

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΠΑΡΑΔΟΣΕΙΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ
ΣΤΑ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

Σ. ΦΟΥΛΙΑΣ
Επίκουρος καθηγητής



1. ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΚΥΜΑΤΩΝ

1.1 Ορισμοί, βασικές έννοιες

Κύμα: Οποιαδήποτε διαταραχή από την κατάσταση ισορροπίας η οποία διαδίδεται στο χώρο με πεπερασμένη ταχύτητα. Η ταχύτητα διαδόσεως του κύματος εξαρτάται από τις ελαστικές ιδιότητες του μέσου μεταδόσεως και από την πυκνότητά του. Για μία κατηγορία κυμάτων, τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, ισχύει επίσης ο παραπάνω γενικός ορισμός του κύματος αλλά η ταχύτητα διαδόσεως εξαρτάται από τις οπτικές* ιδιότητες του μέσου. Ειδικά τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα δεν χρειάζονται υλικό μέσο (με την κλασσική έννοια) για να διαδοθούν αλλά διαδίδονται ως γνωστόν και στο κενό με $c=3 \times 10^8$ m/sec.

Ας θεωρήσουμε για ευκολία ένα κύμα που διαδίδεται μόνον κατά τον άξονα των x . Έστω ότι στην θέση $x=0$ εξελίσσεται μία διαταραχή με εξίσωση $\xi=f(t)$. Με αυτό εννοούμε πως στο $x=0$ δεν υπάρχει ισορροπία, άρα τα διάφορα φυσικά μεγέθη θα μεταβάλλονται στο $x=0$ με το χρόνο, π.χ. η πυκνότητα, η πίεση, η θέση κάποιου υλικού σημείου, η ταχύτητά του κλπ. Το ξ συμβολίζει οποιοδήποτε φυσικό μέγεθος που μεταβάλλεται χρονικά στο $x=0$. Λόγω των ελαστικών ιδιοτήτων του μέσου η διαταραχή $\xi=f(t)$ θα μεταδοθεί από σημείο σε σημείο. Ας εξετάσουμε την περίπτωση που το κύμα διαδίδεται με ταχύτητα v προς τα δεξιά. Αυτό σημαίνει ότι στην τυχούσα θέση $x>0$ η διαταραχή θα φθάσει μετά από χρόνο $t = \frac{x}{v}$. Συνεπώς, όσον αφορά την μεταβολή του ξ , ό,τι συμβαίνει στο x τη χρονική στιγμή t , συνέβη στο $x=0$ τη χρονική στιγμή $(t - \frac{x}{v})$. Άρα για να εκφράσουμε τη μεταβολή του ξ στο x όταν γνωρίζουμε τη μεταβολή του ξ στο $x=0$ δεν έχουμε παρά να αντικαταστήσουμε το t με $(t - \frac{x}{v})$. Δηλαδή :

$$\xi(x,t) = \xi(0, t - \frac{x}{v}) = f(t - \frac{x}{v}).$$

Επειδή πήραμε το x τυχαία, βλέπουμε ότι η εξίσωση ενός κύματος που διαδίδεται προς τα δεξιά, δηλαδή η εξίσωση μίας διαδιδόμενης διαταραχής σε κάθε σημείο x για κάθε t θα έχει τη μορφή $\xi(x,t)=f(t - \frac{x}{v})$. Αντίστοιχα,

* οι οπτικές ιδιότητες του μέσου καθορίζονται από τον τρόπο με τον οποίο αντιδρούν τα ηλεκτρόνια των ατόμων του σε ένα προσπίπτον ΗΜ κύμα.



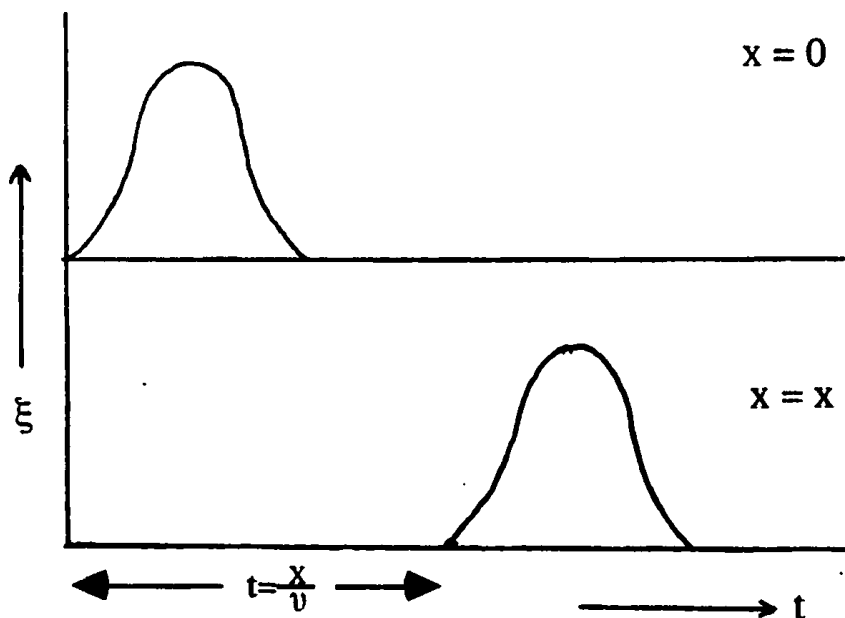
για κάθε κύμα που διαδίδεται προς τα αριστερά μπορεί να δει κανείς ότι η εξίσωση θα είναι της μορφής $\xi(x,t) = f\left(t + \frac{x}{v}\right)$.

Αν θεωρήσουμε την ταχύτητα v με το σημείο της (+) ή (-) ανάλογα με το αν η διάδοση είναι προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά, κάθε κύμα σε μία διάσταση θα έχει τη μορφή:

$$\xi(x,t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

απ' όπου βγαίνουν και οι δύο προηγούμενες εκφράσεις.

Η θεώρηση του κύματος την οποία κάναμε μέχρι τώρα, όπου δηλ. συγκρίναμε τη χρονική μεταβολή σε δύο διαφορετικές θέσεις μπορεί να ονομαστεί χρονική αναπαράσταση (ή απεικόνιση). Διαγραμματικά φαίνεται ως εξής:



Σχήμα 1. Η διαταραχή στο μέγεθος ξ εμφανίζεται στη θέση x μετά από χρόνο $t = \frac{x}{v}$

Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε τη χωρική μεταβολή της διαταραχής σε διάφορες χρονικές στιγμές. Στην περίπτωση αυτή έχουμε τα λεγόμενα στιγμιότυπα του κύματος, που αποτελούν τη χωρική απεικόνιση ενός κύματος. (Όταν βλέπετε τα κύματα στη θάλασσα τι έχετε, τη χρονική ή τη χωρική αναπαράσταση του κύματος;) Η χωρική απεικόνιση καλύπτεται από τον Halliday και τον Serway.



Βρήκαμε προηγουμένως τη μορφή $f(t - \frac{x}{v})$ που θα πρέπει να έχει κάθε κύμα, ξεκινώντας από τον ορισμό (κρίσιμες έννοιες: διαταραχή, διάδοση, ταχύτητα). Αντιστρόφως, μπορούμε να αποδείξουμε ότι κάθε συνάρτηση της μορφής αυτής μπορεί να παριστάνει κύμα. Αρκεί να καταλήξουμε στο ότι ικανοποιείται ο ορισμός, δηλαδή να μπορούμε να πάμε από τη δεδομένη έκφραση $\xi(x,t) = f(t - \frac{x}{v})$ στον ορισμό. Πρέπει επομένως να δούμε αν η

$f(t - \frac{x}{v})$ μπορεί να εκφράζει διαδιδόμενη διαταραχή. Το αν μπορεί να είναι

διαταραχή δεν θα μας απασχολήσει γιατί είναι τετριμμένο. Κάθε συνάρτηση (συνεχής) μπορεί να παριστάνει τη μεταβολή φυσικού μεγέθους (με ορισμένες ακόμη μαθηματικές προϋποθέσεις). Θέλουμε να δούμε αν είναι διαδιδόμενη. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να «πάει» και στο σημείο $x+\Delta x$.

Ας δούμε αν αυτό συμβαίνει και τότε. Το να «πάει» η μορφή $f(t - \frac{x}{v})$ στο

$x+\Delta x$ σημαίνει να ισχύει: $f(t - \frac{x}{v}) = f(t + \Delta t - \frac{x + \Delta x}{v})$

$$\text{ή } \Delta t = \frac{\Delta x}{v}$$

απ' όπου βγαίνει ότι πράγματι θα «πάει» στο $x+\Delta x$ μετά από χρόνο $\Delta x/v$. (Συγχρόνως βλέπουμε ότι η σταθερά v είναι η ταχύτητα διαδόσεως της διαταραχής). Άρα είναι διαδιδόμενη ο.ε.δ.

Εξετάστε αντιπαραδείγματα δηλ. μαθηματικές μορφές που έχουν t και x όχι όμως στον συνδυασμό $(t - \frac{x}{v})$ (ή $x - vt$), για να βρείτε αν μπορεί να

ικανοποιείται ο ορισμός του κύματος. Βλέπουμε λοιπόν πόσο θεμελιώδη σημασία έχει για κάθε κύμα το διώνυμο $(t - \frac{x}{v})$, αφού χρόνος και μήκος

εμφανίζονται πάντοτε κατ' αυτόν τον τρόπο. Λογικό είναι να το βαφτίσουμε και του δίνουμε το όνομα φάση (φ) του κύματος. Η τιμή της φάσης φ καθορίζει την τιμή του διαδιδόμενου φυσικού μεγέθους και όχι ο χρόνος μόνος του ή η θέση μόνη της. Διαφορετικά σημεία του χώρου έχουν την ίδια φάση αναγκαστικά σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. (Σκεφτείτε το αυτό). Αν τη χρονική στιγμή t_1 στο x_1 έχουμε $\varphi_1(t_1, x_1)$ και στο σημείο x_2 η φάση γίνει $\varphi_2 = \varphi_1$ την $t_2 > t_1$, δηλαδή $\varphi_2(t_2, x_2) = \varphi_1(t_1, x_1)$, μπορούμε να πούμε ότι η φάση διαδόθηκε από το σημείο 1 στο σημείο 2, όπως ακριβώς



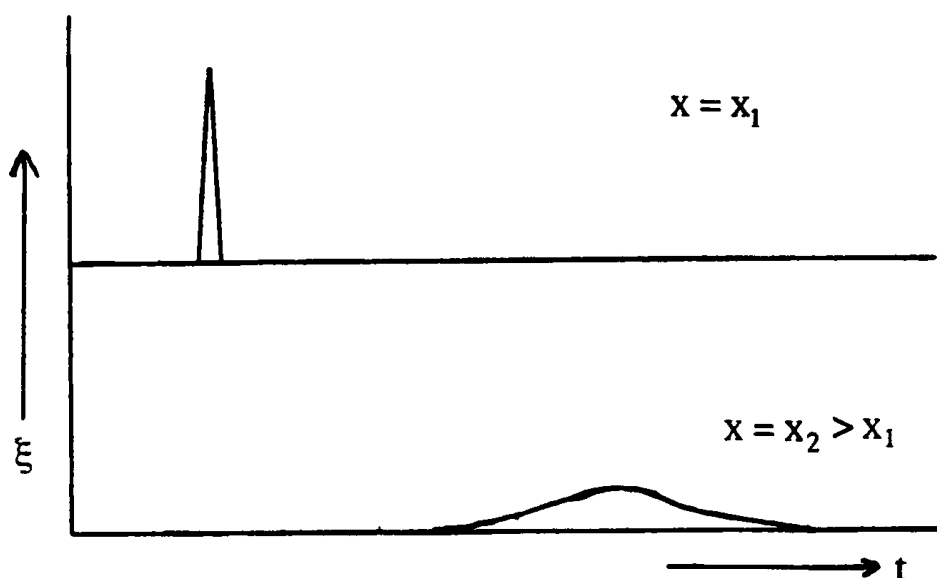
λέμε ότι η διαταραχή διαδίδεται από το 1 στο 2, όταν το φυσικό μέγεθος ξ που χαρακτηρίζει τη διαταραχή αποκτά στο σημείο 2 την τιμή που είχε ενωρίτερα στο σημείο 1.

Η φάση λοιπόν διαδίδεται και μάλιστα μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα διαδόσεώς της ως εξής: Ζητάμε το dx/dt με τη συνθήκη $\varphi=\text{σταθερό}$, δηλ. $x-ut=\text{σταθ.}$, άρα

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{\varphi=\text{σταθ.}} = v$$

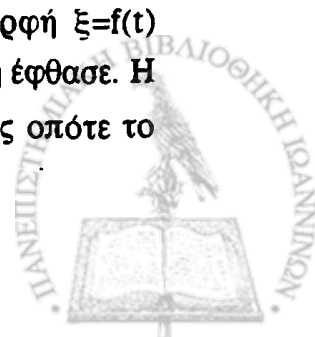
Επομένως ό,τι ονομάζαμε μέχρι τώρα ταχύτητα διαδόσεως ενός κύματος είναι στην πραγματικότητα η ταχύτητα φάσεως ή φασική ταχύτητα του κύματος. Με λόγια, ορίζουμε τη φασική ταχύτητα ως εξής: Είναι το πηλίκο $\Delta x/\Delta t$ όπου Δx η απόσταση δύο σημείων που αποκτούν την ίδια φάση με διαφορά χρόνου Δt .

Η φασική ταχύτητα έχει νόημα όταν η μορφή του κύματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάδοσή του, δηλ. στην παράσταση $\xi=f(x-ut)$ η συνάρτηση f δεν αλλοιώνεται.



Σχήμα 2 Όταν παραμορφώνεται ένας παλμός δεν έχει έννοια να μιλάμε για φασική ταχύτητα του παλμού.

Π.χ. αν ο οξύς τριγωνικός παλμός στη θέση $x=x_1$ διαπλατυνθεί μέχρι να φτάσει στη θέση $x=x_2$, δεν έχει νόημα να πούμε ότι η μορφή $\xi=f(t)$ διαδόθηκε από το x_1 στο x_2 αφού άλλη μορφή ξεκίνησε και άλλη έφθασε. Η φασική ταχύτητα αναφέρεται στη διάδοση αναλλοίωτης μορφής οπότε το



σημείο 2 υφίσταται ακριβώς τη μεταβολή που υπέστη το 1 ενωρίτερα. Έστω κι αν μεταβάλλεται η μορφή του κύματος όμως είναι φανερό ότι κάτι διαδίδεται από σημείο σε σημείο. Αυτό είναι η ενέργεια του κύματος για την οποία θα μιλήσουμε εκτενώς αργότερα. Η ταχύτητα διαδόσεως της ενέργειας που είναι και η ταχύτητα διαδόσεως του παλμού ως συνόλου είναι η ομαδική ταχύτητα και θα ορισθεί αργότερα.

Το αν η μορφή ενός κύματος μεταβάλλεται καθώς διαδίδεται, καθορίζεται από τις ιδιότητες του μέσου διαδόσεως. Μέσα που αλλοιώνουν τη μορφή των κυμάτων, λέμε πως έχουν την ιδιότητα του διασκεδασμού. (Διασκεδασμός=διασκόρπισμα). Για να δούμε τη σημασία του διασκεδασμού όμως, πρέπει προηγουμένως να εισαγάγουμε τα αρμονικά κύματα.

Αρμονικό είναι το κύμα που παράγεται από μία αρμονική (ημιτονοειδή ή συνημιτονοειδή) διαταραχή. Αν σε κάποιο σημείο δρο η διαταραχή $\xi = \xi_0 \eta \mu \omega t$ το κύμα που θα δημιουργηθεί στο μέσο θα είναι $\xi = \xi_0 \eta \mu \omega (t - \frac{x}{v})$ προς τα δεξιά και $\xi = \xi_0 \eta \mu \omega (t + \frac{x}{v})$ προς τα αριστερά.

Η φάση του αρμονικού κύματος είναι το διώνυμο $\varphi = (\omega t - \frac{\omega}{v} x)$. Η φάση είναι συνάρτηση του χρόνου και της θέσης. Ο ρυθμός μεταβολής της με το χρόνο και ο ρυθμός μεταβολής της με την απόσταση ορίζουν δύο χαρακτηριστικά μεγέθη του κύματος.

Ρυθμός μεταβολής με το χρόνο: $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{x=\text{σταθ.}} = \omega$, κυκλική συχνότητα σε rad/sec

Ρυθμός μεταβολής με την απόσταση: $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{t=\text{σταθ.}} = k$, κυματαριθμός σε rad/m

Από τον ορισμό του k και του ω βλέπουμε ότι:

$$k = \frac{\omega}{v} \quad (1)$$

Όπως η ταλάντωση χαρακτηρίζεται από τα μεγέθη ω , v , T που ορίζονται ως προς το χρόνο, έτσι και το κύμα χαρακτηρίζεται από τη χωρική περίοδο λ , και τη μεταβολή της φάσης ανά μονάδα μήκους k . Θα ισχύει προφανώς $k \cdot \lambda = 2\pi$ (Σκεφθείτε αυτή τη σχέση πρακτικά, όχι αλγεβρικά). Το λ καθορίζεται από την T και το v , $\lambda = vT \rightarrow v = \frac{\lambda}{T} = \lambda v$. Αντίστοιχο μέγεθος του v ως προς τον χώρο είναι το $1/\lambda$.



Με τη βοήθεια των μεγεθών $\omega, \nu, T, k, \lambda, \nu$ μπορεί κανείς να γράψει μέ-
 όλους τους δυνατούς τρόπους την εξίσωση του κύματος. Όλοι αυτοί οι
 τρόποι θα είναι φυσικά ισοδύναμοι αφού περιγράφουν το ίδιο κύμα.
 Μπορούμε να βρούμε πόσοι είναι αυτοί οι τρόποι, αν σκεφτούμε πώς
 ορίζεται ένα κύμα από φυσική άποψη. Δηλαδή, ότι ορίζεται από μία
 ταλάντωση και ένα μέσο· επίσης, από μία ταλάντωση (χρονική μεταβολή)
 και από μία χωρική μεταβολή και τέλος από μία χωρική μεταβολή και ένα
 μέσο μεταδόσεως.

Μπορούμε τώρα να επανέλθουμε στα περί διασκεδαστικών μέσων και
 να δούμε τι σημαίνει αυτή η έννοια και τι σχέση έχει με την παραμόρφωση
 ενός παλμού. Ένας παλμός αναλύεται κατά Fourier σε μία σειρά
 αρμονικών συνιστωσών, μπορεί δηλ. να θεωρηθεί ότι προέρχεται από την
 επαλληλία ενός απείρου αριθμού αρμονικών κυμάτων που οι συχνότητές
 τους, πολλαπλάσιες μιας θεμελιώδους, αποτελούν ένα γραμμικό φάσμα.
 Αυτά συμβαίνουν όταν ο παλμός επαναλαμβάνεται περιοδικά· οπότε η
 περίοδος επανάληψης του παλμού καθορίζει τη θεμελιώδη συχνότητα.
 Όταν η περίοδος επανάληψης του παλμού μεγαλώσει, η θεμελιώδης
 συχνότητα θα μικρύνει και οι γραμμές του φάσματος θα πλησιάσουν
 μεταξύ τους. Αν η περίοδος του παλμού γίνει άπειρη τότε το φάσμα γίνεται
 πλέον συνεχές, δηλ. ένας απομονωμένος (χωρίς περιοδική επανάληψη)
 παλμός ισοδυναμεί με ένα συνεχές φάσμα αρμονικών κυμάτων. Τα
 μαθηματικά της ανάλυσης παλμών (απεριοδικών συναρτήσεων) σε συνεχές
 φάσμα αρμονικών θα τα διδάχτετε στα Μαθηματικά για Φυσικούς II
 (μετασχηματισμοί Fourier).

Αφού λοιπόν ένας παλμός αποτελείται από άπειρες αρμονικές, το
 σχήμα του θα αλλάξει όταν τα αρμονικά κύματα που το αποτελούν
 αλλάξουν τις σχετικές μεταξύ τους θέσεις. (Αυτό το βλέπει εύκολα κανείς
 με δύο ταλαντώσεις διαφορετικών συχνοτήτων όπου το σχήμα της
 συνιστάμενης ταλάντωσης εξαρτάται από τη σχετική τους θέση, με άλλα
 λόγια τη σχετική τους φάση). Για ποιό λόγο όμως μπορεί να αλλάξουν οι
 σχετικές θέσεις των αρμονικών κυμάτων καθώς αυτά διαδίδονται σε ένα
 μέσο; Προφανώς, όταν διαδίδονται με διαφορετικές ταχύτητες. Έτσι
 ερχόμαστε στην ουσία του διασκεδασμού (=διασκορπίσματος). Όταν σε ένα
 μέσο η ταχύτητα διαδόσεως (η φασική ταχύτητα) των αρμονικών κυμάτων
 εξαρτάται από τη συχνότητα του αρμονικού κύματος, το μέσο θα
 διασκεδάζει (=διασκορπίζει) τις αρμονικές συνιστώσες ενός παλμού με
 αποτέλεσμα ο παλμός να παραμορφώνεται κατά τη διάδοσή του στο μέσο.



Μαθηματικά, λέμε πως ένα μέσο είναι διασκεδαστικό όταν $v=f(v)$ ή ισοδύναμα $v=f(\lambda)$ ή $v=f(\omega)$. Σε ορισμένους τομείς της Φυσικής (π.χ. Φυσική Στερεάς Καταστάσεως) ο διασκεδασμός εκφράζεται με τη συνάρτηση $\omega=f(k)$ και αυτός ο ορισμός είναι ισοδύναμος με τους προηγούμενους (βρείτε γιατί).

Στα συνηθισμένα ηχητικά κύματα δεν εμφανίζεται το φαινόμενο του διασκεδασμού. Είναι πολύ έντονο όμως στα οπτικά κύματα και είναι το αίτιο που προκαλεί την ανάλυση του λευκού φωτός σε χρώματα από ένα πρίσμα όπως θα δούμε στην Οπτική.

1.2 Διαφορική εξίσωση κύματος

Από τη γενική μορφή που έχει η εξίσωση οποιουδήποτε κύματος, $\xi=f(x\pm vt)$ μπορούμε να βρούμε τη διαφορική εξίσωση που ισχύει για κάθε κύμα. Παραγωγίζοντας την ξ δύο φορές ως προς τον χρόνο και δύο φορές ως προς την απόσταση, αφού λάβουμε υπ' όψη ότι η ξ είναι συνάρτηση του ορίσματος $\varphi=x\pm vt$, προκύπτει ότι

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Η διαφορική εξίσωση του κύματος έχει ιδιαίτερη σημασία διότι αν σε κάποιο συγκεκριμένο μέσο βρεθεί ότι ισχύει*, ο συντελεστής αναλογίας ανάμεσα στα $\partial^2 \xi / \partial x^2$ και $\partial^2 \xi / \partial t^2$, που θα είναι συνάρτηση των ιδιοτήτων του μέσου, θα μας δίνει ένα θεωρητικό υπολογισμό της ταχύτητας διαδόσεως. Με τον τρόπο αυτό ο Maxwell, όπως θα δούμε αργότερα, απέδειξε ότι το φως αποτελείται από ηλεκτρομαγνητικά κύματα.

1.3 Μιγαδική αναπαράσταση αρμονικών μεγεθών

Είναι γνωστή η σχέση της απλής αρμονικής ταλάντωσης με την ομαλή κυκλική κίνηση. Υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ της κίνησης του B που εκτελεί αρμονική ταλάντωση πάνω στον άξονα y'y και του A που κινείται κυκλικά με γωνιακή ταχύτητα ω . Πράγματι, η θέση του

* Εδώ εννοούμε πως θα δούμε αν ισχύει για συγκεκριμένο φυσικό μέγεθος, π.χ. πίεση, ή ηλ. πεδίο κ.λ.π., εξετάζοντας (από φυσική άποψη) ποιά σχέση συνδέει π.χ. το $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$ με το

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$



Η συναρτήσεί του χρόνου είναι $y = \rho \eta \omega t$ ενώ του A είναι $\varphi = \omega t$ (σε δεδομένο

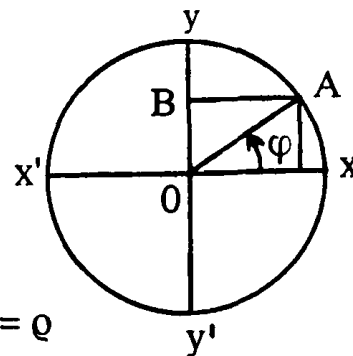
κύκλο ρ). Γνωρίζοντας για κάθε t τις πολικές συντεταγμένες του A($\rho, \varphi(t)$) μπορούμε να προσδιορίσουμε το πλάτος ρ και την φάση $\varphi = \omega t$ της αρμονικής (ημιτονοειδούς) ταλάντωσης που αντιστοιχεί στην κίνηση του A. Αν επιθυμούμε να κάνουμε κάποιες πράξεις με ταλαντώσεις γραμμένες στην πολική τους μορφή, δηλ. έχοντας ζεύγη αριθμών (ρ, φ) δεν είναι πολύ βολικό. Γι' αυτό χρησιμοποιούμε την μιγαδική αναπαράσταση της ομαλής κυκλικής κίνησης που επιτρέπει αλγεβρικές πράξεις με απλούς αριθμούς και όχι

ζεύγη. Συναρτήσεί των ρ και φ η θέση του A καθορίζεται από το μιγαδικό αριθμό $z = \rho \exp(i\varphi)$. Η σχέση αυτή προκύπτει αν θεωρήσουμε τον $x'x$ ως άξονα των πραγματικών αριθμών, $y'y$ των φανταστικών, ότι $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ και το ανάπτυγμα του $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ και του $\exp(i\varphi)$ κατά MacLaurin.

Ο μιγαδικός αριθμός $z = \rho e^{i\omega t}$ εκτός από την ημιτονοειδή μεταβολή $y = \rho \eta \omega t$ ορίζει επίσης και την συνημιτονοειδή μεταβολή $x = \rho \cos \omega t$. Ανάλογα με το συγκεκριμένο πρόβλημα (αν δηλαδή έχουμε ημιτονοειδή ή συνημιτονοειδή μεταβολή) θα μπορούμε να πάρουμε το φανταστικό ή το πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού όταν θα έχουμε εκτελέσει τις απαιτούμενες πράξεις. Η δυνατότητα αυτή οφείλεται στο ότι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού δεν ανακατεύονται όταν εκτελούμε γραμμικούς μετασχηματισμούς και έτσι σε μία εξίσωση (διαφορική ή αλγεβρική) θα μπορούμε να εξισώσουμε τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη ξεχωριστά.

Π.χ. έστω ότι έχουμε τις ταλαντώσεις $x_1 = A_1 \eta \mu \omega_1 t$ και $x_2 = A_2 \eta \mu \omega_2 t$ και θέλουμε να βρούμε τη συνιστάμενη ταλάντωση. Κατά την αρχή της επαλληλίας

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \eta \mu \omega_1 t + A_2 \eta \mu \omega_2 t$$



Σχήμα 3 Η αναπαράσταση της γραμμικής αρμονικής ταλάντωσης με μιγαδικούς αριθμούς βασίζεται στην αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ κυκλικής κίνησης και της προβολής στον άξονα των x (ή των y)



Την ίδια απάντηση θα πάρουμε αν θεωρήσουμε τις x_1, x_2 ως τα φανταστικά μέρη των z_1, z_2 , δηλ. $x_1 = \text{Im} z_1$, $x_2 = \text{Im} z_2$. Για απλότητα, παραλείπουμε συνήθως το σύμβολο Im (και το Re για το πραγματικό μέρος) και γράφουμε απλώς την ταλάντωση x_1 ως τον μιγαδικό αριθμό z_1 . Εννοείται όμως πως δεν είναι ίσα, αλλά έχουμε απλώς αντιστοιχίσει στον x_1 τον z_1 . Έχουμε λοιπόν

$$z = z_1 + z_2 = A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t} \quad (2)$$

Η (2) θα ισχύει χωριστά για τα πραγματικά μέρη και χωριστά για τα φανταστικά. Η ζητούμενη ταλάντωση θα είναι το $\text{Im} z$, αφού οι αρχικές ταλαντώσεις είναι ημιτονοειδείς. Συνεπώς έχουμε από την (2):

$$\text{Im} z = A_1 \eta \mu \omega_1 t + A_2 \eta \mu \omega_2 t,$$

όπως βρήκαμε και με τον προηγούμενο τρόπο. Από την (2) βρίσκουμε επίσης ότι: $\text{Re} z = A_1 \sigma \upsilon \nu \omega_1 t + A_2 \sigma \upsilon \nu \omega_2 t$ που μας δίνει την επαλληλία δύο συνημιτονοειδών ταλαντώσεων*.

Αν μία ταλάντωση έχει αρχική φάση θα γράφεται $x = A \eta \mu(\omega t + \varphi)$. Αντίστοιχα ο μιγαδικός που την εκφράζει θα είναι ο αριθμός: $z = A e^{i(\omega t + \varphi)} = A e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t} = \hat{r} e^{i\omega t}$ όπου $\hat{r} = A e^{i\varphi}$ δηλ. γενικά το πλάτος μπορεί να είναι ένας μιγαδικός αριθμός. Αυτό σημαίνει απλώς ότι το περιστρεφόμενο άνυσμα A για το $t=0$ σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Οι σπουδαιότερες ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών όσον αφορά τη χρήση τους στις αρμονικές μεταβολές είναι:

(α) Το μέτρο του $z = r e^{i\varphi} = a + i\beta$ είναι: $|z| = r = (zz^*)^{1/2} = (a^2 + \beta^2)^{1/2}$

(β) $\epsilon \varphi \varphi = \frac{\beta}{\alpha}$

(γ) Το μέτρο του z^{-1} είναι r^{-1} ενώ η γωνία του είναι $-\varphi$

(δ) $i e^{i\varphi} = e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})}$, $-i e^{i\varphi} = e^{i(\varphi - \frac{\pi}{2})}$

(ε) $e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2 \sigma \upsilon \nu \varphi$ $e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i \eta \mu \varphi$

Ας υπολογίσουμε τώρα ακριβώς το αποτέλεσμα της επαλληλίας δύο συνημιτονοειδών ταλαντώσεων της ίδιας συχνότητας και διαφορετικής αρχικής φάσης.

Ζητάμε δηλαδή το $x_1 + x_2 = x$ όπου $x_1 = A_1 \sigma \upsilon \nu(\omega t + \varphi_1)$ και $x_2 = A_2 \sigma \upsilon \nu(\omega t + \varphi_2)$.

Θεωρούμε τους αντίστοιχους μιγαδικούς αριθμούς που περιγράφουν αυτές τις ταλαντώσεις:

* Πώς θα χρησιμοποιήσουμε μιγαδικούς όταν η μία είναι ημιτονοειδής και η άλλη συνημιτονοειδής;



$$z_1 = A_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} \quad \text{και} \quad z_2 = A_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)}$$

οπότε το ζητούμενο είναι:

$$z = z_1 + z_2 = A_1 \exp i(\omega t + \varphi_1) + A_2 \exp i(\omega t + \varphi_2) = e^{i\omega t} (A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}) = \hat{A} e^{i\omega t}$$

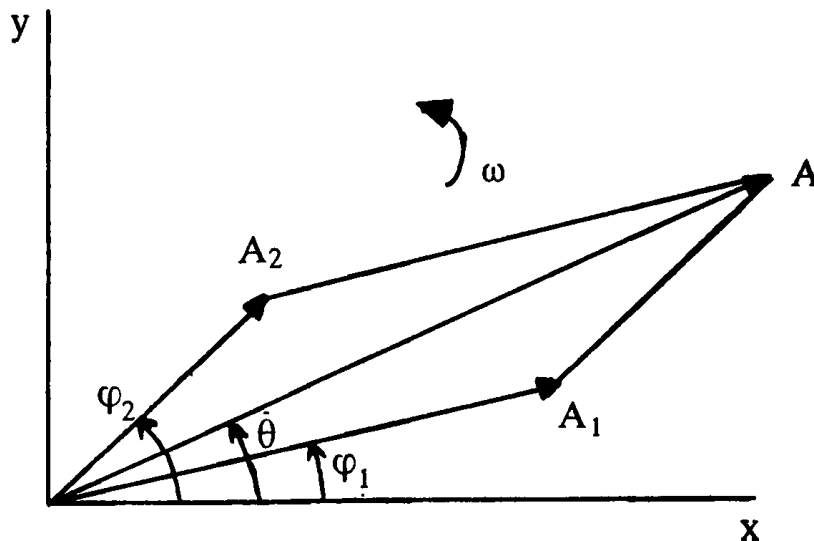
όπου $\hat{A}$ ο μιγαδικός αριθμός $A_1 \exp i\varphi_1 + A_2 \exp i\varphi_2 \equiv \hat{A} e^{i\theta}$

Έχουμε λοιπόν $z = \hat{A} e^{i\omega t}$, οπότε μένει να βρούμε το μέτρο του $\hat{A}$ και την αρχική του φάση θ για να λυθεί το πρόβλημα.

$$\text{Θα είναι: } |\hat{A}|^2 = \hat{A} \hat{A}^* = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{A_1 \eta\mu\varphi_1 + A_2 \eta\mu\varphi_2}{A_1 \sigma\upsilon\nu\varphi_1 + A_2 \sigma\upsilon\nu\varphi_2}$$

Τελικά, η συνιστάμενη ταλάντωση θα δίδεται από το $\text{Re} z = |\hat{A}| \sin(\omega t + \theta)$. Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε τριγωνομετρικά και ανυσματικά. Με τη δεύτερη μέθοδο, το πλάτος της συνιστάμενης ταλάντωσης A ευρίσκεται σύμφωνα με τους



Σχήμα 4 Σύνθεση δύο ταλαντώσεων όταν αυτές θεωρηθούν ως περιστρεφόμενα ανύσματα με γωνιακή ταχύτητα ω .

κανόνες συνθέσεως ανυσμάτων. Προσέξτε ότι η σύνθεση $\vec{A}_1 + \vec{A}_2 = \vec{A}$ αντιστοιχεί ακριβώς στην πρόσθεση δύο μιγαδικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο*. Το παραπάνω διάγραμμα ισχύει για οποιαδήποτε χρονική στιγμή, επειδή η διαφορά φάσεως $\varphi_1 - \varphi_2$ είναι σταθερή. Ολόκληρο το

* Θυμηθείτε εδώ ότι η προβολή της συνισταμένης ισούται με το άθροισμα των προβολών των συνιστωσών.



διάγραμμα περιστρέφεται αμετάβλητο με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από το 0 καθώς περνάει ο χρόνος.

1.4 Εφαρμογή των μιγαδικών στην εξαναγκασμένη ταλάντωση

Ο β' νόμος του Νεύτωνα για ένα ταλαντωτή μάζας m και σταθεράς k (δύναμη επαναφοράς $=-kx$), ο οποίος διεγείρεται από μία αρμονικά μεταβαλλόμενη δύναμη $F=F_0 e^{i\omega t}$ θα είναι:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{F}{m} \quad (1)$$

Δεν είναι απαραίτητο η F να είναι μηδέν για $t=0$. Στη γενική περίπτωση $F=F_0 \exp(i\omega t + \phi)$ οπότε βλέπουμε ότι το πλάτος της F είναι ο μιγαδικός αριθμός $\hat{F}_0 = F_0 \exp i\phi$. Αυτό σημαίνει ότι η δύναμη έχει μία αρχική φάση ϕ .

Ας αναζητήσουμε μία μιγαδική λύση της (1). Από φυσική άποψη αυτό σημαίνει ότι αφού η διεγείρουσα δύναμη είναι αρμονική περιμένουμε η απομάκρυνση να είναι αρμονική*. Για να υπάρχει η λύση $x=\hat{x}_0 \exp i\omega t$, βρίσκουμε αντικαθιστώντας στην (1) ότι θα πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$\hat{x}_0 = \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \hat{F}_0 \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (2)$$

Η ζητούμενη λύση δίδεται από την (2) επί $e^{i\omega t}$. Αφού ο συντελεστής αναλογίας μεταξύ $\hat{x}_0$ και $\hat{F}_0$ είναι πραγματικός αριθμός βλέπουμε ότι η απομάκρυνση έχει είτε την ίδια φάση, όταν $\omega_0 > \omega$, είτε καθυστερεί κατά 180° , όταν $\omega_0 < \omega$. Το ίδιο μπορεί να δεί κανείς χρησιμοποιώντας τη συνημιτονοειδή έκφραση της F . Έστω δηλαδή ότι η εξαναγκάζουσα δύναμη είναι η $F=F_0 \sin(\omega t + \phi)$. Για να βρούμε την απομάκρυνση εξισώνουμε τα πραγματικά μέρη στην (2) οπότε έχουμε (αφού πολλαπλασιάσουμε την (2) με $\exp i\omega t$):

$$x_0 \sin(\omega t + \theta) = \alpha F_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (3)$$

όπου α θετικός ή αρνητικός. Για να ισχύει η (3) για κάθε t θα πρέπει όταν $\alpha > 0$ να είναι $\theta = \phi$ ή όταν $\alpha < 0$ να είναι $\theta = \phi + \pi$.

Όταν ο ταλαντωτής κινείται με απόσβεση, δηλ. υπάρχει τριβή που αντιτίθεται στην κίνηση, ο β' νόμος του Νεύτωνα γράφεται:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F$$

* Αυτή είναι μία δυνατή λύση αλλά όχι η μοναδική. Θα δείτε άλλες λύσεις στην Κλασική Μηχανική.



όπου η δύναμη τριβής υποτίθεται ότι είναι ανάλογη με την ταχύτητα και αντίθετης φοράς. Θέτοντας $\frac{c}{m} = \gamma$, $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ έχουμε

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} \quad (4)$$

Εργαζόμενοι όπως και προηγουμένως βρίσκουμε ότι το πλάτος (μιγαδικό εν γένει) της απομάκρυνσης θα σχετίζεται με το πλάτος της F με τη σχέση:

$$\hat{x}_0 = \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} \hat{F}_0 \quad (5)$$

Τώρα βλέπουμε ότι ο συντελεστής αναλογίας μεταξύ $\hat{x}_0$ και $\hat{F}_0$ δεν είναι πραγματικός αριθμός. Αυτό σημαίνει ότι η απομάκρυνση θα ταλαντώνεται με φάση ως προς την F διαφορετική από 0 ή π . Για να το δείτε αυτό μιγαδικά πάρτε τον $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ και πολλαπλασιάστε τον με τον μιγαδικό $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$. Θα δείτε ότι το γινόμενο είναι σε τυχαία φάση ως προς τον z_1 εκτός εάν ο z_2 έχει μόνον πραγματικό μέρος (δηλ. $\varphi_2 = 0$ ή π).

Από την (5) βρίσκουμε τόσο το πλάτος όσο και την αρχική φάση της απομάκρυνσης. Το πλάτος θα ισούται με το γινόμενο F_0 επί το μέτρο του μιγαδικού αριθμού $z = [m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)]^{-1}$, ήτοι:

$$x_0 = \frac{1}{m \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2 \right]^{\frac{1}{2}}} F_0 \quad (6)$$

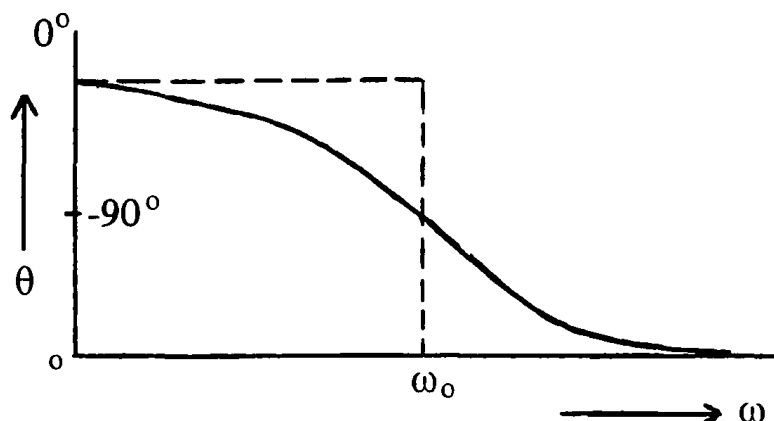
Η (5) δείχνει ότι η αρχική φάση του x θα διαφέρει από την αρχική φάση* της F όσο ακριβώς είναι η φάση του z . Αν είναι θ η φάση του z τότε

$$\epsilon\varphi\theta = - \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (7)$$

Η διαφορά φάσεως θ μεταξύ x και F έχει την εξής μορφή, που προκύπτει από την διερεύνηση της (7).

* Φυσικά η διαφορά φάσεως για κάθε ω θα ισούται με τη διαφορά των αρχικών φάσεων αφού x και F έχουν την ίδια ω .

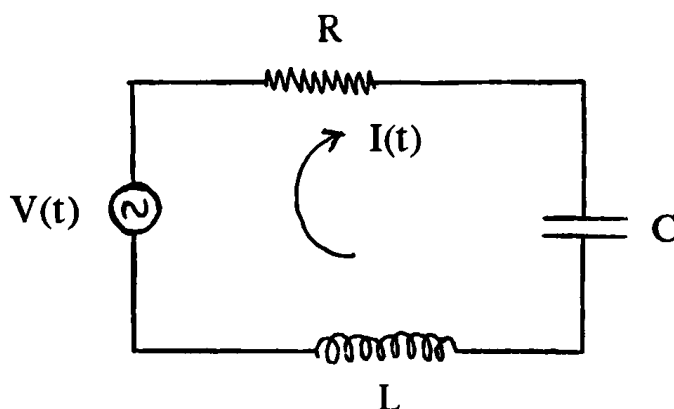




Σχήμα 5 Η μετατόπιση x καθυστερεί ως προς τη διέγερση F μέχρι $\sim 180^\circ$ όταν η συχνότητα της F γίνει πολύ μεγάλη. Όταν η F ταλαντώνεται πολύ αργά ($\omega \rightarrow 0$) ο ταλαντωτής τείνει να παρακολουθήσει την κίνηση της F .

Η διακεκομμένη γραμμή παριστάνει την διαφορά φάσεως χωρίς απόσβεση. Η γραφική παράσταση της (6) είναι η γνωστή καμπύλη συντονισμού.

Μία ακριβώς ανάλογη εξίσωση με την (4) προκύπτει αν αντί για ένα μηχανικό ταλαντωτή εξετάσουμε έναν ηλεκτρικό ταλαντωτή.



Σχήμα 6 Εξαναγκασμένη ταλάντωση ηλεκτρικού ταλαντωτή

Δεδομένου ότι $V_R = IR = R \frac{dq}{dt}$, $V_C = \frac{q}{C}$ και $V_L = L \frac{dI}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2}$ θα έχουμε από τον κανόνα του Kirchhoff:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V(t) \quad (8)$$

Παριστάνοντας την $V(t)$ με μιγαδικό αριθμό μπορούμε να βρούμε τον μιγαδικό αριθμό που θα παριστάνει το φορτίο. Συγκεκριμένα, τα μιγαδικά πλάτη $\hat{q}_0$ και $\hat{V}_0$ συνδέονται με τη σχέση:



$$\hat{q}_0 = \frac{1}{L(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} \hat{V}_0 \quad (9)^*$$

$$\text{όπου } \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \text{ και } \gamma = \frac{R}{L}$$

Για να βρούμε τη σχέση μεταξύ ρεύματος και τάσεως παρατηρούμε ότι

$$I = \frac{dq}{dt} = i\omega q \text{ ή } \hat{I}_0 e^{i\omega t} = i\omega \hat{q}_0 e^{i\omega t} \text{ άρα } \hat{I}_0 = i\omega \hat{q}_0, \text{ με τη βοήθεια του οποίου}$$

η (9) μετατρέπεται στη σχέση:

$$\hat{V}_0 = (i\omega L + R - i \frac{1}{\omega C}) \hat{I}_0$$

Η ποσότητα $R + i\omega L - i \frac{1}{\omega C} = Z$ ονομάζεται σύνθετη αντίσταση του

κυκλώματος. Είναι ένας μιγαδικός αριθμός ο οποίος καθορίζει αφ' ενός το μέτρο του $\hat{I}_0$ και αφ' ετέρου τη φάση του $\hat{I}_0$ για δεδομένη διέγερση $\hat{V}_0$ (δηλ. δεδομένο πλάτος V_0 και αρχική φάση ϕ του $\hat{V}_0$). Κάθε προσθετός της Z δείχνει πώς επηρεάζεται η φάση του ρεύματος σε σχέση με τη φάση της τάσεως από το αντίστοιχο στοιχείο κυκλώματος. Παρατηρούμε ότι η ωμική αντίσταση R εμφανίζεται ως πραγματικός αριθμός μέσα στη Z , συνεπώς το ρεύμα δεν θα αλλάξει τη φάση του ως προς την τάση λόγω της R . Αντίθετα η συνεισφορά της αυτεπαγωγής και της χωρητικότητας χαρακτηρίζεται από τους φανταστικούς αριθμούς $i\omega L$ και $1/i\omega C$ αντιστοίχως, που σημαίνει ότι η φάση του ρεύματος θα μετατοπιστεί κατά 90° για κάθε ένα από τα στοιχεία L, C . Ποιά θα είναι συνολικά η φάση του I ως προς το V εξαρτάται από το σχετικό μέγεθος της ωμικής (R), της χωρητικής ($1/\omega C$) και της επαγωγικής (ωL) αντίστασης.

1.5 Σύνθεση ταλαντώσεων με $\omega_1 \neq \omega_2$

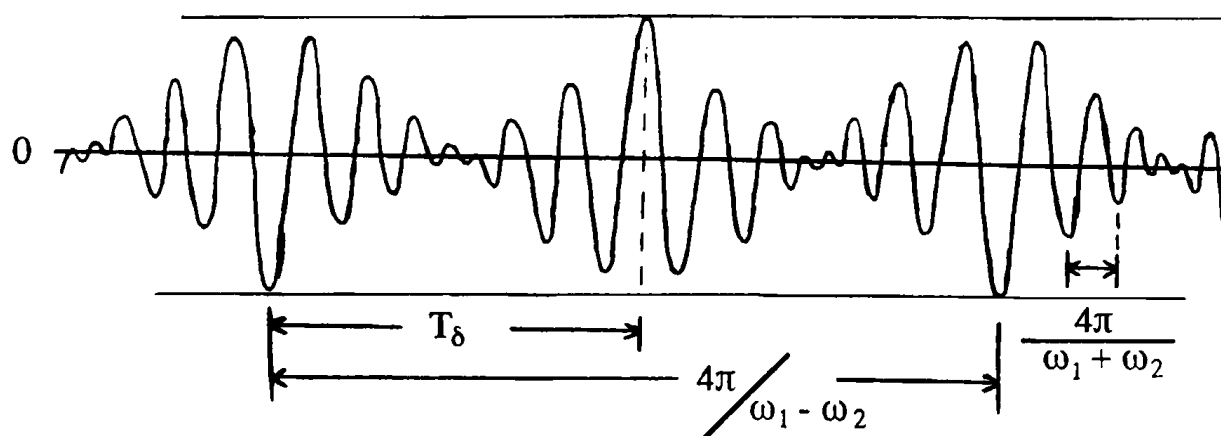
Έστω ότι σε κάποιο σημείο δρούν συγχρόνως δύο ταλαντώσεις με την ίδια συχνότητα και διαφορά φάσεως μηδενική. Το συνολικό πλάτος θα είναι μέγιστο. Αν αλλάξουμε λίγο την αρχική φάση της μιας ταλάντωσης το συνολικό πλάτος θα ελαττωθεί κάπως. Αν φανταστούμε ότι με κάποιο τρόπο μεταβάλλουμε συνεχώς την αρχική φάση της μιας ταλάντωσης, οπότε η διαφορά φάσεως θα περνάει διαδοχικά από όλες τις τιμές $0-360^\circ$, τότε το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης θα παίρνει αντίστοιχα όλες τις τιμές από τη μέγιστη μέχρι μηδέν στις 180° και μετά πάλι τη μέγιστη στις 360° .

* Παρατηρείστε τις ομοιότητες της (9) και της (5), ή ισοδύναμα της ομοιότητες της (4) με την (8)



Μαθηματικά, τα προηγούμενα σημαίνουν ότι αν η φάση της μίας ταλάντωσης είναι $\varphi_1 = \omega t$, της άλλης θα είναι $\varphi_2 = \omega t + \varphi(t)$ και το $\varphi(t)$ θα προκαλεί τη συνεχή μεταβολή της $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ άρα και του συνολικού πλάτους. Στην πιο απλή περίπτωση μπορούμε να ρυθμίσουμε ώστε $\varphi(t) = \omega' t$ όπου ω' είναι ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η $\Delta\varphi$. Βλέπουμε λοιπόν ότι συνθέτοντας δύο ταλαντώσεις με ίδιες συχνότητες και διαφορά φάσεως που αυξάνεται γραμμικά, θα πάρουμε μία ταλάντωση που θα έχει την ίδια συχνότητα. Το πλάτος της θα γίνεται μέγιστο κάθε φορά που η $\Delta\varphi = \omega' t$ θα αποκτά την τιμή $0, 2\pi, 4\pi$ κλπ. και θα γίνεται μηδέν κάθε φορά που η $\Delta\varphi$ θα παίρνει την τιμή $\pi, 3\pi, 5\pi$ κλπ., δηλαδή το πλάτος θα μεταβάλλεται περιοδικά με κυκλική συχνότητα ω' .

Μία ταλάντωση που το πλάτος της δεν είναι σταθερό αλλά μεταβάλλεται περιοδικά θα έχει την παρακάτω μορφή κατά προσέγγιση. (Τα σύμβολα εξηγούνται παρακάτω).



Σχήμα 7 Σύνθεση δύο ταλαντώσεων με διαφορετικές κυκλικές συχνότητες ω_1 και ω_2 .

Παρατηρείστε τις διάφορες περιοδικότητες που εμφανίζονται.

Επειδή ο καθοριστικός παράγων στη σύνθεση δύο ταλαντώσεων είναι η διαφορά φάσεως και αφού η φάση της κάθε μίας εξαρτάται από δύο όρους, τον ωt και την αρχική φάση, είναι φανερό ότι τα προηγούμενα φαινόμενα μπορούμε να τα παρατηρήσουμε με δύο ταλαντώσεις της ίδιας αρχικής φάσεως αλλά διαφορετικών συχνοτήτων. Εδώ, σε κάθε χρονική στιγμή η $\Delta\varphi$ ισούται με $(\omega_1 - \omega_2)t$, αν υποθέσουμε χάριν απλότητας ότι οι αρχικές φάσεις είναι ίδιες. Αν τώρα αναζητήσουμε τον χρόνο μετά από τον οποίο το $\Delta\varphi$ θα γίνει ίσο με 360° θα βρούμε την περίοδο μεταβολής του πλάτους, αφού το



πλάτος γίνεται μέγιστο κάθε φορά που το $\Delta\phi$ παίρνει την τιμή $0, 2\pi, 4\pi$ κλπ. Έχουμε λοιπόν $2\pi = (\omega_1 - \omega_2)T_\delta$ και

$$T_\delta = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} \quad (1)$$

Ας δούμε το πρόβλημα περισσότερο μαθηματικά. Η επαλληλία των ταλαντώσεων $y_1 = y_0 \sin \omega_1 t$ και $y_2 = y_0 \sin \omega_2 t$ θα είναι η ταλάντωση:

$$y = y_1 + y_2 = 2y_0 \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \quad (2)$$

Η μορφή που παριστάνει η εξίσ. (2) μπορεί να περιγραφεί με δύο ισοδύναμους τρόπους: (α) Σαν μία ταλάντωση μεγάλης συχνότητας $(\omega_1 + \omega_2)/2$ της οποίας το πλάτος μεταβάλλεται στον ρυθμό μίας μικρής συχνότητας $(\omega_1 - \omega_2)/2$. (β) Σαν μία αργή ταλάντωση της οποίας η απομάκρυνση μεταβάλλεται στο ρυθμό της $(\omega_1 + \omega_2)/2$. Είναι καθιερωμένο η ταλάντωση (2) να περιγράφεται με τον α' τρόπο. Πιο σύντομα λέμε ότι η ταλάντωση $\sin(\omega_1 + \omega_2)t/2$ είναι διαμορφωμένη από την ταλάντωση $\sin(\omega_1 - \omega_2)t/2$.

Το προηγούμενο σχήμα αποτελεί παράδειγμα της ταλάντωσης που εκφράζει η (2). Παρατηρούμε από την (2) (βλέπε και στο σχήμα) ότι υπάρχουν διάφορες περιοδικότητες. Κατ' αρχήν οι μέγιστες* θετικές (καθώς και οι μέγιστες αρνητικές) απομακρύνσεις έχουν συχνότητα $(\omega_1 + \omega_2)/2$ δηλ. τη μέση τιμή των συχνοτήτων που υπερτίθενται. Αυτό οφείλεται στον παράγοντα $\sin(\omega_1 + \omega_2)t/2$. Ο παράγων $\sin(\omega_1 - \omega_2)t/2$ δείχνει ότι ο χρόνος μεταξύ δύο αρνητικών μεγίστων (ή δύο θετικών) του πλάτους είναι $4\pi/(\omega_1 - \omega_2)$. Όμως, τόσο όταν το πλάτος είναι $2y_0$ όσο και όταν είναι $-2y_0$ οι δύο ταλαντώσεις y_1 και y_2 είναι σε φάση. Άρα η περίοδος σύμπτωσης των φάσεων είναι το μισό της περιόδου του $\sin(\omega_1 - \omega_2)t/2$, κάτι το οποίο βρήκαμε προηγουμένως με άλλο τρόπο (εξ. (1)).

Αξίζει να σχολιάσουμε εδώ δύο σημεία τα οποία αποτελούν πηγή σύγχυσης στη βιβλιογραφία. Το ένα αφορά την ονομασία του όρου $(2y_0 \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t)$ ως πλάτους. Αυτό κανονικά είναι ένα λάθος που

περιέχεται σε όσα βιβλία ξέρω (το κάνω κι εγώ στην προηγούμενη παράγραφο). Είναι λάθος επειδή το πλάτος είναι εξ ορισμού θετικός αριθμός. Ακριβέστερα θα πρέπει να ονομάσουμε πλάτος της $\sin(\omega_1 + \omega_2)t/2$

* Εδώ μιλάμε για τοπικά μέγιστα.



την απόλυτη τιμή του όρου αυτού. Όταν γίνει αυτό, η περίοδος του πλάτους βγαίνει πως είναι $2\pi/(\omega_1 - \omega_2)$ όπως στην εξ. (1).

Το άλλο σημείο αφορά την περιοδικότητα της ίδιας της σύνθετης ταλάντωσης y , όπως δίνεται από την (2), στην οποία δεν αναφερθήκαμε μέχρι τώρα. Στο παράδειγμα του σχήματος φαίνεται πως η περίοδος T της y είναι $4\pi/(\omega_1 - \omega_2)$, δηλαδή ίση με την περίοδο του $\sin(\omega_1 - \omega_2)t/2$. Αυτό δεν έχει γενική ισχύ· μπορεί η T να είναι ίση με T_δ , ή να είναι μεγαλύτερη από $4\pi/(\omega_1 - \omega_2)$, ή ακόμη η y να μην είναι καν περιοδική συνάρτηση. Όλα αυτά εξαρτώνται από τη σχέση που έχουν οι συχνότητες ω_1 και ω_2 μεταξύ τους. Δοκιμάστε π.χ. να βρείτε ποιά συνθήκη πρέπει να ισχύει για τις ω_1 και ω_2 ώστε η περίοδος της y να είναι ίση με την T_δ .

Τα μέγιστα του πλάτους της συνιστάμενης ταλάντωσης ονομάζονται διακροτήματα. Όταν συνθέσουμε δύο ήχους με συχνότητες π.χ. 1000 Hz και 996 Hz θα ακούσουμε έναν ήχο με συχνότητα 998 Hz του οποίου η ένταση θα αυξομειώνεται με ρυθμό 4 Hz. Αυτό οφείλεται στο ότι η ένταση είναι ανάλογη με το τετράγωνο του πλάτους και γνωρίζουμε τώρα ότι το πλάτος* θα μεταβάλλεται αρμονικά με περίοδο 4 Hz.

Μπορεί κανείς να μελετήσει παραστατικά τα διακροτήματα αν διερευνήσει την κίνηση δύο κινητών σε ένα κύκλο με διαφορετικές γωνιακές ταχύτητες. Διακρότημα θα έχουμε οποτεδήποτε τα δύο κινητά συναντώνται σε κάποιο σημείο.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα διαμόρφωσης (σελ. 16) και σχηματισμού διακροτημάτων έχουμε στη διαμόρφωση πλάτους (amplitude modulation AM) που γίνεται στις ραδιοφωνικές εκπομπές. Κάθε σταθμός έχει μία χαρακτηριστική συχνότητα στην οποία εκπέμπει το φέρον κύμα του. Το φέρον κύμα είναι κάποια υψηλή ραδιοσυχνότητα με σταθερό πλάτος $\xi = \xi_0 \eta \mu \omega_0 t$. Για να εκπεμφθεί μία ακουστική συχνότητα πρέπει να διαμορφωθεί (=αυξομειωθεί) το πλάτος ξ_0 στο ρυθμό της χαμηλής συχνότητας. Μαθηματικά αυτό εκφράζεται ως:

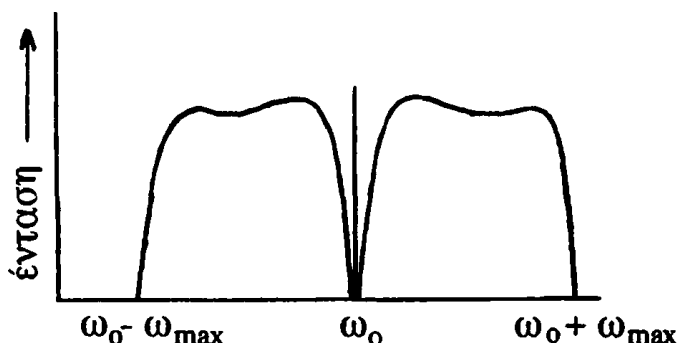
$$\xi_2 = (\xi_0 + \xi_1 \eta \mu \omega_1 t) \eta \mu \omega_0 t = \xi_0 \eta \mu \omega_0 t + \frac{\xi_1}{2} \sin(\omega_0 - \omega_1)t - \frac{\xi_1}{2} \sin(\omega_0 + \omega_1)t \quad (3)$$

Παρατηρούμε ότι μια συχνότητα ω_0 διαμορφωμένη κατά πλάτος από μία συχνότητα ω_1 αποτελείται από την επαλληλία τριών συχνοτήτων: της κεντρικής ω_0 και δύο πλευρικών $\omega_0 + \omega_1$ και $\omega_0 - \omega_1$.

* Αφού η ένταση πάει με το τετράγωνο του πλάτους, η ένταση θα έχει την περίοδο που έχει η απόλυτη τιμή του $\sin(\omega_1 - \omega_2)t/2$.



Όταν το φέρον κύμα διαμορφωθεί από δύο ακουστικές συχνότητες ω_1 και ω_2 το συνισταμένο κύμα θα αποτελείται από τα αρμονικά κύματα με συχνότητες ω_0 , $\omega_0 + \omega_1$, $\omega_0 + \omega_2$, $\omega_0 - \omega_1$ και $\omega_0 - \omega_2$. (Αποδείξτε ακριβώς γιατί θα συμβεί αυτό). Γενικότερα, κατά την εκπομπή μουσικής και λόγου το εκπεμπόμενο κύμα έχει ένα φάσμα συχνοτήτων που αποτελείται από το φέρον κύμα του πομπού ω_0 και δύο ζώνες συχνοτήτων, την πάνω και κάτω πλευρική ζώνη όπως ονομάζονται. Η πάνω πλευρική ζώνη περιλαμβάνει τις συχνότητες από $\omega_0 + \omega_{\min}$ έως $\omega_0 + \omega_{\max}$ όπου $\omega_{\min}$ και $\omega_{\max}$ τα όρια του φάσματος των ακουστικών συχνοτήτων*. Η κάτω πλευρική ζώνη περιλαμβάνει αντίστοιχα τις συχνότητες από $\omega_0 - \omega_{\min}$ έως $\omega_0 - \omega_{\max}$. Οι εντάσεις των πλευρικών συχνοτήτων (ή ισοδύναμα τα πλάτη τους) θα μεταβάλλονται γενικά με τον χρόνο καθώς αλλάζει η ένταση της ομιλίας και της μουσικής στις διάφορες ακουστικές συχνότητες. Σχηματικά το φάσμα εκπομπής ενός πομπού AM θα είναι το εξής:



Σχήμα 8 Φάσμα εκπομπής ενός πομπού με διαμόρφωση πλάτους (AM) μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Εκτός από τη διαμόρφωση AM χρησιμοποιείται και η διαμόρφωση στην οποία το πλάτος διατηρείται σταθερό αλλά η φάση του φέροντος κύματος μεταβάλλεται στο ρυθμό της ακουστικής συχνότητας. Η φάση ενός κύματος βέβαια καθορίζεται από δύο παράγοντες, τη συχνότητα και την αρχική φάση. Από αυτό βλέπουμε ότι υπάρχουν δύο τρόποι να πετύχουμε αυτού του είδους τη διαμόρφωση. Έστω πως το φέρον κύμα είναι το $\xi = \xi_0 \eta\mu(\omega_0 t + \varphi)$. Ο ένας τρόπος είναι να μεταβάλλουμε την ω_0 σύμφωνα με κάποια ακουστική συχνότητα ω_1 . Μαθηματικά, αυτή η διαμόρφωση μπορεί να γραφεί:

$$\xi = \xi_0 \eta\mu(\omega_0 + \xi_1 \eta\mu\omega_1 t) t \quad (4)$$

* Για την ακρίβεια, στην εκπομπή AM δεν χρησιμοποιείται όλο το ακουστικό φάσμα αλλά μέρος αυτού, τόσο όσο χρειάζεται για να είναι παραδεκτός ο ήχος.



όπου παραλείψαμε την αρχική φάση ϕ , θεωρώντας την μηδέν, αφού σ' αυτή την περίπτωση είναι σταθερή και δεν περιέχει καμμία πληροφορία. Η διαμόρφωση αυτή ονομάζεται διαμόρφωση συχνότητας (FM).

Εναλλακτικά μπορούμε να πετύχουμε μεταβολή της φάσεως αλλάζοντας συνεχώς την αρχική φάση και κρατώντας τη συχνότητα ω_0 σταθερή. Η μαθηματική έκφραση τώρα θα είναι:

$$\xi = \xi_0 \eta \mu(\omega_0 t + \xi_1 \eta \mu \omega_1 t) \quad (5)$$

Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε τη διαμόρφωση φάσης (Phase modulation PM). Από φυσική άποψη δεν υπάρχει ουσιαστική διαφορά μεταξύ FM και PM όπως είδαμε. Η διαφορά βρίσκεται στον ηλεκτρονικό τρόπο με τον οποίο επιτυγχάνεται η κάθε διαμόρφωση. Παρατηρείστε ότι για κάθε είδος διαμόρφωσης το ξ_1 έχει διαφορετικές διαστάσεις. Σε κάθε περίπτωση όμως, όπως και στην AM, προσδιορίζει το ποσό μεταβολής του μεγέθους του φέροντος κύματος το οποίο διαμορφώνεται. Π.χ. στην (4) το ξ_1 δείχνει ότι η ω_0 μεταβάλλεται συνεχώς από $\omega_0 - \xi_1$ έως $\omega_0 + \xi_1$.

Τόσο η διαμόρφωση FM όσο και η PM έχουν ως αποτέλεσμα την εκπομπή ενός φάσματος συχνοτήτων γύρω από την ω_0 . Από μαθηματική άποψη η ανάλυση του φάσματος FM και PM είναι πιο περίπλοκη υπόθεση από ότι στην AM και γι αυτό την παραλείπουμε.

Κλείνοντας το κεφάλαιο της επαλληλίας ταλαντώσεων με διαφορετικές συχνότητες προσθέτω εδώ τον μιγαδικό τρόπο εύρεσης της συνισταμένης έντασης που παρέλειψα εκ παραδρομής. Αν υπερθέσουμε τις ταλαντώσεις $\xi_1 = A_1 \exp(i\omega_1 t)$ και $\xi_2 = A_2 \exp(i\omega_2 t)$ θα πάρουμε μία ταλάντωση που θα έχει πλάτος A παρεχόμενο από τον τύπο:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \sin(\omega_1 - \omega_2)t$$

Βλέπουμε ότι το τετράγωνο του πλάτους A^2 μεταβάλλεται περιοδικά από την τιμή $(A_1 + A_2)^2$ μέχρι την τιμή $(A_1 - A_2)^2$ και ότι η συχνότητα αυτής της μεταβολής είναι $\omega_1 - \omega_2$, όπως είχαμε βρεί και προηγουμένως με άλλους τρόπους.

1.6 Κύματα στις τρεις διαστάσεις

Όταν ένα κύμα διαδίδεται στις τρεις διαστάσεις, κάθε χρονική στιγμή όλα τα σημεία που έχουν την ίδια φάση* βρίσκονται σε μία επιφάνεια. Η

* Θυμίζω τι σημαίνει ποιοτικά έχουν την ίδια φάση: βρίσκονται στο ίδιο σημείο της κίνησής τους· π.χ. αν μιλάμε για κύμα-παλμό, βρίσκονται έστω στα 2/3 της μέγιστης απομάκρυνσής τους πλησιάζοντας στη θέση ηρεμίας. Προσέξτε ότι για περιοδικά κύματα η τιμή της απομάκρυνσης δεν αρκεί για να προσδιορίσει τη φάση.



επιφάνεια αυτή ονομάζεται ισοφασική επιφάνεια ή μέτωπο του κύματος. Ανάλογα με τη γεωμετρία της ισοφασικής επιφανείας διακρίνουμε διάφορα είδη κυμάτων. Οι πιο απλές περιπτώσεις είναι τα επίπεδα κύματα, τα σφαιρικά και τα κυλινδρικά. Τα επίπεδα κύματα μπορεί να θεωρηθεί ότι παράγονται από μία επίπεδη κατανομή διαταραχών· π.χ. μία ορθογώνια σανίδα που τη δονούμε στον αέρα κάθετα προς το επίπεδό της δημιουργεί σε μικρή απόσταση επίπεδα κύματα υπερπίεσης και υποπίεσης. Τα σφαιρικά κύματα μπορεί να θεωρηθεί ότι γεννώνται από μία σημειακή πηγή μέσα σε ομογενές και ισότροπο μέσο. Τα κυλινδρικά τέλος, από μία γραμμική κατανομή διαταραχών που δρουν σε φάση μεταξύ τους*. Αντίστοιχα με την περίπτωση του μονοδιάστατου κύματος μπορούμε να πούμε ότι η φάση θα είναι το διώνυμο $(t-d/v)$ όπου d η απόσταση του υπό συζήτηση σημείου από την πηγή του κύματος, όποια είναι αυτή σε κάθε περίπτωση (δηλ. σημειακή πηγή, επίπεδο η ευθεία γραμμή).

Σημειώνω ότι στον ορισμό της ισοφασικής επιφανείας δεν υπάρχει καμμία αναφορά στο πλάτος της κυματικής μεταβολής. Αυτό υποδηλώνει ότι μπορεί σε μία ισοφασική επιφάνεια όλα τα σημεία να έχουν το ίδιο πλάτος (προκειμένου για αρμονικό κύμα), μπορεί όμως και να έχουν διαφορετικά πλάτη. Κύματα με μεταβλητό πλάτος πάνω στην ισοφασική επιφάνεια έχουν πολλές εφαρμογές· θα γνωρίσουμε ένα τέτοιο κύμα στη συμβολή δύο επιπέδων κυμάτων.

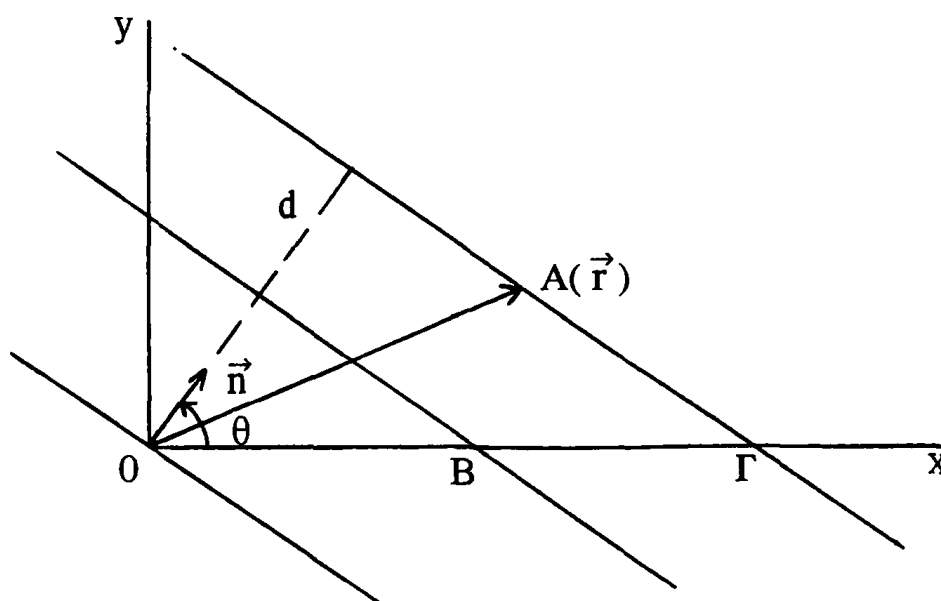
Ας δούμε κάπως λεπτομερέστερα τα επίπεδα αρμονικά κύματα που χρησιμοποιούνται ευρύτατα στην Κβαντική Φυσική. Η εξίσωση του επιπέδου κύματος είναι άμεση γενίκευση της εξίσωσης του μονοδιάστατου κύματος. Αν ένα κύμα διαδίδεται κατά τον άξονα των x και είναι μονοδιάστατο θα έχει εξίσωση $\xi(x,t) = f(t - \frac{x}{v})$. Η ίδια εξίσωση περιγράφει

ένα τρισδιάστατο επίπεδο κύμα που η διεύθυνση διαδόσεώς του συμπίπτει με τον άξονα των x *. Όταν το κύμα είναι αρμονικό η απομάκρυνση θα εξαρτάται από τη φάση $(\omega t - kx)$. Αν η διεύθυνση διαδόσεως δεν συμπίπτει με κάποιον από τους άξονες η φάση θα είναι

* Σε φάση πρέπει να δρουν και οι διαταραχές που παράγουν ένα επίπεδο κύμα.

* Για $x=\text{σταθ.}$ παίρνουμε όλα τα σημεία τα οποία βρίσκονται στο επίπεδο το κάθετο στον άξονα των x , στη θέση αυτή. Όλα τα σημεία αυτού του επιπέδου και μόνον αυτά έχουν την ίδια, συγκεκριμένη φάση για ορισμένο t .





Σχήμα 9 Τομές τριών μετώπων του επιπέδου κύματος που διαδίδεται κατά τη διεύθυνση $\vec{n}$, με το επίπεδο xOy .

$(\omega t - kd)$ όπου d η απόσταση της ισοφασικής επιφανείας από κάποιο σημείο αναφοράς (ή ισοδύναμα του τυχόντος σημείου της ισοφασικής επιφανείας από ένα επίπεδο αναφοράς). Αυτό το σημείο αναφοράς λαμβάνεται ως η θέση της πηγής του επιπέδου κύματος. (Συγκρίνατε με το μονοδιάστατο κύμα). Αν θεωρήσουμε το τυχόν σημείο A του μετώπου που απέχει κατά d από την αρχή, την χρονική στιγμή t , παρατηρούμε ότι $d = \vec{n} \cdot \vec{r}$. Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε τη φάση ως συνάρτηση οποιουδήποτε σημείου του μετώπου που ορίζεται με το άνυσμα θέσεώς του $\vec{r}$:

$$\varphi = \omega t - k \vec{n} \cdot \vec{r}$$

Το $k \vec{n}$ μάς ορίζει ένα άνυσμα με μέτρο τον κυματαριθμό k και διεύθυνση-φορά αυτή του μοναδιαίου $\vec{n}$. Το άνυσμα αυτό ονομάζεται κυματάνυσμα $\vec{k}$. Οι προβολές του $\vec{k}$ εκφράζουν το ρυθμό μεταβολής της φάσης με την αντίστοιχη συντεταγμένη π.χ. το k_x μας λέει ότι η φάση αλλάζει κατά k_x rad ανά μονάδα μήκους προς την διεύθυνση x . Αν θεωρήσουμε τα μέτωπα του παραπάνω σχήματος ότι απέχουν κατά λ μεταξύ τους, (που σημαίνει ότι τα μέτωπα αυτά έχουν ίδιες απομακρύνσεις), και κοιτάξουμε κατά μήκος του άξονα των x βλέπουμε ότι η ίδια απομάκρυνση επαναλαμβάνεται



κάθε $(OB)=(BG)=\lambda/\text{συν}\theta$. Είναι δηλαδή σαν το μήκος του κύματος να μεγαλώνει προς διευθύνσεις άλλες από την διεύθυνση μεταδόσεως $\vec{n}$ (το ίδιο φαίνεται και προς τον άξονα των y). Το ίδιο συνάγεται και από το ότι $k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2$ (γιατί;)*

Η εξίσωση ενός επιπέδου κύματος μπορεί λοιπόν να γραφεί:

$$\xi=\xi_0\text{συν}(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \text{ ή } \xi=\xi_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \text{ κλπ.}$$

Σε ομογενές και ισότροπο μέσο η διεύθυνση διαδόσεως είναι κάθετη προς την ισοφασική επιφάνεια**. Τις γραμμές που είναι κάθετες στις ισοφασικές επιφάνειες ονομάζουμε (κυρίως στην Οπτική) ακτίνες. Όταν ένα μέσο είναι ισότροπο αλλά όχι ομογενές θα δούμε ότι οι ακτίνες καμπυλώνονται, ή ισοδύναμα ότι τα μέτωπα επιπέδου κύματος δεν παραμένουν συνεχώς κάθετα προς την ίδια διεύθυνση. Σύμφωνα με τον ορισμό είναι φανερό ότι η εφαπτομένη σε κάθε σημείο μίας ακτίνας έχει την διεύθυνση του $\vec{k}$.

Οποιοδήποτε κύμα έχει ως αποτέλεσμα τη ροή ενέργειας από σημείο σε σημείο. Ορίζουμε ως ένταση του κύματος σε κάποιο σημείο του χώρου το πηλίκο της ενέργειας ΔE που διέρχεται από μία επιφάνεια ΔS τοποθετημένη κάθετα προς την ακτίνα διά της επιφανείας ΔS και δια του αντιστοίχου χρόνου Δt .

$$I = \frac{\Delta E}{\Delta S \Delta t}$$

Το σχήμα δείχνει δύο διαδοχικές θέσεις του μετώπου ενός κύματος που απέχουν κατά $\Delta \ell$. Η ενέργεια που πέρασε σε Δt , από την επιφάνεια ΔS γύρω από το Α, θα περιέχεται στον στοιχειώδη όγκο $\Delta V = \Delta S \cdot \Delta \ell$. Η ενέργεια που περιέχεται σ' αυτό τον όγκο είναι ίση με $(\Delta E / \Delta V) \Delta V$ όπου το πηλίκο $\Delta E / \Delta V$ είναι η πυκνότητα ενεργείας στο σημείο Α. Αν την συμβολίσουμε με ρ_E θα έχουμε:

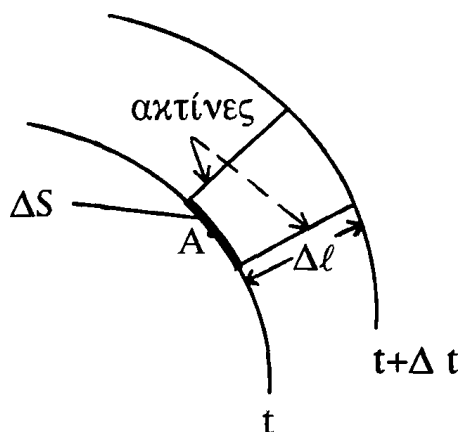
$$I = \frac{\Delta E}{\Delta S \Delta t} = \frac{\rho_E \Delta V}{\Delta S \Delta t} = \rho_E \frac{\Delta S \Delta \ell}{\Delta S \Delta t} = \rho_E v$$

* Παρατηρείστε ότι το $\vec{k}$ έχει την διεύθυνση της μεγίστης μεταβολής της φάσης φ με την απόσταση. Σας θυμίζει τίποτε αυτό;

** Αυτό είναι φανερό για τα επίπεδα, σφαιρικά και κυλινδρικά κύματα και μπορεί γενικά να αποδειχθεί μαθηματικά· δηλ. το αποδεικτέο είναι ότι η επιφάνεια με $\varphi=\text{σταθ.}$ είναι κάθετη σε τυχόν σημείο της στο $\vec{k}$ στο ίδιο σημείο.



Δηλαδή η ένταση σε κάποιο σημείο του χώρου μέσα στον οποίο διαδίδεται το κύμα ισούται με το γινόμενο της πυκνότητας ενεργείας επί την ταχύτητα του κύματος (φασική ή ομαδική;). Για κάθε αρμονικό κύμα μπορεί να αποδειχθεί ότι η πυκνότητα ενεργείας, άρα και η ένταση, είναι ανάλογη με το τετράγωνο του πλάτους της απομάκρυνσης.



Σχήμα 10 Για να ορίσουμε την ένταση του κύματος στο σημείο A θεωρούμε στοιχειώδη επιφάνεια ΔS γύρω από το A τοποθετημένη κάθετα προς την ακτίνα διαδόσεως

Παρατηρούμε τώρα ότι καθώς ένα σφαιρικό ή κυλινδρικό κύμα διαδίδεται η ενέργειά του κατανέμεται σε ολοένα και μεγαλύτερη επιφάνεια. Επομένως η ένταση θα ελαττώνεται με την απόσταση από την πηγή. Βρείτε την εξάρτηση της έντασης και του πλάτους από την απόσταση. Αυτό δεν συμβαίνει βέβαια στα επίπεδα κύματα όπου η ένταση μένει σταθερή με την απόσταση (Γιατί;)

2. ΣΥΜΒΟΛΗ ΚΥΜΑΤΩΝ

Θα εξετάσουμε τη συμβολή σφαιρικών και επιπέδων κυμάτων. Γενικά μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι σε κάποιο σημείο μέσα σε ένα πεδίο κυμάτων* θα δρουν διάφορες διαταραχές που μεταβάλλονται χρονικά. Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας η συνολική διαταραχή στο συγκεκριμένο σημείο θα ισούται με το άθροισμα των επί μέρους διαταραχών. Θα ασχοληθούμε προς το παρόν με μονόμετρα (βαθμωτά) κύματα ούτως ώστε για την εύρεση της συνισταμένης διαταραχής να αρκεί μία αλγεβρική πρόσθεση. Η επέκταση σε ανυσματικά κύματα θα γίνει αργότερα με ελάχιστες πρόσθετες δυσκολίες. Η παρούσα ανάλυση περιλαμβάνει και ανυσματικά κύματα με την προϋπόθεση ότι τα ανυσματικά κυματικά μεγέθη έχουν την ίδια διεύθυνση, οπότε έχει νόημα η αλγεβρική πρόσθεση.

Ουσιαστικά η συμβολή κυμάτων σε κάποιο σημείο είναι σύνθεση ταλαντώσεων που δρουν ανεξάρτητα στο σημείο αυτό. Η επί πλέον δυσκολία συνίσταται στο ότι η φάση ενός κύματος εξαρτάται όχι μόνον

* πεδίο κυμάτων, δηλ. χώρος όπου διαδίδονται κύματα.



από το χρόνο αλλά και από τη θέση του θεωρουμένου σημείου. Για δύο κύματα πρέπει κανείς να λάβει υπ' όψη του : (α) με τι διαφορά φάσεως άρχισαν να εκπέμπουν οι πηγές· (β) ποιά ήταν η διαφορά των δρόμων που διήνυσαν τα δύο κύματα μέχρι το εν λόγω σημείο· (γ) ποιά διαφορά φάσεως εισάγει αυτή η διαφορά δρόμου.

2.1 Σφαιρικά κύματα

Έστω πως οι δύο πηγές αρμονικών σφαιρικών κυμάτων Π_1 και Π_2

εκπέμπουν σε φάση (συγχρονισμένα) και είναι όμοιες. Με αυτό εννοούμε πως έχουν ίδια συχνότητα και ίδιο πλάτος. Στο τυχόν σημείο Σ το αποτέλεσμα της Π_1 θα είναι η ταλάντωση $\xi_1 = A_1 \eta \mu(\omega t - k r_1)^*$ ενώ της Π_2 θα είναι $\xi_2 = A_2 \eta \mu(\omega t - k r_2)$. Τα πλάτη στο Σ δεν είναι κατ' ανάγκη ίσα αφού για σφαιρικά κύματα το πλάτος είναι αντιστρόφως ανάλογο της απόστασης από την πηγή. Η υπέρθεση των δύο κυμάτων στο Σ είναι καθόλα ισοδύναμη με τη σύνθεση δύο αρμονικών ταλαντώσεων της ίδιας κυκλικής συχνότητας ω , με πλάτη A_1, A_2 και διαφορετικές αρχικές φάσεις. Το ρόλο των αρχικών φάσεων παίζουν εδώ τα $(-k r_1)$ και $(-k r_2)$. Η διαφορά φάσεως είναι $\varphi = k(r_2 - r_1)$. Ο νόμος του συνημιτόνου για τη σύνθεση των δύο κυμάτων θα είναι $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \varphi$. Στα διάφορα σημεία το A θα παίρνει τιμές στην περιοχή $A_1 + A_2$ έως $A_1 - A_2$ ανάλογα με την τιμή της φ . Έτσι θα έχουμε:

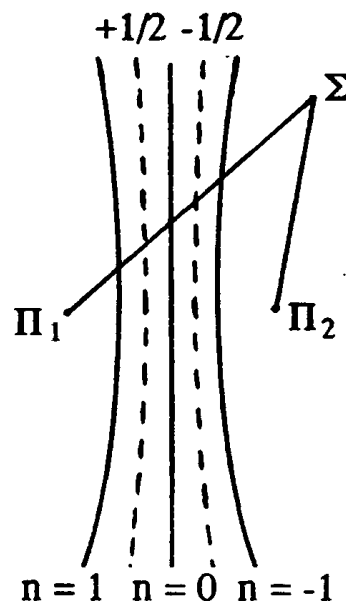
Σημεία με μέγιστη ενισχυτική συμβολή όταν $\varphi = \pm n 2\pi$

Σημεία με μέγιστη αποσβεστική συμβολή όταν $\varphi = \pm (2n + 1)\pi$

Από αυτές τις συνθήκες βρίσκουμε ότι για τα σημεία με μέγιστη ενίσχυση θα ισχύει:

$$r_2 - r_1 = \pm n \lambda \quad (1)$$

ενώ για τα σημεία με μέγιστη απόσβεση:



Σχήμα 11 Συμβολή δύο σφαιρικών κυμάτων

* Θυμηθείτε γιατί γράφουμε τη φάση $(\omega t - k r_1)$.



$$r_2 - r_1 = \pm(2n+1) \frac{\lambda}{2} = \pm(n + \frac{1}{2})\lambda \quad (2)$$

Οι συνθήκες (1) και (2) είναι εξισώσεις υπερβολών με εστίες τα σημεία Π_1 και Π_2 . Οι υπερβολές (2) ονομάζονται δεσμικές γραμμές. Κατά μήκος τους τα σημεία του μέσου είναι συνεχώς ακίνητα. Επειδή το πρόβλημα είναι τρισδιάστατο, οι (1) και (2) ορίζουν υπερβολικές επιφάνειες που η τομή τους με το επίπεδό της σελίδας είναι οι εικονιζόμενες υπερβολές.

2.2 Επίπεδα κύματα

Η συμβολή δύο επιπέδων κυμάτων με ίδιες ω , διαφορετικά πλάτη, τυχαίες διευθύνσεις $\vec{n}_1$ και $\vec{n}_2$ και αρχικές φάσεις φ_1 και φ_2 εκφράζεται με το άθροισμα:

$$\xi_{ολ} = \xi_1 + \xi_2 = A e^{i(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varphi_1)} + B e^{i(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_2)}, \quad |\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = k \quad (1)$$

Το $\xi_{ολ}(\vec{r})$ μπορεί να γραφεί:

$$\xi_{ολ} = \hat{\Gamma} e^{i\omega t} \quad (2)$$

όπου $\hat{\Gamma}$ το μιγαδικό πλάτος

$$\hat{\Gamma} = A e^{i(\varphi_1 - k\vec{n}_1 \cdot \vec{r})} + B e^{i(\varphi_2 - k\vec{n}_2 \cdot \vec{r})} = \varrho e^{i\varphi} \quad (3)$$

Ζητούμε τα ϱ και φ που θα μας προσδιορίσουν το $\hat{\Gamma}$, οπότε θα καθοριστεί τελικά το $\xi_{ολ}(\vec{r})$, εξ. (2).

$$|\hat{\Gamma}|^2 = \varrho^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos[\varphi_1 - \varphi_2 - k\vec{r} \cdot (\vec{n}_1 - \vec{n}_2)] \quad (4)$$

$$\varepsilon\varphi = \frac{A \sin(\varphi_1 - k\vec{r} \cdot \vec{n}_1) + B \sin(\varphi_2 - k\vec{r} \cdot \vec{n}_2)}{A \cos(\varphi_1 - k\vec{r} \cdot \vec{n}_1) + B \cos(\varphi_2 - k\vec{r} \cdot \vec{n}_2)} \quad (5)$$

Ας δούμε τώρα δύο χαρακτηριστικές περιπτώσεις συμβολής τις οποίες πραγματεύεται ο Halliday, αλλά εδώ θα τις δούμε με τους μιγαδικούς αριθμούς. Ας εξετάσουμε πρώτα τη συμβολή των κυμάτων:

$$\xi_1 = A \sin(\omega t - kx + \varphi_1), \quad \xi_2 = A \sin(\omega t - kx + \varphi_2) \quad (6)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε μιγαδικούς αριθμούς θα έχουμε τις προηγούμενες εξισώσεις με $\vec{n}_1 = \vec{n}_2 = \vec{i}$. Το σύνθετο κύμα θα δίδεται από τη σχέση:

$$\xi_{ολ}(x,t) = A e^{i(\omega t - kx + \varphi_1)} + A e^{i(\omega t - kx + \varphi_2)} = \hat{\Gamma} e^{i\omega t} \quad (7)$$

Είναι φανερό ότι το φανταστικό μέρος του $\xi_{ολ}(x,t)$ είναι ακριβώς το άθροισμα των δεδομένων κυμάτων (6). Επομένως το συνιστάμενο κύμα θα



είναι το φανταστικό μέρος του $\hat{\Gamma}$ εκφριωτ ή (αφού $\hat{\Gamma} = |\hat{\Gamma}| \text{exριφ}$) του $|\hat{\Gamma}| \text{exριφexριωτ}$ δηλ. το $|\hat{\Gamma}| \eta \mu(\omega t + \varphi)$.

Από τις εξισώσεις (4) και (5) έχουμε: $|\hat{\Gamma}| = 2A \sigma \nu \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$

$$\text{και εφ}\varphi = \frac{\eta \mu(\varphi_1 - kx) + \eta \mu(\varphi_2 - kx)}{\sigma \nu(\varphi_1 - kx) + \sigma \nu(\varphi_2 - kx)} \quad \text{ή} \quad \varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - kx$$

Τελικά η επαλληλία των (6) μας δίνει το κύμα:

$$\xi_1 + \xi_2 = 2A \sigma \nu \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \eta \mu(\omega t - kx + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}) \quad (8)$$

Προσέξτε τις γωνίες $\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)$ και $\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ που εμφανίζονται στο συνιστάμενο κύμα. Η πρώτη εμφανίζεται επειδή τα πλάτη είναι ίσα*. Γενικά πάντως το συνιστάμενο πλάτος θα εξαρτάται οπωσδήποτε από τη διαφορά φάσεως. Η αρχική φάση τώρα φ του συνισταμένου κύματος εξαρτάται τόσο από την φ_1 όσο και από την φ_2 . Όταν τα πλάτη είναι ίσα η αρχική φάση φ θα είναι λογικά ο μέσος όρος των φ_1, φ_2 . Όταν τα πλάτη δεν είναι ίσα η φ θα έχει κάποια τιμή ενδιάμεση των φ_1, φ_2 και βέβαια θα πλησιάζει προς τη φάση του κύματος με το μεγαλύτερο πλάτος. Αυτά τα συμπεράσματα βγαίνουν κατ' ευθείαν από τις γενικές εξισώσεις (4) και (5) και ισχύουν προφανώς και στην ειδική περίπτωση της εξ. (8). Αξίζει να τα δείτε σε σχέση με την ανυσματική πρόσθεση των δύο κυμάτων. Είναι πολύ περισσότερο παραστατική από τις ψυχρές εξισώσεις της σελ. 25. Παρατηρείστε στην ανυσματική εικόνα πώς για την ίδια $(\varphi_1 - \varphi_2)$, η φ μπορεί να αλλάζει καθώς αλλάζει και η φ_1 και η φ_2 . Τα παραπάνω σχόλια «θάβονται» όταν τα κύματα που υπερτίθενται γραφτούν έτσι ώστε να φαίνεται μόνον η διαφορά φάσεώς τους, όπως στον Halliday και στον Serway. Εκεί, $\varphi_1 = \theta$, $\varphi_2 = 0$ άρα $\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\theta}{2}$.

Από φυσική πάντως άποψη, επειδή οι ανιχνευτές των κυμάτων είτε οι ανθρώπινοι (μάτια, αυτιά) είτε οι τεχνητοί (μικρόφωνα, ραδιόφωνα, φωτοκύτταρα κλπ) είναι συνήθως ευαίσθητοι στο πλάτος (ή σε κάποια συνάρτηση του πλάτους) η αρχική φάση του συνισταμένου κύματος δεν έχει τόση σημασία όσο έχει το συνιστάμενο πλάτος.

* Δηλ. εξηγώ γιατί εμφανίζεται $\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)$ και όχι απλώς $(\varphi_1 - \varphi_2)$



Ας δούμε τώρα τη συμβολή δύο κυμάτων με ίσα πλάτη και συχνότητες, διαδιδόμενα αντίθετα κατά μήκος του άξονα των x , και με $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Όπως και προηγουμένως το συνιστάμενο κύμα θα έχει την μορφή $\hat{\Gamma} \eta \mu(\omega t + \varphi)$ αν τα συμβάλλοντα κύματα είναι ημιτονοειδή. Για το $|\hat{\Gamma}|$ έχουμε:

$$|\hat{\Gamma}|^2 = 2A^2[1 + \sin 2kx] \text{ ή } |\hat{\Gamma}| = 2A \sin kx$$

και $\varphi = 0$, άρα το προκύπτον κύμα θα είναι το:

$$\xi(x,t) = 2A \sin kx \eta \mu \omega t$$

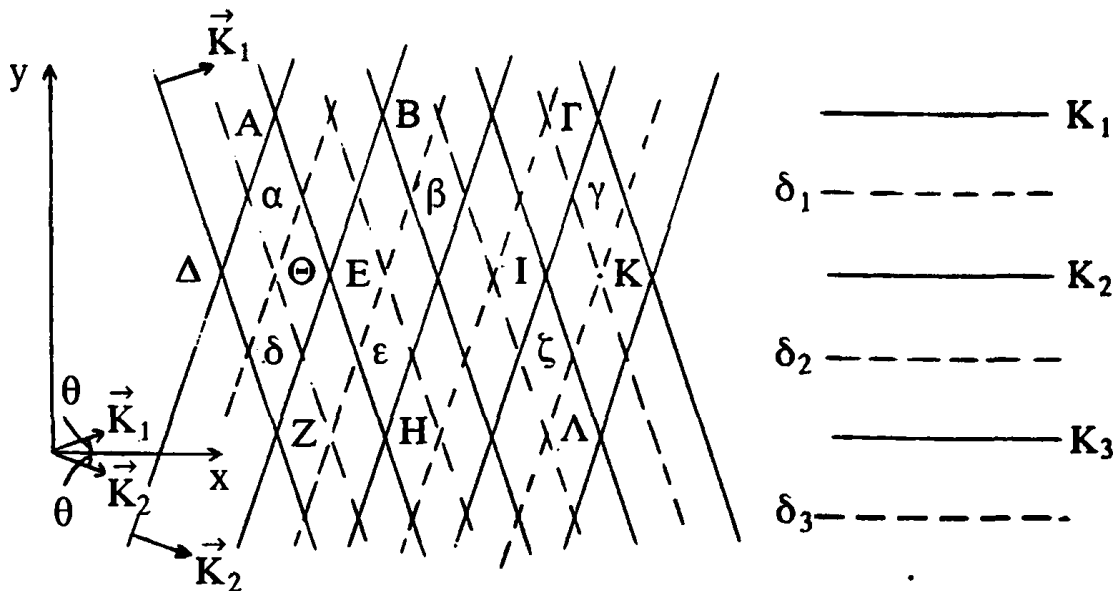
το οποίο δεν είναι καθόλου τρέχον κύμα αλλά είναι μία ταλάντωση με διαφορετικό πλάτος από σημείο σε σημείο.

Από το γενικό τύπο για το $|\hat{\Gamma}|^2$ (σελ. 25) φαίνεται ότι κατά τη συμβολή των επιπέδων κυμάτων το συνιστάμενο πλάτος θα είναι συνάρτηση της θέσης, εκτός από την περίπτωση κυμάτων διαδιδόμενων προς την αυτή φορά, οπότε $\vec{n}_1 = \vec{n}_2$, που εξετάσαμε στην αρχή. Κατά συνέπεια, θα υπάρχουν πάντοτε σημεία όπου το πλάτος θα είναι συνεχώς μηδέν δηλ. θα παραμένουν συνεχώς ακίνητα. Τα σημεία αυτά (δεσμοί) ορίζουν τις δεσμικές γραμμές, όπως και στη συμβολή σφαιρικών κυμάτων, και το συνιστάμενο κύμα δεν διαδίδεται κάθετα στις δεσμικές γραμμές παρά μόνον ανάμεσα στις δεσμικές γραμμές. Θα δούμε τώρα αυτή τη γενική περίπτωση συμβολής δύο επιπέδων κυμάτων που έχει ως αποτέλεσμα τρέχοντα κύματα προς ορισμένες διευθύνσεις αλλά στάσιμα προς άλλες διευθύνσεις.

Το σχήμα 12 είναι ένα στιγμιότυπο της διάδοσης δύο επιπέδων κυμάτων με $|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = \frac{2\pi}{\lambda}$. Οι πλήρεις γραμμές είναι οι στιγμιαίες θέσεις των ισοφασιικών επιφανειών μέγιστης θετικής απομάκρυνσης* (κορυφές). Οι εστιγμένες είναι οι ισοφασιικές επιφάνειες μέγιστης αρνητικής απομάκρυνσης (κοιλιάδες). Σημεία όπως τα σημειωμένα με κεφαλαία γράμματα έχουν μέγιστο πλάτος λόγω ενισχυτικής συμβολής (διπλές κορυφές ή διπλές κοιλιάδες). Δεξιά στην εικόνα είναι σημειωμένα με πλήρεις γραμμές τα ίχνη των επιπέδων πάνω στα οποία τα σημεία δονούνται με μέγιστο συνολικό πλάτος. Με μικρά γράμματα είναι σημειωμένα τα σημεία όπου η ταλάντωση, τουλάχιστον τη χρονική στιγμή

* απομάκρυνση και εδώ όπως παντού, εκτός αν καθορίζεται ειδικά, υπονοεί την απόκλιση του συγκεκριμένου κυματικού μεγέθους από τη θέση ισορροπίας. Και θυμηθείτε πως μιλάμε για συμβολή μονομέτρων μεγεθών ή ανυσματικών υπό προϋποθέσεις.





Σχήμα 12 Συμβολή δύο επιπέδων κυμάτων με τυχαίες διευθύνσεις $\vec{n}_1, \vec{n}_2$. Η εικόνα παριστάνει ένα στιγμιότυπο.

του εικονιζομένου στιγμιότυπου, είναι μηδενική διότι συμπίπτουν κορυφές με κοιλάδες. Αλλά και οποιαδήποτε άλλη στιγμή να κοιτάξει κανένας τα σημεία αυτά θα παραμένουν ακίνητα. Το σημείο α π.χ. μετά από χρόνο $T/2$ θα είναι κορυφή λόγω του κύματος $\vec{k}_2$ αλλά κοιλάδα λόγω του κύματος $\vec{k}_1$ ήτοι συνολικά ακίνητο. Τα α,β,γ καθώς και τα δ,ε,ζ κλπ. βρίσκονται πάνω σε επίπεδα όπου η ταλάντωση είναι συνεχώς ανύπαρκτη. Τα ίχνη αυτών των επιπέδων είναι σημειωμένα δεξιά με εστιγμένες γραμμές.

Τα ίδια συμπεράσματα με περισσότερες ποσοτικές πληροφορίες μας δίνουν οι εξισώσεις της συμβολής. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους τελικούς τύπους κατ' ευθείαν ή να κάνουμε από την αρχή την πρόσθεση των κυμάτων που γίνεται πολύ εύκολα εδώ λόγω της συμμετρίας του προβλήματος. Είναι:

$$k\vec{n}_1 \cdot \vec{r} = k(x\cos\theta + y\sin\theta)$$

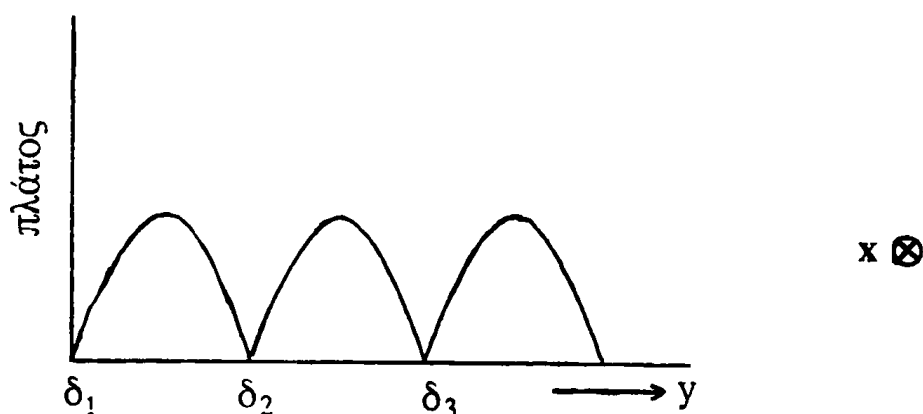
$$k\vec{n}_2 \cdot \vec{r} = k(x\cos\theta - y\sin\theta)$$

$$\xi_{\text{ολ}} = \xi_1 + \xi_2 = Ae^{i\omega t} e^{-ikx\cos\theta} [e^{iky\sin\theta} + e^{-iky\sin\theta}] = 2A\cos(ky\sin\theta) e^{i(\omega t - kx\cos\theta)}$$

Η μορφή αυτή του συνισταμένου κύματος μας λέει ότι έχουμε κατ' αρχήν ένα τρέχον κύμα κατά την διεύθυνση των x, και μάλιστα με φασική ταχύτητα $u' = \omega/k\cos\theta = u/\cos\theta$ όπου $u = \omega/k$ η φασική ταχύτητα των

υπερτιθεμένων κυμάτων. Το πλάτος όμως του κύματος μεταβάλλεται με τη συντεταγμένη y . Παρατηρούμε ότι υπάρχουν θέσεις y όπου το πλάτος είναι 0 (τα δεσμικά επίπεδα δ_1, δ_2 κλπ). Οι θέσεις αυτές είναι εκείνες για τις οποίες $\sin(ky\mu\theta) = 0$ ήτοι $ky\mu\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$ απ' όπου βγαίνει η απόσταση των δεσμικών επιπέδων ίση με $\Delta y = \lambda/2\eta\mu\theta$. Κάθετα προς τα δεσμικά επίπεδα το πλάτος του κύματος μεταβάλλεται αρμονικά με την απόσταση, για να γίνει μέγιστο ακριβώς στο μέσο μεταξύ των δεσμικών επιπέδων. Παρατηρείστε ότι το τρέχον κύμα έχει μέτωπα κάθετα προς τον άξονα x αλλά το πλάτος μεταβάλλεται πάνω στην ισοφασική επιφάνεια (βλ. σελ. 20).

Το συνιστάμενο κύμα διαδίδεται κατά μήκος των καναλιών που σχηματίζουν τα επίπεδα $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ κλπ. Θα δούμε στους κυματοδηγούς ότι τα υποθετικά τοιχώματα δ_1, δ_2 κλπ των καναλιών εκεί είναι πραγματικές μεταλλικές επιφάνειες. Αν μπορούσαμε να δούμε το πλάτος του κύματος, η εικόνα που θα παρατηρούσαμε θα ήταν η εξής: (κοιτάζοντας κατά μήκος του άξονα των x , δηλ. κατά μήκος του καναλιού).



Σχήμα 13 Μεταβολή του πλάτους κατά τη συμβολή των κυμάτων του Σχ. 12

Παρατηρείστε επίσης ότι η ταχύτητα του καθ' ενός από τα υπερτιθέμενα κύματα κατά τη διεύθυνση x είναι υσυνθ. Η ταχύτητα αυτή μας δείχνει πόσο γρήγορα διαδίδεται η κυματική ενέργεια κατ' αυτή τη διεύθυνση*. Έχουμε πεί πως η ενέργεια διαδίδεται με την ομαδική ταχύτητα v_g : εδώ λοιπόν ισχύει $v_g = υ\sigma\eta\theta$. Προηγουμένως βρήκαμε ότι η φασική ταχύτητα ισούται με $υ/\sigma\eta\theta$, συνεπώς $υ' v_g = υ^2$.

* Για να το καταλάβετε καλλίτερα αυτό θεωρείστε την οριακή περίπτωση $\theta \rightarrow 90^\circ$. Η ενέργεια του κύματος τότε μεταδίδεται κάθετα προς τα x , δηλ. δεν έχουμε διάδοση ενέργειας προς την διεύθυνση x , ή αλλιώς το $υ$ κατά μήκος του x είναι μηδέν.



Ας εξετάσουμε τώρα την απλούστερη περίπτωση συμβολής επιπέδων κυμάτων με διαφορετική συχνότητα, όταν δηλαδή έχουν την ίδια διεύθυνση και φορά. Ας δούμε πρώτα το πρόβλημα ποιοτικά. Αν σταθούμε σε κάποιο σημείο του χώρου στον οποίο διαδίδονται τα δύο κύματα, θα παρατηρήσουμε ότι η συνισταμένη ταλάντωση δεν έχει σταθερό πλάτος αλλά αντίθετα το πλάτος της αυξομειώνεται με ρυθμό που καθορίζει η διαφορά των συχνοτήτων των δύο κυμάτων. Έχουμε ακριβώς τα φαινόμενα που γνωρίζουμε ήδη από την σύνθεση ταλαντώσεων με διαφορετικές συχνότητες (σελ. 15). Αν τώρα φανταστούμε πως κάποια στιγμή στη θέση που βρισκόμαστε το πλάτος είναι μέγιστο, είναι φανερό ότι στις γειτονικές θέσεις το πλάτος θα είναι λιγότερο απο μέγιστο (γιατί;). Αυτή την ίδια στιγμή σε κάποια απόσταση από την θέση μας το πλάτος θα είναι ελάχιστο και ακόμη πιο πέρα θα υπάρχει μία θέση που το πλάτος θα είναι πάλι μέγιστο. Το μέγιστο του πλάτους καθώς θα περνάει ο χρόνος θα ταξιδεύει προς άλλες θέσεις με κάποια ταχύτητα. Συγχρόνως, γνωρίζουμε ότι το κάθε ένα από τα υπερτιθέμενα κύματα ταξιδεύει με ορισμένη ταχύτητα. Εμφανίζεται λοιπόν κατά την επαλληλία δύο κυμάτων με $\omega_1 \neq \omega_2$ μία νέα ταχύτητα διαδόσεως, ενδεχομένως διαφορετική από αυτήν των συνιστώντων κυμάτων. (Γιατί στη συμβολή δύο αρμονικών κυμάτων με την ίδια συχνότητα δεν έχουμε κάτι ανάλογο;)

Ας εξετάσουμε τώρα το πρόβλημα με μαθηματικό τρόπο. Ζητάμε την επαλληλία των κυμάτων $A \cos(\omega_1 t - k_1 x)$ και $A \cos(\omega_2 t - k_2 x)$. Οι ταχύτητες φάσεως είναι αντιστοίχως $v_1 = \omega_1 / k_1$ και $v_2 = \omega_2 / k_2$ όπου το v_1 μπορεί να είναι διαφορετικό από το v_2 . Το ζητούμενο κύμα θα είναι το

$$\hat{\xi}_{\text{ολ}} = A e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + A e^{i(\omega_2 t - k_2 x)} = A e^{i(\bar{\omega} t - \bar{k} x)} \left[e^{\frac{1}{2} i(\delta\omega - x \delta k)} + e^{-\frac{1}{2} i(\delta\omega - x \delta k)} \right] \quad (9)$$

όπου θέσαμε $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, $\bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2}$, $\delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, $\delta k = k_1 - k_2$. Τελικά η (9) γίνεται

$$\hat{\xi}_{\text{ολ}} = 2A \sin\left(\frac{\delta\omega}{2} t - \frac{\delta k}{2} x\right) e^{i(\bar{\omega} t - \bar{k} x)} \quad (10)$$

Η (10) περιέχει ήδη ό,τι πληροφορία χρειαζόμαστε αλλά αν θέλουμε μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση του συνημιτονοειδούς συνισταμένου κύματος, υποθέτοντας ότι τα συνιστώσα κύματα είναι συνημιτονοειδή, ως εξής:



$$\xi_{ολ} = 2A \sin\left(\frac{\delta\omega}{2}t - \frac{\delta k}{2}x\right) \sin(\bar{\omega}t - \bar{k}x) \quad (11)$$

Τόσο η (10) όσο και η (11) δείχνουν ότι το συνιστάμενο* κύμα έχει κυκλική συχνότητα και κυματαριθμό τη μέση τιμή των αντιστοιχών μεγεθών των κυμάτων που συμβάλλουν.

Επίσης παρατηρούμε ότι το πλάτος μεταβάλλεται τόσο με το χρόνο όσο και με τη θέση και μάλιστα είναι διαδιδόμενο μέγεθος όπως οποιοδήποτε κύμα. Η ταχύτητα διαδόσεως του πλάτους είναι (γιατί;)

$$v_{\text{πλάτους}} = \frac{\delta\omega}{\delta k}$$

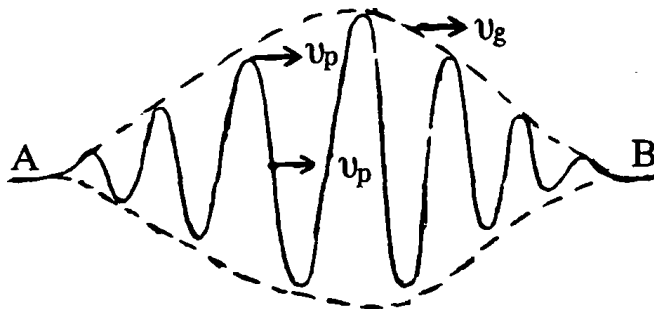
ενώ η ταχύτητα διαδόσεως της φάσεως $(\bar{\omega}t - \bar{k}x)$ είναι

$$v_{\text{φάσεως}} = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$$

Παρατηρείστε ότι αν $v_1 = v_2$ τότε αυτές οι δύο ταχύτητες είναι ίσες. Αν υποθέσουμε ότι οι ω_1 και ω_2 διαφέρουν απειροστά μεταξύ τους τότε οι παραπάνω ταχύτητες γίνονται:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad \text{και} \quad v_p = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$$

που αποτελούν τους ορισμούς της ταχύτητας ομάδας και της ταχύτητας φάσεως αντιστοίχως.



Σχήμα 14 Συμβολή δύο επιπέδων κμάτων με την ίδια διεύθυνση και διαφορετικές συχνότητες. Το περίβλημα μπορεί να κινείται σχετικά με την ομάδα.

Όταν ένας αριθμός αρμονικών κυμάτων με κυκλικές συχνότητες παραπλήσιες μιας κεντρικής ω_0 υπερτίθενται, προκύπτει μία διαταραχή στην οποία υπάρχουν δύο ταχύτητες, η φασική v_p και η ομαδική v_g . Η

* Για την ακρίβεια, το συνιστάμενο κύμα $\xi_{ολ}$ μπορεί και να μην είναι περιοδικό (βλ. και σελ. 17). Εδώ μιλάμε για την περιοδικότητα του κύματος $\sin(\bar{\omega}t - \bar{k}x)$.



πρώτη αναφέρεται στη διάδοση της φάσεως του κύματος υψηλής συχνότητας ω_0 . Στο σχήμα, είναι η ταχύτητα που κινούνται οι κορυφές ή οι κοιλάδες ή γενικά οποιοδήποτε σημείο σταθερής φάσης. Η δεύτερη αναφέρεται στη διάδοση της διαταραχής ως συνόλου (=ομάδα αρμονικών κυμάτων). Όταν $v_p = v_g$ ένας ακίνητος παρατηρητής θα δει την ομάδα να προχωράει σαν ένα σταθερό στερεό σχήμα. Αν $v_p > v_g$ το κύμα υψηλής συχνότητας θα φαίνεται να προχωράει ως προς το περιβλήμα του, να εξαφανίζεται στο Β και να εμφανίζεται στο Α. Το αντίθετο θα ισχύει όταν $v_g > v_p$. Όταν ω/k είναι σταθερό, δηλ. η φασική ταχύτητα είναι ανεξάρτητη από τη συχνότητα, τότε προφανώς $v_g = v_p$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι έννοιες που συναντήσαμε έως τώρα: «διασκεδασμός», «αλλοίωση της μορφής διαδιδόμενου παλμού», «εξάρτηση ταχύτητας από συχνότητα», «διαφοροποίηση v_g και v_p », είναι αλληλένδετες και η μία συνεπάγεται τις άλλες.

3. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΔΙΑΔΟΣΕΩΣ ΣΕ ΔΙΑΦΟΡΑ ΜΕΣΑ

3.1 Γενικά για τις ελαστικές ιδιότητες της ύλης

Έχουμε ήδη αναφέρει (σελ. 7) ότι από τη διαφορική εξίσωση του κύματος για συγκεκριμένο μέσο μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα διαδόσεως. Η μέθοδος για οποιοδήποτε ελαστικό μέσο είναι η εξής: Από τις ελαστικές ιδιότητες του μέσου και από τον β' νόμο του Νεύτωνα προσπαθούμε να βρούμε πώς σχετίζεται με το χρόνο η στοιχειώδης μεταβολή κάποιου φυσικού μεγέθους ως προς την τιμή που έχει όταν το μέσο είναι σε ισορροπία. Η διαφορική εξίσωση που προκύπτει έχει ως παραμέτρους μία ελαστική σταθερά και την πυκνότητα του μέσου, οπότε η ταχύτητα υπολογίζεται συναρτήσει αυτών των παραμέτρων.

Η δημιουργία κυμάτων σε διάφορα υλικά μέσα οφείλεται στην ελαστικότητα της ύλης, δηλ. στην αντίδραση που προβάλλουν τα σώματα στη μεταβολή του όγκου τους και του σχήματός τους. Υπό την επίδραση διαφόρων φορτίσεων (ροπών ή δυνάμεων) τα σώματα παραμορφώνονται. Για ορισμένη περιοχή φορτίσεων και παραμορφώσεων ένα σώμα επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση όταν αρθεί η φόρτιση. Γι' αυτή την περιοχή ισχύει ο νόμος του Hooke που λέει ότι οι παραμορφώσεις είναι ανάλογες με τις φορτίσεις που τις προκαλούν. Το πηλίκο της φόρτισης δια



της αντίστοιχης παραμόρφωσης είναι μέτρο της αντίδρασης της ύλης στην παραμόρφωσή της.

Ανάλογα με το είδος της φόρτισης ορίζονται διάφορα μέτρα ελαστικότητας. Εάν η φόρτιση είναι μία δύναμη F που ενεργεί κάθετα* προς την επιφάνεια S , η τάση F/S θα προκαλέσει επιμήκυνση ή συστολή κατά μήκος της διεύθυνσεως της F ανάλογα με τη φορά της δύναμης. Το μέτρο διαμήκους ελαστικότητας ή μέτρο του Young E^* ορίζεται ως εξής:

$$E = \frac{F/S}{\Delta\ell/\ell} \quad (1)$$

όπου ℓ το αρχικό μήκος κατά τη διεύθυνση της F .

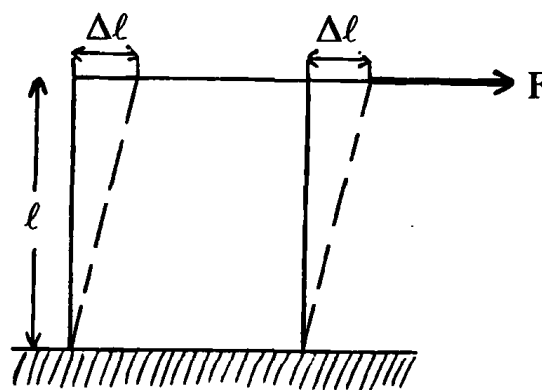
Εάν η φόρτιση είναι μία δύναμη F που ενεργεί παράλληλα προς την επιφάνεια S , το σώμα θα παραμορφωθεί χωρίς να μεταβληθεί ο όγκος του. Η τάση F/S σ' αυτή την περίπτωση ονομάζεται διατμητική τάση. Ο νόμος του Hooke εδώ ορίζει το μέτρο ακαμψίας ή μέτρο διατμητικής ελαστικότητας G ως εξής:

$$G = \frac{F/S}{\Delta\ell/\ell} \quad \text{μέτρο ακαμψίας}$$

Όταν η φόρτιση είναι μία ομοιόμορφη πίεση P σε κάθε σημείο του σώματος το σώμα, εφ' όσον είναι ομογενές και ισότροπο, θα μεταβάλλει τον όγκο του αλλά όχι το σχήμα του. Το αντίστοιχο μέτρο εδώ ορίζεται ως:

$$k = - \frac{\Delta P}{\Delta V/V} \quad \text{μέτρο ελαστικότητας όγκου} \quad (2)$$

Παρατηρούμε ότι το k και το G εκφράζουν αντίστοιχα την ελαστική αντίδραση της ύλης σε καθαρή μεταβολή του όγκου και καθαρή μεταβολή του σχήματος. Επειδή τα ρευστά δεν αντιδρούν στη μεταβολή του σχήματός τους (παίρνουν πάντα το σχήμα του περιέχοντος δοχείου) θα πρέπει να έχουν $G=0$. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν σκεφτούμε ότι τα ρευστά



Σχήμα 15 Το σώμα είναι πακτωμένο στη βάση

του και υφίσταται δύναμη παράλληλη προς την επιφάνειά του. Οι διατομές θα μετατοπιστούν από $\Delta\ell$ η επιφανειακή μέχρι μηδέν η της βάσεως

του και υφίσταται δύναμη παράλληλη προς την επιφάνειά του. Οι διατομές θα μετατοπιστούν από $\Delta\ell$ η επιφανειακή μέχρι μηδέν η της βάσεως

του και υφίσταται δύναμη παράλληλη προς την επιφάνειά του. Οι διατομές θα μετατοπιστούν από $\Delta\ell$ η επιφανειακή μέχρι μηδέν η της βάσεως

* υποτίθεται πως είναι ομοιόμορφα κατανομημένη

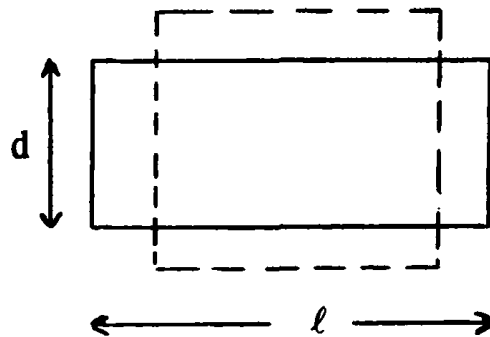
* Μερικές φορές το E αναφέρεται απλά ως το μέτρο ελαστικότητας



δεν μπορούν να αντισταθούν σε διατμητικές τάσεις αφού υπό την επίδρασή τους ρέουν. Επομένως στον ορισμό του G για ένα ρευστό θα είναι $F/S=0$.

Το μέτρο του Young ορίζεται υπό συνθήκες που προκαλούν και εγκάρσια (κάθετη προς την τείνουσα δύναμη) παραμόρφωση. Αυτό οφείλεται στο ότι όταν ένα σώμα (π.χ μία ράβδος) επιμηκύνεται προς μία διεύθυνση παρατηρείται ότι συστέλλεται προς την κάθετη διεύθυνση. Ο συσχετισμός αυτών των παραμορφώσεων, χωρίς αναφορά στην φόρτιση, ορίζει την τέταρτη ελαστική σταθερά, τον λόγο του Poisson σ ως εξής:

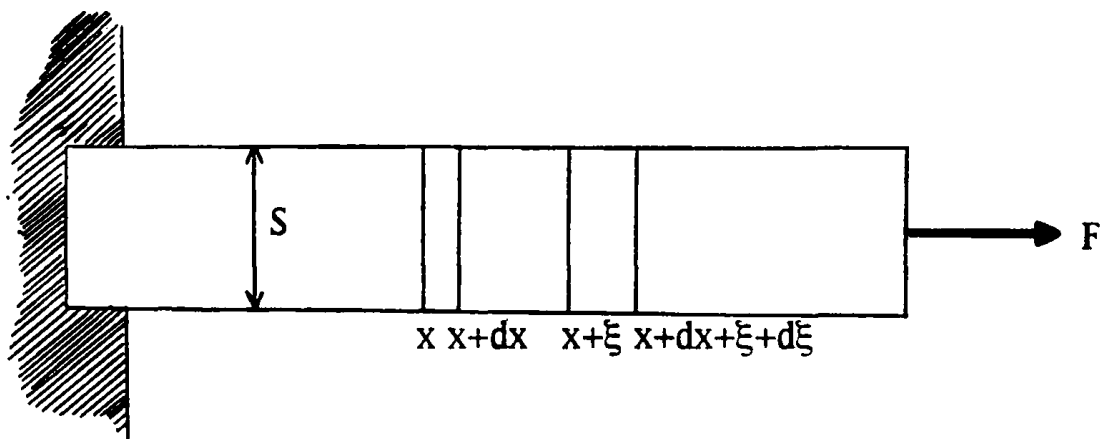
$$\sigma = - \frac{\Delta d / d}{\Delta \ell / \ell}$$



Αποδεικνύεται ότι για ομογενές και ισότροπο υλικό οποιεσδήποτε δύο από τις 4 σταθερές αρκούν για να καθορίσουν πλήρως την ελαστική συμπεριφορά του υλικού.

Σχήμα 16 Εγκάρσια παραμόρφωση εμφανίζεται συγχρόνως με την διαμήκη

3.2 Διαμήκη κύματα σε στερεά



Σχήμα 17 Υπό την επίδραση της F η ράβδος επιμηκύνεται. Αν η F στο άκρο είναι $F(t)$ τότε ένα κύμα θα διαδοθεί μέσα στη ράβδο.

Ας εξετάσουμε τη ράβδο του σχήματος υπό την επίδραση σταθερής δύναμης F που την επιμηκύνει κατά $\Delta \ell$. Η στοιχειώδης μάζα dm , που πριν από την εφαρμογή της δύναμης εκτεινόταν από το x μέχρι το $x+dx$, θα μετατοπιστεί στη θέση $x+\xi$. Το πάχος της από dx θα γίνει $dx+d\xi$ άρα θα έχουμε μία ανηγμένη μεταβολή $d\xi/dx$ και κατά τον νόμο του Hooke,



$$\frac{F}{S} = E \frac{d\xi}{dx} \quad (3)$$

Ολοκλήρωση της (3) με F/S σταθερό, αφού η ράβδος ισορροπεί, οδηγεί στην (1). Η (3) είναι απλώς η διαφορική μορφή της (1). Όταν τώρα η F δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται με το χρόνο, θα είναι επίσης και συνάρτηση της θέσης. Αυτό οφείλεται στο ότι η $F(t)$ εφαρμόζεται στο άκρο της ράβδου επομένως θα χρειαστεί κάποιο χρόνο για να διαδοθεί από σημείο σε σημείο κατά μήκος της ράβδου. Η μάζα dm θα βρεθεί τη χρονική στιγμή t υπό την επίδραση της δύναμης $F(x)$ στη θέση x και μιάς δύναμης $F(x+dx) = F(x) + (\partial F/\partial x)dx$. Ο β' νόμος του Νεύτωνα μας δίνει:

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} dx = (dm) \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = \rho S dx \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}$$

ή

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (4)$$

Παραγωγίζοντας την (3) ως προς x παίρνουμε:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = ES \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (5)$$

και από τις (4) και (5) καταλήγουμε ότι:

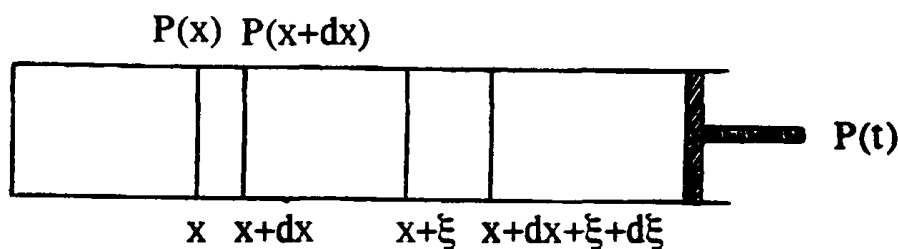
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (6)$$

Από την (6) βλέπουμε ότι υπό συνθήκες ισχύος του νόμου του Hooke διαμήκη ελαστικά κύματα διαδίδονται με ταχύτητα $v = \sqrt{E/\rho}$. Στην περίπτωση που εξετάσαμε η ράβδος ήταν ελεύθερη να παραμορφωθεί εγκάρσια. Όταν η εγκάρσια διαστολή περιορίζεται, το μέτρο ελαστικότητας δεν είναι το E αλλά είναι μεγαλύτερο οπότε και η ταχύτητα αυξάνεται αντίστοιχα.

Για εγκάρσια κύματα στα στερεά αποδεικνύεται ότι η ταχύτητα ισούται με $v = \sqrt{G/\rho}$. Χαρακτηριστικές περιπτώσεις διαμήκων και εγκάρσιων κυμάτων αποτελούν τα σεισμικά κύματα. Η μελέτη του τρόπου διαδόσεώς τους και των ταχυτήτων τους αποτελεί το κυριώτερο μέσο μελέτης της σύστασης και της δομής του εσωτερικού της Γής.



3.3 Διαμήκη κύματα στα ρευστά



Σχήμα 18 Για την εύρεση της εξισώσεως του κύματος μέσα σε ρευστό υποθέτουμε ότι το ρευστό υφίσταται τη χρονικά μεταβαλλόμενη πίεση $P(t)$.

Το σχήμα εικονίζει ένα δοχείο που περιέχει κάποιο ρευστό, υγρό ή αέριο. Η μόνη ουσιαστική διαφορά από την περίπτωση των διαμήκων κυμάτων στα στερεά είναι ότι τα ρευστά περιέχονται σε κάποιο δοχείο που παρεμποδίζει την εγκάρσια παραμόρφωσή τους. Σε στατική κατάσταση (σταθερή εξωτερική δύναμη) τα ρευστά βρίσκονται υπό ομοιόμορφη πίεση σε κάθε σημείο* τους. Η κατάλληλη ελαστική σταθερά εδώ θα πρέπει να είναι ασφαλώς το μέτρο ελαστικότητας όγκου. Κατά τα άλλα η μεθοδολογία είναι όπως και πριν. Έστω ότι στο ρευστό δρά κάποια χρονικά μεταβαλλόμενη πίεση όπως είπαμε πριν θα πρέπει να μεταβάλλεται και χωρικά ήτοι $P=P(x,t)$. Εξετάζουμε πρώτα τι γίνεται τη χρονική στιγμή t . Στη στοιχειώδη μάζα dm θα ασκείται η συνολική δύναμη: (ορίζουμε θετική φορά προς τα δεξιά)

$$dF = -S[P(x+dx,t) - P(x,t)] = -S \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) dx$$

Αναγκαστικά θα προκληθεί μία μετατόπιση $\xi(x,t)$. Ο β' νόμος μας δίνει:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = - \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} \quad (7)$$

όπου ρ_0 η πυκνότητα σε κατάσταση ισορροπίας (πριν εφαρμοστεί η $P(t)$). Τη χρονική στιγμή $t' > t$, η διατομή x μετατοπίζεται στη θέση $x+\xi$ και η $x+dx$ στην $x+dx+\xi+dx$. Ο αρχικός όγκος ήταν $dV=Sdx$ ενώ την t' ο όγκος είναι $S(dx+dx)$. Συνεπώς έχουμε μία μεταβολή όγκου $\delta(dV)=Sd\xi$. Στα ρευστά μία μεταβολή όγκου προκαλείται από μία μεταβολή στην πίεση. Γνωρίζουμε τη μεταβολή της πίεσης που προκάλεσε το $\delta(dV)$: είναι το $P(x+\xi) - P(x)$.

* νόμος του Pascal



Μπορούμε συνεπώς να συσχετίσουμε τις αντίστοιχες μεταβολές πίεσης και όγκου μέσω του μέτρου ελαστικότητας όγκου, εξ. (2). Έχουμε:

$$P(x+\xi) - P(x) = \int_x^{x+\xi} \frac{\partial P}{\partial x} dx = -k \frac{\delta(dV)}{dV} = -k \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \text{ή}$$

$\frac{\partial P}{\partial x} = -k \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ που συνδυαζόμενο με την (7) δίνει:

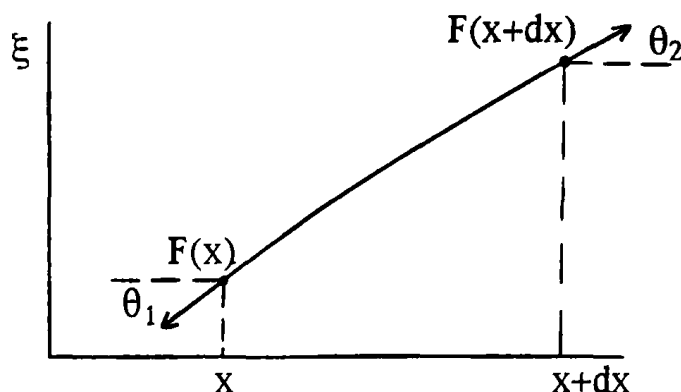
$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{k} = \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} \quad (8)$$

Συνεπώς η ταχύτης διαδόσεως διαμήκων κυμάτων στα ρευστά προκύπτει ίση με:

$$v = \sqrt{k / \rho_0}$$

Μπορεί επίσης να αποδειχθεί ότι $v^2 = (dP / d \rho)_0^*$. Ανάλογα με τον τρόπο που γίνεται η μεταβολή του ρευστού δηλ. η συμπίεση και η εκτόνωση καθώς διαδίδεται το κύμα, προκύπτει διαφορετική ταχύτητα. Υπό συνθήκες αδιαβατικής μεταβολής αποδεικνύεται ότι η ταχύτητα για το ιδανικό αέριο είναι $v = \sqrt{\gamma RT / M}$ όπου $\gamma = C_p / C_v$ και M το μοριακό βάρος.

3.4 Εγκάρσια κύματα σε τεντωμένο σκοινί



Σχήμα 19 Εγκάρσια κύματα σε τεντωμένο σκοινί. Το στοιχειώδες τμήμα από το x έως $x+dx$ είναι τεντωμένο λόγω των τάσεων $F(x)$ και $F(x+dx)$ που δέχεται στα άκρα του.

Η περίπτωση αυτή ισχύει γενικά για μονοδιάστατα μέσα (π.χ. χορδές) όπου οι ελαστικές ιδιότητες δημιουργούνται από την εφαρμογή μιας τείνουσας

* ο δείκτης 0 δείχνει ότι η παράγωγος λαμβάνεται στο σημείο ισορροπίας.



δύναμης. Έστω λοιπόν ότι έχουμε ένα τέλεια εύκαμπτο* σκοινί που το τεντώνουμε ανάμεσα σε δύο σημεία με μία δύναμη F όχι κατ' ανάγκην σταθερή κατά μήκος του. Το σκοινί όταν ισορροπεί βρίσκεται κατά μήκος του άξονα των x . Ας θεωρήσουμε το στοιχειώδες τμήμα από το x έως $x+dx$, μάζας $dm=qdx$ όπου q εδώ είναι προφανώς η γραμμική πυκνότητα του μέσου. Μας ενδιαφέρει η κατακόρυφη (εγκάρσια προς το μήκος του) κίνηση του σκοινιού. Η συνολική κατακόρυφη δύναμη πάνω στο dm θα είναι:

$$F_{\xi} = F(x+dx)\eta\mu\theta_2 - F(x)\eta\mu\theta_1$$

Για μικρές απομακρύνσεις από τη θέση ισορροπίας ισχύουν οι προσεγγίσεις $\eta\mu\theta_2 \equiv \epsilon\phi\theta_2$ και $\eta\mu\theta_1 \equiv \epsilon\phi\theta_1$, οπότε η F_{ξ} γίνεται:

$$F_{\xi} = F(x+dx) \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x+dx} - F(x) \left. \frac{\partial \xi(x)}{\partial x} \right|_x \quad \text{ή}$$

$$F_{\xi} = \frac{\partial}{\partial x} \left[F(x) \frac{\partial \xi(x)}{\partial x} \right] dx \quad \text{που συνδυαζόμενο με τον β' νόμο δίνει:}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(F \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = q \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (9)$$

Όταν η τείνουσα δύναμη είναι σταθερή σ' όλο το μήκος η (9) γίνεται:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{q}{F} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (10)$$

οπότε η ταχύτητα διαδόσεως εγκαρσίων κυμάτων σε μέσα όπως το υπό συζήτηση ισούται με $v = \sqrt{F/q}$.

Παρατηρούμε ότι η F αποτελεί ένα είδος μεταβλητού μέτρου ελαστικότητας. Συγκρίνατε με τις προηγούμενες περιπτώσεις όπου τα διάφορα μέτρα ελαστικότητας είναι χαρακτηριστικά του υλικού.

3.5 Υδάτινα κύματα

Τα κύματα που εξετάσαμε έως τώρα, διαμήκη ή εγκάρσια, οφείλονται στην ελαστική αντίδραση της ύλης στην παραμόρφωσή της (του σχήματος και του όγκου της). Για να μη δημιουργηθεί καμμία σύγχυση ως προς τη φύση αυτών των ελαστικών δυνάμεων τονίζω ότι αυτές οι μακροσκοπικές δυνάμεις έχουν την προέλευσή τους στις ελκτικές και απωστικές δυνάμεις μεταξύ των ατόμων είναι δηλαδή ηλεκτρομαγνητικής φύσεως.

* γιατί κάνουμε αυτή την υπόθεση;



Μικροσκοπικές σφαίρες που συγκρατούνται μεταξύ τους με ελατήρια* είναι ένα καλό πρότυπο για να συλλάβει κανένας τον μικροσκοπικό μηχανισμό της ύπαρξης ελαστικών παραμορφώσεων και της δημιουργίας ελαστικών κυμάτων.

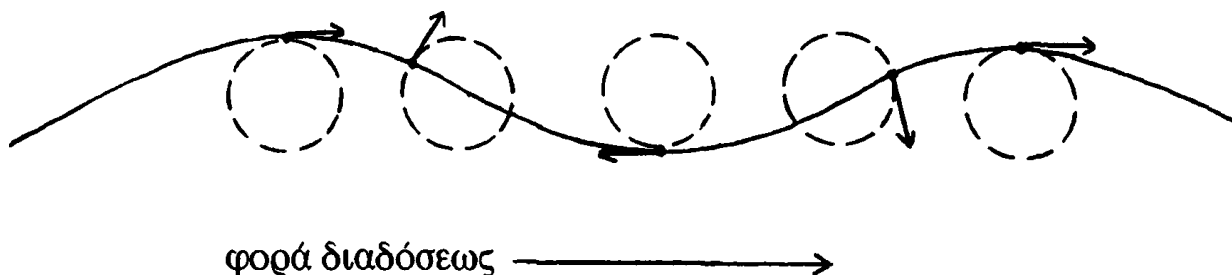
Εκτός από τα κύματα αυτά υπάρχουν και άλλα πιο πολύπλοκα ως προς την περιγραφή τους, όπως π.χ. διάφορα κύματα που δημιουργούνται στις επιφάνειες στερεών και υγρών. Ξεχωριστή θέση ανάμεσα σ' αυτά έχουν τα επιφανειακά κύματα των υγρών και ειδικά βέβαια τα υδάτινα κύματα. Η δύναμη επαναφοράς σ' αυτά μπορεί να προέρχεται από δύο αίτια. Το ένα είναι η βαρύτητα και το άλλο είναι η επιφανειακή τάση. Η βαρύτητα τείνει να επαναφέρει μάζες μετατοπισμένου νερού στη θέση ισορροπίας τους (που είναι βέβαια τέτοια ώστε η επιφάνεια να είναι οριζόντια). Για μικρές μάζες νερού η βαρύτητα παίζει δευτερεύοντα ρόλο καθώς κυριαρχεί η δύναμη λόγω επιφανειακής τάσεως. Η δύναμη αυτή οφείλεται στο ότι η αύξηση της επιφανείας ενός υγρού συνεπάγεται αύξηση της δυναμικής του ενέργειας· και εδώ επίσης τα μικροσκοπικά αίτια είναι ηλεκτρομαγνητικής φύσεως. Επειδή η δύναμη λόγω επιφανειακής τάσεως είναι ανάλογη με την επιφάνεια ενώ το βάρος είναι ανάλογο με τον όγκο, η σχετική σπουδαιότητα των δύο αιτιών ως «ελαστικών» παραγόντων κλίνει προς το μέρος της επιφανειακής τάσεως για μικρές μετατοπιζόμενες μάζες. Από την ως τώρα περιγραφή φαίνεται ότι μεγάλα μήκη κύματος (μεγάλες μετατοπισμένες μάζες) θα έχουν τα κύματα λόγω βαρύτητας, ενώ μικρά μήκη θα έχουν τα κύματα λόγω επιφανειακής τάσεως. Τα πρώτα ονομάζονται και βαρυτικά ενώ τα δεύτερα τριχοειδικά κύματα.

Τα υδάτινα κύματα δεν είναι ούτε καθαρά εγκάρσια ούτε καθαρά διαμήκη. Τα μόρια του νερού** κινούνται κατά προσέγγιση κυκλικά. Η ταχύτητά τους είναι ομόρροπη προς τη φορά του κύματος όταν βρεθούν στην κορυφή του κύματος και αντίθετη όταν βρεθούν στην κοιλάδα του κύματος.

* τα ελατήρια να συνδέουν όχι μόνον τους πλησιέστερους γείτονες αλλά και τους αμέσως επόμενους.

** στην επιφάνεια





Σχήμα 20 Κίνηση των μορίων του νερού στα υδάτινα κύματα.

Το πλάτος της κίνησης των μορίων ελαττώνεται με το βάθος. Επίσης, το σχήμα της τροχιάς μεταβάλλεται σε ελλειπτικό. Πώς θα είναι η ελλειπτική τροχιά κοντά στον πυθμένα;

Για κύματα βαρυτικά, όταν το βάθος h είναι πολύ μικρότερο από το λ , αποδεικνύεται ότι $v = \sqrt{gh}$. Όταν $\lambda \ll h$ περιμένουμε η ταχύτητα να μην εξαρτάται από το βάθος. Αποδεικνύεται ότι τότε: $v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$. Για τα

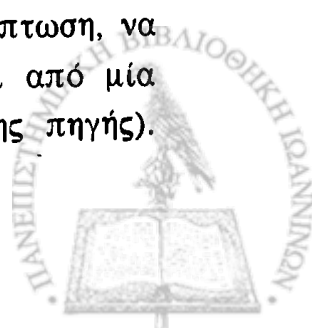
τριχοειδικά κύματα ισχύει η σχέση: $v = \sqrt{\frac{2\pi\alpha}{\rho\lambda}}$ όπου α ο συντελεστής επιφανειακής τάσεως του υγρού και ρ η πυκνότης του. Όταν και τα δύο αίτια, βαρύτητα και επιφανειακή τάση, είναι σημαντικά η ταχύτητα διαδόσεως είναι:

$$v = \sqrt{\frac{\alpha k}{\rho} + \frac{g}{k}} \quad k \text{ ο κυματαριθμός}$$

Παρατηρούμε ότι τα υδάτινα κύματα (ή επιφανειακά κύματα σε υγρά γενικότερα αφού οι προηγούμενοι τύποι ισχύουν γενικά) παρουσιάζουν διασκεδασμό εκτός από μία περίπτωση. Από τον ορισμό της ταχύτητας ομάδας και τους παραπάνω τύπους μπορεί κανείς να υπολογίσει τη σχέση μεταξύ ομαδικής και φασικής ταχύτητας για τις διάφορες περιπτώσεις υδατίνων κυμάτων. Συνάγεται επίσης από τις εξισώσεις αυτές ότι για ορισμένο υγρό υπάρχει μία ελάχιστη ταχύτητα διαδόσεως.

3.6 Μεταβίβαση ενέργειας - χαρακτηριστική αντίσταση

Όταν μία ηλεκτρική γεννήτρια συνδέεται με κάποιο σύστημα που μπορεί να απορροφήσει ηλεκτρική ενέργεια, είναι ασφαλώς επιθυμητό για το σύστημα, που ονομάζεται φορτίο στην προκειμένη περίπτωση, να απορροφάει μέγιστη ενέργεια. Το φορτίο χαρακτηρίζεται από μία αντίσταση· το ίδιο και η πηγή (εσωτερική αντίσταση της πηγής).



Αποδεικνύεται ότι για να καταναλώσει το φορτίο μέγιστη ενέργεια θα πρέπει να υπάρχει μία ορισμένη σχέση ανάμεσα στις αντιστάσεις της πηγής και του φορτίου. Η σχέση αυτή αποτελεί τη συνθήκη προσαρμογής του φορτίου με την πηγή*. Αν οι αντιστάσεις είναι καθαρά ωμικές έχουμε προσαρμογή, δηλ. μέγιστη κατανάλωση ενέργειας, όταν $R_{\pi} = R_{\varphi}$. Αν οι αντιστάσεις είναι σύνθετες θα πρέπει $R_{\pi} = R_{\varphi}$ και $X_{\pi}^{**} = -X_{\varphi}$. Η δεύτερη ισότητα σημαίνει πως αν π.χ. η αντίσταση της πηγής έχει επαγωγική συνιστώσα ($i\omega L$), το φορτίο θα πρέπει να έχει χωρητική συνιστώσα ($-i \frac{1}{\omega C}$)

και μάλιστα του ίδιου μέτρου. Δοκιμάστε να αποδείξετε αυτές τις συνθήκες.

Το φαινόμενο και η αναγκαιότητα της προσαρμογής δεν περιορίζεται σε κυκλώματα ηλεκτρικών πηγών-αντιστάσεων. Εμφανίζεται οποτεδήποτε ενέργεια οποιασδήποτε μορφής πρέπει να μεταφερθεί από τη θέση παραγωγής της, για να καταναλωθεί από κάποιο κατάλληλο φορτίο. Στην ηλεκτρολογία π.χ., η γραμμή μεταφοράς της ηλεκτρικής ισχύος θα πρέπει να είναι προσαρμοσμένη με την γεννήτρια. Στις τηλεπικοινωνίες, η κεραία ενός ραδιοφωνικού πομπού αποτελεί φορτίο για την έξοδο του πομπού (η έξοδος είναι ένας ενισχυτής). Η κεραία θα πρέπει να προσαρμοστεί στην αντίσταση εξόδου του πομπού. Ένας κιθαρίστας παράγει ενέργεια με τα χέρια του που μεταβιβάζεται στις χορδές και από εκεί στο σώμα της κιθάρας και τον περιεχόμενο αέρα, για να εκπεμφθεί κατόπιν η ακουστική ενέργεια στον περιβάλλοντα αέρα και τελικά να διεγερθεί το τύμπανο του αυτιού μας, απ' όπου η ενέργεια διαδίδεται σε λίγα ακόμη βήματα μέσα από το πολύπλοκο εσωτερικό του αυτιού πριν φθάσει στο ακουστικό νεύρο. Κάθε βήμα στη μεταβίβαση της ενέργειας γίνεται από μία πηγή (με τη γενικότερη σημασία της) προς ένα φορτίο. Σε κάθε βήμα έχουμε προσαρμογή, όταν το φορτίο απορροφάει μέγιστη ενέργεια. Όπως και στην περίπτωση της γεννήτριας, η προσαρμογή εκφράζεται με μία ορισμένη σχέση μεταξύ αντιστάσεων με την γενική τους έννοια*. Για οποιοδήποτε σύστημα ικανό να απορροφήσει ενέργεια η χαρακτηριστική του αντίσταση Z όπως ονομάζεται, είναι το πηλίκο της διέγερσης δια της αποκρίσεως του συστήματος. Η διέγερση και η απόκριση πρέπει να μετριώνονται με κάποιο κατάλληλο φυσικό μέγεθος. Για ηλεκτρικά συστήματα η διέγερση μετριέται με την τάση και η απόκριση με την ένταση του ρεύματος. Για μηχανικά

* Ισοδύναμα, μιλάμε για προσαρμογή των αντιστάσεων πηγής-φορτίου.

** Τα X συμβολίζουν καθαρά μη ωμικές αντιστάσεις

* δηλ. όχι στενά ηλεκτρικών αντιστάσεων



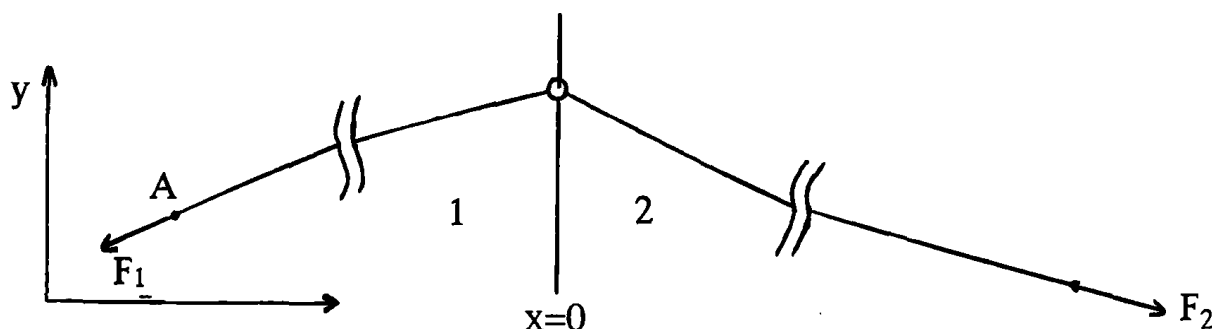
συστήματα η διέγερση μετρείται με τη δύναμη και η απόκριση με την ταχύτητα. Π.χ. όταν ένας μηχανικός αρμονικός ταλαντωτής διεγερθεί από μία περιοδική δύναμη, η μηχανική αντίσταση Z θα ισούται με το πηλίκο της δύναμης δια της ταχύτητάς του. Αυτό φαίνεται από την αντιστοιχία μηχανικών και ηλεκτρικών μεγεθών (βλ. σελ. 12-14).

Τα συστήματα που απορροφούν και επανεκπέμπουν ενέργεια δεν είναι απαραίτητο να είναι σώματα περιορισμένων διαστάσεων όπως π.χ. μία κεραία ή ένα ακουστικό αντηχείο. Μπορεί να είναι εκτεταμένα μέσα με πρακτικά άπειρες διαστάσεις. Όταν ένα κύμα διαδίδεται σε ένα μέσο, το κύμα ασφαλώς ξεκίνησε από κάποια πηγή και το μέσο μεταφέρει την ενέργεια της πηγής από σημείο σε σημείο. Η μεταβίβαση της ενέργειας από την πηγή στο μέσο καθορίζεται από τις χαρακτηριστικές αντιστάσεις των δύο συστημάτων. Κακή προσαρμογή συνεπάγεται ότι έστω και αν η πηγή παράγει αρκετή ενέργεια, λίγη μόνον ενέργεια θα μεταβιβαστεί στο μέσο. Π.χ. ένα διηγερόμενο διαπασών χωρίς αντηχείο δεν ακούγεται έντονα. Η μεσολάβηση του αντηχείου έχει ως αποτέλεσμα την προσαρμογή διαπασών-αντηχείου και αντηχείου-περιβάλλοντος αέρα και επομένως την καλλίτερη συνολικά μεταβίβαση ενέργειας. Όταν κύμα που διαδίδεται σε ένα μέσο συναντήσει τη διαχωριστική επιφάνεια με ένα διαφορετικό μέσο, μέρος της ενέργειας του κύματος θα μπει στο δεύτερο μέσο (διάθλαση) και μέρος της θα επιστρέψει στο πρώτο μέσο (ανάκλαση). Όπως θα δούμε σύντομα, το κλάσμα της κυματικής ενέργειας που ανακλάται (ή ισοδύναμα, αυτής που διαθλάται) καθορίζεται από τη σχέση των χαρακτηριστικών αντιστάσεων των δύο μέσων. Η ενέργεια περνάει ολόκληρη όταν τα δύο μέσα έχουν ίσες χαρακτηριστικές αντιστάσεις. Σύμφωνα με το γενικό ορισμό της χαρακτηριστικής αντίστασης μπορούμε να την ορίσουμε για ένα ελαστικό μέσο ως το πηλίκο $\Delta P/u$, όπου u η ταχύτητα των μορίων που ταλαντώνονται και ΔP η μεταβολή της πίεσης από την τιμή ισορροπίας. Εξίσου καλά* θα μπορούσε να ορισθεί η διέγερση ως η δύναμη που εξαναγκάζει τα μόρια σε ταλάντωση. Μήπως βλέπετε γιατί δεν προτιμάται εδώ η δύναμη ως διέγερση; Στα εγκάρσια κύματα σε τεντωμένο σκοινί διέγερση είναι σαφώς η εγκάρσια συνιστώσα της τείνουσας δύναμης, οπότε $Z=F_y/u$, u πάλι η ταχύτητα των μορίων του μέσου.

Ας δούμε αναλυτικά τη διάδοση των εγκάρσιων κυμάτων κατά μήκος δύο τεντωμένων σκοινιών που συνδέονται σε κάποιο σημείο τους.

* εξίσου καλά, εννοείται ως προς την ανταπόκριση με την έννοια της διέγερσης.





Σχήμα 21 Διάδοση εγκάρσιων κυμάτων κατά μήκος δύο τεντωμένων σκοινιών που συνδέονται σε κάποιο σημείο τους.

Τα δύο σκοινιά δεν είναι αναγκαίο να βρίσκονται υπό την ίδια τάση. Στο σχήμα π.χ., συνδέονται μέσω ενός κρίκου που μπορεί να ολισθαίνει σε κατακόρυφη ράβδο χωρίς τριβές. Το άκρο Α του σκοινιού 1 εξαναγκάζεται να εκτελέσει μία κατακόρυφη κίνηση $f_1(t)$ οπότε θα γεννηθεί ένα κύμα $\xi_1 = f_1(t - \frac{x}{v_1})$ όπου $v_1 = \sqrt{F_1 / \rho_1}$. Στη θέση $x=0$ το κύμα αυτό θα χωριστεί σε

δύο: ένα ανακλώμενο με απομάκρυνση $\xi_2 = f_2(t + \frac{x}{v_1})$ και ένα που περνάει

στο σκοινί 2 με εξίσωση $\xi_3 = f_3(t - \frac{x}{v_2})$ όπου $v_2 = \sqrt{F_2 / \rho_2}$. Υποθέτουμε ότι

το δεύτερο σκοινί έχει πρακτικά άπειρο μήκος ώστε να υπάρχει σ' αυτό κύμα διαδιδόμενο μόνο προς τα δεξιά. Στη θέση $x=0$ που είναι κοινή για τα δύο σκοινιά, η απομάκρυνση* που προκαλούν τα κύματα στο μέσο 1 πρέπει να είναι ίδια με την απομάκρυνση που προκαλεί το κύμα στο μέσο 2. Άρα θα ισχύει:

$$x=0, \quad f_1(t - \frac{x}{v_1}) + f_2(t + \frac{x}{v_1}) = f_3(t - \frac{x}{v_2}) \quad (1)$$

Θα ισχύει επίσης μία ανάλογη οριακή συνθήκη και για τις ταχύτητες με τις οποίες κινείται η στοιχειώδης μάζα σκοινιού στη θέση $x=0$.

$$x=0, \quad f'_1(t - \frac{x}{v_1}) + f'_2(t + \frac{x}{v_1}) = f'_3(t - \frac{x}{v_2}) \quad (2)$$

* βοηθάει να θυμόμαστε ότι στη θέση $x=0$ (όπως και σε κάθε θέση) υπάρχει μία στοιχειώδης μάζα dm που απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας της.



(Η (2) είναι αναγκαία συνέπεια της (1) είτε μαθηματικά είτε φυσικά το σκεφθεί κανείς· την γράφω γιατί θα χρησιμοποιηθεί σε λίγο). Η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης θα πρέπει επίσης να είναι συνεχής, δηλ. το μέγεθος $F(\frac{\partial \xi}{\partial x})$ θα πρέπει να έχει την ίδια τιμή στο $x=0$ και για τα δύο μέσα:

$$x=0, F_1 \frac{\partial \xi(1)}{\partial x} = F_2 \frac{\partial \xi(2)}{\partial x} \quad (3)$$

Δεδομένου ότι $\xi(1) = \xi_1 + \xi_2$ και $\xi(2) = \xi_3$ η (3) γίνεται:

$$F_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + F_1 \frac{\partial f_2}{\partial x} = F_2 \frac{\partial f_3}{\partial x} \quad \text{απ' όπου τελικά έχουμε:}$$

$$\frac{F_1}{v_1} f'_1 - \frac{F_1}{v_1} f'_2 = \frac{F_2}{v_2} f'_3 \quad (4)$$

Θεωρώντας την κατακόρυφη δύναμη που ασκείται στην άκρη Α του σκοινιού 1, η οποία είναι $-F_1(\partial \xi / \partial x)$, παρατηρούμε ότι προκαλεί μία ταχύτητα u (εγκάρσια) ίση με: $u = \partial \xi / \partial t$. Έχουμε λοιπόν:

$$F_y = -F_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} = F_1 \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{1}{v_1} \quad \text{άρα} \quad Z_1 = \frac{F_y}{u} = \frac{F_1}{v_1}^*$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η χαρακτηριστική αντίσταση του μέσου «τεντωμένο σκοινί» ισούται με $F/v = \sqrt{F\rho}$.

Με τον ορισμό αυτό, οι (2) και (4) μας δίνουν το σύστημα:

$$f'_3(t) - f'_2(t) = f'_1(t) \quad (5)$$

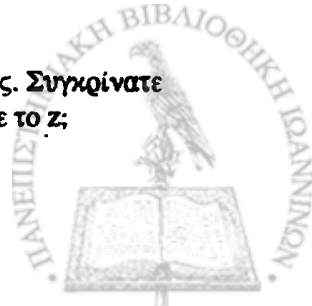
$$z_2 f'_3(t) - z_1 f'_2(t) = z_1 f'_1(t) \quad (6)$$

από το οποίο μπορούν να υπολογιστούν οι άγνωστες απομακρύνσεις συναρτήσει των δεδομένων του προβλήματος που είναι το προσπίπτον κύμα f_1 και οι χαρακτηριστικές αντιστάσεις των μέσων z_1, z_2 . Το σύστημα έχει την λύση, (οι σταθερές των ολοκληρώσεων αποδεικνύεται ότι είναι μηδέν),

$$f_2(0,t) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} f_1(0,t)$$

(7)

* Παρατηρείστε ότι F_y και u βρίσκονται σε φάση άρα z πραγματικός αριθμός. Συγκρίνατε με ηλεκτρικό σύστημα όπου V και I μπορεί να μην είναι σε φάση. Τι είναι τότε το z ;



$$f_3(0,t) = \frac{2z_1}{z_1 + z_2} f_1(0,t)$$

Διερευνώντας κανέναν τις εξισώσεις (7) μπορεί να δει τι γίνεται σε διάφορες οριακές περιπτώσεις. Είναι φανερό ότι η ενέργεια περνάει ολόκληρη στο δεύτερο μέσο όταν $z_1 = z_2$. Αξίζει να σημειώσουμε ότι για να έχουμε τέλεια προσαρμογή δεν είναι ανάγκη το πρώτο σκοινί να συνδεθεί οπωσδήποτε με ένα σκοινί που να έχει κατάλληλο z . Οποιοδήποτε μηχανικό σύστημα συνδεδεμένο στη θέση $x=0$ θα απορροφήσει όλη την ενέργεια που έρχεται από το σκοινί, αρκεί να έχει τη σωστή χαρακτηριστική αντίσταση.

3.7 Ηχητικά κύματα

Τα ηχητικά κύματα χαρακτηρίζονται: από την απομάκρυνση ξ των σωματιδίων του μέσου από τη θέση ισορροπίας· από την υπερπίεση ή ακουστική πίεση p που είναι η μεταβολή της πιέσεως από την τιμή ισορροπίας (δηλ. τη στατική πίεση)· από τη μεταβολή της πυκνότητας ως προς την πυκνότητα ισορροπίας $\Delta\rho$ · από την ταχύτητα των σωματιδίων στην οποία δεν περιλαμβάνεται η τυχαία θερμική ταχύτητα. Όταν μιλάμε για κίνηση σωματιδίων λόγω ηχητικών κυμάτων, εννοούμε τη συγχρονισμένη (κατά μέσον όρο) κίνηση των σωματιδίων που περιέχονται μέσα σε ένα στοιχειώδη όγκο.

Για ένα αρμονικό επίπεδο ηχητικό κύμα διαδιδόμενο προς τα δεξιά μπορούμε να γράψουμε για την απομάκρυνση την εξίσωση:

$$\xi(x,t) = \xi_0 e^{i(\omega t - kx)} \quad (1)$$

$$\text{Για την υπερπίεση,} \quad p = -\rho v^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} = i\rho v \omega \xi(x,t) \quad (2)$$

$$\text{Μεταβολή πυκνότητας,} \quad \frac{\Delta\rho}{\rho_0} = -\frac{\partial \xi}{\partial x} = ik\xi(x,t) \quad (3)$$

$$\text{Ταχύτητα,} \quad u = \frac{\partial \xi}{\partial t} = i\omega \xi(x,t) \quad (4)$$

Οι σχέσεις αυτές προκύπτουν αμοιβαία, με τη χρήση της $-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ (σελ. 38), της $\frac{dP}{d\rho} = \frac{B}{\rho}$ και της διαφορικής εξίσωσης του κύματος.

Η χαρακτηριστική ακουστική αντίσταση ενός μέσου θα είναι το πηλίκο του πλάτους της p δια του πλάτους της u . Ανάλογα με τη σχέση που



έχουν οι φάσεις των p και u η χαρακτηριστική αντίσταση μπορεί να είναι πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός. Για το παραπάνω επίπεδο κύμα φαίνεται πως:

$$Z = \rho v \text{ (διάδοση προς τα δεξιά)}$$

Για επίπεδο κύμα που διαδίδεται προς τα αριστερά, $Z = -\rho v$.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα επίπεδο αρμονικό ηχητικό κύμα που πέφτει κάθετα πάνω στη διαχωριστική επιφάνεια δύο ελαστικών μέσων με σταθερές Z_1, v_1 και Z_2, v_2 αντίστοιχα.

$$\begin{array}{c} Z_1, v_1 \quad | \quad Z_2, v_2 \\ \hline \xi_1 = \xi_0 e^{i(\omega t - k_1 x)} \longrightarrow (p_0, u_0) \quad \longrightarrow \quad \xi_3 = \xi_t e^{i(\omega t - k_2 x)} (p_t, u_t) \\ \xi_2 = \xi_r e^{i(\omega t - k_1 x)} \longleftarrow (p_r, u_r) \quad | \quad x = 0 \end{array}$$

Σε κάθε περίπτωση χωρισμού ενός κύματος σε ανακλώμενο και διερχόμενο (διαθλώμενο) μπορούμε να ορίσουμε τους συντελεστές (ή ποσοστά) ανακλάσεως και διελεύσεως για κάθε μέγεθος που χαρακτηρίζει το κύμα.

Έτσι για τις πιέσεις θα έχουμε: $R = \frac{p_r}{p_0}$ και $T = \frac{p_t}{p_0}$.

Δεδομένων των μέσων και του αρχικού κύματος, θέλουμε να προσδιορίσουμε τους συντελεστές R και T . Θα γράψουμε και εδώ τις οριακές συνθήκες. Κάθετα στη διαχωριστική επιφάνεια θα πρέπει στο $x=0$ να είναι ίσες τόσο οι ταχύτητες όσο και οι πιέσεις.

$$p_0 + p_r = p_t \quad (5) \quad u_0 + u_r = u_t \quad (6)$$

ή (από την (5)) $1 + R = T$ και $\frac{1}{Z_1} - \frac{R}{Z_1} = \frac{T}{Z_2}$ (από την (6)).

Τελικά βγαίνει ότι:

$$R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}, \quad \text{και} \quad T = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές και για τα άλλα χαρακτηριστικά μεγέθη του κύματος.





Τυπώθηκε στο Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο
με δαπάνη του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ
Τυπογραφείο

Copyright: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Απαγορεύεται η μερική ή ολική ανατύπωση, καθώς και η
λήψη φωτοαντιγραφικών από το βιβλίο χωρίς τη γραπτή
άδεια του Τμήματος Δημοσιευμάτων του Πανεπιστημίου
Ιωαννίνων και του συγγραφέα.

Διατίθεται και στο Πανεπιστημιακό Βιβλιοπωλείο,
Πανεπιστημιούπολη, Τηλ.: 41801.

Διανέμεται δωρεάν στους φοιτητές.

