ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ Κ. ΚΑΤΣΑΡΑΣ

Καθηγητής Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Τμήματος Μαθηματικών

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 1994

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ Κ. ΚΑΤΣΑΡΑΣ
Καθηγητής Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
Τμήματος Μαθηματικών

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΙΩΑΝΝΙΝΑ 1994

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Ι: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

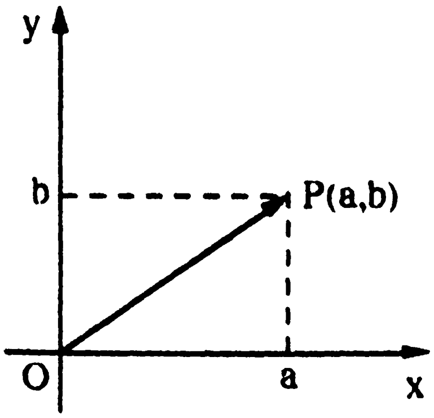
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

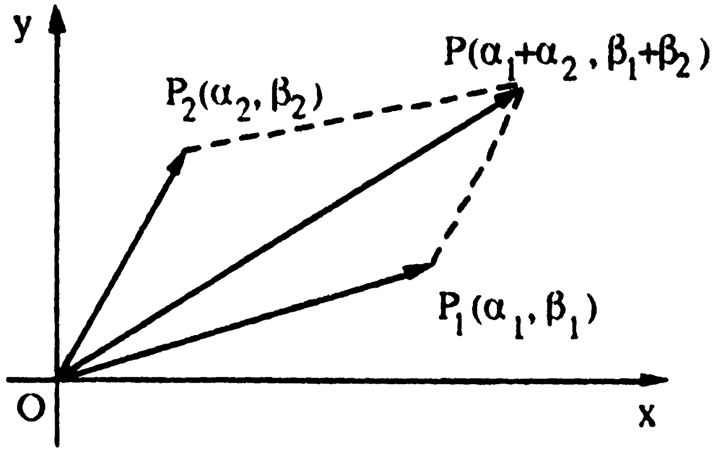
ΜΕΡΟΣ Ι

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1. ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΙ ΧΩΡΟΙ





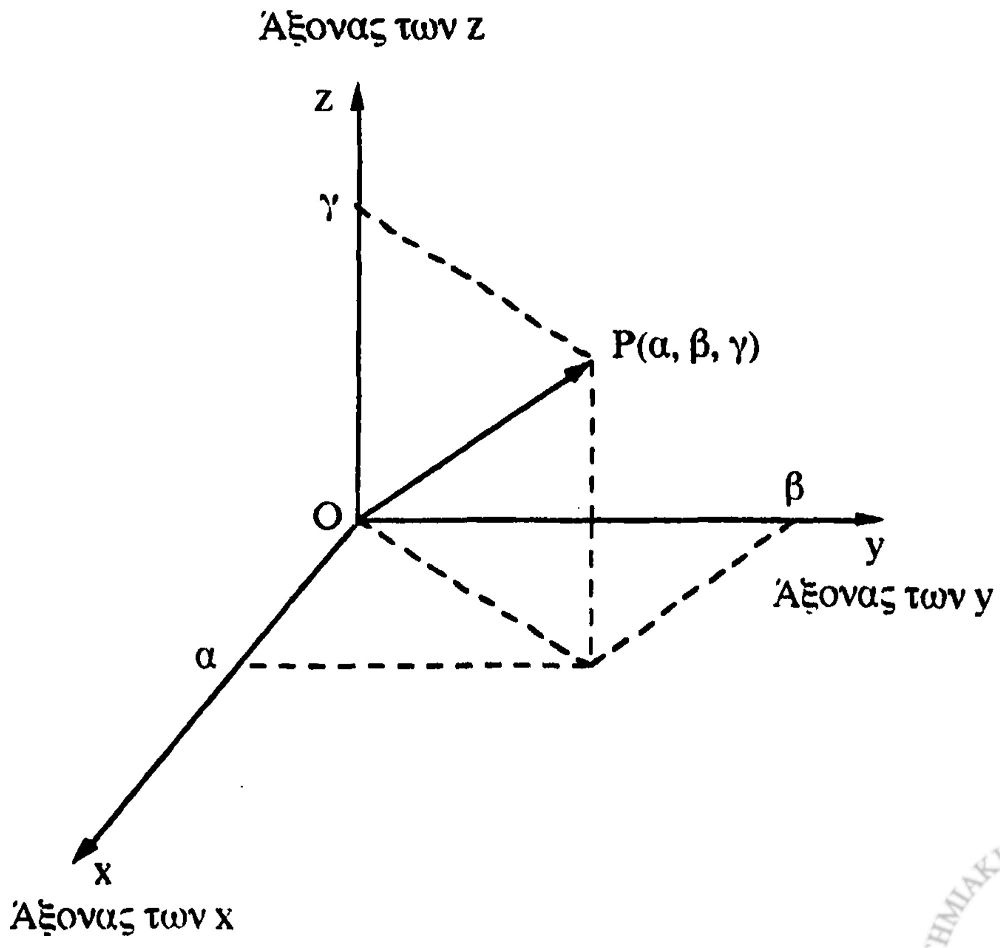
Όπως ξέρουμε, αν σ' ένα επίπεδο πάρουμε ένα σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων Oxy, τότε σε κάθε σημείο P του επιπέδου αντιστοιχεί ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών (a,b), όπου a η τετμημένη και b η τεταγμένη του P. Αντιστρόφως, σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος (α,β) αντιστοιχεί μοναδικό σημείο του επιπέδου με τετμημένη α και τεταγμένη β. Η αντιστοιχία αυτή, μεταξύ των σημείων του επιπέδου και των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών, είναι αμφιμονότιμη και έτσι μπορούμε να ταυτίσουμε το επίπεδο με το σύνολο

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} ,\ y \in \mathbb{R}\} .$$

Στο σημείο P(a,b) μπορούμε επίσης να αντιστοιχίσουμε το διάνυσμα $\vec{OP}$. Τα a,b είναι οι συντεταγμένες του $\vec{OP}$ ως προς το σύστημα των συντεταγμένων Oxy. Αν θεωρήσουμε δύο σημεία $P(\alpha_1, \beta_1)$ και $P(\alpha_2. \beta_2)$ και αν $\vec{OP} = \vec{OP}_1 + \vec{OP}_2$, τότε το σημείο P έχει τετμημένη $\alpha_1+\alpha_2$ και τεταγμένη $\beta_1+\beta_2$. Έτσι οδηγούμαστε στο να ορίσουμε ως άθροισμα των ζευγών (α_1, β_1) και (α_2, β_2) το ζεύγος $(\alpha_1+\alpha_2, \beta_1+\beta_2)$, δηλαδή

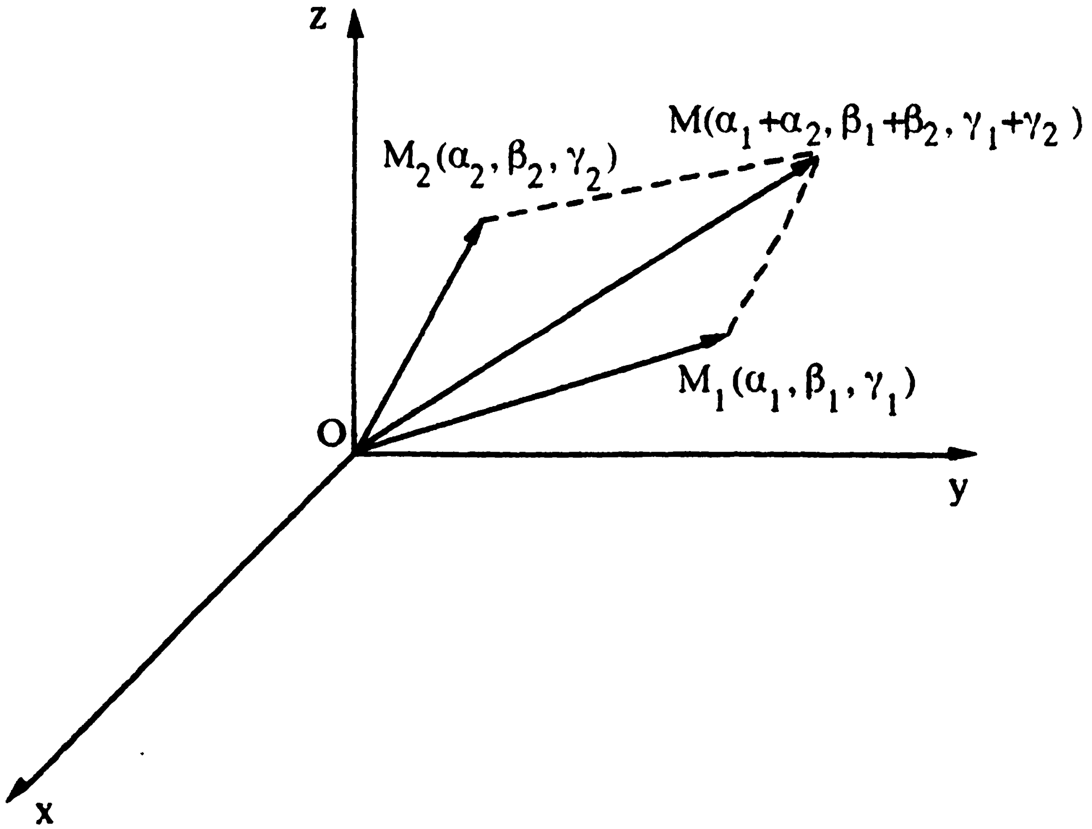
$$(\alpha_1, \beta_1)+(\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_1+\alpha_2, \beta_1+\beta_2) \ .$$

Ομοίως, αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και αν $P(\alpha, \beta)$ είναι σημείο του επιπέδου, τότε το διάνυσμα $\lambda\vec{OP}$ έχει συντεταγμένες λα και λβ. Έτσι ορίζουμε $\lambda\cdot(\alpha, \beta) = (\lambda\alpha, \lambda\beta)$.



Με ανάγολο τρόπο, αν στον τριδιάστατο χώρο πάρουμε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων Oxyz, τότε έχουμε μια αμφιμονότιμη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων του χώρου και του συνόλου όλων των διατεταγμένων τριάδων πραγματικών αριθμών. Έτσι μπορούμε να ταυτίσουμε τον τριδιάστατο χώρο με το σύνολο

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z):\ x \in \mathbb{R}\ ,\ y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\}\ .$$



Στο σημείο P(α, β, γ) μπορούμε επίσης να αντιστοιχίσουμε το διάνυσμα $\vec{OP}$ του οποίου οι συντεταγμένες ως προς το σύστημα Oxyz είναι οι αριθμοί α, β, γ. Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε οι συντεταγμένες του διανύσματος $\lambda\vec{OP}$ είναι οι αριθμοί λα, λβ, λγ. Έτσι οδηγούμαστε στο να ορίσουμε

$$\lambda\cdot(\alpha, \beta, \gamma) = (\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma)\ .$$

Επίσης, αν $M(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ και $M(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ είναι δύο σημεία του χώρου, τότε οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{OM} = \vec{OM}_1 + \vec{OM}_2$ είναι $(\alpha_1+\alpha_2, \beta_1+\beta_2, \gamma_1+\gamma_2)$. Έτσι ορίζουμε

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) + (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = (\alpha_1+\alpha_2, \beta_1+\beta_2, \gamma_1+\gamma_2) \ .$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να πάρουμε το σύνολο όλων των διατεταγμένων τετράδων αριθμών $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ που θα αποτελούν τον τετραδιάστατο χώρο. Το σύνολο αυτό το συμβολίζουμε με $\mathbb{R}^4$, δηλαδή $\mathbb{R}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4): x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}, x_4 \in \mathbb{R}\}$. Γενικεύοντας έχουμε την έννοια του n-διάστατου χώρου $\mathbb{R}^n$.

1.1 Ο Διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$

Έστω n ένας φυσικός αριθμός και έστω $\mathbb{R}^n$ το σύνολο όλων των διατεταγμένων n-άδων πραγματικών αριθμών. Δηλαδή, κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}^n$ έναι μια n-άδα $(x_1, x_2, ..., x_n)$, όπου $x_k \in \mathbb{R}$ για $k=1, ..., n$. Για να τα διακρίνουμε από τους πραγματικούς αριθμούς, θα αναφερόμαστε στα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ ως διανύσματα και θα γράφουμε $\vec{x} = (x_1, x_2, ... x_n)$. Ο αριθμός x_k θα ονομάζεται k-συντεταγμένη του $\vec{x}$. Αν $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ και $\vec{y} = (y_1, ..., y_n)$ είναι δύο στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ και αν $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε ορίζουμε το άθροισμα $\vec{x} + \vec{y}$ και το αριθμητικό γινόμενο $\lambda \vec{x}$ με τους τύπους

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1+y_1, x_2+y_2, ..., x_n+y_n), \quad \lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) \ .$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

i) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$.

ii) $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$.

iii) Υπάρχει μοναδικό στοιχείο $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$ για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Το $\vec{0}$ λέγεται μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{R}^n$ και είναι προφανώς το στοιχείο $(0, 0, \ldots, 0)$.

iv) Για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει στοιχείο $\vec{y}$ του $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{0}$. Προφανώς $\vec{y} = (-1)\vec{x}$.

v) $1\cdot\vec{x} = \vec{x}$ για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

vi) $(\lambda\mu)\vec{x} = \lambda(\mu\vec{x})$.

vii) $(\lambda+\mu)\vec{x} = \lambda\vec{x}+\mu\vec{x}$ και $\lambda(\vec{x}+\vec{y}) = \lambda\vec{x}+\lambda\vec{y}$.

Το στοιχείο $(-1)\vec{x}$ θα το συμβολίζουμε με $-\vec{x}$. Επίσης ορίζουμε $\vec{x}-\vec{y} = \vec{x}+(-1)\vec{y}$.

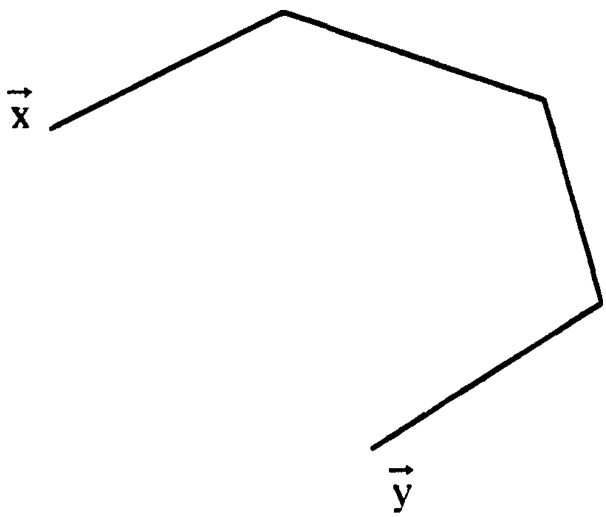
Ορισμός: Ένας διανυσματικός χώρος είναι ένα μη κενό σύνολο X στο οποίο έχουν ορισθεί δύο πράξεις, η πρόσθεση μεταξύ στοιχείων του X και ο πολλαπλασιασμός στοιχείων του X με πραγματικούς αριθμούς, έτσι ώστε να ισχύουν οι ιδιότητες (i) - (vii) που αναφέραμε παραπάνω.

Επομένως ο χώρος $\mathbb{R}^n$, με τις πράξεις που έχουν ορισθεί σ' αυτόν, είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος.

Ευθύγραμμα τμήματα, Πολυγωνικές γραμμές

Έστω $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ δύο στοιχεία του $\mathbb{R}^n$. Το *ευθύγραμμο τμήμα* που ενώνει τα $\vec{x}$, $\vec{y}$ είναι το σύνολο όλων των σημείων του $\mathbb{R}^n$ της μορφής $\vec{x}+t(\vec{y}-\vec{x})$, όπου $0\leq t \leq 1$. Ώστε ένα σημείο $\vec{z}=(z_1, \ldots, z_n)$ ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το $\vec{x}$ με το $\vec{y}$ αν, και μόνον αν, υπάρχει $0\leq t \leq 1$ τέτοιο ώστε $\vec{z}=\vec{x}+t(\vec{y}-\vec{x})$, δηλαδή, $z_1 = x_1+t(y_1-x_1)$, $z_2 = x_2+t(y_2-x_2)$, ..., $z_n = x_n+t(y_n-x_n)$.

Προφανώς για $t=0$ έχουμε $\vec{z}=\vec{x}+t(\vec{y}-\vec{x})=\vec{x}$ ενώ για $t=1$ έχουμε $\vec{z}=\vec{x}+t(\vec{y}-\vec{x})=\vec{y}$. Αν $\vec{x}\neq\vec{y}$ και αν $0<t<1$, τότε το σημείο $\vec{z}=\vec{x}+t(\vec{y}-\vec{x})$ λέγεται εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει το $\vec{x}$ με το $\vec{y}$. Αν $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}\in\mathbb{R}^n$, τότε το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το $\vec{x}$ με το $\vec{y}$ και το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το $\vec{y}$ με το $\vec{z}$ λέγονται διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα. Δηλαδή, δύο ευθύγραμμα τμήματα στον $\mathbb{R}^n$ λέγονται διαδοχικά αν το πέρας του ενός είναι αρχή του άλλου.



Μια *πολυγωνική γραμμή* στον $\mathbb{R}^n$ που συνδέει το $\vec{x}$ με το $\vec{y}$ είναι ένα πεπερασμένο πλήθος διαδοχικών ευθυγράμμων τμημάτων το πρώτο από τα οποία έχει αρχή το $\vec{x}$ και το τελευταίο έχει πέρας το $\vec{y}$

Ευκλείδεια στάθμη. Απόσταση δύο σημείων του $\mathbb{R}^n$

Η Ευκλείδεια στάθμη $\|\vec{x}\|$ ενός $\vec{x}=(x_1, x_2, ..., x_n)\in\mathbb{R}^n$ ορίζεται με τον τύπο

$$\|\vec{x}\|=(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)^{1/2} .$$

Προφανώς $\|\vec{x}\|\geq 0$ και $\|\vec{x}\|=0$ αν, και μόνον αν, $\vec{x}=(0, 0, ..., 0)$.

Για $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \, \|\vec{x}\|$.

Λήμμα 1.1.1 (Ανισότητα των Cauchy - Schwartz)

Αν $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύει η ανισότητα:

$$(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + ... + \alpha_n\beta_n)^2 \leq (\alpha_1^2 + ... + \alpha_n^2)\,(\beta_1^2 + ... + \beta_n^2) \;.$$

Απόδειξη

Η προς απόδειξη ανισότητα γράφεται

$$\alpha_1^2\beta_1^2 + ... + \alpha_n^2\beta_n^2 + 2 \sum_{i<j} \alpha_i\,\beta_i\,\alpha_j\,\beta_j \leq \alpha_1^2\beta_1^2 + ... + \alpha_n^2\beta_n^2 + \sum_{i<j} (\alpha_i^2\beta_j^2 + \alpha_j^2\beta_i^2)$$

η οποία ισχύει διότι $\alpha_i^2\beta_j^2 + \alpha_j^2\beta_i^2 \geq 2\,\alpha_i\,\beta_i\,\alpha_j\,\beta_j$.

Πρόταση 1.1.2

Αν $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ και $\vec{y} = (y_1, ..., y_n)$ είναι δύο στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ τότε ισχύει η ανισότητα

$$\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \quad (\textit{Τριγωνική ανισότητα}) \qquad (*)$$

Απόδειξη

Η ανισότητα (*) γράφεται

$$[(x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 + ... + (x_n+y_n)^2]^{1/2} \leq (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2} + (\sum_{j=1}^{n} y_j^2)^{1/2}$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{j=1}^{n} y_j^2 + 2\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{j=1}^{n} y_j^2 + 2[(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)(\sum_{j=1}^{n} y_j^2)]^{1/2} .$$

δηλαδή με την $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \le \left[(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)(\sum_{j=1}^{n} y_j^2)\right]^{1/2}$, η οποία ισχύει σύμφωνα με το Λήμμα 1.1.1 .

Χρησιμοποιώντας τώρα την Ευκλείδεια στάθμη ορίζουμε την απόσταση μεταξύ δύο σημείων $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ και $\vec{y} = (y_1, ..., y_n)$ του $\mathbb{R}^n$ με τον τύπο

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \left[\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2\right]^{1/2} .$$

Λόγω της Πρότασης 1.1.2, έχουμε την τριγωνική ανισότητα

$$d(\vec{x}, \vec{y}) \le d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y}) .$$

1.2 Εσωτερικό Γινόμενο

Ορισμός: Αν $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ και $\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ είναι δύο διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$, τότε το εσωτερικό γινόμενο των $\vec{a}$, $\vec{b}$ που συμβολίζεται με $\vec{a} \cdot \vec{b}$, είναι ο αριθμός

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n .$$

Για παράδειγμα, αν $\vec{a} = (1, 2, 0)$ και $\vec{b} = (-1, 1, 3)$, τότε $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1\cdot(-1)+2\cdot 1+0\cdot 3 = 1$.

Αποδεικνύεται εύκολα το ακόλουθο.

Θεώρημα 1.2.1

Αν $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ και $\vec{c} = (c_1, c_2, ..., c_n)$

είναι οποιαδήποτε διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ και αν $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε:

i) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

ii) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

iii) $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

iv) $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2 \geq 0$ και $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ αν, και μόνον αν, $\vec{a} = \vec{0}$.

v) $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$ (ανισότητα των Cauchy - Schwartz).

vi) $\vec{a} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{a} = 0$. Αν $\vec{a} \cdot \vec{x} = 0$ για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, τότε $\vec{a} = \vec{0}$.

Θεώρημα 1.2.2

Για $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, έχουμε $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$ αν, και μόνον αν, τα $\vec{a}$, $\vec{b}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Απόδειξη

Αν κάποιο από τα $\vec{a}$, $\vec{b}$ είναι το $\vec{0}$, π.χ. $\vec{a} = \vec{0}$, τότε τα $\vec{a}$, $\vec{b}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα διότι $\vec{a} = 0 \cdot \vec{b}$ και $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$. Υποθέτουμε ότι $\vec{a} \neq \vec{0}$ και $\vec{b} \neq \vec{0}$. Αν τα $\vec{a}$, $\vec{b}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\vec{b} = \lambda \vec{a}$. Άρα

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a} \cdot (\lambda \vec{a})| = |\lambda(\vec{a} \cdot \vec{a})| = |\lambda| \|\vec{a}\|^2 = |\vec{a}| (|\lambda| \|\vec{a}\|) = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| .$$

Αντιστρόφως, έστω ότι $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned} \|\vec{b} - t\,\vec{a}\|^2 &= (\vec{b} - t\,\vec{a}) \cdot (\vec{b} - t\,\vec{a}) \\ &= \vec{b} \cdot \vec{b} - t\,\vec{a} \cdot \vec{b} - t\,\vec{b} \cdot \vec{a} + t^2\,\vec{a} \cdot \vec{a} \\ &= \|\vec{b}\|^2 - 2t\,\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2 \|\vec{b}\|^2 \ . \end{aligned}$$

Για $t = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}$, παίρνουμε

$$\|\vec{b} - t\,\vec{a}\|^2 = \|\vec{b}\|^2 - 2\,\frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{\|\vec{a}\|^2} + \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{\|\vec{a}\|^2} = \|\vec{b}\|^2 - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{\|\vec{a}\|^2} = 0$$

και άρα $\vec{b} - t\vec{a} = \vec{0}$, δηλαδή $\vec{b} = t\vec{a}$.

Γωνία Διανυσμάτων. Καθετότητα

Θα ορίσουμε τη γωνία δύο διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^2$. Για το σκοπό αυτό θα δούμε πρώτα τι συμβαίνει στον $\mathbb{R}^2$. Έτσω $\vec{a} = (a_1, a_2)$ και $\vec{b} = (b_1, b_2)$ δύο μη μηδενικά διανύσματα στον $\mathbb{R}^2$ και έστω θ η γωνία που σχηματίζουν τα δύο αυτά διανύσματα.

Είναι $\text{συν}\theta_1 = \dfrac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}} = \dfrac{a_1}{\|\vec{a}\|}$, $\text{ημ}\theta_1 = \dfrac{a_2}{\|\vec{a}\|}$, $\text{συν}\theta_2 = \dfrac{b_1}{\|\vec{b}\|}$

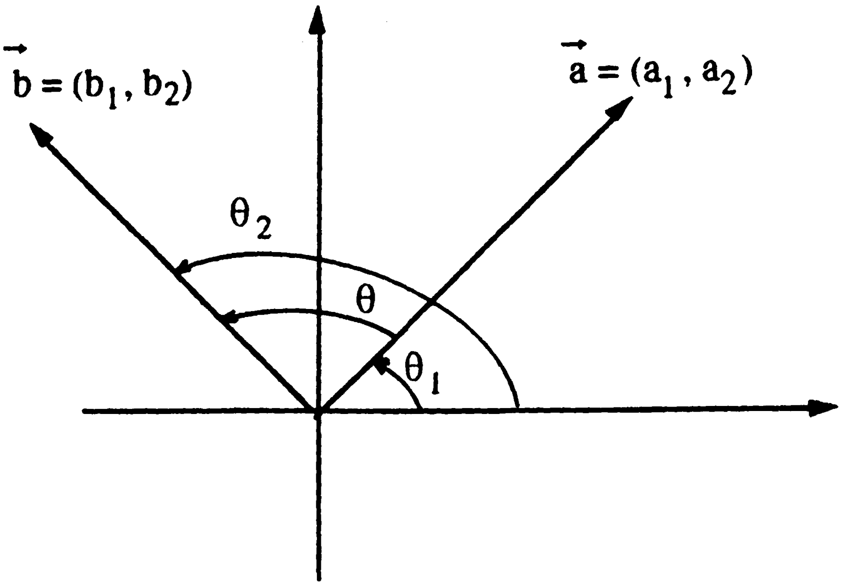
και $\text{ημ}\theta_2 = \dfrac{b_2}{\|\vec{b}\|}$. Επειδή $\theta = |\theta_2 - \theta_1|$, έχουμε

$$\text{συν}\theta = \text{συν}\,|\theta_2 - \theta_1| = \text{συν}(\theta_2 - \theta_1) = \text{συν}\theta_2\,\text{συν}\theta_1 + \text{ημ}\theta_2\,\text{ημ}\theta_1$$

$$= \frac{a_1}{\|\vec{a}\|} \cdot \frac{b_1}{\|\vec{b}\|} + \frac{a_2}{\|\vec{a}\|} \cdot \frac{b_2}{\|\vec{b}\|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} .$$

Έστω τώρα $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ και $\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ δύο μη μηδενικά διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$. Επειδή $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$, είναι

$$-1 \leq \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} \leq 1 .$$



Συνεπώς υπάρχει μοναδική γωνία θ, $0 \le \theta \le \pi$ με $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$. Η γωνία θ ονομάζεται γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{b}$. Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$, τότε τα $\vec{a}$, $\vec{b}$ λέγονται κάθετα. Σ' αυτήν την περίπτωση γράφουμε $\vec{a} \perp \vec{b}$. Ώστε

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 .$$

Δηλαδή, δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$ είναι κάθετα αν, και μόνον αν, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

Αν τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$ είναι συγγραμμικά (γραμμικώς εξαρτημένα), τότε $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$ (σύμφωνα με το Θεώρημα 1.2.2) και άρα συνθ = 1, που συνεπάγεται ότι θ=0 ή θ=π. Άρα:

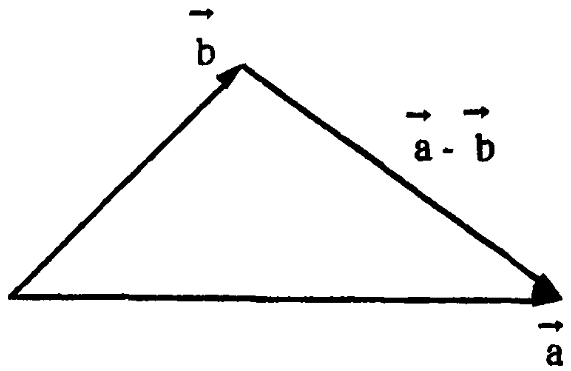
Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα (παράλληλα) $\Leftrightarrow |\vec{a}\cdot\vec{b}| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \Leftrightarrow \theta=0$ ή $\theta=\pi$.

Από τον ορισμό της γωνίας θ δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{b}$ έχουμε:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\,\text{συνθ}.$$

Αν $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, τότε λέμε ότι τα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι κάθετα ακόμη και αν $\vec{a} = \vec{0}$ ή $\vec{b} = \vec{0}$.

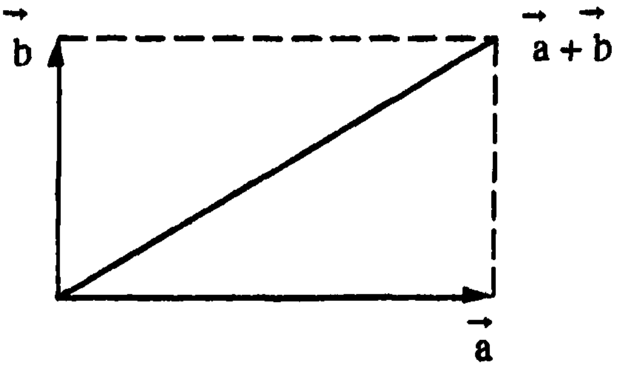
Νόμος των Συνημιτόνων



$$\|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{b}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b}$$
$$= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\| - 2\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\,\text{συνθ}.$$

Έτσι γενικεύεται και στον $\mathbb{R}^n$ ο γνωστός νόμος των συνημιτόνων που ισχύει στο επίπεδο.

Πυθαγόρειο Θεώρημα



Επειδή $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\| + 2\vec{a}\cdot\vec{b}$, προκύπτει ότι:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 .$$

1.3 Εξωτερικό ή Διανυσματικό Γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$

Ορισμός: Για $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ και $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ στον $\mathbb{R}^3$, το εξωτερικό ή διανυσματικό γινόμενο του $\vec{a}$ με το $\vec{b}$ (μ' αυτή τη σειρά) είναι το διάνυσμα

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \left(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1\right) .$$

<u>Ιδιότητες του Εξωτερικού Γινομένου</u>:

i) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$, $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$.

Προκύπτει εύκολα από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου

ii) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

iii) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ είναι συγγραμμικά (γραμμικώς εξαρτημένα). Πραγματικά, όπως προκύπτει άμεσα από τον ορισμό, έχουμε $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{0}$. Άν τώρα τα $\vec{a}$, $\vec{b}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, π.χ. $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, τότε

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \lambda\vec{a} = \lambda(\vec{a} \times \vec{a}) = \lambda\vec{0} = \vec{0} .$$

Για να αποδείξουμε το αντίστροφο, αποδεικνύουμε την ισότητα

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 .$$

Πραγματικά,

$$\begin{aligned}
\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
&= (a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_2a_3b_2b_3) + (a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_1a_3b_1b_3) + \\
&\qquad (a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2) \\
&= [(a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 + \\
&\qquad a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2)]^2 - \\
&\quad [(a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + 2a_1a_3b_1b_3 + 2a_2a_3b_2b_3)] \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
&= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 .
\end{aligned}$$

Αν τώρα $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, τότε $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = 0$ και άρα

$$\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 = \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 ,$$

το οποίο (σύμφωνα με το Θεώρημα 1.2.2) συνεπάγεται ότι τα $\vec{a}$, $\vec{b}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

iv) Αν θ είναι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{b}$ τότε

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \,\eta\mu\theta ,$$

δηλαδή η στάθμη (μέτρο) του $\vec{a} \times \vec{b}$ ισούται με το εμβαδό του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Πραγματικά,

$$\begin{aligned} \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 &= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \times \vec{b})^2, \\ &= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \sigma\upsilon\nu^2 \theta \\ &= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 [1 - \sigma\upsilon\nu^2 \theta] \\ &= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \eta\mu^2 \theta \end{aligned}$$

και άρα $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \eta\mu\theta$ διότι $\eta\mu\theta \geq 0$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$.

v) $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ και $\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ οπότε, αν $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$ δηλαδή αν τα $\vec{a}, \vec{b}$ δεν είναι συγγραμμικά, τότε $\vec{a} \perp (\vec{a} \times \vec{b})$ και $\vec{b} \perp (\vec{a} \times \vec{b})$.

Πραγματικά

$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) =$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι $\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$.

vi) Αν $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$, δηλαδή τα $\vec{a}$, $\vec{b}$ δεν είναι συγγραμμικά, τότε τα $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Πραγματικά, έστω κ, λ, μ πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$\varkappa \vec{a} + \lambda \vec{b} + \mu \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \,. \qquad (*)$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\varkappa = \lambda = \mu = 0$. Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της (*) εσωτερικά με $\vec{a} \times \vec{b}$ και χρησιμοποιώντας την (v), παίρνουμε

$$\mu(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \,,$$

δηλαδή, $\mu \| \vec{a} \times \vec{b} \|^2 = 0$ και άρα $\mu=0$, οπότε η (*) γίνεται $\varkappa \vec{a} + \lambda \vec{a} = \vec{0}$. Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $\varkappa = \lambda = 0$ διότι τα $\vec{a}$, $\vec{b}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα επειδή $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$ (βλέπε την (iii)).

Από την (vi) προκύπτει ότι, αν $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$ τότε τα $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ αποτελούν μια βάση για τον τριδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^3$.

vii) Αν $\vec{c} \perp \vec{a}$ και $\vec{c} \perp \vec{b}$, τότε τα $\vec{c}$ και $\vec{a} \times \vec{b}$ είναι συγγραμμικά. Πραγματικά, αν κάποιο από τα $\vec{c}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε προφανώς τα $\vec{c}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ είναι συγγραμμικά.

Έστω ότι $\vec{c} \neq \vec{0}$ και $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$. Επειδή τα $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ αποτελούν βάση για τον $\mathbb{R}^3$, υπάρχουν αριθμοί $\varkappa$, λ, μ με

$$\vec{c} = \varkappa \vec{a} + \lambda \vec{b} + \mu(\vec{a} \times \vec{b}) \,.$$

Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία ισότητα εσωτερικά με το $\varkappa \vec{a} + \lambda \vec{b}$, παίρνουμε

$$\vec{c} \cdot (\varkappa \vec{a} + \lambda \vec{b}) = (\varkappa \vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot (\varkappa \vec{a} + \lambda \vec{b}) + \mu(\vec{a} \times \vec{b})(\varkappa \vec{a} + \lambda \vec{b}) \,.$$

Επειδή $\vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{b} = 0$ και $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$, προκύπτει ότι

$$0 = \|\kappa \vec{a} + \lambda \vec{b}\|^2$$

και άρα $\kappa \vec{a} + \lambda \vec{b} = \vec{0}$, οπότε $\vec{c} = \mu(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Παρατήρηση: Αν $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$, τότε δεν ισχύει η ισότητα $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

1.4 Μικτό Γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$

Ορισμός: Για μια διατεταγμένη τριάδα $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^3$ ο αριθμός $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ ονομάζεται μικτό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (μ' αυτή τη σειρά).

Αν $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, τότε

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητες των οριζουσών, προκύπτει ότι η κυκλική μετάθεση των διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ δεν μεταβάλλει την τιμή του μικτού γινομένου, δηλαδή

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

Επίσης έχουμε

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} .$$

Πραγματικά

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} .$$

Το μικτό γινόμενο $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ το συμβολίζουμε με $[\vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}]$.

Θεώρημα 1.4.1

Τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ στον $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν, και μόνον αν, $[\vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}] = 0$.

Απόδειξη

Έστω ότι $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$. Αν $\vec{a} = 0$, τότε προφανώς τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Το ίδιο συμβαίνει και όταν $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{0}$, διότι τότε τα $\vec{b}, \vec{c}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Έστω ότι $\vec{b} \times \vec{c} \neq \vec{0}$. Τότε τα $\vec{b}, \vec{c}, \vec{b} \times \vec{c}$ αποτελούν μια βάση για τον $\mathbb{R}^3$. Άρα υπάρχουν αριθμοί κ, λ, μ τέτοιοι ώστε

$$\vec{a} = \kappa\vec{b} + \lambda\vec{c} + \mu(\vec{b} \times \vec{c}) . \qquad (*)$$

Επειδή $\vec{b} \perp (\vec{b} \times \vec{c})$ και $\vec{c} \perp (\vec{b} \times \vec{c})$, αν πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέλη της (*) εσωτερικά με το $\vec{b} \times \vec{c}$ παίρνουμε

$$0 = [\vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}] = \mu(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \mu\|\vec{b} \times \vec{c}\|^2$$

και άρα μ=0 διότι $\vec{b} \times \vec{c} \neq \vec{0}$. Συνεπώς η (*) γίνεται

$$\vec{a} = \varkappa\vec{b} + \lambda\vec{c}$$

και επομένως τα $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Αντιστρόφως, έστω ότι τα $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Άρα υπάρχουν αριθμοί κ. λ, μ, όχι όλοι μηδέν, με $\varkappa\vec{a} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{c} = \vec{0}$. Αν κ=0, τότε $\lambda\vec{b} + \mu\vec{c} = \vec{0}$, με $|\lambda|+|\mu| \neq 0$, οπότε τα $\vec{b}$, $\vec{c}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Αυτό συνεπάγεται ότι $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{0}$ και άρα $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = \vec{a} \cdot \vec{0} = 0$. Έστω ότι $\varkappa \neq 0$. Τότε

$$\vec{a} = \gamma\vec{b} + \delta\vec{c} \quad ,$$

όπου $\gamma = -\lambda/\varkappa$, $\delta = -\mu/\varkappa$. Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία ισότητα εσωτερικά με το $\vec{b} \times \vec{c}$, παίρνουμε $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = 0$.

Θεώρημα 1.4.2

Αν τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε η απόλυτη τιμή του μικτού γινομένου $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$ είναι ίση με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζεται από τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

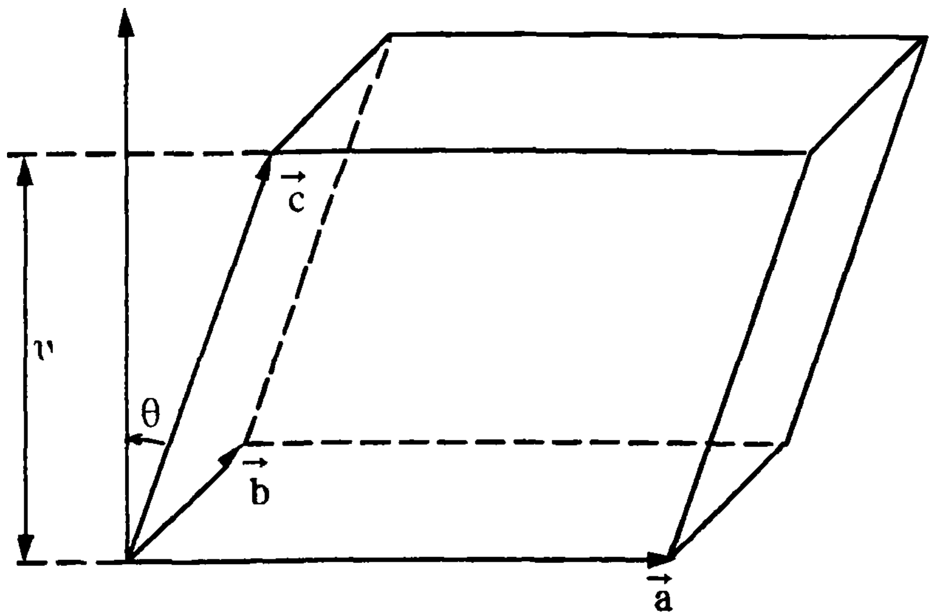
Απόδειξη

Αν θ είναι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{c}$, τότε

$$|[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]| = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \|\vec{c}\| |\text{συν}\theta| .$$

Το εμβαδό της βάσης του παραλληλεπιπέδου του σχήματος είναι $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ το δε ύψος υ ισούται με $υ = \|\vec{c}\|\,|συνθ|$. Αν V ο όγκος του παραλληλεπιπέδου τότε

$$V = (\text{εμβαδό βάσης}) \times \text{ύψος} = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\|\,|συνθ| = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|.$$



1.5 Ανοικτά - Κλειστά Υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$

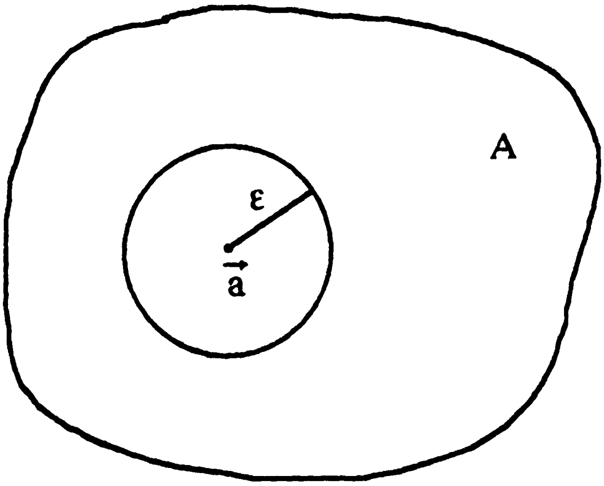
Έστω $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ και $r > 0$. Το σύνολο

$$B(\vec{a}, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{a}\| < r\}$$

ονομάζεται *ανοικτή μπάλα* με κέντρο το $\vec{a}$ και ακτίνα r. Ανάλογα, τό σύνολο

$$B[\vec{a}, r] = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{a}\| \leq r\}$$

ονομάζεται *κλειστή μπάλα* με κέντρο το $\vec{a}$ και ακτίνα r. Μερικές



φορές, αν ε>0, τότε θα ονομάζουμε τις μπάλες $B(\vec{a}, \varepsilon)$ και $B[\vec{a}, \varepsilon]$ *ανοικτή ε-περιοχή* του $\vec{a}$ και *κλειστή ε-περιοχή* του $\vec{a}$, αντίστοιχα.

Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ λέγεται *ανοικτό* αν για κάθε $\vec{a} \in A$ υπάρχει ε>0 (που εξαρτάται γενικά από το $\vec{a}$) τέτοιο ώστε $B(\vec{a}, \varepsilon) \subset A$. Ένα υποσύνολο B του $\mathbb{R}^n$ λέγεται *κλειστό* αν το συμπληρωματικό του $B^c = \mathbb{R}^n \setminus B$ είναι ανοικτό.

Άσκηση

Δείξτε ότι κάθε ανοικτή μπάλα $B(\vec{a}, r)$ στον $\mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό σύνολο και κάθε κλειστή μπάλα $B[\vec{a}, r]$ είναι κλειστό σύνολο.

Εσωτερικά και Εξωτερικά Σημεία Συνόλου

Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$. Ένα σημείο $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ λέγεται *εσωτερικό* σημείο του A αν υπάρχει ε>0 τέτοιο ώστε $B(\vec{a}, \varepsilon) \subset A$. Ένα σημείο $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ λέγεται *εξωτερικό* σημείο του A αν υπάρχει ε>0 τέτοιο ώστε $B(\vec{b}, \varepsilon) \subset A^c$. Προφανώς κάθε εσωτερικό σημείο του A ανήκει στο A ενώ τα εξωτερικά σημεία του A δεν ανήκουν στο A. Τέλος, ένα σημείο $\vec{a} \in A$ λέγεται *συνοριακό* σημείο του A αν δεν είναι ούτε εσωτερικό ούτε εξωτερικό σημείο του A. Ισοδύναμα, $\vec{a}$ είναι συνοριακό σημείο του A αν για κάθε $r>0$ έχουμε $B(\vec{a}, r) \cap A \neq \emptyset$ και $B(\vec{a}, r) \cap A^c \neq \emptyset$.

Παρατήρηση: Ένα συνοριακό σημείο του A μπορεί να ανήκει ή να μην ανήκει στο A.

Άσκηση

Έστω $A = B(\vec{a}, r)$, όπου $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ και $r>0$, και έστω $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι:

1) $\vec{b}$ είναι εσωτερικό σημείο του A αν, και μόνον αν, $\vec{b} \in A$.

2) $\vec{b}$ είναι συνοριακό σημείο του A αν, και μόνον αν, $\|\vec{b} - \vec{a}\| = r$.

3) $\vec{b}$ είναι εξωτερικό σημείο του A αν, και μόνον αν, $\|\vec{b} - \vec{a}\| > r$.

Σημεία Συσσώρευσης ή Οριακά Σημεία Συνόλου

Ένα σημείο $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ λέγεται σημείο *συσσώρευσης* ή συνοριακό σημείο ενός υποσυνόλου A του $\mathbb{R}^n$ αν για κάθε $r>0$ το σύνολο $B(\vec{a}, r)$ περιέχει ένα τουλάχιστο σημείο του A διάφορο του $\vec{a}$.

Παρατήρηση: Ένα σημείο συσσώρευσης του A μπορεί να ανήκει ή να μην ανήκει στο A.

Φραγμένα Σύνολα

Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ λέγεται *φραγμένο* αν υπάρχει $r>0$ τέτοιο ώστε $A \subset B[\vec{0}, r] = \{\vec{x} : \|\vec{x}\| \leq r\}$. Δηλαδή, A είναι φραγμένο αν, και μόνον αν, υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $\|\vec{x}\| \leq r$ για κάθε $\vec{x} \in A$.

Αν το σύνολο $A \in \mathbb{R}^n$ είναι φραγμένο, τότε ο αριθμός $d(A) = \sup\{\|\vec{x} - \vec{y}\| : \vec{x} \in A, \vec{y} \in \vec{A}\}$ ονομάζεται διάμετρος του A.

Άσκηση

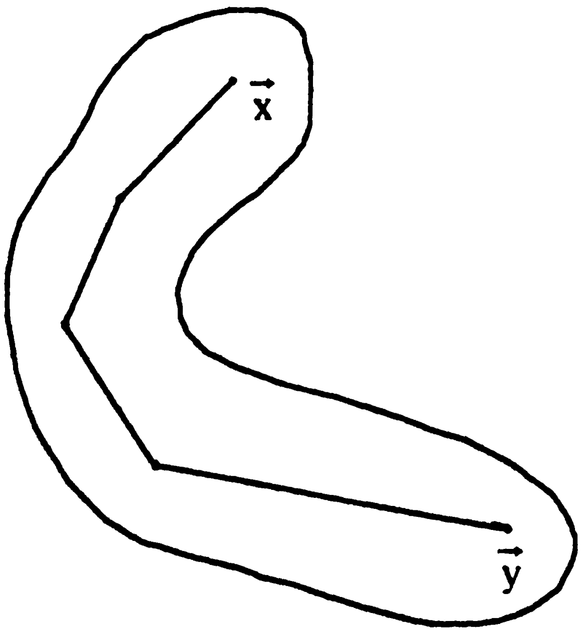
Έστω $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $r>0$ και $A = B(\vec{a}, r)$. Δείξτε ότι το A είναι φραγμένο και ότι $d(A) = 2r$.

Συμπαγή Σύνολα

Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ λέγεται συμπαγές αν είναι *κλειστό* και *φραγμένο*.

Χωρία

Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ είναι ένα *ανοικτό χωρίο* αν είναι ανοικτό σύνολο και αν δύο οποιαδήποτε σημεία του A μπορούν να συνδεθούν με πολυγωνική γραμμή η οποία ανήκει εξ ολοκλήρου στο A.



Ένα υποσύνολο D του $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται *χωρίο* αν το D αποτελείται από ένα ανοικτό χωρίο A μαζί με ορισμένα, όλα ή κανένα από τα συνοριακά σημεία του A.

Ένα *κλειστό χωρίο* είναι ένα χωρίο που είναι κλειστό σύνολο. Αποδεικνύεται εύκολα ότι ένα χωρίο είναι κλειστό αν, και μόνον αν, περιέχει όλα τα συνοριακά του σημεία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΤΗΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Μια συνάρτηση της οποίας το πεδίο ορισμού S είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ λέγεται μια συνάρτηση πολλών μεταβλητών. Αν f είναι η συνάρτηση που ορίζεται επί του S και αν $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ είναι ένα σημείο του S, τότε αντί για $f(\vec{x})$ γράφουμε μερικές φορές $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Παράδειγμα

Η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{4 - x_1^2 - x_2^2}$$

είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών με πεδίο ορισμού το σύνολο

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 - x_2^2 \leq 4\} .$$

2.1 Όρια

Ορισμός 2.1.1: Έστω $S \subset \mathbb{R}^n$ και έστω $f: S \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Έστω $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ ένα σημείο συσσώρευσης του S (το $\vec{a}$ δεν ανήκει αναγχαστικά στο S) και έστω $c \in \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι $f(\vec{x})$ τείνει προς τον αριθμό c όταν το $\vec{x}$ τείνει προς το $\vec{a}$, ή ότι το όριο του $f(\vec{x})$ είναι το c όταν το $\vec{x}$ τείνει προς το $\vec{a}$, αν ισχύει το ακόλουθο: Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\vec{x} \in S$ με $0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta$ να είναι $|f(\vec{x}) - c| < \varepsilon$. Σ' αυτή την περίπτωση γράφουμε

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = c \quad \text{ή} \quad f(\vec{x}) \to c \quad \text{όταν} \quad \vec{x} \to \vec{a}.$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = c$ αν, και μόνον αν, ισχύει το ακόλουθο:

Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\vec{x} \in S$, $\vec{x} \neq \vec{a}$, με $|x_1 - a_1| < \delta$, $|x_2 - a_2| < \delta$, ..., $|x_n - a_n| < \delta$, έχουμε $|f(x_1, x_2, ..., x_n) - c| < \varepsilon$.

Παράδειγμα 1

Θεωρούμε τη συνάρτηση f δύο μεταβλητών η οποία ορίζεται με τον τύπο

$$f(x, y) = \frac{x^3+2y^3}{x^2+3y^2}.$$

Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $S = \{(x, y): x^2+y^2 \neq 0\}$. Το (0, 0) δεν ανήκει στο S αλλά είναι σημείο συσσώρευσης του S. Θα δείξουμε ότι $\lim_{(x, y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$. Πραγματικά,

$$|f(x, y)| \leq \frac{|x^3|}{x^2+3y^2} + \frac{2|y|^2}{x^2+3y^2} = |x| \frac{x^2}{x^2+3y^2} + |y| \frac{2y^2}{x^2+3y^2} \leq |x| + |y|.$$

Έστω τώρα $\varepsilon>0$ και ας πάρουμε $\delta = \varepsilon/2$. Αν $|x-0| < \delta$ και $|y-0| < \delta$, τότε $|f(x,y)| \leq |x| + |y| < 2\delta = \varepsilon$.

Παράδειγμα 2

Για τη συνάρτηση $f(x, y) = \dfrac{(1+y^2)\eta\mu x}{x}$ να βρεθεί (αν υπάρχει) το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

Λύση

Πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $S = \{(x, y): x \neq 0\}$ και το $(0, 0)$ είναι σημείο συσσώρευσης του S. Όπως είναι γνωστό, έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$. Θα δείξουμε $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 1$. Πραγματικά, έστω $\varepsilon>0$. Υπάρχει $0<\delta<\min\{1, \varepsilon/2\}$ τέτοιο ώστε $\left|\dfrac{\eta\mu x}{x} - 1\right| < \varepsilon/2$ αν $0 < |x| < \delta$. Έστω τώρα $0 < |x| < \delta$ και $|y| < \delta$. Επειδή $|\eta\mu x| \leq |x|$, έχουμε

$$|f(x, y) - 1| \leq \left|\frac{\eta\mu x}{x} - 1\right| + y^2\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| < \varepsilon/2 + |y|\cdot 1 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon .$$

Διπλά Όρια

Έστω $A\subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0)\in \mathbb{R}^2$ και $f: A\to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Θέτουμε $_{x_0}A = \{y: (x_0, y)\in A\}$ και $A_{y_0} = \{x: (x, y_0)\in A\}$. Υποθέτουμε ότι το y_0 είναι σημείο συσσώρευσης του $_{x_0}A$ και ότι το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A_{y_0}. Υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε για κάθε y στο διάστημα $(y_0 - \delta, y_0+\delta)$ το οποίο ανήκει στο $_{x_0}A$ το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$ υπάρχει. Έτσι ορίζεται μια συνάρτηση $\varphi: (y_0 - \delta, y_0+\delta) \to \mathbb{R}$,

$\varphi(y) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$. Αν το όριο της συνάρτησης φ, όταν το y τείνει στο y_0, υπάρχει και είναι ένας αριθμός a, δηλαδή, αν $\lim\limits_{y \to y_0} \varphi(y) = a$, τότε ο a λέγεται *διπλό όριο* της f στο (x_0, y_0) και γράφουμε $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = a$.

Εναλλάσσοντας τη σειρά εύρεσης των ορίων, έχουμε (αν υπάρχει) το διπλό όριο $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$. Το όριο $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$ λέγεται διπλό όριο ως προς x και ως προς y ενώ το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$ λέγεται διπλό όριο ως προς y και ως προς x. Υπάρχουν τώρα τα εξής ερωτήματα:

1ο: Αν υπάρχει το ένα από τα διπλά όρια της f στο (x_0, y_0), τότε υπάρχει αναγκαστικά και το άλλο;

2ο: Αν τα όρια υπάρχουν, είναι κατ' ανάγκη ίσα;

3ο: Η ύπαρξη του ορίου $\lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ συνεπάγεται και την ύπαρξη των διπλών ορίων;

4ο: Αν τα δύο διπλά όρια της f στο (x_0, y_0) υπάρχουν και είναι ίσα, υπάρχει αναγκαστικά το όριο της f στο (x_0, y_0) ;

Τα επόμενα παραδείγματα δείχνουν ότι οι απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα δεν είναι κατ' ανάγκη καταφατικές.

Παράδειγμα 1 $f(x, y) = x\,\eta\mu\frac{1}{y}$

Πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $S = \{(x, y): y \neq 0\}$ και το (0, 0) είναι σημείο συσσώρευσης της f. Επειδή

$$\left|x\,\eta\mu\frac{1}{y}\right| \leq |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} \ ,$$

προκύπτει ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Για $y\neq 0$, έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$ και άρα $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$, δηλαδή το ένα διπλό όριο υπάρχει. Όμως το άλλο διπλό όριο $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ δεν υπάρχει διότι, για $x\neq 0$, το όριο $\lim\limits_{y\to 0} x\,\eta\mu\frac{1}{y}$ δεν υπάρχει.

Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι η απάντηση τόσο στο 1ο ερώτημα όσο και στο 3ο ερώτημα είναι γενικά αρνητική.

Παράδειγμα 2 $f(x,y) = \dfrac{\eta\mu(x^2+y)}{x+y}$

Πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $S = \{(x,y): y \neq -x\}$ και το (0, 0) είναι σημείο συσσώρευσης του S. Για $y\neq 0$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \dfrac{\eta\mu y}{y}$ και $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\eta\mu y}{y} = 1$. Άρα $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 1$. Από το άλλο μέρος, για $x\neq 0$ έχουμε $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \dfrac{\eta\mu x^2}{x}$ και

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x^2}{x} = \lim_{x\to 0}\left[x\cdot\frac{\eta\mu x^2}{x^2}\right] = \left[\lim_{x\to 0} x\right]\left[\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x^2}{x^2}\right] = 0\cdot 1 = 0 .$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = 0$, που σημαίνει ότι τα δύο διπλά όρια είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Το παράδειγμα δείχνει ότι η απάντηση στο δεύτερο από τα παραπάνω ερωτήματα δεν είναι πάντοτε καταφατική.

Παράδειγμα 3 $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

Πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $S = \{(x,y): x^2+y^2 \neq 0\}$ και το (0, 0) είναι σημείο συσσώρευσης της f.

Για $x \neq 0$ είναι $\lim_{y \to 0} f(x, y) = 0$. Ομοίως, για $y \neq 0$, έχουμε $\lim_{x \to 0} f(x, y) = 0$.

Επομένως

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = 0 = \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y).$$

Αλλά το όριο $\lim_{(x, y) \to (0,0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει. Πραγματικά έστω ότι υπάρχει το όριο αυτό και είναι ο αριθμός a. Επειδή $(x, 0) \to (0, 0)$ όταν $x \to 0$, θα είναι $\lim_{x \to 0} f(x, 0) = \lim_{(x, y) \to (0,0)} f(x, y) = a$ και άρα $a=0$ διότι $f(x, 0) = 0$ όταν $x \neq 0$. Από το άλλο μέρος, επειδή $(x, x) \to (0, 0)$ όταν $x \to 0$, θα είναι $a = \lim_{x \to 0} f(x, x) = \lim_{x \to 0} 1 = 1$, άτοπο.

Το παράδειγμα αποδεικνύει ότι η απάντηση στο ερώτημα 4 είναι γενικά όχι.

Παράδειγμα 4 $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$

Εδώ, έχουμε $\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = 0 = \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y)$. Αλλά το όριο $\lim_{(x, y) \to (0,0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει. Πραγματικά, αν $(x, y) \to (0, 0)$ κατά μήκος της γραμμής $y = \lambda x$, έχουμε $\lim_{x \to 0} f(x, \lambda x) = \lim_{x \to 0} \dfrac{\lambda^2}{1+\lambda^4} = \dfrac{\lambda^2}{1+\lambda^4}$ και συνεπώς το όριο $\lim_{(x, y) \to (0,0)} f(x, y)$ δεν μπορεί να υπάρχει.

2.2 Συνέχεια Συναρτήσεων

Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ και έστω $f: A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Η f θα λέγεται συνεχής σ' ένα σημείο $\vec{a}$ του A αν ισχύει το ακόλουθο. Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε αν $\vec{a} \in A$ με $\|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta$, τότε $|f(\vec{x}) - f(\vec{a})| < \varepsilon$. Η συνθήκη είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη: Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$

τέτοιο ώστε για κάθε $\vec{x} \in A$ με $|x_1 - a_1| < \delta$, $|x_2 - a_2| < \delta$, ..., $|x_n - a_n| < \delta$, να είναι $|f(x_1, ..., x_n) - f(a_1, ..., a_n)| < \varepsilon$.

Όπως προκύπτει από τον ορισμό της συνέχειας, αν το $\vec{a} \in A$ είναι οριακό σημείο του Α, τότε η f είναι συνεχής στο $\vec{a}$ αν, και μόνον αν, $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$. Έστω τώρα ότι το $\vec{a} \in A$ δεν είναι οριακό σημείο του Α. Σ' αυτή την περίπτωση είναι, όπως λέγεται, μεμονωμένο σημείο του Α, δηλαδή υπάρχει r>0 τέτοιο ώστε $A \cap B(\vec{a}, r) = \{\vec{a}\}$. Αν τώρα $\vec{x} \in A$ με $\|\vec{x} - \vec{a}\| < r$, τότε $\vec{x} = \vec{a}$ και άρα $f(\vec{x}) = f(\vec{a})$. Αυτό αποδεικνύει ότι η f είναι συνεχής σε κάθε μεμονωμένο σημείο του Α. Η συνάρτηση f θα λέγεται συνεχής στο σύνολο ορισμού της Α αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του Α.

Ομοιόμορφος Συνέχεια

Η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ $(A \subset \mathbb{R}^n)$ λέγεται ομοιομόρφως συνεχής επί του Α αν, για κάθε ε>0, υπάρχει δ>0 τέτοιο ώστε αν $\vec{x}, \vec{y} \in A$ με $\|\vec{x} - \vec{y}\| < \delta$, τότε $|f(\vec{x}) - f(\vec{y})| < \varepsilon$.

Προφανώς κάθε ομοιομόρφως συνεχής συνάρτηση είναι συνεχής. Έχουμε επίσης το ακόλουθο:

Θεώρημα 2.2.1

Αν Α είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και αν η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής επί του Α, τότε η f είναι ομοιομόρφως συνεχής.

Όπως και στην περίπτωση συναρτήσεων μιας μεταβλητής έχουμε το εξής:

Θεώρημα 2.2.2

Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ και έστω $f, g: A \to \mathbb{R}$. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς σ' ένα $\vec{a} \in A$, τότε και οι συναρτήσεις $f+g$, fg και λf (για $\lambda \in \mathbb{R}$) συνεχείς στο $\vec{a}$. Επίσης, αν $g(\vec{x}) \neq 0$ για κάθε $\vec{x} \in A$, τότε και η $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής στο $\vec{a}$.

2.3 Μερικές παράγωγοι

Ορισμός: Έστω $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ και $\vec{a} = (a_1, ..., a_n)$ ένα εσωτερικό σημείο του A. Αν για κάποιο j, $1 \leq j \leq n$, τό όριο

$$\lim_{x_j \to a_j} \frac{f(a_1, a_2, ..., a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, ..., a_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n)}{x_j - a_j}$$

υπάρχει, τότε η τιμή αυτού του ορίου ονομάζεται μερική παράγωγος της f στο $\vec{a}$ ως προς τη μεταβλητή x_j και θα την παριστάνουμε με ένα από τα ακόλουθα τρια σύμβολα $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{a})$, $f_{x_j}(\vec{a})$, $D_{x_j}f(\vec{a})$. Θα λέμε ότι η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο $\vec{a}$ αν στο σημείο αυτό υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})$. Αν η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του A, τότε η f λέγεται μερικώς παραγωγίσιμη στο A. Σ' αυτή την περίπτωση ορίζονται οι συναρτήσεις $\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}$ οι οποίες έχουν πεδίο ορισμού το A και ονομάζονται μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της f. Αν υπάρχει r>0 τέτοιο ώστε $B(\vec{a}, r) \subset A$ και η $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ να υπάρχει σε κάθε σημείο του $B(\vec{a}, r)$ και αν η συνάρτηση $\frac{\partial f}{\partial x_i} : B(\vec{a}, r) \to \mathbb{R}$ είναι μερικώς παραγωγίσιμη ως προς x_j στο $\vec{a}$, τότε η παράγωγος της $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ως προς x_j στο $\vec{a}$ θα παρίσταται με $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{a})$ και θα ονομάζεται μερική παράγωγος δευτέρας τάξης της f στο $\vec{a}$ ως προς x_i και x_j . Στην περίπτωση που j=i, γράφουμε συνήθως $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\vec{a})$ αντί για $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(\vec{a})$.

Ανάλογα ορίζονται οι μερικές παράγωγοι ανωτέρας τάξης.

Παράδειγμα 1

Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = ημx_1\, συνx_2$ έχουμε: $\frac{\partial f}{\partial x_1} = συνx_1\, συνx_2$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = -\,ημx_1\, ημx_2$, $\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = -\,συνx_1\, ημx_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -\,ημx_1\, συνx_2,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2} = ημx_1\, ημx_2$$

κ.ο.κ.

Υπάρχουν τα εξής ερωτήματα για συναρτήσεις δύο μεταβλητών:

1°: Αν μια από τις δύο παραγώγους δευτέρας τάξης $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ υπάρχει σ' ένα σημείο, τότε θα υπάρχει αναγκαστικά και η άλλη;

2°: Αν και οι δύο μερικές παράγωγοι υπάρχουν σ' ένα σημείο, τότε θα είναι αναγκαστικά ίσες;

Τα επόμενα δύο παραδείγματα δείχνουν ότι οι απαντήσεις στα δύο αυτά ερωτήματα δεν είναι πάντοτε καταφατικές.

Παράδειγμα 2

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\ , & \text{αν} \quad x^2+y^2\neq 0\\[2mm] 0\ , & \text{αν} \quad x=y=0\end{cases}$$

Για τη συνάρτηση f έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0\ .$$

Για $y\neq 0$, έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y^2}{\sqrt{y^2}}=\frac{y^2}{|y|}=|y|\ .$$

Άρα το όριο

$$\lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{|y|}{y}$$

δεν υπάρχει, που σημαίνει ότι η παράγωγος δευτέρας τάξης $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$

δεν υπάρχει.

Από το άλλο μέρος, για $x\neq 0$ έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(x,y) - f(x,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{\dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{0}{|x|} = 0$$

και άρα $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0$.

Παράδειγμα 3

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & , \quad \text{αν} \quad x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & , \quad \text{αν} \quad x = y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{0}{y} = 0 \ .$$

Για $y \neq 0$, έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,y) - f(0,y)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{xy^3}{x^2+y^2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{y^3}{x^2+y^2} = y$$

και άρα

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{y} = 1 \ .$$

Επίσης, για $x \neq 0$ έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{xy^3}{x^2+y^2}}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^2} = \frac{0}{x^2} = 0$$

και επομένως

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0 .$$

Ώστε $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

Το επόμενο θεώρημα δίνει μια συνθήκη για την ισότητα των $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

Θεώρημα 2.3.1

Έστω V ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, $(x_o, y_o)\in V$ και $f: V\to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Αν υπάρχουν στο V οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ και αν η $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ είναι συνεχής στο (x_o, y_o), τότε η $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_o, y_o)$ υπάρχει και ισούται με την $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$. Ισχύει επίσης η εξής γενίκευση του προηγουμένου θεωρήματος.

Θεώρημα 2.3.2

Έστω V ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, $f: V\to \mathbb{R}$ και k ένας φυσικός αριθμός. Αν όλες οι μερικές παράγωγοι της f μέχρι τάξης k υπάρχουν και είναι συνεχείς επί του V και αν $m_1, m_2, \ldots, m_k$ είναι θετικοί ακέραιοι (όχι κατ' ανάγκη διάφοροι μεταξύ των) μικρότεροι ή το πολύ ίσοι με το n (δηλαδή $m_1 \leq n, \ldots, m_k \leq n$), τότε η μερική παράγωγος k-τάξης $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{m_1} \partial x_{m_2} \ldots \partial x_{m_k}}$ δε μεταβάλλεται αν κάνουμε οποιαδήποτε μετάθεση των δεικτών $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

Όπως είναι γνωστό, αν μια πραγματική συνάρτηση μιας μεταβλητής είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο a του πεδίου ορισμού της, τότε η f είναι συνεχής στο a. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Η ύπαρξη δηλαδή των μερικών παραγώγων πρώτης τάξης μιας συνάρτησης f σ' ένα σημείο δεν συνεπάγεται αναγκαστικά τη συνέχεια της f στο σημείο αυτό.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{αν} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{αν} \quad x = y = 0 . \end{cases}$$

Για την f έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$$

και για τον ίδιο λόγο $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Ώστε οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ και $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ υπάρχουν στο (0, 0). Αλλά η f δεν είναι συνεχής στο (0, 0). Πραγματικά, έστω ότι η f ήταν συνεχής στο (0, 0). Τότε θα υπήρχε δ>0 τέτοιο ώστε $|f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,y)| < \frac{1}{2}$ αν $|x-0| < \delta$ και $|y-0| < \delta$. Αν τώρα $x = y = \frac{\delta}{2}$, τότε θα είχαμε

$$\frac{1}{2} > f\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right) = \frac{\frac{\delta^2}{4}}{\frac{\delta^2}{2}} = \frac{1}{2}, \quad \text{άτοπο} .$$

2.4 Ιακωβιανές Ορίζουσες

Έστω $u_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n)$, $u_2 = f_2(x_1, \ldots, x_n)$, ..., $u_n = f_n(x_1, \ldots, x_n)$, n πραγματικές συναρτήσεις οι οποίες ορίζονται σ' ένα ανοικτό υποσύνολο V του $\mathbb{R}^n$ και έστω $\vec{a} \in V$. Αν οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i=1, \ldots, n$, $j=1, \ldots, n$, υπάρχουν στο $\vec{a}$, τότε η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{a}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{a}) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \ldots\ldots & & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\vec{a}) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{vmatrix}$$

ονομάζεται Ιακωβιανή ορίζουσα των συναρτήσεων $f_1, \ldots, f_n$ στο $\vec{a}$ ως προς τις μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n$ (μ' αυτή τη σειρά) και θα τη συμβολίζουμε με $\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(\vec{a})$.

Παράδειγμα 1

Αν $x = u^2 - v^2$ και $y = 2uv$, τότε

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4(u^2+v^2)\ .$$

Παράδειγμα 2

Αν $u = \dfrac{x}{\sqrt{1-r^2}}$, $v = \dfrac{y}{\sqrt{1-r^2}}$ όπου $r^2 = x^2+y^2$, δείξτε ότι $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{1}{(1-r^2)^2}$.

Λύση

$$u = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\ ,\ v = \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Άρα

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sqrt{1-x^2-y^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}}{1-x^2-y^2} = \frac{1-x^2-y^2+x^2}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} = \frac{1-y^2}{(1-r^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\dfrac{xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}}{1-x^2-y^2} = \frac{xy}{(1-r^2)^{3/2}}\ .$$

Ανάλογα έχουμε

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{xy}{(1-r^2)^{3/2}} \quad \text{και} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1-x^2}{(1-r^2)^{3/2}} \ .$$

Άρα

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \begin{vmatrix} \dfrac{1-y^2}{(1-r^2)^{3/2}} & \dfrac{xy}{(1-r^2)^{3/2}} \\[2ex] \dfrac{xy}{(1-r^2)^{3/2}} & \dfrac{1-x^2}{(1-r^2)^{3/2}} \end{vmatrix} = \frac{(1-x^2)\,(1-y^2)-x^2y^2}{(1-r^2)^3} = \frac{1-x^2-y^2}{(1-r^2)^3} =$$

$$= \frac{1-r^2}{(1-r^2)^3} = \frac{1}{(1-r^2)^2} \ .$$

2.5 Διαφορίσιμες Συναρτήσεις

Ορισμός 2.5.1: Έστω V ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in V$ και f: $V \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Η συνάρτηση f λέγεται διαφορίσιμη στο $\vec{a}$ αν

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a})\,(x_k - a_k)}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0 \ .$$

Ισοδύναμα, η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$ αν οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της f στο $\vec{a}$ υπάρχουν και

$$\lim_{(h_1, \dots, h_n) \to (0, \dots, 0)} \frac{f(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n) - f(a_1, \dots, a_n) - \sum\limits_{k=1}^{n} h_k \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a})}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} h_k^2}} = 0$$

Για συναρτήσεις μιας μεταβλητής οι έννοιες *παραγωγίσιμη συνάρτηση* και *διαφορίσιμη συνάρτηση* ταυτίζονται. Πραγματικά έστω y μια πραγματική συνάρτηση μιας μεταβλητής η οποία είναι παραγωγίσιμη στο a. Τότε

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{g(a+h)-g(a)}{h}-g'(a)\right]=0 ,$$

το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)-hg'(a)}{|h|}=0 ,$$

δηλαδή η g είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$.

Όπως όμως θα δούμε παρακάτω, δεν ισχύει το ίδιο για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Δηλαδή η ύπαρξη σ' ένα σημείο $\vec{a}$ του πεδίου ορισμού της f όλων των μερικών παραγώγων πρώτης τάξης δεν συνεπάγεται ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$.

Πρόταση 2.5.2

Έστω V ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, f: $V\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση και $\vec{a}\in V$. Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$, τότε η f είναι συνεχής σ' αυτό.

Απόδειξη

Για $\vec{h}=(h_1,\ldots,h_n)\neq(0,0,\ldots,0)$, τέτοιο ώστε $\vec{a}+\vec{h}\in V$, έχουμε

$$f(\vec{a}+\vec{h})-f(\vec{a})=\|\vec{h}\|\frac{f(\vec{a}+\vec{h})-f(\vec{a})-\sum_{k=1}^{n}h_k\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a})}{\|\vec{h}\|}+\sum_{k=1}^{n}h_k\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) .$$

Αν $\vec{h} \to \vec{0}$, τότε $\dfrac{f(\vec{a}+\vec{h}) - f(\vec{a}) - \sum\limits_{k=1}^{n} h_k \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a})}{\|\vec{h}\|} \to 0$ (διότι η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$ και $\sum\limits_{k=1}^{n} h_k \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) \to 0$, διότι $h_k \to 0$ όταν $\vec{h} \to \vec{0}$.

Άρα

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{0}} (f(\vec{a}+\vec{h}) - f(\vec{a})) = 0 ,$$

που σημαίνει ότι η f είναι συνεχής στο $\vec{a}$.

Ας θεωρήσουμε τώρα τη συνάρτηση f του παραδείγματος που αναφέραμε μετά το Θεώρημα 2.3.2, δηλαδή

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} , & \text{αν} \quad (x^2, y^2) \neq 0 \\ 0 , & \text{αν} \quad x = y = 0 . \end{cases}$$

Όπως είδαμε οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ και $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ υπάρχουν.

Αλλά η f δεν είναι διαφορίσιμη στο (0, 0) γιατί αν ήταν η f θα ήταν συνεχής στο (0, 0), σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, πράγμα που δεν συμβαίνει όπως δείξαμε.

Όπως αναφέραμε παραπάνω η απλή ύπαρξη των παραγώγων πρώτης τάξης μιας συνάρτησης f δεν συνεπάγεται τη διαφορισιμότητα της f. Αν όμως οι μερικές αυτές παράγωγοι είναι συνεχείς, τότε η f είναι διαφορίσιμη σύμφωνα με το επόμενο

Θεώρημα 2.5.3

Έστω $V \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $\vec{a} \in V$ και $f: V \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Αν οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης υπάρχουν στο V και είναι συνεχείς στο $\vec{a}$, τότε:

i) Η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$

ii) Η f είναι συνεχής στο $\vec{a}$.

Διαφορικό Συνάρτησης

Ορισμός 2.5.4: Έστω $V \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $f: V \to \mathbb{R}$ και $\vec{a} \in V$. Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$, τότε η συνάρτηση

$$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad F(h_1, h_2, \ldots, h_n) = \sum_{k=1}^{n} h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a})$$

ονομάζεται διαφορικό της f στο $\vec{a}$ και συμβολίζεται με $df(\vec{a})$. Ώστε

$$df(\vec{a})\,(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{k=1}^{n} h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) \; .$$

Αν, για $1 \le i \le n$, θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad g(x_1, \ldots, x_n) = x_i \, ,$$

και αν παραστήσουμε το διαφορικό αυτής στο $\vec{a}$ με $dx_i(\vec{a})$, τότε $dx_i(\vec{a})$ $(h_1, \ldots, h_n) = h_i$. Άρα $df(\vec{x})\,(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x})\, dx_k(\vec{x})(h_1, \ldots, h_n)$,

δηλαδή,

$$df(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \quad ,$$

που είναι ο συνήθης τρόπος γραφής του διαφορικού μιας συνάρτησης.

Αν η f είναι διαφορίσιμη σε κάθε $\vec{x} \in V$, τότε παίρνουμε μια συνάρτηση df που ονομάζεται διαφορικό της f η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \ .$$

Παράδειγμα

Για τη συνάρτηση

$$f(x, y, z) = x^2 + \eta\mu z + e^y$$

έχουμε $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^y$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \sigma\upsilon\nu z$. Επειδή οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ είναι συνεχείς, η f είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^3$ και

$$df = 2\,x dx + e^y dy + \sigma\upsilon\nu\, z dz \ .$$

2.6 Παράγωγοι κατά Διεύθυνση

Ένα διάνυσμα $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ λέγεται μοναδιαίο αν $\|\vec{u}\| = 1$.

Ορισμός: Έστω $V \subset \mathbb{R}^n$, $f: V \to \mathbb{R}$, $\vec{a}$ ένα εσωτερικό σημείο του V και $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα. Αν το όριο

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{a} + t\vec{u}) - f(\vec{a})}{t}$$

υπάρχει, τότε το όριο αυτής ονομάζεται παράγωγος της f κατά τη διεύθυνση του $\vec{u}$ και παρίσταται με $D_{\vec{u}} f(\vec{a})$.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x}, & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{αν} \quad x = 0 . \end{cases}$$

Θα βρούμε την παράγωγο της f κατά τη διεύθυνση του $\vec{u} = (1, 0)$ στο σημείο (0, 0).

$$D_{\vec{u}} f(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2+0}{t^2} = 1 .$$

Αν $\vec{v}$ είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$, τότε με τον όρο παράγωγος της f κατά τη διεύθυνση του $\vec{v}$ θα εννοούμε την παράγωγο της f κατά τη διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.

Θεώρημα 2.6.1

Έστω $V \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $\vec{a} \in V$, $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα και $f: V \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$, τότε η παράγωγος της f στο $\vec{a}$ κατά τη διεύθυνση του $\vec{u}$ υπάρχει και

$$D_{\vec{u}} f(\vec{a}) = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}), \quad \vec{u} = (u_1, \ldots, u_n) .$$

Απόδειξη

Επειδή το V είναι ανοικτό και $\vec{a} \in V$, υπάρχει $r>0$ τέτοιο ώστε $\vec{a}+\vec{h} \in V$ για κάθε $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ με $\|\vec{h}\| < r$. Έστω

$$W = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n : \ \|\vec{y}\| < r\}$$

και ορίζουμε $\varphi: W \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(\vec{h}) = f(\vec{a}+\vec{h}) - f(\vec{a}) - \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}),$$

$\vec{h} = (h_1, ..., h_n)$. Επειδή η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$, έχουμε ότι $\lim\limits_{\vec{h} \to 0} \frac{\varphi(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$. Παίρνοντας $\vec{h} = t\vec{u}$ με $|t| < r$, έχουμε

$$\frac{f(\vec{a}+t\vec{u}) - f(\vec{a})}{t} = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) + \frac{\varphi(t\vec{u})}{t},$$

όταν $t \to 0$, θα έχουμε ότι $t\vec{u} \to 0$ και άρα

$$\left|\frac{\varphi(t\vec{u})}{t}\right| = \frac{|\varphi(t\vec{u})|}{\|t\vec{u}\|} \to 0 .$$

Επομένως

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{a}+t\vec{u}) - f(\vec{a})}{t} = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}).$$

Παρατηρήσεις:

1) Αν πάρουμε $\vec{u} = \vec{e}_i = (0, 0, ..., 1, 0, ..., 0)$, όπου το 1 υπάρχει

στην i-θέση, τότε $D_{\vec{u}} f(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})$.

2) Είναι δυνατόν για μια συνάρτηση f να υπάρχει σ' ένα σημείο η παράγωγος κατά τη διεύθυνση ενός μοναδιαίου διανύσματος και να μην υπάρχει κατά τη διεύθυνση ενός άλλου. Όπως έχουμε δει π.χ. υπάρχουν συναρτήσεις f για τις οποίες σ' ένα σημείο $\vec{a}$ υπάρχει κάποια μερική παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})$ αλλά δεν υπάρχει η $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{a})$ για κάποιο άλλο j.

3) Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.6.1, αν η f είναι διαφορίσιμη σε κάποιο σημείο $\vec{a}$, τότε στο σημείο αυτό υπάρχει η παράγωγος $D_{\vec{u}} f(\vec{a})$ για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{u}$. Η ύπαρξη όμως των παραγώγων κατά διεύθυνση σ' ένα σημείο δεν συνεπάγεται τη διαφορισιμότητα της f στο σημείο αυτό.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ και το σημείο $\vec{a} = (0, 0)$. Έστω $\vec{u} = (u_1, u_2)$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^2$. Επειδή $u_1^2+u_2^2 = 1$, υπάρχει μοναδικό θ, $0 \le \theta < 2\pi$, τέτοιο ώστε $u_1 =$ συνθ, $u_2 =$ ημθ. Έχουμε

$$D_{\vec{u}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\,\text{συν}\theta,\ t\sin\theta) - 0}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{t^3\,\text{συν}^3\theta + t^3\,\text{ημ}^3\theta}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{\text{ημ}^3\theta+\text{συν}^3\theta}}{1}$$

$$= \sqrt[3]{\text{ημ}^3\theta+\text{συν}^3\theta}\ .$$

Ώστε η $D_{\vec{u}} f(0, 0)$ υπάρχει για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{u}$. Ειδικά για $\theta=0$ και $\theta=\pi/2$, έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) .$$

Η f όμως δεν είναι διαφορίσιμη στο (0, 0). Πραγματικά,

$$\varphi(x, y) = \frac{f(x, y)- f(0, 0)- x\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)- y\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^3+y^3}- x- y}{\sqrt{x^2+y^2}} .$$

Για $x=y=t$, έχουμε $\varphi(t,t) = \dfrac{\sqrt[3]{2t^3}- 2t}{\sqrt{2t^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{2}- 2}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{t}{|t|}$ και το όριο $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t, t)$ δεν υπάρχει.

4) Η ύπαρξη των μερικών παραγώγων πρώτης τάξης της f σ' ένα σημείο δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη όλων των παραγώγων κατά διεύθυνση στο σημείο αυτό.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{αν} \quad x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{αν} \quad x = y = 0 . \end{cases}$$

Έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x, 0)- f(0, 0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 .$$

Αν όμως $\vec{u} = (\text{συν}\varphi, \text{ημ}\varphi)$ όπου φ είναι τέτοιο ώστε $\text{ημ}2\varphi \neq 0$ (δηλαδή αν $\varphi \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$), τότε

$$\frac{f(0+t\text{συν}\varphi, 0+t\text{ημ}\varphi) - f(0,0)}{t} = \frac{\text{ημ}\varphi\,\text{συν}\varphi}{t} = \frac{\text{ημ}2\varphi}{2t}$$

και το όριο $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\text{ημ}2\varphi}{2t}$ δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

Ορισμός: Αν οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})$ μιας συνάρτησης υπάρχουν σ' ένα σημείο $\vec{a}$, τότε το διάνυσμα $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}))$ ονομάζεται ανάδελτα (gradient) της f στο $\vec{a}$ και παρίσταται με $\nabla f(\vec{a})$ ή με $(\text{grad } f)(\vec{a})$.

Θεώρημα 2.6.2

Έστω $f\colon V \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση όπου V ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη σ' ένα σημείο $\vec{a} \in V$. Τότε:

i) Αν $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$, τότε $D_{\vec{u}} f(\vec{a}) = 0$ για κάθε διεύθυνση $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$.

ii) Αν $\nabla f(\vec{a}) \neq \vec{0}$, τότε το μέγιστο της $D_{\vec{u}} f(\vec{a})$ επιτυγχάνεται στη διεύθυνση του ανάδελτα, και ισούται με $\|\nabla f(\vec{a})\|$, και το ελάχιστο στη διεύθυνση του $-\nabla f(\vec{a})$ και ισούται προς $-\|\nabla f(\vec{a})\|$.

Απόδειξη

i) Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.6.1, έχουμε $D_{\vec{u}} f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{u}$.
Είναι τώρα προφανές ότι αν

$$\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}, \quad \text{τότε} \quad D_{\vec{u}} f(\vec{a}) = 0 .$$

ii) Θέτουμε $\vec{v} = \dfrac{\nabla f(\vec{a})}{\|\nabla f(\vec{a})\|}$. Για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{u}$, έχουμε

$$|D_{\vec{u}} f(\vec{a})| = |\nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{u}| \leq \|\nabla f(\vec{a})\| \, \|\vec{u}\| = \|\nabla f(\vec{a})\|$$

και άρα

$$-\|\nabla f(\vec{a})\| \leq D_{\vec{u}} f(\vec{a}) \leq \|\nabla f(\vec{a})\| .$$

Για το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{v}$, έχουμε

$$D_{\vec{v}} f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{v} = \nabla f(\vec{a}) \cdot \frac{\nabla f(\vec{a})}{\|\nabla f(\vec{a})\|}$$

$$= \frac{\|\nabla f(\vec{a})\|^2}{\|\nabla f(\vec{a})\|} = \|\nabla f(\vec{a})\|$$

και

$$D_{-\vec{v}} f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot (-\vec{v}) = -(\nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{v}) = \|\nabla f(\vec{a})\| .$$

Η παράγωγος $D_{\vec{u}} f(\vec{a})$ ονομάζεται και *ρυθμός μεταβολής* της f κατά τη διεύθυνση του $\vec{u}$.

Παρατήρηση: Η ύπαρξη όλων των παραγώγων κατά διεύθυνση μιας συνάρτησης f σ' ένα σημείο $\vec{a}$ δεν συνεπάγεται τη συνέχεια της f στο $\vec{a}$.

2.7 Παράγωγοι Σύνθετων Συναρτήσεων

Όπως ξέρουμε, αν f είναι μια πραγματική συνάρτηση μιας μεταβλητής x και αν x=x(t), τότε στην περίπτωση που τόσο η f όσο και η x(t) είναι παραγωγίσιμες, η σύνθετη συνάρτηση $h(t) = f(x(t))$ είναι παραγωγίσιμη και $\frac{dh}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$. Τα επόμενα δύο θεωρήματα, που τα δίνουμε χωρίς απόδειξη, αναφέρονται στην παραγώγιση σύνθετων συναρτήσεων περισσοτέρων της μιας μεταβλητών.

Θεώρημα 2.7.1

Έστω $f: V \to \mathbb{R}$, όπου V είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Έστω $x_1 = x_1(t), \ldots, y_n = y_n(t)$ n- συναρτήσεις που ορίζονται σ' ένα ανοικτό διάστημα (a, b) της πραγματικής ευθείας και είναι τέτοιες ώστε $(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \in V$ για κάθε $t \in (a, b)$. Αν οι συναρτήσεις $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ είναι παραγωγίσιμες σ' ένα $t_0 \in (a, b)$ και αν η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a} = (x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0))$ τότε η σύνθετος συνάρτηση

$$F: (a, b) \to \mathbb{R}, \quad F(t) = f(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)),$$

είναι παραγωγίσιμη στο t_0 και ισχύει η ισότητα

$$\frac{dF}{dt}(t_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) \frac{dx_k}{dt}(t_0).$$

Σημείωση: Στην πράξη συνηθίζεται να χρησιμοποιούμε και για τη σύνθετη συνάρτηση την f, δηλαδή να θεωρούμε την f ως συνάρτηση του t μετά την αντικατάσταση των $x_1, ..., x_n$ με $x_1(t), ..., x_n(t)$ αντίστοιχα και να γράφουμε

$$\frac{df}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{dx_k}{dt} . \qquad (*)$$

Πρέπει όμως να έχουμε υπόψη ότι στην (*) οι παράγωγοι $\frac{df}{dt}$ και $\frac{dx_k}{dt}$ υπολογίζονται στο t_o ενώ η $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ στο $(x_1(t_o), ..., x_n(t_o))$.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τη συνάρτηση $u = x^2 e^{x-y^2}$. Αν $x =$ συνt και $y = t^2$, να βρεθεί η $\frac{du}{dt}$.

Λύση

Έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x^2+2x)\, e^{x-y^2} , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\,2yx^2 e^{x-y^2} , \quad \frac{dx}{dt} = -\,\text{ημ}t , \quad \frac{dy}{dt} = 2t .$$

Άρα

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = e^{x-y^2}\,[-\,(x^2+2x)\text{ημ}t - 4tyx^2]$$

$$= e^{\text{συν}t - t^4}\,[-\,(\text{συν}^2 t + 2\text{συν}t)\text{ημ}t - 4t^3\text{συν}^2 t] .$$

Θεώρημα 2.7.2

Έστω W, V ανοικτά υποσύνολα των R^m και $\mathbb{R}^n$, αντίστοιχα, και έστω $f: V \to \mathbb{R}$. Έστω επίσης $x_1 = x_1(u_1, ..., u_m), ..., x_n = x_n(u_1, ..., u_m)$ n-συναρτήσεις που ορίζονται επί του W και είναι τέτοιες ώστε $(x_1(u_1, ..., u_m), ..., x_n(u_1, ..., u_m)) \in V$ για κάθε $(u_1, u_2, ..., u_m) \in W$. Έστω $\vec{a} = (a_1, ..., a_m) \in W$ και $\vec{b} = (x_1(\vec{a}), x_2(\vec{a}), ..., x_n(\vec{a})) \in V$. Αν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial x_i}{\partial u_j}(\vec{a})$, $i=1, ..., n$, $j=1, ..., m$, υπάρχουν και αν η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{b}$, τότε για την σύνθετο συνάρτηση $F: W \to \mathbb{R}$, $F(u_1, ..., u_m) = f(x_1(u_1, ..., u_m), ..., x_n(u_1, ..., u_m))$, οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης υπάρχουν στο $\vec{a}$ και δίνονται από τις σχέσεις

$$\frac{\partial F}{\partial u_j}(\vec{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{b}) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(\vec{a}) \ . \qquad (*)$$

Σημείωση: Θεωρώντας την f ως συνάρτηση των $u_1, ..., u_m$ μετά την αντικατάσταση των $x_1, ..., x_n$ με $x_1(u_1, ..., u_m), ..., x_n(u_1, ..., u_m)$ αντίστοιχα, η (*) συνήθως γράφεται

$$\frac{\partial f}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \ .$$

Παράδειγμα 1

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 + e^{xy} \ .$$

Η f είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$ διότι οι μερικές της παράγωγοι πρώτης τάξης υπάρχουν και είναι συνεχείς. Αν θεωρήσουμε νέες μεταβλητές u, v που συνδέονται με τις x, y με τις σχέσεις $x=uv$, $y=u^2+v^2$, τότε

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=(2x+ye^{xy})v+xe^{xy}\,2u$$

$$=(2uv+(u^2+v^2)e^{uv(u^2+v^2)})v+2u^2ve^{uv(u^2+v^2)}\ .$$

Η $\frac{\partial f}{\partial v}$ υπολογίζεται ανάλογα.

Παράδειγμα 2

Έστω $u=f(x, y)$, όπου η πραγματική συνάρτηση f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι και δευτέρας τάξης. Αν $x=e^s\text{συν}t$ και $y=e^s\text{ημ}t$, δείξτε ότι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{-2s}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\ .$$

Απόδειξη

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}=e^s\,\text{συν}t\,\frac{\partial f}{\partial x}+e^s\,\text{ημ}t\,\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=e^s\text{συν}t\,\frac{\partial f}{\partial x}+e^s\text{συν}t\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}e^s\text{συν}t+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}e^s\text{ημ}t\right]$$

$$+e^s\text{ημ}t\,\frac{\partial f}{\partial y}+e^s\text{ημ}t\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}e^s\text{συν}t+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}e^s\text{ημ}t\right]$$

$$=e^s\left[\text{συν}t\,\frac{\partial f}{\partial x}+\text{ημ}t\,\frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

$$+e^{2s}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\text{συν}^2t+2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\text{ημ}t\,\text{συν}t+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\text{ημ}^2t\right]\ .$$

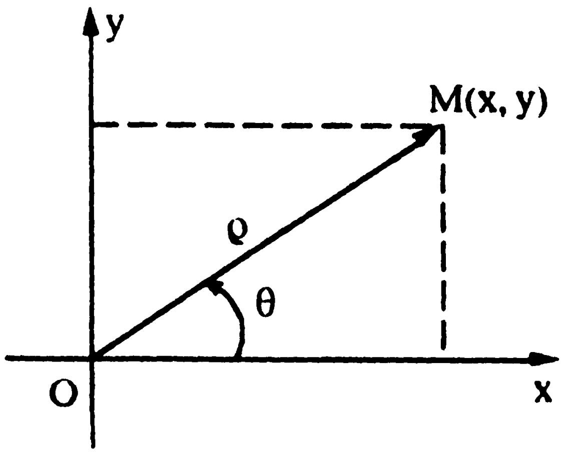
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}(-\,e^s ημt) + \frac{\partial f}{\partial y}\,e^s συνt$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\,e^s συνt\,\frac{\partial f}{\partial x} - e^s ημt\,\frac{\partial f}{\partial y} - e^s ημt\,[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\,e^s ημt) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(e^s συνt)]$$
$$+\,e^s συνt\,[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-\,e^s ημt) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(e^s συνt)] =$$
$$= -\,e^s[\frac{\partial f}{\partial x} συνt + \frac{\partial f}{\partial y} ημt] + e^{2s}\,[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} ημ^2 t - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} ημt συνt + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} συν^2 t]\,.$$

Άρα

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = e^{2s}\,[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(ημ^2 t + συν^2 t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(ημ^2 t + συν^2 t)]$$
$$= e^{2s}\,(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2})\,.$$

Αλλαγή σε Πολικές Συντεταγμένες στο Επίπεδο



Οι Καρτεσιανές συντεταγμένες x, y ενός σημείου του επιπέδου, συνδέονται με τις πολικές συντεταγμένες ρ, θ με τις σχέσεις

$$x = ρσυνθ\,, \quad y = ρημθ\,.$$

Αν τώρα f είναι μια πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης, τότε

$$\frac{\partial f}{\partial \varrho} = \text{συνθ}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \text{ημθ}\,\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = -\,\varrho\,\text{ημθ}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \varrho\,\text{συνθ}\,\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Παράδειγμα

Εάν μια συνάρτηση f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι και $2^{ας}$ τάξης δείξτε ότι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial f}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}.$$

Απόδειξη

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2} = \text{συνθ}\,[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\text{συνθ} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\text{ημθ}] + \text{ημθ}[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\text{συνθ} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\text{ημθ}]$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\text{συν}^2\theta + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\text{ημθσυνθ} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\text{ημ}^2\theta$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = -\,\varrho\,\text{συνθ}\,\frac{\partial f}{\partial x} - \varrho\,\text{ημθ}\,\frac{\partial f}{\partial y} - \varrho\,\text{ημθ}\,[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\,\varrho\,\text{ημθ}) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\varrho\,\text{συνθ}]$$

$$+\,\varrho\,\text{συνθ}\,[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-\,\varrho\,\text{ημθ}) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\varrho\,\text{συνθ}]$$

$$= -\,\varrho\,\text{συνθ}\,\frac{\partial f}{\partial x} - \varrho\,\text{ημθ}\,\frac{\partial f}{\partial y} + \varrho^2\,[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\text{ημ}^2\theta - 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\text{ημθ συνθ} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\text{συν}^2\theta].$$

Επομένως

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial f}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(\text{ημ}^2\theta + \text{συν}^2\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(\text{ημ}^2\theta + \text{συν}^2\theta) +$$

$$+\frac{1}{\varrho}[\text{συνθ}\frac{\partial f}{\partial x}+\text{ημθ}\frac{\partial f}{\partial y}]-\ \frac{1}{\varrho}[\text{συνθ}\frac{\partial f}{\partial x}+\text{ημθ}\frac{\partial f}{\partial y}]=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\ .$$

2.8 Τύπος του Taylor

Όπως είναι γνωστό, αν m είναι ένας φυσικός αριθμός και α, β∈ ℝ, έχουμε

$$(\alpha+\beta)^m=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\alpha^k\beta^{m-k}=\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}\alpha^k\beta^{m-k}\ .$$

Για μια συνάρτηση f δύο μεταβλητών η οποία έχει μερικές παραγώγους μέχρι τάξης m, παριστάνουμε με $(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^m f$ το άθροισμα

$$\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}h^j k^{m-j}\frac{\partial^k f}{\partial x^j\partial y^{m-j}}\ .$$

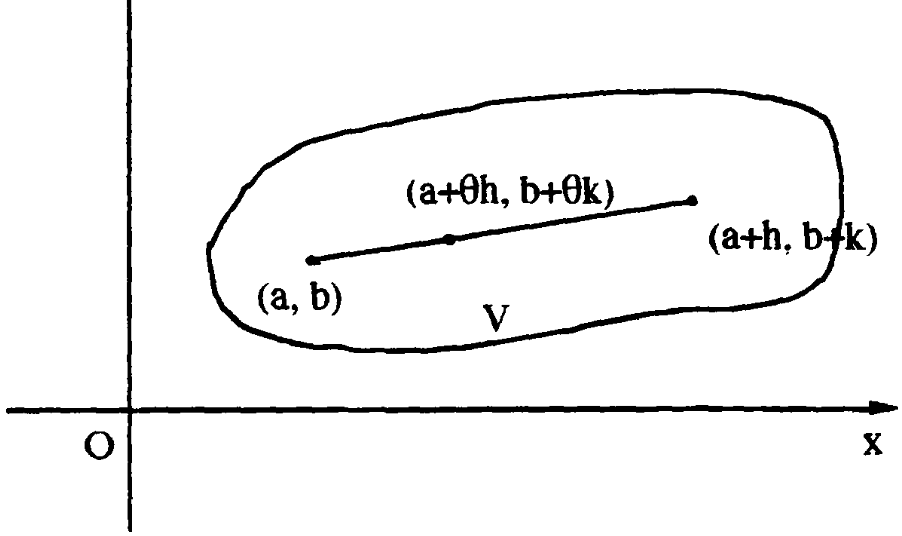
Έχουμε επίσης τον ανάλογο συμβολισμό $(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n})^m f$ όταν η f είναι συνάρτηση n-μεταβλητών.

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει τον τύπο του Taylor για συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

Θεώρημα 2.8.1

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση, η οποία ορίζεται επί ενός ανοικτού υποσυνόλου V του $\mathbb{R}^2$, και έστω (a, b)∈V. Υποθέτουμε ότι όλες οι μερικές παράγωγοι της f μέχρι τάξης m+1 (m≥0) υπάρχουν και είναι συνεχείς επί του V και ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το (a, b) με το (a+h, b+k) βρίσκεται ολόκληρο εντός του V.

(Τύπος του Taylor)



Τότε υπάρχει εσωτερικό σημείο (a+θh, b+θk) αυτού του τμήματος ($0<\theta<1$) τέτοιο ώστε να ισχύει ο τύπος

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!}\left[\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m} f\right]_{(a,b)}$$

$$+\frac{1}{(m+1)!}\left[\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m+1} f\right]_{(a+\theta h, b+\theta k)}$$

Στην περίπτωση που (a, b) = (0, 0) ο τύπος Taylor του προηγουμένου θεωρήματος γίνεται

$$f(h, k) = f(0, 0) + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!}\left[\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{j} f\right]_{(0,0)}$$

$$+\frac{1}{(m+1)!}\left[\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m+1} f\right]_{(\theta h, \theta k)}$$

(Τύπος του Maclaurin)

Παράδειγμα

Θεωρούμε τη συνάρτηση f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^x$ ημy . Για την f έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = e^x \eta\mu y\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^x \sigma\upsilon\nu y\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\,e^x \eta\mu y\,,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -\,e^x \sigma\upsilon\nu y\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^x \sigma\upsilon\nu y\,, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = e^x \sigma\upsilon\nu y\,, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = -\,e^x \eta\mu y\ .$$

Στο σημείο (0, 0) έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1\,, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -\,1\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\ .$$

Επομένως για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ υπάρχει $0<\theta<1$ τέτοιο ώστε

$$e^x \eta\mu y = 0 + (x\cdot 0 + y\cdot 1) + \frac{1}{2}(x^2\cdot 0 + 2xy\cdot 1 + y^2\cdot 0)$$

$$+ \frac{1}{6}(x^3\cdot 0 + 3x^2 y\cdot 1 + 3xy^2\cdot 0 + y^3\cdot(-1)) + \frac{1}{24}\left[\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 f\right]_{(\theta x,\, \theta y)}$$

$$= x + xy + \frac{1}{2}x^2 y - \frac{1}{6}\,y^3 + \frac{1}{24}\left[\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 f\right]_{(\theta x,\, \theta y)}\ .$$

Αν στο Θεώρημα 2.8.1 πάρουμε m=0, παίρνουμε το επόμενο θεώρημα (θεώρημα μέσης τιμής για συναρτήσεις δύο μεταβλητών).

Θεώρημα 2.8.2

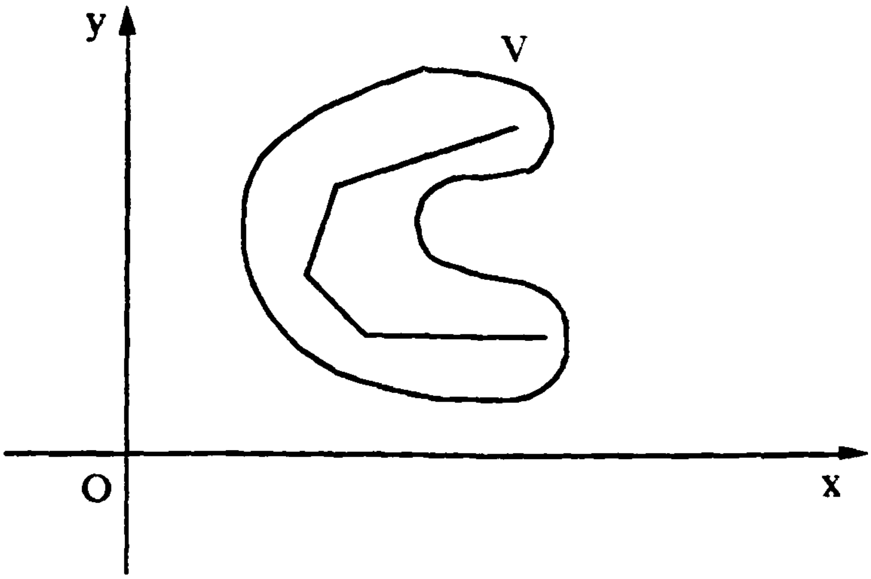
Έστω $V \subset \mathbb{R}$ ανοικτό και έστω $f: V \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση της οποίας οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης υπάρχουν και είναι συνεχείς επί του V. Αν (α, β) και (γ, δ) είναι δύο σημεία του V τέτοια ώστε ολόκληρο το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει ανήκει στο V, τότε υπάρχει σημείο του τμήματος αυτού, δηλαδή υπάρχει $0<\theta<1$, τέτοιο ώστε

$$f(\gamma, \delta) - f(\alpha, \beta) = \left[(\gamma-\alpha)\frac{\partial f}{\partial x} + (\delta-\beta)\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{(\alpha+\theta(\gamma-\alpha),\ \beta+\theta(\delta-\beta))}.$$

Πόρισμα 2.8.3

Έστω V ένα ανοικτό χωρίο στον $\mathbb{R}^2$ και έστω $f: V \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Αν $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ κάθε σημείο του V, τότε η f είναι σταθερή στο V.

Απόδειξη



Έστω (α, β) και (γ, δ) δύο οποιαδήποτε σημεία του V. Θέλουμε να δείξουμε ότι $f(\alpha, \beta) = f(\gamma, \delta)$. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα (α, β) και (γ, δ) βρίσκεται ολόκληρο στο V. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχει σημείο $(x_0, y_0) = (\alpha+\theta(\gamma-\alpha), \ \beta+\theta(\delta-\beta))$ του τμήματος αυτού $(0<\theta<1)$ τέτοιο ώστε

$$f(\gamma, \delta) - f(\alpha, \beta) = (\gamma - \alpha)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (\delta - \beta)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$= (\gamma - \alpha) \cdot 0 + (\delta - \beta) \cdot 0 = 0$$

και άρα $f(\gamma, \delta) = f(\alpha, \beta)$.

Γενική Περίπτωση: Επειδή το σύνολο V είναι ανοικτό συνεκτικό, τα (α, β) και (γ, δ) μπορούν να συνδεθούν με μια πολυγωνική γραμμή που να κείται ολόκληρη εντός του V. Σύμφωνα με την πρώτη περίπτωση, οι τιμές της f στα άκρα κάθε πλευράς αυτής της πολυγωνικής γραμμής ταυτίζονται. Προφανώς αυτό συνεπάγεται ότι $f(\alpha, \beta) = f(\gamma, \delta)$.

Το επόμενο θεώρημα είναι ανάλογο του Θεωρήματος 2.8.1 για συναρτήσεις οσωνδήποτε (πεπερασμένου πλήθους) μεταβλητών.

Θεώρημα 2.8.4

Έστω V ένα ανοικτό του $\mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in V$ και $f: V \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση της οποίας οι μερικές παράγωγοι μέχρι τάξης m+1 $(m \geq 0)$ υπάρχουν και είναι συνεχείς επί του V. Έστω $\vec{a}+\vec{h} = (a_1+h_1, \ldots, a_n+h_n)$ ένα σημείο του V τέτοιο ώστε το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το $\vec{a}$ με το $\vec{a}+\vec{h}$ να βρίσκεται ολόκληρο μέσα στο V. Τότε υπάρχει σημείο $\vec{a}+\theta\vec{h}$ του τμήματος αυτού $(0<\theta<1)$ τέτοιο ώστε

$$f(\vec{a}+\vec{h}) = f(\vec{a}) + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!}\left[\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^j f\right]_{\vec{a}}$$

$$+\frac{1}{(m+1)!}\left[\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\dots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{m+1}f\right]_{\vec{a}+\theta\vec{h}}$$

(Τύπος του Taylor)

Αν $\vec{a}=(0,\dots,0)$ τότε παίρνουμε τον τύπο του Maclaurin.

Ο τύπος του Taylor για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση της κατά προσέγγιση τιμής μιας συνάρτησης σ' ένα σημείο. Ας πάρουμε π.χ. μια συνάρτηση f δύο μεταβλητών. Τότε ο τύπος του Taylor γράφεται

$$f(\alpha+h_1,\beta+h_2)=f(\alpha,\beta)+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\left[\left(h_1\frac{\partial}{\partial x}+h_2\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k}f\right]_{(\alpha,\beta)}+R_m$$

όπου R_m είναι η τιμή του $\frac{1}{(m+1)!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x}+h_2\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m+1}f$ σ' ένα σημείο $(\alpha+\theta h_1,\beta+\theta h_2)$, $0<\theta<1$. Επειδή υποθέσαμε ότι οι μερικές παράγωγοι μέχρι τάξης $(m+1)$ της f είναι συνεχείς, προκύπτει ότι οι τιμές των μερικών παραγώγων της f τάξης $m+1$ είναι κοντά στις τιμές των παραγώγων στο (α,β) αν το σημείο στο οποίο λαμβάνονται είναι κοντά στο (α,β). Επομένως, αν $|h_1|$ και $|h_2|$ είναι μικρά, οι παράγωγοι $m+1$ της f στο $(\alpha+\theta h_1,\beta+\theta h_2)$ είναι κοντά στις παραγώγους στο (α,β). Προκύπτει τώρα εύκολα ότι $R_m\to 0$ αν $h_1\to 0$ και $h_2\to 0$. Επομένως, για μικρά $|h_1|$ και $|h_2|$ έχουμε ότι

$$f(\alpha+h_1,\beta+h_2)\approx f(\alpha,\beta)+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\left[\left(h_1\frac{\partial}{\partial x}+h_2\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k}f\right]_{(\alpha,\beta)}.$$

Ικανοποιητική προσέγγιση έχουμε πολλές φορές αν πάρουμε $m=1$, δηλαδή $f(\alpha+h_1, \beta+h_2) \approx f(\alpha, \beta) + h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) + h_1 \dfrac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta)$.

Παράδειγμα

Να βρεθεί η κατά προσέγγιση τιμή της ρίζας

$$\sqrt{(3,02)^2 + (3,99)^2} \ .$$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Για την f στο σημείο (3, 4) έχουμε:

$$f(3,4) = 5, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(3,4) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)_{(3,4)} = \frac{3}{5}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(3,4) = \frac{4}{5} \ .$$

Άρα

$$\begin{aligned}\sqrt{(3,02)^2 + (3,99)^2} &= f(3 + 0{,}02,\ 4 - 0{,}01)\\ &\approx f(3,4) + 0{,}02 \frac{\partial f}{\partial x}(3,4) - 0{,}01 \frac{\partial f}{\partial y}(3,4)\\ &= 5 + 0{,}02\,\frac{3}{5} - 0{,}01\,\frac{4}{5} = 5{,}004 \ .\end{aligned}$$

2.9 Πεπλεγμένες Συναρτήσεις

Έστω $u=f(x_1, \ldots, x_n, y)$ μια πραγματική συνάρτηση n+1 μεταβλητών, η οποία ορίζεται σ' ένα ανοικτό υποσύνολο V του $\mathbb{R}^{n+1}$. Έχουμε το εξής ερώτημα: Μπορεί η εξίσωση $f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ να ορίζει το y ως μια συνάρτηση των $x_1, \ldots, x_n$; Πιο συγκεκριμένα: Υπάρχει συνάρτηση $y = g(x_1, \ldots, x_n)$ η οποία ορίζεται σ' ένα υποσύνολο W του $\mathbb{R}^n$ και είναι τέτοια ώστε $f(x_1, \ldots, x_n, g(x_1, \ldots, x_n)) = 0$ για κάθε $(x_1, \ldots, x_n) \in W$. Μια τέτοια συνάρτηση (αν υπάρχει) λέγεται πεπλεγμένη συνάρτηση η οποία ορίζεται από την εξίσωση

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0 \ .$$

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε την εξίσωση

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3 \, .$$

Η συνάρτηση $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$ είναι μια πεπλεγμένη συνάρτηση που ορίζεται από την παραπάνω εξίσωση.

Σχετικά με το ερώτημα της ύπαρξης μιας πεπλεγμένης συνάρτησης έχουμε το παρακάτω.

Θεώρημα 2.9.1

Έστω $u = f(x_1, \ldots, x_n, y)$ μια πραγματική συνάρτηση η οποία ορίζεται σ' ένα ανοικτό υποσύνολο V του $\mathbb{R}^{n+1}$ και ας υποθέσουμε ότι τόσο η f όσο και η $\frac{\partial f}{\partial y}$ είναι συνεχείς επί του V. Έστω $(a_1, \ldots, a_n, b) \in V$ τέτοιο ώστε

$$f(a_1, \ldots, a_n, b) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, \ldots, a_n, b) \neq 0 \ .$$

Τότε υπάρχουν ένα ανοικτό υποσύνολο W του $\mathbb{R}^n$ που περιέχει το $(a_1, \ldots, a_n)$ και συνεχής συνάρτηση $g\colon W \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

i $(x_1, x_2, \ldots, x_n, g(x_1, \ldots, x_n)) \in V$ για κάθε $(x_1, \ldots, x_n) \in W$

ii) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, g(x_1, \ldots, x_n)) = 0$

iii) $g(a_1, ..., a_n) = b$.

Αν όλες οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της f υπάρχουν στο V και είναι συνεχείς, τότε οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της g υπάρχουν στο W και δίνονται από τις σχέσεις

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0 , \quad \text{δηλαδή} \quad \frac{\partial g}{\partial x_i} = - \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} ,$$

όπου οι μερικές παράγωγοι και υπολογίζονται στο σημείο $(x_1, x_2, ..., x_n, g(x_1, ..., x_n))$ του V.

Υπάρχει ένα ανάλογο θεώρημα για περισσότερες της μιας πεπλεγμένες συναρτήσεις που δίνονται από ένα σύστημα εξισώσεων της μορφής

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) = 0 \\ &f_2(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &f_m(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

όπου οι συναρτήσεις $f_1, ..., f_m$ ορίζονται σ' ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+m}$. Το ερώτημα είναι αν από το σύστημα (1) τα $y_1, y_2, ..., y_m$ μπορούν να εκφρασθούν ως συναρτήσεις των $x_1, ..., x_n$. Σχετικό με το ερώτημα αυτό είναι το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.9.2

Έστω $u_1 = f_1(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$, $u_2 = f_2(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$, ...,

$u_m = f_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ είναι m συναρτήσεις οι οποίες ορίζονται σ' ένα ανοικτό υποσύνολο V του $\mathbb{R}^{n+m}$ και έστω $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) \in V$. Υποθέτουμε ότι η f και οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_m}$ είναι συνεχείς στο V και ότι $\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_m)} \neq 0$ στο $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$.

Τότε υπάρχουν ένα ανοικτό υποσύνολο W του $\mathbb{R}^n$ που περιέχει το σημείο $(a_1, \dots, a_n)$ και m συναρτήσεις g_i: $W \to \mathbb{R}$, $i=1, \dots, m$, οι οποίες είναι συνεχείς επί του W, ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:

i) Για κάθε $(x_1, \dots, x_n) \in W$ έχουμε ότι

$$(x_1, \dots, x_n, g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)) \in V$$

ii) $g_i(a_1, \dots, \alpha_n) = \beta_i$, $i=1, 2, \dots, m$

iii) $f_i(x_1, \dots, x_n, g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)) = 0$, $i=1, \dots, m$.

Αν επί πλέον κάθε f_i έχει όλες τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης συνεχείς επί του V, τότε κάθε g_i έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης επί του W. Για κάθε k, $1 \le k \le n$, οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial g_1}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial g_m}{\partial x_k}$ βρίσκονται από τη λύση του συστήματος

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \frac{\partial g_j}{\partial x_k} = 0, \quad i=1, 2, \dots, m .$$

Άσκηση

Να δειχθεί ότι υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $y = y(x)$ που δίνεται υπό πεπλεγμένη μορφή από την εξίσωση $x\eta\mu y + y\eta\mu x = \pi$ και για την οποία $y(\pi/2) = \pi/2$. Στη συνέχεια για τη συνάρτηση αυτή να βρεθούν οι $y'(\pi/2)$ και $y''(\pi/2)$.

Λύση

Έχουμε $f(x, y) = x\eta\mu y + y\eta\mu x - \pi = 0$, $f(\pi/2, \pi/2) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \eta\mu y + y\sigma\upsilon\nu x$,

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = x\sigma\upsilon\nu y + \eta\mu x$. Επομένως οι συναρτήσεις f, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ και $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ είναι συνεχείς.

Επίσης $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\pi/2, \pi/2) = 1 \neq 0$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.9.1, υπάρχει ανοικτό διάστημα (α, β) που περιέχει το $\pi/2$ και συνάρτηση $y = y(x)$ που ορίζεται και είναι παραγωγίσιμη επί του (α, β) τέτοια ώστε $y(\pi/2) = \pi/2$ και $f(x, y(x)) = 0$, δηλαδή η $y=y(x)$ πληροί την εξίσωση

$$x\eta\mu y + y\eta\mu x = \pi \; . \tag{1}$$

Παραγωγίζοντας την (1) ως προς x (θεωρώντας το y συνάρτηση του x), παίρνουμε την

$$\eta\mu y + y\sigma\upsilon\nu x + [x\sigma\upsilon\nu y + \eta\mu x]y' = 0 \tag{2}$$

και άρα

$$y' = -\frac{\eta\mu y + y\sigma\upsilon\nu x}{x\sigma\upsilon\nu y + \eta\mu x} \; . \tag{3}$$

Επειδή τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρονομαστής του κλάσματος στο δεύτερο μέλος της (3) είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις του x, προκύπτει ότι υπάρχει η y''. Παραγωγίζοντας τώρα ως προς x τα δύο μέλη της (2) παίρνουμε

$$\begin{aligned}- y\eta\mu x+[\sigma\upsilon\nu y+\sigma\upsilon\nu x]y' +(\sigma\upsilon\nu y+\sigma\upsilon\nu x)y' +(x\sigma\upsilon\nu y+\eta\mu x)y''\\ +(- x\eta\mu y)(y')^2=0 \; .\end{aligned} \tag{4}$$

Επειδή $y(\pi/2) = \pi/2$, η (3) δίνει ότι

$$y'(\pi/2) = -\frac{\eta\mu\,\pi/2 + \pi/2\,\sigma\upsilon\nu\,\pi/2}{\pi/2\,\sigma\upsilon\nu\,\pi/2 + \eta\mu\,\pi/2} = -1 .$$

Η (4) τώρα δίνει

$$-\pi/2 + (0+0)(-1) + (0+0)(-1) + (\pi/2 \cdot 0 + 1)y''(\pi/2) + (-\pi/2)\cdot 1 = 0$$

και επομένως $y''(\pi/2) = \pi$.

2.10 Μέγιστα και Ελάχιστα Συναρτήσεων

Ορισμός 2.10.1: Έστω f μια πραγματική συνάρτηση η οποία ορίζεται επί ενός υποσυνόλου A του $\mathbb{R}^n$. Θα λέμε ότι η f έχει *απόλυτο μέγιστο* (αντίστοιχα *απόλυτο ελάχιστο*) επί του A στο σημείο $\vec{a} \in A$ αν $f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$ (αντ. $f(\vec{x}) \geq f(\vec{a})$) για κάθε $\vec{x} \in A$. Η συνάρτηση f έχει ένα *τοπικό μέγιστο* (αντ. *τοπικό ελάχιστο*) στο $\vec{a}$ αν υπάρχει r>0 τέτοιο ώστε $f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$ (αντ. $f(\vec{x}) \geq f(\vec{a})$) για κάθε $\vec{x} \in A$ με $\|\vec{x} - \vec{a}\| < r$. Η f έχει ένα *τοπικό ακρότατο* επί του A στο $\vec{a}$ αν έχει στο $\vec{a}$ τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο. Η f έχει στο $\vec{a}$ ένα *γνήσιο τοπικό μέγιστο* (αντ. *γνήσιο τοπικό ελάχιστο*) αν υπάρχει r>0 τέτοιο ώστε $f(\vec{x}) < f(\vec{a})$ (αντ. $f(\vec{x}) > f(\vec{a})$) για κάθε $\vec{x} \in A$ με $0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < r$.

Για συνεχείς συναρτήσεις επί συμπαγών συνόλων έχουμε το εξής:

Θεώρημα 2.10.2

Αν η πραγματική συνάρτηση f είναι συνεχής επί ενός μη κενού συμπαγούς υποσυνόλου A του $\mathbb{R}^n$, τότε υπάρχουν $\vec{a}$, $\vec{b} \in A$ τέτοια ώστε $f(\vec{a}) \leq f(\vec{x}) \leq f(\vec{b})$ για κάθε $\vec{x} \in A$.

Ορισμός 2.10.3

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση που ορίζεται σ' ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ και έστω $\vec{a} \in A$. Αν οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της f υπάρχουν στο $\vec{a}$, τότε το διάνυσμα $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})\right)$ ονομάζεται *ανάδελτα* της f στο $\vec{a}$ και παρίσταται με $\nabla f(\vec{a})$.

Ορισμός 2.10.4

Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in A$ και $f: A \to \mathbb{R}$. Το σημείο $\vec{a}$ λέγεται *κρίσιμο σημείο* της f αν το ανάδελτα $\nabla f(\vec{a})$ υπάρχει και είναι το μηδενικό διάνυσμα, δηλαδή αν $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) = 0$, ή αν το ανάδελτα της f δεν υπάρχει στο $\vec{a}$. Για μια συνάρτηση f μιας μεταβλητής, η οποία ορίζεται σ' ένα διάστημα I της πραγματικής ευθείας, ξέρουμε ότι αν η f έχει ένα τοπικό ακρότατο σ' ένα σημείο $x_0 \in I$, τότε αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του I και αν η παράγωγος $f'(x_0)$ υπάρχει, τότε $f'(x_0)=0$. Το επόμενο θεώρημα μας λέει ότι ισχύει κάτι ανάλογο για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Θεώρημα 2.10.5

Έστω f μια παραγματική συνάρτηση η οποία ορίζεται επί ενός υποσυνόλου A του $\mathbb{R}^n$. Αν η f έχει επί του A ένα τοπικό ακρότατο σ' ένα εσωτερικό σημείο $\vec{a}$ του A και αν το $\nabla f(\vec{a})$ υπάρχει, τότε

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) = 0.$$

Απόδειξη

Έστω ότι η f έχει ένα τοπικό μέγιστο στο εσωτερικό σημείο $\vec{a} \in A$ (η περίπτωση του τοπικού ελαχίστου είναι ανάλογη) και ότι το $\nabla f(\vec{a})$ υπάρχει. Τότε υπάρχει r>0 τέτοιο ώστε

$$\{\vec{a} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{a}\| < r\} \subset A \quad \text{και} \quad f(\vec{x}) \leq f(\vec{a}) \quad \text{αν} \quad \|\vec{x} - \vec{a}\| < r .$$

Έστω $1 \leq k \leq n$ και θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g: (a_k - r, a_k + r) \to \mathbb{R}, \quad g(t) = f(a_1, \ldots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \ldots, a_n) .$$

Η g έχει ένα τοπικό μέγιστο επί του $(a_k - r, a_k + r)$ στο a_k. Επειδή η παράγωγος $\frac{dg}{dt}(a_k) = \frac{\partial f}{dx_k}(\vec{a})$ υπάρχει, θα είναι $\frac{dg}{dt}(a_k) = 0$, δηλαδή $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) = 0$.

Παρατήρηση: Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι, αν μια πραγματική συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$, έχει μερικές παραγώγους πρώτης τάξης σε όλα τα εσωτερικά σημεία του A, τότε τα σημεία (αν υπάρχουν) όπου η f έχει απόλυτο μέγιστο (ή απόλυτο ελάχιστο) επί του A είναι είτε συνοριακά σημεία του A είτε εσωτερικά σημεία στα οποία το ανάδελτα της f μηδενίζεται.

Λήμμα 2.10.6

Έστω A, B, Γ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί και ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση: $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + \Gamma y^2$. Θέτουμε $D = A\Gamma - B^2$. Τότε:

i) Αν $D>0$ και $A>0$, τότε $F(x, y)>0$ για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$.

ii) Αν $D>0$ και $A<0$, τότε $F(x, y)<0$ για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$.

iii) Αν $D<0$, τότε υπάρχουν σημεία (x_1, y_1), (x_2, y_2), πάνω στην περιφέρεια κύκλου $x^2+y^2=1$, τέτοια ώστε $F(x_1, y_1)>0$ και $F(x_2, y_2)<0$.

Απόδειξη

i) Έστω ότι $D>0$ και $A>0$. Έχουμε

$$F(x, y) = \frac{1}{A}[(Ax+By)^2 + (A\Gamma - B^2)y^2] \geq 0 .$$

Αν $F(x, y) = 0$ τότε $y=0$ και $Ax+By = 0 \Rightarrow x = y = 0$.

ii) Η απόδειξη είναι ανάλογη με την απόδειξη της (i).

iii) Έστω $D<0$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

<u>Περίπτωση I</u>: $A \neq 0$. Τότε τα σημεία $(1, 0)$ και $\left(\frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$ βρίσκονται πάνω στην περιφέρεια του κύκλου $x^2+y^2=1$ και $F(1, 0)=A$, $F\left(\frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) = \frac{AD}{A^2+B^2}$. Εκ των A και $\frac{AD}{A^2+B^2}$ το ένα είναι θετικό και το άλλο αρνητικό.

<u>Περίπτωση II</u>: $\Gamma \neq 0$. Είναι ανάλογη με την (I).

<u>Περίπτωση III</u>: $A=\Gamma=0$. Επειδή $D=-B^2<0$, θα είναι $B \neq 0$. Τα σημεία $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ και $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ βρίσκονται στην περιφέρεια $x^2+x^2=1$ και $F(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \cdot F(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = -B^2 < 0$.

Θεώρημα 2.10.7

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση η οποία ορίζεται επί ενός ανοικτού υποσυνόλου V του $\mathbb{R}^2$ και έστω $(a, b) \in V$. Υποθέτουμε ότι η f έχει μερικές παραγώγους $2^{ης}$ τάξης οι οποίες είναι συνεχείς επί του V

και ότι $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$. Για $(x,y) \in V$, θέτουμε $A(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$.

$B(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$, $\Gamma(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$, $D(x, y) = A(x, y) \cdot \Gamma(x, y) - B^2(x, y)$,

$A_0 = A(a, b)$, $D_0 = D(a, b)$. Τότε:

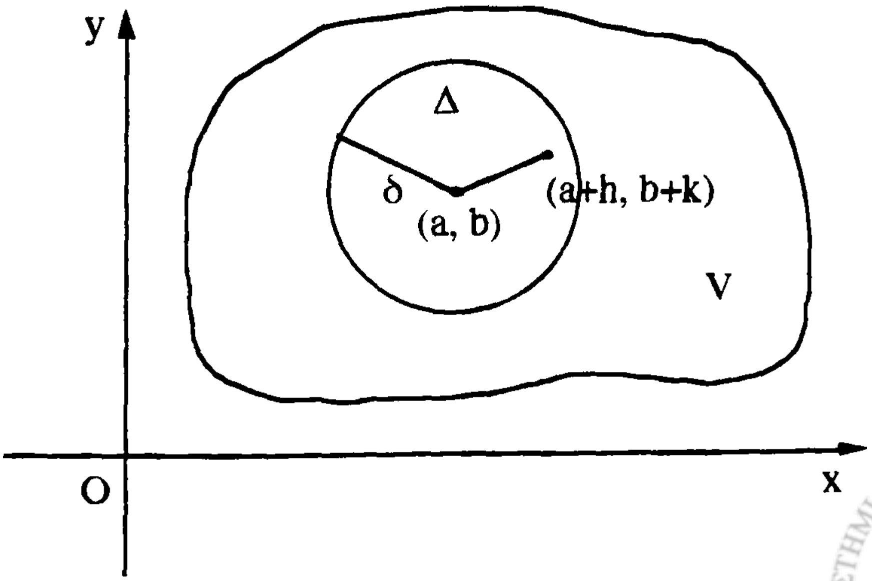
i) Αν $D_0 > 0$ και $A_0 > 0$, τότε η f έχει ένα γνήσιο τοπικό ελάχιστο στο (a, b).

ii) Αν $D_0 > 0$ και $A_0 < 0$, τότε η f έχει στο (a, b) γνήσιο τοπικό μέγιστο.

iii) Αν $D_0 < 0$, τότε η f δεν έχει στο (a, b) ούτε τοπικό ελάχιστο ούτε τοπικό μέγιστο.

iv) Αν $D_0 = 0$, τότε δεν μπορούμε με την παραπάνω μέθοδο να αποφανθούμε κατά πόσο η f έχει ή όχι τοπικό ακρότατο στο (a, b).

Απόδειξη



i) Υποθέτουμε ότι $D_o>0$ και $A_o>0$. Επειδή το σύνολο V είναι ανοικτό και οι συναρτήσεις A(x, y) και D(x, y) είναι συνεχείς επί του V, υπάρχει δ>0 τέτοιο ώστε

$$\Delta = \{(x, y): (x-a)^2+(y-b)^2 < \delta^2\} \subset V$$

και A(x, y)>0, D(x, y)>0 για κάθε $(x, y) \in \Delta$. Τα σημεία του Δ είναι της μορφής (a+h, b+k) με $h^2+k^2<\delta^2$.

Έστω τώρα $(a+h, b+k) \in V$. Σύμφωνα με τον τύπο του Taylor υπάρχει $0<\theta<1$ τέτοιο ώστε

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{1}{2}\left[h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]_{(a+\theta h,\, b+\theta k)} .$$

Το σημείο (a+θh, b+θk) βρίσκεται στο δίσκο Δ και άρα σ' αυτό έχουμε $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - [\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}]^2 > 0$. Αυτό, σύμφωνα με το Λήμμα 2.10.6, συνεπάγεται ότι f(a+h, b+k)- f(a, b)>0 αν $(h, k) \neq (0, 0)$. Συνεπώς η f έχει ένα γνήσιο τοπικό ελάχιστο στο (a, b).

ii) Η απόδειξη είναι ανάλογη της απόδειξης της (i).

iii) Έστω ότι $D_o<0$. Σύμφωνα με το Λήμμα 2.10.6, υπάρχουν σημεία (h_1, k_1), (h_2, k_2) στην περιφέρεια $x^2+y^2=1$ τέτοια ώστε

$$A_o h_1^2 + 2B_o h_1 k_1 + \Gamma_o k_1^2 = c_1 > 0$$
$$A_o h_2^2 + 2B_o h_2 k_2 + \Gamma_o k_2^2 = -c_2 < 0 .$$

Επειδή οι μερικές παράγωγοι δευτέρας τάξης της f είναι συνεχείς και το V είναι ανοικτό, υπάρχει δ>0 τέτοιο ώστε, αν

$$\Delta = \{(x, y): (x-a)^2 + (y-b)^2 < \delta^2\},$$

τότε $\Delta \subset V$ και για κάθε $(x, y) \in \Delta$ να έχουμε

$$|A(x, y) - A_0| < \frac{c}{8}, \ |B(x, y) - B_0| < \frac{c}{8}, \ |\Gamma(x, y) - \Gamma_0| < \frac{c}{8},$$

όπου $c = \min\{c_1, c_2\}$. Έστω ε>0 και διαλέγουμε $0<d<\min\{\delta, \varepsilon\}$.
Αν $h = dh_1$, $k = dk_1$, τότε υπάρχει $0<\theta<1$ τέτοιο ώστε

$$f(a+h) - f(a, b) = \frac{1}{2}\left[h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]_{(a+\theta h,\, b+\theta k)}.$$

Θέτουμε $\varepsilon_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - A_0$, $\varepsilon_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - B_0$, $\varepsilon_3 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \Gamma_0$. Επειδή $\theta^2 h^2 + \theta^2 k^2 < h^2 + k^2 = d^2 \le \delta^2$, έχουμε $|\varepsilon_i| < \frac{c}{8}$, i=1, 2, 3. Άρα

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) - f(a, b) &= \frac{d^2}{2}[A_0 h_1^2 + 2h_1k_1B_0 + \Gamma k_1^2 + \varepsilon_1 h_1^2 + 2h_1k_1\varepsilon_2 + \varepsilon_3 k_1^2] \\ &\ge \frac{d^2}{2}[c - \frac{c}{8}h_1^2 - 2|h_1k_1|\,\frac{c}{8} - \frac{c}{8}k_1^2] \\ &\ge \frac{d^2}{2}(c - \frac{c}{8} - \frac{2c}{8} - \frac{c}{8}) = \frac{d^2 c}{4} > 0. \end{aligned}$$

Ομοίως, αν λάβουμε $h' = dh_2$, $k' = dk_2$, αποδεικνύουμε ανάλογα ότι $f(a+h', b+k') - f(a, b) \le -\frac{d^2 c}{4} < 0$. Τα σημεία $(a+h, b+k)$ και $(a+h', b+k')$ απέχουν από το (a, b) απόσταση μικρότερη του ε. Επομένως, για κάθε ε>0 υπάρχουν (x_1, y_1) και $(x_2, y_2) \in V$ με $(x_1-a)^2+(y_1-b)^2<\varepsilon^2$, $(x_2-a)^2+(y_2-$

$b)^2 < \varepsilon^2$, τέτοια ώστε $f(x_1, y_1) > f(a, b)$ και $f(x_2, y_2) < f(a, b)$. Αυτό συνεπάγεται ότι η f δεν έχει ούτε τοπικό μέγιστο ούτε τοπικό ελάχιστο στο (a, b). Στην περίπτωση που $D_0=0$, τα επόμενα παραδείγματα δείχνουν ότι η συνάρτηση f μπορεί να έχει ή να μην έχει τοπικό ακρότατο στο (a, b).

Παραδείγματα:

1. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2x^4+y^2$.

Στο σημείο (0, 0) έχουμε $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ και $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$.

Προφανώς στο (0, 0) η f έχει απόλυτο ελάχιστο.

2. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = -x^4 - y^4$.

Στο σημείο (0, 0) έχουμε $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ και $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right]^2 = 0$. Στο σημείο αυτό η f έχει απόλυτο μέγιστο.

3. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3+y^3$.

Στο σημείο (0, 0) έχουμε $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right]^2 = 0$. Στο σημείο αυτό η f δεν έχει τοπικό μέγιστο ούτε τοπικό ελάχιστο. Πραγματικά, για κάθε $\delta>0$, υπάρχουν (x, y) με $x^2+y^2 < \delta^2$ και $f(x, y) > 0 = f(0, 0)$ και $f(-x, -y) = -f(x, y) < 0$.

Ορισμός 2.10.8

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση η οποία ορίζεται επί ενός υποσυνόλου A του $\mathbb{R}^n$ και έστω $\vec{a} \in A$. Αν οι μερικές παράγωγοι δευτέρας τάξης της f υπάρχουν στο $\vec{a}$ και αν $a_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j}(\vec{a})$, τότε ο πίνακας

$$H(\vec{a}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ονομάζεται Εσσιανός πίνακας της f στο $\vec{a}$. Αν οι μερικές παράγωγοι δευτέρας τάξης της f είναι συνεχείς στο $\vec{a}$, τότε $a_{ij} = a_{ji}$ και επομένως ο Εσσιανός πίνακας της f στο $\vec{a}$ είναι συμμετρικός ως προς την κυρία διαγώνιο.

Το επόμενο θεώρημα, που δίνουμε χωρίς απόδειξη, αναφέρεται στην ύπαρξη ακρότατων τιμών για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Θεώρημα 2.10.9

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση η οποία ορίζεται και έχει συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι 2ης τάξης επί ενός ανοικτού υποσυνόλου V του $\mathbb{R}^n$. Έστω $\vec{a} \in V$ τέτοιο ώστε $\nabla f(\vec{a}) = (0, ..., 0)$ και έστω

$$H(\vec{a}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ο Εσσιανός πίνακας της f στο $\vec{a}$. Θέτουμε $D_1=a_{11}$ και

$$D_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \quad \text{για } k = 2, 3, \ldots, n .$$

1. Η f έχει ένα γνήσιο τοπικό ελάχιστο στο $\vec{a}$ αν

$$D_k > 0 \quad \text{για} \quad k = 1, 2, \ldots, n .$$

2. Η f έχει ένα γνήσιο τοπικό μέγιστο στο $\vec{a}$ αν

$$(-1)^k D_k > 0 \quad \text{για} \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \text{δηλαδή} \quad D_1 < 0,\ D_2 > 0,\ D_3 < 0,\ \ldots .$$

Παράδειγμα

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz .$$

Βρίσκουμε τα σημεία στα οποία μηδενίζεται το ανάδελτα της f, δηλαδή λύνουμε το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 4x^3 - 4yz = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 4y^3 - 4xz = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 4z^3 - 4xy = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x^3 &= yz \\ y^3 &= xz \\ z^3 &= xy \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^3 = y^3 = z^3 = xyz . \text{ Άρα } x = y = z .$$

Για $x = y = z$, η $x^3 = yz$ γίνεται $x^3 = x^2 \Rightarrow x = 0$ ή $x = 1$.

Άρα το ανάδελτα της f μηδενίζεται στα σημεία (0, 0, 0) και (1, 1, 1). Αυτά είναι τα μόνα σημεία όπου η f μπορεί να έχει τοπικά ακρότατα. Στη συνέχεια βρίσκουμε την Εσσιανή της f. Έχουμε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4z, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -4y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = -4x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -12z^2.$$ Άρα

$$H(x, y, z) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4z & -4y \\ -4z & 12y^2 & -4x \\ -4y & -4x & 12z^2 \end{pmatrix}.$$

Στο σημείο (1, 1, 1) έχουμε

$$H(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 & -4 \\ -4 & 12 & -4 \\ -4 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = 12 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 144 - 16 = 128 > 0$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 12 & -4 & -4 \\ -4 & 12 & -4 \\ -4 & -4 & 12 \end{vmatrix} = 64 \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 64[(3 \cdot 3 \cdot 3 + (-1)(-1)(-1) + (-1)(-1)(-1) - (-1) \cdot 3 \cdot (-1) - (-1)(-1) \cdot 3 - 3(-1)(-1)]$$

$$= 64(27 - 1 - 1 - 3 - 3 - 3) = 64 \cdot 16 = 512 > 0 .$$

Άρα στο σημείο (1, 1, 1) η f έχει ένα γνήσιο τοπικό ελάχιστο.

Στο σημείο (0, 0, 0) η f δεν έχει ούτε τοπικό μέγιστο ούτε τοπικό ελάχιστο. Πραγματικά, f(0, 0, 0) = 0. Δοθέντος τώρα $\delta>0$, υπάρχει $\varepsilon>0$ με $3\varepsilon^2<\delta^2$ $\left(0<\varepsilon<\frac{\delta}{\sqrt{3}}\right)$. Τα σημεία $(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$ και $(-\varepsilon, -\varepsilon, -\varepsilon)$ απέχουν από το (0, 0, 0) απόσταση $\varepsilon\sqrt{3}<\delta$ και $f(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon) = 3\varepsilon^4 - 4\varepsilon^3 = \varepsilon^3(3\varepsilon-4)$ και $f(-\varepsilon, -\varepsilon, -\varepsilon) = 3\varepsilon^4+4\varepsilon^3$. Αν $0<\varepsilon<1$, τότε $f(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon) < 0 = f(0,0,0) < f(-\varepsilon, -\varepsilon, -\varepsilon)$. Αυτό αποδεικνύει ότι η f δεν έχει ούτε τοπικό μέγιστο ούτε τοπικό ελάχιστο στο (0, 0, 0).

2.11 Μέγιστα και Ελάχιστα υπό συνθήκες

Πολλά προβλήματα ευρέσεως μεγίστων ή ελαχίστων είναι τέτοια ώστε οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι υποχρεωμένες να πληρούν ορισμένες συνθήκες. Οι συνθήκες αυτές δίνονται συνήθως υπό τη μορφή ενός συστήματος εξισώσεων της μορφής

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, m\,.$$

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η απόσταση ενός σημείου (x_0, y_0, z_0) του χώρου από το επίπεδο με εξίσωση $\alpha x+\beta y+\gamma z = \delta$. Το πρόβλημα εδώ ανάγεται στο να βρούμε το ελάχιστο της συνάρτησης

$$f(x,y,z) = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

όταν τα x, y, z πληρούν τη συνθήκη $\alpha x+\beta y+\gamma z-\delta = 0$.

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί το σημείο της καμπύλης με εξίσωση $x^2+3y^2+2xy=1$ το οποίο απέχει τη μικρότερη απόσταση από το σημείο (1, -1). Επειδή η απόσταση ενός σημείου (x, y) της καμπύλης από το $(1, -1)$ είναι $\sqrt{(x-1)^2+(y+y)^2}$, το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση του ελαχίστου της συνάρτησης

$$f(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$$

όταν τα x, y πληρούν τη συνθήκη $x^2+3y^2+2xy-1=0$.

Παράδειγμα 3

Να βρεθεί το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης με εξίσωση $2x^2+3xy+y^2=1$. Επειδή τα σημεία που βρίσκονται στα άκρα του μεγάλου άξονα είναι αυτά με τη μεγαλύτερη μεταξύ των απόσταση, το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση του μεγίστου της συνάρτησης

$$f(x, y, u, v) = \sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$$

όπου τα x, y, u, v πληρούν το σύστημα

$$g_1(x, y, u, v) = 2x^2+3xy+y^2-1 = 0$$

$$g_2(x, y, u, v) = 2u^2+3uv+v^2-1 = 0 \quad .$$

Ένας τρόπος με τον οποίο μπορούμε μερικές φορές να λύσουμε το πρόβλημα της εύρεσης των ακρότατων τιμών μιας πραγματικής συνάρτησης f n μεταβλητών υπό τις συνθήκες

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0\ , \quad i = 1, 2, ..., m \quad (m<n) \qquad (1)$$

είναι να εκφράσουμε, (αν μπορούμε) με τη βοήθεια των εξισώσεων (1), m από τις μεταβλητές $x_1, ..., x_n$ ως συναρτήσεις των υπολοίπων και τις τιμές αυτές να τις αντικαταστήσουμε στην f οπότε αναγόμαστε στην αναζήτηση ακρότατων τιμών μιας συνάρτησης n-m μεταβλητών.

Παράδειγμα 4

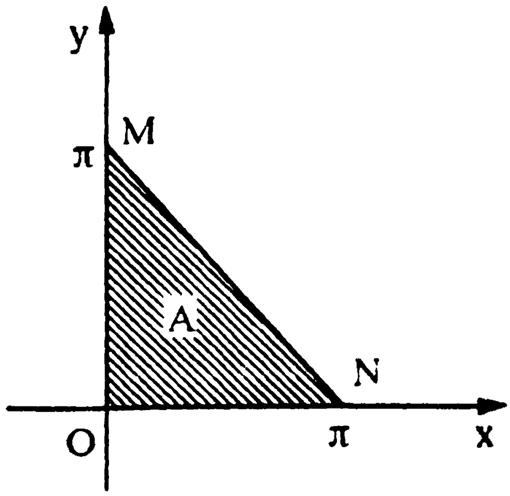
Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου για το οποίο το άθροισμα των ημιτόνων των τριών γωνιών είναι μέγιστο.

Λύση

Αν x, y, z είναι οι γωνίες του τριγώνου, ζητάμε να βρούμε το μέγιστο της συνάρτησης $f(x,y,z) = \eta\mu x+\eta\mu y+\eta\mu z$ στο σύνολο $V = \{(x,y,z)\colon 0 < x,y,z < \pi\}$ όπου τα x, y, z πληρούν τη συνθήκη $x+y+z = \pi$. Από την $x+y+z = \pi$, παίρνουμε $z = \pi-(x+y)$ και το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση της μέγιστης τιμής της συνάρτησης

$$g(x,y) = \eta\mu x+\eta\mu y+\eta\mu(\pi-x-y) = \eta\mu x+\eta\mu y+\eta\mu(x+y)$$

στο σύνολο $A = \{(x,y)\colon 0<x,y,\ x+y<\pi\}$.



Θα δείξουμε κατ' αρχήν ότι η g έχει ένα τοπικό μέγιστο στο A και στη συνέχεια θα δούμε ότι πρόκειται για απόλυτο μέγιστο. Στο σημείο (ή σημεία) όπου έχουμε τοπικό μέγιστο για την g θα είναι

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu(x+y) = 0\,, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \sigma\upsilon\nu y + \sigma\upsilon\nu(x+y)\,.$$

Άρα $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu y = -\sigma\upsilon\nu(x+y) = \sigma\upsilon\nu(\pi-x-y)$. Επειδή

$$0 < x, y, \ \pi - x - y < \pi, \ \text{θα είναι} \ x = y = \pi - x - y \ \Rightarrow \ x = y = \frac{\pi}{3} .$$

Στο σημείο αυτό είναι

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\,\eta\mu x - \eta\mu(x+y) = -\sqrt{3} < 0 \ ,$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\sqrt{3}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = -\,\eta\mu(x+y) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\right]^2 = 3 - \frac{3}{4} > 0 \ .$$

Επομένως στο σημείο αυτό έχουμε τοπικό μέγιστο για την g. Η τιμή της g είναι $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Θα δούμε τώρα ότι στην πραγματικότητα πρόκειται για απόλυτο μέγιστο. Πραγματικά το τρίγωνο ΟΜΝ (το εσωτερικό μαζί με τις πλευρές) είναι κλειστό και φραγμένο, δηλαδή συμπαγές, και άρα υπάρχει ένα σημείο (x_0, y_0) στο τρίγωνο αυτό όπου η g παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή της. Το σημείο αυτό δεν μπορεί να είναι πάνω στις πλευρές. (Αν π.χ. είναι πάνω στην πλευρά, τότε $y_0=0$ και $g(x_0,y_0) = 2\eta\mu x_0 \leq 2 < \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Το ίδιο αν $x_0=0$ ή αν $x_0+y_0 = \pi$). Ώστε το (x_0, y_0) πρέπει να είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου ΟΜΝ. Αλλά τότε σ' αυτό θα έχουμε $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0$ και άρα όπως είδαμε $x_0 = y_0 = \frac{\pi}{3}$. Ώστε η f παίρνει τη μέγιστη τιμή της όταν $x = y = z = \frac{\pi}{3}$, δηλαδή όταν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Η μέθοδος την οποία χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα δεν είναι πάντοτε εφαρμόσιμη γιατί δεν μπορούμε πάντοτε να εκφράσουμε (χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1)) m από τις μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n$ ως συναρτήσεις των υπολοίπων. Μια άλλη μέθοδος που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είναι γνωστή με το όνομα "μέθοδος των πολλ/στών του Lagrange". Πριν αναφέρουμε τη μέθοδο αυτή, ας θυμηθούμε την έννοια του βαθμού ενός πίνακα· θεωρούμε έναν $m \times n$ πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Έστω $1 \leq k \leq \max\{m, n\}$. Αν $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq m$ και $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leq n$, τότε η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \ldots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \ldots & a_{i_2j_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \ldots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix}$$

λέγεται μια ορίζουσα k-τάξης που προέρχεται από τον πίνακα A.

Ας θεωρήσουμε π.χ. τον πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \varepsilon & \zeta & \eta & \theta \\ \varkappa & \lambda & \mu & \nu \end{pmatrix}.$$

Οι ορίζουσες $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \varepsilon & \zeta \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \varepsilon & \eta \end{vmatrix}$, ..., $\begin{vmatrix} \eta & \theta \\ \mu & \nu \end{vmatrix}$ είναι ορίζουσες δευτέρας τάξης που προέρχονται από τον Β. Η ορίζουσα $\begin{vmatrix} \alpha & \gamma & \delta \\ \varepsilon & \eta & \theta \\ \varkappa & \mu & \nu \end{vmatrix}$ είναι μια ορίζουσα τρίτης τάξης που προέρχεται από τον Β. Κάθε ένα από τα στοιχεία του Β είναι μια ορίζουσα πρώτης τάξης που προέρχεται από τον Β.

Ορισμός: Ονομάζουμε *τάξη* του m×n πίνακα A το μεγαλύτερο φυσικό k, $1 \leq k \leq \max\{m, n\}$, για τον οποίο υπάρχει ορίζουσα k-τάξης που προέρχεται από τον A και είναι διάφορος του μηδενός.

Παράδειγμα

Για τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

και άρα η τάξη του A δεν είναι 3. Επειδή $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, η τάξη του A είναι 2.

Αναφέρουμε τώρα χωρίς απόδειξη το θεώρημα της εύρεσης των ακρότατων τιμών μιας συνάρτησης με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών του Lagrange.

Θεώρημα 2.11.1

Έστω $f, g_1, \ldots, g_m$ πραγματικές συναρτήσεις οι οποίες ορίζονται και έχουν συνεχείς παραγώγους πρώτης τάξης επί ενός ανοικτού υποσυνόλου V του $\mathbb{R}^n$ $(m<n)$. Αν $\vec{a}$ είναι ένα σημείο του V όπου η f έχει τοπικό ακρότατο επί του V υπό τις m συνθήκες $g_1(\vec{x})=0, \ldots, g_m(\vec{x})=0$ και αν ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\vec{a}) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\vec{a}) & \ldots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial g_m}{\partial x_2}(\vec{a}) & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

είναι τάξης m, τότε υπάρχει μια μοναδική m-άδα αριθμού $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ τέτοια ώστε

$$\nabla f(\vec{a}) + \lambda_1 g_1(\vec{a}) + \ldots + \nabla g_m(\vec{a}) = (0, 0, \ldots, 0) . \qquad (*)$$

Παρατήρηση: Η (*) ισοδύναμη με το σύστημα

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_k}(\vec{a}) = 0 \ , \quad k = 1, \ldots, m \ .$$

Οι αριθμοί $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ για τους οποίους ισχύει η (*) ονομάζονται πολλαπλασιαστές του Lagrange.

Παράδειγμα

Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $P_o(x_o, y_o)$ από την ευθεία $\alpha x+\beta y+\gamma = 0$, $(|\alpha| + |\beta| \neq 0)$.

Λύση

Όπως ξέρουμε από τη Γεωμετρία, υπάρχει σημείο της ευθείας με τη μικρότερη απόσταση από το P_o. Αν $P(x, y)$ είναι ένα τυχαίο σημείο της ευθείας $\alpha x+\beta y+\gamma = 0$, τότε $PP_o = \sqrt{(x-x_o)^2 +(y-y_o)^2}$. Το σημείο $P(x, y)$ με τη μικρότερη απόσταση είναι το ίδιο με το σημείο του οποίου το τετράγωνο της απόστασης είναι ελάχιστο. Αρκεί λοιπόν να βρούμε το ελάχιστο της συνάρτησης

$$f(x, y) = (x-x_o)^2 + (y-y_o)^2$$

όπου τα x, y πληρούν τη συνθήκη $g(x, y) = \alpha x+\beta y+\gamma = 0$. Ο πίνακας $\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) = (\alpha, \beta)$ είναι τάξης 1 (όσοι και οι περιορισμοί). Άρα μπορούμε να βρούμε το ελάχιστο που ζητάμε με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε στο σημείο του ελαχίστου να είναι

$$\left.\begin{aligned} \lambda\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x}=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2(x-x_o)+\lambda\alpha=0 \\ 2(y-y_o)+\lambda\beta=0 \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

Έχουμε επίσης ότι

$$\alpha x+\beta y+\gamma = 0 . \qquad (2)$$

Από το σύστημα των δύο εξισώσεων (1) παίρνουμε: $x = x_0 - \lambda \frac{\alpha}{2}$, $y = y_0 - \lambda \frac{\beta}{2}$. Αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε:

$$\alpha \left(x_0 - \frac{\lambda\alpha}{2}\right) + \beta \left(y_0 - \frac{\lambda\beta}{2}\right) + \gamma = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 2\,\frac{\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma}{\alpha^2+\beta^2} .$$

Άρα, για το σημείο ελαχίστου, έχουμε:

$$f(x, y) = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \frac{\lambda^2}{4}(\alpha^2+\beta^2) = \frac{(\alpha x_0+\beta y_0+\gamma)^2}{\alpha^2+\beta^2} .$$

Συνεπώς η απόσταση του $P_0(x_0, y_0)$ από την ευθεία $\alpha x+\beta y+\gamma = 0$ είναι

$$d = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = \frac{|\alpha x_0+\beta y_0+\gamma|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} .$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

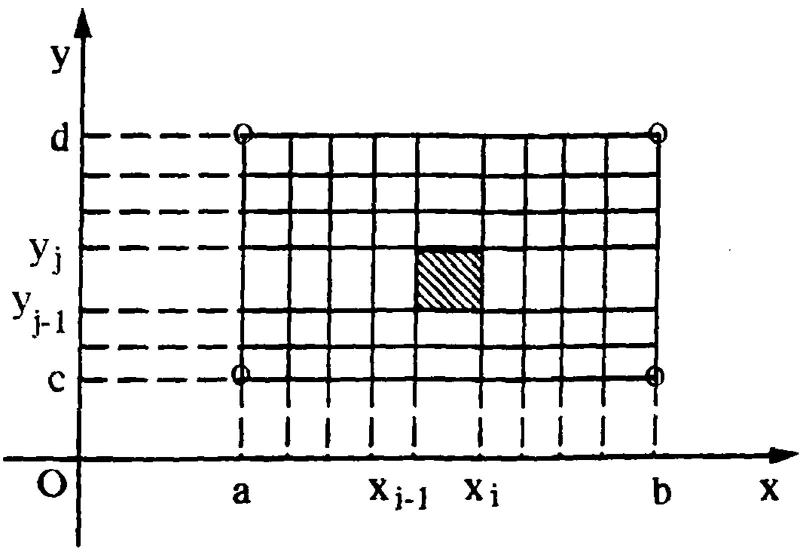
3. ΠΟΛΛΑΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

3.1 Διπλά Ολοκληρώματα

Έστω $I = [a, b]$ ένα κλειστό διάστημα της πραγματικής ευθείας $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε *διαμέριση* του I κάθε πεπερασμένο πλήθος δ αριθμών του $[a, b]$ της μορφής

$$\delta = \{x_o = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\} \ .$$

Ο αριθμός $\lambda(\delta) = \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \ldots, n\}$ ονομάζεται λεπτότητα της διαμέρισης δ. Με τον όρο ορθογώνιο στον $\mathbb{R}^2$ θα εννοούμε ένα ορθογώνιο T με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες συντεταγμένων.



Για να ορίσουμε τα διπλά ολοκληρώματα θα χρειαστούμε την έννοια διαμέριση ενός ορθογωνίου. Έστω $T = [a, b]\times[c, d]$ ένα ορθογώνιο. Θεωρούμε τις διαμερίσεις: $\delta_1 = \{a = x_0<x_1< \dots <x_n = b\}$ του $[a, b]$ και $\delta_2 = \{c = y_0<y_1< \dots <y_m = d\}$ του $[c, d]$. Τότε $P = \delta_1\times\delta_2$ ονομάζεται μια διαμέριση του ορθογωνίου. Η P χωρίζει το T σ' ένα πεπερασμένο πλήθος ορθογωνίων του τύπου $[x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j]$. Έτσι $T_1, T_2, \dots, T_N$ τα ορθογώνια στα οποία η P χωρίζει το T. Ονομάζουμε λεπτότητα της διαμέρισης P τον αριθμό

$$\lambda(P) = \max\{d(T_1), d(T_2), \dots, d(T_N)\} ,$$

όπου $d(T_k)$ είναι η διάμετρος του ορθογωνίου T_k (στην περίπτωση ενός ορθογωνίου η διάμετρος συμπίπτει με τη διαγώνιο του ορθογωνίου).

Έστω τώρα f μια πραγματική συνάρτηση η οποία ορίζεται και είναι φραγμένη επί του T (δηλαδή υπάρχει $M>0$ τέτοιο ώστε $|f(x, y)| \leq M$ για κάθε $(x, y)\in T$). Θέτουμε

$$m_k = \inf\{f(x, y): (x, y)\in T_k\} \text{ και } M_k = \sup\{f(x, y): (x, y)\in T_k\} .$$

Οι αριθμοί

$$K(f, P) = \sum_{k=1}^{N} m_k E(T_k) \quad \text{και} \quad A(f, P) = \sum_{k=1}^{N} M_k E(T_k) ,$$

(όπου $E(T_k)$ είναι το εμβαδό του ορθογωνίου T_k) ονομάζεται το *κάτω άθροισμα* και το *άνω άθροισμα* της f για την διαμέριση P, αντίστοιχα. Αποδεικνύεται ότι αν P, P' είναι δύο οποιεσδήποτε διαμερίσεις του T, τότε $K(f, P) \leq A(f, P')$. Επομένως

$$\sup\{K(f, P): P \text{ διαμ. του } T\} \leq \inf\{A(f, P): \text{διαμ. του } T\} .$$

Οι αριθμοί sup{K(f, P): P διαμ. του T} και inf{A(f, P): P διαμ. του T} ονομάζονται αντίστοιχα *κάτω ολοκλήρωμα* και *άνω ολοκλήρωμα* της f επί του T.

Ορισμός: Η συνάρτηση f ονομάζεται *ολοκληρώσιμη κατά Riemann* επί του T αν το κάτω ολοκλήρωμα της f επί του T είναι ίδιο με το άνω ολοκλήρωμα. Η κοινή αυτή ονομάζεται ολοκλήρωμα της f επί του T και συμβολίζεται με

$$\iint_T f(x, y)dxdy \ .$$

Σημείωση: Για να είναι η f ολοκληρώσιμη επί του T πρέπει η f να είναι φραγμένη επί του T χωρίς όμως η συνθήκη αυτή να είναι και ικανή.

Αποδεικνύεται το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 3.1.1

Αν η συνάρτηση f είναι φραγμένη επί του T και αν είναι συνεπής σε όλα τα σημεία του T εκτός ενδεχομένως από ένα πεπερασμένο ή αριθμήσιμο πλήθος σημείων του T, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη επί του T.

Υπάρχει και ένας άλλος τρόπος για να ορίσουμε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης f επί ενός ορθογωνίου T. Έστω f μια φραγμένη συνάρτηση επί του T και έστω $P = \delta_1 \times \delta_2$ μια διαμέριση του T. Έστω T_1, ..., T_N τα ορθογώνια στα οποία η P χωρίζει το T. Για κάθε k, $1 \le k \le N$, διαλέγουμε ένα τυχαίο σημείο (ξ_k, η_k) στο T_k σχηματίζουμε το άθροισμα $\sum_{k=1}^{N} E(T_k)f(\xi_k, \eta_k)$. Επειδή $m_k \le f(\xi_k, \eta_k) \le M_k$, θα είναι

$$K(f, P) \leq \sum_{k=1}^{N} E(T_k) f(\xi_k, \eta_k) \leq A(f, P) .$$

Αν το όριο

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{k=1}^{N} E(T_k)\, f(\xi_k, \eta_k)$$

και είναι ανεξάρτητο από τον τρόπο επιλογής των σημείων $(\xi_k, \eta_k) \in T_k$, τότε η f λέγεται ολοκληρώσιμη κατά Riemann επί του T και ο αριθμός

$$\iint_T f(x, y) dxdy = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{k=1}^{N} E(T_k)\, f(\xi_k, \eta_k)$$

ονομάζεται ολοκλήρωμα της f επί του T. Αποδεικνύεται ότι το ολοκλήρωμα της f, που ορίζεται με τον παραπάνω τρόπο συμπίπτει μ' αυτό που ορίσαμε προηγουμένως μέσω των άνω και κάτω ολοκληρωμάτων της f.

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει ορισμένες από τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων.

Θεώρημα 3.1.2

Έστω f, g πραγματικές συναρτήσεις οι οποίες είναι ολοκληρώσιμες επί του ορθογωνίου $T = [a, b] \times [c, d]$ και έστω $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε:

1) Η f+g και η λf είναι ολοκληρώσιμες επί του T και

$$\iint_T [f(x, y)+g(x, y)] dxdy = \iint_T f(x, y) dxdy + \iint_T f(x, y) dxdy$$

$$\iint_T \lambda f(x, y)dxdy = \lambda \iint_T f(x, y)dxdy \; .$$

2) Αν $f \geq 0$ επί του Τ, τότε:

$$\iint_T f(x, y)dxdy \geq 0 \; .$$

3) Αν $f \geq g$ επί του Τ, τότε:

$$\iint_T f(x, y)dxdy \geq \iint_T g(x, y)dxdy \; .$$

4) Οι συναρτήσεις $|f|$ και fg είναι ολοκληρώσιμες επί του Τ και

$$\left| \iint_T f(x, y)dxdy \right| \leq \iint_T |f(x, y)|dxdy \; .$$

Απόδειξη

1) Έστω $P = \delta_1 \times \delta_2$ μια διαμέριση του Τ και έστω $T_1, \ldots, T_N$ τα ορθογώνια στα οποία η P χωρίζει το Τ. Αν $(\xi_k, \eta_k) \in T_k$, τότε

$$\lim_{\lambda(P) \to 0} \sum_{k=1}^{N} E(T_k)\,[f(\xi_k, \eta_k) + g(\xi_k, \eta_k)] = \lim_{\lambda(P) \to 0} \sum_{k=1}^{N} E(T_k)\, f(\xi_k, \eta_k)$$

$$+ \lim_{\lambda(P) \to 0} \sum_{k=1}^{N} E(T_k)\, g(\xi_k, \eta_k) = \iint_T f(x, y)dxdy + \iint_T g(x, y)dxdy \; .$$

Ομοίως

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{k=1}^{N} E(T_k)\, \lambda f(\xi_k, \eta_k) = \lambda \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{k=1}^{N} E(T_k)\, f(\xi_k, \eta_k)$$

$$= \lambda \iint_T f(x, y)dxdy \; .$$

2) Αν $f \geq 0$, τότε για κάθε διαμέριση P με αντίστοιχα ορθογώνια $T_1, \ldots, T_N$ έχουμε $\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k, \eta_k)E(T_k) > 0$ και άρα

$$\iint_T f(x, y)dxdy = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{k=1}^{N} E(T_k)\, f(\xi_k, \eta_k) \geq 0 \; .$$

3) Η συνάρτηση $h = f+(-1)g$ είναι (σύμφωνα με την (1)) ολοκληρώσιμη και

$$\iint_T h(x, y)dxdy = \iint_T f(x, y)dxdy - \iint_T g(x, y)dxdy \; .$$

Επειδή $h \geq 0$ επί του T, θα είναι $\iint_T h(x, y)dxdy \geq 0$ (σύμφωνα με την (2) και επομένως προκύπτει αυτό που θέλαμε να αποδείξουμε.

4) Παραλείπουμε την απόδειξη για την ολοκληρωσιμότηττα των $|f|$ και fg. Επειδή $-|f| \leq f \leq |f|$, θα έχουμε (σύμφωνα με την (3))

$$-\iint_T |f(x, y)|dxdy \leq \iint_T f(x, y)dxdy \leq \iint_T |f(x, y)|dxdy$$

και άρα

$$\left|\iint_T f(x, y)dxdy\right| \leq \iint_T |f(x, y)|dxdy \ .$$

3.2 Ολοκλήρωμα επί τυχόντος φραγμένου υποσυνόλου του $\mathbb{R}^2$

Ορισμός 3.2.1: Έστω Α ένα φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και έστω f: $A \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση. Έστω Τ ένα ορθογώνιο στον $\mathbb{R}^2$ (με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες συντεταγμένων) που περιέχει το Α (τέτοιο ορθογώνιο υπάρχει επειδή το Α είναι φραγμένο). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f_T : T \to \mathbb{R}$,

$$f_T(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{αν} \quad (x, y) \in A \\ 0 & \text{αν} \quad (x, y) \in T \setminus A \end{cases} .$$

Αν η συνάρτηση f_T είναι ολοκληρώσιμη επί του Τ, τότε η f λέγεται ολοκληρώσιμη επί του Α. Σ' αυτή την περίπτωση ο αριθμός $\iint_T f_T(x, y)dxdy$ ονομάζεται ολοκλήρωμα της f επί του Α και συμβολίζεται με $\iint_A f(x, y)dxdy$.

Παρατήρηση: Αν T, T' είναι δύο ορθογώνια με $A \subset T$ και $A \subset T'$ και αν ένα από τα ολοκληρώματα $\iint_T f_T(x, y)dxdy$ και $\iint_{T'} f_{T'}(x, y)dxdy$ υπάρχει, τότε θα υπάρχει και το άλλο και θα είναι ίσα. Συνεπώς το ολοκλήρωμα $\iint_A f(x, y)dxdy$ (όταν υπάρχει) είναι καλά ορισμένο.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.1.2 προκύπτει αμέσως το επόμενο.

Θεώρημα 3.2.2

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες επί ενός φραγμένου υποσυνόλου A του $\mathbb{R}^2$ και αν $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε:

1) Οι συναρτήσεις $f+g$, λf, $|f|$ και fg είναι ολοκληρώσιμες επί του A.

2) $$\iint_A (f(x, y)+g(x, y))dxdy = \iint_A f(x, y)dxdy + \iint_A g(x, y)dxdy .$$

$$\iint_A \lambda f(x, y)dxdy = \lambda \iint_A f(x, y)dxdy$$

$$\left| \iint_A f(x, y)dxdy \right| \leq \iint_A |f(x, y)|dxdy .$$

3) Αν $f \geq 0$ επί του A, τότε $\iint_A f(x, y)dxdy \geq 0$.

4) Αν $f \geq g$ επί του A, τότε

$$\iint_A f(x, y)dxdy \geq \iint_A g(x, y)dxdy .$$

3.3 Υπολογισμός Διπλών Ολοκληρωμάτων

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση η οποία ορίζεται και είναι φραγμένη επί του ορθογωνίου $T = [a, b]\times[c, d]$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in [a, b]$ το ολοκλήρωμα $\int_c^d f(x, y)dy$ υπάρχει. Ορίζεται τότε μια συνάρτηση

$$F: [a, b]\to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_c^d f(x, y)dy .$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει το ολοκλήρωμα της F επί του [a, b], δηλαδή υπάρχει το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy\right]dx .$$

Ανάλογα ορίζεται (αν υπάρχει) το ολοκλήρωμα

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)dx\right]dy .$$

Ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

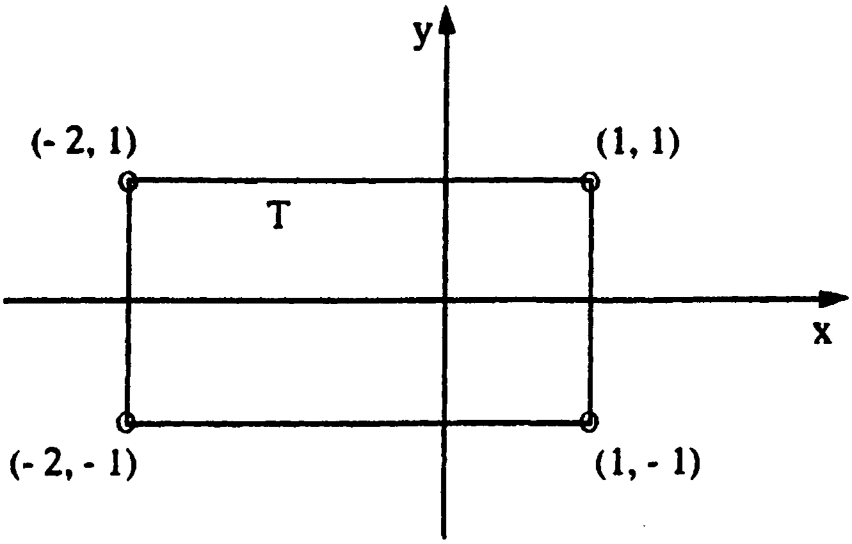
Θεώρημα 3.3.1

Αν η πραγματική συνάρτηση f ορίζεται και είναι συνεχής επί του ορθογωνίου $T = [a, b]\times[c, d]$, τότε

$$\iint_T f(x, y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy\right]dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)dx\right]dy .$$

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\iint_T (y^2+xe^y)dxdy$, όπου T είναι το ορθογώνιο με κορυφές τα σημεία (- 2, 1), (- 2, -1), (1, -1) και (1, 1).



Έχουμε

$$\iint_T (y^2+xe^y)dxdy = \int_{-2}^{1} \left[\int_{-1}^{1} (y^2+xe^y)dy \right] dx \; .$$

Επειδή

$$\int_{-1}^{1} (y^2+xe^y)dy = \left[\frac{y^3}{3}+xe^y\right]_{y=-1}^{y=1} = \frac{1}{3}+ex+\frac{1}{3}-e^{-1}x = \frac{2}{3}+(e-\frac{1}{e})x \; .$$

προκύπτει ότι

$$\iint_T (y^2+xe^y)dxdy = \int_{-2}^{1} \left(\frac{2}{3}+(e-\frac{1}{e})x\right)dx$$

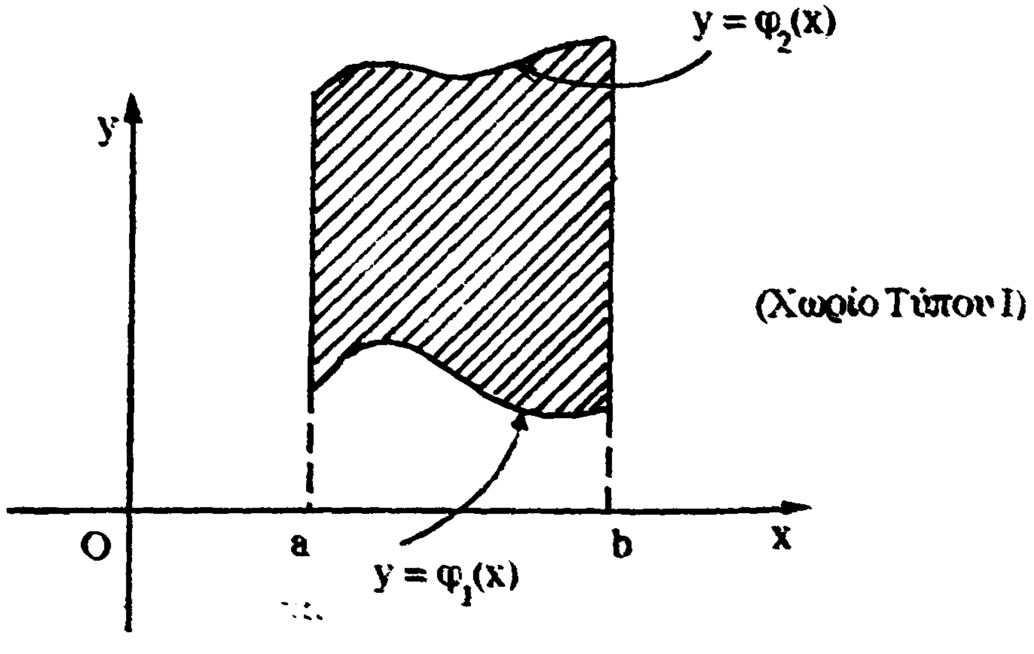
$$= \left[\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}(e - \frac{1}{e})x^2\right]_{x=-2}^{x=1}$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{2}(e - \frac{1}{e}) + \frac{4}{3} - 2\,(e - \frac{1}{e}) = 2 - \frac{3}{2}\,(e - \frac{1}{e})\,.$$

Θα δούμε στη συνέχεια ορισμένα άλλα υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ πάνω στα οποία το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης υπολογίζεται μ' έναν τρόπο ανάλογο αυτού που μας δίνει το Θεώρημα 3.2.1. Τέτοια είναι:

1) Χωρίο A που είναι του τύπου

$$A = \{(x, y):\ a \le x \le b,\ \ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}\ ,$$

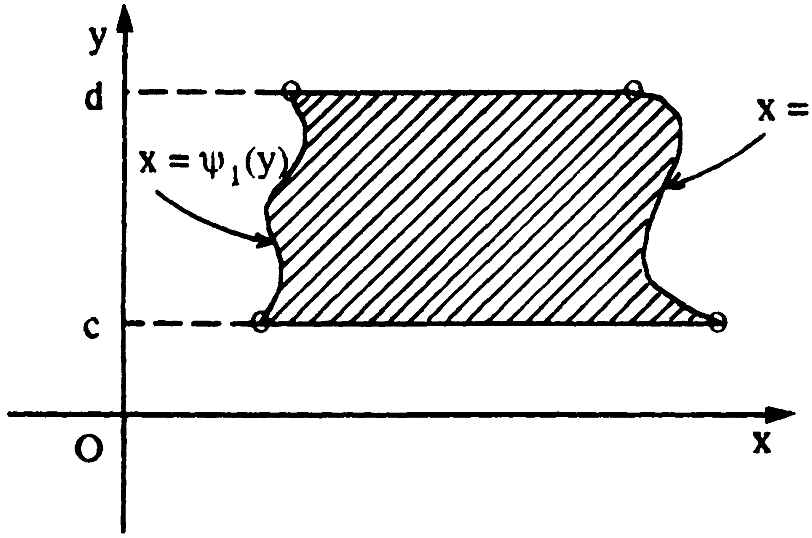


όπου φ_1, φ_2 είναι συνεχείς συναρτήσεις επί του $[a, b]$. Χωρία αυτού του τύπου θα τα λέμε χωρία τύπου I. Σ' ένα τέτοιο χωρίο, η τομή του χωρίου με την ευθεία $x=c$ (για $a \le c \le b$) είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα δηλαδή το τμήμα που ενώνει το σημείο $(c, \varphi_1(c))$ με το $(c, \varphi_2(c))$.

2) Χωρία του τύπου

$$A = \{(x, y):\ c \le y \le d,\ \ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\},$$

όπου ψ_1, ψ_2 είναι συναρτήσεις συνεχείς επί του $[c, d]$. Χωρία του τύπου αυτού θα τα λέμε χωρία τύπου ΙΙ. Σε τέτοια χωρία μια οριζόντια ευθεία που τέμνει το χωρίο θα το τέμνει κατά ένα ευθύγραμμο τμήμα.



(Χωρίο Τύπου ΙΙ)

Αν Α είναι ένα χωρίο τύπου Ι, δηλαδή

$$A = \{(x, y):\ a \le x \le b,\ \ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$$

και f μια συνεχής συνάρτηση επί του Α, τότε

$$\iint\limits_A f(x, y)dxdy = \int_a^b [\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy]dx\ .$$

Ανάλογα, αν το Α είναι χωρίο τύπου ΙΙ,

$$A = \{(x, y):\ c \le y \le d,\ \ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\},$$

τότε

$$\iint_A f(x, y)dxdy = \int_c^d [\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx]dy \ .$$

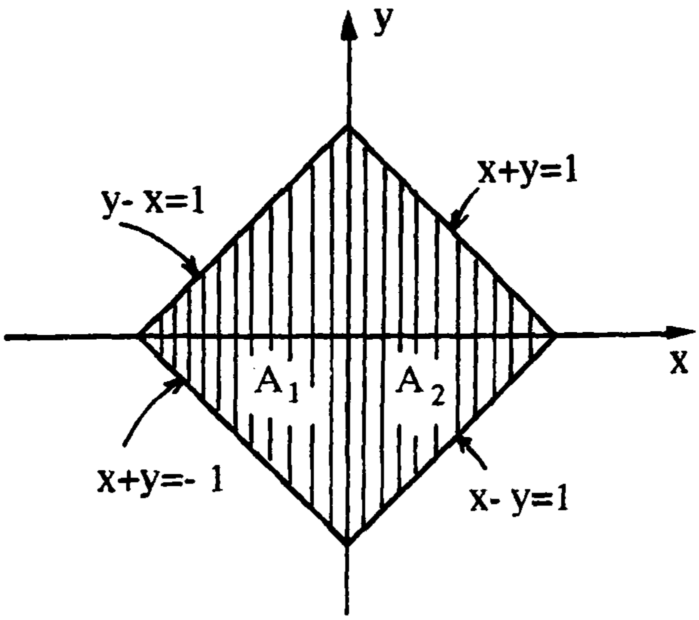
Μια άλλη κατηγορία χωρίων στα οποία μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα είναι αυτά που μπορούν να χωρισθούν σ' ένα πεπερασμένο πλήθος χωρίων το κάθε ένα εκ των οποίων είναι είτε χωρίο τύπου I είτε χωρίο τύπου II. Το ολοκλήρωμα τότε είναι το άθροισμα των ολοκληρωμάτων πάνω στα επί μέρους χωρία.

Παράδειγμα 1

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\iint_A e^{x+y}dxdy \ , \quad \text{όπου} \quad A = \{(x, y): |x| + |y| \leq 1\} \ .$$

Λύση



Το χωρίο A μπορεί να χωρισθεί σε δύο χωρία A_1, A_2

$$A_1 = \{(x, y): -1 \leq x \leq 0 \ , \ -x-1 \leq y \leq x+1\}$$

$$A_2 = \{(x,y):\quad 0 \le x \le 1, \quad x-1 \le y \le -x+1\}$$

$$\iint\limits_{A_1} e^{x+y}dxdy = \int_{-1}^{0} [\int_{-x-1}^{x+1} e^{x+y}dy]dx$$

$$= \int_{-1}^{0} [e^{x+y}]_{y=-x-1}^{y=x+1} dx = \int_{-1}^{0} (e^{2x+1} - \frac{1}{e})dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^{2x+1} - \frac{1}{e}x\right]_{x=-1}^{0} = \frac{e}{2} - (\frac{1}{2e} + \frac{1}{e}) = \frac{e}{2} - \frac{3}{2e}$$

$$\iint\limits_{A} e^{x+y}dxdy = \int_{0}^{1} [\int_{x-1}^{1-x} e^{x+y}dy]dx$$

$$= \int_{0}^{1} [e^{x+y}]_{y=x-1}^{y=1-x} dx = \int_{0}^{1} (e - e^{2x-1})dx$$

$$= \left[ex - \frac{1}{2}e^{2x-1}\right]_{x=0}^{x=1} = e - \frac{e}{2} + \frac{1}{2e} = \frac{e}{2} + \frac{1}{2e}.$$

Άρα

$$\iint\limits_{A} e^{x+y}dxdy = \frac{e}{2} - \frac{3}{2e} + \frac{e}{2} + \frac{1}{2e} = e - \frac{1}{e}.$$

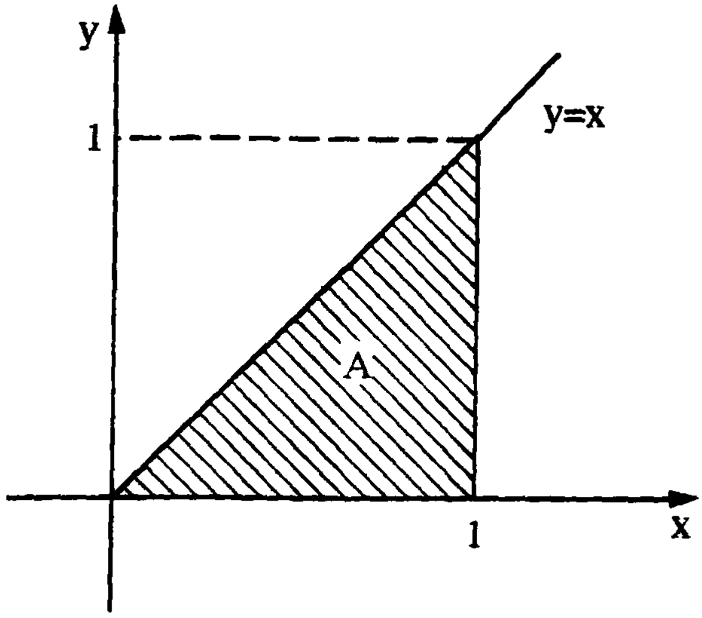
Παράδειγμα 2

Αφού πρώτα σχεδιασθεί το χωρίο ολοκληρώσεως, να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 [\int_y^1 \sqrt{1+x^2}dx]dy$.

Λύση

Χωρίο ολοκληρώσεως είναι το σύνολο

$$A = \{(x, y):\ 0 \le y \le 1\ ,\ \ y \le x \le 1\}\ .$$



Αλλάζοντας την τάξη ολοκληρώσεως, έχουμε

$$I = \int_0^1 [\int_0^x dy]\sqrt{1+x^2}dx = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ \frac{(1+x^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}\ (2^{3/2} - 1)\ .$$

Ορισμός: Έστω A ένα φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Αν η σταθερή συνάρτηση f=1 είναι ολοκληρώσιμη επί του A, τότε ο αριθμός

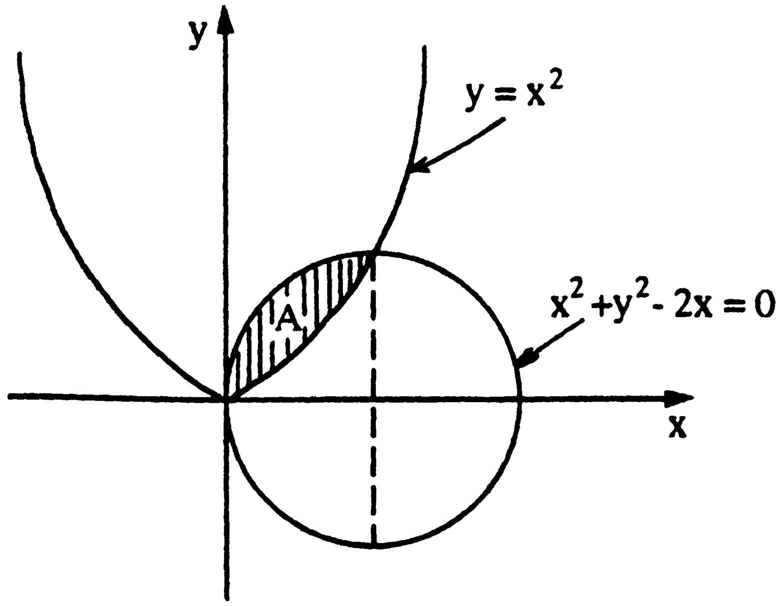
$$\iint\limits_A 1dxdy = \iint\limits_A dxdy$$

ονομάζεται εμβαδό του Α και θα το συμβολίζουμε με Ε(Α).

Παράδειγμα(*)

Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περιβάλλεται από τις καμπύλες $y = x^2$ και $x^2+y^2-2x = 0$.

Λύση



Η εξίσωση $x^2+y^2-2x = 0$ γράφεται $(x-1)^2+y^2 = 1$. Άρα η καμπύλη $x^2+y^2-2x = 0$ είναι περιφέρεια κύκλου με κέντρο το $(1, 0)$ και ακτίνα 1. Βρίσκουμε τα σημεία τομής των καμπύλων:

$$y = x^2$$

$$x^2+y^2-2x = 0 .$$

Η δεύτερη εξίσωση, λόγω της πρώτης γίνεται $x^2+x^4-2x = 0$

$$x^2+x^4-2x = x(x+x^3-2) = x[(x-1)+(x^3-1)] = x(x-1)(x^2+x+2)\,.$$

Επειδή $x^2+x+2 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, στα σημεία τομής έχουμε $x=0$ ή $x=1$. Άρα τα σημεία τομής είναι τα σημεία (0, 0) και (1, 1).

$$E(A) = \iint_A dxdy = \int_0^1 [\int_{x^2}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} dy]dx$$

$$= \int_0^1 [\sqrt{1-(x-1)^2} - x^2]dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}dx - \int_0^1 x^2dx = -\frac{1}{3} + \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}dx\,.$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}dx$ κάνουμε το μετασχηματισμό $x-1 = \eta\mu t$, $\frac{dx}{dt} = \sigma\upsilon\nu t$. Άρα

$$\int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sigma\upsilon\nu^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (1+\sigma\upsilon\nu 2t)dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\eta\mu 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{\pi}{4}\,.$$

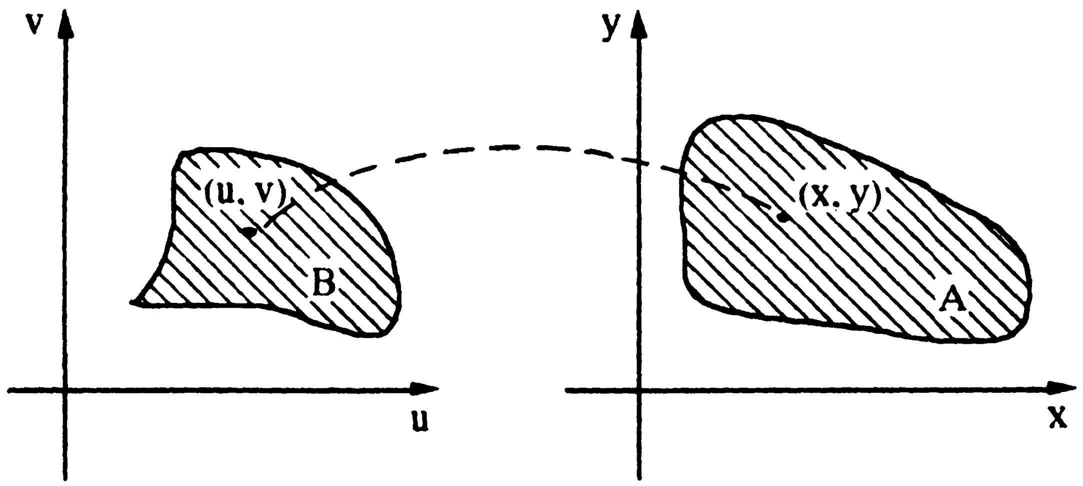
Άρα $E(A) = -\frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}$.

3.4 Αλλαγή Μεταβλητών στα Διπλά Ολοκληρώματα

Μερικές φορές, όπως και στην περίπτωση ολοκληρωμάτων μιας μεταβλητής, ο υπολογισμός ενός διπλού ολοκληρώματος γίνεται ευκολότερα, αν χρησιμοποιήσουμε καινούργιες μεταβλητές. Στο επόμενο θεώρημα, όταν λέμε *κανονικό χωρίο* στο χώρο $\mathbb{R}^2$, εννοούμε ένα χωρίο, που μπορεί να χωρισθεί σ' ένα πεπερασμένο πλήθος χωρίων κάθε ένα εκ των οποίων είναι είτε τύπου I είτε τύπου II.

Θεώρημα 3.4.1

Έστω $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ συναρτήσεις που απεικονίζουν αμφιμονοσήμαντα ένα ανοικτό υποσύνολο W του επιπέδου των u, v επί ενός ανοικτού υποσυνόλου V του επιπέδου των x, y.



Υποθέτουμε ότι οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$ υπάρχουν και είναι συνεχείς επί του W και ότι $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ σε κάθε σημείο του W. Αν B είναι ένα κανονικό χωρίο στο W του οποίου η εικόνα μέσω των $x(u, v)$, $y(u, v)$ είναι το σύνολο $A \subset V$, τότε για κάθε πραγματική συνάρτηση f η οποία ορίζεται και είναι συνεχής επί του A έχουμε

$$\iint_A f(x, y)\,dx\,dy = \iint_B f(x(u, v), y(u, v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv \ .$$

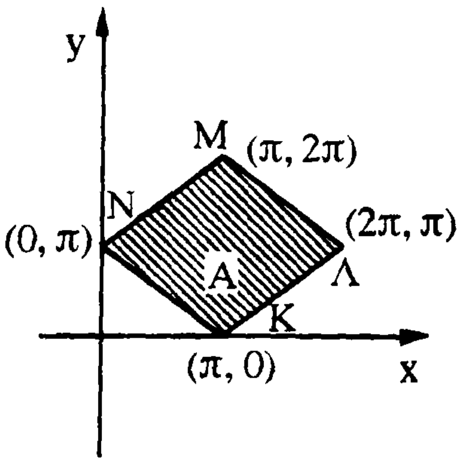
Παράδειγμα 1

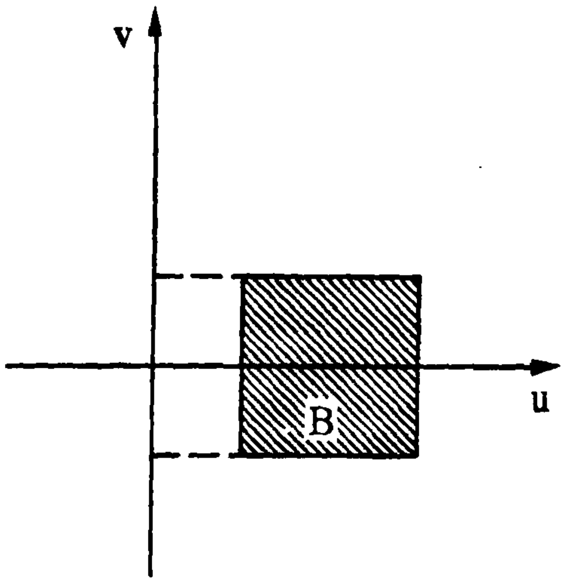
Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\iint_A (x-y)^2 \sin^2(x+y)dxdy \ ,$$

όπου A το παραλληλόγραμμο με κορυφές τα σημεία (π, 0), 2π, π), (π, 2π), (0, π).

Λύση





Οι ευθείες ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ και ΝΚ έχουν εξισώσεις $y-x = -\pi$, $y+x = 3\pi$, $y-x=\pi$, $y-x=\pi$, $y+x=\pi$ αντίστοιχα. Χρησιμοποιούμε νέες μεταβλητές $u=y+x$ και $v=x-y$. Στο σύστημα των u, v η ευθεία $y+x=\pi$ απεικονίζεται στην $u=\pi$, η $y+x=3\pi$ στην $u=3\pi$, η $y-x=-\pi$ στην $v=-\pi$ και η $y-x=\pi$ στην $v=\pi$. Άρα το παραλληλόγραμμο A απεικονίζεται στο ορθογώνιο B. Επειδή $x = \frac{u+v}{2}$ και $y = \frac{u-v}{2}$, θα είναι

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Άρα

$$\iint_A (x-y)^2 \sin^2(x+y)dxdy = \iint_B v^2 \sin^2 u \left| -\frac{1}{2} \right| dudv$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\pi}^{3\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} v^2 \right] \sin^2 u \, du$$

$$= \frac{\pi^3}{3} \int_{\pi}^{3\pi} \sin^2 u \, du = \frac{\pi^3}{6} \int_{\pi}^{3\pi} (1 - \cos 2u) du$$

$$= \frac{\pi^3}{6} \left[u - \frac{\eta\mu 2u}{2} \right]_{u=\pi}^{u=3\pi} = \frac{\pi^4}{3}.$$

Παράδειγμα 2

Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_A xy\, dxdy, \quad \text{όπου } A = \{(x,y): \; x^2+y^2 \leq 1\}$$

κάνοντας την αλλαγή των μεταβλητών $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$.

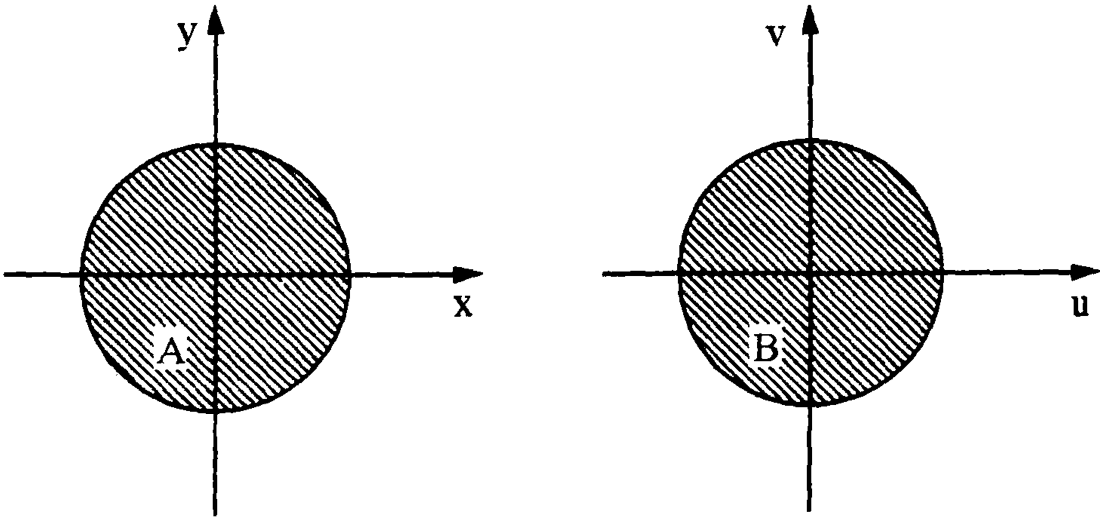
Λύση

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4(u^2+v^2).$$

Η περιφέρεια $x^2 - y^2 = 1$ απεικονίζεται στην καμπύλη

$$(u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2 = 1 \;\Rightarrow\; (u^2+v^2)^2 = 1 \;\Rightarrow\; u^2+v^2 = 1 \;.$$

Επομένως η εικόνα του A είναι το σύνολο $B = \{ (u, v):\; u^2+v^2 \leq 1 \}$.



$$\iint_A xy\,dxdy = 4 \iint_B 2uv(u^2 - v^2)(u^2+v^2)dudv$$

$$= 8 \iint_B (u^5v - uv^5)dudv = 8 \int_{-1}^{1} \Big[\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} (u^5v - uv^5)dv \Big]\, du$$

Επειδή

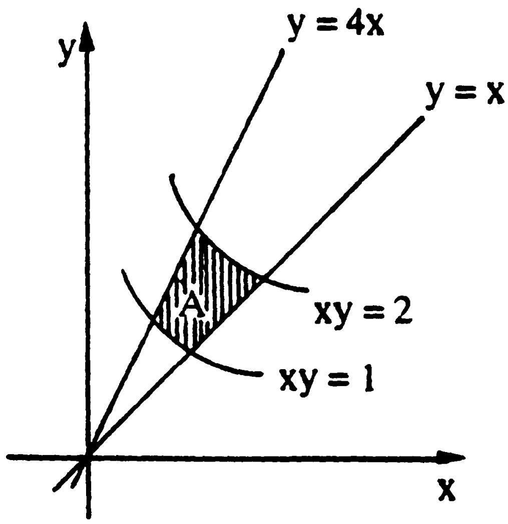
$$\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} (u^5v - uv^5)dv = \left[u^5\,\frac{v^2}{2} - \frac{uv^6}{6} \right]_{v=\sqrt{1-u^2}}^{v=-\sqrt{1-u^2}} = 0\,,$$

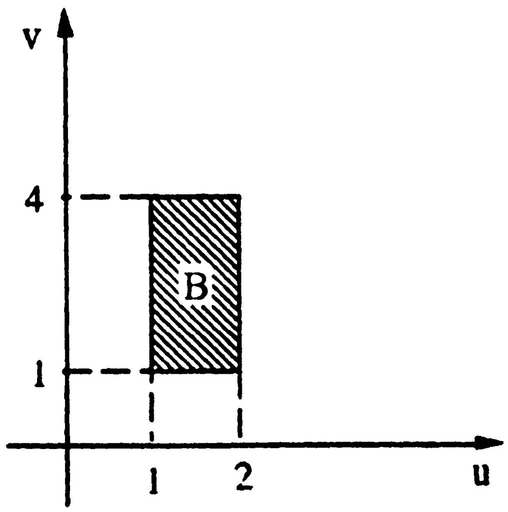
προκύπτει ότι $\iint\limits_A xy\,dx\,dy = 0$.

Παράδειγμα 3

Να υπολογισθεί $\iint\limits_A x^2y^2\,dx\,dy$ όπου A είναι το χωρίο στο πρώτο τεταρτημόριο που περιβάλλεται από τις καμπύλες $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=4x$.

Λύση





Κάνουμε την αλλαγή των μεταβλητών $u = xy$, $v = \dfrac{y}{x}$. Οι καμπύλες $yx=1$ και $yx=2$ απεικονίζονται στις ευθείες $u=1$ και $u=2$ αντίστοιχα. Ομοίως οι ευθείες $y=x$ και $y=4x$ απεικονίζονται στις ευθείες $v=1$ και $v=4$ αντίστοιχα. Επομένως η εικόνα του A είναι το ορθογώνιο B. Από τις $u = xy$ και $v = \dfrac{y}{x}$ παίρνουμε $uv = y^2$, $\dfrac{u}{v} = x^2$ και άρα $x = \sqrt{\dfrac{u}{v}}$, $y = \sqrt{uv}$. Για τις μερικές παραγώγους των x, y έχουμε:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\frac{1}{v}}{2\sqrt{\frac{u}{v}}}=\frac{1}{2\sqrt{uv}},\ \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\frac{u}{v^2}}{2\sqrt{\frac{u}{v}}}=-\frac{u}{2v\sqrt{uv}},\ \frac{\partial y}{\partial u}=\frac{v}{2\sqrt{uv}},\ \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{u}{2\sqrt{uv}}\ .$$

Άρα

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2\sqrt{uv}} & \frac{-u}{2v\sqrt{uv}}\\ \frac{v}{2\sqrt{uv}} & \frac{u}{2\sqrt{uv}}\end{vmatrix}=\frac{1}{2v}\ .$$

Επομένως

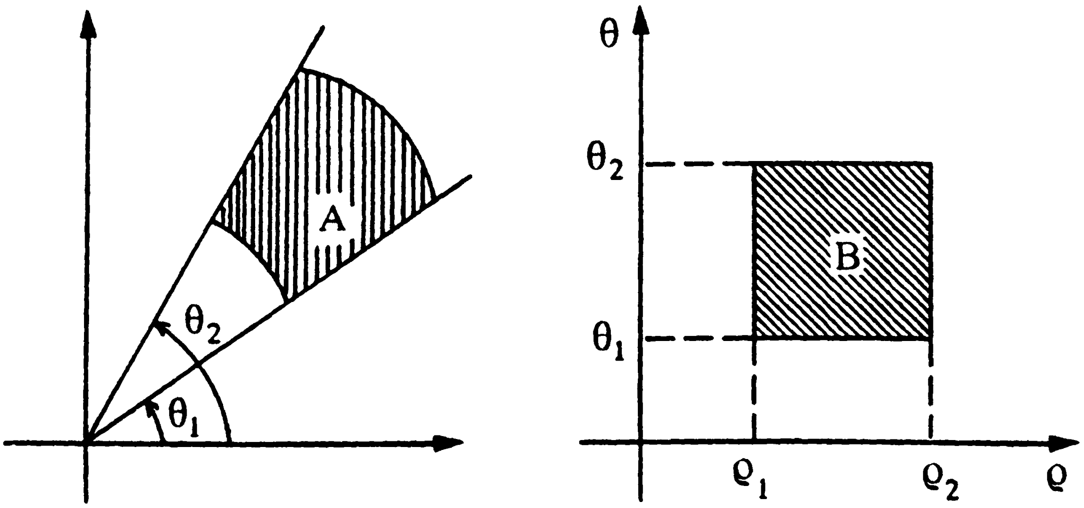
$$\iint_A x^2y^2dxdy=\iint_B u^2\frac{1}{2v}dudv=\frac{1}{2}\int_1^2 u^2\left[\int_1^4\frac{1}{v}dv\right]du$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2 u^2\left[\log v\right]_{v=1}^{v=4}du=\frac{1}{2}\int_1^2 u^2\log 4\,du=\log 2\int_1^2 u^2du=\frac{7}{3}\log 2\ .$$

Μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες

Έστω A ένα χωρίο στο $\mathbb{R}^2$ και έστω B το σύνολο A περιγραφόμενο σε πολικές συντεταγμένες. Οι σχέσεις μεταξύ των καρτεσιανών συντεταγμένων x, y και των πολικών συντεταγμένων ρ, θ είναι $x = \rho\sigma\upsilon\nu\theta$, $y=\rho\eta\mu\theta$. Έχουμε:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}=\begin{vmatrix}\sigma\upsilon\nu\theta & -\rho\eta\mu\theta\\ \eta\mu\theta & \rho\sigma\upsilon\nu\theta\end{vmatrix}=\rho(\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta)=\rho\ .$$



Επομένως, για μια συνάρτηση f ολοκληρώσιμη επί του A έχουμε:

$$\iint_A f(x, y)dxdy = \iint_B f(\varrho\sigma\upsilon\nu\theta, \varrho\eta\mu\theta)\varrho\, d\varrho d\theta .$$

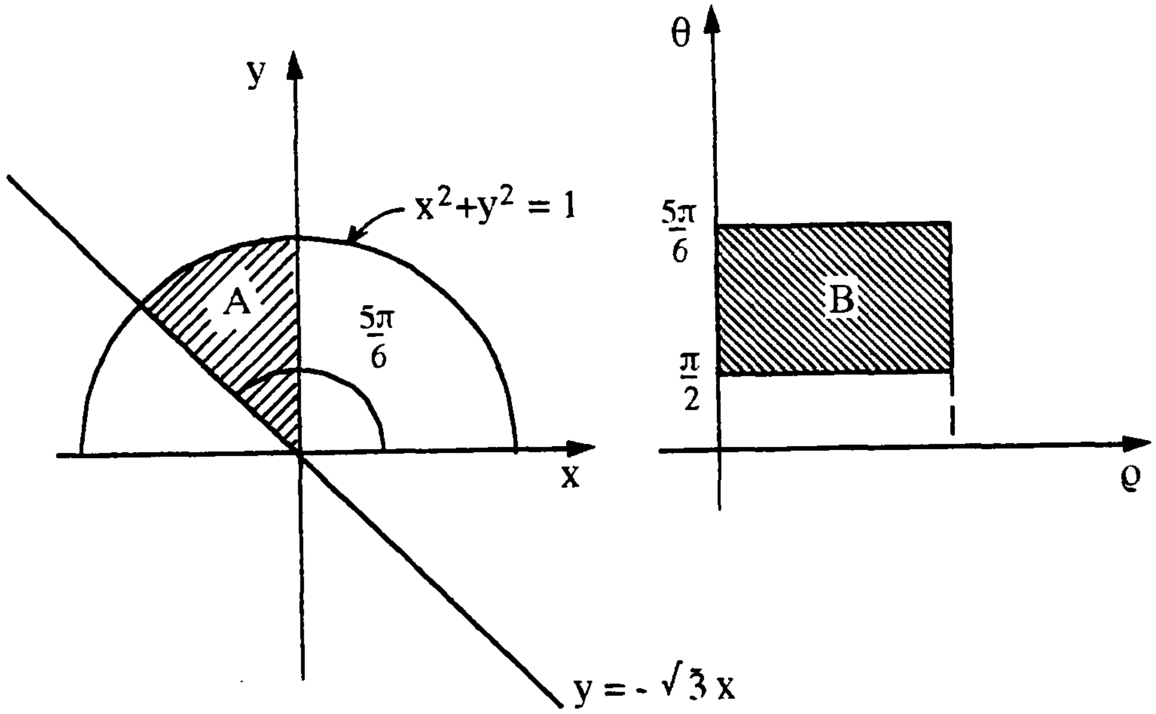
Ο μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες είναι ιδιαίτερα χρήσιμος, όταν το χωρίο ολοκληρώσεως είναι τέτοιο ώστε στο σύνορο του χωρίου το ϱ ή το θ είναι σταθερό.

Παράδειγμα 1

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\iint_A \sqrt{2-x^2-y^2}\, dxdy$, όπου A είναι το χωρίο στο δεύτερο τεταρτημόριο που περιβάλλεται από τον άξονα των y, την ευθεία $y=-\sqrt{3}\,x$ και την περιφέρεια $x^2+y^2=1$.

Λύση

Για $x=\varrho\sigma\upsilon\nu\theta$, $y=\varrho\eta\mu\theta$, έχουμε $x^2+y^2=\varrho^2$. Άρα



$$\iint_A \sqrt{2-x^2-y^2}\,dxdy = \iint_B \sqrt{2-\varrho^2}\,\varrho d\varrho d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} \left[\int_0^1 \varrho\sqrt{2-\varrho^2}\,d\varrho\right] d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} \left[-\frac{1}{3}(2-\varrho^2)^{3/2}\right]_{\varrho=0}^{\varrho=1} d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\,(2^{3/2}-1)\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} d\theta = \frac{\pi}{9}\,(2^{3/2}-1)\ .$$

Παράδειγμα 2

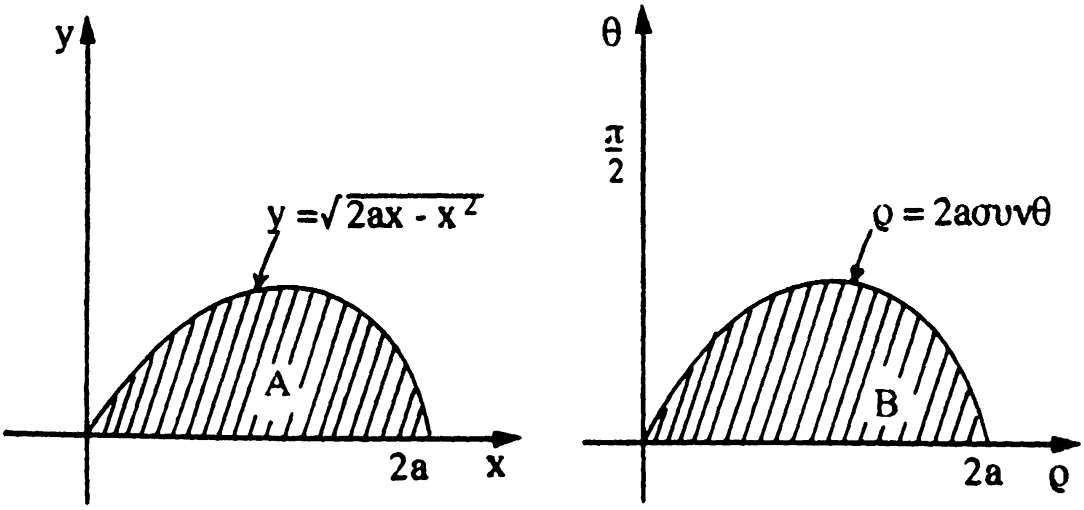
Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2a}\left[\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}(x^2+y^2)dy\right]dx \qquad (a>0)$$

αφού πρώτα σχεδιασθεί ο χώρος ολοκληρώσεως A .

Λύση

Στο χωρίο ολοκληρώσεως A, για μια τιμή του θ το ρ μεταβάλλεται από ρ=0 έως ρ=2αсυνθ (η εξίσωση $y=\sqrt{2ax-x^2}$ σε πολικές συντεταγμένες γίνεται ρ = 2αсυνθ). Άρα



$$\int_0^{2a}\left[\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}(x^2+y^2)dxdy = \iint_A (x^2+y^2)dxdy = \iint_B \rho^3\, d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\int_0^{2a\sigma\upsilon\nu\theta} \varrho^3 \, d\varrho] \, d\theta = 4a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^4\theta \, d\theta$$

$$= a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sigma\upsilon\nu 2\theta)^2 \, d\theta$$

$$= a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1+2\sigma\upsilon\nu 2\theta + \frac{\sigma\upsilon\nu 4\theta+1}{2}] \, d\theta$$

$$= a^4 \left[\frac{3}{2}\theta + \eta\mu 2\theta + \frac{\eta\mu 4\theta}{8}\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi \, a^4}{4} .$$

3.5 Τριπλά Ολοκληρώματα

Μ' ένα τρόπο ανάλογο μ' αυτό που χρησιμοποιήσαμε στα διπλά ολοκληρώματα μπορούμε να ορίσουμε τα τριπλά ολοκληρώματα. Θα δώσουμε πρώτα τον ορισμό ενός τριπλού ολοκληρώματος πάνω σ' ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο Π της μορφής $\Pi=[\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2] \times [\alpha_3, \beta_3]$. Ο όγκος ενός τέτοιου παραλληλεπιπέδου ορίζεται ίσος με το γινόμενο $(\beta_1- \alpha_1)(\beta_2- \alpha_2)(\beta_3- \alpha_3)$ και θα τον συμβολίζουμε με V(Π). Έστω τώρα: $\delta_1 = \{x_0 = \alpha_1 < x_1 < ... < x_m = \beta_1\}$, $\delta_2 = \{y_0 = \alpha_2 < y_1 < ... < y_n = \beta_2\}$ και $\delta_3 = \{z_0 = \alpha_3 < z_1 < ... < z_r = \beta_3\}$ διαμερίσεις των διαστημάτων $[\alpha_1, \beta_1]$ $[\alpha_2, \beta_2]$ και $[\alpha_3, \beta_3]$, αντίστοιχα. Τότε $P = \delta_1 \times \delta_2 \times \delta_3$ ονομάζεται μια διαμέριση του Π. Η διαμέριση P χωρίζει το Π σ' ένα πεπερασμένο πλήθος ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων της μορφής $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$. Ο αριθμός

$$\lambda(P) = \max\{ d(\Pi_1), ..., d(\Pi_N)\}$$

ονομάζεται λεπτότητα της διαμερίσεως P, όπου $d(\Pi_k)$ είναι η διάμετρος του Π_k. Έστω τώρα f μια συνάρτηση η οποία ορίζεται και είναι φραγμένη επί του Π. Για κάθε k, $1 \leq k \leq N$, θέτουμε $m_k = \inf\{f(\vec{x}) : \vec{x} \in \Pi_k\}$, $M_k = \sup\{f(\vec{x}) : \vec{x} \in \Pi_k\}$. Οι αριθμοί

$$K(f, P) = \sum_{k=1}^{N} m_k V(\Pi_k) \quad \text{και} \quad A(f, P) = \sum_{k=1}^{N} M_k V(\Pi_k)$$

ονομάζονται αντίστοιχα κάτω και άνω άθροισμα της f για τη διαμέριση P. Αποδεικνύεται ότι αν, P, P' είναι δύο οποιεσδήποτε διαμερίσεις του Π, τότε $K(f, P) \leq A(f, P')$. Ο αριθμός $\sup\{K(f, P)$: P διαμέριση του $\}$ ονομάζεται κάτω ολοκλήρωμα της f επί του Π ο δε αριθμός $\sup\{A(f, P)$: P διαμέριση του Π$\}$ ονομάζεται άνω ολοκλήρωμα της f επί του Π. Σύμφωνα μ' αυτό που είπαμε παραπάνω, το κάτω ολοκλήρωμα της f είναι μικρότερο ή το πολύ ίσο με το άνω ολοκλήρωμα. Αν οι δύο αυτοί αριθμοί είναι ίσοι, τότε η f λέγεται ολοκληρώσιμη και η κοινή αυτή τιμή λέγεται ολοκλήρωμα της f επί του Π και συμβολίζεται με

$$\iiint_{\Pi} f(x, y, z)dxdydz .$$

Όπως και στην περίπτωση του διπλού ολοκληρώματος, το τριπλό ολοκλήρωμα της f επί του Π μπορεί να ορισθεί και ως εξής: Έστω $P = \delta_1 \times \delta_2 \times \delta_3$ μια διαμέριση του Π με αντίστοιχα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα $\Pi_1, \ldots, \Pi_N$. Για κάθε k, $1 \leq k \leq N$, διαλέγουμε ένα σημείο (ξ_k, η_k, ζ_k) στο Π_k και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) V(\Pi_k) .$$

Η f είναι ολοκληρώσιμη επί του Π αν, και μόνον αν, το όριο

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, V(\Pi_k)$$

υπάρχει ανεξάρτητα με τον τρόπο εκλογής των $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \Pi_k$. Σ' αυτή την περίπτωση το παραπάνω όριο ονομάζεται ολοκλήρωμα της f επί του Π και συμπίπτει με το $\iiint_{\Pi} f(x, y, z)dxdydz$. Ώστε

$$\iiint_{\Pi} f(x, y, z)dxdydz = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, V(\Pi_k)\,.$$

Όπως και στην περίπτωση των διπλών ολοκληρωμάτων, αν η f είναι φραγμένη επί του Π και συνεχής σ' όλα τα σημεία του Π εκτός ενδεχομένως από ένα πεπερασμένο ή αριθμήσιμο πλήθος σημείων του Π, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη επί του Π.

Στη συνέχεια θα δώσουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος πάνω σ' ένα τυχαίο φραγμένο υποσύνολο A του $\mathbb{R}^3$. Για ένα τέτοιο A και για μια συνάρτηση f η οποία ορίζεται και είναι φραγμένη επί του A, παίρνουμε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο Π, της μορφής $\Pi = [a_1, b_1]\times[a_2, b_2]\times[a_3, b_3]$, το οποίο περιέχει το A και θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f_{\Pi} : \Pi \to \mathbb{R}\,,\quad f_{\Pi}(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}) & \text{αν} \quad \vec{x} \in A \\ 0 & \text{αν} \quad \vec{x} \in \Pi \setminus A\,. \end{cases}$$

Αν η συνάρτηση f_{Π} είναι ολοκληρώσιμη επί του Π, τότε η f λέγεται ολοκληρώσιμη επί του A και ορίζουμε

$$\iiint_A f(x, y, z)dxdydz = \iiint_{\Pi} f_{\Pi}(x, y, z)dxdydz .$$

Τόσο η ολοκληρωσιμότητα της f όσο και η τιμή του ολοκληρώματος της f_{Π} δεν εξαρτάται από την εκλογή του Π.

Η απόδειξη του επόμενου θεωρήματος είναι ανάλογη της απόδειξης του Θεωρήματος 3.2.2, που αναφέρεται στα διπλά ολοκληρώματα.

Θεώρημα 3.5.1

Έστω f, g πραγματικές συναρτήσεις οι οποίες είναι ολοκληρώσιμες επί ενός φραγμένου υποσυνόλου A του $\mathbb{R}^3$. Τότε:

1) Οι συναρτήσεις $f+g$, λf για $\lambda \in \mathbb{R}$, fg και $|f|$ είναι ολοκληρώσιμες επί του A και

$$\iiint_A [f(x, y, z) + g(x, y, z)]dxdydz = \iiint_A f(x, y, z)dxdydz + \iiint_A g(x, y, z)dxdydz ,$$

$$\iiint_A \lambda f(x, y, z)dxdydz = \lambda \iiint_A f(x, y, z)dxdydz ,$$

$$\left| \iiint_A f(x, y, z)dxdydz \right| = \iiint_A |f(x. y, z)| \, dxdydz .$$

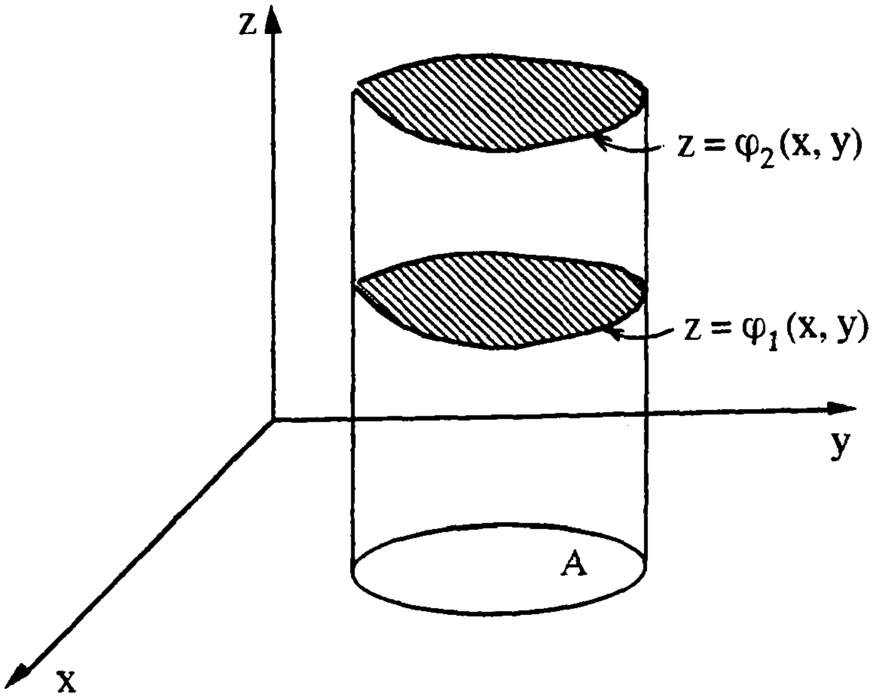
2) Αν $f \geq 0$ επί του A, τότε

$$\iiint_A f(x, y, z)dxdydz \geq 0 \; .$$

3) Αν $f \geq g$ επί του A, τότε

$$\iiint_A f(x, y, z)dxdydz \geq \iiint_A g(x, y, z)dxdydz \; .$$

3.6 Υπολογισμός Τριπλών Ολοκληρωμάτων



Έστω S ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ της μορφής

$$S = \{(x, y, z): \; (x, y) \in A \,, \quad \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\} \; ,$$

όπου A ένα κανονικό χωρίο του $\mathbb{R}^2$ και φ_1, φ_2 συνεχείς συναρτήσεις επί του A .

Αν f είναι μια συνάρτηση η οποία ορίζεται και είναι συνεχής επί του S, τότε

$$\iiint_S f(x, y, z)dxdydz = \iint_A \left[\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right] dxdy \ .$$

Στην περίπτωση που $A = \{(x, y): a \leq x \leq b, \ \ \psi_1(x) \leq y \leq \psi_2(x)\}$, όπου οι συναρτήσεις ψ_1, ψ_2 είναι συνεχείς επί του $[a, b]$, έχουμε

$$\iiint_S f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b \left(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \left[\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right] dy \right) dx \ .$$

Ανάλογα υπολογίζεται το ολοκλήρωμα αν S είναι της μορφής

$$S = \{ (x, y, z): \ (x, z) \in A \ , \ \ \varphi_1(x, z) \leq y \leq \varphi_2(x, z) \}$$

ή της μορφής

$$S = \{ (x, y, z): \ (y, z) \in A \ , \ \ \varphi_1(y, z) \leq x \leq \varphi_2(y, z) \} \ .$$

Παράδειγμα 1

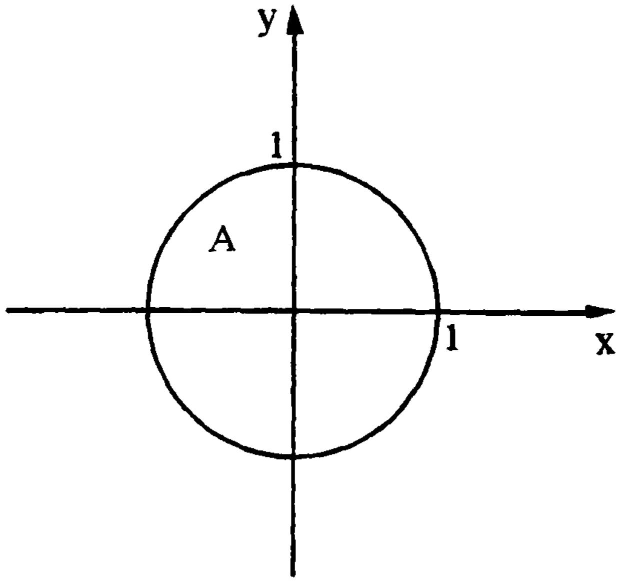
Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\iiint_S x^2 dxdydz$, όπου

$$S = \{(x, y, z): \ x^2+y^2 \leq 1, \ \ 0 \leq z \leq 1\} \ .$$

Λύση

Αν $A = \{(x, y): \ x^2+y^2 \leq 1\}$, τότε

$$\iiint_S x^2 dxdydz = \iint_A [\int_0^1 x^2 dz] dxdy = \iint_A x^2 dxdy \; .$$



Για να υπολογίσουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα κάνουμε αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες, $x = \varrho συνθ$, $y = \varrho ημθ$. Θα έχουμε

$$\iint_A x^2 dxdy = \int_0^{2\pi} [\int_0^1 \varrho^3 συν^2θ d\varrho] dθ = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} συν^2θ dθ$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} (1+συν2θ)dθ = \frac{1}{8}\left[θ + \frac{ημ2θ}{2}\right]_{θ=0}^{θ=2\pi} = \frac{\pi}{4} \; .$$

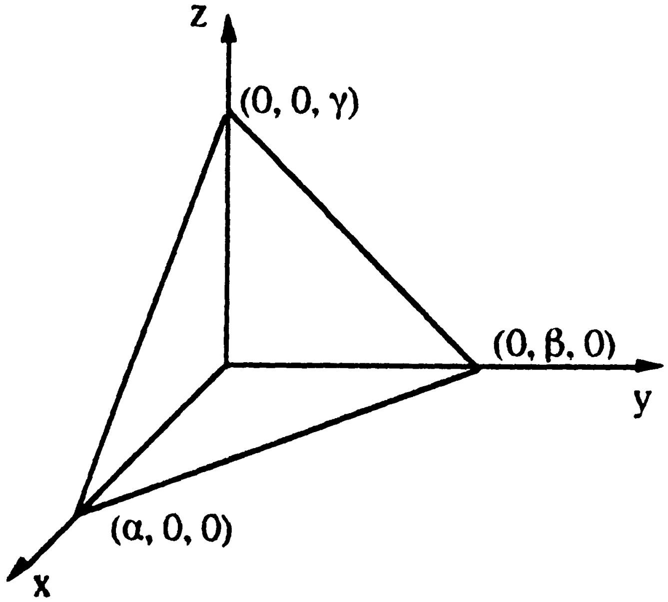
Παράδειγμα 2

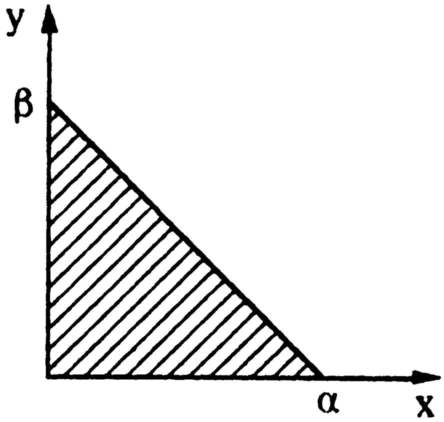
Να υπολογισθεί το τριπλό ολοκλήρωμα

$$I = \iiint_S z dxdydz \; ,$$

όπου S είναι το χωρίο που ορίζεται από τα συντεταγμένα επίπεδα και το επίπεδο $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1 \quad (\alpha, \beta, \gamma > 0)$.

Λύση





Αν A είναι το τρίγωνο στο επίπεδο των x, y με κορυφές τα σημεία (0, 0), (α, 0) και (0, β) θα είναι

$$I = \iint_A \left[\int_0^{\gamma(1-x/\alpha-y/\beta)} z\,dz \right] dxdy = \frac{\gamma^2}{2} \iint_A \left(1-\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}\right)^2 dxdy =$$

$$= \frac{\gamma^2}{2\beta^2} \iint_A \left(y+\frac{\beta}{\alpha}x-\beta\right)^2 dxdy = \frac{\gamma^2}{2\beta^2} \int_0^{\alpha} \left[\int_0^{\beta} \left(y+\frac{\beta}{\alpha}x-\beta\right)^2 dy \right] dx =$$

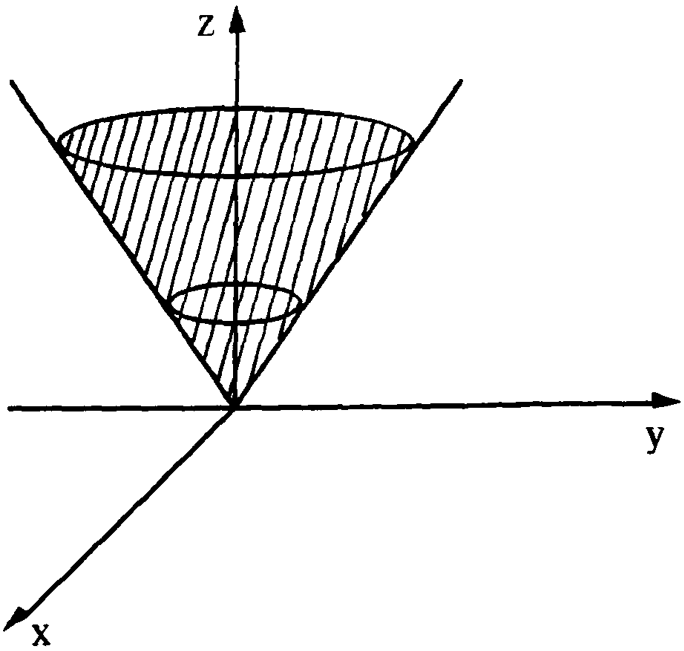
$$= \frac{\gamma^2}{2\beta^2} \int_0^{\alpha} \left[\frac{1}{3}\left(y+\frac{\beta}{\alpha}x-\beta\right)^3 \right]_{y=0}^{y=\beta(1-\frac{x}{\alpha})} d = - \frac{\gamma^2}{6\beta^2} \int_0^{\alpha} \left(\frac{\beta}{\alpha}x-\beta\right)^3 dx =$$

$$= \frac{-\beta\gamma^2}{6\alpha^3}\int_0^{\alpha}(x-\alpha)^3\,dx = -\frac{\beta\gamma^2}{6\alpha^3}\left[\frac{(x-\alpha)^4}{4}\right]_{x=0}^{x=\alpha} = \frac{\alpha\beta\gamma^2}{24}\ .$$

Παράδειγμα 3

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \iiint\limits_S (x^2+y^2)dxdydz$, όπου S είναι το χωρίο που περιβάλλεται από την επιφάνεια $2z = x^2+y^2$ και το επίπεδο $z = 2$.

Λύση



Βρίσκουμε την προβολή πάνω στο επίπεδο των x, y της τομής των δύο επιφανειών

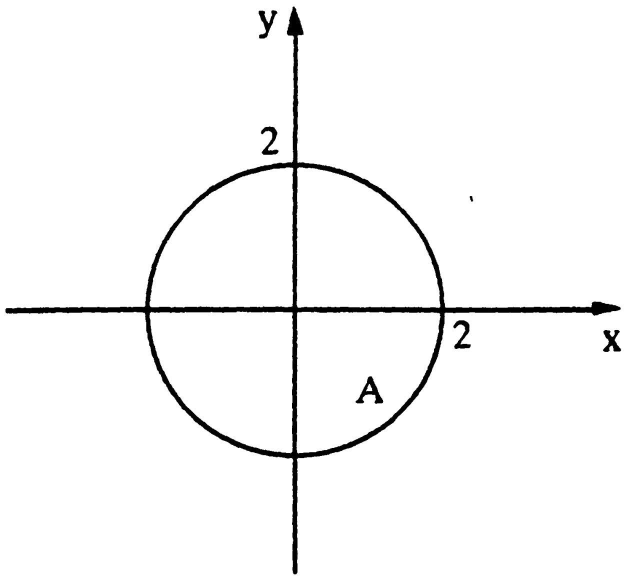
$$2z = x^2+y^2, \quad z=2 \qquad (*)$$

Η προβολή αυτή βρίσκεται αν απαλείψουμε το z μεταξύ των δύο εξισώσεων (*). Άρα η προβολή είναι η περιφέρεια $x^2+y^2= 4$. Αν τώρα $A = \{(x, y):\ x^2+y^2 \leq 4\}$, τότε

$$I = \iint\limits_A \left[\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{2}(x^2+y^2)dz\right]dxdy = \iint\limits_A \left[2(x^2+y^2) - \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2\right]dxdy\ .$$

Για να υπολογίσουμε το τελευταίο διπλό ολοκλήρωμα κάνουμε αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες: $x = \varrho\sigma\upsilon\nu\theta$, $y = \varrho\eta\mu\theta$, $2(x^2+y^2) - \frac{(x^2+y^2)^2}{2} = 2\varrho^2 - \frac{\varrho^4}{2}$, $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varrho,\theta)} = \varrho$.

Άρα



$$I = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^2 \left(2\varrho^2 - \frac{\varrho^4}{2}\right)\varrho d\varrho\right]d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{2}{4}\varrho^4 - \frac{\varrho^6}{12}\right]_{\varrho=0}^{\varrho=2} d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{16\pi}{3}.$$

Όγκος ενός στερεού

Αν για ένα υποσύνολο S του $\mathbb{R}^3$ η συνάρτηση f=1 είναι ολοκληρώσιμη επί του S, τότε το ολοκλήρωμα $\iiint_S 1dxdydz$ ονομάζεται όγκος του S και θα το παριστάνουμε με V(S).

Παράδειγμα 4

Να βρεθεί ο όγκος του στερεού S που ορίζεται από τα συντεταγμένα επίπεδα, την επιφάνεια $z = x^2+y^2$ και το επίπεδο $x+y=1$.

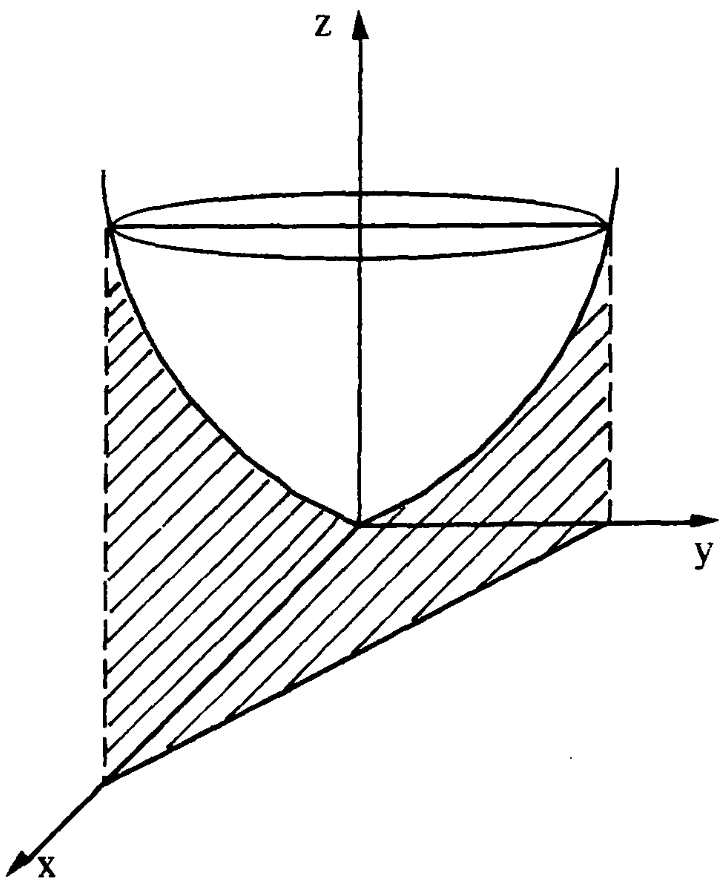
Λύση

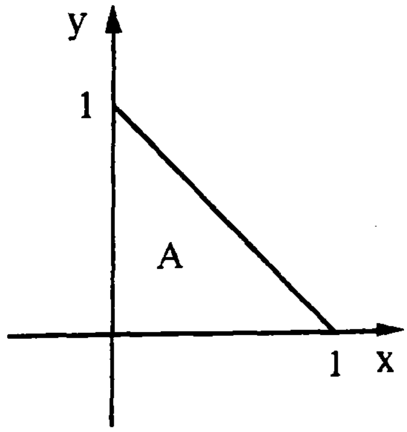
Το S περιβάλλεται από τα πλάγια από τα επίπεδα $x=0$, $y=0$ και $x+y=1$, κάτω από το επίπεδο $z=0$ και πάνω από την επιφάνεια $z=x^2+y^2$. Η προβολή του χωρίου αυτού πάνω στο επίπεδο των x, y είναι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία (0,0,0), (0,1,0) και (1,0,0).

Αν $A = \{(x, y):\ 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1-x\}$, τότε

$$V(S) = \iiint_S dxdydz = \iint_A \Big[\int_0^{x^2+y^2} dz\Big]dxdy$$

$$= \iint_A (x^2+y^2)dxdy = \int_0^1 \Big[\int_0^{1-x} (x^2+y^2)dy\Big]dx$$





$$= \int_0^1 \Big[x^2y+\frac{y^3}{3}\Big]_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_0^1 \Big[x^2(1-x)+\frac{(1-x)^3}{3}\Big]dx$$

$$= \Big[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{(1-x)^4}{12}\Big]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}\ .$$

3.7 Αλλαγή Μεταβλητών στα Τριπλά Ολοκληρώματα

Το επόμενο θεώρημα αναφέρεται στην αλλαγή μεταβλητών στα τριπλα ολοκληρώματα και είναι ανάλογο του αντίστοιχου θεωρήματος για τα διπλά.

Θεώρημα 3.7.1

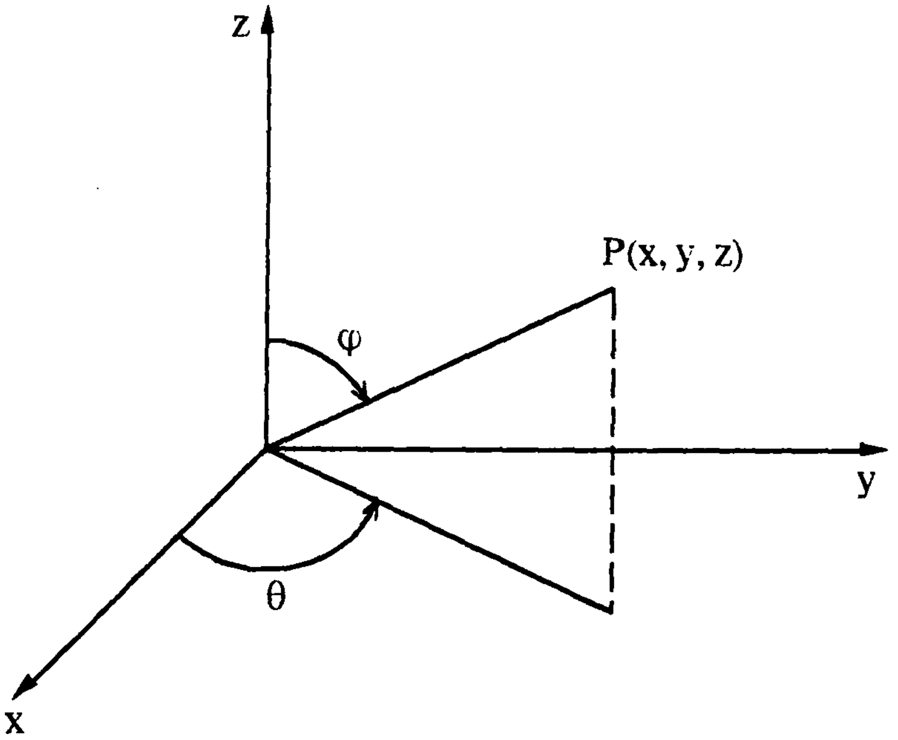
Έστω $x = x(u, v, w)$, $y = y(u. v, z)$, $z = z(u, v, w)$ πραγματικές συναρτήσεις οι οποίες απεικονίζουν αμφιμονοσήμαντα ένα ανοικτό χωρίο W του χώρου των u, v, w επί ενός ανοικτού υποσυνόλου V του χώρου των x, y, z. Ας υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις αυτές έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης επί του W και ότι $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \neq 0$ σε κάθε σημείο του W. Έστω T ένα χωρίο που περιέχεται στο W και έστω S η εικόνα του T μέσω της απεικόνισης $(u, v, w) \rightarrow (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$. Αν f μια πραγματική συνάρτηση ολοκληρώσιμη επί του S, τότε

$$\iiint\limits_S f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_T f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw.$$

Μετασχηματισμός σε Σφαιρικές Συντεταγμένες

Οι σφαιρικές συντεταγμένες ρ, φ, θ συνδέονται με τις ορθογώνιες συντεταγμένες x, y, z με τις σχέσεις

$$x = \rho\sigma\upsilon\nu\theta\ \eta\mu\varphi, \quad y = \rho\eta\mu\theta\ \eta\mu\varphi, \quad z = \rho\sigma\upsilon\nu\varphi$$



$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varrho,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\varphi & \varrho\sigma\upsilon\nu\theta\sigma\upsilon\nu\varphi & -\varrho\eta\mu\theta\eta\mu\varphi \\ \eta\mu\theta\eta\mu\varphi & \varrho\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\varphi & \varrho\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\varphi \\ \sigma\upsilon\nu\varphi & -\varrho\eta\mu\varphi & 0 \end{vmatrix} = \varrho^2\eta\mu\varphi\ .$$

Παράδειγμα 5

Να υπολογισθεί ο όγκος της σφαίρας με εξίσωση $x^2+y^2+z^2 = R^2$.

Λύση

Αν

$$D = \{ (x, y, z):\ x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \}\ ,$$

τότε ο ζητούμενος όγκος ισούται με το ολοκλήρωμα $\iiint_D dxdydz$.
Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες ο χώρος ολοκληρώσεως είναι το χωρίο $T = \{(\varrho, \varphi, \theta): \varrho \leq R\}$. Άρα

$$V = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left[\int_0^{R} \varrho^2\, \eta\mu\varphi d\varrho\right]d\varphi\right)d\theta$$

$$= \frac{R^3}{3}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi} \eta\mu\varphi d\varphi\right]d\theta = \frac{2R^3}{3}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4}{3}\pi R^3 .$$

3.8 Εφαρμογές των Διπλών και των Τριπλών Ολοκληρωμάτων στη Φυσική

3.8.1 Εφαρμογές των Διπλών Ολοκληρωμάτων

Έστω T ένα χωρίο του επιπέδου Oxy στο οποίο βρίσκεται κατανεμημένη μια μάζα σε μικρό (αμελητέο) πάχος. Έστω $\sigma = \sigma(x, y)$ η πυκνότητα (δηλαδή η μάζα ανά μονάδα επιφάνειας) στο σημείο (x, y) του T. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση σ είναι ολοκληρώσιμη επί του T. Τότε η συνολική μάζα m του χωρίου T δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$m = \iint_T \sigma(x, y)dxdy .$$

Το κέντρο μάζας του T είναι το σημείο $(\bar{x}, \bar{y})$, όπου

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iint_T x\,\sigma(x, y)dxdy, \quad \bar{y} = \frac{1}{m}\iint_T y\,\sigma(x, y)dxdy .$$

Αν ε είναι μια ευθεία του επιπέδου, τότε η ροπή αδράνειας της μάζας του T, ως προς την ευθεία ε, δίνεται από τον τύπο

$$I_\varepsilon = \iint_T \delta^2(x, y)\, \sigma(x, y)\, dxdy \ ,$$

όπου $\delta^2(x, y)$ είναι το τετράγωνο της απόστασης του σημείου (x, y) από την ευθεία ε. Ειδικά, οι ροπές αδράνειας ως προς τους άξονες x'Ox και y'Oy δίνονται από τους τύπους

$$I_x = \iint_T y^2\sigma(x, y)\, dxdy\ ,\ I_y = \iint_T x^2\sigma(x, y)\, dxdy\ .$$

Η ροπή αδράνειας ως προς την αρχή των αξόνων ισούται με

$$I = I_x + I_y = \iint_T (x^2+y^2)\, \sigma(x, y) dxdy\ .$$

Στην περίπτωση που σ(x, y) = c (σταθερή) στο T, δηλαδή στην περίπτωση που η μάζα του σώματος είναι ομογενώς κατανεμημένη (θα λέμε τότε ότι το χωρίο είναι ομογενές), έχουμε

$$\bar{x} = \frac{\iint_T x\, dxdy}{\iint_T dxdy}\ ,\ \ \bar{y} = \frac{\iint_T y\, dxdy}{\iint_T dxdy}\ .$$

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί το κέντρο μάζας του χωρίου $T = \{(x, y): x^2+y^2 \le R^2, y \ge 0\}$, $(R>0)$, αν η πυκνότητα μάζας $\sigma(x, y)$ είναι ανάλογη με την απόσταση του (x, y) από το κέντρο του ημικυκλικού χωρίου T) δηλαδή $\sigma(x, y) = k\sqrt{x^2+y^2}$, k = σταθερά. Επίσης για το ίδιο χωρίο να υπολογισθεί η ροπή αδράνειας ως προς την ευθεία $y = x+\mu$. Για ποιά τιμή του μ, η ροπή αδράνειας ως προς την $y = x+\mu$ γίνεται ελάχιστη;

Λύση

$$m = k\iint_T \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy, \quad \bar{x} = \frac{k}{m}\iint_T x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy\,,$$

$$\bar{y} = \frac{k}{m}\iint_T y\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy\,.$$

Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες $x = \varrho\sigma\upsilon\nu\theta$, $y = \varrho\eta\mu\theta$, έχουμε

$$m = k\iint_T \varrho^2 d\varrho d\theta = k\left(\int_0^R \varrho^2 d\varrho\right)\cdot\left(\int_0^\pi d\theta\right) = \frac{k\pi}{3}R^3$$

$$\bar{x} = \frac{k}{m}\iint_T \varrho^3\sigma\upsilon\nu\theta\, d\varrho d\theta = \frac{k}{m}\left[\int_0^R \varrho^3 d\varrho\right]\cdot\left[\int_0^\pi \sigma\upsilon\nu\theta\, d\theta\right] = 0$$

$$\bar{y} = \frac{k}{m}\iint_T \varrho^3\eta\mu\theta\, d\varrho d\theta = \frac{k}{m}\left(\int_0^R \varrho^3 d\varrho\right)\cdot\left(\int_0^\pi \eta\mu\theta\, d\theta\right) = \frac{k}{m}\cdot\frac{R^4}{4}\cdot 2 = \frac{3R}{2\pi}\,.$$

Για την ευθεία ε : $y = x+\mu$, έχουμε $\delta^2(x, y) = \dfrac{(y-x-\mu)^2}{2}$. Επομένως

$$I_\varepsilon = \frac{k}{2}\iint_T (y - x - \mu)^2\, dx dy$$

$$= \frac{k}{2}\iint_T (\varrho\eta\mu\theta - \varrho\sigma\upsilon\nu\theta - \mu)^2\, \varrho d\varrho d\theta$$

$$= \frac{k}{2}\int_0^\pi \left[\int_0^R (\varrho^2(\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta)^2 + \mu^2 - 2\mu\varrho(\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta))\varrho d\varrho\right] d\theta$$

$$= \frac{k}{2}\int_0^\pi \left[\int_0^R (\varrho^3(1 - 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta) + \mu^2\varrho - 2\mu\varrho^2(\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta))d\varrho\right] d\theta$$

$$= \frac{k}{2}\int_0^\pi \left(\frac{R^4}{4}(1 - \eta\mu 2\theta) + \mu^2\frac{R^2}{2} - \frac{2\mu R^3}{3}(\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta)\right)d\theta$$

$$= \frac{k}{2}\left[\frac{R^4}{4}\left(\theta + \frac{\sigma\upsilon\nu 2\theta}{2}\right) + \frac{\mu^2R^2}{2}\theta + \frac{2}{3}\mu R^3\,(\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta)\right]_0^\pi$$

$$= \frac{k}{2}\left[\frac{R^4}{4}\cdot\left(\pi + \frac{1}{2}\right) + \frac{\mu^2R^2}{2}\cdot\pi - \frac{2}{3}\mu R^3 - \left(\frac{R^4}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\mu R^3\right)\right]$$

$$= \frac{k}{2}\left(\frac{\pi}{4}R^4 + \frac{\pi}{2}\mu^2R^2 - \frac{4}{3}\mu R^3\right) = \frac{kR^2}{24}\,(3\pi R^2 + 6\pi\mu^2 - 16\mu R)\ .$$

Για να γίνει η I_ε ελάχιστη αρκεί να γίνει ελάχιστο το τριώνυμο $6\pi\mu^2$-$16\mu R+3\pi R^2$, το οποίο όπως είναι γνωστό συμβαίνει για $\mu = \frac{16R}{12\pi} = \frac{4R}{3\pi}$.

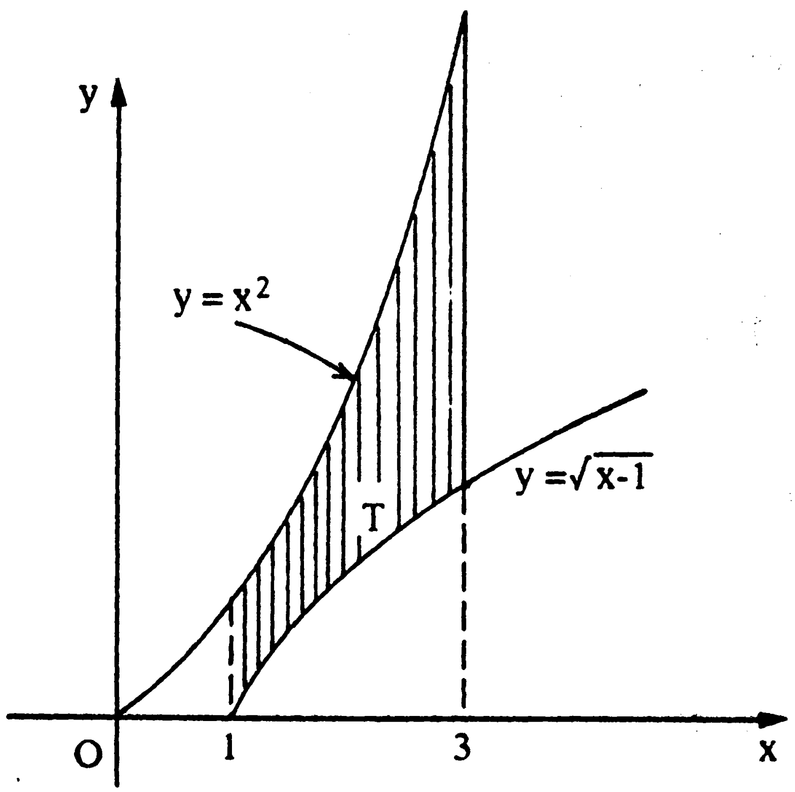
Παράδειγμα 2

Να βρεθεί το κέντρο μάζας του ομογενούς χωρίου

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n : \quad 1 \le x \le 3 \ , \ \sqrt{x-1} \le y \le x^2\} .$$

Λύση

$$\iint_T dxdy = \int_1^3 \left[\int_{\sqrt{x-1}}^{x^2} dy\right] dx = \int_1^3 (x^2 - \sqrt{x-1})dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}(x-1)^{3/2}\right]_1^3 = \frac{26 - 4\sqrt{2}}{3}$$



$$\iint_T x\, dxdy = \int_1^3 x \left[\int_{\sqrt{x-1}}^{x^2} dy\right] dx = \int_1^3 (x^3 - x\sqrt{x-1})dx$$

$$= \int_1^3 x^3\, dx - \int_1^3 x\sqrt{x-1}\, dx = 20 - \int_1^3 [(x-1)+1]\, \sqrt{x-1}\, dx$$

$$= 20 - \int_1^3 (x-1)^{3/2}\,dx - \int_1^3 \sqrt{x-1}\,dx$$

$$= 20 - \left[\frac{2}{5}(x-1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x-1)^{3/2}\right]_1^3$$

$$= 20 - \frac{4\sqrt{2}}{15} = \frac{300 - 4\sqrt{2}}{15}$$

$$\iint_T y\,dxdy = \int_1^3 \left[\int_{\sqrt{x-1}}^{x^2} y\,dy\right] dx = \frac{1}{2}\int_1^3 (x^4 - x + 1)dx = \frac{116}{5}$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{300 - 4\sqrt{2}}{15}}{\frac{27 - 4\sqrt{2}}{3}} = \frac{300 - 4\sqrt{2}}{5(27 - 4\sqrt{2})}, \quad \bar{y} = \frac{\frac{116}{5}}{\frac{27 - 4\sqrt{2}}{3}} = \frac{348}{15(27 - 4\sqrt{2})}.$$

Άσκηση

Να βρεθεί το κέντρο βάρος του ομογενούς τριγωνικού χωρίου T με κορυφές τα σημεία A(1, 3), B(2, 0), Γ(-2, 0).

3.8.2 Εφαρμογές Τριπλών Ολοκληρωμάτων

Θεωρούμε ένα στερεό σώμα Σ που καταλαμβάνει ένα χωρίο D του $\mathbb{R}^3$. Αν $\sigma = \sigma(x, y, z)$ είναι η πυκνότητα του σώματος στο σημείο (x, y, z) του D, τότε η ολική μάζα m του σώματος δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$m = \iiint_D \sigma(x, y, z)dxdydz .$$

Οι συντεταγμένες $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ του κέντρου βάρους του σώματος δίνονται από τους τύπους

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iiint_D x\sigma(x, y, z)dxdydz\ , \qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\iiint_D y\sigma(x, y, z)dxdydz\ ,$$

$$\bar{z} = \frac{1}{m}\iiint_D z\sigma(x, y, z)dxdydz\ .$$

Αν ε είναι μια ευθεία του χώρου και $\delta(x, y, z)$ η απόσταση του σημείου (x, y, z) από την ε, τότε η ροπή αδράνειας του σώματος Σ ως προς την ε δίνεται από τον τύπο

$$I_\varepsilon = \iiint_D \delta^2(x, y, z)\ \sigma(x, y, z)dxdydz\ .$$

Ειδικά οι ροπές αδράνειας του Σ ως προς τους άξονες συντεταγμένων $x'x$, $y'y$ και $z'z$ δίνονται από τους τύπους

$$I_x = \iiint_D (y^2+z^2)\ \sigma(x, y, z)dxdydz\ , \quad I_y = \iiint_D (x^2+z^2)\ \sigma(x, y, z)dxdydz\ ,$$

$$I_z = \iiint_D (x^2+y^2)\ \sigma(x, y, z)dxdydz\ ,$$

Στην περίπτωση που το σώμα Σ είναι ομογενές, η πυκνότητα είναι σταθερή, $\sigma(x, y, z) = c$, και

$$\bar{x} = \frac{\iiint_D x\ dxdydz}{\iiint_D dxdydz} = \frac{\iiint_D x\ dxdydz}{V}$$

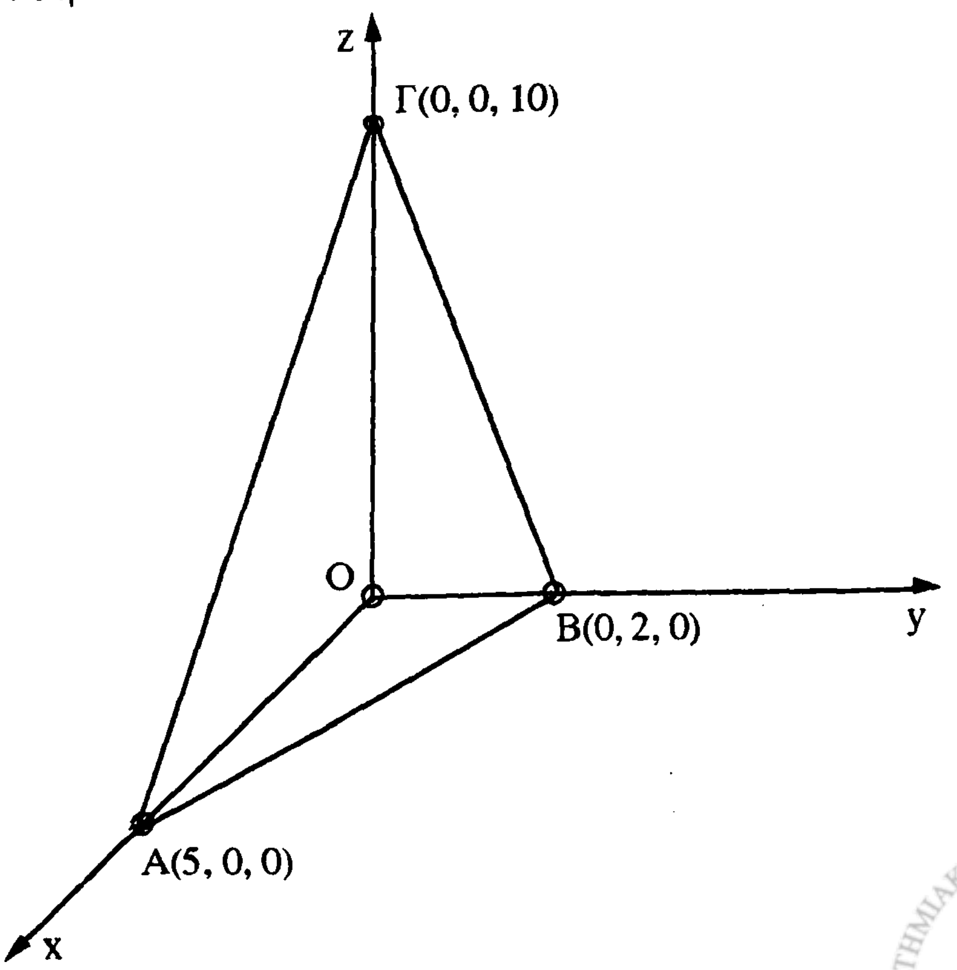
$$\bar{y} = \frac{\iiint\limits_D y\,dxdydz}{V}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint\limits_D z\,dxdydz}{V},$$

όπου V είναι ο όγκος του σώματος Σ.

Παράδειγμα

Έστω Q το τετράεδρο που περιβάλλεται από τα τρία επίπεδα συντεταγμένων $x=0$, $y=0$, $z=0$ και το επίπεδο $2x+5y+z = 10$. Αν η πυκνότητα $\sigma = \sigma(x, y, z)$ είναι ανάλογη με την απόσταση του (x, y, z) από το επίπεδο $y=0$, να βρεθεί το κέντρο βάρος του στερεού Q.

Λύση



Επειδή $\sigma(x, y, z) = ky$, έχουμε

$$m = k\iiint_D y\,dxdydz\,, \quad \bar{x} = \frac{k}{m}\iiint_D xy\,dxdydz\,,$$

$$\bar{y} = \frac{k}{m}\iiint_D y^2\,dxdydz\,, \quad \bar{z} = \frac{k}{m}\iiint_D yz\,dxdydz\,.$$

Στο σύστημα Oxy, η εξίσωση της ευθείας AB είναι: $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$. Αν D είναι το εσωτερικό του τριγώνου OAB, έχουν

$$\iiint_Q y\,dxdydz = \iint_D y\Big[\int_0^{10-2x-5y} dz\Big]dxdy$$

$$= \iint_D (10-2x-5y)y\,dxdy$$

$$= \int_0^5 \Big[\int_0^{\frac{2}{5}(5-x)} (2(5-x)y-5y^2)dy\Big]dx$$

$$= \int_0^5 \Big[(5-x)y^2 - \frac{5}{3}y^3\Big]_0^{\frac{2}{5}(5-x)} dx$$

$$= \frac{4}{75}\int_0^5 (5-x)^3dx = -\frac{1}{75}\big[(5-x)^4\big]_0^5 = \frac{25}{3}$$

$$\iiint_Q y^2dxdydz = \iint_D (10-2x-5y)y^2\,dxdy$$

$$= \int_0^5 \Big[\int_0^{\frac{2}{5}(2-x)} (2(5-x)y^2 - 5y^3)dy\Big]dx$$

$$= \int_0^5 \Big[\frac{16}{375}(5-x)^4 - \frac{4}{125}(5-x)^4\Big]\, dx$$

$$= \frac{4}{375}\int_0^5 (5-x)^4 = \frac{4}{375}\cdot 5^4 = \frac{100}{3}$$

$$\iiint_Q xydxdydz = \iint_D xy\Big[\int_0^{10-2x-5y} dz\Big]\, dxdy$$

$$= \frac{4}{75}\int_0^5 x(5-x)^3\, dx = \frac{4}{75}\int_0^5 [5-(5-x)]\ (5-x)^3 dx$$

$$= \frac{4}{75}\left(5\int_0^5 (5-x)^3\, dx - \int_0^5 (5-x)^4\, dx\right)$$

$$= \frac{4}{75}\left[-\frac{5}{4}(5-x)^4 + \frac{(5-x)^5}{5}\right]_0^5$$

$$= \frac{4}{75}\left(\frac{5}{4}5^4 - 5^4\right) = \frac{25}{3}$$

και

$$\iiint_Q zydxdydz = \frac{1}{2}\iint_D y\,(2(5-x)-5y)^2\, dxdy$$

$$= \frac{1}{2} \iint\limits_{D} [4(5-x)^2 y + 25y^3 - 20y^2(5-x)]dxdy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^5 \left[2(5-x)^2 y^2 + \frac{25}{4} y^4 - \frac{20}{3} y^3 (5-x)\right]_0^{\frac{2}{5}(5-x)} dx$$

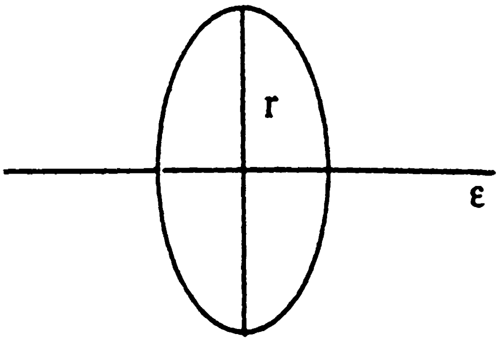
$$= \frac{2}{75} \int_0^5 (5-x)^4 dx = -\frac{2}{75}\left[\frac{(5-x)^5}{5}\right]_0^5 = \frac{50}{3} .$$

Συνεπώς

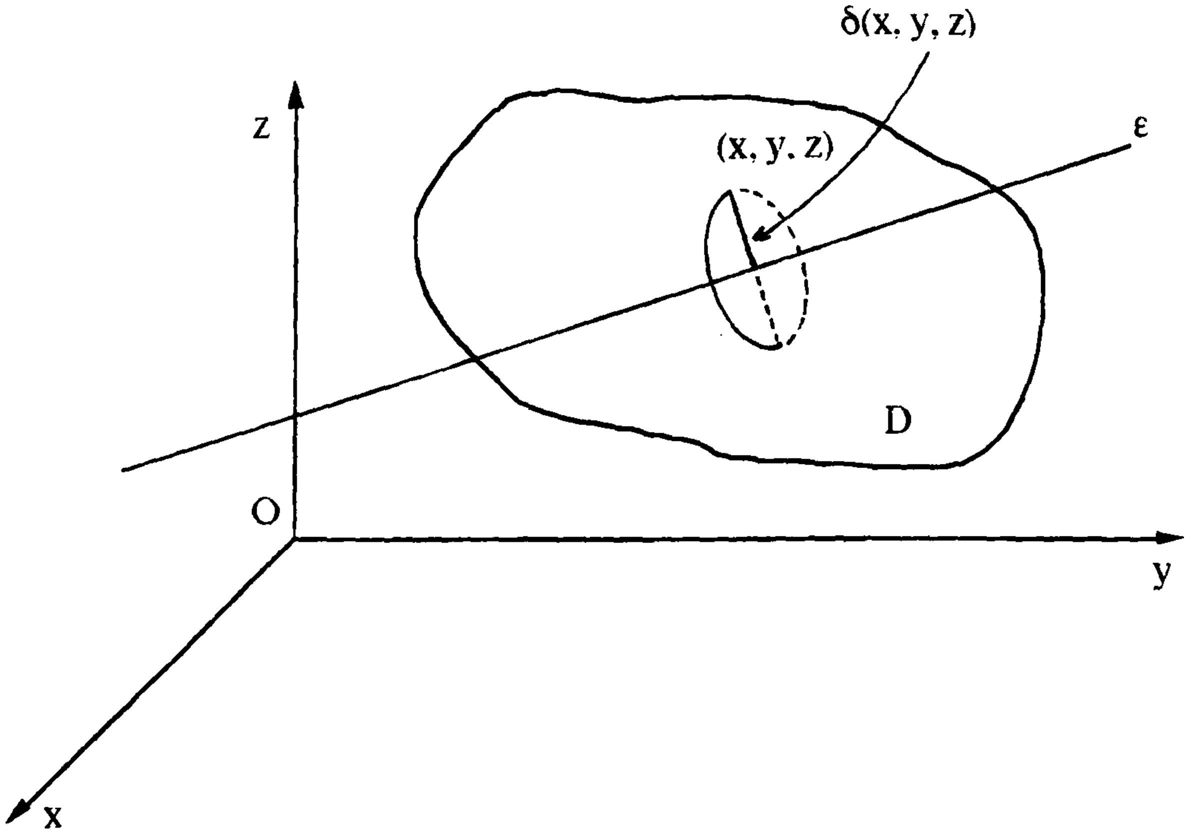
$$\bar{x} = \frac{\frac{25}{3}}{\frac{25}{3}} = 1 , \quad \bar{y} = \frac{\frac{100}{3}}{\frac{25}{3}} = 4 , \quad \bar{z} = \frac{\frac{50}{3}}{\frac{25}{3}} = 2 .$$

Ακτίνα Περιστροφής (Radius of Gyration)

Αν ένα υλικό σημείο μάζας m περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από έναν άξονα ε, τότε η κινητική ενέργειά του ισούται με $E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2} m\upsilon^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2$, όπου r η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς.



Ας θεωρήσουμε τώρα ένα στερεό σώμα Σ που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από έναν άξονα ε. Αν σ(x, y, z) είναι η πυκνότητα του σώματος στο σημείο (x, y, z) και αν δ(x, y, z) είναι η απόσταση του σημείου (x, y, z) από την ευθεία ε, τότε αν κατά μια χρονική στιγμή t το σώμα καταλαμβάνει το χωρίο D του $\mathbb{R}^3$, τότε η κινητική ενέργεια του σώματος τη χρονική αυτή στιγμή δίνεται από τον τύπο



$$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}\omega^2 \iiint_D \sigma(x, y, z)\, \delta^2(x, y, z)\, dxdydz = \frac{1}{2}\omega^2 I_\varepsilon \ ,$$

όπου I_ε είναι η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς την ευθεία ε. Αν m είναι η συνολική μάζα του σώματος, τότε ο αριθμός $R = \sqrt{\frac{I_\varepsilon}{m}}$ ονομάζεται *ακτίνα περιστροφής* (Radius of Gyration) του σώματος ως προς την ε . Η ακτίνα περιστροφής ισούται με την απόσταση από την ε στην οποία αν τοποθετηθεί συγκεντρωμένη όλη η μάζα του σώματος δεν μεταβάλλεται η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς την ε.

ΜΕΡΟΣ II

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1. ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Μια συνήθης διαφορική εξίσωση είναι μια εξίσωση που περιέχει μια ανεξάρτητο μεταβλητή x, μια άγνωστη συνάρτηση αυτής y και ένα πεπερασμένο πλήθος παραγώγων της y ως προς x. Ο δείκτης της υψηλότερης παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση ονομάζεται τάξη της Δ.Ε. π.χ. οι εξισώσεις

2η τάξεως   5η τάξεως   3η τάξεως

$$y'' + e^x y^1 + y^2 \sin x = 3\ , \quad y^{(5)} - \frac{1}{x^2+1} y^{(3)} + 3y = 0$$

$$\frac{dz}{dt} - tz = 0$$

είναι διαφορικές εξισώσεις τάξεων 2, 5 και 1 αντιστοίχως. Γενικά αν F είναι μια πραγματική συνάρτηση n+2 μεταβλητών, τότε η εξίσωση

n τάξεως

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

είναι μια συνήθης Δ.Ε. η οποία είναι τάξης n αν η $y^{(n)}$ εμφανίζεται στην εξίσωση.

Ορισμός: Μια (μερική) λύση μιας Δ.Ε. n-τάξης είναι μια συνάρτηση η οποία ορίζεται και είναι τουλάχιστο n-φορές παραγωγίσιμη επί ενός ανοικτού διαστήματος I = (a, b) της πραγματικής ευθείας $\mathbb{R}$ (το a μπορεί να είναι το $-\infty$ και το b μπορεί να είναι το $+\infty$) και ικανοποιεί (σ' αυτό το διάστημα) τη διαφορική εξίσωση. Το σύνολο όλων των λύσεων μιας Δ.Ε. αποτελεί τη γενική λύση της εξίσωσης.

Παράδειγμα 1

Η συνάρτηση $y = 2\cos 2x - \sin 2x$ είναι μια μερική λύση της Δ.Ε. $y''+4y = 0$ στο διάστημα $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Παράδειγμα 2

Θεωρούμε τη Δ.Ε. $y' = 2x-1$. Αν y είναι μια λύση αυτής της εξίσωσης σ' ένα διάστημα (a, b), τότε για κάθε $x \in (a, b)$ έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 1 = \frac{d}{dx}(x^2 - x)$$

και συνεπώς

$$\frac{d}{dx}(y - x^2 + x) = 0 \ ,$$

το οποίο συνεπάγεται ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $y - x^2 + x = c \ \ \forall \ x \in (a, b)$, δηλαδή $y = x^2 - x + c$. Αντιστρόφως, για κάθε $c \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $y = x^2 - x + c$ είναι λύση της δοθείσης Δ.Ε. στο διάστημα $(-\infty, \infty)$.

Το Πρόβλημα των Αρχικών Τιμών

Έστω ότι μας δίνεται μια Δ.Ε. που περιέχει μια ανεξάρτητο μεταβλητή x, μια άγνωστη συνάρτηση αυτής y και τις παραγώγους της y ως προς x μέχρι n-τάξης. Έστω $x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ δοθέντες πραγματικοί αριθμοί. Ζητείται να βρεθεί μια λύση της Δ.Ε. η οποία ορίζεται επί ενός ανοικτού διαστήματος (a, b) της πραγματικής ευθείας, με $x_0 \in (a, b)$, (δηλαδή ικανοποιεί την εξίσωση στο (a, b)) και να είναι τέτοια ώστε να πληρούνται οι αρχικές συνθήκες $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{n-1}(x_0)=y_{n-1}$. Ένα πρόβλημα αυτού του τύπου λέγεται πρόβλημα αρχικών τιμών. Στην περίπτωση που $n=1$, το πρόβλημα αρχικών τιμών συνίσταται στο να βρεθεί λύση της Δ.Ε. της οποίας η γραφική παράσταση περιέχει το σημείο (x_0, y_0).

Παράδειγμα

Να βρεθεί λύση της Δ.Ε. $y'' = 4e^{-2x}$ η οποία να πληροί τις αρχικές συνθήκες $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

Λύση

Ολοκληρώνοντας δύο φορές τα δύο μέλη της Δ. Ε., έχουμε: $y' = -2e^{-2x}+c_1$, $y = e^{-2x}+c_1x+c_2$, όπου c_1, c_2 είναι σταθερές. Για $x=0$, έχουμε:

$$1 = y(0) = 1+c_2\ ,\ 2 = y'(0) = -2+c_1\ .$$

Συνεπώς $c_1 = 4$, $c_2 = 0$ και $y = e^{-2x}+4x$.

1.1 Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις 1ης τάξης

Μια γραμμική Δ.Ε. πρώτης τάξης είναι μια εξίσωση της μορφής

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)\ . \qquad (1)$$

Αν $q=0$, τότε η εξίσωση (1) λαμβάνει τη μορφή

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0\ , \qquad (2)$$

η οποία ονομάζεται γραμμική ομογενής πρώτης τάξης. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις p, q είναι συνεχείς σ' ένα διάστημα I = (a, b). Αν y = y(x) είναι μια λύση της (1) στο I, τότε στο I έχουμε

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int p(x)dx}\right) = e^{\int p(x)dx}\frac{dy}{dx} + y\,p(x)\,e^{\int p(x)dx}$$

$$= q(x)\,e^{\int p(x)dx} .$$

Συνεπώς, υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$y\,e^{\int p(x)dx} = c + \int q(x)\,e^{\int p(x)dx}\,dx ,$$

δηλαδή

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[c + \int q\,e^{\int p\,dx}\,dx\right] .$$

Αντριστρόφως, για κάθε $c \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση

$$y = e^{-\int p\,dx}\left[c + \int q\,e^{\int p\,dx}\,dx\right] \qquad (3)$$

είναι λύση της (1) στο I. Πραγματικά, για μια τέτοια y, έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = -p\,e^{-\int p\,dx}\left[c + \int q\,e^{\int p\,dx}\,dx\right] + e^{-\int p\,dx}\,q\,e^{\int p\,dx}$$

$$= -py + q , \quad \text{δηλαδή} \quad \frac{dy}{dx} + py = q .$$

Ώστε η (3) δίνει τη γενική λύση της (1).

Παράδειγμα 1

Να λυθεί η Δ.Ε.

$$(x^2+1)y' - 2xy = x^2+1 \ .$$

Λύση

Η εξίσωση γράφεται

$$y' - \frac{2x}{x^2+1}y = 1$$

και άρα είναι της μορφής (1) με $p(x) = -\dfrac{2x}{x^2+1}$, $q(x) = 1$. Οι συναρτήσεις p και q είναι συνεχείς στο $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Η γενική λύση της δοθείσης εξίσωσης στο $\mathbb{R}$ είναι η

$$y = e^{\int \frac{2x}{x^2+1}dx}\left[c + \int e^{-\int \frac{2x}{x^2+1}dx} dx\right]$$

$$= (x^2+1)\,[c + \int \frac{1}{x^2+1}dx) = (x^2+1)\,[c + \arctan x)\ ,$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά.

Παράδειγμα 2

Σώμα μάζας m εκτοξεύεται από την επιφάνεια της γης κατακόρυφα προς τα επάνω με αρχική ταχύτητα υ_0. Υποθέτουμε ότι στο σώμα ενεργούν μόνο το βάρος $B = mg$ και η αντίσταση του αέρα για την οποία υποθέτουμε ότι είναι ανάλογη με την ταχύτητα υ του σώματος, $F_\alpha = k\upsilon$ (k = σταθερά). Να βρεθούν:

i) Η ταχύτητα $\upsilon=\upsilon(t)$ (ως συνάρτηση του χρόνου t) κατά την άνοδο.

ii) Η απόσταση $y=y(t)$ (κατά την άνοδο) του σώματος από την επιφάνεια της γης.

iii) Ο χρόνος ανόδου.

iv) Το μέγιστο ύψος στο οποίο θα ανεβεί το σώμα.

Λύση

Αν $\upsilon=\upsilon(t)$ και $\gamma=\gamma(t)$ η ταχύτητα και η επιτάχυνση (πρόκειται περί επιβράδυνσης και άρα $\gamma<0$) θα είναι $\upsilon = \frac{dy}{dt}$, $\gamma = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$. Η δύναμη που ασκείται στο σώμα κατά την άνοδο είναι $F = -mg - k\upsilon$. Σύμφωνα με το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής, έχουμε $F = m\gamma$, δηλαδή

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -k\upsilon - mg \Rightarrow m\frac{d\upsilon}{dt} + k\upsilon = -mg$$

$$\frac{d\upsilon}{dt} + \frac{k}{m}\upsilon = -g .$$

Παίρνοντας $\int \frac{k}{m}dt = \frac{k}{m}t$ και $\int -g\, e^{\frac{k}{m}t}dt = -\frac{gm}{k}e^{\frac{k}{m}t}$. βλέπουμε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\upsilon(t) = e^{-\frac{k}{m}t}\left[c - \frac{gm}{k}e^{\frac{k}{m}t}\right] = -\frac{mg}{k} + c\, e^{-\frac{k}{m}t} .$$

Επειδή $\upsilon(0) = \upsilon_0$, θα είναι $c - \frac{mg}{k} = \upsilon_0$ και άρα

$$\upsilon(t) = -\frac{mg}{k} + \left(\upsilon_0 + \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t} .$$

iii) Για να βρούμε το χρόνο ανόδου, παρατηρούμε ότι το σώμα παύει να ανεβαίνει όταν $\upsilon=0$. Συνεπώς ο χρόνος ανόδου δίνεται από την εξίσωση

$$-\frac{mg}{k}+(\upsilon_0+\frac{mg}{k})\,e^{-\frac{k}{m}t}=0\,.$$

Λύνοντας την τελευταία εξίσωση ως προς $e^{\frac{k}{m}t}$, παίρνουμε

$$e^{\frac{k}{m}t}=\frac{k}{mg}(\upsilon_0+\frac{mg}{k})=1+\frac{k\upsilon_0}{mg}\,,\quad \text{και άρα}\quad t_{\alpha\nu}=\frac{m}{k}\log\,(1+\frac{k\upsilon_0}{mg})\,.$$

ii) Επειδή $\upsilon=\frac{dy}{dt}$, έχουμε

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{mg}{k}+(\upsilon_0+\frac{mg}{k})\,e^{-\frac{k}{m}t}$$

και άρα

$$y(t)=-\frac{mg}{k}t-\frac{m}{k}(\upsilon_0+\frac{mg}{k})\,e^{-\frac{k}{m}t}+c_1\qquad (c_1\ \text{σταθερά})\,.$$

Επειδή $y(0)=0$, θα είναι

$$c_1=\frac{m}{k}\,(\upsilon_0+\frac{mg}{k})\,,$$

και συνεπώς

$$y(t)=-\frac{mg}{k}t-\frac{m}{k}(\upsilon_0+\frac{mg}{k})\,e^{-\frac{k}{m}t}+\frac{m}{k}(\upsilon_0+\frac{mg}{k})$$

$$=\frac{m}{k}\Big[(\upsilon_0+\frac{mg}{k})\,(1-e^{-\frac{k}{m}t})-gt\Big]\,.$$

Μέγιστο ύψος: Για $t = t_{αν}$. έχουμε $e^{\frac{k}{m}t} = 1 + \frac{kυ_0}{mg} = \frac{mg+kυ_0}{mg}$.

Άρα

$$y_{max} = \frac{m}{k}\left[(υ_0 + \frac{mg}{k})\,(1 - \frac{mg}{mg+kυ_0}) - g\,\frac{m}{k}\log(1 + \frac{kυ_0}{mg})\right]$$

$$= \frac{m}{k}\left[υ_0 - \frac{mg}{k}\log(1 + \frac{kυ_0}{mg})\right].$$

Άσκηση

Σύμφωνα με το νόμο ψύξεως του Νεύτωνα, ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας ενός σώματος που ψύχεται είναι ανάλογος με τη διαφορά της θερμοκρασίας του σώματος από την θερμοκρασία του περιβάλλοντος μέσα στο οποίο βρίσκεται το σώμα. Συνεπώς, αν $T(t)$ και $S(t)$ είναι αντίστοιχα η θερμοκρασία του σώματος και η θερμοκρασία του περιβάλλοντος τη χρονική στιγμή t, υπαρχει $ρ>0$ (σταθερό) τέτοιο ώστε

$$\frac{dT}{dt} = -\,ρ(T(t) - S(t)) .$$

a) Έστω $T_0 = T(t_0)$ η θερμοκρασία του σώματος τη χρονική στιγμή t_0 και ας υποθέσουμε ότι η θερμοκρασία του περιβάλλοντος παραμένει ουσιαστικά σταθερή, $S(t) = S_0$. Να βρεθεί η θερμοκρασία του σώματος τη χρονική στιγμή t και να υπολογισθεί το όριο $\lim_{t\to\infty} T(t)$.

b) Ένα σώμα με θερμοκρασία $70^{o}C$ τοποθετείται σε ψυγείο του οποίου η θερμοκρασία διατηρείται σταθερή και ίση με $-2^{o}C$. Υποθέτουμε ότι ισχύει ο νόμος ψύξεως του Νεύτωνα. Αν η θερμοκρασία του σώματος μετά από 8 λεπτά γίνει $52^{o}C$, ποιά θα είναι η θερμοκρασία του σώματος 16 λεπτά μετά την τοποθέτηση του σώματος στο ψυγείο; Πότε η θερμοκρασία του σώματος θα γίνει 26^oC;

1.2 Διαφορικές Εξισώσεις 1ης Τάξης στις οποίες οι Μεταβλητές χωρίζονται

Αν μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή

$$p(y)\frac{dy}{dx} = q(x) \ , \tag{1}$$

όπου p και q είναι γνωστές συναρτήσεις, τότε λέμε ότι οι μεταβλητές της εξίσωσης χωρίζονται. Οι παρακάτω τρεις εξισώσεις είναι παραδείγματα εξισώσεων στις οποίες οι μεταβλητές χωρίζονται

$$2(y-1)y' = e^x \ , \ x\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+1}{2x+5} \ , \ x(\cos y+2e^y-1)\frac{dy}{dx} = \sin x+e^{2x} \ .$$

Αν $y=f(x)$ είναι μια λύση της (1) σ' ένα διάστημα I, τότε $p(f(x))f'(x) = q(x)$, $\forall \ x\in I$. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν τα ολοκληρώματα, τότε ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\int p(f(x))f'(x)dx = \int q(x)dx + c$$

και άρα

$$\int p(y)dy = \int q(x)dx + c \ .$$

Αν P και Q είναι συναρτήσεις τέτοιες ώστε $P'(y) = p(y)$ και $Q'(x) = q(x)$, τότε έχουμε

$$P(y) = Q(x) + c \ . \tag{2}$$

Αντιστρόφως, αν η συνάρτηση $y = y(x)$ πληροί την (2), τότε παραγωγίζοντας την (2) ως προς x, παίρνουμε

$$P'(y)\frac{dy}{dx} = \frac{dQ}{dx}$$

δηλαδή

$$p(y)\frac{dy}{dx} = q(x)$$

και συνεπώς η y είναι λύση της (1). Ώστε η λύση της (1) συνίσταται από όλες τις παραγωγίσιμες (σε κάποιο διάστημα) συναρτήσεις y που πληρούν την (2) για κάποια τιμή της σταθεράς c. Δηλαδή η (2) δίνει υπό πεπλεγμένη μορφή κάθε λύση της (1).

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί μια λύση της Δ.Ε. $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{y}$ η οποία να πληροί την αρχική συνθήκη $y(0) = -4$.

Λύση

Η εξίσωση γράφεται

$$y\frac{dy}{dx} = \cos x \ .$$

Ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\int y dy = \int \cos x \, dx + c \quad \Rightarrow \quad y^2 = \sin x + c$$

θα είναι $(-4)^2 = \sin 0 + c \Rightarrow c = 16$, και άρα $y^2 = 16+x^2$. Η λύση που ζητάμε θα ορίζεται σ' ένα διάστημα $I = (a, b)$ που περιέχει το 0. Για κάθε $x \in I$ πρέπει $y(x) \neq 0$. Επειδή η y είναι συνεχής στο I, $y(x) \neq 0$ στο

I και $y(0) = -4 < 0$, πρέπει $y(x)<0$ για κάθε $x \in I$. Άρα $y = -\sqrt{x^2+16}$. Η λύση αυτή ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί λύση της Δ.Ε. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^3}$ που πληροί την αρχική συνθήκη $y(1) = y_o > 0$.

Λύση

Έστω y μια λύση της εξίσωσης, σ' ένα ανοικτό διάστημα I της πραγματικής ευθείας που περιέχει το 1, η οποία πληροί την αρχική συνθήκη $y(1) = y_o$. Επειδή $y(1) > 0$, υπάρχει υποδιάστημα (a, b) του I, που περιέχει το 1 τέτοιο ώστε $y(x) > 0 \ \forall \ x \in (a, b)$. Για $x \in (a, b)$, η εξίσωση γράφεται $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^3}$. Ολοκληρώνοντας, παίρνουμε

$$\log y = -\frac{1}{2x^2} + c .$$

Επειδή $y(1) = y_o$, έχουμε $c = \frac{1}{2} + \log y_o$ και άρα

$$\log \frac{y}{y_o} = \frac{x^2-1}{2x^2} \Rightarrow y = y_o e^{\frac{x^2-1}{2x^2}} .$$

Η λύση ορίζεται στο διάστημα $(0, \infty)$.

1.3 Διαφορικές Εξισώσεις της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) . \tag{1}$$

Υπάρχει μια κατηγορία Δ.Ε. που μπορούν να γραφούν με τη μορφή (1). Για να λύσουμε μια τέτοια ώστε λαμβάνουμε ως νέα άγνωστη συνάρτηση τη $z = \frac{y}{x}$. Επειδή $\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$, η (1) γράφεται

$$z + x\frac{dz}{dx} = f(z) \ .$$

Στην τελευταία εξίσωση οι μεταβλητές χωρίζονται.

Παράδειγμα

Να βρεθεί μια λύση της Δ.Ε.

$$y' = \frac{y^2+2xy}{x^2} \ ,$$

η οποία να πληροί την αρχική συνθήκη $y(2) = 3$.

Λύση

Η λύση που ζητάμε θα ορίζεται σ' ένα διάστημα (a, b) που περιέχει το 2 και δεν περιέχει το 0 και άρα $(a, b) \subset (0, \infty)$. Η εξίσωση γράφεται

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x}$$

θέτοντας $z = \frac{y}{x}$, η εξίσωση γίνεται

$$z + x\frac{dz}{dx} = z^2+2z \ \Rightarrow \ x\frac{dz}{dx} = z(z+1) \ . \qquad (1)$$

Υπάρχει ένα υποδιάστημα I του (a, b) που περιέχει το 2 και είναι τέτοιο ώστε $y(x)>0$, και άρα $z>0$, για κάθε $x \in I$ (διότι $y(2)>0$ και η y είναι συνεχής). Ολοκληρώνοντας την (1) παίρνουμε

$$\int \frac{1}{z(z+1)}\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx + c \ . \qquad (2)$$

Επειδή $\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}$, η (2) δίνει

$$\log \frac{z}{z+1} = \log x + c \ .$$

Επειδή, για $x=2$, είναι $z = \frac{y}{x} = \frac{3}{2}$, θα είναι

$$\log \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \log 2 + c \ \Rightarrow \ \log \frac{3}{10} = c \ .$$

Άρα

$$\frac{z}{z+1} = \frac{3}{10}x \ \Rightarrow \ z = \frac{3x}{10-3x} \ \Rightarrow \ y = \frac{3x^2}{10-3x} \ .$$

Επειδή $y>0$, η λύση ορίζεται στο διάστημα $(0, \frac{10}{3})$.

1.4 Διαφορικές Εξισώσεις του Bernoulli

Μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \ , \qquad (1)$$

όπου $n \neq 0, 1$, ονομάζεται εξίσωση του Bernoulli. Προφανώς, αν $n>0$, η $y=0$ είναι λύση της (1). Για $y \neq 0$ η (1) γράφεται $y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = q(x)$. Αν θέσουμε $u = y^{1-n}$, τότε $u' = (1-n)y^{-n}y'$ και η εξίσωση γίνεται

$$\frac{1}{1-n}u' + p(x)u = q(x) \ ,$$

η οποία είναι γραμμική πρώτης τάξης.

Παράδειγμα

Να βρεθεί μερική λύση της Δ.Ε.

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}x^3 ,$$

που να πληροί την αρχική συνθήκη $y(1) = 2$.

Λύση

Η λύση που ζητάμε θα ορίζεται σ' ένα ανοικτό διάστημα (a, b) που περιέχει το 1 και δεν περιέχει το 0 και άρα $(a, b) \subset (0, \infty)$. Η εξίσωση γράφεται

$$y^{-3}y' + \frac{1}{x}y^{-2} = x^2$$

θέτοντας $u = y^{-2}$, η εξίσωση γίνεται

$$-\frac{1}{2}u' + \frac{1}{x}u = x^2 \quad \Rightarrow \quad u' - \frac{2}{x}u = -\, 2x^2 \; .$$

Επειδή $\int -\frac{2}{x}dx = -\, 2\log x$, θα έχουμε

$$u = e^{2\log x}\left[c - \int 2x^2\, e^{-\,2\log x}dx\right] = x^2\,(c - 2x) \; .$$

Για $x=1$, είναι $u = y^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$ και άρα $c = \frac{9}{4} \Rightarrow$

$$u = x^2\,[\frac{9}{4} - 2x] = y^{-2} \;\; \Rightarrow \;\; y^2 = \frac{4}{x^2(9 - 8x)}$$

$$y = \frac{2}{x\sqrt{9-8x}},$$

η οποία ορίζεται στο διάστημα $(0, \frac{9}{8})$.

1.5 Εξισώσεις αμέσως ολοκληρώσιμες

Έστω η Δ.Ε.

$$P(x, y) + Q(x, y)\frac{dy}{dx} = 0 . \quad (1)$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση φ, δύο μεταβλητών x, y, η οποία ορίζεται και έχει μερικές παραγώγους πρώτης τάξης επί ενός ανοικτού συνεκτικού υποσυνόλου V του $\mathbb{R}^2$ και είναι τέτοια ώστε

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y) = P(x, y), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) \quad (2)$$

για κάθε $(x, y)\in V$. Έστω y μια λύση της Δ.Ε. ορισμένη επί ενός ανοικτού διαστήματος $I = (a, b)$ και τέτοια ώστε $(x, y(x))\in V$ για κάθε $x\in I$. Τότε έχουμε

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$$

δηλαδή $\frac{d}{dx}(\varphi(x, y)) = 0$. Επομένως υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε $\varphi(x, y) = c$. Αντιστρόφως, έστω $y = y(x)$ μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα J της πραγματικής ευθείας τέτοια ώστε να υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ για το οποίο για κάθε $x\in J$ το $(x, y(x))$ ανήκει στο V και $\varphi(x, y) = c$. Παραγωγίζοντας ως προς x παίρνουμε (για $x\in J$)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$$

δηλαδή $P(x, y) + Q(x, y)\dfrac{dy}{dx}$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση $y = y(x)$ είναι λύση της Δ.Ε. (1).

Χρειαζόμαστε ένα κριτήριο για να αποφασίσουμε κατά πόσον υπάρχει συνάρτηση φ που να πληροί τις (2). Ας υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις P, Q έχουν μερικές παραγώγους πρώτης τάξης συνεχείς επί του ανοικτού συνεκτικού υποσυνόλου V του $\mathbb{R}^2$. Ας υποθέσουμε επίσης ότι υπάρχει συνάρτηση φ, η οποία να πληροί τις (2) στο V. Τότε έχουμε

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \quad \text{και} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ και $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ είναι (όπως υποθέσαμε) συνεχείς επί του V, προκύπτει ότι $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$ στο V και άρα $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Ώστε η ισότητα

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{4}$$

είναι μια αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη μιας φ επί του V που να πληροί τις (2). Για ορισμένα ανοικτά συνεκτικά σύνολα V, τα λεγόμενα απλώς συνεκτικά, η σχέση (4) είναι επίσης ικανή για την ύπαρξη της φ.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τη Δ.Ε.

$$(x^2 - y)\frac{dy}{dx} + 2x^3 + 2xy = 0 \quad .$$

Η εξίσωση αυτή είναι της μορφής (1) όπου

$$P(x, y) = 2x^3 + 2xy, \quad Q(x, y) = x^2 - y \ .$$

Για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, έχουμε $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Το σύνολο $\mathbb{R}^2$ είναι απλώς συνεκτικό. Άρα υπάρχει φ επί του $\mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x^3 + 2xy$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = x^2 - y$. Θα βρούμε μια τέτοια φ. Από την $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x^3 + 2xy$ βλέπουμε ότι η φ είναι της μορφής

$$\varphi(x, y) = \frac{x^4}{2} + x^2 y + g(y) \ ,$$

όπου η g είναι συνάρτηση μόνο του y. Πρέπει να διαλέξουμε την g ώστε να πληρούται και η $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 - y$. Ώστε πρέπει να έχουμε

$$x^2 - y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 + g'(y) \quad \Rightarrow \quad g'(y) = -y \ ,$$

από όπου προκύπτει ότι μια εκλογή της g είναι η $g(y) = -\frac{y^2}{2}$. Συνεπώς, αρκεί να πάρουμε

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 y - \frac{1}{2}y^2 \ .$$

Άρα η γενική λύση της δοθείσης Δ.Ε. στο $\mathbb{R}^2$ δίνεται από όλες τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $y = y(x)$ που πληρούν την

$$x^4 + 4x^2y - 2y^2 = c$$

για κάποια τιμή της σταθεράς c.

Παράδειγμα 2

Στη Δ.Ε. του παραδείγματος 1, να βρεθεί μερική λύση y που να πληροί την αρχική συνθήκη $y(1) = 2$.

Λύση

Όπως είδαμε, θα υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε $x^4+4x^2y-2y^2= c$. Επειδή $y(1) = 2$, προκύπτει ότι $c=1$ και άρα $x^4+4x^2y-2y^2 = 1 \Rightarrow 2y^2 - 4x^2y +1- x^4 = 0$

$$y = \frac{2x^2 \pm \sqrt{4x^4+2x^4-2}}{2} = \frac{2x^2 \pm \sqrt{6x^4-2}}{2}.$$

Επειδή $y(1) = 2$, πρέπει να πάρουμε την

$$y = \frac{2x^2 + \sqrt{6x^4-2}}{2}.$$

Αυτή πρέπει να ορίζεται σ' ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει το 1. Επειδή η y είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό, θα πρέπει $6x^4-2 > 0 \Rightarrow x^4 > \frac{1}{3} \Rightarrow x > \sqrt[4]{1/3}$. Άρα η λύση δίνεται στο διάστημα $(3^{-1/4}, \infty)$.

1.6 Ολοκληρωτικοί παράγοντες

Μερικές φορές για μια εξίσωση της μορφής

$$P(x, y) + Q(x, y)\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (1)$$

δεν υπάρχει φ που να πληροί τις

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = P(x, y)\,, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = Q(x, y)\,, \tag{2}$$

αλλά αυτό μπορεί να επιτευχθεί αν πολλαπλασιάσουμε τα μέλη της (1) με μια κατάλληλο μη μηδενική συνάρτηση $\varrho(x, y)$. Δηλαδή, υπάρχει συνάρτηση $\varrho(x, y)$ τέτοια ώστε για την εξίσωση

$$\varrho(x, y)P(x, y) + \varrho(x, y)Q(x, y)\frac{dy}{dx} \tag{3}$$

να υπάρχει συνάρτηση $\varphi(x, y)$, ορισμένη επί ενός ανοικτού συνεκτικού συνόλου V στο $\mathbb{R}^2$, τέτοια ώστε στο V να έχουμε

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \varrho(x, y)\,P(x, y) \quad \text{και} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \varrho(x, y)Q(x, y)\,. \tag{4}$$

Αν υποθέσουμε ότι τόσο η $\varrho(x, y)$ όσο και οι $P(x, y)$, $Q(x, y)$ έχουν συνεχείς παραγώγους πρώτης τάξης στο V, θα πρέπει να έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial y}(\varrho(x, y)P(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\varrho(x, y)Q(x, y)) \quad \Rightarrow$$

$$Q\frac{\partial\varrho}{\partial x} - P\frac{\partial\varrho}{\partial y} = \varrho\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\,. \tag{5}$$

Παρατηρούμε ότι:

i) Αν η παράσταση $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ είναι συνάρτηση μόνο του x, τότε προκύπτει από την (5) ότι μπορούμε να διαλέξουμε και ϱ ως συνάρτηση μόνο του x, που να πληροί την

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dx} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right).$$

Συνεπώς αρκεί να πάρουμε

$$\varrho(x) = e^{\int \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx}.$$

ii) Αν η παράσταση $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ είναι συνάρτηση μόνο του y ανάλογα με την περίπτωση (i), μπορούμε να πάρουμε ως ολοκληρωτικό παράγοντα τη συνάρτηση

$$\varrho(y) = e^{-\int \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dy}.$$

Παράδειγμα 1

Αφού προηγουμένως βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας, να λυθεί η Δ.Ε.

$$2xy + (y^2 - x^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

και να βρεθεί μερική λύση που να πληροί τη συνθήκη $y(1) = 2$.

Λύση

Είναι $P(x, y) = 2xy$, $Q(x, y) = y^2 - x^2$

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 4x \Rightarrow \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{2}{y}.$$

Άρα μπορούμε να πάρουμε έναν ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\rho = \rho(y)$. Αρκεί να έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy\rho) = \frac{\partial}{\partial x}((y^2 - x^2)\rho) \Rightarrow 2x\rho + 2xy\frac{d\rho}{dy} = -2x\rho$$

$\Rightarrow xy\dfrac{d\rho}{dy} = -2x\rho \Rightarrow y\dfrac{d\rho}{dy} = -2\rho$. Συνεπώς, αρκεί να πάρουμε $\rho(y) = \dfrac{1}{y^2}$.

Πολλαπλασιάζοντας τη δοθείσα Δ.Ε. με το $\dfrac{1}{y^2}$ παίρνουμε την εξίσωση

$$2\frac{x}{y} + (1 - \frac{x^2}{y^2})\frac{dy}{dx} = 0 \quad . \qquad (*)$$

Ζητάμε μια συνάρτηση $\varphi(x, y)$ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2\frac{x}{y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 1 - \frac{x^2}{y^2} .$$

Από την $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 2\dfrac{x}{y}$, παίρνουμε $\varphi(x, y) = \dfrac{x^2}{y} + g(x) \Rightarrow 1 - \dfrac{x^2}{y^2} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \dfrac{-x^2}{y^2} + g'(y) \Rightarrow g'(y) = 1$. Συνεπώς αρκεί να είναι $g(y) = y$ και $\varphi(x, y) = \dfrac{x^2}{y} + y$.

Η γενική λύση της (*) δίνεται από τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις y που πληρούν την $\dfrac{x^2}{y} + y = c$ (σε κάποιο διάστημα) για κάποια τιμή της c. Μια επιπλέον λύση της δοθείσης εξίσωσης είναι η $y=0$. Θα βρούμε τώρα μια μερική λύση y για την οποία $y(1)=2$. Θα υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε

$$\frac{x^2}{y}+y=c \ .$$

Επειδή $y(1)=2$, θα είναι $c=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ και άρα

$$\frac{x^2}{y}+y=\frac{5}{2} \ \Rightarrow \ 2y^2-5y+2x^2=0$$

$$y=\frac{5\pm\sqrt{25-16x^2}}{4} \ .$$

Επειδή $y(1)=2$, πρέπει να πάρουμε την

$$y=\frac{5+\sqrt{25-16x^2}}{4} \ .$$

Η λύση πρέπει να ορίζεται σ' ένα ανοικτό διάστημα που να περιέχει το 1 και να πληροί την $16x^2<25$. Άρα πρέπει $x^2<\frac{25}{16} \ \Rightarrow \ -\frac{5}{4}<x<\frac{5}{4}$.
Συνεπώς η λύση $y=\frac{5+\sqrt{25-16x^2}}{4}$ ορίζεται στο διάστημα $(-\frac{5}{4}, \frac{5}{4})$.

Παράδειγμα 2
Να λυθεί η Δ.Ε.

$$(1-xy)y'+y^2+3xy^3=0 \ ,$$

αφού πρώτα βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\varrho(x,y)=x^m y^n$.

Λύση
Είναι $P(x,y)=y^2+3xy^3$, $Q(x,y)=1-xy$. Για να είναι η συνάρτηση

$\varrho(x, y) = x^m y^n$ ολοκληρωτικός παράγοντας πρέπει

$$\frac{\partial}{\partial y}[\,x^m y^n (y^2+3xy^3)] = \frac{\partial}{\partial x}[\,x^m y^n (1-xy)]\ ;$$

δηλαδή

$$(n+2)\,x^m y^{n+1} + 3(n+3)x^{m+1}y^{n+2} = mx^{m-1}y^n - (m+1)x^m y^{n+1}\ .$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι πρέπει να είναι

$$m=0,\ n+2 = -(m+1)\ \text{και}\ n+3 = 0\ ,$$

δηλαδή $m=0$, $n=-3$. Ώστε η συνάρτηση $\varrho(y) = \frac{1}{y^3}$ είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας. Μια λύση της δοθείσης Δ.Ε. είναι η $y=0$. Για να βρούμε τις μη μηδενικές λύσεις, πολλαπλασιάζουμε τη δοθείσα εξίσωση με $\frac{1}{y^3}$ και παίρνουμε την

$$\frac{1-xy}{y^3}y' + \frac{1+3xy}{y} = 0\ . \qquad (*)$$

Θα ζητήσουμε μια συνάρτηση φ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1+3xy}{y} \quad \text{και} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{1-xy}{y^3}\ .$$

Από την $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1+3xy}{y}$, παίρνουμε

$$\varphi(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{3}{2}x^2 + g(y)\ .$$

Χρησιμοποιώντας τη $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{1-xy}{y^3}$, βλέπουμε ότι η συνάρτηση g πρέπει να πληροί την εξίσωση

$$-\frac{x}{y^2} + g'(y) = \frac{1-xy}{y^3},$$

δηλαδή την $g'(y) = \frac{1}{y^3}$. Επομένως μπορούμε να εκλέξουμε ως g τη συνάρτηση $g(y) = -\frac{1}{2y^2}$. Άρα μια εκλογή της φ είναι η

$$\varphi(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2y^2}.$$

Ώστε οι μη μηδενικές λύσεις της δοθείσης εξίσωσης είναι αυτές που πληρούν την εξίσωση

$$\frac{x}{y} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2y^2} = c$$

για μια τιμή της αυθαίρετης σταθεράς c.
Λύνοντας την τελευταία εξίσωση ως προς y, βλέπουμε ότι οι λύσεις της δοθείσης Δ.Ε. είναι η y=0 και οι

$$y = \frac{-x \pm \sqrt{4x^2 - 2c}}{3x^2 - 2c} \qquad \text{(c αυθαίρετη σταθερά)}.$$

1.7 Εξισώσεις 2ης τάξης αναγόμενες σε εξισώσεις 1ης τάξης

I. <u>Εξισώσεις 2ης τάξης στις οποίες λείπει το y</u>

Είναι εξισώσεις της μορφής:

$$F(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}) = 0 \ .$$

Χρησιμοποιώντας ώς άγνωστη συνάρτηση την $z = \frac{dy}{dx}$, η δοθείσα εξίσωση ανάγεται στην εξίσωση πρώτης τάξης

$$F(x, z, \frac{dz}{dx}) = 0 \ .$$

Παράδειγμα

Να λυθεί η Δ.Ε.

$$2x\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1$$

και να βρεθεί μια μερική λύση y_1 , η οποία να πληροί τις συνθήκες $y_1(1)=1$, $y_1'(1)=0$.

Λύση

Θέτουμε $z = \frac{dy}{dx}$ και η δοθείσα εξίσωση γράφεται

$$2x\frac{dz}{dx} = z^2 - 1 \ . \qquad (*)$$

Οι συναρτήσεις $z=1$ και $z=-1$ είναι λύσεις της (*). Για $z \neq \pm 1$, η (*) γράφεται $\frac{2}{z^2-1} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$. Ολοκληρώνοντας την τελευταία εξίσωση λαμβάνουμε

$$\log\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = \log|x| + c_1$$

ή

$$\frac{z-1}{z+1} = cx \quad , \quad c = \pm e^{c_1} \neq 0 \ .$$

Αλλά και για $c=0$ η $\frac{z-1}{z+1} = cx$ δίνει την $z=1$ που είναι λύση της (*).
Επομένως οι λύσεις της (*) είναι η $z=-1$ και αυτές που δίνονται από τη σχέση

$$\frac{z-1}{z+1} = cx \quad (c \text{ αυθαίρετη σταθερά}) \ .$$

Από $\frac{z-1}{z+1} = cx$ παίρνουμε

$$\frac{dy}{dx} = z = \frac{cx+1}{1-cx} \ .$$

Για $c \neq 0$, έχουμε

$$y = -x - \frac{2}{c}\log|cx-1| + c_1 \ .$$

Για $c=0$, έχουμε $\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow y = x + c_1$. Τέλος, για $z=-1$ έχουμε $y=-x+c_1$.
Άρα οι λύσεις της δοθείσης εξίσωσης δίνονται από τις

$$y = -x - \frac{2}{c}\log|cx-1| + c_1$$

$$y = x + c_1$$

$$y = -x + c_1 \ ,$$

όπου c, c_1 είναι αυθαίρετες σταθερές, $c \neq 0$.
Θα βρούμε κατόπιν τη μερική λύση y_1 που πληροί τις αρχικές συνθήκες $y_1(1)=1$ και $y_1'(1) = 0$. Η λύση αυτή δεν μπορεί να προέρχεται από τις

$y=x+c_1$, $y=-x+c_1$ διότι για αυτές είναι $\frac{dy}{dx}=1$ και $\frac{dy}{dx}=-1$ αντίστοιχα. Θα υπολογίσουμε τις σταθερές c και c_1 ώστε η λύση

$$y=-x-\frac{2}{c}\log|cx-1|+c_1 \qquad (1)$$

να πληροί τις αρχικές συνθήκες $y(1)=1$ και $y_1'(1)=0$. Παραγωγίζοντας ως προς x την (1) παίρνουμε

$$y'=-1-\frac{2}{cx-1}.$$

Άρα θα πρέπει να είναι

$$1=y(1)=-1-\frac{2}{c}\log|c-1|+c_1$$
$$0=y'(1)=-1-\frac{2}{c-1}$$

δηλαδή $c=-1$ και $c_1=2+\frac{2}{-1}\log 2=2-2\log 2$.

Άρα $y_1(x)=-x+2\log|x+1|+2-2\log 2$. Η συνάρτηση y_1 πρέπει να ορίζεται σ' ένα διάστημα I που να περιέχει το 1 και να μην περιέχει το -1. Άρα $I\subset(-1,\infty)$. Η y_1 ορίζεται σε ολόκληρο το διάστημα $(-1,\infty)$. Στο διάστημα αυτό είναι $x+1>0$ και άρα

$$y_1(x)=-x+2\log(x+1)+2-2\log 2.$$

II. Εξισώσεις 2ης τάξης στις οποίες λείπει το x

Είναι εξισώσεις της μορφής:

$$F\left(y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0. \qquad (1)$$

Ας υποθέσουμε ότι y είναι μια λύση της (1). Επί ενός διαστήματος I της πραγματικής ευθείας όπου η y είναι αμφιμονοσήμαντος, μπορούμε να θεωρήσουμε το x ως συνάρτηση του y και άρα το $z = \frac{dy}{dx}$ ως συνάρτηση του y. Μπορούμε επομένως να γράψουμε σ' αυτό το διάστημα

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}$$

και η (1) γίνεται

$$F(y, z, z\frac{dz}{dy}) = 0 \ , \tag{2}$$

η οποία είναι πρώτης τάξης.

Παράδειγμα

Να λυθεί η Δ.Ε

$$y\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 .$$

Λύση

Θέτουμε $z = \frac{dy}{dx}$, $z\frac{dz}{dy} = \frac{d^2y}{dx^2}$, και η δοθείσα εξίσωση γίνεται

$$yz\frac{dz}{dy} = z^2 . \tag{3}$$

Μια λύση της (3) είναι η z=0 που μας δίνει y=c (c αυθαίρετη σταθερά). Για $z \neq 0$ η (3) γράφεται

$$y\frac{dz}{dy} = z \ \Rightarrow \ \frac{d}{dy}\left(\frac{z}{y}\right) = 0 .$$

Ώστε $\frac{y'}{y} = \frac{z}{y} = c$ και άρα $\log|y| = cx+c_2$ ή $y = c_1e^{cx}$ όπου $e_1 = e^c \neq 0$.

Επειδή η $y=0$ είναι επίσης λύση της δοθείσης εξίσωσης και επειδή η $y=c$ είναι της μορφής $y = c_1e^{cx}$ (αρκεί να πάρουμε $c_1=c$ και $c=0$), έπεται ότι η γενική λύση της δοθείσης εξίσωσης είναι η $y = c_1e^{cx}$ (c_1, c αυθαίρετες σταθερές).

III. <u>Εξισώσεις της μορφής</u> $P_0y''+P_1y'+P_2y = f$, <u>όπου</u> P_0, P_1, P_2, f <u>είναι γνωστές συναρτήσεις του</u> x ·

Υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε μια μερική λύση $y_1 \neq 0$ της εξίσωσης

$$P_0y''+P_1y'+P_2y = 0\ . \tag{1}$$

Χρησιμοποιούμε ως νέα άγνωστο συνάρτηση την $z = \frac{y}{y_1}$. Επειδή $y=y_1z$, $y' = y'_1z+y_1z'$, $y'' = y''_1z+2y'_1z'+y_1z''$, η δοθείσα εξίσωση γίνεται

$$P_0(y''_1z+2y'_1z'+y_1z'') + P_1(y_1z'+y'_1z) + P_2y_1z = f\ ,$$

η οποία (επειδή το y_1 είναι λύση της (1) γράφεται

$$P_0y_1z'' + (2P_0y'_1 + P_1y_1)z' = f\ ,$$

στην οποία λείπει το z.

Παράδειγμα

Να λυθεί η Δ.Ε.

$$xy'' + (1-2x)y' + (x-1)y = 0$$

δοθέντος ότι η $y_1=e^x$ είναι μια μερική λύση αυτής.

Λύση

Θέτουμε $y=e^x z$. Θα είναι

$$y' = e^x z + e^x z', \quad y'' = e^x z + 2e^x z' + e^x z''.$$

Αντικαθιστώντας στη δοθείσα εξίσωση λαμβάνουμε

$$x(e^x z + 2e^x z' + e^x z'') + (1-2x)(e^x z + e^x z') + (x-1)e^x z = 0,$$

η οποία μετά τις πράξεις και τη διαίρεση των δύο μελών της με το e^x γίνεται

$$xz'' + z' = 0$$

θέτουμε $v=z'$ και η τελευταία εξίσωση γίνεται

$$x\frac{dv}{dx} + v = 0. \qquad (2)$$

Ολοκληρώνοντας την (2) παίρνουμε

$$\log|v| = -\log|x| + c_1 \Rightarrow v = \frac{c}{x},$$

όπου $c = \pm e^{c_1} \neq 0$. Ώστε η λύση της (2) είναι η

$$v = \frac{c}{x} \quad (c \text{ αυθαίρετη σταθερά}).$$

Ώστε $z' = \frac{c}{x}$ και άρα $z = c\log|x| + c_1$. Συνεπώς η γενική λύση της δοθείσης εξίσωσης είναι η

$$y = e^x(c\log|x| + c_1) \quad (c, c_1 \text{ αυθαίρετες σταθερές}).$$

(Για $c=0$ έχουμε την $y=c_1 e^x$, η οποία είναι λύση).

1.8 Οικογένειες Καμπύλων

Μια εξίσωση της μορφής:

$$F(x, y, c)=0 , \tag{1}$$

όπου c είναι μια παράμετρος, μπορεί να παριστάνει μια (μονοπαραμετρική) οικογένεια καμπύλων του επιπέδου. Κάθε καμπύλη της οικογένειας αντιστοιχεί σε μια τιμή της παραμέτρου. Αναλόγως, μια εξίσωση της μορφής

$$F(x, y, c_1, c_2)=0 \quad (c_1, c_2 \text{ παράμετροι}) \tag{2}$$

μπορεί να παριστάνει μια διπαραμετρική οικογένεια καμπύλων του επιπέδου.

Θεωρώντας το y ως συνάρτηση του x και υποθέτοντας ότι οι παράγωγοι $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ και $\frac{dy}{dx}$ υπάρχουν, προκύπτει (αν παραγωγίσουμε τα δύο μέλη της (1)), η εξίσωση

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'=0 . \tag{3}$$

Με απαλοιφή (αν είναι δυνατόν) της παραμέτρου c μεταξύ των (1) και (3) προκύπτει μια Δ.Ε., η οποία ονομάζεται Δ.Ε. της οικογένειας των καμπύλων (1).

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η παραμετρική εξίσωση καθώς και η αντίστοιχη Δ.Ε. για την οικογένεια των παραβολών με άξονα παράλληλο προς τον άξονα των x, κορυφή πάνω στον άξονα των y και απόσταση της εστίας από την κορυφή ιση με a (a σταθερά) .

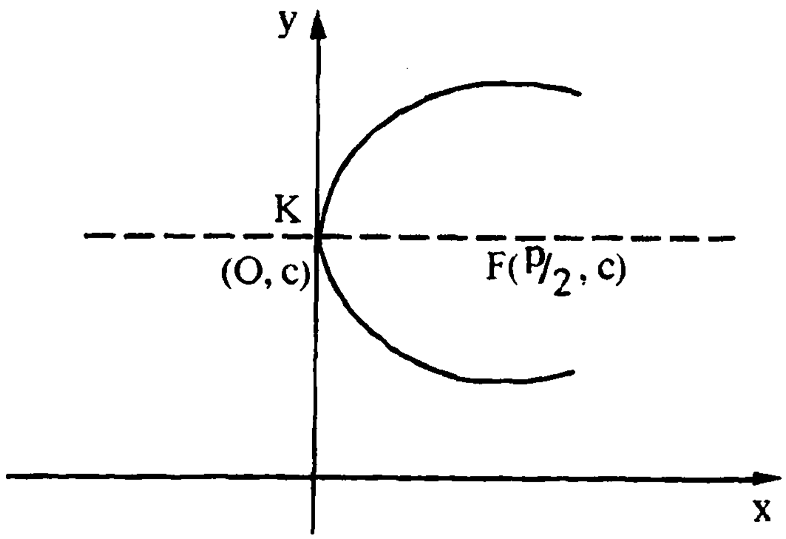
Λύση

Αν K(O,c) είναι η κορυφή της παραβολής και F(p/2, c) η εστία, τότε ως γνωστό η εξίσωση της παραβολής είναι

$$(y-c)^2 = 2px \ .$$

Επειδή KF = a, θα είναι p=2a και άρα η εξίσωση γίνεται

$$(y-c)^2 = 4ax \ . \qquad (*)$$



Η εξίσωση (*) είναι η παραμετρική εξίσωση των παραβολών που ζητάμε. Παραγωγίζοντας την (*) ως προς x, παίρνουμε

$$2(y-c)y' = 4a \ . \qquad (**)$$

Με απαλοιφή του c μεταξύ των εξισώσεων (*) και (**) προκύπτει η εξίσωση

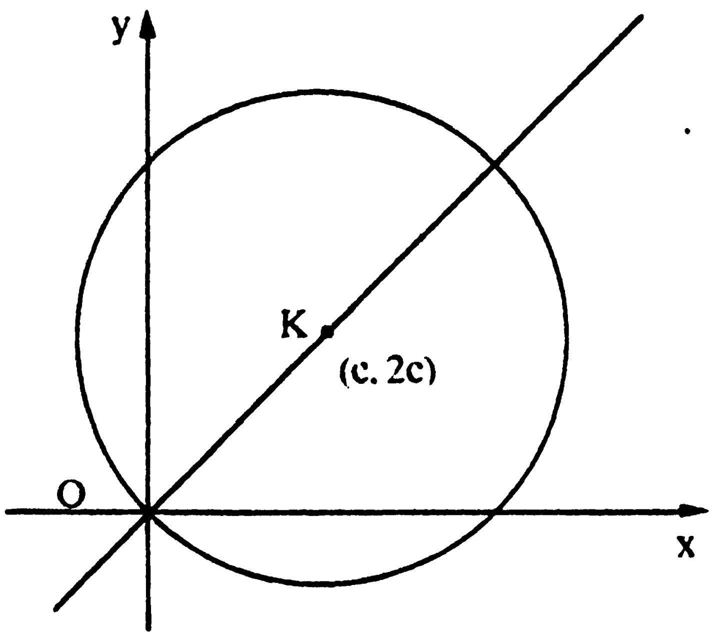
$$x(y')^2 = a \ ,$$

η οποία είναι η Δ.Ε. της ζητούμενης οικογένειας.

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί η παραμετρική εξίσωση, καθώς και η αντίστοιχη Δ.Ε. της οικογένειας των κύκλων που διέρχονται από την αρχή των συντεταγμένων και των οποίων τα κέντρα βρίσκονται πάνω στην ευθεία y=2x.

Λύση



Έστω K(c. 2c) το κέντρο ενός κύκλου της οικογένειας. Επειδή ο κύκλος διέρχεται από την αρχή, αν r είναι η ακτίνα του, τότε $r^2 = c^2+4c^2 = 5c^2$. Συνεπώς, η εξίσωση του κύκλου είναι

$$(x-c)^2 + (y-2c)^2 = 5c^2$$

ή

$$x^2+y^2-2c(x+2y)=0 .$$

Η τελευταία εξίσωση είναι η παραμετρική εξίσωση της οικογένειας. Παραγωγίζοντας ως προς x, παίρνουμε

$$x+yy'-c(1+2y')=0 .$$

Με απαλοιφή του c μεταξύ της τελευταίας εξίσωσης και της παραμε-τρικής εξίσωσης προκύπτει η

$$2(x+yy')(x+2y)=(x^2+y^2)(1+2y') ,$$

η οποία γράφεται

$$2(y^2+xy-x^2)y'=y^2-4xy-x^2 .$$

Η τελευταία εξίσωση είναι η Δ.Ε. της ζητούμενης οικογένειας.

1.9 Ορθογώνιες Τροχιές

Θεωρούμε μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων του επιπέδου με εξίσωση

$$\Phi(x, y, a)=0 \qquad (a \text{ παράμετρος}). \tag{1}$$

Μια καμπύλη γ του επιπέδου λέγεται μια ορθογώνια τροχιά των καμπύλων της οικογένειας (1) αν όταν η γ τέμνει μια καμπύλη της (1), τότε την τέμνει ορθογώνια. Το πρόβλημα της εύρεσης των ορθογωνίων τροχιών της (1) συνίσταται στο να βρεθεί μια άλλη μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων, που να αποτελείται από καμπύλες κάθε μια από τις οποίες είναι μια ορθογώνια τροχιά της δοθείσης.

Παράδειγμα 1

Θεωρούμε τη μονοπαραμετρική οικογένεια των ευθειών με εξίσωση

$$y = cx \quad (c \text{ παράμετρος}) . \tag{2}$$

Η οικογένεια των κύκλων με εξίσωση

$$x^2+y^2 = a \quad (a \text{ παράμετρος}) \tag{3}$$

είναι μια οικογένεια ορθογωνίων τροχιών της οικογένειας (2). Πώς τώρα θα βρούμε τις ορθογώνιες τροχιές της (1). Υποθέτουμε ότι οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}$ υπάρχουν και ότι κάθε καμπύλη της (1) έχει σε κάθε σημείο της μια μοναδική εφαπτομένη. Απαλείφοντας (αν είναι δυνατόν) την παράμετρο a μεταξύ της (1) και της

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}y' = 0 \tag{4}$$

βρίσκουμε τη διαφορική εξίσωση

$$F(x, y, y') = 0 \tag{5}$$

της δοθείσης οικογένειας.

Ζητούμε να βρούμε τη Δ.Ε. της οικογένειας των ορθογωνίων τροχιών. Έστω γ_1 μια ορθογώνιος τροχιά και έστω (x, y) ένα σημείο της γ_1. Έστω γ μια καμπύλη της (1) που περνάει από το (x, y). Έστω λ και λ_1 οι συντελεστές κατευθύνσεων των εφαπτομένων στο (x, y) στις καμπύλες γ και γ_1 αντίστοιχα. Θα είναι $\lambda\lambda_1 = -1$. Επειδή η γ πληροί τη Δ.Ε. (5) θα είναι

$$F(x, y, \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(x, y, -\frac{1}{\lambda_1}) = 0 \quad .$$

Ώστε η γ_1 πληροί τη Δ.Ε.

$$F(x, y, -\frac{1}{y'}) = 0 \quad . \tag{6}$$

Η (6) είναι η Δ.Ε. της οικογένειας των ορθογωνίων τροχιών της δοθείσης οικογένειας (1). Από την (6) βρίσκουμε (αν είναι δυνατόν) την παραμετρική εξίσωση της οικογένειας των ορθογωνίων τροχιών.

Παράδειγμα 2

Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας

$$y = cx \quad (c \text{ παράμετρος}) \,. \tag{7}$$

Λύση

Έχουμε $y' = c$. Απαλείφοντας την παράμετρο c μεταξύ των $y = cx$ και $y' = c$ βρίσκουμε την

$$y = xy' \quad , \tag{8}$$

η οποία είναι η Δ.Ε. της (7). Η Δ.Ε.

$$y = -\frac{x}{y'} \tag{9}$$

είναι Δ.Ε. της οικογένειας των ορθογωνίων τροχιών της (7). Ολοκληρώνοντας την (9) παίρνουμε

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c_1 \quad \Rightarrow \quad y^2+x^2 = 2c_1 = a^2 \quad .$$

Ώστε η εξίσωση των ορθογωνίων τροχιών είναι η

$$x^2+y^2 = a^2 \quad (a \text{ παράμετρος}) .$$

Παράδειγμα 3

Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας των ελλείψεων με εξίσωση

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{2c^2} = 1 \quad (c \text{ παράμετρος}) .$$

Λύση

Με παραγώγιση της παραμετρικής εξίσωσης των ελλείψεων έχουμε

$$\frac{x}{c^2} + \frac{yy'}{2c^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + yy' = 0 .$$

Η τελευταία εξίσωση είναι η Δ.Ε. της δοθείσης οικογένειας. Η Δ.Ε. της οικογένειας των ορθογωνίων τροχιών είναι η

$$2x + y\left(-\frac{1}{y'}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y}{2x} .$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία εξίσωση παίρνουμε την εξίσωση

$$y^2 = cx ,$$

η οποία είναι η ζητούμενη οικογένεια των ορθογωνίων τροχιών. Η οικογένεια αυτή είναι οικογένεια παραβολών με κορυφή την αρχή των συντεταγμένων και άξονα τον άξονα των x .

1.10 Ταχύτητα Διαφυγής

Ονομάζουμε ταχύτητα διαφυγής την ελάχιστη ταχύτητα με την οποία πρέπει να εκτοξεύσουμε κατακόρυφα προς τα άνω ένα σώμα, ώστε το σώμα αυτό να διαφύγει από το πεδίο έλξεως της γης, δηλαδή να πάει όπως λέμε στο άπειρο. Ας υποθέσουμε ότι στο σώμα ενεργεί μόνο η έλξη της γης και ας πάρουμε ως θετική φορά την κίνηση προς τα άνω. Έστω R η ακτίνα της γης, M η μάζα της γης, m η μάζα του σώματος και g η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της γης. Όταν το σώμα βρίσκεται σε ύψος y από την επιφάνεια της γης, τότε έλκεται από τη γη με μια δύναμη F της οποίας το μέτρο είναι $\frac{GMm}{(R+y)^2}$, όπου G η σταθερά της παγκοσμίου έλξεως. Επειδή η F είναι αντίθετη προς τη φορά κινήσεως του σώματος, θα είναι $F = -\frac{GMm}{(R+y)^2}$. Για y=0, έχουμε

$$mg = \frac{GMm}{R^2} \qquad G = \frac{R^2 g}{M} \quad .$$

Άρα

$$F = -\frac{R^2 mg}{(R+y)^2} \quad . \tag{1}$$

Σύμφωνα με το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής, είναι $F = m\gamma = my'' \Rightarrow$

$$y'' = -\frac{R^2 g}{(R+y)^2} \quad . \tag{2}$$

Επειδή $\upsilon = y'(t)$, η (2) γίνεται

$$\upsilon'(t) = -\frac{R^2 g}{[R+y(t)]^2} \quad . \tag{3}$$

Θεωρώντας την υ ως συνάρτηση του y, έχουμε

$$\upsilon'(t) = \frac{d\upsilon}{dy} \cdot \frac{dv}{dt} = \upsilon \frac{d\upsilon}{dy} \tag{4}$$

και η (3) γίνεται

$$\upsilon \frac{d\upsilon}{dy} = - \frac{R^2 g}{(R+y)^2} \; . \tag{5}$$

Αν υ_0 είναι η ταχύτητα με την οποία εκτοξεύεται το σώμα, τότε ολοκληρώνοντας την (5) παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\upsilon^2 - \frac{1}{2}\upsilon_0^2 = \frac{R^2 g}{R+y} - \frac{R^2 g}{R}$$

$$\left(\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} w\,dw = \int_0^y - \frac{R^2 g}{(R+y)^2}\,dx \right)$$

$$\Rightarrow \quad \upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2R^2 g \left(\frac{1}{Ry} - \frac{1}{R} \right) .$$

Αν θέλουμε το σώμα να διαφύγει από το πεδίο έλξεως της γης, πρέπει να έχουμε $\upsilon(t) > 0$ για κάθε t και άρα $\upsilon_0^2 > 2R^2 g \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+y} \right)$. Παίρνοντας $y \to \infty$, έχουμε $\upsilon_0^2 \geq \frac{2R^2 g}{2} = 2Rg$, δηλαδή $\upsilon_0 \geq \sqrt{2Rg}$. Άρα η ελάχιστη ταχύτητα διαφυγής είναι $\upsilon_0 = \sqrt{2Rg}$.

Άσκηση 1

Σώμα εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα άνω από την επιφάνεια της γης με αρχική ταχύτητα υ_0, όπου $0<\upsilon_0<\sqrt{2Rg}$. Υποθέτουμε ότι επί του σώματος ενεργεί μόνο η έλξη της γης. Να δειχθεί ότι το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φθάσει το σώμα είναι

$$h_{max} = \frac{\upsilon_o^2 R}{2gR - \upsilon_o^2} .$$

Άσκηση 2

Στην προηγούμενη άσκηση υποθέτουμε ότι $\upsilon_o = \sqrt{2Rg}$. Να δειχθεί ότι $\upsilon = R\sqrt{\frac{2g}{R+y}}$ και να εκφρασθεί το y ως συνάρτηση του χρόνου t.

Υπόδειξη

Θεωρούμε το t ως συνάρτηση του y

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{R\sqrt{2g}} \cdot \sqrt{R+y} .$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2. ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

2.1 Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις

Μια γραμμική Δ.Ε. n-τάξης είναι μια εξίσωση της μορφής

$$y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_n(x)y = f(x) \ , \qquad (1)$$

όπου οι συναρτήσεις $P_1, P_2, \dots, P_n$, f ορίζονται σ' ένα διάστημα $I = (a, b)$ της πραγματικής ευθείας (το a μπορεί να είναι το $-\infty$ και το b μπορεί να είναι το $+\infty$). Αν $f=0$, τότε η Δ.Ε. λέγεται *ομογενής* . Αν y_1, y_2 είναι λύσεις της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} +P_2(x)y^{(n-2)} + \dots + P_n(x)y = 0 \ , \qquad (2)$$

στο διάστημα I και αν $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση $c_1y_1+c_2y_2$ είναι και αυτή λύση της (2) όπως μπορεί κανείς εύκολα να δείξει. Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι, αν $y_1, \dots, y_k$ είναι λύσεις της (2) στο I και αν $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$, τότε η $y = c_1y_1+c_2y_2+ \dots +c_ky_k$ είναι επίσης λύση της (2) στο I.

Ισχύει το ακόλουθο θεώρημα που δίνουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 2.1.1

Αν οι συναρτήσεις $P_1, \ldots, P_n, f$ στη Δ.Ε. (1) είναι συνεχείς στο $I = (a, b)$ και αν $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$ και $x_0 \in I$, τότε υπάρχει μοναδική λύση y της (1) στο I με $y(x_0) = b_0$, $y'(x_0) = b_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1}$.

2.2 Γραμμική ανεξαρτησία λύσεων

Ορισμός 2.2.1

Έστω $f_1, f_2, \ldots, f_n$ συναρτήσεις οι οποίες ορίζονται σ' ένα διάστημα I της πραγματικής ευθείας. Οι συναρτήσεις αυτές λέγονται *γραμμικά εξαρτημένες* στο I αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n = 0 \quad \text{στο } I.$$

Αν τέτοιοι αριθμοί δεν υπάρχουν, τότε οι συναρτήσεις $f_1, \ldots, f_n$ λέγονται γραμμικά ανεξάρτητες επί του I.

Ισχύει το ακόλουθο:

Θεώρημα 2.2.2

Θεωρούμε την ομογενή εξίσωση

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_n(x)y = 0\,, \qquad (*)$$

όπου οι συναρτήσεις $P_1, P_2, \ldots, P_n$ είναι συνεχείς επί ενός ανοικτού διαστήματος I της πραγματικής ευθείας. Τότε:

a) Υπάρχουν n λύσεις της (*) γραμμικά ανεξάρτητες επί του I

b) Αν $y_1, y_2, \ldots, y_n$ είναι n λύσεις της (*) γραμμικά ανεξάρτητες επί του I, τότε για κάθε λύση y της (*) επί του I υπάρχουν μοναδικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_n y_n \ .$$

Επομένως η γενική λύση της (*) στο I είναι η

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n \quad (c_1, c_2, \ldots, c_n \text{ αυθαίρετες σταθερές}).$$

Ορισμός 2.2.3

Αν $f_1, f_2, \ldots, f_n$ είναι n πραγματικές συναρτήσεις οι οποίες ορίζονται και έχουν παραγώγους μέχρι (n-1)- τάξης επί ενός ανοικτού διαστήματος I της πραγματικής ευθείας, τότε η ορίζουσα

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ f_1' & f_2' & \ldots & f_n' \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \ldots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

ονομάζεται ορίζουσα του Wronsky για τις συναρτήσεις $f_1, \ldots, f_n$.

Παρατήρηση 2.2.4

Αν οι συναρτήσεις $f_1, f_2, \ldots, f_n$ έχουν παραγώγους μέχρι (n-1)-τάξης επί του $I = (a, b)$ και αν οι συναρτήσεις αυτές είναι γραμμικά εξαρτημένες επί του I, τότε $W(f_1, \ldots, f_n) = 0$ επί του I. Πραγματικά υπάρχουν σταθερές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, όχι όλες μηδέν, τέτοιες ώστε $\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n = 0$. Παραγωγίζοντας (n-1)-φορές παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0\\
&\lambda_1 f_1' + \dots + \lambda_n f_n' = 0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\lambda_1 f_1^{(n-1)} + \dots + \lambda_n f_n^{(n-1)} = 0 \quad .
\end{aligned}
$$

Αν $x \in I$, τότε το σύστημα

$$
\begin{aligned}
&x_1 f_1(x) + \dots + x_n f_n(x) = 0\\
&x_1 f_1'(x) + \dots + x_n f_n'(x) = 0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x_1 f_1^{(n-1)}(x) + \dots + x_n f_n^{(n-1)}(x) = 0
\end{aligned}
$$

ως προς τους αγνώστους $x_1, \dots, x_n$, έχει μια μη μηδενική λύση την $x_1 = \lambda_1, \dots, x_n = \lambda_n$ και επομένως η ορίζουσά του $W(f_1, \dots, f_n)$ πρέπει να ισούται με το 0. Ώστε μια *αναγκαία συνθήκη* για να είναι οι συναρτήσεις $f, \dots, f$ γραμμικά εξαρτημένες επί του I είναι ο μηδενισμός της ορίζουσας $W(f_1, \dots, f_n)$ σε κάθε σημείο του I. Η συνθήκη όμως αυτή δεν είναι και ικανή.

Παράδειγμα 2.2.5

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f_1(x) = x^3, \quad f_2(x) = |x|^3, \quad x \in (-\infty, \infty) \ .$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = 0 \, .$$

Οι συναρτήσεις όμως f_1, f_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
Πραγματικά, έστω c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $c_1 f_1 + c_2 f_2 = 0$. Για $x=1$ και $x=-1$, έχουμε $c_1+c_2 = 0$, $-c_1+c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$, το οποίο αποδεικνύει ότι οι συναρτήσεις f_1, f_2 δεν είναι γραμμικά εξαρτημένες.

Ισχύει όμως το εξής:

Θεώρημα 2.2.6
Θεωρούμε τη γραμμική ομογενή εξίσωση

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + P_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + P_n(x)y = 0 \;, \qquad (1)$$

όπου οι συναρτήσεις P_1, P_2, ..., P_n είναι συνεχείς επί ενός ανοικτού διαστήματος I, και έστω y_1, ..., y_n λύσεις της εξίσωσης (1) στο I. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

a) Οι συναρτήσεις y_1, y_2, ..., y_n είναι γραμμικά ανεξάρτητες επί του I.

b) Αν για $x \in I$ θέσουμε

$$W(x) = W(y_1, \dots, y_n ; x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} .$$

τότε $W(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$.

c) Υπάρχει $x_0 \in I$ με $W(x_0) \neq 0$.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x_o \in I$ με $W(x_o) \neq 0$. Τότε το ομογενές σύστημα ως προς τους αγνώστους

$$x_1 y_1^{(k)}(x_o) + x_2 y_2^{(k)}(x_o) + \ldots + x_n y_n^{(k)}(x_o) = 0\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\,,$$

έχει μια μη μηδενική λύση $x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2, \ldots, x_n = \lambda_n$. Η συνάρτηση $y = \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_n y_n$ είναι μια λύση της (1) που πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$y(x_o) = y'(x_o) = \ldots = y^{(n-1)}(x_o) = 0$$

και συνεπώς $y=0$ σύμφωνα με το μέρος του Θεωρήματος 2.2.2 που αναφέρεται στη μοναδικότητα της λύσης. Αυτό όμως αντίκειται στην (a) διότι τα $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ δεν είναι όλα μηδέν.

(c) $\Rightarrow$ (a). Έστω $x_o \in I$ με $W(x_o) \neq 0$. Τότε οι συναρτήσεις $y_1, \ldots, y_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες επί του I διότι αν ήταν γραμμικά εξαρτημένες, τότε θα ήταν $W(x) = 0 \ \forall x \in I$ (Παρατήρηση 2.2.4).

2.3 Γραμμικές ομογενείς με σταθερούς συντελεστές

Ορισμός 2.3.1

Ένα σύστημα n-λύσεων $y_1, y_2, \ldots, y_n$, μιας γραμμικής ομογενούς εξίσωσης n-τάξης, θα λέγεται θεμελιώδες σύστημα λύσεων της εξίσωσης αν οι λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες και για κάθε άλλη λύση y υπάρχουν σταθερές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ τέτοιες ώστε $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_n y_n$.

Θεωρούμε τη Δ.Ε.

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0\,, \qquad (1)$$

όπου $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Θα δούμε πως μπορούμε να βρούμε ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων για τη Δ.Ε. (1). Θα εξετάσουμε κατ' αρχήν πότε μια συνάρτηση της μορφής $y = e^{rx}$, $r \in \mathbb{R}$, είναι λύση της (1). Επειδή $y^{(k)} = r^k e^{rx}$, για να είναι η $y = e^{rx}$ λύση της (1) πρέπει και αρκεί να είναι

$$(r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n) e^{rx} = 0$$

δηλαδή

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0 .$$

Ώστε για να είναι η $y = e^{rx}$ λύση της (1) πρέπει και αρκεί το r να είναι ρίζα της εξίσωσης

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 . \qquad (2)$$

Η εξίσωση (2) ονομάζεται χαρακτηριστική εξίσωση της (1). Η (2) έχει n ρίζες πραγματικές ή μιγαδικές αν λάβουμε υπόψη τις πολλαπλότητες των ριζών. Από τις n αυτές ρίζες βρίσκουμε ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων ως εξής:

a) Αν η εξίσωση (2) έχει n απλές πραγματικές ρίζες $r_1, r_2, \ldots, r_n$, τότε οι συναρτήσεις $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}, \ldots, y_n = e^{r_n x}$, αποτελούν ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων.

b) Για κάθε πολλαπλή πραγματική ρίζα τάξης m της (2) παίρνουμε τις εξής λύσεις

$$e^{rx}, xe^{rx}, \ldots, x^{m-1}e^{rx} .$$

c) Αν $r = \alpha+i\beta$ $(\beta\neq 0)$ είναι μια μιγαδική ρίζα της (2) τάξης m, τότε και η συζυγής της $\alpha - i\beta$ είναι επίσης ρίζα και μάλιστα της ίδιας τάξης m. Για τις δύο αυτές ρίζες παίρνουμε τις 2m λύσεις

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{m-1}\cos\beta x, x^{m-1}\sin\beta x \ .$$

Με τον παραπάνω τρόπο παίρνουμε n λύσεις της (1) οι οποίες, όπως μπορεί κανείς να αποδείξει, αποτελούν ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων της (1) και επομένως η γενική λύση της (1) είναι η

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n \quad (c_1, c_2, \ldots, c_n \text{ αυθαίρετες σταθερές}).$$

Παραδείγματα

1. Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε.

$$y^{(3)} - 2y'' + y' = 0 \ .$$

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$ έχει ρίζες το 0 και το 1 διπλή ρίζα. Άρα η γενική λύση είναι η

$$y = c_1 + (c_2 + c_3x)\,e^x \ .$$

2. Να βρεθεί η μερική λύση της Δ.Ε. $y'' + y' - 6y = 0$, η οποία πληροί τις αρχικές συνθήκες $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.

Λύση

Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ είναι οι $r_1=2$, $r_2 = -3$ και επομένως η γενική λύση είναι η $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}$. Θα είναι $y' = 2c_1e^{2x} - 3c_2e^{-3x}$. Για τη μερική λύση που ζητάμε, έχουμε

$$y(0) = c_1 + c_2 = 3 \quad \text{και} \quad y'(0) = 2c_1 - 3c_3 = 0 \ .$$

Λύνοντας ως προς c_1, c_2 παίρνουμε $c_1 = \frac{9}{5}$, $c_2 = \frac{6}{5}$ και άρα η μερική λύση που ζητάμε είναι η

$$y = \frac{9}{5}e^{2x} + \frac{6}{5}e^{-3x} \ .$$

3. Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε.

$$y'' + k^2 y = 0 \quad (k>0 \text{ σταθερά}) \ .$$

Λύση

Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι οι ki και $-ki$ και άρα η γενική λύση είναι η

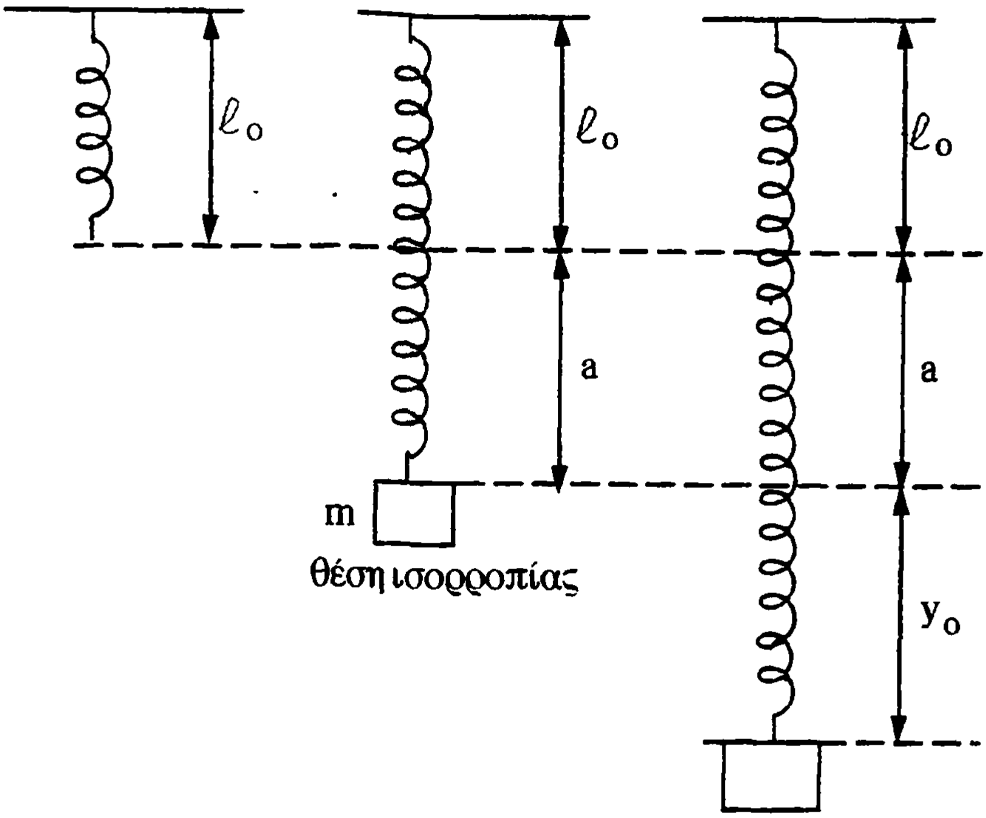
$$y = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx \ .$$

4. Αρμονική ταλάντωση ελατηρίου

Θεωρούμε ελατήριο μήκους ℓ_0 και σταθεράς k του οποίου το ένα άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο. Η μάζα του ελατηρίου θεωρείται αμελητέα. Αν στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου προσδέσουμε ένα σώμα μάζας m, τότε το ελατήριο επιμηκύνεται κατά a και φθάνει σε μια θέση ισορροπίας. Αν σύρουμε το σώμα κατακόρυφα προς τα κάτω κατά διάστημα y_0 (από τη θέση ισορροπίας) και στη συνέχεια το αφήσουμε ελεύθερο, τότε το σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση περί τη θέση ισορρόπίας. Έστω $y = y(t)$ η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας (η απομάκρυνση θεωρείται αν το σώμα είναι κάτω από τη

θέση ισορροπίας και αρνητική αν είναι πάνω από τη θέση ισορροπίας).
Να βρεθεί η συνάρτηση $y = y(t)$.

Λύση



Σε μια τυχαία θέση του σώματος ασκούνται σ' αυτό το βάρος $B=mg$ και η δύναμη του ελατηρίου kx όπου x είναι η επιμήκυνση ή η σμίκρυνση του φυσικού μήκους του ελατηρίου (στην περίπτωση σμίκρυνσης το x λαμβάνεται αρνητικό). Στη θέση ισορροπίας έχουμε $mg=ka$. Όταν η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας είναι y, τότε η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι

$$F = mg - k(a+y) = (mg - ka) - ky = - ky \ .$$

Σύμφωνα με τον 2ο νόμο Μηχανικής του Νεύτωνα, έχουμε

$$F = m\gamma = m\frac{d^2y}{dt^2} \quad (\gamma \text{ η επιτάχυνση})\ .$$

Άρα

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0\ .$$

Θέτοντας $\frac{k}{m} = \omega^2$, η εξίσωση γράφεται

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0\ . \qquad (*)$$

Η γενική λύση της (1) είναι η

$$y = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t$$

θα υπολογίσουμε τα c_1, c_2. Για t=0, είναι $y(0) = y_0$ και άρα $c_1 = y_0$. Αν $\upsilon = \upsilon(t)$ είναι η ταχύτητα του σώματος, τότε $\upsilon = \frac{dy}{dt} = -\omega c_1 \sin\omega t + \omega c_2 \cos\omega t$. Επειδή $\upsilon(0) = 0$, θα είναι $c_2 = 0$ και άρα

$$y(t) = y_0 \cos\omega t\ .$$

Το σώμα λοιπόν κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Για την ταχύτητα έχουμε

$$\upsilon(t) = \frac{dy}{dt} = -\omega y_0 \sin\omega t\ .$$

Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος γίνεται μέγιστο όταν $\sin\omega t = \pm 1$ και άρα $y = y_0 \cos\omega t = 0$, δηλαδή όταν περνάει από τη θέση ισορροπίας. Το μέτρο αυτό ισούται με $\upsilon_0 = \omega y_0$. Άρα $\upsilon(t) = -\upsilon_0 \sin\omega t$.

5. Να βρεθεί ομογενής Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές που να έχει τη συνάρτηση $y = x^2+2x\, e^x+e^{-2x}$ ως μια λύση της.

Λύση

Για να έχουμε τον όρο x^2 αρκεί το $\lambda=0$ να είναι διπλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Για τον όρο $2xe^x$ αρκεί το $\lambda=1$ να είναι διπλή ρίζα της χαρακτηριστικής και τέλος για τον όρο e^{-2x} αρκεί το $\lambda=-2$ να είναι απλή ρίζα. Άρα αρκεί να έχουμε ως χαρακτηριστική εξίσωση την

$$\lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \lambda^5 - 3\lambda^3 + 2\lambda^2 = 0 ,$$

που αντιστοιχεί στη Δ.Ε.

$$y^{(5)} - 3y^{(3)} + 2y'' = 0 .$$

6. Να βρεθεί ομογενής Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές που να έχει ως μία λύση της την $y = 3e^{2x}\cos 3x$.

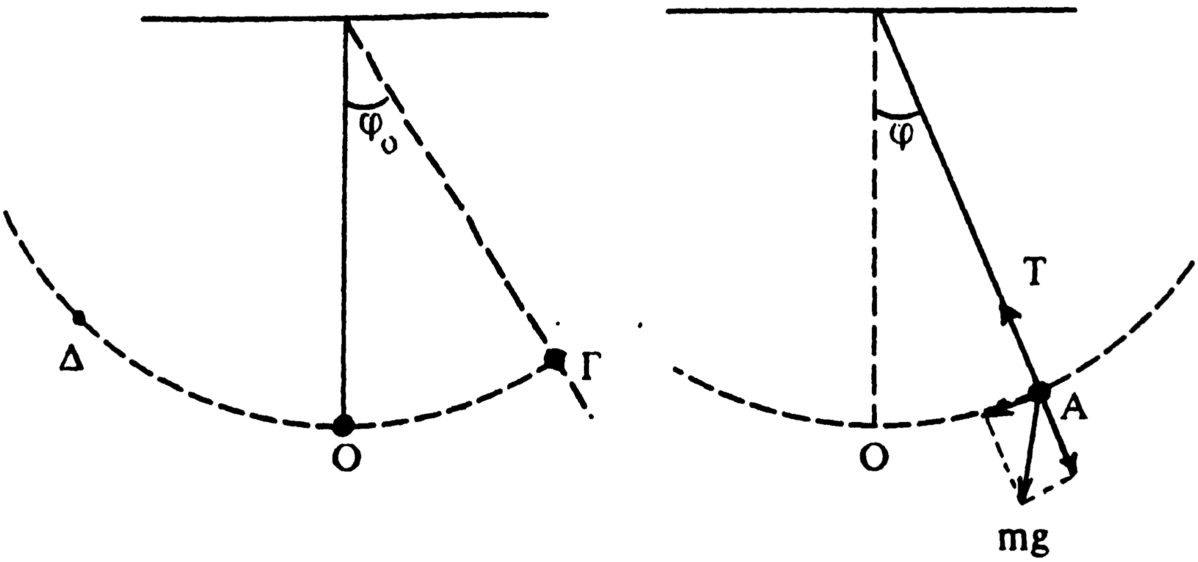
Λύση

Αρκεί η χαρακτηριστική εξίσωση να έχει ως απλή ρίζα τη $\lambda = 2+3i$, οπότε θα έχει και τη $\lambda = 2-3i$. Συνεπώς, η χαρακτηριστική εξίσωση θα έχει παράγοντα το $(\lambda-2)^2+9$. Άρα αρκεί να έχουμε ως χαρακτηριστική εξίσωση τη $(\lambda-2)^2+9=0 \Rightarrow \lambda^2-4\lambda+13=0$, που αντιστοιχεί στη Δ.Ε.

$$y''-4y'+13y=0 .$$

7. Μαθηματικό εκκρεμές

Εκτρέπουμε το εκκρεμές κατά μικρή γωνία φ_0 από την κατακόρυφο (που είναι η θέση ισορροπίας) και στη συνέχεια το αφήνουμε ελεύθερο. Θα δείξουμε ότι το σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση μεταξύ των ακραίων θέσεων Γ, Δ (περί τη θέση ισορροπίας Ο).



Σε μια τυχαία θέση Α του σώματος ασκούνται σ' αυτό το βάρος mg και η τάση του νήματος Τ. Η συνιστώσα του βάρους κατά τη διεύθυνση της ακτίνος είναι ίση και αντίθετη με την Τ. Η συνιστώσα του βάρους η κάθετη προς την ακτίνα (κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς στο σημείο Α) είναι $mg\sin\varphi$ και είναι αυτή που τείνει να επαναφέρει το σώμα στην κατάσταση ισορροπίας Ο. Επειδή το μήκος του τόξου ΟΑ είναι $S = \ell\varphi$ (ℓ το μήκος του νήματος του εκκρεμούς) θα είναι

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = \ell\,\frac{d\varphi}{dt} \quad \text{και} \quad \gamma = \frac{d\upsilon}{dt} = \ell\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}\,.$$

Για $t=0$ έχουμε $\upsilon(0)=0$, $\varphi(0)=\varphi_0$. Σύμφωνα με το 2ο νόμο της Μηχανικής του Νεύτωνα, θα είναι

$$m\gamma = -\,mg\sin\varphi$$

$$\ell \frac{d^2\varphi}{dt^2} = - g \sin\varphi$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin\varphi = 0 \ . \qquad (*)$$

Επειδή η γωνία φ είναι πολύ μικρή, μπορούμε να πάρουμε $\sin\varphi \approx \varphi$ και η Δ.Ε. γίνεται

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \varphi = 0 \ ,$$

της οποίας η γενική λύση είναι η

$$\varphi = c_1 \cos\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t + c_2 \sin\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t \ .$$

Επειδή $\varphi(0) = \varphi_0$, θα είναι $c_1 = \varphi_0$. Επίσης, από τη

$$\upsilon(t) = \frac{d\varphi}{dt} = - c_1 \sqrt{\frac{g}{\ell}} \sin\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t + c_2 \sqrt{\frac{g}{\ell}} \cos\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t \ ,$$

θα είναι

$$0 = \upsilon(0) = c_2 \sqrt{\frac{g}{\ell}} \ \Rightarrow \ c_0 \ .$$

Συνεπώς

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t \ .$$

Ώστε το σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{\ell}}} =$

$2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$, συχνότητα $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$ και κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$

2.4 Διαφορικές Εξισώσεις των Cauchy-Euler

Μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + b_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + b_{n-1} x \frac{dy}{dx} + b_n y = 0 \ , \qquad (1)$$

όπου $b_1, b_2, \dots, b_n$ είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί, ονομάζεται Δ.Ε. των Cauchy-Euler. Θα βρούμε λύσεις της εξίσωσης (1) στο διάστημα $(0, \infty)$. Η περίπτωση του διαστήματος $(-\infty, 0)$ είναι ανάλογος. Χρησιμοποιούμε ως νέα ανεξάρτητο μεταβλητή την $t = \log x$ $(x>0)$ (για την περίπτωση του διαστήματος $(-\infty, 0)$ χρησιμοποιούμε την $t = \log(-x)$). Έχουμε $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dt}$ και άρα

$$x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \ .$$

Ομοίως

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

και άρα

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} \ .$$

Επαγωγικά μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε m, με $1 \leq m \leq n$, υπάρχουν αριθμοί $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ τέτοια ώστε

$$x^m \frac{d^m y}{dx^m} = \gamma_1 \frac{dy}{dt} + \gamma_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \ldots + \gamma_m \frac{d^m y}{dt^m} .$$

Αντικαθιστώντας τις τομές των $x^m \dfrac{d^m y}{dx^m}$, $m = 1, \ldots, n$ στην (1) προκύπτει μια εξίσωση της μορφής

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = 0 , \qquad (2)$$

όπου οι $a_1, \ldots, a_n$ είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

Παράδειγμα

Να λυθεί η Δ.Ε. στο διάστημα $(0, \infty)$

$$x^3 y'' + 2x^2 y'' + xy' - y = 0 .$$

Λύση

Θέτουμε $t = \log x$ θα έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{2}{x^3} \frac{dy}{dt} - \frac{1}{x^3} \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{2}{x^3} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{x^3} \frac{d^3 y}{dx^3}$$

και η δοθείσα εξίσωση γίνεται

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - y = 0 \quad . \qquad (*)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (*) έχει ρίζες τις 1, ±i και άρα η γενική λύση της (*) είναι η

$$y = c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t \quad .$$

Επανερχόμενοι στην αρχική μεταβλητή x, βλέπουμε ότι η γενική λύση της δοθείσης εξίσωσης είναι η

$$y = c_1 x + c_2 \cos(\log x) + c_3 \sin(\log x) \, .$$

2.5 Μη Ομογενείς Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις

Θεώρημα 2.5.1

Θεωρούμε τη γραμμική Δ.Ε.

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_{n-1}\frac{dy}{dx} + P_n y = f \; , \qquad (1)$$

όπου οι συναρτήσεις $P_1, P_2, \ldots, P_n, f$ είναι συνεχείς επί ενός ανοικτού διαστήματος I της πραγματικής ευθείας. Αν y_μ είναι μια μερική λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_n y = 0 \; , \qquad (2)$$

τότε μια συνάρτηση y είναι μια λύση της (1) στο I αν, και μόνον αν, η $y - y_\mu$ είναι μια λύση της (2).

Απόδειξη

Αν θέσουμε $z = y - y_\mu$, τότε $\dfrac{d^k z}{dx^k} = \dfrac{d^k y}{dx^k} - \dfrac{d^k y_\mu}{dx^{k-1}}$, για $k=1, 2, \ldots, n$.

Άρα

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_n y - f = \left[\frac{d^n z}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + P_n z\right] +$$

$$+ \left[\frac{d^n y_\mu}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_n y_\mu - f\right] = \frac{d^n z}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + P_n z + 0 .$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η y είναι λύση της (1) αν, και μόνον αν, η $z = y - \mu_\mu$ είναι λύση της (2).

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.5.1 και το Θεώρημα 2.2.2, αν y_μ είναι μια μερική λύση της (1) και αν $y_1, \ldots, y_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς (2), τότε η γενική λύση της (1) είναι η

$$y = y_\mu + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + y_n \quad (c_1, c_2, \ldots, c_n \text{ αυθαίρετες σταθερές}).$$

Εύρεση μιας μερικής λύσης της (1)

Το ακόλουθο θεώρημα μας διευκολύνει πολλές φορές στην εύρεση μιας μερικής λύσης μιας μη ομογενούς γραμμικής εξίσωσης.

Θεώρημα 2.5.2

Έστω

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_n y = f_1 + f_2 + \ldots + f_m \qquad (3)$$

μια γραμμική μη ομογενής εξίσωση. Αν $y_{1\mu}, y_{2\mu}, \ldots, y_{n\mu}$ είναι μερικές λύσεις των εξισώσεων

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + P_n y = f_1$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + P_n y = f_m$$

αντιστοίχως, τότε η $y_\mu = y_{1\mu} + \dots + y_{m\mu}$ είναι μια μερική λύση της (3).

Απόδειξη

Προκύπτει εύκολα από το γεγονός ότι

$$\frac{d^k}{dx^k}(y_\mu) = \frac{d^k y_{1\mu}}{dx^k} + \dots + \frac{d^k y_{m\mu}}{dx^k} \quad , \quad k = 1, 2, \dots, n \ .$$

2.6 Μέθοδος των Αγνώστων Σταθερών

Σ' αυτήν την παράγραφο θα αναφέρουμε ορισμένα παραδείγματα εύρεσης μιας μερικής λύσης της εξίσωσης

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n y = f \ ,$$

όπου $a_1, a_2, \dots, a_n$ είναι σταθεροί και f ένας γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων των τύπων

$$x^m, \ x^m e^{ax}, x^m e^{ax} \cos bx, \ x^m e^{ax} \sin bx \ .$$

Παράδειγμα 1

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n y = P(x) \ , \qquad (2)$$

όπου $P(x)$ ένα πολυώνυμο m-βαθμού. Σ' αυτήν την περίπτωση μπορούμε να βρούμε μια μερική λύση της μορφής

$$y = c_0 + c_1 x + \dots + c_m x^m \ , \quad c_i \in \mathbb{R} \ , \ \text{αν} \quad a_n \neq 0 \ .$$

Αν $a_n = a_{n-1} = \dots = a_{n-k} = 0$ και $a_{n-k-1} \neq 0$, τότε ζητούμε μια μερική λύση της μορφής

$$y^{(k+1)} = c_0 + c_1 x + \dots + c_m x^m \ .$$

Σαν παράδειγμα, ας πάρουμε τη Δ.Ε.

$$y'' + y' = 3x^2 \ .$$

Εδώ μπορούμε να βρούμε μια μερική λύση y τέτοια ώστε $y' = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$. Θα έχουμε $y'' = c_1 + 2c_2 x$. Αντικαθιστώντας στη δοθείσα εξίσωση λαμβάνουμε

$$c_1 + 2c_2 x + c_0 + c_1 x + c_2 x^2 = 3x^2 \ \Rightarrow \ c_1 + c_0 = 0 \ , \ 2c_2 + c_1 = 0 \ , \ c_2 = 3 \ \Rightarrow$$
$$c_1 = -6 \ , \ c_0 = 6 \ , \ c_2 = 3 \ .$$

Συνεπώς θα είναι $y' = 6 - 6x + 3x^2$ και άρα μπορούμε να πάρουμε ως μερική λύση την $y = 6x - 3x^2 + x^3$.

Παράδειγμα 2

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n y = P(x) e^{ax} \ , \qquad (3)$$

όπου $P(x)$ είναι ένα πολυώνυμο του x και a σταθερά. Σ' αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιούμε ως νέα άγνωστη συνάρτηση την $z = ye^{-ax}$ και η δοθείσα Δ.Ε. μετατρέπεται σε εξίσωση της μορφής

$$\frac{d^n z}{dx^n} + b_1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \dots + b_n z = P(x) \ ,$$

όπου $b_1, \dots, b_n$ είναι σταθεροί αριθμοί και επομένως αναγόμαστε σε εξίσωση της μορφής (2).

Σαν παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη Δ.Ε.

$$y'' - y' - 2y = -6xe^{-x} \ .$$

Χρησιμοποιούμε ως νέα συνάρτηση τη $z = ye^{x}$ θα έχουμε $y = ze^{-x}$, $y' = -e^{-x} z + e^{-x} \frac{dz}{dx}$,

$$y'' = e^{-x}\left(\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dz}{dx}\right) - e^{-x}\left(\frac{dz}{dx} - z\right) = e^{-x}\left(\frac{d^2z}{dx^2} - 2\frac{dz}{dx} + z\right) .$$

Αντικαθιστώντας στη δοθείσα εξίσωση, λαμβάνουμε

$$e^{-x}\left(\frac{d^2z}{dx^2} - 2\frac{dz}{dx} + z\right) - e^{-x}\left(\frac{dz}{dx} - z\right) - 2e^{-x} z = -6xe^{-x} \ .$$

Διαιρώντας τα δύο μέλη της τελευταίας εξίσωσης με e^{-x}, παίρνουμε

$$\frac{d^2z}{dx^2} - 3\frac{dz}{dx} = -6x \ . \qquad (*)$$

Για την εξίσωση (*) θα ζητήσουμε μια μερική λύση της μορφής

$z' = ax+b$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Από την εξίσωση (*) προκύπτει ότι πρέπει να είναι $a - 3(ax+b) = -6x \Rightarrow a = 2,\ b = \frac{2}{3}$. Άρα $z' = 2x + \frac{2}{3}$ και μια μερική λύση της (*) είναι η $z_\mu = x^2 + \frac{2}{3}x$. Η γενική λύση της $z'' - 3z' = 0$ είναι η $z = c_1 + c_2 e^{3x}$. Επομένως η γενική λύση της (*) είναι η $z = c_1 + c_2 e^{3x} + x^2 + \frac{2}{3}x$ και η γενική λύση της δοθείσης εξίσωσης είναι η

$$y = e^{-x}\left(c_1 + c_2 e^{3x} + x^2 + \frac{2}{3}x\right) = \left(c_1 + \frac{2}{3}x + x^2\right)e^{-x} + c_2 e^{2x}.$$

Παρατήρηση: Μπορούμε να βρούμε μια μερική λύση της (3) χωρίς να χρειασθεί να κάνουμε προηγουμένως την αλλαγή $y = z\,e^{ax}$. Ως μια τέτοια λύση μπορούμε να πάρουμε μια λύση της μορφής:

i) $y = q(x)\,e^{ax}$, όπου $q(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού ίσο με το βαθμό του $P(x)$, αν το a δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης.

ii) $y = x^k q(x)\,e^{ax}$, όπου $q(x)$ πολυώνυμο βαθμού ίσο με το βαθμό του πολυωνύμου $P(x)$, αν το a είναι ρίζα τάξης k της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

Ας θεωρήσουμε π.χ. τη Δ.Ε.

$$y'' - y' - 2y = -6xe^{-x},$$

την οποία λύσαμε παραπάνω. Εδώ το -1 είναι ρίζα πρώτης τάξης της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ και άρα μπορούμε να βρούμε μια μερική λύση της μορφής

$$y_\mu(x) = x(ax+b)e^{-x}.$$

Παράδειγμα 3

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n y = P_1(x)\cos ax + P_2(x)\sin ax \ , \qquad (4)$$

όπου P_1, P_2 πολυώνυμα.

Εδώ μπορούμε να βρούμε μια μερική λύση της μορφής:

i) $y = q_1(x)\cos ax + q_2(x)\sin ax$, όπου q_1, q_2 πολυώνυμα βαθμού όχι μεγαλύτερου από το μέγιστο των βαθμών των P_1, P_2, αν το ai δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης.

ii) $y = x^k [q_1(x)\cos ax + q_2(x)\sin ax]$, όπου q_1, q_2 είναι πολυώνυμα με βαθμό όχι μεγαλύτερο από το μέγιστο των βαθμών των P_1, P_2, αν το ai είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης τάξης k.

Ας θεωρήσουμε π.χ. την εξίσωση

$$y'' + y' = 4\sin x \ . \qquad (*)$$

Επειδή το i δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\lambda^2 + \lambda = 0$, μπορούμε να βρούμε μια μερική λύση της μορφής $y = a\cos x + b\sin x$. Για μια τέτοια λύση θα είναι

$$y' = -a\sin x + b\cos x \ , \quad y'' = -a\cos x - b\sin x \ .$$

Αντικαθιστώντας στην (*) έχουμε

$$-a\cos x - b\sin x - a\sin x + b\cos x = 4\sin x \quad \Rightarrow$$
$$-a + b = 0 \ , \ -a - b = 4 \quad \Rightarrow \quad a = b = -2 \ .$$

Ώστε μια μερική λύση είναι η $y = -2$ (ημx+συνx). Επομένως η γενική λύση της (*) είναι η

$$y = -2(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) + c_1 + c_2 e^{-x} .$$

Παράδειγμα 4

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n y = e^{ax} P_1(x)\cos bx + e^{ax} P_2(x)\sin bx , \qquad (5)$$

όπου P_1, P_2 είναι πολυώνυμα.

Στην περίπτωση της εξίσωσης (5), αν χρησιμοποιήσουμε ως νέα άγνωστη συνάρτηση τη $z = ye^{-ax}$, τότε η (5) μετασχηματίζεται σε μια εξίσωση της μορφής (4).

Μπορούμε όμως να βρούμε απ' ευθείας μια μερική λύση (χωρίς προηγουμένως να κάνουμε την αλλαγή $y = ze^{ax}$) ως εξής:

i) Αν $a+ib$ δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης, τότε μπορούμε να βρούμε μια μερική λύση για την (3) της μορφής:

$$y(x) = e^{ax} [q_1(x)\cos bx + q_2(x)\sin bx] ,$$

όπου q_1, q_2 είναι πολυώνυμα του x βαθμού όχι μεγαλύτερο από το μέγιστο των βαθμών των P_1, P_2 .

ii) Αν το $a+ib$ είναι ρίζα τάξης k της χαρακτηριστικής εξίσωσης της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης τότε μπορούμε να βρούμε μια μερική λύση της μορφής:

$$y(x) = x^k e^{ax} [q_1(x)\cos bx + q_2(x)\sin bx] ,$$

όπου q_1, q_2 είναι πολυώνυμα βαθμού όχι μεγαλύτερου από το μέγιστο των βαθμών των P_1, P_2 .

Σαν παράδειγμα θα βρούμε μια μερική λύση της εξίσωσης

$$y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x}\cos 2x\ .$$

Ο αριθμός $-1+2i$ είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\lambda^2+2\lambda+5=0$. Άρα μπορούμε να βρούμε μια μερική λύση της μορφής:

$$y = xe^{-x}\,[a\cos 2x + b\sin 2x]\ .$$

Για μια τέτοια λύση έχουμε (μετά τις πράξεις)

$$y' = e^{-x}\,[(a - ax + 2bx)\text{συν}2x + (b - bx - 2ax)\text{ημ}2x]$$

$$y'' = [(4b - 2a - 4bx - 3ax)\text{συν}2x + (-4a - 2b + 4ax - 3bx)]e^{-x}\ .$$

Αντικαθιστώντας στην (*) παίρνουμε ότι πρέπει να είναι

$$\left.\begin{array}{l} 4b - 2a - 4bx - 3ax + 2a - 2ax + 4bx + 5ax = 4 \\ -4a - 2b + 4ax - 3bx + 2b - 2bx - 4ax + 5bx = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow\ b=1 \\ \Rightarrow\ a=0 \end{array}$$

Άρα η συνάρτηση $y = xe^{-x}\sin 2x$ είναι μια μερική λύση της (*).

2.7 Μέθοδος της Μεταβολής των Σταθερών

Έστω η γραμμική μη ομογενής εξίσωση

$$P_0\frac{d^ny}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + P_ny = f\ . \qquad (1)$$

όπου οι συναρτήσεις $P_0, P_1, \dots, P_n, f$ είναι συνεχείς επί ενός ανοικτού διαστήματος I της πραγματικής ευθείας. Έστω $y_1, y_2, \dots, y_n$ n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενής εξίσωσης

$$P_0\frac{d^ny}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + P_ny = 0\ .$$

Στη μέθοδο της μεταβολής των σταθερών προσπαθούμε να βρούμε μια μερική λύση της (1) της μορφής

$$y = z_1 y_1 + z_2 y_2 + \dots + z_n y_n \,, \tag{2}$$

όπου $z_1, z_2, \dots, z_n$ είναι συναρτήσεις του x τις οποίες πρέπει να υπολογίσουμε. Αν βρούμε τις n παραγώγους της (2) και αντικαταστήσουμε στην (1), προκύπτει μια σχέση μεταξύ των $z_1, z_2, \dots, z_n$. Για να υπολογίσουμε τα $z_1, \dots, z_n$ θα τα υποχρεώσουμε να πληρούν ακόμη n-1 σχέσεις. Παραγωγίζοντας την (2) παίρνουμε

$$y' = (z_1' y_1 + z_2' y_2 + \dots + z_n' y_n) + (z_1 y_1' + z_2 y_2' + \dots + z_n y_n') \,.$$

Μια συνθήκη την οποίας επιβάλλουμε είναι η

$$z_1' y_1 + z_2' y_2 + \dots + z_n' y_n = 0 \,.$$

Συνεπώς θα έχουμε

$$y' = z_1 1 y_1' + z_2 y_2' + \dots + z_n y_n' \,.$$

Παίρνοντας τη δεύτερη παράγωγο της y, λαμβάνουμε

$$y'' = (z_1' y_1' + z_2' y_2' + \dots + z_n' y_n') + (z_1 y_1'' + z_2 y_2'' + \dots + z_n y_n'') \,.$$

Μια δεύτερη συνθήκη που επιβάλλουμε στα $z_1, \dots, z_n$ είναι η

$$z_1' y_1'' + z_2' y_2'' + \dots + z_n' y_n'' = 0 \,,$$

οπότε έχουμε

$$y'' = z_1 y_1'' + z_2 y_2'' + \dots + z_n y_n'' \,.$$

Συνεχίζοντας n-1 φορές, επιβάλλουμε στα $z_1, \ldots, z_n$ τις ακόλουθες n-1 σχέσεις

$$\left.\begin{array}{l} z_1'y_1 + z_2'y_2 + \ldots + z_n'y_n = 0 \\ z_1'y_1' + z_2'y_2' + \ldots + z_n'y_n' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_1'y_1^{(n-2)} + z_2'y_2^{(n-2)} + \ldots + z_n'y_n^{(n-2)} = 0 \end{array}\right\} . \qquad (3)$$

Αν οι συναρτήσεις $z_1, \ldots, z_n$ πληρούν τις (3), τότε έχουμε

$$y' = z_1y_1' + z_2y_2' + \ldots + z_ny_n'$$

$$y'' = z_1y_2'' + z_2y_2'' + \ldots + z_ny_n''$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(n-1)} = z_1y_1^{(n-1)} + z_1y_1^{(n-1)} + \ldots + z_1y_1^{(n-1)}$$

$$y^{(n)} = z_1y_1^{(n)} + \ldots + z_ny_n^{(n)} + [z_1'y_1^{(n-1)} + \ldots + z_n'y_n^{(n-1)}] .$$

Αντικαθιστώντας στην (1), λαμβάνουμε

$$P_o\,[z_1y_1^{(n)} + \ldots + z_ny_n^{(n)} + z_1'y_1^{(n-1)} + \ldots + z_n'y_n^{(n-1)}] +$$
$$+ [z_1y_1^{(n-1)} + \ldots + z_ny_n^{(n-1)}]\,P_1 + \ldots + [z_1y_1 + \ldots + z_ny_n]P_n = f$$

ή

$$z_1(P_oy_1^{(n)} + P_1y_1^{(n-1)} + \ldots + P_ny_1) + z_2(P_oy_2^{(n)} + \ldots + P_ny_2) +$$
$$+ \ldots + z_n(P_oy_n^{(n)} + \ldots + P_ny_n) + P_o(z_1'\,y_1^{(n-1)} + \ldots + z_n'y_n^{(n-1)}) = f .$$

Επειδή οι $y_1, \dots, y_n$ είναι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης, λαμβάνουμε

$$z'_1 y_1^{(n-1)} + z'_2 y_2^{(n-1)} + \dots + z'_n y_n^{(n-1)} = \frac{f}{P_0} . \tag{4}$$

Ώστε οι $z_1', z_2', \dots, z_n'$ είναι λύσεις του συστήματος των n εξισώσεων (3). (4). Η ορίζουσα του συστήματος είναι διάφορος του μηδενός διότι οι λύσεις $y_1, \dots, y_n$ της ομογενούς εξίσωσης είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Λύνουμε το σύστημα αυτό ως προς $z_1', \dots, z_n'$ και κατόπιν βρίσκουμε τα $z_1, \dots, z_n$, οπότε η $y = z_1 y_1 + \dots + z_n y_n$ είναι μια μερική λύση της (1).

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε.

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} . \tag{*}$$

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντιστοίχου ομογενούς είναι η $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, που έχει το 1 ως διπλή ρίζα. Άρα οι συναρτήσεις $y_1 = e^x$ και $y_2 = xe^x$ αποτελούν ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων για την ομογενή εξίσωση θα ζητήσουμε μια μερική λύση της (*) της μορφής

$$y = y_1 z_1 + y_2 z_2 = z_1 e^x + x\, z_2\, e^x ,$$

όπου τα z_1, z_2 πληρούν το σύστημα

$$z_1' e^x + z_2' x\, e^x = 0$$

$$z_1' e^x + z_2'(x\, e^x + e^x) = \frac{e^x}{x} .$$

Λύνοντας το σύστημα αυτό ως προς z_1', z_2' παίρνουμε $z_1' = -1$, $z_2' = \frac{1}{x}$.

Μπορούμε επομένως να πάρουμε

$$z_1 = -x, \ z_2 = \log|x| \quad \text{και άρα η} \quad y_\mu = -x\, e^x + x \log|x|\, e^x$$

είναι μια μερική λύση της (x). Η γενική λύση της (*) είναι η

$$y = (c_1 - x)e^x + (c_2 + \log|x|)\, x\, e^x =$$
$$= (c_1 + (c_2 - 1)x + x\log|x|)\, e^x \qquad (c_1, c_2 \ \text{αυθαίρετες σταθερές}).$$

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε.

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3 e^x \qquad \text{(a)}$$

στο διάστημα $(0, \infty)$.

Λύση

Θεωρούμε την αντίστοιχο ομογενή

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \ . \qquad \text{(b)}$$

Λαμβάνοντας ως νέα ανεξάρτητο μεταβλητή την $t = \log x$, έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

και η (b) γίνεται

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0 \qquad (c)$$

οι συναρτήσεις e^{2t} και e^{t} είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (c) και άρα οι συναρτήσεις $y_1 = x^2$ και $y_2 = x$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (b). Θα ζητήσουμε μια μερική λύση της (a) της μορφής $y_\mu = x^2 z_1 + x\, z_2$, όπου οι συναρτήσεις z_1, z_2 πληρούν το σύστημα

$$x^2 z_1' + x z_2' = 0$$

$$2x z_1' + z_2' = \frac{x^3 e^x}{x^2} = x e^x .$$

Λύνοντας το τελευταίο σύστημα ως προς z_1', z_2' παίρνουμε

$$z_1' = e^x , \quad z_2' = - x e^x .$$

Επομένως μπορούμε να πάρουμε

$$z_1 = \int e^x\, dx = e^x , \quad z_2 = -\int x e^x\, dx = - x e^x + e^x .$$

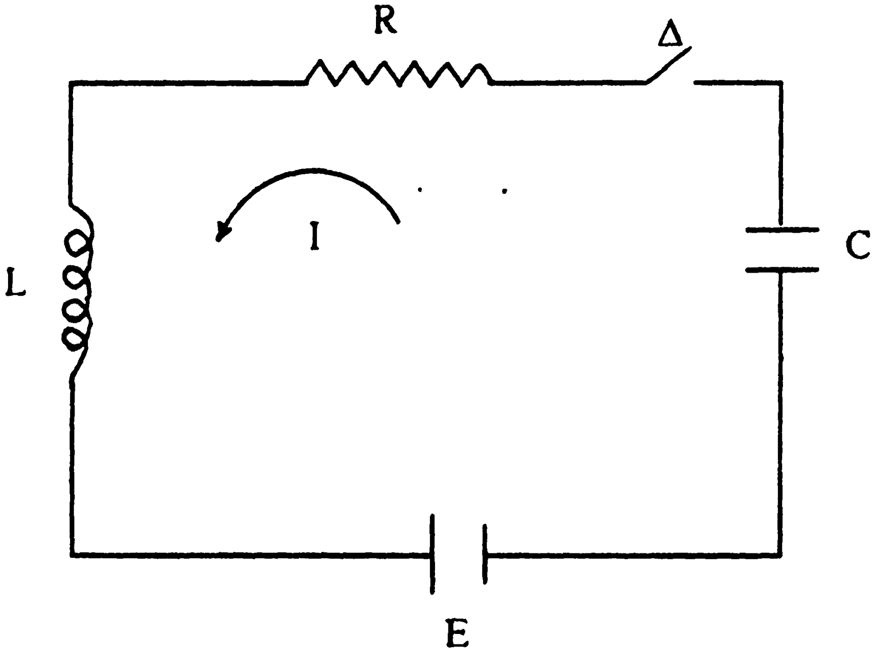
Άρα η $y_\mu = x^2 e^x + (- x e^x + e^x) x = x e^x$ είναι μια μερική λύση της (c). Η ζητούμενη γενική λύση είναι η

$$y = c_1 x^2 + c_2 x + x e^x \qquad (c_1, c_2 \text{ αυθαίρετες σταθερές}) .$$

2.8 Ηλεκτρικά Κυκλώματα

Θεωρούμε ένα απλό ηλεκτρικό κύκλωμα που περιλαμβάνει σε σειρά μια αντίσταση R, έναν πυκνωτή χωρητικότητας C, ένα πηνίο αυτεπαγωγής L και μια ηλεκτρική πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης E.

Σύμφωνα μ' ένα νόμο Φυσικής του Kirkhoff, το άθροισμα των πτώσεων δυναμικού κατά μία ορισμένη κατεύθυνση, γύρω από ένα κλειστό κύκλωμα είναι μηδέν. Αν I είναι η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα και Q το φορτίο του πυκνωτή, τότε:



i) Η πτώση δυναμικού κατά μήκος της αντίστασης R είναι RI .

ii) Η πτώση δυναμικού κατά μήκος του πηνίου είνια $L\dfrac{dI}{dt}$.

iii) Η πτώση δυναμικού κατά μήκος του πυκνωτή είναι $\dfrac{Q}{C}$.

Αν τώρα κλείσουμε το διακόπτη Δ, τότε το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα. Αν $I = I(t)$ είναι η ένταση του ρεύματος και $Q = Q(t)$ το φορτίο του πυκνωτή τη χρονική στιγμή t, τότε έχουμε τη Δ.Ε.

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} - E = 0 \ . \qquad (*)$$

Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της (*) ως προς t, παίρνουμε τη D.E.

$$L\frac{d^2I}{dt} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt} \quad . \tag{1}$$

Θα λύσουμε τη Δ.Ε. (1) στην ειδική περίπτωση που $E = E_o$ (σταθερά). Η (1) γίνεται

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = 0 \quad . \tag{2}$$

Υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:

Περίπτωση 1η: $\quad R - \frac{4L}{C} > 0$.

Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0$$

είναι οι

$$\lambda_1 = \frac{-R + \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} < 0 \quad \text{και} \quad \lambda_2 = \frac{-R - \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} < 0 \ .$$

Αν θέσουμε $\alpha = -\lambda_1$ και $\beta = -\lambda_2$, τότε

$$I(t) = c_1 e^{-\alpha t} + c_2 e^{-\beta t} \ .$$

Η (*) για t=0 δίνει $I'(0) = \frac{E_o}{L}$. Επειδή $I'(t) = -\alpha c_1 e^{-\alpha t} - \beta c_2 e^{-\beta t}$, θα έχουμε

$$I'(0) = 0 = c_1 + c_2$$
$$I'(0) = \frac{E_o}{L} = -\alpha c_1 - \beta c_2 \ .$$

Λύνοντας ως προς c_1, c_2 παίρνουμε

$$c_1 = \frac{E_0}{(R^2\text{-}4L/C)^{1/2}} \quad , \quad c_2 = -\frac{E_0}{(R^2\text{-}4L/C)^{1/2}}$$

και άρα

$$I(t) = \frac{E_0}{(R^2\text{-}4L/C)^{1/2}} [\, e^{-\alpha t} - e^{-\beta t} \,] \; .$$

Επειδή $\alpha, \beta > 0$ προκύπτει ότι $\lim_{t \to \infty} I(t) = 0$.

Περίπτωση 2η: $R^2 = \frac{4L}{C}$.

Σ' αυτή την περίπτωση η χαρακτηριστική εξίσωση της (2) έχει μια διπλή ρίζα την $\lambda = -\frac{R}{2L}$ και άρα

$$I(t) = e^{\frac{-R}{2L}t} \; [c_1 + tc_2]$$

είναι $0 = I(0) = c_1$. Επίσης, επειδή

$$I'(t) = \frac{-R}{2L} \, e^{\frac{-R}{2L}t} \; [c_1 + tc_2] + c_2 \, e^{\frac{-R}{2L}t} \; ,$$

θα είναι

$$\frac{E_0}{L} = I'(0) = -\frac{c_1 R}{2L} + c_2 = c_2$$

και επομένως

$$I(t) = t \, \frac{E_0}{L} \, e^{\frac{-R}{2L}t}$$

και σ' αυτή την περίπτωση έχουμε $\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$.

Περίπτωση 3η: $R^2 - \frac{4L}{C} = -k^2 < 0$.

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (2) γράφεται

$$(\lambda + \frac{R}{2L})^2 + \frac{k^2}{4L^2} = 0$$

με ρίζες τις

$$\lambda = -\frac{R}{2L} \pm \frac{k}{2L} i \ .$$

Άρα

$$I(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} (c_1 \cos\frac{k}{2L} + c_2 \sin\frac{k}{2L}t)$$

θα είναι

$$0 = I(0) = c_1 \ .$$

Επίσης, επειδή $I'(t) = -\frac{R}{2L} e^{-\frac{R}{2L}} [c_1 \cos\frac{k}{2L}t + c_2 \sin\frac{k}{2L}t] +$

$$+\frac{k}{2L} e^{-\frac{R}{2L}t} (-c_1 \sin\frac{k}{2L}t + c_2 \cos\frac{k}{2L}t) \ ,$$

είναι $\frac{E_0}{L} = I'(0) = \frac{kc_2}{2L} \Rightarrow c_2 = \frac{2E_0}{k}$. Συνεπώς

$$I(t) = \frac{2E_0}{k} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin\frac{k}{2L}t \ .$$

και εδώ για $t \to \infty$ έχουμε $I(t) \to 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων είναι ένα πεπερασμένο πλήθος εξισώσεων, που συνδέουν μια ανεξάρτητο μεταβλητή t, συναρτήσεις x_1, x_2, ..., x_n της t και ένα πεπερασμένο αριθμό παραγώγων ως προς t των συναρτήσεων αυτών. Μια λύση ενός τέτοιου συστήματος είναι μια διατεταγμένη n-άδα συναρτήσεων, οι οποίες ορίζονται σ' ένα ανοικτό διάστημα της πραγματικής ευθείας και πληρούν το σύστημα στο διάστημα αυτό π.χ. το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^3x_1}{dt^3} - \frac{dx_1}{dt} - x_1\frac{dx_2}{dt} = \sin t \\ &\frac{d^2x_1}{dt^2} - x_2\frac{dx_1}{dt} - \left(\frac{d^2x_1}{dt^2}\right)^2 = e^t \cos t \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

είναι ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Μια λύση του συστήματος (*) είναι διατεταγμένο ζεύγος συναρτήσεων (x_1, x_2) οι οποίες ορίζονται επί ενός ανοικτού διαστήματος και πληρούν το σύστημα.

3.1 Συστήματα 1ης Τάξης

Ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων ως προς τις άγνωστες συναρτήσεις $x_1, x_2, ..., x_n$ το οποίο είναι της μορφής

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\
&\dots\dots\dots\dots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, \dots, x_n)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

λέγεται κανονικό σύστημα πρώτης τάξης. Πολλά συστήματα, που δεν είναι της μορφής (1), μπορούν να ξαναγραφούν μ' αυτή τη μορφή. Ας θεωρήσουμε π.χ. το σύστημα

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^3x_1}{dt^3} - 2x_1 \frac{dx_2}{dt} + x_2^2 \frac{dx_1}{dt} = e^t \\
&\frac{d^2x_2}{dt^2} - x_2 \frac{dx_1}{dt} = \cos t \ .
\end{aligned}
$$

Θέτουμε $u_1 = x_1$, $u_2 = \frac{dx_1}{dt}$, $u_3 = \frac{d^2x_1}{dt^2}$, $u_4 = x_2$, $u_5 = \frac{dx_2}{dt}$. Το δοθέν σύστημα λαμβάνει τη μορφή

$$
\begin{aligned}
\frac{du_1}{dt} &= u_2 \\
\frac{du_2}{dt} &= u_3 \\
\frac{du_3}{dt} &= 2u_1 u_5 - u_4^2 u_2 + e^t \\
\frac{du_4}{dt} &= u_5 \\
\frac{du_5}{dt} &= u_4 u_2 + \cos t
\end{aligned}
$$

που είναι ένα κανονικό σύστημα πρώτης τάξης.

Η λύση ενός συστήματος της μορφής (1) ανάγεται πολλές φορές στη λύση μιας διαφορικής εξίσωσης n-τάξης με την ακόλουθη διαδικασία:

Υποθέτοντας ότι οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f_1}{\partial t}, \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n}$ υπάρχουν και παραγωγίζοντας την πρώτη των εξισώσεων (1) ως προς t, παίρνουμε

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} =$$

$$= \frac{\partial f_1}{\partial t} + f_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \ldots + f_n\frac{\partial f_1}{\partial x_n} = \sigma_2\,(t, x, \ldots, x_n)\ .$$

Παραγωγίζοντας εκ νέου, λαμβάνουμε

$$\frac{d^3x_1}{dt_3} = \sigma_3\,(t, x_1, \ldots, x_n)\ .$$

Συνεχίζοντας μέχρι την παράγωγο $\frac{d^nx_1}{dt^n}$, λαμβάνουμε ένα σύστημα της μορφής

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f\,(t, x_1, \ldots, x_n)\\
\frac{d^2x_1}{dt^2} &= \sigma_2\,(t, x_1, \ldots, x_n)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{d^nx_1}{dt^n} &= \sigma_n\,(t, x_1, \ldots, x_n)\ .
\end{aligned} \qquad (2)$$

Αν υποθέσουμε ότι μπορούμε να απαλείψουμε τις συναρτήσεις $x_2, \ldots, x_n$ από τις n-εξισώσεις του συστήματος (2), τότε παίρνουμε τελικά μια διαφορική εξίσωση n-τάξης της μορφής $\Phi(t, x_1, x'_1, \ldots, x_1^{(n)}) = 0$. Λύνουμε (αν είναι δυνατόν) την τελευταία εξίσωση ως προς x_1 και κατόπιν βρίσκουμε τα $x_2, x_3, \ldots, x_n$ από το σύστημα των εξισώσεων (2).

Παράδειγμα 1

Να λυθεί το σύστημα

$$\frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} - 3z = 0$$
$$\frac{dz}{dx} - 4y = e^x \ .$$

Λύση

Λύνοντας το σύστημα ως προς τις παραγώγους $\frac{dy}{dx}$ και $\frac{dz}{dx}$, παίρνουμε

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 4y + e^x + 3z \\ \frac{dz}{dx} &= 4y + e^x \end{aligned}\right. \qquad (3)$$

Παραγωγίζοντας την πρώτη εκ των εξισώσεων (3) ως προς x και αντικαθιστώντας την τιμή της $\frac{dz}{dx}$ από τη δεύτερη, παίρνουμε τη Δ.Ε.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} - 12y = 4e^x \ .$$

Η γενική λύση της εξίσωσης αυτής είναι η

$$y = C_1e^{6x} + C_2e^{-2x} - \frac{4}{15}e^x \ .$$

Από την πρώτη της (3), λαμβάνουμε

$$z = \frac{1}{3}\left[\frac{dy}{dx} - 4y - e^x \right] =$$
$$= \frac{1}{3}\left[6C_1e^{6x} - 2C_2e^{-2x} - \frac{4}{15}e^x - 4C_1e^{6x} - 4C_2e^{-2} + \frac{16}{15}e^x - e^x\right] =$$
$$= \frac{1}{3}\left[2C_1e^{6x} - 6C_2e^{-2x} - \frac{3}{15}e^x \right] = \frac{2}{3}C_1e^{6x} - 2Ce^{-2x} - \frac{1}{15}e^x .$$

Συνεπώς η γενική λύση του δοθέντος συστήματος είναι η

$$y = C_1e^{6x} + C_2e^{-2x} - \frac{4}{15}e^x ,\quad z = \frac{2}{3}C_1e^{6x} - 2C_2e^{-2x} - \frac{1}{15}e^x ,$$ όπου C_1, C_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Η μέθοδος την οποία αναφέραμε παραπάνω για τη λύση του συστήματος (1) συνίσταται εις την δια καταλλήλων παραγωγίσεων και απαλοιφών αναγωγή σε μια διαφορική εξίσωση μιας αγνώστου συναρτήσεως. Η ίδια μέθοδος μπορεί να εφαρμοσθεί και σε μερικά συστήματα τάξης ανώτερης της πρώτης.

Παράδειγμα 2

Θεωρούμε το σύστημα

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = -1$$
$$\frac{dy}{dt} + 2\frac{dx}{dt} - y = 1 - t + 2e^t .$$

Από τη δεύτερη των εξισώσεων λαμβάνουμε

$$\frac{dy}{dt} = y - \frac{2dx}{dt} + 1 - t + 2e^t .$$

Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στην πρώτη εξίσωση του συστήματος, παίρνουμε

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - y = -t + 2e^t . \qquad (*)$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία εξίσωση ως προς t και αντικαθιστώντας την τιμή της $\frac{dy}{dt}$, λαμβάνουμε

$$\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - y = -t + 4e^t . \qquad (**)$$

Απαλείφοντας το y μεταξύ των εξισώσεων (*) και (**) καταλήγουμε στη Δ.Ε.

$$\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{dx}{dt} = 2e^t .$$

Η γενική λύση της τελευταίας εξίσωσης είναι η

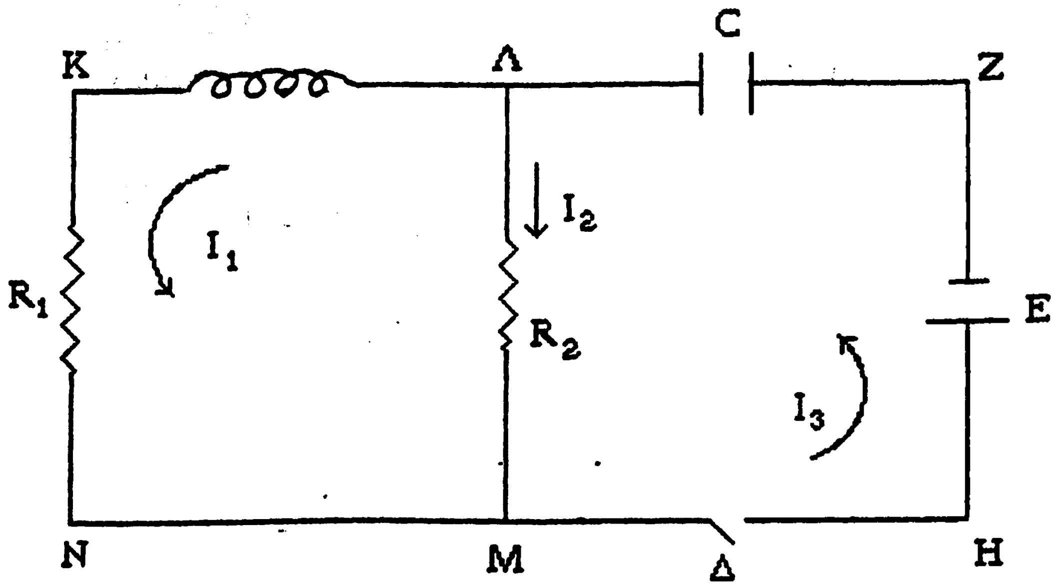
$$x = C_1 + C_2 \cos t + C_3 \sin t + e^t .$$

όπου C_1, C_2, C_3 είναι αυθαίρετες σταθερές.
Αντικαθιστώντας την τιμή του x στην (*) και λύνοντας ως προς y, παίρνουμε

$$y = t + (C_3 - C_2)\cos t - (C_2 + C_3)\sin t .$$

3.2 Ηλεκτρικά Κυκλώματα

Αν κλείσουμε το διακόπτη Δ, τότε τα κυκλώματα διαρρέονται από ρεύμα. Σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Kirkhoff στους βρόχους ΚΝΜL και ΛΜΗΖ, παίρνουμε



$$L\frac{dI_1}{dt} + R_1I_1 - R_2I_2 = 0$$

$$R_2I_3 - E + \frac{Q}{C} = 0 \qquad (Q \text{ το φορτίο του πυκνωτή}) .$$

Παραγωγίζοντας τη δεύτερη εξίσωση ως προς t, παίρνουμε το σύστημα

$$L\frac{dI_1}{dt} + R_1 I_1 - R_2(I_3 - I_1) = 0$$

$$R_2\frac{dI_3}{dt} + \frac{I_3}{C} = \frac{dE}{dt} .$$

Αν υποθέσουμε ότι $E = E_0$ (σταθερή), τότε το σύστημα γίνεται

$$L\frac{dI_1}{dt} + (R_1+R_2)I_1 - R_2I_3 = 0$$

$$R_2\frac{dI_3}{dt} + \frac{I_3}{C} = 0 . \qquad (1)$$

Παραγωγίζοντας την πρώτη των εξισώσεων (1) ως προς t και αντικαθιστώντας την τιμή του $\frac{dI_3}{dt}$ από τη δεύτερη, παίρνουμε τη Δ.Ε.

$$L\frac{d^2I_1}{dt^2} + (R_1 + R_2)\frac{dI_1}{dt} + \frac{I_3}{C} = 0 \ . \qquad (2)$$

Απαλείφοντας το I_3 μεταξύ της (2) και της πρώτης των (1) καταλήγουμε στη Δ.Ε.

$$L\frac{d^2I_1}{dt^2} + \left(R_1 + R_2 + \frac{L}{R_2C}\right)\frac{dI_1}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_2L} I_1 = 0 \ . \qquad (3)$$

Για τις αρχικές συνθήκες έχουμε $I_1(0) = 0$ και $I_3(0) = \frac{E_0}{R_2}$ (επειδή $Q(0)=0$). Λύνοντας τη Δ.Ε. (3) βρίσκουμε την $I_1(t)$ και στη συνέχεια την $I_3(t)$ (από την πρώτη εξίσωση του συστήματος (1)) και την $I_2(t) = I_3(t) - I_1(t)$. Ας πάρουμε π.χ. $R_2 = 1\Omega$, $R_1 = 2\Omega$, $E_0 = 12$Volt, $C = 3$F, $L = 3$H.
Η διαφορική εξίσωση (3) γίνεται

$$3\frac{d^2I_1}{dt^2} + 4\frac{dI_1}{dt} + I_1 = 0 \ . \qquad (4)$$

Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης $3\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$ είναι η

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-3}}{3} = \begin{cases} -1/3 \\ -1 \end{cases}$$

και άρα η γενική λύση της (4) είναι η

$$I_1(t) = C_1e^{-t/3} + C_2e^{-t} \ .$$

Επειδή $I'_1(t) = \frac{-1}{3}C_1e^{-t/3} - C_2e^{-t}$, προκύπτει ότι

$$I_3(t) = \frac{L}{R_2}\frac{dI_1}{dt} + \frac{R_1+R_2}{R_2}I_1 = 3\left(\frac{-1}{3}C_1e^{-t/3} - C_2e^{-t}\right) + 3(C_1e^{-t/3} + C_2e^{-t}) =$$
$$= -C_1e^{-t/3} - 3C_2e^{-t} + 3C_1e^{-t/3} + 3C_2e^{-t} = 2C_1e^{-t/3}.$$

Επειδή $I_1(0) = 0$ και $I_3(0) = \frac{E_0}{R_2} = 12A$, θα είναι $C_1+C_2 = 0$ και $2C_1 = 12 \Rightarrow C_1 = 6,\ C_2 = -6$.

Επομένως

$$I_1(t) = 6(e^{-t/3} - e^{-t}),\ I_3(t) = 12e^{-t/3} \quad \text{και}$$
$$I_2(t) = I_3(t) - I_1(t) = 6(e^{-t/3} + e^{-t}).$$

Τυπώθηκε στο Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο με δαπάνη του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Κ.Α. Πανεπιστημιακού Τυπογραφείου. ....

Διατίθεται και στο Βιβλιοπωλείο του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, Δομπόλη, 451 10 Ιωάννινα τηλ. 21801.

ΔΙΑΝΕΜΕΤΑΙ ΔΩΡΕΑΝ στους φοιτητές.