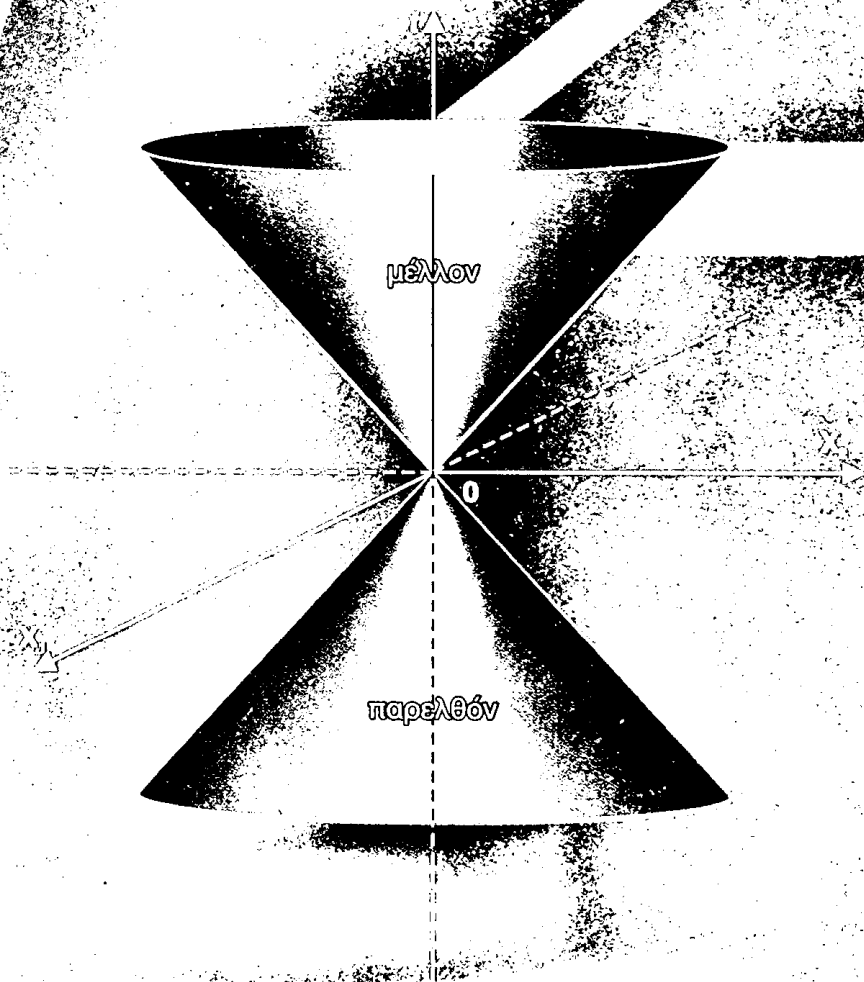


Π. Α. ΑΣΗΜΑΚΟΠΟΥΛΟΥ

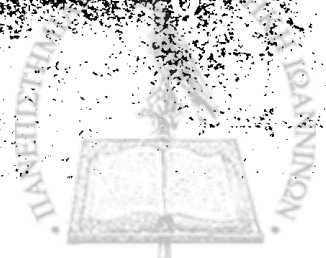
Εισαγωγή στη

Θεωρία της σχετικότητας



$$E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4$$

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Παναγιώτη Α. Ασημακόπουλου

Το σύγγραμμα του καθηγητή Π.Α. Ασημακόπουλου Εισαγωγή στη Θεωρία της Σχετικότητας αποσκοπεί στην κάλυψη των διδακτικών αναγκών του μαθήματος, όπως διδάσκεται σήμερα (συνήθως στο δεύτερο έτος του προγράμματος σπουδών) στις Ελληνικές Πανεπιστημιακές και Πολυτεχνικές Σχολές, είτε υπό μορφή αυτόνομου μαθήματος ή ως εισαγωγή σε ένα γενικότερο ετήσιο μάθημα με τον τίτλο Σύγχρονη Φυσική.

Η επιλογή της ύλης και των παραδειγμάτων από τους διάφορους κλάδους της φυσικής στις σελίδες που ακολουθούν έγινε με βάση δύο στόχους. Βασικός στόχος είναι η μεταφορά στον αναγνώστη των θεμελιωδών εννοιών του χώρου, του χρόνου και των συμμετριών που αναδεικνύονται στα πλαίσια της Θεωρίας της Σχετικότητας και που είναι ξένες προς την καθημερινή του εμπειρία προς αυτό που ονομάζουμε διαίσθηση ή «κοινό νου». Καθ' όσον ο άνθρωπος είναι ουσιαστικά ένα τρισδιάστατο ον και στην καθημερινή του ζωή απαντά κατά κύριο λόγο σχετικά χαμηλές ταχύτητες, έννοιες όπως το φράγμα της ταχύτητας του φωτός, ο τετραδιάστατος χωροχρόνος, η ενοποίηση της μάζας και της ενέργειας σε ένα γενικότερο φυσικό μέγεθος, είναι εξαιρετικά δύσπεπτες. Η εμπέδωση επομένως των βασικών εννοιών της Θεωρίας της Σχετικότητας απαιτεί μεγάλη επιμονή και υπομονή. Τούτο καλύπτεται κατά κύριο λόγο στα τρία πρώτα κεφάλαια του βιβλίου.

Δεύτερος στόχος του συγγράμματος είναι η ανάπτυξη των μαθηματικών τεχνικών που απαιτούνται ώστε μετά το τέλος του μαθήματος ο αυριανός επιστήμονας και ερευνητής να είναι σε θέση να πραγματοποιεί υπολογισμούς για την ποσοτική περιγραφή σχετικιστικών φαινομένων. Στο στόχο αυτό είναι κυρίως αφιερωμένα τα Κεφάλαια 4 και 5 με θέματα αντίστοιχα από τους χώρους της Μηχανικής και της Ηλεκτρομαγνητικής Θεωρίας.

Αν και τα αποτελέσματά της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας μπορούν να εξαχθούν με μεθόδους της στοιχειώδους άλγεβρας και του διαφορικού λογισμού, είναι γεγονός ότι η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας απαιτεί τη χρήση μαθηματικών δεξιοτήτων που δεν διαθέτει ο προπτυχιακός φοιτητής ιδιαίτερα στο δεύτερο έτος σπουδών του. Έτσι, στο τελευταίο κεφάλαιο του βιβλίου, όπου αποσκοπείται η παρουσίαση των βασικών εννοιών που διέπουν τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας η παρουσίαση είναι κυρίως σε ποιοτικό επίπεδο.



*Εισαγωγή στη Θεωρία
της Σχετικότητας*



Εισαγωγή στη Θεωρία της Σχετικότητας

Π. Α. ΑΣΗΜΑΚΟΠΟΥΛΟΥ
Καθηγητού του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Ιωάννινα, 2004



Στον εγγονό μου Χρήστο - William



ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΟΙ ΣΕΛΙΔΕΣ ΠΟΥ ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΝ γράφηκαν για πρώτη φορά κατά τις θερινές διακοπές του 2003 με σκοπό την κάλυψη των αναγκών του πρώτου μέρους του μαθήματος *ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι* που από το Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων μου είχε ανατεθεί να διδάξω κατά το ακαδημαϊκό έτος 2003 – 2004 και κυκλοφόρησαν υπό μορφή σημειώσεων με τον τίτλο *Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας*. Μετά την εφαρμογή του στην πράξη και ιδιαίτερα μετά την αλληλεπίδραση με τους φοιτητές που παρακολούθησαν το μάθημα, το κείμενο τροποποιήθηκε, εμπλουτίστηκε, διορθώθηκαν ορισμένα παροράματα της πρώτης έκδοσης και εμφανίζεται σήμερα ως ένα κατά το δυνατόν ολοκληρωμένο διδακτικό σύγγραμμα σε προπτυχιακό επίπεδο.

Ένα μάθημα Σύγχρονης Φυσικής αρχίζει παραδοσιακά με τη μελέτη της Θεωρίας της Σχετικότητας, δηλαδή του τρόπου με τον οποίο δύο παρατηρητές που κινούνται ο ένας σε σχέση με τον άλλο περιγράφουν τα φυσικά φαινόμενα. Τούτο συμβαίνει για πολλούς λόγους. Κατ' αρχάς, η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας ήταν ο πρώτος κλάδος της μετά-νευτώνειας εποχής που ολοκληρώθηκε, ουσιαστικά στη μορφή που είναι γνωστή σήμερα. Τα νέα φαινόμενα που ανέδειξε άλλαξαν εκ βάθρων τον τρόπο σκέψης σε πολλούς τομείς της φυσικής και έριξαν νέο φως σε θεμελιώδεις έννοιες, όπως αυτές του χώρου, του χρόνου, της μάζας, της ενέργειας και του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Από την άλλη πλευρά, πολλά από τα αποτελέσματα της Θεωρίας της Σχετικότητας – που συνήθως είναι δυνατόν



να εξαχθούν με μαθηματικές μεθόδους της στοιχειώδους άλγεβρας και του διαφορικού λογισμού – θα χρησιμοποιηθούν στην υπόλοιπη ύλη του μαθήματος που περιλαμβάνει στοιχεία της Κβαντικής Θεωρίας, της Ατομικής Φυσικής, της Πυρηνικής Φυσικής και του μικροκόσμου των Στοιχειωδών Σωματίων. Μια πρώτη ανασκόπηση των βασικών αρχών και αποτελεσμάτων της «θεωρίας των θεωριών», όπως έχει αποκληθεί η Θεωρία της Σχετικότητας, είναι επομένως χρήσιμη.

Η επιλογή της ύλης και των παραδειγμάτων από τους διάφορους κλάδους της φυσικής στις σελίδες που ακολουθούν έγινε με βάση δύο στόχους. Κατ' αρχάς θέλησα να μεταφέρω στον αναγνώστη τις θεμελιώδεις έννοιες του χώρου, του χρόνου και των συμμετριών που αναδεικνύονται στα πλαίσια της Θεωρίας της Σχετικότητας και που είναι ξένες προς την καθημερινή του εμπειρία – προς αυτό που ονομάζουμε διαίσθηση ή «κοινό νου». Καθ' όσον ο άνθρωπος είναι ουσιαστικά ένα τρισδιάστατο ον και στην καθημερινή του ζωή απαντά κατά κύριο λόγο σχετικά χαμηλές ταχύτητες, έννοιες όπως το φράγμα της ταχύτητας του φωτός, ο τετραδιάστατος χωροχρόνος, η ενοποίηση της μάζας και της ενέργειας σε ένα γενικότερο φυσικό μέγεθος, είναι εξαιρετικά δύσπεπτες. Η εμπέδωση επομένως των βασικών εννοιών της Θεωρίας της Σχετικότητας απαιτεί μεγάλη επιμονή και υπομονή.

Δεύτερος στόχος μου ήταν η ανάπτυξη των μαθηματικών τεχνικών που απαιτούνται ώστε μετά το τέλος του μαθήματος ο αυριανός επιστήμονας και ερευνητής να είναι σε θέση να πραγματοποιεί υπολογισμούς για την ποσοτική περιγραφή σχετικιστικών φαινομένων. Για το λόγο αυτό ένα μέρος του κειμένου ασχολείται με θέματα που εκ πρώτης όψεως ανήκουν στο χώρο των μαθηματικών.

Όπως ήδη αναφέρθηκε, στην τελική διαμόρφωση του βιβλίου πρωταρχικό ρόλο έπαιξε η αλληλεπίδραση με τους φοιτητές του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων που παρακολού-



θησαν το μάθημά μου, αλλά και των συναδέλφων που με κριτικό μάτι διάβασαν τις σημειώσεις στην προκαταρκτική τους μορφή. Στη διαμόρφωση του κειμένου που ακολουθεί είχα τη βοήθεια του κατ' εξοχήν ειδικού στο θέμα καθηγητή του Τμήματος Φυσικής κ. Νίκου Μπατάκη, τον οποίο και ευχαριστώ θερμά. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω θερμά τους νεαρούς μου συνεργάτες, Δρα Χριστίνα Παπαχριστοδούλου και κ. Νικόλα Πατρώνη, οι οποίοι, μέσα στο κατακαλόκαιρο του 2003, βρήκαν το χρόνο να διαβάσουν με προσοχή το αρχικό κείμενο και να συμβάλουν με εξαιρετικά χρήσιμες και εποικοδομητικές παρατηρήσεις στην ουσιαστική βελτίωσή του. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον σκιτσογράφο κ. Θανάση Πέτρου που με μεγάλη επιτυχία απέδωσε τα σχήματα.

Π.Α.Α.

Ιωάννινα, Μάρτιος, 2004



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή	i
Περιεχόμενα	v
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. Σχετικότητα	1
1-1 Η Αρχή της Σχετικότητας και ο μετασχηματισμός του Γαλιλαίου	1
1-2 Ο μετασχηματισμός του Γαλιλαίου στον Ηλεκτρομαγνητισμό	6
1-3 Ο αιθέρας και τα πειράματα των Michelson και Morley	10
1-4 Η ταχύτητα του φωτός	16
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	25
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. Ο μετασχηματισμός Lorentz	29
2-1 Αξιοματική θεμελίωση της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας	31
2-2 Ο μετασχηματισμός Lorentz	33
2-3 Σχετικιστική Κινηματική	38
2-3.1 ΣΥΣΤΟΛΗ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ	39
2-3.2 ΔΙΑΣΤΟΛΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ	41



2-3.3 ΧΡΟΝΙΚΗ ΚΑΙ ΧΩΡΙΚΗ ΣΥΜΠΤΩΣΗ	46
2-3.4 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ	47
2-3.5 ΩΚΥΤΗΤΑ	49
2-4 Το φαινόμενο Doppler	52
2-5 Πειραματική επαλήθευση του μετασχηματισμού Lorentz	56
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	63
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Ο τετραδιάστατος χώρος	68
3-1 Μετασχηματισμός ανυσμάτων στον τρισδιάστατο χώρο	69
3-2 Ο χώρος Minkowski	75
3-3 Κοσμικοί δρόμοι και διαγράμματα Feynman	81
3-4 Αναλλοίωτος χρόνος και αιτιότητα	84
3-5 Βαθμωτά φυσικά μεγέθη, ανύσματα και τανυστές	89
3-5.1 ΤΑΝΥΣΤΕΣ	90
3-5.2 Η ΣΥΜΒΑΣΗ ΑΘΡΟΙΣΗΣ ΤΟΥ ΕΙΝΣΤΕΙΝ	94
3-5.3 ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΑΝΥΣΤΩΝ	96
3-5.4 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΤΑΝΥΣΤΩΝ ΜΕ ΠΙΝΑΚΕΣ	99
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	102
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. Σχετικιστική Μηχανική	106
4-1 Ταχύτητα	107
4-2 Κίνηση μέσα στον κοσμικό χώρο	111
4-3 Επιτάχυνση	115
4-4 Κίνηση υπό σταθερή επιτάχυνση	119
4-5 Ορμή	124
4-6 Δύναμη	127
4-7 Ενέργεια	130
4-8 Διατήρηση ορμής, μάζας και ενέργειας	138
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	147



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. Σχετικιστική Ηλεκτροδυναμική	153
5-1 Σύντομη ανασκόπηση της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας	154
5-2 Ηλεκτρικό φορτίο και ηλεκτρικό ρεύμα	160
5-3 Μετασχηματισμός του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (I)	163
5-4 Βαθμωτό και ανυσματικό δυναμικό	171
5-5 Ο τανυστής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου	177
5-6 Μετασχηματισμός του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (II)	180
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	183
 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6. Γενική Θεωρία της Σχετικότητας	186
6-1 Αδρανειακή και βαρυτική μάζα	188
6-2 Η Αρχή της Ισοδυναμίας	191
6-3 Πειραματικός έλεγχος της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας	198
6-3.1 ΚΑΜΠΥΛΩΣΗ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ ΣΕ ΕΝΑ ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ	199
6-3.2 ΒΑΡΥΤΙΚΗ ΕΡΥΘΡΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ	203
6-3.3 ΜΕΤΑΠΤΩΤΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΤΗΣ ΤΡΟΧΙΑΣ ΤΟΥ ΕΡΜΗ	207
6-4 Η γεωμετρία του χωροχρόνου	210
6-5 Η καμπυλότητα του χώρου σε κοσμική κλίμακα	216
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	218
 Βιβλιογραφία	221
 Ευρετήριο	223



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Σχετικότητα

Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ αφορά τον τρόπο με τον οποίο δύο παρατηρητές που κινούνται ο ένας σε σχέση με τον άλλο περιγράφουν τα φυσικά φαινόμενα. Στο βιβλίο αυτό θα ασχοληθούμε κατά κύριο λόγο με την ειδική περίπτωση όπου η σχετική ταχύτητα μεταξύ των δύο παρατηρητών έχει σταθερό μέτρο, διεύθυνση και φορά. Το θεωρητικό πλαίσιο που καλύπτει την απλούστερη αυτή περίπτωση σχετικής κίνησης των παρατηρητών απαντάται με την ονομασία *Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας*. Στη *Γενική Θεωρία της Σχετικότητας*, που αφορά οποιαδήποτε μορφή σχετικής κίνησης μεταξύ δύο παρατηρητών, θα αναφερθούμε με συντομία στο Κεφάλαιο 6.

1-1 Η Αρχή της Σχετικότητας και ο μετασχηματισμός του Γαλιλαίου

Από την καθημερινή μας εμπειρία αντλούμε το συμπέρασμα ότι η έννοια «απόλυτη κίνηση» δεν έχει νόημα. Σε ένα σιδηροδρομικό σταθμό, για παράδειγμα, είναι πολλές φορές δύσκολο να προσδιορίσουμε αν κινείται το τραίνο μας ή αν κινείται το τραίνο που βρίσκεται στις διπλανές ράγες. Την ίδια δυσκολία έχει και ένας επιβάτης του δεύτερου τραίνου. Πολύ γρήγορα οι δύο παρατηρητές διαπιστώ-



νουν ότι αυτό που έχει σημασία είναι η *σχετική ταχύτητα* των δύο τρενών και όχι η *απόλυτη ταχύτητα* καθενός ως προς το έδαφος.

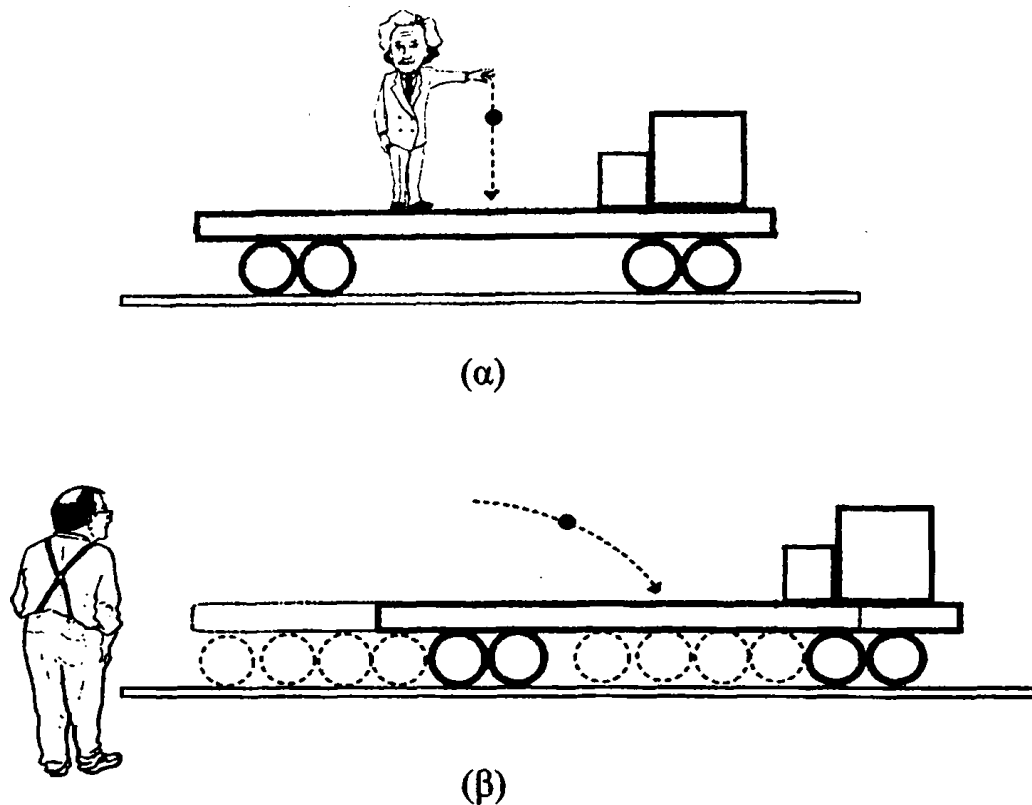
Ένα δεύτερο γεγονός που διαπιστώνουν οι δύο επιβάτες στα δύο τρέινα είναι ότι όλοι οι νόμοι της φυσικής που γνωρίζουν ισχύουν στο περιβάλλον κάθε τρενιού όπως τους γνώριζαν όταν βρίσκονταν ακίνητοι στο έδαφος, ανεξάρτητα από τη σχετική ταχύτητα των δύο τρενών ή την ταχύτητα καθενός ως προς το έδαφος – αρκεί κάθε ταχύτητα να είναι ευθύγραμμη και σταθερή. Μέσα στο τρέινο όλα τα αντικείμενα έχουν βάρος

$$W = mg \quad (1.1)$$

όπου m είναι η μάζα τους και g η επιτάχυνση της βαρύτητας. Αν αφεθούν ελεύθερα από ένα ύψος πέφτουν κατακόρυφα με σταθερά επιταχυνόμενη κίνηση. Δηλαδή, μέσα σε κάθε τρέινο ισχύει ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα. Από την καθημερινή μας εμπειρία, μέσα σε ένα ανελκυστήρα ή κατά τη διάρκεια ενός αεροπορικού ταξιδιού, όταν το αεροπλάνο ταξιδεύει σε σταθερό ύψος με σταθερή ταχύτητα, έχουμε όλοι διαπιστώσει ότι οι νόμοι της μηχανικής ισχύουν με τη μορφή που τους γνωρίζουμε στο εργαστήριο. Με άλλα λόγια, οι νόμοι της φυσικής *παραμένουν αναλλοίωτοι*, δηλαδή διατηρούν την ίδια συναρτησιακή μορφή, σε όλα τα συστήματα αναφοράς που κινούνται με ευθύγραμμη και σταθερή σχετική ταχύτητα. Στη διαπίστωση αυτή θα αναφερθούμε με τον όρο **Αρχή της Σχετικότητας**.

Η Αρχή της Σχετικότητας μπορεί να αναστραφεί ως προς τη λογική της ροή και να διατυπωθεί η αρχή ότι στο σύμπαν δεν μπορεί να οριστεί «απόλυτη κίνηση». Αν σε ένα σύστημα αναφοράς OXYZ ανακαλυφθεί ένας νόμος της φύσης, τότε σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα αναφοράς O'X'Y'Z', το οποίο κινείται ως προς το πρώτο με σταθερή ταχύτητα V , ο νόμος αυτός θα έχει την ίδια συναρτησιακή μορφή. Στο σημείο αυτό, θα εισαγάγουμε ένα νέο όρο και στο μέλ-

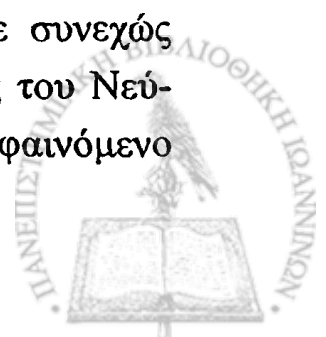




Σχήμα 1.1 Η παρατήρηση ενός φαινομένου σε δύο συστήματα αναφοράς. (α) Στο σύστημα αναφοράς του τραίνου το αντικείμενο πέφτει κατακόρυφα με επιταχυνόμενη κίνηση. (β) Στο σύστημα αναφοράς του εδάφους, το αντικείμενο διαγράφει παραβολική τροχιά προτού καταλήξει στο δάπεδο του τραίνου.

λον θα αναφερθούμε σε συστήματα αναφοράς με μεταξύ τους σταθερή σχετική ταχύτητα V ως **αδρανειακά συστήματα αναφοράς**.

Βεβαίως, η Αρχή της Σχετικότητας δεν συνεπάγεται ότι δύο παρατηρητές σε δύο διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς θα παρατηρήσουν το ίδιο φαινόμενο. Ίσως είναι χρήσιμο να διευκρινίσουμε το σημείο αυτό με ένα παράδειγμα. Ας θεωρήσουμε, όπως δείχνει το σχήμα 1.1, ότι ο επιβάτης ενός τραίνου, το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα V ως προς το έδαφος, αφήνει ένα αντικείμενο να πέσει ελεύθερα από ύψος h . Ο επιβάτης του τραίνου βεβαίως θα παρατηρήσει ότι το αντικείμενο πέφτει κατακόρυφα με συνεχώς επιταχυνόμενη κίνηση που υπαγορεύει ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα. Όμως, ένας παρατηρητής, που παρακολουθεί το φαινόμενο



ακίνητος στο έδαφος καθώς το τραίνο περνά από μπροστά του, θα καταγράψει την τροχιά του σχήματος 1.1(β), ήτοι θα παρατηρήσει ότι το αντικείμενο διαγράφει μια παραβολική τροχιά μέχρις ότου καταλήξει στο δάπεδο. Πώς όμως συνδέονται τα αποτελέσματα της παρατήρησης του φαινομένου από τους δύο ανεξάρτητους παρατηρητές;

Ας δούμε πρώτα σε ποια σημεία συμφωνούν ή διαφωνούν οι δύο παρατηρητές. Διαφωνούν προφανώς σχετικά με τη θέση του αντικειμένου, καθόσον τούτο διαγράφει διαφορετική τροχιά κατά την άποψη καθενός. Με άλλα λόγια διαφωνούν ως προς τις συντεταγμένες x , y , z του αντικειμένου όπως ο κάθε παρατηρητής τις μετρά στο δικό του σύστημα αναφοράς. Διαφωνούν επίσης ως προς την ταχύτητα v με την οποία κινείται το αντικείμενο, καθόσον κατά την άποψη του παρατηρητή στο έδαφος τούτο διαθέτει μη μηδενική οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας. Συμφωνούν όμως σε πολλά πράγματα. Συμφωνούν κατ' αρχάς ότι ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα ισχύει και στα δύο συστήματα αναφοράς (για να χρησιμοποιήσουμε την ορολογία που μόλις εισαγάγαμε, συμφωνούν ότι ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα παραμένει αναλλοίωτος σε σχέση με τα δύο αδρανειακά συστήματα). Συμφωνούν επίσης ότι η μάζα του αντικειμένου είναι η ίδια στα δύο συστήματα αναφοράς όπως συμφωνούν και ως προς τη ροή του χρόνου κατά τη διάρκεια του φαινομένου. Στη νευτώνεια μηχανική, η μάζα m και ο χρόνος t είναι αναλλοίωτα φυσικά μεγέθη. Τέλος, συμφωνούν ως προς τη δύναμη της βαρύτητας F που ασκείται στο αντικείμενο (από την καθημερινή μας εμπειρία, το βάρος των επιβατών ενός τραίνου που ταξιδεύει με σταθερή ταχύτητα δεν αλλάζει). Με την τελευταία παρατήρηση και την εξ. (1.1) οδηγούνται επιπλέον στο συμπέρασμα ότι συμφωνούν και ως προς την επιτάχυνση του αντικειμένου. Αν θεωρήσουμε ότι ο επιβάτης του τραίνου εκφράζει τα φυσικά μεγέθη που παρατηρεί στο σύστημα αναφοράς OXYZ και ο παρατηρητής που βρίσκεται στο έδαφος στο



σύστημα αναφοράς $O'X'Y'Z'$ και αποδώσουμε τα φυσικά μεγέθη που μετρούνται στο δεύτερο σύστημα με τονούμενα σύμβολα, μπορούμε να συνοψίσουμε τις συμφωνίες και διαφωνίες των δύο παρατηρητών με τις ακόλουθες σχέσεις

$$m' = m \quad (1.2\alpha)$$

$$t' = t \quad (1.2\beta)$$

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} \quad (1.2\gamma)$$

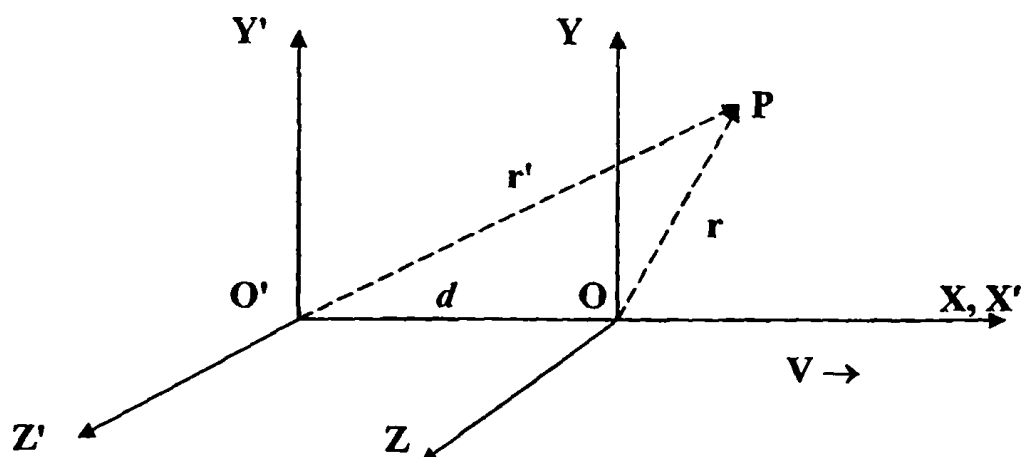
$$\gamma' = \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt'^2} = \gamma = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad (1.2\delta)$$

$$\mathbf{r}' = (x', y', z') \neq \mathbf{r} = (x, y, z) \quad (1.2\epsilon)$$

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} \neq \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (1.2\sigma\tau)$$

Δεν είναι βέβαια καθόλου δύσκολο να μετατρέψουμε τις δύο τελευταίες ανισότητες σε ισότητες και με τον τρόπο αυτό να συνδέσουμε ποσοτικά τα αντίστοιχα φυσικά μεγέθη που μετρούν οι δύο παρατηρητές στα αντίστοιχα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Τα συστήματα αναφοράς των δύο παρατηρητών του παραδείγματος στο σχήμα 1.1 περιέχονται στο σχήμα 1.2. Είναι προφανές από το σχήμα ότι τα ανύσματα θέσης $\mathbf{r}$ και $\mathbf{r}'$ κάποιου σημείου P στο χώρο, όπως εκφράζονται στα δύο συστήματα αναφοράς, δεν θα διαφέρουν ως προς τις συντεταγμένες y και z . Αντίθετα, όπως δείχνει το σχήμα, κατά τη χρονική στιγμή t η συντεταγμένη x θα υπολείπεται της συντεταγμένης x' κατά το διάστημα $d = Vt$, ήτοι μπορούμε να γράψουμε τις σχέσεις





Σχήμα 1.2 Τα δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς στο σχήμα 1.1. Το σύστημα αναφοράς OXYZ κινείται ως προς το σύστημα αναφοράς O'X'Y'Z' με σταθερή ταχύτητα V κατά τη θετική φορά των κοινών αξόνων X και X' . Μετά από χρόνο $t' = t$ τα σημεία O και O' απέχουν απόσταση $d = Vt$.

$$x' = x + Vt \quad (1.3\alpha)$$

$$y' = y \quad (1.3\beta)$$

$$z' = z \quad (1.3\gamma)$$

$$t' = t \quad (1.3\delta)$$

όπου, για λόγους που θα γίνουν προφανείς στη συνέχεια, έχουμε συμπεριλάβει και τη συμφωνία των δύο παρατηρητών ως προς το χρόνο. Οι σχέσεις των εξ. (1.3) εκφράζουν το μετασχηματισμό των συντεταγμένων από το σύστημα αναφοράς OXYZ στο σύστημα αναφοράς O'X'Y'Z' του σχήματος 1.2 και είναι γνωστές ως **νόμοι μετασχηματισμού του Γαλιλαίου** ή απλώς **μετασχηματισμός του Γαλιλαίου**.

1-2 Ο μετασχηματισμός του Γαλιλαίου στον Ηλεκτρομαγνητισμό
 Η συμβατότητα του μετασχηματισμού του Γαλιλαίου με την Αρχή



της Σχετικότητας στη νευτώνεια μηχανική παροτρύνει στον έλεγχο της ορθότητας των εξ. (1.3) σε άλλες περιοχές της Φυσικής, όπως στο χώρο των ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων. Δυστυχώς, η απόπειρα αυτή οδηγεί γρήγορα σε αποτυχία. Όπως μπορούμε να δούμε αμέσως με ένα παράδειγμα, οι εξισώσεις του Maxwell δεν παραμένουν αναλλοίωτες κατά το μετασχηματισμό του Γαλιλαίου.

Ας θεωρήσουμε για το σκοπό αυτό το νόμο του Gauss, που στον κενό χώρο μπορεί να γραφεί ως

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.4)$$

όπου $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ είναι το ηλεκτρικό πεδίο και $\rho(\mathbf{r})$ η πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου σε κάποιο σημείο του χώρου $\mathbf{r}$. Ας θεωρήσουμε ακόμη ότι στο σημείο P του σχήματος 1.2 βρίσκεται ένα σημειακό φορτίο q , το οποίο στο σύστημα αναφοράς OXYZ είναι ακίνητο. Βεβαίως, ο παρατηρητής του συστήματος αναφοράς O'X'Y'Z' παρατηρεί ότι το σημειακό αυτό φορτίο κινείται με ταχύτητα V κατά την θετική φορά του κοινού άξονα X, X'.

Κατ' αρχάς, η παρουσία του τελεστή ∇ στην εξ. (1.4) δηλώνει ότι σε κάποια χρονική στιγμή t θα πρέπει να παραγωγίσουμε τη συνάρτηση E ως προς το χώρο. Καθόσον κατά το μετασχηματισμό του Γαλιλαίου $t = t'$, από τις εξ. (1.3) έπεται ότι

$$dx' = d(x + Vt) = dx, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz \quad (1.5)$$

που συνεπάγεται

$$\nabla' \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E}. \quad (1.6)$$

Δεύτερον, παρατηρούμε ότι αν στο χώρο υπάρχει ηλεκτρικό φορτίο, οι δύο παρατηρητές θα πρέπει να μετρούν το ίδιο φορτίο, μια και



τούτο μετράται μέσω της δύναμης που ασκούν σ' αυτό τα πεδία και η δύναμη παραμένει αναλλοίωτη με το μετασχηματισμό των εξ. (1.3). Ως προς την πυκνότητα φορτίου που μετρούν οι δύο παρατηρητές, τούτο σημαίνει ότι

$$\rho' = \frac{dq'}{dx'dy'dz'} = \frac{dq}{dxdydz} = \rho \quad (1.7)$$

ενώ για το σημειακό φορτίο q που θεωρήσαμε ότι υπάρχει στο σημείο P του σχήματος 1.2 ισχύει

$$q' = q. \quad (1.8)$$

Τέλος, ως προς τη δύναμη Lorentz που ασκείται στο σημειακό φορτίο q , το οποίο κατά τον παρατηρητή του συστήματος αναφοράς $OXYZ$ είναι ακίνητο, ενώ κατά τον παρατηρητή του συστήματος αναφοράς $O'X'Y'Z'$ κινείται με ταχύτητα V , μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = \mathbf{F}' = q(\mathbf{E}' + \mathbf{V} \times \mathbf{B}') \quad (1.9)$$

ή

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \mathbf{V} \times \mathbf{B}'. \quad (1.10)$$

Έτσι, με βάση φυσικά μεγέθη που μετρά ο παρατηρητής στο σύστημα αναφοράς $O'X'Y'Z'$, ο νόμος του Gauss παίρνει τη μορφή

$$\nabla' \cdot \mathbf{E}' = \frac{\rho'}{\epsilon_0} - \nabla' \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{B}'). \quad (1.11)$$

Ο δεύτερος όρος στο δεξιό μέρος της εξ. (1.11) δεν είναι απαραίτητα ίσος με το μηδέν και επομένως ο νόμος του Gauss δεν παραμένει αναλλοίωτος κατά το μετασχηματισμό του Γαλιλαίου. Καθώς μάλι-



στα ο όρος αυτός εξαρτάται από τη σχετική ταχύτητα V μεταξύ αδρανειακών συστημάτων, θα μπορούσε να θεωρήσει κανείς ότι παρέχει τα μέσα για την ανάδειξη ενός προνομιακού συστήματος αναφοράς. Θα ήταν δυνατόν, για παράδειγμα, να υποστηριχθεί (με σοβαρά φιλοσοφικά επιχειρήματα) ότι το σύστημα αναφοράς, στο οποίο ο νόμος του Gauss παίρνει την απλούστερη μορφή, είναι το σύστημα της «απόλυτης μηδενικής ταχύτητας». Αυτή ήταν και η λογική βάση της υπόθεσης για την ύπαρξη του *φωτοφόρου αιθέρα* που θα μας απασχολήσει στην επόμενη Παράγραφο.

Η διαφορά μεταξύ της νευτώνειας μηχανικής και της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας μπορεί να οφείλεται σε τρία διαφορετικά αίτια.

1. Η Αρχή της Σχετικότητας ικανοποιείται κατά τύχη από τη νευτώνεια μηχανική και δεν αποτελεί γενική αρχή της φύσης.
2. Η ηλεκτρομαγνητική θεωρία δεν είναι σωστή και πρέπει να τροποποιηθεί έτσι ώστε να ικανοποιεί την Αρχή της Σχετικότητας.
3. Η Αρχή της Σχετικότητας αποτελεί γενική αρχή της φύσης, αλλά ο μετασχηματισμός του Γαλιλαίου δεν είναι σωστός και πρέπει να βρεθεί ένας νέος μετασχηματισμός που να ικανοποιεί την Αρχή της Σχετικότητας, τόσο σε ό,τι αφορά τα μηχανικά όσο και τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα.

Όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια, ο Einstein υιοθέτησε την τρίτη από τις προηγούμενες απόψεις, που οδήγησε στη Θεωρία της Σχετικότητας, σε αναμόρφωση της Μηχανικής, γενικότερα σε μια νέα φιλοσοφική θεώρηση του κόσμου μέσα στον οποίο ζούμε και παρεμπιπτόντως στη βαθύτερη κατανόηση των ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων. Προηγουμένως όμως θα εξετάσουμε ένα άλλο φιλοσοφικό σκόπελο που αφορά στην αλληλεπίδραση μεταξύ υλικών σωμάτων που βρίσκονται σε κάποια απόσταση.



1-3 Ο αιθέρας και τα πειράματα των Michelson και Morley

Οι στοιχειώδεις δομικοί λίθοι της ύλης (και κατ' επέκταση συγκροτήματα στοιχειωδών δομικών λίθων της ύλης) αλληλεπιδρούν λόγω της μάζας τους σύμφωνα με το νόμο της παγκόσμιας έλξης, κατά τον οποίο δύο σημειακά υλικά σώματα με μάζες m_1 και m_2 που βρίσκονται σε απόσταση r , έλκονται αμοιβαία με δύναμη κατά μέτρο ίση προς

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1.12)$$

όπου G είναι η σταθερά της παγκόσμιας έλξης ($G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N}^2 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-2}$). Παρόμοια σε συναρτησιακή εξάρτηση* ως προς την απόσταση είναι και η δύναμη Coulomb που αναπτύσσεται μεταξύ δύο σημειακών ηλεκτρικών φορτίων q_1 και q_2

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (1.13)$$

όπου πάλι υπεισέρχεται μια σταθερά† k ($= 8.9875 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-1}$). Αν και απλές σε συναρτησιακή μορφή, οι εξ. (1.12) και (1.13) παρουσιάζουν μια σημαντική φιλοσοφική δυσκολία. Στην καθημερινή ζωή η έννοια της δύναμης συνδέεται στενά με «σπρωξίματα» και «τραβήγματα» που εμπεριέχουν την έννοια της επαφής. Η έννοια της δράσης από απόσταση που υπονοούν οι δύο τελευταίοι νόμοι είναι ξένη προς κάθε εμπειρία και διαίσθηση.

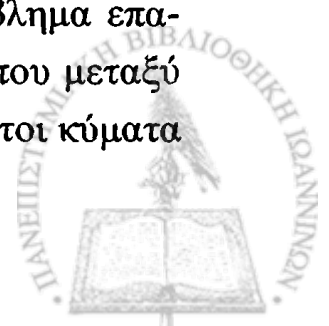
* Η ομοιότητα στη συναρτησιακή εξάρτηση των εξ. (1.12) και (1.13) δεν είναι σήμερα απόλυτα κατανοητή.

† Η σταθερά G στο νόμο της παγκόσμιας έλξης οφείλεται στον εναλλακτικό τρόπο ορισμού της μάζας μέσω του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα $F = mg$ και της εξ. (1.12). Η σταθερά k στο νόμο του Coulomb οφείλεται στον αυθαίρετο ορισμό της μονάδας μέτρησης του ηλεκτρικού φορτίου.



Πρέπει στο παρελθόν να έχουν καταναλωθεί δεκάδες κυβικά μέτρα μελάνης για τη διατύπωση φιλοσοφικών απόψεων γύρω από τη δράση από απόσταση που χαρακτηρίζει την αλληλεπίδραση της βαρύτητας και την ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση. Στο περίφημο έργο του *ΦΥΣΙΚΗΣ ΑΚΡΟΑΣΕΩΣ*, ο Αριστοτέλης παρατηρεί ότι «... φανερόν ὅτι οὕτω μὲν κενὸν οὐκ ἔστιν [...] τὸ γὰρ κενὸν οὐ σῶμα ἀλλὰ σώματος διάστημα βούλεται εἶναι», δηλαδή «... είναι φανερό έτσι ότι κενό δεν υπάρχει [...] διότι το κενό δεν είναι σώμα αλλά διάστημα μεταξύ σωμάτων». Αρκετούς αιώνες αργότερα, ο Νεύτωνας έγραφε «... το ότι ένα σώμα μπορεί να δράσει σε ένα άλλο από απόσταση μέσω κενού χώρου, χωρίς την παρεμβολή κάποιου μέσου, [...] είναι για μένα τέτοιος παραλογισμός, στον οποίο πιστεύω ότι κανένας άνθρωπος με κάποια δεξιότητα περί τη φιλοσοφία είναι δυνατόν να υποπέσει». Ο Νεύτωνας πίστευε στην ύπαρξη μιας άυλης ουσίας που καταλαμβάνει όλο το χώρο στο σύμπαν. Μέσω της ουσίας αυτής, που ονομάστηκε **φωτοφόρος αιθέρας** ή απλώς **αιθέρας**, υποτίθεται ότι μεταδίδεται η δύναμη της βαρύτητας και η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, όπως ο ήχος μεταδίδεται μέσω του ατμοσφαιρικού αέρα.

Στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία, το φιλοσοφικό πρόβλημα που μόλις περιγράψαμε αντιμετωπίζεται με την εισαγωγή του φυσικού μεγέθους του πεδίου. Κατά τη θεώρηση των ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων εγκαταλείπεται η έννοια της δύναμης και υιοθετείται η άποψη ότι με την ύπαρξη ηλεκτρικών φορτίων και ρευμάτων στο χώρο, ο ίδιος ο χώρος αποκτά νέες ιδιότητες. Οι ιδιότητες αυτές εκφράζονται με δύο ανυσματικές συναρτήσεις: το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ και τη μαγνητική επαγωγή $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. Έτσι, αλληλεπιδράσεις μεταξύ ηλεκτρικών φορτίων και ρευμάτων ανάγονται σε αλληλεπιδράσεις φορτίων (στατικών ή κινούμενων) με τα πεδία. Το πρόβλημα επανέρχεται όμως με τη λύση των εξισώσεων του Maxwell που μεταξύ άλλων προβλέπουν την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, ήτοι κύματα

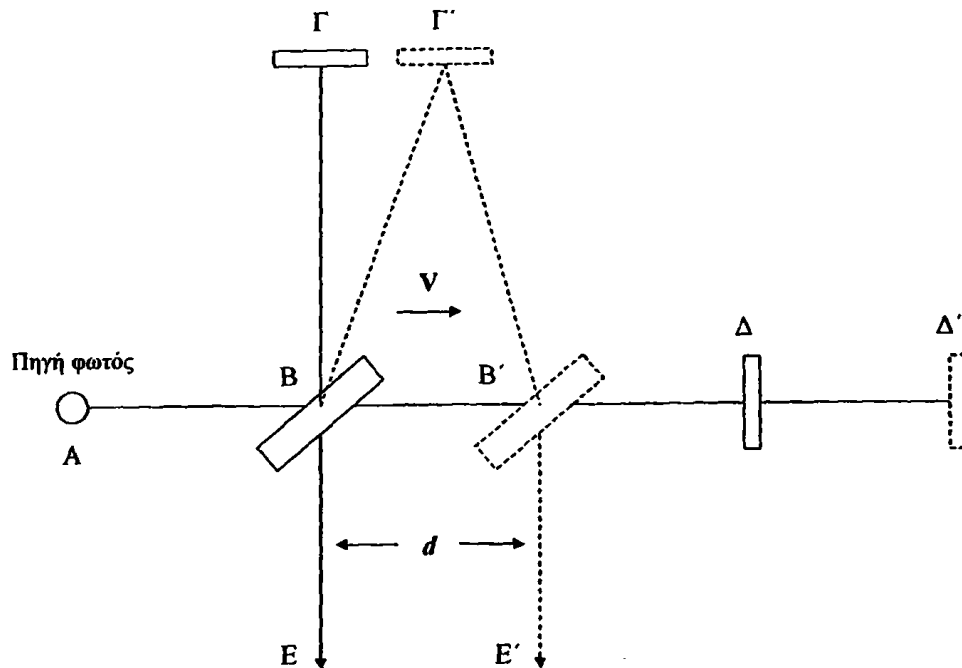


που ταξιδεύουν στο διάστημα και ιδιαίτερα στο κενό. Πώς είναι δυνατόν να μεταφέρεται ακτινοβολία και ιδιαίτερα ενέργεια χωρίς την παρεμβολή ενός μέσου; Η αντιμετώπιση της δράσης από απόσταση και κατ' επέκταση της ύπαρξης του αιθέρα στον ηλεκτρομαγνητισμό μπορεί να παραλληλιστεί με την πρακτική της κακής νοικοκυράς που προσωρινά «σκουπίζει τη σκόνη κάτω από το χαλί».

Αν και για διακόσια περίπου χρόνια μετά τον Νεύτωνα η ιδέα του αιθέρα παρέμενε λίγο, πολύ μια φιλοσοφική έννοια, με την ολοκλήρωση της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας στα τέλη του 19^{ου} αιώνα είχε ωριμάσει πλέον ο χρόνος για την πειραματική παρατήρηση του πανταχού παρόντος αυτού μέσου. Η πρώτη απόπειρα για την ανάδειξη της ύπαρξης του αιθέρα πραγματοποιήθηκε το 1879 από το νεαρό φυσικό Albert Michelson στο Potsdam της Γερμανίας. Το πείραμα επαναλήφθηκε έξι χρόνια αργότερα με τη βοήθεια του εμπειρότερου φυσικού Edward Morley και με πολύ μεγαλύτερη ακρίβεια.

Η πειραματική διάταξη των Michelson και Morley δίνεται διαγραμματικά στο σχήμα 1-3. Όπως φαίνεται στο σχήμα, μια λεπτή δέσμη φωτός διοχετεύεται σε ένα ημιδιαφανές κάτοπτρο Β. Στο σημείο αυτό, ένα μέρος της δέσμης διαπερνά το κάτοπτρο και συνεχίζει την ευθύγραμμη πορεία της προς το κάτοπτρο Δ, ενώ η υπόλοιπη δέσμη ανακλάται και διοχετεύεται προς το κάτοπτρο Γ. Στα κάτοπτρα Γ και Δ οι δύο δέσμες ανακλώνται ολικά και επιστρέφουν στο κάτοπτρο Β, απ' όπου μέρος τους τελικά καταλήγει στο σημείο Ε όπου βρίσκεται ο παρατηρητής. Ο διαχωρισμός αυτός της δέσμης από το ημιδιαφανές κάτοπτρο Β έχει ως αποτέλεσμα οι δύο δέσμες που φτάνουν στον παρατηρητή Ε να έχουν την ίδια στιγμή αφετηρίας. Αν τα δύο κάτοπτρα Γ και Δ απέχουν την ίδια απόσταση από το κάτοπτρο Β (τούτο δεν είναι απαραίτητο για την εκτέλεση του πειράματος, αλλά απλοποιεί την κατανόηση της διεργασίας), και η διάταξη βρίσκεται εν στάσει σε σχέση με τον αιθέρα, οι δύο δέσμες που φτάνουν στον παρατηρητή βρίσκονται σε φάση με αποτέλεσμα





Σχήμα 1.3 Πειραματική διάταξη του πειράματος των Michelson και Morley. Οι εναλλακτικοί δρόμοι $AB\Gamma BE$ και $AB\Delta BE$ που διατρέχει το φως όταν η διάταξη βρίσκεται «ακίνητη» μέσα στον αιθέρα μπορούν να θεωρηθούν ίσοι. Αν η διάταξη κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα V , ο χρόνος που απαιτείται ώστε το φως να διανύσει το δρόμο $B\Delta'B'$ είναι μεγαλύτερος απ' ό,τι για να διανύσει το δρόμο $B\Gamma'B'$.

ενισχυτική συμβολή και τη μέγιστη φωτεινότητα του σήματος. Αν αντιθέτως η διάταξη κινείται μέσω του αιθέρα με ταχύτητα V προς τα δεξιά, ο χρόνος που απαιτείται ώστε το φως να διανύσει το δρόμο $AB\Delta'B'E'$ είναι μεγαλύτερος απ' ό,τι για να διανύσει το δρόμο $AB\Gamma'B'E'$ και οι δύο δέσμες θα φτάσουν στον παρατηρητή με διαφορά φάσης. Στην περίπτωση αυτή, η ενισχυτική συμβολή δεν θα είναι απόλυτη, έτσι ώστε η φωτεινότητα του σήματος να εμφανίζεται μειωμένη.

Η διαφορά του χρόνου διαδρομής στους δύο δρόμους της διάταξης του σχήματος 1.3 δεν είναι δύσκολο να υπολογιστεί. Αν L είναι η απόσταση μεταξύ του κατόπτρου B και του κατόπτρου Δ , ο χρόνος



πτήσης της δέσμης είναι *

$$t(B \rightarrow \Delta) = \frac{L}{V_l + V} \quad (1.14)$$

όπου V_l είναι η ταχύτητα του φωτός. Κατά την επιστροφή της δέσμης από το κάτοπτρο Δ στο κάτοπτρο B ο αντίστοιχος χρόνος πτήσης είναι

$$t(\Delta \rightarrow B) = \frac{L}{V_l - V} \quad (1.15)$$

καθόσον αυτή τη φορά το φως ταξιδεύει αντίθετα προς την κίνηση της διάταξης. Ο ολικός επομένως χρόνος για τη διαδρομή $B\Delta B$ είναι

$$t(B\Delta B) = t(B \rightarrow \Delta) + t(\Delta \rightarrow B) = \frac{2L}{V_l} \frac{1}{1 - (V/V_l)^2}. \quad (1.16)$$

Ο υπολογισμός του χρόνου πτήσης κατά τον εναλλακτικό δρόμο $B\Gamma B$ χρειάζεται λίγο περισσότερη άλγεβρα και θα αφιερωθεί ως άσκηση (βλ. Άσκηση 1-4). Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι

$$t(B\Gamma B) = \frac{2L}{V_l} \frac{1}{\sqrt{1 - (V/V_l)^2}}. \quad (1.17)$$

Από τις εξ. (1.16) και (1.17) προκύπτει αμέσως ότι $t(B\Delta B) > t(B\Gamma B)$, ενώ η διαφορά Δt στον χρόνο πτήσης μπορεί να υπολογιστεί ως

* Στο επόμενο Κεφάλαιο θα δούμε ότι οι εξ. (1.14) και (1.15) δεν είναι απόλυτα ακριβείς. Προς το παρόν όμως θα εφαρμόσουμε τη νευτώνεια μηχανική όπως ήταν γνωστή κατά την εποχή του πειράματος των Michelson και Morley.



$$\Delta t = \frac{2L}{V_\ell} \frac{1 - \sqrt{1 - (V/V_\ell)^2}}{1 - (V/V_\ell)^2}. \quad (1.18)$$

Η διάταξη του σχήματος 1.3 βρίσκεται πάνω στη γη και η ταχύτητα V στις προηγούμενες εξισώσεις είναι η ταχύτητα της γης καθώς αυτή ταξιδεύει στην τροχιά της γύρω από τον ήλιο. Βεβαίως, για την εκτέλεση του πειράματος δεν έχουμε τη δυνατότητα να σταματούμε κατά βούληση τη γη και να την επαναθέτουμε σε κίνηση ώστε να παρατηρήσουμε διαφορές στη φωτεινότητα του σήματος κατά τη συμβολή των δύο δεσμών στο σημείο Ε. Έτσι, οι Michelson και Morley προσπάθησαν να παρατηρήσουν διαφορές στη συμβολή των δύο δεσμών περιστρέφοντας την όλη διάταξη με τον δρόμο ΒΔΒ είτε κατά τη διεύθυνση της ταχύτητας της γης ή κάθετα προς τη διεύθυνση της ταχύτητας της γης. Επιπλέον, επανέλαβαν αρκετές φορές τις μετρήσεις σε διάφορες εποχές του έτους, ώστε να ελέγξουν τα αποτελέσματα σε σχέση με τη διεύθυνση της κίνησης της γης σε διάφορα σημεία της τροχιάς της γύρω από τον ήλιο*.

Το μέγεθος του φαινομένου που αναμένεται να παρατηρήσει η διάταξη των Michelson και Morley είναι πολύ μικρό λόγω της μεγάλης διαφοράς στις ταχύτητες που υπεισέρχονται στην εξ. (1.18). Η ταχύτητα του φωτός είναι περίπου $3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$, ενώ η γη κινείται κατά την τροχιά της γύρω από τον ήλιο – και επομένως μέσω του αιθέρα – με τη σχετικά μικρή ταχύτητα των $3 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$. Στο τελικό τους πείραμα, οι Michelson και Morley χρησιμοποίησαν μία διάταξη όπου η απόσταση μεταξύ των κατόπτρων Β και Δ ήταν $L = 1.2 \text{ m}$. Αν τα δεδομένα αυτά χρησιμοποιηθούν στην εξ. (1.18) προκύπτει το αριθμητικό αποτέλεσμα $\Delta t = 4 \times 10^{-17} \text{ s}$. Στο μικρό αυτό χρονικό

* Κατά την εκτέλεση του πειράματος, η διάταξη των Michelson και Morley ήταν αναρτημένη σε μια μεγάλη μαρμάρινη πλάκα, η οποία επέπλεε σε υδράργυρο ώστε η περιστροφή της να επιτυγχάνεται εύκολα και χωρίς κραδασμούς.



διάστημα το φως ταξιδεύει απόσταση 1.2×10^{-8} m ή, σε μονάδες της οπτικής, 120 Å. Η απόσταση αυτή είναι περίπου πενήντα φορές μικρότερη από το μήκος κύματος στην περιοχή του ορατού φωτός, το οποίο κυμαίνεται στα επίπεδα των 6000 Å. Αν και η μετατόπιση φάσης που προβλέπεται μεταξύ των δύο δεσμών είναι μικρή, η διαφορά στη φωτεινότητα του σήματος στο σημείο E, με τα μέσα που διέθεταν οι Michelson και Morley, ήταν μετρήσιμη.

Τα αποτελέσματα του πειράματος των Michelson και Morley ήσαν αρνητικά. Ανεξάρτητα από τον προσανατολισμό της διάταξης του σχήματος 1.3 και ανεξάρτητα από την εποχή του έτους, καμιά μεταβολή στη συμβολή των δύο δεσμών δεν παρατηρήθηκε. Η διαφορά φάσης των δύο κυμάτων που έφταναν στο σημείο E ήταν πάντα η ίδια, με αποτέλεσμα να μην είναι δυνατή η παρατήρηση της κίνησης της γης μέσω του αιθέρα. Τούτο βέβαια οδηγεί λογικά στην απόρριψη της έννοιας του αιθέρα, στην επαναφορά της έννοιας του κενού (αντίθετα με τις δοξασίες του Αριστοτέλη και του Νεύτωνα), στην εδραίωση της Αρχής της Σχετικότητας και, όπως θα δούμε στο επόμενο Κεφάλαιο, στην ανάδειξη μιας νέας μηχανικής. Προτού όμως τελειώσουμε την ανασκόπηση της πορείας που οδήγησε στη διαμόρφωση της Θεωρίας της Σχετικότητας είναι χρήσιμο να ανακεφαλαιώσουμε τις γνώσεις μας γύρω από την ίδια την ταχύτητα του φωτός.

1-4 Η ταχύτητα του φωτός

Αν ο χώρος είναι απαλλαγμένος από υλικά, ηλεκτρικά φορτία και ηλεκτρικά ρεύματα, δηλαδή αν θεωρήσουμε το απόλυτο κενό, οι εξισώσεις του Maxwell παίρνουν την απλή μορφή*

* Μια σύντομη ανασκόπηση των εξισώσεων της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας δίνεται αργότερα στην Παράγραφο 5-1.



$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.19)$$

και οδηγούν στις διαφορικές εξισώσεις για τα δύο πεδία

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.20\alpha)$$

και

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.20\beta)$$

όπου μ_0 και ε_0 είναι αντίστοιχα η μαγνητική και η ηλεκτρική διαπερατότητα στο κενό με τιμές

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2} \quad (1.21\alpha)$$

$$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}. \quad (1.21\beta)$$

Οι λύσεις των εξ. (1.20) είναι κύματα που ταξιδεύουν στον κενό χώρο με ταχύτητα

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \quad (1.22)$$

που με αντικατάσταση των τιμών από τις εξ. (1.21) δίνει την αριθμητική τιμή

$$v = 2.9979 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} \quad (1.23)$$

αξιοσημείωτα κοντά στη μετρούμενη ταχύτητα του φωτός στο κενό



$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}. \quad (1.24)$$

Η σύμπτωση των τιμών στις εξ. (1.23) και (1.24) έδωσε την πρώτη ένδειξη ότι το φως είναι ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, δηλαδή μετάδοση παλλόμενου ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου στο κενό ή μέσα σε ένα διηλεκτρικό υλικό.

Είναι πράγματι αξιοσημείωτο ότι οι τιμές των εξ. (1.21) που χρησιμοποιήθηκαν για την εξαγωγή του αποτελέσματος στην εξ. (1.22) είναι δυνατόν να προκύψουν από μετρήσεις που δεν έχουν τίποτε να κάνουν με ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Όπως φαίνεται στο σχήμα 1.4(α), η ηλεκτρική διαπερατότητα στο κενό ϵ_0 μπορεί να μετρηθεί με την επιστράτευση ενός πυκνωτή με επίπεδους οπλισμούς, του οποίου η χωρητικότητα δίνεται από τη σχέση

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (1.25)$$

όπου A είναι το εμβαδόν του οπλισμού και d η απόσταση μεταξύ των οπλισμών. Ο πυκνωτής μπορεί να κατασκευαστεί με μεγάλη ακρίβεια ως προς τα γεωμετρικά του χαρακτηριστικά, ενώ η χωρητικότητά του

$$C = \frac{Q}{V} \quad (1.26)$$

μπορεί να προσδιοριστεί με μέτρηση του φορτίου Q που συσσωρεύεται στον πυκνωτή για διάφορες τιμές του δυναμικού V . Η σταθερά ϵ_0 μπορεί τότε να υπολογιστεί από τη σχέση

$$\epsilon_0 = \frac{Q}{V} \frac{d}{A}. \quad (1.27)$$

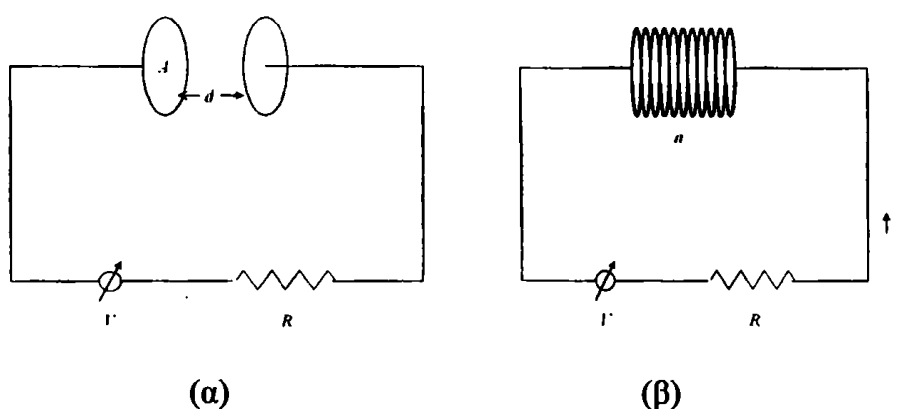


Κατά τον ίδιο τρόπο είναι δυνατόν να μετρηθεί η μαγνητική διαπερατότητα στο κενό αν επιστρατευθεί ένα σωληνοειδές, όπως φαίνεται στη διάταξη του σχήματος 1.4(β). Αν η γεννήτρια συνεχούς ρεύματος στο κύκλωμα του σχήματος 1.4(β) ρυθμίσει το δυναμικό V έτσι ώστε στο κύκλωμα να ρέει ηλεκτρικό ρεύμα I , η μαγνητική επαγωγή B στο κέντρο του πηνίου είναι παράλληλη προς τον άξονά του και με μέτρο που δίνεται από τη σχέση

$$B = \mu_0 n I \quad (1.28)$$

όπου n είναι ο αριθμός των σπειρών του σωληνοειδούς ανά μονάδα μήκους. Μετρώντας τη μαγνητική επαγωγή στο κέντρο του σωληνοειδούς για διάφορες τιμές του ρεύματος, η τιμή της σταθεράς μ_0 μπορεί να εξαχθεί με μεγάλη ακρίβεια.

Η μέτρηση της ταχύτητας του φωτός έπαιξε σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της Θεωρίας της Σχετικότητας. Η πρώτη αναφορά στο θέμα απαντάται, ως συνήθως, στον Αριστοτέλη όπου απαντώντας



Σχήμα 1.4 (α) Διάταξη για τη μέτρηση της ηλεκτρικής διαπερατότητας στο κενό με μεταβολή της τάσης μεταξύ των οπλισμών ενός πυκνωτή. (β) Διάταξη για τη μέτρηση της μαγνητικής διαπερατότητας στο κενό με τη μεταβολή του ηλεκτρικού ρεύματος σε ένα σωληνοειδές.



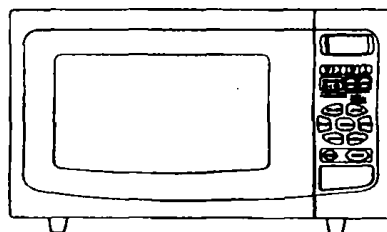
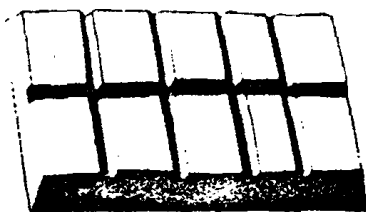
στον Εμπεδοκλή, ο οποίος είχε διατυπώσει την άποψη ότι απαιτείται κάποιος χρόνος ώστε το φως να φτάσει από τον ήλιο στη γη, εμφανίζεται (πάλι λανθασμένα) να διαφωνεί. Ακόμη και ο Καρτέσιος υποστηρίζει ότι το φως μεταδίδεται ακαριαία, ενώ ο Γαλιλαίος, επικαλούμενος το γεγονός ότι όταν εκτυρσοκροτεί ένα κανόνι σε μεγάλη απόσταση πρώτα βλέπουμε τη λάμψη και μετά ακούμε το ήχο, φαίνεται να συμφωνεί με αυτή την άποψη. Βεβαίως, το μόνο που αποδεικνύει ο Γαλιλαίος με την επιχειρηματολογία του είναι ότι η ταχύτητα του φωτός είναι μεγαλύτερη από αυτή του ήχου.

Η πρώτη σοβαρή προσπάθεια για τη μέτρηση της ταχύτητας του φωτός πραγματοποιήθηκε το 1676 από τον Δανό αστρονόμο Ole Römer. Ο Römer είχε μελετήσει με μεγάλη προσοχή την κίνηση της Ιούς, ενός από τους δορυφόρους του Δία, η οποία υφίσταται έκλειψη κατά τακτικά διαστήματα καθώς διατρέχει την τροχιά της γύρω από το Δία. Σύμφωνα με τις παρατηρήσεις του, επί έξι μήνες του έτους οι εκλείψεις της Ιούς παρουσίαζαν μια χρονική υστέρηση, η οποία έφτανε μέχρι τα οκτώ πρώτα λεπτά. Τον υπόλοιπο χρόνο, οι εκλείψεις συνέβαιναν νωρίτερα κατά ένα χρονικό διάστημα που πάλι έφτανε σταδιακά μέχρι τα οκτώ πρώτα λεπτά. Ο Römer αντιλήφθηκε ότι το φαινόμενο δεν οφειλόταν σε κάποια ανωμαλία στην κίνηση της Ιούς, αλλά στην πεπερασμένη ταχύτητα του φωτός και το χρόνο που απαιτείται ώστε τούτο να φτάσει στη γη. Η υστέρηση των οκτώ λεπτών λάμβανε χώρα όταν η γη βρισκόταν στη μέγιστη απόσταση από τον Δία, ενώ οι εκλείψεις συνέβαιναν κατά οκτώ λεπτά νωρίτερα όταν βρισκόταν στην ελάχιστη. Από τις παρατηρήσεις του, ο Römer συμπέρανε ότι το φως χρειάζεται περίπου 22 πρώτα λεπτά για να διατρέξει τη διάμετρο της τροχιάς της γης (περίπου 300.000.000 km) και προσδιόρισε την ταχύτητα του φωτός ως $c = 2.3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$, ήτοι κατά 25 % μικρότερη από την πραγματική.

Κατά πολύ ακριβέστερη ήταν η μέτρηση της ταχύτητας του φωτός από τον άγγλο αστρονόμο James Bradley πενήντα χρόνια αργό-



ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ ΣΤΗ ΚΟΥΖΙΝΑ



Αν διαθέτετε ένα φούρνο μικροκυμάτων στην κουζίνα σας και μια απλή πλάκα σοκολάτα (χωρίς γέμιση ή αμύγδαλα) μπορείτε να μετρήσετε την ταχύτητα του φωτός με ακρίβεια που θα σας εκπλήξει. Ο φούρνος μικροκυμάτων πρέπει να είναι του τύπου που δεν περιέχει στο εσωτερικό του περιστρεφόμενο δίσκο (αν υπάρχει περιστρεφόμενος δίσκος αφαιρέστε τον).

Τοποθετείστε τη σοκολάτα μέσα σε μια μικρή κατσαρόλα, προσθέστε λίγο νερό ή γάλα και λιώστε τη σοκολάτα σε χαμηλή φωτιά, ανακατεύοντας συνεχώς ώστε να μη σχηματιστούν σβόλοι. Μεταφέρετε τη λιωμένη σοκολάτα σε ένα μεγάλο ρηχό πιάτο, κατάλληλο για φούρνο μικροκυμάτων, και αφήστε την να στερεοποιηθεί σε θερμοκρασία δωματίου. Τοποθετήστε το πιάτο στο ψυγείο για δύο τουλάχιστον ώρες. Το πιάτο πρέπει τώρα να είναι καλυμμένο από ένα ομοιόμορφο στρώμα στερεής σοκολάτας.

Τοποθετείστε το πιάτο μέσα στο φούρνο μικροκυμάτων και θέστε τον σε λειτουργία σε χαμηλή ισχύ για 10 s. Αν δεν δείτε καμιά μεταβολή στην επιφάνεια της σοκολάτας, επαναλάβετε τη διαδικασία για άλλα 10 s. Χωρίς τον περιστρεφόμενο δίσκο, ο φούρνος μικροκυμάτων δεν θερμαίνει ομοιόμορφα την επιφάνεια της σοκολάτας. Συντομα θα δείτε την επιφάνεια της σοκολάτας να λιώνει σε μερικά σημεία. Με ένα υποδεκάμετρο μετρήστε την απόσταση ℓ μεταξύ διαδοχικών σημείων όπου έχει αρχίσει να λιώνει η σοκολάτα. Η

απόσταση αυτή είναι το μισό του μήκους κύματος λ της ακτινοβολίας με την οποία λειτουργεί ο φούρνος. Συμβουλευτείτε το εγχειρίδιο του φούρνου σας ή κοιτάξτε στο πίσω μέρος του όπου αναγράφεται η συχνότητα f της ακτινοβολίας. Οι περισσότεροι φούρνοι μικροκυμάτων λειτουργούν σε συχνότητα $f = 2450$ MHz. Η ταχύτητα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας μπορεί τώρα να βρεθεί από τη σχέση

$$c = f\lambda = 2f\ell.$$

Εκτιμείστε το πειραματικό σφάλμα στη μέτρησή σας.

Τώρα, με ένα κουτάλι, μπορείτε να δοκιμάσετε τη σοκολάτα.

τερα. Το 1828, ο Bradley εκμεταλλεύτηκε την κίνηση της γης στην τροχιά της γύρω από τον ήλιο σε σχέση με την παρατήρηση ορισμένων μακρινών αστερών. Η μέθοδος του Bradley είναι δυνατόν να σκιαγραφηθεί με ένα μηχανικό ανάλογο παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι σε μια πεδιάδα βρέχει καταρρακτωδώς, ενώ επικρατεί πλήρης άπνοια. Η διεύθυνση της βροχής είναι κατά την κατακόρυφη διεύθυνση. Ας υποθέσουμε ακόμη ότι ένας παρατηρητής κινείται υπό τη βροχή αυτή (χωρίς ομπρέλα) με σταθερή ταχύτητα κατά μια κυκλική τροχιά. Ο συγκεκριμένος παρατηρητής δεν θα αισθάνεται πλέον ότι η βροχή πέφτει κατακόρυφα, αλλά ως προς αυτόν η βροχή θα διαθέτει μια οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας ίση και αντίθετη με την ταχύτητά του κατά την κυκλική τροχιά. Αν V_β είναι η κατακόρυφη ταχύτητα της βροχής και V_π η ταχύτητα του παρατηρητή, θα παρατηρήσει μια κλίση της διεύθυνσης της βροχής με γωνία ως προς την κατακόρυφη διεύθυνση

$$\theta = \tan^{-1} \frac{V_\pi}{V_\beta}.$$

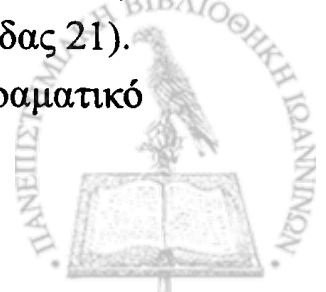


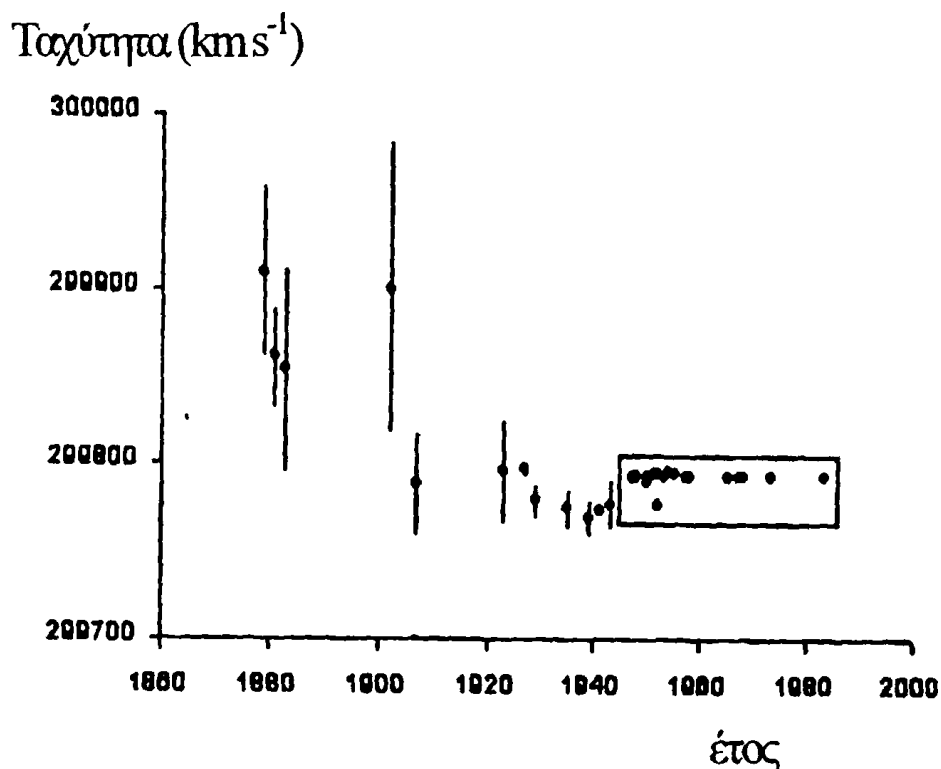
Παραλληλίζοντας τη βροχή με το φως των αστερών που φτάνει στη γη και την κίνηση του προηγούμενου παρατηρητή με την κίνηση της γης στην τροχιά της γύρω από τον ήλιο, ο Bradley, έχοντας υπ' όψη του τα αποτελέσματα του Römer, υπολόγισε τη γωνία της εξ. (1.29) ως μόλις 0.35 δεύτερα λεπτά της μοίρας. Παρ' όλα αυτά, με τις αστρονομικές τεχνικές της εποχής του, η μέτρηση της μικρής αυτής γωνίας ήταν εφικτή με ικανοποιητική ακρίβεια και ο Bradley υπολόγισε την ταχύτητα του φωτός ως $c = 3.01 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$, με πειραματικό σφάλμα μικρότερο του 1 %.

Η πρώτη μέτρηση της ταχύτητας του φωτός πάνω στη γη πραγματοποιήθηκε από τον Armand Fizeau το 1849. Ο Fizeau χρησιμοποίησε την ανάκλαση μιας λεπτής δέσμης φωτός από ένα κάτοπτρο σε απόσταση 8 km. Κατά την εκπομπή της, η δέσμη περνούσε μεταξύ των διάκενων ενός περιστρεφόμενου οδοντωτού τροχού ενώ, κατά την επιστροφή της από το κάτοπτρο, η ταχύτητα του τροχού ρυθμιζόταν έτσι ώστε να διαπεράσει το επόμενο διάκενο. Με την τεχνική αυτή, ο Fizeau υπολόγισε την ταχύτητα του φωτός ως $c = 3.15 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$. Ο σύγχρονός του (και μεγάλος επαγγελματικός του αντίπαλος) Leon Foucault, ένα χρόνο αργότερα, βελτίωσε το πείραμα χρησιμοποιώντας περιστρεφόμενα κάτοπτρα και προσδιόρισε την κατά πολύ ακριβέστερη τιμή $c = 2.98 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$. Η μέθοδός του μάλιστα ήταν αρκετά ακριβής ώστε να παρατηρήσει τη διαφορά της ταχύτητας του φωτός στο νερό. Τα πειράματα του Foucault επαναλήφθηκαν αρκετά χρόνια αργότερα από τον Michelson, ο οποίος πέτυχε να μειώσει σημαντικά το πειραματικό σφάλμα στην τιμή της σταθεράς c στα επίπεδα του 0.04 % (1879) και 0.001 % (1926).

Εκτοτε, πολλές άλλες μέθοδοι χρησιμοποιήθηκαν για τη βελτίωση της ακρίβειας στον προσδιορισμό της ταχύτητας του φωτός (μια αρκετά απλή μέθοδος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ακόμη και στην κουζίνα του σπιτιού σας, παρουσιάζεται στο ένθετο της σελίδας 21).

Μετά το 1970, η χρήση των λέιζερ περιόρισε το πειραματικό





Σχήμα 1.5 Μετρήσεις της ταχύτητας του φωτός από το 1879 έως το 1983. Οι κατακόρυφες γραμμές υποδηλώνουν την εκτίμηση του πειραματικού σφάλματος. Μετά το 1950, το σφάλμα στις μετρήσεις είναι μικρότερο από το μέγεθος του σημείου (A.N. Cutler, Sigma Engineering Corporation, 2001).

σφάλμα σημαντικά, έτσι ώστε στο τέλος της δεκαετίας του 1970 η τιμή του c να είναι γνωστή με αβεβαιότητα της τάξης του $\pm 1 \text{ m s}^{-1}$. Η αβεβαιότητα αυτή είναι κατά πολύ μικρότερη από την αβεβαιότητα με την οποία μπορεί να προσδιοριστεί το μήκος του πρότυπου μέτρου. Έτσι, οι ρόλοι αντιστράφηκαν και από το 1983, για τον ορισμό των μονάδων μέτρησης στο σύστημα SI, η τιμή της εξ. (1.24) λαμβάνεται ως εξ ορισμού απόλυτα ακριβής, ενώ η μονάδα μέτρησης της απόστασης, το μέτρο (m), ορίζεται ως η απόσταση που καλύπτει το φως στο κενό σε χρονικό διάστημα $1/299792458$ δεύτερα λεπτά.

Η ιστορία της μέτρησης της ταχύτητας του φωτός και η συνεχής

βελτίωση της ακρίβειας στη γνώση της τιμής του c δίνεται διαγραμματικά στο σχήμα 1.5.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1-1 Χρησιμοποιώντας τις εξ. (1.3) δείξτε ότι κατά το μετασχηματισμό του Γαλιλαίου, αν στο σύστημα αναφοράς $OXYZ$ του σχήματος 1.2, ένα αντικείμενο που βρίσκεται στο σημείο P κινείται με ταχύτητα v κατά τον άξονα X , ένας παρατηρητής που βρίσκεται ακίνητος στο σύστημα $O'X'Y'Z'$ θα το δει ότι κινείται με ταχύτητα

$$v' = V + v$$

κατά τον άξονα X' .

- 1-2 Ένα τραίνο που ταξιδεύει με σταθερή ταχύτητα 60 km h^{-1} περνά μπροστά από ένα φοιτητή που αναμένει το επόμενο τραίνο σε μια πλατφόρμα σιδηροδρομικού σταθμού την ώρα που το ρολόι του σταθμού δείχνει 12.00 το μεσημέρι. Είκοσι δευτερόλεπτα αργότερα, ένας κεραυνός κτυπά τις σιδηροτροχιές σε μια απόσταση 1 km από το σταθμό. Προσδιορίστε, σύμφωνα με το μετασχηματισμό του Γαλιλαίου, τις συντεταγμένες (x, y, z, t) του σημείου που έπεσε ο κεραυνός όπως τις μετρά ο φοιτητής στην πλατφόρμα και τις συντεταγμένες (x', y', z', t') του ίδιου γεγονότος όπως τις μετρά ο μηχανοδηγός του τραίνου.
- 1-3 Ένας ραδιενεργός πυρήνας, ακίνητος στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, εκπέμπει δύο ηλεκτρόνια προς αντίθετες διευθύνσεις. Ένας επιστήμονας, επίσης ακίνητος στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, παρατηρεί ότι η ταχύτητα του ενός ηλεκτρονίου είναι $0.6c$ και του άλλου $0.7c$. Σύμφωνα με το μετασχηματισμό του Γαλιλαίου, πόση είναι η ταχύτητα του πρώτου ηλεκτρονίου όπως τη μετρά το δεύτερο; Σχολιάστε το αποτέλεσμα.



- 1-4 Αν το σύστημα αναφοράς OXYZ του σχήματος 1.2 κινείται προς τα αριστερά (αντί προς τα δεξιά) με ταχύτητα V , πώς μεταβάλλονται οι εξ. (1.3);
- 1-5 Ο επιβάτης ενός τραίνου που ταξιδεύει με σταθερή ταχύτητα 60 km h^{-1} ως προς το έδαφος, κινείται προς το πίσω μέρος του τραίνου με ταχύτητα 2 km h^{-1} . Ποια είναι η ταχύτητα του επιβάτη που μετρά ένας παρατηρητής ακίνητος στο έδαφος;
- 1-6 Μια βάρκα αρμενίζει στη λίμνη των Ιωαννίνων προς ανατολάς με σταθερή ταχύτητα 5 m s^{-1} . Την ώρα που η βάρκα περνά μπροστά από ένα παιδί που βρίσκεται ακίνητο την προκυμαία, το παιδί πετά μια πέτρα στη λίμνη με διεύθυνση προς το βορρά. Η πέτρα πέφτει στην επιφάνεια της λίμνης 6 s αργότερα και σε απόσταση 60 m . Προσδιορίστε τις συντεταγμένες του σημείου όπου έπεσε η πέτρα στην επιφάνεια της λίμνης, όπως τις μετρά ο επιβάτης της βάρκας.
- 1-7 Αν στο σύστημα αναφοράς OXYZ του σχήματος 1.2 ένα κινητό που βρίσκεται στο σημείο P διαθέτει επιτάχυνση γ , προσδιορίστε με απ' ευθείας χρήση των εξ. (1.3) την επιτάχυνση γ' που κατά το μετασχηματισμό του Γαλιλαίου θα παρατηρήσει ένας παρατηρητής στο σύστημα O'X'Y'Z'.
- 1-8 Ο επιβάτης του τραίνου στο σχήμα 1.1(α), το οποίο ταξιδεύει με ταχύτητα 30 m s^{-1} , πετά μια μπάλα κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα 6 m s^{-1} . Γράψτε την εξίσωση της κίνησης της μπάλας, ήτοι τη θέση της ως συνάρτηση του χρόνου, που προβλέπει ο μετασχηματισμός του Γαλιλαίου, τόσο για τον επιβάτη του τραίνου όσο και για ένα παρατηρητή ακίνητο ως προς το έδαφος.
- 1-9 Γενικεύστε τις εξ. (1.3) για την περίπτωση δύο αδρανειακών συστημάτων αναφοράς με σχετική σταθερή ταχύτητα V κατά των κοινών τους αξόνων X και X' , για τα οποία το χρονόμετρο του παρατηρητή O δείχνει χρόνο $t = T$ όταν συμπίπτουν οι αρχές των συντε-



ταγμένων O και O' .

1-10 Δείξτε ότι η κυματική εξίσωση του ηλεκτρομαγνητισμού

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

δεν παραμένει αναλλοίωτη κατά το μετασχηματισμό του Γαλιλαίου.

1-11 Θεωρείστε ότι στη διάταξη των Michelson και Morley του σχήματος 1.3 χρησιμοποιείται μονοχρωματική ακτινοβολία με μήκος κύματος λ . Προσδιορίστε τη διαφορά φάσης των δύο δεσμών που φτάνουν στον παρατηρητή στο σημείο E' .

1-12 Αποδείξτε την εξ. (1.17).

1-13 Θεωρείστε ότι στη διάταξη των Michelson και Morley του σχήματος 1.3 η απόσταση κάθε βραχίονα είναι $B\Gamma = B\Delta = 10 \text{ m}$. Αν η γη κινείται με ταχύτητα $V = 10^{-4}c$ και ο βραχίονας $B\Delta$ είναι κατά τη διεύθυνση της ταχύτητας της γης, υπολογίστε τη διαφορά χρόνου που απαιτείται ώστε το φως να διατρέξει τους δύο εναλλακτικούς δρόμους $B\Gamma E$ και $B\Delta E$.

1-14 Ένας ρευματοφόρος αγωγός δημιουργεί γύρω του μαγνητικό πεδίο. Εξαρτάται το πεδίο αυτό από την ταχύτητα του παρατηρητή ως προς τον αγωγό; Τεκμηριώστε την απάντησή σας με ένα παράδειγμα.

1-15 Έχει τη δυνατότητα ο επιβάτης ενός τραίνου, του οποίου όλα τα παράθυρα είναι κλειστά να προσδιορίσει την ταχύτητα του τραίνου όταν αυτό κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς το έδαφος; Αν ναι, περιγράψτε ένα απλό πείραμα με το οποίο μπορεί να το πραγματοποιήσει. Έχει τη δυνατότητα να προσδιορίσει αλλαγή στην ταχύτητα του τραίνου; Αν ναι, περιγράψτε ένα απλό πείραμα με το οποίο μπορεί να το πραγματοποιήσει.



- 1-16 Επιβάτης ενός αεροπλάνου, το οποίο ταξιδεύει με σταθερή ταχύτητα V_a σε σταθερό ύψος, πετάει μια μπάλα προς το πίσω μέρος του αεροπλάνου. Η αρχική ταχύτητα της μπάλας, όπως τη μετράει ο επιβάτης, είναι $V_\mu = -V_a$, ενώ το αρχικό ύψος της μπάλας από το δάπεδο του αεροπλάνου είναι h .
- (α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης της μπάλας $x(t)$, $y(t)$ και $z(t)$ σε ένα σύστημα αναφοράς OXYZ που βρίσκεται ακίνητο ως προς τον επιβάτη.
- (β) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό του Γαλιλαίου, γράψτε τις εξισώσεις κίνησης της μπάλας $x'(t)$, $y'(t)$ και $z'(t)$ σε ένα σύστημα αναφοράς O'X'Y'Z' που βρίσκεται ακίνητο ως προς το έδαφος.
- (γ) Είναι ο ολικός χρόνος πτήσης της μπάλας στα δύο συστήματα αναφοράς ο ίδιος;
- (δ) Είναι το ολικό μήκος της τροχιάς της μπάλας στα δύο συστήματα αναφοράς το ίδιο;
- 1-17 Ένα τραίνο ταξιδεύει σε ευθύγραμμες ράγες με σταθερή ταχύτητα $V = 72 \text{ km h}^{-1}$. Ένας επιβάτης σπρώχνει ένα καροτσάκι, το οποίο αρχικά βρίσκεται εν στάσει, ώστε να κινηθεί προς την ίδια κατεύθυνση με την ταχύτητα του τραίνου με σταθερή επιτάχυνση 100 cm s^{-2} σε σχέση με το δάπεδο του τραίνου.
- (α) Ποια είναι η επιτάχυνση που θα μετρήσει ένας παρατηρητής, ακίνητος στο έδαφος;
- (β) Αν στο σύστημα αναφοράς OXYZ του εδάφους, η ταχύτητα V του τραίνου είναι κατά τον άξονα X, γράψτε τις εξισώσεις κίνησης $x'(t)$, $y'(t)$ και $z'(t)$ στο σύστημα αναφοράς O'X'Y'Z' του τραίνου, καθώς και τις εξισώσεις κίνησης $x(t)$, $y(t)$ και $z(t)$ στο σύστημα αναφοράς OXYZ του εδάφους.
- (γ) Για δύο χρονικές στιγμές t_1 και t_2 συγκρίνετε τα διαστήματα $x_2' - x_1'$ και $x_2 - x_1$ όπως μετρώνται στα αντίστοιχα συστήματα α-



ναφοράς.

- 1-18 Θεωρείστε την περίπτωση ελαστικής σκέδασης δύο σφαιρών που κινούνται στην ίδια ευθεία κατά τον άξονα X ενός συστήματος αναφοράς $OXYZ$. Δείξτε ότι, κατά το μετασχηματισμό του Γαλιλαίου, όπως προσδιορίζει ένας παρατηρητής σε ένα δεύτερο σύστημα αναφοράς $O'X'Y'Z'$, το οποίο κινείται ως προς το πρώτο με σταθερή ταχύτητα V κατά τον κοινό τους άξονα XX' , η κινητική ενέργεια διατηρείται.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ο μετασχηματισμός Lorentz

ΤΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΤΩΝ MICHELSON ΚΑΙ MORLEY απέδειξαν ότι ένας παρατηρητής πάνω στη γη μετρά την ταχύτητα του φωτός ως σταθερή, ανεξάρτητα από τη διεύθυνση της ταχύτητας της γης στα διάφορα σημεία της τροχιάς της γύρω από τον ήλιο. Μπορεί η γη να μην αποτελεί ένα τέλειο αδρανειακό σύστημα σε σχέση με τον ήλιο, αλλά σε πολύ καλή προσέγγιση, για το χρονικό διάστημα που απαιτείται για τη μέτρηση στη διάταξη του σχήματος 1.3, το σύστημα αναφοράς ενός παρατηρητή στη γη μπορεί να θεωρηθεί ότι κινείται με σταθερή ταχύτητα σε σχέση με το σύστημα αναφοράς ενός παρατηρητή στον ήλιο. Ο Einstein γενίκευσε την παρατήρηση αυτή δεχόμενος ότι η ταχύτητα του φωτός είναι η ίδια σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Τούτο βεβαίως είχε σημαντικές συνέπειες σχετικά με την αντίληψή μας γύρω από τα φυσικά φαινόμενα. Κατ' αρχάς η επιστήμη απαλλάχθηκε από τον πανταχού παρόντα αιθέρα. Αν ο αιθέρας, που εθεωρείτο αόρατος όσον αφορά τα μηχανικά φαινόμενα, δεν έχει τη δυνατότητα να κάνει αισθητή την παρουσία του και στο χώρο των ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων, τότε ως έννοια είναι τουλάχιστον άχρηστος και μπορεί να εγκαταλειφθεί μιας δια παντός. Μαζί με τον αιθέρα εξαφανίζεται και η έννοια της απόλυτης κίνησης. Αν δεν υπάρχει κάποιο μέσο που



καταλαμβάνει όλο τον χώρο, κίνηση σε σχέση με τον χώρο, δηλαδή με το κενό, δεν είναι δυνατόν να μετρηθεί. Το μόνο επομένως που παραμένει είναι η σχετική κίνηση μεταξύ σωμάτων.

Δεν χρειάζεται παρά ένα ακόμη βήμα στην προηγούμενη ανάλυση των συνεπειών του πειράματος των Michelson και Morley για να επαναφέρει κανείς την Αρχή της Σχετικότητας. Αν δεν υπάρχει απόλυτη κίνηση, τότε δεν υπάρχει και κανένα προνομιακό σύστημα αναφοράς, π.χ. ένα σύστημα αναφοράς σε απόλυτη στάση. Όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς είναι ισοδύναμα και αν ένας νόμος της φύσης διατυπωθεί σωστά σε ένα αδρανειακό σύστημα τότε πρέπει να ισχύει με την ίδια μορφή σε κάθε άλλο αδρανειακό σύστημα.

Με τα πορίσματα της προηγούμενης ανάλυσης θεμελιώνεται ουσιαστικά η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας.

2-1 Αξιοματική θεμελίωση της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας

Με τις προηγούμενες σκέψεις, στις αρχές του 20^{ου} αιώνα, ο Einstein ανέπτυξε την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας χρησιμοποιώντας την Αρχή της Σχετικότητας και τη σταθερότητα της ταχύτητας του φωτός που κωδικοποιούνται στα εξής δύο απλά αξιώματα:

1. Οι νόμοι της φύσης έχουν την ίδια μορφή σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.
2. Η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι η ίδια σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς και είναι ανεξάρτητη από την ταχύτητα της πηγής.

Βεβαίως το επόμενο βήμα είναι η σύνδεση των παρατηρήσεων του ιδίου φυσικού φαινομένου από δύο παρατηρητές σε διάφορα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Στην Παράγραφο 1-2 είδαμε με ένα παράδειγμα ότι, αν και επιτυχής σε ό,τι αφορά τη νευτώνεια μηχανι-



κή, ο μετασχηματισμός του Γαλιλαίου αποτυγχάνει στο χώρο των ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων. Ένα ακόμη απλό παράδειγμα είναι ενδεχομένως χρήσιμο.

Ας θεωρήσουμε δύο παρατηρητές σε δύο συστήματα αναφοράς $OXYZ$ και $O'X'Y'Z'$, τα οποία κινούνται με σταθερή και ευθύγραμμη σχετική ταχύτητα V κατά τη θετική φορά του κοινού τους άξονα X, X' , έτσι ώστε η αρχή των συντεταγμένων τους να συμπίπτει σε κάποια χρονική στιγμή. Τη στιγμή αυτή, που θα λάβουμε ως αρχή μέτρησης του χρόνου (κατά το μετασχηματισμό του Γαλιλαίου, $t = t' = 0$), θα θεωρήσουμε ότι από το κοινό σημείο O και O' εκπέμπεται ένας παλμός φωτός, ισοτροπικά προς κάθε κατεύθυνση. Θα θεωρήσουμε ακόμη ότι οι δύο παρατηρητές διαθέτουν, ο καθένας στο δικό του σύστημα αναφοράς, τα μέσα (π.χ., φωτοκύτταρα και χρονόμετρα εγκαταστημένα σε διάφορα σημεία του χώρου) ώστε να παρακολουθούν την εξέλιξη του φωτεινού παλμού που εκπέμφθηκε. Από τα δύο αξιώματα που μόλις διατυπώθηκαν, ο νόμος μετάδοσης του φωτός σε κάθε σύστημα πρέπει να έχει την ίδια μορφή. Ο πρώτος παρατηρητής θα αναφέρει ότι σε κάθε χρονική στιγμή t το φως βρίσκεται στην επιφάνεια μιας σφαίρας (βλ. σχήμα 2.1) που περιγράφεται από την εξίσωση

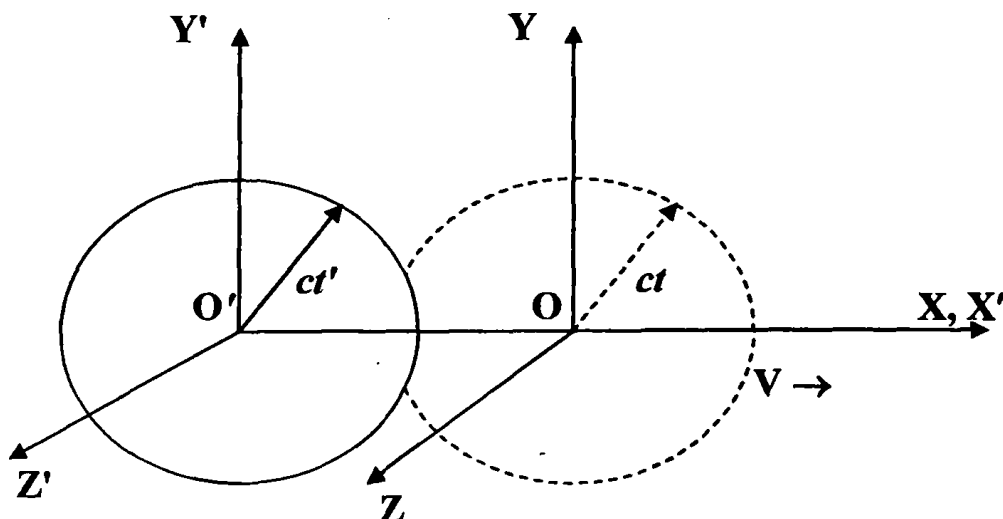
$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \quad (2.1)$$

ενώ για τον παρατηρητή του συστήματος αναφοράς $O'X'Y'Z'$ η αντίστοιχη εξίσωση είναι

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0. \quad (2.2)$$

Απλή αντικατάσταση των εξ. (1.3) στην εξ. (2.2) δείχνει ότι ο μετασχηματισμός του Γαλιλαίου δεν ικανοποιεί τα αξιώματα της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας, καθ' όσον δίνει για το φαινόμενο που





Σχήμα 2.1 Σύμφωνα με το δεύτερο αξίωμα του Einstein, στα δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς, ένας φωτεινός παλμός που εκπέμπεται από την αρχή των συντεταγμένων κάθε συστήματος επεκτείνεται με ταχύτητα c κατά ένα σφαιρικό μέτωπο που περιγράφεται από τις εξ. (2.1) και (2.2).

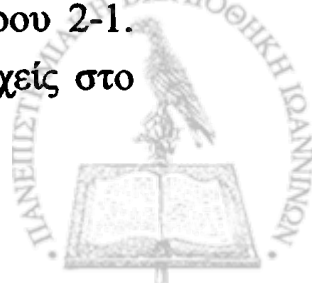
παρατηρεί ο παρατηρητής O' στο δικό του σύστημα αναφοράς τη σχέση

$$(x + Vt)^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0. \quad (2.3)$$

Αυτή είναι η εξίσωση της επιφάνειας μιας σφαίρας, της οποίας το κέντρο ταξιδεύει κατά τη θετική φορά του άξονα X' με ταχύτητα V . Επιπλέον, κατά τη διεύθυνση του άξονα X' , ο παρατηρητής μετράει ότι το φως έχει διανύσει απόσταση $x' = (c+V)t$, ήτοι έχει ταξιδέψει με ταχύτητα μεγαλύτερη του c . Κάτι λοιπόν δεν πάει καλά με το μετασχηματισμό του Γαλιλαίου.

2-2 Ο μετασχηματισμός Lorentz

Τα συμπεράσματα από την προηγούμενη ανάλυση είναι ότι θα πρέπει κατά κάποιο τρόπο να τροποποιήσουμε το μετασχηματισμό του Γαλιλαίου ώστε να ικανοποιεί τα αξιώματα της Παραγράφου 2-1. Από την άλλη πλευρά, οι εξ. (1.3) έχουν αποδειχθεί επιτυχείς στο



χώρο της νευτώνειας μηχανικής και κάθε τροποποίηση που ενδεχομένως θα επιφέρουμε πρέπει να τις προβλέπει ως πολύ καλή προσέγγιση για τις σχετικά χαμηλές ταχύτητες που απαντώνται στην καθημερινή ζωή.

Από τη μορφή των εξ. (1.3) και (2.3) προκύπτει ότι οι συντεταγμένες y και z δεν δημιουργούν κανένα πρόβλημα. Από τις εξισώσεις του μετασχηματισμού που αφορούν τις τρεις χωρικές συντεταγμένες, η εξίσωση που πρέπει να τροποποιηθεί είναι αυτή που αφορά τον άξονα X . Θα τροποποιήσουμε επομένως την εξ. (1.3α) γράφοντας στη θέση της τον μετασχηματισμό

$$x' = \gamma(x + Vt) \quad (2.4)$$

όπου γ είναι ένας παράγοντας με τιμή πολύ κοντά στη μονάδα για ταχύτητες της καθημερινής εμπειρίας. Περισσότερη σκέψη οδηγεί στο συμπέρασμα ότι και η εξ. (1.3δ) δεν πρέπει να είναι σωστή. Όσο και αν η εγκατάλειψη της ιδέας ότι η ροή του χρόνου είναι η ίδια στα δύο συστήματα αναφοράς αντιβαίνει στο αίσθημα της κοινής λογικής, είναι επίσης φανερό ότι τροποποίηση του μετασχηματισμού μόνο των χωρικών συντεταγμένων δεν πρόκειται να διορθώσει τη μορφή της εξ. (2.3). Η απλούστερη τροποποίηση της εξ. (1.3δ) που μπορούμε να επιφέρουμε αφορά την ανάμιξη της συντεταγμένης του χώρου x και του χρόνου t στη γραμμική σχέση

$$t' = At + Bx \quad (2.5)$$

όπου πάλι, στις συνήθεις συνθήκες της νευτώνειας μηχανικής, ο παράγοντας A θα πρέπει να έχει τιμή πολύ κοντά στη μονάδα και ο παράγοντας B τιμή πολύ κοντά στο μηδέν.

Αν αντικαταστήσουμε τις εξ. (2.4) και (2.5) στην εξ. (2.2) και εξισώσουμε με την εξ. (2.1) προκύπτει ότι



$$\begin{aligned}
 (\gamma^2 - B^2 c^2)x^2 + y^2 + z^2 + (\gamma^2 V^2 - A^2 c^2)t^2 - 2(ABc^2 - \gamma^2 V)xt \\
 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0
 \end{aligned}
 \quad (2.6)$$

Η σχέση αυτή ικανοποιείται αν

$$\gamma^2 - B^2 c^2 = 1 \quad (2.7\alpha)$$

$$A^2 c^2 - \gamma^2 V^2 = c^2 \quad (2.7\beta)$$

$$ABc^2 - \gamma^2 V = 0. \quad (2.7\gamma)$$

Το τελευταίο σύστημα εξισώσεων μπορεί να λυθεί ως προς A , B και γ με αποτέλεσμα

$$A = \gamma = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad (2.8\alpha)$$

$$B = \frac{V\gamma}{c^2}. \quad (2.8\beta)$$

Έτσι, αν επιπλέον, χάριν απλοποίησης του συμβολισμού, θέσουμε

$$\beta = \frac{V}{c} \quad (2.9)$$

ο μετασχηματισμός που μόλις προσδιορίσαμε σε αντικατάσταση των εξ. (1.3) μπορεί να γραφεί ως

$$x' = \gamma(x + \beta ct) \quad (2.10\alpha)$$

$$y' = y \quad (2.10\beta)$$



$$z' = z \quad (2.10\gamma)$$

$$t' = \gamma \left(t + \frac{\beta x}{c} \right) \quad (2.10\delta)$$

όπου, για λόγους πληρότητας, θα επαναλάβουμε τις εξ. (2.8) και (2.9)

$$\beta = \frac{V}{c}. \quad (2.11\alpha)$$

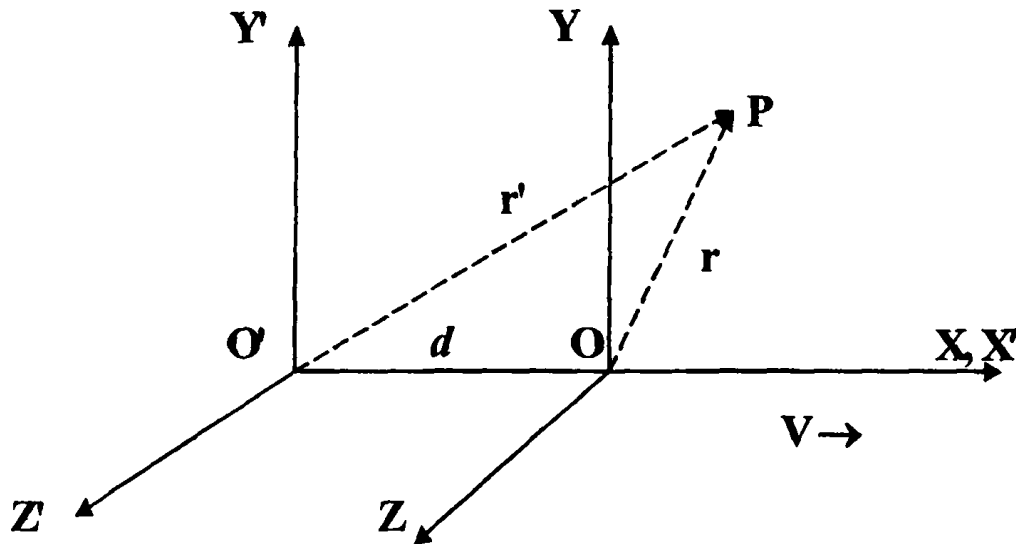
και

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (2.11\beta)$$

Θα ονομάσουμε τις εξ. (2.10), που εφεξής θα αντικαταστήσουν το μετασχηματισμό του Γαλιλαίου των εξ. (1.3), **μετασχηματισμό Lorentz**. Παρατηρείται ότι για σχετικά μικρή σχετική ταχύτητα μεταξύ των δύο συστημάτων αναφοράς $V \ll c$, οι παράγοντες γ και β παίρνουν αριθμητική τιμή $\gamma \cong 1$, $\beta \cong 0$, με αποτέλεσμα οι εξ. (2.10) να μεταπίπτουν στις εξ. (1.3). Αντίθετα, για ταχύτητες που πλησιάζουν την ταχύτητα του φωτός, ο παράγοντας γ τείνει προς το μηδέν και ο παράγοντας β προς τη μονάδα. Για ταχύτητες που υπερβαίνουν την ταχύτητα του φωτός, ο παράγοντας γ γίνεται φανταστικός που συνεπάγεται φανταστικές συντεταγμένες του χώρου και φανταστικό χρόνο. Με άλλα λόγια, ταχύτητες μεγαλύτερες του φωτός οδηγούν σε φυσικά μη παραδεκτές λύσεις. Ένα άμεσο πόρισμα από τη μορφή του μετασχηματισμού Lorentz είναι επομένως ότι κανένα σώμα δεν είναι δυνατόν να κινηθεί με ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός των εξ. (2.10), δηλαδή οι τιμές των χωρικών συντεταγμένων και του χρόνου που μετρά ο παρατη-





Σχήμα 2.2 Δύο αδρανιακά συστήματα αναφοράς με παράλληλους άξονες συντεταγμένων. Το σύστημα αναφοράς $O'X'Y'Z'$ κινείται ως προς το σύστημα αναφοράς $OXYZ$ με σταθερή ταχύτητα V κατά τη θετική φορά των κοινών αξόνων X και X' . Μετά από χρόνο t τα σημεία O και O' απέχουν απόσταση $d = Vt$.

ρητής του συστήματος $OXYZ$ στο σύστημα $O'X'Y'Z'$, είναι επίσης εύκολο να βρεθεί (βλ. Άσκηση 2-2). Κατά την άποψη του παρατηρητή στο σύστημα $OXYZ$, η σχετική ταχύτητα μεταξύ των δύο αδρανειακών συστημάτων αναφοράς είναι $-V$, οπότε ο μετασχηματισμός Lorentz παίρνει τη μορφή

$$x = \gamma(x' - \beta ct') \quad (2.12\alpha)$$

$$y = y' \quad (2.12\beta)$$

$$z = z' \quad (2.12\gamma)$$

$$t = \gamma\left(t' - \frac{\beta x'}{c}\right). \quad (2.12\delta)$$

2-3 Σχετικιστική Κινηματική

Αν και για τις σχετικά χαμηλές ταχύτητες της καθημερινότητας η νευτώνεια μηχανική παραμένει όπως τη γνωρίζαμε μέχρι τώρα, ο μετασχηματισμός Lorentz έχει σημαντικές επιπτώσεις – που σε πολλές περιπτώσεις αγγίζουν τα όρια του παραδόξου – όταν εμφανίζεται κίνηση με ταχύτητα που πλησιάζει την ταχύτητα του φωτός. Μερικές απ' αυτές τις επιπτώσεις θα εξετάσουμε στη συνέχεια. Προηγουμένως όμως είναι χρήσιμο να ορίσουμε με κάποια λεπτομέρεια τη διαδικασία της μέτρησης των χωρικών συντεταγμένων και του χρόνου, όπως αυτή πραγματοποιείται από δύο παρατηρητές σε δύο διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

Θα θεωρήσουμε πάλι τα δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς του σχήματος 1.2 (που εδώ επαναλαμβάνεται για ευκολία ως σχήμα 2.2). Θα θεωρήσουμε ακόμη ότι στην αρχή των συντεταγμένων κάθε συστήματος O και O' υπάρχει ένας παρατηρητής, ο οποίος πραγματοποιεί μετρήσεις, τόσο στο δικό του σύστημα αναφοράς, όσο και στο άλλο σύστημα αναφοράς και συγκρίνει τα αποτελέσματα με αντίστοιχες μετρήσεις του άλλου παρατηρητή. Για την πραγματοποίηση των μετρήσεων, κάθε παρατηρητής διαθέτει ένα πρότυπο μέτρο και ένα αριθμό χρονομέτρων μεγάλης ακρίβειας, τα οποία βρίσκονται σε κάθε σύστημα αναφοράς εγκατεστημένα σε στρατηγικά σημεία. Αρχικά, πριν τα δύο συστήματα αναφοράς αναπτύξουν τη μεταξύ τους σχετική ταχύτητα, οι δύο παρατηρητές συγκρίνουν τα πρότυπα μέτρα που διαθέτουν και, μέσα στο πειραματικό σφάλμα που επιτρέπουν οι μετρήσεις τους, τα βρίσκουν ακριβώς ίσα, ενώ επιπλέον συγχρονίζουν τα χρονόμετρα που βρίσκονται στα σημεία O και O' . Τα λοιπά χρονόμετρα κάθε συστήματος αναφοράς συγχρονίζονται ως προς το χρονόμετρο στην αρχή των συντεταγμένων, π.χ., με την αποστολή φωτεινών παλμών εξαιρετικά μικρής διάρκειας, λαμβάνοντας υπ' όψιν τον πεπερασμένο χρόνο που απαιτείται ώστε το φως να ταξιδέψει από κάθε χρονόμετρο μέχρι το χρονόμετρο που



βρίσκεται τοποθετημένο στα σημεία O και O' . Μετά την ανάπτυξη σταθερής σχετικής ταχύτητας V κατά τον κοινό άξονα X, X' , οι δύο παρατηρητές ορίζουν ως αρχή μέτρησης του χρόνου ($t = t' = 0$) τη στιγμή που τα δύο σημεία O και O' συμπίπτουν, καθώς το ένα σύστημα αναφοράς ξεπερνά το άλλο.

Με τα πρότυπα μέτρα τους ελεγμένα και τα χρονόμετρά τους συγχρονισμένα οι δύο παρατηρητές αρχίζουν τώρα τις μετρήσεις τους.

2-3.1 ΣΥΣΤΟΛΗ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ

Ας υποθέσουμε κατ' αρχήν ότι οι δύο παρατηρητές θέλουν να επανασυγκρίνουν τα πρότυπα μέτρα τους όταν αυτά τοποθετούνται κάθετα προς τη σχετική ταχύτητα των δύο συστημάτων αναφοράς V . Ειδικότερα, ας υποθέσουμε ότι για το σκοπό αυτό ο παρατηρητής O τοποθετεί το δικό του πρότυπο μέτρο (με μήκος $L_0 = 1$ m) παράλληλα προς τον άξονα Y με τα άκρα του στα σημεία είναι y_1 και y_2 . Καθώς οι δύο παρατηρητές διασταυρώνονται, ο παρατηρητής O' θα δει το πρότυπο μέτρο του παρατηρητή O με τα άκρα του στα σημεία y_1' και y_2' . Από την εξ. (2.10β) όμως έπεται ότι το μήκος L' που μετρά ο παρατηρητής O' για το μήκος του πρότυπου μέτρου του παρατηρητή O είναι

$$L' = y_2' - y_1' = y_2 - y_1 = L_0. \quad (2.13)$$

Δηλαδή, κατά την άποψη του παρατηρητή O' το πρότυπο μέτρο του παρατηρητή O διατηρεί το μήκος του αναλλοίωτο.

Ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι ο παρατηρητής O τοποθετεί το πρότυπο μέτρο του παράλληλα προς τους άξονες X και X' , δηλαδή, παράλληλα προς τη διεύθυνση της σχετικής ταχύτητας των δύο συστημάτων αναφοράς. Τώρα, αν (x_1, x_2) και (x_1', x_2') είναι αντίστοιχα οι συντεταγμένες των άκρων του πρότυπου μέτρου που μετρούν οι



δύο παρατηρητές O και O' στα δύο συστήματα αναφοράς, σε μια δεδομένη χρονική στιγμή $t' = t'_0$ (όπως μετρά το χρόνο ο παρατηρητής O'), από την εξ. (2.12α) έπεται ότι

$$x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 - Vt'_0) - \gamma(x'_1 - Vt'_0) = \gamma(x'_2 - x'_1). \quad (2.14)$$

Πάλι, επειδή το πρότυπο μέτρο κατά τον παρατηρητή O βρίσκεται εν στάσει, η απόσταση $x_2 - x_1$ είναι ίση με $L_0 = 1 \text{ m}$, ενώ το μήκος $L' = x'_2 - x'_1$ που μετρά ο παρατηρητής O' ικανοποιεί τη σχέση

$$L_0 = \gamma(x'_2 - x'_1) = \gamma L' \quad (2.15)$$

ή

$$L' = \frac{L_0}{\gamma} = (1 - \beta^2)^{1/2} L_0. \quad (2.16)$$

Με άλλα λόγια, το πρότυπο μέτρο του παρατηρητή στο σύστημα αναφοράς $O'X'Y'Z'$ συρρικνώθηκε κατά ένα παράγοντα $\sqrt{1 - \beta^2}$. Γενικεύοντας την εξ. (2.16), συμπεραίνουμε ότι ένας παρατηρητής που κινείται με σταθερή ταχύτητα V ως προς ένα αντικείμενο, παρατηρεί ότι, κατά τη διεύθυνση της ταχύτητας V , το μήκος του αντικειμένου συρρικνώνεται κατά τον παράγοντα $\sqrt{1 - V^2 / c^2}$. Κάθε αντικείμενο, όταν βρίσκεται εν κινήσει, φαίνεται μικρότερο ως προς τη διάστασή του κατά τη διεύθυνση της ταχύτητας, απ' ότι όταν παρατηρείται εν στάσει. Το φαινόμενο αυτό της συρρίκνωσης της διάστασης ενός αντικειμένου κατά τη διεύθυνση της σχετικής ταχύτητας μεταξύ δύο αδρανειακών συστημάτων αναφοράς, έχει καθιερωθεί στη βιβλιογραφία ως **συστολή του μήκους** ή **συστολή Lorentz-FitzGerald***.

* Η συστολή Lorentz-FitzGerald προτάθηκε αρχικά με σκοπό να περισωθεί η έννοια του αιθέρα μετά τα αρνητικά αποτελέσματα των πειραμάτων του Michel-



Η συστολή του μήκους που μετρά ένας παρατηρητής σε ένα άλλο αδρανειακό σύστημα είναι βέβαια πολύ μικρή στις συνήθεις ταχύτητες. Αν η σχετική ταχύτητα των δύο συστημάτων αναφοράς είναι πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός ($V \ll c$), ο παράγοντας $(1 - \beta^2)^{1/2}$ της εξ. (2.15) μπορεί, σε πολύ καλή προσέγγιση, να γραφεί ως

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - V^2 / c^2} \cong 1 - \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2}. \quad (2.17)$$

Ακόμη και το υπερηχητικό επιβατικό αεριωθούμενο Concorde που ταξιδεύει με διπλάσια ταχύτητα από τον ήχο* ($V = 7 \times 10^2 \text{ m s}^{-1}$) θα υποστεί μείωση του μήκους του ($L_0 = 50 \text{ m}$) της τάξης του $1 \times 10^{-10} \text{ m}$ – μικρότερη από τη διάμετρο ενός ατόμου.

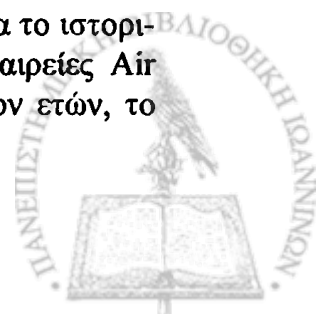
Η συστολή Lorentz-FitzGerald έχει πολλές ενδιαφέρουσες επιπτώσεις στη μορφή που εμφανίζονται διάφορα γεωμετρικά σχήματα. Μια απ' αυτές εξετάζεται στο ένθετο της σελ. 42.

2-3.2 ΔΙΑΣΤΟΛΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Ας επανέλθουμε στους δύο παρατηρητές Ο και Ο' της προηγούμενης

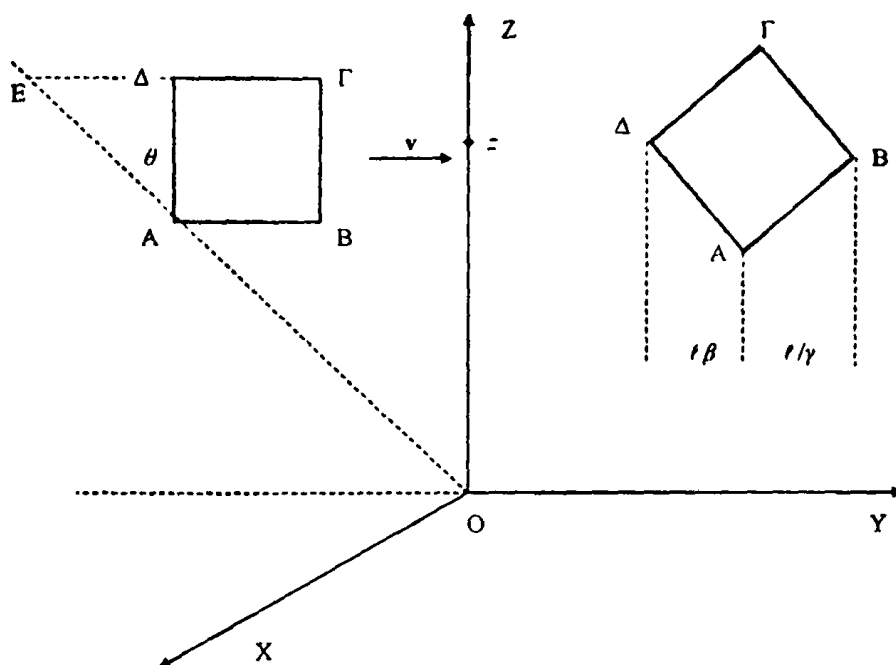
son και Morley. Το 1892, ο George F. FitzGerald και ανεξάρτητα η ομάδα του μαθηματικού Hendrik A. Lorentz πρότειναν ως ερμηνεία των αρνητικών αποτελεσμάτων των πειραμάτων των Michelson και Morley την εξήγηση ότι ο βραχίονας της συσκευής, όταν αυτός έχει διεύθυνση κατά την κίνηση της γης, μέσω του αιθέρα, υφίσταται συστολή, ακριβώς όση χρειάζεται για να εξουδετερωθεί η αναμενόμενη διαφορά φάσης των δύο δεσμών του πειράματος. Μαθηματικά, μπορεί κανείς να δείξει ότι η υποτιθέμενη αυτή συστολή δίνεται από την εξ. (2.16). Δεν πρόλαβαν να περάσουν δύο δεκαετίες και η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας έδειξε ότι η συστολή Lorentz-FitzGerald αποτελεί ιδιότητα του χώρου και του χρόνου και όχι των ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων.

* Καθώς γράφονταν οι γραμμές αυτές, χρησιμοποιώντας ως παράδειγμα το ιστορικό υπερηχητικό επιβατικό αεριωθούμενο, ανακοινώθηκε από τις εταιρείες Air France και British Airways ότι, μετά από υπηρεσία τριάντα και πλέον ετών, το Concorde αποσύρεται από την ενεργό δράση.



ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΛΟΓΩ ΤΗΣ ΣΥΣΤΟΛΗΣ LORENTZ-FITZFERALD

Ένα ενδιαφέρον φαινόμενο που οφείλεται στη σχετικιστική συστολή του μήκους ανακαλύφθηκε το 1959 από τον J. Torrell [J. Torrell, *Phys.Rev.* **116** (1959) 1041. Βλ. επίσης J.B. Marion, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, Academic Press, 1963]. Ας θεωρήσουμε ένα παρατηρητή, ακίνητο στην αρχή των συντεταγμένων O ενός συστήματος αναφοράς $OXYZ$, και ένα τετράγωνο πλαίσιο $AB\Gamma\Delta$ με μήκος πλευράς ℓ , το οποίο ταξιδεύει με σταθερή ταχύτητα v κατά τη θετική φορά του άξονα Y . Έστω ότι, όπως φαίνεται στο σχήμα, το κέντρο του πλαισίου τέμνει τον άξονα Z στο σημείο z . Πώς θα δει ο παρατηρητής το κινούμενο πλαίσιο;



Για 50 περίπου χρόνια μετά τη διατύπωση της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας από τον Einstein σε όλα τα συγγράμματα διατυπώνεται η άποψη ότι ο παρατηρητής θα δει μια συστολή των πλευρών AB και $\Delta\Gamma$ σύμφωνα με την πρόβλεψη της εξ. (2.16). Ο Torrell όμως

παρατήρησε ότι το φως χρειάζεται περισσότερο χρόνο για να φτάσει στον παρατηρητή από το σημείο Δ, απ' ό τι από το σημείο Α. Έτσι, σε μια δεδομένη στιγμή, όταν ο παρατηρητής βλέπει το σημείο Α, ταυτοχρόνως βλέπει το φως που εκπέμφθηκε από το σημείο Δ, όταν αυτό βρισκόταν στο σημείο Ε. Η επιπλέον απόσταση ΔΕ που ταξιδεύει το φως είναι ίση με

$$\Delta E = \frac{v}{c} = \beta \ell$$

έτσι ώστε ο παρατηρητής να βλέπει την πλευρά ΑΔ του πλαισίου υπό μια γωνία

$$\theta = \sin^{-1} \beta .$$

Επιπλέον, η συστολή Lorentz-FitzGerald μειώνει το μήκος της πλευράς ΑΒ κατά τον παράγοντα $1/\gamma$. Η εικόνα του πλαισίου που τελικά φτάνει στον παρατηρητή περιέχεται στο προηγούμενο σχήμα και ισοδυναμεί με περιστροφή του όλου πλαισίου κατά τη γωνία θ .

Ο αναγνώστης μπορεί να βρει πολλά παραδείγματα στη βιβλιογραφία σχετικά με τη φαινομενική παραμόρφωση του σχήματος σωμάτων όταν αυτά κινούνται με μεγάλες ταχύτητες. Μια εξαιρετική ανασκόπηση του θέματος έχει δοθεί από τον V.F. Weisskopf [V.F. Weisskopf, *Physics Today* 13, No. 9 (1960) 24]. Παρ' όλα αυτά, η ανάλυση του φαινομένου κρύβει αρκετές παγίδες και έχει οδηγήσει στο παρελθόν σε λανθασμένα αποτελέσματα. Για παράδειγμα, το αποτέλεσμα ότι ένας παρατηρητής βλέπει ένα κινούμενο κύκλο ως έλλειψη [βλ., π.χ., G. Joos and I.M. Freeman, *Theoretical Physics*, 2nd ed., Hafner, 1950], είναι λάθος. Ένας κινούμενος κύκλος, όσον αφορά οποιοδήποτε παρατηρητή, παραμένει κύκλος [V.F. Weisskopf, *op. cit.*].



παραγράφου, οι οποίοι, καθώς τα δύο αδρανειακά συστήματά τους ταξιδεύουν με σχετική ταχύτητα V , θέλουν τώρα να συγκρίνουν τα χρονόμετρά τους. Συγκεκριμένα, θέλουν να συγκρίνουν το χρονικό διάστημα που παρατηρεί ο καθένας μεταξύ δύο γεγονότων που στο σύστημα OXYZ συμβαίνουν στο ίδιο σημείο, αλλά διαδοχικά σε χρόνους t_1 και t_2 , δηλαδή αφού στο μεταξύ έχει παρέλθει χρονικό διάστημα $T_0 = t_2 - t_1$. Σύμφωνα με το μετασχηματισμό των εξ. (2.12), ο παρατηρητής O' θα δει ότι τα δύο αυτά γεγονότα έλαβαν χώρα όχι μόνον σε διαφορετικά σημεία του χώρου, αλλά και σε διαφορετικούς χρόνους, με μεταξύ τους χρονικό διάστημα

$$t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - t_1) \quad (2.18)$$

ή

$$T = \gamma T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}. \quad (2.19)$$

Με άλλα λόγια, οι δύο παρατηρητές διαφωνούν για τη διάρκεια του χρόνου μεταξύ των δύο γεγονότων. Το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο γεγονότων που έλαβαν χώρα στο ίδιο σημείο στο σύστημα αναφοράς του παρατηρητή O εμφανίζεται μεγαλύτερο σε ότι αφορά τον παρατηρητή στο σύστημα αναφοράς O'. Θα αναφερθούμε στη διαπίστωση αυτή με τον όρο **διαστολή του χρόνου**.

Όπως και με τη συστολή του μήκους, το φαινόμενο της διαστολής του χρόνου έχει ανεπαίσθητες επιπτώσεις για ταχύτητες που συνήθως απαντώνται στη γη. Αν επανέλθουμε στο υπερηχητικό Concorde, η διαφορά σε χρονικά διαστήματα που μετρά ένας επιβάτης του και ένας παρατηρητής στη γη δίνονται πάλι από τον δεύτερο παράγοντα στην προσέγγιση της εξ. (2.17)



$$\Delta T \cong \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2}. \quad (2.20)$$

Αν το Concorde ταξιδεύει με ταχύτητα διπλάσια από την ταχύτητα του ήχου, ο όρος V/c παίρνει την τιμή 2×10^{-6} , έτσι ώστε για να καταγραφεί διαφορά στο χρόνο $\Delta T = 1$ s το αεριωθούμενο θα πρέπει να ταξιδεύει επί 0.5×10^{12} s, ήτοι επί 16000 χρόνια! Σε ένα σύνηθες υπερατλαντικό ταξίδι, το ρολόι του κυβερνήτη θα υστερήσει από τα ρολόγια των αεροδρομίων περίπου 20 ns (20×10^{-9} s).

Το φαινόμενο που μόλις περιγράψαμε εμπεριέχει εκ πρώτης όψεως μια σημαντική φιλοσοφική δυσκολία. Η διαστολή του χρόνου που φαινομενικά καταγράφεται από τους δύο παρατηρητές συνεπάγεται ότι το χρονόμετρο του παρατηρητή Ο «πάει λίγο πίσω» σε σχέση με το χρονόμετρο του παρατηρητή Ο'. Στην καθημερινή ζωή, αλλά και στο εργαστήριο, χρησιμοποιούνται διάφοροι τύποι ρολογιών, από το κουρδιστό ξυπνητήρι, το εκκρεμές από την εποχή του παππού στο σαλόνι, το ηλεκτρικό ρολόι τοίχου στο γραφείο, μέχρι ηλεκτρονικά χρονόμετρα και χρονόμετρα που βασίζονται σε μεταπτώσεις μεταξύ ατομικών ενεργειακών καταστάσεων. Πώς είναι δυνατόν όλοι οι τύποι αυτών των χρονομέτρων να εμφανίζουν την ίδια διαστολή του χρόνου, ανεξάρτητα από τον τρόπο κατασκευής και λειτουργίας τους; Η απάντηση στο ερώτημα πρέπει να αναζητηθεί όχι στην λεπτομερή κατασκευή κάθε ρολογιού, αλλά στους νόμους της φύσης που διέπουν τη λειτουργία του. Αν οι νόμοι της φύσης παραμένουν αναλλοίωτοι με το μετασχηματισμό Lorentz, τότε αυτομάτως ο ρυθμός καταγραφής του χρόνου από όλα τα χρονόμετρα που λειτουργούν με τους νόμους αυτούς θα μεταβάλλεται σύμφωνα με τις επιταγές του μετασχηματισμού Lorentz. Εκείνο επομένως που πρέπει να εξετάσουμε είναι το κατά πόσον οι νόμοι της μηχανικής και οι νόμοι του ηλεκτρομαγνητισμού, στους οποίους βασίζεται η λειτουργία των χρονομέτρων, παραμένουν αναλλοίωτοι



με το μετασχηματισμό Lorentz. Στο θέμα αυτό θα επανέλθουμε στα κεφάλαια 4 και 5.

2-3.3 ΧΡΟΝΙΚΗ ΚΑΙ ΧΩΡΙΚΗ ΣΥΜΠΤΩΣΗ

Μια έννοια που θα πρέπει να αναθεωρήσουμε στα πλαίσια της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας είναι και η σύμπτωση δύο γεγονότων, τόσο ως προς το χώρο όσο και ως προς το χρόνο. Ας θεωρήσουμε για το σκοπό αυτό δύο γεγονότα που κατά τον παρατηρητή του συστήματος αναφοράς O συμβαίνουν σε δύο διαφορετικούς χρόνους t_1 και t_2 σε σημεία του χώρου με συνιστώσες αντίστοιχα (x_1, y_1, z_1) και (x_2, y_2, z_2) , ήτοι με διαφορά χρόνου

$$\Delta t = t_2 - t_1 \quad (2.21)$$

και σε απόσταση κατά τον άξονα X

$$\Delta x = x_2 - x_1. \quad (2.22)$$

Σύμφωνα με τις εξ. (2.10), ο παρατηρητής O' θα μετρήσει ότι τα δύο γεγονότα συνέβησαν με διαφορά χρόνου

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t + \frac{\beta \Delta x}{c} \right) \quad (2.23)$$

και σε χωρική απόσταση

$$\Delta x' = \gamma (\Delta x + \beta c \Delta t). \quad (2.24)$$

Ακόμη και αν τα δύο γεγονότα συμβούν ταυτόχρονα στο σύστημα αναφοράς $OXYZ$ ($\Delta t = 0$), ο παρατηρητής O' θα μετρήσει ένα χρονικό διάστημα

$$\Delta t' = \frac{\gamma \beta \Delta x}{c} = \frac{V \Delta x}{c^2} \quad (2.25)$$

μεταξύ των δύο γεγονότων που εξαρτάται από τη χωρική τους απόσταση.

Κατά τον ίδιο τρόπο, αν κατά τον παρατηρητή Ο τα δύο γεγονότα συμβαίνουν στο ίδιο σημείο του χώρου ($\Delta x = 0$), ο παρατηρητής Ο' θα τα δει να συμβαίνουν σε διαφορετικά σημεία, με μεταξύ τους απόσταση κατά τον άξονα Χ'

$$\Delta x' = \gamma \beta c \Delta t = \frac{V \Delta t}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}. \quad (2.26)$$

Στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας θα πρέπει επομένως να συμβιβαστούμε με το γεγονός ότι η έννοια της σύμπτωσης είναι έννοια σχετική. Γεγονότα που σε ένα σύστημα αναφοράς συμπίπτουν χρονικά ή συμβαίνουν στο ίδιο σημείο του χώρου, σε άλλα αδρανειακά συστήματα αναφοράς μπορεί να συμβαίνουν σε διαφορετικό χρόνο ή σε διαφορετικά σημεία του χώρου.

2-3.4 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ

Στη νευτώνεια μηχανική η ταχύτητα που μετρούν δύο παρατηρητές σε δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς υπακούει στο νόμο του απλού ανυσματικού αθροίσματος. Αν μέσα σε ένα τραίνο που τρέχει με ταχύτητα V ένας επιβάτης κινείται με ταχύτητα v , ένας παρατηρητής στο έδαφος θα μετρήσει την ταχύτητα του επιβάτη ως

$$v' = V + v. \quad (2.27)$$

Κατ' επέκταση, για ένα παρατηρητή στον ήλιο, η ταχύτητα του επιβάτη είναι



$$\mathbf{v}' = \mathbf{V}_s + \mathbf{V} + \mathbf{v} \quad (2.28)$$

όπου $\mathbf{V}_s$ είναι η σχετική ταχύτητα της γης ως προς τον ήλιο. Είναι αμέσως φανερό ότι ο νόμος αυτός της απλής ανυσματικής άθροισης των ταχυτήτων δεν μπορεί να είναι σωστός. Διότι αν οι ταχύτητες που υπεισέρχονται στην εξ. (2.27) είναι αρκετά μεγάλες ή αν διαδοχικά αθροισθούν μεγάλες ταχύτητες όπως στην εξ. (2.28), είναι δυνατόν σε κάποιο αδρανειακό σύστημα να μετρηθεί ταχύτητα μεγαλύτερη από αυτή του φωτός – και έχουμε δει ότι κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατό στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας.

Για τον σωστό μετασχηματισμό της ταχύτητας από ένα αδρανειακό σύστημα σε ένα άλλο θα επιστρατεύσουμε το μετασχηματισμό Lorentz των εξ. (2.10). Ας θεωρήσουμε για το σκοπό αυτό ότι στο σημείο P του σχήματος 2.2 βρίσκεται ένα σώμα που κινείται παράλληλα προς τον κοινό άξονα X, X' με ταχύτητα

$$u = u_x = \frac{dx}{dt} \quad (2.29)$$

όπως μετρά την ταχύτητα ο παρατηρητής O (ο παρατηρητής στο σύστημα αναφοράς του τραίνου στο προηγούμενο παράδειγμα). Σύμφωνα με τις εξ. (2.12), ο παρατηρητής O' μετρά για τα στοιχεία του μήκους και του χρόνου dx' και dt' τις ποσότητες

$$dx' = \gamma(dx + \beta c dt) = \gamma(dx + V dt) \quad (2.30\alpha)$$

$$dt' = \gamma\left(dt + \frac{\beta dx}{c}\right) = \gamma\left(dt + \frac{V dx}{c^2}\right) \quad (2.30\beta)$$

και επομένως μετρά την ταχύτητα του σώματος ως

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx + V dt}{dt + V dx / c^2} = \frac{\frac{dx}{dt} + V}{1 + \frac{V}{c^2} \frac{dx}{dt}}$$

ή

$$u'_x = \frac{u_x + V}{1 + u_x V / c^2} \quad (2.31)$$

Σε αντίθεση με την εξ. (2.27), η πρόσθεση δύο ταχυτήτων μέσω της εξ. (2.31) οδηγεί σε ταχύτητα μικρότερη απ' αυτή του απλού τους αθροίσματος και σε ταχύτητα μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία μπορούμε να επεκτείνουμε την εξ. (2.31) στην περίπτωση που η ταχύτητα u έχει τυχαία διεύθυνση προς τον κοινό άξονα X, X' των δύο συστημάτων αναφοράς O και O' . Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι οι τρεις συνιστώσες της ταχύτητας u στο σύστημα O δίνονται από τις σχέσεις

$$u'_x = \frac{u_x + V}{1 + u_x V / c^2} \quad (2.32\alpha)$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 + u_x V / c^2)} \quad (2.32\beta)$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 + u_x V / c^2)} \quad (2.32\gamma)$$

2-3.5 ΩΚΥΤΗΤΑ

Η πρόσθεση ταχυτήτων στη Θεωρία της Σχετικότητας, όπως εκφράζεται στις εξ. (2.32) είναι σχετικά πολύπλοκη. Το γεγονός αυτό έχει οδηγήσει στην εισαγωγή ενός νέου φυσικού μεγέθους που αποδίδει



εξίσου καλά τον ρυθμό κίνησης ενός σώματος αλλά εμφανίζει γραμμική συμπεριφορά. Η **ωκύτητα** r ενός σωματίου* που ταξιδεύει με ταχύτητα v ορίζεται μέσω της σχέσης

$$r = c \tanh(v/c) \quad (2.33)$$

όπου η υπερβολική εφαπτομένη είναι η συνάρτηση

$$\tanh(\alpha) = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}} \quad (2.34)$$

η οποία απεικονίζει τους πραγματικούς αριθμούς στο διάστημα $(-1, 1)$. Έτσι, ενώ η ταχύτητα περιορίζεται στο διάστημα $(-c, c)$, η ωκύτητα παίρνει τιμές στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Η χρησιμότητα του νέου φυσικού μεγέθους οφείλεται στην ταυτότητα της τριγωνομετρίας

$$\tanh(\alpha + \beta) = \frac{\tanh(\alpha) + \tanh(\beta)}{1 + \tanh(\alpha) \tanh(\beta)} \quad (2.35)$$

που θυμίζει έντονα την εξ. (2.31). Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι αν οι ωκύτητες r και s αντιστοιχούν στις ταχύτητες v και u , η ολική ωκύτητα δίνεται από την απλή σχέση

$$t = r + s \quad (2.36)$$

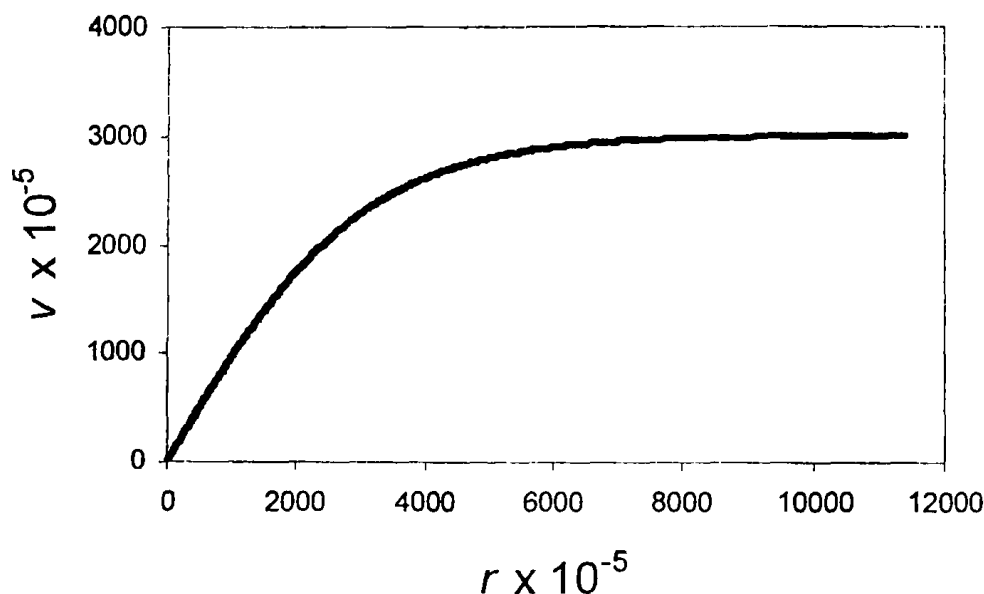
που συνδέεται με την ταχύτητα w μέσω της σχέσης

$$t = c \tanh(w/c). \quad (2.37)$$

Από την εξ. (2.33) είναι εύκολο να επαληθευθεί ότι για χαμηλές

* Στην αγγλοσαξονική βιβλιογραφία ο όρος *ωκύτητα* αποδίδεται ως *rapidity*.





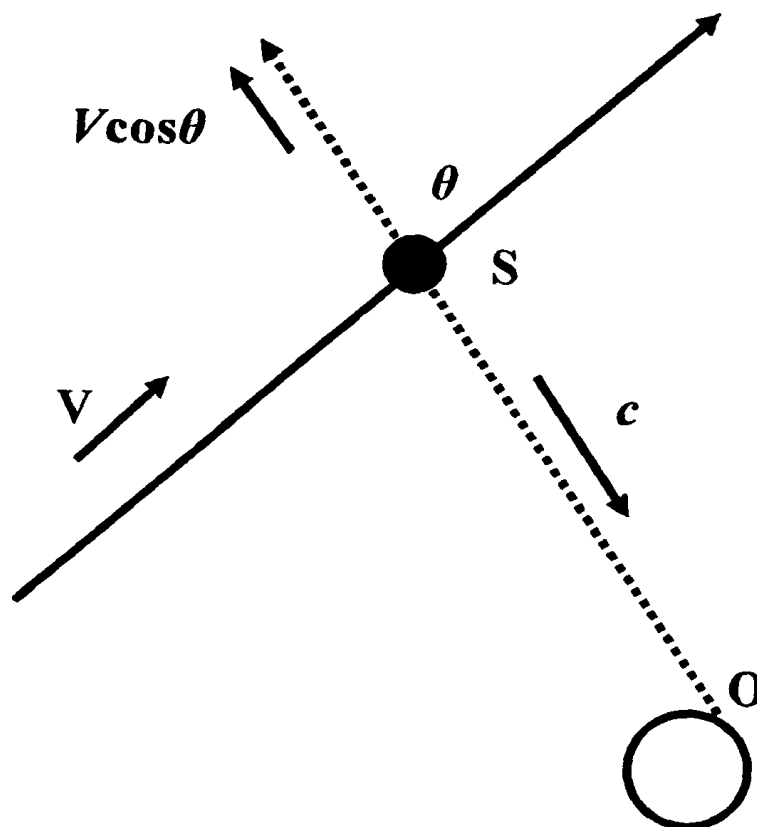
Σχήμα 2.3 Γραφική παράσταση της ταχύτητας ως προς την ωκύτητα ενός σωματίου. Η κλίμακα κάθε άξονα έχει διαιρεθεί με τον παράγοντα 10^5 .

ταχύτητες η αριθμητική τιμή της ωκύτητας δεν διαφέρει πολύ απ' αυτήν της ταχύτητας. Για μεγάλες όμως ταχύτητες οι τιμές των δύο φυσικών μεγεθών διαφέρουν δραστικά. Όπως δείχνει η γραφική παράσταση του σχήματος 2.3, η τιμή της ωκύτητας μπορεί να αυξηθεί απεριόριστα, ενώ η αντίστοιχη ταχύτητα δεν υπερβαίνει ποτέ την τιμή της ταχύτητας του φωτός $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

Η έννοια της ωκύτητας χρησιμοποιείται συχνά στην τεχνολογία των γραμμικών επιταχυντών, όπου ένα στοιχειώδες σωματίο επιταχύνεται με συνεχείς μικρές ωθήσεις από ένα επαναλαμβανόμενο ηλεκτρικό πεδίο. Αν κάθε ώθηση προσπαθεί να προσθέσει μια συγκεκριμένη ταχύτητα v στην ταχύτητα V που ήδη έχει αναπτύξει το σωματίο, τότε μετά από n ωθήσεις η ωκύτητα του σωματίου θα είναι

$$nr = cn \tanh(v/c) \quad (2.38)$$

που αντιστοιχεί σε ταχύτητα



Σχήμα 2.4 Ο αστέρας S κινείται με ταχύτητα V ως προς τη γη, ενώ η σχετική του ταχύτητα ως προς τον παρατηρητή O κατά τη διεύθυνση που μεταδίδεται η ακτινοβολία είναι $V \cos \theta$.

$$w = c \tanh[n \tanh^{-1}(v/c)]. \quad (2.39)$$

2-4 Το φαινόμενο Doppler

Το φαινόμενο Doppler είναι γνωστό από την ακουστική όπου εκδηλώνεται με την αύξηση του τόνου ενός ήχου όταν ένας παρατηρητής πλησιάζει την πηγή του ήχου και τη μείωση του τόνου όταν ο παρατηρητής απομακρύνεται από την πηγή. Το φαινόμενο περιγράφεται ποσοτικά από τη σχέση

$$f_L = f_s \left(1 \pm \frac{V_L}{c} \right) \quad (2.40)$$

όπου f_L είναι η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής όταν κινείται προς ή μακριά από την πηγή του ήχου, f_S η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής όταν είναι ακίνητος, V_L είναι η σχετική κίνηση παρατηρητή-πηγής και, προσωρινά, έχουμε χρησιμοποιήσει το σύμβολο c για την ταχύτητα του ήχου. Το εναλλακτικό σημείο της πράξης $\pm$ αφορά σε προσέγγιση ή απομάκρυνση του παρατηρητή από την πηγή του ήχου.

Η εξ. (2.40) προέρχεται από την εφαρμογή του μετασχηματισμού του Γαλιλαίου και αποδίδει το φαινόμενο με μεγάλη ακρίβεια καθ' όσον η ταχύτητα του ήχου στη γήινη ατμόσφαιρα είναι σχετικά μικρή ($c \cong 350 \text{ m s}^{-1}$). Στην περίπτωση όμως της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, η οποία ταξιδεύει με την ταχύτητα του φωτός, θα πρέπει να επιστρατευθεί ο μετασχηματισμός Lorentz. Ας θεωρήσουμε για το σκοπό αυτό, όπως δείχνει το σχήμα 2.4, έναν απομακρυσμένο αστέρα S, ο οποίος εκπέμπει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία ισοτροπικά στο διάστημα. Η ακτινοβολία που θα παρατηρήσει ένας παρατηρητής O πάνω στη γη, θα προέρχεται από μια διεύθυνση που σχηματίζει γωνία θ ως προς την ταχύτητα V του αστέρα. Κατά τη διεύθυνση αυτή, ο παρατηρητής θα δει τον αστέρα να απομακρύνεται με ταχύτητα $V \cos \theta$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο παρατηρητής O μετρά την περίοδο της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που φτάνει στη γη, δηλαδή, για παράδειγμα, το χρονικό διάστημα t μεταξύ δύο μεγίστων του ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Το χρονικό αυτό διάστημα είναι η περίοδος T της ακτινοβολίας στο σύστημα αναφοράς του παρατηρητή συν η καθυστέρηση με την οποία φτάνει ένα μέγιστο σε σχέση με το προηγούμενο λόγω του ότι στο μεταξύ ο αστέρας έχει απομακρυνθεί κατά μian απόσταση $V \cos \theta T$, ήτοι

$$t = T + \frac{V \cos \theta T}{c} = T(1 + \beta \cos \theta) \quad (2.41)$$



Από την εξ. (2.19) όμως, στο σύστημα του παρατηρητή, η περίοδος της ακτινοβολίας θα εμφανίζει μια διαστολή χρόνου σε σχέση με την περίοδο T_0 στο σύστημα αναφοράς του αστερά

$$T = \gamma T_0. \quad (2.19)$$

Έτσι, η εξ. (2.41) μπορεί να γραφεί ως

$$t = T_0 \gamma (1 + \beta \cos \theta). \quad (2.42)$$

Αυτή είναι τελικά και η περίοδος της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που θα μετρήσει ο παρατηρητής Ο. Αν επιπλέον χρησιμοποιηθεί η σχέση μεταξύ συχνότητας και περιόδου

$$f = \frac{1}{T} \quad (2.43)$$

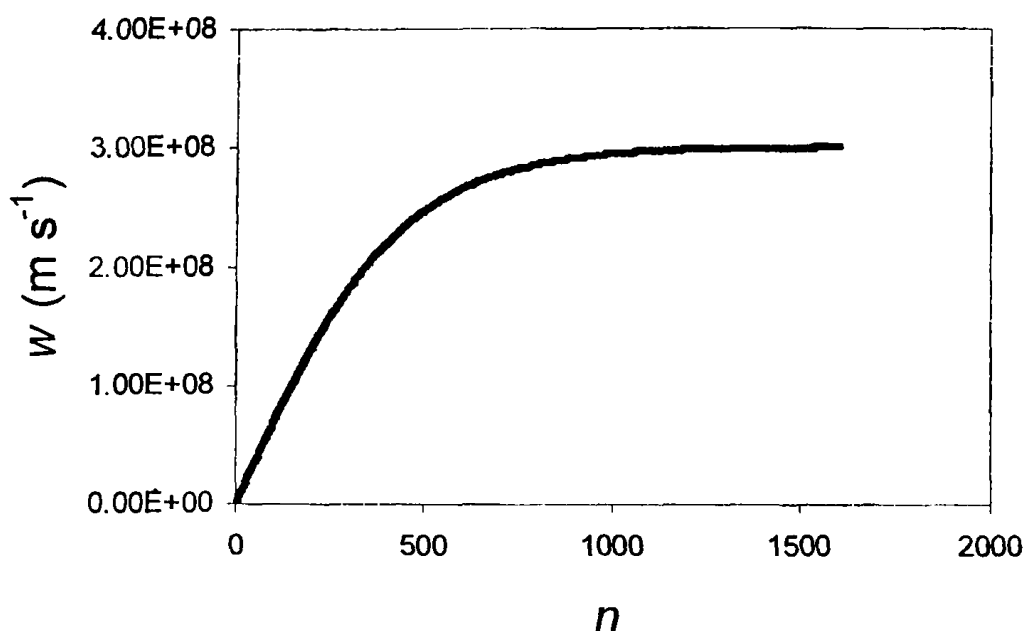
η εξ. (2.41) μπορεί να γραφεί ως

$$f = \frac{f_0}{\gamma (1 + \beta \cos \theta)} \quad (2.44)$$

όπου f είναι η συχνότητα που μετρά ο παρατηρητής Ο και f_0 η συχνότητα που μετράται όταν η πηγή της ακτινοβολίας βρίσκεται ακίνητη ως προς τον παρατηρητή. Η εξ. (2.44) είναι γνωστή ως η **σχετικιστική σχέση Doppler**.

Η εξ. (2.44) προβλέπει μείωση της φαινομενικής συχνότητας της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας αστερών που απομακρύνονται ($0 < \theta < 90^\circ$) από τη γη (προκειμένου περί φωτός, μετατόπιση προς το ερυθρό) και αύξηση της φαινομενικής συχνότητας της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας αστερών που την πλησιάζουν. Καθ' όσον οι περισσότεροι αστέρες απομακρύνονται από τη γη λόγω του συνεχώς





Σχήμα 2.5 Η ολική ταχύτητα w που αποκτά ένα ηλεκτρόνιο μετά από n διαδοχικές προσθέσεις μικρών ταχυτήτων v .

διαστελλόμενου σύμπαντος, στην αστρονομία έχει επικρατήσει ο όρος *ερυθρά μετατόπιση*. Για αστέρες που πλησιάζουν, έστω και υπό γωνία, τη γη ($90^\circ < \theta < 180^\circ$), η εξ. (2.44) προβλέπει αύξηση της φαινομενικής συχνότητας (προκειμένου περί φωτός, μετατόπιση προς το ιώδες). Μέσω της ποσότητας κατά την οποία μετατίθεται η συχνότητα είναι τώρα δυνατόν να εξαχθεί η ταχύτητα με την οποία ένας αστέρας απομακρύνεται από τη γη ή κινείται σε σχέση με έναν άλλο αστέρα. Παρατηρείται ότι για κίνηση του αστέρα με διεύθυνση κάθετη προς τη διεύθυνση εκπομπής της ακτινοβολίας ($\theta = 90^\circ$), η εξ. (2.44) προβλέπει

$$f = \frac{f_0}{\gamma} \quad (2.45)$$

ήτοι μετατόπιση της συχνότητας κατά την ποσότητα που επιβάλλει η διαστολή χρόνου της εξ. (2.19).

2-5 Πειραματική επαλήθευση του μετασχηματισμού Lorentz

Όπως ήδη αναφέρθηκε αρκετές φορές, οι ταχύτητες που συναντούμε στην καθημερινή ζωή είναι αρκετά μικρές ώστε ο μετασχηματισμός του Γαλιλαίου να αποτελεί εξαιρετικά καλή προσέγγιση του μετασχηματισμού Lorentz. Τα πράγματα πάνω στη γη εξελίσσονται αρκετά αργά ώστε να είναι εμφανείς οι διαφορές μεταξύ των δύο μετασχηματισμών. Ακόμη και η εξερεύνηση του διαστήματος που άρχισε δειλά πριν από μερικές δεκαετίες, στο άμεσα ορατό μέλλον θα πραγματοποιείται με ταχύτητες που κατά πολύ υπολείπονται της ταχύτητας του φωτός. Αντίθετα, στο χώρο των στοιχειωδών σωματίων που παρατηρούνται με τα σύγχρονα εργαστηριακά μέσα στην έρευνα του μικρόκοσμου των ατόμων και των πυρήνων, συχνά απαιτούμε ταχύτητες που επιτρέπουν τον λεπτομερή ποσοτικό έλεγχο της Θεωρίας της Σχετικότητας. Η διαστολή του χρόνου και ο νόμος πρόσθεσης ταχυτήτων έχει από καιρού ελεγχθεί αν και, απ' όσο γνωρίζει ο συγγραφέας του παρόντος βιβλίου, μέχρι σήμερα δεν έχει επινοηθεί τρόπος για την άμεση παρατήρηση της συστολής του μήκους ή της έννοιας της χωρικής και χρονικής σύμπτωσης.

Η διαστολή του χρόνου γίνεται ποσοτικά εμφανής με τη μεταβολή του μέσου χρόνου ζωής* ασταθών σωματίων όταν αυτά κινούνται με μεγάλες ταχύτητες σε σχέση με τον παρατηρητή. Για παράδειγμα, το π μεσόνιο, ένα ασταθές στοιχειώδες σωματίο, όταν παρατηρείται εν στάσει, έχει μέσο χρόνο ζωής $\tau = 2.6 \times 10^{-8}$ s. Αν το π μεσόνιο τεθεί σε κίνηση από ένα επιταχυντή ώστε να αποκτήσει ενέργεια†

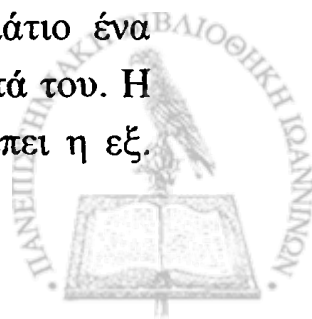
* Ο μέσος χρόνος ζωής τ ενός ασταθούς σωματίου ορίζεται ως $\tau = 1/\lambda$, όπου λ είναι η πιθανότητα ώστε το σωματίο που παρακολουθεί ένας παρατηρητής να μεταλλαχθεί στην επόμενη μονάδα του χρόνου.

† Η μονάδα ενέργειας eV ορίζεται ως η κινητική ενέργεια που αποκτά ένα ηλεκτρόνιο όταν αυτό επιταχύνεται σε διαφορά δυναμικού 1 V. Πολλαπλάσια της μονάδας eV, που αντιπροσωπεύει μικρό ποσό ενέργειας, είναι το keV (10^3 eV), το MeV (10^6 eV) και το GeV (10^9). Θα χρησιμοποιήσουμε ευρέως τη μονάδα eV και τα πολλαπλάσιά της στο Κεφάλαιο 4.



της τάξης του ενός GeV (ταχύτητα περίπου ίση με $0.99c$), ο μέσος χρόνος ζωής του που μετρά ένας παρατηρητής στο εργαστήριο αυξάνει κατά ένα παράγοντα του επτά. Η διαστολή του μέσου χρόνου ζωής ασταθών σωματίων υψηλής ενέργειας είναι εύκολα παρατηρήσιμη, έχει δε σημαντικές επιπτώσεις στη συμπεριφορά της κοσμικής ακτινοβολίας που αενάως βομβαρδίζει τον πλανήτη μας. Ένα μεγάλο ποσοστό της κοσμικής ακτινοβολίας αποτελείται από εξαιρετικά ενεργειακά πρωτόνια, τα οποία στα ανώτερα στρώματα της γήινης ατμόσφαιρας αλληλεπιδρούν με τους πυρήνες του οξυγόνου και του αζώτου και δημιουργούν π μεσόνια. Παρόλη τη διαστολή του μέσου χρόνου ζωής τους ($\tau = 2.6 \times 10^{-8}$ s), τα βραχύβια π μεσόνια ταξιδεύουν σχετικά μικρή απόσταση και γρήγορα μεταλλάσσονται σε μ μεσόνια, ένα άλλο ασταθές σωματίο με μεγαλύτερο όμως μέσο χρόνο ζωής κατά περίπου δύο τάξεις μεγέθους ($\tau = 2.2 \times 10^{-6}$ s). Ακόμη κι αν κινούνταν με ταχύτητα περίπου ίση με την ταχύτητα του φωτός, ο μικρός αυτός χρόνος θα τους επέτρεπε να ταξιδέψουν μέσα στην ατμόσφαιρα σε μια απόσταση μικρότερη του ενός χιλιομέτρου προτού εκλείψουν. Η διαστολή όμως του μέσου χρόνου ζωής που προβλέπει η Θεωρία της Σχετικότητας, επιτρέπει στα μ μεσόνια να ταξιδέψουν αρκετά μεγάλες αποστάσεις και να φτάσουν στην επιφάνεια της γης με τη σημαντική ροή των περίπου 500 μ μεσονίων ανά τετραγωνικό μέτρο ανά δευτερόλεπτο.

Ο νόμος πρόσθεσης ταχυτήτων της Παραγράφου 2-3.4 επαληθεύεται επακριβώς κατά τη λειτουργία σύγχρονων επιταχυντών που παράγουν δέσμες φορτισμένων σωματίων για την έρευνα στην Πυρηνική Φυσική ή στη Φυσική Στοιχειωδών Σωματίων. Όπως ήδη περιγράφηκε, σε ένα γραμμικό επιταχυντή, φορτισμένα σωματΙΑ επιταχύνονται με συνεχείς μικρές ωθήσεις από ένα επαναλαμβανόμενο ηλεκτρικό πεδίο. Κάθε ώθηση προσθέτει στο σωματίο ένα σταθερό ποσό κινητικής ενέργειας και αυξάνει την ταχύτητά του. Η αύξηση όμως της ταχύτητας του σωματίου, όπως προβλέπει η εξ.

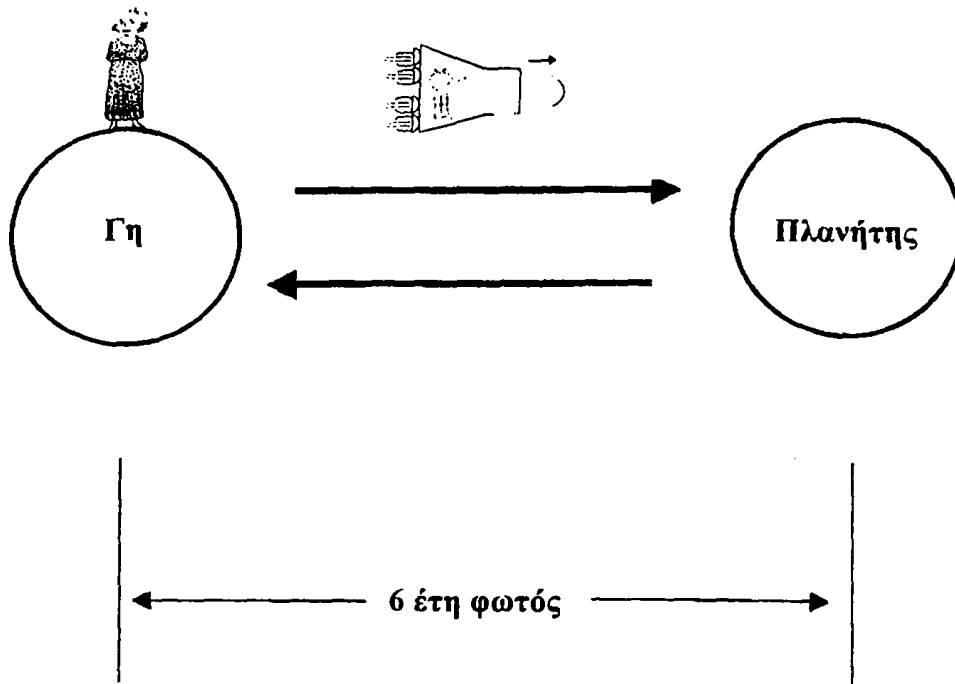


(2.31), πραγματοποιείται με ρυθμό που σταδιακά μειώνεται. Μετά από n ώθησεις, η ταχύτητα w του σωματίου δίνεται από την εξ. (2.39). Όπως φαίνεται στη γραφική παράσταση του σχήματος 2.5, αρχικά, η ταχύτητα μεταβάλλεται σχεδόν γραμμικά, ενώ στη συνέχεια κάθε ώθηση προσθέτει και μικρότερο ποσοστό ταχύτητας. Για παράδειγμα, προσθήκη ταχύτητας $v = 0.0023c$ μετά την εικοστή δεύτερη ώθηση, όταν το ηλεκτρόνιο έχει αναπτύξει ταχύτητα $w = 0.05c$ αυξάνει την ταχύτητά του σχεδόν καθ' όλη την πρόσθετη ταχύτητα $v (= 0.0023c)$, ενώ κατά τη χιλιοστή ώθηση, όταν το σωματίο έχει πλέον αναπτύξει ταχύτητα $w = 0.98c$, ένας παρατηρητής στο εργαστήριο θα δει την ταχύτητα να αυξάνει μόνον κατά $0.00009c$. Οι προβλέψεις αυτές είναι εύκολο να επαληθευθούν στο εργαστήριο.

Το σχετικιστικό φαινόμενο Doppler που μελετήσαμε στην Παράγραφο 2-4, όχι μόνον επιβεβαιώνεται εύκολα στο εργαστήριο, αλλά και χρησιμοποιείται ευρέως στη σύγχρονη τεχνολογία – ακόμη και στην καθημερινή ζωή. Η τροχιά ενός τεχνητού δορυφόρου γύρω από τη γη μπορεί να παρακολουθηθεί από τη μετατόπιση συχνότητας μιας μονοχρωματικής ακτινοβολίας σταθερής συχνότητας που εκπέμπει ο δορυφόρος. Παρόμοια τεχνική χρησιμοποιεί και η αστυνομία για τον έλεγχο της ταχύτητας των αυτοκινήτων. Μια συσκευή, συνήθως σε ένα σταθμευμένο περιπολικό στην άκρη του δρόμου, εκπέμπει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία προς ένα κινούμενο αυτοκίνητο, από το οποίο ανακλάται και επιστρέφει στη συσκευή. Η μετατόπιση της συχνότητας που μετρά η συσκευή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό της ταχύτητας του αυτοκινήτου και την επιβολή, αν χρειάζεται, του ανάλογου προστίμου.

Παρ' όλα αυτά, τα εκ πρώτης όψεως αντίθετα προς την κοινή λογική αποτελέσματα της εφαρμογής του μετασχηματισμού Lorentz οδήγησαν μετά τη διατύπωση της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας στην επινόηση ορισμένων «ιδεατών πειραμάτων», τα οποία ήταν δυνατόν να οδηγήσουν σε αποτελέσματα που προφανώς αντιβαίνουν





Σχήμα 2.6 Σχηματική παράσταση του ταξιδιού στο παράδοξο των διδύμων. Το διάγραμμα δεν έχει βεβαίως σχεδιαστεί υπό κλίμακα.

στη λογική. Τα ιδεατά αυτά πειράματα, που έμειναν στην ιστορία ως *παράδοξα*, αρχίζουν συνήθως με τη φράση: «Ας θεωρήσουμε ένα όχημα που ταξιδεύει με ταχύτητα κοντά στην ταχύτητα του φωτός...». Το πιο γνωστό ίσως απ' αυτά είναι το *παράδοξο των διδύμων*.

Το παράδοξο των διδύμων μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Ας θεωρήσουμε δύο δίδυμα αδέλφια, τον Γιάννη και την Ιωάννα. Ο Γιάννης ξεκινά για ένα μεγάλο ταξίδι στο διάστημα με ένα διαστημικό όχημα που ταξιδεύει με ταχύτητα πολύ κοντά στην ταχύτητα του φωτός, ενώ η Ιωάννα παραμένει στη γη. Μετά από μερικά χρόνια ο Γιάννης επιστρέφει. Όπως είδαμε στην Παράγραφο 2-3.2, λόγω της διαστολής του χρόνου, κατά τη διάρκεια του ταξιδιού του Γιάννη, τα χρονόμετρά του (και μαζί τους οι βιολογικές διεργασίες) καθυστερούν σε σχέση με αυτά της Ιωάννας. Τι απ' όλα θα συμβαί-

νει όταν επιστρέψει ο Γιάννης στη γη;

- (α) Θα είναι νεώτερος από την Ιωάννα;
- (β) Εφ' όσον η κίνηση είναι σχετική και ο Γιάννης κατά τη διάρκεια του ταξιδιού του παρατήρησε κι αυτός διαστολή του χρόνου στη γη, μήπως η Ιωάννα θα είναι νεώτερή του;
- (γ) Μήπως, λόγω του ότι και οι δύο δίδυμοι βλέπουν την ίδια διαστολή χρόνου, θα έχουν την ίδια ηλικία;

Ευθύς εξ' αρχής θα πούμε ότι η επιλογή (α) είναι η σωστή. Κατά την επιστροφή του στη γη, ο Γιάννης θα είναι όντως νεώτερος από την Ιωάννα. Ας δούμε γιατί, παρακολουθώντας με λεπτομέρεια κάθε φάση του ταξιδιού που διαγραμματικά δίνεται στο σχήμα 2.6.

Για να συγκεκριμενοποιήσουμε την ανάλυση, ας δεχτούμε ότι το διαστημόπλοιο το Γιάννη αναπτύσσει ταχύτητα $V = 0.6c$ και ότι προορισμός του είναι ένας πλανήτης 6 έτη φωτός μακριά από τη γη. Κατ' αρχάς δεν πρέπει να μας απασχολήσει η ανάπτυξη της ταχύτητας του διαστημοπλοίου κατά την αναχώρηση του Γιάννη από τη γη*. Αν η επιτάχυνση του διαστημοπλοίου είναι της τάξης των $3g$ (όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας), το διαστημόπλοιο θα χρειαστεί περίπου 70 ημέρες για να φτάσει την τελική του ταχύτητα – χρόνος αμελητέος σε σχέση με τη διάρκεια του ταξιδιού. Αν όμως αυτό δεν ικανοποιεί, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο Γιάννης διαθέτει υπεράνθρωπες ικανότητες, Μπορούμε να φανταστούμε ότι το διαστημόπλοιο έχει ήδη αναπτύξει ταχύτητα $0.6c$ και τη στιγμή που περνάει από τη γη, ο Γιάννης πηδάει μέσα από ένα ανοικτό φιλιστρίνι. Έτσι, ακαριαία μεταφέρεται από το σύστημα αναφοράς της γης

* Στο παρελθόν, το παράδοξο των διδύμων έχει απορριφθεί με το επιχείρημα ότι το ταξίδι του ενός αδελφού περιέχει περιόδους επιταχύνσεων που δεν είναι δυνατόν να χειριστεί η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας. Το επιχείρημα αυτό, όπως θα δούμε, αποδεικνύεται λανθασμένο.



στο σύστημα αναφοράς του διαστημοπλοίου. Μέσα στο διαστημόπλοιο, καθώς βλέπει τη σελήνη και τους πλανήτες να περνούν γρήγορα από το φιλιστρίνι του, λόγω της συστολής του μήκους, ο Γιάννης βλέπει τώρα ότι η απόσταση από τη γη μέχρι τον πλανήτη του προορισμού του είναι μόνο 4.8 έτη φωτός $[6 \cdot \sqrt{1 - 0.6^2}]$. Για να διανύσει αυτή την απόσταση θα χρειαστεί επομένως, σύμφωνα με το χρονόμετρό του, 8 έτη (4.8/0.6), σε διαφωνία με την Ιωάννα πάνω στη γη που υπολογίζει ότι το ταξίδι θα διαρκέσει 10 έτη (6.0/0.6).

Είναι ενδιαφέρον να δούμε τι συμβαίνει με τα χρονόμετρα των δύο αδελφών, τα οποία έχουν συγχρονίσει πάνω στη γη προτού ξεκινήσει ο Γιάννης. Στο φανταστικό αυτό ταξίδι θα θεωρήσουμε ότι οι δίδυμοι διαθέτουν δυνατά τηλεσκόπια, ώστε ο ένας να μπορεί να διαβάζει το χρονόμετρο του άλλου. Όταν ο Γιάννης φτάνει στο μακρινό πλανήτη, το χρονόμετρό του έχει καταγράψει τη διάρκεια του ταξιδιού ως 8 έτη. Το χρονόμετρο όμως της Ιωάννας στη γη έχει καταγράψει 16 έτη – 10 έτη που στο σύστημα αναφοράς της διήρκεσε το ταξίδι και 6 έτη που χρειάστηκε το φως για να της μεταφέρει την εικόνα του χρονομέτρου του Γιάννη από τον μακρινό πλανήτη. Συμπεραίνει επομένως ότι το χρονόμετρο του Γιάννη καταγράφει το χρόνο με το μισό ρυθμό απ' ότι το δικό της. Το αντίθετο συμβαίνει με τον Γιάννη. Όταν φτάνει στον πλανήτη βλέπει με το τηλεσκόπιό του στο χρονόμετρο της Ιωάννας να αναγράφεται η ώρα που αυτό έδειχνε πριν από 6 έτη (όσο χρειάζεται για να φτάσει το φως από τη γη στον πλανήτη). Βλέπει δηλαδή, ότι το χρονόμετρο της Ιωάννας έχει καταγράψει για τη διάρκεια του ταξιδιού του 4 έτη (10 – 6). Συμπεραίνει επομένως και αυτός ότι το χρονόμετρο της Ιωάννας καταγράφει το χρόνο με το μισό ρυθμό απ' ότι το δικό του.

Όταν φτάνει στον πλανήτη, το διαστημόπλοιο σταματά, κάνει στροφή 180° και αναπτύσσει ταχύτητα $V = 0.6c$ με προορισμό τη γη. Βεβαίως, η διαδικασία αυτή συνεπάγεται ένα χρονικό διάστημα επιβράδυνσης και επιτάχυνσης, το οποίο όμως μπορεί να θεωρηθεί



αμελητέο σε σχέση με τη διάρκεια του όλου ταξιδιού. Αν πάλι αυτό δεν ικανοποιεί, μπορούμε για μια ακόμη φορά να επικαλεστούμε τις υπεράνθρωπες ικανότητες του Γιάννη. Θα θεωρήσουμε ότι στην περιοχή του πλανήτη υπάρχει ένα δεύτερο διαστημόπλοιο, το οποίο κατευθύνεται από τον πλανήτη προς τη γη με ίση και αντίθετη ταχύτητα και όταν τα δύο διαστημόπλοια διασταυρώνονται ο Γιάννης πηδάει ακαριαία από το ένα στο άλλο.

Ο Γιάννης πραγματοποιεί το ταξίδι της επιστροφής, σύμφωνα με το χρονόμετρό του, σε όσο χρόνο έκανε για το πρώτο σκέλος του ταξιδιού από τη γη στον πλανήτη - σε 8 έτη. Όταν φτάσει στη γη, το χρονόμετρό του θα έχει καταγράψει συνολικά 16 έτη. Το χρονόμετρο της Ιωάννας θα έχει καταγράψει 20 έτη. Η Ιωάννα θα δει ότι το ταξίδι της επιστροφής συντελέστηκε μόνο σε 4 έτη, μια και όταν ο Γιάννης έφευγε από τον πλανήτη είχε δει ότι το χρονόμετρό της έδειχνε 16 έτη. Συμπεραίνει επομένως ότι το χρονόμετρο του Γιάννη καταγράφει το χρόνο με το μισό ρυθμό απ' ότι το δικό της. Αντίθετα, ο Γιάννης, ο οποίος όταν έφευγε από τον πλανήτη είχε δει το χρονόμετρο της Ιωάννας να γράφει 4 έτη και τώρα το βρίσκει να γράφει 20 έτη συμπεραίνει ότι το χρονόμετρο της Ιωάννας καταγράφει το χρόνο με το μισό ρυθμό απ' ότι το δικό του. Διαφωνούν επομένως για την ακρίβεια των χρονομέτρων τους. Συμφωνούν όμως ως προς ένα γεγονός. Ο Γιάννης είναι τώρα κατά 4 έτη νεώτερος.

Το βασικό ερώτημα βεβαίως είναι τι προκάλεσε αυτή τη διαφορά στην ηλικία των διδύμων. Η απάντηση βρίσκεται στη διαφορά της συμπεριφοράς μεταξύ του Γιάννη και της Ιωάννας ως προς τα τρία συστήματα αναφοράς που εμπλέκονται στο ιδεατό πείραμα - στη γη και στις δύο διαδρομές του διαστημοπλοίου. Καθ' όλη τη διάρκεια του εγχειρήματος, η Ιωάννα παρέμεινε στο ίδιο σύστημα αναφοράς (στη γη). Ο Γιάννης άλλαξε τρεις φορές συστήματα αναφοράς: όταν έφυγε από τη γη, όταν έφτασε στο μακρινό πλανήτη και όταν επέστρεψε στη γη. Γενικός κανόνας του μετασχηματισμού Lorentz είναι



ότι όταν κάποιος μεταπηδά από ένα αδρανειακό σύστημα σε ένα άλλο και στη συνέχεια επανέρχεται, ο χρόνος που καταγράφει το χρονόμετρό του υστερεί σε σχέση με το χρονόμετρο ενός παρατηρητή που ποτέ δεν εγκατέλειψε το αρχικό σύστημα αναφοράς.

Στην πραγματικότητα δεν υπάρχει τίποτε το παράδοξο στο παράδοξο των διδύμων. Η διαφοροποίηση στην ηλικία των δύο διδύμων είναι ένα ακόμη αποτέλεσμα της εφαρμογής του μετασχηματισμού Lorentz που αντιβαίνει στην καθημερινή εμπειρία – όπως η διαστολή του χρόνου και η συστολή του μήκους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 2-1 Επιλύστε το σύστημα των εξ. (2.7) ως προς A , B και γ .
- 2-2 Επιλύστε το σύστημα των εξ. (2.10) ως προς x' , y' , z' και t' και επιβεβαιώστε τις εξ. (2.12).
- 2-3 Σύμφωνα με την εξ. (2.16), ο παρατηρητής O' βλέπει ότι το πρότυπο μέτρο του παρατηρητή O έχει μειωθεί κατά τον παράγοντα $1/\gamma$. Δείξτε ότι το ίδιο βλέπει και ο παρατηρητής O ως προς τον παρατηρητή O' .
- 2-4 Σύμφωνα με την εξ. (2.19), ο παρατηρητής O' βλέπει ότι το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο γεγονότων που έλαβαν χώρα στο ίδιο σημείο στο σύστημα αναφοράς του παρατηρητή O είναι μεγαλύτερο απ' ότι το μετρά ο παρατηρητής O κατά τον παράγοντα γ . Δείξτε ότι το ίδιο βλέπει και ο παρατηρητής O ως προς τον παρατηρητή O' .
- 2-5 Περιγράψτε πώς ένας παρατηρητής μπορεί να συγχρονίσει το χρονόμετρό του με ένα χρονόμετρο που βρίσκεται σε απόσταση L .
- 2-6 Ένας παρατηρητής μετρά το μήκος ενός διαστημοπλοίου που κινείται ως προς αυτόν με ταχύτητα $0.8c$ ως 90 m. Πόσο είναι το μήκος



του διαστημοπλοίου που μετρούν οι επιβάτες του;

- 2-7 Ένα τραίνο έχει μήκος 500 m, όπως αυτό μετράται όταν βρίσκεται σταματημένο σε ένα σταθμό. Καθώς το τραίνο ταξιδεύει με ταχύτητα 100 km h^{-1} , ένας παρατηρητής στο έδαφος παρατηρεί ότι δύο κεραυνοί κτυπούν ταυτοχρόνως τα δύο άκρα του. Πόσο είναι το χρονικό διάστημα μεταξύ των δύο κεραυνών που θα παρατηρήσει ένας επιβάτης του τραίνου;
- 2-8 Ένας παρατηρητής βλέπει ότι δύο γεγονότα συμβαίνουν με μεταξύ τους απόσταση 600 m και με διαφορά χρόνου $8 \times 10^{-7} \text{ s}$. Με ποια ταχύτητα πρέπει να κινείται ένας δεύτερος παρατηρητής ως προς τον πρώτο ώστε να δει ότι τα δύο γεγονότα συνέβησαν ταυτοχρόνως; Πόση είναι για τον δεύτερο παρατηρητή η χωρική απόσταση μεταξύ των δύο γεγονότων;
- 2-9 Ο μέσος χρόνος ζωής του μ μεσονίου όταν αυτό είναι ακίνητο προς τον παρατηρητή είναι 2.22 μs . Πόσος είναι ο μέσος χρόνος ζωής που θα μετρήσει ένας παρατηρητής στη γη για ένα μ μεσόνιο της κοσμικής ακτινοβολίας, το οποίο ταξιδεύει κατά την κατακόρυφη διεύθυνση με ταχύτητα $0.99c$;
- 2-10 Σε ένα διαπλανητικό ταξίδι του μέλλοντος μέσα στο ηλιακό μας σύστημα, ο αξιωματικός της βάρδιας επιδιορθώνει μια βλάβη που ανέκυψε μέσα σε δέκα λεπτά. Αν το διαστημόπλοιο στο οποίο επιβαίνει ταξιδεύει με ταχύτητα $0.99c$, πόσο είναι το χρονικό διάστημα που διήρκεσε η επιδιόρθωση της βλάβης σύμφωνα με ένα παρατηρητή στη γη;
- 2-11 Διαστημικά ταξί του μέλλοντος διασχίζουν το πλανητικό μας σύστημα με ταχύτητα $0.5c$. Το κόμιστρο των ταξί είναι € 10 ανά ώρα, σύμφωνα με το ταξίμετρο στο ταξί, αλλά ο σύλλογος ιδιοκτητών ταξί απεργεί με αίτημα να υπολογίζεται το κόμιστρο σύμφωνα με το χρόνο που καταγράφεται στη γη. Πόσο θα αυξηθεί το κόμιστρο αν



γίνει δεκτό το αίτημά τους;

2-12 Ένα *super-fast* τραίνο του μέλλοντος έχει μήκος, όταν βρίσκεται εν στάσει, 14 m.

(α) Πόσο είναι το μήκος του που μετρά ένας παρατηρητής στο έδαφος καθώς το τραίνο περνά από μπροστά του με ταχύτητα 99 % της ταχύτητας του φωτός;

(β) Ο παρατηρητής στο έδαφος προσδιορίζει το μήκος του τρένου μετρώντας την ίδια στιγμή την αρχή και το τέλος του. Κατά τους επιβάτες του τρένου πόσο είναι το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ των δύο μετρήσεων που ο παρατηρητής στο έδαφος θεωρεί ότι έγιναν ταυτόχρονα;

2-13 Θεωρείστε μια λεπτή ράβδο μήκους L , η οποία στο σύστημα OXYZ βρίσκεται ακίνητη πάνω στο επίπεδο XY και σχηματίζει γωνία θ ως προς τον άξονα X. Δείξτε ότι ένας παρατηρητής σε ένα σύστημα αναφοράς O'X'Y'Z', το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα V ως προς το σύστημα OXYZ κατά τον κοινό τους άξονα X, X', μετρά το μήκος της ράβδου ως

$$L' = L \left(\frac{\cos^2 \theta}{\gamma} + \sin^2 \theta \right)^{1/2}$$

και κλίση ως προς τον άξονα X' που δίνεται από τη σχέση

$$\tan \theta' = \gamma \tan \theta .$$

2-14 Ένα αεροπλάνο *Mirage 2000* με μήκος 20 m πετά σε σταθερό ύψος με ταχύτητα 1.5 mach (1 mach είναι η ταχύτητα του ήχου). Κατά πόσο μικρότερο θα δει το μήκος του αεροπλάνου ένας παρατηρητής πάνω στη γη; Αν η γη ήταν επίπεδη, πόση απόσταση θα έπρεπε να καλύψει το ίδιο αεροπλάνο έτσι ώστε το ρολόι του πιλότου να υστερήσει κατά 1 s από το ρολόι του παρατηρητή στη γη;



2-15 Ένας αστροναύτης που ταξιδεύει μέσα σε ένα δορυφόρο με ταχύτητα $6 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$ βλέπει δύο γεγονότα να συμβαίνουν ταυτόχρονα στην Αθήνα και στο Λονδίνο. Αν η απόσταση Αθήνας-Λονδίνου είναι 2400 km, πόσο χρονικό διάστημα χωρίζει αυτά τα γεγονότα σύμφωνα με ένα παρατηρητή πάνω στη γη;

2-16 Με τη βοήθεια της εξ. (2.30β), η οποία για ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα μπορεί να γραφεί ως

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t + \frac{\beta \Delta x}{c} \right)$$

εξηγείστε πώς ένας παρατηρητής μπορεί να συμπεράνει ότι ένα γεγονός Α συνέβη πριν από ένα γεγονός Β, ενώ ένας άλλος παρατηρητής συμπεραίνει ότι το γεγονός Β συνέβη πριν από το γεγονός Α.

2-17 Δείξτε ότι το άθροισμα της ταχύτητας c με οποιαδήποτε άλλη ταχύτητα $v < c$ είναι ίσο με c .

2-18 Προσδιορίστε το άθροισμα δύο ταχυτήτων v_1 και v_2 στις εξής περιπτώσεις:

(α) $v_1 = v_2 = 0.1c$

(β) $v_1 = v_2 = 0.5c$

(γ) $v_1 = 0.99c, v_2 = 0.1c$.

2-19 Ένας αστέρας απομακρύνεται από τη γη με ταχύτητα 50 km s^{-1} . Πόσο είναι το μήκος κύματος που θα μετρήσει ένας παρατηρητής στη γη για το μήκος κύματος της μετάπτωσης H_α του υδρογόνου ($\lambda = 6563 \text{ \AA}$);

2-20 Αποδείξτε τις εξ. (2.32).



- 2-21 Ένα σωμάτιο ταξιδεύει με ταχύτητα u και διεύθυνση που σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα X ενός συστήματος $OXYZ$. Πόση είναι η ταχύτητα u' και η γωνία θ' που θα μετρήσει ένας παρατηρητής O' που ταξιδεύει κατά τον άξονα X με σταθερή ταχύτητα V ;
- 2-22 Ένας παρατηρητής βλέπει δύο ηλεκτρόνια, τα οποία κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις, το καθένα με ταχύτητα $0.99c$. Ποια είναι η σχετική ταχύτητα των δύο ηλεκτρονίων;
- 2-23 Ο οδηγός ενός αυτοκινήτου συλλαμβάνεται διότι πέρασε μια διασταύρωση με κόκκινο και προσάγεται στο αυτόφωρο. Κατά την απολογία του ισχυρίζεται ότι έτρεχε με μεγάλη ταχύτητα και έτσι, λόγω του φαινομένου Doppler, είδε το κόκκινο φανάρι ($\lambda = 5400 \text{ \AA}$) ως πράσινο ($\lambda = 6200 \text{ \AA}$). Ο δικαστής δέχεται το επιχείρημα, αλλά του επιβάλλει πρόστιμο 1 ΕΥΡΩ για κάθε km/hr που η ταχύτητα του οδηγού υπερέβη το ανώτατο επιτρεπτό όριο ταχύτητας στην περιοχή (60 km/hr). Πόσο πρόστιμο πρέπει να καταβάλει ο οδηγός;
- 2-24 Μετά το ταξίδι του Γιάννη που περιγράφηκε στην Παράγραφο 2-5, η δίδυμη αδελφή του Ιωάννα αποφασίζει και αυτή να ταξιδέψει στο μακρινό πλανήτη που επισκέφθηκε ο αδελφός της. Στο μεταξύ η τεχνολογία έχει βελτιωθεί και το διαστημόπλοιο που μεταφέρει την Ιωάννα ταξιδεύει με ταχύτητα $0.8c$. Όταν επιστρέψει στη γη μετά από 15 έτη, σύμφωνα με το χρονόμετρο του Γιάννη, ποιος από τους δυο διδύμους θα είναι νεώτερος και κατά πόσο;
- 1-25 Δείξτε ότι η κυματική εξίσωση του ηλεκτρομαγνητισμού

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

παραμένει αναλλοίωτη κατά το μετασχηματισμό Lorentz.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ο τετραδιάστατος χώρος

Η ΜΕΧΡΙ ΤΩΡΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ των επιπτώσεων του μετασχηματισμού Lorentz οδηγεί αναπόφευκτα στο συμπέρασμα ότι υπάρχει μια στενή σχέση μεταξύ χώρου και χρόνου. Αν σε ένα σύστημα αναφοράς OXYZ δύο γεγονότα συμβούν σε δύο σημεία του χώρου (x_1, y_1, z_1) και (x_2, y_2, z_2) και σε χρονικές στιγμές αντίστοιχα t_1 και t_2 , ένας παρατηρητής σε ένα δεύτερο αδρανειακό σύστημα αναφοράς O'X'Y'Z' θα τα δει να συμβαίνουν σε διαφορετικά σημεία του χώρου και σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Θα διαφωνήσουν ακόμη οι δύο παρατηρητές ως προς τη χωρική απόσταση

$$\begin{aligned}\Delta r &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\end{aligned}\tag{3.1}$$

που χωρίζει τα δύο γεγονότα καθώς και ως προς το χρονικό διάστημα που μεσολάβησε μεταξύ των δύο γεγονότων

$$\Delta t = t_2 - t_1.\tag{3.2}$$



Στο σύστημα αναφοράς $O'X'Y'Z'$ οι ποσότητες

$$\begin{aligned}\Delta r' &= \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2} \\ &= \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2}\end{aligned}\quad (3.3)$$

και

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 \quad (3.4)$$

θα έχουν γενικά διαφορετικές τιμές απ' ότι στο σύστημα $OXYZ$. Όπως όμως είδαμε στην Παράγραφο 2-1, οι δυο παρατηρητές θα συμφωνήσουν ότι η ποσότητα

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2 (\Delta t)^2 \quad (3.5)$$

έχει την ίδια τιμή στα δύο συστήματα αναφοράς, ήτοι

$$\begin{aligned}(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2 (\Delta t)^2 \\ = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - c^2 (\Delta t')^2.\end{aligned}\quad (3.6)$$

Η τελευταία σχέση προέρχεται από τη σταθερότητα της ταχύτητας του φωτός σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Στην πραγματικότητα ο μετασχηματισμός Lorentz εξήχθη από την απαίτηση η ποσότητα της εξ. (3.5) να παραμένει αναλλοίωτη κατά το μετασχηματισμό. Θα ονομάσουμε την ποσότητα Δs της εξ. (3.5) **διάστημα** μεταξύ των γεγονότων.

3-1 Μετασχηματισμός ανυσμάτων στον τρισδιάστατο χώρο

Στο γνωστό μας τρισδιάστατο χώρο κάθε σημείο περιγράφεται από



το άνυσμα θέσης* $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$, που εκτείνεται από την αρχή των συντεταγμένων O μέχρι το σημείο, ενώ το στοιχείο της απόστασης δίνεται από τη σχέση

$$(dr)^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2. \quad (3.7)$$

Ένα δεύτερο σύστημα αναφοράς $O'X'_1X'_2X'_3$ στον ίδιο χώρο μπορεί να θεωρηθεί γενικά ότι προέρχεται από το σύστημα $OX_1X_2X_3$ μετά από περιστροφή του τελευταίου κατά συγκεκριμένες γωνίες γύρω από τους άξονές του[†]. Τότε, στην κλασσική μηχανική μαθαίνουμε ότι για ένα σημείο P στο χώρο οι συντεταγμένες του (x'_1, x'_2, x'_3) στο σύστημα $O'X'_1X'_2X'_3$ θα συνδέονται προς τις συντεταγμένες του $(x_1,$

* Θα αναθεωρήσουμε στο σημείο αυτό το συμβολισμό μας και θα αναφερθούμε εφεξής στους τρεις άξονες του τρισδιάστατου συστήματος αναφοράς ως $X_1 (= X)$, $X_2 (= Y)$ και $(X_3 (= Z))$ με αντίστοιχες συντεταγμένες για ένα σημείο του χώρου (x_1, x_2, x_3) . Ο νέος συμβολισμός θα φανεί χρήσιμος στη διατύπωση αθροισμάτων συνδυασμών των συντεταγμένων, ενώ θα συντελέσει στη μεταφορά του κατά φυσικό τρόπο στον τετραδιάστατο χώρο. Προς το παρόν θα περιορίσουμε το ενδιαφέρον μας σε καρτεσιανά (ορθογώνια) συστήματα αναφοράς.

† Κατά το **θεώρημα του Chasles** στην κλασσική μηχανική, το όποιο είναι τόσο προφανές ώστε να μην χρειάζεται εδώ μαθηματική απόδειξη, ένας γενικός μετασχηματισμός από ένα σύστημα αναφοράς σε ένα άλλο περιλαμβάνει μια περιστροφή των αξόνων X_1, X_2, X_3 συν μια μετατόπιση της αρχής των συντεταγμένων O κατά ένα άνυσμα $\mathbf{d}$ [με συντεταγμένες (d_1, d_2, d_3)]. Για τους σκοπούς της ανάλυσης που αποσκοπείται εδώ, θα αγνοήσουμε τη σχετική μετατόπιση της αρχής των συντεταγμένων των δύο συστημάτων. Η μόνη συνεισφορά της είναι η προσθήκη των σταθερών ποσοτήτων d_1, d_2 και d_3 αντίστοιχα στις εξ. (3.8) ή τη μετατροπή της εξ. (3.10) στη μορφή

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

Για το λόγο αυτό και προς απλοποίηση του συμβολισμού, η μετατόπιση της αρχής των συντεταγμένων εφεξής θα αγνοηθεί.



x_2, x_3) στο σύστημα $OX_1X_2X_3$ με τις γραμμικές σχέσεις

$$\begin{aligned}x'_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 \\x'_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 \\x'_3 &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3\end{aligned}\quad (3.8)$$

όπου οι συντελεστές c_{ij} αντιπροσωπεύουν το συνημίτονο μεταξύ της θετικής φοράς των αξόνων X'_i και X_j . Η εξ. (3.8) μπορεί να γραφεί συνοπτικά ως

$$x'_n = \sum_{k=1}^3 c_{kn} x_k \quad (3.9)$$

ή, εναλλακτικά, στο συμβολισμό της γραμμικής άλγεβρας, όπου ένα άνυσμα αποδίδεται με ένα πίνακα μιας στήλης τριών στοιχείων και ένας τελεστής με ένα πίνακα 3×3 στοιχείων [βλ. Παράγραφο 3-5.4], ως

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Οι συντελεστές c_{ij} στις γραμμικές εξισώσεις της εξ. (3.8) δεν είναι όλοι ανεξάρτητοι αριθμοί. Αν επιβάλουμε τη συνθήκη ότι η απόσταση $\Delta r(1,2)$ μεταξύ δύο δεδομένων σημείων $P^{(1)}$ και $P^{(2)}$ στο χώρο

$$\Delta r(1,2) = \sqrt{(x_1^{(2)} - x_1^{(1)})^2 + (x_2^{(2)} - x_2^{(1)})^2 + (x_3^{(2)} - x_3^{(1)})^2} \quad (3.11)$$

έχει την ίδια τιμή στα δύο συστήματα αναφοράς, προκύπτουν οι σχέσεις



$$\sum_{i=1}^3 c_{ij} c_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.12\alpha)$$

και

$$\sum_{i=1}^3 c_{ij} c_{ik} = 0, \quad j \neq k, \quad j, k = 1, 2, 3. \quad (3.12\beta)$$

Οι τελευταίες δύο σχέσεις μπορούν να ενοποιηθούν μέσω του συμβόλου του **Kronecker** δ_{ij} , το οποίο ορίζεται ως

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (3.13)$$

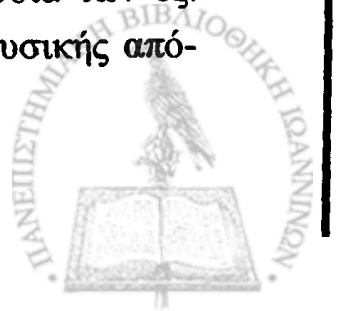
στη μοναδική σχέση

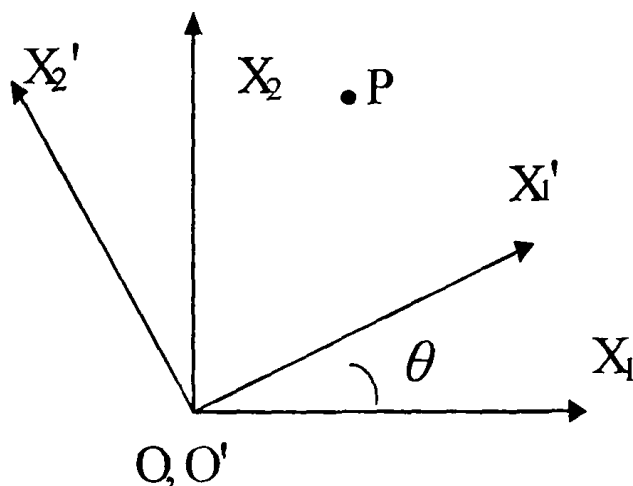
$$\sum_{j=1}^3 c_{ij} c_{kj} = \delta_{ik} \quad (3.14\alpha)$$

ενώ, αν θεωρήσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό, από το σύστημα αναφοράς $O'X'_1X'_2X'_3$ στο σύστημα $OX_1X_2X_3$, λαμβάνεται η σχέση

$$\sum_{i=1}^3 c_{ij} c_{ik} = \delta_{jk}. \quad (3.14\beta)$$

Στις εξ. (3.14) έχει δοθεί η ίδια αρίθμηση για ένα συγκεκριμένο λόγο. Εκ πρώτης όψεως οι εξισώσεις αυτές φαίνονται διαφορετικές: στην εξ. (3.14α) αθροίζονται οι δεύτεροι δείκτες των συντελεστών c_{ij} , ενώ στην εξ. (3.14β) οι πρώτοι. Στην πραγματικότητα όμως πρόκειται για τις ίδιες σχέσεις. Οι εξ. (3.14β) είναι απόρροια των εξ. (3.14α) και αντιστρόφως. Τούτο είναι προφανές από φυσικής από-



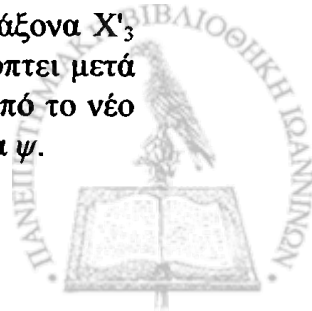


Σχήμα 3.1 Περιστροφή των αξόνων του συστήματος αναφοράς $OX_1X_2X_3$ γύρω από τον άξονα X_3 κατά γωνία θ .

ψεως, καθ' όσον ο μετασχηματισμός από το πρώτο σύστημα αναφοράς στο δεύτερο πρέπει να είναι ισοδύναμος με το μετασχηματισμό από το δεύτερο σύστημα αναφοράς στο πρώτο. Η τυπική απόδειξη της ισοδυναμίας των δύο σχέσεων στις εξ. (3.14) παραπέμπεται στις Ασκήσεις στο τέλος του Κεφαλαίου. Έτσι, υπό το φως των έξι ανεξάρτητων σχέσεων στις εξ. (3.14), το πλήθος των ανεξάρτητων συντελεστών c_{ij} μειώνεται στους τρεις*.

Μια ακόμη σχέση μεταξύ των συντελεστών c_{ij} προκύπτει αν απαιτήσουμε ο όγκος ενός τρισδιάστατου σχήματος, π.χ., ενός κύβου, να παραμένει σταθερός στα δύο συστήματα αναφοράς. Τότε, μπορεί εύκολα να δείξουμε (βλ. Άσκηση 3-3), ότι η ορίζουσα του πίνακα στην εξ. (3.10) πρέπει να ισούται με τη μονάδα, ήτοι

* Στην κλασική μηχανική ως τρεις ανεξάρτητες παράμετροι που προσδιορίζουν μια περιστροφή ενός συστήματος αναφοράς $OX'Y'Z'$ ώστε να συμπίσει με ένα σύστημα αναφοράς $OXYZ$ επιλέγονται οι γωνίες Euler φ , θ και ψ , οι οποίες αντιπροσωπεύουν τρεις περιστροφές με φορά αντίθετη προς αυτή των δεικτών του ωρολογίου και κατά την εξής διαδοχή: (1) περιστροφή γύρω από τον άξονα X'_3 κατά γωνία φ , (2) περιστροφή γύρω από τον νέο άξονα X''_1 που προκύπτει μετά την προηγούμενη περιστροφή κατά γωνία θ και (3) περιστροφή γύρω από το νέο άξονα X'''_3 που προκύπτει μετά την προηγούμενη περιστροφή κατά γωνία ψ .



$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = 1. \quad (3.15)$$

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα της προηγούμενης ανάλυσης περιέχεται στο σχήμα 3.1, όπου το σύστημα αναφοράς $O'X'_1X'_2X'_3$ προέρχεται από το σύστημα αναφοράς $OX_1X_2X_3$ μετά από απλή περιστροφή του τελευταίου κατά μια γωνία θ γύρω από τον άξονα X_3 . Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι στην περίπτωση αυτή η εξ. (3.10) παίρνει την απλή μορφή

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

όπου οι ανεξάρτητες μεταβλητές του πίνακα περιστροφής έχουν μειωθεί περαιτέρω σε μία.

Δεν είναι καθόλου δύσκολο να γενικεύσουμε την προηγούμενη ανάλυση και να δείξουμε ότι οι συνιστώσες οποιουδήποτε ανυσματικού φυσικού μεγέθους στον τρισδιάστατο χώρο, κατά τη μετάβαση από ένα σύστημα συντεταγμένων σε ένα άλλο, μετασχηματίζονται σύμφωνα με τον κανόνα της εξ. (3.9). Αν οι συντελεστές c_{ij} αντιπροσωπεύουν το συνημίτονο μεταξύ της θετικής φοράς των αξόνων X'_i και X_j , οι συνιστώσες a_1, a_2, a_3 ενός ανύσματος $\mathbf{a}$ μετασχηματίζονται σύμφωνα με τη σχέση

$$a'_k = \sum_{n=1}^3 c_{kn} a_n. \quad (3.17)$$

Θα αφεθεί ως άσκηση η απόδειξη του αντίστροφου μετασχηματισμού



$$a_k = \sum_{n=1}^3 c_{nk} a'_n. \quad (3.18)$$

3-2 Ο χώρος Minkowski

Ο Einstein ήταν ο πρώτος που όρισε ότι σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς ένα γεγονός χαρακτηρίζεται από τέσσερις παραμέτρους: τις τρεις χωρικές του συντεταγμένες (x_1, x_2, x_3) στον τρισδιάστατο χώρο και το χρόνο t κατά τον οποίο συμβαίνει. Η ανάμιξη των παραμέτρων αυτών κατά το μετασχηματισμό Lorentz ανέδειξε μια στενότερη σχέση μεταξύ τους και γρήγορα γέννησε την ιδέα ότι τα γεγονότα συμβαίνουν στα πλαίσια ενός γενικότερου χώρου με τέσσερις διαστάσεις – με το χρόνο να αντιπροσωπεύει κατά κάποιο τρόπο την τέταρτη διάσταση. Είναι δυνατόν να εντάξουμε ένα γεγονός σε ένα τετραδιάστατο χώρο αν του προσδώσουμε συντεταγμένες (x_1, x_2, x_3, x_4) , με (x_1, x_2, x_3) τις συνήθεις χωρικές συντεταγμένες και

$$x_4 = ict \quad (3.19)$$

όπου $i = \sqrt{-1}$ είναι η φανταστική μονάδα. Με τις συντεταγμένες αυτές, η απόσταση μεταξύ δυο γεγονότων στον τετραδιάστατο χώρο παίρνει τη μορφή της εξ. (3.5) και το στοιχείο της απόστασης τη μορφή

$$(ds)^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 + (dx_4)^2 \quad (3.20)$$

που αποτελεί φυσική επέκταση της εξ. (3.7).

Στην πρώτη διατύπωση της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας, ο Einstein χρησιμοποίησε τον τετραδιάστατο χώρο κυρίως ως μια κομψή και οικονομική μέθοδο για να περιγράψει φυσικά φαινόμενα μέσα στο χώρο και το χρόνο. Η εδραίωση όμως του τετραδιάστατου χωροχρόνου ως έννοιας οφείλεται εν πολλοίς στον μαθηματικό



Hermann Minkowski, καθηγητή του Einstein στο Πανεπιστήμιο της Ζυρίχης, ο οποίος διέγινωσε ότι η αξιωματική θεμελίωση της θεωρίας μπορεί να απλουστευθεί σημαντικά αν κανείς αναγνωρίσει στον τετραδιάστατο χώρο μια αυτόνομη γεωμετρική οντότητα με χαρακτηριστικά στοιχειώδους διαστήματος της μορφής

$$(ds)^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 - c^2(dt)^2. \quad (3.21)$$

Στα πλαίσια αυτά, ο μετασχηματισμός Lorentz μεταπίπτει σε ένα μετασχηματισμό των συντεταγμένων (x_1, x_2, x_3, x_4) ενός γεγονότος σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς O στις συντεταγμένες (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) που μετρά ένας παρατηρητής σε ένα δεύτερο αδρανειακό σύστημα αναφοράς O' . Ο χώρος αυτός έχει καθιερωθεί στη βιβλιογραφία με τον όρο **κοσμικός χώρος** ή **χώρος Minkowski**.

Σε αναλογία με τον τρισδιάστατο χώρο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι στις τέσσερις διαστάσεις δύο συστήματα αναφοράς συνδέονται μέσω μιας περιστροφής του συστήματος αναφοράς $OX_1X_2X_3X_4$ γύρω από τους άξονές του ώστε το αρχικό σύστημα να συμπίπτει με το σύστημα αναφοράς $O'X'_1X'_2X'_3X'_4$. Στο χώρο Minkowski, η σύνδεση των συντεταγμένων στα δύο συστήματα αναφοράς δίνεται από μια σχέση ανάλογη προς την εξ. (3.9), ήτοι

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

όπου $x_4 = ict$ και $x'_4 = ict'$, ενώ η σύνδεση μεταξύ των στοιχείων του πίνακα* $c_{\mu\nu}$ των εξ. (3.14) παίρνουν τη μορφή

* Εφεξής, ακολουθώντας την πρακτική στη διεθνή βιβλιογραφία, θα χρησιμοποιήσουμε ελληνικούς χαρακτήρες για τους δείκτες στοιχείων που αναφέρονται στον



$$\sum_{\kappa=1}^4 c_{\mu\kappa} c_{\nu\kappa} = \delta_{\mu\nu} . \quad (3.23\alpha)$$

και

$$\sum_{\lambda=1}^4 c_{\lambda\mu} c_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\nu} . \quad (3.23\beta)$$

Ας θεωρήσουμε, σε εφαρμογή των εξ. (3.22) και (3.23), τα δύο ειδικά συστήματα αναφοράς που εικονίζονται στο σχήμα 2.2 και χρησιμοποιήθηκαν για τον προσδιορισμό του μετασχηματισμού Lorentz. Καθ' όσον μεταξύ των δύο αυτών συστημάτων ισχύει ότι $x'_2 = x_2$ και $x'_3 = x_3$, μπορούμε αμέσως να γράψουμε τον πίνακα μετασχηματισμού C της εξ. (3.22) στη μορφή

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & c_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ c_{41} & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix} . \quad (3.24)$$

Για τη μορφή αυτή του πίνακα μετασχηματισμού, οι εξ. (3.23) δίνουν

$$c_{11}^2 + c_{14}^2 = c_{11}^2 + c_{41}^2 = c_{41}^2 + c_{44}^2 = c_{14}^2 + c_{44}^2 = 1 \quad (3.25\alpha)$$

και

$$c_{11}c_{14} + c_{41}c_{44} = c_{11}c_{41} + c_{14}c_{44} = 0 . \quad (3.25\beta)$$

Ο μετασχηματισμός που προβλέπει η μορφή της εξ. (3.22) για τη συντεταγμένη x'_1 είναι

τετραδιάστατο χώρο και λατινικούς χαρακτήρες για δείκτες στοιχείων που αναφέρονται αποκλειστικά στον τρισδιάστατο χώρο. Έτσι, οι δείκτες $\mu, \nu, \kappa, \dots$ θα λαμβάνουν τιμές από 1 έως 4 ενώ δείκτες της μορφής $i, j, k, \dots$ θα παίρνουν τιμές από 1 έως 3.



$$x'_1 = c_{11}x_1 + c_{14}x_4 = c_{11}\left(x_1 + ic\frac{c_{14}}{c_{11}}t\right). \quad (3.26)$$

Τώρα, καθ' όσον τα δύο συστήματα αναφοράς στο σχήμα 2.2 κινούνται με σχετική ταχύτητα V κατά τον κοινό άξονα X_1, X'_1 , έπεται ότι όταν η συνιστώσα $x_1 = 0$, η συνιστώσα x'_1 παίρνει την τιμή $x'_1 = Vt$. Η εξ. (3.26) επομένως δίνει το αποτέλεσμα

$$V = ic\frac{c_{14}}{c_{11}}$$

ή

$$\frac{c_{14}}{c_{11}} = -i\beta \quad (3.27)$$

όπου, ως συνήθως,

$$\beta = \frac{V}{c}. \quad (3.28)$$

Επιπλέον, από τις εξ. (3.25α) και (3.27), προκύπτει ότι

$$c_{11}^2 = \frac{1}{1 + (c_{14}^2 / c_{11}^2)} = \frac{1}{1 - \beta^2}$$

ή

$$c_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3.29)$$

Σημειώνεται ότι στην εξ. (3.29) η τετραγωνική ρίζα έχει επιλεγεί με θετικό πρόσημο. Τούτο προκύπτει από την οριακή συνθήκη $V = 0$, κατά την οποία οι συνιστώσες x'_1 και x_1 πρέπει να προβλέπονται από την εξ. (3.26) ίσες.



Για τον προσδιορισμό των λοιπών στοιχείων του πίνακα μετασχηματισμού θα χρησιμοποιήσουμε πάλι την εξ. (3.25α) που προβλέπει ότι

$$c_{14} = \pm c_{41}$$

ή, με τη βοήθεια της εξ. (3.25β),

$$c_{44} = -\frac{c_{11}c_{41}}{c_{14}} = \pm c_{11} = \pm \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (3.30)$$

Θεωρώντας πάλι την οριακή συνθήκη $t' = t$ όταν η αρχή των συντεταγμένων των δύο συστημάτων αναφοράς συμπίπτει, μπορούμε να δείξουμε (βλ. Άσκηση 3-6) ότι στην εξ. (3.30) πρέπει να επιλεγεί το θετικό πρόσημο με αποτέλεσμα

$$c_{44} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (3.31)$$

Καθ' όσον τα στοιχεία του πίνακα c_{11} και c_{44} είναι θετικοί αριθμοί, από την εξ. (3.25β) έπεται ότι τα στοιχεία c_{14} και c_{41} πρέπει να έχουν αντίθετο πρόσημο, ήτοι

$$c_{14} = -c_{41} \quad (3.32)$$

που σε συνδυασμό με τις εξ. (3.27) και (3.31) δίνει

$$c_{14} = \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (3.33\alpha)$$

και



$$c_{41} = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (3.33\beta)$$

Η μορφή επομένως του πίνακα μετασχηματισμού στην εξ. (3.24) είναι

$$C = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

όπου πάλι έχουμε επαναφέρει τον καθιερωμένο συμβολισμό

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (3.35)$$

Όπως μπορεί εύκολα να επαληθευθεί, ο πίνακας της εξ. (3.34), στο μετασχηματισμό της εξ. (3.22) οδηγεί στο μετασχηματισμό Lorentz των εξ. (2.10)

$$\begin{aligned} x'_1 &= \gamma(x_1 + Vt) \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \\ t' &= \gamma\left(t + \frac{\beta}{c} x_1\right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Με άλλα λόγια, ο μετασχηματισμός Lorentz προκύπτει αβίαστα από την ίδια τη γεωμετρία του χώρου Minkowski.

Στο χώρο Minkowski ο γνώριμος τρισδιάστατος χώρος και ο



χρόνος συγκροτούν ένα Ευκλείδειο* χώρο τεσσάρων διαστάσεων όπου για κάθε σύστημα αναφοράς οι άξονες είναι ορθογώνιοι και ανεξάρτητοι. Τούτο βεβαίως δεν σημαίνει ότι οι τέσσερις άξονες είναι τελείως ισοδύναμοι. Ο άνθρωπος, ως ουσιαστικά τρισδιάστατο ον, διακρίνει μια ουσιαστική διαφορά καθώς ένας απ' αυτούς αντιπροσωπεύει διαφορετικό φυσικό μέγεθος απ' ότι οι άλλοι τρεις. Η συντεταγμένη x_4 μετράται με χρονόμετρα, ενώ οι συντεταγμένες x_1 , x_2 και x_3 με μέτρα. Παρ' όλα αυτά, ο ισοδύναμος χειρισμός των τεσσάρων συντεταγμένων μέσω του μετασχηματισμού Lorentz αποδίδει σωστά ένα γεγονός όπως αυτό παρατηρείται σε δύο διαφορετικά αδρανειακά συστήματα.

3-3 Κοσμικοί δρόμοι και διαγράμματα Feynman

Αν και ο τετραδιάστατος χώρος δεν είναι δυνατόν να απεικονιστεί στις δύο διαστάσεις ενός διαγράμματος, μπορούμε να αποκομίσουμε μια αίσθηση σχετικά με τη συμπεριφορά γεγονότων στο χώρο Minkowski αν θεωρήσουμε μια τομή του κατά μια χωρική διάσταση και τη διάσταση του χρόνου. Μια τέτοια τομή περιέχεται στο σχήμα 3.2, όπου ο οριζόντιος άξονας καταγράφει τη θέση ενός σώματος στον άξονα X_1 ($= X$) και ο κατακόρυφος το χρόνο. Στο συγκεκριμένο διάγραμμα η κλίμακα του κατακόρυφου άξονα είναι σε δευτερόλεπτα, ενώ στον οριζόντιο άξονα η απόσταση μετράται σε δευτερόλεπτα φωτός, ήτοι σε μονάδες που αντιπροσωπεύουν την απόσταση που καλύπτει το φως σε ένα δευτερόλεπτο. Αν το σώμα κινείται αποκλειστικά κατά τη διεύθυνση X_1 , μια καμπύλη του διαγράμματος

* Με τον όρο *Ευκλείδειος χώρος* εννοούμε ένα χώρο n διαστάσεων όπου το στοιχείο της απόστασης

$$(ds)^2 = \sum_{k=1}^n g_k (dx_k)^2$$

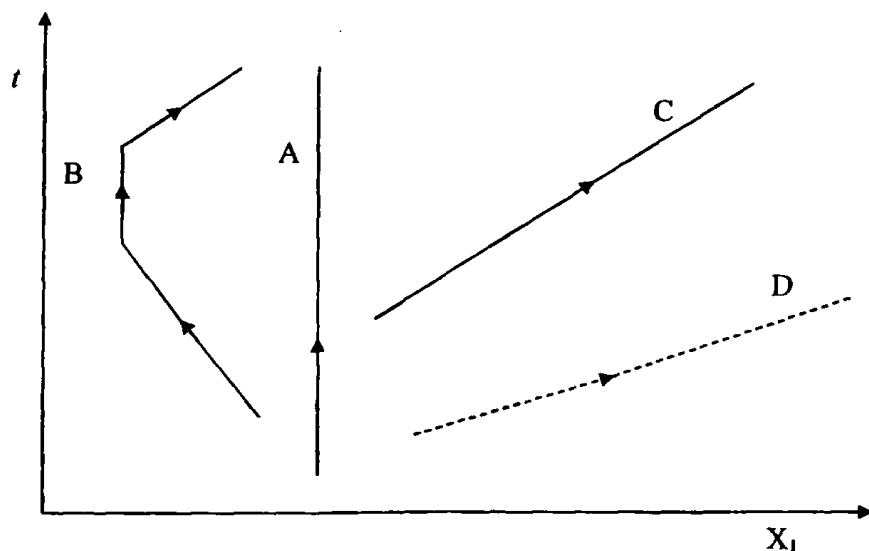
ορίζεται για συντελεστές $g_k = 1$.



μπορεί να αποδώσει την ιστορία του για ένα ορισμένο χρονικό διάστημα. Για παράδειγμα, ένα σώμα εν στάσει περιγράφεται από τον κατακόρυφο δρόμο Α. Ένα δεύτερο σώμα που για ένα χρονικό διάστημα κινείται προς τα αριστερά, σταματά για λίγο και στη συνέχεια κινείται προς τα δεξιά περιγράφεται από το δρόμο Β. Σε κάθε σημείο του δρόμου, η κλίση της καμπύλης αντιπροσωπεύει την ταχύτητα του σώματος κατά τον άξονα Χ. Ο δρόμος C, ο οποίος σχηματίζει γωνία 45° με τους δύο άξονες, στην κλίμακα των αξόνων του διαγράμματος, είναι προφανώς ένα σώμα που ταξιδεύει με την ταχύτητα του φωτός και σηματοδοτεί τα όρια της φυσικά επιτρεπτής περιοχής. Δρόμοι που σχηματίζουν κλίση μικρότερη των 45° με τον οριζόντιο άξονα, όπως ο δρόμος D του σχήματος 3.2, περιγράφουν σώματα που ταξιδεύουν με ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός. Διαγράμματα όπως αυτό του σχήματος 3.2 αναφέρονται συχνά ως **κοσμικά διαγράμματα** ή **διαγράμματα Minkowski**. Κάθε σημείο σε ένα διάγραμμα Minkowski αντιπροσωπεύει ένα γεγονός, όπως το όρισε ο Einstein, ενώ οι δρόμοι που περιγράφουν την ιστορία ενός σώματος έχουν καθιερωθεί με την ονομασία **κοσμικοί δρόμοι**.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον εμφανίζουν γεγονότα, τα οποία συμβαίνουν σε σημεία όπου διασταυρώνονται δύο ή περισσότεροι κοσμικοί δρόμοι. Αν οι κοσμικοί δρόμοι αντιπροσωπεύουν την ιστορία διαφόρων σωμάτων, τα σημεία διασταύρωσης αντιπροσωπεύουν αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωμάτων. Η μέθοδος αυτή απεικόνισης αλληλεπιδράσεων, που εισήχθη στα τέλη της δεκαετίας του 1940 από τον Richard Feynman, βρίσκει μεγάλη εφαρμογή στη θεωρία στοιχειωδών σωματιδίων. Ένα απλό παράδειγμα διαγράμματος Feynman που περιγράφει την αποδιέγερση ενός π μεσονίου σε ένα μ μεσόνιο και ένα νετρίνο

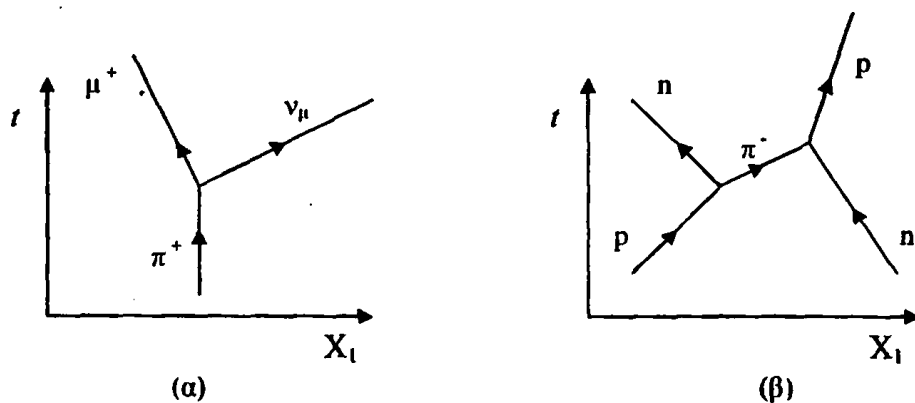




Σχήμα 3.2 Διάγραμμα Minkowski για σώματα με κίνηση αποκλειστικά κατά τον άξονα X.

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad (3.37)$$

περιέχεται στο σχήμα 3.3(α). Όπως φαίνεται στο σχήμα, ένα στάσιμο π μεσόνιο (που περιγράφεται από μια κατακόρυφη γραμμή), σε κάποιο σημείο αποσυντίθεται σε ένα μ μεσόνιο και σε ένα νετρίνο. Το μ μεσόνιο ακολουθεί ένα κοσμικό δρόμο με ταχύτητα μικρότερη απ' αυτή του φωτός, ενώ το νετρίνο, του οποίου η μάζα είναι ίση με το μηδέν, εκπέμπεται με ταχύτητα ίση προς αυτήν του φωτός και ακο-



Σχήμα 3.3 (α) Διάγραμμα Feynman που περιγράφει την αποσύνθεση ενός π μεσονίου. (β) Διάγραμμα Feynman της αλληλεπίδρασης δύο νουκλεονίων.

λουθεί ένα δρόμο με κλίση 45° ως προς τον άξονα του χρόνου.

Κατά τον ίδιο τρόπο το σχήμα 3.3(β) περιγράφει με κοσμικούς δρόμους τη σκέδαση ενός νετρονίου και ενός πρωτονίου. Σύμφωνα με το μηχανισμό που πρότεινε ο Hideki Yukawa αρκετά νωρίς στην ιστορία της Πυρηνικής Φυσικής, η αλληλεπίδραση δύο νουκλεονίων πραγματοποιείται με την ανταλλαγή π μεσονίων. Σε κάποια περιοχή του χώρου, όταν τα δύο νουκλεόνια βρίσκονται αρκετά κοντά, το νετρόνιο εκπέμπει ένα αρνητικό π μεσόνιο, το οποίο στη συνέχεια συλλαμβάνεται από το πρωτόνιο. Με τη μεταφορά φορτίου και ορμής που προκαλεί αυτή η διαδικασία, τα δύο νουκλεόνια αλλάζουν αμοιβαία μορφή και συνεχίζουν τους δρόμους τους με διαφορετικές ταχύτητες.

3-4 Αναλλοίωτος χρόνος και αιτιότητα

Θα έχει γίνει πλέον αντιληπτό ότι στα φυσικά πλαίσια που παρέχει ο τετραδιάστατος χώρος, ο χρόνος έχει χάσει την οικουμενικότητα που κατείχε στη νευτώνεια μηχανική. Παρ' όλα αυτά, όταν σε ένα σύστημα αναφοράς εξετάζεται ένα φαινόμενο είναι απαραίτητη κάποια έννοια «χρόνου» που να αποδίδει την εξέλιξη του φαινομένου ή τους ρυθμούς μεταβολής των φυσικών μεγεθών. Για παράδειγμα, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός σώματος με το χρόνο, τον οποίο στη νευτώνεια μηχανική συνδέουμε με το φυσικό μέγεθος της δύναμης, είναι προφανές ότι δεν αποτελεί συναλλοίωτο φυσικό μέγεθος, καθώς το χρονικό διάστημα dt διαφέρει σε κάθε αδρανειακό σύστημα.

Θα αναζητήσουμε την αναλλοίωτη ποσότητα που σε κάθε αδρανειακό σύστημα αντιπροσωπεύει την έννοια του «χρόνου» στο χρονικό διάστημα που απαιτείται σε ένα δεδομένο αδρανειακό σύστημα αναφοράς ώστε να μεταδοθεί πληροφορία από ένα σημείο του χώρου Minkowski $P_1 [= (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, x_4^{(1)})]$ σε ένα δεύτερο σημείο $P_2 [= (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, x_4^{(2)})]$. Ας θεωρήσουμε ότι η χωρική απόσταση



μεταξύ των δύο αυτών σημείων στον τετραδιάστατο χώρο είναι Δr [βλ. εξ. (3.1)]. Αν η διαφορά των συντεταγμένων τους κατά τον άξονα X_4 είναι, σε μονάδες χρόνου, Δt , τότε, όπως καταγράφεται από το χρονόμετρο ενός παρατηρητή του συστήματος, ο χρόνος Δt που απαιτείται ώστε η πληροφορία για την τιμή της συντεταγμένης $x_4^{(2)}$ να φτάσει από το σημείο P_2 στο σημείο P_1 δίνεται από τη σχέση

$$(\Delta t)^2 = (\Delta \tau)^2 + \frac{(\Delta r)^2}{c^2} \quad (3.38)$$

όπου ο δεύτερος όρος εκφράζει το χρόνο, σύμφωνα με το πρότυπο μέτρο που χρησιμοποιείται στο συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς για τη μέτρηση της απόστασης Δr , ο οποίος απαιτείται ώστε το φως να ταξιδέψει από το σημείο P_2 στο σημείο P_1 . Θα ονομάσουμε το χρονικό διάστημα Δt που ορίζεται από τη σχέση

$$(\Delta \tau)^2 = (\Delta t)^2 - \frac{(\Delta r)^2}{c^2} = -\frac{1}{c^2} \sum_{k=1}^4 (\Delta x_k)^2 \quad (3.39)$$

και το οποίο προφανώς παραμένει αναλλοίωτο κατά το μετασχηματισμό Lorentz*, **αναλλοίωτο χρόνο**.

Από την εξ. (3.39) προκύπτει ότι για δύο δεδομένα σημεία του τετραδιάστατου χώρου P_1 και P_2 το τετράγωνο του αναλλοίωτου χρόνου $(\Delta \tau)^2$ μπορεί να είναι θετικός αριθμός, ίσο με το μηδέν ή αρνητικός αριθμός. Αν $(\Delta \tau)^2 > 0$, το χωρικό διάστημα Δr μεταξύ των δύο σημείων είναι πραγματικός αριθμός και καθώς η ποσότητα $(\Delta \tau)^2$ είναι αναλλοίωτη, παραμένει πραγματικός αριθμός σε όλα τα αδρανειακά συστήματα. Θα ονομάσουμε ένα τέτοιο διάστημα **χρονοει-**

* Ο αναγνώστης θα παρατηρήσει ότι, χωρίς να έχει κατονομαστεί, η έννοια του αναλλοίωτου χρόνου έχει ήδη χρησιμοποιηθεί κατά την ανάλυση του παραδόξου των διδύμων.



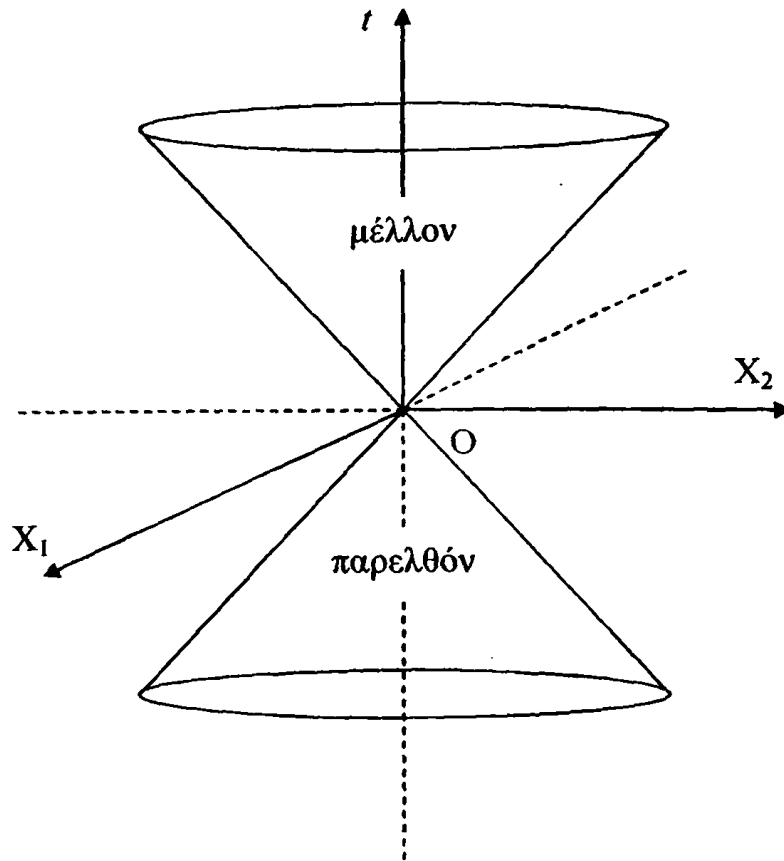
δές. Αντίθετα, αν $(\Delta t)^2 < 0$, το χωρικό διάστημα Δr μεταξύ των σημείων P_1 και P_2 είναι φανταστικός αριθμός σε όλα τα αδρανειακά σημεία και θα το ονομάσουμε **χωροειδές**. Τέλος, αν $(\Delta t)^2 = 0$, η εξ. (3.38) προβλέπει ότι σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς

$$(\Delta t)^2 = \frac{(\Delta r)^2}{c^2}. \quad (3.40)$$

Για λόγους που θα γίνουν προφανείς στη συνέχεια, θα ονομάσουμε το χωρικό διάστημα μεταξύ δύο σημείων που ικανοποιεί την τελευταία σχέση **φωτοειδές**.

Αν δύο γεγονότα που συμβαίνουν σε ένα σύστημα αναφοράς απέχουν κατά ένα χρονοειδές διάστημα, τότε είναι δυνατόν να βρεθεί ένα δεύτερο αδρανειακό σύστημα αναφοράς που κινείται με ταχύτητα μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός ως προς το πρώτο και στο οποίο τα δύο γεγονότα συμβαίνουν στο ίδιο σημείο του χώρου αλλά σε διαφορετικές χρονικές στιγμές t_1 και t_2 . Στο νέο αυτό αδρανειακό σύστημα αναφοράς, το χρονικό διάστημα μεταξύ των δύο γεγονότων Δt είναι ίσο με το αναλλοίωτο χρονικό διάστημα $\Delta \tau$. Από την άλλη πλευρά, αν δύο γεγονότα που συμβαίνουν σε ένα σύστημα αναφοράς απέχουν κατά ένα χωροειδές διάστημα, τότε είναι δυνατόν να βρεθεί ένα δεύτερο αδρανειακό σύστημα αναφοράς που κινείται πάλι με ταχύτητα μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός ως προς το πρώτο και στο οποίο τα δύο γεγονότα συμβαίνουν την ίδια στιγμή, αλλά σε διαφορετικά σημεία του χώρου. Στο νέο αυτό αδρανειακό σύστημα αναφοράς, το φανταστικό αναλλοίωτο χρονικό διάστημα $\Delta \tau$ είναι κατά απόλυτη τιμή ίσο με το χρονικό διάστημα Δt που απαιτείται ώστε το φως να καλύψει τη χωρική απόσταση μεταξύ των δύο γεγονότων. Τέλος, αν δύο γεγονότα απέχουν κατά ένα φωτοειδές διάστημα, τότε σε κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς το χρονικό διάστημα Δt που απαιτείται ώστε να





Σχήμα 3.4 Τομή του χώρου Minkowski κατά τους άξονες t , X_1 και X_2 . Ο κώνος φωτός αφορά ένα γεγονός που συμβαίνει στην αρχή των συντεταγμένων O .

σταλεί πληροφορία από το ένα γεγονός στο άλλο είναι ακριβώς αυτό που απαιτείται ώστε το φως να ταξιδέψει μεταξύ των δύο γεγονότων.

Τα διάφορα είδη διαστημάτων μεταξύ γεγονότων είναι δυνατόν να περιγραφούν με τη βοήθεια της τομής του χώρου Minkowski που περιέχεται στο σχήμα 3.4. Σε αντίθεση με το δισδιάστατο διάγραμμα του σχήματος 3.2, η τομή εδώ περιλαμβάνει τον άξονα του χρόνου και δύο χωρικούς άξονες X_1 και X_2 . Όπως και στο σχήμα 3.2, η κλίμακα του διαγράμματος έχει επιλεγεί έτσι ώστε ο κατακόρυφος άξονας να μετρά το χρόνο σε δευτερόλεπτα και οι δύο οριζόντιοι άξονες να μετρούν το χώρο σε δευτερόλεπτα φως. Στο διάγραμμα



έχουν επίσης σχεδιαστεί δύο κώνοι με την κορυφή τους στην αρχή των συντεταγμένων O , τον άξονά τους κατά τον άξονα t και με κλίση της κυρτής τους επιφάνειας να σχηματίζει γωνία 45° ως προς το επίπεδο X_1X_2 . Θα ονομάσουμε την επιφάνεια αυτών των δύο κώνων κώνο φωτός. Στο χώρο του σχήματος 3.4, ένα γεγονός P_2 που συμβαίνει στην περιοχή έξω από τον κώνο φωτός, συνδέεται με ένα γεγονός P_1 που συμβαίνει στην αρχή των συντεταγμένων O με ένα χωροειδές διάστημα. Σε οποιοδήποτε άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, που κινείται ως προς το σύστημα του σχήματος 3.4 με ταχύτητα μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός, το γεγονός P_2 παραμένει έξω από τον κώνο φωτός του γεγονότος P_1 . Όπως όμως ήδη αναφέρθηκε, υπάρχει ένα συγκεκριμένο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, στο οποίο τα δύο γεγονότα συμβαίνουν στο ίδιο επίπεδο X_1X_2 . Αντίθετα, ένα γεγονός P_2 που συμβαίνει στο εσωτερικό του κώνου φωτός, συνδέεται σε κάθε αδρανειακό σύστημα με το γεγονός P_1 με χρονοειδές διάστημα. Στην περίπτωση αυτή, είναι δυνατόν να βρεθεί ένα συγκεκριμένο αδρανειακό σύστημα αναφοράς (βλ. Άσκηση 3-9), στο οποίο τα δύο γεγονότα συμβαίνουν στην ίδια κατακόρυφη ευθεία ως προς το επίπεδο X_1X_2 αλλά με διαφορετικές συντεταγμένες ως προς τον κατακόρυφο άξονα. Τέλος, ένα γεγονός που συμβαίνει πάνω στην επιφάνεια του κώνου φωτός συνδέεται με το γεγονός στην αρχή των συντεταγμένων με ένα φωτοειδές διάστημα.

Από την πλευρά της φυσικής εξέλιξης ενός γεγονότος, ο κώνος φωτός χωρίζει τον τετραδιάστατο χώρο σε μια επιτρεπτή και σε μια απαγορευμένη περιοχή. Αν δεχτούμε ότι ένα γεγονός προκαλεί κάποιο άλλο, το χρονικό διάστημα μεταξύ των δύο γεγονότων περιορίζεται από την **αρχή της αιτιότητας**, η οποία σε γενικές γραμμές επιτάσσει ότι ένα γεγονός δεν μπορεί να προηγηθεί χρονικά από το γεγονός που το προκάλεσε. Στο παράδοξο των διδύμων του προηγούμενου κεφαλαίου, ο Γιάννης δεν μπορεί να φτάσει στο μακρινό πλα-



πλανήτη πριν ξεκινήσει από τη γη. Έτσι, το γεγονός που στο σχήμα 3.4 συμβαίνει στην αρχή των συντεταγμένων μπορεί να επηρεάσει μόνο γεγονότα που συμβαίνουν στο εσωτερικό της άνω περιοχής του κώνου φωτός ενώ μπορεί να επηρεαστεί μόνο από γεγονότα του συμβαίνουν (μάλλον, με την καθημερινή έννοια, έχουν συμβεί) στην κάτω περιοχή του κώνου. Από μια άλλη άποψη, το γεγονός στην αρχή των συντεταγμένων δεν μπορεί να επικοινωνήσει με ένα γεγονός που συμβαίνει πάνω από το επίπεδο X_1X_2 και έξω από τον κώνο φωτός (π.χ., δεν μπορεί να το πληροφορήσει ότι συνέβη) μια και η επικοινωνία πρέπει να γίνει με ταχύτητα μεγαλύτερη από αυτή του φωτός. Κατά τον ίδιο τρόπο δεν μπορεί να γνωρίζει ότι συνέβη ένα γεγονός στην περιοχή κάτω από το επίπεδο X_1X_2 και έξω από τον κώνο φωτός. Τέτοια γεγονότα, αν και καθ' όλα υπαρκτά, δεν μπορούν να συνδεθούν με τη σχέση αίτιου και αιτιατού. Ιδιαίτερη είναι η περίπτωση των γεγονότων που συμβαίνουν πάνω στην κυρτή επιφάνεια του κώνου φωτός. Τα γεγονότα αυτά μπορούν να επικοινωνήσουν με το γεγονός στην αρχή των συντεταγμένων μόνον αν η πληροφορία μεταβιβαστεί με την ταχύτητα του φωτός. Ορθώς επομένως στο σχήμα 3.4 η άνω περιοχή του κώνου φωτός έχει ονομαστεί «μέλλον» του γεγονότος που συμβαίνει στην αρχή των συντεταγμένων και η κάτω περιοχή του κώνου φωτός «παρελθόν» του.

3-5 Βαθμωτά φυσικά μεγέθη, ανύσματα και τανυστές

Στο νέο πλαίσιο του τετραδιάστατου χώρου που αναδεικνύει ο μετασχηματισμός Lorentz θα πρέπει τώρα να εντάξουμε τα φυσικά μεγέθη που περιγράφουν τα φαινόμενα της φύσης. Τούτο θα μελετήσουμε στα επόμενα κεφάλαια του βιβλίου. Προς το παρόν όμως είναι χρήσιμη μια γρήγορη ανασκόπηση της συμπεριφοράς των οικείων μας φυσικών μεγεθών από τη νευτώνεια μηχανική ως προς τους μετασχηματισμούς των συντεταγμένων του χώρου και του χρόνου. Για απλοποίηση της ανάλυσης που ακολουθεί θα περιοριστούμε



προς το παρόν αποκλειστικά σε συστήματα αναφοράς όπου τα φαινόμενα (και τα αντίστοιχα φυσικά μεγέθη) αποδίδονται σε ορθογώνια καρτεσιανά συστήματα συντεταγμένων.

3-5.1 ΤΑΝΥΣΤΕΣ

Κατά τη μελέτη του φυσικού κόσμου έχουμε ανακαλύψει ότι υπάρχουν διάφορα είδη φυσικών μεγεθών. Το απλούστερο είδος, τα **βαθμωτά** φυσικά μεγέθη, είναι αυτά που για τον προσδιορισμό τους απαιτείται μόνον μια τιμή και η αντίστοιχη μονάδα μέτρησης. Η τιμή τους επιπλέον είναι ανεξάρτητη από το σύστημα αναφοράς στο οποίο μετρούνται. Γνώριμα φυσικά μεγέθη αυτού του είδους είναι η θερμοκρασία, το ηλεκτρικό φορτίο και η σταθερά c που συμβολίζει το μέτρο της ταχύτητας του φωτός σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Πιο πολύπλοκα στο χειρισμό τους είναι τα **ανυσματικά** μεγέθη, τα οποία στο συνήθη τρισδιάστατο χώρο απαιτούν τον προσδιορισμό τριών παραμέτρων που η καθεμιά αναφέρεται σε έναν από τους άξονες του συστήματος συντεταγμένων. Έτσι, ένα ανυσματικό φυσικό μέγεθος που συνοπτικά θα συμβολίσουμε με το άνυσμα $\mathbf{a}$, προσδιορίζεται πλήρως σε ένα ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $OX_1X_2X_3$ από τις τρεις συνιστώσες του (a_1, a_2, a_3) . Το άνυσμα θέσης ενός σημείου στον τρισδιάστατο χώρο, η ταχύτητα, η επιτάχυνση, η δύναμη και το ηλεκτρικό πεδίο είναι γνώριμα φυσικά μεγέθη αυτού του είδους. Στην Παράγραφο 3-1 είδαμε ότι οι τιμές των συνιστωσών ανυσματικών μεγεθών εξαρτώνται από το σύστημα αναφοράς και μελετήσαμε πώς αυτές μετασχηματίζονται κατά τη μετάβαση από ένα σύστημα αναφοράς σε ένα άλλο.

Υπάρχουν όμως φυσικά μεγέθη που απαιτούν περισσότερες από τρεις συνιστώσες για τον προσδιορισμό τους στον τρισδιάστατο χώρο και που εμφανίζουν πολυπλοκότερο μετασχηματισμό των συνιστωσών τους μεταξύ συστημάτων αναφοράς απ' ό τι τα ανυσμα-



τικά μεγέθη. Τα φυσικά αυτά μεγέθη ονομάζονται **τανυστικά** φυσικά μεγέθη ή απλώς **τανυστές**. Ο αριθμός των συνιστωσών που απαιτούνται για τον πλήρη προσδιορισμό ενός τανυστή εξαρτάται από την **τάξη** του. Στον τρισδιάστατο χώρο, ένας τανυστής R τάξης διαθέτει 3^R συνιστώσες, ενώ, σε ένα ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, καθεμιά απ' τις συνιστώσες αναφέρεται σε R άξονες του συγκεκριμένου συστήματος συντεταγμένων. Θα συμβολίσουμε τις συνιστώσες ενός τανυστή T ως $T_{ijk...}$, όπου οι δείκτες $i, j, k, \dots$ παίρνουν τιμές 1, 2 και 3, σύμφωνα με την αρίθμηση των αξόνων στο σύστημα συντεταγμένων $OX_1X_2X_3$. Παραδείγματα τρισδιάστατων τανυστικών φυσικών μεγεθών δεύτερης τάξης από το χώρο της κλασικής μηχανικής και του ηλεκτρομαγνητισμού είναι αντίστοιχα η ροπή αδρανείας και η ηλεκτρική τετραπολική ροπή. Τα φυσικά αυτά μεγέθη απαιτούν τον προσδιορισμό εννέα συνιστωσών. Κάθε παράμετρος αναφέρεται σε ένα ζεύγος αξόνων του συστήματος συντεταγμένων, ενώ ο πλήρης τανυστής μπορεί να αποδοθεί αναλυτικά υπό τη μορφή ενός πίνακα 3×3 στοιχείων ως

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Ο μηχανισμός μετασχηματισμού των συνιστωσών T_{ij} ενός τανυστή δεύτερης τάξης στον τρισδιάστατο χώρο κατά τη μετάβαση από ένα σύστημα συντεταγμένων σε ένα άλλο μπορεί να προσδιοριστεί από τον κανόνα μετασχηματισμού των ανυσματικών μεγεθών που μελετήσαμε στην Παράγραφο 3-1. Για να συγκεκριμενοποιήσουμε την ανάλυσή μας, θα δανειστούμε ένα παράδειγμα από την κλασική μηχανική όπου το άνυσμα της στροφορμής $\mathbf{L}$ ενός στερεού σώματος, σε ένα σύστημα συντεταγμένων $OX_1X_2X_3$, συνδέεται με το άνυσμα της γωνιακής του ταχύτητας ω μέσω του τανυστικού φυσι-



κού μεγέθους της ροπής αδρανείας M με τη σχέση

$$L_k = \sum_{n=1}^3 M_{kn} \omega_n. \quad (3.42)$$

Σε ένα δεύτερο σύστημα συντεταγμένων $O'X'_1X'_2X'_3$, η τελευταία σχέση θα έχει γενικά τη μορφή

$$L'_k = \sum_{j=1}^3 M'_{kj} \omega'_j \quad (3.43)$$

όπου, σύμφωνα με την εξ. (3.18), οι συνιστώσες των δύο ανυσματικών μεγεθών στο πρώτο σύστημα δίνονται σε σχέση με τις τονούμενες συνιστώσες στο δεύτερο από τις σχέσεις

$$L_k = \sum_{m=1}^3 c_{mk} L'_m \quad (3.44)$$

και

$$\omega_k = \sum_{m=1}^3 c_{mk} \omega'_m. \quad (3.45)$$

Αντικατάσταση των εξ. (3.44) και (3.45) στην εξ. (3.42) δίνει

$$\sum_{m=1}^3 c_{mk} L'_m = \sum_{\ell=1}^3 M_{k\ell} \sum_{j=1}^3 c_{j\ell} \omega'_j. \quad (3.46)$$

Αν τώρα πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέρη της τελευταίας σχέσης με το στοιχείο c_{ik} και αθροίσουμε ως προς τον δείκτη k λαμβάνεται η σχέση

$$\sum_{m=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 c_{ik} c_{mk} \right) L'_m = \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 \sum_{\ell=1}^3 c_{ik} c_{j\ell} M_{k\ell} \right) \omega'_j. \quad (3.47)$$

Από την εξ. (3.14), το άθροισμα ως προς τον δείκτη k στο αριστερό μέρος της εξ. (3.47) αναγνωρίζεται ως το σύμβολο του Kroenecker δ_{im} , οπότε, μετά και την άθροιση ως προς m , η εξ. (3.47) παίρνει τη μορφή

$$L'_i = \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 \sum_{\ell=1}^3 c_{ik} c_{j\ell} M_{k\ell} \right) \omega'_j. \quad (3.48)$$

Έτσι, συγκρίνοντας με την εξ. (3.43), ο μετασχηματισμός του τανυστή της ροπής αδρανείας M αναδεικνύεται ως η σχέση

$$M'_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{\ell=1}^3 c_{ik} c_{j\ell} M_{k\ell}. \quad (3.49)$$

Αν και δόθηκε ως παράδειγμα για τον κανόνα μετασχηματισμού ενός συγκεκριμένου τανυστικού φυσικού μεγέθους, θα γενικεύσουμε την εξ. (3.49) για τον ορισμό οποιουδήποτε τανυστή τάξης R σε οποιοδήποτε χώρο N διαστάσεων με τον ακόλουθο ορισμό:

Σε ένα χώρο N διαστάσεων, ένας τανυστής T , τάξης R , συγκροτείται από ένα σύνολο N^R συνιστωσών με R δείκτες. Για ένα δεδομένο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $OX_1X_2...X_N$, κάθε συνιστώσα του τανυστή έχει τη μορφή $T_{ij...m}$, όπου καθένας από τους δείκτες $i, j, ..., m$ αναφέρεται σε έναν από τους άξονες του συστήματος $X_1, X_2, ..., X_N$. Κατά τη μετάβαση σε ένα δεύτερο σύστημα συντεταγμένων $O'X'_1X'_2...X'_N$, οι συνιστώσες του τανυστή $T_{ij...m}$ μετασχηματίζονται σύμφωνα με τη σχέση



$$T'_{ab\dots f} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \dots \sum_{m=1}^N c_{ai} c_{bj} \dots c_{fm} T_{ijk\dots m} \quad (3.50)$$

όπου οι συντελεστές c_{ij} αντιπροσωπεύουν το συνημίτονο μεταξύ της θετικής φοράς δύο αξόνων X'_i και X_j .

Παρατηρείται ότι ο γενικός αυτός ορισμός παρέχει τη δυνατότητα να ενταχθούν στην κατηγορία των τανυστών όλα τα είδη φυσικών μεγεθών που αναφέραμε μέχρι τώρα. Για ένα τανυστή πρώτης τάξης, η εξ. (3.50) οδηγεί στην εξίσωση μετασχηματισμού

$$T'_a = \sum_{i=1}^N c_{ai} T_i. \quad (3.51)$$

Με άλλα λόγια, ένας τανυστής πρώτης τάξης είναι ένα άνυσμα. Κατά τον ίδιο τρόπο, για ένα τανυστή μηδενικής τάξης η εξ. (3.50) δίνει

$$T' = T \quad (3.52)$$

που δηλώνει ότι ένας τανυστής μηδενικής τάξης είναι μια βαθμωτή ποσότητα.

3-5.2 Η ΣΥΜΒΑΣΗ ΑΘΡΟΙΣΗΣ ΤΟΥ EINSTEIN

Όπως δείχνει η σχέση ορισμού του τανυστή στην εξ. (3.50), αλλά και οι λοιπές σχέσεις αυτού του κεφαλαίου, σε πολλές περιπτώσεις απαιτείται η άθροιση όρων που περιέχουν συνιστώσες τανυστών με βάση ένα ή περισσότερους από τους δείκτες τους. Με σκοπό να απλοποιήσει το συμβολισμό, ο Einstein εισήγαγε μια σειρά κανόνων* που δηλώνουν την άθροιση όρων χωρίς τη χρήση του συμβό-

* Λέγεται ότι προς το τέλος της ζωής του, ο Einstein εξομολογήθηκε σε ένα φίλο του, μισό σοβαρά, μισό αστεία, ότι ως ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα της ζωής του θεωρεί το κατόρθωμά του να απαλλάξει τους συναδέλφους του από το σύμβολο Σ .



λου Σ. Η σύμβαση του Einstein για την άθροιση όρων που περιέχουν τανυστές μπορεί να συνοψιστεί στους εξής τρεις κανόνες:

1. Αν ένας δείκτης εμφανίζεται μόνο μια φορά σε κάποια αλγεβρική σχέση που περιέχει συνιστώσες τανυστών, η σχέση ισχύει για καθεμιά από τις N τιμές που μπορεί να λάβει ο δείκτης. Θα αναφερθούμε σε ένα δείκτη αυτού του τύπου με την ονομασία **ελεύθερος δείκτης**.
2. Η παρουσία ενός δείκτη δύο φορές μέσα σε έναν όρο μιας αλγεβρικής έκφρασης δηλώνει άθροισμα αυτού του όρου για όλες τις N τιμές που μπορεί να λάβει ο δείκτης. Θα αναφερθούμε σε ένα δείκτη αυτού του τύπου με την ονομασία **δείκτης αθροίσματος**.
3. Ένας δείκτης δεν μπορεί να απαντάται περισσότερες από δύο φορές σε έναν όρο μιας αλγεβρικής έκφρασης.

Στο συνοπτικό συμβολισμό του αθροίσματος που διαμορφώνει η προηγούμενη σύμβαση, η εξίσωση μετασχηματισμού τανυστών παίρνει τη μορφή

$$T'_{ab\dots f} = c_{ai} c_{bj} \dots c_{fm} T_{ij\dots m} \quad (3.53)$$

όπου η επανάληψη των δεικτών υποδηλώνει άθροισμα για όλες τις δυνατές τιμές $i, j, \dots, m = 1, 2, \dots, R$, ενώ η σχέση ισχύει για όλους τους N^R συνδυασμούς των δεικτών $a, b, \dots, f$.

Μερικά ακόμη παραδείγματα συνοπτικού συμβολισμού αθροισμάτων είναι ίσως χρήσιμα. Η εξ. (3.23), ως πρώτο παράδειγμα, μπορεί τώρα να γραφεί σε ένα χώρο τεσσάρων διαστάσεων ως

$$c_{\mu\kappa} c_{\nu\kappa} = \delta_{\mu\nu}. \quad (3.54)$$

* Ο δείκτης αθροίσματος απαντάται στη βιβλιογραφία και ως βωβός δείκτης



Η εξ. (3.54) αντιπροσωπεύει 16 σχέσεις που δημιουργούνται από όλους τους συνδυασμούς των δεικτών $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$. Στην ίδια σύμβαση, το στοιχείο της απόστασης στο χώρο Minkowski [βλ. εξ. (3.20)] μπορεί να γραφεί ως

$$(ds)^2 = dx_\alpha dx_\alpha \quad (3.55)$$

ενώ ο ίδιος ο μετασχηματισμός Lorentz ως

$$x'_\mu = c_{\mu\nu} x_\nu. \quad (3.56)$$

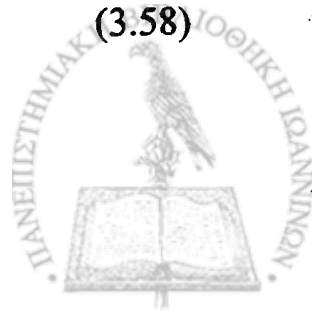
3-5.3 ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΑΝΥΣΤΩΝ

Αν δύο τανυστές A και B είναι της ίδιας τάξης R , τότε το άθροισμά τους $C = A + B$ ορίζεται από τις σχέσεις

$$C_{ab\dots f} = A_{ab\dots f} + B_{ab\dots f}. \quad (3.57)$$

Σύμφωνα με τους κανόνες του Einstein, η εξ. (3.57) αντιπροσωπεύει N^R σχέσεις. Το ότι οι ποσότητες $C_{ab\dots f}$ αποτελούν συνιστώσες ενός τανυστή μπορεί να αποδειχθεί από τον κανόνα μετασχηματισμού της εξ. (3.53). Αν κάθε όρος της εξ. (3.57) αναφέρεται σε ένα σύστημα συντεταγμένων $OX_1X_2\dots X_N$ και με τονούμενες ποσότητες συμβολίσουμε τις αντίστοιχες τιμές τους σε ένα δεύτερο σύστημα $O'X'_1X'_2\dots X'_N$, τότε

$$\begin{aligned} C'_{ab\dots f} &= A'_{ab\dots f} + B'_{ab\dots f} \\ &= c_{ai}c_{bj}\dots c_{fk} A_{ij\dots k} + c_{ai}c_{bj}\dots c_{fk} B_{ij\dots k} \\ &= c_{ai}c_{bj}\dots c_{fk} (A_{ij\dots k} + B_{ij\dots k}) \\ &= c_{ai}c_{bj}\dots c_{fk} C_{ij\dots k} \end{aligned} \quad (3.58)$$



που δείχνει ότι οι ποσότητες $C_{ij...k}$ όντως μετασχηματίζονται σύμφωνα με τον κανόνα της εξ. (3.53) και μπορούν να αποτελέσουν τις συνιστώσες ενός τανυστή C της ίδιας τάξης με τους τανυστές A και B . Η εξ. (3.57) επομένως ορίζει την πράξη της **πρόσθεσης** μεταξύ τανυστών.

Ας εξετάσουμε στη συνέχεια την πράξη του **πολλαπλασιασμού** μεταξύ συνιστωσών δύο τανυστών. Αν ο τανυστής A είναι τάξης R και ο τανυστής B τάξης P , τότε το γινόμενο δύο συνιστωσών του

$$C_{ab...dfg...h} = A_{ab...d} B_{fg...h} \quad (3.59)$$

θα είναι μια ποσότητα που εξαρτάται, όπως δείχνει η τελευταία σχέση, από ένα πλήθος $R + P$ δεικτών $a, b, \dots, d, f, g, \dots, h$. Πάλι, αν κάθε όρος της εξ. (3.57) αναφέρεται σε ένα σύστημα συντεταγμένων $OX_1X_2...X_N$ και με τονούμενες ποσότητες συμβολίσουμε τις αντίστοιχες τιμές τους σε ένα δεύτερο σύστημα $O'X'_1X'_2...X'_N$, τότε, από τον κανόνα μετασχηματισμού της εξ. (3.53) έπεται ότι

$$\begin{aligned} C'_{ab...dfg...h} &= A'_{ab...d} B'_{fg...h} \\ &= (c_{ai} c_{bj} \dots c_{dk} A_{ij...k}) (c_{fs} c_{gp} \dots c_{ht} B_{sp...t}) \\ &= c_{ai} c_{bj} \dots c_{dk} c_{fs} c_{gp} \dots c_{ht} (A_{ij...k} B_{sp...t}) \\ &= c_{ai} c_{bj} \dots c_{fk} c_{fs} c_{gp} \dots c_{ht} C_{ij...ksp...t} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Έτσι, η ποσότητα $C_{ij...ksp...t}$ μετασχηματίζεται ως ένας τανυστής με ένα πλήθος $R + P$ δεικτών. Συμπεραίνουμε ότι η πράξη του **πολλαπλασιασμού** μεταξύ δύο τανυστών A και B , αντίστοιχα τάξης R και P , όπως ορίζεται από την εξ. (3.59), οδηγεί σε ένα τανυστή τάξης $R + P$. Για παράδειγμα, το γινόμενο μιας βαθμωτής ποσότητας με ένα άνυσμα είναι ένα άνυσμα, ενώ το γινόμενο μιας βαθμωτής ποσότητας με ένα τανυστή είναι ένας τανυστής της ίδιας τάξης. Το γινόμενο



ενός ανύσματος με ένα τανυστή δεύτερης τάξης είναι ένας τανυστής τρίτης τάξης.

Μια τελευταία πράξη που θα εξετάσουμε είναι η **συστολή** ενός τανυστή (τάξης $R \geq 2$), η οποία πραγματοποιείται με τη χρησιμοποίηση του ιδίου συμβόλου για δύο από τους δείκτες του. Αν, για παράδειγμα, $A_{a...b...s...p}$ είναι μια συνιστώσα ενός τανυστή A τάξης R , μπορούμε να πραγματοποιήσουμε τη συστολή γράφοντας $A_{a...b...b...p}$. Σύμφωνα με τον δεύτερο κανόνα της σύμβασης άθροισης του Einstein, τούτο σημαίνει άθροιση ως προς τον δείκτη b . Το αποτέλεσμα μπορεί να βρεθεί αν θεωρήσουμε πάλι τον κανόνα μετασχηματισμού τανυστών της εξ. (3.53)

$$A'_{a...b...s...p} = c_{aj} \dots c_{bk} \dots c_{st} \dots c_{pm} A_{j...k...t...m}. \quad (3.61)$$

Θέτοντας τους δείκτες b και s ίσους, η τελευταία σχέση γίνεται

$$A'_{a...b...b...p} = c_{aj} \dots c_{bk} \dots c_{bt} \dots c_{pm} A_{j...k...t...m}. \quad (3.62)$$

Αλλά από την εξ. (3.54) ισχύει η σχέση

$$c_{bk} c_{bt} = \delta_{kt} \quad (3.63)$$

οπότε στο άθροισμα της εξ. (3.62) οι μόνοι όροι που θα επιβιώσουν στο δεξιό μέρος της σχέσης είναι αυτοί για τους οποίους $k = t$, ήτοι

$$A'_{a...b...b...p} = c_{aj} \dots c_{bk} \dots c_{bt} \dots c_{pm} A_{j...k...k...m}. \quad (3.64)$$

που μπορεί να αναγνωριστεί ως ο κανόνας μετασχηματισμού ενός τανυστή τάξης $R - 2$.

Η πράξη της συστολής είναι γνωστή από τον ανυσματικό λογισμό ως το **εσωτερικό γινόμενο** δύο ανυσμάτων. Αν A_k και B_k είναι δύο τανυστές πρώτης τάξης (ανύσματα), το γινόμενο $A_k B_j$ είναι ένας



τανυστής δεύτερης τάξης. Με την πράξη της συστολής, το γινόμενο $A_k B_k$ μεταπίπτει σε ένα τανυστή μηδενικής τάξης, δηλαδή σε μια βαθμωτή ποσότητα.

3-5.4 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΤΑΝΥΣΤΩΝ ΜΕ ΠΙΝΑΚΕΣ

Αν και ο ορισμός ενός τανυστή δόθηκε για λόγους πληρότητας με τη γενική μορφή της εξ. (3.53), που ισχύει για ένα τανυστή τάξης R σε ένα χώρο N διαστάσεων, στα επόμενα κεφάλαια θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με τανυστές μηδενικής (βαθμωτά φυσικά μεγέθη), πρώτης (ανύσματα) και δεύτερης τάξης. Θα περιοριστούμε ακόμη στη θεώρηση της συμπεριφοράς των τανυστών σε ένα χώρο τεσσάρων διαστάσεων. Οι αντίστοιχοι νόμοι μετασχηματισμού είναι

$$M' = M \quad (3.65)$$

για μια (αναλλοίωτη) βαθμωτή ποσότητα M ,

$$a'_\mu = c_{\mu\nu} a_\nu. \quad (3.66)$$

για ένα άνυσμα με συνιστώσες a_1, a_2, a_3, a_4 και

$$T'_{\mu\nu} = c_{\mu\kappa} c_{\nu\lambda} T_{\kappa\lambda} \quad (3.67)$$

για ένα τανυστή T δεύτερης τάξης.

Ήδη από την αρχή του κεφαλαίου έχουμε αναφερθεί στην απεικόνιση τανυστών και του μετασχηματισμού τους μέσω πινάκων της γραμμικής άλγεβρας. Για ένα άνυσμα $\mathbf{a}$, π.χ., ο μετασχηματισμός της εξ. (3.66) μπορεί να αποδοθεί μέσω του τελεστή C ως

$$\mathbf{a}' = C\mathbf{a} \quad (3.68)$$

όπου τα ανύσματα $\mathbf{a}'$ και $\mathbf{a}$ μπορούν να απεικονιστούν ως πίνακες με



μία στήλη

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}' = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \\ a'_4 \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

και ο τελεστής C ως ένας τετράγωνος πίνακας με τέσσερις σειρές και τέσσερις στήλες [βλ. εξ. (3.22)]

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix}. \quad (3.70)$$

Ορισμένες ιδιότητες του τελεστή C και του αντίστοιχου πίνακα C της εξ. (3.70) απορρέουν από τις εξ. (3.23) που στη σύμβαση άθροισης του Einstein παίρνουν τη μορφή

$$c_{\mu\lambda}c_{\nu\lambda} = \delta_{\mu\nu} \quad (3.71\alpha)$$

και

$$c_{\lambda\mu}c_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\nu}. \quad (3.71\beta)$$

Αν ορίσουμε τον **ανάστροφο πίνακα** C^T του πίνακα C με την ανταλλαγή σειρών και στηλών στην εξ. (3.70), ήτοι

$$C^T = \begin{pmatrix} c_{11}^T & c_{12}^T & c_{13}^T & c_{14}^T \\ c_{21}^T & c_{22}^T & c_{23}^T & c_{24}^T \\ c_{31}^T & c_{32}^T & c_{33}^T & c_{34}^T \\ c_{41}^T & c_{42}^T & c_{43}^T & c_{44}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} & c_{41} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} & c_{42} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{43} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

δεν είναι δύσκολο να δείξουμε, μέσω των εξ. (3.71), ότι το γινόμενο των πινάκων C και C^T δίνει τον μοναδιαίο πίνακα I , ήτοι

$$CC^T = C^T C = I \quad (4.73)$$

όπου I είναι ο πίνακας

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.74)$$

Αλλά η εξ. (3.73) ταυτίζεται με τον ορισμό του **αντίστροφου πίνακα** C^{-1}

$$CC^{-1} = C^{-1}C = I. \quad (4.75)$$

Οι ορθογώνιες επομένως σχέσεις των εξ. (3.71) προβλέπουν ότι για τον πίνακα μετασχηματισμού C ο ανάστροφος πίνακας C^T και ο αντίστροφος πίνακας C^{-1} ταυτίζονται

$$C^T = C^{-1} \quad (4.76)$$

(τούτο βεβαίως δεν συμβαίνει για οποιοδήποτε τετράγωνο πίνακα).

Η τελευταία σχέση επιτρέπει τώρα την εύρεση του αντίστροφου μετασχηματισμού από το άνυσμα $\mathbf{a}'$ στο άνυσμα $\mathbf{a}$. Πολλαπλασιασμός των δύο μελών της εξ. (3.68) από αριστερά με τον ανάστροφο πίνακα C^T δίνει

$$C^T \mathbf{a}' = C^T C \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

ή



$$\mathbf{a} = \mathbf{C}^T \mathbf{a}' . \quad (3.77)$$

Κατά τον ίδιο τρόπο μπορεί να εκφραστεί μέσω πινάκων ο μετασχηματισμός ενός τανυστή δεύτερης τάξης της εξ. (3.67). Θεωρώντας τον τανυστή T ως ένα τετράγωνο πίνακα 4×4 με στοιχεία $T_{\mu\nu}$, μπορούμε να γράψουμε την εξ. (3.67) ως

$$T'_{\mu\nu} = (c_{\mu\kappa} T_{\kappa\lambda}) c_{\nu\lambda} = (c_{\mu\kappa} T_{\kappa\lambda}) c_{\lambda\nu}^T . \quad (3.78)$$

Το άθροισμα εντός παρενθέσεων στην τελευταία σχέση μπορεί να αναγνωριστεί ως το στοιχείο $A_{\mu\lambda}$ ενός πίνακα A που προέρχεται από το γινόμενο των πινάκων C και T

$$A = CT \quad (3.79)$$

ενώ ως $c_{\lambda\nu}^T$ έχουν συμβολιστεί τα στοιχεία του ανάστροφου πίνακα C^T . Ο μετασχηματισμός επομένως της εξ. (3.67) μπορεί να γραφεί υπό μορφή πινάκων ως

$$T' = CTC^T . \quad (3.80)$$

Θα αφιερώσουμε ως άσκηση η απόδειξη του αντίστροφου μετασχηματισμού

$$T = C^T T' C . \quad (3.81)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3-1 Αποδείξτε τις εξ. (3.11).

3-2 Θεωρώντας προβολές του σημείου P του σχήματος 3.1 στους άξονες των δύο συστημάτων αναφοράς και απαιτώντας να παραμένει στα-



θερό το διάστημα μεταξύ δύο σημείων του χώρου $P^{(1)}$ και $P^{(2)}$, αποδείξτε την εξ. (3.12).

- 3-3 Δείξτε ότι αν επιβληθεί η απαίτηση ότι ο όγκος ενός κύβου παραμένει σταθερός στα δύο συστήματα αναφοράς που συνδέονται με το μετασχηματισμό της εξ. (3.9), τότε ο πίνακας του μετασχηματισμού (c_{ij}) έχει μοναδιαία ορίζουσα.
- 3-4 Δείξτε ότι οι εξ. (3.14) είναι ισοδύναμες.
- 3-5 Δείξτε ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός ανύσματος της εξ. (3.17) δίνεται από την εξ. (3.18).
- 3-6 Θεωρώντας την οριακή συνθήκη $t' = t$ όταν η αρχή των συντεταγμένων των δύο συστημάτων αναφοράς συμπίπτει, δείξτε ότι στην εξ. (3.30) πρέπει να επιλεγεί το θετικό πρόσημο.
- 3-7 Δείξτε ότι στο χώρο Minkowski μια περιστροφή των αξόνων κατά 90° ισοδυναμεί με τη θεώρηση δύο συστημάτων αναφοράς που κινούνται με σχετική ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του φωτός.
- 3-8 Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Lorentz των εξ. (3.36) μπορεί να γραφεί ως

$$x'_1 = x_1 \cosh \alpha + ct \sinh \alpha$$

$$x'_2 = x_2$$

$$x'_3 = x_3$$

$$t' = t \cosh \alpha + \frac{x_1}{c} \sinh \alpha$$

όπου $\tanh \alpha = V/c$. Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Lorentz ισοδυναμεί με μια περιστροφή στο χώρο Minkowski των αξόνων του συστήματος αναφοράς κατά μια γωνία $i\alpha$.



- 3-9 Αν στον τετραδιάστατο χώρο δύο γεγονότα που συμβαίνουν σε ένα σύστημα αναφοράς απέχουν κατά ένα χρονοειδές διάστημα, προσδιορίστε την ταχύτητα με την οποία πρέπει να κινείται ένα δεύτερο αδρανειακό σύστημα αναφοράς ώστε σ' αυτό τα δύο γεγονότα να συμβούν στο ίδιο σημείο του χώρου. Στο νέο σύστημα αναφοράς προσδιορίστε το χρονικό διάστημα Δt μεταξύ των δύο γεγονότων.
- 3-10 Αν σε ένα σύστημα αναφοράς $O'X'Y'Z'$ ένα σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα v , κατά μέτρο μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός, δείξτε ότι είναι δυνατόν να βρεθεί ένα δεύτερο αδρανειακό σύστημα αναφοράς $OXYZ$ στο οποίο η ταχύτητα του κινητού μηδενίζεται. Το σύστημα αυτό αναφοράς ονομάζεται **σύστημα ηρεμίας** του σώματος. Δείξτε ότι στο σύστημα ηρεμίας ενός σώματος ο αναλλοίωτος χρόνος είναι ο χρόνος που μετρά το χρονόμετρο του συστήματος.
- 3-11 Αν στον τετραδιάστατο χώρο δύο γεγονότα που συμβαίνουν σε ένα σύστημα αναφοράς απέχουν κατά ένα χωροειδές διάστημα, προσδιορίστε την ταχύτητα με την οποία πρέπει να κινείται ένα δεύτερο αδρανειακό σύστημα αναφοράς ώστε σ' αυτό τα δύο γεγονότα να συμβούν ταυτόχρονα. Στο νέο σύστημα αναφοράς προσδιορίστε τη χωρική απόσταση Δr μεταξύ των δύο γεγονότων.
- 3-12 Στο παράδοξο των διδύμων της Παραγράφου 2-5 θεωρείστε δύο γεγονότα: την αναχώρηση του Γιάννη από τη γη και την άφιξή του στο μακρινό πλανήτη. Υπολογίστε τον αναλλοίωτο χρόνο Δt μεταξύ των δύο αυτών γεγονότων, τόσο στο σύστημα αναφοράς του Γιάννη, όσο και στο σύστημα αναφοράς της Ιωάννας.
- 3-13 Δείξτε ότι διαφορική εξίσωση

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$



που διέπει τη μετάδοση του φωτός δεν παραμένει αναλλοίωτη κατά το μετασχηματισμό του Γαλιλαίου, αλλά είναι συναλλοίωτη με το μετασχηματισμό Lorentz.

3-14 Δείξτε ότι στις τέσσερις διαστάσεις το σύμβολο του Kroenecker $\delta_{\mu\nu}$, όπου $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$, συγκροτεί ένα τανυστή δεύτερης τάξης.

3-15 Γράψτε την έκφραση

$$S = g_{\alpha\beta} x_{\alpha} x_{\beta}$$

σε αναλυτική μορφή, χρησιμοποιώντας το σύμβολο Σ της άθροισης, αν το άνυσμα $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ορίζεται στον τετραδιάστατο χώρο.

3-16 Για δύο ανύσματα $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ και $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ αποδείξτε τη σχέση

$$\frac{\partial(x_{\alpha} y_{\alpha})}{\partial y_{\mu}} = x_{\mu}.$$

3-17 Δείξτε ότι εσωτερικό γινόμενο δύο ανυσμάτων παραμένει αναλλοίωτο σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

3-18 Αποδείξτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό της εξ. (3.80) που περιέχεται στην εξ. (3.81).



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Σχετικιστική Μηχανική

ΣΤΑ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΚΕΦΑΛΑΙΑ εξετάσαμε διεξοδικά το χώρο, μέσα στον οποίο θα πρέπει να περιγράψουμε τα φυσικά φαινόμενα, έτσι ώστε να δημιουργηθεί μια ολοκληρωμένη θεωρία που θα καλύπτει όλο το εύρος των φυσικά επιτρεπτών ταχυτήτων. Τα δύο αξιώματα της Θεωρίας της Σχετικότητας ανέδειξαν τον τετραδιάστατο χώρο Minkowski, ο οποίος, τουλάχιστον ως προς τη γεωμετρία, εξασφαλίζει τη σωστή απόδοση των μετρήσεων ανεξάρτητων παρατηρητών σε διαφορετικά αδρανειακά συστήματα. Επόμενο βήμα είναι να εξετάσουμε πώς τα διάφορα φυσικά μεγέθη που περιγράφουν τα φαινόμενα εντάσσονται μέσα σ' αυτόν το χώρο.

Από μια άποψη, στη μέχρι τώρα γνώριμη νευτώνεια μηχανική κινηθήκαμε μέσα σε δύο ανεξάρτητους χώρους: στον κοινό τρισδιάστατο χώρο και σε ένα δεύτερο μονοδιάστατο χώρο – το χρόνο. Στα πλαίσια αυτά, ένα γεγονός χαρακτηρίζεται από τη θέση του στον τρισδιάστατο χώρο και από τη στιγμή που συμβαίνει στον ανεξάρτητο μονοδιάστατο χώρο του χρόνου. Οι δύο χώροι παραμένουν ξεχωριστοί και ανεξάρτητοι εφ' όσον οι ταχύτητες παραμένουν χαμηλές. Όταν όμως οι ταχύτητες που εμπλέκονται στην εξέλιξη ενός γεγονότος αυξηθούν αρκετά, οι δύο χώροι κατά κάποιο τρόπο συνενώνονται και εμπλέκονται στη συγκρότηση ενός νέου ενιαίου τετραδιάστατου χώρου – του χώρου Minkowski. Παρόμοια θα πρέπει να



είναι και η τύχη των φυσικών μεγεθών που μέχρι τώρα χρησιμοποιήθηκαν στον τρισδιάστατο χώρο για την περιγραφή των φαινομένων στη νευτώνεια μηχανική. Βαθμωτές ποσότητες, ανύσματα και τανυστικά μεγέθη υψηλότερης τάξης θα πρέπει να μεταφερθούν στον τετραδιάστατο χώρο κατά τρόπο που να ικανοποιεί τα δύο αξιώματα της Θεωρίας της Σχετικότητας. Θα πρέπει αφ' ενός η μέτρησή τους σε δύο αδρανειακά συστήματα να είναι συμβατή με το μετασχηματισμό Lorentz, ενώ η μορφή των φυσικών νόμων να παραμένει αναλλοίωτη κατά τη μετάβαση από ένα αδρανειακό σύστημα σ' ένα άλλο. Τα δύο αυτά κριτήρια ικανοποιούν από τον ορισμό τους στην εξ. (3.50) και μόνον, οι τανυστές οποιασδήποτε τάξης που ορίσαμε στην Παράγραφο 3-5.

Αντίστροφα, η θεωρία που θα δημιουργήσουμε για την περιγραφή των φυσικών φαινομένων στο χώρο Minkowski, θα πρέπει ασυμπτωτικά, για χαμηλές ταχύτητες, να προβλέπει την αυτονόμηση των εννοιών του τρισδιάστατου χώρου και του μονοδιάστατου χρόνου και να μας επιστρέφει στην τόσο επιτυχή μέχρι τώρα νευτώνεια μηχανική.

Το πρόγραμμα που μόλις σκιαγραφήθηκε θα ακολουθήσουμε στο παρόν κεφάλαιο.

4-1 Ταχύτητα

Σε αναλογία με τον τρισδιάστατο χώρο, ένα σημείο του χώρου Minkowski – ενός γεγονότος που συμβαίνει τη στιγμή t και στο σημείο του τρισδιάστατου χώρου $\mathbf{x}$ – περιγράφεται πλήρως από το τετραδιάστατο **άνυσμα θέσης**

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (\mathbf{x}, ict) \quad (4.1)$$

όπου στο τελευταίο σκέλος έχει δοθεί έμφαση στην προέλευση του ανύσματος από την συνένωση των δύο χώρων. Ένα άνυσμα με τη



μορφή της τελευταίας σχέσης έχει καθιερωθεί με τον όρο **τετράνυσμα**, ενώ ειδικά στο άνυσμα της εξ. (4.1) θα αναφερθούμε με τον όρο* **τετράνυσμα θέσης**. Ήδη έχουμε δει ότι το διάστημα Δs μεταξύ δύο σημείων στο χώρο [βλ. εξ. (3.5)] και το στοιχείο της απόστασης ds [βλ. εξ. (3.20)] που προκύπτουν από το τετράνυσμα θέσης είναι αναλλοίωτες ποσότητες υπό το μετασχηματισμό Lorentz.

Στον κοινό τρισδιάστατο χώρο, ο ρυθμός μεταβολής του ανύσματος θέσης ως προς το χώρο είναι το φυσικό μέγεθος της ταχύτητας

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (4.2)$$

ένα άνυσμα που αφ' ενός δεν παραμένει αναλλοίωτο με το μετασχηματισμό του Γαλιλαίου, ενώ με το μετασχηματισμό Lorentz εμφανίζει τις σχετικά πολύπλοκες σχέσεις μετασχηματισμού των εξ. (2.32). Το αίτιο της συμπεριφοράς αυτής δεν είναι δύσκολο να βρεθεί: το άνυσμα $\mathbf{x}$ αποτελεί μεν μέρος ενός πραγματικού τετρανύσματος (ενός τανυστή πρώτης τάξης στο χώρο Minkowski), η ποσότητα όμως dt δεν παραμένει αναλλοίωτη κατά το μετασχηματισμό Lorentz. Θα αναζητήσουμε επομένως το φυσικό μέγεθος της ταχύτητας στον τετραδιάστατο χώρο στο ρυθμό μεταβολής του τετρανύσματος θέσης ως προς μια αναλλοίωτη ποσότητα που αντιπροσωπεύει το χρόνο και θα ορίσουμε το τετράνυσμα της ταχύτητας ως

$$U = \frac{dX}{d\tau} = \left(\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}, ic \frac{dt}{d\tau} \right) \quad (4.3)$$

* Όπως υποδηλώνει ο συμβολισμός της εξ. (4.1) θα χρησιμοποιήσουμε όρθιους κεφαλαίους χαρακτήρες, της ελληνικής ή της λατινικής αλφαβήτου, για την απόδοση τετρανυσμάτων. Θα διατηρήσουμε τη χρήση μαύρων χαρακτήρων για την απόδοση τρισδιάστατων ανυσμάτων, ενώ θα συνεχίσουμε να χρησιμοποιούμε πλάγιους χαρακτήρες για το συμβολισμό βαθμωτών ποσοτήτων.



όπου dt είναι το στοιχείο του αναλλοίωτου χρόνου που ορίσαμε στην Παράγραφο 3-4

$$d\tau = \frac{i}{c} \sqrt{dx_\alpha dx_\alpha} . \quad (4.4)$$

Καθ' όσον το στοιχείο του χρόνου dt συνδέεται με το στοιχείο του αναλλοίωτου χρόνου $d\tau$ με τη σχέση (βλ. Άσκηση 4-1)

$$d\tau = dt \sqrt{1 - u^2 / c^2} \quad (4.5)$$

το τετράνυσμα της ταχύτητας στην εξ. (4.3) παίρνει τη μορφή

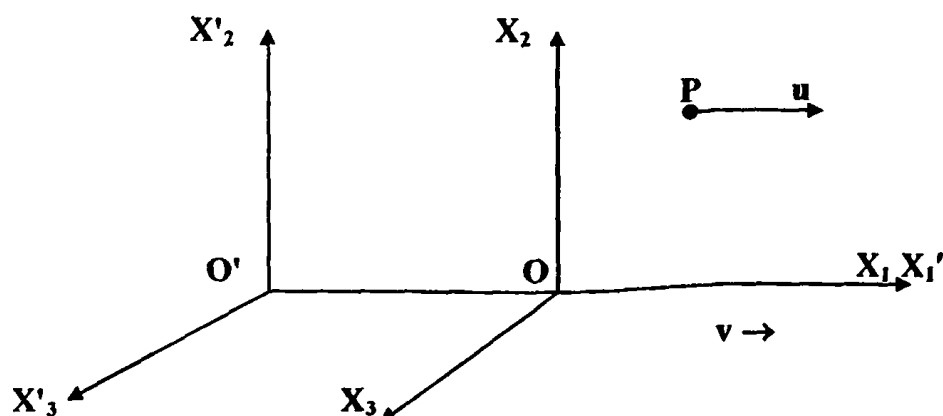
$$U = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} (\mathbf{u}, ic) = \gamma(u) (\mathbf{u}, ic) \quad (4.6)$$

όπου $\mathbf{u}$ είναι η κοινή τρισδιάστατη ταχύτητα της εξ. (4.2) στις τρεις διαστάσεις και στον παράγοντα γ έχει δοθεί έμφαση ότι εξαρτάται από την ταχύτητα u

$$\gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} . \quad (4.7)$$

Ως πραγματικό τετράνυσμα στο χώρο Minkowski, η ταχύτητα U της εξ. (4.6) μετασχηματίζεται μεταξύ αδρανειακών συστημάτων αναφοράς σύμφωνα με το μετασχηματισμό Lorentz. Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, τα δύο αδρανειακά συστήματα $OX_1X_2X_3X_4$ και $O'X'_1X'_2X'_3X'_4$, τα οποία κινούνται με σχετική ταχύτητα v κατά τον κοινό τους άξονα X_1, X'_1 . Ας θεωρήσουμε ακόμη ότι ένα σώμα κινείται με ταχύτητα u στο πρώτο σύστημα, για απλούστευση της άλγεβρας, επίσης κατά τον κοινό άξονα των δύο συστημάτων X_1, X'_1





Σχήμα 4.1 Μετασχηματισμός της ταχύτητας u από το αδρανειακό σύστημα αναφοράς $OX_1X_2X_3X_4$ στο σύστημα $O'X'_1X'_2X'_3X'_4$.

(βλ. σχήμα (4.1)). Ένας παρατηρητής στο δεύτερο σύστημα αναφοράς θα μετρήσει, σύμφωνα με τις εξ. (3.34) και (3.68), τις συνιστώσες του τετρανύσματος της ταχύτητας

$$U'_1 = \gamma(v)U_1 - i\beta(v)\gamma(v)U_4 \quad (4.8\alpha)$$

$$U'_2 = U_2 \quad (4.8\beta)$$

$$U'_3 = U_3 \quad (4.8\gamma)$$

$$U'_4 = i\beta(v)\gamma(v)U_1 + \gamma(v)U_4 \quad (4.8\delta)$$

όπου τώρα, σε προφανή συμβολισμό,

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \quad (4.9\alpha)$$

και

$$\beta(v) = \frac{v}{c}. \quad (4.9\beta)$$

Χρησιμοποιώντας την αναλυτική μορφή του τετρανύσματος της ταχύτητας στην εξ. (4.6), οι εξ. (4.8α) και (4.8δ) μπορούν να γραφούν ως

$$\gamma(u')u' = \gamma(v)\gamma(u)u - i\beta(v)\gamma(v)\gamma(u)(ic) \quad (4.10\alpha)$$

$$\gamma(u')(ic) = i\beta(v)\gamma(v)\gamma(u)u + \gamma(v)\gamma(u)(ic). \quad (4.10\beta)$$

Με λίγη άλγεβρα, οι εξ. (4.10) δίνουν

$$\frac{\gamma(u')}{\gamma(u)} u' = \gamma(v)[u + v] \quad (4.11\alpha)$$

$$\frac{\gamma(u')}{\gamma(u)} = \gamma(v) \left[1 + \frac{uv}{c^2} \right] \quad (4.11\beta)$$

που με διαίρεση κατά μέλη οδηγούν στη σχέση

$$u' = \frac{u + v}{1 + uv/c^2}. \quad (4.12)$$

Η εξ. (4.12) είναι ο νόμος πρόσθεσης ταχυτήτων της εξ. (2.31) που στην Παράγραφο 2-3.4 εξαγάγαμε με διαφορετικό τρόπο.

Στο ασυμπτωτικό όριο βεβαίως, όπου $u, v \ll c$, το στοιχείο του αναλλοίωτου χρόνου dt στην εξ. (4.5) ταυτίζεται με το στοιχείο του χρόνου dt και η εξ. (4.12) μεταπίπτει στη σχέση άθροισης των ταχυτήτων που προβλέπει ο μετασχηματισμός του Γαλιλαίου

$$u' = u + v. \quad (4.13)$$

4-2 Κίνηση μέσα στον κοσμικό χώρο

Η μορφή του τετρανύσματος της ταχύτητας στην εξ. (4.6) αναδεικνύει μια αξιοσημείωτη συμπεριφορά της κίνησης των γεγονότων



μέσα στο χώρο Minkowski. Θωρώντας το τετράγωνο του τετρανύσματος U μπορούμε να γράψουμε

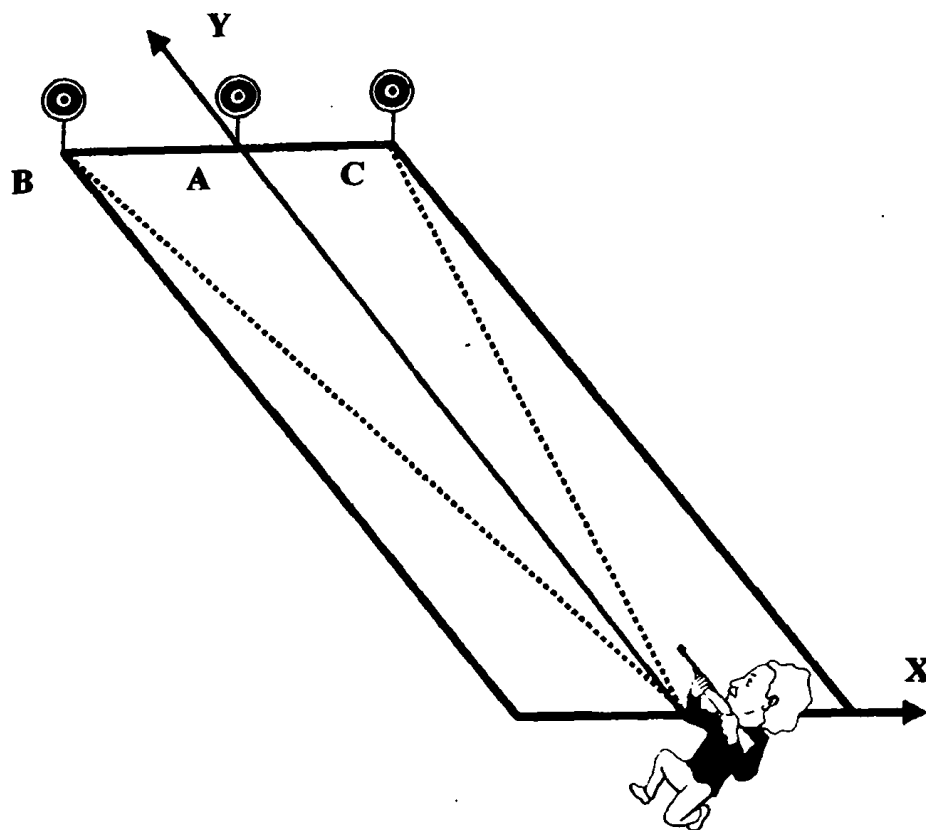
$$|U|^2 = U_\alpha U_\alpha = \frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}} (u^2 - c^2) = -c^2. \quad (4.14)$$

Με άλλα λόγια, ένα γεγονός ταξιδεύει μέσα στο χωροχρόνο πάντα με ταχύτητα, κατά μέτρο, ίση με την ταχύτητα του φωτός.

Το εκ πρώτης όψεως εκπληκτικό αυτό γεγονός δείχνει για μια ακόμη φορά τη στενή σχέση μεταξύ χώρου και χρόνου. Στην κλασική νευτώνεια μηχανική έχουμε συνηθίσει να μιλάμε για ταχύτητες μέσα στον τρισδιάστατο χώρο με διάφορες τιμές του μέτρου, της διεύθυνσης και φοράς τους. Παράλληλα, χωρίς ενδεχομένως πολλή σκέψη, θεωρούμε ότι όλα τα σώματα, κινούμενα ή στάσιμα, «ταξιδεύουν» αδυσώπητα, με τον ίδιο ρυθμό, μέσα στο χρόνο. Τώρα, η ένταξη των φαινομένων στον τετραδιάστατο κοσμικό χώρο αναδεικνύει μια νέα προοπτική σχετικά με τη συμπεριφορά των γεγονότων – που στο χώρο Minkowski αναλογούν στα χωρικά σημεία του τρισδιάστατου χώρου. Στη φύση υπάρχει μια και μόνο ταχύτητα: η ταχύτητα του φωτός. Όλα τα γεγονότα ταξιδεύουν μέσα στο χωροχρόνο με σταθερή ταχύτητα c , κατά τέτοιο τρόπο ώστε αυτή να διαμοιράζεται μεταξύ συνιστωσών στο χώρο και στο χρόνο. Είναι ίσως χρήσιμο στο σημείο αυτό να ανατρέξουμε σε ένα ανάλογο παράδειγμα από τον οικείο μας τρισδιάστατο χώρο.

Ας θεωρήσουμε ότι ένας αθλητής ασκείται στο Ολυμπιακό άθλημα της σκοποβολής με ένα αεροβόλο όπλο του οποίου το βλήμα ταξιδεύει με σταθερή ταχύτητα 150 m s^{-1} . Όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2, ο αθλητής βρίσκεται στο σημείο O , ενώ ακριβώς απέναντί του και σε απόσταση 150 m , στο σημείο A , βρίσκεται ένας στόχος. Εκατέρωθεν του στόχου A , στα σημεία B και C και σε απόσταση 30 m





Σχήμα 4.2 Άσκηση σκοποβολής στο σφαιριστήριο των Ολυμπιακών εγκαταστάσεων της Αθήνας 2004.

βρίσκονται δύο άλλοι στόχοι. Στις υπερσύγχρονες εγκαταστάσεις του σφαιριστηρίου που κατασκευάστηκε στο Μαρκόπουλο της Αττικής για τους Ολυμπιακούς αγώνες της Αθήνας το 2004, υπάρχει η δυνατότητα μέτρησης του χρόνου πτήσης ενός βλήματος, ήτοι της μέτρησης του χρονικού διαστήματος από την εκτυρσοκρότηση ενός όπλου μέχρι τη στιγμή άφιξης του βλήματος στο στόχο.

Ο αθλητής του σχήματος 4.2 ασκείται σημαδεύοντας εναλλάξ τους τρεις στόχους του σφαιριστηρίου. Καθ' όσον πρόκειται για μέλος της Ελληνικής Ολυμπιακής ομάδας, σε κάθε του προσπάθεια πετυχαίνει το κέντρο του στόχου. Από τις χρονομετρήσεις όμως προκύπτει ότι ο χρόνος πτήσης του βλήματος προς τον στόχο Α είναι ακριβώς 1.00 s, ενώ προς τους στόχους Β ή C λίγο μεγαλύτερος,

ίσος με 1.02 s. Πού οφείλεται η διαφορά αυτή; Μα βέβαια στο γεγονός ότι το βλήμα, με σταθερή ταχύτητα, διανύει μεγαλύτερο δρόμο για να φτάσει στους στόχους B ή C (δρόμοι OB ή OC), απ' ότι για να φτάσει στο στόχο A (δρόμος OA). Από μια διαφορετική οπτική γωνία και χρησιμοποιώντας το σύστημα αναφοράς OXY του σχήματος 4.2, η ταχύτητα του βλήματος, όταν αυτό ταξιδεύει προς το στόχο A, αναλώνεται αποκλειστικά στον άξονα Y, ενώ όταν ταξιδεύει προς το στόχο B ή C διαμοιράζεται στους άξονες X και Y.

Τηρουμένων των αναλογιών, το προηγούμενο παράδειγμα μπορεί να μεταφερθεί στο χώρο Minkowski για την περιγραφή της κίνησης ενός γεγονότος. Αν το γεγονός αντιπροσωπεύει την ύπαρξη ενός υλικού σώματος σε κάποιο σημείο r του τρισδιάστατου χώρου σε κάποια χρονική στιγμή t , το γεγονός ταξιδεύει μέσα στο χωροχρόνο με σταθερή ταχύτητα c . Αν η κοινή χωρική του ταχύτητα u είναι ίση με το μηδέν, όλη η κοσμική του ταχύτητα U αναλώνεται στην τέταρτη συνιστώσα της που αντιπροσωπεύει το χρόνο. Όπως όμως και με το βλήμα του σχήματος 4.2 που διανύει το δρόμο OB, αν η κοσμική ταχύτητα U διαθέτει συνιστώσες και κατά τους χωρικούς άξονες του συστήματος αναφοράς $OX_1X_2X_3X_4$, η συνιστώσα κατά τον άξονα του χρόνου υπολείπεται της τιμής c . Από μια άποψη, όπως ο Γιάννης στο παράδοξο των διδύμων, ένα υλικό σώμα που κινείται στον τρισδιάστατο χώρο «γερνάει» με μικρότερο ρυθμό απ' ότι ένα στάσιμο. Στο άλλο άκρο της κλίμακας βρίσκονται γεγονότα που στον τρισδιάστατο χώρο ταξιδεύουν με την ταχύτητα του φωτός. Στην περίπτωση αυτή, όλη η κοσμική ταχύτητα εξαντλείται στις χωρικές συνιστώσες και η συνιστώσα ως προς τον άξονα του χρόνου μηδενίζεται. Έτσι, με λίγη ποιητική διάθεση, μπορούμε να πούμε ότι «το φως ποτέ δεν γερνάει». Ένα φωτόνιο που γεννήθηκε κατά τη μεγάλη έκρηξη παραμένει σήμερα στην ίδια ηλικία που είχε πριν από περίπου 15 δισεκατομμύρια χρόνια όταν γεννήθηκε το σύμπαν.



4-3 Επιτάχυνση

Σε αναλογία με το τετράνυσμα της ταχύτητας στην εξ. (4.3) θα ορίσουμε το τετράνυσμα της επιτάχυνσης με τη σχέση

$$A = \frac{d^2 X}{d\tau^2} = \left(\frac{d^2 \mathbf{x}}{d\tau^2}, ic \frac{d^2 t}{d\tau^2} \right). \quad (4.15)$$

Τώρα, από την εξ. (4.5) προκύπτει ότι ο τελεστής της παραγώγου ως προς τον αναλλοίωτο χρόνο $d/d\tau$ μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{d}{d\tau} = \gamma(u) \frac{d}{dt} \quad (4.16)$$

έτσι ώστε το τετράνυσμα A της εξ. (4.15) να πάρει τη μορφή

$$\begin{aligned} A &= \left(\gamma(u) \frac{d}{dt} \left(\gamma(u) \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right), ic\gamma(u) \frac{d\gamma(u)}{dt} \right) \\ &= \left(\gamma(u) \frac{d}{dt} (\gamma(u) \mathbf{u}), ic\gamma(u) \frac{d\gamma(u)}{dt} \right) \\ &= \left(\gamma(u) \frac{d\gamma(u)}{dt} \mathbf{u} + \gamma(u)^2 \frac{d\mathbf{u}}{dt}, ic\gamma(u) \frac{d\gamma(u)}{dt} \right) \\ &= \left(\gamma(u) \frac{d\gamma(u)}{dt} \mathbf{u} + \gamma(u)^2 \mathbf{a}, ic\gamma(u) \frac{d\gamma(u)}{dt} \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

όπου

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} \quad (4.18)$$

είναι η συνήθης τρισδιάστατη επιτάχυνση.



Η έκφραση της εξ. (4.17) περιέχει την παράγωγο $d\gamma(u)/dt$. Γράφοντας το τετράγωνο της ταχύτητας ως $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι

$$\frac{d\gamma(u)}{dt} = \frac{\frac{\mathbf{u}}{c^2} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt}}{(1 - \mathbf{u}^2 / c^2)^{3/2}} = \gamma(u)^3 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{c^2}. \quad (4.19)$$

Ορίζοντας επιπλέον, προς χάριν συντόμευσης του συμβολισμού, την ποσότητα

$$K = \gamma(u)^2 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \quad (4.20)$$

μπορούμε να γράψουμε το τετράνυσμα της επιτάχυνσης στην τελική του μορφή ως

$$\mathbf{A} = \gamma(u)^2 (K\mathbf{u} + \mathbf{a}, icK). \quad (4.21)$$

Ως τετράνυσμα στο χώρο Minkowski, η επιτάχυνση $\mathbf{A}$ της τελευταίας σχέσης μετασχηματίζεται μεταξύ αδρανειακών συστημάτων αναφοράς σύμφωνα με το μετασχηματισμό Lorentz. Είναι δυνατόν να εργαστούμε όπως και στην Παράγραφο 4-1 και να εκφράσουμε την τρισδιάστατη επιτάχυνση $\mathbf{a}'$ που μετρά ένας παρατηρητής στο σύστημα αναφοράς $O'X'_1X'_2X'_3X'_4$ όταν αυτή έχει την τιμή $\mathbf{a}$ στο σύστημα αναφοράς $OX_1X_2X_3X_4$. Οι σχέσεις όμως που προκύπτουν από τη διαδικασία αυτή είναι εξαιρετικά πολύπλοκες, ακόμη και αν η επιτάχυνση $\mathbf{a}$ είναι παράλληλη με την ταχύτητα $\mathbf{u}$. Θα θεωρήσουμε επομένως μια ιδιαίτερα απλή περίπτωση που παρουσιάζει, παρ' όλα αυτά, κάποιο ενδιαφέρον.

Από το αποτέλεσμα της εξ. (4.12) είναι βέβαιο ότι αν ένα σώμα



διαθέτει στο σύστημα αναφοράς $O'X'_1X'_2X'_3X'_4$ ταχύτητα u' και επιτάχυνση a' , είναι δυνατόν να επιλέξουμε ένα προνομιακό σύστημα αναφοράς $OX_1X_2X_3X_4$ όπου η ταχύτητά του u προς στιγμή μηδενίζεται. Θα ονομάσουμε το τελευταίο σύστημα αναφοράς **σύστημα ηρεμίας**. Στο σύστημα ηρεμίας, το τετράνυσμα της επιτάχυνσης στην εξ. (4.21) παίρνει ιδιαίτερα απλή μορφή. Εδώ, ο παράγοντας K της εξ. (4.20) μηδενίζεται, ενώ ο παράγοντας $\gamma(u)$ γίνεται ίσος με τη μονάδα

$$K = 0 \quad (4.22)$$

και

$$\gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} = 1. \quad (4.23)$$

Το τετράνυσμα επομένως της εξ. (4.21) παίρνει τη μορφή

$$A = (a, 0). \quad (4.24)$$

Ας θεωρήσουμε ότι στο σχήμα 4.1 το σύστημα αναφοράς $OX_1X_2X_3X_4$ αντιπροσωπεύει το σύστημα ηρεμίας ενός σώματος και ότι το σώμα υπόκειται σε μια επιτάχυνση a κατά τη φορά των κοινών αξόνων X_1, X'_1 . Τότε, υπό το φως των εξ. (4.22) και (4.23), ο μετασχηματισμός του τετρανύσματος της εξ. (4.24) στο σύστημα αναφοράς $O'X'_1X'_2X'_3X'_4$ μπορεί να γραφεί ως

$$A'_1 = \gamma(v)a \quad (4.25\alpha)$$

$$A'_2 = 0 \quad (4.25\beta)$$

$$A'_3 = 0 \quad (4.25\gamma)$$



$$A'_4 = i\beta(v)\gamma(v)a \quad (4.25\delta)$$

Οι εξ. (4.25α) και (4.25δ) δίνουν τις σχέσεις

$$\gamma(u')^2 K'u' + \gamma(u')^2 a' = \gamma(v)a$$

$$\gamma(u')^2 K'ic = i\beta(v)\gamma(v)a$$

ή

$$\gamma(u')^2 K'u' = \gamma(v)a - \gamma(u')^2 a' \quad (4.26\alpha)$$

$$\gamma(u')^2 K'c = \beta(v)\gamma(v)a \quad (4.26\beta)$$

ενώ, διαιρώντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις κατά μέλη, προκύπτει η σχέση

$$\frac{u'}{c} = \frac{\gamma(v)a - \gamma(u')^2 a'}{\beta(v)\gamma(v)a}. \quad (4.27)$$

Τώρα, η μετασχηματισμένη ταχύτητα u' , για $u = 0$, είναι, σύμφωνα με την εξ. (4.12), απλώς

$$u' = \frac{u+v}{1+uv/c^2} = v. \quad (4.28)$$

ενώ ο παράγοντας $\gamma(u')$ μεταπίπτει στον παράγοντα $\gamma(v)$

$$\gamma(u') = \frac{1}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma(v). \quad (4.29)$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις, η εξ. (4.27) παίρνει τη μορφή



$$\frac{v}{c} = \frac{\gamma(v)a - \gamma(v)^2 a'}{\beta(v)\gamma(v)a} = \frac{a - \gamma(v)a'}{\beta(v)a}. \quad (4.30)$$

που με λίγη άλγεβρα δίνει

$$a' = \frac{1}{\gamma(v)} (1 - v^2 / c^2) a \quad (4.31)$$

ή

$$a' = \frac{1}{\gamma(v)^3} a. \quad (4.32)$$

Παρατηρείται ότι στο όριο $v \ll c$, η τελευταία σχέση δίνει $a' = a$. Όπως ήδη επισημάνθηκε στην Παράγραφο 1-1, η τρισδιάστατη επιτάχυνση παραμένει αναλλοίωτη κατά το μετασχηματισμό του Γαλιλαίου.

4-4 Κίνηση υπό σταθερή επιτάχυνση

Στη νευτώνεια μηχανική, αν ένα σώμα υπόκειται σε σταθερή επιτάχυνση

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} \quad (4.33)$$

στο σύστημα ηρεμίας του, θα διατηρήσει την επιτάχυνσή του σταθερή σε κάθε άλλο αδρανειακό σύστημα. Στο σύστημα ηρεμίας του, καθώς ρέει ο χρόνος, το σώμα θα αποκτήσει ταχύτητα

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}t \quad (4.34)$$

ενώ, σε ένα σύστημα αναφοράς $O'X'_1X'_2X'_3X'_4$, σχετικά με το οποίο το σύστημα ηρεμίας $OX_1X_2X_3X_4$ ταξιδεύει με ταχύτητα v , ένας παρατηρητής θα δει το σώμα να ταξιδεύει με ταχύτητα



$$\mathbf{u}' = \mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{g}t. \quad (4.35)$$

Στην περίπτωση της απλής γεωμετρίας του σχήματος 4.1, η τελευταία εξίσωση μεταφράζεται στη σχέση των βαθμωτών ποσοτήτων

$$u' = v + gt \quad (4.36)$$

που, χωρίς αμφιβολία, θα αναγνωριστεί ως η, κατά την κλασική μηχανική, ταχύτητα ενός σώματος με αρχική ταχύτητα v μετά παρέλευση χρόνου t . Αν επιπλέον τα δύο συστήματα αναφοράς του σχήματος 4.1 έχουν συγχρονίσει τα χρονόμετρά τους έτσι ώστε όταν οι δύο αρχές των συντεταγμένων O και O' συμπίπτουν να ισχύει $t = t' = 0$, ολοκλήρωση της εξ. (4.36) οδηγεί στην επίσης γνωστή σχέση της νευτώνειας μηχανικής για την απόσταση που έχει καλύψει το σώμα μετά από χρονικό διάστημα t

$$x' = vt + \frac{1}{2} gt^2. \quad (4.37)$$

Είναι προφανές ότι η εξ. (4.36) αντιβαίνει προς το δεύτερο αξίωμα της Θεωρίας της Σχετικότητας, μια και με το χρόνο η ταχύτητα u' είναι δυνατόν να ξεπεράσει την ταχύτητα του φωτός. Για την εξαγωγή της σωστής κινηματικής σχέσης που θα αντικαταστήσει την εξ. (4.36), θα θεωρήσουμε ότι το σύστημα $OX_1X_2X_3X_4$ του σχήματος 4.1 είναι το σύστημα ηρεμίας ενός σώματος, έτσι ώστε η ταχύτητα και η επιτάχυνση να έχουν αντίστοιχα τις τιμές

$$u = \frac{dx}{dt} = 0 \quad (4.38a)$$

και



$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = g \quad (4.38\beta)$$

όπου g είναι μια σταθερά. Σε ένα δεύτερο αδρανειακό σύστημα αναφοράς $O'X'_1X'_2X'_3X'_4$ η επιτάχυνση g' θα δίνεται από τη σχέση

$$g' = \frac{d^2 x'}{d\tau^2} = \frac{1}{\gamma(v)^2} \frac{d^2 x'}{dt'^2} = \frac{1}{\gamma(v)^2} \frac{du'}{dt'} \quad (4.39)$$

όπου στην τελευταία σχέση u' είναι η ταχύτητα του σώματος στο σύστημα αναφοράς $O'X'_1X'_2X'_3X'_4$ και έχει χρησιμοποιηθεί η σύνδεση της εξ. (4.5)

$$d\tau = \gamma(v) dt'. \quad (4.40)$$

Χρησιμοποιώντας την εξ. (4.32), η εξ. (4.39) μπορεί τώρα να γραφεί συναρτήσει της σταθερής επιτάχυνσης στο σύστημα ηρεμίας του σώματος ως

$$\frac{du'}{dt'} = \frac{1}{\gamma(v)} g \quad (4.41)$$

που με απλή ολοκλήρωση ως προς το χρόνο δίνει

$$u' = \frac{1}{\gamma(v)} g t'. \quad (4.42)$$

Καθ' όσον όμως το σύστημα $OX_1X_2X_3X_4$ είναι το σύστημα ηρεμίας του σώματος ($u = 0$), από την εξ. (4.12) έπεται ότι

$$u' = \frac{u + v}{1 + uv/c^2} = -v \quad (4.43)$$



και

$$\gamma(v) = \gamma(u'). \quad (4.44)$$

Έτσι, η εξ. (4.42) μπορεί να γραφεί ως

$$u' = \sqrt{1 - u'^2 / c^2} \, g t' \quad (4.45)$$

που με λίγη άλγεβρα δίνει την κινηματική σχέση στο σύστημα $O'X'_1X'_2X'_3X'_4$

$$u' = \frac{g t'}{\sqrt{1 + g^2 t'^2 / c^2}}.$$

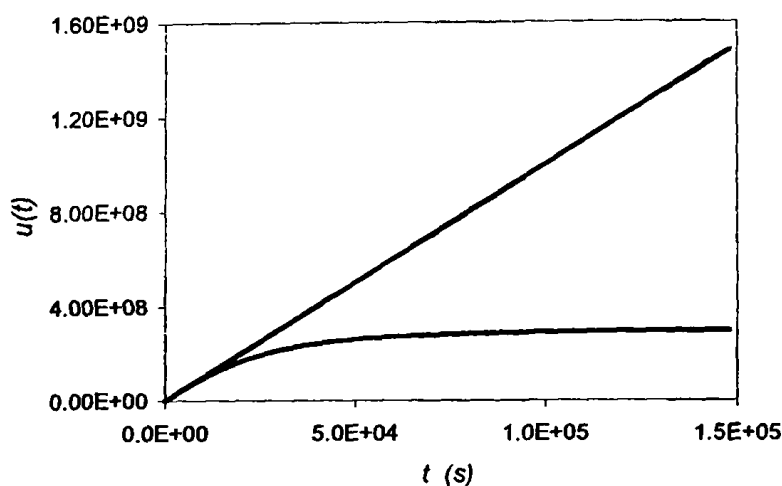
Εγκαταλείποντας τους τόνους στην τελευταία σχέση, μπορούμε να πούμε ότι η ταχύτητα ενός σώματος u , σε οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς, δίνεται από τη σχέση

$$u = \frac{g t}{\sqrt{1 + g^2 t^2 / c^2}}. \quad (4.46)$$

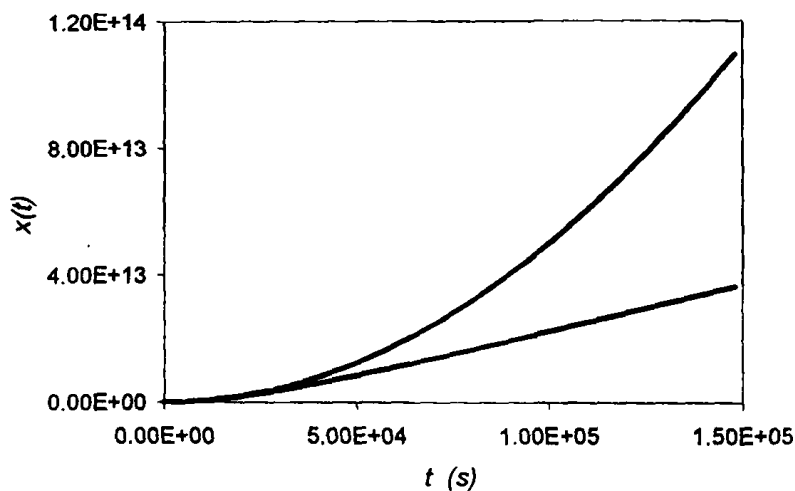
αν g είναι η σταθερή επιτάχυνση, στην οποία υπόκειται το σώμα στο σύστημα ηρεμίας του. Παρατηρείται ότι, σε αντίθεση με την εξ. (4.35), η ταχύτητα της εξ. (4.46) δεν μπορεί ποτέ να υπερβεί την ταχύτητα του φωτός.

Με μια ακόμη ολοκλήρωση (βλ. Άσκηση 4-2), η εξ. (4.46) δίνει την απόσταση x που σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς διανύει ένα σώμα, το οποίο στο σύστημα ηρεμίας του υπόκειται σε σταθερή επιτάχυνση g , ως

$$x = \sqrt{\left(\frac{c^2}{g}\right)^2 + (c t)^2} - \frac{c^2}{g}. \quad (4.47)$$



(α)



(β)

Σχήμα 4.3 (α) Γραφική παράσταση της ταχύτητας u ως προς το χρόνο ενός σώματος με σταθερή επιτάχυνση $g = 10^4 \text{ m s}^{-2}$ στο σύστημα ηρεμίας του. Η άνω καμπύλη αντιπροσωπεύει τη νευτώνεια εκτίμηση και πολύ γρήγορα ξεπερνά την ταχύτητα του φωτός. (β) Η απόσταση x που καλύπτει το κινητό ως συνάρτηση του χρόνου. Η άνω καμπύλη αντιπροσωπεύει πάλι τη νευτώνεια εκτίμηση.

Η ταχύτητα u και η απόσταση x που διανύει ένα σώμα σε χρόνο t , όπως προσδιορίζονται από τις εξ. (4.46) και (4.47), περιέχονται στις γραφικές παραστάσεις του σχήματος 4.3. Οι κινηματικές αυτές εξισώσεις μελετήθηκαν για πρώτη φορά από τον Max Born το 1930, ο



οποίος ονόμασε την κίνηση που προβλέπουν *υπερβολική κίνηση*, καθ' όσον, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.3, η καμπύλη $x(t)$ διαγράφει μια υπερβολή.

4-5 Ορμή

Σε αναλογία με τη νευτώνεια μηχανική, όπου η ορμή ενός σώματος με μάζα m και ταχύτητα u ορίζεται ως

$$p = mu \quad (4.48)$$

θα ορίσουμε το τετράνυσμα της ορμής πολλαπλασιάζοντας τη μάζα του σώματος με το τετράνυσμα της ταχύτητας U στην εξ. (4.6). Ως «μάζα» του σώματος θα χρησιμοποιήσουμε τη μάζα που μετράται όταν το σώμα βρίσκεται ακίνητο, δηλαδή τη μάζα που μετρά ένας παρατηρητής στο σύστημα ηρεμίας του σώματος, έτσι ώστε να μην εμπλακεί στον ορισμό κάποια εξάρτηση από την ταχύτητα και η «μάζα» να αποτελεί μια χαρακτηριστική βαθμωτή ποσότητα του σώματος και μόνον. Θα συμβολίσουμε τη μάζα αυτή ως m_0 και θα την ονομάσουμε **μάζα ηρεμίας** του σώματος. Έτσι, το τετράνυσμα της ορμής θα οριστεί ως

$$P = m_0 U \quad (4.49)$$

με συνιστώσες P_a

$$P_k = m_0 \gamma(u) u_k = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} u_k, \quad k = 1, 2, 3 \quad (4.50\alpha)$$

$$P_4 = m_0 \gamma(u) (ic) = \frac{im_0 c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{iE}{c}. \quad (4.50\beta)$$



όπου στην τελευταία σχέση έχει οριστεί η ποσότητα (με διαστάσεις ενέργειας)

$$E = \gamma(u) m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}. \quad (4.51)$$

Παρατηρείται ότι σε όλες τις συνιστώσες του τετρανύσματος της ορμής επαναλαμβάνεται η ποσότητα $\gamma(u)m_0$ που εξαρτάται από την ταχύτητα u του σώματος. Αν μάλιστα ορίσουμε την ποσότητα (με διαστάσεις μάζας)

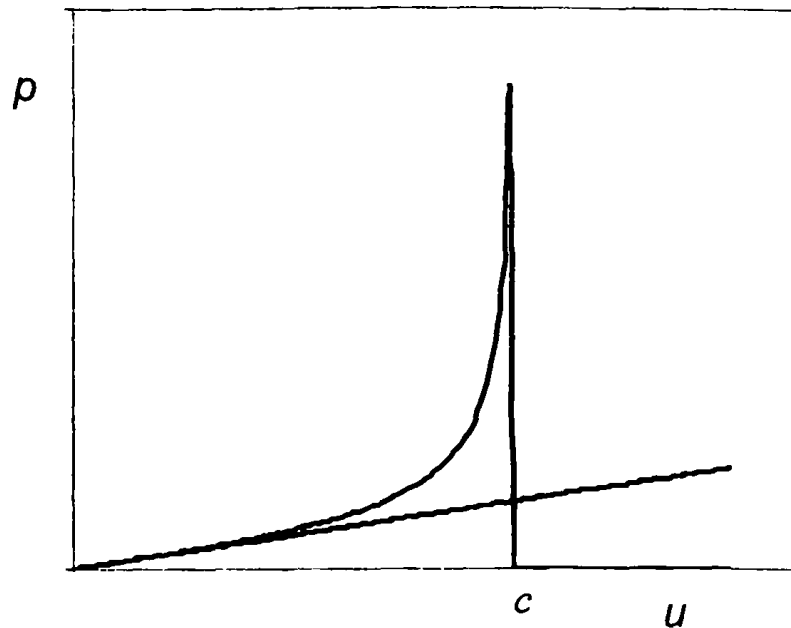
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} \quad (4.52)$$

το τετράνυσμα της ορμής P μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$P = (\mathbf{p}, imc) \quad (4.53)$$

όπου $\mathbf{p}$ είναι η τρισδιάστατη ορμή ενός σώματος με μάζα m , ενώ, εν όψει της μορφής της εξ. (4.52), σε χαμηλές ταχύτητες η ορμή $\mathbf{p}$ μεταπίπτει στην κοινή τρισδιάστατη ορμή της νευτώνειας μηχανικής. Η διαπίστωση αυτή οδήγησε νωρίς στην ιστορία της Θεωρίας της Σχετικότητας στην ανάπτυξη της σκέψης ότι σε υψηλές ταχύτητες η μάζα m_0 ενός σώματος αυξάνει σύμφωνα με το νόμο της εξ. (4.52) – και επομένως αυξάνει και η ορμή του – και στην ποσότητα m δόθηκε η ονομασία **σχετικιστική μάζα**. Κατά την άποψη αυτή, η σχετικιστική μάζα δεν αποτελεί αναλλοίωτη ποσότητα, αλλά εξαρτάται από την ταχύτητα του σώματος σύμφωνα με τη σχέση της εξ. (4.52). Ο αναγνώστης είναι ελεύθερος να υιοθετήσει αυτή την άποψη, παρ' όλο ότι αποτελεί μάλλον «παλαιομοδίτικο» τρόπο σκέψης, σε μια απόπειρα να διατηρηθεί η έννοια του «νευτώνειου σώματος», του οποίου η μάζα αυξάνει με την ταχύτητα. Εναλλακτικά, μπορεί





Σχήμα 4.4 Σύγκριση σχετικιστικής και νευτώνειας (ευθεία γραμμή) εκτίμησης για τη συμπεριφορά της ορμής p ως προς την ταχύτητα u ενός σώματος. Η σχετικιστική ορμή τείνει προς το άπειρο καθώς η ταχύτητα του σώματος τείνει προς την τιμή της ταχύτητας του φωτός c .

να υιοθετηθεί η άποψη ότι η μάζα του σώματος m_0 είναι μια αναλλοίωτη βαθμωτή ποσότητα, ενώ η τρισδιάστατη ορμή του μετασχηματίζεται κατά τη μετάβαση από ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς σε ένα άλλο σύμφωνα με το νόμο

$$\mathbf{p}' = \gamma \mathbf{p} = \gamma(u) m_0 \mathbf{u}. \quad (4.54)$$

Έτσι κι αλλιώς, η σχετικιστική μάζα – σε αντίθεση με την ορμή ενός σώματος – δεν είναι ένα απ' ευθείας μετρίσιμο φυσικό μέγεθος. Η εξέλιξη της ορμής σε σχέση με την ταχύτητα ενός σωματίου περιγράφεται στο σχήμα 4.4.

Ως τετράνυσμα στο χώρο Minkowski η ορμή P μετασχηματίζεται μεταξύ αδρανειακών συστημάτων αναφοράς σύμφωνα με το μετασχηματισμό Lorentz. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι για τα δύο αδρανειακά συστήματα του σχήματος 4.1 ο μετασχηματισμός παίρνει τη

μορφή (βλ. Άσκηση 4-3)

$$P'_1 = \gamma(v) \left(P_1 + \frac{\beta(v) E}{c} \right) \quad (4.55\alpha)$$

$$P'_2 = P_2 \quad (4.55\beta)$$

$$P'_3 = P_3 \quad (4.55\gamma)$$

$$E' = \gamma(v) (E + \beta(v) c P_1). \quad (4.55\delta)$$

4-6 Δύναμη

Παραγωγή του τετρανύσματος P της ορμής [βλ. εξ. (4.53)] ως προς τον αναλλοίωτο χρόνο τ δίνει ένα νέο τετράνυσμα

$$F = \frac{dP}{d\tau} = \left(\frac{d\mathbf{p}}{d\tau}, i c m_0 \frac{d}{d\tau} \gamma(u) \right) = \frac{d}{d\tau} \left(m_0 \frac{dX}{d\tau} \right) \quad (4.56)$$

που, ορμώμενοι από τον αντίστοιχο ορισμό της δύναμης στη νευτώνεια μηχανική, θα ονομάσουμε **δύναμη Minkowski**. Η εξ. (4.56) ορίζει τη σχετικιστική δύναμη που αν εφαρμοστεί σε ένα σώμα θα μεταβάλει το τετράνυσμα της ορμής του. Χρησιμοποιώντας την εξ. (4.5) για τη σύνδεση των στοιχείων dt και $d\tau$, η εξ. (4.56) παίρνει τη μορφή

$$F = \gamma \frac{d}{dt} \left(\gamma m_0 \frac{dX}{dt} \right) \quad (4.57)$$

που για χαμηλές ταχύτητες ($\gamma \cong 1$), για τις τρεις πρώτες συνιστώσες του τετρανύσματος X , δίνει τη σχέση



$$\mathbf{F} = m_0 \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2}. \quad (4.58)$$

Η εξ. (4.56) μπορεί επομένως να θεωρηθεί ως η σωστή επέκταση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα στον τετραδιάστατο χώρο.

Η εξ. (4.56) μπορεί τώρα μέσω της εξ. (4.5) να γραφεί συναρτήσει φυσικών μεγεθών που μετρώνται συνήθως σε ένα σύστημα αναφοράς, ήτοι του τρισδιάστατου ανύσματος της κοινής δύναμης

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (4.59)$$

και της ταχύτητας u , ως

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \left(\gamma(u) \frac{d\mathbf{p}}{dt}, icm_0 \frac{d}{d\tau} \gamma(u) \right) \\ &= \gamma(u) \left(\mathbf{f}, icm_0 \frac{d}{dt} \gamma(u) \right). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Παρατηρείται ότι όπως και με την περίπτωση του τετρανύσματος της ταχύτητας [βλ. εξ. (4.6)], η χωρική συνιστώσα της δύναμης Minkowski δεν ταυτίζεται γενικά με το αντίστοιχο φυσικό μέγεθος της νευτώνειας μηχανικής. Έτσι, όπως και η κοινή τρισδιάστατη ταχύτητα u , το άνυσμα $\mathbf{f}$ δεν μετασχηματίζεται σύμφωνα με το μετασχηματισμό Lorentz. Θα ήταν δυνατόν να εργαστούμε όπως στην Παράγραφο 4-1 και να εξαγάγουμε τις σχέσεις μετασχηματισμού της κοινής δύναμης $\mathbf{f}$ μεταξύ δύο αδρανειακών συστημάτων αναφοράς. Οι εκφράσεις όμως που προκύπτουν δεν είναι και τόσο διαφωτιστικές. Αντίθετα, η ειδική περίπτωση της μετάβασης από το σύστημα ηρεμίας ενός σώματος σε ένα άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς

είναι εξαιρετικά απλή και, όπως θα δούμε στην Παράγραφο 4-8, έχει συνήθως πρακτική εφαρμογή σε θεωρητικούς υπολογισμούς.

Στο προνομιακό σύστημα ηρεμίας ενός σώματος, όπου η ταχύτητά του προς στιγμήν είναι ίση με το μηδέν, το τετράνυσμα της δύναμης Minkowski παίρνει, όπως και το τετράνυσμα της επιτάχυνσης [βλ. εξ. (4.24)], την ιδιαίτερα απλή μορφή

$$F = (\mathbf{f}, 0) \quad (4.61)$$

όπου $\mathbf{f}$ είναι πάλι η συνήθης τρισδιάστατη δύναμη, που συνδέεται με την τρισδιάστατη ορμή $\mathbf{p}$ μέσω της εξ. (4.59). Κατά τη μετάβαση σε ένα δεύτερο αδρανειακό σύστημα αναφοράς $O'X'_1X'_2X'_3X'_4$ το τετράνυσμα της εξ. (4.61) μετασχηματίζεται σύμφωνα με το μετασχηματισμό Lorentz και γενικά αποκτά μια πεπερασμένη τέταρτη συνιστώσα F'_4 . Η δύναμη Minkowski, ως πραγματικό τετράνυσμα στον κοσμικό χώρο, θα διατηρήσει τη μορφή της εξ. (4.60) και μπορεί να γραφεί ως

$$F' = (\gamma(u')\mathbf{f}', F'_4) \quad (4.62)$$

όπου u' και $\mathbf{f}'$ είναι αντίστοιχα η τρισδιάστατη ταχύτητα και δύναμη του σώματος στο νέο σύστημα αναφοράς. Αλλά, όπως είδαμε και στην Παράγραφο 4-3 [βλ. εξ. (4.29)], καθ' όσον το αρχικό σύστημα αναφοράς είναι το σύστημα ηρεμίας του σώματος, έπεται ότι

$$\gamma(u') = \gamma(v) \quad (4.63)$$

όπου v είναι η σχετική ταχύτητα του συστήματος ηρεμίας και του συστήματος αναφοράς $O'X'_1X'_2X'_3X'_4$. Ο μετασχηματισμός μεταξύ των δύο συστημάτων αναφοράς μπορεί τώρα να βρεθεί μέσω της εξ. (3.68). Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε [βλ. Άσκηση 4-5] ότι οι τρεις χωρικές συνιστώσες της κοινής δύναμης, στην ειδική αυτή περίπτω-



ση, μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις

$$f'_1 = f_1 \quad (4.64\alpha)$$

$$f'_2 = \frac{1}{\gamma(v)} f_2 \quad (4.64\beta)$$

$$f'_3 = \frac{1}{\gamma(v)} f_3 \quad (4.64\gamma)$$

ήτοι, η συνιστώσα της δύναμης κατά τη διεύθυνση της ταχύτητας του σώματος παραμένει αναλλοίωτη, ενώ οι κάθετες προς τη διεύθυνση της ταχύτητας συνιστώσες συρρικνώνονται κατά τον παράγοντα $\sqrt{1 - \beta^2}$.

Βεβαίως, στο ασυμπτωτικό όριο των χαμηλών ταχυτήτων, ο παράγοντας γ τείνει προς τη μονάδα, ο αναλλοίωτος χρόνος ταυτίζεται με τον κοινό χρόνο και η χωρική συνιστώσα της δύναμης Minkowski ταυτίζεται με την κοινή δύναμη.

4-7 Ενέργεια

Μέχρι τώρα εστιάσαμε την προσοχή μας στις τρεις χωρικές συνιστώσες της δύναμης Minkowski. Τί όμως συμβαίνει με την τέταρτη συνιστώσα κατά τον άξονα που αντιπροσωπεύει το χρόνο; Η φυσική σημασία της τέταρτης συνιστώσας του τετρανύσματος στην εξ. (4.56) μπορεί να διερευνηθεί αν εξετάσουμε το γινόμενο των τετρανυσμάτων της ορμής και της δύναμης Minkowski*

* Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο $\mathbf{f}$ για την απόδοση της κοινής τριδιάστατης δύναμης που ασκείται σε υλικό ένα σώμα και συνδέεται με την ορμή του μέσω της εξ. (4.59). Με το σύμβολο $\mathbf{F}$ θα αποδώσουμε τις χωρικές συνιστώσες του τετρανύσματος της δύναμης Minkowski $\mathbf{F}$. Αν u είναι η ταχύτητα του σώματος, τα δύο μεγέθη συνδέονται με τη σχέση

$$\mathbf{F} = \gamma(u) \mathbf{f}.$$



$$P = (\mathbf{p}, i\gamma m_0 c) \quad (4.65)$$

$$F = (\gamma \mathbf{f}, F_4) \quad (4.66)$$

όπου $\mathbf{p}$ και $\mathbf{f}$ είναι αντίστοιχα η τρισδιάστατη ορμή και δύναμη. Χρησιμοποιώντας τη σύμβαση άθροισης του Einstein μπορούμε να γράψουμε

$$P_\alpha F_\alpha = \gamma \mathbf{f} \cdot \mathbf{p} + i\gamma m_0 c F_4. \quad (4.67)$$

Αλλά, από τον ορισμό της δύναμης Minkowski [βλ. εξ. (4.56)] και το αποτέλεσμα της Άσκησης 4-4, προκύπτει ότι

$$P_\alpha F_\alpha = P_\alpha \frac{dP_\alpha}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2} P_\alpha P_\alpha \right) = \frac{d}{d\tau} \left(-\frac{1}{2} c^2 \right) = 0. \quad (4.68)$$

Άρα, συγκρίνοντας με την εξ. (4.67),

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{p} + i m_0 c F_4 = 0 \quad (4.69)$$

ενώ, χρησιμοποίηση της εξ (4.54) για σύνδεση της τρισδιάστατης ορμής με την ταχύτητα $\mathbf{u}$, οδηγεί στη σχέση

$$F_4 = \frac{i}{c} \gamma \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}. \quad (4.70)$$

Χρησιμοποιώντας πάλι τον ορισμό της δύναμης Minkowski στην εξ. (4.56) μπορούμε να γράψουμε για τη συνιστώσα F_4

$$F_4 = \frac{d}{d\tau} \left(m_0 \frac{d}{d\tau} (ict) \right) \quad (4.71)$$

που με τη σύνδεση της εξ. (4.5) δίνει



$$F_4 = i\gamma \frac{d}{dt} (\gamma m_0 c). \quad (4.72)$$

Τέλος, από τη σύγκριση με την εξ. (4.70) προκύπτει το αποτέλεσμα

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} = \frac{d}{dt} (\gamma m_0 c^2). \quad (4.73)$$

Στην κλασική μηχανική, η ποσότητα $\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$ αντιπροσωπεύει το ρυθμό με τον οποίο αυξάνει η κινητική ενέργεια ενός σώματος με ταχύτητα $\mathbf{u}$, ήτοι

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}. \quad (4.74)$$

Στην πραγματικότητα, η εξ. (4.74) αποτελεί τον ορισμό της κινητικής ενέργειας στην κλασική μηχανική. Ολοκλήρωση επομένως της εξ. (4.74), σε συνδυασμό με την εξ. (4.73), δίνει

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dT}{dt} dt = \gamma m_0 c^2 \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (4.75)$$

Αν ο χρόνος t_1 επιλεγεί ως ο χρόνος κατά τον οποίο το σώμα ήταν ενστάσει, η τελευταία σχέση δίνει την κινητική ενέργεια

$$T = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2. \quad (4.76)$$

Με άλλα λόγια, η κινητική ενέργεια αναδεικνύεται ως η διαφορά δύο ενεργειών: της ενέργειας $m_0 c^2$ – που περιλαμβάνει μόνο τη μάζα ηρεμίας του σώματος – και που για προφανείς λόγους μπορούμε να ονομάσουμε **ενέργεια ηρεμίας** και της ποσότητας $\gamma m_0 c^2$. Αν ο αναγνώστης έχει υιοθετήσει την άποψη της σχετικιστικής μάζας που





Σχήμα 4.5. Κάποτε το πετυχαίνεις ... (από γελοιογραφία του περιοδικού Playboy στη δεκαετία του 1960).

ορίστηκε στην εξ. (4.52), η εξ. (4.76) μπορεί να γραφεί εναλλακτικά ως

$$T = mc^2 - m_0c^2. \quad (4.77)$$

Η ποσότητα ενέργειας γm_0c^2 (ή mc^2) είναι επομένως η ολική ενέργεια του σώματος που συγκροτείται από το άθροισμα της κινητικής του ενέργειας και της ενέργειας ηρεμίας του

$$E = \gamma m_0c^2 = mc^2 = m_0c^2 + T. \quad (4.78)$$



Η τελευταία σχέση μεταξύ ενέργειας και μάζας διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον Einstein (περίπου με τη λογική διεργασία που ακολουθήσαμε και όχι με τη διαδικασία αυτοσχεδιασμού που υπονοεί η γελοιογραφία του Playboy στο σχήμα 4.5) το 1905 και αποκαλέστηκε **σχέση ισοδυναμίας ενέργειας και μάζας**. Σχετικά γρήγορα, επιβεβαιώθηκε πειραματικά στο χώρο της Πυρηνικής Φυσικής και έδωσε στον άνθρωπο εκπληκτικές δυνατότητες στην παραγωγή χρήσιμης ενέργειας, αλλά και τρομακτικά όπλα καταστροφής.

Αν στην εξ. (4.76) η ταχύτητα u του σώματος είναι μικρή σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός, ο παράγοντας γ μπορεί να αναπτυχθεί με τη βοήθεια της διώνυμης προσέγγισης και να γράψουμε

$$\begin{aligned} T &= m_0 c^2 \left[1 + \frac{1}{2} m_0 \beta^2 + \frac{3}{8} m_0 \beta^4 + \dots \right] - m_0 c^2 \\ &= \frac{1}{2} m_0 u^2 + \frac{3}{8} \frac{u^4}{c^2} + \dots \end{aligned} \quad (4.79)$$

Στο όριο επομένως των χαμηλών ταχυτήτων, όπου μόνον ο πρώτος όρος της εξ. (4.79) είναι σημαντικός, ανακτάται η γνώριμη έκφραση από τη νευτώνεια μηχανική

$$T = \frac{1}{2} m_0 u^2. \quad (4.80)$$

Η εξ. (4.78) έχει ήδη χρησιμοποιηθεί στην έκφραση του τετρανύσματος της ορμής [βλ. εξ. (4.51)], το οποίο, με τη νέα ερμηνεία που δώσαμε στην παράμετρο E , αναδεικνύει την εμπλοκή της ορμής και ενέργειας στο τετράνυσμα της ορμής

$$P = \left(\mathbf{p}, \frac{iE}{c} \right). \quad (4.81)$$



Το τετράγωνο του τετρανύσματος στην τελευταία σχέση παραμένει αναλλοίωτο κατά το μετασχηματισμό Lorentz και, σύμφωνα με το αποτέλεσμα της Άσκησης 4-4, σε κάθε αδρανειακό σύστημα παίρνει την τιμή

$$P_\alpha P_\alpha = -m_0^2 c^2 \quad (4.82)$$

από την οποία προκύπτει η σχέση

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2$$

ή

$$E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4 \quad (4.83)$$

όπου $p^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}$ είναι το τετράγωνο της τρισδιάστατης ορμής.

Η εξ. (4.83) θα αποδειχτεί μια από τις σημαντικότερες σχέσεις της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Πρέπει πάντως να τονιστεί ότι μετρήσιμα φυσικά μεγέθη παραμένουν η κινητική ενέργεια T και η τρισδιάστατη ορμή $\mathbf{p}$ ενός σώματος. Σε ένα πείραμα Ατομικής ή Πυρηνικής Φυσικής, όπου συνήθως ανιχνεύονται σωμάτια, όπως ηλεκτρόνια, νουκλεόνια ή ατομικοί πυρήνες, το μέγεθος που μετράται είναι η κινητική ενέργεια ή η ορμή του σωματίου. Μια χρήσιμη σχέση που μπορεί να εξαχθεί από τις εξ. (4.78) και (4.83) είναι η σύνδεση των δύο μετρήσιμων φυσικών μεγεθών (βλ. Άσκηση 4-10)

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{T(T + 2m_0 c^2)}. \quad (4.84)$$

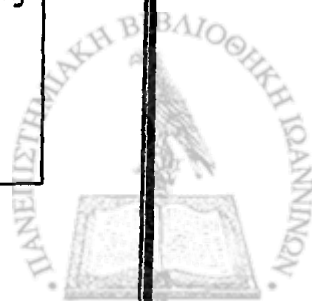
Ιδιαίτερη θέση στη σχετικιστική μηχανική έχουν σωμάτια με μηδενική μάζα. Τέτοια σωμάτια είναι κατ' αρχήν το φωτόνιο, το σωματίο που μεταφέρει την ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση,



ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ, ΜΑΖΑΣ ΚΑΙ ΟΡΜΗΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Η Θεωρία της Σχετικότητας βρίσκει τη μεγαλύτερη εφαρμογή της στον υποατομικό κόσμο όπου ακόμη σήμερα διεξάγεται εργώδης έρευνα για τη μελέτη των στοιχειωδών σωματίων που συγκροτούν την ύλη και της αλληλεπίδρασης μεταξύ τους, η οποία είναι υπεύθυνη για τη διαμόρφωση πιο σύνθετων συστημάτων, όπως νουκλεόνια, πυρήνες και άτομα. Πειράματα που διεξάγονται για το σκοπό αυτό βασίζονται στις περισσότερες περιπτώσεις στη μέθοδο της καταστροφής ενός σύνθετου συστήματος με στόχο τη μελέτη της δομής του μέσω των θραυσμάτων που εκτοξεύονται όταν αυτό αποσυντίθεται. Για παράδειγμα, σε ένα τυπικό πείραμα Πυρηνικής Φυσικής, νουκλεόνια, στα οποία έχει προσδοθεί μεγάλη ορμή, συγκρούονται με στάσιμους πυρήνες και πληροφορίες για τη δομή του πυρήνα αντλούνται από τα θραύσματα (νουκλεόνια ή ελαφρείς πυρήνες) που εκτοξεύονται από το χώρο της σύγκρουσης. Έτσι, η μονάδα μέτρησης της ενέργειας που έχει επικρατήσει στο χώρο αυτό προέρχεται από τον τρόπο με τον οποίο προσδίδεται κινητική ενέργεια στα βλήματα ενός πειράματος. Ηλεκτρικά φορτισμένα σωματίδια επιταχύνονται με την έκθεσή τους σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο και ως μονάδα μέτρησης της κινητικής τους ενέργειας έχει επικρατήσει το ποσό της κινητικής ενέργειας που αποκτά ένα ηλεκτρόνιο όταν εκτεθεί σε διαφορά δυναμικού ίση με 1 V. Στη μονάδα αυτή έχει δοθεί η ονομασία ηλεκτρονιοβόλτ και ο συμβολισμός eV. Πολλαπλάσια του eV είναι το keV (10^3 eV), το MeV (10^6 eV) και το GeV (10^9 eV). Το ηλεκτρονιοβόλτ συνδέεται με τη μονάδα μέτρησης της ενέργειας στην κλασική φυσική, το Joule, με τη σχέση

$$1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}.$$



Έτσι, αναφέρεται ότι ένα πείραμα Πυρηνικής Φυσικής πραγματοποιήθηκε στο Εργαστήριο Επιταχυντή του «Δημοκρίτου» με πρωτόνια ενέργειας 8 MeV ή ότι ο γραμμικός επιταχυντής του Πανεπιστημίου Stanford στην Καλιφόρνια παράγει δέσμη ηλεκτρονίων με κινητική ενέργεια 20 GeV.

Η μονάδα eV όμως μπορεί να χρησιμοποιηθεί εμμέσως και για τη μέτρηση άλλων φυσικών μεγεθών. Κατά την πρακτική που έχει καθιερωθεί στην ορολογία της έρευνας στον υποατομικό κόσμο, η μάζα ενός σωματιδίου εκφράζεται μέσω της ισοδυναμίας ενέργειας και μάζας $E = mc^2$ σε μονάδες eV (στην πραγματικότητα σε μονάδες eV/c^2). Έτσι, η μάζα του ηλεκτρονίου αναφέρεται συνήθως ως 511 keV, ενώ του πρωτονίου ως 938.21 MeV.

Κατά τον ίδιο τρόπο, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το γινόμενο pc έχει τις διαστάσεις ενέργειας, μπορούμε να εκφράσουμε την ορμή ενός σωματίου σε μονάδες eV/c . Για παράδειγμα, είναι εύκολο να υπολογίσουμε μέσω της εξ. (4.84) ότι ένα πρωτόνιο με κινητική ενέργεια 8 MeV διαθέτει ορμή 122.8 MeV/c, ενώ ένα ηλεκτρόνιο 20 GeV, ορμή ίση προς 20 GeV/c.

Όπως αναδεικνύεται στην Παράγραφο 4-8 και μέσω των Ασκήσεων στο τέλος του κεφαλαίου, η χρησιμοποίηση μονάδων ενέργειας στη μέτρηση της μάζας και της ορμής διευκολύνει σημαντικά στην εκτέλεση υπολογισμών, ενώ απαλείφει κάθε αναφορά στη σταθερά c .

αλλά και η τριάδα των νετρίνων ν_e, ν_μ, ν_τ , καθώς και αντισωματίά τους $\bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau$ τα οποία πιστεύεται σήμερα ότι διαθέτουν μάζα ίση με το μηδέν και συνδέονται αντίστοιχα με το ηλεκτρόνιο, το μεσόνιο μ και το μεσόνιο τ που Για τα σωματία αυτά ισχύει $m_0 = 0$ με αποτέλεσμα, από την εξ. (4.83), η ολική τους ενέργεια E να συνδέεται με



την ορμή τους p μέσω της σχέσης

$$E = pc . \quad (4.85)$$

Σωματία με μηδενική μάζα ταξιδεύουν με την ταχύτητα του φωτός σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς και δεν διαθέτουν σύστημα ηρεμίας. Από την εξ. (4.78), η ολική τους ενέργεια E ταυτίζεται με την κινητική τους ενέργεια T , ενώ, από την εξ. (4.82), το τετράγωνο του τετρανύσματος της ορμής τους έχει μηδενικό μήκος – μια σχέση που οδηγεί πάλι στη σύνδεση ολικής ενέργειας και ορμής μέσω της εξ. (4.85).

4-8 Διατήρηση ορμής, μάζας και ενέργειας

Το γεγονός ότι το τετράνυσμα της ορμής παραμένει αναλλοίωτο κατά το μετασχηματισμό Lorentz έχει σημαντικές επιπτώσεις στις αρχές διατήρησης φυσικών μεγεθών που ισχύουν στην κλασική μηχανική. Μέχρι τώρα διατυπώναμε την αρχή ότι αν ένα σύνολο N σωμάτων που δεν αλληλεπιδρούν με τον εξωτερικό κόσμο διαθέτει ολική ορμή

$$\mathbf{p} = \sum_{k=1}^N \mathbf{p}_k \quad (4.86)$$

τότε, ότι και να συμβεί με αλληλεπιδράσεις των σωμάτων στο εσωτερικό του συστήματος, η ολική ορμή $\mathbf{p}$ παραμένει σταθερή. Παράλληλα, διατυπώναμε την αρχή ότι σε ένα τέτοιο κλειστό σύστημα η ολική ενέργεια E

$$E = \sum_{k=1}^N E_k \quad (4.87)$$



όπου E_k η ενέργεια (κινητική, δυναμική, κ.λπ.) κάθε σώματος, παραμένει σταθερή. Τέλος, από την αρχή διατήρησης της μάζας, παραδεχόμαστε ότι η όλη μάζα του συστήματος παραμένει σταθερή. Στη νευτώνεια μηχανική οι τρεις αυτές αρχές εμφανίζονται ανεξάρτητες και με αυτόνομη ισχύ.

Η ανάμιξη συνιστωσών ορμής και ενέργειας στο αναλλοίωτο ως προς το μετασχηματισμό Lorentz τετράνυσμα της ορμής

$$P = (\mathbf{p}, \frac{iE}{c}) \quad (4.88)$$

μετατρέπει τις αρχές αυτές της νευτώνειας μηχανικής σε μια νέα γενικότερη αρχή. Σε ένα κλειστό σύνολο N σωμάτων η ποσότητα που τώρα παραμένει σταθερή είναι κάθε συνιστώσα του ολικού τετράνυσματος P . Αν N σώματα έχουν αρχικά ολικό τετράνυσμα της ορμής

$$P = \sum_{k=1}^N (\mathbf{p}(k), \frac{iE(k)}{c}) \quad (4.89)$$

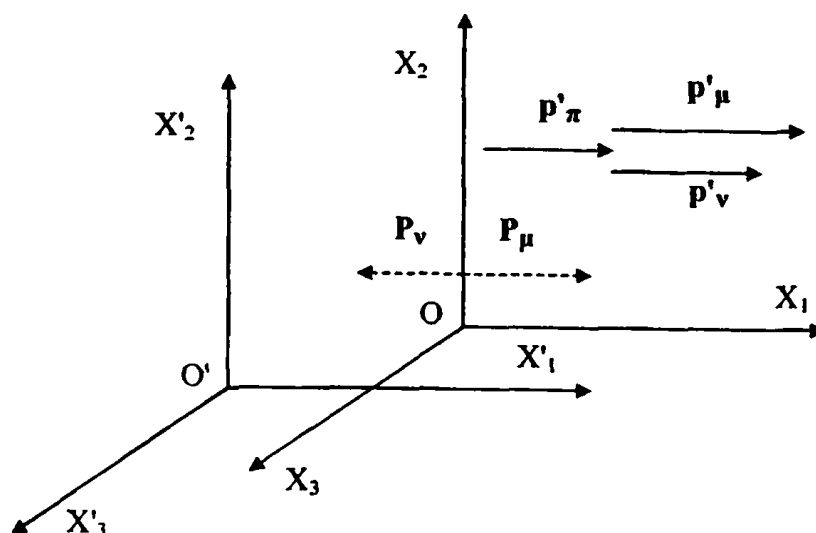
ενώ, μετά από αλληλεπιδράσεις στο εσωτερικό του συστήματος, οι οποίες μπορεί και να επιφέρουν μεταβολή ακόμη και του πλήθους των σωμάτων από N σε N' , η τελική κατάσταση χαρακτηρίζεται από ολικό τετράνυσμα

$$P' = \sum_{\ell=1}^{N'} (\mathbf{p}'(\ell), \frac{iE'(\ell)}{c}) \quad (4.90)$$

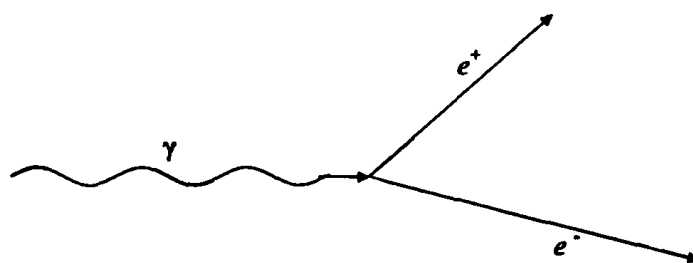
θα ισχύει η σχέση

$$\sum_{k=1}^N P_{\alpha}(k) = \sum_{\ell=1}^{N'} P'_{\alpha}(\ell) \quad (4.91)$$





(α)



(β)

Σχήμα 4.6 (α) Αποσύνθεση ενός κοσμικού μεσονίου π^+ σε ένα μεσόνιο μ^+ και ένα νεutrίνο. (β) Διεργασία δίδυμης γένεσης αρνητικού και θετικού ηλεκτρονίου.

για κάθε συνιστώσα $a = 1, 2, 3, 4$ των δύο τετρανυσμάτων στις εξ. (4.89) και (4.90). Τα δύο αθροίσματα στην εξ. (4.91) εκτείνονται αντίστοιχα στο σύνολο των σωμάτων N και N' στην αρχική και τελική κατάσταση. Με τη διατύπωση αυτή, η μεν διατήρηση της ορμής καλύπτεται από τις χωρικές συνιστώσες του τετρανύσματος P , ενώ η διατήρηση της συνιστώσας P_4 δηλώνει ότι η μάζα ηρεμίας και η κινητική ενέργεια δεν είναι απαραίτητο να διατηρούνται ανεξάρτητα. Κινητική ενέργεια μπορεί να μετατρέπεται σε μάζα και τανάπα-

λιν. Θα αναφερθούμε στην αρχή που διατυπώνει η εξ. (4.91) με τον όρο **διατήρηση ορμής, μάζας και ενέργειας**.

Η αρχή διατήρησης της ορμής, μάζας και ενέργειας έχει επιβεβαιωθεί σε πολλές διεργασίες που συμβαίνουν στον υποατομικό κόσμο. Δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα περιέχονται στο σχήμα 4.6. Ένα πρώτο παράδειγμα διατήρησης της ορμής, μάζας και ενέργειας περιέχεται στο σχήμα 4.6(α), όπου δίνεται διαγραμματικά η αποδιέγερση του μεσονίου π^+ σε ένα μεσόνιο μ^+ και ένα νεutrίνο

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu. \quad (4.92)$$

Ας θεωρήσουμε κατ' αρχάς την αποσύνθεση του μεσονίου π^+ στο σύστημα ηρεμίας του. Στην αποσύνθεση της εξ. (4.92) οι μάζες των εμπλεκόμενων σωματίων είναι*

$$m_0(\pi^+) = 139.62 \text{ MeV} \quad (4.93\alpha)$$

$$m_0(\mu^+) = 105.69 \text{ MeV} \quad (4.93\beta)$$

$$m(\nu) = 0. \quad (4.93\gamma)$$

Η διαθέσιμη επομένως ενέργεια για τη δημιουργία της τελικής κατάστασης στην εξ. (4.92) είναι

$$\Delta m = m_\pi - m_\mu = 33.43 \text{ MeV} \quad (4.94)$$

όπου $m_\pi = m_0(\pi^+)$ και $m_\mu = m_0(\mu^+)$.

* Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε το σύστημα μονάδων που περιγράφεται στο ένθετο της σελ. 136. Τούτο σημαίνει ότι θα θέσουμε σε όλες τις εκφράσεις που περιλαμβάνουν την ταχύτητα του φωτός $c = 1$ και θα μετρήσουμε ενέργειες, μάζες και ορμές σε MeV. Επιπλέον, για απλούστευση του συμβολισμού, θα απαλείψουμε το δείκτη 0 από το σύμβολο της μάζας ηρεμίας.



Στο σύστημα ηρεμίας του μεσονίου π^+ το τετράνυσμα της ορμής στην αρχική κατάσταση έχει την απλή μορφή

$$P(i) = (0, i m_\pi) \quad (4.95)$$

ενώ η τελική κατάσταση χαρακτηρίζεται από το άθροισμα των τετρανυσμάτων

$$P(f) = (\mathbf{p}_\mu, i(T_\mu + m_\mu)) + (\mathbf{p}_\nu, iE_\nu) \quad (4.96)$$

όπου T_μ είναι η κινητική ενέργεια του μεσονίου μ^+ και E_ν η ενέργεια του νετρίνου. Από την αρχή διατήρησης ορμής, μάζας και ενέργειας στην εξ. (4.91) μπορούμε επομένως να γράψουμε τις εξισώσεις

$$p_\mu + p_\nu = 0 \quad (4.97\alpha)$$

$$m_\pi = T_\mu + m_\mu + E_\nu$$

ή

$$T_\mu + E_\nu = \Delta m. \quad (4.97\beta)$$

Από τη σύνδεση ενέργειας και ορμής στις εξ. (4.84) και (4.85), η εξ. (4.97α) μπορεί να γραφεί ως

$$\sqrt{T_\mu(T_\mu + 2m_\mu)} + E_\nu = 0 \quad (4.98)$$

η οποία με χρήση της εξ. (4.97β) δίνει

$$T_\mu(T_\mu + 2m_\mu) = (T_\mu - \Delta m)^2$$

με λύση



$$T_\mu = \frac{(\Delta m)^2}{2(m_\mu + \Delta m)}. \quad (4.99)$$

Αντικατάσταση της αριθμητικής τιμής των μαζών στις εξ. (4.99) και (4.97β) δίνει

$$T_\mu = 4.12 \text{ MeV} \quad (4.100\alpha)$$

$$E_\nu = \Delta m - T_\mu = 29.81 \text{ MeV} \quad (4.100\beta)$$

ενώ, στις μονάδες που χρησιμοποιούνται,

$$p_\nu = -29.81 \text{ MeV}/c \quad (4.101\alpha)$$

[το αρνητικό πρόσημο έχει ληφθεί ώστε το αποτέλεσμα να βρίσκεται σε συμφωνία με το σχήμα 4.6(α)] και, από την εξ. (4.97α),

$$p_\mu = 29.81 \text{ MeV}/c. \quad (4.101\beta)$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να επιβεβαιωθεί από τις εξ. (4.84) και (4.100α).

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι το μεσόνιο π^+ στην αντίδραση της εξ. (4.92) είναι ένα κοσμικό μεσόνιο, το οποίο ταξιδεύει προς τη γη με κινητική ενέργεια 1 GeV (10^3 MeV) και σε κάποια στιγμή αποσυντίθεται σε ένα μεσόνιο μ^+ και ένα νεutrino μέσα στη γήινη ατμόσφαιρα. Η διεργασία περιγράφεται στο σχήμα 4.6(α), όπου η αποσύνθεση του μεσονίου π^+ πραγματοποιείται στην αρχή των συντεταγμένων του συστήματος ηρεμίας του $OX_1X_2X_3X_4$ και, για απλούστευση των υπολογισμών που ακολουθούν, τα δύο σωμάτια στην τελική κατάσταση εκπέμπονται κατά τον άξονα X_1 . Για ένα παρατηρητή στο σύστημα αναφοράς της γης $O'X'_1X'_2X'_3X'_4$, το τετράνυσμα της ορμής στην αρχική κατάσταση είναι τώρα



$$P(i) = (\mathbf{p}'_{\pi}, i(T'_{\pi} + m_{\pi})) \quad (4.102)$$

ενώ στην τελική κατάσταση

$$P(f) = (\mathbf{p}'_{\mu}, i(T'_{\mu} + m_{\mu})) + (\mathbf{p}'_{\nu}, E'_{\nu}) \quad (4.103)$$

που οδηγούν στις εξισώσεις, ανάλογες προς τις εξ. (4.97),

$$p'_{\pi} = p'_{\mu} + p'_{\nu} \quad (4.104\alpha)$$

$$T'_{\pi} + m_{\pi} = T'_{\mu} + m_{\mu} + E'_{\nu}$$

ή

$$T'_{\mu} + E'_{\nu} = T'_{\pi} + \Delta m. \quad (4.104\beta)$$

Από τη σύνδεση ενέργειας και ορμής στις εξ. (4.84) και (4.85), η εξ. (4.104α) μπορεί να γραφεί ως

$$p'_{\pi} = \sqrt{T'_{\mu}(T'_{\mu} + 2m_{\mu})} + E'_{\nu} \quad (4.105)$$

η οποία με χρήση της εξ. (4.104β) δίνει

$$T'_{\mu}(T'_{\mu} + 2m_{\mu}) = (T'_{\mu} - \delta)^2 \quad (4.106)$$

όπου δ είναι η γνωστή από τα δεδομένα του προβλήματος ποσότητα

$$\delta = T'_{\pi} - p'_{\pi} + \Delta m. \quad (4.107)$$

Η λύση της εξ. (4.106) είναι

$$T'_{\mu} = \frac{\delta^2}{2(m_{\mu} + \delta)}. \quad (4.108)$$



Χρησιμοποιώντας τις αριθμητικές τιμές των παραμέτρων στις προηγούμενες σχέσεις υπολογίζεται ότι

$$p'_\pi = \sqrt{T'_\pi(T'_\pi + m_\pi)} = 1131.04 \text{ MeV}/c \quad (4.109)$$

και

$$\delta = -97.11 \text{ MeV} \quad (4.110)$$

που προσδιορίζει την κινητική ενέργεια του μεσονίου μ^+ , στο σύστημα αναφοράς της γης, ως

$$T'_\mu = 549.55 \text{ MeV}. \quad (4.111)$$

Η ενέργεια του νετρίνου μπορεί να υπολογιστεί από την εξ. (4.104β) που δίνει

$$E'_\nu = 484.38 \text{ MeV} \quad (4.112)$$

ενώ η ορμή του νετρίνου, στις μονάδες που χρησιμοποιούμε, έχει την ίδια αριθμητική τιμή, ήτοι

$$p'_\nu = 484.38 \text{ MeV}/c. \quad (4.113)$$

Τέλος, η ορμή του μεσονίου μ^+ μπορεί να προσδιοριστεί από τη σχέση που συνδέει την ορμή με την κινητική ενέργεια

$$p'_\mu = \sqrt{T'_\mu(T'_\mu + 2m_\mu)} = 646.66 \text{ MeV}/c. \quad (4.114)$$

Ο αναγνώστης μπορεί να επαληθεύσει ότι οι τέσσερις τελευταίες τιμές ικανοποιούν, ως οφείλουν, τις σχέσεις

$$p'_\mu + p'_\nu = p'_\pi \quad (4.115)$$



και

$$T'_\mu + E'_\nu = T'_\pi + \Delta m. \quad (4.116)$$

Ένα δεύτερο παράδειγμα όπου επιβάλλεται η αρχή διατήρησης της ορμής και ενέργειας περιέχεται στο σχήμα 4.6(β). Στην περίπτωση αυτή περιγράφεται το φαινόμενο της *δίδυμης γένεσης*, κατά το οποίο ένα φωτόνιο, με μηδενική μάζα και ενέργεια $E_\gamma = p_\gamma c$, σε κάποιο σημείο του χώρου δημιουργεί ένα ζεύγος σωματίων: ένα ηλεκτρόνιο και ένα αντισωματίο του ηλεκτρονίου, το θετικό ηλεκτρόνιο. Κατά τη διαδικασία, μέρος της ενέργειας του φωτονίου μετατρέπεται σε μάζα των δύο σωματίων, ενώ όση ενέργεια περισσεύει διαμοιράζεται ως κινητική ενέργεια μεταξύ του ηλεκτρονίου και του αντισωματίου του. Έτσι, για να πραγματοποιηθεί το φαινόμενο της δίδυμης γένεσης θα πρέπει κατ' αρχήν το φωτόνιο να διαθέτει ενέργεια μεγαλύτερη από τη μάζα ηρεμίας των δύο σωματίων που παράγονται. Καθ' όσον το ηλεκτρόνιο και το θετικό ηλεκτρόνιο έχουν την ίδια μάζα, ίση (στις μονάδες που περιγράφονται στο ένθετο της σελίδας 136) με 0.511 MeV, η ενέργεια του φωτονίου θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από 1.024 MeV.

Ας αναλύσουμε το φαινόμενο θεωρώντας ένα φωτόνιο με ενέργεια 1.124 MeV και, από την εξ. (4.85), ορμή 1.124 MeV/c. Η ενέργεια που θα περισσέψει μετά τη γένεση του ζεύγους των σωματίων θα είναι στην περίπτωση αυτή 0.1 MeV. Θεωρώντας την ευνοϊκότερη των περιπτώσεων, όπου τα δύο σωματίδια εκπέμπονται από το σημείο της γένεσής τους προς την ίδια διεύθυνση με το μητρικό φωτόνιο, είναι εύκολο να υπολογίσουμε από την εξ. (4.84) ότι, αν η περίσσεια ενέργεια μοιραστεί εξ ίσου μεταξύ τους, η ορμή του καθενός θα είναι ίση με 0.231 MeV/c. Η ολική επομένως ορμή των δύο σωματίων στην τελική κατάσταση δεν φτάνει για να εξισορροπήσει την ορμή του μητρικού φωτονίου. Έτσι, το φαινόμενο της δίδυμης γένεσης πραγματοποιείται συνήθως στη γειτονία ενός ατομικού



πυρήνα, όπου ο πυρήνας αποκομίζει την περίσσεια της ορμής και συμβάλλει στη διατήρηση της ορμής και ενέργειας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 4-1 Δείξτε ότι το στοιχείο του χρόνου dt συνδέεται προς το στοιχείο του αναλλοίωτου χρόνου $d\tau$ με τη σχέση

$$d\tau = dt \sqrt{1 - u^2 / c^2} .$$

- 4-2 Ολοκληρώστε τη συνάρτηση $u(t)$ της εξ. (4.46) και δείξτε ότι οδηγεί στη συνάρτηση $x(t)$ της εξ. (4.47).

- 4-3 Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Lorentz αποδείξτε τις εξ. (4.55) για τα δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς του σχήματος 4.1.

- 4-4 Αποδείξτε τη σχέση

$$P_\alpha P_\alpha = -m_0^2 c^2 .$$

- 4-5 Αποδείξτε τις σχέσεις μετασχηματισμού της κοινής δύναμης $\mathbf{f}$ στις εξ. (4.64).

- 4-6 Δείξτε ότι το γινόμενο του τετρανύσματος της δύναμης $\mathbf{F}$ και του τετρανύσματος της ταχύτητας $\mathbf{U}$, $F_\alpha U_\alpha$ είναι ίσο με το μηδέν.

- 4-7 Από το αποτέλεσμα της προηγούμενης Άσκησης δείξτε ότι το εσωτερικό γινόμενο της τρισδιάστατης δύναμης και της τρισδιάστατης ταχύτητας ισούται με το ρυθμό αύξησης της σχετικιστικής ενέργειας.

- 4-8 Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, ένα φωτόνιο κινείται προς τη θετική φορά του άξονα X_1 με ορμή p . Η ενέργεια του φωτονίου E



και η συχνότητα f της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που αντιπροσωπεύει συνδέονται με τη σχέση $E = hf$. Σε ένα δεύτερο σύστημα αναφοράς, το οποίο κινείται με ταχύτητα v κατά τον άξονα X_1 , τα αντίστοιχα φυσικά μεγέθη συνδέονται με τη σχέση $E' = hf'$, ενώ η ορμή του μετράται ως p' . Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις μετασχηματισμού στις εξ. (4.55) δείξτε ότι οι συχνότητες που μετρώνται στα δύο συστήματα αναφοράς συνδέονται με τη σχέση

$$f' = f \frac{1 \pm v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Σε ποια περίπτωση ισχύει το θετικό πρόσημο στην προηγούμενη σχέση και σε ποια το αρνητικό;

4-9 Κατά τη μετάπτωση μιας ενεργειακής κατάστασης του ατόμου του υδρογόνου εκπέμπονται φωτόνια με ενέργεια 10.2 eV. Κοσμικά φωτόνια που εκπέμπονται από την ίδια μετάπτωση σε ένα μακρινό αστέρα παρατηρούνται στη γη με ενέργεια 3.4 eV. Ποια είναι η ταχύτητα του αστέρα ως προς τη γη;

4-10 Δείξτε ότι η ορμή ενός σωματίου p με κινητική ενέργεια T δίνεται από τη σχέση

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{T(T + 2m_0c^2)}.$$

4-11 Πόση είναι η ταχύτητα ενός ηλεκτρονίου που έχει επιταχυνθεί σε διαφορά δυναμικού 10 kV;

4-12 Υπολογίστε την ορμή ενός ηλεκτρονίου με κινητική ενέργεια 1 MeV.

4-13 Υπολογίστε την κινητική ενέργεια ενός ηλεκτρονίου με ορμή 2



MeV/c.

- 4-14 Υπολογίστε την ταχύτητα ενός ηλεκτρονίου με κινητική ενέργεια. 3 MeV.
- 4-15 Υπολογίστε την ορμή ενός ηλεκτρονίου με ταχύτητα $0.8c$.
- 4-16 Με πόση ταχύτητα πρέπει να ταξιδεύει ένα σωματίο ώστε η κινητική του ενέργεια να είναι διπλάσια της ενέργειας ηρεμίας του;
- 4-17 Ένα ηλεκτρόνιο ταξιδεύει στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου με ταχύτητα ίση προς $0.6c$. Ένας παρατηρητής κινείται προς την ίδια κατεύθυνση με το ηλεκτρόνιο με ταχύτητα $0.8c$. Πόση είναι η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου κατά τον παρατηρητή;
- 4-18 Δείξτε ότι η ταχύτητα u ενός σωματίου με κινητική ενέργεια T δίνεται από τη σχέση

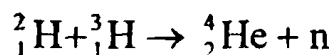
$$u = c \sqrt{1 - \frac{m_0^2 c^4}{(T + m_0 c^2)^2}}.$$

- 4-19 Στην Παράγραφο 4-8 μελετήσαμε την αποσύνθεση ενός π^+ μεσονίου, αρχικά στο σύστημα ηρεμίας του και στη συνέχεια για ένα π^+ μεσόνιο που κινείται κατακόρυφα προς τη γη με κινητική ενέργεια 1 GeV. Χρησιμοποιώντας τις λύσεις στο σύστημα ηρεμίας στις εξ. (4.100) και (4.101), δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Lorentz [βλ. εξ. (3.34)] οδηγεί στα αποτελέσματα των εξ. (4.111) – (4.114).
- 4-20 Ένα μεσόνιο K^0 διασπάται ενστάσει σε δύο π^0 μεσόνια. Αν η μάζα ηρεμίας του μεσονίου K^0 είναι 498 MeV και του π^0 μεσονίου 135 MeV, ποια είναι η κινητική ενέργεια κάθε π^0 μεσονίου;
- 4-21 Στο παράδειγμα της δίδυμης γένεσης που αναλύεται στο κυρίως



κείμενο, θεωρείστε ότι το φαινόμενο λαμβάνει χώρα στη γειτονία ενός πυρήνα ${}_{40}^{90}\text{Zr}$, ο οποίος περιέχει 40 πρωτόνια και 50 νετρόνια, ενώ η μάζα του είναι 83744 MeV. Υπολογίστε την κινητική ενέργεια και ορμή που αποκομίζει ο πυρήνας από την όλη διεργασία.

4-22 Θεωρείστε την πυρηνική αντίδραση



κατά την οποία το ισότοπο του υδρογόνου *δευτέριο* προσκρούει σε ένα άλλο ισότοπο του υδρογόνου, το *τρίτιο*, και από το χώρο της αντίδρασης εκπέμπεται ένας πυρήνας ηλίου και ένα νετρόνιο. Ανατρέξτε στη βιβλιογραφία (π.χ., στη σελίδα του διαδικτύου www.nnrc.bnl.gov/wallet) και προσδιορίστε τις μάζες των σωματίων που εμπλέκονται στην προηγούμενη αντίδραση. Ποιά είναι η μέγιστη δυνατή κινητική ενέργεια του νετρονίου που εκπέμπεται από την αντίδραση, ακόμη και αν αυτή συμβεί με μηδενική ταχύτητα μεταξύ των δύο σωματιδίων στην αρχική κατάσταση; Στην Πυρηνική Φυσική, η ποσότητα που θα υπολογίσετε ονομάζεται τιμή Q της αντίδρασης.

- 4-23 Κατά τη μελέτη της αλληλεπίδρασης μεταξύ σωματίων, η ανάλυση διευκολύνεται πολλές φορές αν εργαστούμε στο **σύστημα κέντρου μάζας** που ορίζεται ως το σύστημα αναφοράς, στο οποίο η ολική τρισδιάστατη ορμή των σωματίων μηδενίζεται. Στο σύστημα κέντρου μάζας N σωματίων όπου το καθένα διαθέτει μάζα ηρεμίας $m_0(k)$, ορμή $\mathbf{p}(k)$ και ολική ενέργεια $E(k)$ δείξτε ότι η αρχή των συντεταγμένων κινείται με ταχύτητα

$$\frac{\mathbf{u}}{c} = \frac{\sum_{k=1}^N \mathbf{p}(k)}{\sum_{k=1}^N E(k)}.$$



- 4-24 Ένα πρωτόνιο (με μάζα ηρεμίας $m_p \cong 938 \text{ MeV}$) διαθέτει στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου ολική ενέργεια 7 GeV . Δείξτε ότι η ορμή του είναι επίσης περίπου $7 \text{ GeV}/c$. Το εν λόγω πρωτόνιο συγκρούεται με ένα δεύτερο στάσιμο πρωτόνιο. Στο σύστημα κέντρου μάζας τα δύο πρωτόνια έχουν ίση και αντίθετη ορμή. Δείξτε ότι το σύστημα κέντρου μάζας ταξιδεύει, σε σχέση με το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, με ταχύτητα $0.87c$.
- 4-25 Σε ένα σύστημα αναφοράς OXYZ, ένα σωματίο με μάζα ηρεμίας m_1 , το οποίο ταξιδεύει με κινητική ταχύτητα T_1 προς τη θετική φορά του άξονα X, συγκρούεται με ένα στάσιμο σωματίο με μάζα ηρεμίας m_2 . Από το χώρο της σύγκρουσης εκπέμπονται δύο διαφορετικά σωματίδια με μάζες ηρεμίας m_3 και m_4 . Το σωματίο με μάζα m_3 εκπέμπεται με ορμή p_3 κατά την αρνητική φορά του άξονα Z. Δείξτε ότι το σωματίο με μάζα m_4 εκπέμπεται με ορμή

$$p_4 = \sqrt{p_3^2 + 2T_1 m_1 + T_1^2 / c^2}$$

και προς μια διεύθυνση που σχηματίζει γωνία θ_4 με την αρχική διεύθυνση του σωματίου m_1

$$\tan \theta_4 = \frac{p_3}{\sqrt{2T_1 m_1 + T_1^2 / c^2}}.$$

- 4-26 Ένα σωματίο με μάζα ηρεμίας m_1 , το οποίο κινείται με ταχύτητα $\beta_1 c$, συγκρούεται με ένα σωματίο μάζας m_2 και στη συνέχεια τα δύο σωματίδια κινούνται ως ένα. Δείξτε ότι η ταχύτητα του σύνθετου σωματίου δίνεται από τη σχέση

$$\beta = \beta_1 \frac{\gamma_1 m_1}{\gamma_1 m_1 + m_2}$$

όπου



$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_1^2}}.$$

- 4-27 Δείξτε ότι στην προηγούμενη άσκηση η μάζα ηρεμίας του σύνθετου σωματίου είναι

$$M = (m_1 + m_2) \sqrt{1 + \frac{2mT_1}{(m_1 + m_2)^2 c^2}}$$

όπου T_1 είναι η κινητική ενέργεια του σωματίου με μάζα m_1 .

- 4-28 Το φωτόνιο μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σωματίο με μηδενική μάζα, το οποίο όμως διαθέτει ορμή ίση προς $h/\lambda = hf/c$ και επομένως κινητική ενέργεια ίση με hf . Στις προηγούμενες σχέσεις, h είναι μια σταθερά (γνωστή ως σταθερά του Planck), λ το μήκος κύματος και f η συχνότητα. Αν το φωτόνιο συγκρουστεί με ένα στάσιμο ηλεκτρόνιο μάζας m_e , θα σκεδαστεί προς μια γωνία θ με νέα ενέργεια hf' . Δείξτε ότι η σχέση που συνδέει τη γωνία σκέδασης θ με τη μεταβολή του μήκους κύματος του φωτονίου είναι

$$\lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

όπου η σταθερά

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c}$$

είναι γνωστή ως μήκος κύματος Compton του ηλεκτρονίου. Δείξτε ακόμη ότι η κινητική ενέργεια T του ηλεκτρονίου μετά τη σκέδαση δίνεται από τη σχέση

$$T = hf \frac{2 \frac{\lambda_c}{\lambda} \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 + 2 \frac{\lambda_c}{\lambda} \sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Σχετικιστική Ηλεκτροδυναμική

ΕΙΔΑΜΕ ΟΤΙ ΥΠΟ ΤΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ του Γαλιλαίου, οι εξισώσεις του Maxwell δεν παραμένουν αναλλοίωτες. Παρ' όλα αυτά, η θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού, όπως εκφράζεται μέσω των εξισώσεων του Maxwell, παραμένει αναλλοίωτη κατά το μετασχηματισμό Lorentz. Τούτο δεν είναι ούτε τυχαίο ούτε παράδοξο. Η εμπιστοσύνη στην ορθότητα της νευτώνειας μηχανικής, η οποία διήρκεσε για περισσότερα από τριακόσια χρόνια, οφειλόταν στο γεγονός ότι οι προβλέψεις της περιορίζονταν στην περιοχή των χαμηλών ταχυτήτων. Μόνον όταν η νευτώνεια μηχανική υποβλήθηκε περί τα τέλη του 19^{ου} αιώνα στη βάσανο των πειραμάτων του J.J. Thomson με ταχεία ηλεκτρόνια, ανακαλύφθηκε ότι κάτι δεν πήγαινε καλά με το μετασχηματισμό του Γαλιλαίου. Αντίθετα, οι εξισώσεις του Maxwell, που εξ αρχής εκλήθησαν να περιγράψουν φαινόμενα στα όρια των ανώτατων επιτρεπτών ταχυτήτων στο σύμπαν, όπως η μετάδοση του φωτός, για να είναι σωστές έπρεπε να παραμένουν αναλλοίωτες κατά το μετασχηματισμό Lorentz.

Θα μπορούσε να σκεφτεί κανείς ότι μια και η ηλεκτρομαγνητική θεωρία, όπως την ξέραμε μέχρι σήμερα, ικανοποιεί τις αρχές της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας, το έργο μας στο χώρο των ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων δεν είναι και πολύ σπουδαίο. Όπως θα δούμε όμως στη συνέχεια του κεφαλαίου, η «μετάφραση» και μόνο



των βασικών εξισώσεων του ηλεκτρομαγνητισμού στη σχετικιστική γλώσσα αναδεικνύει νέα φαινόμενα, οδηγώντας σε μια βαθύτερη κατανόηση των διεργασιών που συμβαίνουν και των φυσικών μεγεθών που συμβάλουν σ' αυτές. Με τη μεταφορά των φυσικών μεγεθών σε τετρανύσματα ή τανυστές υψηλότερης τάξης στο χώρο Minkowski αναδεικνύονται νέα, γενικότερα φυσικά μεγέθη. Για παράδειγμα, όπως θα δούμε στην Παράγραφο 5-5, το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο μεταπίπτουν στον *ηλεκτρομαγνητικό τανυστή* δεύτερης τάξης και παύουν να έχουν αυτόνομη οντότητα, ενώ οι ίδιες οι εξισώσεις του Maxwell εκφράζονται σε μια εξαιρετικά συνοπτική μορφή που συνδέει τις συνιστώσες του ηλεκτρομαγνητικού τανυστή.

Στο υπόλοιπο του κεφαλαίου θα ασχοληθούμε με τη μεταφορά των ηλεκτρομαγνητικών φυσικών μεγεθών στον συμβολισμό της Ειδικής Θεωρίας Σχετικότητας, καθώς και με την ένταξή τους στον τετραδιάστατο χώρο, αφού προηγουμένως επιχειρήσουμε μια σύντομη ανασκόπηση της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας*.

5-1 Σύντομη ανασκόπηση της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας

Γνωρίζουμε σήμερα ότι το **ηλεκτρικό φορτίο** είναι μια ιδιότητα των στοιχειωδών δομικών λίθων της ύλης, όπως η μάζα τους που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Εμφανίζεται με την ανάπτυξη δυνάμεων μεταξύ σωματίων τα οποία έχουν αυτή την ιδιότητα. Όπως και η μάζα, το ηλεκτρικό φορτίο είναι ένα βαθμωτό φυσικό μέγεθος, με τη διαφορά ότι μπορεί να πάρει τόσο θετικές όσο και αρνητικές τιμές. Οι δομικοί λίθοι που συγκροτούν τα άτομα, τα μόρια και τελικά τη μακροσκοπική ύλη είναι τρεις: το **πρωτόνιο**, το

* Θεωρείται εδώ ότι ο αναγνώστης έχει παρακολουθήσει το εισαγωγικό μάθημα της Ηλεκτρομαγνητικής Θεωρίας, όπως αυτό διδάσκεται σήμερα στις Ελληνικές Πανεπιστημιακές και Πολυτεχνικές σχολές. Σκοπός της Παραγράφου 5-1 είναι η συγκέντρωση των εξισώσεων του Ηλεκτρομαγνητισμού σε ένα κείμενο αναφοράς ως προς την αποσκοπούμενη μεταφορά των κλασικών σχέσεων του ηλεκτρομαγνητισμού στο συμβολισμό της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας.



ουδετερόνιο (ή νετρόνιο) και το ηλεκτρόνιο. Όπως προδίδει η ονομασία του, το ουδετερόνιο διαθέτει μηδενικό ηλεκτρικό φορτίο και ουσιαστικά δεν συμμετέχει στα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα. Το πρωτόνιο έχει θετικό ηλεκτρικό φορτίο ίσο με

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (5.1)$$

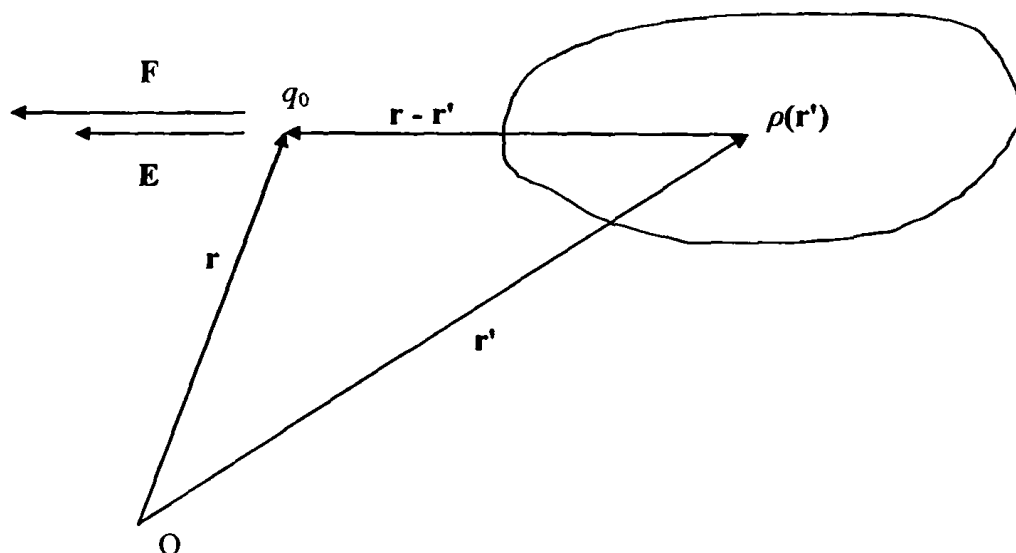
όπου C συμβολίζει τη μονάδα coulomb, η οποία μετρά το ηλεκτρικό φορτίο. Το ηλεκτρόνιο διαθέτει ίσο και αντίθετο ηλεκτρικό φορτίο με το πρωτόνιο.

Τα πρωτόνια αλληλεπιδρούν με ουδετερόνια μέσω των πυρηνικών δυνάμεων και συγκροτούν τον ατομικό πυρήνα, γύρω από τον οποίο περιφέρεται ίσος αριθμός ηλεκτρονίων. Έτσι, το συγκρότημα που δημιουργείται, το **άτομο**, εμφανίζεται στη συνήθη του κατάσταση με μηδενικό ολικό ηλεκτρικό φορτίο. Κατ' επέκταση, η μακροσκοπική ύλη, που συγκροτείται από άτομα (ή συμπλέγματα ατόμων, τα **μόρια**) εμφανίζεται συνήθως αφόρτιστη. Περίσσεια ή έλλειμμα ηλεκτρονίων δημιουργεί το ηλεκτρικό φορτίο της μακροσκοπικής ύλης.

Μέχρι σήμερα δεν έχει παρατηρηθεί στη φύση μεμονωμένο ηλεκτρικό φορτίο με τιμή μικρότερη από αυτή του στοιχειώδους φορτίου e στην εξ. (5.1). Έτσι, κάθε ποσότητα ηλεκτρικού φορτίου της μακροσκοπικής ύλης είναι ένα ακέραιο πολλαπλάσιο Ne (όπου N ένας τεράστιος αριθμός) του στοιχειώδους φορτίου e και η ύπαρξη ηλεκτρικού φορτίου στο χώρο αποδίδεται από μια βαθμωτή συνάρτηση $\rho(\mathbf{r})$, που θα ονομάσουμε **πυκνότητα φορτίου** και θα ορίσουμε ως

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{\sum_k q_k}{d^3 r}. \quad (5.2)$$





Σχήμα 5.1 Ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ που δημιουργείται στο χώρο λόγω της ύπαρξης μιας κατανομής φορτίου $\rho(\mathbf{r})$ και η δύναμη $\mathbf{F}$ που ασκείται σε ένα σημειακό ηλεκτρικό φορτίο q_0 , το οποίο έχει τοποθετηθεί στο σημείο $\mathbf{r}$. Το άνωσμα θέσης $\mathbf{r}'$ καλύπτει τα σημεία της κατανομής ηλεκτρικού φορτίου $\rho(\mathbf{r})$.

Στην τελευταία σχέση έχει χρησιμοποιηθεί η εικόνα, κατά την οποία η κατανομή φορτίου οφείλεται σε μια κατανομή σωματίων, το καθένα με φορτίο q_k και το άθροισμα εκτείνεται σε όλα τα φορτισμένα σωματάρια που περιέχονται στο στοιχείο του όγκου d^3r . Παρ' όλον ότι η πυκνότητα φορτίου έχει εκφραστεί ως συνάρτηση του χώρου μέσω του ανύσματος θέσης $\mathbf{r}$, τίποτε δεν αποκλείει τη μεταβολή της και ως προς το χρόνο t . Στη γενική περίπτωση επομένως θα θεωρήσουμε τη συνάρτηση $\rho(\mathbf{r}, t)$, την οποία, χάριν συντομίας, εφεξής θα συμβολίσουμε απλώς ως ρ .

Ένα από τα πειραματικά γεγονότα στα οποία στηρίζεται η ηλεκτρομαγνητική θεωρία είναι ότι, αν στο χώρο υπάρχει μια κατανομή ηλεκτρικού φορτίου, τότε, αν στον ίδιο χώρο εισαχθεί ένα σημειακό φορτίο q_0 , το φορτίο q_0 θα δεχτεί μια δύναμη. Ποσοτικά, το πειραματικό αυτό γεγονός εκφράζεται με την εισαγωγή ενός νέου φυσικού μεγέθους, του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}$. Το ηλεκτρικό πεδίο είναι μια συνάρτηση του χώρου $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ [και ενδεχομένως του χρόνου, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$]

που χαρτογραφεί το χώρο ως προς τις ιδιότητες που αυτός αποκτά λόγω της ύπαρξης μιας κατανομής ηλεκτρικού φορτίου. Η συνάρτηση $E(\mathbf{r})$ έχει την αναλυτική μορφή

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' \quad (5.3)$$

όπου το ολοκλήρωμα εκτείνεται σε όλο το χώρο και η σταθερά ϵ_0 είναι η ηλεκτρική διαπερατότητα στο κενό που συναντήσαμε στην Παράγραφο 1-4. Οι ιδιότητες που αποκτά ο χώρος λόγω της ύπαρξης της κατανομής φορτίου είναι ότι, αν σε ένα σημείο του χώρου $\mathbf{r}$ τοποθετηθεί ένα σημειακό φορτίο q_0 , τούτο θα δεχτεί μια δύναμη $\mathbf{F}$ ίση με

$$\mathbf{F} = q_0 \mathbf{E}. \quad (5.4)$$

Η γεωμετρία των εξ. (5.3) και (5.4) περιέχεται στο σχήμα 5.1, όπου η κατανομή ηλεκτρικού φορτίου έχει αποδοθεί με την πυκνότητα φορτίου $\rho(\mathbf{r})$.

Ένα δεύτερο πειραματικό γεγονός, στο οποίο στηρίζεται η ηλεκτρομαγνητική θεωρία προέρχεται από τη μελέτη της κίνησης του ηλεκτρικού φορτίου. Αν χρησιμοποιήσουμε πάλι την εικόνα της κατανομής ηλεκτρικού φορτίου ως μιας κατανομής φορτισμένων σωματίων, τα οποία επιπλέον τώρα κινούνται το καθένα με ταχύτητα $\mathbf{u}_k$, σε αναλογία με την εξ. (5.2), μπορούμε να ορίσουμε την **πυκνότητα ρεύματος**

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{\sum_k q_k \mathbf{u}_k}{d^3\mathbf{r}} \quad (5.5)$$

μια ανυσματική συνάρτηση του ανύσματος θέσης $\mathbf{r}$ σε κάθε σημείο



του τρισδιάστατου χώρου. Οι επιπτώσεις μιας κατανομής ρεύματος $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ στις ιδιότητες που αποκτά ο χώρος λόγω της ύπαρξής της και μόνον μπορούν να αποδοθούν από μια ανυσματική συνάρτηση $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, που θα ονομάσουμε **μαγνητική επαγωγή**. Η αναλυτική έκφραση της μαγνητικής επαγωγής είναι

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 r' \quad (5.6)$$

όπου μ_0 είναι η μαγνητική διαπερατότητα στο κενό της εξ. (1.21α) και η γεωμετρία αποδίδεται από ένα σχήμα ανάλογο με αυτό του σχήματος 5.1. Οι ιδιότητες που αποκτά ο χώρος είναι ότι, αν σε ένα σημείο του, που χαρακτηρίζεται από ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ και μαγνητική επαγωγή $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ υπάρχει ένα σημειακό φορτίο q_0 , το οποίο κινείται με ταχύτητα $\mathbf{V}$, τότε το φορτίο q_0 θα δεχτεί δύναμη ίση με

$$\mathbf{F} = q_0 \mathbf{E} + q_0 \mathbf{V} \times \mathbf{B}. \quad (5.7)$$

Η δύναμη της εξ. (5.7) είναι γνωστή ως **δύναμη Lorentz**. Παρατηρείται ότι, λόγω του εξωτερικού γινομένου στις εξ. (5.6) και (5.7), σε αντίθεση με τη γεωμετρία του σχήματος 5.1, η δύναμη Lorentz δεν είναι γενικά κατά τη διεύθυνση του ανύσματος $\mathbf{E}$ ή του ανύσματος $\mathbf{B}$.

Ένα τελευταίο πειραματικό γεγονός που διέπει τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα είναι η **διατήρηση του ηλεκτρικού φορτίου**. Έχει διαπιστωθεί από την παρατήρηση ότι σε ένα δεδομένο σύστημα το ποσό του ηλεκτρικού φορτίου παραμένει σταθερό. Αν και στη φύση εμφανίζονται συχνά φαινόμενα καταστροφής ή γένεσης φορτισμένων στοιχειωδών σωματίων, οι διεργασίες αυτές πραγματοποιούνται πάντοτε σε ζεύγη σωματίων με ίσο και αντίθετο ηλεκτρικό φορτίο, έτσι ώστε το αλγεβρικό άθροισμα του φορτίου να παραμένει σταθε-



ρό [βλ., π.χ., σχήμα 4.6(β)]. Ποσοτικά, η διατήρηση του ηλεκτρικού φορτίου εκφράζεται από την εξίσωση της συνεχείας

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (5.8)$$

Η παρουσία ύλης στο χώρο, ακόμη και αν αυτή είναι αφόρτιστη, επηρεάζει το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο που διαμορφώνεται στο χώρο και επομένως τις δυνάμεις που ασκούνται σε στατικά ή κινούμενα πεδία. Το φαινόμενο αντιμετωπίζεται με την εισαγωγή δύο νέων μακροσκοπικών ανυσματικών συναρτήσεων, της **ηλεκτρικής μετατόπισης** $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ και του **πεδίου μαγνήτισης** $\mathbf{H}(\mathbf{r})$. Για μια μεγάλη κατηγορία υλικών οι ανυσματικές αυτές συναρτήσεις είναι παράλληλες προς τα αντίστοιχα πεδία και για ένα μεγάλο εύρος τιμών συνδέονται προς αυτά με τις απλές γραμμικές σχέσεις

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (5.9)$$

και

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \quad (5.10)$$

όπου ϵ και μ είναι αντίστοιχα η **ηλεκτρική διαπερατότητα** και η **μαγνητική διαπερατότητα** που χαρακτηρίζουν ένα συγκεκριμένο υλικό*.

Η ηλεκτρομαγνητική θεωρία ολοκληρώνεται με τη διατύπωση διαφορικών εξισώσεων που οδηγούν στην εύρεση των συναρτήσεων $\mathbf{D}$ και $\mathbf{H}$ για μια συγκεκριμένη διάταξη φορτίων, ρευμάτων και υλι-

* Ίσως πρέπει να τονιστεί ότι οι συναρτήσεις $\mathbf{D}$ και $\mathbf{H}$ δεν αποτελούν μετρήσιμα φυσικά μεγέθη, αλλά θεωρητικά εργαλεία που σκοπό έχουν την απόδοση της παρουσίας υλικών στο χώρο. Τα μετρήσιμα φυσικά μεγέθη [μέσω της δύναμης Lorentz στην εξ. (5.7)] είναι τα πεδία $\mathbf{E}$ και $\mathbf{B}$.



κών. Οι διαφορικές αυτές εξισώσεις, γνωστές ως εξισώσεις του Maxwell, είναι

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (5.11\alpha)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.11\beta)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (5.11\gamma)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5.11\delta)$$

Όπως είδαμε στην Παράγραφο 1-4, στον κενό χώρο (σε χώρο απαλλαγμένο από φορτία ρεύματα και υλικά) οι εξισώσεις του Maxwell παίρνουν την απλή μορφή των εξ. (1.19) και οδηγούν στις διαφορικές εξισώσεις (1.20) που περιγράφουν τη μετάδοση των πεδίων στο χώρο και στο χρόνο.

Θα αρχίσουμε τη «μετάφραση» των προηγούμενων σχέσεων του ηλεκτρομαγνητισμού στο συμβολισμό της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας εξετάζοντας πρώτα τις πηγές του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, ήτοι την κατανομή ηλεκτρικού φορτίου και την κατανομή ηλεκτρικού ρεύματος αντίστοιχα.

5-2 Ηλεκτρικό φορτίο και ηλεκτρικό ρεύμα

Όπως και στην περίπτωση της μάζας, θα δεχτούμε ότι το ηλεκτρικό φορτίο q_0 ενός σώματος στο σύστημα ηρεμίας του είναι μια αναλλοίωτη βαθμωτή ποσότητα (ένας ταυιστής μηδενικής τάξης) στο χώρο Minkowski. Η παραδοχή αυτή εμπεριέχεται στους ορισμούς των εξ. (5.2) και (5.5), ενώ έχει επιβεβαιωθεί πειραματικά με μεγάλη



ακρίβεια*. Αν τώρα θεωρήσουμε δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς $OX_1X_2X_3X_4$ και $O'X'_1X'_2X'_3X'_4$, τα οποία κινούνται με σχετική ταχύτητα V κατά τον κοινό τους άξονα X_1, X'_1 και από τα οποία το πρώτο είναι το σύστημα ηρεμίας των φορτίων στην εξ. (5.2), δύο παρατηρητές στα σημεία O και O' θα συμφωνήσουν ως προς το ποσό του ηλεκτρικού φορτίου που περιέχεται σε ένα στοιχειώδη όγκο d^3r (όπως τον μετρά ο παρατηρητής στο σημείο O). Το ίδιο το στοιχείο του όγκου, λόγω της συστολής του μήκους, μετασχηματίζεται από το ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς στο άλλο με τη σχέση

$$d^3r' = \frac{1}{\gamma} d^3r. \quad (5.12)$$

Ο μετασχηματισμός της πυκνότητας φορτίου μεταξύ των δύο αδρανειακών συστημάτων αναφοράς μπορεί επομένως να γραφεί ως

$$\rho' = \gamma \rho_0 \quad (5.13)$$

όπου ρ_0 είναι η πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου στο σύστημα ηρεμίας. Παρατηρείται ότι η εξ. (5.13) είναι η ίδια με τη διαστολή του χρόνου στην εξ. (2.19).

Ο μετασχηματισμός της πυκνότητας ρεύματος στην εξ. (5.5) μπορεί να βρεθεί αν θεωρήσουμε, για απλούστευση του συμβολισμού, ότι όλα τα φορτία της κατανομής κινούνται με την ίδια ταχύτητα u . Στην περίπτωση αυτή η εξ. (5.5) μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{\sum_k q_k}{d^3r} \mathbf{u} = \rho \mathbf{u} = \gamma \rho_0 \mathbf{u}. \quad (5.14)$$

* Μια εξαιρετική ανασκόπηση των πειραμάτων που επιβεβαιώνουν το αναλλοίωτο του ηλεκτρικού φορτίου δίνεται από τον J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Second Edition, John Wiley & Sons, 1975, σελ. 548.



Συγκρίνοντας την εξ. (5.14) με την εξ. (4.6) είναι τώρα φανερό ότι οι τρεις συνιστώσες του ανύσματος $\mathbf{J}$ μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις τρεις χωρικές συνιστώσες του τετρανύσματος της ταχύτητας $\mathbf{U}$. Λαμβάνοντας ακόμη υπ' όψιν την εξ. (5.13), μπορούμε να ορίσουμε στο χώρο Minkowski το τετράνυσμα

$$\mathbf{J} = (\mathbf{J}, ic\rho) \quad (5.15)$$

που θα ονομάσουμε **τετράνυσμα της πυκνότητας ρεύματος**.

Όπως θα δούμε αργότερα, με τη βοήθεια του τετρανύσματος της πυκνότητας ρεύματος πολλές από τις σχέσεις του ηλεκτρομαγνητισμού απλοποιούνται σημαντικά. Ως πρώτο παράδειγμα, ας εξετάσουμε την εξίσωση της συνεχείας στην εξ. (5.8). Χρησιμοποιώντας τη μορφή του τετρανύσματος θέσης στην εξ. (4.1), ο τελεστής ανάδελτα ∇ μπορεί να γραφεί απλά ως

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \hat{\mathbf{e}}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (5.16)$$

όπου $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ είναι τα μοναδιαία ανύσματα κατά τους τρεις χωρικούς άξονες X_1, X_2, X_3 , ενώ η παράγωγος ως προς τον χρόνο μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{\partial}{\partial t} = ic \frac{\partial}{\partial x_4}. \quad (5.17)$$

Οι δύο τελευταίες σχέσεις οδηγούν στον ορισμό στο χώρο Minkowski ενός τετραδιάστατου τελεστή ανάλογου προς τον τελεστή ∇ του τρισδιάστατου χώρου που θα συμβολίσουμε ως

$$\square = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \hat{\mathbf{e}}_\alpha = (\nabla, \frac{-i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{e}}_4) \quad (5.18)$$



και που για προφανείς λόγους θα ονομάσουμε **τετράγωνο τελεστή**. Είναι προφανές ότι ο τελεστής $\square$ παραμένει αναλλοίωτος κατά το μετασχηματισμό Lorentz και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή συναρτήσεων στον τετραδιάστατο χώρο, όπως για τον υπολογισμό της κλίσης μιας αναλλοίωτης βαθμωτής συνάρτησης f

$$\square f = \sum_{\alpha=1}^4 \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha}} \quad (5.19)$$

ή την απόκλιση ενός τετρανύσματος F

$$\square \cdot F = \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}}. \quad (5.20)$$

Οι ποσότητες που προκύπτουν από τις δύο τελευταίες δράσεις του τετράγωνου τελεστή είναι προφανώς επίσης μεγέθη που παραμένουν αναλλοίωτα κατά το μετασχηματισμό Lorentz. Χρησιμοποιώντας τον τελεστή $\square$, η εξίσωση της συνεχείας μπορεί τώρα να γραφεί ως η απόκλιση του τετρανύσματος της πυκνότητας ρεύματος

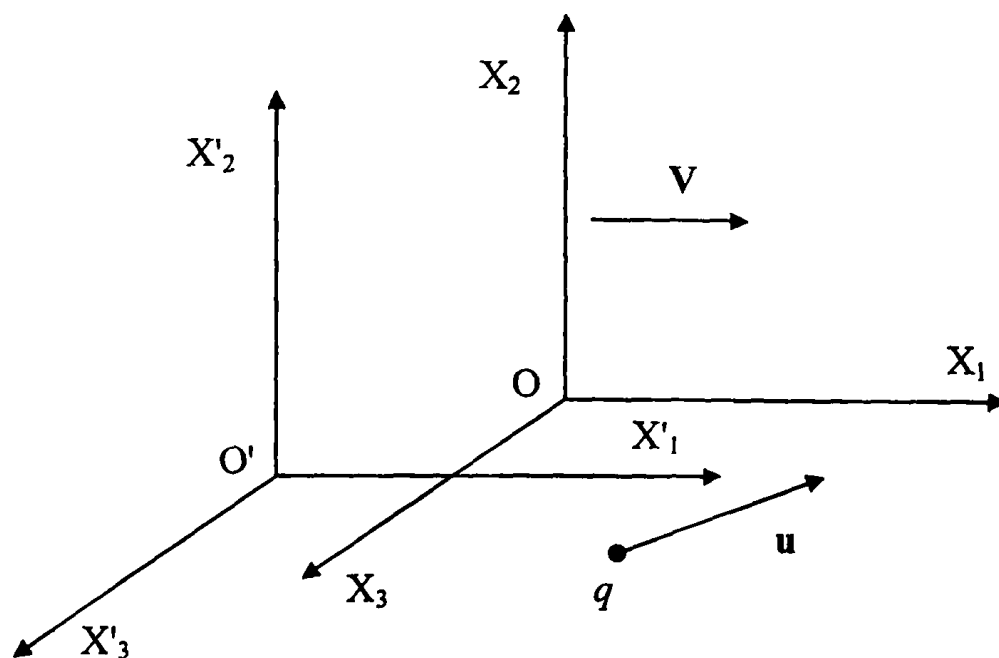
$$\square \cdot J = \frac{\partial J_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = 0 \quad (5.21)$$

μια σχέση που ισχύει σε κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

5-3 Μετασχηματισμός του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (I)

Ας μελετήσουμε κατ' αρχήν πως ένας παρατηρητής στο αδρανειακό σύστημα $O'X'_1X'_2X'_3X'_4$ παρατηρεί το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο $\mathbf{E}'$ και $\mathbf{B}'$ αντίστοιχα, αν τα φυσικά αυτά μεγέθη, σε ένα άλλο αδρανειακό σύστημα $OX_1X_2X_3X_4$, το οποίο κινείται με σχετική ταχύτητα V ως προς το πρώτο, έχουν τιμές $\mathbf{E}$ και $\mathbf{B}$. Η γεωμετρία





Σχήμα 5.2 Κίνηση σημειακού ηλεκτρικού φορτίου σε δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Η ταχύτητα u του σωματίου με ηλεκτρικό φορτίο q βρίσκεται στο κοινό επίπεδο των δύο συστημάτων X_1X_3 και $X'_1X'_3$.

των δύο συστημάτων αναφοράς δίνεται στο σχήμα 5.2, όπου ως συνήθως, για απλούστευση του συμβολισμού, η σχετική ταχύτητα V είναι κατά τη θετική φορά του κοινού άξονα X_1, X'_1 . Θα θεωρήσουμε ότι στο χώρο υπάρχει ένα σημειακό ηλεκτρικό φορτίο q , το οποίο κινείται με ταχύτητα u . Χωρίς να χάσουμε τίποτα από τη γενικότητα, μπορούμε να επιλέξουμε τα δύο συστήματα αναφοράς, έτσι ώστε η ταχύτητα να u έχει μηδενική συνιστώσα κατά τους άξονες X_2 και X'_2 των δύο συστημάτων. Στην περίπτωση αυτή, η δύναμη Lorentz που ασκείται στο φορτίο q στα δύο συστήματα είναι αντίστοιχα

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (5.22\alpha)$$

και

$$\mathbf{F}' = q\mathbf{E}' + q\mathbf{u}' \times \mathbf{B}'. \quad (5.22\beta)$$



Οι δυνάμεις αυτές αντιπροσωπεύουν το ρυθμό μεταβολής της ορμής $\mathbf{p}$ του σωματίου που φέρει το φορτίο q στα δύο συστήματα αναφοράς, ήτοι

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (5.23\alpha)$$

και

$$\mathbf{F}' = \frac{d\mathbf{p}'}{dt'} = \frac{d\mathbf{p}'}{dt} \left(\frac{dt'}{dt} \right)^{-1}. \quad (5.23\beta)$$

Ο μετασχηματισμός της ορμής μεταξύ δύο αδρανειακών συστημάτων αναφοράς έχει δοθεί στην εξ. (4.55) που εδώ θα γράψουμε ως

$$p'_1 = \gamma \left(p_1 + \frac{\beta}{c} W \right) \quad (5.24\alpha)$$

$$p'_2 = p_2 \quad (5.24\beta)$$

$$p'_3 = p_3. \quad (5.24\gamma)$$

Στις εξ. (5.24) έχει χρησιμοποιηθεί το σύμβολο W για την ολική ενέργεια του σωματίου προς αποφυγή σύγχυσης με το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου E , ενώ οι ποσότητες β και γ έχουν τη συνήθη σημασία τους

$$\beta = \frac{V}{c} \quad (5.25)$$

και

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (5.26)$$



Οι συνιστώσες της εξ. (5.23β) μπορούν επομένως να γραφούν ως

$$F'_1 = \gamma \left(\frac{dp_1}{dt} + \frac{\beta}{c} \frac{dW}{dt} \right) = \gamma \left(F_1 + \frac{\beta}{c} \frac{dW}{dt} \right) \quad (5.27\alpha)$$

$$F'_2 = \frac{dp_2}{dt} = F_2 \quad (5.27\beta)$$

$$F'_3 = \frac{dp_3}{dt} = F_3. \quad (5.27\gamma)$$

Σύμφωνα με την εξ. (4.74), η ποσότητα dW/dt στην εξ. (5.27α), η οποία αντιπροσωπεύει το ρυθμό με τον οποίο αυξάνει η κινητική ενέργεια ενός σωματίου με ταχύτητα $\mathbf{u}$, μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = F_1 u_1 + F_3 u_3 \quad (5.28)$$

οπότε η εξ. (5.27α) γίνεται

$$F'_1 = \gamma \left(F_1 + \frac{\beta}{c} F_1 u_1 + \frac{\beta}{c} F_3 u_3 \right). \quad (5.29)$$

Εξ' άλλου, από την εξ. (2.10δ), ο χρόνος που μετράται στο σύστημα αναφοράς $O'X'_1X'_2X'_3X'_4$ είναι

$$t' = \gamma \left(t + \frac{\beta}{c} x_1 \right) \quad (5.30)$$

οπότε

$$\frac{dt'}{dt} = \gamma \left(1 + \frac{\beta}{c} \frac{dx_1}{dt} \right) = \gamma \left(1 + \frac{\beta}{c} u_1 \right). \quad (5.31)$$



Συγκεντρώνοντας τα προηγούμενα αποτελέσματα, οι συνιστώσες της εξ. (5.23β) μπορούν να γραφούν ως

$$\gamma \left(1 + \frac{\beta}{c} u_1 \right) F'_1 = \gamma \left(F_1 + \frac{\beta}{c} F_1 u_1 + \frac{\beta}{c} F_3 u_3 \right) \quad (5.32\alpha)$$

$$\gamma \left(1 + \frac{\beta}{c} u_2 \right) F'_2 = F_2 \quad (5.32\beta)$$

$$\gamma \left(1 + \frac{\beta}{c} u_2 \right) F'_3 = F_3. \quad (5.32\gamma)$$

Στις εξ. (5.32) μπορεί να αντικατασταθεί η αναλυτική μορφή της δύναμης Lorentz στα δύο συστήματα αναφοράς. Ο αναγνώστης μπορεί να δείξει, με ομολογουμένως αρκετά επίπονη διεργασία, ότι οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι ανεξάρτητες από το φορτίο q και έχουν αντίστοιχα τη μορφή (βλ. Άσκηση 5-2)

$$\left(B_2 - \frac{1}{\gamma} B'_2 - \frac{\beta}{c} E_3 \right) u_3 - \frac{\beta}{c} (E_1 - E'_1) u_1 + E_1 - E'_1 = 0 \quad (5.33\alpha)$$

$$(B'_1 - B_1) u_3 + \left(B_3 + \frac{\gamma \beta}{c} E'_2 - \gamma B'_3 \right) u_1 + \gamma E'_2 - \gamma \beta c B'_3 - E_2 = 0 \quad (5.33\beta)$$

$$(c B'_2 + \gamma \beta E'_3 - c B_2) u_1 + \gamma E'_3 + \gamma \beta c B'_2 - E_3 = 0. \quad (5.33\gamma)$$

Στη μετάβαση από τις εξ. (5.32) στις εξ. (5.33) έχει χρησιμοποιηθεί το γεγονός ότι η ταχύτητα του σωματίου στο σχήμα 5.2 έχει μηδενική συνιστώσα κατά τους άξονες X_2, X'_2 , οπότε το εξωτερικό γινόμενο στη δύναμη Lorentz παίρνει τη μορφή

$$\mathbf{u} \times \mathbf{B} = -u_3 B_2 \hat{\mathbf{e}}_1 + (u_3 B_1 - u_1 B_3) \hat{\mathbf{e}}_2 + u_1 B_2 \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (5.34)$$



με ανάλογη έκφραση για τις τονούμενες ποσότητες. Έχει ακόμη χρησιμοποιηθεί ο νόμος πρόσθεσης ταχυτήτων της εξ. (2.32) που στην παρούσα περίπτωση έχει τη μορφή

$$u'_1 = \frac{u_1 + V}{1 + \frac{\beta}{c} u_1} \quad (5.35\alpha)$$

$$u'_2 = \frac{u_2}{\gamma \left(1 + \frac{\beta}{c} u_1 \right)} = 0 \quad (5.35\beta)$$

$$u'_3 = \frac{u_3}{\gamma \left(1 + \frac{\beta}{c} u_1 \right)}. \quad (5.35\gamma)$$

Οι εξ. (5.33) που συνδέουν τις συνιστώσες του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου στα δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς πρέπει να ισχύουν για οποιαδήποτε ταχύτητα u του φορτίου q , στο οποίο επενεργεί η δύναμη Lorentz. Οι συντελεστές επομένως κάθε συνιστώσας της ταχύτητας u_1 και u_3 , καθώς και οι σταθεροί όροι στις εξ. (5.33) πρέπει να μηδενίζονται ανεξάρτητα. Έτσι, η εξ. (5.33α) δίνει τις σχέσεις

$$E'_1 = E_1 \quad (5.36\alpha)$$

$$B'_2 = \gamma \left(E_2 - \frac{\beta}{c} E_3 \right). \quad (5.36\beta)$$

Από την εξ. (5.33β) παίρνουμε τις σχέσεις

$$B'_1 = B_1 \quad (5.36\gamma)$$

και



$$B_3 = \gamma \left(B'_3 - \frac{\beta}{c} E'_2 \right)$$

ή, αντικαθιστώντας $\beta \rightarrow -\beta$, την αντίστροφη της

$$B'_3 = \gamma \left(B_3 + \frac{\beta}{c} E_2 \right) \quad (5.36\delta)$$

καθώς και τη σχέση

$$E_2 = \gamma (E'_2 - \beta c B'_3)$$

ή

$$E'_2 = \gamma (E_2 + \beta c B_3). \quad (5.36\epsilon)$$

Τέλος, από την εξ. (5.33γ) προκύπτει πάλι η εξ. (5.36β), καθώς και η σχέση

$$E_3 = \gamma (E'_3 + \beta c B'_2)$$

ή

$$E'_3 = \gamma (E_3 - \beta c B_2). \quad (5.36\sigma\tau)$$

Συγκεντρώνοντας τώρα τις εξ. (5.36) μπορούμε να γράψουμε για το μετασχηματισμό του ηλεκτρικού πεδίου και της μαγνητικής επαγωγής μεταξύ δύο αδρανειακών συστημάτων αναφοράς τις σχέσεις

$$E'_1 = E_1$$

$$B'_1 = B_1$$

$$E'_2 = \gamma (E_2 + \beta c B_3)$$

$$B'_2 = \gamma \left(B_2 - \frac{\beta}{c} E_3 \right) \quad (5.37)$$

$$E'_3 = \gamma (E_3 - \beta c B_2)$$

$$B'_3 = \gamma \left(B_3 + \frac{\beta}{c} E_2 \right).$$



Παρατηρείται ότι τα πεδία παραμένουν αμετάβλητα κατά τον κοινό άξονα $X_1 X'_1$ προς τον οποίο θεωρήσαμε τη σχετική ταχύτητα V των δύο συστημάτων αναφοράς. Γενικότερα, μπορούμε να δείξουμε (βλ. Άσκηση 5-3) ότι τα πεδία παραμένουν αμετάβλητα προς τη διεύθυνση της σχετικής ταχύτητας των δύο συστημάτων αναφοράς (στη γενική περίπτωση όπου η διεύθυνση της ταχύτητας δεν συμπίπτει με έναν από τους χωρικούς άξονες του συστήματος συντεταγμένων) και να γράψουμε το μετασχηματισμό της εξ. (5.37) σε ανυσματική μορφή ως

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel} & \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel} \\ \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}_{\perp} - \mathbf{V} \times \mathbf{B}) & \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma\left(\mathbf{B}_{\perp} + \frac{1}{c^2} \mathbf{V} \times \mathbf{E}\right) \end{aligned} \quad (5.38)$$

όπου τα σύμβολα $\parallel$ και $\perp$ δηλώνουν διεύθυνση αντίστοιχα παράλληλη και κάθετη προς τη διεύθυνση της σχετικής ταχύτητας V των δύο συστημάτων αναφοράς.

Ο μετασχηματισμός των εξ. (5.38) είναι αρκετά αποκαλυπτικός. Κατά κύριο λόγο δείχνει ότι το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ και η μαγνητική επαγωγή $\mathbf{B}$ δεν έχουν ανεξάρτητη υπόσταση. Ένα καθαρά ηλεκτρικό ή μαγνητικό πεδίο σε κάποιο σύστημα αναφοράς θα εμφανιστεί σε ένα άλλο σύστημα αναφοράς ως μίγμα ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου. Αντίστροφα, ο παρατηρητής μπορεί πάντοτε να επιλέξει ένα σύστημα αναφοράς όπου μια συγκεκριμένη κατανομή φορτίων και ρευμάτων δημιουργεί απλούστερα πεδία. Ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα είναι η περίπτωση κατά την οποία τα ανύσματα του ηλεκτρικού πεδίου και της μαγνητικής επαγωγής είναι μεταξύ τους κάθετα. Τότε μπορούμε να δείξουμε ότι σε οποιοδήποτε άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς θα παραμείνουν κάθετα. Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να δείξει ότι, υπό ορισμένες συνθήκες, για αμοιβαία κάθετα πεδία



μπορεί να επιλέξει ένα σύστημα αναφοράς όπου το πεδίο είναι καθαρά ηλεκτρικό ή καθαρά μαγνητικό. Τα αποτελέσματα αυτά παραπέμπονται στις Ασκήσεις στο τέλος του κεφαλαίου.

5-4 Βαθμωτό και ανυσματικό δυναμικό

Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, το ζεύγος των ανυσματικών συναρτήσεων $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$, χαρτογραφεί το χώρο ως προς τις ιδιότητες που αυτός αποκτά λόγω της ύπαρξης μιας δεδομένης πυκνότητας φορτίου $\rho(\mathbf{r},t)$ και μιας δεδομένης πυκνότητας ρεύματος $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$. Οι δύο αυτές ποσότητες που αποτελούν την πηγή των ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων δεν είναι ανεξάρτητες, αλλά συνδέονται μέσω της εξίσωσης της συνεχείας [βλ. εξ. (5.8)]. Εναλλακτικά – και ορισμένες φορές πιο πρόσφορα – είναι δυνατόν να περιγράψουμε το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο με ένα άλλο ζεύγος συναρτήσεων.

Το βασικό θεώρημα του ανυσματικού λογισμού, σύμφωνα με το οποίο η απόκλιση του στροβιλισμού μιας ανυσματικής συνάρτησης μηδενίζεται, η εξ. (5.11β), οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η μαγνητική επαγωγή μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (5.39)$$

Θα ονομάσουμε τη συνάρτηση $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ που ικανοποιεί την τελευταία σχέση **ανυσματικό δυναμικό**. Με τον ορισμό αυτό η εξ. (5.11γ) παίρνει τη μορφή

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A}$$

ή

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

(5.40)



Τούτο σημαίνει ότι η παράσταση, της οποίας ο στροβιλισμός στην τελευταία σχέση μηδενίζεται, μπορεί να γραφεί ως η κλίση μιας βαθμωτής συνάρτησης $\varphi(\mathbf{r}, t)$. Σε αναλογία επομένως με τον ορισμό της ηλεκτροστατικής $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, θα ορίσουμε τη **συνάρτηση βαθμωτού δυναμικού** φ με τη σχέση

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi$$

ή

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (5.41)$$

Εξ ορισμού οι συναρτήσεις $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ και $\varphi(\mathbf{r}, t)$ ικανοποιούν τις εξ. (5.11β) και (5.11γ). Ο περαιτέρω προσδιορισμός τους μπορεί να επιτευχθεί με τη χρησιμοποίηση των δύο υπόλοιπων εξισώσεων του Maxwell. Αν και οι εξισώσεις μπορούν να επιλυθούν στη γενική περίπτωση όπου ο χώρος περιέχει διηλεκτρικά και μαγνητικά υλικά, θα θεωρήσουμε τις (5.11α) και (5.11δ) στον κενό χώρο όπου η ηλεκτρική μετατόπιση $\mathbf{D}$ και το πεδίο μαγνήτισης $\mathbf{H}$ συνδέονται με τα αντίστοιχα πεδία μέσω των σχέσεων

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (5.42)$$

και

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}. \quad (5.43)$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις εξ. (5.39) και (5.41) στις εξ. (5.11α) και (5.11δ) προκύπτουν οι διαφορικές εξισώσεις



$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.44\alpha)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \mu_0 \mathbf{J} \quad (5.44\beta)$$

όπου για απλούστευση του συμβολισμού έχει χρησιμοποιηθεί η σχέση

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}. \quad (5.45)$$

Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (5.44), με τη βοήθεια των ορισμών του βαθμωτού και ανυσματικού δυναμικού στις εξ. (5.39) και (5.41), είναι ισοδύναμο προς τις εξισώσεις του Maxwell. Εκ πρώτης όψεως βέβαια οι εξ. (5.44) φαίνονται πιο πολύπλοκες από τις εξ. (5.11). Επιπλέον, περιέχουν το μειονέκτημα ότι οι άγνωστες συναρτήσεις $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ και $\varphi(\mathbf{r}, t)$ απαντώνται και στις δύο εξισώσεις. Η απλοποίηση των εξ (5.44) και ταυτόχρονα ο διαχωρισμός τους σε δύο ανεξάρτητες εξισώσεις μπορεί να επιτευχθεί με εκμετάλλευση της σχετικής ελευθερίας που παρέχεται από τον ορισμό των δύο δυναμικών.

Στην ηλεκτροστατική μαθαίνουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι ανεξάρτητο από το σημείο αναφοράς της συνάρτησης δυναμικού. Μεταβολή του σημείου αναφοράς συνεπάγεται πρόσθεση μιας σταθερής ποσότητας στη συνάρτηση δυναμικού, η οποία μέσω της σχέσης $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ οδηγεί στο ίδιο ηλεκτροστατικό πεδίο. Κατά τον ίδιο τρόπο, καθόσον ο στροβιλισμός της κλίσης $\nabla \Lambda$ οποιασδήποτε βαθμωτής συνάρτησης $\Lambda(\mathbf{r}, t)$ μηδενίζεται, η μαγνητική επαγωγή που προσδιορίζει η εξ. (5.39) παραμένει αναλλοίωτη αν το ανυσματικό δυναμικό υποστεί το μετασχηματισμό



$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda. \quad (5.46)$$

Ο μετασχηματισμός αυτός έχει βέβαια ορισμένες επιπτώσεις στον ορισμό του βαθμωτού δυναμικού, που με τη συμμετοχή της συνάρτησης $\Lambda(\mathbf{r}, t)$ ορίζει το ηλεκτρικό πεδίο. Για να μείνει αναλλοίωτο το ηλεκτρικό πεδίο που προσδιορίζει η εξ. (5.41), ο μετασχηματισμός της εξ. (5.46) θα πρέπει να συνοδεύεται από το μετασχηματισμό

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}. \quad (5.47)$$

Ο ταυτόχρονος μετασχηματισμός των εξ. (5.45) και (5.47) ονομάζεται **μετασχηματισμό βαθμίδας**, ενώ η μη μεταβολή των πεδίων υπό το μετασχηματισμό αυτό αναφέρεται ως **αναλλοιότητα** ή **συμμετρία βαθμίδας**. Η ευχέρεια που παρέχεται από τις εξ. (5.46) και (5.47) μας επιτρέπει τώρα να επιλέξουμε ένα ζεύγος δυναμικών που ικανοποιούν τη συνθήκη

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (5.48)$$

Η σχέση αυτή απαντάται στη βιβλιογραφία με τον όρο **συνθήκη Lorentz**^{*}. Με την επιβολή της συνθήκης Lorentz το σύστημα των εξ.

* Η συνθήκη Lorentz δεν είναι η μόνη που απλοποιεί σημαντικά τις εξ. (5.44). Η συνθήκη

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

μετατρέπει την εξ. (5.44) στην εξίσωση Poisson

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.50)$$



(5.44) διαχωρίζεται σε δύο ανεξάρτητες διαφορικές εξισώσεις για καθεμιά από τις συναρτήσεις δυναμικού

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.49\alpha)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (5.49\beta)$$

Οι εξ. (5.49) συγκροτούν ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων καθ' όλα ισοδύναμο προς τις εξισώσεις του Maxwell.

Διεξήλθαμε με κάποια λεπτομέρεια την περιγραφή των ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων μέσω των δύο συναρτήσεων δυναμικού $\mathbf{A}$ και φ , διότι ο φορμαλισμός που αναπτύχθηκε στη βαθμίδα Lorentz επιτρέπει τώρα την άμεση μεταφορά της θεωρίας στο συμβολισμό της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Κατ' αρχάς θα παρατηρήσουμε ότι αν η εξ. (5.49α) πολλαπλασιαστεί κατά μέλη με την ποσότητα i/c λαμβάνεται η σχέση

$$\nabla^2 \left(\frac{i\varphi}{c} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{i\varphi}{c} \right) = -\frac{i}{c} \frac{\rho}{\epsilon_0} = -\mu_0 (ic\rho). \quad (5.51)$$

Η ποσότητα που βρίσκεται σε παρένθεση στο τελευταίο σκέλος της προηγούμενης σχέσης θα αναγνωριστεί, από την εξ. (5.15), ως η τέταρτη συνιστώσα του τετρανύσματος της πυκνότητας ρεύματος

$$J_4 = ic\rho. \quad (5.52)$$

Αν επομένως ορίσουμε ένα νέο τετράνυσμα

της οποίας οι λύσεις μπορεί να είναι ήδη γνωστές. Η συνθήκη ονομάζεται **συνθήκη Coulomb** και ζεύγη δυναμικών που την ικανοποιούν χαρακτηρίζονται ως δυναμικά της **βαθμίδας Coulomb**.



$$A = \left(\mathbf{A}, \frac{i\varphi}{c} \right) \quad (5.53)$$

η εξ. (5.51) μπορεί να γραφεί ως

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A_4 = \square^2 A_4 = -\mu_0 J_4 \quad (5.54)$$

όπου ο τελεστής στο αριστερό σκέλος της εξ. (5.54) έχει αναγνωριστεί ως το τετράγωνο* του τετράγωνου τελεστή της εξ. (5.18)

$$\square^2 = \square \cdot \square = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} = \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right). \quad (5.55)$$

Η εξ. (5.54) σε συνδυασμό με την εξ. (5.49β) μπορεί να ενοποιήσει τώρα το σύστημα των εξ. (5.49) στη μοναδική σχετικιστική διαφορική εξίσωση

$$\square^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (5.56)$$

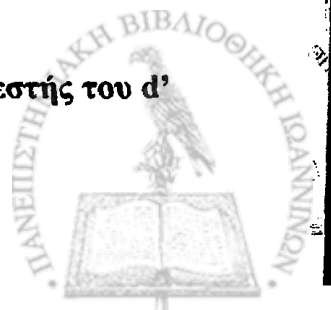
ή

$$\frac{\partial^2 A_\beta}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} = -\mu_0 J_\beta. \quad (5.57)$$

Κατά τον ίδιο τρόπο μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η συνθήκη Lorentz της εξ. (5.48) μπορεί να γραφεί σε σχετικιστικό συμβολισμό ως

$$\frac{\partial A_a}{\partial x_a} = 0. \quad (5.58)$$

* Ο τελεστής της εξ. (5.55) αναφέρεται στη βιβλιογραφία και ως τελεστής του d'Alambert.



5-5 Ο τανυστής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

Στην προηγούμενη Παράγραφο πετύχαμε να αποδώσουμε τις εξισώσεις του ηλεκτρομαγνητισμού σε συμβολισμό του τετραδιάστατου χώρου [βλ. εξ. (5.57)]. Καθώς οι εξισώσεις αυτές προσδιορίζουν το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό, έπεται ότι οι εξισώσεις του Maxwell παραμένουν αναλλοίωτες κατά το μετασχηματισμό Lorentz. Στις περισσότερες όμως περιπτώσεις είναι προτιμότερο να εργαστεί κανείς απ' ευθείας με τα ανυσματικά πεδία $\mathbf{E}$ και $\mathbf{B}$ – που έτσι κι' αλλιώς είναι τα μετρήσιμα φυσικά μεγέθη – παρακάμπτοντας το τετράνυσμα του δυναμικού. Είναι επομένως χρήσιμο να εκφράσουμε τα πεδία αυτά σε τετραδιάστατη μορφή, ώστε να είναι δυνατός ο χειρισμός τους με τις μεθόδους που αναπτύξαμε στο χώρο Minkowski. Ας θεωρήσουμε για το σκοπό αυτό, σε μια προφανή γενίκευση του τρισδιάστατου στροβιλισμού, την έκφραση $\square \times \mathbf{A}$ που αντιπροσωπεύει τον τανυστή δεύτερης τάξης

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}. \quad (5.59)$$

Ο ηλεκτρομαγνητικός τανυστής που μόλις ορίσαμε είναι ένας αντισυμμετρικός τανυστής δεύτερης τάξης, καθ' όσον

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} = -\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha}\right) = -F_{\beta\alpha} \quad (5.60)$$

ενώ ικανοποιεί τη σχέση

$$F_{\alpha\beta} = 0, \text{ για } \alpha = \beta. \quad (5.61)$$

Οι συνιστώσες του ηλεκτρομαγνητικού τανυστή $F_{\alpha\beta}$ μπορούν να βρεθούν από τον ορισμό της εξ. (5.59) σε σύγκριση με τις εξισώσεις που συνδέουν τα πεδία $\mathbf{E}$ και $\mathbf{B}$ με το ανυσματικό δυναμικό $\mathbf{A}$ και τη



βαθμωτή συνάρτηση δυναμικού φ στις εξ. (5.39) και (5.41). Για παράδειγμα, η εξ. (5.39) μπορεί να γραφεί αναλυτικά ως

$$B_1 \hat{e}_1 + B_2 \hat{e}_2 + B_3 \hat{e}_3 = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) \hat{e}_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) \hat{e}_2 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) \hat{e}_3 \quad (5.62)$$

που αμέσως δίνει

$$F_{12} = B_3, \quad F_{13} = -B_2, \quad F_{23} = B_1 \quad (5.63)$$

ενώ οι λοιπές μη μηδενικές συνιστώσες μπορούν να ληφθούν από την αναλυτική μορφή της εξ. (5.41). Ο αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει (βλ. Άσκηση 5-10) ότι η πλήρης μορφή του ηλεκτρομαγνητικού τανυστή είναι

$$F = (F_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{iE_1}{c} \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{iE_2}{c} \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{iE_3}{c} \\ \frac{iE_1}{c} & \frac{iE_2}{c} & \frac{iE_3}{c} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.64)$$

Οι εξισώσεις του Maxwell είναι δυνατόν τώρα να εκφραστούν μέσω του ηλεκτρομαγνητικού τανυστή F . Η παράγωγος $\partial F_{\alpha\beta} / \partial x_\beta$, για παράδειγμα, μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} \right)$$



$$= \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\beta} \right) - \frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\beta}. \quad (5.65)$$

Αλλά ο πρώτος όρος στο τελευταίο σκέλος της εξ. (5.65), λόγω της εξ. (5.58), μηδενίζεται, ενώ ο δεύτερος όρος αναγνωρίζεται από την εξ. (5.57) ως ίσος με την ποσότητα $\mu_0 J_\alpha$. Οι εξισώσεις επομένως

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \mu_0 J_\alpha \quad (5.66)$$

είναι ισοδύναμες με τις εξ. (5.49), οι οποίες με τη σειρά τους είναι ισοδύναμες με τις εξισώσεις του Maxwell (5.11α) και (5.11δ)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \text{ και } \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (5.67)$$

Ο αναγνώστης μπορεί να δείξει κατά τον ίδιο τρόπο (βλ. Άσκηση 5-11) ότι οι δύο λοιπές εξισώσεις του Maxwell [εξ. (5.11β) και (5.11γ)]

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \text{ και } \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.68)$$

είναι ισοδύναμες με τη σχέση μεταξύ των συνιστωσών του τανυστή F

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} = 0. \quad (5.69)$$

Το αριστερό σκέλος της εξ. (5.69) είναι ένας τανυστής τρίτης τάξης και για όλες τις τιμές των δεικτών $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, 4$ αντιπροσωπεύει εξήντα τέσσερις συνολικά εξισώσεις. Είναι όμως εύκολο να δείξου-



με ότι μόνο για $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ δεν μηδενίζεται αυτομάτως. Επιπλέον, οποιασδήποτε κυκλική εναλλαγή των δεικτών δίνει το ίδιο αποτέλεσμα. Έτσι, τελικά, η εξ. (5.69) αντιπροσωπεύει μόνον τέσσερις ανεξάρτητες εξισώσεις.

5-6 Μετασχηματισμός του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (II)

Πριν αφήσουμε το χώρο των ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων θα εξετάσουμε για μια ακόμη φορά το μετασχηματισμό του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου μεταξύ δύο αδρανειακών συστημάτων αναφοράς – αυτή τη φορά στο συμβολισμό του ηλεκτρομαγνητικού τανυστή. Όπως είδαμε στην Παράγραφο 3-5.4 [βλ. εξ. (3.80)], αν χρησιμοποιήσουμε την απεικόνιση τανυστών με πίνακες, για τα δύο αδρανειακά συστήματα που συνήθως θεωρούμε (βλ., π.χ., σχήμα 5.2), ο τανυστής δεύτερης τάξης F μετασχηματίζεται σύμφωνα με τη σχέση

$$F' = CFC^T \quad (5.70)$$

όπου C^T είναι ο ανάστροφος πίνακας του πίνακα

$$C = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \quad (5.71)$$

Η εξ. (5.70) μπορεί να γραφεί αναλυτικά ως

$$F' = \begin{pmatrix} 0 & B'_3 & -B'_2 & -\frac{iE'_1}{c} \\ -B'_3 & 0 & B'_1 & -\frac{iE'_2}{c} \\ B'_2 & -B'_1 & 0 & -\frac{iE'_3}{c} \\ \frac{iE'_1}{c} & \frac{iE'_2}{c} & \frac{iE'_3}{c} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.72)$$



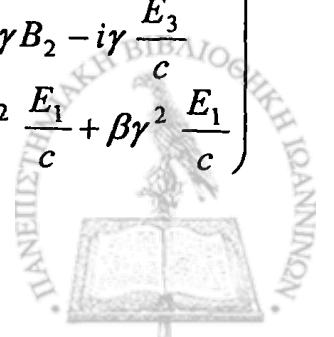
$$= \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{iE_1}{c} \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{iE_2}{c} \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{iE_3}{c} \\ \frac{iE_1}{c} & \frac{iE_2}{c} & \frac{iE_3}{c} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Εκτελώντας τις πράξεις πολλαπλασιασμού των πινάκων στην τελευταία σχέση, παίρνουμε

$$F' = \begin{pmatrix} 0 & B'_3 & -B'_2 & -\frac{iE'_1}{c} \\ -B'_3 & 0 & B'_1 & -\frac{iE'_2}{c} \\ B'_2 & -B'_1 & 0 & -\frac{iE'_3}{c} \\ \frac{iE'_1}{c} & \frac{iE'_2}{c} & \frac{iE'_3}{c} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.73)$$

$$= \begin{pmatrix} \beta\gamma \frac{E_1}{c} & \gamma B_3 + \beta\gamma \frac{E_2}{c} & -\gamma B_2 + \beta\gamma \frac{E_3}{c} & -\frac{i\gamma E_1}{c} \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{iE_2}{c} \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{iE_3}{c} \\ \frac{i\gamma E_1}{c} & i\beta\gamma B_3 + \frac{i\gamma E_2}{c} & -i\beta\gamma B_2 + \frac{i\gamma E_3}{c} & \beta\gamma \frac{E_1}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \beta\gamma \frac{E_1}{c} - \beta\gamma \frac{E_1}{c} & \gamma B_3 + \beta\gamma \frac{E_2}{c} & -\gamma B_2 + \beta\gamma \frac{E_3}{c} & i\beta^2\gamma^2 \frac{E_1}{c} - i\gamma \frac{E_1}{c} \\ -\gamma B_3 + \beta\gamma \frac{E_2}{c} & 0 & B_1 & -i\beta\gamma B_3 - i\gamma \frac{E_2}{c} \\ \gamma B_2 - \beta\gamma \frac{E_3}{c} & -B_1 & 0 & i\beta\gamma B_2 - i\gamma \frac{E_3}{c} \\ i\gamma^2 \frac{E_1}{c} - i\beta^2\gamma^2 \frac{E_1}{c} & i\beta\gamma B_3 + i\gamma \frac{E_2}{c} & -i\beta\gamma B_2 + i\gamma \frac{E_3}{c} & -\beta\gamma^2 \frac{E_1}{c} + \beta\gamma^2 \frac{E_1}{c} \end{pmatrix}$$



$$= \begin{pmatrix} 0 & \gamma B_3 + \beta \gamma \frac{E_2}{c} & -\gamma B_2 + \beta \gamma \frac{E_3}{c} & i\beta^2 \gamma^2 \frac{E_1}{c} - i\gamma \frac{E_1}{c} \\ -\gamma B_3 + \beta \gamma \frac{E_2}{c} & 0 & B_1 & -i\beta \gamma B_3 - i\gamma \frac{E_2}{c} \\ \gamma B_2 - \beta \gamma \frac{E_3}{c} & -B_1 & 0 & i\beta \gamma B_2 - i\gamma \frac{E_3}{c} \\ i\gamma^2 \frac{E_1}{c} - i\beta^2 \gamma^2 \frac{E_1}{c} & i\beta \gamma B_3 + i\gamma \frac{E_2}{c} & -i\beta \gamma B_2 + i\gamma \frac{E_3}{c} & 0 \end{pmatrix}.$$

Σύγκριση των στοιχείων του πρώτου και τελευταίου πίνακα στην εξ. (5.73) οδηγεί στις σχέσεις μετασχηματισμού του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1 & B'_1 &= B_1 \\ E'_2 &= \gamma(E_2 + \beta c B_3) & B'_2 &= \gamma\left(B_2 - \frac{\beta}{c} E_3\right) \\ E'_3 &= \gamma(E_3 - \beta c B_2) & B'_3 &= \gamma\left(B_3 + \frac{\beta}{c} E_2\right) \end{aligned} \quad (5.74)$$

που στην Παράγραφο 5-3 καταλήξαμε [βλ. εξ. (5.37)] με πολύ πιο επίπονη διεργασία.

Η προηγούμενη ένταξη της ηλεκτροδυναμικής στο χώρο Minkowski καταδεικνύει ότι οι εξισώσεις του Maxwell είναι όντως αναλλοίωτες ως προς το μετασχηματισμό Lorentz. Επιπλέον, η στενή σχέση μεταξύ των συναρτήσεων δυναμικού A και ϕ και των πυκνοτήτων $\mathbf{J}$ και ρ στη διαμόρφωση τετρανυσμάτων και των πεδίων $\mathbf{E}$ και $\mathbf{B}$ στη διαμόρφωση του ηλεκτρομαγνητικού τανυστή, αναδεικνύουν τη στενή σχέση – στην πραγματικότητα, την αδιαχώριστη υπόσταση – των ηλεκτρικών και μαγνητικών φαινομένων. Στην προσχετικιστική θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού ήταν γνωστό ότι ένα καθαρά ηλεκτρικό πεδίο ήταν δυνατόν να εμφανιστεί σε ένα άλλο σύστημα αναφοράς ως ένας συνδυασμός ηλεκτρικού και μα-

γνητικού πεδίου. Η μεταφορά όμως της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας στο συμβολισμό της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας οδηγεί σε μια νέα, βαθύτερη κατανόηση της ενιαίας φύσης του ηλεκτρομαγνητισμού.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 5-1 Δείξτε αναλυτικά ότι η εξίσωση της συνεχείας στην εξ. (5.8) ισοδυναμεί με την τετραδιάστατη σχέση της εξ. (5.21).
- 5-2 Χρησιμοποιώντας τις εξ. (5.34) και (5.35), καθώς και την αναλυτική μορφή της δύναμης Lorentz, δείξτε ότι οι εξ. (5.32) οδηγούν στις εξ. (5.33).
- 5-3 Θεωρείστε δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς $O'X'_1X'_2X'_3X'_4$ και $OX_1X_2X_3X_4$ που κινούνται με σχετική ταχύτητα V κατά τον κοινό τους άξονα X_1, X'_2 . Δείξτε ότι οι εξ. (5.38) μεταπίπτουν στις εξ. (5.37).
- 5-4 Δείξτε ότι αν σε ένα σύστημα αναφοράς το ηλεκτρικό πεδίο E είναι κάθετο προς τη μαγνητική επαγωγή B , τα πεδία θα παραμείνουν αμοιβαία κάθετα σε οποιοδήποτε άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς.
- 5-5 Δείξτε ότι μεταξύ των αδρανειακών συστημάτων του σχήματος 5.2, η πυκνότητα ρεύματος J και η πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου ρ μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις εξισώσεις

$$J'_1 = \gamma(J_1 + \beta c\rho), \quad J'_2 = J_2,$$

$$J'_3 = J_3, \quad \rho' = \gamma\left(\rho + \frac{\beta J_1}{c}\right).$$

- 5-6 Δείξτε ότι μεταξύ των αδρανειακών συστημάτων του σχήματος



5.2, το ανυσματικό δυναμικό A και η βαθμωτή συνάρτηση δυναμικού φ μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις εξισώσεις

$$A'_1 = \gamma \left(A_1 + \frac{\beta \varphi}{c} \right), \quad A'_2 = A_2,$$

$$A'_3 = A_3, \quad \varphi' = \gamma (\varphi + \beta c A_1).$$

5-7 Θεωρείστε ότι σε ένα σύστημα αναφοράς το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ είναι κάθετο προς τη μαγνητική επαγωγή $\mathbf{B}$. Δείξτε ότι

(α) Αν $|\mathbf{E}| < c|\mathbf{B}|$, τότε μπορεί να βρεθεί ένα σύστημα αναφοράς όπου το ηλεκτρικό πεδίο μηδενίζεται.

(β) Αν $|\mathbf{E}| > c|\mathbf{B}|$, τότε μπορεί να βρεθεί ένα σύστημα αναφοράς όπου το μαγνητικό πεδίο μηδενίζεται.

5-8 Δείξτε ότι αν ένα ζεύγος συναρτήσεων δυναμικού $A(\mathbf{r}, t)$ και $\varphi(\mathbf{r}, t)$ είναι λύσεις των εξ. (5.49), τότε όλα τα ζεύγη δυναμικών που προέρχονται από το μετασχηματισμό των εξ. (5.46) και (5.47) είναι επίσης λύσεις των εξ. (5.49) αρκεί να ισχύει η συνθήκη

$$\nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0.$$

Οι λύσεις της κατηγορίας αυτής λέγεται ότι ανήκουν στη **βαθμίδα Lorentz**.

5-9 Δείξτε ότι η εξ. (5.58) ισοδυναμεί με τη συνθήκη Lorentz της εξ. (5.48).

5-10 Χρησιμοποιώντας τις εξ. (5.39) και (5.41) υπολογίστε όλες τις συνιστώσες του τανυστή των πεδίων $F_{\alpha\beta}$.



- 5-11 Δείξτε ότι οι εξ. (5.68) και (5.69) είναι ισοδύναμες.
- 5-12 Δείξτε ότι οι εξισώσεις που διέπουν την κίνηση ενός σωματίου μάζας m_0 , το οποίο φέρει φορτίο q , που κινείται σε ένα ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο, είναι

$$m_0 \frac{d^2 x_\alpha}{d\tau^2} = q F_{\alpha\beta} U_\beta.$$

Ερμηνεύστε τη σημασία της σχέσης που προκύπτει για $\beta = 4$.

- 5-13 Χρησιμοποιώντας τον δεύτερο κανόνα του Νεύτωνα δείξτε ότι η ταχύτητα u ενός σωματίου με μάζα ηρεμίας m_0 και ηλεκτρικό φορτίο q , το οποίο κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας R κάθετα προς ένα μαγνητικό πεδίο B , είναι

$$u = \frac{qBR}{m_0 \sqrt{1 + (qBR / m_0 c)^2}}$$

- 5-14 Ένα ηλεκτρόνιο κινείται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο 0.03 T σε κυκλική τροχιά ακτίνας 5 cm κάθετα προς τη διεύθυνση του πεδίου. Ποια είναι η ταχύτητα και κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου;
- 5-15 Ένα ηλεκτρόνιο με κινητική ενέργεια 0.8 MeV κινείται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο σε κυκλική τροχιά ακτίνας 5 cm κάθετα προς τη διεύθυνση του πεδίου. Ποια είναι η ένταση του μαγνητικού πεδίου;
- 5-16 Ένα ηλεκτρόνιο με κινητική ενέργεια 20 MeV κινείται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο σε κυκλική τροχιά κάθετα προς τη διεύθυνση του πεδίου. Υπολογίστε την ακτίνα της τροχιάς.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Γενική Θεωρία της Σχετικότητας

Η ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ που μελετήσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια ανέδειξε μια σειρά από φυσικά φαινόμενα – πολλά απ' αυτά εκ πρώτης όψεως παράδοξα – που εμφανίζονται στους διακριτούς χώρους της κλασικής μηχανικής, του ηλεκτρομαγνητισμού και του υποατομικού κόσμου. Κατά τη διάμορφωσή της επιπλέον, αναδείχτηκε μια στενή σχέση μεταξύ εννοιών που προηγουμένως εθεωρούντο ασύνδετες, όπως ο χώρος και ο χρόνος, η μάζα και η ενέργεια και τα δύο πεδία του ηλεκτρομαγνητισμού. Οι επιπτώσεις της θεωρίας, όπως η διαστολή του χρόνου ή η ισοδυναμία μάζας και ενέργειας έχουν περάσει κατά πανηγυρικό τρόπο τη βάσανο της παρατήρησης και του πειράματος. Παρ' όλα αυτά, αν και ονομάστηκε *θεωρία των θεωριών*, η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας παραμένει αρκετά «ειδική». Ο μετασχηματισμός Lorentz, δηλαδή ο τρόπος με τον οποίο μεταφράζονται οι μετρήσεις δύο παρατηρητών που κινούνται ο ένας προς τον άλλο, ισχύει μόνο για αδρανειακά συστήματα, ήτοι για παρατηρητές με μεταξύ τους σταθερή ταχύτητα. Τον ίδιο περιορισμό έχουμε προς το παρόν θέσει και για την Αρχή της Σχετικότητας: οι φυσικοί νόμοι παραμένουν αναλλοίωτοι μόνο μεταξύ αδρανειακών συστημάτων αναφοράς. Το εύλογο ερώτημα που ανακύπτει βεβαίως είναι τι συμβαίνει όταν η σχετι-



κή κίνηση δύο παρατηρητών περιέχει επιτάχυνση.

Μετά την ολοκλήρωση της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας περί τα μέσα της πρώτης δεκαετίας του 20^{ου} αιώνα, ο Einstein, πιστεύοντας ότι οι νόμοι της φύσης πρέπει να παραμένουν αναλλοίωτοι σε όλα τα συστήματα αναφοράς – επιταχυνόμενα ή μη – συγκέντρωσε όλη του την προσπάθεια στη διερεύνηση της σχέσης φυσικών φαινομένων, όπως αυτά εμφανίζονται μεταξύ μη αδρανειακών συστημάτων αναφοράς. Έτσι, το 1915, μετά από μια αρκετά δαιδαλώδη διαδρομή*, έθεσε τις βασικές αρχές της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας, η οποία ακόμη και σήμερα αποτελεί ένα τομέα εντατικής θεωρητικής έρευνας. Δυστυχώς, η πλήρης παρουσίαση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας απαιτεί εκτεταμένη μαθηματική προπαρασκευή, την οποία δεν διαθέτει ο φοιτητής στο προπτυχιακό στάδιο. Έτσι, στο τελευταίο αυτό κεφάλαιο του βιβλίου θα περιοριστούμε στην περιγραφή των βασικών εννοιών και αξιωμάτων της

* Η διαμόρφωση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας κατά τη δεκαετία 1905 – 1915 δεν ήταν βεβαίως αποκλειστικό δημιούργημα του Einstein. Στην όλη προσπάθεια συνετέλεσαν ουσιαστικά μεγάλοι μαθηματικοί της εποχής, όπως οι Marcel Grossman, E.B. Christoffel, Gregorio Ricci, Tullio Levi-Civita, κ.ά. Ούτε η διαδρομή προς την τελική διατύπωση της θεωρίας ήταν απαλλαγμένη λαθών. Σε μια πρώτη προσπάθεια ολοκλήρωσης της θεωρίας, ο Einstein και ο συμμαθητής του Marcel Grossman, δημοσίευσαν το 1913 μια εργασία που όπως απέδειξε ο Levi-Civita περιείχε σωρεία μαθηματικών λαθών. Ακόμη και ορισμένες προβλέψεις της θεωρίας που τελικά επιβεβαιώθηκαν από την αστρονομική παρατήρηση, όπως ο υπολογισμός της μεταπτωτικής κίνησης της τροχιάς του Ερμή (βλ. Παράγραφο 6-3.3) στηρίχθηκαν σε αρχικά λανθασμένες εξισώσεις. Τελικά, ο Einstein ολοκλήρωσε την προσπάθειά του με την υποβολή προς δημοσίευση, στις 25 Νοεμβρίου 1915, της εργασίας του *Οι εξισώσεις του βαρυτικού πεδίου*, σχεδόν ταυτόχρονα με μια παρόμοια εργασία του D. Hilbert.

Μεταξύ άλλων, ο Einstein έπρεπε να ξεπεράσει και τον σκεπτικισμό των μεγάλων θεωρητικών φυσικών της εποχής του που εξέφραζαν σημαντικές αμφιβολίες για την ορθότητα των ιδεών του. Λέγεται ότι όταν το 1913 ο Max Planck επισκέφτηκε τον Einstein και ο τελευταίος του ανέπτυξε τις θεωρίες του, ο Planck παρατήρησε: «Ως μεγαλύτερος, θα ήθελα να σε συμβουλευσω να τα εγκαταλείψεις αυτά, πρώτον διότι δεν πρόκειται να επιτύχεις και δεύτερον, διότι, ακόμη και αν επιτύχεις, κανείς δεν πρόκειται να σε πιστέψει».



θεωρίας, καθώς και στα κύρια πειραματικά δεδομένα που συνηγορούν για την ορθότητά της.

6-1 Αδρανειακή και βαρυτική μάζα

Στην κλασική μηχανική ασχολούμεθα με τη συμπεριφορά υλικών σωμάτων. Μετρήσιμα μεγέθη κατά την παρατήρηση ή το πείραμα είναι η απόσταση (με μέτρα), ο χρόνος (με χρονόμετρα) και η δύναμη που ασκείται στα υλικά σώματα (με δυναμόμετρα, π.χ. με την παραμόρφωση ενός ελατηρίου). Από τις μετρήσεις αυτές εξάγεται η τιμή παράγωγων φυσικών μεγεθών που θεωρούμε χρήσιμο να ορίσουμε, όπως η ταχύτητα, η επιτάχυνση ή η στροφορμή. Η ίδια η ύλη του σώματος αποδίδεται από το φυσικό μέγεθος της μάζας που μετρά το ποσό της ύλης που περιέχεται σε ένα σώμα, όπως ο όγκος του μετρά το χώρο που καταλαμβάνει το σώμα στον τρισδιάστατο χώρο.

Το ποσό της ύλης που περιέχει ένα σώμα επηρεάζει τη συμπεριφορά του σώματος κατά δύο διακριτούς τρόπους. Αφ' ενός έχει διαπιστωθεί πειραματικά ότι αν ένα σώμα υπόκειται σε μια δύναμη F , τότε αναπτύσσει επιτάχυνση γ , η οποία συνδέεται με τη δύναμη μέσω της σχέσης*

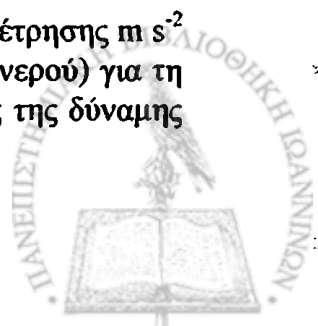
$$F = m\gamma \quad (6.1)$$

όπου m ορίζει το φυσικό μέγεθος της μάζας. Η πειραματική αυτή παρατήρηση έχει καθιερωθεί με την ονομασία *δεύτερος κανόνας του*

* Στην πραγματικότητα, το αποτέλεσμα της παρατήρησης είναι ότι τα τρία φυσικά μεγέθη που υπεισέρχονται στην εξ. (6.1) συνδέονται με την αναλογία

$$F \propto m\gamma.$$

Η αναλογία μετατρέπεται σε ισότητα με την επιλογή των μονάδων μέτρησης $m \text{ s}^{-2}$ για την επιτάχυνση και kg (ποσό ύλης που περιέχεται σε ένα λίτρο νερού) για τη μάζα. Τούτο έχει ως αποτέλεσμα τον ορισμό ως μονάδας μέτρησης της δύναμης το Newton ($1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2}$).



Νεύτωνα, ενώ το φυσικό μέγεθος που ορίζεται μέσω της εξ. (6.1) αναφέρεται ως **αδρανειακή μάζα** του σώματος.

Εναλλακτικά, το ποσό της ύλης που περιέχει ένα σώμα μπορεί να οριστεί μέσω του νόμου της παγκόσμιας έλξης, κατά τον οποίο, αν δύο σώματα βρίσκονται σε σχετική απόσταση r , μεταξύ τους αναπτύσσεται ελκτική δύναμη F , το μέτρο της οποίας περιγράφεται από την αναλογία

$$|F| \propto \frac{M_1 M_2}{r^2} \quad (6.2)$$

όπου M_1 και M_2 είναι η **βαρυτική μάζα**, ένα φυσικό μέγεθος που επίσης μετρά το ποσό ύλης που περιέχει καθένα από τα δύο σώματα. Αν τα δύο φυσικά μεγέθη, η αδρανειακή μάζα και η βαρυτική μάζα ταυτίζονται, καθ' όσον στην τελευταία αναλογία οι μονάδες μέτρησης όλων των φυσικών μεγεθών είναι εκ των προτέρων ορισμένες, η εξ. (6.2) μπορεί να μετατραπεί σε ισότητα μόνο με την επιστράτευση μιας σταθεράς αναλογίας που στο σύστημα μονάδων SI παίρνει την αριθμητική τιμή

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}. \quad (6.3)$$

Θα γράψουμε επομένως το νόμο της παγκόσμιας έλξης ως

$$\mathbf{F} = G \frac{M_1 M_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (6.4)$$

όπου $\hat{\mathbf{r}}$ είναι το μοναδιαίο άνυσμα κατά την ευθεία γραμμή που συνδέει τα δύο σώματα*.

* Όπως και με το νόμο του Coulomb, ο νόμος της παγκόσμιας έλξης ισχύει για σημειακά υλικά σώματα, ήτοι στην περίπτωση όπου οι διαστάσεις κάθε σώματος είναι αμελητέες σε σχέση με τη μεταξύ τους απόσταση r .



Ο Νεύτωνας γνώριζε από τα πειράματα του Γαλιλαίου ότι στη γειτονία της γης, δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 , αν αφεθούν από ένα ορισμένο ύψος, θα εκτελέσουν ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με την ίδια επιτάχυνση. Αν, δηλαδή, F_1 και F_2 είναι οι δυνάμεις με τις οποίες η γη έλκει αντίστοιχα τα δύο σώματα (στην κλασική μηχανική ονομάζουμε τις δυνάμεις αυτές *βάρη* των δύο σωμάτων), τότε ισχύει η σχέση

$$\gamma_1 = \gamma_2 = g. \quad (6.5)$$

Συνδυάζοντας τη σχέση αυτή με τις δύο εξισώσεις ορισμού της μάζας προκύπτει ότι για κάθε υλικό σώμα ο λόγος της αδρανειακής προς τη βαρυτική μάζα παραμένει σταθερός, ήτοι

$$\frac{m_1}{M_1} = \frac{m_2}{M_2}. \quad (6.6)$$

Όπως ήδη αναφέρθηκε, η αναλογία μεταξύ των δύο ειδών μάζας μπορεί να μετατραπεί σε ισότητα μέσω της σταθεράς G στην εξ. (6.4). Έτσι, η Νευτώνεια Μηχανική εμπεριέχει την παραδοχή ότι η αδρανειακή και η βαρυτική μάζα είναι ένα και το αυτό φυσικό μέγεθος, στο οποίο αναφερόμαστε απλώς με τον όρο *μάζα* και το μετράμε τις ίδιες μονάδες μέτρησης (kg). Άμεσο επακόλουθο της παραδοχής αυτής είναι ότι αν ένα σώμα με μάζα m βρεθεί στη γειτονία της γης, θα κινηθεί προς αυτή με ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και με επιτάχυνση

$$g = G \frac{M}{r^2} \quad (6.7)$$

όπου M είναι η μάζα της γης. Κοντά στην επιφάνεια της γης, η τελευταία ποσότητα, γνωστή ως *επιτάχυνση της βαρύτητας*, έχει ως



γνωστό την αριθμητική τιμή $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$.

Είναι αξιοσημείωτο ότι πριν ακόμη διατυπωθεί η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας, το 1890, η ταύτιση της αδρανειακής και βαρυτικής μάζας – για την οποία η Νευτώνεια Μηχανική δεν παρέχει καμιά εξήγηση – είχε επιβεβαιωθεί, κυρίως μέσω των πειραμάτων του Ούγγρου φυσικού Loránd Eötvös, με ακρίβεια $^* 1:10^8$. Για τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, τα πειράματα του Eötvös έπαιξαν τον ίδιο ρόλο με αυτόν των πειραμάτων των Michelson και Morley ως προς την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας. Το αρνητικό αποτέλεσμα των πειραμάτων των Michelson και Morley οδήγησε τον Einstein στη διατύπωση του δεύτερου αξιώματος της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Όπως θα δούμε στην επόμενη Παράγραφο, τα πειράματα του Eötvös τον οδήγησαν δέκα χρόνια αργότερα στη θεμελίωση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας.

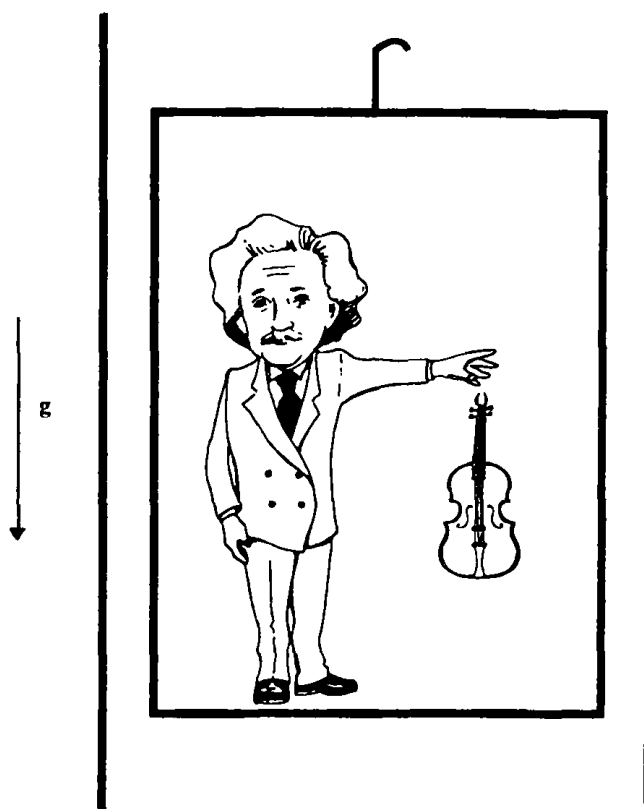
6-2 Η Αρχή της Ισοδυναμίας

Το βασικό συμπέρασμα της προηγούμενης Παραγράφου είναι ότι η ύλη μπορεί να περιγραφεί πλήρως με ένα και μοναδικό βαθμωτό φυσικό μέγεθος - τη μάζα. Το γεγονός ότι το φυσικό αυτό μέγεθος εμφανίζεται σε δύο ομάδες, εκ πρώτης όψεως ασύνδετων φαινομένων, των αδρανειακών και των βαρυτικών, αντίστοιχα μέσω του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα και του νόμου της παγκόσμιας έλξης, αποτελεί μια ένδειξη ότι οι κατηγορίες αυτές των φαινομένων πρέπει τελικά να συνδέονται. Την ιδέα[†] αυτή άρχισε να διερευνά ο Einstein στην προσπάθειά του να επεκτείνει την Αρχή της Σχετικότητας σε μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Λέγεται ότι η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας γεννήθηκε ένα πρωινό του 1907, όταν ο Einstein, ο

* Μετέπειτα πειράματα έχουν βελτιώσει την ακρίβεια με την οποία η αδρανειακή μάζα ταυτίζεται με τη βαρυτική κατά τουλάχιστον τρεις τάξεις μεγέθους.

† Πολύ αργότερα, ο ίδιος ο Einstein περιέγραψε την ιδέα του αυτή ως την «ευτυχέστερη σκέψη της ζωής του».





Σχήμα 6.1 Ανελκυστήρας σε ελεύθερη πτώση μέσα στο βαρυτικό πεδίο της γης.

οποίος διέθετε την ιδιοφυΐα να διαβλέπει θεμελιώδεις αρχές της φύσης με τη βοήθεια απλών παραδειγμάτων, ανέλυσε με προσοχή ένα νοητό πείραμα. Ας παρακολουθήσουμε μαζί τη σκέψη του Einstein, όπως ο ίδιος την παρουσίασε αργότερα.

Ας θεωρήσουμε ότι στον τελευταίο όροφο ενός πολυώροφου κτιρίου ένας επιστήμονας επιβιβάζεται σε ένα ανελκυστήρα. Όσο χρόνο ο ανελκυστήρας παραμένει στάσιμος στον τελευταίο όροφο, παραμένει στάσιμος και ο επιστήμονας. Τούτο σημαίνει ότι στο σώμα του ασκείται αφ' ενός η δύναμη της βαρύτητας (το βάρος του) και αφ' ετέρου μια ίση και αντίθετη δύναμη από το δάπεδο του ανελκυστήρα. Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια ότι συμβαίνει ένα τραγικό γεγονός: το καλώδιο του ανελκυστήρα σπάει και ο ανελκυστήρας

αρχίζει μια τρελή πορεία σε ελεύθερη πτώση, δηλαδή κίνηση με επιτάχυνση την επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$. Ως πραγματικός επιστήμονας, ο επιβάτης του ανελκυστήρα, αδιάφορος ως προς την τελική έκβαση του γεγονότος, στρέφει την προσοχή του στη νέα κατάσταση που διαμορφώθηκε (βλ. σχήμα 6.1). Το πρώτο που παρατηρεί είναι ότι έχει χάσει το βάρος του. Καθώς ο ανελκυστήρας ταξιδεύει αδυσώπητα προς το κέντρο της γης με συνεχώς αυξανόμενη ταχύτητα, λόγω της ισοδυναμίας αδρανειακής και βαρυτικής μάζας, ο ίδιος και όλα τα αντικείμενα περί αυτόν ταξιδεύουν σε ελεύθερη πτώση με την ίδια επιτάχυνση. Έτσι, παραμένει ακίνητος ως προς το σύστημα αναφοράς του ανελκυστήρα, ενώ το δάπεδο δεν ασκεί πλέον καμιά δύναμη στο σώμα του. Το ίδιο θα συμβεί και με ένα οποιοδήποτε αντικείμενο, αν το αφήσει από το χέρι του. Το αντικείμενο θα παραμείνει αιωρούμενο μέσα στον ανελκυστήρα, μια και αυτό βρίσκεται επίσης σε ελεύθερη πτώση μέσα στο βαρυτικό πεδίο της γης.

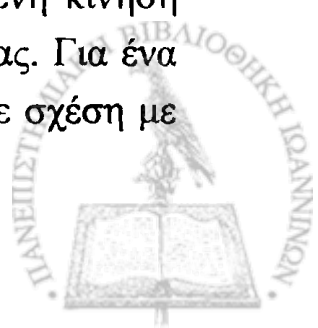
Για τον Einstein, το προηγούμενο νοητό πείραμα αναδεικνύει μια αξιοσημείωτη ιδιότητα του χωροχρόνου: το βαρυτικό πεδίο μπορεί να εξαφανιστεί αν ένας παρατηρητής μεταπηδήσει σε ένα σύστημα αναφοράς το οποίο βρίσκεται σε ελεύθερη πτώση. Μήπως, λοιπόν, η δύναμη της βαρύτητας δεν είναι μια πραγματική δύναμη, αλλά απλώς μια εκδήλωση της κίνησης ενός συστήματος αναφοράς μέσα στο χωροχρόνο; Μπορούμε να επεκτείνουμε τη σκέψη αυτή ακόμη περισσότερο: καθώς τώρα η βαρύτητα μέσα στον υποθετικό ανελκυστήρα του σχήματος 6.1 έχει εξαλειφθεί, θα πρέπει όλα τα πειράματα που διεξάγονται μέσα στον ανελκυστήρα να δίνουν τα ίδια αποτελέσματα με πειράματα που διεξάγονται σε ένα σύστημα αναφοράς πλήρως απαλλαγμένο από το βαρυτικό πεδίο, δηλαδή, σε μια περιοχή του διαστήματος, μακριά από οποιοδήποτε ουράνιο σώμα. Ο Einstein κωδικοποίησε τις σκέψεις αυτές στην **Αρχή της Ισοδυναμίας**, σύμφωνα με την οποία



Οι νόμοι της φύσης παραμένουν αναλλοίωτοι κατά το μετασχηματισμό μεταξύ ενός τοπικού συστήματος αναφοράς, το οποίο βρίσκεται σε ελεύθερη πτώση μέσα σε ένα βαρυτικό πεδίο, και ενός συστήματος αναφοράς απαλλαγμένου από κάθε βαρυτική επιρροή.

Με άλλα λόγια, δεν είναι δυνατόν να διεξαγάγουμε ένα πείραμα, το οποίο θα διακρίνει αν βρισκόμαστε σε ένα σύστημα αναφοράς σε ελεύθερη πτώση μέσα σε ένα βαρυτικό πεδίο ή αν βρισκόμαστε σε ένα σύστημα αναφοράς σε μια περιοχή του διαστήματος όπου η βαρύτητα μηδενίζεται. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, το αξίωμα αυτό της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας έχει αξιοσημείωτες επιπτώσεις.

Ας δούμε το ίδιο φαινόμενο από την αντίστροφη σκοπιά. Θα χρησιμοποιήσουμε για το σκοπό αυτό ένα νοητό πείραμα που αναφέρεται σε πιο σύγχρονη τεχνολογία και ενδεχομένως οδηγεί σε ευτυχέστερο πέρας απ' ότι αυτό του δύσμοιρου επιστήμονα μέσα στον ανελκυστήρα. Ας θεωρήσουμε δυο αστροναύτες μέσα στο διαστημόπλοιο τους λίγο πριν από την εκτόξευση. Οι αστροναύτες βρίσκονται ακίνητοι σε σχέση με τη γη και αισθάνονται το βάρος τους ωςάν να βρίσκονταν έξω από το διαστημόπλοιο. Από το μεγάφωνο της NASA ακούγεται «..., πέντε, τέσσερα, τρία, δύο, ένα, ανάφλεξη» και αρχίζει η εκτόξευση με επιτάχυνση $\gamma = g$. Οι αστροναύτες αισθάνονται τώρα το βάρος τους να διπλασιάζεται. Μετά από ένα ορισμένο χρονικό διάστημα, το διαστημόπλοιο ξεφεύγει από το βαρυτικό πεδίο της γης και σε μια περιοχή του διαπλανητικού χώρου, όπου η βαρύτητα ουσιαστικά μηδενίζεται, το βάρος τους μειώνεται στο φυσιολογικό. Τώρα πλέον όλα είναι όπως πριν από την εκτόξευση. Αν αφήσουν ένα αντικείμενο ελεύθερο, τούτο θα πέσει, όπως και στην επιφάνεια της γης με ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και με επιτάχυνση ίση προς την επιτάχυνση της βαρύτητας. Για ένα παρατηρητή όμως έξω από το διαστημόπλοιο, ακίνητο σε σχέση με



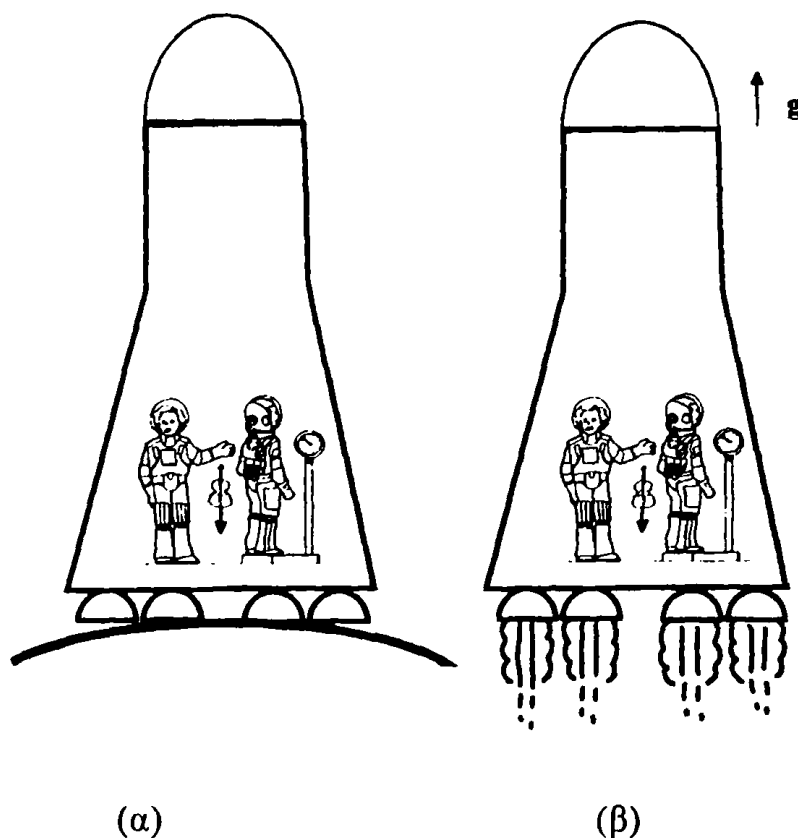
τη γη, το αντικείμενο δεν πέφτει. Απλώς το δάπεδο επιταχύνεται προς το αντικείμενο με επιτάχυνση ίση προς 9.81 m s^{-2} . Γεγονός πάντως είναι ότι, αν το διαστημόπλοιο δεν έχει παράθυρα, σύμφωνα με την Αρχή της Ισοδυναμίας, οι αστροναύτες δεν έχουν τη δυνατότητα να πραγματοποιήσουν ένα πείραμα με το οποίο θα διαπιστώσουν αν βρίσκονται σε ένα επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς ή βρίσκονται ακίνητοι πάνω στην επιφάνεια της γης.

Το διαστημόπλοιο έχει πλέον φτάσει την επιθυμητή ταχύτητα και οι αστροναύτες αποφασίζουν να σβήσουν τις μηχανές του και εφεξής να ταξιδέψουν με σταθερή ταχύτητα. Το βάρος τους τώρα εξαφανίζεται. Όπως έχουμε δει αρκετές φορές στην τηλεόραση, αιωρούνται, μέσα στο διαστημόπλοιο, μαζί με όλα τα αντικείμενα που δεν έχουν φροντίσει να ασφαλίσουν σε κάποιο σταθερό σημείο. Πάλι όμως κανένα πείραμα δεν μπορεί να τους πληροφορήσει αν βρίσκονται σε ένα σημείο του διαπλανητικού χώρου όπου η βαρύτητα μηδενίζεται ή σε κατάσταση ελεύθερης πτώσης προς τη γη, όπως ο επιστήμονας μέσα στον ανελκυστήρα.

Με βάση την Αρχή της Ισοδυναμίας και την ταύτιση της αδρανειακής και βαρυτικής μάζας, ο Einstein προχώρησε σε μια περαιτέρω αφαίρεση. Στην κλασική φυσική η βαρυτική δύναμη θεωρείται λίγο, πολύ μια «πραγματική» δύναμη που έλκει τα σώματα λόγω της μάζας τους. Σε αντίθεση, η αδρανειακή δύναμη είναι μια «φαινομενική» δύναμη που οφείλεται στην επιτάχυνση του συστήματος αναφοράς, δηλαδή στην κινητική κατάσταση ενός σώματος μέσα στο χωροχρόνο. Καθ' όσον οι δύο κατηγορίες δυνάμεων δεν είναι δυνατόν να διακριθούν, μήπως και οι βαρυτικές δυνάμεις είναι και αυτές «φαινομενικές» και απλώς αντανakλούν τη γεωμετρία του χωροχρόνου; Στην ενδιαφέρουσα αυτή άποψη θα επανέλθουμε στην Παράγραφο 6-4.

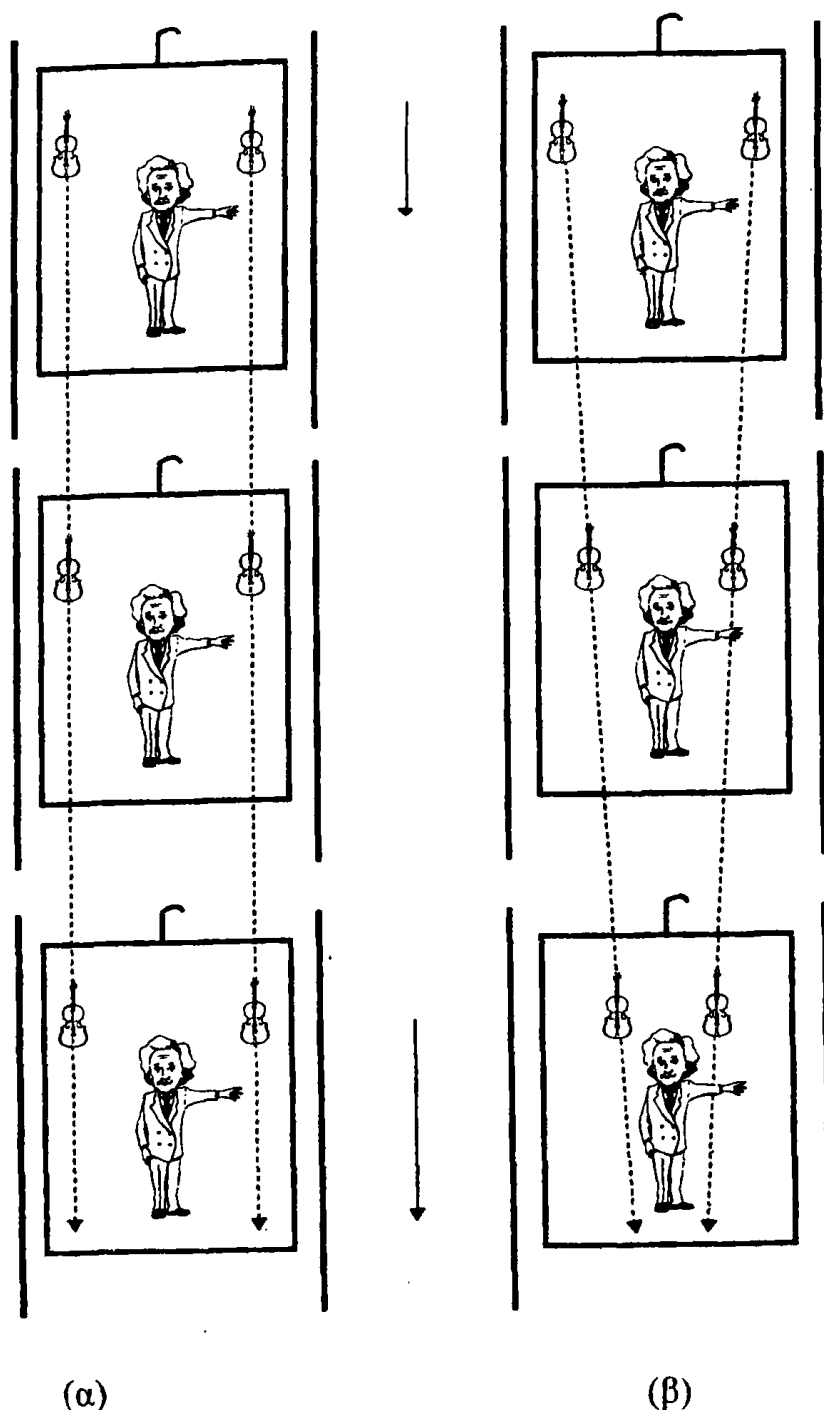
Προτού αφήσουμε την Αρχή της Ισοδυναμίας θα πρέπει ίσως να διευκρινίσουμε τον όρο «τοπικό σύστημα αναφοράς» που





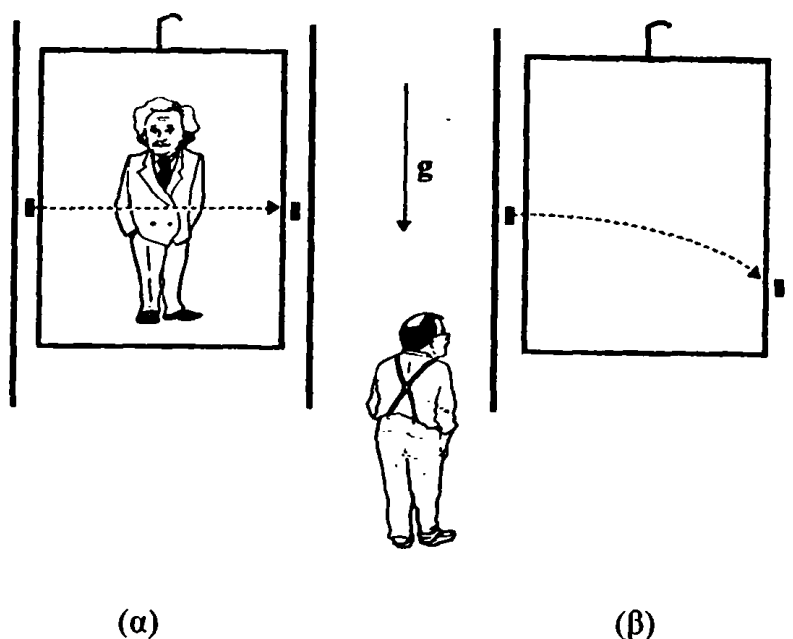
Σχήμα 6.2 (α) Ένα διαστημόπλοιο ταξιδεύει σε μια περιοχή του διαστήματος, απαλλαγμένη από κάθε επιρροή βαρύτητας, με σταθερή επιτάχυνση g . (β) Το ίδιο διαστημόπλοιο εν στάσει πάνω στην επιφάνεια της γης. Για τους δύο αστροναύτες στο εσωτερικό του διαστημοπλοίου, οι δύο καταστάσεις ταυτίζονται απόλυτα.

χρησιμοποιήσαμε στη διατύπωση της σελ. 194. Ο όρος αυτός ουσιαστικά εξασφαλίζει ότι αναφερόμαστε σε ένα αρκετά περιορισμένο χώρο όπου το βαρυτικό πεδίο είναι ομογενές. Όπως φαίνεται στο σχήμα 6.3 που μας επαναφέρει στο παράδειγμα του ανελκυστήρα, τυχόν ανομοιογένεια του βαρυτικού πεδίου είναι δυνατόν να πληροφορήσει τον επιστήμονα για την κατάσταση της κίνησης του συστήματος αναφοράς του. Αν αφήσει δύο αντικείμενα – τα οποία θα παραμείνουν αιωρούμενα μέσα στον ανελκυστήρα – καθώς το σύστημα αναφοράς του ταξιδεύει αδυσώπητα προς το κέντρο της γης, τα δύο αντικείμενα θα ακολουθήσουν και αυτά τροχιές που συγκλίνουν προς το κέντρο της γης. Έτσι, ο επιστήμονας θα δει την



Σχήμα 6.3 (α) Ανελκυστήρας σε περιοχή του διαστήματος όπου το βαρυτικό πεδίο μηδενίζεται. (β) Ο ίδιος ανελκυστήρας σε ελεύθερη πτώση στο βαρυτικό πεδίο της γης. Καθώς κυλά ο χρόνος, στην πρώτη περίπτωση δύο αντικείμενα αιωρούνται μέσα στον ανελκυστήρα σε σταθερή μεταξύ τους απόσταση. Στη δεύτερη περίπτωση τα δύο αντικείμενα συγκλίνουν καθώς ακολουθούν ευθύγραμμες τροχιές προς το κέντρο της γης.



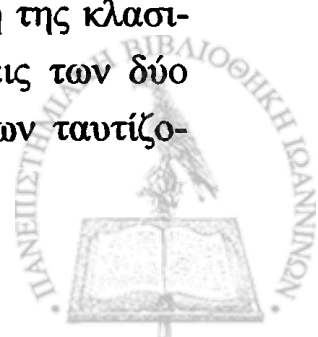


Σχήμα 6.4 Τροχιά του φωτός σε δύο συστήματα αναφοράς. (α) Τροχιά του φωτός όπως παρατηρείται από ένα επιβάτη ενός ανελκυστήρα σε ελεύθερη πτώση μέσα στο βαρυτικό πεδίο της γης. (β) Τροχιά του φωτός όπως εμφανίζεται σε ένα παρατηρητή ακίνητο ως προς τη γη.

απόσταση μεταξύ των δύο αντικειμένων συνεχώς να μειώνεται. Αντίθετα, αν βρισκόταν σε ένα σύστημα αναφοράς, απαλλαγμένο από οποιαδήποτε επίδραση της βαρύτητας, η απόσταση μεταξύ των δύο αντικειμένων θα παρέμενε σταθερή. Ταξιδεύοντας επομένως μέσα σε ένα ανομοιογενές βαρυτικό πεδίο, ο επιστήμονας έχει τη δυνατότητα να διακρίνει μεταξύ βαρυτικής και αδρανειακής δύναμης και η Αρχή της Ισοδυναμίας παύει να ισχύει.

6-3 Πειραματικός έλεγχος της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας

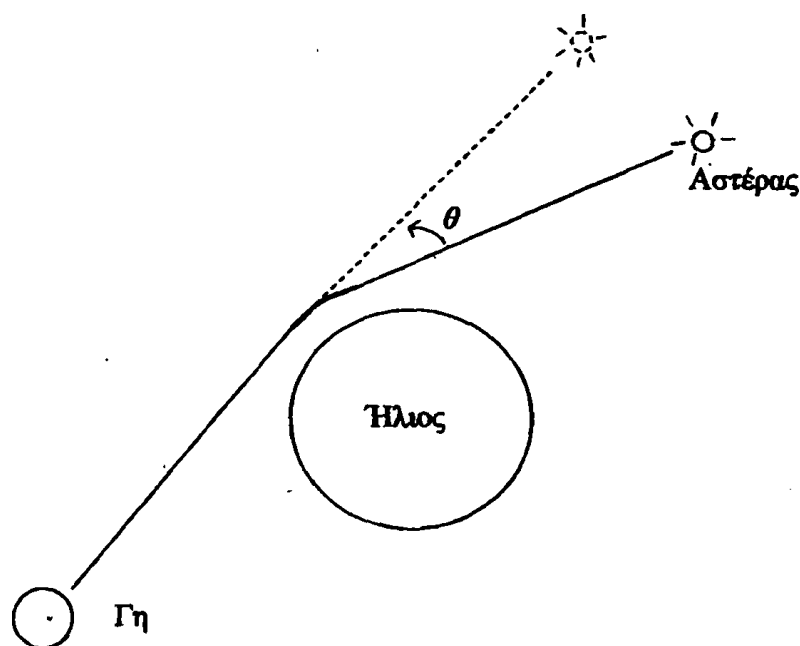
Η άποψη που υιοθετεί η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας ως προς τα μηχανικά φαινόμενα διαφέρει ριζοσπαστικά από αυτή της κλασικής νευτώνειας θεωρίας. Παρ' όλα αυτά, οι προβλέψεις των δύο θεωριών για τη συντριπτική πλειοψηφία των φαινομένων ταυτίζο-



νται, ενώ σε περιπτώσεις όπου τα αποτελέσματα διαφέρουν, η ποσοτική απόκλιση είναι ελάχιστη. Έτσι, η πειραματική επιβεβαίωση των προβλέψεων της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας αποδεικνύεται στην πράξη εξαιρετικά δύσκολη υπόθεση. Στη συνέχεια θα σταχυολογήσουμε μερικά από τα λίγα αποτελέσματα στα οποία οδηγεί η Αρχή της Ισοδυναμίας και τα οποία διαφέρουν από τις προβλέψεις της προ-σχετικιστικής μηχανικής.

6-3.1 ΚΑΜΠΥΛΩΣΗ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ ΣΕ ΕΝΑ ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Ήδη από τα αποτελέσματα της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας, η ισοδυναμία ενέργειας και μάζας υποδεικνύει ότι θα πρέπει να υπάρχει κάποια αλληλεπίδραση μεταξύ ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας (η οποία αντιπροσωπεύει μεταφερόμενη ενέργεια) και υλικών σωμάτων. Την άποψη αυτή είχε πρώτος εκφράσει το 1907 ο Max Planck, χωρίς όμως να κατορθώσει να προσδιορίσει ποσοτικά το μέγεθος



Σχήμα 6.5 Λόγω της καμπύλωσης του φωτός στο βαρυτικό πεδίο του ηλίου, ο αστέρας φαίνεται μετατοπισμένος κατά γωνία θ .



του φαινομένου. Αντίθετα, ο Einstein συμπέρανε με τη βοήθεια ενός ακόμη νοητού πειράματος ότι η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία πρέπει να αλληλεπιδρά με τη βαρύτητα και επιπλέον, μέσω των εξισώσεων του πεδίου που διαμόρφωσε, πρόβλεψε ποσοτικά το μέγεθος της αλληλεπίδρασης.

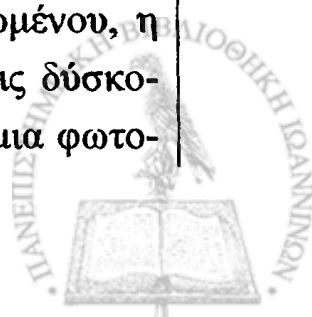
Ας επιστρατέψουμε για μια ακόμη φορά τον επιστήμονα μέσα στον ανελκυστήρα του σχήματος 6.1. Θα θεωρήσουμε τώρα ότι ο θάλαμος του ανελκυστήρα είναι εξοπλισμένος με ένα λέιζερ, αναρτημένο σε ένα από τα τοιχώματά του, ενώ στο απέναντι τοίχωμα βρίσκεται ένα φωτοκύτταρο, το οποίο δέχεται τη δέσμη του λέιζερ [βλ. σχήμα 6.4(α)]. Ενώ ακόμη ο ανελκυστήρας βρίσκεται εν στάσει στον τελευταίο όροφο του κτιρίου, ο επιστήμονας βλέπει τη λεπτή δέσμη φωτός του λέιζερ να ταξιδεύει σε ευθεία γραμμή και να καταλήγει στο φωτοκύτταρο. Το ίδιο βλέπει και καθ' όλο το διάστημα που ο ανελκυστήρας βρίσκεται σε κατάσταση ελεύθερης πτώσης μέσα στο βαρυτικό πεδίο της γης. Τι θα δει όμως ένας δεύτερος παρατηρητής, ο οποίος είναι έξω από τον ανελκυστήρα, ακίνητος ως προς τη γη; Βεβαίως θα δει τη δέσμη φωτός που εκπέμπει ο λέιζερ να καταλήγει στο φωτοκύτταρο (η έκβαση ενός γεγονότος δεν μπορεί να είναι διαφορετική για τους δύο παρατηρητές). Αλλά καθώς το φως ταξιδεύει από το λέιζερ προς το φωτοκύτταρο, ο θάλαμος του ανελκυστήρα ταξιδεύει προς το κέντρο της γης και το φωτοκύτταρο μετακινείται. Ο παρατηρητής επομένως στο σύστημα αναφοράς της γης θα παρατηρήσει ότι το φως θα διαγράψει την καμπύλη τροχιά του σχήματος 6.4(β). Με λεπτομερέστερη ανάλυση (βλ. Άσκηση 6-2), ο αναγνώστης μπορεί να αποδείξει ότι η τροχιά του φωτός – για τον παρατηρητή στο σύστημα αναφοράς της γης – είναι παραβολική. Βεβαίως, ο παρατηρητής πάνω στη γη γνωρίζει ότι βρίσκεται μέσα σε ένα βαρυτικό πεδίο (αισθάνεται το βάρος του). Το λογικό επομένως συμπέρασμα που του παρέχουν οι παρατηρήσεις του είναι ότι σε ένα βαρυτικό πεδίο το φως ακολουθεί καμπυλόγραμμη τροχιά.



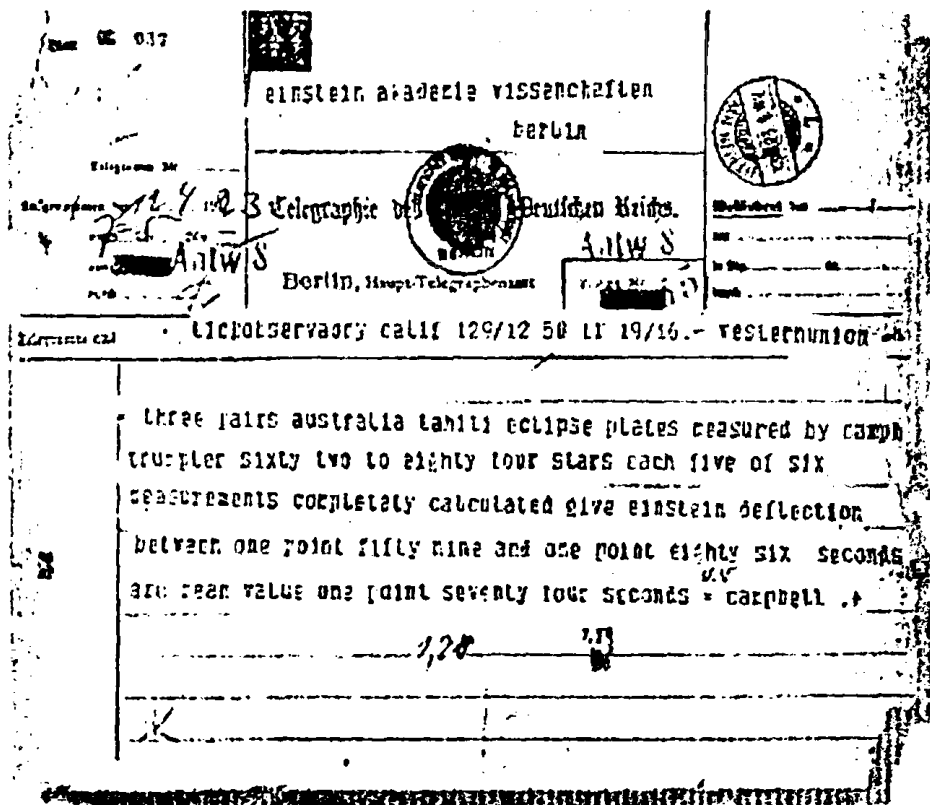
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΒΕΒΑΙΩΣΗ ΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΩΣΗΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ ΣΕ ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Την άνοιξη του 1919, η Βασιλική Αστρονομική Εταιρεία της Αγγλίας διοργάνωσε δύο αποστολές, στη νήσο Principe της Δυτικής Αφρικής και στο Sobral της Βραζιλίας, στέλνοντας τους πλέον διακεκριμένους αστρονόμους της εποχής. Αρχηγός της αποστολής στη Δυτική Αφρική ήταν ο περίφημος μαθηματικός και αστρονόμος Sir Arthur Eddington, ο οποίος ξεκίνησε από την Αγγλία περί τα μέσα Μαρτίου 1919, ενώ ακόμη ο Πρώτος Παγκόσμιος Πόλεμος εμαίνετο στην Ευρώπη, και περί τα μέσα Μαΐου είχε εγκαταστήσει το σταθμό παρατήρησης στη νήσο Principe. Η έκλειψη του ηλίου επρόκειτο να γίνει στις 14.00 της 29 Μαΐου, αλλά η μέρα εκείνη ξημέρωσε με ισχυρή καταιγίδα. Ο Eddington γράφει στο ημερολόγιό του: «Η βροχή σταμάτησε λίγο πριν από το μεσημέρι και γύρω στις 1.30 ξεπρόβαλε ο ήλιος. Έπρεπε να πραγματοποιήσουμε τη φωτογράφιση ελπίζοντας ότι η τύχη θα είναι με το μέρος μας. Προσωπικά δεν είδα την έκλειψη, καθώς ήμουν απασχολημένος με το να αλλάζω φωτογραφικές πλάκες, εκτός από μια ματιά για να βεβαιωθώ ότι είχε αρχίσει και μια δεύτερη, περί τα μέσα του φαινομένου, για να δω πόσα σύννεφα υπήρχαν στον ουρανό. Πήραμε συνολικά δεκαέξι φωτογραφίες. Είναι όλες πολύ καλές φωτογραφίες του ηλίου, αλλά η νέφωση έχει επισκιάσει την απεικόνιση των αστερών. Οι τελευταίες φωτογραφίες περιέχουν λίγες εικόνες που ελπίζω θα μας δώσουν αυτό που χρειαζόμαστε...».

Ο Eddington παρέμεινε στη νήσο Principe μέχρι ότου εμφανίστηκαν οι φωτογραφικές πλάκες και προσπάθησε να μετρήσει την απόκλιση των αστερών κοντά στην περιφέρεια του ηλιακού δίσκου. Λόγω της νέφωσης που επικρατούσε την ώρα του φαινομένου, η ποιότητα των φωτογραφιών ήταν πενιχρή και οι μετρήσεις δύσκολες. Στις 3 Ιουνίου έγραφε πάλι στο ημερολόγιό του: «...μια φωτο-



γραφική πλάκα που μέτρησα δίνει αποτελέσματα που συμφωνούν με τις εκτιμήσεις του Einstein». Το ακόλουθο τηλεγράφημα που έλαβε ο Einstein στο Βερολίνο σηματοδοτεί την πρώτη αλλαγή της επιστημονικής άποψης σχετικά με τη νέα αντίληψη για τη δομή του χωροχρόνου.



Μια ιστορία που κυκλοφόρησε μετά την παρατήρηση της καμπύλωσης του φωτός κατά την έκλειψη της 19/5/1919 αφορά τη βρετανική φλεγματικότητα του Sir Arthur Eddington. Ένας από τους δημοσιογράφους που παρακολουθούσαν το όλο εγχείρημα τον ρώτησε σε κάποια στιγμή «Sir Arthur, είναι αληθές ότι σήμερα υπάρχουν μόνον τρεις άνθρωποι στον κόσμο που καταλαβαίνουν τη θεωρία του Einstein;» Ο Eddington παρέμεινε για αρκετή ώρα σιωπηλός, οπότε ο δημοσιογράφος τον παρότρυνε: «Sir Arthur, γιατί δεν απαντάτε;» Και ο Eddington απήντησε: «Προσπαθώ να σκεφτώ ποιος είναι αυτός ο τρίτος άνθρωπος».

Το ισχυρότερο βαρυτικό πεδίο στη γειτονία της γης είναι αυτό του ήλιου. Έτσι, σύμφωνα με το διάγραμμα του σχήματος 6.5, αν ένας αστέρας βρίσκεται κοντά στην περιφέρεια του ηλιακού δίσκου, η καμπύλωση της τροχιάς του φωτός που καταλήγει στη γη θα εμφανίσει τον αστέρα μετατοπισμένο. Βεβαίως, η φωτεινότητα του ήλιου δεν επιτρέπει υπό συνήθεις συνθήκες την παρατήρηση αστέρων κοντά στην περιφέρειά του. Έτσι, η παρατήρηση του φαινομένου χρειάστηκε να αναμείνει μια ολική έκλειψη, στις 29 Μαΐου του 1919, οπότε και το φαινόμενο επαληθεύτηκε, τουλάχιστον ποιοτικά (βλ. ένθετο σελ. 201).

6-3.2 ΒΑΡΥΤΙΚΗ ΕΡΥΘΡΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ

Στην Παράγραφο 2-4 είδαμε ότι η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία παρατηρείται με διαφορετικό μήκος κύματος μεταξύ διαφορετικών αδρανειακών συστημάτων. Στο φαινόμενο αυτό αναφερθήκαμε με τον όρο μετατόπιση Doppler. Όπως θα δούμε αμέσως στη συνέχεια το φαινόμενο επιτείνεται στην περίπτωση όπου τα δύο συστήματα αναφοράς κινούνται με σχετική επιτάχυνση.

Ας θεωρήσουμε ότι κάπου στο διάστημα, μακριά από κάθε ουράνιο σώμα, ένας παρατηρητής βλέπει μια πηγή φωτός να τον πλησιάζει με σταθερά επιταχυνόμενη κίνηση. Αν σε κάποια χρονική στιγμή η πηγή φωτός απέχει απόσταση L και η ταχύτητά της v είναι μικρή σχετικά με την ταχύτητα του φωτός ($v \ll c$), ο χρόνος που απαιτείται ώστε το φως να διανύσει την απόσταση μεταξύ της πηγής και του παρατηρητή είναι

$$t = \frac{L}{c}. \quad (6.8)$$

Τη στιγμή αυτή, σύμφωνα με την εξ. (2.40), ο παρατηρητής θα δει μια μετατόπιση της συχνότητας



$$f = f_0 \left(1 + \frac{v}{c} \right) \quad (6.9)$$

όπου f_0 είναι η φυσική συχνότητα της πηγής (όταν αυτή παρατηρείται εν στάσει). Όσο χρόνο η ταχύτητα της πηγής παραμένει σε χαμηλά επίπεδα σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός, η τιμή της δίνεται από την απλή σχέση

$$v = -\gamma t = -\gamma \frac{L}{c} \quad (6.10)$$

όπου γ είναι η επιτάχυνση της πηγής. Η εξ. (6.9) επομένως παίρνει τη μορφή

$$f = f_0 \left(1 - \frac{\gamma L}{c^2} \right). \quad (6.11)$$

Το φαινόμενο μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα μέσω της περιόδου της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που εκπέμπει η πηγή ως

$$T = \frac{T_0}{\left(1 - \frac{\gamma L}{c^2} \right)}. \quad (6.12)$$

Η τελευταία σχέση είναι αρκετά αποκαλυπτική. Αν η πηγή φωτός χρησιμοποιείται ως χρονόμετρο, ένας παρατηρητής θα δει ότι σε επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς το χρονόμετρο πηγαίνει πιο αργά απ' ότι όταν το παρατηρεί εν στάσει.

Σύμφωνα με την αρχή της Ισοδυναμίας, ένα επιταχυνόμενο σύστημα δεν είναι δυνατόν να διακριθεί από ένα βαρυτικό πεδίο με την ίδια επιτάχυνση της βαρύτητας. Το αποτέλεσμα επομένως στο οποίο μόλις καταλήξαμε οδηγεί στο συμπέρασμα ότι χρονόμετρα, τα οποία

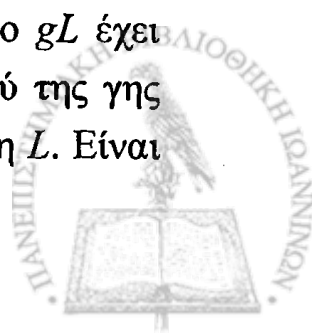


βρίσκονται μέσα σε ένα βαρυτικό πεδίο, μετρούν το χρόνο με διαφορετικούς ρυθμούς, ανάλογα με την τοπική τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας. Κατά τον ίδιο τρόπο μπορεί να ερμηνευτεί και η εξ. (6.11). Αν ένας παρατηρητής, βαθιά μέσα στο διάστημα, παρατηρεί ακτινοβολία που εκπέμπεται από μια πηγή μέσα σε ένα βαρυτικό πεδίο (π.χ. πάνω σε έναν αστέρα), θα δει τη συχνότητά της μετατοπισμένη προς το ερυθρό (αύξηση του μήκους κύματος της ακτινοβολίας). Στο φαινόμενο έχει δοθεί η ονομασία **βαρυτική ερυθρά μετατόπιση**.

Το φαινόμενο της βαρυτικής ερυθράς μετατόπισης είναι εξαιρετικά ασθενές και η παρατήρησή του πολύ δύσκολη. Στην περίπτωση του ηλίου, η μετατόπιση προς το ερυθρό χαρακτηριστικών φασματικών γραμμών που εκπέμπονται από άτομα ή μόρια προβλέπεται από τη θεωρία στα επίπεδα των δύο εκατομμυριοστών του μήκους κύματος. Για βαρύτερους αστέρες η αβεβαιότητα στη μάζα ή την ακτίνα του αστέρα οδηγεί σε αμφίβολες εκτιμήσεις. Αντίθετα, επίγεια πειράματα έχουν περίτρανα επιβεβαιώσει το φαινόμενο. Στις αρχές της δεκαετίας του 1960, οι ερευνητές του Ινστιτούτου Jefferson Physical Laboratory στο Πανεπιστήμιο Harvard των ΗΠΑ, R.V. Pound και G.A. Rebka, μέτρησαν με επιτυχία τη μικρή διαφορά στη συχνότητα που προβλέπει η εξ. (6.11) παρατηρώντας τη μετάδοση ενός παλμού ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας από την οροφή του Πύργου του Πανεπιστημίου (γνωστού ως Harvard Tower) ως το δάπεδο. Στο βαρυτικό πεδίο της γης, η εξ. (6.11) παίρνει τη μορφή

$$f = f_0 \left(1 - \frac{gL}{c^2} \right) = f_0 \left(1 - \frac{\Delta\Phi}{c^2} \right). \quad (6.13)$$

όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας και το γινόμενο gL έχει αναγνωριστεί ως η διαφορά $\Delta\Phi$ του βαρυτικού δυναμικού της γης μεταξύ δύο σημείων που διαφέρουν κατακόρυφη απόσταση L . Είναι



αξιοσημείωτο ότι για τη διαφορά βαρυτικού δυναμικού από την οροφή ως το δάπεδο του Πύργου του Harvard, ύψους 22.6 m, η εξ. (6.13) προβλέπει την απειροελάχιστη ποσοστιαία διαφορά συχνότητας

$$\frac{f - f_0}{f_0} = 4.92 \times 10^{-15} \quad (6.14)$$

που παρ' όλα αυτά κατέστη δυνατόν να μετρηθεί.

Η ίδια η συστολή του χρόνου παρατηρήθηκε πειραματικά με την αποστολή, το 1976, ενός πυραύλου του αστεροσκοπείου Smithsonian Astrophysical Observatory σε ύψος 10 000 χιλιομέτρων, απ' όπου και αφέθηκε σε ελεύθερη πτώση προς τη γη. Στο ύψος αυτό, σύμφωνα με την εξ. (6.12), ένα χρονόμετρο πρέπει να μετρά το χρόνο, σε σχέση με ένα χρονόμετρο στην επιφάνεια της γης, ταχύτερα κατά ένα παράγοντα $4.5 \cdot 10^{10}$. Κατά τη διάρκεια της ελεύθερης πτώσης του, η οποία διήρκεσε δύο ώρες, ο πύραυλος εξέπεμπε σήματα, τα οποία δρούσαν ως χρονόμετρο και συγκρίνονταν με ένα πανομοιότυπο χρονόμετρο στην επιφάνεια της γης. Τα αποτελέσματα επιβεβαίωσαν τις προβλέψεις της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας με ακρίβεια καλύτερη από 0.01%.

Όπως και με τη διαστολή του χρόνου που μελετήσαμε στην Παράγραφο 2-3.2, η βαρυτική ερυθρά μετατόπιση επηρεάζει όλα τα χρονόμετρα, περιλαμβανομένων και των βιολογικών. Αν στο παράδοξο των διδύμων (βλ. Παράγραφο 2-5), ο Γιάννης επισκεφτεί μια περιοχή του σύμπαντος με ισχυρό βαρυτικό πεδίο, θα επιστρέψει στη γη ακόμη πιο νέος σε σχέση με τη δίδυμη αδελφή του απ' ότι προβλέπει η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας. Για να είναι όμως ορατή η διαφορά, το βαρυτικό πεδίο που θα επισκεφθεί πρέπει να είναι τεράστιο. Θα επιστρέψει στη γη νεώτερος από την Ιωάννα ... αν επιβιώσει.



6-3.3 ΜΕΤΑΠΤΩΤΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΤΗΣ ΤΡΟΧΙΑΣ ΤΟΥ ΕΡΜΗ

Η εδραίωση της νευτώνειας μηχανικής οφείλεται κυρίως στην αστρονομία. Ο τεράστιος όγκος των δεδομένων από παρατηρήσεις χιλιάδων ετών – από τους Ασσυρίους και τους Χαλδαίους, τον Πτολεμαίο, τους αστρονόμους του μεσαίωνα, μέχρι τον Κέπλερ – έδωσαν στον Νεύτωνα τα εργαλεία για τον έλεγχο των προβλέψεων του νόμου της παγκόσμιας έλξης ως προς την κίνηση των ουράνιων σωμάτων. Περί τα τέλη του 19^{ου} αιώνα, η συμφωνία μεταξύ προβλέψεων της κλασικής μηχανικής και της αστρονομικής παρατήρησης είχε φτάσει σε τέτοια επίπεδα ακρίβειας ώστε για πολλούς το θέμα να θεωρείται κλειστό. Παρ' όλα αυτά, για τα ανήσυχα πνεύματα της εποχής, μερικές μικρές ασυμφωνίες μεταξύ θεωρίας και παρατήρησης παρέμεναν ανεξήγητες. Μια τέτοια κλασική ασυμφωνία, προς την οποία έστρεψε την προσοχή του ο Einstein, ήταν η ποσοτική πρόβλεψη της μεταπτωτικής τροχιάς του Ερμή. Ας δούμε όμως πρώτα με κάποια λεπτομέρεια πώς ανακύπτει το πρόβλημα.

Σύμφωνα με τις προβλέψεις της νευτώνειας μηχανικής ένας πλανήτης διαγράφει στο χώρο μια ελλειπτική τροχιά γύρω από τον ήλιο, ή, πιο σωστά, μια ελλειπτική τροχιά γύρω από το κέντρο βάρους του ήλιου και του πλανήτη, με το κέντρο βάρους σε μια από τις εστίες της έλλειψης. Έτσι, σε μια πλήρη περιστροφή γύρω από το κέντρο βάρους τους τα δύο ουράνια σώματα διαδοχικά απομακρύνονται και πλησιάζουν το ένα το άλλο, με ρυθμό που εξαρτάται από την εκκεντρότητα* της ελλειπτικής τροχιάς. Τα δύο σώματα βρίσκονται στην πλησιέστερη ή τη μέγιστη απόσταση – στο *περιήλιο* ή το *αφήλιο*,

* Η εκκεντρότητα ε μιας έλλειψης ορίζεται από τη σχέση

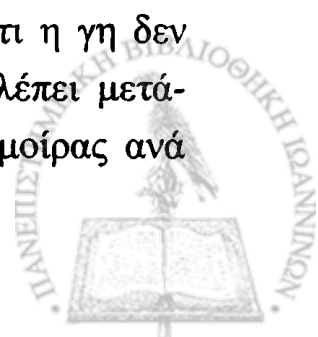
$$b^2 = a^2 (1 - \varepsilon^2)$$

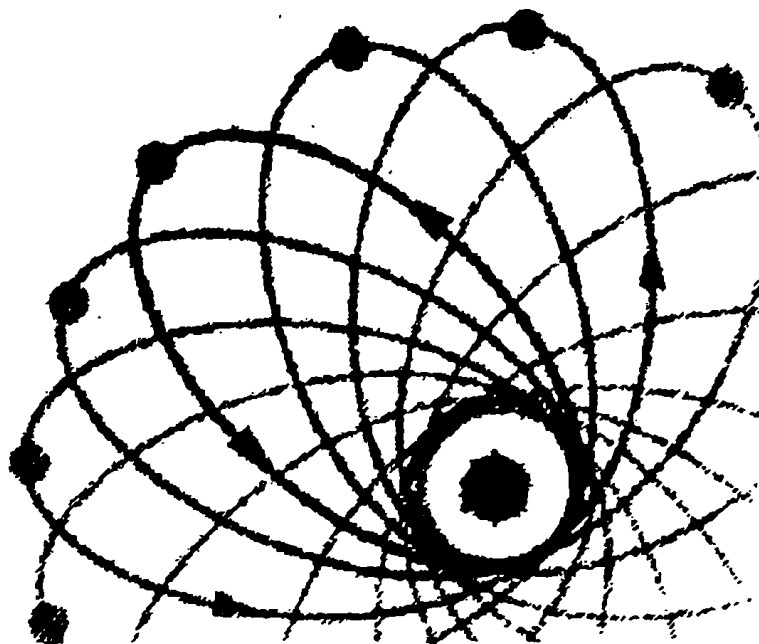
όπου a και b είναι η ημιάξονες της έλλειψης. Για μια έλλειψη, η εκκεντρότητα είναι πάντα μικρότερη της μονάδας, ενώ για $\varepsilon = 0$ η έλλειψη εκφυλίζεται σε κύκλο.



όπως ονομάζονται αντίστοιχα στην αστρονομία – όταν ο πλανήτης βρίσκεται στα σημεία όπου ο μέγιστος άξονας τέμνει την τροχιά του. Στην πράξη, οι τροχιές των πλανητών του ηλιακού μας συστήματος είναι σχεδόν τέλειοι κύκλοι (η εκκεντρότητα της γης είναι μόνον 0.017) πλην του Ερμή, του οποίου η τροχιά εμφανίζει εκκεντρότητα $e = 0.206$. Η ιστορία όμως δεν τελειώνει εδώ. Καθώς ένας πλανήτης διαγράφει την τροχιά του γύρω από τον ήλιο, δέχεται την έλξη (ομολογουμένως μικρή) και των άλλων πλανητών του ηλιακού μας συστήματος. Η επίδραση αυτή πρέπει επομένως να συμπεριληφθεί στους υπολογισμούς και, όπως αποδεικνύεται στην πράξη, επηρεάζει σημαντικά την κίνηση του Ερμή. Το τελικό αποτέλεσμα της διαταραχής που προκαλούν στην τροχιά του Ερμή οι λοιποί πλανήτες του ηλιακού μας συστήματος είναι μια σταδιακή μετατόπιση του περιηλίου σε κάθε πλήρη περιστροφή γύρω από τον ήλιο. Οι διαδοχικές τροχιές της μορφής της κίνησης αυτής, που ονομάζεται *μεταπτωτική*, περιέχεται στο σχήμα 6.6.

Η μεταπτωτική κίνηση δεν είναι αποκλειστικά χαρακτηριστικό γνώρισμα της τροχιάς του Ερμή. Στην πραγματικότητα η νευτώνεια μηχανική προβλέπει μεταπτωτική κίνηση για όλους τους πλανήτες, αν το ηλιακό μας σύστημα ληφθεί ως ενιαίο. Ο υπολογισμός μάλιστα της μετατόπισης του περιηλίου για κάθε πλανήτη, χρησιμοποιώντας μόνον τη νευτώνεια μηχανική, συμφωνεί, μέσα στα όρια του πειραματικού σφάλματος, με την παρατήρηση. Μοναδική εξαίρεση αποτελεί η μεταπτωτική κίνηση του πλανήτη Ερμή. Όπως παρατηρείται από τη γη, η μετατόπιση του περιηλίου της τροχιάς του Ερμή είναι 5600 δεύτερα λεπτά της μοίρας ανά αιώνα (1 μοίρα διαθέτει 3600 δεύτερα λεπτά). Η νευτώνεια μηχανική, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις επιδράσεις όλων των ουράνιων σωμάτων στην ευρύτερη περιοχή του ηλιακού μας συστήματος, καθώς και το γεγονός ότι η γη δεν είναι ένα τέλειο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, προβλέπει μετάπτωση του περιηλίου ίση με 5557 δεύτερα λεπτά της μοίρας ανά





Σχήμα 6.6 Μεταπτωτική κίνηση του πλανήτη Ερμή γύρω από τον ήλιο. Η μετατόπιση του περιηλίου της τροχιάς είναι περίπου 1.5° ανά αιώνα.

αιώνα. Υπάρχει επομένως μια ανεξήγητη διαφορά 43 δευτέρων λεπτών της μοίρας ανά αιώνα*.

Η ιδέα του Einstein ήταν ότι λόγω της μεγάλης εκκεντρότητας της τροχιάς του Ερμή, η οποία τον υποχρεώνει να διανύει διαδοχικά χώρους υψηλής και χαμηλής έντασης του πεδίου βαρύτητας του ηλίου, φαινόμενα που ανακύπτουν από τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας πρέπει να επηρεάζουν σημαντικά την κίνησή του. Το 1913 και ενώ η διαμόρφωση της θεωρίας δεν είχε ακόμη ολοκληρωθεί (βλ. υποσημείωση στη σελ. 187) υπολόγισε τη μετάπτωση του πε-

* Στην προσπάθεια να γεφυρωθεί η διαφορά μεταξύ παρατήρησης και πρόβλεψης της νευτώνειας μηχανικής, έχουν προταθεί στο παρελθόν αρκετές εξηγήσεις του φαινομένου. Για παράδειγμα, η διαφορά αποδόθηκε στην ύπαρξη μιας ποσότητας κοσμικής σκόνης μεταξύ Ερμή και ηλίου. Όλες αυτές οι προτάσεις τελικά απορρίφθηκαν, χάριν της μεγάλης ακρίβειας που παρέχει η αστρονομική παρατήρηση

ριηλίου του πλανήτη Ερμή που επιπρόσθετα προβλέπει η Θεωρία της Σχετικότητας ως ακριβώς 43 δεύτερα λεπτά της μοίρας ανά αιώνα.

6-4 Η γεωμετρία του χωροχρόνου

Στην κλασική φυσική, η φιλοσοφικά προβληματική έννοια της δράσης από απόσταση παρακάμπτεται με την εισαγωγή της έννοιας του πεδίου. Στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία, για παράδειγμα, θεωρούμε ότι αν στο χώρο υπάρχουν ηλεκτρικά φορτία, ο χώρος αποκτά νέες ιδιότητες που σε κάθε σημείο του $\mathbf{r}$ και σε κάθε στιγμή t περιγράφονται πλήρως από την ανυσματική συνάρτηση του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$. Αν επιπλέον τα ηλεκτρικά φορτία κινούνται, ο χώρος αποκτά επιπρόσθετες ιδιότητες. Οι τελευταίες περιγράφονται πλήρως από την ανυσματική συνάρτηση της μαγνητικής επαγωγής $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$. Με τον τρόπο αυτό, η έννοια της δύναμης εξαφανίζεται και τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα αναδεικνύονται ως φαινόμενα που ανακύπτουν από τις ιδιότητες του χωροχρόνου. Όπως είδαμε στην Παράγραφο 5-5, η άποψη αυτή μεταφέρεται ατόφια στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας, ενώ τα δύο πεδία ενοποιούνται στον ηλεκτρομαγνητικό τανυστή. Παρ' όλα αυτά ο χώρος παραμένει ένας τρισδιάστατος χώρος, όπως τον γνωρίζαμε στην κλασική φυσική, που υπακούει στα αξιώματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας.

Κατά τον ίδιο τρόπο είναι δυνατόν να χειριστούμε τα φαινόμενα της βαρύτητας, ορίζοντας την ανυσματική συνάρτηση $\mathbf{G}(\mathbf{r},t)$ που σε κάθε σημείο του χώρου $\mathbf{r}$ και σε κάθε χρονική στιγμή t δίνει τη δύναμη που δέχεται ένα σώμα με μάζα ίση προς 1 kg. Ενώ στα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα το αίτιο της αλληλεπίδρασης ήταν το ηλεκτρικό φορτίο, εδώ το φυσικό μέγεθος που δημιουργεί τα φαινό-

(π.χ., προσεκτική παρατήρηση του διαπλανητικού χώρου μεταξύ Ερμή και ηλίου δεν έδωσε καμία ένδειξη ύπαρξης κοσμικής σκόνης).



μενα είναι η μάζα – το φυσικό μέγεθος που δεχτήκαμε ότι μετρά το ποσό της ύλης που περιέχει ένα σώμα. Υπάρχει όμως μια διαφοροποίηση μεταξύ των δύο φυσικών μεγεθών. Το ηλεκτρικό φορτίο προσδιορίζει την αλληλεπίδραση μεταξύ δύο σωμάτων που διαθέτουν πεπερασμένη τιμή αυτού του φυσικού μεγέθους (τον τρόπο με τον οποίο το ένα σώμα κάνει αισθητή την παρουσία του στο άλλο). Σε αντιδιαστολή, η μάζα, όχι μόνον καθορίζει την αλληλεπίδραση μεταξύ δύο υλικών σωμάτων, αλλά και τη συμπεριφορά ενός και μόνον σώματος όταν μεταβάλλεται η κινητική του κατάσταση. Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας βασίζεται στην παραδοχή ότι για τις δύο αυτές κατηγορίες φαινομένων υπεύθυνο είναι ένα και μόνον φυσικό μέγεθος – με άλλα λόγια, η βαρυτική και η αδρανειακή μάζα είναι ένα και το αυτό φυσικό μέγεθος. Η παραδοχή αυτή οδηγεί αναπόφευκτα στην Αρχή της Ισοδυναμίας και ουσιαστικά στην ενοποίηση των βαρυτικών και αδρανειακών φαινομένων. Όπως παρατηρήθηκε ήδη στη σελ. 195, δεν χρειάζεται παρά ένα ακόμη λογικό βήμα για την ανάδειξη των βαρυτικών δυνάμεων σε εξ ίσου «φαινομενικές» με τις αδρανειακές και την απόδοσή τους στην ιδιαιτερότητα της γεωμετρίας του χωροχρόνου.

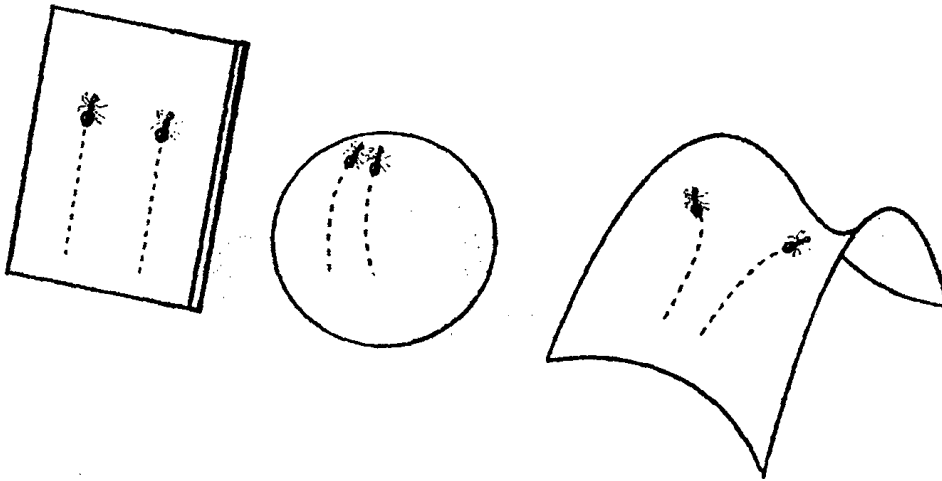
Αν ο αναγνώστης συνάντησε δυσκολίες στην εγκατάλειψη της διάκρισης των ανεξάρτητων εννοιών του τρισδιάστατου χώρου και του απόλυτου χρόνου και στην εποπτεία του ενιαίου τετραδιάστατου χώρου Minkowski, η νέα γεωμετρία που αναδύεται από τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας απαιτεί ακόμη περισσότερη φαντασία. Το κύριο χαρακτηριστικό του νέου χωροχρόνου είναι ότι παύει να υπακούει στα αξιώματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Ο χωροχρόνος παύει να είναι ομοιόμορφο επίπεδος και, σύμφωνα με την προσφιλή έκφραση στα μυθιστορήματα επιστημονικής φαντασίας, χαρακτηρίζεται από μια καμπυλότητα. Τα φαινόμενα – τουλάχιστον τα βαρυτικά – είναι τώρα απλώς εκφάνσεις της τοπικής καμπυλότητας του χωροχρόνου.



Το μαθηματικό οικοδόμημα της μη Ευκλείδειας γεωμετρίας είναι ένα από τα πλέον δύσκολα* και δεν θα αποτολμήσουμε εδώ την ποσοτική ανάπτυξη των φαινομένων που προκύπτουν από την καμπυλότητα του χωροχρόνου. Είναι όμως χρήσιμο να παρακολουθήσουμε, τουλάχιστον ποιοτικά, τη μετάβαση από τις έννοιες της κλασικής μηχανικής σε έννοιες που αναδεικνύει η νέα γεωμετρία. Όπως και στην απόπειρα απεικόνισης του χώρου Minkowski, λόγω της αδυναμίας μας να εποπτεύσουμε τον όλο τετραδιάστατο χώρο (που απορρέει από το γεγονός ότι ουσιαστικά είμαστε τρισδιάστατα όντα), θα περιοριστούμε σε μια τομή του χωροχρόνου. Ένα καλό παράδειγμα καμπύλου χώρου είναι η επιφάνεια της γης, όπου μπορούμε να φανταστούμε ότι κινείται ένα δισδιάστατο όν – ένα φιδάκι. Σε αναλογία με τον άνθρωπο, το φιδάκι είναι αδύνατον να συνειδητοποιήσει την τρισδιάστατη υπόσταση της επιφάνειας της γης μιας και δεν μπορεί να ξεφύγει από τις δύο διαστάσεις. Τοπικά, ο χώρος που αντιπροσωπεύει η επιφάνεια της γης του εμφανίζεται επίπεδος και Ευκλείδειος (π.χ., το άθροισμα των τριών γωνιών όλων των τριγώνων είναι ίσο με 180° και όλα τα ορθογώνια τρίγωνα ικανοποιούν το Πυθαγόρειο θεώρημα). Αν παραμείνει όλη του τη ζωή σε ένα περιορισμένο χώρο (στην αυλή του σπιτιού μας) η γεωμετρία αυτή θα εμπεδωθεί ως «κοινή λογική». Αν όμως θεωρήσει μια αρκετά εκτεταμένη περιοχή του χώρου, θα διαπιστώσει ότι η Ευκλείδεια γεωμετρία παύει να ισχύει. Για παράδειγμα, αν θεωρήσει ένα μεγάλο ισοσκελές τρίγωνο με τη μια πλευρά του κατά τον ισημερινό και την κορυφή του στο βόρειο πόλο, θα μετρήσει ότι οι δύο προσκείμενες προς τη βάση γωνίες είναι ορθές – και το Πυθαγόρειο θεώρημα παύει να ισχύει. Θα παρατηρήσει ενδεχομένως και άλλα παράδοξα

* Είναι χαρακτηριστικό ότι, πέραν του Einstein, ο οποίος θεωρούσε τον εαυτό του κάτι μεταξύ μαθηματικού και φυσικού, τη μεγαλύτερη συμβολή στη διαμόρφωση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας είχαν οι μεγάλοι μαθηματικοί των αρχών του 20^{ου} αιώνα.





Σχήμα 6.7 Διαδρομές δύο δισδιάστατων όντων σε τρεις χώρους δύο διαστάσεων με διαφορετική καμπυλότητα. (α) μηδενική καμπυλότητα (Ευκλείδειος χώρος), (β) θετική και (γ) αρνητική καμπυλότητα. Αν οι διαδρομές είναι παράλληλες στον Ευκλείδειο χώρο, εμφανίζονται αντίστοιχα ως συγκλίνουσες ή αποκλίνουσες σε χώρους θετικής ή αρνητικής καμπυλότητας.

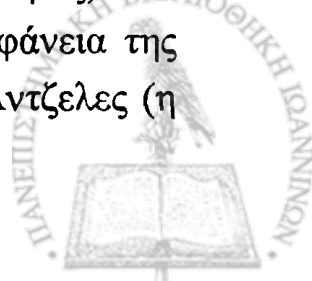
που διέπουν το χώρο του. Αν, για παράδειγμα ξεκινήσει ένα μεγάλο ταξίδι σε ένα δρόμο που σε κάθε του σημείο του φαίνεται ως ευθεία γραμμή, μετά από ένα μεγάλο χρονικό διάστημα θα δει ότι επέστρεψε στο σημείο απ' όπου άρχισε το ταξίδι του. Θα διαπιστώσει δηλαδή, ότι ο χώρος του είναι «κλειστός».

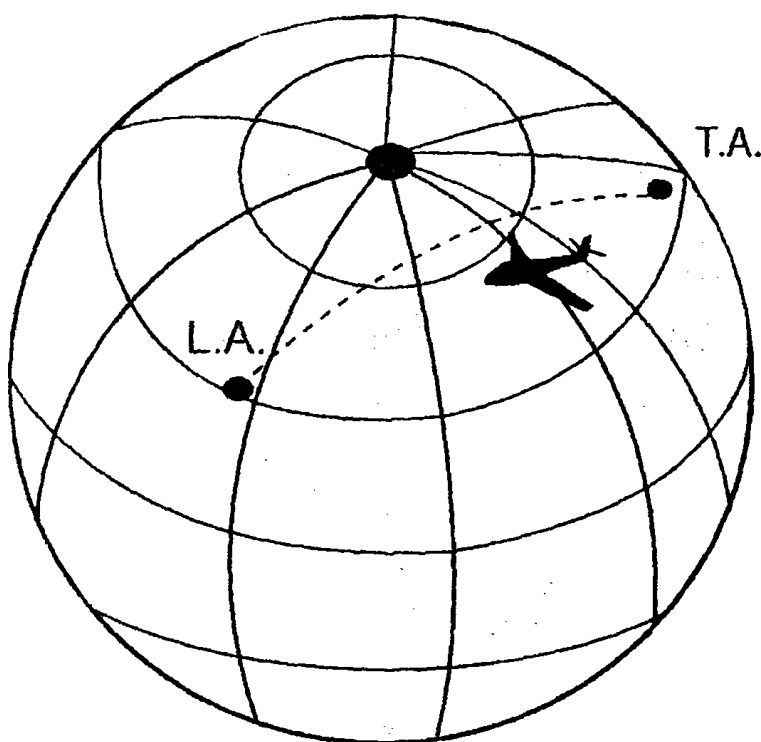
Ο άνθρωπος, κατά μια διάσταση ανώτερος από το δισδιάστατο φιδάκι του τελευταίου παραδείγματος, αν και δεν έχει τη δυνατότητα εποπτείας του όλου τετραδιάστατου σύμπαντος, μπορεί να εξαγάγει ορισμένα συμπεράσματα γύρω από τη γεωμετρία του. Σύμφωνα με τη Θεωρία της Σχετικότητας, τα φαινόμενα που συμβαίνουν στον τετραδιάστατο χώρο και αποδίδονται από κοσμικούς δρόμους επηρεάζονται από τη γεωμετρία του, η οποία διαθέτει ανομοιογενή καμπυλότητα. Η καμπυλότητα είναι πιο έντονη σε περιοχές όπου παρατηρείται συσσώρευση μάζας και ενέργειας και λιγότερο έντονη σε περιοχές όπου μάζα και ενέργεια απουσιάζουν. Σε ένα χώρο της



μορφής αυτής, ο κοσμικός δρόμος ενός φαινομένου εμφανίζει και αυτός την ανάλογη καμπυλότητα. Όπως φαίνεται στο σχήμα 6.7 που μας επιστρέφει στο δισδιάστατο σύμπαν, δύο διαδρομές όντων που ζουν σε δύο διαστάσεις, οι οποίες εμφανίζονται παράλληλες σε ένα επίπεδο Ευκλείδειο χώρο, συγκλίνουν ή αποκλίνουν αντίστοιχα σε ένα χώρο με θετική ή αρνητική καμπυλότητα. Για ένα παρατηρητή του φαινομένου στους αντίστοιχους χώρους, η συμπεριφορά αυτή μπορεί να ερμηνευτεί αντίστοιχα ως το αποτέλεσμα μιας ελκτικής ή απωστικής δύναμης μεταξύ των δύο δισδιάστατων όντων. Η εποπτεία του φαινομένου που απεικονίζεται στο σχήμα 6.7 δεν είναι βέβαια εύκολη στον τετραδιάστατο χώρο. Μπορεί όμως να περιγραφεί αναλυτικά με τις ίδιες γεωμετρικές μεθόδους που ένας μαθηματικός θα χρησιμοποιούσε στον δισδιάστατο χώρο.

Το παράδειγμα του σχήματος 6.7 αναδεικνύει ένα επιπλέον σημαντικό ερώτημα για τη φύση του χώρου μέσα στον οποίο ζούμε. Τι θα αποκαλέσουμε σε ένα χώρο με πεπερασμένη καμπυλότητα «ευθεία γραμμή»; Με την εξαφάνιση του φυσικού μεγέθους της δύναμης – ή, καλύτερα, με την απόδοση του φαινομένου της αλληλεπίδρασης στην καμπυλότητα του χώρου – ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα επιτάσσει ότι οι κοσμικοί δρόμοι όλων των σωμάτων πρέπει να είναι ευθείες γραμμές. Θα πρέπει επομένως να ορίσουμε την έννοια της ευθείας γραμμής σε ένα χώρο με μη μηδενική καμπυλότητα. Στον Ευκλείδειο χώρο ορίζουμε την ευθεία γραμμή ως την διαδρομή με τη μικρότερη απόσταση μεταξύ δύο σημείων και είναι φυσικό να επεκτείνουμε τον ορισμό αυτό σε οποιοδήποτε χώρο. Η γεωμετρία αυτή είναι ίσως γνωστή στον αναγνώστη από την εφαρμογή της σε μια σφαίρα, όπου η μικρότερη απόσταση μεταξύ δύο σημείων της επιφανείας της είναι το τόξο ενός μέγιστου κύκλου (ενός κύκλου πάνω στην επιφάνειά της και κέντρο το κέντρο της σφαίρας) που συνδέει τα δύο σημεία. Για παράδειγμα, πάνω στην επιφάνεια της γης, η μικρότερη απόσταση μεταξύ Τελ Αβίβ και Λος Άντζελες (η





Σχήμα 6.8 Η συντομότερη απόσταση μεταξύ Αθηνών και Νέας Υόρκης είναι η διαδρομή κατά το τόξο του μέγιστου κύκλου που συνδέει τις δύο πόλεις.

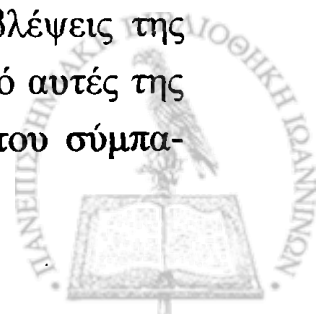
μεγαλύτερη απόσταση που μπορεί να διασχίσει σήμερα ένα επιβατηγό αεροσκάφος χωρίς ανεφοδιασμό σε καύσιμα) είναι η τροχιά που διαγράφεται στο σχήμα 6.8. Παρεμπιπτόντως, αυτή είναι και η διαδρομή που ακολουθούν συνήθως οι αεροπορικές γραμμές για το αντίστοιχο ταξίδι. Στη γεωμετρία, η καμπύλη που προκύπτει από τον ορισμό αυτό της «ευθείας γραμμής» ονομάζεται **γεωδαισική γραμμή**.

Ανάλογη είναι η κατάσταση στον καμπύλο τετραδιάστατο χώρο. Αν διατηρήσουμε τον πρώτο κανόνα του Νεύτωνα, οι κοσμικοί δρόμοι πρέπει να διαγράφουν γεωδαισικές διαδρομές. Βεβαίως, σε ένα χώρο με τοπική μεταβολή της καμπυλότητας, μια γαιωδαισική μπορεί να διαφέρει κατά πολύ από την εικόνα που έχουμε κατά νου σχετικά με το τι είναι μια ευθεία γραμμή. Επιστρέφοντας στο φιδάκι

των προηγούμενων παραγράφων, το οποίο είναι εγκλωβισμένο στον δισδιάστατο χώρο της γήινης επιφάνειας, ας θεωρήσουμε ότι κάποια στιγμή βρίσκεται στην πλατεία Συντάγματος της Αθήνας και θέλει να πάει στον Εθνικό Κήπο (για αναζήτηση τροφής). Μπροστά του ορθώνεται το κτίριο του Κοινοβουλίου. Είναι μάλλον βέβαιο ότι, οδηγούμενο από το ένστικτό του, δεν πρόκειται να σκαρφαλώσει στην κορυφή του κτιρίου της Βουλής και να κατέβει από την πίσω πλευρά στο Εθνικό Κήπο. Το πιο πιθανό είναι ότι θα στρίψει λίγο αριστερά, θα ανεβεί την οδό Βασιλίσσης Σοφίας και μετά από πεντακόσια μέτρα θα μπει δεξιά στον κήπο. Αυτή είναι και η συντομότερη διαδρομή που μπορεί να ακολουθήσει. Αν όμως καταγράψουμε τη διαδρομή (τον κοσμικό δρόμο) που ακολούθησε το φιδάκι σε ένα οδικό χάρτη της Αθήνας, όπου το ύψος των κτιρίων (η μεταβολή της καμπυλότητας του χώρου) δεν απεικονίζεται, μάλλον θα συμπεράνουμε ότι το δισδιάστατο ον που παρακολουθήσαμε δεν ακολούθησε το δρόμο της μικρότερης απόστασης. Ίσως τότε αποδώσουμε την επιλογή του συγκεκριμένου δρόμου σε κάποια δύναμη που ασκήθηκε στο φιδάκι (από το κτίριο της Βουλής) και το υποχρέωσε να ακολουθήσει τεθλασμένη διαδρομή. Τηρουμένων των αναλογιών, η τελευταία άποψη προσομοιάζει την άποψη της Νευτώνειας μηχανικής. Η άποψη ότι με τη δεδομένη καμπυλότητα στο κέντρο των Αθηνών, η διαδρομή που ακολούθησε το φιδάκι είναι μια γεωδαισική, αποτελεί τη νέα εικόνα που μας προσέφερε ο Einstein μέσω της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας.

6-5 Η καμπυλότητα του χώρου σε κοσμική κλίμακα

Όπως τα αποτελέσματα της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας γίνονται αισθητά όταν οι ταχύτητες που εμπλέκονται σε ένα φαινόμενο πλησιάζουν την ταχύτητα του φωτός, έτσι και οι προβλέψεις της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας διαφοροποιούνται από αυτές της κλασικής μηχανικής όταν θεωρούμε μεγάλες περιοχές του σύμπα-



ντος. Στην προηγούμενη Παράγραφο εστιάσαμε την προσοχή μας στην τοπική καμπυλότητα του χώρου, όπως σε μια περιορισμένη περιοχή της υδρογείου θα αναλογούσε η παρατήρηση και περιγραφή των βουνών και των κοιλάδων. Για να γίνει όμως αντιληπτή η γενική καμπυλότητας της επιφάνειας της γης θα πρέπει να θεωρήσουμε μια πιο εκτεταμένη περιοχή της. Το προφανές ερώτημα που ανακύπτει από την αναλογία είναι αν όντως το σύμπαν διαθέτει μια γενική (ή μέση) καμπυλότητα. Και αν η απάντηση είναι καταφατική, τί είδους καμπυλότητα το χαρακτηρίζει;

Πρέπει να σημειώσουμε εξ αρχής ότι το ερώτημα σχετικά με τη μακροσκοπική γεωμετρία του σύμπαντος παραμένει μέχρι τις ημέρες μας αναπάντητο. Αν το σύμπαν διαθέτει μια γενική καμπυλότητα, αναδεικνύονται τρεις δυνατότητες ως προς τη γεωμετρία του. Καθεμιά εξαρτάται από το ποσό της ύλης και ενέργειας που περιέχεται στο σύμπαν και έχει σημαντικές επιπτώσεις ως προς το παρελθόν και το μέλλον του. Είναι σχεδόν βέβαιο ότι στις μέρες μας το σύμπαν συνεχώς διαστέλλεται. Οι ενδείξεις προέρχονται από την ερυθρά μετατόπιση των μακρινών αστερών και από την πειραματική επιβεβαίωση της Θεωρίας της Μεγάλης Έκρηξης. Τα τρία πρότυπα του σύμπαντος που μπορούμε να θεωρήσουμε είναι:

- Το ανοικτό σύμπαν, κατά το οποίο η ολική μάζα που διαθέτει δεν είναι αρκετή ώστε να σταματήσει τη διαστολή του. Ένα τέτοιο σύμπαν διαθέτει αρνητική καμπυλότητα, δεν διαθέτει όρια και θα διαστέλλεται εσαεί.
- Το Ευκλείδειο ή επίπεδο σύμπαν, το οποίο διαθέτει ακριβώς τη μάζα που απαιτείται ώστε να σταματήσει η διαστολή του, αλλά μετά την παρέλευση άπειρου χρόνου. Στην περίπτωση αυτή το σύμπαν δεν έχει όρια και συνεχίζει να διαστέλλεται εσαεί, αλλά με συνεχώς μειούμενο ρυθμό.
- Τέλος, το κλειστό σύμπαν, ένα σύμπαν που διαθέτει αρκετή



μάζα ώστε κάποτε να σταματήσει η διαστολή του και να ακολουθήσει συστολή και σύνθλιψη στο σημείο όπου πραγματοποιήθηκε η Μεγάλη Έκρηξη. Το κλειστό σύμπαν διαθέτει θετική καμπυλότητα, έχει πεπερασμένη έκταση, αλλά δεν διαθέτει όρια – όπως η επιφάνεια μιας σφαίρας έχει πεπερασμένο εμβαδόν χωρίς συγκεκριμένα όρια.

Το ποιο από τα τρία προηγούμενα πρότυπα αντιπροσωπεύει την πραγματικότητα δεν είναι σήμερα γνωστό, κυρίως διότι κατά πάσα πιθανότητα η ολική μάζα του σύμπαντος δεν έχει ακόμη μετρηθεί. Η σύγχρονη θεωρητική τάση τείνει προς την παραδοχή ότι το σύμπαν περιέχει ακριβώς τη μάζα που απαιτείται ώστε να είναι μακροσκοπικά επίπεδο. Εν πάση περιπτώσει, καθ' όλες τις εκτιμήσεις, η Μεγάλη Έκρηξη συνέβη πριν από 15 δισεκατομμύρια έτη και η συντέλεια του κόσμου που θα προέλθει σύμφωνα με το πρότυπο του κλειστού σύμπαντος, ακόμη κι αν η συστολή του σύμπαντος άρχιζε αύριο, θα χρειαζόταν άλλο τόσο χρόνο για να συμβεί. Ελπίζεται ότι αυτός είναι ικανός χρόνος ώστε να διαλευκανθεί το θέμα της γεωμετρίας του.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 6-1 Θεωρείστε έναν υποθετικό κόσμο όπου η αδρανειακή μάζα δεν ταυτίζεται με τη βαρυτική. Περιγράψτε ένα πείραμα που θα σας έδειχνε ότι σ' αυτόν τον κόσμο δεν ισχύει η Αρχή της Ισοδυναμίας.
- 6-2 Θεωρώντας διαδοχικά διαστήματα κατά μήκος της τροχιάς του φωτός στο σχήμα 6.4(β) δείξτε ότι το φως διαγράφει παραβολική τροχιά.
- 6-3 Ένας παρατηρητής που βρίσκεται μέσα σε ένα αερόστατο σε ύψος 12 km παρατηρεί με ένα τηλεσκόπιο ένα χρονόμετρο πάνω στη γη και το συγκρίνει με το δικό του. Τι διαφορές θα δει μεταξύ των δύο



χρονομέτρων;

- 6-4 Η εξ. (6.13) μπορεί να θεωρηθεί ότι εκφράζει τη διαφορά στο ρυθμό καταγραφής του χρόνου από δύο χρονόμετρα σε διαφορετικά σημεία μέσα σε ένα βαρυτικό πεδίο. Έτσι, ένα χρονόμετρο που βρίσκεται μέσα σε ένα αερόστατο σε ύψος 10 km προβλέπεται να μετρά το χρόνο ταχύτερα από ένα χρονόμετρο στην επιφάνεια της γης. Πόση θα είναι η διαφορά στην ένδειξη των δύο χρονομέτρων μετά παρέλευση ενός έτους;
- 6-5 Το δισδιάστατο φιδάκι που επικαλεστήκαμε σε πολλά παραδείγματα και που βρίσκεται εγκλωβισμένο σε δύο διαστάσεις πάνω στη γη, δεν χρειάζεται να ταξιδέψει σε μια ευθεία (κατά την άποψή του) γραμμή, ώστε να επιστρέψει στο ίδιο σημείο και να συμπεράνει ότι βρίσκεται σε ένα καμπύλο χώρο. Μπορεί αντ' αυτού να διεξαγάγει μετρήσεις σε ένα εκτεταμένο χώρο της επιφάνειας της γης που θα του το αποδείξουν. Ας θεωρήσουμε ότι το φιδάκι σχεδιάζει πάνω στην επιφάνεια της γης ένα κύκλο με τη συνήθη διαδικασία, ήτοι επιλέγει ένα σημείο ως κέντρο του κύκλου και μετρά γύρω από το σημείο αυτό ίσες αποστάσεις r προς όλες τις διευθύνσεις. Σε ένα επίπεδο χώρο, ο λόγος της περιφέρειας του κύκλου που κατασκευάσε προς την ακτίνα r θα ήταν η σταθερά 2π ($\pi = 3.14\dots$). Δείξτε ότι τώρα η τιμή της παραμέτρου π' , μέσω της οποίας εκφράζεται ο ίδιος λόγος, είναι

$$\pi' = \frac{\sin(r/R)}{r/R} \pi$$

όπου για το φιδάκι R είναι μια νέα σταθερά με διαστάσεις μήκους (που θα μπορούσε να ονομάσει «ακτίνα του σύμπαντος»).

Υπολογίστε την τελευταία σχέση για τιμές $r = 1, 10, 100$ και 1000 km και σχολιάστε τα συμπεράσματα στα οποία οδηγούν οι μετρήσεις.



- 6-6 Η πτήση ΟΑ411 της Ολυμπιακής Αεροπορίας εκτελεί καθημερινά το δρομολόγιο Αθήνα – Νέα Υόρκη. Η διαδρομή της πτήσης είναι κατά τη γεωδαισική που ενώνει τις δύο πόλεις και, με μέση ταχύτητα του αεροσκάφους 885 km h^{-1} διαρκεί 8.5 ώρες. Πόσο θα διαρκούσε η πτήση αν το αεροσκάφος πετούσε κατά μήκος του 39° παράλληλου; [Σημείωση: Η Αθήνα βρίσκεται στον 38° παράλληλο ενώ η Νέα Υόρκη στον 40° . Για τις ανάγκες του προβλήματος θεωρείστε ότι και οι δύο πόλεις βρίσκονται στον 39° παράλληλο].



ΓΕΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Παραδοσιακά, Στοιχεία της Θεωρίας της Σχετικότητας περιέχονται στα πρώτα κεφάλαια συγγραμμάτων που προορίζονται για τη διδασκαλία του μαθήματος της Νεώτερης Φυσικής. Μερικά από τα συγγράμματα αυτά που μπορεί να συμβουλευτεί ο αναγνώστης στο προπτυχιακό επίπεδο είναι

R.B. Leighton, *Principles of Modern Physics*, McGraw-Hill, New York, 1959

F.K. Richtmyer, E.H. Kennard and T. Lauritsen, *Introduction to Modern Physics*, McGraw-Hill, New York, 1955

K.W. Ford, *Κλασική και Σύγχρονη Φυσική*, Τόμος III, Έκδοση Γ. Πνευματικού, Αθήνα, 1980

A. Beiser, *Σύγχρονη Φυσική*, Εκδόσεις Γιώργος Δαρδάνος, Αθήνα, 2001

Μονογραφίες, αφιερωμένες στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας με στοιχεία Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας, έχουν γραφεί στο παρελθόν, ιδιαίτερα από τους πρωτεργάτες δόμησης της θεωρίας. Μεταξύ αυτών θα αναφέρουμε



W. Pauli, *Theory of Relativity*, Dover Publications, New York, 1958

G. Stephenson and C.W. Kilmister, *Special Relativity for Physicists*, Longmans, Green & Co., London, 1958

R.K. Pathria, *The Theory of Relativity*, Second Edition, Dover Publications, New York, 1963

A. Shadowitz, *Special Relativity*, Dover Publications, New York, 1968



ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

Το αλφαβητικό ευρετήριο περιέχει τους κυριότερους όρους και έννοιες, όπου αρχικά ορίζονται και όπου μετέπειτα αναλύονται ή χρησιμοποιούνται σε κάποια έκταση. Για την κατάταξη όρων με λατινικούς χαρακτήρες ακολουθείται η αντιστοιχία που έχει υιοθετήσει ο ΟΤΕ, ήτοι

B, V, W στο Β

C, Q στο Κ

D στο Δ

G στο Γ

H στο Χ

J στο Ζ

X στο Ξ

U στο Υ

Τα γράμματα που ακολουθούν ορισμένους αριθμούς σελίδων συμβολίζουν:

- ff: και σελίδες που ακολουθούν
- ε: απαντάται σε ένθετο
- α: απαντάται σε άσκηση
- σ: απαντάται σε σχήμα.
- υ: απαντάται σε υποσημείωση

αδρανειακά συστήματα αναφοράς, βλ. συστήματα αναφοράς
αιθέρας 10, 11
- φωτοφόρος 11
αιτιότητα 84ff, 88

αναλλοίωτος χρόνος 84ff, 85
άνυσμα 89ff
- θέσης 107
Αριστοτέλης 11, 19
αρχή της αιτιότητας, βλ. αιτιότητα



αρχή της ισοδυναμίας 191ff,
193, 195, 204

αρχή της σχετικότητας 1ff, 9,
191

βαθμωτά φυσικά μεγέθη 89ff
βαρυτική ερυθρά μετατόπιση,
βλ. ερυθρά μετατόπιση
βαρυτικό πεδίο 192, 197σ
Bradley, James 20

γαιωδεσική γραμμή 215, 215σ
Γενική Θεωρία της Σχετικότη-
τας 186ff, 187υ, 191

- πειραματικός έλεγχος 198ff
Grossman, Marcel 187υ

διαγράμματα Feynman 81ff,
83σ

διαγράμματα Minkowski 82,
83σ

διάστημα 69

διαστολή χρόνου 41, 44

δίδυμη γένεση 146, 140σ, 149α

δύναμη 127ff

- κοινή 128, 130υ
- Lorentz 8, 158, 164
- μετασχηματισμός 129, 147α
- Minkowski 127, 130υ

δυναμικό 171ff

- ανυσματικό 171
- βαθμωτό 172
- τετράνυσμα 176, 184α

Eddington, Sir Arthur 201, 202

Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας
31ff, 186

- αξιωματική θεμελίωση 31ff

Einstein, Albert 31, 94, 75, 94υ,
187υ, 191υ, 193, 202, 212υ

εκκεντρότητα 207, 207υ

ενέργεια

- διατήρηση 138ff, 141
- ηρεμίας 132
- ισοδυναμία με μάζα 133σ, 134
εξισώσεις του Maxwell 160, 175,
179

εξίσωση συνεχείας 159

επιτάχυνση 115ff

- κίνηση με σταθερή 119ff, 123σ
- τετραδιάστατη 115
- της βαρύτητας 190
- τρισδιάστατη 115
ερυθρά μετατόπιση 55
- βαρυτική 203ff, 205

ηλεκτρικό ρεύμα 160ff

- πυκνότητα 155

- τανυστής 177ff

ηλεκτρική διαπερατότητα 159

ηλεκτρική μετατόπιση 159

ηλεκτρικό πεδίο 7, 11, 156, 156σ,
183α, 210

ηλεκτρικό φορτίο 154, 160ff

- διατήρηση 158
- μετασχηματισμός 163ff, 169,
170, 180ff, 182
- πυκνότητα 157

ηλεκτρομαγνητική θεωρία 154ff



ηλεκτρομαγνητικό πεδίο 163

ηλεκτρονιοβόλτ 136

θεώρημα του Chasles 70υ

καμπύλωση του φωτός σε βαρυτικό πεδίο 199ff, 199σ, 218α

Καρτέσιος 20

κινηματική 38ff

κοσμικά διαγράμματα, βλ. διαγράμματα Minkowski

κοσμικοί δρόμοι 81ff, 82

κοσμικός χώρος, βλ. χώρος

Minkowski

κώνος φωτός 88

Christoffel, E.B 187υ

Kroenecker, βλ. σύμβολο του Kroenecker

Levi-Civita, Tullio 187υ

μαγνητική διαπερατότητα 159

μαγνητική επαγωγή 8, 11, 158, 183α, 210

μάζα 191

- αδρανειακή 188ff, 189, 218α

- βαρυτική 188ff, 189, 218α

- διατήρηση 138ff, 141

- ηρεμίας 124

- σχετικιστική 125

μέσος χρόνος ζωής 56, 56υ, 57, 64α

μεταπτωτική κίνηση του Ερμή 187υ, 207ff, 208, 209σ

μετασχηματισμός ανυσμάτων

69ff

- στον τρισδιάστατο χώρο 69ff

μετασχηματισμός βαθμίδας 174

μετασχηματισμός του Lorentz

31ff, 33ff, 36, 45, 67α, 68, 103α, 153

- αντίστροφος 80, 103α, 105α

- πειραματική επαλήθευση 56ff

μετασχηματισμός του Γαλιλαίου

1ff, 6, 25α, 26α, 27α, 29α, 32, 153

- στον ηλεκτρομαγνητισμό 6ff, 27α

Minkowski, Herman 76

Morley, Edward, βλ. πείραμα

Michelson και Morley

νόμοι μετασχηματισμού του Γα-

λιλαίου, βλ. μετασχηματισμός του

Γαλιλαίου

ορμή 124, 126σ

- διατήρηση 138ff, 141

π μεσόνιο 83, 140σ

παράδοξο των διδύμων 59ff, 59σ

πεδίο βαρύτητας, βλ. βαρυτικό πεδίο

πεδίο μαγνήτισης 159

πείραμα Michelson και Morley

10ff, 13σ, 14υ, 27α

πίνακας

- ανάστροφος 100

- αντίστροφος 100



- μετασχηματισμού Lorentz 76ff, 180
- περιστροφής 74
Planck, Max 187v
Pound, R.V. 205
πρόσθεση ταχυτήτων, βλ. ταχύτητα
πυκνότητα φορτίου, βλ. ηλεκτρικό φορτίο
πυκνότητα ρεύματος, βλ. ηλεκτρικό ρεύμα

rapidity 50v
Rebka, G.A. 205
Ricci, Gregorio 187v
Römer, Ole 20

σύμβαση άθροισης του Einstein 94ff, 105α
σύμβολο του Kroenecker 72
συμμετρία βαθμίδας 174
σύμπτωση 46ff
- χρονική 46ff
- χωρική 46ff
συνθήκη Lorentz 174
σύστημα ηρεμίας 104α, 117
συστήματα αναφοράς 3ff
- αδρανειακά 3ff, 37σ
- κέντρου μάζας 150α
- περιστροφή 70ff, 73σ, 103α
- τοπικό 194, 195, 197σ
συστολή Lorentz-Fitzerald 40, 40v, 42
συστολή μήκους 39ff, 40

τανυστές 89ff, 90
- άλγεβρα 96ff
- άθροισμα 96
- απεικόνιση με πίνακες 99ff
- ορισμός 93
- πολλαπλασιασμός 97
- πρόσθεση 97
- συστολή 98
- τάξη 91
τανυστής ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, βλ. ηλεκτρομαγνητικό πεδίο
ταχύτητα 107ff
- πρόσθεση 47ff, 66α, 111
- στον κοσμικό χώρο 111ff
- τετράνυσμα 108
ταχύτητα του φωτός 16ff, 112
- μέτρηση 16ff, 21ε, 24σ
τελεστής d' Alambert 176v
τετραδιάστατος χώρος 68ff
τετράνυσμα 108
- θέσης 108
- πυκνότητας ρεύματος 162

φαινόμενο Doppler 52ff, 52σ, 67α
- σχετικιστική σχέση 54
Feynman, Richard 82
Fizeau, Armand 23
Foucault, Leon 23
φωτοειδές διάστημα 86
φωτόνιο 135, 147α, 152α, 152α
φωτοφόρος αιθέρας, βλ. αιθέρας

Hilbert, H. 187v



χρονοειδές διάστημα 85

χρόνος ημιζωής 83

χρόνος υποδιπλασιασμού,, βλ.

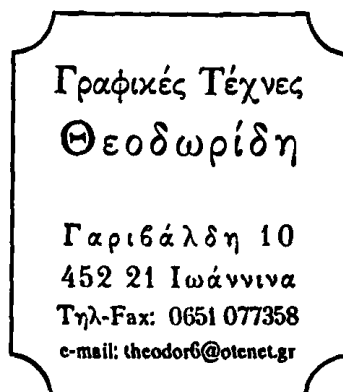
χρόνος ημιζωής

χωροειδές διάστημα 86

χώρος Minkowski 75ff, 87σ, 106

ωκύτητα 49ff, 50υ, 51σ





Copyright: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Απαγορεύεται η μερική ή ολική ανατύπωση, καθώς και η λήψη φωτοαντιγράφων από το βιβλίο χωρίς τη γραπτή άδεια του Τμήματος Δημοσιευμάτων του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων και του συγγραφέα.

Διατίθεται και στο Βιβλιοπωλείο του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, Πανεπιστημιούπολη - Δουρούτη, Ιωάννινα - Τηλ. (0651) 97122.

ΔΙΑΝΕΜΕΤΑΙ ΔΩΡΕΑΝ στους φοιτητές.







Ο Παναγιώτης Ασημακόπουλος γεννήθηκε στην Αθήνα το 1940. Το 1958 αποφοίτησε από το Εθνικό Εκπαιδευτήριο Αναβρύτων και τον επόμενο χρόνο άρχισε τις Πανεπιστημιακές του σπουδές στο Πανεπιστήμιο Brandeis των ΗΠΑ, απ' όπου το 1961 έλαβε το πτυχίο Bachelor στη Φυσική. Συνέχισε μεταπτυχιακές σπουδές στην Αγγλία και στις ΗΠΑ, απ' όπου έλαβε διαδοχικά τα διπλώματα D.I.C. (Imperial College of Science and Technology) στη Μαθηματική Φυσική, Master of Science (Rutgers University) και Ph.D. (Thomas Jefferson University) στην Πυρηνική Φυσική. Από το 1965 έως το 1976 εργάστηκε ως ερευνητής στο Εργαστήριο Επιταχυντών του Κ.Π.Ε. «Δημόκριτος». Το 1976 εξελέγη τακτικός καθηγητής του Τμήματος Φυσικής στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, όπου υπηρετεί μέχρι σήμερα. Το συγγραφικό του έργο περιλαμβάνει περισσότερα από ογδόντα άρθρα σε διεθνή επιστημονικά περιοδικά, οκτώ πανεπιστημιακά συγγράμματα και μεγάλο αριθμό ανακοινώσεων σε διεθνή επιστημονικά συνέδρια. Ζει, με την οικογένειά του, μόνιμα στην Πεδινή Ιωαννίνων, όπου, μεταξύ άλλων, ασχολείται και με την αμπελουργία. Στη φωτογραφία, με την τελευταία προσθήκη στην ευρύτερη οικογένειά του, τον εγγονό του Χάρητο.

