

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μαθήματα Μαθηματικής Θεωρίας της Ελαστικότητας

Δρ. Χρήστου Β. Μασσαλά
Καθηγητή Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Ιωάννινα 1987



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μαθήματα Μαθηματικής Θεωρίας της Ελαστικότητας

Δρ. Χρήστου Β. Μασσαλά
Καθηγητή Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Ιωάννινα 1987



Η μηχανική του συνεχούς μέσου και ιδιαίτερα η θεωρία ελαστικότητας αποτέλεσε την κύρια πηγή, τους τελευταίους δύο αιώνες, για τη σημαντική ανάπτυξη των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Το βασικό ερευνητικό έργο επί της διατύπωσης της θεωρίας ελαστικότητας έγινε το 19-αίωνα. Στο χρονικό διάστημα από το Hooke που εισήγαγε το 1678 την ιδέα της σχέσης ύψους-παραμόρφωσης μέχρι το Navier που το 1821 διατύπωσε τις εξισώσεις ισορροπίας ενός παραμορφώσιμου στερεού, διάσημοι μαθηματικοί όπως οι James και Daniel Bernoulli, Euler και Lagrange χρησιμοποίησαν το ταλέντο τους για την ανάπτυξη μεθόδων ανάλυσης προβλημάτων της μηχανικής του παραμορφώσιμου μέσου. Το 19-αίωνα ένας μεγάλος αριθμός ερευνητών μεταξύ των οποίων και οι Lord Kelvin, Poisson, Lamé, Cauchy, Clapeyron, Green, Saint-Venant, Betti, Airy, Kirchhoff και Boussinesq ασχολήθηκε με την ανάπτυξη και τις εφαρμογές της θεωρίας ελαστικότητας. Μια ενδιαφέρουσα ανάλυση της ιστορικής εξέλιξης της θεωρίας ελαστικότητας παρουσιάζεται στο βιβλίο "History of the theory of elasticity" των Todhunter και Pearson. Τον 20-αίωνα η ερευνητική δουλειά των Lord Rayleigh, Kolosoff, Timoshenko, Galerkin και Muskhelishvili οδήγησε στην ανάπτυξη μαθηματικών μεθόδων επίλυσης των εξισώσεων της ελαστικότητας. Οι σύγχρονοι ερευνητές στο αντικείμενο της θεωρίας ελαστικότητας είναι πάρα πολλοί και αξιόλογοι πράγμα που δυσκολεύει το γράφοντα να ξεχωρίσει και να αναφέρει κάποιους από αυτούς.

Το αντικείμενο της θεωρίας ελαστικότητας για το μηχανικό είναι το μέσο με βάση το οποίο μπορεί να πάρει απάντηση σε πολλά πρακτικά προβλήματα ενώ για το μαθηματικό είναι το πεδίο εφαρμογής της μαθηματικής επιστήμης (σχεδόν όλων των κλάδων της μαθηματικής ανάλυσης, της θεωρίας προσεγγίσεων, της αριθμητικής ανάλυσης,...). Τα μαθήματα αυτά έχουν γραφτεί για σπουδαστές που οι βασικές τους σπουδές είναι στα μαθηματικά με τη μόνη φιλοδοξία να δώσουν σ αυτούς τον τρόπο εφαρμογής της μαθηματικής τους παιδείας στην ανάλυση φυσικών προβλημάτων. Μια πλήρης



παρουσίαση της θεωρίας ελαστικότητας είναι δύσκολη δουλειά και απαιτεί πολύ χώρο και χρόνο. Η επιλογή της ύλης έγινε με γνώμονα το μαθηματικό υπόβαθρο του σπουδαστή (5-εξάμηνο του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων) τη διάρκεια διδασκαλίας του μαθήματος (εξάμηνο) και τον τρόπο με τον οποίο πρέπει αυτός να δει το αντικείμενο της θεωρίας ελαστικότητας. Με βάση τις αρχές διαμόρφωσης της ύλης έγινε προσπάθεια α) να παρουσιαστεί με κάποια πληρότητα η μαθηματική διατύπωση των προβλημάτων της θεωρίας ελαστικότητας και η σύζευξή τους με τη θεωρία αγωγής της θερμότητας με βάση τη θερμοδυναμική των μη-αντιστρεπτών διαδικασιών β) να αναπτυχθούν τα πιο χαρακτηριστικά προβλήματα ώστε ο σπουδαστής να κατανοήσει τόσο από φυσική όσο και από μαθηματική σκοπιά το αντικείμενο αυτών των μαθημάτων και γ) να δοθεί το αναγκαίο υπόβαθρο για τη μελέτη της μεταελαστικής συμπεριφοράς των παραμορφώσιμων σωμάτων (εισαγωγή στη θεωρία της πλαστικότητας). Για την πληρέστερη ενημέρωση στο τέλος κάθε κεφαλαίου αναφέρεται η σχετική βιβλιογραφία.

Τα μαθήματα αυτά αφιερώνονται στο δάσκαλό μου καθηγητή του Polytechnic Institute of Brooklyn Αντώνη Αρμενάκα του οποίου η συστηματική και αυστηρά θεμελιωμένη αλλά και με φιλοσοφική διάθεση διδασκαλία της μηχανικής του συνεχούς μέσου αποτελεί διαρκή πηγή γνώσης και προτροπή για δημιουργική ενασχόληση για τους μαθητές του. Από τη θέση αυτή θέλω να ευχαριστήσω τη γυναίκα μου Δρ Αλίκη Μουκαρίκα που η βοήθειά της τόσο στη δουλειά αυτή όσο και σε κάθε μου προσπάθεια είναι ανεκτίμητη. Η άρτια δακτυλογράφηση έγινε από την κ. Λουκία Λάμπρου-Παπακώστα στην οποία εκφράζω τις ευχαριστίες μου.

1986

Χ.Β.Μ.



Η μηχανική του συνεχούς μέσου και ιδιαίτερα η θεωρία ελαστικότητας αποτέλεσε την κύρια πηγή, τους τελευταίους δύο αιώνες, για τη σημαντική ανάπτυξη των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Το βασικό ερευνητικό έργο επί της διατύπωσης της θεωρίας ελαστικότητας έγινε το 19-αίωνα. Στο χρονικό διάστημα από το Hooke που εισήγαγε το 1678 την ιδέα της σχέσης ύψους-παραμόρφωσης μέχρι το Navier που το 1821 διατύπωσε τις εξισώσεις ισορροπίας ενός παραμορφώσιμου στερεού, διάσημοι μαθηματικοί όπως οι James και Daniel Bernoulli, Euler και Lagrange χρησιμοποίησαν το ταλέντο τους για την ανάπτυξη μεθόδων ανάλυσης προβλημάτων της μηχανικής του παραμορφώσιμου μέσου. Το 19-αίωνα ένας μεγάλος αριθμός ερευνητών μεταξύ των οποίων και οι Lord Kelvin, Poisson, Lamé, Cauchy, Clapeyron, Green, Saint-Venant, Betti, Airy, Kirchhoff και Boussinesq ασχολήθηκε με την ανάπτυξη και τις εφαρμογές της θεωρίας ελαστικότητας. Μια ενδιαφέρουσα ανάλυση της ιστορικής εξέλιξης της θεωρίας ελαστικότητας παρουσιάζεται στο βιβλίο "History of the theory of elasticity" των Todhunter και Pearson. Τον 20-αίωνα η ερευνητική δουλειά των Lord Rayleigh, Kolosoff, Timoshenko, Galerkin και Muskhelishvili οδήγησε στην ανάπτυξη μαθηματικών μεθόδων επίλυσης των εξισώσεων της ελαστικότητας. Οι σύγχρονοι ερευνητές στο αντικείμενο της θεωρίας ελαστικότητας είναι πάρα πολλοί και αξιόλογοι πράγμα που δυσκολεύει το γράφοντα να ξεχωρίσει και να αναφέρει κάποιους από αυτούς.

Το αντικείμενο της θεωρίας ελαστικότητας για το μηχανικό είναι το μέσο με βάση το οποίο μπορεί να πάρει απάντηση σε πολλά πρακτικά προβλήματα ενώ για το μαθηματικό είναι το πεδίο εφαρμογής της μαθηματικής επιστήμης (σχεδόν όλων των κλάδων της μαθηματικής ανάλυσης, της θεωρίας προσεγγίσεων, της αριθμητικής ανάλυσης,...). Τα μαθήματα αυτά έχουν γραφτεί για σπουδαστές που οι βασικές τους σπουδές είναι στα μαθηματικά με τη μόνη φιλοδοξία να δώσουν σ αυτούς τον τρόπο εφαρμογής της μαθηματικής τους παιδείας στην ανάλυση φυσικών προβλημάτων. Μια πλήρης



παρουσίαση της θεωρίας ελαστικότητας είναι δύσκολη δουλειά και απαιτεί πολύ χώρο και χρόνο. Η επιλογή της ύλης έγινε με γνώμονα το μαθηματικό υπόβαθρο του σπουδαστή (5-εξάμηνο του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων) τη διάρκεια διδασκαλίας του μαθήματος (εξάμηνο) και τον τρόπο με τον οποίο πρέπει αυτός να δει το αντικείμενο της θεωρίας ελαστικότητας. Με βάση τις αρχές διαμόρφωσης της ύλης έγινε προσπάθεια α) να παρουσιαστεί με κάποια πληρότητα η μαθηματική διατύπωση των προβλημάτων της θεωρίας ελαστικότητας και η σύζευξή τους με τη θεωρία αγωγής της θερμότητας με βάση τη θερμοδυναμική των μη-αντιστρεπτών διαδικασιών β) να αναπτυχθούν τα πιο χαρακτηριστικά προβλήματα ώστε ο σπουδαστής να κατανοήσει τόσο από φυσική όσο και από μαθηματική σκοπιά το αντικείμενο αυτών των μαθημάτων και γ) να δοθεί το αναγκαίο υπόβαθρο για τη μελέτη της μεταελαστικής συμπεριφοράς των παραμορφώσιμων σωμάτων (εισαγωγή στη θεωρία της πλαστικότητας). Για την πληρέστερη ενημέρωση στο τέλος κάθε κεφαλαίου αναφέρεται η σχετική βιβλιογραφία.

Τα μαθήματα αυτά αφιερώνονται στο δάσκαλό μου καθηγητή του Polytechnic Institute of Brooklyn Αντώνη Αρμενάκα του οποίου η συστηματική και αυστηρά θεμελιωμένη αλλά και με φιλοσοφική διάθεση διδασκαλία της μηχανικής του συνεχούς μέσου αποτελεί διαρκή πηγή γνώσης και προτροπή για δημιουργική ενασχόληση για τους μαθητές του. Από τη θέση αυτή θέλω να ευχαριστήσω τη γυναίκα μου Δρ Αλίκη Μουκαρίκα που η βοήθειά της τόσο στη δουλειά αυτή όσο και σε κάθε μου προσπάθεια είναι ανεκτίμητη. Η άρτια δακτυλογράφηση έγινε από την κ. Λουκία Λάμπρου-Παπακώστα στην οποία εκφράζω τις ευχαριστίες μου.

1986

Χ.Β.Μ.



Περιεχόμενα

Προκαταρκτικές γνώσεις	1
ΚΕΦ. Α	
Ενταση	7
1 Μαζικές και επιφανειακές δυνάμεις - Διάνυσμα τάσης	7
2 Εντατική κατάσταση	9
3 Εξισώσεις ισορροπίας	11
4 Μετασχηματισμός των τ_{ij}	13
5 Κύριες κατευθύνσεις και τάσεις	14
6 Κύριες διατμητικές τάσεις	18
7 Επίπεδη εντατική κατάσταση. Κύκλος του Mohr	21
8 Αποκλίνων τανυστής τάσης	23
9 Καμπυλόγραμμες συντεταγμένες	24
Βιβλιογραφία	27
ΚΕΦ. Β	
Παραμόρφωση	29
1 Τανυστής τροπής	29
2 Ανηγμένη μήκυνση και διάτμηση	32
3 Τανυστής απειροστής τροπής	33
4 Κύριες κατευθύνσεις της τροπής	37
5 Διόγκωση - αποκλίνων τανυστής τροπής	39
6 Συνθήκες συμβιβαστού των παραμορφώσεων	40
7 Καμπυλόγραμμες συντεταγμένες	47
Βιβλιογραφία	50



ΚΕΦ. Γ

	Καταστατικές εξισώσεις των γραμμικά ελαστικών υλικών	51
1	Γραμμική ελαστικότητα - Γενικευμένος νόμος του Hooke	55
2	Γενικευμένος νόμος του Hooke σε θερμικό περιβάλλον	64
	Βιβλιογραφία	72

ΚΕΦ. Δ

	Γραμμική ελαστικότητα	74
1	Το πρόβλημα ισορροπίας ενός ισότροπου και ελαστικού στερεού	74
2	Το δυναμικό πρόβλημα ενός ισότροπου και ελαστικού στερεού	81
3	Θεώρημα του Clapeyron - Εξίσωση ενέργειας	82
4	Μοναδικότητα της λύσης - Παρατηρήσεις επί της ύπαρξης της λύσης	84
5	Αρχή του Saint - Venant	87
6	Θερμοελαστικό πρόβλημα	87
	Βιβλιογραφία	92

ΚΕΦ. Ε

	Θεωρία της επίπεδης ελαστικότητας	94
1	Επίπεδη παραμόρφωση. Επίπεδη ένταση. Γενικευμένη ένταση	94
2	Τασιουσυνάρτηση του Airy	102
3	Το επίπεδο πρόβλημα σε πολικές συντεταγμένες	109
	Βιβλιογραφία	116

ΚΕΦ. ΣΤ

	Προβλήματα της γραμμικής Ελαστικότητας	118
1	Διαμήκη και εγκάρσια ελαστικά κύματα	118
2	Θερμοελαστικές ταλαντώσεις	125
3	Επίπεδα προβλήματα	128



4	Το πρόβλημα στρέψης του Saint Venant	137
5	Τρισδιάστατα προβλήματα	144
5. 1.	Το πρόβλημα του Boussinesq	150
5. 2.	Το πρόβλημα των θερμοελαστικών τάσεων	152
5. 3.	Ταλαντώσεις ελαστικών σωμάτων	153
5. 4.	Διάδοση κυμάτων σε άπειρο ελαστικό μέσο	158
5. 5.	Επιφανειακά κύματα	161
	Βιβλιογραφία	166



Προκαταρκτικές γνώσεις.

Για τη μελέτη της μαθηματικής θεωρίας ελαστικότητας προϋποτίθεται ότι ο σπουδαστής έχει τις βασικές γνώσεις των μαθημάτων του κορμού και ιδιαίτερα εκείνων με αντικείμενα από τη μαθηματική ανάλυση π.χ. διαφορικές εξισώσεις, μιγαδική ανάλυση. Στην ανάπτυξη της θεωρίας ελαστικότητας θα χρησιμοποιηθούν κάποιοι συμβολισμοί και κάποια σύμβολα που θα δοθούν στη συνέχεια ώστε να αποφύγουμε μια πιθανή σύγχυση στο σπουδαστή.

Οι καρτεσιανές συντεταγμένες x, y, z θα συμβολίζονται x_1, x_2, x_3 αντίστοιχα. Ένα διάνυσμα $\bar{a}$ με συνιστώσες $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ θα συμβολίζεται α_i .

Οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες λέγονται βωβοί δείκτες ενώ οι μη επαναλαμβανόμενοι λέγονται ελεύθεροι δείκτες. Για παράδειγμα, στην έκφραση

$$\alpha_{ijk} \tau_{kj}$$

οι δείκτες j και k είναι βωβοί δείκτες ενώ ο i είναι ελεύθερος δείκτης. Οι βωβοί δείκτες σημαίνουν άθροιση ως προς αυτούς τους δείκτες ενώ οι ελεύθεροι δείκτες δίνουν πληροφορίες για το χαρακτήρα της έκφρασης (βαθμωτό, διανυσματικό, τανυστικό). Σένα άθροισμα

$$\alpha_{ijk} \tau_{kj} + A_{kl} \phi_{kli} + \dots$$

όλοι οι όροι πρέπει να έχουν τους ίδιους ελεύθερους δείκτες. Πρέπει να σημειωθεί ότι, ένας δείκτης δεν μπορεί να εμφανίζεται περισσότερες από δύο φορές. Για την κατανόηση του συμβολισμού με δείκτες ας παρακολουθήσουμε την πορεία γραφής στα παραδείγματα,

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i b_i = \alpha_i b_i$$

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \alpha_{ij} d_{jl} f_{lm} = \alpha_{i\alpha} d_{\alpha\beta} f_{\beta m}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

Η σύμβαση της πρόσθεσης μας δίνει το δικαίωμα ένα ζεύγος βωβών δει-



κτών να το αντικαταστήσουμε με κάποιο άλλο ζεύγος γραμμάτων.

Το εναλλακτικό σύμβολο e_{ijk} ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο :

$$e_{ijk} = \begin{cases} 0 & , \text{αν δύο δείκτες είναι ίσοι} \\ +1 & , \text{αν } ijk \text{ είναι άρτια μετάθεση των } (123) \\ -1 & , \text{αν } ijk \text{ είναι περιττή μετάθεση των } (123). \end{cases}$$

π.χ.

$$e_{ijk} = -e_{jik}, \quad e_{ikj} = -e_{ijk}, \quad e_{ijk} = e_{kij}$$

$$e_{123} = e_{312} = e_{231} = 1$$

$$e_{132} = e_{213} = e_{321} = -1.$$

Αν σχηματίσουμε τη συστολή

$$e_{ijk} e_{lmk}$$

έχουμε

$$e_{ijk} e_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \quad (\delta\text{-κανόνας})$$

όπου δ_{ij} είναι το σύμβολο του Kronecker που ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & , \text{αν } i \neq j \\ 1 & , \text{αν } i = j \end{cases}$$

π.χ.

$$\delta_{12} = 0, \quad \delta_{11} = 1, \quad \delta_{ii} = 3.$$

Το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ με τη βοήθεια του e_{ijk} γράφεται

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \sim c_i = e_{ijk} a_j b_k.$$

Αν A_{ij} είναι τα στοιχεία ενός 3×3 -μητρώου τότε η ορίζουσα $|A_{ij}|$ ή $\det(A_{ij})$ γράφεται

$$\det(A_{ij}) = e_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}.$$



Στην ανάπτυξη της θεωρίας της ελαστικότητας γίνεται χρήση καρτεσιανών τανυστών. Η έννοια του τανυστή συνδέεται με μετασχηματισμούς συστημάτων συντεταγμένων τέτοιων που να αφήνουν τη μαθηματική μορφή των φυσικών νόμων αναλλοίωτη. Ο καρτεσιανός τανυστής είναι ένα μαθηματικό κατασκεύασμα που περιγράφεται από συνιστώσες ποσότητες $A_{ijk\dots}$ που ακολουθούν τον ακόλουθο νόμο μετασχηματισμού μεταξύ των καρτεσιανών συστημάτων $\{x_i\} = (0x_1x_2x_3)$ και $\{x'_i\} = (0x'_1x'_2x'_3)$,

$$A'_{lmn\dots} = \lambda_{li}\lambda_{mj}\lambda_{nk}\dots A_{ijk\dots}$$

όπου $\lambda_{pq}, \dots$ είναι το συνημίτονο κατεύθυνσης μεταξύ του x'_p -άξονα και του x_q -άξονα ($p, q=1, 2, 3$), δηλαδή

$$\lambda_{pq} = \cos(x'_p, x_q) = \bar{i}'_p \cdot \bar{i}_q .$$

Από τις γνωστές σχέσεις των συνημιτόνων κατεύθυνσης τρισορθογωνίων συστημάτων αξόνων προκύπτει ότι

$$\lambda_{ik}\lambda_{jk} = \delta_{ij} , \quad \lambda_{ki}\lambda_{kj} = \delta_{ij} .$$

Στη θεωρία ελαστικότητας και σε άλλους κλάδους των φυσικών επιστημών υπάρχουν φυσικά μεγέθη που ικανοποιούν τον ορισμό των τανυστών και λέγονται τανυστικά μεγέθη.

Τανυστής μηδενικής τάξης (ή βαθμωτό μέγεθος) είναι μία ποσότητα που περιγράφεται από μία συνάρτηση $f(x_i)$ των συντεταγμένων και τέτοια που μένει αναλλοίωτη, όταν εκφράζεται στα αυθαίρετα καρτεσιανά συστήματα $\{x_i\}$ και $\{x'_i\}$, δηλαδή

$$f(x_i) = f(x'_i) .$$

Τανυστής πρώτης τάξης είναι ένα μέγεθος α_i που έχει τρεις συνιστώσες (ένα ελεύθερο δείκτη) που μετασχηματίζονται με το νόμο

$$\alpha'_j = \lambda_{ji}\alpha_i ,$$



δηλαδή είναι ένα διάνυσμα. Η προηγούμενη σχέση με συμβολισμό μητρώου γράφεται

$$\begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \alpha'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} .$$

Ένας τανυστής δεύτερης τάξης συμβολίζεται A_{ij} (δύο ελεύθεροι δείκτες) και οι συνιστώσες του μετασχηματίζονται με το νόμο

$$A'_{km} = \lambda_{ki} \lambda_{mj} A_{ij} .$$

Ένας τανυστής n -τάξης έχει $(k)^n$ συνιστώσες στο k -διάστατο χώρο και στο συμβολισμό του με δείκτες έχει n -ελεύθερους δείκτες.

Αν σένα τανυστή $A_{ijklm, \dots}$ εξισώσουμε δύο δείκτες (συστολή) π.χ. $i=j$ τότε ο τανυστής που θα προκύψει θα είναι $(n-2)$ -τάξης.

Αναλλοίωτες τανυστών λέγονται οι συναρτήσεις εκείνες των συνιστωσών ενός τανυστή που δεν μεταβάλλονται οι τιμές τους όταν αλλάξουμε το σύστημα συντεταγμένων, π.χ. για τον τανυστή πρώτης τάξης η μόνη αναλλοίωτη είναι το μέτρο του διανύσματος,

$$|\vec{\alpha}| = (\alpha_k \alpha_k)^{1/2} .$$

Ένας συμμετρικός τανυστής δεύτερης τάξης A_{ij} έχει τρεις αναλλοίωτες

$$I_1 = A_{ii}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (I_1^2 - A_{ij} A_{ij})$$

$$I_3 = \det(A_{ij}) = e_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} = \frac{1}{3} (3I_1 I_2 - I_1^3 + A_{ij} A_{jk} A_{ki}) .$$

Το ότι οι I_i είναι αναλλοίωτες του A_{ij} αποδεικνύεται εύκολα αν χρησιμοποιήσουμε το νόμο μετασχηματισμού των συνιστωσών ενός καρτεσιανού τανυστή.

Για μια σύντομη παρουσίαση των γεωμετρικών γνώσεων που απαιτούνται για τη μελέτη των κλάδων της μηχανικής των συνεχών μέσων βλέπε



Χ.Μασσαλάς (1932) "Μηχανική των Συνεχών Μέσων, Μέρος Α. Προκαταρκτικές Γεωμετρικές Γνώσεις".

Η παράγωγος μιας συνάρτησης ως προς κάποια συντεταγμένη θα συμβολίζεται

$$(\quad)_{,j} = \frac{\partial(\quad)}{\partial x_j} \quad j=1,2,3$$

π.χ.

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad \epsilon_{ij,kl} = \frac{\partial^2 \epsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} \quad i,j,k,l=1,2,3,$$

και η παραγωγή ως προς το χρόνο

$$(\dot{\quad}) = \frac{\partial(\quad)}{\partial t}$$

π.χ.

$$\ddot{u}_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}.$$

Στο κείμενο χρησιμοποιούνται συχνά οι ακόλουθες διανυσματικές πράξεις

	<u>συμβολισμός με δείκτες</u>
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	$a_i b_i$
$\vec{a} \times \vec{b}$	$\epsilon_{ijk} a_j b_k$
$\nabla \phi$	$\phi_{,i}$
$\nabla \cdot \vec{a}$	$a_{i,i}$
$\nabla \times \vec{a}$	$\epsilon_{ijk} a_{k,j}$
$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi$	$\phi_{,ii}$

Αν έχουμε ένα τανυστή $A_{jkl\dots}$ που ορίζεται στην περιοχή $V+S$, όπου V ο όγκος της και S η συνοριακή της επιφάνεια, τότε το θεώρημα του Gauss για κάθε συνιστώσα του (υποθέτουμε ότι είναι συνεχής και παραγωγίσιμη) έχει τη διατύπωση

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_i} A_{jkl\dots} dV = \int_S n_i A_{jkl\dots} dS$$



όπου n_i είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα επί της S . Το θεώρημα του Gauss μπορεί να εκφραστεί με πολλές άλλες μορφές που περικλείουν διάφορες πράξεις, π.χ.

$$\int_V f_{,i} dV = \int_S f n_i dS \quad \text{ή} \quad \int_V \nabla f dV = \int_S \bar{n} f dS$$

$$\int_V \alpha_{i,i} dV = \int_S \alpha_i n_i dS \quad \text{ή} \quad \int_V \nabla \cdot \bar{\alpha} dV = \int_S \bar{n} \cdot \bar{\alpha} dS$$

$$\int_V e_{ijk} \alpha_{k,j} dV = e_{ijk} \int_S \alpha_{k,j} dV = \int_S e_{ijk} \alpha_k n_j dS$$

ή

$$\int_V \nabla \times \bar{\alpha} dV = \int_S \bar{n} \times \bar{\alpha} dS, \quad$$

κ.τ.λ.

Βιβλιογραφία

Χ.Μασσαλάς: "Μηχανική των συνεχών μέσων. Μέρος Α. Προκαταρκτικές γεωμετρικές γνώσεις", Ιωάννινα (1932).



ΚΕΦ. Α

Ένταση

Όταν ένα παραμορφώσιμο μέσο υπόκειται στην επίδραση ενός πεδίου δυνάμεων τότε αυτό βρίσκεται σε μία εντατική κατάσταση. Ο προσδιορισμός της κατάστασης αυτής απαιτεί τη γνώση των συνιστωσών ενός τανυστή 2ης τάξης για κάθε σημείο του μέσου. Οι συνιστώσες αυτές από φυσική σκοπιά είναι δυνάμεις ανά μονάδα επιφάνειας (τάσεις). Το αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου είναι η φυσική και μαθηματική επεξεργασία της εντατικής κατάστασης ενός παραμορφώσιμου μέσου.

1. Μαζικές και επιφανειακές δυνάμεις- Διάνυσμα τάσης.

Ας θεωρήσουμε ένα συνεχές μέσο που καταλαμβάνει την περιοχή $V+S$ όπου V ο όγκος και S η συνοριακή του επιφάνεια, και έστω ΔV ο όγκος ενός απειροστού στοιχείου του (σχ.1). Το σύστημα αναφοράς των σημείων του μέσου είναι το καρτεσιανό σύστημα αξόνων $Ox_1x_2x_3$. Κατά την ανάλυση των δυνάμεων που ενεργούν στο στοιχείο όγκου ΔV πρέπει να λάβουμε υπόψη δύο είδη δυνάμεων :

- i) Μαζικές δυνάμεις, δηλαδή δυνάμεις που είναι ανάλογες της μάζας του στοιχείου ΔV και
- ii) Επιφανειακές δυνάμεις, δηλαδή δυνάμεις που ενεργούν επί της επιφάνειας ΔS του στοιχείου όγκου ΔV .

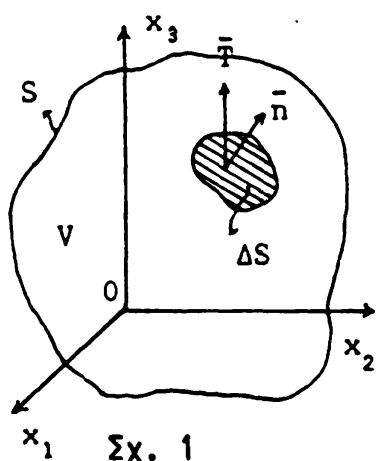
Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε ότι οι μαζικές δυνάμεις είναι συνεχείς συναρτήσεις κλάσης C^1 και οι επιφανειακές δυνάμεις είναι κατά τμήματα συνεχείς συναρτήσεις των συντεταγμένων (x_1, x_2, x_3) των σημείων του μέσου.



Ας θεωρήσουμε τώρα ένα απειροστό στοιχείο επιφάνειας ΔS που να βρίσκεται στο εσωτερικό ή στο σύνορο του μέσου και έστω ότι η δύναμη που ενεργεί στο στοιχείο αυτό είναι $\bar{T}\Delta S$. Επειδή έχουμε θεωρήσει ότι οι δυνάμεις είναι συνεχείς συναρτήσεις, θα έχουμε

$$(1) \quad \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\bar{T}\Delta S}{\Delta S} = \bar{T}(x_1, x_2, x_3),$$

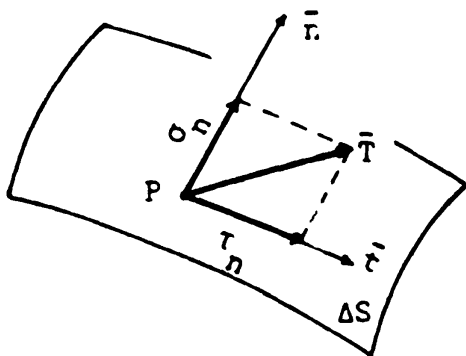
όπου το διάνυσμα $\bar{T}$ εκφράζει την επιφανειακή δύναμη, ανά μονάδα επιφάνειας, που ενεργεί στο σημείο $P(x_1, x_2, x_3)$ και λέγεται διάνυσμα τάσης.



Σχ. 1

Αν το στοιχείο ΔS βρίσκεται στο εσωτερικό του V θα θεωρούμε ότι η μία όψη του στοιχείου ΔS είναι θετική και η άλλη αρνητική. Για τη δύναμη $\bar{T}\Delta S$ μπορούμε να πούμε ότι εκφράζει τη δράση του τμήματος του μέσου που βρίσκεται από τη μεριά της θετικής όψης επί του τμήματος προς την αριστερή όψη. Από τον τρίτο νόμο του Newton θα έχουμε ότι η δύναμη $-\bar{T}\Delta S$ εκφράζει τη δράση του τμήματος του μέσου που βρίσκεται από τη μεριά της αρνητικής

όψης επί του τμήματος προς τη θετική όψη. Οι επιφανειακές δυνάμεις είναι συναρτήσεις τόσο της θέσης όσο και του προσανατολισμού του στοιχείου της επιφάνειας και για το λόγο αυτό το διάνυσμα τάσης το συμβολίζουμε $\bar{T}$. Πρέπει να σημειωθεί ότι γενικά το $\bar{T}$ δεν έχει τη διεύθυνση του $\bar{n}$.



Σχ. 2

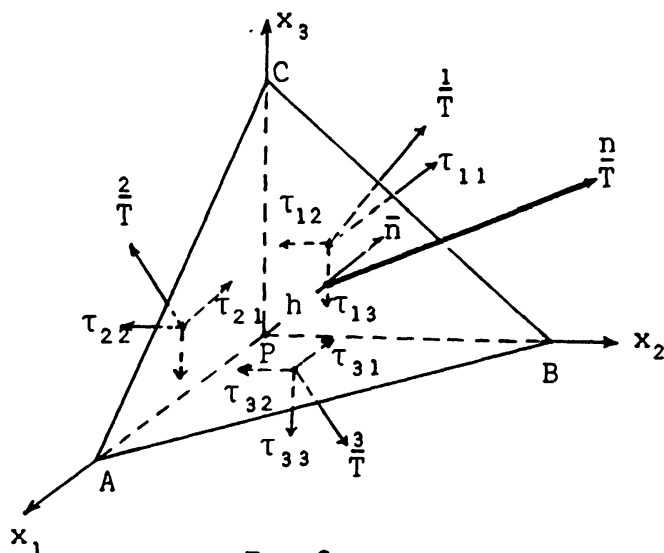
$$(2) \quad \bar{T} = \sigma_n \bar{n} + \tau_n \bar{t}$$



Το διάνυσμα $\bar{T}$ μπορεί να αναλυθεί σε μία συνιστώσα σ_n κάθετη προς την επιφάνεια και σε μία τ_n επί του εφαπτομένου επιπέδου της στο P (σχ.2). Η συνιστώσα σ_n λέγεται ορθή τάση και η τ_n διατμητική τάση. Θα αποδείξουμε στην επόμενη παράγραφο ότι για δοσμένο σημείο P αρκεί η γνώση του διανύσματος τάσης μόνο για τρεις διαφορετικούς προσανατολισμούς της ΔS για να γνωρίζουμε την τάση σε οποιοδήποτε άλλο προσανατολισμό της.

2. Εντατική κατάσταση.

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε ότι η εντατική κατάσταση σε κάθε σημείο του μέσου περιγράφεται πλήρως από 9-ποσότητες που λέγονται συνιστώσες του τανυστή τάσης. Τις ποσότητες αυτές τις έχει εισάγει στην ελαστικότητα ο Cauchy.



Σχ. 3

Ας θεωρήσουμε ένα σημείο P του μέσου και ότι $\bar{T}^n$ είναι το διάνυσμα τάσης που ενεργεί σε στοιχείο επιφάνειας στο P με μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\bar{n}$. Για απλότητα το σημείο P το αντιστοιχίζουμε με την αρχή του συστήματος $Ox_1x_2x_3$ ($O \equiv P$). Από το P φέρουμε τρεις τομές που συμπίπτουν με τα επίπεδα συντεταγμένων και μία τέταρτη σε απόσταση h κάθετη στο διάνυσμα $\bar{n}$ (σχ.3). Με $\bar{T}^1$, $\bar{T}^2$, $\bar{T}^3$ και $\bar{T}^n$ συμβολίζονται τα διανύσμα-



τα των τάσεων στις έδρες CPB, CPA, APB και ABC, αντίστοιχα. Το διάνυσμα λοιπόν $\vec{T}_i$ είναι το διάνυσμα τάσης που ενεργεί στο επίπεδο στοιχείο της επιφάνειας που είναι κάθετο στο x_i -άξονα. Ας αναλύσουμε το κάθε διάνυσμα $\vec{T}_i$ σε τρεις συνιστώσες τ_{ij} , $i, j=1, 2, 3$. Ο πρώτος δείκτης συμβολίζει τον προσανατολισμό της τομής (κάθετη στον i -άξονα) και ο δεύτερος δείκτης τη διεύθυνση της τάσης. Για τα πρόσημα των τ_{ij} θα υιοθετήσουμε τη σύμβαση: αν το κάθετο διάνυσμα επί της τομής έχει τη διεύθυνση του θετικού ή αρνητικού ημιάξονα συντεταγμένων x_i και η τάση τ_{ij} έχει τη θετική ή αρνητική διεύθυνση του x_j -ημιάξονα, αντίστοιχα, τότε η τάση λέμε ότι είναι θετική· σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση η τάση τ_{ij} λέμε ότι είναι αρνητική π.χ. οι τάσεις στο (σχ.3) είναι όλες θετικές. Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε

$$(2) \quad \vec{T}_j = \tau_{ij} \vec{i}_j$$

ή

$$(3) \quad \vec{T}_j = \tau_{ij} \vec{i}_j, \quad$$

όπου $\vec{i}_j$, $j=1, 2, 3$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τον j -άξονα. Όπως θα αποδείξουμε στη συνέχεια οι 9-συνιστώσες

$$(4) \quad \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix}$$

αποτελούν τις συνιστώσες ενός τανυστή 2ης τάξης. Οι συνιστώσες τ_{ij} , $i=j$ λέγονται ορθές τάσεις ενώ οι τ_{ij} , $i \neq j$ λέγονται διατμητικές τάσεις.

Ας επανέλθουμε τώρα στο (σχ.3). Αν η έδρα ABC του τετραέδρου έχει εμβαδόν ΔS τότε η έδρα που είναι κάθετη στον x_i -άξονα θα έχει εμβαδόν $\Delta S \cos(\vec{x}_i, \vec{n}) = \Delta S n_i$. Η ισορροπία του τετραέδρου απαιτεί το μηδενισμό της συνισταμένης δύναμης που ενεργεί επί της ύλης του.

Έστω ότι $\vec{T}_i$, τ_{ij} και B_i είναι οι τιμές του διανύσματος τάσης, του τανυστή τάσης και της μαζικής δύναμης στο σημείο P, αντίστοιχα.



Αν λάβουμε υπόψη τη συνέχεια του διανύσματος τάσης T_i^n η i -συνιστώσα της δύναμης που ενεργεί επί της έδρας ABC του τετραέδρου είναι $(T_i^n + \epsilon_i) \Delta S$, όπου $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon_i = 0$. Η συνιστώσα της δύναμης που αντιστοιχεί στις τάσεις που ενεργούν στις έδρες επιφάνειας $\Delta S_j = \Delta S n_j$ είναι $(\tau_{ji} + \epsilon_{ji}) \Delta S n_j$, όπου $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon_{ji} = 0$. Η συνεισφορά της μαζικής δύναμης B_i στη i -διεύθυνση είναι $\lim_{h \rightarrow 0} (B_i + \epsilon_i') \frac{1}{3} (\Delta S) h$, όπου $\frac{1}{3} (\Delta S) h = \Delta V$ και $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon_i' = 0$. Για να ισορροπεί το τετράεδρο PABC πρέπει (*)

$$(5) \quad (T_i^n + \epsilon_i) \Delta S - (\tau_{ji} + \epsilon_{ji}) \Delta S n_j + (B_i + \epsilon_i') \frac{1}{3} h \Delta S = 0.$$

Αν διαιρέσουμε την (5) με ΔS και πάρουμε το όριο για $h \rightarrow 0$, έχουμε

$$(6) \quad T_i^n = \tau_{ji} n_j.$$

Η σχέση (6) είναι γνωστή σαν τύπος του Cauchy.

Από την (6) γίνεται φανερό ότι αν γνωρίζουμε τις 9-συνιστώσες του τανυστή τ_{ij} σε κάθε σημείο $P(x_i)$ του μέσου, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το διάνυσμα τάσης σε κάθε στοιχείο επιφάνειας που περνάει από το σημείο $P(x_i)$ και έχει προσανατολισμό που προσδιορίζεται από το διάνυσμα n_j . Το ότι οι 9-συνιστώσες τ_{ij} είναι συνιστώσες ενός τανυστή θα το αποδείξουμε σε επόμενη παράγραφο. (*)

3. Εξισώσεις ισορροπίας.

Ας θεωρήσουμε ένα συνεχές μέσο όγκου V και συνοριακής επιφάνειας S που βρίσκεται στην κατάσταση της ισορροπίας. Στην κατάσταση αυτή πρέπει (**)

$$\oint_S T_i^n dS + \int_V B_i dV = 0$$

ή

(*) Το ότι οι τ_{ij} είναι συνιστώσες ενός καρτεσιανού τανυστή μπορεί να αποδειχτεί από την (6) και τον κανόνα του πηλίκου (Χ.Μασσαλάς, σελ.34)

(**) Αν το μέσο κινείται, τότε στη θέση των μαζικών δυνάμεων θα έχουμε $B_i \rightarrow B_i + \text{αδρανειακές δυνάμεις}$ (αρχή του D'Alembert).



$$(7) \quad \int_S \tau_{ji} n_j dS + \int_V B_i dV = 0.$$

Αν εφαρμόσουμε στο πρώτο ολοκλήρωμα της (7) το θεώρημα του Gauss έχουμε

$$(8) \quad \int_V (\tau_{ji,j} + B_i) dV = 0,$$

όπου $(\)_{,j} = \partial(\) / \partial x_j$.

Επειδή ο τύπος ολοκλήρωσης ν είναι αυθαίρετος (κάθε στοιχείο του μέσου βρίσκεται σε ισορροπία) και η υπό ολοκλήρωση έκφραση είναι συνεχής συνάρτηση, από την (8) έχουμε για κάθε σημείο του μέσου ότι

$$(9) \quad \tau_{ji,j} + B_i = 0.$$

Ας δούμε τώρα τη συνέπεια του μηδενισμού της συνισταμένης ροπής των μαζικών και επιφανειακών δυνάμεων :

$$\bar{M} = \int_S \bar{r} \times \bar{T} dS + \int_V \bar{r} \times \bar{B} dV = 0$$

ή

$$(10) \quad M_i = \int_S e_{ijk} x_j T_k^n dS + \int_V e_{ijk} x_j B_k dV = 0.$$

Αλλά

$$\begin{aligned} \int_S e_{ijk} x_j T_k^n dS &= \int_S e_{ijk} x_j \tau_{lk} n_l dS = \int_V (e_{ijk} x_j \tau_{lk})_{,l} dV \\ &= \int_V e_{ijk} x_{j,l} \tau_{lk} dV + \int_V e_{ijk} x_j \tau_{lk,l} dV \\ &= \int_V e_{ijk} \delta_{jl} \tau_{lk} dV + \int_V e_{ijk} x_j \tau_{lk,l} dV \\ &= \int_V e_{ijk} \tau_{jk} dV + \int_V e_{ijk} x_j \tau_{lk,l} dV \end{aligned}$$

και η (10) γράφεται

$$(11) \quad \int_V e_{ijk} \tau_{jk} dV + \int_V e_{ijk} x_j (\cancel{\tau_{lk,l}} + B_k) dV = \int_V e_{ijk} \tau_{jk} dV = 0.$$



Επειδή η υπό ολοκλήρωση έκφραση είναι συνεχής και ο τύπος ολοκλήρωσης αυθαίρετος, από την (11) έχουμε

$$(12) \quad e_{ijk} \tau_{jk} = 0 \Rightarrow \tau_{ij} = \tau_{ji}$$

δηλαδή τη συμμετρία του τανυστή των τάσεων. Από την παραπάνω ανάλυση γίνεται φανερό ότι οι 6-συνιστώσες τ_{ij} ικανοποιούν τις τρεις διαφορικές εξισώσεις

$$(13) \quad \tau_{ij,j} + B_i = 0 \quad x_i \in V$$

στο εσωτερικό του μέσου και τις τρεις συνοριακές συνθήκες

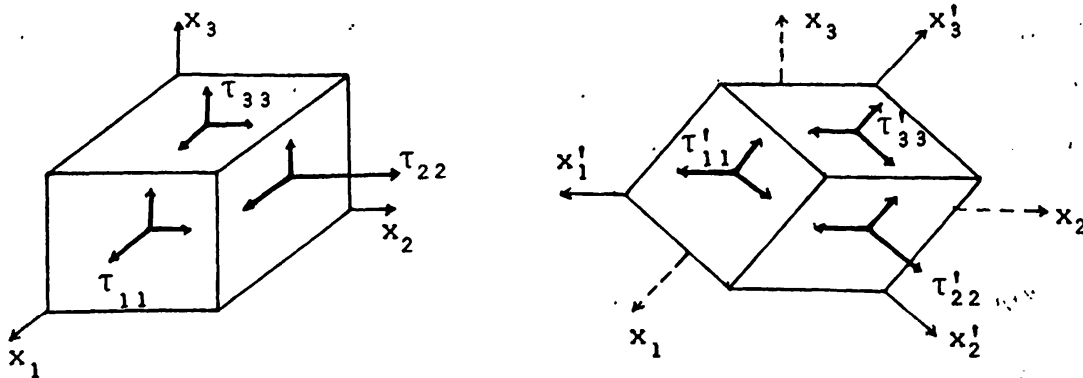
$$(14) \quad \bar{T}_i = \tau_{ij} n_j \quad x_i \in S$$

που προέρχονται από την ισορροπία στην επιφάνεια του S .

Οι (13) και (14) δεν είναι ικανές για τον προσδιορισμό της εντατικής κατάστασης του μέσου γιατί μας χρειάζονται και άλλες πληροφορίες που θα δοθούν σε επόμενο κεφάλαιο.

4. Μετασχηματισμός των τ_{ij}

Στην προηγούμενη παράγραφο οι συνιστώσες τ_{ij} προσδιορίστηκαν ως προς το ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα $Ox_1x_2x_3$. Ας θεωρήσουμε τώρα και ένα δεύτερο ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα $Ox'_1x'_2x'_3$ ως προς το οποίο θα αναζητήσουμε τις συνιστώσες τ'_{ij} (σχ.4).



Σχ.4

Οι συντεταγμένες x_j και x'_j συνδέονται με τη γραμμική σχέση

$$(15) \quad x'_k = \lambda_{ki} x_i,$$

όπου λ_{ki} είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης του x'_k -άξονα ως προς τον x_i -άξονα.

Από τον τύπο του Cauchy ξέρουμε ότι

$$\bar{T}_i = \tau_{ij} n_j.$$

Αν εκλέξουμε το μοναδιαίο διάνυσμα $\bar{n}$ να είναι παράλληλο στον x'_k -άξονα θα έχουμε

$$n_j^k = \lambda_{kj}$$

και

$$T_i^k = \tau_{ji} \lambda_{kj}.$$

Η συνιστώσα του διανύσματος $\bar{T}_i$ στη διεύθυνση του x'_m -άξονα είναι

$$\begin{aligned} T_{km}^i &= \sum_j \text{προβολή του } T_i^k \text{ επί του } x'_m\text{-άξονα} \\ &= T_1^k \lambda_{m1} + T_2^k \lambda_{m2} + T_3^k \lambda_{m3} = \tau_{11} \lambda_{m1} \lambda_{k1} + \tau_{21} \lambda_{m1} \lambda_{k2} + \dots \end{aligned}$$

δηλαδή

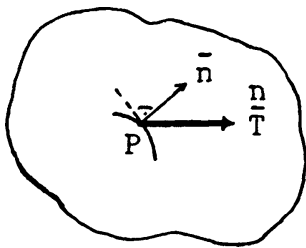
$$(16) \quad T_{km}^i = \lambda_{kj} \lambda_{mi} \tau_{ji}.$$

Από την (16) βλέπουμε ότι οι συνιστώσες ποσότητες τ_{ij} μετασχηματίζονται με το νόμο των καρτεσιανών τανυστών 2ης τάξης και κατά συνέπεια το φυσικό μέγεθος που περιγράφεται από τις τ_{ij} είναι συμμετρικός τανυστής 2ης τάξης στον Ευκλείδειο χώρο.

5. ΚΥΡΙΕΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΑΣΕΙΣ.

Από τον τύπο του Cauchy γίνεται φανερό ότι το διάνυσμα τάσης είναι συνάρτηση του προσανατολισμού της υλικής επιφάνειας πάνω στην ο-





Σχ.5

ποία ενεργεί η τάση αυτή. Για ποιό προσανατολισμό $\bar{n}$ το διάνυσμα $\frac{n}{T}$ είναι κάθετο στο στοιχείο της υλικής επιφάνειας; Με άλλα λόγια πό-
τε η $\bar{T}$ έχει μόνο ορθή τάση και μηδενική δια-
τμητική τάση; Στην περίπτωση αυτή

$$(17) \quad \frac{n}{T}_i = \sigma n_i = \sigma \delta_{ij} n_j = \tau_{ij} n_j \quad .$$

Από την (17) παίρνουμε

$$(18) \quad (\tau_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0, \quad n_i n_i = 1.$$

Για να έχει λύση διάφορη της μηδενικής το αλγεβρικό σύστημα (13) πρέ-
πει

$$(19) \quad \det\{\tau_{ij} - \sigma \delta_{ij}\} = 0 \quad .$$

Αν αναπτύξουμε την (19) θα πάρουμε

$$(20) \quad \sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0$$

όπου

$$J_1 = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = \tau_{ii}$$

$$(21) \quad J_2 = \begin{vmatrix} \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{32} & \tau_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{13} \\ \tau_{31} & \tau_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (J_1^2 - \tau_{ij} \tau_{ij})$$

$$J_3 = \det(\tau_{ij}) = \epsilon_{ijk} \tau_{i1} \tau_{j2} \tau_{k3}$$

είναι οι αναλλοίωτες του τανυστή τ_{ij} , δηλαδή έχουν τις ίδιες τιμές
στα αυθαίρετα συστήματα συντεταγμένων $\{x_i\}$ και $\{x'_i\}$.

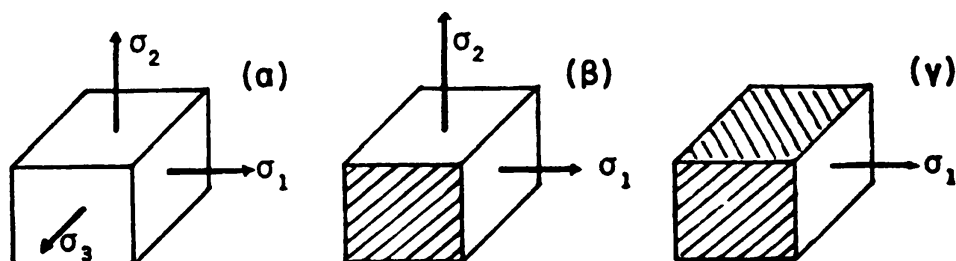
Η (20) έχει τρεις πραγματικές ρίζες $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ που λέγονται κύριες
τάσεις . Για κάθε μία από τις σ_i , $i=1,2,3$ υπάρχει ένα μοναδιαίο διάνυσμα n_j^i που είναι λύση της (13). Τα τρία διανύσματα n_j^1, n_j^2, n_j^3 είναι



(*)
κάθετα μεταξύ τους και καθορίζουν τις κύριες κατευθύνσεις της τάσης στο σημείο $P(x_1)$, ενώ τα επίπεδα που είναι κάθετα στις κύριες κατευθύνσεις λέγονται κύρια επίπεδα. Στα κύρια επίπεδα υπάρχει μόνο ορθή τάση. Όταν $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 \neq 0$, $\sigma_3 \neq 0$ τότε έχουμε στο μέσο τριαξονική εντατική κατάσταση (σχ.6α). Η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται στην περίπτωση αυτή είναι $J_3 \neq 0$. Αν η $J_3 = 0$ και $J_2 \neq 0$, τότε η (20) παίρνει τη μορφή

$$(22) \quad \sigma(\sigma^2 - J_1\sigma + J_2) = 0.$$

Μία από τις ρίζες της (22) είναι ίση με μηδέν. Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι όλα τα διανύσματα τάσης είναι παράλληλα προς ένα επίπεδο που είναι ελεύθερο τάσεων (σχ.6β). Αν $J_2 = J_3 = 0$ τότε η εντατική κατάσταση είναι μονοαξονική (σχ.6γ)



Σχ.6

Παράδειγμα : Αν ο τανυστής τάσης σε κάποιο σημείο του μέσου είναι

$$\tau_{ij} = \begin{bmatrix} 20 & 30 & 10 \\ 30 & 30 & 20 \\ 10 & 20 & 40 \end{bmatrix},$$

όπου όλες οι συνιστώσες έχουν διάσταση kg/cm^2 , να προσδιοριστούν οι κύριες κατευθύνσεις τους .

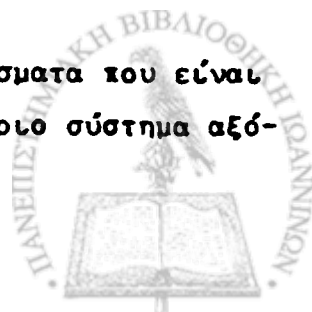
θα έχουμε

$$J_1 = 90, \quad J_2 = 1\,200, \quad J_3 = -11\,000$$

και η (20) γράφεται

$$(23) \quad \sigma^3 - 90\sigma^2 + 1\,200\sigma - 11\,000 = 0.$$

(*) Για κάθε κύρια τάση ορίζονται δύο μοναδιαία διανύσματα που είναι ίσα και αντίθετα. Για να εξασφαλίσουμε δεξιόστροφο κύριο σύστημα αξόνων πρέπει : $\bar{n}^1 \times \bar{n}^2 = \bar{n}^3$.



Οι ρίζες (*) της (23) είναι :

$$\sigma_1 \approx 71 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_2 \approx 25 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_3 \approx -6 \text{ kg/cm}^2.$$

Από τη λύση του συστήματος (18), για κάθε κύρια τάση, κάνοντας χρήση της σχέσης

$$(24) \quad n_i n_i = 1,$$

παίρνουμε τις κύριες κατευθύνσεις

$$(n_1^1, n_2^1, n_3^1) = (.495, .647, .579)$$

$$(25) \quad (n_1^2, n_2^2, n_3^2) = (.480, .352, -.803)$$

$$(n_1^3, n_2^3, n_3^3) = (-.724, .676, -.130).$$

(*) Η (20) με την εισαγωγή της νέας μεταβλητής $q = \sigma - J_1/3$ παίρνει τη μορφή

$$(α) \quad q^3 - P_2 q - P_3 = 0$$

όπου

$$P_2 = -J_2 + \frac{J_1^2}{3} > 0, \quad P_3 = J_3 + \frac{2J_1^3}{27} - \frac{J_1 J_2}{3}.$$

Οι ρίζες της (α) βρίσκονται με την εισαγωγή της νέας μεταβλητής ω από τη σχέση

$$(β) \quad q = 2\left(\frac{P_2}{3}\right)^{1/2} \cos \omega.$$

Αν αντικαταστήσουμε τη (β) στην (α) και χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα $\cos 3\omega = 4\cos^3 \omega - 3\cos \omega$ παίρνουμε

$$(γ) \quad \cos 3\omega = \frac{P_3}{2} \left(\frac{3}{P_2}\right)^{3/2}.$$

Επειδή η (α) έχει τρεις πραγματικές ρίζες (βλ. σχόλιο στο τέλος του κεφαλαίου) $|P_3/2(\frac{3}{P_2})^{3/2}| \leq 1$. Από την (γ) θα έχουμε

$$3\omega = 3\omega_1 + 2(k-1)\pi, \quad \cos 3\omega_1 = \frac{P_3}{2} \left(\frac{3}{P_2}\right)^{3/2}$$

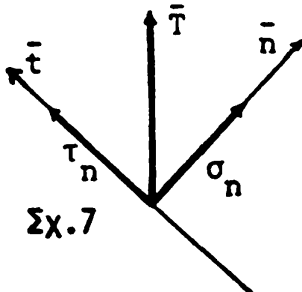
και οι ρίζες της (β) θα προκύψουν από τις

$$0 \leq \omega_1 < \frac{\pi}{3}, \quad \omega_2 = \omega_1 + \frac{2\pi}{3}, \quad \omega_3 = \omega_1 - \frac{2\pi}{3}$$



6. Κύριες διασμητικές τάσεις.

Για κάθε σημείο του μέσου $P(x_i)$ υπάρχει ένα τουλάχιστο σύστημα κυρίων αξόνων. Στην παράγραφο αυτή, με σύστημα αναφοράς το σύστημα των κυρίων αξόνων, θα αναζητήσουμε τις ακραίες τιμές των διασμητικών τάσεων σένα σημείο P του μέσου. Από το σχ.7 έχουμε



Σχ.7

$$(26) \quad \sigma_n = \bar{T} \cdot \bar{n} = (\sigma_1 n_1) \bar{i}_1 + (\sigma_2 n_2) \bar{i}_2 + (\sigma_3 n_3) \bar{i}_3 \cdot \bar{n}$$

$$= \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

$$|\bar{T}|^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2$$

$$(*) \quad \tau_n^2 = (\bar{T})^2 - \sigma_n^2 = n_1^2 n_2^2 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + n_2^2 n_3^2 (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + n_3^2 n_1^2 (\sigma_3 - \sigma_1)^2$$

(23)

$$n_i n_i = 1$$

Θα αναζητήσουμε τα ακρότατα της τ_n^2 που υπόκειται στη δεσμική σχέση (23). Αν κάνουμε χρήση της μεθόδου των πολλαπλασιαστών του Lagrange με πολλαπλασιαστή λ σχηματίζουμε τη συνάρτηση $F = \tau_n^2 - \lambda(n_i n_i - 1)$ και απαιτούμε $\partial F / \partial n_k = 0$, $k=1,2,3$, οπότε παίρνουμε

$$(29) \quad \begin{aligned} 2n_1 \{ n_2^2 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + n_3^2 (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - \lambda \} &= 0 \\ 2n_2 \{ n_3^2 (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + n_1^2 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \lambda \} &= 0 \\ 2n_3 \{ n_1^2 (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + n_2^2 (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - \lambda \} &= 0 \\ n_i n_i &= 1 \end{aligned}$$

(*)

$$n_1^2 - n_1^4 = n_1^2 (1 - n_1^2) = n_1^2 (n_2^2 + n_3^2)$$



θα υποθέτουμε στη συνέχεια ότι η διάταξη των σ_i είναι

$$(30) \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3.$$

Οι λύσεις των (28) και (29) φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα.

n_1	n_2	n_3	τ_n^2	λ	σ_n
± 1	0	0	0	0	σ_1
0	± 1	0	0	0	σ_2
0	0	± 1	0	0	σ_3
0	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2$	$2\tau_n^2$	$\left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)$
$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2$	$2\tau_n^2$	$\left(\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}\right)$
$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2$	$2\tau_n^2$	$\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)$

Από τον πίνακα των λύσεων φαίνεται ότι οι ακραίες τιμές των διατμητικών τάσεων είναι:

$$(31) \quad \frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3|, \quad \frac{1}{2} |\sigma_3 - \sigma_1|, \quad \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2|.$$

Οι κύριες διατμητικές τάσεις εκφράζονται σε όρους των κυρίων ορθών τάσεων από τις σχέσεις:

$$(32) \quad \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3) \geq 0 \\ \tau_2 &= \frac{1}{2} (\sigma_3 - \sigma_1) \leq 0 \\ \tau_3 &= \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \geq 0 \end{aligned} \quad \tau_{\max} = -\tau_2$$

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η $\tau_{\max}$ ενεργεί στα επίπεδα που διχοτομούν τις διευθύνσεις που αντιστοιχούν στις $\sigma_{\max}$ και $\sigma_{\min}$.

Αν λύσουμε τις (26)-(28) ως προς n_i^2 έχουμε

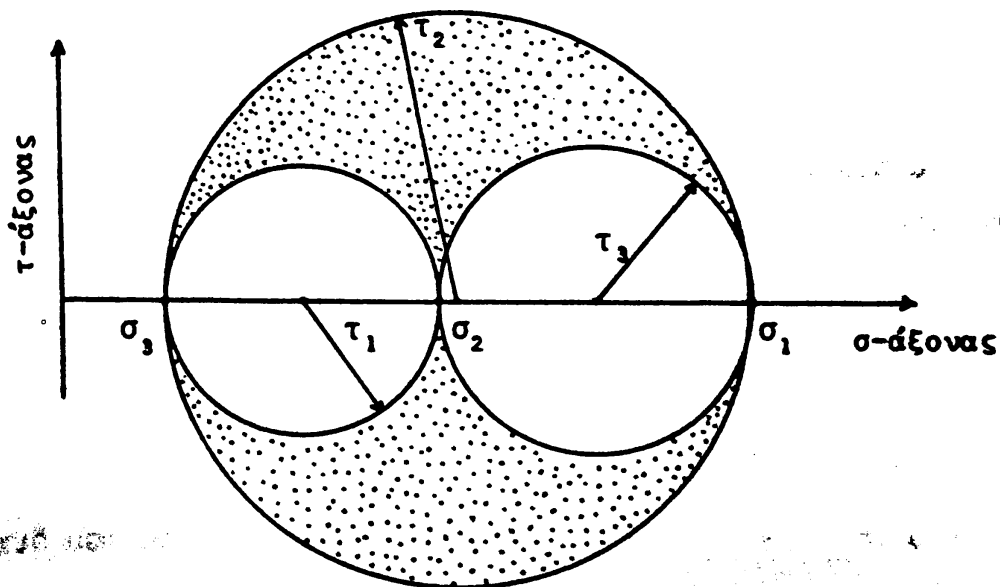


$$\begin{aligned}
 n_1^2 &= \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \geq 0 \\
 n_2^2 &= \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \geq 0 \\
 n_3^2 &= \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \geq 0
 \end{aligned}
 \quad (33)$$

Από τις (33) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 \tau_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 &\geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 = \tau_1^2 \\
 \tau_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}\right)^2 &\leq \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2 = \tau_2^2 \\
 \tau_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 &\geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 = \tau_3^2
 \end{aligned}
 \quad (34)$$

Οι εξισώσεις (34) απεικονίζονται στο (σχ.3). Όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί μεταξύ ορθών και διατμητικών τάσεων παίρνονται από τα σημεία του γραμμοσκιασμένου τμήματος και τα σημεία του συνόρου του.



Σχ.3



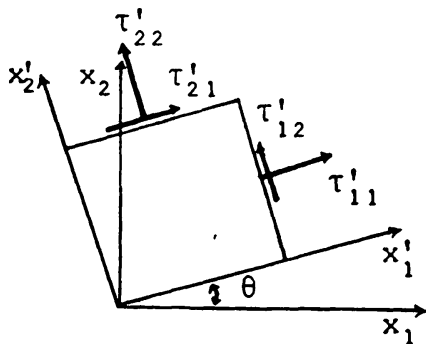
Ας θεωρήσουμε ένα σημείο Ρ από το οποίο φέρουμε επίπεδα κεκλιμένα με ίδια κλίση προς τους κύριους άξονες. Επειδή είναι δυνατό να φέρουμε οκτώ τέτοια επίπεδα κάθε ένα από αυτά λέγεται έδρα οκτάεδρου. Το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο του οκταέδρου είναι $\bar{n} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Από την (27) παίρνουμε

$$(35) \quad \tau_n^2 = \frac{1}{9} \{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\} = \frac{1}{9} (2J_1^2 - 6J_2)$$

Το μέτρο της διατμητικής τάσης που ενεργεί στην έδρα του οκτάεδρου είναι

$$(36) \quad \tau_0 = |\tau_n| = \frac{1}{3} \{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\}^{1/2} \geq 0.$$

7. Επίπεδη εντατική κατάσταση. Κύκλος του Mohr.



Σχ.9

Η επίπεδη εντατική κατάσταση π.χ. στο x_1, x_2 -επίπεδο χαρακτηρίζεται από τη συνθήκη (σχ.9)

$$(37) \quad \tau_{i3} = 0, \quad i=1,2,3.$$

Οι τάσεις τ'_{km} , $k, m=1,2$ δίνονται από τις σχέσεις

$$(38) \quad \begin{aligned} \tau'_{11} &= \tau_{11} \cos^2 \theta + \tau_{22} \sin^2 \theta + 2\tau_{12} \cos \theta \sin \theta \\ \tau'_{22} &= \tau_{11} \sin^2 \theta + \tau_{22} \cos^2 \theta - 2\tau_{12} \cos \theta \sin \theta \\ \tau'_{12} &= (\tau_{11} - \tau_{22}) \sin \theta \cos \theta + \tau_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \end{aligned}$$

όπου τα συνημίτονα κατεύθυνσης $\lambda_{ki}, \lambda_{mi}$ έχουν εκφραστεί σαν συναρτήσεις της γωνίας θ .

Οι (38) μπορούν ακόμα να γραφτούν με την ακόλουθη μορφή

$$\tau'_{11} = \frac{\tau_{11} + \tau_{22}}{2} + \frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{2} \cos 2\theta + \tau_{12} \sin 2\theta$$



$$(39) \quad \tau'_{22} = \frac{\tau_{11} + \tau_{22}}{2} - \frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{2} \cos 2\theta - \tau_{12} \sin 2\theta$$

$$\tau'_{12} = -\frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{2} \sin 2\theta + \tau_{12} \cos 2\theta$$

Επειδή $\tau'_{11} + \tau'_{22} = \tau_{11} + \tau_{22}$ η συνθήκη για την οποία έχουμε στάσιμη τιμή της τ'_{11} είναι

$$(40) \quad \frac{\partial \tau'_{11}}{\partial \theta} = -\frac{(\tau_{11} - \tau_{22})}{2} 2 \sin 2\theta + 2\tau_{12} \cos 2\theta - 2\tau'_{12} = 0 \Rightarrow \tan 2\theta = \frac{2\tau_{12}}{\tau_{11} - \tau_{22}}$$

Οι κατευθύνσεις που προσδιορίζονται από την (40) λέγονται κύριες κατευθύνσεις και οι ορθές τάσεις που αντιστοιχούν σ αυτές λέγονται κύριες τάσεις.

Από τις (40) γίνεται φανερό ότι οι κύριες τάσεις είναι οι ακραίες τιμές των ορθών τάσεων,

$$(41) \quad \left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\tau_{11} + \tau_{22}}{2} \pm \left\{ \left(\frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{2} \right)^2 + \tau_{12}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

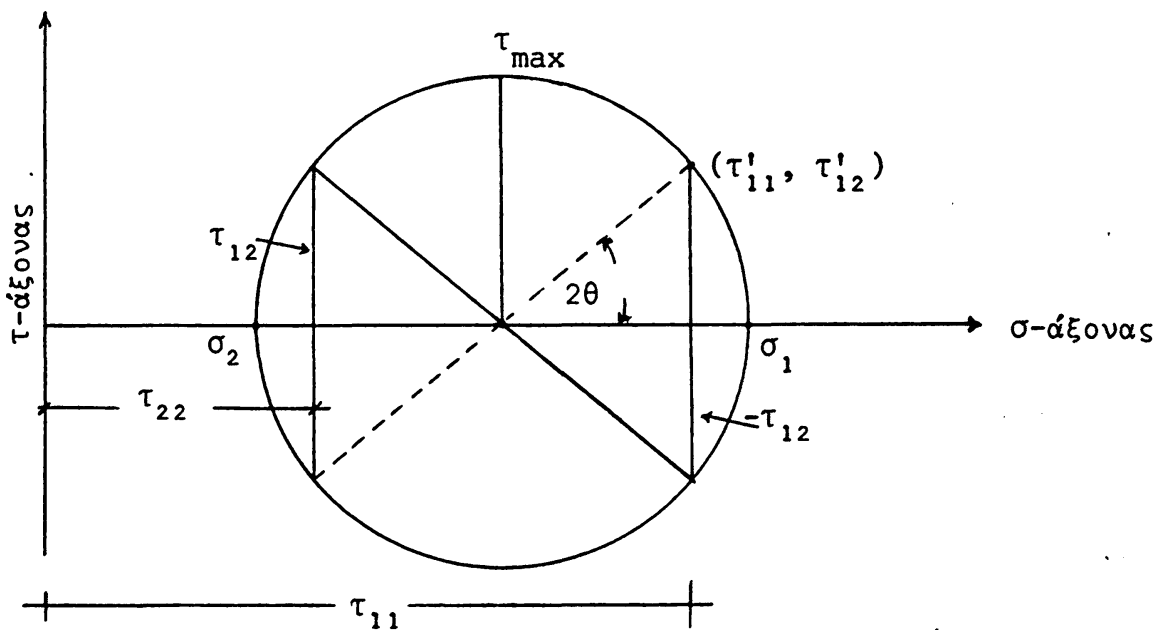
Πρέπει να σημειωθεί ότι στο συμπέρασμα (41) οδηγούμαστε πιο εύκολα λύνοντας την εξίσωση (22).

Από τη συνθήκη για ακρότητα της τ'_{12} παίρνουμε τη γωνία για την οποία αυτό λαβαίνει χώρα. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η γωνία αυτή είναι $\pm \pi/2$ από τις κύριες κατευθύνσεις που προσδιορίζονται από την (40) και η ακραία τιμή της τ'_{12} είναι

$$(42) \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \left\{ \left(\frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{2} \right)^2 + \tau_{12}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Στο (σχ.10) φαίνεται η γεωμετρική παράσταση των παραπάνω σχέσεων (κύκλος του Mohr), όπου θ είναι η γωνία του συστήματος των κυρίων αξόνων με το αρχικό σύστημα αναφοράς.





Σχ. 10

8. Αποκλίνων τανυστής τάσης.

Ο τανυστής τ_{ij} μπορεί να αναλυθεί με τον ακόλουθο τρόπο:

$$(43) \quad \tau_{ij} = s_{ij} + p\delta_{ij}$$

όπου

$$(44) \quad 3p = \tau_{kk}.$$

Ο τανυστής

$$(45) \quad s_{ij} = \tau_{ij} - p\delta_{ij}$$

λέγεται αποκλίνων τανυστής τάσης.

Οι κύριες κατευθύνσεις του s_{ij} συμπίπτουν με εκείνες του τ_{ij} και οι κύριες τιμές των τάσεων θα είναι

$$(46) \quad s_i = \sigma_i - p.$$



Οι s_i είναι ρίζες της εξίσωσης

$$(47) \quad s^3 - J_{2D}s - J_{3D} = 0$$

όπου

$$(48) \quad \begin{aligned} J_{1D} &= s_{ii} = 0 \\ J_{2D} &= \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{3}{2} (\tau_0)^2 = \frac{1}{2} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \\ J_{3D} &= \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki} = s_1 s_2 s_3 = \frac{1}{3} (s_1^3 + s_2^3 + s_3^3) \end{aligned}$$

Η κυβική εξίσωση (47) έχει τρεις πραγματικές

$$(49) \quad \begin{aligned} s_1 &= \tau_0 \sqrt{2} \cos \omega \\ s_2 &= \tau_0 \sqrt{2} \cos(\omega + \frac{2\pi}{3}) \\ s_3 &= \tau_0 \sqrt{2} \cos(\omega - \frac{2\pi}{3}) \end{aligned}$$

όπου

$$(50) \quad \cos 3\omega = \sqrt{2} J_{3D} / \tau_0^3$$

Οι αναλλοίωτες J_{iD} συνδέονται με τις J_i του τανυστή τ_{ij} με τον ακόλουθο τρόπο:

$$(51) \quad \begin{aligned} J_{1D} &= 0, \quad J_{2D} = -J_2 + \frac{1}{3} J_1^2 \\ J_{3D} &= J_3 - \frac{1}{3} (J_1 J_2) + \frac{2}{27} J_1^3 \end{aligned}$$

9. Καμπυλόγραμμες συντεταγμένες.

Στο Κεφάλαιο αυτό η ανάλυση της εντατικής κατάστασης έγινε στα πλαίσια των καρτεσιανών συστημάτων συντεταγμένων. Σε πολλές όμως εφαρμογές έχουμε να αντιμετωπίσουμε προβλήματα με καμπύλα σύνορα και κατά συνέπεια είναι ανάγκη οι βασικές εξισώσεις αυτού του κεφαλαίου να διατυπωθούν σε καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων. Στη συνέχεια θα δοθούν οι βασικές εξισώσεις σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.



α. Κυλινδρικές συντεταγμένες ($x_1 \rightarrow r, x_2 \rightarrow \theta, x_3$).

Διάνυσμα $\bar{F}$

$$(52) \quad \bar{F} = F_r \bar{i}_r + F_\theta \bar{i}_\theta + F_z \bar{i}_z$$

τελεστής ∇

$$(53) \quad \nabla = \bar{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \bar{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \bar{i}_z \frac{\partial}{\partial x_3}$$

Εξισώσεις ισορροπίας

$$(54) \quad \begin{aligned} \tau_{rr,r} + \frac{1}{r} (\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}) + \frac{1}{r} \tau_{r\theta,\theta} + \tau_{rz} + B_r &= 0 \\ \tau_{r\theta,r} + \frac{1}{r} \tau_{\theta\theta,\theta} + \tau_{\theta z,z} + \frac{1}{r} \tau_{r\theta} + B_\theta &= 0 \\ \tau_{zr,r} + \frac{1}{r} \tau_{\theta z,\theta} + \tau_{zz,z} + \tau_{zr} + B_z &= 0. \end{aligned}$$

$$(\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}, \tau_{\theta z} = \tau_{z\theta}, \tau_{zr} = \tau_{rz})$$

β. Σφαιρικές συντεταγμένες ($x_1 \rightarrow r, x_2 \rightarrow \theta, x_3 \rightarrow \phi$).

Διάνυσμα $\bar{F}$

$$(55) \quad \bar{F} = \bar{i}_r F_r + \bar{i}_\theta F_\theta + \bar{i}_\phi F_\phi$$

τελεστής ∇

$$(56) \quad \nabla = \bar{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \bar{i}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \bar{i}_\theta \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Εξισώσεις ισορροπίας

$$(57) \quad \begin{aligned} \tau_{rr,r} + \frac{1}{r} \tau_{r\phi,\phi} + \frac{1}{r \sin \phi} \tau_{r\theta,\theta} + \frac{(2\tau_{rr} - \tau_{\phi\phi} - \tau_{\theta\theta} + \tau_{r\phi} \cot \phi)}{r} + B_r &= 0 \\ \tau_{r\theta,r} + \frac{1}{r} \tau_{\phi\theta,\phi} + \frac{1}{r \sin \phi} \tau_{\theta\theta,\theta} + \frac{(3\tau_{r\theta} + 2\tau_{\theta\phi} \cot \phi)}{r} + B_\theta &= 0 \\ \tau_{r\phi,r} + \frac{1}{r} \tau_{\phi\phi,\phi} + \frac{1}{r \sin \phi} \tau_{\theta\phi,\theta} + \frac{(3\tau_{r\phi} + (\tau_{\phi\phi} - \tau_{\theta\theta}) \cot \phi)}{r} + B_\phi &= 0 \end{aligned}$$

$$(\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}, \tau_{\theta\phi} = \tau_{\phi\theta}, \tau_{\phi r} = \tau_{r\phi})$$



Σχόλιο :

Στην παράγραφο 5, χωρίς απόδειξη, έχει αναφερθεί ότι η (20)

$$(α) \quad \sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0$$

έχει ρίζες πραγματικές. Στο σημείο αυτό θα δώσουμε μια σύντομη απόδειξη. Ας θεωρήσουμε το αντίθετο, δηλαδή

$$(β) \quad \sigma_k = \alpha + i\beta, \quad \beta \neq 0, \quad k=1,2,3.$$

Στην περίπτωση αυτή η (13) θα έχει μιγαδικές λύσεις για τα n_j , δηλαδή

$$(β') \quad n_j^k = \mu_j + i\nu_j.$$

Αν εισάγουμε τις (β) και (β') στην (13) και χωρίσουμε το πραγματικό και φανταστικό μέρος θα πάρουμε

$$(γ) \quad \tau_{kj} \mu_j - (\alpha \mu_k - \beta \nu_k) = 0$$

$$\tau_{kj} \nu_j - (\beta \mu_k + \alpha \nu_k) = 0.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την (γ.1) με ν_k και την (γ.2) με μ_k και τις αφαιρέσουμε κατά μέλη θα πάρουμε

$$(\tau_{kj} \mu_j \nu_k \xrightarrow{\approx 0} \tau_{kj} \nu_j \mu_k) + \beta(\mu_k^2 + \nu_k^2) = 0$$

και

$$\beta(\mu_k^2 + \nu_k^2) = 0.$$

Αλλά $\beta \neq 0$ και κατά συνέπεια

$$(δ) \quad \mu_k = \nu_k = 0.$$

Από την (δ) παίρνουμε την πληροφορία ότι οι ρίζες της (20) είναι πραγματικές.

Αν τώρα σε δύο διαφορετικές ρίζες της (20) π.χ. σ_α και σ_β , $\sigma_\alpha \neq \sigma_\beta$ αντιστοιχούν οι κατευθύνσεις $n_i^{(\alpha)}$ και $n_i^{(\beta)}$ τότε αυτές είναι κάθετες μεταξύ τους.



Για τις δύο αυτές περιπτώσεις έχουμε

$$(ε) \quad \begin{aligned} (\tau_{kj} - \sigma_{\alpha} \delta_{kj}) n_j^{(\alpha)} &= 0 \\ (\tau_{kj} - \sigma_{\beta} \delta_{kj}) n_j^{(\beta)} &= 0 \end{aligned}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την (ε.1) με $n_k^{(\beta)}$ και την (ε.2) με $n_k^{(\alpha)}$ και τις αφαιρέσουμε, θα πάρουμε

$$\begin{aligned} &(\tau_{kj} n_j^{(\alpha)} n_k^{(\beta)} - \tau_{kj} n_j^{(\alpha)} n_k^{(\beta)}) + (\sigma_{\beta} - \sigma_{\alpha}) n_k^{(\alpha)} n_k^{(\beta)} = 0 \\ \text{και} \quad &(\sigma_{\beta} - \sigma_{\alpha}) n_k^{(\alpha)} n_k^{(\beta)} = 0 \end{aligned}$$

Αλλά $\sigma_{\beta} \neq \sigma_{\alpha}$ και κατά συνέπεια

$$n_k^{(\alpha)} n_k^{(\beta)} = 0 \rightarrow \bar{n}^{(\alpha)} \perp \bar{n}^{(\beta)}$$

Πρέπει ακόμα να παρατηρήσουμε ότι ο τανυστής τάσης αναφερόμενος σένα σύστημα παράλληλο προς τις κύριες κατευθύνσεις σχηματίζει ένα διαγώνιο μητρώο (αφήνεται σαν άσκηση στον αναγνώστη).

Βιβλιογραφία

1. A. Green and W. Zerna: "Theoretical elasticity" Oxford University Press, London (1954).
2. Y. Fung: "Foundations of Solid Mechanics" John Willey and Sons, Inc. New York (1962).
3. H. Leipholz: "Theory of elasticity" Noordhoff Int. Publishing Leyden (1974).
4. Γ. Λιάνη: "Μηχανική παραμορφωσίμων σωμάτων και αντοχή των υλικών" Θεσσαλονίκη (1979).
5. R. Little: "Elasticity" Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey (1973).



6. L. Malvern: "Introduction to the Mechanics of a continuous medium" Prentice-Hall, Inc. New Jersey (1969).
7. Χ. Μασσαλάς: "Μηχανική των συνεχών μέσων. Μέρος Α. Προκαταρκτικές γεωμετρικές γνώσεις", Ιωάννινα (1982).
8. Κ. Μυλωνά: "Μηχανική παραμορφωτών σωμάτων Ι", Αθήνα (1982).
9. Γ. Νιτσιώτα: "Ελαστοστατική - γραμμική θεωρία", Θεσσαλονίκη (1978).
10. H. Reismann and P. Pawlik: "Elastokinetics", West publishing Co. New York (1974).
11. I. Sokolnikoff: "Mathematical theory of elasticity", Mc Graw-Hill Book Company, New York (1956).



ΚΕΦ. Β

Παραμόρφωση.

Η επίδραση κάποιου πεδίου δυνάμεων σένα μέσο προκαλεί την παραμόρφωσή του, δηλαδή μεταβολή των διαστάσεων και/ή του σχήματός του. Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε την παραμόρφωση ενός σώματος σαν μια απεικόνιση του σώματος από την αρχική κατάσταση στην παραμορφωμένη κατάσταση. Όπως και στην περίπτωση της έντασης έτσι και εδώ η περιγραφή της παραμορφωτικής κατάστασης σε κάθε σημείο του μέσου θα γίνει με τις συνιστώσες ενός τανυστή 2ης τάξης, του τανυστή τροπής.

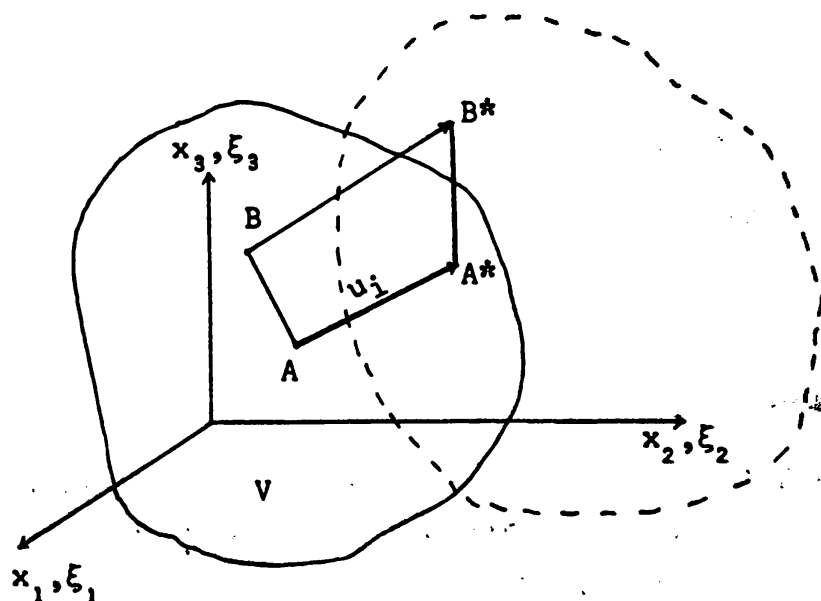
1. Τανυστής τροπής.

Στη μηχανική του συνεχούς μέσου ο χώρος που καταλαμβάνει ένα σώμα περιγράφεται από ένα συνεχές μαθηματικό μοντέλο του οποίου τα γεωμετρικά σημεία ταυτίζονται με τη θέση των υλικών σημείων του μέσου. Όταν ένα τέτοιο συνεχές σώμα, με την επίδραση κάποιας φυσικής δράσης, παραμορφώνεται, η μεταβολή θα είναι συνεχής, δηλαδή γειτονικά σημεία στην απαραμόρφωτη κατάσταση θα παραμένουν γειτονικά και στην παραμορφωμένη κατάσταση. Όταν ένα σώμα υπόκειται σε μια κίνηση απόλυτα στερεού σώματος τότε οι αποστάσεις μεταξύ των σημείων του παραμένουν αμετάβλητες.

Ας θεωρήσουμε ένα σώμα στην απαραμόρφωτη κατάσταση και δυο γειτονικά σημεία του $A(x_i)$ και $B(x_i + dx_i)$ (σχ.1). Η απόσταση $\bar{AB}$ δίνεται από τη σχέση

$$(1) \quad (\bar{AB})^2 = (ds)^2 = dx_i dx_i.$$





Σχ.1

Μετά την παραμόρφωση τα σημεία A και B θα καταλάβουν τις θέσεις $A^*(\xi_i)$ και $B^*(\xi_i + d\xi_i)$ και η απόσταση A^*B^* θα είναι

$$(2) \quad (A^*B^*)^2 = (ds^*)^2 = d\xi_i d\xi_i.$$

Μεταξύ του χώρου () και του χώρου (*) θα θεωρήσουμε ότι υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία απεικόνισης (ένα προς ένα) και κατά συνέπεια η εξίσωση μετασχηματισμού

$$(3) \quad \xi_i = \xi_i(x_1, x_2, x_3)$$

θα έχει, κατά μοναδικό τρόπο, την αντίστροφη

$$(4) \quad x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

για κάθε σημείο του σώματος. Οι συναρτήσεις (3), (4) πρέπει να είναι τουλάχιστον μονότιμες, να ανήκουν στην κλάση C^1 εν και να υπάρχει η $J = \det(\partial x_i / \partial \xi_j) \neq 0$ εν. Τα διανύσματα x_i και ξ_i συνδέονται με το διάνυσμα μετατόπισης u_i με τη διανυσματική σχέση



$$(5) \quad \xi_i = x_i + u_i$$

και

$$(6) \quad d\xi_i = dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} dx_\ell.$$

Μετά την (6) η (2) γράφεται

$$(7) \quad (ds^*)^2 = d\xi_i d\xi_i = (dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} dx_\ell)(dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_s} dx_s), \quad i, \ell, s = 1, 2, 3.$$

Η διαφορά των $(ds^*)^2$ και $(ds)^2$ μας δίνει ένα μέτρο της παραμόρφωσης του σώματος. Από τις (1) και (7) έχουμε^(*)

$$(8) \quad (ds^*)^2 - (ds)^2 = 2\varepsilon_{ij} dx_i dx_j$$

όπου

$$(9) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right), \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

είναι ο τανυστής τροπής του Green. Για τις συνιστώσες ποσότητες ε_{ij} έχουμε

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (\text{συμμετρία}).$$

Το ότι οι ε_{ij} αποτελούν τις συνιστώσες ενός τανυστή 2ης τάξης αποδεικνύεται με τον ακόλουθο τρόπο:

Ας θεωρήσουμε ένα νέο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων $(Ox'_1 x'_2 x'_3)$ ως προς το οποίο οι συντεταγμένες των Α και Β είναι x'_m και $x'_m + dx'_m$, αντίστοιχα. Στο νέο σύστημα το διάνυσμα μετατόπισης είναι

$$(10) \quad u'_m = \lambda_{mi} u_i$$

$$(*) \quad (ds)^2 - (ds^*)^2 = 2n_{ij} d\xi_i d\xi_j$$

όπου

$$n_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} - \frac{\partial u_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_j} \right)$$

είναι ο τανυστής τροπής του Almansi.



και η (9) γράφεται

$$\begin{aligned}
 \epsilon'_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\lambda_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_\ell} \frac{\partial x_\ell}{\partial x'_j} + \lambda_{jm} \frac{\partial u_m}{\partial x_\ell} \frac{\partial x_\ell}{\partial x'_i} + \lambda_{kn} \lambda_{km} \frac{\partial u_n}{\partial x_\ell} \frac{\partial x_\ell}{\partial x'_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial x'_j} \right) \\
 (11) \quad &= \frac{1}{2} \lambda_{ik} \lambda_{jl} \left\{ \frac{\partial u_k}{\partial x_\ell} + \frac{\partial u_\ell}{\partial x_k} + \delta_{nm} \frac{\partial u_n}{\partial x_\ell} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \right\} = \lambda_{ik} \lambda_{jl} \epsilon_{k\ell} .
 \end{aligned}$$

Οι συνιστώσες ϵ_{ij} υπακούουν στο νόμο μετασχηματισμού των συνιστωσών ενός καρτεσιανού τανυστή 2ης τάξης και κατά συνέπεια είναι συνιστώσες ενός τανυστή, του τανυστή τροπής, 2ης τάξης.

2. Ανηγμένη μήκυνση και ολίσθηση.

Ας θεωρήσουμε ένα γραμμικό στοιχείο στην απαραμόρφωτη κατάσταση ($dx_1=ds$, $dx_2=0$, $dx_3=0$). Η ανηγμένη μήκυνσή του ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$(12) \quad E_1 = \frac{ds^* - ds}{ds} \Rightarrow ds^* = (1 + E_1) ds .$$

Στην περίπτωση αυτή η (8) γράφεται

$$(13) \quad (1 + E_1)^2 - 1 = 2\epsilon_{11}$$

και

$$(14) \quad E_1 = (1 + 2\epsilon_{11})^{\frac{1}{2}} - 1 .$$

Για να δώσουμε μια φυσική ερμηνεία στη συνιστώσα ϵ_{12} θα θεωρήσουμε δύο γραμμικά στοιχεία $\bar{AB}=(dx_1=ds_1, dx_2=0, dx_3=0)$, $\bar{B\Gamma}=(dx_1=0, dx_2=ds_2, dx_3=0)$ που είναι κάθετα μεταξύ τους στην απαραμόρφωτη κατάσταση. Μετά την παραμόρφωση τα γραμμικά στοιχεία γίνονται $(d\xi_{1i}^*)$ και $(d\xi_{2i}^*)$. Αν σχηματίσουμε το εσωτερικό γινόμενο των παραμορφωμένων στοιχείων παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 (15) \quad ds_1^* ds_2^* \cos \theta_{12} &= d\xi_{1i}^* d\xi_{2i}^* = \frac{\partial \xi_{1i}}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_{2i}}{\partial x_k} dx_j dx_k = \frac{\partial \xi_{1i}}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_{2i}}{\partial x_2} ds_1 ds_2 \\
 &= \left(\frac{\partial u_{1\alpha}}{\partial x_1} + \delta_{\alpha 1} \right) \left(\frac{\partial u_{2\alpha}}{\partial x_2} + \delta_{\alpha 2} \right) ds_1 ds_2 = 2\epsilon_{12} ds_1 ds_2 .
 \end{aligned}$$



Από τις (12) και (14) έχουμε

$$(16) \quad \begin{aligned} ds_1^* &= (1+2\varepsilon_{11})^{\frac{1}{2}} ds_1 \\ ds_2^* &= (1+2\varepsilon_{22})^{\frac{1}{2}} ds_2 . \end{aligned}$$

Μετά τις (16) από την (15) παίρνουμε

$$(17) \quad \cos \theta_{12} = \frac{2\varepsilon_{12}}{(1+2\varepsilon_{11})^{\frac{1}{2}} (1+2\varepsilon_{22})^{\frac{1}{2}}}$$

Η θ_{12} είναι η γωνία που σχηματίζουν τα γραμμικά στοιχεία A^*B^* και $B^*\Gamma^*$ μετά την παραμόρφωση. Η μεταβολή της αρχικά ορθής γωνίας των γραμμικών στοιχείων θα είναι

$$(18) \quad \alpha_{12} = \pi/2 - \theta_{12}$$

και η (17) γράφεται

$$(19) \quad \sin \alpha_{12} = \frac{2\varepsilon_{12}}{(1+2\varepsilon_{11})^{\frac{1}{2}} (1+2\varepsilon_{22})^{\frac{1}{2}}}$$

Η α_{12} λέγεται διατμητική παραμόρφωση ή ολίσθηση .

3. Τανυστής απειροστής τροπής.

Όταν οι συνιστώσες u_i του διανύσματος μετατόπισης είναι μικρές σε σχέση με τις γραμμικές διαστάσεις του σώματος^(*), τότε, όλες οι εξισώσεις της ελαστικότητας γραμμικοποιούνται ως προς u_i , δηλαδή παραλείπονται οι μη γραμμικοί όροι ως προς u_i και τις παραγώγους των. Στην περίπτωση αυτή η έκφραση (9) παίρνει τη μορφή

$$(20) \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = e_{ji} .$$

Από την (14) για $\varepsilon_{11} \sim \varepsilon_{11}$ έχουμε

$$(21) \quad E_1 = e_{11}$$

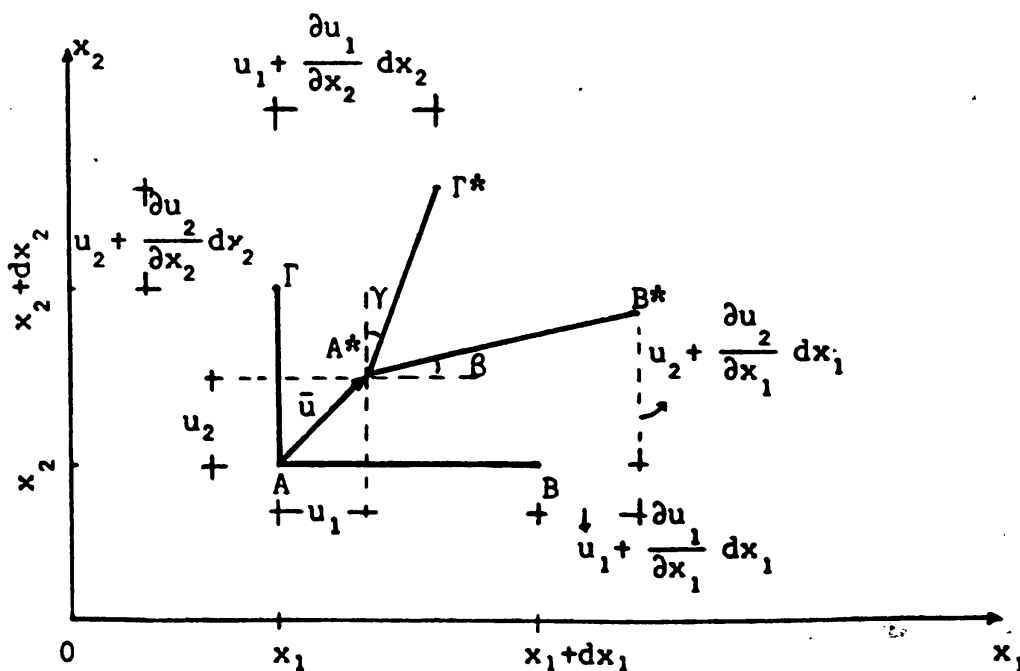
(*)
και $\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \ll 1 .$



δηλαδή οι συνιστώσες e_{ii} του τανυστή e_{ij} περιγράφουν την ανηγμένη μήκυνση κατά τον i -άξονα. Από την (19), για απειροστές παραμορφώσεις, έχουμε

$$(22) \quad \alpha_{12} = 2e_{12} \quad ,$$

δηλαδή οι συνιστώσες e_{ij} , $i \neq j$ περιγράφουν το μισό της μεταβολής μιας αρχικά, στην απαραμόρφωτη κατάσταση, ορθής γωνίας.



Σχ.2

Τη γεωμετρική ερμηνεία των συνιστωσών του τανυστή e_{ij} μπορούμε να την πάρουμε από την (20) με τον ακόλουθο τρόπο:

Ας θεωρήσουμε τα απειροστά γραμμικά στοιχεία $\bar{AB}$ και $\bar{A\Gamma}$ που στην απαραμόρφωτη κατάσταση σχηματίζουν μεταξύ τους ορθή γωνία (σχ.2). Μετά την παραμόρφωση τα γραμμικά στοιχεία παίρνουν τις θέσεις $A^*\bar{B}^*$ και $A^*\bar{\Gamma}^*$, αντίστοιχα. Οι συντεταγμένες των A^* , B^* και Γ^* θα είναι

$$\begin{aligned} A^* : \quad x_1 + (u_1)_A &= x_1 + u_1 \\ x_2 + (u_2)_A &= x_2 + u_2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (23) \quad B^* : & \quad x_1 + dx_1 + (u_1)_A + du_1 \sim x_1 + u_1 + dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 \\
 & \quad x_2 + (u_2)_A + du_2 \sim x_2 + u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 \\
 \Gamma^* : & \quad x_1 + (u_1)_A + du_1 \sim x_1 + u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 \\
 & \quad x_2 + dx_2 + (u_2)_A + du_2 \sim x_2 + u_2 + dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 .
 \end{aligned}$$

Οι ανηγμένες στη μονάδα του αρχικού μήκους μεταβολές των AB και $A\Gamma$ στα όρια $B \rightarrow A$ και $\Gamma \rightarrow A$ είναι

$$\begin{aligned}
 \lim_{B \rightarrow A} \frac{A\bar{B}^* - \bar{A}B}{\bar{A}B} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = e_{11} \\
 \lim_{\Gamma \rightarrow A} \frac{A\bar{\Gamma}^* - \bar{A}\Gamma}{\bar{A}\Gamma} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = e_{22} .
 \end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η ανηγμένη μήκυνση στην κατεύθυνση x_3 είναι

$$(25) \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = e_{33}$$

Οι συνιστώσες e_{ii} , $i=1,2,3$ λέγονται ορθές συνιστώσες του τανυστή τροπής.

Από το σχ.2 για μικρές μετατοπίσεις έχουμε

$$\begin{aligned}
 (26) \quad \tan \beta &\approx \beta = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\
 \tan \gamma &\approx \gamma = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}
 \end{aligned}$$

και

$$(27) \quad \beta + \gamma = \gamma_{12} = 2e_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} .$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε γενικά ότι

$$(28) \quad 2e_{ij} = \gamma_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad i \neq j .$$



Οι γωνίες γ_{ij} , $i \neq j$ λέγονται γωνίες διάτμησης ενώ οι συνιστώσες e_{ij} , $i \neq j$ λέγονται διατμητικές συνιστώσες του τανυστή τροπής.

Από το σχ.2 γίνεται φανερό ότι οι γωνίες β και γ είναι θετικές όταν η στροφή του θετικού ημιάξονα γίνεται προς την πλευρά του άλλου θετικού ημιάξονα ενώ στην αντίθετη περίπτωση οι γωνίες β και γ είναι αρνητικές. Αν $\beta = -\gamma \Rightarrow e_{12} = 0$ και τότε έχουμε καθαρή στροφή, δηλαδή στροφή απόλυτα στερεού σώματος, ενώ όταν $\beta = \gamma$ τότε έχουμε καθαρή διάτμηση. Η ποσότητα

$$(29) \quad \omega_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} (\beta - \gamma)$$

λέγεται απειροστή στροφή του στοιχείου $dx_1 dx_2$. Ας θεωρήσουμε ένα απειροστό πεδίο μετατόπισης $u_i(x_1, x_2, x_3)$. Από το u_i σχηματίζουμε τον καρτεσιανό τανυστή

$$(30) \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

που είναι αντισυμμετρικός.

Στον τριδιάστατο χώρο, από τον αντισυμμετρικό τανυστή κατασκευάζουμε το διάνυσμα

$$(31) \quad \omega_k = \frac{1}{2} e_{kij} \omega_{ij}$$

που έχει μοναδικό αντίστροφο τον τανυστή

$$(32) \quad \omega_{ij} = e_{ijk} \omega_k$$

Από την (31) παίρνουμε την (32) με εφαρμογή του ϵ -δ κανόνα^(*). Για τα ω_k και ω_{ij} χρησιμοποιούμε τους όρους διάνυσμα και τανυστής στροφής, αντίστοιχα.

Ας θεωρήσουμε δύο γειτονικά σημεία $A(x_i)$ και $B(x_i + dx_i)$. Η σχετική μεταξύ τους μετατόπιση είναι

(*) Από την (31) έχουμε : $2e_{kmn} \omega_k = e_{kmn} e_{kij} \omega_{ij} = (\delta_{mi} \delta_{nj} - \delta_{mj} \delta_{ni}) \omega_{ij} =$

$$\omega_{mn} - \omega_{nm} = 2\omega_{mn} \Rightarrow \omega_{ij} = e_{ijk} \omega_k$$



$$(33) \quad du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_j$$

$$= e_{ij} dx_j - \omega_{ij} dx_j .$$

Αν $e_{ij}=0$, τότε

$$(34) \quad du_i = -\omega_{ij} dx_j = \omega_{ji} dx_j = -e_{ijk} \omega_k dx_j \Rightarrow d\bar{u} = \bar{\omega} \times d\bar{r}$$

Η σχετική λοιπόν μετατόπιση των A_1 και A_2 είναι το εξωτερικό γινόμενο των $\bar{\omega}$ και $d\bar{r}$.

4. Κύριες κατευθύνσεις του τανυστή τροπής.

Στην παράγραφο αυτή θα περιοριστούμε στις κύριες κατευθύνσεις και συνιστώσες του τανυστή απειροστής τροπής. Από την (33), για $\omega_{ij}=0$, έχουμε

$$(35) \quad du_i = e_{ij} dx_j .$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι $\omega_{ij}=0$ δεν σημαίνει ότι γραμμές ή επίπεδα του σώματος δεν στρέφονται. Η σχετική μετατόπιση του A_2 προς το A_1 ανά μονάδα μήκους του $A_1 A_2$ εκφράζεται από τη σχέση

$$\frac{du_i}{|A_1 A_2|} = e_{ij} \frac{dx_j}{|A_1 A_2|}$$

ή

$$(36) \quad e_i = e_{ij} n_j$$

όπου n_j , $j=1,2,3$ είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης του γραμμικού στοιχείου $A_1 A_2$. Στη γενικότητα το διάνυσμα τροπής e_i δεν έχει τη διεύθυνση τόσο του $A_1 A_2$ όσο και του $A_1^* A_2^*$. Η ανά μονάδα μήκους μεταβολή του $A_1 A_2$, e , κατά την παραμόρφωση μπορεί να εκφραστεί σε όρους του e_{ij} στο A_1 και των n_j , δηλαδή

$$(37) \quad e = e_{ij} n_i n_j .$$

Θα αναζητήσουμε τις κατευθύνσεις του $A_1 A_2$ για τις οποίες

$$(38) \quad e_i = e n_i, \quad n_i n_i = 1.$$



Οι κατευθύνσεις αυτές λέγονται κύριες κατευθύνσεις και οι αντίστοιχες τιμές της παραμέτρου e κύριες τιμές του τανυστή τροπής.

Από τις (36) και (38) έχουμε

$$(39) \quad (e_{ij} - e\delta_{ij})n_j = 0, \quad n_i n_i = 1.$$

Για να έχει το αλγεβρικό σύστημα (39) λύση διάφορη της μηδενικής, πρέπει

$$(40) \quad \det(e_{ij} - e\delta_{ij}) = 0.$$

Αν αναπτύξουμε την (40) θα πάρουμε

$$(41) \quad e^3 - J_1 e^2 + J_2 e - J_3 = 0$$

όπου

$$(42) \quad J_1 = e_{11} + e_{22} + e_{33} = e_{ii}$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} e_{22} & e_{23} \\ e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{11} & e_{13} \\ e_{31} & e_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (J_1^2 - e_{ij} e_{ij})$$

$$J_3 = \det(e_{ij})$$

είναι οι αναλλοίωτες του τανυστή τροπής e_{ij} . Η εξίσωση (41) έχει τρεις πραγματικές ρίζες που αντιστοιχούν στις κύριες τιμές του e_{ij} . Οι κύριες κατευθύνσεις που αντιστοιχούν στις e_i , $i=1,2,3$ είναι οι κύριες κατευθύνσεις της τροπής και είναι μεταξύ τους κάθετες. Αν έχουμε $e_1 \neq 0$, $e_2 \neq 0$, $e_3 \neq 0$ τότε έχουμε τριαξονική παραμορφωτική κατάσταση. Η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται είναι $J_3 \neq 0$. Αν $J_3 = 0$ και $J_2 \neq 0$, τότε η (41) γράφεται

$$(43) \quad e(e^2 - J_1 e + J_2) = 0.$$

Η μία από τις ρίζες της (43) είναι ίση με μηδέν και η παραμορφωτική κατάσταση είναι διαξονική (επίπεδη). Αν $J_2 = J_3 = 0$ τότε η παραμορφωτική κατάσταση είναι μονοαξονική. Στην περίπτωση που $e_1 = e_2 = e_3$, η κατά-



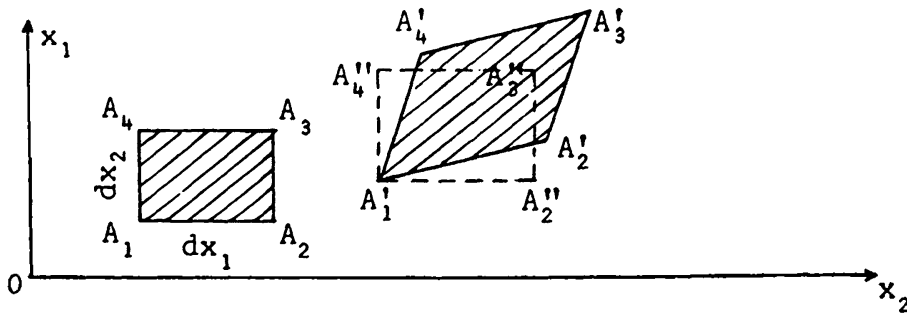
σταση λέγεται υδροστατική. Αν δύο από τις κύριες e_j είναι ίσες π.χ. $e_2=e_3 \neq 0$, $e_1 \neq 0$ τότε η παραμορφωτική κατάσταση λέγεται κυλινδρική. Για την επίπεδη παραμορφωτική κατάσταση π.χ. στο x_1x_2 -επίπεδο έχουμε

$$(44) \quad e_{i3} = 0, \quad i=1,2,3.$$

Η μελέτη της επίπεδης παραμορφωτικής κατάστασης (και ο κύκλος του Mohr) είναι αντίστοιχη εκείνης της επίπεδης εντατικής κατάστασης (τανυστές 2ης τάξης).

5. Διόγκωση - αποκλίνων τανυστής τροπής.

Ας θεωρήσουμε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που έχει πλευρές dx_1 , dx_2 , dx_3 παράλληλες προς τους αντίστοιχους άξονες. Στο σχ.3 φαίνεται η προβολή του $A_1A_2A_3A_4$ στο επίπεδο x_1x_2



Σχ.3

Η προβολή του παραμορφωμένου παραλληλεπιπέδου είναι $A'_1A'_2A'_3A'_4$ με πλευρές μήκους

$$(45) \quad (1+e_{11})dx_1, \quad (1+e_{22})dx_2, \quad (1+e_{33})dx_3.$$

Ο όγκος του $(A''_1A''_2A''_3A''_4)$ με τον όγκο του $(A'_1A'_2A'_3A'_4)$ διαφέρει κατά ποσότητα που περιέχει τα τετράγωνα των διατμητικών παραμορφώσεων.

Αν V είναι ο αρχικός όγκος του παραλληλεπιπέδου και $V+\Delta V$ του παραμορφωμένου, θα έχουμε

$$V = dx_1 dx_2 dx_3$$



$$(46) \quad \begin{aligned} V + \Delta V &\sim (1 + e_{11})(1 + e_{22})(1 + e_{33}) dx_1 dx_2 dx_3 \\ &\sim V + e_{kk} V. \end{aligned}$$

Η ανηγμένη διόγκωση θα είναι

$$(47) \quad \Theta = \frac{V + \Delta V - V}{V} = e_{kk}.$$

Ο αποκλίνων τανυστής τροπής είναι ανάλογος με τον αντίστοιχο του τανυστή της τάσης και ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο :

$$(48) \quad q_{ij} = e_{ij} - \frac{\Theta}{3} \delta_{ij}.$$

6. Συνθήκες συμβιβαστού των παραμορφώσεων.

Από τη σχέση (9) παρατηρούμε ότι για δοσμένες τις συναρτήσεις $\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ οι τρεις συναρτήσεις u_i πρέπει να ικανοποιούν 6-διαφορικές εξισώσεις (*)

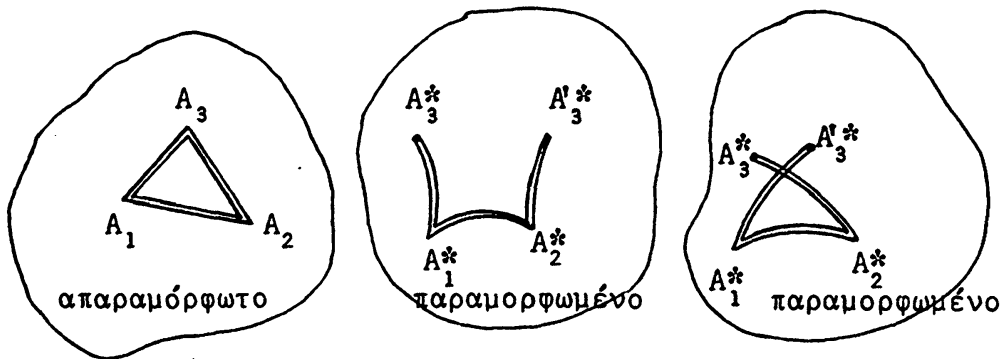
$$(49) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right).$$

Επειδή έχουμε 6-εξισώσεις για τον προσδιορισμό τριών συναρτήσεων το σύστημα (49) δεν θα έχει γενικά μονότιμη λύση αν οι συναρτήσεις ε_{ij} δεν ικανοποιούν κάποιες επιπρόσθετες συνθήκες. Οι συνιστώσες του τανυστή τροπής προσδιορίζουν μόνο τις σχετικές θέσεις σημείων του σώματος και κατά συνέπεια πρέπει να αναμένουμε ότι η λύση u_i μπορεί να προσδιοριστεί με προσέγγιση μιας κίνησης απόλυτα στερεού σώματος. Αν οι ε_{ij} καθοριστούν αυθαίρετα θα πρέπει να αναμένουμε σαν αποτέλεσμα της αυθαίρεσias την κατάσταση που φαίνεται στο (σχ.4) , δηλαδή δεν θα υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχεία μεταξύ των σημείων της απαραμόρφωτης και παραμορφωμένης κατάστασης. Οι συνθήκες για την ολοκλήρωση των (49) λέγονται συνθήκες συμβιβαστού των παραμορφώσεων. Ο προσδιορισμός των συνθηκών αυτών, που πρέπει να ικανοποιούνται από τις ε_{ij} , προκύπτουν από τις (49) με απαλοιφή των u_i (Green and Zerna,

(*) Θα υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις ε_{ij} και u_i ανήκουν στην κατάλληλη, για την πορεύση του προβλήματος, κλάση συναρτήσεων.



(1954): Theoretical Elasticity , σελ. 64).



Σχ.4

Επειδή είναι δύσκολο να δουλέψουμε με τις μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις (49) στη συνέχεια θα αναζητήσουμε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι e_{ij} ,

$$(50) \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) .$$

Αν υιοθετήσουμε το συμβολισμό

$$(\quad)_{,j} = \frac{\partial(\quad)}{\partial x_j}$$

η (50) γράφεται

$$(51) \quad e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) .$$

Από παραγωγή της (51) παίρνουμε

$$(52) \quad e_{ij,kl} = \frac{1}{2} (u_{i,jkl} + u_{j,ikl}) .$$

Από την (52), με εναλλαγή των δεικτών , έχουμε

$$(53) \quad \begin{aligned} e_{kl,ij} &= \frac{1}{2} (u_{k,lij} + u_{l,kij}) \\ e_{jl,ik} &= \frac{1}{2} (u_{j,lik} + u_{l,jik}) \\ e_{ik,jl} &= \frac{1}{2} (u_{i,kjl} + u_{k,ijl}) . \end{aligned}$$



Από τις (52) και (53) παίρνουμε

$$(54) \quad e_{ij,kl} + e_{kl,ij} - e_{ik,jl} - e_{jl,ik} = R_{ijkl} = 0.$$

Οι (54) είναι γνωστές σαν συνθήκες συμβιβαστού του St. Venant. Από τις (81) εξισώσεις που προκύπτουν από την (54) μόνο 6-εξισώσεις είναι ανεξάρτητες ενώ οι υπόλοιπες ή είναι ταυτότητες ή επαναλήψεις λόγω της συμμετρίας του τανυστή τροπής.^(*) Οι εξισώσεις αυτές είναι :

$$(55) \quad \begin{aligned} e_{11,23} &= -e_{23,11} + e_{31,21} + e_{12,31} \\ e_{22,31} &= -e_{31,22} + e_{12,32} + e_{23,12} \\ e_{33,12} &= -e_{12,33} + e_{23,13} + e_{31,23} \\ 2e_{12,12} &= e_{11,22} + e_{22,11} \\ 2e_{23,23} &= e_{22,33} + e_{33,22} \\ 2e_{31,31} &= e_{33,11} + e_{11,33} \end{aligned}$$

Οι συνθήκες (55) είναι οι αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη μονότιμης και συνεχούς λύσης των (51).

Θα εξετάσουμε τώρα αν οι συνθήκες (54) είναι ικανές στο να εξασφαλίσουν την ύπαρξη συνεχούς και μονότιμης λύσης των εξισώσεων (51) (με προσέγγιση κίνησης απόλυτα στερεού σώματος).

Ας θεωρήσουμε ένα σημείο $P_0(x_i^0)$ με γνωστές μετατοπίσεις u_i^0 και τανυστή στροφής ω_{ij}^0 . Οι μετατοπίσεις u_i ενός αυθαίρετου σημείου P προσδιορίζονται από ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος μιας καμπύλης (τυχαίας) C που ενώνει τα σημεία P_0 και $\bar{P}$ (σχ.5).

$$(56) \quad u_i(\bar{x}_k) = u_i^0 + \int_{P_0}^{\bar{P}} du_i = u_i^0 + \int_{P_0}^{\bar{P}} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k.$$

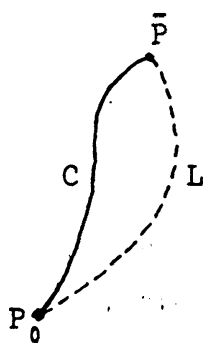
Αλλά

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = e_{ik} - \omega_{ik}$$

(*) Με τη βοήθεια της (54) έχουμε:

$$R_{ijkl} = R_{klij}, \quad R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}$$





Σχ.5

και η (56) παίρνει τη μορφή

$$(57) \quad u_i(\bar{x}_k) = u_i^0 + \int_{P_0}^{\bar{P}} e_{ik} dx_k - \int_{P_0}^{\bar{P}} \omega_{ik} dx_k.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα στην (57) γράφεται

$$(53) \quad \int_{P_0}^{\bar{P}} \omega_{ik} dx_k \sim \int_{P_0}^{\bar{P}} \left\{ \omega_{il}^0 + \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_l} (x_k - x_k^0) \right\} dx_l$$

$$= \omega_{ik}^0 (\bar{x}_k - x_k^0) + \int_{P_0}^{\bar{P}} (x_k - x_k^0) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_l} dx_l.$$

Από τον ορισμό του τανυστή στρωγής έχουμε

$$(59) \quad -\frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_l} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l \partial x_k} - \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_i} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_i} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_l} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_k} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)$$

$$= e_{il,k} - e_{kl,i}.$$

Αν αντικαταστήσουμε τις (58) και (59) στην (57) θα πάρουμε

$$(60) \quad u_i(\bar{x}_k) = u_i^0 - (\bar{x}_k - x_k^0) \omega_{ik}^0 + \int_{P_0}^{\bar{P}} A_{il} dx_l$$



όπου

$$(61) \quad A_{il} = e_{il} + (x_k - x_k^0)(e_{il,k} - e_{kl,i}) .$$

Για να είναι η $u_i(\bar{x}_k)$ συνεχής και μονότιμη πρέπει το ολοκλήρωμα στην (60) να είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης^(*), δηλαδή

$$(62) \quad A_{il,m} = A_{im,l}$$

(*) Για μια απλά συνεκτική περιοχή το θεώρημα του Green έχει τη διατύπωση

$$(α) \quad \int_C (Pdx_1 + Qdx_2 + Rdx_3) = \iint_S \{ (R_{,2} - Q_{,3})n_1 + (P_{,3} - R_{,1})n_2 + (Q_{,1} - P_{,2})n_3 \} dS$$

όπου C είναι μια κλειστή καμπύλη- συνοριακή καμπύλη της επιφάνειας S και n_i το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα επί της S. Όταν επιβάλουμε τις συνθήκες

$$(β) \quad R_{,2} - Q_{,3} = 0, \quad P_{,3} - R_{,1} = 0, \quad Q_{,1} - P_{,2} = 0$$

το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μηδενίζεται για κάθε κλειστή καμπύλη C ,

$$(γ) \quad \int_C (Pdx_1 + Qdx_2 + Rdx_3) = 0 .$$

Αν το συμπέρασμα αυτό το εφαρμόσουμε για δυο δυνατούς δρόμους ολοκλήρωσης μεταξύ του σταθερού σημείου P_0 και του μεταβλητού σημείου $\bar{P}$ (σχ.5) βλέπουμε ότι

$$(δ) \quad \int_{P_0 C \bar{P}} + \int_{\bar{P} L P_0} = 0 = \int_{P_0 C \bar{P}} - \int_{P_0 L \bar{P}} = 0 .$$



Για πολλαπλά συνεκτική περιοχή θα πρέπει να επιβληθούν επιπρόσθετες των (62) συνθήκες.

Από τις (61) και (62) παίρνουμε

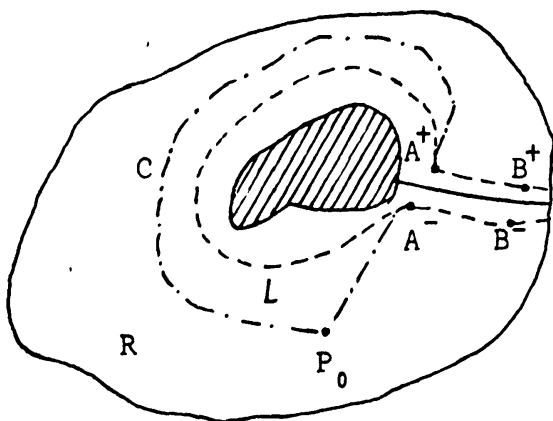
$$e_{il,m} - \delta_{km} (e_{il,k} - e_{kl,i}) + (x_k - x_k^0) (e_{il,km} - e_{kl,im}) - e_{im,l} + \delta_{kl} (e_{im,k} - e_{km,i}) - (x_k - x_k^0) (e_{im,kl} - e_{km,il}) = 0$$

ή

$$(63) \quad (x_k - x_k^0) \{ \text{συνθήκες συμβιβαστού} \} = 0.$$

Η εξίσωση (63) ικανοποιείται αν ικανοποιούνται οι συνθήκες συμβιβαστού (54). Για απλά λοιπόν συνεκτικές περιοχές η ικανοποίηση των συνθηκών συμβιβαστού είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να πάρουμε από τις (51) μονότιμο και συνεχές πεδίο μετατοπίσεων. Για πολλαπλά συνεκτικές (*) περιοχές οι συνθήκες (54) είναι αναγκαίες όχι όμως και ικανές για να εξασφαλίσουν μονότιμο και συνεχές πεδίο μετατοπίσεων από τις (51).

Ας θεωρήσουμε τώρα μία διπλά συνεκτική περιοχή στο επίπεδο (σχ.6).



Σχ.6

(*) Απλά συνεκτική λέγεται μια περιοχή αν κάθε απλή κλειστή καμπύλη επί της περιοχής αυτής μπορεί να συρρικνώνεται συνεχώς σένα σημείο χωρίς να εγκαταλείπει την περιοχή· στην αντίθετη περίπτωση η περιοχή λέγεται πολλαπλά συνεκτική.



Μετά από μια τομή η περιοχή γίνεται απλά συνεκτική. Ας συμβολίσουμε τις δύο πλευρές της τομής με (+) και (-) και έστω ότι τα σημεία A^+ και A^- είναι ακριβώς το ένα απέναντι στο άλλο. Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα

$$(64) \quad f(A^+) = \int_{P_0}^{A^+} (Pdx_1 + Qdx_2), \quad f(A^-) = \int_{P_0}^{A^-} (Pdx_1 + Qdx_2)$$

είναι μονότιμα όχι όμως και ίσα μεταξύ τους αφού τα σημεία A^+ και A^- βρίσκονται σε απέναντι πλευρές.

Αν παραμορφώσουμε το δρόμο C στο δρόμο $P_0 A^- + L$ θα έχουμε

$$(65) \quad \int_{P_0}^{A^+} = \int_{P_0}^{A^-} + \int_L$$

και

$$(66) \quad f(A^+) = f(A^-) + \int_L (Pdx_1 + Qdx_2) .$$

Από την (66) γίνεται φανερό ότι για να έχουμε $f(A^+) = f(A^-)$ πρέπει να ικανοποιείται η επιπρόσθετη συνθήκη

$$(67) \quad \int_L () = 0 .$$

Για $(m+1)$ -πολλαπλά συνεκτική περιοχή οι επιπρόσθετες συνθήκες θα είναι:

$$(68) \quad \int_{L_1} (Pdx_1 + Qdx_2 + Rdx_3) = \int_{L_2} () = \dots = \int_{L_m} () = 0 .$$

Αν τα παραπάνω συμπεράσματα τα εφαρμόσουμε στο πρόβλημα συμβιβαστότητας τότε το μονότιμο του πεδίου μετατοπίσεων απαιτεί τις επιπρόσθετες συνθήκες

$$(69) \quad \int_{L_1} A_{i\ell} dx_\ell = \dots = \int_{L_m} A_{i\ell} dx_\ell = 0 , \quad i=1,2,3$$

όπου $L_1, \dots, L_m$ είναι m -δρόμοι στην $(m+1)$ -πολλαπλά συνεκτική περιοχή.

Για την κατανόηση των επιπρόσθετων συνθηκών (69) θα αναφέρουμε δύο απλές περιπτώσεις εφαρμογής τους:



α) Ας φανταστούμε ένα πέταλο αλόγου που παραμορφώνεται έτσι ώστε οι δύο ακραίες επιφάνειες του S_1 και S_2 να έρθουν σε επαφή. Στην κατάσταση αυτή αν οι επιφάνειες συγκολληθούν θα έχουμε ένα διπλά συνεκτικό σώμα. Αν γνωρίζουμε την παραμόρφωση του νέου σώματος τότε από τις (51) προσδιορίζονται οι μετατοπίσεις που οδηγούν στο αρχικό σώμα. Στην περίπτωση αυτή ένα σημείο της συγκολλημένης επιφάνειας S θα έχει δύο μετατοπίσεις που αντιστοιχούν στα δύο σημεία των επιφανειών S_1 και S_2 και κατά συνέπεια το πεδίο μετατοπίσεων δεν είναι μονότιμο στα σημεία της S . Οι δύο μετατοπίσεις θα συνδέονται με τη σχέση

$$(70) \quad u_i(P_2) - u_i(P_1) = \int_{L(P)} A_{i\ell} dx_\ell$$

β) Αν έχουμε ένα δαχτυλίδι και εφαρμόσουμε κάποιο πεδίο δυνάμεων σαυτό τότε στην αναζήτηση της παραμόρφωσης που αντιστοιχεί θα πρέπει πρώτα να αποφασίσουμε αν είναι επιτρεπτό να ανοιχτεί κάποια σχισμή. Αν το δαχτυλίδι διατηρήσει τον αρχικό μορφικό σχηματισμό του η παραμόρφωση πρέπει να είναι τέτοια ώστε το πεδίο μετατοπίσεων να είναι μονότιμο. Στην περίπτωση αυτή η παραμόρφωση που οφείλεται στο επιβαλλόμενο πεδίο δυνάμεων πρέπει να είναι τέτοια ώστε

$$(71) \quad \int_{L(P)} A_{i\ell} dx_\ell = 0, \quad$$

όπου $L(P)$ έχει την έννοια του δρόμου που αναφέρθηκε στην προηγούμενη ανάλυση των πολλαπλά συνεκτικών σωμάτων.

7. Καμπυλόγραμμες συντεταγμένες.

Επειδή σε πολλές εφαρμογές της θεωρίας του παραμορφώσιμου στερεού αντιμετωπίζονται προβλήματα με καμπύλα σύνορα στη συνέχεια θα δοθούν μερικά από τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.



α. Κυλινδρικές συντεταγμένες ($x_1=r, x_2=\theta, x_3$).

Διάνυσμα μετατόπισης

$$(72) \quad \bar{u} = u_r \bar{i}_r + u_\theta \bar{i}_\theta + u_z \bar{i}_z$$

Τελεστής ∇

$$(73) \quad \nabla = \bar{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \bar{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \bar{i}_z \frac{\partial}{\partial x_3}$$

Τανυστής τροπής

$$(74) \quad \begin{aligned} e_{rr} &= u_{r,r} \\ e_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} u_{\theta,\theta} + \frac{1}{r} u_r \\ e_{zz} &= u_{z,z} \\ 2e_{r\theta} &= \frac{1}{r} u_{r,\theta} - \frac{1}{r} u_\theta + u_{\theta,r} \\ 2e_{\theta z} &= u_{\theta,z} + \frac{1}{r} u_{z,\theta} \\ 2e_{zr} &= u_{z,r} + u_{r,z} \end{aligned}$$

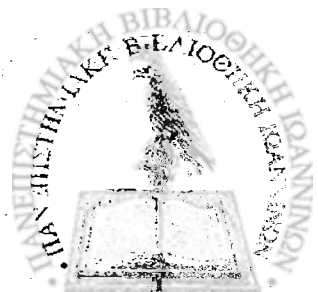
Συνθήκες συμβιβαστού

$$(75) \quad \begin{aligned} 2e_{r,z,r} &= e_{rr,zz} + e_{zz,rr} \\ e_{\theta\theta,zz} - \frac{2}{r} e_{\theta z,\theta z} + \frac{1}{r^2} e_{zz,\theta\theta} + \frac{1}{r} e_{zz,r} - \frac{2}{r} e_{r,z,z} &= 0 \\ e_{rr,\theta\theta} - r e_{rr,r} - 2(r e_{r\theta})_{,\theta} + (r^2 e_{\theta\theta,r})_{,r} &= 0 \\ e_{r\theta,zz} - r \left(\frac{1}{r} e_{\theta z} \right)_{,r} - \frac{1}{r} e_{r,z,\theta} + \left(\frac{1}{r} e_{zz} \right)_{,r\theta} &= 0 \\ \frac{1}{r} e_{rr,\theta z} - \left(\frac{1}{r} e_{r,z} \right)_{,\theta} + \left(\frac{1}{r} (r e_{\theta z})_{,r} \right)_{,\theta} - \frac{1}{r^2} (r^2 e_{r\theta})_{,r,z} &= 0 \\ e_{r,z,\theta\theta} - r e_{rr,zz} - (r e_{z,\theta})_{,\theta} + r (r e_{\theta\theta})_{,r,z} - (r e_{r\theta})_{,\theta z} &= 0 \end{aligned}$$

β. Σφαιρικές συντεταγμένες ($x_1=r, x_2=\theta, x_3=\phi$).

Διάνυσμα μετατόπισης

$$(76) \quad \bar{u} = u_r \bar{i}_r + u_\theta \bar{i}_\theta + u_\phi \bar{i}_\phi$$



Τελεστής ∇

$$(77) \quad \nabla = \bar{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \bar{i}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \bar{i}_\theta \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Τανυστής τροπής

$$(78) \quad \begin{aligned} e_{rr} &= u_{r,r} \\ e_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r} u_\phi \cot \phi + \frac{1}{r \sin \phi} u_{\theta,\theta} \\ e_{\phi\phi} &= \frac{1}{r} (u_{\phi,\phi} + u_r) \\ 2e_{r\theta} &= u_{\theta,r} - \frac{1}{r} u_\theta + \frac{1}{r \sin \phi} u_{r,\theta} \\ 2e_{\theta\phi} &= \frac{1}{r} u_{\theta,\phi} - \frac{1}{r} u_\theta \cot \phi + \frac{1}{r \sin \phi} u_{\phi,\theta} \\ 2e_{\phi r} &= u_{\phi,r} - \frac{1}{r} u_\phi + \frac{1}{r} u_{r,\phi} \end{aligned}$$

Συνθήκες συμβιβαστού

$$(79) \quad \begin{aligned} e_{rr,\phi\phi} - re_{rr,r} - 2(re_{r\phi})_{,r\phi} + (r^2 e_{\phi\phi,r})_{,r} &= 0 \\ \frac{\sin^2 \phi}{r} (r^2 e_{\phi\phi})_{,r} - 2 \sin^2 \phi e_{rr} + r \sin^2 \phi e_{\theta\theta,r} + e_{\phi\phi,\theta\theta} - 2 \sin \phi (\sin \phi e_{r\theta})_{,\phi} \\ + (\sin^2 \phi e_{\theta\theta,\phi})_{,\phi} - \sin \phi \cos \phi e_{\phi\phi,\phi} - 2 (\sin \phi e_{\phi\theta})_{,\theta\phi} - 2 \sin \phi e_{r\theta,\theta} &= 0 \\ \frac{1}{\sin^2 \phi} e_{rr,\theta\theta} - re_{rr,r} + \cot \phi e_{rr,\phi} - \frac{2}{\sin \phi} (re_{r\theta})_{,r\theta} \\ - 2 \cot \phi (re_{r\phi})_{,r} + (r^2 e_{\theta\theta,r})_{,r} &= 0 \\ e_{r\phi,\theta\theta} + 2 \sin^2 \phi e_{r\phi} - r \sin \phi e_{\theta\phi,r\theta} - (\sin \phi e_{r\theta})_{,\theta\phi} \\ + r \sin \phi (\sin \phi e_{\theta\theta})_{,r\phi} - \sin^2 \phi e_{rr,\phi} - r \sin \phi \cos \phi e_{\phi\phi,r} &= 0 \\ (\sin \phi e_{r\theta})_{,\phi\phi} + 2 \sin \phi e_{r\theta} + r (e_{\phi\phi})_{,r\theta} - \cot \phi (\sin \phi e_{r\theta})_{,\phi} \\ - \sin \phi \left(\frac{1}{\sin \phi} e_{r\phi} \right)_{,\phi\theta} - e_{rr,\theta} - \frac{r}{\sin \phi} (\sin^2 \phi e_{\theta\phi})_{,r\phi} &= 0 \\ (r^2 e_{\theta\phi,r})_{,r} + \left(\frac{1}{\sin \phi} e_{rr} \right)_{,\theta\phi} - \frac{1}{\sin \phi} (re_{r\phi})_{,r\theta} \\ - \sin \phi \left(\frac{r}{\sin \phi} e_{r\theta} \right)_{,r\phi} &= 0 \end{aligned}$$



Σχόλιο:

α. Τα όσα αναφέρθηκαν στο σχόλιο του Κεφ. Α ισχύουν και για τον τανυστή της τροπής.

β. Η βιβλιογραφία είναι εκείνη του Κεφ. Α.

γ. Από τη θεωρία των συναρτήσεων είναι γνωστό ότι η (3) έχει μονότιμη και συνεχή λύση του τύπου που δίνεται από την (4) αν και μόνο αν

$$(α) \quad J = \det\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \neq 0 \quad .$$

Από φυσική όμως θεώρηση του αντικειμένου επιβάλλεται και πρόσθετος περιορισμός στην J . Στην απαραμόρφωτη κατάσταση $\xi_i = x_i \Rightarrow J=1$. Επειδή η παραμόρφωση είναι συνεχής συνάρτηση του χρόνου (αυτό μόνο στιγμιαία δεν συμβαίνει) η J θα είναι επίσης συνεχής συνάρτηση του χρόνου και κατά συνέπεια θα είναι $J>0$ για μικρές συνεχείς παραμορφώσεις. Η J δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές από μια συνεχή παραμόρφωση του μέσου χωρίς να περάσει από την κατάσταση $J=0$. Η κατάσταση όμως αυτή δεν είναι αποδεκτή (α) και κατά συνέπεια $J>0$.

Θ ε ώ ρ η μ α : Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι μια συνεχής παραμόρφωση αποδεκτή είναι

$$(β) \quad J = \det(\delta_{ij} + \partial u_i / \partial x_j) > 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad .$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι το πρόσημο της J εξαρτάται από τη στροφή του νέου συστήματος. Αν το νέο σύστημα από δεξιόστροφο γίνει αριστερόστροφο και αντίστροφα τότε $J<0$.



ΚΕΘ. Γ

Καταστατικές εξισώσεις των γραμμικά ελαστικών υλικών.

Η ύπαρξη εντατικής κατάστασης σένα παραμορφώσιμο μέσο έχει σαν συνέπεια την εμφάνιση σαυτό μιάς αντίστοιχης παραμορφωτικής κατάστασης. Η σύνδεση του αιτίου (ένταση) με το αποτέλεσμα (παραμόρφωση) συνδέεται άμεσα με τις φυσικές ιδιότητες του υλικού του μέσου (έκφραση φυσικού νόμου). Τις σχέσεις μεταξύ των τάσεων και παραμορφώσεων σε γενικές εντατικές καταστάσεις προσπαθούμε να τις εκφράσουμε με κατάλληλες γενικεύσεις των αντίστοιχων σχέσεων στον απλό εφελκυσμό και την καθαρή διάτμηση. Γενικά οι σχέσεις αυτές θα περιέχουν και ρυθμούς μεταβολής των τ_{ij} και ϵ_{ij} ή και ανώτερες χρονικές παραγώγους των, τη θερμοκρασία που προκαλεί διαστολή αλλά και μεταβολή των ιδιοτήτων του υλικού όπως επίσης και την ιστορία της παραμόρφωσης. Συμβολικά γράφουμε ότι η κάθε συνιστώσα του τανυστή τάσης είναι μία συνάρτηση^(*)

$$(1) \quad \tau_{ij} = f_{ij}(\epsilon_{mn}, \dot{\epsilon}_{kl}, \dots, T, \epsilon\text{-ιστορία}).$$

Οι σχέσεις (1) αναφέρονται σαν καταστατικές εξισώσεις του υλικού του εξεταζόμενου μέσου.

Ας υποθέσουμε ότι η συνιστώσα τ_{ij} του $\sigma = [\tau_{ij}]$ είναι μία συνάρτηση όλων των συνιστωσών του $\epsilon = [\epsilon_{ij}]$

$$(2) \quad \tau_{ij} = f_{ij}(\epsilon_{mn})$$

όπου η μορφή των f_{ij} αλλάζει με την αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων.

(*) Μετά από ολοκλήρωση μιας συναρτησιακής της μορφής

$$F_{ij} = F_{ij}(\epsilon_{mn}, \dot{\epsilon}_{kl}, \dots, \tau_{mn}, \dot{\tau}_{kl}, \dots, \dots) = 0.$$



Επειδή $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, θα έχουμε

$$(3) \quad f_{ij}(\dots) = f_{ji}(\dots)$$

και κατά συνέπεια μπορούμε να θεωρήσουμε τις $f_{ij}(\dots)$ σαν τα στοιχεία ενός 3×3 συμμετρικού μητρώου $f(\dots)$.

Η (1) σε μορφή εξίσωσης μητρώων γράφεται

$$(4) \quad \sigma = f(\epsilon)$$

όπου

$$(5) \quad f(\epsilon) = f^T(\epsilon) .$$

Η f είναι συμμετρική τανυστική συνάρτηση και στην περίπτωση που εξετάζουμε είναι γνωστή σαν καταστατική συνάρτηση του υλικού.

Σε διάφορα υλικά υπάρχουν συγκεκριμένες κατευθύνσεις αξόνων ως προς τις οποίες η καταστατική εξίσωση έχει αναλλοίωτη μορφή. Μια τέτοια ιδιότητα αντιστοιχεί στις λεγόμενες συμμετρίες του υλικού και οι αντίστοιχες κατευθύνσεις λέγονται κατευθύνσεις συμμετρίας.

Αν έχουμε δύο καρτεσιανά συστήματα αξόνων $0x_1x_2x_3$, $(\{x_i\})$, και $0x'_1x'_2x'_3$, $(\{x'_i\})$, ενσωματωμένα σένα δοσμένο υλικό (τα $\{x_i\}$ και $\{x'_i\}$ σχηματίζονται από υλικές ίνες του υλικού) που καθορίζουν δύο κατευθύνσεις συμμετρίας τότε η (4) στα δύο συστήματα θα έχει τη μορφή

$$(6) \quad \sigma = f(\epsilon)$$

και

$$(7) \quad \sigma' = f(\epsilon')$$

αντίστοιχα. δηλαδή το υλικό αναγνωρίζει ισοδυναμία στις κατευθύνσεις $\{x_i\}$ και $\{x'_i\}$.

Η γεωμετρική σχέση μεταξύ των $\{x_i\}$ και $\{x'_i\}$ περιγράφεται από το ορθογώνιο μητρώο μετασχηματισμού $\Lambda = [\lambda_{ij}]$, όπου

$$(8) \quad \lambda_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} , \quad (x'_i = \lambda_{ij} x_j) .$$



Για κάθε υλικό υπάρχει ένα καθορισμένο σύνολο κατευθύνσεων συμμετρίας που χαρακτηρίζεται από το σύνολο

$$(9) \quad \{\Lambda\} = \{\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n\},$$

όλων των ορθογωνίων μητρώων μετασχηματισμού μεταξύ όλων των ζευγαριών των κατευθύνσεων συμμετρίας. Ο αριθμός (δείκτης) n μπορεί να είναι πεπερασμένος ή άπειρος. Το σύνολο $\{\Lambda\}$ είναι γνωστό σαν ομάδα συμμετρίας του υλικού.

Τα διάφορα υλικά που συναντούμε στις εφαρμογές κατατάσσονται σε κατηγορίες και η κάθε κατηγορία χαρακτηρίζεται από διαφορετική ομάδα συμμετρίας $\{\Lambda\}$. Οι κατηγορίες αυτές είναι γνωστές σαν κρυσταλλικά, ορθότροπα, ισότροπα κ.τ.λ. υλικά.

Οι σχέσεις (6) και (7), μαζί με τον τανυστικό χαρακτήρα των σ και ϵ , υπαγορεύουν συγκεκριμένους περιορισμούς στη μορφή της καταστατικής συνάρτησης f : αν εισάγουμε στην (7) τις

$$(10) \quad \begin{aligned} \tau'_{ij} &= \lambda_{ik} \lambda_{jl} \tau_{kl} & \text{ή} & & \sigma' &= \Lambda \sigma \Lambda^T \\ \epsilon'_{ij} &= \lambda_{ik} \lambda_{jl} \epsilon_{kl} & \text{ή} & & \epsilon' &= \Lambda \epsilon \Lambda^T \end{aligned}$$

θα πάρουμε

$$\Lambda \sigma \Lambda^T = f(\Lambda \epsilon \Lambda^T)$$

και

$$(11) \quad \Lambda f(\epsilon) \Lambda^T = f(\Lambda \epsilon \Lambda^T).$$

Από την παραπάνω ανάλυση οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η καταστατική συνάρτηση f που εκφράζει τη σχέση τάσης-παραμόρφωσης, όταν αυτή αναφέρεται σένα από τα συστήματα συμμετρίας, πρέπει να ικανοποιεί τον περιορισμό (11) για όλα τα μέλη Λ_j , $j=1,2,\dots,n$ της ομάδας συμμετρίας.

Αν βρεθεί μια καταστατική συνάρτηση f που να ικανοποιεί την (11) τότε η (4) θα ισχύει μόνο για μια οποιαδήποτε από τις κατευθύνσεις συμμετρίας που περιγράφει η ομάδα $\{\Lambda\}$. Αν όμως είναι γνωστή μια τέτοια



συνάρτηση τότε εύκολα μπορεί να βρεθεί η καταστατική εξίσωση σε οποιοδήποτε καρτεσιανό σύστημα $\{\bar{x}_i\}$: για το σκοπό αυτό αρκεί να εκφράσουμε τα $\bar{\sigma}$ και $\bar{\epsilon}$ σαν συναρτήσεις των σ και ϵ αντίστοιχα, με τη βοήθεια των μετασχηματισμών (10) και να εισάγουμε τις προκύπτουσες εκφράσεις στην (4).

Η καταστατική συνάρτηση f μπορεί να έχει σαν ανεξάρτητες μεταβλητές εκτός από τις ϵ_{ij} και τις συντεταγμένες των αντίστοιχων σωματίων (υλικών σημείων) της απαραμόρφωτης κατάστασης. Στην περίπτωση αυτή η σχέση τάσης-παραμόρφωσης αλλάζει από σημείο σε σημείο και το υλικό λέγεται ανομοιογενές. Αν οι φυσικές ιδιότητες του υλικού είναι ίδιες σε όλα τα σημεία του τότε η f είναι ανεξάρτητη από τις συντεταγμένες των σωματίων και το υλικό λέγεται ομοιογενές. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε μόνο με ομοιογενή και γραμμικά ελαστικά υλικά.

Για τη μορφή της καταστατικής εξίσωσης συζητήσαμε παραπάνω κάποιους περιορισμούς. Η θερμοδυναμική θεωρία επιβάλλει επί πλέον περιορισμούς στη μορφή της (4). Σύμφωνα με τη θερμοδυναμική θεωρία υπάρχει για κάθε υλικό μια βαθμωτή συνάρτηση $w(\epsilon_{ij})$, που λέγεται ενέργεια παραμόρφωσης ανά μονάδα όγκου, από την οποία ο τανυστής τ_{ij} υπολογίζεται με τον ακόλουθο τρόπο :

$$(12) \quad \tau_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \epsilon_{ij}} \quad .$$

Η συνάρτηση w προτάθηκε από τον G.Green το 1839 για ισόθερμες και για αδιαβατικές ή ισεντροπικές μεταβολές. Η σύγχρονη θερμοδυναμική θεωρία των συνεχών μέσων επιβεβαίωσε την ύπαρξη της $w(\epsilon_{ij})$ (θα γίνει συζήτηση στα επόμενα) όπως επίσης και την ύπαρξη της (12) για όλες τις δυνατές θερμο-μηχανικές μεταβολές μεταξύ της ισόθερμης και αδιαβατικής για γενικά ελαστικά και μη υλικά.

Επειδή η w είναι βαθμωτή συνάρτηση των ϵ_{ij} θα πρέπει να παραμένει αμετάβλητη από την ομάδα μετασχηματισμών $\{A\}$, δηλαδή θα πρέπει να ικανοποιεί τον περιορισμό



$$(13) \quad W(\epsilon) = W(\Lambda \epsilon \Lambda^T) \quad .$$

Από την (12) παίρνουμε την ενδιαφέρουσα ιδιότητα

$$(14) \quad \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} = \frac{\partial \tau_{kl}}{\partial \epsilon_{ij}} \quad .$$

1. Γραμμική ελαστικότητα - Γενικευμένος νόμος του Hooke.

Θα εξετάσουμε τώρα την ειδική περίπτωση καταστατικών εξισώσεων στην οποία κάθε συνιστώσα του τανυστή τάσης είναι μια γραμμική συνάρτηση όλων των συνιστωσών του τανυστή τροπής

$$(15) \quad \tau_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

όπου οι συντελεστές C_{ijkl} λέγονται ελαστικές σταθερές και έχουν διαστάσεις τάσεων (οι ϵ_{kl} είναι αδιάστατες). Ο νόμος (15) λέμε ότι χαρακτηρίζει γραμμικά ελαστικά υλικά και είναι γενίκευση του νόμου του Hooke (προτάθηκε από τον Cauchy). Στην περίπτωση που το υλικό χαρακτηρίζεται από την (15) η (7) παίρνει τη μορφή

$$(16) \quad \tau'_{ij} = C_{ijkl} \epsilon'_{kl} \quad .$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι δύο πρώτοι δείκτες των ελαστικών σταθερών αντιστοιχούν στην τάση και οι δύο τελευταίοι στην παραμόρφωση. Το πλήθος των ελαστικών σταθερών είναι $3^4 = 81$. Αν λάβουμε όμως υπόψη τη συμμετρία των τ_{ij} και ϵ_{kl} το πλήθος των ανεξάρτητων μεταβλητών περιορίζεται σε $6 \times 6 = 36$ (δηλαδή 6 για κάθε ζευγάρι τιμών (i, j) και 6 ανεξάρτητοι τέτοιοι συνδυασμοί για τα (k, l) , σύνολο 36).

Οι συντελεστές C_{ijkl} είναι συνιστώσες ενός τανυστή 4ης τάξης : αν η (15) γραφτεί σένα καρτεσιανό σύστημα $\{x'_i\}$ παίρνει τη μορφή

$$(17) \quad \tau'_{ij} = C'_{ijkl} \epsilon'_{kl}$$

ή



$$(13) \quad \lambda_{i\alpha} \lambda_{j\beta} \tau_{\alpha\beta} = C'_{ijkl} \lambda_{k\gamma} \lambda_{l\delta} \epsilon_{\gamma\delta} \quad .$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της (13) με $\lambda_{is} \lambda_{jm}$ παίρνουμε

$$(19) \quad \lambda_{is} \lambda_{jm} \lambda_{i\alpha} \lambda_{j\beta} \tau_{\alpha\beta} = \lambda_{is} \lambda_{jm} \lambda_{k\gamma} \lambda_{l\delta} C'_{ijkl} \epsilon_{\gamma\delta} \quad .$$

Αλλά

$$\lambda_{ik} \lambda_{jk} = \delta_{ij}$$

και η (19) γράφεται

$$\delta_{sa} \delta_{mb} \tau_{\alpha\beta} = \lambda_{is} \lambda_{jm} \lambda_{k\gamma} \lambda_{l\delta} C'_{ijkl} \epsilon_{\gamma\delta}$$

ή

$$(20) \quad \tau_{sm} = \lambda_{is} \lambda_{jm} \lambda_{k\gamma} \lambda_{l\delta} C'_{ijkl} \epsilon_{\gamma\delta} \quad .$$

Αν λάβουμε υπόψη ότι

$$\tau_{sm} = C_{sm\gamma\delta} \epsilon_{\gamma\delta}$$

από την (20) παίρνουμε

$$(21) \quad C_{sm\gamma\delta} = \lambda_{is} \lambda_{jm} \lambda_{k\gamma} \lambda_{l\delta} C'_{ijkl} \quad .$$

Επειδή οι συντελεστές υπακούουν στο νόμο μετασχηματισμού των τανυστών οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι οι C_{ijkl} είναι συνιστώσες ενός καρτεσιανού τανυστή 4ης τάξης. Ο τανυστής αυτός λέγεται τανυστής του Hooke.

Η (15) αν λυθεί ως προς ϵ_{kl} παίρνουμε

$$(22) \quad \epsilon_{ij} = S_{ijkl} \tau_{kl}$$

όπου οι συντελεστές S_{ijkl} λέγονται ελαστικοί συντελεστές και αποτελούν τις συνιστώσες ενός τανυστή 4ης τάξης που είναι ο αντίστροφος του τανυστή του Hooke.

Για τη μελέτη των περιορισμών που επιβάλουν στις τιμές των C_{ijkl} οι συμμετρίες του υλικού θα θεωρήσουμε προσωρινά τα τ_{ij} και ϵ_{ij} σαν



μητρώα- στήλες Σ και E αντίστοιχα, με στοιχεία

$$(23) \quad (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma_5, \Sigma_6)^T = (\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{12})^T$$

$$(E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6)^T = (\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \epsilon_{23}, \epsilon_{31}, \epsilon_{12})^T .$$

Αν επικαλεστούμε τις συμμετρίες των c_{ijkl} ως προς τους δείκτες (i, j) και (k, l) μπορούμε να αντικαταστήσουμε τους τέσσερες δείκτες των με δύο και αντιστοίχιση ανάλογη των Σ_i και E_i . Με την αντικατάσταση αυτή έχουμε

$$(24) \quad c_{ijkl} \Rightarrow c_{mn} \quad , \quad m, n = 1, 2, \dots, 6$$

και οι συντελεστές c_{mn} μπορούν να διαταχθούν σένα 6×6 - μητρώο. Με τη σύμβαση που έχουμε εισάγει η καταστατική εξίσωση (15) γράφεται

$$(25) \quad \Sigma_i = c_{ij} E_j .$$

Αν εφαρμόσουμε στην (25) τις θερμοδυναμικές σχέσεις (14) έχουμε

$$\frac{\partial \Sigma_i}{\partial E_j} = \frac{\partial \Sigma_j}{\partial E_i} \quad , \quad i, j = 1, 2, \dots, 6$$

και

$$(26) \quad c_{ij} = c_{ji} .$$

Από την (26) γίνεται φανερό ότι ο αριθμός των ανεξάρτητων ελαστικών σταθερών και αντίστοιχα των ελαστικών συντελεστών(*) μειώνεται σε 21.

Η εφαρμογή της ιδιότητας της συμμετρίας που δείχνουν οι εξισώσεις (15) και (16) στις μορφές των ελαστικών νόμων

(*) $s_{ijkl} \Rightarrow s_{mn} \quad , \quad m, n = 1, 2, 3, \dots, 6 \quad , \quad s = c^{-1}$



$$(27) \quad \Sigma_i = c_{ij} E_j, \quad E_i = s_{ij} \Sigma_j$$

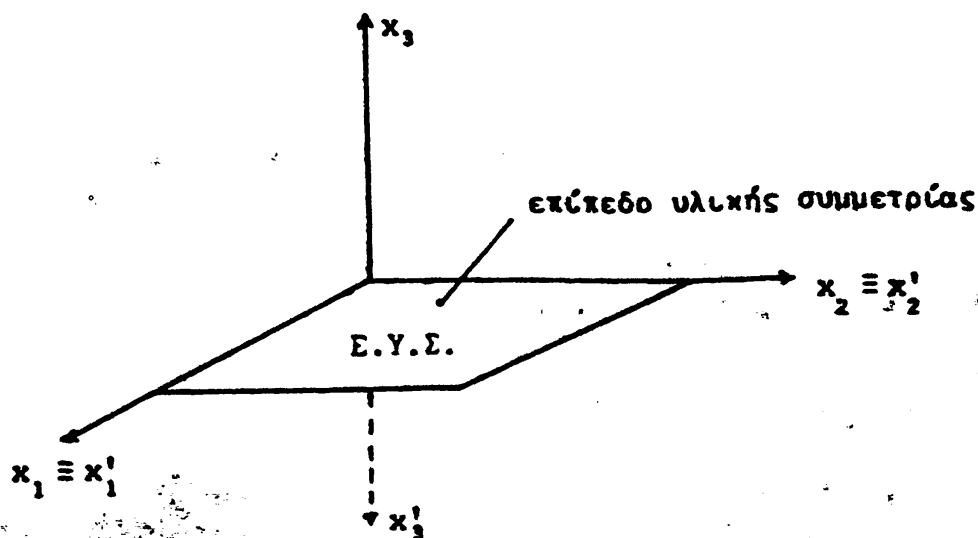
γίνεται με τον ακόλουθο τρόπο : Για ένα συγκεκριμένο σύστημα συμμετρίας βρίσκουμε πρώτα τη σχετική ομάδα συμμετρίας $\{A\}$. Εκφράζουμε τις τ'_{ij} και ϵ'_{ij} σαν συναρτήσεις των τ_{ij} και ϵ_{ij} για κάθε ένα από τα μέλη της ομάδας $\{A\}$. Στη συνέχεια σχηματίζουμε τα κατακόρυφα μητρώα Σ' και E' που αντιστοιχούν στις τ_{ij} και ϵ_{ij} σύμφωνα με τις σχέσεις (23). Οι κατευθύνσεις $\{x_i\}$ και $\{x'_i\}$ που αντιστοιχούν σένα από τα μητρώα της ομάδας $\{A\}$ θα είναι άξονες συμμετρίας αν ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις

$$(28) \quad \begin{aligned} \Sigma_i &= c_{ij} E_j \quad \text{και} \quad \Sigma'_i = c_{ij} E'_j \\ E_i &= s_{ij} \Sigma_j \quad \text{και} \quad E'_i = s_{ij} \Sigma'_j \end{aligned}$$

για αυθαίρετες τιμές των συνιστωσών του τανυστή τάσης ή τροπής. Από τη συνθήκη αυτή παίρνουμε επιπρόσθετες σχέσεις μεταξύ των στοιχείων των μητρώων c ή s .

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα επίπεδο υλικής συμμετρίας (σχ.1)



Σχ.1



Στην περίπτωση αυτή η ομάδα συμμετρίας αποτελείται από ένα μητρώο

$$(29) \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

Αν εφαρμόσουμε τους μετασχηματισμούς (10) μπορούμε να σχηματίσουμε τα μητρώα- στήλες Σ' και E' , δηλαδή

$$(30) \quad \begin{aligned} \Sigma' &= (\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}, -\tau_{23}, -\tau_{31}, \tau_{12})^T \\ E' &= (\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, -\epsilon_{23}, -\epsilon_{31}, \epsilon_{12})^T . \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τις (28) πρέπει

$$(31) \quad \Sigma_i = c_{ij} E_j \quad \text{και} \quad \Sigma'_i = c'_{ij} E'_j .$$

Από τις (31) παίρνουμε

$$\begin{aligned} 1_\alpha \quad \Sigma_1 &= \tau_{11} = c_{11} \epsilon_{11} + c_{12} \epsilon_{22} + c_{13} \epsilon_{33} + c_{14} \epsilon_{23} + c_{15} \epsilon_{31} + c_{16} \epsilon_{12} \\ 1_\beta \quad \Sigma'_1 &= \tau_{11} = c_{11} \epsilon_{11} + c_{12} \epsilon_{22} + c_{13} \epsilon_{33} - c_{14} \epsilon_{23} - c_{15} \epsilon_{31} + c_{16} \epsilon_{12} \\ (32) \quad &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ 6_\alpha \quad \Sigma_6 &= \tau_{12} = c_{61} \epsilon_{11} + c_{62} \epsilon_{22} + c_{63} \epsilon_{33} + c_{64} \epsilon_{23} + c_{65} \epsilon_{31} + c_{66} \epsilon_{12} \\ 6_\beta \quad \Sigma'_6 &= \tau_{12} = c_{61} \epsilon_{11} + c_{62} \epsilon_{22} + c_{63} \epsilon_{33} - c_{64} \epsilon_{23} - c_{65} \epsilon_{31} + c_{66} \epsilon_{12} . \end{aligned}$$

Οι (32, $1_{\alpha, \beta}$) μας δίνουν την πληροφορία ότι

$$(33) \quad c_{14} \epsilon_{23} + c_{15} \epsilon_{31} = 0 .$$

Η (33) πρέπει να ισχύει για αυθαίρετες τιμές των παραμορφώσεων και κατά συνέπεια

$$(34) \quad c_{14} = c_{15} = 0 .$$

Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι



$$c_{24} = c_{25} = c_{34} = c_{35} = c_{41} = c_{42} = c_{43} = c_{46} \\ = c_{51} = c_{52} = c_{53} = c_{56} = c_{64} = c_{65} = 0.$$

Από τις (34) και (35) παρατηρούμε ότι η συμμετρία του μητρώου c διατηρείται.

Αν ένα υλικό έχει τρία κάθετα μεταξύ τους επίπεδα υλικής συμμετρίας (ορθότροπα υλικά π.χ. το ξύλο) και τα επίπεδα αυτά είναι τα (x_1, x_2) , (x_2, x_3) , (x_3, x_1) , τότε βρίσκουμε επιπρόσθετους μηδενιζόμενους όρους του μητρώου c . Ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία βρίσκουμε ότι για ορθότροπα υλικά το μητρώο c έχει τη μορφή.

$$(36) \quad c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}$$

Από την (36) βλέπουμε ότι για ορθότροπα υλικά έχουμε 9-ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές και αντίστοιχα 9-ανεξάρτητους ελαστικούς συντελεστές.

Στα ισότροπα υλικά όλες οι κατευθύνσεις είναι ισοδύναμες και κατά συνέπεια την παραπάνω διαδικασία μπορούμε να την εφαρμόσουμε με αφετηρία τα ορθότροπα υλικά (36). Οι επιπρόσθετες συνθήκες μεταξύ των c_{ij} μπορούν να βρεθούν από το γεγονός ότι για ισότροπα υλικά το σύστημα αξόνων $\{x_i\}$ που προκύπτει από τη στροφή του επιπέδου (x_k, x_l) περί τον άξονα x_m , $k, l, m=1, 2, 3$, $k \neq l \neq m$ κατά μία αυθαίρετη γωνία είναι ισοδύναμο με το αρχικό σύστημα $\{x_i\}$. Αν εφαρμόσουμε την παραπάνω διαδικασία βρίσκουμε ότι για ισότροπα υλικά το μητρώο c έχει την ακόλουθη μορφή:



$$(37) \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{11}-c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{11}-c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{11}-c_{12} \end{bmatrix}$$

Από την (37) βλέπουμε ότι ένα ισότροπο υλικό χαρακτηρίζεται από δύο ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές c_{11} και c_{12} . Αν εισάγουμε τις ανεξάρτητες σταθερές (σταθερές του Lamé)

$$(38) \quad c_{12} = \lambda, \quad \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) = \mu$$

η καταστατική εξίσωση (15), για ισότροπα υλικά, γράφεται

$$(39) \quad \tau_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij}, \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

και ο τανυστής του Hooke είναι ο ισότροπος τανυστής

$$(40) \quad C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

Όπως είναι φυσικό η (39) για ένα αυθαίρετο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων θα είναι

$$(41) \quad \tau'_{ij} = 2\mu \epsilon'_{ij} + \lambda \epsilon'_{kk} \delta_{ij}, \quad \epsilon'_{kk} = \epsilon'_{kk}.$$

Η αντιστροφή της (39) είναι εύκολη : αν κάνουμε τη συστολή του τανυστή τ_{ij} έχουμε

$$\tau_{ii} = 2\mu \epsilon_{ii} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ii} = (2\mu + 3\lambda) \epsilon_{kk}$$

και

$$(42) \quad \epsilon_{kk} = \frac{\tau_{kk}}{3\lambda + 2\mu}.$$

Αν εισάγουμε την (42) στην (39) παίρνουμε



$$(43) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \tau_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \tau_{kk} \delta_{ij} \quad .$$

Από το πείραμα είναι γνωστό ότι στο μονοαξονικό εφελκυσμό η σχέση μεταξύ τάσης (τ_{11}) και ανηγμένης αξονικής μήκυνσης (ε_{11}) είναι

$$(44) \quad \varepsilon_{11} = \frac{\tau_{11}}{E} \quad ,$$

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας του Young και η εγκάρσια ανηγμένη βράχυνση είναι ανάλογη της αξονικής μήκυνσης

$$(45) \quad \varepsilon_{\text{εγκάρσια}} = -\frac{\nu}{E} \tau_{11} \quad ,$$

όπου ν είναι ο λόγος του Poisson.

Στο μονοαξονικό εφελκυσμό η μόνη μη-μηδενιζόμενη τάση είναι η τ_{11} και έτσι από την (43) παίρνουμε

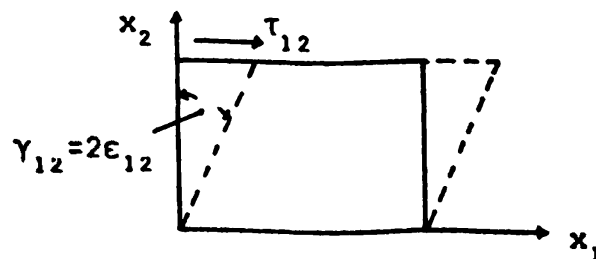
$$(46) \quad \varepsilon_{11} = \left(\frac{1}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \right) \tau_{11} = \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} \tau_{11}$$

$$(47) \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{\text{εγκάρσια}} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \tau_{11} \quad .$$

Αν συγκρίνουμε τις (44) και (45) με τις (46) και (47), αντίστοιχα, θα πάρουμε τη σχέση των ν και E με τους συντελεστές του Lamé λ και μ , δηλαδή

$$(48) \quad E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \quad , \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \quad .$$

Από το πείραμα με καθαρή διάτμηση (σχ.2) έχει διαπιστωθεί η σχέση



Σχ.2



$$(49) \quad \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = \frac{\tau_{12}}{G}$$

όπου G είναι το μέτρο ολίσθησης (ή στρέψης).

Στην καθαρή διάτμηση η μόνη μη-μηδενιζόμενη τάση είναι η τ_{12} και έτσι από την (43) παίρνουμε

$$(50) \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2\mu} \tau_{12} \quad .$$

Αν συγκρίνουμε την (50) με την (49) βλέπουμε ότι

$$(51) \quad G = \mu \quad .$$

Είναι προφανές ότι οι σταθερές G, ν και E δεν είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες· από τις (48) και (51) παίρνουμε

$$(52) \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \mu$$

και τις σχέσεις

$$(53) \quad \frac{\nu}{E} = \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \quad , \quad \frac{1}{2\mu} = \frac{1+\nu}{E} \quad .$$

Αν εισάγουμε τις (53) στην (43) έχουμε

$$(54) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{ij} - \frac{\nu}{E} \tau_{kk} \delta_{ij} \quad .$$

Ας δούμε τώρα τους θερμοδυναμικούς περιορισμούς επί του νόμου τάσης-παραμόρφωσης ενός ισότροπου και ελαστικού υλικού. Όπως θα σχολιάσουμε και στα επόμενα η συνάρτηση της ενέργειας παραμόρφωσης ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο

$$(55) \quad dW = \tau_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad .$$

Αν εισάγουμε την (39) στην (55) έχουμε

$$(56) \quad dW = (\lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij}) d\varepsilon_{ij}$$

και



$$(57) \quad W = \frac{\lambda}{2} \Theta^2 + G \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} \quad \Theta = \epsilon_{kk} .$$

Η συνάρτηση W είναι θετικά ορισμένη (θερμοδυναμική απαίτηση) και κατά συνέπεια

$$(53) \quad \lambda > 0 , \quad G > 0 .$$

Η συνθήκη (53) δεν είναι αναγκαία γιατί ο όρος $\epsilon_{ij} \epsilon_{ij}$ δεν είναι ανεξάρτητος του ϵ_{kk} . Αν εισάγουμε τον αποκλίνοντα τανυστή της τροπής $q_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \Theta \delta_{ij}$, του οποίου η πρώτη αναλλοίωτη μηδενίζεται, η (57) γράφεται (*)

$$(59) \quad W = \frac{1}{2} K \Theta^2 + 2GJ_2$$

όπου

$$(60) \quad J_2 = \frac{1}{2} q_{ij} q_{ij} , \quad K = \lambda + \frac{2}{3} G .$$

Στην (59) οι δύο όροι είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους και κατά συνέπεια η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η W θετικά ορισμένη είναι

$$K = \lambda + \frac{2}{3} G > 0 , \quad G > 0$$

ή

$$(61) \quad \frac{E}{3(1-2\nu)} > 0 , \quad \frac{E}{2(1+\nu)} > 0 .$$

Από την (61) παίρνουμε τις συνθήκες

$$E > 0 , \quad -1 < \nu < \frac{1}{2} .$$

Στην πραγματικότητα όμως δεν είναι γνωστά υλικά με αρνητικό λόγο του Poisson και κατά συνέπεια $0 < \nu < \frac{1}{2}$. Η τιμή $\nu = \frac{1}{2}$ αντιστοιχεί σε ασυμπίεστο υλικό.

2. Γενικευμένος νόμος του Hooke σε θερμικό περιβάλλον.

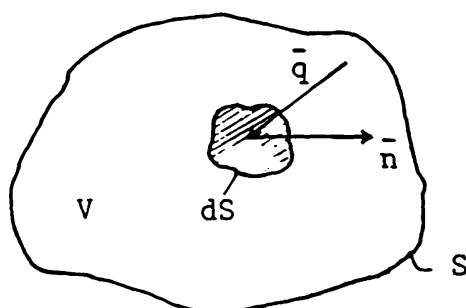
Για τη διατύπωση του γενικευμένου νόμου του Hooke χωρίς να περιο-

$$(*) \quad W = \frac{\lambda}{2} \Theta^2 + G(q_{ij} + \frac{1}{3} \Theta \delta_{ij})(q_{ij} + \frac{1}{3} \Theta \delta_{ij}) = \frac{1}{2} \lambda \Theta^2 + G q_{ij} q_{ij} + \frac{1}{9} \Theta^2 \delta_{ij} \delta_{ij} + 2 \frac{1}{3} q_{ij} \overset{=0}{\Theta \delta_{ij}} = \frac{1}{2} K \Theta^2 + 2GJ_2 .$$



ριστούμε σε ισόθερμες ή ισεντροπικές συνθήκες είναι αναγκαίο να σχολιάσουμε πρώτα την εξίσωση ενέργειας και τη συνάρτηση της ενέργειας παραμόρφωσης.

Ας θεωρήσουμε ένα στοιχείο του συνεχούς μέσου (σχ.3)



Σχ.3

Η ισχύς των μαζικών δυνάμεων B_i και των επιφανειακών δυνάμεων p_i θα είναι

$$(62) \quad L = \int_V B_i u_i dV + \int_S p_i u_i dS \quad (*)$$

όπου $u_i = \dot{u}_i$ είναι το διάνυσμα της ταχύτητας των σημείων του μέσου (u_i το διάνυσμα μετατόπισης).

Η κινητική ενέργεια K δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$(63) \quad K = \frac{1}{2} \rho \int_V u_i u_i dV$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του μέσου (θεωρείται σταθερή).

Από το στοιχείο dS της συνοριακής επιφάνειας S , με μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα n_i (η θετική διεύθυνση φαίνεται στο σχ.3), ρέει προς το στοιχείο του μέσου, στη μονάδα του χρόνου η ποσότητα θερμότητας $d\dot{Q} = -q_i n_i dS$, όπου q_i είναι το διάνυσμα ροής της θερμότητας. Η ολική θερμότητα που περνάει από την επιφάνεια S θα είναι

$$(64) \quad \dot{Q} = - \int_S q_i n_i dS = - \int_V q_{i,i} dV .$$

$$(*) \quad \int_S p_i u_i dS = \int_S \tau_{ij} n_j u_i dS = \int_V (\tau_{ij} u_i)_{,j} dV \quad (\theta. \text{ Gauss}).$$



Για μια απειροστή διαδικασία ενός συνεχούς μέσου, ο πρώτος θερμοδυναμικός νόμος, έχει τη μαθηματική διατύπωση

$$(65) \quad (u+K)' = L+\dot{Q} ,$$

όπου u είναι η εσωτερική ενέργεια του συστήματος και εκφράζει το ισοζύγιο της ενέργειας κατά τη διάρκεια μηχανικών και θερμικών διαδικασιών σένα σύστημα.

Αν εισάγουμε την εσωτερική ενέργεια, U , ανά μονάδα όγκου

$$(66) \quad u = \int_V U dV$$

τότε η μαθηματική διατύπωση του πρώτου θερμοδυναμικού νόμου θα είναι

$$\begin{aligned} & \int_V \{ \dot{U} + \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i - B_i \dot{u}_i - (\tau_{ij} \dot{u}_i)_{,j} + q_{i,i} \} dV \\ &= \int_V \{ \dot{U} + \dot{u}_i (\rho \ddot{u}_i - B_i - \tau_{ij,j}) - \tau_{ij} \dot{u}_{i,j} + q_{i,i} \} dV \\ &= \int_V \{ \dot{U} - \tau_{ij} \dot{u}_{i,j} + q_{i,i} \} dV = 0 . \end{aligned}$$

Αν περιοριστούμε στα πλαίσια της κλασσικής θερμοδυναμικής το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται σε μια μικρή γειτονιά της κατάστασης της θερμοδυναμικής ισορροπίας. Στην περίπτωση αυτή θα θεωρήσουμε απειροστές παραμορφώσεις που επιβάλλονται πολύ αργά. Με την προηγούμενη θεώρηση και με το γεγονός ότι

$$(6a) \quad u_{i,j} = e_{ij} - \omega_{ij} \quad \text{και} \quad \omega_{ij} \tau_{ij} = 0 \quad (\omega_{ij} = -\omega_{ji})$$

η (67) παίρνει τη μορφή

$$(69) \quad \int_V \{ \dot{U} - \tau_{ij} \dot{e}_{ij} + q_{i,i} \} dV = 0 .$$

Επειδή η (69) ισχύει για αυθαίρετο όγκο V πρέπει

$$(70) \quad \dot{U} - \tau_{ij} \dot{e}_{ij} + q_{i,i} = 0 .$$

Η (70) εκφράζει την αρχή διατήρησης της ενέργειας .



Αν επικαλεστούμε το δεύτερο θερμοδυναμικό νόμο : ι) σε κάθε διαδικασία κατά την οποία ένα απομονωμένο σύστημα πηγαίνει από μια μακροσκοπική κατάσταση σε μια άλλη η εντροπία του τείνει να αυξηθεί

$$\Delta s \geq 0$$

ιι) αν το σύστημα δεν είναι απομονωμένο και υπόκειται σε μια σχεδόν-στατική απειροστή διαδικασία κατά την οποία απορροφάει θερμότητα dQ , τότε

$$ds = \frac{dQ}{T}$$

όπου T είναι η απόλυτη θερμοκρασία του συστήματος (μετριέται με την κλίμακα Kelvin). Η εντροπία είναι μια θετικά ορισμένη συνάρτηση κατάστασης, αποτελεί δε ιδιότητα του συστήματος και κατά συνέπεια είναι ανεξάρτητη από το δρόμο κατά τον οποίο λαβαίνει χώρα η διαδικασία (ds είναι ολικό διαφορικό).

$$(71) \quad T\dot{s} = \dot{Q}$$

και τη συσχέτιση των q_i με το ρυθμό $\dot{Q}$ της εισροής θερμότητας στη μονάδα του όγκου του μέσου

$$(72) \quad -q_{i,i} = \dot{Q} \Rightarrow T\dot{s} = -q_{i,i}$$

η εξίσωση ενέργειας γράφεται

$$(73) \quad \dot{U} = \tau_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} + T\dot{s}$$

όπου s και U αναφέρονται στη μονάδα του όγκου.

Παρατήρηση : Αν θεωρήσουμε ένα στοιχείο του μέσου του καταλαμβάνει την περιοχή $V+s$ ο ρυθμός αλλαγής της εντροπίας θα είναι

$$(74) \quad \begin{aligned} \int_V \dot{s} dV &= - \int_V \frac{q_{i,i}}{T} dV = - \int_V \left(\frac{q_i}{T} \right)_{,i} dV - \int_V \frac{q_i T_{,i} dV}{T^2} \\ &= - \int_S \frac{q_i n_i dS}{T} - \int_V \frac{q_i T_{,i} dV}{T^2} = s_1 + s_2 \end{aligned}$$



Ο όρος s_1 εκφράζει το ρυθμό αλλαγής της εντροπίας του συστήματος που οφείλεται στη ροή θερμότητας δια μέσου της επιφάνειας S , δηλαδή το ρυθμό ανταλλαγής εντροπίας του συστήματος με το περιβάλλον του. Ο όρος s_2 περιγράφει μία πηγή εντροπίας και εκφράζει το ρυθμό γεννησής της. Σύμφωνα με την απαίτηση του δεύτερου θερμοδυναμικού νόμου για κάθε σημείο ενός συστήματος πρέπει

$$(75) \quad s_2 \geq 0 \quad .$$

Από την (75) οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι q_i και $T_{,i}$ δεν μπορούν να πάρουν αυθαίρετες τιμές αλλά θα πρέπει να υπάρχει κάποια συναρτησιακή σχέση μεταξύ τους. Στη συνήθη διατύπωση της θεωρίας της ζευγμένης θερμοελαστικότητας η συναρτησιακή αυτή σχέση εκφράζεται με τη γενική γραμμική μορφή

$$(76) \quad q_i = bT_{,i} + B_{ij}T_{,j}$$

που στην περίπτωση ενός ισότροπου και ελαστικού μέσου ανάγεται στο γνωστό νόμο του Fourier για την αγωγή της θερμότητας,

$$(77) \quad q_i = -\lambda_T T_{,i}$$

όπου το βαθμωτό μέγεθος λ_T είναι η θερμική αγωγιμότητα του μέσου.

Για τη μελέτη των καταστατικών εξισώσεων στη θερμοελαστικότητα θα εισάγουμε τη συνάρτηση της ελεύθερης ενέργειας του Helmholtz,

$$(78) \quad F = U - Ts \quad .$$

Οι συναρτήσεις U και F είναι συναρτήσεις^(*) κατάστασης και οι αυξήσεις

(*) Κάθε υλικό σώμα που αποτελείται από ένα μεγάλο αριθμό υλικών σημείων και αλληλεπιδρά με το περιβάλλον του λέγεται θερμοδυναμικό σύστημα. Η κατάσταση ενός τέτοιου συστήματος χαρακτηρίζεται από ένα αριθμό μακροσκοπικών ποσοτήτων που λέγονται μεταβλητές κατάστασης. Ένα πλήρες σύνολο θερμοδυναμικών μεταβλητών που προσδιορίζονται από την κατάσταση του συστήματος λέγονται συναρτήσεις κατάστασης.



τους κατά μία απειροστή μεταβολή της κατάστασης είναι ολικά διαφορικά. Τα ολικά διαφορικά των U και F είναι

$$(79) \quad dU = Tds + \tau_{ij} de_{ij}$$

$$(80) \quad dF = -sdT + \tau_{ij} de_{ij}$$

και

$$(81) \quad \frac{\partial U}{\partial s} = T, \quad \frac{\partial U}{\partial e_{ij}} = \tau_{ij}$$

$$(82) \quad \frac{\partial F}{\partial T} = -s, \quad \frac{\partial F}{\partial e_{ij}} = \tau_{ij}.$$

Από τις (81) και (82) οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι μπορούμε να ταυτίσουμε τη συνάρτηση της ενέργειας παραμόρφωσης W για μεν ισεντροπικές ή αδιαβατικές μεταβολές με την εσωτερική ενέργεια U για δε ισοθερμικές μεταβολές με την συνάρτηση του Helmholtz. Πρέπει να σημειωθεί ότι η W είναι θετικά ορισμένη συνάρτηση.

Για τη διατύπωση των καταστατικών εξισώσεων είναι αναγκαίο να εκφράσουμε την F σαν συνάρτηση των e_{ij} και της θερμοκρασίας T , $F=F(e_{ij}, T)$. Η αύξηση της θερμοκρασίας $\theta=T-T_0$ θεωρούμε ότι είναι τετοια ώστε $|\theta/T_0| \ll 1$.

Αν αναπτύξουμε τη συνάρτηση

$$(83) \quad F = F(e_{ij}, \theta'), \quad \theta' = \frac{\theta}{T_0}$$

σε σειρά Taylor στη γειτονιά της φυσικής κατάστασης^(*) ($e_{ij}=0, \theta=0$) έχουμε

$$(84) \quad F(e_{ij}, \theta') = F(0,0) + \frac{\partial F(0,0)}{\partial e_{ij}} e_{ij} + \frac{\partial F(0,0)}{\partial \theta'} \theta' + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 F(0,0)}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} e_{ij} e_{kl} + 2 \frac{\partial^2 F(0,0)}{\partial e_{ij} \partial \theta'} e_{ij} \theta' \right\}$$

(*) Φυσική κατάσταση λέγεται η απαραμόρφωτη, χωρίς ένταση και με σταθερή θερμοκρασία T_0 κατάσταση του μέσου.



$$+ \frac{\partial^2 F(0,0)}{\partial \theta'^2} \theta'^2 + \dots$$

Στη φυσική κατάσταση θα έχουμε $F(0,0)=0$, $\partial F(0,0)/\partial e_{ij}=0$, $\partial F(0,0)/\partial \theta'=0$.

Στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας η (84) θα περιέχει μόνο τους γραμμικούς και δεύτερης τάξης ως προς e_{ij} και θ' όρους. Αν εισάγουμε την (34) στην (82β) θα πάρουμε

$$(35) \quad \tau_{ij} = \frac{\partial F}{\partial e_{ij}} = \frac{\partial^2 F(0,0)}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} e_{kl} + \frac{\partial^2 F(0,0)}{\partial e_{ij} \partial \theta'} \theta'.$$

Αν εισάγουμε τους συμβολισμούς

$$(36) \quad \frac{\partial^2 F(0,0)}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} = C_{ijkl}, \quad \frac{\partial^2 F(0,0)}{\partial e_{ij} \partial \theta'} = -\beta_{ij}, \quad \frac{\partial^2 F(0,0)}{\partial \theta'^2} = m.$$

Οι (34) και (35) γράφονται

$$(37) \quad F(e_{ij}, \theta') = \frac{1}{2} C_{ijkl} e_{ij} e_{kl} - \beta_{ij} e_{ij} \theta' + \frac{m \theta'^2}{2} + \dots$$

$$(38) \quad \tau_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} - \beta_{ij} \theta'.$$

Οι (36) συνιστούν τον ελαστικό νόμο, γενικευμένο στη θερμοελαστικότητα και είναι γνωστές σαν σχέσεις των Duhamel-Neumann για ένα ανισότροπο υλικό. Οι σταθερές C_{ijkl} και β_{ij} υπολογίζονται στην ισόθερμη κατάσταση και παίζουν το ρόλο των υλικών σταθερών. Οι C_{ijkl} είναι οι 21-ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές για ένα ανισότροπο υλικό και οι β_{ij} σχετίζονται με τις μηχανικές και θερμικές ιδιότητες του υλικού του μέσου. Από την (37) γίνεται φανερό ότι η συνάρτηση της ενέργειας παραμόρφωσης θα είναι

$$(39) \quad W = \frac{1}{2} C_{ijkl} e_{kl} e_{ij}.$$

Για ένα ισότροπο υλικό οι (37) και (38) γράφονται

$$(90) \quad F(e_{ij}, \theta') = \mu e_{ij} e_{ij} + \frac{\lambda}{2} e_{kk} e_{mm} - \gamma e_{kk} \theta - \frac{c_\epsilon}{2T_0} \theta^2$$



$$(91) \quad \tau_{ij} = 2\mu e_{ij} + (\lambda e_{kk} - \gamma\theta)\delta_{ij} \quad ,$$

αντίστοιχα, όπου

$$\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_T \quad \text{και} \quad \alpha_T$$

είναι ο συντελεστής της γραμμικής θερμικής διαστολής του υλικού και $\dot{\epsilon}_E$ είναι ειδική θερμότητά του υπό σταθερή παραμόρφωση.

Σχόλιο

Η καταστατική σχέση (91) μπορεί να διατυπωθεί με απλές φυσικές θεωρήσεις. Οι θερμικές μεταβολές σένα σώμα συνοδεύονται από μετακινήσεις των σωματίων που συνθέτουν το σώμα. Οι μετακινήσεις αυτές δεν λαβαίνουν χώρα, γενικά, ελεύθερα και έτσι το σώμα θα βρίσκεται σε εντατική κατάσταση. Κατά την ελεύθερη διαστολή ενός ισότροπου σώματος ένα στοιχείο όγκου με σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου ακμής l_i^0 παράλληλης προς τον x_i -άξονα συντεταγμένων παραμορφώνεται σένα παρόμοιο παραλληλεπίπεδο με ακμές l_i . Για μικρές θερμικές μεταβολές ΔT η σχέση μεταξύ των l_i^0 και l_i έχει τη μορφή

$$(a) \quad l_i = (1 + \alpha_T \Delta T) l_i^0 \quad , \quad \Delta T = T - T_0 = \theta$$

και η παραμόρφωση e'_{ij} που οφείλεται στην ελεύθερη διαστολή θα είναι

$$(b) \quad e'_{ij} = \alpha_T \theta \delta_{ij} \quad .$$

Επειδή η διαστολή του όγκου δεν συμβαίνει ελεύθερα όταν το σώμα υπόκειται σε δεσμούς, την ολική παραμόρφωση e_{ij} μπορούμε να τη δούμε σαν το άθροισμα της θερμικής παραμόρφωσης e'_{ij} και της ελαστικής παραμόρφωσης e''_{ij} που οφείλεται στην αντίσταση του μέσου στη θερμική διαστολή, δηλαδή

$$(v) \quad e_{ij} = e'_{ij} + e''_{ij}$$

όπου

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad .$$



Η ελαστική παραμόρφωση e''_{ij} συνδέεται με την ένταση τ_{ij} από τις σχέσεις (54),

$$(δ) \quad e''_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{ij} - \frac{\nu}{E} \tau_{kk} \delta_{ij} \quad .$$

Αν εισάγουμε στην (δ) τις (γ) και (β) παίρνουμε

$$(ε) \quad e_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{ij} - \left(\frac{\nu}{E} \tau_{kk} - \alpha_T \theta \right) \delta_{ij}$$

και από την (ε) την (91), δηλαδή

$$(στ) \quad \tau_{ij} = 2\mu e_{ij} + (\lambda e_{kk} - \gamma \theta) \delta_{ij} \quad .$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι σιωπηρά έγινε δεκτό ότι οι μεταβολές της θερμοκρασίας είναι τέτοιες ώστε οι ελαστικές σταθερές ουσιαστικά να παραμένουν αμετάβλητες (οι ελαστικές σταθερές μεταβάλλονται με την μεταβολή της θερμοκρασίας).

Βιβλιογραφία

1. P. Chadwick: "Thermoelasticity. The dynamical Theory", Progress in Solid Mechanics, Vol. I. ch. VI (edited by I. Sneddon and P. Hill), North-Holland Publ. Company, Amsterdam (1964).
2. Y. Fung: "Foundations of Solid mechnaics", John Wiley and Sons, Inc. New York (1962).
3. Γ. Λιάνη : "Μηχανική παραμορφωσίμων σωμάτων και αντοχή των υλικών", Θεσσαλονίκη (1979).
4. Χ. Μασσαλάς: "Μηχανική των συνεχών μέσων. Μέρος Α. Προκαταρκτικές γεωμετρικές γνώσεις", Ιωάννινα (1982).
5. Κ. Μυλωνά: "Μηχανική παραμορφωτών σωμάτων Ι", Αθήνα (1982).
6. W. Nowacki: "Dynamic problems of thermoelasticity" Noordhoff Int. Publishing, Leyden, the Netherlands (1975).
7. I. Sokolnikoff: "Mathematical theory of elasticity", Mc Graw-Hill Book Company, New York (1956).



REF. 4

1. The Board of Directors of the Corporation shall have the right to elect and remove the President, Vice President, Secretary and Treasurer of the Corporation, and to elect and remove any other officers or directors of the Corporation.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ

[illegible]

TO: DIRECTOR, FBI (100-371000) FROM: SAC, NEW YORK (100-100000) (P)
SUBJECT: [Illegible] (C)
[Illegible text follows]

(P.T.) CON - 670005 Vol III

CONFIDENTIAL - SECURITY INFORMATION (S)



ΚΕΘ. Α

Γραμμική Ελαστικότητα

Στη γραμμική θεωρία ελαστικότητας οι βασικές θεωρήσεις είναι :

- ι) Οι παραμορφώσεις είναι απειροστές και
- ιι) Το υλικό είναι γραμμικό, ομογενές και υπακούει στο νόμο του Hooke.

Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε ότι το υλικό είναι και ισότροπο.

Το βασικό πρόβλημα της μαθηματικής θεωρίας της ελαστικότητας είναι ο προσδιορισμός της κατανομής των τ_{ij} , e_{ij} και u_i σε όλα τα σημεία ενός σώματος αν είναι γνωστές κάποιες συνοριακές και αρχικές συνθήκες. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τη διατύπωση των προβλημάτων συνοριακών τιμών της γραμμικής ελαστικότητας και θερμοελαστικότητας και θα σχολιάσουμε τη μοναδικότητα της λύσης των.

1. Το πρόβλημα ισορροπίας ενός ισότροπου και ελαστικού στερεού.

Το πλήρες σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας ενός ομογενούς ισότροπου και ελαστικού στερεού αποτελείται από τις εξισώσεις:

ι) Εξισώσεις ισορροπίας (Α.9)

$$(1) \quad \tau_{ij,j} + B_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

ιι) Τον ελαστικό νόμο (Γ.39)

$$(2) \quad \tau_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda e_{kk} \delta_{ij}$$

και τις κινηματικές σχέσεις (Β.23)



$$(3) \quad e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad .$$

Το σύστημα των εξισώσεων (1-3) πρέπει να ικανοποιείται σε κάθε εσωτερικό σημείο του σώματος και επί της επιφάνειάς του οι τάσεις πρέπει να ικανοποιούν τις συνθήκες ισορροπίας (A.6)

$$(4) \quad T_i^n = \tau_{ij} n_j$$

Στις εξισώσεις (1-4) πρέπει να συμπεριλάβουμε και τις συνθήκες συμβιβαστού των παραμορφώσεων (B.54)

$$(5) \quad e_{ij,kl} + e_{kl,ij} - e_{ik,jl} - e_{jl,ik} = 0 \quad .$$

Σε επόμενη παράγραφο θα αποδείξουμε ότι το σύστημα των (1) και (2) που υπόκειται στις συνθήκες (4) είναι πλήρες δηλαδή αν υπάρχει μία λύση του συστήματος αυτή θα είναι και η μοναδική του λύση. Για τον προσδιορισμό των αγνώστων συναρτήσεων τ_{ij} και u_i ($i, j=1, 2, 3$) διαθέτουμε 9-εξισώσεις. Μετά τον προσδιορισμό των u_i οι e_{ij} υπολογίζονται από τις (3). Στη συνέχεια θα υποθέτουμε ότι οι u_i είναι συνεχείς συναρτήσεις κλάσης C^3 εν και οι συναρτήσεις τ_{ij} είναι συνεχείς κλάσης C^2 εν. Οι μαζικές δυνάμεις B_i θα υποθέτουμε ότι είναι γνωστές συναρτήσεις των συντεταγμένων x_i του απαραμόρφωτου σώματος. Για τις T_i^n θα υποθέτουμε ότι είναι γνωστές συναρτήσεις των συντεταγμένων της απαραμόρφωτης επιφάνειας S του σώματος.

Στην επιφάνεια του σώματος είναι δυνατό αντί των επιφανειακών δυνάμεων T_i^n να είναι γνωστές οι μετατοπίσεις u_i των σημείων της και η εντατική κατάσταση που προκύπτει από την παραμόρφωση της S στο εσωτερικό του σώματος να χαρακτηρίζεται από τη μοναδικότητα.

Δυο βασικά προβλήματα συνοριακών τιμών της μαθηματικής θεωρίας ελαστικότητας είναι :

Πρόβλημα 1 : Προσδιορισμός της κατανομής των τάσεων και των μετατοπίσεων στο εσωτερικό ενός ελαστικού σώματος που βρίσκεται στην κατάσταση της ισορροπίας όταν είναι γνωστές οι μαζικές και οι επιφανειακές



δυνάμεις.

Πρόβλημα 2 : Προσδιορισμός της κατανομής των τάσεων και των μετατοπίσεων στο εσωτερικό ενός ελαστικού σώματος που βρίσκεται στην κατάσταση της ισορροπίας όταν είναι γνωστές οι μαζικές δυνάμεις και οι μετατοπίσεις των σημείων της επιφανείας του.

Σε πολλές εφαρμογές είναι σημαντικό να θεωρήσουμε το συνδυασμό των προβλημάτων 1 και 2 γιατί μπορεί να είναι γνωστές οι $u_i \in S_1$ και οι $T_i^n \in S_2$ όπου $S_1 + S_2 = S$. Το πρόβλημα αυτό λέγεται μικτό πρόβλημα συνοριακών τιμών.

Παρατήρηση : Οι εξωτερικές δυνάμεις αναφέρονται στην αρχική, अपαραμόρφωτη, κατάσταση του σώματος ενώ η ισορροπία κάτω από την επίδραση αυτών των δυνάμεων θα πραγματοποιηθεί στην τελική, παραμορφωμένη, κατάσταση. Το σφάλμα που εισάγεται με την προσέγγιση αυτή είναι επιτρεπτό στα πλαίσια της θεωρίας των απειροστών παραμορφώσεων.

Από τη διατύπωση των προβλημάτων 1 και 2 γίνεται έμμεσα σύσταση στο να διατυπώσουμε τις διαφορικές εξισώσεις (1) και (2) σε όρους των τ_{ij} και u_i , αντίστοιχα.

Αν εισάγουμε τις (3) στις (2) παίρνουμε

$$(6) \quad \tau_{ij} = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ij} \quad .$$

Με την αντικατάσταση των (6) στις (1) οι εξισώσεις ισορροπίας γράφονται

$$(7) \quad \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + B_i = 0 \quad .$$

Οι (7) είναι οι γνωστές εξισώσεις ισορροπίας σε όρους των μετατοπίσεων και φέρουν το όνομα εξισώσεις Navier.

Πρέπει να σημειωθεί ότι με τη διατύπωση των (1) με τη μορφή (7) οι εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων δεν απαιτούνται μιας και αυτές επιβάλουν περιορισμούς επί των e_{ij} ώστε να προκύψει μονότιμο και συνεχές πεδίο μετατοπίσεων σε απλά συνεκτικά σώματα.

Η λύση του προβλήματος 2 θα έχει βρεθεί αν προσδιορίσουμε μια



λύση του συστήματος (7) που να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες

$$(3) \quad u_i = f_i(x_1, x_2, x_3), \quad i=1,2,3, \quad x_i \in S$$

όπου f_i είναι γνωστές συναρτήσεις. Αν γνωρίζουμε τις μετατοπίσεις u_i οι e_{ij} και τ_{ij} προσδιορίζονται από τις (3) και (2), αντίστοιχα.

Αν τώρα εισάγουμε τις (Γ.54),

$$(9) \quad e_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma \delta_{ij}, \quad \sigma = \tau_{kk}$$

στις συνθήκες συμβιβαστού των παραμορφώσεων (5) θα πάρουμε

$$(10) \quad \begin{aligned} &\tau_{ij,kl} + \tau_{kl,ij} - \tau_{ik,jl} - \tau_{jl,ik} \\ &= \frac{\nu}{\nu+1} (\delta_{ij} \sigma_{,kl} + \delta_{kl} \sigma_{,ij} - \delta_{ik} \sigma_{,jl} - \delta_{jl} \sigma_{,ik}). \end{aligned}$$

Επειδή από τις 81-εξισώσεις που αντιπροσωπεύει η (5) οι 6-εξισώσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες το ίδιο θα συμβαίνει και για τις (10).

Αν κάνουμε τη συστολή $l=k$ από τις (10), έχουμε

$$\text{ή} \quad \tau_{ij,kk} + \tau_{kk,ij} - \tau_{ik,jk} - \tau_{jk,ik} = \frac{\nu}{1+\nu} (\delta_{ij} \sigma_{,kk} + 3\sigma_{,ij} - \sigma_{,ji} - \sigma_{,ij})$$

$$(11) \quad \nabla^2 \tau_{ij} + \sigma_{,ij} - \tau_{ik,jk} - \tau_{jk,ik} = \frac{\nu}{1+\nu} (\delta_{ij} \nabla^2 \sigma + \sigma_{,ij})$$

$$\text{όπου} \quad \nabla^2 \tau_{ij} = \tau_{ij,kk} \quad \text{και} \quad \sigma = \tau_{kk}.$$

Από τις εξισώσεις ισορροπίας (1) έχουμε

$$\tau_{ij,j} + B_i = 0$$

και

$$(12) \quad \tau_{ik,jk} = -B_{i,j}.$$

Αν εισάγουμε τις (12) στις (11) θα πάρουμε

$$(13) \quad \nabla^2 \tau_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{,ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} \nabla^2 \sigma = -(B_{i,j} + B_{j,i}).$$



Το σύνολο των 6-ανεξάρτητων εξισώσεων (13) μπορεί να απλοποιηθεί αν εκφράσουμε την αναλλοίωτη $\nabla^2 \sigma$ σε όρους των παραγώγων των μαζικών δυνάμεων B_i .

Αν στις (10) κάνουμε τις συστολές $k=i$ και $l=j$ θα πάρουμε

$$2\tau_{ij,ij} - \tau_{ii,jj} - \tau_{jj,ii} = \frac{\nu}{1+\nu} (2\delta_{ij}\sigma_{,ij} - 3\sigma_{,jj} - 3\sigma_{,ii})$$

ή

$$(14) \quad \tau_{ij,ij} = \frac{1-\nu}{1+\nu} \nabla^2 \sigma.$$

Από τις εξισώσεις ισορροπίας έχουμε

$$\tau_{ij,i} = -B_j \Rightarrow \tau_{ij,ij} = -B_{j,j}$$

και η (14) γράφεται

$$(15) \quad \nabla^2 \sigma = - \frac{1+\nu}{1-\nu} B_{j,j}.$$

Όταν οι μαζικές δυνάμεις είναι σταθερές ή μηδενικές τότε η $\sigma = \tau_{kk}$ είναι αρμονική συνάρτηση, δηλαδή

$$(16) \quad \nabla^2 \sigma = 0.$$

Αν αντικαταστήσουμε την (15) στην (13) παίρνουμε

$$(17) \quad \nabla^2 \tau_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{,ij} = - \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} B_{k,k} - (B_{i,j} + B_{j,i}).$$

Οι εξισώσεις (17) είναι οι εξισώσεις Michell που είναι οι κατάλληλες για την αντιμετώπιση του προβλήματος 1.

Για μηδενικές ή σταθερές μαζικές δυνάμεις οι εξισώσεις Michell παίρνουν τη μορφή

$$(18) \quad \nabla^2 \tau_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{,ij} = 0$$

και είναι γνωστές σαν εξισώσεις Beltrami.

Αν εφαρμόσουμε τον τελεστή ∇^2 στην (18) έχουμε



$$\nabla^2 \nabla^2 \tau_{ij} + \frac{1}{1+\nu} (\nabla^2 \sigma)_{,ij} = 0$$

ή

$$(19) \quad \nabla^2 \nabla^2 \tau_{ij} = 0$$

δηλαδή οι συνιστώσες του τανυστή τάσης για σταθερές ή μηδενικές μαζικές δυνάμεις ικανοποιούν τη διαρμονική εξίσωση με την προϋπόθεση ότι οι τ_{ij} ανήκουν στην κλάση C^4 .

Από τη σχέση (Γ.42)

$$e_{kk} = \frac{\tau_{kk}}{3\lambda+2\mu} = \frac{\sigma}{3\lambda+2\mu}$$

και την (15) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ανηγμένη διόγκωση για μηδενικές ή σταθερές μαζικές δυνάμεις είναι αρμονική συνάρτηση, δηλαδή

$$(20) \quad \nabla^2 e_{kk} = \nabla^2 \theta = 0.$$

Επειδή οι e_{ij} είναι γραμμικές συναρτήσεις των τ_{ij} από την (19) θα έχουμε

$$(21) \quad \nabla^2 \nabla^2 e_{ij} = 0.$$

Οι συναρτήσεις f κλάσης C^4 που ικανοποιούν την εξίσωση $\nabla^2 \nabla^2 f = \nabla^4 f = 0$ λέγονται διαρμονικές συναρτήσεις.

Θ ε ώ ρ η μ α : Όταν οι συνιστώσες των μαζικών δυνάμεων B_i είναι σταθερές οι αναλλοίωτες σ και θ είναι αρμονικές συναρτήσεις και οι συνιστώσες τ_{ij} και e_{ij} είναι διαρμονικές συναρτήσεις.

Αν θεωρήσουμε ότι οι μαζικές δυνάμεις είναι συντηρητικές, δηλαδή

δη

$$(22) \quad B_i = \phi_{,i}$$

και

$$B_{i,i} = \phi_{,ii} = \nabla^2 \phi = 0$$

τότε η (15) μας δίνει την πληροφορία ότι



$$(23) \quad \nabla^2 \sigma = 0$$

και κατά συνέπεια και

$$(24) \quad \nabla^2 \theta = 0 \quad .$$

Το προηγούμενο λοιπόν θεώρημα μπορεί να συμπληρωθεί "..... . Όταν οι μαζικές δυνάμεις είναι συντηρητικές και ορίζονται από αρμονική συνάρτηση οι αναλλοίωτες σ και θ είναι επίσης αρμονικές συναρτήσεις".

Το πρόβλημα της μοναδικότητας των λύσεων των προβλημάτων 1 και 2 όπως επίσης και ορισμένες παρατηρήσεις επί της ύπαρξης αυτών των λύσεων θα συζητηθούν σε επόμενη παράγραφο. Πριν από αυτή τη συζήτηση μπορούμε να σημειώσουμε ότι από το γραμμικό χαρακτήρα των (1), (2) και (3) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η αρχή της υπέρθεσης ισχύει στα βασικά προβλήματα της μαθηματικής θεωρίας ελαστικότητας.

Ας υποθέσουμε ότι βρίσκουμε ένα σύνολο από 9-συναρτήσεις

$$\tau_{ij}^{(1)}, u_i^{(1)}, \quad i, j=1, 2, 3, \quad ,$$

που ικανοποιούν το σύστημα των (1) και (2) με γνωστές μαζικές δυνάμεις $B_i^{(1)}$. Ας υποθέσουμε ακόμη ότι έχουμε ένα σύνολο συναρτήσεων

$$\tau_{ij}^{(2)}, u_i^{(2)}, \quad i, j=1, 2, 3. \quad ,$$

που είναι λύση του συστήματος (1) και (2) για μαζικές δυνάμεις $B_i^{(2)}$. Τότε, είναι προφανές ότι η λύση

$$(25) \quad \tau_{ij} = \tau_{ij}^{(1)} + \tau_{ij}^{(2)}, \quad u_i = u_i^{(1)} + u_i^{(2)}, \quad i, j=1, 2, 3$$

θα αντιστοιχεί στις μαζικές δυνάμεις

$$B_i = B_i^{(1)} + B_i^{(2)} \quad .$$

Αν οι συναρτήσεις $\tau_{ij}^{(2)}, u_i^{(2)}$ αντιπροσωπεύουν λύση του ομογενούς συστήματος τότε η (25) αντιπροσωπεύει λύση του προβλήματος που αντιστοιχεί στις μαζικές δυνάμεις $B_i^{(1)}$.



2. Το δυναμικό πρόβλημα ενός ισότροπου και ελαστικού στερεού.

Οι εξισώσεις κίνησης ενός ελαστικού στερεού λαμβάνονται από τις εξισώσεις ισορροπίας (1) αν προσθέσουμε στις μαζικές δυνάμεις B_i τις αδρανειακές δυνάμεις (αρχή του D'Alembert). Αν $\rho(x_i, t)$ είναι η πυκνότητα του μέσου τότε οι αδρανειακές δυνάμεις που ενεργούν στη μάζα του στοιχείου dV είναι

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho(x_k, t) \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) dV.$$

Στην περίπτωση που $\rho = \rho(x_k)$ τότε οι εξισώσεις κίνησης έχουν τη μορφή

$$(26) \quad \tau_{ij,j} + B_i = \rho \ddot{u}_i.$$

Οι καταστατικές σχέσεις, δεν περιλαμβάνουν μαζικές δυνάμεις, (2) είναι οι ίδιες και στα δυναμικά προβλήματα και οι u_i και T_i^n είναι συναρτήσεις των x_i και του χρόνου t . Οι εξισώσεις του Navier (7) θα έχουν τώρα τη μορφή

$$(27) \quad \mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) u_{j,j} + B_i = \rho \ddot{u}_i.$$

Για την περιγραφή ενός δυναμικού προβλήματος, τις (27) πρέπει να τις συμπληρώσουμε με τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες.

Τα αντίστοιχα των προβλημάτων 1 και 2 της προηγούμενης παραγράφου είναι:

Πρόβλημα 1 : Προσδιορισμός των $u_i = u_i(x_k, t)$ που ικανοποιούν τις εξισώσεις (27) και τις συνθήκες

$$\begin{aligned} u_i &= u_i^0(x_k), & \frac{\partial u_i}{\partial t} &= U_i^0(x_k) & \text{για } t=t_0 & \quad x_k \in V \\ T_i^n &= f_i^n(x_k, t) & & \text{για } t \geq t_0 & \quad x_k \in S. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2 : Προσδιορισμός των $u_i(x_k, t)$ που ικανοποιούν τις εξισώσεις (27) και είναι τέτοιες ώστε

$$u_i = U_i(x_k, t), \quad \text{για } t \geq t_0, \quad x_k \in S.$$



Εκτός από τα προβλήματα 1 και 2 στις εφαρμογές εμφανίζεται το μικτό πρόβλημα στο οποίο οι $\overset{n}{T}_i$ περιγράφονται στο τμήμα της επιφάνειας S_1 και οι u_i στο τμήμα S_2 , όπου $S_1 + S_2 = S$. Για παράδειγμα, ας φανταστούμε ένα σώμα που υπόκειται στο τμήμα S_1 της επιφάνειάς του στο γεωμετρικό περιορισμό $u_i = 0$ και στο υπόλοιπο τμήμα S_2 της επιφάνειάς του είναι γνωστές οι επιφανειακές δυνάμεις $\overset{n}{T}_i$.

3. Θεώρημα του Clapeyron - Εξίσωση ενέργειας.

Από την (Γ.89) παίρνουμε την έκφραση της συνάρτησης της ενέργειας παραμόρφωσης για ισότροπο και ελαστικό μέσο

$$(28) \quad W = \frac{1}{2} \tau_{ij} e_{ij} \quad .$$

Το έργο των επιφανειακών δυνάμεων $\overset{n}{T}_i$ σένα σώμα κατά την παραμόρφωσή του είναι

$$(29) \quad \int_S \overset{n}{T}_i u_i dS = \int_S \tau_{ij} n_j u_i dS = \int_V (\tau_{ij} u_i)_{,j} dV \\ = \int_V \tau_{ij,j} u_i dV + \int_V \tau_{ij} u_{i,j} dV \quad .$$

Αν εισάγουμε στην (29) τις εξισώσεις ισορροπίας (1) και τις σχέσεις (Γ.63)

$$u_{i,j} = e_{ij} - \omega_{ij} \quad , \quad \omega_{ij} \tau_{ij} = 0$$

αυτή γράφεται

$$\int_S \overset{n}{T}_i u_i dS = \int_V (-B_i u_i) dV + \int_V \tau_{ij} e_{ij} dV$$

και

$$(30) \quad \int_S \overset{n}{T}_i u_i dS + \int_V B_i u_i dV = 2 \int_V W dV \quad .$$

Η (30) αποτελεί τη μαθηματική διατύπωση του θεωρήματος του Clapeyron και αφορά την κατάσταση ισορροπίας ενός ελαστικού και ισότροπου σώματος.



Η ισχύς των επιφανειακών δυνάμεων T_i^n κατά την παραμόρφωση ενός σώματος είναι

$$(31) \quad \int_S T_i^n \dot{u}_i dS = \int_V (\tau_{ij} \dot{u}_i)_{,j} dV = \int_V \tau_{ij,j} \dot{u}_i dV + \int_V \tau_{ij} \dot{u}_{i,j} dV .$$

Αν εισάγουμε στην (31) τις εξισώσεις κίνησης (26) και

$$\dot{u}_{i,j} = \dot{e}_{ij} - \dot{\omega}_{ij} \quad , \quad \dot{\omega}_{ij} \tau_{ij} = 0$$

θα πάρουμε

$$(32) \quad \int_S T_i^n \dot{u}_i dS = \int_V (-B_i \dot{u}_i) dV + \int_V \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i dV + \int_V \tau_{ij} \dot{e}_{ij} dV .$$

Επειδή

$$\int_V \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i dV = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV \right) = \dot{K}$$

και

$$\int_V \tau_{ij} \dot{e}_{ij} dV = \int_V \frac{\partial W}{\partial e_{ij}} \dot{e}_{ij} dV = \frac{d}{dt} \int_V W dV$$

από την (32) προκύπτει ότι

$$(33) \quad \int_S T_i^n \dot{u}_i dS + \int_V B_i \dot{u}_i dV = \dot{K} + \frac{d}{dt} \int_V W dV .$$

Αν εισάγουμε τους συμβολισμούς

$$\epsilon = \int_S T_i^n u_i dS + \int_V B_i u_i dV$$

$$\tilde{U} = \int_V W dV$$

όπου ϵ είναι το έργο των μαζικών και επιφανειακών δυνάμεων και $\tilde{U}$ είναι η ενέργεια παραμόρφωσης του σώματος η (33) γράφεται

$$(34) \quad \dot{\epsilon} = \dot{K} + \dot{\tilde{U}} .$$

Αν ολοκληρώσουμε την (34) μεταξύ των ορίων $t=0$ και $t=t$, όπου $t=0$ αντιστοιχεί στη φυσική κατάσταση, θα πάρουμε



$$(35) \quad \epsilon = K + \bar{U}.$$

Η φυσική ερμηνεία της (35) είναι: Το έργο των εξωτερικών δυνάμεων που μετασχηματίζει τη φυσική κατάσταση του συστήματος στην κατάσταση στο χρόνο t είναι ίσο με την κινητική ενέργεια K και την ενέργεια παραμόρφωσης $\bar{U}$ του συστήματος. Η ενέργεια παραμόρφωσης μπορεί να ερμηνευτεί σαν η ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα όταν αυτό μεταβαίνει από τη φυσική κατάσταση στην κατάσταση στο χρόνο t . Η $\bar{U}$ είναι θετικά ορισμένη συνάρτηση. Αν στο χρόνο t το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία τότε $\epsilon = \bar{U}$.

4. Μοναδικότητα της λύσης - Παρατηρήσεις επί της ύπαρξης της λύσης.

ι. Στατικά προβλήματα.

Για να υπάρχει λύση των στατικών προβλημάτων που σχολιάσαμε στην §1 πρέπει να μηδενίζονται η συνισταμένη δύναμη και ροπή των εξωτερικών δυνάμεων του συστήματος.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι για ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών έχουμε δύο λύσεις

$$(36) \quad u_i^{(1)}, \tau_{ij}^{(1)}, \quad i, j=1, 2, 3$$

και

$$(37) \quad u_i^{(2)}, \tau_{ij}^{(2)}, \quad i, j=1, 2, 3.$$

Από το γραμμικό χαρακτήρα των διαφορικών εξισώσεων είναι προφανές ότι το σύνολο των συναρτήσεων

$$u_i \equiv u_i^{(1)} - u_i^{(2)}, \quad \tau_{ij} \equiv \tau_{ij}^{(1)} - \tau_{ij}^{(2)}$$

θα ικανοποιεί τις εξισώσεις (1) για $B_i = 0$. Στην περίπτωση αυτή η (30) γράφεται

$$(38) \quad \int_S T_i u_i dS = 2 \int_V w dV.$$



Επειδή οι λύσεις (36) και (37) ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος το πρώτο μέρος της (33) μηδενίζεται και κατά συνέπεια

$$(39) \quad \int_V w dv = 0.$$

Αλλά η w είναι θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή και για να ισχύει η (39) πρέπει $w=0$, πράγμα που οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $e_{ij}=0$. Επειδή $e_{ij}=0$ θα έχουμε $e_{ij}^{(1)}=e_{ij}^{(2)}$ και $\tau_{ij}^{(1)}=\tau_{ij}^{(2)}$. Οι μετατοπίσεις u_i προσδιορίζονται με προσέγγιση ποσοτήτων που αντιπροσωπεύουν κίνηση απόλυτα στερεού σώματος. Στις περιπτώσεις του προβλήματος 2 και του μικτού προβλήματος έχουμε $u_i^{(1)}=u_i^{(2)}$ επειδή οι u_i είναι προδιαγραμμένες τουλάχιστο σε τμήμα της επιφάνειας S .

Παρατήρηση : Στην απόδειξη της μοναδικότητας της λύσης υποθέσαμε μόνο ότι οι u_i είναι μονότιμες συναρτήσεις χωρίς να βάλουμε κανένα περιορισμό ως προς τη συνεκτικότητα της περιοχής.

ιι. Δυναμικά προβλήματα.^(*)

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο λύσεις (36) και (37) που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες ενός δυναμικού προβλήματος. Η διαφορά των λύσεων

$$u_i, \tau_{ij}, \quad i, j=1, 2, 3$$

θα ικανοποιεί τις εξισώσεις κίνησης για $B_i=0$. Σε όλες τις περιπτώσεις θα έχουμε

$$(40) \quad \sum_{i=1}^n T_i \dot{u}_i = 0 \quad \text{για} \quad x_i \in S, \quad t \geq t_0.$$

Για παράδειγμα στο πρόβλημα 1, $\sum_{i=1}^n T_i=0$ και στο πρόβλημα 2, $\dot{u}_i=0$ ($u_i=0$, $\forall t \geq t_0$).

Η εξίσωση ενέργειας (34) παίρνει τώρα τη μορφή

(*) Η απόδειξη της μοναδικότητας της λύσης ενός δυναμικού προβλήματος συνοριακών τιμών οφείλεται στον Kirchhoff (1959).



$$\dot{K} + \dot{\bar{U}} = 0$$

ή

$$K + \bar{U} = \text{σταθ.} \quad .$$

Η σταθερά ολοκλήρωσης θα είναι ίση με το μηδέν αφού οι μετατοπίσεις και οι ταχύτητες μηδενίζονται για $t=t_0$ και κατά συνέπεια έχουμε

$$K + \bar{U} = 0 \quad .$$

Επειδή όμως οι συναρτήσεις K και $\bar{U}$ είναι θετικά ορισμένες $\forall t \geq t_0$ θα είναι

$$(41) \quad K = \bar{U} = 0, \quad \forall t \geq t_0 \quad .$$

Από τις (41) οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι

$$(42) \quad \dot{u}_i = 0 \quad \text{και} \quad e_{ij} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \forall t \geq t_0 \quad .$$

Η πρώτη από τις (42) μας δίνει την πληροφορία ότι πραγματευόμαστε μια στατική περίπτωση και η δεύτερη ότι το σώμα δεν έχει παραμόρφωση και έτσι έχουμε το συμπέρασμα ότι η λύση u_i αντιπροσωπεύει μία κίνηση απόλυτα στερεού σώματος. Επειδή όμως οι μετατοπίσεις u_i μηδενίζονται για $t=t_0$ η κίνηση απόλυτα στερεού σώματος δεν εμφανίζεται στη λύση και κατά συνέπεια

$$u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \forall t \geq t_0 \quad .$$

Πρέπει στο σημείο αυτό να παρατηρήσουμε ότι στα μη-γραμμικά προβλήματα η w δεν είναι απαραίτητο να είναι θετικά ορισμένη συνάρτηση των παραμορφώσεων και κατά συνέπεια η παραπάνω απόδειξη της μοναδικότητας παύει να ισχύει.

Η απόδειξη της ύπαρξης λύσης των προβλημάτων συνοριακών τιμών της γραμμικής θεωρίας ελαστικότητας μπορεί να βασιστεί στη θεωρία δυναμικού. Οι αποδείξεις όμως αυτές δεν διακρίνονται για την απλότητά τους αφού έχουν εξάρτηση από την κατασκευή κάποιων βοηθητικών συναρτήσεων ανάλογων των συναρτήσεων Green. Η απόδειξη της ύπαρξης τέτοιων συναρτήσεων αποδεικνύεται ότι είναι ένα πρόβλημα το ίδιο δύσκολο με το αρ-



χικό πρόβλημα.

Με την ανάπτυξη των δραστικών μεθόδων της θεωρίας των ολοκληρωτικών εξισώσεων αποδεικνύεται ότι είναι δυνατό να αποδείξουμε την ύπαρξη λύσης των βασικών προβλημάτων της ελαστικότητας για πολύ γενικές συνθήκες.

5. Αρχή του Saint-Venant.

Από τη διατύπωση των προβλημάτων συνοριακών τιμών είναι φανερό ότι η ακριβής τους λύση παρουσιάζει ανυπέρβλητες μαθηματικές δυσκολίες επειδή η μορφή των συνοριακών συνθηκών είναι πολύπλοκη. Σε πολλά προβλήματα είναι δυνατό να οδηγηθούμε στη λύση τους αν τροποποιήσουμε τις συνοριακές συνθήκες τους με βάση την αρχή του Saint-Venant (1835)

" Αν μία κατανομή φορτίων που ενεργεί σένα τμήμα της επιφάνειας του σώματος αντικατασταθεί με μια διαφορετική κατανομή στο ίδιο τμήμα του τότε η επίδραση των δύο διαφορετικών κατανομών σε μέρη του σώματος που βρίσκονται μακριά από το χώρο εφαρμογής των δύο αυτών κατανομών είναι ουσιαστικά η ίδια αν οι δύο κατανομές είναι ισοδύναμες".

Με τον όρο ισοδύναμες εννοούμε ότι οι δύο κατανομές έχουν την ίδια συνισταμένη δύναμη και την ίδια συνισταμένη ροπή.

Η δικαιολόγηση της αρχής του Saint-Venant από καθαρή μαθηματική σκοπιά, στη γενική περίπτωση, είναι πολύ δύσκολη. Σε αρκετές γενικές κατηγορίες προβλημάτων συνοριακών τιμών έχει γίνει πρόσφατα η μαθηματική δικαιολόγηση της αρχής αυτής. Το γεγονός αυτό και τα ευνοϊκά αποτελέσματα από την εφαρμογή της αρχής του Saint-Venant σε προβλήματα που είναι εύκολο να βρεθούν οι λύσεις τους για διάφορες ισοδύναμες κατανομές φορτίων οδηγούν σε αρκετή εμπιστοσύνη προς την αρχή αυτή ώστε να γίνεται χρήση της σε προβλήματα της πράξης.

6. Θερμοελαστικό πρόβλημα.

Η θερμοελαστικότητα συσχετίζει δυο ανεξάρτητες μεταξύ τους επιστήμες, με βάση τη θερμοδυναμική των μη-αντιστρεπτών διαδικασιών : τη θε-



ωρία ελαστικότητας και τη θεωρία της αγωγής θερμότητας. Το αντικείμενο της είναι το αποτέλεσμα της θερμότητας επί των παραμορφώσεων ενός ελαστικού σώματος και αντίστροφα, το αποτέλεσμα της παραμόρφωσης επί της θερμικής κατάστασης του σώματος.

Στην παράγραφο 2 του Κεφ. Γ δόθηκαν περιληπτικά κάποια στοιχεία που θα τα χρησιμοποιήσουμε εδώ για τη διατύπωση της μαθηματικής περιγραφής του θερμοελαστικού προβλήματος.

Οι βασικές εξισώσεις της θερμοελαστικότητας είναι οι εξισώσεις κίνησης και η ζευγμένη μαυτές εξίσωση της αγωγής θερμότητας.

Οι εξισώσεις κίνησης (26) παράγονται από την αρχή διατήρησης της ορμής και είναι :

$$(43) \quad \tau_{ij,j} + B_i = \rho \ddot{u}_i .$$

Από την αρχή διατήρησης της στροφορμής έχουμε $\tau_{ij} = \tau_{ji}^{(*)}$. Αν για ένα ισοτρόπο, γραμμικό και ελαστικό μέσο εκφράσουμε τις συνιστώσες του ταυιστή τάσης σε όρους των e_{ij} και $\theta = T - T_0$ από τις σχέσεις Duhamel-Neumann (Γ.91) ,

$$(44) \quad \tau_{ij} = 2\mu e_{ij} + (\lambda e_{kk} - \gamma\theta)\delta_{ij}$$

και τις συνιστώσες e_{ij} από τις κινηματικές σχέσεις

$$(45) \quad e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

οι εξισώσεις (43) παίρνουν τη μορφή

$$(46) \quad \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + B_i - \gamma\theta_{,i} = \rho \ddot{u}_i .$$

Στη συνέχεια θα παράγουμε την εξίσωση της αγωγής θερμότητας σε ορους της θερμοκρασίας και της παραμόρφωσης.

Από την (Γ. 82α) και την (Γ. 90) παίρνουμε

$$(47) \quad s = \gamma e_{kk} + \frac{c}{T_0} \theta$$

και

(*) Δεν υπάρχουν ζεύγη μαζικών δυνάμεων και τάσεων.



$$(48) \quad \dot{s} = \gamma \dot{\epsilon}_{kk} + \frac{c_{\epsilon}}{T_0} \dot{\theta}.$$

Αν εισάγουμε την (Γ.77) ($q_i = -\lambda_T T_{,i}$) στην (Γ.72) ($T\dot{s} = -q_{i,i}$) έχουμε^(*)

$$(49) \quad T\dot{s} = \lambda_T T_{,ii}.$$

Η (49), αν λάβουμε υπόψη την (48), παίρνει τη μορφή

$$(50) \quad T_{,ii} = \frac{\gamma T \dot{\epsilon}_{kk}}{\lambda_T} + \frac{T c_{\epsilon}}{T_0 \lambda_T} \dot{\theta}.$$

Αν θέσουμε $T = T_0 + \theta$ και παραλείψουμε μη-γραμμικούς όρους στην (50) θα πάρουμε

$$(51) \quad \theta_{,ii} - \frac{1}{\kappa} \dot{\theta} - \eta \dot{\epsilon}_{kk} = 0$$

όπου $\kappa = \lambda_T / c_{\epsilon}$ είναι η θερμική διάχυση και $\eta = \gamma T_0 / \lambda_T$.

Η (51) είναι η εξίσωση αγωγής της θερμότητας στα πλαίσια της ζευγμένης θερμοελαστικότητας. Οι εξισώσεις (46) και (51) αποτελούν το πλήρες σύστημα διαφορικών εξισώσεων της θερμοελαστικότητας.

Οι παραμορφώσεις και το ζευγμένο μαυτές θερμοκρασιακό πεδίο εμφανίζονται σαν αποτέλεσμα της επίδρασης μαζικών δυνάμεων, εξωτερικών δυνάμεων και της θερμικής αλληλεπίδρασης του σώματος με το περιβάλλοντα μέσο.

Αν σένα σώμα συμβαίνει μια μη-αντιστρεπτή διαδικασία αγωγής από την ύπαρξη θερμοκρασιακής κλίσης ($T_{,i} \neq 0$), τότε η διαδικασία αυτή οδηγεί σε μια ελαστική παραμόρφωση. Το φαινόμενο αυτό είναι δευτερεύον και συμβαίνει σαν αποτέλεσμα της ενέργειας αγωγής. Αν σένα σώμα συμβαίνει μια διαδικασία παραμόρφωσης από την εφαρμογή κάποιας εξωτερικής φόρτισης, τότε στο σώμα έχουμε μια δευτερεύουσα διαδικασία αγωγής. Και στις δύο αυτές περιπτώσεις έχουμε ζευγμένες διαδικασίες που οφεί-

(*) Αν έχουμε θερμικές πηγές μέσα στο σώμα τότε

$$T\dot{s} = -q_{i,i} + W$$

όπου W είναι η ποσότητα θερμότητας που γεννιέται στη μονάδα του χρόνου και τη μονάδα του όγκου.



λονται στη σύζευξη μεταξύ των πεδίων παραμόρφωσης και θερμοκρασίας και που οδηγούν στην αύξηση της εντροπίας του συστήματος και κατά συνέπεια στη θερμοελαστική ενέργεια απωλειών. Το μέσο που χαρακτηρίζεται από την αντιστρεπτή ελαστική διαδικασία και την μη-αντιστρεπτή θερμική διαδικασία λέγεται θερμοελαστικό μέσο.

Για την πλήρη περιγραφή ενός θερμοελαστικού προβλήματος εκτός από τις διαφορικές εξισώσεις (46) και (51) είναι ανάγκη να γνωρίζουμε τις συνοριακές και αρχικές του συνθήκες. Η θερμική συνοριακή συνθήκη εκφράζει την αλληλεπίδραση του σώματος με το περιβάλλον επί της επιφάνειας του S και μπορεί να έχει μία από τις ακόλουθες μορφές :

i. η θερμοκρασία T περιγράφεται επί της S σε όρους της θέσης και του χρόνου

$$\theta = k(x_i, t), \quad x_i \in S, \quad t > 0$$

ii. η κλίση της θερμοκρασίας $\partial\theta/\partial n$ είναι γνωστή επί της S σε όρους της θέσης και του χρόνου

$$\frac{\partial\theta}{\partial n} = h(x_i, t), \quad x_i \in S, \quad t > 0$$

iii. η συνάρτηση

$$\left(\frac{\partial}{\partial n} + \alpha\right)\theta(x_i, t) = f(x_i, t), \quad x_i \in S, \quad t > 0$$

είναι δοσμένη, όπου α είναι μια σταθερά.

Η συνθήκη (ii) περιγράφει τη ροή θερμότητας δια μέσου της επιφάνειας S . Η περίπτωση $h(x_i, t) = 0$ περιγράφει τη θερμική απομόνωση της επιφάνειας S . Η συνθήκη (iii) αναφέρεται στην ελεύθερη ανταλλαγή θερμότητας επί της επιφάνειας S . Εκτός από τις περιπτώσεις (i)-(iii) υπάρχουν και περιπτώσεις που έχουμε μικτή θερμική συνοριακή συνθήκη.

Επί της επιφάνειας S μπορεί να είναι γνωστές οι επιφανειακές δυνάμεις T_i^n ή οι μετατοπίσεις u_i , δηλαδή

$$T_i^n(x_k, t) = \tau_{ij} n_j = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) n_j + \lambda(e_{kk} - \gamma\theta) \delta_{ij} n_j \quad x_k \in S, \quad t > 0$$



ή

$$u_i = U_i(x_k, t) \quad x_k \in S, \quad t > 0.$$

Όπως και στην περίπτωση της θερμικής συνοριακής συνθήκης έτσι και εδώ μπορεί να έχουμε μικτές συνοριακές συνθήκες.

Η αρχική συνθήκη για τη θερμοκρασία προσδιορίζει την κατανομή της στη χρονική στιγμή $t=0$, δηλαδή

$$\theta(x_i, 0) = \lambda(x_i), \quad x_i \in V, \quad t=0$$

όπου λ είναι γνωστή συνάρτηση.

Η μορφή του σώματος στη χρονική στιγμή $t=0$ προσδιορίζεται από τις συναρτήσεις

$$u_i(x_k, 0) = g_i(x_k), \quad \dot{u}_i(x_k, 0) = f_i(x_k), \quad x_k \in V, \quad t=0$$

όπου g_i και f_i είναι γνωστές συναρτήσεις.

Για ένα άπειρο μέσο γίνεται αντικατάσταση των συνοριακών συνθηκών επί της S με την απαίτηση οι συναρτήσεις θ και u_i στο άπειρο να μηδενίζονται.

Σχόλιο :

Οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης (46) είναι υπερβολικού τύπου ενώ η εξίσωση αγωγής της θερμότητας (51) είναι παραβολικού τύπου. Στη γενικευμένη θερμοελαστικότητα η εξίσωση αγωγής της θερμότητας περιλαμβάνει και πρόσθετους όρους που έχουν σαν αποτέλεσμα την μετατροπή της σε διαφορική εξίσωση υπερβολικού τύπου. Το γεγονός αυτό από φυσική σκοπιά έχει μεγάλη σημασία γιατί από τη ζευγμένη θερμοελαστικότητα βγαίνει το συμπέρασμα ότι η ταχύτητα διάδοσης των θερμικών κυμάτων είναι άπειρη (παράδοξο). Το φυσικά μη παραδεκτό συμπέρασμα δεν εμφανίζεται στη γενικευμένη θερμοελαστικότητα. Για το πρόβλημα της μοναδικότητας της λύσης του προβλήματος συνοριακών τιμών της θερμοελαστικότητας μπορεί ο αναγνώστης να ανατρέξει στο βιβλίο των Boley και Weiner (1967, σελ.37-40) και στην εργασία του Chandrasekharaiah (1936).



Στην περίπτωση που αγνοηθεί η σύζευξη των πεδίων παραμόρφωσης και θερμοκρασίας τότε έχουμε να λύσουμε το πρόβλημα της ελαστικότητας με μαζικές δυνάμεις $B_i - \gamma \theta_{,i}$, όπου η συνάρτηση $\theta(x_i, t)$ λαμβάνεται από τη λύση του προβλήματος αγωγής της θερμότητας. Το θερμοελαστικό αυτό πρόβλημα είναι γνωστό σαν πρόβλημα θερμικής τάσης.

Βιβλιογραφία

1. B. Boley and J. Weiner: "Theory of thermal stresses" John Wiley and Sons Inc., New York (1960).
2. D. Chandrasekharaiah: "Thermoelasticity with second sound: A review" Appl. Mech. Rev. Vol. 39 no 3, Mar. (1986).
3. Y. Fung: "Foundations of Solid Mechanics" John Wiley and Sons, Inc. New York (1962).
4. H. Leipholz: "Theory of elasticity", Noordhoff Int. Publishing Leyden, The Netherlands (1974).
5. Γ. Λιάνη: "Μηχανική των παραμορφώσιμων σωμάτων και αντοχή των υλικών", Θεσσαλονίκη (1979).
6. H. Reismann and P. Pawlik: "Elasticity: Theory and Applications" John Wiley and Sons, Inc. New York (1980).
7. I. Sokolnikoff: "Mathematical theory of elasticity", Mc Graw-Hill Book Company, New York (1956).



BY AIRMAIL TO NEW YORK TO BE DELIVERED TO THE NEW YORK OFFICE OF THE FBI

... ..

100-443887-100

[illegible]

...
...
...
...
...
...
...
...

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε

1. Enlarge the caption to include the following information:

000000 000000 000000 000000 000000 000000 000000 000000 000000 000000
000000 000000 000000 000000 000000 000000 000000 000000 000000 000000

SECRET

ALL INFORMATION CONTAINED HEREIN IS UNCLASSIFIED

Special Agent in Charge, New York Office (100-100000) (P)

THE TURNING POINTS YOU WILL FIND IN THE HISTORY OF THE UNITED STATES

ALL INFORMATION CONTAINED HEREIN IS UNCLASSIFIED

CHODIN & LEA P. LEVA, MODISTE-KNITZER, ZATEK 2013 2014 2015 2016 2017 2018 2019 2020 2021 2022 2023 2024 2025 2026 2027 2028 2029 2030 2031 2032 2033 2034 2035 2036 2037 2038 2039 2040 2041 2042 2043 2044 2045 2046 2047 2048 2049 2050 2051 2052 2053 2054 2055 2056 2057 2058 2059 2060 2061 2062 2063 2064 2065 2066 2067 2068 2069 2070 2071 2072 2073 2074 2075 2076 2077 2078 2079 2080 2081 2082 2083 2084 2085 2086 2087 2088 2089 2090 2091 2092 2093 2094 2095 2096 2097 2098 2099 2100 2101 2102 2103 2104 2105 2106 2107 2108 2109 2110 2111 2112 2113 2114 2115 2116 2117 2118 2119 2120 2121 2122 2123 2124 2125 2126 2127 2128 2129 2130 2131 2132 2133 2134 2135 2136 2137 2138 2139 2140 2141 2142 2143 2144 2145 2146 2147 2148 2149 2150 2151 2152 2153 2154 2155 2156 2157 2158 2159 2160 2161 2162 2163 2164 2165 2166 2167 2168 2169 2170 2171 2172 2173 2174 2175 2176 2177 2178 2179 2180 2181 2182 2183 2184 2185 2186 2187 2188 2189 2190 2191 2192 2193 2194 2195 2196 2197 2198 2199 2200 2201 2202 2203 2204 2205 2206 2207 2208 2209 2210 2211 2212 2213 2214 2215 2216 2217 2218 2219 2220 2221 2222 2223 2224 2225 2226 2227 2228 2229 2230 2231 2232 2233 2234 2235 2236 2237 2238 2239 2240 2241 2242 2243 2244 2245 2246 2247 2248 2249 2250 2251 2252 2253 2254 2255 2256 2257 2258 2259 2260 2261 2262 2263 2264 2265 2266 2267 2268 2269 2270 2271 2272 2273 2274 2275 2276 2277 2278 2279 2280 2281 2282 2283 2284 2285 2286 2287 2288 2289 2290 2291 2292 2293 2294 2295 2296 2297 2298 2299 2300 2301 2302 2303 2304 2305 2306 2307 2308 2309 2310 2311 2312 2313 2314 2315 2316 2317 2318 2319 2320 2321 2322 2323 2324 2325 2326 2327 2328 2329 2330 2331 2332 2333 2334 2335 2336 2337 2338 2339 2340 2341 2342 2343 2344 2345 2346 2347 2348 2349 2350 2351 2352 2353 2354 2355 2356 2357 2358 2359 2360 2361 2362 2363 2364 2365 2366 2367 2368 2369 2370 2371 2372 2373 2374 2375 2376 2377 2378 2379 2380 2381 2382 2383 2384 2385 2386 2387 2388 2389 2390 2391 2392 2393 2394 2395 2396 2397 2398 2399 2400 2401 2402 2403 2404 2405 2406 2407 2408 2409 2410 2411 2412 2413 2414 2415 2416 2417 2418 2419 2420 2421 2422 2423 2424 2425 2426 2427 2428 2429 2430 2431 2432 2433 2434 2435 2436 2437 2438 2439 2440 2441 2442 2443 2444 2445 2446 2447 2448 2449 2450 2451 2452 2453 2454 2455 2456 2457 2458 2459 2460 2461 2462 2463 2464 2465 2466 2467 2468 2469 2470 2471 2472 2473 2474 2475 2476 2477 2478 2479 2480 2481 2482 2483 2484 2485 2486 2487 2488 2489 2490 2491 2492 2493 2494 2495 2496 2497 2498 2499 2500 2501 2502 2503 2504 2505 2506 2507 2508 2509 2510 2511 2512 2513 2514 2515 2516 2517 2518 2519 2520 2521 2522 2523 2524 2525 2526 2527 2528 2529 2530 2531 2532 2533 2534 2535 2536 2537 2538 2539 2540 2541 2542 2543 2544 2545 2546 2547 2548 2549 2550 2551 2552 2553 2554 2555 2556 2557 2558 2559 2560 2561 2562 2563 2564 2565 2566 2567 2568 2569 2570 2571 2572 2573 2574 2575 2576 2577 2578 2579 2580 2581 2582 2583 2584 2585 2586 2587 2588 2589 2590 2591 2592 2593 2594 2595 2596 2597 2598 2599 2600 2601 2602 2603 2604 2605 2606 2607 2608 2609 2610 2611 2612 2613 2614 2615 2616 2617 2618 2619 2620 2621 2622 2623 2624 2625 2626 2627 2628 2629 2630 2631 2632 2633 2634 2635 2636 2637 2638 2639 2640 2641 2642 2643 2644 2645 2646 2647 2648 2649 2650 2651 2652 2653 2654 2655 2656 2657 2658 2659 2660 2661 2662 2663 2664 2665 2666 2667 2668 2669 2670 2671 2672 2673 2674 2675 2676 2677 2678 2679 2680 2681 2682 2683 2684 2685 2686 2687 2688 2689 2690 2691 2692 2693 2694 2695 2696 2697 2698 2699 2700 2701 2702 2703 2704 2705 2706 2707 2708 2709 2710 2711 2712 2713 2714 2715 2716 2717 2718 2719 2720 2721 2722 2723 2724 2725 2726 2727 2728 2729 2730 2731 2732 2733 2734 2735 2736 2737 2738 2739 2740 2741 2742 2743 2744 2745 2746 2747 2748 2749 2750 2751 2752 2753 2754 2755 2756 2757 2758 2759 2760 2761 2762 2763 2764 2765 2766 2767 2768 2769 2770 2771 2772 2773 2774 2775 2776 2777 2778 2779 2780 2781 2782 2783 2784 2785 2786 2787 2788 2789 2790 2791 2792 2793 2794 2795 2796 2797 2798 2799 2800 2801 2802 2803 2804 2805 2806 2807 2808 2809 2810 2811 2812 2813 2814 2815 2816 2817 2818 2819 2820 2821 2822 2823 2824 2825 2826

01/10/2010 10:10:10 AM

1. The following information is being furnished to you for your information only. It is not to be used for any other purpose. (2)

ΚΕΦ. Ε

Θεωρία της επίπεδης ελαστικότητας.

Τα επίπεδα προβλήματα θα εξεταστούν από την κλασσική τους άποψη, δηλαδή την περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης και την περίπτωση της επίπεδης έντασης. Η περίπτωση της γενικευμένης έντασης αποδεικνύεται ότι κάτω από κάποια συνθήκη είναι ισοδύναμη της επίπεδης έντασης. Στο κεφάλαιο αυτό θα διατυπωθούν τα επίπεδα προβλήματα τόσο σε καρτεσιανές όσο και σε πολικές συντεταγμένες και θα γίνει συζήτηση για τον τρόπο αντιμετώπισής τους.

1. Επίπεδη παραμόρφωση. Επίπεδη ένταση. Γενικευμένη ένταση.

Ένα σώμα λέμε ότι βρίσκεται στην κατάσταση της επίπεδης παραμόρφωσης στο (x_1, x_2) -επίπεδο, αν

$$(1) \quad u_\alpha = u_\alpha(x_1, x_2), \quad u_3 = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

Οι κινηματικές σχέσεις θα έχουν τώρα τη μορφή

$$(2) \quad e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}), \quad u_{i,3} = 0.$$

Από το νόμο του Hooke

$$(3) \quad \tau_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda e_{kk} \delta_{ij}$$

έχουμε

$$(4) \quad \tau_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta}(x_1, x_2), \quad \tau_{\alpha 3} = 0, \quad \tau_{33} = \lambda e_{\alpha\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$



Αν κάνουμε τη συστολή $i=j$ στο νόμο του Hooke έχουμε

$$\tau_{\alpha\alpha} + \tau_{33} = (2\mu + 3\lambda)e_{\alpha\alpha}$$

ή

$$(5) \quad \tau_{33} = \frac{\lambda}{2} \tau_{\alpha\alpha} / (\mu + \lambda) \quad .$$

Από τις (4) και (5) είναι φανερό ότι η εντατική κατάσταση του σώματος στην περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης είναι προσδιορισμένη αν είναι προσδιορισμένες οι τάσεις $\tau_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2$.

Από τις εξισώσεις ισορροπίας

$$(6) \quad \tau_{ij,j} = -B_i$$

παίρνουμε το συμπέρασμα ότι οι συνιστώσες B_1 και B_2 πρέπει να είναι ανεξάρτητες της x_3 . Η συνιστώσα $B_3 = 0$ αφού $\tau_{33,3} = -B_3$ και $\tau_{33} = \tau_{33}(x_1, x_2)$. Αν υποθέσουμε ότι οι παραπάνω συνθήκες ικανοποιούνται από τις μαζικές δυνάμεις B_i θα έχουμε

$$(7) \quad \tau_{\alpha\beta,\beta} = -B_\alpha(x_1, x_2), \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad .$$

Αν εισάγουμε τις εκφράσεις των τάσεων σε όρους των u_α στις (7) θα πάρουμε τις εξισώσεις Navier (Δ.7),

$$(3) \quad \mu u_{\alpha,\beta\beta} + (\lambda + \mu) u_{\beta,\beta\alpha} + B_\alpha = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2$$

για την επίπεδη παραμορφωτική κατάσταση.

Επειδή η παραμόρφωση του σώματος στην επίπεδη παραμόρφωση είναι ανεξάρτητη της συντεταγμένης x_3 , θα θεωρήσουμε μόνο την παραμόρφωση μιας τυχαίας διατομής του με $x_3 = \text{σταθ}$. Οι (3) πρέπει να ικανοποιούνται σε κάποια διδιάστατη περιοχή R , $x_3 = \text{σταθ}$. Αν οι μετατοπίσεις επί του συνόρου C της R είναι προδιαγραμμένες, τότε έχουμε ένα διδιάστατο πρόβλημα ανάλογο του 2ου προβλήματος συνοριακών τιμών που διατυπώθηκε στο Κεφ. Δ.1. Η μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος αυτού για πεπερασμένους τύπους είναι συνέπεια των θεωρήσεων του Κεφ. Δ.4.



Το ανάλογο του 1ου προβλήματος συνοριακών τιμών (Κεφ. Δ.1) της ελαστικότητας μπορεί να διατυπωθεί με την έκφραση του προβλήματος της επίπεδης παραμόρφωσης σε όρους των τάσεων^(*), δηλαδή

$$(9) \quad \nabla^2 \sigma = -\frac{1}{1-\nu} B_{\alpha,\alpha} = -\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} B_{\alpha,\alpha}, \quad (\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}) .$$

Αν οι συνιστώσες των επιφανειακών δυνάμεων $\bar{T}_\alpha(x_1, x_2)$ είναι προδιαγραμμένες στη συνοριακή καμπύλη C , τότε

$$(10) \quad \bar{T}_\alpha = \tau_{\alpha\beta} n_\beta, \quad \bar{n} = (n_1, n_2) .$$

Η μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος που περιγράφεται από τις (9) και (10) είναι συνέπεια των θεωρήσεων του Κεφ. Δ.4.

Από φυσική σκοπιά μια τέτοια κατάσταση μπορεί να πραγματοποιηθεί σένα μακρύ κύλινδρο επί του οποίου εφαρμόζονται δυνάμεις που ενεργούν σε επίπεδα κάθετα στον άξονα του κυλίνδρου (σχ.1).

(*)

$$(a) \quad e_{\alpha\alpha} = \frac{1+\nu}{E} \{ (1-\nu)\tau_{\alpha\alpha} - \nu\tau_{\beta\beta} \}, \quad e_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{\alpha\beta} .$$

Η συνθήκη συμβιβαστού

$$e_{11,22} + e_{22,11} = 2e_{12,12} ,$$

με την εισαγωγή της (α) γράφεται

$$(b) \quad \{ (1-\nu)\tau_{11} - \nu\tau_{22} \}_{,22} + \{ (1-\nu)\tau_{22} - \nu\tau_{11} \}_{,11} = 2\tau_{12,12} .$$

Αν παραγωγίσουμε τις (7)

$$\tau_{11,1} + \tau_{12,2} = -B_1, \quad \tau_{21,1} + \tau_{22,2} = -B_2$$

ως προς x_1 και x_2 , αντίστοιχα, και τις προσθέσουμε έχουμε

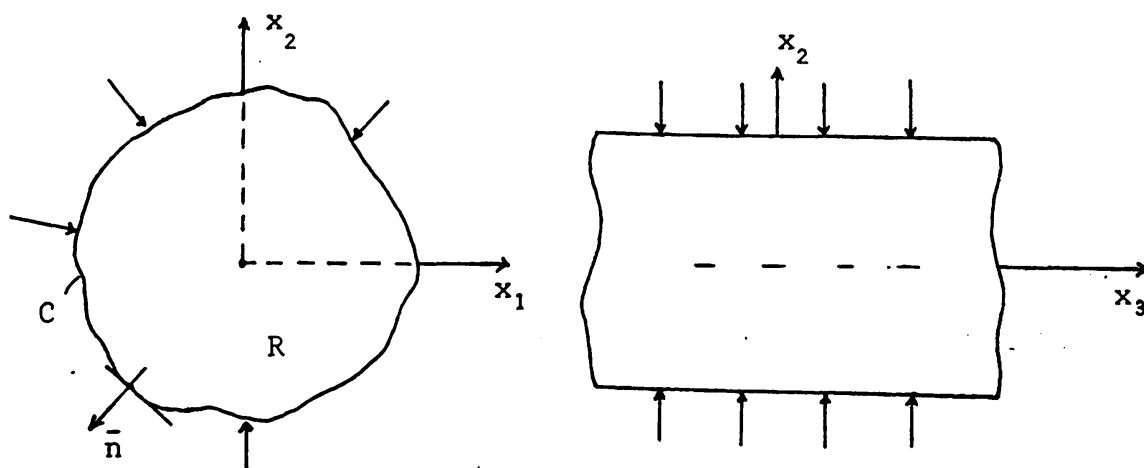
$$(γ) \quad \tau_{11,11} + \tau_{22,22} + 2\tau_{12,12} = -B_{\alpha,\alpha} .$$

Από τις (β) και (γ) με απαλοιφή του όρου $\tau_{12,12}$ παίρνουμε

$$(δ) \quad \nabla^2 \sigma = -\frac{1}{1-\nu} B_{\alpha,\alpha} .$$

Οι υπόλοιπες συνθήκες συμβιβαστού είναι ταυτότητες.





Σχ. 1

Ένα σώμα λέμε ότι βρίσκεται στην κατάσταση της επίπεδης έντασης παράλληλη στο (x_1, x_2) - επίπεδο, αν

$$(11) \quad \tau_{i3} = 0 \quad .$$

Από τις καταστατικές σχέσεις

$$(12) \quad \tau_{ij} = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ij} \quad ,$$

όπου $\tau_{33} = 0$, παίρνουμε

$$(13) \quad u_{3,3} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} (u_{1,1} + u_{2,2}) \quad .$$

Αν αντικαταστήσουμε τη (13) στις (12) θα πάρουμε τις εκφράσεις

$$(14) \quad \tau_{\alpha\alpha} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} e_{\alpha\alpha} + 2\mu u_{\alpha,\alpha}$$

$$\tau_{12} = \tau_{21} = \mu(u_{1,2} + u_{2,1})$$

για τις μη-μηδενιζόμενες τάσεις.

Αν τώρα τις (14) τις εισάγουμε στις εξισώσεις ισορροπίας

$$(15) \quad \tau_{\alpha\beta,\beta} + B_\alpha = 0$$



θα πάρουμε τις εξισώσεις Navier

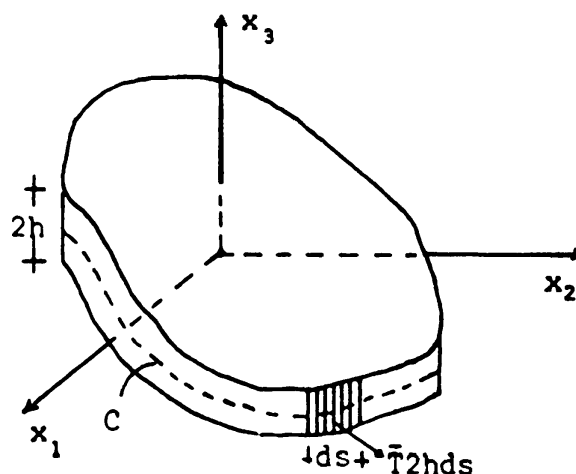
$$(16) \quad \left(\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} + \mu\right) u_{\beta,\beta\alpha} + \mu u_{\alpha,\beta\beta} + B_{\alpha} = 0$$

για το πρόβλημα της επίπεδης έντασης. Η μορφή των (14), (15) και (16) είναι ίδια με εκείνη των αντίστοιχων εξισώσεων της επίπεδης παραμόρφωσης, αν αντικαταστήσουμε τη σταθερά

$$\bar{\lambda} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}$$

με λ , αλλά υπάρχει βασική διάκριση μεταξύ των δύο αυτών εντατικών καταστάσεων. Στο πρόβλημα της επίπεδης παραμόρφωσης οι u_{α} και $\tau_{\alpha\beta}$ είναι ανεξάρτητες από τη συντεταγμένη x_3 , ενώ στο πρόβλημα της επίπεδης έντασης οι συναρτήσεις αυτές μπορεί να έχουν εξάρτηση από την x_3 . Επειδή η ανεξάρτητη μεταβλητή x_3 μπορεί να εμφανίζεται σαν παράμετρος σε όλες τις εξισώσεις του προβλήματος της επίπεδης έντασης το πρόβλημα αυτό δεν είναι στην πραγματικότητα διδιάστατο (επίπεδο) πρόβλημα. Αν και το πρόβλημα της επίπεδης έντασης δεν είναι επίπεδο πρόβλημα, μπορούμε να τροποποιήσουμε το σύστημα των εξισώσεων (14)-(16) κατά τέτοιο τρόπο ώστε οι προκύπτουσες εξισώσεις να αντιστοιχούν σένα φυσικό πρόβλημα μεγάλου πρακτικού ενδιαφέροντος.

Ας θεωρήσουμε τον κύλινδρο που φαίνεται στο (σχ.2).



Σχ.2



Αν $2h$ είναι μικρό συγκρινόμενο με τις άλλες διαστάσεις του κυλίνδρου τότε τον κύλινδρο αυτό θα τον λέμε στη συνέχεια πλάκα. Οι βάσεις του κυλίνδρου είναι οι επιφάνειες $x_3 = \pm h$ της πλάκας και το επίπεδο $x_3 = 0$ είναι το μέσο επίπεδο της πλάκας. Θα υποθέσουμε ότι οι δυνάμεις επί της πλάκας εφαρμόζονται στα άκρα της (σχ.2) και τα επίπεδα $x_3 = \pm h$ είναι ελεύθερα τάσεων οι δε δυνάμεις είναι συμμετρικά κατανεμημένες ως προς το μέσο επίπεδο. Εκτός από τις παραπάνω υποθέσεις (παραδοχές) θα θεωρήσουμε ότι $B_3 = 0$ και οι B_α είναι συμμετρικές ως προς το μέσο επίπεδο. Αν ικανοποιούνται οι παραπάνω παραδοχές τα σημεία του μέσου επιπέδου της πλάκας θα έχουν μετατόπιση $u_3 = 0$ και για λεπτή πλάκα η u_3 για $x_3 \neq 0$ θα είναι πολύ μικρή. Από τη συμμετρία της κατανομής των δυνάμεων βγαίνει το συμπέρασμα ότι η μέση τιμή της u_3 κατά το πάχος της πλάκας είναι ίση με το μηδέν. Το γεγονός αυτό μας δίνει την ιδέα να πραγματευτούμε το πρόβλημα με τις μέσες τιμές,

$$(17) \quad \bar{u}_i(x_1, x_2) \equiv \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} u_i(x_1, x_2, x_3) dx_3,$$

$$\text{όπου} \quad \bar{u}_3 = 0.$$

Επειδή οι επιφάνειες $x_3 = \pm h$ της πλάκας είναι ελεύθερες από εξωτερικά φορτία θα έχουμε

$$(18) \quad \tau_{i3}(x_1, x_2, \pm h) = 0.$$

Από την εξίσωση ισορροπίας

$$(19) \quad \tau_{\alpha 3, \alpha} + \tau_{33, 3} = 0$$

για $x_3 = \pm h$ παίρνουμε την πληροφορία

$$(20) \quad \tau_{33, 3}(x_1, x_2, \pm h) = 0$$

αφού

$$\tau_{\alpha 3}(x_1, x_2, \pm h) = 0, \quad \alpha = 1, 2.$$

Αν αναπτύξουμε τη συνάρτηση τ_{33} σε σειρά Taylor ως προς x_3 στη θέση



$x_3 = \pm h$ και λάβουμε υπόψη τις (18) και (20) βλέπουμε ότι αυτή θα είναι $O(h^2)$. Επειδή έχουμε κάνει την παραδοχή ότι h είναι μικρό θα παραλείψουμε την τ_{33} σε όλο το πάχος της πλάκας.

Αν τις δύο άλλες εξισώσεις ισορροπίας που έχουν απομείνει

$$(21) \quad \tau_{\alpha 1,1} + \tau_{\alpha 2,2} + \tau_{\alpha 3,3} + B_\alpha = 0$$

τις ολοκληρώσουμε ως προς x_3 μεταξύ των ορίων $-h$ και $+h$ θα πάρουμε

$$(22) \quad \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} (\tau_{\alpha 1,1} + \tau_{\alpha 2,2} + \tau_{\alpha 3,3} + B_\alpha) dx_3 = 0.$$

Επειδή

$$\int_{-h}^{+h} \tau_{\alpha 3,3} dx_3 = \tau_{\alpha 3}(x_1, x_2, x_3) \Big|_{-h}^{+h} = 0$$

η (22) γράφεται

$$(23) \quad \bar{\tau}_{\alpha 1,1} + \bar{\tau}_{\alpha 2,2} + \bar{B}_\alpha = 0,$$

όπου

$$\bar{\tau}_{\alpha\beta}(x_1, x_2) \equiv \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} \tau_{\alpha\beta}(x_1, x_2, x_3) dx_3,$$

$$(24) \quad \bar{B}_\alpha(x_1, x_2) \equiv \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} B_\alpha(x_1, x_2, x_3) dx_3$$

είναι οι μέσες τιμές των $\tau_{\alpha\beta}$ και B_α αντίστοιχα.

Αν σχηματίσουμε τις μέσες τιμές στις καταστατικές εξισώσεις θα πάρουμε

$$(25) \quad \bar{\tau}_{\alpha\beta} = \mu(\bar{u}_{\alpha,\beta} + \bar{u}_{\beta,\alpha}) + \bar{\lambda} \bar{u}_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta}$$

όπου

$$\bar{\lambda} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}.$$

Από τις (23) και (25) παίρνουμε τις εξισώσεις του Navier

$$(26) \quad \mu \bar{u}_{\alpha,\beta\beta} + (\bar{\lambda} + \mu) \bar{u}_{\beta,\beta\alpha} + \bar{B}_\alpha = 0$$

από τις οποίες μπορούν να προσδιοριστούν οι μέσες τιμές των $\bar{u}_\alpha$ αν αυ-



τές είναι προδιαγραφμένες στο σύνορο C .

Το σύστημα των εξισώσεων που περιέχει τις μέσες τάσεις $\bar{\tau}_{\alpha\beta}$ μπορεί να προκύψει με την πορεία που προέκυψαν οι (9) και είναι

$$(27) \quad \nabla^2 \bar{\sigma} = - \frac{2(\bar{\lambda} + \mu)}{\bar{\lambda} + 2\mu} \bar{B}_{\alpha, \alpha}.$$

Οι (27) και οι συνοριακές συνθήκες

$$(23) \quad \bar{T}_{\alpha}^n(s) = \bar{\tau}_{\alpha\beta} n_{\beta} \quad \text{στο } C$$

αποτελούν το πρόβλημα συνοριακών τιμών για τον προσδιορισμό των $\bar{\tau}_{\alpha\beta}$.

Το διδιάστατο πρόβλημα συνοριακών τιμών που αποτελούν οι εξισώσεις (23), (27) και (23) είναι γνωστό σαν πρόβλημα γενικευμένης επίπεδης έντασης.

Σχόλιο :

Η μαθηματική περιγραφή των προβλημάτων της επίπεδης παραμόρφωσης και της γενικευμένης έντασης είναι ταυτόσημη. Η αντιμετώπιση των προβλημάτων αυτών απλουστεύεται κατά κάποιο τρόπο αν δεν εμφανίζονται σαυτά οι μαζικές δυνάμεις B_{α} . Επειδή όμως οι εξισώσεις αυτών των προβλημάτων είναι γραμμικές είναι πάντα δυνατό να τις ανάγουμε σε ομογενείς μορφές με την εύρεση κάποιας μερικής των λύσης. Αν $\tau_{\alpha\beta}^{(0)}$ είναι κάποιο σύνολο συναρτήσεων που ικανοποιεί τις εξισώσεις ισορροπίας 7 (ή 15) τότε οι συναρτήσεις $\tau_{\alpha\beta}^{(1)}$ που ορίζονται από τις σχέσεις

$$(29) \quad \tau_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta}^{(0)} + \tau_{\alpha\beta}^{(1)}$$

ικανοποιούν το ομογενές σύστημα

$$(30) \quad \tau_{\alpha\beta, \beta}^{(1)} = 0.$$

Επειδή στις τεχνικές εφαρμογές εμφανίζονται συχνά σταθερές δυνάμεις βαρύτητας και ομοιόμορφες φυγοκεντρικές δυνάμεις θα δώσουμε στη συνέχεια κάποιες μερικές λύσεις των (7 ή 15) για αυτούς τους τύπους των δυνάμεων.



ι. Σταθερή δύναμη βαρύτητας ($B_1=0$, $B_2=-\rho g$)

$$\tau_{11}^{(0)} = \tau_{12}^{(0)} = 0, \quad \tau_{22}^{(0)} = \rho g x_2$$

$$(31) \quad u_1^{(0)} = -\frac{\lambda}{4\mu(\lambda+\mu)} \rho g x_1 x_2$$

$$u_2^{(0)} = \frac{\lambda+2\mu}{8\mu(\lambda+\mu)} \rho g x_2^2 + \frac{\lambda}{8\mu(\lambda+\mu)} \rho g x_1^2$$

ιι. Ομοιόμορφη φυγοκεντρική δύναμη ($B_\alpha = \rho \omega^2 x_\alpha$)

$$(32) \quad \tau_{\alpha\beta}^{(0)} = -\frac{2\lambda+\mu}{4(\lambda+\mu)} \rho \omega^2 (x_1^2 + x_2^2) \delta_{\alpha\beta} - \frac{\mu}{2(\lambda+2\mu)} \rho \omega^2 x_\alpha x_\beta$$

$$u_\alpha^{(0)} = -\frac{\rho \omega^2}{8(\lambda+2\mu)} (x_1^2 + x_2^2) x_\alpha$$

ω : γωνιακή ταχύτητα ως προς τον x_3 -άξονα.

Αν στις συνοριακές συνθήκες εισάγουμε

$$(33) \quad \tau_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta}^{(0)} + \tau_{\alpha\beta}^{(1)}$$

$$u_\alpha = u_\alpha^{(0)} + u_\alpha^{(1)}$$

θα παράγουμε νέες συνοριακές συνθήκες για το ομογενές πρόβλημα,

$$(34) \quad \tau_{\alpha\beta}^{(1)} n_\beta = \bar{T}_\alpha^{(1)}$$

$$u_\alpha^{(1)} = f_\alpha^{(1)} \quad \text{στο } C$$

2. Τασιοσυνάρτηση του Airy.

Από το σχόλιο της προηγούμενης παραγράφου γίνεται φανερό ότι τα προβλήματα συνοριακών τιμών της επίπεδης ελαστικότητας μπορούμε πάντα να τα μελετήσουμε με μηδενικές μαζικές δυνάμεις. Οι εξισώσεις ισορροπίας θα έχουν τη μορφή

$$(35) \quad \tau_{\alpha\beta,\beta} = 0$$



όπου οι $\tau_{\alpha\beta}$, σύμφωνα με τις εξισώσεις (9) και (27) ικανοποιούν στην περιοχή R τη συνθήκη συμβιβαστού

$$(36) \quad \nabla^2(\tau_{11} + \tau_{22}) = 0$$

και στη συνοριακή καμπύλη C του R τη συνθήκη

$$(37) \quad \tau_{\alpha\beta} n_\beta = T_\alpha^n(s),$$

όπου $T_\alpha^n(s)$ είναι γνωστές συναρτήσεις του τόξου $s \in C$.

Από τη δομή των εξισώσεων ισορροπίας συνεπάγεται η ύπαρξη μιας συνάρτησης $F(x_1, x_2)$, τέτοιας ώστε

$$(38) \quad \tau_{22} = F_{,11}, \quad \tau_{11} = F_{,22}, \quad \tau_{12} = -F_{,12}.$$

Η συνάρτηση $F(x_1, x_2)$ λέγεται τασιοσυνάρτηση του Airy. Από τις (33) βλέπουμε ότι οι $\tau_{\alpha\beta}$ ικανοποιούν αυτόματα τις εξισώσεις ισορροπίας (35) η δε συνθήκη συμβιβαστού (36) απαιτεί όπως η $F(x_1, x_2)$ ικανοποιεί τη δι-αρμονική εξίσωση

$$(39) \quad \nabla^2 \nabla^2 F = 0$$

ή

$$\nabla^4 F = F_{,1111} + 2F_{,1122} + F_{,2222} = 0$$

στην περιοχή R .

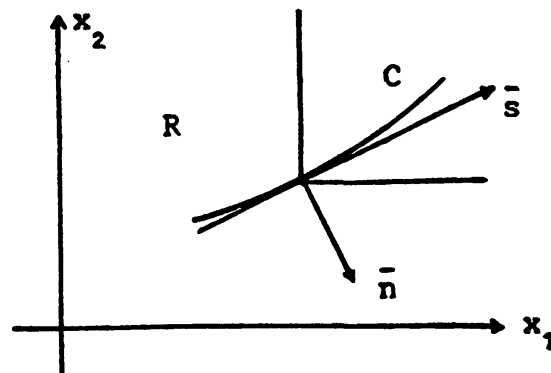
Κάθε λύση της (39) που ανήκει στην κλάση C^4 λέγεται διαρμονική συνάρτηση. Στην περίπτωση μας το ενδιαφέρον μας περιορίζεται στις εν-τατικές καταστάσεις όπου $\tau_{\alpha\beta}$ είναι μονότιμες και κατά συνέπεια σε διαρ-μονικές συναρτήσεις με μονότιμες δεύτερες μερικές παραγώγους (εξ. 38). Η συνάρτηση F και οι πρώτες παράγωγοί της μπορούν να είναι πλειότιμες.

Οι συνοριακές συνθήκες (37), επιβάλλουν ένα περιορισμό στην εκλογή της F , παίρνουν τη μορφή

$$(40) \quad \begin{aligned} F_{,22} n_1 - F_{,12} n_2 &= T_1(s) \\ -F_{,12} n_1 + F_{,11} n_2 &= T_2(s) \end{aligned}$$



Από το σχ.3 έχουμε



Σχ.3

$$(41) \quad \begin{aligned} n_1 &= \cos(x_1, \bar{n}) = \cos(x_2, \bar{s}) = \frac{dx_2}{ds} \\ n_2 &= \cos(x_2, \bar{n}) = -\cos(x_1, \bar{s}) = -\frac{dx_1}{ds} \end{aligned}$$

και οι (40) γράφονται

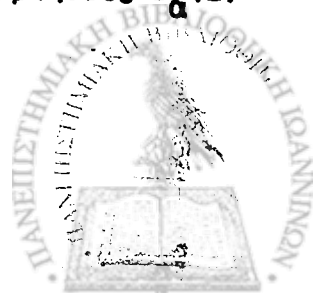
$$(41a) \quad \begin{aligned} \frac{d}{ds} (F_{,2}) &= T_1(s) \\ -\frac{d}{ds} (F_{,1}) &= T_2(s) . \end{aligned}$$

Αν ολοκληρώσουμε τις (41a) κατά μήκος του συνόρου C από ένα σταθερό σημείο s_0 σένα μεταβλητό σημείο s θα πάρουμε

$$(41b) \quad \begin{aligned} F_{,1}(s) &= -\int_{s_0}^s T_2(s) ds \equiv f_1(s) + c_1 \\ F_{,2}(s) &= \int_{s_0}^s T_1(s) ds \equiv f_2(s) + c_2 , \end{aligned}$$

πράγμα που σημαίνει ότι οι παράγωγοι της F κατά μήκος της C δεν προσδιορίζονται μονότιμα^(*). Κάποιος βαθμός αυθαιρεσίας της F και των παραγώ-

(*) Στην περίπτωση κολλαπλά συνεκτικού σώματος η ολοκλήρωση θα γίνει σε κάθε C_i που σχηματίζει το περίγραμμα της R και οι συναρτήσεις $f_a(s)$ δεν είναι ανάγκη να είναι μονότιμες.



γων της πρέπει να αναμένεται αφού οι $\tau_{\alpha\beta}$ προσδιορίζονται από τις δεύτερες παραγώγους της.

Το πρόβλημα των συνοριακών τιμών που εξετάζουμε σχετίζεται με το πρόβλημα

$$(42) \quad \begin{aligned} \nabla^4 F &= 0, & \text{στην } R \\ F_{,\alpha} &= f_{\alpha}(s) & \text{στο } C \end{aligned}$$

που είναι γνωστό σαν θεμελιώδες διαρμονικό πρόβλημα συνοριακών τιμών στη θεωρία των διαφορικών και ολοκληρωτικών εξισώσεων, το λογισμό των μεταβολών και άλλους κλάδους της ανάλυσης.

Αν γνωρίζουμε την $F_{,\alpha}(s)$ στο C τότε μπορούμε να υπολογίσουμε στο C την $F(s)$ και την dF/dn :

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dn} &= F_{,\alpha} n_{\alpha} = F_{,1}(s) \frac{dx}{ds} - F_{,2}(s) \frac{dx}{ds} \equiv g(s) \\ dF &= F_{,\alpha} dx_{\alpha} = f_{\alpha} dx_{\alpha} \\ F(s) &= \int_{s_0}^s f_{\alpha} \frac{dx_{\alpha}}{ds} ds \equiv f(s) + \text{σταθ.} \end{aligned}$$

Από την παραπάνω παρατήρηση οδηγούμαστε στη διατύπωση του προβλήματος (42) με την ακόλουθη μορφή

$$(43) \quad \left. \begin{aligned} \nabla^4 F &= 0 & \text{στην } R \\ F &= f(s) + \text{σταθ.} \\ \frac{dF}{dn} &= g(s) \end{aligned} \right\} \text{ στο } C$$

που είναι πιο κατάλληλη στη έρευνα πολλών προβλημάτων.

Σχόλια :

ι) Αν οι μαζικές δυνάμεις είναι συντηρητικές

$$(44) \quad B_{\alpha} = -U_{,\alpha}$$



θα πάρουμε τις μη-ομογενείς εξισώσεις ισορροπίας

$$(45) \quad \tau_{\alpha\beta, \beta} + B_{\alpha} = 0$$

και τις τάσεις θα τις εκφράσουμε με τον ακόλουθο τρόπο

$$(46) \quad \tau_{11} = F_{,22} + U, \quad \tau_{12} = -F_{,12}, \quad \tau_{22} = F_{,11} + U.$$

Η συνθήκη συμβιβαστού στην περίπτωση αυτή παράγει τη μη-ομογενή εξίσωση

$$(47) \quad \nabla^4 F = -\frac{2\mu}{\lambda+2\mu} \nabla^2 U.$$

Αν η U είναι αρμονική τότε η F θα είναι διαρμονική συνάρτηση, στην αντίθετη περίπτωση

$$(48) \quad \nabla^2 F = V(x_1, x_2) \quad \text{στην} \quad R.$$

ii) Αν θεωρήσουμε τη διαρμονική εξίσωση

$$(49) \quad \nabla^4 F = 0 \quad \text{στην} \quad R$$

και $\nabla^2 F = P_1(x_1, x_2)$ τότε η P_1 είναι αρμονική συνάρτηση στο R .

Από την P_1 μπορούμε να κατασκευάσουμε την αναλυτική συνάρτηση

$$(50) \quad Z(z) = P_1 + iP_2$$

της μιγαδικής μεταβλητής $z = x_1 + ix_2$ υπολογίζοντας από την P_1 την συζυγή της αρμονική συνάρτηση P_2 . Διαφορίζοντας την P_2 έχουμε

$$(51) \quad dP_2 = P_{2,1} dx_1 + P_{2,2} dx_2 = -P_{1,2} dx_1 + P_{1,1} dx_2$$

όπου $P_{2,1} = -P_{1,2}$ και $P_{2,2} = P_{1,1}$ (συνθήκες Cauchy-Riemann). Από την (51) με ολοκλήρωση παίρνουμε

$$(52) \quad P_2(x_1, x_2) = \int_{A_0(x_1^0, x_2^0)}^{A_1(x_1, x_2)} (-P_{1,2} dx_1 + P_{1,1} dx_2)$$

όπου P_2 είναι ανεξάρτητη από το δρόμο ολοκλήρωσης. Η P_2^0 προσδιορίζεται με προσέγγιση μιας σταθεράς C και κατά συνέπεια η $Z(z)$ με προσέγγιση της



iC.

Η συνάρτηση $\psi(z)$ που ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο

$$(53) \quad \psi(z) \equiv \frac{1}{4} \int Z(z) dz = \zeta_1 + i\zeta_2$$

είναι αναλυτική και κατά συνέπεια

$$(54) \quad \psi'(z) = \zeta_{1,1} + i\zeta_{2,1} = \frac{1}{4} (P_1 + iP_2) \quad .$$

Από τις συνθήκες Cauchy-Riemann παίρνουμε

$$(55) \quad \zeta_{1,1} = \zeta_{2,2} = \frac{1}{4} P_1$$

$$\zeta_{1,2} = -\zeta_{2,1} = -\frac{1}{4} P_2 \quad .$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τα παραπάνω συμπεράσματα, το γεγονός ότι ζ_1 και ζ_2 είναι αρμονικές συναρτήσεις στην R και ότι

$$(56) \quad \nabla^2 (x_1 \zeta_1 + x_2 \zeta_2) = P_1$$

τότε μπορούμε να γράψουμε

$$(57) \quad \nabla^2 (F - \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2) \equiv 0 \quad \text{στην } R \quad .$$

Από την (57) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η δομή της F είναι

$$(58) \quad F = \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + q_1(x_1, x_2)$$

όπου $q_1(x_1, x_2)$ είναι αρμονική στην R (*)

(*) Αν $\chi(z) \equiv q_1 + iq_2$ είναι αναλυτική συνάρτηση της z με πραγματικό μέρος $\operatorname{Re} \chi(z) = q_1$ ο τύπος (58) γράφεται

$$(58\alpha) \quad F = \operatorname{Re} \{ \bar{z} \psi(z) + \chi(z) \}$$

όπου $\bar{z} = x_1 - ix_2$. Η F , επειδή $\psi(z)$ και $\chi(z)$ είναι αναλυτικές συναρτήσεις θα είναι κλάσης C^∞ στην R . Η (58α) μπορεί να γραφτεί με τη μορφή

$$(58\beta) \quad 2F = \bar{z} \psi(z) + z \bar{\psi}(z) + \chi(z) + \bar{\chi}(z)$$

$$\text{όπου } \bar{\psi}(z) = \zeta_1 - i\zeta_2 \quad .$$



Επειδή στην αντιμετώπιση πολλών προβλημάτων της ελαστικότητας εμφανίζεται η (49) κρίνεται σκόπιμο να αναφέρουμε δύο θεωρήματα για τις διαρμονικές συναρτήσεις που οφείλονται στον Aïmansî (1899).

Θ ε ώ ρ η μ α 1 : Αν οι συναρτήσεις f_1 και f_2 είναι αρμονικές στην περιοχή $R(x_1, x_2, x_3)$ τότε η

$$(59) \quad f = x_1 f_1 + f_2$$

είναι διαρμονική στην περιοχή R . Αντιστροφα, αν f είναι διαρμονική στην R και αν κάθε γραμμή παράλληλη στο x_1 -άξονα τέμνει το σύνορο της R το πολύ σε δύο σημεία, τότε υπάρχουν δύο αρμονικές συναρτήσεις f_1 και f_2 τέτοιες ώστε η f να εκφράζεται από την (59).

Θ ε ώ ρ η μ α 2 : Αν οι συναρτήσεις f_1 και f_2 είναι αρμονικές στην τριδιάστατη περιοχή R , τότε η

$$(60) \quad f = (r^2 - r_0^2) f_1 + f_2$$

είναι διαρμονική στο R , όπου $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ και r_0 είναι μία αυθαίρετη σταθερά. Αντίστροφα αν f είναι διαρμονική στην R και αν η R είναι τέτοια ώστε, με μια αρχή στο εσωτερικό της R , κάθε ακτινικό διάνυσμα να τέμνει το σύνορο της R το πολύ σε ένα σημείο, τότε μπορούν να προσδιοριστούν δύο αρμονικές συναρτήσεις f_1 και f_2 έτσι ώστε να ισχύει η (60).

Η απόδειξη των θεωρημάτων 1 και 2 βασίζεται στην ταυτότητα

$$(61) \quad \nabla^2(\phi_1 \phi_2) = \phi_1 \nabla^2 \phi_2 + \phi_2 \nabla^2 \phi_1 + 2\{\phi_{1,1} \phi_{2,1} + \phi_{1,2} \phi_{2,2} + \phi_{1,3} \phi_{2,3}\}.$$

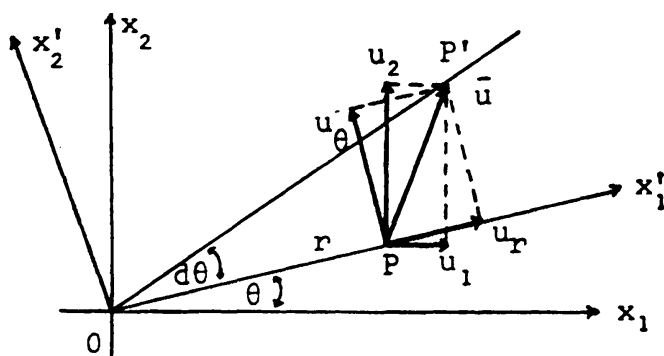
Για τη λεπτομερή απόδειξη των θεωρημάτων 1 και 2 ο αναγνώστης παραπέμπεται στο βιβλίο του Y. Fung (1965) : Foundations of Solid Mechanics, σελ. 206-209.

iii) Για την διατύπωση του επίπεδου θερμοελαστικού προβλήματος ακολουθούμε την ίδια πορεία.



3. Το επίπεδο πρόβλημα σε πολικές συντεταγμένες.

Σε πολλά προβλήματα της ελαστικότητας είναι σκόπιμο, για την απλούστευση των συνοριακών συνθηκών, να χρησιμοποιούμε για την περιγραφή τους καμπυλόγραμμες συντεταγμένες. Στην παράγραφο αυτή θα σχολιάσουμε την περιγραφή ενός επίπεδου προβλήματος σε πολικές συντεταγμένες (σχ.4)



Σχ.4

Οι σχέσεις των πολικών και καρτεσιανών συντεταγμένων είναι

$$(62) \quad x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta$$

και οι αντίστροφές τους

$$(63) \quad r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{x_2}{x_1}.$$

Από τις (63) είναι προφανές ότι αν έχουμε μία συνάρτηση $f(x_1, x_2)$ συνεχή και παραγωγίσιμη τότε

$$(64) \quad \begin{aligned} f_{,x_1} &= f_{,r} r_{,x_1} + f_{,\theta} \theta_{,x_1} = \cos \theta f_{,r} - \frac{\sin \theta}{r} f_{,\theta} \\ f_{,x_2} &= f_{,r} r_{,x_2} + f_{,\theta} \theta_{,x_2} = \sin \theta f_{,r} + \frac{\cos \theta}{r} f_{,\theta} \end{aligned}$$

Το διάνυσμα μετατόπισης $\bar{u}$ στο (x_1, x_2) -επίπεδο έχει πολικές συνιστώσες u_r, u_θ που συνδέονται με τις καρτεσιανές συνιστώσες u_1, u_2 με τις σχέσεις (σχ.4).

$$\theta_{,x_1} = \frac{(x_2/x_1),_{x_1}}{1+(x_2/x_1)^2} = -\frac{\sin \theta}{r}$$



$$\begin{aligned}
 u_1 &= u_r \cos\theta - u_\theta \sin\theta \\
 (65) \quad u_2 &= u_r \sin\theta + u_\theta \cos\theta
 \end{aligned}$$

Η εντατική κατάσταση σένα επίπεδο πρόβλημα χαρακτηρίζεται από τον τανυστή σ' που έχει συνιστώσες

$$(66) \quad \sigma' = \begin{bmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & 0 \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι το απειροστό εξάεδρο που ενεργούν οι τάσεις δεν είναι στην περίπτωση αυτή παραλληλεπίπεδο.

Για να βρούμε τη σχέση μεταξύ του σ' και $\sigma = [\tau_{ij}]$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό (Γ.10) με μητρώο μετασχηματισμού

$$(67) \quad A = \begin{bmatrix} \lambda_{11} = \cos\theta & \lambda_{12} = \sin\theta & \lambda_{13} = 0 \\ \lambda_{21} = -\sin\theta & \lambda_{22} = \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Για επίπεδη παραμόρφωση ή ένταση θα έχουμε

$$(68) \quad \sigma = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{21} & \tau_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{33} \end{bmatrix}$$

όπου για επίπεδη ένταση $\tau_{33} = 0$.

Αν εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό (Γ.10),

$$(69) \quad \sigma = A^T \sigma' A$$

θα πάρουμε τις σχέσεις

$$\tau_{11} = \tau_{rr} \cos^2\theta + \tau_{\theta\theta} \sin^2\theta - \tau_{r\theta} \sin 2\theta$$

$$\tau_{22} = \tau_{rr} \sin^2\theta + \tau_{\theta\theta} \cos^2\theta + \tau_{r\theta} \sin 2\theta$$

$$(70) \quad \tau_{12} = \frac{1}{2} (\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}) \sin 2\theta + \tau_{r\theta} \cos 2\theta$$

$$\tau_{13} = \tau_{23} = \tau_{r3} = \tau_{3\theta} = 0$$

ενώ η τ_{33} είναι η ίδια και για τα δύο συστήματα.

Αν εισάγουμε τις (70) στις εξισώσεις ισορροπίας $\tau_{\alpha\beta,\beta} = 0$ και εφαρμόσουμε τις (64) θα πάρουμε τις

$$(71) \quad \tau_{rr,r} + \frac{1}{r} \tau_{r\theta,\theta} + \frac{(\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta})}{r} = 0$$

$$\tau_{r\theta,r} + \frac{1}{r} \tau_{\theta\theta,\theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0$$

που είναι οι εξισώσεις ισορροπίας σε πολικές συντεταγμένες.

Οι σχέσεις μεταξύ των συνιστωσών του ϵ' και ϵ βρίσκονται από το μετασχηματισμό

$$(72) \quad \epsilon' = \Lambda^T \epsilon \Lambda$$

και είναι

$$(73) \quad e_{rr} = e_{11} \cos^2 \theta + e_{22} \sin^2 \theta + e_{12} \sin 2\theta$$

$$e_{\theta\theta} = e_{11} \sin^2 \theta + e_{22} \cos^2 \theta - e_{12} \sin 2\theta$$

$$e_{r\theta} = \frac{1}{2} (e_{22} - e_{11}) \sin 2\theta + e_{12} \cos 2\theta$$

Αν εισάγουμε τις κινηματικές σχέσεις $e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha})$, $\alpha, \beta = 1, 2$ και τις (65) στις (73) θα πάρουμε

$$(74) \quad e_{rr} = u_{r,r}$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r} u_{\theta,\theta}$$

$$e_{r\theta} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r} u_{r,\theta} + u_{\theta,r} - \frac{1}{r} u_{\theta} \right\}$$

Οι καταστατικές σχέσεις (νόμος του Hooke) σε πολικές συντεταγμένες είναι :

ι) επίπεδη παραμόρφωση



$$\begin{aligned}
 e_{rr} &= \frac{1+\nu}{E} \{ (1-\nu)\tau_{rr} - \nu\tau_{\theta\theta} \} \\
 (75) \quad e_{\theta\theta} &= \frac{1+\nu}{E} \{ (1-\nu)\tau_{\theta\theta} - \nu\tau_{rr} \} \\
 e_{r\theta} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{r\theta}
 \end{aligned}$$

ii) επίπεδη ένταση

$$\begin{aligned}
 e_{rr} &= \frac{1}{E} (\tau_{rr} - \nu\tau_{\theta\theta}) \\
 (76) \quad e_{\theta\theta} &= \frac{1}{E} (\tau_{\theta\theta} - \nu\tau_{rr}) \\
 e_{r\theta} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{r\theta}
 \end{aligned}$$

Ο τελεστής του Laplace σε πολικές συντεταγμένες προκύπτει εύκολα

$$(77) \quad \nabla^2 = ()_{,11} + ()_{,22} = ()_{,rr} + \frac{1}{r} ()_{,r} + \frac{1}{r^2} ()_{,\theta\theta}$$

και η διαρμονική εξίσωση $\nabla^4 f = 0$ σε πολικές συντεταγμένες έχει τη μορφή

$$(78) \quad \nabla^4 F = \{ ()_{,rr} + \frac{1}{r} ()_{,r} + \frac{1}{r^2} ()_{,\theta\theta} \} \{ F_{,rr} + \frac{1}{r} F_{,r} + \frac{1}{r^2} F_{,\theta\theta} \} = 0$$

ή

$$\nabla^4 F = \{ ()_{,rr} + \frac{1}{r} ()_{,r} + \frac{1}{r^2} ()_{,\theta\theta} \}^2 F = 0$$

Για την πλήρη περιγραφή ενός επίπεδου προβλήματος μας χρειάζονται ακόμα οι εκφράσεις των τάσεων σε όρους της τασιοσυνάρτησης F . Αν και μπορούμε από τις σχέσεις $\sigma' = \Lambda^T \sigma \Lambda$ και τις $\tau_{11} = F_{,22}$, $\tau_{22} = F_{,11}$, $\tau_{12} = -F_{,12}$ να πάρουμε τις ζητούμενες εκφράσεις θα επιχειρήσουμε ένα άλλο δρόμο. Ας υποθέσουμε ότι ισχύουν ανάλογες σχέσεις με εκείνες στις καρτεσιανές συντεταγμένες

$$(79) \quad \tau_{rr} = F_{,x'_2 x'_2}, \quad \tau_{\theta\theta} = F_{,rr}, \quad \tau_{r\theta} = -F_{,rx'_2}$$

Από το σχ. 4 έχουμε

$$(80) \quad dx'_2 = r d\theta, \quad ()_{,x'_2} = \frac{1}{r} ()_{,\theta}$$



Η $\tau_{r\theta}$ γράφεται

$$(81) \quad \tau_{r\theta} = -\left(\frac{1}{r} F,_{\theta}\right),_r = -\frac{1}{r} F,_{r\theta} + \frac{1}{r^2} F,_{\theta}$$

Επειδή $\tau_{11} + \tau_{22} = \tau_{rr} + \tau_{\theta\theta}$ είναι αναλλοίωτη του τανυστή τάσης και $\tau_{11} + \tau_{22} = \nabla^2 F$ έχουμε

$$(82) \quad \tau_{rr} + \tau_{\theta\theta} = F,_{rr} + \left(\frac{1}{r} F,_{r} + \frac{1}{r^2} F,_{\theta\theta}\right)$$

Η τάση όμως $\tau_{\theta\theta}$ έχει προσδιοριστεί από την (79.β) ,

$$(83) \quad \tau_{\theta\theta} = F,_{rr}$$

και κατά συνέπεια από την (82) παίρνουμε

$$(84) \quad \tau_{rr} = \frac{1}{r} F,_{r} + \frac{1}{r^2} F,_{\theta\theta}$$

Αν εισάγουμε τις (81), (83) και (84) στις εξισώσεις ισορροπίας διαπιστώνουμε ότι αυτές ικανοποιούνται αυτόματα και κατά συνέπεια οι εκφράσεις αυτές είναι σωστές.

Οι συνοριακές συνθήκες για τις τάσεις έχουν την ίδια μορφή τόσο στο σύστημα $\{x_i\}$ όσο και στο $\{x'_i\}$ (σχ.4), δηλαδή

$$(85) \quad \begin{aligned} \bar{T}_r^n &= \tau_{rr} n_r + \tau_{r\theta} n_\theta \\ \bar{T}_\theta^n &= \tau_{r\theta} n_r + \tau_{\theta\theta} n_\theta \end{aligned}$$

$$\text{όπου} \quad \bar{n} = (n_r, n_\theta, 0)$$

Μια μορφή λύσης της διαρμονικής εξίσωσης (78) προτάθηκε από τον J.Mitchell (1899)

$$(86) \quad \begin{aligned} F(r, \theta) = & \alpha_0 \ln r + b_0 r^2 + c_0 r^2 \ln r + d_0 r^2 \theta + \alpha'_0 \theta \\ & + \frac{\alpha''_1}{2} r \theta \sin \theta + (\alpha_1 r + b_1 r^3 + \alpha'_1 r^{-1} + b'_1 r \ln r) \cos \theta \\ & + \frac{c''_1}{2} r \theta \cos \theta + (c_1 r + d_1 r^3 + c'_1 r^{-1} + d'_1 r \ln r) \sin \theta \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} (\alpha_n r^n + b_n r^{n+2} + \alpha'_n r^{-n} + b'_n r^{-n+2}) \cos n\theta \end{aligned}$$



$$+ \sum_{n=2}^{\infty} (c_n r^n + d_n r^{n+2} + c'_n r^{-n} + d'_n r^{-n+2}) \sin n\theta$$

όπου οι συντελεστές $a_0, b_0, c_1, \dots$ είναι σταθερές.

Η γενική λύση (86) είναι σειρά Fourier ως προς θ και δυναμοσειρά ως προς r . Με απ'ευθείας αντικατάσταση μπορεί να αποδειχτεί ότι κάθε όρος της (86) ικανοποιεί την (78). Πολλά πρακτικά προβλήματα μπορούν να λυθούν λαμβάνοντας υπόψη μόνο ένα περιορισμένο αριθμό όρων στην (86) και προσδιορίζοντας τις σταθερές από τις συνοριακές συνθήκες.

Στην περίπτωση ενός αξονοσυμμετρικού προβλήματος η συνάρτηση F είναι ανεξάρτητη της θ και η (78) παίρνει τη μορφή

$$(87) \quad F_{,rrrr} + \frac{2}{r} F_{,rrr} - \frac{1}{r^2} F_{,rr} + \frac{1}{r^3} F_{,r} = 0.$$

Η (87) είναι ομογενής διαφορική εξίσωση και με την αντικατάσταση $r=e^t$ ανάγεται σε διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές.

Η λύση της (87) είναι

$$(88) \quad F = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + D$$

και αντιστοιχεί σε τανυστή τάσης με συνιστώσες

$$(89) \quad \begin{aligned} \tau_{rr} &= \frac{A}{r^2} + B(1+2\ln r) + 2C \\ \tau_{\theta\theta} &= -\frac{A}{r^2} + B(3+2\ln r) + 2C \\ \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned}$$

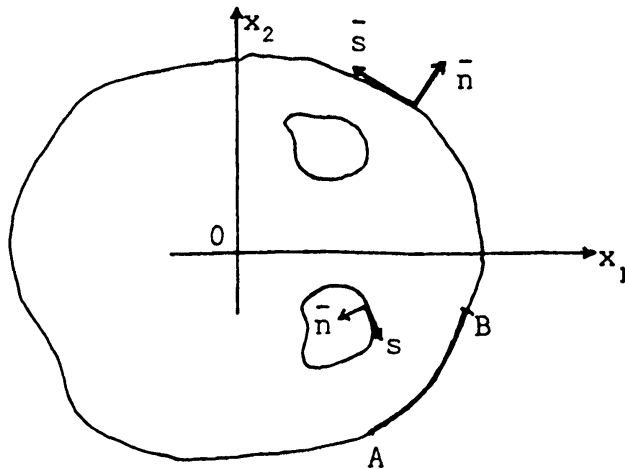
Η λύση όλων των προβλημάτων με αξονοσυμμετρική κατανομή τάσεων και μη-δενικές μαζικές δυνάμεις λαμβάνεται από την (89). Οι σταθερές A, B, C, D προσδιορίζονται από τις συνοριακές συνθήκες. Ο προσδιορισμός των μετατοπίσεων γίνεται με ολοκλήρωση των καταστατικών σχέσεων (75) ή (76).

Σχόλιο :

Η έκφραση των διαρμονικών συναρτήσεων με αναλυτικές συναρτήσεις οδηγεί σε μια γενική μέθοδο επίλυσης προβλημάτων επίπεδης παραμόρφωσης



και επίπεδης έντασης. Ας θεωρήσουμε μια περιοχή απλά ή πολλαπλά συνεκτική στο (x_1, x_2) -επίπεδο με πάχος „1” .



Στη συνοριακή επιφάνεια επιβάλλονται επιφανειακές δυνάμεις και για απλότητα οι μαζικές δυνάμεις θεωρούνται μηδενικές. Σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση

$$(a) \quad \tau_{11} = F_{,22} \quad , \quad \tau_{22} = F_{,11} \quad , \quad \tau_{12} = -F_{,12}$$

όπου η F μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή

$$F(x_1, x_2) = \operatorname{Re}\{\bar{z}\psi(z) + \chi(z)\}$$

ή

$$(b) \quad 2F(x_1, x_2) = \bar{z}\psi(z) + z\bar{\psi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}) \quad .$$

Το πρόβλημα της επίπεδης ελαστικότητας είναι ο προσδιορισμός των $\psi(z)$ και $\chi(z)$ έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Για το σκοπό αυτό πρέπει να εκφράσουμε τις συνοριακές συνθήκες σε όρους των $\psi(z)$, $\chi(z)$ και των παραγώγων τους. Αυτό μπορεί να γίνει αφού υπολογίσουμε τις τάσεις $\tau_{\alpha\beta}$ από την $F(x_1, x_2)$ στη συνέχεια από το νόμο του Hooke τις παραμορφώσεις $e_{\alpha\beta}$ και τελικά με ολοκλήρωση τις μετατοπίσεις u_α . Η μέθοδος αυτή γνωστή σαν μέθοδος Kolosoff-Muskhelishvili είναι η πιο κατάλληλη για την αντιμετώπιση πολλών προβλημάτων της επίπεδης ελαστικότητας π.χ. προβλήματα ρωγμών και ο αναγνώστης που εν-



διαφέρεται για τη μελέτη της παραπέμπεται στο βιβλίο του I.Sokolnikoff (1956) : Mathematical theory of elasticity, σελ. 263-327.

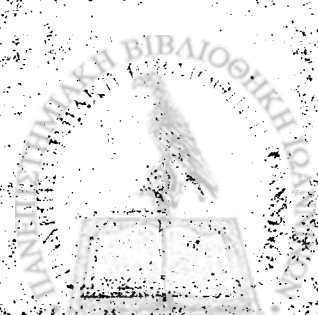
Βιβλιογραφία

1. Y. Fung: "Foundations of Solid Mechanics", John Wiley and Sons Inc., New York (1960).
2. H. Leipholz: "Theory of elasticity", Noordhoff Int. Publishing, Leyden, The Netherlands (1974).
3. Γ. Λιάνη: "Μηχανική των παραμορφωσίμων σωμάτων και αντοχή των υλικών", Θεσσαλονίκη (1979).
4. R. Little: "Elasticity", Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey (1973).
5. A. Love: "A Treatise on the mathematical theory of elasticity", Dover, New York (1944).
6. L. Segel: "Mathematics applied to continuum mechanics", Macmillan publishing Co., Inc, New York (1977).
7. I. Sokolnikoff: "Mathematical theory of elasticity", Mc Graw-Hill Book Company, New York (1956).



ΚΕΦ. 17

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ



ΚΕΦ. ΣΤ

Προβλήματα της γραμμικής Ελαστικότητας.

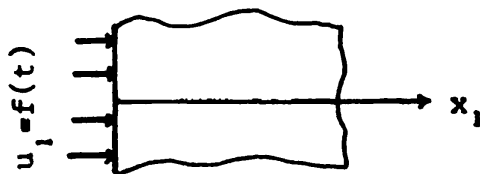
Σε προηγούμενα κεφάλαια δόθηκε η διατύπωση των βασικών προβλημάτων της γραμμικής ελαστικότητας και της ζευγμένης θερμοελαστικότητας για ισότροπα υλικά. Η διατύπωση αυτή, ενώ είναι αρκετά περιοριστική ως προς τη φύση του υλικού και το μέγεθος των παραμορφώσεων, είναι κατάλληλη για πάρα πολλά προβλήματα που έχουν πρακτικό ενδιαφέρον γιατί σχεδόν όλα τα υλικά των κατασκευών επιδεικνύουν ελαστική συμπεριφορά για ικανοποιητικά μικρές παραμορφώσεις και μάλιστα πολλά από αυτά μπορούν να θεωρηθούν με καλή προσέγγιση και σαν ισότροπα. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την αντιμετώπιση κάποιων απλών προβλημάτων της γραμμικής ελαστικότητας.

1. Διαμήκη και εγκάρσια ελαστικά κύματα.

Θα αναζητήσουμε τη λύση των εξισώσεων του Navier (Δ. 27) στην περίπτωση που εφαρμόζουμε μια μετατόπιση

$$(1) \quad u_1 = f(t), \quad u_2 = u_3 = 0 \quad \text{για} \quad t > 0,$$

όπου $f(t)$ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση, στην όψη $x_1 = 0$ μιας ελεύθερης τάσεων ελαστικής περιοχής (σχ.1)



Σχ.1



Στην περίπτωση αυτή αναμένουμε ότι η κίνηση του στερεού σαν αποτέλεσμα της διατάραξης του συνόρου $x_1=0$, θα είναι μία μονοδιάστατη κίνηση στη διεύθυνση της διατάραξης, δηλαδή

$$(2) \quad u_1 = u_1(x_1, t), \quad u_2 = u_3 = 0.$$

Από την εξίσωση του Navier ($B_1=0$)

$$(3) \quad \mu u_{1,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,j1} = \rho \ddot{u}_1$$

παίρνουμε

$$(\lambda + 2\mu) u_{1,11} = \rho \ddot{u}_1$$

ή

$$(4) \quad u_{1,11} = c_1^2 \ddot{u}_1$$

όπου

$$(5) \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}.$$

Η γενική λύση της (4) μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή

$$(6) \quad u_1 = g\left(t - \frac{x_1}{c_1}\right) + h\left(t + \frac{x_1}{c_1}\right)$$

όπου g και h είναι αυθαίρετες συναρτήσεις. Η φυσική ερμηνεία της λύσης (6) είναι η ακόλουθη:

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα τη συνάρτηση $g\left(t - \frac{x_1}{c_1}\right)$. Σε κάποια χρονική στιγμή t^* η συνάρτηση θα περιγράφει κάποια κατανομή της μετατόπισης στη x_1 -δieleύθυνση. Στο χρόνο $t^* + \Delta t$ και στη θέση $x_1 + c_1 \Delta t$ η κατανομή της μετατόπισης περιγράφεται πάλι από την ίδια συνάρτηση $g\left(t - x_1/c_1\right)$. Η συνάρτηση αυτή εκφράζει ένα κύμα σταθερού σχήματος που διαδίδεται στη $+x_1$ -δieleύθυνση με ταχύτητα c_1 . Η συνάρτηση $h\left(t + x_1/c_1\right)$ εκφράζει ένα κύμα σταθερού σχήματος που διαδίδεται στη $-x_1$ -δieleύθυνση με την ίδια ταχύτητα c_1 .

Στο πρόβλημα που εξετάζουμε η λύση της (4) που ικανοποιεί τις συνθήκες (1) και τις αρχικές συνθήκες



$$(7) \quad u_1 = 0, \quad \dot{u}_1 = 0 \quad \text{για} \quad t = 0$$

θα περιλαμβάνει κύματα που κινούνται μόνο στη $+x_1$ -διεύθυνση. Επιπρόσθετα, επειδή η c_1 έχει πεπερασμένη τιμή θα υπάρχει για κάθε χρονική στιγμή μια περιοχή στην οποία δεν θα έχει φτάσει ακόμα η διατάραξη. Η λύση λοιπόν της (4) θα είναι

$$(8) \quad \begin{aligned} u_1 &= f\left(t - \frac{x_1}{c_1}\right), & x_1 &\leq c_1 t \\ u_1 &= 0 & x_1 &\geq c_1 t \end{aligned}$$

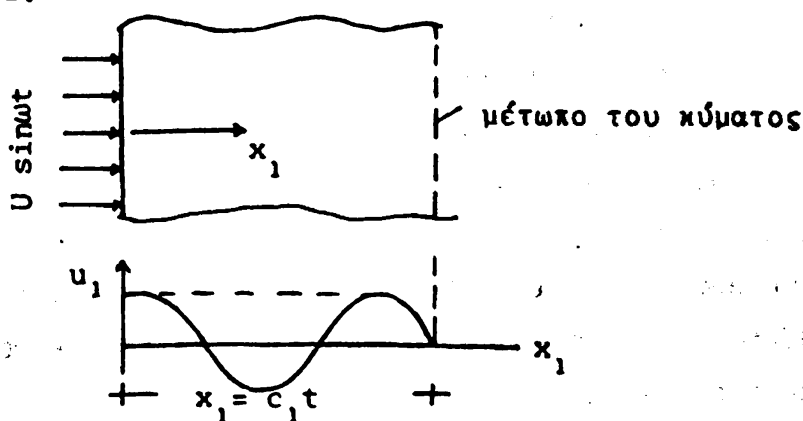
Αν οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι

$$(9) \quad u_1 = U \sin \omega t, \quad u_2 = u_3 = 0,$$

όπου U και ω είναι σταθερές, η λύση (8) γράφεται

$$(10) \quad \begin{aligned} u_1 &= U \sin \omega \left(t - \frac{x_1}{c_1}\right), & x_1 &\leq c_1 t \\ u_1 &= 0 & x_1 &\geq c_1 t \end{aligned}$$

Η λύση (10) εκφράζει ένα απλό παράδειγμα ενός διαμήκους ελαστικού κύματος που διαδίδεται στη x_1 -διεύθυνση με ταχύτητα c_1 . Η διεύθυνση της κίνησης των σωματιδίων είναι η ίδια με τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Η κατανομή της μετατόπισης που αντιστοιχεί στη λύση (10) φαίνεται στο σχ.2.



Σχ.2



Το κύμα τάσης που σχετίζεται με τη μετατόπιση (10) προσδιορίζεται εύκολα από τις καταστατικές εξισώσεις, δηλαδή

$$(11) \quad \begin{aligned} \tau_{11} &= (\lambda + 2\mu) u_{1,1} = -(\lambda + 2\mu) U \frac{\omega}{c_1} \cos\omega(t - \frac{x_1}{c_1}), & x_1 \leq c_1 t \\ \tau_{11} &= 0 & x_1 > c_1 t \end{aligned}$$

Από την (11) γίνεται φανερό ότι η $\max \tau_{11}$ είναι ανάλογη της μέγιστης μετατόπισης U και της συχνότητας διατάραξης ω .

Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι η τάση τ_{11} είναι ασυνεχής στο μέτωπο του κύματος $x_1 = c_1 t$, δηλαδή

$$(12) \quad \{(\tau_{11})^\delta - (\tau_{11})^\alpha\}_{x_1=c_1 t} = -(\lambda + 2\mu) U \frac{\omega}{c_1}.$$

Αν οι συνοριακές συνθήκες (1) αντικατασταθούν με τις

$$(13) \quad u_2 = v(x_1, t), \quad u_1 = u_3 = 0$$

τότε η λύση των εξισώσεων Navier θα εκφράζει ένα εγκάρσιο ελαστικό κύμα διαδιδόμενο στη $+x_1$ - διεύθυνση. Στην περίπτωση αυτή η διεύθυνση της κίνησης των σωματιδίων θα είναι κάθετη ως προς τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος και η ταχύτητα του κύματος θα δίνεται από τη σχέση

$$(14) \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}.$$

Η παραπάνω ακριβής λύση μπορεί να εφαρμοστεί στη μελέτη της διάδοσης διαμήκους κύματος σε ράβδους (οι εγκάρσιες διαστάσεις είναι μικρές σε σύγκριση με το μήκος των) σταθερής ορθογωνικής διατομής στις οποίες εφαρμόζονται κατάλληλες πλευρικές τάσεις τ_{22} και τ_{33} ώστε να εμποδίζεται η εγκάρσια κίνηση. Οι τάσεις αυτές προσδιορίζονται εύκολα από τις καταστατικές εξισώσεις,

$$(15) \quad \tau_{11} = (\lambda + 2\mu) e_{11}, \quad \tau_{22} = \tau_{33} = \lambda e_{11},$$

όπου οι πλευρικές παραμορφώσεις λαμβάνονται ίσες με το μηδέν. Από τις (15) παίρνουμε



$$(16) \quad \tau_{22} = \tau_{33} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \tau_{11} \quad .$$

Στην περίπτωση που οι πλευρικές επιφάνειες των ράβδων είναι ελεύθερες τάσεων τότε μια ακριβής λύση του προβλήματος διάδοσης μιας κυματικής διαταραχής είναι δύσκολη γιατί η εγκάρσια κίνηση έχει σαν αποτέλεσμα τη μη-ομοιόμορφη κατανομή των τάσεων στην εγκάρσια διατομή της ράβδου. Επειδή όμως η ανομοιομορφία δεν πρέπει να υπάρχει με το μηδενισμό των πλευρικών διαστάσεων της ράβδου, μία προσέγγιση του προβλήματος, για πρακτικές εφαρμογές όπου οι πλευρικές διαστάσεις είναι πολύ μικρές συγκρινόμενες με το χαρακτηριστικό μήκος της κυματικής διαταραχής, είναι εκείνη κατά την οποία αγνοείται αυτή η ανομοιομορφία.

Σύμφωνα με την παραπάνω θεώρηση, που βρίσκει εφαρμογή σε ράβδους με ομοιόμορφη διατομή, η μόνη μη μηδενιζόμενη τάση είναι η τ_{11} και η κίνηση κατά την x_1 - διεύθυνση περιγράφεται από την εξίσωση

$$(17) \quad \tau_{11,1} = \rho \ddot{u}_1 \quad .$$

Η ελαστική καταστατική σχέση στην περίπτωση αυτή είναι

$$(18) \quad \tau_{11} = E e_{11} = E u_{1,1}$$

όπου E είναι το μέτρο του Young.

Μετά τις (17) και (18) η εξίσωση του Navier παίρνει τη μορφή

$$(19) \quad c_0^2 u_{1,11} = \ddot{u}_1$$

όπου

$$(20) \quad c_0^2 = \frac{E}{\rho} \quad .$$

Η εξίσωση (19) είναι ίδια με την (4) με τη μόνη διαφορά ότι αντί της c_1 εδώ έχουμε την ταχύτητα κύματος της ράβδου c_0 . Η λύση της (19) που αντιστοιχεί σε εφαρμοζόμενη μετατόπιση

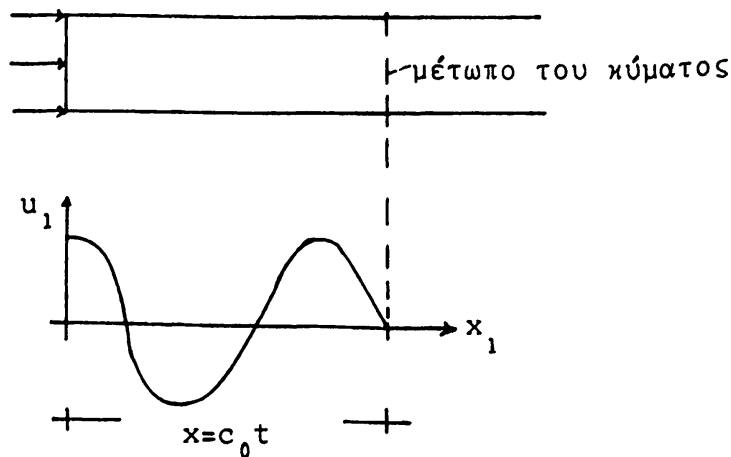
$$(21) \quad u_1 = U \sin \omega t$$



στο άκρο της ράβδου είναι

$$(22) \quad \begin{aligned} u_1 &= U \sin \omega \left(t - \frac{x_1}{c_0} \right), & x_1 &\leq c_0 t \\ u_1 &= 0, & x_1 &> c_0 t \end{aligned}$$

Η λύση της (22) φαίνεται στο σχ.3



Σχ.3

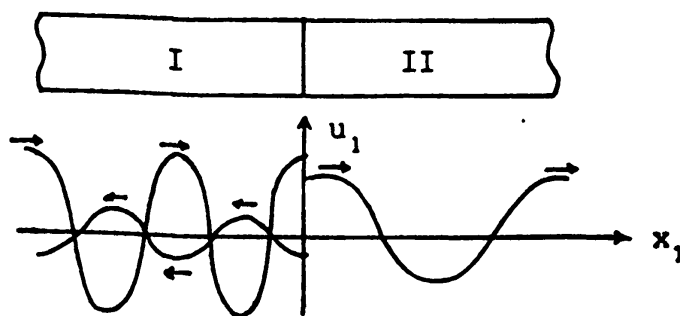
Οι τάσεις στη ράβδο θα είναι

$$(23) \quad \begin{aligned} \tau_{11} &= -EU \frac{\omega}{c_0} \cos \omega \left(t - \frac{x_1}{c_0} \right), & x_1 &\leq c_0 t \\ \tau_{11} &= 0, & x_1 &> c_0 t \end{aligned}$$

Για να έχουμε μια γενικότερη εικόνα του προβλήματος διάδοσης των κυμάτων στα στερεά, ας εξετάσουμε τώρα το πρόβλημα διάδοσης κύματος σε δύο συγκολλημένες στην έννοια του μήκους ράβδους από διαφορετικά υλικά (σχ.4). Όταν ένα εισερχόμενο κύμα της ράβδου I φτάσει στην κοινή επιφάνεια των ράβδων ένα τμήμα του θα περάσει στη ράβδο II (θα διαδοθεί) και ένα άλλο θα ανακλαστεί έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες στην κοινή επιφάνεια των ράβδων.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τα ακόλουθα εισερχόμενο (O), ανακλώμενο (R) και διαδιδόμενο (T), κύματα.





Σχ.4

$$\begin{aligned}
 u_1^0 &= U_0 \sin \omega_0 \left(t - \frac{x_1}{c_I} \right) \\
 (24) \quad u_1^R &= U_R \sin \omega_R \left(t + \frac{x_1}{c_I} \right) \\
 u_1^T &= U_T \sin \omega_T \left(t - \frac{x_1}{c_{II}} \right)
 \end{aligned}$$

όπου το x_1 μετριέται από την κοινή επιφάνεια και c_I , c_{II} είναι οι τιμές της ταχύτητας κύματος ραβδου για τα δύο υλικά, αντίστοιχα.

Οι συνοριακές συνθήκες στην επιφάνεια $x_1=0$ απαιτούν όπως η μετατόπιση και η τάση στη θέση $x_1=0$ να είναι συνεχείς. Από τις μορφές των κυμάτων (24) έχουμε τις απαιτήσεις

$$(25) \quad u_1^0 = u_1^R + u_1^T$$

και

$$(26) \quad E_I (u_{1,1}^0 + u_{1,1}^R) = E_{II} u_{1,1}^T$$

όπου E_I και E_{II} είναι τα μέτρα ελαστικότητας του Young για τα δύο υλικά αντίστοιχα. Αν εισάγουμε τις (24) στις (25) θα πάρουμε

$$(27) \quad \omega_0 = \omega_R = \omega_T$$

και

$$(28) \quad U_R = \frac{\rho_I c_I - \rho_{II} c_{II}}{\rho_I c_I + \rho_{II} c_{II}} U_0, \quad U_T = \frac{2 \rho_I c_I}{\rho_I c_I + \rho_{II} c_{II}} U_0$$



όπου ρ_I και ρ_{II} είναι οι πυκνότητες των δύο υλικών. Η ολική μετατόπιση και τάση στην κοινή επιφάνεια των ράβδων θα είναι

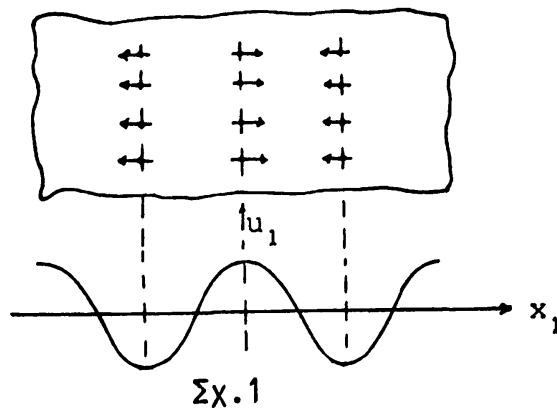
$$(29) \quad u_1 = \frac{2\rho_I c_I}{\rho_I c_I + \rho_{II} c_{II}} U_0$$

$$(30) \quad \tau_{11} = \frac{2\rho_{II} c_{II}}{\rho_I c_I + \rho_{II} c_{II}} \tau_{11}^0.$$

Στην περίπτωση που $E_{II} \rightarrow \infty$ τότε $u_1 = 0$ στη θέση $x_1 = 0$ και η τάση στη θέση αυτή είναι διπλάσια εκείνης του εισερχόμενου κύματος. Στην περίπτωση που η επιφάνεια $x_1 = 0$ είναι ελεύθερη επιφάνεια, $\rho_{II} c_{II} = 0$, τότε η τάση είναι ίση με το μηδέν και η μετατόπιση στη θέση αυτή είναι διπλάσια εκείνης του εισερχόμενου κύματος.

2. Θερμοελαστικές ταλαντώσεις.

Ας θεωρήσουμε το εξιδανικευμένο πρόβλημα των διαμήκων ταλαντώσεων ενός θερμοελαστικού υλικού άπειρου μήκους (σχ.1).



Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος θεωρούμε ότι είναι

$$(1) \quad u_1(x_1, 0) = A \cos m x_1, \quad \dot{u}_1(x_1, 0) = 0$$

όπου A και m είναι σταθερές.

Για τον προσδιορισμό της κίνησης που θα ακολουθήσει σαν συνέπεια των αρχικών συνθηκών (1) θα μελετήσουμε τις διαφορικές εξισώσεις (Δ.46)



και (Δ.51) που στο πρόβλημα που εξετάζουμε έχουν τη μορφή

$$(2) \quad \ddot{u}_1 = c_1^2 u_{1,11} - \frac{\gamma}{\rho} \theta_{,1}$$

και

$$(3) \quad \dot{\theta} + \eta \kappa \dot{u}_{1,1} = \kappa \theta_{,11}$$

αντίστοιχα.

Θα αναζητήσουμε λύση ως προς u_1 της μορφής

$$(4) \quad u_1 = e^{-\lambda t} \{A \cos \omega t + B \sin \omega t\} \cos m x_1$$

όπου λ, A, B και m είναι σταθερές.

Η (4) για $t=0$ ανάγεται στην (1α) ενώ η (1β) δίνει

$$(5) \quad \dot{u}_1(x_1, 0) = 0 = -\lambda A + \omega B \Rightarrow B = \frac{\lambda}{\omega} A$$

Αν εισάγουμε την (4) στην (2), μετά από ολοκλήρωση, παίρνουμε

$$(6) \quad \theta = e^{-\lambda t} \{C \cos \omega t + D \sin \omega t\} \sin m x_1$$

όπου

$$C = - \frac{c_1^2 m^2 - \lambda^2 - \omega^2}{\bar{\gamma} m} A$$

(7)

$$D = - \frac{c_1^2 m^2 + \lambda^2 + \omega^2}{\bar{\gamma} m} \frac{\lambda}{\omega} A, \quad \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{\rho}$$

Αν τώρα εισάγουμε τις (4) και (6) στην (3) παίρνουμε

$$(8) \quad D_1 \cos \omega t + D_2 \sin \omega t = 0$$

όπου

$$D_1 = -\{2\lambda^3 - 2\lambda\omega^2 + \kappa m^2 (c_1^2 m^2 - \lambda^2 - \omega^2)\}$$

(9)

$$D_2 = \frac{\lambda^2 + \omega^2}{\bar{\gamma} \omega m} \{\lambda^2 - \omega^2 + m^2 (c^2 + \bar{\gamma} \eta \kappa - \kappa \lambda)\} - \frac{\kappa \lambda c_1^2 m^3}{\bar{\gamma} \omega}$$



Για να ικανοποιείται η (3) για κάθε t πρέπει

$$(10) \quad D_1 = D_2 = 0.$$

Αν εισάγουμε τους συμβολισμούς

$$(11) \quad \bar{\omega} = \frac{\omega}{mc_1}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{mc_1}, \quad \epsilon = \frac{\gamma\eta\kappa}{c_1^2}, \quad \bar{\kappa} = \frac{\kappa m}{c_1}$$

οι (10) γράφονται

$$(12) \quad \begin{aligned} &\bar{\omega}^2(\bar{\kappa} - 2\bar{\lambda}) - 2\bar{\lambda}^3 + \bar{\kappa}\bar{\lambda}^2 - \bar{\kappa} = 0 \\ &(\bar{\lambda}^2 + \bar{\omega}^2)(\bar{\lambda}^2 - \bar{\omega}^2 + 1 + \epsilon - \bar{\kappa}\bar{\lambda}) - \bar{\kappa}\bar{\lambda} = 0. \end{aligned}$$

Στην περίπτωση που η αδιάστατη παράμετρος (παράμετρος σύζευξης) είναι ίση με το μηδέν η λύση $(\bar{\omega}, \bar{\lambda}) = (1, 0)$ του συστήματος (12) αντιστοιχεί στη λύση του ισόθερμου προβλήματος όπου η συχνότητα ταλάντωσης $\omega = mc_1$. Για ελαστικά υλικά $\epsilon \sim 10^{-2}$ και η λύση του συστήματος (12) θα είναι

$$(13) \quad \begin{aligned} \bar{\omega} &= 1 + \alpha_1 \epsilon + O_1(\epsilon^2) \\ \bar{\lambda} &= \beta_1 \epsilon + O_2(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Αν εισάγουμε τις (13) στις (12) παίρνουμε

$$(14) \quad \alpha_1 = \frac{1}{2(1+\bar{\kappa}^2)}, \quad \beta_1 = \bar{\kappa}\alpha_1$$

και η λύση (13), σε πρώτη προσέγγιση, είναι

$$(15) \quad \bar{\omega} \sim 1 + \frac{\epsilon}{2(1+\bar{\kappa}^2)}, \quad \bar{\lambda} \sim \frac{\bar{\kappa}\epsilon}{2(1+\bar{\kappa}^2)}$$

ή

$$(16) \quad \omega = mc_1 \left\{ 1 + \frac{\gamma\eta\kappa}{2\rho(c_1^2 + m^2\kappa^2)} \right\}, \quad \lambda = \frac{\kappa^2 m^2 \gamma\eta}{2\rho(c_1^2 + m^2\kappa^2)}.$$

Από την (16β) παρατηρούμε ότι μη-μηδενικές τιμές του λ έχουν σαν συνέ-



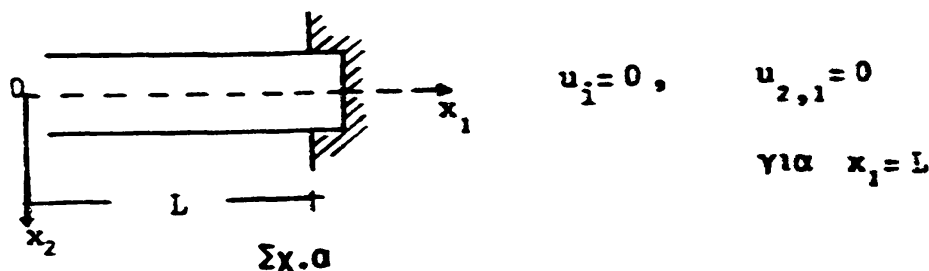
πεία την απόσβεση των ταλαντώσεων (4) και της μη ομοιόμορφης θερμοκρασιακής (6) κατανομής με το χρόνο. Από την (16α) παίρνουμε την πληροφορία ότι η παρουσία του θερμικού πεδίου προκαλεί αύξηση της συχνότητας ταλάντωσης $\omega(\epsilon \neq 0) > \omega c_1$.

Από φυσική σκοπιά η θερμοελαστική απόσβεση των ταλαντώσεων οφείλεται στο γεγονός ότι κάθε συστολή ή διαστολή του μέσου σχετίζεται με αντίστοιχη μείωση ή αύξηση της θερμοκρασίας του. Στην περίπτωση που η θερμοκρασία παραμένει σταθερή δεν παρουσιάζεται καμιά συστολή ή διαστολή του μέσου και κατά συνέπεια καμιά μεταβολή της αρχικής ταλάντωσής του. Με την παρουσία του φαινομένου της αγωγής, όπως στην παραπάνω ανάλυση, οι θερμοκρασιακές μεταβολές και κατά συνέπεια οι κινήσεις του μέσου μεταβάλλονται κατά τη διάρκεια κάθε συστολής ή διαστολής του.

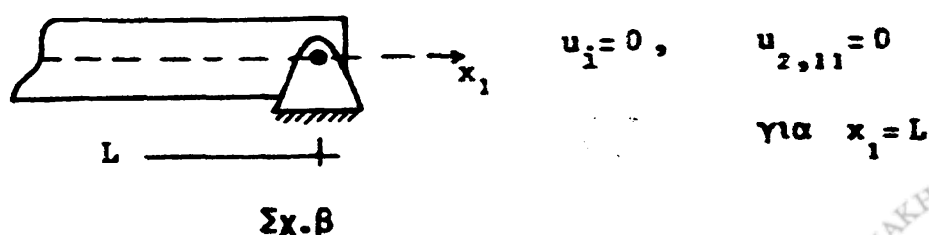
3. Επίπεδα προβλήματα.

Πριν προχωρήσουμε στο αντικείμενο αυτής της παραγράφου θα δώσουμε κάποιες διευκρινίσεις σε όρους που θα χρησιμοποιηθούν ή που θα χρησιμοποιούνται στις εφαρμογές.

ι. πακτωμένο άκρο (ή σύνορο) (σχ.α)

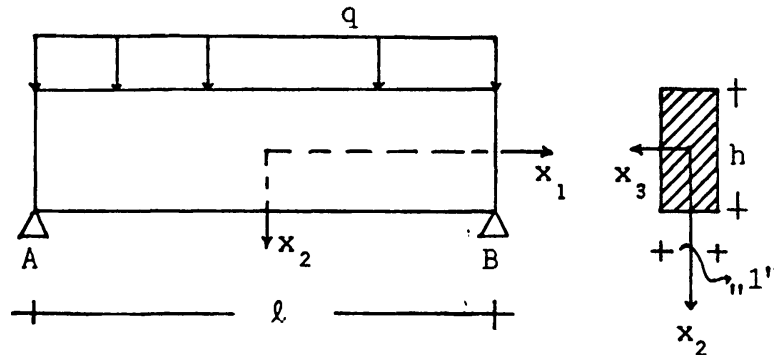


ιι) απλά στηριγμένο άκρο (ή σύνορο) (σχ.β)



θα πρέπει να διευκρινιστεί ότι υπάρχουν πολλοί τύποι απλά στηριγμένων άκρων.

Πρόβλημα 1: Εντατική κατάσταση απλά στηριγμένης δοκού (σχ.1)



Σχ.1

Το πρόβλημα μπορεί να θεωρηθεί σαν πρόβλημα επίπεδης έντασης. Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε ότι $B_1 = 0$. Για την τασιосυνάρτηση $F(x_1, x_2)$ θα θεωρήσουμε ότι έχει την πολυωνυμική μορφή

$$(1) \quad F = \alpha x_2^5 + b x_1^2 x_2^3 + c x_1^4 x_2 + d x_2^3 + e x_1 x_2 + f(x_1) \quad .$$

Για να ικανοποιείται η $\nabla^4 F = 0$ πρέπει

$$(2) \quad \alpha = -\frac{b+c}{5} \quad , \quad f(x_1)_{,1111} = f^{IV}(x_1) = 0 \quad .$$

Οι εκφράσεις των τάσεων μετά τις (1) και (2) θα είναι

$$(3) \quad \begin{aligned} \tau_{11} = F_{,22} &= -4(b+c)x_2^3 + 6bx_1^2x_2 + 6dx_2 \\ \tau_{22} = F_{,11} &= 2bx_2^3 + 12cx_1^2x_2 + 2ex_2 + f''(x_1) \\ \tau_{12} &= -(6bx_1x_2^2 + 4cx_1^3 + 2ex_1) = -F_{,12} \end{aligned}$$

Οι άγνωστοι συντελεστές και η συνάρτηση $f(x_1)$ θα προσδιοριστούν από τις συνοριακές συνθήκες.

Για την πάνω και κάτω επιφάνεια έχουμε:



$$(4) \quad \tau_{22} = -q, \quad \tau_{12} = 0, \quad \text{για} \quad x_2 = -\frac{h}{2}$$

$$\tau_{22} = 0, \quad \tau_{12} = 0 \quad \text{για} \quad x_2 = +\frac{h}{2}$$

Από τη συνθήκη $\tau_{22}(x_2 = \frac{h}{2}) = 0$ προκύπτει ότι

$$(5) \quad \frac{bh^3}{4} + 6cx_1^2h + eh + f''(x_1) = 0$$

Για να ισχύει η (5) για κάθε x_1 πρέπει $c=0$ και $f''(x_1)=k=\text{σταθερά}$. Οι (3) και (5) θα πάρουν τώρα τη μορφή

$$\tau_{11} = -4bx_2^3 + 6bx_1^2x_2 + 6dx_2$$

$$(6) \quad \tau_{22} = 2bx_2^3 + 2ex_2 + k$$

$$\tau_{12} = -6bx_1x_2^2 - 2ex_1$$

$$\frac{bh^3}{4} + eh = -k$$

Από τη συνθήκη $\tau_{22}(x_2 = -\frac{h}{2}) = -q$ προκύπτει ότι

$$(7) \quad -\frac{bh^3}{4} - eh + k = -q$$

και κατά συνέπεια

$$(3) \quad k = -\frac{q}{2}$$

Οι συνοριακές συνθήκες για τις διατμητικές τάσεις τ_{12} έχουν τώρα τη διατύπωση

$$(9) \quad -\frac{3}{2}bh^2x_1 - 2ex_1 = 0 \Rightarrow e = -\frac{3}{4}bh^2$$

και από τις (7) και (3) προκύπτει ότι

$$(10) \quad b = -\frac{q}{h^3}$$

Οι εκφράσεις για τις τάσεις θα είναι



$$\begin{aligned}
 \tau_{11} &= 6dx_2 - \frac{6q}{h^3} x_1^2 x_2 + \frac{4q}{h^3} x_2^3 \\
 (11) \quad \tau_{22} &= -\frac{6q}{h^3} \left(\frac{x_2^3}{3} - \frac{h^2}{4} x_2 + \frac{h^3}{12} \right) \\
 \tau_{12} &= -\frac{6q}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2 \right) x_1 .
 \end{aligned}$$

Από τις (11) βλέπουμε ότι ο μόνος προς προσδιορισμό άγνωστος συντελεστής είναι ο d . Οι συνοριακές συνθήκες στα άκρα της δοκού είναι

$$\begin{aligned}
 (12) \quad \tau_{11} &= 0 \quad \text{για} \quad x_1 = \pm \frac{\ell}{2} \\
 &\quad \text{για} \quad x_1 = \pm \frac{\ell}{2} \\
 &\quad \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12} dx_2 = -q \frac{\ell}{2} .
 \end{aligned}$$

Η δεύτερη συνθήκη ικανοποιείται ενώ η πρώτη γράφεται

$$(13) \quad \tau_{11}(x_1 = \pm \frac{\ell}{2}) = 6dx_2 - \frac{3q\ell^2}{2h^3} x_2 + \frac{4q}{h^3} x_2^3 .$$

Η (13) μας δίνει την πληροφορία ότι αναπτύσσονται τάσεις στα άκρα της δοκού πράγμα που είναι αντίθετο με τη φόρτιση που έχει επιβληθεί στη δοκό. Σύμφωνα με την αρχή του S.Venant η κατανομή των τ_{11} πρέπει να είναι ισοδύναμη με την κατανομή

$$\begin{aligned}
 (14) \quad &\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{11} dx_2 = 0 \\
 &\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{11} x_2 dx_2 = 0 . \\
 &\quad \text{για} \quad x_1 = \pm \frac{\ell}{2}
 \end{aligned}$$

Η πρώτη των (14) ικανοποιείται ενώ η δεύτερη αποτελεί τη συνθήκη προσδιορισμού της d ,

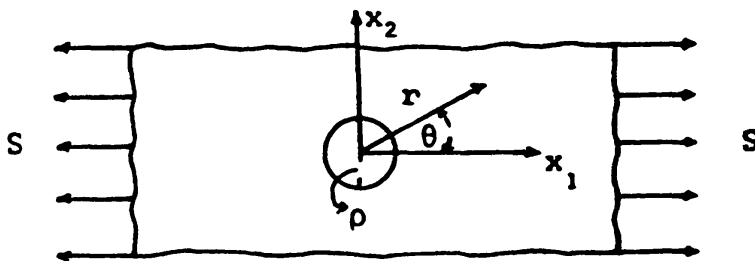
$$(15) \quad d = \frac{2}{h^3} \left(\frac{q\ell^2}{8} - \frac{qh^2}{20} \right) .$$

Η κατανομή των τάσεων στη δοκό δίνεται από τις εκφράσεις



$$\begin{aligned}
 \tau_{11} &= \frac{12}{h^3} \left(\frac{q\ell^2}{8} - \frac{qh^2}{20} \right) x_2 - \frac{6q}{h^3} x_1^2 x_2 + \frac{4q}{h^3} x_2^3 \\
 (16) \quad \tau_{22} &= -\frac{6q}{h^3} \left(\frac{x_2^3}{3} - \frac{h^2}{4} x_2 + \frac{h^3}{12} \right) \\
 \tau_{12} &= -\frac{6q}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2 \right) x_1 .
 \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2. Εντατική κατάσταση άπειρης πλάκας με κυκλική τρύπα (σχ.6)



Σχ.2

Το πρόβλημα που εξετάζουμε είναι χαρακτηριστικό παράδειγμα επίπεδης έντασης και έχει σημαντικό πρακτικό ενδιαφέρον. Από τη μορφή του συνόρου οδηγούμαστε στο να χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες. Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι

$$(17) \quad \tau_{rr} = \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{για} \quad r = \rho$$

και

$$(18) \quad \tau_{11} = S \quad \text{για} \quad r \rightarrow \infty .$$

Αν θεωρήσουμε την πλάκα χωρίς τρύπα και την τασιοσυνάρτηση F^* που αντιστοιχεί στο πρόβλημα του μονοαξονικού ελκυσμού (σχ.2) τότε

$$\tau_{11}^* = F_{,22}^* = S$$

και

$$(19) \quad F^* = \frac{1}{2} S x_2^2 = \frac{1}{2} S r^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{4} S r^2 - \frac{1}{4} S r^2 \cos 2\theta .$$

Από την (19) παίρνουμε την περιγραφή των τάσεων σε πολικές συντεταγμένες, δηλαδή



$$(20) \quad \tau_{rr}^* = \frac{1}{2} S(1+\cos 2\theta), \quad \tau_{\theta\theta}^* = \frac{1}{2} S(1-\cos 2\theta)$$

$$\tau_{r\theta}^* = -\frac{1}{2} S \sin 2\theta .$$

Από τις (20) οδηγούμαστε στο συμπέρασμα να εκλέξουμε για το πρόβλημα μας ταυσιουσυνάρτηση της μορφής

$$(21) \quad F(r, \theta) = f_1(r) + f_2(r) \cos 2\theta$$

όπου f_1 και f_2 είναι κάποιες συναρτήσεις του r . Αν εισάγουμε την (21) στην (Ε.73) βρίσκουμε ότι για να είναι λύση του προβλήματος η (21) πρέπει οι f_1 και f_2 να είναι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων

$$(22) \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 f_1 = 0$$

$$(23) \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right)^2 f_2 = 0 ,$$

αντίστοιχα.

Οι λύσεις των (22) και (23) είναι

$$(24) \quad f_1 = C_1 r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4$$

$$f_2 = C_5 r^2 + C_6 r^4 + \frac{C_7}{r^2} + C_8$$

όπου $C_1, C_2, \dots, C_8$ είναι αυθαίρετες σταθερές.

Οι εκφράσεις για τις τάσεις $\tau_{rr}, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta\theta}$ θα είναι

$$(25) \quad \begin{aligned} \tau_{rr} &= C_1(1+\ln r) + 2C_2 + \frac{C_3}{r^2} - \left(2C_5 + \frac{6C_7}{r^4} + \frac{4C_8}{r^2} \right) \cos 2\theta \\ \tau_{\theta\theta} &= C_1(3+2\ln r) + 2C_2 - \frac{C_3}{r^2} + \left(2C_5 + 12C_6 r^2 + \frac{6C_7}{r^4} \right) \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= \left(2C_5 + 6C_6 r^2 - \frac{6C_7}{r^4} - \frac{2C_8}{r^2} \right) \sin 2\theta . \end{aligned}$$

Οι σταθερές C_i θα προσδιοριστούν από τις συνοριακές συνθήκες (17) και



(18). Από την απαίτηση οι τάσεις να έχουν πεπερασμένες τιμές για $r \rightarrow \infty$ παίρνουμε

$$(26) \quad C_1 = C_6 = 0.$$

Από τη συνθήκη (17) έχουμε

$$(27) \quad 2C_2 + \frac{C_3}{\rho^2} = 0, \quad 2C_5 + \frac{6C_7}{\rho^4} + \frac{4C_8}{\rho^2} = 0$$

και

$$(28) \quad \tau_{r\theta}(r=\rho) = 0 \Rightarrow 2C_5 - \frac{6C_7}{\rho^4} - \frac{2C_8}{\rho^2} = 0.$$

Για $r \rightarrow \infty$ η κατανομή των τάσεων πρέπει να ανάγεται στην (20) και κατά συνέπεια

$$(29) \quad 2C_5 = -\frac{1}{2} S, \quad 2C_2 = \frac{1}{2} S.$$

Από τις (27), (28) και (29) παίρνουμε

$$(30) \quad C_2 = \frac{1}{4} S, \quad C_3 = -\frac{1}{2} S \rho^2, \quad C_5 = -\frac{1}{4} S, \\ C_7 = -\frac{1}{4} S \rho^4, \quad C_8 = \frac{1}{2} S \rho^2$$

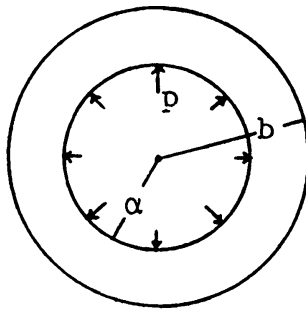
και οι εκφράσεις (25) για τις τάσεις γράφονται

$$(31) \quad \tau_{rr} = \frac{S}{2} \left\{ \left(1 - \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 \right) + \left(1 + 3 \left(\frac{\rho}{r} \right)^4 - 4 \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 \right) \cos 2\theta \right\} \\ \tau_{\theta\theta} = \frac{S}{2} \left\{ \left(1 + \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 \right) - \left(1 + 3 \left(\frac{\rho}{r} \right)^4 \right) \cos 2\theta \right\} \\ \tau_{r\theta} = -\frac{S}{2} \left\{ 1 - 3 \left(\frac{\rho}{r} \right)^4 + 2 \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 \right\} \sin 2\theta.$$

Από τις (31) βλέπουμε ότι η $\max \tau_{\theta\theta} = 3S$ και λαβαίνει χώρα για $r=\rho$ και $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, δηλαδή η παρουσία της τρύπας προκαλεί συγκέντρωση τάσεων.



Πρόβλημα 3. Εντατική κατάσταση κυλίνδρου μεγάλου πάχους από εσωτερική πίεση (σχ.3).



Σχ.3

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος στην εσωτερική επιφάνεια του κυλίνδρου είναι

$$(32) \quad \begin{aligned} \tau_{rr} n_r + \tau_{r\theta} n_\theta &= p \\ \tau_{r\theta} n_r + \tau_{\theta\theta} n_\theta &= 0 \end{aligned} \quad \text{για} \quad r=a$$

Αλλά

$$\bar{n} = (n_r, n_\theta) = (-1, 0)$$

και οι (32) παίρνουν τη μορφή

$$(33) \quad \tau_{rr} = -p, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{για} \quad r=a.$$

Για την εξωτερική επιφάνεια έχουμε

$$(34) \quad \tau_{rr} = \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{για} \quad r=b.$$

Από τις συνοριακές συνθήκες (32) και (34) και τη γεωμετρία του προβλήματος οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι το πρόβλημα που εξετάζουμε είναι ένα αξονοσυμμετρικό πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης. Σύμφωνα με την ανάλυση που προηγήθηκε στην παράγραφο (Ε.3) η έκφραση της τατισοσυνάρτησης και των τάσεων (Ε.28) και η (Ε.39), θα είναι

$$(35) \quad F = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + D$$



$$\begin{aligned}
 \tau_{rr} &= \frac{A}{r^2} + B(1+2\ln r) + 2C \\
 (36) \quad \tau_{\theta\theta} &= -\frac{A}{r^2} + B(3+2\ln r) + 2C \\
 \tau_{r\theta} &= 0.
 \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις (36) περιέχουν τρεις άγνωστες σταθερές A , B και C . Επειδή από τις συνοριακές συνθήκες διαθέτουμε μόνο δύο εξισώσεις για τον προσδιορισμό των A, B και C η θεώρηση μόνο αυτών των συνθηκών δεν αρκεί για τον προσδιορισμό τους (κατά μοναδικό τρόπο). Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στο να εξετάσουμε και τις μετατοπίσεις του κυλίνδρου.

Από τις καταστατικές σχέσεις (Ε.75) και τις κινηματικές σχέσεις (Ε.74) για την περίπτωση αξονοσυμμετρικών μετατοπίσεων, έχουμε

$$\begin{aligned}
 e_{rr} &= \frac{du_r}{dr} = \frac{1+\nu}{E} \{ (1-\nu)\tau_{rr} - \nu\tau_{\theta\theta} \} \\
 (37) \quad e_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r} = \frac{1+\nu}{E} \{ (1-\nu)\tau_{\theta\theta} - \nu\tau_{rr} \} \\
 e_{r\theta} &= \frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r} = 0.
 \end{aligned}$$

Αν εισάγουμε τις (36) στις (37) και ολοκληρώσουμε την (37α) η συγκριση της έκφρασης που θα προκύψει με την (37β) μας δίνει το συμπέρασμα $B=0$ και κατά συνέπεια από τις συνοριακές συνθήκες έχουμε

$$(38) \quad A = -\frac{\alpha^2 b^2}{b^2 - \alpha^2} p, \quad C = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{b^2 - \alpha^2} p$$

και οι εκφράσεις για τις τάσεις είναι

$$\begin{aligned}
 \tau_{rr} &= \frac{\alpha^2 p}{b^2 - \alpha^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \\
 (39) \quad \tau_{\theta\theta} &= \frac{\alpha^2 p}{b^2 - \alpha^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \\
 \tau_{r\theta} &= 0.
 \end{aligned}$$



Η έκφραση για τη μετατόπιση είναι

$$(40) \quad u_r = \frac{1+\nu}{E} \frac{\alpha^2 p}{b^2 - \alpha^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} - 2\nu\right) .$$

Από την ολοκλήρωση της (37.γ) έχουμε

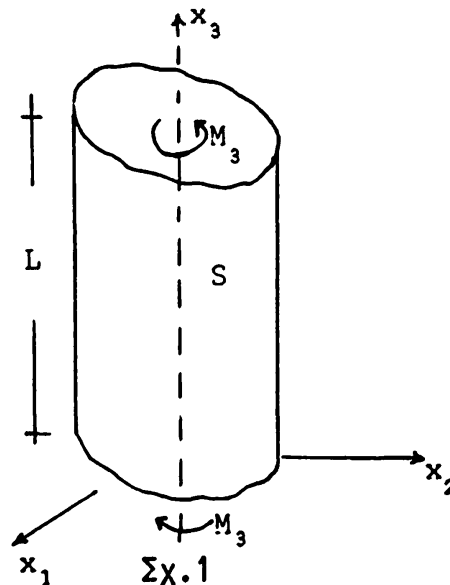
$$(41) \quad u_\theta = kr ,$$

δηλαδή μια στροφή απόλυτα στερεού σώματος περί τον άξονα του κυλίνδρου. Αν υποθέσουμε ότι τα άκρα του κυλίνδρου είναι πακτωμένα τότε μπορούμε να θέσουμε $k=0 \Rightarrow u_\theta=0$.

Από την παραπάνω λύση παρατηρούμε ότι η τ_{rr} είναι πάντα αρνητική (θλίψη) και η $\tau_{\theta\theta}$ πάντα θετική (ελκυσμός) και ακόμα ότι η $\tau_{\theta\theta}$ είναι πάντα μεγαλύτερη από την εσωτερική πίεση, $\tau_{\theta\theta} > p$.

4. Το πρόβλημα στρέψης του Saint Venant.

Ας θεωρήσουμε μια πρισματική ράβδο μήκους L (σχ.1). Η πλευρική επιφάνεια S είναι ελεύθερη από επιφανειακές δυνάμεις. Στα δύο άκρα $x_3=0$, $x_3=L$ επιβάλλονται τάσεις που έχουν μηδενική συνισταμένη δύναμη και στρεπτική ροπή M_3 (το διάνυσμά της είναι στον άξονα x_3). Η ράβδος είναι φυσικό ότι θα στραφεί υπό την επίδραση των στρεπτικών ροπών M_3



Ο αντικειμενικός μας σκοπός είναι να προσδιορίσουμε την εντατική και παραμορφωτική κατάσταση της ράβδου σαν συναρτήσεις της γεωμετρίας της διατομής, των ελαστικών ιδιοτήτων του υλικού της και της M_3 .

Στην επιφάνεια S έχουμε

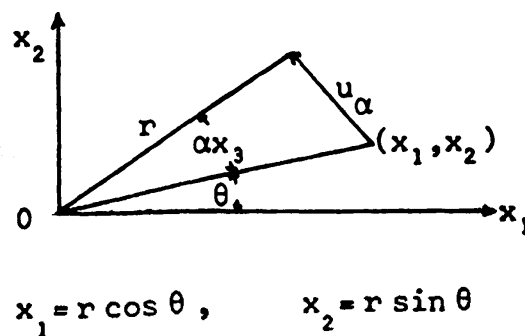
$$(1) \quad \bar{T}_i = \tau_{i\alpha} n_\alpha = 0, \quad \alpha=1,2, \quad i=1,2,3$$

$$\bar{n} = (n_1, n_2, 0) .$$

Θα θεωρήσουμε ότι η $M_3=M$ προκαλεί

- ι) μία μικρή στροφή περί τον x_3 -άξονα, σταθερής τιμής α ανά μονάδα μήκους και
- ιι) μία μετατόπιση στη x_3 -διεύθυνση, που είναι η ίδια για όλες τις διατομές της ράβδου.

Αν επιβάλουμε μια περιστροφή ώστε η διατομή $x_3=0$ να μην περιστραφεί, η θέση ενός σημείου (x_1, x_2) μιας διατομής σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) θα είναι (σχ.2)



Σχ.2

Μετά από την περιστροφή που περιγράφηκε στην παραδοχή (ι) το σημείο θα έχει συντεταγμένες

$$x_1 = r \cos(\theta + \alpha x_3), \quad x_2 = r \sin(\theta + \alpha x_3)$$

όπου x_3 ορίζει τη θέση της διατομής.

Το διάνυσμα μετατόπισης u_α θα έχει συνιστώσες



$$(2) \quad u_1 = r \cos(\theta + \alpha x_3) - r \cos \theta, \quad u_2 = r \sin(\theta + \alpha x_3) - r \sin \theta.$$

Αν αναπτύξουμε τις (2), λαμβάνοντας υπόψη ότι η ολική γωνία αx_3 είναι μικρή, θα πάρουμε

$$(3) \quad u_1 = -\alpha x_2 x_3, \quad u_2 = \alpha x_1 x_3$$

ή

$$(4) \quad u_\alpha = -\epsilon_{\alpha\beta} \alpha x_\beta x_3, \quad \alpha, \beta = 1, 2$$

όπου $\epsilon_{\alpha\beta}$ είναι ο διδιάστατος εναλλακτικός τανυστής

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha=1, \beta=2 \\ -1, & \alpha=2, \beta=1 \\ 0, & \alpha=\beta \end{cases}.$$

Σύμφωνα με την παραδοχή (ii) η μετατόπιση κατά τον x_3 -άξονα θα είναι

$$(5) \quad u_3 = \alpha \psi(x_1, x_2)$$

όπου ψ είναι η συνάρτηση συστροφής του Saint-Venant.

Αν εισάγουμε τις u_i στις εξισώσεις του Navier ($B_i=0$),

$$\mu u_{i,jj} + (\mu + \lambda) u_{j,ji} = 0$$

και λάβουμε υπόψη ότι

$$u_{\alpha,jj} = 0, \quad u_{3,jj} = \alpha \psi_{,\alpha\alpha}, \quad u_{j,j} = -\epsilon_{\alpha\beta} (x_\beta x_3)_{,\alpha} = -\epsilon_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} x_3 = 0$$

θα πάρουμε

$$(6) \quad \psi_{,\alpha\alpha} = 0 \quad x_\alpha \in A$$

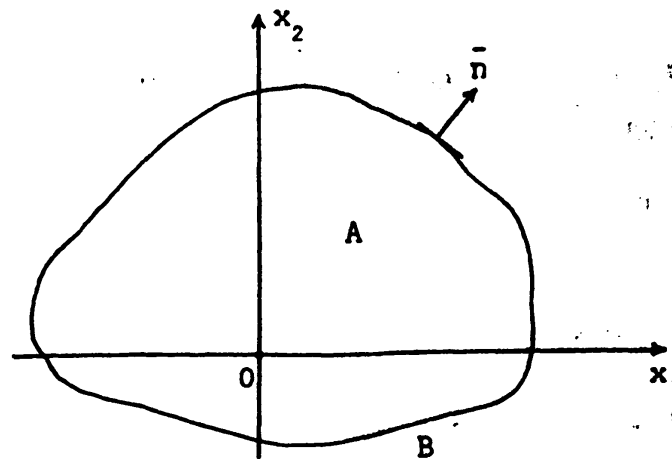
όπου A είναι η περιοχή της διατομής (σχ.3).

Η συνάρτηση ψ θα πρέπει να είναι αρμονική συνάρτηση ($\nabla^2 \psi = 0$).

Αν εισάγουμε τις u_α και u_3 στις καταστατικές σχέσεις

$$\tau_{ij} = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ij}$$





Σχ.3

θα πάρουμε

$$(7) \quad \tau_{\alpha 3} = \mu \alpha (\psi_{,\alpha} - \epsilon_{\alpha\beta} x_{\beta}) = \tau_{3\alpha}, \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

Οι συνοριακές συνθήκες (1), μετά τις (7), παίρνουν τη μορφή

$$\psi_{,\alpha} n_{\alpha} - \epsilon_{\alpha\beta} x_{\beta} n_{\alpha} = 0, \quad \epsilon B$$

ή

$$(8) \quad \psi_{,n} = \epsilon_{\alpha\beta} x_{\beta} n_{\alpha}, \quad \epsilon B$$

ή

$$(\psi_{,1} - x_2) n_1 + (\psi_{,2} + x_1) n_2 = 0, \quad \epsilon S.$$

Από τις (6) και (3) βλέπουμε ότι η ψ ικανοποιεί ένα πρόβλημα Neumann (το δεύτερο πρόβλημα συνοριακών τιμών της θεωρίας δυναμικού).

Επειδή η μη-μηδενικές τάσεις τ_{13} και τ_{23} της (7) παράγουν συνιστώσες δύναμης κατά τις x_1 και x_2 -διευθύνσεις σένα στοιχείο dA της επιφάνειας της διατομής, θα πρέπει να απαιτήσουμε να έχουν συνισταμένα ίση με το μηδέν και ροπή ίση με M_3 . Οι συνθήκες αυτές είναι :

$$(9) \quad F_{\alpha} = \int_A \tau_{\alpha 3} dA = 0,$$



$$(10) \quad M_3 = \int_A \varepsilon_{\alpha\beta} x_\alpha \tau_{3\beta} dA = \int_A (x_1 \tau_{32} - x_2 \tau_{31}) dx_1 dx_2 .$$

Ας εφαρμόσουμε τώρα την παραπάνω ανάλυση στην περίπτωση κυκλικής και ορθογωνικής ράβδου.

Κυκλική ράβδος : Στην περίπτωση αυτή οι συνθήκες που αναφέρθηκαν ικανοποιούνται για $\psi \equiv 0$. Από φυσική σκοπιά αυτό σημαίνει ότι διατομές της ράβδου παραμένουν επίπεδες και απλά στρέφονται κατά τη δράση της M_3 . Από την (10) παίρνουμε ($\psi \equiv 0$)

$$(11) \quad M_3 = J \mu \alpha, \quad J = \pi R^4 / 2$$

όπου R η ακτίνα της ράβδου. Αν είναι γνωστή η M_3 από την (11) προσδιορίζεται η γωνία αx_3 στη διατομή x_3 της ράβδου. Αν εισάγουμε την (11) στις (7) παίρνουμε

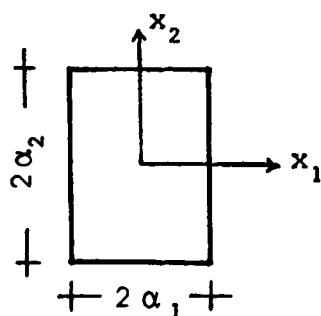
$$(12) \quad \tau_{\alpha 3} = -\varepsilon_{\alpha\beta} x_\beta \frac{M_3}{J} .$$

Η μέγιστη τάση θα συμβαίνει στα σημεία $(0, R)$ και $(R, 0)$ και είναι

$$(13) \quad \tau_{\max} = M_3 \frac{R}{J} .$$

Η παραπάνω λύση ισχύει και για κύλινδρο με εσωτερική και εξωτερική ακτίνα R_i και R_o , αντίστοιχα ($J = \pi(R_o^4 - R_i^4)/2$).

Ορθογωνική ράβδος : Η λύση του προβλήματος της στρέψης μιας ράβδου ορθογωνικής διατομής (σχ.4) δεν είναι τόσο απλή όσο στην περίπτωση της κυκλικής ράβδου .



Σχ.4



Αν εισάγουμε τη μεταβλητή ϕ ,

$$(14) \quad \psi = x_1 x_2 + \phi$$

βλέπουμε από την (6) ότι

$$(15) \quad \nabla^2 \phi = 0,$$

δηλαδή αν ϕ είναι μία αρμονική συνάρτηση τότε και η $x_1 x_2 + \phi$ είναι επίσης.
Οι συνοριακές συνθήκες (δ) παίρνουν τώρα τη μορφή

$$(16) \quad \begin{aligned} \phi_{,1} &= 0 && \text{για} && x_1 = \pm a_1 \\ \phi_{,2} &= -2x_1 && \text{για} && x_2 = \pm a_2 \end{aligned}$$

Για το πρόβλημα (15)-(16) εκλέγουμε λύση της μορφής

$$(17) \quad \phi(x_1, x_2) = A \sin k x_1 \sinh k x_2$$

που ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση (15), δηλαδή είναι αρμονική συνάρτηση. Από την (16α) έχουμε

$$(18) \quad A \cos k a_1 = 0 \Rightarrow k = \frac{n\pi}{2a_1}, \quad n=1,3,5,\dots$$

Για κάθε $n=1,3,5,\dots$ θα έχουμε μία λύση της (15) που ικανοποιεί τη συνθήκη (16α) και κατά συνέπεια η

$$(19) \quad \phi(x_1, x_2) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{2a_1} x_1\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{2a_2} x_2\right)$$

θα είναι επίσης λύση της (15) που ικανοποιεί την (16α). Από τη συνοριακή συνθήκη (16β) έχουμε

$$(20) \quad -2x_1 = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} A_n \left(\frac{n\pi}{2a_1}\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{2a_1} a_2\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2a_1} x_1\right)$$

Από τη θεωρία των σειρών Fourier υπολογίζουμε τους συντελεστές A_n ώστε να ικανοποιείται η (20), δηλαδή



$$(21) \quad A_n = (-1)^{(n+1)/2} \frac{32\alpha_1^2}{\pi^3 n^3} \frac{1}{\cosh(n\pi\alpha_2/2\alpha_1)} .$$

Η λύση του προβλήματος (15)-(16) είναι

$$(22) \quad \phi(x_1, x_2) = \frac{32\alpha_1^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} (-1)^{(n+1)/2} \frac{1}{n^3} \frac{\sinh(n\pi x_2/2\alpha_1)}{\cosh(n\pi\alpha_2/2\alpha_1)} \sin \frac{n\pi x_1}{2\alpha_1} .$$

Για να είναι η $\psi = x_1 x_2 + \phi$ λύση του προβλήματος στρέψης της ράβδου θα πρέπει να ικανοποιούνται οι συνθήκες (9) και (10).

Η (9) γράφεται

$$(23) \quad F_\alpha = \mu\alpha \int_{-\alpha_2}^{\alpha_2} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} (\psi, \alpha - \epsilon_{\alpha\beta} x_\beta) dx_1 dx_2 .$$

Για $\alpha=1$ η (23) παίρνει τη μορφή

$$(24) \quad F_1 = \mu\alpha \int_{-\alpha_2}^{\alpha_2} \{ \psi(\alpha_1, x_2) - \psi(-\alpha_1, x_2) \} dx_2 .$$

Επειδή όμως το ολοκλήρωμα της $\{ \quad \}$ είναι μία άρτια συνάρτηση του x_2 η $F_1=0$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και $F_2=0$.

Η συνθήκη (10) στην περίπτωση που εξετάζουμε γράφεται

$$(25) \quad M_3 = \mu\alpha \int_{-\alpha_2}^{\alpha_2} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} (x_1^2 + x_2^2 + x_1 \psi_{,2} - x_2 \psi_{,1}) dx_1 dx_2$$

$$= \frac{16}{3} \mu\alpha \alpha_1^3 \alpha_2 - \left(\frac{4}{\pi}\right)^5 \mu\alpha \alpha_1^5 \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi\alpha_2}{2\alpha_1}$$

και οι μη μηδενιζόμενες τάσεις δίνονται από τις σχέσεις

$$(26) \quad \tau_{13} = \frac{16\mu\alpha\alpha_1}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} (-1)^{(n+1)/2} \frac{1}{n^2} \frac{\sinh(n\pi x_2/2\alpha_1)}{\cosh(n\pi\alpha_2/2\alpha_1)} \cos \frac{n\pi x_1}{2\alpha_1}$$

$$(27) \quad \tau_{23} = 2\mu\alpha x_1 + \frac{16\mu\alpha\alpha_1}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} (-1)^{(n+1)/2} \frac{1}{n^2} \frac{\cosh(n\pi x_2/2\alpha_1)}{\cosh(n\pi\alpha_2/2\alpha_1)} \sin \frac{n\pi x_1}{2\alpha_1}$$



Όπως είναι εύκολο να διαπιστώσουμε, οι σειρές (25), (26) και (27) συγκλίνουν πολύ γρήγορα και κατά συνέπεια μπορούμε εύκολα να πάρουμε αριθμητικά αποτελέσματα. Η μέγιστη τάση συμβαίνει στα σημεία $(\pm \alpha_1, 0)$. Αν γράψουμε

$$(28) \quad M_3 = K_1 (2\alpha_1)^3 (2\alpha_2) \mu \alpha$$

και

$$(29) \quad \tau_{\max} = K_2 (2\alpha_1) \mu \alpha$$

μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω σχέσεις για τον υπολογισμό των συντελεστών K_1 και K_2 για διάφορες τιμές του λόγου α_2/α_1 (Πιν .1).

Πίνακας 1. Σταθερές για τη στρέψη ορθογωνικών ράβδων

α_2/α_1	K_1	K_2	α_2/α_1	K_1	K_2
1	0.142	0.675	5.	0.292	0.999
1.5	0.196	0.848	6.	0.299	1.000
2.	0.229	0.930	7.	0.304	1.000
2.5	0.250	0.968	8.	0.307	1.000
3.	0.264	0.993	9.	0.310	1.000
3.5	0.274	0.993	10.	0.312	1.000
4.	0.281	0.997	∞	0.333	1.000

5. Τριδιάστατα προβλήματα.

Για την αντιμετώπιση των τριδιάστατων προβλημάτων της θεωρίας ελαστικότητας θα συζητήσουμε πρώτα τη λύση των εξισώσεων Navier

$$(1) \quad \mu u_{i,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,ki} + B_i = 0, \quad i=1,2,3.$$

Σε πρώτο στάδιο θα θεωρήσουμε τις ομογενείς εξισώσεις (1),

$$(2) \quad \mu u_{i,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,ki} = 0.$$



Το διανυσματικό πεδίο u_i μπορεί να εκφραστεί με τον ακόλουθο τρόπο (θεώρημα του Helmholtz)^{*}

$$(3) \quad u_i = \frac{1}{\lambda + \mu} \phi_{,i} + \frac{1}{\mu} \epsilon_{ijk} \psi_{k,j}, \quad \psi_{i,i} = 0$$

Από την (3) έχουμε

$$(4) \quad u_{i,i} = \frac{1}{\lambda + \mu} \phi_{,ii} \equiv \Theta$$

και η (4) γράφεται

$$(5) \quad \nabla^2 (\mu u_i + \phi_{,i}) = 0$$

Από την (5) οδηγούμαστε στο ότι

(*) Αν

$$(\alpha) \quad u_i = \phi_{,i} + \epsilon_{ijk} \psi_{k,j}, \quad \psi_{i,i} = 0$$

τότε

$$(\beta) \quad u_{i,i} = \phi_{,ii}$$

και

$$(\gamma) \quad \psi_{i,jj} = -2\omega_i = -\epsilon_{ijk} u_{k,j}$$

Οι συναρτήσεις ϕ και ψ_i προσδιορίζονται ανεξάρτητα από την (α) και είναι

$$\phi = \phi^* - \frac{1}{4\pi} \int_V u_i(x'_k) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) dx'_1 dx'_2 dx'_3$$

$$\psi_i = \psi_i^* + \frac{1}{4\pi} \int_V \epsilon_{ijk} u_k(x'_l) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{r} \right) dx'_1 dx'_2 dx'_3$$

όπου ϕ^*, ψ_i^* είναι αυθαίρετες αρμονικές συναρτήσεις και $r^2 = (x_\alpha - x'_\alpha)(x_\alpha - x'_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, 3$. (A. Love (1944), Mathematical theory of elasticity, σελ. 48).



$$(6) \quad \mu u_i + \phi_{,i} = q_i \quad ,$$

όπου q_i είναι ένα αυθαίρετο αρμονικό διάνυσμα. Από την (6), μετά από παραγώγιση, παίρνουμε

$$\mu u_{i,i} + \phi_{,ii} = q_{i,i}$$

και λαμβάνοντας υπόψη την (4) έχουμε

$$(7) \quad \nabla^2 \phi = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} q_{i,i} \quad .$$

Μία μερική λύση της (7) είναι η

$$(8) \quad \phi_p = \frac{1}{2} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} x_j q_j$$

αφού

$$\nabla^2 (x_j q_j) = 2q_{j,j} \quad .$$

Η γενική λύση λοιπόν της (7) μπορεί να γραφτεί με τη μορφή

$$(9) \quad \phi = q_0 + \phi_p \quad .$$

όπου q_0 είναι μία αυθαίρετη αρμονική συνάρτηση.

Αν εισάγουμε την (9) στην (6) παίρνουμε την έκφραση του διανύσματος μετατόπισης με τη μορφή

$$(10) \quad \mu u_i = -q_{0,i} - \phi_{p,i} + q_i = q_i - q_{0,i} - \frac{1}{2} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} (x_j q_j)_{,i}$$

που περιέχει 4-αυθαίρετες αρμονικές συναρτήσεις q_i ($i=0,1,2,3$). Η μορφή της λύσης (10) οφείλεται στους Παρκονίτς (1932) και Neuber (1946).

Μια άλλη ενδιαφέρουσα μορφή λύσης των (2) είναι η

$$(11) \quad \mu u_i = 2(1-\nu) \nabla^2 F_i - F_{j,j,i}$$

όπου οι συναρτήσεις F_i είναι διαρμονικές συναρτήσεις. Η (11) οφείλεται στο Galerkin (1930). Η λύση (11) σχετίζεται με τη λύση των Παρκονίτς-Neuber. Αν θέσουμε



$$\nabla^2 F_i = \frac{1}{2(1-\nu)} q_i, \quad F_{j,j} = \phi$$

η (11) παίρνει τη μορφή

$$u_i = q_i - \phi_{,i}$$

που είναι ακριβώς η (6). Για τις διαρμονικές συναρτήσεις πρέπει να ανατρέξουμε στο σχόλιο της παραγράφου (Ε.2).

Η γενική λύση της (1) λαμβάνεται αν προσθέσουμε μια μερική της λύση στη (10). Μια μερική λύση της (1) (βλ. A.Love, σελ.133-185) είναι

$$(12) \quad u_i(x_k) = C_1 \int_V \left\{ C_2 \frac{B_i(x'_k)}{r} - \left(\frac{1}{r} \right)_{,i} (x_j - x'_j) B_j(x'_k) \right\} dx'_1 dx'_2 dx'_3$$

όπου

$$C_1 = \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)}, \quad C_2 = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}, \quad \left(\frac{1}{r} \right)_{,i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right)$$

και

$$r = \{ (x_\alpha - x'_\alpha)(x_\alpha - x'_\alpha) \}^{1/2}, \quad \alpha = 1, 2, 3$$

είναι η απόσταση από το σημείο x_α στο μεταβλητό σημείο x'_α στο V . Οι συναρτήσεις $B_i(x'_k)$ είναι οι συνιστώσες των μαζικών δυνάμεων εκφρασμένες σε όρους των μεταβλητών ολοκλήρωσης x'_k . Σαν άσκηση να αποδειχτεί ότι η (12) ικανοποιεί την (1).

Η λύση των (1) για συγκεντρωμένο φορτίο B_i^0 που εφαρμόζεται στο σημείο x_i^1 μπορεί να προκύψει από τη (12). Ας υποθέσουμε ότι οι μαζικές δυνάμεις B_i είναι κατανεμημένες σε μια υποπεριοχή V' του V που περικλείει το σημείο x_i^1 και μηδενίζεται στην περιοχή $V-V'$. Η συνισταμένη δύναμη θα είναι

$$(13) \quad B_i^0 = \int_{V'} B_i dV.$$

Αν η B_i αυξάνεται έτσι ώστε το ολοκλήρωμα να έχει πεπερασμένο όριο B_i^0 για $V' \rightarrow 0$ τότε λέμε ότι η B_i^0 είναι συγκεντρωμένη δύναμη που ενεργεί στο σημείο x_i^1 .

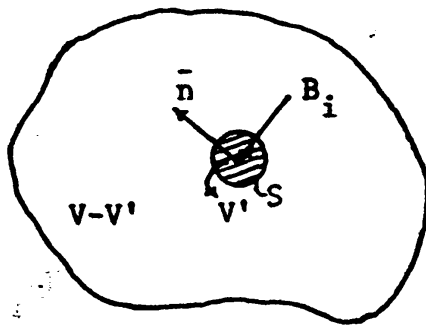
Οι μετατοπίσεις $u_i(x_k)$ στο σημείο $x_i \neq x_i^1$ που παράγονται από τη δύ-



ναμη B_i^0 που εφαρμόζεται στο σημείο $x_i^!$ προκύπτουν από την (12) και είναι

$$(14) \quad u_i(x_k) = \frac{\lambda+3\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \frac{B_i^0}{r} + \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \frac{(x_i-x_i^!)(x_j-x_j^!)}{r^3} B_j^0$$

Η (14) ικανοποιεί τις ομογενείς εξισώσεις (2) για κάθε $x_i \neq x_i^!$. Το σημείο $x_i = x_i^!$ είναι ανώμαλο σημείο και η λύση (14) ισχύει για την περιοχή $v-v'$, όπου v' είναι μια σφαίρα (σχ.1), μικρής ακτίνας $r=a$ με κέντρο το σημείο $x_i = x_i^!$.



Σχ.1

Αν $x_i^! = 0$ και $(B_1^0, B_2^0, B_3^0) = (0, 0, P)$ η (14) γράφεται

$$(15) \quad u_\alpha = C \frac{x_\alpha x_3}{r^3}, \quad \alpha=1,2$$

$$u_3 = C \left\{ \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu} \frac{1}{r} + \frac{x_3^2}{r^3} \right\}$$

όπου

$$C = \frac{(\lambda+\mu)P}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}, \quad r^2 = x_i x_i^!$$

Αν εισάγουμε τις (15) στις καταστατικές σχέσεις

$$\tau_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i})$$

θα πάρουμε

$$\tau_{\alpha\alpha} = - \frac{2\mu C x_3}{r^3} \left\{ 3 \left(\frac{x_3^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{\lambda+\mu} \right\}$$



$$\tau_{33} = - \frac{2\mu C x_3}{r^3} \left\{ 3 \left(\frac{x_3}{r} \right)^2 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right\}$$

$$\tau_{\alpha 3} = - \frac{2\mu C x_\alpha}{r^3} \left\{ 3 \left(\frac{x_3}{r} \right)^2 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right\}$$

$$\tau_{12} = - \frac{6\mu C x_1 x_2 x_3}{r^5}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Οι επιφανειακές δυνάμεις T_i^n στην επιφάνεια της σφαίρας S που οφείλονται στις (16) είναι

$$T_i^n = \tau_{ij} n_j, \quad n_j = \frac{x_j}{\alpha}.$$

δηλαδή

$$(17) \quad T_\alpha^n = - \frac{6\mu C x_\alpha x_3}{\alpha^4}, \quad \tau_3 = - \frac{6\mu C x_3^2}{\alpha^4} - \frac{2\mu^2 C}{(\lambda + \mu)\alpha^2}.$$

Αν ολοκληρώσουμε τις (17) στην επιφάνεια της σφαίρας S θα πάρουμε

$$(18) \quad \int_S T_\alpha ds = 0, \quad \int_S T_3 ds = - \frac{8\pi\mu C(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} = -P$$

δηλαδή η σφαίρα βρίσκεται σε ισορροπία και η λύση (15) είναι αποδεκτή.

Παρατήρηση : Αν στη λύση (10) υποθέσουμε ότι $q_i \equiv 0$ τότε η

$$(19) \quad \mu u_{i,i} = -q_{0,i}$$

εκφράζει μια ειδική λύση των (2). Από την (19) έχουμε

$$\mu u_{i,i} = -q_{0,ii} \equiv 0, \quad q_0: \text{αρμον. συνάρτηση}$$

δηλαδή

$$(20) \quad u_{i,i} = \theta \equiv 0$$

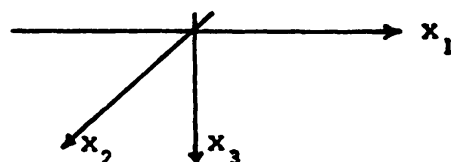
και

$$(21) \quad \tau_{ij} = -2\mu q_{0,ij}.$$



5.1 Το πρόβλημα του Boussinesq.

Την παραπάνω ανάλυση θα την εφαρμόσουμε για τη λύση ενός προβλήματος συνοριακών τιμών. Ας θεωρήσουμε τον ημίσφωρο $x_3 \geq 0$ (σχ.2) στο επίπεδο $x_3=0$ του οποίου οι μετατοπίσεις



Σχ.2

είναι προδιαγραμμένες, δηλαδή

$$(22) \quad u_j = f_j(x_1, x_2)$$

όπου f_j είναι γνωστές συναρτήσεις που μηδενίζονται στο άπειρο.

Οι εξισώσεις του Navier (2) για $B_i=0$ είναι

$$(23) \quad \mu \nabla^2 u_j + (\lambda + \mu) \theta_{,j} = 0.$$

Επειδή οι u_j είναι διαρμονικές συναρτήσεις μπορούν να έχουν τη μορφή

$$(24) \quad u_j = \phi_j + x_3 \psi_{,j}$$

όπου ϕ_j και ψ είναι αρμονικές συναρτήσεις. Οι συναρτήσεις αυτές δεν είναι ανεξάρτητες αφού οι u_j πρέπει να ικανοποιούν τις (23), δηλαδή

$$(25) \quad \{(\lambda + 3\mu)\psi_{,j} + (\lambda + \mu)\phi_{k,k}\}_{,j} = 0.$$

Αν ολοκληρώσουμε την (25) και παραλείψουμε τη σταθερά ολοκλήρωσης θα πάρουμε

$$(26) \quad \psi_{,j} = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} \phi_{k,k}.$$

Οι συναρτήσεις ϕ_j και ψ πρέπει να εκλεγούν έτσι ώστε στο σύνορο $x_3=0$ να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες (22) και στο άπειρο $u_j=0$. Αν θέσουμε $x_3=0$ στις (24) έχουμε



$$(27) \quad u_j = \phi_j(x_1, x_2, 0) = f_j(x_1, x_2).$$

Το πρόβλημα που έχει προκύψει είναι ένα πρόβλημα που πραγματεύεται η θεωρία δυναμικού. Η πιο απλή μέθοδος για τον προσδιορισμό της ϕ_j είναι εκείνη που βασίζεται στους μετασχηματισμούς Fourier (βλ. I. Sneddon (1951), Fourier Transforms)

Αν υποθέσουμε ότι

$$(23) \quad \phi_j(x_1, x_2, x_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_j(\alpha, \beta) e^{\gamma x_3 + i(\alpha x_1 + \beta x_2)} d\alpha d\beta$$

και απαιτήσουμε όπως η (23) εκφράζει αρμονικές συναρτήσεις που μηδενίζονται για $x_3 = \infty$ παίρνουμε $\gamma = -(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$. Επειδή όμως οι ϕ_j ικανοποιούν την (27)

$$(29) \quad f_j(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_j(\alpha, \beta) e^{i(\alpha x_1 + \beta x_2)} d\alpha d\beta.$$

Οι συναρτήσεις $f_j(x_1, x_2)$, υπό κάποιες προϋποθέσεις, μπορούν να εκφραστούν μένα ολοκλήρωμα Fourier της μορφής (29), όπου

$$(30) \quad g_j(\alpha, \beta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_j(x'_1, x'_2) e^{i(\alpha x'_1 + \beta x'_2)} dx'_1 dx'_2.$$

Αν εισάγουμε τις (30) στις (23) παίρνουμε τις συναρτήσεις ϕ_j .

Για να προσδιορίσουμε τις μετατοπίσεις u_j χρειαζόμαστε τις συναρτήσεις $\psi_{,j}$ που προσδιορίζονται, με ολοκλήρωση, από την (26).

Η εύρεση των ολοκληρωτικών εκφράσεων για τις u_j αφήνεται σαν άσκηση στον αναγνώστη.

Παρατήρηση : Στην περίπτωση που το σύνορο είναι σφαίρα θα πρέπει να αναζητήσουμε λύσεις της μορφής (Ε.2, θεωρ.2).

$$(31) \quad u_j = \phi_j + (r^2 - r_0^2) \psi_{,j}$$



5.2 Το πρόβλημα των θερμοελαστικών τάσεων.

Οι εξισώσεις ισορροπίας ενός θερμοελαστικού σώματος είναι (Δ.46)

$$(32) \quad \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} = -(B_i - \gamma \theta_{,i}) \quad .$$

Η λύση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (32) πρέπει να ικανοποιεί κάποιες συνοριακές συνθήκες στη συνοριακή επιφάνεια του σώματος. Η συνάρτηση της θερμοκρασίας θεωρείται γνωστή (προσδιορίζεται από τη λύση της εξίσωσης Fourier για την αγωγή θερμότητας).

Από την (32) γίνεται φανερό ότι το αποτέλεσμα της μεταβολής της θερμοκρασίας θ ισοδυναμεί με αντικατάσταση των μαζικών δυνάμεων B_i στις εξισώσεις του Navier με $B_i - \gamma \theta_{,i}$ και των επιφανειακών δυνάμεων με $T_i + \gamma \theta n_i$ ($\tau_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) - \gamma \theta \delta_{ij}$).

Ας υποθέσουμε ότι η λύση των (32) έχει τη μορφή

$$(33) \quad u_i = \phi_{,i}$$

όπου ϕ είναι μια κατάλληλα διαφορίσιμη βαθμωτή συνάρτηση. Από την (33) έχουμε

$$u_{j,j} = \phi_{,jj} \quad , \quad u_{i,jj} = \phi_{,ijj}$$

και η (32) παίρνει τη μορφή

$$(34) \quad \mu \phi_{,ikk} + (\lambda + \mu) \phi_{,kki} = -B_i + \gamma \theta_{,i} \quad .$$

Αν οι μαζικές δυνάμεις είναι συντηρητικές, $B_i = -F_{,i}$, η (30) γράφεται

$$(35) \quad (\lambda + 2\mu) \phi_{,kki} = (F + \gamma \theta)_{,i} \quad .$$

Αν ολοκληρώσουμε την (35) ως προς x_i παίρνουμε

$$(36) \quad \phi_{,kk} = \frac{1}{\lambda + 2\mu} (F + \gamma \theta) + \text{σταθ.}$$

Επειδή το ενδιαφέρον μας περιορίζεται στην εύρεση μιας μερικής λύσης της (36) θα αναζητήσουμε ένα ολοκλήρωμα της εξίσωσης του Poisson



$$(37) \quad \phi_{,kk} = \frac{1}{\lambda+2\mu} (F+\gamma\theta) .$$

Ένα τέτοιο ολοκλήρωμα είναι, γνωστό από τη θεωρία δυναμικού

$$(38) \quad \phi(x_i) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho(x'_i)}{r(x_i, x'_i)} dx'_1 dx'_2 dx'_3$$

όπου

$$\rho = \frac{1}{\lambda+2\mu} (F+\gamma\theta) .$$

$$r^2 = (x_i - x'_i)(x_i - x'_i) .$$

Μετά τον προσδιορισμό της ϕ οι μετατοπίσεις προσδιορίζονται από την (33).

Παρατήρηση : Στην περίπτωση ενός σφαιρικού σώματος με αξονοσυμμετρική θερμοκρασιακή κατανομή $\theta(r)$ θα αναζητήσουμε λύση της μορφής

$$(39) \quad u_i = x_i \phi(r) , \quad r^2 = x_i x_i .$$

5.3 Ταλαντώσεις ελαστικών σωμάτων.

Από τη θεωρία των ελεύθερων γραμμικών ταλαντώσεων ζευγμένων δυναμικών συστημάτων με πεπερασμένο αριθμό βαθμών ελευθερίας είναι γνωστό ότι η πιο γενική κίνηση γύρω από την κατάσταση ισορροπίας είναι σύνθεση ενός πεπερασμένου αριθμού ειδικών τρόπων ταλάντωσης. Ο αριθμός των τρόπων ταλάντωσης είναι ίσος με τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας του συστήματος. Η γενική κίνηση του συστήματος με n -βαθμούς ελευθερίας, μπορεί να εκφραστεί σαν ένας γραμμικός συνδυασμός n -απλών αρμονικών κινήσεων, με n διακεκριμένες συχνότητες .

Το πρόβλημα των ελεύθερων ταλαντώσεων από μαθηματική σκοπιά είναι ένα πρόβλημα ιδιοτιμών με ιδιοτιμές τις συχνότητες ταλάντωσης του συστήματος και αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις, συναρτήσεις που περιγράφουν τους τρόπους ταλάντωσης του συστήματος. Οι συχνότητες υπολογίζονται από την εξίσωση συχνότητας που προσδιορίζεται από τις τετραγωνικές



μορφές που εκφράζουν την κινητική και δυναμική ενέργεια του συστήματος. (βλ. H. Reismann and P. Pawlik (1974) "Elastokinetics" για λεπτομέρειες στα θέματα ελεύθερων και εξαναγκασμένων ταλαντώσεων διακεκριμένων και συνεχών συστημάτων).

Όταν το σύστημα είναι συνεχές η εξίσωση συχνότητας έχει άπειρες πραγματικές ρίζες και κατά συνέπεια άπειρες ιδιομορφές που εκφράζουν τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης. Οι συναρτήσεις που εκφράζουν τις ιδιομορφές είναι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων κίνησης με κατάλληλες συνοριακές συνθήκες, δηλαδή

$$(40) \quad \mu u_{i,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,ki} = \rho \ddot{u}_i, \quad x_i \in V$$

$$(41) \quad \tau_{ij} n_j = 0 \quad x_i \in S.$$

Επειδή οι κανονικές ταλαντώσεις είναι απλές αρμονικές είναι φυσικό να αναζητήσουμε μερικές λύσεις των (40) με τη μορφή

$$(42) \quad u_i = \phi_i(x_k) \begin{cases} \cos \omega t \\ \text{ή} \\ \sin \omega t \end{cases}.$$

Αν εισάγουμε την (42) στις (40) βλέπουμε ότι οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις ϕ_i ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$(43) \quad \mu \phi_{i,kk} + (\lambda + \mu) \phi_{k,ki} + \rho \omega^2 \phi_i = 0.$$

Μη μηδενικές λύσεις των (43) που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες υπάρχουν μόνο για κάποιες τιμές του ω^2 που λέγονται ιδιοτιμές (ιδιοσυχνότητες) και οι οποίες μπορούν να διαταχθούν^(*) με τον ακόλουθο τρόπο

$$(44) \quad 0 < \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \omega_3^2 \leq \dots \quad \text{και} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n^2 = \infty.$$

Η χαρακτηριστική συνάρτηση που αντιστοιχεί στην ιδιοσυχνότητα ω_n^2 συμβο-

(*) Τα πεδία μετατοπίσεων από κίνηση απόλυτα στερεού σώματος θα πρέπει να μη ληφθούν υπόψη στη διαδικασία του προβλήματος.



λιζεται $\phi_i^{(n)}(x_k)$ και λέγεται n -ιδιοσυνάρτηση, περιγράφει δε την n -ιδιομορφή του συστήματος.

Οι ιδιοσυχνότητες ενός πεπερασμένου ελαστικού σώματος είναι θετικοί αριθμοί (44). Το συμπέρασμα αυτό είναι συνέπεια της σχέσης αμοιβαιότητας των Betti-Rayleigh^(*) και του θετικά ορισμένου χαρακτήρα της ολικής δυναμικής ενέργειας (για την απόδειξη βλ. H. Reissmann, ...σελ. 279-280).

(*) Μεταξύ των διαφόρων παραμορφωτικών και εντατικών καταστάσεων ενός γραμμικά ελαστικού σώματος υπάρχουν κάποιες πολύ χρήσιμες σχέσεις αμοιβαιότητας. Αν $e_{ij}^{(1)}$ και $e_{ij}^{(2)}$ είναι δύο παραμορφωτικές καταστάσεις και $\tau_{ij}^{(1)}, \tau_{ij}^{(2)}$ οι αντίστοιχες εντατικές καταστάσεις ενός ελαστικού σώματος, τότε

$$(α) \quad \tau_{ij}^{(1)} e_{ij}^{(2)} = C_{ijkl} e_{ij}^{(2)} e_{kl}^{(1)} = C_{ijkl} e_{ij}^{(1)} e_{kl}^{(2)} = \tau_{ij}^{(2)} e_{ij}^{(1)}.$$

Αν ολοκληρώσουμε την (α) στο V τότε

$$\begin{aligned} (β) \quad & \int_V \tau_{ij}^{(1)} e_{ij}^{(2)} dV = \int_V \tau_{ij}^{(2)} e_{ij}^{(1)} dV \\ & = \int_V \tau_{ij}^{(1)} u_{i,j}^{(2)} dV = \int_V (\tau_{ij}^{(1)} u_i^{(2)})_{,j} dV - \int_V \tau_{ij,j}^{(1)} u_i^{(2)} dV \\ & = \int_S T_i^{(1)} u_i^{(2)} dS - \int_V \tau_{ij,j}^{(1)} u_i^{(2)} dV = \int_S T_i^{(2)} u_i^{(1)} dS - \int_V \tau_{ij,j}^{(2)} u_i^{(1)} dV \end{aligned}$$

όπου

$$\tau_{ij}^{(1)} n_j = T_i^{(1)}, \quad \tau_{ij}^{(2)} n_j = T_i^{(2)}.$$

Από την (β) παίρνουμε

$$(γ) \quad \int_V (\tau_{ij,j}^{(2)} u_i^{(1)} - \tau_{ij,j}^{(1)} u_i^{(2)}) dV = \int_S (T_i^{(2)} u_i^{(1)} - T_i^{(1)} u_i^{(2)}) dS.$$

Η (γ) αποτελεί τη μαθηματική διατύπωση της σχέσης αμοιβαιότητας των Betti-Rayleigh (βλ. Χ. Μασσαλάς (1980), "Ενεργειακά θεωρήματα και άμεσες μέθοδοι στη μηχανική του παραμορφώσιμου στερεού", σελ. 57-60.



Η κάθε ταλάντωση ενός σώματος μπορεί να εκφραστεί με τη σειρά

$$(45) \quad u_i = \sum_{k=1}^{\infty} A_k u_i^{(k)}$$

όπου A_k είναι κατάλληλες σταθερές που προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες και

$$(46) \quad u_i^{(k)} = \phi_i^{(k)} \cos(\omega_k t)$$

είναι ορθογώνιες συναρτήσεις στο V .

Η ορθογωνικότητα των $u_i^{(k)}$ προκύπτει από τη σχέση αμοιβαιότητας των Betti-Rayleigh : Αν τις καταστάσεις (1) και (2) στη (γ) (υποσημείωση) τις αντιστοιχίσουμε με τις ιδιοκαταστάσεις (n) και (m) αντίστοιχα, θα πάρουμε

$$(47) \quad \int_V (\tau_{ij,j}^{(m)} u_i^{(n)} - \tau_{ij,j}^{(n)} u_i^{(m)}) dV = 0 \quad .$$

Από τις εξισώσεις κίνησης έχουμε

$$\tau_{ij,j}^{(m)} = -\rho \omega_m^2 u_i^{(m)}, \quad -\tau_{ij,j}^{(n)} = \rho \omega_n^2 u_i^{(n)}$$

και η (47) γράφεται

$$(48) \quad (\omega_n^2 - \omega_m^2) \int_V \rho u_i^{(n)} u_i^{(m)} dV = 0 \quad .$$

Αν $\omega_n \neq \omega_m$ τότε

$$(49) \quad \int_V \rho u_i^{(n)} u_i^{(m)} dV \neq 0, \quad m \neq n.$$

Από την (49) παίρνουμε την πληροφορία ότι οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικές ιδιοτιμές (ιδιοσυχνότητες) είναι ορθογώνιες με συνάρτηση βάρους την $\rho(x_k)$. Το προηγούμενο συμπέρασμα μπορούμε να το γενικεύσουμε ώστε να συμπεριλάβουμε όλες τις ιδιοσυναρτήσεις άσχετα με το αν αυτές αντιστοιχούν ή όχι σε διαφορετικές ιδιοτιμές. Αν για παράδειγμα δύο ιδιοσυναρτήσεις $f_i^{(n)}$ και $\psi_i^{(n)}$ αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοσυχνότητα ω_n^2 (διπλός εκφυλισμός, βλ. Χ.Μασσαλάς (1935), "Ειδι-



κές συναρτήσεις της Κλασσικής Ανάλυσης" σελ. 172-130), τότε κάθε γραμμικός συνδυασμός των $f_i^{(n)}$ και $\psi_i^{(n)}$ είναι επίσης μια ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην ω_n^2 . Ας θέσουμε

$$(50) \quad u_i^{(n,1)} = f_i^{(n)} \quad u_i^{(n,2)} = \psi_i^{(n)} - c_n u_i^{(n,1)}$$

όπου c_n είναι σταθερά προς προσδιορισμό έτσι ώστε να οδηγεί στην ορθογωνικότητα των $u_i^{(n,1)}$ και $u_i^{(n,2)}$. Οι συναρτήσεις $u_i^{(n,1)}$ και $u_i^{(n,2)}$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί των $f_i^{(n)}$ και $\psi_i^{(n)}$ και κατά συνέπεια είναι ιδιοσυναρτήσεις και επειδή θέλουμε να είναι ορθογώνιες πρέπει

$$\int_V \rho u_i^{(n,1)} u_i^{(n,1)} dV = \int_V \rho u_i^{(n,1)} \psi_i^{(n)} dV - c_n \int_V \rho u_i^{(n,1)} u_i^{(n,1)} dV = 0$$

και

$$(51) \quad c_n = \frac{\int_V \rho u_i^{(n,1)} \psi_i^{(n)} dV}{\int_V \rho u_i^{(n,1)} u_i^{(n,1)} dV}.$$

Μετά τη γενική θεώρηση του προβλήματος των ελεύθερων ταλαντώσεων θα εξετάσουμε τώρα το πρόβλημα των ακτινικών ταλαντώσεων μιας ελαστικής σφαίρας. Σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση και την παρατήρηση της παραγράφου 5.2, παίρνουμε

$$(52) \quad u_i = x_i f(r) \cos \omega t$$

όπου

$$r^2 = x_i x_i.$$

Η συνάρτηση ϕ_i στην περίπτωση αυτή είναι

$$(53) \quad \phi_i = x_i f(r).$$

Αν εισάγουμε την (53) στις (43) έχουμε

$$(54) \quad f_{,rr} + \frac{4}{r} f_{,r} + k^2 f = 0$$



όπου

$$(55) \quad k = \frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu} \quad .$$

Η λύση της (54) που είναι πεπερασμένη για $r=0$ είναι:

$$(56) \quad f = \frac{C}{r^3} (kr \cos kr - \sin kr)$$

όπου C είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Οι μετατοπίσεις στην ακτινική διεύθυνση είναι

$$(57) \quad u_r = u_i \frac{x_i}{r} = rf(r) \cos \omega t$$

και

$$(58) \quad \tau_{rr} = \lambda u_{k,k} + 2\mu u_{r,r} = \{ (3\lambda+2\mu)f + (\lambda+2\mu)rf, r \} \cos \omega t \quad .$$

Από τη συνοριακή συνθήκη (41) έχουμε για $r=a$

$$\tau_{rr}(r=a) = 0$$

ή

$$(59) \quad (\lambda+2\mu) \{ (2-k^2a^2) \sin ka - 2ka \cos ka \} + 2\lambda (ka \cos ka - \sin ka) = 0 \quad .$$

Η (59) είναι η εξίσωση συχνοτήτων στην οποία το k σχετίζεται με τη συχνότητα από την (55). Η ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην ω_m ή k_m είναι

$$(60) \quad \phi_i^{(m)} = Cx_i \frac{1}{r^3} (k_m r \cos k_m r - \sin k_m r) \quad .$$

5.4 Διάδοση κυμάτων σε άπειρο ελαστικό μέσο.

Το διάνυσμα μετατόπισης του μέσου μπορεί να εκφραστεί (υποσημείωση σελ. 145) με τον ακόλουθο τρόπο

$$(61) \quad u_i = \phi_{,i} + e_{ijk} \psi_{k,j} \quad , \quad \psi_{i,i} = 0$$

όπου ϕ και ψ_i είναι τα δυναμικά του Lamé. Αν εισάγουμε τις μετατοπίσεις (61) στις εξισώσεις του Navier ($B_i=0$) ,



$$(62) \quad \mu u_{i,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,ki} = \rho \ddot{u}_i$$

Θα πάρουμε

$$(63) \quad \{(\lambda + 2\mu)\phi_{,kk} - \rho \ddot{\phi}\}_{,i} + e_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \{\mu \psi_{k,\ell\ell} - \rho \ddot{\psi}_k\} = 0.$$

Η εξίσωση (63) θα ικανοποιείται αν οι συναρτήσεις ϕ και ψ_k είναι λύσεις των εξισώσεων

$$(64) \quad \phi_{,kk} - \frac{1}{c_1^2} \ddot{\phi} = 0, \quad \psi_{k,\ell\ell} - \frac{1}{c_2^2} \ddot{\psi}_k = 0$$

όπου

$$(65) \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}.$$

Οι (64) είναι εξισώσεις κύματος και μας δίνουν την πληροφορία ότι δύο είδη διαταράξεων με ταχύτητες c_1 και c_2 μπορούν να διαδοθούν στο άπειρο ελαστικό μέσο. Μια σύγκριση με τις (ΣΤ. 1.5) και (ΣΤ. 1.14) μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι c_1 και c_2 είναι οι ταχύτητες των διαμηκών και εγκάρσιων κυμάτων, αντίστοιχα. Από τις (65) βλέπουμε ότι $c_1 > c_2$.

Μεταξύ των μερικών λύσεων της εξίσωσης κύματος η πιο απλή και χρήσιμη είναι η λύση του επίπεδου κύματος. Με τον όρο επίπεδο κύμα εννοούμε μια βαθμωτή ή διανυσματική συνάρτηση του χώρου και του χρόνου η οποία είναι σταθερή σένα επίπεδο στο χώρο που κινείται με μια σταθερή ταχύτητα κάθετα προς τον εαυτό του. Ένα τέτοιο επίπεδο περιγράφεται από την εξίσωση

$$(66) \quad x_i n_i - ct = \text{σταθ.}, \quad n_i n_i = 1$$

όπου $\bar{n}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο και c είναι σταθερά.

Ας θεωρήσουμε το διάνυσμα μετατόπισης

$$(67) \quad u_i = u_i(\zeta), \quad \zeta \equiv x_i n_i - ct.$$

Αν εισάγουμε την (67) στις εξισώσεις Navier (62) θα πάρουμε



$$(\lambda + \mu)n_j n_i u_j'' + \mu n_j n_j u_i'' = \rho c^2 u_i''$$

ή

$$(67) \quad \{(\lambda + \mu)n_j n_i + (\mu - \rho c^2)\delta_{ij}\} u_j'' = 0,$$

όπου $(\)' = d(\)/dz$.

Αν εισάγουμε τους συμβολισμούς

$$(68) \quad A = (\lambda + \mu), \quad q = \rho c^2 - \mu, \quad u_i'' = v_i$$

η (67) γράφεται

$$(69) \quad (An_i n_j - q\delta_{ij})v_j = 0.$$

Οι εξισώσεις (69) αποτελούν ένα αλγεβρικό πρόβλημα ιδιοτιμών και η απαίτηση για να υπάρχει μη μηδενική λύση είναι

$$(70) \quad \det\{An_i n_j - q\delta_{ij}\} = 0.$$

Μετά τον προσδιορισμό των ιδιοτιμών q από την (70) οι τιμές των ταχυτήτων διάδοσης c των συνδεδεμένων μαυτές κυμάτων προσδιορίζονται από την (63.β). Επειδή υπάρχουν το πολύ τρεις διακεκριμένες ιδιοτιμές θα υπάρχουν το πολύ τρεις ταχύτητες με τις οποίες μπορεί να διαδίδεται ένα ελαστικό κύμα.

Οι ιδιοτιμές για το πρόβλημα που εξετάζουμε μπορούν να βρεθούν ευκολότερα από τη διανυσματική εξίσωση (69),

$$(71) \quad An_i n_j v_i = q v_j.$$

Από την (71) παρατηρούμε ότι κάθε διάνυσμα του επιπέδου του κάθετου στο $\bar{n}$ θα ικανοποιεί τη σχέση

$$n_j v_j = 0.$$

Ένα τέτοιο διάνυσμα θα είναι ιδιοδιάνυσμα του προβλήματος (71) με αντίστοιχη ιδιοτιμή $q=0$. Επειδή υπάρχουν δύο ανεξάρτητα μεταξύ τους διανύσματα στο επίπεδο η ιδιοτιμή $q=0$ θα έχει πολλαπλότητα 2. Το άθροισμα



των ιδιοτιμών είναι ίσο με το ίχνος του μητρώου και κατά συνέπεια

$$An_i n_i = A = 0+0+q$$

και οι ιδιοτιμές είναι $(q, 0, 0)$.

Στη διπλή ιδιοτιμή $q=0$ αντιστοιχεί ταχύτητα

$$c^2 = \frac{\mu}{\rho} = c_2^2$$

που είναι η ταχύτητα του εγκάρσιου ή διατμητικού κύματος. Επειδή το ι-διοδιάνυσμα βρίσκεται στο επίπεδο του μετώπου του κύματος

$$x_i n_i - ct = \text{σταθ.}$$

το αντίστοιχο διάνυσμα μετατόπισης είναι παράλληλο στο μέτωπο του κύματος. Το κύμα είναι πολωμένο στο επίπεδο του μετώπου του.

Η ιδιοτιμή $q=A$ αντιστοιχεί στην ταχύτητα

$$c^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} = c_1^2$$

που είναι η ταχύτητα των διαμήκων κυμάτων.

Από την (71) έχουμε

$$n_i n_j v_j = v_i$$

δηλαδή ότι v_i είναι παράλληλο του $\bar{n}$. Από το γεγονός αυτό προκύπτει ότι είναι δυνατό να υπάρχει ένα δεύτερο ελαστικό κύμα που διαδίδεται με την ταχύτητα των διαμήκων κυμάτων c_1 και εκφράζει μια μετατόπιση κάθετη στο επίπεδο του κύματος. Τα δύο κύματα που σχολιάστηκαν είναι τα μόνα επίπεδα κύματα σένα ελαστικό σώμα.

5.5 Επιφανειακά κύματα.

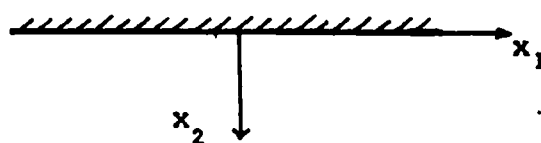
Σένα ελαστικό σώμα είναι δυνατό να έχουμε και άλλον ένα τύπο κύματος που διαδίδεται στην επιφάνεια του σώματος και εισχωρεί ελάχιστα μόνο στο εσωτερικό του. Τα κύματα αυτά είναι παρόμοια με τα κύματα που παράγονται σε μια ήρεμη επιφάνεια νερού όταν πετάξουμε σαυτό μια πέτρα.



Τα κύματα αυτά λεγονται επιφανειακά κύματα. Το απλούστερο επιφανειακό κύμα είναι το κύμα Rayleigh που συμβαίνει σε μια ελεύθερη επιφάνεια ενός ομογενούς, ισότροπου και ημιάπειρου σώματος. Ο τύπος αυτός κύματος έχει πολύ ενδιαφέρον γιατί οι μεγαλύτερες διαταράξεις που προκαλούνται από ένα σεισμό οφείλονται στα κύματα Rayleigh.

Το κριτήριο για τα επιφανειακά κύματα είναι ότι το εύρος της μετατόπισης στο μέσο μειώνεται εκθετικά με την αύξηση της απόστασης από το σύνορο.

Ας θεωρήσουμε τον ελαστικό ημίσωρο $x_2 \leq 0$ του οποίου η επιφάνεια $x_2=0$ είναι ελεύθερη από τάσεις (σχ.3) και τα δυναμικά



Σχ.3

$$(72) \quad \begin{aligned} \phi &= f(x_2)g(x_1-ct) \\ \bar{\psi} &= F(x_2)g(x_1-ct)\bar{i}_3 \end{aligned}$$

Αν αντικαταστήσουμε τις (72) στις (64) θα πάρουμε τις εξισώσεις

$$c_1^2 \nabla^2 \phi - \ddot{\phi} = (c_1^2 - c^2)fg'' + c_1^2 f''g = 0$$

$$c_2^2 \nabla^2 \psi - \ddot{\psi} = (c_2^2 - c^2)Fg'' + c_2^2 F''g = 0$$

ή

$$(73) \quad \frac{g''}{g} = \frac{-c_1^2}{c_1^2 - c^2} \quad \frac{f''}{f} = \frac{-c_2^2}{c_2^2 - c^2} \quad \frac{F''}{F} = -k^2$$

όπου k είναι η σταθερά του χωρισμού και $()' = d()/d(x_1-ct)$. Από τις (73) παίρνουμε τρεις διαφορικές εξισώσεις για τις συναρτήσεις g , f και F , δηλαδή

$$(74) \quad g'' + k^2 g = 0, \quad f'' - k^2 \alpha_1^2 f = 0, \quad F'' - k^2 \alpha_2^2 F = 0$$



όπου

$$\alpha_i^2 = 1 - \frac{c^2}{c_i^2}, \quad i=1,2.$$

Οι λύσεις των (74) είναι

$$(75) \quad g = \exp\{\pm ik(x_1 - ct)\}, \quad f = \exp\{\pm \alpha_1 k x_2\}, \quad F = \exp\{\pm \alpha_2 k x_2\}.$$

Επειδή η λύση πρέπει να παραμένει φραγμένη για $x_2 \rightarrow -\infty$ εκλέγουμε για τις συναρτήσεις f και F το πρόσημο + στον εκθέτη και για διευκόλυνσή μας θα εκλέξουμε ακόμα τον εκθέτη με πρόσημο + στη συνάρτηση g . Τα δυναμικά ϕ και ψ_3 που ικανοποιούν τις εξισώσεις κίνησης θα είναι

$$(76) \quad \begin{aligned} \phi &= A \exp(\alpha_1 k x_2) \exp\{ik(x_1 - ct)\} \\ \psi_3 &= B \exp(\alpha_2 k x_2) \exp\{ik(x_1 - ct)\} \end{aligned}$$

όπου

$$\alpha_i = (1 - \frac{c^2}{c_i^2})^{1/2}.$$

Η σταθερά k στην περίπτωση μας είναι ο κυματαριθμός της κυματικής κίνησης. Οι μετατοπίσεις του μέσου λαμβάνονται από την (61) και είναι

$$(76) \quad \begin{aligned} u_1 &= \phi_{,1} + \psi_{3,2} = \{ikA \exp(\alpha_1 k x_2) + \alpha_2 kB \exp(\alpha_2 k x_2)\} \exp\{ik(x_1 - ct)\} \\ u_2 &= \phi_{,2} - \psi_{3,1} = \{\alpha_1 kA \exp(\alpha_1 k x_2) - ikB \exp(\alpha_2 k x_2)\} \exp\{ik(x_1 - ct)\}. \end{aligned}$$

Αν εισάγουμε τις (76) στις καταστατικές εξισώσεις

$$\tau_{ij} = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ij}$$

θα πάρουμε τις εκφράσεις για τις τάσεις,

$$(77) \quad \begin{aligned} \tau_{11} &= \rho c_2^2 k^2 \{-[2 + (1 - 2\alpha_3^2)\alpha_4^2] A \exp(\alpha_1 k x_2) \\ &\quad + 2i\alpha_2 B \exp(\alpha_2 k x_2)\} \exp\{ik(x_1 - ct)\} \\ \tau_{22} &= \rho c_2^2 k^2 \{(2 - \alpha_4^2) A \exp(\alpha_1 k x_2) - 2i\alpha_2 B \exp(\alpha_2 k x_2)\} \exp\{ik(x_1 - ct)\} \end{aligned}$$



$$\tau_{12} = \rho c_2^2 k^2 \{ 2i\alpha_1 A \exp(\alpha_1 k x_2) + (2 - \alpha_4^2) B \exp(\alpha_2 k x_2) \} \exp\{ik(x_1 - ct)\}$$

όπου

$$\alpha_3 = \frac{c}{c_1}, \quad \alpha_4^2 = \frac{c^2}{c_2^2}.$$

Στην περίπτωση που το σύνορο $x_2=0$ είναι ελεύθερο από τάσεις τότε

$$(78) \quad \tau_{12} = \tau_{22} = 0 \quad \text{για} \quad x_2 = 0.$$

Αν εισάγουμε τις (77) στις συνοριακές συνθήκες, παίρνουμε

$$(79) \quad \begin{aligned} (2 - \alpha_4^2)A - 2i\alpha_2 B &= 0 \\ 2i\alpha_1 A + (2 - \alpha_4^2)B &= 0. \end{aligned}$$

Για να έχει μη μηδενική λύση το σύστημα (79) πρέπει

$$(80) \quad (2 - \alpha_4^2)^2 = 4\alpha_1\alpha_2 = 4\{(1 - \alpha_4^2)(1 - \alpha_3^2\alpha_4^2)\}^{\frac{1}{2}}.$$

Από την (80) προκύπτει η εξίσωση

$$(31) \quad \alpha_4^2 \{ \alpha_4^6 - 8\alpha_4^4 + 8(3 - 2\alpha_3^2)\alpha_4^2 - 16(1 - \alpha_4^2) \} = 0$$

από την οποία προσδιορίζεται η α_4 και κατά συνέπεια η $c^2 = \alpha_4^2 c_2^2$. Η ρίζα $\alpha_4 = 0$ της (31) συνεπάγεται $c=0$ και στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε διάδοση κύματος. Για τιμές του λόγου του Poisson $0 < \nu < \frac{1}{2}$ η κυβική εξίσωση $\{ \quad \}$ ως προς α_4^2 έχει πάντα μια πραγματική ρίζα που ικανοποιεί τις ανισότητες

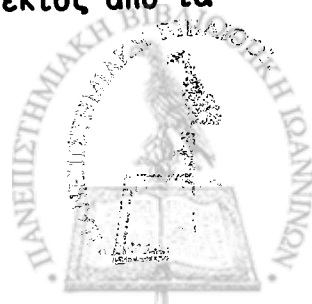
$$0 < \alpha_4^2 < 1 < \frac{1}{\alpha_3^2}$$

ή

$$0 < c^2 < c_1^2 < c_2^2.$$

Η μεταβολή της ρίζας με το λόγο του Poisson φαίνεται στο σχ.4.

Το συμπέρασμα από την προηγούμενη ανάλυση είναι ότι εκτός από τα



κύματα που σχολιάσαμε σε προηγούμενη παράγραφο, που διαδίδονται με ταχύτητες c_1 και c_2 , σένα ελαστικό μέσο διαδίδονται και κύματα με ταχύτητα $c \neq c_1$, $c \neq c_2$. Τα κύματα αυτά είναι γνωστά σαν επιφανειακά κύματα Rayleigh. Από την (31) παρατηρούμε ότι η ταχύτητα c είναι ανεξάρτητη από τον κυματαριθμό k και κατά συνέπεια δεν συμβαίνει διασπορά του κύματος κατά τη διάδοσή του στο μέσο.

Αν θεωρήσουμε την πραγματική διατάραξη

$$(32) \quad \phi = A \exp(\alpha_1 k x_2) \cos k(x_1 - ct)$$

όπου A είναι πραγματική σταθερά, τότε οι μετατοπίσεις στην ελεύθερη επιφάνεια είναι το πραγματικό μέρος των (76), για $x_2=0$ (αφού λάβουμε υπόψη τις (79)), δηλαδή

$$(33) \quad \begin{aligned} u_1 &= -A_1 \sin k(x_1 - ct) \\ u_2 &= -A_2 \cos k(x_1 - ct) \end{aligned}$$

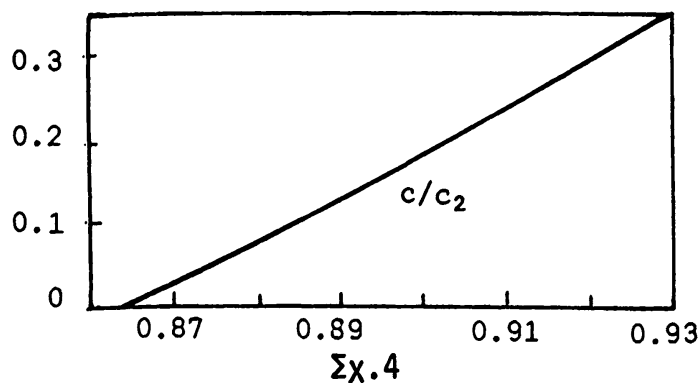
όπου

$$A_1 = \frac{k A \alpha_1^2}{2}, \quad A_2 = \frac{k A \alpha_1^2 c}{2 - \alpha_1^2}.$$

Αν απαλείψουμε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις στις (33) παίρνουμε

$$\left(\frac{u_1}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{A_2}\right)^2 = 1,$$

δηλαδή τα σωματίδια της ελεύθερης επιφάνειας κινούνται σε ελλειπτικές τροχιές. Η περίοδος αυτής της κίνησης είναι $2\pi/kc$.



Βιβλιογραφία

1. T. Dawson: "Theory and Practice of Solid Mechanics", Plenum Press, New York (1976).
2. Y. Fung: "Foundations of Solid Mechanics", John Wiley and Sons, Inc. New York (1962).
3. H. Leipholz: "Theory of Elasticity", Noordhoff Int. Publishing, Leyden, The Netherlands (1974).
4. A. Love: "A Treatise on the mathematical theory of elasticity" Dover, New York (1944).
5. Χ. Μασσαλός: "Ενεργειακά θεωρήματα και άμεσες μέθοδοι στη μηχανική του παραμόρφωσιμου στερεού", Ιωάννινα (1980).
6. Χ. Μασσαλός: "Ειδικές συναρτήσεις της Κλασσικής Ανάλυσης", Ιωάννινα (1985).
7. H. Reismann and P. Pawlik: "Elastokinetics" West Publishing Co. New York (1944).
8. I. Sneddon: "Fourier Transforms", Mc Graw-Hill Book Company, New York (1951).
9. I. Sokolnikoff: "Mathematical theory of elasticity", McGraw-Hill Book Company, New York (1956).



κύματα που σχολιάσαμε σε προηγούμενη παράγραφο, που διαδίδονται με ταχύτητες c_1 και c_2 , σένα ελαστικό μέσο διαδίδονται και κύματα με ταχύτητα $c \neq c_1$, $c \neq c_2$. Τα κύματα αυτά είναι γνωστά σαν επιφανειακά κύματα Rayleigh. Από την (31) παρατηρούμε ότι η ταχύτητα c είναι ανεξάρτητη από τον κυματαριθμό k και κατά συνέπεια δεν συμβαίνει διασπορά του κύματος κατά τη διάδοσή του στο μέσο.

Αν θεωρήσουμε την πραγματική διατάραξη

$$(32) \quad \phi = A \exp(\alpha_1 k x_2) \cos k(x_1 - ct)$$

όπου A είναι πραγματική σταθερά, τότε οι μετατοπίσεις στην ελεύθερη επιφάνεια είναι το πραγματικό μέρος των (76), για $x_2=0$ (αφού λάβουμε υπόψη τις (79)), δηλαδή

$$(33) \quad \begin{aligned} u_1 &= -A_1 \sin k(x_1 - ct) \\ u_2 &= -A_2 \cos k(x_1 - ct) \end{aligned}$$

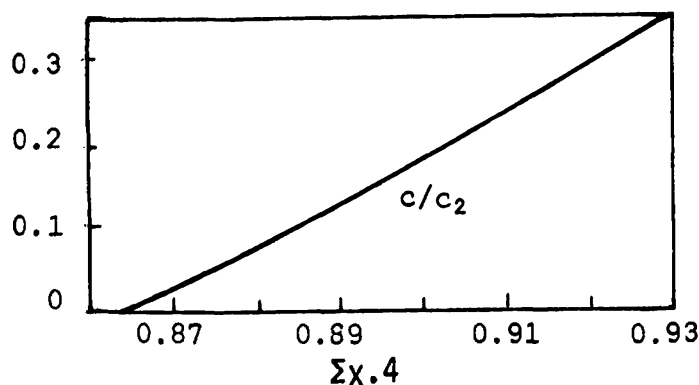
όπου

$$A_1 = \frac{kA\alpha_1^2}{2}, \quad A_2 = \frac{kA\alpha_1^2 c_1}{2 - \alpha_1^2}.$$

Αν απαλείψουμε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις στις (33) παίρνουμε

$$\left(\frac{u_1}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{A_2}\right)^2 = 1,$$

δηλαδή τα σωματίδια της ελεύθερης επιφάνειας κινούνται σε ελλειπτικές τροχιές. Η περίοδος αυτής της κίνησης είναι $2\pi/kc$.



Βιβλιογραφία

1. T. Dawson: "Theory and Practice of Solid Mechanics", Plenum Press, New York (1976).
2. Y. Fung: "Foundations of Solid Mechanics", John Wiley and Sons, Inc. New York (1962).
3. H. Leipholz: "Theory of Elasticity", Noordhoff Int. Publishing, Leyden, The Netherlands (1974).
4. A. Love: "A Treatise on the mathematical theory of elasticity" Dover, New York (1944).
5. Χ. Μασσαλάς: "Ενεργειακά θεωρήματα και άμεσες μέθοδοι στη μηχανική του παραμόρφωσιμου στερεού", Ιωάννινα (1980).
6. Χ. Μασσαλάς: "Ειδικές συναρτήσεις της Κλασσικής Ανάλυσης", Ιωάννινα (1985).
7. H. Reismann and P. Pawlik: "Elastokinetics" West Publishing Co. New York (1944).
8. I. Sneddon: "Fourier Transforms", Mc Graw-Hill Book Company, New York (1951).
9. I. Sokolnikoff: "Mathematical theory of elasticity", McGraw-Hill Book Company, New York (1956).





Τυπώθηκε στο Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο
με δαπάνη του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ
Τυπογραφείο

Copyright: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Απαγορεύεται η μερική ή ολική ανατύπωση, καθώς και η
λήψη φωτοαντιγραφικών από το βιβλίο χωρίς τη γραπτή
άδεια του Τμήματος Δημοσιευμάτων του Πανεπιστημίου
Ιωαννίνων και του συγγραφέα.

Διατίθεται και στο Πανεπιστημιακό Βιβλιοπωλείο,
Πανεπιστημιούπολη, Τηλ.: 41801.

Διανέμεται δωρεάν στους φοιτητές.

