ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΧΡΙΣΤΟΣ ΑΝΑΣΤ. ΜΠΑΪΚΟΥΣΗΣ

Αναπληρωτής Καθηγητής

(Β' Μέρος)

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 1993

ΜΑΘΗΜΑΤΑ
ΑΛΓΕΒΡΑΣ
ΚΑΙ
ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΧΡΙΣΤΟΣ ΑΝΑΣΤ. ΜΠΑΪΚΟΥΣΗΣ

Αναπληρωτής Καθηγητής

(Β' Μέρος)

ΙΩΑΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1. Έννοιες-Ορισμοί.

Από τη Φυσική και τη Γεωμετρία μας είναι γνωστές οι έννοιες του ελεύθερου διανύσματος, του ολισθαίνοντος διανύσματος και του εφαρμοστού διανύσματος. Για παράδειγμα στη Γεωμετρία χρησιμοποιούμε ελεύθερα διανύσματα για την παράσταση μιας παράλληλης μεταφοράς. Επίσης στη Φυσική η ροπή ενός ζεύγους δυνάμεων παριστάνεται με ελεύθερο διάνυσμα. Χρησιμοποιούμε ολισθαίνον διάνυσμα για την παράσταση δυνάμεως που ενεργεί σε ένα υλικό σημείο, ενώ για την παράσταση της ταχύτητας ή της επιτάχυνσης ενός κινητού χρησιμοποιούμε εφαρμοστό διάνυσμα. Ορίζουμε τώρα τις έννοιες του ελεύθερου, του ολισθαίνοντος και του εφαρμοστού διανύσματος στον συνήθη τρισδιάστατο χώρο.

Θεωρούμε το σύνολο Δ όλων των προσανατολισμένων ευθυγράμμων τμημάτων του χώρου. Ένα ευθύγραμμο τμήμα θεωρείται <u>προσανατολισμένο</u> αν στα σημεία που καθορίζουν τα άκρα του έχουμε ορίσει μία διάταξη, δηλαδή έχουμε ορίσει πιό άκρο είναι η <u>αρχή</u> και πιό το <u>πέρας</u> του ευθυγράμμου τμήματος. Μια διάταξη των άκρων ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ ορίζει μία <u>φορά</u> στην ευθεία που κείται το ευθύγραμμο τμήμα, την φορά από το Α προς το Β και την αντίθετη αυτής από το Β προς το Α.

Στο σύνολο Δ δύο προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα λέμε ότι έχουν την ίδια <u>διεύθυνση</u> αν αυτά κείνται στην ίδια ευθεία ή σε παράλληλες ευθείες.

Στο σύνολο Δ ορίζουμε μία διμελή σχέση $R_1 \subseteq \Delta \times \Delta$ ως εξής:

Δύο στοιχεία του συνόλου Δ πληρούν την σχέση R_1 όταν έχουν

(i) ίσα μήκη

(ii) την αυτή διεύθυνση

(iii) την αυτή φορά

Η σχέση R_1 είναι προφανώς

(i) ανακλαστική (δηλαδή $\alpha R_1 \alpha \quad \forall \alpha \in \Delta$)

(ii) συμμετρική (δηλαδή $\alpha R_1 \beta \Longleftrightarrow \beta R_1 \alpha$)

(iii) μεταβατική (δηλαδή $\alpha R_1 \beta$ και $\beta R_1 \gamma \Longrightarrow \alpha R_1 \gamma$).

Έτσι η R_1 είναι σχέση ισοδυναμίας και επομένως χωρίζει το σύνολο Δ σε κλάσεις ισοδυναμίας. Καθε κλάση ισοδυναμίας του συνόλου Δ με τη σχέση R_1 λέγεται <u>ελεύθερο διάνυσμα</u> και περιέχει ως στοιχεία ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και κάθε άλλο που έχει το αυτό μήκος την αυτή διεύθυνση και την αυτή φορά. Στο εξής θα συμβολίζουμε με V το σύνολο των ελεύθερων διανυσμάτων, δηλαδή το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας του συνόλου Δ ως πρός τη σχέση ισοδυναμίας R_1. Συνήθως όταν μιλάμε για ελεύθερο διάνυσμα αντί να λαμβάνουμε όλη την κλάση ισοδυναμίας, λαμβάνουμε ένα στοιχείο αυτής ως αντιπρόσωπο της κλάσεως το οποίο συμβολίζουμε με $\bar{\alpha}$ ή $\overline{AB}$. Αν $\overline{AB}$ είναι ένας αντιπρόσωπος της κλάσεως το Α λέγεται <u>αρχή</u> και το Β <u>πέρας</u>.

Στο σύνολο Δ των προσανατολισμένων ευθυγράμμων τμημάτων ορίζουμε μία άλλη διμελή σχέση $R_2 \subset \Delta \times \Delta$ ώστε δύο στοιχεία του Δ πληρούν τη σχέση R_2 όταν:

(i) έχουν ίσα μήκη

(ii) κείνται στην ίδια ευθεία (φορέα)

(iii) έχουν την αυτή φορά

Ξανά η σχέση R_2 είναι σχέση ισοδυναμίας και συνεπώς χωρίζει το σύνολο Δ σε κλάσεις ισοδυναμίας. Κάθε κλάση ισοδυναμίας του συνόλου Δ με τη σχέση R_2 λέγεται <u>ολισθαίνον διάνυσμα</u> και περιέχει ως στοιχεία ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που κείται σε μία ευθεία ε και κάθε άλλο προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα της ε με το αυτό μήκος και την αυτή φορά. Και στα ολισθαίνοντα διανύσματα αντί να θεωρήσουμε όλη την κλάση θεωρούμε ένα στοιχείο αυτής ως αντιπρόσωπο της κλάσεως.

Εάν υποθέσουμε ότι ένα ολισθαίνον διάνυσμα έχει ως αρχή ένα ορισμένο σημείο Ο της ευθείας ε τότε το διάνυσμα αυτό λέγεται <u>εφαρμοστό διάνυσμα</u>.

Στα επόμενα θα ασχοληθούμε κυρίως με ελεύθερα διανύσματα τα οποία για απλούστευση θα λέμε διανύσματα.

<u>2.Βασικές έννοιες στα διανύσματα</u>.

(i)<u>Μέτρο</u> ή <u>μήκος διανύσματος</u> λέγεται η απόσταση των άκρων του διανύσματος. Το μήκος ενός διανύσματος συμβολίζεται με $|\overline{AB}|$ ή $|\bar{\alpha}|$.

(ii)<u>Μοναδιαίο διάνυσμα</u> λέγεται ένα διάνυσμα που έχει μέτρο ίσο με τη μονάδα. Αν $\bar{\alpha}\in V$ είναι τυχόν διάνυσμα $\bar{\alpha}\neq 0$ τότε με $\bar{\alpha}_0$ συμβολίζουμε το μοναδιαίο διάνυσμα που έχει τη διεύθυνση και τη φορά του $\bar{\alpha}$.

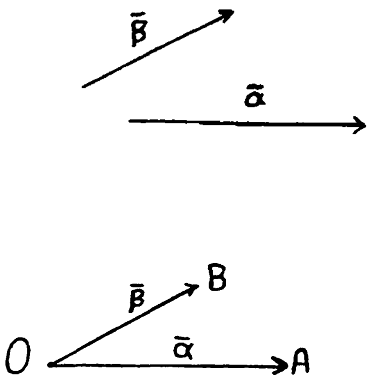
(iii)<u>Μηδενικό διάνυσμα</u> λέγεται ένα διάνυσμα με μέτρο ίσο με μηδέν και οποιαδήποτε διεύθυνση και φορά, συμβολίζεται με $\bar{0}$ ή απλούστερα 0.

Προφανώς μηδενικό διάνυσμα ορίζεται το ευθύγραμμο τμήμα που συμπίπτουν τα άκρα του, δηλαδή $\overline{AA}=0$.

(iv)<u>Αντίθετο διάνυσμα του $\bar{\alpha}$</u> λέγεται ένα διάνυσμα που έχει την αυτή διεύθυνση, το αυτό μέτρο και αντίθετη φορά με το $\bar{\alpha}$, συμβολίζεται με $-\bar{\alpha}$.

(v) <u>Γωνία δύο διανυσμάτων</u>. Δίνονται δύο διανύσματα $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$. Θεωρούμε τυχόν σημείο Ο και λαμβάνουμε τα διανύσματα $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ με κοινή αρχή το Ο, οπότε έχουμε $\overline{OA}=\bar{\alpha}$ και $\overline{OB}=\bar{\beta}$ (Σχ. 1). Καλούμε <u>γωνία</u>

των διανυσμάτων $\bar{\alpha}$ και $\bar{\beta}$ τη μικρότερη από τις δύο γωνίες που σχηματίζουν οι ημιευθείες ΟΑ και ΟΒ και συμβολίζουμε αυτή με $\measuredangle(\alpha, \beta)$ ή $(\widehat{\alpha, \beta})$.



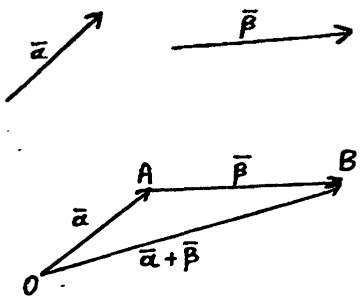
Σχ. 1

Αν δουλεύουμε στο επίπεδο, καλούμε προσανατολισμένη γωνία δύο διανυσμάτων $\bar{\alpha}$ και $\bar{\beta}$ με τη σειρά που δόθηκαν τη γωνία που διαγράφει η ημιευθεία ΟΑ όταν στρέφεται γύρω από το Ο στο επίπεδο που βρίσκονται τα $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ κατά τη θετική φορά (δηλαδή την αντίθετη της κινήσεως των δεικών του ρολογιού) μέχρις ότου συμπέσει με την ημιευθεία ΟΒ.

Προφανώς οι ορισμοί της γωνίας και της προσανατολισμένης γωνίας είναι ανεξάρτητοι από την εκλογή του σημείου Ο που πήραμε για αρχή. Επίσης αν καλέσουμε ω το μέτρο της προσανατολισμένης γωνίας των διανυσμάτων $\bar{\alpha}$ και $\bar{\beta}$ και φ το μέτρο της γωνίας αυτών, τότε είτε $\varphi=\omega$ είτε $\varphi=2\pi-\omega$.

3. Πράξεις στο σύνολο των διανυσμάτων.

3.1. Πρόσθεση διανυσμάτων. Στο σύνολο των διανυσμάτων V ορίζουμε μία εσωτερική πράξη που καλούμε πρόσθεση κατά τον εξής τρόπο. Όταν δίνονται δύο διανύμσατα $\bar{\alpha},\bar{\beta}\in V$ μπορούμε πάντα να βρούμε ένα τρίτο διάνυσμα που συμβολίζουμε με $\bar{\alpha}+\bar{\beta}$ και καλούμε άθροισμα των διανυσμάτων $\bar{\alpha}$ και $\bar{\beta}$ ως εξής: Θεωρούμε τυχόν σημείο Ο και λαμβάνουμε αντί των διανυσμάτων $\bar{\alpha}$ και $\bar{\beta}$ άλλους αντιπροσώπους αυτών έτσι ώστε $\overline{OA}=\bar{\alpha}$ και $\overline{AB}=\bar{\beta}$ (Σχ.2). Ορίζουμε το διάνυσμα $\overline{OB}$ ως άθροισμα των $\bar{\alpha}$ και $\bar{\beta}$, δηλαδή $\overline{OB}=\bar{\alpha}+\bar{\beta}$.



Σχ.2

Προφανώς το άθροισμα $\bar{\alpha}+\bar{\beta}$ ορίζεται μονοσήμαντα δηλαδή είναι ανεξάρτητο από την εκλογή του σημείου Ο.

Από τον ορισμό της προσθέσεως διανυσμάτων προκύπτουν άμεσα οι παρακάτω ιδιότητες για το άθροισμα. Για κάθε $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}\in V$ έχουμε ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που κείται σε μία ευθεία ε και κάθε άλλο προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα της ε με το αυτό μήκος και την αυτή φορά. Και στα ολισθαίνοντα διανύσματα αντί να θεωρήσουμε όλη την κλάση θεωρούμε ένα στοιχείο αυτής ως αντιπρόσωπο της κλάσεως.

Εάν υποθέσουμε ότι ένα ολισθαίνον διάνυσμα έχει ως αρχή ένα ορισμένο σημείο Ο της ευθείας ε τότε το διάνυσμα αυτό λέγεται <u>εφαρμοστό διάνυσμα</u>.

Στα επόμενα θα ασχοληθούμε κυρίως με ελεύθερα διανύσματα τα οποία για απλούστευση θα λέμε διανύσματα.

<u>2.Βασικές έννοιες στα διανύσματα</u>.

(i)<u>Μέτρο</u> ή <u>μήκος διανύσματος</u> λέγεται η απόσταση των άκρων του διανύσματος. Το μήκος ενός διανύσματος συμβολίζεται με $|\overline{AB}|$ ή $|\bar{\alpha}|$.

(ii)<u>Μοναδιαίο διάνυσμα</u> λέγεται ένα διάνυσμα που έχει μέτρο ίσο με τη μονάδα. Αν $\bar{\alpha}\in V$ είναι τυχόν διάνυσμα $\bar{\alpha}\neq 0$ τότε με $\bar{\alpha}_0$ συμβολίζουμε το μοναδιαίο διάνυσμα που έχει τη διεύθυνση και τη φορά του $\bar{\alpha}$.

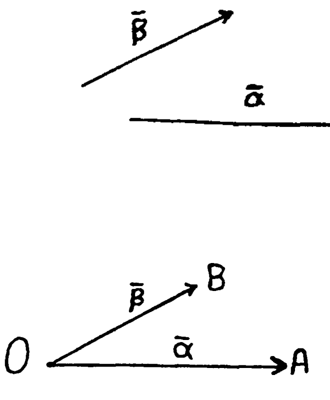
(iii)<u>Μηδενικό διάνυσμα</u> λέγεται ένα διάνυσμα με μέτρο ίσο με μηδέν και οποιαδήποτε διεύθυνση και φορά, συμβολίζεται με $\bar{0}$ ή απλούστερα Ο.

Προφανώς μηδενικό διάνυσμα ορίζεται το ευθύγραμμο τμήμα που συμπίπτουν τα άκρα του, δηλαδή $\overline{AA}=0$.

(iv)<u>Αντίθετο διάνυσμα του $\bar{\alpha}$</u> λέγεται ένα διάνυσμα που έχει την αυτή διεύθυνση, το αυτό μέτρο και αντίθετη φορά με το $\bar{\alpha}$, συμβολίζεται με $-\bar{\alpha}$.

(v) <u>Γωνία δύο διανυσμάτων</u>. Δίνονται δύο διανύσματα $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$. Θεωρούμε τυχόν σημείο Ο και λαμβάνουμε τα διανύσματα $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ με κοινή αρχή το Ο, οπότε έχουμε $\overline{OA}=\bar{\alpha}$ και $\overline{OB}=\bar{\beta}$ (Σχ. 1). Καλούμε <u>γωνία</u>

των διανυσμάτων $\bar{\alpha}$ και $\bar{\beta}$ τη μικρότερη από τις δύο γωνίες που σχηματίζουν οι ημιευθείες ΟΑ και ΟΒ και συμβολίζουμε αυτή με $\sphericalangle(\alpha, \beta)$ ή $(\widehat{\alpha, \beta})$.



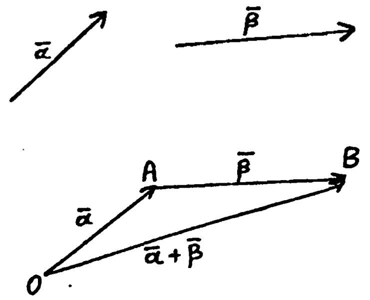
Σχ.1

Αν δουλεύουμε στο επίπεδο, καλούμε <u>προσανατολισμένη γωνία</u> δύο διανυσμάτων $\bar{\alpha}$ και $\bar{\beta}$ με τη σειρά που δόθηκαν τη γωνία που διαγράφει η ημιευθεία ΟΑ όταν στρέφεται γύρω από το Ο στο επίπεδο που βρίσκονται τα $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ κατά τη θετική φορά (δηλαδή την αντίθετη της κινήσεως των δεικών του ρολογιού) μέχρις ότου συμπέσει με την ημιευθεία ΟΒ.

Προφανώς οι ορισμοί της γωνίας και της προσανατολισμένης γωνίας είναι ανεξάρτητοι από την εκλογή του σημείου Ο που πήραμε για αρχή. Επίσης αν καλέσουμε ω το μέτρο της προσανατολισμένης γωνίας των διανυσμάτων $\bar{\alpha}$ και $\bar{\beta}$ και φ το μέτρο της γωνίας αυτών, τότε είτε $\varphi=\omega$ είτε $\varphi=2\pi-\omega$.

<u>3.Πράξεις στο σύνολο των διανυσμάτων</u>.

<u>3.1.Πρόσθεση διανυσμάτων</u>.Στο σύνολο των διανυσμάτων V ορίζουμε μία εσωτερική πράξη που καλούμε <u>πρόσθεση</u> κατά τον εξής τρόπο. Όταν δίνονται δύο διανύμσατα $\bar{\alpha},\bar{\beta}\in V$ μπορούμε πάντα να βρούμε ένα τρίτο διάνυσμα που συμβολίζουμε με $\bar{\alpha}+\bar{\beta}$ και καλούμε <u>άθροισμα</u> των διανυσμάτων $\bar{\alpha}$ και $\bar{\beta}$ ως εξής: Θεωρούμε τυχόν σημείο Ο και λαμβάνουμε αντί των διανυσμάτων $\bar{\alpha}$ και $\bar{\beta}$ άλλους αντιπροσώπους αυτών έτσι ώστε $\overline{OA}=\bar{\alpha}$ και $\overline{AB}=\bar{\beta}$ (Σχ.2). Ορίζουμε το διάνυσμα $\overline{OB}$ ως άθροισμα των $\bar{\alpha}$ και $\bar{\beta}$, δηλαδή $\overline{OB}=\bar{\alpha}+\bar{\beta}$.



Σχ.2

Προφανώς το άθροισμα $\bar{\alpha}+\bar{\beta}$ ορίζεται μονοσήμαντα δηλαδή είναι ανεξάρτητο από την εκλογή του σημείου Ο.

Από τον ορισμό της προσθέσεως διανυσμάτων προκύπτουν άμεσα οι παρακάτω ιδιότητες για το άθροισμα. Για κάθε $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}\in V$ έχουμε

(i) $\bar{\alpha}+\bar{\beta}=\bar{\beta}+\bar{\alpha}$

(ii) $(\bar{\alpha}+\bar{\beta})+\bar{\gamma}=\bar{\alpha}+(\bar{\beta}+\bar{\gamma})$

(iii) $\bar{\alpha}+\bar{0}=\bar{0}+\bar{\alpha}=\bar{\alpha}$

(iv) $\bar{\alpha}+(-\bar{\alpha})=\bar{0}$.

Παρατηρούμε ότι το σύνολο των διανυσμάτων V εφοδιασμένο με την πράξη (εσωτερικής συνθέσεως) της προσθέσεως "+" είναι Αβελιανή ομάδα.

<u>3.2.Διαφορά δύο διανυσμάτων</u>.Επειδή η διάδα (V,+) είναι ομάδα γιά κάθε $(\bar{\alpha},\bar{\beta})\in V\times V$ υπάρχει ένα και μόνο ένα διάνυσμα $\bar{x}\in V$ τέτοιο ώστε $\bar{\beta}+\bar{x}=\bar{\alpha}$. Από τη θεωρία ομάδων γνωρίζουμε επίσης ότι $\bar{x}=\bar{\alpha}+(-\bar{\beta})$. Το διάνυσμα $\bar{x}$ λέγεται <u>διαφορά</u> του $\bar{\beta}$ από το $\bar{\alpha}$ και γράφουμε $\bar{x}=\bar{\alpha}-\bar{\beta}$.

<u>3.3.Πολλαπλασιασμός διανύσματος με πραγματικό αριθμό</u>. Η πράξη του πολλαπλασιασμού ενός διανύσματος με ένα πραγματικό αριθμό μπορεί να οριστεί ως εξής. Για κάθε $\bar{\alpha}\in V$ και $\lambda\in R$ ορίζουμε ένα διάνυσμα $\bar{\beta}\in V$ τέτοιο ώστε:(i) το μέτρο του $\bar{\beta}$ να ισούται με την απόλυτο τιμή του λ επί το μέτρο του $\bar{\alpha}$, δηλδή $|\bar{\beta}|=|\lambda|\ |\bar{\alpha}|$. (ii) Το $\bar{\beta}$ να έχει ως διεύθυνση τη διεύθυνση του $\bar{\alpha}$ και (iii) Το $\bar{\beta}$ να έχει τη φορά του $\bar{\alpha}$ αν $\lambda > 0$, τη φορά του $-\bar{\alpha}$ αν $\lambda < 0$ και οποιουδήποτε αν $\lambda=0$.
Το διάνυσμα $\bar{\beta}$ λέγεται <u>γινόμενο</u> του διανύσματος $\bar{\alpha}$ επί τον πραγματικό αριθμό λ και γράφουμε $\bar{\beta}=\lambda\bar{\alpha}$. Προφανώς για κάθε $\bar{\alpha}\in V$ έχουμε $\bar{\alpha}=|\bar{\alpha}|\bar{\alpha}_0$.
Από τον ορισμό του γινομένου ενός διανύσματος με πραγματικό αριθμό προκύπτουν εύκολα οι παρακάτω ιδιότητες. Για κάθε $\bar{\alpha},\bar{\beta}\in V$ και $\lambda,\mu\in R$ έχουμε

1) $(\lambda\mu)\bar{\alpha} = \lambda(\mu\bar{\alpha}) = \mu(\lambda\bar{\alpha})$

2) $\lambda(\bar{\alpha}+\bar{\beta})= \lambda\bar{\alpha}+\lambda\bar{\beta}$

3) $(\lambda+\mu)\bar{\alpha}= \lambda\bar{\alpha}+\mu\bar{\alpha}$

4) $1\cdot\bar{\alpha} = \bar{\alpha}$

5) $(-1)\bar{\alpha} =-\bar{\alpha}$

6) $(\lambda\bar{\alpha}=0) \Longleftrightarrow$ (ή $\lambda=0$ ή $\bar{\alpha}=0$ ή και τα δύο).

4.Η έννοια του διανυσματικού χώρου.

Είδαμε ότι το σύνολο των διανυσμάτων V εφοδιασμένο με πράξη εσωτερικής συνθέσεως την πρόσθεση είναι Αβελιανή ομάδα, ενώ για τον πολλαπλασιασμό πραγματικού αριθμού με διάνυσμα ισχύουν οι παραπάνω ιδιότητες. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύνολο V αποτελεί διανυσματικό χώρο επί του σώματος R των πραγματικών αριθμών. Δηλαδή το σύνολο V καλείται διανυσματικός χώρος επί του σώματος R όταν για κάθε $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}\in V$ και $\lambda,\mu\in R$ έχουμε

1) $\bar{\alpha}+\bar{\beta} \in V$
2) $\bar{\alpha}+\bar{\beta} = \bar{\beta}+\bar{\alpha}$
3) $(\bar{\alpha}+\bar{\beta})+\bar{\gamma} = \bar{\alpha}+(\bar{\beta}+\bar{\gamma})$
4) $\bar{\alpha}+\bar{0} = \bar{\alpha}$
5) $\bar{\alpha}+(-\bar{\alpha}) = \bar{0}$

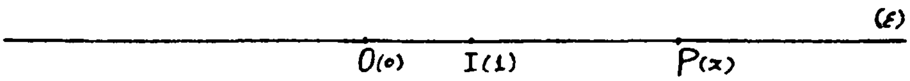
Επίσης

1) $\lambda\bar{\alpha} \in V$
2) $(\lambda+\mu)\bar{\alpha} = \lambda\bar{\alpha}+\mu\bar{\alpha}$
3) $\lambda(\bar{\alpha}+\bar{\beta}) = \lambda\bar{\alpha}+\lambda\bar{\beta}$
4) $\lambda(\mu\bar{\alpha}) = (\lambda\mu)\bar{\alpha}$
5) $1\bar{\alpha} = \bar{\alpha}$

5.Άξονας

Γνωρίζουμε ότι μπορούμε να θέσουμε σε αμφιμονότιμη αντιστοιχία το σύνολο των σημείων μιας ευθείας με το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Καλούμε <u>άξονα</u> κάθε προσανατολισμένη ευθεία στην οποία έχουμε λάβει ένα σημείο O στο οποίο αντιστοιχούμε το μηδέν των πραγματικών αριθμών και ένα σημείο I στο οποίο αντιστοιχούμε τον αριθμό 1(Σχ.3).



Σχ.3

Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος OI λαμβάνεται πάντοτε ίσο με την μετρική μονάδα. Το $\overline{OI}$ δείχνει επίσης τον προσανατολισμό του άξονα. Ένα σημείο του άξονα αντιστοιχεί τότε σ'έναν πραγματικό αριθμό. Αντίστροφα ένας πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σ'ένα σημείο του άξονα.

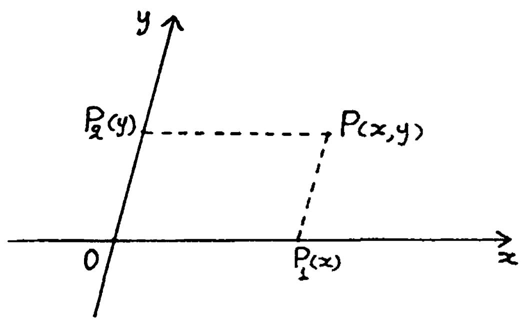
Καλούμε <u>τετμημένη</u> του σημείου P τον πραγματικό αριθμό x που αντιστοιχεί στο σημείο P. Σημειώνουμε αυτό P(x).

<u>5.1.Αλγεβρική τιμή διανύσματος</u>.Θεωρούμε ένα διάνυσμα $\overline{AB}$ που κείται σ'έναν άξονα (ε) ή είναι παράλληλο προς αυτόν. Καλούμε <u>αλγεβρική τιμή</u> του διανύσματος $\overline{AB}$ το μέτρο $|\overline{AB}|$ του διανύσματος με πρόσημο το + αν το διάνυσμα έχει την φορά του μοναδιαίου διανύσματος $\overline{OI}$ του άξονα και με πρόσημο το - αν το διάνυσμα έχει αντίθετη φορά από την φορά του $\overline{OI}$. Την αλγεβρική τιμή του διανύσματος $\overline{AB}$ σημειώνουμε $(\overline{AB})$. Αν $\overline{OI}=\bar{\varepsilon}_0$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα (ε) τότε είναι εύκολο να δούμε ότι $\overline{AB}=(\overline{AB})\bar{\varepsilon}_0$. Δηλαδή κάθε διάνυσμα ισούται με την αλγεβρική τιμή του επί το μοναδιαίο διάνυσμα $\bar{\varepsilon}_0$ του άξονα πάνω στον οποίο παίρνουμε την αλγεβρική τιμή. Αν το διάνυσμα $\bar{\alpha}$ κείται στον άξονα (ε) και έχει αρχή την αρχή των τετμημένων O, τότε η αλγεβρική τιμή του $\bar{\alpha}$ ισούται με την τετμημένη του πέρατος του γιατί $\bar{\alpha}=x\bar{\varepsilon}_0$, οπότε $(\bar{\alpha})=x$. Αν στον

άξονα πάρουμε τα σημεία $A(x_1)$ και $B(x_2)$ τότε η αλγεβρική τιμή του διανύσματος $\overline{AB}$ είναι

$(\overline{AB}) = x_2 - x_1$ γιατί $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = x_2\bar{\varepsilon}_0 - x_1\bar{\varepsilon}_0 = (x_2-x_1)\bar{\varepsilon}_0$.

5.2.Συντεταγμένες σημείου στο επίπεδο. Αν θέλουμε να παραστήσουμε τα σημεία ενός επιπέδου με την βοήθεια των πραγματικών αριθμών παίρνουμε πάνω στο επίπεδο δύο άξονες μη παράλληλους και με κοινή αρχή O (Σχ.4). Τότε βλέπουμε ότι



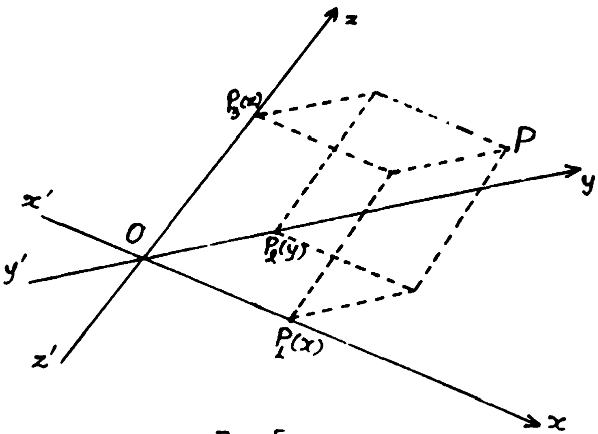
Σχ.4

i) Ένα σημείο P του επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα διατεταγμένο ζεύγος (x,ψ) πραγματικών αριθμών και αντίστροφα

(ii) Ένα διατεταγμένο ζεύγος (x,ψ) πραγματικών αριθμών αντιστοιχεί σ'ένα σημείο P του επιπέδου. Η αντιστοιχία επιτυγχάνεται, όπως φαίνεται στο σχήμα φέροντας από το σημείο P παράλληλες προς τους άξονες οπότε βρίσκουμε τους πραγματικούς αριθμούς x,ψ δηλαδή το ζεύγος (x,ψ).

Αντίστροφα, από τα σημεία $P_1(x)$ και $P_2(\psi)$ φέροντας παράλληλες προς τους άξονες βρίσκουμε το σημείο P που αντιστοιχεί στο ζεύγος (x,ψ). Οι αριθμοί x,ψ λέγονται συντεταγμένες του σημείου P ως προς σύστημα συντεταγμένων Oxψ. Ο x λεγεται τετμημένη του P και ο ψ τεταγμένη.

5.3.Συντεταγμένες σημείου στο χώρο. Θεωρούμε τρεις άξονες x'Ox , ψ'Oψ , z'Oz με κοινή αρχή O και μη κείμενους στο αυτό επίπεδο (Σχ.5). Τότε σε κάθε σημείο του χώρου μπορούμε να αντιστοιχίσουμε αμφιμονοσήμαντα μία διατεταγμένη τριάδα (x,ψ,z) από πραγ-



Σχ.5

ματικούς αριθμούς. Αν P είναι τυχόν σημείο του χώρου τότε φέρουμε από το P επίπεδα παράλληλα προς τα επίπεδα ψOz , xOz και xOψ αντίστοιχα, οπότε προσδιορίζουμε τα σημεία $P_1(x)$ $P_2(\psi)$ και $P_3(z)$ πάνω στους άξονες x'Ox , ψ'Oψ και z'Oz αντίστοιχα. Έτσι στο σημείο P αντιστοιχούμε την διατεταγμένη τριάδα (x,ψ,z). Αντίστροφα, σε κάθε διατεταγμένη τριάδα (x,ψ,z) μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το σημείο P στο οποίο τέμνονται τα τρία επίπεδα που φέρουμε από τα σημεία $P_1(x)$, $P_2(\psi)$, $P_3(z)$ παράλληλα πρός τα επίπεδα ψOz , xOz , xOψ αντίστοιχα. Οι αριθμοί x,ψ,z καλούνται συντεταγμένες του σημείου P. O x καλείται τετμημένη, ο ψ τεταγμένη και ο z κατηγμένη του σημείου P.

Οι άξονες x'Ox , ψ'Oψ και z'Oz λέμε ότι σχηματίζουν ένα σύστημα αναφοράς. Αν οι άξονες είναι ανά δύο κάθετοι μεταξύ τους το σύστημα λέγεται τρισορθογώνιο. Ειδικώτερα το σύστημα αναφοράς λέγεται τρισορθογώνιο δεξιόστροφο αν η φορά των αξόνων είναι τέτοια ώστε όταν ο άξονας Ox έχει τη φορά του αντίχειρα του δεξιού χεριού και ο άξονας Oψ τη φορά του δείκτου του δεξιού χεριού, τότε ο άξονας Oz έχει τη φορά του μέσου δακτύλου του δεξιού χεριού.

6. Διανύσματα γραμμικώς εξαρτημένα-γραμμικώς ανεξάρτητα.

Τα διανύσματα $\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\ldots,\bar{\alpha}_n$ λέγονται γραμμικώς εξαρτημένα αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n \in R$ όχι όλοι συγχρόνως ίσοι με μηδέν τέτοιοι ώστε $\lambda_1\bar{\alpha}_1+\lambda_2\bar{\alpha}_2+\ldots+\lambda_n\bar{\alpha}_n=0$

Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή αν δεν υπάρχουν τέτοιοι αριθμοί τότε τα n διανύσματα καλούνται γραμμικώς ανεξάρτητα. Διαφορετικά μπο-

ρούμε να πούμε ότι τα διανύσματα $\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\ldots,\bar{\alpha}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν οι μόνοι πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει μια σχέση της μορφής $\lambda_1\bar{\alpha}_1+\lambda_2\bar{\alpha}_2+\ldots+\lambda_n\bar{\alpha}_n=0$ είναι $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$.
Αν τα διανύσματα $\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\ldots,\bar{\alpha}_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα τότε και τα διανύσματα $\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\ldots\bar{\alpha}_n,\bar{\alpha}_{n+1},\bar{\alpha}_{n+2},\ldots,\bar{\alpha}_{n+k}$ θα είναι γραμμικώς εξαρτημένα για οποιαδήποτε διάνυσμα $\bar{\alpha}_{n+1},\bar{\alpha}_{n+2},\ldots,\bar{\alpha}_{n+k}$.
Επίσης αν τα διανύσματα $\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\ldots,\bar{\alpha}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε αν παραλήψουμε μερικά από αυτά, τα υπόλοιπα εξακολουθούν πάλι να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Τέλος, αν ένα από τα διανύσματα $\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\ldots,\bar{\alpha}_n$ είναι ίσο με το μηδενικό διάνυσμα τότε αυτά είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

<u>6.1.Ορισμός:</u> Καλούμε <u>διάσταση</u> ενός διανυσματικού χώρου τον αριθμό που εκφράζει το μέγιστο πλήθος των γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων του.
Καλούμε <u>βάση</u> ενός διανυσματικού χώρου κάθε σύνολο από γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα που είναι σε πλήθος όση η διάσταση του.

Θα προσπαθήσουμε τώρα να βρούμε τη διάσταση και στη συνέχεια μια βάση του διανυσματικού χώρου V που έχουμε κατασκευάσει επί του σώματος των πραγματικών αριθμών. Παρατηρούμε ότι η σχέση $\lambda\bar{\alpha}=0$ συνεπάγεται ότι $\lambda=0$ ή $\bar{\alpha}=0$. Επομένως ένα μη μηδενικό διάνυσμα είναι πάντοτε γραμμικώς ανεξάρτητο.
Καλούμε δύο διανύσματα $\bar{\alpha},\bar{\beta}$ <u>συγγραμμικά</u> αν έχουν την ίδια διεύθυνση.

<u>6.2.Πρόταση</u>: Δύο διανύσματα $\bar{\alpha},\bar{\beta}$ είναι συγγραμμικά αν και μόνο αν είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω ότι τα $\bar{\alpha},\bar{\beta}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, δηλαδή $\lambda\bar{\alpha}+\mu\bar{\beta}=0$ και $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$. Έστω $\lambda\neq0$ οπότε $\bar{\alpha}=(-\frac{\mu}{\lambda})\bar{\beta}$ ή $\bar{\alpha}=k\bar{\beta}$.

Συνεπώς τα διανύσματα $\bar{\alpha},\bar{\beta}$ έχουν την αυτή διεύθυνση, δηλαδή είναι συγγραμμικά.

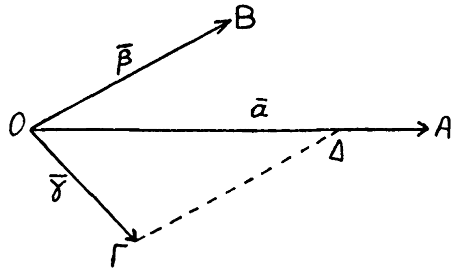
Αντίστροφα, αν τα διανύσματα $\bar{\alpha},\bar{\beta}$ είναι συγγραμμικά τότε $\bar{\alpha}=k\bar{\beta}$ ή $1\bar{\alpha}+(-k)\bar{\beta}=0$, το οποίο σημαίνει ότι τα $\bar{\alpha},\bar{\beta}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Ώστε δύο μη μηδενικά διανύσματα τα οποία δεν είναι συγγραμμικά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

<u>6.3.Πρόταση</u>: Τρία διανύσματα $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$ είναι συνεπίπεδα αν και μόνο άν είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω ότι τα διανύσματα $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Τότε υπάρχουν αριθμοί $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ όχι όλοι μηδέν (δηλαδή $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\neq\neq(0,0,0)$) τέτοιοι ώστε $\lambda_1\bar{\alpha}+\lambda_2\bar{\beta}+\lambda_3\bar{\gamma}=0$. Έστω $\lambda_1\neq 0$, οπότε $\bar{\alpha}=k\bar{\beta}+\mu\bar{\gamma}$ με $k=-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$, $\mu=-\dfrac{\lambda_3}{\lambda_1}$. Από τον ορισμό της προσθέσεως διανυσμάτων συνεπάγεται ότι το διάνυσμα $\bar{\alpha}$ κείται στο επίπεδο που σχηματίζουν τα $k\bar{\beta}$ και $\mu\bar{\gamma}$ και επομένως και τα $\bar{\beta}$ και $\bar{\gamma}$.

Αντίστροφα, έστω ότι τα διανύσματα $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$ είναι τρία συνεπίπεδα διανύσματα. Τότε αν ένα από αυτά είναι το μηδενικό τα $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Επίσης αν δύο από αυτά είναι συγγραμμικά, δηλαδή γραμμικώς εξαρτημένα, τότε και τα τρία είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Υποθέτουμε λοιπόν ότι τα $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$ είναι μη μηδενικά και ανά δύο μη συγγραμμικά. Από τυχόν σημείο Ο θεωρούμε τα διανύσματα $\overline{OA}=\bar{\alpha}$, $\overline{OB}=\bar{\beta}$, $\overline{O\Gamma}=\bar{\gamma}$, οπότε τα σημεία Ο,Α,Β,Γ είναι συνεπίπεδα. Από το σημείο Γ φέρουμε ευθεία παράλληλη πρός το διάνυσμα $\overline{OB}$, η οποία τέμνει τον φορέα του $\overline{OA}$ στο σημείο Δ(Σχ.6). Έτσι έχουμε $\overline{O\Gamma}=\overline{O\Delta}+\overline{\Delta\Gamma}$. Αλλά $\overline{O\Delta}=\lambda\bar{\alpha}$ και $\overline{\Delta\Gamma}=\mu\bar{\beta}$

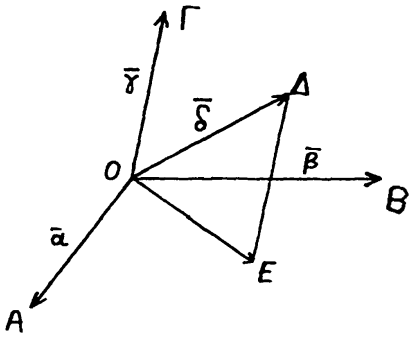


Σχ.6

οπότε $\bar{\gamma}=\lambda\bar{\alpha}+\mu\bar{\beta}$. Ώστε $1\cdot\bar{\gamma}+(-\lambda)\bar{\alpha}+(-\mu)\bar{\beta}=0$, που σημαίνει ότι τα διανύσματα $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

<u>6.4.Πρόταση</u>:Τέσσερα οποιαδήποτε διανύσματα $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma},\bar{\delta}$ είναι πάντοτε γραμμικώς εξαρτημένα.

<u>Απόδειξη</u>:Αν ένα από τα διανύσματα $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma},\bar{\delta}$ είναι το μηδενικό, ή δύο από αυτά είναι συγγραμμικά, ή τέλος τρία από αυτά συνεπίπεδα, τότε σύμφωνα με τις προηγούμενες προτάσεις η πρόταση ισχύει. Υποθέτουμε λοιπόν ότι τα διανύσματα $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma},\bar{\delta}$ είναι μη μηδενικά, ανά δύο μη συγγραμμικά και ανά τρία μη συνεπίπεδα.



Σχ.7

Από τυχόν σημείο O παίρνουμε τα διανύσματα $\overline{OA}=\bar{\alpha}$, $\overline{OB}=\bar{\beta}$, $\overline{O\Gamma}=\bar{\gamma}$, και $\overline{O\Delta}=\bar{\delta}$ (Σχ.7). Από το σημείο Δ φέρουμε μία ευθεία παράλληλη προς το $\overline{O\Gamma}$ η οποία τέμνει το επίπεδο των $\overline{OA}$ και $\overline{OB}$ στο σημείο Ε. Τότε έχουμε $\overline{O\Delta}=\overline{OE}+\overline{E\Delta}$. Αλλά $\overline{E\Delta}=\mu\bar{\gamma}$, $\overline{OE}=k\bar{\alpha}+\lambda\bar{\beta}$ γιατί το διάνυσμα $\overline{OE}$ είναι συνεπίπεδο με τα $\bar{\alpha}$ και $\bar{\beta}$. Έτσι έχουμε τελικά $\bar{\delta}=k\bar{\alpha}+\lambda\bar{\beta}+\mu\bar{\gamma}$ το οποίο αποδεικνύει την πρόταση.

Επειδή τέσσερα διανύσματα είναι πάντοτε γραμμικώς εξαρτημένα, ενώ υπάρχουν τρία διανύσματα γραμμικώς ανεξάρτητα (ως τέτοια μπορούν να ληφθούν τρία οποιαδήποτε μη συνεπίπεδα διανύσματα), έπεται ότι ο διανυσματικός χώρος είναι διαστάσεως 3.

Αν $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$ είναι τρία διανύσματα γραμμικώς ανεξάρτητα τότε αυτά αποτελούν μία βαση του χώρου V και κάθε άλλο διάνυσμα $\bar{\delta}$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$ γιατί όπως είπαμε παραπάνω τα διανύσματα $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma},\bar{\delta}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Άρα

$$\bar{\delta} = k\bar{\alpha}+\lambda\bar{\beta}+\mu\bar{\gamma}\ ,\ \text{όπου}\ \ k,\lambda,\mu\in R \qquad (1)$$

Τα k,λ,μ για κάθε διάνυσμα $\bar{\delta}$ ορίζονται μονότιμα γιατί αν είχαμε επίσης

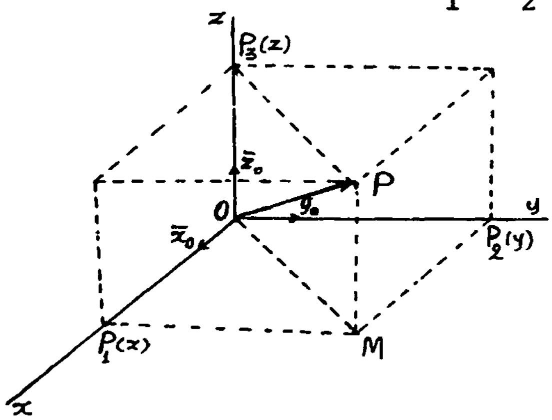
$$\bar{\delta} = k'\bar{\alpha}+\lambda'\bar{\beta}+\mu'\bar{\gamma} \qquad (2)$$

τότε αφαιρούμε τις (1) και (2) κατά μέλη, οπότε έχουμε

$$(k-k')\bar{\alpha}+(\lambda-\lambda')\bar{\beta}+(\mu-\mu')\bar{\gamma} = 0$$

Αλλά τα $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, οπότε $k=k'$, $\lambda=\lambda'$, $\mu=\mu'$. Οι αριθμοί της τριάδας (k,λ,μ) καλούνται συνιστώσες (ή συντεταγμένες) του διανύσματος $\bar{\delta}$ ως προς τη βάση (ή σύστημα αναφοράς) $(\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma})$. Επομένως, αν εκλεγεί μία βάση $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$, τότε σε κάθε διάνυσμα $\bar{\delta}$ αντιστοιχεί μία μόνο διατεταγμένη τριάδα $(k,\lambda,\mu)\in R^3$, $(R^3=R\times R\times R)$. Αλλά και αντίστροφα σε κάθε τριάδα $(k,\lambda,\mu)\in R^3$ αντιστοιχεί ένα μόνο διάνυσμα $\bar{\delta}$ το $\bar{\delta}=k\bar{\alpha}+\lambda\bar{\beta}+\mu\bar{\gamma}$. Έτσι υπάρχει αμφιμονότιμη αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των διανυσμάτων του χώρου V και του $R^3=R\times R\times R$. Συμβολίζουμε την αντιστοιχία αυτή συνήθως με $\bar{\delta}(k,\lambda,\mu)$. Σ'αυτή την αμφιμονότιμη αντιστοιχία στα διανύσματα $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$ της βάσεως αντιστοιχούν οι τριάδες $\bar{\alpha}(1,0,0)$, $\bar{\beta}(0,1,0)$, $\bar{\gamma}(0,0,1)$. Σύμφωνα με την προηγούμενη αμφομονότιμη αντιστοιχία οι πράξεις που ορίσαμε παραπάνω της προσθέσεως διανυσμάτων και του πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα μπορούν να εκφραστούν με τις συντεταγμένες των διανυσμάτων ως εξής. Αν $\bar{\delta}(k,\lambda,\mu)$ και $\bar{\delta}'(k',\lambda',\mu')$ τότε $(\bar{\delta}+\bar{\delta}')(k+k',\lambda+\lambda',\mu+\mu')$. Επίσης αν $\rho\in R$ τότε $\rho\bar{\delta}(\rho k,\rho\lambda,\rho\mu)$.

Θεωρούμε τώρα ένα τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $O x\psi z$ στο συνήθη χώρο και εκλέγουμε ως βάση για τον διανυσματικό χώρο V τα διανύσματα $\bar{x}_0,\bar{\psi}_0,\bar{z}_0$ τέτοια ώστε το $\bar{x}_0$ να είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στον άξονα Ox, το $\bar{\psi}_0$ στον $O\psi$ και το $\bar{z}_0$ στον Oz. Τότε η βάση $\bar{x}_0,\bar{\psi}_0,\bar{z}_0$ καλείται ορθοκανονική. Αν P είναι τυχόν σημείο του χώρου, τότε το διάνυσμα $\overline{OP}$ καλείται διάνυσμα θέσεως ή διανυσματική ακτίνα του σημείου P. 'Ωστε σε κάθε σημείο P του χώρου αντιστοιχεί ένα διάνυσμα $\overline{OP}$ και αντίστροφα σε κάθε διάνυσμα $\bar{\alpha}$ του διανυσματικού χώρου V αντιστοιχεί ένα σημείο P, δηλαδή το πέρας του διανύσματος $\bar{\alpha}$, όταν το $\bar{\alpha}$ μεταφερθεί ώστε να έχει αρχή το O. 'Ετσι έχουμε μία αμφιμονότιμη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων του χώρου και των διανυσμάτων του διανυσματικού χώρου V. Γι'αυτό πολλές φορές μιλάμε για το σημείο $\bar{r}$ και εννοούμε το σημείο P που έχει διάνυσμα θέσεως $\bar{r}$. Σημειώνουμε αυτό με $P(\bar{r})$. Είναι φανερό ότι το διάνυσμα $\overline{OP}$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\bar{x}_0, \bar{\psi}_0, \bar{z}_0$ της βάσεως του διανυσματικού χώρου V. 'Ετσι έχουμε $\overline{OP}=\bar{r}=x\bar{x}_0+\psi\bar{\psi}_0+z\bar{z}_0$, όπου $(x,\psi,z)\in R^3$. Προφανώς η τριάδα (x,ψ,z) είναι συντεταγμένες του σημείου P γιατί $\overline{OP}=\overline{OM}+\overline{MP}=\overline{OP}_1+\overline{OP}_2+\overline{OP}_3$. Αλλά $\overline{OP}_1=x\bar{x}_0$, $\overline{OP}_2=\psi\bar{\psi}_0$ και



Σχ.8

$\overline{OP}_3=z\bar{z}_0$. Αν $P(x_1,\psi_1,z_1)$ και $Q(x_2,\psi_2,z_2)$ είναι άκρα ενός διανύσματος $\bar{\alpha}$, δηλαδή $\overline{PQ}=\bar{\alpha}$ τότε $\bar{\alpha}=\overline{PQ}=\overline{OQ}-\overline{OP}=(x_2\bar{x}_0+\psi_2\bar{\psi}_0+z_2\bar{z}_0)-$ $-(x_1\bar{x}_0+\psi_1\bar{\psi}_0+z_1\bar{z}_0)=(x_2-x_1)\bar{x}_0+$ $+(\psi_2-\psi_1)\bar{\psi}_0+(z_2-z_1)\bar{z}_0$. Δηλαδή $\bar{\alpha}(x_2-x_1,\psi_2-\psi_1,z_2-z_1)$ οι συντεταγμένες διανύσματος είναι οι διαφορές των συντεταγμένων των άκρων του (του πέρατος μείον της αρχής).

Ας δούμε τώρα τι πρέπει να συμβαίνει στις συντεταγμένες δύο διανυσμάτων $\bar{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ και $\bar{\beta}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ ώστε αυτά να είναι συγγραμμικά. Γνωρίζουμε ότι τα $\bar{\alpha},\bar{\beta}$ είναι συγγραμμικά τότε και μόνο τότε όταν είναι γραμμικώς εξαρτημένα, οπότε υπάρχουν $\lambda_1,\lambda_2\in R$ με $(\lambda_1,\lambda_2)\neq(0,0)$ τέτοια ώστε $\lambda_1\bar{\alpha}+\lambda_2\bar{\beta}=0$. 'Εστω $\lambda_1\neq 0$. Τότε $\bar{\alpha}=k\bar{\beta}$, όπου $k=-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Συνεπώς $\alpha_1\bar{x}_0+\alpha_2\bar{\psi}_0+\alpha_3\bar{z}_0=k(\beta_1\bar{x}_0+\beta_2\bar{\psi}_0+\beta_3\bar{z}_0)$, ή

$$(\alpha_1-k\beta_1)\bar{x}_0+(\alpha_2-k\beta_2)\bar{\psi}_0+(\alpha_3-k\beta_3)\bar{z}_0=0$$

Από τη σχέση αυτή παίρνουμε $\alpha_1=k\beta_1$, $\alpha_2=k\beta_2$, $\alpha_3=k\beta_3$ δηλαδή

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\frac{\alpha_3}{\beta_3} \qquad (*)$$

Προφανώς ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή η σχέση (*) συνεπάγεται ότι τα διανύσματα $\bar{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ και $\bar{\beta}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Έχουμε λοιπόν την πρόταση.

<u>6.5.Πρόταση</u>:Τα $\bar{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\bar{\beta}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ είναι συγγραμμικά τότε και μόνο τότε αν $\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}=\dfrac{\alpha_2}{\beta_2}=\dfrac{\alpha_3}{\beta_3}$.

Αν τώρα $\bar{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\bar{\beta}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, $\bar{\gamma}(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ είναι τρία διανύσματα έχουμε την πρόταση.

<u>6.6.Πρόταση</u>:Τρία διανύσματα $\bar{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\bar{\beta}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, $\bar{\gamma}(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ είναι συνεπίπεδα αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}=0$$

<u>Απόδειξη</u>:Γνωρίζουμε ότι τα διανύσματα $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$ είναι συνεπίπεδα τότε και μόνο τότε αν αυτά είναι γραμμικώς εξαρτημένα, οπότε υπάρχουν $\lambda,\mu,\nu\in R$ με $(\lambda,\mu,\nu)\neq(0,0,0)$ έτσι ώστε $\lambda\bar{\alpha}+\mu\bar{\beta}+\nu\bar{\gamma}=0$. Από αυτή παίρνουμε τελικά τη σχέση

$$(\lambda\alpha_1+\mu\beta_1+\nu\gamma_1)\bar{x}_0+(\lambda\alpha_2+\mu\beta_2+\nu\gamma_2)\bar{\psi}_0+(\lambda\alpha_3+\mu\beta_3+\nu\gamma_3)\bar{z}_0=0 ,$$

οπότε

$$\lambda\alpha_1+\mu\beta_1+\nu\gamma_1 = 0$$

$$\lambda\alpha_2+\mu\beta_2+\nu\gamma_2 = 0$$

$$\lambda\alpha_3+\mu\beta_3+\nu\gamma_3 = 0$$

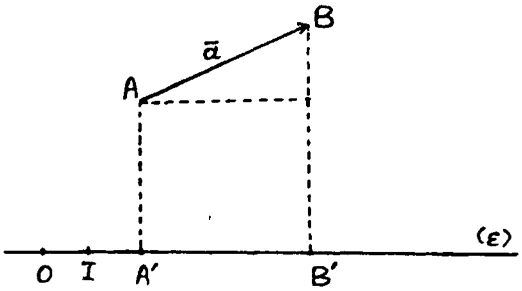
Το σύστημα αυτό είναι ομογενές με αγνώστους τα λ,μ,ν και έχει λύση διάφορη της μηδενικής. Άρα πρέπει να έχουμε

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι ισχύει και το αντίστροφο, οπότε έχουμε την παραπάνω πρόταση.

7.Ορθή προβολή διανύσματος.

Θεωρούμε ένα διάνυσμα $\bar{\alpha}$ και έναν άξονα (ε). Έστω A' η ορθή προβολή της αρχής A του διανύσματος $\bar{\alpha}$ και B' η ορθή προβολή του πέρατος B επί του άξονα. Το διάνυσμα $\overline{A'B'}$ είναι η προβολή του διανύσματος $\overline{AB}=\bar{\alpha}$ επί του άξονα. Προφανώς η προβολή του διανύσματος $\bar{\alpha}$ δεν εξαρτάται από τη θέση του στο χώρο. Επίσης η προβολή $\overline{A'B'}$ είναι πλήρως καθορισμένη από την αλγεβρική τιμή $(\overline{A'B'})$ του $\overline{A'B'}$ επί του άξονα.



Σχ.9

Γι'αυτό ορίζουμε την <u>προβολή του διανύσματος $\bar{\alpha}$ επί του άξονα (ε)</u> το μεγέθος $(\overline{A'B'})$ και γράφουμε $\pi\rho\beta_{(\varepsilon)}\bar{\alpha}=(\overline{A'B'})$.

Προφανώς έχουμε $(\overline{A'B'})=|\bar{\alpha}|$ συν $(\widehat{(\varepsilon),\bar{\alpha}})$ οπότε

$$\pi\rho\beta_{(\varepsilon)}\bar{\alpha} = |\bar{\alpha}|\ \text{συν}(\widehat{(\varepsilon),\bar{\alpha}})$$

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε την προβολή του διανύσματος $\bar{\alpha}$ επί του διανύσματος $\bar{\beta}$ και σημειώνουμε $\pi\rho\beta_{\bar{\beta}}\bar{\alpha}$ ως την προβολή του διανύσματος $\bar{\alpha}$ επί του άξονα που είναι παράλληλος προς το διάνυσμα $\bar{\beta}$ και έχει τη φορά του $\bar{\beta}$. Έτσι έχουμε πάλι

$$\pi\rho\beta_{\bar{\beta}}\bar{\alpha} = |\bar{\alpha}|\,\sigma\upsilon\nu(\widehat{\bar{\beta},\bar{\alpha}})$$

και επειδή είναι $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\bar{\alpha},\bar{\beta}}) = \sigma\upsilon\nu(\widehat{\bar{\beta},\bar{\alpha}})$ έχουμε

$$\pi\rho\beta_{\bar{\beta}}\bar{\alpha} = |\bar{\alpha}|\,\sigma\upsilon\nu(\widehat{\bar{\alpha},\bar{\beta}})$$

Επίσης μπορούμε να πάρουμε $\pi\rho\beta_{\bar{\alpha}}\bar{\beta} = |\bar{\beta}|\,\sigma\upsilon\nu(\widehat{\bar{\beta},\bar{\alpha}})$.

<u>7.1.Πρόταση</u>: (i) $\pi\rho\beta_{(\varepsilon)}(\bar{\alpha}+\bar{\beta}) = \pi\rho\beta_{(\varepsilon)}\bar{\alpha} + \pi\rho\beta_{(\varepsilon)}\bar{\beta}$

(ii) $\pi\rho\beta_{(\varepsilon)}(\bar{\alpha}_1+\ldots+\bar{\alpha}_k) = \pi\rho\beta_{(\varepsilon)}\bar{\alpha}_1+\ldots+\pi\rho\beta_{(\varepsilon)}\bar{\alpha}_k$

<u>Απόδειξη</u>:(i)Αν $\overline{AB}=\bar{\alpha}$, $\overline{BC}=\bar{\beta}$ και A', B', C' είναι οι προβολές επί του άξονα (ε) των σημείων A,B,C αντίστοιχα τότε

$\pi\rho\beta_{(\varepsilon)}(\bar{\alpha}+\bar{\beta}) = \pi\rho\beta_{(\varepsilon)}\overline{AC} = (\overline{A'C'})$

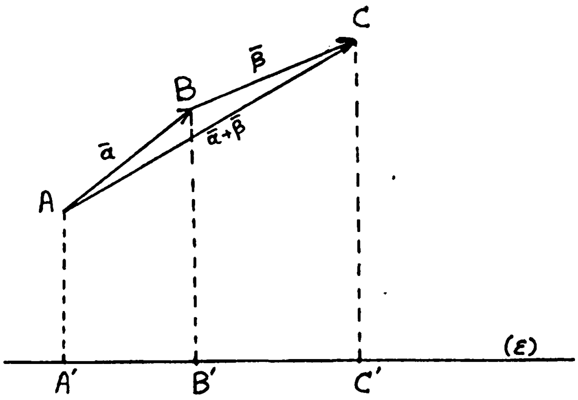
και

$\pi\rho\beta_{(\varepsilon)}\alpha = (\overline{A'B'})$, $\pi\rho\beta_{(\varepsilon)}\bar{\beta} = (\overline{B'C'})$

Αλλά

$(\overline{A'C'}) = (\overline{A'B'}) + (\overline{B'C'})$.

οπότε προκύπτει το ζητούμενο. Η (ii) είναι γενική περίπτωση και προκύπτει με πλήρη επαγωγή.



Σχ.10

<u>8.Γινόμενα.</u>

<u>8.1.Εσωτερικό γινόμενο</u>.Καλούμε <u>εσωτερικό ή αριθμητικό γινόμενο</u> δύο διανυσμάτων $\bar{\alpha},\bar{\beta}$ το γινόμενο των μέτρων επί το συνημίτονο της γωνίας αυτών.

Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\bar{\alpha},\bar{\beta}$ συμβολίζεται συνήθως με $\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}$. Έτσι έχουμε

$$\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta} = |\bar{\alpha}|\ |\bar{\beta}|\text{συν}(\widehat{\bar{\alpha},\bar{\beta}})$$

Από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου έχουμε αμέσως τις παρακάτω ιδιότητες

1) $\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta} = |\bar{\alpha}|\text{πρβ}_{\bar{\alpha}}\bar{\beta} = |\bar{\beta}|\text{πρβ}_{\bar{\beta}}\bar{\alpha}$

2) Αν $\varphi=\measuredangle(\bar{\alpha},\bar{\beta})$ τότε

i) $\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}<0 \Longleftrightarrow \frac{\pi}{2}<\varphi\leq\pi$

ii) $\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}>0 \Longleftrightarrow 0\leq\varphi<\frac{\pi}{2}$

3) Αν $\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}=0$ και $\bar{\alpha}\neq 0$, $\bar{\beta}\neq 0 \Longleftrightarrow$ το $\bar{\alpha}$ είναι κάθετο στο $\bar{\beta}$.

4) $\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}=\bar{\beta}\cdot\bar{\alpha}$

5) $\lambda(\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta})=(\lambda\bar{\alpha})\cdot\bar{\beta}=\bar{\alpha}\cdot(\lambda\bar{\beta})$, $\lambda\in R$

6) $\bar{\alpha}\cdot\bar{\alpha}=|\bar{\alpha}|^2$

7) $(\bar{\alpha}+\bar{\beta})\cdot\bar{\gamma}=\bar{\alpha}\cdot\bar{\gamma}+\bar{\beta}\cdot\bar{\gamma}$

Γιατί $(\bar{\alpha}+\bar{\beta})\cdot\bar{\gamma}=|\bar{\gamma}|\text{πρβ}_{\bar{\gamma}}(\bar{\alpha}+\bar{\beta})=|\bar{\gamma}|(\text{πρβ}_{\bar{\gamma}}\bar{\alpha}+\text{πρβ}_{\bar{\gamma}}\bar{\beta})=$

$$=|\bar{\gamma}|\text{πρβ}_{\bar{\gamma}}\bar{\alpha}+|\bar{\gamma}|\text{πρβ}_{\bar{\gamma}}\bar{\beta}=\bar{\alpha}\cdot\bar{\gamma}+\bar{\beta}\cdot\bar{\gamma}.$$

Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι $(\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta})\bar{\gamma}\neq\bar{\alpha}(\bar{\beta}\cdot\bar{\gamma})$ γιατί το πρώτο μέλος είναι ένας πραγματικός αριθμός, ο $(\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta})$ επί το διάνυσμα $\bar{\gamma}$, δηλαδή είναι ένα διάνυσμα συγγραμμικό με το $\bar{\gamma}$. Το δεύτερο μέλος είναι ο αριθμός $(\bar{\beta}\cdot\bar{\gamma})$ επί το διάνυσμα $\bar{\alpha}$, δηλαδή είναι ένα διάνυσμα συγγραμμικό με το $\bar{\alpha}$.

8.2. Έκφραση του εσωτερικού γινομένου με τις συντεταγμένες των διανυσμάτων.

Θεωρούμε ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(\bar{x}_0,\bar{\psi}_0,\bar{z}_0)$ δηλαδή τα διανύσματα $\bar{x}_0,\bar{\psi}_0,\bar{z}_0$ είναι μοναδιαία και ανά δύο κάθετα. Έτσι έχουμε

$$\bar{x}_0^2=\bar{x}_0\cdot\bar{x}_0=1 \quad , \quad \bar{\psi}_0^2=\bar{\psi}_0\cdot\bar{\psi}_0=1 \quad , \quad \bar{z}_0^2=\bar{z}_0\cdot\bar{z}_0=1$$

και $\bar{x}_0\cdot\bar{\psi}_0=\bar{\psi}_0\cdot\bar{x}_0=\bar{\psi}_0\cdot\bar{z}_0=\bar{z}_0\cdot\bar{\psi}_0=\bar{z}_0\cdot\bar{x}_0=\bar{x}_0\cdot\bar{z}_0=0$.

Αν $\bar{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ και $\bar{\beta}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, δηλαδή αν

$\bar{\alpha}=\alpha_1\bar{x}_0+\alpha_2\bar{\psi}_0+\alpha_3\bar{z}_0$ και $\bar{\beta}=\beta_1\bar{x}_0+\beta_2\bar{\psi}_0+\beta_3\bar{z}_0$ τότε έχουμε

$\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}=(\alpha_1\bar{x}_0+\alpha_2\bar{\psi}_0+\alpha_3\bar{z}_0)\cdot(\beta_1\bar{x}_0+\beta_2\bar{\psi}_0+\beta_3\bar{z}_0)=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3$,

ήτοι

$$\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta} = \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3$$

Αν $\bar{\beta}=\bar{\alpha}$ έχουμε $\bar{\alpha}^2=\bar{\alpha}\cdot\bar{\alpha}=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2$ ήτοι

$|\bar{\alpha}|=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}$

Από την έκφραση του εσωτερικού γινομένου

$$\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta} = |\bar{\alpha}|\ |\bar{\beta}|\text{συν}(\widehat{\bar{\alpha},\bar{\beta}})$$

έχουμε την έκφραση για το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\bar{\alpha}$ και $\bar{\beta}$

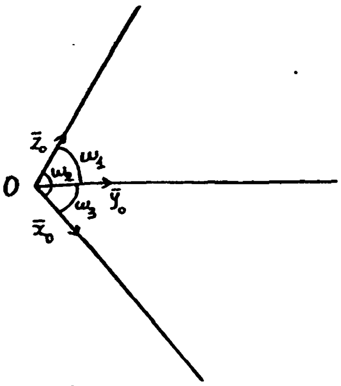
$$\text{συν}(\widehat{\bar{\alpha},\bar{\beta}}) = \frac{\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}}{|\bar{\alpha}|\ |\bar{\beta}|} \qquad ή$$

$$\text{συν}(\widehat{\bar{\alpha},\bar{\beta}}) = \frac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2}}$$

Αν το σύστημα αναφοράς $(\bar{x}_0,\bar{\psi}_0,\bar{z}_0)$ δεν είναι ορθοκανονικό, δηλαδή αν υποθέσουμε ότι τα διανύσματα $\bar{x}_0,\bar{\psi}_0,\bar{z}_0$ είναι μοναδιαία και ότι σχηματίζουν τις γωνίες $\omega_1=\measuredangle(\bar{\psi}_0,\bar{z}_0)$, $\omega_2=\measuredangle(\bar{x}_0,\bar{z}_0)$ και $\omega_3=\measuredangle(\bar{x}_0,\bar{\psi}_0)$ τότε $\bar{x}_0\cdot\bar{x}_0=\bar{\psi}_0\cdot\bar{\psi}_0=\bar{z}_0\cdot\bar{z}_0=1$, $\bar{x}_0\cdot\bar{\psi}_0=\text{συν}\omega_3$, $\bar{\psi}_0\cdot\bar{z}_0=\text{συν}\omega_1$,

$\bar{x}_0\cdot\bar{z}_0=\text{συν}\omega_2$ (Σχ.11). Έτσι για το εσωτερικό γινόμενο $\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}$ έχουμε

$$\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}=\alpha_1\beta_1\bar{x}_0^2+\alpha_2\beta_2\bar{\psi}_0^2+\alpha_3\beta_3\bar{z}_0^2+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)\bar{x}_0\cdot\bar{\psi}_0+$$
$$+(\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2)\bar{\psi}_0\cdot\bar{z}_0+(\alpha_1\beta_3+\alpha_3\beta_1)\bar{x}_0\cdot\bar{z}_0$$



Σχ.11

οπότε

$$\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)\,\text{συνω}_3+$$

$$+(\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2)\,\text{συνω}_1+$$

$$+(\alpha_1\beta_1+\alpha_3\beta_1)\,\text{συνω}_2.$$

Αν $\bar{\beta}=\bar{\alpha}$ τότε το μέτρο του διανύσματος $\bar{\alpha}$ είναι.

$$|\bar{\alpha}|=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+2\alpha_2\alpha_3\,\text{συνω}_1+2\alpha_3\alpha_1\,\text{συνω}_2+2\alpha_1\alpha_2\,\text{συνω}_3}$$

<u>8.3.Εξωτερικό γινόμενο</u>.Καλούμε <u>εξωτερικό γινόμενο</u> ή <u>διανυσματικό γινόμενο</u> δύο διανυσμάτων $\bar{\alpha},\bar{\beta}$ (με αυτή τη σειρά) ένα τρίτο διάνυσμα $\bar{e}$ πού έχει μέτρο $|\bar{e}|=|\bar{\alpha}|\,|\bar{\beta}|\,|\text{ημ}(\widehat{\bar{\alpha},\bar{\beta}})|$, διεύθυνση κάθετη προς το $\bar{\alpha}$ και $\bar{\beta}$ και αφορά τέτοια ώστε τα $(\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{e})$ να αποτελούν δεξιόστροφο σύστημα. Συμβολίζουμε το εξωτερικό γινόμενο των $\bar{\alpha}$ και $\bar{\beta}$ με $\bar{\alpha}\times\bar{\beta}$. Παρατηρούμε ότι το $|\bar{\alpha}\times\bar{\beta}|$ παριστάνει το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που έχει πλευρές τα $\bar{\alpha},\bar{\beta}$ αν φέρουμε τα $\bar{\alpha},\bar{\beta}$ να έχουν κοινή αρχή.
Από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες.

1) $\bar{\alpha}\times\bar{\beta}=-\bar{\beta}\times\bar{\alpha}$. Πραγματικά από τον ορισμό έχουμε ότι τα διανύσματα $\bar{\alpha}\times\bar{\beta}$ και $\bar{\beta}\times\bar{\alpha}$ έχουν το αυτό μέτρο και διεύθυνση, αλλά αντίθετη φορά.

2) Αν τα $\bar{\alpha},\bar{\beta}$ είναι συγγραμμικά, τότε $\bar{\alpha}\times\bar{\beta}=0$. Συνεπώς και $\bar{\alpha}\times\bar{\alpha}=0$. Επίσης $\bar{0}\times\bar{\alpha}=\bar{\alpha}\times\bar{0}=0$. Αν $\bar{\alpha}\times\bar{\beta}=0$ και $\bar{\alpha}\neq 0$, $\bar{\beta}\neq 0$ τότε τα $\bar{\alpha},\bar{\beta}$ είναι παράλληλα.

3) $(\lambda\bar{\alpha})\times\bar{\beta}=\bar{\alpha}\times(\lambda\bar{\beta})=\lambda\bar{\alpha}\times\bar{\beta}$

Αναφέρουμε επίσης την επόμενη ιδιότητα, η απόδειξη της οποίας δεν φαίνεται άμεσα από τον ορισμό, αλλά θα τη δούμε πιό κάτω

4) $\bar{\alpha}\times(\bar{\beta}+\bar{\gamma})=\bar{\alpha}\times\bar{\beta}+\bar{\alpha}\times\bar{\gamma}$.

8.4. Έκφραση του εξωτερικού γινομένου με τις συντεταγμένες των διανυσμάτων. Θεωρούμε ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(\bar{x}_0, \bar{\psi}_0, \bar{z}_0)$ το οποίο υποθέτουμε επίσης ότι είναι δεξιόστροφο. Έχουμε

$$\bar{x}_0 \times \bar{x}_0 = \bar{\psi}_0 \times \bar{\psi}_0 = \bar{z}_0 \times \bar{z}_0 = 0$$

$$\bar{x}_0 \times \bar{\psi}_0 = \bar{z}_0 = -\bar{\psi}_0 \times \bar{x}_0$$

$$\bar{\psi}_0 \times \bar{z}_0 = \bar{x}_0 = -\bar{z}_0 \times \bar{\psi}_0$$

$$\bar{z}_0 \times \bar{x}_0 = \bar{\psi}_0 = -\bar{x}_0 \times \bar{z}_0$$

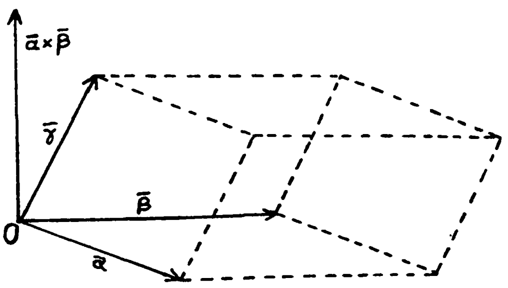
Αν λάβουμε τώρα δύο τυχόντα διανύσματα $\bar{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ και $\bar{\beta}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ τότε από τις ιδιότητες (3) και (4) έχουμε $\bar{\alpha}\times\bar{\beta} = (\alpha_1\bar{x}_0 + \alpha_2\bar{\psi}_0 + \alpha_3\bar{z}_0) \times (\beta_1\bar{x}_0 + \beta_2\bar{\psi}_0 + \beta_3\bar{z}_0) = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\bar{x}_0 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\bar{\psi}_0 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\bar{z}_0$.

Την έκφραση αυτή μπορούμε να γράψουμε με μορφή ορίζουσας ως εξής

$$\bar{\alpha} \times \bar{\beta} = \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{\psi}_0 & \bar{z}_0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} .$$

8.5. Μικτό γινόμενο. Θεωρούμε τρία διανύσματα $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$. Μπορούμε να σχηματίσουμε το εξωτερικό γινόμενο $\bar{\alpha}\times\bar{\beta}$ και μετά το εσωτερικό γινόμενο $(\bar{\alpha}\times\bar{\beta})\cdot\bar{\gamma}$. Ο αριθμός $(\bar{\alpha}\times\bar{\beta})\cdot\bar{\gamma}$ καλείται μικτό γινόμενο των διανυσμάτων $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$.

Παρατηρούμε ότι $(\bar{\alpha}\times\bar{\beta})\cdot\bar{\gamma} = |\bar{\alpha}\times\bar{\beta}|\,|\bar{\gamma}|\,\text{συν}(\widehat{\bar{\alpha}\times\bar{\beta}, \bar{\gamma}})$. Από τη σχέση αυτή βλέπουμε ότι το μικτό γινόμενο $(\bar{\alpha}\times\bar{\beta})\cdot\bar{\gamma}$ εκφράζει τον προσημασμένο όγκο του παραλληλεπιπέδου που έχει συνεχόμενες ακμές σε μία κορυφή τα διανύσματα $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ (Σχ.12). Έχουμε $(\bar{\alpha}\times\bar{\beta})\cdot\bar{\gamma} > 0$ αν το σύστημα $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$ είναι δεξιόστροφο, $(\bar{\alpha}\times\bar{\beta})\cdot\bar{\gamma} < 0$ αν το σύστημα $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$ είναι αριστερόστροφο και $(\bar{\alpha}\times\bar{\beta})\cdot\bar{\gamma} = 0$ αν τα $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ είναι συνεπίπεδα. Με



Σχ.12

όμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι και το μικτό γινόμενο $\bar{\alpha}\cdot(\bar{\beta}\times\bar{\gamma})$ παριστάνει τον προσημασμένο όγκο του ίδιου παραλληλεπιπέδου. Έτσι έχουμε $(\bar{\alpha}\times\bar{\beta})\cdot\bar{\gamma}=\bar{\alpha}\cdot(\bar{\beta}\times\bar{\gamma})$.

Επειδή το εσωτερικό γινόμενο $\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}$ είναι ένας αριθμός, οπότε δεν έχει νόημα το γινόμενο $(\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta})\times\bar{\gamma}$, έπεται ότι οι παρενθέσεις στην έκφραση του μικτού γινομένου $(\bar{\alpha}\times\bar{\beta})\cdot\bar{\gamma}$ ή του ίσου του $\bar{\alpha}\cdot(\bar{\beta}\times\bar{\gamma})$ είναι περιττές. Έτσι μπορούμε να γράψουμε $\bar{\alpha}\times\bar{\beta}\cdot\bar{\gamma}=\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}\times\bar{\gamma}$. Δηλαδή στην έκφραση του μικτού γινομένου μπορούμε να εναλλάσσουμε τα σύμβολα $\times$ και $\cdot$. Γιά τον λόγο αυτό παριστάνουμε το μικτό γινόμενο και με τις εκφράσεις $[\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}]$ ή $(\bar{\alpha}\ \bar{\beta}\ \bar{\gamma})$. Επειδή με κυκλική εναλλαγή του συστήματος $(\bar{\alpha}\ ,\bar{\beta}\ ,\bar{\gamma})$ διατηρείται ο προσανατολισμός έχουμε

$(\bar{\alpha}\ \bar{\beta}\ \bar{\gamma})=(\bar{\beta}\ \bar{\gamma}\ \bar{\alpha})=(\bar{\gamma}\ \bar{\alpha}\ \bar{\beta})$ και $(\bar{\alpha}\ \bar{\beta}\ \bar{\gamma})=-(\bar{\beta}\ \bar{\alpha}\ \bar{\gamma})$,

$(\bar{\beta}\ \bar{\alpha}\ \bar{\gamma})=(\bar{\alpha}\ \bar{\gamma}\ \bar{\beta})=(\bar{\gamma}\ \bar{\beta}\ \bar{\alpha})$. Επίσης από τον ορισμό προκύπτει ότι $(\bar{\alpha}\ \bar{\beta}\ \bar{\gamma})=0$ αν και μόνο αν τα διανύσματα $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$ είναι συνεπίπεδα.

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα την έννοια του μικτού γινομένου για να αποδείξουμε την επιμεριστική ιδιότητα του εξωτερικού γινομένου. Θα δείξουμε δηλαδή ότι $\bar{\alpha}\times(\bar{\beta}+\bar{\gamma})=\bar{\alpha}\times\bar{\beta}+\bar{\alpha}\times\bar{\gamma}$

Θεωρούμε το διάνυσμα $\bar{u}=\bar{\alpha}\times(\bar{\beta}+\bar{\gamma})-\bar{\alpha}\times\bar{\beta}-\bar{\alpha}\times\bar{\gamma}$. Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση αυτή εσωτερικά με το τυχόν διάνυσμα $\bar{v}$, οπότε έχουμε

$$\bar{v}\cdot\bar{u} = \bar{v}\cdot\left[\bar{\alpha}\times(\bar{\beta}+\bar{\gamma})-\bar{\alpha}\times\bar{\beta}-\bar{\alpha}\times\bar{\gamma}\right]$$

και επειδή για το εσωτερικό γινόμενο ισχύσει η επιμεριστική ιδιότητα παίρνουμε

$$\bar{v}\cdot\bar{u} = \bar{v}\cdot\left[\bar{\alpha}\times(\bar{\beta}+\bar{\gamma})\right]-\bar{v}\cdot(\bar{\alpha}\times\bar{\beta})-\bar{v}\cdot(\bar{\alpha}\times\bar{\gamma})\ .$$

Εναλλάσουμε τώρα τα σύμβολα του εσωτερικού και εξωτερικού γινομένου.

$$\bar{v}\cdot\bar{u} = (\bar{v}\times\bar{\alpha})\cdot(\bar{\beta}+\bar{\gamma})-(\bar{v}\times\bar{\alpha})\cdot\bar{\beta}-(\bar{v}\times\bar{\alpha})\cdot\bar{\gamma} \qquad \text{και}$$

$$\bar{v}\cdot\bar{u} = (\bar{v}\times\bar{\alpha})\cdot\bar{\beta}+(\bar{v}\times\bar{\alpha})\cdot\bar{\gamma}-(\bar{v}\times\bar{\alpha})\cdot\bar{\beta}-(\bar{v}\times\bar{\alpha})\cdot\bar{\gamma} =0$$

Δηλαδή έχουμε $\bar{v}\cdot\bar{u}=0$ για κάθε διάνυσμα $\bar{v}$, οπότε αν λάβουμε $\bar{v}=\bar{u}$ έχουμε $\bar{u}^2=0$. Έτσι $\bar{u}=0$ που αποδεικνύει την ιδιότητα.

<u>8.6. Έκφραση του μικτού γινομένου με τις συντεταγμένες των διανυσμάτων</u>. Υποθέτουμε ότι το σύστημα αναφοράς $(\bar{x}_0,\bar{\psi}_0,\bar{z}_0)$ είναι ορθοκανονικό και τα διανύσματα $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$ έχουν ως προς το σύστημα αυτό συντεταγμένες $\bar{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\bar{\beta}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, $\bar{\gamma}(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$.
Έτσι έχουμε

$$(\bar{\alpha}\ \ \bar{\beta}\ \ \bar{\gamma}) = (\bar{\alpha}\times\bar{\beta})\cdot\bar{\gamma}= \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{\psi}_0 & \bar{z}_0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}\cdot(\gamma_1\bar{x}_0+\gamma_2\bar{\psi}_0+\gamma_3\bar{z}_0) =$$

$$= \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Αν το σύστημα αναφοράς δεν είναι ορθοκανονικό αλλά τυχόν, τότε εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των γινομένων είναι εύκολο να δούμε ότι

$$(\bar{\alpha}\ \ \bar{\beta}\ \ \bar{\gamma})= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} (\bar{x}_0\ \ \bar{\psi}_0\ \ \bar{z}_0).$$

<u>8.7. Δις εξωτερικό γινόμενο</u>. Θεωρούμε ένα ορθοκανονικό σύστημα

αναφοράς $(\bar{x}_0,\bar{\psi}_0,\bar{z}_0)$ και τα διανύσματα $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$ με συντεταγμένες $\bar{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\bar{\beta}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, $\bar{\gamma}(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ ως προς το σύστημα αυτό. Μπορούμε να σχηματίσουμε τα γινόμενα $\bar{\alpha}\times(\bar{\beta}\times\bar{\gamma})$ και $(\bar{\alpha}\times\bar{\beta})\times\bar{\gamma}$ τα οποία καλούνται <u>δις εξωτερικά γινόμενα</u>.

Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $\bar{\alpha}\times(\bar{\beta}\times\bar{\gamma})$ είναι κάθετο στο $\bar{\alpha}$ και στο $\bar{\beta}\times\bar{\gamma}$ οπότε είναι συνεπίπεδο με τα $\bar{\beta}$ και $\bar{\gamma}$. Έτσι έχουμε $\bar{\alpha}\times(\bar{\beta}\times\bar{\gamma}) = \lambda\bar{\beta}+\mu\bar{\gamma}$. Για να εκφράσουμε το δις εξωτερικό γινόμενο $\bar{\alpha}\times(\bar{\beta}\times\bar{\gamma})$ με τις συντεταγμένες των διανυσμάτων παρατηρούμε ότι στο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(\bar{x}_0,\bar{\psi}_0,\bar{z}_0)$ έχουμε

$$\bar{\beta}\times\bar{\gamma} = \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{\psi}_0 & \bar{z}_0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = (\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2)\bar{x}_0+(\beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3)\bar{\psi}_0+(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)\bar{z}_0$$

οπότε

$$\bar{\alpha}\times(\bar{\beta}\times\bar{\gamma}) = \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{\psi}_0 & \bar{z}_0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2 & \beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3 & \beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1 \end{vmatrix}$$

Είναι εύκολο να δούμε τώρα ότι η παραπάνω ορίζουσα που εκφράζει το δις εξωτερικό γινόμενο είναι ίση με την έκφραση

$$(\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3)(\beta_1\bar{x}_0+\beta_2\bar{\psi}_0+\beta_3\bar{z}_0)-(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)\cdot$$
$$\cdot(\gamma_1\bar{x}_0+\gamma_2\bar{\psi}_0+\gamma_3\bar{z}_0)$$

δηλαδή έχουμε την ισότητα

$$\bar{\alpha}\times(\bar{\beta}\times\bar{\gamma}) = (\bar{\alpha}\cdot\bar{\gamma})\bar{\beta} - (\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta})\bar{\gamma}$$

Ομοίως μπορούμε να βρούμε ότι $(\bar{\alpha}\times\bar{\beta})\times\bar{\gamma}=(\bar{\alpha}\cdot\bar{\gamma})\bar{\beta}-(\bar{\beta}\cdot\bar{\gamma})\bar{\alpha}$ οπότε παρατηρούμε ότι $\bar{\alpha}\times(\bar{\beta}\times\bar{\gamma})\neq(\bar{\alpha}\times\bar{\beta})\times\bar{\gamma}$.

9.Μετρικές ιδιότητες.

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, οπότε η βάση $(\overline{x}_0,\overline{\psi}_0,\overline{z}_0)$ του διανυσματικού χώρου V θα είναι ορθοκανονική. Αν $P_1(x_1,\psi_1,z_1)$ και $P_2(x_2,\psi_2,z_2)$ είναι δύο σημεία τότε η απόσταση $d(P_1,P_2)$ των δύο αυτών σημείων είναι ίση με το μέτρο του διανύσματος $\overline{P_1P}_2(x_2-x_1,\psi_2-\psi_1,z_2-z_1)$, δηλαδή

$$d(P_1,P_2)=|\overline{P_1P}_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(\psi_2-\psi_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Αν το σύστημα συντεταγμένων είναι πλαγιογώνιο τότε

$$d(P_1,P_2)=|\overline{P_1P}_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(\psi_2-\psi_1)^2+(z_2-z_1)^2+2(x_2-x_1)(\psi_2-\psi_1)\text{συν}(\widehat{\overline{x}_0,\overline{\psi}_0})+2(\psi_2-\psi_1)(z_2-z_1)\text{συν}(\widehat{\overline{\psi}_0,\overline{z}_0})+2(z_2-z_1)(x_2-x_1)\text{συν}(\widehat{\overline{z}_0,\overline{x}_0})}$$

Αν έχουμε τρία σημεία $P_1(x_1,\psi_1,z_1)$, $P_2(x_2,\psi_2,z_2)$, $P_3(x_3,\psi_3,z_3)$ τότε το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζεται με κορυφές τα P_1,P_2,P_3 είναι το μέτρο του διανύσματος $\frac{1}{2}\overline{P_1P}_2\times\overline{P_1P}_3$.

Αλλά

$$\overline{P_1P}_2\times\overline{P_1P}_3=\begin{vmatrix}\overline{x}_0 & \overline{\psi}_0 & \overline{z}_0\\ x_2-x_1 & \psi_2-\psi_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & \psi_3-\psi_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}$$

$$\text{Εμβ}(\widehat{P_1P_2P_3})=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}\psi_2-\psi_1 & z_2-z_1\\ \psi_3-\psi_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z_2-z_1 & x_2-x_1\\ z_3-z_1 & x_3-x_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & \psi_2-\psi_1\\ x_3-x_1 & \psi_3-\psi_1\end{vmatrix}^2}=$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} \psi_1 & z_1 & 1 \\ \psi_2 & z_2 & 1 \\ \psi_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & \psi_1 & 1 \\ x_2 & \psi_2 & 1 \\ x_3 & \psi_3 & 1 \end{vmatrix}^2}$$

Αν τα σημεία P_1, P_2, P_3 κείνται στο επίπεδο Οχψ τότε η κατηγμένη τους z είναι ίση με μηδέν, δηλαδή έχουμε $P_1(x_1,\psi_1)$, $P_2(x_2,\psi_2)$, $P_3(x_3,\psi_3)$ οπότε

$$\text{Εμβ}(\widehat{P_1P_2P_3}) = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & \psi_1 & 1 \\ x_2 & \psi_2 & 1 \\ x_3 & \psi_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$$

Από την έκφραση αυτή συμπεραίνουμε ότι για να κείνται τα τρία σημεία $P_1(x_1,\psi_1), P_2(x_2,\psi_2), P_3(x_3,\psi_3)$ σε ευθεία γραμμή πρέπει και αρκεί να έχουμε

$$\begin{vmatrix} x_1 & \psi_1 & 1 \\ x_2 & \psi_2 & 1 \\ x_3 & \psi_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι αν το σύστημα συντεταγμένων xOψ είναι πλαγιογώνιο και οι άξονες Ox και Oψ σχηματίζουν γωνία ω τότε το εμβαδό του τριγώνου $P_1P_2P_3$ στο επίπεδο xOψ είναι

$$\text{Εμβ}(\widehat{P_1P_2P_3}) = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & \psi_1 & 1 \\ x_2 & \psi_2 & 1 \\ x_3 & \psi_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ημω}\right|$$

Η παραπάνω έκφραση προκύπτει από το μέτρο του διανύσματος $\overline{P_1P_2} \times \overline{P_1P_3}$

$$|\overline{P_1P_2}\times\overline{P_1P_3}| = \left|\left[(x_2-x_1)\bar{x}_0+(\psi_2-\psi_1)\bar{\psi}_0\right]\times\left[(x_3-x_1)\bar{x}_0+(\psi_3-\psi_1)\bar{\psi}_0\right]\right| =$$

$$=\left|((x_2-x_1)(\psi_3-\psi_1)-(x_3-x_1)(\psi_2-\psi_1))\bar{x}_0\times\bar{\psi}_0\right| =$$

$$=|(x_2-x_1)(\psi_3-\psi_1)-(x_3-x_1)(\psi_2-\psi_1)|\,|\bar{x}_0\times\bar{\psi}_0| =$$

$$=|(x_2-x_1)(\psi_3-\psi_1)-(x_3-x_1)(\psi_2-\psi_1)|\,|\eta\mu\omega|.$$

Θεωρούμε τώρα τέσσερα σημεία $P_1(x_1,\psi_1,z_1)$, $P_2(x_2,\psi_2,z_2)$, $P_3(x_3,\psi_3,z_3)$ $P_4(x_4,\psi_4,z_4)$ και ζητούμε να βρούμε τον όγκο του τετραέδρου $P_1P_2P_3P_4$. Επειδή το μικτό γινόμενο $\left[\overline{P_1P_2},\overline{P_1P_3},\overline{P_1P_4}\right]$ εκφράζει τον προσημασμένο όγκο του παραλληλεπιπέδου που έχει ακμές $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_1P_3}$, $\overline{P_1P_4}$, ο <u>όγκος V του τετραέδρου</u> θα είναι

$$V=\frac{1}{6}\left|\left[\overline{P_1P_2},\overline{P_1P_3},\overline{P_1P_4}\right]\right|$$

Αν το σύστημα συντεταγμένων είναι ορθοκανονικό έχουμε

$$V=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & \psi_2-\psi_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & \psi_3-\psi_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & \psi_4-\psi_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} x_1 & \psi_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & \psi_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & \psi_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & \psi_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}\right|$$

Αν όμως το σύστημα συντεταγμένων είναι πλαγιογώνιο τότε

$$V=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} x_1 & \psi_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & \psi_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & \psi_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & \psi_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}\,(\bar{x}_0\ \ \bar{\psi}_0\ \ \bar{z}_0)\right|$$

Από την έκφραση του όγκου του τετραέδρου συμπεραίνουμε ότι τα σημεία $P_1(x_1,\psi_1,z_1)$, $P_2(x_2,\psi_2,z_2)$, $P_3(x_3,\psi_3,z_3)$, $P_4(x_4,\psi_4,z_4)$ κείνται στο αυτό επίπεδο αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} x_1 & \psi_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & \psi_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & \psi_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & \psi_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Γιατί αν τα σημεία είναι συνεπίπεδα τότε το τετράεδρο $P_1P_2P_3P_4$ είναι εκφυλισμένο και έχει όγκο μηδέν. Αντίστροφα, αν η παραπάνω ορίζουσα είναι ίση με μηδέν, τότε ο όγκος του τετραέδρου $P_1P_2P_3P_4$ είναι μηδέν, δηλαδή τα σημεία είναι συνεπίπεδα.

10.Μερικός ή απλός λόγος.

Έστω $P_1(x_1,\psi_1,z_1)$, $P_2(x_2,\psi_2,z_2)$ δύο σημεία και $P(x,\psi,z)$ ένα τρίτο σημείο που κείται στην ευθεία P_1P_2. Ο πραγματικός αριθμός $\mu = \dfrac{(\overline{P_1P})}{(\overline{PP_2})}$ λέγεται μερικός ή απλός λόγος της διατεταγμένης τριάδας των σημείων P_1P_2P και συμβολίζεται $\mu=(P_1P_2P)$. Από τη σχέση $\overline{P_1P}=\mu\overline{PP_2}$ έχουμε

$$(x-x_1)\bar{x}_0+(\psi-\psi_1)\bar{\psi}_0+(z-z_1)\bar{z}_0=\mu\left[(x_2-x)\bar{x}_0+(\psi_2-\psi)\bar{\psi}_0+(z_2-z)\bar{z}_0\right]$$

$$\text{ή}\quad \left[(x-x_1)-\mu(x_2-x)\right]\bar{x}_0+\left[(\psi-\psi_1)-\mu(\psi_2-\psi)\right]\bar{\psi}_0+\left[(z-z_1)-\mu(z_2-z)\right]\bar{z}_0=0$$

οπότε λαμβάνουμε τελικά τις συντεταγμένες του σημείου P

$$x=\frac{x_1+\mu x_2}{1+\mu}\quad,\quad \psi=\frac{\psi_1+\mu\psi_2}{1+\mu}\quad,\quad z=\frac{z_1+\mu z_2}{1+\mu}$$

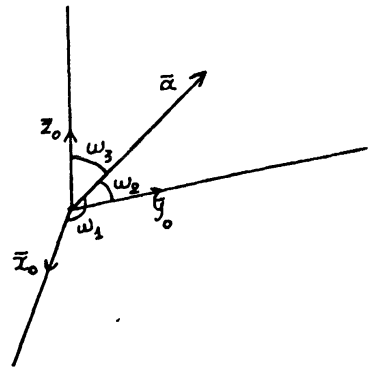
Ειδικά αν $\mu=1$, δηλαδή αν το σημείο P είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος P_1P_2, τότε έχουμε

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}\quad,\quad \psi=\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\quad,\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}\quad.$$

<u>Παρατήρηση</u>: Σε κάθε σημείο της ευθείας P_1P_2 εκτός του P_2 αντιστοιχεί μια τιμή του λόγου μ. Μπορούμε να συμπεριλάβουμε το σημείο P_2 αν δεχθούμε για το σημείο αυτό τις τιμές $\mu=\pm\infty$.

<u>11. Συνημίτονα κατευθύνσεως και συντελεστής διευθύνσεως διανύσματος</u>.

Αναπτύσσουμε τώρα δύο χρήσιμες έννοιες στα διανύσματα. Έστω $\bar{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα και $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ οι γωνίες τις οποίες σχηματίζει το $\bar{\alpha}$ με τα μοναδιαία διανύσματα $\bar{x}_0,\bar{\psi}_0,\bar{z}_0$ του συστήματος αναφοράς. Τα συνημίτονα των γωνιών $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ (Σχ.13) καλούνται <u>συνημίτονα κατευθύνσεως</u> του διανύσματος $\bar{\alpha}$. Επειδή τα συνημίτονα κατευθύνσεως του $\bar{\alpha}$ ισούνται με τις προβολές του διανύσματος $\bar{\alpha}_0$ στους άξονες συντεταγμένων, έπεται ότι τα συνημίτονα κατευθύνσεως του $\bar{\alpha}$ είναι οι συντεταγμένες του μοναδιαίου διανύσματος $\bar{\alpha}_0$. Δηλαδή $\bar{\alpha}_0(\text{συν}\omega_1,\text{συν}\omega_2,\text{συν}\omega_3)$. Αν το σύστημα αναφοράς είναι ορθοκανονικό τότε $|\bar{\alpha}|=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}$ και επειδή $\bar{\alpha}=|\bar{\alpha}|\bar{\alpha}_0$ έχουμε



Σχ.13

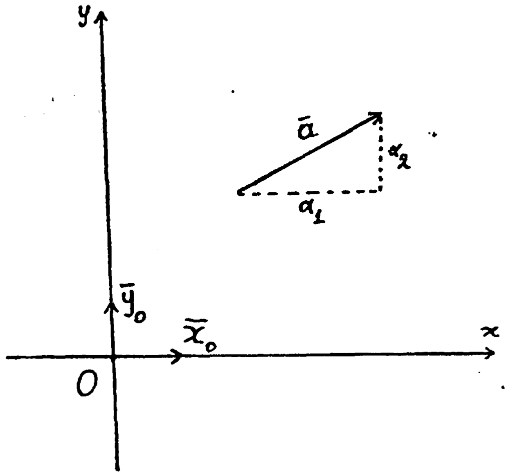
$$\alpha_1\bar{x}_0+\alpha_2\bar{\psi}_0+\alpha_3\bar{z}_0=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}(\text{συν}\omega_1\bar{x}_0+\text{συν}\omega_2\bar{\psi}_0+\text{συν}\omega_3\bar{z}_0)\,.$$

Έτσι τελικά προκύπτουν οι σχέσεις

$$\text{συν}\omega_1=\frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}}\quad,\quad \text{συν}\omega_2=\frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}}\quad,\quad \text{συν}\omega_3=\frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}}$$

και επομένως $\text{συν}^2\omega_1+\text{συν}^2\omega_2+\text{συν}^2\omega_3=1$.

Μια άλλη χρήσιμη έννοια για τα διανύσματα που κείνται στο επίπεδο xOψ είναι ο συντελεστής διευθύνσεως. Έστω $\bar{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2)$ ένα διάνυσμα που κεί ται στο επίπεδο xOψ. Ορίζουμε ως <u>συντελεστή διευθύνσεως</u> αυτού τον αριθμό $\lambda=\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}$, αν $\alpha_1\neq 0$, ενώ θέτουμε $\lambda=\infty$, αν $\alpha_1=0$.



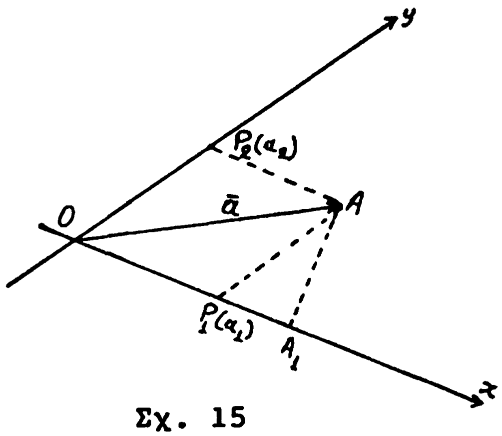
Σχ.14

Παρατηρούμε ότι αν το σύστημα συντεταγμένων xOψ είναι ορθογώνιο (Σχ.14) τότε ο συντελεστής διευθύνσεως του διανύσματος $\bar{\alpha}$ είναι η εφαπτομένη της προσανατολισμένης γωνίας που σχηματίζουν τα διανύσματα $\bar{x}_0$ και $\bar{\alpha}$, δηλαδή $\lambda=\varepsilon\varphi(\widehat{\bar{x}_0,\bar{\alpha}})=\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}$. Αν το σύστημα συντεταγμένων xOψ είναι πλαγιογώνιο και οι άξονες Ox και Oψ σχηματίζουν γωνία ω (Σχ.15), τότε η εφαπτομένη της προσανατολισμένης γωνίας που σχηματίζουν τα διανύσματα $\bar{x}_0$ και $\bar{\alpha}$ είναι

$$\varepsilon\varphi(\bar{x}_0,\bar{\alpha})=\frac{(\overline{A_1A})}{(\overline{OA}_1)}=\frac{\alpha_2\eta\mu\omega}{(\overline{OP}_1)+(\overline{P_1A}_1)}=\frac{\alpha_2\eta\mu\omega}{\alpha_1+\alpha_2\sigma\upsilon\nu\omega}=\frac{\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\,\eta\mu\omega}{1+\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\,\sigma\upsilon\nu\omega}=\frac{\lambda\eta\mu\omega}{1+\lambda\sigma\upsilon\nu\omega}\,.$$

προφανώς αν $\alpha_1=0$ τότε $\varepsilon\varphi(\widehat{\bar{x}_0,\bar{\alpha}})=\varepsilon\varphi\omega$.

Ας δούμε τώρα την έκφραση της εφαπτομένης της προσανατολισμένης γωνίας δύο διανυσμάτων $\bar{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2)$ και $\bar{\beta}(\beta_1,\beta_2)$ του επιπέδου xOψ. Αν φ_1 και φ_2 είναι οι προσανατολισμένες γωνίες που σχηματίζει το διάνυσμα $\bar{x}_0$ με τα $\bar{\alpha}$ και $\bar{\beta}$ αντίστοιχα, τότε η εφαπτομένη της προσανατολισμένης γωνίας φ των $\bar{\alpha}$ και $\bar{\beta}$ είναι



Σχ. 15

$$\varepsilon\varphi\varphi=\varepsilon\varphi(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{\varepsilon\varphi\varphi_2-\varepsilon\varphi\varphi_1}{1+\varepsilon\varphi\varphi_1\varepsilon\varphi\varphi_2}$$

Αν $\lambda_1=\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}$ και $\lambda_2=\dfrac{\beta_2}{\beta_1}$ είναι οι συντελεστές διευθύνσεως των $\bar{\alpha}$ και $\bar{\beta}$ τότε

$$\varepsilon\varphi\varphi_1=\frac{\lambda_1\eta\mu\omega}{1+\lambda_1\sigma\upsilon\nu\omega}\ ,\quad \varepsilon\varphi\varphi_2=\frac{\lambda_2\eta\mu\omega}{1+\lambda_2\sigma\upsilon\nu\omega}\ ,\ \text{όπου } \omega=\sphericalangle(\bar{x}_0,\bar{\psi}_0).$$

Συνεπώς θα έχουμε

$$\varepsilon\varphi\varphi=\frac{(\lambda_2-\lambda_1)\eta\mu\omega}{1+\lambda_1\lambda_2+(\lambda_1+\lambda_2)\sigma\upsilon\nu\omega} \qquad (*)$$

Από τον τύπο (*) έχουμε ότι τα διανύσματα $\bar{\alpha}$ και $\bar{\beta}$ είναι κάθετα αν και μόνο αν $1+\lambda_1\lambda_2+(\lambda_1+\lambda_2)\sigma\upsilon\nu\omega=0$. Στην περίπτωση που το σύστημα συντεταγμένων $xO\psi$ είναι ορθογώνιο έχουμε $\omega=\frac{\pi}{2}$, οπότε ο τύπος (*) παίρνει την απλή μορφή

$$\varepsilon\varphi\varphi=\frac{\lambda_2-\lambda_1}{1+\lambda_1\lambda_2}$$

Στην περίπτωση αυτή τα διανύσματα $\bar{\alpha},\bar{\beta}$ είναι κάθετα αν και μόνο αν $1+\lambda_1\lambda_2=0$.

12. Ασκήσεις.

1) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Δ,Ε,Ζ τα μέσα των πλευρών αυτού. Αν Ο είναι τυχόν σημείο εντός του τριγώνου να δειχθεί ότι $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{O\Gamma}=\overline{O\Delta}+\overline{OE}+\overline{OZ}$.

2. Αν ΑΒΓΔ είναι τυχόν τετράπλευρο και M_1, M_2 τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ να δειχθεί ότι

$\overline{AB}+\overline{A\Delta}+\overline{\Gamma B}+\overline{\Gamma\Delta}=4\overline{M_1M_2}$

3. Να δειχθεί ότι όταν λάβουμε τα διανύσματα $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$ με κοινή αρχή Ο, τότε τα πέρατα Α,Β,Γ κείνται επ'ευθείας αν και μόνο αν υπάρχουν τρείς αριθμοί $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ όχι όλοι ίσοι με μηδέν τέτοιοι ώστε $\lambda_1\bar{\alpha}+\lambda_2\bar{\beta}+\lambda_3\bar{\gamma}=0$ και $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$.

4. Να δειχθεί ότι όταν λάβουμε τα διανύσματα $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma},\bar{\delta}$ με κοινή αρχή Ο, τότε τα πέρατα Α,Β,Γ,Δ αυτών κείνται επί επιπέδου αν και μόνο αν υπάρχουν αριθμοί $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ όχι όλοι ίσοι με μηδέν τέτοιοι ώστε $\lambda_1\bar{\alpha}+\lambda_2\bar{\beta}+\lambda_3\bar{\gamma}+\lambda_4\bar{\delta}=0$ και $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0$.

5. Να δειχθεί ότι οι διάμεσοι τριγώνου διέρχονται από το αυτό σημείο που κείται σε απόσταση από κάθε κορυφή του τριγώνου ίση με $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

6. Αν $\bar{r}_1=2\bar{x}_0-\bar{\psi}_0+\bar{z}_0$, $\bar{r}_2=\bar{x}_0+3\bar{\psi}_0-2\bar{z}_0$, $\bar{r}_3=-2\bar{x}_0+\bar{\psi}_0-3\bar{z}_0$
$\bar{r}_4=3\bar{x}_0+2\bar{\psi}_0+5\bar{z}_0$ να βρεθούν οι αριθμοί $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ τέτοιοι ώστε
$\bar{r}_4=\lambda_1\bar{r}_1+\lambda_2\bar{r}_2+\lambda_3\bar{r}_3$.

7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα διανύσματα θέσεως των κορυφών αυτού $\bar{r}_1,\bar{r}_2,\bar{r}_3$ από μία αρχή Ο που βρίσκεται εκτός του επιπέδου ΑΒΓ. Αν Α΄,Β΄. Γ΄ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ,ΓΑ και ΑΒ αντίστοιχα, να υπολογιστούν τα διανύσματα $\overline{OA'}$, $\overline{OB'}$, $\overline{O\Gamma'}$ και να δειχθεί ότι
$\overline{OA'}+\overline{OB'}+\overline{O\Gamma'}=\bar{r}_1+\bar{r}_2+\bar{r}_3$.

8.Να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\bar{\alpha}(3,-2,1)$, $\bar{\beta}(1,-3,5)$, $\bar{\gamma}(2,1,-4)$ σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο.

9.Να δειχθεί ότι οι διχοτόμοι των γωνιών τριγώνου διέρχονται από το αυτό σημείο του οποίου να προσδιορισθεί το διάνυσμα θέσεως.

10.Να δειχθούν οι ταυτότητες

α) $\bar{\alpha}\times(\bar{\beta}\times\bar{\gamma})+\bar{\beta}\times(\bar{\gamma}\times\bar{\alpha})+\bar{\gamma}\times(\bar{\alpha}\times\bar{\beta})=0$

β) $[\bar{\alpha}\times\bar{\beta},\bar{\gamma}\times\bar{\delta},\bar{\varepsilon}\times\bar{\zeta}]=[\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\delta}]\,[\bar{\gamma},\bar{\varepsilon},\bar{\zeta}]-[\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}]\,[\bar{\delta},\bar{\varepsilon},\bar{\zeta}]$

γ) $[\bar{\alpha}\times\bar{\beta},\bar{\beta}\times\bar{\gamma},\bar{\gamma}\times\bar{\alpha}]=[\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}]^2$

11.Να δειχθεί ότι μία γωνία εγγεγραμμένη σε ημιπεριφέρεια είναι ορθή.

12.Αν ΑΒΓ είναι τυχόν τρίγωνο και $\alpha=|\overline{B\Gamma}|$, $\beta=|\overline{A\Gamma}|$, $\gamma=|\overline{AB}|$ είναι τα μήκη των πλευρών του να δειχθεί ο νόμος των συνημιτόνων, δηλαδή $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\,\text{συν}\hat{\Gamma}$.

13.Να δειχθεί ο νόμος των ημιτόνων δηλαδή $\frac{\alpha}{\text{ημ}A}=\frac{\beta}{\text{ημ}B}=\frac{\gamma}{\text{ημ}\Gamma}$, όπου α,β,γ είναι τα μήκη των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ.

14.Αν $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma},\bar{\delta}$ είναι τέσσερα διανύσματα να δειχθεί ότι $(\bar{\alpha}\ \bar{\beta}\ \bar{\gamma})\bar{\delta}=(\bar{\delta}\ \bar{\beta}\ \bar{\gamma})\bar{\alpha}+(\bar{\alpha}\ \bar{\delta}\ \bar{\gamma})\bar{\beta}+(\bar{\alpha}\ \bar{\beta}\ \bar{\delta})\bar{\gamma}$.

15.Να δειχθεί ότι $\bar{\alpha}\times(\bar{\beta}\times\bar{\gamma})=(\bar{\alpha}\times\bar{\beta})\times\bar{\gamma} \Longleftrightarrow (\bar{\alpha}\times\bar{\gamma})\times\bar{\beta}=0$.

16.Δίδονται τα διανύσματα $\bar{r}=\bar{\alpha}\times\bar{\beta}\neq 0$ και $\bar{\rho}=\bar{\beta}\times\bar{\gamma}\neq 0$. Αν $\bar{r}\times(\bar{\rho}\times\bar{r})=$ $=\bar{\beta}\times\bar{\gamma}(\bar{\alpha}\times\bar{\beta})^2$ και $\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}=0$ να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\bar{\alpha},\bar{\rho}$ είναι συγγραμμικά.

17. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\bar{r}(-7,10,1)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία συγγραμμική με το διάνυσμα $\bar{\alpha}(-3,2,1)$.

18. Δίνονται τα διανύσματα $\bar{\beta}(1,2,3)$ και $\bar{\gamma}(7,1,-3)$. Να προσδιοριστεί το διάνυσμα $\bar{x}$ από τη σχέση

$$\bar{x} = \bar{\beta}+\bar{\gamma}\times\bar{x}.$$

19. Να ορισθεί το διάνυσμα $\bar{r}$ από τις σχέσεις:

$$\bar{r}=\bar{\alpha}+\bar{\beta}\times\bar{r} \quad \text{και} \quad \bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}=0.$$

20. Να δειχθεί ότι το διάνυσμα $|\bar{\beta}|\bar{\alpha}+|\bar{\alpha}|\bar{\beta}$ είναι συγγραμμικό με την διχοτόμο της γωνίας $\sphericalangle(\bar{\alpha},\bar{\beta})$.

21. Αν $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma},\bar{\delta}$ είναι διανύσματα να δειχθεί ότι

$$(\bar{\alpha}\ \bar{\beta}\ \bar{\gamma})\bar{\delta}=(\bar{\delta}\cdot\bar{\alpha})\bar{\beta}\times\bar{\gamma}+(\bar{\delta}\cdot\bar{\beta})\bar{\gamma}\times\bar{\alpha}+(\bar{\delta}\cdot\bar{\gamma})\bar{\alpha}\times\bar{\beta}\ .$$

22. Έστω $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$ τυχούσα βάση του διανυσματικού χώρου V. Δείξτε ότι οι εννέα σχέσεις $\bar{e}_i\cdot\bar{\varepsilon}_j=\delta_{ij}$, $i,j=1,2,3$ ορίζουν μονοσήμαντα μία νέα τριάδα διανυσμάτων $(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2,\bar{\varepsilon}_3)$ που δίνονται από τις σχέσεις

$$\bar{\varepsilon}_1=\frac{\bar{e}_2\times\bar{e}_3}{[\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3]}\ ,\quad \bar{\varepsilon}_2=\frac{\bar{e}_3\times\bar{e}_1}{[\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3]}\ ,\quad \bar{\varepsilon}_3=\frac{\bar{e}_1\times\bar{e}_2}{[\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3]}$$

και αποτελούν επίσης βάση του χώρου V. Δείξτε επίσης ότι η αρχική βάση $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$ ορίζεται από την νέα με τις σχέσεις

$$\bar{e}_1=\frac{\bar{\varepsilon}_2\times\bar{\varepsilon}_3}{[\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2,\bar{\varepsilon}_3]}\ ,\quad \bar{e}_2=\frac{\bar{\varepsilon}_3\times\bar{\varepsilon}_1}{[\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2,\bar{\varepsilon}_3]}\ ,\quad \bar{e}_3=\frac{\bar{\varepsilon}_1\times\bar{\varepsilon}_2}{[\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2,\bar{\varepsilon}_3]}$$

τέλος δείξτε ότι οι δύο βάσεις είναι ομοιόστροφες (δηλ. και οι δύο δεξιόστροφες ή αριστερόστροφες) και $[\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3][\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2,\bar{\varepsilon}_3]=1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1.Θεμελιώδη προβλήματα της αναλυτικής γεωμετρίας.

11.Γεωμετρικοί τόποι στο επίπεδο.

Έστω $f(x,\psi)=0$ μια εξίσωση με δύο αγνώστους. Το σύνολο των σημείων P του επιπέδου των οποίων οι συντεταγμένες (x,ψ) πληρούν την εξίσωση αυτή καλείται γεωμετρικός τόπος της εξισώσεως $f(x,\psi)=0$.

Η αναλυτική γεωμετρία του επιπέδου ασχολείται με τα εξής προβλήματα:

(i)Αν δοθεί μια εξίσωση $f(x,\psi)=0$ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος αυτής, δηλαδή να βρεθεί το σύνολο των σημείων $P(x,\psi)$ του επιπέδου που την επαληθεύουν.

(ii)Αν δοθεί ένα σύνολο σημείων του επιπέδου που πληρούν ορισμένες γεωμετρικές ιδιότητες να βρεθεί η εξίσωση αυτού. Συνήθως ο γεωμετρικός τόπος μιας εξισώσεως της μορφής $f(x,\psi)=0$ είναι μία καμπύλη γραμμή.

1.2.Γεωμετρικοί τόποι στο χώρο.

Το σύνολο των σημείων P του χώρου των οποίων οι συντεταγμένες (x,ψ,z) πληρούν μια εξίσωση της μορφής $f(x,\psi,z)=0$ (αντίστοιχα ένα σύστημα εξισώσεων της μορφής $f_1(x,\psi,z)=0$, $f_2(x,\psi,z)=0$) καλείται γεωμετρικός τόπος της δοθείσης εξισώσεως (αντίστοιχα του συστήματος των εξισώσεων). Εδώ αντιμετωπίζουμε, όπως και στην περίπτωση του επιπέδου, τα εξής προβλήματα:

(i)Αν δοθεί μία εξίσωση $f(x,\psi,z)=0$ (αντίστοιχα δύο εξισώσεις

$f_1(x,\psi,z)=0$, $f_2(x,\psi,z)=0$ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της εξισώσεως (αντίστοιχα των εξισώσεων).

(ii) Αν δοθεί ένα σύνολο σημείων του χώρου πού πληρούν ορισμένες γεωμετρικές ιδιότητες να βρεθεί η εξίσωση ή οι εξισώσεις αυτού. Συνήθως η εξίσωση $f(x,\psi,z)=0$ έχει ως γεωμετρικό τόπο μία επιφάνεια με τη στοιχειώδη έννοια, ενώ το σύστημα εξισώσεων $f_1(x,\psi,z)=0$, $f_2(x,\psi,z)=0$ έχει ως γεωμετρικό τόπο μία καμπύλη.

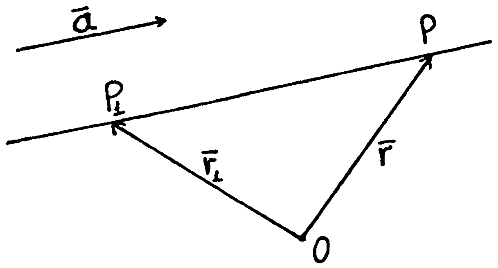
1.3. Διανυσματικές εξισώσεις.

Γνωρίζουμε ότι μπορούμε να θέσουμε σε αμφιμονότιμη αντιστοιχία το σύνολο των σημείων του χώρου με το σύνολο όλων των διανυσμάτων του χώρου. Η αντιστοιχία αυτή επιτυγχάνεται αν σε κάθε σημείο αντιστοιχούμε το διάνυσμα θέσεως αυτού. Έτσι μία εξίσωση της μορφής $f(\bar{r})=0$ παριστάνει ένα γεωμετρικό τόπο ο οποίος αποτελείται από όλα τα σημεία των οποίων το διάνυσμα θέσεως πληρεί την εξίσωση αυτή. Μία εξίσωση της μορφής $f(\bar{r})=0$ καλείται <u>διανυσματική εξίσωση</u>.

2. Ευθεία.

2.1. Διανυσματική εξίσωση ευθείας.

Μια ευθεία (ε) ορίζεται από ένα σημείο αυτής $P_1(\bar{r}_1)$ και ένα διάνυσμα $\bar{a}$ παράλληλο προς αυτήν , ή από δύο σημεία $P_1(\bar{r}_1)$ και $P_2(\bar{r}_2)$ αυτής . Στην πρώτη περίπτωση αν $P(\bar{r})$ είναι τυχόν σημείο της (ε) , τότε το διάνυσμα $\overline{P_1P}$ είναι παράλληλο προς το $\bar{a}$, οπότε $\overline{P_1P}=t\bar{a}$, $t\in R$, ή $\bar{r}-\bar{r}_1=t\bar{a}$. Δηλαδή



Σχ. 1

$$\bar{r}=\bar{r}_1+t\bar{a} \qquad (1)$$

Αντίστροφα , έστω $P'(\bar{r}')$ ένα σημείο που επαληθεύει την (1) , δηλαδή $\bar{r}'-\bar{r}_1=t'\bar{a}$ ή $\overline{P_1P}'=t'\bar{a}$. Άρα το διάνυσμα $\overline{P_1P}'$ είναι παράλληλο προς την ευθεία (ε) και επειδή το P_1 κείται στην (ε) έπεται ότι και το P' κείται στην (ε) . Η (1) είναι <u>η διανυσματική εξίσωση</u> της ευθείας .

Στην δεύτερη περίπτωση δηλαδή όταν η (ε) ορίζεται από τα σημεία $P_1(\bar{r}_1)$ και $P_2(\bar{r}_2)$, παίρνουμε ως παράλληλο διάνυσμα το $\overline{P_1P_2}$, οπότε

$$\bar{r} = \bar{r}_1+t(\bar{r}_2-\bar{r}_1) \tag{2}$$

Η (1) ή (2) είναι η παραμετρική διανυσματική εξίσωση ευθείας . Αυτές είναι ισοδύναμες αντίστοιχα με τις χωρίς παράμετρο εξισώσεις

$$(\bar{r}-\bar{r}_1)\times\bar{\alpha} = 0 \tag{3}$$

και
$$(\bar{r}-\bar{r}_1)\times(\bar{r}_2-\bar{r}_1) = 0 \tag{4}$$

2.2.<u>Παραμετρικές εξισώσεις ευθείας</u>.

Αν στο τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $Ox\psi z$ έχουμε $P_1(x_1,\psi_1,z_1)$, $P_2(x_2,\psi_2,z_2)$, $P(x,\psi,z)$ και $\bar{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ τότε από την (1) προκύπτει

$$x\bar{x}_0+\psi\bar{\psi}_0+z\bar{z}_0=x_1\bar{x}_0+\psi_1\bar{\psi}_0+z_1\bar{z}_0+t(\alpha_1\bar{x}_0+\alpha_2\bar{\psi}_0+\alpha_3\bar{z}_0).$$

'Αρα
$$\begin{aligned} x&=x_1+t\alpha_1\\ \psi&=\psi_1+t\alpha_2\\ z&=z_1+t\alpha_3 \end{aligned} \tag{5}$$

Οι εξισώσεις (5) δίνουν τις συντεταγμένες (x,ψ,z) του τυχόντος σημείου P της ευθείας και λέγονται <u>παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας</u> στο χώρο. 'Ομοια από την (2) έχουμε τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που προσδιορίζεται από δύο σημεία P_1 και P_2

$$\begin{aligned} x&=x_1+t(x_2-x_1)\\ \psi&=\psi_1+t(\psi_2-\psi_1)\\ z&=z_1+t(z_2-z_1) \end{aligned} \tag{6}$$

2.3. Αναλυτικές εξισώσεις ευθείας.

Αν από τις παραμετρικές εξισώσεις (5) της ευθείας απαλείψουμε την παράμετρο t θα πάρουμε τις λεγόμενες αναλυτικές εξισώσεις της ευθείας

$$\frac{x-x_1}{\alpha_1} = \frac{\psi-\psi_1}{\alpha_2} = \frac{z-z_1}{\alpha_3} \qquad (7)$$

'Ομοια από τις (6) έχουμε τις αναλυτικές εξισώσεις της ευθείας που προσδιορίζεται από τα δύο σημεία P_1 και P_2

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{\psi-\psi_1}{\psi_2-\psi_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (8)$$

2.4. Η ευθεία στο επίπεδο.

Αν η ευθεία κείται στο επίπεδο $xO\psi$, τότε οι εξισώσεις αυτής απλουστεύονται. Η διανυσματική εξίσωση της ευθείας

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + t\bar{\alpha} \quad \text{ή} \quad \bar{r} = \bar{r}_1 + t(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)$$

είναι της αυτής μορφής, αλλά τα διανύσματα είναι διανύσματα του επιπέδου. Οι παραμετρικές εξισώσεις είναι τώρα δύο

$$\begin{aligned} x &= x_1 + t\alpha_1 \\ \psi &= \psi_1 + t\alpha_2 \end{aligned} \quad \text{ή} \quad \begin{aligned} x &= x_1 + t(x_2 - x_1) \\ \psi &= \psi_1 + t(\psi_2 - \psi_1) \end{aligned} \qquad (9)$$

από αυτές μπορούμε να πάρουμε τώρα μία αναλυτική εξίσωση την

$$\frac{x-x_1}{\alpha_1} = \frac{\psi-\psi_1}{\alpha_2} \quad \text{ή} \quad \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{\psi-\psi_1}{\psi_2-\psi_1} \qquad (10)$$

Από την (10) παίρνουμε

$$\alpha_2 x - \alpha_1 \psi + \alpha_1 \psi_1 - \alpha_2 x_1 = 0$$

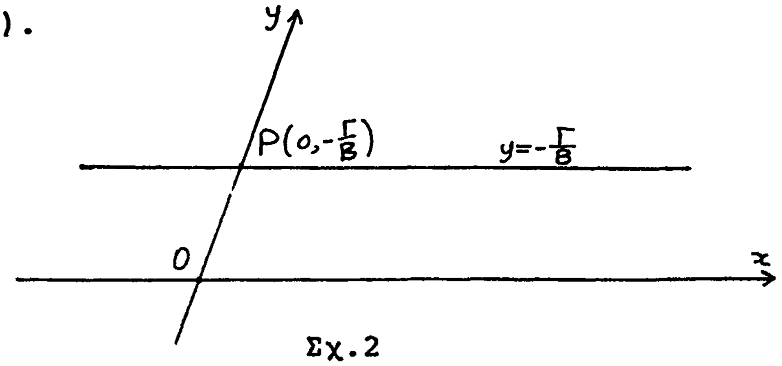
ή

$$(\psi_2-\psi_1)x-(x_2-x_1)\psi+(x_2-x_1)\psi_1-(\psi_2-\psi_1)x_1 = 0 \qquad (11)$$

δηλαδή η αναλυτική εξίσωση της ευθείας στο επίπεδο είναι της μορφής

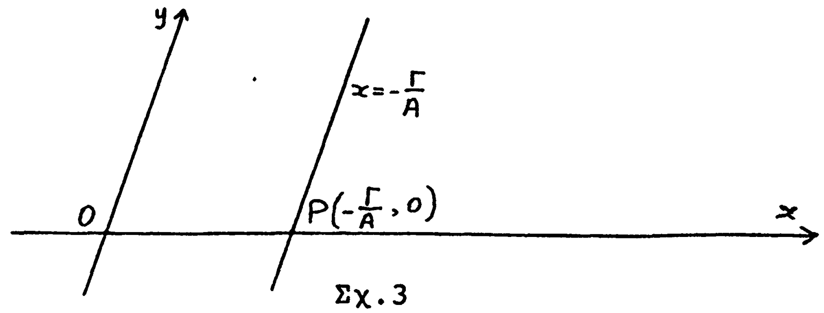
$$Ax+B\psi+\Gamma = 0 \qquad (12)$$

Αντίστροφα, κάθε εξίσωση της μορφής (12) παριστάνει στο επίπεδο $xO\psi$ ευθεία γραμμή. Πράγματι, αν $A=0$ καί $B\neq0$ τότε η (12) γίνεται $\psi=-\frac{\Gamma}{B}$. Η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα Ox (Σχ.2).



Σχ.2

Αν $A\neq0$ και $B=0$ τότε έχουμε $x=-\frac{\Gamma}{A}$. Η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $O\psi$ (Σχ.3).



Σχ.3

Τέλος αν $A\cdot B\neq0$ τότε η εξίσωση (12) γίνεται

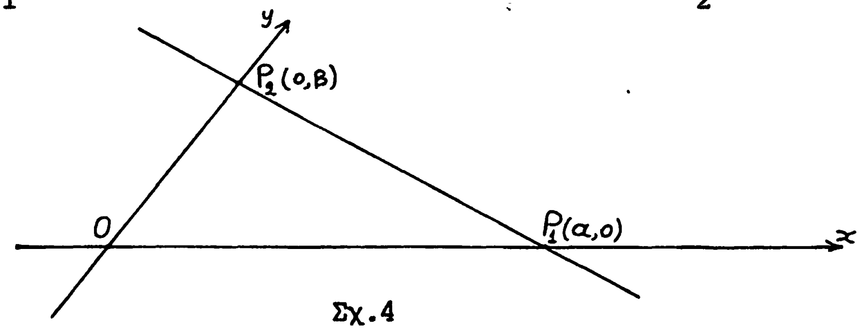
$$\frac{x-(-\frac{\Gamma}{A})}{B} = \frac{\psi-0}{-A}$$

Η εξίσωση αυτή συγκρινόμενη με την εξίσωση (10) μας λέει ότι παριστάνει ευθεία που διέρχεται από το σημείο $P(-\frac{\Gamma}{A},0)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\bar{\alpha}(B\ ,\ -A)$.

Αν $A\neq 0$, $B\neq 0$, $\Gamma\neq 0$ τότε η εξίσωση (12) μπορεί να γραφεί και με την μορφή

$$\frac{x}{-\frac{\Gamma}{A}} + \frac{\psi}{-\frac{\Gamma}{B}} = 1 \quad \text{ή πιό απλά} \quad \frac{x}{\alpha} + \frac{\psi}{\beta} = 1 .$$

Μια τέτοια εξίσωση παριστάνει ευθεία που τέμνει τον άξονα Ox στο σημείο $P_1(\alpha,0)$ και τον άξονα $O\psi$ στο σημείο $P_2(0,\beta)$ (Σχ.4).



Σχ.4

Τα α,β λέγονται τότε <u>συντεταγμένες επί την αρχή</u> της ευθείας. Είδαμε ότι το διάνυσμα $\bar{\alpha}(B,-A)$ είναι παράλληλο προς την ευθεία που παριστάνει η εξίσωση (12). Αν το σύστημα συντεταγμένων $xO\psi$ είναι ορθογώνιο τότε το διάνυσμα $\bar{n}(A\ ,\ B)$ είναι κάθετο στην ευθεία γιατί $\bar{\alpha}\cdot\bar{n} = B\cdot A+(-A)\cdot B=0$. Το διάνυσμα $\bar{\alpha}(B,-A)$ προς το οποίο είναι παράλληλη η ευθεία $Ax+B\psi+\Gamma=0$ έχει συντελεστή διευθύνσεως $\lambda=-\frac{A}{B}$, τον οποίο καλούμε και <u>συντελεστή διευθύνσεως της ευθείας</u>.

Την εξίσωση (10) μπορούμε να γράψουμε με την μορφή

$$\psi-\psi_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(x-x_1) \quad \text{ή} \quad \psi-\psi_1 = \frac{\psi_2-\psi_1}{x_2-x_1}(x-x_1) .$$

Δηλαδή μία ευθεία που περνά από το σημείο $P_1(x_1,\psi_1)$ και έχει συντελεστή διευθύνσεως λ, έχει εξίσωση

$$\psi-\psi_1 = \lambda(x-x_1) .$$

<u>2.5.Σχετική θέση δύο ευθειών.</u>

'Εστω ότι δίνονται δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) στο επίπεδο με εξισώσεις

$$(\varepsilon_1): A_1x+B_1\psi+\Gamma_1 = 0 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2): A_2x+B_2\psi+\Gamma_2 = 0$$

Οι ευθείες είναι παράλληλες προς τα διανύσματα $\bar{\alpha}_1(B_1,-A_1)$, $\bar{\alpha}_2(B_2,-A_2)$ που έχουν συντελεστές διευθύνσεως $\lambda_1 = -\frac{A_1}{B_1}$, $\lambda_2 = -\frac{A_2}{B_2}$, αντίστοιχα. Επομένως

(i) $\quad (\varepsilon_1)//(\varepsilon_2) \Longleftrightarrow \lambda_1=\lambda_2 \Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$

(ii) $\quad (\varepsilon_1) \equiv (\varepsilon_2) \Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$

(iii) $\quad (\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ τέμνονται $\Longleftrightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2 \Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$.

Από τις σχέσεις (i) προκύπτει αμέσως ότι αν μία ευθεία έχει εξίσωση $Ax+B\psi+\Gamma=0$, τότε κάθε άλλη ευθεία παράλληλη προς αυτή θα έχει εξίσωση $Ax+B\psi+\Gamma_1=0$.

2.6. Επίπεδη δέσμη ευθειών.

Καλούμε <u>δέσμη ευθειών</u> το σύνολο των ευθειών του επιπέδου που διέρχονται από ένα σημείο, ή είναι παράλληλες. Το σημείο καλείται κέντρο της δέσμης. 'Εστω $(\varepsilon_1): A_1x+B_1\psi+\Gamma_1=0$ και $(\varepsilon_2): A_2x+B_2\psi+\Gamma_2=0$ δύο μη συμπίπτουσες ευθείες. Τότε αυτές ορίζουν μία δέσμη ευθειών και κάθε εξίσωση της μορφής

$$\lambda_1(A_1x+B_1\psi+\Gamma_1)+\lambda_2(A_2x+B_2\psi+\Gamma_2) = 0 \ , \text{ όπου } (\lambda_1,\lambda_2)\neq(0,0)$$

ορίζει μία ευθεία της δέσμης η οποία διέρχεται από το κέντρο αυτής. Πράγματι, αν $P(x_0,\psi_0)$ είναι το κέντρο της δέσμης, τότε έχουμε

$A_1x_0+B_1\psi_0+\Gamma_1=0$ και $A_2x_0+B_2\psi_0+\Gamma_2=0$ οπότε έχουμε επίσης $\lambda_1(A_1x_0+B_1\psi_0+\Gamma_1)+\lambda_2(A_2x_0+B_2\psi_0+\Gamma_2)=0$. Συνεπώς το κέντρο $P(x_0,\psi_0)$ κείται στην ευθεία που ορίζεται από την εξίσωση της δέσμης, δηλαδή την

$$\lambda_1(A_1x+B_1\psi+\Gamma_1)+\lambda_2(A_2x+B_2\psi+\Gamma_2) = 0 \qquad (*)$$

Αν οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες, τότε

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{\lambda_1A_1+\lambda_2A_2}{\lambda_1B_1+\lambda_2B_2}$$

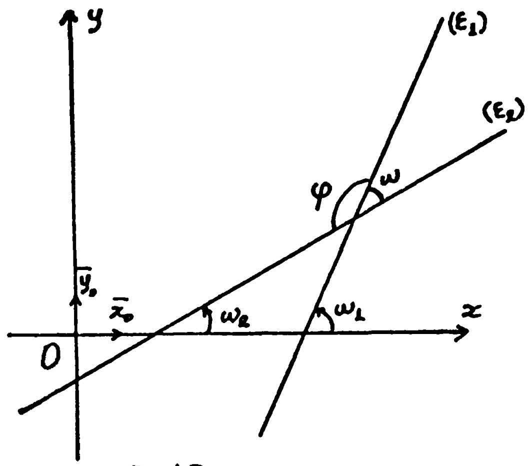
και επομένως και η (*) παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τις (ε_1) και (ε_2).

2.7. Γωνία δύο ευθειών

Θεωρούμε τις ευθείες $(\varepsilon_1):A_1x+B_1\psi+\Gamma_1=0$ και $(\varepsilon_2):A_2x+B_2\psi+\Gamma_2=0$. Η μια γωνία ω των (ε_1) και (ε_2) ισούται με τη γωνία των διανυσμάτων $\bar{\alpha}_1(B_1,-A_1)$ και $\bar{\alpha}_2(B_2,-A_2)$ που είναι παράλληλα προς τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) , αντίστοιχα , ενώ η άλλη γωνία φ είναι παραπληρωματική της ω (Σχ.5) . Αν το σύστημα συντεταγμένων $Ox\psi$ είναι ορθογώνιο έχουμε για το συνημίτονο της γωνίας ω

$$\text{συν}\,\omega = \frac{\bar{\alpha}_1\cdot\bar{\alpha}_2}{|\bar{\alpha}_1|\,|\bar{\alpha}_2|} = \frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

Αν οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες τότε $\text{συν}\omega=0$, οπότε $A_1A_2+B_1B_2=0$. Έτσι αν $\lambda_1=-\frac{A_1}{B_1}$ και $\lambda_2=-\frac{A_2}{B_2}$ είναι οι συντελεστές διευθύνσεως των ευθειών , τότε οι ευθείες είναι κάθετες αν και μόνο αν $\lambda_1\cdot\lambda_2=-1$. Αν ω_1 και ω_2 είναι οι προσανατολισμένες γωνίες των διανυσμάτων $\bar{x}_0,\bar{\alpha}_1$ και $\bar{x}_0,\bar{\alpha}_2$ αντίστοιχα , τότε σε ορθογώνιο



Σχ.5

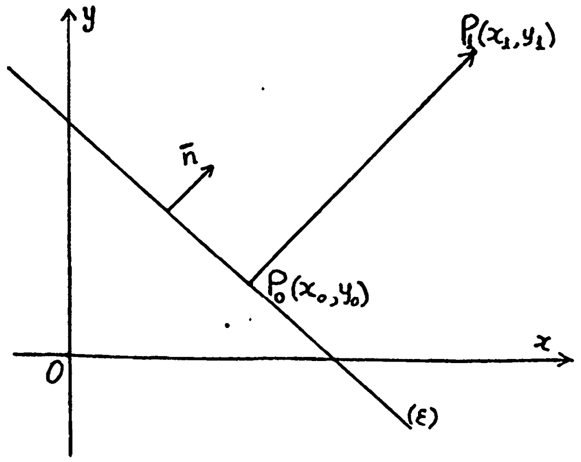
σύστημα έχουμε $\varepsilon\varphi\omega_1 = \lambda_1$ και $\varepsilon\varphi\omega_2 = \lambda_2$, ενώ $\omega = \omega_1 - \omega_2$ και $\varphi = 180^\circ - \omega_1 + \omega_2$. Συνεπώς

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\varepsilon\varphi\omega_1 - \varepsilon\varphi\omega_2}{1+\varepsilon\varphi\omega_1\varepsilon\varphi\omega_2} = \frac{\lambda_1-\lambda_2}{1+\lambda_1\lambda_2}$$

και $$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\varepsilon\varphi\omega_2 - \varepsilon\varphi\omega_1}{1+\varepsilon\varphi\omega_1\varepsilon\varphi\omega_2} = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{1+\lambda_1\lambda_2}.$$

2.8. Προσανατολισμός επιπέδου ως προς ευθεία.

Θεωρούμε την ευθεία (ε) με εξίσωση $Ax+B\psi+\Gamma=0$. Γνωρίζουμε ότι το διάνυσμα $\bar{n}(A,B)$ είναι κάθετο στην ευθεία (ε) (όταν το σύστημα συντεταγμένων $Ox\psi$ είναι ορθογώνιο). Η ευθεία (ε) χωρίζει το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα. Θα αποδείξουμε ότι οι συντεταγμένες των σημείων του ημιεπιπέδου προς το οποίο δείχνει το διάνυσμα $\bar{n}$ καθιστούν το πρώτο μέλος της εξισώσεως της ευθείας (ε) θετικό, ενώ οι συντεταγμένες των σημείων του άλλου ημιεπιπέδου το καθιστούν αρνητικό. 'Εστω $P_0(x_0,\psi_0)$ ένα σημείο της ευθείας (ε) και $\overline{P_0P_1}$ ένα διάνυσμα κάθετο στην ευθεία και ομόρροπο με το $\bar{n}$ (Σχ.6). Τότε έχουμε $\overline{P_0P_1}=\lambda\bar{n}$ με $\lambda>0$.



Σχ.6

Συνεπώς

$$(x_1-x_0)\bar{x}_0+(\psi_1-\psi_0)\bar{\psi}_0=\lambda(A\bar{x}_0+B\bar{\psi}_0)$$

ή

$$x_1 = x_0+\lambda A$$

$$\psi_1 = \psi_0+\lambda B$$

'Ετσι έχουμε

$$Ax_1+B\psi_1+\Gamma=A(x_0+\lambda A)+B(\psi_0+\lambda B)+\Gamma=$$

$=Ax_0+B\psi_0+\Gamma+\lambda(A^2+B^2)=\lambda(A^2+B^2)>0$ γιατί το σημείο $P_0(x_0,\psi_0)$ κείται στην ευθεία (ε) και είναι $Ax_0+B\psi_0+\Gamma=0$, ενώ $\lambda>0$. Αν το σημείο P_1 κείται στο άλλο ημιεπίπεδο τότε θα είναι $\lambda<0$ οπότε θα έχουμε $Ax_1+B\psi_1+\Gamma<0$.

2.9. Απόσταση σημείου από ευθεία.

Για να υπολογίσουμε την απόσταση του σημείου $P_1(x_1,\psi_1)$ από την ευθεία (ε) αρκεί να βρούμε το μέτρο του διανύσματος $\overline{P_0P_1}$, όπου $P_0(x_0,\psi_0)$ είναι ο πόδας της καθέτου που φέρουμε από το P_1 προς την ευθεία. Επειδή, όπως είδαμε παραπάνω, είναι $x_1=x_0+\lambda A$ και $\psi_1=\psi_0+\lambda B$ θα έχουμε $|\overline{P_0P_1}|^2=(x_1-x_0)^2+(\psi_1-\psi_0)^2=\lambda^2(A^2+B^2)$.

Αλλά $Ax_1+B\psi_1+\Gamma=\lambda(A^2+B^2)$ ή $\lambda=\dfrac{Ax_1+B\psi_1+\Gamma}{A^2+B^2}$. Έτσι έχουμε

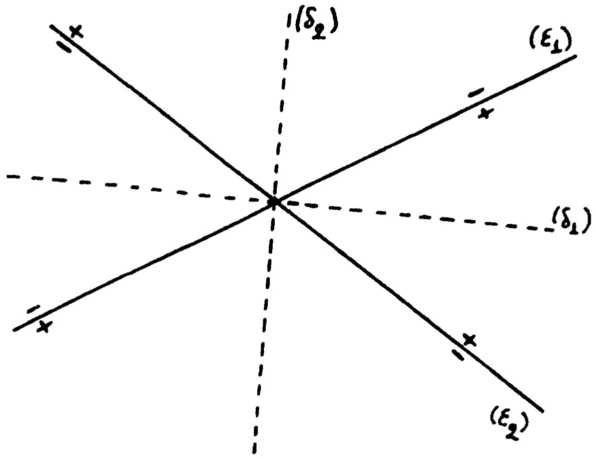
$|\overline{P_0P_1}|^2=\dfrac{(Ax_1+B\psi_1+\Gamma)^2}{A^2+B^2}$, οπότε η απόσταση d του σημείου P_1 από την ευθεία (ε) είναι

$$d=\frac{|Ax_1+B\psi_1+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Αν θεωρήσουμε τον τύπο χωρίς απόλυτη τιμή τότε αυτός εκφράζει την προσημασμένη απόσταση του σημείου P_1 από την ευθεία (ε).

2.10. Διχοτόμοι των γωνιών δύο ευθειών.

Θεωρούμε τις ευθείες $(\varepsilon_1):A_1x+B_1\psi+\Gamma_1=0$ και $(\varepsilon_2):A_2x+B_2\psi+\Gamma_2=0$ σε ορθογώνιο σύστημα. Αν (δ_1) και (δ_2) είναι οι διχοτόμοι των γωνιών που σχηματίζουν οι (ε_1) καί (ε_2) (Σχ.7), γιά να βρούμε τις εξισώσεις των (δ_1) καί (δ_2) παρατηρούμε ότι μία από αυτές π.χ. η (δ_1) κείται σε ομόσημους προσανατολισμούς των ημιεπιπέδων στα οποία χωρίζουν το επίπεδο οι δύο ευθείες (ε_1) καί (ε_2), ενώ η (δ_2)



Σχ.7

κείται σε ετερόσημους προσανατολισμούς. Έτσι ένα τυχόν σημείο $P(x,\psi)$ της διχοτόμου (δ_1) έχει προσημασμένες αποστάσεις από τις ευθείες (ε_1) και (ε_2)

$$\frac{A_1x+B_1\psi+\Gamma_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} \quad \text{και} \quad \frac{A_2x+B_2\psi+\Gamma_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

αντίστοιχα, οι οποίες πρέπει να είναι ίσες. Συνεπώς το τυχόν σημείο της διχοτόμου (δ_1) πληρεί την εξίσωση

$$\frac{A_1x+B_1\psi+\Gamma_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = \frac{A_2x+B_2\psi+\Gamma_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

Ομοίως το τυχόν σημείο $P(x,\psi)$ της διχοτομου (δ_2) έχει προσημασμένες αποστάσεις από τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) οι οποίες πρέπει να είναι αντίθετες. Έτσι η (δ_2) θα έχει εξίσωση

$$\frac{A_1x+B_1\psi+\Gamma_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = -\frac{A_2x+B_2\psi+\Gamma_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

3.Επίπεδο.

3.1.Διανυσματική εξίσωση επιπέδου.

Ένα επίπεδο μπορεί να προσδιορισθεί αν δοθούν

α) Ένα σημείο αυτού καί δύο διανύσματα μη συγγραμμικά παράλληλα προς το επίπεδο.

β) Δύο σημεία αυτού καί ένα διάνυσμα παράλληλο πρός το επίπεδο και μη παράλληλο προς το διάνυσμα που καθορίζουν τα δύο σημεία.

γ) Τρία σημεία αυτού μη συγγραμμικά.

δ) Ένα σημείο και ένα διάνυσμα κάθετο προς το επίπεδο.

Μπορούμε τώρα να βρούμε την διανυσματική εξίσωση του επιπέδου σε καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις.

α) Αν $P_1(\bar{r}_1)$ είναι το δοθέν σημείο του επιπέδου , $P(\bar{r})$ τυχόν σημείο αυτού και $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ τα δοθέντα μη συγγραμμικά διανύσματα , τότε τα διανύσματα $\overline{P_1P}$, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ είναι συνεπίπεδα . Συνεπώς υπάρχουν αριθμοί $u , v \in R$ τέτοιοι ώστε $\overline{P_1P} = u\bar{\alpha} + v\beta$, οπότε

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + u\bar{\alpha} + v\bar{\beta} \qquad (1)$$

Αντίστροφα , κάθε σημείο $P(\bar{r})$ που ικανοποιεί την (1) ανήκει στο επίπεδο , γιατί η (1) μας λέει ότι τα διανύσματα $\overline{P_1P}$, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ είναι συνεπίπεδα . Η (1) είναι η διανυσματική εξίσωση του επιπέδου με παραμέτρους τα u και v . Αν πολλαπλασιάσουμε εσωτερικά τα δύο μέλη της (1) με το διάνυσμα $\bar{\alpha} \times \bar{\beta}$ παίρνουμε την χωρίς παραμέτρους διανυσματική εξίσωση του επιπέδου $(\bar{r}-\bar{r}_1)\cdot(\bar{\alpha} \times \bar{\beta}) = 0$ ή

$$[\bar{r}-\bar{r}_1 \, , \bar{\alpha} \, , \bar{\beta}] = 0 \qquad (2) \quad .$$

β) Στην περίπτωση που το επίπεδο προσδιορίζεται από δύο σημεία $P_1(\bar{r}_1)$ και $P_2(\bar{r}_2)$ αυτού και ένα διάνυσμα $\bar{\alpha}$ παράλληλο προς το επίπεδο και μη συγγραμμικό με το διάνυσμα $\overline{P_1P_2}$ έχουμε ως διανυσματική εξίσωση του επιπέδου την

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + u(\bar{r}_2-\bar{r}_1) + v\bar{\alpha} \qquad (3)$$

ή χωρίς παραμέτρους την

$$[\bar{r}-\bar{r}_1 \, , \, \bar{r}_2-\bar{r}_1 \, , \, \bar{\alpha}] = 0 \qquad (4)$$

Οι εξισώσεις (3) και (4) προκύπτουν από τις εξισώσεις (1) και (2) αντίστοιχα, καθόσον η περίπτωση αυτή ανάγεται στην περίπτωση (α), αν θεωρήσουμε το επίπεδο ως διερχόμενο από το σημείο $P_1(\bar{r}_1)$ και παράλληλο προς τα διανύσματα $\overline{P_1P_2}$ και $\bar{\alpha}$.

γ) Στην περίπτωση που το επίπεδο προσδιορίζεται από τρία σημεία $P_1(\bar{r}_1), P_2(\bar{r}_2), P_3(\bar{r}_3)$ αυτού έχουμε ως διανυσματική εξίσωση την

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + u(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) + v(\bar{r}_3 - \bar{r}_1) \qquad (5)$$

ή χωρίς παραμέτρους την

$$\left[\bar{r}-\bar{r}_1\ ,\ \bar{r}_2-\bar{r}_1\ ,\ \bar{r}_3-\bar{r}_1\right] = 0 \qquad (6)$$

δ) Θεωρούμε τώρα την περίπτωση που το επίπεδο προσδιορίζεται από ένα σημείο $P_1(\bar{r}_1)$ αυτού και ένα διάνυσμα $\bar{n}$ κάθετο στο επίπεδο. Αν $P(\bar{r})$ είναι τυχόν σημείο του επιπέδου, τότε το διάνυσμα $\overline{P_1P}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\bar{n}$ και επομένως έχουμε $\overline{P_1P}\cdot\bar{n}=0$. Συνεπώς η διανυσματική εξίσωση του επιπέδου είναι τότε

$$(\bar{r}-\bar{r}_1)\cdot\bar{n} = 0 \qquad (7)$$

Αντίστροφα, κάθε σημείο $P(\bar{r})$ που επαληθεύει την (7) κείται στο επίπεδο γιατί η (7) μας λέει ότι το διάνυσμα $\overline{P_1P}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\bar{n}$.

3.2. Παραμετρικές εξισώσεις επιπέδου.

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $Ox\psi z$ και έστω $P(x,\psi,z)$, $P_1(x_1,\psi_1,z_1)$, $P_2(x_2,\psi_2,z_2)$, $P_3(x_3,\psi_3,z_3)$, $\bar{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\bar{\beta}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, $\bar{n}(n_1,n_2,n_3)$. Τότε από τις διανυσματικές εξισώσεις (1), (3) καί (5) μπορούμε εύκολα να πάρουμε τις <u>παραμετρικές εξισώσεις του επιπέδου.</u>

Για την περίπτωση (α) η εξίσωση (1) γράφεται

$$x\bar{x}_0+\psi\bar{\psi}_0+z\bar{z}_0=x_1\bar{x}_0+\psi_1\bar{\psi}_0+z_1\bar{z}_0+u(\alpha_1\bar{x}_0+\alpha_2\bar{\psi}_0+\alpha_3\bar{z}_0)+v(\beta_1\bar{x}_0+\beta_2\bar{\psi}_0+\beta_3\bar{z}_0)$$

οπότε έχουμε τις παραμετρικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} x &= x_1+u\alpha_1+v\beta_1 \\ \psi &= \psi_1+u\alpha_2+v\beta_2 \\ z &= z_1+u\alpha_3+v\beta_3 \end{aligned} \qquad (1')$$

Για την περίπτωση (β) από την εξίσωση (3), έχουμε

$$\begin{aligned} x &= x_1+u(x_2-x_1)+v\alpha_1 \\ \psi &= \psi_1+u(\psi_2-\psi_1)+v\alpha_2 \\ z &= z_1+u(z_2-z_1)+v\alpha_3 \end{aligned} \qquad (3')$$

Για την περίπτωση (γ) από την εξίσωση (5), έχουμε

$$\begin{aligned} x &= x_1+u(x_2-x_1)+v(x_3-x_1) \\ \psi &= \psi_1+u(\psi_2-\psi_1)+v(\psi_3-\psi_1) \\ z &= z_1+u(z_2-z_1)+v(z_3-z_1) \end{aligned} \qquad (5')$$

3.3.Αναλυτική εξίσωση επιπέδου.

Αν τώρα από τις παραμετρικές εξισώσεις (1΄) ή (3΄) ή (5΄) απαλείψουμε τις παραμέτρους u και v θα πάρουμε την <u>αναλυτική εξίσωση του επιπέδου</u> γιά την κάθε περίπτωση. Σημειώνουμε εδώ ότι η αναλυτική εξίσωση του επιπέδου μπορεί επίσης να προκύψει και από τις εξισώσεις (2) ή (4) ή (6) ή ακόμα και από την (7) αν εκφράσουμε αυτές συναρτήσει των συντεταγμένων. Έτσι έχουμε.

Γιά την περίπτωση (α) από την εξίσωση (2) ή από τις εξισώσεις

(1') παίρνουμε την αναλυτική εξίσωση

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & \psi-\psi_1 & z-z_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2')$$

Για την περίπτωση (β) από την εξίσωση (4) ή από τις (3') παίρνουμε

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & \psi-\psi_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & \psi_2-\psi_1 & z_2-z_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4')$$

Για την περίπτωση (γ) από την εξίσωση (6) ή από τις (5') παίρνουμε

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & \psi-\psi_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & \psi_2-\psi_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & \psi_3-\psi_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (6')$$

Τέλος για την περίπτωση (δ) παίρνουμε από την εξίσωση (7) την αναλυτική εξίσωση

$$(x-x_1)n_1+(\psi-\psi_1)n_2+(z-z_1)n_3 = 0 \qquad (7')$$

Παρατηρούμε ότι οι αναλυτικές εξισώσεις (2'), (4'), (6') και (7') μπορούν όλες, μετά από την εκτέλεση των πράξεων, να λάβουν την μορφή

$$Ax + B\psi + \Gamma z + \Delta = 0 \qquad (8)$$

Αντίστροφα, μπορούμε να δούμε ότι κάθε εξίσωση της μορφής (8) παριστάνει επίπεδο. Πράγματι, αν $P_1(x_1,\psi_1,z_1)$, $P_2(x_2,\psi_2,z_2)$, είναι δύο σημεία που επαληθεύουν την εξίσωση (8) και $\bar{n}$ είναι το διάνυσμα που έχει συντεταγμένες Α,Β,Γ, δηλαδή $\bar{n}(A,B,\Gamma)$, τότε έχουμε

$$A x_1 + B\psi_1 + \Gamma z_1 + \Delta = 0$$

$$A x_2 + B\psi_2 + \Gamma z_2 + \Delta = 0$$

Αν αφαιρέσουμε αυτές κατά μέλη παίρνουμε

$$A(x_2-x_1)+B(\psi_2-\psi_1)+\Gamma(z_2-z_1) = 0$$

και επομένως $\bar{n}\cdot\overline{P_1P_2}=0$. Δηλαδή το σταθερό διάνυσμα $\bar{n}(A,B,\Gamma)$ είναι κάθετο σε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα των οποίων τα άκρα βρίσκονται στο γεωμετρικό τόπο (8). Συνεπώς η (8) παριστάνει πράγματι επίπεδο. Σημειώνουμε εδώ ότι, όπως είδαμε παραπάνω το διάνυσμα $\bar{n}(A,B,\Gamma)$ είναι κάθετο στο επίπεδο $Ax+B\psi+\Gamma z+\Delta=0$.

3.4. Διερεύνηση της εξισώσεως του επιπέδου.

Θεωρούμε ένα επίπεδο με εξίσωση

$$Ax + B\psi + \Gamma z + \Delta = 0 \qquad (*)$$

α) Αν $B=\Gamma=0$ τότε η (*) γίνεται $x=-\frac{\Delta}{A}$ και παριστάνει επίπεδο παράλληλο προς το επίπεδο ψOz που τέμνει τον άξονα Ox στο σημείο με τετμημένη $-\frac{\Delta}{A}$. Όμοια οι $\psi=-\frac{\Delta}{B}$ και $z=-\frac{\Delta}{\Gamma}$ είναι αντίστοιχα οι εξισώσεις επιπέδων παραλλήλων προς τα επίπεδα xOz και $xO\psi$.

β) Αν $\Gamma=0$, $A,B\neq 0$ τότε η (*) γίνεται $Ax+B\psi+\Delta=0$ και παριστάνει επίπεδο παράλληλο προς τον άξονα Oz, το οποίο τέμνει το επίπεδο $xO\psi$ κατά μία ευθεία με εξισώσεις $Ax+B\psi+\Delta=0$, $z=0$.

γ) Αν $\Delta=0$, τότε η (*) γίνεται $Ax+B\psi+\Gamma z=0$ και παριστάνει επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, αφού το σημείο $O(0,0,0)$ επαληθεύει την εξίσωση.

δ) Αν $A,B,\Gamma,\Delta \neq 0$, τότε το επίπεδο δεν είναι παράλληλο προς κανένα άξονα και η (*) γίνεται

$$\frac{x}{-\frac{\Delta}{A}} + \frac{\psi}{-\frac{\Delta}{B}} + \frac{z}{-\frac{\Delta}{\Gamma}} = 1 \quad \text{ή} \quad \frac{x}{\alpha} + \frac{\psi}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1$$

όπου θέσαμε $\alpha = -\frac{\Delta}{A}$, $\beta = -\frac{\Delta}{B}$, $\gamma = -\frac{\Delta}{\Gamma}$. Τα σημεία $(\alpha,0,0)$, $(0,\beta,0)$, $(0,0,\gamma)$ είναι τα σημεία στα οποία το επίπεδο τέμνει τους άξονες $Ox, O\psi, Oz$ αντίστοιχα. Οι αριθμοί α,β,γ λέγονται <u>συντεταγμένες επί την αρχή</u>.

3.5. Εξισώσεις ευθείας στο χώρο.

Είδαμε ότι αν μία ευθεία στο χώρο διέρχεται από ένα σημείο $P_1(x_1,\psi_1,z_1)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ έχει εξισώσεις

$$\frac{x-x_1}{\alpha_1} = \frac{\psi-\psi_1}{\alpha_2} = \frac{z-z_1}{\alpha_3} \tag{9}$$

Επίσης αν η ευθεία διέρχεται από δύο σημεία $P_1(x_1,\psi_1,z_1)$, $P_2(x_2,\psi_2,z_2)$ τότε έχει εξισώσεις

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{\psi-\psi_1}{\psi_2-\psi_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{10}$$

Το σύστημα των εξισώσεων (9) ή των εξισώσεων (10) μπορεί να γραφεί

$$\begin{aligned} \alpha_2 x - \alpha_1\psi - \alpha_2 x_1 + \alpha_1\psi_1 &= 0 \\ \alpha_3\psi - \alpha_2 z - \alpha_3\psi_1 + \alpha_2 z_1 &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

ή

$$\begin{aligned} (\psi_2-\psi_1)x-(x_2-x_1)\psi-(\psi_2-\psi_1)x_1+(x_2-x_1)\psi_1 &= 0 \\ (z_2-z_1)\psi-(\psi_2-\psi_1)z-(z_2-z_1)\psi_1+(\psi_2-\psi_1)z_1 &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Δηλαδή και στις δύο περιπτώσεις είναι της μορφής

$$A_1x + B_1\psi + \Delta_1 = 0$$
$$B_2\psi + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0 \qquad (13)$$

Η πρώτη από τις εξισώσεις (13) παριστάνει ένα επίπεδο παράλληλο προς τον άξονα Oz και η δεύτερη ένα επίπεδο παράλληλο προς τον άξονα Ox. Έτσι η ευθεία (9) ή (10) παριστάνεται ως τομή δύο επιπέδων τα οποία προβάλουν αυτή στα επίπεδα Oxψ και Oψz.

Γενικά ως εξισώσεις ευθείας μπορούμε να πάρουμε τις εξισώσεις δύο επιπέδων των οποίων η τομή είναι η δοθείσα ευθεία. Δηλαδή οι εξισώσεις

$$A_1x + B_1\psi + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0$$
$$A_2x + B_2\psi + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0 \qquad (14)$$

μπορούν να θεωρηθούν ως εξισώσεις μιάς ευθείας, της ευθείας που είναι η τομή των δύο επιπέδων $A_1x+B_1\psi+\Gamma_1z+\Delta_1=0$ και $A_2x+B_2\psi+\Gamma_2z+\Delta_2=0$. Ας δούμε τώρα πότε τα επίπεδα αυτά τέμνονται, οπότε οι εξισώσεις (14) ορίζουν ευθεία. Αν τα επίπεδα αυτά συμπίπτουν, τότε θα τέμνουν τους άξονες συντεταγμένων στα ίδια σημεία, οπότε εύκολα συμπεραίνουμε ότι έχουμε

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \qquad (15)$$

Αν τα επίπεδα δεν συμπίπτουν, τότε ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 & \Delta_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 & \Delta_2 \end{bmatrix}$$

είναι βαθμού 2. Αν τώρα ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \end{bmatrix}$$

είναι βαθμού 1, τότε το σύστημα (14) δεν έχει λύση και επομένως τα επίπεδα που παριστάνουν οι εξισώσεις (14) είναι παραλλήλα. Αλλά ο παραπάνω πίνακας είναι βαθμού 1 αν και μόνο αν

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \qquad (16)$$

'Ετσι τα επίπεδα $A_1x+B_1\psi+\Gamma_1z+\Delta_1=0$ και $A_2x+B_2\psi+\Gamma_2z+\Delta_2=0$ είναι παράλληλα αν και μόνο αν ισχύουν οι (16). Αν τώρα δεν ισχύουν οι (16) τότε τα επίπεδα που ορίζουν οι εξισώσεις (14) τέμνονται και επομένως ορίζουν μία ευθεία. Σ'αυτή την περίπτωση η ευθεία που ορίζεται από τις εξισώσεις (14) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\bar{n}_1\times\bar{n}_2$, όπου $\bar{n}_1(A_1,B_1,\Gamma_1)$ και $\bar{n}_2(A_2,B_2,\Gamma_2)$. Από την διερεύνηση των εξισώσεων (14) είδαμε επίσης και την σχετική θέση δύο επιπέδων.

3.6.Αξονική δέσμη επιπέδων.

Καλούμε αξονική δέσμη επιπέδων το σύνολο των επιπέδων του χώρου τα οποία διέρχονται από μία ευθεία. Η κοινή ευθεία καλείται άξονας της δέσμης.

Αν
$$\begin{aligned} A_1x + B_1\psi + \Gamma_1z + \Delta_1 &=0 \\ A_2x + B_2\psi + \Gamma_2z + \Delta_2 &=0 \end{aligned} \qquad (17)$$

είναι δύο επίπεδα της δέσμης, τότε η εξίσωση του τυχόντος επιπέδου της δέσμης είναι

$$\lambda_1(A_1x+B_1\psi+\Gamma_1z+\Delta_1)+\lambda_2(A_2x+B_2\psi+\Gamma_2z+\Delta_2)=0 \qquad (18)$$

Πραγματικά η εξίσωση (18) παριστάνει επίπεδο του οποίου η εξίσωση επαληθεύεται από τα κοινά σημεία (κοινή ευθεία) των εξισώσεων (17).

Αντίστροφα, κάθε επίπεδο που διέρχεται από την τομή των επιπέδων (17) έχει εξίσωση της μορφής (18), η οποία μπορεί να προσδιοριστεί αν λάβουμε ένα σημείο που δεν κείται στον άξονα της δέσμης και υπολογίσουμε τον λόγο $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ (ή $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$) ώστε το σημείο να επαληθεύει την (18).

3.7. Κεντρική δέσμη επιπέδων.

Καλούμε <u>κεντρική δέσμη επιπέδων</u> το σύνολο των επιπέδων που διέρχονται από ένα σταθερό σημείο, το λεγόμενο <u>κέντρο της δέσμης</u>.

Αν δοθούν τρία διακεκριμένα επίπεδα

$$(\pi_1):\quad A_1x+B_1\psi+\Gamma_1z+\Delta_1=0$$

$$(\pi_2):\quad A_2x+B_2\psi+\Gamma_2z+\Delta_2=0$$

$$(\pi_3):\quad A_3x+B_3\psi+\Gamma_3z+\Delta_3=0$$

τότε η εξίσωση τυχόντος επιπέδου της δέσμης είναι της μορφής

$$\lambda_1(A_1x+B_1\psi+\Gamma_1z+\Delta_1)+\lambda_2(A_2x+B_2\psi+\Gamma_2z+\Delta_2)+ \\ +\lambda_3(A_3x+B_3\psi+\Gamma_3z+\Delta_3)=0 \tag{19}$$

Πραγματικά η εξίσωση αυτή είναι γραμμική ως προς x,ψ,z και συνεπώς παριστάνει επίπεδο. Οι συντεταγμένες του κέντρου της κεντρικής δέσμης επιπέδων επαληθεύουν την εξίσωση (19) για οποιεσδήποτε τιμές των $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, αφού επαληθεύουν τις εξισώσεις των επιπέδων (π_1), (π_2) και (π_3). Έτσι το επίπεδο (19) για οποιεσδήποτε τιμές των $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ διέρχεται από το κέντρο της δέσμης, δηλαδή η εξίσωση (19) για τις διάφορες τιμές των $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ παριστάνει τα διάφορα επίπεδα που διέρχονται από το κέντρο της δέσμης.

3.8. Προσανατολισμός του χώρου ως προς επίπεδο.

Θεωρούμε σ'ένα τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Οxψz ένα επίπεδο (π) με εξίσωση

$$Ax + B\psi + \Gamma z + \Delta = 0 \qquad (20)$$

Το διάνυσμα $\bar{n}(A,B,\Gamma)$ είναι κάθετο στο επίπεδο (π). Θα δείξουμε ότι οι συντεταγμένες των σημείων τα οποία βρίσκονται προς το μέρος του χώρου προς το οποίο "δείχνει" το διάνυσμα $\bar{n}$ καθιστούν το πρώτο μέλος της (20) θετικό, ενώ του άλλου ημιχώρου αρνητικό. Πραγματικά, αν $P_0(x_0,\psi_0,z_0)$ είναι ένα σημείο του επιπέδου (π) και $\overline{P_0P_1}$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο (π) και ομόρροπο προς το $\bar{n}$, τότε $\overline{P_0P_1}=\lambda\bar{n}$ με $\lambda>0$. Αν $P_1(x_1,\psi_1,z_1)$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned} x_1-x_0 &= \lambda A & \qquad & & x_1 &= x_0+\lambda A \\ \psi_1-\psi_0 &= \lambda B & & \text{ή} & \psi_1 &= \psi_0+\lambda B \\ z_1-z_0 &= \lambda\Gamma & & & z_1 &= z_0+\lambda\Gamma \end{aligned} \qquad (21)$$

Συνεπώς

$$Ax_1+B\psi_1+\Gamma z_1+\Delta=A(x_0+\lambda A)+B(\psi_0+\lambda B)+\Gamma(z_0+\lambda\Gamma)+\Delta=$$

$$=Ax_0+B\psi_0+\Gamma z_0+\Delta+\lambda(A^2+B^2+\Gamma^2)=\lambda(A^2+B^2+\Gamma^2)>0$$

αφού $Ax_0+B\psi_0+\Gamma z_0+\Delta=0$ και $\lambda>0$.

Αν το σημείο P_1 κείται προς τον άλλο ημιχώρο, τότε $\lambda<0$

οπότε $\qquad Ax_1 + B\psi_1 + \Gamma z_1 + \Delta < 0$.

3.9. Απόσταση σημείου από επίπεδο.

Έστω $P_1(x_1,\psi_1,z_1)$ ένα σημείο του χώρου και ζητάμε να βρούμε την απόσταση του P_1 από το επίπεδο (20). Αν $P_0(x_0,\psi_0,z_0)$ είναι ο πόδας της καθέτου που άγεται από το P_1 προς το επίπεδο τότε για την απόσταση d του P_1 από το επίπεδο έχουμε

$$d^2 = (x_1-x_0)^2+(\psi_1-\psi_0)^2+(z_1-z_0)^2$$

Αλλά αν λάβουμε υπ'όψη μας τις (21) έχουμε

$$d^2 = \lambda^2(A^2+B^2+\Gamma^2)$$

και επειδή $Ax_1+B\psi_1+\Gamma z_1+\Delta=\lambda(A^2+B^2+\Gamma^2)$ παίρνουμε τελικά

$$d = \frac{|Ax_1+B\psi_1+\Gamma z_1+\Delta|}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}} \qquad (22)$$

Αν θέλουμε την προσημασμένη απόσταση του σημείου $P_1(x_1,\psi_1,z_1)$ πρέπει να πάρουμε τον τύπο (22) χωρίς απόλυτη τιμή. Μπορούμε επίσης, από τον τύπο (22) να πάρουμε τις εξισώσεις των διχοτομούντων επιπέδων τις γωνίες δύο δοθέντων επιπέδων. 'Ετσι αν

$$A_1x+B_1\psi+\Gamma_1z+\Delta_1 = 0$$

$$A_2x+B_2\psi+\Gamma_2z+\Delta_2 = 0$$

είναι δύο τεμνόμενα επίπεδα, τότε δουλεύοντας όπως και στην περίπτωση των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν δύο ευθείες, βρίσκουμε ότι τα διχοτομούντα επίπεδα έχουν εξισώσεις

$$\frac{A_1x+B_1\psi+\Gamma_1z+\Delta_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+\Gamma_1^2}} = \pm \frac{A_2x+B_2\psi+\Gamma_2z+\Delta_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+\Gamma_2^2}}.$$

3.10. Συνθήκη ώστε δύο ευθείες να είναι συμβατές.

'Εστω δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) στο χώρο που ορίζονται από τις εξισώσεις

$$(\varepsilon_1): \frac{x-x_1}{\alpha_1} = \frac{\psi-\psi_1}{\alpha_2} = \frac{z-z_1}{\alpha_3} \quad , \quad (\varepsilon_2): \frac{x-x_2}{\beta_1} = \frac{\psi-\psi_2}{\beta_2} = \frac{z-z_2}{\beta_3}$$

Οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) διέρχονται από τα σημεία $P_1(x_1,\psi_1,z_1)$, $P_2(x_2,\psi_2,z_2)$ και είναι παράλληλες προς τα διανύσματα $\bar{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ καί $\bar{\beta}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ αντίστοιχα. Για να είναι οι (ε_1) και (ε_2) συμβατές πρέπει και αρκεί τα διανύσματα $\overline{P_1P_2},\bar{\alpha},\bar{\beta}$ να είναι συνεπίπεδα, δηλαδή το μικτό γινόμενο αυτών πρέπει να είναι ίσο με μηδέν. Έτσι έχουμε

$$[\overline{P_1P_2},\bar{\alpha},\bar{\beta}] = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & \psi_2-\psi_1 & z_2-z_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

Όταν $[\overline{P_1P_2},\bar{\alpha},\bar{\beta}]\neq 0$, τότε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι ασύμβατες και η απόσταση αυτών υπολογίζεται ως εξής. Θεωρούμε το επίπεδο (π) που διέρχεται από την (ε_1) και είναι παράλληλο προς την (ε_2). Αυτό έχει εξίσωση

$$(\pi): \begin{vmatrix} x-x_1 & \psi-\psi_1 & z-z_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

Η απόσταση του σημείου $P_2(x_2,\psi_2,z_2)$ από το επίπεδο (π) είναι

$$d = \frac{\left\| \begin{matrix} x_2-x_1 & \psi_2-\psi_1 & z_2-z_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \beta_1 \end{vmatrix}^2}} .$$

Ο τύπος αυτός δίνει την ελάχιστη απόσταση των δύο ασυμβάτων ευθειών (ε_1) και (ε_2).

4.Ασκήσεις.

1.Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από τα σημεία $P_1(-2,3)$,$P_2(2,4)$. Στη συνέχεια να βρεθούν οι συντεταγμένες επί την αρχή.

2.Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $P(3,-1)$ καί είναι παράλληλη προς την ευθεία $5x-\psi+3=0$.

3.Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $P(3,-4)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $4x-2\psi+5=0$.

4.Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών οι οποίες διέρχονται από το σημείο $P(1,1)$ και σχηματίζουν γωνία $45°$ με την ευθεία $x-7\psi+6=0$.

5.Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $(\alpha-2\beta,(\alpha-\beta)^2)$ και έχει τεταγμένη επί την αρχή β^2.

6.Να υπολογισθεί η γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες

$$(\varepsilon_1):\ 3x+4\psi-11=0 \quad , \quad (\varepsilon_2):\ 7x-24\psi-33=0.$$

7.Να υπολογισθούν τα μήκη των πλευρών,οι γωνίες και οι συντεταγμένες του ορθόκεντρου του τριγώνου που έχει κορυφές τα σημεία $A(2,1)$, $B(-5,3)$, $\Gamma(1,-4)$.

8.Να υπολογισθούν οι συντεταγμένες των κορυφών και οι γωνίες του τριγώνου του οποίου οι πλευρές κείνται στις ευθείες $x-\psi=0$, $2x+3\psi+5=0$, $x+2\psi+6=0$.

9.Να δειχθεί ότι τα σημεία $(1,-3)$, $(2,-1)$ και $(-2,-9)$ κείνται σε ευθεία.

10.Να δειχθεί ότι οι ευθείες $3x-2\psi+3=0$, $5x+\psi-8=0$, $x-4\psi+11=0$ διέρχονται από το αυτό σημείο.

11.Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $x-2\psi+1=0$, $3x+2\psi-5=0$ και η οποία διαιρεί το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, όπου $A(1,3)$, $B(4,0)$ σε λόγο $-\frac{1}{3}$.

12.Να βρεθεί η κοινή ευθεία των δεσμών

$$12x-17\psi-29+\lambda(7x+9\psi+2)=0$$

$$10x+\psi-32+\mu(x+10\psi-23)=0.$$

13.Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο (6,8) και σχηματίζει με τους άξονες συντεταγμένων τρίγωνο εμβαδού ίσου προς 12 τετραγωνικές μονάδες.

14.Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των παραλλήλων ευθειών $3x+2\psi-5=0$ καί $6x+4\psi+3=0$.

15.Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι μεσοπαράλληλη στις ευθείες $3x+2\psi-5=0$ και $6x+4\psi+3=0$.

16.Τρίγωνο έχει μία κορυφή το σημείο $A(1,2)$ ενώ δύο από τα ύψη του κείνται στις ευθείες $2x-3\psi+1=0$ και $x+\psi=0$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου και οι συντεταγμένες των άλλων κορυφών αυτού.

17.Να βρεθεί το συμμετρικό του σημείου $P(1,2)$ ως προς την ευθεία $2x+3\psi+4=0$.

18.Τα σημεία $A(0,0)$, $B(3,0)$, $\Gamma(2,3)$ και $\Delta(1,5)$ είναι κορυφές τετραπλεύρου. Αν η ΑΔ τέμνει την ΒΓ στο σημείο Λ και η ΑΒ την ΓΔ στο σημείο Μ να δειχθεί ότι τα μέσα των ΑΓ , ΒΔ και ΛΜ κείνται σε μία ευθεία.

19.Τα σημεία (2,-1) , (3,2) είναι διαδοχικές κορυφές ενός παραλληλογράμμου, του οποίου το σημείο τομής των διαγωνίων είναι (4,-2).Να βρεθούν οι συντεταγμένες των άλλων κορυφών αυτού.

20.Το σημείο A(0,4) είναι κορυφή ρόμβου. Αν η μία διαγώνιος κείται στην ευθεία $x-3\psi+2=0$ και δύο πλευρές του είναι παράλληλες προς την ευθεία $x-\psi=0$, να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών του.

21.Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών, οι οποίες διέρχονται από το σημείο τομής των ευθειών $x+\psi-1=0$, $x-3\psi+1=0$ και τριχοτομούν το ευθύγραμμα τμήμα P_1P_2, όπου $P_1(-2,1)$ και $P_2(7,7)$.

22.Να δειχθεί ότι όταν μεταβάλλεται το λ η ευθεία

$$(1+3\lambda-2\lambda^2)x+(2-\lambda+5\lambda^2)\psi+5+\lambda+8\lambda^2=0$$

διέρχεται από ένα σταθερό σημείο, του οποίου να βρεθούν οι συντεταγμένες.

23.Τα σημεία A και B κινούνται στους άξονες Ox και Oψ, αντίστοιχα, έτσι ώστε $\frac{1}{(\overline{O}A)}+\frac{1}{(\overline{O}B)}=\frac{1}{\kappa}$, όπου κ=σταθ. Να δειχθεί ότι η ευθεία AB διέρχεται από ένα σταθερό σημείο, του οποίου να βρεθούν οι συντεταγμένες.

24.Τα σημεία (1,2) , (7,4) , (3,-4) είναι τα μέσα των πλευρών τριγώνου. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών και οι κορυφές αυτού.

25.Το σημείο τομής των διαμέσων ενός τριγώνου είναι το (-1,0). Δύο από τις πλευρές του τριγώνου κείνται στις ευθείες $x+\psi-1=0$, $\psi+1=0$. Να βρεθεί η εξίσωση της τρίτης πλευράς.

26.Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Συνδέουμε την κορυφή Γ με το τυχόν σημείο Ρ της διαγωνίου ΔΒ και στην προέκταση της ΓΡ λαμβάνουμε μήκος ΡΙ=ΓΡ. Από το σημείο Ι φέρουμε τις ΙΕ και ΙΖ παράλληλες αντίστοιχα προς τις ΑΔ και ΑΒ. Η ΙΕ τέμνει την ΑΒ στο Ε και η ΙΖ την ΑΔ στο Ζ. Να δειχθεί ότι τα σημεία Ζ,Ε,Ρ κείνται σε ευθεία.

27.Δίνονται τρία σημεία Α,Β,Γ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία είναι $(\overline{MA})^2+(\overline{MB})^2-2(\overline{M\Gamma})^2=K^2$ (Κ=σταθ.).

28.Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων Μ του επιπέδου των οποίων οι αποστάσεις από την αρχή Ο και από την ευθεία $3x-2\psi=0$ έχουν λόγο 2:1.

29.Μεταβλητή ευθεία κινείται και τέμνει τους άξονες Οx και Οψ του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων Οxψ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα έτσι ώστε $(\overline{OA})=(\overline{OB})$. Με πλευρά την ΑΒ κατασκευάζουμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΜΡ έτσι ώστε το Μ να βρίσκεται πάντοτε σε μία σταθερή ευθεία που έχει συντεταγμένες επί την αρχή α και β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής Ρ του ορθογωνίου.

30.Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $P_1(2,0,0)$, $P_2(0,-3,0)$, $P_3(0,0,4)$.

31.Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο Ρ(2,1,-1) και είναι κάθετο στην τομή των δύο επιπέδων $2x+\psi-z=3$ και $x+2\psi+z=2$.

32.Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από την τομή των επιπέδων $x+2\psi-3z-1=0$ και $2x+\psi-z+3=0$ και είναι παράλληλο προς τον άξονα Οz.

33.Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο Ρ(1,-2,1) και είναι κάθετο στο διάνυσμα θέσεως του σημείου Ρ.

34.Να εξετασθεί αν τα επόμενα τρία επίπεδα διέρχονται από το αυτό σημείο $5x+3\psi-11z+72=0$, $4x-5\psi+7z+26=0$, $6x+11\psi-3z+66=0$.

35.Να εξετασθεί αν τα επόμενα τρία επίπεδα διέρχονται από την αυτή ευθεία

$4x-\psi-z-10=0$, $7x+2\psi-z-11=0$, $18x+3\psi-3z-32=0$

36.Να ορισθεί στο επίπεδο $4x-7\psi+5z-20=0$ ένα σημείο P τέτοιο ώστε η διανυσματική ακτίνα OP να σχηματίζει ίσες γωνίες με τους θετικούς ημιάξονες.

37.Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $P_1(8,-3,1)$ και $P_2(4,7,2)$ και είναι κάθετο στο επίπεδο $3x+\psi+2z-23=0$.

38.Να βρεθεί η απόσταση των παραλλήλων επιπέδων $3x+2\psi-6z-35=0$ και $3x+2\psi-6z+14=0$.

39.Δείξτε ότι το επίπεδο $(t+1)^2x+(t^2-t+1)\psi+(t^2+1)z=0$ διέρχεται από μία σταθερή ευθεία όταν μεταβάλλεται το t.

40.Να βρεθούν οι εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το σημείο P(1,2,1) καί είναι κάθετη στο επίπεδο $x+2\psi-z=0$.

41.Να βρεθούν οι εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το σημείο P(2,1,1) και είναι παράλληλη προς τα επίπεδα $2x-\psi+1=0$ και $\psi-1=0$.

42.Να βρεθούν οι εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το σημείο P(2,-3,-1), τέμνει την ευθεία $\frac{x-7}{1}=\frac{\psi-3}{2}=\frac{z-5}{2}$ και σχηματίζει γωνία $60°$ με τον άξονα Ox.

43.Να βρεθεί η απόσταση του σημείου (1,1,-2) από τη ευθεία $2x-4z-3=0$, $\psi-2z+5=0$.

44.Να δειχθεί ότι η ευθεία $\frac{x-1}{2}=\frac{\psi+1}{3}=\frac{z-2}{4}$ είναι παράλληλη πρός το επίπεδο $x-2\psi+z-5=0$.

45.Να βρεθούν οι εξισώσεις των επιπέδων τα οποία προβάλλουν την ευθεία $2x-3\psi+4z-12=0$, $x+4\psi-2z-10=0$ στα επίπεδα συντεταγμένων.

46.Να βρεθούν οι εξισώσεις της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $(-3,5,-9)$ και τέμνει τις δύο ασύμβατες ευθείες

$3x-\psi+5=0$, $2x-z-3=0$ και $4x-\psi-7=0$, $5x-z+10=0$.

47.Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση των ευθειών

$x+4z+1=0$, $x-4\psi+9=0$ και $\psi=0$, $x+2z+4=0$.

48.Να βρεθούν οι διχοτόμοι των γωνιών τις οποίες σχηματίζουν μεταξύ τους οι ευθείες

$$\frac{x-1}{3}=\frac{\psi-2}{8}=\frac{z-3}{1} \quad \text{και} \quad \frac{x-1}{4}=\frac{\psi-2}{7}=\frac{z-3}{3}.$$

49.Να βρεθεί το επίπεδο στο οποίο κείνται οι ευθείες

$$\frac{x-1}{1}=\frac{\psi+1}{-1}=\frac{z-1}{2} \quad \text{και} \quad \frac{x-1}{-1}=\frac{\psi+1}{2}=\frac{z-1}{1}.$$

50.Να βρεθεί το συμμετρικό του σημείου $P_1(-1,2,0)$ ως προς το επίπεδο $x+2\psi-z+1=0$.

51.Να βρεθούν οι εξισώσεις της προβολής της ευθείας

$\frac{x-1}{2}=\frac{\psi-2}{3}=\frac{z-1}{4}$ στο επίπεδο $x+2\psi+5z-1=0$.

52.Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση καθώς επίσης και οι εξισώσεις της κοινής καθέτου των ευθειών $\frac{x-1}{2}=\frac{\psi-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ και $\frac{x-2}{3}=\frac{\psi-4}{4}=\frac{z-5}{5}$.

53.Να βρεθούν οι εξισώσεις της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $\frac{x-1}{1}=\frac{\psi-1}{2}=\frac{z+2}{3}$ και $\frac{x+2}{2}=\frac{\psi-5}{-1}=\frac{z+3}{2}$ και είναι κάθετη σ'αυτές.

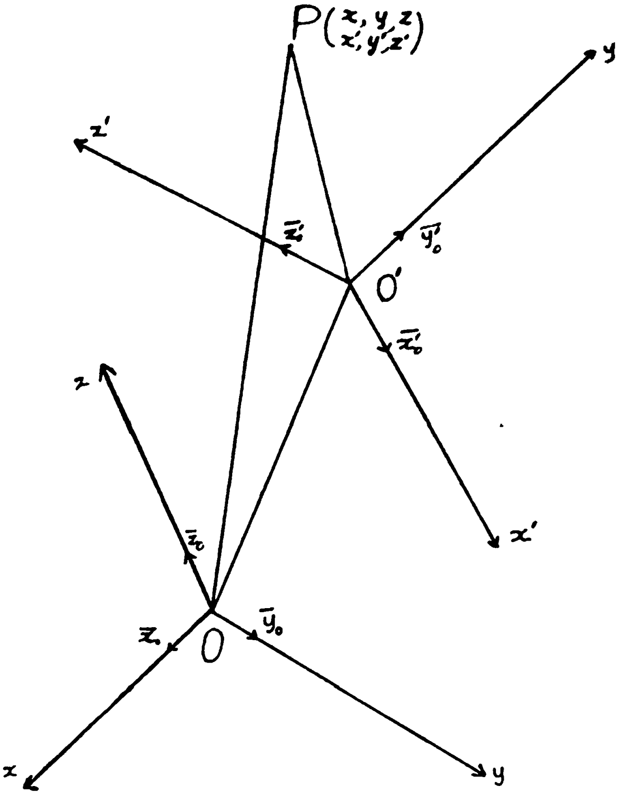
5.Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων

Πολλές φορές, για την επίλυση ενός προβλήματος της Αναλυτικής Γεωμετρίας, είναι σκόπιμο να μεταβαίνουμε από ένα σύστημα συντεταγμένων σ'ένα άλλο και να μελετούμε το πρόβλημα στο δεύτερο σύστημα. Η μετάβαση αυτή από ένα σύστημα συντεταγμένων σ'ένα άλλο επιτυγχάνεται βρίσκοντας τις συντεταγμένες τυχόντος σημείου στο ένα σύστημα όταν ξέρουμε τις συντεταγμένες του στο άλλο. Η αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων γίνεται κυρίως γιατί είναι δυνατό στο νέο σύστημα συντεταγμένων οι εξισώσεις των διαφόρων καμπύλων ή επιφανειών να έχουν απλούστερη μορφή. Γιά παράδειγμα, όταν ένα σχήμα έχει έναν άξονα συμμετρίας, τότε η μελέτη του είναι ευκολώτερη αν ο άξονας συμμετρίας του σχήματος συμπίπτει με έναν από τους άξονες συντεταγμένων.Οι εξισώσεις με τις οποίες υπολογίζουμε τις συντεταγμένες ενός σημείου σ'ένα σύστημα συντεταγμένων όταν ξέρουμε τις συντεταγμένες του σημείου σ'ένα άλλο σύστημα λέγονται εξισώσεις μετασχηματισμού των συντεταγμένων.

5.1.Εξισώσεις μετασχηματισμού συντεταγμένων στο χώρο.

Έστω Οxψz τυχόν σύστημα συντεταγμένων με μοναδιαία διανύσματα αξόνων $\overline{x}_0,\overline{\psi}_0,\overline{z}_0$. Θέλουμε από το σύστημα Οxψz να μεταβούμε σ'ένα νέο σύστημα $O'x'\psi'z'$ με μοναδιαία διανύσματα αξόνων $\overline{x}'_0,\overline{\psi}'_0,\overline{z}'_0$. Το νέο σύστημα $O'x'\psi'z'$ ορίζεται ως προς το αρχικό Οxψz από τις συντεταγμένες τις αρχής $O'(\alpha,\beta,\gamma)$ και από τις συντεταγμένες των διανυσματικών μονάδων $\overline{x}'_0(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$, $\overline{\psi}'_0(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$, $\overline{z}'_0(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)$.
Έστω Ρ τυχόν σημείο με συντεταγμένες (x,ψ,z) ως προς το σύστημα Οxψz και (x',ψ',z') ως προς το σύστημα $O'x'\psi'z'$(Σχ.1). Τότε έχουμε

$$\overline{OP} = \overline{OO'} + \overline{O'P} \qquad (1)$$



Σχ.1

αλλά $\overline{OP} = x\bar{x}_0 + \psi\bar{\psi}_0 + z\bar{z}_0$

$\overline{OO'} = \alpha\bar{x}_0 + \beta\bar{\psi}_0 + \gamma\bar{z}_0$ και

$\overline{O'P} = x'\bar{x}'_0 + \psi'\bar{\psi}'_0 + z'\bar{z}'_0$

'Εχουμε όμως

$$\bar{x}'_0 = \alpha_1\bar{x}_0 + \beta_1\bar{\psi}_0 + \gamma_1\bar{z}_0$$

$$\bar{\psi}'_0 = \alpha_2\bar{x}_0 + \beta_2\bar{\psi}_0 + \gamma_2\bar{z}_0$$

$$\bar{z}'_0 = \alpha_3\bar{x}_0 + \beta_3\bar{\psi}_0 + \gamma_3\bar{z}_0$$

Οπότε

$$\overline{O'P} = x'(\alpha_1\bar{x}_0+\beta_1\bar{\psi}_0+\gamma_1\bar{z}_0)+\psi'(\alpha_2\bar{x}_0+\beta_2\bar{\psi}_0+\gamma_2\bar{z}_0)+z'(\alpha_3\bar{x}_0+\beta_3\bar{\psi}_0+\gamma_3\bar{z}_0).$$

Αν αντικαταστήσουμε στην (1) τις εκφράσεις των παραπάνω διανυσμάτων θα πάρουμε

$$x\bar{x}_0+\psi\bar{\psi}_0+z\bar{z}_0=\alpha\bar{x}_0+\beta\bar{\psi}_0+\gamma\bar{z}_0+x'(\alpha_1\bar{x}_0+\beta_1\bar{\psi}_0+\gamma_1\bar{z}_0)+\psi'(\alpha_2\bar{x}_0+\beta_2\bar{\psi}_0+\gamma_2\bar{z}_0)+$$
$$+z'(\alpha_3\bar{x}_0+\beta_3\bar{\psi}_0+\gamma_3\bar{z}_0)$$

Από τη σχέση αυτή παίρνουμε τελικά

$$x = \alpha + \alpha_1 x' + \alpha_2\psi' + \alpha_3 z'$$

$$\psi = \beta + \beta_1 x' + \beta_2\psi' + \beta_3 z' \qquad (2)$$

$$z = \gamma + \gamma_1 x' + \gamma_2\psi' + \gamma_3 z'$$

Οι εξισώσεις (2) μας δίνουν τις συντεταγμένες (x,ψ,z) του τυχόντος σημείου P ως προς το πρώτο σύστημα συντεταγμένων $Ox\psi z$ συναρτήσει των συντεταγμένων (x',ψ',z') του P ως προς το νέο σύστημα συντεταγμένων $O'x'\psi'z'$.

Στο σύστημα (2) είναι

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

γιατί τα διανύσματα $\overline{x}'_0, \overline{\psi}'_0, \overline{z}'_0$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Συνεπώς το σύστημα (2) έχει μία μόνο λύση και αν δοθούν οι συντεταγμένες (x,ψ,z) του P μπορούμε να λύσουμε το σύστημα (2) ως προς x',ψ',z' και να βρούμε τις συντεταγμένες του P στο νέο σύστημα $O'x'\psi'z'$. Ειδικά αν το σύστημα συντεταγμένων $O'x'\psi'z'$ προέρχεται από παράλληλη μεταφορά του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων $Ox\psi z$ τότε στην περίπτωση αυτή είναι $O'(\alpha,\beta,\gamma)$, $\overline{x}'_0(1,0,0)$, $\overline{\psi}'_0(0,1,0)$, $\overline{z}'_0(0,0,1)$ και οι εξισώσεις (2) γίνονται

$$\begin{aligned} x &= \alpha+x' \\ \psi &= \beta+\psi' \\ z &= \gamma+z' \end{aligned} \qquad \text{ή} \qquad \begin{aligned} x' &= x-\alpha \\ \psi' &= \psi-\beta \\ z' &= z-\gamma \end{aligned} \qquad (3)$$

5.2.Εξισώσεις μετασχηματισμού συντεταγμένων στο επίπεδο.

Έστω $Ox\psi$ τυχόν σύστημα συντεταγμένων με μοναδιαία διανύσματα αξόνων $\overline{x}_0, \overline{\psi}_0$. Θέλουμε από τό συστημα $Ox\psi$ να μεταβούμε σ'ένα νέο σύστημα $O'x'\psi'$ με μοναδιαία διανύσματα αξόνων $\overline{x}'_0$, $\overline{\psi}'_0$. Το νέο σύστημα $O'x'\psi'$ ορίζεται ως προς το αρχικό $Ox\psi$ από τις συντεταγμένες της αρχής $O'(\alpha,\beta)$ και από τις διανυσματικές μονάδες $\overline{x}'_0(\alpha_1,\beta_1)$, $\overline{\psi}'_0(\alpha_2,\beta_2)$. Έστω P τυχόν σημείο του επιπέδου με συντεταγμένες (x,ψ) ως προς το αρχικό σύστημα και (x',ψ') ως προς το νέο σύστημα (Σχ.2). Έχουμε

$$\overline{OP} = \overline{OO'} + \overline{O'P}. \qquad (4)$$

Επειδή $\overline{OP}=x\overline{x}_0+\psi\overline{\psi}_0$, $\overline{OO'}=\alpha\overline{x}_0+\beta\overline{\psi}_0$ και $\overline{O'P}=x'\overline{x}'_0+\psi'\overline{\psi}'_0$ η (4) γίνεται

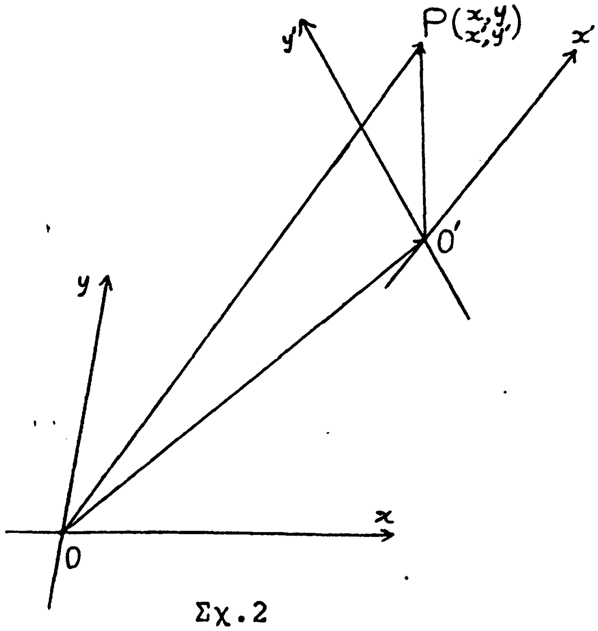
$$x\overline{x}_0+\psi\overline{\psi}_0 = \alpha\overline{x}_0+\beta\overline{\psi}_0+x'\overline{x}'_0+\psi'\overline{\psi}'_0$$

αλλά

$$\overline{x}'_0 = \alpha_1\overline{x}_0+\beta_1\overline{\psi}_0 \quad , \quad \overline{\psi}'_0 = \alpha_2\overline{x}_0+\beta_2\overline{\psi}_0$$

οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται

$$x\overline{x}_0+\psi\overline{\psi}_0 = \alpha\overline{x}_0+\beta\overline{\psi}_0+x'(\alpha_1\overline{x}_0+\beta_1\overline{\psi}_0)+\psi'(\alpha_2\overline{x}_0+\beta_2\overline{\psi}_0).$$



Σχ.2

Αν μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος της ισότητας και γράψουμε τα διανύσματα $\overline{x}_0$ και $\overline{\psi}_0$ με τους συντελεστές τους θα έχουμε

$$(x-\alpha-x'\alpha_1-\psi'\alpha_2)\overline{x}_0+(\psi-\beta-x'\beta_1-\psi'\beta_2)\overline{\psi}_0=0$$

Επειδή τα διανύσματα $\overline{x}_0$ και $\overline{\psi}_0$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα παίρνουμε τελικά

$$x = \alpha+x'\alpha_1+\psi'\alpha_2 \quad , \quad \psi = \beta+x'\beta_1+\psi'\beta_2 \qquad (5)$$

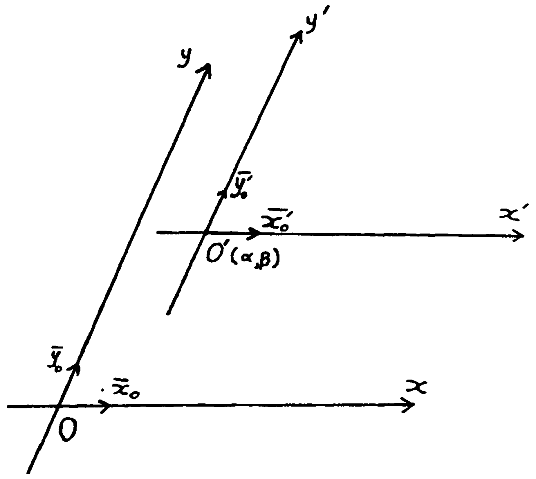
Οι εξισώσεις (5) μας δίνουν στο επίπεδο τις συντεταγμένες (x,ψ) του τυχόντος σημείου P ως προς το σύστημα συντεταγμένων $Ox\psi$ συναρτήσει των συντεταγμένων (x',ψ') του P ως πρός το σύστημα συντεταγμένων $O'x'\psi'$. Επειδή τα διανύσματα $\overline{x}'_0$,$\overline{\psi}'_0$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα έπεται ότι η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

του συστήματος (5) είναι διάφορη του μηδενός. Έτσι το σύστημα (5) μπορεί να λυθεί ως προς x' και ψ'. Δηλαδή αν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες (x,ψ) του σημείου P μπορούμε να προσδιορίσουμε τις συντεταγμένες (x',ψ') του P.

Θα βρούμε τώρα τις εξισώσεις μετασχηματισμού συντεταγμένων σε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις.

α) <u>Παράλληλη μεταφορά</u>. Στην περίπτωση αυτή έχουμε O'(α,β) και $\overline{x}'_0(1,0)$, $\overline{\psi}'_0(0,1)$. Δηλαδή οι διανυσματικές μονάδες $\overline{x}'_0$ και $\overline{\psi}'_0$ του νέου συστήματος είναι ίδιες με τις διανυσματικές μονάδες $\overline{x}_0$ και $\overline{\psi}_0$ του αρχικού συστήματος (Σχ.3) αφού οι άξονες είναι παράλληλοι.



Σχ.3

Έτσι οι εξισώσεις (5) γίνονται

$$\begin{aligned} x &= \alpha + x' \\ \psi &= \beta + \psi' \end{aligned} \quad \text{ή} \quad \begin{aligned} x' &= x - \alpha \\ \psi' &= \psi - \beta \end{aligned} \qquad (6)$$

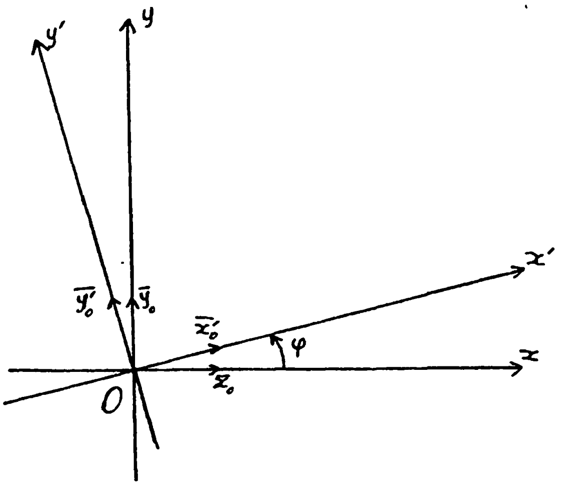
β) <u>Στροφή ορθοκανονικού συστήματος κατά γωνία φ</u>. Στην περίπτωση αυτή έχουμε O'(0,0) και $\overline{x}'_0(\text{συνφ},\text{ημφ})$, $\overline{\psi}'_0(\text{συν}(\frac{\pi}{2}+\varphi),\text{ημ}(\frac{\pi}{2}+\varphi))$, δηλαδή $\overline{\psi}'_0(-\text{ημφ},\text{συνφ})$ (Σχ.4).

Συνεπώς οι εξισώσεις (5) γίνονται

$$\begin{aligned} x &= x'\text{συνφ} - \psi'\text{ημφ} \\ \psi &= x'\text{ημφ} + \psi'\text{συνφ} \end{aligned} \qquad (7)$$

Αν επιλύσουμε το σύστημα (7) ως προς x' και ψ' παίρνουμε

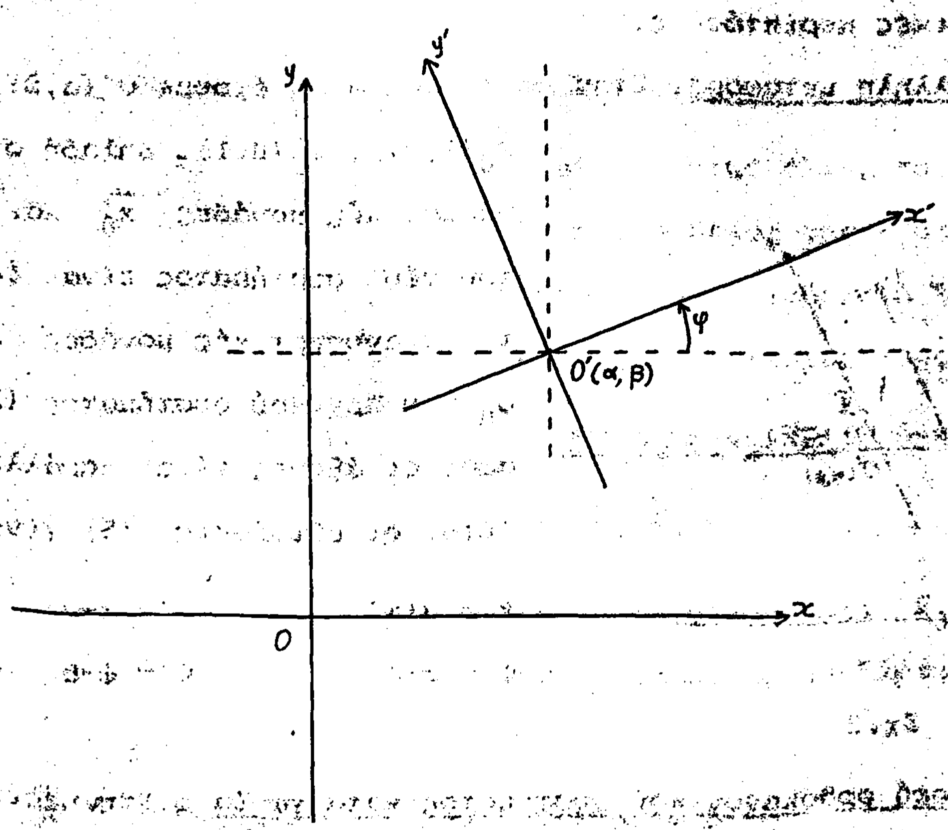
$$\begin{aligned} x' &= x\text{συνφ} + \psi\text{ημφ} \\ \psi' &= -x\text{ημφ} + \psi\text{συνφ} \end{aligned} \qquad (8)$$



Σχ.4

γ) <u>Παράλληλη μεταφορά και στροφή ορθοκανονικού συστήματος</u>: Στην περίπτωση αυτή έχουμε $O'(\alpha,\beta)$ και $\overline{x}'_0(\text{συνφ},\text{ημφ})$, $\overline{\psi}'_0(-\text{ημφ},\text{συνφ})$, (Σχ.5), οπότε οι εξισώσεις (5) γίνονται

$$\begin{aligned} x &= \alpha + x'\text{συνφ} - \psi'\text{ημφ} \\ \psi &= \beta + x'\text{ημφ} + \psi'\text{συνφ} \end{aligned} \quad (9)$$



Σχ.5

6. Ασκήσεις

1. Σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $Ox\psi z$ μία καμπύλη (c) έχει εξισώσεις

$$(x-\psi+z)^2+(\psi-z+x)^2+(z-x+\psi)^2=2\alpha^2$$

$$2x+\sqrt{2}\psi=1$$

Να βρεθούν οι εξισώσεις της (c) στο σύστημα $Ox'\psi'z'$ το οποίο έχει για άξονες τις διχοτόμους των γωνιών των συντεταγμένων επιπέδων του αρχικού συστήματος.

2. Δίνονται δύο συστήματα ορθογωνίων συντεταγμένων $Ox\psi z$ και $O'x'\psi'z'$ με κοινή αρχή O και τέτοια ώστε: Ο άξονας Ox' να προβάλλεται στις διχοτόμους των γωνιών $xO\psi$, ψOz και zOx των συντεταγμένων επιπέδων. Ο άξονας $O\psi'$ να κείται στο επίπεδο $Ox\psi$ και η γωνία των ημιαξόνων Oz και Oz' να είναι οξεία. Να βρεθούν οι τύποι μετασχηματισμού των συντεταγμένων του τυχόντος σημείου P από το ένα σύστημα στο άλλο.

3. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $Ox\psi z$ μια επιφάνεια έχει εξίσωση $x^2+\psi^2+z^2-2\alpha x-2\beta\psi-2\gamma z+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\rho^2=0$. Να βρεθεί η εξίσωση της επιφάνειας στο σύστημα $O'x'\psi'z'$ το οποίο προκύπτει από το $Ox\psi z$ με παράλληλη μεταφορά στο σημείο $O'(\alpha,\beta,\gamma)$.

4. Μία καμπύλη (c) έχει ως προς το σύστημα $Ox\psi z$ εξισώσεις

$$\psi-5x^2+1=0 \quad , \quad z-x^2+12=0$$

Να βρεθούν οι εξισώσεις της (c) ως προς το σύστημα $O'x'\psi'z'$ όπου $O'(0,1,1)$, $\overline{x}_0'=(1,0,0)$, $\overline{\psi}_0'=(0,\frac{5}{\sqrt{26}},\frac{1}{\sqrt{26}})$, $\overline{z}_0'=(0,-\frac{1}{\sqrt{26}},\frac{5}{\sqrt{26}})$.

5. Δύο τρισορθογώνια συστήματα συντεταγμένων $Ox\psi z$ και $Ox'\psi'z'$ έχουν κοινή αρχή O. Να εξετασθεί αν υπάρχουν σημεία του χώρου που έχουν τις ίδιες συντεταγμένες ως προς τα δύο αυτά συστήματα.

6.Μία καμπύλη (c) έχει εξίσωση

$$5x^2-4\psi^2+10x+24\psi+21=0$$

ως προς ορθογώνιο σύστημα Οxψ.Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης (c) ως προς σύστημα συντεταγμένων Ο'x'ψ' το οποίο προκύπτει με παράλληλη μεταφορά στο σημείο Ο'(-1,3).

7.Ένα σημείο P έχει συντεταγμένες (1,-1) ως προς ορθογώνιο σύστημα Οxψ και (-1,1) ως προς νέο σύστημα Ο'x'ψ' που προκύπτει από το αρχικό με παράλληλη μεταφορά στο σημείο Ο'. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του Ο' ως προς το αρχικό σύστημα.

8.Μία καμπύλη (c) έχει σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων Οxψ εξίσωση

$$3x^2+10x\psi+3\psi^2+18=0.$$

Να βρεθεί η εξίσωση της (c) στο σύστημα Οx'ψ' που προκύπτει από το αρχικό με στροφή των αξόνων κατά γωνία $\varphi=45^o$.

9.Σε ορθογώνιο σύστημα Οxψ η καμπύλη (c) έχει εξίσωση

$$x^2-4\psi^2+4x+24\psi-36=0.$$

Να γίνει παράλληλη μεταφορά του συστήματος Οxψ έτσι ώστε στο νέο σύστημα Ο'x'ψ' η εξίσωση της καμπύλης (c) να μην έχει όρους πρώτου βαθμού ως προς x και ψ.

10.Σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Οxψ οι κορυφές ενός τετραγώνου έχουν συντεταγμένες (0,0),(2,0),(2,2),(0,2), Να βρεθούν οι τύποι αλλαγής του συστήματος συντεταγμένων αν λάβουμε ως νέους άξονες τις διαγώνιες του τετραγώνου έτσι ώστε η κορύφη (2,0) να κείται στο θετικό νέο άξονα των x.

11.Σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Οxψ η ευθεία (ε) έχει εξίσωση $-\sqrt{3}x+3\psi=\sqrt{3}$. Κατά ποιά γωνία πρέπει να στραφούν οι άξονες ώστε ο νέος άξονας των x να είναι παράλληλος προς την ευθεία (ε). Στη συνέχεια να βρεθεί η εξίσωση της (ε) στο νέο σύστημα.

12.Κατά ποιά γωνία πρέπει να στραφούν οι άξονες του ορθογωνίου συστήματος Oxψ ώστε η ποσότητα $x^2-\psi^2$ στο νέο σύστημα Ox'ψ' να γίνει 2x'ψ'.

13.'Εστω Oxψ και Ox'ψ' δύο συστήματα συντεταγμένων στο επίπεδο με κοινή αρχή O και γωνίες αξόνων $\omega=\sphericalangle(Ox,O\psi)$ και $\varphi=\sphericalangle(Ox',O\psi')$. Αν ένα σημείο P έχει συντεταγμένες (x,ψ) ως προς το σύστημα Oxψ και (x',ψ') ως προς το O x'ψ', να δεχθεί ότι

$$x^2+\psi^2+2x\psi\,\text{συν}\omega = x'^2+\psi'^2+2x'\psi'\,\text{συν}\varphi$$

14.Δίνονται δύο ορθοκανονικά συστήματα συντεταγμένων Oxψ και O'x'ψ' στο επίπεδο. Υποθέτουμε ότι O'(α,β) και $\varphi=\sphericalangle(Ox,\ O'x')$. Να βρεθεί ένα σημείο του επιπέδου το οποίο να έχει τις αυτές συντεταγμένες ως προς τα δύο συστήματα.

15.Μία καμπύλη (c) του χώρου ορίζεται ως προς τρισορθογώνιο και δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων Oxψz από τις εξισώσεις $x^3+\psi^3+z^3-3x\psi z=0$, $x+\psi+z+5=0$. Να βρεθούν οι εξισώσεις αυτής ως προς το σύστημα O'x'ψ'z' το οποίο χαρακτηρίζεται από τα εξής στοιχεία. O'(1,2,-1) , $\sphericalangle(\bar{x}'_0,\bar{x}_0)=\frac{\pi}{4}$, $\sphericalangle(\bar{x}'_0,\bar{\psi}_0)=\sphericalangle(\bar{\psi}'_0,\bar{\psi}_0)=\frac{\pi}{4}$, $\sphericalangle(\bar{z}'_0,\bar{x}_0)=\sphericalangle(\bar{z}'_0,\bar{\psi}_0)=\frac{5\pi}{12}$, $\sphericalangle(\bar{\psi}'_0,\bar{x}_0)=\frac{\pi}{4}$.

7.Κύκλος και Σφαίρα.

7.1.Εξίσωση περιφέρειας κύκλου στο επίπεδο.

Γνωρίζουμε ότι η περιφέρεια κύκλου ορίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου τα οποία απέχουν σταθερή απόσταση R από ένα ορισμένο σημείο Κ. Το σημείο Κ λέγεται κέντρο της περιφερείας και ο αριθμός R ακτίνα αυτής. Αν Ρ είναι τυχόν σημείο της περιφέρειας, τότε η παραπάνω ιδιότητα αυτής έχει την εξής διανυσματική έκφραση

$$|\overline{KP}| = R \qquad (1)$$

Υποθέτουμε ότι το σύστημα συντεταγμένων Οxψ είναι ορθοκανονικό και ότι το κέντρο Κ έχει συντεταγμένες (α,β) ενώ το τυχόν σημείο Ρ της περιφέρειας (x,ψ). Τότε από την (1) παίρνουμε την αναλυτική εξίσωση της περιφέρειας

$$(x-\alpha)^2 + (\psi-\beta)^2 = R^2 \qquad (2)$$

Αν το σύστημα συντεταγμένων Οxψ είναι πλαγιογώνιο και οι άξονες Οx και Οψ σχηματίζουν γωνία ω, τότε από την (1) θα έχουμε την εξίσωση

$$(x-\alpha)^2+(\psi-\beta)^2+2(x-\alpha)(\psi-\beta)\text{συνω} = R^2$$

η οποία είναι της μορφής

$$x^2+\psi^2+2x\psi\text{συνω}+Ax+B\psi+\Gamma = 0$$

Μετά την εκτέλεση των πράξεων η (2) γράφεται

$$x^2+\psi^2-2\alpha x-2\beta\psi+\alpha^2+\beta^2-R^2 = 0 \qquad (3)$$

είναι δηλαδή της μορφής

$$x^2+\psi^2+Ax+B\psi+\Gamma = 0 \qquad (4)$$

Αντίστροφα, γιά να δούμε τι παριστάνει μία εξίσωση της μορφής (4) γράφουμε αυτή στη μορφή

$$(x+\frac{A}{2})^2+(\psi+\frac{B}{2})^2 = \frac{A^2+B^2-4\Gamma}{4}$$

Αν $A^2+B^2-4\Gamma>0$, η εξίσωση (4) είναι της μορφής (2) και παριστάνει περιφέρεια κύκλου με κέντρο το σημείο $K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ και ακτίνα $R=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}$. Αν $A^2+B^2-4\Gamma=0$ η (4) παριστάνει ένα σημείο το $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ δηλαδή είναι μία περιφέρεια εκφυλισμένη στο κέντρο της. Τέλος, αν $A^2+B^2-4\Gamma<0$ η (4) δέν επαληθεύεται από πραγματικά σημεία. Σ'αυτή την περίπτωση λέμε ότι η (4) παριστάνει φανταστική περιφέρεια.

7.2. Περιφέρεια διερχόμενη από τρία σημεία.

Γνωρίζουμε από την Ευκλείδεια Γεωμετρία, ότι τρία σημεία που δέν κείνται σε ευθεία ορίζουν μία περιφέρεια η οποία διέρχεται από αυτά. Αναλυτικά μπορούμε να δείξουμε αυτό και να βρούμε την εξίσωση της περιφέρειας ως εξής: Έστω ότι δίνονται τα σημεία $P_1(x_1,\psi_1)$, $P_2(x_2,\psi_2)$ και $P_3(x_3,\psi_3)$ τα οποία δεν κείνται σε ευθεία. Η εξίσωση της περιφέρειας που διέρχεται από τα σημεία αυτά είναι

$$\begin{vmatrix} x^2+\psi^2 & x & \psi & 1 \\ x_1^2+\psi_1^2 & x_1 & \psi_1 & 1 \\ x_2^2+\psi_2^2 & x_2 & \psi_2 & 1 \\ x_3^2+\psi_3^2 & x_3 & \psi_3 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad (5)$$

Πραγματικά, η εξίσωση (5) παριστάνει περιφέρεια κύκλου, γιατί αν αναπτύξουμε την ορίζουσα κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής, θα λάβουμε $A_1(x^2+\psi^2)+B_1x+\Gamma_1\psi+\Delta_1=0$ όπου

$$A_1=\begin{vmatrix} x_1 & \psi_1 & 1 \\ x_2 & \psi_2 & 1 \\ x_3 & \psi_3 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$$

αφού τα τρία σημεία P_1, P_2, P_3 δεν κείνται σε ευθεία. Αν διαιρέσουμε την παραπάνω σχέση διά A_1 η εξίσωση παίρνει τη μορφή $x^2+\psi^2+Ax+B\psi+\Gamma=0$ και παριστάνει περιφέρεια κύκλου. Η περιφέρεια αυτή διέρχεται από τα σημεία P_1, P_2, P_3 αφού οι συντεταγμένες των σημείων αυτών πληρούν την εξίσωση (5).

7.3.Εφαπτομένη περιφέρειας.Πόλοι και πολικές.

Η εφαπτομένη μιάς περιφέρειας σ'ένα σημείο αυτής $P_0(x_0,\psi_0)$ μπορεί να οριστεί είτε σαν η ευθεία που διέρχεται από το P_0 και είναι κάθετη στην ακτίνα της περιφέρειας στο σημείο P_0, είτε σαν η ευθεία που διέρχεται από το P_0 και έχει αυτό μόνο το σημείο κοινό με την περιφέρεια. Έστω

$$(x-\alpha)^2+(\psi-\beta)^2 = R^2 \tag{6}$$

η εξίσωση της περιφέρειας και $P_0(x_0,\psi_0)$ ένα σημείο αυτής. Η ακτίνα που διέρχεται από το σημείο P_0 έχει εξίσωση $\psi-\psi_0=\dfrac{\psi_0-\beta}{x_0-\alpha}(x-x_0)$.

Η κάθετος στην ευθεία αυτή έχει συντελεστή διευθύνσεως $\lambda=-\dfrac{x_0-\alpha}{\psi_0-\beta}$ και επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$\psi-\psi_0=-\dfrac{x_0-\alpha}{\psi_0-\beta}(x-x_0)$ ή $(x-x_0)(x_0-\alpha)+(\psi-\psi_0)(\psi_0-\beta)=0$. Την εξίσωση αυτή μπορούμε επίσης να γράψουμε

$$\left[(x-\alpha)-(x_0-\alpha)\right](x_0-\alpha)+\left[(\psi-\beta)-(\psi_0-\beta)\right](\psi_0-\beta)=0 \quad \text{ή}$$

$$(x_0-\alpha)(x-\alpha)+(\psi_0-\beta)(\psi-\beta)=(x_0-\alpha)^2+(\psi_0-\beta)^2.$$

Αλλά το σημείο $P_0(x_0,\psi_0)$ κείται στην περιφέρεια και οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωσή της. Έτσι έχουμε τελικά για την εφαπτομένη την εξίσωση

$$(x_0-\alpha)(x-\alpha)+(\psi_0-\beta)(\psi-\beta) = R^2 \tag{7}$$

Αν η εξίσωση της περιφέρειας δίνεται με τη μορφή

$$x^2+\psi^2+Ax+B\psi+\Gamma = 0 \qquad (8)$$

για να βρούμε την εφαπτομένη στο σημείο $P_0(x_0,\psi_0)$ αυτής γράφουμε την (8) ως εξής

$$(x+\frac{A}{2})^2+(\psi+\frac{B}{2})^2 = \frac{A^2+B^2-4\Gamma}{4}$$

οπότε σύμφωνα με την εξίσωση (7) η εφαπτομένη θα έχει εξίσωση

$$(x_0+\frac{A}{2})(x+\frac{A}{2})+(\psi_0+\frac{B}{2})(\psi+\frac{B}{2})= \frac{A^2+B^2-4\Gamma}{4}$$

ή αν εκτελέσουμε πράξεις παίρνουμε την εξίσωση

$$x_0x+\psi_0\psi+\frac{A}{2}(x_0+x)+\frac{B}{2}(\psi_0+\psi)+\Gamma = 0 \qquad (9)$$

'Εστω τώρα ότι ζητάμε να βρούμε τις εφαπτόμενες της περιφέρειας (6) που άγονται από ένα σημείο $P_1(x_1,\psi_1)$ το οποίο κείται εκτός της περιφέρειας. Αν P_1P_0 είναι μια εφαπτομένη της περιφέρειας που άγεται από το σημείο P_1 και εφάπτεται στο σημείο $P_0(x_0,\psi_0)$ της περιφέρειας, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης αυτής θα είναι

$$(x_0-\alpha)(x-\alpha)+(\psi_0-\beta)(\psi-\beta) = R^2$$

Επειδή η εφαπτομένη αυτή διέρχεται από το σημείο P_1 θα έχουμε

$$(x_0-\alpha)(x_1-\alpha)+(\psi_0-\beta)(\psi_1-\beta) = R^2 \qquad (10)$$

Δηλαδή οι συντεταγμένες του σημείου P_1 θα επαληθεύουν την εξίσωση της εφαπτομένης. Η σχέση (10) μας λέει επίσης ότι τα σημεία επαφής των εφαπτομένων που άγονται από το σημείο $P_1(x_1,\psi_1)$ προς την περιφέρεια (6) κείνται στην ευθεία

$$(x_1-\alpha)(x-\alpha)+(\psi_1-\beta)(\psi-\beta) = R^2 \qquad (11)$$

'Ετσι για να βρούμε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της περιφέρειας που άγονται από το σημείο P_1, μπορούμε να βρούμε τα κοινά σημεία της ευθείας (11) με την περιφέρεια και στη συνέχεια να γράψουμε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της περιφέρειας στα σημεία αυτά. Η ευθεία που έχει εξίσωση (11) λέγεται <u>πολική</u> του σημείου $P_1(x_1,\psi_1)$ ως προς την περιφέρεια (6) και το σημείο $P_1(x_1,\psi_1)$ λέγεται <u>πόλος</u> της ευθείας (11) ως προς την περιφέρεια. Η απόσταση της πολικής (11) από το κέντρο Κ(α,β) της περιφέρειας είναι

$$d = \frac{R^2}{\sqrt{(x_1-\alpha)^2+(\psi_1-\beta)^2}} = \frac{R^2}{|\overline{KP_1}|}$$

Παρατηρούμε ότι αν το σημείο P_1 κείται εκτός του κύκλου τότε $|\overline{KP_1}|>R$ οπότε $d<R$ και η ευθεία (11) τέμνει την περιφέρεια (6) σε δύο σημεία. Όταν το σημείο P_1 κείται στην περιφέρεια, τότε $|\overline{KP_1}|=R$ και συνεπώς $d=R$. Τότε η πολική (11) του σημείου P_1 είναι εφαπτόμενη της περιφέρειας. Τέλος αν το σημείο P_1 κείται μέσα στο κύκλο, τότε $|\overline{KP_1}|<R$, οπότε $d>R$. Σ'αυτή την περίπτωση η πολική του σημείου P_1 κείται εκτός του κύκλου και δεν έχει κανένα κοινό σημείο μ'αυτόν. Είναι εύκολο να δούμε ότι, αν η περιφέρεια δίνεται από την εξίσωση $x^2+\psi^2+Ax+B\psi+\Gamma=0$ τότε η πολική του σημείου $P_1(x_1,\psi_1)$ ως προς την περιφέρεια αυτή έχει εξίσωση

$$x_1x+\psi_1\psi+\frac{A}{2}(x_1+x)+\frac{B}{2}(\psi_1+\psi)+\Gamma=0$$

Ας είναι τώρα

$$Ax+B\psi+\Gamma = 0 \qquad (12)$$

η εξίσωση τυχούσας ευθείας. Θέλουμε να βρούμε τον πόλο της ευθείας αυτής ως προς την περιφέρεια (6). Για το σκοπό αυτό εργαζόμαστε ως εξής. Ας υποθέσουμε ότι ο πόλος της ευθείας (12) είναι το σημείο $P_1(x_1,\psi_1)$ τότε η ευθεία (11), που είναι πολική του P_1, πρέπει να συμπίπτει με την ευθεία (12). Δηλαδή πρέπει να έχουμε

$$\frac{x_1-\alpha}{A}=\frac{\psi_1-\beta}{B}=\frac{-\alpha(x_1-\alpha)-\beta(\psi_1-\beta)-R^2}{\Gamma} \qquad \text{ή}$$

$$\frac{x_1-\alpha}{A}=\frac{\psi_1-\beta}{B}=\frac{-R^2}{A\alpha+B\beta+\Gamma}$$

Από τις σχέσεις αυτές παίρνουμε τελικά

$$x_1=\alpha-\frac{AR^2}{A\alpha+B\beta+\Gamma}, \qquad \psi_1=\beta-\frac{BR^2}{A\alpha+B\beta+\Gamma}$$

Αναφέρουμε μια χαρακτηριστική ιδιότητα των πολικών. Αν η πολική ενός σημείου $P_1(x_1,\psi_1)$ διέρχεται από το σημείο $P_2(x_2,\psi_2)$, τότε και η πολική του σημείου P_2 θα διέρχεται από το P_1. Πραγματικά αν η πολική (11) του σημείου P_1 διέρχεται από το σημείο P_2 οι συντεταγμένες του P_2 θα την επαληθεύουν, δηλαδή θα έχουμε $(x_1-\alpha)(x_2-\alpha)+(\psi_1-\beta)(\psi_2-\beta)=R^2$. Η πολική του σημείου P_2 είναι $(x_2-\alpha)(x-\alpha)+(\psi_2-\beta)(\psi-\beta)=R^2$ και η προηγούμενη σχέση μας λέει ότι το σημείο P_1 επαληθεύει την πολική του P_2.

7.4. Δύναμη σημείου ως προς κύκλο.

Θεωρούμε μια περιφέρεια κύκλου με εξίσωση

$$x^2+\psi^2+Ax+B\psi+\Gamma=0 \qquad (13)$$

και $P_1(x_1,\psi_1)$ τυχόν σημείο του επιπέδου. Ο αριθμός $x_1^2+\psi_1^2+Ax_1+B\psi_1+\Gamma$ καλείται <u>δύναμη του σημείου</u> P_1 <u>ως προς το κύκλο.</u> Θα δείξουμε τώρα ότι η δύναμη σημείου ως προς κύκλο ισούται με το γινόμενο $(\overline{P_1P'})(\overline{P_1P''})$, όπου P' και P'' είναι τα σημεία στα οποία τέμνει την περιφέρεια τυχούσα ευθεία που διέρχεται από το P_1.

Έστω ότι η τυχούσα ευθεία που διέρχεται από το σημείο P_1 και τέμνει την περιφέρεια στα σημεία P' και P'' είναι παράλληλη προς το μοναδιαίο διάνυσμα $\bar{n}(\alpha,\beta)$. Τότε οι παραμετρικές εξισώσεις αυτής θα είναι

$$\begin{aligned} x &= x_1 + t\alpha \\ \psi &= \psi_1 + t\beta \end{aligned} \qquad (14)$$

Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι για τυχούσα τιμή t_0 της παραμέτρου t παίρνουμε ένα σημείο $P_0(x_0,\psi_0)$ επί της ευθείας που ορίζουν οι εξισώσεις (14) και μάλιστα $x_0=x_1+t_0\alpha$, $\psi_0=\psi_1+t_0\beta$, ενώ $t_0=(\overline{P_1P_0})$ (γιατί;). Η λύση του συστήματος των εξισώσεων (13) και (14) θα μας δώσει τα σημεία τομής P' και P'' της περιφέρειας με την τέμνουσα.
Θα έχουμε

$$(x_1+t\alpha)^2+(\psi_1+t\beta)^2+A(x_1+t\alpha)+B(\psi_1+t\beta)+\Gamma=0$$

και επειδή το διάνυσμα $\bar{n}$ είναι μοναδιαίο $\alpha^2+\beta^2=1$, οπότε

$$t^2+2(\alpha x_1+\beta\psi_1+A\alpha+B\beta)t+x_1^2+\psi_1^2+Ax_1+B\psi_1+\Gamma=0 \qquad (15)$$

Οι συντεταγμένες των σημείων τομής P' και P'' της περιφέρειας (13) με την ευθεία (14) προσδιορίζονται από τις εξισώσεις (14) αν θέσουμε όπου t τις λύσεις t' και t'' της εξισώσεως (15). Αλλά $t'=(\overline{P_1P'})$ και $t''=(\overline{P_1P''})$.
Έτσι έχουμε

$$(\overline{P_1P'})(\overline{P_1P''})=t't''=x_1^2+\psi_1^2+Ax_1+B\psi_1+\Gamma$$

Δηλαδή το γινόμενο των δύο τμημάτων $(\overline{P_1P'})$ και $(\overline{P_1P''})$ της τέμνουσας είναι ανεξάρτητο από την τέμνουσα και ισούται με τη δύναμη του σημείου P_1 ως προς τον κύκλο.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε δύο περιφέρειες τις

$$x^2+\psi^2+A_1x+B_1\psi+\Gamma_1=0$$

$$x^2+\psi^2+A_2x+B_2\psi+\Gamma_2=0$$

Είναι εύκολο να βρούμε το γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου που έχουν την αυτή δύναμη σημείου ως προς τους δύο κύκλους. Αν $P(x,\psi)$ είναι τυχόν σημείο του γεωμετρικού τόπου θα έχουμε

$$x^2+\psi^2+A_1x+B_1\psi+\Gamma_1=x^2+\psi^2+A_2x+B_2\psi+\Gamma_2 \qquad ή$$

$$(A_1-A_2)x+(B_1-B_2)\psi+\Gamma_1-\Gamma_2=0$$

Δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που έχουν την αυτή δύναμη ως προς τους δύο κύκλους είναι ευθεία. Η ευθεία αυτή λέγεται <u>ριζικός άξονας</u> των δύο περιφερειών. Είναι εύκολο να δούμε ότι ο ριζικός άξονας δύο περιφερειών είναι κάθετος στη διάκεντρο αυτών.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε και μία τρίτη περιφέρεια

$$x^2+\psi^2+A_3x+B_3\psi+\Gamma_3=0$$

Τότε ορίζονται τρείς ριζικοί άξονες

$$\begin{aligned}(A_1-A_2)x+(B_1-B_2)\psi+\Gamma_1-\Gamma_2&=0\\(A_2-A_3)x+(B_2-B_3)\psi+\Gamma_2-\Gamma_3&=0\\(A_3-A_1)x+(B_3-B_1)\psi+\Gamma_3-\Gamma_1&=0\end{aligned}\qquad (16)$$

Αλλά για τους συντελεστές των ευθειών αυτών μπορούμε εύκολα να δούμε ότι ισχύει η σχέση

$$\begin{vmatrix}A_1-A_2 & B_1-B_2 & \Gamma_1-\Gamma_2\\A_2-A_3 & B_2-B_3 & \Gamma_2-\Gamma_3\\A_3-A_1 & B_3-B_1 & \Gamma_3-\Gamma_1\end{vmatrix}=0$$

Αυτό σημαίνει ότι αν το σύστημα των δύο πρώτων από τις εξισώσεις (16) έχει λύση, τότε η λύση αυτή θα επαληθεύει και την τρίτη εξίσωση. Δηλαδή οι ριζικοί άξονες τριών περιφερειών διέρχονται από ένα σημείο που λέγεται <u>ριζικό κέντρο</u> των τριών περιφερειών. Αν τα κέντρα των τριών περιφερειών βρίσκονται σε ευθεία οι τρείς ριζικοί άξονες είναι πάραλληλοι και το σύστημα (16) δεν έχει λύση.

<u>7.5.Εξίσωση σφαίρας</u>

Γνωρίζουμε ότι η σφαίρα ή καλύτερα η επιφάνεια σφαίρας ορίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του χώρου τα οποία απέχουν σταθερή απόσταση R από ένα σταθερό σημείο Κ. Το σημείο Κ λέγεται <u>κέντρο</u> της σφαίρας και η σταθερή απόσταση R <u>ακτίνα</u> αυτής. Αν $P(x,\psi,z)$ είναι τυχόν σημείο της σφαίρας που έχει κέντρο $K(\alpha,\beta,\gamma)$ και ακτίνα R, τότε η παραπάνω ιδιότητα της σφάιρας εκφράζεται με τη σχέση $|\overline{KP}|^2=R^2$. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $Ox\psi z$ η σχέση αυτή γραμμένη με συντεταγμένες μας δίνει την αναλυτική εξίσωση της σφαίρας

$$(x-\alpha)^2+(\psi-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2 \tag{17}$$

Αν εκτελέσουμε τις πράξεις στην εξίσωση (17) θα πάρουμε μια εξίσωση της μορφής

$$x^2+\psi^2+z^2+Ax+B\psi+\Gamma z+\Delta=0 \tag{18}$$

Αντίστροφα, κάθε εξίσωση της μορφής (18) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$(x+\frac{A}{2})^2+(\psi+\frac{B}{2})^2+(z+\frac{\Gamma}{2})^2=\frac{A^2+B^2+\Gamma^2-4\Delta}{4}$$

Συνεπώς παριστάνει σφαίρα με κέντρο το σημείο

$$K(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2},\ -\frac{\Gamma}{2}) \quad \text{και ακτίνα} \quad R=\sqrt{\frac{A^2+B^2+\Gamma^2-4\Delta}{4}}$$

Προφανώς αν $A^2+B^2+\Gamma^2-4\Delta>0$, τότε η σφάιρα είναι πραγματική, ενώ αν $A^2+B^2+\Gamma^2-4\Delta<0$ η σφαίρα είναι φανταστική. Τέλος αν $A^2+B^2+\Gamma^2-4\Delta=0$

η εξίσωση (18) παριστάνει μία σφαίρα εκφυλισμένη σ'ένα σημείο, το κέντρο της Κ.

7.6. Εξίσωση σφαίρας που διέρχεται από τέσσερα σημεία.

'Οταν δοθούν τέσσερα σημεία $P_1(x_1,\psi_1,z_1)$, $P_2(x_2,\psi_2,z_2)$, $P_3(x_3,\psi_3,z_3)$, $P_4(x_4,\psi_4,z_4)$ που δεν κείνται στο αυτό επίπεδο τότε η εξίσωση της σφαίρας που διέρχεται απ'αυτά είναι

$$\begin{vmatrix} x^2+\psi^2+z^2 & x & \psi & z & 1 \\ x_1^2+\psi_1^2+z_1^2 & x_1 & \psi_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+\psi_2^2+z_2^2 & x_2 & \psi_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+\psi_3^2+z_3^2 & x_3 & \psi_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+\psi_4^2+z_4^2 & x_4 & \psi_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} =0 \qquad (19)$$

Πραγματικά η εξίσωση (19) παριστάνει σφαίρα, γιατί αν αναπτύξουμε την ορίζουσα κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής θα λάβουμε μία εξίσωση της μορφής

$$E_1(x^2+\psi^2+z^2)+A_1x+B_1\psi+\Gamma_1z+\Delta_1 =0 \qquad (20)$$

όπου

$$E_1=\begin{vmatrix} x_1 & \psi_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & \psi_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & \psi_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & \psi_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

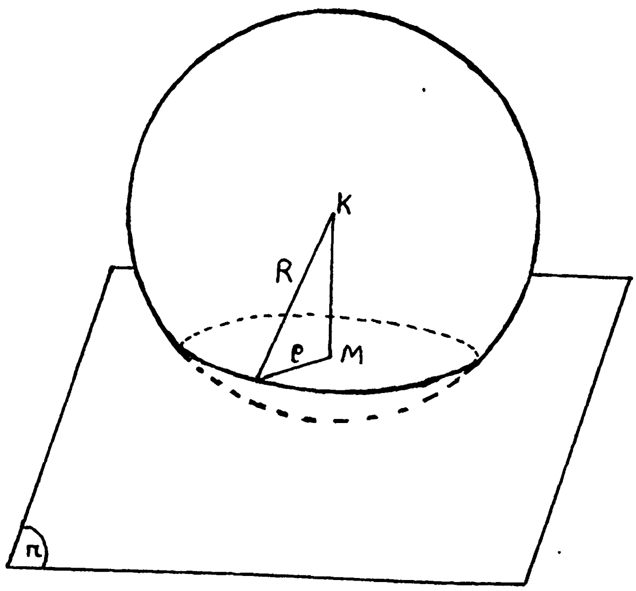
Αλλά $E_1\neq 0$ γιατί τα σημεία P_1,P_2,P_3,P_4 δεν κείνται στο αυτό επίπεδο. Συνεπώς αν διαιρέσουμε την (20) με E_1 θα λάβουμε μια εξίσωση της μορφής $x^2+\psi^2+z^2+Ax+B\psi+\Gamma z+\Delta =0$, δηλαδή εξίσωση σφαίρας. 'Ετσι η εξίσωση (19) παριστάνει σφαίρα και η σφαίρα αυτή διέρχεται από τα τέσσερα σημεία P_1, P_2, P_3, P_4, γιατί αν αντικαταστήσουμε στην (19) τα x,ψ,z με τις συντεταγμένες ενός από τα σημεία αυτά η εξίσωση αυτή θα πληρούται αφού η ορίζουσα θα έχει δύο γραμμές με τα αυτά στοιχεία.

7.7.Εξισώσεις περιφέρειας στο χώρο.

Γνωρίζουμε ότι κάθε καμπύλη στο χώρο προσδιορίζεται ως τομή δύο επιφανειών και συνεπώς εκφράζεται με δύο εξισώσεις τις εξισώσεις που ορίζουν τις επιφάνειες. Έτσι μία περιφέρεια στο χώρο μπορεί να οριστεί από μία σφαίρα και ένα επιπέδο που τέμνει αυτή. Δηλαδή οι εξισώσεις

$$(x-\alpha)^2+(\psi-\beta)^2+(z-\gamma)^2 = R^2 \qquad (21)$$

$$Ax+B\psi+\Gamma z+\Delta = 0 \qquad (22)$$



Σχ.1

είναι εξίσωση της περιφέρειας του Σχ.1. Αν θέλουμε να βρούμε τις συντεταγμένες του κέντρου M της περιφέρειας και την ακτίνα ρ αυτής εργαζόμαστε ως εξής. Το σημείο M θα είναι τομή του επιπέδου (π) και της καθέτου που άγεται από το κέντρο K της σφαίρας προς το επίπεδο (π). Η κάθετος KM διέρχεται από το σημείο K(α,β,γ) και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{n}(A,B,\Gamma)$. Έτσι έχει εξισώσεις

$$\frac{x-\alpha}{A} = \frac{\psi-\beta}{B} = \frac{z-\gamma}{\Gamma} \qquad (23)$$

Οι συντεταγμένες του κέντρου Μ της περιφέρειας θα βρεθούν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων (22) και (23). Για την ακτίνα ρ της περιφέρειας έχουμε $\rho=\sqrt{R^2-(\overline{KM})^2}$. Η απόσταση $|\overline{KM}|$ του σημείου Κ από το επίπεδο (π) είναι

$$|\overline{KM}| = \frac{|A\alpha+B\beta+\Gamma\gamma+\Delta|}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}} .$$

7.8. Εφαπτόμενο επίπεδο. Πόλοι και πολικά επίπεδα ως προς σφαίρα.

Θεωρούμε τη σφαίρα με εξίσωση

$$(x-\alpha)^2+(\psi-\beta)^2+(z-\gamma)^2 = R^2 \qquad (24)$$

και έστω $P_0(x_0,\psi_0,z_0)$ τυχόν σημείο αυτής. Η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της σφαίρας στο σημείο $P_0(x_0,\psi_0,z_0)$ αυτής βρίσκεται ως εξής. Αν $K(\alpha,\beta,\gamma)$ είναι το κέντρο της σφαίρας, τότε το διάνυσμα $\overline{KP_0}$ θα είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο. Έτσι αν $P(x,\psi,z)$ είναι τυχόν σημείο του επιπέδου τα διανύσματα $\overline{KP_0}$ και $\overline{P_0P}$ θα είναι κάθετα. Αλλά $\overline{KP_0}(x_0-\alpha,\psi_0-\beta,z_0-\gamma)$ και $\overline{P_0P}(x-x_0,\psi-\psi_0,z-z_0)$. Επομένως έχουμε την συνθήκη καθετότητας $(x-x_0)(x_0-\alpha)+(\psi-\psi_0)(\psi_0-\beta)+(z-z_0)(z_0-\gamma)=0$ ή

$$[(x-\alpha)-(x_0-\alpha)](x_0-\alpha)+[(\psi-\beta)-(\psi_0-\beta)](\psi_0-\beta)+[(z-\gamma)-(z_0-\gamma)](z_0-\gamma) = 0.$$

Οπότε παίρνουμε

$$(x-\alpha)(x_0-\alpha)+(\psi-\beta)(\psi_0-\beta)+(z-\gamma)(z_0-\gamma)=(x_0-\alpha)^2+(\psi_0-\beta)^2+(z_0-\gamma)^2$$

και τελικά έχουμε

$$(x-\alpha)(x_0-\alpha)+(\psi-\beta)(\psi_0-\beta)+(z-\gamma)(z_0-\gamma) = R^2 \qquad (25)$$

γιατί οι συντεταγμένες του σημείου P_0 επαληθεύουν την εξίσωση (24) της σφαίρας. Συνεπώς το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο P_0 της σφαίρας έχει εξίσωση την (25).

Αν η σφαίρα έχει εξίσωση της μορφής

$$x^2+\psi^2+z^2+Ax+B\psi+\Gamma z+\Delta=0 \qquad (26)$$

τότε η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο σημείο $P_0(x_0,\psi_0,z_0)$ αυτής είναι

$$xx_0+\psi\psi_0+zz_0+\frac{A}{2}(x+x_0)+\frac{B}{2}(\psi+\psi_0)+\frac{\Gamma}{2}(z+z_0)+\Delta=0 \qquad (27)$$

και βρίσκεται εύκολα αν γράψουμε την (26) στη μορφή (24) και εφαρμόσουμε σ'αυτή την (25). Πραγματικά, η (26) γράφεται

$$(x+\frac{A}{2})^2+(\psi+\frac{B}{2})^2+(z+\frac{\Gamma}{2})^2=\frac{A^2+B^2+\Gamma^2-4\Delta}{4}$$

οπότε η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο σημείο $P_0(x_0,\psi_0,z_0)$ αυτής είναι

$$(x+\frac{A}{2})(x_0+\frac{A}{2})+(\psi+\frac{B}{2})(\psi_0+\frac{B}{2})+(z+\frac{\Gamma}{2})(z_0+\frac{\Gamma}{2})=\frac{A^2+B^2+\Gamma^2-4\Delta}{4}$$

και από αυτήν παίρνουμε μετά την εκτέλεση των πράξεων την (27).

Έστω $P_1(x_1,\psi_1,z_1)$ ένα σημείο εκτός της σφαίρας (24) και (π) ένα εφαπτόμενο επίπεδο αυτήςπού διέρχεται από το $P_1(x_1,\psi_1,z_1)$. Αν $P_0(x_0,\psi_0,z_0)$είναι το σημείο επαφής της σφαίρας (24) και του επιπέδου (π) τότε η εξίσωση του (π) θα είναι

$(x-\alpha)(x_0-\alpha)+(\psi-\beta)(\psi_0-\beta)+(z-\gamma)(z_0-\gamma)=R^2$. Αλλά το σημείο $P_1(x_1,\psi_1,z_1)$ κείται στο (π), οπότε οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση του (π), δηλαδή θα έχουμε

$$(x_1-\alpha)(x_0-\alpha)+(\psi_1-\beta)(\psi_0-\beta)+(z_1-\gamma)(z_0-\gamma)=R^2$$

Η ισότητα αυτή μας λέει ότι το σημείο επαφής $P_0(x_0,\psi_0,z_0)$ κείται στο επίπεδο

$$(x_1-\alpha)(x-\alpha)+(\psi_1-\beta)(\psi-\beta)+(z_1-\gamma)(z-\gamma)=R^2 \qquad (28)$$

Δηλαδή τα σημεία επαφής των επιπέδων που διέρχονται από το P_1 και εφάπτονται της σφαίρας κείνται στο επίπεδο (28). Για οποιοδήποτε σημείο $P_1(x_1,\psi_1,z_1)$ του χώρου το επίπεδο (28) λέγεται <u>πολικό</u>

<u>επίπεδο</u> του σημείου P_1 ως προς την σφαίρα (24), ενώ το σημείο P_1 λέγεται <u>πόλος</u> του επιπέδου (28) ως προς την σφαίρα (24). Η απόσταση του κέντρου $K(\alpha,\beta,\gamma)$ της σφαίρας από το πολικό επίπεδο (28) είναι

$$d = \frac{R^2}{\sqrt{(x_1-\alpha)^2+(\psi_1-\beta)^2+(z_1-\gamma)^2}} = \frac{R^2}{|\overline{KP}_1|}$$

Αν το σημείο P_1 κείται εκτός της σφαίρας τότε $|\overline{KP}_1|>R$, οπότε $d<R$ και το πολικό επίπεδο του P_1 τέμνει την σφαίρα κατά περιφέρεια, αφού απέχει από το κέντρο της σφαίρας απόσταση μικρότερη από την ακτίνα. Αν $|\overline{KP}_1|=R$, δηλαδή αν το P_1 κείται στη σφαίρα, τότε $d=R$, οπότε το πολικό επίπεδο του P_1 είναι το εφαπτόμενο επίπεδο της σφαίρας στο σημείο P_1 αυτής. Τέλος αν το σημείο P_1 κείται μέσα στη σφαίρα, τότε $|\overline{KP}_1|<R$, οπότε $d>R$ και το πολικό επίπεδο του σημείου P_1 δεν τέμνει τη σφαίρα.

Αν το πολικό επίπεδο του σημείου $P_1(x_1,\psi_1,z_1)$ ως προς τη σφαίρα (24) διέρχεται από το σημείο $P_2(x_2,\psi_2,z_2)$, τότε και το πολικό επίπεδο του σημείου P_2 διέρχεται από το P_1. Πραγματικά, το πολικό επίπεδο του P_1 έχει εξίσωση

$(x-\alpha)(x_1-\alpha)+(\psi-\beta)(\psi_1-\beta)+(z-\gamma)(z_1-\gamma)=R^2$ και επειδή το P_2 κείται σ'αυτό, οι συντεταγμένες του P_2 θα επαληθεύουν την εξίσωση του. Δηλαδή θα έχουμε

$$(x_2-\alpha)(x_1-\alpha)+(\psi_2-\beta)(\psi_1-\beta)+(z_2-\gamma)(z_1-\gamma)= R^2$$

Αλλά η σχέση αυτή μας λέει ότι το σημείο $P_1(x_1,\psi_1,z_1)$ κείται στο επίπεδο $(x_2-\alpha)(x-\alpha)+(\psi_2-\beta)(\psi-\beta)+(z_2-\gamma)(z-\gamma) = R^2$ που όπως ξέρουμε είναι το πολικό επίπεδο του σημείου P_2. Προφανώς αν η σφαίρα δίνεται από την εξίσωση

$$x^2+\psi^2+z^2+Ax+B\psi+\Gamma z+\Delta = 0$$

τότε το πολικό επίπεδο του σημείου $P_1(x_1,\psi_1,z_1)$ έχει εξίσωση

$$x_1x+\psi_1\psi+z_1z+\frac{A}{2}(x_1+x)+\frac{B}{2}(\psi_1+\psi)+\frac{\Gamma}{2}(z_1+z)+\Delta=0 \qquad (29)$$

7.9. Δύναμη σημείου ως προς σφαίρα

Θεωρούμε σφαίρα με εξίσωση

$$x^2+\psi^2+z^2+Ax+B\psi+\Gamma z+\Delta=0 \qquad (30)$$

και $P_1(x_1,\psi_1,z_1)$ τυχόν σημείο του χώρου. Ο αριθμός

$$x_1^2+\psi_1^2+z_1^2+Ax_1+B\psi_1+\Gamma z_1+\Delta$$

λέγεται δύναμη του σημείου P_1 ως προς τη σφαίρα. Μπορούμε να δείξουμε, όπως στην περίπτωση της δύναμης σημείου ως προς κύκλο, ότι η δύναμη σημείου ως προς σφαίρα ισούται με το γινόμενο $(\overline{P_1P'})(\overline{P_1P''})$, όπου P' και P'' είναι τα σημεία στα οποία τέμνει τη σφαίρα τυχούσα ευθεία που διέρχεται από το σημείο P_1 (άσκηση).

Ας πάρουμε τώρα δύο σφαίρες

$$x^2+\psi^2+z^2+A_1x+B_1\psi+\Gamma_1z+\Delta_1=0 \qquad (31)$$

$$x^2+\psi^2+z^2+A_2x+B_2\psi+\Gamma_2z+\Delta_2=0 \qquad (32)$$

και ας βρούμε το γεωμετρικό τόπο των σημείων του χώρου που έχουν την αυτή δύναμη ως προς τις δύο σφαίρες. Αν $P(x,\psi,z)$ είναι τυχόν σημείο του γεωμετρικού τόπου, τότε η δύναμη του σημείου αυτού ως προς τις σφαίρες (31) και (32) είναι αντίστοιχα

$$x^2+\psi^2+z^2+A_1x+B_1\psi+\Gamma_1z+\Delta_1 \qquad \text{και}$$

$$x^2+\psi^2+z^2+A_2x+B_2\psi+\Gamma_2z+\Delta_2$$

Επειδή πρέπει οι αριθμοί αυτοί να είναι ίσοι, έχουμε

$$x^2+\psi^2+z^2+A_1x+B_1\psi+\Gamma_1z+\Delta_1 = x^2+\psi^2+z^2+A_2x+B_2\psi+\Gamma_2z+\Delta_2 \quad \text{ή}$$

$$(A_1-A_2)x+(B_1-B_2)\psi+(\Gamma_1-\Gamma_2)z+(\Delta_1-\Delta_2) = 0 \qquad (33)$$

'Ωστε ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του χώρου που έχουν την αυτή δύναμη ως προς τις δύο σφαίρες (31) και (32) είναι το επίπεδο (33). Το επίπεδο αυτό λέγεται <u>ριζικό επίπεδο</u> των δύο σφαιρών.

Θεωρούμε τώρα και μία τρίτη σφαίρα με εξίσωση

$$x^2+\psi^2+z^2+A_3x+B_3\psi+\Gamma_3z+\Delta_3 = 0 \qquad (34)$$

Από τις τρείς σφαίρες (31) , (32) και (34) ορίζονται τρία ριζικά επίπεδα αν πάρουμε αυτές ανά δύο. Τα επίπεδα αυτά έχουν εξισώσεις

$$\begin{aligned} (A_1-A_2)x + (B_1-B_2)\psi + (\Gamma_1-\Gamma_2)z + (\Delta_1-\Delta_2) &= 0 \\ (A_2-A_3)x + (B_2-B_3)\psi + (\Gamma_2-\Gamma_3)z + (\Delta_2-\Delta_3) &= 0 \qquad (35) \\ (A_3-A_1)x + (B_3-B_1)\psi + (\Gamma_3-\Gamma_1)z + (\Delta_3-\Delta_1) &= 0 \end{aligned}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι ο βαθμός του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων του συστήματος (35) και ο βαθμός του επηυξημένου πίνακα στη γενική περίπτωση είναι 2, οπότε το σύστημα (35) έχει άπειρες λύσεις, δηλαδή τα τρία ριζικά επίπεδα (35) διέρχονται από μία ευθεία,που καλείται <u>ριζικός άξονας</u> των σφαιρών (31),(32) και (34). Προφανώς ο ριζικός άξονας των τριών σφαιρών περιέχει όλα τα σημεία του χώρου τα οποία έχουν την αυτή δύναμη ως προς τις τρείς σφαίρες.

Τέλος αν δίδονται τέσσερες σφαίρες, τότε ορίζονται έξι ριζικά επίπεδα, όταν πάρουμε αυτές ανά δύο. Είνα εύκολο να δούμε ότι στη γενική περίπτωση τα έξι ριζικά επίπεδα των σφαιρών διέρχονται από ένα σημείο που καλείται <u>ριζικό κέντρο</u> των τεσσάρων σφαιρών. Προφανώς το ριζικό κέντρο τεσσάρων σφαιρών έχει την αυτή δύναμη και ως προς τις τέσσερες σφαίρες.

8. Ασκήσεις.

1. Να βρεθεί η εξίσωση της περιφέρειας κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $K(2,2)$ και διέρχεται από το σημείο $A(4,5)$.

2. Να βρεθεί η περιφέρεια που έχει κέντρο το σημείο $K(-1,1)$ και εφάπτεται της ευθείας $x+2\psi-4=0$.

3. Να βρεθεί η εξίσωση της περιφέρειας της περιγεγραμμένης στο τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $A(1,1)$, $B(-1,1)$, $\Gamma(-1,-1)$.

4. Να βρεθεί η εξίσωση της περιφέρειας της εγγεγραμμένης στο τρίγωνο του οποίου οι πλευρές έχουν εξισώσεις $x+2=0$, $\psi-4=0$, $3x-4\psi-14=0$.

5. Τριγώνου ΑΒΓ οι πλευρές βρίσκονται στις ευθείες (α): $x-2=0$, (β): $x-2\psi-2=0$, (γ): $x+5\psi-5=0$. Να βρεθούν οι εξισώσεις της εγγεγραμμένης και περιγεγραμμένης περιφέρειας. Επίσης να βρεθεί η εξίσωση της παραγγεγραμμένης περιφέρειας που αντιστοιχεί στην κορυφή Β.

6. Να βρεθεί η εξίσωση της περιφέρειας κύκλου που έχει κέντρο $O(0,0)$ και εφάπτεται της ευθείας (ε): $x+4\psi-8=0$. Στη συνέχεια να βρεθεί η εξίσωση της πολικής του σημείο $P(4,0)$ ως προς τον κύκλο.

7. Να βρεθούν το κέντρο και η ακτίνα των κύκλων

(α): $x^2+\psi^2+4x+4\psi+6=0$

(β): $2x^2+2\psi^2+8x-4\psi-15=0$

8.Να βρεθεί το μήκος της κοινής χορδής των κύκλων

$x^2+\psi^2+3x-4-10=0$, $x^2+\psi^2-9x+8\psi+5=0$

9.Δίνεται η περιφέρεια $x^2+\psi^2-8x+13=0$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της περιφέρειας που άγονται από την αρχή των αξόνων.

10.Να βρεθούν οι κοινές εφαπτόμενες των περιφερειών

$x^2+\psi^2-6x=0$, $x^2+\psi^2-6\psi=0$.

11.Να δειχθεί ότι η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε οι περιφέρειες

$x^2+\psi^2+A_1x+B_1\psi+\Gamma_1=0$, $x^2+\psi^2+A_2x+B_2\psi+\Gamma_2=0$

να τέμνονται ορθογωνίως είναι $A_1A_2+B_1B_2-2(\Gamma_1+\Gamma_2)=0$.

12.Να βρεθεί η εξίσωση της περιφερείας που περνάει από το σημείο O(0,0) και από τα κοινά σημεία των περιφερειών

$x^2+\psi^2-4x-8\psi+4=0$, $x^2+\psi^2-12x-16\psi-2=0$

13.Να βρεθεί το ριζικό κέντρο των περιφερειών

$x^2+\psi^2-2x-4\psi-2=0$, $x^2+\psi^2-6x+4=0$

$x^2+\psi^2+8x+2\psi+8=0$.

14.Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των χορδών του κύκλου $x^2+\psi^2-2\alpha x=0$ που διέρχονται από την αρχή O(0,0).

15.Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου που ορίζεται από τις εξισώσεις

$$x^2+\psi^2+z^2-6x-8\psi-10z+41=0 \quad , \quad x+\psi+z-1=0.$$

16.Να βρεθεί η εξίσωση της σφαίρας που περνά από το σημείο $B(3,5,\frac{3}{2})$ και εφάπτεται του επιπέδου $x+\psi+2z-3=0$ στο σημείο $A(1,1,\frac{1}{2})$ αυτού.

17.Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που περνά από τα σημεία $A(2,-1,6)$, $B(1,0,5)$ και εφάπτεται της σφαίρας $x^2+\psi^2+z^2=6$.

18.Να βρεθεί η εξίσωση της σφαίρας που εφάπτεται του επιπέδου $3x+2\psi+6z-1=0$ και περνά από την περιφέρεια κύκλου ο οποίος κείται στο επίπεδο $xO\psi$ και έχει κέντρο το σημείο $(5,4,0)$ και ακτίνα $\rho=6$.

19.Να βρεθούν οι εξισώσεις της περιφέρειας της περιγεγραμμένης περί το τρίγωνο $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $\Gamma(0,0,3)$.

20.Να βρεθεί η εξίσωση της σφαίρας η οποία περνά από το σημείο $A(8,15,10)$ και κόβει το επίπεδο $xO\psi$ κατά περιφέρεια κύκλου του οποίου κέντρο είναι η αρχή O και ακτίνα $\rho=7$.

21.Να βρεθεί η εξίσωση της σφαίρας η οποία εφάπτεται στα επίπεδα $x+\psi+z-3=0$, $x+\psi+z-9=0$ και το κέντρο της βρίσκεται στην ευθεία $2x-\psi=0$, $3x-z=0$.

22.Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα της περιφέρειας κατά την οποία τέμνονται οι δύο σφαίρες

$x^2+\psi^2+z^2-2\psi-4z-40=0 \quad , \quad x^2+\psi^2+z^2-4x-2\psi-20=0.$

23. Να βρεθεί η εξίσωση της σφαίρας η οποία περνά από τη τομή των σφαιρών

$x^2+\psi^2+z^2-x+\psi-z-1=0 \quad , \quad x^2+\psi^2+z^2-2x-\psi+z-2=0$

και η οποία εφάπτεται της ευθείας

$(\varepsilon): x+\psi-z-1=0 \quad , \quad x-\psi-2z+1=0.$

24. Ενώνουμε το σταθερό σημείο $A(\kappa,\mu)$ με τυχόν σημείο M της περιφέρειας $(x-\alpha)^2+(\psi-\beta)^2=\rho^2$. Αν το σημείο P διαιρεί το ευθύγραμμο τμήμα AM σε σταθερό λόγο λ, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του P, όταν το M διαγράφει την δοθείσα περιφέρεια.

25. Δίνεται κύκλος και δύο διάμετροι $A'A$ και $B'B$ κάθετοι μεταξύ τους. Μία ευθεία που διέρχεται από το σημείο B τέμνει την περιφέρεια στο Γ και την ευθεία AA' στο Δ. Έστω M το σημείο τομής της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο Γ και της καθέτου επί την AA' στο Δ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του M, όταν το Γ διαγράφει την περιφέρεια.

26. Να βρεθεί η εξίσωση περιφέρειας η οποία τέμνει ορθογώνια την περιφέρεια $x^2+\psi^2-2x+5\psi-5=0$, διέρχεται από το σημείο $(6,1)$ και έχει το κέντρο της στην ευθεία $9x+4\psi-47=0$.

27. Ένα σημείο A κινείται πάνω στην περιφέρεια $x^2+\psi^2=\alpha^2$ και είναι το κέντρο δύο περιφερειών (Γ) και (Γ') που έχουν ακτίνες R και $2R$ αντίστοιχα. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κοινών σημείων της περιφέρειας (Γ') και του ριζικού άξονα των περιφερειών $x^2+\psi^2=\alpha^2$ και (Γ).

9. Καμπύλες δευτέρου βαθμού στο επίπεδο (κωνικές τομές)

9.1. Γενική εξίσωση δευτέρου βαθμού.

Κάθε καμπύλη του επιπέδου της οποίας η εξίσωση είναι της γενικής μορφής

$$Ax^2+2Bx\psi+\Gamma\psi^2+2\Delta x+2E\psi+Z=0 \qquad (1)$$

λέγεται καμπύλη δευτέρου βαθμού. Για παράδειγμα η περιφέρεια κύκλου είναι μια καμπύλη δευτέρου βαθμού. 'Αλλες καμπύλες δευτέρου βαθμού είναι η έλλειψη, η υπερβολή και η παραβολή τις οποίες και θα μελετήσουμε παρακάτω. Επίσης όταν η (1) γράφεται ως γινόμενο δύο πρωτοβαθμίων παραγόντων ως προς x και ψ παριστάνει ένα σύστημα δύο ευθειών. Επειδή οι καμπύλες αυτές μπορούν να προκύψουν ως τομές ενός ορθού κυκλικού κώνου και ενός επιπέδου, γιαυτό λέγονται και κωνικές τομές. 'Οπως θα δούμε αργότερα οι καμπύλες αυτές, δηλαδή η περιφέρεια κύκλου, η έλλειψη, η υπερβολή, η παραβολή και τέλος το σύστημα δύο ευθειών εξαντλούν όλες τις περιπτώσεις που μπορεί να παριστάνει η εξίσωση (1). Γιαυτό στο εξής κάθε καμπύλη που έχει εξίσωση της μορφής (1) θα λέγεται κωνική τομή. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε ξεχωριστά την κάθε μια από τις καμπύλες έλλειψη, υπερβολή, παραβολή και έπειτα θα δούμε τι συνθήκες πρέπει να πληρούν οι συντελεστές της εξισώσεως (1) ώστε να παριστάνει μια από τις καμπύλες αυτές.

9.2. 'Ελλειψη

'Ελλειψη είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων οι αποστάσεις από δύο σταθερά σημεία Ε και Ε' έχουν άθροισμα ίσο με 2α. Τα σημεία Ε και Ε' καλούνται εστίες της ελλείψεως και η απόστασή των $|\overline{EE'}|=2\gamma$ καλείται εστιακή απόσταση. Αν Ρ είναι τυχόν σημείο της ελλείψεως έχουμε

$$|\overline{E'P}|+|\overline{EP}| =2\alpha \qquad (2)$$

Για να βρούμε την εξίσωση της ελλείψεως, θεωρούμε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $Ox\psi$ έτσι ώστε η αρχή O να βρίσκεται στο μέσο του ευθυγράμμου τμήματος E'E και τα σημεία E' και E να κείνται στον άξονα Ox. Τότε τα σημεία E'και E έχουν συντεταγμένες $(-\gamma,0)$ και $(\gamma,0)$, αντίστοιχα, ενώ αν $P(x,\psi)$ είναι τυχόν σημείο της ελλείψεως η σχέση (2) γράφεται

$$\sqrt{(x+\gamma)^2+\psi^2}+\sqrt{(x-\gamma)^2+\psi^2} =2\alpha \quad \text{ή} \quad \sqrt{(x+\gamma)^2+\psi^2} =2\alpha-\sqrt{(x-\gamma)^2+\psi^2}$$

$$\text{ή} \qquad (x+\gamma)^2+\psi^2=4\alpha^2-4\alpha\sqrt{(x-\gamma)^2+\psi^2}+(x-\gamma)^2+\psi^2 \qquad \text{ή}$$

$$\sqrt{(x-\gamma)^2+\psi^2} =\alpha-\frac{\gamma}{\alpha}x \qquad \text{ή} \qquad \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\alpha^2-\gamma^2}=1$$

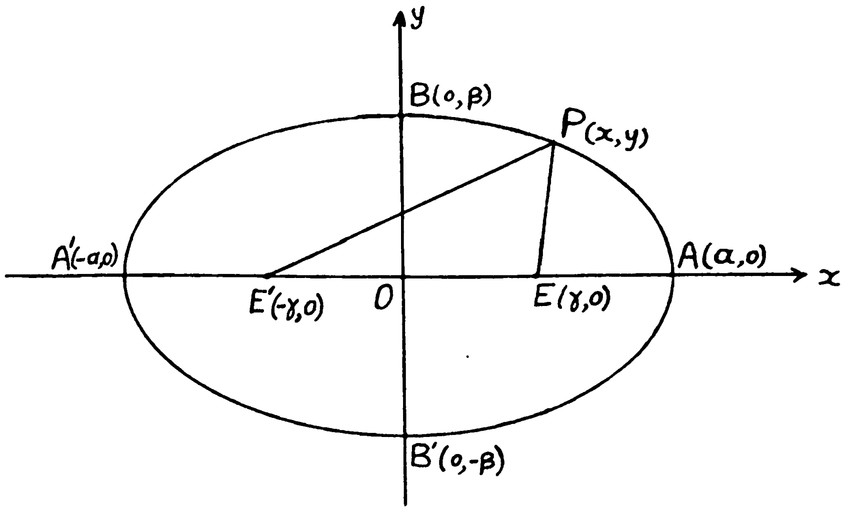
Αλλά $\alpha>\gamma$, οπότε $\alpha^2-\gamma^2>0$ και αν θέσουμε $\alpha^2-\gamma^2=\beta^2$ έχουμε

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1 \qquad (3)$$

Αντίστροφα,αν οι συντεταγμένες ενός σημείου $P(x,\psi)$ πληρούν την (3), τότε το P κείται στην έλλειψη που έχει εστίες τα σημεία $E'(-\gamma,0)$, $E(\gamma,0)$ και $\gamma=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$. Αυτό προκύπτει εύκολα αν ακολουθήσει κανείς αντίστροφη πορεία στις παραπάνω εξισώσεις και διαλέξει το ορθό πρόσημο στην εξαγωγή τετραγωνικής ρίζας,οπότε καταλήγει στην (2). Ώστε η εξίσωση της ελλείψεως είναι η (3).

Ας εξετάσουμε ορισμένες ιδιότητες της ελλείψεως οι οποίες προκύπτουν από την εξίσωση αυτής (3). Αν θέσουμε στην (3) $\psi=0$ βρίσκουμε $x=\pm\alpha$, δηλαδή τα σημεία στα οποία η έλλειψη τέμνει τον άξονα Ox είναι τα $A(\alpha,0)$, $A'(-\alpha,0)$. Επίσης αν θέσουμε στην (3) $x=0$ παίρνουμε $\psi=\pm\beta$, δηλαδή η έλλειψη τέμνει τον άξονα $O\psi$ στα σημεία $B(0,\beta)$

και $B'(0,-\beta)$. Τα σημεία A, A', B και B' λέγονται <u>κορυφές</u> της ελλείψεως.



Σχ.1

Παρατηρούμε ότι, όταν το σημείο $P(x,\psi)$ είναι σημείο της ελλείψεως, τότε τα σημεία $P_1(-x,\psi)$, $P_2(x,-\psi)$ και $P_3(-x,-\psi)$ είναι επίσης σημεία της ελλείψεως, γιατί οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωση αυτής. Έτσι βλέπουμε ότι η έλλειψη είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Ox και τον άξονα Oψ, άρα και ως προς το σημείο O (Σχ.1). Η εξίσωση (3) γράφεται $\frac{\psi^2}{\beta^2} = 1 - \frac{x^2}{\alpha^2}$ και επομένως $1 - \frac{x^2}{\alpha^2} \geqq 0$ ή $-\alpha \leqq x \leqq \alpha$. Ομοίως βρίσκουμε $-\beta \leqq \psi \leqq \beta$. Δηλαδή, η έλλειψη περιέχεται μέσα σ'ένα ορθογώνιο με εξισώσεις πλευρών $x=\pm\alpha$ και $\psi=\pm\beta$.

Το ευθύγραμμο τμήμα Α'Α λέγεται <u>μεγάλος άξονας</u> της ελλείψεως, ενώ το ευθύγραμμο τμήμα Β'Β μικρός άξονας. Επίσης το σημείο συμμετρίας O λέγεται <u>κέντρο</u> της ελλείψεως. Αν οι εστίες της ελλείψεως βρίσκονται πάνω στον άξονα Oψ, τότε η εξίσωση αυτής θα είναι

$$\frac{\psi^2}{\alpha^2} + \frac{x^2}{\beta^2} = 1 \qquad (4)$$

όπου τα α,β έχουν την ίδια σημασία όπως και στην εξίσωση (3).

<u>9.3.Εφαπτομένη ελλείψεως. Πόλοι και πολικές.</u>

Θεωρούμε την έλλειψη

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1 \qquad (5)$$

και ας είναι $P_0(x_0,\psi_0)$ ένα σημείο αυτής. Θα ζητήσουμε να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της ελλείψεως στο σημείο $P_0(x_0,\psi_0)$ αυτής. Δηλαδή θέλουμε να βρούμε την ευθεία που διέρχεται από το σημείο $P_0(x_0,\psi_0)$ και δεν έχει άλλο σημείο κοινό με την έλλειψη εκτός από το P_0. Γνωρίζουμε ότι κάθε ευθεία που διέρχεται από το $P_0(x_0,\psi_0)$ έχει εξίσωση της μορφής

$$\psi-\psi_0 = \lambda(x-x_0) \qquad (6)$$

Επειδή θέλουμε η (6) να είναι εφαπτομένη της ελλείψεως πρέπει το σύστημα των εξισώσεων (5) και (6) να έχει μια μόνο λύση την (x_0,ψ_0). Θέτουμε την τιμή του ψ από την (6) στην (5) οπότε παίρνουμε

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi_0^2+\lambda^2(x-x_0)^2+2\lambda\psi_0(x-x_0)}{\beta^2}=1 \qquad (7)$$

Αλλά το σημείο $P_0(x_0,\psi_0)$ κείται στην έλλειψη και επομένως οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της (5), δηλαδή

$$\frac{x_0^2}{\alpha^2}+\frac{\psi_0^2}{\beta^2}=1 \qquad (8)$$

Έτσι αν αντικαταστήσουμε το ψ_0^2 στην (7) από την (8) θα έχουμε

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+1-\frac{x_0^2}{\alpha^2}+\frac{\lambda^2(x-x_0)+2\lambda\psi_0(x-x_0)}{\beta^2}=1 \qquad \text{ή}$$

$$\frac{x^2-x_0^2}{\alpha^2}+\frac{\lambda^2(x-x_0)^2+2\lambda\psi_0(x-x_0)}{\beta^2}=0 \qquad \text{ή}$$

$$(x-x_0)\left[\frac{x+x_0}{\alpha^2}+\frac{\lambda^2(x-x_0)+2\lambda\psi_0}{\beta^2}\right]=0$$

Πρέπει η δευτεροβάθμια αυτή εξίσωση να έχει διπλή ρίζα ως προς x. Επειδή η μια ρίζα της είναι $x=x_0$ πρέπει και η εντός της αγκύλης παράσταση να μηδενίζεται για $x=x_0$. Έτσι έχουμε

$$\frac{2x_0}{\alpha^2}+\frac{2\lambda\psi_0}{\beta^2}=0 \quad \text{ή} \quad \lambda=-\frac{\beta^2 x_0}{\alpha^2\psi_0} \quad .$$

Την τιμή αυτή του λ θέτουμε στην (6) οπότε έχουμε την εξίσωση της εφαπτομένης που ζητάμε

$$\psi-\psi_0=-\frac{\beta^2 x_0}{\alpha^2\psi_0}(x-x_0) \qquad \text{ή}$$

$$\frac{x_0 x}{\alpha^2}+\frac{\psi_0\psi}{\beta^2}=\frac{x_0^2}{\alpha^2}+\frac{\psi_0^2}{\beta^2}$$

και αν λάβουμε υπ'όψη μας την (8) παίρνουμε τελικά

$$\frac{x_0 x}{\alpha^2}+\frac{\psi_0\psi}{\beta^2}=1 \qquad (9)$$

Ώστε η (9) είναι η εξίσωση της εφαπτομένης της ελλείψεως στο σημείο $P_0(x_0,\psi_0)$ αυτής.

Έστω τώρα ότι θέλουμε να βρούμε τις εφαπτόμενες της ελλείψεως (4) που άγονται από ένα σημείο $P_1(x_1,\psi_1)$ το οποίο κείται εκτός της ελλείψεως. Αν P_1P_0 είναι μια εφαπτομένη της ελλείψεως που άγεται από το P_1 και εφάπτεται στο σημείο $P_0(x_0,\psi_0)$ της ελλείψεως, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης αυτής, θα είναι

$$\frac{xx_0}{\alpha^2}+\frac{\psi\psi_0}{\beta^2}=1.$$

Αλλά η εφαπτομένη αυτή διέρχεται από το σημείο P_1 και οι συντεταγμένες του πρέπει να την επαληθεύουν, δηλαδή

$$\frac{x_1x_0}{\alpha^2}+\frac{\psi_1\psi_0}{\beta^2}=1$$

Παρατηρούμε ότι το σημείο επαφής $P_0(x_0,\psi_0)$ κείται στην ευθεία με εξίσωση

$$\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{\psi\psi_1}{\beta^2}=1 \qquad (10)$$

Ώστε τα σημεία επαφής των εφαπτομένων που άγονται από το σημείο $P_1(x_1,\psi_1)$ κείνται στην ευθεία (10). Τα σημεία αυτά προσδιορίζονται από τις λύσεις του συστήματος των εξισώσεων (5) και (10) και στη συνέχεια μπορούν να βρεθούν οι εφαπτόμενες που άγονται από το P_1. Αν $P_1(x_1,\psi_1)$ είναι τυχόν σημείο του επιπέδου, η ευθεία που έχει εξίσωση την (10) λέγεται <u>πολική</u> του σημείου P_1 ως προς την έλλειψη (4) και το σημείο P_1 λέγεται <u>πόλος</u> της ευθείας αυτής. Προφανώς αν το σημείο P_1 κείται στην έλλειψη, τότε η πολική του ταυτίζεται με την εφαπτομένη της στο σημείο αυτό, ενώ αν το σημείο P_1 κείται εκτός της ελλείψεως η πολική του τέμνει την έλλειψη στα σημεία επαφής των εφαπτομένων που άγονται από το P_1 προς την έλλειψη. Τέλος, αν το σημείο P_1 κείται εντός της ελλείψεως, η πολική του δεν έχει κανένα κοινό σημείο με την έλλειψη. Όπως και στην περίπτωση του κύκλου μπορούμε κι εδώ να δείξουμε ότι αν η πολική του σημείου $P_1(x_1,\psi_1)$ διέρχεται από το σημείο $P_2(x_2,\psi_2)$ τότε και η πολική του P_2 θα διέρχεται από το P_1. Πραγματικά επειδή το P_2 κείται στην πολική του P_1 οι συντεταγμένες του (x_2,ψ_2) θα επαληθεύουν την (10), δηλαδή

$$\frac{x_2x_1}{\alpha^2}+\frac{\psi_2\psi_1}{\beta^2}=1.$$

Αλλά η σχέση αυτή μας λέει ότι το σημείο $P_1(x_1,\psi_1)$ κείται στην ευθεία

$$\frac{x_2x}{\alpha^2}+\frac{\psi_2\psi}{\beta^2}=1$$

που είναι η πολική του $P_2(x_2,\psi_2)$.

9.4. Εκκεντρότητα και διευθετούσες της ελλείψεως.

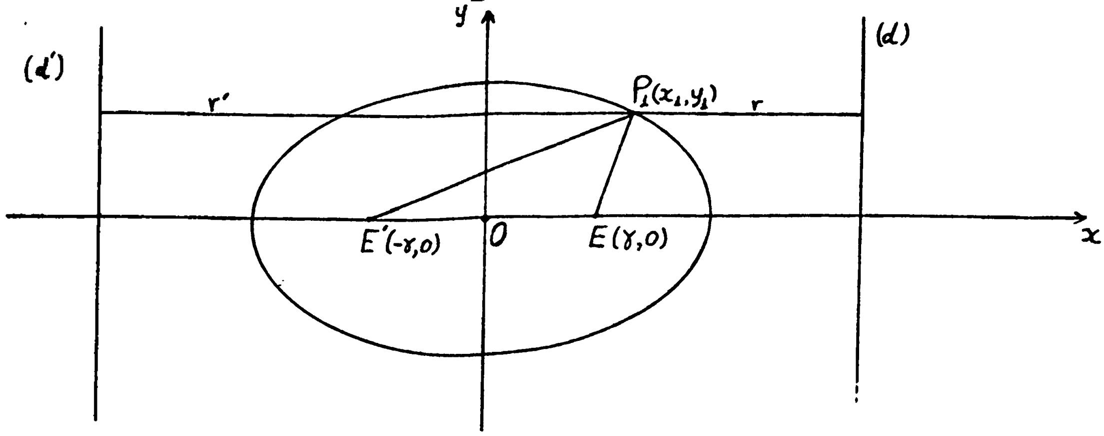
Εκκεντρότητα της ελλείψεως καλείται ο αριθμός $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$, δηλαδή ο λόγος του μισού της εστιακής αποστάσεως προς το μισό μήκος του μεγάλου άξονα αυτής. Προφανώς είναι πάντοτε $\varepsilon<1$.

Οι πολικές των εστιών της ελλείψεως λέγονται διευθετούσες αυτής. Δηλαδή οι διευθετούσες είναι οι ευθείες

$$(d):\ x-\frac{\alpha^2}{\gamma}=0 \quad , \quad (d'):\ x+\frac{\alpha^2}{\gamma}=0$$

Η ευθεία (d) είναι πολική της εστίας $E(\gamma,0)$ και η (d') πολική της εστίας $E'(-\gamma,0)$.

Θεωρούμε τώρα τυχόν σημείο $P_1(x_1,\psi_1)$ της ελλείψεως



Σχ.2

και υπολογίζουμε τα μήκη $|\overline{P_1E'}|$, $|\overline{P_1E}|$ καθώς επίσης και τις αποστάσεις r, r' του σημείου P_1 από τις διευθετούσες (d) και (d') (Σχ.2).

Έχουμε $|\overline{P_1E'}|^2=(x_1+\gamma)^2+\psi_1^2$, $|\overline{P_1E}|^2=(x_1-\gamma)^2+\psi_1^2$ οπότε

$|\overline{P_1E'}|^2-|\overline{P_1E}|^2=4\gamma x_1$. Αλλά $|\overline{P_1E'}|+|\overline{P_1E}|=2\alpha$, οπότε

$(|\overline{P_1E'}|+|\overline{P_1E}|)(|\overline{P_1E'}|-|\overline{P_1E}|)=4\gamma x_1$ ή $|\overline{P_1E'}|-|\overline{P_1E}|=\frac{2\gamma}{\alpha}x_1$.

Έτσι έχουμε τελικά

$$|\overline{P_1E'}|=\alpha+\frac{\gamma}{\alpha}x_1=\frac{\gamma}{\alpha}\left(\frac{\alpha^2}{\gamma}+x_1\right)=\varepsilon\left(\frac{\alpha^2}{\gamma}+x_1\right)>0$$

$$|\overline{P_1E}|=\alpha-\frac{\gamma}{\alpha}x_1=\frac{\gamma}{\alpha}\left(\frac{\alpha^2}{\gamma}-x_1\right)=\varepsilon\left(\frac{\alpha^2}{\gamma}-x_1\right)>0$$

Επίσης

$$r'=\left|x_1+\frac{\alpha^2}{\gamma}\right|=x_1+\frac{\alpha^2}{\gamma}\quad,\quad r=\left|x_1-\frac{\alpha^2}{\gamma}\right|=\frac{\alpha^2}{\gamma}-x_1.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι $\dfrac{|\overline{P_1E'}|}{r'}=\dfrac{|\overline{P_1E}|}{r}=\varepsilon$ δηλαδή ο λόγος των αποστάσεων τυχόντος σημείου της ελλείψεως από την εστία Ε (αντίστοιχα Ε') και από τη διεύθυνση (d) (αντίστοιχα (d')) είναι σταθερός και ίσος με την εκκεντρότητα της ελλείψεως. Η ιδιότητα αυτή λαμβάνεται πολλές φορές και ως ορισμός της ελλείψεως.

9.5.Υπερβολή

<u>Υπερβολή</u> καλείται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επίπεδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία Ε και Ε' είναι σταθερή ίση με 2α. Τα Ε και Ε' λέγονται <u>εστίες</u> της υπερβολής. Αν $P(x,\psi)$ είναι τυχόν σημείο της υπερβολής και θέσουμε $|\overline{EE'}|=2\gamma$, τότε σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων όπου ο άξονας Οx συμπίπτει με την ευθεία Ε'Ε και ο άξονας Οψ είναι η μεσοκάθετος στο ευθύγραμμο τμήμα Ε'Ε έχουμε $\left||\overline{E'P}|-|\overline{EP}|\right|=2\alpha$.
Τα σημεία Ε και Ε'έχουν συντεταγμένες $E(\gamma,0)$,$E'(-\gamma,0)$ οπότε η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\left|\sqrt{(x+\gamma)^2+\psi^2}-\sqrt{(x-\gamma)^2+\psi^2}\right|=2\alpha \qquad \text{ή}$$

$$\sqrt{(x+\gamma)2+\psi^2}-\sqrt{(x-\gamma)^2+\psi^2}=\pm2\alpha \qquad \text{ή}$$

$$\sqrt{(x+\gamma)^2+\psi^2}=\sqrt{(x-\gamma)^2+\psi^2}\pm2\alpha \qquad \text{ή}$$

$$(x+\gamma)^2+\psi^2=(x-\gamma)^2+\psi^2+4\alpha^2\pm4\alpha\sqrt{(x-\gamma)^2+\psi^2} \qquad \text{ή}$$

$$\pm\sqrt{(x-\gamma)^2+\psi^2} = \frac{\gamma}{\alpha}x-\alpha \qquad \acute{\eta}$$

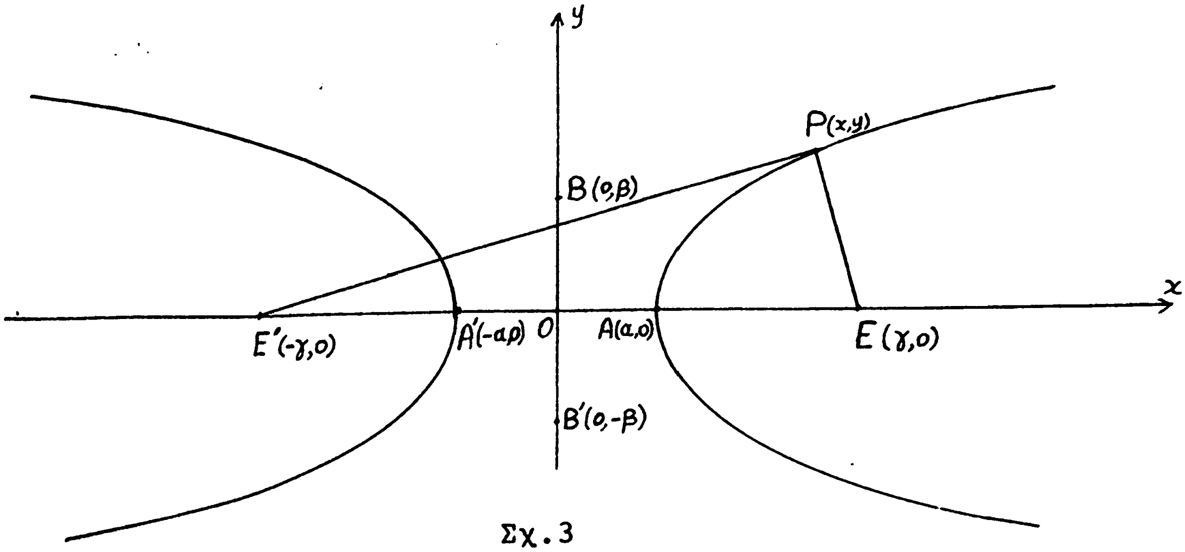
$$x^2+\gamma^2-2\gamma x+\psi^2 = \frac{\gamma^2}{\alpha^2}x^2+\alpha^2-2\gamma x \qquad \acute{\eta}$$

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{\psi^2}{\gamma^2-\alpha^2}=1$$

Αλλά τώρα έχουμε $\gamma>\alpha$, οπότε μπορούμε να θέσουμε $\gamma^2-\alpha^2=\beta^2$ και η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{\psi^2}{\beta^2}=1 \qquad (11)$$

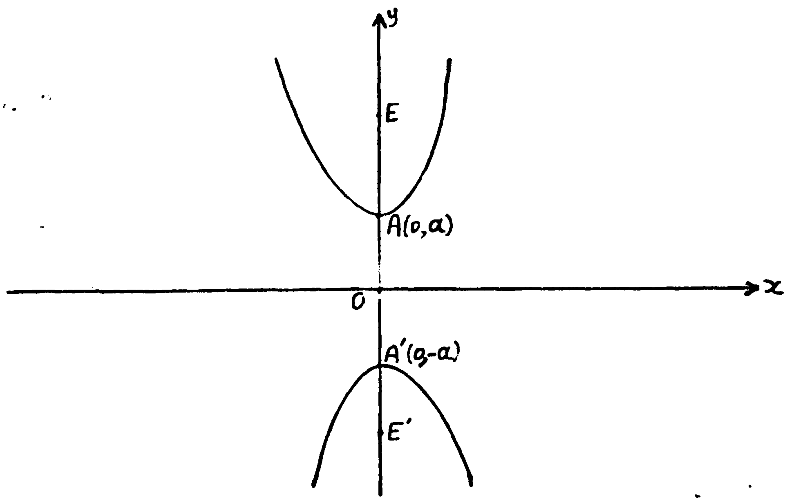
Η (11) είναι η εξίσωση της υπερβολής. Παρατηρούμε ότι, όταν το σημείο $P(x,\psi)$ είναι σημείο της υπερβολής, τότε και τα σημεία $P_1(-x,\psi)$, $P_2(x,-\psi)$ και $P_3(-x,-\psi)$ είναι επίσης σημεία της υπερβολής, γιατί οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωση αυτής. Έτσι βλέπουμε (ΣΧ.3) ότι η υπερβολή έχει το Ο ως κέντρο συμμετρίας και τους



Σχ.3

άξονες Ox , Oψ ως άξονες συμμετρίας. Αν θέσουμε στην εξίσωση (11) $\psi=0$ βρίσκουμε $x=\pm\alpha$. Δηλαδή η υπερβολή τέμνει τον άξονα Ox στα σημεία $A(\alpha,0)$ και $A'(-\alpha,0)$. Το ευθύγραμμο τμήμα Α΄Α λέγεται <u>άξονας</u> της υπερβολής. Επίσης μπορούμε να ορίσουμε τα σημεία $B(0,\beta)$

και B(0,-β). Τα σημεία αυτά δεν κείνται επί της υπερβολής και το ευθύγραμμο τμήμα ΒΒ' λέγεται <u>συζυγής άξονας</u> της υπερβολής. Αν θέσουμε στην εξίσωση (11) της υπερβολής $x=0$, βρίσκουμε φανταστικές τιμές για το ψ. Ώστε η υπερβολή δεν τέμνει τον άξονα Οψ. Από την εξίσωση (11) έχουμε $\frac{x^2}{\alpha^2}=1+\frac{\psi^2}{\beta^2}$ ή $\frac{x^2}{\alpha^2}\geqq 1$ οπότε $x^2 \geqq \alpha^2$ ή $|x|\geqq\alpha$. Από τη σχέση αυτή παρατηρούμε ότι ένα σημείο της υπερβολής κείται η δεξιώτερα της ευθείας $x=\alpha$, ή αριστερώτερα της ευθείας $x=-\alpha$. Δηλαδή, μεταξύ των ευθειών $x=\alpha$ και $x=-\alpha$ δεν υπάρχουν σημεία της υπερβολής. Αν πάρουμε τις εστίες της υπερβολής να κείνται στον άξονα Οψ, τότε εργαζόμενοι όπως και παραπάνω βρίσκουμε



Σχ.4

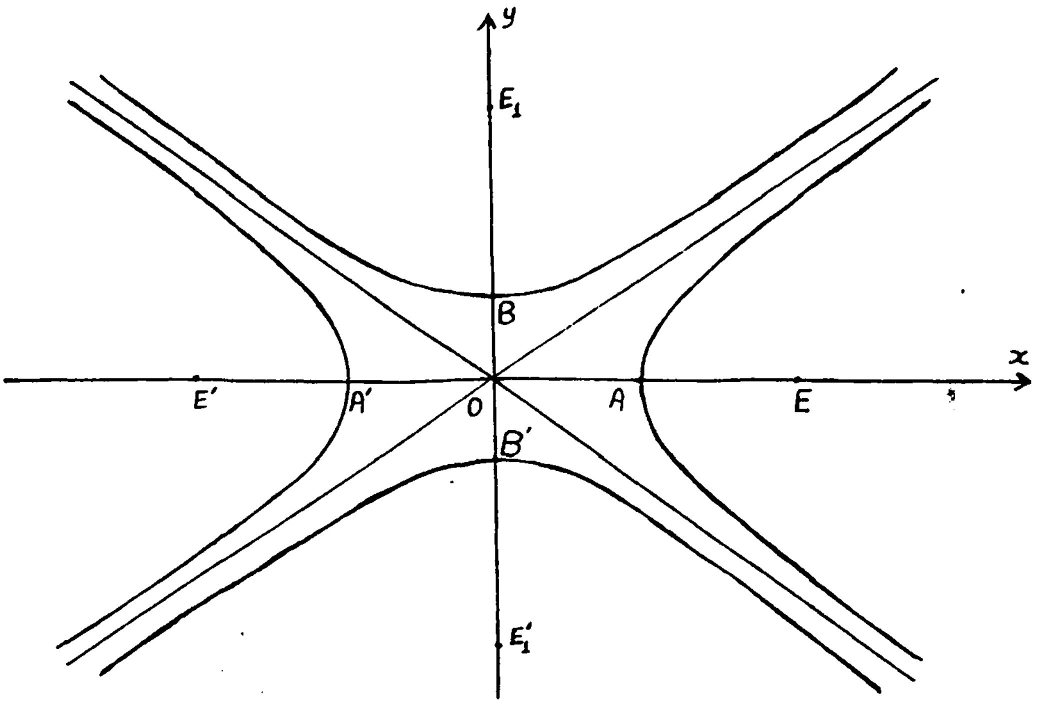
ως εξίσωση της υπερβολής την

$$\frac{\psi^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1 \qquad (12)$$

όπου τα α,β έχουν την ίδια σημασία όπως και στην εξίσωση (11) (Σχ.4).

Θεωρούμε τώρα την υπερβολή με εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{\psi^2}{\beta^2}=-1 \quad (\text{δηλαδή } \frac{\psi^2}{\beta^2}-\frac{x^2}{\alpha^2}=1) \qquad (13)$$



Σχ.5

Παρατηρούμε ότι ο άξονας της υπερβολής (13) είναι συζυγής άξονας της υπερβολής (11) και ο συζυγής άξονας της (13) είναι άξονας της (11). Δύο τέτοιες υπερβολές, όπως η (11) και (13) λέγονται <u>συζυγείς υπερβολές</u> (Σχ.5). Αν σε μια υπερβολή είναι α=β, τότε αυτή λέγεται <u>ισοσκελής</u>.

9.6. Εφαπτομένη υπερβολής. Πόλοι και πολικές.

Θεωρούμε την υπερβολή

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1 \qquad (14)$$

και $P_0(x_0,\psi_0)$ ένα σημείο αυτής. Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής στο σημείο P_0 αυτής, θεωρούμε τυχούσα ευθεία που διέρχεται από το P_0. Η εξίσωση της ευθείας αυτής θα είναι

$$\psi-\psi_0 = \lambda(x-x_0) \qquad (15)$$

θέλουμε να προσδιορίσουμε κατάλληλα το λ ώστε η ευθεία (15) να είναι εφαπτομένη της υπερβολής, δηλαδή να έχει κοινό σημείο με την υπερβολή μόνο το $P_0(x_0,\psi_0)$. Αν την τιμή του ψ από την (15) θέσουμε στην (14) έχουμε

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{\psi_0^2+\lambda^2(x-x_0)^2+2\lambda\psi_0(x-x_0)}{\beta^2}=1$$

Αν λάβουμε υπόψη μας ότι $\frac{x_0^2}{\alpha^2}-\frac{\psi_0^2}{\beta^2}=1$, γιατί το P_0 κείται στην υπερβολή, η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\frac{x^2-x_0^2}{\alpha^2}-\frac{\lambda^2(x-x_0)^2+2\lambda\psi_0(x-x_0)}{\beta^2}=0 \qquad ή$$

$$(x-x_0)\left[\frac{x+x_0}{\alpha^2}-\frac{\lambda^2(x-x_0)+2\lambda\psi_0}{\beta^2}\right]=0$$

Πρέπει η δευτεροβάθμια αυτή εξίσωση να έχει διπλή ρίζα ως προς x. Επειδή η μια ρίζα της είναι $x=x_0$ πρέπει και η εντός της αγκύλης παράσταση να μηδενίζεται για $x=x_0$. 'Ετσι έχουμε

$$\frac{2x_0}{\alpha^2}-\frac{2\lambda\psi_0}{\beta^2}=0 \quad ή \quad \lambda=\frac{\beta^2x_0}{\alpha^2\psi_0}$$

Αν θέσουμε την τιμή αυτή του λ στην (15) θα έχουμε την εξίσωση της εφαπτομένης

$$\psi-\psi_0=\frac{\beta^2x_0}{\alpha^2\psi_0}(x-x_0) \quad ή \quad \frac{x_0x}{\alpha^2}-\frac{\psi_0\psi}{\beta^2}=\frac{x_0^2}{\alpha^2}-\frac{\psi_0^2}{\beta^2}$$

και επειδή το $P_0(x_0,\psi_0)$ κείται στην υπερβολή έχουμε

$$\frac{x_0x}{\alpha^2}-\frac{\psi_0\psi}{\beta^2}=1 \qquad (16)$$

Ώστε η εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο $P_0(x_0,\psi_0)$ αυτής έχει εξίσωση την (16).

Έστω τώρα ότι θέλουμε να βρούμε τις εφαπτόμενες της υπερβολής που άγονται από ένα σημείο $P_1(x_1,\psi_1)$, το οποίο κείται εκτός αυτής. Αν P_1P_0 είναι μία εφαπτομένη της υπερβολής που άγεται από το σημείο P_1 και εφάπτεται στο σημείο $P_0(x_0,\psi_0)$ της υπερβολής, τότε η εξίσωση της P_1P_0 θα είναι

$$\frac{x_0x}{\alpha^2}-\frac{\psi_0\psi}{\beta^2}=1$$

Το σημείο P_1 κείται σ'αυτή, οπότε οι συντεταγμένες του θα την επαληθεύουν, δηλαδή

$$\frac{x_0x_1}{\alpha^2}-\frac{\psi_0\psi_1}{\beta^2}=1$$

Παρατηρούμε ότι το σημείο επαφής $P_0(x_0,\psi_0)$ κείται στην ευθεία

$$\frac{xx_1}{\alpha^2}-\frac{\psi\psi_1}{\beta^2}=1 \qquad (17)$$

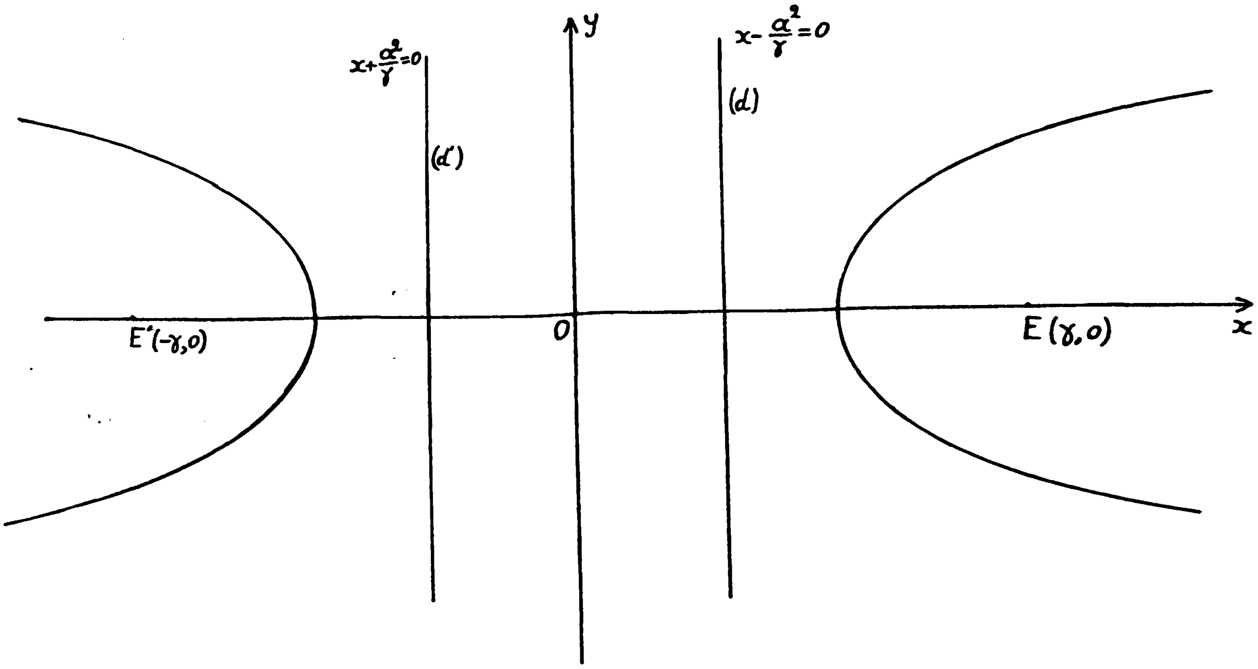
Ώστε τα σημεία επαφής των εφαπτομένων της υπερβολής που άγονται από το σημείο P_1 κείνται στην ευθεία (17) και τα σημεία αυτά μπορούν να προκύψουν από τις λύσεις του συστήματος των εξισώσεων (14) και (17). Όταν το σημείο $P_1(x_1,\psi_1)$ είναι τυχόν σημείο του επιπέδου η ευθεία (17) λέγεται <u>πολική</u> του σημείου P_1 ως προς την υπερβολή ενώ το σημείο P_1 <u>πόλος</u> της ευθείας (17). Όπως και στην περίπτωση της ελλείψεως έτσι κι εδώ μπορούμε να δείξουμε ότι αν ένα σημείο P_2 κείται στην πολική του P_1, τότε και το P_1 κείται στην πολική του P_2.

<u>9.7.Εκκεντρότητα και διευθετούσες της υπερβολής</u>.

<u>Εκκεντρότητα</u> της υπερβολής καλείται ο αριθμός $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}$, δηλαδή ο λόγος του μισού της αποστάσεως των εστιών $|\overline{E'E}|=2\gamma$ προς το μισό

μήκος του μεγάλου άξονα $|\overline{A'A}|=2\alpha$ αυτής. Εδώ έχουμε πάντοτε $\varepsilon>1$. Οι πολικές των εστιών $E(\gamma,0)$ και $E'(-\gamma,0)$ της υπερβολής λέγονται <u>διευθετούσες</u> αυτής. Δηλαδή οι διευθετούσες είναι οι ευθείες

$(d):\ x-\dfrac{\alpha^2}{\gamma}=0$, $(d'):\ x+\dfrac{\alpha^2}{\gamma}=0$



Σχ.6

Η ευθεία (d) είναι η πολική της εστίας $E(\gamma,0)$ και η (d') πολική της $E'(-\gamma,0)$ (Σχ.6).

Θεωρούμε τώρα τυχόν σημείο $P_1(x_1,\psi_1)$ της υπερβολής και υπολογίζουμε τα μήκη $|\overline{P_1E'}|$ και $|\overline{P_1E}|$ καθώς επίσης και τις αποστάσεις r,r' του σημείο P_1 από τις διευθετούσες (d) και (d') αντίστοιχα. Έχουμε $|\overline{P_1E'}|^2=(x_1+\gamma)^2+\psi_1^2$, $|\overline{P_1E}|^2=(x_1-\gamma)^2+\psi_1^2$ οπότε $|\overline{P_1E'}|^2-|\overline{P_1E}|^2=4\gamma x_1$. Από τη σχέση αυτή και την $\left||\overline{P_1E'}|-|\overline{P_1E}|\right|=2\alpha$ παίρνουμε τελικά $|\overline{P_1E'}|=|\frac{\gamma}{\alpha}x_1+\alpha|$ και $|\overline{P_1E}|=|\frac{\gamma}{\alpha}x_1-\alpha|$. Επίσης έχουμε για τις αποστάσεις r και r' του σημείου P_1 από τις διευθετούσες (d) και (d')

$$r= \left|x_1 - \frac{\alpha^2}{\gamma}\right| = \frac{\alpha}{\gamma}\left|\frac{\gamma}{\alpha}x_1-\alpha\right| = \frac{\alpha}{\gamma}|\overline{P_1E}| \qquad \text{και}$$

$$r'= \left|x_1+ \frac{\alpha^2}{\gamma}\right| = \frac{\alpha}{\gamma}\left|\frac{\gamma}{\alpha}x_1+\alpha\right| = \frac{\alpha}{\gamma}|\overline{P_1E'}| \quad .$$

Από τις σχέσεις αυτές παίρνουμε τελικά

$$\frac{|\overline{P_1E}|}{r} = \frac{|\overline{P_1E'}|}{r'} = \frac{\gamma}{\alpha} = \varepsilon$$

Δηλαδή ο λόγος των αποστάσεων τυχόντος σημείου της υπερβολής από την εστία Ε(αντίστοιχα Ε΄) και από τη διευθετούσα (d) (αντίστοιχα (d΄)) είναι σταθερός και ίσος με την εκκεντρότητα της υπερβολής. Πολλές φορές η ιδιότητα αυτή λαμβάνεται και ως ορισμός της υπερβολής.

9.8. Ασύμπτωτες της υπερβολής.

Θεωρούμε την υπερβολή με εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$$

και γράφουμε αυτή στη μορφή

$$\psi = \pm \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2-\alpha^2}$$

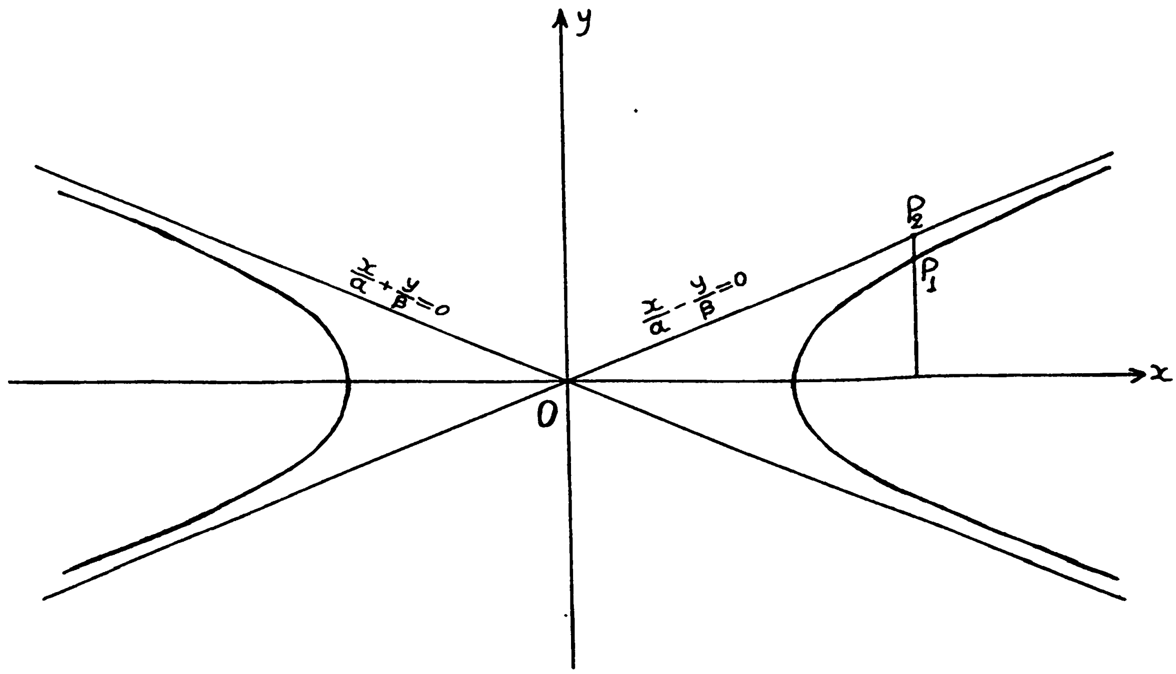
Παρατηρούμε ότι, όταν η τετμημένη x παίρνει απολύτως μεγάλες τιμές, τότε και η τεταγμένη ψ παίρνει απολύτως μεγάλες τιμές. Δηλαδή η υπερβολή έχει κλάδους που τείνουν στο άπειρο. Λαμβάνουμε τώρα το πρώτο μέλος της εξισώσεως της υπερβολής και θέτουμε αυτό ίσο με μηδέν. Έχουμε

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{\psi^2}{\beta^2} = 0 \quad \text{ή} \quad \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{\psi}{\beta}\right)\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{\psi}{\beta}\right) = 0$$

οπότε

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{\psi}{\beta} = 0 \quad , \quad \frac{x}{\alpha} - \frac{\psi}{\beta} = 0 \tag{18}$$

Οι εξισώσεις (18) εκφράζουν δύο ευθείες οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Θα δείξουμε ότι οι κλάδοι της



Σχ.7

υπερβολής πλησιάζουν τις ευθείες (18), χωρίς όμως ποτέ να τις τέμνουν (Σχ.7). Πραγματικά, αν $P_1(x_1,\psi_1)$ είναι τυχόν σημείο της υπερβολής με $x_1>0$, $\psi_1>0$ τότε η απόσταση $|\overline{P_1P_2}|$, όπου $P_2(x_2,\psi_2)$ είναι το σημείο της ευθείας $\frac{x}{\alpha} - \frac{\psi}{\beta} = 0$ που έχει την ίδια τετμημένη $x_2=x_1$ με το σημείο P_1, είναι $|\overline{P_1P_2}| = \psi_2 - \psi_1 = \frac{\beta}{\alpha}x_1 - \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x_1^2-\alpha^2} =$

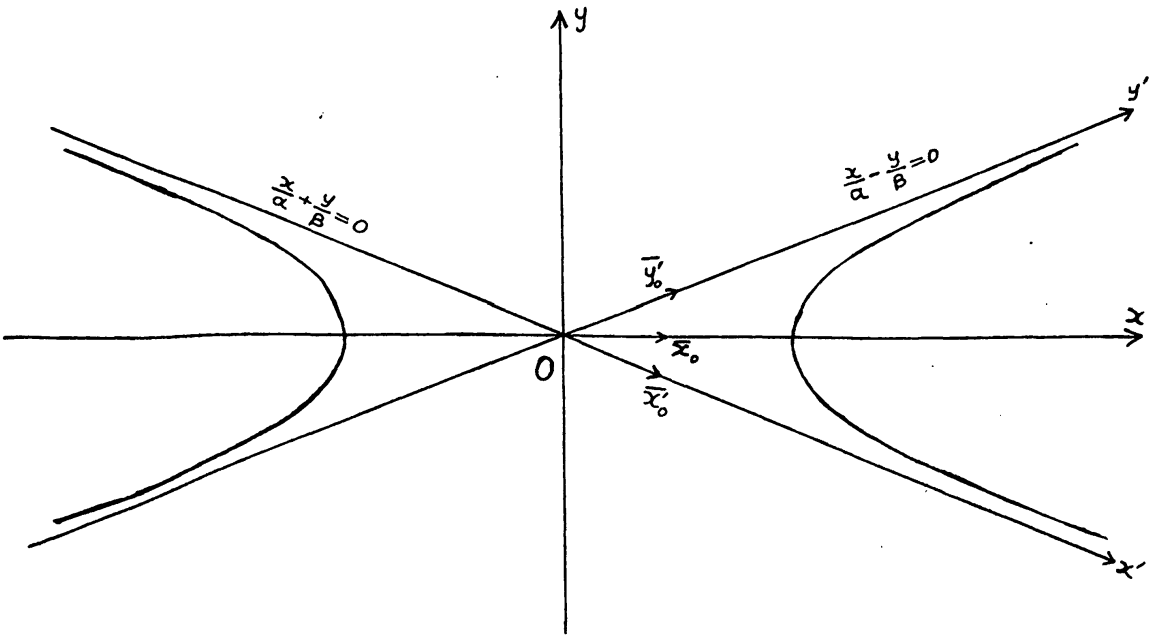
$$= \frac{\beta}{\alpha}(x_1 - \sqrt{x_1^2-\alpha^2}) = \frac{\alpha\beta}{x_1+\sqrt{x_1^2-\alpha^2}}$$

. Αν τώρα $x_1 \to \infty$ τότε $|\overline{P_1P_2}| \to 0$.

Επομένως ο κλάδος της υπερβολής με $x>0$, $\psi>0$ πλησιάζει την ευθεία $\frac{x}{\alpha} - \frac{\psi}{\beta} = 0$ ασυμπτωτικά. Επίσης μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι και ο άλλος κλάδος της υπερβολής με $x<0$, $\psi<0$ πλησιάζει ασυμπτωτικά την ίδια ευθεία. Το αυτό μπορούμε να πούμε και για την ευθεία $\frac{x}{\alpha}+\frac{\psi}{\beta}=0$. Ώστε οι ευθείες με εξισώσεις τις (18) είναι <u>ασύμπτωτες</u> της υπερβολής.

<u>9.9.Εξίσωση της υπερβολής ως προς τις ασύμπτωτες αυτής</u>.

Θέλουμε να βρούμε την έκφραση που παίρνει η εξίσωση της υπερβολής αν θεωρήσουμε ως άξονες συντεταγμένων τις ασύμπτωτες αυτής. Λαμβάνουμε ως νέο άξονα Οx′ την ευθεία $\frac{x}{\alpha}+\frac{\psi}{\beta}=0$ και ως νέο άξονα Οψ′ την ευθεία $\frac{x}{\alpha}-\frac{\psi}{\beta}=0$ (Σχ.8). Ένα διάνυσμα παράλληλο προς τον άξονα Οx′ είναι το $(\alpha,-\beta)$ οπότε το μοναδιαίο διάνυσμα $\overline{x'_0}$ έχει συντεταγμένες $\overline{x'_0}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \frac{-\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)$. Επίσης ένα διάνυσμα



Σχ.8

παράλληλο προς τον άξονα Οψ′ είναι το (α,β) και το μοναδιαίο διάνυσμα $\overline{\psi'_0}$ έχει συντεταγμένες $\overline{\psi'_0}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)$. Συνεπώς οι τύποι αλλαγής του συστήματος συντεταγμένων είναι

$$x = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,x' + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,\psi'$$

$$\psi = -\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,x' + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,\psi'$$

Αν θέσουμε τις τιμές αυτές των x,ψ στην εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$ της υπερβολής θα λάβουμε

$$\frac{(x'+\psi')^2}{\alpha^2+\beta^2} - \frac{(-x'+\psi')^2}{\alpha^2+\beta^2} = 1 \quad ή \quad x'\psi' = \frac{\alpha^2+\beta^2}{4}$$

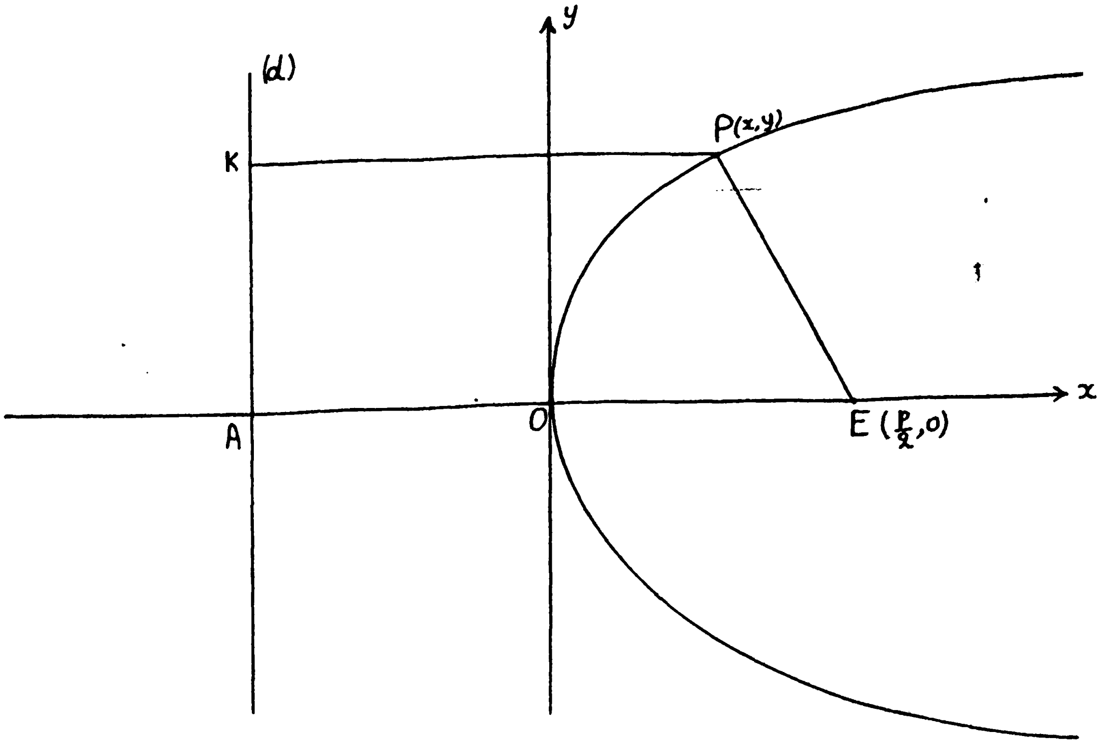
και επειδή $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$ έχουμε τελικά

$$x'\psi' = \frac{\gamma^2}{4} \qquad (19)$$

Ώστε η εξίσωση της υπερβολής σε σύστημα συντεταγμένων τις ασύμπτωτες αυτής είναι η(19).

9.10.Παραβολή.

Παραβολή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, τα οποία απέχουν εξίσου από ένα σταθερό σημείο και μια σταθερή ευθεία. Το σταθερό σημείο Ε λέγεται εστία και η ευθεία (d) διευθετούσα της παραβολής. Για να βρούμε την εξίσωση της παραβολής θεωρούμε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Οxψ έτσι ώστε η κάθετος ΕΑ που άγεται από την εστία Ε προς τη διευθετούσα να αποτελεί τον άξονα Οx με αρχή Ο το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΕΑ. Άξονας Οψ είναι τώρα η μεσοκάθετος στο ευθύγραμμο τμήμα ΕΑ. Αν p είναι η απόσταση της εστίας Ε από τη διευθετούσα (d), τότε



Σχ.9

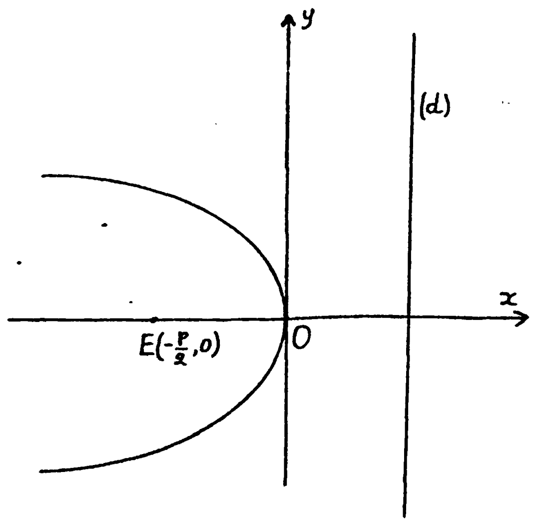
οι συντεταγμένες της εστίας είναι $E(\frac{p}{2},0)$ και η εξίσωση της διευθετούσας $x+\frac{p}{2}=0$. Έστω $P(x,\psi)$ τυχόν σημείο της παραβολής (Σχ.9). Από τον ορισμό έχουμε $|\overline{EP}|=|\overline{PK}|$. Άρα

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+\psi^2} = |x+\frac{p}{2}| \quad \text{ή} \quad (x-\frac{p}{2})^2+\psi^2 = (x+\frac{p}{2})^2$$

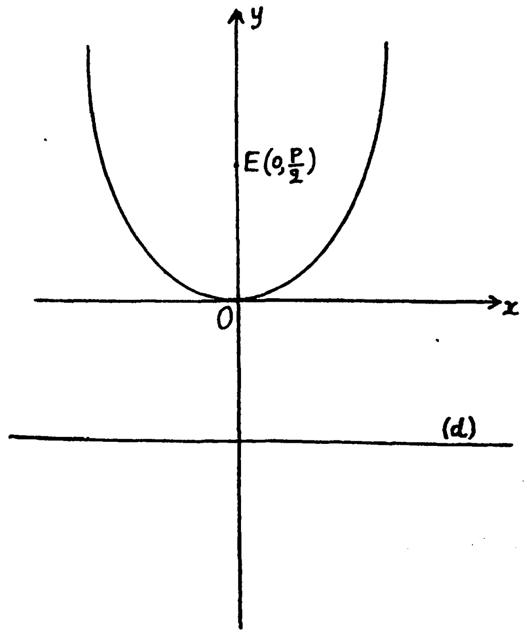
και τελικά

$$\psi^2 = 2px \qquad (20)$$

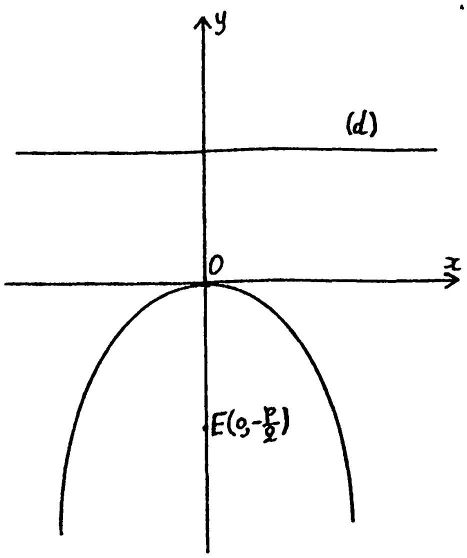
Ώστε η (20) είναι η εξίσωση της παραβολής. Από την εξίσωσή της φαίνεται αμέσως ότι η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα Ox, γιατί αν θέσουμε όπου ψ το -ψ η (20) μένει αμετάβλητη. Παρατηρούμε επίσης ότι η παραβολή δεν έχει κέντρο συμμετρίας και διέρχεται από το σημείο O(0,0), το οποίο λέγεται <u>κορυφή</u> της παραβολής. Από την εξίσωση (20) φαίνεται επίσης ότι έχουμε πάντοτε $x\geqslant 0$ και συνεπώς η παραβολή κείται δεξιά του άξονα Oψ (Σχ.9). Είναι εύκολο



Σχ.10



Σχ.11



Σχ.12

να δούμε ότι αν λάβουμε την εστία Ε στον αρνητικό ημιάξονα Οx', τότε η εξίσωση της παραβολής γίνεται $\psi^2=-2px$, οπότε η παραβολή κείται αριστερά του άξονα Οψ (Σχ.10). Αν θεωρήσουμε την εστία Ε πάνω στον άξονα Οψ και την διευθετούσα (d) παράλληλη προς τον άξονα Οx θα έχουμε για εξίσωση της παραβολής την $x^2=2p\psi$ (Σχ.11), ή την $x^2=-2p\psi$ (Σχ.12).

9.11.Εφαπτομένη παραβολής.Πόλοι και πολικές.

Θεωρούμε την παραβολή

$$\psi^2 = 2px \qquad (21)$$

και θέλουμε να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης στο τυχόν σημείο

$P_0(x_0,\psi_0)$ αυτής. Γνωρίζουμε ότι κάθε ευθεία που διέρχεται από το σημείο $P_0(x_0,\psi_0)$ έχει εξίσωση της μορφής

$$\psi-\psi_0 = \lambda(x-x_0) \qquad (22)$$

Για να είναι η (22) εφαπτομένη της παραβολής πρέπει το λ να έχει τέτοια τιμή ώστε το σύστημα των εξισώσεων (21) και (22) να έχει μια διπλή λύση. Θέτουμε την τιμή του ψ από την (22) στην (21), οπότε έχουμε μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x

$$\left[\psi_0+\lambda(x-x_0)\right]^2 = 2px \qquad \text{ή}$$

$$\psi_0^2+\lambda^2(x-x_0)^2+2\lambda\psi_0(x-x_0)-2px = 0$$

Αλλά το σημείο $P_0(x_0,\psi_0)$ είναι σημείο της παραβολής, οπότε $\psi_0^2=2px_0$ και η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$2px_0+\lambda^2(x-x_0)^2+2\lambda\psi_0(x-x_0)-2px = 0 \qquad \text{ή}$$

$$(x-x_0)\left[\lambda^2(x-x_0)+2\lambda\psi_0-2p\right] = 0$$

Για να έχει η εξίσωση αυτή διπλή ρίζα πρέπει η εντός της αγκύλης παράσταση να επαληθεύεται για $x=x_0$. Συνεπώς έχουμε $2\lambda\psi_0-2p = 0$ ή $\lambda=\dfrac{p}{\psi_0}$. Αν την τιμή του λ θέσουμε τώρα στην εξίσωση (22) θα έχουμε

$$\psi-\psi_0 = \frac{p}{\psi_0}(x-x_0) \qquad \text{ή} \qquad \psi_0\psi-\psi_0^2 = p(x-x_0).$$

Αλλά $\psi_0^2=2px_0$, οπότε έχουμε

$$\psi_0\psi-2px_0 = p(x-x_0) \qquad \text{ή}$$

$$\psi_0\psi=p(x+x_0) \qquad (23)$$

Ώστε η (23) είναι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο τυχόν σημείο $P_0(x_0,\psi_0)$ αυτής.

Θέλουμε τώρα να βρούμε τις εφαπτόμενες της παραβολής που άγονται από ένα σημείο $P_1(x_1,\psi_1)$ το οποίο κείται εκτός της παραβολής. Αν P_1P_0 είναι μία εφαπτομένη που άγεται από το P_1 και εφάπτεται στο σημείο $P_0(x_0,\psi_0)$ της παραβολής, τότε η εξίσωση της θα είναι $\psi_0\psi=p(x+x_0)$. Αλλά η εφαπτομένη αυτή διέρχεται από το σημείο P_1 και οι συντεταγμένες του πρέπει να την επαληθεύουν. Δηλαδή έχουμε $\psi_0\psi_1=p(x_1+x_0)$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι το σημείο επαφής P_0 κείται στην ευθεία με εξίσωση

$$\psi\psi_1 = p(x+x_1) \qquad (24)$$

Έτσι για να βρούμε τις εφαπτόμενες που άγονται από το σημείο P_1 προς την παραβολή αρκεί να βρούμε τα σημεία επαφής από τις λύσεις του συστήματος των εξισώσεων (21) και (24). Αν $P_1(x_1,\psi_1)$ είναι τυχόν σημείο του επιπέδου, η ευθεία που έχει εξίσωση την (24) λέγεται <u>πολική</u> του σημείου P_1 ως προς την παραβολή και το σημείο P_1 λέγεται <u>πόλος</u> της ευθείας αυτής. Προφανώς αν το σημείο P_1 κείται στην παραβολή η πολική του ταυτίζεται με την εφαπτομένη της στο σημείο αυτό, ενώ αν το σημείο P_1 κείται έξω από την παραβολή η πολική του τέμνει αυτήν στα σημεία επαφής των εφαπτομένων που άγονται από το P_1 προς την παραβολή. Τέλος αν το σημείο P_1 κείται στο εσωτερικό της παραβολής η πολική του δεν έχει κανένα κοινό σημείο με την παραβολή. Όπως και στις περιπτώσεις της ελλείψεως και της υπερβολής, αποδεικνύεται και εδώ ότι όταν η πολική του P_1 ως προς την παραβολή διέρχεται από το σημείο P_2, τότε και η πολική του P_2 διέρχεται από το P_1. Επειδή η εστία της παραβολής έχει συντεταγμένες $E(\frac{p}{2},0)$, η πολική του σημείου Ε είναι $0=p(x+\frac{p}{2})$ ή

$x+\frac{p}{2}=0$. Δηλαδή πολική της εστίας είναι η διευθετούσα.

10.Ασκήσεις.

1.Να βρεθεί η εξίσωση της ελλείψεως η οποία έχει για εστίες τα σημεία Ε(5,0) , Ε'(-5,0) και μικρό ημιάξονα $\beta=5$.

2.Να μελετηθούν και να βρεθούν οι γραφικές παραστάσεις των ελλείψεων $x^2+9\psi^2=9$ και $9x^2+\psi^2=9$.

3.Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η καμπύλη

$$4x^2+\psi^2-16x+6\psi-39=0.$$

4.Να βρεθούν τα στοιχεία (εστίες, κορυφές, μήκη αξόνων, εκκεντρότητα) της ελλείψεως $2x^2+3\psi^2-8x-6\psi+10=0$.

5.Από το σημείο (2,-1) να αχθούν οι εφαπτόμενες της ελλείψεως

$$x^2+9\psi^2=9.$$

6.Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της ελλείψεως $4x^2+9\psi^2=36$ οι οποίες είναι παράλληλες προς την ευθεία $4x+3\psi-1=0$.

7.Δίνεται η έλλειψη $x^2+2\psi^2=1$ και τα σημεία Α(3,-1), Β(-1,1). Να βρεθεί ο πόλος της ευθείας ΑΒ ως προς την έλλειψη και οι εξισώσεις των εφαπτομένων της ελλείψεως που άγονται από τον πόλο αυτό.

8.Από το τυχόν σημείο Μ της ελλείψεως $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$ φέρουμε τις καθέτους ΜΑ και ΜΒ προς τους άξονες αυτής. Να δειχθεί ότι ο πόλος της ευθείας ΑΒ γράφει την καμπύλη $\frac{\alpha^2}{x^2}+\frac{\beta^2}{\psi^2}=1$.

9.Να δειχθεί ότι το γινόμενο των αποστάσεων των εστιών τής ελλείψεως $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$ από τυχούσα εφαπτομένη αυτής είναι σταθερό ίσο με β^2.

10.Να δειχθεί ότι η κάθετος της ελλείψεως $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$ στο τυχόν σημείο P_0 αυτής διχοτομεί τη γωνία των εστιακών ακτίνων του σημείου P_0, δηλαδή την γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες P_0E και P_0E', όπου E,E' οι εστίες της ελλείψεως.

11.Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$ και έστω A,A' οι κορυφές αυτής πάνω στο μεγάλο άξονα. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής των υψών του τριγώνου $AA'P_0$, όταν το P_0 κινείται πάνω στην έλλειψη.

12.Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που έχει εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{5}{3}$ και εστίες τα σημεία $E(10,0)$, $E'(-10,0)$.

13.Να μελετηθούν και να παρασταθούν γραφικά οι υπερβολές $3x^2-4\psi^2=12$, $5x^2-2\psi^2+10=0$.

14.Να βρεθούν τα στοιχεία (εστίες, κορυφές, εκκεντρότητα) της υπερβολής $4x^2-7\psi^2+4x+28\psi-55=0$.

15.Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων η διαφορά των αποστάσεων από τα σημεία $P_1(-1,-1)$ και $P_2(1,1)$ είναι ίση με 2.

16.Να βρεθεί η εκκεντρότητα ισοσκελούς υπερβολής.

17.Αν η εκκεντρότητα μιας υπερβολής είναι 2 να βρεθεί η γωνία των ασυμπτώτων της.

18.Να δειχθεί ότι η εφαπτομένη υπερβολής στο τυχόν σημείο $P_0(x_0,\psi_0)$ αυτής διχοτομεί την γωνία των εστιακών ακτίνων του σημείου P_0.

19.Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $16x^2+25\psi^2=400$ και εκκεντρότητα αντίστροφη της εκκεντρότητας της ελλείψεως.

20.Να βρεθεί η γωνία των ασυμπτώτων της υπερβολής $5x^2-2\psi^2=3$.

21.Από το σημείο $(3,-6)$ να αχθούν οι εφαπτόμενες της υπερβολής $4x^2-9\psi^2=36$.

22.Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της υπερβολής $4x^2-\psi^2=4$ που είναι παράλληλες προς την ευθεία $10x+3\psi=0$.

23.Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των πόλων των εφαπτομένων της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$ ως προς την έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$.

24.Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των πόλων των εφαπτομένων της ελλείψεως $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$ ως προς την υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$.

25.Να δειχθεί ότι το γινόμενο των αποστάσεων των εστιών από τυχούσα εφαπτομένη υπερβολής είναι σταθερό.

26. Αν ε_1 και ε_2 είναι οι εκκεντρότητες δύο συζυγών υπερβολών να δειχθεί ότι $\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2=\varepsilon_1^2\cdot\varepsilon_2^2$.

27. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφή την αρχή των συντεταγμένων, άξονα τον άξονα Οx και η οποία διέρχεται από το σημείο $P(-3,-4)$.

28. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής η οποία έχει εστία το σημείο $(-1,1)$ και διευθετούσα την ευθεία $x+3\psi+3=0$.

29. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η καμπύλη με εξίσωση $12x^2-36x+48\psi+107=0$.

30. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής η οποία έχει άξονα την ευθεία $x+2=0$ και περνά από τα σημεία $(0,\frac{11}{3})$ και $(-3,\frac{19}{6})$.

31. Να βρεθεί η εφαπτομένη της παραβολής $x^2=4\psi$ στο σημείο αυτής που έχει τετμημένη 2.

32. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής $\psi^2=2x$ που άγονται από το σημείο $P(2,1)$.

33. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του πόδα της καθέτου η οποία άγεται από την εστία Ε παραβολής προς τυχούσα εφαπτομένη αυτής.

34. Να δειχθεί ότι τα μέσα παραλλήλων χορδών της παραβολής $\psi^2=2px$ κείνται σε ευθεία παράλληλη προς το άξονα Οx.

35.Να δειχθεί ότι η κάθετος στο τυχόν σημείο P_0 της παραβολής $\psi^2=2px$ διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν η εστιακή ακτίνα P_0E και η παράλληλος προς τον άξονα Ox που άγεται από το σημείο P_0.

36.Μια ευθεία (ε) κινείται έτσι ώστε να παραμένει εφαπτομένη της περιφέρειας $x^2+\psi^2=\rho^2$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του πόλου της (ε) ως προς την υπερβολή $\beta^2x^2-\alpha^2\psi^2=\alpha^2\beta^2$. Πότε ο τόπος είναι περιφέρεια;

37.Τυχόν σημείο P της υπερβολής $\beta^2x^2-\alpha^2\psi^2=\alpha^2\beta^2$ προβάλλεται επί τον άξονα Οψ στο σημείο K. Αν O είναι η αρχή των αξόνων και A(α,0) να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της τομής των ευθειών AK και OP.

38.Αν A και A' είναι οι κορυφές της υπερβολής $\beta^2x^2-\alpha^2\psi^2=\alpha^2\beta^2$ και P τυχόν σημείο αυτής, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος α) του κέντρου βάρους, β) του ορθόκεντρου, του τριγώνου A'AP.

39.'Εστω A'(-α,0) και A(α,0) οι κορυφές της ισοσκελούς υπερβολής $x^2-\psi^2=\alpha^2$ και M τυχόν σημείο αυτής. Αν P είναι η προβολή του M στον άξονα Οψ και P' το συμμετρικό του P ως προς το M, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής των ευθειών AP' και A'P.

40.Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των πόλων των εφαπτομένων της υπερβολής $\beta^2x^2-\alpha^2\psi^2=\alpha^2\beta^2$ ως προς την παραβολή $\psi^2=2\alpha x$

41. 'Ενα σημείο P κινείται επί της μιας διευθετούσας της ελλείψεως $\beta^2x^2+\alpha^2\psi^2=\alpha^2\beta^2$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της προβολής του κέντρου της ελλείψεως επί την πολική του P.

11.Διερεύνηση της δευτεροβάθμιας εξισώσεως.

Θέλουμε να διερευνήσουμε την δευτεροβάθμια εξίσωση

$$Αx^2+2Βxψ+Γψ^2+2Δx+2Εψ+Ζ =0 \qquad (1)$$

και να βρούμε τις συνθήκες που πρέπει να πληρούν οι συντελεστές της ωστε η (1) να παριστάνει μια από τις γνωστές καμπύλες έλλειψη, υπερβολή, παραβολή, ή τέλος σύστημα δύο ευθειών. Ο σκοπός μας μπορεί να επιτευχθεί με κατάλληλη αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων ώστε η εξίσωση (1) να αναχθεί σε απλούστερη μορφή. Αυτό συμβαίνει γιατί αν η καμπύλη (1) έχει κέντρο συμμετρίας και λάβουμε το κέντρο αυτό ως αρχή των συντεταγμένων, τότε η νέα εξίσωση που θα προκύψει με την αλλαγή των συντεταγμένων πρέπει να μην έχει πρωτοβάθμιους όρους, γιατί πρέπει να πληρούται από ζεύγη σημείων της μορφής (x,ψ) και (-x,-ψ). Επίσης αν η καμπύλη (1) έχει άξονα συμμετρίας (όπως συμβαίνει με την έλλειψη, υπερβολή, παραβολή) και λάβουμε ως έναν από τους άξονες συντεταγμένων τον άξονα συμμετρίας, τότε πρέπει να λείπει από την εξίσωση ο όρος xψ, γιατί τότε η (1) θα επαληθεύεται από ζεύγη σημείων της μορφής (x,ψ) και (x,-ψ) ή (x,ψ) και (-x,ψ).

11.1.Αναλλοίωτοι των καμπυλών βου βαθμού.

Όπως είπαμε και παραπάνω για να μελετήσουμε την καμπύλη που παριστάνει η εξίσωση (1) πρέπει να κάνουμε μια παράλληλη μεταφορά του συστήματος συντεταγμένων Οxψ ώστε νέα αρχή να είναι το σημείο Ο΄(α,β) και μια στροφή των αξόνων κατά γωνία φ. Τότε στο νέο σύστημα Ο΄XY οι νέες συντεταγμένες (X,Y) θα συνδέονται με τις συντεταγμένες (x,ψ) του αρχικού συστήματος με τους τύπους

$$\begin{aligned} x &= α+Xσυνφ - Yημφ \\ ψ &= β+Xημφ + Yσυνφ \end{aligned} \qquad (2)$$

'Οπως προκύπτει από τις (1) και (2) στο νέο σύστημα $O'XY$ η καμπύλη θα έχει εξίσωση

$$A'X^2 + 2B'XY + \Gamma'Y^2 + 2\Delta'X + 2E'Y + Z'=0 \qquad (3)$$

όπου

$$A'=A\sigma\upsilon\nu^2\varphi+2B\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi+\Gamma\eta\mu^2\varphi \qquad \text{ή}$$

$$A'=\frac{1}{2}(A+\Gamma)+\frac{1}{2}(A-\Gamma)\,\sigma\upsilon\nu2\varphi+B\eta\mu2\varphi$$

$$B'=-\frac{1}{2}(A-\Gamma)\,\eta\mu2\varphi+B\sigma\upsilon\nu2\varphi \qquad (4\alpha)$$

$$\Gamma'=A\eta\mu^2\varphi-2B\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi+\Gamma\sigma\upsilon\nu^2\varphi \qquad \text{ή}$$

$$\Gamma'=\frac{1}{2}(A+\Gamma)-\frac{1}{2}(A-\Gamma)\,\sigma\upsilon\nu2\varphi-B\eta\mu2\varphi$$

$$\Delta'=(A\alpha+B\beta+\Delta)\,\sigma\acute{\upsilon}\nu\varphi+(B\alpha+\Gamma\beta+E)\,\eta\mu\varphi$$

$$(4\beta)$$

$$E'=-(A\alpha+B\beta+\Delta)\,\eta\mu\varphi+(B\alpha+\Gamma\beta+E)\,\sigma\upsilon\nu\varphi$$

$$Z'=(A\alpha+B\beta+\Delta)\,\alpha+(B\alpha+\Gamma\beta+E)\,\beta+\Delta\alpha+E\beta+Z \qquad (4\gamma)$$

Από τις (4α) μπορούμε εύκολα να δούμε ότι

$$A'+\Gamma'=A+\Gamma \qquad (5)$$

Επίσης

$$A'\Gamma'-B'^2=A\Gamma-B^2 \qquad (6)$$

γιατί

$$A'\Gamma'-B'^2=\frac{1}{4}(A'+\Gamma')^2-\frac{1}{4}(A'-\Gamma')-B'^2=\frac{1}{4}(A+\Gamma)^2-\frac{1}{4}(A-\Gamma)^2-B^2=A\Gamma-B^2$$

Μπορούμε να δείξουμε επίσης ότι

$$\begin{vmatrix} A' & B' & \Delta' \\ B' & \Gamma' & E' \\ \Delta' & E' & Z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & \Delta \\ B & \Gamma & E \\ \Delta & E & Z \end{vmatrix} \qquad (7)$$

Την απόδειξη της (7) μπορούμε να πετύχουμε με δύο βήματα. Μπορούμε να δείξουμε πρώτα ότι η (7) ισχύει αν κάνουμε μόνο παράλληλη μεταφορά των αξόνων. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να θέσουμε στους τύπους (4α) και (4β) $\varphi=0$, οπότε έχουμε

$$\begin{vmatrix} A' & B' & \Delta' \\ B' & \Gamma' & E' \\ \Delta' & E' & Z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & A\alpha+B\beta+\Delta \\ B & \Gamma & B\alpha+\Gamma\beta+E \\ A\alpha+B\beta+\Delta & B\alpha+\Gamma\beta+E & (A\alpha+B\beta+\Delta)\alpha+(B\alpha+\Gamma\beta+E)\beta+\Delta\alpha+E\beta+Z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \text{πολλαπλασιάζουμε την 1η στήλη} \\ \text{επί } \alpha \text{ και την 2η στήλη επι } \beta \\ \text{και αφαιρούμε από την 3η.} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & \Delta \\ B & \Gamma & E \\ A\alpha+B\beta+\Delta & B\alpha+\Gamma\beta+E & \Delta\alpha+E\beta+Z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \text{πολλαπλασιάζουμε την 1η γραμμή} \\ \text{επί } \alpha \text{ και την 2η γραμμή επί } \beta \\ \text{και αφαιρούμε από την 3η.} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & \Delta \\ B & \Gamma & E \\ \Delta & E & Z \end{vmatrix}$$

Θα δείξουμε τώρα ότι η (7) ισχύει επίσης αν κάνουμε μόνο στροφή των αξόνων κατά γωνία φ. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να θέσουμε στους τύπους (4β) και (4γ) $\alpha=\beta=0$. Αλλά τότε παρατηρούμε ότι

$$Z'=Z \quad , \quad \Delta'^2+E'^2 = \Delta^2+E^2 \qquad \text{και}$$

$$2B'\Delta'E'+\frac{1}{2}(A'-\Gamma')(\Delta'^2-E'^2)=2B\Delta E+\frac{1}{2}(A-\Gamma)(\Delta^2-E^2) \quad , \text{ οπότε}$$

$$\begin{vmatrix} A' & B' & \Delta' \\ B' & \Gamma' & E' \\ \Delta' & E' & Z' \end{vmatrix} =-(B'^2-A'\Gamma')Z'-\frac{1}{2}(A'+\Gamma')(\Delta'^2+E'^2)+2B'\Delta'E'+\frac{1}{2}(A'-\Gamma')\cdot$$

$$\cdot(\Delta'^2-E'^2)=-(B^2-A\Gamma)Z-\frac{1}{2}(A+\Gamma)(\Delta^2+E^2)+$$

$$+2B\Delta E+\frac{1}{2}(A-\Gamma)(\Delta^2-E^2) = \begin{vmatrix} A & B & \Delta \\ B & \Gamma & E \\ \Delta & E & Z \end{vmatrix}$$

Ἐτσι η (7) ισχύει και στη γενική περίπτωση μετασχηματισμού των συντεταγμένων.

Σαν τελικό συμπέρασμα έχουμε λοιπόν το εξής

Τα μεγέθη

$$\Sigma=A+\Gamma \quad , \quad d=\begin{vmatrix} A & B \\ B & \Gamma \end{vmatrix} \quad , \quad D=\begin{vmatrix} A & B & \Delta \\ B & \Gamma & E \\ \Delta & E & Z \end{vmatrix} \qquad (8)$$

μένουν αναλλοίωτα αν μεταβούμε από το ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy σ'ένα άλλο O'XY που προκύπτει από το αρχικό με παράλληλη μεταφορά και στροφή. Τα μεγέθη Σ, d, D λέγονται <u>αναλλοίωτοι</u> των καμπυλών βου βαθμού. Με τη βοήθεια των αναλλοιώτων αυτών μπορούμε να διερευνήσουμε πλήρως την εξίσωση (1). Θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Η μία όταν $D\neq 0$ και η άλλη αν $D=0$.

i) $D\neq 0$

Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση που η καμπύλη (1) έχει κέντρο συμμετρίας. Μπορούμε να δούμε ότι η (1) έχει κέντρο συμμετρίας αν και μονο αν $d\neq 0$. Πραγματικά, αν υποθέσουμε ότι το σημείο O'(α,β) είναι κέντρο συμμετρίας της καμπύλης τότε πρέπει στο νέο σύστημα O'XY να έχουμε $\Delta'=E'=0$. Επομένως από τις σχέσεις (4β) έχουμε ότι το σημείο (α,β) είναι λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} A\alpha+B\beta+\Delta &=0 \\ B\alpha+\Gamma\beta+E &=0 \end{aligned} \qquad (9)$$

Γνωρίζουμε όμως ότι το σύστημα (9) έχει μία μόνο λύση αν $d=A\Gamma-B^2\neq 0$. Στην περίπτωση αυτή η λύση δίνεται από τον κανόνα του Cramer και είναι

$$\alpha = -\frac{\begin{vmatrix} \Delta & B \\ E & \Gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & \Gamma \end{vmatrix}} \quad , \quad \beta = -\frac{\begin{vmatrix} A & \Delta \\ B & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & \Gamma \end{vmatrix}} \qquad (10)$$

Αν $d=0$, τότε το σύστημα (9) δεν έχει λύση ή είναι αόριστο και την περίπτωση αυτή θα την εξετάσουμε αργότερα.

'Εστω λοιπόν ότι $d\neq 0$, οπότε αν λάβουμε ως αρχή των συντεταγμένων O' το κέντρο συμμετρίας $O'(\alpha,\beta)$ τότε η εξίσωση (3) γίνεται

$$A'X^2+2B'XY+\Gamma'Y^2+Z'=0 \qquad (11)$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι οι άξονες συντεταγμένων O'X και O'Y συμπίπτουν με τους άξονες συμμετρίας της καμπύλης, τότε πρέπει $B'=0$, οπότε από την ανάλογη σχέση που μας δίνει την έκφραση του B' στις (4α) έχουμε

$$-\frac{1}{2}(A-\Gamma)\,\eta\mu 2\varphi + B\sigma\upsilon\nu 2\varphi = 0 \qquad \text{ή}$$

$$\varepsilon\varphi 2\varphi = \frac{2B}{A-\Gamma} \qquad (12)$$

Προφανώς αν $A=\Gamma$ συνεπάγεται ότι $2\varphi=\frac{\pi}{2}$. Υπάρχει πάντοτε μια οξεία γωνία φ, η οποία επαληθεύει τη σχέση (12) και αν στρέψουμε τους άξονες συντεταγμένων κατά τη γωνία αυτή, τότε η εξίσωση της καμπύλης δεν θα έχει τον όρο χψ. Υποθέτουμε λοιπόν ότι στρέψαμε τους άξονες συντεταγμένων κατα την οξεία γωνία φ που δίνεται από τη σχέση (12). Τότε η εξίσωση (11) θα λάβει την μορφή

$$A'X^2+\Gamma'Y^2+Z'=0 \qquad (13)$$

όπου τα A', Γ' δίνονται από τις σχέσεις (4α), ενώ για το Z' έχουμε από την (4γ) και τις (9)

$$Z' = \Delta\alpha+E\beta+Z = -\Delta \frac{\begin{vmatrix} \Delta & B \\ E & \Gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & \Gamma \end{vmatrix}} - E \frac{\begin{vmatrix} A & \Delta \\ B & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & \Gamma \end{vmatrix}} + Z =$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & \Gamma \end{vmatrix}} \left(\Delta \begin{vmatrix} B & \Delta \\ \Gamma & E \end{vmatrix} - E \begin{vmatrix} A & \Delta \\ B & E \end{vmatrix} + Z \begin{vmatrix} A & B \\ B & \Gamma \end{vmatrix} \right) =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} A & B & \Delta \\ B & \Gamma & E \\ \Delta & E & Z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & \Gamma \end{vmatrix}} = \frac{D}{d}$$

Ώστε τελικά έχουμε

$$Z' = \frac{D}{d} \qquad (14)$$

Επειδή $d= A\Gamma-B^2=A'\Gamma'-B'^2=A'\Gamma'\neq 0$ έπεται ότι $A'\neq 0$ και $\Gamma'\neq 0$, ενώ από την (14) έχουμε επίσης $Z'\neq 0$. Έτσι η (13) γράφεται

$$\frac{X^2}{-\frac{Z'}{A'}} + \frac{Y^2}{-\frac{Z'}{\Gamma'}} = 1 \qquad (15)$$

Παρατηρούμε ότι

$$\left(-\frac{Z'}{A'}\right)\left(-\frac{Z'}{\Gamma'}\right) = \frac{Z'^2}{A'\Gamma'} = \frac{1}{d}\cdot\frac{D^2}{d^2}$$

οπότε αν $d<0$ τα $-\frac{Z'}{A'}$ και $-\frac{Z'}{\Gamma'}$ είναι ετερόσημα και η (15) παριστάνει υπερβολή.

Ώστε σαν πρώτο συμπέρασμα έχουμε ότι, αν $d<0$ και $D\neq 0$ τότε η εξίσωση (1) παριστάνει υπερβολή.

Αν τώρα $d>0$, τότε τα $-\frac{Z'}{A'}$ και $-\frac{Z'}{\Gamma'}$ είναι ομόσημα και αν είναι θετικά η (15) θα παριστάνει πραγματική έλλειψη, ενώ αν είναι αρνητικα φανταστική έλλειψη. Αλλά

$$-\frac{Z'}{A'}-\frac{Z'}{\Gamma'} = -Z'\left(\frac{1}{A'}+\frac{1}{\Gamma'}\right) = \frac{-Z'(A'+\Gamma')}{A'\Gamma'} = \frac{-Z'\Sigma}{d} = -\frac{D\Sigma}{d^2}$$

Έτσι αν $D\cdot\Sigma<0$ η (15) παριστάνει πραγματική έλλειψη, ενώ αν $D\cdot\Sigma>0$ η (15) παριστάνει φανταστική έλλειψη.

Ώστε σαν δεύτερο συμπέρασμα έχουμε ότι, αν $d>0$, $D\cdot\Sigma<0$ η εξίσωση (1) παριστάνει πραγματική έλλειψη και αν $d>0$, $D\cdot\Sigma>0$ η (1) παριστάνει φανταστική έλλειψη.

Θα μελετήσουμε τώρα την περίπτωση κατά την οποία $d=0$. Σ'αυτή την περίπτωση δεν μπορούμε γενικά να απαλείψουμε τους πρωτοβάθμιους όρους της (1), μπορούμε όμως να στρέψουμε τους άξονες συντεταγμένων κατά οξεία γωνία φ, ή οποία δίνεται από τη σχέση (12) και να απαλείψουμε τον όρο χψ. Αλλά τότε θα έχουμε $B'=0$, οπότε

$$d = A\Gamma-B^2 = A'\Gamma'=0$$

Έτσι θα είναι $A'=0$ ή $\Gamma'=0$. Προφανώς δεν μπορεί να είναι συγχρόνως $A'=0$ και $\Gamma'=0$ γιατί τότε δεν θα είχαμε δευτεροβάθμια εξίσωση, αφού έχουμε και $B'=0$.

Αν $A'\neq 0$ και $\Gamma'=0$ η (3) γράφεται

$$A'X^2+2\Delta'X+2E'Y+Z'=0 \qquad (16)$$

όπου οι συντελεστές A',Δ',E' και Z' προσδιορίζονται από τις σχέσεις (4α),(4β) και (4γ) αν θέσουμε $\alpha=\beta=0$ και η οξεία γωνία φ από τη σχέση (12). Αλλά από την (7), αν λάβουμε υπόψη μας την $B'=\Gamma'=0$ έχουμε τελικά $D=-E'^2A'$, οπότε επειδή είναι και $D\neq 0$ έχουμε $E'\neq 0$. Έτσι η (16) γίνεται

$$\left(X+\frac{\Delta'}{A'}\right)^2=-\frac{2E'}{A'}\left(Y+\frac{Z'}{2E'}-\frac{\Delta'^2}{2A'E'}\right) \qquad (17)$$

και συνεπώς παριστάνει παραβολή με κορυφή το σημείο $\left(-\frac{\Delta'}{A'},-\frac{Z'}{2E'}+\frac{\Delta'^2}{2A'E'}\right)$, άξονα την ευθεία $X=-\frac{\Delta'}{A'}$ και παράμετρο $p=-\frac{E'}{A'}$ στο σύστημα OXY. Αν τώρα κάνουμε μια παράλληλη μεταφορά του συστήματος συντεταγμένων OXY και φέρουμε την αρχή στην κορυφή της παραβολής βρίσκουμε στο νέο σύστημα $O'x'\psi'$ την εξίσωση

$$x'^2=2p\psi' \qquad (18)$$

Η παράμετρος της παραβολής (18) είναι $p=-\frac{E'}{A'}$. Αλλά στην περίπτωση μας είναι $D=-E'^2A'$ και $\Sigma=A+\Gamma=A'$. Συνεπώς $p^2=-\frac{D}{\Sigma^3}$

Αν τώρα $A'=0$ και $\Gamma'\neq 0$, η (3) γράφεται

$$\Gamma'Y^2+2\Delta'X+2E'Y+Z'=0 \qquad (19)$$

όπου ξανά οι συντελεστές Γ',Δ',E' και Z' προσδιορίζονται από τις σχέσεις (4α),(4β) και (4γ) αν θέσουμε $\alpha=\beta=0$ και η οξεία γωνία φ από τη σχέση (12). Αλλά από την (7) αν λάβουμε υπόψη μας την $A'=B'=0$, έχουμε τελικά $D=-\Gamma'\Delta'^2$, οπότε επειδή $D\neq 0$ έχουμε $\Delta'\neq 0$. Έτσι η (19) γίνεται

$$\left(Y+\frac{E'}{\Gamma'}\right)^2=-\frac{2\Delta'}{\Gamma'}\left(X+\frac{Z'}{2\Delta'}-\frac{E'^2}{2\Gamma'\Delta'}\right) \qquad (20)$$

Οπότε παρατηρούμε ότι εκφράζει παραβολή με κορυφή το σημείο $\left(-\frac{Z'}{2\Delta'}+\frac{E'^2}{2\Gamma'\Delta'},-\frac{E'}{\Gamma'}\right)$ άξονα την ευθεία $Y=-\frac{E'}{\Gamma'}$ και παράμετρο $p=-\frac{\Delta'}{\Gamma'}$ στο σύστημα OXY. Αν τώρα κάνουμε μια παράλληλη μεταφορά του συστήματος συντεταγμένων OXY και φέρουμε την αρχή στην κορυφή της παραβολής, τότε η εξίσωση της στο νέο σύστημα $O'x'\psi'$ γίνεται

$$\psi'^2 = 2px' \qquad (21)$$

Η παράμετρος της παραβολής (21) είναι $p=-\frac{\Delta'}{\Gamma'}$ και επειδή $D=-\Gamma'\Delta'^2$ και $\Sigma=\Gamma'$ έχουμε πάλι $p^2=-\frac{D}{\Sigma^3}$.

Ώστε σαν τελικό συμπέρασμα έχουμε τώρα ότι, αν $d=0$ και $D\neq 0$ η εξίσωση (1) παριστάνει παραβολή.

Για να ολοκληρώσουμε τη διερεύνηση της εξίσωσης (1) πρέπει να μελετήσουμε ακόμα και την περίπτωση κατά την οποία $D=0$. Όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω σ'αυτή την περίπτωση η (1) εκφράζει ένα σύστημα δύο ευθειών πραγματικών η φανταστικών.

ii) $D=0$

Θα εξετάσουμε δυο περιπτώσεις την μια όταν $d\neq 0$ και την άλλη όταν $d=0$.

Έστω $d\neq 0$, τότε μπορούμε να κάνουμε μια παράλληλη μεταφορά του συστήματος συντεταγμένων ώστε να έχουμε για αρχή το σημείο $O'(\alpha,\beta)$ όπου τα α,β δίνονται από τη λύση του συστήματος (9) και στη συνέχεια μια στροφή κατά οξεία γωνία φ, η οποία δίνεται από τη σχέση (12) και έτσι να πάρουμε τελικά από την (1) την εξίσωση (13). Επειδή όμως $D=0$ από την (14) θα έχουμε $Z'=0$, οπότε η (13) γίνεται

$$A'X^2+\Gamma'Y^2=0 \qquad (22)$$

Αλλά $d=A\Gamma-B^2=A'\Gamma'-B'^2=A'\Gamma'\neq 0$, γιατί $B'=0$. Έτσι αν $d<0$ έχουμε ένα σύστημα δύο πραγματικών ευθειών τεμνόμενων, αφού τότε η (22) γράφεται ως γινόμενο δύο πρωτοβάθμιων παραγόντων. Αν όμως $d>0$ τα A',Γ' είναι ομόσημα και η (22) γράφεται ως γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων με φανταστικούς συντελεστές. Έτσι, τότε έχουμε ένα σύστημα δύο φανταστικών ευθειών, οι οποίες όμως τέμνονται σ'ένα πραγματικό σημείο, το σημείο με συντεταγμένες X=0 , Y=0 ως προς το σύστημα O'XY. 'Εστω τώρα d=0, οπότε επειδή τώρα είναι και D=0 παίρνουμε τελικά τις σχέσεις

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma} = \frac{\Delta}{E} \qquad (23)$$

'Ετσι το σύστημα (9) έχει άπειρες λύσεις και αν πάρουμε τυχούσα λύση (α,β) αυτού και κάνουμε στο σημείο αυτό παράλληλη μεταφορά των αξόνων μόνο, τότε η εξίσωση (1) θα λάβει τη μορφή

$$AX^2+2BXY+\Gamma Y^2+Z'= 0 \qquad (24)$$

όπου οι συντελεστές A,B,Γ έμειναν οι ίδιοι αφού λαμβάνονται από τις σχέσεις (4α) για φ=0, ενώ για το Z' έχουμε από την (4γ)

$$Z'= \Delta\alpha+E\beta+Z \qquad (25)$$

Από τη σχέση $d=A\Gamma-B^2=0$ έχουμε ότι τα A και Γ είναι ομόσημα, ενώ δεν μπορεί να είναι συγχρόνως A=0 και Γ=0 γιατί τοτε έχουμε επίσης B=0, το οποίο είναι αδύνατο αφού σ'αυτή την περίπτωση δεν θα είχαμε δευτεροβάθμια εξίσωση. 'Εστω λοιπόν $A\neq 0$, οπότε επειδή d=0 η (24) γράφεται

$$\left(X+\sqrt{\frac{\Gamma}{A}}\,Y\right)^2 = -\frac{Z'}{A} \qquad \text{ή}$$

$$X+\sqrt{\frac{\Gamma}{A}}\,Y = \pm\sqrt{-\frac{Z'}{A}} \qquad (26)$$

Αλλά τότε μπορούμε να εκλέξουμε για λύση του συστήματος (9) την $\alpha=-\frac{\Delta}{A}$, β=0 οπότε η (25) δίνει $Z'=-\frac{\Delta^2-AZ}{A}$ και η (26) γίνεται

$$X+\sqrt{\frac{\Gamma}{A}}\,Y = \pm\sqrt{\frac{\Delta^2-AZ}{A^2}} \qquad (27)$$

και παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες πραγματικές αν $\Delta^2-AZ>0$, φανταστικές αν $Δ^2-AZ<0$ και συμπίπτουσες αν $Δ^2-AZ=0$. Ομοίως αν $Γ\neq 0$ η (24) γράφεται

$$\sqrt{\frac{A}{Γ}}X+Y = \pm\sqrt{-\frac{Z'}{Γ}}$$

οπότε αν εκλέξουμε για λύση του συστήματος (9) την $α=0$ $β=-\frac{E}{Γ}$ έχουμε από την (25) $Z'=-\frac{E^2-ΓZ}{Γ}$ και έτσι παίρνουμε

$$\sqrt{\frac{A}{Γ}}X+Y = \pm\sqrt{\frac{E^2-ΓZ}{Γ^2}} \qquad (28)$$

οπότε παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες πραγματικές αν $E^2-ΓZ>0$, φανταστικές αν $E^2-ΓZ<0$ και συμπίπτουσες αν $E^2-ΓZ=0$. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι αν λάβουμε υπόψη μας τη $d=0$ και τις σχέσεις (23) θα έχουμε $(Δ^2-AZ)(E^2-ΓZ)=(BZ-ΔΓ)^2\geq 0$. Δηλαδή οι ποσότητες $Δ^2-AZ$ και $E^2-ΓZ$ είναι ομόσημες.

'Ωστε σαν τελικό συμπέρασμα από τις (22),(27) και (28) έχουμε ότι αν $D=0$ και $d<0$ η (1) παριστάνει ένα σύστημα δύο πραγματικών ευθειών τεμνομένων. Αν $D=0$ και $d>0$ η (1) παριστάνει ένα σύστημα δύο φανταστικών ευθειών τεμνομένων σε ένα πραγματικό σημείο. Τέλος αν $D=0$ και $d=0$, τότε η (1) παριστάνει ένα σύστημα δύο παραλλήλων ευθειών και μάλιστα οι ευθείες είναι πραγματικές αν $Δ^2-AZ>0$ και $E^2-ΓZ>0$, φανταστικές αν $Δ^2-AZ<0$ και $E^2-ΓZ<0$, συμπίπτουσες αν $Δ^2-AZ=0$ και $E^2-ΓZ=0$. 'Ετσι ολοκληρώσαμε τη διερεύνηση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

Θα δώσουμε τώρα ένα συγκεντρωτικό πίνακα για την πλήρη διερεύνηση της εξίσωσης δευτέρου βαθμού.

<u>1º $D\neq 0$</u>

$$d>0 \begin{cases} D\cdot Σ < 0 & \text{πραγματική έλλειψη} \\ D\cdot Σ > 0 & \text{φανταστική έλλειψη} \end{cases}$$

$d < 0$ υπερβολή

$d = 0$ παραβολή

<u>2º D=0</u>

$d > 0$ δύο φανταστικές ευθείες τεμνόμενες σε πραγματικό σημείο

$d < 0$ δύο πραγματικές ευθείες τεμνόμενες

$d = 0$ δύο ευθείες παράλληλες $\begin{cases} E^2-\Gamma Z>0 \ , \ \Delta^2-AZ>0 \ \text{πραγματικές διακεκριμένες} \\ E^2-\Gamma Z<0 \ , \ \Delta^2-AZ<0 \ \text{φανταστικές} \\ E^2-\Gamma Z=0 \ , \ \Delta^2-AZ=0 \ \text{συμπίπτουσες} \end{cases}$

<u>11.2.Παράδειγμα:</u> α) Δίνεται η καμπύλη βου βαθμού

$$x^2+3x\psi+5\psi^2+2x-8\psi+1=0$$

Να αναχθεί στους άξονες και να παρασταθεί γραφικά.

Έχουμε $A=1$, $B=\frac{3}{2}$, $\Gamma=5$, $\Delta=1$, $E=-4$, $Z=1$, οπότε

$$\Sigma=A+\Gamma=6 \ , \ d=A\Gamma-B^2=5-\frac{9}{4}=\frac{11}{4}>0 \quad \text{και}$$

$$D=\begin{vmatrix} A & B & \Delta \\ B & \Gamma & E \\ \Delta & E & Z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}=-\frac{121}{4}\neq 0$$

Επειδή λοιπόν $D\neq0$ και $d>0$ η εξίσωση παριστάνει έλλειψη και μάλιστα επειδή $D\cdot\Sigma=-\frac{121}{4}\cdot6<0$ η έλλειψη είναι πραγματική. Το κέντρο της έλλειψης βρίσκεται από τη λύση του συστήματος (9), δηλαδή

$$\alpha+\frac{3}{2}\beta+1=0$$

$$\frac{3}{2}\alpha+5\beta-4=0$$

έχουμε $\alpha=-4$ και $\beta=2$. Επίσης η γωνία στροφής φ βρίσκεται από τη σχέση (12). Έχουμε

$$\varepsilon\varphi 2\varphi = \frac{2B}{A-\Gamma} = -\frac{3}{4}$$

Έτσι έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu 2\varphi = -\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 2\varphi}} = -\frac{4}{5} \quad \kappa\alpha\iota \quad \eta\mu 2\varphi = \frac{3}{5}$$

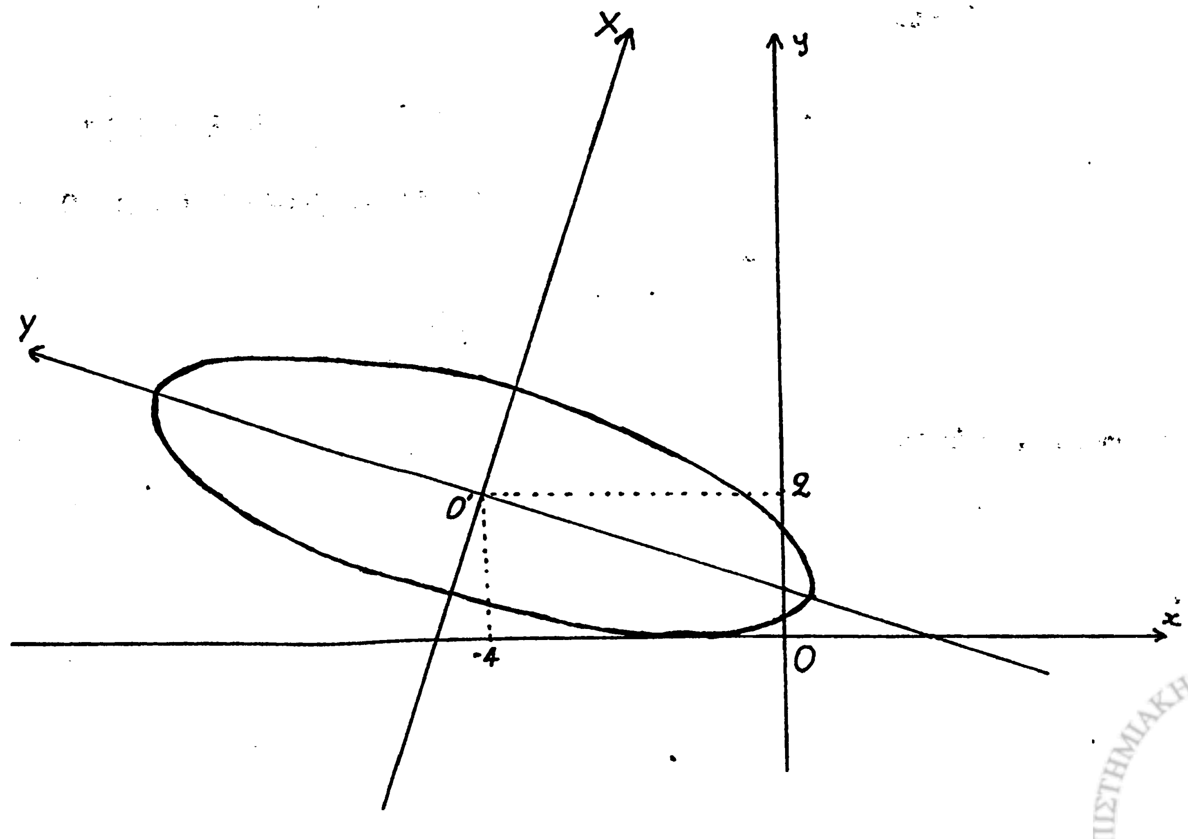
οπότε από τις (4α) έχουμε

$$A' = \frac{1}{2}(A+\Gamma) + \frac{1}{2}(A-\Gamma)\sigma\upsilon\nu 2\varphi + B\eta\mu 2\varphi = 3-2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{5} = \frac{11}{2} \qquad \kappa\alpha\iota$$

$\Gamma' = \Sigma - A' = 6 - \frac{11}{2} = \frac{1}{2}$. Επίσης έχουμε $Z' = \frac{D}{d} = -11$. Έτσι η εξίσωση της καμπύλης μετά την παράλληλη μεταφορά στο σημείο O'(-4,2) και τη στροφή των αξόνων κατά γωνία φ, όπου $\varphi = \frac{1}{2}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(-\frac{3}{4}\right)$ έχει τη μορφή της (13), δηλαδή είναι

$$\frac{11}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2 - 11 = 0 \quad \acute{\eta} \quad \frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{22} = 1$$

Η γραφική παράσταση της καμπύλης δίνεται στο επόμενο σχήμα



β) Δίνεται η καμπύλη $x^2+6x\psi+\psi^2+6x+2\psi-1=0$. Να αναχθεί στους άξονές της και να παρασταθεί γραφικά.

Έχουμε $A=1$, $B=3$, $\Gamma=1$, $\Delta=3$, $E=1$, $Z=-1$, οπότε $\Sigma=A+\Gamma=2$, $d=A\Gamma-B^2=1-9=-8<0$,

$$D=\begin{vmatrix} A & B & \Delta \\ B & \Gamma & E \\ \Delta & E & Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} =16\neq 0$$

Επειδή λοιπόν $D\neq 0$ και $d<0$ η εξίσωση παριστάνει υπερβολή. Το κέντρο της υπερβολής βρίσκεται από τη λύση του συστήματος (9), δηλαδή έχουμε το σύστημα

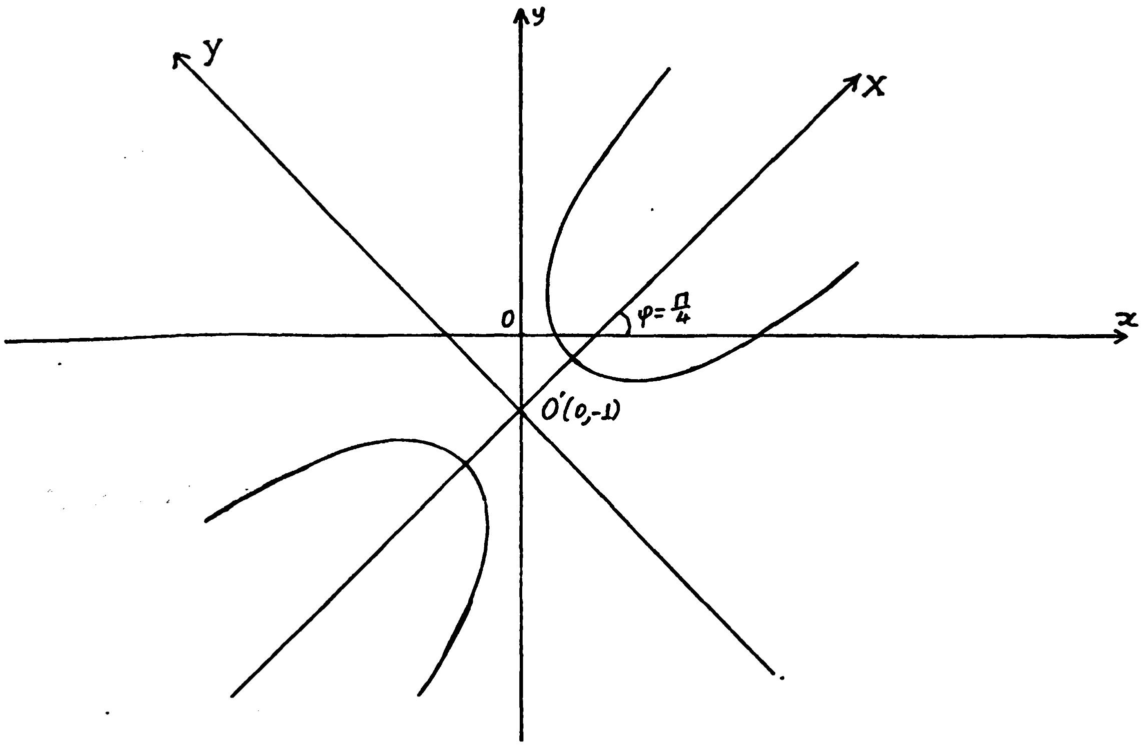
$$\alpha+3\beta+3 =0$$
$$3\alpha+\beta+1 =0$$

και η λύση αυτού είναι $\alpha=0$, $\beta=-1$, δηλαδή $O'(0,-1)$. Επίσης η γωνία στροφής των αξόνων βρίσκεται από τη σχέση (12) και είναι $\varepsilon\varphi 2\varphi=+\infty$ άρα $2\varphi=\frac{\pi}{2}$. Έτσι από τις σχέσεις (4α) έχουμε

$A'=\frac{1}{2}(A+\Gamma)+\frac{1}{2}(A-\Gamma)\sigma\upsilon\nu 2\varphi+B\eta\mu 2\varphi=\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 0+3\cdot 1=4$. Δηλαδή $A'=4$, οπότε $\Gamma'=\Sigma-A'=2-4=-2$. Έχουμε επίσης $Z'=\frac{D}{d}=\frac{16}{-8}=-2$. Έτσι η εξίσωση παίρνει την έκφραση (13) δηλαδή είναι

$$4X^2-2Y^2-2=0 \quad \text{ή} \quad \frac{X^2}{\frac{1}{2}}-\frac{Y^2}{1}=1$$

Η γραφική παράσταση αυτής δίνεται στο επόμενο σχήμα.



γ) Δίνεται η καμπύλη $x^2-2x\psi+\psi^2-2\sqrt{2}x-6\sqrt{2}\psi+10\sqrt{2}=0$. Να αναχθεί στους άξονες της και να παρασταθεί γραφικά. Έχουμε $A=1$, $B=-1$, $\Gamma=1$, $\Delta=-\sqrt{2}$, $E=-3\sqrt{2}$, $Z=10\sqrt{2}$, οπότε $\Sigma=A+\Gamma=1+1=2$, $d=A\Gamma-B^2=1\cdot 1-(-1)^2=0$

$$D=\begin{vmatrix} A & B & \Delta \\ B & \Gamma & E \\ \Delta & E & Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & -3\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -3\sqrt{2} & 10\sqrt{2} \end{vmatrix} =-32\neq 0$$

Επειδή λοιπόν $D\neq 0$ και $d=0$ η εξίσωση παριστάνει παραβολή. Υπολογίζουμε τώρα τη γωνία στροφής φ των αξόνων από τη σχέση (12). Έχουμε $\varepsilon\varphi 2\varphi=+\infty$, άρα $2\varphi=\frac{\pi}{2}$. Έτσι από τις (4α) έχουμε

$$A'=\frac{1}{2}(A+\Gamma)+\frac{1}{2}(A-\Gamma)\sigma\upsilon\nu 2\varphi+B\eta\mu 2\varphi=\frac{1}{2}2+\frac{1}{2}\cdot 0-1\cdot 1=0$$

Δηλαδή $A'=0$, οπότε $\Gamma'=\Sigma-A'=2-0=2$. Έχουμε επίσης από τις σχέσεις (4β) για $\alpha=\beta=0$.

$$\Delta'=\Delta\sigma\upsilon\nu\varphi+E\eta\mu\varphi=-\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}-3\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}=-4$$

$$E'=-\Delta\eta\mu\varphi+E\sigma\upsilon\nu\varphi=\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}-3\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}=-2$$

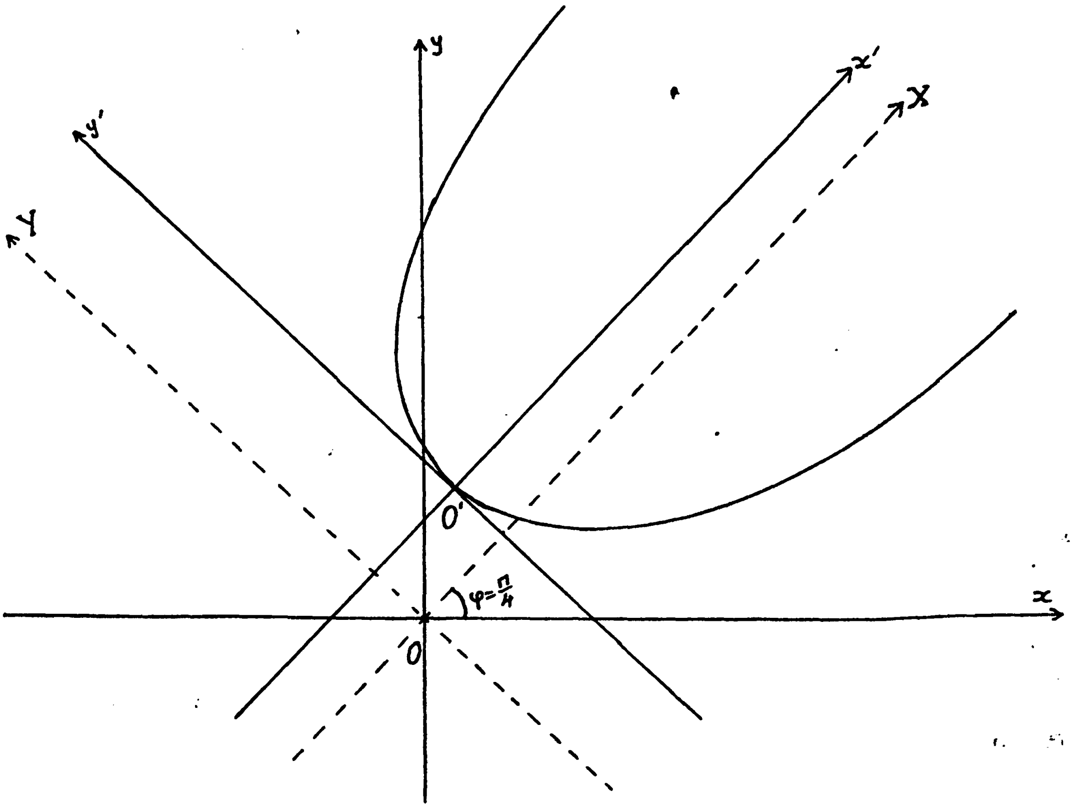
'Ετσι η δοθείσα εξίσωση μετά τη στροφή των αξόνων κατά γωνία $\varphi=\frac{\pi}{4}$ θα πάρει την επόμενη μορφή στο νεό σύστημα ΟΧΥ

$$2Y^2-8X-4Y+10\sqrt{2}=0$$

Η εξίσωση αυτή γράφεται $(Y-1)^2=4\left(X-\frac{5\sqrt{2}-1}{4}\right)$

Κάνουμε τώρα μια παράλληλη μεταφορά του σηστήματος ΟΧΥ στο σημείο $O'\left(\frac{5\sqrt{2}-1}{4},1\right)$ οπότε έχουμε τελικά στο σύστημα $O'x'\psi'$ την εξίσωση $\psi'^2=4x'$.

Η γραφική παράσταση αυτής δίνεται στο επόμενο σχήμα.



δ) Να μελετηθεί η εξίσωση $2x^2-12x\psi+16\psi^2+x-8\psi-3=0$. 'Εχουμε Α=2, Β=-6, Γ=16, $\Delta=\frac{1}{2}$, Ε=-4 , Ζ=-3, οπότε Σ=Α+Γ=2+16=18 ,

$d=A\Gamma-B^2=2\cdot16-(-6)^2=-4<0$ και

$$D=\begin{vmatrix} A & B & \Delta \\ B & \Gamma & E \\ \Delta & E & Z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -6 & \frac{1}{2} \\ -6 & 16 & -4 \\ \frac{1}{2} & -4 & -3 \end{vmatrix}=0$$

Επειδή λοιπόν D=0 και d<0 η εξίσωση παριστάνει δύο πραγματικές τεμνόμενες ευθείες. Για να βρούμε τις εξισώσεις τους θεωρούμε τη δοθείσα εξίσωση ως δευτεροβάθμια εξίσωση του x, δηλαδή

$$2x^2-(12\psi-1)x+16\psi^2-8\psi-3=0$$

Οι ρίζες αυτής είναι

$$x=\frac{12\psi-1\pm\sqrt{(12\psi-1)^2-8(16\psi^2-8\psi-3)}}{4}=$$

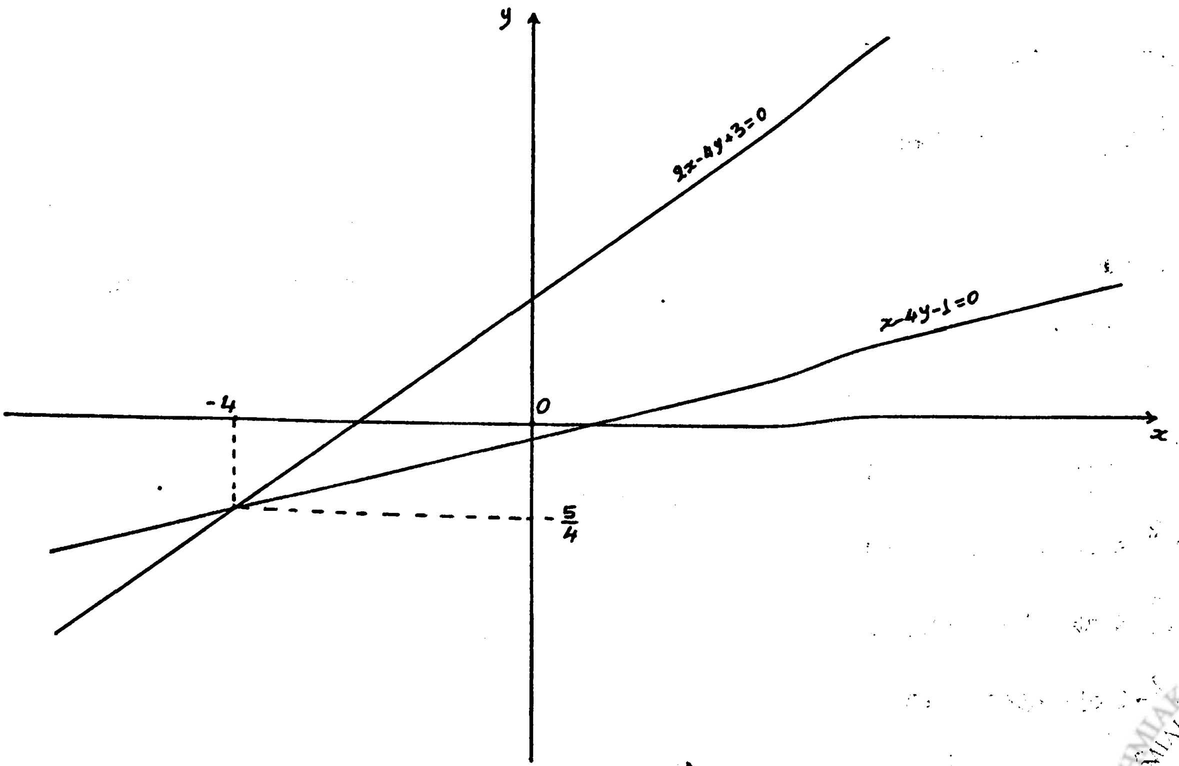
$$=\frac{12\psi-1\pm(4\psi+5)}{4}=\begin{cases}4\psi+1\\ \dfrac{4\psi-3}{2}\end{cases}$$

Έτσι έχουμε ότι η δοθείσα εξίσωση γράφεται ως γινόμενο δύο πρωτοβάθμιων παραγόντων

$$2(x-4\psi-1)\left(x-\frac{4\psi-3}{2}\right)=0$$

Επομένως έχουμε τις ευθείες

$$x-4\psi-1=0 \quad \text{και} \quad 2x-4\psi+3=0.$$



12. Ασκήσεις.

1. Να αναχθούν στους άξονές τους και να παρασταθούν γραφικά οι καμπύλες

α) $x^2-4x\psi+\psi^2+10x-8\psi+7=0$

β) $5x^2+4x\psi+2\psi^2-24x-12\psi+29=0$

γ) $x^2+2\sqrt{3}x\psi+3\psi^2-4(1+2\sqrt{3})x+4(2-\sqrt{3})\psi+20=0$

2. Να αναχθούν στους άξονές τους και να παρασταθούν γραφικά οι καμπύλες

α) $2x^2-\sqrt{3}x\psi+\psi^2-x+2\psi-1=0$

β) $2x^2+4\sqrt{3}x\psi-2\psi^2+x-2=0$

γ) $3x^2-2x\psi+3\psi^2-2x+2\psi+1=0$

δ) $x^2-2x\psi+\psi^2-2\sqrt{2}x-6\sqrt{2}\psi+10\sqrt{2}=0$

ε) $3x^2+2\sqrt{3}x\psi+\psi^2+4x-4\sqrt{3}\psi+16=0$

στ) $x^2-x\psi+\psi^2-5x+\psi+2=0$

ζ) $x^2+6x\psi+\psi^2+8x+24\psi+39=0$

3. Να βρεθούν το κέντρο, οι άξονες και οι ασύμπτωτες, αν υπάρχουν, των καμπύλων

α) $6x^2-4x\psi+9\psi^2-4x-32\psi-6=0$

β) $x^2+2x\psi+2\psi^2-2x-4\psi+1=0$

γ) $4x^2-4x\psi+\psi^2-8x-8\psi+4=0$

δ) $2x^2-4x\psi+\psi^2-2x-6\psi+1=0$

ε) $4x^2+2x\psi+3\psi+12=0$

στ) $5x^2+20x\psi+20\psi^2+34x+12\psi+8=0$

ζ) $x^2-2x\psi-\psi^2+4x-6\psi+1=0$

4. Να προσδιοριστεί η παράμετρος λ έτσι ώστε κάθε μια από τις επόμενες εξισώσεις

α) $x^2+6x\psi+\psi^2+6x+2\psi+\lambda=0$

β) $x^2-8x\psi+2\psi^2-6x-4\psi+\lambda=0$

να παριστάνει ζεύγος πραγματικών τεμνομένων ευθειών. Στη συνέχεια να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών αυτών.

5. Να προσδιοριστεί η παράμετρος λ έτσι ώστε η εξίσωση

$3x^2-2x\psi+3\psi^2-2x-4\psi+\lambda=0$

να πληρούται μόνο από τις συντεταγμένες ενός σημείου του οποίου να βρεθούν οι συντεταγμένες.

6. Σε κάθε μια από τις επόμενες εξισώσεις να προσδιοριστούν οι παράμετροι λ και μ έτσι ώστε να παριστάνει ζεύγος παραλλήλων ευθειών. Στη συνέχεια να βρεθούν οι εξισώσεις αυτών

α) $2x^2+\lambda x\psi+2\psi^2-7x+\mu\psi+3=0$

β) $2x^2+\lambda x\psi+\psi^2-3x+\mu\psi-1=0$

7. Δίνεται η οικογένεια των κωνικών τομών

$(\lambda+5)x^2+\lambda(\lambda+5)x\psi+(\lambda-3)\psi^2+2\lambda x+3\psi+10=0$

όπου λ πραγματική παράμετρος. Να βρεθεί η εξίσωση του γεωμετρικού τόπου των κέντρων των καμπύλων αυτών.

8. Δίνεται η οικογένεια των κωνικών τομών

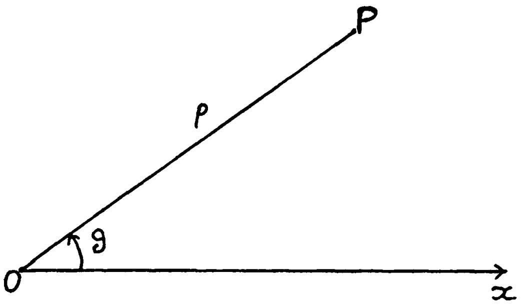
$x^2+2\lambda x\psi+3\psi^2-2\lambda x+4\psi-5=0$

όπου λ πραγματική παράμετρος. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των καμπύλων αυτών.

13.Πολικές συντεταγμένες.

13.1.Πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο.

Είδαμε μέχρι τώρα ότι ένα σημείο του επιπέδου μπορεί να προσδιοριστεί από ένα ζεύγος πραγματικών αριθμών (x,ψ) τις λεγόμενες καρτεσιανές συντεταγμένες. Ο προσδιορισμός όμως της θέσεως ενός σημείου του επιπέδου μπορεί να γίνει και με άλλο τρόπο, με τις λεγόμενες πολικές συντεταγμένες. Έστω Ox μία ημιευθεία, P τυχόν σημείο του επιπέδου, ρ η απόσταση $|\overline{OP}|$ και θ η γωνία $\measuredangle(Ox,OP)$, (Σχ.1)



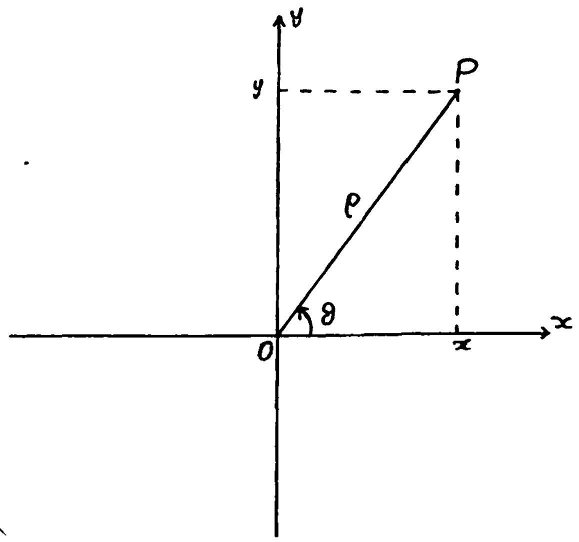
Σχ.1

Το ρ καλείται πολική ακτίνα και η γωνία θ πολική γωνία ή όρισμα του σημείου P. Το σημείο O καλείται πόλος και η ημιευθεία Ox πολικός άξονας. Η πολική γωνία μετράται ως θετική όταν διαγράφεται κατ'αντίθετη φορά από τη φορά κινήσεως των δεικτών του ωρολογίου. Οι πραγματικοί αριθμοί ρ και θ μας δίνουν ένα διατεταγμένο ζεύγος (ρ,θ) που είναι οι πολικές συντεταγμένες του σημείου P. Αν περιορίσουμε το θ στο διάστημα $[0,2\pi)$ και το ρ στο διάστημα $(0,+\infty)$ τότε παρατηρούμε ότι σε κάθε ζεύγος (ρ,θ) αντιστοιχεί ένα σημείο του επιπέδου και αντίστροφα σε κάθε σημείο του επιπέδου εκτός από το σημείο O αντιστοιχεί ένα ζεύγος (ρ,θ). Ειδικά το σημείο O έχει πολική ακτίνα μηδέν ενώ η πολική γωνία αυτού είναι απροσδιόριστη. Αν θέλουμε να βρούμε τις σχέσεις μεταξύ των καρτεσιανών και πολικών συντεταγμένων ενός σημείου, λαμβάνουμε σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων το οποίο έχει ως αρχή των συντεταγμένων τον πόλο O, θετικό ημιάξονα Ox τον πολικό άξονα Ox και άξονα Oψ την κάθετο στον πολικό άξονα στο σημείο O έτσι ώστε το σύστημα xOψ να είναι δεξιόστροφο (Σχ.2). Τέλος η μονάδα μετρήσεως είναι κοινή στα δύο συστήματα συντεταγμένων. Αν (x,ψ) και (ρ,ϑ) καλέσουμε τις καρτεσιανές και τις πολικές συντεταγμένες ενός σημείου P, τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} x&=\rho\sigma\upsilon\nu\vartheta \\ \psi&=\rho\eta\mu\vartheta \end{aligned} \qquad (1)$$

Από τις σχέσεις (1) μπορούμε να πάρουμε τώρα τις αντίστροφες σχέσεις

$$\begin{aligned} \rho&=\sqrt{x^2+\psi^2} \\ \vartheta&=\tau o\xi\varepsilon\varphi\ \frac{\psi}{x} \end{aligned} \qquad (2)$$

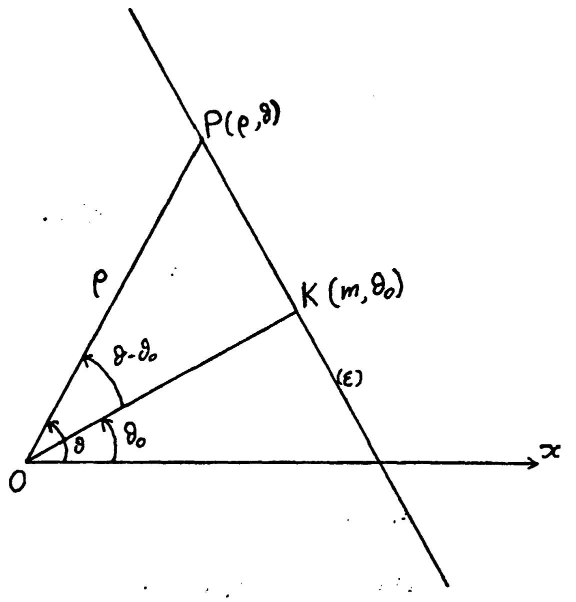


Σχ.2

Οι σχέσεις (1) μας δίνουν τις καρτεσιανές συντεταγμένες (x,ψ) του σημείου P όταν γνωρίζουμε τις πολικές συντεταγμένες (ρ,ϑ) αυτού. Οι σχέσεις (2) μας δίνουν τις πολικές συντεταγμένες (ρ,ϑ) του P όταν γνωρίζουμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες (x,ψ) αυτού. Αν δοθεί μια εξίσωση της μορφής φ(ρ,ϑ)=0 ή σε λυμένη μορφή ρ=f(ϑ), τότε το σύνολο των σημείων του επιπέδου των οποίων οι πολικές συντεταγμένες (ρ,ϑ) επαληθεύουν την παραπάνω εξίσωση είναι, γενικά, μια καμπύλη. Αν έχουμε την εξίσωση μιας καμπύλης σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Οxψ, δηλαδή f(x,ψ)=0, τότε η εξίσωση της καμπύλης σε πολικές συντεταγμένες βρίσκεται αμέσως αν αντικαταστήσουμε τα x,ψ από τους τύπους (1) και θα είναι f(ρσυνϑ,ρημϑ)=0. Αντίστροφα, αν η εξίσωση μιας καμπύλης σε πολικές συντεταγμένες είναι φ(ρ,ϑ)=0, τότε η εξίσωση της σε καρτεσιανές συντεταγμένες θα βρεθεί αν θέσουμε τα ρ και ϑ από τους τύπους (2), δηλαδή θα έχουμε $\varphi(\sqrt{x^2+\psi^2}\ ,\ \tau o\xi\varepsilon\varphi\ \frac{\psi}{x})=0$. Για την μελέτη μιας καμπύλης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε την εξίσωσή της σε καρτεσιανές συντεταγμένες είτε την εξίσωσή της σε πολικές συντεταγμένες, ανάλογα με το ποιά είναι προσφορότερη. Στα επόμενα θα βρούμε τις εξισώσεις σε πολικές συντεταγμένες των καμπύλων που έχουμε μελετήσει μέχρι τώρα.

13.2.Εξίσωση ευθείας.

Είναι προφανές ότι η εξίσωση $\vartheta=\vartheta_0$, όπου ϑ_0=σταθ. παριστάνει μια ημιευθεία που διέρχεται από την αρχή Ο. 'Εστω τώρα ευθεία (ε) η οποία δεν διέρχεται από τον πόλο Ο (Σχ.3). Η κάθετος ΟΚ που άγεται από τον πόλο Ο προς την (ε) τέμνει αυτή στο σημείο Κ του οποίου οι πολικές συντεταγμένες είναι (m,ϑ_0). Αν $P(\rho,\vartheta)$ είναι τυχόν σημείο της ευθείας (ε) τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΡ έχουμε



Σχ.3

$m=\rho\text{συν}(\vartheta-\vartheta_0)$ ή

$$\rho=\frac{m}{\text{συν}(\vartheta-\vartheta_0)} \qquad (3)$$

Η (3) είναι η ζητούμενη εξίσωση της ευθείας (ε). Σημειώνουμε ότι αν $Ax+B\psi+\Gamma=0$ είναι η εξίσωση της ευθείας (ε) σε καρτεσιανές συντεταγμένες, τότε αν χρησιμοποιήσουμε τους τύπους (1) θα πάρουμε

$A\rho\text{συν}\vartheta+B\rho\text{ημ}\vartheta-\Gamma=0$. Θέτουμε τώρα $-\frac{\Gamma}{A}\text{συν}\vartheta_0=m$, $\text{εφ}\vartheta_0=\frac{B}{A}$ οπότε έχουμε

$$\rho=\frac{-\Gamma}{A\text{συν}\vartheta+B\text{ημ}\vartheta}=\frac{-\frac{\Gamma}{A}\text{συν}\vartheta_0}{\text{συν}(\vartheta-\vartheta_0)}$$

Δηλαδή την εξίσωση (3).

13.3.Εξίσωση περιφέρειας κύκλου.

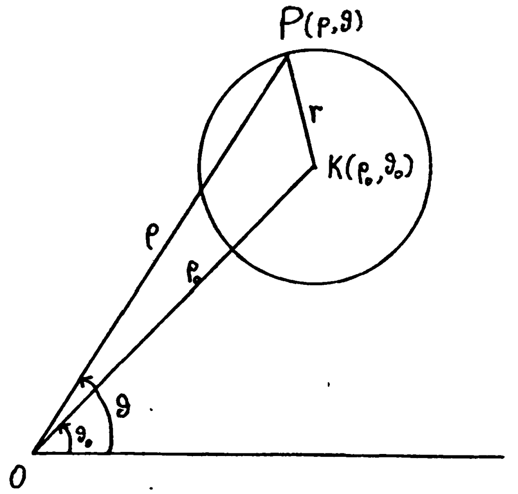
Θεωρούμε την περιφέρεια κύκλου που έχει κέντρο το σημείο Κ με πολικές συντεταγμένες (ρ_0, ϑ_0) και ακτίνα r (Σχ.4). Αν $P(\rho,\vartheta)$ είναι τυχόν σημείο της περιφέρειας, τότε από το τρίγωνο ΟΚΡ θα έχουμε

$$r^2=\rho_0^2+\rho^2-2\rho\rho_0 \text{συν}(\vartheta-\vartheta_0) \qquad (4)$$

Η (4) είναι η εξίσωση της περιφέρειας κύκλου σε πολικές συντεταγμένες. Αν η περιφέρεια διέρχεται από τον πόλο, τότε $\rho_0=r$, οπότε η (4) γίνεται

$$\rho=2r\text{συν}(\vartheta-\vartheta_0) \qquad (5)$$

Αν επί πλέον το κέντρο Κ κείται στον πολικό άξονα Ox, τότε έχουμε $\vartheta_0=0$, οπότε η (5) απλουστεύεται περισσότερο και έχει την μορφή $\rho=2r\text{συν}\vartheta$.



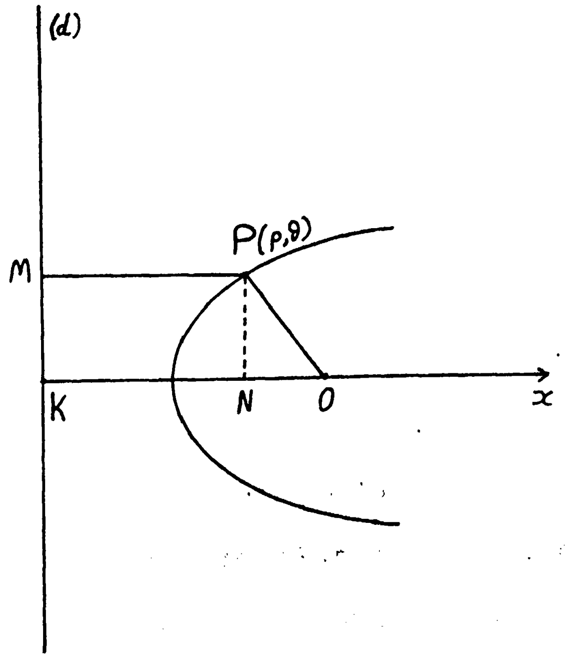
Σχ.4

13.4.Εξίσωση κωνικών τομών.

Η εξίσωση των κωνικών τομών σε πολικές συντεταγμένες μπορεί να προκύψει από τη γενική εξίσωση δευτέρου βαθμού, δηλαδή από την

$$Ax^2+2Bx\psi+\Gamma\psi^2+2\Delta x+2E\psi+Z=0$$

αν χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (1). Είναι προτιμότερο όμως να βρούμε την εξίσωση μιας κωνικής τομής με τη χρήση της χαρακτηριστικής ιδιότητας που έχει η εστία με τη διευθετούσα. Έτσι, έστω ότι η κωνική τομή (έλλειψη, υπερβολή, ή παραβολή) έχει τον πόλο Ο ως εστία και αντίστοιχη διευθετούσα μια ευθεία (d) κάθετη στον πολικό άξονα Ox σε απόσταση p από τον πόλο και βρισκόμενη προς τα αριστερά του πόλου (Σχ.5). Αν $P(\rho,\vartheta)$ είναι τυχόν σημείο της κωνικής τομής, τότε η απόσταση του P από τη διευθετούσα (d) είναι



Σχ.5

$|\overline{PM}|=|\overline{KN}|=|\overline{KO}|-|\overline{NO}|=$

$=p-\rho\sigma\upsilon\nu(\pi-\vartheta)=p+\rho\sigma\upsilon\nu\vartheta.$

'Εστω επίσης ε η εκκεντρότητα της κωνικής τομής. Υπενθυμίζουμε ότι, αν η κωνική είναι έλλειψη έχουμε ε<1, αν είναι υπερβολή έχουμε ε>1 και τέλος για την παραβολή είναι ε=1. Επειδή ο λόγος των αποστάσεων τυχόντος σημείου της κωνικής τομής από την εστία και την αντίστοιχη διευθετούσα είναι σταθερός ίσος με την εκκεντρότητα ε, έχουμε τελικά

$$\frac{|\overline{OP}|}{|\overline{PM}|}=\frac{\rho}{p+\rho\sigma\upsilon\nu\vartheta}=\varepsilon$$

Από τη σχέση αυτή παίρνουμε

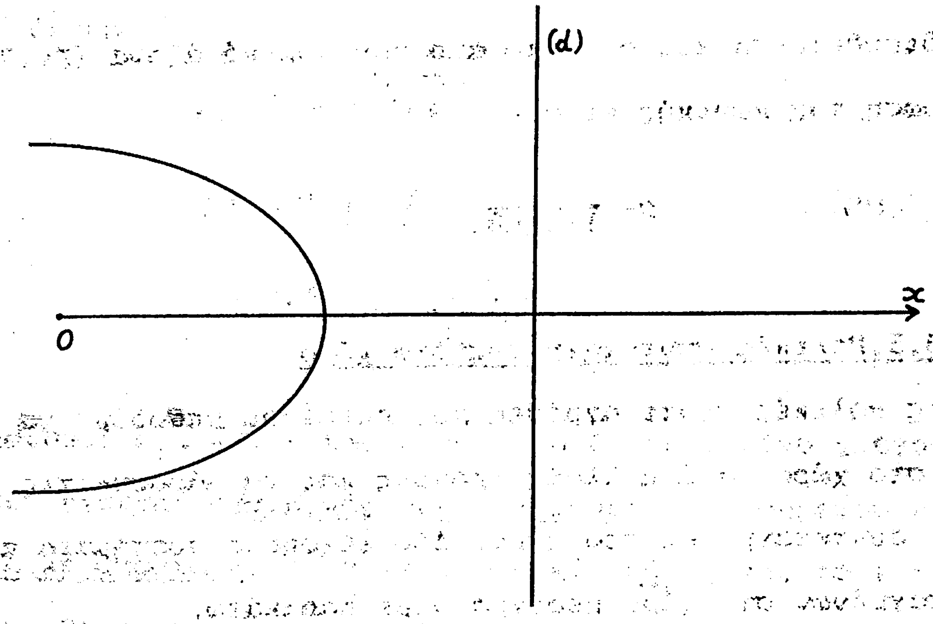
$$\rho=\frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon\sigma\upsilon\nu\vartheta}$$

και αν θέσουμε $p\varepsilon=m$

$$\rho=\frac{m}{1-\varepsilon\sigma\upsilon\nu\vartheta} \qquad (6)$$

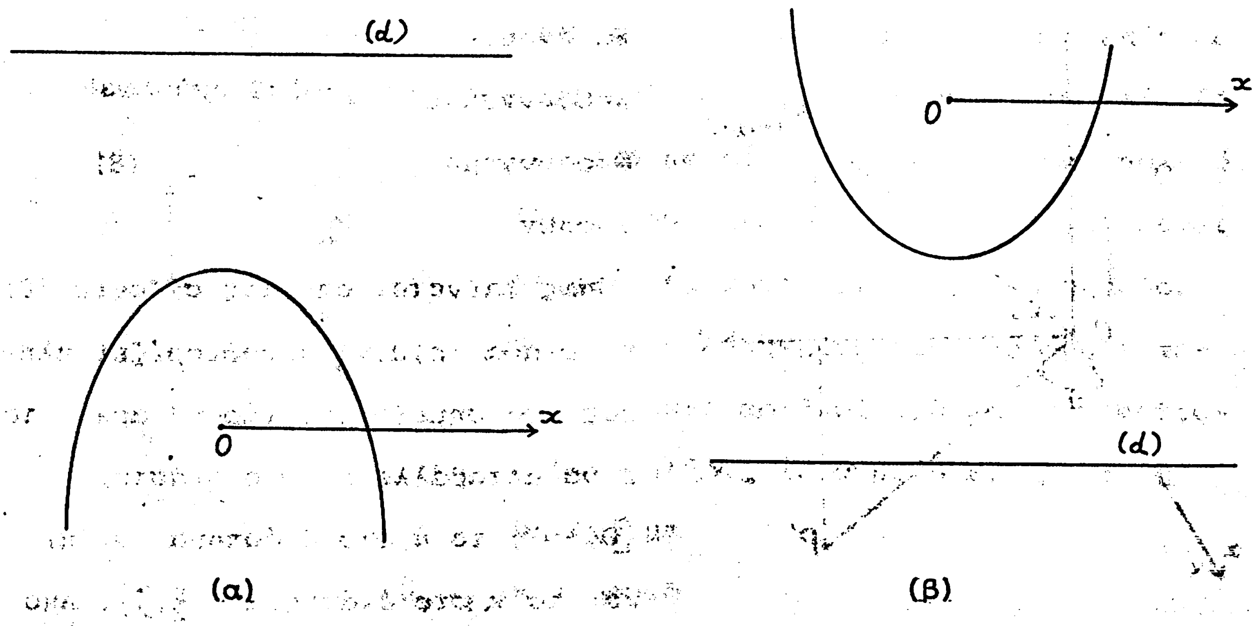
Η (6) εκφράζει την εξίσωση της κωνικής τομής σε πολικές συντεταγμένες. Αν η διευθετούσα κείται δεξιά του πόλου και είναι κάθετη στον πολικό άξονα (Σχ.6) τότε η εξίσωση της κωνικής θα είναι

$$\rho=\frac{m}{1+\varepsilon\sigma\upsilon\nu\vartheta} \qquad (7)$$



Σχ.6

Τέλος αν η διευθετούσα είναι παράλληλη προς τον πολικό άξονα (Σχ.7) η εξίσωση της κωνικής θα είναι $\rho=\frac{m}{1+\varepsilon\eta\mu\theta}$, αν η διευθετούσα είναι πάνω από τον πολικό άξονα (Σχ.7(α)).



Σχ.7

Αν η διευθετούσα κείται κάτω από τον πολικό άξονα (Σχ.7(β)), τότε η εξίσωση της κωνικής είναι

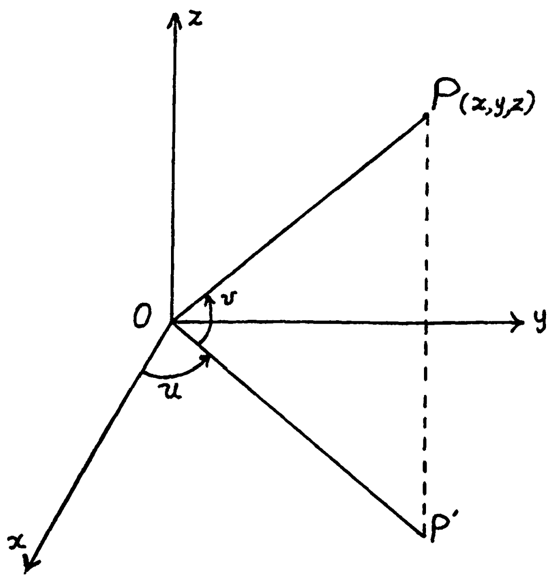
$$\rho = \frac{m}{1-\varepsilon\eta\mu\theta}$$

13.5.Πολικές συντεταγμένες στο χώρο

Τις πολικές συντεταγμένες του επιπέδου μπορούμε να τις επεκτείνουμε στο χώρο κατά πολλούς τρόπους και να πάρουμε τις λεγόμενες πολικές συντεταγμένες στο χώρο. Δύο εύχρηστα συστήματα πολικών συντεταγμένων στο χώρο περιγράφουμε παρακάτω.

α)Σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων

'Εστω P τυχόν σημείο του χώρου με καρτεσιανές συντεταγμένες (x,ψ,z) σ'ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxψz. 'Εστω επίσης $\rho=|\overline{OP}|$ το μέτρο της διανυσματικής ακτίνας του P και P' η ορθή προβολή του P στο επίπεδο Oxψ. Θέτουμε $u=\sphericalangle(Ox,OP')$ και $v=\sphericalangle(OP',OP)$ (Σχ.8).



Σχ.8

Θα έχουμε

$$\begin{aligned} x &= \rho\sigma\upsilon\nu v\sigma\upsilon\nu u \\ \psi &= \rho\sigma\upsilon\nu v\eta\mu u \\ z &= \rho\eta\mu v \end{aligned} \qquad (8)$$

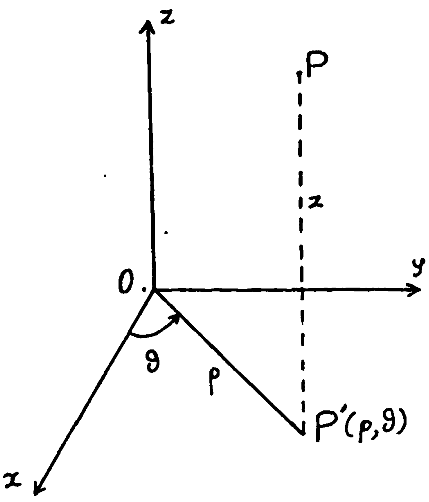
'Οπως φαίνεται από τις σχέσεις (8), η τριάδα (ρ,u,v) προσδιορίζει πλήρως ένα σημείο του χώρου, αρκεί το ρ να μεταβάλλεται στο διάστημα $[0,+\infty)$, το u στο διάστημα $[0,2\pi)$ και το v στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Από τις σχέσεις (8) μπορούμε να πάρουμε τις αντίστροφες αυτών, δηλαδή τις σχέσεις που δίνουν τα ρ,u και v ως συναρτήσεις των x,ψ και z. Πραγματικά έχουμε

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+\psi^2+z^2} \\ u &= \text{τοξ εφ}\ \frac{\psi}{x} \qquad\qquad (9) \\ v &= \text{τοξ ημ}\ \frac{z}{\sqrt{x^2+\psi^2+z^2}} \end{aligned}$$

Οι τρείς αριθμοί ρ,u και v μας δίνουν το διατεταγμένο ζεύγος (ρ,u,v) και λέγονται <u>σφαιρικές συντεταγμένες</u> του σημείου P. Το ρ λέγεται <u>πολική απόσταση</u>, το u (γεωγραφικό) <u>μήκος</u> και το v <u>πλάτος</u> του σημείου. Οι τύποι (8) και (9) μας δείχνουν πως μπορούμε να μεταβούμε από ένα σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων σ'ένα σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων και αντίστροφα.

<u>β) Σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων</u>

Θεωρούμε πάλι ένα τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxψz και P τυχόν σημείο του χώρου με συντεταγμένες (x,ψ,z) ως προς το σύστημα Oxψz (Σχ.9). 'Εστω P' η ορθή προβολή του σημείου P στο επίπεδο Oxψ. Θεωρούμε επίσης ένα σύστημα πολικών συντεταγμένων στο επίπεδο Oxψ με πόλο το σημείο O και πολικό άξονα την ημιευθεία Ox. Αν (ρ,θ) είναι οι πολικές συντεταγμένες του σημείου P'και z η κατηγμένη του σημείου P,τότε οι τρείς αριθμοί ρ,θ και z προσδιορίζουν πλήρως το σημείο P. Προφανώς θα έχουμε



Σχ.9

$$\begin{aligned} x &= \rho\,\text{συν}\theta \\ \psi &= \rho\,\text{ημ}\theta \qquad\qquad (10) \\ z &= z \end{aligned}$$

Επίσης από τις σχέσεις (10) μπορούμε να πάρουμε τις αντίστροφες σχέσεις, δηλαδή τις

$$\rho = \sqrt{x^2+\psi^2}$$

$$\vartheta = \text{τοξεφ}\,\frac{\psi}{x} \qquad (11)$$

$$z = z$$

Οι τρείς αριθμοί ρ,θ και z μας δίνουν την διατεταγμένη τριάδα (ρ,θ,z) και λέγονται <u>κυλινδρικές συντεταγμένες</u> του σημείου P. Οι σχέσεις (10) μας δίνουν τις καρτεσιανές συντεταγμένες (x,ψ,z) του σημείου P ως συναρτήσεις των κυλινδρικών συντεταγμένων (ρ,θ,z) ενώ οι αντίστροφες σχέσεις (11) μας δίνουν τις κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ,θ,z) του τυχόντος σημείου P ως συναρτήσεις των καρτεσιανών συντεταγμένων (x,ψ,z).

14.Ασκήσεις

1.Να βρεθούν οι εξισώσεις των παρακάτω καμπύλων σε πολικές συντεταγμένες

α) $x^2+\psi^2-8x=0$ β) $x^2-\psi^2=16$

γ) $\psi^2=x^3-\frac{x^2}{6}+x$ δ) $9x^2=\psi^2(25-x^2)$

2.Να βρεθούν οι εξισώσεις των παρακάτω καμπύλων σε καρτεσιανές συντεταγμένες

α) ρ=3συνθ β) ρσυνθ=6

γ) ρ=ημ2θ δ) ρ^2=2συν2θ

ε) ρ=4(1+εφθ) στ) $\rho^2=\frac{1}{\text{συνθ}}$

ζ) $\rho=\frac{3}{1-\text{συνθ}}$ η) $\rho=\frac{\text{ημθ}}{\text{ημθ}-\text{συνθ}}$

3.Να βρεθεί η εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες της περιφέρειας κύκλου που έχει κέντρο πάνω στην ευθεία $\vartheta=\pi$, ακτίνα α και διέρχεται από τον πόλο Ο.

4.Να βρεθεί η εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες της ελλείψεως η οποία έχει για μια εστία τον πόλο Ο, για δεύτερη εστία το σημείο $O'(\rho=2,\vartheta=0)$ και μια κορυφή το σημείο $A(\rho=1,\vartheta=\pi)$.

5.Να βρεθεί η εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες της παραβολής της οποίας εστία είναι ο πόλος Ο και διευθετούσα η ευθεία $\rho=\dfrac{1}{\text{συν}(\vartheta+\frac{\pi}{3})}$.

6.Υπερβολή έχει εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{5}{4}$, μια εστία τον πόλο Ο και αντίστοιχη διευθετούσα την ευθεία $\rho=\dfrac{9}{\text{συν}\vartheta}$. Να βρεθεί η εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες της υπερβολής, καθώς επίσης και οι πολικές συντεταγμένες της άλλης εστίας.

7.Να βρεθεί η εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες της υπερβολής της οποίας μια εστία είναι ο πόλος Ο, κέντρο το σημείο $K(\rho=2,\vartheta=\frac{\pi}{2})$ και μια κορυφή το σημείο $A(\rho=1,\vartheta=\frac{\pi}{2})$.

8.Να βρεθεί η εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες της ελλείψεως η οποία έχει για εστίες τον πόλο Ο και το σημείο $K(\rho=2,\vartheta=0)$ και μια κορυφή το σημείο $A(\rho=4,\vartheta=0)$.

15. Επιφάνειες

Στις προηγούμενες παραγράφους είδαμε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του χώρου που πληρούν μια εξίσωση της μορφής $f(x,\psi,z)=0$ είναι μια επιφάνεια. Η επιφάνεια μπορεί να θεωρηθεί επίσης και ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που πληρούν μια ορισμένη χαρακτηριστική γεωμετρική ιδιότητα. Για παράδειγμα η επιφάνεια της σφαίρας ορίστηκε με τη χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της και μετά βρήκαμε την εξίσωση της. Επίσης μια επιφάνεια μπορεί να θεωρηθεί ότι παράγεται κατά την κίνηση μιας καμπύλης η οποία κινείται με κάποιον ορισμένο νόμο. Ο νόμος κινήσεως της καμπύλης εκφράζεται συνήθως με ορισμένες παραμέτρους οι οποίες υπεισέρχονται στις εξισώσεις της καμπύλης. Έτσι οι εξισώσεις

$$f_1(x,\psi,z,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)=0 \quad , \quad f_2(x,\psi,z,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)=0 \qquad (1)$$

παριστάνουν μια καμπύλη που εξαρτάται από τις παραμέτρους $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$. Κάθε τιμή των παραμέτρων $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ προσδιορίζει και μια θέση της καμπύλης (1). Για να παράγει όμως η καμπύλη (1) την επιφάνεις πρέπει οι παράμετροι $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ να συνδέονται μεταξύ τους με n-1 σχέσεις

$$\varphi_i(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)=0 \quad , \quad i=1,2,\ldots,n-1 \qquad (2)$$

οι οποίες εκφράζουν τον νόμο με τον οποίο κινείται η καμπύλη. Αν απαλείψουμε τις παραμέτρους $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ μεταξύ των εξισώσεων (1) και (2) θα πάρουμε την εξίσωση της επιφάνειας, δηλαδή $f(x,\psi,z)=0$. Στις επόμενες παραγράφους θα δούμε μερικές κατηγορίες επιφανειών που προκύπτουν από την κίνηση μιας καμπύλης.

15.1. Κυλινδρικές επιφάνειες

Μια επιφάνεια καλείται <u>κυλινδρική</u> αν παράγεται από μια ευθεία η οποία κινείται έτσι ώστε να είναι συνέχεια παράλληλη προς μια σταθερή διεύθυνση και να συναντά μια σταθερή καμπύλη ή να εφάπτεται δοθείσης επιφάνειας.

Η ευθεία που κινείται και παράγει την επιφάνεια λέγεται <u>γενέτειρα</u> ενώ η καμπύλη την οποία συναντά η γενέτειρα λέγεται <u>οδηγός</u>. Αν

$$f_1(x,\psi,z)=0 \quad , \quad f_2(x,\psi,z)=0 \qquad (3)$$

είναι οι εξισώσεις που εκφράζουν την οδηγό καμπύλη και $\vec{\alpha}(\alpha,\beta,\gamma)$ ένα σταθερό διάνυσμα που εκφράζει την σταθερή διεύθυνση της γενέτειρας, τότε οι εξισώσεις της γενέτειρας θα είναι

$$\frac{x-k}{\alpha}=\frac{\psi-\lambda}{\beta}=\frac{z-\mu}{\gamma} \qquad (4)$$

όπου k,λ,μ είναι παράμετροι και μπορούν να θεωρηθούν ως οι συντεταγμένες του σημείου στο οποίο συναντά η γενέτειρα την οδηγό. Συνεπώς θα έχουμε τις εξής σχέσεις μεταξύ των παραμέτρων

$$f_1(k,\lambda,\mu)=0 \quad , \quad f_2(k,\lambda,\mu)=0 \qquad (5)$$

Αν τώρα μεταξύ των τεσσάρων εξισώσεων (4) και (5) απαλείψουμε τις παραμέτρους k,λ και μ θα πάρουμε την εξίσωση της επιφάνειας, δηλαδή $f(x,\psi,z)=0$. Πραγματικά, αν θέσουμε στην (4) τους ίσους λόγους ίσους με t θα έχουμε

$$k=x-\alpha t \quad , \quad \lambda=\psi-\beta t \quad , \quad \mu=z-\gamma t$$

οπότε οι (5) γίνονται

$$f_1(x-\alpha t,\psi-\beta t,z-\gamma t)=0 \quad , \quad f_2(x-\alpha t,\psi-\beta t,z-\gamma t)=0$$

Η απαλοιφή του t από αυτές θα μας δώσει την εξίσωση της επιφάνειας $f(x,\psi,z)=0$.

Αν η διεύθυνση των γενετειρών της κυλινδρικής επιφάνειας καθορίζεται από μια ευθεία (ε) με εξισώσεις

$$A_1x+B_1\psi+\Gamma_1z+\Delta_1=0 \quad , \quad A_2x+B_2\psi+\Gamma_2z+\Delta_2=0 \qquad (6)$$

τότε κάθε ευθεία παράλληλη προς την (ε) θα έχει εξισώσεις

$$A_1x+B_1\psi+\Gamma_1z+\Delta_1=\lambda \quad , \quad A_2x+B_2\psi+\Gamma_2z+\Delta_2=\mu \qquad (7)$$

Για να είναι η ευθεία (7) γενέτειρα της κυλινδρικής επιφάνειας πρέπει οι παράμετροι λ και μ να παίρνουν τέτοιες τιμές ώστε το σύστημα των εξισώσεων (3) της οδηγού και των εξισώσεων (7) να είναι συμβιβαστό. Αν απαλείψουμε τα x,ψ,z μεταξύ των (3) και (7) θα πάρουμε μια σχέση μεταξύ των παραμέτρων λ και μ, την

$$\varphi(\lambda,\mu)=0 \qquad (8)$$

Μεταξύ των (7) και (8) απαλοίφουμε τις παραμέτρους λ και μ οπότε παίρνουμε την εξίσωση της επιφάνειας, που είναι της μορφής

$$\varphi(A_1x+B_1\psi+\Gamma_1z+\Delta_1, A_2x+B_2\psi+\Gamma_2z+\Delta_2)=0 \qquad (9)$$

Συνεπώς η εξίσωση μιας κυλινδρικής επιφάνειας έχει την μορφή (9), δηλαδή είναι συνάρτηση δυο πρωτοβάθμιων παραστάσεων ως προς x,ψ,z οι οποίες παραστάσεις αν εξισωθούν με το μηδέν μας δίνουν μια ευθεία παράλληλη προς τις γενέτειρες της κυλινδρικής επιφάνειας. Αντίστροφα, κάθε εξίσωση της μορφής (9) παριστάνει κυλινδρική επιφάνεια, γιατί αν θέσουμε

$$A_1x+B_1\psi+\Gamma_1z+\Delta_1=\lambda \quad , \quad A_2x+B_2\psi+\Gamma_2z+\Delta_2=\mu \qquad (10)$$

θα έχουμε

$$\varphi(\lambda,\mu)=0 \qquad (11)$$

Δηλαδή, η ευθεία (10) κείται στην επιφάνεια που προκύπτει από την απαλοιφή των λ και μ μεταξύ των (10) και (11), συνεπώς κείται στην επιφάνεια (9). Ώστε η επιφάνεια (9) παράγεται από τις ευθείες (10) για τις οποίες τα λ και μ πληρούν την (11). Ειδικά κάθε εξίσωση της μορφής

$$\varphi(x,\psi)=0$$

παριστάνει κυλινδρική επιφάνεια της οποίας οι γενέτειρες ειναι παράλληλες προς την ευθεία με εξισώσεις

$$x=0 \quad , \quad \psi=0$$

δηλαδή τον άξονα Oz. Παρόμοια συμπεράσματα έχουμε για κάθε εξίσωση της μορφής $\varphi(x,z)=0$ ή της μορφής $\varphi(\psi,z)=0$. Ώστε κάθε εξίσωση από την οποία απουσιάζει η μια μεταβλητή π.χ. η x (ή ψ, ή z) παριστάνει κυλινδρική επιφάνεια με γενέτειρες παράλληλες προς τον άξονα Ox (ή Oψ, ή Oz αντίστοιχα).

Για την περίπτωση που οι γενέτειρες εφάπτονται δοθείσης επιφάνειας εργαζόμαστε ως εξής. Έστω

$$f(x,\psi,z)=0 \tag{12}$$

η εξίσωση της δοθείσης επιφάνειας και

$$\frac{x-k}{\alpha}=\frac{\psi-\lambda}{\beta}=\frac{z-\mu}{\gamma} \tag{13}$$

οι εξισώσεις της γενέτειρας, όπου (k,λ,μ) είναι οι συντεταγμένες του σημείου στο οποίο η γενέτειρα εφάπτεται της επιφάνειας (12). Από τις (13) έχουμε

$$k=x-\alpha t \quad , \quad \lambda=\psi-\beta t \quad , \quad \mu=z-\gamma t$$

Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές αυτές στην εξίσωση (12) θα έχουμε

$$f(x-\alpha t\ ,\ \psi-\beta t\ ,\ z-\gamma t)=0 \tag{14}$$

Για να εφάπτεται όμως η γενέτειρα (13) της επιφάνειας (12) πρέπει η (14) να έχει διπλή ρίζα ως προς t. Η συνθήκη ώστε να συμβαίνει αυτό, δηλαδή να έχει η (14) διπλή ρίζα ως προς t μας δίνει την εξίσωση της ζητούμενης επιφάνειας.

15.2. Παράδειγμα: α) Να βρεθεί η εξίσωση της κυλινδρικής επιφάνειας η οποία έχει οδηγό την καμπύλη

$$4\psi^2-2z^2+x-8\psi-8z-2=0 \quad , \quad x+\psi-z=0$$

και γενέτειρες παράλληλες προς το διάνυσμα $\vec{a}(1,-1,2)$. Οι εξισώσεις των γενετειρών θα είναι

$$\frac{x-k}{1}=\frac{\psi-\lambda}{-1}=\frac{z-\mu}{2} \qquad (15)$$

όπου (k,λ,μ) είναι οι συντεταγμένες του σημείου στο οποίο η γενέτειρα συναντά την οδηγό, δηλαδή έχουμε

$$4\lambda^2-2\mu^2+k-8\lambda-8\mu-2=0 \quad , \quad k+\lambda-\mu=0 \qquad (16)$$

Μεταξύ των (15) και (16) απαλοίφουμε τα k,λ,μ οπότε έχουμε την εξίσωση της ζητούμενης επιφάνειας. Θέτουμε τους ίσους λόγους στην (15) ίσους με t, οπότε παίρνουμε

$$k=x-t \quad , \quad \lambda=\psi+t \quad , \quad \mu=z-2t$$

Οι (16) γίνονται τώρα

$$4(\psi+t)^2-2(z-2t)^2+x-t-8(\psi+t)-8(z-2t)-2=0 \quad ,$$

$$x-t+\psi+t-z+2t=0$$

Η δεύτερη από αυτές μας δίνει $t=-\frac{1}{2}(x+\psi-z)$, οπότε η πρώτη γίνεται

$$4(\psi-\frac{1}{2}(x+\psi-z))^2-2(z+x+\psi-z)^2+x+\frac{1}{2}(x+\psi-z)-8(\psi-\frac{1}{2}(x+\psi-z))-8(z+x+\psi-z)-2=0$$

Μετά από πράξεις παίρνουμε τελικά την εξίσωση της ζητούμενης επιφάνειας

$$2(\psi-x+z)^2-4(x+\psi)^2-5x-23\psi-9z-4=0$$

β) να βρεθεί η εξίσωση της κυλινδρικής επιφάνειας της οποίας οι γενέτειρες είναι παράλληλες προς το διάνυσμα $\bar{a}(1,2,3)$ και η οποία εφάπτεται της επιφάνειας $3x^2+2\psi^2+z^2-5x+2=0$. Οι γενέτειρες θα δίνονται από τις εξισώσεις

$$\frac{x-k}{1}=\frac{\psi-\lambda}{2}=\frac{z-\mu}{3}$$

όπου (k,λ,μ) είναι το σημείο στο οποίο εφάπτεται η γενέτειρα με την επιφάνεια $3x^2+2\psi^2+z^2-5x+2=0$. Έτσι έχουμε $3k^2+2\lambda^2+\mu^2-5k+2=0$, οπότε αν θέσουμε τους ίσους λόγους στις εξισώσεις των γενετειρών ίσους με t παίρνουμε

$$k=x-t \quad , \quad \lambda=\psi-2t \quad , \quad \mu=z-3t$$

Οι τιμές αυτές των k,λ,μ αν αντικατασταθούν στην προηγούμενη σχέση θα μας δώσουν

$$3(x-t)^2+2(\psi-2t)^2+(z-3t)^2-5(x-t)+2=0 \quad \text{ή}$$

$$20t^2-(6x+8\psi+6z+5)t+3x^2+2\psi^2+z^2-5x+2=0$$

Για να εφάπτονται όμως οι γενέτειρες στην δοθείσα επιφάνεια πρέπει η παραπάνω εξίσωση να έχει διπλή ρίζα ως προς t. Δηλαδή πρέπει η διακρίνουσα αυτής να είναι ίση με μηδέν. Η συνθήκη αυτή μας δίνει συγχρόνως και την εξίσωση της ζητούμενης επιφάνειας. Έτσι έχουμε

$$(6x+8\psi+6z+5)^2-80(3x^2+2\psi^2+z^2-5x+2)=0.$$

15.3. Κωνικές επιφάνειες.

Μια επιφάνεια καλείται κωνική όταν παράγεται από μια ευθεία η οποία κινείται έτσι ώστε να διέρχεται από ένα σταθερό σημείο και να συναντά μια σταθερή καμπύλη ή να εφάπτεται δοθείσης επιφάνειας. Το σταθερό σημείο καλείται κορυφή της κωνικής επιφάνειας, η ευθεία που κινείται και παράγει την επιφάνεια λέγεται γενέτειρα ενώ η καμπύλη την οποία συναντά η γενέτειρα λέγεται οδηγός της επιφάνειας.

Έστω $P_0(x_0,\psi_0,z_0)$ η κορυφή και

$$f_1(x,\psi,z)=0 \quad , \quad f_2(x,\psi,z)=0 \tag{17}$$

οι εξισώσεις της οδηγού καμπύλης. Τότε οι εξισώσεις της γενέτειρας θα είναι

$$\frac{x-x_0}{k}=\frac{\psi-\psi_0}{\lambda}=\frac{z-z_0}{\mu} \tag{18}$$

όπου k,λ και μ είναι παράμετροι. Το κοινό σημείο της γενέτειρας και της οδηγού θα επαληθεύει τις (17) και (18). Από τις (18) έχουμε

$$\psi-\psi_0=\frac{\lambda}{k}(x-x_0) \quad , \quad z-z_0=\frac{\mu}{k}(x-x_0) \tag{19}$$

οπότε οι (17), αν αντικαταστήσουμε τις (19) θα μας δώσουν τελικά μια σχέση μεταξύ των παραμέτρων k,λ,μ την

$$\varphi\left(\frac{\lambda}{k}, \frac{\mu}{k}\right)=0 \tag{20}$$

ή ακόμα πιο απλοποιημένη

$$F(k,\lambda,\mu)=0 \tag{21}$$

'Οπως φαίνεται από την (20), η (21) είναι ομογενής ως προς k,λ,μ και η απαλοιφή των παραμέτρων k,λ,μ μεταξύ των (21) και (18) θα μας δώσει την εξίσωση της ζητούμενης επιφάνειας. Αν θέσουμε τους ίσους λόγους στην (18) ίσους με $\frac{1}{t}$ θα πάρουμε

$$k=t(x-x_0) \quad , \quad \lambda=t(\psi-\psi_0) \quad , \quad \mu=t(z-z_0)$$

οπότε η (21) γίνεται

$$F(t(x-x_0),t(\psi-\psi_0),t(z-z_0))=0$$

και επειδή η (21) είναι ομογενής ως προς k,λ,μ θα έχουμε

$$t^nF(x-x_0,\psi-\psi_0,z-z_0)=0$$

και τελικά η εξίσωση της ζητούμενης επιφάνειας θα είναι

$$F(x-x_0,\psi-\psi_0,z-z_0)=0 \tag{22}$$

Επαναλαμβάνουμε εδώ ότι η εξίσωση (22) της κωνικής επιφάνειας είναι ομογενής ως προς $x-x_0,\psi-\psi_0,z-z_0$. Αλλά και αντίστροφα κάθε εξίσωση ομογενής ως προς $x-x_0,\psi-\psi_0,z-z_0$ παριστάνει κωνική επιφάνεια με κορυφή το σημείο $P_0(x_0,\psi_0,z_0)$. Πραγματικά θεωρούμε την ομογενή εξίσωση (22) ως προς $x-x_0,\psi-\psi_0,z-z_0$ και θα δείξουμε ότι αυτή παριστάνει κωνική επιφάνεια με κορυφή το σημείο $P_0(x_0,\psi_0,z_0)$. Έστω $P_1(x_1,\psi_1,z_1)\neq P_0(x_0,\psi_0,z_0)$ τυχόν σημείο που κείται στην επιφάνεια (22). Θα δείξουμε ότι η ευθεία P_0P_1 κείται ολόκληρη πάνω στην επιφάνεια (22). Αν $P_2(x_2,\psi_2,z_2)$είναι τυχόν σημείο της ευθείας P_0P_1, τότε θα έχουμε

$$x_2=x_0+t(x_1-x_0) \quad , \quad \psi_2=\psi_0+t(\psi_1-\psi_0) \quad , \quad z_2=z_0+t(z_1-z_0)$$

οπότε

$$F(x_2-x_0,\psi_2-\psi_0,z_2-z_0)=F(t(x_1-x_0),t(\psi_1-\psi_0),t(z_1-z_0)) =$$

$$= t^nF(x_1-x_0,\psi_1-\psi_0,z_1-z_0) =0$$

αφού η (22) είναι ομογενής ως προς $x-x_0,\psi-\psi_0,z-z_0$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι το σημείο $P_2(x_2,\psi_2,z_2)$ επαληθεύει την (22), δηλαδή κείται στην επιφάνεια. Έτσι το τυχόν σημείο της ευθείας P_0P_1 κείται στην επιφάνεια, δηλαδή η επιφάνεια παράγεται από μια ευθεία που διέρχεται από το σταθερό σημείο P_0, άρα η (22) εκφράζει κωνική επιφάνεια.

Στην περίπτωση που η κωνική επιφάνεια παράγεται από μια ευθεία η οποία διέρχεται από το σταθερό σημείο $P_0(x_0,\psi_0,z_0)$ και εφάπτεται δοθείσης επιφάνειας με εξίσωση

$$f(x,\psi,z) =0 \qquad (23)$$

μπορούμε να προσδιορίσουμε την εξίσωση της κωνικής επιφάνειας ως εξής. Θεωρούμε τις εξισώσεις (18) της γενέτειρας που παράγει την κωνική επιφάνεια. Αυτές μπορούν να γραφούν και με τη μορφή

$$x=x_0+tk \quad , \quad \psi=\psi_0+t\lambda \quad , \quad z=z_0+t\mu$$

οπότε τα κοινά σημεία της γενέτειρας και της δοθείσης επιφάνειας (23) θα δίνονται από τη σχέση

$$f(x_0+tk \; , \; \psi_0+t\lambda \; , \; z_0+t\mu) =0 \tag{24}$$

Για να εφάπτεται η γενέτειρα (18) της επιφάνειας (23) πρέπει η εξίσωση (24) να έχει διπλή ρίζα ως προς t. Η συνθήκη αυτή μας δίνει τη σχέση μεταξύ των παραμέτρων κ,λ,μ που είναι της μορφής $F(\kappa,\lambda,\mu)=0$ και από αυτή παίρνουμε τελικά την εξίσωση της ζητούμενης επιφάνειας, δηλαδή την

$$F(x-x_0 \; , \; \psi-\psi_0 \; , \; z-z_0) =0$$

Σημειώνουμε τέλος, ότι αν ως κορυφή της κωνικής επιφάνειας είναι η αρχή των συντεταγμένων O(0,0,0), τότε η εξίσωση αυτής είναι της μορφής $F(x,\psi,z)=0$ και είναι ομογενής ως προς x,ψ,z. Επίσης και αντίστροφα κάθε ομογενής εξίσωση ως προς x,ψ,z εκφράζει κωνική επιφάνεια με κορυφή την αρχή O(0,0,0).

<u>15.4.Παραδείγματα:</u>α)Να βρεθεί η εξίσωση της κωνικής επιφάνειας η οποία έχει κορυφή το σημείο $P_0(1,1,1)$ και οδηγό την καμπύλη

$$x+\psi+z =0 \quad , \quad \psi^2+z^2 =1$$

Οι εξισώσεις της γενέτειρας είναι

$$\frac{x-1}{k} = \frac{\psi-1}{\lambda} = \frac{z-1}{\mu} \tag{25}$$

Μεταξύ αυτών και των εξισώσεων της οδηγού απαλοίφουμε τα x,ψ,z οπότε έχουμε τη σχέση μεταξύ των παραμέτρων

$$k^2+4\lambda^2+4\mu^2-10\lambda\mu-4\kappa\lambda-4\kappa\mu =0 \tag{26}$$

Μεταξύ αυτής και των εξισώσεων της γενέτειρας απαλοίφουμε τώρα τις παραμέτρους κ,λ,μ οπότε παίρνουμε την εξίσωση της ζητούμενης κωνικής επιφάνειας. Από τις (25) αν θέσουμε τους ίσους λόγους ίσους με $\frac{1}{t}$ θα πάρουμε

$$k=t(x-1) \quad , \quad \lambda=t(\psi-1) \quad , \quad \mu=t(z-1)$$

οπότε η (26) μας δίνει

$$t^2\left[(x-1)^2+4(\psi-1)^2+4(z-1)^2-10(\psi-1)(z-1)-4(x-1)(\psi-1)-4(x-1)(z-1)\right]=0$$

τελικά η εξίσωση της επιφάνειας είναι

$$(x-1)^2+4(\psi-1)^2+4(z-1)^2-10(\psi-1)(z-1)-4(x-1)(\psi-1)-4(x-1)(z-1)=0.$$

β) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $(x+2)(z-x)^2-(\psi-1)^2(z+2\psi)=0$ παριστάνει κωνική επιφάνεια της οποίας να προσδιοριστεί η κορύφη.

Η δοθείσα εξίσωση γράφεται

$$(x+2)\left[(z+2)-(x+2)\right]^2-(\psi-1)^2\left[(z+2)+2(\psi-1)\right]=0 \qquad ή$$

$$(x+2)(z+2)^2-2(x+2)^2(z+2)+(x+2)^3-(\psi-1)^2(z+2)-2(\psi-1)^3=0.$$

Επειδή η εξίσωση αυτή είναι ομογενής βαθμού ομογενείας 3 ως προς $x+2$, $\psi-1$, $z+2$ έπεται ότι παριστάνει κωνική επιφάνεια με κορυφή το σημείο $P_0(-2,1,-2)$.

15.5. Επιφάνειες εκ περιστροφής.

Μια επιφάνεια καλείται επιφάνεια εκ περιστροφής όταν παράγεται με την περιστροφή μιας καμπύλης γύρω από έναν άξονα.

Η καμπύλη που περιστρέφεται και παράγει την επιφάνεια λέγεται γενέτειρα της επιφάνειας εκ περιστροφής. Προφανώς κάθε σημείο της γενέτειρας διαγράφει κατά την περιστροφή μια περιφέρεια κύκλου της οποίας το επίπεδο είναι κάθετο στον άξονα και το κέντρο της κείται πάνω στον άξονα. Συνεπώς μπορούμε να πούμε ότι η επιφάνεια εκ περιστροφής παράγεται από μια περιφέρεια η οποία κινείται έτσι ώστε το κέντρο της να βρίσκεται πάνω στον άξονα, το επίπεδο της να είναι κάθετο στον άξονα και τέλος να συναντά μια δοθείσα καμπύλη. Για να βρούμε την εξίσωση της εκ περιστροφής επιφάνειας εργαζόμαστε ως εξής. Έστω

$$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{\psi-\psi_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma} \qquad (27)$$

οι εξισώσεις του άξονα και

$$f_1(x,\psi,z) = 0 \quad , \quad f_2(x,\psi,z) = 0 \qquad (28)$$

οι εξισώσεις της γενέτειρας. Η περιφέρεια προκύπτει ως τομή μιας σφαίρας που έχει κέντρο το σημείο $P_0(x_0,\psi_0,z_0)$ του άξονα και ενός επιπέδου καθέτου στον άξονα. Έτσι θα έχει εξισώσεις

$$\left.\begin{array}{l}(x-x_0)^2+(\psi-\psi_0)^2+(z-z_0)^2 = \rho^2 \\ \alpha x+\beta\psi+\gamma z = \lambda\end{array}\right. \qquad (29)$$

όπου ρ,λ είναι παράμετροι. Η περιφέρεια (29) πρέπει να συναντά τη γενέτειρα (28). Επομένως πρέπει οι εξισώσεις (28) και (29) να έχουν κοινή λύση ως προς x,ψ,z. Έτσι αν μεταξύ αυτών απαλείψουμε τα x,ψ,z θα βρούμε μια σχέση μεταξύ των παραμέτρων ρ,λ έστω την

$$\varphi(\rho^2,\lambda) = 0 \qquad (30)$$

Αν τώρα μεταξύ των (29) και (30) απαλείψουμε τις παραμέτρους ρ και λ θα βρούμε της εκ περιστροφής επιφάνειας, δηλαδή την

$$\varphi((x-x_0)^2+(\psi-\psi_0)^2+(z-z_0)^2, \alpha x+\beta\psi+\gamma z) = 0 \qquad (31)$$

Στην ειδική περίπτωση που έχουμε ως άξονα περιστροφής έναν από τους άξονες συντεταγμένων και ως γενέτειρα μια καμπύλη που κείται σ'ένα από τα επίπεδα συντεταγμένων τότε η εύρεση της εξίσωσης της εκ περιστροφής επιφάνειας είναι πιό απλή. Για παράδειγμα έστω ότι θέλουμε να βρούμε την εκ περιστροφής επιφάνεια που παράγεται αν περιστρέψουμε την καμπύλη

$$f(x,z)=0 \quad , \quad \psi=0 \qquad (32)$$

γύρω από τον άξονα Oz. Τότε οι εξισώσεις της κινούμενης περιφέρειας είναι

$$x^2+\psi^2=\rho^2 \quad , \quad z=\lambda \qquad (33)$$

Μεταξύ των (32) και (33) απαλοίφουμε τα x,ψ,z οπότε έχουμε τη σχέση μεταξύ των παραμέτρων ρ,λ, δηλαδή

$$f(\pm\rho,\lambda)=0$$

Η απαλοιφή των ρ,λ μεταξύ αυτής και των (33) θα μας δώσει την ζητούμενη εξίσωση της εκ περιστροφής επιφάνειας, δηλαδή

$$f(\pm\sqrt{x^2+\psi^2}\ ,\ z\ )=0$$

Από τα παραπάνω έχουμε ως συμπέρασμα ότι: Αν μια επίπεδη καμπύλη που κείται σ'ένα από τα επίπεδα συντεταγμένων περιστραφεί γύρω από έναν άξονα συντεταγμένων ο οποίος κείται στο επίπεδο της καμπύλης τότε προκύπτει μια εκ περιστροφής επιφάνεια της οποίας η εξίσωση βρίσκεται από την εξίσωση της καμπύλης (όχι αυτήν που παριστάνει το επίπεδο συντεταγμένων) αν αντικαταστήσουμε την μεταβλητή η οποία δεν μετράται στον άξονα περιστροφής με την τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των μεταβλητών οι οποίες δεν μετρούνται στον άξονα περιστροφής.

Έτσι η εκ περιστροφής επιφάνεια η οποία παράγεται όταν η καμπύλη $f(\psi,z)=0$, $x=0$ περιστραφεί γύρω από τον άξονα Oz θα έχει εξίσωση $f(\pm\sqrt{x^2+\psi^2},z)=0$. Επίσης η εκ περιστροφής επιφάνεια που παράγεται από την ίδια καμπύλη, όταν αυτή περιστραφεί γύρω από τον άξονα Οψ, θα έχει εξίσωση $f(\psi,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$. Όμοια βρίσκουμε την εξίσωση της εκ περιστροφής επιφάνειας για τις άλλες ανάλογες περιπτώσεις.

Κάθε ημιεπίπεδο που διέρχεται από τον άξονα περιστροφής μιας εκ περιστροφής επιφάνειας τέμνει την επιφάνεια κατά μια καμπύλη που λέγεται <u>μεσημβρινός</u> της επιφάνειας, ενώ κάθε επίπεδο κάθετο στον άξονα τέμνει την επίφανεια κατά μια περιφέρεια πού λέγεται <u>παράλληλος της επιφάνειας</u>.

<u>15.6.Παραδείγματα:</u>α)Να βρεθεί η εκ περιστροφής επιφάνεια η οποία παράγεται από την περιστροφή της καμπύλης

(c): $\psi^2=4x$, $z=0$ περί την ευθεία (ε): $\psi=0$, $z=2$.

Οι εξισώσεις του άξονα μπορούν να γραφούν και με την μορφή

$$\frac{x}{1}=\frac{\psi}{0}=\frac{z-2}{0}$$

Δηλαδή ο άξονας περιστροφής διέρχεται από το σημείο $P_0(0,0,2)$ και είναι παράλληλος προς το διάνυσμα $\bar{\alpha}(1,0,0)$. Έτσι η μεταβλητή περιφέρεια που θα παράγει την εκ περιστροφής επιφάνεια θα έχει εξισώσεις

$$x=\lambda \quad , \quad x^2+\psi^2+(z-2)^2=\rho^2 \qquad (33)$$

Μεταξύ των (33) και των εξισώσεων της (c) απαλοίφουμε τα x,ψ,z, οπότε έχουμε μια σχέση μεταξύ των παραμέτρων ρ,λ δηλαδή

$$(\lambda+2)^2-\rho^2=0$$

Μεταξύ αυτής τώρα και των (33) απαλοίφουμε τα ρ,λ οπότε έχουμε την εξίσωση της εκ περιστροφής επιφάνειας, δηλαδή

$$4(x+z)-\psi^2-z^2=0.$$

β)Να βρεθεί η εκ περιστροφής επιφάνεια η οποία παράγεται δια περιστροφής της καμπύλης (c): $2\psi^2-z^2=8$, $x=0$ γύρω από τον άξονα Oz.

Επειδή η καμπύλη (c) κείται στο επίπεδο $O\psi z$ και περιστρέφεται γύρω από τον άξονα Oz η εξίσωση της εκ περιστροφής επιφάνειας θα βρεθεί αν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση $2\psi^2-z^2=8$ την μεταβλητή ψ με την $\pm\sqrt{x^2+\psi^2}$. 'Ετσι έχουμε

$$2(x^2+\psi^2)-z^2 =8.$$

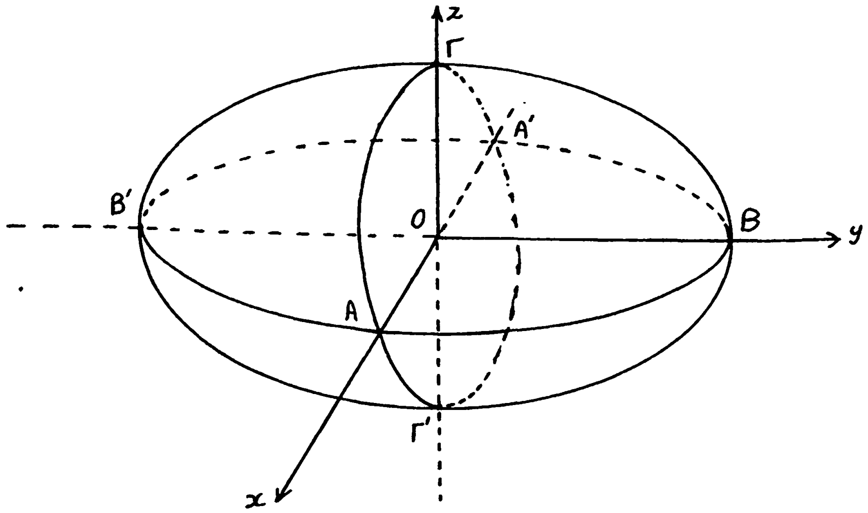
Στις επόμενες παραγράφους θα μελετήσουμε τις καλούμενες επιφάνειες δευτέρου βαθμού, δηλαδή τις επιφάνειες των οποίων η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού ως προς x,ψ,z.

15.7.Ελλειψοειδές

Ελλειψοειδές καλείται η επιφάνεια της οποίας η εξίσωση είναι

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1 \quad , \quad \alpha,\beta,\gamma>0 \qquad (34)$$

Από την εξίσωση (34) φαίνεται ότι αν το σημείο (x,ψ,z) κείται στην επιφάνεια τότε και καθένα από τα οκτώ σημεία $(\pm x,\pm\psi,\pm z)$ κείται στην επιφάνεια. Επομένως η επιφάνεια είναι συμμετρική ως προς τα επιπέδα συντεταγμένων, τους άξονες συντεταγμένων και την αρχή O. Επίσης το ελλειψοειδές τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(\alpha,0,0)$, $A'(-\alpha,0,0)$ $B(0,\beta,0)$, $B'(0,-\beta,0)$, $\Gamma(0,0,\gamma)$, $\Gamma'(0,0,-\gamma)$ (Σχ.1). Από την εξίσωση (34) παρατηρούμε ότι $-\alpha\le x\le\alpha$, $-\beta\le\psi\le\beta$, $-\gamma\le z\le\gamma$, δηλαδή η επιφά-



Σχ.1

νεια του ελλειψοειδούς κείται μέσα στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με έδρες $x=\pm\alpha$, $\psi=\pm\beta$, $z=\pm\gamma$. Τέλος σημειώνουμε ότι οι τομές της επιφάνειας με τα επίπεδα συντεταγμένων είναι

(i) με το επίπεδο Οxψ η έλλειψη

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1 \quad , \quad z=0$$

(ii) με το επίπεδο Οψz η έλλειψη

$$\frac{\psi^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1 \quad , \quad x=0$$

(iii) με το επίπεδο Οzx η έλλειψη

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1 \quad , \quad \psi=0 .$$

15.8. Μονόχωνο υπερβολοειδές.

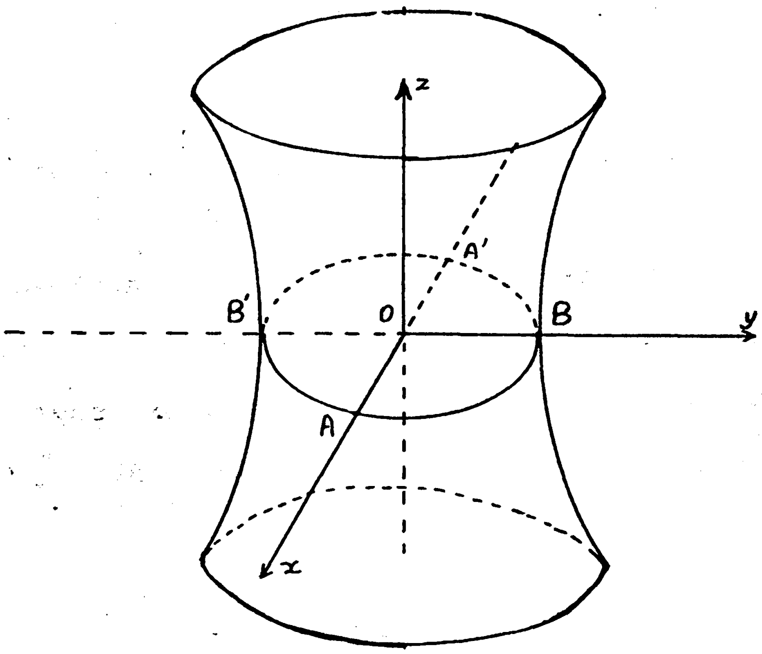
Μονόχωνο υπερβολοειδές καλείται η επιφάνεια η οποία ως προς το ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Οxψz έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1 \qquad \alpha,\beta,\gamma>0 \tag{35}$$

$$\left(\text{ή} \quad -\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1 \quad , \quad \text{ή} \quad \frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{\psi^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1\right)$$

'Οπως στην περίπτωση του ελλειψοειδούς, έτσι και εδώ παρατηρούμε ότι η επιφάνεια είναι συμμετρική ως προς τα επίπεδα συντεταγμένων, τους άξονες και την αρχή Ο. Επίσης ο άξονας Οx τέμνει την επιφάνεια στα σημεία $A(\alpha,0,0)$, $A'(-\alpha,0,0)$ και ο άξονα Οψ στα σημεία $B(0,\beta,0)$, $B'(0,-\beta,0)$ (Σχ.2), ενώ ο άξονας Οz δεν τέμνει την επιφάνεια γιατί για $x=0$, $\psi=0$, έχουμε $z^2=-\gamma^2$.

Τέλος οι τομές της επιφάνειας με τα συντεταγμένα επίπεδα είναι:



Σχ.2

(i) Με το επίπεδο Οxψ η έλλειψη

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1 \quad , \quad z=0$$

(ii) Με το επίπεδο Οψz η υπερβολή

$$\frac{\psi^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1 \quad , \quad x=0$$

(iii) Με το επίπεδο Οzx η υπερβολή

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1 \quad , \quad \psi=0$$

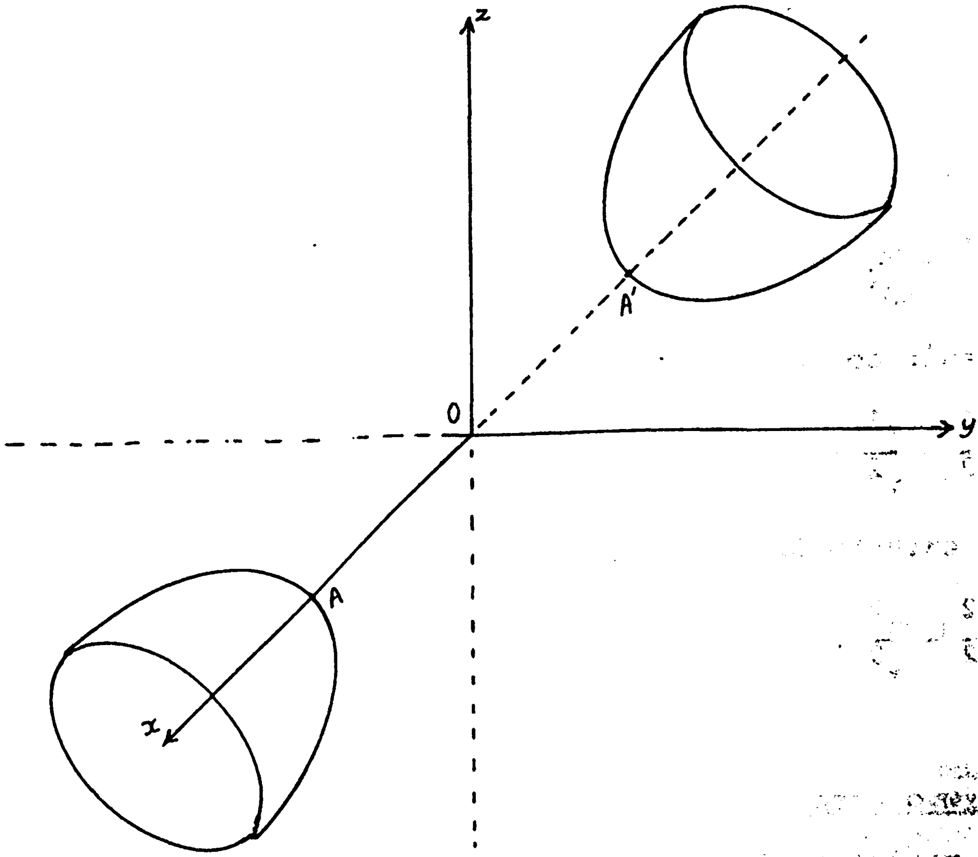
15.9.Δίχωνο υπερβολοειδές.

Δίχωνο υπερβολοειδές καλείται η επιφάνεια η οποία ως προς το ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Οxψz έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{\psi^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1 \quad , \quad \alpha,\beta,\gamma>0 \qquad (36)$$

$$\left(\text{ή} \quad -\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1 \quad , \quad \text{ή} \quad -\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{\psi^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1\right)$$

'Οπως οι προηγούμενες επιφάνειες έτσι και το δίχωνο υπερβολοειδές είναι μια επιφάνεια συμμετρική ως προς τα επίπεδα συντεταγμένων, τους άξονες συντεταγμένων και την αρχή Ο. Ο άξονας Οx τέμνει την επιφάνεια στα σημεία Α(α,0,0) και Α'(-α,0,0), ενώ οι άξονες Οψ και Οz δεν τέμνουν την επιφάνεια (Σχ.3)



Σχ.3

Οι τομές της επιφάνειας με τα συντεταγμένα επίπεδα είναι

(i) με το επίπεδο Οxψ η υπερβολή

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{\psi^2}{\beta^2}=1 \quad , \quad z=0$$

(ii) με το επίπεδο Οzx η υπερβολή

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1 \quad , \quad \psi=0$$

(iii) το επίπεδο Οψz δεν τέμνει την επιφάνεια, γιατί για x=0 έχουμε $-\frac{\psi^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1$, ενώ κάθε επίπεδο παράλληλο προς το Οψz με εξίσωση x=k, όπου $|k|>\alpha$ τέμνει την επιφάνεια κατά την έλλειψη

$$\frac{\psi^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=\frac{k^2}{\alpha^2}-1 \quad , \quad x=\lambda$$

Μεταξύ των επιπέδων $x=\pm\alpha$ δεν υπάρχουν σημεία της επιφάνειας και έτσι παρατηρούμε ότι η επιφάνεια αποτελείται από δύο τμήματα (δύο χοάνες) μια για $x\geq\alpha$ και μια για $x\leq-\alpha$.

15.10. Ελλειπτικό παραβολοειδές.

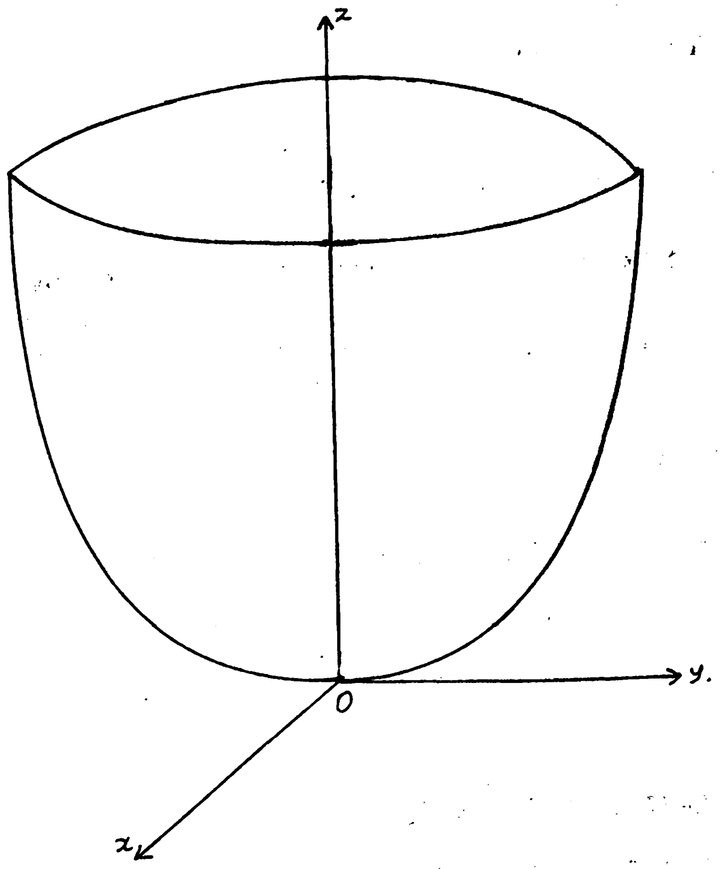
Ελλειπτικό παραβολοειδές καλείται η επιφάνεια η οποία ως προς το ορθογώνιο συστημα συντεταγμένων Οxψz έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=2\gamma z \quad , \quad \alpha,\beta>0 \tag{37}$$

$$\left(\text{ή } \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{z^2}{\beta^2}=2\gamma\psi \quad \text{ή} \quad \frac{\psi^2}{\alpha^2}+\frac{z^2}{\beta^2}=2\gamma x\right)$$

Παρατηρούμε ότι η επιφάνεια είναι συμμετρική ως προς τα επίπεδα συντεταγμένων Οψz, Οzx και ως προς τον άξονα Οz, γιατί αν το σημείο (x,ψ,z) κείται στην επιφάνεια, τότε και τα τέσσερα σημεία

$(\pm x, \pm\psi, z)$ κείνται επίσης στην επιφάνεια (Σχ.4). Αν $\gamma>0$, τότε έχουμε πάντοτε $z\geq 0$, οπότε η επιφάνεια κείται προς το ένα μέρος του επιπέδου $O x\psi$



Σχ.4

Το επίπεδο $Ox\psi$ συναντά την επιφάνεια μόνο στην αρχή O. Το επίπεδο $O\psi z$ τέμνει την επιφάνεια κατά την παραβολή

$$\psi^2=2\beta^2\gamma z \quad , \quad x=0$$

και το επίπεδο Oxz κατά την παραβολή

$$x^2=2\alpha^2\gamma z \quad , \quad \psi=0$$

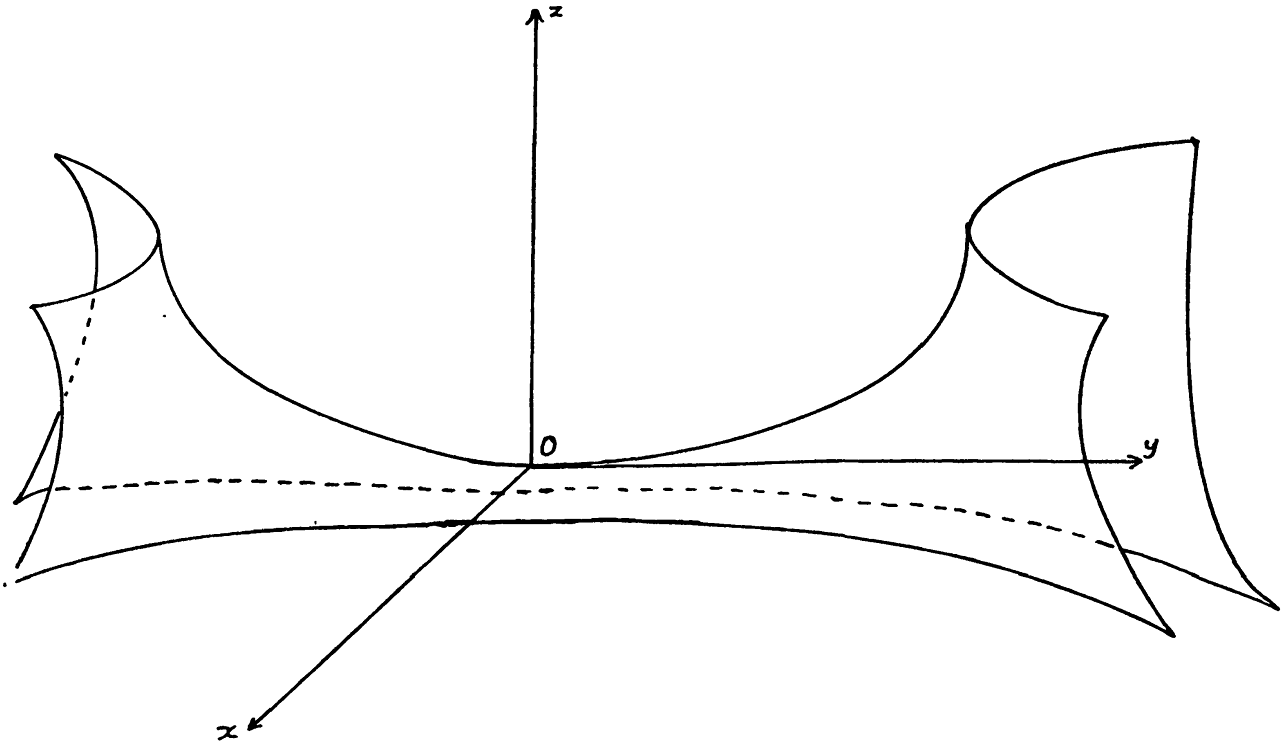
Τέλος κάθε επίπεδο παράλληλο προς το $Ox\psi$ με εξίσωση $z=k$, $k\geq 0$ τέμνει την επιφάνεια κατά την έλλειψη

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=2\gamma k \quad , \quad z=k .$$

15.11. Υπερβολικό Παραβολοειδές.

Υπερβολικό παραβολοειδές καλείται η επιφάνεια η οποία ως προς το ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Οχψz έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{\psi^2}{\beta^2} = 2\gamma z \qquad (38)$$



Σχ.5

Η επιφάνεια είναι συμμετρική ως προς τα επίπεδα συντεταγμένων Οψz και Οzx καθώς επίσης και ως προς τον άξονα Οz (Σχ.5).

Το επίπεδο Οχψ τέμνει την επιφάνεια κατά τις ευθείες

$$\frac{x}{\alpha} \pm \frac{\psi}{\beta} = 0 \quad , \quad z=0$$

Το επίπεδο Οψz τέμνει την επιφάνεια κατά την παραβολή

$$\psi^2 = -2\beta^2\gamma z \quad , \quad x=0$$

Το επίπεδο Οzx τέμνει την επιφάνεια κατά την παραβολή

$$x^2=2\alpha^2\gamma z \quad , \quad \psi=0$$

Τέλος κάθε επίπεδο παράλληλο προς το $0x\psi$ τέμνει την επιφάνεια κατά την υπερβολή

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{\psi^2}{\beta^2}=2\gamma k \quad , \quad z=k \ .$$

16. Ασκήσεις

1. Να βρεθεί η εξίσωση της κυλινδρικής επιφάνειας η οποία έχει ως οδηγό την καμπύλη $x\psi=1$, $z=0$ και γενέτειρες παράλληλες προς το διάνυσμα $\bar{\alpha}(1,-1,-2)$.

2. Να βρεθεί η εξίσωση της κυλινδρικής επιφάνειας η οποία έχει ως οδηγό την καμπύλη $\psi^2=x$, $z=0$ και γενέτειρες παράλληλες προς τη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{\psi 0 z}$.

3. Να βρεθεί η κυλινδρική επιφάνεια η οποία έχει οδηγό την καμπύλη $x^2+\psi^2=1$, $z=0$ και γενέτειρες παράλληλες προς την ευθεία $x=\psi=z$.

4. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $17x^2+2\psi^2+z^2-8x\psi-6xz-2=0$ παριστάνει κυλινδρική επιφάνεια, της οποίας να βρεθούν οι γενέτειρες και η οδηγός.

5. Να βρεθεί η εξίσωση της κυλινδρικής επιφάνειας της οποίας οι γενέτειρες είναι παράλληλες προς το διάνυσμα $\bar{\alpha}(1,2,3)$ και εφάπτονται της επιφάνειας $x^2+\psi^2+z^2=1$.

6. Να βρεθεί η εξίσωση της κωνικής επιφάνειας, η οποία έχει κορυφή το σημείο $(3,5,-2)$ και οδηγό την καμπύλη $4x^2+9\psi^2=36$, $z=0$.

7.Να βρεθεί η εξίσωση της κωνικής επιφάνειας, η οποία έχει κορυφή το σημείο (1,2,3) και οδηγό την καμπύλη $9x^2+4z^2=36$, $\psi=5$.

8.Να βρεθεί η εξίσωση της κωνικής επιφάνειας, η οποία έχει κορυφή το σημείο $O(0,0,0)$ και οδηγό την καμπύλη $x^2+\psi^2=x$, $z=1$.

9.Να βρεθεί η εξίσωση της κωνικής επιφάνειας η οποία έχει κορυφή το σημείο (6,9,12) και οι γενέτειρες της εφάπτονται της επιφάνειας $x^2+2\psi^2+3z^2=5$.

10.Ένας κυκλικός δίσκος έχει κέντρο το σημείο $K(1,0,2)$, ακτίνα $\rho=1$ και το επίπεδο του είναι παράλληλο προς το επίπεδο ψOz. Ο δίσκος φωτίζεται από μια φωτεινή πηγή που βρίσκεται στο σημείο $A(0,0,\alpha)$. Να προσδιοριστεί το α έτσι ώστε η σκιά του δίσκου επί του επιπέδου $xO\psi$ να είναι παραβολή. Στη συνέχεια να βρεθούν οι εξισώσεις της παραβολής. Για ποιά τιμή του α η σκιά του δίσκου στο επίπεδο $xO\psi$ είναι ισοσκελής υπερβολή;

11.Να βρεθεί το είδος της επιφάνειας $z^2+4x\psi=0$ καθώς και τα χαρακτηριστικά στοιχεία αυτής.

12.Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x\psi+2z^2-2x-\psi+2=0$ παριστάνει κωνική επιφάνεια της οποίας να βρεθεί η κορυφή.

13.Να βρεθεί η εξίσωση της εκ περιστροφής επιφάνειας η οποία παράγεται δια περιστροφής της καμπύλης $x^2-2z=0$, $\psi=0$ περί τον άξονα Oz.

14. Να βρεθεί η εξίσωση της εκ περιστροφής επιφάνειας η οποία παράγεται δια περιστροφής της καμπύλης $x^2+\psi^2-2x=0$, $z=0$ περί τον άξονα Οx.

15. Να βρεθεί η εξίσωση της εκ περιστροφής επιφάνειας η οποία παράγεται δια περιστροφής της καμπύλης $x^2+(\psi-2)^2+z^2=1$, $\psi-2x=0$ περί τον άξονα Οz.

16. Να δειχθεί ότι οι παρακάτω εξισώσεις παριστάνουν επιφάνειες εκ περιστροφής. Στη συνέχεια να προσδιοριστούν οι μεσημβρινοί και οι άξονες αυτών

α) $x^2\psi^2+x^2z^2=1$

β) $x^2+4\psi^2+4z^2=36$

γ) $x^2+\psi^2+z^2-2\psi+1=0$

δ) $x^2z+\psi^2z=1$.

17. Να βρεθεί το είδος της επιφάνειας που παριστάνει η εξίσωση $3x^2+4\psi^2-2z^2-6x-16\psi+8z-13=0$.

18. Να βρεθούν οι ορθές προβολές επί των συντεταγμένων επιπέδων των παρακάτω καμπύλων

α) $2x^2+5\psi^2-z=0$, $x^2+\psi^2+z-6=0$

β) $x^2+\psi^2+z^2=9$, $x+\psi+z=3$.

19. Να βρεθούν οι εξισώσεις της ορθής προβολής της καμπύλης $x^2+\psi^2+z^2=4$, $x+3\psi+z=2$ στο επίπεδο $x-\psi+z=0$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Aitken,A.C. *Determinants and Matrices* , Oliver and Boyd , Edinburg and London , 1958 .

2. Ανδρεαδάκη,Σ.Α. Μαθήματα Αναλυτικής Γεωμετρίας , Ιωάννινα , 1969 .

3. Ανδρεαδάκη,Σ.Α. Μαθήματα Γραμμικής Άλγεβρας , Αθήνα , 1974 .

4. Archbold,J.W. *Algebra* , Sir Isaak Pitman and Sons LTD , 1964 .

5. Bronson,R. *Matrix Methods* , An Introduction , Academic Press , New York , 1972 .

6. Dieudonne,J. *Linear Algebra and Geometry* , Hermann , Paris , 1969 .

7. Hadley , G. *Linear Algebra* , Addison-Wesley , 1965 .

8. Hoffman,K.-Kunze,R. *Linear Algebra* , Prentice Hall , New Jersey , 1965 .

9. Lang,S. *Linear Algebra* , Addison-Wesley Publishing Com. , 1971 .

10. Lightstone,A.H. *Linear Algebra* , Appleton-Century-Crofts , 1969 .

11. Lipschutz,S. *Linear Algebra* , Schaum's Outline Series , McGraw-Hill Book Com. , 1968 .

12. Loonstra,F. *Introduction to Algebra* , McGraw-Hill , London , 1969 .

13. Mac Lane,S.-Birkhoff,G. *Algebra* , The Macmillan Com.New York , 1967 .

14. Marcus,M.-Minc,H. *Introduction to linear Algebra* , Macmillan , New York , 1965 .

15. Μπρίκα ,Μ.Α. Μαθήματα Αναλυτικής Γεωμετρίας , Αθήνα , 1961 .

16. Salmon,G. *Analytic Geometry of three dimensions* , Chelsea Publishing Com., Seventh edition Vol.I,II.

17. Salmon,G. *Conic Sections* , Chelsea Publishing Co , New York , sixth edition.

18. Shields,P.C. *Linear Algebra* , Addison Wesley , 1965 .

19. Smith,E.S.-Solkover,M.-Justice,H.K. *Analytic Geometry* , John Wiley and Sons , New York , 1966 .

20. Steen,F.H. *Analytic Geometry* , Blaisdell Publishing Com. , 1963

21. Taylor,A. *Calculus with Analytic Geometry* , Prentice-Hall

22. Τσάγκα.,Γ. Αναλυτική Γεωμετρία , Θεσσαλονίκη , 1977 .

23. Walker,R. *Analytic Geometry* , London , 1952-1957-1960-1962 .

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ

Τυπώθηκε στο Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο με δαπάνη του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Κ.Α. Πανεπιστημιακού Τυπογραφείου. ....

Ο.Τ. ....

Διατίθεται και στο Βιβλιοπωλείο του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, Δομπόλη, 451 10 Ιωάννινα τηλ. 21801.

ΔΙΑΝΕΜΕΤΑΙ ΔΩΡΕΑΝ στους φοιτητές.