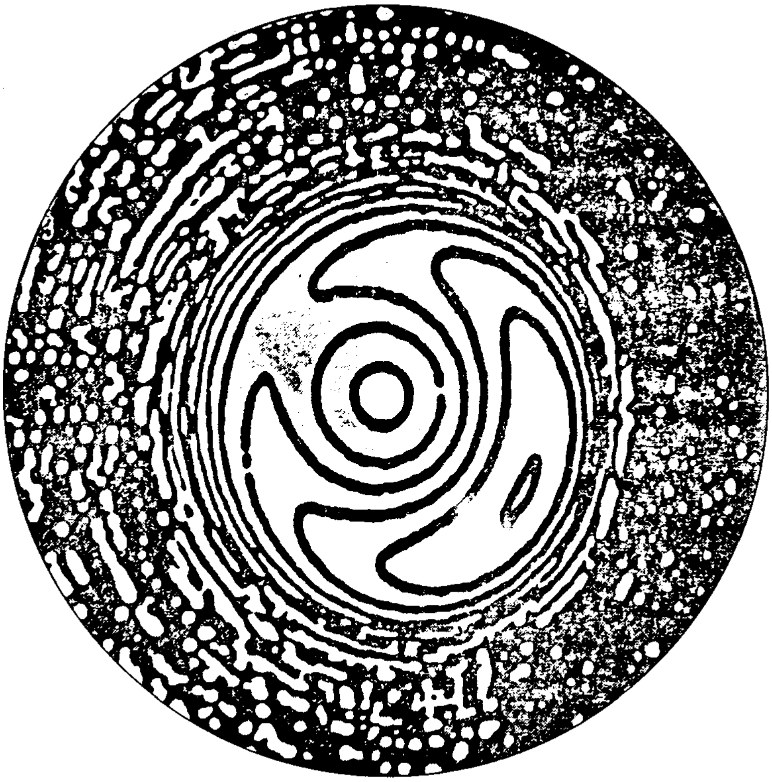
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
Τομέας Θεωρητικής Φυσικής
Γ. Παντής - Γ. Θρουμουλόπουλος

Εισαγωγή στη Φυσική Πλάσματος



ΙΩΑΝΝΙΝΑ 1999

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
Τομέας Θεωρητικής Φυσικής
Γ. Παντής - Γ. Θρουμουλόπουλος

Εισαγωγή στη Φυσική Πλάσματος

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 1999

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Οι σημειώσεις αυτές στηριχτήκανε κύρια πάνω στις παραδόσεις μας προς τους τετραετείς φοιτητές του φυσικού τμήματος του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων τα ακαδημαϊκά έτη 1986-87 και 1987-88.

Πιστεύουμε ότι το αυξανόμενο ενδιαφέρον για την ελεγχόμενη πυρηνική σύντηξη και την αστροφυσική δικαιολογεί την ένταξη και την διδασκαλία του μαθήματος της Φυσικής Πλάσματος σε προπτυχιακό επίπεδο. Γι αυτό οι σημειώσεις αυτές απευθύνονται κύρια σε φοιτητές του επιπέδου αυτού με σκοπό να τους δώσουν μια βασική εικόνα του σχετικού αντικειμένου.

Μια πλήρης ανάπτυξη της Φυσικής Πλάσματος θα πρέπει να περιλαμβάνει τουλάχιστον τρία ζητήματα: την Ισορροπία, την Σταθερότητα και τα Φαινόμενα Μεταφοράς. Στο βαθμό που το μάθημα αυτό διδάσκεται σε ένα εξάμηνο προτιμήσαμε να επιλέξουμε την ύλη με τρόπο ώστε να καλύπτει τα δύο πρώτα ζητήματα. Έτσι προτιμήσαμε αντί να ασχοληθούμε με μια επιφανειακή εξέταση των φαινομένων μεταφοράς να συνδέσουμε τη Φυσική Πλάσματος με το πρόβλημα της ελεγχόμενης πυρηνικής σύντηξης αποσκοπώντας στην εξοικείωση των φοιτητών με ένα από τα πιο σπουδαία επιστημονικά προβλήματα της εποχής μας. Η δόμιση του μαθήματος έγινε με κορμό το Υδροδυναμικό μοντέλο επειδή το μοντέλο αυτό μπορεί να καλύψει το βασικότερο μέρος των φαινομένων της Φυσικής Πλάσματος. Ωστόσο σαν εφαρμογή της κινητικής θεωρίας αναλύεται το σημαντικό φαινόμενο της απόσβεσης Landau.

Η ύλη αναπτύχθηκε με γνώμονα την αρχή ότι η Μαθηματική ανάλυση δεν πρέπει να αποβαίνει σε βάρος της Φυσικής. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα ορισμένα μαθηματικά βήματα να παραληφθούν ή να δοθούν σαν ασκήσεις στο τέλος κάθε κεφαλαίου που συμπληρώνεται και με μερικά προβλήματα. Για παραπέρα μελέτη προτείνεται σχετική βιβλιογραφία τόσο σε διδακτικά βιβλία όσο και σε ερευνητικά συγγράμματα.

Ευχαριστούμε θερμά τα μέλη του ΕΔΤΠ δ. Χ. Παπαϊωάννου και κ. Λ. Παπαφωτίκα για την επιμέλεια του κειμένου και την υπομονετική αποκρυπτογράφιση των ιδιόμορφων χειρογράφων μας. Για τυχόν λάθη ευθυνόμαστε εμείς και όχι αυτές. Επισήμανση λαθών και έκφραση παρατηρήσεων από τον αναγνώστη που θα βοηθούσαν στη βελτίωση των σημειώσεων αυτών θα ήταν ευπρόσδεκτα.

Γ.Παντής **Γ.Ν. Θρουμουλόπουλος**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1. Βασικές ιδέες στη Φυσική Πλάσματος

Τα τελευταία χρόνια οι έρευνες για την κατασκευή θερμοπυρηνικών σταθμών παραγωγής ενέργειας οδήγησαν και στη συστηματική μελέτη της Φυσικής Πλάσματος πέρα από εκείνα τα γνωστά όρια που είχαν τεθεί από τα πειράματα ηλεκτρικών εφαρμογών και από τις μελέτες πάνω σε φαινόμενα της αστροφυσικής και της γεωφυσικής. Έτσι με εξαίρεση τα κβαντικά φαινόμενα που δεν εμφανίζονται στο πλάσμα χαμηλής πυκνότητας και υψηλής θερμοκρασίας, στην έρευνα της φυσικής του πλάσματος συναντάει κανείς όλα τα πεδία της κλασικής φυσικής. Για παράδειγμα, μονοσωματιδιακές δορυφορικές κινήσεις και ηλεκτρικές ταλαντώσεις μεγάλου πλάτους που θα εξεταστούν σαν προβλήματα κλασικής Χαμιλτονιανής φυσικής και συλλογικές κινήσεις που θα συσχετιστούν είτε με την υδροδυναμική, όταν εξετάζονται προβλήματα σταθερότητας, είτε με την κινητική θεωρία των αερίων και τη στατιστική μηχανική, όταν εξετάζονται προβλήματα ισορροπίας.

Σε τούτο το κεφάλαιο θα εξετάσουμε τι είναι πλάσμα, πώς εμφανίζεται στη φύση και ποια είναι τα κυριότερα χαρακτηριστικά του. Συνάμα θα δώσουμε τον ορισμό του πλάσματος και θα προσδιορίσουμε τις πιο βασικές παραμέτρους του: όπως πυκνότητα σωματίδιων n, θερμοκρασία T, βαθμό ιονισμού, μήκος Debye κ.τ.λ.

1.2. Ορισμός πλάσματος

Τον όρο πλάσμα χρησιμοποίησε πρώτος ο Langmuir το 1923 για να προσδιορίσει την κατάσταση αερίων που εμφανιζόταν σε πειράματα ηλεκτρικών εκκενώσεων. Είναι φανερό λοιπόν ότι ο πρώτος αυτός ορισμός του πλάσματος είχε να κάνει με ιονισμένα αέρια. Κάθε ιονισμένο αέριο όμως δεν είναι πλάσμα και επομένως δεν μπορεί να ονομάζεται και έτσι. Σήμερα το πλάσμα χαρακτηρίζεται σαν η τέταρτη μορφή της ύλης, δίπλα στα στερεά υγρά και τα αέρια και ορίζεται ποιοτικά: σαν ένα αέριο που περιέχει φορτισμένα αλλά και ουδέτερα σωμάτια και που παρουσιάζει ιδιότητες συλλογικής συμπεριφοράς και αμφιουδετερότητας (Quasyneutrality) όπως θ' αναλύσουμε πιο κάτω.

Βέβαια αυτός ο ορισμός δεν περιορίζει το πλάσμα ούτε στα εντελώς ιονισμένα αέρια ούτε όμως και στα σχεδόν ουδέτερα συστήματα. Για παράδειγμα στα συνηθισμένα αέρια επειδή είναι ουδέτερα δεν υπάρχουν ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις και στο βαθμό που η δύναμη βαρύτητας είναι αμελητέα η κίνηση των σωματίδιων είναι αποτέλεσμα μόνο των συγκρούσεων μεταξύ των. Αντίθετα στο πλάσμα η κίνηση των σωματίδιων δημιουργεί ηλεκτρικά πεδία και ρεύματα τα οποία με τη σειρά τους δημιουργούν ηλεκτρομαγνητικά (ΗΜ) πεδία. Αυτά όμως τα πεδία επιδρούν πάνω στην κίνηση των σωματίδιων που βρίσκονται σε κάποια απόσταση από αυτά. Συγκεκριμένα, το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ δυο φορτισμένων σωματίων ελαττώνεται ανάλογα με το $1/r^2$ ενώ το φορτίο από μια πυκνότητα πλάσματος αυξάνει ανάλογα με το r^3 και έτσι κομμάτια πλάσματος μπορούν να επιδρούν μεταξύ τους σε σχετικά μεγάλες αποστάσεις. Έτσι βλέπουμε ότι στο πλάσμα οι μεγάλης εμβέλειας δυνάμεις Coulomb είναι κύρια οι δυνάμεις που προσδιορίζουν την κίνηση των σωματίδιων σε αντίθεση με τα συνηθισμένα αέρια όπου τα μόρια αντιδρούν μεταξύ τους κύρια διαμέσου δυνάμεων μικρής εμβέλειας. Είναι φανερό από τον παραπάνω ποιοτικό ορισμό του πλάσματος ότι η φυσική πλάσματος είναι ένα πρόβλημα πολλών σωματίδιων.

Για να δώσουμε έναν ποσοτικό ορισμό, θα χρειαστούμε μια από τις πιο βασικές παραμέτρους της φυσικής πλάσματος, το μήκος Debye λ_D, που όπως θα δούμε στην παράγραφο 1.4 ορίζει την εμβέλεια των δυνάμεων Coulomb μέσα στο πλάσμα. Το σκεπτικό μας εδώ είναι ότι τα συλλογικά φαινόμενα κυριαρχούν σε σύγκριση με τη συμπεριφορά του ενός σωματίδιου. Αυτό όμως συμβαίνει όταν η ενέργεια που χρειάζεται ένα φορτισμένο σωμάτιο με φορτίο q για να διανύσει τη μισή απόσταση μεταξύ δυο τοπικών φορτίων με δυναμικό φ είναι μεγαλύτερη από τη μέση ενέργεια της θερμικής κίνησης του σωμάτιου. Κατ' επέκταση ένα ιονισμένο αέριο μπορεί να χαρακτηριστεί σαν πλάσμα όταν οι διαστάσεις του L είναι κατά πολύ μεγαλύτερες από το μήκος Debye δηλαδή όταν

$$L \gg \lambda_D$$

1.3. Πλάσμα στη φύση

Είναι γνωστό από την αστροφυσική ότι τα περισσότερα συστήματα στο σύμπαν (άστρα, μεσοαστρική ύλη κ.τ.λ.) βρίσκονται σε μια κατάσταση ηλεκτρισμένων αερίων όπου τ' άτομα είναι χωρισμένα σε θετικά φορτισμένα ιόντα και σε ηλεκτρόνια. Είναι επίσης γνωστό ότι το ίδιο συμβαίνει και στα ψηλότερα στρώματα της ατμόσφαιρας, για παράδειγμα, στην ιονόσφαιρα ενώ αυτός ο ιονισμός εμφανίζεται σε πολύ λιγότερο βαθμό στη γη. Για παράδειγμα ενώ η πυκνότητα ιονισμένων σωματίδιων στα κατώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας δηλαδή μέχρι του ύψους των 100 km είναι πολύ μικρή, γίνεται αρκετά μεγαλύτερη στα ανώτερα στρώματα δηλαδή στο ύψος 300-500 km.

Λέγεται ότι τα 99% της ύλης στο σύμπαν βρίσκεται σε μορφή πλάσματος ενώ το 1% μοιάζει με την κατάσταση της ύλης στη γη που δεν είναι αυτής της μορφής. Στη γη οι κυριώτερες φυσικές μορφές πλάσματος είναι ο κεραυνός και το βορειοπολικό Σέλας. Το ενδιαφέρον όμως δεν εξαντλείται μόνο σ' αυτά γιατί σήμερα υπάρχουν μια σειρά από διατάξεις που ξεκινούν από τους σωλήνες φθορισμού και φτάνουν μέχρι τους αντιδραστήρες πυρηνικής σύντηξης που χρησιμοποιούν ύλη που βρίσκεται σε κατάσταση πλάσματος. Σαν πλάσμα επίσης μπορούν να χαρακτηριστούν τα αέρια των πυραύλων και το εσωτερικό των ημιαγωγών στο οποίο βρίσκονται θετικά και αρνητικά φορτία. Ιδιαίτερα σήμερα, γίνονται σημαντικές μελέτες για την παραγωγή πλάσματος υψηλής θερμοκρασίας και πυκνότητας για να προσδιοριστούν οι συνθήκες που θα έδιναν τη δυνατότητα ελεγχόμενης θερμοπυρηνικής σύντηξης που θα είχε σαν αποτέλεσμα την παραγωγή απεριόριστων ποσών ενέργειας.

Το ότι υπάρχουν ελάχιστα παραδείγματα πλάσματος πάνω στη γη οφείλεται και στην πυκνότητα σωματίδιων αλλά και στη θερμοκρασία. Αυτό μπορούμε να το δούμε προσεγγιστικά από την εξίσωση Saha[1] που μας δίνει τον ιονισμό σ' ένα αέριο στην κατάσταση ισορροπίας:

$$\frac{n_i}{n_n} \approx \frac{AT^{3/2}}{n_i} \exp\left(-\frac{U_i}{kT}\right) \tag{1.1}$$

όπου $A = g(mk/2\pi h^2)^{3/2}$ είναι μια σταθερά, n_n και n_i οι αντίστοιχες πυκνότητες ουδέτερων και ιονισμένων ατόμων, T είναι η θερμοκρασία, k είναι η σταθερά Boltzmann και U_i η ενέργεια ιονισμού (δηλαδή η ενέργεια που χρειαζόμαστε να υποσπάσουμε ένα ηλεκτρόνιο από τον εξωτερικό φλοιό του ατόμου). Ο παράγοντας g είναι ένα στατιστικό βάρος που παίρνει υπόψη του καταστάσεις εκφυλισμού.

Σαν ένα μικρό παράδειγμα θα πάρουμε την ατμόσφαιρα. Για κανονική θερμοκρασία δωμάτιου έχουμε $n_n = 3\times10^{19}$ cm^{-3} $T = 300$ ^0K, $U_i = 14.5$ eV (άζωτο) και $k = 1.38\times10^{-16}$ $erg/^0K$ οπότε από την εξίσωση [1.1] παίρνουμε(2), με $A = 2.4 \times 10^{15}$ $(^0K^{-1/2}\ cm)^3$

$$\frac{n_i}{n_n} \approx 10^{-122}$$

έναν πολύ μικρό βαθμό ιονισμού. Με την αύξηση της θερμοκρασίας όμως ο βαθμός ιονισμού αρχίζει ν' αλλάζει δραστικά όταν kT γίνει της ίδιας τάξης μεγέθους με την ενέργεια ιονισμού U_i. Τότε το αέριο μεταβαίνει στην κατάσταση πλάσματος και γίνεται ολικά ιονισμένο όταν $n_i > n_n$. Γι' αυτό εξάλλου λέγεται και η Τετάρτη μορφή της ύλης και αυτός είναι και ο λόγος που υπάρχει στα αστρονομικά σώματα που έχουν μεγάλες θερμοκρασίες ενώ δεν υπάρχει στη γη.

Στο παραπάνω παράδειγμα κάναμε τον υπολογισμό στο σύστημα μονάδων cgs. Θα μπορούσαμε όμως να χρησιμοποιήσουμε μονάδες ενέργειας όπου η σταθερά Boltzmann $k = 1$, και η θερμοκρασία T δίνεται σε electronvolts (1 eV = 11.600 ^0K = 1.6×10^{-12} erg).

Παράλληλα με τον ορισμό [1.1] η σύνθεση του πλάσματος μπορεί να περιγραφεί και με το λόγο της πυκνότητας ηλεκτρονίων προς την πυκνότητα ουδέτερων ατόμων $r = n_e/n_n$ που συνήθως λέγεται βαθμός ιονισμού. Σύμφωνα μ' αυτόν τον ορισμό το πλάσμα είναι ελαφρά ιονισμένο όταν $r < 10^{-2}$, 10^{-3} και εντελώς ιονισμένο όταν $r \to \infty$. Εναλλακτικά για το βαθμό ιονισμού χρησιμοποιείται(3) και η σχέση

$$r = \frac{n_e}{\left(n_n + \sum_i n_i\right)} \qquad (1.2)$$

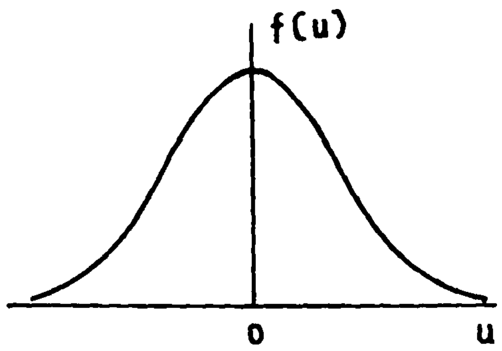
οπότε σ' αυτή την περίπτωση για $r = 1$ έχουμε ολικό ιονισμό ενώ για $r < 1$ μερικό ιονισμό.

1.4. Θερμοκρασία πλάσματος σε θερμική ισορροπία. Κατανομές Maxwell και Fermi.

Τα σωματίδια που συνθέτουν το πλάσμα, όταν βρίσκεται σε θερμική ισορροπία έχουν όλες τις δυνατές ταχύτητες. Για την περιγραφή της θερμικής κίνησής του χρειαζόμαστε να ξέρουμε τις κατανομές ταχυτήτων των διαφορετικών ειδών σωματίδιων (ηλεκτρόνια, ιόντα, ουδέτερα σωμάτια) και επομένως τις αντίστοιχες θερμοκρασίες τους T_α. Αν η θερμοκρασία του πλάσματος $T \equiv T_\alpha$ τότε το πλάσμα είναι ισοθερμικό. Σ' αυτή την περίπτωση η πιο πιθανή κατανομή ταχυτήτων είναι γνωστή σαν κατανομή Maxwell. Στη μια διάσταση η κατανομή αυτή είναι της μορφής:

$$f(u) = A \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{m\,u^2}{k\,T}\right) \tag{1.3}$$

όπου $A = n\,(m/2\pi\,kT)^{1/2}$ είναι η σταθερά κανονικοποίησης που βρίσκεται από τη σχέση



$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(u)du = 1 \tag{1.4}$$

$$\hat{f} = f/n$$

Σχήμα 1.1. Κατανομή Maxwell.

$f(u)\,du$ είναι ο αριθμός σωματίδιων ανά μονάδα όγκου με ταχύτητες u και $u+du$ και $1/2\ m\,u^2 = p^2/2m$ είναι η κινητική ενέργεια. Η πυκνότητα ή ο αριθμός σωματίδιων ανά μονάδα όγκου δίνεται από τη σχέση

$$n = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)du \tag{1.5}$$

Συνήθως το πλάσμα βρίσκεται σε μερική θερμοδυναμική ισορροπία οπότε για κάθε συνιστώσα του υπάρχει μια διαφορετική θερμοκρασία T_α και κατανομή $f_\alpha(u_\alpha)$ γύρω από την ταχύτητα u_α. Σ' αυτή την περίπτωση η κατανομή Maxwell σε μια διάσταση είναι:

$$f_\alpha(u_\alpha) = \frac{n_\alpha}{(2\pi/m_\alpha kT)^{1/2}} \exp(- \frac{1}{2}\left(\frac{m_\alpha u_\alpha^2}{k\,T_\alpha}\right) \tag{1.6}$$

και το πλάσμα λέγεται ανισοθερμικό (μη-ισοθερμικό).

Για να κατανοήσουμε το ρόλο της θερμοκρασίας θα βρούμε τη μέση (Λ) κινητική ενέργεια μιας συνιστώσας σωματίδιων σε μια διάσταση.

$$\hat{E} = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m\, u^2\, f(u)\, du}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, du} \tag{1.7}$$

Αντικαθιστώντας $(2kT/m)^{1/2} = u_9$ την ταχύτητα θερμικής κίνησης και θέτοντας $y = u/u_9$ έχουμε

$$\hat{E} = A\,\frac{1}{2} m\, u_9^2 \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) y^2\, dy}{\displaystyle A\,u \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy} \tag{1.8}$$

ή

$$\hat{E} = \frac{1}{4} m\, u_9^2 = \frac{1}{2} k\,T \tag{1.9}$$

δηλαδή η μέση κινητική ενέργεια σε μια διάσταση είναι 1/2 kT. Είναι εύκολο να βρει κανένας και τη μέση κινητική ενέργεια σε τρεις διαστάσεις χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη κατανομή Maxwell σε τρεις διαστάσεις:

$$f(u,v,w) = A_3 \exp \frac{\left(-\frac{1}{2} m(u^2 + v^2 + w^2)\right)}{k\,T} \qquad (1.10)$$

όπου A_3 είναι η σταθερά κανονικοποίησης (βλέπε άσκηση 1.8.1). Ορίζοντας τη μέση κινητική ενέργεια όπως στην (1.7) στις τρεις διαστάσεις βλέπουμε ότι τα ολοκληρώματα είναι συμμετρικά ως προς u,v και w επειδή η κατανομή Maxwell είναι ισοτροπική. Εύκολα αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας τις [1.8], [1.9] και [1.10] ότι:

$$\hat{E} = \frac{3}{2} k\,T \qquad (1.11)$$

Δηλαδή, η κινητική ενέργεια είναι 1/2 kT για κάθε διάσταση (κάθε βαθμό ελευθερίας).

Από τις εξισώσεις [1.9] και [1.11] φαίνεται καθαρά η εξάρτηση της ενέργειας από τη θερμοκρασία. Για να μην γίνεται σύγχιση της θερμοκρασίας όταν αυτή αναφέρεται σε μονοδιάστατο ή πολυδιάστατο σύστημα προτιμιέται αντί της ενέργειας $\hat{E}$ να δίνεται η ενέργεια που αντιστοιχεί στο kT. Για παράδειγμα για το πλάσμα ενέργειας kT = 1 eV = 1.6×10^{-12} erg έχουμε

$$T = \frac{1.6 \times 10^{-12}}{1.38 \times 10^{-16}} = 11.600\ {}^{o}K$$

επομένως έναν παράγοντα μετατροπής:

$$1\ eV = 11.600\ {}^{0}K \qquad (1.12)$$

δηλαδή αντί να πούμε ότι έχουμε ένα πλάσμα θερμοκρασίας 11.600 ^{0}K λέμε ότι έχουμε ένα πλάσμα θερμοκρασίας 1 eV.

Πρέπει να τονίσουμε εδώ ότι η μη ισοθερμική κατάσταση στο πλάσμα οφείλεται στο διαφορετικό αριθμό συγκρούσεων μεταξύ των διάφορων σωματίδιων. Για παράδειγμα τα ιόντα και τα ηλεκτρόνια έχουν διαφορετικές κατανομές Maxwell και διαφορετικές θερμοκρασίες T_i και T_e. Αυτό συμβαίνει γιατί ο αριθμός των συγκρούσεων μεταξύ ηλεκτρονίων ή μεταξύ ιόντων είναι πολύ μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο αριθμό συγκρούσεων μεταξύ ηλεκτρονίων-ιόντων. Έτσι όταν το πλάσμα δεν παραμένει σε κατάσταση ισορροπίας για πολύ χρόνο δεν υπάρχει θερμική ισορροπία $T_i = T_e = T$ ενώ κάθε κομμάτι χωριστά μπορεί να βρίσκεται σε θερμική ισορροπία T_i, T_e κ.λπ.

Η κατάσταση γίνεται πιο πολύπλοκη κάτω από την επίδραση ενός μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$. Και αυτό γιατί λόγω της δύναμης Lorentz οι δυνάμεις που δρουν π.χ. σ' ένα ιόν που κινείται παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ είναι διαφορετικές από αυτές που δρουν όταν το ιόν κινείται κάθετα στη διεύθυνση του $\vec{B}$. Επομένως οι ταχύτητες κάθετα και παράλληλα στο B μπορεί ν' ανήκουν σε διαφορετικές κατανομές Maxwell με διαφορετικές ταχύτητες $T_{\perp}$ και $T_{\parallel}$.

Πριν τελειώσουμε την παράγραφο πρέπει να τονίσουμε ότι ο ορισμός της θερμοκρασίας πλάσματος που δώσαμε παραπάνω σε σχέση με τη συνάρτηση κατανομής Maxwell ισχύει κύρια για αρκετά ψηλές θερμοκρασίες που δεν υπάρχει εκφυλισμός Fermi από την απαγορευτική αρχή του Pauli. Γιατί για σωμάτιο με ημιακέραιο σπιν (ηλεκτρόνια, τρύπες, ιόντα υδρόγονου κ.τ.λ.) ο εκφυλισμός Fermi είναι σημαντικός όταν η ενέργεια Fermi ε_f είναι μεγαλύτερη από τη θερμική ενέργεια

$$\varepsilon_f = \frac{p_f^2}{2\,m} > k\,T \qquad (1.13)$$

όπου $p_f = m_f\, u_f = (3\pi^2)^{1/3}\, \hbar\, n^{1/3}$ είναι η ορμή Fermi και $\hbar$ είναι η σταθερά Plank $h/2\pi$.

Σ' αυτή την περίπτωση ισχύει η πιο γενική[4] κατανομή ισορροπίας, η κατανομή Fermi:

$$f_f = \frac{2}{(2\pi h)^3}\left[\exp\left(\frac{\frac{p^2}{2m} - \varepsilon_f}{k\,T}\right) + 1\right]^{-1} \tag{1.14}$$

Γενικά η ανισότητα (1.13) ικανοποιείται σε χαμηλές θερμοκρασίες και ψηλές πυκνότητες. Σ' ένα τέτοιο εκφυλισμένο πλάσμα η ιδέα της θερμοκρασίας σαν μετρητής της ενέργειας δεν έχει νόημα και χρησιμοποιείται η ενέργεια Fermi ε_f. Σε άλλες περιπτώσεις κατανομών, εκτός των κατανομών Maxwell και Fermi, ο ορισμός της θερμοκρασίας T δίνεται από την εξίσωση (1.7).

1.5. Θωράκιση Debye, μήκος Debye και αμφι-ουδετερότητα.

Μια σπουδαία χαρακτηριστική ιδιότητα του πλάσματος είναι ότι έχει τη δυνατότητα ν' απομονώνει ένα ηλεκτρικό δυναμικό που επιδρά πάνω σ' αυτό σχηματίζοντας γύρω από το δυναμικό ένα νέφος φορτίου. Το φαινόμενο αυτό λέγεται θωράκιση Debye και μπορεί να παρατηρηθεί εύκολα βάζοντας μέσα στο πλάσμα δυο ηλεκτρόδια που συνδέονται μεταξύ τους με μια μπαταρία. Γύρω από κάθε ηλεκτρόδιο θα σχηματιστεί αμέσως νέφος από σωματίδια με φορτίο αντίθετο από αυτό του ηλεκτρόδιου. Αν η μπαταρία είναι αρκετά μεγάλη ώστε να καλύπτει αμέσως τα ιόντα που προσλαμβάνονται από τα ηλεκτρόδια (ή αν μεταξύ νέφους και ηλεκτροδίου τοποθετηθεί ένα διηλεκτρικό) τότε θ' απομονωθεί (θα θωρακιστεί) απόλυτα το εξωτερικό δυναμικό στην περίπτωση μηδενικής θερμικής κίνησης (κρύο πλάσμα). Στην πραγματικότητα όμως υπάρχει κάποια θερμοκρασία έστω και μικρή και μερικά ιόντα που βρίσκονται στο εξωτερικό μέρος του νέφους θα έχουν αρκετή θερμική ενέργεια ώστε να μπορέσουν να ξεπεράσουν το φράγμα του ηλεκτροστατικού δυναμικού. Θα δημιουργηθεί επομένως ηλεκτρικό πεδίο οπότε η θωράκιση δεν θα είναι τέλεια.

Δεν είναι δύσκολο να υπολογίσει κανένας το πάχος του νέφους. Στην πιο απλή προσέγγιση υποθέτουμε ότι το ηλεκτρόδιο βρίσκεται στο δυναμικό Φ_0 και ότι η μάζα των ιόντων M είναι πολύ μεγαλύτερη από τη μάζα των ηλεκτρονίων m ώστε ο λόγος M/m είναι τόσο μεγάλος που τα ιόντα παραμένουν ακίνητα κατά τη χρονική διάρκεια του πειράματος. Χρησιμοποιώντας τη μονοδιάστατη εξίσωση του Poisson έχουμε

$$\nabla^2 \Phi = \frac{d^2\Phi}{dx^2} = -4\pi e(n_i(\Phi)-n_e(\Phi)) \qquad (1.15)$$

όπου $n_i(\Phi)$ και $n_e(\Phi)$ είναι οι αντίστοιχες πυκνότητες των ιόντων και των ηλεκτρονίων όταν το δυναμικό Φ δρα πάνω στο πλάσμα. Σε αποστάσεις μεγάλες όπου το δυναμικό $\Phi \to 0$ έχουμε $n_i(\Phi) = n_e(\Phi) = n$. Έτσι χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση κατανομής των ηλεκτρονίων

$$f(u) = A \exp\left[-\frac{p^2}{2m} - \frac{e\,\Phi}{k\,T}\right]$$

βρίσκουμε για την πυκνότητα ηλεκτρονίων

$$n_e = n \exp\left(\frac{e\,\Phi}{k\,T_e}\right)$$

και αντίστοιχα για τα ιόντα

$$n_i = n \exp\left(-\frac{e\,\Phi}{k\,T_i}\right)$$

Για ένα γρήγορο πείραμα, γρηγορότερο από το χρόνο που χρειάζονται τα ιόντα να κινηθούν επειδή η μάζα των ιόντων $M_i \gg m_e$, $n_i = n$.

Αντικαθιστώντας $n_i(\Phi)$ και $n_e(\Phi)$ στην (1.15) βρίσκουμε

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 4\pi e n \left(\exp\left(\frac{e\,\Phi}{k\,T}\right) - 1\right)$$

Αλλά στην περιοχή e Φ/k T << 1 μπορούμε ν' αναπτύξουμε την εκθετική συνάρτηση σε σειρά Taylor οπότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 4\pi e n \left[\frac{e\,\Phi}{k\,T_e} + \frac{1}{2}\left(\frac{e\,\Phi}{k\,T_e}\right)^2 + \ldots\right] \qquad (1.16)$$

οπότε χρησιμοποιώντας μόνο τους γραμμικούς όρους της (1.16) βρίσκουμε

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 4\pi n e^2 \frac{\Phi}{k\,T_e}$$

και

$$\Phi = \Phi_o\, e^{-x/\lambda_D}$$

όπου ορίσαμε την παράμετρο

$$\lambda_D = \left(\frac{k\,T_e}{4\pi n e^2}\right)^{1/2} \qquad (1.17)$$

γνωστή σαν το μήκος Debye. Η παράμετρος αυτή χαρακτηρίζει το πάχος του νέφους ή το μήκος της θωράκισης.

Είναι φανερό ότι το μήκος θωράκισης ελαττώνεται με την αύξηση της πυκνότητας, επειδή κάθε στρώμα πλάσματος έχει τώρα περισσότερα ηλεκτρόνια, και αυξάνει με την αύξηση της θερμοκρασίας γιατί χωρίς θερμική κίνηση θα υπήρχε ένα μηδενικό στρώμα πάχους. Σαν αποτέλεσμα της παραπάνω απλουστευτικής εικόνας και ιδιαίτερα της υπόθεσης M >> m βρήκαμε ότι το μήκος θωράκισης λ_D είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας των ηλεκτρονίων και όχι των ιόντων. Αυτό φαίνεται λογικό αν αναλογιστεί κανένας ότι τα ηλεκτρόνια είναι πιο κινητικά και επομένως σπεύδουν να δημιουργήσουν τη θωράκιση με αυξομείωση αρνητικού φορτίου.

Στην ακριβή όμως στάσιμη κατάσταση ισορροπίας η κατανομή των ηλεκτρονίων και των ιόντων δίνεται από τη σχέση Boltzmann

$$n_j(\Phi) = n_j \exp\left(-\frac{q\,\Phi}{kT_j}\right)$$

οπότε πρέπει να υπολογίσουμε το ηλεκτροστατικό δυναμικό γύρω από ένα φορτίο q μέσα σ' ένα πλάσμα με θερμική ισορροπία. Σ' αυτή την περίπτωση η Δ.Ε. του Poisson σε τρεις διαστάσεις είναι

$$\nabla^2\Phi = -4\pi q\,\delta(\vec{r}) - 4\pi \sum_j q_j n_j \exp\left(-\frac{q_j\Phi}{k\,T}\right) \qquad (1.18)$$

που μπορεί εύκολα να λυθεί (βλέπε άσκηση 1.8.2), π.χ. αναπτύσσοντας την εκθετική συνάρτηση και χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς Fourier, δίνοντας σαν λύση

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{r}\, e^{-r/\lambda_D} \qquad (1.19)$$

όπου τώρα λ_D

$$\left(\lambda_D^{-1}\right)^2 = \sum_j \frac{4\pi e^2 n_j}{k\,T_j} = \frac{1}{\lambda_{De}^2} + \frac{1}{\lambda_{Di}^2} = 4\pi n e^2\left(\frac{1}{k\,T_e} + \frac{1}{k\,T_i}\right) \qquad (1.20)$$

με λ_{De} και λ_{Di} τ' αντίστοιχα μήκη Debye για τα ηλεκτρόνια και τα ιόντα. Από την (1.20) είναι φανερό ότι το μήκος θωράκισης προσδιορίζεται κύρια από θερμοκρασία των πιο κρύων σωματίδιων.

Συγκρίνοντας το δυναμικό (1.19) με το αντίστοιχο δυναμικό στο κενό ($\Phi = q/r$) βλέπουμε ότι ένα φορτίο q που τοποθετείται μέσα στο πλάσμα θωρακίζεται από ένα νέφος φορτίου πάχους λ ώστε τα φορτισμένα σωμάτια που βρίσκονται σε αποστάσεις $r > \lambda_D$ να αισθάνονται τη δύναμη Coulomb ελαττωμένη κατά τον παράγοντα $\exp(-r/\lambda_D)$. Με άλλα λόγια παρά τη μεγάλη εμβέλεια των δυνάμεων Coulomb τα φορτισμένα σωμάτια μέσα στο πλάσμα δεν επιδρούν μεταξύ τους σε αποστάσεις μεγαλύτερες από το μήκος Debye. Το μήκος Debye λοιπόν μπορεί να χαρακτηριστεί και σαν η εμβέλεια των ηλεκτροστατικών δυνάμεων μέσα στο πλάσμα.

Με την παράμετρο λ_D μπορούμε να ορίσουμε και την έννοια της αμφι-ουδετερότητας (quasi-neutrality). Αν οι διαστάσεις L του συστήματος είναι πολύ μεγαλύτερες από το μήκος Debye λ_D τότε φορτία με διαφορετικά πρόσημα έλκονται μεταξύ τους και τείνουν να δημιουργήσουν μια κατάσταση ουδετερότητας. Το ίδιο συμβαίνει και με την παρεμβολή ενός εξωτερικού φορτίου ή δυναμικού. Θωρακίζεται σε απόσταση λ_D αφήνοντας έτσι το υπόλοιπο πλάσμα ανεπηρέαστο, υπό την έννοια ότι δεν απέχει δραστικά από τη στατική κατάσταση ισορροπίας ώστε η διαφορά της δυναμικής ενέργειάς του να είναι ανάλογη της θερμικής ενέργειας $\Delta(e\Phi) \leq k\,T_e$. Το πλάσμα τότε είναι σχεδόν-ουδέτερο ώστε να ισχύει μια κοινή πυκνότητα πλάσματος $n_i = n_e = n$ αλλά όχι απόλυτα ουδέτερο ώστε να υπάρχουν οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις που είναι η κύρια αιτία όλων των σημαντικών φαινόμενων σ' αυτό.

1.6. Η παράμετρος του πλάσματος

Είναι φανερό ότι η έννοια της θωράκισης έχει νόημα όταν υπάρχουν πολλά σωματίδια σε μια σφαίρα Debye. Γιατί όταν υπάρχουν π.χ. μόνο δυο σωμάτια τότε η θωράκιση δεν μπορεί να είναι ένα φαινόμενο αποδεκτό στη στατιστική φυσική. Αν υπολογίσουμε τον αριθμό των σωματίδιων σε μια σφαίρα Debye με

$$N_D = n \frac{4\pi}{3} \lambda_D^3 \tag{1.21}$$

τότε η απαίτηση ότι μέσα σε μια σφαίρα Debye πρέπει να υπάρχουν πολλά σωμάτια, ισοδυναμεί με τη συνθήκη

$$N_D \gg 1 \qquad \text{ή} \qquad \lambda_D \gg n^{-1/3} \tag{1.22}$$

Παράλληλα για να ισχύει η προσέγγιση του πλάσματος σαν αέριου πρέπει η μέση δυναμική ενέργεια των σωματίδιων να είναι μικρότερη από τη μέση κινητική ενέργειά του. Επειδή $r_\mu > r_c$ όπου $r_c = e^2/k\,T$ είναι η απόσταση όπου η κινητική ενέργεια είναι ίση με τη δυναμική έχουμε ότι

$$\frac{e^2}{r_\mu} \leq k\,T \qquad \frac{e^2}{\lambda_D} \ll k\,T \tag{1.23}$$

οπότε η ανισότητα (1.23) επιβάλλει

$$\frac{r_\mu}{\lambda_D} \ll 1 \tag{1.24}$$

από όπου με συνδυασμό και των συνθηκών (1.22) και (1.23) προκύπτει η διάταξη μεγεθών

$$r_\mu \ll n^{-1/3} \ll \lambda_D \ll L \tag{1.25}$$

Μια σπουδαία ιδιότητα του πλάσματος είναι συνδεδεμένη μ' αυτήν την τελευταία ανισότητα: Μπορούμε να ορίσουμε το λόγο Δυναμική/Κινητική ενέργεια με την παράμετρο

$$\eta = \frac{e^2}{r_\mu\, k\,T} \tag{1.26}$$

Η παράμετρος η λέγεται παράμετρος πλάσματος και για ένα αεριούχο πλάσμα παίρνει τις τιμές $\eta \ll 1$. Για παράδειγμα στο ιονοσφαιρικό πλάσμα έχουμε $\eta \leq 10^{-2}$, ενώ στη θερμοπυρηνική σύντηξη $\eta \leq 10^{-4}$.

Για εκφυλισμένο πλάσμα η παράμετρος του πλάσματος ορίζεται διαμέσου της ενέργειας Fermi:

$$\eta = \frac{e^2}{r_\mu \varepsilon_f} = \frac{e^2}{\lambda_D \varepsilon_f} = \frac{e^2 n^{1/3}}{\varepsilon_f} \tag{1.27}$$

Από την (1.27) φαίνεται καθαρά ότι η αύξηση της πυκνότητας σ' ένα μη εκφυλισμένο πλάσμα τείνει να κάνει αναποτελεσματική την προσέγγιση του πλάσματος σαν αεριούχο ρευστό. Αντίθετα στην περίπτωση εκφυλισμού η προσέγγιση αυτή είναι πιο σωστή. Έτσι η παράμετρος η παίζει ένα πολύ σημαντικό ρόλο στην κινητική θεωρία του πλάσματος. Επιπλέον λόγω του ότι συνδέεται με τον αριθμό των σωματίδιων μέσα στη σφαίρα Debye, στην πραγματικότητα $\eta = 3\,N_D$, (βλέπε άσκηση 1.8.3), μας δίνει και έναν τρόπο αξιολόγησης του πότε τα συλλογικά φαινόμενα υπερτερούν των ατομικών. Για το λόγο αυτό ένας άλλος[3] ορισμός της η είναι

$$\eta = \frac{\lambda_D}{r_c} \tag{1.28}$$

όπου r_c τώρα δεν είναι η μέση απόσταση r_μ μεταξύ των σωματίδιων στο πλάσμα, αλλά όπως είδαμε παραπάνω η απόσταση όπου η κινητική ενέργεια γίνεται ίση με τη δυναμική.

1.7. Κριτήρια για το πλάσμα

Μέχρι τώρα δώσαμε δυο συνθήκες που πρέπει να υπακούει ένα ιονισμένο αέριο για να ονομάζεται πλάσμα. Μια τρίτη συνθήκη έχει να κάνει με τις συγκρούσεις μεταξύ των σωματίδιων του πλάσματος. Για παράδειγμα τα αέρια που εξωθούνται από ένα αεριωθούμενο δεν συμπεριφέρονται σαν πλάσμα γιατί τα φορτισμένα σωμάτια συγκρούονται τόσο συχνά με τα ουδέτερα άτομα ώστε η κίνησή τους να υπακούει περισσότερο σε υδροδυναμικές παρά σε ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις. Από το μήκος Debye λ_D και τη θερμική ταχύτητα $\upsilon_\theta = (kT/m)^{1/2}$ μπορούμε να ορίσουμε τη συχνότητα ταλαντώσεων ω στο πλάσμα. Αν τ είναι ο μέσος χρόνος μεταξύ συγκρούσεων με ουδέτερα άτομα τότε για να συμπεριφέρεται ένα αέριο σαν πλάσμα πρέπει να ισχύει $\omega\tau > 1$. Έτσι οι τρεις συνθήκες που πρέπει να υπακούει ένα πλάσμα είναι

1. $\lambda_D \ll L$
2. $N_D \gg 1$ (1.29)
3. $\omega\tau > 1$

1.8. Εφαρμογές της φυσικής πλάσματος

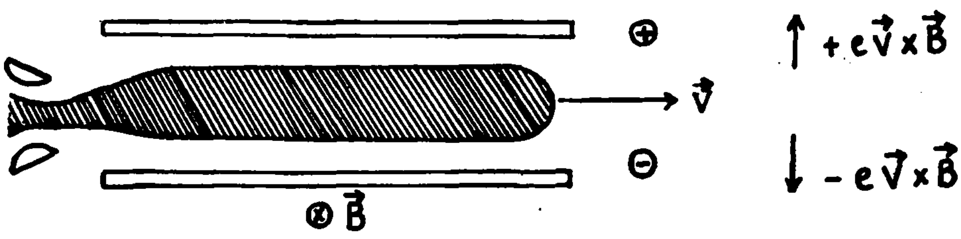
Το πλάσμα μπορεί να χαρακτηριστεί με δυο κύριες παράμετρους, την ενέργεια kT και την πυκνότητα n. Στις διάφορες εφαρμογές οι παράμετρες αυτές επιδέχονται ένα μεγάλο φάσμα τιμών. Η πυκνότητα π.χ. μπορεί να πάρει τιμές από 1 μέχρι 10^{18} cm^{-3} ενώ η θερμοκρασία kT από 0.1 μέχρι 10^6 eV. Οι εφαρμογές της φυσικής πλάσματος μπορούν επομένως να ταξινομηθούν σε εφαρμογές χαμηλής θερμοκρασίας και σε εφαρμογές υψηλής θερμοκρασίας. Οι πρώτες εργασίες στο πλάσμα σε σχετικά χαμηλές θερμοκρασίες $kT_e \sim 2$ eV έχιναν από τους Langmuir(5), Tonks και τους συνεργάτες τους για την κατασκευή ηλεκτρονικών λυχνίων με πυκνότητες $10^8 < n < 10^{12}$ cm^{-3}. Σ' αυτές τις μελέτες μελετήθηκε και το φαινόμενο της θωράκισης. Στην ίδια κατηγορία συμπεριλαμβάνονται οι ανορθωτές υδρογόνου, οι φωτιστικοί σωλήνες και το πλάσμα ημιαγωγών, μετάλλων κ.τ.λ.

Στις εφαρμογές υψηλής θερμοκρασίας ο κύριος εκπρόσωπος είναι η θερμοπυρηνική σύντηξη που θα μελετήσουμε στο κεφάλαιο 6. Εδώ οι μικρότερες θερμοκρασίες είναι $kT > 10$ KeV και η πυκνότητα σωματίδιων εξαρτάται από τη μέθοδο περιορισμού και θέρμανσης. Συνηθισμένες πυκνότητες είναι $n_e = n_i = 10^{14}$ μέχρι 10^{15} cm^3 ή $n_e = n_i = 10^{22}$ μέχρι 10^{23} cm^3. Υψηλές θερμοκρασίες $kT \sim 5$ KeV έχουμε και στο στρώμα F της ιονόσφαιρας που λόγω της σχετικά χαμηλής πυκνότητάς του, $n_e = n_i = 10^6$ cm^{-3} μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην τηλεπικοινωνία για τη μεταβίβαση πληροφοριών. Στη διαστημική τεχνική υπάρχουν δυο ειδών εφαρμογές:

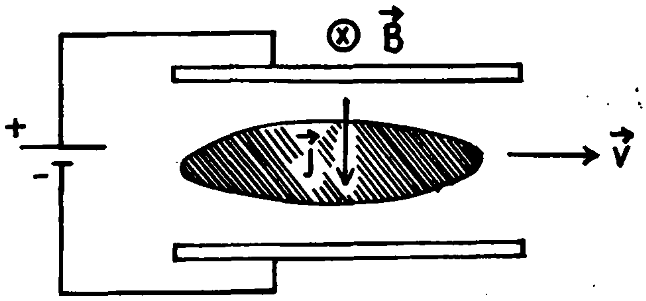
α) Η μαγνητοϋδροδυναμική μετατροπή ενέργειας που χρησιμοποιεί την κίνηση μιας μικρής τορπίλλης γεμάτη με πλάσμα για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας (βλέπε σχήμα 1.2) και β) η ηλεκτρομαγνητική μηχανή αεριοώθησης που στηρίζεται ακριβώς στην αντίθετη αρχή, (βλέπε σχήμα 1.3).

Στην πρώτη περίπτωση η τορπίλλη επιταχύνεται μέσα σ' ένα μαγνητικό πεδίο οπότε λόγω της δύναμης Lorentz τα θετικά φορτία διευθύνονται προς τα πάνω, ενώ τ' αρνητικά προς τα κάτω, φορτίζοντας έτσι δυο ηλεκτρόδια.

Το αντίθετο συμβαίνει στην ηλεκτρομαγνητική μηχανή αεριοώθησης διαστημοπλοίων. Εδώ το ηλεκτρικό ρεύμα μιας μπαταρίας διαπερνάει το πλάσμα που λόγω της δύναμης $\vec{J} \times \vec{B}$ απωθείται προς τα έξω δίνοντας εμπρόσθια ώθηση.



Σχήμα 1.2. Μαγνητοϋδροδυναμικό δυναμό.



Σχήμα 1.3. Αεριοώθησης διαστημοπλοίου.

1.9. Ασκήσεις

1.9.1. Για την κατανομή Maxwell σε τρεις διαστάσεις (εξ. (1.11)) να βρεθεί η σταθερά κανονικοποίησης A.

Λύση Θα βρούμε τη σταθερά κανονικοποίησης σε μια διάσταση. Η κατανομή Maxwell σε μια διάσταση είναι

$$f(u) = A \exp\left(-\frac{mu^2/kT}{2}\right)$$

Από την εξ. (1.4) έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(u)\, du = 1 \tag{1}$$

αλλά επειδή

$$\hat{f}(u) = f(u)/\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, du\right] = f(u)/n$$

παίρνουμε

$$1/n \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, du = \frac{A}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-mu^2/2kT)\, du \qquad \text{και}$$

$$\frac{A}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-mu^2/2kT)\, du = 1$$

θέτουμε

$$(m/2kT)^{1/2}\, u = x \rightarrow du = (m/2kT)^{-1/2}\, dx$$

οπότε από τη (2) έχουμε

$$\frac{A}{n} (2kT/m)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = 1 \;\rightarrow\; A = n(m/2k\pi T)^{1/2}$$

Στις τρεις διαστάσεις η κατανομή Maxwell είναι

$$f(u,v,w) = A_3 \exp\left[-m(u^2+v^2+w^2)/2kT\right] \tag{3}$$

και η εξ. (1) γίνεται:

$$\frac{A_3}{n} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} dw \exp\left(-mu^2/2kT - \frac{mv^2}{2kT} - \frac{mw^2}{2kT}\right) = 1 \tag{4}$$

$$\frac{A_3}{n}(2kT/m)^{3/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-w^2}dw = 1$$

και επειδή $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda^2}d\lambda = \pi$

$$A_3 = n\,(m/2kT\,\pi)^{3/2}$$

1.9.2. Να βρεθεί το δυναμικό Φ ενός φορτίου q που τοποθετείται σ' ένα ομογενές πλάσμα με θερμοκρασία ηλεκτρονίων Te και θερμοκρασία ιόντων Ti.

<u>Λύση</u> Το φορτίο q παράγει ένα ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$. σαν αποτέλεσμα, εκτός από την πυκνότητα q δ($\vec{r}$) θα έχουμε και μια πυκνότητα επαγωγής ρ(Φ) που θα προέρχεται από αυτό το πεδίο. 'Αρα η ολική πυκνότητα θα είναι $\rho(\vec{r}) = q\,\delta(\vec{r}) + \rho(\Phi)$. Η Δ.Ε. του Poisson στις τρεις διαστάσεις θα είναι λοιπόν

$$\nabla^2\Phi = -4\pi\rho\,(\varphi) - 4\pi q\,\delta(\vec{r}) \qquad (1)$$

Από τη συνθήκη Boltzmann έχουμε ότι η πυκνότητα των σωματίδιων γύρω από το δυναμικό Φ είναι:

$$n_\alpha = n\,\exp\,(-e_\alpha\,\Phi/kT_\alpha) \qquad (2)$$

και επομένως η πυκνότητα φορτίου ρ(Φ) γίνεται

$$\rho(\varphi) = \sum_{\alpha} e_\alpha n_\alpha \tag{3}$$

Αντικαθιστώντας την (2) και την (3) στην (1) βρίσκουμε

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\,(q\,\delta(\vec{r}) + e_\alpha \sum_{\alpha} n \exp(-e_\alpha\varphi/kT_\alpha) \quad \text{ή για } e_\alpha\varphi \ll kT_\alpha$$

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\,(q\,\delta(\vec{r}) + \sum_{\alpha} n\, e_\alpha\varphi/kT_\alpha) \tag{4}$$

Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Fourier

$$\varphi(\vec{r}) = \int dk\, e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{r}}\, \varphi(\vec{k}) \tag{5}$$

και τη σχέση

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}\, e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{r}} = \delta(\vec{r})$$

$$\int\left[k^2 + \sum_{\alpha} (e_\alpha^2 n\, 4\pi/\kappa T_\alpha)\right]\varphi(\vec{k})\, e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{r}}\, d\vec{k} = \frac{4\pi q}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}\, e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

ή

$$\varphi(\vec{k}) = \frac{4\pi q}{(2\pi)^3}\,(k^2 + \sum_{\alpha} 4\pi\, n\, e^2/\kappa T_\alpha)^{-1} \tag{6}$$

οπότε η (5) γίνεται

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{4\pi q}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}\, e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{r}}\left(k^2 + \frac{1}{r_D^2}\right) \tag{7}$$

με

$$\frac{1}{r_D^2} = \sum_{\alpha} 4\pi\, e^2\, n/kT_\alpha = \left(\frac{1}{r_{De}^2} + \frac{1}{r_{Di}^2}\right)$$

(r_{De} και r_{Di} είναι τα μήκη Debye για τα ηλεκτρόνια και τα ιόντα).

Το ολοκλήρωμα (6) βγαίνει εύκολα χρησιμοποιώντας αναλυτικές συναρτήσεις και τη μέθοδο των υπόλοιπων. Κάνοντας την ολοκλήρωση στο επάνω επίπεδο και παίρνοντας το υπόλοιπο $k = i/r_D$ βρίσκουμε

$$\Phi(r) = q/r \; e^{-r/r_D} \qquad (8)$$

Είναι φανερό ότι το μήκος θωράκισης r_D εξαρτάται κύρια από τη μικρότερη θερμοκρασία.

1.9.3.α) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό [1.27] $\eta=\lambda_D/r_c$ για την παράμετρο του πλάσματος να δειχτεί ότι $\eta = 3N_D$.

β) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό (1.27) βρείτε την παράμετρο η στη θερμοπυρηνική σύντηξη (kT = 1 KeV, $\eta = 10^{15}$ cm^3 και kT = 10 KeV, $n = 10^{15}$ cm^3).

Λύση

$$\eta = \lambda_D/r_C \qquad (1)$$

α)

Επειδή $N_D = \eta \dfrac{4\pi}{3} \lambda_D^3$, και $\dfrac{e^2}{r_C} = k\,T$

έχουμε

$$\frac{\lambda_D}{r_C} = \frac{\lambda_D}{e^2/k\,T}$$

αλλά από τον ορισμό της λ_D έχουμε

$$\lambda_D = \left(\frac{kT}{4\pi^2 n}\right)^{1/2} \therefore \quad \frac{kT}{e^2} = \lambda_D^2 \, 4\pi n \qquad (3)$$

οπότε αντικαθιστώντας την (3) στη (2) έχουμε

$$\eta = \frac{\lambda_D}{(\lambda_D 4\pi^2 n)^{-1}} = 4\pi n \, \lambda_D^3 = 3N_D$$

β) $\eta = e^2 r_\mu / kT = \dfrac{e^2 n^{1/3}}{kT} = \dfrac{1.44\,\text{MeV fm}\,(10^{15}/\text{cm}^3)^{1/3}}{1\,\text{KeV}} = 1.44\; 10^{-4}$ (1 KeV)

και για $kT = 10$ KeV και $n = 10^{15}$ cm^3 $\eta = 1.44 \;\; 10^{-5}$ (10 KeV).

1.9.4. Να βρεθεί ο αριθμός Loschmidt που είναι η πυκνότητα n(cm^{-3}) σε θερμοκρασία 0^0 C και πίεση 760 Torr.

<u>Λύση</u> Για αδιαβατική συμπίεση έχουμε

$$p = n\,k\,T \rightarrow n = \frac{p}{kT} \qquad (1)$$

$k = 1.38 \times 10^{-16}$ erg/gd $= 1.38\text{x}10^{16}/1.6\text{x}10^{12}$ eV/gd

1^0 K = 1 kT = $(11.600)^{-1}$ eV, 0 ^{0}C = 273 ^{0}K επομένως

273 ^{0}K = $(11.600)^{-1}$ x 273 eV.

1 eV = $1.6\text{x}10^{-19}$J j 1 Torr = 1 mm Hg = $\dfrac{1}{760}$ atm

$= 1.6\text{x}10^{-12}$ erg j, $\quad = \dfrac{1.032\text{ kp}}{760}/\text{cm}^2 = \dfrac{1.032\text{ kp}}{760}$ at

$$1\ J = \frac{1}{9.81}\ kp/m$$

$$p = 760\ Torr = 1\ atm = 1.032\ kp/cm^2 = 1.032x10^4\ kp/m^2$$

$$= 1.032x10^4 x9.81\ J/m^3 = 9.81x1.032x10^4 x(1.6x10^{-19})^{-1}\ eV/m^3$$

$$n = \frac{p}{kT} = \frac{9.81x1.032x10^{23}}{273x(11.600)^{-1}\ x\ 1.6}\ \frac{eV/m^3}{(eV)} = 2.69x10^{25}\ (m^{-3}) = 2.69\ 10^{19}\ cm^{-3}$$

1.9.5. Να βρεθεί η πίεση σε ατμόσφαιρες που εξασκεί ένα θερμοπυρηνικό πλάσμα ($kTe = kTi = 20$ KeV, $n = 10^{15}\ cm^{-3}$) πάνω στα τοιχώματα του αντιδραστήρα.

<u>Λύση</u>

$$p = n\ k\ T = n(kT_e + kT_i) = 40x10^3 x10^{15}\ (eV/cm^3)$$

$$p = 4x10^{19}.1.6x10^{-19}\ J/cm^3 = 6.4\ Nm/cm^3 = 640\ N/cm^2$$

$$= \frac{640}{9.81}\ k\ /cm^2 \approx 64\ at = \frac{64}{1.032}\ atm$$

1.9.6. Να βρεθεί η συχνότητα ταλάντωσης που δημιουργείται από τη μετατόπιση των ηλεκτρονίων μέσα στο πλάσμα.

<u>Λύση</u> Η πυκνότητα φορτίου που επάγεται μετατόπιση πυκνότητας N_e ηλεκτρονίων σε μια απόσταση $\Delta\vec{r}$ από τα ιόντα είναι

$$\rho = \nabla\cdot(e\ N_e\ \vec{r}) = e\ N_e\ \vec{\nabla}\cdot\vec{r} \qquad (1)$$

Από την εξίσωση του Maxwell $\nabla\cdot\vec{E} = \rho\ 4\pi$ έχουμε

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\ e\ N_e\ \vec{\nabla}\cdot\vec{r} \qquad (2)$$

ή

$\vec{E} = 4\pi\, e\, N_e\, \vec{r}$ εφόσον $\vec{E} = 0$ για $\vec{r} = 0$

Επομένως το πεδίο $\vec{E}$ είναι παράλληλο προς τη μετατόπιση και δρα πάνω στα ηλεκτρόνια με τη δύναμη

$$\vec{F} = -e\,\vec{E} = -4\,\pi\, e^2\, N_e\, \vec{r} \qquad (3)$$

Η εξίσωση λοιπόν της κίνησης των ηλεκτρονίων στη διεύθυνση $\vec{r}$ γίνεται

$$m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\,e\,E = -\,4\pi e^2\, N_e\, \vec{r}$$

ή

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{4\pi e^2}{m} N_e\, r = 0$$

ή

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + w_e^2\, r = 0$$

όπου η συχνότητα ταλαντώσεων είναι

$$w_e = \left(\frac{4\pi e^2 N_e}{m}\right)^{1/2}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

ΚΙΝΗΣΗ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΩΝ ΣΩΜΑΤΙΩΝ

2.1. Εισαγωγή

Αυτό που κάνει την μελέτη της φυσικής του πλάσματος δύσκολη είναι ότι δεν παρουσιάζεται σε μια συγκεκριμένη πυκνότητα ή θερμοκρασία, αλλά σε πολλές διαφορετικές πυκνότητες και θερμοκρασίες έτσι που να μην είναι εύκολη η παρομοίωση του μ'ένα ρευστό ή ένα αέριο οπότε θα ίσχυαν και γι αυτό το σύστημα οι κανόνες για τα ρευστά ή τα αέρια. Για παράδειγμα όταν ένα στοιχείο είναι πολύ πυκνό, όπως το νερό, τότε οι επί μέρους κινήσεις των σωματιδίων του δεν έχουν σπουδαιότητα, το στοιχείο αυτό συμπεριφέρεται σαν υγρό και για την περιγραφή του αρκούν οι εξισώσεις της υδροδυναμικής. Αντίθετα όταν το στοιχείο είναι πολύ αραιό τότε τα συλλογικά φαινόμενα είναι αμελητέα και το πλάσμα μπορεί να περιγραφεί από την κίνηση των σωματιδίων του. Το πλάσμα είναι μια κατάσταση με ενδιάμεση πυκνότητα. Έτσι πότε συμπεριφέρεται σαν υγρό και πότε σαν αέριο. Συνάμα το πλάσμα είναι μια συλλογή φορτισμένων σωματίων. Έτσι μέσα στο πλάσμα δημιουργούνται ΗΜ-πεδία που μαζί με τα εξωτερικά πεδία επιδρούν πάνω στην κίνηση του. Θα ήταν αδύνατο λοιπόν να κατανοήσει κανείς την κίνηση του συνόλου χωρίς να έχει κατανοήσει την κίνηση του ενός σωματίου. Γι αυτό το λόγο σε τούτο το κεφάλαιο θ' ασχοληθούμε με την κίνηση ενός σωματίου κάτω από την επίδραση του ΗΜ-πεδίου. Για ευκολία θα υποθέσουμε ότι το ΗΜ-πεδίο εξασκείται από τα έξω και περιλαμβάνει και τα ΗΜ-Πεδία που δημιουργχούνται από την κίνηση των φορτιμένων σωματίων. Με άλλα λόγια οι κινήσεις των φορτισμένων σωματίων δεν επιδρούν πάνω σ' αυτό. Σ' αυτή την περίπτωση η κίνηση των σωματίων περιγράφεται από την γνωστή εξίσωση.

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = q\left(\vec{E} + \vec{V} \times \frac{\vec{B}}{C}\right) \qquad (2.1)$$

Είναι φανερό ότι στην περίπτωση που υπάρχει μόνο ηλεκτρικό πεδίο E οι τροχιές είναι απλές ενώ όπως θα δούμε παρακάτω αν υπάρχει και το E και το μαγνητικό πεδίο B τότε η κίνηση γίνεται αρκετά πολύπλοκη.

2.2. Κίνηση σε στατικά και ομοχενή E και B.

2.2.1. $E = 0$ και $B \neq 0$

Όταν το ηλεκτρικό πεδίο $E = 0$ τότε η εξίσωση (2.1) γίνεται

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = q\left(\vec{V} \times \frac{\vec{B}}{C}\right) \qquad (2.2)$$

Για ευκολία μπορούμε να πάρουμε την διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου πάνω στον άξονα Z, δηλ. $B = B\,Z$. Τότε η εξίσωση (2.2) στις τρεις διαστάσεις γίνεται:

$$m\ddot{x} = q\,B/C\,y, \quad m\ddot{y} = -q\,B/C\,x, \quad m\ddot{z} = 0$$

που μετά από παραγώγηση της πρώτης εξίσωσης και αντικατάσταση της δεύτερης στην πρώτη και αντίστοφα παίρνει την μορφή

$$\frac{d^2}{dt^2}(\dot{x})+\left(\frac{qB}{mc}\right)^2\dot{x}=0, \qquad \frac{d^2}{dt^2}(\dot{y})+\left(\frac{qB}{mc}\right)^2\dot{y}=0,$$

$$z = ct + D \tag{2.3}$$

Είναι φανερό ότι οι διαφορετικές εξισώσεις (2.3) ως προς τις ταχύτητες $\dot{x}(\dot{y})$ περιγράφουν ταλαντώσεις με συχνότητα κυκλοτρονίου

$$\omega_c = \frac{|q|B}{mc} \tag{2.4}$$

με λύσεις της μορφής

$$V_{xy} = V_\perp \exp(\pm\, i\omega_c\, t + \delta_{xy})$$

όπου $V_\perp$ είναι η ταχύτητα κάθετη προς το B. Το πρόσημο είναι το αντίστοιχο πρόσημο του φορτίου και δ_{xy} είναι μια διαφορά φάσης. Για ευκολία ορίζουμε την φάση έτσι ώστε

$$\dot{x} = V_x = V_\perp e^{i\omega t}$$

οπότε (2.5)

$$\dot{y} = V_y = \pm\, iV_\perp e^{i\omega t}$$

Ολοκλήρωση της (2.5) μας δίνει την κίνηση στο επίπεδο (x,y)

$$x-x_0 = -i\,\frac{V_\perp}{\omega_c}\, e^{i\omega_c t}$$

(2.6)

$$y-y_0 = \pm\,\frac{V_\perp}{\omega_c}\, e^{i\omega_c t}$$

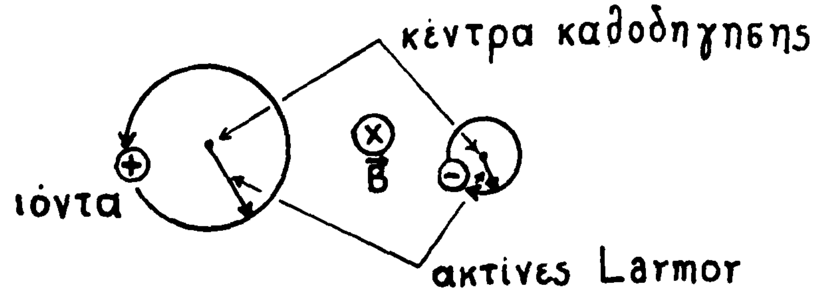
παίρνοντας τα πραγματικά μέρη της (2.6)

$$(x-x_0) = r_L \sin \omega_c t \qquad \text{και} \quad (y-y_0) = \pm r_L \cos \omega_c t \tag{2.7}$$

βλέπουμε ότι το σωμάτιο περιγράφει κύκλο γύρω από ένα κέντρο καθοδήγησης (x_0, y_0), όπως στο σχήμα (2.1), με ακτίνα

$$r_L = \frac{V_\perp}{\omega_c} = \frac{mV_\perp c}{|q|B} \tag{2.8}$$

που είναι γνωστή σαν ακτίνα Larmor.

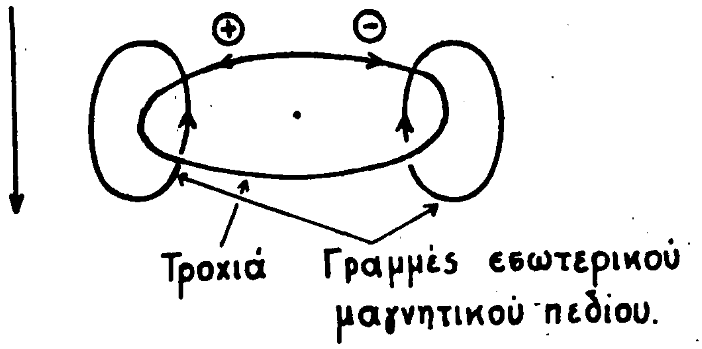


Σχήμα 2.1. Κύκλοι Larmor

Είναι φανερό ότι επειδή η φορά της κυκλικής κίνησης εξαρτάται από το φορτίο, η φορά της τροχιάς είναι αντίθετη στα ηλεκτρόνια από τα ιόντα. Επι πλέον η κίνηση των σωματιδίων παράγει μαγνητικό πεδίο που και στις δύο περιπτώσεις είναι αντίθετο από το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο, βλέπε σχήμα 2. Επομένως το πλάσμα είναι διαμαγνητικό.

Είναι επίσης φανερό από την (2.3) ότι η ταχύτητα στην διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου είναι σταθερά και δεν εξαρτάται από αυτό, έτσι η κίνηση των σωματιδίων στην διεύθυνση Z είναι ευθύγραμμη ομαλή.

Επομένως η ολική κίνηση των σωματιδίων στο χώρο είναι ελικοειδής.
Η κυκλική κίνηση ενός φορτισμένου σωματίου, παράγει το ρεύμα $I=q(\omega_c/2\pi)$ και επομένως μια μαγνητική ροπή μ. Η ροπή αυτή βρίσκεται εύκολα χρησιμοποιώντας το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλύει η κυκλική τροχιά, $f=\pi r_c^2$. Επομένως έχουμε για την μαγνητική ροπή.



Σχήμα 2.2. Διαμαγνητισμός στο πλάσμα.

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c}\int \vec{r}' \times \vec{j}(r')d^3r' = \frac{1}{c}\int \frac{1}{2}\vec{r}' \times \vec{j}(r')A\vec{dl}$$

ή

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c}\int \vec{r}' \times \vec{dl} = \frac{I}{c}\int \frac{1}{2}(\vec{r}' \times \vec{dl})$$

ή

$$\mu = \frac{IS}{c} = \frac{q\omega_c}{2\pi c}\pi r_L^2 = \frac{qV_\perp^2}{2\omega_c c} = \frac{1}{2}\frac{mV_\perp^2}{B} = \frac{W_\perp}{B}$$

οπότε

$$\vec{\mu} = -\frac{W_\perp \hat{B}}{B} = -\frac{W_\perp \vec{B}}{B^2} \qquad (2.9)$$

2.2.2. $\vec{E} \neq 0$ και $\vec{B} \neq 0$

Εφαρμόζοντας τώρα και ένα ηλεκτρικό πεδίο θα παρατηρήσουμε ότι η κίνηση γίνεται πιο σύνθετη αποτελούμενη από την τροχιά Larmor και μια κίνηση του κέντρου καθοδήγησης. Θα εξετάσουμε πρώτα την απλή περίπτωση που το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ αλλά δεν είναι παράλληλο προς αυτό. Για παράδειγμα $\vec{E} \parallel (X,Z)$ οπότε $E_X, E_Z \neq 0$ αλλά $E_y = 0$ (σχήμα (2.3a)).

Από την εξίσωση (2.1) μπορούμε πάλι να πάρουμε τις τρεις συνιστώσες της κίνησης. Η κίνηση στην διεύθυνση Z δεν εξαρτάται από το μαγνητικό πεδίο οπότε έχουμε

$$\frac{d^2Z}{dt} = \frac{q}{m} E_z \quad \text{ή} \quad \frac{dZ}{dt} = \frac{q}{m} E_z t + V_{zo} \qquad (2.10)$$

που δείχνει επιτάχυνση του σωματίου στην διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου. Οι άλλες δύο συνιστώσες είναι

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{q}{m} E_x \pm \omega_c \frac{dy}{dt}$$

και (2.11)

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \pm \omega_c \frac{dx}{dt} \qquad \text{επειδή} \qquad E_y = 0 .$$

Εφόσον το E είναι σταθερό μπορούμε να παραγωγήσουμε ως προς τον χρόνο οπότε προχωρώντας όπως στην παραγ. 2.2.1. βρίσκουμε

$$\frac{d^2(\dot{x})}{dt^2} + \omega_c^2 \; \dot{x} = 0$$

$$\frac{d^2(\dot{y} + c\,E_x/B)}{dt^2} + \omega_c^2 \; (\dot{y} + c\,E_x/B) = 0 \tag{2.12}$$

Από τις εξισώσεις (2.12) βλέπουμε ότι οι λύσεις είναι όμοιες με τις λύσεις της (2.3) με την διαφορά ότι τώρα το $\dot{y}$ πρέπει να το αντικαταστήσουμε με $\dot{y} + cE_x/B$:

$$\dot{x} = V_\perp e^{i\omega_c t}$$

$$\dot{y} = \pm i \, V_\perp e^{i\omega_c t} - c\,E_x/B \tag{2.13}$$

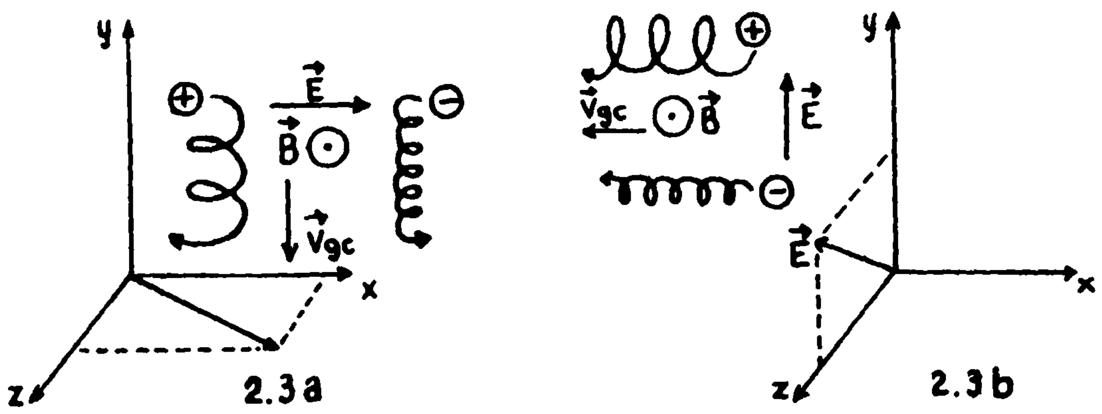
Επομένως έχουμε τώρα μια κίνηση Larmor όπως και προηγουμένως παράλληλα όμως κινείται και το κέντρο καθοδήγησης στην διεύθυνση (-y) γιά $E_x > 0$ με μια ταχύτητα ολίσθησης $V_{gc} = -cE_x/B$.

Είναι φανερό ότι παρόμοιες λύσεις προκύπτουν αν το ηλεκτρικό πεδίο βρίσκεται στο (zy) επίπεδο. Σ' αυτήν την περίπτωση (βλέπε σχήμα 2.3b) η ταχύτητα ολίσθησης είναι στην διεύθυνση (-x) για $E_y > 0$ με $V_{gc} = -cE_y/B$ και οι λύσεις βρίσκονται εύκολα από την (2.5) με αντικατάσταση του $\dot{x}$ από $(\dot{x} + cE_y/B)$.

$$\dot{x} = V_\perp e^{i\omega_c t} - c\,E_y/B$$

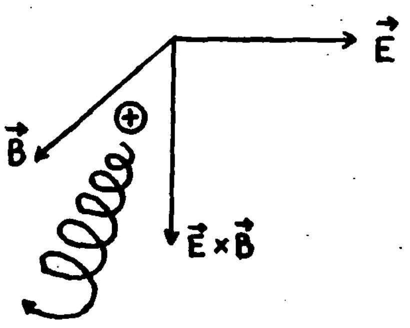
$$\dot{y} = V_\perp e^{i\omega_c t} \tag{2.14}$$

Από τα παραπάνω συνάγεται ότι όταν το ηλεκτρικό πεδίο έχει συνιστώσες και στις τρεις διευθύνσεις x,y,z τότε πάλι οι λύσεις βρίσκονται εύκολα από τις (2.5) με ταυτόχρονη αντικατάσταση των $\dot{x} \rightarrow \dot{x} + cE_y/B$ και $\dot{y}+cE_x/B$. Θα υπάρχουν λοιπόν δύο ταχύτητες ολίσθησης μια στην διεύθυνση x λόγω της συνιστώσας E_y και μια στην διεύθυνση y λόγω της συνιστώσες E_x. Η συνισταμένη των δύο αυτών ταχυτήτων θα είναι κάθετος στο επίπεδο που σχηματίζουν το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο $\vec{E}$ και $\vec{B}$ και επομένως παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{E} \times \vec{B}$. Η τρισδιάστατη τροχιά θα είναι λοιπόν κεκλιμένος έλικας με αυξανόμενη



Σχήμα 2.2. Ταχύτητα ολίσθησης σε ΗΜ πεδίο

ελικότητα όπως φαίνεται στο σχήμα (2.4).Δεν είναι δύσκολο να βρεθεί η συνιστώσα των ταχυτήτων ολίσθησης και από την εξίσωση (2.1). Εφόσον η V_{gc} είναι παράλληλος προς το διάνυσμα $\vec{E} \times \vec{B}$ και δεν μας ενδιαφέρει η κυκλική κίνηση Larmor γράφουμε την (2.1).



Σχ.2.4. Τρισδιάτατη τροχιά σε ΗΜ-πεδίο.

$$\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}/C = 0 \tag{2.15}$$

οπότε παίρνοντας το εξωτερικό γινόμενο με το B έχουμε

$$\vec{E} \times \vec{B} = \vec{B} \times (\vec{V} \times \vec{B}/C) = \vec{V}B^2/c - \vec{B}(\vec{V} \cdot \vec{B})/C \tag{2.16}$$

και επομένως

$$\vec{V}_{gc} \equiv \vec{V}_E = c\,\vec{E} \times \vec{B}/B^2 \tag{2.17}$$

όπου ο δείκτης E υποδηλώνει το ηλεκτρικό πεδίο.

Ένα φυσικό επιχείρημα για την ταχύτητα ολίσθησης μπορεί να δοθεί από το σχήμα 2.3. Στο πρώτο μισό μέρος του ημικυκλίου το θετικό φορτίο κινείται στην διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου και επομένως κερδίζει ενέργεια και επιταχύνεται. Αντίθετα στο δεύτερο μέρος κινείται αντίθετα με το ηλεκτρικό πεδίο και επομένως επιβραδύνεται, έτσι $r_{L\alpha} > r_{L\beta}$ και αυτή η διαφορά προκαλεί την ολίσθηση. Το ίδιο βέβαια συμβαίνει και με το αρνητικό φορτίο, μόνο που τώρα επιτάχυνση και επιβράδυνση είναι αντίστροφες. Από το επιχείρημα αυτό φαίνεται ότι V_E είναι ανεξάρτητη από q, m και V .Βλέπε και πρόβλημα (2.1)

2.2.3. Πεδίο βαρύτητας και $\vec{B} \neq 0$.

Η ανάλυση που κάναμε στις παράγραφους 2.2.1. και 2.2.2. θα μπορούσε να γίνει και για οποιοδήποτε άλλο πεδίο, εκτός του ηλεκτρικού, που προκαλεί μια δύναμη $\vec{F}$. Σ' αυτή την περίπτωση μπορούμε να αντικαταστήσουμε στην εξίσωση κίνησης (2.1) την ηλεκτρική δύναμη $q\vec{E}$ με την δύναμη $\vec{F}$ οπότε η ταχύτητα ολίσθησης γίνεται

$$\vec{V}_f = c(\vec{F} \times \vec{B})/B^2q \tag{2.18}$$

Η ταχύτητα ολίσθησης γίνεται αρκετές φορές η αιτία ασταθειών στο πλάσμα. Για παράδειγμα μια τέτοια αστάθεια προέρχεται από τις φυγόκεντρες δυνάμεις λόγω βαρύτητας και ονομάζεται βαρυτική αστάθεια. Βέβαια λόγω της μικρής τιμής της επιτάχυνσης g η ολίσθηση λόγω βαρύτητας είναι πολύ μικρή, όπως φαίνεται κι από την εξίσωση (2.17) αν αντικαταστήσουμε το $\vec{F}$ με το $m\,g$ οπότε

$$\vec{V}_g = c\,\frac{m}{q}\,(\vec{g} \times \vec{B})/B^2$$

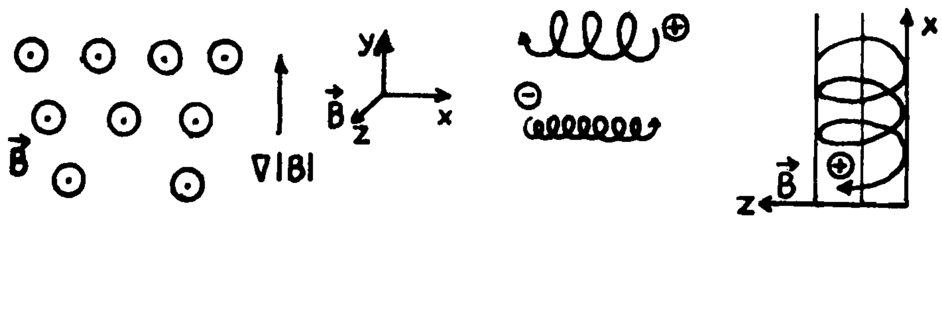
Μπορεί όμως να γίνει αρκετά μεγάλη[2] όταν οι δυναμικές γραμμές παρουσιάζουν καμπυλότητα. Μια άλλη ιδιότητα της τεέυταίας εξίσωσης είναι ότι επειδή V_g εξαρτάται από το φορτίο q η διεύθυνση ολίσθησης των ιόντων είναι αντίθετη από αυτή των ηλεκτρονίων. Έτσι παράγεται ρεύμα (Βλέπε άσκηση 2.6.3). Επιπλέον επειδή V_g εξαρτάται και από την μάζα m, τα μήκη της ολίσθησης είναι διαφορετικά για τα ιόντα και τα ηλεκτρόνια.

2.3. Κίνηση σε ανομοιογενές μαγνητικό πεδίο.

2.3.1. Μαγνητικό πεδίο με εγκάρσια μεταβολή $\Delta \vec{B} \perp \vec{B}$.

Θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου το μαγνητικό πεδίο έχει παράλληλες δυναμικές γραμμές αλλά η έντασή του μεταβάλλεται στην διεύθυνση κάθετα προς αυτές. Για παράδειγμα η αλλαγή γίνεται στην διεύθυνση y.

Είχαμε τονίσει στην παράγραφο 2.2.3 ότι η ακτίνα Larmor ελατώνεται στην περιοχή ισχυρού πεδίου και αυξάνεται στην περιοχή αδύνατου πεδίου. Επομένως όταν το πεδίο είναι ανομοιογενές τα ηλεκτρόνια και τα ιόντα θα έχουν ταχύτητες ολίσθησης σε αντίθετες διευθύνσεις και με διαφορετικά μήκη. Άρα θα υπάρχει ροή ρεύματος και η ταχύτητα ολίσθησης θα είναι ανάλογη των r_L και V όπως στο σχήμα 2.5.



Σχ. 2.4. Ολίσθηση σε μη ομογενές πεδίο B.

Για να βρούμε την ταχύτητα ολίσθησης θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (2.18) όπου $\vec{F}$ είναι η δύναμη Lorentz. Είναι προφανές ότι από τις τρεις συνιστώσες της $\vec{F}$ μας ενδιαφέρει μόνο η F_y

$$F_y = -q \frac{V_x}{c} B_z(y) \qquad (2.19)$$

που είναι συνάρτηση της $B_z(y)$. Για $r_L \ll L$ μπορούμε προσεγγιστικά να αναπτύξουμε το μαγνητικό πεδίο σε σειρά Taylor γύρω από το σημείο B_0 $(x = 0, y = 0)$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\, \vec{B}$$

$$B_z = B_0 + y \left(\frac{\partial B_z}{\partial y}\right) + \ldots\ldots \qquad (2.20)$$

οπότε με την βοήθεια της (2.5) η F_y γίνεται

$$F_y = -q \frac{V_\perp}{c} \cos\omega_c t \left(B_0 \pm r_L(\cos\omega_c t) \frac{\partial B}{\partial y}\right) \qquad (2.21)$$

Παίρνοντας τώρα την μέση τιμή της (2.21) σε μια περίοδο $T = 2\pi/\omega_c$ βρίσκουμε

$$\overline{F_y} = \frac{1}{T}\int_0^T F_y(t)\, dt = \mp q \frac{V_\perp r_c}{c} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right) \qquad (2.22)$$

οπότε η κίνησης ολίσθησης του σημείου καθοδήγησης είναι

$$\vec{V}_{gc} = \frac{c}{q} \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{B^2} = \frac{c}{q} \frac{F_y}{|B|} \hat{x} = \mp \frac{1}{2} \frac{V r_L}{|B|} \frac{\partial B}{\partial y} \hat{x}$$

(2.23)

Προχωρώντας με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι όταν η μεταβολή του μαγνητικού πεδίου είναι στην διεύθυνση x τότε η αντίστοιχη κίνηση ολίσθησης είναι στην διεύθυνση y με

$$\vec{V}_{gc} = \mp \frac{1}{2} \frac{V_{\perp} r_L}{|B|} \frac{\partial B}{\partial x} \hat{y} \tag{2.24}$$

Είναι προφανές από τις (2.22) και (2.24) ότι για μια εγκάρσια μεταβολή, $\Delta B \perp \vec{B}$, του μαγνητικού πεδίου θα ισχύει γενικά

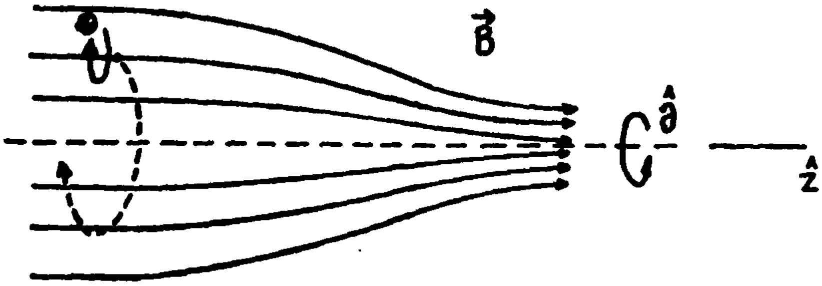
$$\vec{V}_{gc} = \pm \frac{1}{2} V_{\perp} r_L \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla} \vec{B}}{B^2} \tag{2.25}$$

2.3.2. Μαγνητικό πεδίο με διαμήκη μεταβολή.

Η περίπτωση αυτή είναι γνωστή σαν την γεωμετρία της μαγνητικής φιάλης ή του μαγνητικού καθρέφτη και φαίνεται στο σχήμα (2.6) στο οποίο για ευκολία χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες. Στην περίπτωση αξονικής συμμετρίας (αξονικά συμμετρικό πεδίο), είναι $B_\theta = 0$ οπότε το μαγνητικό πεδίο έχει την μορφή

$$\vec{B}(z,r) = B_z(z)\, Z + B_r(z,r)\, \hat{r} \tag{2.26}$$

Είναι φανερό ότι αν γνωρίζουμε την αξονική συνιστώσα μπορούμε να βρούμε την ακτινική συνιστώσα από την εξίσωση Mazwell $\vec{\nabla} \div \vec{B} = 0$



Σχήμα 2.6. Ολίσθηση στη μαγνητική φιάλη.

ή

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}B_\vartheta + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \qquad (2.27)$$

οπότε προσεγγιστικά έχουμε για $(\partial B_Z(r)/\partial z) \approx$ σταθερό

$$rB_r = -\int_0^r r\frac{\partial B_z}{\partial z}dr \approx -\frac{1}{2}r^2\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$B_r = -\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z} \qquad (2.28)$$

Για να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (2.18) χρειαζόμαστε τις συνιστώσεις της δύναμης Lorentz από την (2.1). Επειδή $B_\vartheta = \partial B_\vartheta/\partial\vartheta = 0$ έχουμε

$$F_r = \frac{qV_\vartheta B_z}{c}, \quad F_\vartheta = -\frac{q}{c}(V_r B_z + V_z B_r), \quad F_z = \frac{q}{c}(-V_\vartheta B_r) \qquad (2.29)$$

Είναι φανερό ότι η F_r και ο πρώτος όρος της F_ϑ συντελούν στην κίνηση Larmor. Το δεύτερο μέρος της F_ϑ δίνει μια ολίσθηση στην ακτινική διεύθυνση και μηδενίζεται πάνω στον άξονα. Η ολίσθηση αυτή επιβάλλει στο κέντρο καθοδήγησης να ακολουθεί τις δυναμικές γραμμές του πεδίου.

Η συνιστώσα F_z με την βοήθεια της (2.28) και λαμβάνοντας υπ' όψη ότι σε μια περίοδο $V_\vartheta = \mp V_\perp$ (ανάλογα με το πρόσημο του φορτίου) και $r = r_L$, γίνεται:

$$F_z = \mp \frac{q}{c} V_\perp \frac{1}{2} r_L \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

και η μέση τιμή της

$$\bar{F}_z = \mp \frac{1}{2} q \frac{V_\perp r_L}{c} \frac{\partial B_z}{\partial z} = \mp \frac{1}{2} q \frac{V_\perp^2}{c\omega_c} \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{mV_\perp^2}{B} \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\mu \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

(2.30)

όπου μ είναι η μαγνητική ροπή

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{mV_\perp^2}{B}$$

που ορίσαμε στην εξίσωση (2.9)

Η εξίσωση (2.30) μπορεί να γραφεί σε μια πιο γενική μορφή

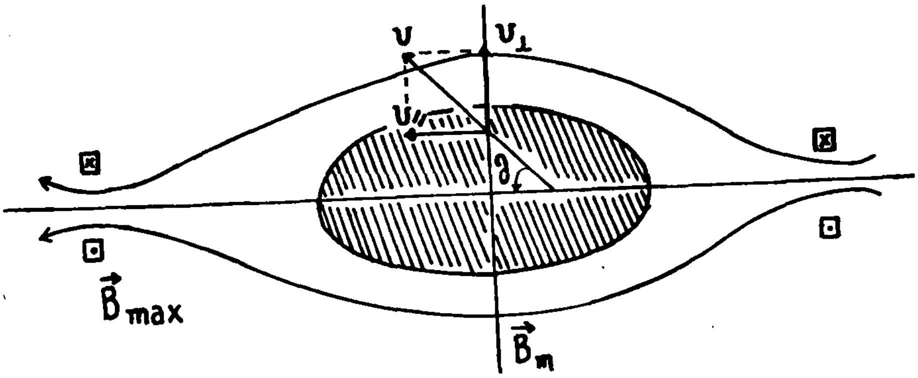
$$\vec{F}_{\parallel} = -\mu \vec{\nabla}_{\parallel} B \qquad (2.31)$$

που (") δηλώνει ότι η παραγώγιση γίνεται στην διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου. Το αποτέλεσμα (2.31) δείχνει ότι η διεύθυνση της δύναμης είναι προς τις περιοχές όπου το πεδίο έχει μικρότερη ένταση και είναι ανεξάρτητη από το φορτιο των σωματίων. Έτσι κάτω από την επίδραση της δύναμης αυτής σωμάτια που κινούνται προς την περιοχή ισχυρού πεδίου επιβραδύνονται και κάτω από ορισμένες συνθήκες μπορούν να ανακλαστούν προς τα πίσω. Αυτή η μορφολογία του μαγνητικού πεδίου λοιπόν έχει την δυνατότητα να συγκρατήσει το πλάσμα. Το φαινόμενο αυτό λέγεται μαγνητικός καθρέφτης και οφείλεται στη σταθερότητα της μαγνητικής ροπής και την διατήρηση της ολικής ενέργειας.

$$w = \frac{1}{2} m V_{\perp}^{2} + \mu B = \frac{1}{2} m V_{\parallel}^{2} + \frac{1}{2} m V_{\perp}^{2} = \text{σταθερά} \tag{2.32}$$

Όπως το σωμάτιο κινείται από την περιοχή αδύνατου στην περιοχή ισχυρού μαγνητικού πεδίου αυξάνει την ταχύτητά του $V_{\perp}$ για να κρατήσει μ σταθερό. Από την άλλη μεριά ελαττώνει την ταχύτητά του $V_{\parallel}$ για να διατηρήσει την ολική ενέργεια w σταθερά. Όταν το πεδίο B είναι πολύ ισχυρό τότε το σωμάτιο μπορεί να ανακλαστεί κι έτσι να κάνει ταλαντώσεις παραμένοντας εγκλωβισμένο στην περιοχή αδύνατου μαγνητικού πεδίου. Για παράδειγμα στην διάταξη του διπλού μαγνητικού καθρέφτη που φαίνεται στο σχήμα (2.7) εκείνα τα σωμάτια που έχουν ολική ενέργεια $w < \mu B_{max}$ εγκλωβίζονται στην περιοχή μεταξύ των καθρεφτών.

Είναι φανερό ότι δεν μπορεί να εγκλωβιστούν όλα τα σωμάτια. Για παράδειγμα σωμάτια με $V_{\perp} = 0$ δεν εγκλωβίζονται. (Γιατί;) Ούτε σωμάτια με μικρές τιμές $V_\perp$ / $V_{\parallel}$ στο σημείο που το μαγνητικό πεδίο γίνεται ελάχιστο δηλαδή όπου $B = B_m$ (δηλαδή στη μεσοκάθετο μεταξύ δύο καθρεφτών) εκγλωβίζονται, όταν το μέγιστο μαγνητικό πεδίο $B = B_{max}$



Σχήμα 2.7. Μαγνητικός καθρέφτης

στο σημείο ανάκλασης δεν είναι αρκετά ισχυρό. (Γιατί ;) Για παράδειγμα: Για ένα σωμάτιο που έχει στο σημείο ανάκλασής του $B = B_{max}$ έχουμε

$$w = \mu \; B_{max} \tag{2.33}$$

Αλλά επειδή η μαγνητική ροπή είναι σταθερή μπορούμε να την πάρουμε στο σημείο με $B = B_m$ οπότε σύμφωνα και με το σχήμα 2.6 θα έχουμε:

$$\mu = \left(\frac{W}{B}\right)_m = \frac{W_m}{B_m} = \frac{1/2\, mV^2}{B_m} = \frac{1/2\, mV^2 \sin^2\vartheta}{B_m} = \frac{W \sin^2\vartheta}{B_m} \tag{2.34}$$

Από τις εξισώσεις (2.33) και (2.34) βρίσκουμε την συνθήκη ανάκλασης δηλαδή την ελάχιστη γωνία ανάκλασης θ_c που κάνει ένα σωμάτιο στο B_m όταν ανακλάται στο B_{max}

$$\sin^2 \theta_c = B_m / B_{max} \qquad (2.35)$$

Επομένως μόνο σωμάτια στο χώρο μεταξύ π και θ_c θα εγκλωβιστούν από τους μαγνητικούς καθρέφτες ενώ σωμάτια μέσα στον κώνο θ_c θα διαφύγουν από αυτούς. Γενικά όταν δεν υπάρχουν συγκρούσεις, ιόντα και ηλεκτρόνια εγκλωβίζονται ομοιόμορφα επειδή η γωνία θ_c είναι ανεξάρτητη των q και m. Όταν όμως υπάρχουν συγκρούσεις αυξάνεται και η πιθανότητα διαφυγής ιδιαίτερα των ηλεκτρονίων επειδή έχουν μεγαλύτερες συχνότητες συγκρούσεων. Ο μαγνητικός καθρέφτης είναι μια μορφολογία μαγνητικού πεδίου που συναντάται και στην φύση. Όπως στο μαγνητικό πεδίο της γης (ισχυρό στους πόλους και αδύνατο στον ισημερινό) και στις ζώνες Van Allen. Είναι επίσης μια πιό τις κύριες μορφές πεδίου που χρησιμοποιούνται στο εργαστήριο για περιορισμό ή συγκράτηση (confinement) του πλάσματος.

2.4. Μη ομογενές ηλεκτρικό πεδίο

Για ευκολία θα υποθέσουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ βρίσκεται στην διεύθυνση x και μεταβάλλεται μόνο στην διεύθυνση y. Από την εξίσωση (2.1) έχουμε για τις συνιστώσες της επιτάχυνσης

$$\ddot{x} = \frac{qB}{cm}\dot{y} + \frac{q}{m}E_x(y) \,, \qquad \ddot{y} = -\frac{qB}{cm}\dot{x}$$

που μετά από παραγώγηση ως προς τον χρόνο και αντικατάσταση μεταξύ τους όπως στην προηγούμενη πράγραφο γίνονται

$$\frac{d^2}{dt^2}(\dot{x}) + \omega_c^2\,\dot{x} = \pm\,\frac{\omega_c c}{B}\,\frac{d}{dt}\,E_x(y) = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\dot{y}) + \omega_c^2\,\dot{y} = -\,\frac{\omega_c c}{B}\,E_x(y) \tag{2.36}$$

Από την (2.36) είναι φανερό ότι θα έχουμε μια τροχιά Larmor με συχνότητα ω_c και μια κίνηση ολίσθησης V_E κάθετη στη διεύθυνση E. Μπορούμε να ξεχωρίσουμε την κυκλική τροχιά παίρνοντας την μέση τιμή της (2.36) για έναν κύκλο. Υποθέτοντας ότι το ηλεκτρικό πεδίο E έχει την μορφή μιας ημιτονοειδούς ταλάντωσης

$$\vec{E} = E_0 \cos(ky)\,\hat{x} \tag{2.37}$$

με μήκος κύματος $\lambda = 2\pi/k$ και ότι για μικρές τιμές μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την λύση του ομογενούς μέρους της (2.36)

$$y = y_0 \pm r_L \cos \omega_c t$$

βρίσκουμε $\dot{x} = (d^2\dot{y}/\,dt^2) = 0$. Η μέση τιμή της ταχύτητας ολίσθησης κάθετη στην διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου E είναι επομένως

$$(\dot{y}) = -\frac{cE_0}{B}\cos(ky_0 \pm r_L\cos\omega_c t) = -\frac{E_0 c}{B}\cos ky_0\left(1-\frac{1}{4}k^2r_L^2\right) = -\frac{cE_0}{B}\left(1-\frac{1}{4}k^2r_L^2\right) \tag{2.38}$$

όπου για μικρές ακτίνες Larmor $kr_L \ll 1$ αναπτύξαμε τις συναρτήσεις $\cos(kr_L \cos\omega_c t)$ και $\sin(kr_L \cos\omega_c t)$ σε σειρές Taylor. Από τις εξισώσεις (2.38) και σε αναλογία με τις εξισώσεις (2.13) και (2.14) είναι φανερό ότι η μεταβολή του ηλεκτρικού πεδίου επιφέρει μια αλλαγή κατά $(1-(1/4)\,k^2r^2_L)$ στην ταχύτητα ολίσθησης. Στη γενική της μορφή επομένως όπου η μεταβολή της E είναι και στις τρεις διαστάσεις η γνωστή ταχύτητα ολίσθησης $\vec{E} \times \vec{B}$ μετατρέπεται λόγω της ανομοιογένειας του ηλεκτρικού πεδίου, σε

$$\vec{V}_E = -\frac{c\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}\left(1 - \frac{1}{4} r_L^2 k^2\right) \qquad (2.39)$$

η οποία μπορεί και να γραφεί με αντικατάσταση του κυματικού αριθμού ik με ∇ οπότε έχουμε

$$\vec{V}_E = c\left(1 + \frac{1}{4} r_L^2 \nabla^2\right) \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \qquad (2.40)$$

Το φυσικό επακόλουθο της εξίσωσης (2.40) είναι τώρα ότι επειδή η ταχύτητα ολίσθησης εξαρτάται από την ακτίνα Larmor (r_L) θα είναι διαφορετική για τα ιόντα και διαφορετική για τα ηλεκτρόνια. Θα υπάρχει επομένως διαχωρισμός φορτίου που θα έχει σαν αποτέλεσμα την δημιουργία ηλεκτρικών πεδίων που κάτω από ορισμένες περιπτώσεις θα τείνουν να δημιουργήσουν αστάθειες στο πλάσμα.

2.5. Κίνηση σε χρονικά μεταβαλλόμενα πεδία

2.5.1. Αργά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο.

Είναι γνωστό ότι ένα μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ διεγείρει ένα μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$. Το φαινόμενο αυτό όμως είναι δεύτερης τάξης. Επιπλέον στην περίπτωση που η χρονική μεταβολή είναι αργή δηλαδή όταν ισχύει $(1/\omega_c)|((\partial E/\partial \tau)/E)| \ll 1$ τότε μπορεί να αγνοηθεί. Έτσι η μελέτη της κίνησης ενός χρονικά αργά μεταβαλλόμενου ηλεκτρικού πεδίου δεν έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Αντίθετα αρκετό ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση που αυτό συνδιάζεται και με ένα μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$. Για παράδειγμα θα πάρουμε την περίπτωση που το ηλεκτρικό πεδίο βρίσκεται πάνω στον άξονα x και είναι της μορφής

$$\vec{E} = E_x(t)\,\hat{x} = E_0\, e^{i\omega t}\,\hat{x} \qquad (2.41)$$

και είναι κάθετο προς το μαγνητικό πεδίο που είναι σταθερό. Από την εξίσωση της κίνησης (2.1) έχουμε

$$\dot{V}_x = \frac{qB}{mc} V_y + \frac{q}{m} E_x(t), \qquad \dot{V}_y = -\frac{qB}{mc} V_x \qquad (2.42)$$

παραγωγίζοντας την (2.42) και θέτοντας $\omega_c = qB/mc$ έχουμε

$$\ddot{V}_x = -\omega^2{}_c V_x \pm \omega^2{}_c E_x\, c/B\, \omega_c$$

$$(2.43)$$

$$\ddot{V}_y = -\omega^2{}_c V_y + \omega^2{}_c\, c\, E_x/B$$

Αντικαθιστώντας στην (2.43)

$$V_p = \pm \frac{i\,\omega\, cE_x}{\omega_c B} \quad \text{και} \quad V_E = \frac{cE_x}{B} \qquad (2.44)$$

γίνεται

$$\ddot{V}_x = -\omega^2{}_c (V_x - V_p) \qquad \ddot{V}_x + \omega^2{}_c V_x = \omega^2{}_c V_p$$

$$(2.45)$$

$$\ddot{V}_y = -\omega^2{}_c (V_y - V_E) \qquad \ddot{V}_y + \omega^2{}_c V_y = \omega^2{}_c V_E$$

που σε αναλογία με τις εξισώσεις (2.3), (2.5) και (2.12) ,(2.13) βρίσκουμε τις λύσεις

$$V_x = V_\perp e^{i\omega_c t} + V_p$$

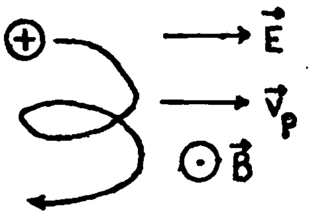
$$\omega^2 \ll \omega_c \qquad (2.46)$$

$$V_y = \pm iV_\perp e^{i\omega_c t} + V_E$$

από τις οποίες φαίνεται ότι το κέντρο καθοδήγησης έχει δύο ταχύτητες ολίσθησης. Μια στην διεύθυνση y, την γνωστή $\vec{V}_E \approx \vec{E} \times \vec{B}$ που εκτελεί ταλαντώσεις με συχνότητα ω και μια στην διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου την V_p που λέγεται ολίσθηση πόλωσης.

$$\vec{V}_p = \pm \frac{i\omega c}{\omega_c} \frac{\vec{E}_x}{B} \quad \text{ή} \quad \vec{V}_p = \pm \frac{c}{\omega_c B} \frac{\partial \vec{E}_x}{\partial t} \qquad (2.47)$$

Επειδή η ολίσθηση είναι αντίθετη για τα ιόντα και τα ηλεκτρόνια είναι προφανές ότι θα δημιουργείται και ένα ρεύμα πόλωσης. Από φυσική σκοπιά μπορούμε αυτό να το εξηγήσουμε ως εξής: Στην αρχή το φορτισμένο σωμάτιο δέχεται μόνο την δύναμη λόγω της $\vec{E}$ και κινείται προς αυτή την διεύθυνση. Στη συνέχεια επιδρά πάνω στο σωμάτιο και η δύναμη Lorentz από το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ και αρχίζει να κινείται κυκλικά. Εάν το $\vec{E}$ είναι σταθερό τότε δεν υπάρχει ολίσθηση πόλωσης. Εάν όμως το $\vec{E}$ αλλάζει διεύθυνση τότε υπάρχει και νέα ολίσθηση, τώρα στην αντίθετη διεύθυνση. Επομένως V_p είναι η ολίσθηση που εμφανίζεται στην αρχή κάθε ημικυκλίου όπως φαίνεται και στο σχήμα (2.8)



Σχ. (2.7). Ολίσθηση πόλωσης.

2.5.2. Αργά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο

Στο αργό μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο ισχύει η συνθήκη $(1/\omega_c)|dB/dt/B| \ll 1$ η οποία δίνει σχεδόν μια κυκλική τροχιά. Σ' αυτή την περίπτωση είναι ενδιαφέρον να εξετάσουμε την μαγνητική ροπή. Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο της ταχύτητας $V_\perp$ με την εξίσωση της κίνησης, έχουμε

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\, m\, V_\perp^2\right) = q\,\vec{E}\cdot\vec{V}_\perp \qquad \text{όπου} \qquad \vec{V}_\perp = \frac{d\vec{\ell}}{dt} \qquad (2.48)$$

Ολοκληρώνοντας την (2.48) και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Stockes

$$\int \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot \vec{ds} \qquad (2.49)$$

και την εξίσωση Maxwell $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -(1/c)(\partial\vec{B}/\partial t)$ έχουμε

$$\delta\left(\frac{1}{2} m V_\perp^2\right) = \int_0^{2\pi/\omega_c} q\, \vec{E} \cdot \frac{d\vec{\ell}}{dt}\, dt \tag{2.50}$$

$$\delta\left(\frac{1}{2} m V_\perp^2\right) = \int q\, \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = q \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = -\frac{q}{c} \int_S \dot{\vec{B}}\cdot d\vec{S} \tag{2.51}$$

όπου s είναι η επιφάνεια του κύκλου Larmor.

Έτσι από την (2.51) βρίσκουμε

$$\delta\left(\frac{1}{2} m V_\perp^2\right) = \pm\, q\frac{\dot{B}}{c}\, \pi\, r_L^2 = -\frac{1}{2} m \frac{V_\perp^2}{B} \cdot \frac{2\pi \dot{B}}{\omega_c} = \frac{1}{2} m\, V_\perp^2/B \cdot \delta(B) \tag{2.52}$$

ή

$$\delta\left(\frac{1}{2} m V_\perp^2\right) = \mu\delta(B).$$

Αλλά επειδή το αριστερό μέρος της (2.52) είναι δ(μΒ), έχουμε

$$\delta\mu = 0 \tag{2.53}$$

δηλαδή σταθερότητα της μαγνητικής ροπής.

Επομένως όταν η χρονική μεταβολή του μαγνητικού πεδίου είναι αργή, η μαγνητική ροπή μ είναι κατά προσέγγιση σταθερή. Τέτοιες ποσότητες που είναι κατά προσέγγιση σταθερές ονομάζονται αδιαβατικές αναλοίωτες ποσότητες και έχουν ιδιαίτερη χρησιμότητα στην περιγραφή της κίνησης όταν η γεωμετρία του μαγνητικού πεδίου είναι πολύπλοκη. Για παράδειγμα με την βοήθεια της αδιαβατικής σταθερότητας της μαγνητικής ροπής μπορεί να δειχτεί ότι και η μαγνητική ροή Φ δια μέσου ενός κύκλου Larmor είναι σταθερά (βλέπε άσκηση 2.6.7).

Προφανώς τα παραπάνω ισχύουν και για μικρές χωρικές μεταβολές του μαγνητικού πεδίου εφ' όσον ισχύει η αντίστοιχη συνθήκη

$$\frac{V}{\omega_c}\left|\frac{\nabla B}{B}\right| << 1$$

Η αδιαβατική αναλοιώτητα της μαγνητικής ροπής μ και κατ' επέκταση της μαγνητικής ροής Φ είναι σπουδαίες ιδιότητες του πλάσματος που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον περιορισμό και την θερμανσή του.

2.6. Ασκήσεις

2.6.1. Να βρεθεί η ακτίνα Larmor r_L

α) στο Μαγνητικό πεδίο της γης (0,5G) για ένα 5 KeV ηλεκτρόνιο

β) για ένα πρωτόνιο ηλιακού ανέμου με ταχύτητα 300 Km/sec, $B=5\times10^{-5}$ G.

γ) Για ένα 1-KeV He^+ ιόν της ηλιακής ατμόσφαιρας κοντά στην ηλιακή κηλίδα όπου B = 500 G.

Λύση

α) Η εξίσωση κίνησης φορτισμένου σωματίου σε ΗΜ-πεδίο είναι (εξ.2.2):

$$\frac{md\vec{V}}{dt} = q\left|\vec{E} + \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{B}\right|$$

επειδή $\vec{V} \perp \vec{B}$ και E = 0 έχουμε

$$\frac{mdV}{dt} = \frac{qVB}{c}$$

ή

$$\frac{mV^2}{r} = \frac{qVB}{c} \qquad \text{και} \quad r_L = \frac{mV^2c}{qVB} = mV\left(\frac{c}{qB}\right)$$

ή

$$r_L^2 = \frac{mV^2\,mc^2}{(qB)^2} = \frac{1}{2}\;\frac{mV^2 \cdot 2mc^2}{e^2B^2} = \frac{1}{2}mV^2 \cdot \frac{2mc^2}{e^2B^2} = \frac{5keV \times 2 \times 0.5MeV}{e^2(0.5)^2G^2} =$$

$$= \frac{5 \times 10^3\,(KeV)^2}{e^2(0.5)^2G^2} = 200 \times 10^3\left|\frac{kV}{G}\right|^2, \quad r = 1.42 \times 10^4\left|\frac{V}{G}\right|$$

και επειδή 1G =300V/cm, $r = 0.5 \times 10^2$cm

β) V = 300 Km/sec = 3.10^7cm/sec

$V = 300$ Km/sec $= 3\cdot10^7$cm/sec,

$$r_L^2 = \frac{mc^2}{qB}\ \frac{V}{c} = \frac{940\ \text{MeV}}{e^2\ \text{x}5\text{x}10^{-5}\ \text{G}}$$

300 km/sec, $r_L = 1880\text{x}10^6\ \left(\frac{V}{G}\right)$

$$r_L^2 = 20 \times 10^{10}\ \left(\frac{V}{G}\right)^2 = 20 \times 10^{10}\left(\frac{\text{Volt}}{\text{Volt/cm}}\right)^2 \quad \text{και} \quad r_L = 5 \times 10^5\text{cm}$$

γ)

$$m^4{}_{He}\, c^2 = 931.48 \times A + \Delta M = 931.48\text{x}4 + 8.05 \approx 3734\ \text{MeV}$$

$$r^2{}_L = (^1/_2)m_{He}V^2\cdot 2\ m_{He}c^2/e^2B^2$$

$$r^2{}_L = (1\text{x}10^3\text{eV}\ \text{x}2\text{x}3734\text{x}10^6\text{eV})/e^2B^2$$

$$r_L^2 = \frac{7.468\text{x}10^{12}}{25\text{x}10^4\ \text{x}9\text{x}10^4}\ \left(\frac{V}{V/cm}\right) \rightarrow r_L = \frac{2}{3}\ \text{x}10\ \text{x}\sqrt{7.468} = 18\text{cm}$$

2.6.2. Σ' ένα κυλινδρικό πλάσμα τα ηλεκτρόνια υπακούουν την εξίσωση Boltzmann $n = n_0\ \exp(-q\varphi/\ kt)$. Επιπλέον η πυκνότητα $n(r)$ μεταβάλλεται σύμφωνα με την εξίσωση $(dn/dr) = -n/\lambda$.

α) Χρησιμοποιώντας την σχέση $E = -\nabla\Phi$ να βρεθεί η E_r

β) Να δειχτεί ότι $r_L = 2\lambda$ για $U_{th} = U_E$

γ) Ισχύει η β) και για τά ιόντα;

Λύση

α)

$$\frac{dn}{dr} = -\frac{n}{\lambda} \rightarrow \frac{dn}{n} = -\frac{dr}{\lambda} \rightarrow n = ce^{-r/\lambda}$$

Επειδή επίσης ισχύει ότι $n = n_0\, e^{-q\Phi/kt}$ έχουμε ότι

$$n_o e^{-q\Phi/kT} = ce^{-r/\lambda} \quad ή \quad \ln(n_o) - q\Phi/kT = \ln(c) - \frac{r}{\lambda}$$

Αλλά επειδή $q = -e$

και $E_r = -(d\Phi/dr) = (kT/e\lambda)$

β) Από την εξίσωση της κίνησης

$$m\dot{\vec{V}} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{V}\times\vec{R}}{c}\right)$$

έχουμε

$$\frac{mV_E^2}{r} = |q|\left(E + \frac{V_E B}{c}\right) \quad \text{Αλλά επειδή } \vec{E}_r \perp n$$

$$\frac{mV_E^2}{r} = \frac{eV_E B}{c} \rightarrow r_L = \frac{mV_E c}{eB}$$

Γνωρίζουμε όμως ότι

$$V_E = \frac{c\vec{E}\times\vec{B}}{B^2} \qquad ή \qquad V_E = \frac{cE}{B}$$

και

$V^2{}_{th} = 2kT/m$

επομένως

$$r_L = \frac{mV_E^2\, c}{eE} = \frac{mV_E^2\, \lambda e}{(e)kT} = \frac{V_E^2}{V_{th}^2}\, 2\lambda = 2\lambda$$

γ) Ισχύει εφόσον $U_{th} = U_E$.

2.6.3. Να βρεθεί η πυκνότητα ρεύματος που προέρχεται από την βαρυτική δύναμη.

Λύση

Λόγω της βαρυτικής δύναμης τα ηλεκτρόνια και τα ιόντα ολισθαίνουν σε διαφορετικές διευθύνσεις.

$$\vec{V}_g^{ions} = \frac{cM}{q}\,\frac{\vec{g}\times\vec{B}}{B^2}\ ; \quad \vec{V}^{el} = \frac{cM}{e}\,\frac{\vec{g}\times\vec{B}}{B^2}$$

$$\vec{J}^{ions} = n_i q\, \vec{V}_g{}^{ions}\ ; \quad \vec{J}^{el} = -n_e e\, \vec{V}_g{}^{el}$$

$$\vec{J} = \vec{J}^{ions} + \vec{J}^{el} = n_i q\, \vec{V}_g{}^{ions} - n_e e\, \vec{V}_g{}^{el} =$$

$$= \frac{n_i q M}{q}\left(\frac{\vec{g}\times\vec{B}}{B^2}\right) + \frac{n_{el}\, em}{e}\left(\frac{\vec{g}\times\vec{B}}{B^2}\right)$$

οπότε για $n_i - n_e = n$

$$\vec{J} = cn\,(m+M)\left(\frac{\vec{g}\times\vec{B}}{B^2}\right)$$

2.6.4. Να βρεθεί η μαγνητική ροπή ενός ιόντος που διαγράφει κίνηση Larmor.

Λύση

Η κίνηση ενός φορτισμένου σωματίου σε κυκλική τροχιά δημιουργεί ένα ρεύμα I. Εάν το εμβαδόν που περικλύεται από την κυκλική τροχιά είναι A τότε η μαγνητική ροπή μ είναι

$$\vec{\mu} = \frac{\vec{I}}{c} A$$

Στην περίπτωση ενός ιόντος με τροχιά Larmor και συχνότητα ω έχουμε: $A = \pi r_L^2$

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{e}{\tau} = \frac{e\omega_c}{2\pi}\ ; \qquad m = \frac{1}{c}\, I A = \frac{1}{c}\, \frac{e\omega_c}{2\pi}\, \pi r_L^2$$

αλλά επειδή $r_L = \dfrac{V_\perp}{\omega_c}$ και $\omega_c = \dfrac{qB}{mc}$

$$\mu = \frac{1}{2}\, \frac{eV_\perp^2}{c\omega_c} = \frac{1}{2}\, \frac{mV_\perp^2}{B}$$

2.6.5. Σ' ένα κυλινδρικό αντιδραστήρα έχουμε $KT_e = KT_i = 0.2$ eV και $B=4KG$. Τα ηλεκτρόνια υπακούουν την γνωστή σχέση Boltzmann και το προφίλ της πυκνότητας δίνεται από τη σχέση $n=n_0\exp(\exp(-r^2)-1)$. Να βρεθεί η ταχύτητα ολίσθησης U_E.

<u>Λύση</u>

Η σχέση Boltzmann είναι

$$n = n_0 \exp\,(+e\Phi/kT)$$

συγκρίνοντας με το προφίλ έχουμε

$$n = n_0 \exp\,(+e\Phi/kT) = n_0 \exp\,(\exp(-r^2) - 1) \rightarrow$$

$$+e\Phi/kT = \exp\,(-r^2/\lambda^2) - 1 \rightarrow$$

$$+\,\Phi = \frac{kT}{e}\,\exp\left(-\frac{r^2}{\lambda^2}\right) - \frac{kT}{e} \quad \text{ή}$$

$$E = -\nabla\Phi = \frac{kT}{e}\,\frac{2r}{\lambda^2}\,\exp\left(-\frac{r^2}{\lambda^2}\right)$$

οπότε

$$V_E = \frac{cE}{B} = \frac{0.2\mathrm{x}2}{4\mathrm{x}10^3}\,\frac{cr}{\lambda^2}\,\exp\left(-\frac{r^2}{\lambda^2}\right)\left(\frac{\mathrm{eV/cm}}{\mathrm{e\,G}}\right)\left(\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}}\right)$$

$$V_E = 1.3\mathrm{x}10^{-6}\,\frac{cr}{\lambda^2}\,\exp\left(-\frac{r^2}{\lambda^2}\right)\left(\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}}\right)$$

2.6.6. Το μαγνητικό πεδίο της γης είναι 0.3 G στον ισημερινό και ελαττώνεται κατά $1/r^3$ σε απόσταση r από αυτόν. Σε απόσταση r=5 ακτίνες της γης στο επίπεδο του ισημερινού βρίσκονται ισοτροπικές πυκνότητες ηλεκτρονίων και πρωτονίων $n_e = n_p = 10\mathrm{cm}^{-3}$ με αντίστοιχες ενέργειες 1-eV και 30-KeV.

α) Να βρεθούν οι ταχύτητες ολίσθησης $U_{\Delta B}$ της παραγράφου

β) Τα ηλεκτρόνια κινούνται ανατολικά ή δυτικά

γ) Πόσο χρόνο θα χρειαστεί ένα ηλεκτρόνιο για μια περιστοφή γύρω από τη γη.

δ) Ποιά είναι η πυκνότητα ρεύματος.

Λύση

Η ταχύτητα ολίσθησης της παραγώγου δίνεται από την σχέση

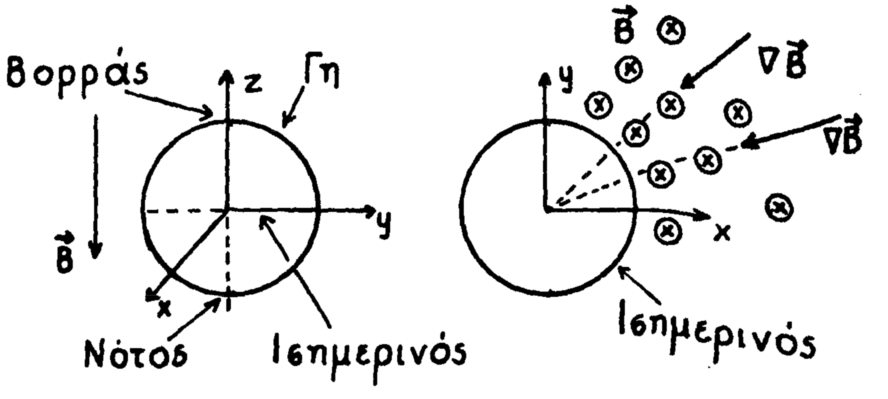
$$\vec{V}_{\Delta B} = \pm \frac{1}{2} V_{\perp} r_{\perp} \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla} B}{B}$$

Η ακτίνα Larmor ενός σωματίου στο μαγνητικό πεδίο είναι

$$r_L = \frac{mV_{\perp} c}{|q|\, B} \quad \text{επομένος} \quad V_{\perp} r_{\perp} = \frac{c}{|q|B}\, mV_{\perp}^2$$

οπότε

$$\vec{V}_{\Delta B} = \pm \frac{1}{2} mV_{\perp}^2 c \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla} B}{|q|B^2}$$



Αλλά επειδή $\vec{B} \times \Delta\vec{B} = B\,\nabla B$

$$V_{\Delta B} = \pm \frac{1}{2} m V_{\perp}^{2} c \quad \frac{\nabla_r B c}{|q| B^2}$$

$$B_r = A\,(R/r)^3\,; \qquad \frac{\partial B_r B c}{\partial r} = - \frac{3A}{R} \left(\frac{R}{r}\right)^4$$

$$\frac{B_r}{r=R} = A\,; \qquad \left.\frac{\partial B_r B c}{\partial r}\right|_{r=5R} = - \frac{3A}{R} \left(\frac{1}{5}\right)^4 = - \frac{3}{(5)^4} \frac{A}{R}$$

α) Για τα πρωτόνια

$$V_{\Delta B} = \pm \frac{1}{2} m V_{\perp}^{2} \quad \frac{Bc}{|q| B^2} = c.1(eV) \frac{-3A/(5)^4}{eRA^2\,(1/5)^6} = \frac{-75c}{AR} = \frac{-75c}{300 \times 0.3R}$$

$$V_{\Delta B} = -0.83 \quad \frac{c}{R[cm]}$$

$V_{\Delta B} = 1.4 \times 10^{-9} c.$

Για τα ηλεκτρόνια θα αλλάξει το πρόσημο και θα πολλαπλασιαστεί

με 3×10^4 επειδή $E_e = 30KeV = 3 \times 10^4$ eV άρα

$V_{\Delta B} = 4.2 \times 10^{-5} c$

β) Τα ηλεκτρόνια κινούνται ανατολικά τα πρωτόνια δυτικά.

γ) $$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{(qB/mc)} = \frac{2\pi mc}{qB} = \frac{2\pi}{c} \frac{mc^2}{qB}$$

για το ηλεκτρόνιο έχουμε $mc^2 = 0.5MeV$

άρα $\tau = (2\pi/c) \cdot 0.5 \times 10^6$ eV/(0.3 e G) =

$\tau = 3.4\times10^4/c$ [sec] με c σε (cm/sec)

δ) $I_q = m_q\, q\, V^q{}_{\Delta B}$; $I_e = -n_e\, e\, V^e{}_{\Delta B}$

$$I = I_q + I_e = n_e\, (\nabla_B/B)\ {}^1/_2\, (V^q{}_\perp r^q{}_\perp - V^e{}_\perp r^e{}_\perp)$$

$$I = \frac{n\nabla Bc}{B^2} \times \Big(\underbrace{\frac{1}{2}\, m_q V_\perp^{q^2} + \frac{1}{2}\, m_e V_\perp^{e^2}}_{3\times10^4\ \mathrm{eV}}\Big)$$

$$I = 10 \times \frac{3}{125}\ \frac{R}{A}\ c \times 1\times10^4 \times 1.6\times10^{-19}\ (\mathrm{coul/sec\ cm^2})$$

$$I = 1.23\times10^{-5}\ (\mathrm{Ampere/cm^2})$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

ΜΟΝΤΕΛΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗΣ ΠΛΑΣΜΑΤΟΣ

3.1. Εισαγωγή

Επειδή το πλάσμα συναντάται σε διάφορες περιοχές πυκνότητας και θερμοκρασίας χρειαζόμαστε για την περιγραφή του διαφορετικά μοντέλα ανάλογα με τις τιμές της πυκνότητας και θερμοκρασίας. Για παράδειγμα για χαμηλές πυκνότητες η περιγραφή του πλάσματος μέσω ενός μοντέλου που βασίζεται στην ανεξάρτητη κίνηση των σωματίων θα είναι καλή προσέγγιση. Όταν όμως η πυκνότητα είναι μεγάλη τότε δεν είναι ακριβής η περιγραφή με βάση την κίνηση ενός ανεξάρτητου σωματίου αλλά χρειαζόμαστε να λάβουμε υπόψιν μας και την κίνηση των άλλων σωματίων και επομένως την επίδρασή τους πάνω σ' αυτό. Παρόμοιο πρόβλημα έχουμε στην Μηχανική των ρευστών όπου στην πράξη αγνοείται η ταυτότητα του ενός σωματίου και εξετάζεται η συλλογική κίνηση του ρευστού. Το μοντέλο αυτό λέγεται υδροδυναμικό μοντέλο. Όμως στα ρευστά η συλλογική κίνηση προσδιορίζεται από τις συγκρούσεις μεταξύ των σωματίων σε αντίθεση με την κίνηση μέσα στο πλάσμα που προσδιορίζεται κύρια από τις ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις. Παρά την διαφορά της φύσης των δυνάμεων, περίπου 80% των φαινομένων που παρουσιάζονται στο πλάσμα μπορούν να περιγραφούν με το υδροδυναμικό μοντέλο και γιαυτό θα το εξετάσουμε αναλυτικά σ' αυτό το κεφάλαιο.

Είναι προφανές ότι το υδροδυναμικό μοντέλο επειδή παραβλέπει εντελώς την κίνηση ανεξαρτήτων σωματιδίων δεν είναι δυνατό να μας δώσει μια εντελώς ακριβή περιγραφή. Για μια τέτοια περιγραφή θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν μέθοδοι της στατιστικής φυσικής και η κινητική θεωρία. Επειδή ο σκοπός μας είναι να δώσουμε μια απλή περιγραφή δεν θα εξετάσουμε τα μοντέλα αυτά σε βάθος. Θα ασχοληθούμε μ' αυτά τόσο όσο χρειάζεται για να εισάγουμε τις δύο κυριώτερες εξισώσεις που αναφέρονται στο πλάσμα. Την εξίσωση Vlasov και την εξίσωση Fokker-Plank.

3.2. Το μοντέλο των ανεξάρτητων σωματιδίων.

Η περιγραφή του πλάσματος άρχισε από την κατασκευή πολύ απλουστευτικών πρωτοτύπων που εξελίχτηκαν με το χρόνο σε πολύ πιο σύνθετα. Ένα από τα πρωταρχικά και πολύ απλά μοντέλα είναι το μοντέλο των ανεξαρτήτων σωματιδίων. Το μοντέλο αυτό περιγράφει ένα σύστημα σωματιδίων που δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ των και επομένως κινούνται μόνο κάτω από την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων. Είναι φανερό ότι για την λύση ενός τέτοιου προβλήματος σ' ένα σύστημα ΣN_α σωματιδίων θα χρειαζόταν κανείς να λύσει ένα σύστημα ΣN_α εξισώσεων. Το πρόβλημα αυτό απλουστεύεται όταν υποθέσουμε ότι όλα τα σωματίδια έχουν την ίδια ταχύτητα κάτω από την επίδραση των εξωτερικών πεδίων οπότε παραμένουν ακίνητα όταν τα πεδία αυτά δεν υπάρχουν. Ένα τέτοιο μοντέλο που αγνοεί την αλληλεπίδραση των σωματιδίων και τις διαφορές ταχυτήτων που μπορεί να έχουν είναι το μοντέλο των ανεξάρτητων σωματιδίων. Οι εξισώσεις κίνησης για ένα τυχαίο σωμάτιο με ταχύτητα $V_a \ll c$ είναι

$$\frac{d\vec{r}_a}{dt} = \vec{v}_a \ , \qquad m_a \frac{d\vec{v}_a}{dt} = q_a \left[\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}_a \times \vec{B}\right] + \vec{g}_a m_a \tag{3.1}$$

όπου g_a είναι η επιτάχυνση από όλες τις άλλες δυνάμεις εκτός των ηλεκτρομαγνητικών. Τέτοιες δυνάμεις για παράδειγμα μπορεί να είναι, η δύναμη βαρύτητας , η δύναμη που προέρχεται από την καμπυλότητα του μαγνητικού πεδίου που όπως είδαμε στο κεφάλειο δύο είναι ανάλογος της δύναμης βαρύτητας και άλλες δυνάμεις που προέρχονται από τις συγκρούσεις μεταξύ των σωματίων. Γενικά το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ και το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ περιλαμβάνουν και τα αντίστοιχα ΗΜ-πεδία που δημιουργούνται από την κίνηση των φορτισμένων σωματιδίων μέσα στο πλάσμα οπότε έχει να κάνει κανείς με ένα αυτοσυνεπές πρόβλημα (self - consistent) που ορίζεται εντελώς όταν μαζί με την εξίσωση (3.1) λύσει κανείς ταυτόχρονα και τις εξισώσεις Maxwell.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\left(\vec{J} + \vec{J}_0\right), \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 4\pi(\rho + \rho_o) \tag{3.2}$$

όπου $\vec{J}_0$ και ρ_0 είναι οι πυκνότητες ρεύματος και φορτίου των εξωτερικών πεδίων και $\vec{J}$ και ρ οι αντίστοιχες πυκνότητες επαγωγής για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις

$$\rho = \sum_a n_a q_a \qquad \vec{J} = \sum_a n_a q_a \vec{v}_a \tag{3.3}$$

και οι οποίες πληρούν την εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} + n_a \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_a = 0 \qquad (3.4)$$

Είναι φανερό ότι ένα τέτοιο μοντέλο είναι αρκετά περιορισμένο γιατί δεν παίρνει υπ' όψιν του ούτε την θερμική κίνηση των σωματιδίων ούτε την αλληλεπίδραση μεταξύ των.

3.3. Το Υδροδυναμικό Μοντέλο

3.3.1 Μαγνητοϋδροδυναμική εξίσωση του μοντέλου των δύο ρευστών.

Στο αντίθετο άκρο δηλαδή στην περίπτωση μεγάλης πυκνότητας όπου κυριαρχούν τα συλλογικά φαινόμενα το πλάσμα μπορεί να περιγραφεί με το υδροδυναμικό μοντέλο. Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό το πλάσμα θεωρείται ότι απαρτίζεται από δύο ή περισσότερα αλληλοεφαπτόμενα, αγώγιμα ρευστά που αντιστοιχούν στα διάφορα είδη των σωματιδίων. Στην απλή περίπτωση που έχουμε να κάνουμε μόνο με ένα είδος ιόντων, τότε έχουμε δύο εξισώσεις κίνησης, μια για τα θετικά φορτισμένα σωμάτια (θετικά φορτισμένο ρευστό) τα ιόντα και μια για τα αρνητικά, τα ηλεκτρόνια, (εξισώσεις δύο ρευστών). Βέβαια όταν το πλάσμα δεν είναι εντελώς ιονισμένο αλλά περιέχει και ουδέτερα σωμάτια τότε χρειαζόμαστε και μια τρίτη εξίσωση, την εξίσωση για ουδέτερα άτομα τα οποία παρότι είναι ουδέτερα επιδρούν πάνω στα ηλεκτρόνια και τα ιόντα μέσω των συγκρούσεων μ' αυτά. Φυσικά τα ηλετρόνια και τα ιόντα επιδρούν επιπρόσθετα μεταξύ των ακόμη κι όταν δεν υπάρχουν συγκρούσεις, μέσω των ΗΜ -πεδίων. Για ευκολία θα υποθέσουμε ότι έχουμε μόνο δύο είδη σωματιδίων, ηλεκτρόνια και ιόντα. Με τις εξισώσεις φορτίου και ρεύματος

$$\rho = n_i q_i + n_e q_e , \qquad \vec{J} = n_i q_i \vec{V}_i + n_e q_e \vec{V}_e \tag{3.5}$$

αγνοώντας συγκρούσεις και ιξώδες παίρνουμε από τις εξισώσεις (3.2) και (3.4)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\,(n_i q_i + n_e q_e) \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \tag{3.6}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\left(n_i q_i \vec{V}_i + n_e q_e \vec{V}_e\right) \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(n_j\cdot\vec{V}_j) = 0 \qquad j = i,e \tag{3.8}$$

Οι εξισώσεις (5) -(8) πρέπει να συμπληρωθούν με την εξίσωση της κίνησης της υδροδυναμικής που προέρχεται από την εξίσωση (3.1) εάν πολλαπλασιατεί με την πυκνότητα n και συμπληρωθεί με την δύναμη που οφείλεται στην ολική παράγωγο $((\partial/\partial t) + \vec{V}\cdot\vec{\nabla})$ η οποία δίνει τον ρυθμό της αλλαγής κάθε ποσότητας η οποία κινείται με το ρευστό. Έτσι η εξίσωση (3.1) γίνεται

$$n_a m_a \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_a\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{V}_a = n_a q_a \left[\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{V}_a \times \vec{B}\right] + \vec{g}_a m_a n_a$$

Ο τελευταίος όρος της εξίσωσης αυτής περιγράφει όλες τις άλλες δυνάμεις εκτός των ηλεκτρομαγνητικών και μπορούμε να τον δούμε ξεχωριστά. Εκτός από τη δύναμη της βαρύτητας $m_a n_a \vec{g}$ θα πρέπει ακόμη να περιλάβει: α) Την δύναμη τριβής F_{ij} μεταξύ των δύο ρευστών και β) την μεταβολή της πίεσης $\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$ που προέρχεται από την μεταφορά ορμής από κάθε διεύθυνση σε όλες τις άλλες διευθύνσεις. Αυτή η μεταφορά ορμής που έχει συνιστώσες $P_{ij} = m_a n_a V_i V_j$ είναι ένας τανυστής, ο τανυστής τάσης, του οποίου οι συνιστώσες περιγράφουν την διεύθυνση της κίνησης και την συνιστώσα της ορμής η οποία είναι υπεύθυνη για την κίνηση. Όταν το πλάσμα είναι ισοτροπικό, δηλαδή όταν αυτό υπακούει μια ισοτροπική κατανομή τύπου Maxwell τότε P_{ij} έχει μόνο διαγώνια στοιχεία επειδή η κίνηση σε μια διεύθυνση μεταφέρει ορμή μόνο σ' αυτήν την διεύθυνση.

Έτσι $\nabla \cdot \mathbf{P} = \nabla P$ ή με

$$P = \begin{matrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p' & 0 \\ 0 & 0 & p \end{matrix}$$

όπου p είναι η πίεση του ρευστού που μπορούμε να εκφράσουμε δια μέσου της καταστατικής εξίσωσης ισορροπίας

$$p = \lambda (m\,n)^{\gamma} \quad (\lambda = \text{σταθ.},\ \gamma = c_p/c_v)$$

Στην περίπτωση που υπάρχουν τα μη διαγώνια στοιχεία αυτά αντιπροσωπεύουν το ιξώδες όπως και στην εξίσωση Navier-Stokes της υδροστατικής των συνειθισμένων ρευστών.

Όσον αφορά τη δύναμη F_{ij}, αυτή προέρχεται από την αύξηση της ορμής των ιόντων λόγω των συγκρούσεών τους με τα ηλεκτρόνια. Με άλλα λόγια δηλώνει την τριβή μεταξύ δύο ρευστών και μπορούμε να την εκφράσουμε σαν συνάρτηση της συχνότητας ν_{ij} των συγκρούσεων και τις σχετικής ταχύτητας των δύο ρευστών ($V_i - V_j$).

$$\vec{F}_{ij} = nm \left(\vec{V}_i - \vec{V}_j \right) v_{ij}$$

έτσι ώστε να ικανοποιείται και η σχέση διατήρησης της ορμής επειδή $F_{ij}=-F_{ji}$. Από την μηχανική των συγκρούσεων Coulomb μπορούμε εύκολα να βρούμε την σχέση μεταξύ συχνότητας v_{ij} και ειδικής αντίστασης η.

$$v_{ij}= (n\, e^2/m)\, \eta$$

και επομένως η δύναμη τριβής γίνεται

$$\vec{F}_{ie} = -\vec{F}_{ei} = \eta\, e^2\, n^2 \,(\vec{V}_i - \vec{V}_e) \qquad (3.9)$$

Έτσι η τελική μορφή της εξίσωσης (3.1) είναι

$$m_j n_j \left[\frac{\partial \vec{V}_j}{\partial t} + \left(\vec{V}_j \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{V}_j \right] = q_j\, n_j \left(\vec{E} + \frac{1}{c}\, \vec{V}_j \times \vec{B} \right) - \vec{\nabla} p_j - \vec{F}_{jk} + m_j n_j \vec{g}$$

$$j,k = i,e \quad k \neq j \qquad (3.10)$$

Έτσι έχουμε 16 άγνωστους n_i, n_e, p_i, p_e, $\vec{V}_i$, $\vec{V}_e$, $\vec{E}$, $\vec{B}$ και 16 εξισώσεις εφόσον πάρουμε ότι κάθε διανυσματική εξίσωση ισοδυναμεί με τρεις βαθμωτές εξισώσεις και ότι $\vec{\nabla}\cdot B$ και $\vec{\nabla}\cdot E$ είναι πλεονάζουσες. Η ταυτόχρονη λύση αυτών των εξισώσεων θα μας δώσει ένα αυτοσυνεπές σύστημα από πεδία και κινήσεις σαν προσέγγιση του υδροδυναμικού μοντέλου των δύο ρευστών. Γι αυτό και η (3.10) λέγεται Μαγνητοϋδροδυναμική εξίσωση του μοντέλου των δύο ρευστών.

3.3.2. Μαγνητοϋδροδυναμική εξίσωση του Μοντέλου του ενός ρευστού.

Όμως σ' ένα πλήρως ιονισμένο πλάσμα όπου οι κινήσεις των σωματιδίων είναι πολύ στενά συνδεδεμένες μεταξύ των, οι διαφορές μεταξύ των ιόντων και τών ηλεκτρονίων μπορούν να αγνοηθούν. Σ' αυτή την περίπτωση το πλάσμα φαίνεται να συμπεριφέρεται σαν ένα ουδέτερο αγώγιμο ρευστό. Είναι τότε δυνατό να πάρει κανείς ένα γραμμικό συνδιασμό των εξισώσεων των ηλεκτρονίων και των ιόντων έτσι ώστε σαν άγνωστος να εμφανίζεται η διαφορά των ταχυτήτων $\vec{V}_i - \vec{V}_e$ αντί των ταχυτήτων $\vec{V}_i$ και $\vec{V}_e$. Αυτός ο γραμμικός συνδιασμός θα περιγράφει το πλάσμα σαν ένα και μόναδικό υγρό, όπως π.χ. ο ρευστός υδράργυρος, με πυκνότητα μάζας ρ και ηλεκτρική αγωγιμότητα σ. Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε την περίπτωση της προσέγγισης του υδροδυναμικού μοντέλου του ενός ρευστού από την οποία προκύπτουν οι εξίσωσεις της μαγνητο-υδροδυναμικής (MHD). Για ένα ημιουδέτερο πλάσμα με ενιαία φορτισμένα ιόντα μπορούμε να ορίσουμε τις πυκνότητες ρεύματος j και μάζας μ καθώς και την ταχύτητα $\vec{V}$ ως εξής

$$\mu = n_i\, M + n_e\, m \approx n(M+m) \tag{3.11}$$

$$\vec{V} = \frac{1}{\mu}\left(n_i M\vec{V}_i + n_e\, m\, \vec{V}_e\right) = \frac{M\vec{V}_i + m\vec{V}_e}{M+m} \tag{3.12}$$

$$j = e\,(n_i \vec{V}_i - n_e \vec{V}_e) = ne(\vec{V}_i - \vec{V}_e) \tag{3.13}$$

για $n_i = n_e = n$. Έτσι οι εξισώσεις για τα ιόντα και τα ηλεκτρόνια θα είναι από την (3.10)

$$Mn\,\frac{\partial \vec{V}_i}{\partial t} = en\left(\vec{E} + \frac{\vec{V}_i \times \vec{B}}{c}\right) - \vec{\nabla}\, p_i + Mn\,\vec{g} + \vec{F}_{ie} \tag{3.14}$$

$$mn\,\frac{\partial \vec{V}_e}{\partial t} = -en\left(\vec{E} + \frac{\vec{V}_e \times \vec{B}}{c}\right) - \vec{\nabla}\, p_e + mn\,\vec{g} + \vec{F}_{ei} \tag{3.15}$$

όπου παραλείψαμε τον όρο $(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}$ υποθέτοντας ότι $\vec{V}$ <<. Προσθέτοντας τις (3.14) και (3.15) έχουμε

$$n\,\frac{\partial}{\partial t}\left(M\vec{V}_i + m\vec{V}_e\right) = en\left|\frac{\vec{V}_i - \vec{V}_e}{c}\right| \times\vec{B} - \vec{\nabla}\,p + n(M+m)g \tag{3.16}$$

όπου

$$p = p_i + p_e \tag{3.17}$$

είναι η ολική πίεση.

Με την βοήθεια των εξισώσεων (3.11-3.13) η εξίσωση (3.16) γίνεται

$$\mu\,\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} = \frac{\vec{j}\times\vec{B}}{c} - \vec{\nabla}\,p + \mu\,\vec{g} \tag{3.18}$$

Η εξίσωση (3.18) είναι η εξίσωση κίνησης για ένα ρευστό και περιγράφει την ροή της μάζας. Το ηλεκτρικό πεδίο δεν εμφανίζεται αναλυτικά γιατί το ρευστό παρουσιάζεται εξωτερικά σαν ουδέτερο.

Μπορούμε να πάρουμε μια άλλη εξίσου σπουδαία εξίσωση πολλαπλασιάζοντας την (3.14) με m και την (3.15) με M και αφαιρώντας την μια από την άλλη. Διαιρώντας με εμ βρίσκουμε

$$\vec{E} + \frac{\vec{V}\times\vec{B}}{c} - \eta\,\vec{j} = \frac{1}{e\mu}\left[\frac{Mm}{e}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{j}}{n}\right) + (M-m)\,\frac{\vec{j}\times\vec{B}}{c} + m\vec{\nabla}p_i - M\vec{\nabla}p_e\right] \tag{3.19}$$

όπου αντικαταστήσαμε στις εξισώσεις (3.14), (3.15) τη δύναμη τριβής $\vec{F}_{ie} = -\vec{F}_{ei}$ από την εξίσωση (3.2). Στο όριο

$$(m/M) \rightarrow 0 \tag{3.20}$$

η (3.19) γίνεται

$$\vec{E} + \frac{\vec{V} \times \vec{B}}{c} = \eta \vec{J} + \frac{1}{en} \left(\frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c} - \vec{\nabla} p_e \right) \tag{3.21}$$

που λέγεται γενικευμένος νόμος του Ohm. Ο νόμος αυτός περιγράφει τις ηλεκτρικές ιδιότητες ενός αγώγιμου υγρού και περιέχει τόν όρο $\vec{J} \times \vec{B}$ που λέγεται ρεύμα Hall. Γενικά οι δύο τελευταίοι όροι στην εξίσωση (3.20) είναι πολύ μικροί και μπορούν να παραληφθούν οπότε αυτή γίνεται

$$\vec{E} + \frac{\vec{V} \times \vec{B}}{c} = \eta \vec{J} \tag{3.22}$$

που είναι γνωστή σαν ο νόμος του Ohm.

Τέλος από το άθροισμα και την διαφορά των εξισώσεων συνέχειας για τα ηλεκτρόνια και τα ιόντα

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_e \vec{V}_e) = 0 \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_i \vec{V}_i) = 0 \tag{3.24}$$

βρίσκουμε τις εξισώσεις συνέχειας για την πυκνότητα μάζας μ και φορτίου ρ.

Για την πυκνότητα μάζας μ έχουμε

$$m \frac{\partial n_e}{\partial t} + M \frac{\partial n_i}{\partial t} + m\vec{\nabla} \cdot (n_e \vec{V}_e) + M \vec{\nabla} \cdot (n_i \vec{V}_i) = 0$$

ή

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(mn_e + Mn_i \right) + \nabla \cdot (mn_e \vec{V}_e + M n_i \vec{V}_i) = 0 \tag{3.25}$$

Οπότε με βάση τις εξισώσεις (3.11) και (3.12) η εξίσωση (3.25) γίνεται

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mu) + \nabla\cdot(\mu \vec{V}) = 0 \tag{3.26}$$

Όμοια για την πυκνότητα φορτίου έχουμε

$$e\frac{\partial n_e}{\partial t} - q\frac{\partial n_i}{\partial t} + e\vec{\nabla}\cdot(n_e \vec{V}_e) - q\,\vec{\nabla}\cdot(n_i \vec{V}_i) = 0$$

ή

$$\frac{\partial e(n_e+n_i)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0 \tag{3.27}$$

Συνοψίζοντας, μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις της μαγνητοϋδροδυναμικής (MHD) ως εξής

$$\mu\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{\vec{J}\times\vec{B}}{c} - \vec{\nabla}p + \mu\vec{g} \tag{3.28}$$

$$\vec{E} + \frac{\vec{V}\times\vec{B}}{c} = \eta\vec{j} \tag{3.29}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\mu\vec{V}) = 0 \tag{3.30}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0 \tag{3.31}$$

οι οποίες μαζί με τις εξισώσεις του Maxwell χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό καταστάσεων ισορροπίας στο πλάσμα.

3.3.4. Ολίσθηση κάθετα στο $\vec{B}$ στο MHD - Μοντέλο

Παίρνοντας την εξίσωση (3.10) για ένα είδος σωματιδίων έχουμε

$$mn\left[\frac{d\vec{V}}{dt} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}\right] = qn\left[\vec{E} + \frac{\vec{V}\times\vec{B}}{c}\right] - \vec{\nabla}p \qquad (3.32)$$

Ξέρουμε ότι λόγω του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ θα υπάρχει ολίσθηση κάθετα στο $\vec{B}$. Συνάμα όμως θα υπάρχει και επιπρόσθετη ολίσθηση λόγω του όρου $\vec{\nabla}p$ που εμφανίζεται στην κίνηση του υγρού αλλά δεν εμφανίζεται στο ανεξάρτητο σωμάτιο. Εάν η ταχύτητα ολίσθησης είναι μικρή (και μας ενδιαφέρει εδώ η $V_\perp$) τότε η ολίσθηση γίνεται αργά σε σύγκριση με την κυκλική κίνηση. Δηλαδή εάν $(\partial V/\partial t) \ll \omega_c$ τότε παίρνοντας το εξωτερικό γινόμενο της (3.11) με το $\vec{B}$ και θέτοντας τον όρο $(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}) = 0$ έχουμε

$$0 = qn\left[\vec{E}\times\vec{B} + \frac{1}{c}(\vec{V}\times\vec{B})\times\vec{B}\right] - \vec{\nabla}p\times\vec{B} \qquad (3.33)$$

ή

$$0 = qn\left[\vec{E}\times\vec{B} + \vec{B}\cdot\left(\frac{\vec{V}\times\vec{B}}{c}\right) - \frac{\vec{V}B^2}{c}\right] - \vec{\nabla}p\times\vec{B} \qquad (3.34)$$

οπότε

$$\vec{V}_\perp = c\,\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2} - c\,\frac{\vec{\nabla}p\times\vec{B}}{qnB^2} = \vec{V}_E + \vec{V}_D \qquad (3.35)$$

όπου

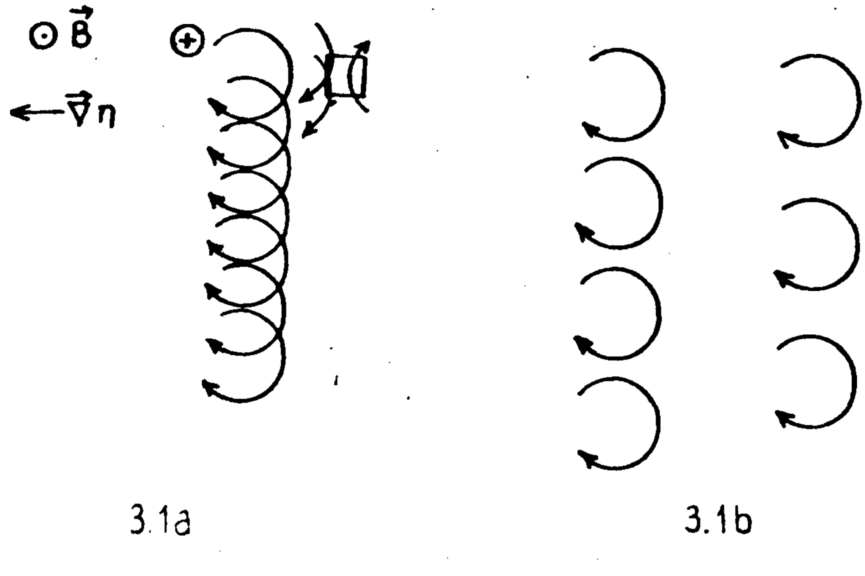
$$\vec{V}_E = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}\,c \qquad (3.36)$$

είναι η γνωστή ($\vec{E}\times\vec{B}$) ολίσθηση και

$$\vec{V}_D = \frac{\vec{\nabla}p \times \vec{B}}{qnB^2}\, c \qquad (3.37)$$

είναι μια νέα ολίσθηση κάθετη στην διεύθυνση μεταβολής της πυκνότητας και λέγεται διαμαγνητική ολίσθηση επειδή δημιουργεί διαμαγνητικό ρεύμα. Είναι φανερό ότι επειδή $\vec{V}_D \perp \Delta p$ η προσέγγιση $(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{V} \ll$ είναι αποδεκτή. Παραπέρα βλέπουμε ότι η $\vec{V}_D$ εξαρτάται από το φορτίο λόγω της κίνησης Larmor αλλά δεν εξαρτάται άμεσα από την μάζα.

Την φυσική σημασία της $\vec{V}_D$ μπορούμε να κατανοήσουμε και με την εξής εικόνα: Για ένα στοιχείο υγρού τα πιό πολλά σωμάτια θα κινηθούν στην διεύθυνση μικρότερης πυκνότητας (βλ. Σχήμα 3.1a). Επομένως θα υπάρχει μεταβολή της πυκνότητας κύκλων Larmor στην διεύθυνση της μεταβολής της πυκνότητας (βλ. σχήμα 3.1b) και συνεπώς ολίσθηση του υγρού στην dιευθυνση $(\vec{B}\times\vec{\nabla}n)$. Λόγω του αντίθετου φορτίου τα ηλεκτρόνια θα κινηθούν σε αντίθετη διεύθυνση από τα ιόντα κι αυτό



3.1a 3.1b

Σχήμα (3.1). Κίνηση Larmor σε μεταβαλλόμενη πυκνότητα θα έχει σαν αποτέλεσμα την δημιουργία διαμαγνητικού ρεύματος. Το ρεύμα αυτό για ισοθερμική συμπίεση ($\gamma = 1$) είναι (βλέπε άσκηση 3.6.1)

$$\vec{J}_D = (kTi + kTe)\,\frac{\vec{B} \times \vec{\nabla} n}{B^2}\,c \qquad (3.38)$$

3.3.2. Ολίσθηση παράλληλα στο $\vec{B}$ στο MHD - Μοντέλο

Παραλείποντας κι εδώ τον όρο $(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{V}$ και εξετάζοντας την κίνηση στην διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου έχουμε από την εξίσωση κίνησης

$$mn\,\frac{\partial V_z}{\partial t} = nq\,E_z - \gamma kT\,\frac{\partial n}{\partial z} \qquad (3.39)$$

από όπου φαίνεται ότι έχουμε επιτάχυνση στην διεύθυνση της συνισταμένης της ηλεκτρικής δύναμης και της δύναμης πίεσης. Για τα ηλεκτρόνια μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση αυτή προσεγγιστικά βάζοντας $m \to 0$, $E_z = -(\partial\Phi/\partial z)$ και $q = -e$ οπότε από την εξίσωση (3.39) παίρνουμε

$$e\,\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \gamma\,\frac{kTe}{n}\,\frac{\partial n}{\partial z} \qquad (3.40)$$

Αυτή η εξίσωση για ισοθερμικά ηλεκτρόνια ($\gamma=1$) έχει σαν λύση την γνωστή σχέση Boltzmann

$$n = n_0 \exp\,(e\Phi/\,kT_e) \qquad (3.41)$$

Μπορούμε να δώσουμε μια φυσική εξήγηση για την σχέση Boltzmann. Επειδή τα ηλεκτρόνια έχουν μικρή μάζα σε σύγκριση με τα ιόντα, μπορούν να επιταχυνθούν πολύ γρήγορα σε υψηλές ενέργειες αφήνοντας πίσω τους τα ιόντα. Έτσι δημιουργούνται κατανομές φορτίου και ηλεκτροστατικές δυνάμεις που για να υπάρχει γενική ισορροπία πρέπει να εξισορροπούνται από τις δυνάμεις που προέρχονται από την πίεση.

3.5. Η κινητική θεωρία και η εξίσωση Vlasov

Στην κινητική θεωρία το πλάσμα περιγράφεται από την συνάρτηση κατανομής. Για κάθε σωμάτιο τύπου a του πλάσματος η πιθανότητα (η πυκνότητα πυθανότητας) να βρίσκεται σε μια ορισμένη κατάσταση στη θέση $\vec{r}$ με ορμή $\vec{p} = m\,\vec{u}$ μια χρονική στιγμή t δίνεται από την συνάρτηση κατανομής $f_a(\vec{p},\vec{r},t)$. Σαν συνέπεια ο αριθμός των σωματιδίων στο πλάσμα δίνεται από τη σχέση

$$n_a(\vec{r},t) = \int d\vec{p}\; f_a(\vec{p},\vec{r},t) \qquad (3.42)$$

Σε αντιστοιχία με την εξ. (1.7) η μέση τιμή κάθε φυσικού μεγέθους θα δίνεται από τη σχέση

$$\vec{A}_a(\vec{r},t) = \frac{\int f_a(\vec{p},\vec{r},t)\, A_a(\vec{p})\, d\vec{p}}{n_a(\vec{r},t)} \qquad (3.43)$$

Για να βρει κανείς την συνάρτηση κατανομής πρέπει να λύσει την κινητική εξίσωση στην γενική της μορφή πράγμα που δεν είναι και τόσο εύκολο. Όσον αφορά όμως το πλάσμα μπορούν να γίνουν αρκετές προσεγγίσεις. Για παράδειγμα εάν υποθέσουμε ότι τα σωμάτια δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ των δηλαδή αν δεν έχουμε συγκρούσεις, οπότε η χρονική μεταβολή τηςς συνάρτησης κατανομής λόγω των συγκρούσεων είναι μηδέν, δηλ. $(\partial f/\partial t)_c = 0$, η κατανομή σ' ένα στοιχειώδες χώρο είναι συνάρτηση της διαφοράς του αριθμού σωματιδίων που εισέρχονται και εξέρχονται από την επιφάνεια που περικλύει αυτός ο χώρος. Εαν επιπρόσθετα δεν υπάρχουν ούτε πηγές ούτε καταβόθρες σωματιδίων τότε η ολική χρονική μεταβολή της συνάρτησης κατανομής μηδενίζεται κι έτσι έχουμε την εξίσωση της συνέχειας

$$\frac{df_a}{dt} = \frac{\partial f_a}{\partial t} + \frac{\partial f_a}{\partial \vec{p}} \cdot \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + \frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = 0 \qquad (3.44)$$

που με τις

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \vec{F}_a, \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \vec{v}$$

γίνεται

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}} + \vec{F}_a \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \vec{p}} = 0 \qquad (3.45)$$

είναι φανερό ότι $\vec{F}_a$ είναι η δύναμη που δρα πάνω σε κάθε σωμάτιο α. Στο πλάσμα η δύναμη αυτή είναι η δύναμη Lorentz που δρα πάνω σε κάθε φορτισμένο σωμάτιο

$$\vec{F}_a = q_a (\vec{E} + \frac{1}{c} (\vec{v} \times \vec{B}) \qquad (3.46)$$

Έτσι η εξίσωση (44) γίνεται

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}} + q_a (\vec{E} + \frac{1}{c} (\vec{v} \times \vec{B})) \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \vec{p}} = 0 \qquad (3.47)$$

όπου $\vec{E}(\vec{r},t)$ και $\vec{B}(\vec{r},t)$ είναι το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο στην θέση του σωματιδίου. Τα πεδία αυτά ορίζονται από τις εξισώσεις του Maxwell στις οποίες όμωςτώρα για τις πυκνότητες φορτίου q και ρεύματος $\vec{J}$ θα πρέπει να πάρουμε τις σχέσεις

$$\rho = \sum_a q_a \int f_a(\vec{p},\vec{r},t)\, d\vec{p}, \qquad \vec{J} = \sum_a q_a \int \vec{v}\, f_a(\vec{p},\vec{r},t)\, d\vec{p}$$

Η εξίσωση (3.47) λέγεται εξίσωση Vlasov και χρησιμοποιείται πολύ στην κινητική θεωρία λόγω της απλής μορφής της.

3.5.1 Εξισώσεις Boltzmann και Fokker-Plank

Η εξίσωση Vlasov προήλθε από την υπόθεση ότι δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ των σωματιδίων. Στην πραγματικότητα όμως υπάρχει αλληλεπίδραση, η σπουδαιότητα της οποίας εξαρτάται από την πυκνότητα του πλάσματος. Για μεγάλες πυκνότητες λοιπόν στην εξίσωση Vlasov πρέπει να προστεθούν και όροι που θα καλύπτουν τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματιδίων και θα περιγράφουν την αλλαγή της συνάρτησης κατανομής. Μια τέτοια αλληλεπίδραση για παράδειγμα είναι οι συγκρούσεις μεταξύ των σωματιδίων. Ο όρος σ' αυτή την περίπτωση λέγεται ολοκλήρωμα συγκρούσεων και η ενσωμάτωσή του στην εξίσωση Vlasov την μετατρέπει στην εξίσωση Boltzmann.

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \vec{v}\cdot\frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}} + e_a\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\,(\vec{v}\times\vec{B})\right)\cdot\frac{\partial f_a}{\partial \vec{p}} = \left(\frac{\partial f_a}{\partial t}\right)_c \qquad (3.48)$$

Το ολοκλήρωμα των συγκρούσεων $(\partial f_a/\partial t)_c$ περιγράφει την αλλαγή της συνάρτησης κατανομής λόγω της σύγκρουσης μεταξύ σωματιδίων. Σε πρώτη προσέγγιση συμπεριλαμβάνονται μόνο συγκρούσεις μεταξύ δύο σωματιδίων. Συγκρούσεις μεταξύ περισσοτέρων σωματιδίων αντιστοιχούν σε προσεγγίσεις μεγαλύτερης τάξης. Ειδικά για ημιουδέτερα πλάσματα οι συγκρούσεις μεταξύ περισσοτέρων σωματιδίων είναι ελάχιστες οπότε η πρώτη προσέγγιση είναι αρκετά καλη. Σ'αυτή την περίπτωση το ολοκλήρωμα των συγκρούσεων γίνεται

$$\left(\frac{\partial f_a}{\partial t}\right)_c = \sum_{\beta}\left(\frac{\partial f_a}{\partial t}\right)^{\alpha\beta} \qquad (3.49)$$

όπου α υποδηλώνει το είδος του σωματιδίου και β περιλαμβάνει όλα τα ζευγάρια σύγκρουσης. Στο πλάσμα είναι αρκετό να συμπεριλάβει κανείς μόνο ελαστικές συγκρούσεις, δηλαδή τέτοιες που διατηρούν την ενέργεια και δεν αλλάζουν την μορφή των σωματιδίων. Σ' αυτή την περίπτωση εάν $\vec{p}_\alpha$, $\vec{p}_\beta$ και $\vec{p}'_\alpha$, $\vec{p}'_\beta$ είναι αντίστοιχα οι αρχικές και οι τελικές ορμές των σωματιδίων α και β πριν και μετά την σύγκρουσή τους τότε η μεταβολή της συνάρτησης κατανομής λόγω των συγκρούσεων δίνεται από το ολοκλήρωμα ελαστικής σκέδασης του Boltzmann

$$\left(\frac{\partial f_a}{\partial t}\right)_c^{\alpha\beta} = -\int d\,\vec{p}_\beta\, d\,\vec{p}'_\alpha\, d\,\vec{p}'_\beta\, W\left(\vec{p}_\alpha, \vec{p}_\beta, \vec{p}'_\alpha, \vec{p}'_\beta\right)$$

$$\times[f_\alpha(\vec{p}_\alpha)\, f_\beta(\vec{p}_\beta) - f_\alpha(\vec{p}_\alpha)\, f_\beta(\vec{p}_\beta)] \qquad (3.50)$$

όπου W είναι ο συντελεστής διέλευσης από την κατάσταση α στην καταστάση β για ελαστική σκέδαση. Μπορεί να δειχτεί κβαντομηχανικά[3] ότι

$$\left(\frac{\partial f_a}{\partial t}\right)_c^{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial p_{\alpha i}} \int d\vec{p}_\beta \, I_{ij}^{\alpha\beta} (\vec{p}_\alpha , \vec{p}_\beta) \left[\frac{\partial f_a(\vec{p}_\alpha)}{\partial p_{\alpha j}} f_\beta (\vec{p}_\beta) - f_a(\vec{p}_\alpha) \frac{\partial f_\beta(\vec{p}_\beta)}{\partial p_{\beta j}} \right] \tag{3.51}$$

με

$$I_{ij}^{\alpha\beta} = (2\pi)^3 \frac{\pi}{2} \left(\frac{u^2\delta_{ij} - u_i u_j}{u^2} \right) \int k^2 d \, \vec{k} \, |U(k)|^2 \delta \, (\vec{k} \cdot \vec{u}) \tag{3.52}$$

όπου $u = \vec{v}_\alpha - \vec{v}_\beta$ είναι η σχετική ταχύτητα μεταξύ των δύο σωματιδίων και U(k) είναι ο μετασχηματισμός Fourier του δυναμικού αλληλεπίδρασης U(r). Με βάση τις (3.51) και (3.52) η εξίσωση Boltzmann γίνεται

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}} + \vec{F}_\alpha \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \vec{p}_a} = \frac{\partial}{\partial p_{ai}} \left(D_{ij} \frac{\partial f_a}{\partial p_{aj}} - A_i f_a \right) \tag{3.53}$$

όπου

$$D_{ij} = \sum_\beta \int d\vec{p}_\beta \; I_{ij}^{\alpha\beta} (\vec{p}_\alpha, \vec{p}_\beta) \, f_\beta(\vec{p}_\beta) \tag{3.54}$$

και

$$A_i = \sum_\beta \int d\vec{p}_\beta \; I_{ij}^{\alpha\beta}(\vec{p}_\alpha, \vec{p}_\beta) \frac{\partial f_\beta(\vec{p}_\beta)}{\partial p_{\beta j}} \tag{3.55}$$

είναι οι συντελεστές διάχυσης και τριβής στο χώρο της ορμής. Η εξίσωση (3.53) λέγεται και εξίσωση Fokker-Planck κύρια επειδή παρουσιάζει ομοιότητα με την πρωτότυπη εξίσωση Fokker-Planck που πρωτάθηκε για την περιγραφή σωματιδίων σε κίνηση Brown.

3.6. Σχέση μεταξύ κινητικής θεωρίας και Μαγνητοϋδροδυναμικής

Μια κινητική εξίσωση όπως η Fokker-Planck περιγράφει το πλάσμα σε μικροσκοπικό επίπεδο όπου η κατανομή των σωματιδίων είναι γνωστή. Αντίθετα η υδροδυναμική εξετάζει μακροσκοπικές ποσότητες όπως πυκνότητα, ταχύτητα, κ.λ.π. που είναι ροπές της συνάρτησης κατανομής ταχυτήτων. Θα πρέπει λοιπόν να είναι δυνατόν να εξάγουμε τα φυσικά αυτά μεγέθη κι από την κινητική θεωρία. Στην πραγματικότητα οι εξισώσεις της υδροδυναμικής είναι οι ροπές της εξίσωσης Boltzmann. Για παράδειγμα από την εξίσωση

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{V} \times \vec{B}\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial p} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c \tag{3.56}$$

ολοκληρώνοντας ως προς την ορμή $\vec{p} = m\vec{V}$ έχουμε την εξίσωση

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d\vec{p} + \int (\vec{V} \cdot \vec{\nabla} f) d\vec{p} + q\int \left(\vec{E} + \frac{\vec{V} \times \vec{B}}{c}\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} d\vec{p} = \int \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c d\vec{p} \tag{3.57}$$

από την οποία παίρνουμε την εξίσωση της συνέχειας

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\vec{u}) = 0$$

όπου u είναι η μέση ταχύτητα που ορίζεται

$$n\vec{u} = \int \vec{V} f \, d\vec{p} = n\vec{V} \tag{3.58}$$

Αυτό φαίνεται εύκολα παρατηρώντας ότι ο πρώτος όρος είναι;

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d\vec{p} = \frac{\partial}{\partial t} \int f \, d\vec{p} = \frac{\partial n}{\partial t} \tag{3.59}$$

Ο δεύτερος όρος είναι

$$\int \vec{V} \cdot \vec{\nabla} f \, d\vec{p} = \vec{\nabla} \cdot \int \vec{V} f \, d\vec{p} = \nabla \cdot (n \vec{V}) \equiv \nabla \cdot (n\vec{u}) \tag{3.60}$$

όπου σύμφωνα με τον ορισμό της η μέση ταχύτητα είναι η ταχύτητα του ρευστού. Ο όρος που περιλαμβάνει το ηλεκτρικό πεδίο

$$\int \vec{E} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} d\vec{p} = \int \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \cdot (f \, E) \, d\vec{p} = \int_s f \, \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \tag{3.61}$$

μηδενίζεται λόγω του ότι $f \to 0$ για $V \to \infty$. Και ο μαγνητικός όρος επίσης μηδενίζεται επειδή

$$\int \frac{(\vec{V} \times \vec{B})}{c} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} d\vec{p} = \int \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \cdot \left| \frac{f \, \vec{V} \times \vec{B}}{c} \right| d\vec{p} - \int f \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \cdot \frac{(\vec{V} \times \vec{B})}{c} d\vec{p} = 0 \tag{3.62}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα του δεύτερου μέρους μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα επιφάνειας και είναι μηδέν. Το δεύτερο είναι μηδέν επειδή το διάνυσμα

$(\vec{V} \times \vec{B})$ είναι $\perp$ στο διάνυσμα $\dfrac{\partial}{\partial \vec{p}} = \dfrac{\partial}{m \partial \vec{V}}$

Τελικά το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι μηδέν επειδή οι συγκρούσεις δεν αλλάζουν τον ολικό αριθμό των σωματιδίων.

Η δεύτερη ροπή της εξίσωσης Boltzmann περιγράφει την ροή της ορμής. Μπορούμε να την πάρουμε πολλαπλασιάζοντας την (3.56) με p και ολοκληρώνοντας ως προς dp. Μπορεί να δειχτεί (βλέπε άσκηση 3.6.6) ότι σ' αυτή την περίπτωση παίρνει κανείς την εξίσωση της μαγνητοϋδροδυναμικής

$$mn\left[\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{V}\right]=qn\left[\vec{E}+\frac{1}{c}\,\vec{V}\times\vec{B}\right]-\vec{\nabla}\cdot\vec{p}+\vec{P}_{ij}+F_{ij} \qquad (3.63)$$

όπου η ποσότητα P είναι ο τανυστής τάσης που συναντήσαμε στην παράγραφο (3.3) και F_{ij} είναι η αλλαγή της ορμής λόγω των συγκρούσεων (βλέπε άσκηση 3.6.7).

Είναι φανερό ότι η ροπή ενέργειας βρίσκεται πολλασιάζοντας την εξίσωση Boltzmann με ($\vec{p}\cdot\vec{p}$ /2m) και ολοκληρώνοντας. Σ' αυτή την περίπτωση θα πάρουμε την εξίσωση της ροής της θερμότητας στην οποία θα παρουσιαστεί ο συντελεστής αγωγιμότητας k όπως παρουσιάστηκε στην προηγούμενη περίπτωση ο τανυστής έντασης. Από την εξίσωση αυτή μπορούμε να βρούμε την καταστατική εξίσωση $p \approx \mu\gamma$ για $k = 1$.

3.7. Ασκήσεις

3.7.1. Να βρεθεί η πυκνότητα διαμαγνητικού ρεύματος που δημιουργείται στο πλάσμα όταν ολισθαίνει ⊥ στο μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$. (Στατικό + Ομογενές)

Λύση

Επειδή στην εξίσωση της (MHD) θα υπάρχει τώρα ένας όρος $\vec{\nabla}p$ τής πίεσης του ρευστού, θα υπάρχει και μία ολίσθηση συνδεδεμένη με αυτήν. Η ολίσθησή αυτή λέγεται διαμαγνητική και δίνεται από την σχέση

$$\vec{V}_D = -\frac{\vec{\nabla}p \times \vec{B}}{qnB^2}\, c \qquad (3.1)$$

Επειδή V_D εξαρτάται από το φορτίο. θα έχουμε για τα ιόντα.

$$\vec{V}_{Di} = -(\vec{\nabla}p_i \times \vec{B})/\, enB^2 \qquad (3.2)$$

και για τα ηλεκτρόνια

$$\vec{V}_{De} = (\vec{\nabla}p_e \times \vec{B})/\, enB^2 \qquad (3.3)$$

Η πυκνότητα ρεύματος δίνεται από την σχέση

$$j_D = n_i q_e \vec{V}_{Di} + n_i q_e \vec{V}_{De} = ne\,(\vec{V}_{Di} - \vec{V}_{De}) \qquad (3.4)$$

Αντικαθιστώντας στην (3.4) τις (3.2) και (3.3) βρίσκουμε

$$j_D = \frac{nec}{nB^2}\left(-\frac{\vec{\nabla} p_i x \vec{B}}{e} - \frac{\vec{\nabla} p_e x \vec{B}}{e}\right)$$

$$j_D = -c\,((\vec{\nabla} p_i + \vec{\nabla} p_e) \times \vec{B})/B^2 \qquad (3.5)$$

Αλλά $\vec{\nabla} p = kT\nabla n$ για αδιαβατική συμπίεση οπότε αντικαθιστώντας στην (3.5) έχουμε

$$j_D = -c\,\frac{(kT_i + kT_e)}{B^2}\,(\vec{\nabla} n x \vec{B}) =$$

$$= \frac{(kT_i + kT_e)}{B^2}\,(\vec{B} \times \vec{\nabla} n)\,c$$

3.7.2. Ένα κυλινδρικό πλάσμα με αξωνική συμμετρία βρίσκεται κάτω από την επίδραση του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ ($\vec{B} \parallel Z$) και έχει την κατανομή

$$n(r) = n_0 \exp(-r^2/a^2)$$

$$n_i = n_e = n_0 \exp(e\Phi/kT_e) \qquad (3.1)$$

α) Να δειχτεί ότι οι ταχύτητες ολίσθησης $\vec{U}_e$ και $\vec{U}_{De}$ είναι ίσες και αντίθετες.

β) Να δειχθεί ότι περιστρέφεται σαν στερεό σώμα.

<u>Λύση</u>

Οι ταχύτητες ολίσθησης $\vec{U}_e$ και $\vec{U}_D$ είναι

$$\vec{V}_E = c\,\frac{(\vec{E}+\vec{B})}{B^2} \quad ; \quad \vec{V}_D = -c\,(\vec{\nabla}p + \vec{B}) \qquad (3.2)$$

Από την εξ. (3.1) έχουμε ότι

$$n_r = n_i = n_e \qquad (3.3)$$

επομένως

$$\exp(-r^2/a^2) = \exp(e\Phi/kT_e) \qquad (3.4)$$

ή

$$\Phi = -\frac{kT_e}{e}\left(\frac{r}{a}\right)^2 \qquad (3.5)$$

οπότε

$$\vec{E} = -\hat{r}\,\frac{d\Phi}{dr} = 2\hat{r}\,\frac{kT_e}{e}\,\frac{r}{a^2} \qquad (3.6)$$

Αντικαθιστώντας την (3.6) στις (3.2) βρίσκουμε

$$\vec{V}_E = c\,\frac{(\vec{E}x\vec{B})}{B^2} = 2c\,\frac{kT_e}{ea^2}\,\frac{\vec{r}x\vec{B})}{B^2} \qquad (3.7)$$

$$\vec{V}_D = -c\,\frac{(\vec{\nabla}px\vec{B})}{qnB^2} = -c\,\frac{(kT_e\,\vec{\nabla}nx\vec{B})}{qnB^2} = -\frac{ckT_e}{q}\,\frac{(\vec{\nabla}nx\vec{B})}{nB^2} \qquad (3.8)$$

Αλλά από την εξ. (3.1) έχουμε

$$(\nabla n/n) = -(2/a^2)\,\vec{r} \qquad (3.9)$$

οπότε η (3.8) γίνεται

$$\vec{V}_{DE} = -\frac{2ckT_e}{ea^2}\,\frac{(\vec{r}\times\vec{B})}{B^2} = -\vec{V}_E \qquad (3.10)$$

β) Το πλάσμα έχει τρεις ταχύτητες. Την κυκλική κίνηση Larmor $\vec{V}_\perp$ με γωνιακή ταχύτητα ω_c και ακτίνα r_L και τις ολισθήσεις $\vec{V}_{De}$ και $\vec{V}_E$. Η κινητική του ενέργεια για το ένα είδος σωματιδίων, δηλαδή για τα ηλεκτρόνια που εξετάζουμε εδώ δίνεται:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i V_i^2 = \frac{1}{2}\, m_i \vec{V}_i \cdot (\vec{\omega}_c \times \vec{r}_i) \qquad (3.1)$$

όπου V_i είναι η ταχύτητα σχετικά με ένα σταθερό σημείο. Επομένως για τις τρεις ταχύτητες θα έχουμε

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{V}_\perp \cdot (\vec{\omega}_c \times \vec{r}_i) + \frac{1}{2}\, m_i \vec{V}_{DE} \cdot (\vec{\omega}_{DE} \times \vec{r}_{DE})$$

$$+ \frac{1}{2}\, m_i \vec{V}_E \cdot (\vec{\omega}_E \times \vec{r}_E) \qquad (3.2)$$

αλλά επειδή $\vec{V}_{De} = -\vec{V}_E$

$$T = \sum_1 \frac{1}{2} m_i \vec{V}_\perp \cdot (\vec{\omega}_c \times \vec{r}_L) = \frac{\omega_c}{2} \cdot \sum_1 m_i (\vec{r}_L \times \vec{V}_\perp) = \frac{\omega_c \cdot \vec{L}}{2} \qquad (3.3)$$

όπου L είναι η γωνιακή στροφορμή γύρω από τον άξωνα Z. Αλλά επειδή L =ω·I όπου I είναι η ροπή αδράνειας η εξ. (3.3) γίνεται

$$T = \omega_c \cdot I \cdot \omega_c = {}^1/_2\, I\, \omega^2_c$$

που είναι η κινητική ενέργεια ενός στερεού σώματος το οποίο περιστρέφεται γύρω από ένα σημείο. Η ροπή αδράνειας του I είναι:

$$I = \frac{1}{V} \sum_i m_i \rho_i^2 = \frac{m}{V} \int \rho^3 \, d_\rho \, d_\varphi \, d_z$$

$$I = \frac{m}{\pi \rho^2 h} \frac{\rho^4}{4} 2\pi 2h = m \rho^2$$

3.7.3. Χρησιμοποιώντας το μοντέλο των ανεξαρτήτων σωματιδίων να βρεθεί η μέση δύναμη

$$\vec{F}_{\alpha v} = - m\,(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\, V + {}^e/_c\, [\vec{v} \times \vec{B}]$$

που δρα στα ηλεκτρόνια και στα ιόντα τα οποία βρίσκονται κάτω από την επίδραση ενός ανομοιογενούς ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}(\vec{r},t)$ $=\vec{E}(r)\sin\omega_0 t$ υψηλής συχνότητας.

<u>Λύση</u>

Υποθέτουμε ότι υπάρχει εξωτερικό μαγνητικό πεδίο B_0. Τότε η εξίσωση της κίνησης για τα ηλεκτρόνια γίνεται

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla}) = \frac{\rho E(\vec{r},t)}{m} + \frac{\rho}{mc}\left[\vec{v}\times(\vec{B}_0 + \vec{B}(\vec{r},t))\right] \qquad (3.1)$$

Μας δίνεται ότι

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r}) \sin \omega_0 t$$

(3.2)

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}(\vec{r}) \cos \omega_0 t$$

Από τις εξισώσεις του Maxwell έχουμε

$$\frac{1}{c}\dot{\vec{B}}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r}) \rightarrow \vec{B}(\vec{r}) - \frac{c}{\omega_0}\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r}) \qquad (3.3)$$

Για ασθενή πεδία $\vec{E}(\vec{r},t)$ και $\vec{B}(\vec{r},t)$ μπορούμε να αναπτύξουμε την ταχύτητα υ γύρω από την υ_0, οπότε η εξίσωση (3.1) γίνεται

$$m^{d\upsilon_0}/_{dt} = e\vec{E}(\vec{r},t) \sin c\, \omega_0 t + {}^{e}/_{c}(\vec{\upsilon}_0 \times \vec{B}_0) \qquad (3.4)$$

α) Εάν το εξωτερικό πεδίο είναι μηδέν δηλαδή εαν

$$B_0 = 0$$

τότε

$$m^{d\upsilon_0}/_{dt} = e\vec{E}(\vec{r},t) \operatorname{sinc} \omega_0 t \quad \text{και}$$

(3.5)

$$\upsilon_0 = -\left({}^{e\vec{E}(\vec{r},t)}/_{m\omega_0}\right) \cos \omega_0 t$$

Παράλληλα η μέση δύναμη γίνεται

$$\vec{F}_{\alpha v} = -m\,(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\nabla})\,\vec{\nabla}_0 + {}^{e}/_{c}(\vec{\upsilon}_0 \times \vec{B}_0) \qquad (3.6)$$

Από την γεωμετρία διανυσμάτων έχουμε ότι

$$(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} = (A_x \frac{d}{dx} + A_y \frac{d}{dy} \ldots)\,(B_x + B_y + B_z) \tag{3.7}$$

και

$$\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = -\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} - (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} \tag{3.8}$$

Αντικαθιστώντας την (3.3) και την (3.5) στην (3.6) και χρησιμοποιώντας την (3.7) και την (3.8) βρίσκουμε ότι

$$\bar{F}_{\alpha\nu} = -\frac{e^2}{2m\omega_0^2}\nabla E^2(r)\cos^2\omega_0 = \frac{-e^2}{2m\omega_0^2}\nabla E^2(r) \tag{3.9}$$

Άρα η δύναμη $\bar{F}_{\alpha\nu}$ προσπαθεί να βγάλει τα ηλεκτρόνια έξω από το πεδίο υψηλής συχνότητας.

β) Εάν το $B_0 \neq 0$ τότε μπορεί να υπάρξει περίπτωση όπου τα ηλεκτρόνια απορροφούνται από το πεδίο.

γ) Είναι φανερό ότι η μέση δύναμη που δρα στα ιόντα είναι κατά m/M μικρότερη από αυτή που δρα στα ηλεκτρόνια.

3.7.4. Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα Boltzmann για ελαστικές συγκρούσεις μηδενίζεται όταν οι συναρτήσεις κατανομής f_α και f_β είναι κατανομές Maxwell για τις οποίες ισχύει $T_\alpha = T_\beta = T$.

Λύση

Από την εξίσωση (3.50) έχουμε για το ολοκλήρωμα των συγκρούσεων

$$\left(\frac{\partial f_a}{\partial t}\right)^{\alpha\beta} = \int dp_\beta \ dp'_\alpha \ dp'_\beta \ W\left(\vec{P}_\alpha, \vec{P}_\beta, \vec{P}'_\alpha, \vec{P}'_\beta\right)$$

$$[f_\alpha(p_\alpha)\, f_\beta(p_\beta) - f_\alpha(p'_\alpha)\, f_\beta(p'_\beta)] \qquad (3.1)$$

$$g(\alpha,\beta,\alpha',\beta')$$

Επίσης ξέρουμε ότι

$$f_i\,(p_i) = \frac{N_i}{2\pi m_i T_i^{\;3/2}} \ \exp\left(-\ \frac{f_i^2}{kT_i}\right) \qquad (3.2)$$

Επειδή $T_\alpha = T_\beta$. Έχουμε

$$f_\alpha\,(p_\alpha) f_\beta\,(p_\beta) = \frac{N_\alpha N_\beta}{(2\pi T)^3\,(m_\alpha m_\beta)^{3/2}} \ \exp\ -\left(\frac{p_\alpha}{2m_\alpha T} + \frac{p_\beta^2}{2m_\beta T}\right)$$

και όμοια

$$f_\alpha\,(p'_\alpha) f_\beta\,(p'_\beta) = \frac{N_\alpha N_\beta}{(2\pi T^3)\,(m_\alpha m_\beta)^{3/2}} \ \exp\left[-\ \frac{p'_\alpha}{2m_\alpha T} + \frac{p'^{\,2}_\beta}{2m_\beta T}\right]$$

Αλλά επειδή για την κινητική ενέργεια πριν και μετά την σύγκρουση ισχύει

$$\frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{p_\beta^2}{2m_\beta} = \frac{p'^2_\alpha}{2m_\alpha} + \frac{p'^2_\beta}{2m_\beta}$$

έχουμε

$$g(\alpha,\beta,\alpha',\beta') = 0$$

και

$$\left(\frac{\partial f_a}{\partial t}\right)_c^{\alpha\beta} = 0$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΚΥΜΑΤΑ ΣΤΟ ΠΛΑΣΜΑ

4.1. Εισαγωγή

Είναι δυνατόν με εξωτερική παρέμβαση να προκληθεί μια διαταραχή στο πλάσμα ενώ βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας. Κάτω από ορισμένες συνθήκες η διαταραχή αυτή μπορεί να διαδοθεί περιοδικά και το πλάσμα ν' αποχτήσει μια περιοδική κίνηση. Μια τέτοια κίνηση μπορεί ν' αναλυθεί κατά Fourier σε απλά ημιτονοειδή κύματα διαφορετικής συχνότητας ω και μήκους κύματος λ.

Ωστόσο, η περιγραφή ενός τέτοιου φαινόμενου είναι γενικά πολύπλοκη. Όταν λέμε ότι ένα κύμα διαδίδεται στο πλάσμα δεν αρκεί πάντα να το θεωρούμε σαν ρευστό ξεχνώντας έτσι την ταυτότητα των σωματιδίων του. Η επιλογή του κατάλληλου μοντέλου από αυτά που εκτέθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο για την περιγραφή ενός κύματος, εκτός από τις κρίσιμες παραμέτρους της πυκνότητας και θερμοκρασίας έχει να κάνει επίσης αποφασιστικά με τη συχνότητα ω. Για να κάνουμε τη μελέτη πιο εύκολη θα θεωρήσουμε ότι το πλάσμα είναι ομογενές. Αν λοιπόν ενδιαφερθούμε για χαμηλής συχνότητας κύματα σ' ένα κρύο ομογενές πλάσμα, ίσως διαισθητικά θα περιμέναμε ότι τέτοια κύματα έχουν να κάνουν με κινήσεις του πλάσματος σαν σύνολο, δηλαδή με τα ηλεκτρόνια και τα ιόντα να κινούνται μαζί έτσι ώστε να μην προκύπτει ξεχώρισμα των φορτίων. Με άλλα λόγια στην περίπτωση αυτή το μαγνητοϋδροδυναμικό (MHD) μοντέλο είναι το πιο κατάλληλο. Για μεγάλες όμως συχνότητες ενώ τα ηλεκτρόνια δεν έχουν πρόβλημα να ταλαντωθούν τα βαριά ιόντα λόγω αδράνειας παραμένουν σχεδόν ακίνητα. Η διαφορετική αυτή συμπεριφορά δεν μπορεί να περιγραφεί σωστά στα πλαίσια του MHD μοντέλου αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί το υδροδυναμικό μοντέλο των δυο ρευστών.

Τέλος για τη μελέτη κυμάτων σε πλάσματα υψηλών θερμοκρασιών κανένα μοντέλο ρευστού δεν είναι κατάλληλο και είναι απαραίτητη η χρησιμοποίηση της κινητικής θεωρίας.

4.2. Κύματα στα πλαίσια του MHD μοντέλου

4.2.1. Η μέθοδος της γραμμοποίησης

Θα θεωρήσουμε ένα ομογενές πλάσμα το οποίο επιπλέον θα υποθέσουμε ότι είναι τέλεια αγώγιμο και συμπεριφέρεται αδιαβατικά. Κάτω από αυτές τις συνθήκες οι εξισώσεις της μαγνητοϋδροδυναμικής αν αμελήσουμε τις βαρυτικές δυνάμεις γράφονται

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\mu\,\vec{v}) = 0 \qquad (4.1)$$

$$\mu\,\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\,\vec{\nabla}p + \frac{1}{c}\,\vec{J}\times\vec{B} \qquad (4.2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\mu^{\gamma}}\right) = 0 \qquad (4.3)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\,\vec{J} \qquad (4.4)$$

$$\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{V} \times \vec{B}) = 0 \tag{4.5}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{4.6}$$

Η εξίσωση (4.3) εκφράζει την αδιαβατική συμπεριφορά του ρευστού και $d/dt = (\partial/\partial t) + \vec{V}\cdot\vec{\nabla}$ είναι η ολική παράγωγος. Αντικαθιστώντας στην (4.6) το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ από την (4.5) προκύπτει για το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{V} \times \vec{B}) \tag{4.7}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ενώ το πλάσμα βρίσκεται σε κατάσταση στατικής ισορροπίαςς όπου τα διάφορα μεγέθη χαρακτηρίζονται σαν g_0 (π.χ. μ_0, B_0, P_0 κ.λπ.), συμβαίνει μια μικρή μετατόπιση (διαταραχή) $\vec{\xi}(\vec{r},t)$ που θα είναι υπεύθυνη για το κυματικό φαινόμενο. Η διαταραχή αυτή προκαλεί μια αντίστοιχη διαταραχή g_1 στα μεγέθη g_0 και η νέα κατάσταση περιγράφεται από τα μεγέθη $g = g_0 + g_1$ (π.χ. $\mu = \mu_0 + \mu_1$, $B = B_0 + B_1$ κ.λπ.). Όπου η διαταραχή g_1 είναι αρκετά μικρότερη του g_0. Όταν λέμε αρκετά μικρότερη εννοούμε ότι όροι που περιέχουν γινόμενα διαταραχών (π.χ. V_1B_1) είναι αμελητέοι. Αυτή είναι η βασική ιδέα της μεθόδου της γραμμοποίησης.

Έτσι η εξίσωση της συνέχειας (4.1) που περιγράφει το διαταραγμένο πλάσμα γράφεται

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mu_o+\mu_1) + \vec{\nabla}\cdot\left[(\mu_o+\mu_1)\vec{V}_1)\right] = 0 \tag{4.8}$$

Ας σημειώσουμε ότι $V_0 = 0$, εφόσον έχουμε υποθέσει κατάσταση στατικής ισορροπίας. Εφόσον οι ποσότητες g_0 χαρακτηρίζουν μια κατάσταση ισορροπίας ικανοποιούν οι ίδιες την εξίσωση συνέχειας και επομένως (4.8) γίνεται

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu_1 + \vec{\nabla}\cdot(\mu_o V_1) = 0 \tag{4.9}$$

Η (4.9) είναι η γραμμοποιημένη εξίσωση συνέχειας. Όμοια μπορεί να προκύψουν οι αντίστοιχες γραμμοποιημένες εξισώσεις των (4.2), (4.3) και (4.7)

$$\mu_o \frac{\partial V_1}{\partial t} + \vec{\nabla} p_1 = \frac{1}{c}\left[\vec{J}_o \times \vec{B}_1 + \vec{J}_1 \times \vec{B}_o\right] \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + (\vec{V}_1\cdot\vec{\nabla})p_o + \gamma p_o \vec{\nabla}\cdot\vec{V}_1 = 0 \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{V}_1 \times \vec{B}_o) \tag{4.12}$$

Αφού $\vec{\xi}(\vec{r},t)$ είναι η μετατόπιση του πλάσματος από την κατάσταση ισορροπίας, ισχύει

$$\vec{V}_1 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_1\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\xi} \approx \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \tag{4.13}$$

οπότε από τις εξισώσεις (4.9), (4.11) και (4.12) παίρνουμε αντίστοιχα

$$\mu_1 = -\vec{\nabla}\cdot(\mu\,\vec{\xi}) \tag{4.14}$$

$$p_1 = -(\vec{\xi}\cdot\vec{\nabla})\,p_o - \gamma\,p_o\,\vec{\nabla}\cdot\vec{\xi} \tag{4.15}$$

$$\vec{B}_1 = \vec{\nabla} \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_o) \qquad (4.16)$$

Αντικαθιστώντας τις (4.4), (4.14) και (4.15) στην εξ. (4.10) προκύπτει

$$\mu_o \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = \vec{\nabla}(\vec{\xi}\cdot\vec{\nabla} P_o + \gamma P_o \vec{\nabla}\cdot\vec{\xi}) + \frac{1}{4\pi}(\vec{\nabla}\times\vec{B}_o)\times\vec{B}_1 + \frac{1}{4\pi}(\vec{\nabla}\times\vec{B}_1)\times\vec{B}_o \qquad (4.17)$$

Αν η διαταραχή $\vec{\xi}(\vec{r},t)$ είναι της μορφής $\vec{\xi}_r\, e^{-i\omega t}$ η εξίσωση (4.17) σε συνδυασμό με την (4.16) γίνεται μια εξίσωση ως προς $\vec{\xi}_r$ και κάτω από κατάλληλες συνοριακές συνθήκες, δίνει τις δυνατές τιμές του ω^2 (πρόβλημα ιδιοτιμής). Η διαδικασία που ακολουθήσαμε γενικά χρησιμοποιείται τόσο για τη μελέτη της διάδοσης κυμάτων στο πλάσμα όσο και για τη μελέτη ασταθειών.

Όμως, ας σημειώσουμε εδώ τη βασική διαφορά κυμάτων και ασταθειών. Τα κύματα διεγείρονται από εξωτερικά μέσα ενώ οι αστάθειες όπως θα δούμε και στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζονται αυθόρμητα.

4.2.2. Κύματα Alfven

Υποθέτουμε ότι στην κατάσταση ισορροπίας η πίεση P_0 και το μαγνητικό πεδίο B_0 είναι ομογενή. Τότε η εξίσωση (4.17) παίρνει την απλούστερη μορφή

$$\mu_o \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = \vec{\nabla}(\gamma P_o \vec{\nabla}\cdot\vec{\xi}) + \frac{1}{4\pi}(\vec{\nabla}\times\vec{B}_1)\times\vec{B}_o \qquad (4.18)$$

όπου η διαταραχή $\vec{B}_1$ δίνεται πάντα από την εξίσωση (4.16).

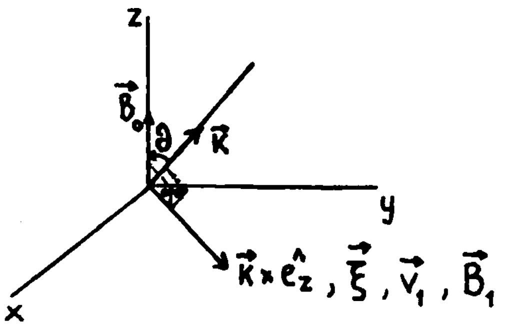
Εφόσον το πλάσμα είναι ομογενές και θα ενδιαφερθούμε για κύματα μικρού πλάτους υποθέτουμε ότι όλες οι διαταραχές έχουν τη μορφή "επίπεδων κυμάτων", $g_1 = \tilde{g}_1 \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ οπότε μια τυχαία διαταραχή μπορεί να θεωρηθεί σαν υπέρθεσή τους (στα επόμενα θα παραλείπουμε την ~).

Τότε η δράση των τελεστών $\vec{\nabla}$ και $\partial/\partial t$ που μπαίνουν στις εξισώσεις μας γίνεται $\vec{\nabla} g_1 = i\vec{k} g_1$ και $(\partial/\partial t) g_1 = -i\omega g_1$. Έτσι οι τελεστές αυτοί απλά αντικαθίστανται με $i\vec{k}$ και $-i\omega$ αντίστοιχα και οι εξισώσεις (4.16) και (4.18) γίνονται

$$\vec{B}_1 = i\vec{k} \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \tag{4.20}$$

$$-\omega^2 \mu_o \vec{\xi} = -\vec{k}\gamma P_o(\vec{k}\cdot\vec{\xi}) + \frac{1}{4\pi}(i\vec{k} \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_o \tag{4.21}$$

Θεωρούμε ότι το μαγνητικό πεδίο B_0 βρίσκεται στον άξονα z και σχηματίζει με το κύμα, το άνυσμα $\vec{k}$, γωνία θ (σχήμα (4.1)).



Σχήμα 1.4.
Κύμα Alfven.

Παίρνοντας τα εσωτερικά γινόμενα της εξίσωσης (4.21) με τα διανύσματα $\vec{k}$, $\hat{e}_z$ και $\vec{k} \times \hat{e}_z$ αντίστοιχα προκύπτουν (άσκηση 4.7.2) οι τρεις παρακάτω εξισώσεις

$$\omega^2 (\vec{\xi}\cdot\vec{k}) = V_S^2 k^2 (\vec{\xi}\cdot\vec{k}) - V_\alpha \xi_z{}^3 \cos\theta + V_A{}^2 k^2 (\vec{\xi}\cdot\vec{k}) \tag{4.23}$$

$$\omega^2 \xi_z = V_S^2 k \cos\theta\, (\vec{\xi}\cdot\vec{k}) \qquad (\xi_z = \vec{\xi}\cdot\hat{e}_z) \tag{4.24}$$

$$(\omega^2 - V_A{}^2 k^2 \cos\theta)\,(\vec{k} \times \hat{e}_z)\cdot\vec{\xi} = 0 \qquad (k = |\vec{k}|) \tag{4.25}$$

όπου $V_S{}^2 = \gamma\, P_0/\mu_0$ είναι η ταχύτητα των συνηθισμένων ηχητικών κυμάτων στον αέρα (βλέπε άσκηση (4.7.1)) και $V_A{}^2 = B_0{}^2/4\pi\mu_0$. Από τις τρεις αυτές εξισώσεις, οι οποίες γενικά είναι ανεξάρτητες, μπορούμε να πάρουμε τη σχέση διασποράς $\omega = f(k)$ για τα διάφορα είδη κυμάτων (wave modes). Η πιο απλή περίπτωση προκύπτει από την εξίσωση (4.25) με

$$\omega^2 = V_A{}^2 k^2 \cos^2\theta = V_A{}^2 k^2{}_z \tag{4.26}$$

$$V_A = \frac{B_0}{(4\pi\mu)^{1/2}} \tag{4.27}$$

Αυτό είναι το κύμα Alfven. Σ' αυτό η μετατόπιση $\vec{\xi}$ βρίσκεται πάνω στη διεύθυνση $\vec{k} \times \hat{e}_z$ και επομένως η $\vec{\xi}$ θα είναι κάθετη τόσο στο αδιατάραχτο πεδίο $\vec{B}_0$ όσο και στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Η σταθερή ταχύτητα Alfven V_A ισούται με τη μέγιστη φασική ταχύτητα όταν το κύμα ταξιδεύει παράλληλα στο αδιατάραχτο μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_0$ (θ=0). Στην περίπτωση αυτή και η ταχύτητα ροής της ενέργειας (ομαδική ταχύτητα), $V_g = d\omega/dk$ γίνεται μέγιστη, γι' αυτό συνήθως λέγοντας κύμα Alfven εννοούμε κύμα διαδιδόμενο παράλληλα στο αδιατάραχτο μαγνητικό πεδίο.

Για την περιγραφή των κυμάτων Alfven χρησιμοποιήσαμε μόνο την εξίσωση (4.25). Ας σημειώσουμε, όμως, ότι οι εξισώσεις (4.23) και (4.24), γενικά, για μη μηδενικά ξ_z και $\vec{k}\cdot\vec{\xi}$ δίνουν νέα είδη κυμάτων γνωστά σαν μαγνητοηχητικά κύματα. (Βλέπε άσκηση (4.7.2) για την παραγωγή της εξίσωσης διασποράς των κυμάτων αυτών).

4.3. Ονοματολογία κυμάτων στο πλάσμα

Στην περιγραφή ενός κύματος υπεισέρχονται πολλά διανυσματικά μεγέθη που γενικά είναι χρονικά μεταβαλλόμενα. Από τα πιο σημαντικά είναι τα αδιατάραχτα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία $\vec{E}_0$ και $\vec{B}_0$, οι διαταραχές τους $\vec{E}_1$ και $\vec{B}_1$ και ο κυματαριθμός $\vec{k}$ που χαρακτηρίζει τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Σ' ένα κύμα γενικά οι διευθύνσεις των παραπάνω διανυσμάτων μπορούν να σχηματίζουν τυχαίες γωνίες μεταξύ τους αρκεί να ικανοποιούνται οι αρμόδιες εξισώσεις για το πλάσμα. Ωστόσο, για χάρη απλότητας, ακριβολογίας και μεθοδικότητας μπορεί να ξεχωριστούν ορισμένοι βασικοί τύποι κυμάτων. Έτσι με τους όρους κάθετα και παράλληλα εννοούμε κύματα τέτοια ώστε το διάνυσμα διάδοσης του $\vec{k}$ είναι κάθετο ή παράλληλο αντίστοιχα με το αδιατάραχτο μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_0$. Τα κύματα είναι εγκάρσια ή διαμήκη όσον αφορά τη διεύθυνση του $\vec{k}$ σχετικά με τη διαταραχή του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}_1$.

Τέλος αν η διαταραχή του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}_1$ είναι μηδενική χαρακτηρίζονται σαν ηλεκτροστατικά, αλλοιώς σαν ηλεκτρομαγνητικά. Οι δυο τελευταίες κατηγορίες όρων συνδέονται με την εξίσωση του Maxwell για τις διαταραχές

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_1 = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \tag{4.28}$$

Η εξ. (4.28) για κύματα του τύπου της εξίσωσης (4.19) γίνεται

$$\vec{k} \times \vec{E}_1 = (c/\omega)\,\vec{B}_1 \tag{4.29}$$

Αν, λοιπόν, ένα κύμα είναι διαμήκες, ο όρος $\vec{k} \times \vec{E}_1$ μηδενίζεται και το κύμα είναι και ηλεκτροστατικό. Αν το κύμα είναι εγκάρσιο, η διαταραχή $\vec{B}_1$ είναι μη μηδενική και το κύμα είναι επίσης ηλεκτρομαγνητικό. Για παράδειγμα το κύμα Alfven για $\theta = 0$ (βλέπε σχήμα (4.1)) είναι ένα παράλληλο ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Αν το διάνυσμα $\vec{k}$ σχηματίζει τυχαίες γωνίες με τα πεδία $\vec{B}_0$ ή και $\vec{E}_1$ τότε μπορεί να εκφραστεί σαν επαλληλία των παραπάνω κυμάτων.

4.4. Κύματα στα πλαίσια του μοντέλου των δύο ρευστών

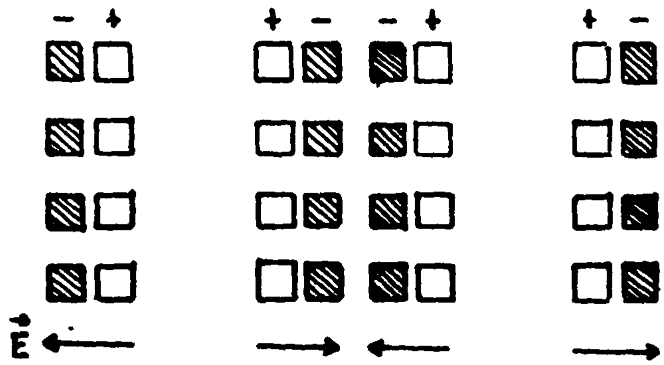
Μέχρι τώρα μελετήσαμε χαμηλής συχνότητας κύματα που διαδίδονται σε κρύο πλάσμα. Σε υψηλές συχνότητες, δεν είναι σωστό ν' αγνοηθεί η ταυτότητα των σωματίδιων που απαρτίζουν το πλάσμα και επομένως για τη μελέτη υψήσυχνων κυμάτων θα πρέπει να επικαλεστούμε ένα πιο βασικό μοντέλο. Αυτό είναι το μοντέλο των δυο ρευστών που μπορεί να ξεχωρίζει τη συμπεριφορά των ηλεκτρονίων και των ιόντων. Φυσικά τα κύματα της προηγούμενης παραγράφου μπορούν να περιγραφούν εξίσου καλά στα πλαίσια του μοντέλου αυτού και μάλιστα έχει κανείς μια καλύτερη φυσική εικόνα του τι συμβαίνει. Είναι επίσης ευνόητο ότι σε υψήσυχνα φαινόμενα η υπόθεση της ιδανικότητας των ρευστών είναι πιο ακριβής (οι συγκρούσεις δεν παίζουν κανένα σημαντικό ρόλο). Θα εξακολουθήσουμε να μελετάμε γραμμικά κύματα και επομένως θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο της γραμμοποίησης. Το πρόβλημα είναι πιο πολύπλοκο αφού έχουμε να χειριστούμε το σύνολο των εξισώσεων (4.5)-(4.10) του τρίτου κεφάλαιου για τα ηλεκτρόνια (j = e) και για τα ιόντα (j = i). Έτσι μια γενική αντιμετώπιση του προβλήματος όπως στην προηγούμενη παράγραφο ίσως θα έμπλεκε τον αναγνώστη και θ' απορροφούσε την προσοχή του στο μαθηματικό μέρος σε βάρος της φυσικής. Γι' αυτό δεν θα την ακολουθήσουμε αλλά θα προσαρμόζουμε κάθε φορά τις εξισώσεις στο συγκεκριμένο τύπο κυμάτων.

4.4.1. Ταλαντώσεις πλάσματος

Στην πραγματικότητα πρόκειτια για ηλεκτρονικές ταλαντώσεις και θ' αναπαράγουμε τη συχνότητα ταλάντωσης της άσκησης (1.8.6).

Ας υποθέσουμε ότι ένα ομοιόμορφο, ουδέτερο πλάσμα ισορροπεί. Λέγοντας ουδέτερο εννοούμε ότι δεν έχουμε καμιά εμφάνιση, έστω και τοπική, πυκνότητας φορτίου και επομένως τ' αδιατάραχτα πεδία $\vec{E}_0$ και $\vec{B}_0$ και οι παράγωγές τους είναι μηδέν (βλέπε εξισώσεις (3.5) - (3.10)).

Έστω ότι συμβαίνει μια μετατόπιση των ηλεκτρονίων που έχει σαν επακόλουθο την εμφάνιση ενός ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}_1$ μεταξύ αυτών και των βαριών ιόντων που θέλουν έτσι να τα "επαναφέρουν στην τάξη". Έτσι έχουμε την απαρχή δημιουργίας μιας ταλάντωσης που τα ιόντα δεν μπορούν να παρακολουθήσουν και παραμένουν στάσιμα (σχήμα (4.2)). Για χάρη απλότητας ας υποθέσουμε ότι η διαταραχή είναι μονοδιάστατη και συμβαίνει κατά τον άξονα π.χ. x ενός καρτεσιανού συστήματος.



Σχήμα 2.
Μηχανισμός ταλαντώσεων πλάσματος.

Επίσης ότι δεν υπάρχει διαταραχή μαγνητικού πεδίου ($B_1 = 0$), οι θερμικές κινήσεις είναι αμελητέες ($kT = 0$) και ότι το πλάσμα εκτείνεται απεριόριστα. Η διαταραχή $\vec{E}_1$ ικανοποιεί τη γραμμοποιημένη εξίσωση Poisson

$$\nabla\cdot\vec{E}_1 = -4\pi n_{e1}\, e \tag{4.30}$$

($n_{i1} = 0$ αφού τα ιόντα παραμένουν ακίνητα).

Επίσης οι γραμμοποιημένες εξισώσεις συνέχειας και κίνησης γράφονται

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_o\, \nabla\cdot \vec{v}_{e1} = 0 \tag{4.31}$$

$$(n_{i0} = n_{e0} = n_0)$$

$$m\,\frac{\partial \vec{v}_{e1}}{\partial t} = -\, e\, \vec{E}_1 \tag{4.32}$$

Αν, όπως και πριν, υποθέσουμε διαταραχή επίπεδων κυμάτων (εξ. (19)) οι σχέσεις (4.30)-(4.32) παίρνουν τη μορφή

$$i\, k\, E_1 = -\, 4\pi e\, n_{e1} \tag{4.30a}$$

$$-i\,\omega\, n_{e1} + n_0\, i\, k\, V_{e1} = 0 \qquad (4.31a)$$

$$-i\, m\, \omega\, V_{e1} = -\,e\, E_1 \qquad (4.32a)$$

Αν από τις σχέσεις (4.30α) - (4.32α) απαλοιφθούν τα n_{e1}, E_1 και V_{e1} προκύπτει η συχνότητα ταλάντωσης των ηλεκτρονίων, γνωστή σαν συχνότητα πλάσματος

$$\omega_p = \left(\frac{4\pi\, n_o\, e^2}{m}\right)^{1/2} \quad \text{(rad/sec)} \qquad (4.33)$$

Για τις τιμές που μπορεί να πάρει η συχνότητα πλάσματος, ενδεικτικά μπορεί κανένας να υπολογίσει ότι για $n_0 = 10^{12}\ \mathrm{cm}^{-3}$ είναι περίπου ίση με τη συχνότητα κυκλοτρονίου, ω_c (βλέπε εξ. (2.4)) για $B \approx 3.5$ kG. Η συχνότητα του πλάσματος είναι ανεξάρτητη του k, πράγμα που περιμέναμε, και επομένως δεν έχουμε καμιά διαδοση ενέργειας.

4.4.2. Ηλεκτρονικά κύματα

Εντούτοις, όπως πρόβλεψαν θεωρητικά οι Bohm και Gross[7] το 1949 και επιβεβαίωσαν πρώτοι πειραματικά οι Looney και Brown[8] το 1954, ενέργεια μπορεί να διαδοθεί. Και η ταλάντωση του πλάσματος που αναλύσαμε πριν μπορεί να ονομαστεί κύμα. Η διεργασία που συνεισφέρει στη δημιουργία τέτοιων κυμάτων είναι η θερμική κίνηση που αγνοήσαμε τελείως στην προηγούμενη παράγραφο. Αυτή λαβαίνεται υπόψη αν κρατήσουμε το δεύτερο μέλος της εξίσωσης κίνησης (3.10) τον όρο

$- \nabla P_e$. Στην περίπτωση αδιαβατικής μεταβολής η καταστατική εξίσωση (3.9) σε μια διάσταση ($\gamma = 3$) δίνει

$$\vec{\nabla} P_e = 3k\, T_e\, \nabla n_e = 3k\, T_e\, \vec{\nabla}(n_o + \eta_{e1}) = 3k\, T_e \frac{\partial n_{e1}}{\partial x}\, \hat{e}_x \qquad (4.34)$$

και η γραμμοποιημένη εξίσωση κίνησης γίνεται

$$m\, n_o \frac{\partial V_{e1}}{\partial t} = -\, e\, n_o\, E_1 - 3k\, T_e \frac{\partial n_{e1}}{\partial x} \qquad (4.34\alpha)$$

Από τις εξισώσεις (29α), (31α) που παραμένουν αμετάβλητες και την εξ. (4.33) μπορεί ανάλογα να προκύψει η σχέση διασποράς

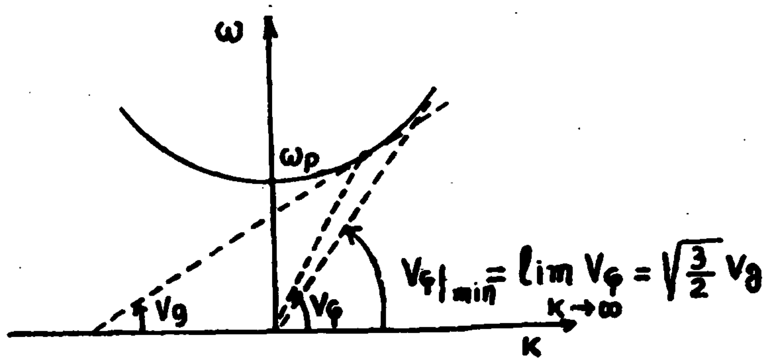
$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{3}{2} k^2\, \upsilon_9^2 \qquad (4.35)$$

όπου $\upsilon_9 \equiv {}^{2k\, T_e}/m$ είναι η ταχύτητα θερμικής κίνησης των ηλεκτρονίων.

Έτσι τώρα η συχνότητα ω εξαρτάται από τον κυματαριθμό k και η ομαδική ταχύτητα είναι

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{2} \frac{k}{\omega}\, \upsilon_9^2 = \frac{3}{2} \frac{\upsilon_9^2}{\upsilon_\varphi} \qquad (4.36)$$

Η σχέση διασποράς (4.35) δείχνεται γραφικά στο σχήμα (4.3). Ας αναφέρουμε επίσης ότι τα ηλεκτρονικά κύματα με βάση την ονοματολογία που έχουμε υιοθετήσει είναι διαμήκη ηλεκτροστατικά κύματα.



Σχήμα 4.3. Σχέση Διασποράς των Ηλεκτρονικών Κυμάτων στο Πλάσμα. Η ενέργεια για μεγάλες τιμές του k διαδίδεται ουσιαστικά με την ταχύτητα της θερμικής κίνησης $υ_\vartheta$, ενώ για μικρές τιμές του k διαδίδεται αργότερα.

4.4.3. Ιοντικά κύματα

Για να δοθεί δυνατότητα στα δυσκίνητα ιόντα να ταλαντωθούν θα πρέπει να επανέλθουμε σε διαταραχές χαμηλής συχνότητας και να κάνουμε μια ανάλυση ανάλογη μ' αυτή της προηγούμενης υποπαραγράφου. (Βλέπε άσκηση (4.7.3)). Ωστόσο για κινήσεις μικρής συχνότητας χρησιμοποιείται συχνά η λεγόμενη προσέγγιση πλάσματος, που ουσιαστικά σκιαγραφήθηκε στην § 1.5 και έχει να κάνει με την τάση του πλάσματος να παραμένει ηλεκτρικά ουδέτερο. Αν για παράδειγμα τα ιόντα κινηθούν, τα ηλεκτρόνια θ' ακολουθήσουν. Ουδετερότητα δεν σημαίνει ότι τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα εξαφανίζονται, αλλά ότι σε μια τέτοια κίνηση το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο θα ρυθμίσει τις τροχιές των ιόντων και των ηλεκτρονίων ώστε να διαφυλάξει την ουδετερότητα. Έτσι η προσέγγιση πλάσματος μεταφράζεται με την απλή σχέση $n_i = n_e = n$ και το ηλεκτρικό πεδίο δεν μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση Poisson αφού συγχρόνως $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} \neq 0$. Η υπόθεση αυτή ίσως ξενίζει κάπως τον αναγνώστη που την αντιμετωπίζει πρώτη φορά αλλά πιστεύουμε ότι θα γίνει πλήρως κατανοητή παρακάτω.

Μετά από αυτά η εξίσωση κίνησης για το ιοντικό ρευστό γίνεται

$$Mn\left[\frac{\partial \vec{V}_i}{\partial t} + (\vec{V}_i\cdot\vec{\nabla})\,\vec{V}_i\right] = e\,n\,\vec{E} - \vec{\nabla}P = -e\,n\,\vec{\nabla}\Phi - \gamma_i\,k\,T_i\,\vec{\nabla}n \qquad (4.37)$$

Έχουμε υποθέσει $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ και ότι η κίνηση είναι αδιαβατική. Υποθέτοντας επίπεδα κύματα η γραμμοποιημένη της εξ. (4.37) γράφεται

$$-\,i\,\omega\,Mn_0\,V_{11} = -en_0\,i\,k\,\Phi_1 - \gamma_1\,k\,T_1\,i\,kn_{11} \qquad (4.37\alpha)$$

Αφού ισχύει η προσέγγιση πλάσματος είναι $n_{i1} = n_{e1}$ και αρκεί να υπολογίσουμε τη διαταραχή n_{e1} από την εξίσωση Boltzmann, (3.41). Σημειώνουμε ότι στην παρούσα πρείπτωση δεν υπάρχει μαγνητικό πεδίο και εφόσον $\vec{E}_0 = 0$ μπορούμε να διαλέξουμε $\Phi_0 = 0$. Κάνοντας επέκταση της εξ. (3.41) παίρνουμε

$$n_e = n_o \exp\left(\frac{e\Phi_1}{kT_e}\right) = n_o\left(1 + \frac{e\Phi_1}{kT_e} + \ldots\right) \qquad (4.38)$$

οπότε

$$n_{i1} = n_{e1} = n_e - n_o = \frac{e\Phi_1}{kT_e}\,n_o \qquad (4.38\alpha)$$

Μας χρειάζεται ακόμα η εξίσωση συνέχειας που μπορούμε να την πάρουμε με βαση τη σχέση (4.31a)

$$i\,\omega\, n_{i1} = n_0\, i\, k\, V_{i1} \tag{4.39}$$

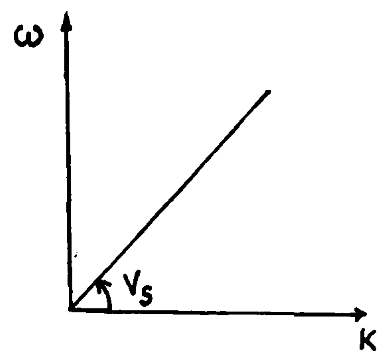
Αν στην εξίσωση (4.37α) αντικατασήσουμε τα Φ_1 και n_{i1} από τις (4.38α) και (4.39) προκύπτει η ζητούμενη σχέση διασποράς για τα λεγόμενα ιοντικά ακουστικά κύματα

$$\frac{\omega}{k} = \left(\frac{kT_e + \gamma_i\, kT_i}{M}\right)^{1/2} \equiv \upsilon_s \tag{4.40}$$

όπου υ_S είναι η ηχητική ταχύτητα στο πλάσμα. Υπεύθυνες βέβαια για τη διάδοση τέτοιων κυμάτων δεν είναι συγκρούσεις μεταξύ των σωματιδίων όπως στο συνηθισμένο αέρα αλλά το ηλεκτρικό πεδίο.

Εφόσον τα ιόντα υφίστανται μονοδιάστατες συμπιέσεις και αραιώσεις θα μπορούσαμε στην προηγούμενη ανάλυση από την αρχή να θεσουμε $\gamma_i = 3$. Δεν το κάναμε σκόπιμα για να φανεί καλύτερα η διαφορά μεταξύ ηλεκτρονικού (kT_e) και ιοντικού ($\gamma_i\, kT_i$) όρου στη σχέση διασποράς. Πραγματικά η σχέση Boltzman που χρησιμοποιήσαμε ισχύει για ισοθερμικά ηλεκτρόνια ($\gamma_e = 1$) και η υπόθεση αυτή είναι σωστή αφού τα ηλεκτρόνια κινούνται τόσο γρήγορα σε σχέση με τα ιοντικά ακουστικά κύματα ώστε έχουν αρκετό χρόνο διαθέσιμο για να εξισώσουν παντού τη θερμοκρασία τους.

Η καμπύλη διασποράς των ιοντικών κυμάτων φαίνεται στο σχήμα (4.4).



Σχήμα 4.4.
Καμπύλη διασποράς ιοντικών ακουστικών κυματων για το όριο μικρού μήκους Debye.

Η σχέση (4.40) είναι τόσο πιο ακριβής όσο καλύτερα ισχύει η προσέγγιση πλάσματος που χρησιμοποιήσαμε. Στην άσκηση (4.7.3) θα δείξουμε ότι η προσέγγιση αυτή είναι τόσο καλύτερη όσο το μήκος Debye είναι μικρότερο. Από την καμπύλη διασποράς βλέπει κανένας ότι τα ιοντικά κύματα είναι κύματα σταθερής ταχύτητας και εμφανίζονται μόνον όταν υπάρχουν θερμικές κινήσεις. Επίσης η ομαδική ταχύτητα είναι ίση με τη φασική. Αντίθετα τα ηλεκτρονικά κύματα σύμφωνα με την εξίσωση (4.34) είναι κύματα σταθερής συχνότητας με μια διόρθωση λόγω θερμικών κινήσεων.

Οι λόγοι αυτής της διαφοράς μπορεί να φανούν από την ακόλουθη περιγραφή του αρμόδιου φυσικού μηχανισμού. Στα ηλεκτρονικά κύματα τα ιόντα παραμένουν ακίνητα. Αντίθετα στα ιοντικά κύματα τα ηλεκτρόνια συμπαρασύρονται από την κίνηση των ιόντων και προσπαθούν να θωρακίσουν τα ηλεκτρικά πεδία που δημιουργούνται από τις τοπικές μεταβολές της πυκνότητας φορτίου των ιόντων. Ωστόσο όπως είδαμε στην παράγραφο (1.5) η θωράκιση δεν είναι τέλεια και δυναμικά της τάξης kT_e μπορούν να διαρεύσουν εξαιτίας της θερμικής κίνησης των ηλεκτρονίων. Τα ιόντα σχηματίζουν περιοχές συμπίεσης και αραίωσης όπως συμβαίνει σ' ένα συνηθισμένο ηχητικό κύμα. Οι περιοχές συμπίεσης τείνουν να μετατραπούν σε περιοχές αραίωσης για δυο λόγους. Ο πρώτος είναι η θερμική κίνηση των ιόντων που είναι υπεύθυνη για την εμφάνιση του δεύτερου όρου στην τετραγωνική ρίζα της εξ. (4.40). Ο δεύτερος έχει να κάνει με τη διαροή που αναφέραμε πριν. Πραγματικά, τα ιόντα ενός πυκνώματος ασκούν μεταξύ τους απωστικές ηλεκτρικές δυνάμεις ώστε το πύκνωμα τείνει να διασπαρεί. Το υπεύθυνο ηλεκτρικό πεδίο θωρακίζεται βέβαια κατά μεγάλο μέρος από τα ηλεκτρόνια. Ένα όμως μέρος ανάλογο με kT_e μένει διαθέσιμο να δρα στα ιόντα του πυκνώματος. Η διεργασία αυτή προκαλεί την εμφάνιση του πρώτου όρου στην τετραγωνική ρίζα της εξ. (4.40). Επίσης οδηγεί σ' ένα λίγο περίεργο φαινόμενο. Αν $kT_i \to 0$ τα ιοντικά κύματα εξακολουθούν να υπάρχουν, πράγμα που δεν συμβαίνει σ' ένα ουδέτερο συνηθισμένο αέριο. Η ηχητική ταχύτητα τότε είναι

$$V_S = \left(\frac{kT_e}{M}\right)^{1/2} \tag{4.41}$$

Αυτή εξαρτάται από τη θερμοκρασία των ηλεκτρονίων (αφού το διαθέσιμο ηλεκτρικό πεδίο είναι ανάλογο μ' αυτή) και από τη μάζα των ιόντων (αφού η αδράνεια του ρευστού είναι ανάλογή της). Επίσης παρατηρείται συχνά πειραματικά αφού η συνθήκη $T_i \ll T_e$ συμβαίνει πολλές φορές στο πλάσμα του εργαστήριου.

4.4.4. Ηλεκτρομαγνητικά κύματα με $\vec{B}_0 = 0$

Στη μέχρι τώρα ανάλυση το μαγνητικό πεδίο ήταν μηδενικό. Θεωρώντας πεπερασμένα μαγνητικά πεδία εμφανίζεται μια ποικιλία βασικών τρόπων ταλάντωσης σύμφωνα με τους ορισμούς της παραχρ. 4.3. Διαλέξαμε για μελέτη τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα - φωτεινά κύματα, ραδιοκύματα ή μικροκύματα, και επομένως εγκάρσια κύματα-με $\vec{B}_0 = 0$. Οι συχνότητες τέτοιων κυμάτων είναι αρκετά μεγάλες για ν' ανταποκριθούν τα ιόντα και έτσι αυτά θα θεωρηθούν πάλι ακίνητα.

Οι γραμμοποιημένες μορφές των σχετικών εξισώσεων Maxwell γράφονται

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_1 = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{J}_{e1} \tag{4.42}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_1 = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \qquad (4.43)$$

Παίρνοντας την απόκλιση της εξ. (4.43) έχουμε

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}_1) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1) - \vec{\nabla}^2 \cdot \vec{E}_1 = -\frac{1}{c}\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \qquad (4.44)$$

Ο όρος $\vec{\nabla} \times (\partial \vec{B}_1/\partial t)$ μπορεί ν' απαλοιφθεί από την εξ. (4.44) αν πάρουμε τη μερική ως προς το χρόνο παράγωγο της (4.42). Υποθέτοντας επίπεδα κύματα έχουμε

$$-\vec{k}\,(\vec{k} \cdot \vec{E}_1) + k^2 \vec{E}_1 = -\frac{4\pi}{c^2}\vec{J}_{e1} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}_1 \qquad (4.45)$$

Από τη γραμμοποιημένη εξίσωση κίνησης των ηλεκτρονίων αγνοώντας θερμικές κινήσεις ($k\,T_e = 0$) προκύπτει

$$\vec{V}_{e1} = \frac{e\,\vec{E}_1}{im\omega}$$

και επομένως η διαταραχή της πυκνότητας ρεύματος, $\vec{J}_{e1}$, υπολογίζεται από τη σχέση

$$\vec{J}_{e1} = -n_o\, e\, \vec{V}_{e1} = -\frac{n_o\, e^2}{im\omega}\vec{E}_1 \qquad (4.46)$$

Εφόσον πρόκειται για εγκάρσια κύματα είναι $\vec{k}\cdot\vec{E}_1 = 0$ και η εξίσωση (4.45) μας δίνει τη σχέση διασποράς

$$\omega^2 = \omega_p{}^2 + c^2\, k^2 \qquad (4.47)$$

όπου ω_p είναι η γνωστή συχνότητα ταλάντωσης του πλάσματος.

Στην εξίσωση (4.47) ο όρος $c^2\, k^2$ είναι υπεύθυνος για τη διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο κενό με φασική ταχύτητα c. Η παρουσία του πλάσματος συνεισφέρει τον όρο ω_p^2 και εμφανίζεται ένα νέο ενδιαφέρον φαινόμενο όπως θα εξηγήσουμε παρακάτω. Ας σημειωθεί ότι τώρα η φασική ταχύτητα του κύματος γίνεται μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός. Πραγματικά

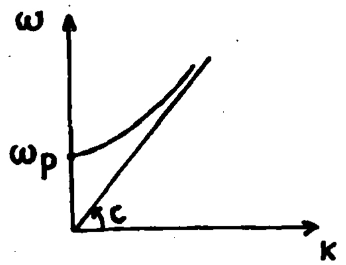
$$u_\varphi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2} > c^2 \tag{4.48}$$

Εντούτοις η ενέργεια διαδίδεται πάντα με ταχύτητα μικρότερη του φωτός αφού

$$u_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{u_\varphi} < c \tag{4.49}$$

Η σχέση διασποράς φαίνεται στο σχήμα (4.5). Το διάγραμμα αυτό, αν και παρουσιάζει ομοιότητες με το διάγραμμα (4.3) των ηλεκτρονικών κυμάτων

Σχήμα 4.5.
Σχέση διασποράς ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο πλάσμα χωρίς την ύπαρξη αδιατάραχτου μαγνητικού πεδίου B_0.



για μικρές τιμές του k, για μεγάλες τιμές είναι τελείως διαφορετικό. Για μεγάλα k η ασυμπτωτική ταχύτυτα c στο διάγραμμα (4.5) είναι πάρα πολύ μεγαλύτερη από την αντίστοιχη θερμική ταχύτητα u_g του διαγράμματος (4.3). Πιο σημαντική είναι η διαφορά στην απόσβεση τέτοιων κυμάτων.

Όπως θα δούμε στη παράγραφο 4.6.1, κύματα πλάσματος με μεγάλα kv_g παρουσιάζουν μεγάλη απόσβεση ενώ ηλεκτρομαγνητικά κύματα με μεγάλα kc , συμπεριφέρονται σαν στο κενό, δηλαδή η παρουσία του πλάσματος δεν τους προκαλεί πρακτικά καμιά απόσβεση ($k^2c^2 \gg \omega_p{}^2$).

Από τη σχέση διασποράς (4.47) μπορούμε να καταλάβουμε εύκολα ένα φαινόμενο που έχει να κάνει με την εμφάνιση ενός κατωφλιού αποκοπής. Ας θεωρήσουμε ότι εκπέμπουμε ένα βραχύ ραδιοφωνικό κύμα με δοσμένη συχνότητα ω ώστε να περάσει από πλάσμα πυκνότητας n. Μέσα στο πλασμα το μήκος κύματος $2\pi/k$ θα πάρει κάποια τιμή που υπαγορεύει η σχέση διασποράς (4.47) (ω και ω_p δοσμένα). Αν αρχίσουμε τώρα ν' αυξάνουμε την πυκνότητα του πλάσματος, για να συνεχίσει να επαληθεύεται η (4.47) πρέπει να μικραίνει το k ή να μεγαλώνει το μήκος κύματος. Το κατώφλι αποκοπής θα εμφανιστεί σε μια κρίσιμη πυκνότητα n_k τέτοια ώστε $\omega = \omega_p$ και επομένως $k = 0$. Για πυκνότητες μεγαλύτερες από αυτή η σχέση διασποράς ικανοποιείται μόνο για φανταστικές τιμές του k και το κύμα δεν μπορεί να διαδοθεί. Η κρίσιμη πυκνότητα n_c δίνεται μέσω της (4.33) από τη σχέση

$$n_c = \frac{m\omega^2}{4\pi e^2} \qquad (4.50)$$

Αν λοιπόν η πυκνότητα του πλάσματος είναι αρκετά μεγάλη, ή η συχνότητα ω του κύματος αρκετά μικρή το κύμα δεν μπορεί να περάσει μέσ' από το πλάσμα. Σ' αυτή την περίπτωση το φανταστικό k δίνεται από τη σχέση

$$k = \frac{(\omega^2-\omega_p^2)^{1/2}}{c} = \frac{i\,|\omega_p^2 - \omega^2|^{1/2}}{c} \qquad (4.51)$$

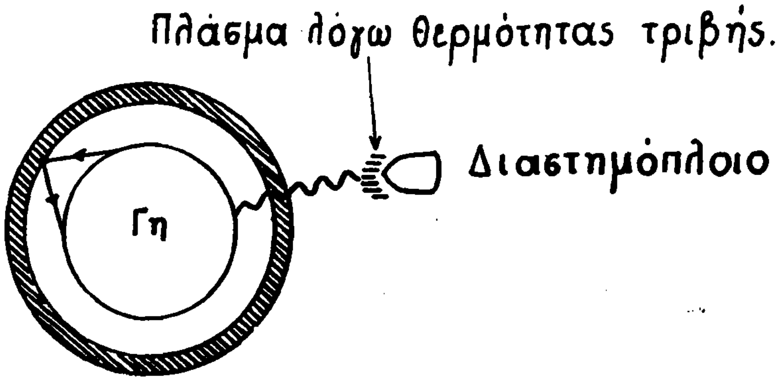
Αφού το κύμα έχει χωρική εξάρτηση της μορφής exp(ikx) θ' αποσβύνεται εκθετικά και για το μήκος απόσβεσης δ θα έχουμε

$$e^{ikx} = e^{-|k|x} = e^{-x/\delta}$$

οπότε

$$\delta = |k|^{-1} = \frac{c}{(\omega_p^2 - \omega^2)^{1/2}} \tag{4.52}$$

Η πιο γνωστή εφαρμογή του παραπάνω φαινόμενου αποκοπής είναι η επικοινωνία μέσω των βραχέων ραδιοφωνικών κυμάτων. Αν π.χ. ένας ραδιοφωνικός σταθμός του βόρειου ημισφαίριου (σχήμα 4.6) εκπέμπει βραχέα κύματα κάποιας συχνότητας, αυτά σ' ένα ύψος στην ιονόσφαιρα



Σχήμα 4.6. Ραδιοεπικοινωνία μέσω του πλάσματος.

όπου η πυκνότητα του πλάσματος θα πάρει την αντίστοιχη κρίσιμη τιμή n_c θ' ανακλαστούν και θα μπορεί έτσι να τα συλλάβει ένας δέκτης στο νότιο ημισφαίριο. Είναι επίσης ευνόητο ότι για να είναι εφικτή η επικοινωνία με τα διαστημόπλοια πρέπει να χρησιμοποιούνται συχνότητες μεγαλύτερες από μια κρίσιμη συχνότητα που αντιστοιχεί στο μέγιστο της πυκνότητας του πλάσματος της ιονόσφαιρας. Για $n_{max} \approx 10^6$ cm^{-3} η κρίσιμη συχνότητα, $\nu = \omega p/2\pi$, είναι της τάξης των 10 MHZ. Επίσης, κατά την επιστροφή ενός διαστημόπλοιου στη γη, λόγω μεγάλης θερμότητας τριβής δημιουργείται πλάσμα (σχήμα 4.6) και εμφανίζεται ένα κατώφλι αποκοπής που έχει σαν αποτέλεσμα τη διακοπή της επικοινωνίας του σταθμού ελέγχου με το διαστημόπλοιο.

4.5. Σύνοψη των κυμάτων στο πλάσμα

Θ' αφήσουμε για εργασία του παραπέρα ενδιαφερόμενου αναγνώστη τη μελέτη άλλων βασικών κυμάτων. Ωστόσο θα δώσουμε στον παρακάτω κύριο πίνακα τα χαρακτηριστικά τους.

Στοιχειώδη Κύματα στο Πλάσμα

1. Ηλεκτροστατικά

   i. Ηλεκτρονικά Κύματα

$\vec{B}_0 = 0$ ή $\hat{k} \,//\, \vec{B}_0$	$\omega^2 = \omega_p^2 + 3/2\, k^2 \upsilon_\theta^2$	Ταλαντώσεις πλάσματος
$k \perp \vec{B}_0$	$\omega^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2 = \omega_h^2$	Ανώτερες μικτογενείς ταλαντώσεις

   ii. Ιοντικά Κύματα

$\vec{B}_0 = 0$ ή $\hat{k} \,//\, \vec{B}_0$	$\omega^2 = k^2 \upsilon_s^2$	
	$= k^2 \dfrac{\gamma_e k T_e + \gamma_i k T_i}{M}$	Ακουστικά κύματα
$k \perp \vec{B}_0$	$\omega^2 = \Omega_c^2 + k^2 \upsilon_s^2$	Ηλεκτροστατικά κυκλοτρονικά κύματα ιόντων
	ή	

	$\omega^2 = \omega_g^{\,2} = \Omega_c\,\omega_c$	Κατώτερες μικτογενείς ταλαντώσεις.

2. Ηλεκτρομαγνητικά

i. Ηλεκτρονικά Κύματα

$\vec{B}_0 = 0$	$\omega^2 = \omega_p^{\,2} + k^2c^2$	Φωτεινά κύματα.
$\vec{k} \perp \vec{B}_0,\ \vec{E}_1 \,//\, \vec{B}_0$	$c^2k^2/\omega^2 = 1 - \omega_p^{\,2}/\omega^2$	Κύματα τύπου O.
$\vec{k}\ \ \vec{B}_0,\ \vec{E}_1 \,//\, \vec{B}_0$	$c^2k^2/\omega^2 = (1 - \omega_p^{\,2}/\omega^2)$ $(\omega^2 - \omega_p^{\,2}/\omega^2 - \omega_h^{\,2})$	Κύματα τύπου X
$\vec{k} \,//\, \vec{B}_0$	$c^2k^2/\omega^2 = 1 - (\omega_p^{\,2}/\omega^2)/(1 - (\omega_c/\omega)$	Κύματα τύπου R. Τύπος σφυρίχτρας
	$c^2k^2/\omega^2 = 1 - (\omega_p^{\,2}/\omega^2)/(1 + (\omega_c/\omega)$	Κύματα τύπου L.

ii. Ιοντικά Κύματα

$\vec{B}_0 = 0$	Κανένα	
$\vec{k} \,//\, \vec{B}_0$	$\omega^2 = k^2V_A^{\,2}$	Κύματα Alfven
$\vec{k} \perp \vec{B}_0$	$\omega^2/k^2 = V_S^{\,2} + V_A^{\,2}$	Μαγνητοακουστικά Κύματα

4.6. Κινητική Θεωρία των Κυμάτων

Όπως θα δούμε στο κεφάλαιο έξι οι θερμοκρασίες που χαρακτηρίζουν το θερμοπυρηνικό πλάσμα είναι αρκετά υψηλές. Σ' ένα τόσο ζεστό πλάσμα τα θερμικά φαινόμενα παίζουν ένα πολύ σημαντικό ρόλο και συμβαίνουν διεργασίες οι οποίες δεν μπορεί να προβλεφθούν από κανένα μοντέλο ρευστού. Έτσι πιο κατάλληλη είναι η κινητική θεωρία του πλάσματος. Επειδή σ' ένα ζεστό πλάσμα οι συγκρούσεις μεταξύ των σωματίδιων είναι σπάνιες, μπορεί κανένας να χρησιμοποιήσει την εξίσωση Vlasov. Εφαρμόζοντας κατάλληλα την εξίσωση αυτή ο Landau(9) το 1946 για την περιγραφή των ηλεκτρονικών κυμάτων της παραγρ. 4.4.2 πρόβλεψε ένα νέο φαινόμενο απόσβεσης που πήρε το όνομά του. Όπως θ' αναλύσουμε στις επόμενες παραγράφους η απόσβεση Landau είναι το αποτέλεσμα μιας συντονισμένης αλληλεπίδρασης μεταξύ ενός κύματος και σωματίδιων με ταχύτητες κοντά στη φασική ταχύτητά του. Το φαινόμενο αυτό είναι θεμελιακής σημασίας στη φυσική πλάσματος και αποτελεί κλειδί για την κατανόηση πολλών μηχανισμών αστάθειας καθώς και μηχανισμών με τους οποίους μπορεί ν' απορροφηθεί από το πλάσμα ενέργεια από προσπίπτοντα κύματα. Επίσης αποτελεί ένα θρίαμβο της θεωρητικής φυσικής αφού επαληθεύτηκε πειραματικά από τους Malmberg και Wharton(10) 19 χρόνια αργότερα.

4.6.1. Απόσβεση Landau

Θα μελετήσουμε όπως και στην παραγφρ. 4.4.2 ηλεκτροστατικά ηλεκτρονικά επίπεδα κύματα μικρού πλάτους και μεγάλης συχνότητας χωρίς την ύπαρξη αδιατάραχτου ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, ($\vec{E}_0$ = $\vec{B}_0$ = 0) κάτω όμως από το πρίσμα της γραμμοποιημένης εξίσωσης Vlasov. Η συνάρτηση κατανομής για τα ηλεκτρόνια μπορεί να γραφεί

$$f_e(\vec{r},\vec{v},t) = f_0(\vec{v}) + f_1(\vec{r},\vec{v},t) \tag{4.53}$$

Στην εξίσωση (4.53) f_0 είναι η αδιατάραχτη και χωρικά ομοιόμορφη συνάρτηση κατανομής και f_1 μια μικρή διαταραχή η οποία θα ικανοποιεί τη γραμμοποιημένη εξίσωση Vlasov. Σημειώνουμε ότι σαν ανεξάρτητη μεταβλητή στη συνάρτηση κατανομής χρησιμοποιούμε την ταχύτητα και όχι όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο την ορμή. Εκεί για την παραγωγή της εξίσωσης Fokker-Plank χρησιμοποιήσαμε τη Κβαντομηχανική όπου θεμελιακό μέγεθος είναι η ορμή. Στην παρούσα παράγραφο η ταχύτητα των σωματίδιων είναι αυτή που ενδιαφέρει αφού όπως θα δούμε παρακάτω συγκρίνεται με τη φασική ταχύτητα του κύματος. Η ταχύτητα τώρα δεν γραμμοποιείται αφού είναι ανεξάρτητη μεταβλητή. Μετά από αυτά η γραμμοποιημένη εξίσωση Vlasov γράφεται

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla} f_1 - \frac{e}{m}\vec{E}_1\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = 0 \qquad (4.54)$$

Θα υποθέσουμε πάλι επίπεδα κύματα που διαδίδονται στη διεύθυνση x οπότε η διαταραχή f_1 είναι της μορφής $f_1 \propto e^{i(kx-\omega t)}$ και η εξ. (4.54) γίνεται

$$-i\,\omega f_1 + i\,k\,u_x f_1 = \frac{e}{m} E_x \frac{\partial f_0}{\partial u_x} \qquad (4.55)$$

Για το ηλεκτρικό πεδίο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση Poisson

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_1 = i\,k\,E_x = -4\pi\,e\,n_1 = -4\pi e\int f_1\, d^3\vec{u} \qquad (4.56)$$

Λύνοντας την εξ. (4.55) ως προς f_1 και αντικαθιστώντας στην εξ. (4.56) προκύπτει

$$1 = -\frac{4\pi e^2}{km}\int \frac{\partial f_0/\partial u_x}{\omega - k u_x}\, d^3 u \qquad (4.57)$$

Σύμφωνα με αυτά που είπαμε στην παραχρ. 1.4 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την κανονικοποιημένη $\hat{f}_0$ (εξ. (1.4)) οπότε (βλέπε σχέση (3.42)) $f_0 = n_0 \hat{f}_0$ και η εξίσωση (4.57) γράφεται

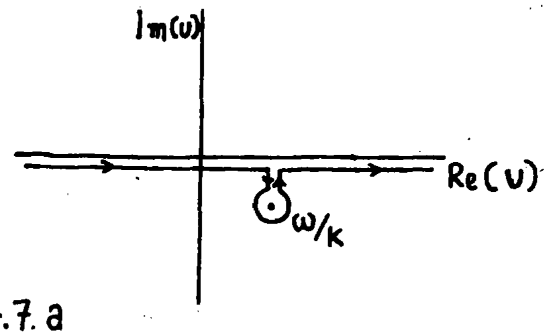
$$1 = -\frac{\omega_p^2}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} d\upsilon_z \int_{-\infty}^{+\infty} d\,\upsilon_y \frac{\partial \hat{f}_0 (\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)/\partial \upsilon_x}{\omega - k\upsilon_x} \qquad (4.58)$$

Αν η $\hat{f}_0$ έχει την ιδιότητα $\hat{f}_0 = \hat{f}_0\,(\upsilon_x)\ \hat{f}_0\,(\upsilon_y)\ \hat{f}_0(\upsilon_z)$ η ολοκλήρωση ως προς υ_x ,υ_y και υ_z χωρίζεται και η ολοκλήρωση ως προς υ_y και υ_z δίνει αποτέλεσμα μονάδα. Μια τέτοια κατανομή είναι π.χ. η κατανομή Maxwell (βλέπε άσκηση 1.8.1). Επειδή έχουμε να κάνουμε μ' ένα μονοδιάστατο πρόβλημα μπορούμε να παραλείψουμε τον κάτω δείκτη x προσέχοντας να μην μπερδεύουμε τη μεταβλητή υ (που στην πραγματικότητα είναι υ_x) με την ολική ταχύτητα $\vec{\upsilon}$. Έτσι η σχέση διασποράς (4.58) γίνεται

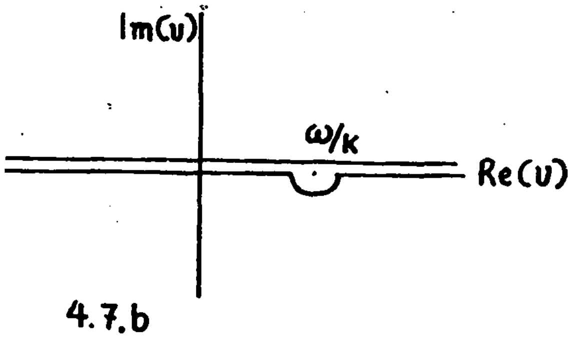
$$1 = \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\, \hat{f}_0(\upsilon)/\partial\upsilon}{\upsilon - (\omega/k)}\, d\upsilon \qquad (4.59)$$

Θα μπορούσε να σκεφτεί κανένας ν' αντιμετωπίσει το ολοκλήρωμα της εξ. (4.59) με τη θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων. Μάλιστα το πιο πιθανό είναι η ανωμαλία του παρονομαστή να είναι πόλος πρώτης τάξης και ο δρόμος ολοκλήρωσης να μην περνάει από αυτόν αφού στην πράξη σχεδόν πάντα η συχνότητα ω δεν είναι πραγματικός αριθμός. Πραγματικά τα κύματα στο πλάσμα είτε ενισχύονται οπότε, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, έχουμε την εμφάνιση ασταθειών, είτε αποσβύνονται. Αν η χρονική εξάρτηση της διαταραχής είναι της μορφής $e^{i\omega t}$, ενίσχυση θα έχουμε για $I_m\ \omega > 0$ και απόσβεση για $I_m\ \omega < 0$. Ατυχώς η ολοκληρωτέα συνάρτηση στη σχέση (4.59) δεν ικανοποιεί το λήμα Jordan δηλαδή ο παράγοντας $\exp(-u^2/u_g^2)$ αποκλίνει για $u \to \pm i\ \infty$ και έτσι το θεώρημα των υπολοίπων δεν μπορεί τουλάχιστον άμεσα να εφαρμοστεί.

Ο Landau ήταν ο πρώτος που αντιμετώπισε το πρόβλημα σωστά θεωρώντάς το σαν πρόβλημα αρχικής συνθήκης ώστε η f_1 να είναι γνωστή τη χρονική στιγμή $t = 0$ και να υπολογίζεται αργότερα, και όχι απλά υποθέτοντας ότι έχει χρονική εξάρτηση της μορφής $e^{-i\omega t}$. Σ' αυτή την περίπτωση χρησιμοποιώντας σαν δρόμο ολοκλήρωσης αυτόν που φαίνεται στο σχήμα (4.7α) έδειξε ότι η ύπαρξη της ανωμαλίας ω/k οδηγεί σε μια σημαντική τροποποίηση της σχέσης διασποράς των συνηθισμένων κυμάτων πλάσματος (εξ. (4.35)).



4.7. a



4.7. b

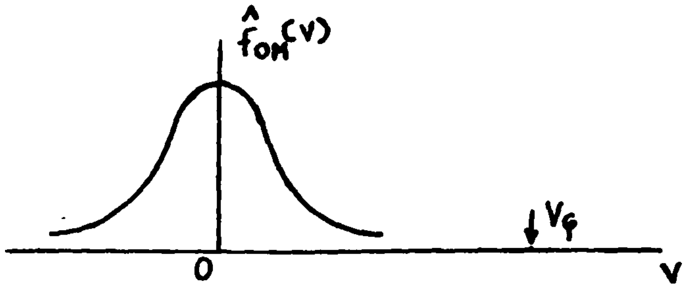
Σχήμα 4.7

Δρόμος ολοκλήρωσης Landau

Μια αυστηρή ανάλυση του προβλήματος περνά από τους μετασχηματισμούς Laplace και είναι λίγο περίπλοκη(5)-(6). Γι' αυτό εδώ θα παράγουμε μια προσεγγιστική σχέση c διασποράς στην περίπτωση μεγάλης φασικής ταχύτητας σε σχέση με τις ταχύτητες των ηλεκτρονίων, και μικρής απόσβεσης. Τότε, ο πόλος ω/k είναι πολύ κοντά στον πραγματικό άξονα και ο δρόμος Landau γίνεται όπως στο σχήμα (4.7b). Η εξ. (4.59) παίρνει τη μορφή

$$1 = \frac{\omega_p^2}{k^2}\left[P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial \hat{f}_o/\partial u}{u-(\omega/k)}\,du + i\pi \left.\frac{\partial \hat{f}_o}{\partial u}\right|_{u=\omega/k}\right] \qquad (4.60)$$

όπου P αντιπροσωπεύει την κύρια τιμή του ολοκληρώματος. Για να την υπολογίσουμε θα ολοκληρώσουμε κατά μήκος του πραγματικού άξονα αλλά θα σταματήσουμε αμέσως πριν συναντήσουμε τον πόλο. Αφού έχουμε υποθέσει ότι η φασική ταχύτητα είναι μεγάλη, η συνεισφορά στο ολοκλήρωμα από το υπόλοιπο τμήμα της καμπύλης είναι ασήμαντη γιατί εκεί τόσο η $\hat{f}_0$ όσο και η $\partial\hat{f}_0/\partial u$ παίρνουν πολύ μικρές τιμές (βλέπε για παράδειγμα το σχήμα 4.8).



Σχήμα 4.8. Κανονικοποιημένη συνάρτηση κατανομή Maxwell στην περίπτωση όπου $u_\varphi \gg u_g$.

Το ολοκλήρωμα της σχέσης (4.60) υπολογίζεται με παραγοντική ολοκλήρωση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial \upsilon} \frac{d\upsilon}{\upsilon-\upsilon_\varphi} = \frac{\hat{f}_0}{\upsilon-\upsilon_\varphi} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\hat{f}_0\, d\upsilon}{(\upsilon-\upsilon_\varphi)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\hat{f}_0\, d\upsilon}{(\upsilon-\upsilon_\varphi)^2} \tag{4.61}$$

θ' αναπαράγουμε τώρα τη γνωστή σχέση διασποράς (εξ. (4.35)) των κυμάτων πλάσματος παίρνοντας το πραγματικό μέρος της εξ. (4.60), το οποίο μέσω της (4.61) γράφεται

$$1 = \frac{\omega_p^2}{k^2} \left\langle (\upsilon-\upsilon_\varphi)^{-2} \right\rangle \tag{4.62}$$

όπου $< (\upsilon-\upsilon_\varphi)^{-2} >$ αντιπροσωπεύει τη μέση τιμή του μεγέθους $(\upsilon-\upsilon_\varphi)^{-2}$. Αφού $\upsilon_\varphi \gg \upsilon$ μπορούμε να κάνουμε διωνυμική επέκταση στον όρο $(\upsilon-\upsilon_\varphi)^{-2}$ κρατώντας δυνάμεις μέχρι τρίτου βαθμού. Παίρνοντας τη μέση τιμή οι περιττοί όροι δεν συνεισφέρουν και έχουμε

$$\left\langle (\upsilon-\upsilon_\varphi)^{-2} \right\rangle \approx \upsilon_\varphi^{-2} \left(1 + \frac{3\langle \upsilon^2 \rangle}{\upsilon_\varphi^2}\right) \tag{4.63}$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι η κατανομή f_0 είναι τύπου Maxwell και αντικαταστήσουμε στην εξ. (4.63) την $\langle \upsilon^2 \rangle$ όπως την υπολογίσαμε στην παραγρ. 1.4 παίρνουμε

$$1 = \frac{\omega_p^2}{k^2}\frac{k^2}{\omega^2}\left(1 + 3\,\frac{k^3}{\omega^2}\frac{k\,T_e}{m}\right)$$

ή

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\frac{3\,kT_e}{m}k^2 = \omega_p^2 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\frac{3}{2}k^2 v_g^2 \tag{4.64}$$

Αν η θερμική διόρθωση είναι μικρή επιτρέπεται να βάλουμε στο δεύτερο όρο της σχέση (4.64) $\omega^2/\omega_p^2 \approx 1$ οπότε ξαναβρίσκουμε τη σχέση (4.35).

Ας έρθουμε τώρα στο τελευταίο και πιο ενδιαφέρον μέρος της ανάλυσης που σχετίζεται με το φανταστικό όρο στην εξίσωση (4.60). Μπορούμε να υπολογίσουμε με αρκετή ακρίβεια το μικρό αυτό όρο αν αμελήσουμε τη θερμική διόρθωση στο πραγματικό μέρος της συχνότητας ω και θέσουμε $\omega^2 \approx \omega_p^2$. Τότε από τις σχέσεις (4.61) και (4.63) προκύπτει ότι η κύρια τιμή του ολοκληρώματος της (4.60) είναι περίπου ίση με k^2/ω^2. Η εξίσωση (4.60) τότε γίνεται

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + i\,\pi\,\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\left.\frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v}\right|_{v=v_\varphi} \tag{4.65}$$

ή

$$\omega^2 \left(1 - i\,\pi\,\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\left[\frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v}\right]\right) = \omega_p^2 \tag{4.65α}$$

Θεωρώντας το φανταστικό μέρος μικρό, μπορούμε να το φέρουμε στο δεξιό μέρος, να θέσουμε $\omega^2 \approx \omega_p^2$ και να πάρουμε την τετραγωνική ρίζα από την αντίστοιχη σειρά Teylor. Τότε βρίσκουμε

$$\omega = \omega_p \left(1 + i \frac{\pi}{2} \frac{\omega_p^2}{k^2} \left[\frac{\partial \hat{f}_o}{\partial u}\right]_{u = u_\varphi} \right) \tag{4.66}$$

Στην περίπτωση που η f_0 είναι μονοδιάστατη κατανομή Maxwell έχουμε

$$\frac{\partial \hat{f}_o}{\partial u} = (\pi u_g^2)^{-1/2} \left(\frac{-2u}{u_g^2} \right) \exp\left(- \frac{u^2}{u_g^2} \right) = - \frac{2u}{\sqrt{\pi}\, u_g^3} \exp\left(- \frac{u^2}{u_g^2} \right) \tag{4.67}$$

Αμελώντας τη θερμική διόρθωση στο γραμμικό όρο ($u = \omega_p/k$) αλλά κρατώντας την στο εκθετικό της εξίσωσης (4.67) βρίσκουμε την απόσβεση από την εξ. (4.66)

$$I_m(\omega) = - \frac{\pi}{2} \frac{\omega_p^3}{k^2} \frac{2\omega_p}{k\sqrt{\pi}} \frac{1}{u_g^3} \exp\left(- \frac{\omega^2}{k^2 u_g^2} \right)$$

ή ισοδύναμα

$$I_m\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right) = - 0.22 \sqrt{\pi} \left(\frac{\omega_p}{k u_g} \right)^3 \exp\left(\frac{-1}{2k^2 \lambda_p} \right) \tag{4.68}$$

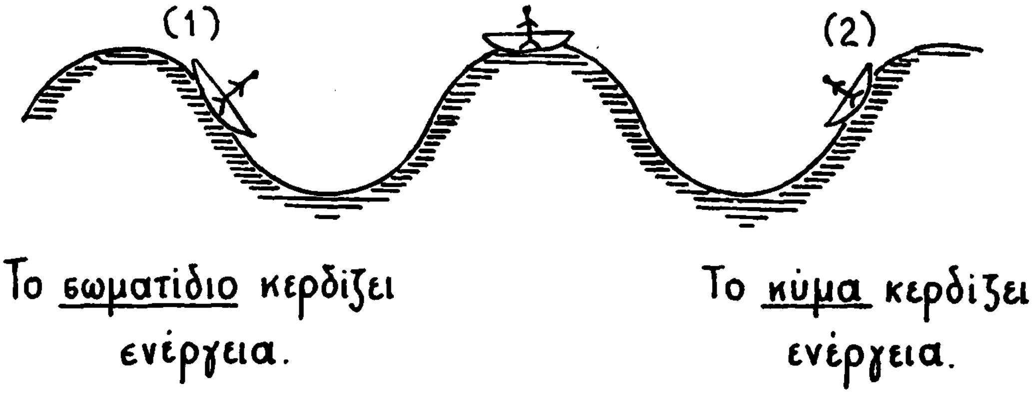
Αφού $I_m(\omega) < 0$ το κύμα αποσβύνεται. Αυτή είναι η απόσβεση Landau που σε πρώτη εκτίμηση φαίνεται ένα παράξενο γεγονός αφού συμβαίνει σε πλάσμα με ανύπαρκτες συγκρούσεις. Προφανώς η απόσβεση είναι πάρα πολύ μικρή για μικρές τιμές του $k\lambda_D$ αλλά γίνεται σημαντική για $k\lambda_D$ της τάξης της μονάδας.

Ίσως ο αναγνώστης να κουράστηκε με τη μακροσκελή και μάλλον πολύπλοκη παραγωγή της απόσβεσης Landau. Ας μην απογοητευτεί αφού στην επόμενη υποπαράγραφο ακολουθεί μια απλή φυσική εξήγηση.

4.6.2. Φυσική σημασία της απόσβεσης Landau

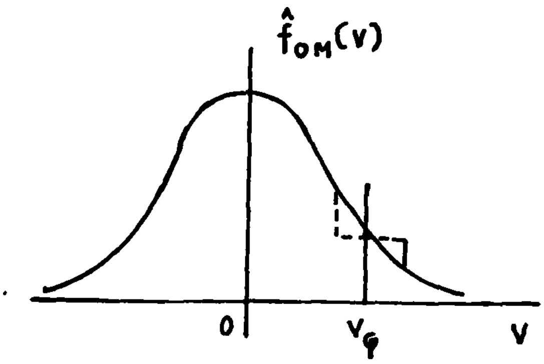
Για να δούμε ποιος μηχανισμός είναι υπεύθυνος για την απόσβεση Landau θα πρέπει πρώτα να σημειώσουμε ότι η φανταστική συχνότητα $I_m(\omega)$ παράγεται από τον πόλο $\upsilon = \omega/k = \upsilon_\varphi$. Άρα το φαινόμενο σχετίζεται μ' εκείνα τα σωματίδια της κατανομής των οποίων η ταχύτητα είναι κοντά στη φασική ταχύτητα του κύματος. Τα σωματίδια αυτά θα τα ονομάσουμε σωματίδια συντονισμού γιατί αφού κινούνται με μικρές ταχύτητες ως προς το κύμα δεν αντιλαμβάνονται ένα χρήγορα μεταβαλόμενο ηλεκτρικό πεδίο και επομένως είναι σε θέση ν' ανταλλάξουν αποτελεσματικά ενέργεια με το κύμα. Για να το καταλάβουμε αυτό καλύτερα θα θεωρήσουμε το μηχανικό ανάλογο του βαρκάρη του σχήματος (4.9). (Με τη λέξη ανάλογο δεν εννοούμε ότι θα εξηγήσουμε ακριβώς τη σχέση (4.68) ούτε και το φαινόμενο της απόσβεσης Landau σ' όλο του του βάθος. Απλά θα σκιαγραφήσουμε το σωστό τρόπο σκέψης). Αν η βάρκα δεν κινείται σε σχέση με την ξηρά απλά θ' ανεβοκατεβαίνει καθώς το κύμα περνά και κατά μέσο όρο ούτε θα κερδίζει ούτε θα χάνει ενέργεια. Το ίδιο θα συμβαίνει αν κινείται με πολύ μεγαλύτερη ταχύτητα σε σχέση με το κύμα. Αν όμως κινείται με την ίδια σχεδόν ταχυτητα με το κύμα μπορεί να συμπαρασύρεται ή να ξεπερνα'τα μετωπα του κύματος και αυτό είναι το κρίσιμο μέρος του φιανόμενου για την κατανόηση της απόσβεσης Landau. Αν η βάρκα κινείται με ταχύτητα μικρότερη από τη
φασική ταχύτητα του κύματος το μέτωπο που την ακολουθεί θα την προλάβει και θα τη συμπαρασύρει (περίπτωση (1) στο σχήμα (4.9)). Έτσι η βάρκα θα κερδίσει ενέργεια σε βαρος του κύματος. Αντίθετα αν κινείται με μεγαλύτερη ταχύτητα θα προλάβει το επόμενο μέτωπο

(περίπτωση (2)) και καθώς το ξεπερνά θα χάνει ενέργεια σε όφελος του κύματος.



Σχήμα 4.9. Συνηθισμένη φυσική εικόνα της απόσβεσης Landau.

Στο πλάσμα υπάρχουν ηλεκτρόνια των οποίων οι ταχύτητες μπορεί να είναι και μεγαλύτερες και μικρότερες από τη φασική ταχύτητα του κύματος. Όμως, η κατανομή Maxwell θέλει περισσότερα βραδύτερα ηλεκτρονια παρά ταχύτερα (σχήμα (4.10)). Έτσι, υπάρχουν περισσότερα σωματίδια που κερδίζουν ενέργεια από το κύμα και το κύμα αποσβύνεται.



Σχήμα 4.10. Παραμόρφωση μιας κατανομής Maxwell $\hat{f}_{0M}(u)$ στην περιοχή $u \approx u_\varphi$ που προκαλείται από την απόσβεση Landau.

Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την εξομάλυνση της κατανομής στην περιοχή $\upsilon = \upsilon_\varphi$. Η εξομάλυνση οφείλεται στη συνάρτηση f_1 που χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη υποπαράγραφο. Η διαταραγμένη καμπύλη περικλείει τον ίδιο αριθμό σωματίδιων, όμως συνολικά έχει κερδίσει ενέργεια (σε βαρος βέβαια του κύματος).

4.7. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.7.1. Τα συνηθισμένα υδροδυναμικά ρευστά υπακούουν την εξίσωση κίνησης των Navier-Stokes η οποία αν το ιξώδες είναι αμελητέο γράφεται

$$\mu\left[\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{V}\right] = -\vec{\nabla}p \qquad (4.69)$$

Θεωρώντας αδιαβατικές μεταβολές και χρησιμοποιώντας την εξίσωση συνέχειας για το ρευστό να παράγετε, με τη μέθοδο της γραμμοποίησης, τον τύπο της ταχύτητας του ήχου στο συνηθισμένο αέρα

$$V_s = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{\gamma\, p_o}{\mu_o}\right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma\, k\, T}{M}\right)^{1/2} \qquad (4.70)$$

<u>Λύση</u> Εφόσον η μεταβολή είναι αδιαβατική τα μόρια του αέρα ικανοποιούν την καταστατική εξίσωση (3.9) από την οποία παίρνουμε

$$\frac{\vec{\nabla} p}{p} = \gamma \frac{\vec{\nabla}\mu}{\mu} \quad (\mu = m\,n) \tag{4.71}$$

Υποθέτοντας επίπεδα κύματα η γραμμοποιημένη εξίσωση κίνησης μέσω της εξ. (4.71) γράφεται

$$- i\,\omega\,\mu_o \vec{V}_1 = - \frac{\gamma p_o}{\mu_o}\, i\,\vec{k}\,\mu_1 \tag{4.72}$$

Η γραμμοποιημένη εξίσωση της συνέχειας παίρνει τη μορφή

$$-i\,\omega\,\mu_1 + \mu_0\, i\,\vec{k}\cdot\vec{V}_1 = 0 \tag{4.73}$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξ. (4.72) εσωτερικά επί $\vec{k}$ και αντικαθιστώντας τον όρο $\vec{k}\cdot\vec{V}_1$ στην (4.73) παίρνουμε τη ζητούμενη ταχύτητα. (Αλλοιώς μπορούμε να θεωρήσουμε μονοδιάστατο κύμα ώστε π.χ. $\vec{k} = k\,\hat{e}_x$ και $\vec{V} = V\,\hat{e}_x$ και ν' απαλλείψουμε από τις εξ. (4.72) και (4.73) το μ_1).

4.7.2. α) Να παραχτούν οι σχέσεις (4.23) - (4.25)

β) Να βρεθεί η γενική σχέση διασποράς για τα μαγνητοακουστικά κύματα και να εντοπιστούν ορισμένοι βασικοί τύποι κυμάτων.

<u>Λύση</u>

α) $$(\vec{k}\times\vec{B}_1)\times\vec{B}_0 = -\vec{B}_0\times(\vec{k}\times\vec{B}_1) = B_0\,[(\hat{e}_z\cdot\vec{k})\vec{B}_1 - (\hat{e}_z\cdot\vec{B}_1)\vec{k}] \tag{4.74}$$

$$(4.20) \rightarrow \vec{B}_1 = i\vec{k}\times(\vec{\xi}\times\vec{B}_0) = iB_0\,[(\hat{e}_z\cdot\vec{k})\vec{B}_1 - (\hat{e}_z\cdot\vec{B}_1)\vec{k}] \tag{4.75}$$

$$\vec{k}\cdot\vec{B}_1 = iB_0\,[(\vec{k}\cdot\hat{e}_z)\,(\vec{k}\cdot\vec{\xi}) - (\vec{k}\cdot\vec{\xi})\,(\vec{k}\cdot\hat{e}_z)] = 0 \tag{4.76}$$

$$\hat{e}_z\cdot\vec{B}_1 = iB_0\,[\,(\vec{k}\cdot\hat{e}_z)\,(\hat{e}_z\cdot\vec{\xi}) - (\vec{k}\cdot\vec{\xi})\,] =$$

$$= iB_0\,[\,(\vec{k}\cdot\hat{e}_z)\xi - (\vec{k}\cdot\vec{\xi})\,] = iB_0\,[k\cos\theta\,\xi_z - (\vec{k}\cdot\vec{\xi})\,] \tag{4.77}$$

$$k\cdot(4.21) \rightarrow -\omega^2\mu_0\,(\vec{\xi}\cdot\vec{k}) = \gamma p_0(\vec{k}\cdot\vec{\xi})k^2 +$$

$$1/4\pi i B_0(\hat{e}_z\cdot\vec{k})\,(\vec{k}\cdot\vec{B}_1)-(\hat{e}_z\cdot\vec{B}_1)k^2\,]$$

$$\omega^2(\vec{\xi}\cdot\vec{k}) = V_S{}^2\,k^2\,(\vec{\xi}\cdot\vec{k}) - V_A{}^2\cos\theta\,\xi_z + k^2\,V_A{}^2\,(\vec{\xi}\cdot\vec{k}) \tag{4.23}$$

$$\hat{e}_z\cdot(4.21) \rightarrow -\omega^2\mu_0(\hat{e}_z\cdot\vec{\xi}) = -\gamma p_0(\vec{k}\cdot\vec{\xi})\,(\hat{e}_z\cdot\vec{k}) +$$

$$iB_0/4\pi\,[(\hat{e}_z\cdot\vec{k})\,(\hat{e}_z\cdot\vec{B}_1) - (\hat{e}_z\cdot\vec{B}_1)\,(\hat{e}_z\cdot\vec{k})\,]$$

$$\omega^2\xi_z = V_A{}^2\,k\cos\theta\,(\vec{\xi}\cdot\vec{k}) \tag{4.24}$$

$$(\vec{k}\times\hat{e}_z)\cdot(4.21) \rightarrow -\omega^2\mu_0(\vec{k}\times\hat{e}_z)\cdot\vec{\xi} = \gamma P_0\,(\vec{k}\cdot\vec{\xi})\,(\vec{k}\times\hat{e}_z)\cdot\vec{k} +$$

$$+\,iB_0\,[(\hat{e}_z\cdot\vec{k})(\vec{k}\times\hat{e}_z)\cdot\vec{B}_1 - (\hat{e}_z\cdot\vec{B}_1)\,(\vec{k}\times\hat{e}_z)\cdot\vec{k}\,] \tag{4.78}$$

Είναι

$$iB_0\,[(\hat{e}_z\cdot\vec{k})(\vec{k}\cdot\hat{e}_z)\cdot\vec{B}_1] = i/4\pi B_0\,[\,(\hat{e}_z\cdot\vec{k})\,(\vec{k}\cdot\hat{e}_z)\,(\vec{k}\cdot\hat{e}_z)\cdot\vec{\xi}\,] -$$

$$-\;(\hat{e}_z\cdot\vec{k})\,(\vec{k}\cdot\vec{\xi})\,(\vec{k}\cdot\hat{e}_z)\cdot\hat{e}_z] = -B_0{}^2/4\pi\,k^2\cos^2\theta \tag{4.79}$$

Η σχέση (4.78) μέσω της (4.79) δίνει

$$[\,\omega^2 + V_A{}^2\,k^2\cos^2\theta\,]\,(\vec{k}\cdot\hat{e}_z)\cdot\vec{\xi} = 0 \tag{4.25}$$

β) Απαλλείφοντας τα $(\vec{k}\cdot\vec{\xi})$ και ξ_z από τις (4.23) και (4.24) εύκολα προκύπτει

$$\omega^2 - k^2\omega^2(V_S^2 + V_A^2) + k^4\,V_S^2\,V_A^2\cos^2\theta = 0 \tag{4.80}$$

Θεωρώντας την (4.80) σαν τριώνυμο ως προς $(\omega/k)^2$ βρίσκουμε η γενική σχέση διασποράς

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{2}\left\{ V_S^2 + V_A^2 \pm \left[(V_S^2+V_A^2) - 4\, V_S^2 V_A^2 \cos^2\vartheta\right]^{1/2} \right\} \qquad (4.81)$$

Υπάρχουν δυο είδη κυμάτων τα ταχέα μαγνητοακουστικά κύματα που αντιστοιχούν στο + και τα βραδέα που αντιστοιχούν στο −.

Ταχέα

$$\vec{k} // \vec{B}_0 \ (\vartheta = 0) \quad \omega^2/k^2 = V_S{}^2 \qquad (4.82)$$

$$\vec{k} \perp \vec{B}_0 \ \left(\vartheta = \frac{\pi}{2}\right) \frac{\omega^2}{k^2} = V_S^2 + V_A^2 \qquad (4.83)$$

Για $P_0 \ll 1$ $\quad \omega^2/k^2 = V_A{}^2$ (ταχύ κύμα Alfven) (4.84)

Βραδέα

$$\vec{k} // \vec{B}_0 \quad \omega^2/k^2 = V_A{}^2 \quad \text{(κύμα Alfven)} \qquad (4.85)$$

4.7.3. Να βρεθεί η σχέση διασποράς των ιοντικών κυμάτων πλάσματος χωρίς να χρησιμοποιηθεί η προσέγγιση πλάσματος. Από αυτή να εκτιμηθεί πότε ισχύει η προσέγγιση πλάσματος.

Λύση Αφού δεν θα επικαλεστούμε την προσέγγιση πλάσματος έχουμε $n_i \neq n_e$ και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη γραμμοποιημένη εξίσωση Poisson η οποία γράφεται

$$\nabla \cdot E_1 = k^2 \Phi_1 = 4\pi e (n_{i1} - n_{e1}) \qquad (4.86)$$

Η διαταραχή της πυκνότητας των ηλεκτρόνιων n_{e1} βρίσκεται όπως στην παράγραφο 4.4.3 από τη γραμμοποιημένη εξίσωση Boltzmann

$$\eta_{e1} = \frac{e\,\varphi_1}{\kappa\, T_e}\,\eta_o \qquad (4.38\alpha)$$

Η εξ. (4.86) μέσω της (4.38α) γράφεται

$$\varphi_1 \left(\varphi^2 + \frac{4\pi\, \eta_1\, e^2}{\kappa\, T_e} \right) = 4\pi\, e\, \eta_{i1} \qquad (4.87)$$

ή

$$\varphi_1 (k^2 \lambda_D^2 + 1) = 4\pi\, \eta_{i1}\, \lambda_D^2 \qquad (4.87)$$

όπου λ_D το μήκος θωράκισης Debye (εξ. (1.17)).

Η η_{i1} μπορεί να βρεθεί από τη γραμμοποιημένη εξίσωση συνέχειας για τα ιόντα (εξ. (4.39))

$$\eta_{e1} = \eta_o \frac{k}{\omega} V_{e1} \qquad (4.88)$$

Η γραμμοποιημένη εξίσωση κίνησης για τα ιόντα (εξ. (4.37α)) μέσω των εξ. (4.87) και (4.88) δίνει

$$i\,\omega\, M\, \eta_o\, V_{i1} = \left(e\, \eta_o\, i\, k\, \frac{4\pi\, e\, \lambda_D^2}{1 + k^2 \lambda_D^2} + i\, \gamma_i\, \kappa\, T_i\, k \right) \frac{k}{\omega}\, \eta_o\, V_{i1} \qquad (4.89)$$

οπότε

$$\frac{\omega}{k} = \left(\frac{k\, T_e}{M} \frac{1}{1 + k^2 \lambda_D^2} + \frac{\gamma_i\, k\, T_i}{M} \right)^{1/2} \qquad (4.90)$$

Η διαφορά της εξ. (4.90) από την (4.40) εντοπίζεται στον παράγοντα $k^2\lambda_D{}^2$. 'Αρα η προσέγγιση πλάσματος είναι καλή αν $k^2\lambda_D{}^2 = (2\pi\ \lambda_D/\lambda)^2 \ll 1$. Αφού στην πράξη το μήκος θωράκισης Debye είναι μικρό η προσέγγιση πλάσματος ισχύει για όλα τα μήκη κύματος με εξαίρεση τα πάρα πολύ μικρά.

4.7.4. Αν ένα κύμα έχει αρκετά μικρή φασική ταχύτητα ώστε να συντονιστεί με τη θερμική ταχύτητα των ιόντων μπορεί να συμβεί απόσβεση Landau για τα ιόντα. Η ανάλυση του φαινόμενου αυτού μπορεί να γίνει με τρόπο ανάλογο αυτού της παραγρ. 4.6.1. Ενδεικτικά.

α) Αν f_{oe} και f_{oi} είναι οι συναρτήσεις κατανομής για τα ηλεκτρόνια και τα ιόντα αντίστοιχα στην κατάσταση ισορροπίας βρείτε τις χραμμοποιημένες εξισώσεις Vlasov για κάθε κατανομή.
β) Δείξτε ότι για διαταραχές ανάλογες μ' αυτή της παραγράφου 4.6.1. Η σχέση διασποράς του συστήματος εξακολουθεί να είναι η ίδια (εξ. (4.59)) με $\hat{f}_0(v) \rightarrow \hat{f}_{0e}(v) + (m/M)\,\hat{f}_{0i}(v)$ όπου μ (M) η μάζα ηλεκτρονίου (ιόντος).

<u>Λύση</u> α) Οι χραμμοποιημένες εξισώσεις Vlasov για μικρές διαταραχές f_{1e} για τα ηλεκτρόνια και f_{1i} για τα ιόντα γράφονται

$$\frac{\partial f_{1e}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla} f_{1e} - \frac{e}{m}\vec{E}_1 \cdot \frac{\partial f_{oe}}{\partial \vec{v}} = 0 \qquad \text{ηλεκτρόνια} \qquad (4.54)$$

$$\frac{\partial f_{1e}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla} f_{1i} - \frac{e}{m}\vec{E}_1 \frac{\partial f_{oi}}{\partial \vec{v}} = 0 \qquad \text{ιόντα} \qquad (4.91)$$

β) Για διαταραχές ανάλογες του $e^{i(kx-\omega t)}$ στη μια διάσταση παίρνουμε από τις (4.54) και (4.91) αντίστοιχα

$$f_{1e} = \frac{i\, e\, E_x}{m} \; \frac{\partial f_{oe}/\partial_x}{\omega - k\, V_x} \tag{4.92}$$

$$f_{1i} = -\, \frac{i\, e\, E_x}{M} \; \frac{\partial f_{oi}/\partial_x}{\omega - k\, V_x} \tag{4.93}$$

Η εξίσωση Poisson γράφεται

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = i\, k\, E_x = 4\, \pi\, e(\eta_{1i} - \eta_{1e}) = 4\, \pi\, e \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_{1i}\, d^3V - \int_{-\infty}^{+\infty} f_{1e}\, d^3V \right] \tag{4.94}$$

Προχωρώντας όπως στη σελίδα 104 βρίσκουμε

$$1 = \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \hat{f}_{oe}/\partial V_x + \frac{m}{M}\, \partial \hat{f}_{oi}/\partial V_x}{V_x - (\omega/k)}\, dV_x = \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \hat{f}_o/\partial V_x}{V_x - (\omega/k)}\, dV_x \tag{4.95}$$

όπου

$$\hat{f}_o = \hat{f}_{oe} + \frac{m}{M}\, \hat{f}_{oi}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

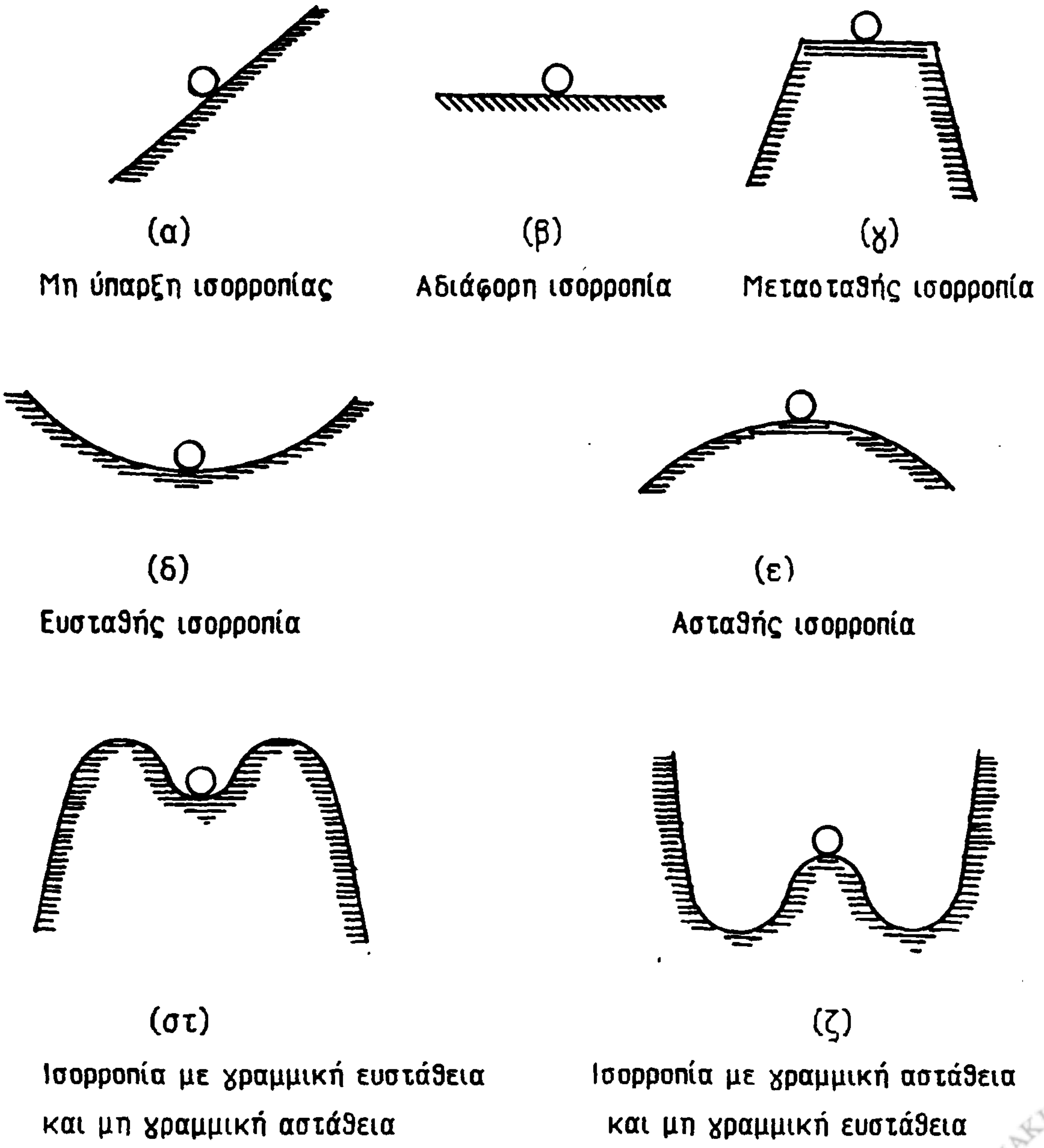
ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΚΑΙ ΣΤΑΘΕΡΟΤΗΤΑ

5.1. Εισαγωγή

Το πρόβλημα της ισορροπίας και σταθερότητας είναι κεντρικής σημασίας για το θερμοπυρηνικό πλάσμα. Ένας τρόπος που χρησιμοποιείται σήμερα για τον περιορισμό (confinement) του πλάσματος αφορά κατάλληλα εξωτερικά μαγνητικά πεδία (magnetic confinement) έτσι ώστε το πλάσμα να παγιδεύεται όπως στην περίπτωση του μαγνητικού καθρέφτη που εξετάσαμε στην § 2.3.2. Και μάλιστα αν στο πλάσμα θεωρηθούν μόνο κινήσεις σωματιδίων, ο σχεδιασμός τέτοιων μαγνητικών πεδίων φαίνεται μάλλον εύκολος. Πραγματικά, αρκεί να μεριμνήσει κανείς ώστε οι δυναμικές γραμμές να μη διαπερνούν τα τοιχώματα της διάταξης που χωρίζουν το πλάσμα από το κενό και να κανονιστεί η συμμετρία του συστήματος ώστε όλες οι ολισθήσεις των σωματιδίων ($\vec{V}_E$,$\vec{V}_{gc}$ κ.λ.π.) να είναι παράλληλες στα τοιχώματα. Όπως όμως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο στο πλάσμα δημιουργούνται και εσωτερικά πεδία. Μια διαταραχή που μπορεί να έχει τη μορφή μεταβολής της πυκνότητας φορτίου μπορεί να δημιουργήσει πεδία $\vec{E}$ οπότε να εμφανιστούν νέες $\vec{E} \times \vec{B}$ ολισθήσεις με το εξωτερικό πεδίο $\vec{B}$ που όπως και να το είχαμε σχεδιάσει αρχικά είναι πιθανό να οδηγήσουν το πλάσμα στα τοιχώματα. Κάτι παρόμοιο μπορεί να συμβεί με ρεύματα και επομένως εσωτερικά πεδία $\vec{B}$

που θα έχουν σαν αποτέλεσμα ολισθήσεις λόγω μεταβολής του πεδίου $\vec{B}$.

Συνήθως η μελέτη του περιορισμού του πλάσματος χωρίζεται σε δύο επι μέρους προβλήματα, της ισορροπίας και της σταθερότητας. Η διαφορά τους συνάγεται αν επικαλεστούμε διάφορα μηχανικά ανάλογα όπως στο σχήμα 1. Από αυτά φαίνεται ότι η ισορροπία είναι αναγκαία αλλά όχι και ικανή συνθήκη για τον περιορισμό. Η ικανή συνθήκη προέρχεται από την



Σχήμα 5.1. Μηχανική αναλογία διαφόρων τύπων ισορροπίας

απαίτηση η ισορροπία να είναι ευσταθής. Έτσι στο πλάσμα θα πρέπει να καθοριστεί μια κατάσταση ισορροπίας και στη συνέχεια να εξετάσει αν μια απόκλιση (διαταραχή) από την κατάσταση ισορροπίας παίρνει ενισχυτικό ή αποσβυστικό χαρακτήρα. Στην πρώτη περίπτωση μιλάμε για εμφάνιση ασταθειών. Στην περίπτωση (στ) του σχήματος (5.1) το σφαιρίδιο βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας εφόσον η διαταραχή δεν είναι μεγάλη. Αν υπερβεί ένα κατώφλι η κατάσταση μετατρέπεται σε ασταθή. Τέτοιες μη γραμμικές αστάθειες ονομάζονται εκρηκτικές. Στην περίπτωσης (ζ) η ισορροπία είναι μεν ασταθής αλλά το σφαιρίδιο δεν έχει τη δυνατότητα να πάει μακρυά. Αστάθειες αυτού του είδους δεν είναι στις πιο πολλές περιπτώσεις επικίνδυνες.

Η μελέτη της ισορροπίας και της σταθερότητας του πλάσματος είναι γενικά δύσκολα προβλήματα. Η δυσκολία αυξάνει καθώς εξετάζονται σε πιο περίπλοκες μαγνητικές γεωμετρίες. Μπορούν να αντιμετωπιστούν σχετικά απλά σε μονοδιάστατους σχηματισμούς, μάλλον προσεγγιστικά σε διδιάστατους ενώ πολλά μένουν ακόμα να ερευνηθούν στις τρεις διαστάσεις. Το πρόβλημα του καθορισμού της ισοροπίας είναι γενικά μη γραμμικό (βλέπε άσκηση 5.4.4). Στην περίπτωση της σταθερότητας μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος της γραμμοποίησης (γραμμική σταθερότητα). Από την άποψη αυτή το πρόβλημα της ισορροπίας είναι πιό δύσκολο από της σταθερότητας.

5.2. Στατική Μαγνητοϋδροδυναμική Ισορροπία.

Οι σχέσεις της στατικής μαγνητοϋδροδυναμικής ισορροπίας προκύπτουν αν στις (MHD) εξισώσεις αμελήσουμε το βαρυτικό όρο (εξ. 3.28) (αν εξαιρεθούν μερικές εφαρμογές στην Αστροφυσική και στη φυσική της Ιονόσφαιρας ο όρος αυτός είναι ασήμαντος), και θέσουμε $\partial/\partial t=0$. Τότε παίρνουμε

$$\vec{\nabla}P = \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c} \tag{5.1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} \tag{5.2}$$

Οι εξισώσεις (5.1) και (5.2) σε συνδιασμό με την

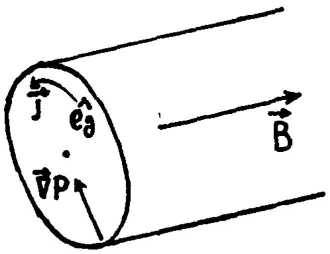
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{5.3}$$

προσδιορίζουν κατ' αρχή τα μεγέθη P,J και B της κατάστασης ισορροπίας. Η ισορροπία χαρακτηρίζεται στατική γιατί η ροή του ρευστού έχει υποτεθεί ασήμαντη. Πράγματι στην § 3.3 στην πορεία για την παραγωγή των (MHD) εξισώσεων ο όρος $(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}$ έχει αμεληθεί σαν μικρός. Καίτοι κανείς μπορεί να επικαλεστεί ένα πρόσθετο λόγο, δηλαδή μη μηδενική ροή συνεπάγεται πηγή ελεύθερης ενέργειας που παράγει αστάθειες, ο μηδενισμός του όρου αυτού δεν αποτελεί πάγια θέση. Σήμερα μάλιστα ισορροπίες πλάσματος που παριλαβαίνουν και ροή του ρευστού παρουσιάζουν αυξανόμενο ενδιαφέρον.

Η μορφή των εξισώσεων (5.1) -(5.2) φαίνεται απλή. Ορισμένα βασικά χαρακτηριστικά προκύπτουν όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω εύκολα. Ωστόσο η παραγωγή ισορροπιών συμβιβαστών με κατάλληλες συνοριακές συνθήκες είναι ένα περίπλοκο πρόβλημα ιδιαίτερα σε τριδιάστατες γεωμετρίες.

5.2.1. Χαρακτηριστικά της Μαγνητοϋδροδυναμικής Ισορροπίας.

Η εξίσωση (5.1) απλά μας λέει ότι η δύναμη που ωφείλεται στη μεταβολή (κλίση) της πυκνότητας P εξισορροπεί τη δύναμη Lorentz. Για να γίνει αυτό πιο κατανοητό ας δώσουμε ένα παράδειγμα μονοδιάστατης ισορροπίας όπως φαίνεται στο σχήμα (5.2).



Σχ. 5.2. Στην κατάσταση ισορροπίας η δύναμη Lorentz ($\vec{J} \times \vec{B}/C$) εξισορροπεί τη δύναμη $\vec{\nabla}P$ που ωφείλεται στη μεταβολή της πίεσης.

Σ' αυτό μια κυλινδρική στήλη πλάσματος πολύ μεγάλου μήκους με μια κλίση πίεσης $\vec{\nabla}P$, κάθετη στον άξονα του κυλίνδρου, υπόκειται την επίδραση ενός ομογενούς μαγνητικού πεδίου παράλληλου προς τον άξονα του κυλίνδρου. Σύμφωνα με όσα συζητήσαμε στην § 3.3.1 επάγεται ένα διαμαγνητικό ρεύμα στην διεύθυνση $\hat{e}_9$. Από τη σκοπιά της ισορροπίας η αναγκαιότητα ενός τέτοιου ρεύματος φαίνεται αν πολλαπλασιάσουμε την (εξ. 5.1) εξωτερικά με το πεδίο $\vec{B}$. Τότε

$$\vec{J}_9 = C\,\frac{\vec{B} \times \nabla P}{B^2} = C(kT_i + kT_e)\,\frac{\vec{B} \times \vec{\nabla} n}{B^2} \qquad (5.4)$$

Πράγματι την ίδια ακριβώς σχέση βρήκαμε στην άσκηση 3.6.1 για την πυκνότητα $\vec{J}_D$ του διαμαγνητικού ρεύματος. Ο απλός αυτός μηχανισμός έχει προταθεί και ερευνάται και σήμερα σαν ένας από τους πολλούς τρόπους για το μαγνητικό περιορισμό του θερμοπυρηνικού πλάσματος. Μάλιστα πήρε το όνομά του από τη διεύθυνση του επαγώμενου χαρακτηριστικού διαμαγνητικού ρεύματος και έτσι ονομάζεται συμπιεστής 9 (9-pinch).

Από την εξίσωση (5.2) προκύπτει

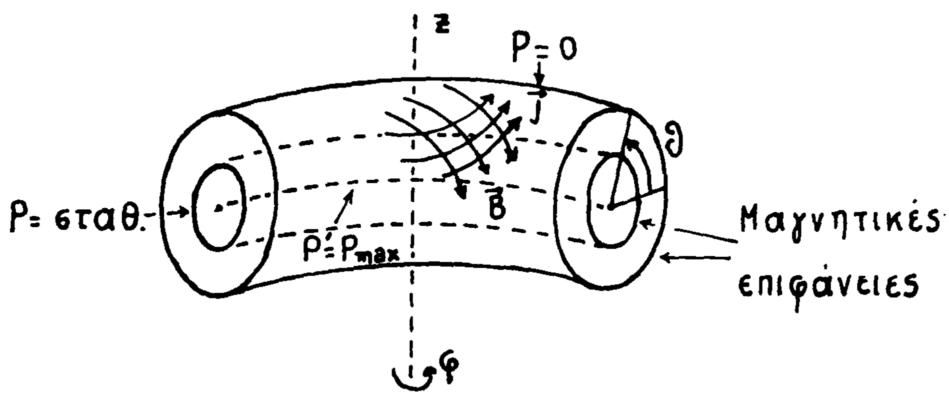
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \qquad (5.5)$$

που εύλογα σημαίνει ότι δεν υπάρχουν πηγές η καταβόθρες ρεύματος. Επί πλέον από την εξίσωση (5.1) παίρνουμε

$$\vec{B}\cdot\vec{\nabla}P = 0 \tag{5.6}$$

$$\vec{J}\cdot\vec{\nabla}P = 0 \tag{5.7}$$

Οι δύο τελευταίες σχέσεις μας λένε ότι το πεδίο $\vec{B}$ και η πυκνότητα ρεύματος $\vec{J}$ είναι παντού κάθετα στην κλίση της πίεσης $\vec{\nabla}P$. Αφού η κλίση $\vec{\nabla}P$ είναι κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια P = σταθερή βγαίνει το συμπέρασμα ότι τόσο το πεδίο $\vec{B}$ όσο και το ρεύμα $\vec{J}$ εφάπτονται των επιφανειών σταθερής πίεσης. Σ' ένα περιορισμένο πλάσμα υπάρχει σχεδόν παντού μη μηδενική κλίση πίεσης και επομένως υπάρχουν καλά καθορισμένες κλειστές επιφάνειες πίεσης. Πάνω σ' αυτές βρίσκονται οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου και οι γραμμές της πυκνότητας ρεύματος. Γι αυτό ονομάζονται μαγνητικές επιφάνειες ή επιφάνειες ροής. Ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να είναι μια τοροειδής διάταξη (σχήμα (5.3)). Μπορούμε να τη φανταστούμε να κατασκευάζεται αν ο κύλινδρος του σχήματος (5.2) καμφθεί ώστε να πάρει τη μορφή σαμπρέλας.



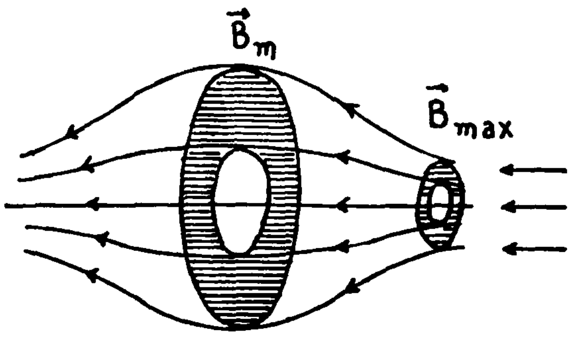
Σχήμα 5.3. Τμήμα τοροειδούς πλάσματος. Η διακεκομένη γραμμή που αντιστοιχεί στο μέγιστο της πίεσης καλείται μαγνητικός άξονας.

Στη γενική περίπτωση τόσο η σαμπρέλα όσο και η διατομή της δεν είναι κυκλικές. Αν υπάρχει συμμετρία ως προς τον άξονα z το πρόβλημα μετατρέπεται σε διδιάστατο. Στην κατηγορία των συμμετρικών ως προς άξονα τοροειδών πλασμάτων περιλαμβάνεται το tokamak, η πιο σημαντική και πλατιά μελετημένη διάταξη στην περιοχή έρευνας της πυρηνικής σύντηξης σήμερα.

Η συνιστώσα της εξ. (5.1) η παράλληλη στο πεδίο $\vec{B}$ γράφεται

$$(\partial P / \partial \ell) = 0 \qquad (5.8)$$

όπου ℓ είναι η παράλληλη προς μια δυναμική χραμμή συνιστώσα. Για σταθερή θερμοκρασία η εξ. (5.8) σημαίνει ότι η πυκνότητα είναι σταθερή κατά μήκος μιας δυναμικής χραμμής. Αυτό σε μια πρώτη ματιά φαίνεται λάθος. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε ένα μαγνητικό καθρέφτη στον οποίο εισάγουμε πλάσμα όπως φαίνεται στο σχήμα (5.4). Καθώς το πλάσμα εισρέει προς την κεντρική περιοχή ασθενούς $\vec{B}$ η πυκνότητα του δεν παραμένει σταθερή κατά μήκος μιας δυναμικής χραμμής. Ωστόσο η κατάσταση αυτή δεν ικανοποιεί τις συνθήκες στατικής ισορροπίας αφού έχουμε μη μηδενική ροή πλάσματος



Σχήμα 5.4. Διαστολή πλάσματος που εμβάλεται μέσα σ' ένα μαγνητικό καθρέφτη.

Σε μια στατική κατάσταση ισορροπίας με $\vec{V} = 0$ τα περισσότερα από τα παγιδευμένα σωματίδια βρίσκονται στην κεντρική περιοχή του καθρέφτη, όπου ο λόγος (B_{max}/B) είναι μεγαλύτερος. Επειδή η διατομή μεγαλώνει από τα άκρα προς το κέντρο η πυκνότητα κατά μήκος μιας δυναμικής γραμμής παραμένει σταθερή.

Ας αναφέρουμε εδώ ότι στην περίπτωση ανοικτών μαγνητικών γεωμετριών όπως αυτή του μαγνητικού καθρέφτη η περιγραφή με βάση το μαγνητοϋδροδυναμικό μοντέλο είναι φτωχή. Σε τέτοιες γεωμετρίες υπάρχει γενικά ανισοτροπία στις κατανομές ταχυτήτων (για παράδειγμα η ταχύτητες παράλληλα και κάθετα στο μαγνητικό πεδίο είναι διαφορετικές) και οι κατανομές μπορεί να μην είναι τύπου Maxwell γεγονός που υποτίθεται σε μια θεωρία ρευστού. Αντίθετα το μαγνητοϋδροδυναμικό μοντέλο προσεγγίζει ικανοποιητικά τη φυσική σε τοροειδείς μαγνητικές γεωμετρίες.

Θα αναφέρουμε χωρίς απόδειξη δύο θεωρήματα που ικανοποεί η ιδανική μαγνητοϋδροδυναμική ισορροπία.

1. _Θεώρημα 1 (ισχυρότητας)._ Δεν είναι δυνατόν να υπάρχει κλειστή MHD ισορροπία που να υποστηρίζεται από μαγνητικά πεδία που προέρχονται αποκλειστικά από εσωτερικά ρεύματα του πλάσματος.

Μ' άλλα λόγια για τον μαγνητικό περιορισμό του πλάσματος η ύπαρξη εξωτερικών αγωγών ρεύματος είναι απαραίτητη.

2. _Θεώρημα 2._ Ένα μαγνητικό πεδίο με μοναδική συνιστώσα την τοροειδή (B_φ στο σχήμα 5.3) δεν είναι δυνατόν να υποστηρίξει κατάσταση ισορροπίας τοροειδούς σχηματισμού πλάσματος.

5.2.2. Η παράμετρος β.

Αν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (5.1) την πυκνότητα ρεύματος $\vec{J}$ από την (εξ. (5.2) παίρνουμε

$$\vec{\nabla}P = \frac{1}{4\pi}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi}\left[(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{B}\right] - \frac{1}{2} \nabla B^2 \tag{5.9}$$

ή

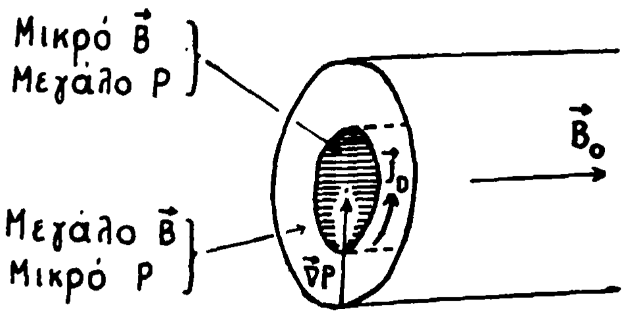
$$\vec{\nabla}\left(P + \frac{B^2}{8\pi} \right) = \frac{1}{4\pi} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{B} \tag{5.10}$$

Αν δεν υπάρχει διαμήκης μεταβολή του μαγνητικού πεδίου, όπως στην περίπτωση του κυλίνδρου του σχήματος (5.2) το δεύτερο μέλος της εξ. (5.10) μηδενίζεται και επομένως

$$P + \frac{B^2}{8\pi} = \text{σταθερό} \tag{5.11}$$

Η απλή σχέση (5.11) δηλώνει ότι στην καταστaση ισορροπίας το άθροισμα της κινητικής πίεσης P του πλάσματος και της μαγνητικής πίεσης είναι στεθερό. Έτσι το πεδίο είναι μεγέλο σε περιοχές όπου η πίεση P είναι μικρή και μικρό σε περιοχές όπου η πίεση P είναι μεγάλη όπως φαίνεται στο σχήμα (5.5). Η μείωση του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του πλάσματος ωφείλεται στο διαμαγνητικό ρεύμα $\vec{J}_D$.

Επειδή η μαγνητική πίεση είναι ανάλογη του τετραγώνου του μαγνητικού πεδίου μικρά μαγνητικά πεδία δημιουργούν μεγάλες μαγνητικές πιέσεις. Για παράδειγμα πίεση 1atm απαιτεί πεδίο 0.5×10^4 Gauss (0.5 Tesla).



Σχήμα 5.5.Το διάμαγνητικό ρεύμα ελαττώνει το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_0$ ώστε το άθροισμα κινητικής και μαγνητικής πίεσης να παραμένει σταθερό.

Υπολογίζεται ότι για τον έλεγχο του θερμοπυρηνικού πλάσματος απαιτούνται πιέσεις της τάξης των 10^2 atms που αντιστοιχούν σε μεγάλα αλλά όχι παράλογα μαγνητικά πεδία $5x10^4$ Gauss (5 Tesla). Η μαγνητική πίεση είναι μαγάλη σε σύγκριση μ' αυτή που πετυχαίνουμε με ηλεκτρικά πεδία. Για παράδειγμα ένα ηλεκτρικό πεδίο E = 1statvolt/cm και ένα μαγνητικό B = 1Gauss εξασκούν την ίδια πίεση. (Η μονάδα Gauss είναι πολύ μικρή. Στο MKSA σύστημα η αναλογία είναι $E = 3x10^8$ Volt/m και B = 1 Tesla). Αυτός είναι ο κύριος λόγος για τον οποίο δεν χρησιμοποιούνται ηλεκτρικά πεδία για τον περιορισμό του θερμοπυρηνικού πλάσματος.

Το μέτρο της ικανότητας με την οποία το εξωτερικό πεδίο χρησιμοποιείται για την δημιουργία διαμαγνητικού ρεύματος, δηλαδή το μέγεθος του διαμαγνητικού φαινομένου χαρακτηρίζεται από το λόγο

$$\beta \equiv \frac{n \sum_i k\, T_i}{B^2/8\pi} = \frac{\text{Κινητική Πίεση}}{\text{Μαγνητική Πίεση}} \tag{5.12}$$

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε πλάσματα με μικρές τιμές της παραμέτρου β στην περιοχή από 10^{-3} έως 10^{-6}. Σ' αυτά το διαμαγνητικό φαινόμενο είναι ασήμαντο και έτσι δικαιολογείται η υπόθεσή μας να θεωρούμε ομογενή αδιατάραχα μαγνητικά πεδίο $\vec{B}_0$. Σε πλάσματα με μεγάλες τιμές της παράμετρου β η ισορροπία θα ήταν πιο πολύπλοκη. Στους αντιδραστήρες σύντηξης η παραγόμενη ενέργεια είναι ανάλογη του η^2 ενώ το κόστος για κατασκευή των απαιτούμενων μαγνητικών πεδίων είναι ανάλογο κάποιας δύναμης του Β. Έτσι, από οικονομική άποψη το β πρέπει να παίρνει τιμές μαγαλύτερες από 1%.

Μπορεί κατ' αρχή να έχουμε πλάσμα με β=1 στο οποίο το διαμαγνητικό ρεύμα δημιουργεί ένα ακριβώς ίσο και αντίθετο μαγνητικό πεδίο με το εξωτερικό. Στην ιδανική αυτή περίπτωση υπάρχουν δύο περιοχές. Μια περιοχή πλάσματος χωρίς πεδίο και μια με πεδίο χωρίς πλάσμα. Αν οι δυναμικές γραμμές του πεδίου είναι παράλληλες ευθείες η ισορροπία είναι μάλλον ασταθής. Είναι σαν να συγκρατείς μια στήλη μαρμελάδας με τεντωμένα νήματα καουτσούκ. Παραμένει ανοικτό ζήτημα αν μια τέτοια απλή διάταξη πλάσματος με β =1 θα μπορέσει να πραγματοποιηθεί. Υπάρχουν μαγνητικές γεωμετρίες όπου περιοχές του πλάσματος δεν υφίστανται πεδία, όπως για περάδειγμα εσωτερικές περιοχές μεγάλης έκτασης πλάσματος που υφίσταται επιφανειακά μαγνητικά πεδία. Τότε η παράμετρος β μπορεί να απειριστεί γι αυτό συνηθίζεται να ορίζεται σαν

$$\beta \equiv \frac{\left(n \sum_i k\, T_i\right)_{max}}{\left(B^2/8\pi\right)_{max}} \tag{5.13}$$

δηλαδή σαν το λόγο της μέγιστης κινητικής προς τη μαγνητική πίεση. Εναλλακτικά μπορεί επίσης να οριστεί σαν

$$\beta \equiv \frac{n \sum_{i} k T_i}{n \sum_{i} k T_i + B^2/8\pi} \tag{5.14}$$

Τόσο στον ορισμό (5.13) όσο και στον (5.14) ισχύει

$$0 \le \beta \le 1 \tag{5.15}$$

5.3. Σταθερότητα

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει όταν καθοριστεί μια κατάσταση ισορροπίας το επόμενο ερώτημα που θα πρέπει να μας απασχολήσει είναι αν είναι ή όχι ευσταθής, δηλαδή αν για μια μικρή διαταραχή θα έχουμε μια ταλάντωση γύρω από την κατάσταση ισορροπίας η αν η διαταραχή θα αυξάνει. Στο μηχανικό ανάλογο του σχήματος (5.1ε) το σφαιρίδιο στην κατάσταση ισορροπίας έχει μέγιστη δυναμική και μηδενική κινητική ενέργεια. Η ισορροπία είναι ασταθής και για μικρή απόκλιση το σωματίδιο κατεβαίνοντας μια πλευρά του στηρίγματος αποκτά κινητική ενέργεια σε βάρος της δυναμικής ώστε η ολική του ενέργεια παραμένει σταθερή. Στην περίπτωση του προηγούμενου κεφαλαίου που μελετήσαμε κύματα η αδιατάραχτη κατάσταση ήταν μια κατάσταση στατικής τέλειας θερμοδυναμικής ισορροπίας. Οι κατανομές ταχυτήτων των σωματίδιων ήταν τύπου Maxwell και η πυκνότητα και το μαγνητικό πεδίο ομογενή.

Μια τέτοια κατάσταση ισορροπίας είναι και κατάσταση μέγιστης εντροπίας και δεν υπάρχει εσωτερική πηγή ενέργειας για να προκαλέσει τη δημιουργία κυμάτων. Έτσι οι διαταραχές που θεωρήσαμε προκαλούνταν από εξωτερικά μέσα. Στην παρούσα παράγραφο θα θεωρήσουμε καταστάσεις ισορροπίας με την έννοια ότι η συνισταμένη των δυνάμεων που εξασκούνται στο πλάσμα είναι μηδέν αλλά δεν είναι καταστάσεις τέλειας θερμοδυναμικής ισορροπίας και επομένως μέγιστης εντροπίας. Έτσι υπάρχει εσωτερική πηγή ελεύθερης ενέργειας που αυθόρμητα προκαλεί κύματα και η εμφάνιση μιας αστάθειας είναι συνυφασμένη με την εμφάνιση και ενίσχυση μιας διαταραχής η οποία ελαττώνει την διαθέσιμη ελεύθερη ενέργεια και φέρνει το πλάσμα πιο κοντά στην πραγματική θερμοδυναμική ισορροπία. Ας τονίσουμε ότι σε μια τέτοια διεργασία, όπως και στην περίπτωση του μηχανικού ανάλογου που σχολιάσαμε πριν, η ολική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή.

Στην ιδανική περίπτωση θα ήταν επιθυμητό να επιτύχουμε τελείως ευσταθή περιορισμό του πλάσματος. Όμως είναι πιθανό μια τέτοια κατάσταση να μην είναι δυνατό να επιτευχθεί και ασθενείς και αργά εξελισσόμενες αστάθειες είναι αποδεκτές αρκεί να μην οδηγούν σε πλήρη αποδιοργάνωση της κατάστασης ισορροπίας.

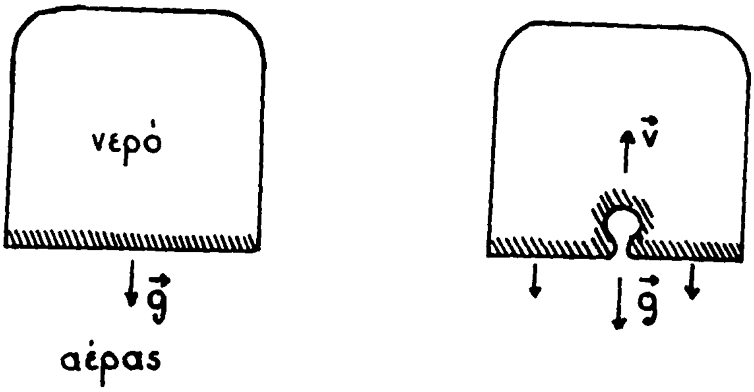
5.3.2. Ταξινόμιση Ασταθειών

Υπάρχει μια ατελείωτη ποικιλία ασταθειών στο πλάσμα που ωφείλεται στην πολαπλότητα τόσο των τύπων της ελεύθερης ενέργειας όσο και των δυνατών μετατοπίσεων. Για τη δόμιση ενός σχηματισμού περιορισμένου πλάσματος πρέπει κανείς να εξαλείψει εκείνες τις αστάθειες που είναι αναπόφευκτες και να αποφύγει όσες δεν μπορεί να εξαλείψει. Έτσι πρέπει πρώτα να μελετήσει ποιές είναι εξαλείψιμες και ποιές αναπόφευκτες. Ακόμη και μία αστάθεια να αγνοήσει μπορεί να οδηγηθεί σε τελείως λαθεμένα συμπεράσματα.

Οι διάφορες αστάθειες μπορεί να ταξινομηθούν ανάλογα με τον τύπο της αντίστοιχης υπεύθυνης ελεύθερης ενέργειας. Υπάρχουν τέσσερεις κύριες κατηγορίες.

1. Αστάθειες ρυακίων (Streaming instabilities). Στην περίπτωση αυτή είτε μια δέσμη ενεργητικών σωματιδίων διαπερνά το πλάσμα είτε ένα ρεύμα επάγεται μέσα στο πλάσμα έτσι ώστε τα διαφορετικού είδους σωματίδια (ηλεκτρόνια, ιόντα) να παρουσιάζουν μεταξύ τους ολισθήσεις στην αδιατάραχτη κατάσταση (κατάσταση ισορροπίας). Η ενέργεια ολίσθησης χρησιμοποιείται για την πρόκληση κυμάτων έτσι ώστε να μετατρέπεται σε ενέργεια ταλάντωσης.

2. Αστάθειες τύπου Rayleigh - Taylor. Αυτές συμβαίνουν όταν το πλάσμα δεν είναι ομογενές, για παράδειγμα όταν υπάρχει κλίση πίεσης η απότομο τοίχωμα. Επί πλέον μια εξωτερική δύναμη όχι ηλεκτρομαγνητικής προέλευσης εξασκείται στο πλάσμα. Μια ανάλογη αστάθεια είναι γνωστή από την Υδροδυναμική και συμβαίνει όταν ένα βαρύ ρευστό υποστηρίζεται από ένα ελαφρότερο όπως φαίνεται στην περίπτωση του αντεστραμένου ποτηριού με νερό στο σχήμα 5.5.



Σχ. 5.6. Υδροδυναμική αστάθεια τύπου Rayleigh - Taylor όπου ένα βαρύ ρευστό υποστηρίζεται από ένα ελαφρότερο.

Η επιφάνεια νερού που έρχεται σε επαφή με τον αέρα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας αφού η δύναμη από το νερό και από τον ατμοσφαιρικό αέρα είναι ίσες και αντίθετες (για να πετύχει το πείραμα έχουμε το ποτήρι σκεπασμένο μ' ένα λεπτό λείο χαρτί). Ωστόσο η ισορροπία είναι ασταθής αφού μια μικρή διαταραχή στην επιφάνεια επαφής τείνει να μεγαλώσει αποχτώντας κινητική ενέργεια σε βάρος της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας.

3. Παγκόσμιες Αστάθειες (Universal Instrabilities). Και στην περίπτωση που δεν υπάρχει ηλεκτρικό ή βαρυτικό πεδίο αστάθειες εμφανίζονται στο πλάσμα εφόσον είναι περιορισμένο. Πράγματι, τότε το πλάσμα δεν βρίσκεται σε τέλεια θερμοδυναμική ισορροπία και τείνει να επεκταθεί (διασταλεί) λόγω των δυνάμεων πίεσης). Η ενέργεια διαστολής μπορεί να προωθήσει μια αστάθεια. Μια τέτοια μορφή ελεύθερης ενέργειας παρουσιάζεται πάντοτε σ' ένα χωρικά πεπερασμένο πλάσμα και τα επακόλουθα κύματα ονομάζονται γενικές αστάθειες.

4. Κινητικές αστάθειες. Είναι αστάθειες που προκαλούνται λόγω ανισοτροπίας στην κατανομή ταχυτήτων. Στη θεωρία των ρευστών οι κατανομές ταχυτήτων υποτίθενται τύπου Maxwell. Αν οι κατανομές δεν είναι τύπου Maxwell υπάρχει μια παρέκλιση από τη θερμοδυναμική ισορροπία. Για παράδειγμα αν οι θερμοκρασίες παράλληλα και κάθετα στο μαγνητικό πεδίο είναι διαφορετικές μπορεί να προκληθεί μια αστάθεια που ονομάζεται τροποποιημένη αστάθεια του Harris[(6)]. Επίσης σ' ένα μαγνητικό καθρέφτη, όπως συζητήσαμε στην § 2.3.2 έχουμε απώλεια σωματιδίων με μεγάλα $U_{\parallel}/U_{\perp}$ εξαιτίας του κώνου θ_c (κώνος διαρροής). Η εχειρόμενη αστάθεια λόγω της ανισοτροπίας αυτής ονομάζεται αστάθεια του κώνου διαρροής (loss cone instability). Γενικά τέτοιες αστάθειες που ονομάζονται και μικροαστάθειες (microinstabilities) μπορούν να μελετηθούν στα πλαίσια της κινητικής θεωρίας.

5.3.3. Η αστάθεια των δύο ρυακίων.

Αυτή είναι ένα απλό παράδειγμα αστάθειας της πρώτης κατηγορίας. Ας θεωρήσουμε ένα ομογενες πλάσμα στο οποίο τα ηλεκτρόνια κινούνται μια σταθερή ταχύτητα $\vec{V}_0$ σε σχέση με τα ιόντα. Με άλλα λόγια τα ιόντα είναι ακίνητα για ένα παρατηρητή που κινείται μαζί με το "ρυάκι" τους. Υποθέτουμε ότι το πλάσμα είναι κρύο ($kT_e = kT_i = 0$) και ότι δεν υπάρχει αδιατάραχτο μαγνητικό πεδίο ($B_0 = 0$). Χρησιμοποιώντας το μοντέλο των δύο ρευστών και σημειώνοντας ότι η κατάσταση ισορροπίας δεν είναι στατική οι γραμμοποιημένες εξισώσεις κίνησης γράφονται

$$Mn_0 \frac{\partial \vec{V}_{i1}}{\partial t} = en_0 \vec{E}_1 \tag{5.16}$$

$$Mn_0 \left[\frac{\partial \vec{V}_{e1}}{\partial t} + (\vec{V}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_{e1} \right] = -en_0 \vec{E}_1 \tag{5.17}$$

Ο όρος $(\vec{V}_{e1} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}_0$ είναι μηδενικός αφού η ταχύτητα $\vec{V}_0$ υποτέθηκε σταθερή. Ας εξετάσουμε την περίπτωση διέγερσης ηλεκτοστατικών κυμάτων παράλληλων στην ταχύτητα $\vec{V}_0$, δηλαδή της μορφής

$$\vec{E}_1 = E\, e^{i(kx-\omega t)}\, \hat{e}_x \qquad \vec{k} // \vec{V}_0 // \hat{e}_x \tag{5.18}$$

Τότε οι εξισώσεις (5.16) και (5.17) γίνονται

$$-i\omega Mn_0 \vec{V}_{i1} = en_0 \vec{E}_1 \qquad \vec{V}_{i1} = \frac{ie}{M\omega} E\hat{e}_x \tag{5.19}$$

$$mn_o\left(-i\omega + ikV_o\right)\vec{V}_{e1} = -en_o\,\vec{E}_1 \qquad \vec{V}_{e1} = -\frac{ie}{m}\,\frac{E\hat{e}_x}{\omega - kV_o} \tag{5.20}$$

Η γραμμοποιημένη εξίσωση συνέχειας για τα ιόντα είναι

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + n_o\vec{\nabla}\cdot\vec{V}_{i1} = 0 \qquad n_{i1} = \frac{k}{\omega}\,n_o V_{i1} = \frac{ien_o k}{M\omega^2}\,E \tag{5.21}$$

Ας σημειώσουμε ότι οι άλλοι όροι στο $\vec{\nabla}\cdot(nV_j)$ είναι μηδενικοί επειδή $\nabla n_0 = V_{i0} = 0$. Η γραμμοποιημένη εξίσωση για τα ηλεκτρόνια γράφεται

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_o\vec{\nabla}\cdot\vec{V}_{e1} + \left(\vec{V}_o\cdot\vec{\nabla}\right)n_{e1} = 0 \tag{5.22}$$

Από αυτή προκύπτει

$$n_{e1} = \frac{k\,n_o}{\omega - k\,V_o}\,V_{e1} = -\frac{iek\,n_o}{m\left(\omega - k\,V_o\right)^2}\,E \tag{5.23}$$

Έχοντας υπολογίσει τις διαταραχές n_{i1} και n_{e1} κάνουμε χρήση της εξίσωσης Poisson

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_1 = 4\pi e\,(n_{i1} - n_{e1}) \tag{5.24}$$

Η εξίσωση (5.24) με βάση τις σχέσεις (5.21) και (5.23) παράγει τη σχέση διασποράς που γράφεται

$$1 = \omega_p^2\left[\frac{m/M}{\omega^2} + \frac{1}{\left(\omega - k\,V_o\right)^2}\right] \tag{5.25}$$

Η εξ. (5.25) είναι μια εξίσωση τέταρτου βαθμού ως προς ω.

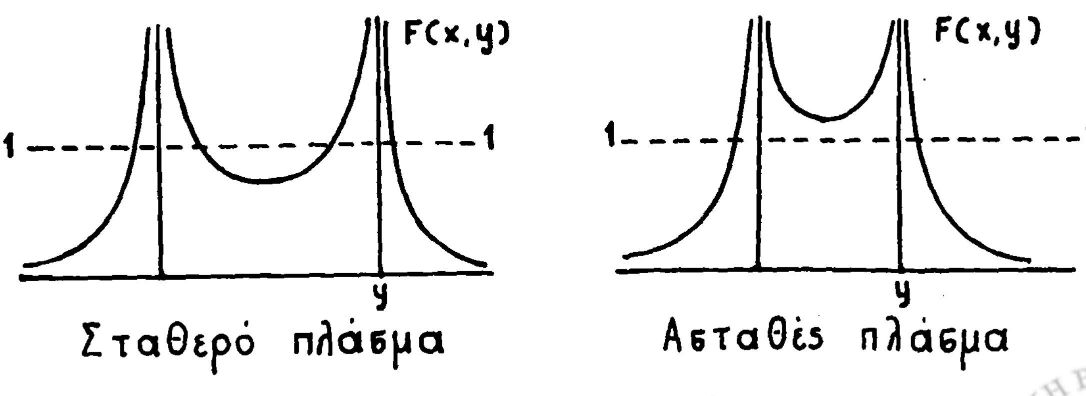
Σύμφωνα με όσα συζητήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο η εμφάνιση μιας αστάθειας συνδέεται με την ύπαρξη μιγαδικών ριζών με θετικό φανταστικό μέρος. Τότε η διαταραχή ενισχύεται και μαθηματικά αυτό εκφράζεται με την εμφάνιση ενός παράγοντα exp(Im (ω)t). Έτσι αν οι ρίζες της εξ. (5.25) είναι όλες πραγματικές το πλάτος του κύματος παραμένει σταθερό και επομένως το πλάσμα είναι σταθερό. Η ύπαρξη μιας μιγαδικής ρίζας συνεπάγεται την εμφάνιση αστάθειας αφού και η συζυγής της είναι επίσης ρίζα. Οι ρίζες απόσβεσης με Im (ω) < 0 δεν μας ενδιαφέρουν εδώ αφού διαταραχές που αποσβύνονται δεν συμβαίνουν αυθόρμητα.

Οι ρίζες της σχέσης διασποράς (5.25) μπορεί να βρεθούν με γραφική επίλυση. Αν ορίσουμε $x \equiv \omega/\omega p$ και $y \equiv kV_0/\omega p$ η εξ. (5.25) γίνεται

$$1 = \frac{m/M}{x^2} + \frac{1}{(x-y)^2} \equiv F(x,y) \qquad (5.26)$$

Για δοθείσα τιμή των y μπορούμε να κάνουμε τη γραφική παράσταση της F(x,y) σαν συνάρτησης του x. Η συνάρτηση αυτή θα παρουσιάζει ανωμαλίες στα σημεία x = 0 και x = y (σχήμα 5.7a)

(a) (b)

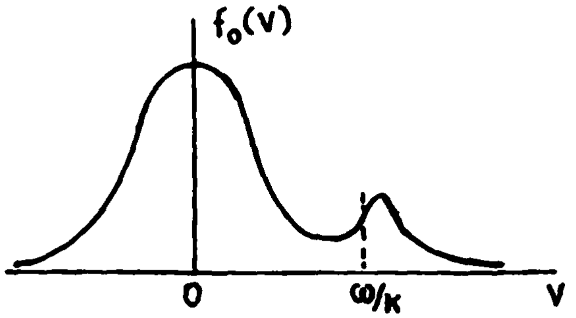


Σταθερο πλασμα Ασταθές πλάσμα

Σχήμα 5.7. Η συνάρτηση F(x,y) στην αστάθεια των δύο ρυακιών.

Τα σημεία τομής της καμπύλης του σχήματος (5.6) με τη γραμμή $F(x,y)=1$ καθορίζουν τις τιμές του x που ικανοποιούν τη σχέση διασποράς. Στο σχήμα (5.7a) υπάρχουν τέσσερα σημεία τομής και επομένως τέσσερεις πραγματικές ρίζες ω_j. Ωστόσο, αν διαλέξουμε μικρότερη τιμή για το y το γράφημα θα είναι σαν κι αυτό του σχήματος (5.7b). Αφού τώρα έχουμε μόνο δύο σημείο τομής δύο μόνο από τις ρίζες είναι πραγματικές. Η μια από τις άλλες δύο συζηγείς μιγαδικές αντιστοιχεί σ' ένα ασταθές κύμα. Έτσι για αρκούντως μικρό kV_0 το πλάσμα είναι ασταθές και για δεδομένη σχετική ταχύτητα $\vec{V}_0$ το πλάσμα είναι πάντοτε ασταθές στην περίπτωση διαταραχών μεγάλου μήκους κύματος. (βλέπε άσκηση 5.4.5). Αντίστροφα για δεδομένο μήκος κύματος η ταχύτητα $\vec{V}_0$ πρέπει να είναι αρκούτως μικρή για την εμφανιση της αστάθειας. Αυτό από φυσική άποψη δεν φαίνεται λογικό αφού η ταχύτητα $\vec{V}_0$ είναι η πηγή ελεύθερης ενέργειας που τροφοδοτεί τα διαμήκη κύματα του πλάσματος που αντιστοιχούν στη διαταραχή $\vec{E}_1$. Το "παράδοξο" ωφείλεται στη χρήση των εξισώσεων ρευστών. Στην πραγματικότητα το πλάσμα έχει πεπερασμένη θερμοκρασία και πρέπει να λάβουμε υπ' όψη τα θερμικά φαινόμενα στα πλαίσια της κινητικής θεωρίας. Για ταχύτητες υ_0 μικρότερες από τη θερμική ταχύτητα υ_9 δεν προβλέπεται αστάθεια αφού κυριαρχεί το φαινόμενο της απόσβεσης Landau.

Ωστόσο κατά την ανάλυση του φαινοιμένου της απόσβεσης Landau μπορεί κανείς να μαντέψει ότι αν στην κατανομή $f_0(V)$ περιέχονται περισσότερο χρήγορα παρά αργά σωματίδια το κύμα μπορεί να ενισχυθεί. Πράγματι, από την εξίσωση (4.66) είναι φανερό ότι $Im(\omega) > 0$ εάν είναι $\partial \hat{f}_0/\partial V > 0$ κοντά στη φασική ταχύτητα του κύματος. Μια τέτοια κατανομή παραθέτουμε στο σχήμα (5.8).

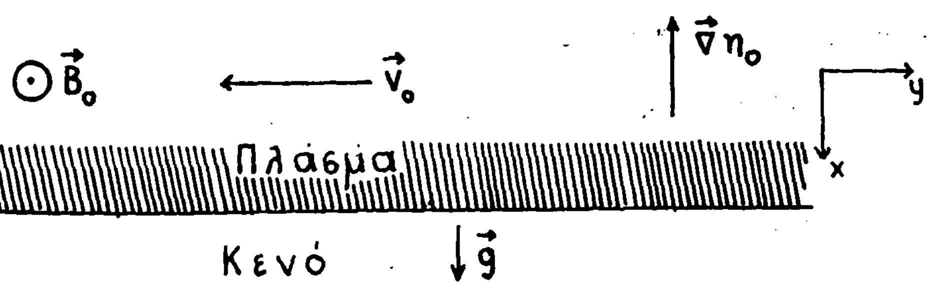


Σχήμα 5.8. **Κατανομή υπεύθυνη για την εμφάνιση της αστάθειας των δύο ρυακίων.**

Κύματα με ομαδική ταχύτητα στην περιοχή θετικής κλίσης θα είναι ασταθή κερδίζοντας ενέργεια σε βάρος των σωματίδιων . Αυτό ακριβώς είναι το ανάλογο της αστάθειας των δύο ρυακίων με πεπερασμένη θερμοκρασία. Όταν η θερμοκρασία είναι αμελητέα ($kT = 0$) υπάρχουν δύο "κρύα ρυάκια" ηλεκτρονίων με ίσες και αντίθετες ταχύτητας και η κατανομή $f_0(v)$ αποτελείται από δύο συναρτήσεις Dirac (βλέπε ασκήσεις 5.4.6 και 5.4.7). Μια τέτοια κατανομή είναι ασταθής αφού η παράγωγός της απειρίζεται και την αστάθεια αυτή αναλύσαμε στην παρούσα παράγραφο στα πλαίσια της θεωρίας των δύο ρευστών. Όταν η θερμοκρασία είναι πεπερασμένη από την κινητική θεωρία συμπεραίνουμε ότι για να εμφανιστεί αστάθεια θα πρέπει οι πυκνότητες και θερμοκρασίες των δύο ηλεκτρονικών ρυακίων να είναι τέτοιες ώστε η ολική συνάρτηση κατανομής να παρουσιάζει ένα ελάχιστο.

5.3.4. Η αστάθεια ανταλλαχής.

Στο πλάσμα μια αστάθεια τύπου Rayleigh-Taylor μπορεί να συμβεί αφού όπως είδαμε στην παράγραφο (5.2.1) το μαγνητικό πεδίο δρα σαν ένα ελαφρύ ρευστό και υποστηρίζει (περιορίζει) το βαρύτερο ρευστό, δηλαδή το πλάσμα. Η αστάθεια αυτή μπορεί να χαρακτηριστεί και σαν "βαρυτική" αφού η υπεύθυνες δυνάμεις που επενεργούν στο πλάσμα είναι φυγόκεντρες δυνάμεις. Πράγματι αν οι δυναμικές γραμμές του πεδίου είναι καμπύλες και εξετάσουμε το πλάσμα με το μοντέλο των ανεξάρτητων σωματίδιων μπορούμε να αποδείξουμε ότι σ' αυτό επενεργεί μια φυγόκεντρη δύναμη λόγω της κίνησης των σωματιδίων κατά μήκος των δυναμικών γραμμών του πεδίου. Για να μελετήσουμε την αστάθεια ανταλλαχής στην πιο απλή περίπτωση ας θεωρήσουμε ότι το πλάσμα περιορίζεται έτσι ώστε η διαχωριστική επιφάνεια πλάσματος κενού βρίσκεται στο επίπεδο y-z όπως φαίνεται στο σχήμα (5.8). Ας υποθέσουμε ότι στην κατάσταση ισορροπίας υπάρχει μια κλίση πυκνότητας $\vec{\nabla} n_0$ στην διεύθυνση -x και ένα ομογενές "βαρυτικό" πεδίο $\vec{g}$ στη διεύθυνση x.



Σχήμα 5.9. Η κατάσταση ισορροπίας πριν την εμφάνιση της αστάθειας ανταλλαχής.

Για λόγους μαθηματικής απλότητας μπορούμε να θέσουμε $kT_i = kT_e = 0$ και να θεωρήσουμε ότι η παράμετρος β του πλάσματος παίρνει αρκετά μικρές τιμές ώστε να επιτρέπεται να θεωρήσουμε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_0$. Στην κατάσταση ισορροπίας τα ιόντα υπακούουν στην εξίσωση

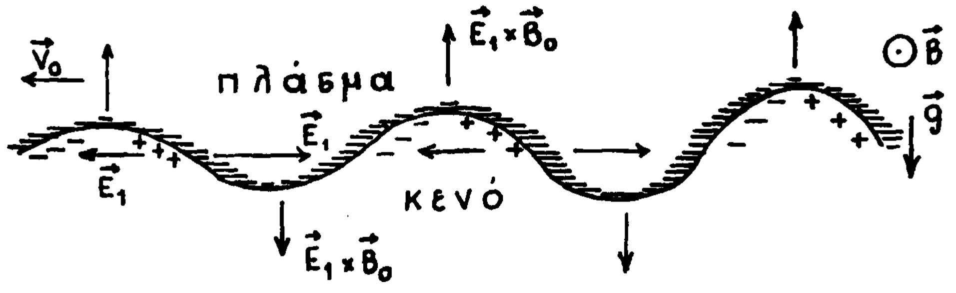
$$Mn_0\,(\vec{V}_0\cdot\nabla)\,\vec{V}_0 = en_0\,\frac{\vec{V}_0\times\vec{B}_0}{c} + Mn_0\,\vec{g} \qquad (5.27)$$

Αφού τα διανύσματα $\vec{g}$ και $\vec{B}_0$ είναι σταθερά από την εξ. (5.27) προκύπτει ότι γενικά και το διάνυσμα $\vec{V}_0$ θα είναι σταθερό και επομένως ο όρος $(\vec{V}_0\cdot\vec{\nabla})\,\vec{V}_0$ είναι μηδενικός. Παίρνοντας το εξωτερικό γινόμενο της εξ. (5.7) με το $\vec{B}_0$ βρίσκουμε όπως στην § 2.2.3.

$$\vec{V}_0 = c\,\frac{M}{e}\,\frac{\vec{g}\times\vec{B}_0}{B_0^2} = \frac{g}{\Omega_c}\,\hat{e}_y \qquad (5.28)$$

όπου Ω_c είναι η συχνότητα της κίνηση Larmor για τα ιόντα. Τα ηλεκτρόνια θα έχουν μια αντίθετη ολίσθηση που μπορεί να αμεληθεί στο όριο $m/M \to 0$. Δεν εμφανίζεται διαμαγνητική ολίσθηση αφού $kT = 0$ ούτε ολίσθηση $\vec{E}_0 \times \vec{B}_0$ γιατί $\vec{E}_0 = 0$.

Πριν προχωρήσουμε στην εύρεση της σχέσης διασποράς ας εξηγήσουμε το φυσικό μηχανισμό που εγείρει την αστάθεια ανταλλαγής. Αν μια διαταραχή της μορφής ενός κυματίδιου δημιουργηθεί στην διαχωριστική επιφάνεια πλάσματος -κενού σαν αποτέλεσμα μιας τυχαίας θερμικής διακύμανσης η ολίσθηση $\vec{V}_0$ των ιόντων θα προκαλέσει αύξηση της διαταραχής. Λόγω της ολίσθησης των ιόντων θα δημιουργηθεί περίσσεια φορτίων στις πλευρές της διαταραγμένης επιφάνειας και το επακόλουθο ηλεκτρικό πεδίο αλλάζει σημείο καθώς προχωράμε από μια



Σχήμα 5.10. Φυσικός μηχανισμός της αστάθειας ανταλλαγής.

κοιλάδα σε ένα λόφο της διαταραχής. Όπως φαίνεται από το σχήμα (5.10) η ολίσθηση $\vec{E}_1 x \vec{B}_0$ διευθύνεται προς τα επάνω στις περιοχές της διαχωριστικής επιφάνειας που έχουν κινηθεί προς τα επάνω και προς τα κάτω σε περιοχές που έχουν κινηθεί προς τα κάτω. Η κατάλληλης φάσης αυτή επενέργεια των ολισθήσεων $\vec{E}_1 \times \vec{B}_0$ έχει σαν αποτέλεσμα την ενίσχυση του αρχικού κυματίδιου.

Για να παράγουμε τη σχέση διασποράς από την οποία θα προκύψει η φανταστική συχνότητα ω που αντιστοιχεί στην αστάθεια θα εφαρμόσουμε τη συνηθισμένη μέθοδο της χραμμοποίησης θεωρώντας κύματα που διαδίδονται κατά την διεύθυνση $\vec{k} = k\,\hat{e}_y$. Στην διαταραχμένη κατάσταση η εξίσωση κίνησης για τα ιόντα γράφεται

$$M(n_0+n_1)\left[\frac{\partial}{\partial t}(\vec{V}_0+\vec{V}_1) + \left[(\vec{V}_0+\vec{V}_1)\cdot\vec{\nabla}\right](\vec{V}_0+\vec{V}_1)\right]$$

$$= e(n_0+n_1)\left[\vec{E}_1 + \frac{(\vec{V}_0+\vec{V}_1)\times\vec{B}_0}{c}\right] + M(n_0+n_1)\,\vec{g} \qquad (5.28a)$$

Η γραμμοποιημένη εξίσωση είναι

$$Mn_o \frac{\partial}{\partial t} \vec{V}_1 + (\vec{V}_o \cdot \nabla) \vec{V}_1 = en_o \left(\vec{E}_1 + \frac{(\vec{V}_1 \times \vec{B}_o)}{C} \right)$$

$$+ (n_o + n_1) \left[e \left(\frac{\vec{V}_o \times \vec{B}_o}{C} \right) + M \vec{g} \right] \qquad (5.28b)$$

Ο όρος $en_0(\vec{V}_0 + \vec{B}_0)/C + M\vec{g}$ μηδενίζεται λόγω της εξίσωσης ισορροπίας (5.27) και η εξ. (5.28b) για διαταραχές της μορφής $\exp[i(ky-\omega t)]$ γίνεται

$$M(\omega - kV_o) \vec{V}_1 = i\, e \left(E_1 + \frac{\vec{V}_1 \times \vec{B}_o}{C} \right) \qquad (5.29)$$

Ας σημειώσουμε ότι το πεδίο $\vec{g}$ έχει απαλειφθεί αλλά η σχετική πληροφορία μεταφέρεται μέσω της $\vec{V}_0$. Από την εξίσωση (5.29) προκύπτει ότι η διαταραχή $\vec{V}_{i1}$ έχει με μηδενικές συνιστώσες κατά τη διεύθυνση $\hat{e}_x$ και $\hat{e}_y$ που δίνονται από τις σχέσεις

$$V_{ix} = c \frac{\Omega_c^2}{(\omega - kV_o)} \left[\frac{\Omega_c^2}{(\omega - kV_o)^2} - 1 \right]^{-1} \qquad (5.30a)$$

$$V_{iy} = -ic \frac{\Omega_c}{(\omega - kV_o)} \frac{E_y}{B_o} \left[\frac{\Omega_c^2}{(\omega - kV_o)^2} - 1 \right]^{-1} \qquad (5.31a)$$

Υποθέτουμε ότι

$$\Omega^2{}_c \gg (\omega - ku_0)^2 \qquad (5.32)$$

Η υπόθεση αυτή σημαίνει ότι η συχνότητα της διαταραχής είναι μικρή δηλαδή το πεδίο E_1 είναι αργά μεταβαλλόμενο πράγμα που θα δικαιολογηθεί εκ των υστέρων (a posteriori). Τότε οι σχέσεις (5.30a) και

(5.31a) γίνονται

$$V_{ix} = C\,\frac{E_y}{B_o} \qquad (5.30b)$$

$$V_{iy} = -ic\,\frac{\omega - kV_o}{\Omega_c}\,\frac{E_y}{B_o} \qquad (5.31b)$$

Η ποσότητα V_{iy} όπως δίνεται από την εξ. (5.31b) είναι η ολίσθηση πόλωσης που υπολογίσαμε κάτω από την ίδια υπόθεση στην § 2.5.1 όπως μετρείται στο σύστημα αναφοράς των ιόντων ($\omega \to \omega - kV_0$). Η αντίστοιχη ποσότητα για τα ηλεκτρόνια μηδενίζεται στο όριο $m/M \to 0$. Έτσι για τα ηλεκτρόνια έχουμε

$$V_{ex} = C\,\frac{E_y}{B_o} \qquad V_{ey} = 0 \qquad (5.33)$$

Η γραμμοποιημένη εξίσωση συνέχειας για τα ιόντα είναι

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \vec{V}_o \cdot \vec{\nabla} n_o + \vec{V}_1 \cdot \vec{\nabla} n_o + n_o \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_1 = 0 \qquad (5.34)$$

Ας σημειώσουμε ότι ο όρος $\vec{V}_0 \cdot \vec{\nabla} n_0$ μηδενίζεται γιατί $\vec{V}_0 \perp \vec{\nabla} n_0$. Από την εξ. (5.34) παίρνουμε

$$-i\omega n_1 + ikV_0 n_1 + V_{ix}\, n'_0 + ikn_0 V_{iy} = 0 \qquad (5.35)$$

όπου $n_0 = \partial n_0/\partial x$. Η εξίσωση συνέχειας για τα ηλεκτρόνια αφού $\vec{V}_{e0} = 0$ και $V_{ey} = 0$ παίρνει την απλούστερη μορφή

$$-i\omega n_1 + V_{ex}\, n'_0 = 0 \qquad (5.36)$$

Στις διαταραχές πυκνότητας ιόντων και ηλεκτρονίων δεν χρησιμοποιήσαμε κάτω δείκτες i και e γιατί έχουμε κάνει χρήση της προσέγγισης πλάσματος ($n_{i1} = n_{e1} = n_1$). Από τις εξισώσεις (5.30b), (5.31β) και (5.34) παίρνουμε

$$\left(\omega - kV_o\right) n_1 + ic \frac{E_y}{B_o} n'_o + ickn_o \frac{\omega - kV_o}{\Omega_c} \frac{E_y}{B_o} = 0 \qquad (5.37)$$

Οι εξισώσεις (5.33) και (5.36) δίνουν

$$\frac{E_y}{B_o} = \frac{i\omega n_1}{cn'_o} \qquad (5.38)$$

Αντικαθιστώντας τον λόγο (E_y/B_0) στην εξίσωση (5.37) παίρνουμε διαδοχικά

$$\left(\omega - kV_o\right) n_1 - \left(n'_o + kn_o \frac{\omega - kV_o}{\Omega_c}\right) \frac{\omega n_1}{n'_o} = 0 \qquad (5.39a)$$

$$\omega - kV_o - \left(1 + \frac{kn_o}{\Omega_c} \frac{\omega - kV_o}{n'_o}\right) \omega = 0 \qquad (5.39b)$$

$$\omega\left(\omega - kV_o\right) = - V_o \Omega_c n'_o/n_o \qquad (5.39c)$$

Η τελευταία εξίσωση με βάση την σχέση (5.28) δίνει την τελική σχέση διασποράς

$$(\omega^2) - kV_0 \omega - g(n'_0/n_0) = 0 \qquad (5.40)$$

Οι δύο ρίζες για τη συχνότητα ω είναι

$$\omega = \frac{1}{2} kV_o \pm \left[\frac{1}{4} k^2 V_o^2 + g\left(n'_o/n_o\right)\right]^{1/2} \qquad (5.42)$$

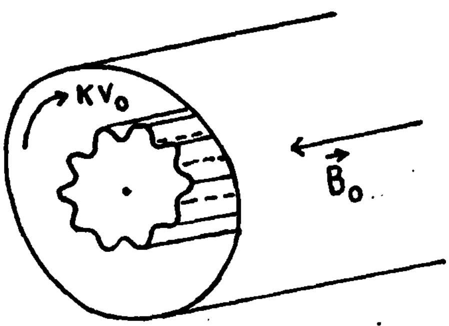
Για να είναι το πλάσμα ασταθές πρέπει η συχνότητα ω νε είναι μιγαδική, δηλαδή πρέπει

$$-g\, n'_0/n_0 > (1/4)\, k^2 V^2{}_0 \qquad (5.43)$$

Από αυτή βλέπουμε ότι για να εμφανιστεί η αστάθεια τα μεγέθη g και n'_0/n να έχουν αντίθετο σημείο. Αυτό είναι σύμφωνο με το βασικό χαρακτηριστικό των ασταθειών Rayleigh -Taylor ότι το βαρύ ρευστό υποστηρίζεται από το ελαφρύ. Για αρκετά μεγάλες τιμές του κυματάριθμου k το ποσό αύξησης της διαταραχής δίνεται από τη σχέση

$$I_m(\omega) \approx [\,-g(\,n'_0/n_0)]^{1/2} \tag{5.44}$$

Η αστάθεια ανταλλαγής στην οποία $\vec{k} \perp B_0$ ονομάζεται και αστάθεια κυματιδίου η αυλακιού (ripple instability n flute instability) για τον ακόλουθο λόγο. Σ' ένα γραμμικό κυλινδρικό πλάσμα, όπου και φωτογραφήθηκε από τον D.J.Albares και τους συνεργάτες τον [12] το 1961, τα κύματα διαδίδονται κατά την διεύθυνση $\hat{e}_\theta$ αν οι δυνάμεις επενεργούν στη διεύθυνση $\hat{e}_r$. Τότε οι επιφάνειες σταθερής πυκνότητας μοιάζουν σαν Αρχαίο Ελληνικό κίωνα (σχήμα (5.11))



Σχήμα 5.11. Η αστάθεια κυματιδίου ή αυλακιού.

5.4. Ασκήσεις

5.4.1. Να βρεθεί η σχέση που συνδέει την κινητική και μαγνητική πίεση στην κατάσταση μαγνητοϋδροδυναμικής ισορροπίας για το συμπιεστή θ (θ-pinch), (σχήμα (5.2)), αν το εξωτερικό ομογενές μαγνητικό πεδίο είναι B_0. Στη συνέχεια σχεδιάστε την κινητική πίεση και το μαγνητικό πεδίο σαν συνάρτηση της απόστασης από τον άξονα του κυλίνδρου.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε κυλινδρικές συντεταγμένες (r,z,θ).

Λύση

Το διαμαγνητικό ρεύμα J_θ δίνεται μέσω της εξ. (5.2) από τη σχέση

$$J_\theta = -\frac{c}{4\pi}\frac{dB_z(r)}{dr} \tag{5.45}$$

Τότε από την εξ. (5.1) παίρνουμε

$$\frac{dP(r)}{dr} = \frac{J_\theta B_z}{c} \tag{5.46}$$

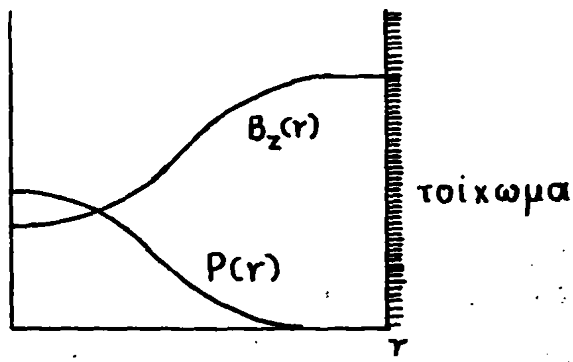
Από αυτή προκύπτει

$$\frac{d}{dr}\left[P(r) + \frac{B_z^2(r)}{8\pi}\right] = 0 \tag{5.47}$$

Ολοκληρώντοντας την τελευταία εξίσωση και αφού το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο είναι B_0 παίρνουμε

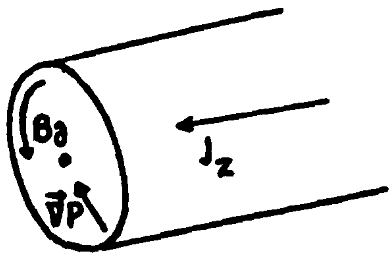
$$P(r) + \frac{B_z^2(r)}{8\pi} = \frac{B_0^2}{8\pi} \tag{5.48}$$

Η εξ. (5.48) εκφράζει όπως και η (5.11) τη σταθερότητα του αθροίσματος της κινητικής και μαγνητικής πίεσης για κάθε τιμή της απόστασης r. Ένα χαρακτηριστικό διάγραμμα φαίνεται στο σχήμα (5.11). Στο διάγραμμα αυτό η πίεση p παίρνει μέγιστη τιμή στο σημείο r = 0 και πέφτει γρήγορα για μεγάλα r ώστε το πλάσμα να απομονώνεται από το τοίχωμα της διάταξης



Σχήμα 5.12. Χαρακτηριστικές καμπύλες ισορροπίας για το συμπιεστή -θ.

5.4.2. Μια μονοδιάστατη διάταξη της οποίας η μαγνητική γεωμετρία είναι ορθογώνια προς τη μαγνητική γεωμετρία του συμπιεστή -θ φαίνεται στο σχήμα (5.13). Σ. αυτή ένα διαμήκες ρεύμα J_z διαπερνά το πλάσμα, από το οποίο η διάταξη παίρνει το όνομά της σαν συμπιεστής-z (z-pinch), το οποίο δημιουργεί ένα μαγνητικό πεδίο B_φ. Στο πλάσμα δεν επενεργεί άλλο εξωτερικό πεδίο, δηλαδή ζεται. Βρείτε για τον συμπιεστή -z τη σχέση ισορροπίας που συνδέει την πίεση $p(r)$ και το μαγνητικό πεδίο B_φ.



Σχήμα 5.13. Ο συμπιεστής -z.

<u>Λύση</u>

Από την σχέση (5.2) παίρνουμε

$$J_z = \frac{c}{4\pi}\,\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\,(rB_\vartheta) \qquad (5.49)$$

Αντικαθιστώντας το J_z στην (5.1) προκύπτει

$$\frac{d}{dr}\left[P(r) + \frac{B_\vartheta}{8\pi} + \frac{B_\vartheta^2}{r}\right] = 0 \qquad (5.50)$$

Η εξίσωση (5.50) διαφέρει στη μορφή από την αντίστοιχη εξίσωση για το συμπιεστή -ϑ ως προς τον όρο B_ϑ^2/r. Αυτός αντιπροσωπεύει μια πρόσθετη δύναμη που διευθύνεται προς τον άξονα του κυλίνδρου και ωφείλεται στην καμπυλότητα των μαγνητικών δυναμικών γραμμών του πεδίου.

5.4.3. Το αστροφυσικό πλάσμα σε πολλές περιπτώσεις οδεύει προς μια πολλή απλή κατάσταση ισορροπίας τέτοια ώστε

$$\vec{J} = k\,\vec{B} \tag{5.51}$$

Τότε στο πλάσμα δεν υπάρχει κλίση πίεσης και δεν επενεργεί καμιά δύναμη. Τέτοιοι σχηματισμοί ονομάζονται σχηματισμοί ελεύθεροι δύναμης (force free configurations) και αποτελούν μια απλή περίπτωση τρισδιάστατης μαγνητοϋδροδυμανικής ισορροπίας. Δείξτε ότι αν k = σταθερό, το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ ικανοποιεί μια διαφορική εξίσωση τύπου Helmholtz.

Λύση

Από την εξίσωση (5.2) παίρνουμε

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} k\,\vec{B} \tag{5.52}$$

Απ' αυτή έχουμε

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} k\,\vec{\nabla}\times\vec{B} \tag{5.53a}$$

οπότε

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \vec{\nabla}^2\vec{B} = \frac{4\pi}{c} k \left(\frac{4\pi}{c} k\,\vec{B}\right) \tag{5.53b}$$

Ο όρος $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})$ είναι μηδενικός λόγω της (5.52). Πράγματι απ' αυτή προκύπτει

$$0 = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \frac{4\pi}{c} k\,\vec{\nabla}\times\vec{B} \tag{5.53c}$$

Από τις (5.53b) και (5.53c) βρίσκουμε

$$(\nabla^2+a^2)\vec{B} = 0, \quad a = \frac{4\pi}{c} k \tag{5.54}$$

5.4.4. Η μαγνητοϋδροδυναμική ισορροπία σε δύο διαστάσεις υπακούει μια διαφορική εξίσωση που μπορεί να προκύψει από τις εξισώσεις ισορροπίας με τον ακόλουθο τρόπο.

1. Θεωρείστε κυλινδρικές συντεταγμένες (r,z,θ) και υποθέστε ότι όλα τα μεγάθη δεν εξαρτώνται από την γωνία θ, δηλαδή ότι

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = 0 \tag{5.55}$$

2. Λαβαίνοντας υπ' όψη την εξίσωση (5.3) και τη συμμετρία (5.55) δείξτε ότι το μαγνητικό πεδίο προκύπτει από δύο βαθμωτές συναρτήσεις $\psi(r,z)$ και $I(r,z)$. Συγκεκριμένα

$$B_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial z} \qquad B_z = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} \qquad B_\theta = \frac{I}{r} \tag{5.56}$$

3. Από τις τρεις συνιστώσεις $(\hat{e}_r,\hat{e}_z,\hat{e}_\varphi)$ της εξίσωσης (5.1) αφού αντικαταστήσετε την πυκνότητα $\vec{J}$ από την εξ. (5.2) και λάβετε υπ' όψη την εξ. (5.55) δείξτε ότι

a. Η πίεση $p(r,z)$ και η συνάρτηση $I(r,z)$ συναρτώνται μόνο από την $\psi(r,z)$.

<u>Υπόδειξη:</u> Αρκεί να δείξετε ότι οι Ιακωβιανές $J(\Psi,P)$ και $J(\Psi,I)$ μηδενίζονται

β) Οι $P(\psi)$ και $I(\Psi)$ ικανοποιούν την εξίσωση

$$\Delta^{*}\Psi = -4\pi r^2 \frac{dP}{d\Psi} - I\frac{dI}{d\Psi} \tag{5.57}$$

όπου Δ^* ο τελεστής

$$\Delta^{*} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \tag{5.58}$$

Λύση

2. Λόγω της σχέσης (5.3) είναι γνωστό ότι το μαγνητικό πεδίο μπορεί να προκύψει σαν ο στροβιλισμός ενός διανυσματικού δυναμικού $\vec{A}$, δηλαδή

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{5.59}$$

Λόγω της συμμετρίας (5.55) μπορούμε να ορίσουμε

$$r\, A_\theta \equiv \Psi(r,z) \tag{5.60}$$

$$r\left[\frac{\partial A_z}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right] \equiv (r,z) \tag{5.61}$$

ώστε το μαγνητικό πεδίο να δίνεται από τις (5.56)

3. Οι εν λόγω συνιστώσεις γράφονται

$$\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial I}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \Psi}{\partial r}\Delta^{*}\Psi\right] = 0 \tag{5.62}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\Delta^{*}\Psi\right] = 0 \tag{5.63}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial \Psi}{\partial r}\frac{\partial I}{\partial z} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{\partial I}{\partial r} = 0 \qquad (5.64)$$

Η εξίσωση συνεπάγεται το μηδενισμό της $J(\psi, I)$ και επομένως η I είναι μόνο συνάρτηση της ψ.

$$I = I(\Psi) \qquad (5.65)$$

Οι εξισώσεις (5.62) και (5.63) με βάση την (5.65) μπορούν να γραφούν αντίστοιχα

$$\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial r}\left[\frac{1}{r^2}\Delta^*\Psi + \frac{1}{r^2} I \frac{dI}{d\Psi}\right] = 0 \qquad (5.66)$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\left[\frac{1}{r^2}\Delta^*\Psi + \frac{1}{r^2} I \frac{dI}{d\Psi}\right] = 0 \qquad (5.67)$$

Από τις (5.66) και (5.67) προκύπτει

$$\frac{\partial P}{\partial r}\frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0 \qquad (5.68)$$

Έτσι η P είναι μόνο συνάρτηση της ψ

$$P = P(\Psi) \qquad (5.69)$$

Από την εξίσωση (5.66) η (5.67) προκύπτει η εξίσωση ισορροπίας

$$\Delta^*\Psi = -4\pi r^2 \frac{dP}{d\Psi} - I\frac{dI}{d\Psi} \qquad (5.70)$$

Η τελευταία είναι γενικά μια μη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης.

5.4.5. Για σταθερή ταχύτητα ολίσθησης V_0 βρείτε το ελάχιστο μήκος κύματος για το οποίο εμφανίζεται η αστάθεια των δύο ρυακίων

Λύση

Από το σχήμα (5.6) φαίνεται ότι για να είναι το πλάσμα ασταθες θα πρέπει

$$F(x,y)|_{min} \geq 1 \tag{5.71}$$

Από την

$$\partial F(x,y)/\partial x = 0$$

παίρνουμε

$$\frac{x}{x-y} = -\left(\frac{m}{M}\right)^{1/3} \tag{5.72}$$

Τότε η (5.71) γίνεται

$$\frac{\left[1+(m/M)^{1/3}\right]^3}{y^2} \geq 1 \tag{5.73}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει

$$\lambda^2 \geq \frac{4\pi^2 V_0^2}{\omega_p^2}\left[1+(m/M)^{1/3}\right]^3 \tag{5.74}$$

οπότε

$$\lambda_{min} = 4\pi\frac{V_0}{\omega_p}\left[1+(m/M)^{1/3}\right]^{3/2} \tag{5.75}$$

5.4.6. Να βρείτε τη σχέση διασποράς της αστάθειας των δύο ρυακιών όταν στο πλάσμα συνυπάρχουν δύο συνιστώσεις ηλεκτρονίων πυκνότητας $(\eta_0/2)$ και σχετικής ταχύτητας $\vec{V}_0$ και $-V_0$ σε σχέση με το σύστημα αναφοράς των ιόντων.

<u>Λύση</u>

Η ανάλυση προχωρά όπως στην § 5.33 μόνο που υπάρχουν δύο ηλεκτρονιακές συνιστώσες. Η (+) συνιστώσα αντιστοιχεί στην ταχύτητα $\vec{V}_0$ και η (-) συνιστώσα στην ταχύτητα $-\vec{V}_0$. Έτσι αντί της εξίσωσης (5.20) έχουμε τις

$$V_{e1}^{+} = \frac{-ie}{m} \frac{E}{\omega - KV_0} \hat{e}_x \qquad (5.76)$$

$$V_{e1}^{-} = \frac{-ie}{m} \frac{E}{\omega + KV_0} \hat{e}_x \qquad (5.77)$$

Τελικά η εξίσωση Poisson γράφεται

$$\frac{\partial}{\partial x} E_1 = 4\pi e \left(n_{i1} - n_{e1}^{+} - n_{e1}^{-}\right) \qquad (5.78)$$

Από αυτή προκύπτει η ζητούμενη σχέση διασποράς

$$1 = \omega_p^2 \left[\frac{m/M}{\omega^2} + \frac{1}{2(\omega - KV_0)^2} + \frac{1}{2(\omega + KV_0)^2} \right] \qquad (5.79)$$

5.4.7. Να παραχθεί η σχέση διασποράς η υπεύθυνη για την εμφάνιση της αστάθειάς των δύο ρυακίων σε κρύο πλάσμα ($kT_i = kT_e = 0$) στα πλαίσια της κινητικής θεωρίας. Για το σκοπό αυτό θεωρείστε την μονοδιάστατη κατανομή

$$\hat{f}_0(V) = \frac{1}{2}\left[\, \delta(V-V_0) + \delta(V+V_0)\,\right] \tag{5.80}$$

όπου δ η συνάρτηση του Dirac. Υποθέστε ότι τα ιόντα είναι ακίνητα.

Λύση

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (4.59) με f όπως δίνεται από την (5.80). Η σχέση διασποράς στη συνέχεια προκύπτει μέσω της εξ. 5.4.8. Τελικά βρίσκουμε

$$1 = \frac{\omega_p^2}{k^2}\left[\frac{1}{2(V-\omega/K_0)^2} + \frac{1}{2(V+\omega/K_0)^2}\right] \tag{5.81}$$

Η εξίσωση (5.81) ταυτίζεται με την εξ. (5.79) στο όριο $(m/M) \to 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΛΕΓΧΟΜΕΝΗ ΣΥΝΤΗΞΗ

6.1. Γενικά

Η ελεγχόμενη σύντηξη είναι ένα πρόβλημα πολυσύνθετο. Για την επίλυσή του έχουν επιστρατευτεί σχεδόν όλα τα πεδία της φυσικής και έχει προωθηθεί σημαντικά η ανάπτυξη της τεχνολογίας σε νέους τομείς. Αρκετά όμως από τα προβλήματα παραμένουν άλυτα και στο κεφάλαιο αυτό θα συζητήσουμε τις δυσκολίες που παρουσιάζουν. Οι δυσκολίες αυτές φαίνεται να είναι ανάλογες με τη σπουδαιότητα της πυρηνικής σύντηξης, η επίτευξη της οποίας θα επιφέρει σημαντικές αλλαγές στις οικονομικές και κοινωνικές συνθήκες στον πλανήτη μας. Κι αυτό γιατί το μοναδικό υλικό που θα χρειάζεται ένας πυρηνικός αντιδραστήρας για τη λειτουργία του θα είναι το δευτέριο το οποίο βρίσκεται άφθονο στο θαλασσινό νερό, σε ποσοστό 0.015 % του υδρογόνου. Έτσι η επίλυση του προβλήματος της θερμοπυρηνικής σύντηξης θα σημάνει στην πραγματικότητα την εξεύρεση ανεξάντλητων πηγών ενέργειας με φτηνό κόστος και διαθεσιμότητα σ' όλες τις χώρες της γης.

4.6. Βασικές ιδέες και προβλήματα

Είναι γενικά αποδεκτό ότι οι πρώτοι αντιδραστήρες σύντηξης θα στηριχτούν στην αντίδραση δευτέριου (D) και τρίτιου (T)

$$D + T \rightarrow {}^{4}He\ (3.5\ MeV) + n(14.1\ MeV) \qquad (6.1)$$

επειδή η αντίδραση αυτή χρειάζεται το μικρότερο χρόνο περιορισμού και τη μικρότερη θερμοκρασία ανάφλεξης. Με την ανάπτυξη της τεχνολογίας όμως η αντίδραση αυτή θ' αντικατασταθεί γιατί παρουσιάζει δυο βασικά μειονεκτήματα. Πρώτο, το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειας που προέρχεται από τη διαφορά των μαζών στην εξ. (6.1) μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια του νετρόνιου (n) και επομένως για να μετατραπεί σε ηλεκτρική πρέπει να περάσει από το θερμικό κύκλο του οποίου ο συντελεστής θερμικής μετατροπής στην καλύτερη περίπτωση δεν υπερβαίνει το 40%. Επιπλέον η υψηλή ενέργεια των νετρόνιων θα δημιουργεί σοβαρά προβλήματα ραδιενέργειας τόσο στο περιβάλλον όσο και στα τοιχώματα του αντιδραστήρα που θα πρέπει γι' αυτό το λόγο ν' αλλάζονται σε σύντομα χρονικά διαστήματα. Δεύτερο, το τρίτιο πέρα του ότι είναι ραδιενεργό υλικό δεν υπάρχει ελεύθερο στη φύση και έτσι θα πρέπει να κατασκευάζεται τεχνητά. Πάντως διαφαίνεται η δυνατότητα παραγωγής του μέσα στον αντιδραστήρα με την αντίδραση

$$n + {}^{6}Li \rightarrow {}^{4}He\ (2.1\ MeV) + T(2.7\ MeV) \qquad (6.2)$$

Για το σκοπό αυτό το πλάσμα μπορεί να περιβληθεί από έναν χιτώνα ^{6}Li που θα παράγει το τρίτιο με την αντίδραση (6.2) χρησιμοποιώντας τα νετρόνια της αντίδρασης (6.1).

Έτσι δεν θα υπάρχει πρόβλημα εξεύρεσης συντήξιμου υλικού γιατί το ισότοπο ^{6}Li βρίσκεται σε περιεκτικότητα 7.5 % μέσα στο φυσικό λίθιο που υπάρχει σε απεριόριστες ποσότητες στο φλοιό της γης.

Η δεύτερη γενιά αντιδραστήρων σύντηξης θα στηριχτεί στην καύση ατόμων δευτέριου που με την ίδια πιθανότητα ακολουθεί τις δυο ακόλουθες αντιδράσεις:

$$D + D \rightarrow T\ (1\ MeV) + p\ (3\ MeV) \qquad (6.3)$$

$$D + D \rightarrow {}^{3}He\ (0.8\ MeV) + n\ (2.5\ MeV) \qquad (6.4)$$

Γι' αυτούς τους αντιδραστήρες δεν θα είναι αναγκαία η παραγωγή του τριτιου και έχουν και το επιπρόσθετο πλεονέκτημα ότι μόνο το 34 % της ενέργειας εμφανίζεται στα νετρόνια. Επιπλέον οι αντιδραστήρες αυτοί παρουσιάζουν και τη δυνατότητα εξέλιξης σε δυο ενδιαφέρουσες παραλλαγές: Στον κύκλο ημικατάλυσης, όπου το τρίτιο που παράγεται στην αντίδραση (6.3) επανατροφοδοτείται στον αντιδραστήρα για να συνεχίσει την καύση με την αντίδραση (6.1), και τον κύκλο κατάλυσης όπου και το ^{3}He επανατροφοδοτείται στον αντιδραστήρα για να χρησιμοποιηθεί στην αντίδραση

$$D + {}^{3}He \rightarrow {}^{4}He\ (4.5\ MeV) + p\ (13.8\ MeV) \qquad (6.5)$$

Είναι προφανές από τις εξ. (6.1 - 6.5) ότι ο κύκλος ημικατάλυσης συνεπάγεται την καύση 5 ατόμων δευτέριου για την παραγωγή ενέργειας 25 MeV:

$$5D \rightarrow 2n + p + {}^{3}He + {}^{4}He + (24.9\ MeV) \qquad (6.6)$$

ενώ ο κύκλος κατάλυσης στηρίζεται στην καύση 6 ατόμων δευτέριου για την παραγωγή σχεδόν διπλάσιου ποσού ενέργειας

$$6D \rightarrow 2p + n + 2\ {}^{4}He + (43.2\ MeV) \qquad (6.7)$$

Έτσι ο κύκλος κατάλυσης θα υπερισχύσει τελικά του κύκλου ημικατάλυσης. Όμως ούτε αυτός ο κύκλος θα αποτελέσει την τελευταία μορφή της πυρηνικής σύντηξης. Στο βαθμό που θα υπάρχει η παραγωγή νετρονίων και οι συνδεδεμένες μ' αυτή επιπτώσεις στο περιβάλλον τόσο υπό μορφή ραδιενέργειας όσο και λόγω θερμικής μορφής ο κύκλος αυτός τελικά θ' αντικατασταθεί από κύκλους πυρηνικών αντιδράσεων που δεν θα παρουσιάζουν προβλήματα ραδιενέργειας και που θα στηρίζονται αποκλειστικά στην παραγωγή μη ραδιενεργών φορτισμένων σωμάτιων για την απευθείας μετατροπή της πυρηνικής ενέργειας σε ηλεκτρική. Έτσι με την κατανόηση της Φυσικής Πλάσματος και την ανάπτυξη της τεχνολογίας οι πυρηνικοί αντιδραστήρες σύντηξης θα στηριχτούν στην αντίδραση (6.5) ή παρόμοιες, που θα πληρούν τις παραπάνω προϋποθέσεις όπως για παράδειγμα οι αντιδράσεις

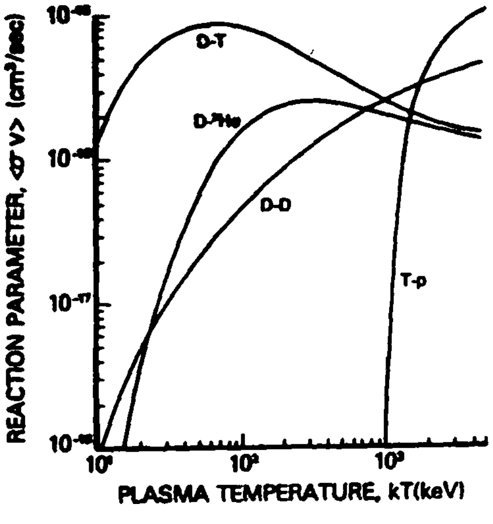
$$p + {}^{6}Li \rightarrow {}^{4}He + {}^{3}He + (4.5\ MeV) \qquad (6.8)$$

και

$$p + {}^{11}B \rightarrow 3\,{}^{4}He + (8.7\ MeV) \qquad (6.9)$$

6.3. Συνθήκες για τη δημιουργία θερμοπυρηνικής σύντηξης

Για την πυρηνική σύντηξη είναι αναγκαίος ο σχηματισμός θερμοπυρηνικού πλάσματος. Επειδή όμως τα ιόντα του πλάσματος είναι θετικά φορτισμένα για να μπορέσουν ν' αντιδράσουν μεταξύ των πρέπει να ξεπεράσουν το δυναμικό Coulomb. Επομένως ή πρέπει να επιταχυνθούν ή πρέπει το πλάσμα να θερμανθεί σε αρκετά υψηλές θερμοκρασίες, γιατι όπως φαίνεται από το σχήμα 6.1 η ενεργός διατομή πρακτικής σημασίας επιτυγχάνεται πάνω από 40 KeV. Είναι προφανές ότι η επιτάχυνση δεν μπορεί να γίνει με το συνήθη τρόπο των πυρηνικών αντιδράσεων με επιταχυντές, γιατί αυτός ο τρόπος οδηγεί σε μεγάλες απώλειες ενέργειας λόγω ιονισμού, ανάφλεξης του στόχου και ελάχιστης σκέδασης. Μήτε μπορεί να γίνει με δυο συγκρουόμενες δέσμες γιατί τέτοιες δέσμες μπορούν να φτιαχτούν μόνο με περιορισμένες πυκνότητες και έτσι η ενέργεια που χρειαζόμαστε για επιτάχυνση γίνεται μεγαλύτερη από την ενέργεια που απελευθερώνεται από τη σύντηξη. Δεν είναι απόλυτα σίγουρο αλλά αρκετά πιθανό ότι το πλάσμα πρέπει παορυσιάζει μια κατανομή που να μοιάζει με τύπου Maxwell. Έτσι οι σκεδάσεις θα είναι περιορισμένες και τα χρήγορα ιόντα στην ουρά της κατανομής θα εχουν τη δυνατότητα ν' αντιδρούν. Η ενέργεια που θα παράγεται ανά μονάδα χρόνου (sec) και όγκου (cm^3) για μια πυρηνική αντίδραση που απελευθερώνει την πυρηνική ενέργεια W θα είναι για παράδειγμα για την αντίδραση δευτέριου-τρίτιου



Σχήμα 6.1. Διαφορική διατομή σαν συνάρτηση της σχετικής ενέργειας των ιόντων

$$p_r = n_D \, n_T \, \langle \sigma \upsilon \rangle \, W \qquad (6.10)$$

όπου n είναι οι πυκνότητες των ιόντων, <συ> η μέση τιμή της ροής της ενεργού διατομής με κατανομή τύπου Maxwell και W = 17.6 MeV η ενέργεια που απελευθερώνεται από την πυρηνική αντίδραση (6.1). Η ενέργεια αυτή πρέπει να είναι μεγαλύτερη από την ενέργεια η οποία χάνεται μέσω της ακτινοβολίας των ηλεκτρονίων που προέρχεται από την ελαστική σκέδασή τους με τα ιόντα. Η ενέργεια αυτή λέγεται απώλεια Brems-strahlung και δίνεται από τη σχέση

$$P_b = 5 \times 10^{-31} Z^2 n^2 (KT_e)^{1/2} = C\, n^2 (KT_e)^{1/2} \qquad (6.11)$$

με KT_e σε KeV.

Ένα χαρακτηριστικό μέγεθος της πυρηνικής σύντηξης είναι η θερμοκρασία ανάφλεξης T_{ig} του θερμοπυρηνικού πλάσματος. Η θερμοκρασία αυτή προκύπτει από την ισότητα των εξισώσεων (6.10) και (6.11). Εκτιμάται ότι για την αντίδραση D-T η θερμοκρασία αυτή είναι γύρω στα 4 KeV ενώ για την D-D είναι μια τάξη μεγέθους μεγαλύτερη δηλαδή γύρω στα 40 KeV. Το πρόβλημα όμως της ανάφλεξης δεν είναι το μόνο καθοριστικό γιατί και με δεδομένη τη δυνατότητα ανάφλεξης το πρόβλημα της παραγωγής ενέργειας με σύντηξη παραμένει. Αν δηλαδή η ενέργεια που παράγεται κατά τη σύντηξη είναι κατά πολύ μεγαλύτερη από αυτή που χρειάζεται για τη θέρμανση του πλάσματος και την κάλυψη των απωλειών. Αυτή η προϋπόθεση επιβάλλει στο πλάσμα ορισμένες συνθήκες που αναδεικνύονται σε σοβαρά προβλήματα αναφορικά με την πυκνότητά του n, τη θερμοκρασία του T και το χρόνο περιορισμού του τ.

Ένα καθοριστικό μέγεθος για την πυρηνική σύντηξη είναι το γινόμενο nτ. Αν υπάρχουν $(n_T + n_D)$ πυρήνες ανά μονάδα όγκου (cm^3) τότε για την ανάφλεξη του πλάσματος χρειαζόμαστε ενέργεια $(n_D + n_T)$ 3/2 KT. Η ωφέλιμη ενέργεια λοιπόν από τη σύντηξη θα δίνεται από το ισοζύγιο των εξισώσεων (6.10) και (6.11) με συντελεστή μετατροπής ε.

$$E = \varepsilon\, ((n_D + n_T)\, 3/2\, kT + P_r\, \tau + P_b\, \tau) \qquad (6.12)$$

$$= \varepsilon\ ((n_D + n_T)\ 3/2\ kT + n_D\ n_T\ \langle\sigma\upsilon\rangle\ w\ \tau + C\ n_D\ n_T\ (kT_e)^{1/2}\ \tau)$$

ή με $n_D = n_T = n$

$$\left(\frac{E}{3n\ k\ T}\right) = \varepsilon\left(1 + n\ \tau\left(\frac{\langle\sigma\upsilon\rangle\ w}{3\ k\ T}\right) + n\ \tau\ \frac{C(kT_e)^{1/2}}{3\ k\ T}\right) \qquad (6.13)$$

Οπότε για σταθερή παραγωγή ενέργειας πρέπει για κάθε χρόνο τ και θερμοκρασία Τ να υπάρχει μια πυκνότητα n ώστε

$$n\ \tau\ =\ \text{σταθερό} \qquad (6.14)$$

Τα πειραματικά αποτελέσματα για το γινόμενο nτ συγκλίνουν στις ελάχιστες τιμές $n\tau \sim 10^{14}\ cm^{-3}$ sec για την D-T αντίδραση και $n\ \tau \sim 10^{16}\ cm^{-3}$ sec για την D-D αντίδραση. Οι τιμές αυτές σαν ελάχιστα όρια ονομάζονται κριτήρια Lawson. Είναι προφανές ότι για να εκπληρωθεί το κριτήριο Lawson χρειάζεται μεγάλες πυκνότητες και χρόνους περιορισμού και αυτό δεν μπορεί να γίνει χωρίς τη συμπίεση του πλάσματος. Η ερευνητική δουλειά έχει αναπτύξει δυο κύριες μεθόδους: τη μέθοδο του περιορισμού με μαγνητικά πεδία, $n \sim 10^{15}\ cm^{-3}$ $\tau = 0.1$ sec και τη μέθοδο με εσωτερικό περιορισμό με δέσμες Laser ή δέσμες σωματίδιων $n \sim 10^{26}\ cm^{-3}$ $\tau = 10^{-11}$ sec. Σήμερα και οι δυο αυτές μέθοδες χρησιμοποιούνται ερευνητικά σε μεγάλη έκταση και ενώ και οι δυο τους παρουσιάζουν πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα είναι αδύνατη η πρόβλεψη για το ποια θα είναι η επικρατέστερη. Η μέθοδος του μαγνητικού περιορισμού έχει μελετηθεί εντατικά τα τελευταία χρόνια και στα βασικά της σημεία έχει γίνει κατανοητή. Η μέθοδος εσωτερικού περιορισμού παρουσιάζεται αρκετά πολύπλοκη. Από την άλλη μεριά η μέθοδος όμως αυτή παρακάμπτει όλα τα προβλήματα που προέρχονται από μαγνητικές αστάθειες.

6.4. Μαχνητικός περιορισμός

6.4.1. Ισορροπία και σταθερότητα

Η ιδέα του περιορισμού με μαχνητικά πεδία εξελίσσεται σε τρεις κύριες κατευθύνσεις

α) Κλειστά συστήματα (Σαμπρέλες - τοροειδή)

β) Ανοικτά συστήματα (Μαχνητικοί καθρέφτες)

γ) Συστήματα συμπίεσης (Pinches).

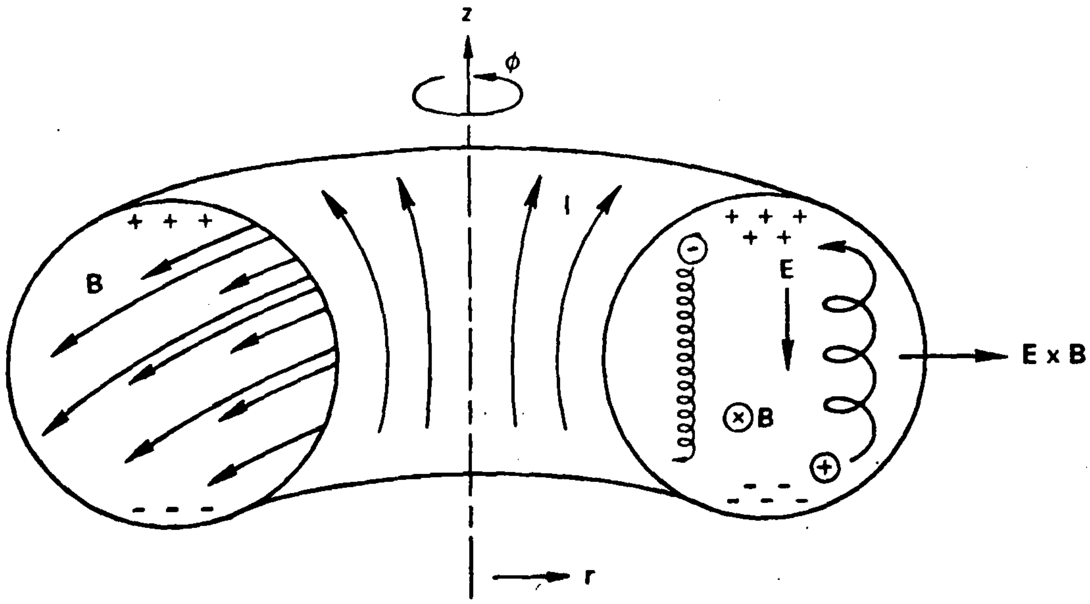
Στα κλειστά συστήματα οι μαχνητικές δυναμικές χραμμές παραμένουν μέσα στο σύστημα παρ' ότι μπορεί και να μην κλείνουν μεταξύ τους. Τ' ανοικτά συστήματα στηρίζονται στην ιδέα της μαχνητικής φιάλης που αναπτύξαμε στην παράχραφο (2.3). Στα συστήματα θήτα το εσωτερικό μαχνητικό πεδίο του πλάσματος υποβοηθιέται από τα πεδία που δημιουρχούνται από τη ροή εσωτερικών ρευμάτων. Τα ρεύματα αυτά χρησιμοποιούνται επιπλέον και χια τη θέρμανση του πλάσματος.

Όπως φαίνεται στο σχήμα (6.2) στα τοροειδή συστήματα οι μαχνητικές δυναμικές χραμμές είναι κύκλοι. Επειδή λόχω του νόμου του Ampere

$$\oint B \, ds = I \tag{6.15}$$

$|B| \sim 1/r$ τα σωμάτια εκτελούν δορυφορικές κινήσεις με μεταβαλόμενες ακτίνες Larmor. Έτσι λόχω της χνωστής ολίσθησης της παραχώχου ΔΒ τα θετικά φορτία συχκεντρώνονται στο πάνω μέρος ενώ τα αρνητικά στο κάτω μέρος του τόρου με αποτέλεσμα αυτός ο διαχωρισμός φορτίου να δημιουρχεί κάθετο ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ που κάνει τα φορτία να ολισθαίνουν στη διεύθυνση $\vec{E} \times \vec{B}$, δηλαδή προς τα εξωτερικά τοιχώματα μακριά από το μεχάλο άξονα του τόρου. Έτσι όπως είδαμε και στην παράχραφο 2.3

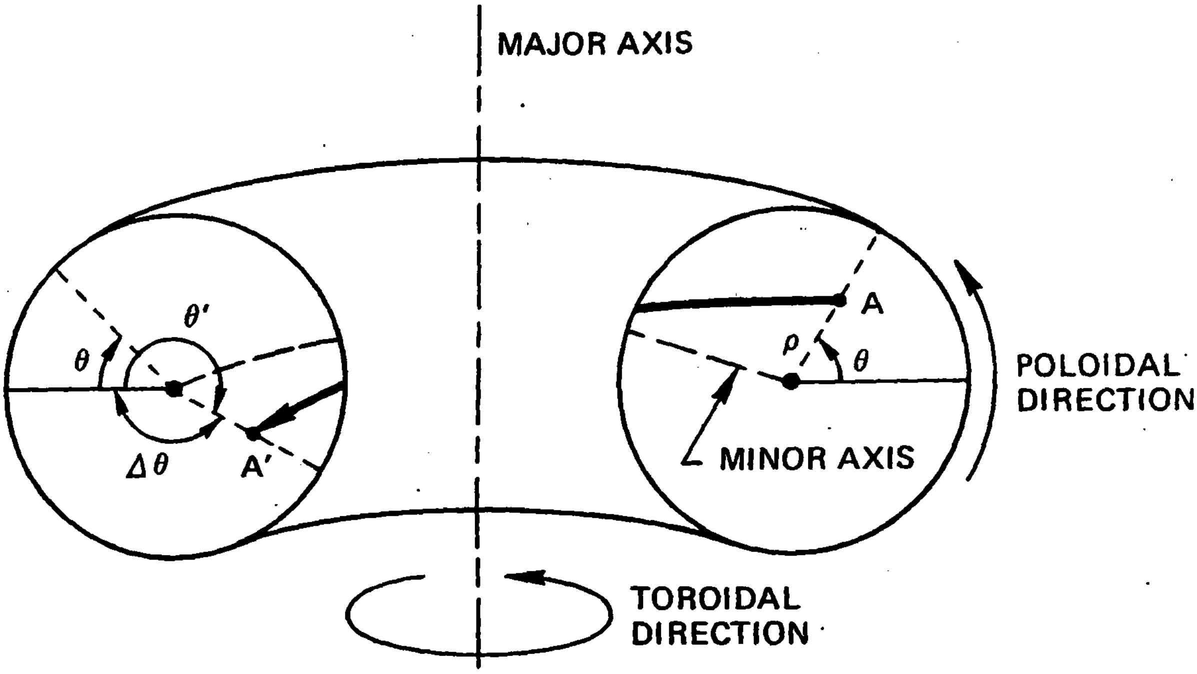
επειδή στον απλό



Σχήμα 6.2. Η ολίσθηση λόγω της παραχώχου ΔΒ δημιουργεί το ηλεκτρικό πεδίο Ε που προκαλεί ολίσθηση του πλάσματος προς τα έξω.

τόρο οι μαγνητικές γραμμές είναι κυκλικές και κλίνουν μεταξύ τους τα σωμάτια θα τείνουν να ξεφύγουν προς τα έξω. Το φαινόμενο αυτό μπορεί ν' αντιμετωπιστεί με τη δημιουργία καμπυλότητας στις μαγνητικές γραμμές όπως φαίνεται στο σχήμα (6.3).

Για παράδειγμα η δυναμική γραμμή στο σημείο Α με συντεταγμένες (ρ,θ) αντί να φτάσει στο απέναντι μέρος στο σημείο Α με τις ίδιες συντεταγμένες φτάνει στο σημείο Α' με συντεταγμένες (ρ,θ') σχηματίζοντας με το μικρό άξονα μια διαφορά γωνίας Δθ. Η γωνία Δθ που προέρχεται από μια ολόκληρη περιστροφή της μαγνητικής γραμμής λέγεται περιστροφική συνάρτηση μετασχηματισμού γιώτα (i). Αν δεν θα υπήρχαν συγκρούσεις τότε οποιαδήποτε ορισμένη τιμή της (i) θα ήταν αρκετή ν' αποτρέψει την ολίσθηση προς τα έξω. Στην πραγματικότητα



Σχήμα 6.3. Περιστροφική συνάρτηση μετασχηματισμού Γιώτα (i).

όμως λόγω των συγκρούσεων η συνάρτηση (1) πρέπει να πάρει αρκετά μεγάλες τιμές για να διατηρηθεί η ισορροπία στο πλάσμα.

Παράλληλα με την ισορροπία πρέπει επίσης να εξασφαλιστεί και η σταθερότητα. Στα τοροειδή συστήματα η υψηλής συχνότητας αστάθειες των ηλεκτρονίων δεν είναι επικίνδυνες λόγω της βραδύτητας των ιόντων. Αντίθετα οι αστάθειες χαμηλής συχνότητας μπορούν να οδηγήσουν στην απώλεια των ιόντων προς τα τοιχώματα. Οι αστάθειες αυτές διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες:

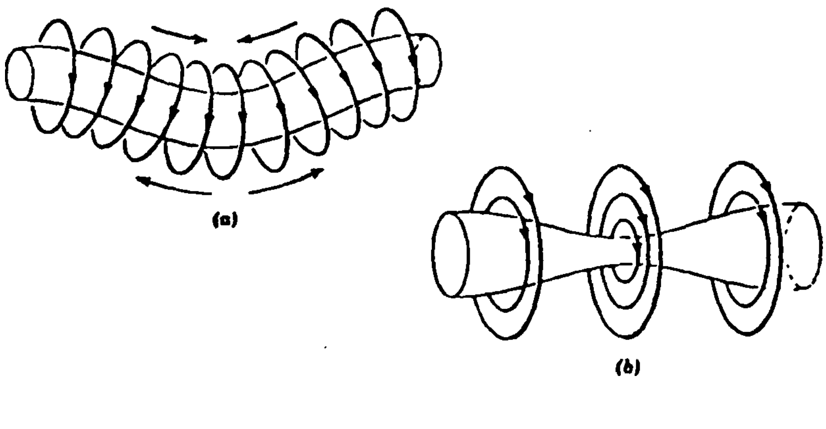
α) Rayleigh - Taylor

β) αστάθειες λόγω ρευμάτων

γ) αστάθειες λόγω ολισθήσεων

Επιπρόσθετες αστάθειες προέρχονται από την καμπυλότητα των μαγνητικών γραμμών με κύριο παράδειγμα τη βαρυτική αστάθεια που συναντήσαμε στο κεφάλαιο 3. Μια πολύ σημαντική αστάθεια είναι η Rayleigh - Taylor που εξηγήσαμε στην παράγραφο (5.3.2).

Τις αστάθειες που προέρχονται από τα επιβαλλόμενα ρεύματα τις διακρίνουμε σε ηλεκτροστατικές και ηλεκτρομαγνητικές. Μια γνωστή ηλεκτρομαγνητική αστάθεια είναι η αστάθεια καμπυλότητας <Kink> του πλάσματος που όπως φαίνεται και από το σχήμα (6.4) προέρχεται από την αλλαγή της πυκνότητας των μαγνητικών γραμμών στα σημεία καμπυλότητας του πλάσματος. Το ρεύμα που διαπερνά το πλάσμα κατά μήκος του δημιουργεί το πολοειδές μαγνητικό B_p. Όταν για κάποιο λόγο το πλάσμα παρουσιάζει απότομη καμπυλότητα τότε οι μαγνητικές γραμμές συμπιέζονται στο κάτω μέρος ενώ αραιώνουν στο πάνω μέρος. Έτσι δημιουργούνται δυνάμεις που πιέζουν το πλάσμα προς τα τοιχώματα. Όμοια με την αστάθεια καμπυλότητας είναι και η αστάθεια του λουκάνικου ή του λαιμού. Στο σημείο της συμπίεσης αυξάνει η επαγωγή στην πολοειδή διεύθυνση και αυτό δημιουργεί μια μεγαλύτερη εσωτερική πίεση σ' αυτό το σημείο παρά αλλού με αποτέλεσμα να γίνεται η αστάθεια μεγαλύτερη.



Σχήμα 6.4. α) αστάθεια ασυνέχειας. β) αστάθεια λουκάνικου ή λαιμού.

Παρ' ότι το πρόβλημα των ασταθειών δεν έχει λυθεί εντελώς έχουν μελετηθεί αρκετές μέθοδες για την καταπολέμησή τους. Συγκεκριμένα αναφέρουμε τα αχώχιμα επικαλύματα χύρω από το πλάσμα που κατορθώνουν να δημιουρχούν τοροειδές μαχνητικό πεδιο στο εσωτερικό χύρω από το πλασμα και πολοειδές στο εξωτερικό του δοχείου. Τα μαχνητικά δυναμικά με μαχνητικές χραμμές μαχαλύτερης πυκνότητας στο κέντρο του πλάσματος και μικρότερης στο εξωτερικό του και τη δυναμική σταθεροποίηση που χρησιμοποιεί ημιτονοειδή μεταβαλλόμενα ηλεκτρομαχνητικά πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$.

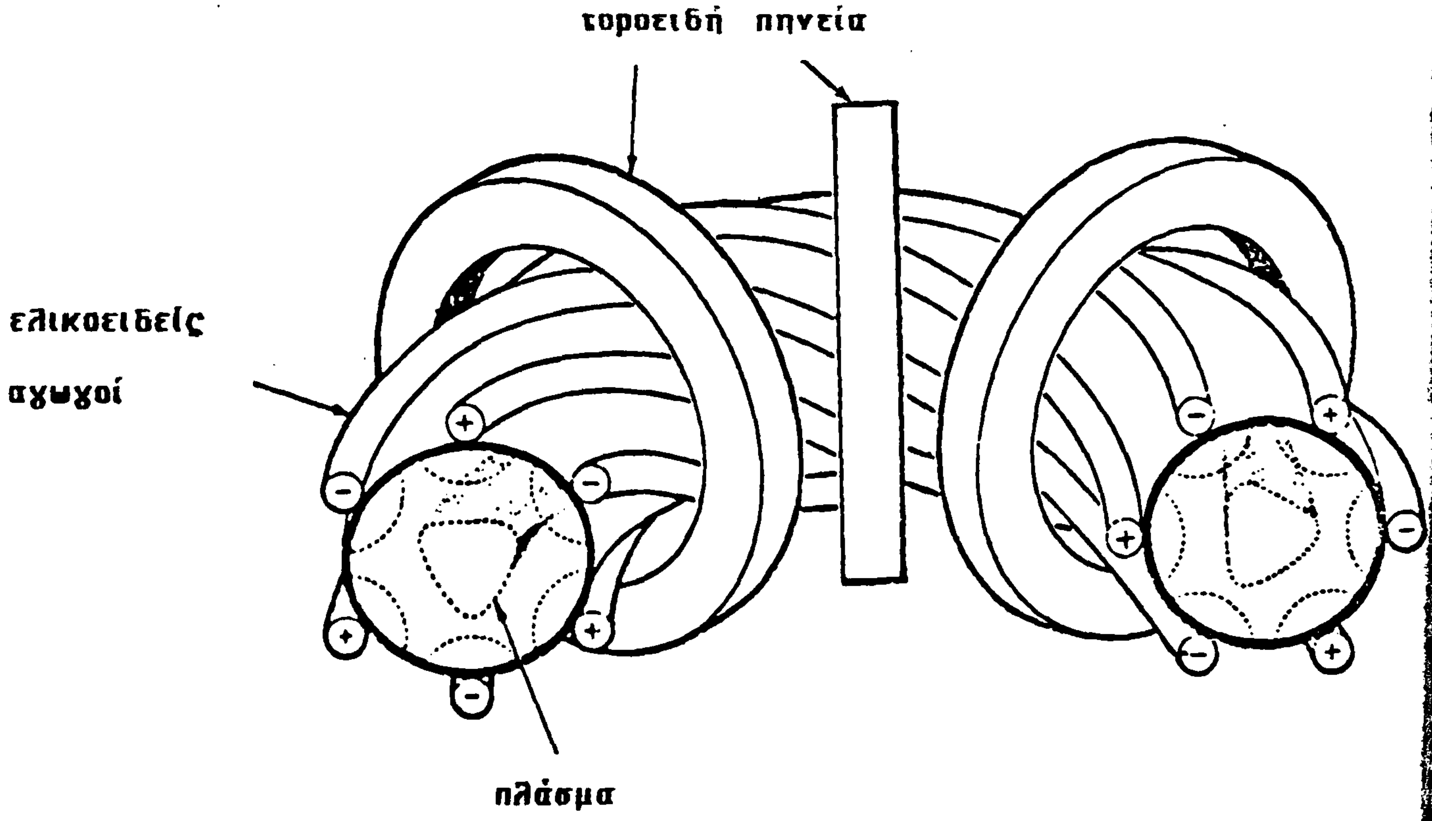
6.4.2. Κλειστά συστήματα. Τύποι τοροειδών

Τα τοροειδή συστήματα διαφέρουν μεταξύ τους στον τρόπο που χίνεται η καμπυλότητα των μαχνητικών χραμμών. Διακρίνουμε: α) τους Stellarators που η καμπυλότητα χίνεται με ρεύματα που περνούν από ελικοειδείς εξωτερικούς αχωχούς β) τα Tokamaks που αντίθετα χίνεται με εσωτερικά ρεύματα χ) το Astron με εσωτερικές δέσμες σωματίων και δ) τα πολύπολα με εσωτερικούς αχωχούς.

Ένα τυπικό παράδειχμα Stellarator φαίνεται στο σχήμα (6.5). Τρία ζεύχη (ℓ = 3) ελικοειδών αχωχών που διαρρέονται από ρεύματα δημιουρχούν μια μαχνητική επιφάνεια με τριχωνική μορφολοχία. Τα ρεύματα αυτά επιπρόσθετα δημιουρχούν τα μαχνητικά επικαλύμματα και ενισχύουν την περιστροφική παράμετρο. Γενικά η αδυναμία του Stellarator να περιορίσει το πλάσμα καθοριστικά φαίνεται να οφείλεται στην ασυμμετρία χύρω από το μεχάλο άξονα που προκαλεί ασυμμετρία στο ηλεκτρικό πεδίο. Ένας άλλος λόχος είναι ότι δεν διαθέτει αρκετά μαχνητικά αχώχιμα επικαλύμματα ώστε να καλύψει όλες τις αστάθειες.

Το πιο διαδεδομένο από τα τοροειδή είναι το Tokamak. Όπως φαίνεται και στο σχήμα (6.6) εκτός από το ισχυρό τοροειδές B_t και πολοειδές

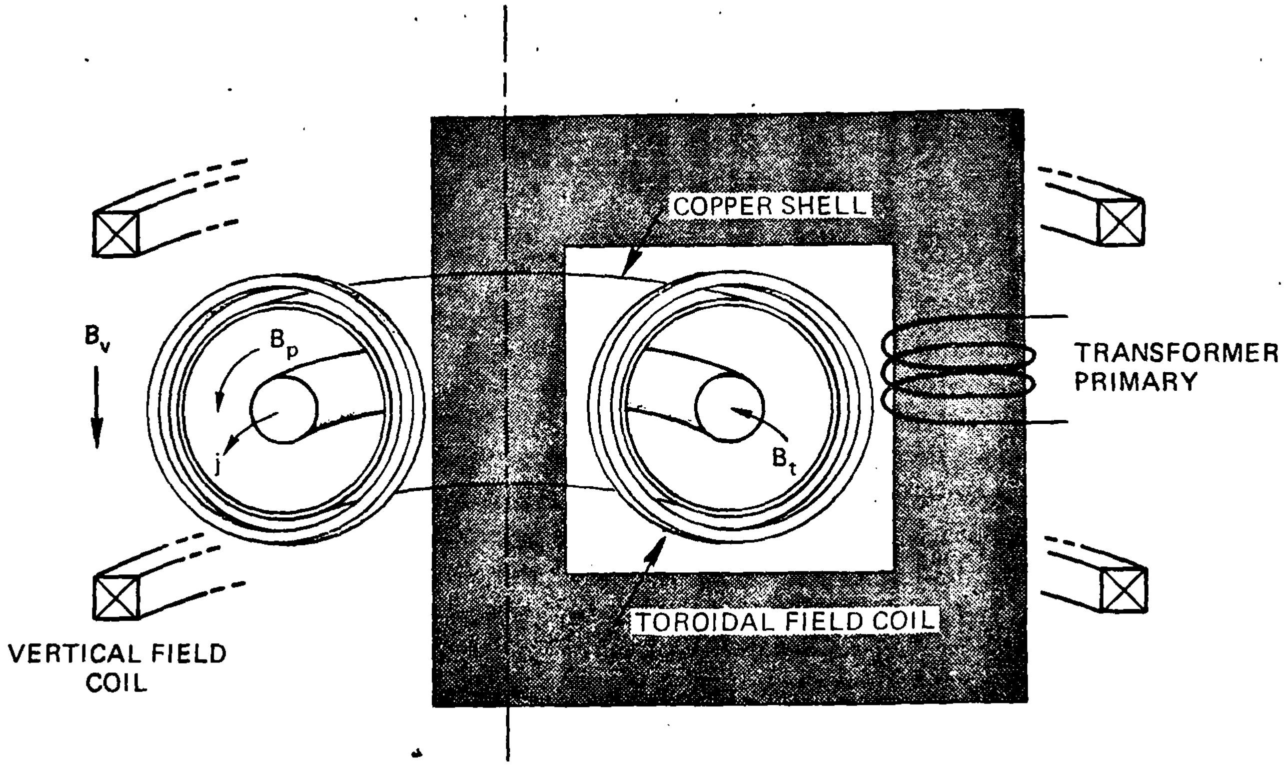
B_p μαγνητικό πεδίο έχει και ένα τρίτο πεδίο B_U παράλληλο προς το μεγάλο άξονα ώστε να δημιουργεί μια δύναμη $\vec{J} \times \vec{B}_U$ με διεύθυνση προς



Σχήμα 6.5. Stellarator με $\ell = 3$.

το εσωτερικό του τόρου. Η δύναμη αυτή συμπιέζει το πλάσμα ακτινικά προς τα μέσα και επομένως δρα ενάντια στην επεκτασιμότητα του πλάσματος προς τα έξω.

Το Tokamak είναι απλό στην κατασκευή του και στην ανάλυσή του. Παρουσιάζει όμως το μειονέκτημα ότι τα προβλήματα θέρμανσης και ισορροπίας δεν μπορούν να μελετηθούν ξεχωριστά γιατί και τα δυο αντιμετωπίζονται με τη δημιουργία ρευμάτων. Ένα άλλο μειονέκτημα είναι ότι το ρεύμα στο πλάσμα τροφοδοτείται επαγωγικά με μετασχηματιστή. Έτσι το Tokamak δεν μπορεί να λειτουργήσει σε



Σχήμα 6.6. Στο Tokamak, το τοροειδές πεδίο B_t παράγεται από ισχυρά πηνία και το πολικό B_p από ισχυρά ρεύματα j που δημιουργούνται από το μετασχηματιστή. Το ασθενές πεδίο B_v για την καταπολέμηση ασταθειών παράγεται από πηνία με χαλκό υψηλής αγωγιμότητας.

σταθερή κατάσταση (steady-state) αλλά σε παλμοειδή. Παρά τα δυο αυτά μειονεκτήματα το Tokamak φαίνεται να είναι το πιο επιτυχές από τα τοροειδή συστήματα.

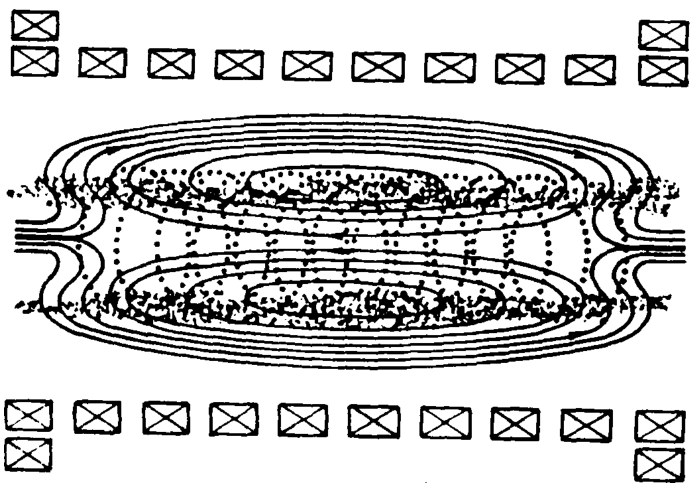
Στο Tokamak ιδιαίτερο ρόλο παίζει η περιστροφική παράμετρος (ι). Για να παραμένουν ανοικτές οι μαγνητικές γραμμές, η παράμετρος αυτή δεν πρέπει να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Για να εξασφαλίζεται η σταθερότητα όμως δεν πρέπει και να είναι μικρότερη από 2π. Επομένως το ρεύμα δεν μπορεί ν' αυξηθεί απεριόριστα ώστε να επιτευχθεί η ανάφλεξη. Μια ενδιαφέρουσα παράμετρος προκύπτει από τη σχέση της μεγάλης ακτίνας προς τη μικρή ακτίνα του τόρου και το λόγο του τοροειδούς προς το πολοειδές πεδίο. Ο ρυθμός με τον οποίο η μαγνητική γραμμή στην επιφάνεια του πλάσματος περιστρέφεται γύρω από το μεγάλο άξονα είναι ανάλογος του λόγου B_t/R και γύρω από το μικρό άξονα του λόγου B_p/α. Επομένως η περιστροφική παράμετρος (i) είναι ανάλογος του πηλίκου των λόγων αυτών. Σαν παράγοντας ποιότητας ορίζεται το αντίστροφο αυτού του πηλίκου, δηλαδή

$$q \equiv \frac{B_t\, \alpha}{B_p\, R} = \frac{2\pi}{i} \qquad (6.16)$$

Ο παράγοντας αυτός δηλώνει πόσο μακριά είναι ένα Tokamak από το όριο σταθερότητας $q = 1$ ή $i = 2\pi$ το οποίο και ονομάζεται όριο Kruskal-Shafranov. Εδώ είναι και που η θέρμανση και η ισορροπία δρουν αντίθετα. Γιατί από άποψη θέρμανσης θα πρέπει να υπάρχουν αρκετά μεγάλα ρεύματα $J >>$. Επειδή όμως $J \sim B_p/\alpha$ αυτό μπορεί να γίνει μόνο για μικρές τιμές του q. Όμως πλάσματα με μικρές τιμές q, ($q < 2., 3.$) δεν είναι σταθερά.

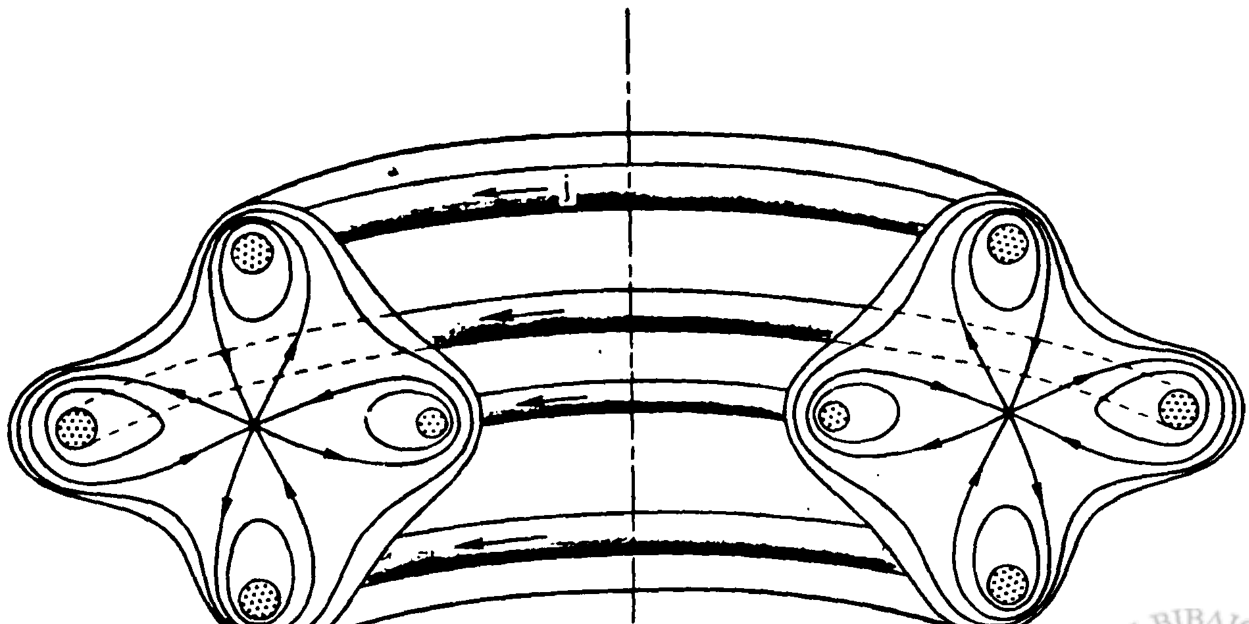
Τα προβλήματα σταθερότητας και ανάφλεξης στα Tokamak έχουν εντοπιστεί σαν αποτέλεσμα της διαφοράς του μαγνητικού πεδίου B_t στο εσωτερικό και εξωτερικό μέρος του τόρου. Έτσι έχουν γίνει προσπάθειες αλλαγής της διατομής σε μη κυκλική για παράδειγμα σε σχήμα τριγωνικό Δ ή σχήμα D. Ένα τέτοιο Tokamak είναι το Tokamak του Ευρωπαϊκού Προγράμματος JET (Joint European Torus). Πάντως υπάρχει όριο στη σμίκρυνση της ακτίνας γιατί δημιουργούνται απότομες αλλαγές στις μαγνητικές γραμμές. Η αλλαγή της διατομής φαίνεται να επιδρά ευνοϊκά και στη σταθερότητα και στην ανάφλεξη. Μέχρι στιγμής τα πιο ευνοϊκά αποτελέσματα είναι $T = 2$ KeV, $n = 2 \times 10^{13}$ cm^{-3} αλλά πτ μια τάξη μεγέθους κάτω από το κριτήριο Lawson(13,14). Οι προσπάθειες αύξησης του χρόνου τ με ανάλογη αύξηση των διαστάσεων ελαττώνει τη θέρμανση κατά την αύξηση της θερμοκρασίας πάνω από 1 KeV. Είναι πιθανόν ότι πρέπει ν' αναζητηθούν άλλοι τρόποι θέρμανσης όπως θ' αναφέρουμε στην παράγραφο (6.6).

Το Astron στηρίζεται στην αρχή του μαγνητικού καθρέφτη για περιορισμό και σε σχετικιστικές δέσμες ηλεκτρονίων για την αναστροφή του μαγνητικού πεδίου ώστε να σχηματιστεί μαγνητική μορφολογία εγκλωβισμού όπως φαίνεται στο σχήμα (6.7). Η δέσμη των ηλεκτρονίων χρησιμοποιείται επίσης για τη θέρμανση του πλάσματος. Το Astron μπορεί να χαρακτηριστεί σαν μια μηχανή μεταξύ Tokamak και Πολύπολου.



Σχήμα 6.7. Στο Astron το ρεύμα σχετιστικιστικών δεσμών ηλεκτρόνιων που διαγράφουν κυκλικές τροχιές γύρω από τον άξονα συμμετρίας παραλλάσσει τις αρχικές δυναμικές γραμμές του μαγνητικού καθρέφτη με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί μια σταθερή περιοχή περιορισμού με κλειστές δυναμικές γραμμές.

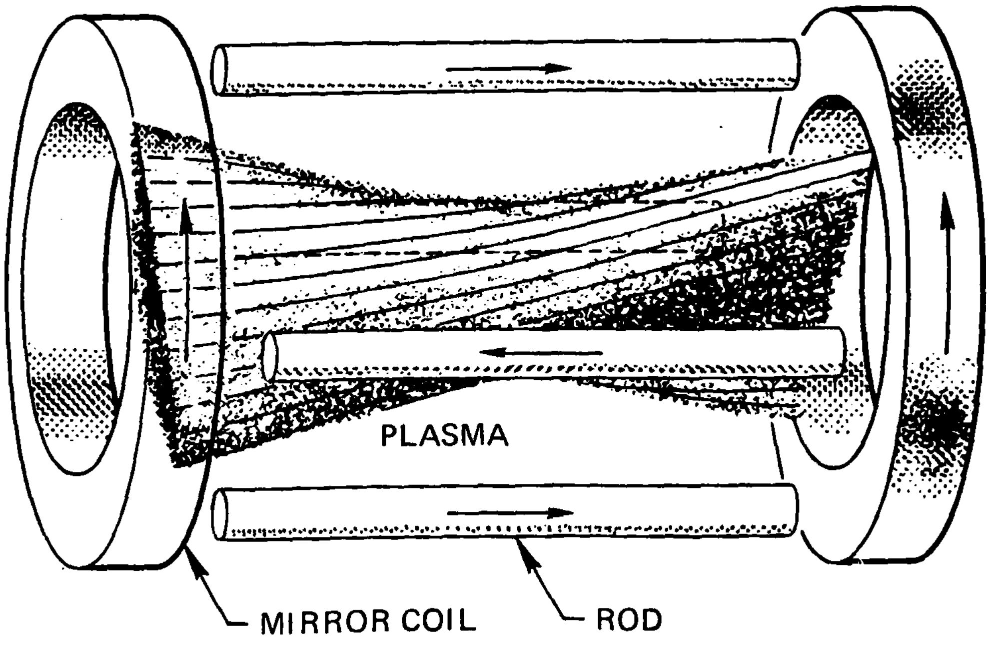
Πολύπολα ονομάζονται τα τοροειδή που έχουν B = 0 (Zero - B) πάνω στο μικρό άξονα. Αυτό επιτυγχάνεται με τη διοχέτευση ρευμάτων με χάλκινους δακτυλιωτούς αγωγούς που ακολουθούν τη διεύθυνση του πλάσματος. Έτσι σωμάτια που εγκλωβίζονται στο χώρο γύρω από το μικρό άξονα αισθάνονται μια αυξανόμενη μαγνητική πίεση σε όλες τις διευθύνσεις. Επίσης σωμάτια που είναι κοντά στους αγωγούς αισθάνονται μια κεντρομόλο δύναμη και έτσι δημιουργείται σταθερότητα ενάντια στη βαρυτική αστάθεια. Τα πολύπολα σε αντίθεση με το Tokamak και το Stellarator έχουν μόνο πολοειδές μαγνητικό πεδίο. Έχουν όμως τη δυνατότητα απόκτησης και τοροειδούς πεδίου με τη διοχέτευση ρεύματος στη διεύθυνση του μεγάλου άξονα. Ένα τυπικό παράδειγμα πολύπολου είναι το οκτάπολο, με $\ell=4$ αγώγιμα δακτυλίδια, που φαίνεται στο σχήμα (6.8). Το μαγνητικό πεδίο είναι εντελώς πολοειδές και είναι σχεδόν μηδέν πάνω στο μικρό άξονα. Πλάσμα που κινείται γύρω από τον άξονα ή μεταξύ του άξονα και των αγωγών εγκλωβίζεται, ενώ πλάσμα που κινείται έξω από αυτό το χώρο χάνεται λόγω της βαρυτικής αστάθειας. Άλλες παραλλαγές πολύπολων είναι το τετράπολο με $\ell = 2$ δακτυλίδια και το δίπολο που λέγεται και spherator ή παράκεντρο levitron μ' ένα δακτυλίδι. Και στο δίπολο και στο τετράπολο όμως πρέπει να επενεργήσουν επιπρόσθετα πεδία για να λειτουργήσουν. Ιδιαίτερα χρειάζονται τοροειδές και κατακόρυφο μαγνητικό πεδίο για ευστάθεια.



Σχήμα 6.8. Τοροειδές οκτάπολο.

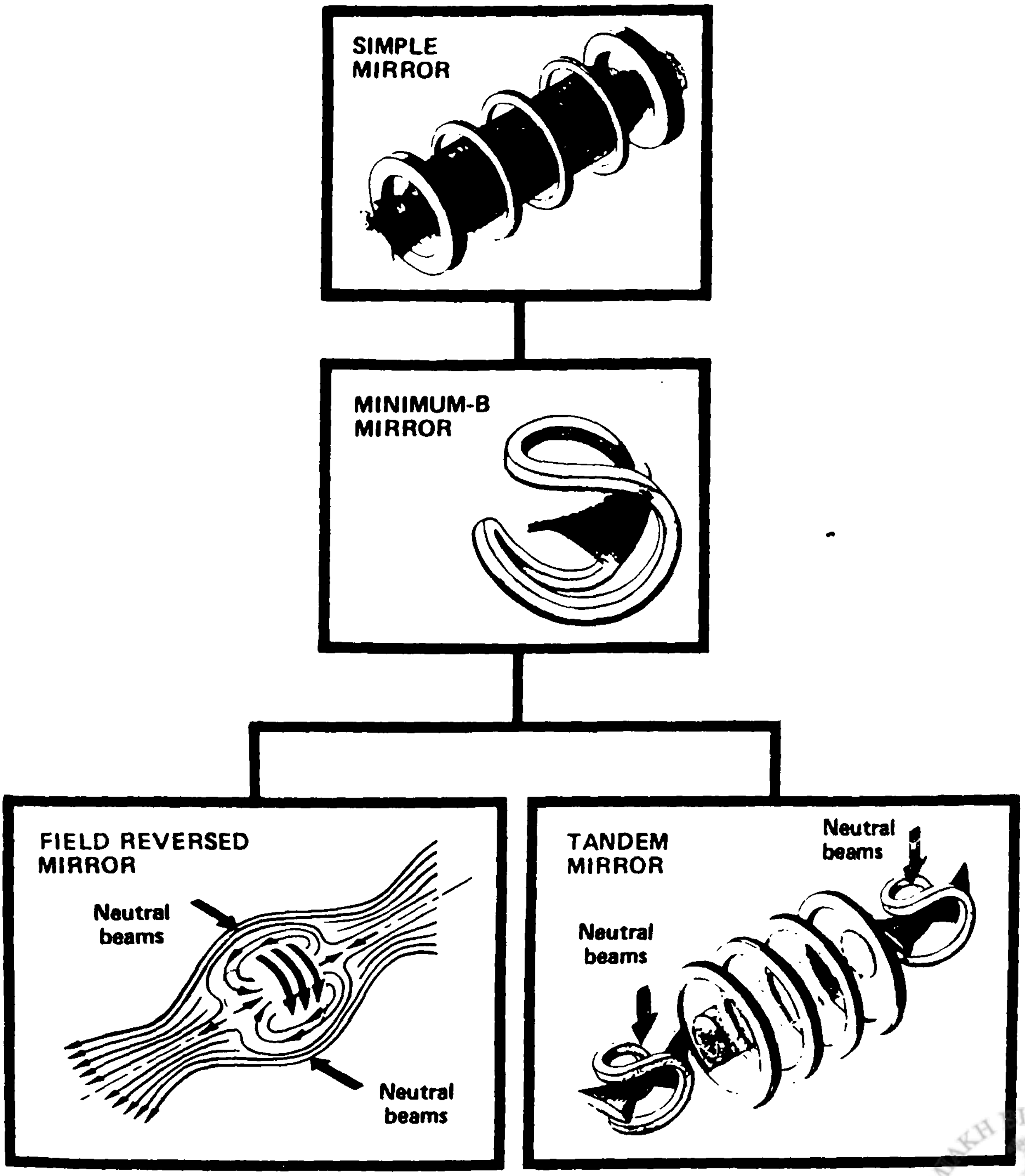
6.4.3. Ανοικτά συστήματα - Μαγνητικοί καθρέφτες

Οι απλοί μαγνητικοί καθρέφτες είναι ανοικτά συστήματα και από τα δυο άκρα. Τη γεωμετρία τους την περιγράψαμεε στην παράγραφο (2.3). Είναι ασταθή στη βαρυτική αστάθεια και παρουσιάζουν μεγάλες απώλειες στα άκρα τους. Το πρόβλημα της ευστάθειάς τους λύνεται με ζεύγη υποβοηθητικών ρευμάτων αντίθετης διεύθυνσης που διοχετεύονται από αγωγούς παράλληλους στη διεύθυνση του πλάσματος, τους αγωγούς Ioffe. Με αυτό τον τροπο το πλάσμα παραμορφώνεται ασύμμετρα και δημιουργείται πάνω στον άξονα του κυλίνδρου μαγνητικό πεδίο με ελάχιστο -B. Το πλάσμα που βρίσκεται σ' αυτό το χώρο βλέπει ένα αυξανόμενο μαγνητικό πεδίο σε κάθε διεύθυνση και έτσι εγκλωβίζεται σ' αυτό το χώρο. Ένας τέτοιος μαγνητικός καθρέφτης φαίνεται στο σχήμα (6.9). Ενώ δεν έχει τις γνωστές αστάθειες των τοροειδών παρουσιάζει



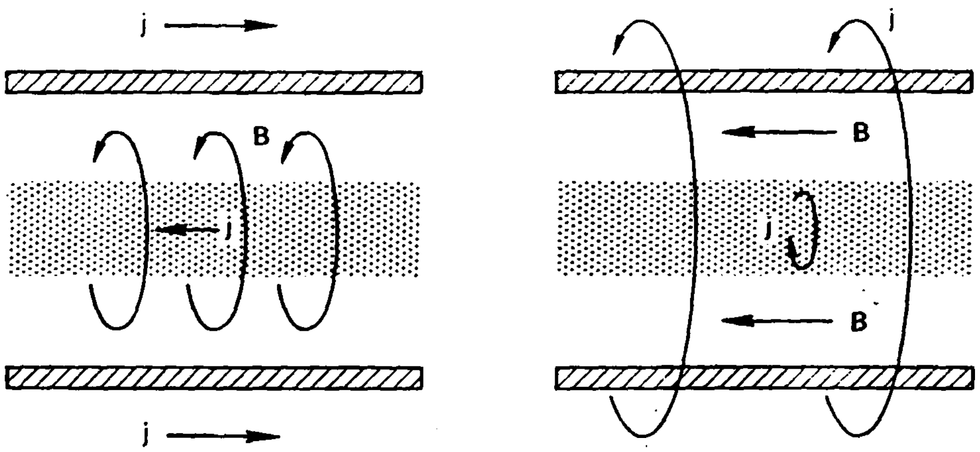
Σχήμα 6.9. Μαγνητικός καθρέφτης με αγωγούς Ioffe.

αστάθειες εκεί που το πλάσμα έχει μεγάλες καμπυλότητες. Μερικές από τις αστάθειες αυτές αντιμετωπίζονται με μια κατάλληλη παραμόρφωση και σύνδεση των πηνίων με τους αγωγούς Ioffe σ' ένα μοναδικό πηνίο. Η εξέλιξη του μαγνητικού καθρέφτη φαίνεται στο σχήμα (6.10).



Σχήμα 6.10 Τύποι μαγνητικού καθρέφτη.

Με τα ελικοειδή πηνία στα άκρα ελαττώνεται η απώλεια σωματίδιων και μικραίνει ο κώνος απώλειας που είδαμε στην παράγραφο 2.3. Τα καλύτερα αποτελέσματα μέχρι τώρα σε τέτοιες μηχανές είναι $T_i = 2.5$ KeV, $n_e = 10^{13}$ cm^{-3} $\tau = 120$ ms [14].

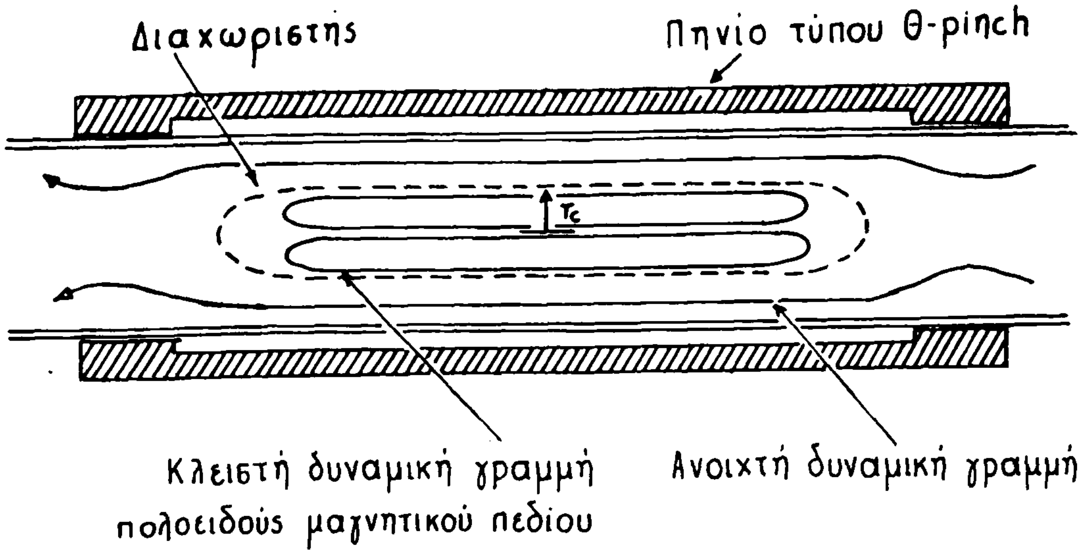


Σχήμα 6.11. Γεωμετρία Pinch

6.4.4. Pinches

Τα συστήματα αυτά είναι τα πιο απλά. Σ' αυτά ρεύματα που μεταφέρει το ίδιο το πλάσμα συνεισφέρουν αποφαστιστικά στη δημιουργία μαγνητικών πεδίων για τον περιορισμό του. Όπως είδαμε στο κεφάλαιο V υπάρχουν δυο γεωμετρικές μορφολογίες το θ-pinch και το Z-pinch (σχήμα 6.11). Και στις δυο περιπτώσεις το μαγνητικό πεδίο αυξάνεται με την άυξηση του ρεύματος εγκλωβίζοντας και αναφλέγοντας το πλάσμα. Συνήθως το θ-Pinch έχει στα άκρα τη μορφολογία του μαγνητικού καθρέφτη για να ελαττώνονται οι απώλειες των σωματίδιων. Για τον ίδιο βασικά λόγο μπορούν επίσης να καμπυλωθούν ώστε να μετατραπούν σε τοροειδή συστήματα. Δεν έχουν αποδειχτεί αρκετά χρήσιμοι στην πράξη γιατί παρουσιάζουν τόσο την αστάθεια της ασυνέχειας όσο και την αστάθεια του λουκάνικου. Εδώ φαίνεται να μην αποδίδουν και οι συνήθεις μέθοδοι καταπολέμησης αυτών των ασταθειών.

Μια πρόσφατη ενδιαφέρουσα εξέλιξη των συστημάτων αυτών στηρίζεται στην παρακάτω αρχή. Αν τα εσωτερικά ρεύματα στο πλάσμα γίνουν πολύ ισχυρά μπορούν ν' αντιστρέψουν το μαγνητικό πεδίο στον άξονα συμμετρίας και να οδηγήσουν σε τοροειδή μαγνητική μορφολογία παρόμοια με την περίπτωση του Astron όπως φαίνεται στο σχήμα (6.12). Τέτοιες διατάξεις που συνδυάζουν την απλότητα του μαγνητικού καθρέφτη (ανοιχτό σύστημα) με τα πλεονεκτήματα του τοροειδούς μαγνητικού περιορισμού ονομάζονται συμπαγή τοροειδή.



Σχήμα 6.12. Γεωμετρία αντιστροφής μαγνητικού πεδίου σε μια διάταξη θ-pinch όπου φαίνονται οι κλειστές δυναμικές γραμμές. Ο διαχωριστής ακτίνας r_c είναι η συνοριακή επιφάνεια μεταξύ κλειστών και ανοιχτών δυναμικών γραμμών.

6.5. Εσωτερικός περιορισμός

Μια άλλη μέθοδος περιορισμού του πλάσματος για πυρηνική σύντηξη βασίζεται στη χρήση ακτίνων Laser ή δεσμών σωματιδίων (σχετικιστικά ηλεκτρόνια, ελαφρά η βαριά ιόντα) πολύ μεγάλης ενέργειας. Οι δέσμες αυτές εστιάζονται σ' ένα μικρό στόχο στερεού D-T πυκνότητας $n_0 \approx 5x10^{22}$ cm^{-3} πυκνότητα μάζας $\mu_0 = n_0 M = .2 g/cm^3$) και αναγκαία συνθήκη για την επίτευξη πυρηνικής σύντηξης είναι ότι ο στόχος πρέπει να θερμανθεί και οι πυρηνικές αντιδράσεις πρέπει να λάβουν χώρα σε πάρα πολύ μικρό χρονικό διάστημα της τάξης μεγέθους μερικών nsecs (1 ns = 10^{-9} s) πριν το πλάσμα αρχίσει να εκτονώνεται (διαστέλλεται). Έτσι οι δέσμες πρέπει να έχουν τη μορφή παλμού πολύ μικρής διάρκειας. Για πυκνότητες πλάσματος της τάξης 10^{22} cm^{-3} δεν είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν μαγνητικά πεδία για την εξισορρόπηση της κινητικής πίεσης nKT.

Στο παραπάνω σενάριο ο χρόνος περιορισμού καθορίζεται από την ταχύτητα εκτόνωσης του πλάσματος. Η ταχύτητα αυτή εξαρτάται από την αδράνεια των ιόντων και από τα δυναμικά του πλάσματος (της τάξης KT_e) που είναι διαθέσιμα για την επιτάχυνση των ιόντων. Επομένως η ταχύτητα εκτόνωσης είναι ανάλογη με την ακουστική ταχύτητα $U_s = (KT_e/M)^{1/2}$. Αν ο στόχος είναι σφαιρικός με ακτίνα R ο χρόνος περιορισμού δίνεται από τη σχέση

$$\tau \approx \frac{R}{U_s} \qquad (6.17)$$

Μέσω της σχέσης (6.17) το κριτήριο Lawson επιβάλλει ένα ελάχιστο για το γινόμενο n R n μR. Μια έκφρασή του που χρησιμοποιείται συνήθως γράφεται

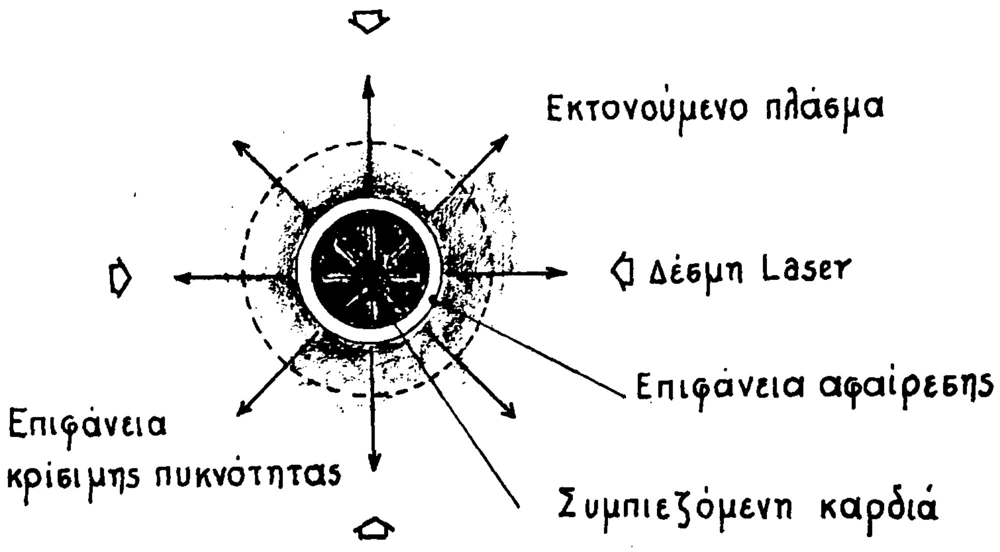
$$\mu R > 1 \text{ g/cm}^3 \qquad (6.18)$$

Η ενέργεια που χρειάζεται ο στόχος για να θερμανθεί ώστε να επιτευχθεί η σύντηξη είναι περίπου 10 KeV. Σε συνηθισμένες πυκνότητες στερεού στόχου D-T η απαιτούμενη ενέργεια του παλμού για τη θέρμανση του στόχου σε τέτοιες θερμοκρασίες είναι μεγαλύτερη από 3×10^{10} J και επομένως δεν υπάρχει δυνατότητα πραγματοποίησής της. Έτσι η ανάγκη κάποιας άλλης μεθόδου είναι εμφανής. Η μέθοδος αυτή μπορεί να είναι η συμπίεση του στόχου όπως, φαίνεται από το παρακάτω απλό θεωρητικό σκεπτικό. Η ενέργεια θέρμανσης του στόχου είναι ανάλογη της μάζας του $\mu(4/3\ \pi\ R^3)$. Επομένως για οριακή ικανοποίηση του κριτήριου Lawson ($R = \mu^{-1}$) η ενέργεια του παλμού είναι ανάλογη του μ^{-2}. Η συμπίεση λοιπόν του αρχικού στόχου σε μεγαλύτερες πυκνότητες θα είχε σαν αποτέλεσμα την ελάττωση της απαιτούμενης ενέργειας του παλμού. Για παράδειγμα αν ο στόχος συμπιεστεί ώστε $\mu = 10^4\ \mu_0$ η απαιτούμενη ενέργεια του παλμού ελαττώνεται κατά έναν παράγοντα 10^8 φτάνοντας την πραγματοποίηση τιμή 1MJ.

Η συμπίεση του στόχου δεν μπορεί να επιτευχθεί με την πίεση ακτινοβολίας του Laser ή με τη μεταφερόμενη ορμή της δέσμης των σωματίδιων. Οι δυνάμεις που χρειάζονται είναι πολύ μεγαλύτερες. Η πιο αποτελεσματική τεχνική που χρησιμοποιείται είναι η αφαιρετική συμπίεση (ablative compression). Η τεχνική αυτή έγκειται στον ομοιόμορφο βομβαρδισμό του στόχου από διάφορες διευθύνσεις. Στην περίπτωση ακτινοβολίας με Laser οι δέσμες εστιάζονται στο στόχο όπως φαίνεται στο σχήμα (6.13).

Η ακτινοβολία εξαερώνει και ιονίζει ένα εξωτερικό μέρος του στόχου κοντά στην επιφάνεια και δημιουργείται ένας εξωτερικός φλοιός πλάσματος του οποίου η πυκνότητα ελαττώνεται από μέσα προς τα έξω.

Οι ακτίνες διαπερνούν το πλάσμα μέχρι μια επιφάνεια ακτίνας κρίσιμης πυκνότητας n_c τέτοια ώστε η συχνότητα του πλάσματος ω_p γίνεται ίση με τη συχνότητα του Laser ω.



Σχήμα 6.13. Σύντηξη με Laser προκαλουμενη λόγω αφαιρετικής συμπίεσης.

$$n_c = \frac{m\,\omega^2}{4\,\pi e^2} \qquad \omega = \omega_p \tag{6.18}$$

Η ενέργεια του Laser αποθηκεύεται στη γειτονιά της επιφάνειας r_c. Ο μηχανισμός απορρόφησης εξαρτάται από το μήκος κύματος του Laser και στις πιο πολλές περιπτώσεις οφείλεται σε μη γραμμικά φαινόμενα. Για μικρά μήκη κύματος, όπως για παράδειγμα στο Laser υάλου Nd μήκους κύματος 1.06 μm που χρησιμοποιείται σήμερα [15], ο κυρίαρχος μηχανισμός απορρόφησης ονομάζεται κρουστική απορρόφηση. Σ' αυτή τα ηλεκτρόνια ταλαντούμενα στο ηλεκτρικό πεδίο του Laser θερμαίνουν το πλάσμα μέσω συγκρούσεων μεταξύ τους και με ιόντα. Η θερμική ενέργεια μεταφέρεται με αγωγή από την επιφάνεια κρίσιμης πυκνότητας προς το εσωτερικό του στόχου μέχρι την επιφάνεια αφαίρεσης (ablation surface). Αυτή είναι μια συνοριακή επιφάνεια μεταξύ του θερμού πλάσματος και του πυκνού εσωτερικού μέρους του στόχου. Το πλάσμα στο εξωτερικό μέρος της επιφάνειας αφαίρεσης εκτινάσσεται προς τα έξω σαν τ' αέρια προώθησης ενός πυραύλου - γι' αυτό το φαινόμενο αυτό συχνά αναφέρεται και σαν σφαιρικός πύραυλος. Ας αναφέρουμε ότι η ταχύτητα του εκτονούμενου πλάσματος είναι της τάξης των 1000 km/sec. Η δύναμη από αντίδραση προκαλεί ένα σφαιρικό ωστικό κύμα προς το κέντρο του στόχου. Το υλικό στην καρδιά του στόχου που αναλογεί στο 10% του αρχικού μεγέθους συμπιέζεται και θερμαίνεται ώστε να μπορούν να λάβουν χώρα θερμοπυρηνικές αντιδράσεις. Η εκλυόμενη ενέργεια μπορεί ν' απορροφηθεί από ένα περιβάλλον λουτρό υγρού L_i.

Η βασική διεργασία της σφαιρικής συμπίεσης με Lasers όπως περιγράφτηκε πιο πάνω ισχύει και στην περίπτωση του εσωτερικού περιορισμού με δέσμες σωματίδιων.

Καίτοι με τον εσωτερικό περιορισμό αποφεύγονται τα δύσκολα προβλήματα του μανγητικού περιορισμού, νέα ίσης δυσκολίας προβλήματα εγείρονται. Για να είναι η συμπίεση του στόχου πιο αποτελεσματική η καρδιά του θα πρέπει να είναι όσο το δυνατό κρύα. Στην ιδανική περίπτωση η συμπίεση πρέπει να γίνεται αδιαβατικά γιατί έτσι η ενέργεια που δαπανιέται γίνεται ελάχιστη. Κατά τη φάση της απορρόφησης της ενέργειας του παλμού που περιγράψαμε πιο πάνω παράγονται υπερθερμικά ηλεκτρόνια (superthermal electrons), δηλαδή πολύ ταχέα ηλεκτρόνια τα οποία προπορευόμενα του ωστικού κύματος εισχωρούν στην καρδιά και την προθερμαίνουν με αποτέλεσμα η συμπίεση να μην είναι αποτελεσματική.

Σαν στόχοι γενικά δεν χρησιμοποιούνται στερεά σφαιρικά καύσιμα D-T αλλά κοίλα σφαιρικά κελύφη από βαρύτερα υλικά που περιβάλλουν το καύσιμο. Η αδράνεια τέτοιων υλικών βοηθά στην καλύτερη συμπίεση και συγκράτηση της καρδιάς του στόχου. Επικίνδυνη σ' αυτή την περίπτωση είναι η αστάθεια Rayleigh-Taylor. Σ' ένα συμπιεζόμενο στόχο η επιτάχυνση του συστήματος προς το κέντρο ισοδυναμεί με μια βαρυτική δύναμη που δρα προς τα έξω. Η ανάπτυξη της αστάθειας μπορεί να έχει σαν αποτέλεσμα το σπάσιμο του κέλυφους. Για την αποφυγή της αστάθειας πρέπει η δέσμη να είναι όσο το δυνατό πιο ομοιόμορφη και η επιφάνεια του κέλυφους λεία.

Άλλα προβλήματα σχετίζονται με την απόδοση και το ρυθμό επανάληψης της δέσμης, με το γεγονός ότι η ενέργεια της δέσμης πρέπει ν' αποδίδεται σε αρκούντως μικρό χρόνο, και με μη γραμμικές αστάθειες που μπορεί ν' ανακλάσουν τη δέσμη πριν φτάσει στην επιφάνεια κρίσιμης πυκνότητας.

Στην περίπτωση των Lasers μερικά από τα προβλήματα αυτά φαίνεται ν' αντιμετωπίζονται ευκολότερα σε μικρότερα μήκη κύματος (για παράδειγμα μικραίνει η παραγωγή υπερθερμικών ηλεκτρονίων) και σήμερα χρησιμοποιούνται η δεύτερη και τρίτη αρμονική συχνότητα του Laser υάλου Nd. Από την άλλη πλευρά οι δέσμες σωματίδιων πλεονεκτούν στην απόδοση σε σχέση με τα Lasers. Η μέγιστη τιμή του συντελεστή απόδοσης των επιταχυντών ιόντων κυμαίνεται στο 25% ενώ η αντίστοιχη τιμή για τα Lasers είναι 5%. Υπάρχει όμως το πρόσθετο πρόβλημα εστιασμού της δέσμης λόγω των αμοιβαία απωστικών δυνάμεων των φορτισμένων σωματίδιων. Η τεχνολογία των επιταχυντών που έχει αναπτυχθεί στον τομέα της Πυρηνικής Φυσικής και των Στοιχειωδών Σωματίδιων μπορεί να λύσει μερικά από τα παραπάνω προβλήματα και τρέχουσες μελέτες δείχνουν ότι η χρήση βαριών ιόντων (π.χ. ουράνιου) είναι ίσως η μέθοδος που υπόσχεται τα πιο πολλά για τον εσωτερικό περιορισμό του πλάσματος.

6.6. Ανάφλεξη και τεχνολοχική ανάπτυξη

Ισοδύναμο σε δυσκολία με το πρόβλημα του περιορισμού είναι και το πρόβλημα της ανάφλεξης. Μέχρι τώρα οι κυριότεροι τρόποι ανάφλεξης είναι:

1) Μέσω αντίστασης Ohm. Γίνεται στα Tokamaks και στους Stellarators 2) Με αδιαβατική συμπίεση. Γίνεται στα Pinch και στους μαγνητικούς καθρέφτες. 3) Με κύματα ιόντων σε ραδιοσυχνότητες 4) Με κύματα ηλεκτρονίων σε συχνότητες μικροκυμάτων. 5) Με δέσμες φορτισμένων σωμάτιων. 6) Με δέσμες ουδέτερων σωμάτιων. Με άλλους τρόπους που όμως χρειάζονται παραπέρα ανάπτυξη της τεχνολογίας. Η τεχνολογία βέβαια πρέπει ν' αναπτυχθεί και σε άλλους τομείς όπως 1) στα τοιχώματα για να μπορούν να συγκρατούν δέσμες νετρονίων με ενέργειες γύρω στα 14 MeV 2) στους χιτώνες για την παραγωγή τρίτιου 3) στην εξαγωγή της ενέργειας 4) σε περιβαντολλογικά προβλήματα που αναφέρονται στην παραγωγή και αποθήκευση του τρίτιου και σε άλλα προβλήματα μικρότερης εμβέλειας.

Επειδή τα προβλήματα αυτά είναι πολλά και σύνθετα και λόγω της υπάρχουσας υποδομής σε πυρηνικούς αντιδραστήρες σχάσης είναι πολύ πιθανό, οι πρώτοι πυρηνικοί αντιδραστήρες σύντηξης να λειτουργήσουν σ' ένα συζευγμένο σύστημα σχάσης/σύντηξης. Το σύστημα αυτό θα βελτιστοποιεί τα προτερήματα των δυο αντιδραστήρων και θα ελαχιστοποιεί τα μειονεκτήματά τους. Για παράδειγμα τα νετρόνια από τη σύντηξη θα χρησιμοποιούνται για σχάση ενώ τριτιο θα παράγεται στη σχάση και ενέργεια από τη σχάση θα χρησιμοποιείται για ανάφλεξη στη σύντηξη. Ένα τέτοιο σύστημα όμως μπορεί να γίνει αποδεκτό μόνο σαν ενα παροδικό και ενδιάμεσο στάδιο που τελικά θα παραχωρήσει τη θέση του στα προηγμένα συστήματα σύντηξης.

6.7. Ασκήσεις

6.7.1. Δείξε ότι μια πιθανή πυρηνική αντίδραση σύντηξης είναι.

$$D + {}^{6}L_{i} \rightarrow 2\,{}^{4}He + 22.4 \text{ MeV} \qquad (1)$$

Λύση

Το πλεόνασμα μάζας ΔΜ των πυρήνων D, ${}^{6}L_{1}$ και ${}^{4}He$ είναι αντίστοιχα 13.14 MeV, 2.43 MeV και 14.10 MeV. Επομένως οι μάζες αδράνειας θα είναι

$D \rightarrow M_D = 931.48 \times 2 + 13.14$ MeV

${}^{4}He \rightarrow M\,{}^{4}He = 931.48 \times 4 + 2.43$ MeV

${}^{6}Li \rightarrow M\,{}^{6}Li = 931.48 \times 6 + 14.10$ MeV

Από την εξίσωση (1) έχουμε

$931.48 \times 2 + 931.48 \times 6 + 13.14 + 14.10 = 2(931.48 \times 4 + 2.43) + Q$

ή

$$Q = 13.14 + 14.10 - 2 \times 2.43$$

ή

$$Q = 22.38 \text{ MeV}$$

'Αρα έχουμε απελευθέρωση ενέργειας.

6.1.2. Δείξε ότι στην αντίδραση D-T το ${}^{4}He$ παίρνει μόνο το 1/5 της ενέργειας που απελευθερώνεται

Λύση

Στην αντίδραση αυτή έχουμε:

$$D + T \rightarrow n + {}^{4}He$$

Από τις εξισώσεις διατήρησης ενέργειας και ορμής

$$E_D + E_T \; E_\alpha \quad ; \quad E_n + E_{He} = E_\beta$$

$$\vec{P}_0 + \vec{P}_\tau = \vec{P}_\alpha \quad ; \quad \vec{P}_n + \vec{P}\,{}^4He = \vec{P}_\beta$$

$$E = E_\alpha = E_\beta \quad ; \quad \vec{P}_\alpha = \vec{P}_\beta$$

έχουμε

$$E_n = E \frac{m^4He}{m_n + m^4He} = E\ 4/5$$

και

$$E^4He = E \frac{m_n}{m_n + m^4He} = E\ 1/4$$

6.1.3. Πόσα γραμμάρια (g) δευτέριου θα χρειαστούν την ημέρα (d) σ' έναν αντιδραστήρα σύντηξης D-D ολικής κατάλυσης, ισχύος 1000 MW. Αν όλο το δευτέριο το πάρουμε από θαλασσινό νερό πόσα χιλιόγραμμα (Kg) νερού θα χρειαζόμαστε κάθε μέρα;

<u>Λύση</u> Στον κύκλο της ολικής κατάλυσης έχουμε ότι

$$6D \rightarrow 2\,P + 2n + 2\,{}^4He + 43.2\ \text{MeV} \qquad (1)$$

άρα για κάθε υδρογόνο που καίγεται έχουμε παραγωγή ενέργειας

$$E = \frac{43.2}{6} = 7.2\ \text{MeV}$$

Επομένως για κάθε αντίδραση σύντηξης θα έχουμε

$$E = (7.2\ \text{MeV}) \times (1.6 \times 10^{-13}\ \text{J/MeV}) = 1.15 \times 10^{-12}\ \text{J}$$

Άρα ο αριθμός των αντιδράσεων που χρειαζόμαστε για την παραγωγή ενέργειας 1W-sec θα είναι

$$N_\alpha = \frac{1}{1.15\times 10^{-12}} = 0.87 \times 10^{12} \text{ Reactions/w-sec}$$

Για έναν αντιδραστήρα ισχύος 1MW, ο αριθμός κατανάλωσης δευτέριου την ημέρα θα είναι

$$N_D = (10^6 \text{ w})\,(0.87 \times 10^{12} \text{ Αντιδ./w-sec})\,(86.400 \text{ sec/d})$$

$$N_D = 7.5 \times 10^{22} \text{ Particles/w-sec}$$

Επειδή 2g δευτέριου αντιστοιχούν στον αριθμό Avogadro 6.02×10^{23}, το δευτέριο που καταναλώνεται θα είναι

$$M_D = \frac{7.2 \times 10^{22}}{6.02 \times 10^{23}} = 0.12 \text{ (g/d)}$$

Επειδή η ποσότητα δευτέριου σε θαλασσινό νερό είναι 0.015 % θα χρειαζόμαστε

$$n = \frac{0.12 \times 100}{0.015} = 800 \text{ g} = 0.8 \text{ Kg}$$

νερό την ημέρα.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

[1]. **Handbook of Plasma Physics**, General Editors: ROSENBLUTH M.N. and R.Z. SAGDEEV, **Basic Plasma Physics** (Vol I), Volume Editors: GALEEV A.A. and R.N. SUDAN, North - Holland Publ. Co. (1983).

[2]. CHEN F.F., **Introduction to Plasma Physics**: Plenum Press (1974).

[3]. ALEXANDROV A. F. , L.S. BOGDANKEVICH and A. A. RUKHADZE, **Principles of Plasma Electrodynamics**, Springer Series in Electrophysics 9, Springer Verlag (1984).

[4]. **Plasma Physics in Theory and Application**, Editor: KUNKEL, W.B. McGraw Hill (1966).

[5]. THOMSON W.B., **An Introduction to Plasma Physics**, Addison-Wesley (1962).

[6]. CAIRNS R.A., **Plasma Physics**, Blackie and Son Limited (1985).

[7]. BOHM D. and E.P. GROSS, Phys. Rev. 75 (1949) 1851

[8]. LOONEY D.H. and S.C. BROWN, Phys. Rev. 93 (1954) 965

[9]. LANDAU L.D., Zh. Eksp. Teor. Fiz. 16 (1946) 574
[10]. MALBERG, J.H. and C.B. WHARTON, Phys. Letters 17 (1966) 175
[11]. LANGMUIR I. and L. TONKS, Phys. Rev. 34 (1929) 874
[12]. ALBARES D.J., N.A. KRALL and C.L. OXLEY, Phys. Fluids 4 (1961) 1033.
[13]. SCHARZCHILD B. A., Physics Today, November 1986
[14]. GIBSON A., T. SEKIGUCHI, K. LACKNER, S. BODNER and R. HANCOX, Summaries of the Eleventh IAEA International Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion, Kyoto, Japan (1986), Nucl. Fusion 27 (1987) 481.
[15]. CRAXTON R., R.L. McCROY and J.M. SOURES, Progress in Laser Fusion, Scientific American, August 1986.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Α. Γενικά

Τ' ακόλουθα κλασικά βιβλία Φυσικής αναλύουν μερικά βασικά ζητήματα Φυσικής Πλάσματος με βαση το Μαγνητοϋδροδυναμικό μοντέλο.

[1]. JACKSON J.D., **Classical Electrodynamics** (Second edition), Chapter 10, John Wiley and Sons (1975).
[2]. LANDAU L.D. and E.M. LIFSHITZ, **Electrodynamics of Continuous Media**, Chapter VIII, Pergamon Press (1960).

Βιβλία Φυσικής Πλάσματος εισαγωγικού περιεχομένου, του ίδιου ή πιο προχωρημένου από τις παρούσες σημειώσεις επιπέδου, είναι οι αναφορές [2], [5], [6] και τα βιβλία [3]-[8] που ακολουθούν πιο κάτω. Σημειώνουμε ιδιαίτερα τη γλαφυρή και μ' έμφαση στη

φυσική ερμηνεία παρουσίαση της ύλης του βιβλίου του F.F. CHEN το οποίο έχει επηρεάσει του συγγραφείς των παρόντων σημειώσεων. Το βιβλίο του W.B. THOMSON περιλαμβάνει συνοπτικές λύσεις των ασκήσεων που περιέχει.

[3]. CHANDRASEKHAR S., **Plasma Physics,** Notes Compiled by S.K. Trehan from a course given at the University of Chicago, The University of Chicago Press (1962)

[4]. LONGMIRE C.L., **Elementary Plasma Physics**, Interscience Publishers (1963)

[5]. LINHART J.G., **Plasma Physics**, North-Holland Publishing Co. (1961).

[6]. GARTENHAUS S, **Elements of Plasma Physics,** Holt-Rinehart and Winston (1964). Περιέχει μια εκτεταμένη συλλογή προβλημάτων.

[7]. LYMAN SPITZER J.R., **Physics of Fully Ionized Gases,** Second edition, Intersience Publishers (1962)

[8]. FERRARO V.C.A. and C. PLUMPTON, **Megneto-Fluid Mechanics,** Second edition, Oxford University Press (1966)

[9]. BIRDSALL C.K. and A. BRUCE LANGDON, **Plasma Physics via Computer Simulation,** Mc Graw-Hill Book Company (1985) Σύγχρονο βιβλίο που αναλύει αριθμητικές τεχνικές για τη μελέτη πολλών φαινόμενων Φυσικής Πλάσματος.

[10]. **Handbook of Plasma Physics,** General editors: ROSENBLUTH M.N. and R.Z. SAGDEEV, **Basic Plasma Physics** (Vol. II), Volume Editors: GALEEV A.A. and R.N. SUDAN, North-Holland Publishing Co. (1984). Τα διάφορα θέματα της Φυσικής Πλάσματος εκθέτονται από πρωτοπόρους ερευνητές. Μαζί με τον τόμο I (αναφορά (1)) αποτελούν την πιο σύγχρονη και πλήρη παρουσίαση της Βασικής

Φυσικής Πλάσματος που κυκλοφορεί σήμερα. Συνίσταται ανεπιφύλακτα σε όποιον έχει μια εισαγωγική γνώση του αντικείμενου.

Προχωρημένα συγγράμματα αποτελούμενα από διαλέξεις επισκόπησης που παρουσιάστηκαν σε διάφορα σχολεία ή συνέδρια είναι η αναφορά (4) και τα (11)-(14) που ακολουθούν.

[11]. **Advanced Plasma Physics,** Editor: ROSENBLUTH M.N., Academic Press (1964)

[12]. **Plasma Physics**, Editors: DEWITT C. and J. PEYRAND, Gordon and Breach Science Publishers (1975)

[13]. **Strongly Coupled Plasmas,** Editors: KALMAN G. and P. CARINI, Plenum Press (1978)

[14]. **Twenty Years of Plasma Physics,** Editor: B. MCNAMARA, World Scientific (1984)

B. Ειδικά

Κεφάλαιο III

Τα διάφορα απλά μοντέλα περιγραφής του πλάσματος αναλύονται στο τρίτο κεφάλαιο του βιβλίου των Alexandrov, Bogdankevich και Rukhadze (αναφορά (3)). Το βιβλίο αυτό περιλαμβάνει επίσης λυμένες ασκήσεις.

Κεφάλαιο IV

[1]. STIX T.H., **The Theory of Plasma Waves**, Mc Graw-Hill (1962). Καίτοι παλιό είναι το standard βιβλίο στα κύματα.

[2]. DENISSE J.F. and J.L. DELCROIX, **Plasma Waves,** Interscience Publishers (1963)

Κεφάλαιο V

[1]. CHANDRASEKHAR S., **Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability**, Oxford University Press (1961). Φέρει τη σφραγίδα της ιδιοφυΐας του Chandrasekhar

[2]. BATEMAN G., **MHD Instabilities**, The MIT Press (1978) Αναφέρεται σε αστάθειες πλάσματος σύντηξης με μαγνητικό περιορισμό.

Κεφάλαιο VI

[1]. HULME H.R., **Nuclear Fusion**, Wykeham Publicaations (London) Ltd. (1969). Εκλαϊκευμένη παρουσίαση της Πυρηνικής Σύντηξης.

[2]. MIYAMOTO K., **Plasma Physics for Nuclear Fusion**, The MIT Press (1976). Επαρκής κάλυψη της Φυσικής του Πλάσματος Σύντηξης. Αποτελεί και γενικό βιβλίο Φυσικής Πλάσματος.

Τυπώθηκε στο Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο
με δαπάνη του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟ

Διανέμεται Δωρεάν στους φοιτητές.

ΕΚΤΥΠΩΣΗ
ΤυπογραφείΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ