ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ ΣΤΑΪΚΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

ΜΕΡΟΣ II

ΣΥΓΚΛΙΣΙΣ • ΣΥΝΕΧΕΙΑ

1974

ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ ΣΤΑΪΚΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

ΜΕΡΟΣ II
ΣΥΓΚΛΙΣΙΣ • ΣΥΝΕΧΕΙΑ

1974

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΠΩΛΗΣΙΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΚΟΡΦΙΑΤΗΣ
ΙΠΠΟΚΡΑΤΟΥΣ 6 - ΤΗΛ. 628492 - ΑΘΗΝΑΙ Τ.Τ. 143

Τὰ γνήσια ἀντίτυπα φέρουν τὴν ἰδιόχειρον ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως.

'Η παροῦσα συλλογή ἀσκήσεων περιέχει τάς ἀσκήσεις μετά τῶν λύσεών των τοῦ συγγράμματος τοῦ καθηγητοῦ Βασιλείου Στάϊκου :

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

ΜΕΡΟΣ II · ΣΥΓΚΛΙΣΙΣ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Αἱ ἀσκήσεις εἶναι ταξινομημέναι καθ' ὁμάδας καί μέ τήν σειράν, τήν ὁποίαν ἐμφανίζονται εἰς τό ἀνωτέρω σύγγραμμα.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

ΟΜΑΣ 1

ΣΕΛΙΔΕΣ 77-82

1. Δείξατε ότι διά τυχούσαν ἀκολουθίαν πραγματικῶν ἀριθμῶν $(a_\nu)_{\nu\in N}$ ἰσχύει

$$\lim|a_\nu|=0 \Rightarrow \lim a_\nu=0$$

Λύσις. Ἄν $\lim|a_\nu|=0$, τότε

$$(\forall\ \varepsilon>0)(\exists\ n\in\mathbb{R})(\forall\ \nu\in N)\ \ \nu>n \Rightarrow ||a_\nu||<\varepsilon$$

ὁπότε, ἐπειδή $||a_\nu||=|a_\nu|$, θά ἔχωμεν καί

$$(\forall\ \varepsilon>0)(\exists\ n\in\mathbb{R})(\forall\ \nu\in N)\ \nu>n \Rightarrow |a_\nu|<\varepsilon$$

τό ὁποῖον σημαίνει ὅτι $\lim a_\nu=0$.

2. Δείξατε ὅτι, ἄν $(a_\nu)_{\nu\in N}$ εἶναι ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν τοιαύτη, ὥστε ἡ ἀκολουθία $(|a_\nu|)_{\nu\in N}$ νά εἶναι συγκλίνουσα, τότε ὑπάρχει συγκλίνουσα ὑπακολουθία τῆς $(a_\nu)_{\nu\in N}$.

Λύσις. Ἡ ἀκολουθία $(|a_\nu|)_{\nu\in N}$ ὡς συγκλίνουσα εἶναι φραγμένη, ὁπότε προφανῶς καί ἡ $(a_\nu)_{\nu\in N}$ εἶναι φραγμένη. Ἑπομένως, δυνάμει τοῦ θεωρήματος τῶν Bolzano-Weierstrass, ὑπάρχει συγκλίνουσα ὑπακολουθία τῆς $(a_\nu)_{\nu\in N}$.

3. Δείξατε ὅτι, ἄν $(a_\nu)_{\nu\in N}$ εἶναι συγκλίνουσα ἀκολουθία πρα-

γματικῶν ἀριθμῶν, τότε καὶ ἡ ἀκολουθία $(|a_\nu|)_{\nu\in N}$ εἶναι ἐπίσης συγκλίνουσα καὶ μάλιστα ἰσχύει

$$\lim|a_\nu| = |\lim a_\nu|$$

Λύσις. Ὑποθέτομεν ὅτι $\lim a_\nu = \ell$, $\ell\in\mathbb{R}$, ἤτοι ὅτι

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists n\in\mathbb{R})(\forall \nu\in N)\ \nu>n \Rightarrow |a_\nu-\ell|<\varepsilon$$

Ἐπειδὴ διὰ κάθε $\nu\in N$ ἰσχύει

$$||a_\nu|-|\ell|| \leq |a_\nu-\ell|$$

θὰ ἔχωμεν καὶ

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists n\in\mathbb{R})(\forall \nu\in N)\ \nu>n \Rightarrow ||a_\nu|-|\ell||<\varepsilon$$

ἤτοι ὅτι

$$\lim|a_\nu| = |\ell| = |\lim a_\nu|$$

4. Δείξατε ὅτι, ἂν $(a_\nu)_{\nu\in N}$ εἶναι συγκλίνουσα ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε ἡ ἀκολουθία $(a_\nu^\rho)_{\nu\in N}$, ὅπου ρ εἶναι ῥητὸς ἀριθμός, εἶναι ἐπίσης συγκλίνουσα καὶ ἰσχύει

$$\lim_{\nu\to\infty} a_\nu^\rho = (\lim a_\nu)^\rho$$

ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι αἱ σημειούμεναι δυνάμεις ἔχουν ἔννοιαν. (Ὑπενθυμίζομεν ὅτι διὰ τυχόντα πραγματικὸν ἀριθμὸν a

$$a^\rho = \sqrt[n(\rho)]{a^{m(\rho)}}$$

ὅπου $n(\rho) = \min\{\nu\in\mathbb{N} : \nu\rho\in\mathbb{Z}\}$ καὶ $m(\rho) = \rho n(\rho)$).

Λύσις. Ὑποθέτομεν ὅτι $\lim a_\nu = \ell$, $\ell\in\mathbb{R}$. Ἡ ἀκολουθία $(a_\nu)_{\nu\in N}$ εἶναι τότε φραγμένη καὶ ἑπομένως, ὡς εὐκόλως συνάγεται, ἡ ἀκολουθία $(a_\nu^\rho)_{\nu\in N}$ * εἶναι ἐπίσης φραγμένη. Ἐπὶ πλέον ἰσχύει ὅτι:

Κάθε συγκλίνουσα ὑπακολουθία τῆς $(a_\nu^\rho)_{\nu\in N}$ ἔχει ὅριον τὸ ℓ^ρ.

Πράγματι· χωρὶς βλάβην τῆς γενικότητος, θεωροῦμεν τυχοῦσαν φυσικὴν ὑπακολουθίαν $(a_\nu^\rho)_{\nu\in M}$ τῆς $(a_\nu^\rho)_{\nu\in N}$ μὲ $\lim_{\nu\in M} a_\nu^\rho = \ell_1$, $\ell_1\in\mathbb{R}$, καὶ παρα-

ΟΜΑΣ 1

τηροῦμεν ὅτι ἀφ' ἑνὸς μὲν

$$\lim_{\nu\in M} a_\nu^{m(p)} = \ell^{m(p)}$$

ἀφ' ἑτέρου δὲ

$$\lim_{\nu\in M} a_\nu^{m(p)} = \lim_{\nu\in M} (a_\nu^p)^{n(p)} = \ell_1^{n(p)}$$

Ἄρα $\ell_1^{n(p)} = \ell^{m(p)}$, ἤτοι $\ell_1 = \ell^p$.

Ἐν συνεχείᾳ θεωροῦμεν τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν ε καὶ ὁρίζομεν τὸ σύνολον

$$N_\varepsilon = \{\nu\in N : |a_\nu^p - \ell^p| \geqq \varepsilon\}$$

Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ σύνολον N_ε εἶναι ἀπέραντον, τότε ἐπειδὴ ἡ ἀκολουθία $(a_\nu^p)_{\nu\in N_\varepsilon}$ εἶναι προφανῶς φραγμένη, δυνάμει τοῦ θεωρήματος Bolzano-Weierstrass, ὑπάρχει συγκλίνουσα φυσικὴ ὑπακολουθία $(a_\nu^p)_{\nu\in M}$ αὐτῆς, ὁπότε ἀναγκαστικῶς θὰ ἰσχύῃ

$$\lim_{\nu\in M} a_\nu^p = \ell^p \qquad |a_\nu^p - \ell^p| < \varepsilon$$

Ἀλλὰ προφανῶς $M \subseteqq N_\varepsilon$, δηλαδὴ

$$(\forall \nu\in M)\ |a_\nu^p - \ell^p| \geqq \varepsilon$$

τὸ ὁποῖον ὁδηγεῖ εἰς τὸ ἄτοπον

$$\varepsilon \leqq \lim_{\nu\in M} |a_\nu^p - \ell^p| = 0$$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι τὸ σύνολον N_ε εἶναι πεπερασμένον, ἤτοι ὅτι ἰσχύει

$|a_\nu^p - \ell^p| < \varepsilon$ τελικῶς δι' ὅλους τοὺς δείκτας $\nu\in N$

τὸ ὁποῖον, ἐπειδὴ τὸ ε εἶναι τυχόν, σημαίνει ὅτι $\lim_{\nu\in N} a_\nu^p = \ell^p$.

Παρατήρησις. Ἡ λύσις θὰ ἠδύνατο νὰ δοθῇ καὶ τῇ βοηθείᾳ τοῦ ἀνωτέρου καὶ κατωτέρου ὁρίου ἀκολουθίας. Οὕτω, μετὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ φραγμένου τῆς ἀκολουθίας $(a_\nu^p)_{\nu\in N}$ καὶ τοῦ ὅτι κάθε συγκλίνουσα ὑπακολουθία αὐτῆς ἔχει ὅριον τὸ ℓ^p, θεωροῦμεν τὰς φυσικὰς ὑπακολουθίας $(a_\nu^p)_{\nu\in M}$ καὶ $(a_\nu^p)_{\nu\in K}$ τῆς $(a_\nu^p)_{\nu\in N}$ μὲ

$$\lim_{\nu\in M} a_\nu^p = \limsup_{\nu\in N} a_\nu^p \quad \text{καὶ} \quad \lim_{\nu\in K} a_\nu^p = \liminf_{\nu\in N} a_\nu^p$$

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι τὰ $\limsup a_\nu^\rho$ καὶ $\liminf a_\nu^\rho$ εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί, ὁπότε ἀναγκαστικῶς θὰ ἔχωμεν

$$\limsup_{\nu\in N} a_\nu^\rho = \ell^\rho \quad \text{καὶ} \quad \liminf_{\nu\in N} a_\nu^\rho = \ell^\rho$$

ἤτοι ὅτι $\lim\limits_{\nu\in N} a_\nu^\rho = \ell^\rho$.

5. Δείξατε ὅτι διὰ τυχοῦσαν συγκλίνουσαν ἐν $\mathbb{R}^*$ ἀκολουθίαν πραγματικῶν ἀριθμῶν $(a_\nu)_{\nu\in N}$ ἰσχύουν :

α) ἄν $\lim a_\nu > 0$, τότε ἰσχύει $a_\nu > 0$ τελικῶς δι' ὅλους τοὺς δείκτας $\nu\in N$.

β) ἄν $\lim a_\nu < 0$, τότε ἰσχύει $a_\nu < 0$ τελικῶς δι' ὅλους τοὺς δείκτας $\nu\in N$.

Λύσις. Θέτομεν $\lim a_\nu = \ell$, ὁπότε ἔχομεν :

α) Ἄν τὸ σύνολον

$$M = \{\nu\in N \ : \ a_\nu \leqq 0\}$$

εἶναι ἀπέραντον, τότε προφανῶς ἰσχύει

$$\lim_{\nu\in M} a_\nu = \ell \leqq 0$$

Ἐπομένως, ἄν $\ell > 0$, τότε τὸ σύνολον M εἶναι πεπερασμένον, ὁπότε ἰσχύει

$$a_\nu > 0 \quad \text{τελικῶς δι' ὅλους τοὺς δείκτας } \nu\in N.$$

β) Ὁμοίως, ἄν τὸ σύνολον

$$K = \{\nu\in N : \ a_\nu \geqq 0\}$$

εἶναι ἀπέραντον, τότε προφανῶς ἰσχύει

$$\lim_{\nu\in K} a_\nu = \ell \geqq 0$$

Ἐπομένως, ἄν $\ell < 0$, τότε τὸ σύνολον K εἶναι πεπερασμένον, ὁπότε ἰσχύει

$$a_\nu < 0 \quad \text{τελικῶς δι' ὅλους τοὺς δείκτας } \nu\in N.$$

6. Δείξατε ὅτι, ἄν ἡ ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν $(a_\nu)_{\nu\in N}$ συγκλίνῃ κατ' ἐκδοχήν, τότε ἡ ἀκολουθία $(|a_\nu|)_{\nu\in N}$ ἀπειρίζεται θετικῶς.

Λύσις. Θεωροῦμεν τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν ε καὶ ὁρίζομεν τὸ σύνολον

$$N_\varepsilon = \{ \nu\in N : |a_\nu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \}$$

Ἂν τὸ σύνολον N_ε εἶναι ἀπέραντον, τότε ἡ ἀκολουθία $(a_\nu)_{\nu\in N_\varepsilon}$, ὡς ὑπακολουθία τῆς $(a_\nu)_{\nu\in N}$ θὰ συνέκλινεν κατ' ἐξοχὴν καὶ ἑπομένως αὕτη θὰ ἦτο μὴ φραγμένη. Τοῦτο ὅμως ἀντίκειται εἰς τὸν ὁρισμὸν τοῦ συνόλου N_ε, διότι προφανῶς ἰσχύει

$$(\forall\, \nu\in N_\varepsilon)\ |a_\nu| \leqq \frac{1}{\varepsilon}$$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι τὸ σύνολον N_ε εἶναι πεπερασμένον, ἤτοι ὅτι ἰσχύει

$$|a_\nu| > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{τελικῶς δι' ὅλους τοὺς δείκτας } \nu\in N$$

τὸ ὁποῖον, ἐπειδὴ τὸ ε εἶναι τυχόν, σημαίνει ὅτι $\lim|a_\nu| = +\infty$.

7. Δείξατε ὅτι, ἂν ἡ ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν $(a_\nu)_{\nu\in N}$ συγκλίνῃ κατ' ἐξοχήν, τότε διὰ τυχόντα θετικὸν ρητὸν ἀριθμὸν ρ ἰσχύουν:

α) $\lim a_\nu = +\infty \Rightarrow \lim\limits_\nu a_\nu^\rho = +\infty$

β) $\lim a_\nu = -\infty \Rightarrow \lim\limits_\nu a_\nu^\rho = \begin{cases} +\infty, & \text{ἂν } (-1)^\rho = 1 \\ -\infty, & \text{ἂν } (-1)^\rho = -1 \end{cases}$

Λύσις. α) Ὑποθέτομεν ὅτι $\lim a_\nu = +\infty$ καὶ θεωροῦμεν τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν ε. Προφανῶς ὑπάρχει $n\in R$ τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$(\forall\, \nu\in N)\ \nu > n \Rightarrow a_\nu > \frac{1}{\varepsilon^{1/\rho}}$$

Ἀλλὰ

$$a_\nu > \frac{1}{\varepsilon^{1/\rho}} \Rightarrow a_\nu^\rho > \left(\frac{1}{\varepsilon^{1/\rho}}\right)^\rho = \frac{1}{(\varepsilon^{1/\rho})^\rho} = \frac{1}{\varepsilon}$$

καὶ ἑπομένως

$$(\forall\, \nu\in N)\ \nu > n \Rightarrow a_\nu^\rho > \frac{1}{\varepsilon}$$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, n\in R)(\forall\, \nu\in N)\ \nu > n \Rightarrow a_\nu^\rho > \frac{1}{\varepsilon}$$

δηλαδὴ ὅτι $\lim\limits_\nu a_\nu^\rho = +\infty$.

β) Ὑποθέτομεν ὅτι $\lim a_\nu = -\infty$, ὁπότε ἰσχύει $\lim(-a_\nu) = +\infty$ καὶ ἑπομένως, δυνάμει τῆς α), $\lim_{\nu}(-a_\nu)^p = +\infty$. Ἀλλὰ

$$a_\nu^p = (-1)^p(-a_\nu)^p$$

ὁπότε λαμβάνομεν

$$\lim_{\nu} a_\nu^p = (-1)^p \lim_{\nu}(-a_\nu)^p = (-1)^p(+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{ἂν } (-1)^p = 1 \\ -\infty, & \text{ἂν } (-1)^p = -1 \end{cases}$$

8. **Δείξατε ὅτι αἱ ἀκολουθίαι (a_ν) καὶ (β_ν), ὅπου**

$$a_\nu = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\nu-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2\nu)} \quad \text{καὶ} \quad \beta_\nu = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2\nu)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\nu-1)}\frac{1}{\nu}$$

εἶναι συγκλίνουσαι καὶ μάλιστα ἰσχύει

$$\lim a_\nu \leq \frac{15}{48} \quad \text{καὶ} \quad \lim \beta_\nu \leq \frac{4}{3}$$

Λύσις. Ἀμφότεραι αἱ ἀκολουθίαι (a_ν) καὶ (β_ν) εἶναι γνησίως φθίνουσαι. Πράγματι· εὐκόλως συνάγεται ὅτι διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν ἰσχύει

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \frac{2\nu+1}{2(\nu+1)} < 1, \quad \text{ἤτοι} \quad a_{\nu+1} < a_\nu$$

καὶ

$$\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} = \frac{2\nu}{2\nu+1} < 1, \quad \text{ἤτοι} \quad \beta_{\nu+1} < \beta_\nu$$

Προφανῶς αἱ ἀκολουθίαι (a_ν) καὶ (β_ν), ὡς ἀκολουθίαι θετικῶν ὅρων, εἶναι καὶ κάτω φραγμέναι. Ἄρα ὑπάρχουν τὰ $\lim a_\nu$ καὶ $\lim \beta_\nu$ ἐν $\mathbb{R}$ καὶ μάλιστα ἰσχύει

$$\lim a_\nu = \inf a_\nu \leq a_3 = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} = \frac{15}{48}$$

καὶ

$$\lim \beta_\nu = \inf \beta_\nu \leq \beta_2 = \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3}\frac{1}{2} = \frac{4}{3}$$

9. **Δείξατε ὅτι αἱ ἀκολουθίαι (a_ν), (β_ν) καὶ (γ_ν), ὅπου**

$$a_\nu = \omega^\nu\ (|\omega| < 1), \quad \beta_\nu = \frac{\omega^\nu}{\nu!}\ (\omega \in \mathbb{R}) \quad \text{καὶ} \quad \gamma_\nu = \nu^\kappa \omega^\nu\ (|\omega| < 1, \kappa \in \mathbb{N})$$

είναι μηδενικαί.

Λύσις. α) Διά $\omega=0$ είναι προφανές ότι ή ακολουθία (α_ν) είναι μηδενική. Υποθέτομεν λοιπόν ότι $\omega\neq 0$, ήτοι ότι $0<|\omega|<1$, όπότε θέτοντες $\theta=1-\frac{1}{|\omega|}$ έχομεν $\theta>0$ καί $|\omega|=\frac{1}{1+\theta}$. Άρα διά κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ ισχύει

$\theta > \frac{1}{|\omega|}-1$

$$|\alpha_\nu|=|\omega|^\nu=\frac{1}{(1+\theta)^\nu}$$

Άλλά έκ τοῦ διωνυμικοῦ τύπου τοῦ Newton αμέσως συνάγεται ότι

$$(1+\theta)^\nu>\nu\theta$$

καί έπομένως διά κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ ισχύει

$$|\alpha_\nu|<\frac{1}{\nu\theta}$$

τό όποῖον, έπειδή $\lim\limits_{\nu}\frac{1}{\nu\theta}=0$, αποδεικνύει ότι $\lim\alpha_\nu=0$.

β) Λαμβάνομεν ένα φυσικόν αριθμόν κ μέ $\kappa>|\omega|$, όπότε διά κάθε $\nu>\kappa$ ισχύει

$$\frac{1}{\nu!}=\frac{1}{1\cdot 2\cdots\nu}=\frac{1}{(\kappa-1)!\,\kappa(\kappa+1)\cdots\nu}\leqq\frac{1}{(\kappa-1)!\,\kappa^{\nu-(\kappa-1)}}=\frac{\kappa^{\kappa-1}}{(\kappa-1)!}\frac{1}{\kappa^\nu}$$

καί έπομένως

$$|\beta_\nu|=\frac{|\omega|^\nu}{\nu!}\leqq\frac{\kappa^{\kappa-1}}{(\kappa-1)!}\frac{|\omega|^\nu}{\kappa^\nu}=\frac{\kappa^{\kappa-1}}{(\kappa-1)!}\left(\frac{|\omega|}{\kappa}\right)^\nu$$

Άλλά $\frac{|\omega|}{\kappa}<1$, όπότε, δυνάμει τῆς α), $\lim\left(\frac{|\omega|}{\kappa}\right)^\nu=0$. Άρα καί $\lim\beta_\nu=0$.

γ) Διά $\omega=0$ είναι προφανές ότι ή ακολουθία (γ_ν) είναι μηδενική. Υποθέτομεν λοιπόν ότι $\omega\neq 0$, ήτοι ότι $0<|\omega|<1$, όπότε θέτοντες $\theta=1-\frac{1}{|\omega|}$ έχομεν $\theta>0$ καί $|\omega|=\frac{1}{1+\theta}$. Άρα διά κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ ισχύει

$\theta = \frac{1}{|\omega|}-1$

$$|\gamma_\nu|=\nu^\kappa\omega^\nu=\frac{\nu^\kappa}{(1+\theta)^\nu}$$

Άλλά έκ τοῦ διωνυμικοῦ τύπου τοῦ Newton αμέσως συνάγεται ότι διά κάθε $\nu>\kappa$ ισχύει

$$(1+\theta)^\nu\geqq\binom{\nu}{\kappa+1}\theta^{\kappa+1}=\frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-\kappa)}{(\kappa+1)!}\theta^{\kappa+1}=\frac{\theta^{\kappa+1}}{(\kappa+1)!}\nu^{\kappa+1}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)\cdots\left(1-\frac{\kappa}{\nu}\right)$$

καί έπομένως

$$|\gamma_\nu|\leqq\frac{(\kappa+1)!}{\theta^{\kappa+1}}\,\frac{1}{\nu}\Big/\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)\cdots\left(1-\frac{\kappa}{\nu}\right)$$

τὸ ὁποῖον, ἐπειδὴ $\lim_{\nu} \frac{1}{\nu}\Big/\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)\cdots\left(1-\frac{\kappa}{\nu}\right) = 0/1\cdot 1\cdots 1 = 0$, ἀποδεικνύει ὅτι $\lim \gamma_\nu = 0$.

10. Δείξατε ὅτι, ἄν ω εἶναι πραγματικὸς ἀριθμὸς μὲ $|\omega|<1$, τότε ἰσχύει

$$\lim(1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^\nu) = \frac{1}{1-\omega}$$

Λύσις. Θέτομεν

$$a_\nu = 1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^\nu$$

καὶ παρατηροῦμεν ὅτι

$$\begin{aligned} a_\nu-\omega a_\nu &= (1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^\nu)-(\omega+\omega^2+\cdots+\omega^\nu+\omega^{\nu+1}) \\ &= 1-\omega^{\nu+1} \end{aligned}$$

δηλαδὴ

$$a_\nu = \frac{1-\omega^{\nu+1}}{1-\omega}$$

Ἀλλὰ $\lim \omega^{\nu+1} = 0$ καὶ ἑπομένως $\lim a_\nu = \frac{1-0}{1-\omega} = \frac{1}{1-\omega}$.

11. Δείξατε ὅτι, ἂν $p_1, p_2, \cdots, p_\kappa$ εἶναι θετικοὶ καὶ $a_1, a_2, \cdots, a_\kappa$ μὴ ἀρνητικοὶ πραγματικοὶ ἀριθμοί, τότε ἰσχύει

$$\lim_{\nu} \sqrt[\nu]{p_1a_1^\nu+p_2a_2^\nu+\cdots+p_\kappa a_\kappa^\nu} = \max\{a_1,a_2,\cdots,a_\kappa\}$$

Λύσις. Θέτομεν

$$\beta_\nu = \sqrt[\nu]{p_1a_1^\nu+p_2a_2^\nu+\cdots+p_\kappa a_\kappa^\nu}$$

καὶ χωρὶς βλάβην τῆς γενικότητος, ὑποθέτομεν ὅτι

$$a_\kappa = \max\{a_1,a_2,\cdots,a_\kappa\}$$

Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι διὰ $a_\kappa=0$, ὁπότε $a_1=a_2=\cdots=a_\kappa=0$, ἡ ἀκολουθία (β_ν) εἶναι μηδενικὴ καὶ ἑπομένως ἰσχύει

$$\lim \beta_\nu = a_\kappa$$

Ὑποθέτομεν λοιπὸν ὅτι $a_\kappa \neq 0$, ὁπότε διὰ κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ ἔχομεν

$$\frac{\beta_\nu}{a_\kappa} = \sqrt[\nu]{p_1\left(\frac{a_1}{a_\kappa}\right)^\nu+p_2\left(\frac{a_2}{a_\kappa}\right)^\nu+\cdots+p_{\kappa-1}\left(\frac{a_{\kappa-1}}{a_\kappa}\right)^\nu+p_\kappa}$$

καὶ ἑπομένως

$$\sqrt[\nu]{p_\kappa} \leq \frac{\beta_\nu}{a_\kappa} \leq \sqrt[\nu]{p_1+p_2+\cdots+p_\kappa}$$

Ἀλλά

$$\lim_\nu \sqrt[\nu]{p_\kappa} = 1 = \lim_\nu \sqrt[\nu]{p_1+p_2+\cdots+p_\kappa}$$

καὶ ἑπομένως

$$\lim_\nu \frac{\beta_\nu}{a_\kappa} = 1$$

Ἄρα, ἐπειδὴ

$$\beta_\nu = a_\kappa + a_\kappa\left(\frac{\beta_\nu}{a_\kappa} - 1\right)$$

λαμβάνομεν

$$\lim \beta_\nu = a_\kappa + a_\kappa(1-1) = a_\kappa$$

12. Δείξατε ὅτι, ἂν διὰ τὴν ἀκολουθίαν πραγματικῶν ἀριθμῶν (a_ν) ἰσχύῃ

$$(\forall \nu \in \mathbb{N})\ |a_{\nu+1}| \leq \theta\, |a_\nu|$$

ὅπου $0 \leq \theta < 1$, τότε αὕτη εἶναι μηδενικὴ ἀκολουθία.

Λύσις. Προφανῶς διὰ κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ἰσχύει

$$|a_{\nu+1}| < |a_\nu|$$

δηλαδὴ ὅτι ἡ ἀκολουθία $(|a_\nu|)$ εἶναι γνησίως φθίνουσα. Ἄρα αὕτη, ὡς ἀκολουθία μὴ ἀρνητικῶν ὅρων, εἶναι κάτω φραγμένη καὶ ἑπομένως συγκλίνουσα. Θέτομεν $\lim |a_\nu| = \ell$, ὁπότε προφανῶς $\ell \geq 0$ καὶ μάλιστα, δυνάμει τῆς ἀνισότητος

$$|a_{\nu+1}| \leq \theta\, |a_\nu|$$

ἰσχύει $\ell \leq \theta \ell$. Ἄρα $0 \leq (1-\theta)\ell \leq 0$, δηλαδὴ $(1-\theta)\ell = 0$, καὶ ἑπομένως $\ell = 0$. Συνεπῶς $\lim |a_\nu| = 0$ ἢ ἰσοδυνάμως $\lim a_\nu = 0$.

Παρατήρησις. Δυνάμει τῆς ἀσκήσεως ταύτης λύεται καὶ ἡ ἄσκησις 9. Συγκεκριμένως διὰ $a_\nu = \omega^\nu$, $|\omega| < 1$, ἔχομεν

$$(\forall \nu \in \mathbb{N})\ |a_{\nu+1}| \leq |\omega|\,|a_\nu|$$

καὶ ἑπομένως $\lim_\nu \omega^\nu = 0$, $|\omega| < 1$. Ὁμοίως διὰ τὰς ἀκολουθίας (β_ν), $\beta_\nu = \frac{\omega^\nu}{\nu!}$ $(\omega \in \mathbb{R})$, καὶ (γ_ν), $\gamma_\nu = \nu^\kappa \omega^\nu$ $(|\omega| < 1)$ τῆς ἀσκήσεως 9 ἰσχύουν ἀντιστοίχως

$$(\forall \nu \in N) \quad \beta_{n+\nu+1} \leq \frac{|\omega|}{n+1} \beta_{n+\nu}$$

καὶ

$$(\forall \nu \in N) \quad \gamma_{n+\nu+1} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\kappa} |\omega| \, \gamma_{n+\nu}$$

ὁπότε, ἄν ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς n ληφθῇ ἀντιστοίχως εἰς τρόπον, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$\frac{|\omega|}{n+1} < 1 \quad \text{καὶ} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\kappa} |\omega| < 1$$

δυνάμει τῆς ἀνωτέρω ἀσκήσεως, συμπεραίνομεν ὅτι :

$$\lim_{\nu} \frac{\omega^{\nu}}{\nu!} = 0 \quad (\omega \in \mathbb{R}) \quad \text{καὶ} \quad \lim_{\nu} \nu^{\kappa}\omega^{\nu} = 0 \quad (|\omega| < 1)$$

13. Δείξατε ὅτι διὰ τυχοῦσαν ἀκολουθίαν πραγματικῶν ἀριθμῶν (a_ν) μὲ

$$(\forall \nu \in \mathbb{N}) \; a_\nu \neq -1$$

ἰσχύει

$$\lim \frac{a_\nu - 1}{a_\nu + 1} = 0 \implies \lim a_\nu = 1$$

Λύσις. Θέτομεν

$$\beta_\nu = \frac{a_\nu - 1}{a_\nu + 1}$$

καὶ ὑποθέτομεν ὅτι $\lim \frac{a_\nu - 1}{a_\nu + 1} = 0$, δηλαδὴ $\lim \beta_\nu = 0$. Ἔχομεν τότε ὅτι διὰ κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ἰσχύει

$$\beta_\nu \neq 1 \quad \text{καὶ} \quad a_\nu = \frac{1+\beta_\nu}{1-\beta_\nu}$$

ὁπότε λαμβάνομεν

$$\lim a_\nu = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

14. Δείξατε ὅτι, ἂν διὰ τὴν ἀκολουθίαν πραγματικῶν ἀριθμῶν (a_ν) ἰσχύῃ

$$a_1 = \sqrt{2} \quad \text{καὶ} \quad (\forall \nu \in \mathbb{N}) \, a_{\nu+1} = \sqrt{2a_\nu}$$

τότε $\lim a_\nu = 2$.

Λύσις. Κατὰ πρῶτον θὰ δείξωμεν ὅτι διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν ἰσχύει

$$0 < a_\nu < 2 \quad \text{καὶ} \quad a_\nu < a_{\nu+1}$$

Πρὸς τοῦτο ἐφαρμόζομεν τὴν μέθοδον τῆς ἐπαγωγικῆς ἀποδείξεως, ὁπότε παρατηροῦμεν ὅτι διὰ $\nu = 1$ ἔχομεν

$$0 < a_1 = \sqrt{2} < 2 \quad \text{καὶ} \quad a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{2a_1} = a_2$$

Ὑποθέτομεν, ἐν συνεχείᾳ, ὅτι ἰσχύει

$$0 < a_\kappa < 2 \quad \text{καὶ} \quad a_\kappa < a_{\kappa+1}$$

ὁπότε λαμβάνομεν

$$0 < a_{\kappa+1} = \sqrt{2a_\kappa} < \sqrt{2\cdot 2} = 2 \quad \text{καὶ} \quad a_{\kappa+1} = \sqrt{2a_\kappa} < \sqrt{2a_{\kappa+1}} = a_{\kappa+2}$$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι ἡ ἀκολουθία (a_ν) εἶναι (γνησίως) αὔξουσα καὶ ἄνω φραγμένη. Ἄρα ὑπάρχει τὸ $\lim a_\nu = \ell$ ἐν $\mathbb{R}$ καὶ μάλιστα $\ell > a_1 = \sqrt{2} > 0$.

Τέλος, ἐκ τῆς σχέσεως

$$a_{\nu+1} = \sqrt{2a_\nu}$$

λαμβάνομεν $\ell = \sqrt{2\ell}$ καὶ συνεπῶς $\ell = 2$, ἤτοι $\lim a_\nu = 2$.

15. Μελετήσατε, ὡς πρὸς τὴν σύγκλισιν, τὴν ἀκολουθίαν πραγματικῶν ἀριθμῶν (a_ν) μὲ

$$a_1 = A,\ a_2 = B \quad \text{καὶ} \quad (\forall\, \nu \geqq 2)\ a_{\nu+1} = \frac{1}{2}(a_\nu + a_{\nu-1})$$

Λύσις. Κατὰ πρῶτον παρατηροῦμεν ὅτι διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν μ ἰσχύει

$$a_{\mu+2} - a_{\mu+1} = \frac{1}{2}(a_{\mu+1} + a_\mu) - a_{\mu+1} = -\frac{1}{2}(a_{\mu+1} - a_\mu)$$

ὁπότε εὐκόλως συνάγεται ὅτι διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν κ ἰσχύει

$$a_{\kappa+1} - a_\kappa = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\kappa-1}(a_2 - a_1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\kappa-1}(B - A)$$

Ἄρα διὰ τυχόντα φυσικὸν ἀριθμὸν ν λαμβάνομεν

$$a_{\nu+1} = A + (a_{\nu+1} - a_1) = A + \sum_{\kappa=1}^{\nu}(a_{\kappa+1} - a_\kappa) = A + (B-A)\sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(-\frac{1}{2}\right)^{\kappa-1},$$

ἤτοι

$$a_{\nu+1} = A + (B-A)\left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}\right]$$

Ἀλλά, δυνάμει τῆς ἀσκήσεως 10, ἰσχύει

$$\lim\left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}\right] = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$$

καὶ ἑπομένως

$$\ell im a_\nu = \ell im a_{\nu+1} = A + (B-A)\frac{2}{3} = \frac{A+2B}{3}$$

16. Μελετήσατε, ὡς πρὸς τὴν σύγκλισιν, τὴν ἀκολουθίαν πραγματικῶν ἀριθμῶν (a_ν) μὲ

$$a_1 = c \quad \text{καὶ} \quad (\forall \nu \in \mathbb{N})\, a_{\nu+1} = \frac{A + Ba_\nu}{B + Aa_\nu}$$

Λύσις. Διὰ $A = 0$ ἰσχύει

$$(\forall \nu \in \mathbb{N})\, a_{\nu+1} = a_\nu$$

καὶ ἑπομένως ἡ (a_ν) εἶναι ἡ σταθερὰ ἀκολουθία

$$c, c, \cdots$$

ἡ ὁποία προφανῶς συγκλίνει πρὸς τὸ c.

Ἀντιθέτως διὰ $B = 0$ ἡ ἀκολουθία (a_ν) δὲν εἶναι ἐν γένει συγκλίνουσα, διότι τότε ἰσχύει

$$(\forall \nu \in \mathbb{N})\, a_{\nu+1} = \frac{1}{a_\nu}$$

καὶ ἑπομένως ἡ ἀκολουθία (a_ν) γράφεται

$$c, \frac{1}{c}, c, \frac{1}{c}, \ldots$$

Προφανῶς αὐτὴ συγκλίνει μόνον διὰ $c = 1$ καὶ $c = -1$, ὁπότε καθίσταται σταθερὰ καὶ συγκλίνει ἀντιστοίχως πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 1 καὶ -1.

Ὑποθέτομεν τώρα ὅτι $AB \neq 0$, ὁπότε ὑποχρεωτικῶς ἰσχύει

$$\left|\frac{A-B}{A+B}\right| < 1 \quad \text{ἤ} \quad \left|\frac{A+B}{A-B}\right| < 1$$

καὶ ἑπομένως ὑπολείπονται νὰ ἐξετασθοῦν αἱ ἑξῆς δύο περιπτώσεις:

Περίπτωσις 1. $\left|\dfrac{A-B}{A+B}\right| < 1$. Διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν ἔχομεν

$$\frac{a_{\nu+1}-1}{a_{\nu+1}+1} = \frac{\dfrac{A+Ba_\nu}{B+Aa_\nu} - 1}{\dfrac{A+Ba_\nu}{B+Aa_\nu} + 1} = \frac{B-A}{A+B}\;\frac{a_\nu - 1}{a_\nu + 1}$$

καὶ ἑπομένως

$$\left|\frac{a_{\nu+1}-1}{a_{\nu+1}+1}\right| = \left|\frac{A-B}{A+B}\right| \left|\frac{a_\nu-1}{a_\nu+1}\right|$$

Ἄρα, δυνάμει τῆς ἀσκήσεως 12, ἰσχύει $\lim \frac{a_\nu-1}{a_\nu+1}=0$ καὶ ἑπομένως, δυνάμει τῆς ἀσκήσεως 13, $\lim a_\nu=1$.

Περίπτωσις 2. $\left|\frac{A+B}{A-B}\right|<1$. Διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν ἔχομεν

$$\frac{(-a_{\nu+1})-1}{(-a_{\nu+1})+1} = \frac{-\frac{A+Ba_\nu}{B+Aa_\nu}-1}{-\frac{A+Ba_\nu}{B+Aa_\nu}+1} = \frac{A+B}{B-A}\,\frac{(-a_\nu)-1}{(-a_\nu)+1}$$

καὶ ἑπομένως

$$\left|\frac{(-a_{\nu+1})-1}{(-a_{\nu+1})+1}\right| = \left|\frac{A+B}{A-B}\right| \left|\frac{(-a_\nu)-1}{(-a_\nu)+1}\right|$$

Ἄρα, δυνάμει τῆς ἀσκήσεως 12, ἰσχύει $\lim \frac{(-a_\nu)-1}{(-a_\nu)+1}=0$ καὶ ἑπομένως, δυνάμει τῆς ἀσκήσεως 13, $\lim(-a_\nu)=1$, ἤτοι $\lim a_\nu=-1$.

17. Μελετήσατε, ὡς πρὸς τὴν σύγκλισιν, τὴν ἀκολουθίαν πραγματικῶν ἀριθμῶν (a_ν) μὲ

$$a_1=\sqrt{c} \quad \text{καὶ} \quad (\forall \nu\in\mathbb{N})\, a_{\nu+1}=\sqrt{c+a_\nu}$$

Λύσις. Κατὰ πρῶτον θὰ δείξωμεν ὅτι διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν ἰσχύει

$$0\leq a_\nu<1+\sqrt{c} \quad \text{καὶ} \quad a_\nu\leq a_{\nu+1}$$

Πρὸς τοῦτο ἐφαρμόζομεν τὴν μέθοδον τῆς ἐπαγωγικῆς ἀποδείξεως, ὁπότε παρατηροῦμεν ὅτι διὰ $\nu=1$ ἔχομεν

$$0\leq a_1=\sqrt{c}<1+\sqrt{c} \quad \text{καὶ} \quad a_1=\sqrt{c}\leq\sqrt{c+\sqrt{c}}=\sqrt{c+a_1}=a_2$$

Ὑποθέτομεν, ἐν συνεχείᾳ, ὅτι ἰσχύει

$$0\leq a_\kappa<1+\sqrt{c} \quad \text{καὶ} \quad a_\kappa\leq a_{\kappa+1}$$

ὁπότε λαμβάνομεν

$$0 \leqq a_{\kappa+1} = \sqrt{c+a_\kappa} < \sqrt{c+1+\sqrt{c}} \leqq 1+\sqrt{c} \quad \text{καὶ} \quad a_{\kappa+1} = \sqrt{c+a_\kappa} \leqq \sqrt{c+a_{\kappa+1}} = a_{\kappa+2}$$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι ἡ ἀκολουθία (a_ν) εἶναι αὔξουσα καὶ ἄνω φραγμένη. Ἄρα ὑπάρχει τὸ $\lim a_\nu = \ell$ ἐν $\mathbb{R}$ καὶ μάλιστα $\ell \geqq a_1 = \sqrt{c} \geqq 0$.

Τέλος, ἐκ τῆς σχέσεως

$$a_{\nu+1} = \sqrt{c+a_\nu}$$

λαμβάνομεν $\ell = \sqrt{c+\ell}$ καὶ συνεπῶς $\ell = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+c}$. Ἄρα ἰσχύει

$$\lim a_\nu = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+c}$$

18. Δείξατε ὅτι

$$\lim_\nu \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{\nu}\right) = +\infty$$

Λύσις. Θέτομεν

$$a_\nu = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{\nu}$$

καὶ παρατηροῦμεν ὅτι διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν ἰσχύει

$$a_{2\nu}-a_\nu = \frac{1}{\nu+1}+\cdots+\frac{1}{2\nu} \geqq \frac{1}{2\nu}+\cdots+\frac{1}{2\nu} = \nu\,\frac{1}{2\nu} = \frac{1}{2}$$

ἤτοι ὅτι

$$a_{2\nu}-a_\nu \geqq \frac{1}{2}$$

Ἡ ἀκολουθία (a_ν) εἶναι προφανῶς (γνησίως) αὔξουσα καὶ ἐπομένως ὑπάρχει τὸ $\lim a_\nu = \ell$ ἐν $\mathbb{R}^*$ καὶ μάλιστα $\ell \geqq a_1 = 1 > 0$. Ἂν τὸ ὅριον ℓ ἦτο πεπερασμένος πραγματικὸς ἀριθμός, τότε

$$\frac{1}{2} \leqq \lim(a_{2\nu}-a_\nu) = \lim a_{2\nu} - \lim a_\nu = \ell-\ell = 0 .$$

Ἄρα $\ell = +\infty$, ἤτοι $\lim a_\nu = +\infty$.

19. Δείξατε ὅτι, ἂν $a_0\beta_0 \neq 0$ καὶ (s_ν) εἶναι τυχοῦσα ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν μὲ $\lim s_\nu = +\infty$, τότε

$$\lim_\nu \frac{a_0 s_\nu^m + a_1 s_\nu^{m-1} + \cdots + a_{m-1}s_\nu + a_m}{\beta_0 s_\nu^n + \beta_1 s_\nu^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1}s_\nu + \beta_n} = \begin{cases} 0, & \text{ἂν } m<n \\ \frac{a_0}{\beta_0}, & \text{ἂν } m=n \\ +\infty, & \text{ἂν } m>n \text{ καὶ } \frac{a_0}{\beta_0}>0 \\ -\infty, & \text{ἂν } m>n \text{ καὶ } \frac{a_0}{\beta_0}<0 \end{cases}$$

Λύσις. Θέτομεν

$$r_\nu = \frac{a_0 s_\nu^m + a_1 s_\nu^{m-1} + \cdots + a_{m-1} s_\nu + a_m}{\beta_0 s_\nu^n + \beta_1 s_\nu^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1} s_\nu + \beta_n}$$

$$= \frac{a_0 + \frac{a_1}{s_\nu} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{s_\nu^{m-1}} + \frac{a_m}{s_\nu^m}}{\beta_0 + \frac{\beta_1}{s_\nu} + \cdots + \frac{\beta_{n-1}}{s_\nu^{n-1}} + \frac{\beta_n}{s_\nu^n}} \, s_\nu^{m-n}$$

Ἀλλά, ἐπειδή $\lim s_\nu = +\infty$, ἰσχύει

$$\lim_\nu \frac{a_i}{s_\nu^i} = 0 \quad \text{διά κάθε } i = 1, 2, \cdots, m$$

καί

$$\lim_\nu \frac{\beta_j}{s_\nu^j} = 0 \quad \text{διά κάθε } j = 1, 2, \cdots, n$$

καί ἑπομένως

$$\lim r_\nu = \frac{a_0}{\beta_0} \lim_\nu s_\nu^{m-n}$$

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι :

(α) ἄν $m < n$, τότε $\lim_\nu s_\nu^{m-n} = \lim_\nu \left(\frac{1}{s_\nu}\right)^{n-m} = 0^{n-m} = 0$

(β) ἄν $m = n$, τότε $\lim_\nu s_\nu^{m-n} = \lim 1 = 1$

(γ) ἄν $m > n$, τότε $\lim_\nu s_\nu^{m-n} = +\infty$

Ἑπομένως λαμβάνομεν

$$\lim r_\nu = \begin{cases} 0, & \text{ἄν } m < n \\ \frac{a_0}{\beta_0}, & \text{ἄν } m = n \\ +\infty, & \text{ἄν } m > n \text{ καί } \frac{a_0}{\beta_0} > 0 \\ -\infty, & \text{ἄν } m > n \text{ καί } \frac{a_0}{\beta_0} < 0 \end{cases}$$

20. Εὕρετε τά $\limsup a_\nu$ καί $\liminf a_\nu$, ὅταν ἡ ἀκολουθία (a_ν) ὁρίζεται ὡς κάτωθι :

α) $a_\nu = (-1)^{\nu+1}\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)$ β) $a_\nu = \begin{cases} \frac{\nu-1}{\nu}, & \text{ἄν } \nu \text{ εἶναι ἄρτιος} \\ \frac{1}{\nu}, & \text{ἄν } \nu \text{ εἶναι περιττός} \end{cases}$

γ) $a_\nu = \left[1 + (-1)^\nu\right] \nu^2$ δ) $a_\nu = \left[1 + (-1)^\nu\right] \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 + \nu}$

Λύσις. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι τό $\limsup a_\nu$ εἶναι ὅριον μιᾶς ὑπακολουθίας τῆς (a_ν) καί μάλιστα τό μεγαλύτερον ἐξ ὅλων τῶν ὁρίων τῶν συγκλινουσῶν ὑπακολουθιῶν τῆς (a_ν). Ὁμοίως, τὸ $\liminf a_\nu$ εἶναι ὅριον μιᾶς ὑπακολουθίας τῆς (a_ν) καὶ μάλιστα τὸ μικρότερον ἐξ ὅλων τῶν ὁρίων τῶν συγκλινουσῶν ὑπακολουθιῶν τῆς (a_ν).

Ἀκολούθως, συμβολίζομεν μὲ N_1 τὸ σύνολον τῶν περιττῶν καὶ N_2 τὸ σύνολον τῶν ἀρτίων φυσικῶν ἀριθμῶν, ὁπότε :

α) Ἔχομεν

$$\lim_{\nu\in N_1} a_\nu = \lim(1+\frac{1}{\nu}) = 1+0=1$$

καὶ

$$\lim_{\nu\in N_2} a_\nu = \lim(-1)(1+\frac{1}{\nu}) = (-1)(1+0)=-1$$

Ἐπὶ πλέον διὰ τυχοῦσαν φυσικὴν ὑπακολουθίαν $(a_\nu)_{\nu\in M}$ μὲ $\lim\limits_{\nu\in M} a_\nu = s$ ἰσχύει

$$\lim_{\nu\in M\cap N_1} a_\nu = s \quad \text{καὶ} \quad \lim_{\nu\in M\cap N_1} a_\nu = 1, \text{ ἄν } M\cap N_1 \text{ εἶναι ἀπέραντον}$$

καὶ

$$\lim_{\nu\in M\cap N_2} a_\nu = s \quad \text{καὶ} \quad \lim_{\nu\in M\cap N_2} a_\nu = -1, \text{ ἄν } M\cap N_2 \text{ εἶναι ἀπέραντον}$$

Ἐπομένως ἔχομεν $s=\pm 1$ καὶ ἐπειδὴ τυχοῦσα ὑπακολουθία τῆς (a_ν) ἔχει ὡς ἀντίγραφον μίαν φυσικὴν ὑπακολουθίαν τῆς (a_ν), συμπεραίνομεν ὅτι ἰσχύει

$$\limsup a_\nu = 1 \quad \text{καὶ} \quad \liminf a_\nu = -1$$

β) Ἔχομεν

$$\lim_{\nu\in N_1} a_\nu = \lim_{\nu\in N_1} \frac{1}{\nu} = 0$$

καὶ

$$\lim_{\nu\in N_2} a_\nu = \lim_{\nu\in N_2} \frac{\nu-1}{\nu} = \lim_{\nu\in N_2}(1-\frac{1}{\nu}) = 1-0=1$$

Ἀκολούθως, ὡς καὶ ἐν α), συμπεραίνομεν ὅτι

$$\limsup a_\nu = 1 \quad \text{καὶ} \quad \liminf a_\nu = 0$$

γ) Ἔχομεν

$$\lim_{\nu\in N_1} a_\nu = \lim_{\nu\in N_1} 0 = 0$$

καὶ

$$\lim_{\nu\in N_2} a_\nu = \lim_{\nu\in N_2} 2\nu^2 = +\infty$$

Ἐπομένως

$$\limsup a_\nu = +\infty \quad \text{καὶ} \quad \liminf a_\nu = 0$$

δ) Ἔχομεν

$$\lim_{\nu \in N_1} a_\nu = \lim_{\nu \in N_1} 0 = 0$$

καὶ

$$\lim_{\nu \in N_2} a_\nu = \lim_{\nu \in N_2} \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 + \nu} = \frac{1}{1} = 1$$

Ἐπομένως
$$\limsup a_\nu = 1 \quad \text{καὶ} \quad \liminf a_\nu = 0$$

21. Δείξατε ὅτι, ἂν $(a_\nu)_{\nu \in N}$ καὶ $(\beta_\mu)_{\mu \in M}$ εἶναι ἀκολουθίαι πραγματικῶν ἀριθμῶν τοιαῦται, ὥστε

$$(\forall\ \nu \in M \cap N)\ a_\nu = \beta_\nu$$

καὶ τὸ σύνολον

$$M \dotplus N = (M - N) \cup (N - M)$$

εἶναι πεπερασμένον, τότε ἰσχύει

$$\liminf a_\nu = \liminf \beta_\mu \quad \text{καὶ} \quad \limsup a_\nu = \limsup \beta_\mu$$

Λύσις. Θὰ δείξωμεν πρῶτον ὅτι

$$\liminf a_\nu = \liminf \beta_\mu .$$

Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν μίαν φυσικὴν ὑπακολουθίαν $(a_\nu)_{\nu \in K}$ τῆς $(a_\nu)_{\nu \in N}$ τοιαύτην, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$\liminf a_\nu = \lim_{\nu \in K} a_\nu$$

Ἐπειδὴ τὸ σύνολον $M \dotplus N$ εἶναι πεπερασμένον καὶ προφανῶς ἰσχύει

$$(\forall\ \nu \in K - (M \dotplus N))\ a_\nu = \beta_\nu$$

θὰ ἔχωμεν

$$\lim_{\nu \in K} a_\nu = \lim_{\mu \in K} \beta_\mu$$

Ἐπομένως

$$\liminf \beta_\mu \leq \liminf_{\mu \in K} \beta_\mu = \lim_{\mu \in K} \beta_\mu = \lim_{\nu \in K} a_\nu = \liminf a_\nu$$

δηλαδή

$$\liminf \beta_\mu \leq \liminf a_\nu$$

όπότε δι' έναλλαγής τοῦ ρόλου τῶν ἀκολουθιῶν $(a_\nu)_{\nu\in N}$ καί $(\beta_\mu)_{\mu\in M}$ λαμβάνομεν καί

$$\liminf a_\nu \leq \liminf \beta_\mu$$

Ἄρα ἰσχύει

$$\liminf a_\nu = \liminf \beta_\mu$$

Ἐκ τοῦ συμπεράσματος τούτου, ἐφαρμοζομένου διά τάς ἀκολουθίας $(-a_\nu)_{\nu\in N}$ καί $(-\beta_\mu)_{\mu\in M}$, λαμβάνομεν καί

$$\limsup a_\nu = -\liminf(-a_\nu) = -\liminf(-\beta_\mu) = \limsup \beta_\mu$$

22. Δείξατε ὅτι διά τυχούσας ἀκολουθίας πραγματικῶν ἀριθμῶν $(a_\nu)_{\nu\in N}$ καί $(\beta_\nu)_{\nu\in N}$ ἰσχύουν τά κάτωθι, ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι αἱ κατωτέρω σημειούμεναι πράξεις εἶναι ἐπιτρεπταί:

(i) Ἄν $\limsup a_\nu \leq 0$ καί $\limsup \beta_\nu \leq 0$, τότε ἰσχύει

$$(\limsup a_\nu)(\limsup \beta_\nu) \leq \liminf a_\nu\beta_\nu$$

$$\leq \begin{cases}(\limsup a_\nu)(\liminf a_\nu)\\(\liminf a_\nu)(\limsup \beta_\nu)\end{cases}$$

$$\leq \limsup a_\nu\beta_\nu$$

$$\leq (\liminf a_\nu)(\liminf \beta_\nu)$$

(ii) Ἄν $\limsup a_\nu \leq 0$ καί $\liminf \beta_\nu \geq 0$, τότε ἰσχύει

$$(\limsup a_\nu)(\liminf \beta_\nu) \geq \limsup a_\nu\beta_\nu$$

$$\geq \begin{cases}(\limsup a_\nu)(\limsup \beta_\nu)\\(\liminf a_\nu)(\liminf \beta_\nu)\end{cases}$$

$$\geq \liminf a_\nu\beta_\nu$$

$$\geq (\liminf a_\nu)(\limsup \beta_\nu)$$

(iii) Ἄν ἡ ἀκολουθία $(a_\nu)_{\nu\in N}$ εἶναι συγκλίνουσα ἐν $\mathbb{R}^*$, τότε ἰσχύει

$$\liminf \alpha_\nu\beta_\nu = \begin{cases} (\lim \alpha_\nu) \liminf \beta_\nu, & \text{ἄν } \lim\alpha_\nu \geqq 0 \\ (\lim\alpha_\nu) \limsup \beta_\nu, & \text{ἄν } \lim\alpha_\nu \leqq 0 \end{cases}$$

καί

$$\limsup \alpha_\nu\beta_\nu = \begin{cases} (\lim \alpha_\nu) \limsup \beta_\nu, & \text{ἄν } \lim\alpha_\nu \geqq 0 \\ (\lim\alpha_\nu) \liminf \beta_\nu, & \text{ἄν } \lim\alpha_\nu \leqq 0 \end{cases}$$

Εἰδικῶς, διά τυχόντα πραγματικόν ἀριθμόν c ἰσχύει :

$$\liminf c\beta_\nu = \begin{cases} c \liminf \beta_\nu, & \text{ἄν } c \geqq 0 \\ c \limsup \beta_\nu, & \text{ἄν } c \leqq 0 \end{cases}$$

καί

$$\limsup c\beta_\nu = \begin{cases} c \limsup \beta_\nu, & \text{ἄν } c \geqq 0 \\ c \liminf \beta_\nu, & \text{ἄν } c \leqq 0 \end{cases}$$

Λύσις. Ὡς γνωστόν, διά τυχοῦσαν ἀκολουθίαν πραγματικῶν ἀριθμῶν $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ἰσχύει

$$\liminf(-x_\nu) = -\limsup x_\nu \quad \text{καί} \quad \limsup(-x_\nu) = -\liminf x_\nu$$

(i) Παρατηροῦμεν ὅτι

$$\liminf(-\alpha_\nu) = -\limsup \alpha_\nu \geqq 0 \quad \text{καί} \quad \liminf(-\beta_\nu) = -\limsup\beta_\nu \geqq 0$$

καί ἐπομένως ἐφαρμόζοντες τήν πρότασιν 1.11.11 τοῦ βιβλίου (Σελίς 63) διά τάς ἀκολουθίας $(-\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ καί $(-\beta_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, λαμβάνομεν

$$\begin{aligned}
(\limsup\alpha_\nu)(\limsup\beta_\nu) &= (\liminf(-\alpha_\nu))(\liminf(-\beta_\nu)) \\
&\leqq \liminf(-\alpha_\nu)(-\beta_\nu) = \liminf \alpha_\nu\beta_\nu \\
&\leqq \begin{cases} (\liminf(-\alpha_\nu))(\limsup(-\beta_\nu)) \\ (\limsup(-\alpha_\nu))(\liminf(-\beta_\nu)) \end{cases} \\
&= \begin{cases} (\limsup\alpha_\nu)(\liminf\beta_\nu) \\ (\liminf\alpha_\nu)(\limsup\beta_\nu) \end{cases} \\
&\leqq \limsup(-\alpha_\nu)(-\beta_\nu) = \limsup\alpha_\nu\beta_\nu \\
&\leqq (\limsup(-\alpha_\nu))(\limsup(-\beta_\nu)) \\
&= (\liminf\alpha_\nu)(\liminf\beta_\nu)
\end{aligned}$$

(ii) Παρατηρούμεν ότι

$$\liminf(-a_\nu) = -\limsup a_\nu \geqq 0$$

καί έπομένως έφαρμόζοντες πάλιν τήν πρότασιν 1.11.11 τοῦ βιβλίου διά τάς ἀκολουθίας $(-a_\nu)_{\nu\in N}$ καί $(\beta_\nu)_{\nu\in N}$, λαμβάνομεν

$$\begin{aligned}
(\limsup a_\nu)(\liminf \beta_\nu) &= -(\liminf(-a_\nu))(\liminf \beta_\nu)\\
&\geqq -\liminf(-a_\nu)\beta_\nu = \limsup a_\nu\beta_\nu\\
&\geqq \begin{cases} -(\liminf(-a_\nu))(\limsup \beta_\nu)\\ -(\limsup(-a_\nu))(\liminf \beta_\nu)\end{cases}\\
&= \begin{cases} (\limsup a_\nu)(\limsup \beta_\nu)\\ (\liminf a_\nu)(\liminf \beta_\nu)\end{cases}\\
&\geqq -\limsup(-a_\nu)\beta_\nu = \liminf a_\nu\beta_\nu\\
&\geqq -(\limsup(-a_\nu))(\limsup \beta_\nu)\\
&= (\liminf a_\nu)(\limsup \beta_\nu)
\end{aligned}$$

(iii) Κατά πρῶτον θά δείξωμεν ότι άν $\lim a_\nu \geqq 0$, τότε ἰσχύει

$$\liminf a_\nu\beta_\nu = (\lim a_\nu)\liminf \beta_\nu$$

Πράγματι· παρατηροῦμεν ότι

$$\liminf a_\nu = \lim a_\nu \geqq 0$$

καί διακρίνομεν τάς ἑξῆς δύο περιπτώσεις :

Περίπτωσις 1. $\liminf \beta_\nu \geqq 0$. Δυνάμει τῆς προτάσεως 1.11.11 τοῦ βιβλίου, λαμβάνομεν

$$(\liminf a_\nu)(\liminf \beta_\nu) \leqq \liminf a_\nu\beta_\nu \leqq (\limsup a_\nu)(\liminf \beta_\nu)$$

Ἀλλά

$$\liminf a_\nu = \limsup a_\nu = \lim a_\nu$$

καί έπομένως

$$\liminf a_\nu\beta_\nu = (\lim a_\nu)\liminf \beta_\nu$$

Περίπτωσις 2. $\liminf \beta_\nu \leqq 0$. Έχομεν $\limsup(-\beta_\nu) = -\liminf \beta_\nu \geqq 0$ καὶ ἐπομένως ἐφαρμόζοντες τὴν πρότασιν (ii) ἀνωτέρω διὰ τὰς ἀκολουθίας $(-\beta_\nu)_{\nu\in N}$ καὶ $(a_\nu)_{\nu\in N}$ εἰς τὰς θέσεις τῶν $(a_\nu)_{\nu\in N}$ καὶ $(\beta_\nu)_{\nu\in N}$ ἀντιστοίχως, λαμβάνομεν

$$(\limsup(-\beta_\nu))(\liminf a_\nu) \geqq \limsup(-a_\nu\beta_\nu) \geqq (\limsup(-\beta_\nu))(\limsup a_\nu)$$

δηλαδὴ

$$(-\liminf \beta_\nu)\lim a_\nu \geqq -\liminf a_\nu\beta_\nu \geqq (-\liminf\beta_\nu)\lim a_\nu$$

ἤτοι

$$\liminf a_\nu\beta_\nu = (\lim a_\nu)\liminf \beta_\nu$$

Ἐπίσης, ἄν $\lim a_\nu \geqq 0$, τότε, δυνάμει τοῦ ἀνωτέρω τύπου, λαμβάνομεν

$$\begin{aligned}\limsup a_\nu\beta_\nu &= -\liminf(-a_\nu\beta_\nu) = -\liminf a_\nu(-\beta_\nu)\\ &= -(\lim a_\nu)\liminf(-\beta_\nu) = -(\lim a_\nu)(-\limsup\beta_\nu)\\ &= (\lim a_\nu)\limsup\beta_\nu\end{aligned}$$

ἤτοι ἄν $\lim a_\nu \geqq 0$, τότε ἰσχύει

$$\limsup a_\nu\beta_\nu = (\lim a_\nu)\limsup\beta_\nu$$

Τέλος, ὑποθέτομεν ὅτι $\lim a_\nu \leqq 0$, ὁπότε, ἐπειδὴ $\lim(-a_\nu) \geqq 0$, δυνάμει τῶν ἀνωτέρω ἀποδειχθέντων δύο τύπων, λαμβάνομεν

$$\begin{aligned}\liminf a_\nu\beta_\nu &= \liminf(-a_\nu)(-\beta_\nu) = (\lim(-a_\nu))\liminf(-\beta_\nu)\\ &= (-\lim a_\nu)(-\limsup\beta_\nu) = (\lim a_\nu)\limsup\beta_\nu\end{aligned}$$

καὶ

$$\begin{aligned}\limsup a_\nu\beta_\nu &= \limsup(-a_\nu)(-\beta_\nu) = (\lim(-a_\nu))\limsup(-\beta_\nu)\\ &= (-\lim a_\nu)(-\liminf\beta_\nu) = (\lim a_\nu)\liminf\beta_\nu\end{aligned}$$

23. Δείξατε ὅτι διὰ τυχούσας ἀκολουθίας πραγματικῶν ἀριθμῶν $(a_\nu)_{\nu\in N}$ καὶ $(\beta_\nu)_{\nu\in N}$ ἰσχύουν τὰ κάτωθι, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι αἱ κατωτέρω σημειούμεναι πράξεις εἶναι ἐπιτρεπταί :

(i) Ἂν $\liminf a_\nu \geq 0$ καὶ $(\forall \nu \in \mathbb{N})\, \beta_\nu > 0$, τότε ἰσχύει

$$\frac{\liminf a_\nu}{\limsup \beta_\nu} \leq \liminf \frac{a_\nu}{\beta_\nu} \leq \begin{cases} \dfrac{\liminf a_\nu}{\liminf \beta_\nu} \\[2ex] \dfrac{\limsup a_\nu}{\limsup \beta_\nu} \end{cases} \leq \limsup \frac{a_\nu}{\beta_\nu} \leq \frac{\limsup a_\nu}{\liminf \beta_\nu}$$

(ii) Ἂν $\limsup a_\nu \leq 0$ καὶ $(\forall \nu \in \mathbb{N})\, \beta_\nu < 0$, τότε ἰσχύει

$$\frac{\limsup a_\nu}{\liminf \beta_\nu} \leq \liminf \frac{a_\nu}{\beta_\nu} \leq \begin{cases} \dfrac{\limsup a_\nu}{\limsup \beta_\nu} \\[2ex] \dfrac{\liminf a_\nu}{\liminf \beta_\nu} \end{cases} \leq \limsup \frac{a_\nu}{\beta_\nu} \leq \frac{\liminf a_\nu}{\limsup \beta_\nu}$$

(iii) Ἂν $\limsup a_\nu \leq 0$ καὶ $(\forall \nu \in \mathbb{N})\, \beta_\nu > 0$, τότε ἰσχύει

$$\frac{\limsup a_\nu}{\limsup \beta_\nu} \geq \limsup \frac{a_\nu}{\beta_\nu} \geq \begin{cases} \dfrac{\limsup a_\nu}{\liminf \beta_\nu} \\[2ex] \dfrac{\liminf a_\nu}{\limsup \beta_\nu} \end{cases} \geq \liminf \frac{a_\nu}{\beta_\nu} \geq \frac{\liminf a_\nu}{\liminf \beta_\nu}$$

(iv) Ἄν $\liminf a_\nu \geqq 0$ καὶ $(\forall \nu \in N)\ \beta_\nu < 0$, τότε ἰσχύει

$$\frac{\liminf a_\nu}{\liminf \beta_\nu} \geqq \limsup \frac{a_\nu}{\beta_\nu} \geqq \begin{cases} \dfrac{\limsup a_\nu}{\liminf \beta_\nu} \\ \dfrac{\liminf a_\nu}{\limsup \beta_\nu} \end{cases} \geqq \liminf \frac{a_\nu}{\beta_\nu} \geqq \frac{\limsup a_\nu}{\limsup \beta_\nu}$$

Λύσις. Ὡς γνωστὸν ἰσχύει

$$\limsup \frac{1}{\beta_\nu} = \frac{1}{\liminf \beta_\nu} \quad \text{καὶ} \quad \liminf \frac{1}{\beta_\nu} = \frac{1}{\limsup \beta_\nu}$$

ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι αἱ σημειούμεναι πράξεις εἶναι ἐπιτρεπταί.

(i) Προφανῶς ἰσχύει $\liminf \frac{1}{\beta_\nu} \geqq 0$ καὶ ἐπομένως ἐφαρμόζοντες τὴν πρότασιν 1.11.11 τοῦ βιβλίου (Σελίς 63), λαμβάνομεν

$$\frac{\liminf a_\nu}{\limsup \beta_\nu} = \liminf a_\nu \frac{1}{\limsup \beta_\nu} = (\liminf a_\nu)(\liminf \frac{1}{\beta_\nu})$$

$$\leqq \liminf a_\nu \frac{1}{\beta_\nu} = \liminf \frac{a_\nu}{\beta_\nu}$$

$$\leqq \begin{cases} (\liminf a_\nu)(\limsup \dfrac{1}{\beta_\nu}) = \dfrac{\liminf a_\nu}{\liminf \beta_\nu} \\ (\limsup a_\nu)(\liminf \dfrac{1}{\beta_\nu}) = \dfrac{\limsup a_\nu}{\limsup \beta_\nu} \end{cases}$$

$$\leqq \limsup a_\nu \frac{1}{\beta_\nu} = \limsup \frac{a_\nu}{\beta_\nu}$$

$$\leqq (\limsup a_\nu)(\limsup \frac{1}{\beta_\nu}) = \frac{\limsup a_\nu}{\liminf \beta_\nu}$$

(ii) Προφανῶς ἰσχύει $\limsup \frac{1}{\beta_\nu} \leqq 0$ καὶ ἐπομένως ἐφαρμόζοντες τὴν πρότασιν (i) τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως 22, λαμβάνομεν

$$\frac{\limsup a_\nu}{\liminf \beta_\nu} = \limsup a_\nu \frac{1}{\liminf \beta_\nu} = (\limsup a_\nu)(\limsup \frac{1}{\beta_\nu})$$

$$\geqq \liminf a_\nu \frac{1}{\beta_\nu} = \liminf \frac{a_\nu}{\beta_\nu}$$

$$\geqq \begin{cases} (\limsup a_\nu)(\liminf \frac{1}{\beta_\nu}) = \dfrac{\limsup a_\nu}{\limsup \beta_\nu} \\ (\liminf a_\nu)(\limsup \frac{1}{\beta_\nu}) = \dfrac{\liminf a_\nu}{\liminf \beta_\nu} \end{cases}$$

$$\geqq \limsup a_\nu \frac{1}{\beta_\nu} = \limsup \frac{a_\nu}{\beta_\nu}$$

$$\geqq (\liminf a_\nu)(\liminf \frac{1}{\beta_\nu}) = \frac{\liminf a_\nu}{\limsup \beta_\nu}$$

(iii) Προφανῶς ἰσχύει $\liminf \frac{1}{\beta_\nu} \geqq 0$ καὶ ἐπομένως ἐφαρμόζοντες τὴν πρότασιν (ii) τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως 22, λαμβάνομεν

$$\frac{\limsup a_\nu}{\limsup \beta_\nu} = \limsup a_\nu \frac{1}{\limsup \beta_\nu} = (\limsup a_\nu)(\liminf \frac{1}{\beta_\nu})$$

$$\geqq \limsup a_\nu \frac{1}{\beta_\nu} = \limsup \frac{a_\nu}{\beta_\nu}$$

$$\geqq \begin{cases} (\limsup a_\nu)(\limsup \frac{1}{\beta_\nu}) = \dfrac{\limsup a_\nu}{\liminf \beta_\nu} \\ (\liminf a_\nu)(\liminf \frac{1}{\beta_\nu}) = \dfrac{\liminf a_\nu}{\limsup \beta_\nu} \end{cases}$$

$$\geqq \liminf a_\nu \frac{1}{\beta_\nu} = \liminf \frac{a_\nu}{\beta_\nu}$$

$$\geqq (\liminf a_\nu)(\limsup \frac{1}{\beta_\nu}) = \frac{\liminf a_\nu}{\liminf \beta_\nu}$$

(iv) Προφανῶς ἰσχύει $\limsup \frac{1}{\beta_\nu} \leqq 0$ καὶ ἐπομένως ἐφαρμόζοντες πάλιν τὴν πρότασιν (ii) τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως 22, λαμβάνομεν

$$\frac{\liminf a_\nu}{\liminf \beta_\nu} = \frac{1}{\liminf \beta_\nu} \liminf a_\nu = (\limsup \frac{1}{\beta_\nu})(\liminf a_\nu)$$

$$\geqq \limsup \frac{1}{\beta_\nu} a_\nu = \limsup \frac{a_\nu}{\beta_\nu}$$

$$\geqq \begin{cases} (\limsup \frac{1}{\beta_\nu})(\limsup a_\nu) = \dfrac{\limsup a_\nu}{\liminf \beta_\nu} \\ (\liminf \frac{1}{\beta_\nu})(\liminf a_\nu) = \dfrac{\liminf a_\nu}{\limsup \beta_\nu} \end{cases}$$

$$\geqq \liminf \frac{1}{\beta_\nu} a_\nu = \liminf \frac{a_\nu}{\beta_\nu}$$

$$\geqq (\liminf \frac{1}{\beta_\nu})(\limsup a_\nu) = \frac{\limsup a_\nu}{\limsup \beta_\nu}$$

24. Χρησιμοποιοῦντες τὰς ἐννοίας τοῦ ἀνωτέρου καὶ κατωτέρου ὁρίου ἀκολουθίας πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἀποδείξατε τὸ κριτήριον συγκλίσεως τοῦ Cauchy, ἤτοι ὅτι μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι συγκλίνουσα τότε καὶ μόνον τότε, ἄν εἶναι βασική.

Λύσις. Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι κάθε βασικὴ ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι καὶ συγκλίνουσα, διότι, ὡς γνωστόν, κάθε συγκλίνουσα ἀκολουθία εἶναι καὶ βασική. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τυχοῦσαν βασικὴν ἀκολουθίαν πραγματικῶν ἀριθμῶν $(a_\nu)_{\nu\in N}$, ἡ ὁποία, ὡς γνωστόν, εἶναι καὶ φραγμένη, δηλαδὴ ἰσχύει

$$-\infty < \liminf a_\nu \leqq \limsup a_\nu < +\infty$$

καὶ ἐπομένως ἀμφότερα τὰ $\liminf a_\nu$ καὶ $\limsup a_\nu$ εἶναι πεπερασμένοι πραγματικοὶ ἀριθμοί.

Ἀκολούθως, ὑποθέτομεν ὅτι $\liminf a_\nu \neq \limsup a_\nu$ καὶ θεωροῦμεν δύο πραγματικοὺς ἀριθμοὺς β καὶ γ μὲ

$$\liminf a_\nu < \beta < \gamma < \limsup a_\nu$$

Προφανῶς τὰ σύνολα

$$B = \{\nu\in N : a_\nu < \beta\} \quad \text{καὶ} \quad \Gamma = \{\nu\in N : \gamma < a_\nu\}$$

εἶναι ἀπέραντα.

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι, λόγῳ τῆς βασικότητος τῆς $(a_\nu)_{\nu\in N}$, ὑπάρχει δείκτης $n\in N$ τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$(\forall\, \mu,\nu \text{ ἐν } N)\ \mu > n \text{ καί } \nu > n \Rightarrow |a_\mu - a_\nu| < \gamma - \beta$$

Τέλος, ἐκλέγοντες δείκτας $\mu \in B$ καί $\nu \in \Gamma$ μέ $\mu > n$ καί $\nu > n$ θά ἔχωμεν, ἀφ' ἑνός μέν

$$|a_\mu - a_\nu| < \gamma - \beta$$

ἀφ' ἑτέρου δέ

$$|a_\mu - a_\nu| = a_\nu - a_\mu > \gamma - \beta$$

Ἐδείχθη λοιπόν ὅτι $\liminf a_\nu = \limsup a_\nu$, τό ὁποῖον σημαίνει ὅτι ἡ ἀκολουθία $(a_\nu)_{\nu \in N}$ εἶναι συγκλίνουσα, διότι τά $\liminf a_\nu$ καί $\limsup a_\nu$, ὡς ἀνωτέρω ἐδείχθη, εἶναι πεπερασμένοι πραγματικοί ἀριθμοί.

25. Δείξατε ὅτι :

1) $\lim \dfrac{(\nu+1)^\nu}{\nu^{\nu+1}} = 0$ 2) $\lim \left(1+\dfrac{1}{2\nu}\right)^\nu = \sqrt{e}$

3) $\lim \left(1-\dfrac{1}{\nu}\right)^\nu = \dfrac{1}{e}$ 4) $\lim \left(1-\dfrac{1}{\nu^2}\right)^\nu = 1$

5) $\lim \left(1-\dfrac{1}{\nu+2}\right)^{\nu+8} = \dfrac{1}{e}$ 6) $\lim \left(1+\dfrac{1}{\nu+1}\right)^{6\nu} = e^6$

Λύσις. 1) Ἔχομεν

$$\frac{(\nu+1)^\nu}{\nu^{\nu+1}} = \frac{1}{\nu}\,\frac{(\nu+1)^\nu}{\nu^\nu} = \frac{1}{\nu}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$$

καί ἑπομένως

$$\lim \frac{(\nu+1)^\nu}{\nu^{\nu+1}} = \left(\lim \frac{1}{\nu}\right) \lim\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu = 0\cdot e = 0$$

2) Ἔχομεν

$$\left(1+\frac{1}{2\nu}\right)^\nu = \left[\left(1+\frac{1}{2\nu}\right)^{2\nu}\right]^{\frac{1}{2}}$$

καί ἐπειδή

$$\lim\left(1+\frac{1}{2\nu}\right)^{2\nu} = \lim\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu = e$$

λαμβάνομεν

$$\lim\left(1+\frac{1}{2\nu}\right)^\nu = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

3) Ἔχομεν

$$\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^\nu = \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^\nu = \frac{\nu-1}{\nu}\,\frac{1}{\left(\frac{\nu}{\nu-1}\right)^{\nu-1}} = \frac{\nu-1}{\nu}\,\frac{1}{\left(\frac{\nu-1+1}{\nu-1}\right)^{\nu-1}} = \frac{\nu-1}{\nu}\,\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)^{\nu-1}}$$

Ἀλλά

$$\lim \frac{\nu-1}{\nu} = 1 \quad \text{καὶ} \quad \lim \left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)^{\nu-1} = \lim \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} = e$$

καὶ ἐπομένως

$$\lim \left(1-\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} = 1 \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$

4) Ἔχομεν

$$\left(1-\frac{1}{\nu^2}\right)^{\nu} = \left[\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\right]^{\nu} = \left(1-\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$$

καὶ ἐπομένως, ἐπειδὴ

$$\lim \left(1-\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} = \frac{1}{e} \quad \text{καὶ} \quad \lim \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} = e$$

λαμβάνομεν

$$\lim \left(1-\frac{1}{\nu^2}\right)^{\nu} = \frac{1}{e} \cdot e = 1$$

5) Ἔχομεν

$$\left(1-\frac{1}{\nu+2}\right)^{\nu+8} = \left(1-\frac{1}{\nu+2}\right)^{6}\left(1-\frac{1}{\nu+2}\right)^{\nu+2}$$

καὶ ἐπομένως, ἐπειδὴ

$$\lim \left(1-\frac{1}{\nu+2}\right) = 1-0 = 1 \quad \text{καὶ} \quad \lim \left(1-\frac{1}{\nu+2}\right)^{\nu+2} = \lim \left(1-\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} = \frac{1}{e}$$

λαμβάνομεν

$$\lim \left(1-\frac{1}{\nu+2}\right)^{\nu+8} = 1^6 \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$

6) Ἔχομεν

$$\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{6\nu} = \frac{\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{6(\nu+1)}}{\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{6}} = \frac{\left[\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1}\right]^{6}}{\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{6}}$$

καὶ ἐπομένως, ἐπειδὴ

$$\lim \left(1+\frac{1}{\nu+1}\right) = 1+0 = 1 \quad \text{καὶ} \quad \lim \left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1} = \lim \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} = e$$

λαμβάνομεν

$$\lim \left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{6\nu} = \frac{e^6}{1^6} = e^6$$

26. Δείξατε ὅτι :

α) $\lim\limits_{\nu} \left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{\nu!}\right) = e$

β) διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν,

$$0 < e - \left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{\nu!}\right) < \frac{1}{\nu!\nu}$$

γ) ὁ ἀριθμός e εἶναι ἄρρητος.

Λύσις. α) Δυνάμει τοῦ διωνυμικοῦ τύπου τοῦ Newton, ἔχομεν

$$(1+\frac{1}{\mu})^{\mu}=1+\sum_{\kappa=1}^{\mu}\binom{\mu}{\kappa}\frac{1}{\mu^{\kappa}}$$

Ἀλλά

$$\binom{\mu}{\kappa}\frac{1}{\mu^{\kappa}}=\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-\kappa+1)}{\kappa!}\,\frac{1}{\mu^{\kappa}}=\frac{1}{\kappa!}(1-\frac{1}{\mu})(1-\frac{2}{\mu})\cdots(1-\frac{\kappa-1}{\mu})$$

καί ἐπομένως διά τυχόντας φυσικούς ἀριθμούς μ,ν μέ $\mu\geqq\nu$ ἰσχύει

$$(1+\frac{1}{\mu})^{\mu}=1+\sum_{\kappa=1}^{\mu}\frac{1}{\kappa!}(1-\frac{1}{\mu})(1-\frac{2}{\mu})\cdots(1-\frac{\kappa-1}{\mu})$$

$$=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{\mu})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{\mu})(1-\frac{2}{\mu})+\cdots+\frac{1}{\nu!}(1-\frac{1}{\mu})\cdots(1-\frac{\nu-1}{\mu})$$

$$+\cdots+\frac{1}{\mu!}(1-\frac{1}{\mu})\cdots(1-\frac{\mu-1}{\mu})$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου λαμβάνομεν, ἀφ' ἑνός μέν

$$(1+\frac{1}{\mu})^{\mu}\geqq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{\mu})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{\mu})(1-\frac{2}{\mu})+\cdots+\frac{1}{\nu!}(1-\frac{1}{\mu})\cdots(1-\frac{\nu-1}{\mu})$$

διά κάθε $\mu\geqq\nu$ καί ἐπομένως

$$e=\lim_{\mu}(1+\frac{1}{\mu})^{\mu}\geqq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{\nu!}$$

ἀφ' ἑτέρου δέ διά $\mu=\nu$,

$$(1+\frac{1}{\nu})^{\nu}\leqq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{\nu!}$$

Ἄρα, ἡ ἀκολουθία (a_ν),

$$a_\nu=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{\nu!}$$

ὡς (γνησίως) αὔξουσα καί ἄνω φραγμένη, εἶναι συγκλίνουσα καί μάλιστα ἰσχύει

$$e\geqq\lim a_\nu \quad \text{καί} \quad e=\lim(1+\frac{1}{\nu})^{\nu}\leqq\lim a_\nu$$

ἤτοι

$$\lim_{\nu}(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{\nu!})=e$$

β) Θέτομεν

$$a_\nu=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{\nu!}$$

καὶ παρατηροῦμεν ὅτι διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν ἰσχύει

$$a_\nu < e, \quad \text{ἤτοι} \quad e - a_\nu > 0$$

διότι ἡ ἀκολουθία (a_ν) εἶναι γνησίως αὔξουσα καὶ δυνάμει τῆς α), $\lim a_\nu = e$.

Ἐπίσης, διὰ τυχόντας φυσικοὺς ἀριθμοὺς μ, ν ἔχομεν

$$\begin{aligned} a_{\nu+\mu} - a_\nu &= \frac{1}{(\nu+1)!} + \frac{1}{(\nu+2)!} + \cdots + \frac{1}{(\nu+\mu)!} \\ &= \frac{1}{(\nu+1)!}\left[1 + \frac{1}{\nu+2} + \frac{1}{(\nu+2)(\nu+3)} + \cdots + \frac{1}{(\nu+2)(\nu+3)\cdots(\nu+\mu)}\right] \\ &\leqq \frac{1}{(\nu+1)!}\left[1 + \frac{1}{\nu+2} + \frac{1}{(\nu+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(\nu+2)^{\mu-1}}\right] \end{aligned}$$

Ἀλλά, δυνάμει τῆς ἀσκήσεως 10, ἰσχύει

$$\lim_\mu \left[1 + \frac{1}{\nu+2} + \frac{1}{(\nu+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(\nu+2)^{\mu-1}}\right] = \frac{1}{1 - \frac{1}{\nu+2}} = \frac{\nu+2}{\nu+1}$$

καὶ ἐπομένως

$$e - a_\nu = \lim_\mu a_{\nu+\mu} - a_\nu \leqq \frac{1}{(\nu+1)!}\,\frac{\nu+2}{\nu+1} = \frac{1}{\nu!}\,\frac{\nu+2}{(\nu+1)^2} < \frac{1}{\nu!}\,\frac{1}{\nu}$$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν ἰσχύει

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{\nu!}\right) < \frac{1}{\nu!\,\nu}$$

γ) Ὑποθέτομεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς e εἶναι ῥητὸς καὶ συγκεκριμένως ὅτι $e = \frac{\mu}{\nu}$, ὅπου $\nu \in \mathbb{N}$. Δυνάμει τῆς β), λαμβάνομεν τότε

$$0 < \frac{\mu}{\nu} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{\nu!}\right) < \frac{1}{\nu!\,\nu}$$

καὶ ἐπομένως

$$0 < \nu!\,\mu - \nu\left(\nu! + \frac{\nu!}{1!} + \frac{\nu!}{2!} + \cdots + \frac{\nu!}{(\nu-1)!} + 1\right) < 1$$

Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, διότι ὁ ἀριθμὸς

$$\nu!\,\mu - \nu\left(\nu! + \frac{\nu!}{1!} + \frac{\nu!}{2!} + \cdots + \frac{\nu!}{(\nu-1)!} + 1\right)$$

εἶναι προφανῶς ἀκέραιος.

Ἄρα ὁ ἀριθμὸς e εἶναι ἄρρητος.

27. Δείξατε ὅτι διά κάθε ρητόν ἀριθμόν ρ ἰσχύει

$$\lim\left(1+\frac{\rho}{\nu}\right)^{\nu}=e^{\rho}$$

Λύσις. Ὑποθέτομεν κατ' ἀρχήν ὅτι ὁ ἀριθμός ρ εἶναι φυσικός, ὁπότε ἔχομεν

$$1+\frac{\rho}{\nu}=\frac{\nu+\rho}{\nu}=\frac{\nu+1}{\nu}\,\frac{\nu+2}{\nu+1}\cdots\frac{\nu+\rho}{\nu+\rho-1}=\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\nu+\rho-1}\right)$$

καί ἐπομένως

$$\left(1+\frac{\rho}{\nu}\right)^{\nu}=\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu}\cdots\left(1+\frac{1}{\nu+\rho-1}\right)^{\nu}$$

Ἀλλά διά κάθε $j=0,1,2,\dots,\rho-1$ ἔχομεν

$$\left(1+\frac{1}{\nu+j}\right)^{\nu}=\frac{\left(1+\frac{1}{\nu+j}\right)^{\nu+j}}{\left(1+\frac{1}{\nu+j}\right)^{j}}\,.$$

ὁπότε

$$\lim_{\nu}\left(1+\frac{1}{\nu+j}\right)^{\nu}=\frac{\lim\limits_{\nu}\left(1+\frac{1}{\nu+j}\right)^{\nu+j}}{\lim\limits_{\nu}\left(1+\frac{1}{\nu+j}\right)^{j}}=\frac{e}{1^{j}}=e$$

Ἄρα

$$\lim_{\nu}\left(1+\frac{\rho}{\nu}\right)^{\nu}=\underbrace{e\cdot e\cdots e}_{\rho\ \text{παράγοντες}}=e^{\rho}$$

Ἐν συνεχείᾳ ὑποθέτομεν ὅτι ὁ ρ εἶναι ἀρνητικός ἀκέραιος, ὁπότε ὁ $-\rho$ εἶναι φυσικός ἀριθμός καί ἐπομένως

$$\lim_{\nu}\left(1+\frac{-\rho}{\nu}\right)^{\nu}=e^{-\rho}$$

Ἀλλά διά κάθε φυσικόν ἀριθμόν ν μέ $\nu>-\rho$ ἰσχύει

$$\left(1+\frac{\rho}{\nu}\right)^{\nu}=\left(\frac{\nu+\rho}{\nu}\right)^{\nu}=\frac{1}{\left(\frac{\nu}{\nu+\rho}\right)^{\nu}}=\frac{1}{\left(1+\frac{-\rho}{\nu+\rho}\right)^{\nu}}=\frac{\left(1+\frac{-\rho}{\nu+\rho}\right)^{\rho}}{\left(1+\frac{-\rho}{\nu+\rho}\right)^{\nu+\rho}}$$

καί ἐπομένως

$$\lim_{\nu}\left(1+\frac{\rho}{\nu}\right)^{\nu}=\frac{\lim\limits_{\nu}\left(1+\frac{-\rho}{\nu+\rho}\right)^{\rho}}{\lim\limits_{\nu}\left(1+\frac{-\rho}{\nu+\rho}\right)^{\nu+\rho}}=\frac{1^{\rho}}{e^{-\rho}}=e^{\rho}$$

Ἐπειδή προφανῶς ἰσχύει καί

$$\lim\left(1+\frac{0}{\nu}\right)^{\nu}=\lim 1=1=e^{0}$$

ἐδείχθη ὅτι διὰ τυχόντα ἀκέραιον ἀριθμὸν κ ἰσχύει

$$\lim_{\nu} \left(1+\frac{\kappa}{\nu}\right)^{\nu} = e^{\kappa}$$

Τέλος, ὑποθέτομεν ὅτι $\rho = \frac{\kappa}{\mu}$, ὅπου κ ἀκέραιος καὶ μ φυσικὸς ἀριθμός, ὁπότε ἔχομεν

$$\left(1+\frac{\rho}{\nu}\right)^{\nu} = \left(1+\frac{\kappa}{\mu\nu}\right)^{\nu} = \left[\left(1+\frac{\kappa}{\mu\nu}\right)^{\mu\nu}\right]^{\frac{1}{\mu}}$$

Ἀλλά, ἡ ἀκολουθία $\left(1+\frac{\kappa}{\mu\nu}\right)^{\mu\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}$ εἶναι ὑπακολουθία τῆς $\left(1+\frac{\kappa}{\nu}\right)^{\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}$ καὶ ἐπομένως

$$\lim_{\nu} \left(1+\frac{\kappa}{\mu\nu}\right)^{\mu\nu} = e^{\kappa}$$

Ἄρα ἔχομεν

$$\lim_{\nu} \left(1+\frac{\rho}{\nu}\right)^{\nu} = (e^{\kappa})^{\frac{1}{\mu}} = e^{\frac{\kappa}{\mu}} = e^{\rho}$$

28. Δείξατε ὅτι

1) $\lim \sqrt[\nu]{\nu} = 1$ 2) $\lim \sqrt[\nu]{\nu!} = +\infty$

3) $\lim \frac{\sqrt[\nu]{\nu!}}{\nu} = \frac{1}{e}$ 4) $\lim \sqrt[\nu]{\frac{\nu!}{5\cdot 9\cdots(4\nu+1)}} = \frac{1}{4}$

Λύσις. Βάσει τοῦ γνωστοῦ κριτηρίου

$$\lim \sqrt[\nu]{a_\nu} = \lim \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$$

ἔχομεν :

$$\lim \sqrt[\nu]{\nu} = \lim \frac{\nu+1}{\nu} = 1$$

$$\lim \sqrt[\nu]{\nu!} = \lim \frac{(\nu+1)!}{\nu!} = \lim (\nu+1) = +\infty$$

$$\lim \frac{\sqrt[\nu]{\nu!}}{\nu} = \lim \sqrt[\nu]{\frac{\nu!}{\nu^\nu}} = \lim \frac{\frac{(\nu+1)!}{(\nu+1)^{\nu+1}}}{\frac{\nu!}{\nu^\nu}} = \lim \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}} = \frac{1}{e}$$

$$\lim \sqrt[\nu]{\frac{\nu!}{5\cdot 9\cdots(4\nu+1)}} = \lim \frac{\frac{(\nu+1)!}{5\cdot 9\cdots(4\nu+1)[4(\nu+1)+1]}}{\frac{\nu!}{5\cdot 9\cdots(4\nu+1)}} = \lim \frac{\nu+1}{4\nu+5} = \frac{1}{4}$$

29. Δείξατε ὅτι, ἄν (a_ν) εἶναι τυχοῦσα ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν συγκλίνουσα ἐν $\mathbb{R}^*$, τότε ἰσχύει

$$\text{α)}\quad \lim \frac{a_1+a_2+\cdots+a_\nu}{\nu} = \lim a_\nu$$

$$\text{β)}\quad \lim \frac{\nu a_1+(\nu-1)a_2+\cdots+2a_{\nu-1}+a_\nu}{\nu(\nu+1)} = \frac{1}{2}\lim a_\nu$$

$$\text{γ)}\quad \lim_\nu \frac{\binom{\nu+\kappa-2}{\nu-1}a_1+\binom{\nu+\kappa-3}{\nu-2}a_2+\cdots+\binom{\kappa}{1}a_{\nu-1}+a_\nu}{\binom{\nu+\kappa-1}{\nu-1}} = \lim a_\nu$$

(κ εἶναι τυχὼν φυσικὸς ἀριθμός).

Λύσις. Ἐφαρμόζομεν ἐνταῦθα τὸν γνωστὸν τύπον

$$\lim \frac{p_\nu a_1+p_{\nu-1}a_2+\cdots+p_1a_\nu}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu} = \lim a_\nu$$

ὅπου (p_ν) εἶναι τυχοῦσα ἀκολουθία θετικῶν ἀριθμῶν μέ

$$\lim \frac{p_\nu}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu} = 0$$

α) Διὰ κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ λαμβάνομεν $p_\nu=1$ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι

$$\frac{p_\nu}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu}=\frac{1}{\nu} \quad \text{καὶ} \quad \frac{p_\nu a_1+p_{\nu-1}a_2+\cdots+p_1a_\nu}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu} = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_\nu}{\nu}$$

Ἀλλὰ $\lim\frac{1}{\nu}=0$ καὶ ἑπομένως

$$\lim \frac{a_1+a_2+\cdots+a_\nu}{\nu} = \lim a_\nu$$

β) Διὰ κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ λαμβάνομεν $p_\nu=\nu$ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι

$$\frac{\nu}{1+2+\cdots+\nu} = \frac{\nu}{\frac{\nu(\nu+1)}{2}} = \frac{2}{\nu+1}$$

καὶ

$$\frac{p_\nu a_1+p_{\nu-1}a_2+\cdots+p_1a_\nu}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu} = 2\,\frac{\nu a_1+(\nu-1)a_2+\cdots+2a_{\nu-1}+a_\nu}{\nu(\nu+1)}$$

Ἀλλὰ $\lim\frac{2}{\nu+1}=0$ καὶ ἑπομένως

$$\lim \frac{\nu a_1+(\nu-1)a_2+\cdots+2a_{\nu-1}+a_\nu}{\nu(\nu+1)} = \frac{1}{2}\lim a_\nu$$

γ) Διὰ κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ λαμβάνομεν $p_\nu=\binom{\nu+\kappa-2}{\nu-1}$ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι

$$\frac{p_\nu}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu}=\frac{\binom{\nu+\kappa-2}{\nu-1}}{\binom{\nu+\kappa-2}{\nu-1}+\binom{\nu+\kappa-3}{\nu-2}+\cdots+\binom{\kappa}{1}+1}$$

$$=\frac{\binom{\nu+\kappa-2}{\nu-1}}{\binom{\nu+\kappa-1}{\nu-1}}=\frac{\dfrac{(\nu+\kappa-2)!}{(\nu-1)!(\kappa-1)!}}{\dfrac{(\nu+\kappa-1)!}{(\nu-1)!\,\kappa!}}=\frac{\kappa}{\nu+\kappa-1}$$

καί

$$\frac{p_\nu a_1+p_{\nu-1}a_2+\cdots+p_1a_\nu}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu}=\frac{\binom{\nu+\kappa-2}{\nu-1}a_1+\binom{\nu+\kappa-3}{\nu-2}a_2+\cdots+\binom{\kappa}{1}a_{\nu-1}+a_\nu}{\binom{\nu+\kappa-2}{\nu-1}+\binom{\nu+\kappa-3}{\nu-2}+\cdots+\binom{\kappa}{1}+1}$$

$$=\frac{\binom{\nu+\kappa-2}{\nu-1}a_1+\binom{\nu+\kappa-3}{\nu-2}a_2+\cdots+\binom{\kappa}{1}a_{\nu-1}+a_\nu}{\binom{\nu+\kappa-1}{\nu-1}}$$

Ἀλλά $\lim\limits_{\nu}\dfrac{\kappa}{\nu+\kappa-1}=0$ καί ἑπομένως

$$\lim_{\nu}\frac{\binom{\nu+\kappa-2}{\nu-1}a_1+\binom{\nu+\kappa-3}{\nu-2}a_2+\cdots+\binom{\kappa}{1}a_{\nu-1}+a_\nu}{\binom{\nu+\kappa-1}{\nu-1}}=\lim a_\nu$$

Σημείωσις. Εἰς τήν τελευταίαν περίπτωσιν γ) ἐχρησιμοποιήθη ὁ τύπος

$$\binom{\nu+\kappa-2}{\nu-1}+\binom{\nu+\kappa-3}{\nu-2}+\cdots+\binom{\kappa}{1}+1=\binom{\nu+\kappa-1}{\nu-1}$$

ὁ ὁποῖος συνάγεται ἐκ τοῦ ἁπλοῦ τύπου

$$\binom{m}{n}+\binom{m}{n-1}=\binom{m+1}{n}$$

Πράγματι· δυνάμει τοῦ τελευταίου τύπου, ἔχομεν :

$$\begin{aligned}
\binom{\nu+\kappa-2}{\nu-1}&+\binom{\nu+\kappa-2}{\nu-2}=\binom{\nu+\kappa-1}{\nu-1}\\
\binom{\nu+\kappa-3}{\nu-2}&+\binom{\nu+\kappa-3}{\nu-3}=\binom{\nu+\kappa-2}{\nu-2}\\
\binom{\nu+\kappa-4}{\nu-3}&+\binom{\nu+\kappa-4}{\nu-4}=\binom{\nu+\kappa-3}{\nu-3}\\
\vdots\quad&\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\\
\binom{\kappa+1}{2}&+\binom{\kappa+1}{1}=\binom{\kappa+2}{2}\\
\binom{\kappa}{1}&+\quad 1\quad=\binom{\kappa+1}{1}
\end{aligned}$$

όποτε δι' άθροίσεως κατά μέλη λαμβάνομεν

$$\binom{\nu+\kappa-2}{\nu-1}+\binom{\nu+\kappa-3}{\nu-2}+\cdots+\binom{\kappa}{1}+1=\binom{\nu+\kappa-1}{\nu-1}$$

30. Δείξατε ότι διά τυχοῦσαν ἀκολουθίαν πραγματικῶν ἀριθμῶν (a_ν), ἰσχύει

$$\lim(a_{\nu+1}-a_\nu)=\ell \Rightarrow \lim\frac{a_\nu}{\nu}=\ell$$

Λύσις. Ὑποθέτομεν ὅτι $\lim(a_{\nu+1}-a_\nu)=\ell$, ὁπότε, δυνάμει τῆς ἀσκήσεως 29α), λαμβάνομεν

$$\lim\frac{a_{\nu+1}-a_1}{\nu}=\lim\frac{(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_\nu-a_{\nu-1})+(a_{\nu+1}-a_\nu)}{\nu}$$

$$=\lim(a_{\nu+1}-a_\nu)=\ell$$

Ἀλλά

$$\frac{a_{\nu+1}}{\nu+1}=\frac{a_{\nu+1}-a_1+a_1}{\nu+1}=\frac{a_{\nu+1}-a_1}{\nu+1}+\frac{a_1}{\nu+1}$$

καί ἐπομένως

$$\lim\frac{a_\nu}{\nu}=\lim\frac{a_{\nu+1}}{\nu+1}=\ell+0=\ell$$

31. Δείξατε ὅτι, ἄν (a_ν) εἶναι τυχοῦσα συγκλίνουσα ἐν $\mathbb{R}^*$ ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν καί (p_ν) τυχοῦσα ἀκολουθία μή ἀρνητικῶν ἀριθμῶν μέ $\lim(p_1+p_2+\cdots+p_\nu)=+\infty$, τότε ἰσχύει

$$\lim\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_\nu a_\nu}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu}=\lim a_\nu$$

Λύσις. Ὑποθέτομεν κατά πρῶτον ὅτι ἡ ἀκολουθία (a_ν) εἶναι συγκλίνουσα (ἐν $\mathbb{R}$) καί θέτομεν $\lim a_\nu=\ell$. Θεωροῦμεν τώρα τυχόντα θετικόν ἀριθμόν ε, ὁπότε ὑπάρχει $m\in\mathbb{N}$ τοιοῦτον, ὥστε διά κάθε φυσικόν ἀριθμόν ν μέ $\nu>m$ νά ἰσχύῃ

$$|a_\nu-\ell|<\varepsilon$$

Χωρίς βλάβην τῆς γενικότητος, ὑποθέτομεν ὅτι $p_1+p_2+\cdots+p_m>0$ καί παρατηροῦμεν ὅτι διά κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ μέ $\nu>m$ ἰσχύει

$$\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_\nu a_\nu}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu}-\ell=\frac{p_1(a_1-\ell)+p_2(a_2-\ell)+\cdots+p_\nu(a_\nu-\ell)}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu}$$

$$=\frac{p_1(a_1-\ell)+\cdots+p_m(a_m-\ell)}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu}+\frac{p_{m+1}(a_{m+1}-\ell)+\cdots+p_\nu(a_\nu-\ell)}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu}$$

καὶ ἐπομένως

$$\left|\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_\nu a_\nu}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu}-\ell\right| \leqq \frac{|p_1(a_1-\ell)+\cdots+p_m(a_m-\ell)|}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu}+\frac{p_{m+1}|a_{m+1}-\ell|+\cdots+p_\nu|a_\nu-\ell|}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu}$$

$$< \frac{A}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu}+\frac{p_{m+1}+\cdots+p_\nu}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu}\varepsilon$$

$$\leqq \frac{A}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu}+\varepsilon$$

ὅπου ἐτέθη $A=|p_1(a_1-\ell)+\cdots+p_m(a_m-\ell)|$.

Ἀλλά, ἐπειδή

$$\lim \frac{A}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu}=\frac{A}{+\infty}=0$$

ὑπάρχει $n\in\mathbb{N}$ μὲ $n>m$ τοιοῦτον, ὥστε διὰ κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ μὲ $\nu>n$ νὰ ἰσχύῃ

$$\frac{A}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu}<\varepsilon$$

καὶ ἐπομένως

$$\left|\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_\nu a_\nu}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu}-\ell\right|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

Ἄρα, ἐπειδὴ τὸ ε εἶναι τυχόν, ἰσχύει

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists n\in\mathbb{N})(\forall\nu\in\mathbb{N})\ \nu>n \Rightarrow \left|\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_\nu a_\nu}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu}-\ell\right|<2\varepsilon$$

τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι

$$\lim \frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_\nu a_\nu}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu}=\ell=\lim a_\nu$$

Ἀκολούθως ὑποθέτομεν ὅτι $\lim a_\nu=+\infty$ καὶ θεωροῦμεν τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν ε, ὁπότε ὑπάρχει $m\in\mathbb{N}$ τοιοῦτον, ὥστε διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν μὲ $\nu>m$ νὰ ἰσχύῃ

$$a_\nu>\frac{1}{\varepsilon}$$

Χωρὶς βλάβην τῆς γενικότητος, ὑποθέτομεν ὅτι $p_1+p_2+\cdots+p_m>0$ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι διὰ κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ μὲ $\nu>m$ ἰσχύει

$$\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_\nu a_\nu}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu}=\frac{p_1a_1+\cdots+p_ma_m}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu}+\frac{p_{m+1}a_{m+1}+\cdots+p_\nu a_\nu}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu}$$

$$>\frac{p_1a_1+\cdots+p_ma_m}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu}+\frac{p_{m+1}+\cdots+p_\nu}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu}\,\frac{1}{\varepsilon}$$

Ἀλλά, ἐπειδή

$$\lim_{\nu} \frac{p_1a_1+\cdots+p_ma_m}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu} = \frac{p_1a_1+\cdots+p_ma_m}{+\infty} = 0$$

καί

$$\lim_{\nu} \frac{p_{m+1}+\cdots+p_\nu}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu} = \lim_{\nu}\left(1-\frac{p_1+p_2+\cdots+p_m}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu}\right) = 1-\frac{p_1+p_2+\cdots+p_m}{+\infty} = 1$$

ὑπάρχει $n\in N$ μέ $n>m$ τοιοῦτον, ὥστε διά κάθε $\nu\in N$ μέ $\nu>n$ νά ἰσχύῃ

$$\frac{p_1a_1+\cdots+p_ma_m}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu} > -\frac{1}{4\varepsilon} \quad \text{καί} \quad \frac{p_{m+1}+\cdots+p_\nu}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu} > \frac{1}{2}$$

καί ἐπομένως

$$\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_\nu a_\nu}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu} > -\frac{1}{4\varepsilon}+\frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{4}\frac{1}{\varepsilon}$$

Ἄρα, ἐπειδή τό ε εἶναι τυχόν, ἰσχύει

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists n\in N)(\forall \nu\in N)\ \nu>n \Longrightarrow \frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_\nu a_\nu}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu} > \frac{1}{4}\frac{1}{\varepsilon}$$

τό ὁποῖον σημαίνει ὅτι

$$\lim \frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_\nu a_\nu}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu} = +\infty = \lim a_\nu$$

Τέλος, ὑποθέτομεν ὅτι $\lim a_\nu = -\infty$, ὁπότε $\lim(-a_\nu) = +\infty$ καί ἐπομένως, ἐφαρμοζομένου τοῦ τελευταίου τύπου διά τήν ἀκολουθίαν $(-a_\nu)$, λαμβάνομεν

$$\lim \frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_\nu a_\nu}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu} = -\lim \frac{p_1(-a_1)+p_2(-a_2)+\cdots+p_\nu(-a_\nu)}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu}$$

$$= -\lim(-a_\nu) = -(+\infty) = -\infty = \lim a_\nu$$

32. Δείξατε ὅτι, ἄν (a_ν) εἶναι τυχοῦσα συγκλίνουσα ἐν $\mathbb{R}^*$ ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε ἰσχύει

$$\lim \frac{\binom{\nu}{1}a_1+\binom{\nu}{2}a_2+\cdots+\binom{\nu}{\nu}a_\nu}{2^\nu} = \lim a_\nu$$

Λύσις. Δυνάμει τοῦ διωνυμικοῦ τύπου τοῦ Newton, ἔχομεν

$$2^\nu = (1+1)^\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu}\binom{\nu}{\mu}1^{\nu-\mu}1^\mu = \sum_{\mu=0}^{\nu}\binom{\nu}{\mu} = 1+\binom{\nu}{1}+\binom{\nu}{2}+\cdots+\binom{\nu}{\nu}$$

ἤτοι

$$\binom{\nu}{1}+\binom{\nu}{2}+\cdots+\binom{\nu}{\nu}=2^{\nu}-1$$

Ἐπομένως, ἐπειδὴ $\lim(2^{\nu}-1)=+\infty$, δυνάμει τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως 31, ἰσχύει

$$\lim\frac{\binom{\nu}{1}a_1+\binom{\nu}{2}a_2+\cdots+\binom{\nu}{\nu}a_\nu}{2^{\nu}-1}=\lim a_\nu$$

Ἄρα, ἐπειδὴ

$$\frac{\binom{\nu}{1}a_1+\binom{\nu}{2}a_2+\cdots+\binom{\nu}{\nu}a_\nu}{2^{\nu}}=\frac{\binom{\nu}{1}a_1+\binom{\nu}{2}a_2+\cdots+\binom{\nu}{\nu}a_\nu}{2^{\nu}-1}\left(1-\frac{1}{2^{\nu}}\right)$$

λαμβάνομεν

$$\lim\frac{\binom{\nu}{1}a_1+\binom{\nu}{2}a_2+\cdots+\binom{\nu}{\nu}a_\nu}{2^{\nu}}=(\lim a_\nu)(1-0)=\lim a_\nu$$

33. Δείξατε ὅτι, ἄν $(a_\nu),(\beta_\nu)$ εἶναι τυχοῦσαι ἀκολουθίαι πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ ἡ (β_ν) εἶναι γνησίως αὔξουσα μὲ $\lim\beta_\nu=+\infty$, τότε ἰσχύει

$$\frac{a_{\nu+1}-a_\nu}{\beta_{\nu+1}-\beta_\nu}=\ell \implies \lim\frac{a_\nu}{\beta_\nu}=\ell$$

Λύσις. Ὑποθέτομεν ὅτι

$$\lim\frac{a_{\nu+1}-a_\nu}{\beta_{\nu+1}-\beta_\nu}=\ell$$

καὶ θέτομεν

$$A_\nu=\frac{a_{\nu+1}-a_\nu}{\beta_{\nu+1}-\beta_\nu}\quad\text{καὶ}\quad p_\nu=\beta_{\nu+1}-\beta_\nu$$

Ἔχομεν τότε

$$\frac{p_1A_1+p_2A_2+\cdots+p_\nu A_\nu}{p_1+p_2+\cdots+p_\nu}=\frac{a_{\nu+1}-a_1}{\beta_{\nu+1}-\beta_1}$$

καὶ μάλιστα

$$\lim(p_1+p_2+\cdots+p_\nu)=\lim(\beta_{\nu+1}-\beta_1)=+\infty-\beta_1=+\infty$$

Ἄρα, δυνάμει τῆς ἀσκήσεως 31, ἔχομεν

$$\lim\frac{a_{\nu+1}-a_1}{\beta_{\nu+1}-\beta_1}=\lim A_\nu=\ell$$

Ἀλλά

$$\frac{a_{\nu+1}}{\beta_{\nu+1}} = \frac{a_{\nu+1}-a_1}{\beta_{\nu+1}} + \frac{a_1}{\beta_{\nu+1}} = \frac{a_{\nu+1}-a_1}{\beta_{\nu+1}-\beta_1}\left(1-\frac{\beta_1}{\beta_{\nu+1}}\right) + \frac{a_1}{\beta_{\nu+1}}$$

καὶ ἑπομένως

$$\lim\frac{a_\nu}{\beta_\nu} = \lim\frac{a_{\nu+1}}{\beta_{\nu+1}} = \ell\left(1-\frac{\beta_1}{+\infty}\right) + \frac{a_1}{+\infty} = \ell(1-0)+0 = \ell$$

34. Δείξατε ὅτι, ἄν (a_ν) καὶ (β_ν) εἶναι συγκλίνουσαι ἀκολουθίαι πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε ἰσχύουν :

α) $$\lim\frac{a_1\beta_1+a_2\beta_2+\cdots+a_\nu\beta_\nu}{\nu} = (\lim a_\nu)(\lim\beta_\nu)$$

β) $$\lim\frac{a_1\beta_\nu+a_2\beta_{\nu-1}+\cdots+a_\nu\beta_1}{\nu} = (\lim a_\nu)(\lim\beta_\nu)$$

Λύσις. α) Ἡ ἀκολουθία $(a_\nu\beta_\nu)$ εἶναι προφανῶς συγκλίνουσα καὶ ἑπομένως, δυνάμει τῆς ἀσκήσεως 29α), ἔχομεν

$$\lim\frac{a_1\beta_1+a_2\beta_2+\cdots+a_\nu\beta_\nu}{\nu} = \lim a_\nu\beta_\nu = (\lim a_\nu)(\lim\beta_\nu)$$

β) Θέτομεν $\lim a_\nu = \ell_1$ καὶ $\lim\beta_\nu = \ell_2$ καὶ θεωροῦμεν τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν ε, ὁπότε ὑπάρχει $m\in\mathbb{N}$ τοιοῦτον, ὥστε διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν μὲ $\nu > m$ νὰ ἰσχύῃ

$$|a_\nu-\ell_1|<\varepsilon \quad\text{καὶ}\quad |\beta_\nu-\ell_2|<\varepsilon$$

Διὰ κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ μὲ $\nu > 2m$ ἔχομεν

$$\frac{a_1\beta_\nu+a_2\beta_{\nu-1}+\cdots+a_\nu\beta_1}{\nu} - \ell_1\ell_2 = \frac{(a_1\beta_\nu-\ell_1\ell_2)+(a_2\beta_{\nu-1}-\ell_1\ell_2)+\cdots+(a_\nu\beta_1-\ell_1\ell_2)}{\nu}$$

$$= \frac{(a_1\beta_\nu-\ell_1\ell_2)+\cdots+(a_m\beta_{\nu-m+1}-\ell_1\ell_2)}{\nu} + \frac{(a_{m+1}\beta_{\nu-m}-\ell_1\ell_2)+\cdots+(a_{\nu-m}\beta_{m+1}-\ell_1\ell_2)}{\nu}$$

$$+ \frac{(a_{\nu-m+1}\beta_m-\ell_1\ell_2)+\cdots+(a_\nu\beta_1-\ell_1\ell_2)}{\nu}$$

$$= A_\nu + \frac{(a_{m+1}\beta_{\nu-m}-\ell_1\ell_2)+\cdots+(a_\kappa\beta_{\nu-\kappa+1}-\ell_1\ell_2)+\cdots+(a_{\nu-m}\beta_{m+1}-\ell_1\ell_2)}{\nu} + B_\nu$$

ὅπου ἐτέθη

$$A_\nu = \frac{(a_1\beta_\nu-\ell_1\ell_2)+\cdots+(a_m\beta_{\nu-m+1}-\ell_1\ell_2)}{\nu} = \frac{a_1\beta_\nu+a_2\beta_{\nu-1}+\cdots+a_m\beta_{\nu-m+1}-m\ell_1\ell_2}{\nu}$$

καὶ

$$B_\nu = \frac{(a_{\nu-m+1}\beta_m - \ell_1\ell_2) + \cdots + (a_\nu\beta_1 - \ell_1\ell_2)}{\nu} = \frac{\beta_1 a_\nu + \beta_2 a_{\nu-1} + \cdots + \beta_m a_{\nu-m+1} - m\ell_1\ell_2}{\nu}$$

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι διὰ κάθε $\kappa = m+1, m+2, \cdots, \nu-m$ ἔχομεν

$$a_\kappa \beta_{\nu-\kappa+1} - \ell_1\ell_2 = \beta_{\nu-\kappa+1}(a_\kappa - \ell_1) + \ell_1(\beta_{\nu-\kappa+1} - \ell_2)$$

ὁπότε, ἂν M εἶναι ἓν φράγμα τῆς ἀκολουθίας (β_ν) (αὕτη, ὡς συγκλίνουσα, εἶναι προφανῶς φραγμένη), λαμβάνομεν

$$|a_\kappa\beta_{\nu-\kappa+1} - \ell_1\ell_2| \leqq |\beta_{\nu-\kappa+1}|\,|a_\kappa - \ell_1| + |\ell_1|\,|\beta_{\nu-\kappa+1} - \ell_2|$$

$$\leqq M\varepsilon + |\ell_1|\varepsilon = (M + |\ell_1|)\varepsilon$$

Ἄρα ἔχομεν καὶ

$$\left|\frac{a_1\beta_\nu + a_2\beta_{\nu-1} + \cdots + a_\nu\beta_1}{\nu} - \ell_1\ell_2\right| \leqq$$

$$\leqq |A_\nu| + \frac{|a_{m+1}\beta_{\nu-m} - \ell_1\ell_2| + \cdots + |a_{\nu-m}\beta_{m+1} - \ell_1\ell_2|}{\nu} + |B_\nu|$$

$$\leqq |A_\nu| + \frac{(\nu-2m)(M+|\ell_1|)\varepsilon}{\nu} + |B_\nu|$$

$$\leqq |A_\nu| + (M + |\ell_1|)\varepsilon + |B_\nu|$$

Αἱ ἀκολουθίαι (A_ν) καὶ (B_ν) εἶναι ἀμφότεραι μηδενικαί, διότι

$$\lim A_\nu = \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)\ell_2 - m\ell_1\ell_2}{+\infty} = 0$$

καὶ

$$\lim B_\nu = \frac{(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_m)\ell_1 - m\ell_1\ell_2}{+\infty} = 0$$

Ἄρα ὑπάρχει $n \in \mathbb{N}$ μὲ $n > 2m$ τοιοῦτον, ὥστε διὰ κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ μὲ $\nu > n$ νὰ ἰσχύῃ

$$|A_\nu| < \varepsilon \quad \text{καὶ} \quad |B_\nu| < \varepsilon$$

ὁπότε λαμβάνομεν καὶ

$$\left|\frac{a_1\beta_\nu + a_2\beta_{\nu-1} + \cdots + a_\nu\beta_1}{\nu} - \ell_1\ell_2\right| < \varepsilon + (M + |\ell_1|)\varepsilon + \varepsilon = (2 + M + |\ell_1|)\varepsilon$$

Ὥστε, ἐπειδὴ τὸ ε εἶναι τυχόν, ἰσχύει

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists n\in N)(\forall \nu\in N)\ \nu>n \Rightarrow \left|\frac{\alpha_1\beta_\nu+\alpha_2\beta_{\nu-1}+\cdots+\alpha_\nu\beta_1}{\nu}-\ell_1\ell_2\right|<(2+M+|\ell_1|)\varepsilon$$

τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι

$$\lim \frac{\alpha_1\beta_\nu+\alpha_2\beta_{\nu-1}+\cdots+\alpha_\nu\beta_1}{\nu}=\ell_1\ell_2=(\lim\alpha_\nu)(\lim\beta_\nu)$$

35. Ἔστω $(\alpha_\nu)_{\nu\in N}$ τυχοῦσα ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἂν θεωρήσωμεν τὰς ἀκολουθίας $(\beta_{\mu\nu})_{(\mu,\nu)\in N\times N}$ καὶ $(\gamma_{\mu\nu})_{(\mu,\nu)\in N\times N}$, ὅπου

$$\beta_{\mu\nu}=\max_{\kappa\in N_{\mu\nu}}\alpha_\kappa\ ,\qquad \gamma_{\mu\nu}=\min_{\kappa\in N_{\mu\nu}}\alpha_\kappa$$

καὶ

$$N_{\mu\nu}=\left\{\kappa\in N:\ \min\{\mu,\nu\}\leqq\kappa\leqq\max\{\mu,\nu\}\right\}$$

τότε δείξατε ὅτι ἰσχύει

$$\limsup\alpha_\nu=\lim_\mu(\lim_\nu\beta_{\mu\nu})=\lim_\nu(\lim_\mu\beta_{\mu\nu})$$

καὶ

$$\liminf\alpha_\nu=\lim_\mu(\lim_\nu\gamma_{\mu\nu})=\lim_\nu(\lim_\mu\gamma_{\mu\nu})$$

Λύσις. Διὰ κάθε $\mu\in N$ θέτομεν

$$N_\mu=\{\nu\in N:\ \nu\geqq\mu\}$$

καὶ παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ἀκολουθίαι $(\beta_{\mu\nu})_{\nu\in N_\mu}$ καὶ $(\gamma_{\mu\nu})_{\nu\in N_\mu}$ εἶναι μονότονοι καὶ μάλιστα ἡ πρώτη αὔξουσα καὶ ἡ δευτέρα φθίνουσα. Ἄρα

$$B_\mu=\lim_\nu\beta_{\mu\nu}=\sup\{\beta_{\mu\nu}:\nu\in N_\mu\}=\sup\{\alpha_\nu:\nu\in N \text{ καὶ } \nu\geqq\mu\}$$

καὶ

$$\Gamma_\mu=\lim_\nu\gamma_{\mu\nu}=\inf\{\gamma_{\mu\nu}:\nu\in N_\mu\}=\inf\{\alpha_\nu:\nu\in N \text{ καὶ } \nu\geqq\mu\}$$

Θεωροῦμεν τώρα τυχόντας δείκτας m, n ἐν N μὲ $m\leqq n$ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι διὰ κάθε $\nu\geqq\max\{m,n\}$ ἰσχύει

$$\beta_{m\nu}\geqq\beta_{n\nu}\quad \text{καὶ}\quad \gamma_{m\nu}\leqq\gamma_{n\nu}$$

ὁπότε

$$B_m=\lim_\nu\beta_{m\nu}\geqq\lim_\nu\beta_{n\nu}=B_n\quad \text{καὶ}\quad \Gamma_m=\lim_\nu\gamma_{m\nu}\leqq\lim_\nu\gamma_{n\nu}=\Gamma_n$$

δηλαδή αἱ ἀκολουθίαι $(B_\mu)_{\mu\in N}$ καί $(\Gamma_\mu)_{\mu\in N}$ εἶναι μονότονοι καί μάλιστα ἡ πρώτη φθίνουσα καί ἡ δευτέρα αὔξουσα. Ἄρα

$$\lim_\mu B_\mu = \inf_{\mu\in N} B_\mu = \inf_{\mu\in N} \sup\{a_\nu : \nu\in N \text{ καί } \nu \geqq \mu\} = \limsup a_\nu$$

καί

$$\lim_\mu \Gamma_\mu = \sup_{\mu\in N} \Gamma_\mu = \sup_{\mu\in N} \inf\{a_\nu : \nu\in N \text{ καί } \nu \geqq \mu\} = \liminf a_\nu$$

ἤτοι

$$\lim_\mu (\lim_\nu \beta_{\mu\nu}) = \limsup a_\nu \quad \text{καί} \quad \lim_\mu (\lim_\nu \gamma_{\mu\nu}) = \liminf a_\nu$$

Τέλος παρατηροῦμεν ὅτι διά κάθε μ, ν ἐν N ἰσχύει

$$\beta_{\mu\nu} = \beta_{\nu\mu} \quad \text{καί} \quad \gamma_{\mu\nu} = \gamma_{\nu\mu}$$

καί ἐπομένως

$$\lim_\nu (\lim_\mu \beta_{\mu\nu}) = \lim_\nu (\lim_\mu \beta_{\nu\mu}) = \limsup a_\nu$$

καί

$$\lim_\nu (\lim_\mu \gamma_{\mu\nu}) = \lim_\nu (\lim_\mu \gamma_{\nu\mu}) = \liminf a_\nu$$

ΟΜΑΣ 2

ΣΕΛΙΔΕΣ 119-122

1. Ἔστω Ε τὸ σύνολον τῶν φραγμένων ἀκολουθιῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν μὲ κοινὸν σύνολον δεικτῶν N. Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις ρ ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\rho(x,y) = \sup_{\nu\in N} |x_\nu - y_\nu| \qquad (x=(x_\nu)_{\nu\in N},\ y=(y_\nu)_{\nu\in N} \text{ ἐν } E)$$

εἶναι μία μετρικὴ εἰς τὸ Ε.

Λύσις. Διὰ τυχούσας ἀκολουθίας $x=(x_\nu)_{\nu\in N}$, $y=(y_\nu)_{\nu\in N}$ καὶ $z=(z_\nu)_{\nu\in N}$ ἐν Ε ἔχομεν :

1. $$\rho(x,y)=0 \Longleftrightarrow \sup_{\nu\in N}|x_\nu-y_\nu|=0 \Longleftrightarrow (\forall \nu\in N)\ |x_\nu-y_\nu|=0$$

$$\Longleftrightarrow (\forall \nu\in N)\ x_\nu=y_\nu \Longleftrightarrow x=y$$

καὶ

2. $$\rho(x,y)=\sup_{\nu\in N}|x_\nu-y_\nu| \leqq \sup_{\nu\in N}\left(|x_\nu-z_\nu|+|y_\nu-z_\nu|\right)$$

$$\leqq \sup_{\nu\in N}|x_\nu-z_\nu| + \sup_{\nu\in N}|y_\nu-z_\nu| = \rho(x,z)+\rho(y,z)$$

2. Ἔστω $\mathcal{F}$ τὸ σύνολον τῶν φραγμένων πραγματικῶν συναρτήσεων μὲ κοινὸν πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον Α. Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις ρ ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\rho(f,g) = \sup_{x\in A}|f(x)-g(x)| \qquad (f,g \text{ ἐν } \mathcal{F})$$

εἶναι μία μετρική εἰς τό $\mathcal{F}$.

Λύσις. Διά τυχούσας συναρτήσεις f, g καί h ἐν $\mathcal{F}$ ἔχομεν:

1. $$\rho(f,g)=0 \iff \sup_{x\in A}|f(x)-g(x)|=0 \iff (\forall x\in A)|f(x)-g(x)|=0$$
$$\iff (\forall x\in A)\, f(x)=g(x) \iff f=g$$

καί

2. $$\rho(f,g)=\sup_{x\in A}|f(x)-g(x)| \leq \sup_{x\in A}\left(|f(x)-h(x)|+|g(x)-h(x)|\right)$$
$$\leq \sup_{x\in A}|f(x)-h(x)|+\sup_{x\in A}|g(x)-h(x)|=\rho(f,h)+\rho(g,h)$$

3. Δώσατε:

α) Ἕν παράδειγμα ὑποσυνόλων A καί B ἑνός μετρικοῦ χώρου E μέ μετρικήν ρ τοιούτων, ὥστε
$$A\cap B=\emptyset \text{ καί } \rho(A,B)=0$$

β) Ἕν παράδειγμα σημείου α καί ὑποσυνόλου A ἑνός μετρικοῦ χώρου E μέ μετρικήν ρ τοιούτων, ὥστε
$$\alpha\notin A \text{ καί } \rho(\alpha,A)=0$$

Λύσις. Θεωροῦμεν τόν μετρικόν χῶρον $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν μέ τήν συνήθη μετρικήν ρ τήν εἰσαγομένην διά τῆς ἀπολύτου τιμῆς, ἤτοι
$$\rho(x,y)=|x-y|$$
ὁπότε, ἄν λάβωμεν
$$A=(0,1),\ B=(1,2) \text{ καί } \alpha=0$$
θά ἔχωμεν ἀφ' ἑνός μέν
$$A\cap B=\emptyset \text{ καί } \rho(A,B)=0$$
ἀφ' ἑτέρου δέ
$$\alpha\notin A \text{ καί } \rho(\alpha,A)=0$$

4. Δείξατε ὅτι, ἄν A καί B εἶναι φραγμένα ὑποσύνολα ἑνός μετρικοῦ χώρου, τότε καί ἡ ἕνωσις $A\cup B$ αὐτῶν εἶναι φραγμένον σύνολον. Ἄν ἰσχύῃ δέ ἐπί πλέον καί $A\cap B\neq\emptyset$, τότε
$$\delta(A\cup B)\leq\delta(A)+\delta(B)$$

Λύσις. Ὑποθέτομεν ὅτι τά A, B εἶναι φραγμένα ὑποσύνολα ἑνός μετρικοῦ χώρου μὲ μετρικὴν ρ καὶ θεωροῦμεν τυχόντα σημεῖα x, y ἐν $A \cup B$. Ἐν συνεχείᾳ δεχόμεθα ὅτι ἰσχύει $x \in A$ καὶ $y \in B$ καὶ διὰ τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν ε λαμβάνομεν τὰ σημεῖα $z \in A$ καὶ $w \in B$ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$\rho(z,w) \leqq \rho(A,B) + \varepsilon$$

Ἔχομεν τότε

$$\rho(x,y) \leqq \rho(x,z) + \rho(z,w) + \rho(w,y) \leqq \delta(A) + \rho(A,B) + \varepsilon + \delta(B)$$

καὶ ἑπομένως, ἐπειδὴ τὸ ε εἶναι τυχόν,

$$\rho(x,y) \leqq \delta(A) + \rho(A,B) + \delta(B)$$

Ἡ ἀνισότης αὕτη ἰσχύει καὶ διὰ τὰς λοιπὰς περιπτώσεις, διότι

$$\rho(x,y) \leqq \delta(A), \text{ ἂν } x,y \text{ ἐν } A$$

καὶ

$$\rho(x,y) \leqq \delta(B), \text{ ἂν } x,y \text{ ἐν } B$$

Ἄρα ἔχομεν

$$\delta(A \cup B) = \sup_{(x,y) \in (A \cup B)^2} \rho(x,y) \leqq \delta(A) + \rho(A,B) + \delta(B)$$

καὶ ἑπομένως τὸ σύνολον $A \cup B$ εἶναι φραγμένον. Προφανῶς, ἂν $A \cap B \neq \emptyset$, ἰσχύει $\rho(A,B) = 0$ καὶ ἑπομένως

$$\delta(A \cup B) \leqq \delta(A) + \delta(B)$$

5. Δείξατε ὅτι εἰς τὸν καρτεσιανὸν χῶρον (E, ρ) τῶν μετρικῶν χώρων (E_i, ρ_i), $i = 1, 2, \cdots, m$ αἱ συναρτήσεις ρ' καὶ ρ'', αἱ ὁριζόμεναι ὑπὸ τῶν τύπων

$$\rho'(x,y) = \sup_i \rho_i(x_i, y_i) \quad \text{καὶ} \quad \rho''(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \rho_i(x_i, y_i)$$

εἶναι ἐπίσης μετρικαὶ εἰς τὸ E. Ἐπὶ πλέον, δείξατε ὅτι διὰ κάθε x, y, z ἐν E ἰσχύουν :

$$\rho'(x,y) \leqq \rho(x,y) \leqq \sqrt{m}\, \rho'(x,y)$$

$$\frac{1}{m} \rho''(x,y) \leqq \rho(x,y) \leqq \rho''(x,y)$$

Λύσις. Διὰ τυχόντα σημεῖα $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$ καὶ $z=(z_1,z_2,\cdots,z_m)$ ἐν E ἔχομεν :

1. $\rho'(x,y)=0 \Longleftrightarrow \sup_i \rho_i(x_i,y_i)=0 \longleftrightarrow (\forall i)\ \rho_i(x_i,y_i)=0$

$$\Longleftrightarrow (\forall i)\ x_i=y_i \Longleftrightarrow x=y$$

2. $\rho'(x,y)=\sup_i \rho_i(x_i,y_i) \leqq \sup_i \left(\rho_i(x_i,z_i)+\rho_i(y_i,z_i)\right)$

$$\leqq \sup_i \rho_i(x_i,z_i) + \sup_i \rho_i(y_i,z_i) = \rho'(x,z)+\rho'(y,z)$$

καὶ

1΄. $\rho''(x,y)=0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{m}\rho_i(x_i,y_i)=0 \Longleftrightarrow (\forall i)\ \rho_i(x_i,y_i)=0$

$$\Longleftrightarrow (\forall i)\ x_i=y_i \Longleftrightarrow x=y$$

2΄. $\rho''(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\rho_i(x_i,y_i) \leqq \sum_{i=1}^{m}\left(\rho_i(x_i,z_i)+\rho_i(y_i,z_i)\right)$

$$\leqq \sum_{i=1}^{m}\rho_i(x_i,z_i)+\sum_{i=1}^{m}\rho_i(y_i,z_i) = \rho''(x,z)+\rho''(y,z)$$

Ὥστε αἱ συναρτήσεις ρ' καὶ ρ'' εἶναι μετρικαὶ εἰς τὸ E.

Δυνάμει τῆς ἀσκήσεως 10 τοῦ κεφαλαίου 14 τοῦ μέρους I τοῦ βιβλίου (Σελὶς 163), διὰ τυχὸν $\vec{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_m)\in\mathbb{R}^m$ ἰσχύει

$$\sup_i |a_i| \leqq |\vec{a}| \leqq \sqrt{m}\,\sup_i |a_i|$$

καὶ

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}|a_i| \leqq |\vec{a}| \leqq \sum_{i=1}^{m}|a_i|$$

Ἑπομένως, θέτοντες

$$a_i=\rho_i(x_i,y_i),\quad i=1,2,\cdots,m$$

λαμβάνομεν :

$$\sup_i \rho_i(x_i,y_i) \leqq \left|\left(\rho_1(x_1,y_1),\ldots,\rho_m(x_m,y_m)\right)\right| \leqq \sqrt{m}\,\sup_i \rho_i(x_i,y_i).$$

καὶ

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\rho_i(x_i,y_i) \leqq \left|\left(\rho_1(x_1,y_1),\cdots,\rho_m(x_m,y_m)\right)\right| \leqq \sum_{i=1}^{m}\rho_i(x_i,y_i)$$

ἤτοι :

$$\rho'(x,y) \leqq \rho(x,y) \leqq \sqrt{m}\,\rho'(x,y)$$

καὶ

$$\frac{1}{m}\rho''(x,y) \leqq \rho(x,y) \leqq \rho''(x,y)$$

6. Δείξατε ὅτι διά τυχοῦσαν σφαιρικήν περιοχήν $B(a,r)$ ἰσχύει

$$\delta\left(B(a,r)\right) \leq 2r \, .$$

Λύσις. Ἔστω τυχοῦσα σφαιρική περιοχή $B(a,r)$ εἰς ἕνα μετρικόν χῶρον μέ μετρικήν ρ. Διά τυχόντα σημεῖα x, y ἐν $B(a,r)$ ἔχομεν

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,a)+\rho(y,a) < r+r = 2r$$

καί ἑπομένως

$$\delta\left(B(a,r)\right) = \sup_{(x,y)\in B(a,r)^2} \rho(x,y) \leq 2r$$

7. Δείξατε ὅτι διά τυχόντα ὑποσύνολα A, B ἑνός μετρικοῦ χώρου ἰσχύει·

$$(B-A)^{\circ} = B^{\circ}-\bar{A} \quad \text{καί} \quad \overline{B-A} \subseteq \bar{B}-A^{\circ}$$

Λύσις. Ἔχομεν :

$$(B-A)^{\circ} = (B\cap A^c)^{\circ} = B^{\circ}\cap (A^c)^{\circ} = B^{\circ}\cap(\bar{A})^c = B^{\circ}-\bar{A}$$

καί

$$\overline{B-A} = \overline{B\cap A^c} \subseteq \bar{B}\cap \overline{A^c} = \bar{B}\cap(A^{\circ})^c = \bar{B}-A^{\circ}$$

8. Δείξατε ὅτι διά τυχόν ὑποσύνολον A ἑνός μετρικοῦ χώρου E ἰσχύουν :

(i) $a\in A' \Longleftrightarrow a\in \overline{A-\{a\}}$

(ii) $A = \bigcap_{a\in E} \overline{A-\{a\}}$

Λύσις. (i) Ἔχομεν

$$a\in A' \Longleftrightarrow (\forall\, U(a))\ \underline{U}(a)\cap A \neq \emptyset \Longleftrightarrow (\forall U(a))\ U(a)\cap(A-\{a\})\neq\emptyset$$

$$\Longleftrightarrow a\in \overline{A-\{a\}}$$

(ii) Δυνάμει τῆς (i), διά κάθε $a\in E$ ἰσχύει

$$A' \subseteq \overline{A-\{a\}}$$

καί ἑπομένως

$$A' \subseteq \bigcap_{a\in E} \overline{A-\{a\}}$$

'Επίσης, δυνάμει πάλιν τῆς (1), διά κάθε $x\in E$ ἰσχύει

$$x\in \bigcap_{a\in E} \overline{A-\{a\}} \Longrightarrow x\in \overline{A-\{x\}} \Longrightarrow x\in A'$$

ἤτοι ἰσχύει καί

$$\bigcap_{a\in E} \overline{A-\{a\}} \subseteq A'$$

9. Δείξατε ὅτι διά τυχόν ὑποσύνολον A ἑνός μετρικοῦ χώρου ἰσχύει

$$\delta(\bar{A}) = \delta(A)$$

Λύσις. Ἔστωσαν τυχόντα σημεῖα x, y ἐν $\bar{A}$. Θεωροῦμεν τυχόντα θετικόν ἀριθμόν ε καί λαμβάνομεν τά σημεῖα z, w ἐν A εἰς τρόπον, ὥστε νά ἰσχύῃ

$$\rho(x,z) < \varepsilon \quad \text{καί} \quad \rho(y,w) < \varepsilon$$

Ἔχομεν τότε

$$\rho(x,y) \leqq \rho(x,z) + \rho(z,w) + \rho(w,y) \leqq \varepsilon + \delta(A) + \varepsilon = \delta(A) + 2\varepsilon$$

καί ἑπομένως, ἐπειδή τό ε εἶναι τυχόν,

$$\rho(x,y) \leqq \delta(A)$$

Ἄρα

$$\delta(\bar{A}) = \sup_{(x,y)\in \bar{A}^2} \rho(x,y) \leqq \delta(A)$$

Ἀλλά, ἐπειδή $A \subseteq \bar{A}$, ἰσχύει καί

$$\delta(A) \leqq \delta(\bar{A})$$

ἤτοι $\delta(\bar{A}) = \delta(A)$.

10. Ἔστω A τυχόν ὑποσύνολον ἑνός μετρικοῦ χώρου. Ἕν σημεῖον $a\in A$ καλεῖται μεμονωμένον σημεῖον τοῦ A τότε καί μόνον τότε, ἄν ὑπάρχῃ περιοχή $U(a)$ τοιαύτη, ὥστε

$$U(a) \cap A = \{a\}, \text{ ἤ ἰσοδυνάμως } \underline{U}(a) \cap A = \emptyset$$

Δείξατε ὅτι ἕν σημεῖον τοῦ A εἶναι μεμονωμένον σημεῖον αὐτοῦ τότε καί μόνον τότε, ἄν τοῦτο δέν εἶναι σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ A.

Λύσις. Ἔχομεν

a εἶναι μεμονωμένον σημεῖον τοῦ $A \longleftrightarrow (\exists U(a))\ \underline{U}(a) \cap A = \emptyset$

$\longleftrightarrow \sim (\forall U(a))\ \underline{U}(a) \cap A \neq \emptyset \longleftrightarrow \sim a \in A' \longleftrightarrow a \notin A'$

11. **Δείξατε ὅτι, ἄν A εἶναι τυχὸν ὑποσύνολον ἑνὸς μετρικοῦ χώρου E μὲ μετρικὴν ρ, τότε ἰσχύει**

$$\bar{A} = \{x \in E : \rho(x, A) = 0\}$$

Λύσις. Θέτομεν

$$B = \{x \in E : \rho(x, A) = 0\}$$

Κατ' ἀρχὴν θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον $x \in \bar{A}$, ὁπότε ὑπάρχει ἀκολουθία $(y_\nu)_{\nu \in N}$ ἐν A μὲ $\lim y_\nu = x$. Τότε διὰ κάθε $\nu \in N$ ἰσχύει

$$\rho(x, A) = \rho(x, A) - \rho(y_\nu, A) \leqq \rho(y_\nu, x)$$

καὶ ἐπομένως

$$\rho(x, A) \leqq \lim \rho(y_\nu, x) = 0, \quad \text{δηλαδὴ} \quad \rho(x, A) = 0$$

Ἄρα $x \in B$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι $\bar{A} \subseteqq B$.

Ἀντιστρόφως, θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον $x \in B$, ὁπότε $\rho(x, A) = 0$, καὶ ὑποθέτομεν ὅτι $x \notin \bar{A}$. Προφανῶς ὑπάρχει τότε περιοχὴ τοῦ σημείου x, ἡ ὁποία μάλιστα δύναται νὰ ὑποτεθῇ καὶ σφαιρική, ἔστω $B(x, r)$, τοιαύτη, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$B(x, r) \cap A = \emptyset$$

ὁπότε ὁδηγούμεθα εἰς τὸ ἄτοπον

$$0 = \rho(x, A) \geqq r > 0$$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι ἰσχύει καὶ $B \subseteqq \bar{A}$. Ἄρα

$$\bar{A} = \{x \in E : \rho(x, A) = 0\}$$

12. **Δείξατε ὅτι εἰς τὸν μετρικὸν χῶρον $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἰσχύει**

$$\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

Λύσις. Εὐκόλως συνάγεται ὅτι

$$\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \quad \text{καί} \quad \mathbb{Q}^\circ = \emptyset$$

όπότε λαμβάνομεν

$$\partial \mathbb{Q} = \bar{\mathbb{Q}} - \mathbb{Q}^\circ = \mathbb{R} - \emptyset = \mathbb{R}$$

13. Δείξατε ότι, άν A, B είναι τυχόντα ύποσύνολα ένός μετρικοῦ χώρου, τότε ἰσχύουν :

(i) $\partial \bar{A} \subseteq \partial A$ καί $\partial A^\circ \subseteq \partial A$

(ii) $\partial(A \cup B) \subseteq (\partial A) \cup (\partial B)$

(iii) $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset \Rightarrow \partial(A \cup B) = (\partial A) \cup (\partial B)$

Λύσις. (i) Παρατηροῦμεν ότι

$$A^\circ \subseteq (\bar{A})^\circ \quad \text{καί} \quad \overline{A^\circ} \subseteq \bar{A}$$

όπότε ἔχομεν

$$\partial \bar{A} = \bar{\bar{A}} - (\bar{A})^\circ \subseteq \bar{A} - A^\circ = \partial A$$

καί

$$\partial A^\circ = \overline{A^\circ} - A^{\circ\circ} \subseteq \bar{A} - A^\circ = \partial A$$

(ii) Παρατηροῦμεν ότι

$$A^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ \quad \text{καί} \quad B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$$

όπότε ἔχομεν

$$\partial(A \cup B) = \overline{A \cup B} - (A \cup B)^\circ = \bar{A} \cup \bar{B} - (A \cup B)^\circ = [\bar{A} - (A \cup B)^\circ] \cup [\bar{B} - (A \cup B)^\circ]$$
$$\subseteq (\bar{A} - A^\circ) \cup (\bar{B} - B^\circ) = (\partial A) \cup (\partial B)$$

(iii) Ύποθέτομεν ότι $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$. Θεωροῦμεν ἀκολούθως τυχόν $x \in (A \cup B)^\circ$, όπότε ύπάρχει περιοχή $U(x)$ μέ $U(x) \subseteq A \cup B$. Ἄν $x \in A$, τότε βεβαίως $x \notin \bar{B}$ καί ἑπομένως ύπάρχει περιοχή $V(x)$ μέ $V(x) \cap \bar{B} = \emptyset$. Προφανῶς διά τήν περιοχήν $W(x) = U(x) \cap V(x)$ ἰσχύει $W(x) \subseteq A$ καί ἑπομένως ἰσχύει $x \in A^\circ$. Όμοίως, άν $x \in B$, τότε $x \in B^\circ$. Ἄρα ἰσχύει $x \in A^\circ \cup B^\circ$ τό όποῖον σημαίνει ότι $(A \cup B)^\circ \subseteq A^\circ \cup B^\circ$. Ἀλλά, ώς γνωστόν, ἰσχύει $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$ καί ἑπομένως

$$(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$$

Δυνάμει τοῦ τύπου τούτου λαμβάνομεν

$$\begin{aligned}\partial(A\cup B) &= \overline{A\cup B} - (A\cup B)^\circ = \bar A\cup\bar B - (A^\circ\cup B^\circ)\\ &= [\bar A-(A^\circ\cup B^\circ)]\cup[\bar B-(A^\circ\cup B^\circ)]\\ &= [(\bar A-A^\circ)\cap(\bar A-B^\circ)]\cup[(\bar B-A^\circ)\cap(\bar B-B^\circ)]\\ &= [(\bar A-A^\circ)\cap\bar A]\cup[\bar B\cap(\bar B-B^\circ)]\\ &= (\bar A-A^\circ)\cup(\bar B-B^\circ) = (\partial A)\cup(\partial B)\end{aligned}$$

14. Δείξατε ὅτι εἰς τὸν μετρικὸν χῶρον $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἰσχύουν :

(i) Τυχὸν ἀνοικτὸν διάστημα τῆς μορφῆς (α,β), $(\alpha,+\infty)$, ἤ $(-\infty,\beta)$ εἶναι ἀνοικτὸν σύνολον.

(ii) Τυχὸν κλειστὸν διάστημα τῆς μορφῆς $[\alpha,\beta]$ εἶναι κλειστὸν σύνολον.

(iii) Τυχὸν διάστημα τῆς μορφῆς $[\alpha,+\infty)$ εἶναι κλειστὸν σύνολον.

Λύσις. (i) Θεωροῦμεν τυχὸν $x\in(\alpha,\beta)$ καὶ θέτομεν

$$r=\min\{x-\alpha,\beta-x\}$$

Προφανῶς ἰσχύει

$$B(x,r)\subseteq(\alpha,\beta)$$

δηλαδὴ τὸ (α,β) εἶναι περιοχὴ τοῦ x. Ἄρα τὸ διάστημα (α,β), ὡς περιοχὴ παντὸς σημείου του, εἶναι ἀνοικτὸν σύνολον.

Ὁμοίως διὰ τυχὸν $x\in(\alpha,+\infty)$ θέτομεν $r=x-\alpha$, ὁπότε ἔχομεν

$$B(x,r)\subseteq(\alpha,+\infty)$$

δηλαδὴ ὅτι τὸ $(\alpha,+\infty)$ εἶναι περιοχὴ τοῦ x. Ἄρα τὸ διάστημα $(\alpha,+\infty)$ εἶναι ἀνοικτὸν σύνολον.

Τέλος διὰ τυχὸν $x\in(-\infty,\beta)$ θέτομεν $r=\beta-x$, ὁπότε ἔχομεν

$$B(x,r)\subseteq(-\infty,\beta)$$

δηλαδὴ ὅτι τὸ $(-\infty,\beta)$ εἶναι περιοχὴ τοῦ x. Ἄρα τὸ διάστημα $(-\infty,\beta)$ εἶναι ἀνοικτὸν σύνολον.

(ii) Ἔχομεν

$$[\alpha,\beta]^c = (-\infty,\alpha) \cup (\beta,+\infty)$$

καὶ ἐπομένως τὸ σύνολον $[\alpha,\beta]^c$, ὡς ἕνωσις ἀνοικτῶν συνόλων, εἶναι ἀνοικτὸν σύνολον. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ διάστημα $[\alpha,\beta]$ εἶναι κλειστὸν σύνολον.

(iii) Ἔχομεν

$$[\alpha,+\infty)^c = (-\infty,\alpha)$$

δηλαδὴ ὅτι τὸ σύνολον $[\alpha,+\infty)^c$ εἶναι ἀνοικτόν, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι τὸ διάστημα $[\alpha,+\infty)$ εἶναι κλειστὸν σύνολον.

15. Εἰς ἕνα μετρικὸν χῶρον E μὲ μετρικὴν ρ τὸ σύνολον

$$C(\alpha,r) = \{x\in E : \rho(x,\alpha) \leqq r\}$$

ὅπου $\alpha\in E$ καὶ $r>0$, καλεῖται κλειστὴ σφαιρικὴ περιοχὴ μὲ κέντρον τὸ α καὶ ἀκτῖνα r.

(i) Δείξατε ὅτι τυχοῦσα κλειστὴ σφαιρικὴ περιοχὴ $C(\alpha,r)$ εἶναι κλειστὸν σύνολον.

(ii) Δώσατε παράδειγμα, ὅπου $C(\alpha,r) \neq \overline{B(\alpha,r)}$.

Λύσις. (i) Θεωροῦμεν τυχοῦσαν ἀκολουθίαν $(y_\nu)_{\nu\in N}$ ἐν $C(\alpha,r)$ μὲ $\lim y_\nu = x$, $x\in E$. Ἔχομεν τότε ὅτι διὰ κάθε $\nu\in N$ ἰσχύει

$$|\rho(y_\nu,\alpha)-\rho(x,\alpha)| \leqq \rho(y_\nu,x)$$

καὶ ἐπειδὴ $\lim\rho(y_\nu,x)=0$,

$$\lim|\rho(y_\nu,\alpha)-\rho(x,\alpha)| = 0\ ,\ \text{δηλαδὴ}\ \lim\rho(y_\nu,\alpha)=\rho(x,\alpha)$$

Ἀλλὰ διὰ κάθε $\nu\in N$

$$\rho(y_\nu,\alpha) \leqq r$$

καὶ ἐπομένως

$$\rho(x,\alpha) \leqq r\ ,\ \text{δηλαδὴ}\ x\in C(\alpha,r)$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ κλειστὴ σφαιρικὴ περιοχὴ $C(\alpha,r)$ εἶναι καὶ κλειστὸν σύνολον.

(ii) Θεωροῦμεν ἓν σύνολον E, τὸ ὁποῖον ἔχει τουλάχιστον δύο στοιχεῖα, καὶ τὴν μετρικὴν ρ τὴν ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0, & \text{ἂν } x=y\\ 1, & \text{ἂν } x\neq y\end{cases}$$

Διὰ τυχὸν $a\in E$, ἰσχύει

$$B(a,1)=\{a\} \quad \text{καὶ ἑπομένως} \quad \overline{B(a,1)}=\{a\}$$

ὡς ἐπίσης καὶ

$$C(a,1)=E$$

Ἄρα $C(a,1)\neq\overline{B(a,1)}$.

16. Δείξατε ὅτι διὰ τυχὸν ὑποσύνολον A ἑνὸς μετρικοῦ χώρου τὸ παράγωγον σύνολον A′ αὐτοῦ εἶναι κλειστόν.

Λύσις. Θεωροῦμεν τυχὸν $x\in A''$ καὶ τυχοῦσαν περιοχὴν $U(x)$ αὐτοῦ. Ἔστω μία σφαιρικὴ περιοχὴ $B(x,r_1)$ μὲ $B(x,r_1)\subseteq U(x)$, ὁπότε, ἐπειδὴ τὸ x εἶναι σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ συνόλου A', ὑπάρχει σημεῖον $y\in A'$ μὲ $y\in\underline{B}(x,r_1)$. Ἀκολούθως, θέτομεν $r_2=r_1-\rho(x,y)$ καὶ θεωροῦμεν τὴν σφαιρικὴν περιοχὴν $B(y,r_2)$ διὰ τὴν ὁποίαν προφανῶς ἰσχύει $B(y,r_2)\subseteq B(x,r_1)$. Ἐπειδὴ τὸ y εἶναι σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ συνόλου A, ὑπάρχει σημεῖον $z\in A$ μὲ $z\in\underline{B}(y,r_2)$. Ἀλλὰ $B(y,r_2)\subseteq B(x,r_1)\subseteq U(x)$ καὶ ἑπομένως

$$z\in\underline{B}(y,r_2)\cap A\subseteq\underline{U}(x)\cap A$$

δηλαδὴ

$$\underline{U}(x)\cap A\neq\emptyset$$

τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι $x\in A'$. Ὥστε ἐδείχθη ὅτι $A''\subseteq A'$, δηλαδὴ ὅτι τὸ παράγωγον σύνολον A' εἶναι κλειστόν.

17. Δείξατε ὅτι, ἂν A εἶναι κλειστὸν σύνολον, ὑποσύνολον ἑνὸς μετρικοῦ χώρου μὲ μετρικὴν ρ, τότε διὰ τυχὸν σημεῖον α μὲ $a\notin A$, ἰσχύει $\rho(a,A)>0$.

Λύσις. Ἰσχύει

$$\rho(a,A)=\inf_{x\in A}\rho(a,x)$$

καὶ ἑπομένως ὑπάρχει ἀκολουθία (x_ν) ἐν A τοιαύτη, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$\rho(a,A)=\lim\rho(a,x_\nu)$$

Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι $\rho(a,A)=0$, τότε $\lim x_\nu=a$ καὶ ἑπομένως, λόγῳ τῆς κλειστότητος τοῦ A, ὁδηγούμεθα εἰς τὸ ἄτοπον $a \in A$. Ἄρα ἰσχύει $\rho(a, A) > 0$.

18. Δείξατε ὅτι, ἂν A, B εἶναι τυχόντα ὑποσύνολα ἑνὸς μετρικοῦ χώρου καὶ τὸ A εἶναι ἀνοικτόν, τότε

$$A \cap \bar{B} \neq \emptyset \Longrightarrow A \cap B \neq \emptyset$$

Λύσις. Ὑποθέτομεν ὅτι $A \cap \bar{B} \neq \emptyset$ καὶ θεωροῦμεν τυχὸν $x \in A \cap \bar{B}$. Ἐπειδὴ $x \in A$ καὶ τὸ A εἶναι ἀνοικτόν, ὑπάρχει περιοχὴ $U(x)$ τοιαύτη, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$U(x) \subseteq A$$

Ἀλλὰ $x \in \bar{B}$ καὶ ἐπομένως

$$U(x) \cap B \neq \emptyset$$

ὁπότε προφανῶς θὰ ἔχωμεν καὶ $A \cap B \neq \emptyset$.

19. Δείξατε ὅτι εἰς τὸν μετρικὸν χῶρον (E, ρ) μὲ

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ἂν } x \neq y \\ 0, & \text{ἂν } x = y \end{cases}$$

ὅλα τὰ σύνολα εἶναι ἀνοικτὰ καὶ κλειστά.

Λύσις. Θεωροῦμεν τυχὸν σύνολον A, ὑποσύνολον τοῦ E, καὶ θὰ δείξωμεν ὅτι τοῦτο εἶναι περιοχὴ παντὸς σημείου του. Πράγματι· ἂν $x \in A$, τότε ἰσχύει

$$B(x, 1) = \{x\} \subseteq A$$

καὶ ἐπομένως τὸ σύνολον A εἶναι περιοχὴ τοῦ σημείου x.

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι ὅλα τὰ ὑποσύνολα τοῦ E εἶναι ἀνοικτά. Ἐπομένως ταῦτα εἶναι καὶ κλειστά, διότι τὰ συμπληρώματά των εἶναι προφανῶς ἀνοικτὰ σύνολα.

20. Δείξατε ὅτι, ἂν E εἶναι εἷς μετρικὸς χῶρος, τότε ἡ διαγώνιος Δ τοῦ καρτεσιανοῦ μετρικοῦ χώρου E^2 εἶναι κλειστὸν σύνολον.

Λύσις. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν ἀκολουθίαν (z_ν, z_ν), $\nu \in N$ ἐν Δ μὲ $\lim(z_\nu, z_\nu) = (x, y)$, $(x, y) \in E^2$. Προφανῶς ἰσχύει τότε

$$\lim z_\nu = x \quad \text{καὶ} \quad \lim z_\nu = y$$

καὶ ἐπομένως $x = y$, δηλαδὴ $(x,y) \in \Delta$. Τοῦτο ἀκριβῶς σημαίνει ὅτι ἡ διαγώνιος Δ εἶναι κλειστὸν σύνολον.

21. Ἔστωσαν $E = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{m} E_i$ ὁ καρτεσιανὸς μετρικὸς χῶρος τῶν μετρικῶν χώρων E_i, $i = 1,2,\cdots,m$ καὶ $A = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{m} A_i$, ὅπου $A_i \subseteq E_i$, $i = 1,2,\cdots,m$. Δείξατε ὅτι

(α) Τὸ σύνολον A εἶναι κλειστὸν ὑποσύνολον τοῦ καρτεσιανοῦ χώρου E τότε καὶ μόνον τότε, ἂν τὰ σύνολα A_i, $i = 1,2,\cdots,m$ εἶναι κλειστά.

(β) Τὸ σύνολον A εἶναι ἀνοικτὸν ὑποσύνολον τοῦ καρτεσιανοῦ χώρου E τότε καὶ μόνον τότε, ἂν τὰ σύνολα A_i, $i = 1,2,\cdots,m$ εἶναι ἀνοικτά.

Λύσις. (α) Ὑποθέτομεν ὅτι τὸ σύνολον A εἶναι κλειστὸν καὶ θεωροῦμεν τυχούσας ἀκολουθίας

$$(y_{i\nu})_{\nu\in N} \text{ ἐν } A_i \ , \quad i = 1,2,\cdots,m$$

τοιαύτας, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$\lim_{\nu} y_{i\nu} = x_i \ , \ \text{ὅπου } x_i \in E_i \ , \ i = 1,2,\cdots,m$$

Θέτομεν

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \quad \text{καὶ} \quad y_\nu = (y_{1\nu}, y_{2\nu}, \cdots, y_{m\nu})$$

ὁπότε προφανῶς

$$\lim y_\nu = x \ , \ x \in E$$

Ἡ $(y_\nu)_{\nu\in N}$ εἶναι βεβαίως ἀκολουθία ἐν A καὶ ἐπομένως, λόγῳ τῆς κλειστότητος τοῦ A, θὰ ἰσχύῃ $x \in A$, δηλαδὴ

$$(\forall\, i = 1,2,\cdots,m) \quad x_i \in A_i$$

τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι τὰ σύνολα A_i, $i = 1,2,\cdots,m$ εἶναι κλειστά.

Ἀντιστρόφως, ὑποθέτομεν ὅτι τὰ σύνολα A_i, $i = 1,2,\cdots,m$ εἶναι κλειστὰ καὶ θεωροῦμεν τυχοῦσαν ἀκολουθίαν $(y_\nu)_{\nu\in N}$ ἐν A μὲ $\lim y_\nu = x$, $x \in E$. Ἔχομεν τότε

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \quad \text{καὶ} \quad y_\nu = (y_{1\nu}, y_{2\nu}, \cdots, y_{m\nu})$$

ὁπότε προφανῶς διὰ κάθε $i = 1,2,\cdots,m$ θὰ ἰσχύῃ

$$\lim_{\nu} y_{i\nu} = x_i \ , \ x_i \in E_i$$

Ἑκάστη $(y_{i\nu})_{\nu\in N}$ εἶναι βεβαίως ἀκολουθία ἐν A_i καὶ ἐπομένως, λόγῳ τῆς κλειστότητος τοῦ A_i, θὰ ἰσχύῃ

$$(\forall\ i=1,2,\cdots,m)\ x_i \in A_i\,,\ \text{δηλαδή}\ x \in A$$

τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι τὸ σύνολον A εἶναι κλειστόν.

(β) Ὑποθέτομεν ὅτι τὸ σύνολον A εἶναι ἀνοικτὸν καὶ θεωροῦμεν τυχόντα σημεῖα $x_i \in A_i$, $i=1,2,\cdots,m$. Προφανῶς τὸ A εἶναι περιοχὴ τοῦ σημείου $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ καὶ ἑπομένως ὑπάρχει σφαιρικὴ περιοχὴ $B(x,r)$ μὲ

$$B(x,r) \subseteq A$$

Ἀλλά, ὡς εὐκόλως συνάγεται,

$$B(x_1,\frac{r}{\sqrt{m}}) \times B(x_2,\frac{r}{\sqrt{m}}) \times \cdots \times B(x_m,\frac{r}{\sqrt{m}}) \subseteq B(x,r)$$

καὶ ἑπομένως

$$(\forall\, i=1,2,\cdots,m)\ \ B(x_i,\frac{r}{\sqrt{m}}) \subseteq A_i$$

τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι ἕκαστον σύνολον A_i εἶναι περιοχὴ τοῦ σημείου x_i. Ἄρα τὰ σύνολα A_i, $i=1,2,\cdots,m$ εἶναι ἀνοικτά.

Ἀντιστρόφως, ὑποθέτομεν ὅτι τὰ σύνολα A_i, $i=1,2,\cdots,m$ εἶναι ἀνοικτὰ καὶ θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m) \in A$. Προφανῶς ἕκαστον σύνολον A_i εἶναι περιοχὴ τοῦ σημείου x_i καὶ ἑπομένως ὑπάρχει σφαιρικὴ περιοχὴ $B(x_i,r_i)$ μὲ

$$(\forall\, i=1,2,\cdots,m)\ B(x_i,r_i) \subseteq A_i$$

Ἀλλά, ὡς εὐκόλως συνάγεται, διὰ $r=\min\{r_1,r_2,\cdots,r_m\}$ ἰσχύει

$$B(x,r) \subseteq B(x_1,r_1) \times B(x_2,r_2) \times \cdots \times B(x_m,r_m)$$

καὶ ἑπομένως

$$B(x,r) \subseteq A$$

τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι τὸ σύνολον A εἶναι περιοχὴ τοῦ σημείου x. Ἄρα τὸ σύνολον A εἶναι ἀνοικτόν.

22. Ἔστω S εἷς ὑπόχωρος τοῦ μετρικοῦ χώρου E. Δείξατε ὅτι τυχὸν ὑποσύνολον A τοῦ S εἶναι πυκνὸν ἐν S τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύῃ $S \subseteq \bar{A}$.

Λύσις. Ὡς γνωστὸν ἰσχύει

$$\bar{A}^s = S \cap \bar{A}$$

καὶ ἑπομένως

Α εἶναι πυκνὸν ἐν $S \longleftrightarrow \bar{A}^S = S \longleftrightarrow S \cap \bar{A} = S \longleftrightarrow S \subseteq \bar{A}$

23. Ἔστωσαν ἓν μὴ κενὸν σύνολον E καὶ μία πραγματικὴ συνάρτησις ρ μὲ πεδίον ὁρισμοῦ $\mathscr{D}(\rho) = E \times E$ τοιαύτη, ὥστε διὰ τυχόντα x, y, z ἐν E νὰ ἰσχύουν :

1. $\rho(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
2. $\rho(x,y) \leq \max\{\rho(x,z), \rho(y,z)\}$

Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις ρ εἶναι μία μετρικὴ εἰς τὸ E.

Σημείωσις. Μία συνάρτησις ρ, ὡς ἡ ἀνωτέρω, πληροῦσα τὰς 1 καὶ 2 καλεῖται *ὑπερμετρική* εἰς τὸ E, ὁ δὲ χῶρος (E, ρ) *ὑπερμετρικὸς χῶρος*.

Λύσις. Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν τὴν τριγωνικὴν ἰδιότητα. Πράγματι· διὰ τυχόντα x, y, z ἐν E ἰσχύει

$$\rho(x,y) \leq \max\{\rho(x,z), \rho(y,z)\} \leq \rho(x,z) + \rho(y,z)$$

24. Δείξατε ὅτι τὸ σύνολον $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἀποτελεῖ ὑπερμετρικὸν χῶρον μὲ ὑπερμετρικὴν ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ἄν } x = y \\ \max\{|x|, |y|\}, & \text{ἄν } x \neq y \end{cases}$$

Λύσις. Ἔστωσαν τυχόντα x, y, z ἐν E. Προφανῶς διὰ $x \neq y$ ἰσχύει $\rho(x,y) > 0$ καὶ ἑπομένως

1. $\rho(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς

2. $\rho(x,y) \leq \max\{\rho(x,z), \rho(y,z)\}$

παρατηροῦμεν ὅτι διὰ $x = y$ ἢ $y = z$ ἢ $z = x$ αὕτη προφανῶς ἰσχύει, ἐνῷ διὰ x, y, z διάφορα ἀνὰ δύο ἔχομεν

$$\begin{aligned} \rho(x,y) &= \max\{|x|, |y|\} \\ &\leq \max\{|x|, |y|, |z|\} = \max\Big\{\max\{|x|, |z|\}, \max\{|y|, |z|\}\Big\} \\ &= \max\{\rho(x,z), \rho(y,z)\} \end{aligned}$$

25. Δείξατε ὅτι εἰς ἕνα ὑπερμετρικὸν χῶρον (E,ρ) ἰσχύουν :

(i) Ἂν $\rho(x,z) \neq \rho(y,z)$, τότε $\rho(x,y) = \max\{\rho(x,z), \rho(y,z)\}$

(ii) Τυχοῦσα σφαιρικὴ περιοχὴ $B(a,r)$ εἶναι ἀνοικτὸν καὶ κλειστὸν σύνολον. Ἐπὶ πλέον δέ, διὰ τυχὸν $\beta \in B(a,r)$ ἰσχύει

$$B(\beta,r) = B(a,r)$$

(iii) Τυχοῦσα κλειστὴ σφαιρικὴ περιοχὴ $C(a,r)$ εἶναι ἀνοικτὸν καὶ κλειστὸν σύνολον. Ἐπὶ πλέον δέ, διὰ τυχὸν $\beta \in C(a,r)$ ἰσχύει

$$C(\beta,r) = C(a,r)$$

(iv) Ἂν δύο σφαιρικαὶ περιοχαὶ ἔχουν κοινὰ σημεῖα, τότε ἡ μία ἐξ αὐτῶν περιέχεται εἰς τὴν ἄλλην.

(v) Ἡ ἀπόστασις δύο ξένων σφαιρικῶν περιοχῶν κοινῆς ἀκτῖνος r, αἱ ὁποῖαι περιέχονται εἰς μίαν κλειστὴν σφαιρικὴν περιοχὴν ἀκτῖνος ἐπίσης r, ἰσοῦται μὲ r.

Λύσις. (i) Χωρὶς βλάβην τῆς γενικότητος, ὑποθέτομεν ὅτι $\rho(x,z) < \rho(y,z)$, ὁπότε ἔχομεν, ἀφ' ἑνὸς μὲν

$$\rho(x,y) \leqq \max\left\{\rho(x,z), \rho(y,z)\right\} = \rho(y,z)$$

ἀφ' ἑτέρου δὲ

$$\rho(y,z) \leqq \max\left\{\rho(y,x), \rho(z,x)\right\} = \rho(y,x)$$

Ἄρα ἰσχύει

$$\rho(x,y) = \rho(y,z) = \max\left\{\rho(x,z), \rho(y,z)\right\}$$

(ii) Δυνάμει τῆς ἀσκήσεως 23, εἷς ὑπερμετρικὸς χῶρος (E,ρ) εἶναι καὶ μετρικὸς καὶ ἐπομένως τυχοῦσα σφαιρικὴ περιοχὴ $B(a,r)$ τοῦ χώρου E εἶναι ἀνοικτὸν σύνολον. Θὰ δείξωμεν ὅτι αὕτη εἶναι καὶ κλειστὸν σύνολον. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τυχοῦσαν ἀκολουθίαν $(y_\nu)_{\nu\in N}$ ἐν $B(a,r)$ μὲ $\lim y_\nu = x$, ὅπου $x \in E$, καὶ παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν ἰσχύῃ

$$(\forall\, \nu \in N)\ \rho(a, y_\nu) \leqq \rho(y_\nu, x)$$

τότε, ἐπειδὴ $\lim\rho(y_\nu, x) = 0$, θὰ ἰσχύῃ καὶ $\lim\rho(a,y_\nu) = 0$, δηλαδὴ $\lim y_\nu = a$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν $x = a$. Ἂν λοιπὸν ὑποθέσωμεν ὅτι $\rho(a,x) \geqq r$, τότε θὰ ὑπάρχῃ δείκτης $n \in N$ τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$\rho(y_n, x) < \rho(a, y_n)$$

καὶ ἑπομένως

$$\rho(a,y_n) = \max\{\rho(a,y_n),\rho(y_n,x)\} \geq \rho(a,x) \geq r$$

τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὸ ὅτι $y_n \in B(a,r)$. Ὥστε ἐδείχθη ὅτι ἰσχύει $\rho(a,x) < r$, δηλαδὴ $x \in B(a,r)$, τὸ ὁποῖον καὶ ἀποδεικνύει τὴν κλειστότητα τοῦ συνόλου $B(a,r)$.

Θεωροῦμεν τώρα τυχὸν $\beta \in B(a,r)$, ὁπότε $\rho(a,\beta) < r$, καὶ παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τυχὸν $x \in E$ ἰσχύει

$$x \in B(\beta,r) \Longleftrightarrow \rho(\beta,x) < r \Longleftrightarrow \rho(a,x) = \max\{\rho(a,\beta),\rho(x,\beta)\} < r$$
$$\Longleftrightarrow x \in B(a,r)$$

Ἄρα $B(\beta,r) = B(a,r)$.

(iii) Ἐπειδὴ ὁ ὑπερμετρικὸς χῶρος (E,ρ) εἶναι καὶ μετρικὸς χῶρος, δυνάμει τῆς ἀσκήσεως 15, τυχοῦσα κλειστὴ σφαιρικὴ περιοχὴ $C(a,r)$ τοῦ χώρου E εἶναι κλειστὸν σύνολον. Θὰ δείξωμεν ὅτι αὐτὴ εἶναι καὶ ἀνοικτὸν σύνολον. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει

$$C(a,r) = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} B\left(a, r+\frac{1}{\nu}\right)$$

διότι διὰ κάθε $x \in E$

$$x \in C(a,r) \Longleftrightarrow \rho(a,x) \leq r \Longleftrightarrow (\forall \nu \in \mathbb{N})\ \rho(a,x) < r + \frac{1}{\nu}$$
$$\Longleftrightarrow (\forall \nu \in \mathbb{N})\ x \in B\left(a, r+\frac{1}{\nu}\right) \Longleftrightarrow x \in \bigcap_{\nu=1}^{\infty} B\left(a, r+\frac{1}{\nu}\right)$$

Θεωροῦμεν τώρα τυχὸν σημεῖον $x \in C(a,r)$, ὁπότε $x \in B(a, r+\frac{1}{\nu})$ καὶ ἑπομένως, δυνάμει τῆς (ii), διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν ἔχομεν

$$B(x,r) \subseteq B\left(x, r+\frac{1}{\nu}\right) = B\left(a, r+\frac{1}{\nu}\right)$$

Ἄρα

$$B(x,r) \subseteq \bigcap_{\nu=1}^{\infty} B\left(a, r+\frac{1}{\nu}\right) = C(a,r)$$

δηλαδὴ τὸ σύνολον $C(a,r)$ εἶναι περιοχὴ τοῦ σημείου x, τὸ ὁποῖον καὶ ἀποδεικνύει ὅτι τὸ σύνολον $C(a,r)$ εἶναι ἀνοικτόν.

Τέλος θεωροῦμεν τυχὸν $\beta \in C(a,r)$, ὁπότε $\rho(a,\beta) \leq r$, καὶ παρατηροῦμεν ὅτι διὰ κάθε $x \in E$ ἰσχύει

$$x \in C(\beta,r) \Leftrightarrow \rho(\beta,x) \leqq r \Leftrightarrow \rho(\alpha,x) = \max\{\rho(\alpha,\beta), \rho(x,\beta)\} \leqq r$$
$$\Leftrightarrow x \in C(\alpha,r)$$

Ἄρα $C(\beta,r) = C(\alpha,r)$.

(iv) Ἔστωσαν $B(\alpha_1,r_1)$ καὶ $B(\alpha_2,r_2)$ τυχοῦσαι σφαιρικαὶ περιοχαὶ τοῦ ὑπερμετρικοῦ χώρου E τοιαῦται, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$B(\alpha_1,r_1) \cap B(\alpha_2,r_2) \neq \emptyset$$

Θεωροῦμεν ἓν σημεῖον $\beta \in B(\alpha_1,r_1) \cap B(\alpha_2,r_2)$, ὁπότε, δυνάμει τῆς (ii), λαμβάνομεν

$$B(\beta,r_1) = B(\alpha_1,r_1) \quad \text{καὶ} \quad B(\beta,r_2) = B(\alpha_2,r_2)$$

Ἀλλὰ προφανῶς ἰσχύει

$$B(\beta,r_1) \subseteq B(\beta,r_2) \quad \text{ἢ} \quad B(\beta,r_2) \subseteq B(\beta,r_1)$$

ἤτοι

$$B(\alpha_1,r_1) \subseteq B(\alpha_2,r_2) \quad \text{ἢ} \quad B(\alpha_2,r_2) \subseteq B(\alpha_1,r_1)$$

(v) Ἔστωσαν αἱ ξέναι σφαιρικαὶ περιοχαὶ $B(\alpha_1,r), B(\alpha_2,r)$ ὡς καὶ ἡ κλειστὴ $C(\alpha,r)$ μὲ

$$B(\alpha_1,r) \subseteq C(\alpha,r) \quad \text{καὶ} \quad B(\alpha_2,r) \subseteq C(\alpha,r)$$

Θεωροῦμεν τώρα τυχόντα σημεῖα x,y μὲ $x \in B(\alpha_1,r)$ καὶ $y \in B(\alpha_2,r)$, ὁπότε, ἐπειδὴ αἱ $B(\alpha_1,r)$ καὶ $B(\alpha_2,r)$ εἶναι ξέναι, θὰ ἔχωμεν

$$\rho(x,\alpha_1) < r \quad \text{καὶ} \quad \rho(y,\alpha_1) \geqq r$$

καὶ ἐπομένως, δυνάμει τῆς (i),

$$\rho(x,y) = \max\{\rho(x,\alpha_1), \rho(y,\alpha_1)\} = \rho(y,\alpha_1) \geqq r$$

Ἀλλὰ προφανῶς $x \in C(\alpha,r)$ καὶ $y \in C(\alpha,r)$, ὁπότε, δυνάμει τῆς (iii),

$$C(x,r) = C(\alpha,r)$$

καὶ ἐπομένως $y \in C(x,r)$, δηλαδὴ $\rho(x,y) \leqq r$. Ἄρα, διὰ τυχόντα x,y μὲ $x \in B(\alpha_1,r)$ καὶ $y \in B(\alpha_2,r)$ ἰσχύει $\rho(x,y) = r$ καὶ ἐπομένως

$$\rho(B(\alpha_1,r), B(\alpha_2,r)) = r$$

ΟΜΑΣ 3

ΣΕΛΙΔΕΣ 149-151

1. Έστωσαν ὁ μετρικὸς χῶρος $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, $a \in \mathbb{R}$ καὶ B ἓν μὴ κενὸν ὑπόσυνολον τοῦ $\mathbb{R}$. Δείξατε ὅτι, ἂν τὸ B εἶναι κλειστὸν καὶ φραγμένον, τότε ὑπάρχει $\beta \in B$ τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἰσχύῃ $\rho(a,B) = |a-\beta|$.

Λύσις. Ὡς γνωστὸν ἔχομεν

$$\rho(a,B) = \inf_{x \in B} |a-x|$$

καὶ ἐπομένως ὑπάρχει ἀκολουθία $(x_\nu)_{\nu \in N}$ ἐν B τοιαύτη, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$\rho(a,B) = \lim |a-x_\nu|$$

Ἀλλὰ ἡ $(x_\nu)_{\nu \in N}$, ὡς ἀκολουθία ἐν B, εἶναι προφανῶς φραγμένη ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ ἐπομένως, δυνάμει τοῦ θεωρήματος Bolzano-Weierstrass, ὑπάρχει συγκλίνουσα ὑπακολουθία $(y_\mu)_{\mu \in M}$ ταύτης. Θέτομεν

$$\lim y_\mu = \beta, \text{ ὅπου } \beta \in \mathbb{R}$$

ὁπότε, ἐπειδὴ ἡ $(y_\mu)_{\mu \in M}$ εἶναι προφανῶς ἀκολουθία ἐν B, λόγῳ τῆς κλειστότητος τοῦ B, προκύπτει ὅτι $\beta \in B$. Ἐπομένως

$$\rho(a,B) = \lim |a-x_\nu| = \lim |a-y_\mu| = |a-\lim y_\mu| = |a-\beta|$$

2. Ἔστωσαν E_1, E_2 μετρικοὶ χῶροι καὶ τυχοῦσαι συνεχεῖς συναρτήσεις $f: E_1 \to E_2$ καὶ $g: E_1 \to E_2$. Δείξατε ὅτι, ἂν $A \subseteq \mathfrak{D}(f) \cap \mathfrak{D}(g)$ καὶ αἱ συναρτήσεις f καὶ g συμπίπτουν ἐπὶ τοῦ A, τότε αὗται συμπίπτουν καὶ ἐπὶ τοῦ $\bar{A} \cap \mathfrak{D}(f) \cap \mathfrak{D}(g)$.

Λύσις. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον $x \in \bar{A} \cap \mathfrak{D}(f) \cap \mathfrak{D}(g)$, ὁπότε $x \in \bar{A}$ καὶ ἑπομένως ὑπάρχει ἀκολουθία $(y_\nu)_{\nu \in N}$ ἐν A μὲ $\lim y_\nu = x$. Ἐπειδὴ αἱ συναρτήσεις f, g συμπίπτουν ἐπὶ τοῦ A, ἔχομεν

$$(\forall \nu \in N)\ f(y_\nu) = g(y_\nu)$$

καὶ ἑπομένως, λόγῳ τῆς συνεχείας τῶν f καὶ g, λαμβάνομεν

$$f(x) = \lim f(y_\nu) = \lim g(y_\nu) = g(x)$$

τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι αἱ f, g συμπίπτουν καὶ ἐπὶ τοῦ συνόλου $\bar{A} \cap \mathfrak{D}(f) \cap \mathfrak{D}(g)$.

3. Ἔστωσαν E_1, E_2 μετρικοὶ χῶροι καὶ τυχοῦσα συνάρτησις $f: E_1 \mapsto E_2$. Δείξατε ὅτι ἡ f εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τότε καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ κάθε σύνολον X, $X \subseteq E_1$, ἰσχύῃ $f(\bar{X}) \subseteq \overline{f(X)}$.

Λύσις. Ὑποθέτομεν ὅτι διὰ κάθε ὑποσύνολον X τοῦ E_1 ἰσχύει $f(\bar{X}) \subseteq \overline{f(X)}$ καὶ θεωροῦμεν τυχὸν κλειστὸν ἐν E_2 σύνολον K. Ἔχομεν τότε

$$f\left(\overline{f^{-1}(K)}\right) \subseteq \overline{f(f^{-1}(K))} \subseteq \bar{K} = K$$

καὶ ἑπομένως

$$f^{-1}(K) \supseteq f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(K)}\right)\right) \supseteq \overline{f^{-1}(K)}$$

ἤτοι $f^{-1}(K) = \overline{f^{-1}(K)}$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι τὸ σύνολον $f^{-1}(K)$ εἶναι κλειστὸν ὑποσύνολον τοῦ E_1. Ἄρα ἡ συνάρτησις f εἶναι συνεχής.

Ἀντιστρόφως ὑποθέτομεν ὅτι ἡ συνάρτησις f εἶναι συνεχὴς καὶ θεωροῦμεν τυχὸν ὑποσύνολον X τοῦ E_1. Ἐπειδὴ τὸ σύνολον $\overline{f(X)}$ εἶναι κλειστὸν ἐν E_2, λόγῳ τῆς συνεχείας τῆς συναρτήσεως f, τὸ σύνολον $f^{-1}(\overline{f(X)})$ εἶναι κλειστὸν ἐν E_1, δηλαδὴ ἰσχύει

$$\overline{f^{-1}(\overline{f(X)})} = f^{-1}(\overline{f(X)})$$

Ἐπίσης ἔχομεν

$$f^{-1}(\overline{f(X)}) \supseteq f^{-1}(f(X)) \supseteq X$$

καί ἐπομένως

$$\overline{X} \subseteq \overline{f^{-1}(\overline{f(X)})} = f^{-1}(\overline{f(X)})$$

ὁπότε

$$f(\overline{X}) \subseteq f\left(f^{-1}(\overline{f(X)})\right) \subseteq \overline{f(X)}$$

4. Ἔστωσαν E_1, E_2 μετρικοί χῶροι καί τυχοῦσα συνάρτησις $f: E_1 \to E_2$. Δείξατε ὅτι αἱ κάτωθι προτάσεις εἶναι ἰσοδύναμοι:

(i) Ἡ f εἶναι συνεχής συνάρτησις.

(ii) Διά κάθε ὑποσύνολον X τοῦ E_2 ἰσχύει $f^{-1}(X^\circ) \subseteq f^{-1}(X)^\circ$.

(iii) Διά κάθε ὑποσύνολον X τοῦ E_2 ἰσχύει $\overline{f^{-1}(X)} \subseteq f^{-1}(\overline{X})$.

Λύσις. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ συνάρτησις f εἶναι συνεχής καί θεωροῦμεν τυχόν ὑποσύνολον X τοῦ E_2. Ἐπειδή τό σύνολον X° εἶναι ἀνοικτόν ἐν E_2, λόγῳ τῆς συνεχείας τῆς συναρτήσεως f, τό σύνολον $f^{-1}(X^\circ)$ εἶναι ἀνοικτόν ἐν E_1, ὁπότε ἔχομεν

$$f^{-1}(X^\circ) = f^{-1}(X^\circ)^\circ \subseteq f^{-1}(X)^\circ$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Ὑποθέτομεν ὅτι ἰσχύει ἡ (ii) καί θεωροῦμεν τυχόν ὑποσύνολον X τοῦ E_2. Ὡς γνωστόν διά τυχόν ὑποσύνολον A ἑνός μετρικοῦ χώρου ἰσχύει

$$\overline{A}^c = (A^c)^\circ, \text{ δηλαδή } \overline{A} = [(A^c)^\circ]^c$$

Ἔχομεν λοιπόν

$$f^{-1}(\overline{X}) = f^{-1}([(X^c)^\circ]^c) = f^{-1}((X^c)^\circ)^c$$

Ἀλλά, δυνάμει τῆς (ii), ἰσχύει

$$f^{-1}((X^c)^\circ) \subseteq f^{-1}(X^c)^\circ = [f^{-1}(X)^c]^\circ$$

καί ἐπομένως

$$f^{-1}(\overline{X}) \supseteq ([f^{-1}(X)^c]^\circ)^c = \overline{f^{-1}(X)}$$

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Ὑποθέτομεν ὅτι ἰσχύει ἡ (iii) καί θεωροῦμεν τυχόν ὑποσύνολον Z τοῦ E_1. Ἐπειδή $f(Z) \subseteq E_2$, δυνάμει τῆς (iii), ἔχομεν

$$\overline{f^{-1}(f(Z))} \subseteq f^{-1}(\overline{f(Z)})$$

οπότε λαμβάνομεν

$$f(\overline{Z}) \subseteq f\left(\overline{f^{-1}(f(Z))}\right) \subseteq f\left(f^{-1}(\overline{f(Z)})\right) \subseteq \overline{f(Z)}$$

Άρα, δυνάμει τής προηγουμένης ἀσκήσεως 3, ἡ f εἶναι συνεχής.

5. Δείξατε ὅτι, ἄν A, B εἶναι τυχόντα μὴ κενὰ ὑποσύνολα ἑνὸς μετρικοῦ χώρου μὲ

$$\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$$

τότε ὑπάρχουν περιοχαὶ $U(A)$ καὶ $U(B)$ τοιαῦται, ὥστε

$$U(A) \cap U(B) = \emptyset$$

Ἐπὶ πλέον αἱ περιοχαὶ αὗται δύναται νὰ ὑποτεθοῦν καὶ ἀνοικταί.

Λύσις. Ὑποθέτομεν ὅτι τὰ A, B εἶναι ὑποσύνολα τοῦ μετρικοῦ χώρου (E, ρ) καὶ θεωροῦμεν τὰ σύνολα

$$U(A) = \{x \in E : \rho(x, A) < \rho(x, B)\} \quad \text{καὶ} \quad U(B) = \{x \in E : \rho(x, B) < \rho(x, A)\}$$

διὰ τὰ ὁποῖα προφανῶς ἰσχύει

$$U(A) \cap U(B) = \emptyset$$

Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ δείξωμεν ὅτι τὰ σύνολα $U(A)$ καὶ $U(B)$ εἶναι ἀνοικτὰ καὶ τοιαῦτα, ὥστε

$$A \subseteq U(A) \quad \text{καὶ} \quad B \subseteq U(B)$$

Λόγῳ τῆς συμμετρίας τῶν ὑποθέσεων δυνάμεθα νὰ περιορισθῶμεν εἰς τὸ σύνολον $U(A)$. Οὕτω θεωροῦμεν τυχὸν $x \in U(A)$ καὶ θέτομεν

$$r = \frac{1}{2}\left(\rho(x, B) - \rho(x, A)\right) > 0$$

ὁπότε διὰ κάθε $y \in B(x, r)$ ἔχομεν

$$|\rho(x, A) - \rho(y, A)| \leqq \rho(x, y) < r$$

καὶ

$$|\rho(x, B) - \rho(y, B)| \leqq \rho(x, y) < r$$

καὶ ἑπομένως

$$\rho(y,A) < \rho(x,A) + r = \frac{1}{2}\left(\rho(x,A)+\rho(x,B)\right) = \rho(x,B) - r < \rho(y,B)$$

δηλαδή $y \in U(A)$. Ὥστε ἐδείχθη ὅτι $B(x,r) \subseteq U(A)$, δηλαδή ὅτι τό σύνολον $U(A)$ εἶναι περιοχή τοῦ σημείου x. Ἄρα τό $U(A)$ εἶναι ἀνοικτόν σύνολον. Τέλος, πρός ἀπόδειξιν τῆς $A \subseteq U(A)$ παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδή $A \cap \bar{B} = \emptyset$, δυνάμει τῆς ἀσκήσεως 11 τῆς προηγουμένης ὁμάδος 2, διά κάθε $x \in A$ ἔχομεν

$$x \in A \longrightarrow \rho(x,A) = 0 \text{ καί } x \notin \bar{B} \Longrightarrow \rho(x,A) = 0 \text{ καί } \rho(x,B) \neq 0$$

$$\longrightarrow \rho(x,A) < \rho(x,B) \Longrightarrow x \in U(A)$$

6. Ἔστωσαν E_1, E_2 μετρικοί χῶροι καί τυχοῦσα συνάρτησις $f: E_1 \mapsto E_2$. Ἡ f καλεῖται ἀνοικτή τότε καί μόνον τότε, ἄν διά κάθε ἀνοικτόν ἐν E_1 σύνολον A, τό σύνολον $f(A)$ εἶναι ἀνοικτόν ἐν E_2. Ὁμοίως, ἡ f καλεῖται κλειστή τότε καί μόνον τότε, ἄν διά κάθε κλειστόν ἐν E_1 σύνολον K, τό σύνολον $f(K)$ εἶναι κλειστόν ἐν E_2. Δείξατε ὅτι αἱ προβολαί ἑνός καρτεσιανοῦ μετρικοῦ χώρου εἶναι ἀνοικταί συναρτήσεις, ἐνῷ αὗται δέν εἶναι, ἐν γένει, καί κλεισταί.

Λύσις. Ἔστωσαν (E,ρ) ὁ καρτεσιανός χῶρος τῶν μετρικῶν χώρων (E_i, ρ_i), $i = 1,2,\cdots,m$ καί $P_i : E \mapsto E_i$ ἡ i-προβολή αὐτοῦ. Θεωροῦμεν τώρα ἕν ἀνοικτόν ὑποσύνολον A τοῦ E καί τυχόν σημεῖον $u \in P_i(A)$. Λαμβάνομεν ἕν $x \in A$ μέ $u = P_i(x)$ καί παρατηροῦμεν ὅτι ὑπάρχει σφαιρική περιοχή $B(x,r)$ τοιαύτη, ὥστε νά ἰσχύῃ

$$B(x,r) \subseteq A$$

Διά τυχόν σημεῖον $v \in B(u,r)$ θεωροῦμεν τό σημεῖον $y \in E$, ὅπου

$$P_i(y) = v \text{ καί } (\forall j \neq i)\ P_j(y) = P_j(x)$$

ὁπότε ἰσχύει

$$\rho(x,y) = \rho_i\left(P_i(x), P_i(y)\right) = \rho_i(u,v) < r$$

δηλαδή $y \in B(x,r)$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι

$$B(u,r) \subseteq P_i\left(B(x,r)\right) \subseteq P_i(A)$$

δηλαδή ὅτι τό $P_i(A)$ εἶναι περιοχή τοῦ σημείου u. Ἄρα τό σύνολον $P_i(A)$ εἶναι ἀνοικτοῦ καὶ ἑπομένως, ἐπειδὴ τὸ Α εἶναι τυχὸν ἀνοικτὸν ὑποσύνολον τοῦ E, ἡ i-προβολὴ P_i $(i=1,2,\cdots,m)$ τοῦ καρτεσιανοῦ χώρου E εἶναι ἀνοικτὴ συνάρτησις.

Τέλος παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸν καρτεσιανὸν μετρικὸν χῶρον $\mathbb{R}^2$ τὸ ὑποσύνολόν του $K=\{(x,\frac{1}{x}) : 0 < x \leqq 1\}$ εἶναι κλειστόν, ἐνῷ τὸ σύνολον $P_1(K) = (0,1]$ δὲν εἶναι κλειστὸν (σημειωτέον ἐνταῦθα ὅτι τὸ $P_2(K)=[1,+\infty)$ εἶναι κλειστὸν σύνολον). Τοῦτο ἀποδεικνύει ὅτι αἱ προβολαὶ ἑνὸς καρτεσιανοῦ μετρικοῦ χώρου δὲν εἶναι, ἐν γένει, κλεισταί.

7. Ἔστωσαν E_1, E_2 μετρικοὶ χῶροι καὶ f_i, $i=1,2,\cdots,m$ συναρτήσεις ἐκ τοῦ E_1 εἰς τὸν E_2 διὰ τὰς ὁποίας ὑπάρχει κοινὴ ἐπέκτασις. Δείξατε ὅτι, ἂν τὰ σύνολα $\mathscr{D}(f_i)$, $i=1,2,\cdots,m$ εἶναι κλειστὰ (ἐν E_1) καὶ αἱ συναρτήσεις f_i, $i=1,2,\cdots,m$ εἶναι ὅλαι συνεχεῖς, **τότε ἡ ἐλαχίστη κοινὴ ἐπέκτασις αὐτῶν εἶναι ἐπίσης συνεχὴς συνάρτησις.**

Λύσις. Θεωροῦμεν τὴν ἐλαχίστην κοινὴν ἐπέκτασιν $F=\bigcup_{i=1}^{m} f_i$ τῶν συναρτήσεων f_i, $i=1,2,\cdots,m$ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τυχὸν ὑποσύνολον X τοῦ E_2 ἰσχύει

$$F^{-1}(X)=\bigcup_{i=1}^{m} f_i^{-1}(X)$$

Πράγματι·

$$x\in F^{-1}(X) \Longleftrightarrow (\exists y\in X)\ y=F(x) \Longleftrightarrow (\exists y\in X)(\exists i)\ y=f_i(x)$$

$$\Longleftrightarrow (\exists i)(\exists y\in X)\ y=f_i(x) \Longleftrightarrow (\exists i)\ x\in f_i^{-1}(X)$$

$$\Longleftrightarrow x\in \bigcup_{i=1}^{m} f_i^{-1}(X)$$

Εἰδικῶς διὰ $X=E_2$ λαμβάνομεν

$$\mathscr{D}(F)=\bigcup_{i=1}^{m}\mathscr{D}(f_i)$$

καὶ ἑπομένως τὸ πεδίον ὁρισμοῦ $\mathscr{D}(F)$ τῆς F εἶναι ἐπίσης κλειστὸν (ἐν E_1) σύνολον.

Τώρα, ἂν K εἶναι τυχὸν κλειστὸν ὑποσύνολον τοῦ E_2, τότε τὸ σύνολον

$$F^{-1}(K)=\bigcup_{i=1}^{m} f_i^{-1}(K)$$

εἶναι κλειστὸν (ἐν E_1). Πράγματι· ἕκαστον σύνολον $f_i^{-1}(K)$ εἶναι κλειστὸν ἐν E_1, διότι τοῦτο, λόγῳ τῆς συνεχείας τῆς f_i, εἶναι κλειστὸν ἐν $\mathfrak{D}(f_i)$ καὶ τὸ $\mathfrak{D}(f_i)$ εἶναι κλειστὸν ἐν E_1.

Τέλος, ἐπειδὴ $F^{-1}(K) \subseteq \mathfrak{D}(F)$ καὶ ἀμφότερα τὰ σύνολα $F^{-1}(K)$ καὶ $\mathfrak{D}(F)$ εἶναι κλειστὰ (ἐν E_1), τὸ σύνολον $F^{-1}(K)$ θὰ εἶναι καὶ κλειστὸν ἐν $\mathfrak{D}(F)$. Τοῦτο προφανῶς ἀποδεικνύει τὴν συνέχειαν τῆς συναρτήσεως F.

8. Ἔστωσαν εἷς μετρικὸς χῶρος (E,ρ) καὶ ἓν σημεῖον $a\in E$. Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x)=\rho(x,a)$ εἶναι ὁμοιομόρφως συνεχής.

Λύσις. Διὰ τυχόντα x,y ἐν $\mathfrak{D}(f)=E$ ἰσχύει

$$|f(x)-f(y)| = |\rho(x,a)-\rho(y,a)| \leq \rho(x,y)$$

καὶ ἐπομένως εἰς τὸν ὁρισμὸν τῆς ὁμοιομόρφου συνεχείας ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν $\delta=\varepsilon$.

9. Ἔστωσαν E_1 εἷς μετρικὸς χῶρος καὶ E_2 εἷς σταθμητὸς διανυσματικὸς χῶρος. Δείξατε ὅτι, ἂν αἱ συναρτήσεις

$$p: E_1 \to \mathbb{R} \quad \text{καὶ} \quad f: E_1 \to E_2$$

εἶναι φραγμέναι καὶ ὁμοιομόρφως συνεχεῖς, τότε ἡ συνάρτησις pf εἶναι ἐπίσης ὁμοιομόρφως συνεχής.

Λύσις. Ἔστωσαν N ἡ στάθμη τοῦ χώρου E_2 καὶ M_1, M_2 θετικὰ φράγματα τῶν συναρτήσεων p, f ἀντιστοίχως, ὁπότε ἔχομεν

$$(\forall x\in\mathfrak{D}(p)) \ |p(x)| \leq M_1 \quad \text{καὶ} \quad (\forall x\in\mathfrak{D}(f)) \ N(f(x)) \leq M_2$$

Διὰ τυχόντα σημεῖα x,y ἐν $\mathfrak{D}(pf)=\mathfrak{D}(p)\cap\mathfrak{D}(f)$ ἔχομεν

$$\begin{aligned}(pf)(x)-(pf)(y) &= p(x)f(x)-p(y)f(y)\\ &= p(x)f(x)-p(x)f(y)+p(x)f(y)-p(y)f(y)\\ &= p(x)\big(f(x)-f(y)\big)+\big(p(x)-p(y)\big)f(y)\end{aligned}$$

καὶ ἐπομένως

$$\begin{aligned}N\big((pf)(x)-(pf)(y)\big) &\leq |p(x)|\,N\big(f(x)-f(y)\big)+|p(x)-p(y)|\,N(f(y))\\ &\leq M_1 N\big(f(x)-f(y)\big)+M_2|p(x)-p(y)|\end{aligned}$$

Ἀλλὰ αἱ συναρτήσεις p, f εἶναι ὁμοιομόρφως συνεχεῖς, δηλαδὴ διὰ τυχὸν $\varepsilon > 0$ ὑπάρχουν $\delta_1 > 0$ καὶ $\delta_2 > 0$ τοιαῦτα, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$(\forall x, y \text{ ἐν } \mathcal{D}(p))\ \rho(x,y) < \delta_1 \Rightarrow |p(x) - p(y)| < \varepsilon$$

καὶ

$$(\forall x, y \text{ ἐν } \mathcal{D}(f))\ \rho(x,y) < \delta_2 \Rightarrow N\big(f(x) - f(y)\big) < \varepsilon$$

ὅπου ρ εἶναι ἡ μετρικὴ τοῦ χώρου E_1. Ἄν λάβωμεν λοιπὸν $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, διὰ κάθε x, y ἐν $\mathcal{D}(pf) = \mathcal{D}(p) \cap \mathcal{D}(f)$ θὰ ἰσχύῃ καὶ

$$N\big((pf)(x) - (pf)(y)\big) < M_1\varepsilon + M_2\varepsilon = (M_1 + M_2)\varepsilon$$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\big(\forall x, y \text{ ἐν } \mathcal{D}(pf)\big)\ \rho(x,y) < \delta \Rightarrow N\big((pf)(x) - (pf)(y)\big) < (M_1 + M_2)\varepsilon$$

δηλαδὴ ὅτι ἡ συνάρτησις pf εἶναι ὁμοιομόρφως συνεχής.

10. Ἔστωσαν E_1, E_2 μετρικοὶ χῶροι καὶ τυχοῦσα ἀμφιμονοσήμαντος συνάρτησις $f : E_1 \mapsto E_2$. Δείξατε ὅτι ἡ f εἶναι εἷς ὁμοιομορφισμὸς τότε καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ κάθε σύνολον X μὲ $X \subseteq E_1$ ἰσχύῃ $f(\overline{X}) = \overline{f(X)}$

Λύσις. Ὑποθέτομεν ὅτι διὰ κάθε ὑποσύνολον X τοῦ E_1 ἰσχύει $f(\overline{X}) = \overline{f(X)}$, ὁπότε, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὸ ἀμφιμονοσήμαντον τῆς f, ἔχομεν

$$X \text{ εἶναι κλειστὸν ἐν } E_1 \Longleftrightarrow X = \overline{X} \Longleftrightarrow f(X) = f(\overline{X}) \Longleftrightarrow f(X) = \overline{f(X)}$$
$$\Longleftrightarrow f(X) \text{ εἶναι κλειστὸν ἐν } E_2$$

Ἄρα ἡ συνάρτησις f εἶναι εἷς ὁμοιομορφισμός.

Ἀντιστρόφως, ὑποθέτομεν ὅτι ἡ f εἶναι εἷς ὁμοιομορφισμὸς καὶ θεωροῦμεν τυχὸν ὑποσύνολον X τοῦ E_1, ὁπότε βεβαίως τὸ σύνολον $f(\overline{X})$ εἶναι κλειστὸν καὶ ἑπομένως

$$f(\overline{X}) = \overline{f(\overline{X})} \supseteq \overline{f(X)}$$

Ἀλλὰ προφανῶς ἡ f εἶναι συνεχὴς καὶ ἑπομένως, δυνάμει τῆς ἀσκήσεως 3, ἰσχύει

$$f(\overline{X}) \subseteq \overline{f(X)}$$

Ἄρα $f(\overline{X}) = \overline{f(X)}$.

11. Ἔστωσαν (E,ρ) ὁ καρτεσιανὸς μετρικὸς χῶρος τῶν μετρικῶν χώρων (E_i,ρ_i), $i=1,2,\cdots,m$ καὶ ρ', ρ'' αἱ εἰς τὸ σύνολον E ὁριζόμεναι μετρικαὶ ὑπὸ τῶν τύπων

$$\rho'(x,y)=\sup_i \rho_i(x_i,y_i) \qquad \text{καὶ} \qquad \rho''(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\rho_i(x_i,y_i)$$

Δείξατε ὅτι οἱ μετρικοὶ χῶροι (E,ρ), (E,ρ') καὶ (E,ρ'') εἶναι μεταξύ των (ἀνὰ δύο) ὁμοιομορφικοί.

Λύσις. Δυνάμει τῆς ἀσκήσεως 5 τῆς προηγουμένης ὁμάδος 2, αἱ μετρικαὶ ρ, ρ' καὶ ρ'' εἶναι ἀνὰ δύο ἰσοδύναμοι καὶ ἑπομένως ἡ ταυτοτικὴ ἀπεικόνισις, ὡς ἀπεικόνισις μεταξὺ τῶν χώρων (E,ρ), (E,ρ') καὶ (E,ρ'') ἀνὰ δύο θεωρουμένων, εἶναι εἷς ὁμοιομορφισμός.

12. Ἔστωσαν E καὶ S ἀντιστοίχως οἱ καρτεσιανοὶ μετρικοὶ χῶροι τῶν μετρικῶν χώρων E_i καὶ S_i, $i=1,2,\cdots,m$. Δείξατε ὅτι, ἂν διὰ κάθε $i=1,2,\cdots,m$ οἱ μετρικοὶ χῶροι E_i καὶ S_i εἶναι ὁμοιομορφικοί, τότε καὶ οἱ καρτεσιανοὶ χῶροι E καὶ S εἶναι ἐπίσης ὁμοιομορφικοί.

Λύσις. Θεωροῦμεν τοὺς ὁμοιομορφισμοὺς f_i τοῦ E_i ἐπὶ τοῦ S_i $(i=1,2,\cdots,m)$ καὶ διὰ τυχὸν $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in E$ θέτομεν

$$f(x)=\big(f_1(x_1),f_2(x_2),\cdots,f_m(x_m)\big)$$

Προφανῶς ἡ f εἶναι μία ἀμφιμονοσήμαντος συνάρτησις τοῦ E ἐπὶ τοῦ S καὶ μάλιστα διὰ τυχὸν $y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)\in S$ ἰσχύει

$$f^{-1}(y)=\big(f_1^{-1}(y_1),f_2^{-1}(y_2),\cdots,f_m^{-1}(y_m)\big)$$

Λόγῳ τῆς συνεχείας τῶν f_i καὶ f_i^{-1} $(i=1,2,\cdots,m)$, εὐκόλως συνάγεται τώρα καὶ ἡ συνέχεια τῶν συναρτήσεων f καὶ f^{-1}. Ἄρα ἡ συνάρτησις f εἶναι εἷς ὁμοιομορφισμὸς τοῦ E ἐπὶ τοῦ S.

13. Ἔστωσαν (E,ρ) καὶ (E,σ) ἀντιστοίχως οἱ καρτεσιανοὶ μετρικοὶ χῶροι τῶν μετρικῶν χώρων (E_i,ρ_i) καὶ (E_i,σ_i), $i=1,2,\cdots,m$. Δείξατε ὅτι, ἂν διὰ κάθε $i=1,2,\cdots,m$ αἱ μετρικαὶ ρ_i καὶ σ_i εἶναι ὁμοιομόρφως ἰσοδύναμοι, τότε αἱ μετρικαὶ ρ καὶ σ εἶναι ἐπίσης ὁμοιομόρφως ἰσοδύναμοι.

Λύσις. Θεωροῦμεν τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν ε καὶ τυχόντα σημεῖα $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$ ἐν E. Ἐπειδὴ αἱ μετρικαὶ ρ_i καὶ σ_i εἶναι ὁμοιομόρφως ἰσοδύναμοι, ἡ ταυτοτικὴ συνάρτησις τοῦ E_i ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του εἶναι ὁμοιομόρφως συνεχής, ὡς συνάρτησις τοῦ (E_i, ρ_i) ἐπὶ τοῦ (E_i, σ_i), καὶ ἑπομένως ὑπάρχει $\delta_i > 0$ τοιοῦτον, ὥστε διὰ τυχόντα u, v ἐν E_i νὰ ἰσχύῃ

$$\rho_i(u,v) < \delta_i \implies \sigma_i(u,v) < \varepsilon$$

Ἑπομένως, ἂν θέσωμεν $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_m\}$, θὰ ἔχωμεν

$$\begin{aligned} \rho(x,y) < \delta &\implies (\forall i)\ \rho_i(x_i, y_i) < \delta_i \implies (\forall i)\ \sigma_i(x_i, y_i) < \varepsilon \\ &\implies \sigma(x,y) < \sqrt{m}\cdot\varepsilon \end{aligned}$$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \text{ ἐν } E)\ \rho(x,y) < \delta \implies \sigma(x,y) < \sqrt{m}\cdot\varepsilon$$

τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι ἡ ταυτοτικὴ συνάρτησις τοῦ E ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του εἶναι ὁμοιομόρφως συνεχὴς ὡς συνάρτησις τοῦ (E, ρ) ἐπὶ τοῦ (E, σ). Λόγῳ τῆς συμμετρίας τῶν ὑποθέσεων, αὕτη εἶναι ὁμοιομόρφως συνεχὴς καὶ ὡς συνάρτησις τοῦ (E, σ) ἐπὶ τοῦ (E, ρ). Ἄρα αἱ μετρικαὶ ρ καὶ σ εἶναι ὁμοιομόρφως ἰσοδύναμοι.

14. Ἔστωσαν E_1, E_2 μετρικοὶ χῶροι καὶ τυχοῦσα συνάρτησις $f: E_1 \to E_2$. Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις f εἶναι συνεχὴς τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ συνάρτησις $g: E_1 \to E_1 \times E_2$

$$g(x) = (x, f(x))$$

εἶναι εἷς ὁμοιομορφισμὸς ἐκ τοῦ E_1 εἰς τὸ $E_1 \times E_2$.

Ἂν ἡ f εἶναι συνεχής, εἶναι τὰ σύνολα $\mathfrak{D}(f)$ καὶ f ὁμοιομορφικά;

Λύσις. Κατ' ἀρχὴν παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συνάρτησις g εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος καὶ μάλιστα ἡ ἀντίστροφός της g^{-1} εἶναι προφανῶς περιορισμὸς τῆς πρώτης προβολῆς τοῦ $E_1 \times E_2$ καὶ ἑπομένως συνεχὴς συνάρτησις.

Ἂν ἡ συνάρτησις f εἶναι συνεχής, τότε καὶ ἡ g εἶναι βεβαίως συνεχὴς καὶ ἑπομένως εἷς ὁμοιομορφισμὸς ἐκ τοῦ E_1 εἰς τὸ $E_1 \times E_2$.

Ἀντιστρόφως, ἂν ἡ g εἶναι εἷς ὁμοιομορφισμὸς ἐκ τοῦ E_1 εἰς τὸ $E_1 \times E_2$, τότε αὕτη εἶναι συνεχής, ὁπότε καὶ ἡ συνάρτησις $f = P_2 \circ g$ εἶναι συνεχής, ὡς σύνθεσις συνεχών συναρτήσεων.

Τέλος, παρατηροῦμεν ὅτι $\mathcal{R}(g)=f$ καὶ ἐπομένως, ἄν ἡ f εἶναι συνεχής, ἡ g εἶναι εἷς ὁμοιομορφισμὸς τοῦ $\mathcal{D}(f)$ ἐπὶ τοῦ f, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι τὰ σύνολα $\mathcal{D}(f)$ καὶ f εἶναι ὁμοιομορφικά.

15. **Ἔστωσαν ρ_1 καὶ ρ_2 μετρικαὶ εἰς τὸ σύνολον E. Δείξατε ὅτι αἱ ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι ἰσοδύναμοι τότε καὶ μόνον τότε, ἄν τὸ σύνολον τῶν συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν ὡς πρὸς τὴν μετρικὴν ρ_1 συμπίπτῃ μὲ τὸ τοιοῦτον ὡς πρὸς τὴν ρ_2.**

Λύσις. Ὑποθέτομεν ὅτι αἱ μετρικαὶ ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι ἰσοδύναμοι, ὁπότε, ὡς γνωστόν, οἱ μετρικοὶ χῶροι (E,ρ_1) καὶ (E,ρ_2) ἔχουν τὴν αὐτὴν συλλογὴν περιοχῶν. Ἐπομένως τυχοῦσα ἀκολουθία ἐν E, ἡ ὁποία συγκλίνει ὡς πρὸς τὴν μίαν μετρικήν, συγκλίνει καὶ ὡς πρὸς τὴν ἄλλην.

Ἀντιστρόφως, ὑποθέτομεν ὅτι τὸ σύνολον τῶν συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν ὡς πρὸς τὴν μετρικὴν ρ_1 συμπίπτει μὲ τὸ τοιοῦτον ὡς πρὸς τὴν ρ_2 καὶ παρατηροῦμεν ὅτι, διὰ τυχοῦσαν ἀκολουθίαν $(a_\nu)_{\nu\in N}$ ἐν E ἰσχύει

$$\rho_1-\lim a_\nu=\ell \Longleftrightarrow \rho_2-\lim a_\nu=\ell$$

Πράγματι· χωρὶς βλάβην τῆς γενικότητος, ὑποθέτομεν ὅτι τὸ N εἶναι τὸ σύνολον τῶν περιττῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ θεωροῦμεν τὴν ἀκολουθίαν (β_ν), ὅπου

$$\beta_\nu=\begin{cases} a_\nu, & \nu\in N\\ \ell, & \nu\in \mathbb{N}-N\end{cases}$$

δηλαδὴ τὴν ἀκολουθίαν

$$a_1,\ \ell,\ a_3,\ \ell,\ a_5,\ \ell,\ \dots$$

Ἄν ὑποθέσωμεν ὅτι $\rho_1-\lim a_\nu=\ell$, τότε προφανῶς ἰσχύει καὶ $\rho_1-\lim\beta_\nu=\ell$, ὁπότε ἡ ἀκολουθία (β_ν) θὰ συγκλίνῃ καὶ ὡς πρὸς τὴν μετρικὴν ρ_2. Ἀλλὰ διὰ κάθε $\nu\in\mathbb{N}-N$ ἰσχύει $\beta_\nu=\ell$, ὁπότε βεβαίως $\rho_2-\lim\limits_{\nu\in\mathbb{N}-N}\beta_\nu=\ell$ καὶ ἐπομένως $\rho_2-\lim\beta_\nu=\ell$. Ἄρα ἡ ἀκολουθία $(a_\nu)_{\nu\in N}$, ὡς ὑπακολουθία τῆς (β_ν), συγκλίνει ὡς πρὸς τὴν μετρικὴν ρ_2 καὶ μάλιστα ἰσχύει $\rho_2-\lim a_\nu=\ell$. Λόγῳ τῆς συμμετρίας τῶν ὑποθέσεων, προκύπτει ὅτι ἄν $\rho_2-\lim a_\nu=\ell$, τότε ἰσχύει καὶ $\rho_1-\lim a_\nu=\ell$.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω, εὐκόλως συνάγεται ὅτι ἡ ταυτοτικὴ συνάρτησις τοῦ E ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του εἶναι συνεχὴς τόσον ὡς συνάρτησις τοῦ (E,ρ_1) ἐπὶ τοῦ (E,ρ_2), ὅσον καὶ ὡς συνάρτησις τοῦ (E,ρ_2) ἐπὶ τοῦ (E,ρ_1). Ἄρα ἡ ταυτοτικὴ συνάρτησις τοῦ E ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του εἶναι εἷς ὁμοιομορφισμὸς καὶ ἑπομένως αἱ μετρικαὶ ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι ἰσοδύναμοι.

16. Ἔστω εἷς μετρικὸς χῶρος (E,ρ). Δείξατε ὅτι αἱ μετρικαὶ σ καὶ τ αἱ ὁριζόμεναι ὑπὸ τῶν τύπων

$$\sigma(x,y)=\min\{\rho(x,y),1\} \qquad \text{καὶ} \qquad \tau(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$$

εἶναι ἰσοδύναμοι πρὸς τὴν ρ (ἄρα καὶ μεταξύ των).

Λύσις. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν ἀκολουθίαν $(a_\nu)_{\nu\in N}$ ἐν E καὶ παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τυχόντα σημεῖα x,y ἐν E ἰσχύει

$$\sigma(x,y)\leq\rho(x,y) \quad \text{καὶ} \quad \tau(x,y)\leq\rho(x,y)$$

(i) Ἂν $\ell\in E$, τότε ἔχομεν

$$\rho\text{-}\lim a_\nu=\ell \Longrightarrow \lim\rho(a_\nu,\ell)=0 \Longrightarrow \lim\sigma(a_\nu,\ell)=0$$
$$\Longrightarrow \sigma\text{-}\lim a_\nu=\ell$$

Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως

$$\sigma\text{-}\lim a_\nu=\ell \Longrightarrow \sigma(a_\nu,\ell)<1 \quad \text{τελικῶς δι' ὅλους τοὺς δείκτας } \nu\in N$$
$$\Longrightarrow \rho(a_\nu,\ell)=\sigma(a_\nu,\ell) \quad \text{τελικῶς δι' ὅλους τοὺς δείκτας } \nu\in N$$
$$\Longrightarrow \lim\rho(a_\nu,\ell)=\lim\sigma(a_\nu,\ell)=0$$
$$\Longrightarrow \rho\text{-}\lim a_\nu=\ell$$

Ἄρα, δυνάμει τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως 15, αἱ μετρικαὶ σ καὶ ρ εἶναι ἰσοδύναμοι.

(ii) Ὁμοίως ἔχομεν

$$\rho\text{-}\lim a_\nu=\ell \Longrightarrow \tau\text{-}\lim a_\nu=\ell$$

καὶ ἀντιστρόφως

$$\tau\text{-}\lim a_\nu=\ell \Longrightarrow \lim\tau(a_\nu,\ell)=0$$
$$\Longrightarrow \lim\rho(a_\nu,\ell)=\lim\frac{\tau(a_\nu,\ell)}{1-\tau(a_\nu,\ell)}=\frac{0}{1-0}=0$$
$$\Longrightarrow \rho\text{-}\lim a_\nu=\ell$$

Ἄρα, δυνάμει πάλιν τῆς ἀσκήσεως 15, αἱ μετρικαὶ τ καὶ ρ εἶναι ἐπίσης ἰσοδύναμοι.

17. Ἔστωσαν ρ_i, $i=1,2,\cdots,m$ ἰσοδύναμοι (ἀνὰ δύο) μετρικαὶ εἰς τὸ σύνολον E. Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις ρ ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\rho(x,y)=\sup_i \rho_i(x,y)$$

εἶναι μία μετρικὴ εἰς τὸ E ἰσοδύναμος πρὸς τὰς ρ_i, $i=1,2,\cdots,m$.*

Λύσις. Κατ' ἀρχὴν ἡ συνάρτησις ρ εἶναι μία μετρικὴ εἰς τὸ E, διότι διὰ τυχόντα x,y,z ἐν E ἰσχύουν:

1. $\rho(x,y)=0 \Longleftrightarrow (\forall i)\,\rho_i(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y$

καὶ

2. $\rho(x,y)=\sup_i \rho_i(x,y) \leqq \sup_i \left(\rho_i(x,z)+\rho_i(y,z)\right)$

$$\leqq \sup_i \rho_i(x,z)+\sup_i \rho_i(y,z)=\rho(x,z)+\rho(y,z)$$

Ἀκολούθως θεωροῦμεν τυχοῦσαν ἀκολουθίαν $(a_\nu)_{\nu\in N}$ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τὰ τυχόντα σημεῖα x,y ἐν E ἰσχύει

$$\rho_i(x,y) \leqq \rho(x,y) \quad \text{καὶ} \quad \rho(x,y) \leqq \sum_{j=1}^{m} \rho_j(x,y)$$

Ἐπομένως ἂν $\ell\in E$, ἔχομεν

$$\rho\text{-}\lim a_\nu=\ell \Longrightarrow \rho_i\text{-}\lim a_\nu=\ell$$

καὶ ἀντιστρόφως, ἐπειδὴ αἱ μετρικαὶ ρ_j, $j=1,2,\cdots,m$ εἶναι ἰσοδύναμοι,

$$\rho_i\text{-}\lim a_\nu=\ell \Longrightarrow (\forall j)\ \rho_j\text{-}\lim a_\nu=\ell \Longrightarrow (\forall j)\ \lim_\nu \rho_j(a_\nu,\ell)=0$$

$$\Longrightarrow \lim_\nu \sum_{j=1}^{m}\rho_j(a_\nu,\ell)=0 \Longrightarrow \lim \rho(a_\nu,\ell)=0$$

$$\Longrightarrow \rho\text{-}\lim a_\nu=\ell$$

Ἄρα, δυνάμει τῆς ἀσκήσεως 15, αἱ μετρικαὶ ρ καὶ ρ_i εἶναι ἰσοδύναμοι καὶ μάλιστα διὰ κάθε $i=1,2,\cdots,m$.

18. Ἔστωσαν ρ_1 καὶ ρ_2 μετρικαὶ εἰς τὸ σύνολον E τοιαῦται, ὥστε

$$(\forall x, y \text{ ἐν } E)\ \rho_1(x,y) \leqq \rho_2(x,y)$$

Δείξατε ὅτι ἡ μετρικὴ ρ_2 εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ρ_1 τότε καὶ μόνον τότε, ἂν αὕτη εἶναι συνεχὴς συνάρτησις (ὡς πρὸς τὴν μετρικὴν τὴν εἰσαγομένην εἰς τὸν καρτεσιανὸν χῶρον $E\times E$ διὰ τῆς ρ_1). Ἐπὶ πλέον δείξατε ὅτι εἰς ἕνα μετρικὸν χῶρον (E,ρ) καὶ διὰ τυχοῦσαν συνεχῆ ἐπὶ τοῦ E πραγματικὴν συνάρτησιν f, ὁρίζεται μία ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ρ μετρικὴ σ εἰς τὸ E διὰ τοῦ τύπου

$$\sigma(x,y) = |f(x) - f(y)| + \rho(x,y)$$

Λύσις. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ μετρικὴ ρ_2 εἶναι συνεχὴς συνάρτησις, ὡς πρὸς τὴν μετρικὴν τὴν εἰσαγομένην εἰς τὸν καρτεσιανὸν χῶρον E^2 διὰ τῆς ρ_1, καὶ θεωροῦμεν τυχοῦσαν ἀκολουθίαν $(a_\nu)_{\nu\in N}$ ἐν E. Ἂν $\ell\in E$, ἔχομεν

$$\rho_1\text{-}\lim a_\nu = \ell \Longrightarrow \lim \rho_2(a_\nu,\ell) = \rho_2(\rho_1\text{-}\lim a_\nu,\ell) = \rho_2(\ell,\ell) = 0$$

$$\Longrightarrow \rho_2\text{-}\lim a_\nu = \ell$$

καὶ ἀντιστρόφως

$$\rho_2\text{-}\lim a_\nu = \ell \longrightarrow \rho_1\text{-}\lim a_\nu = \ell$$

ὡς προκύπτει ἀμέσως ἐκ τῆς

$$(\forall x, y \text{ ἐν } E)\ \rho_1(x,y) \leqq \rho_2(x,y)$$

Ἄρα, δυνάμει τῆς ἀσκήσεως 15, αἱ μετρικαὶ ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ἀντιστρόφως, ὑποθέτομεν ὅτι αἱ μετρικαὶ ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι ἰσοδύναμοι καὶ θεωροῦμεν τυχοῦσαν συγκλίνουσαν ἀκολουθίαν (x_ν, y_ν), $\nu\in N$ ἐν E ὡς πρὸς τὴν μετρικὴν τοῦ καρτεσιανοῦ χώρου E^2 τὴν εἰσαγομένην διὰ τῆς ρ_1. Θέτομεν

$$\rho_1\text{-}\lim x_\nu = a \quad \text{καὶ} \quad \rho_1\text{-}\lim y_\nu = \beta$$

ὁπότε, ἐπειδὴ αἱ μετρικαὶ ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι ἰσοδύναμοι, ἔχομεν καὶ

$$\rho_2\text{-}\lim x_\nu = a \quad \text{καὶ} \quad \rho_2\text{-}\lim y_\nu = \beta$$

Ἐπειδή, ὡς εὐκόλως συνάγεται, διὰ κάθε $\nu\in N$ ἰσχύει

$$|\rho_2(x_\nu,y_\nu) - \rho_2(a,\beta)| \leqq \rho_2(x_\nu,a) + \rho_2(y_\nu,\beta)$$

θά ἔχωμεν

$$\lim |\rho_2(x_\nu,y_\nu)-\rho_2(\alpha,\beta)|=0$$

δηλαδή

$$\lim \rho_2(x_\nu,y_\nu)=\rho_2(\rho_1\text{-}\lim x_\nu,\rho_1\text{-}\lim y_\nu)$$

Τοῦτο ἀκριβῶς σημαίνει ὅτι ἡ μετρική ρ_2 εἶναι συνεχής συνάρτησις ὡς πρός τήν μετρικήν τήν εἰσαγομένην εἰς τόν καρτεσιανόν χῶρον E^2 διά τῆς ρ_1.

Τέλος, ἡ συνάρτησις σ εἶναι μία μετρική εἰς τό E, διότι διά κάθε x, y,z ἐν E ἰσχύουν :

1. $\sigma(x,y)=0 \Longleftrightarrow |f(x)-f(y)|=0$ καί $\rho(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y$

καί

2. $$\begin{aligned}\sigma(x,y) &= |f(x)-f(y)|+\rho(x,y)=|(f(x)-f(z))+(f(z)-f(y))|+\rho(x,y)\\ &\leqq |f(x)-f(z)|+|f(z)-f(y)|+\rho(x,z)+\rho(y,z)\\ &=(|f(x)-f(z)|+\rho(x,z))+(|f(y)-f(z)|+\rho(y,z))\\ &=\sigma(x,z)+\sigma(y,z)\end{aligned}$$

Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι

$$(\forall\ x,y \text{ ἐν } E)\quad \rho(x,y)\leqq\sigma(x,y)$$

καί ἐπί πλέον ὅτι ἡ σ εἶναι συνεχής συνάρτησις ὡς πρός τήν μετρικήν τήν εἰσαγομένην εἰς τόν καρτεσιανόν χῶρον E^2 διά τῆς ρ, διότι διά τυχοῦσαν συγκλίνουσαν ἀκολουθίαν (x_ν,y_ν) ἐν E, ἔχομεν

$$\begin{aligned}\lim\sigma(x_\nu,y_\nu) &= \lim|f(x_\nu)-f(y_\nu)|+\lim\rho(x_\nu,y_\nu)\\ &=|\lim f(x_\nu)-\lim f(y_\nu)|+\lim\rho(x_\nu,y_\nu)\\ &=|f(\rho\text{-}\lim x_\nu)-f(\rho\text{-}\lim y_\nu)|+\rho(\rho\text{-}\lim x_\nu,\rho\text{-}\lim y_\nu)\\ &=\sigma(\rho\text{-}\lim x_\nu,\rho\text{-}\lim y_\nu)\end{aligned}$$

Ἐπομένως, δυνάμει τῶν ἀνωτέρω ἀποδειχθέντων, αἱ μετρικαί ρ καί σ εἶναι ἰσοδύναμοι.

ΟΜΑΣ 4

ΣΕΛΙΔΕΣ 171-172

1. Δείξατε ὅτι, ἄν ὁ καρτεσιανός μετρικός χῶρος E τῶν μετρικῶν χώρων E_i, $i = 1, 2, \cdots, m$ εἶναι πλήρης, τότε οἱ χῶροι E_i, $i = 1, 2, \cdots, m$ εἶναι ἐπίσης πλήρεις.

Λύσις. Ἔστωσαν ἕν ὡρισμένον σημεῖον $c = (c_1, c_2, \cdots, c_m) \in E$ καί τυχοῦσα βασική ἀκολουθία $(\alpha_\nu)_{\nu \in N}$ ἐν E_i, ὅπου i εἶναι εἷς τυχών, ἀλλ' ὡρισμένος δείκτης ἐν $\{1, 2, \cdots, m\}$. Θέτομεν

$$\beta_\nu = (\beta_{1\nu}, \beta_{2\nu}, \cdots, \beta_{m\nu})$$

ὅπου

$$\beta_{j\nu} = \begin{cases} \alpha_\nu, & \text{ἄν } j = i \\ c_j, & \text{ἄν } j \neq i \end{cases}$$

καί παρατηροῦμεν ὅτι ἡ $(\beta_\nu)_{\nu \in N}$ εἶναι μία βασική ἀκολουθία ἐν E. Ἄρα, λόγῳ τῆς πληρότητος τοῦ καρτεσιανοῦ χώρου E, ἡ ἀκολουθία $(\beta_\nu)_{\nu \in N}$ εἶναι συγκλίνουσα ἐν E καί ἑπομένως ἡ $(\beta_{i\nu})_{\nu \in N}$, δηλαδή ἡ ἀκολουθία $(\alpha_\nu)_{\nu \in N}$, εἶναι συγκλίνουσα ἐν E_i. Τοῦτο ἀποδεικνύει τήν πληρότητα τοῦ χώρου E_i καί μάλιστα διά κάθε $i = 1, 2, \cdots, m$.

2. Οἱ μετρικοί χῶροι E_1 καί E_2 καλοῦνται ὁμοιομόρφως ἰσοδύναμοι τότε καί μόνον τότε, ἄν ὑπάρχῃ μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις f τοῦ E_1 ἐπί τοῦ E_2 τοιαύτη, ὥστε τόσον αὐτή, ὅσον καί ἡ ἀντίστροφός της f^{-1} νά εἶναι ὁμοιομόρφως συνεχεῖς συναρτήσεις. Δείξατε ὅτι:

(α) Ἂν ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι ὁμοιομόρφως ἰσοδύναμοι μετρικαὶ ἐν E, τότε οἱ μετρικοὶ χῶροι (E,ρ_1) καὶ (E,ρ_2) εἶναι ὁμοιομόρφως ἰσοδύναμοι.

(β) Ἂν E_1 καὶ E_2 εἶναι ὁμοιομόρφως ἰσοδύναμοι μετρικοὶ χῶροι, τότε ἰσχύει

$$E_1 \text{ εἶναι πλήρης} \Longleftrightarrow E_2 \text{ εἶναι πλήρης}$$

Λύσις. (α) Ἐπειδὴ αἱ μετρικαὶ ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι ὁμοιομόρφως ἰσοδύναμοι, ἡ ταυτοτικὴ συνάρτησις τοῦ E ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του εἶναι ὁμοιομόρφως συνεχὴς τόσον ὡς συνάρτησις τοῦ (E,ρ_1) ἐπὶ τοῦ (E,ρ_2), ὅσον καὶ ὡς συνάρτησις τοῦ (E,ρ_2) ἐπὶ τοῦ (E,ρ_1). Τοῦτο ἀκριβῶς ἀποδεικνύει ὅτι οἱ μετρικοὶ χῶροι (E,ρ_1) καὶ (E,ρ_2) εἶναι ὁμοιομόρφως ἰσοδύναμοι, διότι ἡ ταυτοτικὴ συνάρτησις συμπίπτει μὲ τὴν ἀντίστροφόν της.

(β) Ἔστωσαν ρ_1, ρ_2 αἱ μετρικαὶ τῶν χώρων E_1, E_2 ἀντιστοίχως καὶ f μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ E_1 ἐπὶ τοῦ E_2 τοιαύτη, ὥστε τόσον αὐτή, ὅσον καὶ ἡ ἀντίστροφός της f^{-1} νὰ εἶναι ὁμοιομόρφως συνεχεῖς συναρτήσεις. Ὑποθέτομεν ὅτι ὁ μετρικὸς χῶρος E_1 εἶναι πλήρης καὶ θεωροῦμεν τυχοῦσαν βασικὴν ἀκολουθίαν $(\alpha_\nu)_{\nu\in N}$ ἐν E_2.

Ἂν ε εἶναι τυχὼν θετικὸς ἀριθμός, τότε, λόγῳ τῆς ὁμοιομόρφου συνεχείας τῆς f^{-1}, ὑπάρχει $\delta > 0$ τοιοῦτον, ὥστε διὰ κάθε x, y ἐν E_2 νὰ ἰσχύῃ

$$\rho_2(x,y) < \delta \Rightarrow \rho_1(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) < \varepsilon$$

Ἀλλὰ ἡ ἀκολουθία $(\alpha_\nu)_{\nu\in N}$ εἶναι βασικὴ καὶ ἑπομένως ὑπάρχει $n\in\mathbb{R}$ τοιοῦτον, ὥστε διὰ κάθε μ, ν ἐν N μὲ $\mu > n$ καὶ $\nu > n$ νὰ ἰσχύῃ

$$\rho_2(\alpha_\mu, \alpha_\nu) < \delta \text{ καὶ ἑπομένως } \rho_1(f^{-1}(\alpha_\mu), f^{-1}(\alpha_\nu)) < \varepsilon$$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n\in\mathbb{R})(\forall \mu,\nu \text{ ἐν } N)\ \mu > n \text{ καὶ } \nu > n \Longrightarrow \rho_1(f^{-1}(\alpha_\mu), f^{-1}(\alpha_\nu)) < \varepsilon$$

δηλαδὴ ὅτι ἡ ἀκολουθία $(f^{-1}(\alpha_\nu))_{\nu\in N}$ εἶναι βασικὴ ἀκολουθία ἐν E_1 καὶ ἑπομένως, ἐπειδὴ ὁ χῶρος E_1 εἶναι πλήρης, αὐτὴ εἶναι συγκλίνουσα ἐν E_1.

Θέτομεν τώρα

$$\lim f^{-1}(\alpha_\nu) = \ell$$

ὁπότε, λόγῳ τῆς συνεχείας τῆς f, λαμβάνομεν

$$\ell im f(f^{-1}(a_\nu)) = f(\ell im f^{-1}(a_\nu)) = f(\ell)$$

Ἀλλά, λόγῳ τοῦ ἀμφιμονοσημάντου τῆς f, διὰ κάθε $\nu \in N$ ἰσχύει

$$a_\nu = f(f^{-1}(a_\nu))$$

καὶ ἑπομένως

$$\ell im\, a_\nu = f(\ell)$$

Ἄρα, κάθε βασικὴ ἀκολουθία ἐν E_2 εἶναι καὶ συγκλίνουσα.

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι

$$E_1 \text{ εἶναι πλήρης} \Longrightarrow E_2 \text{ εἶναι πλήρης}$$

Τὸ ἀντίστροφον, δηλαδὴ ἡ συνεπαγωγὴ

$$E_2 \text{ εἶναι πλήρης} \Longrightarrow E_1 \text{ εἶναι πλήρης}$$

εἶναι προφανὲς λόγῳ τῆς συμμετρίας τῶν ὑποθέσεων.

3. Δώσατε ἓν παράδειγμα μιᾶς φθινούσης ἀκολουθίας (K_ν) μὴ κενῶν καὶ κλειστῶν συνόλων εἰς ἕνα πλήρη μετρικὸν χῶρον τοιαύτης, ὥστε $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} K_\nu = \emptyset$.

Λύσις. Θεωροῦμεν τὸν μετρικὸν χῶρον $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ὁ ὁποῖος εἶναι πλήρης. Ὡς γνωστόν, κατὰ τὴν ἄσκησιν 14 τῆς ὁμάδος 2, τυχὸν διάστημα τῆς μορφῆς $[a,+\infty)$ εἶναι κλειστὸν ἐν $\mathbb{R}$. Ἡ ἀκολουθία (K_ν), ὅπου

$$K_\nu = [\nu, +\infty)$$

εἶναι προφανῶς μία φθίνουσα ἀκολουθία κλειστῶν συνόλων διὰ τὴν ὁποίαν μάλιστα ἰσχύει

$$\bigcap_{\nu=1}^{\infty} K_\nu = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} [\nu, +\infty) = \emptyset$$

4. Δείξατε ὅτι, ἂν f εἶναι μία συνεχὴς πραγματικὴ συνάρτησις ὡρισμένη ἐπὶ τοῦ $\mathbb{R}$ καὶ τοιαύτη, ὥστε

$$(\forall\, x,y \text{ ἐν } \mathbb{R})\ \ f(x+y) = f(x)+f(y)$$

τότε αὕτη δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$f(x) = ax$$

ὅπου a εἶναι κατάλληλος πραγματικὸς ἀριθμός.

Λύσις. Κατὰ πρῶτον παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τυχόντα φυσικὸν ἀριθμὸν λ ἰσχύει

$$f(\lambda x) = f\left[(\lambda-1)x\right] + f(x), \text{ δηλαδὴ } f(\lambda x) - f\left[(\lambda-1)x\right] = f(x)$$

καὶ ἐπομένως

$$\sum_{\lambda=1}^{\kappa} \left(f(\lambda x) - f\left[(\lambda-1)x\right] \right) = \kappa f(x)$$

ὅπου κ εἶναι τυχὼν φυσικὸς ἀριθμός. Ἀλλὰ

$$\sum_{\lambda=1}^{\kappa} \left(f(\lambda x) - f\left[(\lambda-1)x\right] \right) = \sum_{\lambda=1}^{\kappa} f(\lambda x) - \sum_{\lambda=1}^{\kappa} f\left[(\lambda-1)x\right] = f(\kappa x) - f(0) = f(\kappa x)$$

διότι $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$, δηλαδὴ $f(0) = 0$. Ἐπομένως διὰ κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸν x καὶ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν κ ἰσχύει

$$f(\kappa x) = \kappa f(x)$$

Ὁ τύπος οὗτος ἰσχύει καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου ὁ κ εἶναι ἀκέραιος, διότι διὰ $\kappa = 0$ ἔχομεν

$$f(0x) = f(0) = 0 = 0f(x)$$

ἐνῷ διὰ $\kappa < 0$ ἰσχύει $-\kappa > 0$ καὶ ἐπομένως

$$f((-\kappa)x) = (-\kappa)f(x)$$

ὁπότε, ἐπειδὴ

$$f(\kappa x) + f((-\kappa)x) = f(\kappa x + (-\kappa)x) = f(0) = 0$$

ἔχομεν

$$f(\kappa x) = -f((-\kappa)x) = -(-\kappa)f(x) = \kappa f(x)$$

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω θεωροῦμεν τυχόντα ῥητὸν ἀριθμὸν y, ὁπότε ὑπάρχουν ἀκέραιοι μ, ν μὲ $y = \frac{\mu}{\nu}$ καὶ $\nu \in \mathbb{N}$. Ἔχομεν τότε

$$f(\mu) = f\left(\nu \frac{\mu}{\nu}\right) = \nu f\left(\frac{\mu}{\nu}\right)$$

καὶ ἐπομένως

$$f\left(\frac{\mu}{\nu}\right) = \frac{f(\mu)}{\nu} = \frac{\mu f(1)}{\nu} = f(1)\frac{\mu}{\nu}.$$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι διὰ κάθε ῥητὸν ἀριθμὸν y ἰσχύει

$$f(y)=ay\,, \quad \text{όπου } a=f(1)$$

Θεωρούμεν τώρα τυχόντα πραγματικόν αριθμόν x καί τυχοῦσαν ἀκολουθίαν ρητῶν ἀριθμῶν $(y_\nu)_{\nu\in N}$ μέ $\lim y_\nu = x$, ὁπότε, λόγῳ τῆς συνεχείας τῆς συναρτήσεως f, λαμβάνομεν

$$f(x)=\lim f(y_\nu) = \lim(ay_\nu) = a\lim y_\nu = ax$$

5. **Δείξατε ὅτι διά κάθε πραγματικόν ἀριθμόν x ἰσχύει**

$$e^x \geqq 1+x$$

Λύσις. Θεωροῦμεν τυχόντα ρητόν ἀριθμόν y, ὁπότε ὑπάρχουν ἀκέραιοι μ,ν μέ $y=\frac{\mu}{\nu}$ καί $\nu\in N$, καί διακρίνομεν τάς ἑξῆς δύο περιπτώσεις :

Περίπτωσις 1 : $y\geqq 0$, δηλαδή $\mu\geqq 0$. Θέτομεν

$$K=\left\{\kappa : \frac{\kappa}{\nu}\in N\right\}$$

ὁπότε προφανῶς τό K εἶναι ἕν ἀπέραντον ὑποσύνολον τοῦ συνόλου N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καί μάλιστα διά κάθε $\kappa\in K$ ἰσχύει

$$\kappa y = \kappa\frac{\mu}{\nu} = \frac{\kappa}{\nu}\mu \quad \text{καί ἐπομένως } \kappa y\in N_0$$

Ἄρα

$$\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)^{\kappa y} \geqq 1+(\kappa y)\frac{1}{\kappa} = 1+y$$

καί ἐπειδή, δυνάμει τῆς ἀσκήσεως 4 τῆς ὁμάδος 1,

$$\lim_{\kappa\in K}\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)^{\kappa y} = \lim_{\kappa\in K}\left[\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)^{\kappa}\right]^y = \left[\lim_{\kappa\in K}\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)^{\kappa}\right]^y = e^y$$

λαμβάνομεν

$$e^y \geqq 1+y$$

Περίπτωσις 2 : $y<0$, δηλαδή $\mu<0$. Θέτομεν

$$\Lambda=\left\{\lambda : \lambda>0 \text{ καί } \frac{\lambda+1}{\nu}\in N\right\}$$

ὁπότε προφανῶς τό Λ εἶναι ἕν ἀπέραντον ὑποσύνολον τοῦ συνόλου N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καί μάλιστα διά κάθε $\lambda\in\Lambda$ ἰσχύει

$$-(\lambda+1)y = -(\lambda+1)\frac{\mu}{\nu} = \frac{\lambda+1}{\nu}(-\mu)$$ καί έπομένως $-(\lambda+1)y\in N$

Άρα

$$\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^{\lambda y} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^{-\lambda y}} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{\lambda}}\right)^{-\lambda y} = \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{-\lambda y} = \left(1-\frac{1}{\lambda+1}\right)^{-\lambda y}$$

$$\geqq \left(1-\frac{1}{\lambda+1}\right)^{-(\lambda+1)y} \geqq 1+\left[-(\lambda+1)y\right]\left(-\frac{1}{\lambda+1}\right) = 1+y$$

καί έπειδή

$$\lim_{\lambda\in\Lambda}\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^{\lambda y} = e^{y}$$

λαμβάνομεν

$$e^{y} \geqq 1+y$$

Ώστε έδείχθη ότι διά τυχόντα ρητόν άριθμόν y ίσχύει

$$e^{y} \geqq 1+y$$

καί έπομένως, άν διά τυχόντα πραγματικόν άριθμόν x θεωρήσωμεν μίαν άκολουθίαν ρητών άριθμών $(y_\nu)_{\nu\in N}$ μέ $\lim y_\nu = x$, τότε, λόγῳ τής συνεχείας τής έκθετικής συναρτήσεως exp, θά έχωμεν

$$e^{x} = \lim e^{y_\nu} \geqq \lim(1+y_\nu) = 1+\lim y_\nu = 1+x$$

Παρατήρησις. Άνωτέρω έχρησιμοποιήθη ή άνισότης

$$(1+\delta)^{\nu} \geqq 1+\nu\delta,\quad \text{όπου } \nu\in N \text{ καί } \delta>-1$$

ή όποία συνάγεται εύκόλως δυνάμει τής μεθόδου τής έπαγωγικής άποδείξεως.

6. **Δείξατε ότι ίσχύουν οί τύποι :**

1) $a^{x-y} = \dfrac{a^{x}}{a^{y}}$ 2) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

3) $a^{x} = \beta^{x\log_\beta a}$ 4) $\log_a x = \dfrac{\log_\beta x}{\log_\beta a}$

5) $a^{x} = e^{x\log a}$ 6) $\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$

Λύσις. 1) Έχομεν

$$a^x = a^{(x-y)+y} = a^{x-y}a^y \quad \text{καὶ ἑπομένως} \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}.$$

2) Ἔχομεν

$$\log_a x = \log_a\left(\frac{x}{y}y\right) = \log_a\frac{x}{y} + \log_a y$$

καὶ ἑπομένως

$$\log_a\frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

3) Ὡς γνωστὸν ἰσχύει $\beta^{\log_\beta a} = a$ καὶ ἑπομένως ἔχομεν

$$a^x = \left(\beta^{\log_\beta a}\right)^x = \beta^{x\log_\beta a}$$

4) Ὡς γνωστὸν ἰσχύει $a^{\log_a x} = x$ καὶ ἑπομένως ἔχομεν

$$\log_\beta x = \log_\beta a^{\log_a x} = (\log_a x)(\log_\beta a).$$

ὁπότε

$$\log_a x = \frac{\log_\beta x}{\log_\beta a}$$

5) Ἐκ τῆς 3 διὰ $\beta = e$ λαμβάνομεν

$$a^x = e^{x\log_e a} = e^{x\log a}$$

6) Ὁμοίως ἐκ τῆς 4 διὰ $\beta = e$ λαμβάνομεν

$$\log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a} = \frac{\log x}{\log a}.$$

7. Ἔστωσαν οἱ μετρικοὶ χῶροι (E_1, ρ_1), (E_2, ρ_2) καὶ τυχοῦσα συνεχὴς συνάρτησις $f: E_1 \times E_2 \mapsto E_2$ τοιαύτη, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$(\forall t \in E_1)(\forall x, y \text{ ἐν } E_2)\ \rho_2(f(t,x), f(t,y)) \leq \theta\rho_2(x,y)$$

ὅπου θ εἶναι εἷς ὡρισμένος πραγματικὸς ἀριθμὸς μὲ $\theta < 1$.

Δείξατε ὅτι, ἂν ὁ χῶρος E_2 εἶναι πλήρης καὶ $\varphi(t)$ παριστᾷ τό, δυνάμει τῆς ἀρχῆς τῆς συστολῆς, μοναδικὸν σημεῖον $a \in E_2$ διὰ τὸ ὁποῖον ἰσχύει $f(t,a) = a$, τότε ἡ συνάρτησις $\varphi: E_1 \mapsto E_2$ εἶναι συνεχής.

Λύσις. Θεωροῦμεν ἓν σημεῖον $t_0 \in E_1$, ὁπότε, λόγῳ τῆς συνεχείας τῆς συναρτήσεως f εἰς τὸ σημεῖον $(t_0, \varphi(t_0))$, διὰ κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει $\delta > 0$ τοιοῦτον, ὥστε διὰ κάθε $t \in E_1$ νὰ ἰσχύῃ

$$\rho_1(t,t_0) < \delta \Longrightarrow \rho_2\big(f(t,\varphi(t_0)),\, f(t_0,\varphi(t_0))\big) < \varepsilon$$

καὶ ἑπομένως, ἐπειδὴ $f(t_0,\varphi(t_0)) = \varphi(t_0)$, ἰσχύει

$$\rho_1(t,t_0) < \delta \Longrightarrow \rho_2\big(f(t,\varphi(t_0)),\, \varphi(t_0)\big) < \varepsilon$$

Θεωροῦμεν τώρα τὸ σταθερὸν σημεῖον $a = \varphi(t)$ καὶ ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον προσεγγίσεως αὐτοῦ

$$\rho_2(a, x_\nu) \leq \frac{\theta^\nu}{1-\theta}\, \rho_2(x_0, x_1)$$

(Πρβλ. σελίδα 165 τοῦ βιβλίου, παρατήρησιν θεωρήματος 4.2.1) διὰ $\nu = 0$ καὶ $x_0 = \varphi(t_0)$, ὁπότε, ἐπειδὴ $x_1 = f(t,x_0) = f(t,\varphi(t_0))$, λαμβάνομεν

$$\rho_2(\varphi(t), \varphi(t_0)) \leq \frac{\rho_2(\varphi(t_0), f(t,\varphi(t_0)))}{1-\theta}$$

καὶ ἑπομένως

$$\rho_1(t,t_0) < \delta \Longrightarrow \rho_2(\varphi(t), \varphi(t_0)) \leq \frac{\varepsilon}{1-\theta} = \frac{1}{1-\theta}\varepsilon$$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t \in E_1)\ \rho_1(t,t_0) < \delta \Longrightarrow \rho_2(\varphi(t),\varphi(t_0)) < \frac{1}{1-\theta}\varepsilon$$

δηλαδὴ ὅτι ἡ συνάρτησις f εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον t_0. Ἄρα, ἐπειδὴ τὸ t_0 εἶναι τυχόν, ἡ f εἶναι συνεχής.

ΟΜΑΣ 5

ΣΕΛΙΔΕΣ 192-194

1. Δείξατε ὅτι, ἄν $S_1, S_2, \cdots, S_k$ εἶναι συμπαγῆ ὑποσύνολα ἑνὸς μετρικοῦ χώρου, τότε καὶ ἡ ἕνωσις $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k$ αὐτῶν εἶναι συμπαγὲς σύνολον.

Λύσις. Ἔστω $\mathcal{C}$ μία ἀνοικτὴ κάλυψις τοῦ συνόλου $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k$. Προφανῶς ἡ $\mathcal{C}$ εἶναι κάλυψις ἑκάστου συνόλου S_i καὶ ἐπομένως, λόγῳ τῆς συμπαγότητος τοῦ S_i, ὑπάρχει πεπερασμένη ὑποκάλυψις $\mathcal{B}_i$ τῆς $\mathcal{C}$. Θεωροῦμεν τώρα τὰς συλλογὰς $\mathcal{B}_i$, $i = 1, 2, \cdots, k$ καὶ τὴν ἕνωσιν $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ αὐτῶν. Προφανῶς ἡ συλλογὴ $\mathcal{B}$ εἶναι πεπερασμένη καὶ τοιαύτη, ὥστε

$$S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k \subseteqq \mathcal{B}$$

δηλαδὴ αὐτὴ εἶναι μία πεπερασμένη ὑποκάλυψις τῆς $\mathcal{C}$.

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι διὰ κάθε ἀνοικτὴν κάλυψιν $\mathcal{C}$ τοῦ συνόλου $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k$ ὑπάρχει μία πεπερασμένη ὑποκάλυψις $\mathcal{B}$ αὐτῆς, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι τὸ σύνολον $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k$ εἶναι συμπαγές.

2. Δείξατε ὅτι κάθε πεπερασμένον ὑποσύνολον ἑνὸς μετρικοῦ χώρου εἶναι συμπαγές.

Λύσις. Ἔστωσαν A ἓν πεπερασμένον σύνολον ἑνὸς μετρικοῦ χώρου καὶ $\mathcal{C}$ τυχοῦσα ἀνοικτὴ κάλυψις τοῦ συνόλου A. Θεωροῦμεν τὰς συλλογὰς

$$\mathfrak{A}_a = \{X \in \mathcal{C} : a \in X\},\ a \in A$$

καί, δυνάμει τοῦ ἀξιώματος ἐπιλογῆς, μίαν συνάρτησιν

$$G : A \longmapsto \mathcal{C}$$

τοιαύτην, ὥστε νά ἰσχύῃ

$$(\forall a \in A) \quad G(a) \in \mathfrak{A}_a$$

Προφανῶς ἰσχύει τότε

$$(\forall a \in A) \quad a \in G(a)$$

καί ἑπομένως, ἄν θέσωμεν $\mathcal{B} = \mathcal{R}(G)$, ἔχομεν

$$A \subseteq \bigcup_{a \in A} G(a) = \bigcup \mathcal{B}$$

Ἀλλά ἡ συλλογή $\mathcal{B}$ εἶναι προφανῶς μία πεπερασμένη ὑποσυλλογή τῆς $\mathcal{C}$ καί ἑπομένως πεπερασμένη ὑποκάλυψις ταύτης.

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι διά τυχοῦσαν ἀνοικτήν κάλυψιν $\mathcal{C}$ τοῦ πεπερασμένου συνόλου A ὑπάρχει μία πεπερασμένη ὑποκάλυψις $\mathcal{B}$ τῆς $\mathcal{C}$, τό ὁποῖον σημαίνει ὅτι τό A εἶναι συμπαγές σύνολον.

3. Δείξατε ὅτι, ἄν A, B εἶναι μή κενά καί συμπαγῆ ὑποσύνολα ἑνός μετρικοῦ χώρου, τότε ὑπάρχουν $a \in A$ καί $\beta \in B$ τοιαῦτα, ὥστε νά ἰσχύῃ

$$\rho(A,B) = \rho(a,\beta)$$

Ἐπί πλέον δείξατε ὅτι

$$A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \rho(A,B) > 0$$

Λύσις. Ἐπειδή, ἐξ ὁρισμοῦ,

$$\rho(A,B) = \inf_{(x,y) \in A \times B} \rho(x,y)$$

ὑπάρχει ἀκολουθία (x_ν, y_ν), $\nu \in N$ ἐν $A \times B$ τοιαύτη, ὥστε

$$\rho(A,B) = \lim \rho(x_\nu, y_\nu)$$

Λόγῳ τῆς συμπαγότητος τοῦ συνόλου A, ἡ ἀκολουθία $(x_\nu)_{\nu \in N}$, ὡς ἀκολουθία ἐν A, ἔχει μίαν φυσικήν ὑπακολουθίαν $(x_\nu)_{\nu \in M}$ μέ

$$\lim_{\nu \in M} x_\nu = a, \quad \text{ὅπου } a \in A$$

Ὁμοίως, λόγῳ τῆς συμπαγότητος τοῦ συνόλου B, ἡ ἀκολουθία $(y_\nu)_{\nu\in M}$, ὡς ἀκολουθία ἐν B, ἔχει μίαν φυσικὴν ὑπακολουθίαν $(y_\nu)_{\nu\in K}$ μὲ

$$\lim_{\nu\in K} y_\nu = \beta\text{, ὅπου } \beta\in B$$

Ἐπειδὴ προφανῶς

$$\lim_{\nu\in K} x_\nu = \lim_{\nu\in M} x_\nu = \alpha$$

λόγῳ τῆς συνεχείας τῆς ἀποστάσεως ρ, θὰ ἔχωμεν

$$\lim \rho(x_\nu, y_\nu) = \lim_{\nu\in K} \rho(x_\nu, y_\nu) = \rho(\alpha,\beta)$$

ἤτοι

$$\rho(A,B) = \rho(\alpha,\beta)$$

Τέλος, εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου $A\cap B=\emptyset$, ἰσχύει $\alpha\neq\beta$ καὶ ἐπομένως $\rho(\alpha,\beta)>0$, ἤτοι $\rho(A,B)>0$.

4. **Δείξατε ὅτι, ἂν A, B εἶναι μὴ κενὰ καὶ κλειστὰ ὑποσύνολα τοῦ χώρου $\mathbb{R}^m$ καὶ τὸ ἓν τουλάχιστον ἐξ αὐτῶν εἶναι φραγμένον, τότε ὑπάρχουν $\vec{\alpha}\in A$ καὶ $\vec{\beta}\in B$ τοιαῦτα, ὥστε νὰ ἰσχύῃ**

$$\rho(A,B) = \rho(\vec{\alpha},\vec{\beta})$$

Ἐπὶ πλέον δείξατε ὅτι

$$A\cap B=\emptyset \Longrightarrow \rho(A,B)>0$$

Λύσις. Ὑποθέτομεν ὅτι τὸ σύνολον A εἶναι φραγμένον καὶ θεωροῦμεν μίαν σφαιρικὴν περιοχὴν $B(\vec{0},r)$ τοιαύτην, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$A\subseteq B(\vec{0},r) \quad\text{καὶ}\quad B\cap B(\vec{0},r)\neq\emptyset$$

Εὐκόλως συνάγεται τώρα ὅτι

$$\rho(A,B) = \rho(A, B\cap B(\vec{0},r))$$

Ἀλλὰ τὰ σύνολα A καὶ $B\cap B(\vec{0},r)$, ὡς κλειστὰ καὶ φραγμένα ὑποσύνολα τοῦ $\mathbb{R}^m$, εἶναι συμπαγῆ καὶ ἑπομένως, δυνάμει τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως 3, ὑπάρχουν σημεῖα $\vec{\alpha}\in A$ καὶ $\vec{\beta}\in B\cap B(\vec{0},r)$ τοιαῦτα, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$\rho(A, B\cap B(\vec{o},r)) = \rho(\vec{a},\vec{\beta})$$

Ἐπομένως

$$\rho(A,B)=\rho(\vec{a},\vec{\beta}),\quad \text{ὅπου } \vec{a}\in A \quad \text{καὶ} \quad \vec{\beta}\in B$$

Ἐπὶ πλέον, κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν 3, ἰσχύει

$$A\cap B=\emptyset \Longrightarrow A\cap\left[B\cap B(\vec{o},r)\right]=\emptyset \Longrightarrow \rho(A, B\cap B(\vec{o},r))>0 \Longrightarrow \rho(A,B)>0$$

5. Ἔστω $\mathcal{C}$ μία συλλογὴ μὴ κενῶν καὶ κλειστῶν συνόλων ἑνὸς μετρικοῦ χώρου. Δείξατε ὅτι, ἂν ἡ συλλογὴ $\mathcal{C}$ εἶναι γραμμικῶς διατεταγμένη (ὡς πρὸς τὴν σχέσιν τοῦ ὑποσυνόλου) καὶ ἓν τουλάχιστον ἐκ τῶν συνόλων αὐτῆς εἶναι συμπαγές, τότε ἰσχύει

$$\cap\,\mathcal{C}\neq\emptyset$$

Λύσις. Ἔστωσαν C ἓν συμπαγὲς σύνολον ἐν $\mathcal{C}$ καὶ ἡ συλλογὴ

$$\mathcal{C}(C)=\{X\in\mathcal{C} : X\subseteq C\}$$

Προφανῶς ἰσχύει

$$\cap\,\mathcal{C}(C)=\cap\,\mathcal{C}$$

Ἐπίσης ἡ $\mathcal{C}(C)$ ἀποτελεῖ μίαν συλλογὴν ὑποσυνόλων τοῦ ὑποχώρου C καὶ μάλιστα αὐτὴ ἔχει τὴν ἰδιότητα τῶν πεπερασμένων τομῶν, δηλαδὴ διὰ κάθε πεπερασμένην ὑποσυλλογὴν $\mathcal{B}$ αὐτῆς ἰσχύει $\cap\mathcal{B}\neq\emptyset$, διότι ἡ τομὴ $\cap\mathcal{B}$ συμπίπτει ἀκριβῶς μὲ τὸ ἐλάχιστον στοιχεῖον τῆς συλλογῆς $\mathcal{B}$.

Ἄρα, ἐπειδὴ ὁ ὑποχῶρος C εἶναι συμπαγής, θὰ ἰσχύῃ καὶ

$$\cap\,\mathcal{C}(C)\neq\emptyset,\quad \text{ἤτοι}\quad \cap\,\mathcal{C}\neq\emptyset$$

6. Δείξατε ὅτι, ἂν S εἶναι ἓν μὴ κενὸν καὶ συμπαγὲς ὑποσύνολον ἑνὸς μετρικοῦ χώρου, τότε ὑπάρχουν α καὶ β ἐν S τοιαῦτα, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$\delta(S)=\rho(\alpha,\beta)$$

Ἐπὶ πλέον δείξατε ὅτι

$$\delta(S)=0 \Longleftrightarrow S \text{ εἶναι μονοστοιχειακόν}$$

Λύσις. Ἐπειδή, ἐξ ὁρισμοῦ,

$$\delta(S)=\sup_{(x,y)\in S^2}\rho(x,y)$$

ὑπάρχει ἀκολουθία (x_ν, y_ν), $\nu\in N$ ἐν S^2 τοιαύτη, ὥστε

$$\delta(S) = \lim \rho(x_\nu, y_\nu)$$

Λόγῳ τῆς συμπαγότητος τοῦ συνόλου S, ἡ ἀκολουθία $(x_\nu)_{\nu\in N}$, ὡς ἀκολουθία ἐν S, ἔχει μίαν φυσικὴν ὑπακολουθίαν $(x_\nu)_{\nu\in M}$ μέ

$$\lim_{\nu\in M} x_\nu = \alpha\,, \quad \text{ὅπου } \alpha\in S$$

Ὁμοίως καὶ ἡ ἀκολουθία $(y_\nu)_{\nu\in M}$, ὡς ἀκολουθία ἐν S, ἔχει μίαν φυσικὴν ὑπακολουθίαν $(y_\nu)_{\nu\in K}$ μέ

$$\lim_{\nu\in K} y_\nu = \beta, \quad \text{ὅπου } \beta\in S$$

Ἐπειδὴ προφανῶς

$$\lim_{\nu\in K} x_\nu = \lim_{\nu\in M} x_\nu = \alpha$$

λόγῳ τῆς συνεχείας τῆς ἀποστάσεως ρ, θὰ ἔχωμεν

$$\lim \rho(x_\nu, y_\nu) = \lim_{\nu\in K} \rho(x_\nu, y_\nu) = \rho(\alpha,\beta)$$

ἤτοι

$$\delta(S) = \rho(\alpha,\beta)$$

Τέλος παρατηροῦμεν ὅτι

$$\delta(S) = 0 \Longleftrightarrow \sup_{(x,y)\in S^2} \rho(x,y) = 0 \longleftrightarrow (\forall x,y \text{ ἐν } S)\ \rho(x,y) = 0$$

$$\Longleftrightarrow (\forall x,y \text{ ἐν } S)\ x = y \Longleftrightarrow S \text{ εἶναι μονοστοιχειακόν}$$

7. Δείξατε ὅτι, ἂν $(K_\nu)_{\nu\in N}$ εἶναι μία φθίνουσα ἀκολουθία μὴ κενῶν καὶ κλειστῶν συνόλων τῆς ὁποίας εἷς τοὐλάχιστον ὅρος εἶναι συμπαγὲς σύνολον, τότε ἰσχύει

$$\bigcap_{\nu\in N} K_\nu \neq \emptyset$$

καὶ μάλιστα

$$\delta\Big(\bigcap_{\nu\in N} K_\nu\Big) = \lim \delta(K_\nu)$$

Ἐπὶ πλέον δείξατε ὅτι ἡ τομὴ $\bigcap_{\nu\in N} K_\nu$ εἶναι μονοστοιχειακὸν σύνολον τότε καὶ μόνον τότε, ἂν $\lim \delta(K_\nu) = 0$.

Λύσις. Κατ' ἀρχὴν παρατηροῦμεν ὅτι διὰ κάθε $\nu\in N$ ἰσχύει

$$\bigcap_{\mu\in N} K_\mu \subseteq K_\nu \quad \text{καὶ ἐπομένως} \quad \delta\Big(\bigcap_{\mu\in N} K_\mu\Big) \leqq \delta(K_\nu)$$

Ἀλλὰ ἡ ἀκολουθία $\delta(K_\nu)$, $\nu\in N$ εἶναι φθίνουσα, διότι

$$\mu<\nu \Longrightarrow K_\mu \supseteq K_\nu \Longrightarrow \delta(K_\mu)\geq\delta(K_\nu)$$

καὶ ἑπομένως ὑπάρχει τὸ $\lim\delta(K_\nu)$, ὁπότε ἔχομεν

$$\delta(\bigcap_{\mu\in N}K_\mu)\leq\lim\delta(K_\nu), \text{ ἤτοι } \delta(\bigcap_{\nu\in N}K_\nu)\leq\lim\delta(K_\nu)$$

Ἀκολούθως ὑποθέτομεν ὅτι ὁ ὅρος K_m εἶναι συμπαγὲς σύνολον, ὁπότε ἅλοι οἱ ὅροι K_ν μὲ $\nu\in N$ καὶ $\nu\geq m$, ὡς κλειστὰ ὑποσύνολα τοῦ συμπαγοῦς συνόλου K_m, εἶναι συμπαγῆ σύνολα. Ἑπομένως, δυνάμει τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως 6, διὰ κάθε $\nu\in N$ μὲ $\nu\geq m$ ὑπάρχουν a_ν καὶ β_ν ἐν K_ν μὲ

$$\delta(K_\nu)=\rho(a_\nu,\beta_\nu)$$

Λόγῳ τῆς συμπαγότητος τοῦ συνόλου K_m, ἡ ἀκολουθία $(a_\nu)_{\nu\in N_m}$, ὅπου $N_m=\{\nu\in N:\nu\geq m\}$, ἔχει μίαν φυσικὴν ὑπακολουθίαν $(a_\nu)_{\nu\in M}$ μὲ $\lim_{\nu\in M}a_\nu=\ell_a$, ὅπου $\ell_a\in K_m$. Ἐπειδὴ διὰ κάθε $\mu\in N$ τὸ σύνολον $M\cap N_\mu$, ὅπου $N_\mu=\{\nu\in N:\nu\geq\mu\}$, εἶναι ἀπέραντον, προφανῶς ἰσχύει

$$\lim_{\nu\in M\cap N_\mu}a_\nu=\lim_{\nu\in M}a_\nu=\ell_a$$

καὶ ἑπομένως, λόγῳ τῆς κλειστότητος τοῦ συνόλου K_μ καὶ τοῦ γεγονότος ὅτι ἡ $(a_\nu)_{\nu\in M\cap N_\mu}$ εἶναι μία ἀκολουθία ἐν K_μ, $\ell_a\in K_\mu$. Ἄρα, διὰ κάθε $\mu\in N$ ἰσχύει $\ell_a\in K_\mu$, ἤτοι $\ell_a\in\bigcap_{\nu\in N}K_\nu$.

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι ὑπάρχει μία φυσικὴ ὑπακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in M}$ τῆς $(a_\nu)_{\nu\in N_m}$ τοιαύτη, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$\lim_{\nu\in M}a_\nu=\ell_a, \quad \text{ὅπου } \ell_a\in\bigcap_{\nu\in N}K_\nu$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ὑπάρχει φυσικὴ ὑπακολουθία $(\beta_\nu)_{\nu\in\Lambda}$ τῆς ἀκολουθίας $(\beta_\nu)_{\nu\in M}$ τοιαύτη, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$\lim_{\nu\in\Lambda}\beta_\nu=\ell_\beta, \quad \text{ὅπου } \ell_\beta\in\bigcap_{\nu\in N}K_\nu$$

Ἐπειδὴ προφανῶς

$$\lim_{\nu\in\Lambda}a_\nu=\lim_{\nu\in M}a_\nu=\ell_a$$

λόγῳ τῆς συνεχείας τῆς ἀποστάσεως ρ, θὰ ἔχωμεν

$$\lim \delta(K_\nu) = \lim \rho(\alpha_\nu,\beta_\nu) = \lim_{\nu\in\Lambda} \rho(\alpha_\nu,\beta_\nu) = \rho(\ell_\alpha,\ell_\beta)$$

$$\leqq \delta\left(\bigcap_{\nu\in N} K_\nu\right)$$

Ἄρα ἰσχύει

$$\delta\left(\bigcap_{\nu\in N} K_\nu\right) = \lim \delta(K_\nu)$$

Τέλος, δυνάμει τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως 6, ἔχομεν

$$\bigcap_{\nu\in N} K_\nu \text{ εἶναι μονοστοιχειακὸν σύνολον } \iff \delta\left(\bigcap_{\nu\in N} K_\nu\right) = 0$$

$$\iff \lim \delta(K_\nu) = 0$$

8. Δείξατε ὅτι, ἂν S εἶναι ἓν ὑποσύνολον ἑνὸς μετρικοῦ χώρου τοιοῦτον, ὥστε διὰ κάθε ἀκολουθίαν ἐν S νὰ ὑπάρχῃ μία ὑπακολουθία αὐτῆς συγκλίνουσα ἐν $\overline{S}$, τότε τὸ σύνολον $\overline{S}$ εἶναι συμπαγές.

Λύσις. Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ σύνολον $\overline{S}$ ἔχει τὴν ἰδιότητα Bolzano-Weierstrass. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τυχοῦσαν ἀκολουθίαν $(x_\nu)_{\nu\in N}$ ἐν $\overline{S}$ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τὰ σύνολα

$$T_\nu = \left\{ z\in S : \rho(x_\nu, z) < \frac{1}{|\nu|+1} \right\}, \quad \nu\in N$$

εἶναι μὴ κενά. Δυνάμει τοῦ ἀξιώματος ἐπιλογῆς λαμβάνομεν μίαν ἀκολουθίαν $(y_\nu)_{\nu\in N}$ ἐν S τοιαύτην, ὥστε διὰ κάθε $\nu\in N$ νὰ ἰσχύῃ

$$y_\nu \in T_\nu, \text{ δηλαδὴ } \rho(x_\nu, y_\nu) < \frac{1}{|\nu|+1}$$

Διὰ τὴν ἀκολουθίαν $(y_\nu)_{\nu\in N}$ ὑπάρχει ὑπακολουθία αὐτῆς συγκλίνουσα ἐν $\overline{S}$ καὶ μάλιστα, χωρὶς βλάβην τῆς γενικότητος, ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ὑπακολουθία αὐτὴ εἶναι φυσικὴ ὑπακολουθία τῆς $(y_\nu)_{\nu\in N}$, ἔστω ἡ $(y_\nu)_{\nu\in M}$. Ἂν $\lim_{\nu\in M} y_\nu = \ell$, ὅπου $\ell\in\overline{S}$, ἔχομεν

$$\rho(x_\nu,\ell) \leqq \rho(x_\nu, y_\nu) + \rho(y_\nu, \ell) < \frac{1}{|\nu|+1} + \rho(y_\nu,\ell)$$

καὶ ἑπομένως, ἐπειδὴ

$$\lim_{\nu\in M}\left(\frac{1}{|\nu|+1} + \rho(y_\nu,\ell)\right) = \lim_{\nu\in M} \frac{1}{|\nu|+1} + \lim_{\nu\in M} \rho(y_\nu,\ell) = 0+0=0$$

θὰ ἔχωμεν καὶ

$$\lim_{\nu\in M} \rho(x_\nu, \ell) = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad \lim_{\nu\in M} x_\nu = \ell$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ὑπακολουθία $(x_\nu)_{\nu\in M}$ τῆς $(x_\nu)_{\nu\in N}$ εἶναι συγκλίνουσα ἐν $\bar{S}$ καὶ ἐπομένως τὸ σύνολον $\bar{S}$ ἔχει τὴν ἰδιότητα τῶν Bolzano-Weierstrass.

9. Ἔστω E εἷς συμπαγὴς μετρικὸς χῶρος. Δείξατε ὅτι, ἂν μία ἀκολουθία $(x_\nu)_{\nu\in N}$ ἐν E ἔχῃ ἓν μοναδικὸν σημεῖον συσσωρεύσεως $\ell\in E$, τότε $\lim x_\nu = \ell$.

Λύσις. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν ὑπακολουθίαν $(y_\mu)_{\mu\in M}$ τῆς $(x_\nu)_{\nu\in N}$ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι, λόγῳ τῆς συμπαγότητος τοῦ χώρου E, ἡ $(y_\mu)_{\mu\in M}$, ὡς ἀκολουθία ἐν E, ἔχει μίαν συγκλίνουσαν ὑπακολουθίαν $(z_\kappa)_{\kappa\in K}$. Ἐπειδὴ ἡ $(z_\kappa)_{\kappa\in K}$ εἶναι προφανῶς ὑπακολουθία τῆς $(x_\nu)_{\nu\in N}$, θὰ ἰσχύῃ $\lim_{\kappa\in K} z_\kappa = \ell$, διότι τὸ ℓ εἶναι τὸ μοναδικὸν σημεῖον συσσωρεύσεως τῆς $(x_\nu)_{\nu\in N}$.

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι διὰ κάθε ὑπακολουθίαν τῆς $(x_\nu)_{\nu\in N}$ ὑπάρχει ὑπακολουθία αὐτῆς συγκλίνουσα πρὸς τὸ σημεῖον ℓ καὶ ἐπομένως θὰ ἰσχύῃ $\lim x_\nu = \ell$.

10. Στηριζόμενοι εἰς τὸν χαρακτηρισμὸν τῆς συμπαγότητος ἑνὸς μετρικοῦ χώρου X διὰ τῶν προτάσεων:

(α) Ὁ χῶρος X εἶναι πλήρης καὶ ὁλικῶς φραγμένος

καὶ

(β) Ὁ χῶρος X ἔχει τὴν ἰδιότητα τῶν Bolzano-Weierstrass

δώσατε ἀντιστοίχως δύο ἀποδείξεις τῆς κάτωθι προτάσεως:

Ἓν συμπαγὲς σύνολον, ὑποσύνολον ἑνὸς μετρικοῦ χώρου, εἶναι κλειστὸν καὶ φραγμένον.

Λύσις. Ἔστω S ἓν συμπαγὲς ὑποσύνολον τοῦ μετρικοῦ χώρου E.

1η ἀπόδειξις. Τὸ σύνολον S, ὡς συμπαγές, εἶναι πλῆρες καὶ ὁλικῶς φραγμένον. Ἐπειδὴ ἓν ὁλικῶς φραγμένον σύνολον εἶναι καὶ φραγμένον, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ S εἶναι κλειστόν. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τυχοῦσαν ἀκολουθίαν $(x_\nu)_{\nu\in N}$ ἐν S μὲ $\lim x_\nu = \ell$, ὅπου $\ell\in E$, καὶ παρατηροῦμεν ὅτι αὕτη ὡς συγκλίνουσα (ἐν E), εἶναι βασικὴ ἀκολουθία ἐν E. Ἄρα ἡ $(x_\nu)_{\nu\in N}$ εἶναι καὶ βασικὴ ἀκολουθία ἐν S καὶ ἐπομένως, λόγῳ τῆς πληρότητος τοῦ S, αὕτη εἶναι συγκλίνουσα ἐν S. Τοῦτο, λόγῳ τοῦ μονοσημάντου τῆς ὁριακῆς τιμῆς, σημαίνει ὅτι $\ell\in S$ καὶ ἀποδεικνύει τὴν κλειστότητα τοῦ S.

2α ἀπόδειξις. Τὸ σύνολον S, ὡς συμπαγές, ἔχει τὴν ἰδιότητα τῶν Bolzano-Weierstrass. Ἐπομένως, ἂν θεωρήσωμεν τυχοῦσαν ἀκολουθίαν $(x_\nu)_{\nu\in N}$ ἐν S μὲ $\lim x_\nu = \ell$, ὅπου $\ell\in S$, θὰ ὑπάρχῃ μία συγκλίνουσα ἐν S ὑπακολουθία $(y_\mu)_{\mu\in M}$ αὐτῆς διὰ τὴν ὁποίαν προφανῶς θὰ ἰσχύῃ $\lim y_\mu = \ell$, ὁπότε βεβαίως ἔχομεν $\ell\in S$. Ἄρα τὸ σύνολον S εἶναι κλειστόν.

Τέλος, δυνάμει τῆς ἀσκήσεως 6, ὑπάρχουν α καὶ β ἐν S τοιαῦτα, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$\delta(S) = \rho(\alpha,\beta) \quad \text{καὶ ἐπομένως} \quad \delta(S) < +\infty$$

τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι τὸ σύνολον S εἶναι καὶ φραγμένον.

11. Στηριζόμενοι εἰς τὸν χαρακτηρισμὸν τῆς συμπαγότητος διὰ τῶν προτάσεων (α) καὶ (β) ὡς εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν 10, δώσατε ἀντιστοίχως δύο ἀποδείξεις τῆς κάτωθι προτάσεως:

"Εν κλειστὸν σύνολον, ὑποσύνολον ἑνὸς συμπαγοῦς μετρικοῦ χώρου, εἶναι συμπαγές.

Λύσις. Ἔστω S ἓν κλειστὸν ὑποσύνολον τοῦ συμπαγοῦς μετρικοῦ χώρου E.

1η ἀπόδειξις. Ὁ χῶρος E, ὡς συμπαγής, εἶναι πλήρης καὶ ὁλικῶς φραγμένος. Τὸ σύνολον S, ὡς ὑποσύνολον τοῦ χώρου E, εἶναι ἐπίσης ὁλικῶς φραγμένον καὶ ἐπὶ πλέον, ὡς κλειστὸν ὑποσύνολον τοῦ πλήρους χώρου E, εἶναι καὶ πλῆρες. Ἄρα τὸ σύνολον S ὡς πλῆρες καὶ ὁλικῶς φραγμένον εἶναι συμπαγές.

2α ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν ἀκολουθίαν $(x_\nu)_{\nu\in N}$ ἐν S. Ὁ χῶρος E, ὡς συμπαγής, ἔχει τὴν ἰδιότητα τῶν Bolzano-Weierstrass καὶ ἐπομένως ὑπάρχει ὑπακολουθία $(y_\mu)_{\mu\in M}$ τῆς $(x_\nu)_{\nu\in N}$ μὲ

$$\lim y_\mu = \ell, \quad \text{ὅπου } \ell\in E$$

Ἀλλὰ ἡ $(y_\mu)_{\mu\in M}$ εἶναι μία ἀκολουθία ἐν S καὶ λόγῳ τῆς κλειστότητος τοῦ συνόλου S, θὰ ἰσχύῃ $\ell\in S$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ σύνολον S ἔχει τὴν ἰδιότητα τῶν Bolzano-Weierstrass, δηλαδὴ ὅτι εἶναι συμπαγές.

12. Ἔστωσαν E_1, E_2 μετρικοὶ χῶροι καὶ $f: E_1 \mapsto E_2$ τυχοῦσα συνεχὴς συνάρτησις. Στηριζόμενοι εἰς τὸν χαρακτηρισμὸν τῆς συμπαγότητος διὰ

τῆς προτάσεως (β) ὡς εἰς τὴν ἄσκησιν 10 ἀνωτέρω, δώσατε μίαν ἀπόδειξιν τῆς κάτωθι προτάσεως:

Ἂν ὁ χῶρος E_1 εἶναι συμπαγής, τότε καὶ τὸ πεδίον τιμῶν τῆς f εἶναι συμπαγὲς σύνολον.

Λύσις. Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ πεδίον τιμῶν $\mathcal{R}(f)$ τῆς f ἔχει τὴν ἰδιότητα τῶν Bolzano-Weierstrass. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τυχοῦσαν ἀκολουθίαν $(y_\nu)_{\nu\in N}$ ἐν $\mathcal{R}(f)$ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τὰ σύνολα

$$f^{-1}(\{y_\nu\}),\ \nu\in N$$

εἶναι προφανῶς μὴ κενά. Δυνάμει τοῦ ἀξιώματος ἐπιλογῆς λαμβάνομεν μίαν ἀκολουθίαν $(x_\nu)_{\nu\in N}$ ἐν E_1 τοιαύτην, ὥστε διὰ κάθε $\nu\in N$ νὰ ἰσχύῃ

$$x_\nu\in f^{-1}(\{y_\nu\}) \text{ καὶ ἑπομένως } y_\nu=f(x_\nu)$$

Λόγῳ τῆς συμπαγότητος τοῦ χώρου E_1, ἡ $(x_\nu)_{\nu\in N}$, ὡς ἀκολουθία ἐν E_1, ἔχει μίαν ὑπακολουθίαν $(u_\mu)_{\mu\in M}$ μὲ

$$\lim u_\mu=\ell,\ \text{ὅπου } \ell\in E_1$$

Ἡ ἀκολουθία $(v_\mu)_{\mu\in M}$, ὅπου $v_\mu=f(u_\mu)$, εἶναι προφανῶς μία ὑπακολουθία τῆς $(y_\nu)_{\nu\in N}$ καὶ μάλιστα αὕτη εἶναι συγκλίνουσα ἐν $\mathcal{R}(f)$, διότι, λόγῳ τῆς συνεχείας τῆς f, ἰσχύει

$$\lim v_\mu=f(\ell)$$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι διὰ κάθε ἀκολουθίαν $(y_\nu)_{\nu\in N}$ ἐν $\mathcal{R}(f)$ ὑπάρχει ὑπακολουθία $(v_\mu)_{\mu\in M}$ αὐτῆς συγκλίνουσα ἐν $\mathcal{R}(f)$, δηλαδὴ ὅτι τὸ πεδίον τιμῶν τῆς f ἔχει τὴν ἰδιότητα τῶν Bolzano-Weierstrass.

13. Δείξατε ὅτι εἷς συμπαγὴς μετρικὸς χῶρος δὲν δύναται νὰ εἶναι ἰσομετρικὸς πρὸς ἕνα γνήσιον ὑποχῶρον του.

Λύσις. Ἔστωσαν S ἓν γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ συμπαγοῦς μετρικοῦ χώρου E καὶ f μία ἰσομετρία τοῦ E ἐπὶ τοῦ S. Ἐπειδὴ μία ἰσομετρία εἶναι συνεχὴς συνάρτησις, τὸ σύνολον S εἶναι συμπαγές, ὁπότε, ἂν θεωρήσωμεν ἓν σημεῖον $a\in E-S$, δυνάμει τῆς ἀσκήσεως 3, θὰ ἔχωμεν

$$\rho(a,S)=\rho(\{a\},S)>0$$

Ὁρίζομεν τώρα τὴν ἀκολουθίαν (x_ν) εἰς τρόπον, ὥστε

$$x_1=f(a) \text{ καὶ } (\forall \mu\in N)\, x_{\mu+1}=f(x_\mu)$$

καὶ παρατηροῦμεν ὅτι αὕτη εἶναι μία ἀκολουθία ἐν S, ὁπότε διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν θὰ ἰσχύῃ

$$\rho(a,x_\nu)\geqq\rho(a,S)$$

Ἐπειδὴ ἡ f εἶναι ἰσομετρία, διὰ τυχόντα φυσικὸν ἀριθμὸν ν θὰ ἔχωμεν :

$$\rho(x_1,x_{\nu+1})=\rho(f(a),f(x_\nu))=\rho(a,x_\nu)\geqq\rho(a,S)$$

$$\rho(x_2,x_{\nu+2})=\rho(f(x_1),f(x_{\nu+1}))=\rho(x_1,x_{\nu+1})\geqq\rho(a,S)$$

καὶ ἐπαγωγικῶς διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν κ,

$$\rho(x_\kappa,x_{\nu+\kappa})\geqq\rho(a,S)$$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι διὰ τυχόντας φυσικοὺς ἀριθμοὺς κ,ν ἰσχύει

$$\rho(x_\kappa,x_{\nu+\kappa})\geqq\rho(a,S)$$

τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν συμπαγότητα τοῦ S, διότι $\rho(a,S)>0$ καὶ ἑπομένως οὐδεμία ὑπακολουθία τῆς (x_ν) δύναται νὰ εἶναι βασικὴ καὶ κατὰ μείζονα λόγον συγκλίνουσα ἐν S.

14. **Ἔστω μία ἀνοικτὴ κάλυψις A_i, $i\in I$ ἑνὸς μετρικοῦ χώρου E. Εἷς θετικὸς ἀριθμὸς δ καλεῖται ἀριθμὸς τοῦ Lebesgue τῆς καλύψεως A_i, $i\in I$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύῃ**

$$(\forall x\in E)(\exists i\in I)\, B(x,\delta)\subseteqq A_i$$

Δείξατε ὅτι διὰ κάθε ἀνοικτὴν κάλυψιν ἑνὸς συμπαγοῦς μετρικοῦ χώρου ὑπάρχει εἷς ἀριθμὸς τοῦ Lebesgue.

Λύσις. Ἔστωσαν εἷς συμπαγὴς μετρικὸς χῶρος E καὶ τυχοῦσα ἀνοικτὴ κάλυψις A_i, $i\in I$ αὐτοῦ. Ἀκολούθως, διὰ κάθε $y\in E$ ἐκλέγομεν ἓν $r_y>0$ τοιοῦτον, ὥστε νά ἰσχύῃ

$$(\exists i\in I)\ B(y,2r_y)\subseteq A_i$$

Προφανῶς ἡ οἰκογένεια $B(y,r_y)$, $y\in E$ ἀποτελεῖ μίαν ἀνοικτήν κάλυψιν τοῦ χώρου E καί ἑπομένως, λόγῳ τῆς συμπαγότητος τοῦ E, ὑπάρχει πεπερασμένη ὑποκάλυψις $B(y,r_y)$, $y\in Y$ ταύτης. Θέτομεν τώρα

$$\delta=\min_{y\in Y} r_y$$

ὁπότε προφανῶς $\delta>0$ καί μάλιστα διά τυχόν $x\in E$ ὑπάρχει $y\in Y$ μέ $x\in B(y,r_y)$. Ἑπομένως ἔχομεν

$$B(x,\delta)\subseteq B(y,\delta+r_y)\subseteq B(y,2r_y)$$

ὁπότε ὑπάρχει δείκτης $i\in I$ μέ

$$B(x,\delta)\subseteq B(y,2r_y)\subseteq A_i$$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι διά τόν ἀνωτέρω ὁρισθέντα θετικόν ἀριθμόν δ ἰσχύει

$$(\forall x\in E)(\exists i\in I)\ B(x,\delta)\subseteq A_i$$

τό ὁποῖον σημαίνει ὅτι ὁ δ εἶναι εἷς ἀριθμός τοῦ Lebesgue τῆς καλύψεως A_i, $i\in I$ τοῦ συμπαγοῦς χώρου E.

15. Δείξατε ὅτι, ἄν E_1, E_2 εἶναι μετρικοί χῶροι καί $f: E_1\mapsto E_2$ τυχοῦσα συνάρτησις, τότε αἱ κάτωθι προτάσεις εἶναι ἰσοδύναμοι:

(i) Ἡ συνάρτησις f εἶναι συνεχής.

(ii) Διά κάθε συμπαγές ὑποσύνολον S τοῦ E_1, ὁ περιορισμός $f|S$ εἶναι συνεχής συνάρτησις.

Λύσις. Τό ὅτι (i) $\Rightarrow$ (ii) εἶναι προφανές. Πρός ἀπόδειξιν τοῦ ἀντιστρόφου ὑποθέτομεν ὅτι ἰσχύει ἡ πρότασις (ii) καί θεωροῦμεν τυχόν σημεῖον $x\in E_1$ καί τυχοῦσαν ἀκολουθίαν $(y_\nu)_{\nu\in N}$ ἐν E_1 μέ $\lim y_\nu=x$. Τότε τό σύνολον $S=\{x\}\cup\{y_\nu:\nu\in N\}$ εἶναι συμπαγές ὑποσύνολον τοῦ E_1 καί ἑπομένως ὁ περιορισμός $f|S$ εἶναι συνεχής συνάρτησις. Ἀλλά, προφανῶς $x\in S$ καί ἡ $(y_\nu)_{\nu\in N}$ εἶναι μία ἀκολουθία ἐν S, ὁπότε, ἐπειδή $\lim y_\nu=x$, θά ἔχωμεν

$$\ell im\,(f|S)(y_\nu) = (f|S)(x), \text{ ἤτοι } \ell im f(y_\nu) = f(x)$$

τὸ ὁποῖον καὶ ἀποδεικνύει τὴν συνέχειαν τῆς συναρτήσεως f εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον $x \in E_1$, δηλαδὴ τὴν πρότασιν (i).

16. Στηριζόμενοι εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν 15, δείξατε ὅτι ἡ λογαριθμικὴ συνάρτησις ℓog_a εἶναι συνεχής.

Λύσις. Ἔστω S τυχὸν συμπαγὲς σύνολον μὲ $S \subseteqq \mathcal{D}(\ell og_a)$. Τὸ σύνολον S, ὡς συμπαγὲς ὑποσύνολον τοῦ $\mathbb{R}$, ἔχει μέγιστον καὶ ἐλάχιστον στοιχεῖον, ὁπότε ἔχομεν $S \subseteqq [\gamma_1, \gamma_2]$, ὅπου

$$\gamma_1 = \min S \quad \text{καὶ} \quad \gamma_2 = \max S$$

Θέτομεν τώρα

$$\beta_1 = \min\{\ell og_a \gamma_1, \ell og_a \gamma_2\} \quad \text{καὶ} \quad \beta_2 = \max\{\ell og_a \gamma_1, \ell og_a \gamma_2\}$$

καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἐκθετικὴ συνάρτησις exp_a εἶναι συνεχὴς ἐπὶ τοῦ διαστήματος $[\beta_1, \beta_2]$, τὸ ὁποῖον, ὡς κλειστὸν καὶ φραγμένον ὑποσύνολον τοῦ $\mathbb{R}$, εἶναι συμπαγὲς σύνολον. Ἄρα ἡ συνάρτησις ℓog_a, ὡς ἀντίστροφος συνάρτησις τῆς exp_a, εἶναι ἐπίσης συνεχὴς ἐπὶ τοῦ συνόλου $[\gamma_1, \gamma_2] \cap \mathcal{D}(\ell og_a)$, διότι, λόγῳ τοῦ μονοτόνου τῆς συναρτήσεως exp_a, ἰσχύει

$$exp_a([\beta_1, \beta_2]) = [\gamma_1, \gamma_2] \cap \mathcal{D}(\ell og_a)$$

Ἄρα, ἐπειδὴ $S \subseteqq [\gamma_1, \gamma_2] \cap \mathcal{D}(\ell og_a)$, ὁ περιορισμὸς $\ell og_a|S$ εἶναι συνεχὴς συνάρτησις καὶ ἑπομένως, δυνάμει τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως 15, ἡ λογαριθμικὴ συνάρτησις ℓog_a εἶναι συνεχής.

17. Δείξατε ὅτι ἓν ὑποσύνολον ἑνὸς σταθμητοῦ διανυσματικοῦ χώρου πεπερασμένης διαστάσεως εἶναι συμπαγὲς τότε καὶ μόνον τότε, ἂν εἶναι κλειστὸν καὶ φραγμένον.

Λύσις. Ἔστωσαν (E, N) εἷς σταθμητὸς διανυσματικὸς χῶρος διαστάσεως m καὶ $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\}$ μία βάσις αὐτοῦ. Προφανῶς, τυχὸν $x \in E$ δύναται νὰ γραφῇ κατὰ ἕνα καὶ μοναδικὸν τρόπον ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$x = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_m\beta_m$$

ὅπου $x_1, x_2, \cdots, x_m$ πραγματικοὶ ἀριθμοί. Θέτομεν $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$ καὶ ὁρίζομεν τὴν συνάρτησιν $f : E \mapsto \mathbb{R}^m$ μὲ

$$f(x) = \vec{x}$$

ἡ ὁποία προφανῶς εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος. Εὐκόλως συνάγεται ὅτι διὰ τοῦ τύπου

$$N_f(\vec{x}) = N(f^{-1}(\vec{x}))$$

ὁρίζεται μία στάθμη εἰς τὸν χῶρον $\mathbb{R}^m$, ἡ ὁποία βεβαίως εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν εὐκλείδειον τοιαύτην.

Θεωροῦμεν τώρα τυχὸν κλειστὸν καὶ φραγμένον ὑποσύνολον S τοῦ χώρου E καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σύνολον $f(S)$ εἶναι ἐπίσης φραγμένον ὡς ὑποσύνολον τοῦ χώρου $(\mathbb{R}^m, N_f)$ καὶ ἑπομένως καὶ ὡς ὑποσύνολον τοῦ εὐκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^m$, λόγῳ τῆς ἰσοδυναμίας τῆς N_f πρὸς τὴν εὐκλείδειον στάθμην. Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι τὸ σύνολον $f(S)$ εἶναι καὶ κλειστὸν ὑποσύνολον τοῦ εὐκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^m$. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τυχοῦσαν ἀκολουθίαν $(\vec{y}_\nu)_{\nu \in N}$ ἐν $f(S)$ μὲ $\lim \vec{y}_\nu = \vec{x}$, ὅπου $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$, ὁπότε ἔχομεν

$$\lim \vec{y}_\nu = \vec{x} \Longrightarrow N_f\text{-}\lim \vec{y}_\nu = \vec{x} \Longrightarrow \lim N_f(\vec{y}_\nu - \vec{x}) = 0$$

$$\Longrightarrow \lim N(f^{-1}(\vec{y}_\nu - \vec{x})) = 0 \Longrightarrow \lim N(f^{-1}(\vec{y}_\nu) - f^{-1}(\vec{x})) = 0$$

$$\Longrightarrow N\text{-}\lim f^{-1}(\vec{y}_\nu) = f^{-1}(\vec{x})$$

Ἀλλὰ ἡ $f^{-1}(\vec{y}_\nu)$, $\nu \in N$ εἶναι ἀκολουθία ἐν S καί, λόγῳ τῆς κλειστότητος τοῦ S, θὰ ἔχωμεν

$$N - \lim f^{-1}(\vec{y}_\nu) = f^{-1}(\vec{x}) \Longrightarrow f^{-1}(\vec{x}) \in S \Longrightarrow \vec{x} \in f(S)$$

ὁπότε λαμβάνομεν

$$\lim \vec{y}_\nu = \vec{x} \Longrightarrow \vec{x} \in f(S)$$

Ὥστε τὸ σύνολον $f(S)$ εἶναι κλειστὸν καὶ φραγμένον ὑποσύνολον τοῦ εὐκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^m$ καὶ ἑπομένως συμπαγές. Ἀλλὰ

$$S = f^{-1}(f(S))$$

καὶ ἑπομένως τὸ S, ὡς συνεχὴς εἰκὼν τοῦ συμπαγοῦς συνόλου $f(S)$, εἶναι συμπαγὲς σύνολον, ὑποσύνολον τοῦ χώρου E.

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι κάθε κλειστὸν καὶ φραγμένον ὑποσύνολον ἑνὸς σταθμητοῦ διανυσματικοῦ χώρου πεπερασμένης διαστάσεως εἶναι συμπαγές. Τὸ ἀντίστροφον εἶναι προφανές, διότι, ὡς γνωστόν, τυχὸν συμπαγὲς ὑποσύνολον ἑνὸς μετρικοῦ χώρου εἶναι κλειστὸν καὶ φραγμένον σύνολον.

18. Εἷς μετρικὸς χῶρος καλεῖται τοπικῶς συμπαγὴς τότε καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ κάθε σημεῖον του ὑπάρχῃ μία συμπαγὴς περιοχὴ αὐτοῦ.

Δείξατε ὅτι ὁ καρτεσιανὸς μετρικὸς χῶρος E τῶν τοπικῶς συμπαγῶν μετρικῶν χώρων E_i, $i=1,2,\cdots,m$ εἶναι ἐπίσης τοπικῶς συμπαγής.

Λύσις. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in E$. Ἐπειδὴ $x_i\in E_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$ καὶ ἕκαστος χῶρος E_i εἶναι τοπικῶς συμπαγής, ὑπάρχει συμπαγὴς περιοχὴ $U(x_i)$ τοῦ σημείου x_i. Ἐπίσης τὸ σύνολον

$$U(x)=U(x_1)\times U(x_2)\times\cdots\times U(x_m)$$

ἀποτελεῖ μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου x, ἡ ὁποία εἶναι καὶ συμπαγής, ὡς καρτεσιανὸν γινόμενον συμπαγῶν συνόλων.

19. Δείξατε ὅτι εἷς σταθμητὸς διανυσματικὸς χῶρος πεπερασμένης διαστάσεως εἶναι τοπικῶς συμπαγής.

Λύσις. Ἔστωσαν E εἷς σταθμητὸς διανυσματικὸς χῶρος πεπερασμένης διαστάσεως καὶ x τυχὸν σημεῖον αὐτοῦ. Ἐπειδὴ τυχοῦσα κλειστὴ σφαιρικὴ περιοχὴ $C(x,r)$ εἶναι κλειστὸν καὶ φραγμένον σύνολον, δυνάμει τῆς ἀσκήσεως 17, ἡ περιοχὴ $C(x;r)$ τοῦ σημείου x εἶναι συμπαγής. Ἄρα ὁ χῶρος E εἶναι τοπικῶς συμπαγής.

ΟΜΑΣ 6

ΣΕΛΙΔΕΣ 202-203

1. Δείξατε ὅτι εἰς ἕνα διαχωρίσιμον μετρικὸν χῶρον κάθε συλλογὴ ξένων καὶ μὴ κενῶν ἀνοικτῶν συνόλων εἶναι τὸ πολὺ ἀριθμήσιμος.

Λύσις. Ἔστωσαν E εἷς διαχωρίσιμος μετρικὸς χῶρος καὶ $\mathcal{A}$ τυχαῖα συλλογὴ ξένων καὶ μὴ κενῶν ἀνοικτῶν ὑποσυνόλων αὐτοῦ. Θεωροῦμεν τώρα ἓν πυκνὸν καὶ τὸ πολὺ ἀριθμήσιμον ὑποσύνολον D τοῦ χώρου E, ὁπότε θὰ ἰσχύῃ

$$(\forall X \in \mathcal{A})\ X \cap D \neq \emptyset$$

διότι τὸ X, ὡς ἀνοικτόν, εἶναι περιοχὴ παντὸς σημείου του.

Ἀκολούθως, δυνάμει τοῦ ἀξιώματος ἐπιλογῆς, λαμβάνομεν μίαν συνάρτησιν

$$F : \{X \cap D : X \in \mathcal{A}\} \mapsto D$$

τοιαύτην, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$(\forall X \in \mathcal{A})\ F(X \cap D) \in X \cap D$$

Ὁρίζομεν τώρα τὴν συνάρτησιν $f : \mathcal{A} \mapsto D$ διὰ τοῦ τύπου

$$f(X) = F(X \cap D)$$

καὶ παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τυχόντα σύνολα X, Y ἐν $\mathcal{A}$ ἰσχύει

$$X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \emptyset \Longrightarrow (X \cap D) \cap (Y \cap D) = \emptyset$$

$$\Longrightarrow F(X\cap D)\neq F(Y\cap D)\Longrightarrow f(X)\neq f(Y)$$

Ἄρα ἡ συνάρτησις f εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος καὶ ἐπομένως ἡ συλλογὴ $\mathcal{A}$ ἔχει τὸ πολὺ τὴν ἰσχὺν τοῦ συνόλου D, δηλαδὴ εἶναι τὸ πολὺ ἀριθμήσιμος.

2. Δείξατε ὅτι ὁ καρτεσιανὸς μετρικὸς χῶρος E τῶν διαχωρισίμων μετρικῶν χώρων E_i, $i=1,2,\cdots,m$ εἶναι ἐπίσης διαχωρίσιμος.

Ἐπὶ *πλέον* δείξατε ὅτι ὁ εὐκλείδειος χῶρος $\mathbb{R}^m$ εἶναι διαχωρίσιμος μετρικὸς χῶρος.

Λύσις. Διʼ ἕκαστον $i=1,2,\cdots,m$ λαμβάνομεν ἓν πυκνὸν καὶ τὸ πολὺ ἀριθμήσιμον ὑποσύνολον D_i τοῦ χώρου E_i. Ὡς γνωστόν, τὸ σύνολον $\overset{m}{\underset{i=1}{X}} D_i$ εἶναι τὸ πολὺ ἀριθμήσιμον καὶ ἐπομένως ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τοῦτο εἶναι πυκνὸν ὑποσύνολον τοῦ καρτεσιανοῦ χώρου E. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει ὁ τύπος

$$\overline{\overset{m}{\underset{i=1}{X}} A_i} = \overset{m}{\underset{i=1}{X}} \overline{A_i}$$

Πράγματι· διὰ τυχὸν $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in E$ καὶ τυχοῦσαν ἀκολουθίαν $(y_\nu)_{\nu\in N}$ σημείων τοῦ E, ὅπου $y_\nu=(y_{1\nu},y_{2\nu},\cdots,y_{m\nu})$, ἔχομεν

$$(y_\nu)_{\nu\in N} \text{ ἐν } \overset{m}{\underset{i=1}{X}} A_i \text{ καὶ } \lim y_\nu = x \Longleftrightarrow (\forall i)(y_{i\nu})_{\nu\in N} \text{ ἐν } A_i \text{ καὶ } \lim_\nu y_{i\nu}=x_i$$

Ἄρα διὰ τυχὸν σημεῖον $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in E$ ἰσχύει

$$x\in\overline{\overset{m}{\underset{i=1}{X}} A_i} \Longleftrightarrow (\forall i)\, x_i\in\overline{A_i} \Longleftrightarrow x\in\overset{m}{\underset{i=1}{X}} \overline{A_i}$$

Τώρα, δυνάμει τοῦ ἀνωτέρω ἀποδειχθέντος τύπου, ἔχομεν

$$\overline{\overset{m}{\underset{i=1}{X}} D_i} = \overset{m}{\underset{i=1}{X}} \overline{D_i} = \overset{m}{\underset{i=1}{X}} E_i = E$$

δηλαδὴ ὅτι τὸ σύνολον $\overset{m}{\underset{i=1}{X}} D_i$ εἶναι πυκνὸν ὑποσύνολον τοῦ καρτεσιανοῦ χώρου E.

Τέλος παρατηροῦμεν ὅτι ὁ χῶρος $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι διαχωρίσιμος, διότι, ὡς γνωστόν, τὸ σύνολον $\mathbb{Q}$ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμήσιμον καὶ πυκνόν. Ἐπομένως, λαμβάνοντες $E_i=\mathbb{R}$, $i=1,2,\cdots,m$, συμπεραίνομεν ὅτι ὁ καρτεσιανὸς μετρικὸς χῶρος τῶν E_i, $i=1,2,\cdots,m$, δηλαδὴ ὁ εὐκλείδειος χῶρος $\mathbb{R}^m$ εἶναι διαχωρίσιμος.

3. Δείξατε ὅτι τυχὸν μὴ κενὸν ὑποσύνολον ἑνὸς διαχωρισίμου μετρικοῦ χώρου εἶναι διαχωρίσιμον, χωρὶς νὰ χρησιμοποιηθῇ τὸ θεώρημα 6.1.6 τοῦ βιβλίου.

Λύσις. Ἔστωσαν E εἷς διαχωρίσιμος μετρικὸς χῶρος καὶ S τυχὸν μὴ κενὸν ὑποσύνολον αὐτοῦ. Ἂν D εἶναι ἓν πυκνὸν καὶ τὸ πολὺ ἀριθμήσιμον ὑποσύνολον τοῦ χώρου E, τότε τὸ σύνολον $\Delta = S\cap D$ εἶναι προφανῶς τὸ πολὺ ἀριθμήσιμον καὶ ἐπὶ πλέον πυκνὸν ἐν S, διότι

$$\overline{\Delta}^S = S\cap\overline{D} = S\cap E = S$$

4. Ἔστωσαν οἱ μετρικοὶ χῶροι E_i, $i = 1,2,\cdots,m$ καὶ ὁ καρτεσιανὸς μετρικὸς χῶρος E αὐτῶν. Δείξατε ὅτι, ἂν διὰ κάθε $i=1,2,\cdots,m$ $\mathcal{B}_i$ εἶναι μία βάσις διὰ τὴν τοπολογίαν τοῦ E_i, τότε ἡ συλλογὴ

$$\mathcal{B} = \{ B_1\times B_2\times\cdots\times B_m : (\forall i)\ B_i\in\mathcal{B}_i \}$$

εἶναι βάσις διὰ τὴν τοπολογίαν τοῦ καρτεσιανοῦ μετρικοῦ χώρου E.

Ἐπὶ πλέον, στηριζόμενοι εἰς τὸ θεώρημα 6.1.6 τοῦ βιβλίου, λύσατε ἐκ νέου τὴν ἄσκησιν 2.

Λύσις. Ἔστωσαν ἓν ἀνοικτὸν σύνολον A τοῦ καρτεσιανοῦ μετρικοῦ χώρου E καὶ τυχὸν σημεῖον $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in A$. Ἐπειδὴ τὸ A εἶναι ἀνοικτόν, ὑπάρχει σφαιρικὴ περιοχὴ $B(x,r)$ μὲ $B(x,r)\subseteq A$, ὁπότε ἰσχύει καὶ

$$B(x_1,\tfrac{r}{\sqrt{m}})\times B(x_2,\tfrac{r}{\sqrt{m}})\times\cdots\times B(x_m,\tfrac{r}{\sqrt{m}})\subseteq A$$

διότι ὡς εὐκόλως συνάγεται

$$B(x_1,\tfrac{r}{\sqrt{m}})\times B(x_2,\tfrac{r}{\sqrt{m}})\times\cdots\times B(x_m,\tfrac{r}{\sqrt{m}})\subseteq B(x,r)$$

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι, ἐπειδὴ αἱ σφαιρικαὶ περιοχαὶ εἶναι ἀνοικτὰ σύνολα, δι' ἕκαστον $i=1,2,\cdots,m$ ἡ $B(x_i,\tfrac{r}{\sqrt{m}})$ παρίσταται ὡς ἕνωσις συνόλων τῆς βάσεως $\mathcal{B}_i$ καὶ ἐπομένως ὑπάρχει $B_i\in\mathcal{B}_i$ μὲ

$$x_i\in B_i\subseteq B(x_i,\tfrac{r}{\sqrt{m}})$$

Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν καὶ

$$x \in B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_m \subseteq A$$

τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι τὸ σύνολον A παρίσταται ὡς ἕνωσις συνόλων τῆς συλλογῆς $\mathcal{B}$. Ἄρα, ἐπειδὴ τὸ A εἶναι τυχὸν ἀνοικτὸν σύνολον τοῦ E, ἡ συλλογὴ $\mathcal{B}$ ἀποτελεῖ βάσιν διὰ τὴν τοπολογίαν τοῦ καρτεσιανοῦ χώρου E.

Τέλος εἰς ἐφαρμογὴν τῶν ἀνωτέρω πρὸς λύσιν τῆς ἀσκήσεως 2, ὑποθέτομεν ὅτι οἱ μετρικοὶ χῶροι E_i, $i=1,2,\cdots,m$ εἶναι διαχωρίσιμοι, ὁπότε, δυνάμει τοῦ θεωρήματος 6.1.6 τοῦ βιβλίου (Σελίς 199), δι' ἕκαστον χῶρον E_i ὑπάρχει μία τὸ πολὺ ἀριθμήσιμος βάσις $\mathcal{B}_i$ διὰ τὴν τοπολογίαν αὐτοῦ. Ἡ συλλογὴ $\mathcal{B}$ εἶναι τότε ἐπίσης τὸ πολὺ ἀριθμήσιμος καὶ μάλιστα, ὡς ἤδη ἀπεδείχθη, βάσις διὰ τὴν τοπολογίαν τοῦ E, τὸ ὁποῖον, δυνάμει πάλιν τοῦ θεωρήματος 6.1.6, σημαίνει ὅτι καὶ ὁ καρτεσιανὸς μετρικὸς χῶρος E εἶναι διαχωρίσιμος.

5. **Εἷς μετρικὸς χῶρος καλεῖται τοπικῶς διαχωρίσιμος τότε καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ κάθε σημεῖον του ὑπάρχῃ μία διαχωρίσιμος περιοχὴ αὐτοῦ.**

(α) Δώσατε ἓν παράδειγμα ἑνὸς τοπικῶς διαχωρισίμου μετρικοῦ χώρου, ὁ ὁποῖος νὰ μὴν εἶναι διαχωρίσιμος

(β) Δείξατε ὅτι, ἂν E_1 εἶναι εἷς διαχωρίσιμος μετρικὸς χῶρος καὶ E_2 εἷς τοπικῶς διαχωρίσιμος μετρικὸς χῶρος, ὁ ὁποῖος ὅμως δὲν εἶναι διαχωρίσιμος, τότε ὁ καρτεσιανὸς μετρικὸς χῶρος $E_1 \times E_2$ εἶναι τοπικῶς διαχωρίσιμος, ἀλλὰ δὲν εἶναι διαχωρίσιμος.

(γ) Ἔστω εἷς τοπικῶς διαχωρίσιμος μετρικὸς χῶρος E, ὁ ὁποῖος δὲν εἶναι διαχωρίσιμος. Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις φ ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\varphi(x) = \sup\{r \in \mathbb{R} : B(x,r) \text{ εἶναι διαχωρίσιμος}\},\ x \in E$$

εἶναι πραγματικὴ καὶ ὅτι διὰ κάθε $x \in E$ ἡ σφαιρικὴ περιοχὴ $B(x,\varphi(x))$ εἶναι διαχωρίσιμος. Ἐπὶ πλέον ἀποδείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις φ εἶναι ὁμοιομόρφως συνεχής.

Λύσις. (α) Θεωροῦμεν ἕνα ὑπεραριθμήσιμον μετρικὸν χῶρον E μὲ μετρικὴν ρ ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ἂν } x = y \\ 1, & \text{ἂν } x \neq y \end{cases}$$

καὶ παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τυχὸν ὑποσύνολον X τοῦ E ἰσχύει $\overline{X}=X$ καὶ ἐπομένως ὁ χῶρος E δὲν εἶναι διαχωρίσιμος. Οὗτος ὅμως εἶναι τοπικῶς διαχωρίσιμος, διότι διὰ τυχὸν $x\in E$ τὸ σύνολον $\{x\}$ εἶναι περιοχὴ τοῦ x καὶ μάλιστα διαχωρίσιμος.

(β) Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον $(x,y)\in E_1\times E_2$, ὁπότε, ἐπειδὴ ὁ χῶρος E_2 εἶναι τοπικῶς διαχωρίσιμος, ὑπάρχει διαχωρίσιμος περιοχὴ $V(y)$ τοῦ σημείου y. Ἂν θεωρήσωμεν καὶ τυχοῦσαν περιοχὴν $U(x)$ τοῦ σημείου x, αὕτη, ὡς ὑποσύνολον τοῦ διαχωρισίμου χώρου E_1, θὰ εἶναι ἐπίσης διαχωρίσιμος. Ἐπομένως τὸ σύνολον

$$W((x,y)) = U(x)\times V(y)$$

τὸ ὁποῖον προφανῶς εἶναι μία περιοχὴ τοῦ σημείου (x,y), εἶναι διαχωρίσιμον. Ὥστε ἐδείχθη ὅτι διὰ κάθε σημεῖον $(x,y)\in E_1\times E_2$ ὑπάρχει διαχωρίσιμος περιοχὴ $W((x,y))$ αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι ὁ καρτεσιανὸς μετρικὸς χῶρος $E_1\times E_2$ εἶναι τοπικῶς διαχωρίσιμος. Ὁ χῶρος $E_1\times E_2$ δὲν εἶναι διαχωρίσιμος, διότι

$$P_2(E_1\times E_2) = E_2$$

ὅπου P_2 εἶναι ἡ δευτέρα προβολὴ τοῦ χώρου $E_1\times E_2$, καί, ὡς γνωστόν, μέσῳ μιᾶς συνεχοῦς συναρτήσεως, ὡς π.χ. ἡ P_2, τὰ διαχωρίσιμα σύνολα ἀπεικονίζονται ἐπίσης εἰς διαχωρίσιμα.

Εἰδικῶς, ἐπειδὴ ὁ μετρικὸς χῶρος $\mathbb{R}$ εἶναι διαχωρίσιμος, διὰ $E_1=\mathbb{R}$ καὶ $E_2=E$, ὅπου E ὁ ἐν (α) ὁρισθεὶς μετρικὸς χῶρος, προκύπτει ὅτι ὁ καρτεσιανὸς μετρικὸς χῶρος $\mathbb{R}\times E$ εἶναι τοπικῶς διαχωρίσιμος, ἀλλὰ δὲν εἶναι διαχωρίσιμος.

(γ) Ἐπειδὴ ὁ χῶρος E εἶναι τοπικῶς διαχωρίσιμος, διὰ κάθε $x\in E$ ἰσχύει προφανῶς $\varphi(x)>0$. Ἐπὶ πλέον κάθε σφαιρικὴ περιοχὴ $B(x,r)$ μὲ $r<\varphi(x)$ εἶναι διαχωρίσιμον σύνολον, διότι τυχὸν ὑποσύνολον ἑνὸς διαχωρισίμου συνόλου εἶναι ἐπίσης διαχωρίσιμον. Ἂν ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἡ συνάρτησις φ δὲν εἶναι πραγματική, τότε δι' ἓν τουλάχιστον $x\in E$ θὰ ἰσχύῃ $\varphi(x)=+\infty$ καὶ ἐπομένως διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν ἡ σφαιρικὴ περιοχὴ $B(x,\nu)$ θὰ εἶναι διαχωρίσιμος, ὁπότε καὶ ὁ χῶρος

$$E=\bigcup_{\nu=1}^{\infty} B(x,\nu)$$

θὰ εἶναι διαχωρίσιμος, ὡς ἕνωσις μιᾶς ἀριθμησίμου συλλογῆς διαχωρισίμων ὑποσυνόλων του.

Ἀκολούθως ἐκλέγομεν ἕνα φυσικὸν ἀριθμὸν κ μὲ $\frac{1}{\kappa} < \varphi(x)$, ὁπότε ἔχομεν

$$B(x,\varphi(x)) = \bigcup_{\nu=\kappa}^{\infty} B\left(x, \varphi(x) - \frac{1}{\nu}\right)$$

καὶ ἑπομένως ἡ σφαιρικὴ περιοχὴ $B(x,\varphi(x))$ εἶναι διαχωρίσιμος, ὡς ἕνωσις μιᾶς ἀριθμησίμου συλλογῆς διαχωρισίμων ὑποσυνόλων της.

Τέλος, θεωροῦμεν τυχόντα x, y ἐν E καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει

$$\varphi(x) - \varphi(y) \leqq \rho(x,y)$$

Πράγματι· τοῦτο εἶναι προφανές, ὅταν ἰσχύῃ $\varphi(x) \leqq \rho(x,y)$, ἐνῷ εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου $\varphi(x) > \rho(x,y)$, ἔχομεν

$$B(y, \varphi(x) - \rho(x,y)) \subseteqq B(x,\varphi(x))$$

καὶ ἑπομένως ἡ σφαιρικὴ περιοχὴ $B(y, \varphi(x) - \rho(x,y))$ εἶναι διαχωρίσιμος, ὁπότε

$$\varphi(x) - \rho(x,y) \leqq \varphi(y), \quad \text{δηλαδὴ } \varphi(x) - \varphi(y) \leqq \rho(x,y)$$

Ὁμοίως, δι' ἐναλλαγῆς τοῦ ρόλου τῶν x καὶ y λαμβάνομεν

$$\varphi(y) - \varphi(x) \leqq \rho(x,y)$$

καὶ ἑπομένως

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqq \rho(x,y)$$

τὸ ὁποῖον ἀποδεικνύει τὴν ὁμοιόμορφον συνέχειαν τῆς φ.

ΟΜΑΣ 7

ΣΕΛΙΔΕΣ 218-221

1. Δείξατε ὅτι, ἄν A εἶναι ἕν ἀνοικτόν καί κλειστόν ὑποσύνολον ἑνός μετρικοῦ χώρου E, τότε διά κάθε συνεκτικόν ὑποσύνολον S τοῦ χώρου E ἰσχύει

$$S \subseteq A \quad \text{ἤ} \quad S \cap A = \emptyset$$

Λύσις. Ἡ συλλογή $\{A^c, A\}$ ἀποτελεῖ προφανῶς μίαν ἀνοικτήν κάλυψιν τοῦ συνόλου S διά τήν ὁποίαν ἰσχύει

$$S \cap A^c \cap A = S \cap \emptyset = \emptyset$$

Ἐπομένως, λόγῳ τῆς συνεκτικότητος τοῦ συνόλου S, θά πρέπῃ νά ἰσχύῃ

$$S \cap A^c = \emptyset \quad \text{ἤ} \quad S \cap A = \emptyset$$

δηλαδή

$$S \subseteq A \quad \text{ἤ} \quad S \cap A = \emptyset$$

2. Δείξατε ὅτι δέν ὑπάρχει ὑποσύνολον τοῦ μετρικοῦ χώρου $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ὁμοιόμορφον πρός τόν μοναδιαῖον κύκλον ἐν $\mathbb{R}^2$, ἤτοι πρός τό σύνολον $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$.

Λύσις. Ἐν πρώτοις θά δείξωμεν ὅτι ὁ μοναδιαῖος κύκλος ἐν $\mathbb{R}^2$

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

εἶναι συνεκτικόν σύνολον. Πρός τοῦτο θεωροῦμεν τάς συνεχεῖς συναρτήσεις

$f: [-1,1] \longmapsto \mathbb{R}^2$ καὶ $g: [-1,1] \longmapsto \mathbb{R}^2$ μὲ

$$f(x) = (x, \sqrt{1-x^2}) \quad \text{καὶ} \quad g(x) = (x, -\sqrt{1-x^2})$$

καὶ παρατηροῦμεν ὅτι

$$S = \mathcal{R}(f) \cup \mathcal{R}(g) \quad \text{καὶ} \quad \mathcal{R}(f) \cap \mathcal{R}(g) = \{(-1,0), (1,0)\} \neq \emptyset$$

Ἀλλὰ αἱ συναρτήσεις f καὶ g ἔχουν κοινὸν πεδίον ὁρισμοῦ τὸ συνεκτικὸν σύνολον $[-1,1]$ καὶ ἑπομένως, λόγῳ τῆς συνεχείας των, τὰ πεδία τιμῶν $\mathcal{R}(f)$ καὶ $\mathcal{R}(g)$ εἶναι ἐπίσης συνεκτικὰ σύνολα. Ἄρα καὶ ὁ μοναδιαῖος κύκλος S ἐν $\mathbb{R}^2$ εἶναι συνεκτικὸν σύνολον.

Ἐπὶ πλέον παρατηροῦμεν ὅτι τὰ σύνολα

$$S - \{(-1,0)\} \quad \text{καὶ} \quad S - \{(1,0)\}$$

εἶναι ἐπίσης συνεκτικά, διότι, ὡς εὐκόλως συνάγεται, ἰσχύει

$$S - \{(-1,0)\} = f((-1,1]) \cup g((-1,1]) \quad \text{καὶ} \quad f((-1,1]) \cap g((-1,1]) = \{(1,0)\} \neq \emptyset$$

καὶ

$$S - \{(1,0)\} = f([-1,1)) \cup g([-1,1)) \quad \text{καὶ} \quad f([-1,1)) \cap g([-1,1)) = \{(-1,0)\} \neq \emptyset$$

ὅπου, λόγῳ τῆς συνεχείας τῶν f καὶ g, τὰ σύνολα $f((-1,1])$, $g((-1,1])$ καὶ $f([-1,1))$, $g([-1,1))$ εἶναι συνεκτικά.

Ὁμοίως, ἂν θεωρήσωμεν τὰς συναρτήσεις $F: [-1,1] \longmapsto \mathbb{R}^2$ καὶ $G: [-1,1] \longmapsto \mathbb{R}^2$ μὲ

$$F(x) = (\sqrt{1-x^2}, x) \quad \text{καὶ} \quad G(x) = (-\sqrt{1-x^2}, x)$$

θὰ ἔχωμεν

$$S - \{(0,1)\} = F([-1,1)) \cup G([-1,1)) \quad \text{καὶ} \quad F([-1,1)) \cap G([-1,1)) = \{(0,-1)\} \neq \emptyset$$

ὅπου, λόγῳ τῆς συνεχείας τῶν F καὶ G, τὰ σύνολα $F([-1,1))$ καὶ $G([-1,1))$ εἶναι συνεκτικά. Ἄρα καὶ τὸ σύνολον

$$S - \{(0,1)\}$$

εἶναι συνεκτικόν.

Ὑποθέτομεν τώρα ὅτι ὑπάρχει ἓν ὑποσύνολον T τοῦ χώρου $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ὁμοιόμορφον πρὸς τὸν μοναδιαῖον κύκλον S καὶ ἔστω h εἷς ὁμοιομορφισμὸς τοῦ T ἐπὶ τοῦ S. Τὸ σύνολον T, ὡς ὁμοιόμορφον πρὸς τὸ συνεκτικὸν σύνολον S, εἶναι συνεκτικὸν καὶ ἑπομένως ἓν διάστημα τῆς πραγματικῆς εὐθείας. Προφανῶς εἷς τουλάχιστον ἐκ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν

$$h^{-1}[(-1,0)],\ h^{-1}[(1,0)] \text{ καὶ } h^{-1}[(0,1)]$$

θὰ εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ διαστήματος T, ὁπότε ἓν τουλάχιστον ἐκ τῶν συνόλων

$$T-\{h^{-1}[(-1,0)]\},\ T-\{h^{-1}[(1,0)]\} \text{ καὶ } T-\{h^{-1}[(0,1)]\}$$

δὲν εἶναι διάστημα καὶ κατὰ συνέπειαν δὲν εἶναι συνεκτικὸν σύνολον. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον, διότι τὰ σύνολα ταῦτα εἶναι ἀντιστοίχως ὁμοιόμορφα πρὸς τὰ συνεκτικὰ σύνολα

$$S-\{(-1,0)\},\quad S-\{(1,0)\} \text{ καὶ } S-\{(0,1)\}$$

καὶ ἑπομένως συνεκτικά.

Παρατήρησις. Μία ἁπλουστέρα λύσις τῆς ἀσκήσεως ταύτης δύναται νὰ δοθῇ, ἂν θεωρηθοῦν γνωσταὶ αἱ συνεχεῖς πραγματικαὶ συναρτήσεις cos καὶ sin. Οὕτως, ἀποδεικνύομεν ὅτι τὰ σύνολα

$$S \text{ καὶ } S-\{(a_1,a_2)\}, \text{ ὅπου } (a_1,a_2)\in S$$

εἶναι συνεκτικὰ θεωροῦντες τὴν συνεχῆ συνάρτησιν $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ μὲ

$$f(x)=(\cos x,\ \sin x)$$

ὁπότε ἔχομεν

$$S=f([0,2\pi]) \text{ καὶ } S-\{(a_1,a_2)\}=f((x_0,x_0+2\pi))$$

ὅπου τὸ x_0 ἔχει ἐκλεγῆ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$a_1=\cos x_0 \text{ καὶ } a_2=\sin x_0$$

3. Δείξατε ὅτι διὰ $m\geqq 2$ δὲν ὑπάρχει μὴ κενὸν ἀνοικτὸν ὑποσύνολον τοῦ $\mathbb{R}^m$ ὁμοιόμορφον πρὸς κάποιο ὑποσύνολον τοῦ χώρου $\mathbb{R}$.

Λύσις. Ὑποθέτομεν ὅτι ὑπάρχει ἓν μὴ κενὸν καὶ ἀνοικτὸν ὑποσύνολον A τοῦ $\mathbb{R}^m$, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁμοιόμορφον πρὸς ἕνα ὑποσύνολον τοῦ χώρου $\mathbb{R}$, ὁπότε καὶ κάθε ὑποσύνολον τοῦ A θὰ εἶναι προφανῶς ὁμοιόμορφον πρὸς κάποιο ὑποσύνολον τοῦ $\mathbb{R}$.

Ἐπειδὴ τὸ σύνολον A εἶναι μὴ κενὸν καὶ ἀνοικτόν, ὑπάρχει σφαιρικὴ περιοχὴ $B(a,r)$ μὲ $B(a,r) \subseteq A$. Ἂν $a=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$, ὁρίζομεν τὸν ὁμοιομορφισμὸν $h: \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^m$ διὰ τοῦ τύπου

$$h[(x_1,x_2)] = (\frac{r}{2}x_1+a_1, \frac{r}{2}x_2+a_2, a_3, \cdots, a_m)$$

ὁπότε εὐκόλως συνάγεται ὅτι, ἂν S εἶναι ὁ μοναδιαῖος κύκλος ἐν $\mathbb{R}^2$, ἰσχύει

$$h(S) \subseteq B(a,r) \subseteq A$$

καὶ ἐπομένως τὸ σύνολον $h(S)$ θὰ εἶναι ὁμοιόμορφον πρὸς κάποιο ὑποσύνολον τοῦ χώρου $\mathbb{R}$. Ἄρα καὶ ὁ μοναδιαῖος κύκλος S ἐν $\mathbb{R}^2$, ὡς ὁμοιόμορφος πρὸς τὸ $h(S)$, θὰ εἶναι ὁμοιόμορφος πρὸς κάποιο ὑποσύνολον τοῦ $\mathbb{R}$, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν 2.

4. Δείξατε ὅτι διὰ κάθε μὴ κενὸν καὶ συνεκτικὸν ὑποσύνολον S ἑνὸς μετρικοῦ χώρου E ὑπάρχει ἀκριβῶς μία συνεκτικὴ συνιστῶσα C τοῦ E μὲ $S \subseteq C$.

Λύσις. Λαμβάνομεν ἓν σημεῖον $a \in S$ καὶ θεωροῦμεν τὴν μοναδικὴν συνεκτικὴν συνιστῶσαν C τοῦ E μὲ $a \in C$. Προφανῶς θὰ ἰσχύῃ καὶ $S \subseteq C$, διότι τὸ S εἶναι συνεκτικὸν σύνολον. Τέλος, ἐπειδὴ αἱ συνεκτικαὶ συνιστῶσαι ἑνὸς μετρικοῦ χώρου εἶναι ξέναι ἀνὰ δύο, ἡ ἀνωτέρω ὁρισθεῖσα συνεκτικὴ συνιστῶσα C μὲ $S \subseteq C$ εἶναι μοναδική.

5. Δείξατε ὅτι, ἂν αἱ συνεκτικαὶ συνιστῶσαι ἑνὸς μετρικοῦ χώρου εἶναι πεπερασμένου πλήθους, τότε αὗται εἶναι ὅλαι ἀνοικτὰ καὶ κλειστὰ σύνολα.

Λύσις. Ὡς γνωστὸν αἱ συνεκτικαὶ συνιστῶσαι ἑνὸς μετρικοῦ χώρου εἶναι κλειστὰ σύνολα. Ὑποθέτομεν τώρα ὅτι ἡ συλλογὴ $\mathcal{C}$ τῶν συνεκτικῶν συνιστωσῶν ἑνὸς μετρικοῦ χώρου εἶναι πεπερασμένη καὶ θεωροῦμεν τυχοῦσαν συνεκτικὴν συνιστῶσαν $C \in \mathcal{C}$. Προφανῶς ἡ συλλογὴ $\mathcal{C}-\{C\}$ εἶναι μία πεπερασμένη συλλογὴ κλειστῶν συνόλων καὶ ἐπομένως ἡ ἕνωσις $\cup(\mathcal{C}-\{C\})$ εἶναι ἐπίσης κλειστὸν σύνολον. Ἀλλὰ

$$C^c = \cup(\mathcal{C}-\{C\})$$

ὁπότε τὸ σύνολον C^c εἶναι κλειστόν, δηλαδὴ ἡ συνεκτικὴ συνιστῶσα C εἶναι ἀνοικτὸν σύνολον.

6. Ἔστωσαν E εἷς μετρικὸς χῶρος καὶ σ ἡ σχέσις εἰς τὸν χῶρον E ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τοῦ τύπου

$$x\sigma y \Longleftrightarrow \text{ὑπάρχει συνεκτικὸν σύνολον } S \text{ μὲ } x\in S \text{ καὶ } y\in S$$

Δείξατε ὅτι ἡ σχέσις σ εἶναι μία ἰσοδυναμία εἰς τὸν E καὶ μάλιστα ὅτι αἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας ταύτης συμπίπτουν μὲ τὰς συνεκτικὰς συνιστώσας τοῦ χώρου E.

Λύσις. Ἡ σχέσις σ εἶναι μία ἰσοδυναμία, διότι εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική, δηλαδὴ διὰ κάθε x, y, z ἐν E ἰσχύουν:

1. $x\sigma x$
2. $x\sigma y \Longrightarrow y\sigma x$
3. $x\sigma y$ καὶ $y\sigma z \Longrightarrow x\sigma z$

Πράγματι· ἡ πρώτη τούτων προκύπτει ἀμέσως ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι τὸ μονοστοιχειακὸν σύνολον $\{x\}$ εἶναι συνεκτικόν, ἐνῷ ἡ δευτέρα εἶναι προφανής. Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς τρίτης ὑποθέτομεν ὅτι ἰσχύει $x\sigma y$ καὶ $y\sigma z$, δηλαδὴ ὅτι ὑπάρχουν συνεκτικὰ σύνολα S καὶ T τοιαῦτα, ὥστε

$$x\in S,\ y\in S \text{ καὶ } y\in T,\ z\in T$$

ὁπότε $S\cap T\neq\emptyset$ καὶ ἐπομένως ἡ ἕνωσις $S\cup T$ εἶναι συνεκτικὸν σύνολον διὰ τὸ ὁποῖον μάλιστα ἰσχύει $x\in S\cup T$ καὶ $z\in S\cup T$. Ἄρα $x\sigma z$.

Θεωροῦμεν τώρα τυχὸν σημεῖον $a\in E$ καὶ ἔστω C ἡ μοναδικὴ συνεκτικὴ συνιστῶσα τοῦ E μὲ $a\in C$. Προφανῶς ἰσχύει

$$(\forall x\in C)\ a\sigma x$$

καὶ ἐπομένως $C\subseteq \kappa\lambda_\sigma(a)$. Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως διὰ τυχὸν σημεῖον $x\in\kappa\lambda_\sigma(a)$, ἔχομεν $a\sigma x$ καὶ ἐπομένως ὑπάρχει συνεκτικὸν σύνολον S μὲ $a\in S$ καὶ $x\in S$. Ἄρα $S\subseteq C$, ὁπότε $x\in C$ καὶ ἐπομένως $\kappa\lambda_\sigma(a)\subseteq C$. Ἄρα ἰσχύει $\kappa\lambda_\sigma(a)=C$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι αἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας τῆς σ συμπίπτουν μὲ τὰς συνεκτικὰς συνιστώσας τοῦ E.

7. Δοθέντος ὅτι ἡ ἐκθετικὴ συνάρτησις $\exp_a$, $a \neq 1$ εἶναι συνεχής, δείξατε ὅτι τὸ πεδίον τιμῶν ταύτης εἶναι τὸ διάστημα $(0,+\infty)$.

Λύσις. Τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως $\exp_a$ εἶναι ὁλόκληρος ἡ πραγματικὴ εὐθεῖα $\mathbb{R}$, δηλαδὴ ἓν συνεκτικὸν σύνολον. Ἑπομένως, λόγῳ τῆς συνεχείας, καὶ τὸ πεδίον τιμῶν ταύτης θὰ εἶναι συνεκτικόν, δηλαδὴ ἓν διάστημα.

Ἀκολούθως παρατηροῦμεν ὅτι

$$\lim_{\nu} \exp_a(-\nu) = \lim_{\nu} a^{-\nu} = \begin{cases} 0, & \text{ἂν } a > 1 \\ +\infty, & \text{ἂν } a < 1 \end{cases}$$

καὶ

$$\lim_{\nu} \exp_a \nu = \lim_{\nu} a^{\nu} = \begin{cases} +\infty, & \text{ἂν } a > 1 \\ 0, & \text{ἂν } a < 1 \end{cases}$$

ὁπότε, λόγῳ τῆς μονοτονίας τῆς συναρτήσεως $\exp_a$, εὐκόλως συνάγεται ὅτι $\mathcal{R}(\exp_a) = (0,+\infty)$.

8. Εἷς μετρικὸς χῶρος καλεῖται τοπικῶς συνεκτικὸς τότε καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ κάθε σημεῖον x αὐτοῦ καὶ κάθε περιοχὴ $U(x)$ τοῦ σημείου x ὑπάρχῃ συνεκτικὴ περιοχὴ $V(x)$ τοῦ x τοιαύτη, ὥστε νὰ ἰσχύῃ $V(x) \subseteq U(x)$.

Δείξατε ὅτι ὁ καρτεσιανὸς μετρικὸς χῶρος E τῶν τοπικῶς συνεκτικῶν μετρικῶν χώρων E_i, $i = 1,2,\cdots,m$ εἶναι ἐπίσης τοπικῶς συνεκτικός.

Εἶναι ὁ χῶρος $\mathbb{R}^m$ τοπικῶς συνεκτικός; Εἶναι ἡ τοπικὴ συνεκτικότης τοπολογικὴ ἰδιότης;

Λύσις. Ἔστωσαν $U(x)$ τυχοῦσα περιοχὴ τοῦ σημείου $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in E$ καὶ $B(x,r)$ μία σφαιρικὴ περιοχὴ μὲ

$$B(x,r) \subseteq U(x)$$

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι

$$B(x_1,\frac{r}{\sqrt{m}}) \times B(x_2,\frac{r}{\sqrt{m}}) \times \cdots \times B(x_m,\frac{r}{\sqrt{m}}) \subseteq B(x,r)$$

Ἐπειδὴ οἱ χῶροι E_i, $i=1,2,\cdots,m$ εἶναι τοπικῶς συνεκτικοί, ὑπάρχουν συνεκτικαὶ περιοχαὶ $V_i(x_i)$, $i=1,2,\cdots,m$ τοιαῦται, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$(\forall i=1,2,\cdots,m)\ V_i(x_i) \subseteq B(x_i,\frac{r}{\sqrt{m}})$$

Προφανῶς τὸ σύνολον

$$V(x) = V_1(x_1) \times V_2(x_2) \times \cdots \times V_m(x_m)$$

εἶναι μία συνεκτικὴ περιοχὴ τοῦ σημείου x, διὰ τὴν ὁποίαν εὐκόλως συνάγεται ὅτι ἰσχύει $V(x) \subseteq U(x)$.

Ὁ μετρικὸς χῶρος $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι τοπικῶς συνεκτικός, διότι αἱ σφαιρικαὶ περιοχαὶ ἐν $\mathbb{R}$ εἶναι διαστήματα καὶ ἐπομένως συνεκτικαί. Ἄρα ὁ εὐκλείδειος χῶρος $\mathbb{R}^m$, ὡς καρτεσιανὸς μετρικὸς χῶρος τῶν χώρων $E_i=\mathbb{R}$, $i=1,2,\cdots,m$ εἶναι τοπικῶς συνεκτικός.

Ἡ τοπικὴ συνεκτικότης εἶναι τοπολογικὴ ἰδιότης, διότι, μέσῳ ἑνὸς ὁμοιομορφισμοῦ h, τυχοῦσα περιοχὴ ἑνὸς σημείου x ἀπεικονίζεται εἰς περιοχὴν τοῦ σημείου $h(x)$ καὶ μάλιστα, λόγῳ τῆς συνεχείας τοῦ ὁμοιομορφισμοῦ h, αἱ συνεκτικαὶ περιοχαὶ ἀπεικονίζονται ἐπίσης εἰς συνεκτικὰς τοιαύτας.

9. Δείξατε ὅτι αἱ συνεκτικαὶ συνιστῶσαι τυχόντος ἀνοικτοῦ ὑποσυνόλου ἑνὸς τοπικῶς συνεκτικοῦ μετρικοῦ χώρου εἶναι ἐπίσης ἀνοικτὰ σύνολα.

Λύσις. Ἔστωσαν A ἓν ἀνοικτὸν σύνολον, ὑποσύνολον ἑνὸς τοπικῶς συνεκτικοῦ μετρικοῦ χώρου E, καὶ C τυχοῦσα συνεκτικὴ συνιστῶσα αὐτοῦ. Ἐπειδὴ ὁ χῶρος E εἶναι τοπικῶς συνεκτικός, διὰ κάθε $x \in C$ ὑπάρχει συνεκτικὴ περιοχὴ $U(x)$ τοῦ σημείου x, ὁπότε προφανῶς θὰ ἰσχύῃ

$$U(x) \subseteq C$$

τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι ἡ συνεκτικὴ συνιστῶσα C εἶναι ἀνοικτὸν σύνολον.

10. Δείξατε ὅτι :

α) Κάθε μὴ κενὸν καὶ ἀνοικτὸν ὑποσύνολον τοῦ $\mathbb{R}^m$ εἶναι ἕνωσις μιᾶς τὸ πολὺ ἀριθμησίμου συλλογῆς ξένων τόπων.

β) Κάθε μὴ κενὸν καὶ ἀνοικτὸν ὑποσύνολον τοῦ $\mathbb{R}$ εἶναι ἕνωσις μιᾶς τὸ πολὺ ἀριθμησίμου συλλογῆς ξένων καὶ ἀνοικτῶν διαστημάτων.

Λύσις. α) Ἔστωσαν A ἓν μὴ κενὸν καὶ ἀνοικτὸν ὑποσύνολον τοῦ χώρου $\mathbb{R}^m$ καὶ $\mathcal{C}$ ἡ συλλογὴ τῶν συνεκτικῶν συνιστωσῶν αὐτοῦ, ὁπότε ἔχομεν

$$A = \cup\, \mathcal{C}$$

ὅπου ἡ συλλογὴ $\mathcal{C}$ εἶναι προφανῶς μία συλλογὴ ξένων μὴ κενῶν συνόλων καὶ μάλιστα, δυνάμει τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως 9, ἀνοικτῶν, διότι ὁ χῶρος $\mathbb{R}^m$ εἶναι τοπικῶς συνεκτικός. Ἀλλά, ὡς γνωστόν, ὁ χῶρος $\mathbb{R}^m$ εἶναι διαχωρίσιμος καὶ ἑπομένως, δυνάμει τῆς ἀσκήσεως 1 τῆς ὁμάδος 6, ἡ συλλογὴ $\mathcal{C}$ εἶναι τὸ πολὺ ἀριθμήσιμος. Ἐπειδὴ αἱ συνεκτικαὶ συνιστῶσαι τοῦ A, ὡς μὴ κενά, ἀνοικτὰ καὶ συνεκτικὰ σύνολα, εἶναι τόποι, ἐδείχθη ὅτι τὸ σύνολον A εἶναι ἕνωσις μιᾶς τὸ πολὺ ἀριθμησίμου συλλογῆς ξένων τόπων.

β) Ἐπειδή, ὡς εὐκόλως συνάγεται, εἷς τόπος ἐν $\mathbb{R}$ εἶναι ἓν ἀνοικτὸν διάστημα, δυνάμει τῆς ἀποδειχθείσης προτάσεως α), προκύπτει ὅτι κάθε μὴ κενὸν καὶ ἀνοικτὸν ὑποσύνολον τοῦ $\mathbb{R}$ εἶναι ἕνωσις μιᾶς τὸ πολὺ ἀριθμησίμου συλλογῆς ξένων καὶ ἀνοικτῶν διαστημάτων.

11. Ἔστωσαν E_1, E_2 μετρικοὶ χῶροι καὶ $f: E_1 \to E_2$ τυχοῦσα συνεχὴς συνάρτησις. Δείξατε ὅτι, ἂν τὸ πεδίον ὁρισμοῦ $\mathcal{D}(f)$ τῆς συναρτήσεως f εἶναι ὁδικῶς συνεκτικὸν σύνολον, τότε καὶ τὸ πεδίον τιμῶν $\mathcal{R}(f)$ αὐτῆς εἶναι ὁδικῶς συνεκτικόν.

Εἶναι ἡ ὁδικὴ συνεκτικότης τοπολογικὴ ἰδιότης;

Λύσις. Θεωροῦμεν τυχόντα σημεῖα u, v ἐν $\mathcal{R}(f)$, ὁπότε ὑπάρχουν x, y ἐν $\mathcal{D}(f)$ τοιαῦτα, ὥστε

$$u = f(x) \quad \text{καὶ} \quad v = f(y)$$

Ἐπειδὴ τὸ σύνολον $\mathcal{D}(f)$ εἶναι ὁδικῶς συνεκτικόν, ὑπάρχει ὁδὸς ἐν $\mathcal{D}(f)$ συνδέουσα τὰ σημεῖα x, y καὶ ἑπομένως ὁρίζεται μία συνεχὴς συνάρτησις $\varphi: [0,1] \longmapsto \mathcal{D}(f)$ μὲ

$$\varphi(0) = x \quad \text{καὶ} \quad \varphi(1) = y$$

Ἡ συνάρτησις $\psi = f \circ \varphi$ εἶναι ἐπίσης συνεχὴς καὶ τοιαύτη, ὥστε

$$\mathcal{D}(\psi) = [0,1] \quad \text{καὶ} \quad \mathcal{R}(\psi) \subseteq \mathcal{R}(f)$$

δηλαδὴ αὐτὴ ἀποτελεῖ μίαν ὁδὸν ἐν $\mathcal{R}(f)$, ἡ ὁποία μάλιστα συνδέει τὰ σημεῖα u καὶ v, διότι

$$\psi(0) = f\,[\varphi(0)] = f(x) = u \quad \text{καὶ} \quad \psi(1) = f\,[\varphi(1)] = f(y) = v$$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι διὰ τυχόντα σημεῖα u, v ἐν $\mathcal{R}(f)$ ὑπάρχει ὁδὸς ἐν $\mathcal{R}(f)$ συνδέουσα αὐτά, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι τὸ σύνολον $\mathcal{R}(f)$ εἶναι ὁδικῶς συνεκτικόν.

Ἡ ὁδικὴ συνεκτικότης εἶναι τοπολογικὴ ἰδιότης, διότι οἱ ὁμοιομορφισμοί, ὡς συνεχεῖς συναρτήσεις, διατηροῦν αὐτήν.

12. Δείξατε ὅτι ὁ καρτεσιανὸς μετρικὸς χῶρος E τῶν μετρικῶν χώρων E_i, $i = 1,2,\cdots,m$ εἶναι ὁδικῶς συνεκτικὸς τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ὅλοι οἱ χῶροι E_i, $i = 1,2,\cdots,m$ εἶναι ὁδικῶς συνεκτικοί.

Λύσις. Ὑποθέτομεν ὅτι ὁ καρτεσιανὸς χῶρος E εἶναι ὁδικῶς συνεκτικός, ὁπότε, ἐπειδὴ αἱ προβολαὶ τοῦ χώρου E εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις, δυνάμει τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως 11, ἕκαστος χῶρος $E_i = P_i(E)$, $i = 1,2,\cdots,m$ εἶναι ἐπίσης ὁδικῶς συνεκτικός.

Ἀντιστρόφως, ὑποθέτομεν ὅτι ὅλοι οἱ χῶροι E_i, $i = 1,2,\cdots,m$ εἶναι ὁδικῶς συνεκτικοὶ καὶ θεωροῦμεν τυχόντα σημεῖα $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$ καὶ $y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$. Ἐπειδὴ ὁ χῶρος E_i εἶναι ὁδικῶς συνεκτικὸς ὑπάρχει ὁδὸς συνδέουσα τὰ σημεῖα x_i, y_i αὐτοῦ καὶ ἑπομένως ὁρίζεται μία συνεχὴς συνάρτησις $\varphi_i : [0,1] \longmapsto E_i$ μὲ

$$\varphi_i(0) = x_i \quad \text{καὶ} \quad \varphi_i(1) = y_i \quad (i = 1,2,\ldots,m)$$

Ὁρίζομεν τώρα τὴν συνάρτησιν $\varphi : [0,1] \longmapsto E$ διὰ τοῦ τύπου

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_m(x))$$

καὶ παρατηροῦμεν ὅτι αὐτὴ εἶναι συνεχὴς καὶ τοιαύτη, ὥστε

$$\varphi(0) = (x_1, x_2, \cdots, x_m) = x \quad \text{καὶ} \quad \varphi(1) = (y_1, y_2, \cdots, y_m) = y$$

δηλαδὴ ἡ συνάρτησις φ ἀποτελεῖ μίαν ὁδὸν συνδέουσα τὰ σημεῖα x καὶ y, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι ὁ καρτεσιανὸς μετρικὸς χῶρος E εἶναι ἐπίσης ὁδικῶς συνεκτικός.

13. **Δείξατε ὅτι ἡ μοναδιαία σφαῖρα εἰς τὸν εὐκλείδειον χῶρον $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, δηλαδὴ τὸ σύνολον $\{\vec{x}\in\mathbb{R}^m : |\vec{x}| = 1\}$ εἶναι ὁδικῶς συνεκτικὸν σύνολον.**

Λύσις. Θεωροῦμεν τυχόντα σημεῖα $\vec{x}, \vec{y}$ τῆς μοναδιαίας σφαίρας καὶ λαμβάνομεν ἓν ἀκόμη σημεῖον $\vec{z}$ αὐτῆς τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἰσχύῃ $\vec{z} \neq -\vec{x}$ καὶ $\vec{z} \neq -\vec{y}$. Ἀκολούθως ὁρίζομεν τὰς συναρτήσεις $\vec{\varphi}:[0,1]\mapsto\mathbb{R}^m$ καὶ $\vec{\psi} : [0,1]\mapsto \mathbb{R}^m$ διὰ τῶν τύπων

$$\vec{\varphi}(t) = \frac{(1-t)\vec{x}+t\vec{z}}{|(1-t)\vec{x}+t\vec{z}|} \quad \text{καὶ} \quad \vec{\psi}(t) = \frac{(1-t)\vec{z}+t\vec{y}}{|(1-t)\vec{z}+t\vec{y}|}$$

αἱ ὁποῖαι εἶναι προφανῶς συνεχεῖς, λαμβάνουν τιμὰς ἐν $\{\vec{x}\in\mathbb{R}^m: |\vec{x}|=1\}$ καὶ ἰσχύουν :

$$\vec{\varphi}(0) = \vec{x}, \quad \vec{\varphi}(1) = \vec{z} = \vec{\psi}(0), \quad \vec{\psi}(1) = \vec{y}$$

Ἑπομένως αὗται ὁρίζουν μίαν ὁδὸν $(\vec{\varphi}, \vec{\psi})$ ἐν $\{\vec{x}\in\mathbb{R}^m : |\vec{x}| = 1\}$ συνδέουσαν τὰ σημεῖα $\vec{x}$ καὶ $\vec{y}$.

14. **Δείξατε ὅτι, ἂν S_i, $i\in I$ εἶναι μία οἰκογένεια ὁδικῶς συνεκτικῶν συνόλων, ὑποσυνόλων ἑνὸς μετρικοῦ χώρου, μὲ $\bigcap_{i\in I} S_i \neq \emptyset$, τότε ἡ ἕνωσις $\bigcup_{i\in I} S_i$ αὐτῆς εἶναι ἐπίσης ὁδικῶς συνεκτικὸν σύνολον.**

Λύσις. Θεωροῦμεν τυχόντα σημεῖα x, y ἐν $\bigcup_{i\in I} S_i$ καὶ λαμβάνομεν ἓν ὡρισμένον σημεῖον $a \in \bigcap_{i\in I} S_i$. Προφανῶς ὑπάρχουν δεῖκτες κ, λ ἐν I μὲ $x\in S_\kappa$ καὶ $y\in S_\lambda$, ὁπότε, ἐπειδὴ $a\in S_\kappa$ καὶ $a\in S_\lambda$, ὑπάρχει ὁδὸς $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m)$ ἐν S_κ συνδέουσα τὰ x, a καὶ ὁδὸς $(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n)$ ἐν S_λ συνδέουσα τὰ a, y. Αἱ ὁδοὶ αὗται ὁρίζουν προφανῶς μίαν ὁδὸν $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m ; \psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n)$ ἐν $\bigcup_{i\in I} S_i$ συνδέουσαν τὰ σημεῖα x καὶ y. Ἄρα ἡ ἕνωσις $\bigcup_{i\in I} S_i$ εἶναι ἐπίσης ὁδικῶς συνεκτικὸν σύνολον.

15. **Ἔστωσαν E εἷς μετρικὸς χῶρος καὶ $\mathcal{S}$ ἡ συλλογὴ ὅλων τῶν ὁδικῶς**

συνεκτικῶν ὑποσυνόλων τοῦ E. Ἓν σύνολον C καλεῖται ὁδικὴ συνεκτικὴ συνιστῶσα τοῦ χώρου E τότε καὶ μόνον τότε, ἂν τοῦτο εἶναι ψευδομέγιστον στοιχεῖον τῆς συλλογῆς $\mathcal{S}$ (διατεταγμένης ὡς πρὸς τὴν σχέσιν τοῦ ὑποσυνόλου).

Δείξατε, ὅτι:

α) Διὰ κάθε σημεῖον x τοῦ μετρικοῦ χώρου E ὑπάρχει ἀκριβῶς μία ὁδικὴ συνεκτικὴ συνιστῶσα C τοῦ E μὲ $x \in C$.

β) Ἡ συλλογὴ ὅλων τῶν ὁδικῶν συνεκτικῶν συνιστωσῶν ἑνὸς μετρικοῦ χώρου ἀποτελεῖ μίαν διαμέρισιν αὐτοῦ.

Λύσις. α) Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον $x \in E$ καὶ τὴν συλλογὴν

$$\mathfrak{X} = \{X : x \in X \text{ καὶ } X \text{ εἶναι ὁδικῶς συνεκτικὸν ὑποσύνολον τοῦ } E\}$$

Προφανῶς ἡ συλλογὴ $\mathfrak{X}$ εἶναι μὴ κενή, διότι τὸ μονοστοιχειακὸν σύνολον $\{x\}$ εἶναι ὁδικῶς συνεκτικὸν ὑποσύνολον τοῦ χώρου E. Ἑπομένως ἰσχύει

$$\bigcap \mathfrak{X} = \{x\} \neq \emptyset$$

ὁπότε, δυνάμει τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως 14, τὸ σύνολον $C = \bigcup \mathfrak{X}$ εἶναι ἐπίσης ὁδικῶς συνεκτικὸν μὲ $x \in C$. Τὸ C εἶναι μία ὁδικῶς συνεκτικὴ συνιστῶσα τοῦ E, διότι διὰ τυχὸν ὁδικῶς συνεκτικὸν ὑποσύνολον S τοῦ E ἰσχύει

$$C \subseteq S \Longrightarrow C \subseteq S \text{ καὶ } S \in \mathfrak{X} \Longrightarrow C \subseteq S \text{ καὶ } S \subseteq C = \bigcup \mathfrak{X} \Longrightarrow C = S$$

Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ μονοσημάντου τῆς ὁδικῆς συνεκτικῆς συνιστώσης C, ὑποθέτομεν ὅτι $\hat{C}$ εἶναι ἐπίσης ὁδικὴ συνεκτικὴ συνιστῶσα τοῦ E μὲ $x \in \hat{C}$. Προφανῶς $x \in C \cap \hat{C}$, δηλαδὴ $C \cap \hat{C} \neq \emptyset$, καὶ ἑπομένως, δυνάμει τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως 14, ἡ ἕνωσις $C \cup \hat{C}$ εἶναι ὁδικῶς συνεκτικὸν σύνολον. Ἀλλὰ $C \subseteq C \cup \hat{C}$ καὶ $\hat{C} \subseteq C \cup \hat{C}$, ὁπότε, ἐπειδὴ αἱ C καὶ $\hat{C}$ εἶναι ὁδικαὶ συνεκτικαὶ συνιστῶσαι τοῦ E, θὰ ἔχωμεν $C = C \cup \hat{C}$ καὶ $\hat{C} = C \cup \hat{C}$, δηλαδὴ $\hat{C} \subseteq C$ καὶ $C \subseteq \hat{C}$, ἤτοι $C = \hat{C}$.

β) Δυνάμει καὶ τῆς α), ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι αἱ ὁδικαὶ συνεκτικαὶ συνιστῶσαι τοῦ χώρου E εἶναι ξέναι ἀνὰ δύο, δηλαδὴ ὅτι διὰ τυχούσας ὁδικὰς συνεκτικὰς συνιστώσας C_1 καὶ C_2 τοῦ E ἰσχύει

$$C_1 \neq C_2 \Longrightarrow C_1 \cap C_2 = \emptyset$$

Πράγματι· ὑποθέτομεν ὅτι $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ καὶ θεωροῦμεν ἓν $x \in C_1 \cap C_2$, ὁπότε ἔχομεν $x \in C_1$ καὶ $x \in C_2$ καὶ ἑπομένως, δυνάμει τῆς α), $C_1 = C_2$.

16. Ἔστωσαν E εἷς μετρικὸς χῶρος καὶ σ ἡ σχέσις εἰς τὸν E ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τοῦ τύπου

$$x \sigma y \Longleftrightarrow \text{ὑπάρχει ὁδὸς συνδέουσα τὰ } x \text{ καὶ } y$$

Δείξατε ὅτι ἡ σχέσις σ εἶναι μία ἰσοδυναμία εἰς τὸν E καὶ μάλιστα ὅτι αἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας ταύτης συμπίπτουν μὲ τὰς ὁδικὰς συνεκτικὰς συνιστώσας τοῦ χώρου E.

Λύσις. Ἡ σχέσις σ εἶναι μία ἰσοδυναμία, διότι εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική, δηλαδὴ διὰ κάθε x, y, z ἐν E ἰσχύουν:

1. $x \sigma x$
2. $x \sigma y \Longrightarrow y \sigma x$
3. $x \sigma y$ καὶ $y \sigma z \Longrightarrow x \sigma z$

Πράγματι· ἡ πρώτη τούτων προκύπτει ἀμέσως ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι τὸ μονοστοιχειακὸν σύνολον $\{x\}$ εἶναι ὁδικῶς συνεκτικόν, ἐνῷ ἡ δευτέρα εἶναι προφανής. Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς τρίτης ὑποθέτομεν ὅτι ἰσχύει $x \sigma y$ καὶ $y \sigma z$, δηλαδὴ ὅτι ὑπάρχει ὁδὸς $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m)$ συνδέουσα τὰ x, y καὶ ὁδὸς $(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n)$ συνδέουσα τὰ y, z, ὁπότε αἱ ὁδοὶ αὗται ὁρίζουν μίαν ὁδὸν $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m ; \psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n)$ συνδέουσαν τὰ σημεῖα x καὶ z. Ἄρα $x \sigma z$.

Θεωροῦμεν τώρα τυχὸν σημεῖον $a \in E$ καὶ ἔστω C ἡ, δυνάμει τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως 15 α), μοναδικὴ ὁδικὴ συνεκτικὴ συνιστῶσα τοῦ χώρου E μὲ $a \in C$. Προφανῶς ἰσχύει

$$(\forall\, x \in C)\ a \sigma x$$

καὶ ἑπομένως $C \subseteq \kappa\lambda_\sigma(a)$. Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως διὰ τυχόντα σημεῖα x, y ἐν $\kappa\lambda_\sigma(a)$ ἔχομεν $x \sigma a$ καὶ $a \sigma y$ καὶ ἑπομένως ὑπάρχει ὁδὸς $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m)$ συνδέουσα τὰ x, a καὶ ὁδὸς $(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n)$ συνδέουσα τὰ a, y, ὁπότε αἱ ὁδοὶ αὗται ὁρίζουν μίαν ὁδὸν $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m ; \psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n)$ συνδέουσαν τὰ σημεῖα x καὶ y. Ἐπειδὴ αἱ ὁδοὶ $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m)$ καὶ $(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n)$ εἶναι προφανῶς ὁδοὶ ἐν $\kappa\lambda_\sigma(a)$, ἡ ὁδὸς $(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m\,;\ \psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n)$ εἶναι ἐπίσης ὁδὸς ἐν $\kappa\lambda_\sigma(a)$ καὶ ἐπομένως ἡ κλάσις ἰσοδυναμίας $\kappa\lambda_\sigma(a)$ εἶναι ὁδικῶς συνεκτικὸν σύνολον μὲ $a\epsilon\kappa\lambda_\sigma(a)$, τὸ ὁποῖον συνεπάγεται ὅτι $\kappa\lambda_\sigma(a)\subseteq C$. Ἄρα ἰσχύει $\kappa\lambda_\sigma(a)=C$, τὸ ὁποῖον, δυνάμει τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως 15, σημαίνει ὅτι αἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας τῆς σ συμπίπτουν μὲ τὰς ὁδικὰς συνεκτικὰς συνιστώσας τοῦ E.

17. Εἷς μετρικὸς χῶρος καλεῖται τοπικῶς ὁδικῶς συνεκτικὸς τότε καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ κάθε σημείου x αὐτοῦ καὶ κάθε περιοχὴν $U(x)$ τοῦ σημείου x ὑπάρχῃ ὁδικῶς συνεκτικὴ περιοχὴ $V(x)$ τοῦ x τοιαύτη, ὥστε νὰ ἰσχύῃ $V(x)\subseteq U(x)$.

Δείξατε ὅτι εἷς συνεκτικὸς καὶ τοπικῶς ὁδικῶς συνεκτικὸς μετρικὸς χῶρος εἶναι καὶ ὁδικῶς συνεκτικός.

Λύσις. Ἔστωσαν E εἷς συνεκτικὸς καὶ τοπικῶς ὁδικῶς συνεκτικὸς μετρικὸς χῶρος καὶ a ἓν ὡρισμένον σημεῖον αὐτοῦ. Θέτομεν

$$A=\{x\epsilon E:\ \text{ὑπάρχει ὁδὸς συνδέουσα τὰ } a,x\}$$

καὶ θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον $x\epsilon A$, ὁπότε ὑπάρχει ὁδὸς $(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m)$ συνδέουσα τὰ σημεῖα a καὶ x. Ἐπειδὴ ὁ χῶρος E εἶναι τοπικῶς ὁδικῶς συνεκτικός, ὑπάρχει ὁδικῶς συνεκτικὴ περιοχὴ $U(x)$ τοῦ σημείου x. Διὰ τυχὸν $y\epsilon U(x)$, ὑπάρχει προφανῶς ὁδὸς $(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n)$ συνδέουσα τὰ σημεῖα x,y καὶ ἐπομένως ὁρίζεται ὁδὸς $(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m;\ \psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n)$ συνδέουσα τὰ a καὶ y. Ἄρα $U(x)\subseteq A$ καὶ ἐπομένως τὸ σύνολον A εἶναι ἀνοικτόν.

Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι καὶ τὸ συμπλήρωμα τοῦ A εἶναι ἐπίσης ἀνοικτὸν σύνολον. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τυχὸν $x\epsilon A^c$ καὶ μίαν ὁδικῶς συνεκτικὴν περιοχὴν $U(x)$ αὐτοῦ. Ἰσχύει τότε $U(x)\subseteq A^c$, διότι ἄλλως θὰ ὑπῆρχε y μὲ $y\epsilon A$ καὶ $y\epsilon U(x)$, ὁπότε θὰ ὑπῆρχον καὶ ὁδοὶ $(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m)$ καὶ $(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n)$ συνδέουσαι τὰ σημεῖα a,y καὶ y,x ἀντιστοίχως καὶ ἐπομένως θὰ ὡρίζετο ὁδὸς $(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m\,;\ \psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n)$ συνδέουσα τὰ σημεῖα a καὶ x, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὸ ὅτι $x\epsilon A^c$.

Ἔχομεν λοιπὸν

$$E = A \cup A^c \quad \text{καὶ} \quad A \cap A^c = \emptyset$$

καὶ ἐπομένως, λόγῳ τῆς συνεκτικότητος τοῦ χώρου E, $A^c = \emptyset$, διότι $a \in A$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι $E = A$.

Τέλος, ἂν x, y εἶναι τυχόντα σημεῖα ἐν E, τότε βεβαίως ὑπάρχουν ὁδοὶ $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m)$ καὶ $(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n)$ συνδέουσαι τὰ x, a καὶ a, y ἀντιστοίχως, ὁπότε ὁρίζεται ὁδὸς $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m ; \psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n)$ συνδέουσα τὰ x, y. Ἄρα ὁ χῶρος E εἶναι ὁδικῶς συνεκτικός.

$\lim w^\nu = 0, |w|<1$

$\lim \nu^k w^\nu = 0, \ |w|<1$

$\lim \left(1-\frac{1}{\nu}\right)^\nu = \frac{1}{e}$

ΟΜΑΣ 8

ΣΕΛΙΔΕΣ 242-243

1. Μελετήσατε ὡς πρὸς τὴν ὁμοιόμορφον σύγκλισιν τὴν ἀκολουθίαν τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων $(f_\nu)_{\nu\in N}$ εἰς τὰς κατωθι περιπτώσεις:

1) $f_\nu(x) = \nu^2 x(1-x)^\nu,\ x\in[0,1]$ 2) $f_\nu(x) = \dfrac{x^{2\nu}}{1+x^{2\nu}},\ x\in R$

3) $f_\nu(x) = \dfrac{x^2}{x^2+(1-\nu x)^2},\ x\in[0,1]$ 4) $f_\nu(x) = \dfrac{x}{\nu}e^{-\frac{x}{\nu}},\ x\in[0,+\infty)$

Λύσις. 1) Διὰ κάθε $x\in[0,1]$ ἔχομεν $|1-x|<1$ καὶ ἐπομένως, δυνάμει τῆς ἀσκήσεως 9 τῆς ὁμάδος 1,

$$\lim_\nu \nu^2 x(1-x)^\nu = x\lim_\nu \nu^2(1-x)^\nu = x\cdot 0 = 0$$

Ἄρα ἰσχύει

$$\lim f_\nu = 0 \text{ κατὰ σημεῖον}$$

Ἂν θεωρήσωμεν τώρα τὴν ἀκολουθίαν (x_ν) ἐν $[0,1]$ μὲ $x_\nu = \frac{1}{\nu}$, θὰ ἔχωμεν

$$f_\nu(x_\nu) = \nu^2\frac{1}{\nu}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^\nu = \nu\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^\nu$$

καὶ ἐπομένως, δυνάμει τῆς ἀσκήσεως 25-3) τῆς ὁμάδος 1, λαμβάνομεν

$$\lim f_\nu(x_\nu) = (+\infty)\frac{1}{e} = +\infty \neq 0$$

τὸ ὁποῖον, ἐπειδὴ $\lim x_\nu = 0$, σημαίνει ὅτι ἡ ἀκολουθία (f_ν) δὲν συγκλίνει ὁμοιομόρφως.

2) Κατ' ἀρχὴν παρατηροῦμεν ὅτι :

$$|x|<1 \Longrightarrow \lim \frac{x^{2\nu}}{1+x^{2\nu}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

$$|x|=1 \Longrightarrow \lim \frac{x^{2\nu}}{1+x^{2\nu}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$|x|>1 \Longrightarrow \lim \frac{x^{2\nu}}{1+x^{2\nu}} = \lim \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^{2\nu}+1} = \frac{1}{0+1} = 1$$

καὶ ἑπομένως ἰσχύει

$$\lim f_\nu = F \text{ κατὰ σημεῖον}$$

ὅπου ἡ ὁριακὴ συνάρτησις F ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ἄν } |x|<1 \\ \frac{1}{2}, & \text{ἄν } |x|=1 \\ 1, & \text{ἄν } |x|>1 \end{cases}$$

Ἀλλὰ προφανῶς ἡ συνάρτησις F δὲν εἶναι συνεχὴς καὶ ἑπομένως ἡ ἀκολουθία (f_ν) δὲν συγκλίνει ὁμοιομόρφως.

3) Ἔχομεν

$$\lim \frac{x^2}{x^2+(1-\nu x)^2} = \begin{cases} \dfrac{0^2}{0^2+(1-0)^2} = 0, & \text{ἄν } x=0 \\ \dfrac{x^2}{x^2+(1-(+\infty)x)^2} = \dfrac{x^2}{x^2+(+\infty)} = 0, & \text{ἄν } 0<x\leq 1 \end{cases}$$

καὶ ἑπομένως

$$\lim f_\nu = 0 \text{ κατὰ σημεῖον}$$

Ἄν θεωρήσωμεν τώρα τὴν ἀκολουθίαν (x_ν) ἐν $[0,1]$ μὲ $x_\nu = \frac{1}{\nu}$ θὰ ἔχωμεν

$$f_\nu(x_\nu) = \frac{x_\nu^2}{x_\nu^2+(1-\nu x_\nu)^2} = \frac{x_\nu^2}{x_\nu^2+0^2} = 1$$

καὶ ἑπομένως

$$\lim f_\nu(x_\nu) = 1$$

τὸ ὁποῖον, ἐπειδὴ $\lim x_\nu = 0$, σημαίνει ὅτι ἡ ἀκολουθία (f_ν) δὲν συγκλίνει ὁμοιομόρφως.

4) Διὰ κάθε $x\in[0,+\infty)$ ἔχομεν

$$\lim \frac{x}{\nu} e^{-\frac{x}{\nu}} = 0\cdot e^{-0} = 0\cdot 1 = 0$$

καὶ ἐπομένως

$$\lim f_\nu = 0 \quad \text{κατὰ σημεῖον}$$

Ἀλλὰ

$$\hat{\rho}_u(f_\nu, 0) = \sup_{x\in[0,+\infty)} |f_\nu(x)| \geq |f_\nu(\nu)| = \frac{1}{e}$$

καὶ ἐπομένως ἡ ἀκολουθία (f_ν) δὲν συγκλίνει ὁμοιομόρφως.

2. (Θεώρημα τοῦ Dini). Ἔστω S εἷς συμπαγὴς μετρικὸς χῶρος καὶ $(f_\nu)_{\nu\in N}$ τυχοῦσα ἀκολουθία ἐν $\mathcal{C}(S,\mathbb{R})$. Δείξατε ὅτι, ἂν ἡ ἀκολουθία $(f_\nu)_{\nu\in N}$ εἶναι αὔξουσα, ἤτοι ἂν διὰ κάθε μ,ν ἐν N ἰσχύῃ

$$\mu < \nu \Longrightarrow (\forall x\in S)\ f_\mu(x) \leq f_\nu(x)$$

καὶ ἐπὶ πλέον αὕτη συγκλίνῃ κατὰ σημεῖον πρὸς μίαν συνάρτησιν $F\in\mathcal{C}(S,\mathbb{R})$, τότε ἡ ἀκολουθία $(f_\nu)_{\nu\in N}$ συγκλίνει καὶ ὁμοιομόρφως πρὸς τὴν συνάρτησιν F.

Λύσις. Λόγῳ τῆς συμπαγότητος τοῦ χώρου S καὶ τῆς συνεχείας τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων F καὶ f_ν, $\nu\in N$, ἔχομεν

$$\hat{\rho}_u(f_\nu, F) = \sup_{x\in S}|(f_\nu - F)(x)| = \sup_{x\in S}\big(F(x) - f_\nu(x)\big) = F(x_\nu) - f_\nu(x_\nu)$$

Ἐπειδὴ ὁ χῶρος S εἶναι συμπαγής, ἡ $(x_\nu)_{\nu\in N}$, ὡς ἀκολουθία ἐν S, ἔχει μία (φυσικὴν) ὑπακολουθίαν $(x_\nu)_{\nu\in M}$ συγκλίνουσαν ἐν S. Θέτομεν

$$\lim_{\nu\in M} x_\nu = \ell$$

καὶ παρατηροῦμεν ὅτι

$$\lim_{\nu\in M} f_\nu(\ell) = F(\ell)$$

Θεωροῦμεν τώρα τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν ε καὶ ἐκλέγομεν ἕνα δείκτην $\kappa\in M$ μὲ

$$|F(\ell) - f_\kappa(\ell)| < \varepsilon$$

Λόγῳ τῆς συνεχείας τῶν συναρτήσεων F καὶ f_κ, ἔχομεν

$$\lim_{\nu\in M} F(x_\nu) = F(\ell) \quad \text{καὶ} \quad \lim_{\nu\in M} f_\kappa(x_\nu) = f_\kappa(\ell)$$

καὶ ἐπομένως ὑπάρχει δείκτης $n\in M$ τοιοῦτος, ὥστε διὰ κάθε $\nu\in M$ μὲ $\nu \geq n$

νὰ ἰσχύῃ

$$|F(x_\nu)-F(\ell)|<\varepsilon \quad \text{καὶ} \quad |f_\kappa(x_\nu)-f_\kappa(\ell)|<\varepsilon$$

ὁπότε ἰσχύει καὶ

$$|F(x_\nu)-f_\nu(x_\nu)| \leqq |F(x_\nu)-F(\ell)|+|F(\ell)-f_\kappa(\ell)|+|f_\kappa(\ell)-f_\kappa(x_\nu)|$$
$$< \varepsilon+\varepsilon+\varepsilon = 3\varepsilon$$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists n\in M)(\forall \nu\in M)\ \nu \geqq n \Longrightarrow |F(x_\nu)-f_\nu(x_\nu)|<3\varepsilon$$

δηλαδὴ

$$\lim_{\nu\in M}\left(F(x_\nu)-f_\nu(x_\nu)\right)=0, \quad \text{ἤτοι} \quad \lim_{\nu\in M}\hat{\rho}_u(f_\nu,F)=0$$

Ἀλλὰ ἡ ἀκολουθία $\hat{\rho}_u(f_\nu,F)$, $\nu\in N$ εἶναι φθίνουσα, διότι διὰ κάθε μ,ν ἐν N ἰσχύει

$$\mu<\nu \Longrightarrow \hat{\rho}_u(f_\nu,F)=\sup_{x\in S}\left(F(x)-f_\nu(x)\right) \leqq \sup_{x\in S}\left(F(x)-f_\mu(x)\right)=\hat{\rho}_u(f_\mu,F)$$

Ἑπομένως θὰ ἰσχύῃ $\lim\hat{\rho}_u(f_\nu,F)=0$, δηλαδὴ

$$\lim f_\nu = F \text{ ὁμοιομόρφως}$$

V
3. Ἔστωσαν S, E μετρικοὶ χῶροι καὶ $(f_\nu)_{\nu\in N}$ τυχοῦσα ἀκολουθία συναρτήσεων ἐν $\mathcal{F}(S,E)$, ἡ ὁποία συγκλίνει κατὰ σημεῖον πρὸς μίαν συνάρτησιν $F\in\mathcal{F}(S,E)$. Δείξατε ὅτι, ἂν ἡ ἀκολουθία $(f_\nu)_{\nu\in N}$ εἶναι ἰσοσυνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον $x\in S$, τότε ἡ ὁριακὴ συνάρτησις F εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ x.

Λύσις. Θεωροῦμεν τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν ε, ὁπότε, ἐπειδὴ ἡ ἀκολουθία $(f_\nu)_{\nu\in N}$ εἶναι ἰσοσυνεχὴς εἰς τὸ x, ὑπάρχει περιοχὴ $U(x)$ τοῦ σημείου x τοιαύτη, ὥστε διὰ κάθε $y\in U(x)$ νὰ ἰσχύῃ

$$(\forall \nu\in N)\ \rho(f_\nu(y),f_\nu(x))<\varepsilon$$

ὅπου ρ εἶναι ἡ μετρικὴ τοῦ χώρου E. Ἀλλὰ ἡ ἀκολουθία $(f_\nu)_{\nu\in N}$ συγκλίνει κατὰ σημεῖον πρὸς τὴν συνάρτησιν F, ὁπότε

$$F(x)=\lim f_\nu(x) \quad \text{καὶ} \quad F(y)=\lim f_\nu(y)$$

καὶ ἐπομένως, λόγῳ τῆς συνεχείας τῆς μετρικῆς ρ,

$$\rho(F(y),F(x))=\rho(\lim f_\nu(y),\lim f_\nu(x)) = \lim\rho(f_\nu(y),f_\nu(x))\leq\varepsilon$$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists U(x))(\forall y\in S)\ \ y\in U(x)\Rightarrow\rho(F(y),F(x))\leq\varepsilon$$

δηλαδὴ ὅτι ἡ ὁριακὴ συνάρτησις F εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον x.

4. Ἔστωσαν S εἷς μετρικὸς χῶρος, E εἷς πλήρης μετρικὸς χῶρος καὶ $(f_\nu)_{\nu\in N}$ τυχοῦσα ἰσοσυνεχὴς ἀκολουθία συναρτήσεων ἐν $\mathcal{C}(S,E)$. Δείξατε ὅτι, ἂν D εἶναι ἓν πυκνὸν ὑποσύνολον τοῦ χώρου S καὶ ἡ ἀκολουθία $(f_\nu)_{\nu\in N}$ συγκλίνῃ κατὰ σημεῖον ἐπὶ τοῦ D, τότε αὕτη συγκλίνει κατὰ σημεῖον πρὸς μίαν συνεχῆ συνάρτησιν F (ἐπὶ ὁλοκλήρου τοῦ S).

Λύσις. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον $x\in S$ καὶ τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν ε. Ἐπειδὴ ἡ ἀκολουθία $(f_\nu)_{\nu\in N}$ εἶναι ἰσοσυνεχής, ὑπάρχει περιοχὴ U(x) τοῦ σημείου x τοιαύτη, ὥστε διὰ κάθε $y\in U(x)$ νὰ ἰσχύῃ

$$(\forall\nu\in N)\ \rho(f_\nu(y),\ f_\nu(x))<\varepsilon$$

ὅπου ρ εἶναι ἡ μετρικὴ τοῦ χώρου E. Ἐπειδὴ τὸ D εἶναι πυκνὸν ὑποσύνολον τοῦ χώρου S, ὑπάρχει $u\in D\cap U(x)$ καὶ ἐπομένως διὰ κάθε $\nu\in N$ θὰ ἰσχύῃ

$$\rho(f_\nu(u),\ f_\nu(x))<\varepsilon$$

Ἀλλὰ ἡ ἀκολουθία $(f_\nu(u))_{\nu\in N}$ εἶναι συγκλίνουσα, ἄρα καὶ βασική, ὁπότε ὑπάρχει δείκτης $n\in N$ τοιοῦτος, ὥστε διὰ κάθε μ, ν ἐν N μὲ $\mu\geq n$ καὶ $\nu\geq n$ νὰ ἰσχύῃ

$$\rho(f_\mu(u),\ f_\nu(u))<\varepsilon$$

Ἄρα θὰ ἰσχύῃ καὶ

$$\begin{aligned}\rho(f_\mu(x),f_\nu(x))&\leq\rho(f_\mu(x),f_\mu(u))+\rho(f_\mu(u),f_\nu(u))+\rho(f_\nu(u),f_\nu(x))\\&<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon\end{aligned}$$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists n\in N)(\forall\mu,\nu\text{ ἐν }N)\ \ \mu\geq n\text{ καὶ }\nu\geq n\Rightarrow\rho(f_\mu(x),f_\nu(x))<3\varepsilon$$

δηλαδή ότι ή ἀκολουθία $(f_\nu(x))_{\nu\in N}$ εἶναι βασική καί ἐπομένως, λόγῳ τῆς πληρότητος τοῦ χώρου E, συγκλίνουσα.

῾Η ἀκολουθία $(f_\nu)_{\nu\in N}$ συγκλίνει λοιπόν κατά σημεῖον πρός μίαν συνάρτησιν $F\in\mathcal{F}(S,E)$, ἡ ὁποία μάλιστα, δυνάμει τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως 3, εἶναι συνεχής.

√ 5. Ἔστωσαν S εἷς συμπαγής μετρικός χῶρος καί E εἷς πλήρης μετρικός χῶρος. Δείξατε ὅτι, ἄν $(f_\nu)_{\nu\in N}$ εἶναι τυχοῦσα ἰσοσυνεχής ἀκολουθία ἐν $\mathcal{C}(S,E)$, ἡ ὁποία συγκλίνει κατά σημεῖον πρός μίαν συνάρτησιν $F\in\mathcal{F}(S,E)$, τότε αὕτη συγκλίνει καί ὁμοιομόρφως πρός τήν F.

Λύσις. Θεωροῦμεν τυχόντα θετικόν ἀριθμόν ε, ὁπότε, ἐπειδή ἡ ἀκολουθία $(f_\nu)_{\nu\in N}$ εἶναι ἰσοσυνεχής, διά τυχόν $x\in S$ ἐκλέγομεν μίαν ἀνοικτήν περιοχήν $U(x)$ αὐτοῦ τοιαύτην, ὥστε διά κάθε $y\in U(x)$ νά ἰσχύῃ

$$(\forall \nu\in N)\ \rho(f_\nu(y), f_\nu(x)) < \varepsilon$$

ὅπου ρ εἶναι ἡ μετρική τοῦ χώρου E. Προφανῶς ἡ οἰκογένεια $U(x)$, $x\in S$ ἀποτελεῖ μίαν ἀνοικτήν κάλυψιν τοῦ συμπαγοῦς χώρου S καί ἐπομένως ὑπάρχουν $x_1, x_2, \cdots, x_m$ ἐν S τοιαῦτα, ὥστε νά ἰσχύῃ

$$S = \bigcup_{i=1}^{m} U(x_i)$$

Ἐπειδή αἱ $(f_\nu(x_i))_{\nu\in N}$, $i = 1,2,\cdots,m$ εἶναι συγκλίνουσαι ἀκολουθίαι ἐν E, ἄρα καί βασικαί τοιαῦται, ὑπάρχει δείκτης $n\in N$ τοιοῦτος, ὥστε διά κάθε μ,ν ἐν N μέ $\mu\geqq n$ καί $\nu\geqq n$ νά ἰσχύῃ

$$(\forall i = 1,2,\cdots,m)\ \rho(f_\mu(x_i), f_\nu(x_i)) < \varepsilon$$

Διά τυχόν $y\in S$ θεωροῦμεν τώρα μίαν περιοχήν $U(x_\kappa)$ μέ $y\in U(x_\kappa)$, ὁπότε διά κάθε μ,ν ἐν N μέ $\mu\geqq n$ καί $\nu\geqq n$ θά ἔχωμεν

$$\rho(f_\mu(y), f_\nu(y)) \leqq \rho(f_\mu(y), f_\mu(x_\kappa)) + \rho(f_\mu(x_\kappa), f_\nu(x_\kappa)) + \rho(f_\nu(x_\kappa), f_\nu(y))$$
$$< \varepsilon+\varepsilon+\varepsilon = 3\varepsilon$$

Ἄρα διά κάθε μ,ν ἐν N μέ $\mu\geqq n$ καί $\nu\geqq n$ θά ἰσχύῃ

$$\hat{\rho}_u(f_\mu, f_\nu) = \sup_{y\in S} \rho(f_\mu(y), f_\nu(y)) \leqq 3\varepsilon$$

τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι ἡ $(f_\nu)_{\nu\in N}$ εἶναι μία βασικὴ ἀκολουθία ἐν $\mathcal{C}(S,E)$. Ἀλλά, ὡς γνωστόν, ὁ χῶρος $\mathcal{C}(S,E)$ εἶναι ἐπίσης πλήρης καὶ ἐπομένως ἡ ἀκολουθία $(f_\nu)_{\nu\in N}$ εἶναι συγκλίνουσα ἐν $\mathcal{C}(S,E)$, ὁπότε ἰσχύει

$$\lim f_\nu = F \text{ ὁμοιομόρφως}$$

6. Στηριζόμενοι εἰς τὰς προηγουμένας ἀσκήσεις 4 καὶ 5, δείξατε ὅτι, ἂν S εἶναι εἷς συμπαγὴς καὶ E εἷς σταθμητὸς διανυσματικὸς χῶρος πεπερασμένης διαστάσεως, τότε κάθε ἰσοσυνεχὴς καὶ φραγμένη ἀκολουθία συναρτήσεων ἐν $\mathcal{C}(S,E)$ ἔχει μίαν ὁμοιομόρφως συγκλίνουσαν ὑπακολουθίαν.

Λύσις. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν ἰσοσυνεχῆ καὶ φραγμένην ἀκολουθίαν $(f_\nu)_{\nu\in N}$ ἐν $\mathcal{C}(S,E)$. Διὰ τυχὸν $x\in S$ ἡ ἀκολουθία $(f_\nu(x))_{\nu\in N}$ εἶναι προφανῶς μία φραγμένη ἀκολουθία ἐν Γ, ὁπότε τὸ σύνολον $cl\{f_\nu(x):\nu\in N\}$ εἶναι κλειστὸν καὶ φραγμένον ὑποσύνολον τοῦ χώρου E καὶ ἐπομένως, δυνάμει τῆς ἀσκήσεως 17 τῆς ὁμάδος 5, συμπαγές. Ἄρα διὰ τυχὸν $x\in S$ ἡ ἀκολουθία $(f_\nu(x))_{\nu\in N}$ ἔχει μίαν συγκλίνουσαν ἐν E ὑπακολουθίαν. Τοῦτο ἰσχύει προφανῶς καὶ διὰ τυχοῦσαν ὑπακολουθίαν αὐτῆς.

Ὁ χῶρος S, ὡς συμπαγές, εἶναι διαχωρίσιμος καὶ ἐπομένως ὑπάρχει ἓν πυκνὸν καὶ τὸ πολὺ ἀριθμήσιμον ὑποσύνολον D αὐτοῦ. Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι ὑπάρχει μία ὑπακολουθία $(f_\mu)_{\mu\in M}$ τῆς $(f_\nu)_{\nu\in N}$, ἡ ὁποία συγκλίνει κατὰ σημεῖον ἐπὶ τοῦ D. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν μίαν ἀκολουθίαν (u_ν) μὲ

$$D=\{u_\nu:\nu\in N\}$$

καὶ παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τὴν ἀκολουθίαν $(f_\nu(u_1))_{\nu\in N}$ ὑπάρχει φυσικὴ ὑπακολουθία $(f_\mu(u_1))_{\mu\in M_1}$ αὐτῆς συγκλίνουσα ἐν E. Ὁμοίως ὑπάρχει φυσικὴ ὑπακολουθία $(f_\mu(u_2))_{\mu\in M_2}$ τῆς ἀκολουθίας $(f_\mu(u_2))_{\mu\in M_1}$ συγκλίνουσα ἐν E καὶ γενικῶς, ἂν ἔχῃ ὁρισθῆ μία συγκλίνουσα ἐν E ἀκολουθία $(f_\mu(u_\kappa))_{\mu\in M_\kappa}$, τότε ὑπάρχει μία φυσικὴ ὑπακολουθία $(f_\mu(u_{\kappa+1}))_{\mu\in M_{\kappa+1}}$ τῆς $(f_\mu(u_{\kappa+1}))_{\mu\in M_\kappa}$ συγκλίνουσα ἐπίσης ἐν E. Ὁρίζεται λοιπὸν ἐπαγωγικῶς μία ἀκολουθία συγκλινουσῶν ἐν E ἀκολουθιῶν

$$(f_\mu(u_\nu))_{\mu\in M_\nu}\,,\quad \nu=1,2,\cdots$$

ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι φυσικὴ ὑπακολουθία τῆς προηγουμένης της. Ἐκλέγομεν ἓν ἀπέραντον σύνολον δεικτῶν $M \subseteq N$ τοιοῦτον, ὥστε διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν τὸ σύνολον $M \dotplus M_\nu$ νὰ εἶναι πεπερασμένον (Π.χ. δυνάμεθα νὰ λάβωμεν $M=\{\mu_1,\mu_2,\cdots\}$, ὅπου $\mu_1 \in M_1$, $\mu_2 \in M_2$ καὶ $\mu_2 > \mu_1$, καὶ γενικῶς, $\mu_{\nu+1} \in M_{\nu+1}$ καὶ $\mu_{\nu+1} > \mu_\nu$), ὁπότε ἡ ἀκολουθία $(f_\mu)_{\mu\in M}$ συγκλίνει κατὰ σημεῖον ἐπὶ τοῦ D, διότι διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν ἡ ἀκολουθία $(f_\mu(u_\nu))_{\mu\in M_\nu}$ εἶναι συγκλίνουσα ἐν E καὶ ἑπομένως ἡ ἀκολουθία $(f_\mu(u_\nu))_{\mu\in M}$ εἶναι ἐπίσης συγκλίνουσα ἐν E.

Ἡ ἀκολουθία $(f_\mu)_{\mu\in M}$ εἶναι προφανῶς ἰσοσυνεχὴς καὶ ἑπομένως, δυνάμει τῆς ἀσκήσεως 4, αὐτὴ συγκλίνει κατὰ σημεῖον ἐπὶ ὁλοκλήρου τοῦ χώρου S. Ἐπειδὴ ὁ χῶρος E, ὡς σταθμητὸς διανυσματικὸς χῶρος πεπερασμένης διαστάσεως, εἶναι χῶρος τοῦ Banach καὶ ἑπομένως πλήρης, δυνάμει τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως 5, ἡ ἀκολουθία $(f_\mu)_{\mu\in M}$ συγκλίνει καὶ ὁμοιομόρφως.

7. Ἔστωσαν S, T, E μετρικοὶ χῶροι καὶ τυχοῦσα συνάρτησις $f\in\mathcal{F}(S\times T,E)$. Δείξατε ὅτι, ἂν $(\xi,\eta)\in S\times T$ καὶ ἐπὶ πλέον:

(i) Ἡ συνάρτησις f εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον (ξ,η) ὡς πρὸς τὴν δευτέραν μεταβλητήν της

(ii) Ἡ οἰκογένεια τῶν ἐν $\mathcal{F}(S,E)$ συναρτήσεων $f(\cdot,y)$, $y\in T$ εἶναι ἰσοσυνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον ξ,

τότε ἡ συνάρτησις f εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον (ξ,η).

Λύσις. Θεωροῦμεν τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν ε, ὁπότε, δυνάμει τῆς (i), ὑπάρχει περιοχὴ $V(\eta)$ τοῦ σημείου $\eta\in T$ τοιαύτη, ὥστε διὰ κάθε $y\in V(\eta)$ νὰ ἰσχύῃ

$$\rho(f(\xi,y), f(\xi,\eta)) < \varepsilon$$

ὅπου ρ εἶναι ἡ μετρικὴ τοῦ χώρου E. Ἐπίσης, δυνάμει τῆς (ii), ὑπάρχει περιοχὴ $U(\xi)$ τοῦ σημείου $\xi\in S$ τοιαύτη, ὥστε διὰ κάθε $x\in U(\xi)$ καὶ $y\in T$ νὰ ἰσχύῃ

$$\rho(f(x,y), f(\xi,y)) < \varepsilon$$

Τὸ σύνολον $W((\xi,\eta)) = U(\xi)\times V(\eta)$ εἶναι μία περιοχὴ τοῦ σημείου $(\xi,\eta)\in S\times T$ τοιαύτη, ὥστε διὰ κάθε $(x,y)\in W((\xi,\eta))$ νὰ ἰσχύῃ

$$\rho(f(x,y), f(\xi,\eta)) \leq \rho(f(x,y), f(\xi,y)) + \rho(f(\xi,y), f(\xi,\eta))$$
$$< \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon,$$

τὸ ὁποῖον, ἐπειδὴ τὸ ε εἶναι τυχόν, σημαίνει ὅτι ἡ συνάρτησις f εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον (ξ,η).

ΟΜΑΣ 9

ΣΕΛΙΔΕΣ 272-274

1. Έστωσαν E ἓν μὴ κενὸν σύνολον καὶ $\mathcal{K}$ μία συλλογὴ ὑποσυνόλων αὐτοῦ. Ἂν διὰ τυχοῦσαν οἰκογένειαν $(K_i)_{i\in I}$ ἐν $\mathcal{K}$ ἰσχύουν:

(i) $\bigcap_{i\in I} K_i \in \mathcal{K}$

καὶ

(ii) ἂν I εἶναι πεπερασμένον, τότε $\bigcup_{i\in I} K_i \in \mathcal{K}$

δείξατε ὅτι ἡ συλλογὴ

$$\mathcal{T} = \{X : X \subseteq E \text{ καὶ } X^c \in \mathcal{K}\}$$

εἶναι μία τοπολογία τοῦ E τοιαύτη, ὥστε τὰ κλειστὰ ὑποσύνολα τοῦ E νὰ εἶναι ἀκριβῶς τὰ σύνολα τῆς συλλογῆς $\mathcal{K}$.

Λύσις. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν οἰκογένειαν $(A_i)_{i\in I}$ ἐν $\mathcal{T}$, ὁπότε ἡ οἰκογένεια $(A_i^c)_{i\in I}$ τῶν συμπληρωμάτων εἶναι μία οἰκογένεια ἐν $\mathcal{K}$ καὶ ἑπομένως, δυνάμει τῶν (i) καὶ (ii), λαμβάνομεν:

(i)′ $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$

διότι $(\bigcup_{i\in I} A_i)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c \in \mathcal{K}$, καὶ

(ii)′ ἂν I εἶναι πεπερασμένον, τότε $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$

διότι εἰς τὴν περίπτωσιν πεπερασμένου I ἔχομεν $(\bigcap_{i\in I} A_i)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c \in \mathcal{K}$.

Ἄρα ἡ συλλογὴ $\mathcal{T}$ εἶναι μία τοπολογία τοῦ E διὰ τὴν ὁποίαν μάλιστα ἰσχύει

$$X \text{ εἶναι } \mathcal{T}\text{- κλειστὸν σύνολον} \longleftrightarrow X^c \in \mathcal{T} \longleftrightarrow (X^c)^c \in \mathcal{K} \longleftrightarrow X \in \mathcal{K}$$

δηλαδή ότι τά κλειστά υποσύνολα τοῦ E εἶναι ἀκριβῶς τά σύνολα τῆς συλλογῆς $\mathcal{K}$.

2. Ἔστωσαν ἕν μή κενόν σύνολον E καί μία συνάρτησις $\kappa : \mathcal{P}(E) \mapsto \mathcal{P}(E)$, ἡ ὁποία πληροῖ τάς ἀκολούθους ἰδιότητας (ἀξιώματα τοῦ καλύμματος κατά Kuratowski) :

(α) $\kappa(\emptyset) = \emptyset$

(β) $A \subseteq \kappa(A)$

(γ) $\kappa(\kappa(A)) = \kappa(A)$

(δ) $\kappa(A \cup B) = \kappa(A) \cup \kappa(B)$

ὅπου A,B τυχόντα ὑποσύνολα τοῦ E.

Θεωρήσατε τήν συλλογήν

$$\mathcal{K} = \{X : X \subseteq E \text{ καί } \kappa(X) = X\}$$

καί τῇ βοηθείᾳ τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως 1, δείξατε ὅτι ὁρίζεται τοπολογία $\mathcal{T}$ τοῦ E τοιαύτη, ὥστε διά κάθε σύνολον S, ὑποσύνολον τοῦ E, νά ἰσχύῃ

$$\kappa(S) = \bar{S}$$

Λύσις. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν οἰκογένειαν $(K_i)_{i\in I}$ ἐν $\mathcal{K}$, ὁπότε προφανῶς ἰσχύει

$$(\forall i \in I) \ \kappa(K_i) = K_i \ .$$

(i) $\bigcap_{i\in I} K_i \in \mathcal{K}$

Πράγματι· δυνάμει τοῦ ἀξιώματος (δ), διά τυχόντα ὑποσύνολα A,B τοῦ E ἔχομεν

$$A \subseteq B \Rightarrow B = A \cup B \Rightarrow \kappa(B) = \kappa(A) \cup \kappa(B) \Longrightarrow \kappa(A) \subseteq \kappa(B)$$

Ἑπομένως ἰσχύει

$$(\forall j \in I) \ \kappa(\bigcap_{i\in I} K_i) \subseteq \kappa(K_j) = K_j$$

δηλαδή

$$\kappa(\bigcap_{i\in I} K_i) \subseteq \bigcap_{j\in I} K_j = \bigcap_{i\in I} K_i$$

Ἀλλά, δυνάμει τοῦ ἀξιώματος (β), ἰσχύει καί

$$\bigcap_{i\in I} K_i \subseteq \kappa(\bigcap_{i\in I} K_i)$$

Ἄρα

$$\kappa(\bigcap_{i\in I} K_i) = \bigcap_{i\in I} K_i$$

δηλαδὴ $\bigcap_{i\in I} K_i \in \mathcal{K}$.

(ii) Ἂν I εἶναι πεπερασμένον, τότε $\bigcup_{i\in I} K_i \in \mathcal{K}$.

Πράγματι· δυνάμει καὶ τοῦ ἀξιώματος (α), ἡ ἰδιότης (δ) ἐπεκτείνεται ἐπαγωγικῶς ὡς ἑξῆς:

$$\kappa(\bigcup_{j\in J} A_j) = \bigcup_{j\in J} \kappa(A_j)$$

ὅπου $(A_j)_{j\in J}$ εἶναι τυχοῦσα οἰκογένεια ἐν $\mathcal{P}(E)$ καὶ J πεπερασμένον σύνολον. Ἑπομένως εἰς τὴν περίπτωσιν πεπερασμένου συνόλου δεικτῶν I ἔχομεν

$$\kappa(\bigcup_{i\in I} K_i) = \bigcup_{i\in I} \kappa(K_i) = \bigcup_{i\in I} K_i$$

δηλαδὴ $\bigcup_{i\in I} K_i \in \mathcal{K}$.

Δυνάμει τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως 1, ἡ συλλογὴ

$$\mathcal{T} = \{X : X \subseteq E \text{ καὶ } X^c \in \mathcal{K}\}$$

εἶναι μία τοπολογία τοῦ E τοιαύτη, ὥστε τὰ κλειστὰ ὑποσύνολα τοῦ E νὰ εἶναι ἀκριβῶς τὰ σύνολα τῆς συλλογῆς $\mathcal{K}$. Διὰ τυχὸν σύνολον S, ὑποσύνολον τοῦ E, δυνάμει τοῦ ἀξιώματος (γ), ἰσχύει $\kappa(S) \in \mathcal{K}$ καὶ ἐπομένως τὸ σύνολον $\kappa(S)$ εἶναι κλειστόν, δηλαδὴ

$$\kappa(S) = \overline{\kappa(S)}$$

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι, δυνάμει τοῦ ἀξιώματος (β), ἰσχύει $S \subseteq \kappa(S)$ καὶ ἐπομένως $\overline{S} \subseteq \overline{\kappa(S)} = \kappa(S)$. Ἐπίσης, ἐπειδὴ τὸ σύνολον $\overline{S}$ εἶναι κλειστόν, ἰσχύει $\overline{S} \in \mathcal{K}$ καὶ ἐπομένως $\overline{S} = \kappa(\overline{S}) \supseteq \kappa(S)$. Ἄρα

$$\kappa(S) = \overline{S}$$

3. Ἔστωσαν ἓν μὴ κενὸν σύνολον E καὶ μία συνάρτησις $I : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$, ἡ ὁποία πληροῖ τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας:

(α) $I(\emptyset) = \emptyset$

(β) $A \supseteq I(A)$

(γ) $I(I(A)) = I(A)$

(δ) $I(A \cup B) = I(A) \cup I(B)$

ὅπου A,B τυχόντα ὑποσύνολα τοῦ E.

Δείξατε ὅτι ἡ συλλογή

$$\mathcal{T} = \{X : X \subseteq E \text{ καὶ } I(X) = X\}$$

εἶναι μία τοπολογία τοῦ E τοιαύτη, ὥστε διὰ κάθε σύνολον S, ὑποσύνολον τοῦ E, νὰ ἰσχύῃ

$$I(S) = S^{\circ}$$

Λύσις. Μία λύσις δύναται νὰ προκύψῃ κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὴν τοιαύτην τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως 2. Ἐνταῦθα ὅμως θὰ δοθῇ συντομωτέρα λύσις δι' ἐφαρμογῆς τῶν προηγουμένων ἀσκήσεων 1 καὶ 2. Οὕτω θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν $\kappa : \mathcal{P}(E) \mapsto \mathcal{P}(E)$ τὴν ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\kappa(X) = I(X^c)^c$$

καὶ παρατηροῦμεν ὅτι αὕτη πληροῖ τὰ ἀξιώματα τοῦ Kuratowski. Δυνάμει τῶν ἀσκήσεων 1 καὶ 2, ἡ συλλογή

$$\mathcal{K} = \{X : X \subseteq E \text{ καὶ } \kappa(X) = X\}$$

ὁρίζει μίαν τοπολογίαν τοῦ E, ἡ ὁποία συμπίπτει μὲ τὴν συλλογὴν $\mathcal{T}$, διότι

$$I(X) = X \iff I(X)^c = X^c \iff I((X^c)^c)^c = X^c \iff \kappa(X^c) = X^c \iff X^c \in \mathcal{K}$$

καὶ ἑπομένως

$$\mathcal{T} = \{X : X \subseteq E \text{ καὶ } I(X) = X\} = \{X : X \subseteq E \text{ καὶ } X^c \in \mathcal{K}\}$$

Τέλος, διὰ τυχὸν σύνολον S, ὑποσύνολον τοῦ E, δυνάμει τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως 2, ἔχομεν

$$I(S) = \kappa(S^c)^c = (\overline{S^c})^c = ((S^{\circ})^c)^c = S^{\circ}$$

4. Δείξατε ὅτι τὰ *πυκνὰ* ὑποσύνολα τῆς πραγματικῆς εὐθείας ὡς πρὸς τὴν τοπολογίαν

$$\{X - Y : X \subseteq \mathbb{R} \text{ καὶ } Y \text{ πεπερασμένον σύνολον}\}$$

εἶναι ἀπέραντα. Ὁμοίως τὰ πυκνὰ ὑποσύνολα τῆς πραγματικῆς εὐθείας ὡς πρὸς τὴν τοπολογίαν

$$\{ X - Y : X \subseteq \mathbb{R} \text{ καὶ } Y \text{ τὸ πολὺ ἀριθμήσιμον σύνολον} \}$$

εἶναι ὑπεραριθμήσιμα.

Λύσις. (i) Ὑποθέτομεν ὅτι τὸ σύνολον S εἶναι ἓν πεπερασμένον ὑποσύνολον τῆς πραγματικῆς εὐθείας, ὁπότε τὸ σύνολον $\mathbb{R}-S$ εἶναι μὴ κενὸν καὶ ἀνοικτὸν ὡς πρὸς τὴν θεωρηθεῖσαν τοπολογίαν. Ἀλλὰ προφανῶς ἰσχύει

$$(\mathbb{R}-S) \cap S = \emptyset$$

καὶ ἑπομένως τὸ σύνολον S δὲν εἶναι πυκνόν. Ἄρα τὰ πυκνά, ὡς πρὸς τὴν θεωρηθεῖσαν τοπολογίαν, ὑποσύνολα τῆς πραγματικῆς εὐθείας εἶναι ἀπέραντα.

(ii) Ὁμοίως, ὑποθέτομεν ὅτι τὸ σύνολον S εἶναι ἓν τὸ πολὺ ἀριθμήσιμον ὑποσύνολον τῆς πραγματικῆς εὐθείας, ὁπότε τὸ σύνολον $\mathbb{R}-S$ εἶναι μὴ κενὸν καὶ ἀνοικτὸν ὡς πρὸς τὴν θεωρηθεῖσαν τοπολογίαν. Ἀλλὰ προφανῶς ἰσχύει

$$(\mathbb{R}-S) \cap S = \emptyset$$

καὶ ἑπομένως τὸ σύνολον S δὲν εἶναι πυκνόν. Ἄρα τὰ πυκνά, ὡς πρὸς τὴν θεωρηθεῖσαν τοπολογίαν, ὑποσύνολα τῆς πραγματικῆς εὐθείας εἶναι ὑπεραριθμήσιμα.

5. Δείξατε ὅτι, ἂν εἰς ἕνα τοπολογικὸν χῶρον ὑπάρχῃ τὸ πολὺ ἀριθμήσιμος βάσις διὰ τὴν τοπολογίαν του, τότε οὗτος εἶναι διαχωρίσιμος.

Λύσις. Ἔστωσαν E εἷς τοπολογικὸς χῶρος καὶ $\mathcal{B}$ μία τὸ πολὺ ἀριθμήσιμος βάσις διὰ τὴν τοπολογίαν του. Χωρὶς βλάβην τῆς γενικότητος ὑποθέτομεν ὅτι τὰ σύνολα τῆς βάσεως $\mathcal{B}$ εἶναι μὴ κενά, ὁπότε, δυνάμει τοῦ ἀξιώματος ἐπιλογῆς, ὑπάρχει συνάρτησις $f : \mathcal{B} \longmapsto E$ τοιαύτη, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$(\forall X \in \mathcal{B}) \; f(X) \in X$$

Τὸ σύνολον $D = \mathcal{R}(f)$ εἶναι προφανῶς τὸ πολὺ ἀριθμήσιμον ὑποσύνολον τοῦ χώρου E καὶ ἰσχύει

$$(\forall X \in \mathcal{B}) \; X \cap D \neq \emptyset$$

Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν τώρα ὅτι τὸ $\mathcal{D}$ εἶναι πυκνὸν σύνολον. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τυχὸν μὴ κενὸν ἀνοικτὸν ὑποσύνολον A τοῦ E, ὁπότε ὑπάρχει μία ὑποσυλλογὴ $\mathcal{C}$ τῆς βάσεως $\mathcal{B}$ μὲ $A = \bigcup \mathcal{C}$ καὶ ἑπομένως

$$A \cap \mathcal{D} = (\bigcup \mathcal{C}) \cap \mathcal{D} = \bigcup_{X \in \mathcal{C}} X \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$$

6. Ἔστωσαν οἱ τοπολογικοὶ χῶροι E_1 καὶ E_2. Δείξατε ὅτι, ἂν ὁ χῶρος E_1 εἶναι διακεκριμένος ἢ ὁ E_2 τετριμμένος, τότε κάθε συνάρτησις $f : E_1 \mapsto E_2$ εἶναι συνεχής.

Λύσις. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν συνάρτησιν $f : E_1 \mapsto E_2$ καὶ διακρίνομεν τὰς ἑξῆς δύο περιπτώσεις :

(i) *Ὁ χῶρος E_1 εἶναι διακεκριμένος.* Προφανῶς καὶ ὁ ὑποχῶρος $\mathcal{D}(f)$ αὐτοῦ εἶναι διακεκριμένος καὶ ἑπομένως κάθε ὑποσύνολον τοῦ $\mathcal{D}(f)$ εἶναι ἀνοικτὸν ἐν $\mathcal{D}(f)$. Ἄρα ἰσχύει ὅτι διὰ κάθε ἀνοικτὸν ἐν E_2 σύνολον A, τὸ σύνολον $f^{-1}(A)$ εἶναι ἀνοικτὸν ἐν $\mathcal{D}(f)$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι ἡ συνάρτησις f εἶναι συνεχής.

(ii) *Ὁ χῶρος E_2 εἶναι τετριμμένος.* Τὰ μόνα ἀνοικτὰ σύνολα ἐν E_2 εἶναι τότε τὰ $\emptyset$ καὶ E_2. Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \quad \text{καὶ} \quad f^{-1}(E_2) = \mathcal{D}(f)$$

καὶ ἑπομένως ταῦτα εἶναι ἀνοικτὰ σύνολα ἐν $\mathcal{D}(f)$. Ἄρα ἰσχύει ὅτι διὰ κάθε ἀνοικτὸν ἐν E_2 σύνολον A, τὸ σύνολον $f^{-1}(A)$ εἶναι ἀνοικτὸν ἐν $\mathcal{D}(f)$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι ἡ συνάρτησις f εἶναι συνεχής.

7. Δείξατε ὅτι τυχοῦσα ἀκολουθία σημείων ἑνὸς τοπολογικοῦ χώρου τοῦ Hausdorff συγκλίνει τὸ πολὺ πρὸς ἓν σημεῖον. Ἰσχύει ἡ ἰδιότης αὕτη εἰς τοὺς T_1- χώρους ;

Λύσις. Ἔστωσαν E εἷς τοπολογικὸς χῶρος τοῦ Hausdorff καὶ $(a_\nu)_{\nu\in N}$ τυχοῦσα ἀκολουθία ἐν E. Ὑποθέτομεν ἐν συνεχείᾳ ὅτι ὑπάρχουν σημεῖα ℓ_1, ℓ_2 ἐν E μὲ $\ell_1 \neq \ell_2$ καὶ τοιαῦτα, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$\lim a_\nu = \ell_1 \quad \text{καὶ} \quad \lim a_\nu = \ell_2$$

Ἀλλὰ ὁ χῶρος E εἶναι χῶρος τοῦ Hausdorff καὶ ἑπομένως ὑπάρχουν περιοχαὶ

$U(\ell_1)$ καὶ $V(\ell_2)$ μὲ

$$U(\ell_1)\cap V(\ell_2)=\emptyset$$

τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὸ ὅτι $\lim a_\nu=\ell_1$ καὶ $\lim a_\nu=\ell_2$, διότι τότε ἰσχύει

$$a_\nu\in U(\ell_1) \text{ καὶ } a_\nu\in V(\ell_2) \text{ τελικῶς δι' ὅλους τοὺς δείκτας } \nu\in\mathbb{N}$$

Ὥστε ἡ ἀκολουθία $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει τὸ πολὺ πρὸς ἓν σημεῖον τοῦ χώρου E.

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ δὲν ἰσχύει εἰς τοὺς T_1-χώρους. Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συλλογὴ

$$\mathcal{T}=\{\emptyset\}\cup\{\mathbb{R}-X : X \text{ εἶναι πεπερασμένον σύνολον}\}$$

εἶναι μία τοπολογία τοῦ συνόλου $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ μάλιστα ὁ τοπολογικὸς χῶρος $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ εἶναι εἷς T_1-χῶρος, διότι διὰ τυχόντας πραγματικοὺς ἀριθμοὺς x, y μὲ $x\neq y$ τὸ σύνολον $\mathbb{R}-\{y\}$ ἀποτελεῖ περιοχὴν τοῦ x διὰ τὴν ὁποίαν προφανῶς ἰσχύει $y\notin\mathbb{R}-\{y\}$. Ἂν θεωρήσωμεν τώρα μίαν ἀκολουθίαν πραγματικῶν ἀριθμῶν $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, διαφόρων ὅρων ἀνὰ δύο, καὶ τυχόντα πραγματικὸν ἀριθμὸν ℓ, τότε διὰ κάθε περιοχὴν $U(\ell)$ αὐτοῦ θὰ ἰσχύῃ

$$a_\nu\in U(\ell) \text{ τελικῶς δι' ὅλους τοὺς δείκτας } \nu\in\mathbb{N}$$

διότι ἡ περιοχὴ $U(\ell)$ εἶναι τῆς μορφῆς $\mathbb{R}-S$, ὅπου τὸ σύνολον S εἶναι πεπερασμένον. Ὥστε ἡ ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, ὡς ἀκολουθία σημείων τοῦ T_1-χώρου $(\mathbb{R},\mathcal{T})$, συγκλίνει πρὸς κάθε πραγματικὸν ἀριθμόν.

8. Δείξατε ὅτι εἷς τοπολογικὸς χῶρος εἶναι T_1-χῶρος τότε καὶ μόνον τότε, ἂν τὰ μονοστοιχειακὰ ὑποσύνολα αὐτοῦ εἶναι κλειστά.

Λύσις. Ἔστω E εἷς τοπολογικὸς χῶρος. Ἂν ὁ E εἶναι T_1-χῶρος καὶ $\{y\}$ τυχὸν μονοστοιχειακὸν ὑποσύνολον αὐτοῦ, τότε διὰ κάθε $x\in\{y\}^c$ ἰσχύει $x\neq y$ καὶ ἑπομένως ὑπάρχει περιοχὴ $U(x)$ τοῦ σημείου x μὲ $y\notin U(x)$, δηλαδὴ $U(x)\subseteq\{y\}^c$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ συμπλήρωμα $\{y\}^c$ εἶναι ἀνοικτὸν σύνολον καὶ ἑπομένως τὸ μονοστοιχειακὸν σύνολον $\{y\}$ εἶναι κλειστόν.

Ἀντιστρόφως, ἂν τὰ μονοστοιχειακὰ ὑποσύνολα τοῦ χώρου E εἶναι κλειστά, τότε διὰ τυχόντα x, y ἐν E μὲ $x\neq y$ ἰσχύει $x\in\{y\}^c$, ὅπου τὸ συμπλήρωμα $\{y\}^c$ εἶναι ἀνοικτὸν σύνολον. Ἄρα ὑπάρχει περιοχὴ $U(x)$ τοῦ σημείου x μὲ $U(x) \subseteq \{y\}^c$, δηλαδὴ $y \notin U(x)$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι ὁ E εἶναι T_1-χῶρος.

9. Δείξατε ὅτι εἷς τοπολογικὸς χῶρος E εἶναι κανονικὸς τότε καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ κάθε σημεῖον $x \in E$ καὶ κάθε περιοχὴν $U(x)$ ὑπάρχῃ ἀνοικτὸν σύνολον V μὲ $x \in V$ καὶ $\overline{V} \subseteq U(x)$.

Λύσις. Ὑποθέτομεν ὅτι ὁ χῶρος E εἶναι κανονικὸς καὶ θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον $x \in E$ καὶ μίαν περιοχὴν $U(x)$ αὐτοῦ. Θεωροῦμεν ἐπίσης ἓν ἀνοικτὸν σύνολον A μὲ $x \in A$ καὶ $A \subseteq U(x)$, ὁπότε τὸ συμπλήρωμα A^c αὐτοῦ εἶναι κλειστὸν σύνολον καὶ ἰσχύει $x \notin A^c$. Ἑπομένως, ἐπειδὴ ὁ χῶρος E εἶναι κανονικός, ὑπάρχει μία περιοχὴ $W(x)$ τοῦ x καὶ ἓν ἀνοικτὸν σύνολον B μὲ $A^c \subseteq B$ καὶ $W(x) \cap B = \emptyset$, ὁπότε ἔχομεν καὶ

$$W(x) \subseteq B^c \subseteq A$$

Θεωροῦμεν τώρα ἓν ἀνοικτὸν σύνολον V μὲ $x \in V$ καὶ $V \subseteq W(x)$, ὁπότε ἔχομεν $V \subseteq B^c$ καὶ ἑπομένως, λόγῳ τῆς κλειστότητος τοῦ συμπληρώματος B^c,

$$\overline{V} \subseteq \overline{B^c} = B^c \subseteq A \subseteq U(x)$$

Ἀντιστρόφως, ὑποθέτομεν ὅτι διὰ κάθε $x \in E$ καὶ κάθε περιοχὴν $U(x)$ ὑπάρχει ἀνοικτὸν σύνολον V μὲ $x \in V$ καὶ $\overline{V} \subseteq U(x)$ καὶ θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον $x \in E$ καὶ τυχὸν κλειστὸν ὑποσύνολον K τοῦ E μὲ $x \notin K$. Προφανῶς τὸ συμπλήρωμα K^c εἶναι περιοχὴ τοῦ σημείου x καὶ ἑπομένως ὑπάρχει ἀνοικτὸν σύνολον V μὲ $x \in V$ καὶ $\overline{V} \subseteq K^c$, ὁπότε ἔχομεν

$$K \subseteq \overline{V}^c \quad \text{καὶ} \quad V \cap \overline{V}^c = \emptyset$$

τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι ὁ χῶρος E εἶναι κανονικός, διότι προφανῶς τὸ V εἶναι περιοχὴ τοῦ σημείου x καὶ τὸ $\overline{V}^c$ ἀνοικτὸν σύνολον.

10. Δείξατε ὅτι εἷς τοπολογικὸς χῶρος E εἶναι φυσιολογικὸς τότε καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ κάθε κλειστὸν ὑποσύνολον K τοῦ E καὶ κάθε ἀνοικτὸν σύνολον U μὲ $K \subseteq U$ ὑπάρχῃ ἀνοικτὸν σύνολον V μὲ $K \subseteq V$ καὶ $\overline{V} \subseteq U$.

Λύσις. Ὑποθέτομεν ὅτι ὁ χῶρος E εἶναι φυσιολογικός καί θεωροῦμεν τυχόν κλειστόν ὑποσύνολον K καί τυχόν ἀνοικτόν ὑποσύνολον U αὐτοῦ μέ $K \subseteq U$. Προφανῶς τά σύνολα K καί U^c εἶναι ξένα καί κλειστά καί ἐπομένως, ἐπειδή ὁ χῶρος E εἶναι φυσιολογικός, ὑπάρχουν ξένα καί ἀνοικτά σύνολα V, W μέ $K \subseteq V$ καί $U^c \subseteq W$, ὁπότε ἔχομεν καί

$$V \subseteq W^c \subseteq U$$

Ἄρα, λόγῳ τῆς κλειστότητος τοῦ συμπληρώματος W^c, λαμβάνομεν

$$\overline{V} \subseteq \overline{W^c} = W^c \subseteq U$$

Ἀντιστρόφως, ὑποθέτομεν ὅτι διά κάθε κλειστόν ὑποσύνολον K καί κάθε ἀνοικτόν ὑποσύνολον U τοῦ χώρου E ὑπάρχει ἀνοικτόν σύνολον V μέ $K \subseteq V$ καί $\overline{V} \subseteq U$ καί θεωροῦμεν τυχόντα ξένα καί κλειστά ὑποσύνολα L, M τοῦ E. Προφανῶς τό συμπλήρωμα M^c εἶναι ἀνοικτόν σύνολον καί ἰσχύει $L \subseteq M^c$, ὁπότε ὑπάρχει ἀνοικτόν σύνολον V μέ $L \subseteq V$ καί $\overline{V} \subseteq M^c$ καί ἐπομένως ἔχομεν

$$L \subseteq V, \quad M \subseteq \overline{V}^c \quad \text{καί} \quad V \cap \overline{V}^c = \emptyset$$

τό ὁποῖον σημαίνει ὅτι ὁ χῶρος E εἶναι φυσιολογικός, διότι ἐκτός τοῦ V καί τό σύνολον $\overline{V}^c$ εἶναι ἀνοικτόν.

11. Ἔστωσαν ἕν μή κενόν σύνολον S καί εἷς τοπολογικός χῶρος E. Δείξατε ὅτι διά τυχοῦσαν συνάρτησιν $f : S \mapsto E$ ἡ συλλογή

$$\{ f^{-1}(X) : X \text{ ἀνοικτόν ἐν } E \}$$

εἶναι ἡ ἀρχική τοπολογία τοῦ S ὡς πρός τόν τοπολογικόν χῶρον E καί τήν συνάρτησιν f.

Ἐπί πλέον, ἄν $S \subseteq E$, ὁρίσατε τήν σχετικήν τοπολογίαν ἐπί τοῦ S ὡς μίαν ἀρχικήν τοπολογίαν αὐτοῦ.

Λύσις. Ἡ ἀρχική τοπολογία τοῦ S ὡς πρός τόν χῶρον E καί τήν συνάρτησιν f εἶναι, ὡς γνωστόν, ἡ χονδροτέρα τοπολογία τοῦ S, ἡ ὁποία περιέχει τήν συλλογήν

$$\mathcal{T} = \{ f^{-1}(X) : X \text{ ἀνοικτόν ἐν } E \}$$

Ἑπομένως ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ συλλογὴ αὕτη ἀποτελεῖ τοπολογίαν τοῦ S. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τυχοῦσαν οἰκογένειαν $(A_i)_{i\in I}$ ἐν $\mathcal{T}$, ὁπότε ὑπάρχει οἰκογένεια $(X_i)_{i\in I}$ ἀνοικτῶν ἐν E συνόλων τοιαύτη, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$(\forall i\in I)\, A_i = f^{-1}(X_i)$$

(i) $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$

Πράγματι·

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(X_i) = f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} X_i\Big)$$

ὅπου ἡ ἕνωσις $\bigcup_{i\in I} X_i$ εἶναι ἀνοικτὸν ἐν E σύνολον.

(ii) ἂν I εἶναι πεπερασμένον, τότε $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$.

Πράγματι·

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(X_i) = f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} X_i\Big)$$

ὅπου εἰς τὴν περίπτωσιν πεπερασμένου συνόλου δεικτῶν I ἡ τομὴ $\bigcap_{i\in I} X_i$ εἶναι ἀνοικτὸν ἐν E σύνολον.

Τέλος, ἂν τὸ σύνολον S εἶναι ὑποσύνολον τοῦ χώρου E καὶ ἡ συνάρτησις f εἶναι ἡ ταυτοτικὴ τοιαύτη, δηλαδὴ

$$(\forall x\in S)\, f(x) = x$$

τότε διὰ κάθε ὑποσύνολον X τοῦ E ἰσχύει

$$f^{-1}(X) = S \cap X$$

καὶ ἑπομένως

$$\{f^{-1}(X) : X \text{ ἀνοικτὸν ἐν } E\} = \{S\cap X : X \text{ ἀνοικτὸν ἐν } E\}$$

Ἄρα ἡ σχετικὴ τοπολογία ἐπὶ τοῦ S εἶναι ἡ ἀρχικὴ τοπολογία τοῦ S ὡς πρὸς τὸν χῶρον E καὶ τὴν ταυτοτικὴν συνάρτησιν.

12. Ὁρίσατε τὸ σύστημα περιοχῶν τυχόντος σημείου ἑνὸς καρτεσιανοῦ τοπολογικοῦ χώρου.

Λύσις. Ἔστωσαν E ὁ καρτεσιανὸς τοπολογικὸς χῶρος τῆς οἰκογενείας τῶν τοπολογικῶν χώρων $(E_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$ καὶ $a = (a_i)_{i \in I}$ τυχὸν σημεῖον αὐτοῦ. Ὡς γνωστόν, ἡ συλλογή

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathop{\times}_{i \in I} B_i : \text{τὸ σύνολον } \{ i \in I : B_i \neq E_i \} \text{ εἶναι πεπερασμένον καὶ } (\forall i \in I) B_i \in \mathcal{T}_i \right\}$$

εἶναι μία βάσις διὰ τὴν καρτεσιανὴν τοπολογίαν τοῦ E καὶ ἐπομένως ἡ συλλογή

$$\mathcal{B}_a = \{ V : V \in \mathcal{B} \text{ καὶ } a \in V \}$$

εἶναι μία συλλογὴ ἀνοικτῶν περιοχῶν τοῦ a καὶ μάλιστα βάσις τοῦ συστήματος περιοχῶν $\mathcal{N}_a$ τοῦ σημείου a. Ἄρα

$$\mathcal{N}_a = \{ U : (\exists V \in \mathcal{B}_a)\ V \subseteq U \}$$

$$= \{ U : (\exists V \in \mathcal{B})\ a \in V \text{ καὶ } V \subseteq U \}$$

$$= \left\{ U : \mathop{\times}_{i \in I} V_i \subseteq U, \text{ τὸ σύνολον } \{ i \in I : V_i \neq E_i \} \text{ εἶναι πεπερασμένον καὶ } (\forall i \in I)\ a_i \in V_i \text{ καὶ } V_i \in \mathcal{T}_i \right\}$$

ΣΤΑΙΚΟΣ . Β.

Ασκήσεις Μαθηματικής Αναλύσεως

ΔΑΝΕΙΖΟΜΕΝΟΣ	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ 557/75		
Μαστραγγελή	14.10.85	7.11.85	Μαστραγγελή
Δικαιόπουλος, Ν	13.12.92	✓	
Σαπρούδη, Ε.	2.11.93	17.11.93	Γ
Μπαοδήμου, Σ.	2.2.96	16.2.96	
Φωτιάδη, Κ	3.4.97	17.4.97	