# NP-Πλήρη Προβλήματα σε Κλάσεις Τέλειων Γραφημάτων

Η ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

υποβάλλεται στην

ορισθείσα από την Γενική Συνέλευση Ειδικής Σύνθεσης

του Τμήματος Πληροφορικής Εξεταστική Επιτροπή

από την

Μαρία Δ. Χρόνη

ως μέρος των Υποχρεώσεων για τη λήψη του

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΕ ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΣΗ

ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Οκτώβριος 2007

# ΑΦΙΕΡΩΣΗ

Η διατριβή αυτή αφιερώνεται στους γονείς μου και στον αδερφό μου για την πολύτιμη συμπαράσταση και κατανόηση που έδειξαν όλο αυτό το διάστημα, που απαιτήθηκε για την εκπόνησή της.

# ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστώ πολύ τον επιβλέποντα καθηγητή κ.Σταύρο Δ. Νικολόπουλο και την υποψήφια διδάκτορα κ. Αικατερίνη Ασδρέ, γιατί με τις γνώσεις τους και την πείρα τους συνέβαλαν καταλυτικά στην ολοκλήρωση αυτής της διατριβής.

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

# ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

# Ευρετηριο Πινακων

# Περιληψη

Μαρία Χρόνη του Δημητρίου και της Ελευθερίας. MSc, Τμήμα Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Οκτώβριος, 2007. NP-Πλήρη Προβλήματα σε Κλάσεις Τέλειων Γραφημάτων. Επιβλέπων: Σταύρος Δ. Νικολόπουλος.

Στη διατριβή αυτή περιγράφονται και μελετώνται τα εξής προβλήματα απόφασης: του αρμονικού αριθμού, του αχρωματικού αριθμού, του μέγιστου συνόλου κοπής, του μονοπατιού Hamilton, της επικάλυψης με μονοπάτια και του κυρίαρχου συνόλου. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζουμε αναλυτικά σε ποιες κλάσεις τέλειων γραφημάτων κάθε ένα από αυτά τα προβλήματα παραμένει NP-πλήρες και σε ποιες κλάσεις τα προβλήματα αυτά ανήκουν στην κλάση P. Μας ενδιαφέρει να βρούμε τη διαχωριστική γραμμή ανάμεσα στις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων, η οποία κατηγοριοποιεί τις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων σε δύο κατηγορίες, δηλαδή σε αυτές που τα προβλήματα απόφασης επιλύονται σε πολυωνυμικό χρόνο (κλάση P) και σε αυτές για τις οποίες δεν υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου που να τα επιλύει (NP-πλήρη προβλήματα). Ειδικότερα, δίνονται οι ορισμοί και η περιγραφή των παραπάνω προβλημάτων απόφασης, παρουσιάζονται οι αποδείξεις που αναφέρονται στην NP-πληρότητα, καθώς και οι αλγόριθμοι που επιλύουν τα πρόβλήματα απόφασης σε πολυωνυμικό χρόνο για τις αντίστοιχες κλάσεις των τέλειων γραφημάτων.

# Extended Abstract in English

Chroni, Maria, J. MSc, Computer Science Department, University of Ioannina, Greece. October, 2007.
NP-Complete Problems in Classes of Perfect Graphs. Supervisor: Stavros D. Nikolopoulos.

In this master we describe and study the next decision problems: harmonious number, achromatic number, max cut, Hamilton path, path cover and dominating set. More specific, we present the classes of perfect graphs that these decision problems remain NP-complete and the classes that they become polynomial solvable (belong to the P class). We are interesting in finding the distinguishing line between the classes of perfect graphs that classifies the classes of perfect graphs in two categories, those that can solve the decision problems in polynomial time (P class) and those that there is not a polynomial time algorithm that can solve them (NP-complete problems). More over, we give the definitions and the description of the previous decision problems, we present the proves that are related to the NP-completeness and the algorithms that solve the decision problems in polynomial time for the corresponding classes of perfect graphs.

In chapter 1, which is the introduction of the master, we present the issues that we are going to analyze. In chapter 2 we give the definitions of some classes of perfect graphs. In chapter 3 we describe the theory of decision problems and we give the deference between NP-complete class and the P class. Chapter 4 describes the problem of harmonious coloring and its complexity for the classes of perfect graphs. Chapter 5 gives the definition of the achromatic number and presents a polynomial solution for that problem in threshold graphs. In chapter 6 we show how the simple max cut problem turns out to be NP-complete in split and for the class of cographs we present a polynomial time algorithm. In chapter 7 we describe polynomial time algorithms for Hamilton path and path cover in cographs, bipartite permutation and interval graphs. In chapter 8 we give the definition and the complexity of dominating set and we present an algorithm that solves that decision problem in polynomial time in interval. Finally, chapter 9 concludes with some important results and presents some open decision problems.

# Κεφαλαιο 1

# Εισαγωγη



## 1.1 Στόχοι

Ο συνολικός στόχος της διατριβής είναι να γίνει μια λεπτομερής περιγραφή των εξής προβλημάτων απόφασης: του αρμονικού αριθμού, του αχρωματικού αριθμού, του μέγιστου συνόλου κοπής, του μονοπατιού Hamilton, της διαμέρισης μονοπατιών και του κυρίαρχου συνόλου. Πιο συγκεκριμένα, θα παρουσιάσουμε αναλυτικά σε ποιες κλάσεις τέλειων γραφημάτων κάθε ένα από αυτά τα προβλήματα παραμένει **NP**-πλήρες και σε ποιες κλάσεις τα προβλήματα αυτά ανήκουν στην κλάση **P**. Μας ενδιαφέρει να βρούμε τη διαχωριστική γραμμή ανάμεσα στις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων, η οποία κατηγοριοποιεί τις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων σε δύο κατηγορίες, δηλαδή σε αυτές που επιλύουν τα προβλήματα απόφασης σε πολυωνυμικό χρόνο (κλάση **P**) και σε αύτές για τις οποίες δεν υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου που να τα επιλύει (**NP**-πλήρη προβλήματα). Οι επί μέρους στόχοι είναι:

- Να δοθούν οι ορισμοί και η περιγραφή των προβλημάτων απόφασης που θα μελετήσουμε.
- Η ανάπτυξη των αποδείξεων που αναφέρονται στην **NP**-πληρότητα.
- Η παρουσίαση των αλγορίθμων που επιλύουν τα προβλήματα απόφασης σε πολυωνυμικό χρόνο.
- Να κατηγοριοποιηθούν οι κλάσεις των τέλειων γραφημάτων σε δύο κατηγορίες, δηλαδή σε αυτές που επιλύουν τα προβλήματα απόφασης σε πολυωνυμικό χρόνο (κλάση **P**) και σε αυτές για τις οποίες δεν υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου που να τα επιλύει (**NP**-πλήρη προβλήματα).

## 1.2 Συνεισφορά

Στη διατριβή αυτή δίνουμε μια αναλυτική περιγραφή των προβλημάτων απόφασης με τα οποία θα ασχοληθούμε. Ήταν διαπιστωμένο ότι υπήρχε ένα κενό στην ελληνική βιβλιογραφία πάνω στη συνολική και ολοκληρωμένη καταγραφή, παρουσίαση και μελέτη των προβλημάτων απόφασης, τόσο στο σύνολο των αποδεδειγμένων γνώσεων όσο και στις τάσεις που επικρατούν σε ερευνητικό επίπεδο. Η παρούσα διατριβή προσπαθεί να καλύψει αυτό το κενό, όσο είναι δυνατόν. Ο αναγνώστης θα αντιληφθεί ότι αυτή η διατριβή μπορεί να σταθεί αφορμή για περαιτέρω μελέτη και έρευνα άλλων προβλημάτων απόφασης που σχετίζονται άμεσα με τα θέματα που θα μελετήσουμε, καθώς οι αποδείξεις που παρουσιάζουμε μπορούν να χρησιμοποιηθούν αυτούσιες ή με παραλλαγές, για την επίλυση άλλων προβλημάτων απόφασης. Είναι ιδιαίτερα χρήσιμο και βολικό να υπάρχουν συγκεντρωμένες αποδείξεις και αλγόριθμοι που αφορούν αυτού του είδους τα προβλήματα, γιατί είναι προβλήματα που είναι ακόμα ανοιχτά για διάφορες κλάσεις γραφημάτων και ταλανίζουν τους ερευνητές για πολλά χρόνια.

## 1.3 Δομή της Διατριβής

Η διατριβή περιέχει 8 κεφάλαια: Το Κεφάλαιο 1 είναι η εισαγωγή της διατριβής. Το Κεφάλαιο 2 αναπτύσσει κάποιες βασικές έννοιες σχετικές με τη θεωρία γραφημάτων και περιγράφει αναλυτικά τις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων, δίνοντας τους ορισμούς τους και την ακριβή περιγραφή τους. Το Κεφάλαιο 3 παρουσιάζει ορισμούς σχετικούς με την **NP**-πληρότητα και τα **NP**-πλήρη προβλήματα, με τα οποία θα ασχοληθούμε. Τα Κεφάλαια 4, 5, 6 και 7, ασχολούνται με την περιγραφή του αρμονικού αριθμού, του αχρωματικού αριθμού, του μέγιστου συνόλου κοπής, του μονοπατιού **Hamilton**, της διαμέρισης μονοπατιών και του κυρίαρχου συνόλου, αντίστοιχα. Τέλος, το Κεφάλαιο 8 κλείνει τη διατριβή, ανακεφαλαιώνοντας με ό,τι μελετήσαμε και βγάζοντας κάποια χρήσιμα συμπεράσματα. Επίσης, παρουσιάζει κάποια ανοιχτά προβλήματα, τα οποία αποτελούν αφορμή για περαιτέρω μελέτη.

# Κεφαλαιο 2

# Θεωρια Τελειων Γραφηματων



## 2.1 Βασικές Έννοιες

Γράφος ή γράφημα (graph) είναι μια τοπολογία ή δομή που αποτελείται από ένα σύνολο *κορυφών* (vertices) ή *κόμβων* (nodes), που συνδέονται μεταξύ τους με ένα σύνολο *ακμών*(edges). Στη γενική περίπτωση, ένα γράφημα συμβολίζεται ως $G(V, E)$ ή $G = (V, E)$ ή ακόμα $(V(G), E(G))$, όπου $V, E$ είναι τα σύνολα κορυφών και ακμών αντίστοιχα. Το πλήθος των κορυφών [ακμών] ονομάζεται *τάξη* [*μέγεθος*] και συμβολίζεται με $n = |V|$ $[m = |E|]$, αντίστοιχα. Αν $n = 0$, τότε το γράφημα ονομάζεται *κενό* (empty), ενώ αν $n = 1$ τότε το γράφημα ονομάζεται *ασήμαντο ή τετριμμένο.*

Κάθε ακμή προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τις δύο κορυφές που ενώνει, οι οποίες ονομάζονται *τερματικά σημεία* (endpoints). Αν η ακμή $e$ έχει τα $u, v$ ως τερματικά σημεία, τότε η $e$ ονομάζεται *προσπίπτουσα* (incident) στα σημεία αυτά ή ότι *ενώνει* (joins) τα σημεία αυτά, και συμβολίζεται ως $(u, v)$ ή ως $(v, u)$. Το σημείο (κόμβος) $u$ ονομάζεται *γειτονικό* του $v$. Με $\mathrm{Adj}(v)$ συμβολίζεται το σύνολο *γειτνίασης* του κόμβου $v$. Προφανώς

$$(u, v) \in E \Longleftrightarrow v \in \mathrm{Adj}(u).$$

Σε αυτή την περίπτωση, ο κόμβος $v$ είναι γειτονικός του κόμβου $u$ και ο κόμβος $u$ είναι γειτονικός του κόμβου $v$ και οι κόμβοι $u$ και $v$ είναι τα τερματικά σημεία της ακμής $\{u, v\}$. Ο αριθμός (πλήθος) των ακμών που προσπίπτουν σε μια κορυφή $v \in V$ ονομάζεται *βαθμός* της $v$ και συμβολίζεται με $d(v)$. Ο μέγιστος βαθμός από όλες τις κορυφές του γραφήματος ονομάζεται *βαθμός* του γραφήματος και συμβολίζεται με $D(G)$. Δηλαδή $D(G) = \max_{v \in V}(d(v))$. Μία κορυφή $v \in V$ με $d(v) = 0$ ή $d(v) = 1$, ονομάζεται *απομονωμένη* (isolated) κορυφή.

Σε ένα γράφημα $G$, ονομάζουμε *μονοπάτι* (path) μεταξύ δύο κορυφών $u$ και $v$ μια ακολουθία ακμών $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)$ τέτοια ώστε να ισχύει:

1. $u = v_0$, $v = v_k$, και
2. οι κορυφές $v_i$ , $0 \le i \le k$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

Λέμε ότι το μονοπάτι ενώνει ή συνδέει τις κορυφές $v$ και $u$. Οι κορυφές $v$ και $u$ ονομάζονται άκρα του μονοπατιού. Το μονοπάτι περνάει ή περιέχει τις ακμές $(v_{i-1}, v_i), 1 \leq i \leq k$. Το πλήθος των ακμών που περιέχονται σε ένα μονοπάτι ονομάζεται *μήκος* του μονοπατιού. Ένα μονοπάτι περιγράφεται πλήρως από την ακολουθία των κορυφών $v_0, v_1, \ldots, v_k$ και συμβολίζεται ως $P_k$, όπου $k$ είναι το πλήθος των κόμβων που αυτό περιέχει.

Ένα μονοπάτι είναι *απλό*, εάν κάθε κόμβος του γραφήματος εμφανίζεται το πολύ μια φορά στο μονοπάτι. Εάν σε ένα μονοπάτι $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)$ ισχύει $v_0 = v_k$, δηλαδή τα τερματικά σημεία του μονοπατιού ταυτίζονται, τότε το μονοπάτι ονομάζεται *κύκλος*. Επομένως, ένας κύκλος είναι ένα κλειστό μονοπάτι. Το πλήθος των ακμών του κύκλου είναι το μήκος του. Ένας κύκλος έχει πάντα μήκος μεγαλύτερο του 2 και περιγράφεται πλήρως από την ακολουθία των ακμών $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_0)$ που περιέχει και συμβολίζεται ως $C_k$, όπου $k$ είναι το πλήθος των κόμβων που αυτός περιέχει.

Εάν το σύνολο κορυφών $V$ μπορεί να διαμεριστεί σε $k$ ανεξάρτητα μεταξύ τους υποσύνολα $V_1, V_2, \ldots, V_k$ τέτοια ώστε δύο κορυφές $u, v$ να ενώνονται μόνο εάν βρίσκονται στο ίδιο υποσύνολο $V_i \subseteq V$, τότε οι υπογράφοι $G(V_1), \ldots, G(V_k)$ ονομάζονται *συνεκτικές συνιστώσες* του $G$ και ο $G$ $k$-συνεκτικός.

Πιο αναλυτικά, εάν σε ένα μονοπάτι που συνδέει τις κορυφές $u$ και $v$ αντιστρέψουμε τις ακμές κατά τη σειρά που αυτές εμφανίζονται, δημιουργούμε ένα μονοπάτι μεταξύ $v$ και $u$. Αν μια κορυφή $v$ συνδέεται με ένα απλό μονοπάτι με μία άλλη κορυφή $w$, και η $w$ συνδέεται με μία τρίτη κορυφή $u$ με ένα απλό μονοπάτι, τότε μπορούμε να συνδέσουμε τις κορυφές $v$ και $u$, παραθέτοντας τα δύο μονοπάτια και απαλοίφοντας τυχόν κύκλους που δημιουργούνται. Επίσης, κάθε κορυφή συνδέεται με τον εαυτό της με ένα μονοπάτι μήκους μηδέν. Δηλαδή, η σχέση $\mathcal{R}$ που εκφράζει τη σύνδεση μεταξύ κορυφών του γραφήματος είναι *συμμετρική*, *μεταβατική* και *ανακλαστική*, άρα είναι *σχέση ισοδυναμίας* και χωρίζει το γράφημα σε *κλάσεις ισοδυναμίας*, η κάθε μία από τις οποίες περιέχει όλες τις ακμές που υπάρχουν σε κάποιο μονοπάτι. Κορυφές που δεν συνδέονται με κανένα μονοπάτι ανήκουν σε διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας. Άρα, όλες οι κορυφές κατά μήκος ενός μονοπατιού ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας, όπως επίσης και τα άκρα μιας ακμής. Οι κλάσεις ισοδυναμίας της παραπάνω σχέσης ισοδυναμίας, ονομάζονται *συνεκτικές συνιστώσες*. Άρα, συνεκτικές συνιστώσες ενός γραφήματος $G$ είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας της παραπάνω σχέσης $\mathcal{R}$ που εκφράζει τη σύνδεση μεταξύ κορυφών του γραφήματος. Εάν ένα γράφημα αποτελείται μόνο από μια κλάση ισοδυναμίας, τότε ονομάζεται *συνεκτικό*, δηλαδή είναι συνεκτικό εάν και μόνο εάν υπάρχει μονοπάτι μεταξύ δύο οποιονδήποτε κορυφών του.

Εάν ένα γράφημα είναι συνεκτικό και δεν περιέχει κύκλους, δηλαδή κάθε κορυφή ενώνεται με οποιαδήποτε άλλη κορυφή στο γράφημα μέσω ενός απλού μονοπατιού, τότε το γράφημα ονομάζεται *δέντρο*.

Έστω $G = (V, E)$ ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα. Ορίζουμε ως *συμπλήρωμα* του γραφήματος $G$ το γράφημα $\bar{G}(V, \bar{E})$ με $\bar{E} = \{(u, v) : \ u, v \in V \ \wedge \ (u, v) \notin E\}$. Δηλαδή το συμπλήρωμα $\bar{G}$ ενός γραφήματος $G$ είναι ένα γράφημα με το ίδιο σύνολο κόμβων και με σύνολο ακμών που περιλαμβάνει τις ακμές που *δεν* υπάρχουν στο γράφημα $G$. Ισοδύναμα, το γράφημα $\bar{G}$ είναι το συμπλήρωμα του γραφήματος $G$ εάν τα $G$ και $\bar{G}$ έχουν το ίδιο πλήθος κορυφών και ισχύει: $E(G) \cap E(\bar{G}) = \emptyset$ και $G \cup \bar{G} = K_{|V|}$, όπου $K_{|V|}$ είναι το πλήρες γράφημα $|V|$ κόμβων.

Σε κάθε ακμή μπορούμε να αντιστοιχίσουμε έναν αριθμό μέσω μιας απεικόνισης $w : \mathbb{R} \rightarrow E$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται *συνάρτηση βάρους*. Το βάρος κάθε ακμής $e \in E$ συμβολίζεται με $w(e)$. Στην περίπτωση αυτή, ο γράφος ονομάζεται *βεβαρημένος*. Το βάρος ενός γράφου ισούται με το άθροισμα των βαρών των ακμών του, δηλαδή $w(G) = \sum_{e \in E} w(e)$.

Με $\cong$ συμβολίζεται ο ισομορφισμός δύο γραφημάτων, δηλαδή εάν $G_1$ και $G_2$ είναι δύο ισομορφικά γραφήματα, τότε γράφουμε $G_1 \cong G_2$. Δύο γραφήματα $G = (V, E)$ και $G' = (V', E')$ ονομάζονται *ισομορφικά*, εάν υπάρχει μία ένα προς ένα και επί αντιστοιχία $\phi : V \rightarrow V'$ με $(u, v) \in E \Longleftrightarrow \{\phi(u), \phi(v)\} \in E'$.

Έστω $G = (V, E)$ ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα. Σε αυτό ορίζονται τα παρακάτω:

**Κλίκα (clique)**: Ένα υποσύνολο $A \subseteq V$ πληθικότητας $r$ κόμβων, είναι μια $r$-κλίκα εάν επάγει ένα πλήρες υπογράφημα, δηλαδή $G_A \cong K_r$. Ένας απλός κόμβος είναι μια 1-κλίκα. Μία κλίκα είναι *μείζονα* **(maximal)**, εάν δεν υπάρχει άλλη κλίκα στο $G$ που να περιέχει εξ' ολοκλήρου αυτή την κλίκα σαν υποσύνολο. Μία κλίκα είναι *μέγιστη* (maximum), εάν δεν υπάρχει άλλη κλίκα σε όλο το γράφημα $G$ μεγαλύτερης πληθικότητας. Αριθμός κλίκας, $\omega(G)$, είναι ο αριθμός των κόμβων σε μια μέγιστη κλίκα ενός γραφήματος $G$.

**Επικάλυψη με κλίκες (clique cover)**: Μια επικάλυψη με κλίκες μεγέθους $k$, είναι μια διαμέριση των κόμβων $V = A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_k$, έτσι ώστε κάθε σύνολο κόμβων $A_i$ να είναι κλίκα. Αριθμός κλικών επικάλυψης, $k(G)$, είναι το μέγεθος της μικρότερης δυνατής επικάλυψης κλικών στο γράφημα $G$, δηλαδή ο ελάχιστος αριθμός κλικών που μπορεί να διαμεριστεί το σύνολο κόμβων του $G$.

**Ευσταθές σύνολο (stable set)**: Ένα ευσταθές σύνολο είναι ένα υποσύνολο $X$ των κόμβων του $G$, στο οποίο ανά δύο οι κόμβοι δεν γειτνιάζουν. Επίσης, ονομάζεται και *ανεξάρτητο σύνολο*(independent set). **Ευσταθής** αριθμός, $\alpha(G)$, είναι ο αριθμός των κόμβων του γραφήματος $G$ σε ένα ευσταθές σύνολο μέγιστης πληθικότητας.

**Σωστός $c$-χρωματισμός (proper $c$-coloring)**: Είναι μια διαμέριση $V = X_1 \cup X_2 \cdots \cup X_c$ των κόμβων του γραφήματος $G$, έτσι ώστε το κάθε σύνολο κόμβων $X_i$ να είναι ευσταθές σύνολο. Σε αυτή την περίπτωση, τα μέλη του κάθε συνόλου $X_i$ "χρωματίζονται" με το χρώμα $i$ και γειτονικοί κόμβοι έχουν διαφορετικό χρώμα. Το γράφημα $G$ είναι τότε $c$-χρωματίσιμο (colorable). Χρωματικός αριθμός, $\chi(G)$, είναι ο μικρότερος δυνατός αριθμός $c$, τέτοιος ώστε να υπάρχει ένας σωστός $c$-χρωματισμός του γραφήματος $G$.

## 2.2 Τέλεια Γραφήματα

Σε αυτή την ενότητα δίνονται οι ορισμοί των κλάσεων τέλειων γραφημάτων που θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια.

### 2.2.1 Κλάσεις Τέλειων Γραφημάτων

Τέλεια γραφήματα ονομάζονται τα γραφήματα εκείνα, τα οποία έχουν την ιδιότητα για κάθε επαγόμενο υπογράφημα αυτών ο χρωματικός αριθμός του επαγόμενου υπογραφήματος να ισούται με τον αριθμό μέγιστης κλίκας αυτού. Οι παρακάτω τρεις συνθήκες ορίζουν τις τέλειες ιδιότητες (perfect properties) ενός τέλειου γραφήματος $G$:

**($\mathbf{P_1}$)** $\omega(G_A) = \chi(G_A)$, $\forall A \subseteq V(G)$,

**($\mathbf{P_2}$)** $\alpha(G_A) = k(G_A)$, $\forall A \subseteq V(G)$, και

**($\mathbf{P_3}$)** $\omega(G_A) \cdot \alpha(G_A) \geq |A|$, $\forall A \subseteq V(G)$.

**Θεώρημα 2.1 (The Perfect Graph Theorem).** *Για ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G$, οι τέλειες ιδιότητες* ($\mathbf{P_1}$), ($\mathbf{P_2}$) *και* ($\mathbf{P_3}$) *είναι ισοδύναμες.*

**Πόρισμα 2.1.** *Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G$ είναι τέλειο, εάν και μόνο εάν το συμπλήρωμά του $\bar{G}$ είναι τέλειο.*

Η Ισχυρή Εικασία των Τέλειων Γραφημάτων (Strong Perfect Graph Conjecture) δίνει τον χαρακτηρισμό των τέλειων γραφημάτων. Μπορεί να διατυπωθεί με τους ακόλουθους τρόπους:

**SPGC$_1$**: Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα είναι τέλειο εάν και μόνο εάν δεν περιέχει κανένα επαγόμενο υπογράφημα ισομορφικό των γραφημάτων $C_{2k+1}$ και $\bar{C}_{2k+1}$, δηλαδή των κύκλων περιττού μήκους και των συμπληρωμάτων τους, για $k \geq 2$.

**SPGC$_2$**: Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G$ είναι τέλειο εάν και μόνο εάν στο $G$ και στο συμπλήρωμα αυτού, $\bar{G}$, κάθε κύκλος περιττού μήκους $\geq 5$ έχει χορδή.

**SPGC$_3$**: Τα μοναδικά $p$-critical γραφήματα που υπάρχουν είναι τα $C_{2k+1}$ και $\bar{C}_{2k+1}$ για $k \geq 2$.

**SPGC$_4$**: Δεν υπάρχει $p$-critical γράφημα με $\alpha > 2$ και $\omega > 2$.

**SPGC$_5$**: Εάν ένα γράφημα $G$ είναι $p$-critical με $\alpha(G) = \alpha$ και $\omega(G) = \omega$, τότε το $G$ περιέχει επαγόμενο υπογράφημα ισομορφικό με το $C^{\omega-1}_{\alpha\omega+1}$.

Τα γραφήματα $C_{2k+1}$ και $\bar{C}_{2k+1}$ για $k \geq 2$ αναφέρονται συνήθως ως *περιττές οπές* (odd hole) και ως *περιττές αντιοπές* (odd antihole) αντίστοιχα. Επίσης ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G$ ονομάζεται $p$-critical εάν δεν είναι τέλειο αλλά κάθε κατάλληλο επαγόμενο υπογράφημά του *είναι* τέλειο. Τέτοια γραφήματα ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\forall x \in V(G) : \alpha(G - x) = k(G - x) \;\wedge\; \omega(G - x) = \chi(G - x)$$

όπου $G - x$ είναι το γράφημα αφού διαγράψουμε τον κόμβο $x$.

Οι Chvátal και Sbihi πρότειναν να ονομάζεται ένα γράφημα ως *Berge* γράφημα εάν δεν περιέχει καμία περιττή οπή ή περιττή αντιοπή. Έτσι η Ισχυρή Εικασία των Τέλειων Γραφημάτων επιβεβαιώνει ότι ένα γράφημα είναι τέλειο εάν και μόνο εάν είναι *Berge* γράφημα. Το 2002 οι Chudnovsky και Sheymour ανακοίνωσαν σε μια εκτενέστατη εργασία 176 σελίδων ότι σε συνεργασία με προηγούμενη έρευνα των Robertson, Thomas και Kristina Vušković ολοκλήρωσαν την απόδειξη της Ισχυρής Εικασίας των Τέλειων Γραφημάτων μετατρέποντάς την έτσι σε *Ισχυρό Θεώρημα Τέλειων Γραφημάτων* (Strong Perfect Graph Theorem) [19, 20].

### 2.2.2 Μεταβατικά Γραφήματα (Comparability Graphs)

Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ είναι *μεταβατικό* (comparability) γράφημα, εάν υπάρχει μια *κατεύθυνση* (orientation) των ακμών, $(V, F)$, η οποία να ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

(*i*) $F \cap F^{-1} = \emptyset$

(*ii*) $F \cup F^{-1} = E$

(*iii*) $F^2 \subseteq F$

όπου $F^2 = \{ac|\ ab,\ bc \in F,\ b \in V\}$. Η πρώτη συνθήκη λέει ότι κάθε ακμή έχει ακριβώς μια κατεύθυνση, ενώ η δεύτερη ότι *κάθε* ακμή πρέπει να έχει μια κατεύθυνση. Η σχέση $F$ είναι μια αυστηρή μερική διάταξη του συνόλου κόμβων $V$, της οποίας η comparability σχέση είναι ακριβώς το σύνολο ακμών $E$. Η σχέση $F$ μερικές φορές αναφέρεται και ως *μεταβατική κατεύθυνση* (transitive orientation) του $G$ (ή του συνόλου $E$). Τα μεταβατικά (comparability) γραφήματα, επίσης ονομάζονται και ως *μεταβατικώς κατευθυνόμενα* γραφήματα (transitively orientable) ή *μερικώς διατάξιμα* (partially orderable). Διαισθητικά, τα μεταβατικά (comparability) γραφήματα είναι τα γραφήματα, όπου μπορούμε να αναθέσουμε κατεύθυνση στις ακμές αυτών, έτσι ώστε εάν υπάρχει ακμή από τον κόμβο $a$ στον κόμβο $b$ με κατεύθυνση $(ab)$ και ακμή από τον $b$ στον $c$ με κατεύθυνση $(bc)$, τότε υπάρχει ακμή από τον κόμβο $a$ στον κόμβο $c$ με κατεύθυνση $(ac)$.

### 2.2.3 Τριγωνικά Γραφήματα (Chordal or Triangulated Graphs)

Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G$ ονομάζεται *τριγωνικό* (chordal), εάν κάθε κύκλος μήκους αυστηρά μεγαλύτερος του 3, περιέχει μια χορδή, δηλαδή μία ακμή που ενώνει δύο μη συνεχόμενους κόμβους στον κύκλο. Ισοδύναμα, το γράφημα $G$ είναι τριγωνικό (chordal), αν δεν περιέχει επαγόμενα υπογραφήματα ισομορφικά των κύκλων $C_n$ για $n \geq 4$.

Ένας κόμβος $x \in V(G)$ ονομάζεται *simplicial*, εάν το σύνολο γειτνίασής του $\mathrm{Adj}(x)$ επάγει ένα πλήρες υπογράφημα, δηλαδή το σύνολο $\mathrm{Adj}(x)$ είναι κλίκα (όχι απαραίτητα μείζονα). Ο Dirac [28] και ανεξάρτητα οι Lekkerkerker, Boland [46], απέδειξαν ότι ένα τριγωνικό (chordal) γράφημα έχει πάντα έναν simplicial κόμβο.

Έστω $G = (V, E)$ ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα και έστω $\sigma = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ μία διάταξη των κόμβων του $G$. Λέμε ότι η διάταξη $\sigma$ είναι ένα *τέλειο σχήμα απαλοιφής* (ή *τέλειο σχήμα*), εάν κάθε $v_i$ είναι simplicial κόμβος στο επαγόμενο υπογράφημα $G_{\{v_i,\ldots,v_n\}}$. Με άλλα λόγια, το κάθε σύνολο

$$X_i = \{v_j \in \mathrm{Adj}(v_i) | \; j > i\}$$

είναι πλήρες (κλίκα).

Ένα υποσύνολο $S \subset V$ ενός γραφήματος είναι ένας *διαχωριστής κόμβων* (vertex seperator) για μη γειτονικούς κόμβους $a$ και $b$ (ή αλλιώς ένας $a - b$ separator), εάν η αφαίρεση του συνόλου $S$ από το γράφημα χωρίζει τους κόμβους $a$ και $b$ σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες. Εάν κανένα υποσύνολο του συνόλου $S$ δεν διαχωρίζει τους κόμβους $a$ και $b$, δηλαδή εάν κανένα υποσύνολο του $S$ δεν είναι $a - b$ seperator, τότε το $S$ θα αναφέρεται ως *ελλάσσων διαχωριστής κόμβων* (minimal vertex seperator).

Παρακάτω δίνεται ένα θεώρημα που χαρακτηρίζει τα τριγωνικά (chordal) γραφήματα και οφείλεται στους Fulkerson και Gross [37].

**Θεώρημα 2.2.** *Έστω $G$ ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

(α) *Το γράφημα $G$ είναι τριγωνικό (chordal).*

(β) *Το γράφημα $G$ έχει τέλειο σχήμα απαλοιφής (όχι απαραίτητα μοναδικό). Επιπλέον, κάθε simplicial κόμβος μπορεί να είναι αρχικός στο τέλειο σχήμα.*

(γ) *Κάθε ελλάσσων διαχωριστής κόμβων (minimal vertex seperator) επάγει ένα πλήρες υπογράφημα του $G$.*

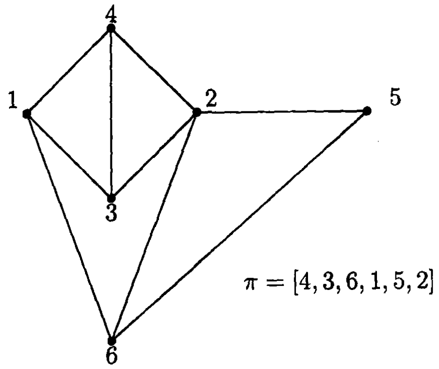
### 2.2.4 Μεταθετικά Γραφήματα (Permutation Graphs)

Έστω $\pi$ μια μετάθεση των αριθμών $1, 2, \ldots, n$. Με $\pi_i^{-1}$ συμβολίζεται *η θέση στην ακολουθία*, στην οποία μπορεί να βρεθεί ο αριθμός $i$. Από τη μετάθεση $\pi$ μπορεί να κατασκευαστεί ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G[\pi]$, με τον ακόλουθο τρόπο: το γράφημα $G[\pi]$ έχει κόμβους αριθμημένους με τους αριθμούς της μετάθεσης $(1, 2, \ldots, n)$. Δύο κόμβοι ενώνονται με ακμή, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.1, εάν ο μεγαλύτερος από τους δύο αριθμούς που αντιστοιχεί στους εκάστοτε κόμβους βρίσκεται στα αριστερά του μικρότερου αριθμού στη μετάθεση $\pi$ (δηλαδή εμφανίζονται εκτός σειράς, καθώς η μετάθεση διαβάζεται από αριστερά προς τα δεξιά). Πιο συγκεκριμένα, εάν $\pi$ είναι μια μετάθεση των αριθμών $1, 2, \ldots, n$, τότε το γράφημα $G[\pi] = (V, E)$ ορίζεται ως εξής:

$$V = \{1, 2, \ldots, n\}$$

και

$$\{i, j\} \in E \Leftrightarrow (i - j)(\pi_i^{-1} - \pi_j^{-1}) < 0$$




Σχήμα 2.1: Το Γράφημα $G$ που Αντιστοιχεί στη Μετάθεση $\pi = [4,3,6,1,5,2]$

Ένα γράφημα $G$ θα αναφέρεται ως *μεταθετικό* (permutation) γράφημα, εάν υπάρχει μια μετάθεση $\pi$ τέτοια ώστε $G \cong G[\pi]$.

Εάν αντιστραφεί η ακολουθία των αριθμών της μετάθεσης $\pi$, κάθε ζεύγος αριθμών στη σωστή σειρά στην $\pi$, στην αντεστραμμένη μετάθεση θα εμφανίζεται με ανάποδη σειρά και το αντίστροφο, δηλαδή κάθε ζεύγος σε λάθος σειρά στην αρχική μετάθεση, θα εμφανίζεται στη σωστή σειρά στην αντεστραμμένη μετάθεση. Έτσι, το μεταθετικό (permutation) γράφημα που κατασκευάζεται με αυτόν τον τρόπο είναι το συμπλήρωμα του $G[\pi]$. Με άλλα λόγια, εάν $\pi^{\rho}$ είναι η μετάθεση που κατασκευάζεται αντιστρέφοντας τη μετάθεση $\pi$, τότε

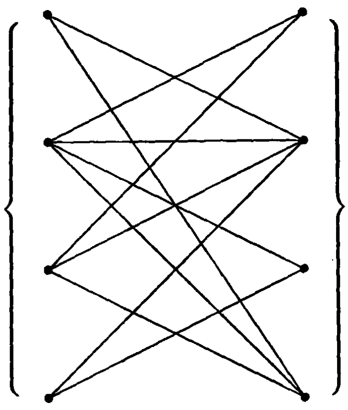
$$G[\pi^{\rho}] \cong \overline{G[\pi]}$$

δηλαδή, επιπλέον, το συμπλήρωμα ενός μεταθετικού (permutation) γραφήματος, είναι επίσης μεταθετικό γράφημα. Η σχέση των μεταθετικών (permutation) γραφημάτων με τα μεταβατικά (comparability) γραφήματα, φαίνεται στο επόμενο θεώρημα:

**Θεώρημα 2.3.** *Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G$ είναι μεταθετικό (permutation) γράφημα, εάν και μόνο εάν το $G$ και το συμπλήρωμά του, $\overline{G}$, είναι μεταβατικά (comparability) γραφήματα.*

### 2.2.5 Διμερή Γραφήματα (Bipartite Graphs)

Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ είναι διμερές (bipartite), εάν οι κόμβοι του μπορούν να διαμεριστούν σε δύο ανεξάρτητα μη κενά ευσταθή σύνολα, $V = S_1 \cup S_2$, δηλαδή η κάθε ακμή έχει το ένα τερματικό της σημείο στο σύνολο $S_1$ και το άλλο τερματικό σημείο στο σύνολο $S_2$. Ισοδύναμα, το γράφημα $G$ είναι διμερές (bipartite), εάν και μόνο εάν είναι 2-χρωματίσιμο, δηλαδή 2 χρώματα επαρκούν ώστε να χρωματιστεί κατάλληλα. Το κάθε χρώμα θα αντιστοιχεί προφανώς στο κάθε ένα σύνολο $S$. Είναι σύνηθες να χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $G = (S_1, S_2, E)$ για τα διμερή (bipartite) γραφήματα, συμβολισμός ο οποίος δίνει έμφαση στη διαμέριση. Οι κόμβοι $x \in S_i$ και $y \in S_j$ είναι στο ίδιο σύνολο ανν $i = j$. Ένα διμερές (bipartite) γράφημα είναι *πλήρες*, εάν για κάθε $x \in S_i$ και $y \in S_j$, υπάρχει η ακμή $(x, y)$. Αν θεωρήσουμε ότι $|S_i| = n$ και $|S_j| = m$, τότε το πλήρες διμερές (bipartite) γράφημα συμβολίζεται ως $K_{n,m}$.




Σχήμα 2.2: Διμερές (Bipartite) Γράφημα

### 2.2.6 Διαχωρίσιμα Γραφήματα (Split Graphs)

Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ ορίζεται ως *διαχωρίσιμο* (split) γράφημα, εάν υπάρχει μια διαμέριση του συνόλου των κόμβων $V = S + K$ σε ένα ευσταθές (ανεξάρτητο) σύνολο $S$ και σε ένα πλήρες σύνολο (κλίκα) $K$. Δεν υπάρχει περιορισμός στον αριθμό των ακμών ανάμεσα στα δύο σύνολα $S$ και $K$. Γενικά, η διαμέριση του συνόλου των κόμβων ενός διαχωρίσιμου (split) γραφήματος δεν είναι μοναδική. Ούτε το σύνολο $S$ είναι αναγκαίο να είναι ένα μέγιστο ευσταθές σύνολο, ούτε το πλήρες σύνολο $K$ απαιτείται να είναι μέγιστη (ή μείζονα) κλίκα. Το Σχήμα 2.3 δείχνει ένα διαχωρίσιμο (split) γράφημα.

**Θεώρημα 2.4.** *Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ είναι διαχωρίσιμο (split) γράφημα, εάν και μόνο εάν το συμπλήρωμά του, $\bar{G}$, είναι διαχωρίσιμο (split) γράφημα.*

Το αποτέλεσμα αυτό είναι άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι ένα ευσταθές σύνολο σε ένα γράφημα $G$ είναι ένα πλήρες σύνολο στο συμπλήρωμά του, $\bar{G}$, ενώ ένα πλήρες σύνολο σε ένα γράφημα $G$ είναι ένα ευσταθές σύνολο στο συμπλήρωμά του, $\bar{G}$.

Το επόμενο θεώρημα οφείλεται στους Földes και Hammer [36].

**Θεώρημα 2.5.** *Έστω $G = (V, E)$ ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα. Οι επόμενες ιδιότητες είναι ισοδύναμες:*

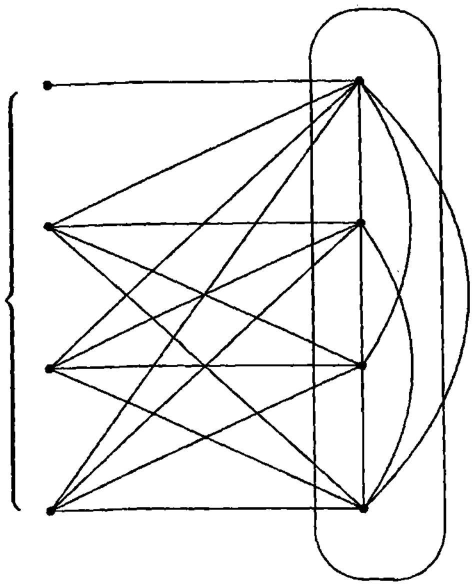
(*i*) *Το $G$ είναι ένα διαχωρίσιμο (split) γράφημα.*

(*ii*) *Το $G$ και το $\bar{G}$ είναι τριγωνικά (chordal) γραφήματα.*

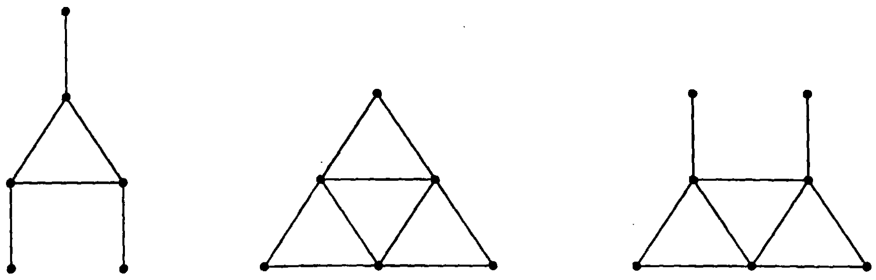
(*iii*) *Το γράφημα $G$ δεν περιέχει επαγόμενα υπογραφήματα ισομορφικά με τα $2K_2, C_4$ ή $C_5$.*

Η σχέση των διαχωρίσιμων (split) γραφημάτων με τα μεταβατικά (comparability) γραφήματα, φαίνεται στο επόμενο θεώρημα:

**Θεώρημα 2.6.** *Εάν ένα γράφημα $G$ είναι ένα διαχωρίσιμο (split) γράφημα, τότε το $G$ είναι και μεταβατικό (comparability) γράφημα, εάν και μόνο εάν το $G$ δεν περιέχει επαγόμενο υπογράφημα ισομορφικό των $H_1, H_2$ ή $H_3$ (Σχήμα 2.4).*



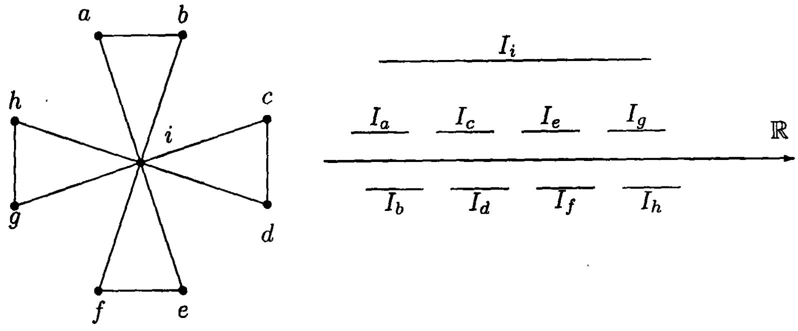

Σχήμα 2.3: Διαχωρίσιμο (Split) Γράφημα.




Σχήμα 2.4: Απαγορευμένα Υπογραφήματα για Διαχωρίσιμα (Split)-Μεταβατικά (Comparability) Γραφήματα.

### 2.2.7 Γραφήματα Διαστημάτων (Interval Graphs)

Τα γραφήματα διαστημάτων (interval graphs), είναι τα γραφήματα εκείνα των οποίων οι κόμβοι μπορούν να τοποθετηθούν σε μία-προς-μία αντιστοιχία με ένα σύνολο διαστημάτων στην γραμμή των πραγματικών αριθμών (ή γενικά ενός γραμμικά διατάξιμου συνόλου), με μία ακμή να ενώνει δύο κόμβους, εάν τα αντίστοιχα διαστήματα τέμνονται. Το Σχήμα 2.5 δείχνει ένα γράφημα διαστημάτων (interval). Επίσης, τα γραφήματα διαστημάτων (interval) αποτελούνται από εκείνα τα τριγωνικά (chordal) γραφήματα, των οποίων το συμπλήρωμα είναι μεταβατικό (comparability) γράφημα.




Σχήμα 2.5: Ένα Γράφημα Διαστημάτων (Interval Graph).

### 2.2.8 Συμπληρωματικά Παραγόμενα Γραφήματα (Cographs)

Η κλάση των *συμπληρωματικά παραγόμενων γραφημάτων* (cographs ή complement reducible graphs) ορίστηκε από τον H.Lerchs [47] και μελετήθηκε διεξοδικά από τους Corneil, Lerchs και Burlingham [24]. Ένα συμπληρωματικά παραγόμενο γράφημα (cograph) ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

(α) Ένα γράφημα που αποτελείται από έναν απλό κόμβο είναι ένα συμπληρωματικά παραγόμενο γράφημα (cograph).

(β) Εάν $G_1, G_2, \ldots, G_k$ είναι συμπληρωματικά παραγόμενα γραφήματα (cographs), τότε και η ένωσή τους, $G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_k$ είναι συμπληρωματικά παραγόμενο γράφημα (cograph).

(γ) Εάν $G$ είναι ένα συμπληρωματικά παραγόμενο γράφημα (cograph), τότε και το συμπλήρωμά του, $\overline{G}$, είναι συμπληρωματικά παραγόμενο γράφημα (cograph).

Τα συμπληρωματικά παραγόμενα γραφήματα (cographs) είναι η κλάση των γραφημάτων που κατασκευάζεται από έναν αρχικό κόμβο υπό την κλειστότητα των πράξεων της ένωσης και του συμπληρώματος. Επίσης, επιδέχονται μια μοναδική ως προς τον ισομορφισμό δενδρική αναπαράσταση, που ονομάζεται *cotree*. Ακόμη, είναι υποκλάση των μεταθετικών (permutation) γραφημάτων, και επίσης μπορούν να οριστούν ως τα γραφήματα εκείνα που δεν έχουν επαγόμενο $P_4$, δηλαδή άχορδο μονοπάτι μήκους 4.

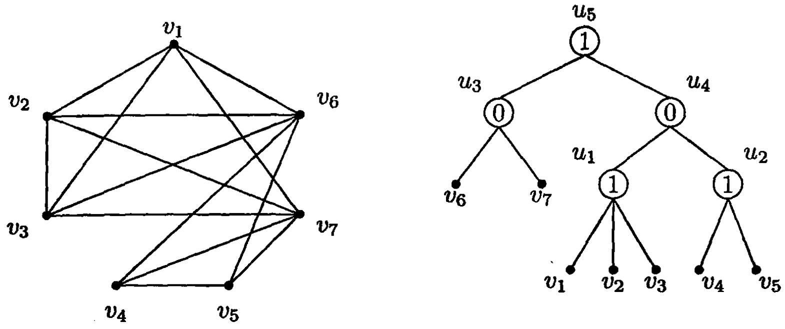
Οι παραπάνω πράξεις κατασκευής ενός συμπληρωματικά παραγόμενου γραφήματος (cograph), ορίζουν μια μοναδική δενδρική αναπαράσταση για κάθε διαφορετικό συμπληρωματικά παραγόμενο γράφημα (cograph), η οποία ονομάζεται *cotree*, και συμβολίζεται $T_{co}(G)$, όπως δείχνει και το Σχήμα 2.6 . Το $T_{co}(G)$ ενός συμπληρωματικά παραγόμενου γραφήματος (cograph) $G$, είναι ένα ριζομένο δέντρο τέτοιο ώστε:

(α) Κάθε εσωτερικός κόμβος, εκτός της ρίζας, έχει τουλάχιστον δύο παιδιά.

(β) Οι εσωτερικοί κόμβοι έχουν επιγραφές είτε 0 (0-κόμβοι), είτε 1 (1-κόμβοι). Τα παιδιά που είναι εσωτερικοί κόμβοι ενός 1-κόμβου (0-κόμβου) αντίστοιχα, είναι 0-κόμβοι (1-κόμβοι) αντίστοιχα, δηλαδή οι 0-κόμβοι και οι 1-κόμβοι εναλλάσσονται μεταξύ τους σε κάθε μονοπάτι από τη ρίζα μέχρι οποιονδήποτε κόμβο του cotree.

(γ) Τα φύλλα του cotree έχουν μία-προς-μία αντιστοιχία με τους κόμβους του συμπληρωματικά παραγόμενου γραφήματος (cograph) $G$ και δύο κόμβοι $u, v$ ενώνονται με ακμή στο $G$, εάν και μόνο εάν ο ελάχιστος κοινός προκάτοχος των φύλλων που αντιστοιχούν στους κόμβους $u, v$ είναι ένας 1-κόμβος.

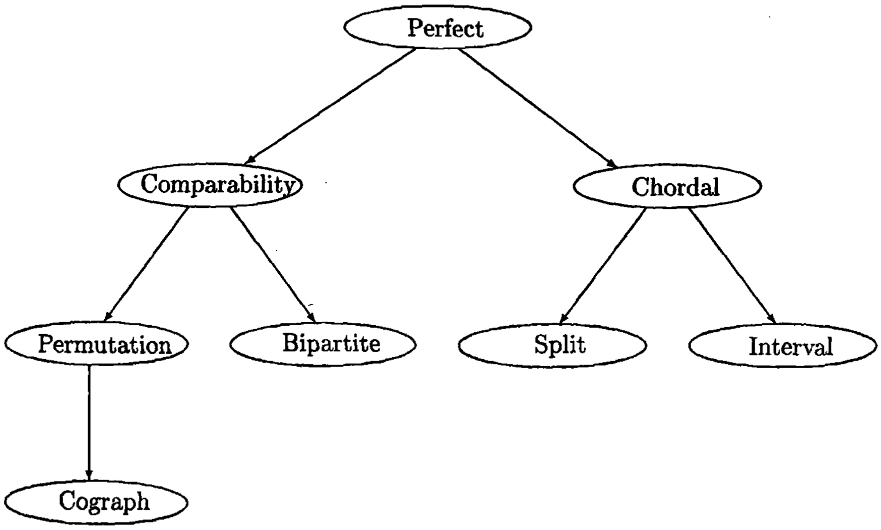
Ο παραπάνω ορισμός απαιτεί η ρίζα να είναι 1-κόμβος, εκτός αν το γράφημα $G$ είναι μη συνεκτικό.




Σχήμα 2.6: Ένα Συμπληρωματικά Παραγόμενο Γράφημα (Cograph) 7 Κόμβων και το Αντίστοιχο Cotree.

### 2.2.9 Σχέσεις κλάσεων τέλειων γραφημάτων

Πολλές από τις παραπάνω κλάσεις τέλειων γραφημάτων περικλείονται από ή περικλείουν κάποιες άλλες. Μπορούμε να αναπαραστήσουμε αυτές τις σχέσεις εγκλεισμού με το διάγραμμα του Σχήματος 2.7. Αυτό θα είναι πολύ χρήσιμο στη συνέχεια για το υπό μελέτη θέμα, καθώς η γνώση ότι ένα συγκεκριμένο πρόβλημα είναι **NP**-πλήρη για μια συγκεκριμένη κλάση, αυτόματα μας δίνει την **NP**-πληρότητα για όλες τις κλάσεις τέλειων γραφημάτων οι οποίες είναι υπερκλάσεις της συγκεκριμένης κλάσης.




Σχήμα 2.7: Σχέσεις Εγκλεισμού των Κλάσεων Τέλειων Γραφημάτων.

# Κεφαλαιο 3

# NP-Πληροτητα



## 3.1 Βασικές Έννοιες

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε κάποιες έννοιες, οι οποίες σχετίζονται με την **NP**-πληρότητα. Συγκεκριμένα, θα δώσουμε κάποιους βασικούς ορισμούς σχετικά με την **NP**-πληρότητα, καθώς και τους ορισμούς των προβλημάτων απόφασης, με τα οποία θα ασχοληθούμε στα επόμενα κεφάλαια.

Υπάρχουν δύο θέματα που θα μας απασχολήσουν: η *υπολογισιμότητα* (computability) και η *υπολογιστική πολυπλοκότητα* (computational complexity). Η υπολογισιμότητα απευθύνεται κυρίως σε ερωτήσεις σχετικές με την ύπαρξη: Υπάρχει αλγόριθμος ο οποίος επιλύει το πρόβλημα **Π**; Μπορεί να αποδειχθεί μαθηματικά ότι οι υπολογιστές δεν μπορούν να κάνουν τα πάντα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το πρόβλημα του σταματήματος (halting problem), το οποίο παραμένει άλυτο. Με απλά λόγια είναι αδύνατον για έναν καθηγητή να γράψει ένα πρόγραμμα για υπολογιστή, το οποίο θα δέχεται σαν είσοδο τον κώδικα κάποιου φοιτητή και θα επιστρέφει είτε την απάντηση "ναι, αυτό το πρόγραμμα του φοιτητή θα σταματήσει σε πεπερασμένο χρόνο", είτε την απάντηση "όχι, αυτό το πρόγραμμα του φοιτητή θα τρέχει για πάντα". Η απόδειξη ότι ένα πρόβλημα είναι υπολογίσιμο συνήθως, αλλά όχι πάντα, σχετίζεται με την παρουσίαση ενός αλγορίθμου, ο οποίος θα τερματίζει με μια σωστή απάντηση για κάθε είσοδο. Η ποσότητα των πηγών (χρόνου και χώρου) που χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό, αν και πεπερασμένη, είναι απεριόριστη. Συνεπώς, η υπολογισιμότητα μας δίνει να καταλάβουμε τις ικανότητες και τους περιορισμούς των μηχανών που ο άνθρωπος μπορεί να κατασκευάσει, χωρίς όμως να λαμβάνει υπόψιν περιορισμούς σε πηγές.

Σε αντίθεση με την υπολογισιμότητα, η υπολογιστική πολυπλοκότητα σχετίζεται με τα ποσοτικά θέματα της επίλυσης ενός προβλήματος. Σχετίζεται με ό,τι μπορεί να υπολογιστεί σε *πρακτική ή λογική* ποσότητα χρόνου και χώρου, υπολογίζοντας τις απαιτήσεις σε πηγές επ' ακριβώς ή υπολογίζοντας άνω και κάτω όρια. Η πολυπλοκότητα καθορίζεται από τρία επίπεδα: το πρόβλημα, τον αλγόριθμο και την υλοποίηση. Φυσικά, θέλουμε τον καλύτερο αλγόριθμο που να επιλύει το πρόβλημά μας και την καλύτερη υλοποίηση του αλγορίθμου αυτού.

Ένα *πρόβλημα* αποτελείται από μια ερώτηση η οποία πρέπει να απαντηθεί, από μια απαίτηση η οποία πρέπει να εκπληρωθεί, ή από μια καλύτερη δυνατή κατάσταση ή δομή που πρέπει να βρεθεί, και η οποία ονομάζεται *λύση*, συνήθως σε σχέση με μερικές *παραμέτρους* ή *μεταβλητές* εισόδου, οι οποίες περιγράφονται αλλά οι τιμές τους παραμένουν ακαθόριστες. Ένα *πρόβλημα απόφασης* είναι αυτό που απαιτεί μια απλή "ναι" ή "όχι" απάντηση. Ένα *στιγμιότυπο* ενός προβλήματος Π είναι ο καθορισμός συγκεκριμένων τιμών για τις παραμέτρους του προβλήματος. Ένας *αλγόριθμος* για το πρόβλημα Π είναι μια βήμα-προς-βήμα διαδικασία, η οποία όταν εφαρμόζεται σε οποιοδήποτε στιγμιότυπο του Π παράγει μια λύση.

Συνήθως μπορούμε να ξαναγράψουμε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης σαν ένα πρόβλημα απόφασης, το οποίο στην αρχή φαίνεται να λύνεται πιο εύκολα από το αρχικό, αλλά καταλήγει να είναι το ίδιο δύσκολο. Ακολουθούν δύο εκδοχές για το πρόβλημα χρωματισμού ενός γραφήματος.

*ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ* (GRAPH COLORING (optimization version))

*Στιγμιότυπο*: Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G$.
*Ερώτηση*: Ποιο είναι το μικρότερο πλήθος χρωμάτων που χρειάζονται για έναν κατάλληλο χρωματισμό του γραφήματος $G$?

*ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ* (GRAPH COLORING (decision version))

*Στιγμιότυπο*: Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G$ και ένας ακέραιος $k > 0$.
*Ερώτηση*: Υπάρχει ένας κατάλληλος $k$ χρωματισμός του γραφήματος $G$?

Η εκδοχή της βελτιστοποίησης μπορεί να λυθεί εφαρμόζοντας $n$ φορές έναν αλγόριθμο για την εκδοχή της απόφασης για ένα γράφημα με $n$ κόμβους. Εάν τα $n$ προβλήματα απόφασης επιλύονται διαδοχικά, τότε ο χρόνος που χρειάζεται για να λυθεί η εκδοχή της βελτιστοποίησης είναι μεγαλύτερος από τον χρόνο της εκδοχής της απόφασης, το πολύ κατά έναν παράγοντα του $n$. Παρ' όλα αυτά, εάν μπορούν να επιλυθούν ταυτόχρονα (παράλληλα), τότε ο χρόνος που χρειάζεται και για τις δύο εκδοχές είναι ο ίδιος.

Συνηθίζεται να εκφράζεται η πολυπλοκότητα σαν μια συνάρτηση του μεγέθους της εισόδου. Ένας αλγόριθμος Α για κάποιο πρόβλημα Π τρέχει σε χρόνο $\mathcal{O}(f(m))$ , εάν για κάποια σταθερά $c > 0$ υπάρχει μια υλοποίηση του αλγορίθμου Α, η οποία τερματίζει μετά από το πολύ $cf(m)$ (υπολογιστικά) βήματα για όλα τα στιγμιότυπα μεγέθους $m$. Η πολυπλοκότητα ενός αλγορίθμου Α είναι η μικρότερη συνάρτηση $f$, τέτοια ώστε ο αλγόριθμος Α τρέχει σε χρόνο $\mathcal{O}(f(m))$. Η πολυπλοκότητα ενός προβλήματος Π είναι η μικρότερη συνάρτηση $f$, για την οποία υπάρχει ένας αλγόριθμος Α χρόνου $\mathcal{O}(f(m))$ για το πρόβλημα Π, δηλαδή η μικρότερη πολυπλοκότητα από όλους τους πιθανούς αλγορίθμους που επιλύουν το πρόβλημα Π. Έτσι, παρουσιάζοντας και αναλύοντας την πολυπλοκότητα ενός συγκεκριμένου αλγορίθμου για το πρόβλημα Π, βρίσκουμε ένα άνω όριο για την πολυπλοκότητα του προβλήματος Π.

Η εύρεση της πολυπλοκότητας ενός προβλήματος Π περιλαμβάνει δύο υπολογισμούς:

(1) Το *άνω όριο*, δηλαδή τη μικρότερη πολυπλοκότητα από όλους τους γνωστούς αλγορίθμους που επιλύουν το πρόβλημα Π.

(2) Το *κάτω όριο*, δηλαδή τη μεγαλύτερη συνάρτηση $f$ για την οποία έχει αποδειχθεί (μαθηματικά) ότι όλοι οι πιθανοί αλγόριθμοι που επιλύουν το πρόβλημα Π πρέπει να έχουν πολυπλοκότητα τουλάχιστον όσο η συνάρτηση $f$.

Ο απώτερος στόχος είναι να κάνουμε αυτά τα δύο όρια να ταυτιστούν. Το κενό ανάμεσα στα δύο όρια υποδηλώνει πόση έρευνα πρέπει να γίνει ακόμη για να επιτευχθεί αυτός ο στόχος. Για πολλά προβλήματα αυτό το κενό είναι μεγάλο, όπως για παράδειγμα για το πρόβλημα του πολλαπλασιασμού πινάκων.

Το μεγαλύτερο ανοιχτό ερώτημα που σχετίζεται με το κενό μεταξύ των άνω και κάτω ορίων της πολυπλοκότητας, αφορά στα γνωστά **NP**-πλήρη προβλήματα. Για κάθε πρόβλημα αυτής της κλάσης γνωρίζουμε αλγορίθμους μόνο εκθετικού χρόνου, ενώ τα καλύτερα κάτω όρια που έχουν αποδειχθεί μέχρι τώρα είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις. Επιπλέον, εάν υπάρχει ένας αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου για κάποιο από αυτά, τότε υπάρχει αλγόριθμος για όλα τα προβλήματα της κλάσης. Προβλήματα που είναι **NP**-πλήρη σε γραφήματα είναι η εύρεση κύκλου **Hamilton**, ο ελάχιστος χρωματισμός και η μέγιστη κλίκα.

Η *κατάσταση* ενός αλγορίθμου αποτελείται από τις τρέχουσες τιμές όλων των μεταβλητών και από τη θέση της τρέχουσας εντολής που πρέπει να εκτελεστεί. Ένας *ντετερμινιστικός αλγόριθμος* είναι αυτός για τον οποίο κάθε κατάσταση κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης της εντολής μεταβαίνει μοναδικά σε το πολύ μια επόμενη κατάσταση. Ουσιαστικά όλοι οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές , όπως τους γνωρίζουμε, τρέχουν ντετρμινιστικά. Ένα πρόβλημα Π ανήκει στην κλάση **P** εάν υπάρχει ένας ντετερμινιστικός αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου, ο οποίος επιλύει το πρόβλημα Π.

Ένας *μη ντετερμινιστικός αλγόριθμος* είναι αυτός για τον οποίο μία κατάσταση μπορεί να οδηγεί σε πολλές επόμενες καταστάσεις ταυτόχρονα. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ένας μη ντετερμινιστικός αλγόριθμος έχει την ικανότητα να δημιουργεί πολλά αντίγραφα του εαυτού του, ένα για κάθε επόμενη κατάσταση. Έτσι, ενώ ένας ντετερμινιστικός αλγόριθμος πρέπει να ελέγξει κάθε φορά μία από τις εναλλακτικές λύσεις, ο μη ντετερμινιστικός αλγόριθμος ελέγχει όλες τις εναλλακτικές λύσεις ταυτόχρονα.

Ακολουθούν τρεις ειδικές εντολές, οι οποίες χρησιμοποιούνται στην κατασκευή μη ντετερμινιστικών αλγορίθμων για προβλήματα απόφασης, σύμφωνα με τους **Reigold**, **Nievergelt** και **Deo (1977)**.

$x \leftarrow$ **choice**$(S)$ δημιουργεί $|S|$ αντίγραφα του αλγορίθμου και αναθέτει κάθε στοιχείο του συνόλου $S$ στη μεταβλητή $x$ σε ένα από τα αντίγραφα.

**failure** προκαλεί κάποιο συγκεκριμένο αντίγραφο του αλγορίθμου να σταματήσει να εκτελείται.

**success** προκαλεί όλα τα αντίγραφα του αλγορίθμου να σταματήσουν να εκτελούνται και σημειώνει μία "ναι" απάντηση στο συγκεκριμένο στιγμιότυπο του προβλήματος.

Ένας μη ντετερμινιστικός αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου για το πρόβλημα εύρεσης μέγιστης κλίκας (πρόβλημα απόφασης) είναι ο ακόλουθος: Έστω $G = (V, E)$ ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα καί έστω $k \geqslant 0$.

**procedure** CLIQUE$(G, k)$:

**begin**

1. $A \leftarrow \varnothing$;
2. **for** all $v \in V$ **do** $A \leftarrow$ **choice**$(A + \{v\}, A)$;
3. **if** $|A| < k$ **then failure**;
4. **for** all $v, w \in A$, $v \neq w$ **do**
5. **if** $vw \notin E$ **then failure**;
6. **success**;

**end**

Ο βρόχος στη γραμμή 2 επιλέγει μη ντετερμινιστικά ένα υποσύνολο από κόμβους $A \subseteq V$. Οι γραμμές **4-6** ελέγχουν αν το σύνολο $A$ είναι ένα πλήρες σύνολο. Εάν φτάσουμε σε **success** σε ένα από τα αντίγραφα, τότε η τελική τιμή του συνόλου $A$ σε εκείνο το αντίγραφο είναι μια κλίκα μεγέθους τουλάχιστον

$k$. Χρησιμοποιώντας την πιο πάνω διαδικασία έχουμε έναν μη ντετερμινιστικό αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου για την εκδοχή της βελτιστοποίησης του προβλήματος εύρεσης μέγιστης κλίκας (CLIQUE), η οποία είναι η ακόλουθη: Έστω $G$ ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα με $n$ κόμβους.

**procedure** MAXCLIQUE($G$):

**begin**

**for** $k \leftarrow n$ **to** 1 **step** -1 **do**

**if** CLIQUE($G, k$) **then return** $k$;

**end**

Ένα πρόβλημα Π ανήκει στην κλάση **NP** εάν υπάρχει ένας μη ντετερμινιστικός αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου, ο οποίος επιλύει το πρόβλημα Π. Έχουμε ήδη αποδείξει ότι CLIQUE $\in$ **NP** παρουσιάζοντας έναν κατάλληλο αλγόριθμο. Προφανώς $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$. Ένα σημαντικό ανοιχτό πρόβλημα στην θεωρία υπολογισμού είναι αν ισχύει $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$.

Ένα πρόβλημα $\Pi_1$ ανάγεται πολυωνυμικά σε ένα άλλο πρόβλημα $\Pi_2$, και συμβολίζεται με $\Pi_1 \preceq \Pi_2$, εάν υπάρχει μία συνάρτηση $f$ η οποία αντιστοιχεί τα στιγμιότυπα του προβλήματος $\Pi_1$ στα στιγμιότυπα του προβλήματος $\Pi_2$ έτσι ώστε

($i$) η $f$ είναι ντετερμινιστικά υπολογίσιμη σε πολυωνυμικό χρόνο, και

($ii$) μία λύση για το στιγμιότυπο $f(I)$ του προβλήματος $\Pi_2$ δίνει λύση για το στιγμιότυπο $I$ του προβλήματος $\Pi_1$, για όλα τα στιγμιότυπα $I$.

Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι το πρόβλημα $\Pi_1$ δεν λύνεται πιο δύσκολα από το πρόβλημα $\Pi_2$ κατά έναν προστιθέμενο πολυωνυμικό όρο, διότι θα μπορούσαμε να επιλύσουμε το πρόβλημα $\Pi_1$ συνδυάζοντας το μετασχηματισμό $f$ με τον καλύτερο αλγόριθμο επίλυσης του προβλήματος $\Pi_2$. Έτσι, εάν $\Pi_1 \preceq \Pi_2$, τότε

$$\text{COMPLEXITY}(\Pi_1) \leq \text{COMPLEXITY}(\Pi_2) + \text{POLYNOMIAL}.$$

Εάν για το πρόβλημα $\Pi_2$ υπάρχει ένας ντετερμινιστικός αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου, τότε το ίδιο ισχύει και για το πρόβλημα $\Pi_1$. Εάν κάθε ντετερμινιστικός αλγόριθμος που επιλύει το πρόβλημα $\Pi_1$ απαιτεί εκθετικό χρόνο, τότε το ίδιο ισχύει και για το πρόβλημα $\Pi_2$.

Ένα πρόβλημα Π είναι **NP**-*hard* εάν ισχύει οποιαδήποτε από τις παρακάτω ισοδύναμες συνθήκες:

($H_1$) $\Pi' \preceq \Pi$ για κάθε $\Pi' \in \mathbf{NP}$;

($H_2$) $\Pi \in \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{NP}$;

($H_3$) η ύπαρξη ενός ντετερμινιστικού αλγορίθμου πολυωνυμικού χρόνου για το πρόβλημα Π θα μπορούσε να συνεπάγεται την ύπαρξη ενός αλγορίθμου πολυωνυμικού χρόνου για κάθε πρόβλημα στην κλάση **NP**.

Ένα πρόβλημα Π είναι **NP**-πλήρες εάν ενήκει στην κλάση **NP** και είναι **NP**-*hard*. Τα **NP**-πλήρη προβλήματα είναι τα πιο δύσκολα προβλήματα από εκείνα που ανήκουν στο **NP**-**P**.

Η **NP**-πληρότητα ξεκίνησε από τον Cook (1971), ο οποίος επικεντρώθηκε στα **NP** προβλήματα απόφασης. Απέδειξε ότι το πρόβλημα της Ικανοποιησιμότητας (SATISFIABILITY - SAT) της μαθηματικής λογικής είναι **NP**-πλήρες (Cook's theorem), και πρότεινε άλλα προβλήματα τα οποία μπορεί να είναι **NP**-πλήρη. Ο Karp (1972) παρουσίασε μία μεγάλη συλλογή από **NP**-πλήρη προβλήματα, τα οποία προέρχονταν από πολλές περιοχές των διακριτών μαθηματικών. Τα επόμενα χρόνια, εκατοντάδες προβλήματα αποδείχθηκαν **NP**-πλήρη. Η τεχνική που εφαρμόστηκε για την **NP**-πληρότητα είναι η επόμενη: Αρχικά, από το θεώρημα του Cook, τοποθετούμε το πρόβλημα SAT στην κλάση των **NP**-πλήρη προβλημάτων. Στη συνέχεια, επαναλαμβάνουμε την ακόλουθη διαδικασία μερικές εκατοντάδες φορές:

Βρίσκουμε ένα υποψήφιο πρόβλημα Π, το οποίο μπορεί να είναι **NP**-πλήρες. Επιλέγουμε ένα κατάλληλο πρόβλημα Π' από την κλάση των **NP**-πλήρων προβλημάτων. Δείχνουμε ότι $\Pi \in \mathbf{NP}$ και $\Pi' \preceq \Pi$. Προσθέτουμε το πρόβλημα Π στην κλάση **NP**.

Ακολουθεί ένα παράδειγμα όπου εφαρμόζεται η τεχνική της αναγωγής:

**Θεώρημα 3.1.** *(Poljak, 1974). (i) STABLE SET $\preceq$ STABLE SET ON TRIANGLE-FREE GRAPHS; (ii) STABLE SET $\preceq$ GRAPH COLORING.*

**Απόδειξη**: (i) Έστω $G$ ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα με $n$ κόμβους και $e$ ακμές. Η κεντρική ιδεά της απόδειξης είναι να κατασκευαστεί από το γράφημα $G$ ένα triangle-free γράφημα $H$ τέτοιο ώστε γνωρίζοντας το $\alpha(H)$ έχουμε και το $\alpha(G)$. Υποδιαιρούμε κάθε ακμή του γραφήματος $G$ σε ένα μονοπάτι μήκους τρία. Έστω $H$ το γράφημα που προκύπτει. Το γράφημα $H$ είναι ένα triangle-free γράφημα με $n+2e$ κόμβους και $3e$ ακμές. Επίσης, το γράφημα $H$ μπορεί να κατασκευαστεί από το γράφημα $G$ σε $\mathcal{O}(n+e)$ βήματα. Τελικά, αφού ισχύει $\alpha(H) = \alpha(G) + e$, ένας ντετερμινιστικός αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου που υπολογίζει το $\alpha(H)$ δίνει λύση για το $\alpha(G)$.

(ii) Έστω $G$ ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα. Κατασκευάζουμε το γράφημα $H$ όπως και στο μέρος (i). Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το γράφημα $H'$ από το γράφημα $H$ ως εξής: Οι κόμβοι από το γράφημα $H'$ αντιστοιχούν στις ακμές του γραφήματος $H$, και συνδέουμε δύο κόμβους στο γράφημα $H'$ εάν οι αντίστοιχες ακμές τους στο γράφημα $H$ δεν μοιράζονται κάποιον κοινό κόμβο. Αυτή η κατασκευή γίνεται σε $\mathcal{O}(e^2)$ βήματα. Αφού το γράφημα $H$ είναι triangle-free, προκύπτει ότι $\chi(H') = (2e+n)$ - $\alpha(H) = e+n$ - $\alpha(G)$. Έτσι, το $\alpha(G)$ μπορεί να υπολογιστεί από τον χρωματικό αριθμό του γραφήματος $H'$, $\chi(H')$. □

Αφού είναι γνωστό ότι το STABLE SET είναι **NP**-πλήρες, προκύπτει το επόμενο αποτέλεσμα.

**Πόρισμα 3.1.** *Το STABLE SET στα triangle-free γραφήματα είναι NP-πλήρες.*

Ένα πρόβλημα Π οποιουδήποτε τύπου, το οποίο είναι δύσκολο να επιλυθεί για την γενική περίπτωση, μπορεί να έχει μια αποτελεσματική λύση εάν το στιγμιότυπο εισόδου είναι συγκεκριμένο. Για παράδειγμα, το πρόβλημα εύρεσης κύκλου Hamilton, είναι τετριμμένο εάν τα μόνα γραφήματα που εξετάζουμε είναι τα δέντρα. Παρ' όλα αυτά, είδαμε ότι το προβλημα STABLE SET στα triangle-free γραφήματα δεν υπολογίζεται γρήγορα (εκτός αν κάποιος αποδείξει ότι ισχύει $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$). Έχουν βρεθεί ενδιαφέρουσες οικογένειες γραφημάτων, για τις οποίες συγκεκριμένα δύσκολα προβλήματα Π είναι μη τετριμμένα και επιλύσιμα.

## 3.2 NP-Πλήρη Προβλήματα

Υπάρχουν πολλά προβλήματα τα οποία παραμένουν **NP**-*hard* (και η αντίστοιχη έκδοση απόφασης αυτών παραμένει **NP**-πλήρης). Παρακάτω θα δώσουμε τους ορισμούς προβλημάτων, τα οποία έχουν αποδειχθεί ότι είναι υπολογιστικά δύσκολο να λυθούν βέλτιστα, ακόμα και για συγκεκριμένες κλάσεις τέλειων γραφημάτων.

## Πρόβλημα HN: Αρμονικός Αριθμός (Harmonious Number)

*Στιγμιότυπο*: Γράφημα $G = (V, E)$, θετικός ακέραιος $K \leqslant |V|$.

*Ερώτηση*: Υπάρχει θετικός ακέραιος $k \leq K$ και ένας κατάλληλος χρωματισμός του γραφήματος $G$ με $k$ χρώματα τέτοιος ώστε κάθε ζεύγος χρωμάτων να εμφανίζεται σε το πολύ μια ακμή;

## Πρόβλημα AN: Αχρωματικός Αριθμός (Achromatic Number)

*Στιγμιότυπο*: Γράφημα $G = (V, E)$, θετικός ακέραιος $K \leqslant |V|$.

*Ερώτηση*: Υπάρχει θετικός ακέραιος $k \geq K$ και ένας κατάλληλος χρωματισμός του γραφήματος $G$ με $k$ χρώματα τέτοιος ώστε κάθε ζεύγος χρωμάτων να εμφανίζεται σε τουλάχιστον μια ακμή;

## Πρόβλημα MC: Μέγιστο Σύνολο Κοπής (Max Cut)

*Στιγμιότυπο*: Γράφημα $G = (V, E)$, βάρος $w(e) \in Z^+$ για $\forall e \in E$, θετικός ακέραιος $K \leqslant |V|$.

*Ερώτηση*: Υπάρχει μια διαμέριση του συνόλου $V$ σε ξένα σύνολα $V_1$ και $V_2$, τέτοια ώστε το άθροισμα των βαρών των ακμών από το $E$ που έχουν το ένα τους άκρο στο σύνολο $V_1$ και το άλλο άκρο στο σύνολο $V_2$ να είναι τουλάχιστον $K$?

## Πρόβλημα HP: Μονοπάτι Hamilton (Hamilton Path)

*Στιγμιότυπο*: Γράφημα $G = (V, E)$.

*Ερώτηση*: Έχει το γράφημα $G$ μονοπάτι Hamilton?

## Πρόβλημα PC: Επικάλυψη με Μονοπάτια (Path Cover or Path Partition)

*Στιγμιότυπο*: Γράφημα $G = (V, E)$.

*Ερώτηση*: Υπάρχει μια επικάλυψη με μονοπάτια του γραφήματος $G$ ως προς τις κορυφές του, η οποία να καλύπτει όλους τις κορυφές, δηλαδή για κάθε κορυφή του γραφήματος υπάρχει *μοναδικό* μονοπάτι που περιέχει τον κόμβο αυτό. Υπάρχει δηλαδή μια διαμέριση του συνόλου $V$ σε σύνολα $V_1, V_2, \ldots, V_k$ τέτοια ώστε $V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k = V(G)$ και $V_i \cap V_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$, $1 \leq i, j \leq k$?

## Πρόβλημα DS: Κυρίαρχο Σύνολο (Dominating Set)

*Στιγμιότυπο*: Γράφημα $G = (V, E)$, θετικός ακέραιος $K \leqslant |V|$.

*Ερώτηση*: Υπάρχει ένα κυρίαρχο σύνολο μεγέθους $K$ ή μικρότερο του $K$, δηλαδή υπάρχει ένα υποσύνολο $V' \subseteq V$ με $|V'| \leq K$ τέτοιο ώστε $\forall u \in V - V'$ να υπάρχει ένας κόμβος $v \in V'$ για τον οποίο να ισχύει $(u, v) \in E$?

# Κεφαλαιο 4

# Αρμονικος Αριθμος



## 4.1 Στόχος

Σε αυτό το κεφάλαιο, μελετάμε την πολυπλοκότητα των προβλημάτων απόφασης ή/και βελτιστοποίησης που ορίστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο για τις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων του ενδιαφέροντός μας. Συγκεκριμένα, επιδιώκουμε να βρούμε το όριο στο οποίο το εκάστοτε πρόβλημα μετατρέπεται από πολυωνυμικά επιλύσιμο σε μη πολυωνυμικά επιλύσιμο, για τις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων. Αν υπάρχει ένα αποτέλεσμα **NP**-πληρότητας για μια κλάση γραφημάτων $A$, τότε το αποτέλεσμα αυτό διαδίδεται σε κάθε *υπερκλάση* της κλάσης $A$. Αντίστροφα, ένα αποτέλεσμα ότι ένα πρόβλημα για την κλάση $A$ ανήκει στην κλάση **P**, εκφρασμένο πάντα με έναν αλγόριθμο επίλυσης πολυωνυμικού χρόνου, διαδίδεται προς όλες τις *υποκλάσεις* της κλάσης $A$. Μας ενδιαφέρει στην προκειμένη περίπτωση να βρεθεί σε ποιες κλάσεις γίνεται το πέρασμα από το **P** στην **NP**-πληρότητα για το εκάστοτε πρόβλημα. Αυτό γίνεται με το να βρούμε μια κλάση $A$, στην οποία το πρόβλημα να είναι **NP**-πλήρες και στην αμέσως επόμενη *υποκλάση* του το πρόβλημα να μετατρέπεται σε πολυωνυμικά επιλύσιμο. Αυτές οι δύο κλάσεις είναι το διαχωριστικό όριο ως προς την πολυπλοκότητα (χρόνου) του εκάστοτε προβλήματος μελέτης.

## 4.2 Αρμονικός Αριθμός

Ένας *κατάλληλος χρωματισμός* ενός γραφήματος $G = (V, E)$ είναι μια ανάθεση χρωμάτων στις κορυφές του γραφήματος, έτσι ώστε γειτονικές κορυφές να έχουν διαφορετικό χρώμα. Δηλαδή, ζητείται μια διαμέριση του συνόλου κορυφών σε *κλάσεις χρωματισμού* οι οποίες αντιστοιχούν σε ανεξάρτητα σύνολα. Ένας χρωματισμός θεωρείται πλήρης, εάν για κάθε διαφορετικό ζεύγος χρωμάτων (διαφορετικών μεταξύ τους), υπάρχουν δύο γειτονικές κορυφές που τους έχουν ανατεθεί αυτά τα δύο χρώματα. Ένας *αρμονικός χρωματισμός* ενός γραφήματος $G$ είναι ένας κατάλληλος χρωματισμός των κόμβων τέτοιος ώστε κάθε ζεύγος διαφορετικών χρωμάτων εμφανίζεται *το πολύ* σε μια ακμή. Ο *αρμονικός χρωματικός αριθμός* $h(G)$ είναι ο ελάχιστος ακέραιος $k$ για τον οποίο το γράφημα $G$ επιδέχεται έναν αρμονικό χρωματισμό με $k$ χρώματα.

Η **NP**-πληρότητα του Αχρωματικού Αριθμού για τα γραφήματα διαστημάτων (interval graphs) συνεπάγεται την **NP**-πληρότητα του Αρμονικού Αριθμού των μη συνεκτικών γραφημάτων διαστημάτων (disconnected interval graphs) [10]. Σε μία πολύ πρόσφατη εργασία, επεκτείνονται τα προηγούμενα αποτελέσματα για *συνεκτικά* μεταθετικά (permutation) γραφήματα και *συνεκτικά* γραφήματα διαστημάτων (interval) [6]. Όσον αφορά στα συμπληρωματικά παραγόμενα γραφήματα (cographs), το πρόβλημα έχει λύση την τετριμμένη, αφού σε ένα τέτοιο γράφημα κάθε κόμβος παίρνει ένα διαφορετικό χρώμα, επειδή βρίσκεται σε απόσταση το πολύ δύο από τους υπόλοιπους κόμβους του γραφήματος. Σαν συνέπεια αυτού του αποτελέσματος, το πρόβλημα του Αρμονικού Αριθμού είναι **NP**-πλήρες για τα τριγωνικά (chordal) και τα μεταβατικά (comparability) γραφήματα, αφού αποτελούν υπερκλάση των γραφημάτων διαστημάτων (interval) και των μεταθετικών (permutation) γραφημάτων, αντίστοιχα. Έχει αποδειχθεί ότι το πρόβλημα εύρεσης του Αρμονικού Αριθμού είναι **NP**-πλήρες για την κλάση των διμερών (bipartite) γραφημάτων [34]. Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι το πρόβλημα παραμένει **NP**-πλήρες και στα δέντρα (trees) [30].

Το Σχήμα 4.1 αναπαριστά τα παραπάνω αποτελέσματα. Το διακεκομμένο τετράγωνο αντιστοιχεί στις κλάσεις εκείνες όπου το εκάστοτε πρόβλημα ανήκει στην κλάση **P**, ενώ η έλλειψη αντιστοιχεί στις κλάσεις όπου το πρόβλημα παραμένει **NP**-πλήρες. Για την κλάση των διαχωρίσιμων (split) γραφημάτων το πρόβλημα εύρεσης του Αρμονικού Αριθμού είναι **NP**-πλήρες [6]. Στη συνέχεια ακολουθεί λεπτομερής περιγραφή των αναγωγών που αποδεικνύουν ότι το πρόβλημα εύρεσης του Αρμονικού Αριθμού είναι **NP**-πλήρες για τις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων.

## 4.3 Αποτελέσματα NP-πληρότητας

Υπάρχει μία κλάση Τέλειων Γραφημάτων, η οποία ονομάζεται *bipartite permutation* και σε αυτήν την κλάση το πρόβλημα του Αρμονικού Αριθμού είναι **NP**-πλήρες. Η κατηγορία αυτή αποτελεί υποκλάση της κατηγορίας των διμερών (bipartite) γραφημάτων, οπότε και για τα διμερή (bipartite) γραφήματα το πρόβλημα του Αρμονικού Αριθμού είναι **NP**-πλήρες.

Ένα διμερές (bipartite) γράφημα $G = (X, Y; E)$ είναι ένα *διμερές μεταθετικό* (bipartite permutation) γράφημα, εάν και μόνο εάν οι κόμβοι του γραφήματος εμφανίζουν μία ισχυρή διάταξη [55]. Με τον όρο ισχυρή διάταξη των κόμβων ενός γραφήματος $G = (X, Y; E)$, εννοούμε μία διάταξη $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ των κόμβων του συνόλου $X$ και μία διάταξη $\{y_1, y_2, \ldots, y_s\}$ των κόμβων του συνόλου $Y$ τέτοια ώστε, όποτε ισχύει $x_i y_l, x_j y_m \in E$ με $i < j$ και $l > m$ να ισχύει επιπλέον $x_i y_m, x_j y_l \in E$ [55].

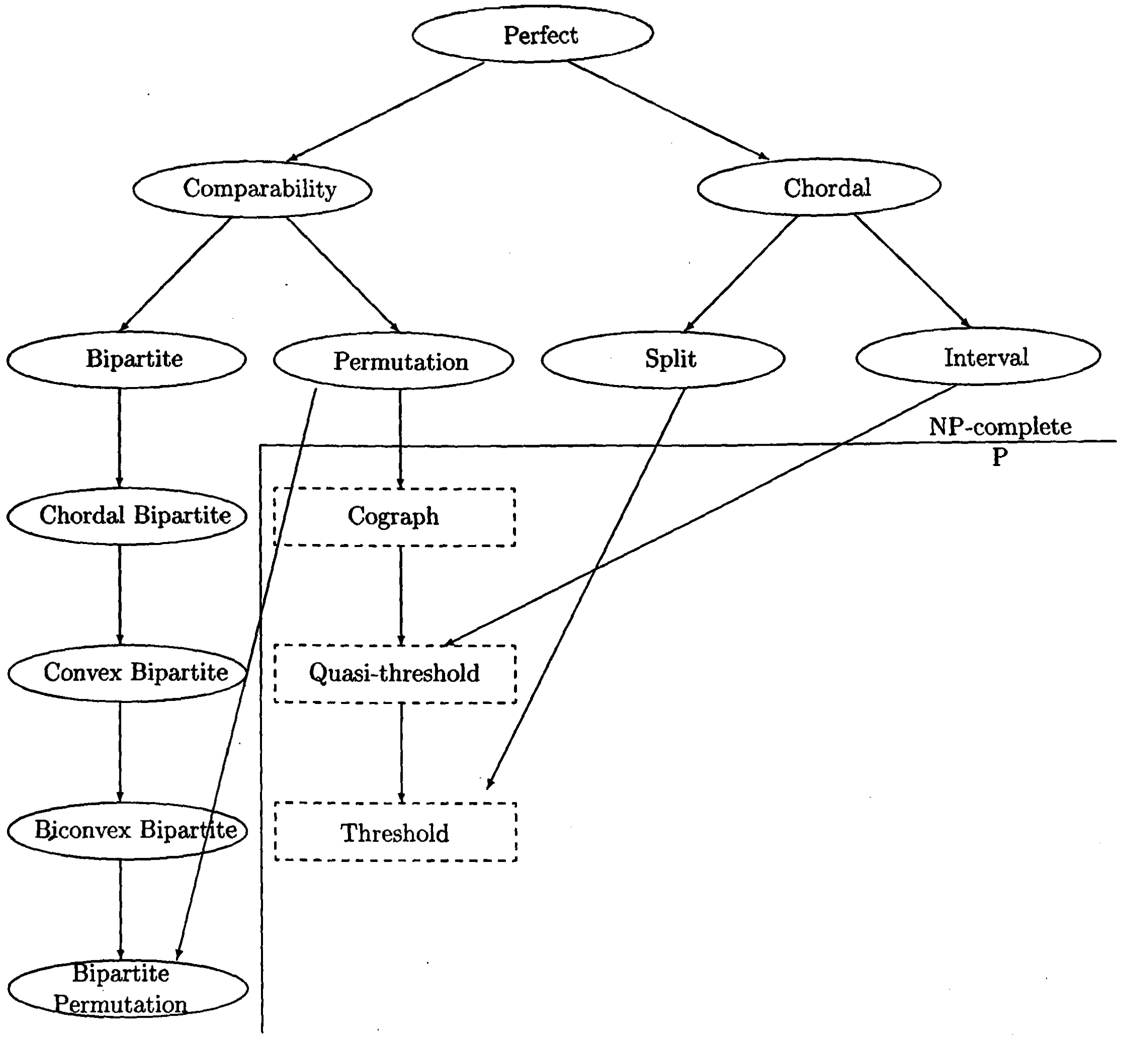
**Θεώρημα 4.1.** [7] *Το πρόβλημα εύρεσης του Αρμονικού Αριθμού είναι* **NP**-*πλήρες για τα συνεκτικά διμερή μεταθετικά (bipartite permutation) γραφήματα.*

**Απόδειξη**: Το πρόβλημα εύρεσης του Αρμονικού Αριθμού ανήκει στην κλάση **NP**. Για να αποδειχθεί ότι είναι **NP**-*hard*, θα χρησιμοποιηθεί ένας μετασχηματισμός από το πρόβλημα 3-PARTITION. Παρακάτω δίνεται ο ορισμός του 3-PARTITION.

**Ορισμός 4.1. 3-PARTITION**

*Στιγμιότυπο*: Σύνολο $A$ με $3m$ στοιχεία, ένα όριο $B \in Z^+$, και θετικοί ακέραιοι μεγέθους $s(a) \in Z^+$ για $\forall a \in A$, τέτοιοι ώστε να ισχύει $\frac{1}{4}B < s(a) < \frac{1}{2}B$, και $\sum_{a \in A} s(a) = mB$.

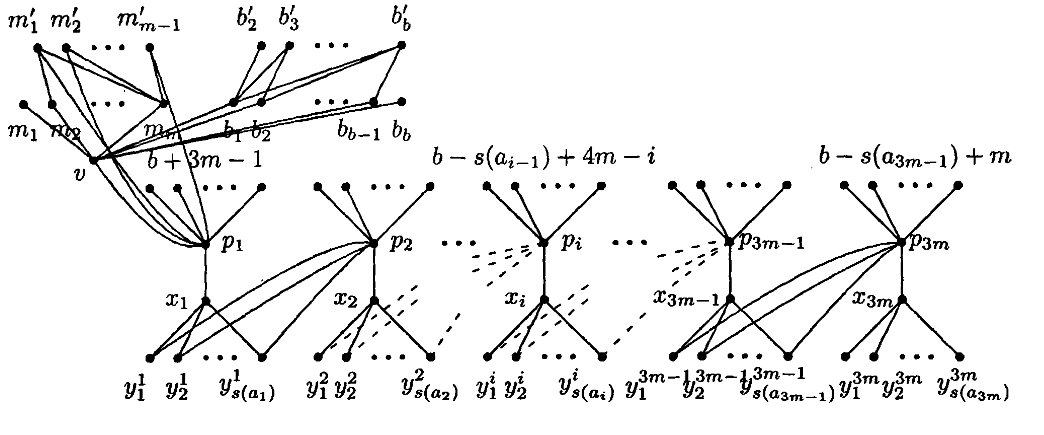
*Ερώτηση*: Μπορεί το σύνολο $A$ να διαμεριστεί σε $m$ ξένα σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_m$ τέτοια ώστε, για $1 \leq i \leq m$, $\sum_{a \in A_i} s(a) = B$ (κάθε σύνολο $A_i$ πρέπει να περιέχει ακριβώς τρία στοιχεία από το σύνολο $A$)?




Σχήμα 4.1: Η Πολυπλοκότητα του Προβλήματος Εύρεσης του Αρμονικού Αριθμού για Συνδεδεμένα Γραφήματα που ανήκουν σε Κλάσεις Τέλειων Γραφημάτων.

Έστω ένα σύνολο $A = \{a_1, \ldots, a_{3m}\}$ με $3m$ στοιχεία, ένας θετικός ακέραιος $b$ και θετικοί ακέραιοι μεγέθους $s(a_i)$ για κάθε $a_i \in A$ τέτοια ώστε να ισχύει $\frac{1}{4}b < s(a_i) < \frac{1}{2}b$, και $\sum_{a_i \in A} s(a_i) = mb$, $1 \leq i \leq 3m$. Υποθέτουμε επίσης ότι, για κάθε $a_i \in A$, ισχύει $s(a_i) > m$ (εάν όχι, τότε μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε όλα τα μεγέθη $s(a_i)$ και $b$ με το $m+1$).

Κατασκευάζεται το ακόλουθο συνεκτικό γράφημα, το οποίο είναι ένα διμερές μεταθετικό (bipartite permutation) γράφημα. Έστω ένα σύνολο $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_m\}$ με $m$ κόμβους, ένα σύνολο $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_b\}$ με $b$ κόμβους και προσθέτεται ένα κόμβος $v$, ο οποίος συνδέεται με κάθε κόμβο από τα δύο σύνολα. Δημιουργείται ένα σύνολο $M' = \{m'_1, m'_2, \ldots, m'_{m-1}\}$ με $m-1$ κόμβους και ένα σύνολο $B' = \{b'_2, b'_3, \ldots, b'_b\}$ με $b-1$ κόμβους. Οι κόμβοι των συνόλων $M'$ και $B'$ συνδέονται με τους κόμβους των συνόλων $M$ και $B$ ως εξής: κάθε κόμβος $m'_i, 1 \leq i \leq m-1$, συνδέεται με τους κόμβους




Σχήμα 4.2: Το Διμερές Μεταθετικό (Bipartite Permutation) Γράφημα.

$m_{i+1}, m_{i+2}, \ldots, m_m$, και κάθε κόμβος $b_i, 1 \leq i \leq b-1$ με τους κόμβους $b'_{i+1}, b'_{i+2}, \ldots, b'_b$. Στη συνέχεια κατασκευάζεται για κάθε $a_i \in A$ ένα δέντρο $T_i$ βάθους ένα με $s(a_i)$ φύλλα και με ονομασίες φύλλων $y_1^i, y_2^i, \ldots, y_{s(a_i)}^i$. Κάθε δέντρο έχει για ρίζα το $x_i$ και κάθε φύλλο συνδέεται με τη ρίζα, έχει δηλαδή γείτονα τη ρίζα του δέντρου. Έτσι, υπάρχουν $3m$ τέτοια δέντρα, τα $T_1, T_2, \ldots, T_{3m}$. Στη συνέχεια προστίθεται ένα σύνολο $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_{3m}\}$ με $3m$ κόμβους και συνδέεται κάθε κόμβος $p_i$ με τη ρίζα $x_i$ κάθε δέντρου $T_i, 1 \leq i \leq 3m$. Επίσης, κάθε κόμβος $p_i, 2 \leq i \leq 3m$, συνδέεται με τα $s(a_{i-1})$ φύλλα του αντίστοιχου δέντρου $T_{i-1}$. Ο κόμβος $p_1$ συνδέεται με τους κόμβους του συνόλου $M'$ και με τον κόμβο $v$. Ακόμη, για κάθε κόμβο $p_i \in P, 2 \leq i \leq 3m$, προστίθενται κόμβοι $v_j^i, 1 \leq j \leq m-1+b-s(a_{i-1})+1+3m-i$ και συνδέονται με τον κόμβο $p_i$. Προστίθενται ακόμη οι κόμβοι $v_j^1, 1 \leq j \leq b+3m-1$ και συνδέονται με τον κόμβο $p_1$. Έστω $G$ το τελικό γράφημα, το οποίο είναι συνεκτικό και παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.2.

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι το γράφημα $G$ είναι ένα διμερές (bipartite) γράφημα. Έστω $X$ και $Y$ τα δύο ευσταθή του σύνολα. Οι κόμβοι του γραφήματος $G = (X, Y; E)$ έχουν μια ισχυρή διάταξη, επομένως το γράφημα είναι ένα διμερές μεταθετικό (bipartite permutation) γράφημα. Έστω $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ οι διατάξεις των κόμβων των συνόλων $X$ και $Y$ αντίστοιχα. Τα σύνολα $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ ορίζονται ως εξής:

$$\mathcal{X} = \{b'_2, b'_3, \ldots, b'_b, v, m'_1, m'_2, \ldots, m'_{m-1}, v_1^1, v_2^1, \ldots, v_{b+3m-1}^1, \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}_5, \ldots, \mathcal{X}_{3m-2}, x_{3m}\}$$
$$\mathcal{Y} = \{b_1, b_2, \ldots, b_b, m_1, m_2, \ldots, m_m, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_3, \mathcal{Y}_5, \ldots, \mathcal{Y}_{3m-2}, y_1^{3m}, y_2^{3m}, \ldots, y_{s(a_{3m})}^{3m}\}$$

όπου $\mathcal{X}_i = \{x_i, p_{i+1}, y_1^{i+1}, y_2^{i+1}, \ldots, y_{s(a_{i+1})}^{i+1}, v_1^{i+2}, v_2^{i+2}, \ldots, v_{4m+b-s(a_{i+1})-i-2}^{i+2}\}$, $i = 1, 3, 5, \ldots, 3m-2$,
και $\mathcal{Y}_i = \{y_1^i, y_2^i, \ldots, y_{s(a_i)}^i, v_1^{i+1}, v_2^{i+1}, \ldots, v_{4m+b-s(a_i)-i-1}^{i+1}, x_{i+1}\}$, $i = 1, 3, 5, \ldots, 3m-2$.

Το πλήθος των ακμών στο γράφημα $G$ είναι

$$\binom{m}{2} + \binom{b}{2} + m + b + 3m^2 + 3mb + 3m + mb + \sum_{i=1}^{3m-1} i = \binom{4m+b+1}{2}$$

Για οποιοδήποτε αρμονικό χρωματισμό του γραφήματος $G$ και για κάθε ζεύγος διαφορετικών χρωμάτων $i, j, i \neq j$, πρέπει να υπάρχει το πολύ μια ακμή που να χρωματίζεται με τα χρώματα $i$ και $j$. Σαν αποτέλεσμα αυτής της παρατήρησης προκύπτει ότι ο αρμονικός χρωματικός αριθμός δεν μπορεί να είναι μικρότερος από $4m+b+1$, και αν είναι ίσος με $4m+b+1$ τότε για κάθε ζεύγος διαφορετικών χρωμάτων $i, j, 1 \leq i, j \leq$

$4m+b+1$ υπάρχει μία μοναδική ακμή με τα άκρα της να έχουν τα χρώματα $i$ και $j$. 'Ετσι, έχουμε έναν ακριβή χρωματισμό του γραφήματος $G$. Με τον όρο *ακριβή χρωματισμό* του γραφήματος $G$ με $k$ χρώματα εννοούμε τον αρμονικό χρωματισμό του γραφήματος $G$ με $k$ χρώματα για τα οποία, για οποιοδήποτε ζεύγος χρωμάτων $i, j$, υπάρχει ακριβώς μία ακμή $ab$ τέτοια ώστε η κορυφή $a$ έχει το χρώμα $i$ και η κορυφή $b$ έχει το χρώμα $j$.

Χρησιμοποιώντας έναν μετασχηματισμό από το πρόβλημα 3-PARTITION θα αποδειχθεί ότι ο αρμονικός χρωματικός αριθμός του γραφήματος $G$ είναι (μικρότερος ή ίσος με) $4m+b+1$ εάν και μόνο εάν το σύνολο $A$ μπορεί να διαμεριστεί σε $m$ σύνολα $A_1, \ldots, A_m$ τέτοια ώστε να ισχύει $\sum_{a \in A_j} s(a) = b$, για οποιοδήποτε $j, 1 \leq j \leq m$.

($\Longleftarrow$) 'Εστω τώρα μία 3-διαμέριση του συνόλου $A$ σε $A_1, \ldots, A_m$ σύνολα τέτοια ώστε να ισχύει $\forall j$: $\sum_{a \in A_j} s(a) = b$. Οι κόμβοι των συνόλων $M$ και $M'$ χρωματίζονται με τα χρώματα $1, 2, \ldots, m$, οι κόμβοι των συνόλων $B$ και $B'$ με τα χρώματα $m+1, m+2, \ldots, m+b$, και ο κόμβος $v$ παίρνει το χρώμα $m+b+1$. 'Εστω $\mathcal{M}$ το σύνολο που περιέχει τα χρώματα $1, 2, \ldots, m$, $\mathcal{B}$ το σύνολο που περιέχει τα χρώματα $m+1, m+2, \ldots, m+b$ και $\mathcal{K}$ το σύνολο που περιέχει τα χρώματα $m+b+2, m+b+3, \ldots, 4m+b+1$. Εάν $a_i \in A_j$ τότε ο κόμβος που αντιστοιχεί στο $a_i$ παίρνει το χρώμα $j$. Κάθε χρώμα $j \in \mathcal{M}$ αντιστοιχίζεται σε τρεις κόμβους $x_i$, οι οποίοι αντιστοιχούν σε τρία $a_i$ που έχουν όλα μαζί ακριβώς $b$ γείτονες βαθμού δύο. Καθένας από τους $b$ γείτονες παίρνει ένα διαφορετικό χρώμα από το σύνολο $\mathcal{B}$ και κάθε κόμβος $p_i$ από το σύνολο $P$ παίρνει ένα διαφορετικό χρώμα από το σύνολο $\mathcal{K}$. Υπενθυμίζεται ότι κάθε κόμβος $p_i, 1 \leq i \leq 3m$, συνδέεται με $m+b+1+3m-i$ κόμβους.

Στη συνέχεια πρέπει να χρωματιστούν οι υπόλοιποι $m-1+b-s(a_{i-1})+1+3m-i$ γείτονες κάθε ενός κόμβου $p_i, 1 \leq i \leq 3m$. Οι $m-1$ γείτονες του κόμβου $p_i$ παίρνουν ένα διαφορετικό χρώμα από το σύνολο $\mathcal{M} \backslash c_i$, όπου $c_i$ είναι το χρώμα που προηγουμένως ανατέθηκε στον κόμβο $x_i$ που αντιστοιχεί στο $a_i$. Οι $b-s(a_{i-1})$ γείτονες του κόμβου $p_i$ παίρνουν ένα διαφορετικό χρώμα από το σύνολο $\mathcal{B} \backslash C_i$, όπου $C_i$ είναι το σύνολο των χρωμάτων που προηγουμένως ανατέθηκαν στους $s(a_{i-1})$ γείτονες του κόμβου $x_{i-1}$ που αντιστοιχεί στο $a_{i-1}$. Οι υπόλοιποι $1+3m-i$ γείτονες του κόμβου $p_i$ παίρνουν ένα διαφορετικό χρώμα χρησιμοποιώντας το χρώμα $m+b+1$ και τα χρώματα που ανατέθηκαν στους κόμβους $p_j, i+1 \leq j \leq 3m$. Για τους $b+3m-1$ γείτονες του κόμβου $p_1$ χρησιμοποιούνται χρώματα από τα σύνολα $\mathcal{K}$ και $\mathcal{B}$, ενώ οι $m$ γείτονές του έχουν ήδη χρωματιστεί. Τελικά, υπάρχει ένας αρμονικός χρωματισμός του γραφήματος $G$ με $4m+b+1$ χρώματα και επομένως ο αρμονικός χρωματικός αριθμός του γραφήματος $G$ είναι $4m+b+1$.

($\Longrightarrow$) 'Εστω ότι ο αρμονικός χρωματικός αριθμός του γραφήματος $G$ είναι (μικρότερος ή ίσος με) $4m+b+1$. Χωρίς τον περιορισμό της γενικότητας, έστω ότι οι $m$ κόμβοι του συνόλου $M$ παίρνουν διαφορετικά χρώματα από το σύνολο $\mathcal{M}$, ενώ οι $b$ κόμβοι του συνόλου $B$ παίρνουν διαφορετικά χρώματα από το σύνολο $\mathcal{B}$. Επίσης, ο κόμβος $v$ χρωματίζεται με το χρώμα $m+b+1$, αφού γειτονεύει με όλους τους κόμβους των δύο συνόλων, και ο κόμβος $p_1$ με το χρώμα $c_{p_1} = m+b+2$. Σημειώνεται ότι ο κόμβος $p_1$ έχει το μέγιστο βαθμό, ο οποίος είναι $4m+b$, και ως εκ τούτου το χρώμα $m+b+2$ γειτονεύει με όλα τα χρώματα, αφού όλοι οι γείτονες του κόμβου $p_1$ που δεν έχουν χρωματιστεί παίρνουν διαφορετικά χρώματα από το σύνολο $\mathcal{M} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{K} \backslash c_{p_1}$. Κάθε κόμβος $p_i, 1 \leq i \leq 3m$, χρωματίζεται με κάποιο χρώμα από το σύνολο $\mathcal{K}$. Πράγματι, έστω $c_m \in \mathcal{M}$ το χρώμα που δίνεται στον κόμβο $p_2$. Ο βαθμός του κόμβου $p_2$ είναι ίσος με $4m+b-1$. Παρ' όλα αυτά, το χρώμα $c_m$ γειτονεύει με άλλα $(m-1+b+3m+1)-(1+1) < 4m+b-1$ χρώματα, και έτσι χρειαζόμαστε ένα ακόμα χρώμα για να χρωματίσουμε έναν ακόμη γείτονα του κόμβου $p_2$. Με παρόμοια επιχειρήματα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο κόμβος $p_2$ δεν μπορεί να πάρει χρώμα από το σύνολο $\mathcal{B} \cup \{m+b+1, m+b+2\}$, και γι' αυτό παίρνει ένα χρώμα από το σύνολο $\mathcal{K} \backslash c_{p_1}$. Με επαγωγή στο $i$ αποδεικνύεται ότι κάθε κόμβος $p_i \in P, 2 \leq i \leq 3m$, παίρνει ένα χρώμα από το σύνολο $\mathcal{K} \backslash \mathcal{L}$, όπου $\mathcal{L}$ είναι το σύνολο που περιέχει τα χρώματα $c_{p_1}, c_{p_2}, \ldots, c_{p_{i-1}}$, τα οποία είναι τα χρώματα που έχουν ήδη ανατεθεί στους κόμβους $p_j, 1 \leq j \leq i$. Εάν $c_k$ είναι ένα χρώμα από το σύνολο $\mathcal{K} \cup \{m+b+1\}$, τότε δεν μπορεί να ανατεθεί σε κανέναν άλλον κόμβο του γραφήματος $G$, αφού οποιοδήποτε ζεύγος χρωμάτων $(c_{\mathcal{K}}, j), 1 \leq j \leq 4m + b + 1$ υπάρχει ήδη στον αρμονικό χρωματισμό. Υπενθυμίζεται ότι για κάθε ζεύγος διαφορετικών χρωμάτων $i, j, 1 \leq i, j \leq 4m + b + 1$, υπάρχει μια μοναδική ακμή που τα άκρα της έχουν τα χρώματα $i$ και $j$.

Θα δειχθεί ότι όλοι οι κόμβοι από το σύνολο $B'$ παίρνουν χρώματα από το σύνολο $\mathcal{B}$. Αφού κάθε κόμβος $u_i \in B', 2 \leq i \leq b$, γειτονεύει με τουλάχιστον έναν κόμβο από το σύνολο $B$, δεν μπορεί κανένας να πάρει το χρώμα $m + b + 1$. Έστω $u \in B'$ ένας κόμβος που παίρνει ένα χρώμα από το σύνολο $\mathcal{M}$, με βαθμό $d_u$, ενώ όλοι οι άλλοι κόμβοι παίρνουν χρώμα από το σύνολο $\mathcal{B}$. Το πλήθος των ακμών του γραφήματος $G$ που έχουν το ένα τους άκρο χρωματισμένο με κάποιο χρώμα από το σύνολο $\mathcal{M}$ που δεν έχουν εμφανιστεί ακόμα είναι $mb - d_u$. Επίσης, το πλήθος των ακμών του γραφήματος $G$ που έχουν το ένα τους άκρο χρωματισμένο με κάποιο χρώμα από το σύνολο $\mathcal{B}$ που δεν έχουν εμφανιστεί ακόμα είναι $mb$. Έτσι, το πλήθος των ζευγών που δεν έχουν εμφανιστεί ακόμα στο γράφημα $G$ είναι $mb - d_u + mb - mb = mb - d_u$, ενώ το πλήθος των ακμών που δεν έχουν χρωματιστεί είναι $mb$, και είναι οι ακμές της μορφής $x_i y_j^i, 1 \leq i \leq 3m, 1 \leq j \leq s(a_i)$. Αυτό συνεπάγεται ότι χρειάζονται περισσότερα χρώματα και γι' αυτό οι κόμβοι από το σύνολο $B'$ παίρνουν χρώματα από το σύνολο $\mathcal{B}$. Χρησιμοποιώντας την ίδια λογική, αποδεικνύεται ότι οι κόμβοι από το σύνολο $M'$ παίρνουν χρώματα από το σύνολο $\mathcal{M}$.

Επειδή όλα τα ζεύγη χρωμάτων πρέπει να εμφανιστούν και τα ζεύγη $(a, b), a \in \mathcal{M}, b \in \mathcal{B}$ δεν έχουν εμφανιστεί ακόμα, θα ανατεθούν αυτά τα ζεύγη χρωμάτων στις $mb$ ακμές που έχουν και τα δυο άκρα τους αχρωμάτιστα. Αυτές οι ακμές είναι οι ακμές της μορφής $x_i y_j^i, 1 \leq i \leq 3m, 1 \leq j \leq s(a_i)$, όπου ο κόμβος $x_i$ αντιστοιχεί στο $a_i$ και ο κόμβος $y_j^i$ αντιστοιχεί στον $j$-οστό γείτονα του κόμβου $x_i$ που έχει βαθμό ίσο με δύο. Οι κόμβοι $x_i$ δεν μπορούν να πάρουν χρώμα από το σύνολο $\mathcal{B}$, διαφορετικά οι $s(a_i) > m$ αχρωμάτιστοι γείτονες $y_j^i$ δεν μπορούν να χρωματιστούν με $m$ χρώματα από το σύνολο $\mathcal{M}$. Έτσι, οι κόμβοι $x_i$ παίρνουν ένα χρώμα από το σύνολο $\mathcal{M}$ και οι κόμβοι $y_j^i$ παίρνουν ένα χρώμα από το σύνολο $\mathcal{B}$ (ισχύει ότι $\frac{b}{4} < s(a_i) < \frac{b}{2}$). Οι $m - 1$ γείτονες του κόμβου $p_1$ που ανήκουν στο σύνολο $M'$ έχουν ήδη χρωματιστεί με κάποιο χρώμα από το σύνολο $\mathcal{M}$. Έτσι, ανατίθενται διαφορετικά χρώματα στους $4m + b - s(a_{i-1}) - i$ γείτονες καθενός $p_i, 1 < i \leq 3m$ με βαθμό ένα. Αν $c_{p_i}$ είναι το χρώμα του κόμβου $p_i$, χρησιμοποιούνται διαφορετικά χρώματα από το σύνολο $\mathcal{M} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{K} \backslash \{c_{x_i}, \mathcal{F}, \mathcal{L}, c_{p_i}\}$, όπου $\mathcal{F}$ είναι το σύνολο που περιέχει όλα τα χρώματα που έχουν ήδη ανατεθεί στους $s(a_{i-1}) + 1$ γείτονες του κόμβου $p_i$ και $c_{x_i} \in \mathcal{M}$ είναι το χρώμα που έχει ήδη ανατεθεί στον κόμβο $x_i$.

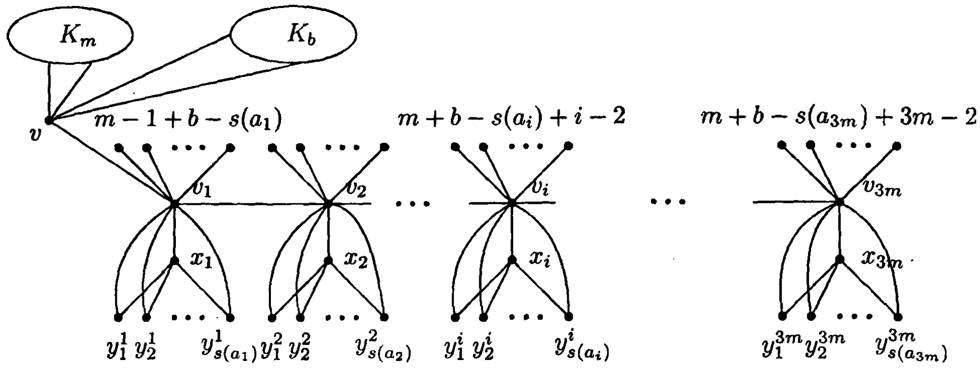
Τελικά, θα ισχύει $a_i \in A_j$ εάν και μόνο εάν ο κόμβος $x_i$ (με γείτονες τους κόμβους $y_j^i$) χρωματίζεται με το χρώμα $j \in \mathcal{M}$. Ακόμα, ισχύει $\sum_{a \in A_j} s(a) = b, \forall j$. Πράγματι, κάθε χρώμα $j$ πρέπει να γειτονεύει με κάποια χρώματα από το σύνολο $\mathcal{B}$, και κάθε χρώμα από το σύνολο $\mathcal{B}$ αντιστοιχίζεται ακριβώς σε έναν κόμβο ο οποίος γειτονεύει με όλους τους κόμβους $x_i$ που έχουν χρώμα $j$. Έτσι, υπάρχει μία σωστή 3-διαμέριση.

Η ισχύς του θεωρήματος προκύπτει από την **NP**-πληρότητα του 3-PARTITION, αφού ο μετασχηματισμός μπορεί να γίνει εύκολα σε πολυωνυμικό χρόνο. □

**Θεώρημα 4.2.** *Το πρόβλημα εύρεσης του Αρμονικού Αριθμού είναι* **NP***-πλήρες για τα συνεκτικά γραφήματα διαστημάτων (interval graphs).*

**Απόδειξη**: Το πρόβλημα εύρεσης του Αρμονικού Αριθμού ανήκει στην κλάση **NP**. Για να αποδειχθεί ότι είναι **NP**-*hard*, θα χρησιμοποιηθεί ένας μετασχηματισμός από το πρόβλημα 3-PARTITION.

Έστω ένα σύνολο $A = \{a_1, \ldots, a_{3m}\}$ με $3m$ στοιχεία, ένας θετικός ακέραιος $b$ και θετικοί ακέραιοι μεγέθους $s(a_i)$ για κάθε $a_i \in A$ τέτοια ώστε να ισχύει $\frac{1}{4}b < s(a_i) < \frac{1}{2}b$, και $\sum_{a_i \in A} s(a_i) = mb$, $1 \leq i \leq 3m$. Υποθέτουμε επίσης ότι, για κάθε $a_i \in A$, ισχύει $s(a_i) > m$ (εάν όχι, τότε μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε όλα τα μεγέθη $s(a_i)$ και $b$ με το $m + 1$).




Σχήμα 4.3: Το Γράφημα που είναι Ταυτόχρονα Γράφημα Διαστημάτων (Interval) και Μεταθετικό (Permutation) Γράφημα.

Ακολουθεί η περιγραφή κατασκευής ενός συνεκτικού γραφήματος, το οποίο είναι ταυτόχρονα γράφημα διαστημάτων (interval) και μεταθετικό (permutation) γράφημα: Έστω μία κλίκα με $m$ κόμβους, μία κλίκα με $b$ κόμβους και ένας κόμβος $v$ ο οποίος συνδέεται με όλους τους κόμβους των δύο κλικών. Το γράφημα που προκύπτει το ονομάζουμε $G_1$. Στη συνέχεια για κάθε $a_i \in A$ κατασκευάζεται ένα δέντρο $T_i$ βάθους ένα, με $s(a_i)$ φύλλα και με ονομασίες φύλλων $y_1^i, y_2^i, \ldots, y_{s(a_i)}^i$. Κάθε δέντρο έχει για ρίζα το $x_i$ και κάθε φύλλο συνδέεται με τη ρίζα. Έτσι, υπάρχουν $3m$ τέτοια δέντρα, τα $T_1, T_2, \ldots, T_{3m}$. Ακολουθεί η κατασκευή ενός μονοπατιού $P = [v_1, v_2, \ldots, v_{3m}]$ με $3m$ κόμβους, και κάθε κόμβος $v_i$ στο μονοπάτι συνδέεται με όλους τους κόμβους κάθε δέντρου $T_i, 1 \leq i \leq 3m$. Επιπλέον, για κάθε κόμβο $v_i \in P$ προστίθενται $m-1+b-s(a_i)+i-1$ κόμβοι και συνδέονται με τον κόμβο $v_i$. Το γράφημα που προκύπτει το ονομάζουμε $G_2$. Το γράφημα $G_1 \cup G_2$ είναι μη συνεκτικό. Για να γίνει συνεκτικό συνδέουμε με μία αχμή τους κόμβους $v_1$ και $v$ και έστω $G$ το τελικό γράφημα που προκύπτει, το οποίο είναι συνεκτικό και φαίνεται στο Σχήμα 4.3.

Το γράφημα $G$ είναι ένα γράφημα διαστημάτων (interval), γιατί μια κλίκα μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα πλήθος διαστημάτων που έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο. Δύο κλίκες που μοιράζονται έναν κόμβο $u$ μπορούν να αναπαρασταθούν σαν ένα πλήθος από διαστήματα τέτοια ώστε ένα από αυτά τα διαστήματα, το οποίο αντιστοιχεί στον κόμβο $u$, έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τα διαστήματα που αντιστοιχούν στους κόμβους κάθε κλίκας. Έτσι, οι κόμβοι του γραφήματος $G$ μπορούν να τοποθετηθούν σε μία-προς-μία αντιστοιχία με ένα σύνολο διαστημάτων στην γραμμή των πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε δύο κόμβοι να γειτονεύουν στο $G$ εάν και μόνο εάν τα αντίστοιχα διαστήματα τέμνονται.

Εύκολα υπολογίζεται ότι το πλήθος των αχμών του γραφήματος $G$ είναι

$$\binom{m}{2} + \binom{b}{2} + m + b + 3m + mb + 3m + mb + 3m(m-2) + 2mb + \sum_{i=1}^{3m} i = \binom{4m+b+1}{2}$$

Για οποιοδήποτε αρμονικό χρωματισμό του γραφήματος $G$ και για κάθε ζεύγος διαφορετικών χρωμάτων $i, j, i \neq j$, πρέπει να υπάρχει το πολύ μια αχμή που τα άκρα της χρωματίζονται με τα χρώματα $i$ και $j$. Έτσι, ο αρμονικός χρωματικός αριθμός δεν μπορεί να είναι μικρότερος από $4m+b+1$, και αν είναι ίσος με $4m+b+1$ τότε για κάθε ζεύγος διαφορετικών χρωμάτων $i, j, 1 \leq i, j \leq 4m+b+1$ υπάρχει μία μοναδική ακμή με τα άκρα της να έχουν τα χρώματα $i$ και $j$. Έτσι, έχουμε έναν ακριβή χρωματισμό του γραφήματος $G$ με $k$ χρώματα.

Χρησιμοποιώντας έναν μετασχηματισμό από το πρόβλημα 3-PARTITION θα αποδειχθεί ότι ο αρμονικός χρωματικός αριθμός του γραφήματος $G$ είναι (μικρότερος ή ίσος με) $4m+b+1$ εάν και μόνο εάν το σύνολο $A$ μπορεί να διαμεριστεί σε $m$ σύνολα $A_1, \ldots, A_m$ τέτοια ώστε να ισχύει $\sum_{a \in A_j} s(a) = b$, για οποιοδήποτε $j, 1 \leq j \leq m$.

($\Longleftarrow$) Έστω τώρα μία 3-διαμέριση του συνόλου $A$ σε $A_1, \ldots, A_m$ σύνολα τέτοια ώστε να ισχύει $\forall j$: $\sum_{a \in A_j} s(a) = b$. Οι κόμβοι της πρώτης κλίκας παίρνουν τα χρώματα $1, 2, \ldots, m$, οι κόμβοι της δεύτερης κλίκας τα χρώματα $m+1, m+2, \ldots, m+b$, και ο κόμβος $v$ παίρνει το χρώμα $m+b+1$. Έστω $\mathcal{M}$ το σύνολο που περιέχει τα χρώματα $1, 2, \ldots, m$, $\mathcal{B}$ το σύνολο που περιέχει τα χρώματα $m+1, m+2, \ldots, m+b$ και $\mathcal{K}$ το σύνολο που περιέχει τα χρώματα $m+b+2, m+b+3, \ldots, 4m+b+1$. Εάν $a_i \in A_j$ τότε ο κόμβος $x_i$ παίρνει το χρώμα $j$. Κάθε χρώμα $j \in \mathcal{M}$ αντιστοιχίζεται σε τρεις κόμβους $x_i$, οι οποίοι αντιστοιχούν σε τρία $a_i$ που έχουν όλα μαζί ακριβώς $b$ γείτονες βαθμού δύο. Καθένας από τους $b$ γείτονες παίρνει ένα διαφορετικό χρώμα από το σύνολο $\mathcal{B}$ και κάθε κόμβος $v_i$ από το μονοπάτι $P$ παίρνει ένα διαφορετικό χρώμα από το σύνολο $\mathcal{K}$. Υπενθυμίζεται ότι κάθε κόμβος $v_i, 1 \leq i \leq 3m$, συνδέεται με άλλους δύο κόμβους στο μονοπάτι $P$, δηλαδή τους κόμβους $v_{i-1}$ και $v_{i+1}$, καθώς και με άλλους $m+b+i-1$ κόμβους. Ο κόμβος $v_1$ συνδέεται με τους κόμβους $v_2$, $v$ και με $m+b$ άλλους κόμβους, ενώ ο κόμβος $v_{3m}$ συνδέεται με τον κόμβο $v_{3m-1}$ και με $m+b+3m-1$ ακόμα κόμβους.

Στη συνέχεια, πρέπει να χρωματιστούν οι υπόλοιποι $m-1+b-s(a_i)+i-1$ γείτονες κάθε ενός κόμβου $v_i, 1 \leq i \leq 3m$. Οι $m-1$ γείτονες του κόμβου $v_i$ παίρνουν ένα διαφορετικό χρώμα από το σύνολο $\mathcal{M} \backslash c_i$, όπου $c_i$ είναι το χρώμα που προηγουμένως ανατέθηκε στον κόμβο $x_i$. Οι $b-s(a_i)$ γείτονες του κόμβου $v_i$ παίρνουν ένα διαφορετικό χρώμα από το σύνολο $\mathcal{B} \backslash C_i$, όπου $C_i$ είναι το σύνολο των χρωμάτων που προηγουμένως ανατέθηκαν στους $s(a_i)$ γείτονες του κόμβου $x_i$. Οι υπόλοιποι $i-1$ γείτονες του κόμβού $v_i, 3 \leq i \leq 3m$, παίρνουν το χρώμα $m+b+1$ και τα χρώματα που ανατέθηκαν στους κόμβους $v_j, 1 \leq j \leq i-2$. Για τους $m+b-s(a_2)$ γείτονες του κόμβου $v_2$ χρησιμοποιείται το χρώμα $m+b+1$, καθώς και τα χρώματα από τα σύνολα $\mathcal{M}$ και $\mathcal{B}$, ενώ οι $m-1+b-s(a_1)$ γείτονες του κόμβου $v_1$ παίρνουν χρώματα από τα σύνολα $\mathcal{M}$ και $\mathcal{B}$. Τελικά, υπάρχει ένας αρμονικός χρωματισμός του γραφήματος $G$ με $4m+b+1$ χρώματα και επομένως ο αρμονικός χρωματικός αριθμός του γραφήματος $G$ είναι $4m+b+1$.

($\Longrightarrow$) Έστω ότι ο αρμονικός χρωματικός αριθμός του γραφήματος $G$ είναι (μικρότερος ή ίσος με) $4m+b+1$. Χωρίς τον περιορισμό της γενικότητας, έστω ότι οι $m$ κόμβοι της πρώτης κλίκας παίρνουν διαφορετικά χρώματα από το σύνολο $\mathcal{M}$, ενώ οι $b$ κόμβοι της δεύτερης κλίκας παίρνουν διαφορετικά χρώματα από το σύνολο $\mathcal{B}$. Επίσης, ο κόμβος $v$ χρωματίζεται με το χρώμα $m+b+1$, αφού γειτονεύει με όλους τους κόμβους από τις δύο κλίκες. Αφού, ο κόμβος $v_{3m}$ είναι ο κόμβος με το μέγιστο βαθμό, ο οποίος είναι ίσος με $4m+b$, πρέπει να πάρει ένα χρώμα από το σύνολο $\mathcal{K}$. Πράγματι, εάν πάρει ένα χρώμα από το σύνολο $\mathcal{M}$, τότε κανένας από τους γείτονές του δεν μπορεί να πάρει ένα χρώμα από το σύνολο $\mathcal{M}$ και δεν μπορεί να γίνει ο χρωματισμός των $4m+b$ κόμβων χρησιμοποιώντας μόνο $4m+b+1-m$ χρώματα. Με παρόμοια επιχειρήματα δείχνεται ότι ο κόμβος $v_{3m}$ δεν μπορεί να χρωματιστεί χρησιμοποιώντας ένα χρώμα από το σύνολο $\mathcal{B}$ ή το χρώμα $m+b+1$. Έτσι, χωρίς τον περιορισμό της γενικότητας, ο κόμβος $v_{3m}$ παίρνει το χρώμα $4m+b+1$. Όλοι οι γείτονές του χρωματίζονται με χρώματα από το σύνολο $\mathcal{M} \cup \mathcal{B} \cup \{m+b+1\} \cup \mathcal{K} \backslash \{4m+b+1\}$. Ο κόμβος $v_{3m-1}$ παίρνει ένα χρώμα από το σύνολο $\mathcal{K} \backslash \{4m+b+1\}$ και έστω ότι παίρνει το χρώμα $4m+b$. Πράγματι, με παρόμοιους ισχυρισμούς προκύπτει ότι δεν μπορεί να πάρει χρώμα από το σύνολο $\mathcal{M} \cup \mathcal{B} \cup \{m+b+1\} \cup \{4m+b+1\}$. Επιπλέον, το χρώμα $4m+b+1$ δεν μπορεί να δοθεί σε κανέναν άλλον κόμβο του γραφήματος $G$, αφού οποιοδήποτε ζεύγος χρωμάτων $(4m+b+1, j), 1 \leq j \leq 4m+b$, εμφανίζεται ήδη στον αρμονικό χρωματισμό. Υπενθυμίζεται ότι για οποιοδήποτε ζεύγος διαφορετικών χρωμάτων $i, j, 1 \leq i, j \leq 4m+b+1$, υπάρχει μία μοναδική ακμή με τα άκρα της να παίρνουν τα χρώματα $i$ και $j$. Με επαγωγή στο $i$ αποδεικνύεται ότι το ίδιο ισχύει για όλους τους κόμβους $v_i \in P, 1 \leq i \leq 3m-2$, δηλαδή ο κόμβος $v_i$ παίρνει ένα χρώμα από το σύνολο $\mathcal{K}\backslash\mathcal{L}$, όπου $\mathcal{L}$ είναι το σύνολο που περιέχει τα χρώματα $m+b+1+i+1, m+b+1+i+2, \ldots, 4m+b+1$, τα οποία είναι τα χρώματα που έχουν ήδη ανατεθεί στους κόμβους $v_j, 1 < j \leq 3m$.

Επειδή όλα τα ζεύγη χρωμάτων πρέπει να εμφανιστούν και τα ζεύγη $(a,b), a \in \mathcal{M}, b \in \mathcal{B}$ δεν έχουν εμφανιστεί ακόμα, θα ανατεθούν αυτά τα ζεύγη χρωμάτων στις $mb$ ακμές που έχουν και τα δυο άκρα τους αχρωμάτιστα. Αυτές οι ακμές είναι οι ακμές της μορφής $x_i y_j^i, 1 \leq i \leq 3m, 1 \leq j \leq s(a_i)$, όπου ο κόμβος $x_i$ αντιστοιχεί στο $a_i$ και ο κόμβος $y_j^i$ αντιστοιχεί στον $j$-οστό γείτονα του κόμβου $x_i$ που έχει βαθμό ίσο με δύο. Οι κόμβοι $x_i$ δεν μπορούν να πάρουν χρώμα από το σύνολο $\mathcal{B}$, διαφορετικά οι $s(a_i) > m$ αχρωμάτιστοι γείτονες $y_j^i$ δεν μπορούν να χρωματιστούν με $m$ χρώματα από το σύνολο $\mathcal{M}$. Έτσι, οι κόμβοι $x_i$ παίρνουν ένα χρώμα από το σύνολο $\mathcal{M}$ και οι κόμβοι $y_j^i$ παίρνουν ένα χρώμα από το σύνολο $\mathcal{B}$ (ισχύει ότι $\frac{b}{4} < s(a_i) < \frac{b}{2}$). Οι μοναδικοί κόμβοι που δεν έχουν χρωματιστεί είναι οι $m-1+b-s(a_i)+i-1$ γείτονες κάθε ενός κόμβου $v_i, 1 \leq i \leq 3m$. Για να χρωματιστούν $m-1+b-s(a_i)$ κόμβοι από τους αχρωμάτιστους γείτονες κάθε ενός $v_i$, χρησιμοποιούνται διαφορετικά χρώματα από το σύνολο $(\mathcal{M} \cup \mathcal{B})\backslash\mathcal{F}$, όπου $\mathcal{F}$ είναι το σύνολο που περιέχει τα χρώματα που έχουν ήδη ανατεθεί στους $s(a_i)+1$ γείτονες του κόμβου $v_i$. Για να χρωματιστούν οι τελευταίοι $i-1$ αχρωμάτιστοι γείτονες του κόμβου $v_i, i > 1$, μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο χρώματα από το σύνολο $\mathcal{K}\backslash\mathcal{L}\backslash\{m+b+1+i, m+b+i\}$, επειδή τα μόνα ζεύγη χρωμάτων που δεν έχουν χρησιμοποιηθεί είναι τα $(m+b+1+i, j)$, όπου $m+b+1 \leq j \leq m+b+1+i-2$.

Τελικά, θα ισχύει $a_i \in A_j$ εάν και μόνο εάν ο κόμβος $x_i$ (με γείτονες τους κόμβους $y_j^i$) χρωματίζεται με το χρώμα $j \in \mathcal{M}$. Ακόμα ισχύει $\sum_{a \in A_j} s(a) = b, \forall j$. Πράγματι, κάθε χρώμα $j$ πρέπει να γειτονεύει με κάποια χρώματα από το σύνολο $\mathcal{B}$, και κάθε χρώμα από το σύνολο $\mathcal{B}$ αντιστοιχίζεται ακριβώς σε έναν κόμβο ο οποίος γειτονεύει με όλους τους κόμβους $x_i$ που έχουν χρώμα $j$. Έτσι, υπάρχει μία σωστή 3-διαμέριση.

Η ισχύς του θεωρήματος προκύπτει από την **NP**-πληρότητα του 3-PARTITION, αφού ο μετασχηματισμός μπορεί να γίνει εύκολα σε πολυωνυμικό χρόνο. □

Το γράφημα του Σχήματος 4.3 μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι είναι επίσης και ένα μεταθετικό (permutation) γράφημα. Έτσι, το γράφημα $G$ είναι ένα γράφημα διαστημάτων (interval), εάν και μόνο εάν είναι ένα τριγωνικό (chordal) γράφημα και το γράφημα $\overline{G}$ είναι ένα μεταβατικό (comparability) γράφημα [40]. Επιπλέον, το γράφημα $G$ παρουσιάζει μία άκυκλη μεταβατική κατεύθυνση, οπότε είναι ένα μεταβατικό (comparability) γράφημα. Αφού, τα γραφήματα $G$ και $\overline{G}$ είναι μεταβατικά (comparability) γραφήματα, συνεπάγεται ότι το γράφημα $G$ είναι ένα μεταθετικό (permutation) γράφημα [40]. Επομένως, ισχύει το επόμενο θεώρημα.

**Θεώρημα 4.3.** *Το πρόβλημα εύρεσης του Αρμονικού Αριθμού είναι* **NP***-πλήρες για τα συνεκτικά μεταθετικά (permutation) γραφήματα.*

# Κεφαλαιο 5

# Αχρωματικος Αριθμος



## 5.1 Στόχος

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε την πολυπλοκότητα του προβλήματος του Αχρωματικού Αριθμού για τις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων του ενδιαφέροντός μας. Συγκεκριμένα, μάς ενδιαφέρει να βρούμε το όριο στο οποίο το πρόβλημα αυτό μετατρέπεται από πολυωνυμικά επιλύσιμο σε μη πολυωνυμικά επιλύσιμο.

## 5.2 Αχρωματικός Αριθμός

'Ενας *κατάλληλος χρωματισμός* ενός γραφήματος $G = (V, E)$ είναι μια ανάθεση χρωμάτων στις κορυφές του γραφήματος, $V$, έτσι ώστε γειτονικές κορυφές (που συνδέονται με ακμή) να έχουν διαφορετικό χρώμα. Δηλαδή, ζητείται μια διαμέριση του συνόλου κορυφών σε *κλάσεις χρωματισμού*, οι οποίες αντιστοιχούν σε ανεξάρτητα σύνολα. 'Ενας χρωματισμός θεωρείται πλήρης, εάν για κάθε διαφορετικό ζεύγος χρωμάτων (διαφορετικών μεταξύ τους), υπάρχουν δύο γειτονικές κορυφές που τους έχουν ανατεθεί αυτά τα δύο χρώματα. Ο *αχρωματικός αριθμός* $\psi(G)$ είναι ο *μέγιστος* αριθμός $k$, για τον οποίο το γράφημα $G$ επιδέχεται έναν τέτοιο πλήρη χρωματισμό. Με άλλα λόγια θέλουμε τον μέγιστο αριθμό χρωμάτων και μια ανάθεση αυτών τέτοια ώστε, οποιεσδήποτε δύο διαφορετικές κλάσεις χρωματισμού να μοιράζονται *τουλάχιστον* μια ακμή.

Το πρόβλημα του αχρωματικού αριθμού $\psi(G)$ έχει αποδειχθεί **NP**-hard από τους Gavril και Γιαννακάκη [59], ενώ το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης είναι **NP**-πλήρες. Το πρόβλημα έχει μελετηθεί διεξοδικά από διάφορους ερευνητές για το θεωρητικό του ενδιαφέρον καθώς και για τις εφαρμογές που βρίσκει το πρόβλημα, κυρίως στους τομείς του σχεδιασμού δικτύων [29, 43]. Στην εργασία των Farber at. al. [34], αποδείχτηκε ότι το πρόβλημα του αχρωματικού αριθμού είναι **NP**-hard για διμερή (bipartite) γραφήματα. Ο Bodlænder [10] απέδειξε ότι το πρόβλημα παραμένει **NP**-hard για γραφήματα που είναι ταυτόχρονα συμπληρωματικά παραγόμενα (cographs) και γραφήματα διαστημάτων (interval). Οι Cairnie και Edwards [15] απέδειξαν ότι το πρόβλημα είναι **NP**-hard για τα δέντρα (trees).

Το πρόβλημα έχει επίσης μελετηθεί εκτός από τα διμερή (bipartite) γραφήματα, και για διάφορες κατάλληλες υπο-κλάσεις αυτών όπως τα *κυρτά διμερή* (convex bipartite) γραφήματα καθώς και για τα διμερή μεταθετικά (bipartite permutation) γραφήματα, όταν τα τελευταία είναι *μη συνεκτικά* [29]. Η περίπτωση των αντίστοιχων συνεκτικών περιπτώσεων δεν είναι τετριμμένη γενίκευση. Πολύ πρόσφατα [7], αποδείχτηκε ότι το πρόβλημα του αχρωματικού αριθμού είναι **NP**-hard για συνεκτικά διμερή μεταθετικά (bipartite permutation) γραφήματα, και άρα το ίδιο ισχύει και για την κλάση των biconvex bipartite γραφημάτων, υπερκλάση των διμερή μεταθετικών (bipartite permutation). Επίσης, στην ίδια εργασία, αποδεικνύεται ότι το πρόβλημα είναι **NP**-hard και για την κλάση των quasi-threshold γραφημάτων. Επιπλέον αυτών των αποτελεσμάτων, δίνεται ένας γραμμικού χρόνου αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος για την κλάση των κατωφλικών (threshold) γραφημάτων, διαχωρίζοντας έτσι τις δύο κλάσεις των κατωφλικών (threshold) και των quasi-threshold γραφημάτων, ως προς την πολυπλοκότητά τους. Η **NP**-πληρότητα του προβλήματος για την κλάση των quasi-threshold γραφημάτων έχει ως συνέπεια την αυτόματη απόδειξη του αποτελέσματος για τις υπερκλάσεις των quasi-threshold γραφημάτων, δηλαδή των τριγωνικών (chordal) και των γραφημάτων διαστημάτων (interval).

Το Σχήμα 5.1 αναπαριστά τις παραπάνω διαπιστώσεις. Το διακεκομμένο τετράγωνο αντιστοιχεί στις κλάσεις εκείνες όπου το πρόβλημα ανήκει στην κλάση **P**, ενώ η έλλειψη αντιστοιχεί στις κλάσεις όπου το πρόβλημα παραμένει **NP**-πλήρες. Για την κλάση των διαχωρίσιμων (split) γραφημάτων, το πρόβλημα εύρεσης του Αχρωματικού Αριθμού είναι ανοιχτό. Στη συνέχεια, αποδεικνύεται ότι ο Αχρωματικός Αριθμός είναι **NP**-πλήρης για γραφήματα που είναι ταυτόχρονα συμπληρωματικά παραγόμενα (cographs) και γράφημα διαστημάτων (interval).

## 5.3 Αποτελέσματα NP-πληρότητας

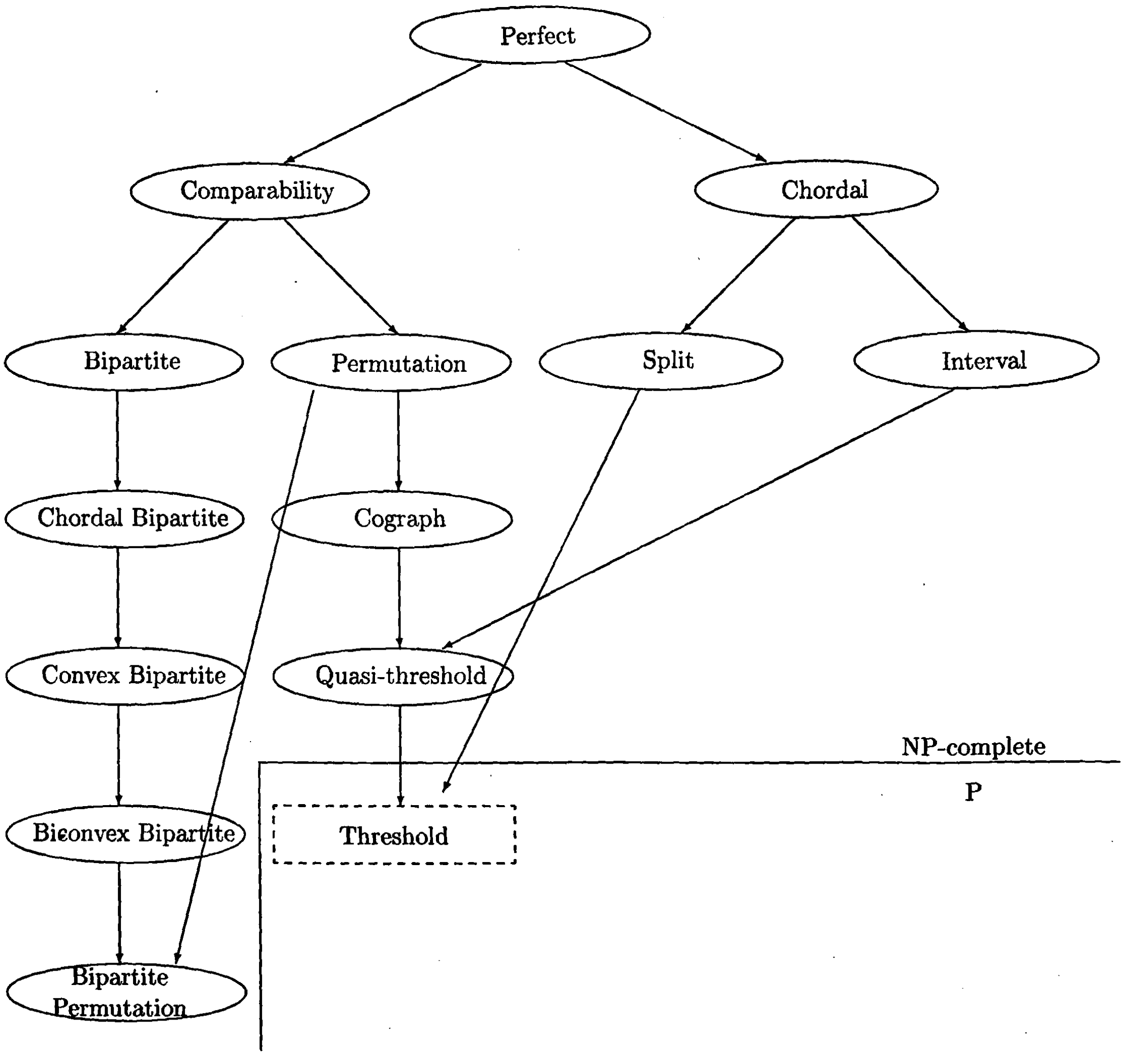
Πρώτα, θα αποδειχθεί ότι το πρόβλημα εύρεσης του Αχρωματικού Αριθμού είναι **NP**-πλήρες για τα μη συνεκτικά γραφήματα που είναι ταυτόχρονα συμπληρωματικά παραγόμενα (cographs) και γραφήματα διαστημάτων (interval), ενώ στη συνέχεια θα δοθεί ένας εύκολος μετασχηματισμός και για την περίπτωση των συνεκτικών γραφημάτων [10].

**Θεώρημα 5.1.** *Το πρόβλημα εύρεσης του Αχρωματικού Αριθμού είναι* **NP***-πλήρες για τα μη συνεκτικά γραφήματα που είναι ταυτόχρονα γράφημα διαστημάτων (interval) και συμπληρωματικά παραγόμενο (cograph) γράφημα.*

**Απόδειξη**: Το πρόβλημα εύρεσης του Αχρωματικού Αριθμού ανήκει στην κλάση **NP**. Για να αποδειχθεί ότι είναι **NP**-*hard*, θα χρησιμοποιηθεί ένας μετασχηματισμός από το πρόβλημα 3-PARTITION.

Έστω ένα σύνολο $A = \{a_1, \ldots, a_{3m}\}$ με $3m$ στοιχεία, ένας θετικός ακέραιος $B$ και θετικοί ακέραιοι μεγέθους $s(a_i)$ για κάθε $a_i \in A$ τέτοια ώστε να ισχύει $\frac{1}{4}B < s(a_i) < \frac{1}{2}B$, και $\sum_{a_i \in A} s(a_i) = mB$, $1 \leq i \leq 3m$. Υποθέτουμε επίσης ότι, για κάθε $a_i \in A$, ισχύει $s(a_i) > m$ (εάν όχι, τότε μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε όλα τα μεγέθη $s(a_i)$ και $B$ με το $m+1$).

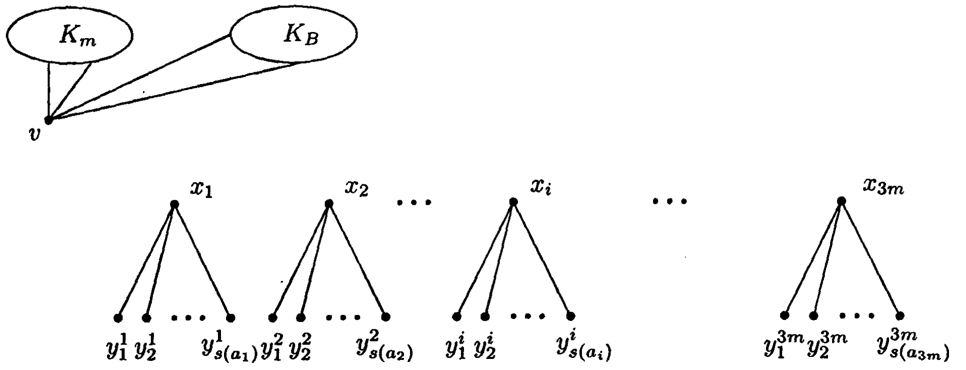
Ακολουθεί η περιγραφή κατασκευής ενός μη συνεκτικού γραφήματος, το οποίο είναι ταυτόχρονα γράφημα διαστημάτων (interval) και συμπληρωματικά παραγόμενο (cograph) γράφημα: Έστω μία κλίκα με




Σχήμα 5.1: Η Πολυπλοκότητα του Προβλήματος Εύρεσης του Αχρωματικού Αριθμού για Συνδεδεμένα Γραφήματα που ανήκουν σε Κλάσεις Τέλειων Γραφημάτων.

$m$ κόμβους, μία κλίκα με $B$ κόμβους και ένας κόμβος $v$, ο οποίος συνδέεται με όλους τους κόμβους των δύο κλικών. Στη συνέχεια, για κάθε $a_i \in A$ κατασκευάζεται ένα δέντρο $T_i$ βάθους ένα, με $s(a_i)$ φύλλα και με ονομασίες φύλλων $y_1^i, y_2^i, \ldots, y_{s(a_i)}^i$. Κάθε δέντρο έχει για ρίζα το $x_i$ και κάθε φύλλο συνδέεται με τη ρίζα. Έτσι, υπάρχουν $3m$ τέτοια δέντρα, τα $T_1, T_2, \ldots, T_{3m}$. Έστω $G$ το γράφημα που προκύπτει, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.2.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι το γράφημα $G$ είναι ταυτόχρονα γράφημα διαστημάτων (interval) και συμπληρωματικά παραγόμενο (cograph) γράφημα. Προφανώς, το γράφημα $G$ δεν περιέχει ένα μονοπάτι με τέσσερις κόμβους σαν επαγόμενο υπογράφημα, επομένως το γράφημα $G$ είναι ένα συμπληρωματικά παραγόμενο (cograph) γράφημα. Ένα δέντρο βάθους ένα, μπορεί να αναπαρασταθεί σαν ένα γράφημα διαστημάτων (interval), αντιστοιχίζοντας κάθε ένα φύλλο με ένα μικρό διάστημα, χωρίς να τέμνονται τα




Σχήμα 5.2: Ένα Γράφημα που είναι Ταυτόχρονα Συμπληρωματικά Παραγόμενο (Cograph) και Γράφημα Διαστημάτων (Interval).

αντίστοιχα διαστήματα σε κάποιο σημείο, και κάθε ρίζα του δέντρου με ένα μεγαλύτερο διάστημα, το οποίο θα περιλαμβάνει όλα τα διαστήματα που αντιστοιχούν στα φύλλα της ρίζας. Μία κλίκα μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα πλήθος διαστημάτων, τα οποία ανά δύο μοιράζονται τουλάχιστον ένα κοινό σημείο. Από την ένωση γραφημάτων διαστημάτων (interval) προκύπτει γράφημα, το οποίο είναι γράφημα διαστημάτων (interval).

Στη συνέχεια αποδεικνύεται ότι ο αχρωματικός αριθμός του γραφήματος $G$ είναι ($\geqslant$) $m + B + 1$, εάν και μόνο εάν το σύνολο $A$ μπορεί να διαμεριστεί σε $m$ σύνολα $A_1, \dots, A_m$, τέτοια ώστε να ισχύει $\forall j$: $\sum_{a \in A_j} s(a) = B$.

Το συνολικό πλήθος ακμών στο γράφημα $G$ είναι:

$$\binom{m}{2} + \binom{B}{2} + m + B + \sum_{i=1}^{3m} s(a_i) = \binom{m+B+1}{2}$$

Για κάθε σωστό χρωματισμό του γραφήματος $G$ και κάθε ζεύγος διαφορετικών χρωμάτων $i, j, i \neq j$, πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον μία ακμή με τα άκρα της να έχουν τα χρώματα $i, j$. Έτσι, προκύπτει ότι ο αχρωματικός αριθμός του γραφήματος $G$ δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος από $m + B + 1$, και αν είναι ίσος με $m + B + 1$, τότε για κάθε σωστό χρωματισμό που χρησιμοποιεί $m + B + 1$ χρώματα, υπάρχει για κάθε ζεύγος διαφορετικών χρωμάτων $i, j \in \{1, \dots, m + B + 1\}, i \neq j$, μία μοναδική ακμή με τα άκρα της να έχουν τα χρώματα $i$ και $j$.

Έστω μία διαμέριση του συνόλου $A$ σε $m$ σύνολα $A_1, \dots, A_m$, τέτοια ώστε να ισχύει $\forall j$: $\sum_{a \in A_j} s(a) = B$. Θα δειχθεί πως προκύπτει ένας σωστός χρωματισμός του γραφήματος $G$, χρησιμοποιώντας $m + B + 1$ χρώματα. Οι κόμβοι της πρώτης κλίκας παίρνουν τα χρώματα από το σύνολο $\{1, \dots, m\}$, οι κόμβοι της δεύτερης κλίκας παίρνουν τα χρώματα από το σύνολο $\{m+1, \dots, m+B\}$, και ο κόμβος $v$ χρωματίζεται με το χρώμα $m+B+1$. Εάν $a_i \in A_j$, τότε η ρίζα του $i$-οστού δέντρου που έχει $s(a_i)$ φύλλα, παίρνει το χρώμα $j$. Κάθε χρώμα $j \in \{1, \dots, m\}$ αντιστοιχίζεται στη ρίζα τριών δέντρων που έχουν όλα μαζί ακριβώς $B$ φύλλα. Κάθε ένα από αυτά τα $B$ φύλλα παίρνει ένα διαφορετικό χρώμα από το σύνολο $\{m+1, \dots, m+B\}$. Έτσι, προκύπτει ένας σωστός χρωματισμός του γραφήματος $G$ με $m+B+1$ χρώματα, επομένως ο αχρωματικός αριθμός του γραφήματος $G$ είναι $m + B + 1$.

Έστω, ότι ο αχρωματικός αριθμός του γραφήματος $G$ είναι ($\geqslant$) $m + B + 1$, επομένως θα υπάρχει ένας σωστός χρωματισμός του γραφήματος $G$ με $m+B+1$ χρώματα. Χωρίς τον περιορισμό της γενικότητας, θεωρούμε ότι ο κόμβος $v$ χρωματίζεται με το χρώμα $m+B+1$. Επειδή, ο κόμβος $v$ γειτονεύει με άλλους $m+B$ κόμβους, κανένας άλλος κόμβος στο γράφημα $G$ δεν παίρνει το χρώμα $m+B+1$. Επίσης, όλοι οι κόμβοι που γειτονεύουν με τον κόμβο $v$, πρέπει να έχουν διαφορετικό χρώμα από τον κόμβο $v$. 'Ετσι, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι κόμβοι της πρώτης κλίκας χρωματίζονται με τα χρώματα από το σύνολο $\{1,\ldots,m\}$, και οι κόμβοι της δεύτερης κλίκας παίρνουν τα χρώματα από το σύνολο $\{m+1,\ldots,m+B\}$. 'Οσον αφορά στα στοιχεία $a_i \in A_j, s(a_i) > m$, δεν μπορεί να χρωματιστεί η ρίζα ενός δέντρου με κάποιο χρώμα από το σύνολο $\{m+1,\ldots,m+B\}$. Αν γινότανε αυτό, κόμβοι με αυτό το χρώμα θα γειτονεύανε με περισσότερους από $m+B$ κόμβους, με αποτέλεσμα περισσότερες από δύο ακμές να έχουν τα ίδια χρώματα στα άκρα τους.

'Εστω ότι $a_i \in A_j$ εάν και μόνο εάν η ρίζα του $i$-οστού δέντρου (με $s(a_i)$ φύλλα) χρωματίζεται με το χρώμα $j$. Ισχύει ότι $\forall j$: $\sum_{a\in A_j} s(a) = B$: κάθε χρώμα $j$ πρέπει να γειτνιάζει με τα χρώματα από το σύνολο $\{m+1,\ldots,m+B\}$, που αντιστοιχούν στις ακμές των δέντρων, και κάθε ένα από αυτά τα $B$ χρώματα πρέπει να αντιστοιχεί σε ακριβώς ένα παιδί της ρίζας ενός δέντρου, η οποία χρωματίζεται με το χρώμα $j$. 'Ετσι, υπάρχει μία σωστή 3-διαμέριση.

Η ισχύς του θεωρήματος προκύπτει από την **NP**-πληρότητα του 3-PARTITION, αφού ο μετασχηματισμός μπορεί να γίνει εύκολα σε πολυωνυμικό χρόνο. □

**Θεώρημα 5.2.** *Το πρόβλημα του Αχρωματικού Αριθμού είναι* **NP***-πλήρες για τα συνεκτικά γραφήματα που είναι ταυτόχρονα γράφημα διαστημάτων (interval) και συμπληρωματικά παραγόμενο (cograph) γράφημα.*

**Απόδειξη:** Ο μετασχηματισμός θα προκύψει από το προηγούμενο θεώρημα, που περιλαμβάνει τα μη συνεκτικά γραφήματα. 'Εστω ένα γράφημα $G=(V,E)$, το οποίο είναι ταυτόχρονα ένα γράφημα διαστημάτων (interval) και ένα συμπληρωματικά παραγόμενο (cograph) γράφημα, και το οποίο έχει αχρωματικό αριθμό ίσο με $K$. 'Εστω $G^*$ το γράφημα το οποίο προκύπτει από την προσθήκη του κόμβου $v_0$ στο γράφημα $G$, και ο οποίος συνδέεται με όλους τους άλλους κόμβους του γραφήματος $G$. Το γράφημα $G^*$ που προκύπτει, είναι ένα γράφημα διαστημάτων (interval), γιατί ο κόμβος $v_0$ αντιστοιχεί σε ένα διάστημα που περιλαμβάνει όλα τα άλλα διαστήματα. Επιπλέον, το γράφημα $G^*$ είναι ένα συμπληρωματικά παραγόμενο (cograph) γράφημα, επειδή το γράφημα $G$ δεν περιέχει $P_4$ σαν επαγόμενο υπογράφημα και κανένα επαγόμενο υπογράφημα του γραφήματος $G^*$ που περιλαμβάνει τον κόμβο $v_0$ δεν μπορεί να είναι ισομορφικό με το $P_4$, αφού ο κόμβος $v_0$ πρέπει να γειτονεύει με καθέναν από τους άλλους τρεις κόμβους από το επαγόμενο υπογράφημα. Επομένως, το γράφημα $G^*$ είναι συνεκτικό, αφού κάθε κόμβος $\neq v_0$ γειτονεύει με τον κόμβο $v_0$.

Ο αχρωματικός αριθμός του γραφήματος $G^*$ είναι ακριβώς $K+1$. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί ως εξής: ένας σωστός χρωματισμός του γραφήματος $G$ με $K$ χρώματα μπορεί να επεκταθεί σε έναν σωστό χρωματισμό του γραφήματος $G^*$ με $K+1$ χρώματα, αν χρωματιστεί ο κόμβος $v_0$ με το χρώμα $K+1$. 'Ετσι, ο αχρωματικός αριθμός του γραφήματος $G^*$ είναι τουλάχιστον ίσος με $K+1$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας σωστός χρωματισμός $f$ του γραφήματος $G^*$ με $k$ χρώματα. Κανένας κόμβος $\neq v_0$ δεν μπορεί να έχει το ίδιο χρώμα με τον κόμβο $v_0$. 'Εστω $f'$ ο χρωματισμός που προκύπτει αν εφαρμόσουμε το χρωματισμό $f$ στο γράφημα $G$. Ο $f'$ χρωματισμός είναι ένας σωστός χρωματισμός του γραφήματος $G$ χρησιμοποιώντας $k-1$ χρώματα. Συνεπάγεται ότι ο αχρωματικός αριθμός του γραφήματος $G^*$ είναι το πολύ ίσος με $K+1$.

'Οπως φαίνεται από τα παραπάνω, υπάρχει ένας πολυωνυμικού χρόνου μετασχηματισμός από την περίπτωση των μη συνεκτικών γραφημάτων προς την περίπτωση των συνεκτικών γραφημάτων. 'Ετσι, το πρόβλημα του Αχρωματικού Αριθμού είναι **NP**-πλήρες για τα συνεκτικά γραφήματα που είναι ταυτόχρονα γράφημα διαστημάτων (interval) και συμπληρωματικά παραγόμενο (cograph) γράφημα. □

Τα συνεκτικά γραφήματα που είναι ταυτόχρονα γράφημα διαστημάτων (interval) και συμπληρωματικά παραγόμενο (cograph) γράφημα, είναι επίσης quasi-threshold γραφήματα. Αυτό συμβαίνει, γιατί δεν περιέχουν επαγόμενο υπογράφημα ισόμορφο του $P_4$ ή του $C_4$, χαρακτηριστικά που περιγράφουν ένα quasi-threshold γράφημα. Επομένως, επειδή το γράφημα είναι και quasi-threshold, θα ισχύει το επόμενο θεώρημα.

**Θεώρημα 5.3.** *Το πρόβλημα εύρεσης του Αχρωματικού Αριθμού είναι* **NP**-*πλήρες για τα συνεκτικά quasi-threshold γραφήματα.*

Στην εργασία [29] έχει αποδειχθεί ότι εάν $G$ είναι ένα γράφημα το οποίο έχει ακριβώς $\binom{k}{2}$ ακμές, τότε ένας κατάλληλος χρωματισμός των κόμβων του γραφήματος $G$ με $k$ χρώματα είναι αχρωματικός εάν και μόνο εάν το γράφημα $G$ έχει αρμονικό χρωματισμό. Επιπλέον, εάν το γράφημα $G$ έχει $\binom{k}{2}$ ακμές, τότε ισχύει ότι $\psi(G) = k$ εάν και μόνο εάν $h(G) = k$ [15]. Έτσι, ισχύει το ακόλουθο θεωρήμα για το πρόβλημα εύρεσης του Αχρωματικού Αριθμού σύμφωνα με τις αποδείξεις που ισχύουν για το πρόβλημα εύρεσης του Αρμονικού Αριθμού.

**Θεώρημα 5.4.** *[7] Το πρόβλημα εύρεσης του Αχρωματικού Αριθμού είναι* **NP**-*πλήρες για τα συνεκτικά διμερή μεταθετικά (bipartite permutation) γραφήματα.*

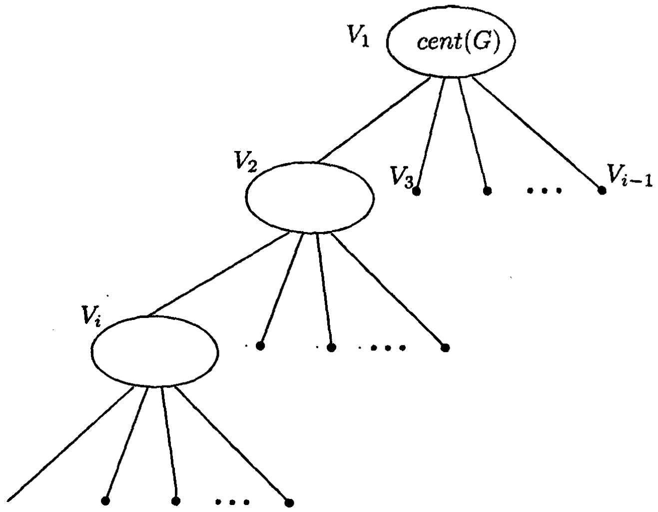
## 5.4 Πολυωνυμική Λύση για το Πρόβλημα του Αχρωματικού Αριθμού στα Κατωφλικά (Threshold) Γραφήματα

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθεί το πρόβλημα εύρεσης του Αχρωματικού Αριθμού για την κλάση των κατωφλικών (threshold) γραφημάτων και θα δοθεί η περιγραφή ενός γραμμικού αλγορίθμου που στηρίζεται στις ιδιότητες της κλάσης των κατωφλικών (threshold) γραφημάτων [7].

Η έννοια των κατωφλικών (threshold) γραφημάτων παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τους Chvátal και Hammer το 1977 [21]. Ένα γράφημα $G$ είναι ένα *κατωφλικό* (threshold) γράφημα [29], εάν και μόνο εάν το γράφημα $G$ δεν περιέχει $2K_2$, $P_4$ ή $C_4$ σαν επαγόμενα υπογραφήματα. Υπάρχει και ένας εναλλακτικός ισοδύναμος ορισμός [34]: Ένα γράφημα είναι κατωφλικό (threshold), εάν υπάρχει μία διαμέριση του συνόλου $V(G)$ σε δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα $K, I$ και μία διάταξη $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ των κόμβων του συνόλου $I$, τέτοια ώστε το σύνολο $K$ να επάγει μία κλίκα στο γράφημα $G$, ενώ το σύνολο $I$ να είναι ένα ευσταθές σύνολο κόμβων και να ισχύει $N_G(u_1) \subseteq N_G(u_2) \subseteq \cdots \subseteq N_G(u_n)$. Η διαμέριση του συνόλου $V(G)$ που ικανοποιεί τον πιο πάνω ορισμό, ονομάζεται $(K, I)$ διαμέριση του γραφήματος $G$.

Η κλάση των κατωφλικών (threshold) γραφημάτων είναι υποκλάση των quasi-threshold γραφημάτων. Ως εκ τούτου, για ένα κατωφλικό (threshold) γράφημα $G$ υπάρχει μια δενδρική αναπαράσταση, το cent-tree $T_c(G)$, η οποία πληροί τις ιδιότητες του γραφήματος $G$. Το $T_c(G)$ είναι παρόμοιο με το cent-tree ενός quasi-threshold γραφήματος. Αφού, ένα κατωφλικό (threshold) γράφημα $G$ δεν περιέχει κάποιο επαγόμενο υπογράφημα ισόμορφο του $2K_2$, κάθε εσωτερικός κόμβος $V_i$ έχει $k_i \geq 2$ παιδιά, όπου το πολύ ένα από αυτά είναι εσωτερικός κόμβος, ενώ τα υπόλοιπα $k_i - 1$ παιδιά είναι φύλλα που περιέχουν μόνο έναν κόμβο, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.3. Το cent-tree $T_c(G)$ ενός κατωφλικού (threshold) γραφήματος $G$ αναπαριστά μια $(K, I)$ διαμέριση του γραφήματος $G$. Ισοδύναμα, δοθέντος μιας $(K, I)$ διαμέρισης του γραφήματος $G$, μπορεί να γίνει η κατασκευή του cent-tree $T_c(G)$.

Το πρόβλημα του Αχρωματικού Αριθμού για την κλάση των κατωφλικών (threshold) γραφημάτων λύνεται σε γραμμικό χρόνο με χρήση του cent-tree $T_c(G)$. Οι κόμβοι $V_i$ του πιο αριστερού μονοπατιού του δέντρου σχηματίζουν μια κλίκα, επομένως κάθε κόμβος $v_i \in V(G)$ που ανήκει σε αυτό το μονοπάτι πρέπει να έχει ένα διαφορετικό χρώμα. Εάν $n'$ είναι το πλήθος των κόμβων του γραφήματος $G$ που ανήκουν στο πιο αριστερό μονοπάτι του $T_c(G)$, τότε οι κόμβοι του γραφήματος $G$ παίρνουν χρώματα από το σύνολο




Σχήμα 5.3: Η Δενδρική Αναπαράσταση του Cent-Tree $T_c(G)$ ενός Κατωφλικού (Threshold) Γραφήματος.

$C = \{1, 2, \ldots, n'\}$ και ο αχρωματικός αριθμός $\psi(G)$ είναι $\psi(G) = n'$. Πράγματι, έστω $C' \subset C$ το σύνολο των χρωμάτων που αποδίδονται στο πιο αριστερό φύλλο του $T_c(G)$ και έστω $c'_i \in C'$. Εάν δοθεί ένα καινούριο χρώμα, έστω $n'+1$, σε έναν κόμβο του $T_c(G)$ που δεν έχει χρωματιστεί ακόμη, τότε το ζεύγος $(n'+1, c'_i)$ δεν μπορεί να εμφανιστεί. Επομένως, χρησιμοποιείται το σύνολο $C$ για να δοθούν χρώματα στα φύλλα του $T_c(G)$ που δεν έχουν χρωματιστεί, με τέτοιο τρόπο ώστε κανένας κόμβος $v_i \in V(G)$ να μην παίρνει χρώμα που έχει ήδη αποδοθεί σε κάποιον πρόγονό του που ανήκει στο πιο αριστερό μονοπάτι.

Αξίζει να σημειωθεί ότι εάν $n'$ είναι το πλήθος των κόμβων του γραφήματος $G$ που ανήκουν στο πιο αριστερό μονοπάτι του $T_c(G)$, τότε το $n'$ ισούται με τον αριθμό της μέγιστης κλίκας $\omega(G)$, δηλαδή ισχύει $\psi(G) = \omega(G)$. Από τις ιδιότητες του cent-tree $T_c(G)$ αποδεικνύεται ότι ο αριθμός της μέγιστης κλίκας ισούται με τον χρωματικό αριθμό $\chi(G)$ του γραφήματος $G$, δηλαδή ισχύει $\chi(G) = \omega(G)$. Ακολουθεί ο γραμμικός αλγόριθμος, ο οποίος ισχύει για συνεκτικά και μη συνεκτικά κατωφλικά (threshold) γραφήματα.

**Υπολογισμός του Αχρωματικού Αριθμού στα Κατωφλικά (Threshold) Γραφήματα**

**Είσοδος:** Ένα κατωφλικό (threshold) γράφημα G.

**Έξοδος:** Ένας αχρωματικός χρωματισμός του γραφήματος G με $\psi(G) = \omega(G)$.

1. Κατασκευή του cent-tree $T_c(G)$ του γραφήματος $G$.

2. Χρωματισμός των κόμβων του πιο αριστερού μονοπατιού (κλίκας) του $T_c(G)$ με διαφορετικά χρώματα από το σύνολο $C = \{1, 2, \ldots, \psi(G)\}$.

3. Χρωματισμός κάθε κόμβου που είναι φύλλο στο $T_c(G)$ χρησιμοποιώντας ένα χρώμα που έχει ήδη αποδοθεί στον κόμβο αδερφό που ανήκει στο πιο αριστερό μονοπάτι του $T_c(G)$ και περιέχει μία κλίκα.

4. Εάν υπάρχουν απομονωμένοι κόμβοι, τότε αυτοί χρωματίζονται χρησιμοποιώντας ένα χρώμα από το σύνολο $C$.

Το τέταρτο βήμα του αλγορίθμου εφαρμόζεται όταν το γράφημα είναι μη συνεκτικό. Αυτό ισχύει, γιατί το μη συνεκτικό κατωφλικό (threshold) γράφημα περιέχει μόνο μια συνεκτική συνιστώσα με περισσότερους από έναν κόμβους. Κάθε μία όμως από τις υπόλοιπες συνεκτικές συνιστώσες περιέχει μόνο έναν κόμβο, διαφορετικά θα υπήρχε ένα υπογράφημα ισόμορφο του $2K_2$. Γι' αυτό, οι απομονωμένοι κόμβοι μπορούν να χρωματιστούν με ένα χρώμα που έχει ήδη χρησιμοποιηθεί. Σαν αποτέλεσμα του προηγούμενου αλγορίθμου προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 5.5.** *Έστω $G$ ένα κατωφλικό (threshold) γράφημα. Το πρόβλημα του αχρωματικού χρωματισμού επιλύεται σε γραμμικό χρόνο για το γράφημα $G$ και ο αχρωματικός αριθμός είναι ίσος με τον αριθμό κλίκας, δηλαδή ισχύει $\psi(G) = \omega(G)$.*

Κεφαλαιο 6

# Μεγιστο Συνολο Κοπης



## 6.1 Στόχος

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε την πολυπλοκότητα του προβλήματος εύρεσης του Μέγιστου Συνόλου Κοπής για τις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων του ενδιαφέροντός μας. Συγκεκριμένα, μάς ενδιαφέρει να βρούμε το όριο στο οποίο το πρόβλημα αυτό μετατρέπεται από πολυωνυμικά επιλύσιμο σε μη πολυωνυμικά επιλύσιμο.

## 6.2 Μέγιστο Σύνολο Κοπής

Το πρόβλημα εύρεσης του Μέγιστου Συνόλου Κοπής (MaxCut) είναι το πρόβλημα όπου δίνεται ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ και συνάρτηση βαρών στις ακμές $w : E \to \mathbb{Z}^+$ και ένας θετικός ακέραιος $K$ και ζητείται το κατά πόσον υπάρχει διαμέριση του συνόλου των κόμβων $V$ σε δύο σύνολα $V_1, V_2$ τέτοια ώστε το άθροισμα των βαρών των ακμών που έχουν το ένα άκρο τους στο σύνολο $V_1$ και το άλλο άκρο τους στο σύνολο $V_2$ να είναι *τουλάχιστον* $K$. Το πρόβλημα του Απλού Μεγίστου Συνόλου Κοπής (Simple MaxCut) είναι μια παραλλαγή του προβλήματος Μεγίστου Συνόλου Κοπής, όταν όλα τα βάρη είναι 1, δηλαδή όταν ουσιαστικά το γράφημα δεν έχει βάρη, και ζητείται μια διαμέριση του συνόλου των κόμβων $V$ σε δύο σύνολα $V_1, V_2$ τέτοια ώστε το *πλήθος* των ακμών που έχουν το ένα άκρο τους στο σύνολο $V_1$ και το άλλο άκρο τους στο σύνολο $V_2$ να είναι τουλάχιστον $K$. Και τα δύο προβλήματα, στην γενική τους περίπτωση, είναι NP-πλήρη [52, 39].

Το πρόβλημα του Απλού Μεγίστου Συνόλου Κοπής (SIMPLE MAXCUT) έχει μελετηθεί για αρκετές κλάσεις τέλειων γραφημάτων ως προς την πολυπλοκότητά του. Οι Bodlaender και Jansen [11], μελετούν το πρόβλημα για πολλές κλάσεις τέλειων γραφημάτων. Συγκεκριμένα, αποδεικνύουν ότι το πρόβλημα παραμένει **NP**-πλήρες για τα τριγωνικά (chordal) γραφήματα με αναγωγή του MAX 2-SAT. Επίσης, αποδεικνύεται η **NP**-πληρότητα του προβλήματος για τα διαχωρίσιμα (split) γραφήματα με αναγωγή του αρχικού (SIMPLE MAXCUT). 'Οσον αφορά τα διμερή (bipartite) γραφήματα, το πρόβλημα λύνεται πολυωνυμικά (με τετριμμένο τρόπο) για την κλάση των διμερών (bipartite) γραφημάτων, όμως παραμένει **NP**-πλήρες για τα *τριμερή* (tripartite) γραφήματα και για το συμπλήρωμα διμερούς γραφήματος (co-bipartite) [11]. Αντίθετα, οι Grötschel και Pulleyblank [41], αποδεικνύουν ότι το πρόβλημα εύρεσης του Απλού Μεγίστου Συνόλου Κοπής (SIMPLE MAXCUT) λύνεται πολυωνυμικά για την κλάση των *ασθενά διμερών γραφημάτων* (weakly bipartite) χρησιμοποιώντας τεχνικές γραμμικού προγραμματισμού και συγκεκριμένα τον *ελλειψοειδή αλγόριθμο*. Αξίζει να αναφερθεί ότι δεν δίνεται συγκεκριμένος αλγόριθμος για το πρόβλημα, αλλά αποδεικνύεται ότι η συγκεκριμένη μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώστε να λυθεί πολυωνυμικά το πρόβλημα για τα ασθενά διμερή (weakly bipartite) γραφήματα, τα οποία περιέχουν τα διμερή (bipartite) γραφήματα, άρα αυτή η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την επίλυση του προβλήματος στα διμερή (bipartite) γραφήματα σε πολυωνυμικό χρόνο (αν και αρκετά μεγάλου βαθμού, λόγω της πολυπλοκότητας και των ιδιαιτεροτήτων του ελλειψοειδούς αλγορίθμου). Επίσης, υπάρχει τετραγωνικός αλγόριθμος $\mathcal{O}(n^2)$για το πρόβλημα, όταν αυτό αναφέρεται σε συμπληρωματικά παραγόμενα (cographs) γραφήματα [9].

Συμπληρωματικά, και σχετικά με την πολυπλοκότητα του προβλήματος (MAXCUT), αυτό παραμένει **NP**-πλήρες για όλες τις κλάσεις γραφημάτων που περιέχουν όλες τις κλίκες (τα πλήρη γραφήματα), όπως είναι η κλάση των συμπληρωματικά παραγόμενων (cographs) γραφημάτων, και με βάρη που ανήκουν στο σύνολο $\{1,2\}$ [9].

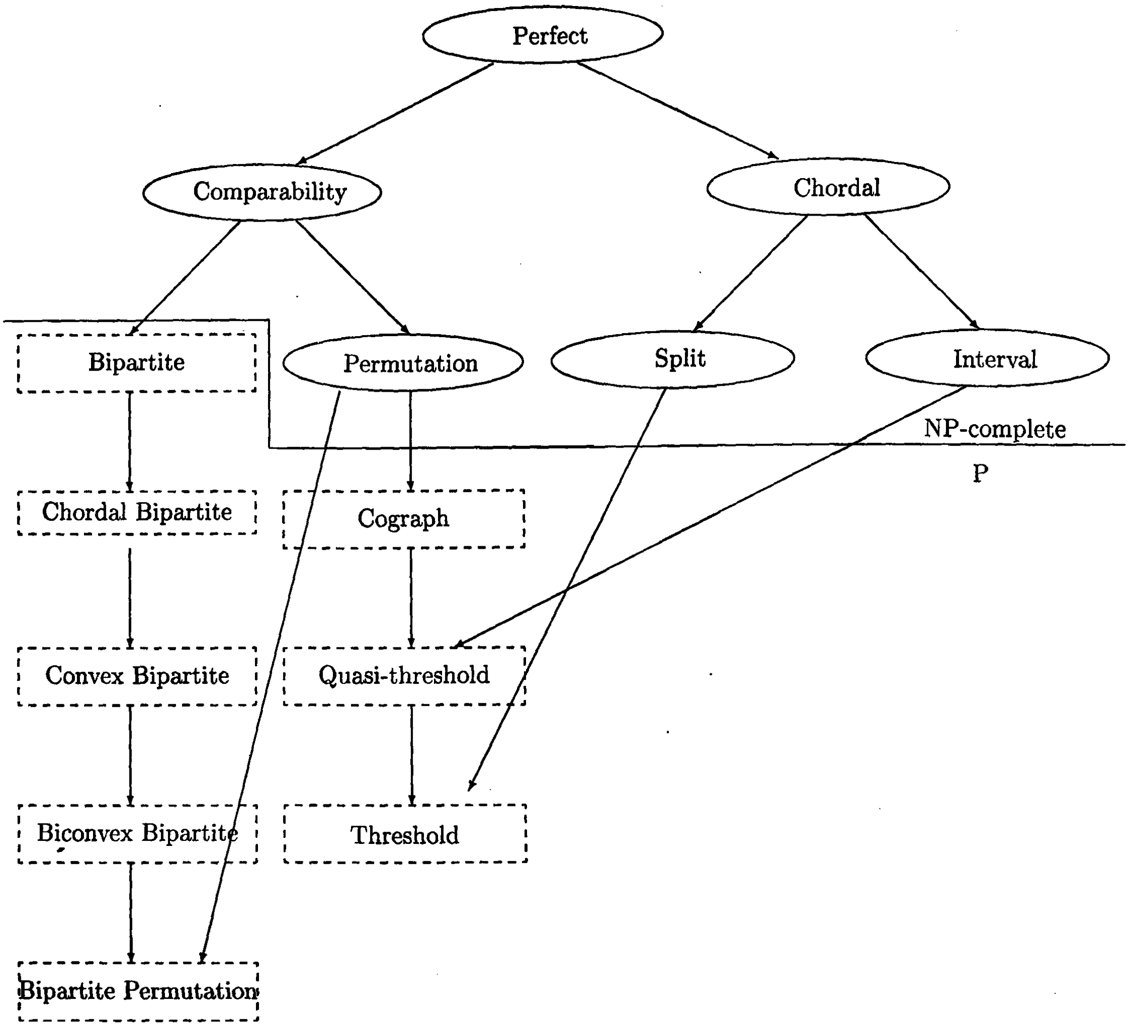
Το Σχήμα 6.1 αναπαριστά τις παραπάνω διαπιστώσεις. Το διακεκομμένο τετράγωνο αντιστοιχεί στις κλάσεις εκείνες όπου το εκάστοτε πρόβλημα ανήκει στην κλάση **P**, ενώ η έλλειψη αντιστοιχεί στις κλάσεις όπου το πρόβλημα παραμένει **NP**-πλήρες.

## 6.3 Αποτελέσματα NP-πληρότητας

Πρώτα θα αποδειχθεί ότι το πρόβλημα εύρεσης του Απλού Μέγιστου Συνόλου Κοπής είναι **NP**-πλήρες για τα διαχωρίσιμα (split) γραφήματα. 'Ενα γράφημα $G = (V, E)$ είναι ένα διαχωρίσιμο (split) γράφημα, εάν και μόνο εάν υπάρχει μια διαμέριση των κόμβων $V$ του γραφήματος $G$ σε μια κλίκα $K$ και σε ένα ανεξάρτητο σύνολο $I$. Επίσης, ένα γράφημα $G$ είναι διαχωρίσιμο (split) γράφημα αν και μόνο αν το γράφημα $G$ και το συμπλήρωμα $\bar{G}$ να είναι τριγωνικά (chordal) γραφήματα. Θα ασχοληθούμε με μία υποκλάση των διαχωρίσιμων (split) γραφημάτων, στην οποία κάθε κόμβος από το ανεξάρτητο σύνολο $I$ των διαχωρίσιμων (split) γραφημάτων γειτονεύει με ακριβώς δύο κόμβους από την κλίκα $K$. Τα γραφήματα αυτά ονομάζονται δύο-διαχωρίσιμα (2-split) γραφήματα.

**Θεώρημα 6.1.** [11] *Το* SIMPLE MAXCUT *είναι* **NP**-*πλήρες για τα δύο-διαχωρίσιμα (2-split) γραφήματα.*

**Απόδειξη**: Θα χρησιμοποιηθεί ένας μετασχηματισμός από το SIMPLE MAX CUT πρόβλημα. 'Εστω, ότι δίνεται ένα γράφημα $G = (V, E)$ και $\bar{G} = (V, \bar{E})$ το συμπλήρωμα του γραφήματος $G$. 'Εστω $H = (V \cup \bar{E}, F)$ το γράφημα, όπου $F = \{(v, w) | v, w \in V, v \neq w\} \cup \{(v, e) | v \in V, e \in \bar{E}, v \text{ is an endpoint of edge e } \}$. Με λίγα λόγια, αντιστοιχούμε έναν κόμβο στο γράφημα $H$ με κάθε κόμβο από το γράφημα $G$ και κάθε ακμή από το συμπλήρωμα του γραφήματος $G$. Το σύνολο $V$ σχηματίζει μία κλίκα, το σύνολο $\bar{E}$ αποτελεί ένα ανεξάρτητο σύνολο στο γράφημα $H$. Κάθε ακμή που αναπαριστά έναν κόμβο συνδέεται με τους κόμβους, που αναπαριστούν τα άκρα της.




Σχήμα 6.1: Η Πολυπλοκότητα του Προβλήματος Εύρεσης του Απλού Μέγιστου Συνόλου Κοπής για Συνδεδεμένα Γραφήματα που ανήκουν σε Κλάσεις Τέλειων Γραφημάτων.

Ισχυριζόμαστε ότι το γράφημα $G$ επιτρέπει μία διαμέριση με τουλάχιστον $k$ ακμές κοπής, εάν και μόνο εάν το γράφημα $H$ επιτρέπει μία διαμέριση με τουλάχιστον $2 \cdot |\bar{E}| + k$ ακμές κοπής.

Έστω ότι υπάρχει μία διαμέριση $W_1, W_2$ του γραφήματος $G$ με τουλάχιστον $k$ ακμές κοπής. Θα γίνει η διαμέριση των κόμβων του γραφήματος $H$ ως εξής: το σύνολο $V$ θα διαμεριστεί όπως διαμερίστηκε στο γράφημα $G$, ενώ για κάθε $e \in \bar{E}$ εάν και τα δύο άκρα της ακμής $e$ ανήκουν στη διαμέριση $W_1$, τότε η ακμή $e$ τοποθετείται στη διαμέριση $W_2$, διαφορετικά η ακμή $e$ τοποθετείται στη διαμέριση $W_1$. Έτσι το πλήθος των επιθυμητών ακμών κοπής είναι $2 \cdot |\bar{E}| + k$.

Τώρα έστω ότι υπάρχει μία διαμέριση του γραφήματος $H$ στα σύνολα $W_1, W_2$, με τουλάχιστον $2 \cdot |\bar{E}| + k$ ακμές κοπής. Διαμερίζουμε τους κόμβους του γραφήματος $G$ στα σύνολα $W_1 \cap V$, $W_2 \cap V$. Αυτή η διαμέριση δίνει το επιθυμητό πλήθος ακμών κοπής. Αυτό μπορεί να εξακριβωθεί ως εξής: για κάθε ακμή $(v, w) \in E$ υπάρχει μία ακμή κοπής στο γράφημα $H$ εάν η ακμή $(v, w)$ είναι μία ακμή κοπής στο γράφημα

$G$, διαφορετικά δεν υπάρχουν ακμές κοπής. Για κάθε ακμή $e = (v, w) \in \bar{E}$, ισχύει ότι από τις τρεις ακμές $(v, w), (e, v)$ και $(e, w)$ το πολύ δύο μπορούν να είναι μία ακμή κοπής. Έτσι, το πλήθος των ακμών κοπής στο γράφημα $G$ είναι τουλάχιστον το πλήθος των ακμών κοπής στο γράφημα $H$ μείον $2 \cdot |\bar{E}|$.

Το θεώρημα τώρα ισχύει, επειδή το γράφημα $H$ μπορεί να κατασκευαστεί από το γράφημα $G$ σε πολυωνυμικό χρόνο.

Επειδή, τα δύο-διαχωρίσιμα (2-split) γραφήματα αποτελούν υποκλάση των διαχωρίσιμων (split) γραφημάτων, ισχύει το επόμενο θεώρημα:

**Θεώρημα 6.2.** *Το* SIMPLE MAXCUT *είναι* **NP**-*πλήρες για τα διαχωρίσιμα (split) γραφήματα.*

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.5, εάν ένα γράφημα $G$ είναι ένα διαχωρίσιμο (split) γράφημα, τότε το γράφημα $G$ είναι και μεταβατικό (comparability) γράφημα, εάν και μόνο εάν το $G$ δεν περιέχει υπογράφημα ισομορφικό των τριών γραφημάτων που φαίνονται στο Σχήμα 2.3. Επομένως, θα ισχύει για τα μεταβατικά (comparability) γραφήματα ό,τι ισχύει και για τα διαχωρίσιμα (split) γραφήματα. Έτσι, θα ισχύει και το ακόλουθο θεώρημα:

**Θεώρημα 6.3.** *Το* SIMPLE MAXCUT *είναι* **NP**-*πλήρες για τα μεταβατικά (comparability) γραφήματα.*

## 6.4 Πολυωνυμική Λύση για το Simple MaxCut στα Συμπληρωματικά Παραγόμενα (Cographs) Γραφήματα

Στην ενότητα αυτή, θα δοθεί η περιγραφή ενός τετραγωνικού αλγορίθμου που στηρίζεται στις ιδιότητες της κλάσης των συμπληρωματικών παραγόμενων (cographs) γραφημάτων και στο cotree.

Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος δέχεται σαν είσοδο ένα συμπληρωματικά παραγόμενο (cograph) γράφημα $G = (V, E)$ και αρχικά υπολογίζει το cotree του γραφήματος $G$. Στη συνέχεια, για κάθε κόμβο του cotree υπολογίζεται ένας πίνακας, ο οποίος ονομάζεται $maxc_H$, όπου $H$ το συμπληρωματικά παραγόμενο (cograph) γράφημα, που αντιστοιχεί στον κόμβο αυτό. Αυτοί οι πίνακες υπολογίζονται από κάτω προς τα πάνω για το cotree. Πρώτα υπολογίζονται όλοι οι πίνακες για τους κόμβους που είναι φύλλα και ο πίνακας για έναν εσωτερικό κόμβο υπολογίζεται αφού πρώτα έχουν υπολογιστεί οι πίνακες των δύο παιδιών του.

Έστω $G = (V', E')$ ένα συμπληρωματικά παραγόμενο (cograph) γράφημα. Ο πίνακας $maxc_H$ έχει θέσεις για όλους τους ακεραίους $i, 0 \leq i \leq |V'|$, οι οποίοι δηλώνουν το μέγιστο μέγεθος μιας διαμέρισης του γραφήματος $H$ σε ένα σύνολο μεγέθους $i$ και σε ένα σύνολο μεγέθους $|V'| - i$, δηλαδή ισχύει το εξής:

$$maxc_H(i) = max\{|\{(v, w)|v \in W_1, w \in W_2\}||W_1 \cup W_2 = V', W_1 \cap W_2 = \emptyset, |W_1| = i\}$$

Τελικά, προκύπτει ότι η μέγιστη διαμέριση του γραφήματος $G$ είναι η $max_{0 \leq i \leq |V|} maxc_G(i)$, γι' αυτό όταν έχουμε υπολογίσει τον πίνακα $maxc_G$, δηλαδή τον πίνακα της ρίζας του cotree, τότε γνωρίζουμε το μέγεθος της μέγιστης διαμέρισης. Οι πίνακες μπορούν να υπολογιστούν εύκολα, ξεκινώντας με τους πίνακες των φύλλων, έτσι ώστε όταν θέλουμε να υπολογίσουμε τον πίνακα ενός εσωτερικού κόμβου οι πίνακες των παιδιών του να έχουν ήδη υπολογιστεί.

Οι πίνακες που συσχετίζονται με τους κόμβους που είναι φύλλα είναι της μορφής $maxc_H(0) = 0$, $maxc_H(1) = 0$.

Το ακόλουθο λήμμα δείχνει πως μπορεί να υπολογιστεί ένας πίνακας $maxc_{G_1 \cup G_2}$ ή ένας πίνακας $maxc_{G_1 \times G_2}$, αφού πρώτα έχουν υπολογιστεί οι πίνακες $maxc_{G_1}$ και $maxc_{G_2}$.

**Λήμμα 6.1.** *Έστω $G_1 = (V_1, E_1)$ και $G_2 = (V_2, E_2)$ δύο γραφήματα, με $V_1$ και $V_2$ δύο μη συνεχτικά σύνολα. Τότε:*

(i) $maxc_{G_1 \cup G_2}(i) = max\{maxc_{G_1}(j) + maxc_{G_2}(i-j) | 0 \leq j \leq i, j \leq |V_1|, i-j \leq |V_2|\}$.

(ii) $maxc_{G_1 \times G_2}(i) = max\{maxc_{G_1}(j) + maxc_{G_2}(i-j) + j \cdot (|V_2| - (i-j)) + (|V_1| - j) \cdot (i-j) | 0 \leq j \leq i, j \leq |V_1|, i-j \leq |V_2|\}$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι οι πίνακες $maxc_{G_1 \cup G_2}$ και $maxc_{G_1 \times G_2}$ μπορούν να υπολογιστούν σε χρόνο $\mathcal{O}(|V_1| \cdot |V_2|)$. Έτσι, προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα:

**Θεώρημα 6.4.** *Υπάρχει ένας $\mathcal{O}(n^2)$ αλγόριθμος για το* Simple MaxCut *στα Συμπληρωματικά Παραγόμενα (Cographs) Γραφήματα.*

# Κεφαλαιο 7

# Μονοπατι Hamilton και Επικαλυψη με Μονοπατια



## 7.1 Στόχος

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την πολυπλοκότητα του προβλήματος εύρεσης μονοπατιού Hamilton, καθώς και του προβλήματος της διαμέρισης μονοπατιών για τις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων του ενδιαφέροντός μας. Συγκεκριμένα, μάς ενδιαφέρει να βρούμε το όριο στο οποίο τα προβλήματα αυτά μετατρέπονται από πολυωνυμικά επιλύσιμα σε μη πολυωνυμικά επιλύσιμα.

## 7.2 Μονοπάτι Hamilton

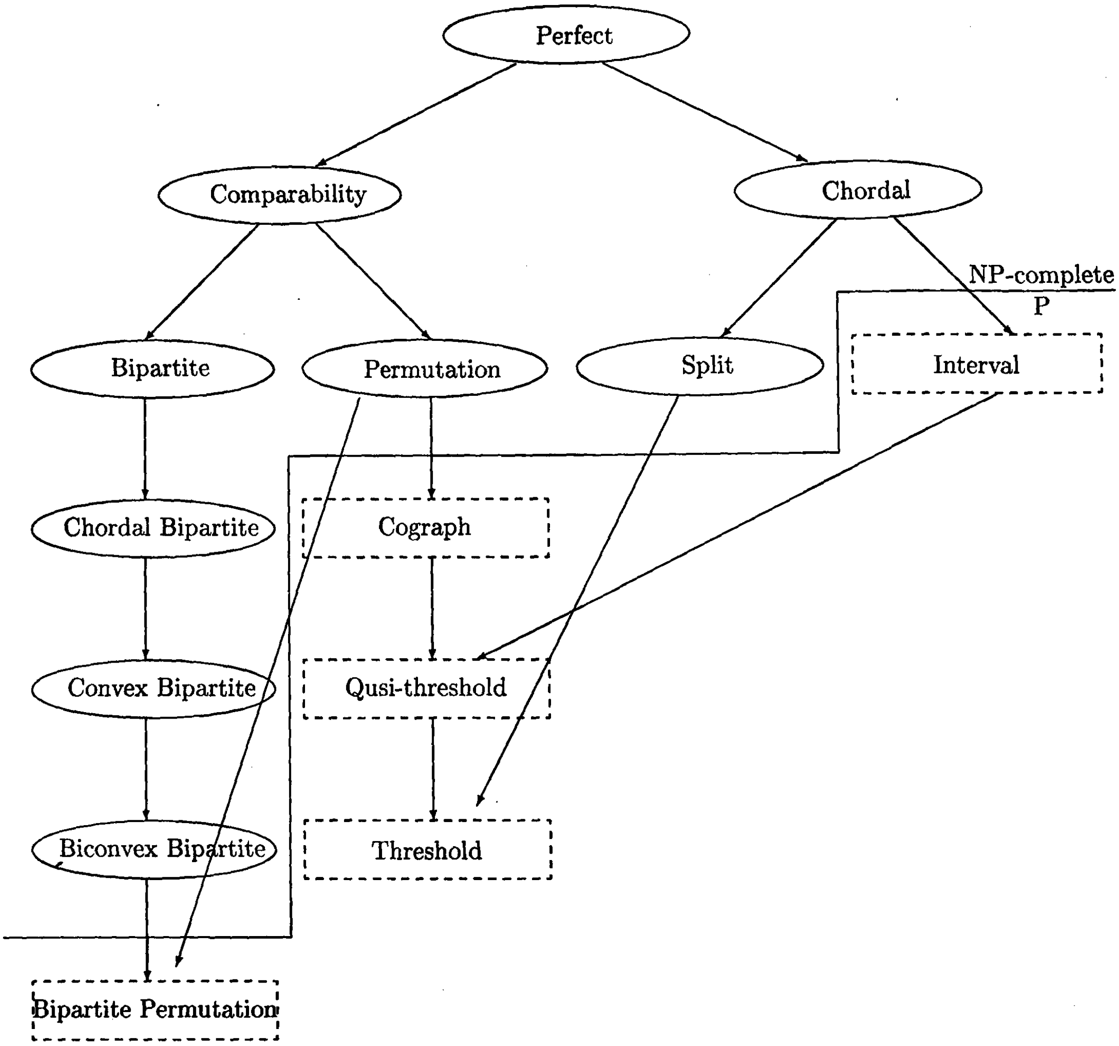
Ένα μονοπάτι (ή κύκλος) Hamilton είναι ένα απλό μονοπάτι που περιέχει όλους τους κόμβους του γραφήματος. Το πρόβλημα απόφασης εάν ένα γράφημα περιέχει κύκλο Hamilton είναι **NP**-πλήρες, ενώ η εύρεση ενός κύκλου ή μονοπατιού Hamilton δοθέντος ενός γραφήματος είναι **NP**-*hard* για γενικά γραφήματα [39]. Για την γενική κλάση των τέλειων γραφημάτων είναι γνωστό ότι επίσης παραμένει **NP**-πλήρες [4]. Έχει επίσης αποδειχθεί η **NP**-πληρότητα του προβλήματος για τα διμερή (bipartite) γραφήματα [4], γεγονός που υποδηλώνει άμεσα την **NP**-πληρότητα του προβλήματος για την κλάση των μεταβατικών (comparability) γραφημάτων, καθώς τα διμερή (bipartite) γραφήματα είναι υποκλάση των μεταβατικών (comparability) γραφημάτων. Η **NP**-πληρότητα του προβλήματος για τα διμερή (bipartite) γραφήματα, δίνεται επίσης στο βιβλίο του M. C. Golumbic [40] καθώς και στην εργασία [45]. Επιπλέον, οι Colbourn και Stewart [22], απέδειξαν την **NP**-πληρότητα του προβλήματος για τις κλάσεις των διαχωρίσιμων (split) και των τριγωνικών (chordal) γραφημάτων. Άρα, η **NP**-πληρότητα του προβλήματος για τη γενική κλάση των τέλειων γραφημάτων, εξάγεται άμεσα από τα προηγούμενα αποτελέσματα. Ο Müller [51], επέκτεινε τα αποτελέσματα της **NP**-πληρότητας του προβλήματος για τις κλάσεις των τριγωνικών διμερών (chordal bipartite) και των ισχυρών τριγωνικών (strongly chordal) γραφημάτων. Η κλάση των τριγωνικών διμερών (chordal bipartite) γραφημάτων περιέχει όλα εκείνα τα γραφήματα που είναι διμερή (bipartite) και *δεν περιέχουν επαγόμενο* $C_k$, $k > 4$. Δηλαδή, ένα τριγωνικό διμερές (chordal bipartite) γράφημα δεν είναι απαραίτητα τριγωνικό (chordal) (π.χ. το $C_4$). Η κλάση των ισχυρών τριγωνικών (strongly chordal) γραφημάτων μελετήθηκε στην εργασία [33] και είναι μια ειδική περίπτωση των τριγωνικών (chordal) γραφημάτων. Χαρακτηρίζονται από πολλές ισοδύναμες ιδιότητες ως προς την ύπαρξη χορδών σε κύκλους, ως προς απαγορευμένα υπογραφήματα, σχήματα απαλοιφής κ.α. Γενικά, είναι τα τριγωνικά (chordal) γραφήματα, στα οποία κάθε κύκλος αρτίου μήκους τουλάχιστον 6 έχει μια περιττή χορδή, δηλαδή μια χορδή που ενώνει κόμβους οι οποίοι χωρίζονται από ένα περιττό πλήθος ακμών στο γράφημα.

Από την άλλη μεριά, το πρόβλημα εύρεσης κύκλου Hamilton μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο σε κάποιες άλλες κλάσεις τέλειων γραφημάτων. Για παράδειγμα, οι Corneil et al. [24], όρισαν και μελέτησαν τα συμπληρωματικά παραγόμενα (cographs) γραφήματα και απέδειξαν ότι το πρόβλημα εύρεσης κύκλου Hamilton ανήκει στην κλάση **P**. Αυτό σημαίνει ότι για οποιαδήποτε κατάλληλη υποκλάση των συμπληρωματικά παραγόμενων (cographs) γραφημάτων, το πρόβλημα παραμένει πολυωνυμικά επιλύσιμο (**P**). Το πρόβλημα αυτό διαχωρίζει τις κλάσεις των συμπληρωματικά παραγόμενων (cographs) γραφημάτων από τα μεταβατικά (comparability) γραφήματα. Επίσης, το πρόβλημα είναι πολυωνυνικά επιλύσιμο και για την κλάση των γραφημάτων διαστημάτων (interval graphs)[18]. Τα γραφήματα διαστημάτων (interval) είναι υποκλάση των τριγωνικών (chordal) γραφημάτων, καθώς τα γραφήματα διαστημάτων (interval) είναι ακριβώς εκείνα τα τριγωνικά (chordal) γραφήματα, των οποίων το συμπλήρωμα είναι μεταβατικό (comparability) γράφημα. Άρα, τα γραφήματα διαστημάτων (interval) διαχωρίζονται στην πολυπλοκότητά τους από το πρόβλημα εύρεσης κύκλου Hamilton, δηλαδή οι δύο αυτές κλάσεις αποτελούν όριο στην πολυπλοκότητα του προβλήματος αυτού. Επίσης, το πρόβλημα είναι πολυωνυμικά επιλύσιμο όταν περιορίζεται στην κλάση των γραφημάτων που είναι ταυτόχρονα μεταθετικά (permutation) και διμερή (bipartite), καθώς και στα block γραφήματα [56]. Για την κλάση των μεταθετικών (permutation) γραφημάτων το πρόβλημα επιλύεται πολυωνυμικά [26].

Το Σχήμα 7.1 αναπαριστά τα παραπάνω αποτελέσματα. Το διακεκομμένο τετράγωνο αντιστοιχεί στις κλάσεις εκείνες όπου το μονοπάτι Hamilton ανήκει στην κλάση **P**, ενώ η έλλειψη αντιστοιχεί στις κλάσεις όπου το πρόβλημα παραμένει **NP**-πλήρες.

## 7.3 Επικάλυψη με Μονοπάτια

Μια επικάλυψη με μονοπάτια σε ένα γράφημα είναι μια συλλογή ξένων ως προς τις κορυφές μονοπατιών η οποία καλύπτει όλους τους κόμβους, δηλαδή για κάθε κορυφή του γραφήματος υπάρχει *μοναδικό* μονοπάτι που περιέχει τον κόμβο αυτό. Το πρόβλημα της επικάλυψης με μονοπάτια (*path-cover problem*) είναι να βρεθεί μια διαμέριση μονοπατιών στο γράφημα $G$ με ελάχιστο πλήθος μονοπατιών $p(G)$. Στη γενική του περίπτωση, για γενικά γραφήματα, είναι **NP**-πλήρες [39]. Επίσης, το γράφημα $G$ έχει κύκλο Hamilton εάν και μόνο εάν $p(G) = 1$. Αφού, το πρόβλημα εύρεσης κύκλου (ή μονοπατιού) Hamilton είναι **NP**-πλήρες [39], και το πρόβλημα επικάλυψης με μονοπάτια είναι γενίκευση του προβλήματος εύρεσης κύκλου (ή μονοπατιού) Hamilton, αν σε κάποια κλάση γραφημάτων το πρόβλημα εύρεσης κύκλου (ή μονοπατιού) Hamilton είναι **NP**-πλήρες, αυτό αυτόματα συνεπάγεται **NP**-πληρότητα του προβλήματος της επικάλυψης




Σχήμα 7.1: Η Πολυπλοκότητα του Προβλήματος Εύρεσης Μονοπατιού Hamilton για Συνδεδεμένα Γραφήματα που ανήκουν σε Κλάσεις Τέλειων Γραφημάτων.

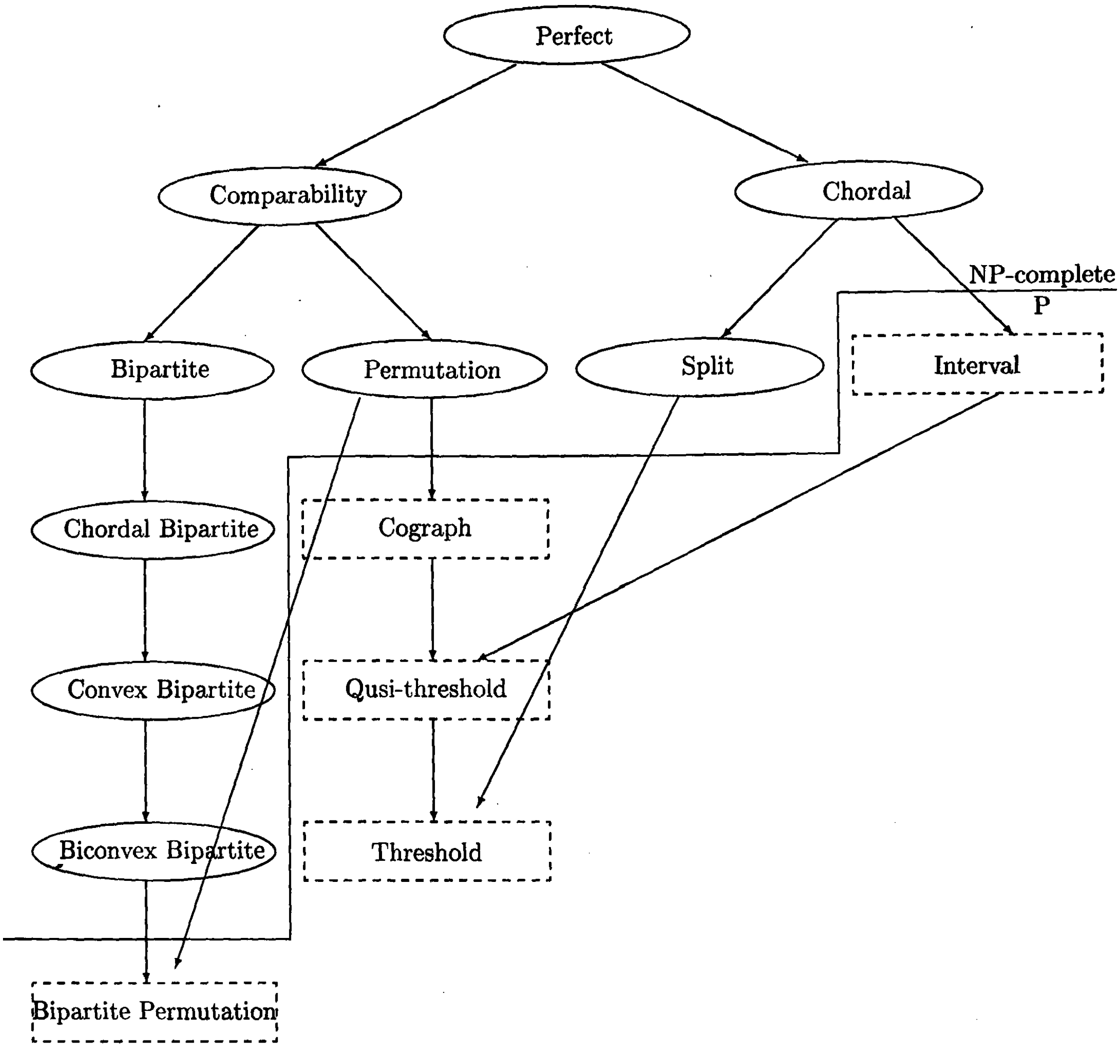
με μονοπάτια, για την αντίστοιχη κλάση. Μια γενίκευση του προβλήματος επικάλυψης με μονοπάτια είναι το $k$-path cover πρόβλημα, στο οποίο κάθε μονοπάτι έχει μήκος *το πολύ* $k$, για κάποιον θετικό ακέραιο $k$.

Για όλες τις κλάσεις τέλειων γραφημάτων της προηγούμενης παραγράφου, που το πρόβλημα εύρεσης μονοπατιού Hamilton είναι **NP**-πλήρες, προκύπτει ότι το ίδιο θα ισχύει για το πρόβλημα επικάλυψης με μονοπάτια, αφού η ύπαρξη μονοπατιού Hamilton σε οποιοδήποτε γράφημα συνεπάγεται την ύπαρξη μίας επικάλυψης μονοπατιών (path cover) με $p(G) \geq 1$. Δηλαδή, το πρόβλημα επικάλυψης με μονοπάτια παραμένει **NP**-πλήρες για τις κλάσεις των διαχωρίσιμων (split), τριγωνικών (chordal), μεταβατικών (comparability), τριγωνικών διμερών (chordal bipartite), ισχυρών τριγωνικών (strongly chordal) και των διμερών (bipartite) γραφημάτων. Το πρόβλημα επικάλυψης με μονοπάτια είναι πολυωνυμικά επιλύσιμο για δέντρα (trees) [44, 54] και για γραφήματα διαστημάτων (interval) [5, 12]. Έχει αποδειχθεί ότι το πρόβλημα είναι πολυωνυμικά επιλύσιμο για την κλάση των circular-arc γραφημάτων [12], κατάλληλη υπερκλάση των γραφημάτων διαστημάτων (interval). Στο άρθρο [5], το πρόβλημα επιλύεται σε χρόνο $O(n + m)$. Στο άρθρο [42] δίνεται πολυωνυνικός αλγόριθμος για την επίλυση του προβλήματος στην κλάση των γραφημάτων διαστημάτων (interval), πολυπλοκότητας $O(n \log n)$. Επίσης, γραμμικός αλγόριθμος για το πρόβλημα της επικάλυψης με μονοπάτια, καθώς και για πλήθος άλλων προβλημάτων, για γραφήματα διαστημάτων (interval) παρουσιάστηκε από τον Chang et al. [18]. Αυτό είναι και το όριο που διαφοροποιείται η πολυπλοκότητα του προβλήματος ως προς τις κλάσεις των τριγωνικών (chordal) γραφημάτων, καθώς και των γραφημάτων διαστημάτων (interval). Επίσης, το πρόβλημα είναι πολυωνυμικά επιλύσιμο και για την κλάση των συμπληρωματικά παραγόμενων (cographs) γραφημάτων [16], αφού στο πρώτο άρθρο αποδεικνύεται ότι υπάρχει μονοπάτι Hamilton στα συμπληρωματικά παραγόμενα (cographs) γραφήματα, πράγμα το οποίο συνεπάγεται ότι υπάρχει επικάλυψη με μονοπάτια με $p(G) \geq 1$. Τέλος, το πρόβλημα είναι πολυωνυμικά επιλύσιμο όταν περιορίζεται στην κλάση των γραφημάτων που είναι *ταυτόχρονα* μεταθετικά (permutation) και διμερή (bipartite), καθώς και στα block γραφήματα [56]. 'Οπως συμβαίνει και με το πρόβλημα εύρεσης μονοπατιού Hamilton, το πρόβλημα της επικάλυψης με μονοπάτια επιλύεται πολυωνυμικά [26].

Το πρόβλημα της επικάλυψης με μονοπάτια, όταν περιορίζουμε το κάθε μονοπάτι να έχει μήκος το πολύ $k$, έχει μελετηθεί εκτενώς για κλάσεις τέλειων γραφημάτων. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να μοντελοποιήσει πολλά προβλήματα που ανήκουν κυρίως στο πεδίο των δικτύων και των επικοινωνιών. Προφανώς, αφού αποτελεί γενίκευση ενός ήδη **NP**-πλήρους προβλήματος, το *k-path cover πρόβλημα* θα είναι και αυτό **NP**-πλήρες για γενικά γραφήματα [39]. Οι Yan et al. [60] δίνουν πολυωνυμικό αλγόριθμο επίλυσης του προβλήματος για δέντρα (trees), δηλαδή την εύρεση του ελάχιστου αριθμού μονοπατιών για το *k-path partition* πρόβλημα. Σχετικά με τα συμπληρωματικά παραγόμενα (cographs) γραφήματα, ο Steiner [57] αποδεικνύει ότι το πρόβλημα στη συγκεκριμένη κλάση είναι **NP**-πλήρες *εάν το k θεωρηθεί μέρος της εισόδου*. Εάν, όμως, το $k$ ορισθεί εξ' αρχής, τότε το πρόβλημα λύνεται πολυωνυμικά. Δίνεται επίσης ένας γραμμικός αλγόριθμος βέλτιστης επίλυσης του προβλήματος για την κλάση των κατωφλικών (threshold) γραφημάτων και αποδεικνύεται ότι το πρόβλημα είναι **NP**-πλήρες για την κλάση των τριγωνικών διμερών (chordal bipartite) γραφημάτων, εάν το $k$ θεωρηθεί μέρος της εισόδου καθώς και για τα μεταβατικά (comparability) γραφήματα, ακόμα και στην περίπτωση όπου το $k$ είναι 3 [57]. Επίσης, παρουσιάζεται ένας αλγόριθμος που επιλύει το πρόβλημα σε πολυωνυμικό χρόνο για την κλάση των διμερών μεταθετικών (bipartite permutation) γραφημάτων. Στην εργασία [7], οι συγγραφείς αποδεικνύουν την **NP**-πληρότητα του προβλήματος για την κλάση των quasi-threshold γραφημάτων, με συνέπεια την αυτόματη απόδειξη του αποτελέσματος για τις υπερκλάσεις των quasi-threshold γραφημάτων, δηλαδή των τριγωνικών (chordal) και των γραφημάτων διαστημάτων (interval).

Το Σχήμα 7.2 αναπαριστά τα παραπάνω αποτελέσματα. Το διακεκομμένο τετράγωνο αντιστοιχεί στις κλάσεις εκείνες όπου το εκάστοτε πρόβλημα ανήκει στην κλάση **P**, ενώ η έλλειψη αντιστοιχεί στις κλάσεις όπου το πρόβλημα παραμένει **NP**-πλήρες.

Στην επόμενη παράγραφο ακολουθεί η περιγραφή αλγορίθμων που αποδεικνύουν ότι το πρόβλημα της επικάλυψης με μονοπάτια είναι πολυωνυμικά επιλύσιμο για τις κλάσεις γραφημάτων που αναφέρθηκαν πιο πάνω. 'Οταν οι αλγόριθμοι αυτοί παράγουν ένα μόνο μονοπάτι, τότε υπάρχει και μονοπάτι Hamilton στο εκάστοτε γράφημα που μελετάμε, και ισχύει ο ίδιος αλγόριθμος και για το πρόβλημα του μονοπατιού Hamilton. Διαφορετικά, δεν υπάρχει μονοπάτι Hamilton στο γράφημα που μελετάμε.




Σχήμα 7.2: Η Πολυπλοκότητα του Προβλήματος Επικάλυψης με Μονοπάτια για Συνδεδεμένα Γραφήματα που ανήκουν σε Κλάσεις Τέλειων Γραφημάτων.

## 7.4 Πολυωνυμικοί Αλγόριθμοι για το Μονοπάτι Hamilton και το Πρόβλημα της Επικάλυψης με Μονοπάτια σε Συμπληρωματικά Παραγόμενα, σε Διμερή Μεταθετικά και σε Γραφήματα Διαστημάτων

Αρχικά, θα αποδειχθεί ότι το πρόβλημα επικάλυψης με μονοπάτια είναι πολυωνυμικά επιλύσιμο για την κλάση των διμερών μεταθετικών (bipartite permutation) γραφημάτων.

Έστω $G = (S, T, E)$ ένα διμερές μεταθετικό (bipartite permutation) γράφημα, όπου $S, T$ τα επιμέρους σύνολα του γραφήματος $G$. Μία ισχυρή διάταξη (strong ordering) των κόμβων ενός διμερούς (bipartite) γραφήματος $G = (S, T, E)$ αποτελείται από μια διάταξη του συνόλου $S$ και από μια διάταξη του συνόλου $T$, τέτοια ώστε για όλα τα ζεύγη $(s, t), (s', t') \in E$ με $s < s'$ και $t > t'$ να ισχύει $(s, t'), (s', t) \in E$.

**Λήμμα 7.1.** *(Spinrad et al.[55]) Έστω $G = (S, T, E)$ ένα διμερές (bipartite) γράφημα. Τότε οι παρακάτω* *προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

(1) *Το γράφημα $G$ είναι ένα διμερές μεταθετικό (bipartite permutation) γράφημα.*

(2) *Υπάρχει μια ισχυρή διάταξη των κόμβων του γραφήματος $G$.*

**Ορισμός 7.1.** Έστω $G$ ένα διμερές μεταθετικό (bipartite permutation) γράφημα. Μία επικάλυψη μονοπατιών (path cover) $(P_2, P_2, \ldots, P_k)$ του γραφήματος $G$ ονομάζεται συνεχόμενη (contiguous) εάν ικανοποιούνται οι επόμενες δύο συνθήκες:

(1) Εάν $s$ είναι ο μοναδικός κόμβος στο μονοπάτι $P_i$ και εάν $s' < s < s''$, τότε οι κόμβοι $s'$ και $s''$ ανήκουν σε διαφορετικά μονοπάτια.

(2) Εάν $st$ είναι μία ακμή στο μονοπάτι $P_i$ και $s't'$ είναι μία ακμή στο μονοπάτι $P_j$, όπου $i \neq j$ και $s < s'$, τότε ισχύει $t < t'$.

**Λήμμα 7.2.** *Έστω $G$ ένα διμερές μεταθετικό (bipartite permutation) γράφημα. Τότε, υπάρχει μια συνεχόμενη επικάλυψη μονοπατιών (path cover) για το γράφημα $G$, η οποία είναι βέλτιστη.*

**Απόδειξη**: Θα μετατρέψουμε μία αυθαίρετη βέλτιστη επικάλυψη μονοπατιών (path cover) $P$ σε μία συνεχόμενη βέλτιστη επικάλυψη μονοπατιών (path cover), χρησιμοποιώντας τις δύο συνθήκες του προηγούμενου ορισμού ξεχωριστά:

(1) Έστω $s', s, s''$ οι κόμβοι που δεν ικανοποιούν τη συνθήκη 1. Χωρίς τον περιορισμό της γενικότητας, ας υποθέσουμε ότι οι κόμβοι $s', s''$ είναι πιο κοντά στον κόμβο $s$ από τα δεξιά και από τα αριστερά στη διάταξη στο σύνολο $S$ σε κάποιο μονοπάτι $P_j$ της επικάλυψης μονοπατιών (path cover) $P$. Έστω $s' - t - s''$ το υπομονοπάτι του $P_j$. Από τον ορισμό 2, προκύπτει ότι ο κόμβος $t$ γειτονεύει με τον κόμβο $s$. Συνδέουμε τον κόμβο $t$ με τον κόμβο $s$ και αφαιρούμε τη σύνδεση ανάμεσα στους κόμβους $t$ και $s''$ στην επικάλυψη μονοπατιών (path cover). Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία, προκύπτει μία βέλτιστη επικάλυψη μονοπατιών (path cover) που ικανοποιεί τη συνθήκη 1.

(2) Έστω $st$ και $s't'$, αντίστοιχα, οι ακμές στα μονοπάτια $P_i$ και $P_j$ της επικάλυψης μονοπατιών (path cover) $P$, που δεν ικανοποιούν τη συνθήκη 2. Εξ' ορισμού, γνωρίζουμε ότι οι ακμές $st$ και $s't'$ ανήκουν στο σύνολο $E$. Αφαιρούμε τις ακμές $st$ και $s't'$ από την επικάλυψη μονοπατιών (path cover) και τις αντικαθιστούμε με τις ακμές $st'$ και $s't$. Προκύπτουν δύο νέα μονοπάτια, τα $P_i'$ και $P_j'$, τα οποία καλύπτουν τους ίδιους κόμβους που καλύπτουν και τα μονοπάτια $P_i$ και $P_j$. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για όλα τα ζεύγη των ακμών που δεν ικανοποιούν τη συνθήκη 2, προκύπτει μία βέλτιστη επικάλυψη μονοπατιών (path cover) που ικανοποιεί τη συνθήκη 2.

**Θεώρημα 7.1.** *Το πρόβλημα της επικάλυψης με μονοπάτια είναι πολυωνυμικά επιλύσιμο για τα γραφήματα διαστημάτων (interval).*

**Απόδειξη**: Θα παρουσιάσουμε έναν greedy αλγόριθμο για το βέλτιστο πρόβλημα επικάλυψης με μονοπάτια σε ένα σύνολο από ταξινομημένα διαστήματα (sorted intervals). Με τον όρο ταξινομημένα διαστήματα, εννοούμε ότι τα άκρα των διαστημάτων με τα οποία μπορεί να αναπαρασταθεί ένα interval γράφημα, μπορούν να ταξινομηθούν σε αυξανόμενη σειρά, παίρνοντας διακριτές τιμές μεταξύ του 1 και του 2n, όπου n το πλήθος των κόμβων του γραφήματος διαστημάτων (interval). Στη συνέχεια του αλγορίθμου, ορίζουμε ως $I = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ το σύνολο των n ταξινομημένων διαστημάτων ενός γραφήματος διαστημάτων (interval) και για $i = 1, 2, \ldots, n$, ορίζουμε $a_i$ και $b_i$ τις συντεταγμένες από τα αριστερά και δεξιά, αντίστοιχα, των άκρων ενός διαστήματος $v_i$. Για οποιαδήποτε δύο διαστήματα $v_i$ και $v_j$, εάν ισχύει $i < j$ τότε συνεπάγεται ότι $b_i < b_j$.

Ο αλγόριθμος αρχικά ξεκινάει με ένα απλό μονοπάτι $P$, το οποίο ξεκινάει από τον κόμβο $v$ και καταλήγει στον κόμβο $v$. Στη συνέχεια, στηριζόμενος στην άπληστη αρχή (greedy principle), επεκτείνει το μονοπάτι $P$. Έστω ότι το μονοπάτι $P$ είναι το ακόλουθο: $P = x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_s$, όπου $s \geqslant 1$. Στη συνέχεια, επιλέγεται ο μικρότερος γείτονας του κόμβου $x_s$ που δεν έχει καλυφθεί, και το μονοπάτι $P$ επεκτείνεται για να το καλύψει. Εάν δεν υπάρχει τέτοιος γείτονας, τότε το μονοπάτι $P$ σταματάει και, εάν είναι εφικτό, ένα καινούριο μονοπάτι ξεκινάει για το υπόλοιπο γράφημα από εκείνον τον κόμβο που δεν έχει καλυφθεί και έχει τον μικρότερο αριθμό στη διάταξη. Έστω $S$ ένα σύνολο με αριθμούς και $\min S$ ο μικρότερος αριθμός του συνόλου $S$. Ακολουθεί περιγραφή του αλγορίθμου:

**Αλγόριθμος GOPC. Εύρεση μιας βέλτιστης επικάλυψης με μονοπάτια (path cover) ενός $G(I)$ από ένα σύνολο $I$ ταξινομημένων διαστημάτων.**

**Είσοδος:** Ένα σύνολο με ταξινομημένα διαστήματα $I = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

**Έξοδος:** Μία βέλτιστη επικάλυψη με μονοπάτια (path cover) του $G(I)$.

1. $U \leftarrow I; r \leftarrow 1;$
2. $P_r \leftarrow v_1; U \leftarrow U - \{v_1\};$
3. **while** $U \neq \varnothing$ **do**
4.     Let $x_s$ be the path-end of $P_r$;
5.     $S \leftarrow \{v_j : (x_s, v_j) \in E, v_j \in V\};$
6.     **if** $S \neq \varnothing$ **then**
7.         $k \leftarrow min\{j : v_j \in S\}; P_r \leftarrow P_r \to v_k;$

        **else**

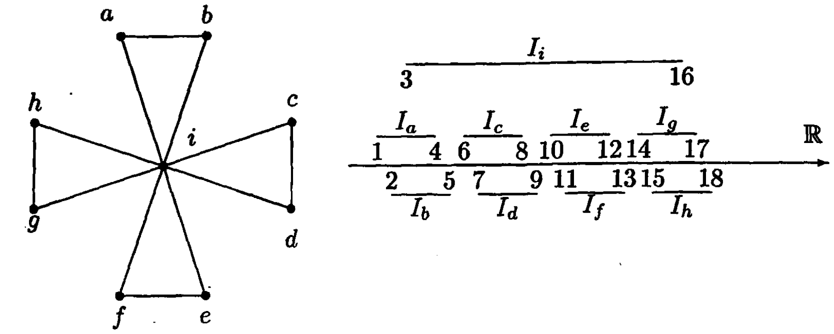
8.         $k \leftarrow min\{j : v_j \in U\}; r \leftarrow r + 1; P_r \leftarrow v_k;$
9.     $U \leftarrow U - \{v_k\};$

    **end while**

10. Output $P_1, P_2, \ldots, P_r$;

Ο παραπάνω αλγόριθμος υπολογίζει μία βέλτιστη επικάλυψη με μονοπάτια (path cover) σε ένα σύνολο ταξινομημένων διαστημάτων σε χρόνο $\mathcal{O}(n \log n)$. Ακολουθεί παράδειγμα που υπολογίζει με βάση τον αλγόριθμο GOPC μία βέλτιστη διαμέριση μονοπατιών για το δοθέν interval γράφημα.

Έστω, ότι το γράφημα που μας δίνουν για να υπολογίσουμε μία βέλτιστη επικάλυψη με μονοπάτια (path cover) είναι αυτό που φαίνεται στο Σχήμα 7.3. Ξεκινάμε με το $I_a$ διάστημα, γιατί έχει το μικρότερο δεξιό άκρο. Ο κόμβος $a$ έχει γείτονες τους κόμβους $b$ και $i$ και η επέκταση του μονοπατιού $P_1$ γίνεται προς τον κόμβο $b$, γιατί το αντίστοιχο διάστημα $I_b$ έχει μικρότερο δεξιό άκρο από το διάστημα $I_i$. Στη συνέχεια, το μονοπάτι $P_1$ επεκτείνεται προς τον κόμβο $i$, γιατί είναι ο μοναδικός γείτονας του κόμβου $b$ που δεν έχει καλυφθεί. Ο κόμβος $i$ γειτονεύει με τους κόμβους $c, d, e, f, g, h$ που δεν έχουν καλυφθεί, και




Σχήμα 7.3: Ένα Γράφημα Διαστημάτων (Interval) και τα Αντίστοιχα Ταξινομημένα Διαστήματα.

επιλέγεται για επόμενος κόμβος στο μονοπάτι ο κόμβος $c$, γιατί έχει το μικρότερο δεξιό άκρο από τους εναπομείναντες ακάλυπτους κόμβους. Τέλος, επιλέγεται και ο κόμβος $d$. Μετά την επιλογή του κόμβου $d$, αναχαλύπτουμε ότι ο κόμβος $d$ δεν έχει άλλους ακάλυπτους γείτονες, αφού οι γείτονές του $c$ και $i$, έχουν ήδη προστεθεί στο μονοπάτι $P_1$. Επομένως, ξεκινάει ένα δεύτερο μονοπάτι, το $P_2$, με πρώτη επίσκεψη στον κόμβο $e$ και μετά στον κόμβο $f$. Όπως και προηγουμένως, το μονοπάτι $P_2$ τερματίζει και ξεκινάει ένα τρίτο μονοπάτι που περιέχει τους κόμβους $g$ και $h$. Άρα, η επικάλυψη με μονοπάτια που προκύπτει για το συγκεκριμένο interval γράφημα είναι η εξής: $P_1 = \{a, b, i, c, d\}$, $P_2 = \{e, f\}$ και $P_3 = \{g, h\}$.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

# ΚΥΡΙΑΡΧΟ ΣΥΝΟΛΟ



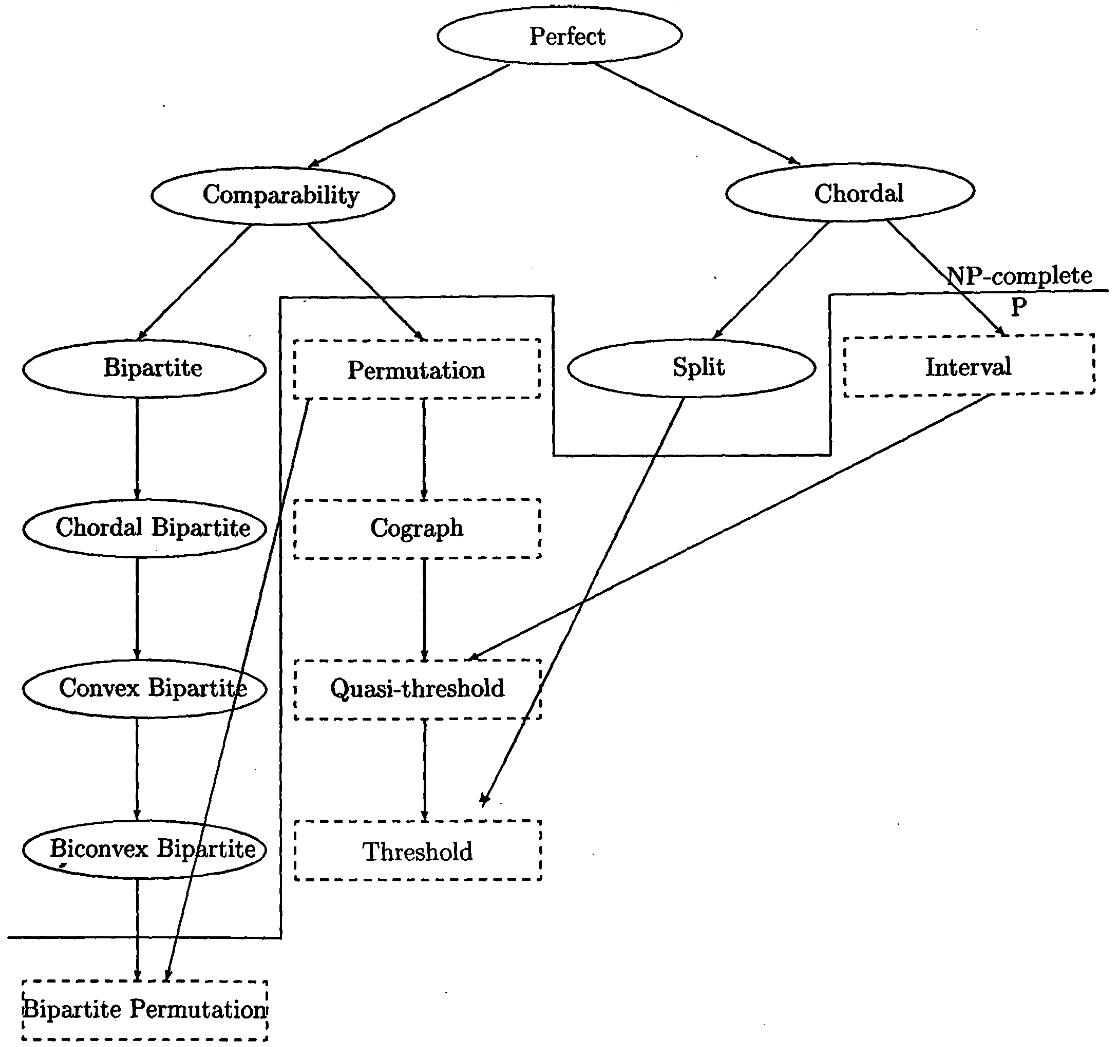
## 8.1 Στόχος

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την πολυπλοκότητα του προβλήματος εύρεσης του Κυρίαρχου Συνόλου για τις κλάσεις των τέλειων γραφημάτων που μελετάμε. Συγκεκριμένα, μάς ενδιαφέρει να βρούμε το όριο στο οποίο το πρόβλημα αυτό μετατρέπεται από πολυωνυμικά επιλύσιμο σε μη πολυωνυμικά επιλύσιμο.

## 8.2 Κυρίαρχο Σύνολο

Έστω γράφημα $G = (V, E)$ και ένας θετικός αριθμός $k \leq |V|$. Τότε ένα υποσύνολο κόμβων $S \subseteq V$, με $|S| \leq k$, ονομάζεται *κυρίαρχο* εάν κάθε κόμβος στο σύνολο $V - S$ γειτονεύει με τουλάχιστον έναν κόμβο από το σύνολο $S$. Ένα κυρίαρχο σύνολο λέγεται *ανεξάρτητο*, εάν δεν υπάρχουν δύο κόμβοι στο σύνολο $S$ τέτοιοι ώστε να γειτονεύουν μεταξύ τους. Το πρόβλημα του Κυρίαρχου Συνόλου αποδεικνύεται ότι είναι **NP**-πλήρες [39]. Παραμένει **NP**-πλήρες στα τριγωνικά (chordal) γραφήματα [14], καθώς και στα μεταβατικά (comparability) γραφήματα [27]. Έχει, επίσης, αποδειχθεί η **NP**-πληρότητα του προβλήματος και για τα διμερή (bipartite) γραφήματα [27]. Επιπλέον, το πρόβλημα του Κυρίαρχου Συνόλου παραμένει **NP**-πλήρες και για τα διαχωρίσιμα (split) γραφήματα [17].

Όμως, εκτός από αποτελέσματα **NP**-πληρότητας έχουν βρεθεί και αλγόριθμοι πολυωνυμικού χρόνου για διάφορες κλάσεις τέλειων γραφημάτων, τοποθετώντας το συγκεκριμένο πρόβλημα στην κλάση **P** όταν περιορίζεται στις συγκεκριμένες κλάσεις τέλειων γραφημάτων. Για παράδειγμα, το πρόβλημα γίνεται πολυωνυμικά επιλύσιμο για τα συμπληρωματικά παραγόμενα (cographs) γραφήματα, τα γραφήματα διαστημάτων (interval), τα μεταθετικά (permutation) γραφήματα καθώς και για τα ισχυρά τριγωνικά (strongly chordal) γραφήματα [35, 13, 33]. Τέλος, στην εργασία [18], παρουσιάζεται ένας λογαριθμικός και ένας γραμμικός αλγόριθμος που επιλύει βέλτιστα το πρόβλημα για τα γραφήματα διαστημάτων (interval).




Σχήμα 8.1: Η Πολυπλοκότητα του Προβλήματος του Κυρίαρχου Συνόλου για Συνδεδεμένα Γραφήματα που ανήκουν σε Κλάσεις Τέλειων Γραφημάτων.

Το Σχήμα 8.1 αναπαριστά τα παραπάνω αποτελέσματα. Το διακεκομμένο τετράγωνο αντιστοιχεί στις κλάσεις εκείνες όπου το πρόβλημα ανήκει στην κλάση **P**, ενώ η έλλειψη αντιστοιχεί στις κλάσεις όπου το πρόβλημα παραμένει **NP**-πλήρες.

Στην επόμενη παράγραφο ακολουθεί η περιγραφή αλγορίθμων που αποδεικνύουν ότι το πρόβλημα του κυρίαρχου συνόλου είναι πολυωνυμικά επιλύσιμο για την κλάση των γραφημάτων διαστημάτων (interval).

## 8.3 Πολυωνυμικός Αλγόριθμος για το Κυρίαρχο Σύνολο στα Γραφήματα Διαστημάτων (Interval)

Σε αυτόν τον αλγόριθμο χρησιμοποιούμε διαστήματα από το σύνολο $I$, τα οποία είναι αριθμημένα από το 1 μέχρι το $n$ κατά αύξουσα τάξη, ανάλογα με τα αριστερά τους άκρα, όπου $n$ το πλήθος των κόμβων σε ένα δοθέν γράφημα διαστημάτων (interval). Τα άκρα των διαστημάτων παίρνουν τιμές από 1 έως $2n$. Ορίζουμε ως $I = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ το σύνολο των $n$ ταξινομημένων διαστημάτων ενός γραφήματος διαστημάτων (interval) και για $i = 1, 2, \ldots, n$, ορίζουμε $a_i$ και $b_i$ τις συντεταγμένες από τα αριστερά και δεξιά, αντίστοιχα, των άκρων ενός διαστήματος $v_i$. Για οποιαδήποτε δύο διαστήματα $v_i$ και $v_j$, εάν ισχύει $i < j$ τότε συνεπάγεται ότι $b_i < b_j$.Επιπλέον, για οποιαδήποτε δύο διαστήματα $v_i$ και $v_j$, εάν ισχύει $i < j$, τότε θα ισχύει και $a_i < a_j$.

**Θεώρημα 8.1.** *Το Domatic Partition Πρόβλημα είναι πολυωνυμικά επιλύσιμο για τα γραφήματα διαστημάτων (interval).*

**Απόδειξη:** Ο αλγόριθμος διατηρεί $\delta + 1$ ξένα σύνολα διαστημάτων, όπου $\delta$ είναι ο ελάχιστος βαθμός του $G(I)$ και υπολογίζεται σε χρόνο $\mathcal{O}(m + n)$. Έχει αποδειχθεί ότι ισχύει $d(G) \leq \delta + 1$, όπου $d(G)$ είναι ο μέγιστος αριθμός από μη συνεκτικά dominating σύνολα για οποιοδήποτε γράφημα $G$ [18]. Αρχικά, τα σύνολα αυτά είναι κενά. Τότε, αρχίζουμε να επισκεπτόμαστε ένα-ένα τα διαστήματα, σύμφωνα με την αύξουσα σειρά που τα έχουμε διατάξει, για να αποφασίσουμε σε ποιο σύνολο πρέπει να τοποθετηθεί το κάθε διάστημα. Στο τέλος του αλγορίθμου, κάθε διάστημα τοποθετείται σε ένα σύνολο και κάθε σύνολο είναι ένα dominating σύνολο. Ορίζουμε τις εξής μεταβλητές: $DP = \{P_i : P_i$ είναι ένα υποσύνολο του συνόλου $I, 1 \leq i \leq \delta + 1\}$ είναι μια οικογένεια από $\delta + 1$ ξένα σύνολα διαστημάτων. Κάθε σύνολο $P_i$ συσχετίζεται με μία μεταβλητή $pr_i$, η η οποία είναι το μέγιστο δεξιό άκρο $b_j$ ενός $v_j$ στο σύνολο $P_i$, για $1 \leq i \leq \delta + 1$. Η μεταβλητή $pr_i$ είναι το μέγιστο δεξιό άκρο του συνόλου $P_i$. Αρχικά, όλα τα σύνολα $P_i$ είναι κενά. Τα διαστήματα τοποθετούνται ένα-ένα σε κάποιο σύνολο του $DP$. $PQ$ είναι μια ουρά προτεραιοτήτων, η οποία διατηρεί το μέγιστο δεξιό άκρο από όλα τα σύνολα του $DP$. Η ουρά $PQ$ υποστηρίζει τις λειτουργίες εύρεσης του ελάχιστου στοιχείου, εισαγωγής στοιχείου και διαγραφής στοιχείου από την ουρά $PQ$. Στην πραγματικότητα, αυτός ο αλγόριθμος είναι άπληστος (greedy). Όταν επισκέπτεται ένα διάστημα, τοποθετεί το διάστημα σε ένα σύνολο του συνόλου $DP$. Σύμφωνα με έναν greedy κανόνα, επιλέγει το σύνολο του οποίου το τρέχων μέγιστο δεξιό άκρο είναι το μικρότερο ανάμεσα στα σύνολα του συνόλου $DP$. Ακολουθεί περιγραφή του αλγορίθμου:

**Αλγόριθμος GDP: Εύρεση μιας domatic partition ενός $G(I)$ δοθέντος ενός συνόλου $I$ ταξινομημένων διαστημάτων.**

**Είσοδος:** Ένα σύνολο με ταξινομημένα διαστήματα $I = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

**Έξοδος:** Ένα domatic partition $DP$ του $G(I)$ μεγέθους $\delta + 1$.

1. Find the minimum degree $\delta$ of $G(I)$;
2. **for** $i = 1$ to $\delta + 1$ **do**
3. $\quad P_i \leftarrow \varnothing$;
4. $\quad pr_i \leftarrow i-(\delta + 1)$;
5. $\quad$ Insert $pr_i$ into $PQ$;

**end for**

6. **for** $i = 1$ **to** $n$ **do**

7. Find the minimum $pr_k$ from $PQ$;

8. $P_k \leftarrow P_k \cup \{v_i\}$;

9. **if** $b_i > pr_k$ **then do**

10. Delete $pr_k$ from $PQ$;

11. $pr_k \leftarrow b_i$;

12. Insert $pr_k$ into $PQ$;

**end if**

**end for;**

13. Output $DP$.

Η ισχύς του αλγορίθμου αυτού έχει αποδειχθεί [50, 53]. Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου εξαρτάται από τις λειτουργίες της εύρεσης του ελαχίστου στοιχείου της ουράς $PQ$, καθώς και της εισαγωγής και διαγραφής ενός στοιχείου από την ουρά $PQ$. Επιπλέον, εάν $\delta > \log\log n$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια two-level ουρά προτεραιοτήτων, για να υλοποιήσουε την $PQ$. Αυτή η δομή δεδομένων χρησιμοποιεί $\mathcal{O}(n)$ χώρο και χρειάζεται $\mathcal{O}(\log\log n)$ χρόνο, για να ολοκληρώσει κάθε μία από τις παραπάνω λειτουργίες. Ως εκ τούτου, η πολυπλοκότητα χρόνου για τον αλγόριθμο GDP είναι $\mathcal{O}(n \log\log n)$.

Κεφαλαιο 9

# Συμπερασματα



## 9.1 Αποτελέσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε κάποια αποτελέσματα που προέκυψαν από τα προηγούμενα κεφάλαια, κατά τη μελέτη των προβλημάτων απόφασης για τις διάφορες κλάσεις των τέλειων γραφημάτων. Πιο συγκεκριμένα, θα παρουσιάσουμε για κάθε μία κλάση των τέλειων γραφημάτων ποια προβλήματα απόφασης παραμένουν **NP**-πλήρη και ποια ανήκουν στην κλάση **P**. Ξεκινώντας με την κλάση των μεταβατικών (comparability) γραφημάτων, είδαμε ότι όλα τα προβλήματα απόφασης που μελετήσαμε παραμένουν **NP**-πλήρη. Το ίδιο ισχύει και για την κλάση των τριγωνικών (chordal) γραφημάτων. Στα μεταθετικά (permutation) γραφήματα, παρατηρήσαμε ότι ο αρμονικός αριθμός, ο αχρωματικός αριθμός, το μέγιστο σύνολο κοπής και η διαμέριση μονοπατιών, παραμένουν **NP**-πλήρη. Το ίδιο δεν ισχύει για το μονοπάτι Hamilton και το κυρίαρχο σύνολο, τα οποία επιλύονται σε πολυωνυμικό χρόνο για αυτή την κλάση γραφημάτων. Για την κλάση των διμερών (bipartite) γραφημάτων, προκύπτει ότι το μέγιστο σύνολο κοπής ανήκει στην κλάση **P**, ενώ όλα τα άλλα προβλήματα απόφασης τα οποία μελετήσαμε, παραμένουν **NP**-πλήρη. Ακόμη, από την περιγραφή των προβλημάτων απόφασης προέκυψε ότι στα διαχωρίσιμα (split) γραφήματα όλα τα προβλήματα απόφασης παραμένουν **NP**-πλήρη. Προχωρώντας στην κλάση των γραφημάτων διαστημάτων (interval), παρατηρήσαμε ότι ο αρμονικός αριθμός, ο αχρωματικός αριθμός και το μέγιστο σύνολο κοπής παραμένουν **NP**-πλήρη, ενώ το μονοπάτι Hamilton, η διαμέριση μονοπατιών και το κυρίαρχο σύνολο επιλύονται σε πολωνυμικό χρόνο, ανήκουν επομένως στην κλάση **P**. Επιπλέον, για τα συμπληρωματικά παραγόμενα γραφήματα (cographs), ο αχρωματικός αριθμός παραμένει **NP**-πλήρης, ενώ όλα τα άλλα προβλήματα απόφασης που μελετήσαμε ανήκουν στην κλάση **P**. Τέλος, στα κατωφλικά (threshold) γραφήματα όλα τα προβλήματα απόφασης που παρουσιάσαμε ανήκουν στην κλάση **P**, ενώ για τα διμερή μεταθετικά (bipartite permutation) γραφήματα, αρμονικός και ο αχρωματικός αριθμός παραμένουν **NP**-πλήρη και τα υπόλοιπα προβλήματα απόφασης που είδαμε επιλύονται σε πολυωνυμικό χρόνο. Ο παρακάτω πίνακας συνοψίζει τα παραπάνω αποτελέσματα.

Πίναχας 9.1: Αποτελέσματα Πολυπλοκότητας των Προβλημάτων Απόφασης που Μελετήσαμε στις Κλάσεις των Τέλειων Γραφημάτων

| GRAPH CLASS | HARMNUM | ACHRNUM | MAXCUT | HAM-PATHCOV | INDSET |
|---|---|---|---|---|---|
| Comparability | NP | NP | NP | NP | NP |
| Chordal | NP | NP | NP | NP | NP |
| Permutation | NP | NP | NP | P | P |
| Bipartite | NP | NP | P | NP | NP |
| Split | NP | NP | NP | NP | NP |
| Interval | NP | NP | NP | P | P |
| Cograph | P | NP | P | P | P |
| Threshold | P | P | P | P | P |
| Bipartite Permutation | NP | NP | P | P | P |

## 9.2 Ανοιχτά Προβλήματα

Υπάρχουν κάποια προβλήματα απόφασης για οποία έχει γίνει πολύ έρευνα σχετικά με το αν παραμένουν NP-πλήρη ή αν υπάρχει κάποιος αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου που να τα επιλύει. Αυτά τα προβλήματα είναι όπως λέμε ανοιχτά και τέτοια προβλήματα είναι τα 1-HP, 2-HP στα γραφήματα διαστημάτων (interval graphs). Σαν 1-HP ορίζουμε το πρόβλημα εύρεσης μονοπατιού Hamilton σε ένα γράφημα, με τον περιορισμό να ξεκινάει το μονοπάτι από έναν συγκεκριμένο κόμβο. Σαν 2-HP ορίζουμε το πρόβλημα εύρεσης μονοπατιού Hamilton σε ένα γράφημα, όταν ξεκινάει από έναν συγκεκριμένο κόμβο του γραφήματος και καταλήγει σε κάποιον συγκεκριμένο κόμβο του. Ένα άλλο ανοιχτό πρόβλημα είναι το πρόβλημα του αχρωματικού αριθμού στα διαχωρίσιμα (split) γραφήματα.

# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ


[1] K. Abrahamson, N. Daboun, D.G. Kirkpatrick and T. Przytycka, A simple parallel tree contraction algorithm, *J. Algorithms* **10** (1989) 287–302.

[2] G.S. Adhar and S. Peng, Parallel algorithm for path covering, Hamiltonian path, and Hamiltonian cycle in cographs, *Proc. Internat. Conf. on Parallel Processing* **III** (1990) 364–365.

[3] A.V. Aho, J.E. Hopcroft, and J.D. Ullman, *The Design and Analysis of Computer Algorithms*, Addison-Wesley (1974).

[4] T. Akiyama, T. Nishizeki and N. Saito, NP-completness of the Hamiltonian cycle problem in bipartite graphs, *J. Information Processing* **3** (1980) 73–76.

[5] S.R. Arikati and C.P. Rangan, Linear algorithm for optimal path cover problem on interval graphs, *Inform. Process. Lett.* **35** (1990) 149–153.

[6] K. Asdre, K. Ioannidou and S.D. Nikolopoulos, The harmonious coloring problem is NP-complete for interval and permutation graphs, *Disc. Appl. Math.* **155** (2007) 2377–2382.

[7] K. Asdre and S.D. Nikolopoulos, NP-completness results for some problems on subclasses of bipartite and chordal graphs, *Theoretical Computer Science* **381** (2007) 248–259.

[8] C. Berge and F. Graphen, Deren sämtliche bzw. deren ungerade Kreise starr sind, *Wiss. Z. Martin-Luther-Universetëit, Halle-Wittemberg Math.-Natur, Reiche* (1961) 114–115.

[9] H. Bodlaender, The Maximum Cut and Minimum Cut into Bounded Sets problems on Cographs, *Technical report RUU-CS-87-12, Department of Computer Science, University of Utrecht, Netherlands* (1987).

[10] H.L. Bodlaender, Achromatic number is NP-complete for cographs and interval graphs, *Inform. Process. Lett.* **31** (1989) 135–138.

[11] H.L. Bodlaender and K. Jansen, On the Complexity of the Maximum Cut Problem, *Nord. J. Comput.* **7** (2000) 14–31.

[12] M.A. Bonuccelli and D.P. Bovet, Minimum node disjoint path covering for circular-arc graphs, *Inform. Process. Lett.* **8** (1979) 159–161.

[13] K.S. Booth and J.H. Johnson, Dominating sets in chordal graphs, *SIAM J. Comput.* **11** (1982) 191–199.

[14] K.S. Booth, Dominating sets in chordal graphs, *Computer Science Department, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canade* (1980).

[15] N. Cairnie and K. Edwards, Some results on the achromatic number, *J. Graph Theory* **26** (1997) 129–136.

[16] G.J. Chang and D. Kuo, The $L(2,1)$-labeling problem on graphs, *SIAM J. Discrete Math.* **9** (1996) 309–316.

[17] G.J. Chang and G.L. Nemhauser, The $k$-domination and $k$-stability problems on sun-free chordal graphs, *SIAM J. Algebraic and Discrete Methods* **5** (1984) 332-345.

[18] M.S. Chang, S.L. Peng and J.L. Liaw, Deferred-Query: An Efficient Aproach for some problems on Interval graphs, *Networks* **34** (1999) 1–10.

[19] M. Chudnovsky, G. Cornuéjols, X. Liu, P.D. Seymour and K. Vušković, Recognizing Berge Graphs, *Combinatorica* **25** (2005) 143–186.

[20] M. Chudnovsky, N. Robertson, P.D. Seymour and R. Thomas, The Strong Perfect Graph Theorem, *Annals of Math.* **164** (2006) 51–229.

[21] V. Chvátal and P.L. Hammer, Aggregation of inequalities in integer programming, *Annals of Discrete Mathematics North-Holland, Amsterdam* (1977) 145–162.

[22] C.J. Colbourn and L.K. Stewart, Permutation graphs: connected domination and Steiner trees, 1985.

[23] S.A. Cook, The complexity of theorem proving procedures, *ACM Symp. on the Theory of Computing, ACM* **3** (1971) 151–158.

[24] D.G Corneil, H. Lerchs and L.S. Burlingham, Complement Reducible graphs, *Disc. Applied Math.* **3** (1981) 163–174.

[25] D.G. Corneil and Y. Perl, Clustering and domination in perfect graphs, *Disc. Applied Math.* **9** (1982) 27–39.

[26] P. Damaschke, J.S. Deogun, D. Kratsch and G. Steiner, Finding Hamiltonian paths in cocomparability graphs using the bump number algorithm, *Order* **8** (1992) 383–391.

[27] A.K. Dewdney, Fast Turing reductions between problems in NP, *Computer Science Department, University of Western Ontario, London, Ontario* (1983).

[28] G.A. Dirac, On rigit circuit graphs, *Abh. Math. Sem. universetëit Hamburg* **25** (1961) 71–76.

[29] K. Edwards, The harmonious chromatic number and the achromatic number, *Surveys in Combinatorics,* Cambridge University Press, Cambridge, UK (1997) 13–47.

[30] K. Edwards and C. McDiarmid, The complexity of harmonious coloring for trees, *J. Combinatorial Theory, Ser. B* **40** (1986) 21–39.

[31] M. Farber, Independent domination in chordal graphs, *Operation Res. Lett.* **1** (1982) 134–182.

[32] M. Farber, Characterizations of strongly chordal graphs, *Discrete Math.* **43** (1983) 173–189.

[33] M. Farber, Domination, independent domination and duality in strongly chordal graphs, *Disc. Applied Math.* **7** (1984) 115–130.

[34] M. Farber, G. Hahn, P. Hell and D. Miller, Concerning the achromatic number of graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **40**, (1986) 21–39.

[35] M. Farber and J.M. Keil, Domination in permutation graphs, *J. Algorithms* **6**, (1985) 309–321.

[36] S. Földes and P.L. Hammer, Split graphs, *8th Southeastern Conf. on Combinatorics, Graph theory and Computing*, Louisiana State University, Baton Rouge, Louisiana (1977) 311–315.

[37] D.R. Fulkerson and O.A. Gross, Incidence matrices and interval graphs, *Pacific J. Math.* **15** (1965) 835–855.

[38] M.R. Garey, R.L. Graham and D.S. Johnson, The complexity of computing Steiner minimal trees, *SIAM J. Applied Math.* **34** (1977) 477–495.

[39] M.R. Garey and D.S. Johnson, A Guide on the Theory of NP-completness, *Computers and Intractability*, Freeman, San Fransisco, California, 1979.

[40] M.C. Golumbic, Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs, *Elsevier, Annals of Discrete Mathematics*, 2004.

[41] M. Grötschel and W.R. Pulleyblank, Weakly bipartite graphs and the MAXCUT problem, *Oper. Res. Lett.* **1**, (1981) 23–27.

[42] W.L. Hsu, W.K. Shih and T.C. Chern, An $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ time algorithm for the Hamiltonian cycle problem, *SIAM J. Computing* **21** (1992) 1026–1046.

[43] F. Hughes and G. McGillivray, The achromatic number of graphs: a survey and some new results, *Bull. Inst. Combin. Appl.* **19** (1997) 27–56.

[44] H.A. Jung, On a class of posets and the coresponding comparability graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **35** (1978) 125–133.

[45] M.S. Krishnamoorthy, An NP-hard problem in bipartite graphs, *SIGACT News* **26** (1976).

[46] C.G. Lekkerkerker and J.C. Boland, Representation of a finite graph by a set of intervals in the real line, *Fundamenta Mathematica* **51** (1962) 45–64.

[47] H. Lerchs, On cliques and kernels, *Department of Computer Science, University of Toronto, Toronto, Canada*, 1971.

[48] L.A. Levin, Universal sorting problems, *Problemy Peredachi Informatsii*, **9**, (1973) 165–266.

[49] W. Lipski and F.P. Preparata, Efficient algorithms for finding maximum matchings in convex bipartite graphs and related problems, *Acta Informatica* **15** (1981) 329–346.

[50] G.K. Manacher and T.A.Mankus, Determining the domatic number and a domatic partition of an interval graph in time $\mathcal{O}(n)$ given its sorted model (1991).

[51] H. Müller, Hamilton circuits in chordal bipartite graphs, *Discrete Math.* **156** (1996) 291–298.

[52] C.H. Papadimitriou, *Computational Complexity*, Addison-Wesley, 1994.

[53] S.L. Peng and M.S. Chang, A new approach for domatic number problem on interval graphs, *Proceed Nat Comput Sympos, Taiwan, R.O.C.* (1991) 236–241.

[54] Z. Škupien, Path partitions of vertices and Hamiltonicity of graphs, *Second Čzechoslovakian Symposium on Graph Theory*, Prague, Čzechoslovakian Republic, 1974.

[55] J. Spinrad, A. Brandstadt and L. Stewart, Bipartite permutation graphs, *Disc. Appl. Math.* **18** (1987) 279–292.

[56] R. Srikant, R. Sundaram, L.S. Singh and C.P. Rangan, Optimal path cover problem on block graphs and bipartite permutation graphs, *Department of Computer Science and Engineering, India, Theoritical Computer Science* **115** (1993) 351–357.

[57] G. Steiner, On the $k$-path partition problem in cographs graphs, *Cong. Numer.* **290** (2000) 89–96.

[58] K. White, M. Farber and W. Pulleyblank, Steiner trees, connected domination and strongly chordal graph, *Networks* **15** (1985) 109–124.

[59] M. Yannakakis and F. Gavril, Edge dominating sets in graphs, *SIAM J. Appl. Math.* **38** (1980) 364–372.

[60] J. Yan, G.J. Chang, S.M. Hedetniemi and S.T. Hedetniemi, $k$-path partitions in trees, *Disc. Appl. Math.* **78** (1997) 227–233.

# ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ

Η Μαρία Δ. Χρόνη γεννήθηκε το έτος 1982 και μεγάλωσε στην πόλη των Ιωαννινων. Το έτος 2000 εισήχθη στο τμήμα Πληροφορικής των Θετικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων. Το έτος 2004 αποφοίτησε από την εν λόγω σχολή, ενώ την ίδια χρονιά ξεκίνησε τις σπουδές της στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών του ίδιου τμήματος.