

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εισαγωγή στη
Θεωρία Μέτρου
και
Ολοκλήρωσης

Γεώργιος Λ. Καρακώστας

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006



ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



026000287701



515.43
KAP

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εισαγωγή στη

Θεωρία Μέτρου

και

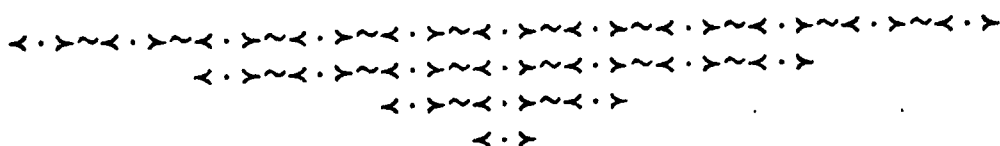
Ολοκλήρωσης

Γεώργιος Α. Καρακώστας



ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006





ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Από σχετικά μαθήματα της Πραγματικής Ανάλυσης γνωρίζουμε την έννοια της χωρητικότητας ενός υποσυνόλου του n -διάστατου πραγματικού χώρου $\mathbb{R}^n$, ή όπως αυτή λέγεται, το μέτρο Lebesgue. Τούτο είναι εκείνο που ονομάζουμε "μήκος" στην ευθεία ($n = 1$), "εμβαδό" στο επίπεδο ($n = 2$), "όγκο" στον χώρο ($n = 3$) και δεν είναι τίποτε άλλο παρά μια (θετική) συνάρτηση ορισμένη πάνω σε μια συλλογή συνόλων, τα οποία μπορούν να "μετρηθούν". Τα σύνολα αυτά είναι τα λεγόμενα κατά Lebesgue μετρήσιμα σύνολα. Στην πραγματικότητα πέρα απ' το μήκος, το εμβαδό και τον όγκο, υπάρχουν και άλλα "μεγέθη" όπως, για παράδειγμα, η μάζα, το πλήθος, η πιθανότητα κ.ά. Μια τέτοια οντότητα, η οποία επίσης είναι ένα μέτρο, σε γενικές γραμμές, συμπεριφέρεται όπως και το μέτρο Lebesgue. Για παράδειγμα, το μέτρο του κενού συνόλου είναι μηδέν, το μέτρο της ένωσης δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων είναι ίσο με το άθροισμα των μέτρων των δύο συνόλων κ. ά.

Μια έννοια, η οποία έχει μεγάλη σχέση με το μέτρο, είναι αυτή της ολοκλήρωσης. Όπως γνωρίζουμε, το κατά Lebesgue ολοκλήρωμα μιας μη αρνητικής πραγματικής συνάρτησης ορισμένης πάνω στην πραγματική ευθεία είναι το εμβαδόν του τμήματος του επιπέδου που περιέχεται μεταξύ του άξονα της μεταβλητής και της καμπύλης που παριστάνει το γράφημα της συνάρτησης. Κάπως έτσι ορίζεται και το ολοκλήρωμα γενικά ως προς κάποιο μέτρο. Η προσέγγιση είναι κλασική: πρώτα ορίζουμε το ολοκλήρωμα για τις λεγόμενες απλές συναρτήσεις (δηλαδή για τις συναρτήσεις που παίρνουν πεπερασμένου πλήθους τιμές) κι έπειτα λαμβάνουμε τα κατά σημείο όρια αυξουσών ακολουθιών.

Το βιβλίο τούτο περιέχει τα πιο βασικά στοιχεία της θεωρίας μέτρου και ολοκλήρωσης. Μεταξύ άλλων παρουσιάζεται και μία από τις μεθόδους κατασκευής μέτρου, το θεώρημα επέκτασης του Καραθεοδωρή, τα κλασικά θεωρήματα σύγκλισης (των Levi, Fatou και Lebesgue), τα θεωρήματα διάσπασης Hahn και Jordan, το θεώρημα Radon-Nikodym, το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz και το θεώρημα του Fubini. Αυτά είναι μερικά από τα πιο απαραίτητα στοιχεία που χρειάζεται κάποιος για να ασχοληθεί σε βάθος με θέματα σχετικά με την Ανάλυση και τις Πιθανότητες. Προορισμός του βιβλίου είναι να αποτελέσει ένα κύριο βοήθημα για το μάθημα της Θεωρίας Μέτρου και Ολοκλήρωσης που διδάσκεται σε φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Για την ενημέρωση του αναγνώστη σημειώνουμε ορισμένα στοιχεία που αφορούν την παρουσίαση του βιβλίου τούτου.

Υπάρχει ενιαία αρίθμηση των Προτάσεων, Λημμάτων και Θεωρημάτων, ενώ οι

Typeset by $\Lambda\lambda\delta\text{-}\tau\epsilon\chi$



ορισμοί δεν αριθμούνται. Οι αποδείξεις τελειώνουν με το σύμβολο $\square$. Η διαφορά συνόλων παριστάνεται με μια πλάγια γραμμή $\setminus$ κι όχι με την κλασική παύλα $-$. Το συμπλήρωμα συνόλου δηλώνεται με τον εκθέτη " c ", δηλαδή το A^c είναι το συμπλήρωμα του A ως προς ένα σύνολο αναφοράς. Τέλος, η εξ ορισμού ισότητα δηλώνεται με το σύμβολο " $:=$ ", δηλαδή, για παράδειγμα,

$$\mu(A) := \int_A f d\nu$$

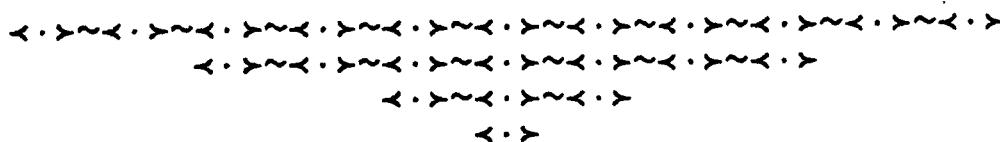
σημαίνει ότι το $\mu(A)$ είναι εξ ορισμού η ποσότητα που αναγράφεται στο δεύτερο μέλος. Τούτο, ισοδύναμα, θα το γράφαμε και ως

$$\int_A f d\nu =: \mu(A).$$

Ιωάννινα, Δεκέμβριος 2001

Γεώργιος Λ. Καφαλώστας





ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

- 1.1. Η επεκτεταμένη ευθεία, 5
- 1.2. Ακολουθίες στοιχείων της επεκτεταμένης ευθείας, 6
- 1.3. Ακολουθίες συνόλων, 6
- 1.4. Άλγεβρα και σ-άλγεβρα συνόλων, 7
- 1.5. Σύνολα Borel, 8
- Προβλήματα, 9

2. ΜΕΤΡΟ

- 2.1. Εισαγωγή, 11
- 2.2. Ορισμός του μέτρου, 13
- 2.3. Παραδείγματα μέτρων, 14
- 2.4. Ιδιότητες μέτρων, 16
- Προβλήματα, 20

3. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΜΕΤΡΩΝ

- 3.1. Εισαγωγή, 21
- 3.2. Εξωτερικό μέτρο, 21
- 3.3. Κατασκευή εξωτερικού μέτρου, 22
- 3.4. μ^* -μετρήσιμα σύνολα, 24
- 3.5. Κατασκευή μέτρου, 30
- 3.6. Παραδείγματα, 30
- 3.7. Μη μετρήσιμα σύνολα, 32
- Προβλήματα, 34

4. ΜΕΤΡΗΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

- 4.1. Εισαγωγή, 35
- 4.2. Ορισμοί, 35
- 4.3. Παραδείγματα μετρήσιμων συναρτήσεων, 36
- 4.4. Ιδιότητες μετρήσιμων συναρτήσεων, 37
- 4.5. Μετρήσιμες συναρτήσεις με τιμές στην επεκτεταμένη πραγματική ευθεία, 39
- 4.6. Η έννοια του σχεδόν παντού, 42
- 4.7. Απλές συναρτήσεις, 43
- Προβλήματα, 46



5. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

- 5.1. Εισαγωγή, 47
- 5.2. Ολοκλήρωμα απλής συνάρτησης, 47
- 5.3. Ολοκλήρωμα στοιχείων του $M^+(\Omega, U)$, 50
- 5.4. Απόλυτη συνέχεια, 56
- Προβλήματα, 57

6. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

- 6.1. Ορισμοί, 58
- 6.2. Ιδιότητες ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, 59
- Προβλήματα, 63

7. ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΑ ΜΕΤΡΑ

- 7.1. Ορισμοί, 66
- 7.2. Ιδιότητες προσημασμένων μέτρων, 66
- 7.3. Διάσπαση του χώρου Ω , 67
- 7.4. Διάσπαση προσημασμένων μέτρων, 69
- 7.5. Απόλυτα συνεχή προσημασμένα μέτρα, 73
- Προβλήματα, 77

8. ΟΙ ΧΩΡΟΙ L_p

- 8.1. Σταθμητοί χώροι, 78
- 8.2. Ο χώρος L_p , 79
- 8.3. Ο χώρος L_∞ , 83
- Προβλήματα, 85

9. ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΤΟΥ RIESZ

- 9.1. Εισαγωγή, 86
- 9.2. Θετικά γραμμικά συναρτησοειδή, 87
- 9.3. Αναπαράσταση γραμμικών συναρτησοειδών, 88
- Προβλήματα, 93

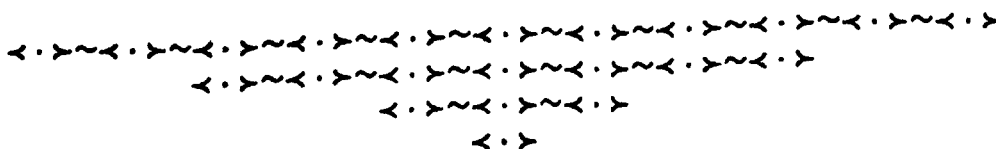
10. ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ FUBINI

- 10.1. Εισαγωγή, 94
- 10.2. Γινόμενο μέτρων, 94
- 10.3. Μονότονη κλάση, 96
- 10.4. Θεώρημα του Fubini, 97
- Προβλήματα, 100

ΒΟΗΘΗΜΑΤΑ, 101

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ, 103.





1. ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1.1. Η ΕΠΕΚΤΕΤΑΜΕΝΗ ΕΥΘΕΙΑ

Στη θεωρία μέτρου είναι σκόπιμο να δεχτούμε ότι πολλές συναρτήσεις "απειρίζονται". Για τον λόγο αυτό επεκτείνουμε την πραγματική ευθεία προσαρτώντας σ' αυτή δύο νέα στοιχεία, το πλήν άπειρο $-\infty$ και το συν άπειρο $+\infty$. Έτσι παίρνουμε την επεκτεταμένη ευθεία των πραγματικών αριθμών

$$\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι τα στοιχεία $-\infty$ και $+\infty$ δεν είναι πραγματικοί αριθμοί.

Επεκτείνοντας τη γνωστή διάταξη $<$ των πραγματικών αριθμών δεχόμαστε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει

$$-\infty < x < +\infty.$$

Μία χαρακτηριστική ιδιότητα που έχει η επεκτεταμένη ευθεία των πραγματικών αριθμών είναι ότι κάθε υποσύνολό της είναι φραγμένο σ' αυτή. Επίσης, παρόλο που το σύνολο $\bar{\mathbb{R}}$ δεν είναι σώμα, συμφωνούμε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x επιτρέπεται να εκτελούνται οι παρακάτω πράξεις:

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty,$$

$$x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty,$$

$$(+\infty) \cdot (\pm\infty) = \pm\infty,$$

$$(-\infty) \cdot (\pm\infty) = \mp\infty,$$

$$(\pm\infty) \cdot x = x \cdot (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ \mp\infty, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{x}{\pm\infty} = 0.$$



1.2. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΗΣ ΕΠΕΚΤΕΤΑΜΕΝΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

Ορισμός. Αν (x_n) είναι μια ακολουθία στοιχείων της επεκτεταμένης ευθείας, το κατώτερο όριο $\liminf x_n$ και το ανώτερο όριο $\limsup x_n$ της ακολουθίας αυτής είναι αντίστοιχα οι ποσότητες

$$\sup_k \inf_{n \geq k} x_n \text{ και } \inf_k \sup_{n \geq k} x_n.$$

Τα δυο αυτά στοιχεία υπάρχουν πάντοτε στο σύνολο $\overline{\mathbb{R}}$ και, αν ταυτίζονται, τότε η κοινή τιμή τους ονομάζεται το όριο της ακολουθίας (x_n) και συμβολίζεται με $\lim x_n$. Αν η ακολουθία (x_n) έχει όρους πραγματικούς αριθμούς, τότε οι έννοιες αυτές ταυτίζονται μ' εκείνες που γνωρίζουμε από μαθήματα του Απειροστικού Λογισμού.

Επίσης μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το κατώτερο όριο και το ανώτερο όριο μπορούν αντίστοιχα να δοθούν και απ' τις σχέσεις

$$\liminf x_n = \lim_k \lim_m \inf \{x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}\}.$$

και

$$\limsup x_n = \lim_k \lim_m \sup \{x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}\}.$$

1.3. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

Έστω (A_n) μια ακολουθία υποσυνόλων ενός μη κενού συνόλου αναφοράς. Σε αναλογία με το κατώτερο και το ανώτερο όριο μιας ακολουθίας στοιχείων της επεκτεταμένης ευθείας, ορίζουμε το κατώτερο όριο $\liminf A_n$ και το ανώτερο όριο $\limsup A_n$ της ακολουθίας (A_n) να είναι αντίστοιχα τα σύνολα

$$\liminf A_n := \bigcup_k \bigcap_{n \geq k} A_n \text{ και } \limsup A_n := \bigcap_k \bigcup_{n \geq k} A_n.$$

Είναι φανερό ότι το σύνολο $\liminf A_n$ απαρτίζεται από εκείνα τα στοιχεία που ανήκουν σε όλα τα σύνολα A_n , $n = 1, 2, \dots$, εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος απ' τα σύνολα αυτά, ενώ το $\limsup A_n$ απαρτίζεται από τα στοιχεία που ανήκουν σε άπειρο πλήθος απ' τα σύνολα A_n , $n = 1, 2, \dots$

Αν τα σύνολα $\liminf A_n$ και $\limsup A_n$ ταυτίζονται, τότε λέμε ότι η ακολουθία (A_n) συγκλίνει και έχει όριο $\lim A_n$ το σύνολο εκείνο που είναι η (κοινή) τιμή των $\liminf A_n$ και $\limsup A_n$.

Για να δούμε τη σχέση που υπάρχει μεταξύ ορίων ακολουθιών συνόλων και ακολουθιών στοιχείων της επεκτεταμένης ευθείας, χρησιμοποιούμε την έννοια της χαρακτηριστικής συνάρτησης.

Υπενθυμίζουμε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός συνόλου A είναι αυτή που ορίζεται με τον τύπο

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A \\ 0, & \text{αν } x \notin A, \end{cases}$$

Έτσι, αν (A_n) είναι μια ακολουθία υποσυνόλων ενός συνόλου X , μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι για κάθε στοιχείο $x \in X$ ισχύουν οι σχέσεις

$$(1) \quad \chi_{\liminf A_n}(x) = \liminf \chi_{A_n}(x), \quad \chi_{\limsup A_n}(x) = \limsup \chi_{A_n}(x).$$



Επομένως το $\lim A_n$ υπάρχει αν και μόνο αν το κατά σημείο όριο της ακολουθίας των συναρτήσεων χ_{A_n} υπάρχει και μάλιστα τότε ισχύει

$$\chi_{\lim A_n}(x) = \lim \chi_{A_n}(x),$$

για κάθε $x \in X$.

1.4. ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ σ -ΑΛΓΕΒΡΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

Εδώ θα δούμε δυο έννοιες οι οποίες είναι θεμελιώδεις στη θεωρία μέτρου. Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{A}$ μια συλλογή υποσυνόλων του Ω .

Ορισμός. Η συλλογή $\mathcal{A}$ είναι μια *άλγεβρα συνόλων*, αν ικανοποιούνται οι εξής συνθήκες:

- (I) $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- (II) Το συμπλήρωμα B^c κάθε συνόλου B της συλλογής ανήκει επίσης στη συλλογή $\mathcal{A}$.
- (III) Αν B, C είναι στοιχεία της συλλογής $\mathcal{A}$, τότε και η ένωση $B \cup C$ είναι στοιχείο της $\mathcal{A}$.

Ορισμός. Μια συλλογή $\mathcal{S}$ υποσυνόλων του Ω είναι μια σ -άλγεβρα στο Ω , αν ικανοποιούνται οι εξής συνθήκες:

- (I) $\emptyset \in \mathcal{S}$.
- (II) Το συμπλήρωμα B^c κάθε συνόλου $B \in \mathcal{S}$ ανήκει επίσης στη συλλογή $\mathcal{S}$.
- (III) Αν (A_n) είναι μια ακολουθία στοιχείων της συλλογής $\mathcal{S}$, τότε και η ένωση $\bigcup A_n$ είναι στοιχείο της $\mathcal{S}$.

Είναι φανερό ότι σε κάθε σύνολο Ω μπορούν να οριστούν δυο τουλάχιστον σ -άλγεβρες συνόλων. Αυτές είναι

- α) η κλάση όλων των υποσυνόλων του Ω , δηλαδή το δυναμοσύνολο $P(\Omega)$ του Ω και
- β) η κλάση που αποτελείται από δυο μόνο σύνολα, το $\emptyset$ και το Ω .

Το σύνολο αναφοράς Ω είναι στοιχείο κάθε σ -άλγεβρας (και επομένως και κάθε άλγεβρας) υποσυνόλων του Ω .

Τέλος, αν (A_n) είναι μια ακολουθία στοιχείων μιας σ -άλγεβρας, τότε στοιχεία της είναι και τα σύνολα

$$\liminf A_n, \limsup A_n, \lim A_n,$$

με την προϋπόθεση ότι το τελευταίο σύνολο υπάρχει.

Έστω $\mathcal{E}$ μια συλλογή υποσυνόλων του Ω . Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι η τομή μιας οικογένειας σ -άλγεβρων είναι επίσης μια σ -άλγεβρα. Επομένως προκύπτει ότι για τη δοθείσα συλλογή $\mathcal{E}$ υπάρχει μια σ -άλγεβρα $\mathcal{S}$ με τις εξής ιδιότητες:

- (1) $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}$,
- (2) αν $\mathcal{S}'$ είναι μια σ -άλγεβρα που ικανοποιεί την (1), τότε $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$.

Ορισμός. Μια τέτοια σ -άλγεβρα $\mathcal{S}'$ (η οποία είναι μοναδική για κάθε $\mathcal{E}$) λέγεται σ -άλγεβρα παραγόμενη απ' τη συλλογή $\mathcal{E}$.

Άλλα πιο ουσιαστικά παραδείγματα σ -άλγεβρων θα δούμε παρακάτω.



1.5. ΣΥΝΟΛΑ BOREL

Υποθέτουμε ότι Ω είναι ένας μετρικός χώρος.

Ορισμός. Αν E είναι μια τυχαία συλλογή υποσυνόλων του Ω ορίζουμε δύο νέες συλλογές συνόλων ως εξής:

E_σ : είναι η συλλογή των ενώσεων όλων των αριθμήσιμων υποσυλλογών της E , και

E_δ : είναι η συλλογή των τομών όλων των αριθμήσιμων υποσυλλογών της E .

Δηλαδή, E_σ είναι η συλλογή όλων των συνόλων που γράφονται ως αριθμήσιμες ενώσεις συνόλων της συλλογής E και η E_δ είναι η συλλογή όλων των συνόλων που γράφονται ως αριθμήσιμες τομές συνόλων της E . Είναι φανερό ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$E \subseteq E_\sigma, \quad E \subseteq E_\delta$$

και

$$(E_\sigma)_\sigma = E_\sigma, \quad (E_\delta)_\delta = E_\delta.$$

Εξάλλου οι πράξεις σ και δ μπορούν να εφαρμοστούν και διαδοχικά και τότε, για παράδειγμα,

αντί του $[(E_\sigma)_\delta]_\sigma$ γράφουμε $E_{\sigma\delta\sigma}$.

Έστω F η συλλογή των κλειστών υποσυνόλων του συνόλου Ω και G η συλλογή όλων των ανοικτών υποσυνόλων του Ω . Επειδή η τομή κάθε αριθμήσιμης συλλογής κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο και η ένωση κάθε αριθμήσιμης συλλογής ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό, παίρνουμε αμέσως ότι

$$F_\delta = F \quad \text{και} \quad G_\sigma = G.$$

1.5.1. Θεώρημα. Ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$F \subseteq F_\sigma, \quad G \subseteq G_\delta, \quad F \subseteq G_\delta, \quad G \subseteq F_\sigma.$$

Απόδειξη. Οι πρώτες δύο σχέσεις είναι προφανείς. Για ν' αποδείξουμε την τρίτη σχέση λαμβάνουμε υπόψη μας ότι ο χώρος Ω είναι μετρικός και θεωρούμε ένα στοιχείο $F \in F$. Τότε για κάθε $n = 1, 2, \dots$ ορίζουμε το σύνολο G_n όλων των στοιχείων που απέχουν από κάποιο στοιχείο x του συνόλου F απόσταση μικρότερη από το $1/n$.

Προφανώς το σύνολο G_n είναι ανοικτό σύνολο και ισχύει $F \subseteq G_n$.

Επίσης, για κάθε $y \in \cap G_n$, και κάθε $n = 1, 2, \dots$ υπάρχει στοιχείο $x_n \in F$ τέτοιο ώστε $|y - x_n| < 1/n$. Τούτο σημαίνει ότι το όριο της ακολουθίας (x_n) είναι το σημείο y και, επειδή το σύνολο F είναι κλειστό, θα έχουμε $y \in F$. Άρα ισχύει

$$F = \bigcap_{n=1}^{+\infty} G_n,$$

πράγμα που σημαίνει ότι $F \in G_\delta$. Το γεγονός ότι $G \subseteq F_\sigma$ μπορεί ν' αποδειχτεί ανάλογα, ή χρησιμοποιώντας την προηγούμενη σχέση και τους νόμους του de Morgan. ◻



Ορισμός. Αν συνεχίσουμε να εφαρμόζουμε διαδοχικά τις πράξεις σ και δ πάνω στα σύνολα F και G , βρίσκουμε δυο ακολουθίες συλλογών οι οποίες απαρτίζουν αυτό που ονομάζουμε *ταξινόμηση συνόλων κατά Borel*, ή απλά, *ταξινόμηση Borel*. Οι ακολουθίες αυτές είναι οι εξής:

$$F^0 := F, F^1 := F_\sigma, F^2 := F_{\sigma\delta}, F^3 := F_{\sigma\delta\sigma} \dots$$

$$G^0 := G, G^1 := G_\delta, G^2 := G_{\delta\sigma}, G^3 := G_{\delta\sigma\delta} \dots$$

1.5.2. Θεώρημα. Για κάθε $n = 1, 2, \dots$ ισχύουν οι σχέσεις

$$F^{n-1} \subseteq F^n, G^{n-1} \subseteq G^n, F^{n-1} \subseteq G^n, G^{n-1} \subseteq F^n.$$

Απόδειξη. Ακολουθούμε την επαγωγική μέθοδο. Ήδη, για $n=1$ όλες οι σχέσεις ισχύουν, όπως είδαμε στο Θεώρημα 1.5.1. Εξάλλου οι δυο πρώτες σχέσεις προκύπτουν εύκολα όπως και στην περίπτωση $n=1$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $F^{n-1} \subseteq G^n$ και θεωρούμε την περίπτωση όπου ο ακέραιος αριθμός n είναι περιττός.

Έστω $A \in F^n$. Τότε το σύνολο A γράφεται ως ένωση μιας ακολουθίας συνόλων $A_k \in F^{n-1}$. Άρα $A_k \in G^n$, άρα $\cup A_k \in G^{n+1}$, αφού n είναι περιττός. Επομένως $F^n \subseteq G^{n+1}$, όταν n είναι περιττός.

Παρόμοια αποδεικνύεται η σχέση αυτή για άρτιο n .

Η τελευταία σχέση προκύπτει ανάλογα. ◊

Ορισμός. Η σ -άλγεβρα B που παράγεται απ' τη συλλογή F λέγεται *άλγεβρα Borel* και κάθε στοιχείο της B λέγεται *σύνολο Borel*. Είναι φανερό ότι για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$ ισχύει

$$F^n \subseteq B \text{ και } G^n \subseteq B.$$

Κάθε σύνολο-στοιχείο των κλάσεων F^n και G^n λέγεται *σύνολο Borel τάξης n* .

Από το Θεώρημα 1.5.2. έπεται ότι η άλγεβρα Borel παράγεται επίσης και απ' τη συλλογή G , των ανοικτών συνόλων. Ειδικά, στην πραγματική ευθεία, η άλγεβρα Borel B περιέχει κάθε σύνολο της μορφής $[a, b]$, (a, b) , $\{a\}$, $(a, b]$ και $[a, b)$, αφού το πρώτο είναι κλειστό, το δεύτερο ανοικτό, ενώ για τα υπόλοιπα παρατηρούμε ότι

$$\{a\} = \cap \left(\left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right), n = 1, 2, \dots \right)$$

$$(a, b] = \cap \left(\left(a, b + \frac{1}{n} \right), n = 1, 2, \dots \right)$$

$$[a, b) = \cap \left(\left(a - \frac{1}{n}, b \right), n = 1, 2, \dots \right).$$

Επομένως κάθε αριθμήσιμο σύνολο είναι σύνολο Borel και άρα το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι σύνολο Borel.

Προβλήματα

1.1. Αν A είναι ένα μη κενό υποσύνολο της επεκτεταμένης πραγματικής ευθείας να αποδειχτεί ότι $\inf A \leq \sup A$. Επίσης να αποδειχτεί ότι ισχύει $\inf \emptyset = -\infty$ και $\sup \emptyset = +\infty$.



1.2. Έστω (x_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Ν' αποδειχτεί ότι το $\limsup x_n$ μπορεί να οριστεί απ' τις εξής συνθήκες:

- (α) αν $a < \limsup x_n$, τότε $a < x_n$ για όπειρο πλήθος δεικτών n , και
 (β) αν $b > \limsup x_n$, τότε $b > x_n$ μόνο για πεπερασμένο πλήθος δεικτών n .

Να διατυπωθούν και να αποδειχτούν ανάλογες συνθήκες και για το $\liminf x_n$.

1.3. Αν $(x_n), (y_n)$ είναι δυο ακολουθίες στοιχείων της επεκτεταμένης πραγματικής ευθείας, ν' αποδειχτεί ότι $\liminf x_n + \liminf y_n \leq \liminf (x_n + y_n) \leq \liminf x_n + \limsup y_n \leq \limsup (x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$. Να δοθούν παραδείγματα στα οποία να ισχύουν οι γνήσιες ανισότητες.

1.4. Ν' αποδειχτούν οι σχέσεις (1) της παραγράφου 1.3.

1.5. Ν' αποδειχτεί ότι κάθε μονότονη ακολουθία συνόλων συγκλίνει.

1.6. Ν' αποδειχτεί ότι κάθε ακολουθία με όρους σύνολα ξένα ανά δύο συγκλίνει προς το κενό σύνολο.

1.7. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας (A_n) η οποία ορίζεται απ' τον τύπο $A_n := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 1/n\}$.

1.8. Να βρεθεί η σ -άλγεβρα στο σύνολο των φυσικών αριθμών που παράγεται απ' τη συλλογή $E := \{N_2\}$, όπου N_2 είναι το σύνολο των άρτιων φυσικών αριθμών.

1.9. Έστω Ω ένα μη αριθμήσιμο σύνολο. Ν' αποδειχτεί ότι η συλλογή όλων των υποσυνόλων A του Ω με την ιδιότητα ότι το A^c ή το A είναι αριθμήσιμο, είναι μια σ -άλγεβρα στο Ω .

1.10. Για κάθε σύνολο Borel B στην ευθεία ορίζουμε τις συλλογές $B_+ := B \cup \{+\infty\}$, $B_- := B \cup \{-\infty\}$, $B_\pm := B \cup \{-\infty, +\infty\}$. Να αποδειχτεί ότι η συλλογή όλων των συνόλων της μορφής $B, B_+, B_-, B_\pm$ είναι μια σ -άλγεβρα στην επεκτεταμένη πραγματική ευθεία, η οποία λέγεται επεκτεταμένη άλγεβρα Borel.

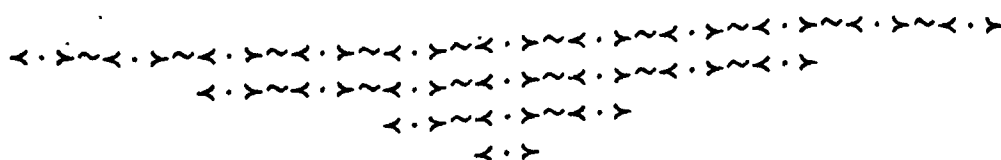
1.11. Έστω Ω ένα απέραντο σύνολο. Ν' αποδειχτεί ότι η συλλογή όλων των υποσυνόλων A του Ω με την ιδιότητα ότι το A ή το A^c είναι πεπερασμένο, είναι μια άλγεβρα στο Ω , αλλά όχι σ -άλγεβρα.

1.12. Αν U είναι μια σ -άλγεβρα, να αποδειχτεί ότι $U_\sigma = U_\delta = U$.

1.13. Έστω $A_n \in G, n = 1, 2, \dots$. Ν' αποδειχτεί ότι $\limsup A_n \in G_\delta$ και $\liminf A_n \in G_{\delta\sigma}$.

1.14. Έστω U μια σ -άλγεβρα στο Ω και Y ένα μη κενό σύνολο. Ν' αποδειχτεί ότι για κάθε συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow Y$, η συλλογή $Y := \{A \subseteq Y : f^{-1}(A) \in U\}$ είναι μια σ -άλγεβρα στο σύνολο Y .





2. ΜΕΤΡΟ

2.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην παράγραφο 1.4 δόθηκε η έννοια της σ -άλγεβρας συνόλων σε ένα σύνολο αναφοράς Ω . Τα στοιχεία της συλλογής αυτής είναι αυτά που λέμε *μετρήσιμα* σύνολα, δηλαδή σύνολα που κατά κάποια έννοια μπορούν να "μετρηθούν". Έτσι, διαισθητικά τουλάχιστον, έχει εισαχθεί η έννοια του μέτρου, δηλαδή μιας συνάρτησης που απεικονίζει κάθε μετρήσιμο σύνολο σε έναν θετικό πραγματικό αριθμό. Οπωσδήποτε, κάθε τέτοια απεικόνιση δεν μπορεί να είναι πάντοτε ένα μέτρο. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι η τιμή 1 είναι το μέτρο (;) κάθε υποσυνόλου ενός συνόλου, δηλαδή $\mu(A) = 1$, για κάθε A . Όμως είναι φυσικό να απαιτήσουμε ώστε δυο ξένα μεταξύ τους σύνολα A και B να έχουν συνολικό μέτρο ίσο με το άθροισμα των μέτρων τους, δηλαδή θα πρέπει

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B),$$

οπότε $1 = 1+1$, πράγμα άτοπο. Επομένως η παραπάνω απεικόνιση δεν ορίζει μέτρο.

Η αφηρημένη έννοια του μέτρου προέρχεται από μια γενίκευση γνωστών εννοιών, όπως είναι το πλήθος, το μήκος, το εμβαδό, ο όγκος, η μάζα, η πιθανότητα κ. ά., οι οποίες χρησιμοποιούνται πολύ συχνά στην καθημερινή μας ζωή. Η μελέτη της γενικής έννοιας του μέτρου βοηθά στην καλύτερη κατανόησή της σε θεωρητικό, αλλά και σε πρακτικό επίπεδο.

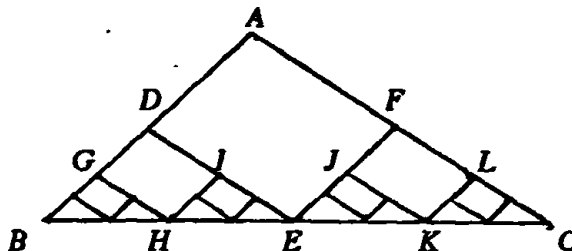
Θα παρουσιάσουμε πρώτα δύο ενδιαφέροντα στοιχεία τα οποία αφορούν το μέτρο "μήκος" και πού από πρώτη άποψη φαίνονται ως παράδοξα φαινόμενα. Η ερμηνεία των φαινομένων τούτων μπορεί να γίνει, αφού πρώτα γνωρίσουμε τις βασικές ιδιότητες του μέτρου.

2.1.1. Παράδειγμα. Θεωρούμε ένα τρίγωνο ABC του οποίου οι πλευρές BC , CA , και AB έχουν μήκη a , b και c αντίστοιχα.

Ενώνουμε με ευθύγραμμα τμήματα τα μέσα D και F των πλευρών AB και AC αντίστοιχα με το μέσον E της πλευράς BC . Επίσης στο τρίγωνο DBE ενώνουμε με ευθύγραμμα τμήματα τα μέσα G και I των πλευρών DB και DE αντίστοιχα με το μέσον H της πλευράς BE . Το ίδιο κάνουμε και με το τρίγωνο FEC , δηλαδή, ενώνουμε με ευθύγραμμα τμήματα τα μέσα J και L των πλευρών FE και FC αντίστοιχα με



το μέσον K της πλευράς EC . Με αυτόν τον τρόπο συνεχίζουμε επαγωγικά, όπως φαίνεται και στο σχήμα.



Στο n -οστό βήμα θα έχει προκύψει μια τεθλασμένη γραμμή L_n με αρχή το σημείο B , πέρας το σημείο C και της οποίας τα ευθύγραμμα τμήματα που την απαρτίζουν χωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Η μία κατηγορία αποτελείται από 2^n ίσα ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα προς την πλευρά AB και με μήκος καθενός ίσο με $2^{-n}c$. Η άλλη κατηγορία αποτελείται επίσης από 2^n ίσα ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα προς την πλευρά AC και με μήκος καθενός ίσο με $2^{-n}b$. Το πλάτος, δηλαδή το εύρος αυτής της ταλαντούμενης καμπύλης είναι ίσο με το $2^{-n}h$, όπου h είναι το ύψος του αρχικού τριγώνου που αντιστοιχεί στην κορυφή A . Είναι εύκολο να δούμε ότι η ακολουθία (L_n) με τις παραπάνω ιδιότητες έχει ομοιόμορφο όριο την ευθεία BC . Ήτοι θα μπορούσαμε να γράψουμε ότι

$$\text{unif.} - \lim L_n = BC.$$

Από την άλλη μεριά όμως παρατηρούμε ότι αν $\mu(L_n)$ παριστάνει το μήκος της καμπύλης L_n , τότε ισχύει αφενός μεν

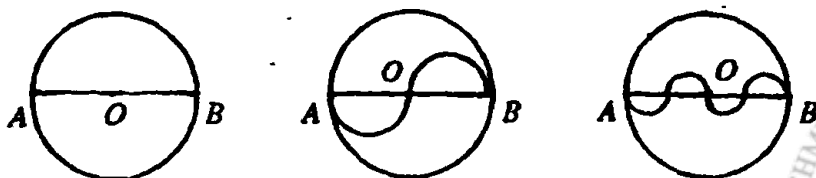
$$\begin{aligned} \lim[\mu(L_n)] &= \dots = \lim[(BG) + (GH) + (HI) + (IE) + (EJ) + (JK) + (KL) + (LC)] = \\ &= \lim[(BD) + (DE) + (EF) + (FC)] = c + b, \end{aligned}$$

αφετέρου δε

$$\mu(\text{unif.} - \lim L_n) = \mu(BC) = A,$$

γεγονός το οποίο θα μπορούσε να οδηγήσει στο άτοπο $a=b+c$!

2.1.2. Παράδειγμα. Θεωρούμε την περιφέρεια ενός κύκλου με κέντρο O και διάμετρο ίση D . Φέρουμε μια διάμετρο AOB του κύκλου και στη συνέχεια γράφουμε κύκλους με διαμέτρους AO και OB αντίστοιχα.



Εφαρμόζουμε την ίδια μέθοδο στους νέους κύκλους και συνεχίζουμε με αυτόν τον τρόπο επαγωγικά. Μετά από κάθε εφαρμογή της μεθόδου παραλείπουμε το κάτω ή το άνω ημικύκλιο, ανάλογα, σε τρόπο ώστε τελικά να έχει προκύψει μια συνεχής καμπύλη του επιπέδου με αρχή το σημείο A και πέρας το B . Στο n -οστό βήμα θα έχει δημιουργηθεί μία καμπύλη K_n αποτελούμενη από 2^n ίσες ημιπεριφέρειες που το μήκος καθεμιάς θα είναι ίσο με $\pi D 2^{-n-1}$. Τώρα, όπως εύκολα διαπιστώνεται, το ομοιόμορφο όριο της ακολουθίας (K_n) είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB . Δηλαδή θα μπορούσαμε να γράψουμε ότι

$$\text{unif.} - \lim K_n = AB.$$

Από την άλλη μεριά όμως παρατηρούμε ότι αν $\mu(K_n)$ παριστάνει το μήκος της καμπύλης K_n , τότε ισχύει, αφενός μεν

$$\lim[\mu(K_n)] = \frac{\pi D}{2},$$

αφετέρου δε

$$\mu(\text{unif.} - \lim K_n) = \mu(AB) = D.$$

Το γεγονός τούτο θα μπορούσε να οδηγήσει στο άτοπο $\pi = 2$.

Επαναλαμβάνουμε ότι η εξήγηση των παραπάνω φαινομένων, που εκ πρώτης όψεως φαίνονται παράδοξα, μπορεί να γίνει με βάση σχετικά στοιχεία της ολοκλήρωσης ως προς μέτρο που θα γνωρίσουμε σε επόμενα κεφάλαια.

Αν δοθεί ένα μέτρο, τότε αμέσως καθορίζεται το σύνολο των μετρήσιμων ως προς αυτό συναρτήσεων, καθώς επίσης και το λεγόμενο ολοκλήρωμα τέτοιων συναρτήσεων. Πριν όμως ασχοληθούμε με αυτές τις επίσης βασικές έννοιες, θα πρέπει να γνωρίσουμε μερικούς τρόπους κατασκευής μέτρων πάνω σε ένα γενικό σύνολο Ω .

Στο κεφάλαιο τούτο θα δοθεί η έννοια του θετικού μέτρου, ή απλά μέτρου, σε αντιδιαστολή με το προσημασμένο μέτρο που θα γνωρίσουμε αργότερα.

2.2. ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ

Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{U}$ μια σ -άλγεβρα στο Ω .

Ορισμός. Το ζεύγος $(\Omega, \mathcal{U})$ θα το ονομάζουμε *μετρήσιμο χώρο* και κάθε σύνολο A της συλλογής $\mathcal{U}$ το λέμε *μετρήσιμο ως προς $\mathcal{U}$* , ή *$\mathcal{U}$ -μετρήσιμο σύνολο*. Επίσης τότε λέμε ότι το σύνολο Ω , αν εφοδιαστεί με τη σ -άλγεβρα $\mathcal{U}$, γίνεται ένας *μετρήσιμος χώρος*.

Θεωρούμε μια συνάρτηση

$$\mu : \mathcal{U} \rightarrow [0, +\infty]$$

η οποία απεικονίζει το τυχαίο σύνολο $A \in \mathcal{U}$ σε έναν μη αρνητικό πραγματικό αριθμό ή το $+\infty$. Θα λέμε ότι η συνάρτηση μ είναι ένα μέτρο στο Ω , αν ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

$$(c.1) \mu(\emptyset) = 0.$$



(c.2) Για κάθε αριθμήσιμη συλλογή $A_n, n = 1, 2, \dots$ ξένων ανα δύο συνόλων της σ -άλγεβρας $\mathcal{U}$ (δηλαδή τέτοιων ώστε $A_n \cap A_m = \emptyset$, αν $n \neq m$), ισχύει

$$(1) \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

Ορισμός. Η ιδιότητα (c.2) ονομάζεται *αριθμήσιμη προσθετικότητα*. Η τιμή $\mu(A)$ ενός συνόλου A μέσω της συνάρτησης μ λέγεται συνήθως *μέτρο* του A .

Επειδή εξ ορισμού δεχόμαστε ότι το πεδίο τιμών μιας συνάρτησης - μέτρου είναι το ημι-απέραντο διάστημα $[0, +\infty]$, θα πρέπει κατ' ανάγκη να δεχτούμε ότι και το σημείο $+\infty$ μπορεί να θεωρηθεί ως η τιμή του μέτρου κάποιου μετρήσιμου συνόλου. Είναι προφανές ότι από μαθηματικής σκοπιάς, η εμφάνιση της τιμής $+\infty$ στο δεξιό μέλος της (1) σημαίνει ότι η σειρά $\sum \mu(A_n)$ απειρίζεται θετικά, οπότε και το μέτρο του αντίστοιχου συνόλου $\bigcup A_n$ πρέπει να είναι $+\infty$.

Ορισμός. Αν ένα μέτρο μ δεν παίρνει την τιμή $+\infty$, λέγεται *πεπερασμένο*, ενώ, αν υπάρχει ακολουθία (Ω_n) μετρήσιμων συνόλων με την ιδιότητα ότι

$$\Omega = \bigcup \Omega_n \text{ και } \mu(\Omega_n) < +\infty, \quad n = 1, 2, \dots,$$

τότε το μέτρο μ λέγεται *σ -πεπερασμένο*.

Είναι φανερό ότι κάθε πεπερασμένο μέτρο είναι σ -πεπερασμένο.

Ορισμός. Αν $(\Omega, \mathcal{U})$ είναι ένας μετρήσιμος χώρος και μ είναι ένα μέτρο στο Ω , η τριάδα $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ ονομάζεται *χώρος μέτρου*.

2.3. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΜΕΤΡΩΝ

Στο εδάφιο τούτο θα δούμε μερικά απλά παραδείγματα μέτρων. Περισσότερα παραδείγματα θα συναντήσουμε στο εδάφιο 3.6.

2.3.1. Πληθικός αριθμός. Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{U}$ η συλλογή όλων των υποσυνόλων του Ω , δηλαδή το δυναμοσύνολο $P(\Omega)$ του Ω . Τότε η $\mathcal{U}$ είναι μια σ -άλγεβρα στο Ω . Για κάθε $A \in \mathcal{U}$ ορίζουμε τη συνάρτηση με τύπο

$$\mu(A) := \text{card } A;$$

όπου $\text{card } A$ (cardinality) είναι το πλήθος των στοιχείων του A , αν τούτο είναι πεπερασμένο και $\text{card } A$ είναι το σημείο $+\infty$, αν το A είναι απέραντο. Η συνάρτηση μ ορίζει ένα μέτρο στο σύνολο Ω . Το μέτρο αυτό συνήθως ονομάζεται *διακριτό* και, όπως θα δούμε αργότερα, ολοκληρώματα ως προς το μέτρο τούτο ισοδυναμούν με σειρές. Έτσι μπορούμε να μελετούμε ολοκληρώματα και σειρές ταυτόχρονα.

2.3.2. Το μηδενικό μέτρο. Αν $(\Omega, \mathcal{U})$ είναι ένας μετρήσιμος χώρος, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\mu(A) := 0, \quad A \in \mathcal{U}.$$

Αυτή ορίζει το μηδενικό μέτρο στο Ω .



2.3.3. Το μέτρο $+\infty$. Αν $(\Omega, \mathcal{U})$ είναι ένας μετρήσιμος χώρος, τότε ο τύπος

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{αν } A = \emptyset, \\ +\infty & \text{αν } A \neq \emptyset, \end{cases}$$

ορίζει το λεγόμενο $+\infty$ -μέτρο στο Ω , οποιαδήποτε και αν είναι η σ -άλγεβρα $\mathcal{U}$.

2.3.4. Μέτρο Dirac. Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{U}$ η σ -άλγεβρα όλων των υποσυνόλων του Ω . Για κάθε σταθερό $x \in \Omega$ ορίζουμε

$$\mu_x(A) := \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A, \\ 0, & \text{αν } x \notin A, \end{cases}$$

Η συνάρτηση μ_x είναι ένα (πεπερασμένο) μέτρο στο Ω και λέγεται *μέτρο Dirac*. Στο σημείο x λέμε ότι το μέτρο τούτο έχει ένα "αισιό". Αναφερόμενοι στη μάζα ενός σώματος το μέτρο τούτο δηλώνει ότι στο σημείο x του σώματος συγκεντρώνεται ολόκληρη η μάζα του. Άρα αποκλείεται η περίπτωση ομογενούς σώματος, όπου η μάζα κατανέμεται ομοιόμορφα σε όλα τα σημεία του. Το μέτρο τούτο παίζει έναν πολύ σημαντικό ρόλο στις εφαρμογές.

2.3.5. Μέτρο βάρους. Έστω $X := \{x_1, x_2, \dots\}$ ένα σύνολο θετικών πραγματικών αριθμών τέτοιων ώστε $L := x_1 + x_2 + \dots < +\infty$. Έστω επίσης (p_i) μια ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών και το σύνολο των φυσικών αριθμών. Για κάθε υποσύνολο A του $\mathbb{N}$ ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\mu(A) := \frac{1}{L} \sum_{i \in A} p_i x_i.$$

Τότε ο $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ είναι ένας χώρος μέτρου. Το μ είναι ένα σ -πεπερασμένο μέτρο στο $\mathbb{N}$. Αν όμως η ακολουθία (p_i) είναι φραγμένη, τότε το μ είναι πεπερασμένο.

2.3.6. Μέτρο επίδοσης. Μια ειδική περίπτωση του μέτρου το οποίο είδαμε στο παράδειγμα 2.3.5 είναι αυτό που υιοθέτησε το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων το έτος 1986 για τον υπολογισμό του βαθμού πτυχίου. Έστω $X := \{1, 2, \dots, k\}$ το σύνολο των μαθημάτων ενός προγράμματος σπουδών και έστω x_i ο αριθμός των διδακτικών μονάδων του μαθήματος i . Έστω επίσης p_i ο βαθμός που πέτυχε κάποιος σπουδαστής στο μάθημα i . Για κάθε σύνολο μαθημάτων $A := \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ ορίζουμε το *μέτρο επίδοσης*, ή, απλά, την *επίδοση* στο σύνολο των μαθημάτων A , να είναι ο αριθμός

$$\mu(A) := \frac{x_{i_1} p_{i_1} + x_{i_2} p_{i_2} + \dots + x_{i_n} p_{i_n}}{x_1 + x_2 + \dots + x_k}.$$

Η συνάρτηση μ είναι ένα πεπερασμένο μέτρο στο X με σ -άλγεβρα τη συλλογή όλων των υποσυνόλων του X . Η τελική επίδοση του σπουδαστή είναι ο αριθμός $\mu(X)$, δηλαδή το μέτρο όλου του χώρου των μαθημάτων του προγράμματος. Αν p είναι ο μέγιστος βαθμός που μπορεί κάποιος να πετύχει (δηλαδή, το "άριστα"), τότε βλέπουμε ότι

$$\mu(X) \leq \frac{p(x_1 + x_2 + \dots + x_k)}{x_1 + x_2 + \dots + x_k} = p,$$



ενώ ισχύει $\mu(X) = p$, μόνο όταν $p_i = p$, για κάθε μάθημα i . Δηλαδή το άριστα p θα είναι τελικός βαθμός μόνο αν σε κάθε μάθημα ο σπουδαστής πετύχει άριστα.

2.3.7. Πιθανότητα. Χώρος πιθανότητας είναι ένας χώρος μέτρου $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ με $P(\Omega) = 1$. Το μέτρο P στον χώρο αυτό λέγεται *μέτρο πιθανότητας*, ενώ τα στοιχεία - σύνολα της σ -άλγεβρας $\mathcal{U}$ λέγονται *ενδεχόμενα*. Τότε $P(A)$ είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου $A \in \mathcal{U}$. Μια πραγματική συνάρτηση $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται *τυχαία μεταβλητή*, αν για κάθε $A \in \mathcal{U}$ το $Y(A)$ είναι ένα σύνολο Borel. Σύνολα της μορφής

$$\{\omega : Y(\omega) \leq x\} \text{ ή } \{\omega : Y(\omega) \in B\}$$

γράφονται πολλές φορές και ως

$$\{Y \leq x\} \text{ ή } \{Y \in B\}$$

αντίστοιχα. Επίσης $P(Y = x)$ δηλώνει το μέτρο του συνόλου $\{\omega : Y(\omega) = x\}$.

Σε κάθε τυχαία μεταβλητή Y αντιστοιχεί η *συνάρτηση κατανομής* F_Y , δηλαδή η συνάρτηση $F_Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται με τον τύπο

$$F_Y(x) := P(Y \leq x).$$

Η συνάρτηση αυτή είναι αύξουσα και τέτοια ώστε $F_Y(-\infty) = 0$ και $F_Y(+\infty) = 1$. Η θεωρία πιθανοτήτων ενδιαφέρεται κυρίως για τέτοιες συναρτήσεις, δηλαδή για συναρτήσεις κατανομής και για τις ιδιότητες που αυτές έχουν. Αυτή η έμφαση στις συναρτήσεις κατανομής είναι ακριβώς εκείνο που διακρίνει τη θεωρία πιθανοτήτων από τη γενική θεωρία μέτρου.

2.4. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΡΩΝ

Εδώ θα γνωρίσουμε ορισμένες ιδιότητες των μέτρων.

2.4.1. Πρόταση. Εστω $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Για κάθε $A, B \in \mathcal{U}$ έχουμε ότι

$$\text{αν } A \subseteq B, \text{ τότε } \mu(A) \leq \mu(B).$$

Επιπλέον, αν $\mu(A) < +\infty$, τότε

$$(1) \quad \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

Απόδειξη. Αφού τα σύνολα A και $B \setminus A$ είναι ξένα μεταξύ τους και τέτοια ώστε $A \cup (B \setminus A) = B$, έπεται ότι

$$(2) \quad \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A).$$

Αλλά ισχύει $\mu(B \setminus A) \geq 0$, οπότε $\mu(B) \geq \mu(A)$. Επιπλέον, αν $\mu(A) < +\infty$, τότε, απ' τη (2), παίρνουμε την (1). $\diamond$



2.4.2. Πρόταση. Αν $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ είναι ένας χώρος μέτρου, τότε για κάθε ακολουθία (A_n) συνόλων της σ -άλγεβρας $\mathcal{U}$ τέτοια ώστε $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ ισχύει

$$(3) \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n).$$

Απόδειξη. Είναι φανερό ότι αν για κάποιο μετρήσιμο σύνολο A_n ισχύει $\mu(A_n) = +\infty$, τότε η σχέση (3) αληθεύει, αφού και τα δύο μέλη της είναι ίσα με $+\infty$. Έτσι, υποθέτουμε ότι ισχύει $\mu(A_n) < +\infty$, για κάθε $n = 1, 2, \dots$. Θέτουμε

$$A'_0 := \emptyset$$

$$A'_1 := A_1$$

$$A'_2 := A_2 \setminus A_1$$

...

$$A'_n := A_n \setminus A_{n-1}$$

και παρατηρούμε ότι τα A'_n , $n = 1, 2, \dots$ είναι ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα, τέτοια ώστε

$$A_n = A'_1 \cup A'_2 \cup \dots \cup A'_n.$$

Άρα έχουμε

$$(4) \quad \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A'_n.$$

Επειδή το μέτρο μ έχει την ιδιότητα της αριθμήσιμης προσθετικότητας, απ' την (4) παίρνουμε

$$(5) \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A'_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A'_n).$$

Λόγω της Πρότασης 2.4.1, για κάθε $n = 1, 2, \dots$, έχουμε $\mu(A'_n) = \mu(A_n) - \mu(A_{n-1})$, όπου θέτουμε $A_0 = \emptyset$, οπότε η σχέση (5) γράφεται ως

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} [\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})].$$

Το δεύτερο μέλος είναι μια τηλεσκοπική σειρά της οποίας το άθροισμα είναι το $\lim_n \mu(A_n)$. Τούτο αποδεικνύει την Πρόταση. ◻

2.4.3. Πρόταση. Αν $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ είναι ένας χώρος μέτρου, τότε για κάθε ακολουθία (B_n) συνόλων της σ -άλγεβρας $\mathcal{U}$ τέτοια ώστε $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$ και $\mu(B_1) < +\infty$ ισχύει

$$(6) \quad \mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_n \mu(B_n).$$

Απόδειξη. Θέτοντας

$$A_n := B_1 \setminus B_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

παρατηρούμε ότι $A_n \in \mathcal{U}$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$ και επιπλέον ότι $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$. Έτσι, η προηγούμενη Πρόταση 2.4.2 εφαρμόζεται, οπότε παίρνουμε ότι

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n).$$



Αλλά ισχύει ότι

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (B_1 \setminus B_n) = B_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n.$$

Έτσι, τελικά, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) &= \mu(B_1) - \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \mu(B_1) - \lim_n \mu(A_n) = \\ &= \lim_n [\mu(B_1) - \mu(A_n)] = \lim_n \mu(B_1 \setminus A_n) = \lim_n \mu(B_n). \end{aligned} \quad \diamond$$

Η αριθμήσιμη προσθετικότητα καθώς επίσης και οι προηγούμενες Προτάσεις αναφέρονται σε ακολουθίες συνόλων τα οποία είναι ξένα ανά δύο, ή οι ακολουθίες αυτές είναι μονότονες. Στην περίπτωση που έχουμε μια τυχαία ακολουθία μετρήσιμων συνόλων μπορούμε να εκτιμήσουμε ένα άνω φράγμα του μέτρου της ένωσης των συνόλων αυτών.

2.4.4. Πρόταση. Αν $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ είναι ένας χώρος μέτρου, τότε για κάθε ακολουθία (A_n) συνόλων της σ -άλγεβρας $\mathcal{U}$ ισχύει

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι τα μετρήσιμα σύνολα

$$\begin{aligned} A'_1 &:= A_1, \\ A'_2 &:= A_2 \setminus A_1, \\ A'_3 &:= A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \\ &\dots \\ A'_n &:= A_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}) \\ &\dots \end{aligned}$$

είναι ξένα ανά δύο και τέτοια ώστε $A'_n \subseteq A_n$, $n = 1, 2, \dots$ και

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A'_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

Επομένως, απ' την αριθμήσιμη προσθετικότητα του μέτρου και την Πρόταση 2.4.1, παίρνουμε ότι

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A'_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A'_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n). \quad \diamond$$

2.4.5. Πρόταση. Αν $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ είναι ένας χώρος μέτρου και (A_n) είναι μια ακολουθία στοιχείων της συλλογής $\mathcal{U}$, τότε ισχύει

$$\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n).$$

Απόδειξη. Για κάθε $n = 1, 2, \dots$ θέτουμε

$$B_n := A_n \cap A_{n+1} \cap \dots = \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k.$$



οπότε παρατηρούμε ότι

$$B_n \in \mathcal{U} \text{ και } B_n \subseteq A_n.$$

Άρα $\mu(B_n) \leq \mu(A_n)$, για κάθε $n=1, 2, \dots$ και επομένως

$$\liminf \mu(B_n) \leq \liminf \mu(A_n).$$

Αλλά η ακολουθία (B_n) είναι αύξουσα, οπότε, απ' την Πρόταση 2.4.2, παίρνουμε τελικά

$$\begin{aligned} \liminf \mu(A_n) &\geq \liminf \mu(B_n) = \lim_n \mu(B_n) = \\ &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k\right) = \mu(\liminf A_n). \end{aligned} \quad \diamond$$

2.4.6. Πρόταση. Αν $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ είναι ένας χώρος μέτρου και (A_n) είναι μια ακολουθία στοιχείων της σ -άλγεβρας $\mathcal{U}$ τέτοια ώστε

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) < +\infty,$$

τότε

$$\mu(\limsup A_n) \geq \limsup \mu(A_n).$$

Απόδειξη. Θέτουμε

$$A'_k := \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \setminus A_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

οπότε πρέπει

$$\mu(A'_k) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) - \mu(A_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Έτσι, εφαρμόζοντας την προηγούμενη Πρόταση 2.4.5, παίρνουμε

$$\mu(\liminf A'_n) \leq \liminf \mu(A'_n).$$

Αλλά ισχύει ότι

$$A_k = \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \setminus A'_k,$$

οπότε και

$$\mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) - \mu(A'_k).$$

Άρα θα έχουμε

$$\begin{aligned} \limsup \mu(A_n) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) - \liminf \mu(A'_n) \leq \\ &\leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) - \mu(\liminf A'_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \setminus \liminf A'_n\right), \end{aligned}$$

οπότε τελικά

$$\limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n). \quad \diamond$$

2.4.7. Πρόταση. Αν $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ είναι ένας χώρος μέτρου και (A_n) είναι μια ακολουθία στοιχείων της σ -άλγεβρας $\mathcal{U}$ τέτοια ώστε

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) < +\infty$$



και η ακολουθία (A_n) συγκλίνει, τότε και η ακολουθία $(\mu(A_n))$ συγκλίνει και μάλιστα ισχύει

$$\lim_n \mu(A_n) = \mu(\lim_n A_n).$$

Απόδειξη. Τούτο προκύπτει απ' τα προηγούμενα. Πραγματικά, απ' τις Προτάσεις 2.4.5 και 2.4.6 έχουμε

$$\begin{aligned} \mu(\lim_n A_n) = \mu(\liminf A_n) &\leq \liminf \mu(A_n) \leq \\ &\leq \limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n) = \mu(\lim_n A_n). \end{aligned}$$

Επειδή ο πρώτος και ο τελευταίος αριθμός της σειράς αυτής των ανισοτήτων είναι ίσοι, έπεται ότι ισχύει παντού η ισότητα, πράγμα που αποδεικνύει το συμπέρασμα. ◻

Προβλήματα

2.1. Ρίχνοντας ένα ζάρι έχουμε μία απ' τις ενδείξεις 1, 2, ..., 6. Σύμφωνα με το Παράδειγμα 2.3.7 να βρεθεί το αντίστοιχο μέτρο πιθανότητας.

2.2. Έστω (u_n) μια ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών. Για κάθε σύνολο A φυσικών αριθμών ορίζουμε το $\mu(A)$ να είναι το άθροισμα όλων των στοιχείων της ακολουθίας (u_n) που έχουν δείκτες από το A . Ν' αποδειχτεί ότι μ είναι ένα σ -πεπερασμένο μέτρο. Πότε τούτο είναι πεπερασμένο;

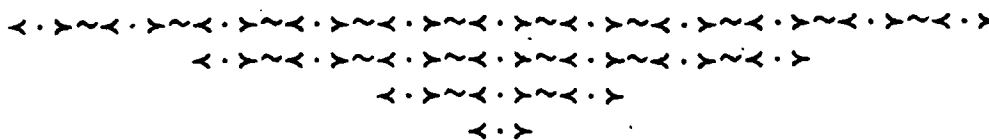
2.3. Έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο στην σ -άλγεβρα Borel της πραγματικής ευθείας. Ν' αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $g(x) := \mu(-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$ είναι αύξουσα και δεξιά συνεχής. Επίσης να αποδειχτεί ότι το μέτρο της ευθείας $\mathbb{R}$ είναι το όριο της $g(x)$, όταν το x τείνει προς το $+\infty$.

2.4. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και έστω $\gamma : P(X) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε $0 \leq \gamma(A) \leq \gamma(A \cup B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$, για κάθε $A, B \subseteq X$. Έστω $\mathcal{S}$ η συλλογή όλων των συνόλων $E \subseteq X$ που ικανοποιούν τη σχέση $\gamma(A) = \gamma(A \cap E) + \gamma(A \setminus E)$, για κάθε $A \subseteq X$. Αν $\mathcal{S} \neq \emptyset$, ν' αποδειχτεί ότι $\mathcal{S}$ είναι μια σ -άλγεβρα στο X και η γ είναι προσθετική πάνω στην $\mathcal{S}$.

2.5. Έστω μ ένα σ -πεπερασμένο μέτρο στο Ω , ορισμένο πάνω σε μια σ -άλγεβρα $\mathcal{U}$. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία (Ω_n) τέτοια ώστε $\Omega_n \in \mathcal{U}$, $\mu(\Omega_n) < +\infty$, $n = 1, 2, \dots$ και $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots$

2.6. Θεωρούμε ένα σύνολο Ω και τα σ -πεπερασμένα μέτρα $\mu_1, \dots, \mu_k$ στο Ω ορισμένα στην ίδια σ -άλγεβρα $\mathcal{U}$. Ν' αποδειχτεί ότι υπάρχει μια ακολουθία (Ω_n) στοιχείων της σ -άλγεβρας $\mathcal{U}$ τέτοια ώστε $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots$ και $\mu_i(\Omega_n) < +\infty$, $i = 1, 2, \dots, k$.





3. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΜΕΤΡΩΝ

3.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε την έννοια του (θετικού) μέτρου που είναι ορισμένο πάνω σε μια σ -άλγεβρα. Εδώ θα δούμε με ποιόν τρόπο μπορεί να κατασκευαστεί ένα μέτρο. Προς τούτο θα αναζητήσουμε πρώτα ποια απ' τις πραγματικές συναρτήσεις που ορίζονται πάνω στο δυναμοσύνολο $P(\Omega)$ έχει τις ιδιότητες του μέτρου εξετάζοντας αυτό που λέμε εξωτερικό μέτρο. Τούτο είναι μια συνάρτηση με τιμές στο σύνολο $[0, +\infty]$ η οποία είναι ορισμένη πάνω σ' ολοκληρο το δυναμοσύνολο του Ω . Στη συνέχεια θα δούμε ότι ο περιορισμός του εξωτερικού μέτρου πάνω σε μια κατάλληλη σ -άλγεβρα οδηγεί σ' ένα μέτρο.

3.2. ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΜΕΤΡΟ

Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο και $P(\Omega)$ το δυναμοσύνολο του Ω . Μια συνάρτηση

$$\mu^* : P(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$$

θα ονομάζεται *εξωτερικό μέτρο* στο Ω , αν ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

(C.1) $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(C.2) Για κάθε ακολουθία υποσυνόλων (A_n) του Ω ισχύει

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n).$$

(C.3) Για κάθε ζεύγος υποσυνόλων A, B του Ω

$$\text{αν ισχύει } A \subseteq B, \text{ τότε } \mu^*(A) \leq \mu^*(B).$$

Είναι φανερό ότι τα αξιώματα ενός εξωτερικού μέτρου ικανοποιούνται από το μέτρο και επομένως ένα μέτρο είναι εξωτερικό μέτρο.



3.3. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΜΕΤΡΟΥ

Ορισμός. Έστω C μια μη κενή συλλογή υποσυνόλων του Ω . Θα λέμε ότι η C είναι μια *ακολουθιακή κάλυψη* στο Ω , αν ισχύουν οι εξής συνθήκες:

- (α) $\emptyset \in C$,
- (β) Για κάθε $A \subseteq \Omega$ υπάρχει μια ακολουθία (A_n) στοιχείων της συλλογής C τέτοια ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$.

Ένα βασικό παράδειγμα ακολουθιακής κάλυψης στο σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι η συλλογή όλων των φραγμένων ανοικτών διαστημάτων. Πραγματικά, κάθε υποσύνολο πραγματικών αριθμών περιέχεται στην ένωση αριθμήσιμης συλλογής ανοικτών διαστημάτων.

Έστω, τώρα, C μια ακολουθιακή κάλυψη και $\tau : C \rightarrow [0, +\infty]$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε $\tau(\emptyset) = 0$. Για κάθε $A \subseteq \Omega$ ορίζουμε το σύνολο

$$A^C := \{(A_n) : A_n \in C \text{ και } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\}$$

και θέτουμε

$$(1) \quad \mu^*(A) := \inf \left\{ \sum \tau(A_n) : (A_n) \in A^C \right\}.$$

Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση μ^* είναι πάντοτε ένα εξωτερικό μέτρο. Πραγματικά, έχουμε το εξής συμπέρασμα:

3.3.1. Θεώρημα. Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο, C μια ακολουθιακή κάλυψη στο Ω και $\tau : C \rightarrow [0, +\infty]$ μια συνάρτηση με $\tau(\emptyset) = 0$. Τότε η συνάρτηση μ^* η οποία ορίζεται με τη σχέση (1) είναι ένα εξωτερικό μέτρο.

Απόδειξη. Η συνθήκη (C.1) της παραγράφου 3.2 ικανοποιείται αυτόματα, αφού ισχύει $\tau(\emptyset) = 0$. Επίσης για κάθε $A \subseteq \Omega$ ισχύει $\mu^*(A) \geq 0$, επειδή και η συνάρτηση τ παίρνει μη αρνητικές τιμές.

Θ' αποδείξουμε τη συνθήκη (C.2). Προς τούτο, θεωρούμε μια ακολουθία (A_n) υποσυνόλων του Ω και ένα $\epsilon > 0$. Επειδή η C είναι ακολουθιακή κάλυψη στο Ω , για κάθε $n = 1, 2, \dots$ υπάρχει μια ακολουθία $(A_{nk}) \in A_n^C$ τέτοια ώστε

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \tau(A_{nk}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Επειδή η συλλογή $\{A_{nk}\}$ είναι αριθμήσιμη, μπορούμε να την παραστήσουμε ως μια ακολουθία με έναν δείκτη, έστω (B_m) . Αλλά τότε

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_{nk} = \bigcup_{m=1}^{+\infty} B_m$$

και επομένως

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{m=1}^{+\infty} \tau(B_m) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \tau(A_{nk}) \leq$$



$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\mu'(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n} \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu'(A_n) + \epsilon,$$

απ' όπου προκύπτει η (C.2), αφού το ϵ είναι αυθαίρετο.

Για να αποδείξουμε την ιδιότητα (C.3), υποθέτουμε ότι $A \subseteq B$ και θεωρούμε ένα $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει ακολουθία (A_n) στη συλλογή $\mathcal{C}$ με

$$B \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \tau(A_n) \leq \mu'(B) + \epsilon.$$

Αλλά, επειδή και $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, έπεται ότι

$$\mu'(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \tau(A_n) \leq \mu'(B) + \epsilon,$$

απ' όπου προκύπτει η (C.3), αφού ϵ είναι τυχαίο. $\diamond$

3.3.2. Θεώρημα. Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο, $\mathcal{C}$ μια ακολουθιακή κάλυψη στο Ω και $\tau_1, \tau_2 : \mathcal{C} \rightarrow [0, +\infty]$ δύο συναρτήσεις τέτοιες ώστε $\tau_1(\emptyset) = \tau_2(\emptyset) = 0$. Αν μ_1^* και μ_2^* είναι τα αντίστοιχα εξωτερικά μέτρα που ορίζονται απ' τις συναρτήσεις τ_1, τ_2 με τον τύπο (I) και ισχύει ότι $\mu_1^*(A) = \mu_2^*(A)$, για κάθε $A \in \mathcal{C}$, τότε $\mu_1^* = \mu_2^*$.

Απόδειξη. Είναι πρώτα φανερό ότι $\mu_i^*(A) \leq \tau_i^*(A)$, $i = 1, 2$, για κάθε $A \in \mathcal{C}$. Έστω $A \subseteq \Omega$ σταθερό και θεωρούμε ένα $\epsilon > 0$. Υπάρχει, επομένως, μια ακολουθία $(A_n) \in \mathcal{C}$ τέτοια ώστε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \tau_1(A_n) \leq \mu_1^*(B) + \epsilon.$$

Αλλά ισχύει $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, οπότε

$$\mu_2^*(A) \leq \mu_2^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_2^*(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_1^*(A_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \tau_1(A_n) \leq \mu_1^*(A) + \epsilon.$$

Τούτο συνεπάγεται ότι

$$\mu_2^*(A) \leq \mu_1^*(A).$$

Εναλλάσσοντας τον ρόλο των δεικτών 1, 2 παίρνουμε και την αντίστροφη ανισότητα, οπότε προκύπτει η ισότητα. $\diamond$

Θα δούμε τώρα τι συμβαίνει στην περίπτωση όπου $\mathcal{C}$ είναι μια άλγεβρα. Είναι φανερό ότι κάθε άλγεβρα $\mathcal{A}$ (και κάθε σ -άλγεβρα) είναι μια ακολουθιακή κάλυψη, αφού $\Omega \in \mathcal{A}$.

Ορισμός. Αν $\mathcal{A}$ είναι μια άλγεβρα, θα λέμε ότι μια συνάρτηση $\tau : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ είναι ένα μέτρο ορισμένο στην άλγεβρα $\mathcal{A}$, αν ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

$$(i)' \tau(\emptyset) = 0.$$



(ii)' Για κάθε αριθμήσιμη συλλογή A_n , $n = 1, 2, \dots$ ξένων ανά δύο συνόλων της άλγεβρας $\mathcal{A}$ με την ιδιότητα ότι η ένωση όλων των στοιχείων της συλλογής να είναι επίσης στοιχείο της $\mathcal{A}$, ισχύει

$$\tau\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau(A_n).$$

Έχοντας μια άλγεβρα και ένα μέτρο τ ορισμένο πάνω σ' αυτή μπορούμε να πάρουμε το αντίστοιχο εξωτερικό μέτρο με τον τύπο (1), αφού, επαναλαμβάνουμε ότι, η άλγεβρα είναι ακολουθιακή κάλυψη στο Ω . Τότε μάλιστα τούτο το εξωτερικό μέτρο ταυτίζεται με το τ πάνω στα σύνολα της άλγεβρας. Πραγματικά έχουμε το εξής συμπέρασμα:

3.3.3. Θεώρημα. Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο, $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα στο Ω και τ ένα μέτρο ορισμένο στην άλγεβρα $\mathcal{A}$. Αν μ^* είναι το εξωτερικό μέτρο που ορίζεται με τον τύπο (1), τότε για κάθε σύνολο A της άλγεβρας $\mathcal{A}$ ισχύει

$$\mu^*(A) = \tau(A).$$

Απόδειξη. Έστω $A \in \mathcal{A}$. Τότε είναι φανερό ότι $\mu^*(A) \leq \tau(A)$. Επίσης αν (A_n) είναι μια ακολουθία στοιχείων της συλλογής $\mathcal{A}$ με

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

θα ισχύει

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (A \cap A_n),$$

όπου $A \cap A_n \in \mathcal{A}$, για κάθε $n = 1, 2, \dots$. Άρα, αφού τ είναι μέτρο ορισμένο πάνω στην άλγεβρα $\mathcal{A}$, θα έχουμε

$$\tau(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \tau(A \cap A_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \tau(A_n)$$

και επομένως $\tau(A) \leq \mu^*(A)$. Επειδή ισχύει και $\mu^*(A) \leq \tau(A)$, έχουμε την ισότητα που θέλαμε ν' αποδείξουμε. ◊

3.4. μ^* - ΜΕΤΡΗΣΙΜΑ ΣΥΝΟΛΑ

Έστω μ^* ένα εξωτερικό μέτρο στο Ω .

Ορισμός. Ένα σύνολο $E \subseteq \Omega$ είναι *μετρήσιμο* ως προς μ^* , ή μ^* -*μετρήσιμο*, αν για κάθε $A \subseteq \Omega$ ισχύει η συνθήκη του Καραθεοδωρή:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E).$$

Με άλλα λόγια, ένα σύνολο E είναι μ^* -μετρήσιμο, αν κάθε σύνολο $A \subseteq \Omega$ "τέμνεται" απ' το E σε δύο σύνολα όπου το μ^* είναι προσθετικό. Θα παριστάνουμε με $\mathcal{N}$ τη



συλλογή όλων των μ^* -μετρήσιμων υποσυνόλων του Ω . Κύριος σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι η συλλογή $\mathcal{N}$ είναι μια σ -άλγεβρα στο Ω και αν το μ^* προέρχεται από μια άλγεβρα $\mathcal{A}$ με ένα μέτρο τ , τότε $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}$ και το μ^* είναι επέκταση του τ . Για να πετύχουμε αυτά παραθέτουμε πρώτα ορισμένες βοηθητικές Προτάσεις.

3.4.1. Πρόταση. Αν E είναι ένα σύνολο τέτοιο ώστε $\mu^*(E) = 0$, τότε ισχύει και $E \in \mathcal{N}$. Άρα $\emptyset \in \mathcal{N}$.

Απόδειξη. Για κάθε $A \subseteq \Omega$ έχουμε $A \cap E \subseteq E$ και $A \setminus E \subseteq A$. Άρα

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) \leq \mu^*(E) + \mu^*(A) = \mu^*(A).$$

Επίσης, έχουμε $A = (A \cap E) \cup (A \setminus E)$, οπότε και

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) \geq \mu^*((A \cap E) \cup (A \setminus E)) = \mu^*(A). \quad \circ$$

3.4.2. Πρόταση. Αν E είναι στοιχείο της συλλογής $\mathcal{N}$, τότε και το συμπλήρωμα E^c του E είναι στοιχείο της $\mathcal{N}$.

Απόδειξη. Τούτο είναι φανερό, γιατί για κάθε υποσύνολο A του Ω έχουμε

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) = \\ &= \mu^*(A \setminus E) + \mu^*(A \cap E) = \mu^*(A \cap E^c) + \mu^*(A \setminus E^c). \end{aligned} \quad \circ$$

3.4.3. Πρόταση. Αν E_1, E_2 είναι στοιχεία της συλλογής $\mathcal{N}$, τότε και τα σύνολα $E_1 \cap E_2$ και $E_1 \cup E_2$ είναι επίσης στοιχεία της $\mathcal{N}$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε πρώτα ότι αν $E_1, E_2 \in \mathcal{N}$, τότε και $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{N}$, δηλαδή ότι

$$(2) \quad \mu^*(A) = \mu^*(A \cap (E_1 \cap E_2)) + \mu^*(A \setminus (E_1 \cap E_2))$$

για κάθε $A \subseteq \Omega$. Έστω, λοιπόν, $A \subseteq \Omega$. Αφού $E_1 \in \mathcal{N}$, έχουμε

$$(3) \quad \mu^*(A \cap E_2) = \mu^*((A \cap E_2) \cap E_1) + \mu^*((A \cap E_2) \setminus E_1).$$

Επίσης, αφού $E_2 \in \mathcal{N}$, έχουμε

$$(4) \quad \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_2) + \mu^*(A \setminus E_2).$$

Αλλά παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\begin{aligned} (5) \quad \mu^*(A \setminus (E_1 \cap E_2)) &= \mu^*((A \setminus (E_1 \cap E_2)) \cap E_2) + \mu^*((A \setminus (E_1 \cap E_2)) \setminus E_2) = \\ &= \mu^*((A \cap E_2) \setminus E_1) + \mu^*(A \setminus E_2). \end{aligned}$$

Αν

$$\mu^*((A \cap E_2) \setminus E_1) = +\infty,$$



τότε, αφενός μεν απ' την (5), παίρνουμε

$$\mu^*(A \setminus (E_1 \cap E_2)) = +\infty,$$

αφετέρου δε, θα έχουμε και $\mu^*(A) = +\infty$. Έτσι η (2) ισχύει.

Επίσης, αν

$$\mu^*((A \cap E_2) \setminus E_1) < +\infty,$$

τότε απ' τις (3), (4) και (5) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap (E_1 \cap E_2)) + \mu^*(A \setminus (E_1 \cap E_2)) &= \\ &= \mu^*(A \cap E_2) - \mu^*((A \cap E_2) \setminus E_1) + \mu^*((A \cap E_2) \setminus E_1) + \mu^*(A \setminus E_2) = \\ &= \mu^*(A \cap E_2) + \mu^*(A \setminus E_2) = \mu^*(A), \end{aligned}$$

δηλαδή τη σχέση (2). Έτσι αποδείχθηκε ότι $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{N}$.

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο συμπέρασμα και εφαρμόζοντας την Πρόταση 3.4.2 προκύπτει ότι, αν E_1, E_2 είναι στοιχεία της συλλογής $\mathcal{N}$, τότε και τα σύνολα E_1^c, E_2^c είναι στοιχεία της $\mathcal{N}$ και άρα

$$E_1^c \cap E_2^c \in \mathcal{N}.$$

Επομένως, τελικά, θα έχουμε και

$$E_1 \cup E_2 = (E_1^c \cap E_2^c)^c \in \mathcal{N}. \quad \diamond$$

3.4.4. Πρόγραμμα. Αν $E_1, E_2, \dots, E_m$ είναι στοιχεία της συλλογής $\mathcal{N}$, τότε και η ένωση $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_m$ τούτων είναι επίσης στοιχείο της $\mathcal{N}$.

Απόδειξη. Τούτο προκύπτει επαγωγικά εφαρμόζοντας το τελευταίο συμπέρασμα της Πρότασης 3.4.3. $\diamond$

3.4.5. Πρόταση. Αν $E_1, E_2, \dots, E_m$ είναι ξένα ανά δύο μ^* -μετρήσιμα σύνολα, τότε για κάθε $A \subseteq \Omega$ ισχύει

$$\mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_m)) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_2) + \dots + \mu^*(A \cap E_m).$$

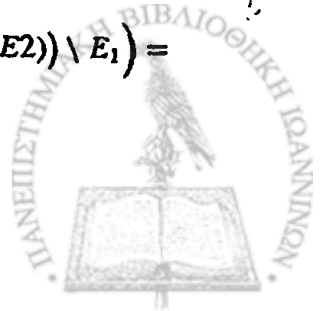
Επομένως, αν στη θέση του συνόλου A θέσουμε το σύνολο αναφοράς Ω , θα πάρουμε την πεπερασμένη προσθετικότητα του μ^* στο $\mathcal{N}$, δηλαδή την ιδιότητα εκείνη που εκφράζεται με την ταυτότητα

$$\mu^*(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_m) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2) + \dots + \mu^*(E_m).$$

Απόδειξη. Αρκεί ν' αποδείξουμε ότι η Πρόταση ισχύει για δύο σύνολα E_1, E_2 , αφού τότε, επαγωγικά, μπορούμε να πάρουμε τη γενική περίπτωση.

Θεωρούμε, λοιπόν, δύο σύνολα $E_1, E_2 \in \mathcal{N}$ με $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Τότε για κάθε $A \subseteq \Omega$ έχουμε

$$\mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \mu^*((A \cap (E_1 \cup E_2)) \cap E_1) + \mu^*((A \cap (E_1 \cup E_2)) \setminus E_1) =$$



$$= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_2).$$

◊

3.4.6. Πρόταση. Αν (E_n) είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο μ^* -μετρήσιμων υποσυνόλων του Ω , τότε για κάθε υποσύνολο A του Ω ισχύει

$$\mu^*(A \cap (\cup_{n=1}^{+\infty} E_n)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A \cap E_n).$$

Ιδιαίτερα, στην περίπτωση όπου το σύνολο A είναι ολόκληρο το σύνολο Ω , ο τύπος αυτός γίνεται

$$\mu^*(\cup_{n=1}^{+\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(E_n).$$

Απόδειξη. Θέτουμε

$$H_k := E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k.$$

εφαρμόζουμε την Πρόταση 3.4.5 και παίρνουμε

$$\mu^*(A \cap H_k) = \sum_{n=1}^k \mu^*(A \cap E_n),$$

για κάθε $A \subseteq \Omega$. Αλλά ισχύει ότι

$$A \cap H_k \subseteq A \cap (\cup_{n=1}^{+\infty} E_n),$$

οπότε, αφού το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k \mu^*(A \cap E_n) &= \mu^*(A \cap H_k) \leq \mu^*(A \cap (\cup_{n=1}^{+\infty} E_n)) = \\ &= \mu^*(\cup_{n=1}^{+\infty} (A \cap E_n)) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A \cap E_n), \end{aligned}$$

για κάθε $k = 1, 2, \dots$. Λαμβάνοντας τα όρια και των δύο μελών όταν $k \rightarrow +\infty$, προκύπτει το συμπέρασμα ◊

3.4.7. Πρόταση. Αν (E_n) είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο μ^* -μετρήσιμων συνόλων, τότε και η ένωση τούτων είναι ένα μ^* -μετρήσιμο σύνολο.

Απόδειξη. Για κάθε $k = 1, 2, \dots$ θέτουμε

$$H_k := E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k, \text{ και } H := E_1 \cup E_2 \cup \dots$$

οπότε, απ' το Πρόσχημα 3.4.4, έχουμε $H_k \in \mathcal{N}$.

Έστω $A \subseteq \Omega$. Τότε $A \setminus H \subseteq A \setminus H_k$, οπότε $\mu^*(A \setminus H) \leq \mu^*(A \setminus H_k)$ και λόγω της Πρότασης 3.4.5,

$$(6) \quad \mu^*(A) = \mu^*(A \cap H_k) + \mu^*(A \setminus H_k) = \sum_{n=1}^k \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A \setminus H_k) \geq$$



$$\geq \sum_{n=1}^k \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A \setminus H).$$

Αλλά έχουμε επίσης ότι

$$A \cap H = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (A \cap E_n),$$

οπότε

$$\mu^*(A \cap H) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A \cap E_n)$$

και ακόμα

$$A = (A \cap H) \cup (A \setminus H).$$

Άρα έχουμε

$$(7) \quad \mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap H) + \mu^*(A \setminus H) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A \setminus H),$$

ενώ, απ' την (6) όταν λάβουμε τα όρια και των δύο μελών της για $k \rightarrow +\infty$, παίρνουμε την αντίθετη ανισότητα. Έτσι στην (7) ισχύει παντού η ισότητα. Αλλά, ισότητα των δυο πρώτων μελών της σχέσης (7) σημαίνει ότι το σύνολο H είναι μ^* -μετρήσιμο. ο

Τώρα είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το σημαντικότερο συμπέρασμα του κεφαλαίου τούτου.

3.4.8. Θεώρημα (Επέκτασης του Καραθεοδωρή). Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο, μ^* ένα εξωτερικό μέτρο στο Ω και $\mathcal{N}$ η συλλογή όλων των μ^* -μετρήσιμων υποσυνόλων του Ω . Τότε η $\mathcal{N}$ είναι μια σ -άλγεβρα στο Ω και ο περιορισμός του μ^* στη συλλογή $\mathcal{N}$ είναι ένα μέτρο. Επιπλέον, αν το μ^* προέρχεται από μια άλγεβρα $\mathcal{A}$ η οποία είναι εφοδιασμένη με ένα μέτρο τ , όπως ορίζεται από τον τύπο (1) της παραγράφου 3.3, τότε έχουμε $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}$ και ο περιορισμός του μ^* πάνω στην $\mathcal{A}$ είναι το μέτρο τ .

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε πρώτα ότι η συλλογή $\mathcal{N}$ ικανοποιεί τις συνθήκες (I), (II), (III) της παραγράφου 1.4.

Πραγματικά, η (I) είναι προφανής και η (II) έπεται απ' την Πρόταση 3.4.2. Για ν' αποδείξουμε τη συνθήκη (III) θεωρούμε μια ακολουθία (E_n) στη συλλογή $\mathcal{N}$. Θέτουμε

$$\begin{aligned} E'_1 &:= E_1, \\ E'_2 &:= E_2 \setminus E_1, \\ &\dots \\ E'_n &:= E_n \setminus (E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{n-1}). \\ &\dots \end{aligned}$$

Τότε, απ' το Πρόγραμμα 3.4.4, προκύπτει εύκολα ότι $E'_n \in \mathcal{N}$, $n = 1, 2, \dots$. Επίσης, αφού τα σύνολα E'_n είναι ξένα ανά δύο, απ' την Πρόταση 3.4.7, θα έχουμε

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} E'_n \in \mathcal{N}.$$

Αλλά ισχύει

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} E'_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n.$$



οπότε η συνθήκη (III) ικανοποιείται.

Θ' αποδείξουμε ότι η συνάρτηση μ^* αν περιοριστεί στη σ -άλγεβρα N είναι ένα μέτρο. Προς τούτο αρκεί ν' αποδείξουμε ότι η συνθήκη (c.2) της παραγράφου 2.2 ικανοποιείται. Αλλά τούτο προκύπτει από την Πρόταση 3.4.6 θέτοντας $A = \Omega$.

Μένει τώρα ν' αποδείξουμε το τελευταίο συμπέρασμα του θεωρήματος. Έτσι υποθέτουμε ότι μ^* προέρχεται από μια άλγεβρα A με ένα μέτρο τ με τον τύπο (1). Θα δείξουμε ότι $A \subseteq N$.

Έστω, λοιπόν, E ένα στοιχείο της συλλογής A . Τότε, για κάθε $A \subseteq \Omega$, θα έχουμε

$$(8) \quad \mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E).$$

Θ' αποδείξουμε ότι ισχύει και η αντίθετη ανισότητα, οπότε, τότε, η ισότητα θα δηλώνει ότι $E \in N$, δηλαδή αυτό που θέλουμε.

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει ακολουθία (A_n) στην A τέτοια ώστε

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \text{ και } \sum_{n=1}^{+\infty} \tau(A_n) \leq \mu^*(A) + \epsilon.$$

Αλλά έχουμε

$$A \cap E \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n \cap E) \text{ και } A \setminus E \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n \setminus E),$$

όπου, βέβαια, $A_n \cap E \in A$ και $A_n \setminus E \in A$, $n = 1, 2, \dots$. Άρα

$$\mu^*(A \cap E) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \tau(A_n \cap E)$$

και

$$\mu^*(A \setminus E) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \tau(A_n \setminus E),$$

οπότε

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} (\tau(A_n \cap E) + \tau(A_n \setminus E)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau(A_n) \leq \mu^*(A) + \epsilon.$$

Από την ανισότητα αυτή προκύπτει ότι η αντίθετη ανισότητα στην (8) ισχύει, αφού το ϵ είναι τυχαίο.

Τέλος, το γεγονός ότι ο περιορισμός του μ^* στη συλλογή A είναι το μέτρο τ , δηλαδή ότι $\mu^*(A) = \tau(A)$, για κάθε $A \in A$, αποδείχτηκε στο Θεώρημα 3.3.3. ◊

Ορισμός. Έστω U μια σ -άλγεβρα και μ ένα μέτρο ορισμένο σ' αυτή. Θα λέμε ότι η U είναι πλήρης ως προς μ , αν, για κάθε $A \in U$ με $\mu(A) = 0$, ισχύει ότι

$$B \subseteq A \implies B \in U \text{ και } \mu(B) = 0.$$

Εδώ θα δούμε ότι η σ -άλγεβρα N είναι πλήρης ως προς τον περιορισμό του μ^* πάνω σ' αυτή.



3.4.9. Θεώρημα. Έστω Ω, μ^* και $\mathcal{N}$ όπως παραπάνω. Τότε η σ -άλγεβρα $\mathcal{N}$ είναι πλήρης ως προς τον περιορισμό του μ^* πάνω στη $\mathcal{N}$.

Απόδειξη. Έστω $E \in \mathcal{N}$ με $\mu^*(E) = 0$ και $H \subseteq E$. Τότε έχουμε

$$0 \leq \mu^*(H) \leq \mu^*(E) = 0,$$

δηλαδή $\mu^*(H) = 0$. Έτσι, απ' την Πρόταση 3.4.1, προκύπτει ότι $H \in \mathcal{N}$. ◊

3.5. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΜΕΤΡΟΥ

Ύστερα απ' τα παραπάνω μπορούμε τώρα να ανακεφαλαιώσουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μέτρο σ' ένα σύνολο Ω . Εδώ παραθέτουμε και τις δύο περιπτώσεις ταυτόχρονα αλλά και παράλληλα ώστε να καταδειχτούν οι ομοιότητες και οι διαφορές των δύο κατασκευών. Χρησιμοποιούμε τον ίδιο όπως και παραπάνω συμβολισμό.

Θεωρούμε, λοιπόν, τα εξής στοιχεία:

Ω : ένα μη κενό σύνολο.

Ω : ένα μη κενό σύνολο.

$\mathcal{C}$: μια ακολουθιακή κάλυψη στο Ω .

$\mathcal{A}$: μια άλγεβρα στο Ω .

τ : μια συνάρτηση ορισμένη στην $\mathcal{C}$
με τιμές στο διάστημα $[0, +\infty]$
και τέτοια ώστε $\tau(\emptyset) = 0$.

τ : $\mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ ένα μέτρο

Με τα στοιχεία αυτά ως δεδομένα παίρνουμε αντίστοιχα τα εξής:

μ^* : το εξωτερικό μέτρο που ορίζεται
με τον τύπο (1) της παραγράφου 3.4.

μ^* : το εξωτερικό μέτρο που ορίζεται
με τον τύπο (1) της παραγράφου 3.4.

$\mathcal{N}$: η σ -άλγεβρα όλων των
 μ^* -μετρήσιμων συνόλων.

$\mathcal{N}$: η σ -άλγεβρα όλων των
 μ^* -μετρήσιμων συνόλων.

Τότε η συλλογή $\mathcal{N}$ περιέχει την άλγεβρα $\mathcal{A}$.

Τέλος, ο περιορισμός της συνάρτησης μ^* πάνω στη σ -άλγεβρα $\mathcal{N}$ οδηγεί στο

μ : μέτρο.

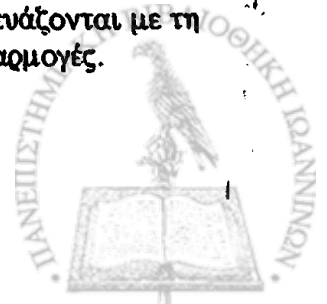
μ : μέτρο.

Ο περιορισμός του μέτρου μ πάνω στην άλγεβρα $\mathcal{A}$ ταυτίζεται με το αρχικό μέτρο τ .

Επαναλαμβάνουμε ότι η σ -άλγεβρα $\mathcal{N}$ είναι πλήρης ως προς το μέτρο τ .

3.6. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Θα δούμε εδώ ορισμένα παραδείγματα μέτρων τα οποία κατασκευάζονται με τη μέθοδο που είδαμε παραπάνω και τα οποία έχουν πολύ χρήσιμες εφαρμογές.



3.6.1. Μέτρο Lebesgue. Από μαθήματα της Πραγματικής Ανάλυσης ο αναγνώστης γνωρίζει τον κλασικό τρόπο κατασκευής του μέτρου του Lebesgue. Εφαρμόζοντας όμως την παραπάνω μέθοδο μπορούμε να πάρουμε επίσης το μέτρο αυτό. Προς τούτο θεωρούμε την πραγματική ευθεία και τα διαστήματα της μορφής (α, β) , όπου $\alpha < \beta$. Ορίζουμε τότε ως A τη συλλογή η οποία περιέχει το κενό σύνολο, τον χώρο $\mathbb{R}$, όλα τα διαστήματα της μορφής (α, β) , καθώς επίσης και όλες τις πεπερασμένες ενώσεις και διαφορές αυτών. Τότε η A είναι μια άλγεβρα στο $\mathbb{R}$. Ορίζουμε, τέλος, μια συνάρτηση $\tau : A \rightarrow [0, +\infty]$ με τον τύπο

$$\begin{aligned}\tau(\emptyset) &:= 0, \\ \tau(\mathbb{R}) &:= \tau((-\infty, \beta]) = \tau((\alpha, +\infty)) = +\infty, \\ \tau((\alpha, \beta)) &:= \beta - \alpha, \text{ αν } \alpha < \beta,\end{aligned}$$

η οποία παίρνει ως τιμές το μήκος διαστήματος. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η συνάρτηση τ είναι ένα μέτρο πάνω στην άλγεβρα A . Εφαρμόζοντας την παραπάνω μέθοδο παίρνουμε ένα μοναδικό εξωτερικό μέτρο μ_L^* και την αντίστοιχη σ -άλγεβρα N_L η οποία περιέχει την άλγεβρα A . Ο περιορισμός του μ_L^* πάνω στη συλλογή N_L είναι ένα μέτρο μ_L το οποίο πάνω στην A ταυτίζεται με το τ . Το μ_L^* λέγεται *εξωτερικό μέτρο Lebesgue*, το N_L είναι η συλλογή των *κατά Lebesgue μετρήσιμων συνόλων* και το μ_L είναι το *μέτρο του Lebesgue*.

Όπως είδαμε στην παράγραφο 1.5, η άλγεβρα Borel B είναι η μικρότερη σ -άλγεβρα που παράγεται απ' τα κλειστά (ή τα ανοικτά) σύνολα. Όμως κάθε σύνολο της μορφής (α, β) , (που είναι ένα G_δ -σύνολο) ανήκει στην B . Άρα θα πρέπει να έχουμε

$$A \subseteq B \subseteq N_L,$$

οπότε κάθε σύνολο Borel είναι κατά Lebesgue μετρήσιμο. Ο περιορισμός του μ_L πάνω στην άλγεβρα Borel B ονομάζεται *μέτρο Borel*. Περισσότερα στοιχεία για το μέτρο Lebesgue ο αναγνώστης μπορεί να βρει στο βιβλίο "Πραγματική Ανάλυση" του Γ. Καρακώστα.

3.6.2. Μέτρο Lebesgue-Stieltjes. Το μέτρο Lebesgue-Stieltjes είναι μια γενικότερη περίπτωση του μέτρου Lebesgue και περιγράφεται "ζυγίζοντας" τα διαστήματα της πραγματικής ευθείας σύμφωνα με τις τιμές κάποιας κατάλληλης συνάρτησης.

Πιο συγκεκριμένα, έστω f μια αύξουσα πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο σύνολο $BbbR$ και θεωρούμε ότι η f είναι δεξιά συνεχής, δηλαδή για κάθε $s_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(s_0) = \lim_{s \rightarrow s_0+} f(s).$$

Είναι γνωστό ότι τέτοια (μονόπλευρα) όρια για μονότονες συναρτήσεις υπάρχουν.

Έστω A η άλγεβρα που θεωρήσαμε στο Παράδειγμα 3.6.1. Θέτουμε

$$\begin{aligned}\tau(\emptyset) &:= 0, \\ \tau((\alpha, \beta)) &:= f(\beta) - f(\alpha), \text{ αν } \alpha \leq \beta, \\ \tau((\alpha, +\infty)) &:= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - f(\alpha), \\ \tau((-\infty, \beta)) &:= f(\beta) - \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \\ \tau((-\infty, +\infty)) &:= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).\end{aligned}$$

Τότε η τ ορίζει ένα μέτρο πάνω στην άλγεβρα A . Εφαρμόζοντας την προηγούμενη μέθοδο παίρνουμε ένα μέτρο μ που το ονομάζουμε *μέτρο Lebesgue-Stieltjes*. Η



σ -άλγεβρα $\mathcal{N}$ πάνω στην οποία ορίζεται το μέτρο Lebesgue-Stieltjes είναι η σύλλογή των κατά Lebesgue μετρήσιμων συνόλων.

3.6.3. Ένα μέτρο πιθανότητας. Έστω $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια μη αρνητική συνεχή συνάρτηση της οποίας το γενικευμένο κατά Riemann ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο. Δηλαδή

$$E := \int_{-\infty}^{\infty} g(s) ds < +\infty.$$

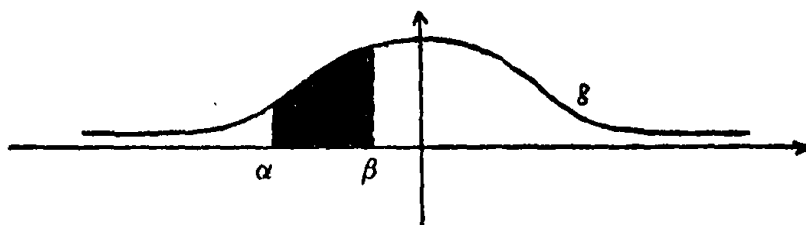
Υποθέτουμε ότι $E > 0$. Θεωρούμε τη συλλογή $\mathcal{C}$ η οποία περιέχει το κενό σύνολο και όλα τα κλειστά και φραγμένα διαστήματα της πραγματικής ευθείας. Τότε η $\mathcal{C}$ είναι μια ακολουθιακή κάλυψη στο σύνολο $\mathbb{R}$.

Για κάθε κλειστό διάστημα της μορφής $[\alpha, \beta]$ ορίζουμε

$$\tau([\alpha, \beta]) := \frac{1}{E} \int_{\alpha}^{\beta} g(s) ds,$$

$$\tau(\emptyset) := 0$$

οπότε εφαρμόζοντας την προηγούμενη μέθοδο παίρνουμε ένα μέτρο πιθανότητας μ , αφού, όπως εύκολα μπορούμε να δούμε, ισχύει $\mu(\mathbb{R}) = 1$.



Το μέτρο ως προς g του διαστήματος $[\alpha, \beta]$, είναι αριθμητικά ίσο προς το εμβαδό του γραμμικοποιημένου τόπου όταν ισχύει

$$E := \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 1.$$

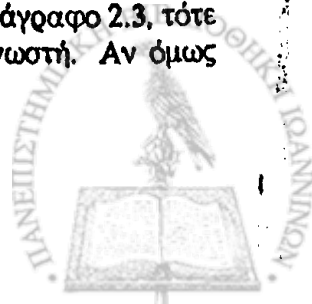
3.7. ΜΗ ΜΕΤΡΗΣΙΜΑ ΣΥΝΟΛΑ

Στις παραγράφους 2.3 και 3.6 έχουμε συναντήσει ορισμένα παραδείγματα μέτρων που κατασκευάσαμε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο που γνωρίσαμε στην παράγραφο 3.5. Κατασκευάζοντας όμως το μέτρο πρέπει να καθορίσουμε και τα στοιχεία της σ -άλγεβρας $\mathcal{U}$ πάνω στην οποία ορίζεται το μέτρο.

Έτσι, τώρα τίθεται το εξής πρόβλημα: Αν δοθεί ένα σύνολο $A \subseteq \Omega$, πώς θα διαπιστώσουμε ότι τούτο είναι ή όχι μετρήσιμο;

Το ερώτημα τούτο έχει έννοια αν απαντηθεί ένα άλλο: υπάρχουν σύνολα τα οποία δεν είναι μετρήσιμα;

Και αν μιν το μέτρο είναι κάποιο απ' αυτά που είδαμε στην παράγραφο 2.3, τότε γνωρίζουμε τα μη μετρήσιμα σύνολα, αφού η σ -άλγεβρα είναι γνωστή. Αν όμως



έχουμε το μέτρο Lebesgue, ή το μέτρο Lebesgue-Stieltjes, ή άλλο, τότε πώς μπορούμε να απαντήσουμε στα παραπάνω ερωτήματα;

Θα κατασκευάσουμε ένα σύνολο πραγματικών αριθμών που δεν είναι μετρήσιμο ως προς το μέτρο Lebesgue μ_L , που είδαμε στην παράγραφο 3.6.

Στο διάστημα $(0, 1)$ της πραγματικής ευθείας ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας με τον τύπο

$$x \sim y : x - y \in \mathbb{Q}.$$

Η σχέση αυτή διαμερίζει το διάστημα $(0, 1)$ σε κλάσεις ισοδυναμίας τέτοιες ώστε, αν $\sigma(x)$ είναι η κλάση του x , τότε

$$\sigma(x) = \{x + r : r \in \mathbb{Q}\} \cap (0, 1)$$

Με βάση το αξίωμα Επιλογής, από κάθε κλάση μπορούμε να πάρουμε ένα στοιχείο και να δημιουργήσουμε έτσι ένα σύνολο Γ .

Θ' αποδείξουμε ότι το σύνολο Γ δεν είναι μ_L -μετρήσιμο.

Προς τούτο έστω $\{r_1, r_2, \dots\}$ το (αριθμήσιμο) σύνολο $\mathbb{Q} \cap (-1, 1)$, δηλαδή το σύνολο των ρητών αριθμών του διαστήματος $(-1, 1)$.

Τότε η συλλογή $\{\Gamma + r_n : n = 1, 2, \dots\}$ αποτελείται από ξένα ανά δύο σύνολα. Πραγματικά, υποθέτουμε ότι για κάποιους δείκτες n και m ισχύει $(\Gamma + r_n) \cap (\Gamma + r_m) \neq \emptyset$. Τότε υπάρχουν $x, y \in \Gamma$ με $x + r_n = y + r_m$. Άρα έχουμε $x - y = r_m - r_n \in \mathbb{Q}$, δηλαδή τα στοιχεία x, y ανήκουν στην ίδια κλάση. Τούτο σημαίνει ότι $x = y$, οπότε και $r_n = r_m$. Επομένως οι δύο κλάσεις $\Gamma + r_n$ και $\Gamma + r_m$ ταυτίζονται, πράγμα που αποδεικνύει ότι η συλλογή $\{\Gamma + r_n : n = 1, 2, \dots\}$ αποτελείται από ξένα ανά δύο στοιχεία.

Επίσης παρατηρούμε ότι ισχύει

$$(9) \quad (0, 1) \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} (\Gamma + r_n) \subseteq (-1, 2).$$

Τώρα υποθέτουμε ότι το σύνολο Γ είναι μ_L -μετρήσιμο. Αφού το μέτρο Lebesgue μ_L είναι αναλλοίωτο κατά τις μεταφορές (Πρόβλ. 3.8), θα πρέπει και κάθε σύνολο της μορφής $\Gamma + r_n$ να είναι μ_L -μετρήσιμο και θα ισχύει

$$\mu_L(\Gamma + r_n) = \mu_L(\Gamma), \quad n = 1, 2, \dots$$

Έτσι από τη σχέση (9) θα έχουμε

$$\begin{aligned} 1 &= \mu_L((0, 1)) \leq \\ &\leq \mu_L\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (\Gamma + r_n)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_L(\Gamma + r_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_L(\Gamma) \leq \\ &\leq \mu_L((-1, 2)) = 3. \end{aligned}$$

Αλλά, αν ισχύει $\mu_L(\Gamma) = 0$, τότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu_L(\Gamma) = 0 < 1,$$



ενώ, αν, $\mu_L(\Gamma) > 0$, τότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu_L(\Gamma) = +\infty > 3.$$

Το γεγονός τούτο είναι άτοπο και επομένως το σύνολο Γ δεν είναι μ_L -μετρήσιμο.

Προβλήματα

3.1. Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο, $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα στο Ω και μ ένα μέτρο πάνω στην $\mathcal{A}$. Για κάθε $B \subseteq \Omega$ ορίζουμε τη συνάρτηση $\mu'(B) := \inf\{\mu(A) : B \subseteq A \text{ και } A \in \mathcal{A}\}$. Ν' αποδειχτεί ότι

- (i) $\mu'(B) = \mu(B)$, για κάθε $B \in \mathcal{A}$,
- (ii) $\mu^*(B) \leq \mu'(B)$, για κάθε $B \subseteq \Omega$ και
- (iii) $\mu^* = \mu'$, αν Ω είναι αριθμήσιμη ένωση συνόλων $A_n \in \mathcal{A}$ με $\mu(A_n) < +\infty$.

3.2. Ν' αποδειχτεί ότι, αν ένα εξωτερικό μέτρο ικανοποιεί την πεπερασμένη προσθετικότητα, τότε ικανοποιεί και την αριθμήσιμη προσθετικότητα.

3.3. Έστω Ω ένα σύνολο. Ορίζουμε $\mu^*(\emptyset) := 0$, $\mu^*(\Omega) := 2$ και $\mu^*(A) := 1$, για κάθε άλλο σύνολο $A \subseteq \Omega$. Ν' αποδειχτεί ότι μ^* είναι ένα εξωτερικό μέτρο και να καθοριστεί η συλλογή $\mathcal{N}$ των μ^* -μετρήσιμων συνόλων.

3.4. Να εξεταστεί ποιά απ' τις σ -άλγεβρες των παραδειγμάτων των παραγράφων 2.3 και 3.6 είναι πλήρης ως προς το αντίστοιχο μέτρο.

3.5. Έστω $\Omega = \mathbb{N}$. Αν $A \subseteq \mathbb{N}$ περιέχει n στοιχεία, ορίζουμε $\mu^*(A) := n/(n+1)$ και αν A έχει άπειρα στοιχεία, ορίζουμε $\mu^*(A) = 1$. Ν' αποδειχτεί ότι το μ^* είναι ένα εξωτερικό μέτρο.

3.6. Ν' αποδειχτεί ότι το σύνολο C του Cantor, δηλαδή το σύνολο των σημείων του διαστήματος $[0,1]$ των οποίων η παράσταση στο τριαδικό σύστημα αρίθμησης περιέχει μόνο ψηφία 0 ή/και 2, έχει μέτρο Lebesgue ίσο με το μηδέν.

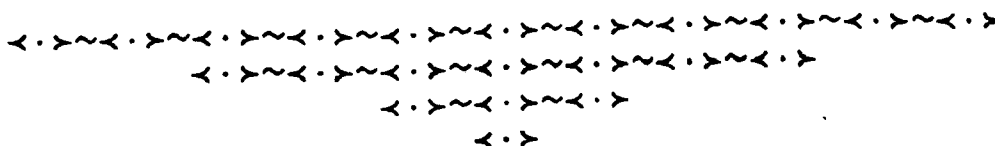
3.7. Για τη συνάρτηση $f = \chi_{[0,+\infty)}$ να καθοριστεί το μέτρο Lebesgue-Stieltjes μ_f και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 g(x) d\mu_f,$$

όπου $g := \chi_{(-\infty,0]}$.

3.8. Ν' αποδειχτεί ότι το μέτρο Lebesgue μ_L είναι αναλλοίωτο κατά τις μεταφορές, δηλαδή, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $A \in \mathcal{N}_L$ ισχύει $\mu_L(x + A) = \mu_L(A)$.





4. ΜΕΤΡΗΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

4.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έννοια του μέτρου που γνωρίσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια δικαιολογεί το γεγονός ότι τα στοιχεία-σύνολα της άλγεβρας $\mathcal{U}$ πάνω στην οποία ορίζεται το μέτρο ονομάζονται μετρήσιμα. Δηλαδή, τα σύνολα αυτά μπορούν να μετρηθούν.

Στο κεφάλαιο τούτο θα δούμε ότι η έννοια της μετρησιμότητας μπορεί να αναφέρεται και σε συναρτήσεις. Το πόσο στενή είναι η σχέση μεταξύ μετρήσιμων συνόλων και μετρήσιμων συναρτήσεων φαίνεται από το γεγονός ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός συνόλου είναι μετρήσιμη, αν και μόνο αν το σύνολο είναι μετρήσιμο. Συνέπεια του γεγονότος αυτού είναι ότι οι απλές συναρτήσεις, δηλαδή οι (πεπερασμένοι) γραμμικοί συνδυασμοί χαρακτηριστικών συναρτήσεων, είναι μετρήσιμες συναρτήσεις. Τέτοιες συναρτήσεις παίζουν σημαντικό ρόλο στην ολοκλήρωση την οποία θα γνωρίσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

4.2. ΟΡΙΣΜΟΙ

Έστω $(\Omega, \mathcal{U})$ ένας μετρήσιμος χώρος και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση.

Ορισμός. Η συνάρτηση f είναι μετρήσιμη ως προς $\mathcal{U}$, ή απλά $\mathcal{U}$ -μετρήσιμη, αν, για κάθε $k \in \mathbb{R}$, το σύνολο

$$A_k := \{x \in \Omega : f(x) > k\}$$

είναι μετρήσιμο, δηλαδή ανήκει στη σ -άλγεβρα $\mathcal{U}$.

Πριν δούμε ορισμένα παραδείγματα μετρήσιμων συναρτήσεων, ίσως πρέπει να γνωρίσουμε και άλλους ισοδύναμους ορισμούς της μετρησιμότητας συναρτήσεων.

4.2.1. Πρόταση. Έστω $(\Omega, \mathcal{U})$ ένας μετρήσιμος χώρος και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- (i) Για κάθε $k \in \mathbb{R}$, το σύνολο $A_k := \{x \in \Omega : f(x) > k\}$ είναι μετρήσιμο.
- (ii) Για κάθε $k \in \mathbb{R}$, το σύνολο $B_k := \{x \in \Omega : f(x) \leq k\}$ είναι μετρήσιμο.



(iii) Για κάθε $k \in \mathbb{R}$, το σύνολο $\Gamma_k := \{x \in \Omega : f(x) < k\}$ είναι μετρήσιμο.

(iv) Για κάθε $k \in \mathbb{R}$, το σύνολο $\Delta_k := \{x \in \Omega : f(x) \geq k\}$ είναι μετρήσιμο.

Απόδειξη. Επειδή ισχύει $B_k = A_k^c$ και $\Delta_k = \Gamma_k^c$, έπεται ότι η πρόταση (ii) είναι ισοδύναμη με την (i) και η (iv) με την (iii). Επομένως αρκεί ν' αποδείξουμε ότι οι προτάσεις (i) και (iv) είναι ισοδύναμες.

Έστω ότι η πρόταση (i) ισχύει. Επειδή για κάθε $k \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\Delta_k = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_{k-\frac{1}{n}} \text{ και } A_{k-\frac{1}{n}} \in \mathcal{U},$$

έπεται ότι $\Delta_k \in \mathcal{U}$. Άρα η (i) συνεπάγεται την (iv).

Έστω ότι η πρόταση (iv) ισχύει. Τότε, επειδή

$$A_k = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Delta_{k+\frac{1}{n}} \text{ και } \Delta_{k+\frac{1}{n}} \in \mathcal{U},$$

θα έχουμε $A_k \in \mathcal{U}$. Έτσι η πρόταση (iv) συνεπάγεται την (i) και άρα οι προτάσεις (i) και (iv) είναι ισοδύναμες. ◻

4.3. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΜΕΤΡΗΣΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Θα δούμε εδώ ορισμένα παραδείγματα μετρήσιμων συναρτήσεων. Πρέπει να σημειώσουμε ότι είναι δυνατό μια συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι μετρήσιμη ως προς μια σ -άλγεβρα, αλλά όχι μετρήσιμη ως προς μια άλλη.

4.3.1. Σταθερές συναρτήσεις. Αν $(\Omega, \mathcal{U})$ είναι ένας μετρήσιμος χώρος, τότε κάθε σταθερή συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{U}$ -μετρήσιμη. Πραγματικά, έστω $f(x) = c$, $x \in \Omega$ μια τέτοια συνάρτηση, όπου $c \in \mathbb{R}$. Τότε βλέπουμε ότι

$$A_k = \begin{cases} \emptyset, & \text{αν } k \geq c, \\ \Omega, & \text{αν } k < c. \end{cases}$$

Αλλά τα σύνολα $\emptyset$ και Ω ανήκουν στη σ -άλγεβρα $\mathcal{U}$, οποιαδήποτε και αν είναι αυτή. Άρα η f είναι $\mathcal{U}$ -μετρήσιμη.

4.3.2. Χαρακτηριστικές συναρτήσεις. Έστω $(\Omega, \mathcal{U})$ ένας μετρήσιμος χώρος και έστω $A \in \mathcal{U}$. Τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση χ_A του A είναι $\mathcal{U}$ -μετρήσιμη. Πραγματικά, έχουμε

$$A_k = \begin{cases} \emptyset, & \text{αν } k \geq 1, \\ A, & \text{αν } 0 \leq k < 1, \\ \Omega, & \text{αν } k < 0. \end{cases}$$

Αλλά τα σύνολα $\emptyset$, A και Ω ανήκουν στη σ -άλγεβρα $\mathcal{U}$, οπότε η συνάρτηση χ_A είναι $\mathcal{U}$ -μετρήσιμη.

4.3.3. Γενικές συναρτήσεις. Έστω $\mathcal{U}$ η συλλογή όλων των υποσυνόλων ενός συνόλου Ω . Τότε κάθε συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{U}$ -μετρήσιμη.



4.3.4. Ακολουθίες. Στο σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών θεωρούμε τη συλλογή $\mathcal{U}$ όλων των υποσυνόλων του. Τότε κάθε ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι $\mathcal{U}$ -μετρήσιμη.

4.3.5. Συναρτήσεις επιλογής. Έστω $(\Omega, \mathcal{U})$ ένας μετρήσιμος χώρος και $\{X_1, X_2, \dots\}$ μια αριθμήσιμη συλλογή ξένων ανά δύο στοιχείων της σ -άλγεβρας $\mathcal{U}$. Έστω και (α_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε η συνάρτηση

$$f := \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \chi_{X_n}$$

είναι $\mathcal{U}$ -μετρήσιμη. Πραγματικά, έστω $k \in \mathbb{R}$. Θέτουμε

$$I_k := \{n \in \mathbb{N} : \alpha_n > k\},$$

και παρατηρούμε ότι, αν $\text{μεν } k \geq 0$, τότε ισχύει

$$A_k = \bigcup_{n \in I_k} X_n,$$

ενώ, αν $k < 0$, τότε ισχύει

$$A_k = \Omega \setminus \bigcup_{n \notin I_k} X_n.$$

Αλλά, κάθε σύνολο X_n είναι $\mathcal{U}$ -μετρήσιμο, οπότε και το σύνολο A_k είναι τέτοιο για κάθε $k \in \mathbb{R}$.

4.3.6. Ημισυνεχείς συναρτήσεις. Έστω $\mathcal{B}$ η άλγεβρα Borel στην πραγματική ευθεία και $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια κάτω (ή άνω) ημισυνεχής συνάρτηση. (Υπενθυμίζουμε ότι τούτο σημαίνει ότι το σύνολο A_k (ή Γ_k , αντίστοιχα) είναι ανοικτό.) Αλλά κάθε ανοικτό σύνολο είναι Borel. Επομένως κάθε τέτοια συνάρτηση είναι Borel μετρήσιμη, δηλαδή $\mathcal{B}$ -μετρήσιμη. Επειδή κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κάτω και άνω ημισυνεχής, απ' το προηγούμενο γεγονός, προκύπτει ότι αυτή είναι Borel μετρήσιμη.

4.3.7. Μονότονες συναρτήσεις. Έστω $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ όπως στο παράδειγμα 4.3.6 και έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια μονότονη (δηλαδή, αύξουσα ή φθίνουσα) συνάρτηση. Τότε, για κάθε $k \in \mathbb{R}$, το σύνολο A_k είναι ένα διάστημα της πραγματικής ευθείας, δηλαδή ένα σύνολο Borel. Άρα κάθε μονότονη συνάρτηση είναι Borel μετρήσιμη.

4.4. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΡΗΣΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Εδώ θα δούμε ορισμένες ιδιότητες των μετρήσιμων συναρτήσεων οι οποίες είναι χρήσιμες για τη θεωρία ολοκλήρωσης που θ' αναπτύξουμε στα επόμενα κεφάλαια.

Ορισμός Υπενθυμίζουμε ότι, αν f είναι μία πραγματική συνάρτηση, το θετικό μέρος f^+ της f και το αρνητικό μέρος f^- της f είναι οι συναρτήσεις που ορίζονται αντίστοιχα με τους τύπους

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\} \text{ και } f^-(x) := \max\{-f(x), 0\}.$$



Θα υποθέσουμε στο εξής ότι Ω είναι ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{U}$ είναι μια σ -άλγεβρα στο Ω .

4.4.1. Πρόταση. Αν $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δυο $\mathcal{U}$ -μετρήσιμες συναρτήσεις και c είναι ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός, τότε και οι συναρτήσεις

$$cf, |f|, f^2, f+g, fg, f^+, f^-$$

είναι επίσης $\mathcal{U}$ -μετρήσιμες.

Απόδειξη. Αν $c = 0$, έχουμε $cf = 0$, οπότε επειδή

$$\{x \in \Omega : cf(x) > k\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{αν } k \geq 0, \\ \Omega, & \text{αν } k < 0, \end{cases}$$

έπεται ότι η $cf = 0$, είναι $\mathcal{U}$ -μετρήσιμη. Επίσης, αν $c \neq 0$, τότε επειδή

$$\{x \in \Omega : cf(x) > k\} = \begin{cases} \{x \in \Omega : f(x) > \frac{k}{c}\}, & \text{αν } c > 0, \\ \{x \in \Omega : f(x) < \frac{k}{c}\}, & \text{αν } c < 0, \end{cases}$$

λόγω και της Πρότασης 4.2.1, έπεται ότι η cf είναι $\mathcal{U}$ -μετρήσιμη.

Για τη συνάρτηση $|f|$ παρατηρούμε ότι

$$\{x \in \Omega : |f(x)| > k\} = \begin{cases} \Omega, & \text{αν } k < 0, \\ \{x \in \Omega : f(x) > k\} \cup \{x \in \Omega : f(x) < -k\}, & \text{αν } k \geq 0, \end{cases}$$

οπότε και η $|f|$ είναι $\mathcal{U}$ -μετρήσιμη.

Παρόμοια, για την f^2 έχουμε

$$\{x \in \Omega : f^2(x) > k\} = \begin{cases} \Omega, & \text{αν } k < 0, \\ \{x \in \Omega : f(x) > \sqrt{k}\} \cup \{x \in \Omega : f(x) < -\sqrt{k}\}, & \text{αν } k \geq 0 \end{cases}$$

και επομένως και η συνάρτηση f είναι $\mathcal{U}$ -μετρήσιμη.

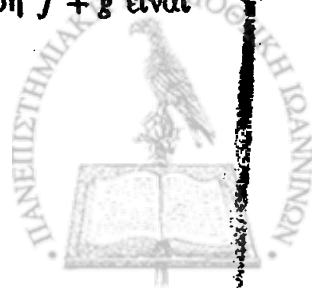
Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $f+g$. Για κάθε $k \in \mathbb{R}$ και κάθε ρητό πραγματικό αριθμό ρ το σύνολο

$$\{x \in \Omega : f(x) > \rho\} \cap \{x \in \Omega : g(x) > k - \rho\}$$

είναι $\mathcal{U}$ -μετρήσιμο. Έστω $x \in \Omega$ με $f(x) + g(x) > k$. Άρα υπάρχει ρητός αριθμός ρ τέτοιος ώστε $f(x) > \rho > k - g(x)$. Επομένως έχουμε

$$\{x \in \Omega : (f+g)(x) > k\} = \bigcup_{\rho \in \mathbb{Q}} [\{x \in \Omega : f(x) > \rho\} \cap \{x \in \Omega : g(x) > k - \rho\}].$$

Επειδή η συλλογή των συνόλων του δευτέρου μέλους είναι αριθμήσιμη (αφού το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο), έπεται ότι το σύνολο στο πρώτο μέλος είναι $\mathcal{U}$ -μετρήσιμο. Τούτο, βέβαια, σημαίνει ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι $\mathcal{U}$ -μετρήσιμη.



Τώρα, χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα συμπεράσματα και την προφανή ταυτότητα

$$f(x)g(x) = \frac{1}{4} \left[(f(x) + g(x))^2 - (f(x) - g(x))^2 \right]$$

συμπεραίνουμε ότι και η fg είναι U -μετρήσιμη συνάρτηση.

Τέλος, και οι συναρτήσεις f^+ (θετικό μέρος της f) και f^- (αρνητικό μέρος της f) είναι U -μετρήσιμες, αφού ισχύει

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\} = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x))$$

και

$$f^-(x) := \max\{-f(x), 0\} = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x)).$$

◊

4.5. ΜΕΤΡΗΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΕ ΤΙΜΕΣ ΣΤΗΝ ΕΠΕΚΤΕΤΑΜΕΝΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΕΥΘΕΙΑ

Μέχρι τώρα είδαμε μετρήσιμες συναρτήσεις που παίρνουν τιμές πραγματικούς αριθμούς. Σε πολλές όμως περιπτώσεις κρίνεται σκόπιμο να θεωρούμε συναρτήσεις που παίρνουν ως τιμές και τα σημεία $+\infty$ και $-\infty$.

Ορισμός Έστω $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ μια συνάρτηση. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι μετρήσιμη ως προς U ή U -μετρήσιμη, αν για κάθε $k \in \mathbb{R}$ το σύνολο

$$\{x \in \Omega : f(x) > k\}$$

είναι U -μετρήσιμο.

Στο εξής θα παριστάνουμε με $M(\Omega, U)$ το σύνολο όλων των U -μετρήσιμων συναρτήσεων $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Ακολουθώντας την πορεία απόδειξης της Πρότασης 4.2.1 μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $f \in M(\Omega, U)$, αν και μόνο αν γνωρίζουμε ότι τουλάχιστον ένα από τα σύνολα

$$\{x \in \Omega : f(x) \geq k\}, \text{ ή } \{x \in \Omega : f(x) < k\}, \text{ ή } \{x \in \Omega : f(x) \leq k\}$$

είναι U -μετρήσιμο (οπότε και τα άλλα θα είναι τέτοια.)

4.5.1. Πρόταση. Υποθέτουμε ότι (f_n) είναι μια ακολουθία συναρτήσεων στο σύνολο $M(\Omega, U)$. Τότε και οι συναρτήσεις με τύπους

$$F(x) := \sup f_n(x),$$

$$f(x) := \inf f_n(x),$$

$$F^*(x) := \limsup f_n(x),$$

$$f^*(x) := \liminf f_n(x)$$



είναι στοιχεία του $M(\Omega, U)$, δηλαδή είναι επίσης μετρήσιμες συναρτήσεις.

Απόδειξη. Τούτο προκύπτει απ' το γεγονός ότι για κάθε $k \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$\{x \in \Omega : F(x) > k\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{x \in \Omega : f_n(x) > k\},$$

$$\{x \in \Omega : f(x) \geq k\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{x \in \Omega : f_n(x) \geq k\},$$

$$\{x \in \Omega : F^+(x) \geq k\} = \bigcap_{m=1}^{+\infty} \bigcap_{\lambda=1}^{+\infty} \bigcup_{n \geq \lambda} \{x \in \Omega : f_n(x) > k - \frac{1}{m}\},$$

$$\{x \in \Omega : f^+(x) \geq k\} = \bigcap_{m=1}^{+\infty} \bigcup_{\lambda=1}^{+\infty} \bigcap_{n \geq \lambda} \{x \in \Omega : f_n(x) > k - \frac{1}{m}\}.$$

4.5.2. Πρόταση. Αν (f_n) είναι μια ακολουθία στο σύνολο $M(\Omega, U)$ που συγκλίνει κατά σημείο προς μια συνάρτηση f , τότε και $f \in M(\Omega, U)$.

Απόδειξη. Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει κατά σημείο προς την f , όταν για κάθε $x \in \Omega$ ισχύει $\lim_n f_n(x) = f(x)$. Έτσι έχουμε $f \in M(\Omega, U)$, αφού

$$\lim_n f_n(x) = \limsup f_n(x)$$

και ισχύει το συμπέρασμα της προηγούμενης Πρότασης. $\diamond$

4.5.3. Πρόταση. Αν $f \in M(\Omega, U)$, τότε τα σύνολα

$$f^{+\infty} := \{x \in \Omega : f(x) = +\infty\},$$

$$f^{-\infty} := \{x \in \Omega : f(x) = -\infty\}$$

είναι U -μετρήσιμα.

Απόδειξη. Τούτο προκύπτει απ' το γεγονός ότι ισχύει

$$f^{+\infty} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{x \in \Omega : f(x) > n\}.$$

Θα μπορούσε κάποιος να διερωτηθεί γιατί η έννοια της μετρήσιμης συνάρτησης έχει εισαχθεί σε δύο στάδια, δηλαδή πρώτα για συναρτήσεις με τιμές στην πραγματική ευθεία και έπειτα για συναρτήσεις με τιμές στην επεκτεταμένη πραγματική ευθεία $\overline{\mathbb{R}}$. Θα ήταν δυνατό να εισαχθεί κατ' ευθείαν για τις δεύτερες; Οπωσδήποτε "ναι", όμως θα συναντούσαμε ορισμένες δυσκολίες σε διάφορα σημεία, όπως, για παράδειγμα, στην απόδειξη του γεγονότος ότι το γινόμενο δύο U -μετρήσιμων συναρτήσεων είναι U -μετρήσιμη συνάρτηση, βλ. Πρόταση 4.5.5. Υπάρχει όμως στενή σχέση μεταξύ των δύο ορισμών της μετρησιμότητας, όπως φαίνεται στην Πρόταση που ακολουθεί.

4.5.4. Πρόταση. Μια συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ είναι U -μετρήσιμη αν και μόνο αν τα σύνολα $f^{+\infty}$ και $f^{-\infty}$ (που ορίστηκαν στην Πρόταση 4.5.3) είναι U -μετρήσιμα και η πραγματική συνάρτηση $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται απ' τον τύπο

$$h(x) := \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \notin f^{+\infty} \cup f^{-\infty}, \\ 0, & \text{αν } x \in f^{+\infty} \cup f^{-\infty} \end{cases}$$



είναι U -μετρήσιμη.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $f \in M(\Omega, U)$. Τότε, λόγω της Πρότασης 4.5.3, τα σύνολα $f^{+\infty}$ και $f^{-\infty}$ είναι U -μετρήσιμα. Επίσης η συνάρτηση h είναι U -μετρήσιμη, αφού, για κάθε $k \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\{x \in \Omega : h(x) > k\} = \begin{cases} \{x \in \Omega : f(x) > k\} \setminus f^{+\infty}, & \text{αν } k \geq 0, \\ \{x \in \Omega : f(x) > k\} \cup f^{-\infty}, & \text{αν } k < 0. \end{cases}$$

Αντίστροφα. Έστω ότι τα σύνολα $f^{+\infty}$ και $f^{-\infty}$ είναι U -μετρήσιμα και η συνάρτηση h είναι U -μετρήσιμη. Τότε και η συνάρτηση f είναι U -μετρήσιμη, αφού, για κάθε $k \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\{x \in \Omega : f(x) > k\} = \begin{cases} \{x \in \Omega : h(x) > k\} \cup f^{+\infty}, & \text{αν } k \geq 0, \\ \{x \in \Omega : h(x) > k\} \setminus f^{-\infty}, & \text{αν } k < 0. \end{cases} \quad \diamond$$

Συνέπεια της προηγούμενης Πρότασης 4.5.4 είναι τώρα ότι το συμπέρασμα της Πρότασης 4.4.1 ισχύει και για συναρτήσεις του συνόλου $M(\Omega, U)$, δηλαδή για συναρτήσεις με τιμές στην επεκτεταμένη ευθεία $\overline{\mathbb{R}}$. Πρέπει, όμως, να επισημανθεί το γεγονός ότι στην περίπτωση που έχουμε δυο συναρτήσεις f και g του $M(\Omega, U)$ και θέλουμε να πάρουμε το άθροισμα $f + g$, τότε η συνάρτηση αυτή δεν ορίζεται για εκείνα τα σημεία $x \in \Omega$, όπου $f(x) = -g(x) = \pm\infty$. Αν στα σημεία αυτά ορίσουμε την $f + g$ να παίρνει την τιμή 0, τότε η νέα συνάρτηση είναι επίσης μετρήσιμη. Όσον αφορά το γινόμενο έχουμε το εξής συμπέρασμα:

4.5.5. Πρόταση. Αν $f, g \in M(\Omega, U)$, τότε και $fg \in M(\Omega, U)$.

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε πρώτα ότι, αν στο γινόμενο $f(x) \cdot g(x)$ εμφανιστούν οι πράξεις $0 \cdot (\pm\infty)$ ή $(\pm\infty) \cdot 0$, τότε, σύμφωνα με όσα συμφωνήσαμε στην παράγραφο 1.1 για το σύνολο $\overline{\mathbb{R}}$, το αποτέλεσμα των πράξεων αυτών είναι ίσο με το 0. Θ' αποδείξουμε τώρα την Πρόταση. Για κάθε $n = 1, 2, \dots$ ορίζουμε τη συνάρτηση $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με τον τύπο

$$f_n(x) := \begin{cases} f(x), & \text{αν } |f(x)| \leq n, \\ n, & \text{αν } f(x) > n, \\ -n, & \text{αν } f(x) < -n \end{cases}$$

η οποία είναι U -μετρήσιμη, αφού, για κάθε $k \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\{x \in \Omega : f_n(x) > k\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{αν } k \geq n, \\ \{x : f(x) > k\}, & \text{αν } -n \leq k < n, \\ \Omega, & \text{αν } k < -n. \end{cases}$$

Τα ίδια πράγματα συμβαίνουν και για τη συνάρτηση g_m που ορίζεται με τη βοήθεια της g , για κάθε $m = 1, 2, \dots$, όπως και η f_n . Απ' την Πρόταση 4.4.1 προκύπτει τώρα ότι, για κάθε n, m το γινόμενο $f_n g_m$ είναι U -μετρήσιμη συνάρτηση. Αλλά, παρατηρούμε ότι ισχύει $f(x) = \lim_n f_n(x)$ και $g(x) = \lim_m g_m(x)$, οπότε και

$$(1) \quad f(x)g_m(x) = \lim_n f_n(x)g_m(x),$$



για κάθε $m = 1, 2, \dots$ και

$$(2) \quad f(x)g(x) = \lim_m f g_m(x).$$

Έτσι, το Πρόρισμα 4.5.2 και η (1) συνεπάγονται ότι $f g_m \in M(\Omega, \mathcal{U})$, για κάθε $m = 1, 2, \dots$, οπότε, πάλι το Πρόρισμα 4.5.2 και η (2) συνεπάγονται ότι $f g \in M(\Omega, \mathcal{U})$. ◊

4.6. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΣΧΕΔΟΝ ΠΑΝΤΟΥ

Ας υποθέσουμε ότι $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ είναι ένας χώρος μέτρου και έστω $P(x)$, $x \in \Omega$ ένας προτασιακός τύπος με παράμετρο x απ' το σύνολο Ω .

Ορισμός Η πρόταση $P(a)$ είναι αληθής για μ -σχεδόν όλα τα $a \in \Omega$, ή μ -σχεδόν παντού στο Ω και θα γράφουμε

$$P(a), \mu\text{-σχ. ο. } a \in \Omega, \text{ ή } P(a), \mu\text{-σχ. π. } \Omega,$$

αντίστοιχα, αν υπάρχει ένα $\mathcal{U}$ -μετρήσιμο σύνολο E τέτοιο ώστε $\mu(E) = 0$ και, για κάθε $a \in E^c$, η πρόταση $P(a)$ είναι αληθής. Είναι φανερό ότι η έννοια αυτή του "σχεδόν παντού" εξαρτάται απ' το σύνολο Ω και το μέτρο μ . Στα επόμενα, αν το Ω ή/και το μ θεωρούνται σταθερά, τότε θα παραλείπουμε το Ω ή/και το μ απ' το συμβολισμό μ -σχ. π. Ω . Έτσι, για παράδειγμα, αν (f_n) είναι μια ακολουθία συναρτήσεων του Ω στο $\mathbb{R}$, θα λέμε ότι η (f_n) συγκλίνει σχ. π. προς μια συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ και θα γράφουμε

$$\lim_n f_n = f, \text{ σχ.π.,}$$

αν υπάρχει $E \in \mathcal{U}$ με $\mu(E) = 0$ και $\lim_n f_n(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Omega \setminus E$.

Το συμπέρασμα του Προρίσματος 4.5.2 μπορεί τώρα να γενικευτεί και για ακολουθίες οι οποίες συγκλίνουν σχεδόν παντού. Συγκεκριμένα έχουμε την εξής Πρόταση:

4.6.1. Πρόταση. Έστω (f_n) μια ακολουθία συναρτήσεων του $M(\Omega, \mathcal{U})$ και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Αν η $\mathcal{U}$ είναι πλήρης ως προς το μέτρο μ και ισχύει $\lim f_n = f$, σχ. π., τότε και $f \in M(\Omega, \mathcal{U})$.

Απόδειξη. Επειδή $\lim f_n = f$, σχ. π., υπάρχει σύνολο $E \in \mathcal{U}$ τέτοιο ώστε $\mu(E) = 0$ και $\lim f_n(x) = f(x)$, για κάθε $x \in E^c$.

Για κάθε $n = 1, 2, \dots$ θέτουμε

$$h_n(x) := \begin{cases} f_n(x), & \text{αν } x \in E^c, \\ 0, & \text{αν } x \in E \end{cases}$$

και επίσης

$$h(x) := \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in E^c, \\ 0, & \text{αν } x \in E \end{cases}$$

Έτσι, θα έχουμε $\lim h_n(x) = h(x)$, για κάθε $x \in \Omega$. Ακολουθώντας την ίδια ακριβώς πορεία όπως και για την απόδειξη του Προρίσματος 4.5.2, μπορούμε ν' αποδείξουμε

ότι η h είναι U -μετρήσιμη, αφού, για κάθε $n = 1, 2, \dots$ η f_n είναι τέτοια. Τούτο προκύπτει απ' το γεγονός ότι, για κάθε $k \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\{x \in \Omega : f'_n(x) > k\} = \begin{cases} \{x \in \Omega : f_n(x) > k\} \setminus E, & \text{αν } k \geq 0, \\ \{x \in \Omega : f_n(x) > k\} \cup E, & \text{αν } k < 0. \end{cases}$$

Έστω $k \in \mathbb{R}$. Επειδή η σ -άλγεβρα U είναι πλήρης ως προς μ , έπεται ότι τα σύνολα

$$E_k := \{x \in \Omega : f(x) \geq k\} \cap E$$

και

$$E'_k := \{x \in \Omega : f(x) > k\} \cap E$$

είναι U -μετρήσιμα (και μάλιστα ισχύει $\mu(E_k) = \mu(E'_k) = 0$). Άρα, αφού η h είναι U -μετρήσιμη, συμπεραίνουμε ότι και η f είναι τέτοια, αφού ισχύει

$$\{x \in \Omega : f(x) > k\} = \begin{cases} \{x \in \Omega : h(x) > k\} \cup E'_k, & \text{αν } k \geq 0, \\ \{x \in \Omega : h(x) > k\} \setminus E_k, & \text{αν } k < 0. \end{cases}$$

4.7. ΑΠΛΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Στη θεωρία ολοκλήρωσης μερικές συναρτήσεις ειδικού τύπου παίζουν πρωταρχικό ρόλο. Τέτοιες είναι οι απλές συναρτήσεις.

Ορισμός Μια συνάρτηση $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται απλή, αν το σύνολο τιμών της είναι πεπερασμένο. Κάθε απλή συνάρτηση έχει πολλές παραστάσεις, αλλά υπάρχει μια μοναδική παράσταση που θα τη λέμε κανονική και που είναι της μορφής

$$\phi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i},$$

όπου $a_1, a_2, \dots, a_n$ είναι οι (διαφορετικές) τιμές της ϕ και $A_1, A_2, \dots, A_n$ είναι τα σύνολα

$$A_i := \{x \in \Omega : \phi(x) = a_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Είναι φανερό ότι τα σύνολα αυτά είναι ξένα ανά δύο και συνιστούν μια διαμέριση του συνόλου Ω .

4.7.1. Πρόταση. Έστω ϕ μια απλή συνάρτηση με κανονική παράσταση

$$\phi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}.$$

Η συνάρτηση ϕ είναι U -μετρήσιμη, αν και μόνο αν τα σύνολα $A_1, A_2, \dots, A_n$ είναι U -μετρήσιμα.



Απόδειξη. Έστω ότι η ϕ είναι U -μετρήσιμη. Τότε κάθε A_i είναι U -μετρήσιμο σύνολο, αφού ισχύει ότι

$$A_i = \{x \in \Omega : \phi(x) \geq \alpha_i\} \setminus \{x \in \Omega : \phi(x) > \alpha_i\}.$$

Αντίστροφα. Έστω ότι κάθε A_i είναι U -μετρήσιμο. Απ' το παράδειγμα 4.3.5 προκύπτει, τότε, ότι και η συνάρτηση ϕ είναι U -μετρήσιμη. ◊

Θα παριστάνουμε στο εξής με $M^+(\Omega, U)$ το σύνολο των μη αρνητικών U -μετρήσιμων συναρτήσεων $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Η επόμενη Πρόταση μας δίνει ένα συμπέρασμα που αποτελεί το κλειδί στην εισαγωγή της έννοιας της ολοκλήρωσης.

4.7.2. Πρόταση. Για κάθε $f \in M^+(\Omega, U)$ υπάρχει ακολουθία απλών συναρτήσεων $\phi_n \in M^+(\Omega, U)$ τέτοια ώστε

$$(i) \quad \phi_n(x) \leq \phi_{n+1}(x), \quad x \in \Omega, n = 1, 2, \dots$$

$$(ii) \quad f(x) = \lim \phi_n(x), \quad x \in \Omega.$$

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε τα σύνολα

$$A_k^n := \begin{cases} \{x \in \Omega : \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\}, & \text{αν } 1 \leq k \leq n2^n - 1, \\ \{x \in \Omega : f(x) \geq k\}, & \text{αν } k = n2^n, \end{cases}$$

Τα σύνολα $A_k^n, k = 1, 2, \dots, n2^n$ είναι U -μετρήσιμα και αποτελούν μια διαμέριση του Ω . Ορίζουμε, τώρα, τη συνάρτηση

$$\phi_n := \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k}{2^n} \chi_{A_k^n}$$

και θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία (ϕ_n) ικανοποιεί τις συνθήκες (i) και (ii) της Πρότασης. Πραγματικά, για κάθε φυσικό αριθμό n η συνάρτηση ϕ_n είναι απλή, μη αρνητική και U -μετρήσιμη.

Θ' αποδείξουμε ότι η (i) ικανοποιείται. Έστω $x \in \Omega$ σταθερό. Τότε ισχύει μία απ' τις εξής σχέσεις:

$$(3) \quad \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}, \quad \text{για κάποιο } k \in \{0, 1, \dots, n2^n - 1\},$$

$$(4) \quad f(x) \geq n.$$

Αν ισχύει η (3), τότε

$$\phi_n(x) = \frac{k}{2^n}$$

και, αν ισχύει η (4), τότε

$$\phi_n(x) = n.$$

Παρατηρούμε ότι το διάστημα $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$ γράφεται ως

$$[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}) = [\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}) \cup [\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}})$$



Άρα, αν ισχύει η (3), τότε θα έχουμε

$$\phi_{n+1}(x) = \frac{2k}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} = \phi_n(x)$$

ή

$$\phi_{n+1}(x) = \frac{2k+1}{2^{n+1}} > \frac{k}{2^n} = \phi_n(x).$$

Δηλαδή $\phi_{n+1}(x) \geq \phi_n(x)$.

Έστω ότι ισχύει η (4). Τότε θα αληθεύει μία απ' τις εξής ανισότητες:

$$(5) \quad f(x) \geq n+1, \quad n \leq f(x) < n+1.$$

Αν ισχύει η πρώτη, θα έχουμε

$$\phi_{n+1}(x) = n+1 > n = \phi_n(x)$$

και αν ισχύει η δεύτερη, θα έχουμε

$$\frac{k'}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{k'+1}{2^{n+1}}$$

για κάποιο $k' \in \{n2^{n+1}, n2^{n+1} + 1, \dots, (n+1)2^{n+1} - 1\}$. Αλλά τότε

$$\phi_{n+1}(x) = \frac{k'}{2^{n+1}} \geq \frac{n2^{n+1}}{2^{n+1}} = n = \phi_n(x).$$

Έτσι, σε κάθε περίπτωση έχουμε

$$\phi_{n+1}(x) \geq \phi_n(x), \quad x \in \Omega,$$

δηλαδή η (i) ικανοποιείται.

Θ' αποδείξουμε ότι η (ii) ικανοποιείται. Προς τούτο έστω $x \in \Omega$ σταθερό και $\epsilon > 0$. Αν μεν $f(x) = +\infty$, τότε $f(x) \geq n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα

$$\phi_n(x) = n \rightarrow +\infty = f(x).$$

Έστω ότι $f(x) < +\infty$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $f(x) < n_0$ και $2^{-n_0} < \epsilon$. Για τυχόν $n \geq n_0$, υπάρχει $m \in \{0, 1, \dots, n2^n - 1\}$ τέτοιο ώστε

$$\frac{m}{2^n} \leq f(x) < \frac{m+1}{2^n},$$

οπότε

$$\phi_n(x) = \frac{m}{2^n}.$$

Άρα τότε ισχύει

$$|f(x) - \phi_n(x)| = |f(x) - \frac{m}{2^n}| = f(x) - \frac{m}{2^n} < \frac{m+1}{2^n} - \frac{m}{2^n} = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n_0}} < \epsilon.$$

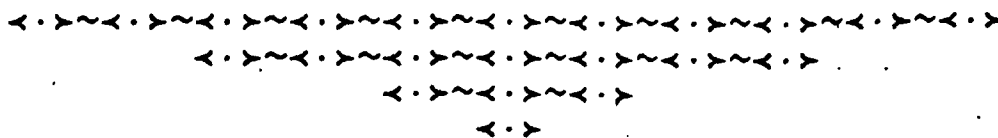


δηλαδή $\lim_n \phi_n(x) = f(x)$. Επομένως και η (ii) ικανοποιείται. ◊

Προβλήματα

- 4.1. Ν' αποδειχτεί ότι $A \in \mathcal{U}$ αν και μόνο αν $\chi_A \in M_+(\Omega, \mathcal{U})$.
- 4.2. Να δοθεί ένα παράδειγμα που αποδεικνύει ότι μια συνάρτηση μπορεί να είναι μετρήσιμη ως προς μια σ -άλγεβρα αλλά όχι μετρήσιμη ως προς μια άλλη.
- 4.3. Έστω $(\Omega, \mathcal{U})$ ένας μετρήσιμος χώρος και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Ν' αποδειχτεί ότι $f \in M(\Omega, \mathcal{U})$, αν και μόνο αν $f^{-1}((a, b)) \in \mathcal{U}$, για κάθε ανοικτό διάστημα $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$.
- 4.4. Να δοθεί ένα παράδειγμα μιας συνάρτησης f τέτοιας ώστε η $|f|$ να είναι $\mathcal{U}$ -μετρήσιμη και η f να μην είναι.
- 4.5. Ν' αποδειχτεί ότι αν $f \in M(\Omega, \mathcal{U})$ και $g = f$, σχ. π., τότε $g \in M(\Omega, \mathcal{U})$, αρκεί η $\mathcal{U}$ να είναι πλήρης.





5. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

5.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μια απ' τις απλούστερες θεωρήσεις του γνωστού μας κατά Riemann ορισμένου ολοκληρώματος πραγματικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής είναι εκείνη του εμβαδού του τόπου που περιέχεται μεταξύ του Ox -άξονα και της καμπύλης που παριστάνει το γράφημα της συνάρτησης. Αλλά και το ολοκλήρωμα Lebesgue και, όπως θα δούμε, κάθε ολοκλήρωμα που παράγεται από κάποιο μέτρο, είναι, κατά κάποιον τρόπο, μια γενίκευση αυτής της έννοιας του εμβαδού. Στο κεφάλαιο τούτο ορίζουμε το ολοκλήρωμα, πρώτα, μιας απλής συνάρτησης ως το άθροισμα των "εμβαδών" που είναι "κάτω" απ' τα σταθερά "τμήματά" της. Στη συνέχεια παίρνοντας όρια αυξανουσών ακολουθιών τέτοιων απλών συναρτήσεων προκύπτει το ολοκλήρωμα κάθε μη αρνητικής μετρήσιμης συνάρτησης.

5.2. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΑΠΛΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $\phi \in M(\Omega, \mathcal{U})$ μια απλή συνάρτηση με κανονική παράσταση

$$\phi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i},$$

όπου $A_i \in \mathcal{U}$ και $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Ορισμός. Ορίζουμε το ολοκλήρωμα της ϕ ως προς μ με τον τύπο

$$\int \phi d\mu := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i).$$

Είναι φανερό ότι το ολοκλήρωμα της ϕ είναι ένας πραγματικός αριθμός ή το $\pm\infty$. (Επαναλαμβάνουμε ότι σε περίπτωση που παρουσιάζεται το γινόμενο $0(\pm\infty)$ τότε τούτο θεωρείται ίσο με το μηδέν). Αργότερα θα περιοριστούμε σε συναρτήσεις που το ολοκλήρωμά τους είναι πεπερασμένο.



5.2.1. Πρόταση. Αν ϕ, ψ είναι δυο απλές συναρτήσεις στο $M(\Omega, \mathcal{U})$ και $c \in \mathbb{R}$, τότε και οι συναρτήσεις $c\phi, \phi + \psi$ είναι επίσης απλές συναρτήσεις του συνόλου $M(\Omega, \mathcal{U})$ και μάλιστα ισχύει

$$(i) \quad \int c\phi d\mu = c \int \phi d\mu,$$

$$(ii) \quad \int (\phi + \psi) d\mu = \int \phi d\mu + \int \psi d\mu.$$

Απόδειξη. Αν $c = 0$, τότε $c\phi = 0$ και η (i) ισχύει. Έστω $c \neq 0$ και

$$\phi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$$

η κανονική παράσταση της ϕ . Τότε η

$$c\phi = \sum_{i=1}^n ca_i \chi_{A_i}$$

είναι η κανονική παράσταση της $c\phi$. Επομένως αυτή είναι απλή και $\mathcal{U}$ -μετρήσιμη. Έτσι έχουμε

$$\int c\phi d\mu = \sum_{i=1}^n ca_i \mu(A_i) = c \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) = c \int \phi d\mu,$$

δηλαδή η (i) ισχύει.

Έστω τώρα

$$\psi = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{B_j}$$

η κανονική παράσταση της ψ . Τότε η $\phi + \psi$ είναι απλή συνάρτηση με μια παράσταση

$$\phi + \psi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i + \beta_j) \chi_{A_i \cap B_j},$$

η οποία μπορεί να μην είναι η κανονική, επειδή οι αριθμοί $a_i + \beta_j$, ($i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$) μπορεί να μην είναι διαφορετικοί ανά δύο. Αλλά, αν υποθέσουμε ότι γ_k , $k = 1, 2, \dots, l$ είναι οι τιμές των αθροισμάτων $a_i + \beta_j$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ (όπου αυτές λαμβάνονται με κάποια διάταξη) και ορίσουμε τα σύνολα

$$S_k := \{(i, j) : a_i + \beta_j = \gamma_k\}$$

και

$$\Gamma_k := \bigcup_{(i,j) \in S_k} (A_i \cap B_j),$$



τότε βλέπουμε ότι η συνάρτηση $\phi + \psi$ γράφεται ως

$$\phi + \psi = \sum_{k=1}^l \gamma_k \chi_{\Gamma_k}.$$

Επειδή τα σύνολα Γ_k είναι U -μετρήσιμα, έπεται ότι $\phi + \psi \in M(\Omega, U)$. Επιπλέον έχουμε

$$\begin{aligned} \int (\phi + \psi) d\mu &= \sum_{k=1}^l \gamma_k \mu(\Gamma_k) = \sum_{k=1}^l \gamma_k \mu\left(\bigcup_{(i,j) \in S_k} (A_i \cap B_j)\right) = \\ &= \sum_{k=1}^l \sum_{(i,j) \in S_k} (\alpha_i + \beta_j) \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha_i + \beta_j) \mu(A_i \cap B_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(A_i \cap B_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(A_i \cap B_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^m \beta_j \sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap B_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(B_j) = \\ &= \int \phi d\mu + \int \psi d\mu, \end{aligned}$$

δηλαδή και η (II) ισχύει. ◊

5.2.2. Πρόταση. Αν $\phi, \psi \in M(\Omega, U)$ είναι δύο απλές συναρτήσεις τέτοιες ώστε $\phi \leq \psi$, τότε ισχύει και

$$\int \phi d\mu \leq \int \psi d\mu.$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.2.1, η συνάρτηση $\phi - \psi$ είναι απλή και ισχύει

$$\int (\phi - \psi) d\mu = \int \phi d\mu - \int \psi d\mu.$$

Αλλά έχουμε $\phi - \psi \leq 0$, οπότε και $\int (\phi - \psi) d\mu \leq 0$, δηλαδή $\int \phi d\mu \leq \int \psi d\mu$. ◊

Με τη βοήθεια ενός μέτρου μ και μιας απλής συνάρτησης ϕ μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα νέο μέτρο λ στο σύνολο Ω ορισμένο πάνω στη σ -άλγεβρα U . Πραγματικά, έχουμε την εξής Πρόταση:



5.2.3. Πρόταση. Για κάθε απλή συνάρτηση $\phi \in M^+(\Omega, U)$, η συνάρτηση $\lambda : U \rightarrow [0, +\infty]$ με τύπο

$$\lambda(A) := \int \phi \chi_A d\mu$$

ορίζει ένα μέτρο στο Ω .

Απόδειξη. Έστω $\phi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ η κανονική παράσταση της ϕ . Τότε η συνάρτηση $\phi \chi_A$ γράφεται ως

$$\phi \chi_A = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A \cap A_i}$$

κι επομένως έχουμε

$$\lambda(A) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A \cap A_i), \quad A \in U.$$

Έτσι, βλέπουμε ότι $\lambda(A) \geq 0$, $\lambda(\emptyset) = 0$ και αν (B_m) είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο U -μετρήσιμων συνόλων, τότε

$$\begin{aligned} \lambda\left(\bigcup_{m=1}^{+\infty} B_m\right) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu\left(\left(\bigcup_{m=1}^{+\infty} B_m\right) \cap A_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu\left(\bigcup_{m=1}^{+\infty} (B_m \cap A_i)\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{m=1}^{+\infty} \mu(B_m \cap A_i) = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(B_m \cap A_i) = \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda(B_m), \end{aligned}$$

οπότε, πραγματικά, η συνάρτηση λ είναι ένα μέτρο. $\diamond$

5.3. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΟΥ $M^+(\Omega, U)$

Όπως είδαμε στην Πρόταση 4.7.2, για κάθε συνάρτηση $f \in M^+(\Omega, U)$ υπάρχει ακολουθία απλών συναρτήσεων $\phi_n \in M^+(\Omega, U)$ τέτοια ώστε $f(x) = \lim \phi_n(x)$ και $\phi_n(x) \leq f(x)$, για κάθε $x \in \Omega$ και $n = 1, 2, \dots$ (Τούτο προκύπτει απ' το γεγονός ότι η ακολουθία (ϕ_n) είναι αύξουσα και συγκλίνουσα). Επομένως το σύνολο

$$\Phi_f := \{\phi \in M^+(\Omega, U) : \phi \text{ απλή και } \phi(x) \leq f(x), x \in \Omega\}$$

είναι μη κενό. Ορίζουμε, τώρα, το ολοκλήρωμα της f ως προς μ με τον τύπο

$$\int f d\mu := \sup \left\{ \int \phi d\mu : \phi \in \Phi_f \right\}.$$

Είναι φανερό ότι τούτο είναι ένας πραγματικός αριθμός, ή το $+\infty$.

Στην περίπτωση που η συνάρτηση f είναι απλή, ο ορισμός αυτός και ο ορισμός που δόθηκε στην παράγραφο 5.2 οδηγούν στην ίδια έννοια του ολοκληρώματος.



Πραγματικά, αν $f \in \Phi_f$, τότε έχουμε

$$\int f d\mu \leq \sup\{\int \phi d\mu : \phi \in \Phi_f\}.$$

Αλλά για κάθε συνάρτηση $\phi \in \Phi_f$ ισχύει $\phi \leq f$. Έτσι, σύμφωνα με την Πρόταση 5.2.2, θα έχουμε και

$$\int \phi d\mu \leq \int f d\mu.$$

Επομένως

$$\sup\{\int \phi d\mu : \phi \in \Phi_f\} \leq \int f d\mu,$$

οπότε ισχύει η ισότητα. ◊

5.3.1. Πρόταση. Αν $f, g \in M^+(\Omega, U)$, τότε

$$f \leq g \implies \int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

Απόδειξη. Τούτο προκύπτει απ' τον ορισμό του ολοκληρώματος και το γεγονός ότι αν $f \leq g$, τότε $\Phi_f \subseteq \Phi_g$. ◊

Έστω A ένα U -μετρήσιμο σύνολο και $f \in M^+(\Omega, U)$ μία συνάρτηση. Τότε, βέβαια, έχουμε και $f\chi_A \in M^+(\Omega, U)$ (βλ. Πρόβλ. 4.1). Το ολοκλήρωμα της f ως προς το μέτρο μ πάνω στο σύνολο A ορίζεται με τον τύπο

$$\int_A f d\mu := \int f\chi_A d\mu.$$

5.3.2. Πρόταση. Για κάθε $f \in M^+(\Omega, U)$ και $A, B \in U$ ισχύει

$$A \subseteq B \implies \int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu.$$

Απόδειξη. Αν $A \subseteq B$, τότε $f\chi_A \leq f\chi_B$, οπότε απ' τον ορισμό και την Πρόταση 5.3.1. προκύπτει το συμπέρασμα. ◊

Το επόμενο συμπέρασμα είναι το πρώτο το οποίο αναφέρεται στην αντιμετάθεση των πράξεων του ολοκληρώματος $\int$ και του ορίου $\lim$.

5.3.3. Θεώρημα (μονότονης σύγκλισης ή του Levi). Αν (f_n) είναι μια αύξουσα ακολουθία συναρτήσεων του $M^+(\Omega, U)$ και f είναι η συνάρτηση

$$f(x) = \lim f_n(x), \quad x \in \Omega,$$

τότε $f \in M^+(\Omega, U)$ και μάλιστα ισχύει

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Απόδειξη. Απ' το Πρόγραμμα 4.5.2 προκύπτει ότι και η f είναι U -μετρήσιμη. Ακόμα, λόγω του ότι η ακολουθία (f_n) είναι αύξουσα, η συνάρτηση f παίρνει μη αρνητικές τιμές. Άρα $f \in M^+(\Omega, U)$ και επιπλέον ισχύει $f_n \leq f$, $n \in \mathbb{N}$. Τούτο, λόγω της Πρότασης 5.3.1, συνεπάγεται ότι

$$\int f_n d\mu \leq \int f d\mu,$$

οπότε και

$$(1) \quad \lim_n \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

Για ν' αποδείξουμε ότι ισχύει η ισότητα στην (1), υποθέτουμε ότι ισχύει η γνήσια ανισότητα. Τότε όμως, εξ ορισμού του ολοκληρώματος της f ως προς μ , υπάρχει $\phi \in \Phi_f$ τέτοια ώστε

$$(2) \quad \lim_n \int f_n d\mu < \int \phi d\mu < \int f d\mu.$$

Έστω $c \in (0, 1)$. Για κάθε $n = 1, 2, \dots$, ορίζουμε το σύνολο

$$A_n := \{x \in \Omega : c\phi(x) \leq f_n(x)\}.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$A_n \subseteq A_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad \text{και} \quad \Omega = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

Τότε όμως, απ' τις Προτάσεις 5.3.1 και 5.3.2, παίρνουμε

$$c \int_{A_n} \phi d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \leq \int f_n d\mu$$

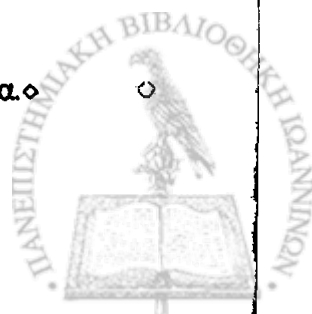
ενώ, απ' τις 5.2.2, 5.2.3 και 2.4.2 προκύπτει ότι αν χ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου $\bigcup A_n$, τότε

$$\begin{aligned} c \int \phi d\mu &= c \int \chi \phi d\mu = c\lambda(\bigcup A_n) = c(\lim_n \lambda(A_n)) = \lim_n (c \int_{A_n} \phi d\mu) \leq \\ &\leq \lim_n \int f_n d\mu. \end{aligned}$$

Έτσι, υποθέτοντας ότι το c τείνει από αριστερά προς το σημείο 1, προκύπτει τελικά ότι

$$\int \phi d\mu \leq \lim_n \int f_n d\mu,$$

πράγμα που αντίκειται προς τη (2). Επομένως στην (1) ισχύει η ισότητα. ◊



5.3.4. Πρόταση. Αν $f, g \in M^+(\Omega, U)$ και $c > 0$, τότε και $cf, f + g \in M^+(\Omega, U)$. Επίσης έχουμε

$$(i) \quad \int cf d\mu = c \int f d\mu,$$

$$(ii) \quad \int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Απόδειξη. Αν $c = 0$, η (i) προφανώς ισχύει.

Έστω ότι $c > 0$. Για τη συνάρτηση f παίρνουμε μια ακολουθία απλών συναρτήσεων $\phi_n \in M^+(\Omega, U)$ τέτοια ώστε οι συνθήκες (i) και (ii) της Πρότασης 4.7.2 να ικανοποιούνται. Αλλά τότε η $(c\phi_n)$ είναι μια αύξουσα ακολουθία απλών συναρτήσεων του $M^+(\Omega, U)$ τέτοια ώστε $\lim_n c\phi_n(x) = cf(x)$, για κάθε $x \in \Omega$. Έτσι, το Θεώρημα 5.3.3 εφαρμόζεται, οπότε παίρνουμε

$$\int cf d\mu = \lim_n \int c\phi_n d\mu = \lim_n \left(c \int \phi_n d\mu \right) = c \left(\lim_n \int \phi_n d\mu \right) = c \int f d\mu,$$

δηλαδή την (i).

Για ν' αποδείξουμε τη σχέση (ii), για τις συναρτήσεις f, g θεωρούμε πάλι, όπως στην Πρόταση 4.7.2, δυο ακολουθίες απλών συναρτήσεων $\phi_n, \psi_n \in M^+(\Omega, U)$, τέτοιες ώστε

$$\lim_n \phi_n(x) = f(x) \text{ και } \lim_n \psi_n(x) = g(x),$$

για κάθε στοιχείο $x \in \Omega$. Τότε η ακολουθία των αθροισμάτων $(\phi_n + \psi_n)$ είναι αύξουσα και έχει όρους απλές συναρτήσεις του $M^+(\Omega, U)$. Επίσης ισχύει

$$\lim_n (\phi_n + \psi_n)(x) = (f + g)(x),$$

για κάθε $x \in \Omega$. Έτσι, πάλι, το Θεώρημα 5.3.3 εφαρμόζεται οπότε, τελικά, προκύπτει

$$\int (f + g) d\mu = \lim \int (\phi_n + \psi_n) d\mu = \lim \int \phi_n d\mu + \lim \int \psi_n d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu. \diamond$$

5.3.5. Θεώρημα (Λήμμα του Fatou). Έστω (f_n) μια ακολουθία συναρτήσεων στον χώρο $M^+(\Omega, U)$. Θέτουμε

$$\underline{f}(x) := \liminf f_n(x), \quad x \in \Omega.$$

Τότε $\underline{f} \in M^+(\Omega, U)$ και μάλιστα ισχύει

$$\int \underline{f} d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

Απόδειξη. Το γεγονός ότι $\underline{f} \in M^+(\Omega, U)$ αποδείχτηκε στην Πρόταση 4.5.1.



Τώρα, για κάθε $k=1, 2, \dots$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$g_k(x) := \inf\{f_n(x) : n \geq k\}, \quad x \in \Omega,$$

οπότε, λόγω της Πρότασης 5.3.1, ισχύει

$$k \leq n \implies g_k \leq f_n \implies \int g_k d\mu \leq \int f_n d\mu$$

και επομένως

$$\int_k g_k d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

Αλλά, η ακολουθία (g_k) είναι αύξουσα, έχει όρους στο $M^+(\Omega, \mathcal{U})$ (Πρόταση 4.5.1) και επιπλέον ισχύει

$$\lim g_k(x) = \liminf f_n(x) = f(x), \quad x \in \Omega.$$

Έτσι, εφαρμόζοντας το θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης 5.3.3, παίρνουμε.

$$\int f d\mu = \lim_k \int g_k d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu. \quad \diamond$$

5.3.6. Πρόταση. Έστω $f \in M^+(\Omega, \mathcal{U})$. Τότε

$$f = 0, \text{ σχ.π., αν και μόνο αν } \int f d\mu = 0.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $f = 0$ σχ. π. Θέτοντας

$$A := \{x \in \Omega : f(x) > 0\}$$

θα έχουμε $\mu(A) = 0$. Για κάθε $n = 1, 2, \dots$, ορίζουμε τη συνάρτηση $f_n := n\chi_A$, οπότε παρατηρούμε ότι

$$f \leq \liminf f_n.$$

Έτσι, το Λήμμα του Fatou 5.3.5 συνεπάγεται ότι

$$0 \leq \int f d\mu \leq \int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu,$$

ενώ, απ' την άλλη μεριά, έχουμε

$$\liminf \int f_n d\mu = \liminf \left(n \int \chi_A d\mu \right) = \liminf (n \cdot \mu(A)) = 0.$$

Άρα $\int f d\mu = 0$.

Αντίστροφα. Υποθέτουμε ότι $\int f d\mu = 0$ και, για κάθε $n = 1, 2, \dots$, θέτουμε

$$A_n := \{x \in \Omega : f(x) > \frac{1}{n}\}.$$



Τότε έχουμε $f \geq \frac{1}{n} \chi_{A_n}$, οπότε και

$$0 = \int f d\mu \geq \frac{1}{n} \int \chi_{A_n} d\mu = \frac{1}{n} \mu(A_n) \geq 0,$$

δηλαδή $\mu(A_n) = 0$, $n = 1, 2, \dots$ Αλλά ισχύει ότι

$$A := \{x \in \Omega : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

οπότε, λόγω της Πρότασης 2.4.4, θα έχουμε και $\mu(A) = 0$. Άρα $f = 0$, σχ. π. $\diamond$

Ένα άμεσο επακόλουθο της παραπάνω Πρότασης είναι το συμπέρασμα που ακολουθεί:

5.3.7. Πρόταση. Αν $f, g \in M^+(\Omega, U)$ είναι συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f = g$, σχ. π., τότε $\int f d\mu = \int g d\mu$.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$A := \{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\},$$

και παρατηρούμε ότι $\mu(A) = 0$ και επιπλέον ότι $f \chi_{A^c} = g \chi_{A^c}$. Άρα ισχύει

$$\int f \chi_{A^c} d\mu = \int g \chi_{A^c} d\mu \text{ και } \int f \chi_A d\mu = \int g \chi_A d\mu.$$

Αλλά έχουμε $f = f \chi_A + f \chi_{A^c}$ και $g = g \chi_A + g \chi_{A^c}$. Επομένως

$$\int f d\mu = \int f \chi_A d\mu + \int f \chi_{A^c} d\mu = \int g \chi_A d\mu + \int g \chi_{A^c} d\mu = \int g d\mu. \quad \diamond$$

Απ' την Πρόταση 5.3.7 προκύπτει τώρα ότι το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης του Levi 5.3.3 και το Λήμμα του Fatou 5.3.5 ισχύουν γενικότερα για ακολουθίες (f_n) που συγκλίνουν σχεδόν παντού. Συγκεκριμένα μπορούμε εύκολα ν' αποδείξουμε τα παρακάτω συμπεράσματα τα οποία είναι γενικεύσεις των 5.3.3 και 5.3.5 αντίστοιχα:

5.3.3₁. Θεώρημα (μονότονης σύγκλισης ή του Levi). Υποθέτουμε ότι U είναι μία πλήρης σ -άλγεβρα. Αν (f_n) είναι μια αίξουσα ακολουθία συναρτήσεων του $M^+(\Omega, U)$ και f είναι μία συνάρτηση τέτοια ώστε

$$f = \lim_n f_n, \text{ σχ.π.,}$$

τότε $f \in M^+(\Omega, U)$ και επιπλέον ισχύει

$$\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu.$$

Επίσης έχουμε το

5.3.5₁. Θεώρημα (Λήμμα του Fatou). Έστω U μια πλήρης σ -άλγεβρα στο σύνολο Ω και (f_n) μια ακολουθία συναρτήσεων στο $M^+(\Omega, U)$. Αν f είναι μία συνάρτηση τέτοια ώστε

$$f = \liminf f_n, \text{ σχ.π.,}$$



τότε $f \in M^+(\Omega, \mathcal{U})$ και επιπλέον ισχύει

$$\int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

5.4. ΑΠΟΛΥΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Ορισμός. Έστω $(\Omega, \mathcal{U})$ ένας μετρήσιμος χώρος εφοδιασμένος με δυο μέτρα μ και λ . Θα λέμε ότι το μέτρο λ είναι *απόλυτα συνεχές* ως προς το μέτρο μ , αν, για κάθε $A \in \mathcal{U}$, ισχύει

$$\mu(A) = 0 \implies \lambda(A) = 0.$$

Η παρακάτω Πρόταση μας δίνει ένα καλό παράδειγμα κατασκευής ενός μέτρου λ που είναι απόλυτα συνεχές ως προς ένα άλλο μέτρο μ .

5.4.1. Πρόταση. Έστω $f \in M^+(\Omega, \mathcal{U})$. Τότε ο τύπος

$$\lambda(A) := \int_A f d\mu, \quad A \in \mathcal{U}$$

ορίζει ένα μέτρο $\lambda : \mathcal{U} \rightarrow [0, +\infty]$ το οποίο είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο μ .

Απόδειξη. Είναι φανερό ότι ισχύει $\lambda(\emptyset) = 0$.

Τώρα, έστω (A_n) μια ακολουθία ξένων ανά δυο $\mathcal{U}$ -μετρήσιμων συνόλων. Για κάθε $n = 1, 2, \dots$ ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f_n := \sum_{i=1}^n f \chi_{A_i}$$

και εφαρμόζουμε διαδοχικά την Πρόταση 5.3.4. Έτσι βρίσκουμε

$$\int f_n d\mu = \sum_{i=1}^n \lambda(A_i).$$

Όμως η (f_n) είναι μια αύξουσα ακολουθία στοιχείων του συνόλου $M^+(\Omega, \mathcal{U})$ τέτοια ώστε

$$\lim_n f_n(x) = f \chi_{\bigcup_{i=1}^\infty A_i}(x), \quad x \in \Omega.$$

Έτσι, αν χ_n παριστάνει τη χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου $\bigcup_{i=1}^n A_i$, το Θεώρημα 5.3.3 (ή το 5.3.3₁) συνεπάγεται ότι

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = \int f \chi_n d\mu = \lim_n \int f_n d\mu = \sum_{i=1}^\infty \lambda(A_i),$$

πράγμα που αποδεικνύει ότι το λ είναι ένα μέτρο με πεδίο ορισμού τη σ -άλγεβρα $\mathcal{U}$.



Έστω, τώρα, A ένα U -μετρήσιμο σύνολο τέτοιο ώστε $\mu(A) = 0$. Τότε

$$\int \chi_A = 0, \text{ σχ. π.}$$

και, λόγω της Πρότασης 5.3.6, έχουμε

$$\lambda(A) = \int_A f d\mu = \int f \chi_A d\mu = 0.$$

Άρα το λ είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο μ . $\diamond$

Προβλήματα

5.1. Ν' αποδειχτεί ότι αν για κάθε σύνολο $A \in U$ ισχύει

$$\int f d\mu = \int g d\mu,$$

τότε οι συναρτήσεις f και g ταυτίζονται σχεδόν παντού.

5.2. Υποθέτουμε ότι $\Omega = \mathbb{N}$ και θεωρούμε το μέτρο του Παραδείγματος 2.3.1. Ν' αποδειχτεί ότι αν $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μη αρνητική, τότε $f \in M^+(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$ και επιπλέον ισχύει

$$\int f d\mu = \sum_{k=1}^{+\infty} f(k).$$

5.3. Να διατυπωθούν το Θεώρημα 5.3.3 και το Λήμμα του Φαίτου 5.3.5 στην περίπτωση που τα Ω, U, μ είναι όπως στο πρόβλημα 5.2 παραπάνω.

5.4. Αν $f \in M^+(\Omega, U)$ και ισχύει $\int f d\mu < +\infty$, τότε το σύνολο $\{x \in \Omega : f(x) > 0\}$ είναι σ -πεπερασμένο και για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $E \in U$ τέτοιο ώστε $\mu(E) < +\infty$ και

$$\int f d\mu \leq \int_E f d\mu + \epsilon.$$

5.5. Έστω (f_n) μια ακολουθία στο $M^+(\Omega, U)$. Να αποδειχτεί ότι ισχύει

$$\int \sum f_n d\mu = \sum \int f_n d\mu.$$

5.6. Να διατυπωθεί το πρόβλημα 5.5 όταν τα Ω, U, μ είναι αυτά του προβλήματος 5.2.





6. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

6.1. ΟΡΙΣΜΟΙ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $f \in M^+(\Omega, \mathcal{U})$ ως προς ένα μέτρο μ μπορεί να είναι ένας πραγματικός αριθμός ή το $+\infty$.

Ορισμός. Μια συνάρτηση $f \in M^+(\Omega, \mathcal{U})$ είναι *ολοκληρώσιμη* ως προς μ , ή *μ -ολοκληρώσιμη*, αν ισχύει

$$\int f d\mu < +\infty.$$

Γενικά, αν f είναι μια οποιαδήποτε $\mathcal{U}$ -μετρήσιμη συνάρτηση (και όχι αναγκαστικά μη αρνητική), τότε, όπως είδαμε στην Πρόταση 4.4.1, οι συναρτήσεις f^+ και f^- , δηλαδή το θετικό και αρνητικό αντίστοιχα μέρος της f , είναι μη αρνητικές $\mathcal{U}$ -μετρήσιμες συναρτήσεις. Δηλαδή f^+ και f^- είναι στοιχεία του συνόλου $M^+(\Omega, \mathcal{U})$.

Ορισμός. Μια συνάρτηση $f \in M^+(\Omega, \mathcal{U})$ είναι *ολοκληρώσιμη* ως προς μ , ή *μ -ολοκληρώσιμη*, αν οι συναρτήσεις f^+ και f^- είναι μ -ολοκληρώσιμες. Στην περίπτωση αυτή ορίζουμε το *ολοκλήρωμα* της f ως προς μ να είναι ο πραγματικός αριθμός.

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

Υπενθυμίζουμε ότι ισχύει $f = f^+ - f^-$.

Θα παριστάνουμε με $L(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ το σύνολο όλων των μ -ολοκληρώσιμων συναρτήσεων του συνόλου $M(\Omega, \mathcal{U})$.

Ορισμός. Επίσης, αν A είναι ένα $\mathcal{U}$ -μετρήσιμο σύνολο, τότε μια συνάρτηση $f \in M(\Omega, \mathcal{U})$ θα λέγεται *ολοκληρώσιμη ως προς μ πάνω στο A* , ή *μ -ολοκληρώσιμη πάνω στο A* , αν $f \chi_A \in L(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$. Το ολοκλήρωμα της f ως προς μ πάνω στο A ορίζεται με τον τύπο

$$\int_A f d\mu = \int f \chi_A d\mu.$$

Θα παριστάνουμε με $L(A, \mathcal{U}, \mu)$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων που είναι μ -ολοκληρώσιμες πάνω στο σύνολο A .



6.2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Εδώ θα δούμε ορισμένες ιδιότητες που έχουν οι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.

6.2.1. Πρόταση. Έστω $A \in \mathcal{U}$. Τότε για κάθε $f, g \in L(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ ισχύει

$$f \leq g \implies \int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu.$$

Απόδειξη. Από τη σχέση

$$f^+ - f^- = f \leq g = g^+ - g^-,$$

προκύπτει ότι

$$f^+ + g^- \leq f^- + g^+.$$

όπου $f^+ + g^-, f^- + g^+ \in M^+(\Omega, \mathcal{U})$. Τώρα η Πρόταση 5.3.1 συνεπάγεται ότι

$$\int_A f^+ d\mu + \int_A g^- d\mu \leq \int_A f^- d\mu + \int_A g^+ d\mu.$$

Επίσης, επειδή όλα τα ολοκληρώματα που εμπεριέχονται στη σχέση αυτή είναι πραγματικοί αριθμοί, έπεται ότι

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu \leq \int_A g^+ d\mu - \int_A g^- d\mu = \int_A g d\mu. \quad \diamond$$

6.2.2. Πρόταση. Έστω $f \in M(\Omega, \mathcal{U})$. Τότε η f είναι μ -ολοκληρώσιμη, αν και μόνο αν η $|f|$ είναι μ -ολοκληρώσιμη. Στην περίπτωση αυτή ισχύει

$$\left| \int_A f d\mu \right| \leq \int_A |f| d\mu.$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $f \in L(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$, αν και μόνο αν οι συναρτήσεις f^+ και f^- έχουν πεπερασμένα ολοκληρώματα. Αλλά ισχύει

$$|f| = f^+ + f^-,$$

οπότε, λόγω της Πρότασης 5.3.4, θα έχουμε και $|f| \in L(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$. Επίσης τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \int f d\mu \right| &= \left| \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right| \leq \left| \int f^+ d\mu \right| + \left| \int f^- d\mu \right| = \\ &= \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int (f^+ + f^-) d\mu = \int |f| d\mu. \quad \diamond \end{aligned}$$

6.2.3. Πρόταση. Αν $f \in M(\Omega, \mathcal{U})$ και $g \in L(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ είναι δυο συναρτήσεις τέτοιες ώστε $|f| \leq |g|$, τότε και $f \in L(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ και μάλιστα ισχύει

$$\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu.$$



Απόδειξη. Επειδή οι συναρτήσεις $|f|$ και $|g|$ είναι στοιχεία του συνόλου $M^+(\Omega, \mathcal{U})$, το συμπέρασμα προκύπτει εύκολα, αν συνδυάσουμε τις Προτάσεις 6.2.2 και 5.3.1 ◊

6.2.4. Πρόταση. Έστω $A \in \mathcal{U}$. Τότε για κάθε $f, g \in L(A, \mathcal{U}, \mu)$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha f, f + g \in L(A, \mathcal{U}, \mu)$ και επιπλέον

$$(i) \quad \int_A \alpha f d\mu = \alpha \int_A f d\mu,$$

και

$$(ii) \quad \int_A (f + g) d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu.$$

Απόδειξη. Θα εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση του αθροίσματος $f + g$ και στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε το συμπέρασμα αυτό για να εξετάσουμε το γινόμενο αf .

Όπως γνωρίζουμε απ' την Πρόταση 4.4.1 και τα σχόλια που κάναμε ύστερα απ' την Πρόταση 4.5.4, η συνάρτηση $f + g$ είναι $\mathcal{U}$ -μετρήσιμη. Επίσης έχουμε $|f + g| \leq |f| + |g|$, οπότε απ' τις Προτάσεις 6.2.2 και 6.2.3, έπεται ότι $f + g \in L(A, \mathcal{U}, \mu)$. Τώρα παρατηρούμε ότι $f = f^+ - f^-$ και $g = g^+ - g^-$, οπότε

$$f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-).$$

Αλλά έχουμε επίσης

$$f + g = (f + g)^+ - (f + g)^-,$$

οπότε θα ισχύει

$$(f + g)^+ + (f^- + g^-) = (f^+ + g^+) + (f + g)^-.$$

Επομένως, απ' την Πρόταση 5.3.4, παίρνουμε

$$\int_A (f + g)^+ d\mu + \int_A (f^- + g^-) d\mu = \int_A (f^+ + g^+) d\mu + \int_A (f + g)^- d\mu,$$

οπότε

$$\begin{aligned} \int_A (f + g) d\mu &= \int_A (f + g)^+ d\mu - \int_A (f + g)^- d\mu = \int_A (f^+ + g^+) d\mu - \int_A (f^- + g^-) d\mu = \\ &= \int_A f^+ d\mu + \int_A g^+ d\mu - \int_A f^- d\mu - \int_A g^- d\mu = \\ &= \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu + \int_A g^+ d\mu - \int_A g^- d\mu = \\ &= \int_A f d\mu + \int_A g d\mu. \end{aligned}$$



Θα εξετάσουμε τώρα την περίπτωση του γινομένου αf . Αν $\alpha = 0$, το συμπέρασμα, προφανώς, ισχύει. Έστω ότι $\alpha > 0$. Τότε έχουμε

$$(\alpha f)^+ = \alpha f^+ \text{ και } (\alpha f)^- = \alpha f^-,$$

οπότε, λόγω της Πρότασης 5.3.4, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_A (\alpha f) d\mu &= \int_A (\alpha f)^+ d\mu - \int_A (\alpha f)^- d\mu = \alpha \int_A f^+ d\mu - \alpha \int_A f^- d\mu = \\ &= \alpha \left(\int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu \right) = \alpha \int_A f d\mu. \end{aligned}$$

Επίσης παρατηρούμε ότι

$$0 = \int_A (f + (-f)) d\mu = \int_A f d\mu + \int_A (-f) d\mu,$$

οπότε

$$\int_A (-f) d\mu = - \int_A f d\mu.$$

Τέλος, για κάθε $\alpha < 0$, έχουμε $-\alpha > 0$ και επομένως

$$\int_A (\alpha f) d\mu = \int_A (-(-\alpha f)) d\mu = - \int_A (-\alpha f) d\mu = -(-\alpha) \int_A f d\mu = \alpha \int_A f d\mu. \quad \diamond$$

Τώρα θα δούμε τι συμβαίνει στον χώρο $L(A, U, \mu)$ όταν μεταβληθεί το U - μετρήσιμο σύνολο A .

6.2.5. Πρόταση. Αν A, B είναι δυο U -μετρήσιμα σύνολα τέτοια ώστε $A \subseteq B$, τότε ισχύει ότι

$$L(B, U, \mu) \subseteq L(A, U, \mu).$$

Απόδειξη. Έστω $f \in L(B, U, \mu)$. Τότε ισχύει $|f|_A \leq |f|_B$, οπότε εφαρμόζοντας την Πρόταση 6.2.3 προκύπτει το συμπέρασμα. $\diamond$

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με συναρτήσεις οι οποίες παίρνουν τιμές πραγματικούς αριθμούς ή τα σημεία $+\infty$ και $-\infty$. Στην περίπτωση όμως που μια συνάρτηση είναι μ -ολοκληρώσιμη, αυτή παίρνει πεπερασμένες τιμές μ -σχεδόν παντού. Συγκεκριμένα έχουμε το εξής συμπέρασμα.

6.2.6. Πρόταση. Για κάθε $f \in L(\Omega, U, \mu)$ ισχύει $\mu\{x \in \Omega : f(x) = \pm\infty\} = 0$.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$f^{+\infty} := \{x \in \Omega : f(x) = +\infty\}$$

και

$$A_n := \{x \in \Omega : f^+(x) > n\},$$

για κάθε $n = 1, 2, \dots$. Τότε έχουμε

$$f^{+\infty} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$$



και τα σύνολα $f^{+\infty}$ και $A_n, n = 1, 2, \dots$ είναι $\mathcal{U}$ -μετρήσιμα. Επίσης παρατηρούμε ότι

$$\int_{A_n} f^+ d\mu \geq n \int_{A_n} d\mu = n\mu(A_n)$$

και επομένως

$$\mu(A_n) \leq \frac{1}{n} \int_{A_n} f^+ d\mu \leq \frac{1}{n} \int f^+ d\mu.$$

Αλλά η ακολουθία των $\mathcal{U}$ -μετρήσιμων συνόλων $A_n, n = 1, 2, \dots$ είναι φθίνουσα, οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 2.4.3, θα έχουμε

$$\mu(f^{+\infty}) = \lim_n \mu(A_n) \leq \lim_n \frac{1}{n} \int f^+ d\mu = 0.$$

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία με τη συνάρτηση f^- βρίσκουμε ότι

$$\mu(f^{-\infty}) = 0,$$

όπου

$$f^{-\infty} := \{x \in \Omega : f(x) = -\infty\}.$$

Ένα απ' τα πιο σημαντικά συμπεράσματα της θεωρίας ολοκλήρωσης είναι αυτό που αναφέρεται στην περίπτωση κατά την οποία το σύμβολο του ορίου μπορεί να αντιμετωπιστεί με το σύμβολο του ολοκληρώματος, δηλαδή την περίπτωση εκείνη κατά την οποία ισχύει $\int \lim_n f_n d\mu = \lim_n \int f_n d\mu$, για κάποια ακολουθία συναρτήσεων (f_n) . Συγκεκριμένα έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

6.2.7. Θεώρημα (σύγκλισης του Lebesgue). Έστω (f_n) και f μια ακολουθία και μια συνάρτηση του συνόλου $M(\Omega, \mathcal{U})$ τέτοιες ώστε

$$\lim_n f_n = f, \text{ σχ.π.}$$

Αν υπάρχει συνάρτηση $g \in L(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ τέτοια ώστε

$$|f_n| \leq g, \text{ σχ.π.,}$$

για κάθε $n = 1, 2, \dots$, τότε έχουμε $f \in L(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ και μάλιστα ισχύει

$$\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τα σύνολα

$$E_1 := \{x \in \Omega : \lim_n f_n(x) \neq f(x)\}$$

και

$$E_2 := \{x \in \Omega : (\exists n \in \mathbb{N}) |f_n(x)| > g(x)\},$$



και θέτουμε $E := E_1 \cup E_2$ και $A := E^c$. Τότε τα σύνολα E_1, E_2 άρα και το σύνολο E , έχουν μέτρο 0. Επίσης, παρατηρούμε ότι $A \in \mathcal{U}$ και $f \in L(A, \mathcal{U}, \mu)$, αφού έχουμε

$$|f(x)| = \lim_n |f_n(x)| \leq g(x), \text{ για κάθε } x \in A$$

και ισχύει και η Πρόταση 6.2.3. Επίσης, για κάθε δείκτη $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $g + f_n \geq 0$ στο σύνολο A , οπότε, το Λήμμα του Fatou 5.3.5 συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} \int_A g d\mu + \int_A f d\mu &= \int g \chi_A d\mu + \int f \chi_A d\mu = \int (g + f) \chi_A d\mu \leq \\ &\leq \liminf \int (g + f_n) \chi_A d\mu = \int_A g d\mu + \liminf \int f_n \chi_A d\mu, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$(1) \quad \int_A f d\mu \leq \liminf \int_A f_n d\mu.$$

Επίσης, επειδή για κάθε δείκτη n ισχύει $g - f_n \geq 0$ στο σύνολο A , πάλι, το Λήμμα του Fatou δίνει

$$\begin{aligned} \int_A g d\mu - \int_A f d\mu &= \int g \chi_A d\mu - \int f \chi_A d\mu = \int (g - f) \chi_A d\mu \leq \\ &\leq \liminf \int (g - f_n) \chi_A d\mu = \int_A g d\mu - \limsup \int f_n \chi_A d\mu, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$(2) \quad \int_A f d\mu \geq \limsup \int_A f_n d\mu.$$

Συνδυάζοντας τις ανισότητες (1) και (2) παίρνουμε ότι

$$\int_A f d\mu = \lim_n \int_A f_n d\mu.$$

Τέλος, απ' την Πρόταση 5.4.1, προκύπτει

$$\begin{aligned} \int f d\mu &= \int_{A \cup E} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_E f d\mu = \lim_n \int_A f_n d\mu + 0 = \\ &= \lim_n \left(\int_A f_n d\mu + \int_E f_n d\mu \right) = \lim_n \int f_n d\mu. \end{aligned}$$

Προβλήματα.

6.1. Ν' αποδειχτεί ότι, αν $\mu(\Omega) < +\infty$, τότε κάθε φραγμένη $\mathcal{U}$ -μετρήσιμη συνάρτηση είναι μ -ολοκληρώσιμη.



6.2. Έστω ότι $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{U} := \mathcal{P}(\mathbb{N})$ και μ είναι ο πληθικός αριθμός. Ν' αποδειχτεί ότι αν f είναι μια μη αρνητική συνάρτηση του Ω στο $\mathbb{R}$, τότε η f είναι μ -ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν η σειρά $\sum f(n)$ συγκλίνει.

6.3. Αν f είναι μία φραγμένη και $\mathcal{U}$ -μετρήσιμη συνάρτηση και αν g είναι μ -ολοκληρώσιμη, ν' αποδειχτεί ότι η fg είναι μ -ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

6.4. Ν' αποδειχτεί το πρώτο θεώρημα της μέσης τιμής για ολοκληρώματα: Αν $m \leq f(x) \leq M$, $x \in \Omega$, όπου f είναι $\mathcal{U}$ -μετρήσιμη και αν g είναι μ -ολοκληρώσιμη, τότε υπάρχει $\xi \in [m, M]$ τέτοιο ώστε

$$\int f|g|d\mu = \xi \int |g|d\mu.$$

Ισχύει το θεώρημα αυτό αν αντί της $|g|$ τεθεί g (χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής):

6.5. Έστω (f_n) μια ακολουθία μη αρνητικών μ -ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, τέτοια ώστε, για κάποια συνάρτηση f_0 και για σχεδόν όλα τα $x \in \Omega$, να ισχύει $\sum f_n(x) = f_0(x)$. Ν' αποδειχτεί ότι η f_0 είναι μ -ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν η σειρά $\sum \int f_n d\mu$ συγκλίνει. Μάλιστα δε σ' αυτή την περίπτωση ισχύει

$$\int f_0 d\mu = \sum \int f_n d\mu.$$

6.6. Έστω μ_L το μέτρο Lebesgue στην πραγματική ευθεία και f μια μ_L -ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ν' αποδειχτεί ότι, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f d\mu_L = \int_{\alpha}^{\beta} f d\mu_L + \int_{\beta}^{\gamma} f d\mu_L.$$

Ισχύει η σχέση αυτή αν αντί του μ_L θεωρήσουμε το μέτρο Lebesgue - Stieltjes μ_g , όπου g είναι η συνάρτηση

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \chi_{[n-1, n)};$$

6.7. Να διατυπωθεί το θεώρημα Σύγκλισης του Lebesgue όταν Ω , $\mathcal{U}$ και μ είναι όπως στο πρόβλημα 6.2 παραπάνω.

6.8. Με παράδειγμα ν' αποδειχτεί ότι η συνθήκη $|f_n| \leq g$ στο θεώρημα Σύγκλισης του Lebesgue δεν μπορεί να παραλειφθεί.

6.9. Έστω $f : \Omega \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε η $f(\cdot, t)$ είναι $\mathcal{U}$ -μετρήσιμη για κάθε $t \in [\alpha, \beta]$ και έστω μ ένα μέτρο στο Ω . Ν' αποδειχτεί ότι

(i) Αν υπάρχει $t_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x \in \Omega$, να ισχύει $f(x, t) = f(x, t_0)$ και υπάρχει $g \in L(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ με $|f(x, t)| \leq g(x)$, τότε $\int f(x, t) d\mu = \int f(x, t_0) d\mu$.

(ii) Αν η $f(x, \cdot)$ είναι συνεχής για κάθε $x \in \Omega$ και υπάρχει συνάρτηση g όπως στην περίπτωση (i), τότε η συνάρτηση $F(t) := \int f(x, t) d\mu$, $t \in [\alpha, \beta]$ είναι συνεχής.

(iii) Αν για κάποιο $t_0 \in [\alpha, \beta]$ η συνάρτηση $f(\cdot, t_0)$ είναι μ -ολοκληρώσιμη, η μερική παράγωγος της συνάρτησης f ως προς t , δηλαδή η f_t , υπάρχει και ακόμα υπάρχει



$h \in L(\Omega, U, \mu)$ τέτοια ώστε $|f_i(x, t)| \leq h(x)$, $x \in \Omega$, τότε η συνάρτηση F της (ii) είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, b]$ και μάλιστα ισχύει

$$F'(t) = \int f_i(x, t) d\mu.$$

(iv) Κάτω απ' τις υποθέσεις της (ii) ισχύει

$$\int_a^b F(t) dt = \int_a^b \left(\int f(x, t) d\mu \right) dt = \int \left(\int_a^b f(x, t) dt \right) d\mu,$$

όπου το ολοκλήρωμα ως προς t είναι το ήδη γνωστό κατά Riemann ολοκλήρωμα.

6.10. Αν $f \in L(\Omega, U, \mu)$ και $\epsilon > 0$, τότε υπάρχει μια απλή U -μετρήσιμη συνάρτηση ϕ τέτοια ώστε

$$\int |f - \phi| d\mu < \epsilon.$$

6.11. Να εξεταστεί η αλήθεια της εξής πρότασης :

$$f \in L(\Omega, U, \mu) \implies f^2 \in L(\Omega, U, \mu).$$

6.12. Αν $\mu(\Omega) < +\infty$ και $f_n \in L(\Omega, U, \mu)$ είναι τέτοια ώστε $f_n \rightarrow f$, ομοιόμορφα στο Ω , τότε ισχύει

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

6.13. Αν A, B είναι δύο U -μετρήσιμα ξένα μεταξύ τους σύνολα, τότε για κάθε $f \in L(A \cup B, U, \mu)$ ισχύει

$$\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu.$$

6.14. Να διατυπωθεί και να αποδειχτεί το Λήμμα του Fatou χρησιμοποιώντας το $\limsup f_n$ αντί του $\liminf f_n$. (Ετσι βλέπουμε ότι το Λήμμα αναφέρεται και στις δύο αυτές οριακές συναρτήσεις.)





7. ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΑ ΜΕΤΡΑ

7.1. ΟΡΙΣΜΟΙ

Στα προηγούμενα κεφάλαια ασχοληθήκαμε με μέτρα ορισμένα πάνω σε μια σ -άλγεβρα $\mathcal{U}$. Είναι φανερό ότι αν μ_1, μ_2 είναι δύο πεπερασμένα μέτρα ορισμένα πάνω στην $\mathcal{U}$, τότε και το άθροισμα τους $\mu_1 + \mu_2$ είναι επίσης ένα μέτρο. Η διαφορά τους όμως $\nu := \mu_1 - \mu_2$ δεν είναι μέτρο. Πραγματικά, αν και οι δυο συνθήκες του μέτρου

$$(i) \nu(\emptyset) = 0,$$

$$(ii) \nu[\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n] = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(A_n), \text{ όπου } A_n \text{ είναι ξένα ανά δύο,}$$

ικανοποιούνται, η ανισότητα $\nu(A) \geq 0$, δεν ισχύει για κάθε σύνολο A της συλλογής $\mathcal{U}$.

Επίσης, αν μ είναι ένα μέτρο, τότε η συνάρτηση $-\mu$ δεν είναι μέτρο, αν και τούτο ικανοποιεί τις συνθήκες (i) και (ii). Βλέπουμε λοιπόν ότι και στις δυο περιπτώσεις χάνεται η θετικότητα του μέτρου. Με αφορμή το γεγονός αυτό γενικεύουμε την έννοια του μέτρου ως εξής:

Ορισμός. Μια συνάρτηση $\mu : \mathcal{U} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ είναι ένα *προσημασμένο μέτρο*, αν τούτο ικανοποιεί τις συνθήκες (i) και (ii) και επιπλέον παίρνει το πολύ μία απ' τις τιμές $+\infty, -\infty$. Έτσι, λαμβάνοντας τη διαφορά ενός μέτρου και ενός πεπερασμένου μέτρου προκύπτει ένα προσημασμένο μέτρο.

Ορισμός. Το προσημασμένο μέτρο μ λέγεται *πεπερασμένο*, αν ισχύει

$$|\mu(A)| < +\infty, \text{ για κάθε } A \in \mathcal{U},$$

και λέγεται *σ -πεπερασμένο*, αν υπάρχει μια ακολουθία (A_n) στη σ -άλγεβρα $\mathcal{U}$ τέτοια ώστε για κάθε $n = 1, 2, \dots$ να ισχύει

$$|\mu(A_n)| < +\infty$$

και

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

7.2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΩΝ ΜΕΤΡΩΝ



Θα δούμε εδώ ορισμένες χρήσιμες ιδιότητες των προσημασμένων μέτρων.

7.2.1. Πρόταση. Αν μ είναι ένα προσημασμένο μέτρο, τότε, για κάθε $A, B \in \mathcal{U}$, ισχύει

$$A \subseteq B \text{ και } |\mu(B)| < +\infty \implies |\mu(A)| < +\infty.$$

Απόδειξη. Επειδή το σύνολο B γράφεται ως ένωση των δύο ξένων συνόλων A και $B \setminus A$ και επειδή το μέτρο μ είναι προσθετική συνάρτηση, θα έχουμε $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. Επίσης, επειδή το μ παίρνει το πολύ μία απ' τις τιμές $+\infty, -\infty$ και ισχύει $\mu(B) \in \mathbb{R}$, έπεται ότι και $\mu(A) \in \mathbb{R}$, δηλαδή $|\mu(A)| < +\infty$. ◊

7.2.2. Πρόταση. Αν μ είναι ένα προσημασμένο μέτρο και (A_n) μια μονότονη ακολουθία $\mathcal{U}$ -μετρήσιμων συνόλων με $|\mu(A_1)| < +\infty$ στην περίπτωση όπου η (A_n) είναι φθίνουσα, τότε ισχύει

$$\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη τούτου γίνεται όπως ακριβώς γίνονται και οι αποδείξεις των αντίστοιχων Προτάσεων 2.4.2 και 2.4.3. ◊

7.3. ΔΙΑΣΠΑΣΗ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ Ω .

Έστω μ ένα προσημασμένο μέτρο και E ένα $\mathcal{U}$ -μετρήσιμο σύνολο.

Ορισμός. Θα λέμε ότι το E είναι θετικό ως προς μ , ή μ -θετικό, αν για κάθε $\mathcal{U}$ -μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq E$, ισχύει $\mu(A) \geq 0$. Παρόμοια, το E θα λέγεται μ -αρνητικό, αν, για κάθε $\mathcal{U}$ -μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq E$, ισχύει $\mu(A) \leq 0$.

Είναι εύκολο να δούμε ότι η ένωση δυο μ -θετικών συνόλων είναι μ -θετικό σύνολο και η ένωση δυο μ -αρνητικών συνόλων είναι μ -αρνητικό σύνολο.

Ένα προσημασμένο μέτρο παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές. Δηλαδή υπάρχουν $\mathcal{U}$ -μετρήσιμα σύνολα E_1, E_2 τέτοια ώστε $\mu(E_1) \geq 0 \geq \mu(E_2)$. Όπως θα δούμε, υπάρχουν ζεύγη (P, N) τέτοιων συνόλων των οποίων η ένωση είναι το Ω , δηλαδή το σύνολο Ω μπορεί να διασπαστεί σε δυο σύνολα $P, N \in \mathcal{U}$ με το P θετικό και το N αρνητικό σύνολο.

7.3.1. Θεώρημα (Διάσπασις του Hahn). Αν $\mu : \mathcal{U} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ είναι ένα προσημασμένο μέτρο, τότε υπάρχουν δυο σύνολα $P, N \in \mathcal{U}$ τέτοια ώστε $P \cap N = \emptyset$, $P \cup N = \Omega$ και επιπλέον το P είναι μ -θετικό και το N μ -αρνητικό.

Απόδειξη. Επειδή το μέτρο μ παίρνει το πολύ μία απ' τις τιμές $+\infty, -\infty$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ισχύει $-\infty \leq \mu(A) < +\infty$, για κάθε $A \in \mathcal{U}$.

Έστω $\mathcal{U}_+$ η συλλογή όλων των μ -θετικών συνόλων της $\mathcal{U}$. Τότε $\emptyset \in \mathcal{U}_+$ και άρα $\mathcal{U}_+ \neq \emptyset$. Επομένως το

$$\sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{U}_+\} =: a$$

υπάρχει στο διάστημα $[0, +\infty]$.

Έστω (A_n) μια ακολουθία στοιχείων του $\mathcal{U}_+$ τέτοια ώστε $\lim \mu(A_n) = a$. Επειδή η ένωση δυο μ -θετικών συνόλων είναι επίσης μ -θετικό σύνολο, μπορούμε να



υποθέσουμε ότι η ακολουθία (A_n) είναι αύξουσα. (Πραγματικά, μπορούμε αντί της $A_1, A_2, A_3, \dots$ να θεωρήσουμε την $A_1, A_1 \cup A_2, A_1 \cup A_2 \cup A_3, \dots$). Επομένως αν θέσουμε

$$P := \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

θα έχουμε

$$\mu(P) = \lim_n \mu(A_n) = a.$$

Άρα $a < +\infty$, δηλαδή a είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός. Επίσης έχουμε $P \in \mathcal{U}_+$ και δεν υπάρχει μ -θετικό σύνολο Q τέτοιο ώστε $\mu(Q) > a$.

Θ' αποδείξουμε ότι το σύνολο $N := \Omega \setminus P$ είναι ένα μ -αρνητικό σύνολο. Προς τούτο υποθέτουμε ότι το σύνολο N δεν είναι αρνητικό. Τότε υπάρχει $E \in \mathcal{U}$ με $E \subseteq N$ και $\mu(E) > 0$. Το σύνολο E δεν μπορεί να είναι μ -θετικό και άρα $\mu(P \cup E) = \mu(P) + \mu(E) > a$, άτοπο. Επομένως, υπάρχει σύνολο $A \in \mathcal{U}$ τέτοιο ώστε $A \subseteq E$ και $\mu(A) < 0$. Έστω n_1 ο μικρότερος φυσικός αριθμός για τον οποίο υπάρχει $E_1 \in \mathcal{U}$ με $E_1 \subseteq E$ και

$$\mu(E_1) \leq -\frac{1}{n_1}.$$

Τότε παρατηρούμε ότι

$$\mu(E \setminus E_1) = \mu(E) - \mu(E_1) > \mu(E) > 0.$$

Το σύνολο $E \setminus E_1$ δεν μπορεί να είναι μ -θετικό, γιατί αν ήταν τέτοιο, τότε και το $P \cup (E \setminus E_1)$ θα ήταν μ -θετικό, οπότε θα είχαμε

$$\mu(P \cup (E \setminus E_1)) = \mu(P) + \mu(E \setminus E_1) > a,$$

άτοπο. Άρα υπάρχει σύνολο $A \in \mathcal{U}$ τέτοιο ώστε $A \subseteq E \setminus E_1$ και $\mu(A) < 0$. Έστω n_2 ο μικρότερος φυσικός αριθμός για τον οποίο υπάρχει $E_2 \in \mathcal{U}$ με $E_2 \subseteq E \setminus E_1$ και

$$\mu(E_2) \leq -\frac{1}{n_2}.$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε μια αύξουσα ακολουθία (n_k) μη αρνητικών ακέραιων αριθμών τέτοια ώστε για κάθε δείκτη k ο αριθμός n_k είναι ο μικρότερος για τον οποίο υπάρχει σύνολο $E_k \in \mathcal{U}$ με την ιδιότητα ότι

$$E_k \subseteq (((E \setminus E_1) \setminus E_2) \setminus \dots) \setminus E_{k-1}$$

και

$$\mu(E_k) \leq -\frac{1}{n_k}.$$

Θέτοντας

$$F := \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_k,$$

έχουμε

$$\mu(F) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_k) \leq -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n_k} < 0,$$



αφού τα σύνολα E_k είναι ξένα ανά δύο. Επομένως, επειδή $F \subseteq E$ και

$$\mu(E) = \mu(F) + \mu(E \setminus F),$$

έπεται ότι $\mu(F)$ είναι πραγματικός αριθμός. Τούτο συνεπάγεται ότι $n_k \rightarrow +\infty$, όταν $k \rightarrow +\infty$. Αν υπάρχει $A \in \mathcal{U}$ με $A \in E \subseteq F$ και $\mu(A) < 0$, τότε θα ισχύει

$$\mu(A) < -\frac{1}{n_k - 1}$$

για ένα αρκετά μεγάλο k , πράγμα το οποίο αντίκειται προς το γεγονός ότι n_k είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός για τον οποίο υπάρχει σύνολο $A \subseteq E \setminus (E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{k-1})$ με $A \in \mathcal{U}$ και

$$\mu(A) \leq -\frac{1}{n_k}.$$

Επομένως πρέπει, για κάθε $A \in \mathcal{U}$ με $A \subseteq E \setminus F$ να ισχύει $\mu(A) \geq 0$. Με άλλα λόγια το σύνολο $E \setminus F$ είναι ένα μ -θετικό σύνολο. Μάλιστα δε ισχύει

$$\mu(E \setminus F) = \mu(E) - \mu(F) > 0.$$

Άρα και το σύνολο $P \cup (E \setminus F)$ είναι ένα μ -θετικό σύνολο τέτοιο ώστε

$$\mu(P \cup (E \setminus F)) = \mu(P) + \mu(E \setminus F) > a,$$

πράγμα άτοπο, αφού δεν υπάρχουν σύνολα στη σ -άλγεβρα $\mathcal{U}$ που να έχουν μέτρο μεγαλύτερο του a . Τούτο σημαίνει ότι το σύνολο N είναι ένα μ -αρνητικό σύνολο. ◊

7.4. ΔΙΑΣΠΑΣΗ ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΩΝ ΜΕΤΡΩΝ

Ορισμός. Το ζεύγος (P, N) του οποίου η ύπαρξη εξασφαλίζεται απ' το Θεώρημα 7.3.1 ονομάζεται *διάσπαση του Hahn*. Πριν εξετάσουμε τις συνέπειες που μπορεί να έχει μια διάσπαση του Hahn, θ' αποδείξουμε το εξής συμπέρασμα:

7.4.1. Πρόταση. Υποθέτουμε ότι (P_1, N_1) και (P_2, N_2) είναι δυο διασπάσεις του Hahn. Τότε, για κάθε $A \in \mathcal{U}$, ισχύουν οι σχέσεις

$$\mu(P_1 \cap A) = \mu(P_2 \cap A), \text{ και } \mu(N_1 \cap A) = \mu(N_2 \cap A).$$

Απόδειξη. Έστω $A \in \mathcal{U}$. Τότε έχουμε $(P_1 \setminus P_2) \cap A \subseteq P_1$, οπότε

$$\mu((P_1 \setminus P_2) \cap A) \geq 0.$$

Επίσης ισχύει ότι $(P_1 \setminus P_2) \cap A \subseteq N_2$, οπότε και

$$\mu((P_1 \setminus P_2) \cap A) \leq 0.$$

Επομένως

$$\mu((P_1 \setminus P_2) \cap A) = 0.$$



Παρόμοια βρίσκουμε ότι και

$$\mu((P_2 \setminus P_1) \cap A) = 0.$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}\mu(P_1 \cap A) &= \mu(P_1 \cap P_2 \cap A) + \mu((P_1 \setminus P_2) \cap A) = \mu(P_1 \cap P_2 \cap A) + 0 = \\ &= \mu(P_1 \cap P_2 \cap A) + \mu((P_2 \setminus P_1) \cap A) = \mu(P_2 \cap A).\end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε και την άλλη ταυτότητα που αναφέρεται στα μ -αρνητικά σύνολα N_1 και N_2 . ◻

Ορισμός. Απ' την προηγούμενη Πρόταση προκύπτει ότι οι σχέσεις

$$\mu^+(A) := \mu(P \cap A)$$

και

$$\mu^-(A) := -\mu(N \cap A)$$

ορίζουν καλά δυο συναρτήσεις μ^+ και μ^- . Αυτές έχουν πεδίο ορισμού τη σ -άλγεβρα $\mathcal{U}$, παίρνουν τιμές στην επεκτεταμένη ευθεία $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητες απ' τη διάσπαση (P, N) . Η συνάρτηση μ^+ λέγεται *άνω κύμανση* ή *άνω μεταβολή* του μ και η μ^- *κάτω κύμανση* ή *κάτω μεταβολή* του μ . Τέλος, το άθροισμα

$$|\mu| := \mu^+ + \mu^-$$

λέγεται *ολική κύμανση*, ή, *ολική μεταβολή* του μ . Στο παρακάτω θεώρημα θα δούμε ορισμένες απ' τις ιδιότητες που έχουν οι συναρτήσεις μ^+ και μ^- .

7.4.2. Θεώρημα (διάσπασης του Jordan). Αν μ είναι ένα προσημασμένο μέτρο, τότε

- (i) μ^+ και μ^- είναι μέτρα,
- (ii) $\mu = \mu^+ - \mu^-$,
- (iii) αν μ είναι πεπερασμένο, ή σ -πεπερασμένο, τέτοια είναι αντίστοιχα και τα μέτρα μ^+ και μ^- ,
- (iv) τουλάχιστον ένα απ' τα μέτρα μ^+ , μ^- είναι πεπερασμένο,
- (v) αν μ_1, μ_2 είναι δυο πεπερασμένα μέτρα με $\mu_1 - \mu_2 = \mu$, τότε ισχύει

$$\mu_1(A) \geq \mu^+(A) \text{ και } \mu_2(A) \geq \mu^-(A),$$

για κάθε $\mathcal{U}$ -μετρήσιμο σύνολο A .

Απόδειξη. (i) Τούτο προκύπτει άμεσα απ' τον ορισμό των μ^+ και μ^- .

(ii) Για κάθε $A \in \mathcal{U}$ έχουμε

$$\mu(A) = \mu((P \cap A) \cup (N \cap A)) = \mu(P \cap A) + \mu(N \cap A) = \mu^+(A) - \mu^-(A),$$

δηλαδή $\mu = \mu^+ - \mu^-$.

(iii) Τούτο επίσης προκύπτει απ' τον ορισμό.



(iv) Τούτο προκύπτει απ' το γεγονός ότι το προσημασμένο μέτρο μ παίρνει το πολύ μία απ' τις τιμές $+\infty$ και $-\infty$.

(v) Επειδή τα μ_1 και μ_2 παίρνουν μη αρνητικές τιμές θα έχουμε

$$\mu^+(A) = \mu(P \cap A) = \mu_1(P \cap A) - \mu_2(P \cap A) \leq \mu_1(P \cap A) \leq \mu_1(A),$$

για κάθε $A \in \mathcal{U}$. Παρόμοια βρίσκουμε και ότι

$$\mu^-(A) \leq \mu_2(A)$$

και το θεώρημα αποδείχτηκε. ◻

Ορισμός. Η παράσταση του προσημασμένου μέτρου μ ως

$$\mu = \mu^+ - \mu^-$$

λέγεται *διάσπαση του Jordan*. Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα:

Παράδειγμα. Έστω $(\Omega, \mathcal{U}, \nu)$ ένας χώρος μέτρου και ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση $f \in L(\Omega, \mathcal{U}, \nu)$. Ορίζουμε το προσημασμένο μέτρο

$$\mu(A) := \int_A f d\nu, \quad A \in \mathcal{U}.$$

Αν θεωρήσουμε τα σύνολα

$$P := \{x \in \Omega : f(x) \geq 0\}$$

και

$$N := \{x \in \Omega : f(x) < 0\},$$

είναι εύκολο να δούμε ότι (P, N) είναι μια διάσπαση του Hahn στο Ω ως προς μ . Άρα, αν μ^+, μ^- είναι η διάσπαση Jordan του μ θα έχουμε

$$\begin{aligned} \mu^+(A) &= \mu(P \cap A) = \int_{P \cap A} f d\nu = \int f \chi_{P \cap A} d\nu = \int f \chi_P \chi_A d\nu = \int_A f \chi_P d\nu = \\ &= \int_A f^+ d\nu. \end{aligned}$$

Επίσης προκύπτει ότι

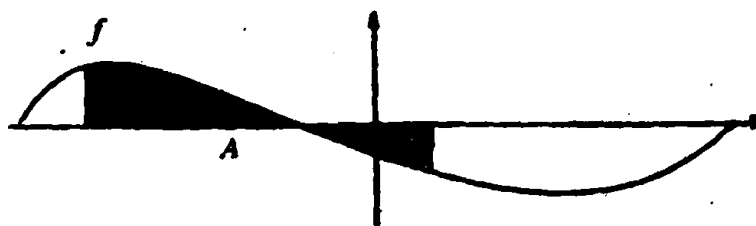
$$\mu^-(A) = \int_A f^- d\nu,$$

για κάθε $A \in \mathcal{U}$, όπου f^+, f^- είναι αντίστοιχα το θετικό και αρνητικό μέρος της συνάρτησης f .

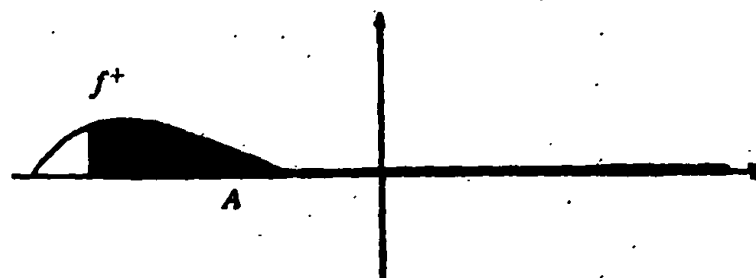
Τέλος, είναι φανερό ότι η ολική μεταβολή του μ είναι

$$|\mu|(A) = \int_A |f| d\nu, \quad A \in \mathcal{U}.$$

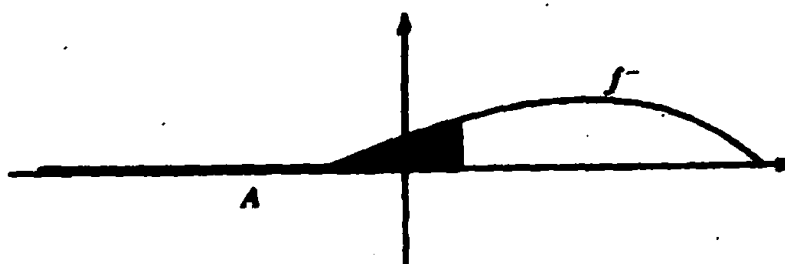




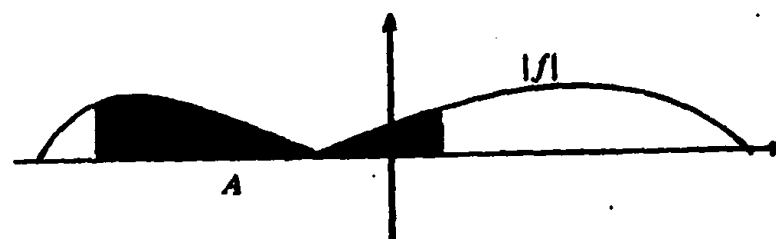
Όταν $\Omega = \mathbb{R}$ και $\nu = \mu_L$ το $\mu_L(A)$ είναι αριθμητικά ίσο προς το εμβαδό του γραμμωσσιασμένου τόπου



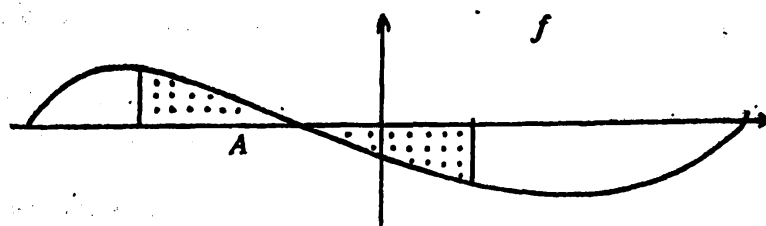
Όταν $\Omega = \mathbb{R}$ και $\nu = \mu_L$ το $\mu_L^+(A)$ είναι αριθμητικά ίσο προς το εμβαδό του γραμμωσσιασμένου τόπου



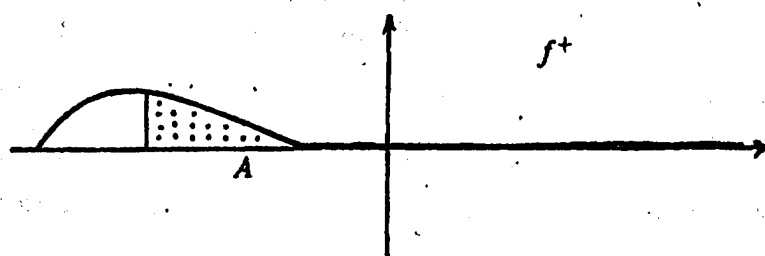
Όταν $\Omega = \mathbb{R}$ και $\nu = \mu_L$ το $\mu_L^-(A)$ είναι αριθμητικά ίσο προς το εμβαδό του γραμμωσσιασμένου τόπου



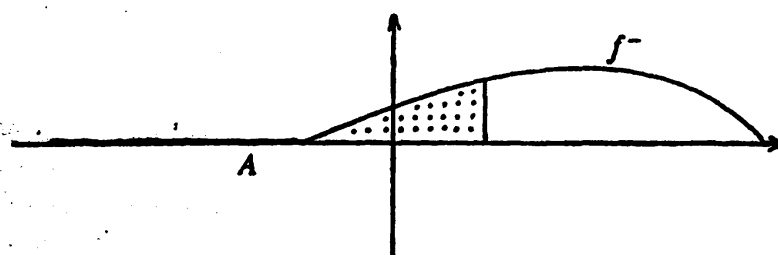
Όταν $\Omega = \mathbb{R}$ και $\nu = \mu_L$ το $|\mu_L|(A)$ είναι αριθμητικά ίσο προς το εμβαδό του γραμμωσσιασμένου τόπου



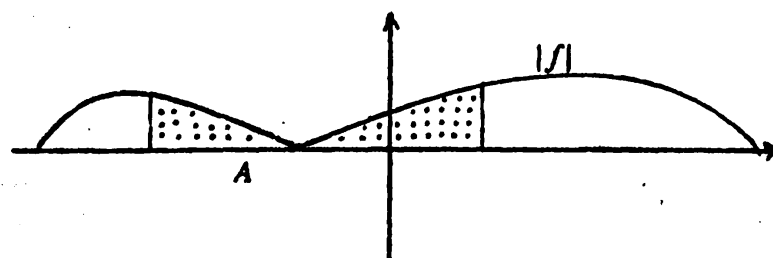
Όταν $\Omega = \mathbb{R}$ και $\nu = \mu_L$ το $\mu_L(A)$ είναι αριθμητικά ίσο προς το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου τόπου



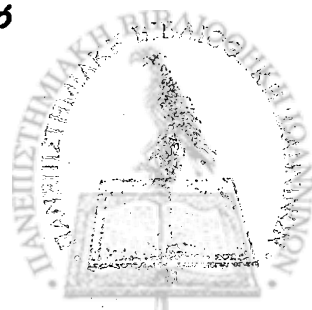
Όταν $\Omega = \mathbb{R}$ και $\nu = \mu_L$ το $\mu_L^+(A)$ είναι αριθμητικά ίσο προς το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου τόπου



Όταν $\Omega = \mathbb{R}$ και $\nu = \mu_L$ το $\mu_L^-(A)$ είναι αριθμητικά ίσο προς το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου τόπου



Όταν $\Omega = \mathbb{R}$ και $\nu = \mu_L$ το $|\mu_L|(A)$ είναι αριθμητικά ίσο προς το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου τόπου



7.5. ΑΠΟΛΥΤΑ ΣΥΝΕΧΗ ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΑ ΜΕΤΡΑ

Στην παράγραφο 5.4 είδαμε τι σημαίνει ότι ένα μέτρο είναι απόλυτα συνεχές ως προς ένα άλλο. Εδώ θα επεκτείνουμε τον ορισμό της απόλυτης συνέχειας ώστε εκείνος να αναφέρεται γενικά σε προσημασμένα μέτρα.

Ορισμός. Υποθέτουμε ότι μ είναι ένα μέτρο και ν ένα προσημασμένο μέτρο ορισμένα πάνω στη σ -άλγεβρα $\mathcal{U}$. Θα λέμε ότι το ν είναι απόλυτα συνεχές ως προς μ , ή ότι το ν είναι μ -απόλυτα συνεχές και θα γράφουμε τότε

$$\nu \ll \mu, \text{ αν ισχύει ότι } (\forall A \in \mathcal{U}) \mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0.$$

Ένα απ' τα πιο σημαντικά συμπεράσματα του κεφαλαίου τούτου είναι το Θεώρημα των Radon-Nikodym. Για να το αποδείξουμε χρειαζόμαστε το εξής:

7.5.1. Λήμμα. Υποθέτουμε ότι μ, ν είναι πεπερασμένα μέτρα τέτοια ώστε $\nu \ll \mu$ και το ν δεν είναι εκ ταυτότητας μηδέν. Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ και ένα σύνολο $A \in \mathcal{U}$ θετικό ως προς το προσημασμένο μέτρο $\nu - \epsilon\mu$ τέτοιο ώστε $\mu(A) > 0$.

Απόδειξη. Έστω (P_n, N_n) μια διάσπαση του Hahn ως προς το προσημασμένο μέτρο $\nu - (1/n)\mu$. Θέτουμε

$$E := P_1 \cup P_2 \cup \dots$$

και

$$F := N_1 \cap N_2 \cap \dots$$

Τότε έχουμε $F \subseteq N_n$, οπότε $\nu(F) - (1/n)\mu(F) \leq 0$ και άρα

$$0 \leq \nu(F) \leq \frac{1}{n}\mu(F), \quad n = 1, 2, \dots$$

Επομένως έχουμε $\nu(F) = 0$, οπότε πρέπει $\nu(E) > 0$. Τούτο και η υπόθεση ότι $\nu \ll \mu$ συνεπάγονται ότι $\mu(E) > 0$. Άρα υπάρχει P_k με $\mu(P_k) > 0$, για ένα τουλάχιστον δείκτη $k \in \mathbb{N}$. Ονομάζουμε A το σύνολο P_k και ϵ τον αριθμό $1/k$. Τότε το σύνολο A είναι θετικό ως προς το προσημασμένο μέτρο $\nu - \epsilon\mu$ και επιπλέον ισχύει $\mu(A) > 0$. $\diamond$

7.5.2. Θεώρημα (των Radon-Nikodym). Υποθέτουμε ότι μ και ν είναι δύο σ -πεπερασμένα μέτρα ορισμένα πάνω στη σ -άλγεβρα $\mathcal{U}$. Αν ισχύει $\nu \ll \mu$, τότε υπάρχει μία $\mathcal{U}$ -μετρήσιμη συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ τέτοια ώστε

$$\nu(A) = \int_A f d\mu, \quad A \in \mathcal{U}.$$

Επίσης, αν g είναι μια συνάρτηση με την ίδια ιδιότητα, τότε θα πρέπει $g = f$, σχ. π.

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι τα μέτρα μ, ν είναι πεπερασμένα.

Έστω Θ_+ η κλάση όλων των μη αρνητικών συναρτήσεων $f \in L(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ οι οποίες ικανοποιούν την ανισότητα

$$\int_A f d\mu \leq \nu(A), \quad A \in \mathcal{U}.$$



Θέτουμε

$$b := \sup \left\{ \int f d\mu : f \in \Theta_+ \right\}$$

και θεωρούμε μια ακολουθία (f_n) στην κλάση Θ_+ τέτοια ώστε

$$\lim \int f_n d\mu = b.$$

Επίσης, για κάθε $n = 1, 2, \dots$, θέτουμε

$$g_n(x) := \max\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$$

και, για κάθε $A \in \mathcal{U}$, ορίζουμε τα σύνολα

$$A_i := \{x \in \Omega : g_n(x) = f_i(x)\},$$

όπου $i = 1, 2, \dots, n$. Τέλος, θέτουμε

$$A'_1 := A_1,$$

$$A'_2 := A_2 \setminus A_1,$$

...

$$A'_n := A_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}).$$

Επομένως, για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, το σύνολο A'_i είναι $\mathcal{U}$ -μετρήσιμο. Επιπλέον ισχύει ότι $A_i = A'_1 \cup A'_2 \cup \dots \cup A'_n$ και τα A'_i είναι ξένα ανά δύο. Άρα

$$\int_A g_n d\mu = \sum_{i=1}^n \int_{A'_i} g_i d\mu \leq \sum_{i=1}^n \nu(A'_i) = \nu(A),$$

δηλαδή $g_n \in \Theta_+$ για κάθε n .

Ορίζουμε τώρα τη συνάρτηση

$$f_0(x) := \sup_n f_n(x), \quad x \in \Omega$$

και παρατηρούμε ότι $f_0(x) = \lim g_n(x)$, για κάθε $x \in \Omega$, όπου, σημειώνουμε ότι, η ακολουθία συναρτήσεων (g_n) είναι αύξουσα. Έτσι, το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης συνεπάγεται ότι η συνάρτηση f_0 ανήκει στην κλάση Θ_+ και ικανοποιεί τη σχέση

$$\int f_0 d\mu = b.$$

Επειδή η συνάρτηση f_0 είναι μ -ολοκληρώσιμη, υπάρχει συνάρτηση $f \in L(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$, που παίρνει μόνο πεπερασμένες τιμές, και είναι τέτοια ώστε $f = f_0$, σχ. π.

Θα αποδείξουμε ότι το προσημασμένο μέτρο λ που ορίζεται πάνω στη σ -άλγεβρα $\mathcal{U}$ με τον τύπο

$$\lambda(A) := \nu(A) - \int_A f d\mu,$$



είναι εκ ταυτότητας μηδέν. Πραγματικά, υποθέτουμε ότι τούτο δεν αληθεύει. Λόγω του Λήμματος 7.5.1, υπάρχει $\epsilon > 0$ και $A \in \mathcal{U}$ τέτοιο ώστε $\mu(A) > 0$ και $\lambda(A \cap E) - \epsilon \mu(A \cap E) \geq 0$, για κάθε $E \in \mathcal{U}$, δηλαδή

$$\epsilon \mu(A \cap E) \leq \nu(A \cap E) - \int_{A \cap E} f d\mu,$$

για κάθε $E \in \mathcal{U}$. Θέτοντας $g := f + \epsilon \cdot \chi_A$ παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \int_E g d\mu &= \int_E f d\mu + \epsilon \mu(A \cap E) \leq \\ &\leq \int_E f d\mu + \nu(A \cap E) - \int_{A \cap E} f d\mu = \int_{E \setminus A} f d\mu + \nu(A \cap E) \leq \\ &\leq \nu(E \setminus A) + \nu(A \cap E) = \nu(E), \end{aligned}$$

για κάθε $E \in \mathcal{U}$. Επομένως η συνάρτηση g είναι στοιχείο της κλάσης Θ_+ . Απ' την άλλη μεριά όμως ισχύει

$$\int g d\mu = \int f d\mu + \epsilon \mu(A) = b + \epsilon \mu(A) > b,$$

άτοπο. Άρα $\lambda = 0$, οπότε πρέπει

$$\nu(A) = \int_A f d\mu, \quad A \in \mathcal{U},$$

πράγμα που αποδεικνύει το συμπέρασμα όταν τα μέτρα μ, ν είναι πεπερασμένα.

Υποθέτουμε τώρα ότι τα μ, ν είναι σ -πεπερασμένα. Τότε υπάρχουν ακολουθίες (X_n) και (Y_n) συνόλων της σ -άλγεβρας $\mathcal{U}$ τέτοιες ώστε

$$X_1 \cup X_2 \cup \dots = Y_1 \cup Y_2 \cup \dots = \Omega,$$

και

$$\mu(X_n) < +\infty, \quad \nu(Y_n) < +\infty, \quad n = 1, 2, \dots$$

Τότε και η συλλογή των συνόλων

$$X_1 \cap Y_1, X_1 \cap Y_2, \dots, X_2 \cap Y_1, X_2 \cap Y_2, \dots, X_3 \cap Y_1, X_3 \cap Y_2, X_3 \cap Y_3, \dots$$

είναι αριθμήσιμη την οποία και αναπαριστάνουμε με (Z_n) . Θέτουμε

$$\Omega_1 := Z_1,$$

$$\Omega_2 := Z_1 \cup Z_2,$$

...

$$\Omega_n := Z_1 \cup Z_2 \cup \dots \cup Z_{n-1} \cup Z_n$$

...

και παρατηρούμε ότι η ακολουθία των $\mathcal{U}$ -μετρήσιμων συνόλων Ω_n είναι τέτοια ώστε

$$\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \dots, \quad \text{και} \quad \lim_n \Omega_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Omega_n = \Omega$$



και επιπλέον

$$\mu(\Omega_n) < +\infty \text{ και } \nu(\Omega_n) < +\infty,$$

για κάθε $n = 1, 2, \dots$. Επομένως, σύμφωνα με ό,τι αποδείξαμε παραπάνω, για κάθε δείκτη $n = 1, 2, \dots$, υπάρχει μ -ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f_n : \Omega_n \rightarrow [0, +\infty)$ τέτοια ώστε

$$\nu(A) = \int_A f_n d\mu,$$

για κάθε $A \in \mathcal{U}$ με $A \subseteq \Omega_n$. Επεκτείνουμε την f_n σε ολόκληρο τον χώρο Ω , ορίζοντας να παίρνει την τιμή 0 πάνω στο σύνολο $\Omega \setminus \Omega_n$. Τότε παρατηρούμε ότι, για κάθε $n \leq m$, ισχύει

$$\int_A f_n d\mu = \int_A f_m d\mu,$$

για κάθε $A \in \mathcal{U}$ με $A \subseteq \Omega_n$, αφού και $\Omega_n \subseteq \Omega_m$. Αλλά ισχύει $f_n = f_m$, μ -σχ. π. στο σύνολο Ω_n (βλ. Πρόβλ. 5.1). Για κάθε $n = 1, 2, \dots$ θέτουμε

$$h_n(x) := \sup\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}, \quad x \in \Omega.$$

Τότε η (h_n) είναι μια αύξουσα ακολουθία συναρτήσεων του $M^+(\Omega, \mathcal{U})$. Θέτουμε

$$f(x) := \lim_n h_n(x), \quad x \in \Omega,$$

όπου, προφανώς, η f είναι μια $\mathcal{U}$ -μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $B \in \mathcal{U}$, τότε θα έχουμε και $A := B \cap \Omega_n \in \mathcal{U}$. Ορίζουμε τα σύνολα

$$A_i := \{x \in \Omega : h_n(x) = f_i(x)\}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

και θέτουμε

$$A'_1 := A_1,$$

$$A'_2 := A_2 \setminus A_1,$$

...

$$A'_n := A_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}).$$

Τότε κάθε A'_i είναι $\mathcal{U}$ -μετρήσιμο και ισχύει $A'_i = A'_1 \cup A'_2 \cup \dots \cup A'_n$. Επιπλέον τα A'_i είναι ξένα ανά δύο. Επομένως θα έχουμε

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^n \nu(A'_i) = \sum_{i=1}^n \int_{A'_i} f_i d\mu = \int_A h_n d\mu,$$

οπότε, αφού οι ακολουθίες $(B \cap \Omega_n)$ και (h_n) είναι αύξουσες, παίρνουμε τελικά ότι

$$\begin{aligned} \nu(B) &= \lim_n \nu(B \cap \Omega_n) = \lim_n \int_{B \cap \Omega_n} h_n d\mu + \lim_n \int_{B \setminus \Omega_n} h_n d\mu = \\ &= \lim_n \left(\int_{B \cap \Omega_n} h_n d\mu + \int_{B \setminus \Omega_n} h_n d\mu \right) = \lim_n \int_B h_n d\mu = \int_B f d\mu, \end{aligned}$$

διότι $h_n(x) = 0$, για κάθε $x \in \Omega \setminus \Omega_n$. ◊



Ορισμός. Η συνάρτηση f που δίνει το Θεώρημα των Radon-Nikodym για τα μέτρα μ και ν λέγεται συνήθως *παράγωγος του ν ως προς μ* και παριστάνεται με

$$\frac{d\nu}{d\mu}.$$

Δηλαδή η παράσταση

$$f = \frac{d\nu}{d\mu}$$

σημαίνει ότι

$$\nu(A) = \int_A f d\mu, \quad B \in \mathcal{U}.$$

Προβλήματα.

7.1. Ν' αποδειχτεί ότι η ένωση δύο μ -θετικών (ή μ -αρνητικών) συνόλων είναι μ -θετικό (αντίστοιχα, μ -αρνητικό) σύνολο.

7.2. Αν μ_1, μ_2, μ_3 είναι μέτρα στο Ω ορισμένα πάνω στην ίδια σ -άλγεβρα τότε ισχύει ότι

(i) $\mu_1 \ll \mu_1$,

(ii) $\mu_1 \ll \mu_2$ και $\mu_2 \ll \mu_3 \implies \mu_1 \ll \mu_3$,

(iii) $\mu_1 \ll \mu_2$, αλλά όχι πάντοτε και $\mu_2 \ll \mu_1$. Να δοθεί ένα παράδειγμα που να επαληθεύει το γεγονός τούτο.

7.3. Αν μ_1, μ_2, μ_3 είναι σ -πεπερασμένα μέτρα στο Ω ορισμένα πάνω στην ίδια σ -άλγεβρα $\mathcal{U}$ ν' αποδειχτεί ότι ισχύει ο γνωστός κανόνας παραγωγής σύνθετης συνάρτησης, δηλαδή ότι

$$\frac{d\mu_1}{d\mu_3} = \frac{d\mu_1}{d\mu_2} \cdot \frac{d\mu_2}{d\mu_3},$$

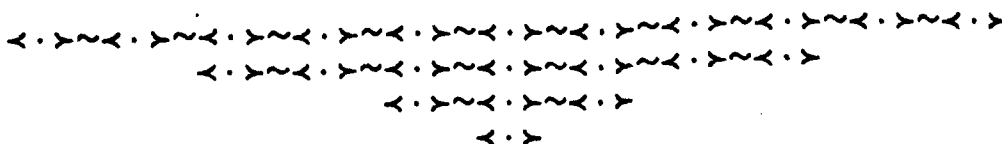
όπου, βέβαια, υποτίθεται ότι $\mu_1 \ll \mu_2 \ll \mu_3$.

7.4. Αν ισχύει $\mu_1 \ll \mu_2$, όπου μ_1, μ_2 είναι σ -πεπερασμένα μέτρα, τότε υπάρχει μία $\mathcal{U}$ -μετρήσιμη συνάρτηση g τέτοια ώστε

$$\int_A f d\mu_1 = \int_A f g d\mu_2,$$

για κάθε $A \in \mathcal{U}$ και μ_1 -ολοκληρώσιμη συνάρτηση f .





8. ΟΙ ΧΩΡΟΙ L_p

8.1. ΣΤΑΘΜΗΤΟΙ ΧΩΡΟΙ

Ορισμός. Όπως είναι γνωστό, αν X είναι ένας πραγματικός γραμμικός χώρος, δηλαδή ένας γραμμικός χώρος πάνω στο σώμα των πραγματικών αριθμών και αν $N : X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση, θα λέμε ότι η N είναι μια *ημιστάθμη* στον γραμμικό χώρο X , αν ικανοποιούνται οι εξής συνθήκες:

- (i) $N(x) \geq 0$, για κάθε $x \in X$
- (ii) $N(ax) = |a|N(x)$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και $x \in X$
- (iii) $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$, για κάθε $x, y \in X$.

Ορισμός. Το ζεύγος (X, N) (ή ο χώρος X , στην περίπτωση που η συνάρτηση N εννοείται) λέγεται *ημισταθμητός χώρος*:

Η έννοια της σύγκλισης της ακολουθίας στον ημισταθμητό χώρο (X, N) είναι γνωστή και εισάγεται ως εξής:

Ορισμός. Μια ακολουθία (x_n) *συγκλίνει* προς ένα στοιχείο $x \in X$, όταν ισχύει

$$\lim_n N(x_n - x) = 0.$$

Τότε γράφουμε και $\lim_n x_n = x$. Είναι όμως δυνατό να ισχύει ταυτόχρονα και $\lim_n x_n = y \in X$, όπου $y \neq x$. Τότε αναγκαστικά πρέπει να ισχύει $N(x - y) = 0$. Η σχέση αυτή δεν συνεπάγεται ότι $x = y$. Τούτο συμβαίνει μόνο στην περίπτωση που η συνάρτηση N είναι μια στάθμη, δηλαδή όταν η N ικανοποιεί την επιπλέον συνθήκη

$$N(x) = 0, \text{ αν και μόνο αν } x = 0.$$

Στο κεφάλαιο τούτο θα γνωρίσουμε ορισμένους σταθμητούς χώρους οι οποίοι παράγονται από μετρήσιμους χώρους και που παίζουν σημαντικό ρόλο στην Ανάλυση.

8.2. Ο ΧΩΡΟΣ L_p



Ορισμός. Έστω $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Για κάθε $f \in L(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ θέτουμε

$$N_\mu(f) := \int |f| d\mu$$

και παρατηρούμε ότι ο τύπος αυτός ορίζει μια συνάρτηση

$$N_\mu : L(\Omega, \mathcal{U}, \mu) \rightarrow \mathbb{R},$$

η οποία είναι μια ημιστάθμη. Έτσι ο χώρος $L(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ είναι ένας ημισταθμητός χώρος.

Επαναλαμβάνουμε εδώ ότι η Πρόταση 5.3.6 συνεπάγεται ότι

$$N_\mu(f) = 0 \implies f = 0, \text{ σ.π.}$$

Έτσι, στο σύνολο $L(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ μπορούμε να ορίσουμε μια σχέση ισοδυναμίας " $\sim$ " ως εξής:

$$f \sim g : \text{αν } f = g, \text{ σ.π.}$$

Η κλάση $[0]$ της μηδενικής συνάρτησης ως προς τη σχέση αυτή περιέχει όλες τις συναρτήσεις που έχουν ημιστάθμη ίση με το 0. Θα παριστάνουμε με $L_1(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ τον χώρο-πηλίκο $L(\Omega, \mathcal{U}, \mu) / \sim$. Τότε ο $L_1(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ περιέχει όλες τις κλάσεις $[f]$, $f \in L(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ που είναι τέτοιες ώστε

$$g \in [f] \iff g = f, \text{ σ.π.}$$

Ορίζοντας

$$\| [f] \|_1 := \int |f| d\mu,$$

μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι το σύνολο $L_1(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ είναι ένας σταθμητός γραμμικός χώρος εφοδιασμένος με τη στάθμη $\| \cdot \|_1$. Στα επόμενα τα στοιχεία του χώρου $L_1(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ θα τα θεωρούμε ως συναρτήσεις και αντί της κλάσης $[f]$ μιας συνάρτησης f θα παίρνουμε την ίδια την f , θεωρώντας ότι αυτή είναι ένα στοιχείο του $L_1(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$. Επιπλέον στην περίπτωση αυτή αντί του $\| [f] \|_1$ θα γράφουμε $\| f \|_1$, για κάθε συνάρτηση f .

Έστω τώρα $p \in [1, +\infty)$ ένας σταθερός πραγματικός αριθμός. Θα παριστάνουμε με $L_p(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ το σύνολο όλων των (κλάσεων των) συναρτήσεων f που είναι $\mathcal{U}$ -μετρήσιμες και τέτοιες ώστε $|f|^p \in L_1(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$. Θέτουμε

$$\| f \|_p := \left[\int |f|^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}},$$

οπότε η $\| \cdot \|_p$ είναι μια συνάρτηση του $L_p(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ μέσα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Κύριος σκοπός μας είναι να δείξουμε πρώτα ότι ο χώρος $L_p(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ είναι σταθμητός, με στάθμη τη συνάρτηση $\| \cdot \|_p$ και έπειτα ότι αυτός ο χώρος είναι πλήρης, οπότε είναι ένας χώρος Banach.

8.2.1. Πρόταση (Ανισότητα του Hölder). Έστω $p \in (1, +\infty)$ και $q \in (1, +\infty)$ τέτοιοι ώστε

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$



(Οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται συζυγείς δείκτες). Τότε για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g με $f \in L_p(\Omega, U, \mu)$ και $g \in L_q(\Omega, U, \mu)$, ισχύει $fg \in L_1(\Omega, U, \mu)$ και επιπλέον

$$(1) \quad \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Απόδειξη. Πρώτα παρατηρούμε ότι, αν $\|f\|_p = 0$, ή $\|g\|_q = 0$, τότε $f = 0$, σχ. π. ή $g = 0$, σχ. π., αντίστοιχα. Έτσι $fg = 0$, σχ. π., οπότε $fg \in L_1(\Omega, U, \mu)$ και η (1) ικανοποιείται.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\|f\|_p > 0$ και $\|g\|_q > 0$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα

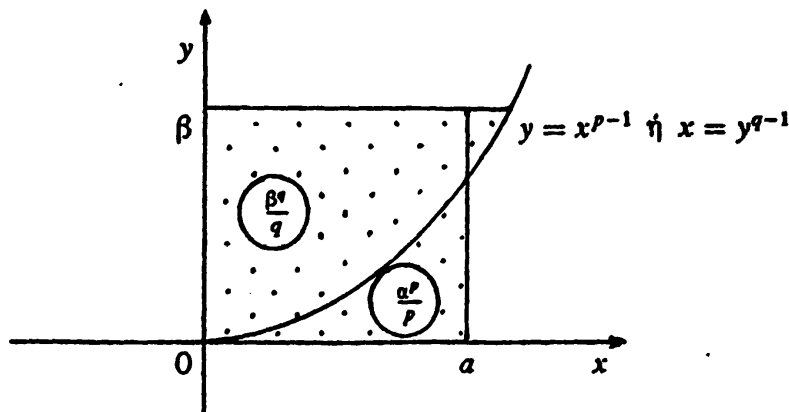
$$\frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q} \geq \alpha\beta, \quad \alpha, \beta \geq 0,$$

η οποία προκύπτει αν λάβουμε υπόψη μας ότι $(p-1)^{-1} = q-1$ και παρατηρήσουμε προσεκτικά το παρακάτω σχήμα, βρίσκουμε

$$(2) \quad \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p \|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q \|g\|_q^q},$$

όπου θέσαμε

$$\alpha := \frac{|f(x)|}{(\|f\|_p)^{1/p}} \quad \text{και} \quad \beta := \frac{|g(x)|}{(\|g\|_q)^{1/q}}.$$



Η Πρόταση 6.2.3 συνεπάγεται ότι $fg \in L_1(\Omega, U, \mu)$. Τώρα, η (1) προκύπτει απ' την ανισότητα (2), αν ολοκληρώσουμε και τα δυο μέλη της ως προς το μέτρο μ . ◊

8.2.2. Πρόρισμα. (Ανισότητα των Cauchy-Bunyakovskii-Schwartz). Για κάθε $f, g \in L_2(\Omega, U, \mu)$ ισχύει $fg \in L_1(\Omega, U, \mu)$ και

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Απόδειξη. Τούτο προκύπτει απ' την προηγούμενη Πρόταση, γιατί ο αριθμός 2 είναι συζυγής του εαυτού του. ◊



8.2.3. Πρόταση. (Ανισότητα του Minkowski). Για κάθε $f, g \in L_p(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ όπου $p \geq 1$, ισχύει $f + g \in L_p(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ και ακόμα

$$(3) \quad \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Απόδειξη. Για $p = 1$, το συμπέρασμα είναι προφανές. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $p > 1$. Επειδή για κάθε $x \in \Omega$ ισχύει

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (2 \max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p),$$

απ' την Πρόταση 6.2.3, παίρνουμε ότι

$$|f + g|^p \in L_1(\Omega, \mathcal{U}, \mu),$$

δηλαδή $f + g \in L_p(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$. Αλλά, αν q είναι ο συζυγής εκθέτης του p , τότε ισχύει $p = q(p - 1)$, οπότε αφού $|f + g|^p \in L_1(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$, θα έχουμε

$$|f + g|^{q(p-1)} \in L_1(\Omega, \mathcal{U}, \mu),$$

δηλαδή

$$|f + g|^{p-1} \in L_q(\Omega, \mathcal{U}, \mu).$$

Τώρα παρατηρούμε ότι

$$|f + g|^p = |f + g| |f + g|^{p-1} \leq |f| |f + g|^{p-1} + |g| |f + g|^{p-1},$$

οπότε, εφαρμόζοντας την ανισότητα του Hölder, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int |f + g|^p d\mu \leq \int |f| |f + g|^{p-1} d\mu + \int |g| |f + g|^{p-1} d\mu \leq \\ &\leq \|f\|_p \left(\int (|f + g|^{p-1})^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} + \|g\|_p \left(\int (|f + g|^{p-1})^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \|f\|_p \left(\int |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}} + \|g\|_p \left(\int |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p/q}. \end{aligned}$$

Τούτο συνεπάγεται ότι

$$(4) \quad \|f + g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p-1},$$

αφού $p = q(p - 1)$. Αν $\|f + g\|_p = 0$, τότε προφανώς η (3) ισχύει. Αν $\|f + g\|_p > 0$, τότε διαιρώντας και τα δύο μέλη της (4) με την ποσότητα $\|f + g\|_p^{p-1}$ βρίσκουμε την (3). ◻

Αν χρησιμοποιήσουμε την Ανισότητα του Minkowski, μπορούμε, τώρα, εύκολα να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $\|\cdot\|_p$ είναι μια στάθμη στον χώρο $L_p(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$. Επίσης παρατηρούμε ότι ισχύει το παρακάτω θεώρημα:



8.2.4. Θεώρημα. Ο χώρος $(L_p(\Omega, \mathcal{U}, \mu), \|\cdot\|_p)$ είναι ένας χώρος Banach (δηλαδή ένας πλήρης σταθμητός χώρος).

Απόδειξη. Το γεγονός ότι ο χώρος $L_p(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$, είναι σταθμητός, αναφέρθηκε παραπάνω.

Θ' αποδείξουμε ότι αυτός είναι πλήρης χώρος. Προς τούτο θεωρούμε μια βασική ακολουθία (f_n) συναρτήσεων του $L_p(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$. Έστω n_1 ο μικρότερος φυσικός αριθμός με την ιδιότητα ότι

$$m > n_1 \implies \|f_m - f_{n_1}\|_p < \frac{1}{2}.$$

Επίσης, έστω n_2 ο μικρότερος φυσικός αριθμός με $n_2 > n_1$ και τέτοιος ώστε

$$m > n_2 \implies \|f_m - f_{n_2}\|_p < \frac{1}{2^2}.$$

Επαγωγικά, τώρα, κατασκευάζουμε μια ακολουθία φυσικών αριθμών n_k τέτοια ώστε, για κάθε $k = 1, 2, \dots$, να ισχύει $n_{k+1} > n_k$ και τέτοιος ώστε

$$m > n_{k+1} \implies \|f_m - f_{n_{k+1}}\|_p < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Έτσι προκύπτει μια υποακολουθία (f_{n_k}) της (f_n) τέτοια ώστε

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k},$$

για κάθε $k = 1, 2, \dots$.

Τώρα, για κάθε $m = 1, 2, \dots$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$g_m(x) := |f_{n_1}(x)| + \sum_{i=1}^m |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)|, \quad x \in \Omega$$

και παρατηρούμε ότι $g_m \in M^+(\Omega, \mathcal{U})$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα του Fatou βρίσκουμε

$$(5) \quad \int |g|^p d\mu \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int (|f_{n_1}| + \sum_{i=1}^m |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|)^p d\mu,$$

όπου το

$$g(x) := \lim_{m \rightarrow \infty} g_m(x),$$

υπάρχει, αφού η ακολουθία (g_m) είναι αύξουσα. Παίρνοντας την p -ρίζα και των δύο μελών της (5) και εφαρμόζοντας την ανισότητα του Minkowski έχουμε τελικά ότι

$$\left(\int |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} (\|f_{n_1}\|_p + \sum_{i=1}^m \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p) \leq \|f_{n_1}\|_p + 1.$$

Έτσι προκύπτει ότι η συνάρτηση g ανήκει στο σύνολο $L_p(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι $|g|^p \in L_1(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$.



Ορίζουμε τώρα τη συνάρτηση

$$f(x) := \begin{cases} f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^m (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)), & \text{αν } x \in A, \\ 0, & \text{αν } x \notin A, \end{cases}$$

όπου

$$A := \{x \in \Omega : g(x) < +\infty\}.$$

(Προφανώς ισχύει $\mu(\Omega \setminus A) = 0$, λόγω της Πρότασης 6.2.6). Αλλά για κάθε δείκτη k έχουμε

$$|f_{n_k}| \leq |f_{n_1}| + \sum_{i=1}^{k-1} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| = g_{n_{k-1}} \leq g$$

και επιπλέον ότι $\lim f_{n_k} = f$, σχ.π. Άρα το Θεώρημα Σύγκλισης του Lebesgue συνεπάγεται ότι $f \in L_p(\Omega, \mathbf{U}, \mu)$. Επίσης έχουμε

$$|f - f_{n_k}|^p \leq (|f| + |f_{n_k}|)^p \leq (2g)^p$$

και

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f - f_{n_k}| = 0, \text{ σχ.π.}$$

οπότε, πάλι, το Θεώρημα Σύγκλισης του Lebesgue συνεπάγεται ότι

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_{n_k}\|_p = 0.$$

Τούτο σημαίνει ότι η ακολουθία (f_{n_k}) συγκλίνει προς τη συνάρτηση f ως προς την στάθμη $\|\cdot\|_p$. Όμως η ακολουθία (f_{n_k}) είναι υποακολουθία της βασικής ακολουθίας (f_n) και επομένως και η (f_n) συγκλίνει προς την $f \in L_p(\Omega, \mathbf{U}, \mu)$. Τούτο αποδεικνύει το συμπέρασμα. ◊

8.3. Ο ΧΩΡΟΣ L_∞ .

Ορισμός. Θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $L_\infty(\Omega, \mathbf{U}, \mu)$ για να παραστήσουμε το σύνολο όλων των (κλάσεων ισοδυναμίας των) $\mathbf{U}$ -μετρήσιμων συναρτήσεων $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ οι οποίες είναι μ -σχεδόν παντού φραγμένες. Δηλαδή $f \in L_\infty(\Omega, \mathbf{U}, \mu)$ σημαίνει ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$\mu\{x \in \Omega : |f(x)| > M\} = 0.$$

Για κάθε τέτοια συνάρτηση ορίζουμε τον πραγματικό αριθμό

$$\|f\|_\infty := \inf\{M > 0 : \mu\{x \in \Omega : |f(x)| > M\} = 0\}$$

και παρατηρούμε ότι ισχύει

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty,$$

για σχεδόν όλα τα σημεία $x \in \Omega$.



8.3.1. Πρόταση. Η συνάρτηση $\|\cdot\|_\infty : f \rightarrow \|f\|_\infty$ είναι μια στάθμη στον χώρο $L_\infty(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$.

Απόδειξη. Προφανώς ισχύει $\|f\|_\infty \geq 0$ και $\|0\|_\infty = 0$. Επίσης, αν $\|f\|_\infty = 0$, τότε, αφού $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$, σχ.ο. $x \in \Omega$, θα έχουμε $f = 0$, σχ.π.

Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$. Τότε

$$\begin{aligned} \|\alpha f\|_\infty &= \inf\{M > 0 : \mu\{x \in \Omega : |\alpha f(x)| > M\} = 0\} = \\ &= \inf\{M > 0 : \mu\{x \in \Omega : |f(x)| > \frac{M}{|\alpha|}\} = 0\} = \\ &= \inf\{|\alpha| \frac{M}{|\alpha|} > 0 : \mu\{x \in \Omega : |f(x)| > \frac{M}{|\alpha|}\} = 0\} = \\ &= |\alpha| \inf\{N > 0 : \mu\{x \in \Omega : |f(x)| > N\} = 0\} = \\ &= |\alpha| \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Τέλος, υποθέτουμε ότι $f, g \in L_\infty(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$. Τότε έχουμε $|f| \leq \|f\|_\infty$ και $|g| \leq \|g\|_\infty$, σχ. π. Επομένως

$$|f + g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty, \text{ σχ.π.}$$

και άρα $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. ◊

8.3.2. Θεώρημα. Ο χώρος $(L_\infty(\Omega, \mathcal{U}, \mu), \|\cdot\|_\infty)$ είναι ένας χώρος Banach.

Απόδειξη. Είδαμε μόλις παραπάνω ότι η συνάρτηση $\|\cdot\|_\infty$ είναι μια στάθμη στον γραμμικό χώρο $L_\infty(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$. Έτσι, αρκεί ν' αποδείξουμε ότι ο χώρος αυτός είναι πλήρης.

Προς τούτο θεωρούμε μια βασική ακολουθία (f_n) . Τότε, για κάθε ζεύγος δεικτών n, m έχουμε $f_n - f_m \in L_\infty(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$. Άρα υπάρχουν σύνολα A_n και B_n^m τέτοια ώστε

$$\mu(A_n) = \mu(B_n^m) = 0$$

και

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty, \quad x \in \Omega \setminus A_n,$$

και

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty, \quad x \in \Omega \setminus B_n^m.$$

Θέτοντας A την ένωση όλων των A_n και B_n^m , για όλους τους δείκτες n και m , παρατηρούμε ότι οι δυο παραπάνω ανισότητες ισχύουν για κάθε n, m και $x \in \Omega \setminus A$. Η δεύτερη ανισότητα συνεπάγεται ότι η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα πάνω στο σύνολο $\Omega \setminus A$. Άρα, αν ορίσουμε τη συνάρτηση

$$f(x) := \begin{cases} \lim_n f_n(x), & \text{αν } x \in \Omega \setminus A, \\ 0, & \text{αν } x \in A, \end{cases}$$

θα έχουμε $f = \lim_n f_n$, σχ. π., οπότε η f είναι $\mathcal{U}$ -μετρήσιμη συνάρτηση.



Έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει n_0 με την ιδιότητα ότι

$$n \geq n_0 \implies |f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon, \text{ σ.χ.ο. } x \in \Omega,$$

δηλαδή

$$n \geq n_0 \implies \mu\{x \in \Omega : |f(x) - f_n(x)| > \epsilon\} = 0.$$

Άρα

$$n \geq n_0 \implies \inf\{M > 0 : \mu\{x \in \Omega : |f(x) - f_n(x)| > M\} = 0\} \leq \epsilon,$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$n \geq n_0 \implies \|f - f_n\|_\infty \leq \epsilon,$$

οπότε και

$$\lim \|f - f_n\|_\infty = 0.$$

◊

Προβλήματα.

8.1. Έστω $\Omega = \mathbb{N}$, $U := P(\mathbb{N})$ και $\mu(A) := \text{card } A$. Να εξεταστεί αν η συνάρτηση $f(x) := \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{N}$ ανήκει στον χώρο $L_p(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \text{card})$, όπου $1 \leq p \leq +\infty$. (Για την έννοια του συμβόλου card βλ. Παράδ. 2.3.1).

8.2. Έστω Ω , μ όπως στο πρόβλημα 8.1. Ν' αποδειχτεί ότι, αν $f \in L_p(\Omega, U, \mu)$, τότε $f \in L_s(\Omega, U, \mu)$ και $\|f\|_s \leq \|f\|_p$, όταν $1 \leq p \leq s < +\infty$.

8.3. Να αποδειχτεί ότι ισχύει $L_1(\Omega, U, \mu) = L_\infty(\Omega, U, \mu)$, αν και μόνο αν $\mu(\Omega) < +\infty$.

8.4. Θέτοντας $p := \frac{1}{2}$, $f(x) := x^2$, $g(x) := x^4$, $\Omega := [0, 1]$, $\mu := \mu_L$ να εξεταστεί αν ισχύει η ανισότητα του Minkowski.

8.5. Αν $f \in L_1(\Omega, U, \mu)$ και $g \in L_\infty(\Omega, U, \mu)$, τότε $fg \in L_1(\Omega, U, \mu)$.

8.6. Αν $\mu(\Omega) < +\infty$, τότε $L_\infty(\Omega, U, \mu) \subseteq L_p(\Omega, U, \mu)$, για κάθε $p \geq 1$.

8.7. Ν' αποδειχτεί ότι το σύνολο των φραγμένων συναρτήσεων του $M(\Omega, U)$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $L_\infty(\Omega, U, \mu_L)$, όπου $\Omega = \mathbb{R}$ και μ_L το μέτρο του Lebesgue.

8.8. Ν' αποδειχτεί ότι αν $x_1, x_2, \dots, x_n$ και $y_1, y_2, \dots, y_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί και αν $p \geq 1$, τότε ισχύει

$$\left(\sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^m |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

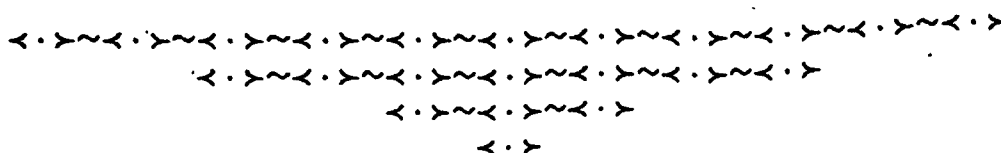
και

$$\sum_{i=1}^m |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^m |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

όπου q είναι ο συζυγής δείκτης του p , αν $p > 1$ και $q = +\infty$, αν $p = 1$.

8.9. Έστω $\Omega = [0, 1]$ και $\mu = \mu_L$. Ν' αποδειχτεί ότι το σύνολο $C(\Omega, \mathbb{R})$ των συνεχών συναρτήσεων $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του $L_p(\Omega, U, \mu)$, $p \geq 1$, ο οποίος όμως δεν είναι κλειστός.





9. ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΤΟΥ RIESZ

9.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο τούτο θα αναζητήσουμε τον δυϊκό χώρο του $L_1(\Omega, U, \mu)$, δηλαδή θα εξετάσουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να αναπαράστούμε γραμμικά συναρτησοειδή που είναι ορισμένα πάνω σε έναν χώρο της μορφής $L_1(\Omega, U, \mu)$. Με αυτόν τον τρόπο κερδίζουμε πολύ σημαντικά πράγματα. Γνωρίζουμε την εσωτερική υφή που έχει ένα τέτοιο συναρτησοειδές, οπότε μπορούμε να το μελετήσουμε όσο, βεβαίως, η γενικότητα μας επιτρέπει. Για παράδειγμα, από μαθήματα της Ανάλυσης είναι γνωστό ότι για κάθε συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές T ορισμένο πάνω στον n -διάστατο ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ υπάρχει ένα σταθερό διάνυσμα a τέτοιο ώστε να ισχύει $T(x) = \langle a, x \rangle$, για κάθε x , όπου το σύμβολο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ παριστάνει το γνωστό εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων.

Ορισμός. Έστω X ένας σταθμητός πραγματικός χώρος με στάθμη $\|\cdot\|$. Ένα γραμμικό συναρτησοειδές G του X στο $\mathbb{R}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση του X στο $\mathbb{R}$, δηλαδή μια συνάρτηση τέτοια ώστε

$$G(\alpha x + \beta y) = \alpha G(x) + \beta G(y),$$

για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $x, y \in X$.

Ορισμός. Το γραμμικό συναρτησοειδές $G : X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι φραγμένο, ή συνεχές, αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$|G(x)| \leq M\|x\|,$$

για κάθε $x \in X$. Ο αριθμός

$$\|G\| := \sup\{|G(x)| : \|x\| \leq 1\}$$

λέγεται στάθμη του G . Είναι φανερό ότι, για κάθε $x \in X$ ισχύει

$$|G(x)| \leq \|G\| \cdot \|x\|.$$



Εδώ θ' ασχοληθούμε μόνο με την περίπτωση που το σύνολο X είναι ο χώρος $L_1(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$, όπου $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ είναι ένας χώρος μέτρου. Υπενθυμίζουμε ότι ο χώρος $L_1(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ είναι σταθμητός με στάθμη την $\|\cdot\|_1$.

9.2. ΘΕΤΙΚΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΟΕΙΔΗ

Ορισμός. Ένα γραμμικό συναρτησοειδές G του $L_1(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ στο $\mathbb{R}$ λέγεται **θετικό**, αν ισχύει

$$G(f) \geq 0,$$

για κάθε $f \in L_1(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ με $f \geq 0$.

Για παράδειγμα, αν g είναι μια μη αρνητική συνάρτηση στο $L_\infty(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$, τότε, όπως γνωρίζουμε απ' την παράγραφο 8.3, για κάθε $f \in L_1(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$, η συνάρτηση fg ανήκει στο σύνολο $L_1(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$. Τότε η συνάρτηση

$$G(f) := \int fg d\mu, \quad f \in L_1(\Omega, \mathcal{U}, \mu),$$

είναι ένα θετικό φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές.

9.2.1. Πρόταση. Έστω $G : L_1(\Omega, \mathcal{U}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Τότε υπάρχουν δυο θετικά φραγμένα γραμμικά συναρτησοειδή G^+ και $G^- : L_1(\Omega, \mathcal{U}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$G(f) = G^+(f) - G^-(f), \quad f \in L_1(\Omega, \mathcal{U}, \mu).$$

Απόδειξη. Για κάθε $f \in L_1(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ με $f \geq 0$, ορίζουμε

$$G^+(f) := \sup\{G(h) : h \in L_1(\Omega, \mathcal{U}, \mu), 0 \leq h \leq f\}$$

και θ' αποδείξουμε ότι το G^+ είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές.

Πραγματικά, παρατηρούμε πρώτα ότι, για κάθε $\alpha \geq 0$, ισχύει

$$G^+(\alpha f) = \alpha G^+(f), \quad f \geq 0.$$

Επίσης, αν ισχύει $0 \leq h_1 \leq f_1$ και $0 \leq h_2 \leq f_2$, τότε

$$G(h_1) + G(h_2) = G(h_1 + h_2) \leq G^+(f_1 + f_2)$$

και επομένως

$$(1) \quad G^+(f_1) + G^+(f_2) \leq G^+(f_1 + f_2).$$

Έστω τώρα h μία συνάρτηση τέτοια ώστε $0 \leq h \leq f_1 + f_2$. Θέτουμε

$$h_1 := \max\{h - f_2, 0\} \text{ και } h_2 := \min\{h, f_2\}.$$



Τότε έχουμε

$$0 \leq h_2 \leq f_2, \quad 0 \leq h_1 \leq f_1 \quad \text{και} \quad 0 \leq h \leq h_1 + h_2.$$

Άρα ισχύει

$$G(h) \leq G(h_1) + G(h_2) \leq G^+(f_1) + G^+(f_2),$$

οπότε και

$$G^+(f_1 + f_2) \leq G^+(f_1) + G^+(f_2).$$

Επειδή, λόγω της (1), ισχύει και η αντίστροφη ανισότητα, έπεται ότι

$$G^+(f_1 + f_2) = G^+(f_1) + G^+(f_2),$$

για κάθε $f_1, f_2 \in L_1(\Omega, U, \mu)$ με $f_1, f_2 \geq 0$.

Τώρα, για κάθε $f \in L_1(\Omega, U, \mu)$ θέτουμε

$$G^+(f) := G^+(f^+) - G^+(f^-),$$

οπότε, εύκολα μπορούμε ν' αποδείξουμε ότι το G^+ είναι ένα θετικό φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές πάνω στον χώρο $L_1(\Omega, U, \mu)$. Το ίδιο συμβαίνει και με το $G^- := G^+ - G$, πράγμα που αποδεικνύει την Πρόταση. ο

9.3. ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΟΕΙΔΩΝ

Με τον όρο αναπαράσταση εννοούμε τη συγκεκριμένη μορφή που μπορεί να έχει το γραμμικό συναρτησοειδές. Τέτοια αναπαράσταση μας δίνει το παρακάτω θεώρημα το οποίο είναι απ' τα πιο σημαντικά της Ανάλυσης.

9.3.1 Θεώρημα (αναπαράστασης του Riesz). Έστω (Ω, U, μ) ένας χώρος μέτρου, όπου υποθέτουμε ότι το μέτρο μ είναι σ -πεπερασμένο. Έστω, επίσης, G ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές ορισμένο στον χώρο $L_1(\Omega, U, \mu)$. Τότε υπάρχει συνάρτηση $g \in L_\infty(\Omega, U, \mu)$ τέτοια ώστε

$$G(f) = \int f g d\mu, \quad f \in L_1(\Omega, U, \mu).$$

Επιπλέον, αν το συναρτησοειδές G είναι θετικό, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση g ως μη αρνητική, δηλαδή $g \geq 0$. Σε κάθε περίπτωση ισχύει

$$\|G\| = \|g\|_\infty.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το μέτρο είναι πεπερασμένο, δηλαδή $\mu(\Omega) < +\infty$. Ακόμη υποθέτουμε ότι το G είναι ένα θετικό φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές.

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\lambda: A \rightarrow G(\chi_A), \quad A \in U$$



και θ' αποδείξουμε ότι λ είναι ένα μέτρο ορισμένο στη σ -άλγεβρα $\mathcal{U}$ και μάλιστα απόλυτα συνεχές ως προς μ . Πραγματικά, κατ' αρχήν βλέπουμε ότι ισχύει

$$\lambda(\emptyset) = G(0) = 0.$$

Έστω (A_n) μια ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων της $\mathcal{U}$ και έστω

$$A := A_1 \cup A_2 \cup \dots$$

Θέτουμε

$$B_1 := A_1,$$

$$B_2 := A_1 \cup A_2,$$

...

$$B_n := A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n,$$

...

οπότε παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\lim_n \chi_{B_n}(x) = \chi_A(x), \quad x \in \Omega.$$

Αλλά έχουμε $\mu(\Omega) < +\infty$, οπότε και $\mu(A) < +\infty$. Έτσι το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης εφαρμόζεται και δίνει ότι

$$\lim_n \int \chi_{B_n} d\mu = \int \chi_A d\mu,$$

δηλαδή ότι

$$\lim_n \|\chi_{B_n} - \chi_A\|_1 = 0.$$

Αλλά έχουμε

$$B_n \subseteq A,$$

οπότε

$$\lambda(B_n) \leq \lambda(A)$$

και άρα

$$0 \leq \lambda(A) - \lambda(B_n) = G(\chi_A) - G(\chi_{B_n}) = G(\chi_A - \chi_{B_n}) \leq \|G\| \cdot \|\chi_A - \chi_{B_n}\|.$$

Έτσι πρέπει και $\lim_n \lambda(B_n) = \lambda(A)$. Όμως

$$\lambda(B_n) = G(\chi_{B_n}) = G\left(\sum_{i=1}^n \chi_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^n G(\chi_{A_i}) = \sum_{i=1}^n \lambda(A_i),$$

οπότε τελικά

$$\sum_{i=1}^n \lambda(A_i) = \lambda(A),$$

πράγμα που αποδεικνύει ότι το λ είναι ένα μέτρο.



Τώρα, για κάθε σύνολο $A \in \mathcal{U}$ με $\mu(A) = 0$, θα έχουμε και $\lambda(A) = 0$, αφού

$$0 \leq \lambda(A) = G(\chi_A) \leq \|G\| \cdot \|\chi_A\|_1.$$

Τούτο δηλώνει ότι το μέτρο λ είναι απόλυτα συνεχές ως προς μ . Το Θεώρημα των Radon-Nikodym συνεπάγεται ότι υπάρχει μια μοναδική (με την έννοια του σχεδόν παντού) συνάρτηση $g \in M(\Omega, \mathcal{U})$ τέτοια ώστε

$$G(\chi_A) = \lambda(A) = \int \chi_A g d\mu.$$

Τη συνάρτηση g μπορούμε να τη θεωρήσουμε μη αρνητική. Πραγματικά, αν θέσουμε

$$\Gamma_n := \{x \in \Omega : g(x) \leq -\frac{1}{n}\},$$

τότε έχουμε $\Gamma_n \in \mathcal{U}$ και άρα

$$G(\chi_{\Gamma_n}) = \int \chi_{\Gamma_n} g d\mu \leq -\frac{1}{n} \mu(\Gamma_n),$$

οπότε πρέπει $\mu(\Gamma_n) = 0$, $n = 1, 2, \dots$. Άρα, αν θέσουμε

$$\Gamma := \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots,$$

θα έχουμε και $\mu(\Gamma) = 0$. Αλλά ισχύει ότι $\Gamma = \{x \in \Omega : g(x) < 0\}$, οπότε $g \geq 0$, σχ.π. Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε τη g ως μη αρνητική.

Έστω ϕ μια απλή μ -μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε αυτή έχει κανονική παράσταση

$$\phi = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{A_i}.$$

Άρα θα έχουμε

$$G(\phi) = G\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i G(\chi_{A_i}) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \int \chi_{A_i} g d\mu = \int \phi g d\mu.$$

Πριν δούμε την τιμή της G πάνω στην τυχαία συνάρτηση $f \in L_1(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$, θ' αποδείξουμε ότι $g \in L_\infty(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$. Πραγματικά. Για κάθε $n = 1, 2, \dots$ θέτουμε

$$A_n := \{x \in \Omega : g(x) \geq \|G\| + \frac{1}{n}\}$$

και υποθέτουμε ότι για κάποιο m ισχύει $\mu(A_m) > 0$. Τότε η συνάρτηση

$$\phi := \frac{1}{\mu(A_m)} \chi_{A_m}$$



είναι μια απλή μ -μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $\|\phi\|_1 = 1$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \|G\| + \frac{1}{m} &= \frac{1}{\mu(A_m)} \int (\|G\| + \frac{1}{m}) \chi_{A_m} d\mu \leq \\ &\leq \int \phi g d\mu = G(\phi) \leq \|G\| \cdot \|\phi\|_1 = \|G\|, \end{aligned}$$

άτοπο. Άρα $\mu(A_m) = 0$, οπότε και $\mu(A) = 0$, όπου $A := A_1 \cup A_2 \cup \dots$. Αλλά, προφανώς

$$A = \{x \in \Omega : g(x) > \|G\|\},$$

οπότε πρέπει $g(x) \leq \|G\|$, σχ.ο. $x \in \Omega$. Έτσι δείξαμε ότι $g \in L_\infty(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$.

Έστω τώρα $f \in L_1(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$. Άρα υπάρχει αύξουσα ακολουθία (ϕ_n) απλών $\mathcal{U}$ -μετρήσιμων συναρτήσεων τέτοια ώστε $f = \lim_n \phi_n$, σχ.π. Τούτο εξασφαλίζεται απ' την Πρόταση 4.7.2. Αλλά το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης συνεπάγεται τότε ότι

$$\lim_n \int \phi_n d\mu = \int f d\mu, \quad \text{ή} \quad \lim_n \|\phi_n - f\|_1 = 0.$$

Τούτο λέει ότι $\lim_n \phi_n = f$, ως προς τη σύγκλιση του χώρου $L_1(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$. Επομένως και

$$\lim_n G(\phi_n) = G(f),$$

αφού G είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Άρα έχουμε

$$G(f) = \lim_n \int \phi_n g d\mu = \int f g d\mu,$$

αφού

$$\int |\phi_n g - f g| d\mu \leq \|g\|_\infty \|\phi_n - f\|_1 \rightarrow 0, \quad \text{όταν } n \rightarrow +\infty.$$

Τέλος, για οποιαδήποτε συνάρτηση $f \in L_1(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$, έχουμε $f^+, f^- \geq 0$, οπότε

$$\begin{aligned} G(f) &= G(f^+ - f^-) = G(f^+) - G(f^-) = \\ &= \int f^+ g d\mu - \int f^- g d\mu = \int (f^+ - f^-) g d\mu = \int f g d\mu, \end{aligned}$$

πράγμα το οποίο αποδεικνύει το θεώρημα για την περίπτωση που $\mu(\Omega) < +\infty$ και G είναι θετικό.

Υποθέτουμε τώρα ότι το μέτρο μ είναι σ -πεπερασμένο και ότι το συναρτησοειδές G είναι θετικό. Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε μια αύξουσα ακολουθία (Ω_n) συνόλων της σ -άλγεβρας $\mathcal{U}$ τέτοια ώστε $\mu(\Omega_n) < +\infty$, για κάθε $n = 1, 2, \dots$ και

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots$$

Τότε, για κάθε $n = 1, 2, \dots$, σύμφωνα με τα προηγούμενα, υπάρχει $g_n \in L_\infty(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ τέτοια ώστε $g_n \geq 0$ και

$$G(f \chi_{\Omega_n}) = \int f \chi_{\Omega_n} g_n d\mu, \quad f \in L_1(\Omega, \mathcal{U}, \mu).$$



Επειδή όμως η ακολουθία (Ω_n) είναι αύξουσα, η συνάρτηση

$$g(x) := g_n(x), \text{ σχ.ο. } x \in \Omega_n$$

είναι καλά ορισμένη.

Έστω f μια συνάρτηση του χώρου $L_1(\Omega, U, \mu)$ με $f \geq 0$. Για κάθε $n = 1, 2, \dots$ θέτουμε

$$f_n := f \chi_{\Omega_n}$$

και παρατηρούμε ότι η ακολουθία (f_n) είναι αύξουσα και ακόμη ότι $\lim_n f_n = f$. Άρα, απ' το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης, παίρνουμε ότι

$$\lim_n \int f_n d\mu = \int f d\mu,$$

οπότε και

$$\lim_n \|f_n - f\|_1 = 0.$$

Επειδή όμως το συναρτησοειδές G είναι φραγμένη συνάρτηση, θα έχουμε $G(f) = \lim_n G(f_n)$ και άρα

$$G(f) = \lim_n \int f_n g d\mu = \int f g d\mu,$$

αφού

$$\int |f_n g - f g| d\mu \leq \|g\|_\infty \|f_n - f\|_1 \rightarrow 0, \text{ όταν } n \rightarrow +\infty.$$

Έστω, τώρα, $f \in L_1(\Omega, U, \mu)$. Άρα $f^+, f^- \geq 0$ και επομένως, όπως και παραπάνω, ισχύει

$$G(f) = \int f^+ g d\mu - \int f^- g d\mu = \int f g d\mu.$$

Τέλος, εξετάζουμε την περίπτωση όπου G δεν είναι αναγκαστικά θετικό γραμμικό συναρτησοειδές.

Απ' την Πρόταση 9.2.1 έπεται ότι υπάρχουν δύο θετικά φραγμένα γραμμικά συναρτησοειδή G^+ και G^- τέτοια ώστε $G = G^+ - G^-$. Σύμφωνα, όμως, με τα παραπάνω, υπάρχουν $g^+, g^- \in L_\infty(\Omega, U, \mu)$ τέτοια ώστε $g^+ \geq 0, g^- \geq 0$ και

$$G^+(f) = \int f g^+ d\mu, \quad G^-(f) = \int f g^- d\mu,$$

για κάθε $f \in L_1(\Omega, U, \mu)$. Θέτοντας $g := g^+ - g^-$ έχουμε $g \in L_\infty(\Omega, U, \mu)$ και επομένως

$$G(f) = \int f g d\mu, \quad f \in L_1(\Omega, U, \mu).$$

Για να τελειώσουμε την απόδειξη πρέπει ν' αποδείξουμε ότι $\|G\| = \|g\|_\infty$. Προς τούτο παρατηρούμε πρώτα ότι ισχύει

$$|G(f)| \leq \int |f| |g| d\mu \leq \|g\|_\infty \|f\|_1$$



και άρα έχουμε

$$\|G\| \leq \|g\|_{\infty}.$$

Αρκεί ν' αποδείξουμε και την αντίστροφη ανισότητα. Έστω $\epsilon > 0$ και θεωρούμε το σύνολο

$$E := \{x \in \Omega : |g(x)| \geq \|g\|_{\infty} - \epsilon\}.$$

Τότε $\mu(E) > 0$, οπότε η συνάρτηση

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{\mu(E) \operatorname{sgn}(g(x))}, & \text{αν } x \in E, \\ 0, & \text{αν } x \notin E, \end{cases}$$

είναι καλά ορισμένη και τέτοια ώστε

$$\|f\|_1 = \int |f| d\mu = \frac{1}{\mu(E)} \int_E \chi_E d\mu = 1.$$

Άρα

$$\|G\| \geq |G(f)| = \left| \int f g d\mu \right| = \frac{1}{\mu(E)} \int_E |g| d\mu \geq \|g\|_{\infty} - \epsilon,$$

για κάθε $\epsilon > 0$. Επομένως ισχύει $\|G\| \geq \|g\|_{\infty}$ και η απόδειξη είναι πλήρης. $\diamond$

Προβλήματα..

9.1. Αν Ω είναι ένας σταθμητός πραγματικός γραμμικός χώρος και $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ένα γραμμικό συναρτησοειδές, ν' αποδειχτεί ότι G είναι φραγμένο αν και μόνο αν τούτο είναι συνεχής συνάρτηση.

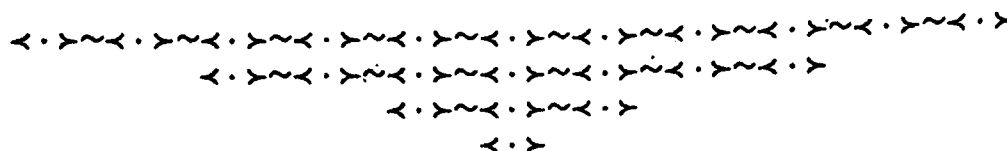
9.2. Να διατυπωθεί το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz για την περίπτωση όπου $\Omega = \mathbb{N}$, $U := P(\mathbb{N})$ και $\mu := \text{card}$.

9.3. Αφού διαπιστωθεί ότι η απεικόνιση

$$G : f \rightarrow \int_0^1 x f(x) dx, \quad f \in L_1(\mathbb{R}, U, \mu_L)$$

είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, ν' αποδειχτεί ότι η συνάρτηση g , που δίνει το Θεώρημα 9.3.1, ικανοποιεί τη σχέση $g(x) = x$, για σχ.ο. $x \in [0, 1]$.





10. ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ FUBINI

10.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Πολλές φορές αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα αν σε ένα διπλό άθροισμα της μορφής

$$\sum_n \sum_m a_{nm}$$

μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά άθροισης και να το γράψουμε ως

$$\sum_m \sum_n a_{nm}$$

ή, ανάλογα, σε ένα διπλό ολοκλήρωμα της μορφής

$$\int \int f(x, y) dx dy$$

μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης και να το γράψουμε ως

$$\int \int f(x, y) dy dx.$$

Στο εδάφιο τούτο θα δούμε το λεγόμενο θεώρημα του Fubini το οποίο μας λέει ακριβώς τι μπορεί να γίνει στις παραπάνω, αλλά και σε ανάλογες, περιπτώσεις.

10.2. ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΜΕΤΡΩΝ

Ορισμός. Θεωρούμε δύο μετρήσιμους χώρους $(X, \mathcal{X})$ και $(Y, \mathcal{Y})$. Τότε κάθε σύνολο της μορφής $A \times B$, όπου $A \in \mathcal{X}$ και $B \in \mathcal{Y}$ θα το λέμε **μετρήσιμο ορθογώνιο** ή απλά **ορθογώνιο** στο σύνολο $Z := X \times Y$.

Εστω Z_0 η συλλογή όλων των υποσυνόλων του Z που γράφονται ως ενώσεις πεπερασμένου πλήθους ξένων ανά δύο τετραγώνων. Θ' αποδείξουμε ότι



10.2.1. Πρόταση. Η συλλογή Z_0 είναι μια άλγεβρα στο σύνολο Z .

Απόδειξη. Είναι φανερό ότι $\emptyset \in Z$ και ακόμα ότι η ένωση δύο στοιχείων του Z_0 είναι επίσης στοιχείο του Z_0 . Έστω $A \times B \in Z_0$. Τότε ισχύει και $(A \times B)^c \in Z_0$, αφού

$$(A \times B)^c = (A^c \times Y) \cup (X \times B^c).$$

Τούτο συνεπάγεται εύκολα ότι και το συμπλήρωμα κάθε στοιχείου του Z_0 ανήκει επίσης στο Z_0 . $\diamond$

Υποθέτουμε τώρα ότι $(X, \mathcal{X}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ είναι δύο σ -πεπερασμένοι χώροι μέτρου. Θα παριστάνουμε με Z τη σ -άλγεβρα στο σύνολο $Z = X \times Y$ που παράγεται απ' τη συλλογή Z_0 .

10.2.2. Θεώρημα. Υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο ρ ορισμένο στη σ -άλγεβρα Z τέτοιο ώστε

$$\tau(A \times B) = \mu(A)\nu(B),$$

για κάθε $A \in \mathcal{X}$ και $B \in \mathcal{Y}$. Τότε συνήθως γράφουμε

$$\tau = \mu \times \nu.$$

Απόδειξη. Για κάθε σύνολο Γ της άλγεβρας Z_0 υπάρχουν σύνολα $A_1, A_2, \dots, A_n$ της σ -άλγεβρας $\mathcal{X}$ και $B_1, B_2, \dots, B_n$ της $\mathcal{Y}$ τέτοια ώστε

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^n (A_i \times B_i).$$

Θέτουμε

$$\tau_0(\Gamma) := \sum_{i=1}^n \mu(A_i)\nu(B_i)$$

και θ' αποδείξουμε ότι τ_0 είναι καλά ορισμένη συνάρτηση και μάλιστα είναι ένα μέτρο πάνω στην άλγεβρα Z_0 . Προς τούτο, υποθέτουμε ότι το ορθογώνιο $A \times B$ γράφεται ως ένωση μιας αριθμήσιμης συλλογής ορθογωνίων $A_i \times B_i$, δηλαδή

$$A \times B = \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \times B_i).$$

Τότε προφανώς ισχύει

$$\chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x)\chi_B(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i}(x)\chi_{B_i}(y),$$

για κάθε $(x, y) \in X \times Y$. Επομένως, για κάθε $x \in X$ ισχύει

$$\begin{aligned} \chi_A(x)\nu(B) &= \int \chi_A(x)\chi_B d\nu = \int \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i}(x)\chi_{B_i} d\nu = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i}(x) \int \chi_{B_i} d\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i}(x)\nu(B_i), \end{aligned}$$



όπου εδώ εφαρμόσαμε το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης 5.3.3. Ολοκληρώνοντας τώρα ως προς μ βρίσκουμε

$$\mu(A) \nu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_i) \nu(B_i),$$

πράγμα που αποδεικνύει ότι η συνάρτηση τ_0 είναι καλά ορισμένη και έχει την ιδιότητα της αριθμήσιμης προσθετικότητας.

Εφαρμόζουμε στο σημείο αυτό το Θεώρημα Επέκτασης του Καραθεοδωρή 3.4.8, οπότε συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένα μέτρο τ ορισμένο πάνω στη σ -άλγεβρα $\mathcal{Z}$ του οποίου ο περιορισμός πάνω στην άλγεβρα $\mathcal{Z}_0$ είναι το μέτρο τ_0 . $\diamond$

10.3. ΜΟΝΟΤΟΝΗ ΚΛΑΣΗ

Ορισμός. Θα λέμε ότι μια συλλογή $\mathcal{S}$ συνόλων είναι μια *μονότονη κλάση*, αν αυτή είναι μη κενή και περιέχει την ένωση κάθε αύξουσας ακολουθίας στοιχείων της καθώς επίσης και την τομή κάθε φθίνουσας ακολουθίας στοιχείων της.

Είναι φανερό ότι αν $\mathcal{S}$ είναι μια μονότονη κλάση και (A_n) είναι μια μονότονη ακολουθία στοιχείων της συλλογής $\mathcal{S}$, τότε ισχύει $\lim A_n \in \mathcal{S}$.

Επίσης μπορούμε να δούμε ότι, αν E είναι μια μη κενή συλλογή υποσυνόλων ενός συνόλου Δ , τότε η σ -άλγεβρα $\mathcal{U}$ που παράγεται απ' την E περιέχει την ελάχιστη μονότονη κλάση $\mathcal{S}$ που περιέχει την E . Όμως δεν ισχύει μόνο αυτό. Θα δείξουμε ότι, αν η E είναι μια άλγεβρα, τότε $\mathcal{U} = \mathcal{S}$.

10.3.1. Πρόταση. Αν $\mathcal{A}$ είναι μια άλγεβρα συνόλων, τότε η σ -άλγεβρα $\mathcal{U}$ που παράγεται απ' την $\mathcal{A}$ ταυτίζεται με την ελάχιστη μονότονη κλάση $\mathcal{S}$ που περιέχει την $\mathcal{A}$.

Απόδειξη. Επειδή, όπως είπαμε παραπάνω, ισχύει $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{U}$, αρκεί ν' αποδείξουμε ότι $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$.

Προς τούτο, αρκεί ν' αποδείξουμε ότι η $\mathcal{S}$ είναι μια σ -άλγεβρα, ή, επειδή αυτή είναι μονότονη κλάση, αρκεί να δείξουμε ότι η $\mathcal{S}$ είναι μια άλγεβρα.

Πραγματικά, είναι φανερό ότι $\emptyset \in \mathcal{S}$. Θα πρέπει να δείξουμε ότι αν A και B είναι στοιχεία της συλλογής $\mathcal{S}$, τότε και τα σύνολα $A \setminus B$ και $A \cup B$ είναι επίσης στοιχεία της συλλογής $\mathcal{S}$.

Για κάθε $A \in \mathcal{S}$ ορίζουμε τη συλλογή

$$\mathcal{S}(A) := \{B \in \mathcal{S} : A \setminus B, A \cap B, B \setminus A \in \mathcal{S}\}.$$

Είναι φανερό ότι $\emptyset \in \mathcal{S}(A)$, $A \in \mathcal{S}(A)$ και ακόμα η $\mathcal{S}(A)$ είναι μια μονότονη κλάση. Επίσης παρατηρούμε ότι ισχύει

$$(1) \quad B \in \mathcal{S}(A) \iff A \in \mathcal{S}(B).$$

Αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $A \subseteq \mathcal{S}(A)$ και επειδή η $\mathcal{S}$ είναι η μικρότερη μονότονη κλάση που περιέχει την άλγεβρα $\mathcal{A}$, θα πρέπει $\mathcal{S} = \mathcal{S}(A)$, για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Επομένως, αν $B \in \mathcal{S}$ και $A \in \mathcal{A}$, τότε $B \in \mathcal{S}(A)$, οπότε, λόγω της (1), $A \in \mathcal{S}(B)$ και άρα $A \subseteq \mathcal{S}(B)$ για κάθε



$B \in \mathcal{S}$. Πάλι, όμως, αφού η $\mathcal{S}$ είναι η ελάχιστη μονότονη κλάση που περιέχει την $\mathcal{A}$, θα πρέπει $\mathcal{S} = \mathcal{S}(B)$, για κάθε $B \in \mathcal{S}$. Άρα και $\mathcal{S} = \mathcal{S}(A)$, οπότε, αφού $\mathcal{S}(A)$ είναι μια άλγεβρα, θα πρέπει και η $\mathcal{S}$ να είναι μια άλγεβρα. Τέλος, επειδή η $\mathcal{S}$ είναι μια μονότονη κλάση, έπεται ότι αυτή είναι μια σ -άλγεβρα. Συνεπώς $\mathcal{U} = \mathcal{S}$. $\diamond$

10.4. ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ FUBINI

Θεωρούμε δύο χώρους μέτρου $(X, \mathcal{X}, \mu)$, $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$. Τότε ορίζεται, όπως είδαμε στο εδάφιο 10.2, το γινόμενο $\tau = \mu \times \nu$ των μέτρων μ, ν πάνω στη σ -άλγεβρα $\mathcal{Z}$ του καρτεσιανού γινομένου $X \times Y$.

Έστω E ένα τ -μετρήσιμο σύνολο και $x \in X, y \in Y$. Ορίζουμε τα σύνολα

$$E_x := \{y \in Y : (x, y) \in E\}$$

και

$$E^y := \{x \in X : (x, y) \in E\}$$

και θ' αποδείξουμε ότι $E_x \in \mathcal{Y}$ και $E^y \in \mathcal{X}$.

Πραγματικά, έστω Δ η συλλογή όλων των $E \in \mathcal{Z}$ με $E_x \in \mathcal{Y}$. Αν $E = A \times B$, όπου $A \in \mathcal{X}$ και $B \in \mathcal{Y}$, τότε $E_x = B$, αν $x \in A$ και $E_x = \emptyset$, αν $x \notin A$. Έτσι η συλλογή Δ περιέχει όλα τα τετράγωνα της $\mathcal{Z}$. Επειδή η συλλογή $\mathcal{Y}$ είναι μια σ -άλγεβρα θα έχουμε τα εξής:

- i) $X \times Y \in \Delta$, αφού $Y = (X \times Y)_x \in \mathcal{Y}$.
- ii) αν $E \in \Delta$, τότε $E_x \in \mathcal{Y}$, οπότε και $(E^c)_x = (E_x)^c \in \mathcal{Y}$ και άρα $E^c \in \Delta$.
- iii) αν $E_n \in \Delta$, $n = 1, 2, \dots$, τότε θέτοντας $E := \cup E_n$ θα έχουμε $E_x = \cup (E_n)_x$, οπότε, αφού $(E_n)_x \in \mathcal{Y}$, θα έχουμε και $E_x \in \mathcal{Y}$, δηλαδή $E \in \Delta$.

Οι ιδιότητες αυτές δείχνουν ότι η συλλογή Δ είναι μια σ -άλγεβρα στοιχείων της $\mathcal{Z}$ και επειδή η $\mathcal{Z}$ είναι η μικρότερη, θα πρέπει $\Delta = \mathcal{Z}$. Τούτο συνεπάγεται ότι $E_x \in \mathcal{Y}$, για κάθε $E \in \mathcal{Z}$.

Παρόμοια αποδεικνύεται και ότι $E^y \in \mathcal{X}$.

Έστω τώρα $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ μία $\mathcal{Z}$ -μετρήσιμη συνάρτηση. Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f_x(y) := f(x, y), \quad y \in Y$$

και για κάθε $y \in Y$ ορίζουμε την

$$f^y(x) := f(x, y), \quad x \in X.$$

Θα αποδείξουμε ότι η f_x είναι $\mathcal{Y}$ -μετρήσιμη και η f^y είναι $\mathcal{X}$ -μετρήσιμη. Πραγματικά, για κάθε $k \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\{(x, y) \in X \times Y : f(x, y) > k\} =: E \in \mathcal{Z}.$$

Αλλά ισχύει

$$E_x = \{y \in Y : f_x(y) > k\}$$



και, όπως, μόλις, αποδείξαμε $E_x \in \mathcal{Y}$. Τούτο δηλώνει ότι η f_x είναι $\mathcal{Y}$ -μετρήσιμη. Παρόμοια αποδεικνύεται και ότι η f^y είναι $\mathcal{X}$ -μετρήσιμη συνάρτηση.

10.4.1. Λήμμα. Υποθέτουμε ότι $(X, \mathcal{X}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ είναι χώροι μέτρου, όπου τα μ, ν είναι σ -πεπερασμένα μέτρα. Τότε, για κάθε $E \in \mathcal{Z}$, η συνάρτηση

$$\phi(x) := \nu(E_x), \quad x \in X$$

είναι $\mathcal{X}$ -μετρήσιμη και η

$$\psi(y) := \mu(E^y), \quad y \in Y$$

είναι $\mathcal{Y}$ -μετρήσιμη συνάρτηση. Επιπλέον σ' αυτή την περίπτωση ισχύουν οι σχέσεις

$$\int \phi d\mu = \tau(E) = \int \psi d\nu.$$

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{S}$ η συλλογή όλων των $E \in \mathcal{Z}$ που ικανοποιούν τα συμπεράσματα του Λήμματος. Θ' αποδείξουμε ότι η $\mathcal{S}$ είναι μια μονότονη κλάση που περιέχει την άλγεβρα $\mathcal{Z}_0$, οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 10.3.1, θα περιέχει και τη σ -άλγεβρα $\mathcal{Z}$. Υποθέτουμε ότι τα μέτρα μ, ν είναι πεπερασμένα.

Θεωρούμε πρώτα ότι E είναι ένα τετράγωνο, δηλαδή $E = A \times B$, όπου $A \in \mathcal{X}$ και $B \in \mathcal{Y}$. Τότε έχουμε

$$\phi(x) = \chi_A(x)\nu(B),$$

$$\psi(y) = \chi_B(y)\mu(A),$$

και

$$\int \phi d\mu = \mu(A)\nu(B) = \int \psi d\nu,$$

οπότε το συμπέρασμα ισχύει, δηλαδή $E \in \mathcal{S}$. Επομένως και $\mathcal{Z}_0 \subseteq \mathcal{S}$.

Έτσι απομένει ν' αποδείξουμε ότι η συλλογή $\mathcal{S}$ είναι μια μονότονη κλάση. Προς τούτο υποθέτουμε ότι (E_n) είναι μια αύξουσα ακολουθία στοιχείων του $\mathcal{S}$ και έστω

$$E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Τότε, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το κατά σημείο σχεδόν παντού όριο μετρήσιμων συναρτήσεων είναι επίσης μετρήσιμη συνάρτηση και το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης του Levi, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι $E \in \mathcal{S}$. Παρόμοια βρίσκουμε ότι και

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{S},$$

για κάθε φθίνουσα ακολουθία (F_n) στοιχείων του $\mathcal{S}$. Τούτο συνεπάγεται ότι $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{S}$, όταν μ, ν είναι πεπερασμένα μέτρα. Αν αυτά είναι σ -πεπερασμένα, το συμπέρασμα προκύπτει με τον τρόπο που ακολουθήσαμε σε προηγούμενες ανάλογες περιπτώσεις. ◊

10.4.2. Θεώρημα (του Tonelli). Υποθέτουμε ότι $(X, \mathcal{X}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ είναι χώροι μέτρου, όπου μ, ν είναι σ -πεπερασμένα μέτρα. Έστω $F : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ μια τ -ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε η συνάρτηση

$$\phi(x) := \int F_x d\nu, \quad x \in X$$



είναι X -μετρήσιμη, η

$$\psi(y) := \int F^y d\mu, \quad y \in Y$$

είναι Y -μετρήσιμη και επιπλέον ισχύει ότι

$$\int \phi d\mu = \int F d\tau = \int \psi d\nu,$$

ή με άλλα λόγια

$$\int_X \int_Y F d\nu d\mu = \int F d\tau = \int_Y \int_X F d\mu d\nu.$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα 10.4.1 προκύπτει ότι το συμπέρασμα ισχύει όταν η F είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός συνόλου της σ -άλγεβρας $\mathcal{Z}$. Άρα, τούτο ισχύει για κάθε απλή συνάρτηση.

Έστω ότι F είναι μία $\mathcal{Z}$ -μετρήσιμη μη αρνητική συνάρτηση. Τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 4.7.2, υπάρχει αύξουσα ακολουθία απλών συναρτήσεων F_n , $n = 1, 2, \dots$, τέτοια ώστε

$$F(x, y) = \lim F_n(x, y),$$

για κάθε $(x, y) \in X \times Y$. Αλλά, για κάθε F_n το συμπέρασμα του θεωρήματος ισχύει, οπότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης περνούμε στο όριο για να διαπιστώσουμε εύκολα ότι το θεώρημα ισχύει και για την F . ◊

Υποθέτουμε τώρα ότι η συνάρτηση F στο προηγούμενο θεώρημα παίρνει και αρνητικές τιμές. Τότε όμως, αφού οι F^+ και F^- είναι μη αρνητικές $\mathcal{Z}$ -μετρήσιμες συναρτήσεις, θα ικανοποιούν το συμπέρασμα του θεωρήματος. Άρα, επειδή ισχύει $F = F^+ - F^-$, έπεται ότι και η F ικανοποιεί το ίδιο θεώρημα. Το τελευταίο τούτο συμπέρασμα αναφέρεται ως Θεώρημα του Fubini, που είναι και το βασικότερο συμπέρασμα του κεφαλαίου τούτου.

Έτσι, λοιπόν, είδαμε ότι ισχύει το εξής

10.4.3. Θεώρημα (του Fubini). Υποθέτουμε ότι $(X, \mathcal{X}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ είναι χώροι μέτρου, όπου τα μ, ν είναι σ -πεπερασμένα μέτρα. Έστω $\mathcal{Z}$ η σ -άλγεβρα στο $X \times Y$ που παράγεται απ' τις σ -άλγεβρες $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ και έστω τ το μέτρο εκείνο που ορίζεται πάνω στην $\mathcal{Z}$, όπως είδαμε παραπάνω. Τέλος, έστω $F : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ μια τ -ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε η συνάρτηση

$$\phi(x) := \int F_x d\nu, \quad \mu - \text{σχ.ο. } x \in X$$

είναι X -μετρήσιμη και η

$$\psi(y) := \int F^y d\mu, \quad \nu - \text{σχ.ο. } y \in Y$$

είναι Y -μετρήσιμη. Επιπλέον ισχύει ότι

$$\int \phi d\mu = \int F d\tau = \int \psi d\nu,$$



ή με άλλα σύμβολα

$$\int_X \int_Y F d\nu d\mu = \int F d\tau = \int_Y \int_X F d\mu d\nu.$$

Προβλήματα.

10.1. Αν $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι X -μετρήσιμη και $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Y -μετρήσιμη, να αποδειχτεί ότι η $h(x, y) := f(x)g(y)$ είναι Z -μετρήσιμη συνάρτηση.

10.2. Αν $E, F \subseteq X \times Y$ και $x \in X$, ν' αποδειχτεί ότι $(E \setminus F)_x = E_x \setminus F_x$.

10.3. Αν (E_n) είναι μια ακολουθία υποσυνόλων του $X \times Y$, ν' αποδειχτεί ότι ισχύει $(\cup E_n)_x = \cup (E_n)_x$.

10.4. Αν a_{mn} $m, n \in \mathbb{N}$, ν' αποδειχτεί ότι

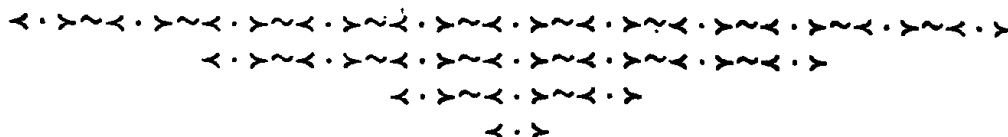
$$\sum_n \sum_m a_{nm} = \sum_m \sum_{n=1} a_{nm}.$$

10.5. Θεωρούμε την ακολουθία (a_{nm}) η οποία ορίζεται ως εξής: $a_{nn} := 1$, $a_{n,n+1} = -1$ και $a_{nm} := 0$, αν $m \neq n, n+1$. Ν' αποδειχτεί ότι

$$\sum_m \sum_n a_{nm} = 0 \text{ και } \sum_n \sum_m a_{nm} = 1,$$

οπότε το συμπέρασμα του Θεωρήματος του Fubini δεν ισχύει. Γιατί;

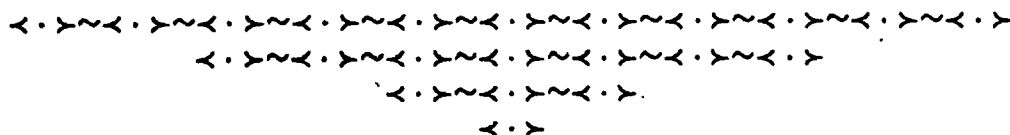




ΒΟΗΘΗΜΑΤΑ

- Bartle, R.G., *The Elements of Integration*, Wiley, New York, 1966.
 Halmos, P. R., *Measure Theory*, Springer-Verlag, New York, 1974.
 Hewitt, E. and Stromberg, K., *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1956.
 Klambauer, G., *Real Analysis*, Elsevier, New York, 1973.
 Loève, M., *Probability Theory*, 3rd Ed., Van Nostrand Co., Toronto, 1963.
 Munroe, M.E., *Introduction to Measure and Integration*, Addison-Wesley Co., 1959.
 Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, 2nd Ed., Tata McGraw-Hill Co., New Delhi, India, 1974.





ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ

- Ακολουθιακή κάλυψη, 22
 Άλγεβρα Borel, 9
 συνόλων, 7
 Ανισότητα Cauchy-Bunyakovskil-Schwartz, 80
 Hölder, 79
 Minkowski, 81
 Άνω κύμανση, 70
 Ανώτερο όριο ακολουθίας στοιχείων, 6
 συνόλων, 6
 Απλή συνάρτηση, 43
 Απόλυτα συνεχές μέτρο, 56, 73
 Αριθμήσιμη προσθετικότητα, 14
 Αρνητικό μέρος συνάρτησης, 37
 σύνολο, 67
 Γινόμενο μέτρων, 94
 Γραμμικό συναρτησοειδές, 86
 Διάσπαση του Hahn, 69
 Jordan, 71
 Ενδεχόμενο, 16
 Εξωτερικό μέτρο, 21
 Επεκτεταμένη άλγεβρα Borel, 10
 ευθεία πραγματικών αριθμών, 5
 Ημιστάθμη, 78
 Ημισταθμητός χώρος, 78
 Θετικό γραμμικό συναρτησοειδές, 87
 σύνολο, 67
 Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz, 88
 Διάσπασης του Hahn, 67
 Jordan, 70
 Επέκτασης του Καραθεοδωρή, 28
 Fubini, 99
 Μονότονης Σύγκλισης ή του Levi, 51, 55
 Radon-Nikodym, 73
 Σύγκλισης του Lebesgue, 62



- Tonelli, 98
 Κατασκευή μέτρων, 30
 Κάτω κύμανση, 70
 Κατώτερο όριο ακολουθίας στοιχείων του $\mathbb{R}$, 6
 συνόλων, 6
 Λήμμα του Fatou, 53, 55
 Μετρήσιμη συνάρτηση, 35, 39
 Μετρήσιμο σύνολο, 13, 24
 Μετρήσιμος χώρος, 13
 Μέτρο, 11
 Borel, 31
 Dirac, 15
 Lebesgue, 31
 - Stieltjes, 31
 πιθανότητας, 16, 32
 προσημασμένο, 66
 σ-πεπερασμένο, 66
 Μη μετρήσιμα σύνολα, 32
 Μονότονη κλάση, 96
 Ολική κύμανση ή μεταβολή, 70
 Ολοκλήρωμα, 47, 50
 Ολοκληρώσιμη συνάρτηση, 58
 Παράγωγος μέτρου, 77
 πλήρης σ-άλγεβρα, 29
 σ-άλγεβρα παραγόμενη από συλλογή συνόλων, 7
 συνόλων, 7
 Στάθμη, 78
 Σύγκλιση ακολουθίας στοιχείων του, 6, 78
 συνόλων, 6
 Συζυγείς δείκτες, 80
 Συνάρτηση κατανομής, 16
 Σύνολο Borel, 9
 Σχεδόν παντού, 42
 Ταξινόμηση Borel, 9
 Τυχαία μεταβλητή, 16
 Φραγμένο συναρτησοειδές, 86
 Χαρακτηριστική συνάρτηση, 6, 36
 Χώρος μέτρου, 14





Τυπώθηκε στο Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο
με δαπάνη του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ
Τυπογραφείο

Διανέμεται δωρεάν στους φοιτητές.



1. The first part of the document is a letter from the President of the United States to the President of the Soviet Union, dated 1945. The letter discusses the recent end of the war and the need for peace and cooperation between the two nations.

2. The second part of the document is a letter from the President of the United States to the President of the Soviet Union, dated 1945. The letter discusses the recent end of the war and the need for peace and cooperation between the two nations.



3. The third part of the document is a letter from the President of the United States to the President of the Soviet Union, dated 1945. The letter discusses the recent end of the war and the need for peace and cooperation between the two nations.

4. The fourth part of the document is a letter from the President of the United States to the President of the Soviet Union, dated 1945. The letter discusses the recent end of the war and the need for peace and cooperation between the two nations.

5. The fifth part of the document is a letter from the President of the United States to the President of the Soviet Union, dated 1945. The letter discusses the recent end of the war and the need for peace and cooperation between the two nations.

6. The sixth part of the document is a letter from the President of the United States to the President of the Soviet Union, dated 1945. The letter discusses the recent end of the war and the need for peace and cooperation between the two nations.

7. The seventh part of the document is a letter from the President of the United States to the President of the Soviet Union, dated 1945. The letter discusses the recent end of the war and the need for peace and cooperation between the two nations.

