ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΧΡΙΣΤΟΣ ΑΝΑΣΤ. ΜΠΑΪΚΟΥΣΗΣ

Αναπληρωτής Καθηγητής

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 1993

ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΚΑΙ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

[illegible]

[illegible]

ΜΑΘΗΜΑΤΑ
ΑΛΓΕΒΡΑΣ
ΚΑΙ
ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΧΡΙΣΤΟΣ ΑΝΑΣΤ. ΜΠΑΪΚΟΥΣΗΣ

Αναπληρωτής Καθηγητής

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 1993

Αντί Προλόγου

Τα "Μαθήματα Άλγεβρας και Αναλυτικής Γεωμετρίας" προορίζονται για πρωτοετείς φοιτητές Φυσικού Τμήματος και περιλαμβάνουν βασικές έννοιες και προτάσεις της θεωρίας συνόλων, αλγεβρικών δομών, συνδυαστικής ανάλυσης, πινάκων, οριζουσών, γραμμικών συστημάτων, διανυσματικών χώρων, αναλυτικής γεωμετρίας του επιπέδου και του χώρου.

Επειδή η Άλγεβρα και η Αναλυτική Γεωμετρία, μαζί με τον Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό, αποτελούν τα πρώτα και πλέον απαραίτητα "μαθηματικά εργαλεία" για έναν φοιτητή Φυσικού Τμήματος, καταβλήθηκε προσπάθεια το βιβλίο να είναι απλό και αυτοδύναμο έτσι ώστε ο αναγνώστης να κατανοεί την ύλη, χωρίς να καταφεύγει σε άλλα βοηθήματα.

Θεωρώ καθήκον μου να ευχαριστήσω το συνάδελφό μου Θεμιστοκλή Κουφογιώργο για τις χρήσιμες παρατηρήσεις του. Επίσης ευχαριστώ τη Γραμματέα του Τομέα Άλγεβρας και Γεωμετρίας του Μαθηματικού Τμήματος κ. Αθηναΐδα Δούβλη για την επιμελημένη δακτυλογράφηση του κειμένου.

Χρίστος Αναστ. Μπαϊκούσης

Γιάννινα, Οκτώβριος 1984

Αντί προλόγου

Τα "Μαθήματα Αλγέβρας και Αναλυτικής Γεωμετρίας" προορίζονται για πρωτοετείς φοιτητές Φυσικού Τμήματος και περιλαμβάνουν βασικές έννοιες και προτάσεις της θεωρίας συνόλων, αλγεβρικών δομών, συνδυαστικής ανάλυσης, πινάκων, οριζουσών, γραμμικών συστημάτων, διανυσματικών χώρων, αναλυτικής γεωμετρίας του επιπέδου και του χώρου.

Επειδή η Άλγεβρα και η Αναλυτική Γεωμετρία, μαζί με τον Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό, αποτελούν τα πρώτα και πλέον απαραίτητα "μαθηματικά εργαλεία" για έναν φοιτητή Φυσικού Τμήματος, καταβλήθηκε προσπάθεια το βιβλίο να είναι απλό και αυτοδύναμο έτσι ώστε ο σπουδαστής να κατανοεί την ύλη, χωρίς να καταφεύγει σε άλλα βοηθήματα.

Θεωρώ καθήκον μου να ευχαριστήσω το συνάδελφο κ. Θεμιστοκλή Χουσογιάννο για τις κριτικές παρατηρήσεις του. Επίσης ευχαριστώ τη γραμματέα του Τομέα Άλγεβρας και Γεωμετρίας του Μαθηματικού Τμήματος, κ. [illegible] για την επιμελημένη δακτυλογράφηση του κειμένου.

[illegible]

Ιωάννινα, [illegible]

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΣΥΝΟΛΑ ΚΑΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ

1.Σύνολα.

Στα διάφορα βιβλία που πραγματεύονται τα στοιχεία της θεωρίας συνόλων , συνήθως αποφεύγεται να δοθεί ένας αυστηρός ορισμός της έννοιας του συνόλου . Η αποφυγή αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι η έννοια του συνόλου είναι αρχική έννοια . Παρατηρείται λοιπόν και εδώ ό,τι ακριβώς γίνεται και σε άλλους τομείς της μαθηματικής επιστήμης π.χ. στη Γεωμετρία όπου αρχίζει κανείς και παραθέτει σχέσεις και ιδιότητες μεταξύ σημείων και ευθειών χωρίς να ορίσει τι είναι σημείο ή ευθεία . Σε μία αξιωματική θεμελίωση της θεωρίας των συνόλων δίνεται αυστηρός ορισμός της έννοιας του συνόλου , αυτό όμως εκφεύγει από το σκοπό μας . Αρκούμαστε λοιπόν στο να πούμε ότι ένα <u>σύνολο</u> Α καθορίζεται από μία ιδιότητα $P(x)$ αν συμφωνήσουμε και δεχθούμε ότι οι "μαθηματικές οντότητες" α , στο εξής θα καλούνται <u>στοιχεία</u> του συνόλου , οι οποίες "φτιάχνουν" το σύνολο Α είναι εκείνες για τις οποίες η $P(\alpha)$ είναι αληθής πρόταση . Συνήθως σημειώνουμε αυτό το γεγονός γράφοντας

$$A=\{x/\,P(x)\}\ .$$

Γράφουμε $\alpha\in A$ για να δηλώσουμε ότι το στοιχείο α ανήκει στο σύνολο Α και $\beta\notin A$ για να δηλώσουμε ότι το β δεν ανήκει στο Α . Έτσι έχουμε $\alpha\in\{x/P(x)\}$ αν και μόνον αν η $P(\alpha)$ είναι αληθής πρόταση . Το σύνολο Α που συνίσταται από τα στοιχεία $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ σημειώνεται επίσης και

$$A=\{\alpha,\beta,\gamma,\ldots\}\ .$$

Λέμε ότι το σύνολο Α είναι <u>υποσύνολο</u> του συνόλου Β αν και μόνο αν κάθε στοιχείο του συνόλου A είναι και στοιχείο του συνόλου B . Γράφουμε το γεγονός αυτό $A \subseteq B$ ή $B \supseteq A$.

Λέμε ότι δύο σύνολα A και B είναι ίσα αν και μονο αν $A \subseteq B$ και συγχρόνως $B \subseteq A$. Γράφουμε για την ισότητα των συνόλων A και B τη σχέση $A = B$.

'Ενα σύνολο A λέγεται <u>γνήσιο υποσύνολο</u> του B αν $A \subseteq B$, αλλά δεν ισχύει η σχέση $B \subseteq A$.Δηλαδή σ'αυτή τη περίπτωση έχουμε $A \subseteq B$ και $A \neq B$. Αν το A είναι γνήσιο υποσύνολο του B γράφουμε $A \subset B$. Το <u>κενό σύνολο</u> είναι το σύνολο που δεν έχει στοιχεία και σημειώνεται με $\emptyset$. Το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου . Για να ισχύει αυτό πρέπει να δείξουμε τον εξής ισχυρισμό : Αν A είναι τυχόν σύνολο τότε κάθε στοιχείο του $\emptyset$ είναι και στοιχείο του A. Αλλά , εξ ορισμού , το $\emptyset$ δεν έχει στοιχεία, έτσι ο ισχυρισμός μας αυτόματα πληρούται .

Το <u>δυναμοσύνολο</u> $\mathcal{P}(A)$ του συνόλου A είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A . Αν το σύνολο A έχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων έστω m , τότε το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(A)$ έχει 2^m στοιχεία .

Αν B είναι ένα υποσύνολο του A , τότε το σύνολο που αποτελείται από εκείνα τα στοιχεία του A τα οποία δεν ανείκουν στο B καλείται <u>συμπλήρωμα</u> του B (ως προς το A) και σημειώνεται $C(B)$ ή $A-B$ ή A/B . Γενικά αν A και B είναι υποσύνολα του συνόλου V, τότε $A-B$ (ή A/B) θα σημαίνει το υποσύνολο του A του οποίου τα στοιχεία δεν ανήκουν στο B .

Η <u>ένωση</u> των συνόλων A και B , συμβολίζεται $A \cup B$, είναι το σύνολο όλων των στοιχείων τα οποία ανήκουν ή στο σύνολο A ή στο σύνολο B . 'Ετσι έχουμε $x \in A \cup B$ αν και μόνο αν το x ανήκει τουλάχιστον σε ένα από τα A και B .

Η <u>τομή</u> δύο συνόλων A και B , σημειώνεται $A \cap B$, είναι το σύνολο όλων των στοιχείων που ανήκουν σε αμφότερα τα σύνολα A και B .

Δύο σύνολα A και B λέγονται <u>ξένα μεταξύ τους</u> αν $A \cap B = \emptyset$.

'Εστω A ένα σύνολο και $\mathcal{C}$ μία συλλογή υποσυνόλων του A με τις ιδιότητες

i) $\bigcup \mathcal{C} = A$, όπου $\bigcup \mathcal{C} = \{x / x \in X$ για κάποιο $X \in \mathcal{C}\}$

ii) $X \cap Y = \emptyset$, για $X, Y \in \mathcal{C}$.

Τότε λέμε ότι έχουμε μία <u>διαμέριση</u> του A .

Το <u>καρτεσιανό γινόμενο</u> των συνόλων $V_1, V_2, \ldots, V_k$ είναι το σύνολο V όλων των διατεταγμένων k-άδων $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$, $u_i \in V_i$ $i=1,2,\ldots,k$. 'Εχουμε κάνει τη σύμβαση ότι $(u_1, u_2, \ldots, u_k) = (u_1', u_2', \ldots, u_k')$ τότε και μόνο τότε αν $u_i = u_i'$, $i=1,2,\ldots,k$. Σημειώνουμε $V = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_k$ ή $V = \bigtimes_{1 \leq i \leq k} V_i$.

2.Σχέσεις

Αν δοθούν δύο σύνολα A,B ένα υποσύνολο R του καρτεσιανού γινομένου $A \times B$ καλείται <u>σχέση</u> από το A στο B . Ιδιαίτερα αν A=B τότε λέμε ότι ένα $R \subseteq A \times A$ είναι μία σχέση στο A . Αν $(x,y) \in R$ γράφουμε συνήθως xRy και λέμε ότι το x βρίσκεται σε σχέση R με το y . Πολλές φορές χρησιμοποιούμε διάφορα σύμβολα για να δηλώσουμε ορισμένες σχέσεις όπως π.χ. ισότητα , ανισότητα , ταύτιση κ.λ.π. δηλαδή $x=y$, $x<y$, $x \equiv y$ κ.λ.π.

Μία σχέση R στο σύνολο A λέγεται <u>αυτοπαθής</u> ή <u>ανακλαστική</u> αν και μόνο αν $xRx \ \forall x \in A$, <u>συμμετρική</u> αν $xRy \Leftrightarrow yRx$, <u>αντισυμμετρική</u> αν xRy και $yRx \Rightarrow x=y$ και τέλος <u>μεταβατική</u> αν xRy και $yRz \Rightarrow xRz$.

Μία σχέση R στο A καλείται <u>σχέση ισοδυναμίας</u> αν είναι ανακλαστική , συμμετρική και μεταβατική . Συνήθως για μία σχέση ισοδυναμίας χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\sim$ αντί του R .

Μία σχέση R στο A καλείται <u>σχέση διατάξεως</u> αν είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική. Συνήθως μία σχέση διατάξεως συμβολίζεται με $\leq$ αντί του R.

Έστω $\sim$ μία σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο A. Αν $\alpha \in A$ θέτουμε $C_\alpha = \{x / x \in A$ και $x \sim \alpha\}$. Το σύνολο C_α αποτελείται από όλα τα στοιχεία του A που είναι ισοδύναμα με το α. Αν $\beta \in A$ τότε είτε $C_\alpha = C_\beta$ είτε $C_\alpha \cap C_\beta = \emptyset$. Πραγματικά αν υποθέσουμε ότι $C_\alpha \cap C_\beta \neq \emptyset$, τότε $\gamma \in C_\alpha \cap C_\beta$ σημαίνει ότι $\gamma \sim \alpha$ και $\gamma \sim \beta$, όποτε $\alpha \sim \beta$, αφού η $\sim$ είναι συμμετρική και μεταβατική. Έτσι αν $x \in C_\alpha$ τότε $x \sim \alpha$ και επειδή $\alpha \sim \beta$ έχουμε $x \sim \beta$, δηλαδή $x \in C_\beta$. Ομοίως και αντίστροφα αν $x \in C_\beta$ έχουμε ότι $x \in C_\alpha$. Επομένως $C_\alpha = C_\beta$. Τα σύνολα C_α για $\alpha \in A$ καλούνται <u>κλάσεις ισοδυναμίας</u> και αποτελούν μία διαμέριση του A. Αντίστροφα, αν δοθεί μία διαμέριση $\mathcal{C}$ του συνόλου A μπορούμε να ορίσουμε μία σχέση ισοδυναμίας σ' αυτό ως εξής. Θέτουμε $x \sim y$ αν και μόνο αν $x, y \in X$ για κάποιο $X \in \mathcal{C}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Το σύνολο $\mathcal{C}$ των κλάσεων ισοδυναμίας καλείται <u>σύνολο πηλίκο</u> ως προς την ισοδυναμία $\sim$ και συμβολίζεται συνήθως $A/\sim$. Έχουμε επομένως $A/\sim \subset \mathcal{P}(A)$.

Αν $R \subseteq A \times B$ είναι μία σχέση από το A στο B, τότε μπορούμε να ορίσουμε την <u>αντίστροφη σχέση</u> R^{-1} που είναι μία σχέση από το B στο A ως εξής: $(\beta, \alpha) \in R^{-1} \Longleftrightarrow (\alpha, \beta) \in R$.

Αν $R \subseteq A \times B$ και $S \subseteq B \times C$ είναι δύο σχέσεις, τότε μπορούμε να ορίσουμε μία σχέση από το A στο C και να τη συμβολίσουμε $S \circ R$ ως εξής $S \circ R \subseteq A \times C$ και

$$S \circ R = \{x / x = (\alpha, \gamma) \text{ και } \exists\, \beta \in B \text{ ώστε } (\alpha, \beta) \in R \text{ και } (\beta, \gamma) \in S\}.$$

Η $S \circ R$ καλείται <u>σύνθεση</u> των R και S.

3. Απεικονίσεις

Μία απεικόνιση f ενός συνόλου V σ'ένα άλλο σύνολο V', τη σημειώνουμε $f:V\to V'$ είναι ένας "νόμος" (κανόνας) ο οποίος από ένα στοιχείο του V μας δίνει ένα ακριβώς στοιχείο του V'. Δηλαδή μία απεικόνιση f του V στο V' είναι μία σχέση $f\subseteq V\times V'$ τέτοια ώστε για κάθε $x\in V$ υπάρχει ένα μόνο στοιχείο $x'\in V'$ ώστε $(x,x')\in f$. Αν $f:V\to V'$ είναι μία απεικόνιση και $x\in V$ τότε το μοναδικό στοιχείο x' για το οποίο $(x,x')\in f$ το γράφουμε xf ή $f(x)$ ή f_x ή f^x και το καλούμε εικόνα του x (μέσω της f).

Δύο απεικονίσεις f και g του V στο V' είναι ίσες αν και μονο αν $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in V$. Αν $M\subseteq V$ τότε $f(M)$ είναι το σύνολο όλων των στοιχείων $f(x)$ του V' για τα οποία είναι $x\in M$. Έστω f μία απεικόνιση του V στο V' και $M'\subseteq V'$. Τότε με $f^{-1}(M')$ συμβολίζουμε το υποσύνολο όλων των στοιχείων $x\in V$ για τα οποία έχουμε $f(x)\in M'$. Προφανώς μπορεί να είναι $f^{-1}(M')=\emptyset$. Γενικά η αντιστοίχηση του x' στο $f^{-1}(x')$ δεν είναι απεικόνιση.

Μία απεικόνιση $f:V\to V'$ καλείται επί του συνόλου V' αν $f(V)=V'$.

Αν f είναι μία απεικόνιση του V επί του V' τέτοια ώστε το $f^{-1}(x)$ να συνίσταται από ένα ακριβώς στοιχείο για κάθε $x\in V'$, τότε η αντιστοίχηση $x\to f^{-1}(x)$ είναι μία απεικόνιση του V' επί του V και συμβολίζεται με f^{-1}. Σ'αυτή την ειδική περίπτωση η f καλείται αμφιμονότιμη ή ένα-προς-ένα ή 1-1 απεικόνιση του V επί του V' ενώ η f^{-1} καλείται αντίστροφη της f.

Μία απεικόνιση f καλείται ένα-προς-ένα απεικόνιση του V στο V' αν η f είναι 1-1 απεικόνιση του V επί του $f(V)$.

Αν f είναι μία απεικόνιση του V στο V' και g μία απεικόνιση του V' στο V'', τότε η <u>σύνθεση</u> $g\circ f$ των f και g είναι η απεικόνιση του V στο V'' η οποία σε κάθε στοιχείο $x\in V$ αντιστοιχίζει το στοιχείο $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ στο V''.

Η <u>ταυτοτική</u> απεικόνιση ε (ή ε_V) του V είναι η απεικόνιση του V επί του V με $\varepsilon(x)=x$ $\forall x\in V$.

Αν f είναι μία απεικόνιση του V στο V' τότε $f\circ\varepsilon=\varepsilon\circ f=f$.
Αν η f είναι μία ένα-προς-ένα απεικόνιση του V επί του V' και f^{-1} είναι η αντίστροφη απεικόνιση τότε $f^{-1}\circ f=\varepsilon_V$ και $f\circ f^{-1}=\varepsilon_{V'}$.

<u>4.Ασκήσεις</u>.

1.Αν $M\subseteq V$ και $N\subseteq V$ να δειχθεί ότι οι επόμενες σχέσεις είναι ισοδύναμες :

$$M\cap N=\emptyset \quad , \quad M\subseteq \complement N \quad , \quad N\subseteq \complement M \quad .$$

2.Αν $M\subseteq V$ και $N\subseteq V$ να δειχθεί ότι οι επόμενες σχέσεις είναι ισοδύναμες :

$$M\cup N=V \quad , \quad \complement M\subseteq N \quad , \quad \complement N\subseteq M \quad .$$

3. Αν $P\subset M$ και $P\subset N$ να δειχθεί ότι $P\subset M\cap N$.

4. Αν $M\subset P$ και $N\subset P$ να δειχθεί ότι $M\cup N\subset P$.

5.Δείξτε ότι η R είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο Z των ακέραιων αν $\alpha R\beta$ σημαίνει $\alpha^2+\alpha=\beta^2+\beta$. Περιγράψτε τις κλάσεις ισοδυναμίας .

6.Δείξτε ότι η R είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο V όλων των πολυωνύμων του x με ακέραιους συντελεστές , όπου $f(x)Rg(x)$ σημαίνει ότι το x είναι παράγοντας του $f(x)-g(x)$. Περιγράψτε τις κλάσεις ισοδυναμίας .

7.'Εστω M το σύνολο όλων των διαφορίσιμων συναρτήσεων f(x) της πραγματικής μεταβλητής x και fRg σημαίνει ότι $\frac{df}{dx}=\frac{dg}{dx}$ για όλα τα x . Δείξτε ότι η R είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο M και περιγράψτε τις κλάσεις ισοδυναμίας .

8.'Εστω Z το σύνολο των ακεραίων και το σύνολο $A=Z\times(Z-\{0\})$, δηλαδή των ζεύγων των ακεραίων (p,q) με $q\neq 0$. Ορίζουμε για δύο στοιχεία (p,q) και (r,s) του A τη σχέση $\sim$ $(p,q)\sim(r,s)$ αν $ps-qr=0$. Δείξτε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας .

Η κλάση ισοδυναμίας στην οποία ανήκει το (p,q) ονομάζεται <u>ρητός αριθμός</u> και συμβολίζεται $\frac{p}{q}$ ή με $\frac{r}{s}$ αν $(p,q)\sim(r,s)$, γιατί $ps=qr$ $\frac{p}{q}=\frac{r}{s}$.

9.Υποθέτουμε ότι R_1 και R_2 είναι σχέσεις ισοδυναμίας στο σύνολο V . Ορίζουμε μια σχέση R' στο V με την ιδιότητα $aR'b$ αν και μόνο αν υπάρχει ένα στοιχείο $c\in V$ τέτοιο ώστε aR_1c και cR_2b . Επίσης ορίζουμε μία σχέση R'' στο V με την ιδιότητα $aR''b$ αν και μόνο αν aR_1b και aR_2b . Είναι οι R' και R'' σχέσεις ισοδυναμίας στο V ; Περιγράψτε τις κλάσεις ισοδυναμίας της R'' σε σχέση με εκείνες των R_1 και R_2 .

10.Αν f είναι μία απεικόνιση του συνόλου V στο W , g μία απεικόνιση του W στο V και $g\circ f=\varepsilon_V$, $f\circ g=\varepsilon_W$, τότε οι f και g είναι ένα-προς-ένα απεικονίσεις και επιπλέον $g=f^{-1}$.

<u>5.Πράξεις</u>.

'Εστω M ένα μη κενό σύνολο . Μία μονότιμη απεικόνιση f του συνόλου M×M στο σύνολο M, δηλαδή

$$f: M\times M\to M : (\alpha,\beta)\mapsto f(\alpha,\beta)$$

καλείται <u>νόμος εσωτερικής συνθέσεως</u> ή <u>εσωτερική πράξη</u> στο σύνολο M .

Σ'αυτή την περίπτωση η εικόνα ενός στοιχείου $(\alpha,\beta)\in M\times M$ συμβολίζεται συνήθως με $\alpha f\beta$. Μ'άλλα λόγια μία εσωτερική πράξη είναι ένας κανόνας που από κάθε διατεταγμένο ζεύγος στοιχείων του συνόλου M μας δίνει ένα τρίτο στοιχείο του M . Είναι φανερό ότι αν δοθεί ένα μη κενό σύνολο M , τότε μπορούμε να ορίσουμε εσωτερικές πράξεις σ'αυτό κατά πολλούς τρόπους . Στην 'Αλγεβρα όμως παρουσιάζουν ενδιαφέρον οι πράξεις που έχουν μερικές χαρακτηριστικές ιδιότητες . Στο εξής μία εσωτερική πράξη θα τη συμβολίζουμε μ'ένα από τα σύμβολα $*$, $+$, $\cdot$, $\circ$, $\square$. Για διαφορετικές πράξεις θα χρησιμοποιούμε διαφορετικά σύμβολα . 'Οταν δεν υπάρχει κίνδυνος να γίνει σύγχυση δεν χρησιμοποιούμε σύμβολο , αλλά τα στοιχεία γράφονται το ένα κατόπιν του άλλου π.χ. $\alpha\beta$.

Μία εσωτερική πράξη $*$ στο σύνολο M λέγεται :

(i) <u>μεταθετική</u> όταν $\alpha*\beta=\beta*\alpha \quad \forall \alpha,\beta\in M$

(ii) <u>προσεταιριστική</u> όταν $\alpha*(\beta*\gamma)=(\alpha*\beta)*\gamma \quad \forall \alpha,\beta,\gamma\in M$.

Αν f_1,f_2 είναι δύο εσωτερικές πράξεις στο σύνολο M , η πράξη f_1 λέγεται <u>επιμεριστική</u> ως προς την πράξη f_2 όταν

$$\alpha f_1(\beta f_2\gamma)=(\alpha f_1\beta)f_2(\alpha f_1\gamma) \qquad \forall \alpha,\beta,\gamma\in M \quad .$$

'Ενα στοιχείο $e\in M$ λέγεται <u>ουδέτερο</u> στοιχείο ως προς την πράξη $*$ όταν $\alpha*e=e*\alpha=\alpha \quad \forall\alpha\in M$. Αν το σύνολο M έχει ουδέτερο στοιχείο ως προς την πράξη $*$ τότε αυτό είναι μοναδικό . Πραγματικά , ας υποθέσουμε ότι εκτός από το e υπάρχει και ένα άλλο ουδέτερο στοιχείο $e'\in M$. Τότε έχουμε $\alpha*e'=e'*\alpha=\alpha \quad \forall\alpha\in M$, οπότε για $\alpha=e$ θα είναι $e*e'=e'*e=e$. Επειδή όμως και το e είναι ουδέτερο στοιχείο έχουμε $e'*e=e*e'=e'$. Από τις δύο τελευταίες σχέσεις συμπεραίνουμε ότι $e'=e$.

Αν το σύνολο M έχει ουδέτερο στοιχείο e ως προς την πράξη $*$ τότε ένα στοιχείο $\alpha' \in M$ λέγεται <u>συμμετρικό</u> του $\alpha \in M$ αν $\alpha*\alpha'=\alpha'*\alpha=e$.

Αν υποθέσουμε ότι η πράξη $*$ είναι προσεταιριστική , τότε υπάρχει το πολύ ένα συμμετρικό $\alpha' \in M$ του στοιχείου α . Πραγματικά , ας υποθέσουμε ότι το στοιχείο $\alpha \in M$ έχει δύο συμμετρικά στοιχεία α_1' και α_2' (α_1' , $\alpha_2' \in M$) ως προς την πράξη $*$. Τότε έχουμε $\alpha*\alpha_1'=\alpha_1'*\alpha=e$ και $\alpha*\alpha_2'=\alpha_2'*\alpha=e$. Συνεπώς $\alpha_2'=\alpha_2'*e=\alpha_2'*(\alpha*\alpha_1')=$ $=(\alpha_2'*\alpha)*\alpha_1'=e*\alpha_1'=\alpha_1'$.

Ορίσαμε μία πράξη εσωτερικής συνθέσεως σαν μία μονότιμη απεικόνιση του συνόλου $M\times M$ στο M . Αν M και Ω είναι δύο σύνολα , τότε ορίζουμε μία εξωτερική πράξη f στο M ως προς το Ω ως μία μονότιμη απεικόνιση από το $\Omega\times M$ στο M δηλαδή

$$f : \Omega\times M \to M : (\alpha,m) \mapsto f(\alpha,m) \quad .$$

Ώστε μία <u>εξωτερική πράξη</u> στο M ως προς το Ω ορίζεται αν σε κάθε ζεύγος $(\alpha,m) \in \Omega\times M$ αντιστοιχεί ένα στοιχείο $f(\alpha,m) \in M$. Όπως στις εσωτερικές πράξεις έτσι και εδώ για την εικόνα $f(\alpha,m)$ του ζεύγους (α,m) γράφουμε $\alpha f m$ ή θέτουμε στη θέση του f ένα σύμβολο π.χ. $\cdot$, $\circ$, $*$ κ.λ.π. Το σύνολο Ω σε μία εξωτερική πράξη καλείται <u>σύνολο συντελεστών</u> .

<u>6.Αλγεβρικά συστήματα , ισομορφισμός</u>.

Ένα <u>αλγεβρικό σύστημα</u> είναι ένα σύνολο M με έναν αριθμό εσωτερικών πράξεων και εξωτερικών πράξεων ορισμένων στο M ως προς κάποιο σύνολο συντελεστών Ω , που πληρεί κάποιες ιδιότητες (αξιώματα του συτήματος) π.χ.προσεταιριστική , μεταθετική κ.λ.π.

Ο αριθμός των εσωτερικών και εξωτερικών πράξεων ενός αλγεβρικού συστήματος M και τα αξιώματα καθορίζουν τον τύπο του συτήματος. Παρακάτω θα ορίσουμε διάφορους τύπους αλγεβρικών συστημάτων , όπως για παράδειγμα ομάδα , δακτύλιο , σώμα κ.λ.π. Αν δύο αλγεβρικά συστήματα M και M′ είναι του αυτού τύπου , τότε οι εσωτερικές πράξεις (αντίστοιχα οι εξωτερικές πράξεις) του M αντιστοιχούν μονοσήμαντα προς τις εσωτερικές (αντίστοιχα εξωτερικές) πράξεις του M′.

Αν M και M′είναι δύο αλγεβρικά συστήματα του αυτού τύπου τέτοια ώστε οι αντίστοιχες εξωτερικές πράξεις να έχουν το ίδιο σύνολο συντελεστών Ω τότε τα M και M′λέγονται <u>ισόμορφα</u> αν υπάρχει μία ένα-προς-ένα απεικόνιση f από το M επί του M′ τέτοια ώστε

(i) $f(m_1\circ m_2)=f(m_1)\odot f(m_2)$, $\forall\, m_1,m_2,\in M$ και για κάθε ζεύγος αντίστοιχων εσωτερικών πράξεων $\circ$ του M και $\odot$ του M′

(ii) $f(\alpha * m)=\alpha\otimes f(m)$ $\forall\, m\in M$, $\alpha\in\Omega$ και για κάθε ζεύγος αντίστοιχων εξωτερικών πράξεων $*$ του M και $\otimes$ του M′.

Σ′αυτή την περίπτωση η f καλείται <u>ισομορφισμός</u> του M επί του M′ και γράφουμε $M\cong M'$.

Με πιο απλά λόγια ένας ισομορφισμός των δύο αλγεβρικών συστημάτων M και M′ είναι μία ένα-προς-ένα απεικόνιση του M επί του M′ η οποία διατηρεί τις πράξεις .

Ένας ισομορφισμός του αλγεβρικού συστήματος M επί του εαυτού του καλείται <u>αυτομορφισμός</u> .

<u>6.1.Παραδείγματα:</u>

α) Έστω M το σύνολο των ακεραίων με πράξη εσωτερικής συνθέσεως την πρόσθεση και N το σύνολο των δυνάμεων 2^n , n=ακέραιος με πράξη τον πολλαπλασιασμό . Τότε η απεικόνιση

$$f : N\to M : 2^n\mapsto f(2^n)=n$$

είναι ένας ισομορφισμός των M και N με τις παραπάνω πράξεις .

β) Έστω M το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών εφοδιασμένο με πράξη εσωτερικής συνθέσεως τον συνήθη πολλαπλασιασμό και το σύνολο R των πραγματικών αριθμών με πράξη την πρόσθεση . Η απεικόνιση

$$f : M \to R : \alpha \mapsto f(\alpha) = \log \alpha$$

είναι ένα-προς-ένα και διατηρεί τις πράξεις αφού

$$f(ab) = \log(ab) = \log \alpha + \log b = f(\alpha) + f(b) \quad .$$

Άρα $M \cong R$.

7. Ομάδα.

Έστω M ένα μη κενό σύνολο και $*$ μία εσωτερική πράξη ορισμένη στο M . Το ζεύγος $(M,*)$ καλείται ομάδα όταν πληρούνται οι επόμενες ιδιότητες

(i) Η πράξη $*$ είναι παντού ορισμένη στο σύνολο M , δηλαδή $\forall \alpha, b \in M \Longrightarrow \alpha * b \in M$.

(ii) $\alpha*(b*c) = (\alpha*b)*c \quad \forall \alpha,b,c \in M$ (προσεταιριστικός νόμος).

(iii) Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο e , δηλαδή $\alpha*e=e*\alpha=\alpha \quad \forall \alpha \in M$.

(iv) $\forall \alpha \in M$ υπάρχει ένα συμμετρικό $\alpha' \in M$, δηλαδή $\alpha*\alpha'=\alpha'*\alpha=e$.

Από τον ορισμό και από την παραπάνω συζήτηση συμπεραίνουμε ότι το ουδέτερο στοιχείο e είναι μοναδικό για την ομάδα $(M, *)$, όπως επίσης για κάθε στοιχείο $\alpha \in M$ το συμμετρικό στοιχείο $\alpha' \in M$ είναι μοναδικό .

Αν στην ομάδα $(M, *)$ ισχύει επίσης και ο μεταθετικός νόμος , τότε η ομάδα καλείται Αβελιανή .

Πολλές φορές για συντομία και εφόσον δεν υπάρχει αμφιβολία ως προς την πράξη $*$ θα λέμε απλώς η ομάδα M χωρίς να σημειώνουμε την πράξη .

7.1.Παραδείγματα:

α) Το σύνολο Z των ακεραίων με πράξη την πρόσθεση , δηλαδή το ζεύγος (Z , +) είναι ομάδα και μάλιστα Αβελιανή , γιατί πληρούνται οι παραπάνω προϋποθέσεις .

β) Θεωρούμε το σύνολο A={α,β,γ} και την πράξη * η οποία καθορίζεται από τον επόμενο πίνακα

*	α	β	γ
α	β	γ	α
β	γ	α	β
γ	α	β	γ

δηλαδή α*α=β , β*β=α , γ*γ=γ , α*β=γ , α*γ=α , β*α=γ , β*γ=β , γ*α=α και γ*β=β . Το ζεύγος (A , *) είναι ομάδα γιατί πληρούνται οι απαραίτητες συνθήκες . Σημειώνουμε ότι ουδέτερο στοιχείο είναι το γ και συμμετρικό του α είναι το β .

γ) Η εξίσωση $z^n-1=0$ έχει ακριβώς n ρίζες στο σώμα C των μιγαδικών αριθμών ,

$$\omega_k = \text{συν}\,\frac{2k\pi}{n} + i\,\text{ημ}\,\frac{2k\pi}{n} \qquad (k=0,1,\ldots,n-1) \quad .$$

Τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που αντιπροσωπεύουν αυτές τις ρίζες είναι οι κορυφές ενός κανονικού n-πλεύρου εγγεγραμμένου στο μοναδιαίο κύκλο . Οι n-οστές ρίζες της μονάδος σχηματίζουν Αβελιανή ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό . Αυτό είναι εύκολο να φανεί από το θεώρημα του de Moivre , αφού το γινόμενο και το πηλίκο δύο n-οστών ριζών της μονάδος είναι πάλι n-οστή ρίζα της μονάδος. Επίσης η προσεταιριστικότητα και μεταθετικότητα που ισχύουν στο γινόμενο των μιγαδικών αριθμών ισχύουν ειδικά και για τις n-οστές ρίζες της μονάδος . Μία επιπλέον ιδιότητα που έχουν οι n-οστές ρίζες της μονάδος είναι ότι κάθε μία απ'αυτές μπορεί να εκφρασθεί ως δύναμη μίας οποιασδήποτε . Για παράδειγμα αν λάβουμε

ω_1=συν $\frac{2\pi}{n}$+i ημ $\frac{2\pi}{n}$, τότε $\omega_1^1=\omega_1$, $\omega_1^2=\omega_2$, $\omega_1^3=\omega_3,\ldots,\omega_1^{n-1}=$ $=\omega_{n-1}$, $\omega_1^n=\omega_0=1$.

δ) Το σύνολο όλων των (m,n)-πινάκων $[\alpha_{ij}]$ με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς και πράξη την πρόσθεση πινάκων (ορίζεται ως $[\alpha_{ij}]+[b_{ij}]=[\alpha_{ij}+b_{ij}]$) είναι μία προσθετική αβελιανή ομάδα .

ε) Το σύνολο όλων των τετραγωνικών πινάκων του τύπου (n,n) που έχουν ορίζουσα διάφορη του μηδενός (δηλαδή το σύνολο όλων των ομαλών (n,n)-πινάκων) με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων (ορίζεται ως εξής $[\alpha_{ij}]\cdot[b_{ij}]=[\sum_{\ell=1}^{n}\alpha_{i\ell}b_{\ell j}]$) είναι μία ομάδα . Ουδέτερο στοιχείο της ομάδας αυτής είναι ο ταυτοτικός πίνακας $[\delta_{ij}]$ και συμμετρικό στοιχείο του πίνακα $[\alpha_{ij}]$ είναι ο αντίστροφος πίνακας $[\alpha_{ij}]^{-1}$. Η ομάδα αυτή γενικά δεν είναι αβελιανή .

Σε προηγούμενη παράγραφο είδαμε τον ορισμό του ισομορφισμού για αλγεβρικά συστήματα . Θα επαναλάβουμε τον ορισμό για την περίπτωση δύο ομάδων . Δίνουμε αρχικά τον ορισμό του ομομορφισμού .

'Εστω $(G,\circ)$ μία ομάδα και G' ένα σύνολο εφοδιασμένο με μία πράξη εσωτερικής συνθέσεως που συμβολίζουμε με το $*$. Μία απεικόνιση f του G επί του G' καλείται <u>ομομορφισμός</u> του G επί του G' αν η απεικόνιση αυτή διατηρεί τις πράξεις . Δηλαδή αν $f: G\to G': \alpha\mapsto f(\alpha)$ είναι η απεικόνιση , τότε $f(\alpha\circ\beta)=f(\alpha)*f(\beta)$.

Δύο ομάδες $(G,\circ)$ και $(G',*)$ είναι <u>ισόμορφες</u> $G\cong G'$ αν υπάρχει μία ένα-προς-ένα απεικόνιση f από το G επί του G' που διατηρεί τις πράξεις , δηλαδή $f(\alpha\circ b)=f(\alpha)*f(b)$.

'Ενας <u>αυτομορφισμός</u> είναι ένας ισομορφισμός μιας ομάδας G επί του εαυτού της .

Η διαφορά μεταξύ ενός ομομορφισμού και ενός ισομορφισμού είναι ότι ο ισομορφισμός πρέπει να είναι ένα-προς-ένα .

Προφανώς σ'έναν ομομορφισμό το ζεύγος $(G',*)$ είναι ομάδα και μάλιστα αν η ομάδα $(G,\circ)$ είναι αβελιανή τότε και η $(G',*)$ είναι επίσης αβελιανή . Η απόδειξη του ισχυρισμού αυτού είναι προφανής , αφού ο ομομορφισμός f διατηρεί και τις ιδιότητες των πράξεων . Για παράδειγμα έχουμε

$$f((a\circ b)\circ c)=f(a\circ b)*f(c)=(f(a)*f(b))*f(c)$$

Αλλά επειδή η πράξη $\circ$ είναι προσεταιριστική έχουμε $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$, οπότε

$$f((a\circ b)\circ c)=f(a\circ (b\circ c)) \Longrightarrow$$
$$f(a\circ b)*f(c)=f(a)*f(b\circ c) \Longrightarrow$$
$$(f(a)*f(b))*f(c)=f(a)*(f(b)*f(c)) .$$

'Ενα μη κενό υποσύνολο Η μίας ομάδας Μ καλείται <u>υποομάδα</u> της Μ αν το Η είναι μία ομάδα ως προς την ίδια πράξη .

Για να διαπιστώσουμε αν ένα υποσύνολο Η είναι <u>υποομάδα</u> της ομάδας $(M,*)$ αρκεί να εξετάσουμε τις δύο επόμενες ιδιότητες

i) $\forall\, a,b\in H \Longrightarrow a*b\in H$

ii) $\forall\, a\in H \Longrightarrow a'\in H$, όπου a' είναι το συμμετρικό του a στην ομάδα Μ .

<u>7.2.Παραδείγματα</u>:

α) Το υποσύνολο Η που αποτελείται μόνο από το ουδέτερο στοιχείο e της ομάδας Μ είναι μία υποομάδα της Μ .

β) Το σύνολο όλων των άρτιων ακεραίων είναι μία υποομάδα της προσθετικής ομάδας των ακεραίων , ενώ η τελευταία είναι υποομάδα της προσθετικής ομάδας των ρητών . 'Ολες οι παραπάνω ομάδες είναι υποομάδες της προσθετικής ομάδας των μιγαδικών αριθμών .

Η πολλαπλασιαστική ομάδα των θετικών ρητών και η πολλαπλασιαστική ομάδα που αποτελείται μόνο από τα στοιχεία 1 και -1 είναι υποομάδες της πολλαπλασιαστικής ομάδας των μη-μηδενικών ρητών αριθμών.

8. Δακτύλιος

Θεωρούμε ένα σύνολο Μ $(M \neq \emptyset)$ και δύο εσωτερικές πράξεις f_1 και f_2 στο Μ . Η τριάδα (M, f_1, f_2) καλείται <u>δακτύλιος</u> όταν :

(i) Το ζεύγος (M, f_1) είναι Αβελιανή ομάδα , δηλαδή

α) $\forall\, x, y \in M \Longrightarrow x f_1 y \in M$

β) $x f_1 (y f_1 z) = (x f_1 y) f_1 z \quad \forall\, x, y, z \in M$

γ) Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο e , δηλαδή

$x f_1 e = e f_1 x = x \quad \forall\, x \in M$

δ) $\forall\, x \in M$ υπάρχει ένα συμμετρικό x', δηλαδή

$x f_1 x' = x' f_1 x = e$

ε) $x f_1 y = y f_1 x \quad \forall\, x, y \in M$

(ii) Η πράξη f_2 είναι παντού ορισμένη στο σύνολο Μ .

(iii) Η f_2 είναι προσεταιριστική

(iv) Η f_2 είναι επιμεριστική ως προς την f_1 , δηλαδή

$$x f_2 (y f_1 z) = (x f_2 y) f_1 (x f_2 z)$$

και

$$(y f_1 z) f_2 x = (y f_2 x) f_1 (z f_2 x) \qquad \forall\, x, y, z \in M \, .$$

Συνήθως για τις πράξεις f_1 και f_2 σ'ένα δακτύλιο χρησιμοποιούμε τα σύμβολα + και · αντίστοιχα, οπότε καλούμε αυτές πρόσθεση και πολλαπλασιασμό . Σ'αυτή την περίπτωση το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας (M, f_1) δηλαδή της $(M,+)$ συμβολίζεται με 0 (μηδέν), το δε συμμετρικό x' του στοιχείου x ως προς την πράξη + συμβολίζεται με $-x$ και καλείται <u>αντίθετο</u> .

Πολλές φορες , όταν δεν υπάρχει αμφιβολία ως προς τις πράξεις του δακτυλίου , λέμε απλώς ο δακτύλιος M χωρίς να σημειώνουμε τις πράξεις .

<u>8.1.Παραδείγματα</u>:

α)Το σύνολο των ακεραίων Z με πράξεις την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό , δηλαδή η τριάδα $(Z,+,\cdot)$ αποτελεί δακτύλιο , γιατί ισχύουν οι παραπάνω συνθήκες .

β)Το σύνολο όλων των τετραγωνικών (n,n)-πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς και πράξεις την πρόσθεση

$$[\alpha_{ij}]+[b_{ij}]=[\alpha_{ij}+b_{ij}]$$

και τον πολλαπλασιασμό

$$[\alpha_{ij}]\cdot[b_{ij}]=[c_{ij}]$$

όπου

$$c_{ij}=\sum_{\ell=1}^{n}\alpha_{i\ell}b_{\ell j}$$

είναι δακτύλιος .

γ) Έστω V το κλειστό μοναδιαίο διάστημα $0\leq x\leq 1$ και M το σύνολο όλων των υποσυνόλων του V . Η τριάδα $(M,+,\cdot)$ είναι δακτύλιος, αν ορίσουμε την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ως εξής . Αν m,n είναι δύο στοιχεία του M τότε το άθροισμα $m+n$ είναι το σύνολο των σημείων που ανήκουν σε ένα από τα m ή n αλλά δεν ανήκουν και στα δύο . Το γινόμενο $m\cdot n$ είναι το σύνολο των σημείων που είναι κοινά στα m και n , δηλαδή $m\cdot n$ είναι η τομή των συνόλων m και n . Είναι εύκολο να δούμε ότι για τον δακτύλιο $(M,+,\cdot)$ έχουμε $m\cdot m=m$ και $m+m=\emptyset$, ενώ το ουδέτερο στοιχείο ως προς την πρόσθεση είναι το κενό σύνολο .

9.Σώμα

Θεωρούμε ένα σύνολο M ($M\neq\emptyset$) και δύο εσωτερικές πράξεις f_1 και f_2 στο M . Η τριάδα (M,f_1,f_2) λέγεται σώμα όταν :

(i) Η τριάδα (M,f_1,f_2) είναι δακτύλιος

(ii) Η πράξη f_2 είναι μεταθετική

(iii) Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο $e^*\in M$ ως προς την πράξη f_2 .

(iv) Για κάθε στοιχείο $x\in M$ και $x\neq e$, όπου e είναι το ουδέτερο στοιχείο ως προς την πράξη f_1 , υπάρχει το συμμετρικό αυτού ως προς την πράξη f_2 .

Συνήθως για τις πράξεις f_1 και f_2 του σώματος (M,f_1,f_2) χρησιμοποιούμε τα σύμβολα της προσθέσεως και του πολλαπλασιασμού , δηλαδή $(M,+,\cdot)$, οπότε για το ουδέτερο στοιχείο $e^*\in M$ ως προς τον πολλαπλασιασμό χρησιμοποιούμε το σύμβολο 1 (μονάδα) και για το συμμετρικό ενός στοιχείου $x\in M$ ως προς τον πολλαπλασιασμό χρησιμοποιούμε το σύμβολο x^{-1} που καλείται αντίστροφο του x .

Όπως και στις περιπτώσεις της ομάδας και του δακτυλίου , έτσι κι εδώ πολλές φορές λέμε το σώμα M χωρίς να σημειώνουμε τις πράξεις .

Μπορούμε να πούμε ότι η τριάδα $(M,+,\cdot)$ είναι σώμα αν η τριάδα αυτή είναι δακτύλιος και επιπλέον το ζεύγος $(M^*,\cdot)$ είναι αβελιανή ομάδα , όπου $M^*=M-\{0\}$.

9.1.Παραδείγματα:

α) Οι τριάδες $(Q,+,\cdot)$, $(R,+,\cdot)$, $(C,+,\cdot)$, όπου Q,R,C είναι το σύνολο των ρητών , πραγματικών και μιγαδικών αριθμών αντίστοιχα, είναι σώματα γιατί ισχύουν οι παραπάνω ιδιότητες.

β) Η τριάδα $(Z,+,\cdot)$, όπου Z το σύνολο των ακεραίων δεν είναι σώμα , γιατί τα μόνα στοιχεία του Z που έχουν αντίστροφο είναι το 1 και το -1.

10. Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι αν η πράξη $*$ είναι προσεταιριστική και $a*b=b*a$, $a*c=c*a$ τότε $a*(b*c)=(b*c)*a$.

2. Αν $*$ είναι μία εσωτερική πράξη στο M και M' είναι το υποσύνολο των στοιχείων $x\in M$ που πληρούν τη σχέση $x*(y*z)=(x*y)*z$ γιά όλα τα $y,z\in M$, δείξτε ότι $x*x'$ είναι στοιχείο του M' αν $x,x'\in M'$. Δείξτε επίσης ότι η πράξη $*$ είναι προσεταιριστική στο M'.

3. Μία πράξη $*$ ορίζεται στα υποσύνολα του συνόλου M ως εξής. $X*Y=X\cup Y$ αν $X\cap Y=\emptyset$ και $X*Y=M$ αν $X\cap Y\neq\emptyset$. Δείξτε ότι η πράξη αυτή είναι προσεταιριστική και μεταθετική .

4. Δείξτε ότι το σύνολο όλων των μετασχηματισμών $x\mapsto x'=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ με $ad-bc=1$ και a,b,c,d μιγαδικούς αριθμούς είναι ομάδα .

5. Εξετάστε ποιός από τους επόμενους πίνακες περιγράφει ομάδα

$*$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_2	a_2	a_3	a_1	a_5	a_6	a_4
a_3	a_3	a_1	a_2	a_6	a_4	a_5
a_4	a_4	a_5	a_6	a_3	a_2	a_1
a_5	a_5	a_6	a_4	a_2	a_1	a_3
a_6	a_6	a_4	a_5	a_1	a_3	a_2

*	a	b	c	d
a	b	d	a	c
b	d	c	b	a
c	a	b	c	d
d	c	a	d	b

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	a
d	d	c	b	b

6. Έστω M το σύνολο των συναρτήσεων

$$f_1(x)=x \ , \ f_2(x)=\frac{1}{1-x} \ , \ f_3(x)=\frac{x-1}{x} \ ,$$

$$f_4(x)=1-x \ , \ f_5(x)=\frac{1}{x} \ , \ f_6(x)=\frac{x}{x-1} \ .$$

Ορίζουμε τη σύνθεση δύο συναρτήσεων με $(f_i \circ f_j)(x)=f_i(f_j(x))$. Δείξτε ότι το M είναι ομάδα .

7. Δείξτε ότι η προσθετική ομάδα των μιγαδικών αριθμών $a+ib$ (a,b ακέραιοι) είναι ισόμορφη με την πολλαπλασιαστική ομάδα των ρητών αριθμών της μορφής 2^a3^b (a,b ακέραιοι) .

8. Έστω Z η προσθετική ομάδα των ακεραίων . Δείξτε ότι η απεικόνιση $n \mapsto 2n$ είναι ένας ισομορφισμός του Z στην προσθετική ομάδα Z′ των άρτιων ακεραίων .

9. Έστω k τυχών ακέραιος και $R=\{0,\pm k,\pm 2k,\pm 3k,\ldots\}$. Δείξτε ότι η τριάδα $(R,+,\cdot)$ είναι δακτύλιος , όπου + και · είναι οι συνήθεις πράξεις προσθέσεως και πολλαπλασιασμού των ακεραίων . Περιγράψτε τις ειδικές περιπτώσεις $k=1$ και $k=0$.

10. Έστω X ένα μη κενό σύνολο εφοδιασμένο με δύο πράξεις $*$ και $\circ$ ως προς τις οποίες το X έχει κοινό ουδέτερο στοιχείο e . Αν $(x*x')\circ(y*y')=(x\circ y)*(x'\circ y')$ δείξτε ότι οι δύο πράξεις ταυτίζονται και είναι μεταθετικές και προσεταιριστικές .

11. Αν α είναι ένα σταθερό στοιχείο μίας ομάδας $(G,*)$ και α' το συμμετρικό του, δείξτε ότι η απεικόνιση $f:G\to G: x\to f(x)=\alpha' * x * \alpha$ είναι ένας αυτομορφισμός.

12. Αν $(G,*)$ είναι μία ομάδα δείξτε ότι η σχέση $\alpha*\alpha=\alpha$ συνεπάγεται ότι $\alpha=e$.

13. Έστω G ένα σύνολο εφοδιασμένο με μία πράξη $*$ που έχει την ιδιότητα $\alpha*(\beta*\gamma)=(\beta*\alpha)*\gamma$ για κάθε $\alpha,\beta,\gamma\in G$. Αν η πράξη $*$ έχει ουδέτερο $e\in G$ δείξτε ότι είναι μεταθετική και προσεταιριστική.

14. Δείξτε ότι η ομάδα $(G,*)$ είναι αβελιανή αν για κάθε $\alpha\in G$ έχουμε $\alpha*\alpha=e$.

15. Έστω $(G,\circ),(G',*)$ δύο ομάδες και e,e' τα ουδέτερα στοιχεία αυτών αντίστοιχα . Αν $f:G\to G'$ είναι ένας ομομορφισμός δείξτε ότι $f(e)=e'$. Δείξτε επίσης ότι για κάθε $x\in G$ έχουμε $f(x')=(f(x))'$, όπου x' είναι το συμμετρικό στοιχείο του $x\in G$ και $(f(x))'$ είναι το συμμετρικό του $f(x)\in G'$.

16. Έστω $f:G\to G'$ και $g:G'\to G''$ δύο ομομορφισμοί των ομάδων G,G' και G'' . Δείξτε ότι η απεικόνιση $g\circ f$ είναι ομομορφισμός της ομάδας G επί της G'' .

17. Έστω $(R,+,\cdot)$ ένας δακτύλιος και G το υποσύνολο του R που αποτελείται από όλα τα στοιχεία $x\in R$ για τα οποία υπάρχει ένα $y\in R$ τέτοιο ώστε $x\cdot y=y\cdot x=e$. Δείξτε ότι το $(G,+)$ είναι ομάδα .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

1.Μεταθέσεις.

1.1. Ορισμός: Μια μετάθεση π των στοιχείων ενός συνόλου S είναι μια αμφιμονότιμη (ένα προς ένα) απεικόνιση του συνόλου S στον εαυτό του.

Επειδή θα ασχοληθούμε με μεταθέσεις πεπερασμένων συνόλων, δηλαδή συνόλων με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το σύνολο S είναι το σύνολο των n πρώτων ακεραίων $S=\{1,2,3,\dots,n\}$. Το στοιχείο στο οποίο η μετάθεση π αντιστοιχίζει το στοιχείο i, το σημειώνουμε με π(i) ή ακόμη και με π_i. Κάθε φορά που θέλουμε να ορίσουμε λεπτομερώς μια μετάθεση περιγράφουμε αυτή γράφοντας τα στοιχεία του συνόλου S σε δυο σειρές . Η πρώτη σειρά περιέχει τα στοιχεία του συνόλου S κατά μια τυχούσα τάξη και η δεύτερη σειρά έχει το στοιχείο π(i) ακριβώς κάτω από το στοιχείο i της πρώτης σειράς.

1.2. Παράδειγμα: Αν $S=\{1,2,3,4\}$,η μετάθεση π για την οποία έχουμε $\pi(1)=2$, $\pi(2)=4$, $\pi(3)=3$ και $\pi(4)=1$ μπορεί εύκολα να περιγραφεί με τις

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \pi(4) \end{pmatrix} \text{ ή } \pi=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ ή } \pi=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ ή}$$

$$\pi=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ ή } \pi=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{κ.λ.π.}$$

Συνήθως όμως η πρώτη γραμμή παραλείπεται και γράφονται σε παράταξη κατά μήκος μιας ευθείας μόνο οι εικόνες

$$\pi(1)\ \pi(2)\ \pi(3)\ldots\pi(n)$$

έτσι ώστε το πρώτο στοιχείο $\pi(1)$ της παρατάξεως να είναι η εικόνα του 1, το δεύτερο η εικόνα του 2, το τρίτο η εικόνα του 3 κ.λ.π. Κατόπιν τούτου, για παιδαγωγικούς κυρίως σκοπούς, μπορούμε να ορίσουμε ως μετάθεση των n στοιχείων ενός συνόλου κάθε παράθεση των στοιχείων αυτών σε σειρά επ' ευθείας γραμμής. Για παράδειγμα, μπορούμε να γράφουμε όλες τις μεταθέσεις των στοιχείων του συνόλου $S=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ ως εξής: αβγ, βαγ, βγα, αγβ, γβα, γαβ.

Επειδή οι μεταθέσεις των στοιχείων ενός συνόλου είναι αμφιμονότιμες απεικονίσεις, υπάρχει πάντοτε η <u>σύνθεση</u> δυο μεταθέσεων και είναι και αυτή μετάθεση. Έτσι αν π και σ είναι δυο μεταθέσεις των στοιχείων ενός συνόλου S, τότε $\sigma\circ\pi$ θα είναι η μετάθεση που απεικονίζει το στοιχείο i στο στοιχείο $\sigma[\pi(i)]$, δηλαδή $(\sigma\circ\pi)(i)=\sigma[\pi(i)]$. Για απλούστευση, στο εξής θα συμβολίζουμε τη σύνθεση $\sigma\circ\pi$ ως $\sigma\pi$.

<u>1.3. Παράδειγμα</u>: Αν π είναι η μετάθεση του παραδείγματος 1.2 και σ είναι η μετάθεση

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$$

τότε η μετάθεση $\sigma\pi$ είναι

$$\sigma\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

ενώ η μετάθεση $\pi\sigma$ είναι

$$\pi\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

Σημειώνουμε ότι γενικά $\sigma\pi \neq \pi\sigma$.

Η μετάθεση η οποία αφήνει όλα τα στοιχεία του συνόλου S αναλλοίωτα (σταθερά), δηλαδή $\pi(i)=i$ $\forall i \in S$, καλείται <u>ταυτοτική μετάθεση</u> και συμβολίζεται με ε, δηλαδή έχουμε

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} .$$

Αν π είναι μια μετάθεση, τότε υπάρχει μια μοναδική μετάθεση π^{-1} τέτοια ώστε $\pi\pi^{-1}=\pi^{-1}\pi=\varepsilon$. Η μετάθεση π^{-1} καλείται <u>η αντίστροφη της π</u>. Για παράδειγμα αναφέρουμε ότι η αντίστροφη της μεταθέσεως

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

είναι η μετάθεση

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

και της μεταθέσεως

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

η αντιστροφή είναι

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Στο εξής το πλήθος όλων των μεταθέσεων του συνόλου $S=\{1,2,3,\ldots,n\}$ θα συμβολίζεται με $n!$ (διαβάζεται n παραγοντικό).

<u>1.4. Πρόταση</u>: Το πλήθος όλων των μεταθέσεων του συνόλου $S=\{1,2,\dots,n\}$ είναι ίσο με το γινόμενο $1\cdot2\cdot3\cdot\dots\cdot n$, δηλαδή $n!=1\cdot2\cdot3\ \dots\cdot n$.

<u>Απόδειξη</u>: Θα αποδείξουμε την πρόταση με επαγωγή.
Η πρόταση ισχύει για $n=1$, γιατί $1!=1$. Επίσης για $n=2$ οι μεταθέσεις του συνόλου $S=\{1,2\}$ είναι: 12 και 21, δηλαδή $2!=2=1\cdot2$.
Υποθέτουμε τώρα ότι η πρόταση ισχύει για $n=k$, δηλαδή $k!=1\cdot2\ \dots\cdot k$ και θα δείξουμε ότι ισχύει και για $n=k+1$. Πράγματι, γράφουμε όλες τις μεταθέσεις του συνόλου $S=\{1,2,\dots k,k+1\}$ και τις χωρίζουμε σε ομάδες, έτσι ώστε η πρώτη ομάδα να έχει όλες τις μεταθέσεις του συνόλου $S=\{1,2,\dots k,k+1\}$ οι οποίες για πρώτο στοιχείο έχουν το 1. Η δεύτερη ομάδα να έχει όλες τις μεταθέσεις οι οποίες για πρώτο στοιχείο έχουν το 2 κλπ. Τέλος η $k+1$ ομάδα να έχει όλες τις μεταθέσεις οι οποίες για πρώτο στοιχείο έχουν το $k+1$. Είναι φανερό ότι κάθε μια από τις παραπάνω ομάδες έχει $k!$ διαφορετικές μεταθέσεις, οι οποίες λαμβάνονται αν μετά από το πρώτο στοιχείο της ομάδας γράψουμε όλες τις μεταθέσεις των υπολοίπων k στοιχείων που είναι, σύμφωνα με την υπόθεση, $k!$. Έτσι το πλήθος όλων των μεταθέσεων των $(k+1)$ στοιχείων είναι

$$(k+1)\cdot k! = (k+1)\cdot1\cdot2\cdot\dots\cdot k = 1\cdot2\cdot\dots\cdot k\cdot(k+1) = (k+1)!$$

Δηλαδή η πρόταση ισχύει και για $n=k+1$, οπότε ισχύει πλέον για κάθε φυσικό αριθμό n.

<u>2. Άρτιες και περιττές μεταθέσεις</u>.

Αν για ένα ζεύγος στοιχείων $i<j$ του S έχουμε $\pi(i)>\pi(j)$, λέμε ότι η μετάθεση π παρουσιάζει μια <u>αντιστροφή</u>. Ο ολικός αριθμός των αντιστροφών της μεταθέσεως π θα συμβολίζεται με $k(\pi)$. Η μετάθεση π του παραδείγματος 1.2 έχει τέσσερες αντιστροφές, δηλαδή $k(\pi)=4$.

Αν $(-1)^{k(\pi)}=1$, δηλαδή ο αριθμός $k(\pi)$ είναι άρτιος, η μετάθεση π καλείται <u>άρτια</u>, ενώ στην αντίθετη περίπτωση, δηλαδή όταν $(-1)^{k(\pi)}=-1$, οπότε ο αριθμός $K(\pi)$ είναι περιττός, η μετάθεση π καλείται <u>περιττή</u>. Έτσι όλες οι μεταθέσεις των στοιχείων ενός συνόλου χωρίζονται σε δυο κλάσεις (ομάδες), την κλάση των άρτιων μεταθέσεων καί τήν κλάση των περιττών μεταθέσεων.

<u>2.1.Πρόταση</u>: Αν π,σ είναι δύο μεταθέσεις των στοιχείων ενός συνόλου S, τότε έχουμε $(-1)^{k(\sigma\pi)}=(-1)^{k(\sigma)}(-1)^{k(\pi)}=(-1)^{k(\sigma)+k(\pi)}$

<u>Απόδειξη</u>: Επειδή $(\sigma\pi)(i)=\sigma[\pi(i)]$ η μετάθεση σ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \ldots\pi(i)\ldots\pi(j)\ldots \\ \ldots\sigma\pi(i)\ldots\sigma\pi(j)\ldots \end{pmatrix}$$

Έτσι στην απαρίθμηση των αντιστροφών της μεταθέσεως σ είναι αναγκαίο να συγκρίνουμε τα στοιχεία $\pi(i)$ και $\pi(j)$ με τα στοιχεία $\sigma\pi(i)$ καί $\sigma\pi(j)$. Αν υποθέσουμε ότι $i<j$, τότε υπάρχουν τέσσερες πιθανότητες

1. $i<j$, $\pi(i)<\pi(j)$, $\sigma\pi(i)<\sigma\pi(j)$ δεν υπάρχουν αντιστροφές
2. $i<j$, $\pi(i)<\pi(j)$, $\sigma\pi(i)>\sigma\pi(j)$ μία αντιστροφή στη μετάθεση σ, μία στη μετάθεση σπ
3. $i<j$, $\pi(i)>\pi(j)$, $\sigma\pi(i)>\sigma\pi(j)$ μία αντιστροφή στη μετάθεση π, μία στη μετάθεση σπ
4. $i<j$, $\pi(i)>\pi(j)$, $\sigma\pi(i)<\sigma\pi(j)$ μία αντιστροφή στη μετάθεση π, μία στην σ και καμμία στη σπ.

Από τις προηγούμενες περιπτώσεις φαίνεται ότι ο αριθμός $k(\sigma\pi)$ διαφέρει από τον αριθμό $k(\sigma)+k(\pi)$ κατά έναν άρτιο αριθμό. Έτσι έχουμε $(-1)^{k(\sigma\pi)}=(-1)^{k(\sigma)}\cdot(-1)^{k(\pi)}$.

<u>2.2.Πρόταση:</u> Αν μια μετάθεση π αφήνει ένα στοιχείο j σταθερό, τότε για τον καθορισμό της κλάσεως (άρτια ή περιττή) της μεταθέσεως π δεν λαμβάνονται υπόψη οι αντιστροφές που έχουν το σταθερό στοιχείο j.

<u>Απόδειξη:</u> Υποθέτουμε ότι $\pi(j)=j$. Υπάρχουν $j-1$ στοιχεία του συνόλου S μικρότερα του j και $n-j$ στοιχεία του S μεγαλύτερα του j. Για $i<j$, μία αντιστροφή υπάρχει αν και μόνο αν $\pi(i)>\pi(j)=j$. Έστω λ ο αριθμός των στοιχείων i του S τα οποία προηγούνται του j και για τα οποία έχουμε $\pi(i)>j$. Τότε πρέπει επίσης να υπάρχουν ακριβώς λ στοιχεία i του S που έπονται του j και για τα οποία έχουμε $\pi(i)<j$. Επομένως υπάρχουν $\lambda+\lambda=2\lambda$ αντιστροφές οι οποίες έχουν το j. Επειδή ο αριθμός 2λ είναι άρτιος μπορούμε να τον παραλείψουμε στον προσδιορισμό του $(-1)^{k(\pi)}$.

<u>2.3.Παράδειγμα:</u> Θεωρούμε τη μετάθεση

$$\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&4&3&1&6&5\end{pmatrix}$$

Η μετάθεση π έχει πέντε αντιστροφές γιατί $\pi(1)>\pi(4)$, $\pi(2)>\pi(3)$, $\pi(2)>\pi(4)$, $\pi(3)>\pi(4)$, $\pi(5)>\pi(6)$. Συνεπώς $k(\pi)=5$ οπότε η μετάθεση π είναι περιττή. Επειδή όμως $\pi(3)=3$, δηλαδή το στοιχείο 3 μένει σταθερό στη μετάθεση π, για να προσδιορίσουμε την κλάση της δεν λαμβάνουμε υπόψη μας τις αντιστροφές που προκύπτουν από το σταθερό στοιχείο 3. Έτσι οι υπόλοιπες αντιστροφές είναι $\pi(1)>\pi(4)$, $\pi(2)>\pi(4)$, $\pi(5)>\pi(6)$, δηλαδή τρείς σε πλήθος, οπότε και πάλι προκύπτει ότι η μετάθεση π είναι περιττή.

<u>2.4.Πρόταση:</u> Η μετάθεση, η οποία ανταλλάσει ακριβώς δύο στοιχεία του συνόλου S και αφήνει όλα τα άλλα στοιχεία του S σταθερά, είναι

μία περιττή μετάθεση.

Απόδειξη: Έστω π μία μετάθεση, η οποία ανταλλάσει τα στοιχεία i και j και αφήνει όλα τα άλλα στοιχεία του συνόλου S σταθερά. Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση στόν προσδιορισμό του αριθμού $(-1)^{k(\pi)}$ μπορούμε να αγνοήσουμε τις αντιστροφές που έχουν όλα τα στοιχεία του S, εκτός από τα i καί j. Αλλά τότε υπάρχει ακριβώς μία αντιστροφή την οποία δεν θεωρήσαμε, οπότε $(-1)^{k(\pi)}=(-1)^{1}=-1$ και η μετάθεση π είναι περιττή.

2.5.Πόρισμα: Αν σε μία μετάθεση π ανταλλάξουμε δύο στοιχεία, τότε η μετάθεση αλλάζει κλάση(από άρτια γίνεται περιτή, ή από περιττή γίνεται άρτια).

2.6.Πρόταση: Ο αριθμός των περιττών μεταθέσεων των στοιχείων ενός συνόλου S ισούται με τον αριθμό των άρτιων μεταθέσεων του S.

Απόδειξη: Παίρνουμε μία περιττή μετάθεση π την οποία διατηρούμε σταθερή. Η μετάθεση π^{-1} είναι επίσης περιττή γιατί $(-1)^{k(\pi\,\pi^{-1})}=$ $=(-1)^{k(\varepsilon)}=(-1)^{k(\pi)+k(\pi^{-1})}$. Γιά κάθε άρτια μετάθεση σ, η μετάθεση πσ είναι περιττή ενώ για κάθε περιττή μετάθεση τ η μετάθεση $\pi^{-1}\tau$ είναι άρτια. Έστω Α καί Π τα σύνολα όλων των άρτιων και περιττών μεταθέσεων, αντίστοιχα. Η απεικόνιση

$$f : A \to \Pi : \sigma \to f(\sigma) = \pi\sigma$$

είναι αμφιμονότιμη και επί. Επί είναι γιατί για τυχούσα περιττή μετάθεση $\tau \in \Pi$ υπάρχει μία άρτια μετάθεση $\sigma \in A$ τέτοια ώστε $f(\sigma)=\tau$. Πράγματι αρκεί να πάρουμε για σ την άρτια μετάθεση $\pi^{-1}\tau$. Τότε έχουμε $f(\sigma)=f(\pi^{-1}\tau)=\pi(\pi^{-1}\tau)=(\pi\pi^{-1})\tau=\varepsilon\tau=\tau$. Επίσης $f(A)=\Pi$ γιατί για τυχούσα $\sigma\in A$ έχουμε $f(\sigma)=\pi\sigma\in\Pi$. Αλλά η απεικόνιση f είναι και αμφιμονότιμη, γιατί αν $f(\sigma_1)=f(\sigma_2)$ τότε $\sigma_1=\sigma_2$. Πράγματι, η $f(\sigma_1)=f(\sigma_2)$ σημαίνει

$\pi(\sigma_1)=\pi(\sigma_2)$, οπότε $\pi^{-1}(\pi\sigma_1)=\pi^{-1}(\pi\sigma_2)$ και τελικά $\sigma_1=\sigma_2$. Επειδή τώρα τα σύνολα A και Π έχουν πεπερασμένο αριθμό στοιχείων (μικρότερο ή το πολύ ίσο με n!) και επειδή η απεικόνιση f είναι αμφιμονότιμη και επί έπεται ότι τα A και Π έχουν το αυτό πλήθος στοιχείων.

3.Κυκλικές μεταθέσεις.

Γνωρίζουμε ότι κάθε παράθεση των στοιχείων ενός συνόλου S επ' ευθείας γραμμής είναι μία μετάθεση. Αν η παράθεση των στοιχείων του συνόλου S δεν γίνει επ'ευθείας γραμμής, αλλά επί περιφερείας κύκλου, τότε η μετάθεση καλείται κυκλική. Ώστε κάθε παράθεση των στοιχείων ενός συνόλου S επί περιφερείας κύκλου καλείται κυκλική μετάθεση του S. Το πλήθος των κυκλικών μεταθέσεων του συνόλου $S=\{1,2,\dots,n\}$ θα συμβολίζουμε με K_n.

3.1.Πρόταση: Το πλήθος των κυκλικών μεταθέσεων του συνόλου $S=\{1,2,\dots,n\}$ είναι $(n-1)!$, δηλαδή $K_n=(n-1)!$

Απόδειξη: Είναι φανερό ότι σε μία κυκλική μετάθεση ως πρώτο στοιχείο μπορούμε να λάβουμε οποιοδήποτε. Έτσι από μία κυκλική μετάθεση των n στοιχείων προκύπτουν n απλές μεταθέσεις, αν λάβουμε ως πρώτο στοιχείο της απλής μεταθέσεως το 1, έπειτα το 2 κ.λ.π. Επειδή τώρα υπάρχουν K_n κυκλικές μεταθέσεις το πλήθος των απλών μεταθέσεων που μπορούμε να πάρουμε απ'αυτές είναι $K_n\cdot n$. Αλλά ο αριθμός αυτός πρέπει να ισούται με το πλήθος των (απλών) μεταθέσεων των n στοιχείων του συνόλου S. Συνεπώς έχουμε $K_n\cdot n=n!$, οπότε $K_n=\frac{n!}{n}$ ή $K_n=(n-1)!$.

4.Επαναληπτικές μεταθέσεις.

Αν από τα n στοιχεία του συνόλου S τα μ πρώτα στοιχεία είναι ίσα μεταξύ τους και μάλιστα ίσα προς α ενώ τα υπόλοιπα n-μ είναι διάφορα μεταξύ τους και διάφορα πρός τα μ πρώτα, τότε το πλήθος των μεταθέσεων που είναι διάφορες μεταξύ τους είναι $\frac{n!}{\mu!}$. Για να δείξουμε αυτό ας υποθέσουμε προς στιγμή ότι τα n στοιχεία του συνόλου S είναι διάφορα μεταξύ τους και σχηματίζουμε τις n! μεταθέσεις αυτών. Χωρίζουμε τις μεταθέσεις αυτές σε ομάδες έτσι ώστε μία ομάδα έχει μία μετάθεση μαζί με όλες όσες προκύπτουν από αυτή αν διατηρήσουμε την τάξη όλων των στοιχείων τα οποία αρχικά διέφεραν από το α και κατατάξουμε τα υπόλοιπα (δηλαδή όσα ταυτίζονται αρχικά με το α) καθ' όλους τους δυνατούς τρόπους. Έτσι κάθε ομάδα μεταθέσεων θα έχει μ! μεταθέσεις. Αν τώρα θέσουμε τα μ στοιχεία (τα οποία θεωρήσαμε προσωρινά διάφορα μεταξύ τους) ίσα με α τότε οι μ! διαφορετικές μεταθέσεις μιας ομάδας θα παριστάνουν την αυτή επαναληπτική μετάθεση. Άρα το πλήθος των μεταθέσεων είναι πλέον $\frac{n!}{\mu!}$.

Αν τώρα από τα n στοιχεία τα K_1 είναι ίσα μεταξύ τους, τα K_2 επίσης ίσα μεταξύ τους αλλά διάφορα προς τα K_1, κ.λ.π. τέλος τα K_ν στοιχεία ίσα μεταξύ τους και διάφορα προς όλα τα προηγούμενα $K_1,K_2,\dots,K_{\nu-1}$ (όπου $K_1+K_2+\dots+K_\nu=n$), τότε το πλήθος των διαφόρων μεταθέσεων των n στοιχείων είναι

$$\frac{n!}{K_1!K_2!\dots K_\nu!} .$$

<u>5.Συνδυασμοί</u>.

Θεωρούμε ένα σύνολο $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$, (όπου τα $\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n$ είναι διακεκριμένα στοιχεία). Κάθε σύνολο από m στοιχεία ($1\leq m\leq n$), τα οποία λαμβάνονται από τα στοιχεία του συνόλου S, δηλαδή κάθε υποσύνολο του S μέ m στοιχεία καλείται <u>ανά m συνδυασμός των n στοιχείων</u>. Δύο συνδυασμοί, οι οποίοι διαφέρουν μόνο στην διάταξη των m στοιχείων δεν θεωρούνται διάφοροι μεταξύ τους, αλλά θεωρούνται ότι είναι ο αυτός συνδυασμός. Για το πλήθος των ανά m συνδυασμών των n στοιχείων χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\binom{n}{m}$.

Προφανώς $\binom{n}{1}=n$ και $\binom{n}{n}=1$, ενώ εξ ορισμού θέτουμε $\binom{n}{0}=1$.

5.1.Πρόταση: Για κάθε $m\in N$ με $1\leq m\leq n$ έχουμε

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (*)$$

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε την πρόταση με επαγωγή. Θεωρούμε το σύνολο $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$. Οι ανά 2 συνδυασμοί των n στοιχείων του συνόλου S είναι οι εξής:

$$\begin{array}{r}
\{\alpha_1,\alpha_2\},\{\alpha_1,\alpha_3\},\{\alpha_1,\alpha_4\},\ldots,\{\alpha_1,\alpha_{n-1}\},\{\alpha_1,\alpha_n\}\ , \\
\{\alpha_2,\alpha_3\},\{\alpha_2,\alpha_4\},\ldots,\{\alpha_2,\alpha_{n-1}\},\{\alpha_2,\alpha_n\}\ , \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\{\alpha_{n-2},\alpha_{n-1}\},\{\alpha_{n-2},\alpha_n\}\ , \\
\{\alpha_{n-1},\alpha_n\}\ .
\end{array}$$

και είναι σε πλήθος

$$1+2+3+\ldots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n-2)!(n-1)\cdot n}{(n-2)!2} = \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

δηλαδή ο τύπος (*) αληθεύει για m=2. Υποθέτουμε ότι αληθεύει για m=k, δηλαδή

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

και θα δείξουμε αυτόν για $m=k+1$ $(m\leq n)$.

'Ενας ανά k συνδυασμός των n στοιχείων του S μπορεί να επεκταθεί σε έναν ανά k+1 συνδυασμό των n στοιχείων του S με την προσθήκη ενός άλλου στοιχείου από τα υπόλοιπα n-k στοιχεία του S. 'Ετσι από κάθε ανά k συνδυασμό των n στοιχείων του S προκύπτουν (n-k) ανά k+1 συνδυασμοί των στοιχείων του συνόλου S, οπότε από τους $\binom{n}{k}$ συνδυασμούς προκύπτουν $(n-k)\cdot\binom{n}{k}$ ανά k+1 συνδυασμοί των στοιχείων του S. Αλλά στο σύνολο $(n-k)\binom{n}{k}$ των ανά k+1 συνδυασμών, κάθε ένας ανά k+1 συνδυασμός παράγεται k+1 φορές. Πραγματικά, αν από έναν ανά k+1 συνδυασμό αφαιρέσουμε ένα στοιχείο τότε προκύπτει ένας ανά k συδυασμός. Επειδή τώρα μπορούμε να αφαιρούμε οποιοδήποτε από τα k+1 στοιχεία του ανά k+1 συνδυασμού, είναι φανερό ότι από έναν ανά k+1 συνδυασμό μπορούμε να πάρουμε συνολικά k+1 διάφορους ανά k συνδυασμούς. Έτσι με αντίστροφο σκέψη από τους k+1 διάφορους ανά k συνδυασμούς μπορεί να προκύψει ένας και ο αυτός ανά k+1 συνδυασμός. Συνεπώς στο σύνολο $(n-k)\cdot\binom{n}{k}$ περιέχονται (k+1) φορές οι $\binom{n}{k+1}$ συνδυασμοί, δηλαδή έχουμε

$$(n-k)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n}{k+1} \qquad \text{οπότε}$$

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{n-k}{k+1} = \frac{n!(n-k)}{k!(n-k-1)!(n-k)(k+1)} = \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!}.$$

Έτσι ο τύπος (*) είναι αληθής για κάθε $m\in N$ με $1\leq m\leq n$.

Δίνουμε τώρα μία άλλη απόδειξη της παραπάνω προτάσεως. Παίρνουμε έναν ανά m συνδυασμό των n στοιχείων του συνόλου S, γιά παράδειγμα τον συνδυασμό $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m$. Μετά από τα m στοιχεία του συνδυασμού αυτού γράφουμε τα υπόλοιπα n-m στοιχεία του συνόλου S οπότε λαμβάνουμε μία μετάθεση του S την $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\alpha_{m+1}\ldots\alpha_n$. Αλλά τα n-m υπόλοιπα στοιχεία του S μπορούμε να τα γράψουμε κατά (n-m)! διάφορους τρόπους, οπότε προκύπτουν (n-m)! μεταθέσεις των n στοιχείων του συνόλου S. Επίσης τα m στοιχεία του συνδυασμού $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m$ μπορούμε να τα γράψουμε κατά m! διάφορους τρόπους. Έτσι από τον συνδυασμό $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m$ μπορούν να προκύψουν συνολικά m!(n-m)! διάφορες μεταθέσεις των n στοιχείων του συνόλου S. Συνεπώς από τους $\binom{n}{m}$ συνδυασμούς προκύπτουν τελικά $\binom{n}{m}m!(n-m)!$ μεταθέσεις των n στοιχείων του συνόλου S. Αλλά έτσι παίρνουμε όλες τις μεταθέσεις του S που είναι σε πλήθος n! Δηλαδή έχουμε τη σχέση

$$\binom{n}{m}m!(n-m)! = n! \quad ή \quad \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \ .$$

6.Επαναληπτικοί συνδυασμοί.

Θεωρούμε ένα σύνολο S με n στοιχεία, δηλαδή $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$. Οι ανά m συνδυασμοί των n στοιχείων με ελεύθερες απαναλήψεις δημιουργούνται όταν κάθε στοιχείο από τα n διαφορετικά στοιχεία του συνόλου S μπορεί να υπάρχει μέσα σ'ένα ανά m συνδυασμό πολλές φορές (πάντως όχι περισσότερες από m φορές).

6.1.Πρόταση: Οι ανά m συνδυασμοί των n στοιχείων του συνόλου S με ελεύθερες επαναλήψεις είναι σε πλήθος $\binom{n+m-1}{m}$.

Απόδειξη: Κάθε ανά m συνδυασμός των n στοιχείων $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n$ με ελεύθερες επαναλήψεις είναι ένα "σύνολο" στο οποίο υπάρχει x_1 φορές το στοιχείο α_1, x_2 φορές το στοιχείο α_2, x_3 φορές το στοιχείο $\alpha_3,\ldots,x_n$ φορές το στοιχείο α_n, όπου $x_1,x_2,\ldots,x_n$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι με την ιδιότητα $x_1+x_2+\ldots+x_n=m$. Αντίστροφα, κάθε n-άδα $x_1,x_2,\ldots,x_n$ από μη αρνητικούς ακέραιους τέτοια ώστε $x_1+x_2+\ldots+x_n=m$ ορίζει έναν ανά m συνδυασμό των n στοιχείων με ελεύθερες επαναλήψεις. Συνεπώς ο ολικός αριθμός των ανά m συνδυασμών με ελεύθερες επαναλήψεις ισούται με τον ολικό αριθμό των λύσεων της εξισώσεως $x_1+x_2+\ldots+x_n=m$ στο σύνολο των μη αρνητικών ακεραίων. Θα δείξουμε ότι ο συνολικός αριθμός των λύσεων της εξισώσεως αυτής ισούται με τον συνολικό αριθμό των επαναληπτικών μεταθέσεων του "συνόλου" $T=\{\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n-1\ φορές}\ ,\ \underbrace{1,1,\ldots,1}_{m-φορές}\}$.

Αν δοθεί μία επαναληπτική μετάθεση του T, τότε τα n-1 σε πλήθος 0 χωρίζουν τα m σε πλήθος 1 σε n ομάδες. Έστω ότι υπάρχουν x_1 σε πλήθος 1 που βρίσκονται αριστερά του πρώτου 0, x_2 σε πλήθος 1 μεταξύ του πρώτου 0 και του δευτέρου 0, x_3 σε πλήθος 1 μεταξύ του δευτέρου 0 και του τρίτου 0,..., και x_n σε πληθος 1 που βρίσκονται δεξιά του τελευταίου 0. Τότε τα $x_1,x_2,\ldots,x_n$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι και $x_1+x_2+\ldots+x_n=m$. Αντίστροφα αν δοθούν μη αρνητικοί ακέραιοι $x_1,x_2,\ldots,x_n$ τέτοιοι ώστε $x_1+x_2+\ldots+x_n=m$, μπορούμε, αντιστρέφοντας τον προηγούμενο συλλογισμό να κατασκευάσουμε μια επαναληπτική μετάθεση του T. (Για παράδειγμα αν n=4 και m=5, τότε μια επαναληπτική μετάθεση του $T=\{0,0,0,1,1,1,1,1\}$ είναι η 01110011 και αντιστοιχεί στη λύση της εξισώσεως $x_1+x_2+x_3+x_4=5$ που δίνεται από τις $x_1=0$, $x_2=3$, $x_3=0$, $x_4=2$). Έτσι ο αριθμός των ανά m συνδυασμών των n στοιχείων του συνόλου S με επαναλήψεις ισούται με τον αριθμό των επαναληπτικών μεταθέσεων του"συνόλου" T. Αλλά οι επαναληπτικές μεταθέσεις του T είναι σε πλήθος

$$\frac{(n-1+m)!}{(n-1)!m!} = \binom{n+m-1}{m} .$$

7.<u>Διατάξεις</u>.

Έστω $S=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ ένα σύνολο με n διακεκριμένα στοιχεία. Καλείται <u>ανά m διάταξη των n στοιχείων</u> κάθε μετάθεση m στοιχείων τα οποία λαμβάνονται από το σύνολο S. Επομένως δύο ανά m διατάξεις των n στοιχείων θεωρούνται διάφορες, όταν ή δεν αποτελούνται από τα αυτά ακριβώς στοιχεία ή αποτελούνται μεν από τα αυτά στοιχεία, αλλά διαφέρουν ως προς την σειρά των στοιχείων. Δηλαδή σε κάθε διάταξη παίζει ρόλο όχι μόνο ποια m στοιχεία θα λάβουμε από τα n, αλλά και ποια μετάθεση αυτών των m στοιχείων. Για το πλήθος των ανά m διατάξεων των n στοιχείων χρησιμοποιούμε το σύμβολο Δ_m^n.

Αν από κάθε ανά m συνδυασμό των n στοιχείων πάρουμε όλες τις μεταθέσεις είναι προφανές ότι θα προκύψει το πλήθος των ανά m διατάξεων των n στοιχείων. Επειδή κάθε ανά m συνδυασμός των n στοιχείων έχει m! μεταθέσεις έπεται ότι

$$\Delta_m^n = m!\binom{n}{m} = \frac{n!m!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1) \quad .$$

8.<u>Επαναληπτικές διατάξεις</u>.

'Εστω πάλι $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ ένα σύνολο με n διακεκριμένα στοιχεία. Καλούμε <u>ανά m επαναληπτική διάταξη των n στοιχείων</u> κάθε ανά m διάταξη την οποία μπορούμε να σχηματίσουμε από τα στοιχεία του συνόλου S όπου όμως κάθε στοιχείο μπορεί να ληφθεί μέσα στην διάταξη πολλές φορές (φυσικά όχι περισσότερες από m).

<u>8.1.Πρόταση</u>: Οι ανά m επαναληπτικές διατάξεις των n στοιχείων ενός συνόλου είναι σε πλήθος n^m.

<u>Απόδειξη</u>: Αποδεικνύουμε την πρόταση με επαγωγή. Η πρόταση ισχύει για m=2, γιατί οι ανά 2 επαναληπτικές διατάξεις των στοιχείων του συνόλου $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ είναι οι εξής:

$$\left.\begin{array}{l}
\alpha_1\alpha_1\ ,\ \alpha_1\alpha_2\ ,\ \alpha_1\alpha_3,\dots,\alpha_1\alpha_n \\
\alpha_2\alpha_1\ ,\ \alpha_2\alpha_2\ ,\ \alpha_2\alpha_3,\dots,\alpha_2\alpha_n \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\alpha_n\alpha_1\ ,\ \alpha_n\alpha_2\ ,\ \alpha_n\alpha_3,\dots,\alpha_n\alpha_n
\end{array}\right\}\ \text{πλήθος ανά 2 επαναληπτικών διατάξεων} : n\cdot n=n^2 \ .$$

Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει επίσης για m=k, δηλαδή οι ανά k επαναληπτικές διατάξεις είναι σε πλήθος n^k, και θα δείξουμε την πρόταση για m=k+1. Για να βρούμε τις ανά k+1 επαναληπτικές διατάξεις των n στοιχείων του συνόλου S αρκεί να επεκτείνουμε όλες τις ανά k επαναληπτικές διατάξεις θέτοντας στο τέλος κάθε μιας από αυτές ένα ακόμα στοιχείο του συνόλου S. Επειδή όμως το σύνολο S έχει n διακεκριμένα στοιχεία έπεται ότι από κάθε μία ανά k επαναληπτική διάταξη προκύπτουν n σε πλήθος ανά k+1 διακεκριμένες επαναληπτικές διατάξεις. Συνεπώς από τις n^k σέ πλήθος ανά k επαναληπτικές διατάξεις θα προκύψουν $n^k \cdot n = n^{k+1}$ σε πλήθος ανά k+1 επαναληπτικές διατάξεις. Εδώ πρέπει να διευκρινίσουμε ότι μία ανά k επαναληπτική διάταξη την επεκτείναμε σε μία ανά k+1 θέτοντας ένα στοιχείο μόνο στή τελευταία θέση, δηλαδή δεξία των k στοιχείων αυτής, ενώ θα μπορούσε να ισχυριστεί κανείς ότι το στοιχείο που προσθέσαμε θα έπρεπε να τεθεί και στις υπόλοιπες θέσεις της ανά k επαναληπτικής διατάξεως για να δώσει όλες τις δυνατές ανά k+1 επαναληπτικές διατάξεις. Κάτι τέτοιο όμως θα οδηγούσε στο να πάρουμε την κάθε μία ανά k+1 επαναληπτική διάταξη περισσότερες από μια φορές. Για παράδειγμα από την ανά k επαναληπτική διάταξη $\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_k}$ (όπου $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots\alpha_{i_k}\in S$) μπορούμε να πάρουμε την ανά k+1 επαναληπτική διάταξη $\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_k}\alpha_i$, θέτοντας το στοιχείο α_i στο τέλος της ανά k διατάξεως. Δεν λαμβάνουμε υπόψη μας τις άλλες ανά k+1 διατάξεις πού προκύπτουν από την $\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_k}$ αν θέσουμε το στοιχείο α_i στίς άλλες θέσεις π.χ. την $\alpha_i\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_k}$ γιατί η διάταξη αυτή προκύπτει από την ανά k διάταξη $\alpha_i\alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_{k-1}}$ αν θέσουμε στο τέλος αυτής το στοιχείο α_{i_k}.

9.Τύπος του διωνύμου ή τύπος του Νεύτωνα (Newton).

Για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών x,ψ και για κάθε $n\in N$ ισχύει ο επόμενος τύπος του διωνύμου ή τύπος του Νεύτωνα,

$$(x+\psi)^n = \binom{n}{0}x^n\psi^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}\psi^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}\psi^2 + \ldots + \binom{n}{m}x^{n-m}\psi^m + \ldots + \binom{n}{n}x^0\psi^n =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i}\psi^{i} .$$

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε την αρχή της πλήρους επαγωγής.

Για n=1 έχουμε

$$(x+\psi)^{1} = \binom{1}{0} x^{1}\psi^{0} + \binom{1}{1} x^{0}\psi^{1} = x+\psi$$

Υποθέτουμε ότι ο τύπος ισχύει για n=k, δηλαδή

$$(x+\psi)^{k} = \binom{k}{0} x^{k}\psi^{0} + \ldots + \binom{k}{m} x^{k-m}\psi^{m} + \ldots + \binom{k}{k} x^{0}\psi^{k} . \qquad (1)$$

Από την (1) λαμβάνουμε

$$(x+\psi)^{k+1} = (x+\psi)(x+\psi)^{k} = (x+\psi)\left[\binom{k}{0} x^{k}\psi^{0} + \ldots + \binom{k}{m} x^{k-m}\psi^{m} + \ldots +\right.$$

$$\left. + \binom{k}{k} x^{0}\psi^{k}\right] = \binom{k}{0} x^{k+1}\psi^{0} + \left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1}\right] x^{k}\psi + \ldots + \left[\binom{k}{m-1} + \binom{k}{m}\right] x^{k+1-m}\psi^{m} +$$

$$+ \binom{k}{k} x^{0}\psi^{k+1}$$. Αλλά $\binom{k}{0} = 1 = \binom{k+1}{0}$ και $\binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1}$

επίσης έχουμε

$$\binom{k}{m} + \binom{k}{m+1} = \binom{k+1}{m+1}$$

γιατί $$\binom{k}{m} + \binom{k}{m+1} = \frac{k!}{m!(k-m)!} + \frac{k!}{(m+1)!(k-m-1)!} = \frac{k!}{m!(k-m-1)!(k-m)} +$$

$$+ \frac{k!}{m!(m+1)(k-m-1)!} = \frac{k!}{m!(k-m-1)!}\left[\frac{1}{k-m} + \frac{1}{m+1}\right] = \frac{k!}{m!(k-m-1)!} : \frac{m+1+k-m}{(k-m)(m+1)} =$$

$$= \frac{k!(k+1)}{m!(m+1)(k-m-1)!(k-m)} = \frac{(k+1)!}{(m+1)!(k-m)!} = \binom{k+1}{m+1} .$$

Συνεπώς θα είναι

$$\binom{k}{0} + \binom{k}{1} = \binom{k+1}{1}, \ldots, \binom{k}{m-1} + \binom{k}{m} = \binom{k+1}{m}$$

'Αρα

$(x+\psi)^{k+1}=\binom{k+1}{0}x^{k+1}\psi^0+\ldots+\binom{k+1}{m}x^{k+1-m}\psi^m+\ldots+\binom{k+1}{k+1}x^0\psi^{k+1}$, το οποίο σημαίνει ότι ο τύπος του διωνύμου ισχύει για n=k+1, οπότε πλέον ισχύει για κάθε $n\in N$.

Γενίκευση του τύπου του διωνύμου.

Τον τύπο του διωνύμου $(x+\psi)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}\psi^i$ μπορούμε επίσης να γράψουμε ως εξής

$$(x+\psi)^n=\frac{n!}{n!0!}x^n\psi^0+\frac{n!}{(n-1)!1!}x^{n-1}\psi^1+\ldots+\frac{n!}{(n-k)!k!}x^{n-k}\psi^k+\ldots+$$

$$+\frac{n!}{(n-n)!n!}x^{n-n}\psi^n \quad ή \quad (x+\psi)^n=\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{(n-i)!i!}x^{n-i}\psi^i,$$

όπου θέτουμε εξ ορισμού $0!=1$.

Αυτό μας οδηγεί στο να γενικεύσουμε τον τύπο του διωνύμου στην περίπτωση περισσοτέρων από δύο προσθετέους. Έτσι έχουμε τον τύπο $(x_1+x_2+\ldots+x_k)^n=\frac{n!}{n!0!0!\ldots0!}x_1^n x_2^0\ldots x_k^0+$

$$+\frac{n!}{(n-1)!1!0!\ldots0!}x_1^{n-1}x_2^1x_3^0\ldots x_k^0+\ldots+\frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_k!}x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_k^{m_k}+\ldots$$

$$ή \quad (x_1+x_2+\ldots+x_k)^n=\sum_{m_1+m_2+\ldots+m_k=n}\frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_k!}x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_k^{m_k}.$$

όπου τα $m_1,m_2,\ldots,m_k$ διατρέχουν όλες τις μη αρνητικές ακέραιες τιμές για τις οποίες $m_1+m_2+\ldots+m_k=n$.

Η απόδειξη του τύπου αυτού μπορεί να δοθεί επαγωγικά. Ο τύπος ισχύει για k=2, είναι ο γνωστός τύπος του διωνύμου. Υποθέτουμε ότι ο τύπος ισχύει για άθροισμα λ-1 προσθετέων και θα δείξουμε ότι τότε ισχύει και για λ προσθετέους. Θέτουμε $\alpha=x_2+x_3+\ldots+x_\lambda$, οπότε

$$(x_1+\alpha)^n=\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{(n-i)!i!}x_1^{n-i}\alpha^i$$

Αλλά $\alpha^{i}=(x_2+x_3+\ldots+x_\lambda)^{i} = \sum\limits_{i_2+i_3+\ldots+i_\lambda=i} \frac{i!}{i_2!i_3!\ldots i_\lambda!}\, x_2^{i_2}x_3^{i_3}\ldots x_\lambda^{i_\lambda}$

οπότε

$(x_1+\alpha)^n=(x_1+x_2+\ldots+x_\lambda)^n=$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(n-i)!i!}\, x_1^{n-i}\Big(\sum_{i_2+i_3+\ldots+i_\lambda=i} \frac{i!}{i_2!i_3!\ldots i_\lambda!}\, x_2^{i_2}x_3^{i_3}\ldots x_\lambda^{i_\lambda}\Big) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{i_2+i_3+\ldots+i_\lambda=i} \frac{n!}{(n-i)!i!}\, \frac{i!}{i_2!i_3!\ldots i_\lambda!}\, x_1^{n-i}x_2^{i_2}x_3^{i_3}\ldots x_\lambda^{i_\lambda}$$

Αν θέσουμε τώρα $n-i=i_1$ έχουμε $i_1+i=n$ ή $i_1+i_2+\ldots+i_\lambda=n$, οπότε

$$(x_1+x_2+\ldots+x_\lambda)^n = \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_\lambda=n} \frac{n!}{i_1!i_2!\ldots i_\lambda!}\, x_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_\lambda^{i_\lambda} .$$

10. Ασκήσεις.

1. Να βρεθεί η κλάση καθώς επίσης και η αντίστροφη μετάθεση κάθε μιας από τις παρακάτω μεταθέσεις

α) $\pi=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ β) $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

γ) $\tau=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ δ) $\rho=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Λύση: α) Για να βρούμε την κλάση της μεταθέσεως π, αρκεί να βρούμε το πλήθος των αντιστροφών αυτής $k(\pi)$. Η μετάθεση π έχει δύο αντιστροφές τις $(2,1)$ καί $(3,1)$. Επομένως $k(\pi)=2$ καί η π είναι άρτια.

Η αντίστροφη της μεταθέσεως π είναι η μετάθεση π^{-1} τέτοια ώστε $\pi^{-1}\pi=\varepsilon$. Πρέπει λοιπόν να έχουμε

$\pi^{-1}\pi(1)=1$ ή $\pi^{-1}(2)=1$, $\pi^{-1}\pi(2)=2$ ή $\pi^{-1}(3)=2$ και

$\pi^{-1}\pi(3)=3$ ή $\pi^{-1}(1)=3$ 'Αρα

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

β)Η μετάθεση σ έχει τρεις αντιστροφές (3,2),(3,1) και (2,1). Συνεπώς έχουμε $k(\sigma)=3$, οπότε η σ είναι περιττή. Για την αντίστροφη μετάθεση σ^{-1}της μεταθέσεως σ έχουμε $\sigma^{-1}\sigma(1)=1$ ή $\sigma^{-1}(3)=1$, $\sigma^{-1}\sigma(2)=2$ ή $\sigma^{-1}(2)=2$ και $\sigma^{-1}\sigma(3)=3$ ή $\sigma^{-1}(1)=3$, οπότε

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

γ)Η μετάθεση τ είναι άρτια γιατί έχει δύο αντιστροφές τις (2,1) και (3,1). 'Αρα $k(\tau)=2$. Για την αντίστροφη μετάθεση τ^{-1} έχουμε

$\tau^{-1}\tau(1)=1$ ή $\tau^{-1}(2)=1$, $\tau^{-1}\tau(2)=2$ ή $\tau^{-1}(3)=2$

$\tau^{-1}\tau(3)=3$ ή $\tau^{-1}(1)=3$ και $\tau^{-1}\tau(4)=4$ ή $\tau^{-1}(4)=4$. 'Αρα

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

δ)Η μετάθεση ρ έχει τέσσερες αντιστροφές τις (3,2),(3,1),(2,1) και (4,1). Συνεπώς έχουμε $k(\rho)=4$ και η ρ είναι άρτια. Για την μετάθεση ρ^{-1} έχουμε $\rho^{-1}\rho(1)=1$ ή $\rho^{-1}(3)=1$, $\rho^{-1}\rho(2)=2$ ή $\rho^{-1}(2)=2$, $\rho^{-1}\rho(3)=3$ ή $\rho^{-1}(4)=3$, $\rho^{-1}\rho(4)=4$ ή $\rho^{-1}(1)=4$. 'Αρα

$$\rho^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2.Να βρεθεί το άθροισμα όλων των πενταψήφιων αριθμών που έχουν για ψηφία ακριβώς τα 2,3,4,7,9.

<u>Λύση</u>: Το πλήθος των πενταψήφιων αριθμών που μπορούν να σχηματιστούν από τα ψηφία 2,3,4,7,9 είναι όσες και οι μεταθέσεις των ψηφίων αυτών, δηλαδή 5! Γιά να βρούμε το άθροισμα όλων αυτών των πενταψήφιων αριθμών σκεπτόμαστε ως εξής. Το πλήθος των αριθμών που έχουν το 2 ως τελευταίο ψηφίο, δηλαδή ψηφίο μονάδων, είναι 4! και το άθροισμα των μονάδων αυτών των αριθμών είναι $4!\cdot 2$. Ομοίως οι αριθμοί που έχουν το ψηφίο 2 ως ψηφίο δεκάδων είναι 4! και το άθροισμα των δεκάδων αυτών των αριθμών είναι $4!\cdot 2\cdot 10$. Οι αριθμοί που έχουν το 2 ως ψηφίο εκατοντάδων είναι 4! και το άθροισμα των εκατοντάδων αυτών των αριθμών είναι $4!\cdot 2\cdot 100$. Επίσης αυτοί που έχουν το 2 ως ψηφίο χιλιάδων είναι 4! και το άθροισμα των χιλιάδων αυτών των αριθμών είναι $4!\cdot 2\cdot 1000$. Τέλος οι αριθμοί που έχουν το 2 στην πρώτη θέση, δηλαδή στη θέση των δεκάδων χιλιάδων είναι 4! και το άθροισμα αυτών είναι $4!\cdot 2\cdot 10.000$. Άρα το άθροισμα όλων των μονάδων στις διάφορες θέσεις του ψηφίου 2 όλων των αριθμών είναι

$4!\cdot 2\cdot(1+10+100+1000+10000)=4!\cdot 2\cdot 1111$

ομοίως για το ψηφίο 3 έχουμε $4!\cdot 3\cdot 1111$

για το ψηφίο 4 έχουμε $4!\cdot 4\cdot 1111$

για το ψηφίο 7 έχουμε $4!\cdot 7\cdot 1111$

για το ψηφίο 9 έχουμε $4!\cdot 9\cdot 1111$

Άρα το άθροισμα όλων των αριθμών είναι

$4!1111\cdot(2+3+4+7+9)=4!1111\cdot 25=666.600$

3.Πόσους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε αν λάβουμε τρία από τα ψηφία 1,2,3,4,5,6 και δύο από τα ψηφία 7,8,9;

<u>Λύση</u>:Από τα έξη πρώτα ψηφία μπορούμε να λάβουμε τρία, κατά $\binom{6}{3}$ δυνατούς τρόπους. Επίσης από τα τρία δεύτερα μπορούμε να λάβουμε δύο, κατά $\binom{3}{2}$ δυνατούς τρόπους. Αν τώρα συνδυάσουμε κάθε συνδυασμό

των πρώτων με κάθε συνδυασμό των δεύτερων, τότε θα προκύψουν συνολικά $\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{2}$ πενταψήφιοι αριθμοί. Από κάθε τέτοιο αριθμό μπορούμε να πάρουμε 5! διαφορετικούς αριθμούς. Συνεπώς το πλήθος των αριθμών θα είναι $\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{2}\cdot 5! = \frac{6!}{3!(6-3)!}\cdot\frac{3!}{2!(3-2)!}\cdot 5! = \frac{6!3!5!}{3!3!2!1!} =$

$$= \frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 3!2!\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{3!\cdot 3!\cdot 2!} = 2\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot 5^2 = 7.200$$

4. Πόσους τετραψηφίους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε από τά ψηφία 1,2,3,4,5,6,7 έτσι ώστε κάθε αριθμός που σχηματίζουμε να έχει όλα τα ψηφία διαφορετικά;

<u>Λύση</u>: Προφανώς το πλήθος των αριθμών είναι ίσο με το σύνολο των διατάξεων των 7 ψηφίων ανά 4, δηλαδή

$$\Delta_4^7 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{3!} = 840 \ .$$

5. Να βρεθεί ο φυσικός αριθμός n στίς παρακάτω εξισώσεις:

α) $\binom{n}{2}=28$, β) $\binom{n}{3}=35$

γ) $2\binom{n}{5}=3\binom{n}{3}$, δ) $2\binom{6}{n}=3\binom{5}{n}$

<u>Λύση</u>:

α) $\binom{n}{2}=28 \Rightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!}=28 \Rightarrow \frac{(n-2)!(n-1)n}{2(n-2)!}=28 \Rightarrow$

$\frac{(n-1)n}{2}=28 \Rightarrow n^2-n-56=0$ οπότε

$$n=\frac{1\pm\sqrt{225}}{2}= \begin{cases} 8 \\ -7 \text{ απορρίπτεται} \end{cases}$$

β) $\binom{n}{3}=35 \Rightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!}=35 \Rightarrow \frac{(n-3)!(n-2)(n-1)n}{6(n-3)!}=35 \Rightarrow$

$\frac{(n-2)(n-1)n}{6}=35 \Rightarrow n^3-3n^2+2n-210=0 \Rightarrow$

$(n-7)(n^2+4n+30)=0 \Rightarrow n=7$ ή $n^2+4n+30=0$.

Η εξίσωση αυτή όμως έχει μιγαδικές ρίζες. 'Αρα έχουμε n=7.

γ) $2\binom{n}{5}=3\binom{n}{3} \Rightarrow 2\cdot \frac{n!}{5!(n-5)!} = 3\,\frac{n!}{3!(n-3)!} \Rightarrow$

$$\frac{2}{3!4\cdot5(n-5)!} = \frac{3}{3!(n-5)!(n-4)(n-3)} \Rightarrow \frac{2}{4\cdot5} = \frac{3}{(n-4)(n-5)} \Rightarrow$$

$$n^2-7n-18=0 \Rightarrow n= \frac{7\pm\sqrt{121}}{2} = \begin{cases} 9 \\ -2 \text{ απορρίπτεται} \end{cases}$$

'Αρα n=9.

δ) $2\binom{6}{n}=3\binom{5}{n} \Rightarrow \frac{2\cdot6!}{n!(6-n)!} = \frac{3\cdot5!}{n!(5-n)!} \Rightarrow \frac{2\cdot5!6}{n!(6-n-1)!(6-n)} =$

$$= \frac{3\cdot5!}{n!(5-n)!} \Rightarrow \frac{12}{6-n} = 3 \Rightarrow n=2 \;.$$

6. Πόσους αριθμούς μεγαλύτερους του αριθμού 1.000.000 μπορούμε να σχηματίσουμε ώστε ο καθένας να έχει ακριβώς τα ψηφία 2,2,2,3,3,0,4.

Λύση:Ο συνολικός αριθμός των επταψήφιων αριθμών που έχουν για ψηφία 2,2,2,3,3,0,4 είναι ίσος με το πλήθος των επαναληπτικών μεταθέσεων των επτά αυτών ψηφίων, δηλαδή $\frac{7!}{3!2!} = 420$. Αλλά στο πλήθος αυτών των αριθμών περιλαμβάνονται και εκείνοι που έχουν για πρώτο ψηφίο το 0. Καθένας από τους οποίους βέβαια είναι μικρότερος από τον αριθμό 1.000.000. Οι αριθμοί αυτοί είναι σε πλήθος όσες είναι και οι επαναληπτικές μεταθέσεις των υπολοίπων ψηφίων, δηλαδή των 2,2,2,3,3,4. 'Αρα είναι σε πλήθος $\frac{6!}{3!2!}=60$. 'Ετσι το πλήθος των ζητουμένων αριθμών είναι 420-60=360.

7. Δώδεκα ευθείες κείνται σ'ένα επίπεδο και ανά δύο δεν είναι παράλληλες ενώ ανά τρεις δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο. Να βρεθεί σε πόσα σημεία τέμνονται οι 12 ευθείες.

Λύση: Τό πλήθος των σημείων που τέμνονται οι 12 ευθείες ισούται με το πλήθος των συνδυασμών των 12 ανά 2, δηλαδή

$$\binom{12}{2}=\frac{12!}{2!(12-2)!}=\frac{12!}{2!10!}=\frac{11\cdot 12}{2}=66 \quad \text{σημεία.}$$

8.Να βρεθεί το πλήθος των διαγωνίων ενός πολυγώνου με n κορυφές.

Λύση: Το πλήθος των πλευρών και των διαγωνίων μαζί του πολυγώνου είναι όσοι οι ανά δύο συνδυασμοί των n κορυφών, δηλαδή

$$\binom{n}{2}=\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{(n-1)n}{2} \quad .$$

Αν από το πλήθος αυτό αφαιρέσουμε το πλήθος n, των πλευρών θα έχουμε το πλήθος των διαγωνίων, δηλαδή

$$\frac{(n-1)n}{2}-n=\frac{(n-1)n-2n}{2}=\frac{n(n-3)}{2} \quad .$$

9.Από μια ομάδα 7 ανδρών και 6 γυναικών σχηματίζεται μια επιτροπή 5 ατόμων. Να βρεθεί ο αριθμός των διαφορετικών επιτροπών που μπορούν να σχηματιστούν έτσι ώστε: α)η επιτροπή να έχει ακριβώς 3 ανδρές, β)η επιτροπή να έχει τουλάχιστον 3 άνδρες.

Λύση: α)Στη πρώτη περίπτωση πρέπει να υπάρχουν στην επιτροπή ακριβώς 2 γυναίκες. Οι άνδρες μπορούν να εκλεγούν κατά

$$\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!(7-3)!}=\frac{4!5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 4!}=35 \text{ διαφορετικούς τρόπους}$$

και οι γυναίκες κατά $\binom{6}{2}=\frac{6!}{2!(6-2)!}=\frac{4!5\cdot 6}{2\cdot 4!}=15$

διαφορετικούς τρόπους. Επομένως κάθε εκλογή ανδρών μπορεί να συνδυαστεί με κάθε εκλογή γυναικών, οπότε έχουμε συνολικά 35·15=525 εκλογές επιτροπής των 5 ατόμων.

β) Εδώ έχουμε τρεις τύπους επιτροπής:(1)τρεις άνδρες και δύο γυναίκες, (2)τέσσερες άνδρες και μία γυναίκα και (3)πέντε άνδρες. Ο αριθμός των επιτροπών για κάθε μια από τις τρεις παραπάνω περιπτώσεις είναι

(1) 525 επιτροπές, όπως βρήκαμε στην περίπτωση (α)

(2) $\binom{7}{4}\cdot\binom{6}{1}= \frac{7!}{4!(7-4)!}\cdot\frac{6!}{1!(6-1)!} = 210$

(3) $\binom{7}{5}= \frac{7!}{5!(7-5)!} = 21$

Συνεπώς ο ολικός αριθμός των επιτροπών είναι

$525+210+21 = 756$.

10. Δώδεκα σημεία είναι συνεπίπεδα αλλά ανά τρια δεν είναι συγγραμμικά:α)Να βρεθεί ο αριθμός των διαφορετικών τριγώνων τα οποία μπορούν να σχηματίστουν αν χρησιμοποιηθούν αυτά τα σημεία ως κορυφές. β)Να βρεθεί πόσα από αυτά τα τρίγωνα έχουν ένα συγκεκριμένο σημείο ως κορυφή.

<u>Λύση</u>: α)Επειδή κάθε τρίγωνο έχει 3 κορυφές μπορούμε να κατασκευάσουμε τόσα τρίγωνα όσος είναι ο αριθμός των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να εκλέξουμε τρία σημεία από τα 12. Ο αριθμός αυτός είναι

$$\binom{12}{3}= \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{9!\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{2\cdot 3\cdot 9!} = 220$$

β)Για να είναι ένα συγκεκριμένο σημείο κορυφή κάθε τριγώνου, αφήνουμε αυτό το σημείο και εκλέγουμε τα άλλα δύο σημεία (τις άλλες δύο κορυφές του τριγώνου) από τα υπόλοιπα 11 κατά

$$\binom{11}{2}= \frac{11!}{2!(11-2)!} = \frac{9!\cdot 10\cdot 11}{2\cdot 9!} = 55$$

διαφορετικούς τρόπους. Συνεπώς υπάρχουν 55 διαφορετικά τρίγωνα τα οποία έχουν ένα συγκεκριμένο σημείο ως κορυφή.

11. Να δειχτούν οι επόμενες σχέσεις

α) $\binom{n}{k}= \binom{n}{n-k}$,β) $\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$, γ) $\binom{n}{k}+2\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k-2}=\binom{n+2}{k}$

(δ) $\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k-1} = \frac{(n+1)!(n-2k)}{(k+1)!(n-k+1)!}$

<u>Λύση</u>:

α) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

και $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

β) $\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!(n-k)}{k!(k+1)(n-k-1)!(n-k)} = \frac{n!(n-k)}{k!(n-k)!(k+1)} =$

$= \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$

γ) $\binom{n}{k} + 2\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-2} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + 2\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{(k-2)!(n-k+2)!} =$

$= \frac{n!}{(k-2)!(k-1)k(n-k)!} + \frac{2n!}{(k-2)!(k-1)(n-k+1)(n-k)!} +$

$+ \frac{n!}{(k-2)!(n-k+2)(n-k+1)(n-k)!} =$

$= \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} \left[\frac{1}{(k-1)k} + \frac{2}{(k-1)(n-k+1)} + \frac{1}{(n-k+2)(n-k+1)} \right] =$

$= \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k+1)(n-k+2)+2k(n-k+2)+k(k-1)}{k(k-1)(n-k+1)(n-k+2)} =$

$= \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} \cdot \frac{n^2+3n+2}{k(k-1)(n-k+1)(n-k+2)} = \frac{n!(n+1)(n+2)}{k!(n-k+2)!} =$

$= \frac{(n+2)!}{k!(n+2-k)!} = \binom{n+2}{k}$

δ) $\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} - \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} =$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(n-k)(n-k+1)}\right] =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k-1)!} \cdot \frac{(n-k)(n-k+1)-k(k+1)}{k(k+1)(n-k)(n-k+1)} = \frac{n!(n^2-2kn-2k+n)}{(k+1)!(n-k+1)!} =$$

$$= \frac{n!(n+1)(n-2k)}{(k+1)!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!(n-2k)}{(k+1)!(n-k+1)!} .$$

12.Από δέκα διαφορετικά σύμφωνα και 4 διαφορετικά φωνήεντα πόσες λέξεις,(αναγραμματισμούς,δηλ. οι λέξεις δεν είναι απαραίτητο να έχουν νόημα), μπορούμε να σχηματίσουμε ώστε κάθε λέξη να έχει 6 σύμφωνα και 2 φωνήεντα;

<u>Λύση</u>: Μπορούμε να εκλέξουμε 6 σύμφωνα από τα 10 κατά $\binom{10}{6}$ διαφορετικούς τρόπους, δηλαδή

$$\binom{10}{6} = \frac{10!}{6!(10-6)!} = \frac{6!\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{6!4!} = 210 \text{ τρόπους}$$

Ομοίως μπορούμε να εκλέξουμε 2 φωνήεντα από τα 4 κατά $\binom{4}{2}$ διαφορετικούς τρόπους, δηλαδή

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = 6 \text{ τρόπους}$$

Επομένως για κάθε έναν από τους 210 τρόπους εκλογής των 6 συμφώνων έχουμε 6 τρόπους εκλογής των 2 φωνηέντων. Συνεπώς τα 8 γράμματα κάθε λέξεως μπορούν να εκλεγούν κατά 210·6=1260 τρόπους. Μετά από αυτό, κάθε εκλογή από τις εκλογές των 8 γραμμάτων μπορεί να μετατεθεί κατά 8! διαφορετικούς τρόπους. Συνεπώς, ο ολικός αριθμός των λέξεων που μπορούμε να σχηματίσουμε είναι 1260·8!=50.803.200

13.Πόσες λέξεις μπορούμε να σχηματίσουμε μεταθέτοντας τα γράμματα της λέξεως "πανεπιστήμιο".

Λύση: Η λέξη "πανεπιστήμιο" έχει 13 γράμματα από τα οποία δύο είναι το γράμμα π, δύο το γράμμα ν και δύο το γράμμα ι. Άρα μπορούμε να πάρουμε τις μεταθέσεις 13 γραμμάτων με επαναλήψεις ορισμένων από αυτά. Δηλαδή έχουμε

$$\frac{13!}{2!2!2!} = 778.377.600 \text{ λέξεις}$$

14.Με τα ψηφία 0,1,2,3,4,5,6 πόσους πενταψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε;

Λύση: Οι πενταψήφιοι αριθμοί που δεν έχουν καθόλου το ψηφίο 0 είναι σε πλήθος όσες οι ανά 5 επαναληπτικές διατάξεις των ψηφίων 1,2,3,4, 5,6 , δηλαδή 6^5=7.776. Επίσης οι πενταψήφιοι αριθμοί που έχουν μία φορά το ψηφίο 0, όχι όμως στην πρώτη θέση, είναι σε πλήθος $4\cdot6^4$=5184. Ο αριθμός αυτών προκύπτει από τους τετραψήφιους αριθμούς που μπορούμε να δημιουργήσουμε με τα 1,2,3,4,5,6, αν σε καθέναν από αυτούς θέσουμε ένα 0 στις διάφορες θέσεις εκτός βέβαια από την πρώτη. Επειδή τώρα ένας τετραψήφιος αριθμός μετατρέπεται σε πενταψήφιο με ένα ψηφίο το 0 κατά 4 τρόπους έχουμε συνολικά τον αριθμό $4\cdot6^4$. Ομοίως οι πενταψήφιοι αριθμοί που έχουν δύο φορές το ψηφίο 0, όχι όμως στην πρώτη θέση, είναι σε πλήθος $6\cdot6^3$=1296. Δηλαδή, όσοι είναι οι τριψήφιοι αριθμοί που δημιουργούνται από τα ψηφία 1,2,3,4,5,6 αν σε καθέναν από αυτούς θέσουμε το ψηφίο 0 δύο φορές στις διάφορες θέσεις εκτός από την πρώτη. Οι δυνατές θέσεις είναι 6. Στη συνέχεια οι πενταψήφιοι αριθμοί που έχουν τρείς φορές το ψηφίο 0, όχι όμως στήν πρώτη θέση, είναι $4\cdot6^2$=144.Τέλος οι πενταψήφιοι αριθμοί που έχουν το ψηφίο 0 τέσσερες φορές είναι 6. Έτσι όλοι οι πενταψήφιοι αριθμοί είναι σε πλήθος 7776+5184+1296+144+6=14406.

15. Να βρεθεί, αν υπάρχει, ο ανεξάρτητος του x όρος σε καθένα από τα επόμενα αναπτύγματα.

α) $(2x+\frac{1}{x^2})^{12}$ β) $(\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{3x})^9$

Λύση:

α) Ο όρος k+1 τάξεως στο ανάπτυγμα $(2x+\frac{1}{x^2})^{12}$ είναι, σύμφωνα με τον τύπο του διωνύμου

$$\binom{12}{k}(2x)^{12-k}(\frac{1}{x^2})^k=\binom{12}{k}\cdot 2^{12-k}\cdot x^{12-k}\cdot\frac{1}{x^{2k}}=$$

$$=\binom{12}{k}\cdot 2^{12-k}\cdot x^{12-k-2k}=\binom{12}{k}\cdot 2^{12-k}x^{12-3k}$$

Για να είναι ο όρος αυτός ανεξάρτητος του x πρέπει να έχουμε $12-3k=0$ ή $k=4$. Άρα ο 5ος όρος του αναπτύγματος είναι ανεξάρτητος του x.

β) Ο όρος k+1 τάξεως στο ανάπτυγμα $(\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{3x})^9$ είναι

$$\binom{9}{k}(\frac{3x^2}{2})^{9-k}(-\frac{1}{3x})^k=\binom{9}{k}(\frac{3}{2})^{9-k}(-\frac{1}{3})^k\cdot x^{2(9-k)}\cdot x^{-k}=$$

$$=\binom{9}{k}\cdot(\frac{3}{2})^{9-k}(-\frac{1}{3})^k\cdot x^{18-3k}.$$

Για να είναι ο όρος αυτός ανεξάρτητος του x πρέπει να έχουμε $18-3k=0$ ή $k=6$. Άρα ο 7ος όρος του αναπτύγματος είναι ανεξάρτητος του x.

16. Να δειχθούν οι ταυτότητες

α) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$

β) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$

γ) $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots=2^{n-1}$

δ) $\frac{\binom{n}{1}}{1}+2\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{1}}+3\frac{\binom{n}{3}}{\binom{n}{2}}+\ldots+n\frac{\binom{n}{n}}{\binom{n}{n-1}}=\frac{n(n+1)}{2}$

<u>Λύση</u>: Θεωρούμε τον τύπο του διωνύμου

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\ldots+\binom{n}{n}x^n$$

Αν θέσουμε τώρα x=-1 παίρνουμε την ταυτότητα (α). Αν θέσουμε x=1 παίρνουμε την ταυτότητα(β). Για την (γ) χρησιμοποιούμε τις (α) και (β). Από την (α) έχουμε

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots \qquad (*)$$

Αν τώρα θέσουμε στην (β) όπου $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots$ τό ίσο του από την (*) έχουμε

$$2\{\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots\}=2^n \quad ή \quad \binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots=2^{n-1}$$

Για την (δ) παρατηρούμε ότι

$$k\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}}=k\frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}}=\frac{k(k-1)!(n-k+1)!}{k!(n-k)!}=n-k+1$$

Αν τώρα πάρουμε τη σχέση αυτή διαδοχικά για k=1,2,3,...,n θα έχουμε για το πρώτο μέλος της (δ)

$$\frac{\binom{n}{1}}{1}+2\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{1}}+3\frac{\binom{n}{3}}{\binom{n}{2}}+\ldots+n\frac{\binom{n}{n}}{\binom{n}{n-1}}=(n-1+1)+(n-2+1)+(n-3+1)+\ldots+$$

$$+(n-n+1)=n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1=1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

17. Να δειχθεί ότι $2^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}3^{n-k}$

<u>Λύση</u>: Εφαρμόζουμε τον τύπο του διωνύμου για x=3 και ψ=-1 οπότε έχουμε $(3+(-1))^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}(-1)^k$ ή $2^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}3^{n-k}$ δηλαδή

τήν ζητούμενη ταυτότητα.

18. Να δειχθεί ότι

α) $1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\ldots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1}$

β) $\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}-4\binom{n}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}n\binom{n}{n}=0$

γ) $n(n+1)2^{n-2}=\sum\limits_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$

δ) $1+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\frac{1}{4}\binom{n}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

<u>Λύση</u>: Θεωρούμε τον τύπο του διωνύμου

$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\ldots+\binom{n}{n}x^n$

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας οπότε έχουμε

$n(1+x)^{n-1}=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}x+3\binom{n}{3}x^2+\ldots+n\binom{n}{n}x^{n-1}$ (*)

θέτουμε τώρα x=1 οπότε παίρνουμε την (α). Αν θέσουμε x=-1 θα πάρουμε την (β). Για να παράγουμε την (γ) πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της (*) επί x. Έτσι έχουμε $nx(1+x)^{n-1}=\sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k$.

Στη συνέχεια παραγωγίζουμε οπότε έχουμε

$n\left[(1+x)^{n-1}+(n-1)x(1+x)^{n-2}\right]=\sum\limits_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}x^{k-1}$ θέτοντας τώρα x=1 παίρνουμε τελικά την (γ). Για να αποδείξουμε την (δ) θεωρούμε ξανά τον τύπο του διωνύμου $(1+x)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ και ολοκληρώνουμε τα δύο μέλη από 0 έως 1. Έτσι έχουμε διαδοχικά

$$\int_0^1(1+x)^n dx=\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)dx \quad \text{ή} \quad \int_0^1(1+x)^n d(1+x)=\sum_{k=0}^{n}\int_0^1\binom{n}{k}x^k dx$$

$$\left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\left.\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_0^1$$

$$\frac{2^{n+1}}{n+1}-\frac{1}{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+1}.$$

19. Να βρεθεί ο συντελεστής του όρου $x_1^3x_2x_3^4x_5^2$ στο ανάπτυγμα $(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^{10}$

Λύση: Από τον γενικό τύπο του διωνύμου έχουμε

$$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+)^{10}=\sum_{k_1+k_2+k_3+k_4+k_5=10}\frac{10!}{k_1!k_2!k_3!k_4!k_5!}\cdot$$

$$\cdot x_1^{k_1}x_2^{k_2}x_3^{k_3}x_4^{k_4}x_5^{k_5}$$

Συνεπώς ο συντελεστής του όρου $x_1^3x_2x_3^4x_5^2$ είναι

$$\frac{10!}{3!1!4!0!2!}=12600$$

20. Να βρεθεί ο συντελεστής του όρου $x_1^2x_2^3x_3x_4^2$ στο ανάπτυγμα $(x_1-x_2+2x_3-2x_4)^8$.

Λύση: 'Εχουμε

$$(x_1-x_2+2x_3-2x_4)^8=\sum_{k_1+k_2+k_3+k_4=8}\frac{8!}{k_1!k_2!k_3!k_4!}\cdot x_1^{k}(-x_2)^{k_2}\cdot$$

$$(2x_3)^{k_3}(-2x_4)^{k_4}=\sum_{k_1+k_2+k_3+k_4=8}\frac{8!}{k_1!k_2!k_3!k_4!}(-1)^{k_2}2^{k_3}(-2)^{k_4}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdot$$

$\cdot x_3^{k_3}x_4^{k_4}$. Συνεπώς ο συντελεστής του όρου $x_1^2x_2^3x_3x_4^2$ είναι

$$\frac{8!}{2!3!1!2!}(-1)^3 2^1(-2)^2=-13440$$

11. Άλυτες ασκήσεις.

1. Πόσες μεταθέσεις μπορούμε να σχηματίσουμε με τα γράμματα Α,Β,Γ, κ,λ,π, έτσι ώστε κάθε μια να έχει ως πρώτο γράμμα ένα από τα κεφαλαία;

2. Κατά πόσους τρόπους μπορούν n διάφορα βιβλία να τοποθετηθούν σ'ένα ράφι έτσι ώστε δύο συγκεκριμένα βιβλία να μη βρίσκονται το

ένα πλάι στο άλλο;

3. Με τα ψηφία 1,1,2,2,3,3,4 πόσους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε έτσι ώστε τα άρτια ψηφία να κατέχουν άρτιας τάξεως θέση και τα περιττά περιττής;

4. Κατά πόσους τρόπους 11 διάφορα βιβλία μπορούν να μοιρασθούν σε 4 μαθητές ώστε ο Α να πάρει 4 βιβλία, ο Β 3 βιβλία και ο Γ και Δ απο 2;

5. Να δειχθεί ότι το άθροισμα όλων των αριθμών (του δεκαδικού συστήματος αριθμήσεως) τους οποίους παίρνουμε αν μεταθέσουμε n διάφορα μεταξύ τους ψηφία καθ'όλους τους δυνατούς τρόπους ισούται με $(n-1)!\frac{10^n-1}{9}S$ όπου S είναι το άθροισμα των n ψηφίων.

6. Από τέσσερες άνδρες και οκτώ γυναίκες πρόκειται να εκλεγεί μία ομάδα 6 ατόμων στην οποία ένας τουλάχιστον θα είναι άνδρας. Πόσσες τέτοιες διαφορετικές ομάδες είναι δυνατόν να σχηματίσουμε;

7. Ποίο είναι το πολύ το πλήθος των σημαίων τομής i)6 ευθειών, ii)5 περιφερειών;

8. Να βρεθεί το n αν $\binom{2n}{3}:\binom{n}{2}=\frac{44}{3}$

9. Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί υπάρχουν που δεν έχουν το ψηφίο 0;

10. Κατά πόσους τρόπους τρείς μαθητές μπορούν να καθίσουν σε 4 θρανία;

11. Να προσδιορισθεί ο θετικός ακέραιος k έτσι ώστε $\Delta^{56}_{k+6}=30800\cdot\Delta^{57}_{k+3}$.

12. Να δειχθεί ότι $\Delta^{n+1}_m=\Delta^n_m+m\Delta^n_{m-1}$.

13. Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί με διαφορετικά μεταξύ τους ψηφία υπάρχουν;

14. Να βρεθούν οι συντελεστές του x^{30} και του x^{-15} του αναπτύγμα-

τος $(x^4-\frac{1}{x})^{15}$.

15.Να βρεθεί ο ανεξάρτητος του x όρος στο ανάπτυγμα $(x-\frac{1}{x^2})^{3n}$.

16.Ο 2ος,3ος και 4ος όρος στο ανάπτυγμα $(x+\psi)^n$ είναι αντίστοιχα 240 , 720 , 1080. Να βρεθούν τα x,ψ,n.

17.Αν στο ανάπτυγμα $(1+x)^{43}$ οι όροι τάξεως $2\mu+1$ και $\mu+2$ έχουν ίσους συντελεστές να βρεθεί ο μ.

18.Να δειχθούν οι ταυτότητες:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{6}+\ldots=\frac{1}{2}\left[(1+i)^n+(1-i)^n\right]$$

$$\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\binom{n}{7}+\ldots=\frac{1}{2i}\left[(1+i)^n-(1-i)^n\right].$$

19.Να βρεθεί με τι ισούται η κάθε μια από τις παραστάσεις

$$\sum_{i=0}^{5}\binom{5}{i}k^i\lambda^{5-i}\ ,\qquad \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}k^i(1-k)^{n-i}\ ,$$

$$\sum_{i=0}^{7}\left[3\binom{7}{i}k^i(1-k)^{7-i}+5\right].$$

20.Να βρεθεί ο συντελεστής του $x^2\psi^2z$ στο ανάπτυγμα $(x+\psi+z)^5$.

21. Αν m είναι τυχόντας πραγματικός αριθμός και n ένας θετικός ακέραιος τότε θέτουμε

$$m_n=m(m-1)\ldots(m-n+1)=\binom{m}{n}n!$$

Δείξτε ότι για δύο τυχόντες πραγματικούς αριθμούς α και β και κάθε θετικό ακέραιο n έχουμε

$$(\alpha+\beta)_n=\binom{n}{0}\alpha_n+\binom{n}{1}\alpha_{n-1}\beta_1+\ldots+\binom{n}{r}\alpha_{n-r}\beta_r+\ldots+\binom{n}{n}\beta_n\ .$$

(Τύπος του Vandermonde) .

ΠΙΝΑΚΕΣ

1. Έννοιες - Ορισμοί.

1.1. Ορισμός: Κάθε ορθογώνια διάταξη $m\cdot n$ σε πλήθος στοιχείων $\alpha_{11},\alpha_{12},\dots,\alpha_{1n},\alpha_{21},\dots,\alpha_{2n},\dots,\alpha_{m1},\dots,\alpha_{mn}$, από ένα σώμα F σε m γραμμές και n στήλες στη μορφή

$$A=\left[\alpha_{ij}\right]=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\dots\alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\dots\alpha_{2n}\\ \dots & \dots\\ \dots & \dots\\ \dots & \dots\\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2}\dots\alpha_{mn}\end{bmatrix} \qquad (1.1)$$

καλείται πίνακας ή μητρώο ή μήτρα (matrix) με m γραμμές και n στήλες. 'Οταν θέλουμε να δηλώσουμε συγχρόνως και το πλήθος των γραμμών και στηλών του πίνακα (1.1) καλούμε αυτόν (m,n)-πίνακα, ή ακόμα πίνακα του τύπου (m,n).

Τα α_{ij} καλούνται στοιχεία του πίνακα και είναι βέβαια στοιχεία του σώματος F. Οι δείκτες i και j δηλώνουν τη γραμμή και τη στήλη, αντίστοιχα, στην οποία βρίσκεται το στοιχείο α_{ij}. Ο πρώτος δείκτης i καλείται δείκτης γραμμής και ο δεύτερος δείκτης j καλείται δείκτης στήλης.

1.2. Ορισμοί: α) Αν $m=n$ ο πίνακας (1.1) λέγεται n-τετραγωνικός πίνακας (square matrix). Σ'αυτή την περίπτωση τα στοιχεία $\alpha_{11},\alpha_{22},\dots,\alpha_{nn}$ (δηλαδή τα στοιχεία α_{ii}) σχηματίζουν την κύρια διαγώνιο του πίνακα, ενώ τα στοιχεία $\alpha_{1n},\alpha_{2,n-1},\dots,\alpha_{n1}$ σχηματίζουν την δευτερεύουσα διαγώνιο του πίνακα.

β) Ένας (1,n)-πίνακας, δηλαδή

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix}$$

καλείται <u>πίνακας γραμμή</u> ή <u>διάνυσμα γραμμής</u>, ενώ ένας (n,1)-πίνακας, δηλαδή

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

καλείται <u>πίνακας στήλη</u> ή <u>διάνυσμα στήλης</u>.

γ) Δύο πίνακες είναι ίσοι αν και μόνο αν είναι του ίδιου τύπου και έχουν ίσα στοιχεία στις αντίστοιχες θέσεις. Δηλαδή οι (m,n)--πίνακες $A=[\alpha_{ij}]$ και $B=[b_{ij}]$ θα είναι ίσοι αν και μονον αν $\alpha_{ij}=b_{ij}$ για κάθε ζεύγος δεικτών i και j , $1\leq i\leq m$, $1\leq j\leq n$.

δ) Ένας (m,n)-πίνακας $A=[\alpha_{ij}]$ που έχει όλα τα στοιχεία ίσα με μηδέν, δηλαδή $\alpha_{ij}=0$ για όλους τους δείκτες i και j είναι γνωστός ως ο (m,n)-<u>μηδενικός πίνακας</u> (zero matrix) και σημειώνεται με 0.

δ) Ένας n-τετραγωνικός πίνακας $A=[\alpha_{ij}]$ που έχει την ιδιότητα $\alpha_{ij}=0$ αν $i\neq j$, δηλαδή όλα τα στοιχεία που δεν κείνται στην κύρια διαγώνιο είναι μηδέν, καλείται <u>διαγώνιος πίνακας</u> (diagonal metrix).

ε) Ένας n-τετραγωνικός διαγώνιος πίνακας που έχει $\alpha_{11}=\alpha_{22}=\dots=\alpha_{nn}=1$ καλείται <u>ταυτοτικός πίνακας</u> (identity metrix) και σημειώνεται με I ή I_n άν θέλουμε να δηλώσουμε συγχρόνως και τον τύπο του. Δηλαδή έχουμε

$$I_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε το δέλτα του Kronecker, δηλαδή

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad i=j \\ 0 & \text{αν} \quad i\neq j \end{cases}$$

τότε ο ταυτοτικός πίνακας μπορεί να γραφεί $I=[\delta_{ij}]$.

ζ) Θεωρούμε έναν (m,n)-πίνακα $A=[\alpha_{ij}]$, ή

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

Αν τις γραμμές του πίνακα A τις κάνουμε στήλες και τις στήλες του γραμμές, τότε παίρνουμε ένα νέο πίνακα $B=[b_{ij}]$ ο οποίος είναι του τύπου (n,m) και καλείται <u>ανάστροφος</u> (transpose) του A, δηλαδή έχουμε

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε συνεπώς ότι $b_{ij}=\alpha_{ji}$ για κάθε ζεύγος δεικτών i και j, $1\leq j\leq n$ και το στοιχείο b_{ij}, που εμφανίζεται στην i-γραμμή και j-στήλη του ανάστροφου πίνακα, είναι το στοιχείο α_{ji} πού υπάρχει στην j-γραμμή και την i-στήλη του πίνακα A. Τον ανάστροφο ενός πίνακα A συμβολίζουμε συνήθως με A^t ή A^T.

η) Ένας τετραγωνικός πίνακας $A=[\alpha_{ij}]$ καλείται <u>συμμετρικός</u> (symmetric) αν $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$ (i,j=1,2,...,n), δηλαδή αν $A=A^t$.

θ) Ένας τετραγωνικός πίνακας $A=[\alpha_{ij}]$ καλείται <u>αντισυμμετρικός</u> (skew-symmetric) αν $\alpha_{ij}=-\alpha_{ji}$ (i,j=1,2,...,n). Σ'αυτή τη περίπτωση έχουμε $\alpha_{ii}=0$ (i=1,2,...,n), γιατί πρέπει να είναι $\alpha_{ii}=-\alpha_{ii}$.

Ας είναι $A=[\alpha_{ij}]$ ένας πίνακας με στοιχεία από το σώμα C των μιγαδικών αριθμών. Δηλαδή τα στοιχεία α_{ij} του πίνακα A είναι μιγαδικοί αριθμοί.

ι) Ο πίνακας $B=[b_{ij}]$, όπου $b_{ij}=\bar{\alpha}_{ij}$, καλείται <u>συζυγής</u> (conjugate) του πίνακα A. (Σημειώνουμε ότι με $\bar{\alpha}_{ij}$ συμβολίζουμε τον συζυγή μιγαδικό αριθμό του α_{ij}. Δηλαδή, αν $\alpha_{ij}=x+i\psi$ $(i=\sqrt{-1})$ τότε $\bar{\alpha}_{ij}=x-i\psi$). Ο συζυγής του πίνακα A συμβολίζεται συνήθως με $\bar{A}$.

ια) Ένας τετραγωνικός πίνακας $A=[\alpha_{ij}]$ τέτοιος ώστε $\bar{A}^t=A$ καλείται <u>Ερμιτιανός</u> (Hermitian). Δηλαδή ο πίνακας $A=[\alpha_{ij}]$ θα είναι Ερμιτιανός αν $\bar{\alpha}_{ij}=\alpha_{ji}$.

ιβ) Ένας τετραγωνικός πίνακας $A=[\alpha_{ij}]$ τέτοιος ώστε $\bar{A}^t=-A$ καλείται <u>αντί-Ερμιτιανός</u> (skew-Hermitian). Δηλαδή ο πίνακας $A=[\alpha_{ij}]$ θα είναι αντί-Ερμιτιανός αν $\bar{\alpha}_{ij}=-\alpha_{ji}$, για όλα τα στοιχεία α_{ij}.

<u>1.3. Παράδειγμα</u>:

α) Οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-t \\ t & 1+t \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} u & 3+t \\ v-3 & w \end{bmatrix}$$

είναι ίσοι αν και μόνο αν $1=u$, $1-t=3+t$, $t=v-3$, $1+t=w$. Αυτό συμβαίνει όταν $u=1$, $t=-1$, $v=2$, $w=0$.

β) Ο ανάστροφος του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

είναι ο πίνακας

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

γ) Ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι αντισυμμετρικός, διότι $\alpha_{ij}=-\alpha_{ji}$

Ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix}$$ είναι Ερμιτιανός διότι $\bar{\alpha}_{ij} = \alpha_{ji}$

Ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix}$$ είναι αντί-Ερμιτιανός διότι $\bar{\alpha}_{ij}=-\alpha_{ji}$

2.Πράξεις στους πίνακες.

2.1.Ορισμός: Το άθροισμα δύο πινάκων $A=[\alpha_{ij}]$ και $B=[b_{ij}]$ του αυτού τύπου (m,n) ορίζεται ως εξής:

$$A+B=[\alpha_{ij}]+[b_{ij}]=[\alpha_{ij}+b_{ij}]$$

ή αναλυτικά

$$A+B=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_{11}+b_{11} & \alpha_{12}+b_{12} & \cdots & \alpha_{1n}+b_{1n} \\ \alpha_{21}+b_{21} & \alpha_{22}+b_{22} & \cdots & \alpha_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1}+b_{m1} & \alpha_{m2}+b_{m2} & \cdots & \alpha_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Από τον ορισμό του αθροίσματος πινάκων έχουμε αμέσως τις επόμενες ιδιότητες.

Αν A,B,C είναι τυχόντες πίνακες του αυτού τύπου (m,n) τότε

(i) $A+B=B+A$

(ii) $A+(B+C)=(A+B)+C$

(iii) Αν $A=B \longrightarrow A+C=B+C$

(iv) $0+A=A$, για κάθε πίνακα A , όπου 0 είναι ο μηδενικός πίνακας του τύπου (m,n).

(v) Αν $A=\left[\alpha_{ij}\right]$ και $-A=\left[-\alpha_{ij}\right]$ τότε $A+(-A)=0$

<u>2.2.Ορισμός</u>: Αν $\lambda\in F$ και $A=\left[\alpha_{ij}\right]$ είναι ένας (m,n)-πίνακας επί του σώματος F, τότε το <u>γινόμενο λA</u> είναι ο πίνακας $\lambda A=\left[\lambda\alpha_{ij}\right]$.

Δηλαδή

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda\alpha_{11} & \lambda\alpha_{12} & \cdots & \lambda\alpha_{1n} \\ \lambda\alpha_{21} & \lambda\alpha_{22} & \cdots & \lambda\alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda\alpha_{m1} & \lambda\alpha_{m2} & \cdots & \lambda\alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον πίνακα A, αν πολλαπλασιάσουμε όλα τα στοιχεία αυτού α_{ij} επί λ.

Είναι προφανείς οι επόμενες ιδιότητες.

(i) $1\cdot A=A$

(ii) $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$

(iii) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$

(iv) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

Αν $A=\left[\alpha_{ij}\right]$ είναι ένας (m,n)-πίνακας και $B=\left[b_{ij}\right]$ είναι ένας (m′,n′)-πίνακας, τότε <u>το γινόμενο A·B των πινάκων A και B ορίζεται μόνο όταν ο αριθμός n των στηλών του A είναι ίσος με τον αριθμό m′</u>

<u>των γραμμών του B</u>. Έτσι έχουμε τον επόμενο ορισμό

<u>2.3.Ορισμός:</u> Το γινόμενο A·B του (m,n)-πίνακα $A=[\alpha_{ij}]$ και του (n,p)-πίνακα $B=[b_{ij}]$ είναι ένας (m,p)-πίνακας $C=[c_{ij}]$, όπου

$$c_{ij} = \alpha_{i1}\, b_{1j}+\alpha_{i2}\, b_{2j}+\ldots+\alpha_{in}\, b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\, b_{kj} .$$

Κάπως πιο χαλαρά θα μπορούσαμε να πούμε ότι το στοιχείο c_{ij} είναι το γινόμενο της i-γραμμής του πίνακα A με την j-στήλη του πίνακα B, δηλαδή

$$c_{ij}=\begin{bmatrix}\alpha_{i1} & \alpha_{i2}\ldots\alpha_{in}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{nj}\end{bmatrix} = \alpha_{i1}b_{1j}+\alpha_{i2}b_{2j}+\ldots+\alpha_{in}b_{nj} .$$

<u>2.4.Παράδειγμα</u>:

α) Αν $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}5 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}$

τότε έχουμε

$$A+B = \begin{bmatrix}6 & 0 & -1\\ 4 & 4 & 3\end{bmatrix}$$

$$2A=\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ 4 & 6 & 8\end{bmatrix} \quad \text{και} \quad -A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -2 & -3 & -4\end{bmatrix}$$

β) Αν $A=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}$

τότε

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{11}b_{11}+\alpha_{12}b_{21} & \alpha_{11}b_{12}+\alpha_{12}b_{22}\\ \alpha_{21}b_{11}+\alpha_{22}b_{21} & \alpha_{21}b_{12}+\alpha_{22}b_{22}\end{bmatrix}$$

γ) $$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

Το τελευταίο παράδειγμα δείχνει ότι, γενικά ο πολλαπλασιασμός πινάκων, αν ορίζεται, δεν είναι αναγκαστικά μεταθετικός, δηλαδή έχουμε $A\cdot B\neq B\cdot A$.

<u>2.5.Ορισμός</u>: α)Αν A και B είναι δύο τετραγωνικοί πίνακες τέτοιοι ώστε $A\cdot B=B\cdot A$, τότε οι A και B λέγονται <u>μεταθετοί πίνακες</u> (commutative matrices).

β) Ένας τετραγωνικός πίνακας A για τον οποίο ισχύει $A^2=A$ (δηλαδή $A\cdot A=A$) καλείται <u>αυτοδύναμος</u> (idempotent).

γ) Ένας τετραγωνικός πίνακας A για τον οποίο ισχύει $A^{\tau}=0$, για κάποιο θετικό ακέραιο τ, καλείται <u>μηδενικής ισχύος</u> (nilpotent).

Για παράδειγμα ο πίνακας

$$A=\begin{bmatrix}2 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}$$ είναι αυτοδύναμος γιατί

$$A^2=\begin{bmatrix}2 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}=A\ .$$

Ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$ είναι μηδενικής ισχύος γιατί

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$ και

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

<u>2.6.Πρόταση</u>: Το γινόμενο πινάκων πληρεί τον προσεταιριστικό νόμο $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$.

<u>Απόδειξη</u>: Ας είναι $A=[\alpha_{ij}]$ ένας (m,n)-πίνακας, $B=[b_{ij}]$ ένας (n,p)-πίνακας και $C=[c_{ij}]$ ένας (p,q)-πίνακας. Τότε $A\cdot B=[x_{ij}]$ είναι ένας (m,p)-πίνακας με $x_{ij}=\alpha_{i1}b_{1j}+\alpha_{i2}b_{2j}+\ldots+\alpha_{in}b_{nj}=\sum_{\tau=1}^{n}\alpha_{i\tau}b_{\tau j}$.

Επίσης $B\cdot C=[\psi_{ij}]$ είναι ένας (n,q)-πίνακας με

$\psi_{ij}=b_{i1}c_{1j}+b_{i2}c_{2j}+\ldots+b_{ip}c_{pj}=\sum_{\ell=1}^{p}b_{i\ell}c_{\ell j}$

Τα στοιχεία της i-γραμμής του πίνακα A είναι $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\ldots,\alpha_{in}$ και τα στοιχεία της j-στήλης του πίνακα $B\cdot C$ είναι $\psi_{1j},\psi_{2j},\ldots,\psi_{nj}$, όπου $\psi_{1j}=\sum_{\ell=1}^{p}b_{1\ell}c_{\ell j}$, $\psi_{2j}=\sum_{\ell=1}^{p}b_{2\ell}c_{\ell j},\ldots,\psi_{nj}=\sum_{\ell=1}^{p}b_{n\ell}c_{\ell j}$. Συνεπώς το στοιχείο στην i-γραμμή και j-στήλη του πίνακα $A\cdot(B\cdot C)$ είναι

$$\alpha_{i1}\psi_{1j}+\alpha_{i2}\psi_{2j}+\ldots+\alpha_{in}\psi_{nj}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\psi_{kj}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\Big(\sum_{\ell=1}^{p}b_{k\ell}c_{\ell j}\Big)=$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{p}\alpha_{ik}b_{k\ell}c_{\ell j}=\sum_{\ell=1}^{p}\Big(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}b_{k\ell}\Big)c_{\ell j}=\Big(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}b_{k1}\Big)c_{1j}+\Big(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}b_{k2}\Big)c_{2j}+$$

$$+\dots+\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}b_{kp}\right)c_{pj}=x_{i1}c_{1j}+x_{i2}c_{2j}+\dots+x_{ip}c_{pj}\,.$$

Αυτό όμως είναι το στοιχείο που βρίσκεται στην i-γραμμή και j-στήλη του πίνακα $(A\cdot B)\cdot C$. Συνεπώς έχουμε $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$.

<u>2.7.Πρόταση</u>: Ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι επιμεριστικός ως πρός την πρόσθεση, δηλαδή

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C \quad , \quad (A+D)\cdot C=A\cdot C+D\cdot C$$

όπου οι πίνακες A,B,C,D είναι κατάλληλων τύπων για να είναι δυνατές οι αντίστοιχες πράξεις της προσθέσεως και του πολλαπλασιασμού.

<u>Απόδειξη</u>: Θα αποδείξουμε μόνο την πρώτη σχέση, η δεύτερη αποδεικνύεται παρόμοια. Ας είναι $A=[\alpha_{ij}]$ ένας (m,n)-πίνακας και $B=[b_{ij}]$, $C=[c_{ij}]$ δύο (n,p)-πίνακες. Τότε $B+C=[x_{ij}]$ είναι ένας (n,p)-πίνακας με $x_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$. Επίσης $A\cdot B=[f_{ij}]$ και $A\cdot C=[h_{ij}]$ είναι δύο (m,p)-πίνακες με $f_{ij}=\alpha_{i1}b_{1j}+\alpha_{i2}b_{2j}+\dots+\alpha_{in}b_{nj}=\sum_{\tau=1}^{n}\alpha_{i\tau}b_{\tau j}$

$$h_{ij}=\alpha_{i1}c_{1j}+\alpha_{i2}c_{2j}+\dots+\alpha_{in}c_{nj}=\sum_{\tau=1}^{n}\alpha_{i\tau}c_{\tau j}\,.$$

Αλλά $A\cdot(B+C)=[g_{ij}]$ είναι ένας (m,p)-πίνακας με

$$g_{ij}=\alpha_{i1}x_{1j}+\alpha_{i2}x_{2j}+\dots+\alpha_{in}x_{nj}=\sum_{\tau=1}^{n}\alpha_{i\tau}x_{\tau j}=$$

$$=\sum_{\tau=1}^{n}\alpha_{i\tau}(b_{\tau j}+c_{\tau j})=\sum_{\tau=1}^{n}(\alpha_{i\tau}b_{\tau j}+\alpha_{i\tau}c_{\tau j})=$$

$$=\sum_{\tau=1}^{n}\alpha_{i\tau}b_{\tau j}+\sum_{\tau=1}^{n}\alpha_{i\tau}c_{\tau j}=f_{ij}+h_{ij}$$

Συνεπώς

$$A\cdot(B+C)=[g_{ij}]=[f_{ij}+h_{ij}]=[f_{ij}]+[h_{ij}]=A\cdot B+A\cdot C.$$

<u>2.8.Πρόταση</u>: Ο ανάστροφος του γινομένου $A\cdot B$ πληρεί τη σχέση

$(A\cdot B)^t = B^t\cdot A^t$.

<u>Απόδειξη</u>: Αν $A=[\alpha_{ij}]$ είναι ένας (m,n)-πίνακας και $B=[b_{ij}]$ ένας (n,p)-πίνακας, τότε ο $C=A\cdot B=[c_{ij}]$ είναι ένας (m,p)-πίνακας. Το στοιχείο που βρίσκεται στην i-γραμμή και j-στήλη του πίνακα $A\cdot B$ είναι $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}b_{kj}$. Το ίδιο στοιχείο είναι επίσης στοιχείο της j-γραμμής και i-στήλης του πίνακα $(A\cdot B)^t$. Τα στοιχεία της j-γραμμής του πίνακα B^t είναι b_{1j} , $b_{2j},\ldots,b_{nj}$ και τα στοιχεία της i-στήλης του πίνακα A^t είναι $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\ldots,\alpha_{in}$. Συνεπώς το στοιχείο της j-γραμμής και i-στήλης του πίνακα $B^t\cdot A^t$ είναι $b_{1j}\alpha_{i1}+b_{2j}\alpha_{i2}+\ldots+b_{nj}\alpha_{in}=$

$$=\sum_{k=1}^{n}b_{kj}\alpha_{ik}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}b_{kj}=c_{ij}.$$

Συνεπώς $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$.

<u>3. Αντίστροφοι πίνακες</u>.

<u>3.1. Ορισμός</u>: Ένας πίνακας B καλείται <u>αντίστροφος</u> του πίνακα A αν $A\cdot B=B\cdot A=I$

Είναι προφανές ότι αν ο πίνακας B είναι ένας αντίστροφος του πίνακα A τότε και ο πίνακας A είναι αντίστροφος του B. Επειδή τα γινόμενα $A\cdot B$ καί $B\cdot A$ υπάρχουν αν και μόνον αν οι πίνακες A,B είναι τετραγωνικοί και του ίδιου τύπου, έπεται ότι μονον οι τετραγωνικοί πίνακες είναι δυνατόν να έχουν αντίστροφους πίνακες. Αν ο πίνακας A έχει έναν αντίστροφο B, τότε ο B είναι μοναδικός, γιατί αν υποθέσουμε ότι υπάρχει και ένας άλλος πίνακας C αντίστροφος του A, δηλαδή αν έχουμε συγχρόνως $A\cdot B=B\cdot A=I$ και $A\cdot C=C\cdot A=I$ τότε έπεται ότι $C=C\cdot I=C\cdot(A\cdot B)=(C\cdot A)\cdot B=I\cdot B=B$.

Έτσι σημειώνουμε τον μονοσήμαντα ορισμένο αντίστροφο πίνακα του A (άν υπάρχει) με A^{-1}, οπότε έχουμε $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$. Είναι χρήσιμο να σημειώσουμε εδώ ότι αν για δύο τετραγωνικούς (n,n)-πίνακες A και B ισχύει $A\cdot B=I$ τότε $B=A^{-1}$. Δηλαδή η σχέση $A\cdot B=I$ συνεπάγεται την $B\cdot A=I$ και αντίστροφα. Για την απόδειξη του ισχυρισμού αυτού χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η σχέση $A\cdot B=I$ συνεπάγεται την ύπαρξη του αντιστρόφου του πίνακα A, δηλαδή την ύπαρξη του A^{-1}. Την απόδειξη του ισχυρισμού αυτού θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο. Τώρα έχουμε $B=I\cdot B=(A^{-1}\cdot A)\cdot B=A^{-1}\cdot(A\cdot B)=A^{-1}\cdot I=A^{-1}$.

<u>3.2.Πρόταση</u>: Αν οι τετραγωνικοί πίνακες A και B είναι και οι δύο του αυτού τύπου και έχουν αντιστρόφους A^{-1} και B^{-1}, αντίστοιχα, τότε και ο πίνακας $A\cdot B$ έχει αντίστροφο, ο οποίος είναι $B^{-1}\cdot A^{-1}$, δηλαδή $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$.

<u>Απόδειξη</u>:Επειδή οι πίνακες A^{-1} και B^{-1} είναι αντίστροφοι των A και B, αντίστοιχα, έχουμε $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$ και $B\cdot B^{-1}=B^{-1}\cdot B=I$. Για να αποδείξουμε ότι ο πίνακας $B^{-1}\cdot A^{-1}$ είναι αντίστροφος του $A\cdot B$ πρέπει να δείξουμε ότι $(A\cdot B)\cdot(B^{-1}\cdot A^{-1})=(B^{-1}\cdot A^{-1})\cdot(A\cdot B)=I$.
Πράγματι έχουμε

$$(A\cdot B)\cdot(B^{-1}\cdot A^{-1})=A\cdot(B\cdot B^{-1})\cdot A^{-1}=A\cdot I\cdot A^{-1}=A\cdot A^{-1}=I, \text{ και}$$

$$(B^{-1}\cdot A^{-1})\cdot(A\cdot B)=B^{-1}\cdot(A^{-1}\cdot A)\cdot B=B^{-1}\cdot I\cdot B=B^{-1}\cdot B=I.$$

<u>3.3.Πρόταση</u>:Αν ο τετραγωνικός πίνακας A έχει αντίστροφο, τότε και ο ανάστροφος αυτού έχει αντίστροφο και είναι

$$(A^{t})^{-1} = (A^{-1})^{t}.$$

<u>Απόδειξη</u>:Επειδή ο πίνακας A^{-1} είναι ο αντίστροφος του A θα έχουμε

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I \qquad (*)$$

Από την πρόταση 2.8 και τη σχέση (*) έχουμε

$$A^t\cdot(A^{-1})^t = (A^{-1}\cdot A)^t = I^t = I \quad , \text{ και}$$

$$(A^{-1})^t\cdot A^t = (A\cdot A^{-1})^t = I^t = I$$

Συνεπώς $A^t\cdot(A^{-1})^t = (A^{-1})^t\cdot A^t = I$ το οποίο αποδεικνύει την πρόταση.

<u>3.4.Ορισμός</u>:'Ενας τετραγωνικός πίνακας A καλείται <u>ορθογώνιος</u> (orthogonal) αν $A\cdot A^t=A^t\cdot A=I$, δηλαδή αν $A^t=A^{-1}$. 'Ενας τετραγωνικός πίνακας A καλείται <u>μοναδιαίος</u> (unitary) αν $\bar{A}^t\cdot A=A\cdot\bar{A}^t=I$, δηλαδή αν $\bar{A}^t=A^{-1}$.

<u>4.Ασκήσεις</u>.

1.Αν
$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

να βρεθούν οι πίνακες: A+B , -2B , 2A+B , B-A

<u>Λύση</u>:

$$A+B=\begin{bmatrix} 1+(-1) & 2+5 & 3+(-2) \\ -1+2 & 0+2 & 2+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-2B=\begin{bmatrix} 2 & -10 & 4 \\ -4 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2A+B=\begin{bmatrix} 2+(-1) & 4+5 & 6+(-2) \\ -2+2 & 0+2 & 4+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B-A=\begin{bmatrix} -1-1 & 5-2 & -2-3 \\ 2-(-1) & 2-0 & -1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

2.Αν

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad J=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{να δειχθεί ότι}$$

$(\alpha I+bJ)\cdot(cI+dJ)=(\alpha c-bd)I+(\alpha d+bc)J.$

<u>Λύση</u>:Υπολογίζουμε ξεχωριστά το κάθε μέλος της ισότητας που έχουμε.

$$(\alpha I+bJ)(cI+dJ)=\left(\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} \alpha & b \\ -b & \alpha \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \alpha c-bd & \alpha d+bc \\ -\alpha d-bc & \alpha c-bd \end{bmatrix}$$

επίσης έχουμε

$$(\alpha c-bd)I+(\alpha d+bc)J=\begin{bmatrix} \alpha c-bd & 0 \\ 0 & \alpha c-bd \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & \alpha d+bc \\ -\alpha d-bc & 0 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \alpha c-bd & \alpha d+bc \\ -\alpha d-bc & \alpha c-bd \end{bmatrix}$$

3.Δίνεται

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Να βρεθεί ο πίνακας A.

<u>Λύση</u>: Για να υπάρχουν τα παραπάνω γινόμενα πρέπει ο πίνακας A που ζητάμε να είναι του τύπου (3,3). Έστω λοιπόν

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

ο ζητούμενος πίνακας A. Έχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ή}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 2\alpha_{21} & 2\alpha_{22} & 2\alpha_{23} \\ -3\alpha_{31} & -3\alpha_{32} & -3\alpha_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ή}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} & \alpha_{12} \\ 2\alpha_{21} & 2\alpha_{23} & 2\alpha_{22} \\ -3\alpha_{31} & -3\alpha_{33} & -3\alpha_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{οπότε έχουμε}$$

$\alpha_{11}=1$, $\alpha_{13}=2$, $\alpha_{12}=3$, $\alpha_{21}=2$, $\alpha_{23}=\frac{5}{2}$, $\alpha_{22}=2$, $\alpha_{31}=-1$, $\alpha_{33}=-\frac{2}{3}$

$\alpha_{32}=-\frac{1}{3}$ και ο πίνακας A είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & \frac{5}{2} \\ -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

4. Αν

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

να βρεθεί ο πίνακας 3A+4B-2C

Λύση:

$$3A+4B-2C= \begin{bmatrix} 3\cdot 2+4\cdot 1-2\cdot 0 & 3\cdot(-5)+4\cdot(-2)-2\cdot 1 & 3\cdot 1+4\cdot(-3)-2\cdot(-2) \\ 3\cdot 3+4\cdot 0-2\cdot 1 & 3\cdot 0+4(-1)-2\cdot(-1) & 3\cdot(-4)+4\cdot 5-2\cdot(-1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & -25 & -5 \\ 7 & -2 & 10 \end{bmatrix}$$

5. Να βρεθούν τα x,ψ,z και ω αν

$$3\cdot \begin{bmatrix} x & \psi \\ z & \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+\psi \\ z+\omega & 3 \end{bmatrix}$$

Λύση: Έχουμε

$$\begin{bmatrix} 3x & 3\psi \\ 3z & 3\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+4 & 6+x+\psi \\ -1+z+\omega & 2\omega+3 \end{bmatrix} \quad \text{οπότε}$$

$3x=x+4$, $3\psi=6+x+\psi$, $3z=-1+z+\omega$, $3\omega=2\omega+3$

Τελικά παίρνουμε $x=2$, $\psi=4$, $z=1$, $\omega=3$.

6. Θεωρούμε τούς πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad ,$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \Delta = \begin{bmatrix} 10 & -4 & -1 \\ -11 & 5 & 0 \\ 9 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Να δειχτεί ότι $A\cdot B \neq B\cdot A$, ενώ $\Gamma\cdot\Delta = \Delta\cdot\Gamma$

<u>Λύση</u>: Έχουμε

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4\cdot 1+6\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+3\cdot 2 & 4\cdot 2+6\cdot 1+(-1)\cdot 6+3\cdot 3 \\ 0\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+2\cdot 1+1\cdot 2 & 0\cdot 2+(-1)\cdot 1+2\cdot 6+1\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 17 \\ 5 & 14 \end{bmatrix}$$

$$B\cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 4+2\cdot 0 & 1\cdot 6+2(-1) & 1(-1)+2\cdot 2 & 1\cdot 3+2\cdot 1 \\ (-1)\cdot 4+1\cdot 0 & (-1)\cdot 6+1(-1) & (-1)\cdot(-1)+1\cdot 2 & (-1)\cdot 3+1\cdot 1 \\ 1\cdot 4+6\cdot 0 & 1\cdot 6+6(-1) & 1(-1)+6\cdot 2 & 1\cdot 3+6\cdot 1 \\ 2\cdot 3+3\cdot 0 & 2\cdot 6+3(-1) & 2(-1)+3\cdot 2 & 2\cdot 3+3\cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 & 5 \\ -4 & -7 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 11 & 9 \\ 8 & 9 & 4 & 9 \end{bmatrix} \qquad \text{Άρα} \quad A\cdot B \neq B\cdot A \ .$$

<u>Παρατήρηση</u>: Επειδή ο A είναι (2,4)-πίνακας και ο B(4,2)-πίνακας μπορούμε αμέσως να πούμε ότι $A\cdot B\neq B\cdot A$, γιατί το γινόμενο $A\cdot B$ είναι ένας (2,2)-πίνακας, ενώ το γινόμενο $B\cdot A$ είναι ένας (4,4)-πίνακας.

$$\Gamma\cdot\Delta=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 2\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}10 & -4 & -1\\ -11 & 5 & 0\\ 9 & -5 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1\cdot 10+2(-11)+1\cdot 9 & 1\cdot(-4)+2\cdot 5+1(-5) & 1(-1)+2\cdot 0+1\cdot 1\\ 3\cdot 10+4\cdot(-11)+2\cdot 9 & 3\cdot(-4)+4\cdot 5+2(-5) & 3(-1)+4\cdot 0+2\cdot 1\\ 1\cdot 10+3\cdot(-11)+2\cdot 9 & 1\cdot(-4)+3\cdot 5+2\cdot(-5) & 1\cdot(-1)+3\cdot 0+2\cdot 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ 4 & -2 & -1\\ -5 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Delta\cdot\Gamma=\begin{bmatrix}10 & -4 & -1\\ -11 & 5 & 0\\ 9 & -5 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 2\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}10\cdot 1+(-4)\cdot 3+(-1)\cdot 1 & 10\cdot 2+(-4)\cdot 4+(-1)\cdot 3 & 10\cdot 1+(-4)\cdot 2+(-1)\cdot 2\\ (-11)\cdot 1+5\cdot 3+0\cdot 1 & (-11)\cdot 2+5\cdot 4+0\cdot 3 & (-11)\cdot 1+5\cdot 2+0\cdot 2\\ 9\cdot 1+(-5)\cdot 3+1\cdot 1 & 9\cdot 2+(-5)\cdot 4+1\cdot 3 & 9\cdot 1+(-5)\cdot 2+1\cdot 2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ 4 & -2 & -1\\ -5 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Άρα $\Gamma\cdot\Delta=\Delta\cdot\Gamma$.

7. Να βρεθούν τα γινόμενα $A\cdot A^t$ και $A^t\cdot A$ όταν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

<u>Λύση</u>: 'Εχουμε

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{οπότε} \quad A\cdot A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot1+2\cdot2+0\cdot0 & 1\cdot3+2(-1)+0\cdot4 \\ 3\cdot1+(-1)\cdot2+4\cdot0 & 3\cdot3+(-1)\cdot(-1)+4\cdot4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 26 \end{bmatrix}$$

$$A^t.A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot1+3\cdot3 & 1\cdot2+3(-1) & 1\cdot0+3\cdot4 \\ 2\cdot1+(-1)\cdot3 & 2\cdot2+(-1)\cdot(-1) & 2\cdot0+(-1)\cdot4 \\ 0\cdot1+4\cdot3 & 0\cdot2+4(-1) & 0\cdot0+4\cdot4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 12 \\ -1 & 5 & -4 \\ 12 & -4 & 16 \end{bmatrix}$$

8.Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

<u>Λύση</u>:

'Εστω $A^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$ ο αντίστροφος τού πίνακα Α.

'Εχουμε $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I$. Συνεπώς

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{οπότε παίρνουμε}$$

$$\begin{bmatrix} 3\alpha_{11}+5\alpha_{21} & 3\alpha_{12}+5\alpha_{22} \\ 2\alpha_{11}+3\alpha_{21} & 2\alpha_{12}+3\alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς έχουμε $3\alpha_{11}+5\alpha_{21}=1$, $2\alpha_{11}+3\alpha_{21}=0$

$3\alpha_{12}+5\alpha_{22}=0$, $2\alpha_{12}+3\alpha_{22}=1$

Από αυτές παίρνουμε τελικά $\alpha_{11}=-3$, $\alpha_{12}=5$, $\alpha_{21}=2$ και $\alpha_{22}=-3$, οπότε ο πίνακας A^{-1} είναι

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

9. Αν I είναι ο (2,2) ταυτοτικός πίνακας, να βρεθούν όλοι οι (2,2) πίνακες X πού πληρούν τη σχέση

$$X^2-4X+3I=0$$

<u>Λύση</u>:

Από τη σχέση $X^2-4X+3I=0$ έχουμε

$X^2-4X+4I=I$ ή $(X-2I)^2=I$ (*)

θέτουμε

$$X-2I=\begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{οπότε}$$

$$(X-2I)^2=\begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2+bc & \alpha b+bd \\ \alpha c+cd & bc+d^2 \end{bmatrix}. \qquad (**)$$

Από τις (*) και (**) έχουμε

$$\begin{bmatrix} \alpha^2+bc & b(\alpha+d) \\ c(\alpha+d) & bc+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ Συνεπώς πρέπει να είναι

$a^2+bc=1=bc+d^2$, $b(a+d) = 0 = c(a+d)$.

Αν $a+d=0$, τότε $b\cdot c=1-a^2$ και αν θέσουμε $a=\lambda$ θα έχουμε $d=-\lambda$, $b=\mu(1-\lambda)$, $c=\mu^{-1}(1+\lambda)$ για κάποια λ και $\mu\neq 0$.

Αν $a+d\neq 0$ τότε $b=0=c$ και $a^2=d^2=1$ έτσι ώστε $(a=1$, $b=0$, $c=0$, $d=1)$ ή $(a=-1$, $b=0$, $c=0$, $d=-1)$.

Συνεπώς από τη σχέση

$$X-2I = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{έχουμε}$$

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} +2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2 & b \\ c & d+2 \end{bmatrix}$$

οπότε τελικά υπάρχουν οι εξής λύσεις

$$X = \begin{bmatrix} 2+\lambda & \mu(1-\lambda) \\ \mu^{-1}(1+\lambda) & 2-\lambda \end{bmatrix} \text{ ή } X=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ ή } X=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Έστω

$$A=\begin{bmatrix} \text{συν}\theta & -\text{ημ}\theta \\ \text{ημ}\theta & \text{συν}\theta \end{bmatrix}$$

Να δειχθεί ότι

$$A^2=\begin{bmatrix} \text{συν}2\theta & -\text{ημ}2\theta \\ \text{ημ}2\theta & \text{συν}2\theta \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια να ορισθεί επαγωγικά ο πίνακας A^n.

<u>Λύση</u>:

$$A^2=\begin{bmatrix} συνϑ & -ημϑ \\ ημϑ & συνϑ \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} συνϑ & -ημϑ \\ ημϑ & συνϑ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} συν^2ϑ-ημ^2ϑ & -2ημϑσυνϑ \\ 2ημϑσυνϑ & -ημ^2ϑ+συν^2ϑ \end{bmatrix}$$

ή $$A^2=\begin{bmatrix} συν2ϑ & -ημ2ϑ \\ ημ2ϑ & συν2ϑ \end{bmatrix}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι

$$A^{n-1}=\begin{bmatrix} συν(n-1)ϑ & -ημ(n-1)ϑ \\ ημ(n-1)ϑ & συν(n-1)ϑ \end{bmatrix}$$

και θα δείξουμε ότι

$$A^n=\begin{bmatrix} συνnϑ & -ημnϑ \\ ημnϑ & συνnϑ \end{bmatrix}$$

'Εχουμε

$$A^n=A^{n-1}\cdot A=\begin{bmatrix} συν(n-1)ϑ & -ημ(n-1)ϑ \\ ημ(n-1)ϑ & συν(n-1)ϑ \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} συνϑ & -ημϑ \\ ημϑ & συνϑ \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} συν(n-1)ϑ\cdot συνϑ-ημ(n-1)ϑ\cdot ημϑ & -συν(n-1)ϑ\cdot ημϑ-ημ(n-1)ϑ\cdot συνϑ \\ ημ(n-1)ϑ\cdot συνϑ+συν(n-1)ϑ\cdot ημϑ & -ημ(n-1)ϑ\cdot ημϑ+συν(n-1)ϑ\cdot συνϑ \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} συν((n-1)ϑ+ϑ) & -ημ((n-1)ϑ+ϑ) \\ ημ((n-1)ϑ+ϑ) & συν((n-1)ϑ+ϑ) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} συνnϑ & -ημnϑ \\ ημnϑ & συνnϑ \end{bmatrix}.$$

5. Άλυτες ασκήσεις.

1. Δείξτε ότι ο πίνακας

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{bmatrix}$$

ικανοποιεί τη σχέση $A^3-6A^2+11A-6I_3=0$

2. Δίδονται οι πίνακες

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Να δειχθεί ότι

α) $A\cdot B=B\cdot A=0$, $A\cdot C=A$, $C\cdot A=C$

β) $A\cdot C\cdot B=C\cdot B\cdot A$, $A^2-B^2=(A-B)\cdot(A+B)$, $(A\pm B)^2=A^2+B^2$

3. Αν ο τετραγωνικός (n,n)-πίνακας A έχει αντίστροφο δείξτε ότι η σχέση $A\cdot B=A\cdot C$ συνεπάγεται τη σχέση $B=C$.

4. Αν οι πίνακες A και B είναι μεταθετοί δείξτε ότι το αυτό συμβαίνει και για τους πίνακες
α) A^{-1} και B , β) A και B^{-1} , γ) A^{-1} και B^{-1}.

5. Δείξτε ότι, αν οι συμμετρικοί πίνακες A και B είναι μεταθετοί τότε οι πίνακες $A^{-1}\cdot B$, $A\cdot B^{-1}$ και $A^{-1}\cdot B^{-1}$ είναι συμμετρικοί.

6. Δείξτε ότι ο αντίστροφος του πίνακα

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \text{ είναι ο πίνακας } A^{-1}=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Να εξετασθεί ποιός από τους επόμενους πίνακες είναι ορθογώνιος

α) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, β) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, γ) $\begin{bmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & -0,6 \end{bmatrix}$

δ) $\begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8.Ποιός από τους επόμενους πίνακες είναι μοναδιαίος;

α) $\begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{bmatrix}$, β) $\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$, γ) $\begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$.

9. Αν $A\cdot B+A+I=0$ δείξτε ότι ο πίνακας A έχει αντίστροφο $A^{-1}=-I-B$.

10. Δείξτε ότι κάθε (2,2)-πίνακας X τέτοιος ώστε $X^t\cdot A\cdot X=B$, όπου

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B=2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

έχει μία από τις εκφράσεις

$$X=\begin{bmatrix} k & k^{-1} \\ k & -k^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad X=\begin{bmatrix} k & k^{-1} \\ -k & k^{-1} \end{bmatrix}$$

Να βρεθούν όλοι οι πίνακες X οι οποίοι πληρούν την επιπλέον συνθήκη

$$X^t\cdot X=2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

11. Αν $A\cdot X=X\cdot A$ για κάθε πίνακα X δείξτε ότι $A=\alpha I$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

1.Ορισμοί-Ιδιότητες.

Έστω $A=[\alpha_{ij}]$ ένας τετραγωνικός (n,n)-πίνακας με στοιχεία α_{ij} από το σώμα C των μιγαδικών αριθμών ή το σώμα R των πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε μια τυχούσα μετάθεση π των στοιχείων του συνόλου $S=\{1,2,3,\dots,n\}$, την

$$\pi(1)\pi(2)\pi(3)\dots\pi(n) \tag{1}$$

και αντιστοιχίζουμε σ'αυτή το γινόμενο

$$(-1)^{k(\pi)}\alpha_{1\pi(1)}\alpha_{2\pi(2)}\alpha_{3\pi(3)}\dots\alpha_{n\pi(n)} \tag{2}$$

όπου $k(\pi)$ είναι το πλήθος των αντιστροφών της μεταθέσεως (1) και $\alpha_{i\pi(i)}$ είναι στοιχεία του πίνακα A. Είναι γνωστό ότι υπάρχουν $n!$ σε πλήθος μεταθέσεις των στοιχείων του συνόλου $S=\{1,2,\dots,n\}$. Συνεπώς μπορούμε να σχηματίσουμε $n!$ γινόμενα της μορφής (2). Συμβολίζουμε το άθροισμα όλων αυτών των γινομένων με

$$\sum_{\pi}(-1)^{k(\pi)}\alpha_{1\pi(1)}\alpha_{2\pi(2)}\dots\alpha_{n\pi(n)} \tag{3}$$

Δηλαδή το άθροισμα (3) εκτείνεται σ'όλες τις μεταθέσεις των στοιχείων του συνόλου $S=\{1,2,\dots,n\}$.

1.1.Ορισμός: Καλούμε <u>ορίζουσα n τάξεως</u> του τετραγωνικού (n,n)-πίνακα $A=[\alpha_{ij}]$ τον αριθμό $\sum_{\pi}(-1)^{k(\pi)}\alpha_{1\pi(1)}\,\alpha_{2\pi(2)}\dots\alpha_{n\pi(n)}$ και συμβολίζουμε αυτόν

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

ή πιό απλά

$$|A| = |\alpha_{ij}| \quad (i,j=1,2,\dots,n) \; .$$

Συνεπώς έχουμε

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\pi} (-1)^{k(\pi)} \alpha_{1\pi(1)} \alpha_{2\pi(2)} \cdots \alpha_{n\pi(n)}$$

Σημειώνουμε ότι κάθε ένας από τους $n!$ όρους (που είναι ένα γινόμενο με n παράγοντες) στο παραπάνω άθροισμα έχει ένα στοιχείο από κάθε γραμμή του πίνακα A, αφού ο δείκτης κάθε γραμμής εμφανίζεται ακριβώς μία φορά, και ένα στοιχείο από κάθε στήλη του πίνακα A, αφού επίσης ο δείκτης κάθε στήλης εμφανίζεται ακριβώς μία φορά σε κάθε όρο του αθροίσματος.

Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι μία ορίζουσα είναι ένας απλός αριθμός, δηλαδή ένα στοιχείο του σώματος στο οποίο ανήκουν τα στοιχεία του πίνακα A και συνεπώς υπακούει στους νόμους αυτού του σώματος.

1.2. Παραδείγματα:

α) Η ορίζουσα πρώτης τάξεως είναι

$$|\alpha_{11}| = \alpha_{11}$$

β) Η ορίζουσα δεύτερης τάξεως είναι

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$$

γ) Η ορίζουσα τρίτης τάξεως είναι

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}+\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}+\alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32}- -\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33}-\alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}-\alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32}$$

γιατί οι 6 μεταθέσεις των στοιχείων του συνόλου

$S=\{1,2,3\}$ είναι

$$\pi_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad k(\pi_1)=0 \rightarrow (-1)^{k(\pi_1)}=1$$

$$\pi_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad k(\pi_2)=2 \rightarrow (-1)^{k(\pi_2)}=1$$

$$\pi_3=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad k(\pi_3)=2 \rightarrow (-1)^{k(\pi_3)}=1$$

$$\pi_4=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad k(\pi_4)=1 \rightarrow (-1)^{k(\pi_4)}=-1$$

$$\pi_5=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad k(\pi_5)=3 \rightarrow (-1)^{k(\pi_5)}=-1$$

$$\pi_6=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad k(\pi_6)=1 \rightarrow (-1)^{k(\pi_6)}=-1$$

Ειδικά για την ορίζουσα τρίτης τάξεως υπάρχει ένας άλλος τρόπος υπολογισμού αυτής, ο λεγόμενος κανόνας του Sarrus. Ο υπολογισμός αυτός γίνεται ως εξής: Επαναλαμβάνουμε τις δύο πρώτες στήλες, όπως στο σχήμα

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{array}\right.$$

και στη συνέχεια παίρνουμε το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου και των παραλλήλων προς αυτή με θετικό πρόσημο και κατόπιν το γινόμενο των στοιχείων της δευτερεύουσας διαγωνίου και των δύο παραλλήλων πρός αυτή με αρνητικό πρόσημο.

Για παράδειγμα υπολογίζουμε την ορίζουσα

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

έχουμε

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right.$$

$$|A|= 1\cdot 0\cdot(-3)+(-1)\cdot 3\cdot 1+2\cdot(-1)\cdot 4-2\cdot 0\cdot 1-1\cdot 3\cdot 4-(-1)\cdot(-1)\cdot(-3)=$$

$$=0-3-8-0-12+3= -20$$

Η ορίζουσα $|\alpha_{ij}|$ σπάνια υπολογίζεται σύμφωνα με τον ορισμό 1.1 , όταν n>3. Αντ'αυτού υπολογίζουμε την ορίζουσα $|\alpha_{ij}|$ εφαρμόζοντες στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στον πίνακα $A=\left[\alpha_{ij}\right]$, τους οποίους θα μελετήσουμε παρακάτω.

<u>1.3.Πρόταση</u>: Αν $A=\left[\alpha_{ij}\right]$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας, τότε $|A^t|=|A|$. Δηλαδή ο ανάστροφος A^t του πίνακα A και ο A έχουν την αυτή ορίζουσα.

<u>Απόδειξη</u>:Στήν έκφραση της ορίζουσας του πίνακα A

$$|A|=\sum_{\pi}(-1)^{k(\pi)}\alpha_{1\pi(1)}\alpha_{2\pi(2)}\cdots\alpha_{n\pi(n)} \tag{1}$$

κάθε όρος είναι της μορφής

$$(-1)^{k(\pi)}\alpha_{1\pi(1)}\alpha_{2\pi(2)}\cdots\alpha_{n\pi(n)} \tag{2}$$

Οι παράγοντες του όρου (2) είναι διατεταγμένοι έτσι ώστε οι δείκτες γραμμών (πρώτοι δείκτες) παρουσιάζονται με την φυσική τους σειρά, δηλαδή $1\ 2\ 3\ldots n$, ενώ οι δείκτες στηλών (δεύτεροι δείκτες) παρουσιάζονται με την σειρά της μεταθέσεως π, δηλαδή $\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(n)$. Αν στον όρο (2) ο παράγοντας $\alpha_{k\pi(k)}$ έχει για δείκτη στήλης το 1, δηλαδή $\pi(k)=1$ τότε $\pi^{-1}(\pi(k))=\pi^{-1}(1)$ οπότε $k=\pi^{-1}(1)$. Δηλαδή $\alpha_{k\pi(k)}=\alpha_{\pi^{-1}(1)1}$. Ομοίως οι παράγοντες που έχουν για δείκτη στήλης αντίστοιχα τους αριθμούς $2,3,\ldots,n$ είναι οι $\alpha_{\pi^{-1}(2)2},\alpha_{\pi^{-1}(3)3},\ldots,\alpha_{\pi^{-1}(n)n}$. Συνεπώς αν τώρα αλλάξουμε την σειρά των παραγόντων του όρου (2) έτσι ώστε οι δεύτεροι δείκτες, δηλαδή οι δείκτες στηλών, να βρίσκονται στη φυσική τους σειρά, τότε παίρνουμε τον όρο

$$(-1)^{k(\pi)}\alpha_{\pi^{-1}(1)1}\alpha_{\pi^{-1}(2)2}\cdots\alpha_{\pi^{-1}(n)n} \tag{3}$$

Αλλά αν θέσουμε $A^t=[b_{ij}]$, τότε η ορίζουσα του πίνακα A^t είναι

$$|A^t|=\sum_{\sigma}(-1)^{k(\sigma)}b_{1\sigma(1)}b_{2\sigma(2)}\cdots b_{n\sigma(n)} \tag{4}$$

όπου βέβαια $b_{ij}=\alpha_{ji}$

Έτσι επειδή $(-1)^{k(\pi)}=(-1)^{k(\pi^{-1})}$ και $\alpha_{\pi^{-1}(j)j}=b_{j\pi^{-1}(j)}$ η σχέση (3) γίνεται

$$(-1)^{k(\pi^{-1})} b_{1\pi^{-1}(1)} b_{2\pi^{-1}(2)} \cdots b_{n\pi^{-1}(n)}$$

Αν τώρα σημειώσουμε με σ τη μετάθεση π^{-1} παίρνουμε

$$(-1)^{k(\pi)} \alpha_{\pi^{-1}(1)1} \alpha_{\pi^{-1}(2)2} \cdots \alpha_{\pi^{-1}(n)n} = (-1)^{k(\sigma)} b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)}$$

οπότε από τις σχέσεις (1),(4) και την παραπάνω σχέση έχουμε

$$|A| = \sum_{\pi} (-1)^{k(\pi)} \alpha_{1\pi(1)} \alpha_{2\pi(2)} \cdots \alpha_{n\pi(n)} = \sum_{\pi} (-1)^{k(\pi)} \alpha_{\pi^{-1}(1)1} \alpha_{\pi^{-1}(2)2} \cdots$$

$$\cdots \alpha_{\pi^{-1}(n)n} = \sum_{\pi} (-1)^{k(\pi^{-1})} b_{1\pi^{-1}(1)} b_{2\pi^{-1}(2)} \cdots b_{n\pi^{-1}(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma} (-1)^{k(\sigma)} b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)} = |A^t| \ .$$

Από την παραπάνω πρόταση συμπεραίνουμε ότι κάθε ιδιότητα των οριζουσών που ισχύει για τις γραμμές (αντίστοιχα τις στήλες) του πίνακα Α θα ισχύει επίσης και για τις στήλες (αντίστοιχα γραμμές) του Α. Στό εξής όταν θα αναφέρουμε την λέξη πίνακας θα εννοούμε τετραγωνικό πίνακα.

<u>1.4.Πρόταση</u>: Αν Α' είναι ο πίνακας ο οποίος προκύπτει από τον πίνακα $A=[\alpha_{ij}]$ δια πολλαπλασιασμού μιας γραμμής (ή μιας στήλης) του Α επί μια σταθερά c, τότε $|A'|=c|A|$.

<u>Απόδειξη</u>: Κάθε όρος στην έκφραση της ορίζουσας του Α, δηλαδή

$$|A| = \sum_{\pi} (-1)^{k(\pi)} \alpha_{1\pi(1)} \alpha_{2\pi(2)} \cdots \alpha_{n\pi(n)}$$

περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε γραμμή του Α. Έτσι πολλαπλασιάζοντας μία γραμμή του πίνακα Α επί μία σταθερά c, εισάγουμε τον παράγοντα c σε κάθε όρο της $|A|$. Επομένως $|A'|=c\cdot|A|$.

1.5.Πόρισμα: Αν όλα τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης του πίνακα A είναι 0 τότε η ορίζουσα του A είναι μηδέν, δηλαδή $|A|=0$.

1.6.Πρόταση: Αν A' είναι ο πίνακας ο οποίος προκύπτει από τον πίνακα $A=[\alpha_{ij}]$ όταν εναλλάξουμε δύο οποιεσδήποτε γραμμές (ή στήλες) του A, τότε $|A'|=-|A|$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι εναλλάσσουμε την k-γραμμή του (n,n)-πίνακα $A=[\alpha_{ij}]$ με την ℓ-γραμμή $(k\neq\ell)$, οπότε παίρνουμε τον πίνακα $A'=[\alpha'_{ij}]$ για τον οποίο έχουμε

$$\begin{aligned} &\alpha'_{kj}=\alpha_{\ell j}\ ,\ \alpha'_{\ell j}=\alpha_{kj} \qquad (j=1,2,\ldots,n) \\ &\alpha'_{ij}=\alpha_{ij} \qquad (i\neq k\ ,\ i\neq\ell\ ,\ j=1,2,\ldots,n) \end{aligned} \tag{1}$$

Η έκφραση της ορίζουσας των πινάκων A και A' είναι, αντίστοιχα

$$|A|=\sum_{\pi}(-1)^{k(\pi)}\alpha_{1\pi(1)}\alpha_{2\pi(2)}\cdots\alpha_{k\pi(k)}\cdots\alpha_{\ell\pi(\ell)}\cdots\alpha_{n\pi(n)} \tag{2}$$

$$|A'|=\sum_{\pi}(-1)^{k(\pi)}\alpha'_{1\pi(1)}\alpha'_{2\pi(2)}\cdots\alpha'_{k\pi(k)}\cdots\alpha'_{\ell\pi(\ell)}\cdots\alpha'_{n\pi(n)} \tag{3}$$

Θεωρούμε τη μετάθεση σ η οποία εναλλάσσει τις δύο γραμμές k και ℓ, δηλαδή

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & \ldots & \ell & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & \ell & \ldots & k & \ldots & n \end{pmatrix}$$

και η οποία προφανώς είναι περιττή $((-1)^{k(\sigma)}=-1)$ σύμφωνα με την Πρόταση 2.4 Κεφ.ΙΙ. Επειδή το άθροισμα (3) το οποίο δίνει την τιμή της ορίζουσας του πίνακα A' εκτείνεται σ'όλες τις μεταθέσεις π, έπεται ότι και το άθροισμα

$$\sum_{\pi\sigma}(-1)^{k(\pi\sigma)}\alpha'_{1\pi\sigma(1)}\alpha'_{2\pi\sigma(2)}\cdots\alpha'_{k\pi\sigma(k)}\cdots\alpha'_{\ell\pi\sigma(\ell)}\cdots\alpha'_{n\pi\sigma(n)} \quad (4)$$

εκτείνεται σ'όλες τις μεταθέσεις του συνόλου $S=\{1,2,\dots,n\}$, διότι αντικαταστήσαμε κάθε μετάθεση π του αθροίσματος (3) με την μετάθεση πσ. Συνεπώς το άθροισμα (4) δίνει την τιμή της ορίζουσας του πίνακα A', δηλαδή

$$|A'|=\sum_{\pi\sigma}(-1)^{k(\pi\sigma)}\alpha'_{1\pi\sigma(1)}\alpha'_{2\pi\sigma(2)}\cdots\alpha'_{k\pi\sigma(k)}\cdots\alpha'_{\ell\pi\sigma(\ell)}\cdots\alpha'_{n\pi\sigma(n)}=$$

$$=\sum_{\pi}(-1)^{k(\sigma)}(-1)^{k(\pi)}\alpha'_{1\pi(1)}\alpha'_{2\pi(2)}\cdots\alpha'_{k\pi(\ell)}\cdots\alpha'_{\ell\pi(k)}\cdots\alpha'_{n\pi(n)}=$$

$$=(-1)\sum_{\pi}(-1)^{k(\pi)}\alpha_{1\pi(1)}\alpha_{2\pi(2)}\cdots\alpha_{\ell\pi(\ell)}\cdots\alpha_{k\pi(k)}\cdots\alpha_{n\pi(n)}$$

$=(-1)|A|$. Άρα $|A'|=-|A|$.

<u>1.7.Πρόταση</u>: Αν ένας πίνακας $A=[\alpha_{ij}]$ έχει δύο γραμμές ίσες, δηλαδή δύο γραμμές οι οποίες να έχουν τα αντίστοιχα στοιχεία ίσα, (ή δύο στήλες ίσες), τότε έχει ορίζουσα μηδέν, δηλαδή $|A|=0$.

<u>Απόδειξη</u>: Ο πίνακας ο οποίος προκύπτει από τον πίνακα A δι' εναλλαγής των δύο ίσων γραμμών είναι ίσος προς τον πίνακα A. Αλλά τότε σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση η εναλλαγή αυτή αλλάζει πρόσημο στην τιμή της ορίζουσας. Συνεπώς έχουμε $|A|=-|A|$, όποτε $2|A|=0$ ή $|A|=0$.

<u>1.8.Πρόταση</u>: Αν κάθε στοιχείο μιας γραμμής (ή μιας στήλης) ενός πίνακα $A=[\alpha_{ij}]$ είναι άθροισμα αριθμών, για παράδειγμα

$\alpha_{k1}=b_{k1}+c_{k1},\alpha_{k2}=b_{k2}+c_{k2},\dots,\alpha_{kn}=b_{kn}+c_{kn}$

τότε έχουμε

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots\cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots\cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1}+c_{k1} & b_{k2}+c_{k2} & \cdots & b_{kn}+c_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots\cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

<u>Απόδειξη</u>: Έχουμε

$$|A| = \sum_{\pi}(-1)^{k(\pi)}\alpha_{2\pi(1)}\alpha_{2\pi(2)}\cdots\alpha_{k\pi(k)}\cdots\alpha_{n\pi(n)}$$

$$= \sum_{\pi}(-1)^{k(\pi)}\alpha_{1\pi(1)}\alpha_{2\pi(2)}\cdots(b_{k\pi(k)}+c_{k\pi(k)})\cdots\alpha_{n\pi(n)}$$

$$= \sum_{\pi}(-1)^{k(\pi)}\alpha_{1\pi(1)}\alpha_{2\pi(2)}\cdots b_{k\pi(k)}\cdots\alpha_{n\pi(n)}+$$

$$+ \sum_{\pi}(-1)^{k(\pi)}\alpha_{1\pi(1)}\alpha_{2\pi(2)}\cdots c_{k\pi(k)}\cdots\alpha_{n\pi(n)}$$

<u>1.9.Πρόταση</u>: Αν κάθε στοιχείο μιας τυχούσας γραμμής (ή στήλης) ενός πίνακα $A=[\alpha_{ij}]$ πολλαπλασιαστεί επί μία σταθερά λ και προστεθεί στό αντίστοιχο στοιχείο μίας άλλης γραμμής (ή στήλης), τότε

ο νέος πίνακας A' έχει την αυτή ορίζουσα με τον πίνακα A.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι τα στοιχεία της ℓ γραμμής του πίνακα A τα πολλαπλασιάζουμε επί λ και τα προσθέτουμε στα στοιχεία της k γραμμής, οπότε παίρνουμε τον πίνακα

$$A' = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{k1}+\lambda\alpha_{\ell 1} & \alpha_{k2}+\lambda\alpha_{\ell 2} & \cdots & \alpha_{kn}+\lambda\alpha_{\ell n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\ell 1} & \alpha_{\ell 2} & \cdots & \alpha_{\ell n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσα του πίνακα A' είναι σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση

$$|A'| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{k1}+\lambda\alpha_{\ell 1} & \alpha_{k2}+\lambda\alpha_{\ell 2} & \cdots & \alpha_{kn}+\lambda\alpha_{\ell n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\ell 1} & \alpha_{\ell 2} & \cdots & \alpha_{\ell n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \cdots & \alpha_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\ell 1} & \alpha_{\ell 2} & \cdots & \alpha_{\ell n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda\alpha_{\ell 1} & \lambda\alpha_{\ell 2} & \cdots & \lambda\alpha_{\ell n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\ell 1} & \alpha_{\ell 2} & \cdots & \alpha_{\ell n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=|A|+\lambda \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\ell 1} & \alpha_{\ell 2} & \cdots & \alpha_{\ell n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\ell 1} & \alpha_{\ell 2} & \cdots & \alpha_{\ell n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

Αλλά η τελευταία ορίζουσα έχει δύο γραμμές ίσες, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 1.7 είναι ίση με μηδέν.

'Ετσι τελικά έχουμε $|A'|=|A|$.

<u>1.10.Πρόταση</u>:Αν $A=[\alpha_{ij}]$ και $B=[b_{ij}]$ είναι δύο (n,n)-πίνακες, τότε

$$|A\cdot B|=|A|\cdot|B|=|B\cdot A|$$

<u>Απόδειξη</u>: 'Εστω ότι $C=[c_{ij}]$ είναι ο τετραγωνικός (n,n)-πίνακας $A\cdot B$, δηλαδή έχουμε ότι το στοιχείο c_{ij} του πίνακα C είναι

$$c_{ij} = \sum_{\tau=1}^{n} \alpha_{i\tau} b_{\tau j}$$

Επομένως

$$|C| = \sum_{\pi} (-1)^{k(\pi)} c_{1\pi(1)} c_{2\pi(2)} \cdots c_{n\pi(n)}$$

$$= \sum_{\pi} (-1)^{k(\pi)} \Big(\sum_{\tau_1=1}^{n} \alpha_{1\tau_1} b_{\tau_1 \pi(1)} \Big) \Big(\sum_{\tau_2=1}^{n} \alpha_{2\tau_2} b_{\tau_2 \pi(2)} \Big) \cdots \Big(\sum_{\tau_n=1}^{n} \alpha_{n\tau_n} b_{\tau_n \pi(n)} \Big)$$

$$= \sum_{\tau_1=1}^{n} \sum_{\tau_2=1}^{n} \cdots \sum_{\tau_n=1}^{n} \alpha_{1\tau_1} \alpha_{2\tau_2} \cdots \alpha_{n\tau_n} \Big(\sum_{\pi} (-1)^{k(\pi)} b_{\tau_1 \pi(1)} b_{\tau_2 \pi(2)} \cdots$$

$$\cdots b_{\tau_n \pi(n)} \Big) \qquad (1)$$

Το άθροισμα

$$\sum_{\pi} (-1)^{k(\pi)} b_{\tau_1 \pi(1)} b_{\tau_2 \pi(2)} \cdots b_{\tau_n \pi(n)} \qquad (2)$$

είναι ίσο με μηδέν αν δύο τουλάχιστον από τους δείκτες $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ είναι ίσοι. Αν όλοι οι δείκτες $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ είναι διάφοροι μεταξύ τους, δηλαδή αν $\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_n$ είναι μία μετάθεση μ του συνόλου $S=\{1,2,\ldots,n\}$, τότε το άθροισμα (2) ισούται με $|B|$ αν η μετάθεση μ είναι άρτια, ή με $-|B|$ αν η μετάθεση μ είναι περιττή. Συνεπώς το άθροισμα (1) εκτείνεται σε όλες τις μεταθέσεις $\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_n$ του συνόλου $S=\{1,2,\ldots,n\}$, οπότε έχουμε

$$|C| = \sum_{\mu} (-1)^{k(\mu)} \alpha_{1\tau_1} \alpha_{2\tau_2} \cdots \alpha_{n\tau_n} \cdot (|B|)$$

Άρα $|C| = |A| \cdot |B|$.

2.Αλγεβρικό συμπλήρωμα.

Έστω $A=[\alpha_{ij}]$ ένας (n,n)-πίνακας. Αν θεωρήσουμε τυχόν στοιχείο

$\alpha_{k\ell}$ του πίνακα A, τότε το ανάπτυγμα της ορίζουσας αυτού μπορεί να γραφεί

$|A|=\alpha_{k\ell}\cdot A_{k\ell}+$ (όροι οι οποίοι δεν περιέχουν το $\alpha_{k\ell}$)

Ο συντελεστής $A_{k\ell}$ καλείται <u>αλγεβρικό συμπλήρωμα</u> του στοιχείου $\alpha_{k\ell}$. Για το αλγεβρικό συμπλήρωμα A_{11} του στοιχείου α_{11} παρατηρούμε ότι

$$A_{11}=\sum_{\pi}(-1)^{k(\pi)}\alpha_{2\pi(2)}\alpha_{3\pi(3)}\cdots\alpha_{n\pi(n)} \qquad (1)$$

όπου το άθροισμα εκτείνεται σε όλες τις μεταθέσεις π οι οποίες αφήνουν το 1 σταθερό. Κάθε τέτοια μετάθεση π ορίζει μία μετάθεση π′ επί του συνόλου $S'=\{2,3,\ldots,n\}$, η οποία συμπίπτει με την π επί του $S=\{1,2,\ldots,n\}$. Επειδή οι αντιστροφές της μεταθέσεως π δεν εμπλέκουν το στοιχείο 1, έχουμε ότι $(-1)^{k(\pi)}=(-1)^{k(\pi')}$. Έτσι από τη σχέση (1) έχουμε ότι το αλγεβρικό συμπλήρωμα A_{11} είναι η τιμή της ορίζουσας του πίνακα ο οποίος προκύπτει από τον πίνακα A αν παραλείψουμε την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη, δηλαδή είναι

$$A_{11}=\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

Τον ίδιο συλλογισμό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε το αλγεβρικό συμπλήρωμα $A_{k\ell}$. Για τον σκοπό αυτό φέρουμε το στοιχείο $\alpha_{k\ell}$ στήν πρώτη γραμμή και πρώτη στήλη. Δηλαδή αν $k>1$ εναλλάσσουμε διαδοχικά την k γραμμή του πίνακα A με την (k-1)-γραμμή, μετά με την (k-2)-γραμμή κ.ο.κ. και τέλος με την 1-γραμμή. Έτσι με k-1 εναλλαγές γραμμών η k-γραμμή πού είχε το στοιχείο $\alpha_{k\ell}$ ήρθε στη πρώτη γραμμή. Στην συνέχεια αν $\ell>1$ εναλλάσουμε την ℓ-στήλη με την $(\ell-1)$-στήλη, μετά με την $(\ell-2)$-στήλη κ.ο.κ. και τέλος με την 1-στήλη, οπότε κάναμε $(\ell-1)$ εναλλαγές στηλών και το στοιχείο $\alpha_{k\ell}$ ήλθε πλέον στην 1-γραμμή και 1-στήλη.

Συνολικά κάναμε $(k-1)+(\ell-1)=k+\ell-2$ εναλλαγές γραμμών και στηλών. Έτσι, αν A' είναι ο πίνακας πού προέκυψε μετά από τις εναλλαγές αυτές, έχουμε

$$|A'|=(-1)^{k+\ell}|A|$$

Επειδή όμως τώρα το στοιχείο $\alpha_{k\ell}$ βρίσκεται στην πρώτη γραμμή και στήλη το αλγεβρικό συμπλήρωμα $A_{k\ell}$ αυτού θα είναι η ορίζουσα που προκύπτει από τον πίνακα A', αν αποκόψουμε την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη αυτού. Άρα

$$A_{k\ell}=(-1)^{k+\ell}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1,\ell-1} & \alpha_{1,\ell+1} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2,\ell-1} & \alpha_{2,\ell+1} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{k-1,1} & \alpha_{k-1,2} & \cdots & \alpha_{k-1,\ell-1} & \alpha_{k-1,\ell+1} & \cdots & \alpha_{k-1,n} \\ \alpha_{k+1,1} & \alpha_{k+1,2} & \cdots & \alpha_{k+1,\ell-1} & \alpha_{k+1,\ell+1} & \cdots & \alpha_{k+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{n,\ell-1} & \alpha_{n,\ell+1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Κάθε όρος στην έκφραση της ορίζουσας $|A|$ έχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε γραμμή και από κάθε στήλη του πίνακα A. Έτσι για μια οποιαδήποτε γραμμή του πίνακα A, έστω την k-γραμμή κάθε όρος της ορίζουσας $|A|$ έχει ακριβώς έναν παράγοντα από την k-γραμμή. Συνεπώς έχουμε για την έκφραση της ορίζουσας του πίνακα A

$$|A|=\alpha_{k1}A_{k1}+\alpha_{k2}A_{k2}+\ldots+\alpha_{kn}A_{kn} \qquad (3)$$

Η έκφραση (3) καλείται ανάπτυγμα της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της k-γραμμής.

Ομοίως για μια οποιαδήποτε στήλη του πίνακα A, έστω την ℓ-στήλη, κάθε όρος στο ανάπτυγμα της ορίζουσας του A έχει ακριβώς έναν παράγοντα από την ℓ-στήλη. Συνεπώς έχουμε επίσης

$$|A| = \alpha_{1\ell}A_{1\ell}+\alpha_{2\ell}A_{2\ell}+\ldots+\alpha_{n\ell}A_{n\ell} \tag{4}$$

η έκφραση (4) καλείται ανάπτυγμα της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της ℓ-στήλης.

Αν στο ανάπτυγμα (3) αντικαταστήσουμε τα στοιχεία $\alpha_{k1},\alpha_{k2},\ldots,\alpha_{kn}$, δηλαδή τα στοιχεία της k-γραμμής, με τα ομοτάξια στοιχεία μιας άλλης γραμμής, έστω της μ-γραμμής ($\mu\neq k$), τότε παίρνουμε το άθροισμα

$$\alpha_{\mu 1} A_{k1}+\alpha_{\mu 2}A_{k2} +\ldots+ \alpha_{\mu n}A_{kn} \tag{5}$$

Αλλά το άθροισμα (5) αντιστοιχεί στο ανάπτυγμα μιας ορίζουσας της οποίας η k-γραμμή και η μ-γραμμή είναι ίσες. Συνεπώς έχουμε

$$\alpha_{\mu 1}A_{k1}+\alpha_{\mu 2}A_{k2} +\ldots+ \alpha_{\mu n}A_{kn} = 0 \qquad (\mu\neq k) \tag{6}$$

Την ίδια σκέψη αν κάνουμε και για το ανάπτυγμα (4) θα πάρουμε

$$\alpha_{1\nu}A_{1\ell}+\alpha_{2\nu}A_{2\ell} +\ldots+ \alpha_{n\nu}A_{n\ell} = 0 \qquad (\nu\neq\ell) \tag{7}$$

Οι σχέσεις (3) και (6) μπορούν να γραφούν μαζί

$$\sum_{\tau=1}^{n} \alpha_{\mu\tau} A_{k\tau} = \delta_{\mu k}|A| \tag{8}$$

Επίσης οι σχέσεις (4) και (7) γράφονται

$$\sum_{\tau=1}^{n} \alpha_{\tau\nu}A_{\tau\ell} = \delta_{\nu\ell}|A| \tag{9}$$

όπου βέβαια τα $\delta_{\mu k}$ και $\delta_{\nu\ell}$ είναι τα δέλτα του Kronecker. Η ανάπτυξη ορίζουσας κατά τα στοιχεία μιας γραμμής (ή μιας στήλης) μας παρέχει αναγωγικό τρόπο για τον υπολογισμό της τιμής της ορίζουσας, γιατί μετατρέπει το πρόβλημα του υπολογισμού μιάς ορίζουσας n τάξεως στον υπολογισμό n οριζουσών n-1 τάξεως.

2.1.Παράδειγμα:

α) Να βρεθεί το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου $\alpha_{23}=7$ (2-γραμμή και 3-στήλη) της ορίζουσας

$$A=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 5 & -4 & 7 & -3 \\ 4 & 0 & 6 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Έχουμε

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 5 & -4 & 7 & -2 \\ 4 & 0 & 6 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)\cdot[2\cdot 0\cdot 2+1\cdot(-3)\cdot 3+4\cdot 4\cdot(-2)=4\cdot 0\cdot 3-2\cdot(-3)(-2)-1\cdot 4\cdot 2]=61$$

β) Να βρεθεί η τιμή της ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ -2 & -5 & 8 \\ 3 & 4 & -9 \end{vmatrix}$$

αναπτύσσοντας αυτήν κατά τα στοιχεία: i) της 2-στήλης και ii) της 3-γραμμής i)

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ -2 & -5 & 8 \\ 3 & 4 & -9 \end{vmatrix} = 6\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} + (-5)\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} + 4(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$=-6\left[(-2)\cdot(-9)-3\cdot 8\right]-5\left[1\cdot(-9)-3\cdot 7\right]-4\left[1\cdot 8-(-2)\cdot 7\right]=98$$

ii)

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ -2 & -5 & 8 \\ 3 & 4 & -9 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -5 & 8 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} + (-9)\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$=3\cdot\left[6\cdot 8-(-5)\cdot 7\right]-4\left[1\cdot 8-(-2)\cdot 7\right]-9\left[1\cdot(-5)-(-2)\cdot 6\right]=98.$$

Επειδή ο υπολογισμός μιας ορίζουσας ακόμη και με την παραπάνω μέθοδο της αναπτύξεως κατά τα στοιχεία μιας γραμμής η μιας στήλης γενικά είναι επίπονος, γι΄αυτό πολλές φορές εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των οριζουσών που περιγράψαμε στις προτάσεις 1.3 έως 1.10. Πρώτα παρατηρούμε ότι, αν μια γραμμή ή μια στήλη μιας ορίζουσας έχει αρκετά στοιχεία μηδέν, τότε αναπτύσσουμε κατά τα στοιχεία αυτής της γραμμής ή στήλης, γιατί τότε χρειαζόμαστε μόνο τα αλγεβρικά συμπληρώματα των μη μηδενικών στοιχείων. Αν δεν υπάρχει γραμμή ή στήλη με την παραπάνω ιδιότητα τότε εφαρμόζουμε τις προτάσεις 1.3 έως 1.10 και προσπαθούμε να μετατρέψουμε την ορίζουσα σε άλλη ισοδύναμη που να έχει την ιδιότητα αυτή.

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε την ορίζουσα

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 & 10 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Για να υπολογίσουμε αυτή πολλαπλασιάζουμε τα στοιχεία της τελευταίας γραμμής διαδοχικά επί 3, επί 3, επί -2 και τα αφαιρούμε από τα ομοτάξια στοιχεία της πρώτης, της δεύτερης, της τρίτης γραμμής, αντίστοιχα, οπότε παίρνουμε σύμφωνα με την πρόταση 1.9

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -17 & 4 \\ 0 & -2 & -14 & -4 \\ 0 & 4 & 13 & 8 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Αναπτύσουμε τώρα κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης οπότε έχουμε

$$|A|=1\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} -1 & -17 & 4 \\ -2 & -14 & -4 \\ 4 & 13 & 8 \end{vmatrix}$$

Στήν συνέχεια βγάζουμε από την τρίτη στήλη το 4 κοινό παράγοντα (Πρόταση 1.4), δηλαδή

$$|A|=-4\begin{vmatrix} -1 & -17 & 1 \\ -2 & -14 & -1 \\ 4 & 13 & 2 \end{vmatrix}$$

Στη δεύτερη γραμμή προσθέτουμε την πρώτη και μετά πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή επί -2 και προσθέτουμε αυτή στην τρίτη γραμμή, οπότε παίρνουμε

$$|A|=-4\begin{vmatrix} -1 & -17 & 1 \\ -3 & -31 & 0 \\ 6 & 47 & 0 \end{vmatrix}$$

Αναπτύσουμε τώρα κατά τα στοιχεία της τελευταίας στήλης

$$|A|=-4\cdot 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -3 & -31 \\ 6 & 47 \end{vmatrix}=-4\left[-3\cdot 47-(-31)\cdot 6\right]=-180.$$

3. <u>Τριγωνική μορφή ορίζουσας</u>.

Για τον υπολογισμό ορίζουσας χρησιμοποιείται πολλές φορές και η λεγόμενη τριγωνική μορφή αυτής. Σύμφωνα με τις προτάσεις 1.3 έως 1.10 μπορούμε κάθε ορίζουσα n τάξεως να την μετασχηματίσουμε σε άλλη η οποία να έχει όλα τα στοιχεία τα κάτω (ή άνω) της κυρίας διαγωνίου ίσα με μηδέν. Η μορφή αυτή της ορίζουσας λέγεται <u>τριγωνική μορφή</u>. Για να μετατρέψουμε μια ορίζουσα σε τριγωνική μορφή εργαζόμαστε ως εξής:

Θεωρούμε την ορίζουσα n τάξεως

$$|A|=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

Υποθέτουμε ότι $\alpha_{11}\neq 0$, γιατί αν δεν συμβαίνει αυτό, μπορούμε να εναλλάξουμε την πρώτη γραμμή με κάποια άλλη που έχει το πρώτο στοιχείο διάφορο του μηδενός (οπότε για να διατηρήσει η ορίζουσα την τιμή της πολλαπλασιάζουμε τα στοιχεία μιας οποιασδήποτε γραμμής επί -1). Αυτό είναι δυνατό γιατί όλα τα στοιχεία της πρώτης στήλης δεν είναι ίσα με μηδέν αφού τότε θα είχαμε $|A|=0$. Πολλαπλασιάζουμε τώρα τα στοιχεία της 1-γραμμής πρώτα επί $-\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}$ και τα προσθέτουμε στα ομοτάξια στοιχεία της 2-γραμμής, έπειτα επί $-\frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}}$ και τα προσθέτουμε στα ομοτάξια στοιχεία της 3-γραμμής κ.ο.κ. και τέλος επί $-\frac{\alpha_{n1}}{\alpha_{11}}$ και τα προσθέτουμε στα ομοτάξια στοιχεία της n-γραμμής, οπότε η ορίζουσα παίρνει τη μορφή

$$|A|=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \beta_{22} & \beta_{23} & \cdots & \beta_{2n} \\ 0 & \beta_{32} & \beta_{33} & \cdots & \beta_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \beta_{n2} & \beta_{n3} & \cdots & \beta_{nn} \end{vmatrix}$$

όπου $\beta_{ik}=\alpha_{ik}-\dfrac{\alpha_{1k}\cdot\alpha_{ik}}{\alpha_{11}}$ $(i,k>1)$

Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε με τον ίδιο τρόπο, όπως και παραπάνω, ότι $\beta_{22}\neq 0$, οπότε συνεχίζουμε όπως προηγούμενα. Δηλαδή πολλαπλασιάζουμε τα στοιχεία της 2-γραμμής πρώτα επί $-\dfrac{\beta_{32}}{\beta_{22}}$ και τα προσθέτουμε στα ομοτάξια στοιχεία της 3-γραμμής, έπειτα επί $-\dfrac{\beta_{42}}{\beta_{22}}$ και τα προσθέτουμε στα ομοτάξια στοιχεία της 4-γραμμής κ.ο.κ. και τέλος επί $-\dfrac{\beta_{n2}}{\beta_{22}}$ και τα προσθέτουμε στα ομοτάξια στοιχεία της n-γραμμής. Έτσι μετά από n-1 το πολύ τέτοια βήματα μια ορίζουσα n τάξεως μπορεί να πάρει τριγωνική μορφή.

Ας υπολογίσουμε τώρα την τιμή μιας ορίζουσας η οποία έχει τριγωνική μορφή. Θεωρούμε την ορίζουσα n τάξεως σε τριγωνική μορφή

$$|A|=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι για την ορίζουσα αυτή έχουμε $\alpha_{ij}=0$ για όλα τα i και j για τα οποία $i>j$. Έτσι από την έκφραση της τιμής της $|A|$ συμπεραίνουμε ότι τα μόνα γινόμενα $(-1)^{k(\pi)}\alpha_{1\pi(1)}\,\alpha_{2\pi(2)}\cdots\alpha_{n\pi(n)}$ που έχουν νόημα είναι εκείνα για τα οποία οι δείκτες γραμμής και στήλης των στοιχείων $\alpha_{i\pi(i)}$ πληρούν τη σχέση $i\leq\pi(i)$ για κάθε $i=1,2,\ldots,n$. Αλλά η μόνη μετάθεση των αριθμών $1,2,\ldots,n$ γιά την οποία έχουμε $i\leq\pi(i)$ για όλα τα i είναι η ταυτοτική μετάθεση ε. Πραγματικά, για $i=n$ έχουμε $n\leq\pi(n)$ οπότε $\pi(n)=n$, στη συνέχεια για $i=n-1$ έχουμε $n-1\leq\pi(n-1)$, οπότε $\pi(n-1)=n-1$ κ.ο.κ. Έτσι έχουμε τελικά ότι $\pi=\varepsilon$, οπότε

$$|A|=\sum_{\pi}(-1)^{k(\pi)}\alpha_{1\pi(1)}\alpha_{2\pi(2)}\cdots\alpha_{n\pi(n)}=(-1)^{k(\varepsilon)}\alpha_{1\varepsilon(1)}\alpha_{2\varepsilon(2)}\cdots\alpha_{n\varepsilon(n)}\ ,$$

ή $|A|=\alpha_{11}\alpha_{22}\cdots\alpha_{nn}$.

Δηλαδή η ορίζουσα η οποία έχει τριγωνική μορφή ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου.

Αν η ορίζουσα λάβει τη μορφή

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{2,n-1} & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \alpha_{n-1,2} & \cdots & \alpha_{n-1,n-1} & \alpha_{n-1,n} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{n,n-1} & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

δηλαδή τριγωνική μορφή με όλα τα στοιχεία άνω (ή κάτω) της δευτερεύουσας διαγωνίου ίσα με μηδέν, τότε η τιμή της ορίζουσας είναι

$$|A|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\alpha_{1n}\alpha_{2,n-1}\cdots\alpha_{n1}$$

Η σχέση αυτή αποδεικνύεται με την αρχή της πλήρους επαγωγής (άσκηση).

3.1.Παράδειγμα:

α)Να υπολογιστεί η ορίζουσα

$$D=\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \beta & \beta & \beta \\ \alpha & \beta & \gamma & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

αφού αναχθεί σε τριγωνική μορφή

Έχουμε

$$D=\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \beta & \beta & \beta \\ \alpha & \beta & \gamma & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} \underset{\text{από όλες τις άλλες)}}{\overset{\text{(αφαιρώ την 1-γραμμή}}{=}} \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & \beta-\alpha & \beta-\alpha & \beta-\alpha \\ 0 & \beta-\alpha & \gamma-\alpha & \gamma-\alpha \\ 0 & \beta-\alpha & \gamma-\alpha & \delta-\alpha \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{από τις γραμμές 3 \& 4)}}{\overset{\text{(αφαιρώ την 2-γραμμή}}{=}} \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & \beta-\alpha & \beta-\alpha & \beta-\alpha \\ 0 & 0 & \gamma-\beta & \gamma-\beta \\ 0 & 0 & \gamma-\beta & \delta-\beta \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\text{την 4-γραμμή)}}{\overset{\text{(αφαιρώ 3-γραμμή από}}{=}} \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & \beta-\alpha & \beta-\alpha & \beta-\alpha \\ 0 & 0 & \gamma-\beta & \gamma-\beta \\ 0 & 0 & 0 & \delta-\gamma \end{vmatrix}$$

$=\alpha(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)(\delta-\gamma)$.

β) Να δειχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_1 & \sigma_1 & \cdots & \sigma_1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \cdots & \sigma_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \cdots & \sigma_n \end{vmatrix} = n!$$

όπου $\sigma_1=1$, $\sigma_2=1+2$, $\sigma_3=1+2+3,\ldots,\sigma_n=1+2+3+\ldots+n$.

Αφαιρώ την 1-γραμμή από όλες τις άλλες, έπειτα αφαιρώ την 2-γραμμή από τις υπόλοιπες, δηλαδή από τις 3,4,...,n-γραμμές κ.ο.κ. και τέλος αφαιρώ την (n-1)-γραμμή από την n-γραμμή. Έτσι έχω

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_1 & \sigma_1\ldots & \sigma_1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_2\ldots & \sigma_2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3\ldots & \sigma_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3\ldots & \sigma_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\ \ldots & 1 \\ 1 & 1+2 & 1+2\ \ldots & 1+2 \\ 1 & 1+2 & 1+2+3\ldots & 1+2+3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1+2 & 1+2+3\ldots & 1+2+3+\ldots+n \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\ \ldots & 1 \\ 0 & 2 & 2\ \ldots & 2 \\ 0 & 2 & 2+3\ldots & 2+3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 2 & 2+3\ldots & 2+3+\ldots+n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\ \ldots & 1 \\ 0 & 2 & 2\ \ldots & 2 \\ 0 & 0 & 3\ \ldots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 3\ \ldots & 3+\ldots+n \end{vmatrix} =$$

$$= \ldots = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\ \ldots & 1 \\ 0 & 2 & 2\ \ldots & 2 \\ 0 & 0 & 3\ \ldots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\ \ldots & n \end{vmatrix} = n!$$

4.<u>Προσηρτημένη Ορίζουσα</u>

Ας είναι $A=[\alpha_{ij}]$ ένας τετραγωνικός (n,n)-πίνακας. Δίνουμε μερικούς χρήσιμους ορισμούς.

Αν η ορίζουσα $|A|$ του πίνακα A είναι ίση με μηδέν ($|A|=0$), τότε ο πίνακας A καλείται <u>ανώμαλος</u> (singular). Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή αν $|A|\neq 0$, ο πίνακας A καλείται <u>ομαλός</u> (non-singular).

Το άθροισμα των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του πίνακα A καλείται <u>ίχνος</u> (trace) αυτού και συμβολίζουμε αυτό με $tr[A]$.

Δηλαδή έχουμε $tr[A]=\alpha_{11}+\alpha_{22}+\ldots+\alpha_{nn}$.

Παίρνουμε τα αλγεβρικά συμπληρώματα A_{ij} των στοιχείων α_{ij} του πίνακα $A=[\alpha_{ij}]$ και σχηματίζουμε τον πίνακα $B=[A_{ij}]$. Δηλαδή σχηματίζουμε την (n,n)-πίνακα ο οποίος στην i-γραμμή και j-στήλη έχει για στοιχείο το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου α_{ij} (γιά όλα τα $i,j=1,2,\ldots,n$).

<u>4.1.Ορισμός</u>:Ο ανάστροφος του πίνακα $B=[A_{ij}]$, δηλαδή ο πίνακας $B^t=[A_{ij}]^t$ καλείται <u>προσηρτημένος</u> (adjoint) του πίνακα $A=[\alpha_{ij}]$ και συμβολίζεται με adjA. Δηλαδή $adjA=[A_{ij}]^t$. Επίσης η ορίζουσα του προσηρτημένου πίνακα καλείται <u>προσηρτημένη ορίζουσα</u> της ορίζουσας $|A|$.

Ο προσηρτημένος πίνακας μας βοηθά στον υπολογισμό του αντίστροφου πίνακα.

<u>4.2.Πρόταση</u>:Αν $A=[\alpha_{ij}]$ είναι ένας τετραγωνικός (n,n)-πίνακας τότε $A\cdot(adjA)=(adjA)\cdot A=|A|I$

<u>Απόδειξη</u>: Καλούμε $C=[c_{ij}]$ τον πίνακα $A\cdot(adjA)$, δηλαδή $C=A\cdot(adjA)$. Επειδή $A=[\alpha_{ij}]$ και $adjA=[A_{ij}]^t$ έχουμε ότι το στοιχείο c_{ij} του πίνακα C θα είναι το γινόμενο της i-γραμμής του πίνακα $A=[\alpha_{ij}]$ επί την j-στήλη του πίνακα $adjA=[A_{ij}]^t$, δηλαδή επί την j-γραμμή του πίνακα $[A_{ij}]$. Συνεπώς θα είναι

$$c_{ij}=\alpha_{i1}A_{j1}+\alpha_{i2}A_{j2}+\ldots+\alpha_{in}A_{jn}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}A_{jk}=\delta_{ij}|A|$$

δηλαδή έχουμε

$$C=\left[c_{ij}\right]=\left[\delta_{ij}|A|\right]=|A|\cdot\left[\delta_{ij}\right]=|A|\cdot I$$

Επίσης αν καλέσουμε $D=\left[d_{ij}\right]$ τον πίνακα $(\mathrm{adj}A)\cdot A$, δηλαδή $D=(\mathrm{adj}A)\cdot A$, τότε το στοιχείο d_{ij} του πίνακα D θα είναι το γινόμενο της i-γραμμής του πίνακα $\mathrm{adj}A=\left[A_{ij}\right]^t$,(δηλαδή της i-στήλης του πίνακα $\left[A_{ij}\right]$), επί την j-στήλη του πίνακα $A=\left[\alpha_{ij}\right]$. Συνεπώς θα έχουμε

$$d_{ij}=A_{1i}\alpha_{1j}+A_{2i}\alpha_{2j}+\ldots+A_{ni}\alpha_{nj}=\sum_{k=1}^{n}A_{ki}\alpha_{kj}=\delta_{ij}\cdot|A|$$

Δηλαδή είναι

$$D=\left[d_{ij}\right]=\left[\delta_{ij}|A|\right]=|A|\cdot\left[\delta_{ij}\right]=|A|\cdot I$$

<u>4.3.Πρόταση</u>:Ο τετραγωνικός πίνακας $A=\left[\alpha_{ij}\right]$ έχει αντίστροφο A^{-1} αν και μόνο αν $|A|\neq 0$.

<u>Απόδειξη</u>:Ας υποθέσουμε πρώτα ότι ο αντίστροφος A^{-1} του πίνακα A υπάρχει. Τότε έχουμε $A\cdot A^{-1}=I$, οπότε θα είναι και $|A\cdot A^{-1}|=|I|$ ή $|A|\cdot|A^{-1}|=1$. Άρα $|A|\neq 0$. Βέβαια έχουμε επίσης και $|A^{-1}|\neq 0$ και μάλιστα $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=(|A|)^{-1}$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $|A|\neq 0$ και θα δείξουμε ότι ο πίνακας

$$B=\begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{bmatrix}=\frac{1}{|A|}\left[A_{ij}\right]^t=\frac{1}{|A|}(\mathrm{adj}A)$$

είναι αντίστροφος του πίνακα A. Για να δείξουμε αυτό αρκεί να δείξουμε ότι $A\cdot B=I_n$.

Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση έχουμε

$$A\cdot B=A\cdot \frac{1}{|A|}(\mathrm{adj}A)=\frac{1}{|A|}A\cdot(\mathrm{adj}A)=\frac{1}{|A|}|A|I_n=I_n \; .$$

Συνέπεια της παραπάνω προτάσεως είναι η έκφραση του αντίστροφου ενός ομαλού τετραγωνικού πίνακα, την οποία και δίνουμε στο επόμενο πόρισμα.

<u>4.4.Πόρισμα</u>: Αν $A=[\alpha_{ij}]$ είναι ένας ομαλός (n,n)-πίνακας τότε

$$A^{-1}=\left[\frac{A_{ij}}{|A|}\right]^t=\frac{1}{|A|}(\mathrm{adj}A) \; .$$

<u>4.5.Παράδειγμα</u>:

α) Να βρεθεί ο προσηρτημένος πίνακας $(\mathrm{adj}A)$ του πίνακα

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 4\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}. \text{ Έχουμε } \quad \mathrm{adj}A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}^t =$$

$$=\begin{bmatrix}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}\\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 3 & 2\end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}\\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0 & 4\\ 1 & 0\end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 2 & 0\end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}\end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 4 & -16 & 2 \\ -4 & 8 & -2 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -4 & -16 & 8 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

β) Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Να βρεθεί ο προσηρτημένος αυτού adjA και να δείχνει ότι adj(adjA)=A

Έχουμε

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}d & (-1)^{1+2}c \\ (-1)^{2+1}b & (-1)^{2+2}\alpha \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & \alpha \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & \alpha \end{bmatrix}$$

επίσης έχουμε

$$\text{adj}(\text{adj}A) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\alpha & (-1)^{1+2}(-c) \\ (-1)^{2+1}(-b) & (-1)^{2+2}\,d \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} \alpha & c \\ b & d \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix} = A$$

γ) Δίνεται ο πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Να βρεθούν: i) η ορίζουσα $|A|$, ii) ο πίνακας adjA και iii) ο πίνακας A^{-1}

i) Για να υπολογίσουμε την ορίζουσα $|A|$ αναπτύσουμε αυτήν κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής. Άρα

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$+3\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$=1\cdot(3\cdot7-5\cdot4)-2\cdot(2\cdot7-1\cdot4)+3\cdot(2\cdot5-1\cdot3)=2.$$

ii)

$$\alpha djA = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^t =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -10 & 7 \\ 1 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

iii)

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\alpha djA = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -5 & 2 & 1 \\ \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

δ) Αν A, B είναι ομαλοί πίνακες, να δειχθεί ότι

$adj(A\cdot B)=(adjB)\cdot(adjA)$.

Γνωρίζουμε ότι $(A\cdot B)\cdot adj(A\cdot B)=|A\cdot B|I$.

Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση αυτή από αριστερά επί $adjA$ και έχουμε

$((adjA)\cdot A)\cdot B\cdot adj(AB)=|AB|adjA$ ή

$|A|B\cdot adj(A\cdot B)=|A|\,|B|adjA$.

Επειδή ο A είναι ομαλός έχουμε $|A|\neq 0$. Άρα $B\cdot adj(A\cdot B)=|B|adjA$.

Πολλαπλασιάζουμε τώρα από αριστερά επί $adjB$ και έχουμε

$((adjB)\cdot B)adj(A\cdot B)=(adjB)\,|B|adjA$ ή

$|B|adj(A\cdot B)=|B|\,(adjB)\cdot(adjA)$.

Αλλά και ο B είναι ομαλός . Άρα $|B|\neq 0$ οπότε

$adj(A\cdot B)=(adjB)\cdot(adjA)$.

ε) Αν ο ομαλός πίνακας A είναι συμμετρικός να δειχθεί ότι και ο πίνακας $adjA$ είναι συμμετρικός .

Επειδή ο πίνακας A είναι συμμετρικός έχουμε ότι $A^t=A$. Για να δείξουμε τη συμμετρικότητα του πίνακα $adjA$ αρκεί να δείξουμε ότι $(adjA)^t=adjA$. Δηλαδή πρέπει να δείξουμε ότι $A(adjA)^t=(adjA)^t\cdot A=$ $=|A|I$.

Έχουμε

$A\cdot(adjA)^t=A^t\cdot(adjA)^t=((adjA)\cdot A)^t=(|A|I)^t=|A|I.$

Επίσης

$(adjA)^t\cdot A=(adjA)^t\cdot A^t=(A\cdot(adjA))^t=(|A|I)^t=|A|I.$

στ) Αν ο τετραγωνικόςπίνακας A είναι Ερμιτιανός να δειχθεί ότι καί ο πίνακας $adjA$ είναι Ερμιτιανός.

Επειδή ο πίνακας A είναι Ερμιτιανός έχουμε ότι $\bar{A}^t=A$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\overline{(adjA)}^t=adjA$. Δηλαδή $A\cdot\overline{(adjA)}^t=\overline{(adjA)}^t\cdot A=|A|I$

Έχουμε $A\cdot\overline{(adjA)}^t=\bar{A}^t\,\overline{(adjA)}^t=(\overline{(adjA)}\cdot\bar{A})^t=(\overline{(adjA)\cdot A})^t=(\overline{|A|I})^t=\overline{|A|}I$

Επίσης

$$\overline{(\mathrm{adj}A)}^t\cdot A=\overline{(\mathrm{adj}A)}^t\cdot\bar{A}^t=(\bar{A}\cdot\overline{(\mathrm{adj}A)})^t=(\overline{A\cdot(\mathrm{adj}A)})^t=$$
$$=(\overline{|A|I})^t=\overline{|A|}I.$$

Μένει τώρα να δείξουμε ότι $\overline{|A|}=|A|$. Προς τούτο θα δείξουμε ότι η ορίζουσα ενός Ερμιτιανού πίνακα A είναι πραγματικός αριθμός.

Επειδή ο πίνακας A είναι Ερμιτιανός έχουμε $\bar{A}^t=A$ ή $\bar{A}=A^t$, οπότε $|\bar{A}|=|A^t|=|A|$.

Αλλά αν υποθέσουμε ότι ο αριθμός $|A|$ είναι μιγαδικός τότε θα έχουμε

$$|A|=\sum_{\pi}(-1)^{k(\pi)}\alpha_{1\pi(1)}\alpha_{2\pi(2)}\cdots\alpha_{n\pi(n)}=x+i\psi$$

οπότε

$$|\bar{A}|=\sum_{\pi}(-1)^{k(\pi)}\bar{\alpha}_{1\pi(1)}\,\bar{\alpha}_{2\pi(2)}\cdots\bar{\alpha}_{n\pi(n)}=\sum_{\pi}(-1)^{k(\pi)}\overline{\alpha_{1\pi(1)}\alpha_{2\pi(2)}\cdots}$$
$$\overline{\cdots\alpha_{n\pi(n)}}=x-i\psi$$

Από τη σχέση $|\bar{A}|=|A|$ έχουμε ότι $\psi=0$. 'Αρα $\overline{|A|}=|A|$.

5. Ελάσσονες ορίζουσες.

Θεωρούμε τυχόντα (m,n)-πίνακα $A=[\alpha_{ij}]$. Ας πάρουμε k γραμμές τις $i_1,i_2,\ldots,i_k$, από τις m γραμμές του πίνακα A, δηλαδή ας πάρουμε τον υποπίνακα

$$\begin{bmatrix}\alpha_{i_1 1} & \alpha_{i_1 2} & \cdots & \alpha_{i_1 n}\\ \alpha_{i_2 1} & \alpha_{i_2 2} & \cdots & \alpha_{i_2 n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{i_k 1} & \alpha_{i_k 2} & \cdots & \alpha_{i_k n}\end{bmatrix} \qquad (1)$$

Προφανώς για τούς δείκτες $i_1,i_2,\ldots,i_k$ έχουμε $1\leq i_\ell\leq m$ όπου $\ell=1,2,\ldots,k$.

Στή συνέχεια παίρνουμε k στήλες, τις $j_1,j_2,\ldots,j_k$ από τις n στήλες του (k,n)-πίνακα (1). Δηλαδή παίρνουμε τον (k,k)-πίνακα

$$\begin{bmatrix} \alpha_{i_1j_1} & \alpha_{i_1j_2} & \cdots & \alpha_{i_1j_k} \\ \alpha_{i_2j_1} & \alpha_{i_2j_2} & & \alpha_{i_2j_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{i_kj_1} & \alpha_{i_kj_2} & & \alpha_{i_kj_k} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

<u>5.1.Ορισμός</u>: Ο πίνακας (2) καλείται <u>ελάσσων πίνακας τάξεως k</u> του πίνακα A και η αντίστοιχη ορίζουσα του πίνακα (2) καλείται <u>ελάσσων ορίζουσα τάξεως k</u> της ορίζουσας $|A|$.

Γιά παράδειγμα αναφέρουμε ότι οι ελάσσονες πίνακες τάξεως 2 του πίνακα

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

είναι οι

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}.$$

<u>5.2.Ορισμός</u>:Θεωρούμε τον (m,n)-πίνακα $A=\left[\alpha_{ij}\right]$. Αν υπάρχει μία τουλάχιστον ελάσσων ορίζουσα τάξεως k από τον πίνακα A διάφορη του μηδενός, ενώ κάθε ελάσσων ορίζουσα τάξεως μεγαλύτερης του k είναι ίση με μηδέν, τότε λέμε ότι ο πίνακα A είναι <u>βαθμού k</u> ή <u>βαθμίδας K</u> και συμβολίζομε αυτό rankA=k.

<u>5.3.Παραδείγματα</u>:

α) Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

είναι βαθμού 2, γιατί

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \text{ενώ} \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

β) Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

είναι βαθμού 3, γιατί

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 30 \neq 0$$

γ) Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

είναι βαθμού 2, γιατί όλες οι ελάσσονες ορίζουσες τάξεως 3 είναι μηδέν, δηλαδή

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \; , \; \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0 \; , \; \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0 \; , \; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0 \; ,$$

ενώ υπάρχει ελάσσων ορίζουσα τάξεως 2 διάφορη του μηδενός

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

δ) Να βρεθούν οι τιμές του $x \in R$ για τις οποίες ο βαθμός του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{bmatrix}$$

είναι μικρότερος του 4.

Για να είναι ο βαθμός του πίνακα A μικρότερος του 4 πρέπει η μοναδική ορίζουσα τετάρτης τάξεως αυτού να είναι ίση με μηδέν. Συνεπώς έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (*)$$

Αναπτύσουμε την ορίζουσα (*)

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix} = \text{(προσθέτουμε στην 1-στήλη τις υπόλοιπες)} = \begin{vmatrix} 1+3x & x & x & x \\ 1+3x & 1 & x & x \\ 1+3x & x & 1 & x \\ 1+3x & x & x & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(1+3x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & 1 & x & x \\ 1 & x & 1 & x \\ 1 & x & x & 1 \end{vmatrix} = \text{(αφαιρούμε την 1-γραμμή από τις υπόλοιπες)} =$$

$$(1+3x)\cdot\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix}=(1+3x)\cdot(1-x)^3$$

'Ετσι έχουμε

$(1+3x)\cdot(1-x)^3=0$, οπότε $x=-\frac{1}{3}$ ή $x=1$.

6. Ορίζουσα Vandermonde.

Ορίζουσα Vandermonde n τάξεως είναι μία ορίζουσα της μορφής

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

όπου $\alpha_i\neq\alpha_j$ όταν $i\neq j$.

Θα δείξουμε ότι η τιμή της ορίζουσας D_n είναι

$$D_n=\prod_{i>j}^{1,n}(\alpha_i-\alpha_j)$$

Η απόδειξη θα γίνει με τήν αρχή της πλήρους επαγωγής.

Για $n=2$ έχουμε
$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 1 & \alpha_2 \end{vmatrix}=\alpha_2-\alpha_1$$

και επειδή $\prod_{i>j}^{1,2}(\alpha_i-\alpha_j)=\alpha_2-\alpha_1$ η πρόταση ισχύει.

'Εστω τώρα ότι η πρόταση ισχύει για $n=k$, δηλαδή

$$D_k = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{k-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_k & \alpha_k^2 & \dots & \alpha_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j}^{1,k} (\alpha_i - \alpha_j)$$

θα δείξουμε ότι

$$D_{k+1} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{k-1} & \alpha_1^k \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{k-1} & \alpha_2^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_k & \alpha_k^2 & \dots & \alpha_k^{k-1} & \alpha_k^k \\ 1 & \alpha_{k+1} & \alpha_{k+1}^2 & \dots & \alpha_{k+1}^{k-1} & \alpha_{k+1}^k \end{vmatrix} = \prod_{i>j}^{1,k+1} (\alpha_i - \alpha_j)$$

Πολλαπλασιάζουμε τα στοιχεία κάθε στήλης της ορίζουσας D_{k+1} επί α_1 και τα αφαιρούμε από τα στοιχεία της επόμενης στήλης, οπότε έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots\dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_2-\alpha_1 & \alpha_2^2-\alpha_1\alpha_2 & \dots\dots & \alpha_2^{k-1}-\alpha_1\alpha_2^{k-2} & \alpha_2^k-\alpha_1\alpha_2^{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_k-\alpha_1 & \alpha_k^2-\alpha_1\alpha_k & \dots\dots & \alpha_k^{k-1}-\alpha_1\alpha_k^{k-2} & \alpha_k^k-\alpha_1\alpha_k^{k-1} \\ 1 & \alpha_{k+1}-\alpha_1 & \alpha_{k+1}^2-\alpha_1\alpha_{k+1} & \dots\dots & \alpha_{k+1}^{k-1}-\alpha_1\alpha_{k+1}^{k-2} & \alpha_{k+1}^k-\alpha_1\alpha_{k+1}^{k-1} \end{vmatrix} =$$

$$
=\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
1 & \alpha_2-\alpha_1 & \alpha_2(\alpha_2-\alpha_1) & \cdots & \alpha_2^{k-2}(\alpha_2-\alpha_1) & \alpha_2^{k-1}(\alpha_2-\alpha_1) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
1 & \alpha_k-\alpha_1 & \alpha_k(\alpha_k-\alpha_1) & \cdots & \alpha_k^{k-2}(\alpha_k-\alpha_1) & \alpha_k^{k-1}(\alpha_k-\alpha_1) \\
1 & \alpha_{k+1}-\alpha_1 & \alpha_{k+1}(\alpha_{k+1}-\alpha_1) & \cdots & \alpha_{k+1}^{k-2}(\alpha_{k+1}-\alpha_1) & \alpha_{k+1}^{k-1}(\alpha_{k+1}-\alpha_1)
\end{vmatrix}
$$

και αν αναπτύξουμε κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής έχουμε

$$
\begin{vmatrix}
\alpha_2-\alpha_1 & \alpha_2(\alpha_2-\alpha_1) & \cdots & \alpha_2^{k-2}(\alpha_2-\alpha_1) & \alpha_2^{k-1}(\alpha_2-\alpha_1) \\
\alpha_3-\alpha_1 & \alpha_3(\alpha_3-\alpha_1) & \cdots & \alpha_3^{k-2}(\alpha_3-\alpha_1) & \alpha_3^{k-1}(\alpha_3-\alpha_1) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\alpha_k-\alpha_1 & \alpha_k(\alpha_k-\alpha_1) & \cdots & \alpha_k^{k-2}(\alpha_k-\alpha_1) & \alpha_k^{k-1}(\alpha_k-\alpha_1) \\
\alpha_{k+1}-\alpha_1 & \alpha_{k+1}(\alpha_{k+1}-\alpha_1) & \cdots & \alpha_{k+1}^{k-2}(\alpha_{k+1}-\alpha_1) & \alpha_{k+1}^{k-1}(\alpha_{k+1}-\alpha_1)
\end{vmatrix}
$$

Τά στοιχεία της 1-γραμμής έχουν κοινό παράγοντα το $\alpha_2-\alpha_1$, της 2-γραμμής το $\alpha_3-\alpha_1$ κ.ο.κ της k-γραμμής το $\alpha_{k+1}-\alpha_1$

Συνεπώς έχουμε

$$
D_{k+1}=(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)\ldots(\alpha_{k+1}-\alpha_1)
\begin{vmatrix}
1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{k-2} & \alpha_2^{k-1} \\
1 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_3^{k-2} & \alpha_3^{k-1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
1 & \alpha_k & \cdots & \alpha_k^{k-2} & \alpha_k^{k-1} \\
1 & \alpha_{k+1} & \cdots & \alpha_{k+1}^{k-2} & \alpha_{k+1}^{k-1}
\end{vmatrix}
$$

Η ορίζουσα όμως στο δεύτερο μέλος της παραπάνω σχέσεως είναι ορίζουσα Vandermonde τάξεως k και ισούται με

$$\prod_{i>j}^{2,k+1} (\alpha_i-\alpha_j)$$

'Ετσι έχουμε

$$D_{k+1}=(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)\ldots(\alpha_k-\alpha_1)(\alpha_{k+1}-\alpha_1)\prod_{i>j}^{2,k+1}(\alpha_i-\alpha_j)$$

ή

$$D_{k+1}=\prod_{i>j}^{1,k+1}(\alpha_i-\alpha_j) .$$

7.Ισοδύναμοι πίνακες.

Στήν παράγραφο αυτή θα δούμε πως μπορούμε να βρούμε τον βαθμό ενός πίνακα καθώς επίσης και έναν τρόπο υπολογισμού του αντίστροφου πίνακα ενός ομαλού τετραγωνικού πίνακα.

7.1.Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί:

Θεωρούμε έναν (m,n)-πίνακα $A=[\alpha_{ij}]$

7.2.Ορισμός: Οι επόμενοι μετασχηματισμοί του πίνακα Α καλούνται στοιχειώδεις μετασχηματισμοί (elementary transformations).

(α) Εναλλαγή της k και ℓ γραμμής (συμβολισμός $H_{k\ell}$)

(α') Εναλλαγή της k και ℓ στήλης (συμβολισμός $K_{k\ell}$)

(β) Πολλαπλασιασμός των στοιχείων της k γραμμής επί c (συμβολισμός $H_k(c)$)

(β') Πολλαπλασιασμός των στοιχείων της k στηλής επί c (συμβολισμός $K_k(c)$)

(γ) Πολλαπλασιασμός των στοιχείων της ℓ γραμμής επί c και πρόσθεση αυτής στην k γραμμή (συμβολισμός $H_{k\ell}(c)$)

(γ΄) Πολλαπλασιασμός των στοιχείων της ℓ στήλης επί c και πρόσθεση αυτής στην k στήλη (συμβολισμός $K_{k\ell}(c)$).

Οι μετασχηματισμοί (α),(β),(γ), δηλαδή οι μετασχηματισμοί H καλούνται <u>στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών</u> (elementary row transformations), ενώ οι μετασχηματισμοί (α΄),(β΄),(γ΄), δηλαδή οι μετασχηματισμοί K καλούνται <u>στοιχειώδεις μετασχηματισμοί στηλών</u> (elementary column transformations).

Είναι προφανές ότι ένας στοιχειώδης μετασχηματισμός στον πίνακα A δεν αλλάζει τον τύπο αυτού, δηλαδή ο πίνακας A εξακολουθεί και μετά από έναν στοιχειώδη μετασχηματισμό να είναι του τύπου (m,n).

7.3. Αντίστροφοι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί.

Ο αντίστροφος ενός στοιχειώδη μετασχηματισμού είναι επίσης ένας μετασχηματισμός ο οποίος έχει την ιδιότητα να "καταστρέφει" το αποτέλεσμα του στοιχειώδη μετασχηματισμού. Δηλαδή αν σ'έναν πίνακα A εφαρμόσουμε ένα στοιχειώδη μετασχηματισμό θα πάρουμε έναν άλλο πίνακα A΄. Αν στη συνέχεια εφαρμόσουμε στον πίνακα A΄ τον αντίστροφο μετασχηματισμό τότε το αποτέλεσμα θα είναι ο αρχικός πίνακας A.

Οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί συμβολίζονται με τα ίδια σύμβολα που χρησιμοποιούμε για τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς θέτοντας επί πλέον τον εκθέτη -1. Έτσι έχουμε

$$H_{k\ell}^{-1} = H_{k\ell} \quad , \quad K_{k\ell}^{-1} = K_{k\ell} \quad , \quad H_k^{-1}(c) = H_k\left(\frac{1}{c}\right) \quad , \quad K_k^{-1}(c) = K_k\left(\frac{1}{c}\right) \quad ,$$

$$H_{k\ell}^{-1}(c) = H_{k\ell}(-c) \quad , \quad K_{k\ell}^{-1}(c) = K_{k\ell}(-c).$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι ο αντίστροφος ενός στοιχειώδη μετασχηματισμού είναι επίσης στοιχειώδης μετασχηματισμός.

7.4.<u>Παράδειγμα</u>:

Ας εφαρμόσουμε στόν πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

τον στοιχειώδη μετασχηματισμό $H_{21}(-2)$. Θα πάρουμε τον πίνακα

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Αν τώρα στον πίνακα B εφαρμόσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό $H_{21}(2)$ θα λάβουμε τον αρχικό πίνακα A.

7.5.<u>Ορισμός:</u> Δύο πίνακες A και B καλούνται <u>ισοδύναμοι</u> (equivalent) και συμβολίζονται $A \sim B$ αν ο ένας μπορεί να προκύψει από τον άλλο με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς.

Αναφέρουμε εδώ χωρίς απόδειξη την επόμενη χρήσιμη πρόταση.

7.6.<u>Πρόταση</u>: Οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί δεν αλλάζουν το βαθμό ενός πίνακα.

Από τον ορισμό ισοδυναμίας πινάκων και την προηγούμενη πρόταση έχουμε ως άμεσο συμπέρασμα ότι οι <u>ισοδύναμοι πίνακες είναι του ίδιου τύπου και του αυτού βαθμού</u>.

7.7.<u>Παράδειγμα</u>:

Θεωρούμε τον πίνακα

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζουμε διαδοχικά τούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς $H_{21}(-2)$, $H_{31}(1)$, $H_{32}(-1)$ και λαμβάνουμε τον ισοδύναμο πίνακα B. Δηλαδή

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \overset{H_{21}(-2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \overset{H_{31}(1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \overset{H_{32}(-1)}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=B$$

Επειδή όλες οι ελλάσσονες ορίζουσες τρίτης τάξεως του πίνακα B είναι μηδέν, ενώ υπάρχει ελάσσων ορίζουσα δευτέρας τάξεως διάφορη του μηδενός $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}=-17\neq 0$

έπεται ότι ο βαθμός του πίνακα B είναι 2. Συνεπώς και ο βαθμός του πίνακα A είναι 2.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι με τη βοήθεια των ισοδυνάμων πινάκων μπορούμε να βρίσκουμε πιό εύκολα το βαθμό ενός πίνακα.

7.8.Παράδειγμα:

Να βρεθεί ο βαθμός του κάθενα από τους πίνακες

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad \Gamma=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & 6 \\ -1 & -3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

<u>**Λύση:**</u>

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&2\\2&3&5&1\\1&3&4&5\end{bmatrix}\overset{H_{21}(-2)}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&3&2\\0&-1&-1&-3\\1&3&4&5\end{bmatrix}\overset{H_{31}(-1)}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&3&2\\0&-1&-1&-3\\0&1&1&3\end{bmatrix}\overset{H_{32}(1)}{\sim}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&2&3&2\\0&-1&-1&-3\\0&0&0&0\end{bmatrix}=A'$$

Επειδή ο πίνακας A' είναι βαθμού 2 έπεται ότι και ο ισοδύναμος προς αυτόν πίνακας A είναι βαθμού 2.

$$B=\begin{bmatrix}1&2&1&2\\1&3&2&2\\2&4&3&4\\3&7&4&6\end{bmatrix}\overset{H_{21}(-1),H_{31}(-2),H_{41}(-3)}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&1&1&0\end{bmatrix}\overset{H_{42}(-1)}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=B'$$

Ο πίνακα B' είναι βαθμού 3. Συνεπώς και ο πίνακας B είναι βαθμού 3.

$$\Gamma=\begin{bmatrix}1&2&-2&3\\2&5&-4&6\\-1&-3&2&-2\\2&4&-1&6\end{bmatrix}\overset{H_{21}(-2),H_{31}(1),H_{41}(-2)}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&-2&3\\0&1&0&0\\0&-1&0&1\\0&0&3&0\end{bmatrix}\overset{H_{32}(1)}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&-2&3\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&3&0\end{bmatrix}\overset{H_{34}}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&-2&3\\0&1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\overset{H_{12}(-2),H_{13}(\frac{2}{3}),H_{14}(-3)}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\overset{H_3(\frac{1}{3})}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\Gamma'$$

Ο πίνακας Γ'είναι βαθμού 4. Συνεπώς και ο πίνακας Γ είναι βαθμού 4. Από τα παραπάνω παραδείγματα παρατηρούμε ότι ένας ομαλός τετραγωνικός (n,n)-πίνακας μπορεί να μετατραπεί στον πίνακα I_n χρησιμοποιώντας μόνο στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών.

7.9.Ορισμός: Ένας πίνακας που προκύπτει από τον πίνακα I_n όταν εφαρμόσουμε σ'αυτόν ένα στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών ή στηλών λέγεται στοιχειώδης πίνακας γραμμών ή στηλών αντίστοιχα.

7.10.Παράδειγμα:

Θεωρούμε τον πίνακα

$$I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Οι επόμενοι πίνακες που προκύπτουν από τον I_3 είναι στοιχειώδεις πίνακες

$$H_{23}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=K_{23},\quad H_2(c)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&c&0\\0&0&1\end{bmatrix}=K_2(c),$$

$$H_{21}(c)=\begin{bmatrix}1&0&0\\c&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=K_{12}(c)$$

Προφανώς, κάθε στοιχειώδης πίνακας είναι ομαλός. Ο πίνακας που προκύπτει αν εφαρμόσουμε σ'ένα (m,n)-πίνακα A ένα στοιχειώδη μετασχηματισμό μπορεί επίσης να προκύψει και από τον πίνακα A αν πολλαπλασιάσουμε αυτόν μ'έναν στοιχειώδη πίνακα. Έτσι ο πίνακας που προκύπτει από τον (m,n)-πίνακα A αν εφαρμόσουμε σ'αυτόν έναν στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών, μπορεί να προκύψει ως εξής. Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό αυτό στον πίνακα I_m και παίρνουμε τον αντίστοιχο στοιχειώδη πίνακα H. Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε τον πίνακα A έξ αριστερών με τον πίνακα H. Επίσης το αποτέλεσμα που επιφέρει ένας στοιχειώδης μετασχηματισμός στηλών, αν εφαρμοσθεί στον πίνακα A, μπορεί να προκύψει αν εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό αυτό στον πίνακα I_n και στη συνέχεια πολλαπλασιάσουμε τον πίνακα A εκ δεξιών με τον προκύπτοντα στοιχειώδη πίνακα K.

7.11.Παράδειγμα:

Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Αν στον πίνακα A εφαρμόσουμε τον στοιχειώδη μετασχηματισμό H_{13} θα λάβουμε τον πίνακα

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακα B μπορεί επίσης να προκύψει και ως εξής. Από τον πίνακα I_3 παίρνουμε τον στοιχειώδη πίνακα

$$H_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια έχουμε

$$H_{13}\cdot A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&8&9\\4&5&6\\1&2&3\end{bmatrix}=B$$

Επίσης αν στον πίνακα A εφαρμόσουμε τον στοιχειώδη μετασχηματισμό $K_{13}(2)$ θα λάβουμε τον πίνακα

$$D=\begin{bmatrix}7&2&3\\16&5&6\\25&8&9\end{bmatrix}$$

Ο πίνακας D μπορεί να προκύψει επίσης και ως εξής. Από τον πίνακα I_3 παίρνουμε τον στοιχειώδη πίνακα

$$K_{13}(2)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια έχουμε

$$A\cdot K_{13}(2)=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&2&3\\16&5&6\\25&8&9\end{bmatrix}=D$$

Ας είναι A και B δύο ισοδύναμοι πίνακες ($A\sim B$). Σημειώνουμε τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών καί στηλών, οι οποίοι μετατρέπουν τον πίνακα A στον πίνακα B, με $H_1,H_2,\ldots,H_s$ και $K_1,K_2,\ldots,K_t$. Δηλαδή με H_1 συμβολίζουμε τον πρώτο στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών που εφαρμόζουμε στον πίνακα A, με H_2 τον δεύτερο,κ.ο.κ. Επίσης με K_1 συμβολίζουμε τον πρώτο στοιχειώδη μετασχηματισμό στηλών, με K_2 τον δεύτερο κ.ο.κ. Χρησιμοποιούμε τα ίδια σύμβολα $H_1,H_2,\ldots,H_s$ και $K_1,K_2,\ldots,K_t$ για να συμβολίσουμε τους αντίστοιχους στοιχειώδεις πίνακες των στοιχειωδών μετασχηματισμών $H_1, H_2, \ldots, H_s$ και $K_1, K_2, \ldots, K_t$. Έτσι έχουμε τελικά

$$H_s \cdot \ldots \cdot H_2 \cdot H_1 \cdot A \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot \ldots \cdot K_t = P \cdot A \cdot Q = B \tag{1}$$

όπου $$P = H_s \cdot \ldots \cdot H_2 \cdot H_1 \quad , \quad Q = K_1 \cdot K_2 \cdot \ldots \cdot K_t \tag{2}$$

Συνεπώς δύο πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι αν και μόνο αν υπάρχουν ομαλοί πίνακες P και Q, που ορίζονται από τις σχέσεις (2) τέτοιοι ώστε $P \cdot A \cdot Q = B$.

<u>7.12.Παράδειγμα</u>:

Αν
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

τότε $H_{31}(-1) \cdot H_{21}(-2) \cdot A \cdot K_{21}(-2) \cdot K_{31}(1) \cdot K_{41}(-2) \cdot K_{42}(1) \cdot K_3(\frac{1}{2}) = B$.

Δηλαδή

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P \cdot A \cdot Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = B$$

Πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι επειδή ο πίνακα A είναι του τύπου (3,4) οι στοιχειώδης πίνακες H είναι του τύπου (3,3) ενώ οι στοιχειώδεις πίνακες K είναι του τύπου (4,4).

Έστω A ένας ομαλός (n,n)-πίνακας και $H_1, H_2, \ldots, H_s$ στοιχειώδεις πίνακες γραμμών που μετατρέπουν τον A στον πίνακα I_n. Αν

$$P = H_s \cdot \ldots \cdot H_2 \cdot H_1 \qquad (3)$$

τότε $$P \cdot A = I_n \qquad (4)$$

Επειδή καθένας από τους πίνακες $H_1, H_2, \ldots, H_s$ έχει αντίστροφο, από τη σχέση (3) έχουμε

$$P^{-1} = H_1^{-1} \cdot H_2^{-1} \cdot \ldots \cdot H_s^{-1}$$

οπότε $P^{-1} \cdot (P \cdot A) = P^{-1} \cdot I_n$ ή $(P^{-1} \cdot P) \cdot A = P^{-1}$ ή

$$A = P^{-1} = H_1^{-1} \cdot H_2^{-1} \cdot \ldots \cdot H_s^{-1} \qquad (5)$$

Έτσι έχουμε σαν συμπέρασμα την επόμενη πρόταση.

<u>7.13.Πρόταση</u>: Κάθε ομαλός τετραγωνικός πίνακας A μπορεί να εκφραστεί ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων γραμμών (ή στηλών).

<u>7.14.Πόρισμα:</u> α) Αν A είναι ομαλός τετραγωνικός πίνακας, τότε ο βαθμός του πίνακα A·B (ή του πίνακα B·A) ισούται με τον βαθμό του πίνακα B.

β) Αν P,Q είναι ομαλοί πίνακες τότε ο βαθμός του πίνακα P·A·Q ισούται με τον βαθμό του πίνακα A.

<u>Απόδειξη</u>: α) Επειδή ο πίνακας A είναι ομαλός σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση θα γράφεται ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων. Συνεπώς το γινόμενο A·B είναι ένας πίνακας ισοδύναμος με τον B γιατί προκύπτει από αυτόν αν εφαρμόσουμε στον B στοιχειώδεις μετασχηματι-

σμούς, εκείνους ακριβώς που αντιστοιχούν στους στοιχειώδεις πίνακες οι οποίοι δίνουν ως γινόμενο τον A. Συνεπώς ο βαθμός του πίνακα A·B ισούται με το βαθμό του ισοδύναμου πίνακα B.

β)Επειδή οι πίνακες P και Q είναι ομαλοί καθένας από αυτούς θα γράφεται ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων, οπότε ο πίνακας P·A·Q προκύπτει από τον A αν εφαρμόσουμε σ'αυτόν στοιχειώδεις μετασχηματισμούς, εκείνους ακριβώς που αντιστοιχούν στους στοιχειώδεις πίνακες οι οποίοι δίνουν τους πίνακες P και Q.

Συνεπώς ο πίνακας P·A·Q είναι ισοδύναμος με τον A.

7.15.Παράδειγμα:

Να εκφρασθεί ο πίνακας

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ 1 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων γραμμών, καθώς επίσης και ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων στηλών.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ 1 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix}\overset{H_{31}(-1),H_{21}(-1)}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\overset{H_{13}(-3)}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\overset{H_{12}(-3)}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I_3$$

Παρατηρούμε ότι οι στοιχειώδεις πίνακες οι οποίοι μετατρέπουν τον πίνακα A στόν πίνακα I_3 είναι $H_{31}(-1),H_{21}(-1),H_{13}(-3),H_{12}(-3)$.

Δηλαδή έχουμε

$$H_{12}(-3)\cdot H_{13}(-3)\cdot H_{21}(-1)\cdot H_{31}(-1)\cdot A=I_3$$

Συνεπώς $P=H_{12}(-3)\cdot H_{13}(-3)\cdot H_{21}(-1)\cdot H_{31}(-1)$

οπότε $A=P^{-1}=H_{31}^{-1}(-1)\cdot H_{21}^{-1}(-1)\cdot H_{13}^{-1}(-3)\cdot H_{12}^{-1}(-3)$

ή $$A=H_{31}(1)\cdot H_{21}(1)\cdot H_{13}(3)\cdot H_{12}(3)$$

δηλαδή

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Εκφράζουμε τώρα τον πίνακα A ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων στηλών

$$A=\begin{bmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{bmatrix}\overset{K_{31}(-3),K_{21}(-3)}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\overset{K_{12}(-1)}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\overset{K_{13}(-1)}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Συνεπώς

$$Q=K_{31}(-3)\cdot K_{21}(-3)\cdot K_{12}(-1)\cdot K_{13}(-1)\quad,\quad A\cdot Q=I_3$$

οπότε $A=Q^{-1}=K_{13}^{-1}(-1)\cdot K_{12}^{-1}(-1)\cdot K_{21}^{-1}(-3)\cdot K_{31}^{-1}(-3)$

ή $A=K_{13}(1)\cdot K_{12}(1)\cdot K_{21}(3)\cdot K_{31}(3)$

δηλαδή

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Αν A είναι ένας ομαλός τετραγωνικός (n,n)-πίνακας, τότε ο αντίστροφος αυτού A^{-1} ορίζεται από τη σχέση

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\mathrm{adj}A)$$

Επειδή ο υπολογισμός του αντίστροφου πίνακα από την παραπάνω έκφραση είναι επίπονος μπορούμε να υπολογίσουμε τον πίνακα A^{-1} από τη σχέση (5), δηλαδή την

$$A = H_1^{-1} \cdot H_2^{-1} \cdot \ldots \cdot H_s^{-1} \ .$$

Αν πάρουμε τον αντίστροφο αυτού έχουμε

$$A^{-1} = H_s \cdot \ldots \cdot H_2 \cdot H_1 \qquad (6)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι όποιους μετασχηματισμούς γραμμών εφαρμόζουμε στον πίνακα A για να πάρουμε τον πίνακα I_n, όπως φαίνεται από τη σχέση (4), τους ίδιους μετασχηματισμούς εφαρμόζουμε στον πίνακα I_n για να πάρουμε τον πίνακα A^{-1}, όπως φαίνεται από τη σχέση (6). Η παρατήρηση αυτή μας βοηθά να βρούμε τον αντίστροφο ενός ομαλού πίνακα.

<u>7.16.Παράδειγμα</u>:

Να υπολογισθεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Θεωρούμε τον πίνακα

$$\left[A\ I_3\right] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Εφαρμόζουμε στον πίνακα $\left[A\ I_3\right]$ <u>μόνο</u> στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών ώστε να μετατρέψουμε τον πίνακα A στον πίνακα I_3. Έχουμε διαδοχικά

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{H_{31}(-1),\,H_{21}(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{H_{12}(-3)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 3 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{H_{13}(-3)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[I_3 A^{-1}\right]$$

Με την παραπάνω διαδικασία, κατά τη διάρκεια κατά την οποία μετατρέπαμε τον πίνακα A στόν I_3 με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, οι ίδιοι μετασχηματισμοί εφαρμοζόμενοι στον πίνακα I_3 μας μετέτρεπαν αυτόν στον πίνακα A^{-1}. Έτσι έχουμε τελικά

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>7.17.Παράδειγμα</u>:

Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 14 & 14 \end{bmatrix}$$

Θεωρούμε τον πίνακα $\left[A\, I_4\right]$ και εκτελούμε σ'αυτόν στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών ώστε να τον μετατρέψουμε στον πίνακα $\left[I_4\, A^{-1}\right]$

Έχουμε διαδοχικά

$$
\begin{bmatrix} A & I_4 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 14 & 14 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{H_1(\frac{1}{2})}{\sim}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 14 & 14 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{H_{41}(-4),H_{31}(-2),H_{21}(-3)}{\sim}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & 10 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{H_{23}}{\sim}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & 10 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{H_3(2),H_{42}(3),H_{12}(-2)}{\sim}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{7}{2} & 11 & \frac{5}{2} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & -5 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \overset{H_{43}(-5),H_{13}(-\frac{7}{2})}{\sim}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 18 & 13 & -7 & -2 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -7 & -4 & 2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 3 & 1
\end{array}\right]
\overset{H_4(\frac{1}{5}),H_{14}(-18),H_{24}(-7),H_{34}(-2)}{\sim}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & -23 & 29 & -\frac{64}{5} & -\frac{18}{5} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 10 & -12 & \frac{26}{5} & \frac{7}{5} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5}
\end{array}\right]
= \left[I_4 \; A^{-1}\right]
$$

Συνεπώς

$$
A^{-1} = \begin{bmatrix}
-23 & 29 & -\frac{64}{5} & -\frac{18}{5} \\
10 & -12 & \frac{26}{5} & \frac{7}{8} \\
1 & -2 & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\
2 & -2 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5}
\end{bmatrix}
$$

<u>7.18.Παρατήρηση:</u> Σύμφωνα με τα παραπάνω και με παρόμοιους συλλογισμούς μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ένας ομαλός τετραγωνικός (n,n)-πίνακας A μετατρέπεται στον πίνακα I_n με τη βοήθεια <u>μόνο</u> στοιχειωδών μετασχηματισμών στηλών. Συνεπώς μπορούμε να βρούμε τον αντίστροφο του A εφαρμόζοντας στον πίνακα I_n <u>μόνο</u> στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών. Στο επόμενο παράδειγμα φαίνεται τούτο.

<u>7.19.Παράδειγμα:</u>

Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Θεωρούμε τον πίνακα $\begin{bmatrix} A \\ I_4 \end{bmatrix}$

και εφαρμόζουμε σ'αυτόν στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών ώστε να μετατρέψουμε τον πίνακα A στον πίνακα I_4. Κατά τη διάρκεια αυτής της διαδικασίας ο πίνακας I_4 μετατρέπεται στον πίνακα A^{-1}.

'Ετσι έχουμε διαδοχικά

$$\begin{bmatrix} A \\ I_4 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{K_{12}(1),K_{32}(-2),K_{42}(-2)}{\sim} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & -1 \\ 5 & 3 & -3 & -3 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{K_{21}(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & \frac{3}{2} & -3 \\ \hdashline 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{K_{42}(1)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & \frac{3}{2} & -5 \\ \hdashline 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{K_{43}(3)}{\sim} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \hdashline 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{K_{4}(-2)}{\sim} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ \hdashline 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right] \overset{K_{12}(-2),K_{23}(-2),K_{34}(-\frac{3}{2})}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right] \overbrace{\sim}^{K_{14}(-1),K_{24}(1)} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -3 & 3 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} I_4 \\ A^{-1} \end{bmatrix}$$

Συνεπώς έχουμε

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

7.20. Ειδικές περιπτώσεις ισοδυναμίας πινάκων.

Είδαμε ότι δύο (m,n)-πίνακες A,B είναι ισοδύναμοι ($A \sim B$) αν και μονο αν υπάρχουν ομαλοί πίνακες P και Q τέτοιοι ώστε $B=P\cdot A\cdot Q$. Αναφέρουμε εδώ μερικές ειδικές περιπτώσεις ισοδυναμίας πινάκων:

α) Αν οι ομαλοί πίνακες P,Q είναι τυχόντες, τότε λέμε ότι οι πίνακες A,B είναι <u>ισοδύναμοι</u>.

β) Αν $P=Q^t$, δηλαδή $B=Q^t\cdot A\cdot Q$ τότε οι πίνακες A,B λέγονται <u>ισότιμοι</u> ή <u>ανάλογοι</u>.

γ) Αν $P=Q^{-1}$, δηλαδή $B=Q^{-1}\cdot A\cdot Q$ τότε οι πίνακες A,B λέγονται <u>όμοιοι</u>.

δ) Αν $P=Q^t=Q^{-1}$, δηλαδή $B=Q^t\cdot A\cdot Q=Q^{-1}\cdot A\cdot Q$ τότε οι πίνακες A,B λέγονται <u>ορθογωνίως όμοιοι</u>.

7.21. Παραδείγματα:

α) Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Να βρεθεί ο πίνακας B, όπου $B=R^{-1}\cdot A\cdot R$

β) Δίνονται οι πίνακες

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Να βρεθεί ο πίνακας Δ, όπου $\Delta=Q^{-1}\cdot\Gamma\cdot Q$.

Τι σχέση έχουν οι πίνακες A,B και οι πίνακες Γ,Δ;

α) Έχουμε

$$|R| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{και} \quad R^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς

$$B=R^{-1}\cdot A\cdot R = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 14 & 13 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Άρα} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 14 & 13 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι οι πίνακες A και B είναι όμοιοι.

β) Έχουμε

$$|Q|=\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{vmatrix}=1 \qquad \text{και} \qquad Q^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Συνεπώς

$$\Delta=Q^{-1}\cdot\Gamma\cdot Q=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{6}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{6}{\sqrt{2}} \\ \frac{6}{\sqrt{3}} & \frac{6}{\sqrt{3}} & \frac{6}{\sqrt{3}} \\ \frac{12}{\sqrt{6}} & -\frac{24}{\sqrt{6}} & \frac{12}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι οι πίνακες Γ και Δ είναι ορθογωνίως όμοιοι γιατί $Q^{-1}=Q^{t}$.

8.Ασκήσεις

1)Να υπολογιστεί η ορίζουσα των παρακάτω πινάκων

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

<u>Λύση</u>:Αναπτύσσουμε την ορίζουσα $|A|$ κατά τα στοιχεία της 1-γραμμής

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -2 & 3\\ 2 & 5 & -1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 5 & -1\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}+$$

$$+3\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4 & -2\\ 2 & 5\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot[(-2)\cdot(-1)-5\cdot 3]+2\cdot(-1)\cdot[4(-1)-2\cdot 3]+3\cdot[4\cdot 5-(-2)\cdot 2]=$$

$$=-13+20+72=79$$

'Εφαρμόζουμε τον κανόνα του Sarrus, οπότε έχουμε

$$|B|=\left|\begin{array}{ccc|cc}2 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & -3 & 3 & 2\\ -1 & -3 & 5 & -1 & -3\end{array}\right.$$

$$=2\cdot 2\cdot 5+0\cdot(-3)\cdot(-1)+1\cdot 3\cdot(-3)-1\cdot 2\cdot(-1)-2\cdot(-3)\cdot(-3)-0\cdot 3\cdot 5=$$

$$=20-9+2-18=-5.$$

2.Δίνεται ο πίνακας

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 3 & -1 & 5 & 0\\ 4 & 0 & 2 & 1\\ 1 & 7 & 2 & -3\end{bmatrix}$$

Να βρεθεί το αλγεβρικό συμπλήρωμα α) του στοιχείου 4 και β) του στοιχείου 5.

<u>Λύση</u>:α) Το στοιχείο 4 είναι στην 3-γραμμή και 1-στήλη, δηλαδή $4=\alpha_{31}$, οπότε το αλγεβρικό συμπλήρωμα αυτού είναι

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \\ 7 & 2 & -3 \end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}-2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot(-15)-2\cdot(-1)\cdot 3+3\cdot(-2-35)=-30+6-111=-135,$$

δηλαδή $A_{31}=-135$.

β) Το στοιχείο 5 είναι στη 2-γραμμή και 3-στήλη, δηλαδή $5=\alpha_{23}$, οπότε το αλγεβρικό συμπλήρωμα αυτού είναι

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & -3 \end{vmatrix}=-(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}-2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$-3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}= 7-26-84=-103.$$

3. Δίδονται οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Να βρεθούν οι πίνακες adjA , adjB , A^{-1} και B^{-1}

<u>Λύση</u>:

$$\text{adjA}=\begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}\\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}\\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} \end{bmatrix}^t =$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

Για να βρούμε τον πίνακα A^{-1} υπολογίζουμε την ορίζουσα $|A|$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=-2$$

οπότε

$$A^{-1}=\frac{1}{A}(\text{adjA})=\begin{bmatrix}\frac{-1}{-2} & \frac{-1}{-2} & \frac{1}{-2}\\ \frac{-1}{-2} & \frac{1}{-2} & \frac{-1}{-2}\\ \frac{2}{-2} & \frac{2}{-2} & \frac{0}{-2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$
\operatorname{adj}B=\begin{bmatrix}
(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\
(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\
(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}
\end{bmatrix}^{t} =
$$

$$
\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ -2 & 6 & -5\end{bmatrix}^{t}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ -3 & -1 & 6\\ 2 & 1 & -5\end{bmatrix}
$$

Επίσης έχουμε για την ορίζουσα $|B|$

$$
|B|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=
$$

$$
=2\cdot 2+1(-5)=-1.
$$

Για τον πίνακα B^{-1} έχουμε

$$
B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{-1} & \frac{0}{-1} & \frac{-2}{-1}\\ \frac{-3}{-1} & \frac{-1}{-1} & \frac{6}{-1}\\ \frac{2}{-1} & \frac{1}{-1} & \frac{-5}{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & -6\\ -2 & -1 & 5\end{bmatrix}
$$

4.Να δειχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \ldots\ldots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots\ldots & 1-n \end{vmatrix}_{n\times n} = 0$$

<u>Λύση</u>:Προσθέτουμε όλες τις γραμμές στην πρώτη, οπότε όλα τα στοιχεία της 1-γραμμής γίνονται ίσα με μηδέν.

'Αρα έχουμε

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 1 & 1-n & \ldots\ldots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \ldots\ldots & 1-n \end{vmatrix}_{n\times n} = 0$$

5.Να δειχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} x+\lambda & x & x & \ldots & x \\ x & x+\lambda & x & \ldots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \ldots & x+\lambda \end{vmatrix}_{n\times n} = \lambda^{n-1}(nx+\lambda)$$

<u>Λύση</u>:

$$\begin{vmatrix} x+\lambda & x & x & \ldots & x \\ x & x+\lambda & x & \ldots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \ldots & x+\lambda \end{vmatrix}_{n\times n} = \begin{pmatrix}\text{προσθέτουμε όλες τις} \\ \text{γραμμές στην 1-γραμμή}\end{pmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} nx+\lambda & nx+\lambda & nx+\lambda & \dots & nx+\lambda \\ x & x+\lambda & x & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & x+\lambda \end{vmatrix}_{n\times n} =$$

$$(nx+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x & x+\lambda & x & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & x+\lambda \end{vmatrix} = \begin{matrix}\text{(αφαιρούμε την 1-στήλη}\\ \text{από όλες τις άλλες)}\end{matrix} =$$

$$(nx+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{vmatrix} = (nx+\lambda)\cdot\lambda^{n-1}$$

γιατί η τελευταία ορίζουσα είναι τριγωνική.

6. Για ποιές τιμές του t ο παρακάτω πίνακας δέν έχει αντίστροφο;

$$A=\begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ t & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Λύση</u>: Ο πίνακας A δεν έχει αντίστροφο όταν $|A|=0$. Έχουμε

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ t & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-t^2$$

Συνεπώς ο πίνακας A δέν έχει αντίστροφο όταν $1-t^2=0$ ή $t=\pm 1$. Για να βρούμε τον αντίστροφο του πίνακα A όταν $t\neq\pm1$, βρίσκουμε πρώτα τον πίνακα adjA

$$\operatorname{adj}A=\begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & -1\\ t & 1\end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ t & 0\end{vmatrix}\\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}t & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & t\\ t & 0\end{vmatrix}\\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}t & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{vmatrix}\end{bmatrix}^t=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -t & -t\\ -t & 1 & t^2\\ -t & 1 & 1\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}1 & -t & -t\\ -t & 1 & 1\\ -t & t^2 & 1\end{bmatrix}$$

Οπότε ο πίνακας A^{-1} είναι

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{1-t^2} & \frac{-t}{1-t^2} & \frac{-t}{1-t^2}\\ \frac{-t}{1-t^2} & \frac{1}{1-t^2} & \frac{1}{1-t^2}\\ \frac{-t}{1-t^2} & \frac{t^2}{1-t^2} & \frac{1}{1-t^2}\end{bmatrix}$$

7.Να βρεθεί η ορίζουσα του πίνακα

$$D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1&\frac{1}{3}\\1&\frac{1}{2}&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

<u>Λύση</u>: Καλούμε A τον πρώτο πίνακα, B τον δεύτερο πίνακα και C τον τρίτο πίνακα, οπότε έχουμε $D=A\cdot B\cdot C$. Σύμφωνα με την πρόταση 1.10 έχουμε $|D|=|A\cdot B\cdot C|=|A|\cdot|B|\cdot|C|$. Αλλά

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{vmatrix}=1\cdot2\cdot3=6\ ,\quad |B|=\begin{vmatrix}2&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=1,\ |C|=\begin{vmatrix}1&1&\frac{1}{3}\\1&\frac{1}{2}&0\\1&0&0\end{vmatrix}=-\frac{1}{6}$$

'Αρα $|D|=|A|\cdot|B|\cdot|C|=6\cdot1\cdot(-\frac{1}{6})=-1$.

Διαφορετικά μπορούμε να βρούμε την ορίζουσα $|D|$ αν βρούμε πρώτα τον πίνακα D, δηλαδή

$$D=\begin{bmatrix}3&2&\frac{2}{3}\\2&1&0\\6&3&1\end{bmatrix}$$ οπότε έχουμε μετά $|D|=-1$.

8.Δίνεται ότι

$$\begin{bmatrix}1&-2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot A\cdot\begin{bmatrix}1&2&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=5\cdot I$$

Να βρεθεί η ορίζουσα του πίνακα A.

<u>Λύση</u>: Καλούμε B τον πρώτο πίνακα και C τον τρίτο, δηλαδή

$$B=\begin{bmatrix}1&-2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\ ,\quad C=\begin{bmatrix}1&2&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

οπότε έχουμε

$$B\cdot A\cdot C=5\cdot I$$

και $|B\cdot A\cdot C|=|5\cdot I|$ ή $|B|\cdot|A|\cdot|C|=5^3|I|$

αλλά $|B|=5$ και $|C|=5$, οπότε έχουμε

$$5\cdot|A|\cdot 5=5^3 \quad ή \quad |A|=\frac{5^3}{25} \quad ή \quad |A|=5$$

9.Να δειχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & \psi & z \\ \psi+x & z+x & x+\psi \end{vmatrix}=0$$

<u>Λύση</u>:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & \psi & z \\ \psi+z & z+x & x+\psi \end{vmatrix} = \text{(προσθέτουμε στην 1-γραμμή τις άλλες δύο γραμμές)} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1+x+\psi+z & 1+x+\psi+z & 1+x+\psi+z \\ x & \psi & z \\ \psi+z & z+x & x+\psi \end{vmatrix} =$$

$$(1+x+\psi+z)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & \psi & z \\ \psi+z & z+x & x+\psi \end{vmatrix} = \text{(αφαιρούμε την 1-στήλη από τις δύο άλλες)} =$$

$$(1+x+\psi+z)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & \psi-x & z-x \\ \psi+z & x-\psi & x-z \end{vmatrix} = \text{(προσθέτω στην 2-γραμμή την 3η)} =$$

$$= (1+x+\psi+z)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+\psi+z & 0 & 0 \\ \psi+z & x-\psi & x-z \end{vmatrix} =$$

$$=(1+x+\psi+z)\cdot 1\cdot 0\cdot (x-z)=0.$$

10.Να δειχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} x-\psi-z & 2x & 2x \\ 2\psi & \psi-x-z & 2\psi \\ 2z & 2z & z-x-\psi \end{vmatrix} =(x+\psi+z)^3$$

<u>Λύση</u>:

$$\begin{vmatrix} x-\psi-z & 2x & 2x \\ 2\psi & \psi-x-z & 2\psi \\ 2z & 2z & z-x-\psi \end{vmatrix} \underset{\text{γραμμή τις δύο άλλες)}}{\overset{\text{(προσθέτουμε στην 1-}}{=}}$$

$$=\begin{vmatrix} x+\psi+z & x+\psi+z & x+\psi+z \\ 2\psi & \psi-x-z & 2\psi \\ 2z & 2z & z-x-\psi \end{vmatrix} =(x+\psi+z)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2\psi & \psi-x-z & 2\psi \\ 2z & 2z & z-x-\psi \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\text{στήλη αφαιρώ την 1η)}}{\overset{\text{(από την 2- και 3-}}{=}} (x+\psi+z)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\psi & -(x+\psi+z) & 0 \\ 2z & 0 & -(x+\psi+z) \end{vmatrix} =(x+\psi+z)^3$$

11.Να δειχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2-\psi z \\ 1 & \psi & \psi^2-xz \\ 1 & z & z^2-x\psi \end{vmatrix} =0$$

<u>Λύση</u>:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2-\psi z \\ 1 & \psi & \psi^2-xz \\ 1 & z & z^2-x\psi \end{vmatrix} = \text{(αφαιρούμε την 1-γραμμή από τις δύο άλλες)} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2-\psi z \\ 0 & \psi-x & \psi^2-xz-x^2+\psi z \\ 0 & z-x & z^2-x\psi-x^2+\psi z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x^{2-\psi z} \\ 0 & \psi-x & (\psi-x)(x+\psi+z) \\ 0 & z-x & (z-x)(x+\psi+z) \end{vmatrix} = (\psi-x)(z-x) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2-\psi z \\ 0 & 1 & x+\psi+z \\ 0 & 1 & x+\psi+z \end{vmatrix} = 0$$

γιατί η ορίζουσα έχει δύο γραμμές ίσες.

12.Να δειχθεί ότι

α) $$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \alpha^3 & 1 & \alpha & \alpha^2 \\ b & \alpha^3 & 1 & \alpha \\ c & d & \alpha^3 & 1 \end{vmatrix} = (1-\alpha^4)^3$$

β) $$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \cos(n-1)x & \cos nx & \cos(n+1)x \\ \sin(n-1)x & \sin nx & \sin(n+1)x \end{vmatrix} = (1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\sin x$$

γ) $$\begin{vmatrix} 1+\sin^2\vartheta & \cos^2\vartheta & 4\sin 2\vartheta \\ \sin^2\vartheta & 1+\cos^2\vartheta & 4\sin 2\vartheta \\ \sin^2\vartheta & \cos^2\vartheta & 1+4\sin 2\vartheta \end{vmatrix} = 2(1+2\sin 2\vartheta)$$

<u>Λύση</u>:

α) $$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \alpha^3 & 1 & \alpha & \alpha^2 \\ b & \alpha^3 & 1 & \alpha \\ c & d & \alpha^3 & 1 \end{vmatrix} =$$ (πολλαπλασιάζουμε την 2-γραμμή επί α και την αφαιρούμε από την 1-γραμμή, την 3η επί α και την αφαιρούμε από την 2η και τέλος την 4-γραμμή επί α και την αφαιρούμε από την 3η)

$$\begin{vmatrix} 1-\alpha^4 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha^3-\alpha b & 1-\alpha^4 & 0 & 0 \\ b-\alpha c & \alpha^3-\alpha d & 1-\alpha^4 & 0 \\ c & d & \alpha^3 & 1 \end{vmatrix} = (1-\alpha^4)^3 \quad .$$

β) $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \cos(n-1)x & \cos nx & \cos(n+1)x \\ \sin(n-1)x & \sin nx & \sin(n+1)x \end{vmatrix} =$ (πολλαπλασιάζουμε την 2-στήλη επί 2cosx και αφαιρούμε από την 1-στήλη, επίσης προσθέτουμε την 3-στήλη στην 1-στήλη)

$$\begin{vmatrix} 1-2\alpha\cos x+\alpha^2 & \alpha & \alpha^2 \\ \cos(n-1)x-2\cos nx\cos x+\cos(n+1)x & \cos nx & \cos(n+1)x \\ \sin(n-1)x-2\sin nx\cos x+\sin(n+1)x & \sin nx & \sin(n+1)x \end{vmatrix}$$

'Εχουμε

$\cos(n-1)x-2\cos nx\cos x+\cos(n+1)x=\cos(nx-x)-2\cos nx\cos x+\cos(nx+x)=$

$=\cos nx\cos x+\sin nx\sin x-2\cos nx\cos x+\cos nx\cos x-\sin nx\sin x=0$

$\sin(n-1)x-2\sin nx\cos x+\sin(n+1)x=\sin(nx-x)-2\sin nx\cos x+\sin(nx+x)=$

$=\sin nx\cos x-\cos nx\sin x-2\sin nx\cos x+\sin nx\cos x+\cos nx\sin x=0$

'Αρα έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \cos(n-1)x & \cos nx & \cos(n+1)x \\ \sin(n-1)x & \sin nx & \sin(n+1)x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-2\alpha\cos x+\alpha^2 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & \cos nx & \cos(n+1)x \\ 0 & \sin nx & \sin(n+1)x \end{vmatrix} =$$

$$=(1-2\alpha\cos x+\alpha^2) \begin{vmatrix} \cos x & \cos(n+1)x \\ \sin nx & \sin(n+1)x \end{vmatrix} =$$

$$=(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\left[\sin(n+1)x\cdot\cos nx-\cos(n+1)x\cdot\sin nx\right]=$$

$$=(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\cdot\sin\left[(n+1)x-nx\right]=(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\sin x$$

γ) $\begin{vmatrix} 1+\sin^2\vartheta & \cos^2\vartheta & 4\sin 2\vartheta \\ \sin^2\vartheta & 1+\cos^2\vartheta & 4\sin 2\vartheta \\ \sin^2\vartheta & \cos^2\vartheta & 1+4\sin 2\vartheta \end{vmatrix}$ = (αφαιρούμε από την 1-γραμμή την 2-γραμμή και από την 2-γραμμή την 3-γραμμή) =

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \sin^2\vartheta & \cos^2\vartheta & 1+4\sin 2\vartheta \end{vmatrix}$ = (προσθέτουμε την 1-στήλη στην 2-στήλη) =

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \sin^2\vartheta & 1 & 1+4\sin 2\vartheta \end{vmatrix}=1+4\sin 2\vartheta+1=2+4\sin 2\vartheta=2(1+2\sin 2\vartheta).$$

13.Να υπολογιστεί η τιμή της ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha+\beta & \alpha+2\beta \\ \alpha(\alpha+\beta) & (\alpha+\beta)(\alpha+2\beta) & (\alpha+2\beta)(\alpha+3\beta) \end{vmatrix}$$

<u>Λύση</u>:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha+\beta & \alpha+2\beta \\ \alpha(\alpha+\beta) & (\alpha+\beta)(\alpha+2\beta) & (\alpha+2\beta)(\alpha+3\beta) \end{vmatrix}$ = (αφαιρώ από την 3-στήλη την 2η και από την 2η την πρώτη) =

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \beta \\ \alpha(\alpha+\beta) & 2\beta(\alpha+\beta) & 2\beta(\alpha+2\beta) \end{vmatrix}$ = (αφαιρώ από την 3-στήλη την δεύτερη)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \\ \alpha(\alpha+\beta) & 2\beta(\alpha+\beta) & 2\beta^2 \end{vmatrix} = 1\cdot\beta\cdot 2\beta^2 = 2\beta^3$$

14. Να δειχθούν οι ταυτότητες

α) $|A_n| = (\alpha+n-1)(\alpha-1)^{n-1}$

β) $|X_n| = x_1 x_2 \dots x_n$

γ) $|B_n| = 1!2!3!\dots n!$

όπου

$$|A_n| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & \dots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \alpha \end{vmatrix}, \quad |X_n| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_2 & \dots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+x_n \end{vmatrix},$$

$$|B_n| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 & (n+1)^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \dots & n^3 & (n+1)^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2^n & 3^n & \dots & n^n & (n+1)^n \end{vmatrix}$$

<u>Λύση</u>:

α)

$$|A_n| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & \dots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \alpha \end{vmatrix} \underset{\text{στήλες στην 1η)}}{\overset{\text{(προσθέτω όλες τις}}{=}} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha+n-1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha+n-1 & \alpha & 1 & \dots & 1 \\ \alpha+n-1 & 1 & \alpha & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha+n-1 & 1 & 1 & \dots & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \alpha \end{vmatrix} = \text{(αφαιρούμε τη 1η στήλη από όλες τις άλλες)}$$

$$=(\alpha+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha-1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \alpha-1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \alpha-1 \end{vmatrix} = (\alpha+n-1)(\alpha-1)^{n-1}$$

β)

$$|X_n| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+x_n \end{vmatrix} = \text{(αφαιρώ την 1-στήλη από όλες τις υπόλοιπες)} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix} = x_1 x_2 \dots x_n$$

γ)

$$|B_n| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \dots & n & n+1 \\ 1 & 2^2 & 3^2 \dots & n^2 & (n+1)^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 \dots & n^3 & (n+1)^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2^n & 3^n \dots & n^n & (n+1)^n \end{vmatrix} = $$ (η ορίζουσα είναι Vandermonde με $\alpha_i = i$, άρα) =

$$=(n+1-1)(n+1-2)(n+1-3)\dots(n+1-n)(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-(n-1))\dots$$

$$(3-2)(2-1)=1\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\dots 1\cdot 2\dots n=1!2!3!\dots n!$$

15. Να δειχθούν οι ταυτότητες

α) $$\begin{vmatrix} \alpha & x & x & \beta \\ x & \alpha & \beta & x \\ x & \beta & \alpha & x \\ \beta & x & x & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)^2\left[(\alpha+\beta)^2-4x^2\right]$$

β) $$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\beta & \alpha & -\delta & \gamma \\ -\gamma & \delta & \alpha & -\beta \\ -\delta & -\gamma & \beta & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)^2$$

<u>Λύση</u>:

α) $$\begin{vmatrix} \alpha & x & x & \beta \\ x & \alpha & \beta & x \\ x & \beta & \alpha & x \\ \beta & x & x & \alpha \end{vmatrix} = $$ (αφαιρώ από την 1η στήλη την 4η και από την 2η την 3η) $$= \begin{vmatrix} \alpha-\beta & 0 & x & \beta \\ 0 & \alpha-\beta & \beta & x \\ 0 & \beta-\alpha & \alpha & x \\ \beta-\alpha & 0 & x & \alpha \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{matrix}(\text{προσθέτω στην 4η}\\ \text{γραμμή την 1η}\\ \text{και στην 3η}\\ \text{την 2η})\end{matrix} = \begin{vmatrix} \alpha-\beta & 0 & x & \beta \\ 0 & \alpha-\beta & \beta & x \\ 0 & 0 & \alpha+\beta & 2x \\ 0 & 0 & 2x & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \begin{matrix}(\text{αφαιρώ από την 3η}\\ \text{στήλη την 4η})\end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha-\beta & 0 & x-\beta & \beta \\ 0 & \alpha-\beta & \beta-x & x \\ 0 & 0 & \alpha+\beta-2x & 2x \\ 0 & 0 & 2x-(\alpha+\beta) & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \begin{matrix}(\text{προσθέτω στην 4η}\\ \text{γραμμή την 3η})\end{matrix} = \begin{vmatrix} \alpha-\beta & 0 & x-\beta & \beta \\ 0 & \alpha-\beta & \beta-x & x \\ 0 & 0 & \alpha+\beta-2x & 2x \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+\beta+2x \end{vmatrix} =$$

$$=(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta-2x)(\alpha+\beta+2x)=(\alpha-\beta)^2\left[(\alpha+\beta)^2-4x^2\right]$$

β) Θεωρούμε τον πίνακα

$$A=\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\beta & \alpha & -\delta & \gamma \\ -\gamma & \delta & \alpha & -\beta \\ -\delta & -\gamma & \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Έχουμε

$$A\cdot A^t=\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\beta & \alpha & -\delta & \gamma \\ -\gamma & \delta & \alpha & -\beta \\ -\delta & -\gamma & \beta & \alpha \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \alpha & -\beta & -\gamma & -\delta \\ \beta & \alpha & \delta & -\gamma \\ \gamma & -\delta & \alpha & \beta \\ \delta & \gamma & -\beta & \alpha \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 \end{bmatrix}$$

οπότε $|A\cdot A^t|=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)^4$ ή $|A|\cdot|A^t|=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)^4$

Επειδή όμως $|A|=|A^t|$ έχουμε $|A|^2=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)^4$ και

$|A|=\pm(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)^2$. Αλλά αν αναπτύξουμε την ορίζουσα $|A|$ κατά τα στοιχεία της 1-γραμμής μπορούμε να δούμε εύκολα ότι αυτή είναι τεάρτου βαθμού ως προς α και μάλιστα ο συντελεστής του α^4 είναι 1. Έτσι το πρόσημο πλήν στην ορίζουσα $|A|$ απορρίπτεται και έχουμε τελικά $|A|=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)^2$.

16. Να δειχθούν οι ταυτότητες

α) $|A_n|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\, n^{n-2}$

β) $|B_n|=(-1)^{n-1}\left[(n-1)\alpha-1\right](\alpha+1)^{n-1}$

γ) $|D_n|=\alpha^n\beta^n\gamma^n(\gamma-\alpha)^2(\gamma-\beta)^2(\beta-\alpha)^2$

όπου

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{vmatrix}, \quad |B_n| = \begin{vmatrix} -1 & \alpha & \alpha & \dots & \alpha \\ \alpha & -1 & \alpha & \dots & \alpha \\ \alpha & \alpha & -1 & \dots & \alpha \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha & \alpha & \alpha & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

$$|D_n| = \begin{vmatrix} \alpha^n+\beta^n+\gamma^n & \alpha^{n+1}+\beta^{n+1}+\gamma^{n+1} & \alpha^{n+2}+\beta^{n+2}+\gamma^{n+2} \\ \alpha^{n+1}+\beta^{n+1}+\gamma^{n+1} & \alpha^{n+2}+\beta^{n+2}+\gamma^{n+2} & \alpha^{n+3}+\beta^{n+3}+\gamma^{n+3} \\ \alpha^{n+2}+\beta^{n+2}+\gamma^{n+2} & \alpha^{n+3}+\beta^{n+3}+\gamma^{n+3} & \alpha^{n+4}+\beta^{n+4}+\gamma^{n+4} \end{vmatrix}$$

Λύση:

α)

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = \text{(προσθέτω όλες τις στήλες στη πρώτη)} =$$

$$\begin{vmatrix} 1+2+3+\dots+n & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1+2+3+\dots+n & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ 1+2+3+\dots+n & 4 & 5 & \dots & 1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+2+3+\dots+n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ 1 & 4 & 5 & \dots & 1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = \text{(από κάθε γραμμή αφαιρώ την προηγούμενη)} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{(αναπτύσσω κατά τα στοιχεία της 1-στήλης)} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \ldots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1-n & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{(αφαιρώ την 1-γραμμή από όλες τις άλλες)} =$$

$$\frac{n(n+1)}{2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1-n \\ 0 & 0 & \ldots & -n & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & \ldots & 0 & n \end{vmatrix} = \text{(προσθέτω όλες τις στήλες στην τελευταία)} =$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & -n & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(-1)(-n)^{n-2} =$$

$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\ \frac{n(n+1)}{2}\ n^{n-2}$,γιατί η τελευταία ορίζουσα έχει όλα τα στοιχεία κάτω της δευτερεύουσας διαγωνίου μηδέν.

β)

$$|B_n| = \begin{vmatrix} -1 & \alpha & \alpha & \ldots & \alpha \\ \alpha & -1 & \alpha & \ldots & \alpha \\ \alpha & \alpha & -1 & \ldots & \alpha \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha & \alpha & \alpha & \ldots & -1 \end{vmatrix} = \text{(προσθέτω όλες τις στήλες στην πρώτη)} = \begin{vmatrix} (n-1)\alpha-1 & \alpha & \alpha & \ldots & \alpha \\ (n-1)\alpha-1 & -1 & \alpha & \ldots & \alpha \\ (n-1)\alpha-1 & \alpha & -1 & \ldots & \alpha \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n-1)\alpha-1 & \alpha & \alpha & \ldots & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \boxed{(n-1)\alpha-1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha & \ldots & \alpha \\ 1 & -1 & \alpha & \ldots & \alpha \\ 1 & \alpha & -1 & \ldots & \alpha \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \alpha & \alpha & \ldots & -1 \end{vmatrix} = \text{(αφαιρώ την 1η γραμμή από τις υπόλοιπες)} =$$

$$=\boxed{(n-1)\alpha-1}\cdot\begin{vmatrix}1 & \alpha & \alpha & \dots & \alpha\\ 0 & -(\alpha+1) & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & -(\alpha+1) & \dots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & & -(\alpha+1)\end{vmatrix}=\boxed{(n-1)\alpha-1}\,(\alpha+1)^{n-1}(-1)^{n-1}$$

γ) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{bmatrix}\alpha^n & \beta^n & \gamma^n\\ \alpha^{n+1} & \beta^{n+1} & \gamma^{n+1}\\ \alpha^{n+2} & \beta^{n+2} & \gamma^{n+2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & \alpha & \alpha^2\\ 1 & \beta & \beta^2\\ 1 & \gamma & \gamma^2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\alpha^n+\beta^n+\gamma^n & \alpha^{n+1}+\beta^{n+1}+\gamma^{n+1} & \alpha^{n+2}+\beta^{n+2}+\gamma^{n+2}\\ \alpha^{n+1}+\beta^{n+1}+\gamma^{n+1} & \alpha^{n+2}+\beta^{n+2}+\gamma^{n+2} & \alpha^{n+3}+\beta^{n+3}+\gamma^{n+3}\\ \alpha^{n+2}+\beta^{n+2}+\gamma^{n+2} & \alpha^{n+3}+\beta^{n+3}+\gamma^{n+3} & \alpha^{n+4}+\beta^{n+4}+\gamma^{n+4}\end{bmatrix}$$

Συνεπώς

$$|D_n|=\begin{vmatrix}\alpha^n+\beta^n+\gamma^n & \alpha^{n+1}+\beta^{n+1}+\gamma^{n+1} & \alpha^{n+2}+\beta^{n+2}+\gamma^{n+2}\\ \alpha^{n+1}+\beta^{n+1}+\gamma^{n+1} & \alpha^{n+2}+\beta^{n+2}+\gamma^{n+2} & \alpha^{n+3}+\beta^{n+3}+\gamma^{n+3}\\ \alpha^{n+2}+\beta^{n+2}+\gamma^{n+2} & \alpha^{n+3}+\beta^{n+3}+\gamma^{n+3} & \alpha^{n+4}+\beta^{n+4}+\gamma^{n+4}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\alpha^n & \beta^n & \gamma^n\\ \alpha^{n+1} & \beta^{n+1} & \gamma^{n+1}\\ \alpha^{n+2} & \beta^{n+2} & \gamma^{n+2}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & \alpha & \alpha^2\\ 1 & \beta & \beta^2\\ 1 & \gamma & \gamma^2\end{vmatrix}=$$

(από την 1η ορίζουσα βγάζω κοινό παράγοντα το α^n, β^n και γ^n από την 1η, 2η και 3η στήλη, αντίστοιχα) =

$$=\alpha^n\beta^n\gamma^n\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \alpha & \beta & \gamma\\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & \alpha & \alpha^2\\ 1 & \beta & \beta^2\\ 1 & \gamma & \gamma^2\end{vmatrix}=\alpha^n\beta^n\gamma^n|\Delta|\cdot|\Delta^t|$$

όπου

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{bmatrix}$$

Επειδή όμως η ορίζουσα $|\Delta|$ είναι Vandermonde έχουμε

$|\Delta| = |\Delta^t| = (\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)$. Άρα $|D_n| = \alpha^n\beta^n\gamma^n(\gamma-\beta)^2(\gamma-\alpha)^2(\beta-\alpha)^2$.

17. Να βρεθεί ο βαθμός των πινάκων

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 13 & 12 \end{bmatrix}$$

<u>Λύση</u>:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \overset{H_{21}(-1),H_{31}(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \overset{H_{32}(-2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'$$

Επειδή $A \sim A'$ και ο πίνακας A' είναι βαθμού 2 έπεται ότι και ο βαθμός του πίνακα A είναι 2.

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \overset{H_{21}(-3),H_{31}(2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 2 & 3 \end{bmatrix} \overset{H_{32}(\frac{7}{2})}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{41}{2} \end{bmatrix} = B'$$

Ο πίνακα B' είναι βαθμού 3 άρα και ο πίνακα B είναι βαθμού 3.

$$C=\begin{bmatrix}0&2&3&4\\2&3&5&4\\4&8&13&12\end{bmatrix}\overset{H_{12}}{\sim}\begin{bmatrix}2&3&5&4\\0&2&3&4\\4&8&13&12\end{bmatrix}\overset{H_{31}(-2)}{\sim}\begin{bmatrix}2&3&5&4\\0&2&3&4\\0&2&3&4\end{bmatrix}\overset{H_{32}(-1)}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix}2&3&5&4\\0&2&3&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}=C'$$

Ο πίνακας C′ είναι βαθμού 2 άρα και ο πίνακας C είναι βαθμού 2.

18. Να βρεθεί ο αντίστροφος πίνακας των πινάκων

$$A=\begin{bmatrix}1&3&6\\1&4&5\\1&5&5\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1&2&-1&2\\2&5&-2&3\\1&2&1&2\\2&3&4&1\end{bmatrix}$$

<u>Λύση</u>: Θεωρούμε τον πίνακα $[A\ I_3]$ και εκτελούμε σ'αυτόν στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών για να μετατρέψουμε τον πίνακα A στον ταυτοτικό πίνακα I_3. Έχουμε

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&6&1&0&0\\1&4&5&0&1&0\\1&5&5&0&0&1\end{array}\right]\overset{H_{31}(-1),H_{21}(-1)}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&6&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&6&-1&-1&0&1\end{array}\right]\overset{H_{32}(-2),H_{12}(-3)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&9&4&-3&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&1&1&-2&1\end{array}\right]\overset{H_{23}(1),H_{13}(-9)}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-5&15&-9\\0&1&0&0&-1&1\\0&0&1&1&-2&1\end{array}\right]=\left[I_3A^{-1}\right]$$

Άρα ο αντίστροφος του πίνακα A είναι

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} -5 & 15 & -9 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Εργαζόμαστε όπως παραπάνω και έχουμε

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{H_{21}(-2),H_{31}(-1),H_{41}(-2)}{\sim} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{H_{42}(1)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -4 & -4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{H_{12}(-2),H_{43}(-3)}{\sim} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & -1 & 4 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] \overset{H_{3}(\frac{1}{2}),H_{4}(-\frac{1}{4})}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & -1 & 4 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right] \overset{H_{13}(1),H_{24}(1)}{\sim} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 4 & \frac{9}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right] \overset{H_{14}(-4)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & -1 & -\frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0. & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right] = \left[I_4 \; B^{-1}\right]$$

Συνεπώς ο αντίστροφος του πίνακα Β είναι

$$B^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -1 & -\frac{5}{2} & 1 \\ -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

19. Να δειχθεί η πρόταση 7.6: Οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί δεν αλλάζουν το βαθμό ενός πίνακα.

<u>Λύση</u>: Ας υποθέσουμε ότι ο (m,n)-πίνακας $A=[a_{ij}]$ είναι βαθμού τ, οπότε κάθε $(\tau+1)$ τάξεως ελάσσων ορίζουσα του A, αν υπάρχουν τέτοιες ορίζουσες, είναι μηδέν. Το αυτό φυσικά συμβαίνει και για ελάσσονες ορίζουσες μεγαλύτερης τάξεως. Ας είναι B ο πίνακα που επιτυγχάνεται από τον πίνακα A με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς. Σημειώνουμε με $|R|$ μία $(\tau+1)$ τάξεως ελάσσονα ορίζουσα του πίνακα A και με $|S|$ την $(\tau+1)$ τάξεως ελάσσονα ορίζουσα του B που έχει την ίδια θέση με την ορίζουσα $|R|$. Προφανώς κάθε $(\tau+1)$ τάξεως ελάσσων ορίζουσα $|R|$ του πίνακα A είναι ίση με μηδέν ($|R|=0$).

Υποθέτουμε τώρα ότι ο πίνακας B προκύπτει από τον πίνακα A με έναν από τους εξής στοιχειώδεις μετασχηματισμούς: $H_{k\ell}$ ή $H_k(c)$ ή $H_{k\ell}(c)$. Εξετάζουμε χωριστά την κάθε μια περίπτωση:

(1). $H_{k\ell}$. Σ'αυτήν την περίπτωση έχουμε για κάθε $(\tau+1)$ τάξεως ορίζουσα $|R|$ του πίνακα A ένα από τα επόμενα αποτελέσματα.

(α) Παραμένει αμετάβλητη

(β) Εναλλάσσονται δύο γραμμές της

(γ) Μία γραμμή της εναλλασσεται με μία γραμμή του πίνακα A που δεν ανήκει στην $|R|$.

Συνεπώς για την αντίστοιχη ορίζουσα $|S|$ έχουμε τα αντίστοιχα συμπεράσματα (α) $|S|=|R|=0$

(β) $|S|=-|R|=0$

(γ) Η $|S|$ είναι μία άλλη (τ+1) τάξεως ελάσσων ορίζουσα του πίνακα Α και επομένως $|S|=0$.

(2). $H_k(c)$. Σ'αυτήν την περίπτωση για κάθε (τ+1) τάξεως ελάσσονα ορόζουσα $|R|$ έχουμε ένα από τα επόμενα αποτελέσματα.

(α) Παραμένει αμετάβλητη

(β) Πολλαπλασιάζεται μία γραμμή της επί c.

Συνεπώς για την αντίστοιχη ορίζουσα $|S|$ έχουμε τα αντίστοιχα συμπεράσματα

(α) $|S|=|R|=0$

(β) $|S|=c|R|=0$

(3). $H_{k\ell}(c)$. Έχουμε για κάθε (τ+1) τάξεως ελάσσονα ορίζουσα $|R|$ ένα από τα εξής αποτελέσματα

(α) Παραμένει αμετάβλητη

(β) Προστίθεται σε μία γραμμή της μία άλλη γραμμή της πολλαπλασιασμένη επί c

(γ) Προστίθενται στα στοιχεία μιας γραμμής της τα αντίστοιχα c--πολλαπλάσια στοιχεία μιας άλλης γραμμής του πίνακα Α που δεν ανήκει στην $|R|$.

Για την αντίστοιχη ορίζουσα $|S|$ έχουμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα

(α) $|S|=|R|=0$

. $|S|=|R|=0$

$|S|=|R|+c\cdot$(μία (τ+1) τάξεως ελάσσονα ορίζουσα του Α)$=0+c\cdot 0=0$.

Επομένως ένας στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών δεν αλλάζει το βαθμό του πίνακα Α. Με τους ίδιους συλλογισμούς συμπεραίνουμε επίσης ότι και ένας στοιχειώδης μετασχηματισμός στηλών δέν αλλάζει το βαθμό του πίνακα Α. Έτσι συμπεραίνουμε ότι οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί αφήνουν αναλλοίωτο το βαθμό ενός πίνακα.

9. Άλυτες ασκήσεις.

1. Να δειχθούν οι ταυτότητες

α) $$\begin{vmatrix} -2\alpha & \alpha+\beta & \alpha+\gamma \\ \beta+\alpha & -2\beta & \beta+\gamma \\ \gamma+\alpha & \gamma+\beta & -2\gamma \end{vmatrix} = 4(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$$

β) $$\begin{vmatrix} (\beta+\gamma)^2 & \alpha^2 & \alpha^2 \\ \beta^2 & (\gamma+\alpha)^2 & \beta^2 \\ \gamma^2 & \gamma^2 & (\alpha+\beta)^2 \end{vmatrix} = 2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)^3$$

2. Να δειχθούν οι ταυτότητες

α) $$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta\gamma \\ 1 & \beta & \alpha\gamma \\ 1 & \gamma & \alpha\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix}$$

β) $$\begin{vmatrix} \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \\ \mu+\nu & \nu+\lambda & \lambda+\mu \\ \psi+z & z+x & x+\psi \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \nu \\ x & \psi & z \end{vmatrix}$$

γ) $$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ x & \psi & z \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \psi & \beta & \mu \\ x & \alpha & \lambda \\ z & \gamma & \nu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & \psi & z \\ \lambda & \mu & \nu \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

3. Αν για κάθε x έχουμε

$$\begin{vmatrix} x & \alpha & \beta \\ \gamma & x & \delta \\ \varepsilon & \zeta & x \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} x^2+2 & 4x+2 & 2x+2 \\ 4x+2 & x^2+13 & 4x+3 \\ 2x+2 & 4x+3 & x^2+5 \end{vmatrix}$$

να υπολογιστούν τα $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta$.

4.Να διεχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} \dots & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \\ -\alpha & \beta & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & \beta \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & -\alpha & \beta \end{vmatrix} = (\alpha+\beta)^n$$

5.Αν

$$|\Delta_n| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Να δειχθεί ότι $|\Delta_n|=0$ όταν n=περιττός και $|\Delta_n|=1$ όταν n=άρτιος.

6.Να δειχθεί ότι κάθε αντισυμμετρική ορίζουσα περιττής τάξεως είναι ίση με μηδέν.

7.Να υπολογιστούν οι ορίζουσες

$$|\Delta_n| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad |A_n| = \begin{vmatrix} 1+\alpha_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+\alpha_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+\alpha_n \end{vmatrix}$$

8.Να δειχθεί ότι για n>3 έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \dots & (n+1)^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & \dots & (n+2)^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & \dots & (n+3)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 & \dots & (2n-1)^2 \end{vmatrix} = 0$$

9.Να δειχθεί ότι για n>2 έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1+x_1\psi_1 & 1+x_1\psi_2 & \dots & 1+x_1\psi_n \\ 1+x_2\psi_1 & 1+x_2\psi_2 & \dots & 1+x_2\psi_n \\ 1+x_3\psi_1 & 1+x_3\psi_2 & \dots & 1+x_3\psi_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_n\psi_1 & 1+x_n\psi_2 & \dots & 1+x_n\psi_n \end{vmatrix} = 0$$

10.Δείξτε ότι αν ο τετραγωνικός (n,n)-πίνακας A είναι αντισυμμετρικός, τότε ο πίνακας adjA είναι συμμετρικός ή αντισυμμετρικός αντίστοιχα αν ο αριθμός n είναι περιττός ή άρτιος.

11.Να υπολογισθεί ο προσηρτημένος και ο αντίστροφος του καθένα από τούς πίνακες

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

12.Δείξτε ότι ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι ομαλός αν και μόνο αν ο πίνακας adjA είναι ομαλός.

13.Να βρεθεί ο αντίστροφος πίνακας του

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

14.Να βρεθεί ο βαθμός των πινάκων

α) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, β) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, γ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & 6 \\ -1 & -3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$,

δ) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \end{bmatrix}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1. Έννοιες-Ορισμοί:

Έστω F ένα σώμα (π.χ. το σώμα των πραγματικών αριθμών R, ή το σώμα των μιγαδικών αριθμών C).

Ένα γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους είναι της μορφής

$$\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n=\beta_1 \\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ldots+\alpha_{2n}x_n=\beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}x_1+\alpha_{m2}x_2+\ldots+\alpha_{mn}x_n=\beta_m \end{array} \qquad (1)$$

όπου α_{ij}, $\beta_i \in F$ $(i=1,2,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n)$. Οι $x_1,x_2,\ldots,x_n$ καλούνται <u>άγνωστοι</u>. Το πρόβλημα το οποίο αντιμετωπίζουμε εδώ είναι η εύρεση n αριθμών $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n \in F$, οι οποίοι θα αντικαταστήσουν τους αγνώστους $x_1,x_2,\ldots,x_n$ στις εξισώσεις (1) και θα τις επαληθεύουν. Η n-άδα $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ λέγεται τότε <u>λύση του συστήματος</u> (1).

Ο (m,n)-πίνακας

$$A=\left[\alpha_{ij}\right]=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

καλείται <u>πίνακας του συστήματος</u> (1) ή <u>πίνακας των συντελεστών των αγνώστων</u> του συστήματος. Ο (m,n+1)-πίνακας

$$C=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{bmatrix} \qquad (3)$$

καλείται <u>πίνακας όλων των συντελεστών του συστήματος</u> ή <u>επηυξημένος πίνακας</u>.

Αν θεωρήσουμε τον (n,1)-πίνακα X και τον (m,1)-πίνακα B, όπου

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_m \end{bmatrix} \qquad (4)$$

τότε το σύστημα (1) μπορεί να γραφεί υπό μορφή γινομένου πινάκων

$$A\cdot X = B \qquad (5)$$

ή αναλυτικώτερα

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_m \end{bmatrix} \qquad (6)$$

2. <u>Λύση γραμμικού συστήματος</u>.

Ένα ερώτημα το οποίο γεννιέται είναι κατά πόσο ένα γραμμικό σύστημα έχει λύση. Παρακάτω εξετάζουμε αυτό το ερώτημα και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Την περίπτωση στην οποία ο αριθμός των εξισώσεων του συστήματος είναι ίσος με τον αριθμό των αγνώστων, δηλαδή $m=n$ και την περίπτωση όπου $m \neq n$.

Εξετάζουμε την πρώτη περίπτωση.

2.1. Περίπτωση όπου $m=n$.

Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n=\beta_1 \\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ldots+\alpha_{2n}x_n=\beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}x_1+\alpha_{n2}x_2+\ldots+\alpha_{nn}x_n=\beta_n \end{array} \qquad (1)$$

Καλούμε D την ορίζουσα του πίνακα A των συντελεστών των αγνώστων και υποθέτουμε ότι είναι διάφορη του μηδενός, δηλαδή

$$D=|A|\neq 0 \qquad (2)$$

Επειδή $D\neq 0$, σύμφωνα με την πρόταση 4.3 του Κεφ.IV ο πίνακας A έχει αντίστροφο. Γράφουμε το σύστημα (1) υπό μορφή πινάκων $A\cdot X=B$ και πολλαπλασιάζουμε τη σχέση αυτή εξ αριστερών επί τον πίνακα A^{-1}, οπότε έχουμε

$$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B \quad \text{ή} \quad I_n\cdot X=A^{-1}\cdot B \quad \text{ή} \quad X=A^{-1}\cdot B \qquad (3)$$

είναι γνωστό ότι

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \ldots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \ldots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \ldots & \frac{A_{nn}}{D} \end{bmatrix}$$

οπότε η σχέση (3) γράφεται αναλυτικότερα

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \cdots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \cdots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \cdots & \frac{A_{nn}}{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_1 A_{11}+\beta_2 A_{21}+\cdots+\beta_n A_{n1}}{D} \\ \frac{\beta_1 A_{12}+\beta_2 A_{22}+\cdots+\beta_n A_{n2}}{D} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\beta_1 A_{1n}+\beta_2 A_{2n}+\cdots+\beta_n A_{nn}}{D} \end{bmatrix} \quad (4)$$

από τη σχέση (4) έχουμε ότι

$$x_i = \frac{\beta_1 A_{1i}+\beta_2 A_{2i}+\cdots+\beta_n A_{ni}}{D}, \quad i=1,2,\ldots,n \quad (5)$$

Ο αριθμητής στο δεύτερο μέλος της σχέσεως (5) είναι ακριβώς το ανάπτυγμα της ορίζουσας του πίνακα ο οποίος προκύπτει από τον πίνακα Α των συντελεστών των αγνώστων, αν αντικαταστήσουμε την i-στήλη αυτού με τη στήλη των σταθερών όρων, δηλαδή είναι η ορίζουσα του πίνακα

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1,i-1} & \beta_1 & \alpha_{1,i+1} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2,i-1} & \beta_2 & \alpha_{2,i+1} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{n,i-1} & \beta_n & \alpha_{n,i+1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Την ορίζουσα του πίνακα (6) καλούμε D_i, οπότε η σχέση (4) γράφεται

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{D_1}{D} \\ \frac{D_2}{D} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{D_n}{D} \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Από τη σχέση (7) συμπεραίνουμε ότι λύση του συστήματος (1) είναι η n-άδα $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$, όπου

$$\xi_i = \frac{D_i}{D} \quad , \quad i=1,2,\ldots,n \qquad (8)$$

Οι σχέσεις (8) εκφράζουν τον καλούμενο <u>κανόνα του Cramer</u> για τη λύση των γραμμικών συστημάτων. Το ότι οι σχέσεις (8) είναι λύση του συστήματος (1) μπορεί να δειχτεί εύκολα αν στο σύστημα (1) αντικαταστήσουμε τους αγνώστους x_i με τις τιμές από τις σχέσεις (8). Για παράδειγμα η k εξίσωση του συστήματος δίνει

$$\alpha_{k1}x_1+\alpha_{k2}x_2+\ldots+\alpha_{kn}x_n=\alpha_{k1}\left(\frac{D_1}{D}\right)+\alpha_{k2}\left(\frac{D_2}{D}\right)+\ldots+\alpha_{kn}\left(\frac{D_n}{D}\right)=$$

$$=\frac{1}{D}(\alpha_{k1}D_1+\alpha_{k2}D_2+\ldots+\alpha_{kn}D_n)=$$

$$=\frac{1}{D}\alpha_{k1}(\beta_1A_{11}+\beta_2A_{21}+\ldots+\beta_nA_{n1})+\frac{1}{D}\alpha_{k2}(\beta_1A_{12}+\beta_2A_{22}+\ldots+\beta_nA_{n2})+\ldots+$$

$$\frac{1}{D}\alpha_{kn}(\beta_1A_{1n}+\beta_2A_{2n}+\ldots+\beta_nA_{nn})=\frac{1}{D}(\alpha_{k1}A_{11}+\alpha_{k2}A_{12}+\ldots+\alpha_{kn}A_{1n})\beta_1+$$

$$\frac{1}{D}(\alpha_{k1}A_{21}+\alpha_{k2}A_{22}+\ldots+\alpha_{kn}A_{n})\beta_2+\ldots+\frac{1}{D}(\alpha_{k1}A_{n1}+\alpha_{k2}A_{n2}+\ldots+\alpha_{kn}A_{nn})\beta_n=$$

$$= \frac{1}{D} D\delta_{k1}\beta_1 + \frac{1}{D} D\delta_{k2}\beta_2 + \ldots + \frac{1}{D} D\delta_{kk}\beta_k + \ldots + \frac{1}{D} D\delta_{kn}\beta_n = \beta_k$$

Ώστε αν $D\neq 0$ τότε το σύστημα (1) δέχεται <u>μία</u> μόνο λύση την (8).

<u>2.2.Παραδείγματα:</u>

α) Να βρεθούν οι λύσεις του παρακάτω συστήματος στο σώμα των πραγματικών αριθμών

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 \quad -4x_3 &= -5 \end{aligned}$$

Ο αριθμός των εξισώσεων ισούται με τον αριθμό των αγνώστων. Επίσης η ορίζουσα D των συντελεστών των αγνώστων είναι

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$$

Συνεπώς το σύστημα δέχεται μία μοναδική λύση την

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}}{21}=\frac{63}{21}=3 \;, \quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 9 & 1 \\ 1 & -5 & -4 \end{vmatrix}}{21}=\frac{-21}{21}=-1$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 9 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{21}=\frac{42}{21}=2.$$

β) Στο σώμα των μιγαδικών αριθμών να βρεθούν οι λύσεις του συστήματος

$$(1+i)z_1 + iz_2 = 1+3i$$

$$(2-i)z_1 - 5z_2 = 5$$

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα ο αριθμός των εξισώσεων ισούται με τον αριθμό των αγνώστων και η ορίζουσα D είναι

$$D=\begin{vmatrix} 1+i & i \\ 2-i & -5 \end{vmatrix} =-(6+7i)\neq 0$$

Συνεπώς το σύστημα δέχεται μια μοναδική λύση στο σώμα των μιγαδικών αριθμών, την

$$z_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 1+3i & i \\ 5 & -5 \end{vmatrix}}{-(6+7i)}=\frac{5+20i}{6+7i}=2+i \quad , \quad z_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 1+i & 1+3i \\ 2-i & 5 \end{vmatrix}}{-(6+7i)}=0$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι $z_1=2+i$, $z_2=0$.

<u>2.3.Περίπτωση όπου $m\neq n$</u>

Θα εξετάσουμε τώρα τη γενική περίπτωση ενός γραμμικού συστήματος, δηλαδή την περίπτωση κατά την οποία ο αριθμός των εξισώσεων είναι διάφορος από τον αριθμό των αγνώστων. Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 +\dots+ \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 +\dots+ \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 +\dots+ \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{array} \qquad (9)$$

όπου $m\neq n$. Θα αποδείξουμε την παρακάτω πρόταση.

<u>2.4.Πρόταση</u>: Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχει το σύστη-

μα (9) λύση είναι ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων και ο επηυξημένος πίνακας να είναι του αυτού βαθμού, δηλαδή οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \qquad (10)$$

και

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{bmatrix} \qquad (11)$$

πρέπει να είναι του αυτού βαθμού.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ μία λύση του συστήματος (9) τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \ldots + \alpha_{1n}\xi_n \\ \beta_2 &= \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \ldots + \alpha_{2n}\xi_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_m &= \alpha_{m1}\xi_1 + \alpha_{m2}\xi_2 + \ldots + \alpha_{mn}\xi_n \end{aligned} \qquad (12)$$

Υποθέτουμε ότι ο βαθμός του πίνακα (10) είναι k. Ο βαθμός του πίνακα (11) μπορεί να είναι k ή το πολύ k+1, γιατί ο πίνακα (11) έχει μία στήλη παραπάνω από τον πίνακα (10). Θα δείξουμε ότι ο βαθμός του πίνακα (11) δεν μπορεί να είναι k+1. Πραγματικά, αν υποθέσουμε ότι ο πίνακας (11) είναι βαθμού k+1 τότε θα υπάρχει μια ελάσσων ορίζουσα αυτού τάξεως k+1 η οποία θα είναι διάφορη του μηδενός. Η ορίζουσα αυτή θα έχει κατ'ανάγκη στοιχεία από την τελευταία στήλη του πίνακα. 'Εστω ότι η ορίζουσα αυτή είναι η

$$D=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1k} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2k} & \beta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \cdots & \alpha_{kk} & \beta_k \\ \alpha_{k+1,1} & \alpha_{k+1,2} & & \alpha_{k+1,k} & \beta_{k+1} \end{vmatrix} \qquad (13)$$

Από τις σχέσεις (12) παρατηρούμε ότι τα στοιχεία της τελευταίας στήλης της ορίζουσας (13) είναι άθροισμα n παραγόντων και η ορίζουσα (13) αναλύεται σε άθροισμα n οριζουσών k+1 τάξεως οι οποίες μετά την εξαγωγή ως κοινών παραγόντων των ξ_i $(i=1,2,\ldots,n)$ θα είναι ορίζουσες από τον πίνακα (10) του οποίου ο βαθμός είναι k και επομένως θα ισούνται με μηδέν, οπότε D=0.

Αντίστροφα:Υποθέτουμε ότι οι πίνακες (10) και (11) έχουν τον αυτό βαθμό k και θα δείξουμε ότι το σύστημα (9) έχει λύση. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ορίζουσα

$$D=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \cdots & \alpha_{kk} \end{vmatrix} \qquad (14)$$

είναι διάφορη του μηδενός, δηλαδή $D\neq 0$, γιατί αν δεν συμβαίνει αυτό μπορούμε να αλλάξουμε την τάξη των εξισώσεων και την αρίθμηση των αγνώστων του συστήματος (9). Παίρνουμε τις k πρώτες εξισώσεις του συστήματος (9) και τις γράφουμε

$$\begin{array}{l}
\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1k}x_k = \beta_1-(\alpha_{1,k+1}x_{k+1}+\ldots+\alpha_{1n}x_n) \\
\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ldots+\alpha_{2k}x_k = \beta_2-(\alpha_{2,k+1}x_{k+1}+\ldots+\alpha_{2n}x_n) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_{k1}x_1+\alpha_{k2}x_2+\ldots+\alpha_{kk}x_k = \beta_k-(\alpha_{k,k+1}x_{k+1}+\ldots+\alpha_{kn}x_n)
\end{array} \qquad (15)$$

Ορίζουσα του συστήματος (15) είναι η (14), η οποία είναι $D\neq 0$. Επομένως αν στο σύστημα (9) θεωρήσουμε τους άγνωστους $x_{k+1},\ldots,x_n$ ώς γνωστούς (δηλαδή τους ορίσουμε αυθαίρετα) τότε ο κανόνας του Cramer μας δίνει τη μοναδική λύση αυτού

$$(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k) \qquad (16)$$

Θα δείξουμε ότι η λύση (16) επαληθεύει και τις υπόλοιπες $m-k$ εξισώσεις του συστήματος (9). Έστω

$$\alpha_{\lambda 1}x_1+\alpha_{\lambda 2}x_2 +\ldots+ \alpha_{\lambda n}x_n = \beta_\lambda \quad , \quad k+1 \leqq \lambda \leqq m \qquad (17)$$

μια από τις υπόλοιπες $m-k$ εξισώσεις. Θα δείξουμε ότι η εξίσωση (17) επαληθεύεται από τη λύση (16), δηλαδή

$$\alpha_{\lambda 1}\xi_1+\alpha_{\lambda 2}\xi_2 +\ldots+ \alpha_{\lambda k}\xi_k = \beta_\lambda-(\alpha_{\lambda,k+1}x_{k+1} +\ldots+ \alpha_{\lambda n}x_n) \qquad (18)$$

όπου όπως αναφέραμε παραπάνω τα $x_{k+1},\ldots,x_n$ έχουν οριστεί αυθαίρετα. Θεωρούμε την ορίζουσα

$$D_\lambda = \begin{vmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1k} & \beta_1-(\alpha_{1,k+1}x_{k+1}+\ldots+\alpha_{1n}x_n) \\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2k} & \beta_2-(\alpha_{2,k+1}x_{k+1}+\ldots+\alpha_{2n}x_n) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \ldots & \alpha_{kk} & \beta_k-(\alpha_{k,k+1}x_{k+1}+\ldots+\alpha_{kn}x_n) \\
\alpha_{\lambda 1} & \alpha_{\lambda 2} & \ldots & \alpha_{\lambda k} & \beta_\lambda-(\alpha_{\lambda,k+1}x_{k+1}+\ldots+\alpha_{\lambda n}x_n)
\end{vmatrix} \qquad (19)$$

'Εχουμε $D_\lambda=0$. Πραγματικά η τελευταία στήλη της ορίζουσας D_λ είναι άθροισμα n-k+1 παραγόντων, οπότε η D_λ αναλύεται σε άθροισμα n-k+1 οριζουσών k+1 τάξεως, οι οποίες μετά την εξαγωγή των κοινών παραγόντων x_i $(i=k+1,\dots,n)$ θα είναι ορίζουσες k+1 τάξεως από τους πίνακες (10) και (11) των οποίων ο βαθμός είναι k. 'Αρα $D_\lambda=0$. Αλλά αν στην ορίζουσα D_λ πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία της 1-στήλης επί ξ_1, της 2-στήλης επί ξ_2, κ.ο.κ. της k-στήλης επί ξ_k και τα αφαιρέσουμε από την τελευταία στήλη λαμβάνουμε

$$D_\lambda=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1k} & \beta_1-(\alpha_{11}\xi_1+\dots+\alpha_{1k}\xi_k+\alpha_{1,k+1}x_{k+1}+\dots+\alpha_{1n}x_n) \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2k} & \beta_2-(\alpha_{21}\xi_1+\dots+\alpha_{2k}\xi_k+\alpha_{2,k+1}x_{k+1}+\dots+\alpha_{2n}x_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \cdots & \alpha_{kk} & \beta_k-(\alpha_{k1}\xi_1+\dots+\alpha_{kk}\xi_k+\alpha_{k,k+1}x_{k+1}+\dots+\alpha_{kn}x_n) \\ \alpha_{\lambda1} & \alpha_{\lambda2} & \cdots & \alpha_{\lambda k} & \beta_\lambda-(\alpha_{\lambda1}\xi_1+\dots+\alpha_{\lambda k}\xi_k+\alpha_{\lambda,k+1}x_{k+1}+\dots+\alpha_{\lambda n}x_n) \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1k} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2k} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \cdots & \alpha_{kk} & 0 \\ \alpha_{\lambda1} & \alpha_{\lambda2} & \cdots & \alpha_{\lambda k} & \beta_\lambda-(\alpha_{\lambda1}\xi_1+\dots+\alpha_{\lambda k}\xi_k+\alpha_{\lambda,k+1}x_{k+1}+\dots+\alpha_{\lambda n}x_n) \end{vmatrix}$$

Αναπτύσσουμε κατά τα στοιχεία της τελευταίας στήλης, οπότε

$$D_\lambda=\left[\beta_\lambda-(\alpha_{\lambda1}\xi_1+\dots+\alpha_{\lambda k}\xi_k+\alpha_{\lambda,k+1}x_{k+1}+\dots+\alpha_{\lambda n}x_n)\right]\cdot\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \cdots & \alpha_{kk} \end{vmatrix}$$

Δηλαδή

$$0=\left[\beta_\lambda-(\alpha_{\lambda1}\xi_1+\ldots+\alpha_{\lambda k}\xi_k+\alpha_{\lambda,k+1}x_{k+1}+\ldots+\alpha_{\lambda n}x_n)\right]\cdot D$$

και επειδή $D\neq0$, έπεται ότι

$$\alpha_{\lambda1}\xi_1+\alpha_{\lambda2}\xi_2+\ldots+\alpha_{\lambda k}\xi_k+\alpha_{\lambda,k+1}x_{k+1}+\ldots+\alpha_{\lambda n}x_n=\beta_\lambda$$

άρα ισχύει η (18).

2.5.Παραδείγματα:

α) Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x+\psi&=0\\ 3x-2\psi&=1\\ 6x+\psi&=1\\ x-4\psi&=1 \end{aligned}$$

ο πίνακας και ο επηυξημένος πίνακας του συστήματος είναι αντίστοιχα

$$\begin{bmatrix}1&1\\3&-2\\6&1\\1&-4\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&1&0\\3&-2&1\\6&1&1\\1&-4&1\end{bmatrix}$$

Οι δύο πίνακες είναι βαθμού 2 γιατί όλες οι ελάσσονες ορίζουσες τάξεως τρία του επηυξημένου πίνακα είναι ίσες με μηδέν ενώ

$$\begin{vmatrix}1&1\\3&-2\end{vmatrix}=-5\neq0.$$

Έτσι για να λύσουμε το σύστημα θεωρούμε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} x+\psi&=0\\ 3x-2\psi&=1 \end{aligned}$$

οπότε έχουμε

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}}=\frac{-1}{-5}=\frac{1}{5}\quad,\quad \psi=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}}=\frac{1}{-5}=-\frac{1}{5}$$

β) Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned}(m+1)x + \psi + z &= 2-m\\ x + (m+1)\psi + z &= -2\\ x + \psi + (m+1)z &= m\end{aligned}$$

Η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων του συστήματος είναι

$$|A|=\begin{vmatrix}m+1 & 1 & 1\\ 1 & m+1 & 1\\ 1 & 1 & m+1\end{vmatrix}=m^2(m+3)$$

Αν $m\neq 0$ και $m\neq 3$ τότε $|A|\neq 0$ και το σύστημα έχει μια και μόνο λύση, η οποία δίνεται από τον κανόνα του Cramer

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2-m & 1 & 1\\ -2 & m+1 & 1\\ m & 1 & m+1\end{vmatrix}}{m^2(m+3)}=\frac{m(2-m)(m+3)}{m^2(m+3)}=\frac{2-m}{m}\quad,$$

$$\psi=\frac{\begin{vmatrix}m+1 & 2-m & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & m & m+1\end{vmatrix}}{m^2(m+3)}=\frac{-2m(m+3)}{m^2(m+3)}=-\frac{2}{m}\quad,$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} m+1 & 1 & 2-m \\ 1 & m+1 & -2 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}}{m^2(m+3)}=\frac{m^2(m+3)}{m^2(m+3)}=1$$

Για m=0 το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} x+\psi+z &= 2 \\ x+\psi+z &= -2 \\ x+\psi+z &= 0 \end{aligned}$$

το οποίο δέν έχει λύση γιατί ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι τάξεως 1, ενώ ο επηυξημένος πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι τάξεως 2.

Για m=-3 το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} -2x + \psi + z &= 5 \\ x - 2\psi + z &= -2 \\ x + \psi - 2z &= -3 \end{aligned}$$

και οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

είναι τάξεως 2, άρα το σύστημα έχει λύση. Για να βρούμε τη λύση του συστήματος, επειδή

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

παίρνουμε τις δύο πρώτες εξισώσεις και τις γράφουμε

$$\begin{aligned} -2x + \psi &= 5-z \\ x - 2\psi &= -2-z \end{aligned}$$

και λύνουμε το σύστημα αυτό θεωρούντες το z ως γνωστό

'Εχουμε

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5-z & 1 \\ -2-z & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = z - \frac{8}{3}, \quad \psi = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 5-z \\ 1 & -2-z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = z - \frac{1}{3}$$

'Αρα η λύση του συστήματος είναι

$x = c - \frac{8}{3}$, $\psi = c - \frac{1}{3}$, $z = c$, όπου c είναι αυθαίρετος.

γ) Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} 3x + 2\psi + z - 2\omega &= 4 \\ 2x - \psi + 2z - 5\omega &= 15 \\ 4x + 2\psi - \omega &= 1 \\ 3x - 2z - 4\omega &= 1 \end{aligned}$$

Η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων του συστήματος είναι

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & -4 \end{vmatrix}=-65\neq 0$$

Άρα το σύστημα έχει λύση την

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & -2 \\ 15 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -4 \end{vmatrix}}{-65}=\frac{-65}{-65}=1,$$

$$\psi=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 15 & 2 & -5 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & -4 \end{vmatrix}}{-65}=\frac{130}{-65}=-2,$$

$$z=\frac{D_3}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 15 & -5 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -4 \end{vmatrix}}{-65}=\frac{-195}{-65}=3,$$

$$\omega=\frac{D_4}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 15 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-65} = \frac{65}{-65} = -1$$

δ) <u>Πρόβλημα της απαλοιφής:</u> θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}x_n = \beta_n \end{array} \qquad (20)$$

Αν η ορίζουσα D του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων είναι διάφορη του μηδενός, τότε ως γνωστόν το σύστημα έχει μία μοναδική λύση. Να δειχτεί ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η λύση αυτή και λύση της εξισώσεως

$$\alpha_{n+1,1}x_1 + \alpha_{n+1,2}x_2 + \dots + \alpha_{n+1,n}x_n = \beta_{n+1} \qquad (21)$$

είναι

$$A=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \vdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} & \beta_n \\ \alpha_{n+1,1} & \alpha_{n+1,2} & \dots & \alpha_{n+1,n} & \beta_{n+1} \end{vmatrix} = 0 \qquad (22)$$

Υποθέτουμε ότι $(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n)$ είναι η λύση του συστήματος (20). Έστω οτι η λύση του συστήματος επαληθεύει και την εξίσωση (21). Θα δείξουμε ότι, τότε A=0. Πραγματικά, αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία της 1-στήλης της ορίζουσας A επί ξ_1, της 2-στήλης επί ξ_2 κ.ο.κ. της n-στήλης επί ξ_n και τα αφαιρέσουμε από την τελευταία στήλη παίρνουμε την ισοδύναμη ορίζουσα

$$A=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1-(\alpha_{11}\xi_1+\alpha_{12}\xi_2+\ldots+\alpha_{1n}\xi_n) \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2-(\alpha_{21}\xi_1+\alpha_{22}\xi_2+\ldots+\alpha_{2n}\xi_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} & \beta_n-(\alpha_{n1}\xi_1+\alpha_{n2}\xi_2+\ldots+\alpha_{nn}\xi_n) \\ \alpha_{n+1,1} & \alpha_{n+1,2} & \cdots & \alpha_{n+1,n} & \beta_{n+1}-(\alpha_{n+1,1}\xi_1+\alpha_{n+1,2}\xi_2+\ldots+\alpha_{n+1,n}\xi_n) \end{vmatrix} \quad (23)$$

Αλλά $\beta_i-(\alpha_{i1}\xi_1+\alpha_{i2}\xi_2+\ldots+\alpha_{in}\xi_n)=0$ για $i=1,2,\ldots,n,\ n+1$ διότι η $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ είναι λύση του συστήματος (20) και της εξισώσεως (21), άρα A=0.

Αντίστροφα: Έστω A=0. Επειδή η $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ είναι λύση του συστήματος (20) έχουμε

$\beta_i-(\alpha_{i1}\xi_1+\alpha_{i2}\xi_2+\ldots+\alpha_{in}\xi_n)=0$ για $i=1,2,\ldots,n$. Άρα η (23) γράφεται

$$A=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ \alpha_{n+1,1} & \alpha_{n+1,2} & \cdots & \alpha_{n+1,n} & \beta_{n+1}-(\alpha_{n+1,1}\xi_1+\alpha_{n+1,2}\xi_2+\ldots+\alpha_{n+1,n}\xi_n) \end{vmatrix}=0$$

Αναπτύσσουμε αυτή κατά τα στοιχεία της τελευταίας στήλης, οπότε έχουμε

$$\boxed{\beta_{n+1}-(\alpha_{n+1,1}\xi_1+\alpha_{n+1,2}\xi_2+\ldots+\alpha_{n+1,n}\xi_n)}\cdot D=0$$

όπου D είναι η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων του συστήματος (20) και εξ' υποθέσεως έχουμε $D \neq 0$, άρα

$$\beta_{n+1}-(\alpha_{n+1,1}\xi_1+\alpha_{n+1,2}\xi_2+\ldots+\alpha_{n+1,n}\xi_n)=0$$

Τούτο φανερώνει ότι η λύση $(\xi_1,\xi_2,\ldots\xi_n)$ του συστήματος (20) είναι και λύση της εξισώσεως (21).

ε) Να βρεθεί η τιμή του k έτσι ώστε το παρακάτω σύστημα να έχει λύση

$$\begin{aligned}
2x + \psi + z &= k\\
x - \psi - 2z &= -2\\
3x - \psi + z &= 2k\\
x + \psi + z &= 1
\end{aligned}$$

Πρέπει η ορίζουσα του επηυξημένου πίνακα να είναι ίση με μηδέν, δηλαδή

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & k\\ 1 & -1 & -2 & -2\\ 3 & -1 & 1 & 2k\\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow k=3$$

Θέτουμε $k=3$ στο σύστημα, οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}
2x + \psi + z &= 3\\
x - \psi - 2z &= -2\\
3x - \psi + z &= 6\\
x + 2\psi + z &= 1
\end{aligned}$$

Μπορούμε να πάρουμε τις τρεις πρώτες εξισώσεις του συστήματος και να λύσουμε αυτές. Η λύση που θα βρούμε θα επαληθεύει και την τέταρτη εξίσωση.

Έχουμε

$$x=1 \quad , \quad \psi=-1 \quad , \quad z=2$$

2.6.Ομογενή συστήματα:

Αν στο σύστημα (1) θέσουμε $\beta_i=0$ $(i=1,2,\dots,m)$ τότε έχουμε το σύστημα

$$\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 +\dots+ \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 +\dots+ \alpha_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 +\dots+ \alpha_{mn}x_n = 0 \end{array} \qquad (24)$$

Το σύστημα (24) καλείται ομογενές σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους. Προφανώς το σύστημα (24) έχει μια λύση την $(0,0,\dots,0)$. Η λύση αυτή καλείται μηδενική ή προφανής ή τετριμμένη. Επίσης αν το σύστημα (24) έχει μία λύση την $(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n)$ τότε θα έχει για λύση και την $(k\xi_1,k\xi_2,\dots,k\xi_n)$ για κάθε $k\in R$.

2.7.Πρόταση: Το σύστημα (24) έχει λύση διάφορη από τη μηδενική αν και μόνο αν ο βαθμός του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων είναι μικρότερος από το πλήθος των αγνώστων.

Απόδειξη: Αν k είναι ο βαθμός του πίνακα

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

τότε θα υπάρχει μία τουλάχιστον ορίζουσα του πίνακα αυτού τάξεως k διάφορη του μηδενός. Έστω ότι η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \cdots & \alpha_{kk} \end{vmatrix}$$

είναι διάφορη του μηδενός. Τότε κάθε λύση του συστήματος

$$\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{k1}x_1 + \alpha_{k2}x_2 + \ldots + \alpha_{kn}x_n = 0 \end{array} \qquad (25)$$

είναι και λύση των υπολοίπων εξισώσεων του συστήματος (24). Όταν $k=n$ το σύστημα (25) είναι σύστημα k εξισώσεων με k αγνώστους του οποίου η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι διάφορη του μηδενός. Συνεπώς το σύστημα έχει μία μοναδική λύση τη μηδενική, δηλαδή όταν $k=n$ δεν υπάρχει λύση διάφορη του μηδενός.

Όταν $k<n$ τους αγνώστους $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ τους ορίζουμε αυθαίρετα στο σύστημα (25) και συνεπώς έχουμε λύσεις διάφορες της μηδενικής. Ώστε πράγματι μόνο όταν ο βαθμός k του πίνακα του συστήματος είναι μικρότερος από το πλήθος n των αγνώστων έχουμε λύσεις διάφορες της μηδενικής. Προφανώς όταν $m<n$ ο βαθμός του πίνακα του συστήματος είναι οπωσδήποτε μικρότερος του n. Έτσι όταν οι εξισώσεις του συστήματος είναι λιγότερες από τους αγνώστους έχουμε πάντοτε λύσεις διάφορες της μηδενικής. Εξετάζουμε τώρα μερικές περιπτώσεις ομογενών συστημάτων.

2.8. Σύστημα n-1 ομογενών εξισώσεων με n αγνώστους και βαθμό πίνακα n-1.

Θεωρούμε το σύστημα (24) για το οποίο έχουμε m=n-1, δηλαδή

$$\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n-1,1}x_1 + \alpha_{n-1,2}x_2 + \ldots + \alpha_{n-1,n}x_n = 0 \end{array} \qquad (26)$$

Ο πίνακας του συστήματος είναι

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n-1,1} & \alpha_{n-1,2} & \cdots & \alpha_{n-1,n} \end{bmatrix} \qquad (27)$$

Σημειώνουμε με D_i την ορίζουσα που προκύπτει από τον πίνακα (27) αν παραλείψουμε την i-στήλη αυτού. Επειδή από την υπόθεση έχουμε ότι ο πίνακας (27) είναι βαθμού n-1 θα υπάρχει ορίζουσα n-1 τάξεως, διάφορη του μηδενός. Έστω ότι $D_n \neq 0$. Σ'αυτή τη περίπτωση μπορούμε να γράψουμε το σύστημα (26) ως εξής

$$\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1,n-1}x_{n-1} = -\alpha_{1n}x_n \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2,n-1}x_{n-1} = -\alpha_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n-1,1}x_1 + \alpha_{n-1,2}x_2 + \ldots + \alpha_{n-1,n-1}x_{n-1} = -\alpha_{n-1,n}x_n \end{array} \qquad (28)$$

Το σύστημα (28) μπορεί να λυθεί ως προς τους αγνώστους.

$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ και η λύση του δίνεται από τις σχέσεις

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1,i-1} & -\alpha_{1n}x_n & \alpha_{1,i+1} & \cdots & \alpha_{1,n-1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2,i-1} & -\alpha_{2n}x_n & \alpha_{2,i+1} & \cdots & \alpha_{2,n-1} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n-1,1} & \alpha_{n-2,2} & \cdots & \alpha_{n-1,i-1} & -\alpha_{n-1,n}x_n & \alpha_{n-1,i+1} & \cdots & \alpha_{n-1,n-1} \end{vmatrix}}{D_n} =$$

$$= \frac{-x_n \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1,i-1} & \alpha_{1n} & \alpha_{1,i+1} & \cdots & \alpha_{1,n-1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2,i-1} & \alpha_{2n} & \alpha_{2,i-1} & \cdots & \alpha_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n-1,1} & \alpha_{n-2,2} & \cdots & \alpha_{n-1,i-1} & \alpha_{n-1,n} & \alpha_{n-1,i+1} & \cdots & \alpha_{n-1,n-1} \end{vmatrix}}{D_n}.$$

για $i=1,2,\ldots,n-1$.

Αν στην ορίζουσα του αριθμητού την i-στήλη την μεταθέσουμε στο τέλος με n-i-1 εναλλαγές διαδοχικών στηλών θα πάρουμε τελικά

$$x_i = \frac{-x_n(-1)^{n-i-1}D_i}{D_n}$$

θέτουμε τώρα $\dfrac{(-1)^{n-1}x_n}{D_n} = \lambda$ οπότε έχουμε $x_i=(-1)^{-(i-1)}D_i\lambda$, για $i=1,2,\ldots,n-1$

Ώστε οι λύσεις του συστήματος (26) δίνονται τελικά από τις σχέσεις

$$\frac{x_1}{D_1} = \frac{x_2}{-D_2} = \frac{x_3}{D_3} = \frac{x_4}{-D_4} = \ldots = \frac{x_n}{(-1)^{n-1}D_n} = \lambda \qquad (29)$$

2.9. Σύστημα n ομογενών εξισώσεων με n αγνώστους και βαθμό πίνακα n-1.

Αν m=n, δηλαδή αν έχουμε n εξισώσεις με n αγνώστους τότε το σύστημα (24) γίνεται

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ &\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n = 0 \end{aligned} \qquad (30)$$

Σύμφωνα με την πρόταση 2.7 το σύστημα (30) θα έχει λύση διάφορη της μηδενικής αν και μόνο αν η ορίζουσα του πίνακα του συστήματος είναι ίση με μηδέν. Δηλαδή αν

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad (31)$$

Υποθέτουμε τώρα ότι ο πίνακας του συστήματος (30) είναι βαθμού n-1. Συνεπώς θα υπάρχει μια ορίζουσα n-1 τάξεως διάφορη του μηδενός. Έστω

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1,n-1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n-1,1} & \alpha_{n-1,2} & \cdots & \alpha_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

οπότε το σύστημα (30) είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{array}{llll} \alpha_{11}x_1 & +\alpha_{12}x_2 & +\ldots+\alpha_{1n}x_n & =0 \\ \alpha_{21}x_1 & +\alpha_{22}x_2 & +\ldots+\alpha_{2n}x_n & =0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n-1,1}x_1 & +\alpha_{n-1,2}x_2 & +\ldots+\alpha_{n-1,n}x_n & =0 \end{array} \qquad (32)$$

'Ετσι έχουμε την προηγούμενη περίπτωση 2.8 με ορίζουσα $D_n \neq 0$. Συνεπώς οι λύσεις του συστήματος (30) θα δίνονται από τις σχέσεις

$$x_i = (-1)^{i-1}\lambda D_i \qquad i=1,2,\ldots,n \qquad (33)$$

όπου D_i είναι η ορίζουσα που προκύπτει από την (31) αν παραλείψουμε την n-γραμμή και i-στήλη.

Αν καλέσουμε A_{ni} το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου α_{ni} στην ορίζουσα (31) παρατηρούμε ότι

$$A_{ni} = (-1)^{n+i}D_i \quad ή \quad D_i = (-1)^{n+i}A_{ni}$$

Αν θέσουμε την τιμή αυτή του D_i στις σχέσεις (33) θα έχουμε

$$x_i=(-1)^{n+2i-1}\lambda A_{ni} \quad ή \quad x_i=(-1)^{n-1}\lambda A_{ni} \quad ή \quad x_i=\mu A_{ni},$$

όπου $\mu=(-1)^{n-1}\lambda$. 'Ετσι τελικά έχουμε

$$\frac{x_1}{A_{n1}} = \frac{x_2}{A_{n2}} = \frac{x_3}{A_{n3}} = \ldots = \frac{x_n}{A_{nn}}$$

Δηλαδή στην περίπτωση αυτή οι τιμές των αγνώστων είναι ανάλογες προς τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων της τελευταίας γραμμής του πίνακα του συστήματος.

2.10. Παραδείγματα:

Να λυθούν τα συστήματα

α) $2x+3\psi-4z=0$

$5x-4\psi+3z=0$

β) $2x - 3\psi - z = 0$

$4x + \psi + 5z = 0$

$x - 2\psi - z = 0$

α) Ο πίνακας του συστήματος είναι

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

και είναι βαθμού 2, γιατί

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -23 \neq 0$$

Έτσι έχουμε ένα ομογενές σύστημα δύο εξισώσεων με τρείς αγνώστους, οπότε σύμφωνα με την περίπτωση 2.8 θα έχουμε τις λύσεις

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{\psi}{-\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}} \quad \text{ή} \quad \frac{x}{-7} = \frac{\psi}{-26} = \frac{z}{-23}$$

Συνεπώς $x=-7\lambda$, $\psi=-26\lambda$, $z=-23\lambda$ για κάθε $\lambda \in R$.

β) Ο πίνακας του συστήματος είναι βαθμού δύο, γιατί

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ένω} \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Έτσι έχουμε ένα ομογενές σύστημα τριών εξισώσεων με τρείς αγνώστους και βαθμό πίνακα 2. Σύμφωνα με την περίπτωση 2.9 έχουμε

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{\psi}{-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}} \quad \text{ή} \quad \frac{x}{-14} = \frac{\psi}{-14} = \frac{z}{14}$$

Συνεπώς οι λύσεις του συστήματος είναι

$$x=-14\lambda \quad , \quad \psi=-14\lambda \quad , \quad z=14\lambda \quad \text{για κάθε} \quad \lambda\in R.$$

3.Ασκήσεις

1.Να λυθούν τα συστήματα

α) $3x_1 -2x_2 + x_3 =1$
$x_1 +4x_2 -5x_3 =3$
$-x_1 +3x_2 +2x_3 =-4$

β) $x_1-3x_2+ x_3 =1$
$2x_1 -3x_3 =4$
$x_2+2x_3 =0$

Λύση:

α)Η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} =70$$

'Αρα το σύστημα έχει λύση την

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{70}=\frac{20}{70}=\frac{2}{7}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \\ -1 & -4 & 2 \end{vmatrix}}{70}=\frac{-40}{70}=-\frac{4}{7}$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & -4 \end{vmatrix}}{70}=\frac{-70}{70}=-1$$

β) Η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 17$$ Άρα το σύστημα έχει λύση την

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{17} = \frac{31}{17}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{17} = \frac{4}{17}$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{17} = \frac{-2}{17}$$

2. Να βρεθούν αν υπάρχουν οι λύσεις των συστημάτων:

α) $$\begin{aligned} 2x + 2\psi - z &= -5 \\ x - \psi + 3z &= 6 \\ 2x - 4\psi + 3z &= 1 \\ x + \psi + z &\ 4 \end{aligned}$$

β) $$\begin{aligned} 2x + \psi - z &= 7 \\ x - \psi - z &= 0 \\ x + 2\psi - z &= 8 \\ 3x - 2\psi - 2z &= 3 \end{aligned}$$

<u>Λύση</u>:

α) Ο επηυξημένος πίνακας του συστήματος έχει ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -52 \neq 0$$

'Αρα το σύστημα δεν έχει λύση.

β) Ο επηυξημένος πίνακας του συστήματος έχει ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 3 & -2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Συνεπώς το σύστημα έχει λύση. Για να βρούμε τη λύση του συστήματος παίρνουμε τις τρεις πρώτες εξισώσεις

$$\begin{aligned} 2x + \psi - z &= 7 \\ x - \psi - z &= 0 \\ x + 2\psi + z &= 8 \end{aligned}$$

Η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

οπότε έχουμε

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-9}{-3} = 3 \quad , \quad \psi = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-6}{-3} = 2$$

$$z = \frac{D_3}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-3}{-3} = 1$$

Η λύση του συστήματος είναι $x=3$, $\psi=2$, $z=1$. Προφανώς αυτή επαληθεύει και την τέταρτη εξίσωση.

3.Να οριστεί ο k έτσι ώστε τα παρακάτω συστήματα να έχουν λύση

α) $$\begin{aligned} 2x + \psi + 3z &= 3 \\ x - \psi - 2z &= 2k \\ x + 2\psi + 2z &= 4k \\ x + \psi + z &= 3 \end{aligned}$$

β) $$\begin{aligned} x + \psi - 3z &= k \\ 3x + 3\psi + z &= 4 \\ 2x - \psi - 4z &= 4 \\ x - \psi - 3z &= k \end{aligned}$$

<u>Λύση</u>: Για να έχει το σύστημα λύση πρέπει η ορίζουσα του επηυξημένου πίνακα να είναι ίση με μηδέν, γιατί το σύστημα έχει τρείς αγνώστους και τέσσερες εξισώσεις. Συνεπώς έχουμε

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 2k \\ 1 & 2 & 2 & 4k \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow k=1$$

οπότε το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} 2x + \psi + 3z &= 3 \\ x - \psi - 2z &= 2 \\ x + 2\psi + 2z &= 4 \\ x + \psi + z &= 3 \end{aligned}$$

Παίρνουμε τις τρεις πρώτες εξισώσεις και λύνουμε το σύστημα αυτό

$$\begin{aligned} 2x + \psi + 3z &= 3 \\ x - \psi - 2z &= 2 \\ x + 2\psi + 2z &= 4 \end{aligned}$$

έχουμε

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=9$$

Συνεπώς

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{9}=\frac{18}{9}=2 \quad , \quad \psi=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{9}=\frac{18}{9}=2$$

$$z=\frac{D_3}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{9}=\frac{-9}{9}=-1.$$ 'Αρα $x=2$, $\psi=2$, $z=-1$.

β) 'Οπως και στο προηγούμενο σύστημα πρέπει

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & k \\ 3 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & -3 & -k \end{vmatrix}=0$$

Από αυτή έχουμε $k=-2$, οπότε το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} x + \psi - 3z &= -2 \\ 3x + 3\psi + z &= 4 \\ 2x - \psi - 4z &= 4 \\ x - \psi - 3z &= 2 \end{aligned}$$

Παίρνουμε τις τρείς πρώτες εξισώσεις και λύνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x + \psi - 3z &= -2 \\ 3x + 3\psi + z &= 4 \\ 2x - \psi - 4z &= 4 \end{aligned}$$

Έχουμε

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 30$$

οπότε

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -4 \end{vmatrix}}{30} = \frac{90}{30} = 3 \ , \quad \psi = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & -4 \end{vmatrix}}{30} = \frac{-60}{30} = -2$$

$$z = \frac{D_3}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{30} = \frac{30}{30} = 1$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι $x=3$, $\psi=-2$, $z=1$.

4.Να λυθούν τα συστήματα

α) $$\begin{aligned} x + 3\psi + 2z + \omega &= 0 \\ 2x - \psi + 4z + 3\omega &= 0 \\ 3x + 7\psi + 6z + 4\omega &= 0 \\ 2x + 3\psi + 7z + 5\omega &= 0 \end{aligned}$$

β) $$\begin{aligned} x - 2\psi + 2z - \omega &= 0 \\ 3x + 2\psi + 4z + 2\omega &= 0 \\ x + 3\psi + z + 2\omega &= 0 \\ 2x - \psi + z + \omega &= 0 \end{aligned}$$

<u>Λύση</u>:

α) Η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$$

Επειδή το σύστημα είναι ομογενές και η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι διάφορη του μηδενός έπεται ότι το σύστημα έχει μόνο τη μηδενική λύση, δηλαδή $x=0$, $\psi=0$, $z=0$, $\omega=0$.

β) Η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Συνεπώς το σύστημα έχει και άλλες λύσεις εκτός από την μηδενική. Για να βρούμε τις λύσεις αυτές βρίσκουμε πρώτα την τάξη του πίνκα-κα των συντελεστών των αγνώστων, δηλαδή του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Επειδή

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

ο βαθμός του πίνακα του συστήματος είναι 3. Έτσι θα έχουμε

$$\frac{x}{-\begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{\psi}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{z}{-\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{\omega}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}$$

ή $\frac{x}{-2} = \frac{\psi}{-1} = \frac{z}{1} = \frac{\omega}{2}$. Οπότε οι λύσεις του συστήματος είναι

$x=-2\lambda$, $\psi=-\lambda$, $z=\lambda$, $\omega=2\lambda$ για κάθε $\lambda \in R$.

5.Να λυθεί στο σώμα F(5) των mod5 ακεραίων το σύστημα

$$\xi_1 + \bar{2}\xi_2 + \bar{4}\xi_3 = \bar{1}$$

$$\bar{2}\xi_1 + \bar{2}\xi_2 + \xi_3 = \bar{1}$$

$$\bar{4}\xi_1 + \xi_2 + \bar{2}\xi_3 = \bar{1}$$

Λύση:Γνωρίζουμε ότι το σώμα F(5) των ακεραίων mod5 είναι το σύνολο $F(5) = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$, όπου

$\bar{0}$	είναι	η κλάση	των ακεραίων	της μορφής	5n	(n=ακέραιος)
$\bar{1}$	"	"	"	"	5n+1	
$\bar{2}$	"	"	"	"	5n+2	
$\bar{3}$	"	"	"	"	5n+3	
$\bar{4}$	"	"	"	"	5n+4	

Υπενθυμίζουμε ότι η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός στο σώμα F(5) ορίζονται με τους επόμενους πίνακες

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων είναι

$$D=\begin{vmatrix}\overline{1} & \overline{2} & \overline{4}\\ \overline{2} & \overline{2} & \overline{1}\\ \overline{4} & \overline{1} & \overline{2}\end{vmatrix}=\overline{1}\cdot(\overline{2}\cdot\overline{2}-\overline{1}\cdot\overline{1})-\overline{2}\cdot(\overline{2}\cdot\overline{2}-\overline{1}\cdot\overline{4})+\overline{4}\cdot(\overline{2}\cdot\overline{1}-\overline{2}\cdot\overline{4})=$$

$$=\overline{3}-\overline{0}+\overline{4}(\overline{2}-\overline{3})=\overline{3}+\overline{4}\cdot\overline{4}=\overline{3}+\overline{1}=\overline{4}\neq\overline{0}$$

Συνεπώς το σύστημα έχει μία μόνο λύση την

$$\xi_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix}\overline{1} & \overline{2} & \overline{4}\\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{1}\\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{2}\end{vmatrix}}{\overline{4}}=\frac{\overline{2}}{\overline{4}}=\overline{3}\ ,\quad \xi_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix}\overline{1} & \overline{1} & \overline{4}\\ \overline{2} & \overline{1} & \overline{1}\\ \overline{4} & \overline{1} & \overline{2}\end{vmatrix}}{\overline{4}}=\frac{\overline{3}}{\overline{4}}=\overline{2}\ ,$$

$$\xi_3=\frac{D_3}{D}=\frac{\begin{vmatrix}\overline{1} & \overline{2} & \overline{1}\\ \overline{2} & \overline{2} & \overline{1}\\ \overline{4} & \overline{1} & \overline{1}\end{vmatrix}}{\overline{4}}=\frac{\overline{4}}{\overline{4}}=\overline{1}\ .$$ Δηλαδή η λύση του συστήματος είναι

$\xi_1=\overline{3}$, $\xi_2=\overline{2}$, $\xi_3=\overline{1}$.

6. Να διερευνηθούν και να λυθούν τα συστήματα

α) $x+\psi+z=\alpha$
$x+(1+\alpha)\psi+z=2\alpha$
$x+\psi+(1+\alpha)z=0$

β) $3x-\psi=0$
$kx-\psi=0$
$kx-2\psi=\frac{3}{8}$
$x-3\psi=1$

Λύση:

α) Ο πίνακας του συστήματος έχει ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha \end{vmatrix}=\alpha^2$$

Αν $\alpha\neq 0$ το σύστημα έχει τη λύση

$$x=\frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 2\alpha & 1+\alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1+\alpha \end{vmatrix}}{\alpha^2}=\alpha\ ,\quad \psi=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 2\alpha & 1 \\ 1 & 0 & 1+\alpha \end{vmatrix}}{\alpha^2}=1\ ,\quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1+\alpha & 2\alpha \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\alpha^2}=-1$$

Αν $\alpha=0$ οι εξισώσεις του συστήματος ταυτίζονται σε μία την $x+\psi+z=0$ οπότε η λύση του συστήματος είναι $x=k$, $\psi=\lambda$, $z=-k-\lambda$ για κάθε $k,\lambda\in R$.

β) Ο πίνακας του συτήματος και ο επηυξημένος πίνακας είναι αντίστοιχα

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ k & -1 \\ k & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\ ,\quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ k & -1 & 0 \\ k & -2 & \frac{3}{8} \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Για να έχει λύση το σύστημα πρέπει οι δύο πίνακες να είναι του αυτού βαθμού. Συνεπώς πρέπει κάθε ορίζουσα τρίτης τάξεως του επηυξημένου πίνακα να είναι ίση με μηδέν. Έτσι έχουμε

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ k & -1 & 0 \\ k & -2 & \frac{3}{8} \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \text{οπότε} \quad k=3.$$

Για $k \neq 3$ το σύστημα δεν έχει λύση, για $k=3$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} 3x - \psi &= 0 \\ 3x - \psi &= 0 \\ 3x - 2\psi &= \frac{3}{8} \\ x - 3\psi &= 1 \end{aligned} \qquad \text{ή ισοδύναμα} \qquad \begin{aligned} 3x - \psi &= 0 \\ 3x - 2\psi &= \frac{3}{8} \\ x - 3\psi &= 1 \end{aligned}$$

Ο πίνακας του συστήματος αυτού και ο επηυξημένος πίνακας είναι και οι δύο βαθμού 2 γιατί

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & \frac{3}{8} \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ενώ} \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Συνεπώς το σύστημα είναι συμβιβαστό και για να το λύσουμε θεωρούμε τις δύο πρώτες εξισώσεις

$$\begin{aligned} 3x - \psi &= 0 \\ 3x - 2\psi &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Έχουμε

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \frac{3}{8} & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{3}{8}}{-3} = -\frac{1}{8} \quad , \quad \psi = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & \frac{3}{8} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{9}{8}}{-3} = -\frac{3}{8}$$

7.Να διερευνηθεί και να λυθεί το σύστημα

$$\lambda x+2\psi=\alpha$$
$$2x+2\psi=\beta$$

<u>Λύση</u>:Η ορίζουσα του πίνακα του συστήματος είναι

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-4$$

Αν $\lambda^2-4\neq 0$ δηλαδή $\lambda\neq\pm 2$ τότε το σύστημα έχει τη λύση

$$x=\frac{\begin{vmatrix} \alpha & 2 \\ \beta & \lambda \end{vmatrix}}{\lambda^2-4}=\frac{\alpha\lambda-2\beta}{\lambda^2-4}\quad,\quad \psi=\frac{\begin{vmatrix} \lambda & \alpha \\ 2 & \beta \end{vmatrix}}{\lambda^2-4}=\frac{\beta\lambda-2\alpha}{\lambda^2-4}$$

Αν $\lambda=2$ το σύστημα γίνεται

$$2x+2\psi=\alpha$$
$$2x+2\psi=\beta$$

οπότε για $\alpha\neq\beta$ το σύστημα είναι αδύνατο, για $\alpha=\beta$ το σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση $2x+2\psi=\alpha$ και λύση αυτής είναι η $x=k$, $\psi=\frac{\alpha-2k}{2}$ για κάθε $k\in R$.

Αν $\lambda=-2$ το σύστημα γίνεται

$$-2x+2\psi=\alpha$$
$$2x-2\psi=\beta$$

οπότε για $\alpha\neq-\beta$ το σύστημα είναι αδύνατο, για $\alpha=-\beta$ το σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση $2x-2\psi=-\alpha$, και λύση αυτής είναι η $x=k$, $\psi=\frac{\alpha+2k}{2}$ για κάθε $k\in R$.

8. Να διερευνηθούν και να λυθούν τα συστήματα

α) $\begin{aligned} x + \lambda\psi &= 1 \\ x + 2\psi &= \alpha \\ 2x + 4\psi &= \beta \end{aligned}$ β) $\begin{aligned} \lambda x + \psi + z &= 1 \\ x + \lambda\psi + z &= \lambda \\ x + \psi + \lambda z &= \lambda^2 \end{aligned}$

Λύση:

α) Για να έχει λύση το σύστημα πρέπει ο πίνακας του συστήματος και ο επηυξημένος πίνακας να είναι του αυτού βαθμού. Συνεπώς πρέπει να έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 2 & \alpha \\ 2 & 4 & \beta \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ή} \quad \text{ισοδύναμα } (\beta-2\alpha)(2-\lambda)=0$$

Αν $\beta \neq 2\alpha$ και $\lambda \neq 2$ το σύστημα είναι αδύνατο.

Αν $\beta = 2\alpha$ και $\lambda \neq 2$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} x + \lambda\psi &= 1 \\ x + 2\psi &= \alpha \\ 2x + 4\psi &= 2\alpha \end{aligned}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\begin{aligned} x + \lambda\psi &= 1 \\ x + 2\psi &= \alpha \end{aligned}$$

και η λύση του είναι

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \alpha & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2-\lambda\alpha}{2-\lambda}, \quad \psi = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{\alpha-1}{2-\lambda}$$

Αν $\beta=2\alpha$ και $\lambda=2$ το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{aligned} x+2\psi &=1 \\ x+2\psi &=\alpha \end{aligned}$$

Αν $\alpha\neq 1$ το σύστημα είναι αδύνατο, ενώ αν $\alpha=1$ το σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση $x+2\psi=1$.

Λύση της εξισώσεως αυτής είναι η $x=k$, $\psi=\frac{1-k}{2}$ για κάθε $k\in\mathbb{R}$.

Αν $\beta\neq 2\alpha$ και $\lambda=2$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} x+2\psi &=1 \\ x+2\psi &=\alpha \\ 2x+4\psi &=\beta \end{aligned}$$

Ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων του συστήματος αυτού είναι βαθμού ένα ενώ ο επηυξημένος πίνακας είναι βαθμού δύο. Συνεπώς το σύστημα δεν έχει λύση.

β) Η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων είναι

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

Αν $(\lambda-1)^2(\lambda+2)\neq 0$, δηλαδή $\lambda\neq 1$ και $\lambda\neq -2$ τότε ο πίνακας του συστήματος και ο επηυξημένος είναι βαθμού 3, οπότε το σύστημα έχει λύση την

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}}=-\frac{\lambda+1}{\lambda+2}\ , \quad \psi=\frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}}=\frac{1}{\lambda+2}\ , \quad z=\frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}}=\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}$$

Αν $\lambda=1$ το σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση $x+\psi+z=1$ και η λύση της είναι $x=k$, $\psi=\lambda$, $z=1-k-\lambda$ για κάθε $k,\lambda\in R$.

Αν $\lambda=-2$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} -2x+\psi+z &= 1 \\ x-2\psi+z &= -2 \\ x+\psi-2z &= 4 \end{aligned}$$

ο βαθμός του πίνακα $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ είναι 2 ενώ ο βαθμός

του επηυξημένου πίνακα $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ είναι 3 γιατί

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

Συνεπώς για $\lambda=-2$ το σύστημα δεν έχει λύση.

4. Άλυτες ασκήσεις:

1. Να λυθούν τα συστήματα

α) $\begin{aligned} 2x \quad\quad - z &= 1 \\ 2x+4\psi-z &= 1 \\ -x+8\psi+3z &= 2 \end{aligned}$ β) $\begin{aligned} x+2\psi-z &= 0 \\ 4x+\psi+z &= -1 \\ -3x+2\psi-z &= 2 \end{aligned}$ γ) $\begin{aligned} x-\psi &= 0 \\ 2x-3\psi &= 1 \\ 5x-4\psi &= 1 \end{aligned}$

2. Να διερευνηθεί και να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} -2x + \psi + z &= \alpha \\ \lambda x + 2\psi + 2z &= 1 \\ 6x - 3\psi - 3z &= \beta \\ 4x - 2\psi - 2z &= 1 \end{aligned}$$

3.Να λυθούν τα συστήματα

α) $$\begin{aligned} x - 2\psi - 5z &= -1 \\ 2x - 4\psi - 10z &= -2 \\ x - 4\psi - 9z &= -2 \\ 5x - 2\psi - 9z &= 3 \\ 7x - 8\psi + 9z &= 15 \end{aligned}$$

β) $$\begin{aligned} 5x + 4\psi + z + 2t &= -25 \\ -2x + 3\psi + z + 2t &= 10 \\ 5x + 4z + 8t &= -25 \\ -5x + \psi - 2z - 4t &= 25 \end{aligned}$$

4.Να λυθούν και να διερευνηθούν τα συστήματα

α) $$\begin{aligned} x + \psi + z &= 1 \\ \alpha x + \beta\psi + \gamma z &= k \\ \alpha^2 x + \beta^2\psi + \gamma^2 z &= k^2 \end{aligned}$$

β) $$\begin{aligned} \alpha\psi + \beta z &= 0 \\ -\alpha x + \gamma z &= 0 \\ \beta x + \gamma\psi &= 0 \end{aligned}$$

5.Να λυθούν τα συστήματα

α) $$\begin{aligned} x + 2\psi + 4z &= 0 \\ \psi - 2z &= 0 \\ x + 8z &= 0 \end{aligned}$$

β) $$\begin{aligned} 3x + 5\psi - 8z &= 0 \\ x + 7\psi - 3z &= 0 \end{aligned}$$

6.Να λυθούν τα συστήματα

α) $$\begin{aligned} 2x - 3\psi + 4z + t &= 0 \\ x + z - t &= 0 \\ 3x - 3\psi + 5z &= 0 \\ 4x - 3\psi + 6z - t &= 0 \end{aligned}$$

β) $$\begin{aligned} 4x - 3\psi - 2z &= 0 \\ -2x + 3\psi + 4z &= 0 \\ x - \psi - z &= 0 \\ 3x - \psi + z &= 0 \end{aligned}$$

γ) $$\begin{aligned} 4x - 3\psi + 5z &= 0 \\ -2x - \psi + z &= 0 \\ -14x + 3\psi - 7z &= 0 \end{aligned}$$

Τυπώθηκε στο Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο με δαπάνη του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Κ.Α. Πανεπιστημιακού Τυπογραφείου. ....

Διατίθεται και στο Βιβλιοπωλείο του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, Δομπόλη, 451 10 Ιωάννινα τηλ. 21801.

ΔΙΑΝΕΜΕΤΑΙ ΔΩΡΕΑΝ στους φοιτητές.