ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ ΣΤΑΪΚΟΥ

Καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου Ἰωαννίνων

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

ΜΕΡΟΣ Ι

ΒΑΣΙΚΑΙ ΓΝΩΣΕΙΣ

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
026000023787

515
S7A
τ.1

4595/74

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΝ ΤΜΗΜΑ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αρ. Βιβλ. Εισαγ.

27803

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ ΣΤΑΪΚΟΥ
Καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου Ἰωαννίνων

116, 117

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΝ ΤΜΗΜΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Τὰ γνήσια ἀντίτυπα φέρουν τὴν ἰδιόχειρον ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως.

4595/74

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΝ ΤΜΗΜΑ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἀπαγορεύεται ἡ ἐν ὅλῳ ἢ ἐν μέρει ἀνατύπωσις ἢ μετάφρασις τοῦ παρόντος βιβλίου.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἡ συστηματικὴ ταξινόμησις τῆς μαθηματικῆς γνώσεως εἰς διαφόρους κλάδους συνέβαλεν ἀποφασιστικῶς εἰς τὴν κατὰ τὸν τρέχοντα αἰῶνα ἀλματώδη ἀνάπτυξιν τῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης. Κατὰ τὸν παρελθόντα αἰῶνα θὰ ἠδύνατο νὰ εἴπῃ κανεὶς ὅτι οἱ βασικοὶ κλάδοι τῆς Ἀλγέβρας, τῆς Ἀναλύσεως καὶ τῆς Γεωμετρίας, ἀναφερόμενοι σήμερον ὡς κλασσικὴ Ἄλγεβρα, κλασσικὴ Ἀνάλυσις καὶ κλασσικὴ Γεωμετρία, ἔχουν σαφῆ τὰ μεταξύ των ὅρια καὶ ὅτι αὐτοὶ χαρακτηρίζονται ἐκ τῆς αὐτοδυναμίας των. Σήμερον ὅμως, λόγῳ τῆς ἤδη συντελεσθείσης ἀναπτύξεως τῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης, ὄχι μόνον ἔχουν διευρυνθῆ οἱ προαναφερθέντες κλάδοι, ἀλλὰ ἔχουν δημιουργηθῆ καὶ νέοι εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι πολὺ δύσκολον ἢ ἴσως καὶ ἀδύνατον νὰ διακρίνωμεν ὅρια μεταξὺ αὐτῶν. Δὲν δυνάμεθα λοιπὸν νὰ ἀγνοήσωμεν τὸ γεγονὸς τῆς ἀλληλοεπιδράσεως μεταξὺ τῶν διαφόρων κλάδων τῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης.

Πολλαὶ ἔννοιαι τῶν συγχρόνων κλάδων τῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης ἔχουν τὰς ρίζας των εἰς τὴν κλασσικὴν Ἀνάλυσιν καὶ εἶναι ἐπομένως φυσικὸν νὰ χρησιμοποιοῦνται αὗται σήμερον διὰ τὴν ἀναμόρφωσιν καὶ ἐπέκτασιν ταύτης. Πανεπιστημιακὰ μαθήματα Ἀναλύσεως δὲν νοοῦνται σήμερον χωρὶς νὰ λαμβάνωνται ὑπ' ὄψιν οἱ ἄλλοι κλάδοι τῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης, ὅπως π.χ. ἡ Ἄλγεβρα καὶ ἡ Γενικὴ Τοπολογία. Τὸ παρὸν σύγγραμμα ἀποτελεῖ τὸ πρῶτον μέρος τῆς σειρᾶς τῶν μαθημάτων μου ἐπὶ τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως, τὰ ὁποῖα διδάσκω εἰς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τοὺς τριτοετεῖς καὶ τεταρτοετεῖς φοιτητὰς τοῦ Μαθηματικοῦ Τμήματος τοῦ Πανεπιστημίου Ἰωαννίνων. Τοῦτο περιλαμβάνει *βασικὰς γνώσεις* διὰ τῶν ὁποίων εἰσάγεται ὁ φοιτητὴς εἰς τὴν Σύγχρονον Ἀνάλυσιν καὶ αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν αὐτοδύναμον ἑνότητα εἰς τρόπον, ὥστε τὸ σύνολον τῶν μαθημάτων μου ἐπὶ τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως νὰ εἶναι κατανοητὸν καὶ ἀπὸ τὸν ἐκτὸς τοῦ πανεπιστημιακοῦ χώρου ἀναγνώστην.

Ἰωάννινα
Ἰανουάριος 1971

Βασίλειος Σπάϊκος

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΣΥΝΟΛΑ

1.1	Ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου	Σελίς	3
1.2	Ἡ ἔννοια τοῦ ἀνήκειν εἰς σύνολον	»	4
1.3	Βασική ἰσότης	»	4
1.4	Ἴσα σύνολα	»	4
1.5	Παράστασις συνόλου δι' ἀναγραφῆς	»	5
1.6	Ἡ ἔννοια τοῦ ὑποσυνόλου	»	6
1.7	Τό κενόν σύνολον	»	7
1.8	Βασικόν σύνολον	»	8
1.9	Δυναμοσύνολον	»	8
1.10	Καρτεσιανόν γινόμενον	»	9

2. ΛΟΓΙΚΗ

2.1	Ἡ ἔννοια τῆς προτάσεως	Σελίς	11
2.2	Λογικοί σύνδεσμοι	»	12
2.3	Προτασιακοί τύποι	»	15
2.4	Ποσοδείκται	»	16
2.5	Παράστασις συνόλου διά περιγραφῆς	»	21
2.6	Προτασιακοί τύποι πολλῶν μεταβλητῶν	»	23

3. ΑΛΓΕΒΡΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

3.1	Τομή συνόλων	Σελίς	24
3.2	Ἕνωσις συνόλων	»	24
3.3	Διαφορά συνόλων	»	25

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

3.4 Βασικά θεωρήματα ..... Σελίς 26
3.5 Ἡ ἄλγεβρα $\mathcal{P}(\Omega)$ ..... » 30
3.6 Γενίκευσις τῶν ἐννοιῶν τομῆς καὶ ἑνώσεως ..... » 31
3.7 Ἀσκήσεις ..... » 32

4. ΣΧΕΣΕΙΣ

4.1 Ἡ ἔννοια τῆς σχέσεως ..... Σελίς 34

5. ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ - ΔΙΑΤΑΞΙΣ

5.1 Σχέσεις εἰς σύνολον καὶ βασικαὶ κατηγορίαι αὐτῶν ... Σελίς 37
5.2 Ἰσοδυναμίαι - Κλάσεις ἰσοδυναμίας ..... » 38
5.3 Διάταξις ..... » 40
5.4 Ἀσκήσεις ..... » 44

6. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑΙ

6.1 Συναρτήσεις ..... Σελίς 47
6.2 Οἰκογένειαι ..... » 51
6.3 Μονότονον ..... » 54
6.4 Ἀσκήσεις ..... » 56

7. ΣΩΜΑΤΑ

7.1 Πράξεις ..... Σελίς 58
7.2 Ἡ ἔννοια τῆς ὁμάδος ..... » 62
7.3 Ἡ ἔννοια τοῦ σώματος ..... » 63
7.4 Διατεταγμένα σώματα ..... » 69
7.5 Κεκορεσμένα διατεταγμένα σώματα ..... » 73
7.6 Ἀσκήσεις ..... » 77

8. ΕΠΑΓΩΓΗ

8.1 Ἀρχὴ τῆς ἐπαγωγικῆς ἀποδείξεως ..... Σελίς 79
8.2 Ἀρχὴ τοῦ ἐπαγωγικοῦ ὁρισμοῦ ..... » 81
8.3 Ἀσκήσεις ..... » 85

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

9. ΙΣΟΜΟΡΦΙΣΜΟΣ – ΙΣΟΜΟΡΦΑ ΣΩΜΑΤΑ

9.1 Ἰσομορφισμός ..... Σελίς 87
9.2 Ἰσόμορφα σώματα ..... » 92
9.3 Ἀσκήσεις ..... » 97

10. ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

10.1 Σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ..... Σελίς 99
10.2 Γεωμετρικὴ παράστασις τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν .... » 100
10.3 Διαστήματα ἐν $\mathbb{R}$ ..... » 106
10.4 Ἀσκήσεις ..... » 107

11. ΑΞΙΩΜΑ ΤΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ – ΛΗΜΜΑ ΤΟΥ ZORN

11.1 Ἀξίωμα τῆς ἐπιλογῆς ..... Σελίς 108
11.2 Λῆμμα τοῦ Zorn ..... » 108

12. ΙΣΧΥΣ ΣΥΝΟΛΟΥ

12.1 Σύνολα τῆς αὐτῆς ἰσχύος, ὑπερισχύοντα σύνολα ..... Σελίς 113
12.2 Πεπερασμένα σύνολα ..... » 116
12.3 Ἀριθμήσιμα σύνολα ..... » 121
12.4 Ἀσκήσεις ..... » 127

13. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΓΙΝΟΜΕΝΑ

13.1 Γενικευμένα ἀποτελέσματα πράξεως ..... Σελίς 129
13.2 Γενικευμένα ἀθροίσματα καὶ γινόμενα ..... » 133
13.3 Γενικευμένα ἀθροίσματα καὶ γινόμενα εἰς ἓν σῶμα » 135
13.4 Ἀπέραντα ἀθροίσματα καὶ γινόμενα μὲ πεπερασμένον φορέα ..... » 138
13.5 Ἀσκήσεις ..... » 139

14. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

14.1 Διανυσματικοὶ χῶροι ..... Σελίς 142
14.2 Διανυσματικοὶ ὑποχῶροι ..... » 144

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

14.3 Διανυσματική βάσις – Διάστασις ..... Σελὶς 147
14.4 Ὑπερεπίπεδα ..... » 151
14.5 Διανυσματικοὶ χῶροι ὑπεράνω τοῦ $\mathbb{R}$ ..... » 154
14.6 Εὐκλείδειοι χῶροι ..... » 159
14.7 Ἀσκήσεις ..... » 161

15. ΠΙΝΑΚΕΣ – ΟΡΙΖΟΥΣΑ

15.1 Ἡ ἔννοια τοῦ πίνακος ..... Σελὶς 165
15.2 Πολλαπλασιασμὸς πινάκων ..... » 166
15.3 Ὁρίζουσα ..... » 167
15.4 Ἀσκήσεις ..... » 170

16. ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑΙ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

16.1 Ἡ ἄλγεβρα τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων ..... Σελὶς 172
16.2 Τὸ σῶμα τῶν ρητῶν συναρτήσεων ..... » 174
16.3 Διανυσματικαὶ συναρτήσεις ..... » 178
16.4 Ἀσκήσεις ..... » 180

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ ΟΡΩΝ ..... » 185
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ ΟΝΟΜΑΤΩΝ ..... » 193

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

I. ΒΑΣΙΚΑΙ ΓΝΩΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1ο ΒΑΣΙΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

1. ΣΥΝΟΛΑ

1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ

Ἡ ἁπλὴ ἔννοια τοῦ *συνόλου* ἔχει γίνει σήμερον παραδεκτὴ ὡς μία ἀπὸ τὰς πλέον βασικὰς καὶ χρησίμους ἐννοίας εἰς τὰ Μαθηματικά. Μία ἔννοια δυνατὸν νὰ νοῆται ὡς *σύνολον* ἄλλων ἐννοιῶν, σαφῶς καθωρισμένων καὶ διακεκριμένων μεταξύ των. Π.χ. μία εὐθεῖα ὡς σύνολον τῶν σημείων της, μία τάξις ὡς σύνολον τῶν μαθητῶν της κ.ο.κ. Αἱ ἔννοιαι, αἱ ὁποῖαι ἀπαρτίζουν ἕν σύνολον, καλοῦνται *στοιχεῖα* ἢ *σημεῖα* αὐτοῦ.

Ἀξιοσημείωτα σύνολα ἀριθμῶν, μὲ τὰ ὁποῖα ὑποθέτομεν ὅτι ὁ ἀναγνώστης εἶναι ἐξοικειωμένος, εἶναι τὰ κάτωθι :

$\mathbb{N}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν $1, 2, 3, \cdots$

$\mathbb{N}_0$ τῶν ἀκεραίων τῆς ἀριθμητικῆς $0, 1, 2, 3, \cdots$

$\mathbb{Z}$ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν $\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$

$\mathbb{Q}$ τῶν ῥητῶν ἀριθμῶν

$\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Εἰς τὰ ἀνωτέρω σύνολα ἀριθμῶν θὰ ἀναφερώμεθα συχνὰ κατωτέρω καὶ κυρίως εἰς τὴν διαμόρφωσιν παραδειγμάτων, πρὸς ἐπεξήγησιν τῶν διαφόρων μαθηματικῶν ἐννοιῶν. Τὰ σύνολα ταῦτα ὁρίζονται αὐστηρῶς εἰς τὸ ἐδάφιον 10 τοῦ παρόντος πρώτου μέρους τοῦ βιβλίου καὶ ἀποτελοῦν ἔκτοτε τὸ βασικὸν ἀντικείμενον μελέτης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1.2 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΑΝΗΚΕΙΝ ΕΙΣ ΣΥΝΟΛΟΝ

Δεχόμεθα ὅτι εἶναι βέβαιον καὶ μὲ τὴν αὐτὴν πάντοτε σημασίαν τὸ ἂν μία ἔννοια εἶναι ἢ δὲν εἶναι στοιχεῖον ἑνὸς συνόλου. Ἵνα δηλώσωμεν ὅτι τὸ α εἶναι στοιχεῖον ἑνὸς συνόλου Ε, γράφομεν :

$$a \in E$$

χρησιμοποιοῦντες τὸ σύμβολον ∈ τοῦ *ἀνήκειν εἰς σύνολον*. Τὴν ἄρνησιν τοῦ $a \in E$ συμβολίζομεν μὲ $a \notin E$. Οὕτως, ἔχομεν :

$$5 \in \mathbb{N}\,,\quad \frac{4}{7} \notin \mathbb{N}\,,\quad \frac{2}{3} \in \mathbb{Q}\,,\quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}\,,\quad \sqrt{2} \in \mathbb{R}\,.$$

Ἐνίοτε χρησιμοποιοῦνται ἰσοδυνάμως καὶ οἱ συμβολισμοὶ $E \ni a$ καὶ $E \not\ni a$ ἀντὶ τῶν $a \in E$ καὶ $a \notin E$ ἀντιστοίχως.

1.3 ΒΑΣΙΚΗ ΙΣΟΤΗΣ

Ἓν σύνολον Ε καθορίζεται ἀπὸ τὰ στοιχεῖα του, τὰ ὁποῖα θεωροῦνται *διακεκριμένα* μεταξύ των. Διὰ τῆς λέξεως « διακεκριμένα » ἐννοοῦμεν ὅτι : ἂν α, β παριστοῦν στοιχεῖα τοῦ συνόλου Ε, τότε εἶναι βέβαιον καὶ μὲ τὴν αὐτὴν πάντοτε σημασίαν ἂν τὰ α καὶ β παριστοῦν ἢ ὄχι τὸ αὐτὸ σημεῖον τοῦ Ε. Ἵνα δηλώσωμεν ὅτι τὰ α καὶ β παριστοῦν τὸ αὐτὸ στοιχεῖον τοῦ Ε, γράφομεν

$$a = \beta$$

χρησιμοποιοῦντες τὸ σύμβολον = τῆς *βασικῆς ἰσότητος* εἰς τὸ σύνολον Ε. Τὴν ἄρνησιν τοῦ $a = \beta$ συμβολίζομεν μὲ $a \neq \beta$. Οὕτως, εἰς τὸ σύνολον $\mathbb{N}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἔχομεν :

$$5 = 3+2\,,\quad 7 = 4+3\,,\quad 5 \neq 6\,,\quad 7 \neq 8+5\,.$$

Ὥστε ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου εἶναι στενῶς συνδεδεμένη μὲ τὴν ἔννοιαν μιᾶς *βασικῆς ἰσότητος* (ἢ καὶ ἄλλως *ταυτοτικῆς ἰσότητος*), δυνάμει τῆς ὁποίας διακρίνονται τὰ στοιχεῖα αὐτοῦ.

1.4 ΙΣΑ ΣΥΝΟΛΑ

Λέγομεν ὅτι τὰ σύνολα Α καὶ Β εἶναι *ἴσα* ἢ καὶ ἄλλως ὅτι *ταυτίζονται* τότε καὶ μόνον τότε, ἂν τὰ Α καὶ Β ἀπαρτίζωνται ἀπὸ τὰ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

αὐτά στοιχεῖα, δηλαδή κάθε στοιχεῖον τοῦ ἑνός συνόλου εἶναι καί στοιχεῖον τοῦ ἄλλου.

1.5' ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΣΥΝΟΛΟΥ ΔΙ' ΑΝΑΓΡΑΦΗΣ

Εἰς πολλάς περιπτώσεις ἕν σύνολον εἶναι δυνατόν νά παρασταθῇ δί ἀναγραφῆς ἐντός ἀγκίστρων $\{\ \}$ ὅλων τῶν στοιχείων του. Π.χ. τό σύνολον, τό ὁποῖον ἀπαρτίζεται ἀπό τά στοιχεῖα 1, 4, 7, 8, παρίσταται μέ $\{1, 4, 7, 8\}$. Προφανῶς κατά τόν συμβολισμόν τοῦτον δέν ἔχει σημασίαν ἡ σειρά, μέ τήν ὁποίαν ἀναγράφονται τά στοιχεῖα. Π.χ. τά $\{1, 4, 7, 8\}$ καί $\{7, 4, 8, 1\}$ παριστοῦν τό αὐτό σύνολον, ἤτοι $\{1, 4, 7, 8\} = \{7, 4, 8, 1\}$. Εἰς τόν ἀνωτέρω τρόπον συμβολισμοῦ ἑνός συνόλου δεχόμεθα ὅτι ἐπιτρέπεται νά ἀναγραφῇ ἕν στοιχεῖον περισσοτέρας τῆς μιᾶς φοράς. Π.χ. δεχόμεθα ὅτι τά σύμβολα $\{1, 4, 7, 8, 1, 7\}$ καί $\{1, 4, 7, 8\}$ παριστοῦν τό αὐτό σύνολον, ἤτοι $\{1, 4, 7, 8, 1, 7\} = \{1, 4, 7, 8\}$. Ἐπίσης ἔχομεν :

$$\{2+3, 5, 2\} = \{5, 2\},\ \{4+3, 7\} = \{7\},\ \{1, 2\} = \{1, 2, 6-5\},\ \{a, a\} = \{a\}$$

κ.ο.κ.

"Ἕν σύνολον δύναται ἐνίοτε νά παρασταθῇ καί δι' ἀναγραφῆς ἐντός ἀγκίστρων ὡρισμένων στοιχείων του ἐν συνδυασμῷ μετά τελειῶν (συνήθως ἀνά τριῶν σημειουμένων), ὅπου αἱ τελεῖαι ὑποδηλοῦν τά μή ἀναγραφόμενα στοιχεῖα, τά ὁποῖα ἐννοοῦνται ἐκ τοῦ τρόπου δηλώσεως τῶν ἀναγραφομένων στοιχείων τοῦ θεωρουμένου συνόλου. Οὕτω π.χ. τό σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἀπό τοῦ 1 μέχρι καί τοῦ 1000 δύναται νά παρασταθῇ μέ $\{1, 2, 3, \cdots, 1000\}$. Ὁμοίως τό σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν δύναται νά παρασταθῇ $\{1, 2, 3, \cdots\}$ ἤ ἀκριβέστερον καί μέ $\{1, 2, 3, \cdots, \nu, \cdots\}$.

Συμφώνως πρός τά ἀνωτέρω τό σύμβολον $\{a\}$ παριστᾷ τό σύνολον, τό ὁποῖον ἀπαρτίζεται ἀπό ἕν καί μόνον στοιχεῖον, τό a. Ἑπομένως τά $\{a\}$ καί a παριστοῦν διαφορετικάς ἐννοίας, ἤτοι $\{a\} \neq a$. Τό σύνολον $\{a\}$ καλεῖται *μονοστοιχειακόν* ἤ καί ἄλλως *μονομελές* σύνολον. Ὁμοίως ἕν σύνολον, τό ὁποῖον ἀπαρτίζεται ἀπό ἀκριβῶς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

δύο στοιχεῖα, καλεῖται *διστοιχειακόν ἤ διμελές* καί γενικῶς ἕν σύνολον, τό ὁποῖον ἀπαρτίζεται ἀπό ἀκριβῶς ν στοιχεῖα, καλεῖται *ν-στοιχειακόν ἤ ν-μελές* σύνολον.

1.6 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΥΠΟΣΥΝΟΛΟΥ

"Ἐν σύνολον Α καλεῖται *ὑποσύνολον* ἑνός συνόλου Β τότε καί μόνον τότε, ἄν κάθε στοιχεῖον τοῦ Α εἶναι καί στοιχεῖον τοῦ Β. "Ινα δηλώσωμεν ὅτι ἕν σύνολον Α εἶναι ὑποσύνολον ἑνός συνόλου Β, γράφομεν $A \subseteq B$ ἤ καί ἄλλως $B \supseteq A$, ὁπότε εἰς τήν περίπτωσιν $B \supseteq A$ ἀναγιγνώσκομεν « Β εἶναι *ὑπερσύνολον* τοῦ Α ». Τήν ἄρνησιν τοῦ $A \subseteq B$ παριστῶμεν ἐνίοτε μέ $A \nsubseteq B$ ἤ ἀκόμη καί $B \nsupseteq A$. Οὕτως, ἔχομεν :

$$\{2,3\} \subseteq \{1,2,3\}, \quad \{1,2\} \nsubseteq \{4,2,5\}, \quad \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q} \supseteq \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Q} \nsubseteq \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} \supseteq \mathbb{N}.$$

"Αμεσοι συνέπειαι τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ὑποσυνόλου εἶναι :

1.6.1 $A \subseteq A$

1.6.2 $A \subseteq B$ *καί* $B \subseteq A$ *τότε καί μόνον τότε, ἄν* $A = B$.

1.6.3 *Ἄν* $A \subseteq B$ *καί* $B \subseteq \Gamma$, *τότε* $A \subseteq \Gamma$.

"Ἐν σύνολον Α καλεῖται *γνήσιον ὑποσύνολον* ἑνός συνόλου Β τότε καί μόνον τότε, ἄν $A \subseteq B$ καί $A \neq B$, δηλαδή τότε καί μόνον τότε, ἄν κάθε στοιχεῖον τοῦ Α εἶναι στοιχεῖον τοῦ Β καί ἐπί πλέον τό Β περιέχῃ τουλάχιστον ἕν στοιχεῖον, τό ὁποῖον δέν ἀνήκει εἰς τό Α. "Ινα δηλώσωμεν, ὅτι ἕν σύνολον Α εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον ἑνός συνόλου Β, γράφομεν $A \subset B$ ἤ καί ἄλλως $B \supset A$, ὁπότε εἰς τήν περίπτωσιν $B \supset A$ ἀναγιγνώσκομεν « Β εἶναι *γνήσιον ὑπερσύνολον* τοῦ Α ». Τήν ἄρνησιν τοῦ $A \subset B$ παριστῶμεν ἐνίοτε μέ $A \not\subset B$ ἤ ἀκόμη καί $B \not\supset A$. Οὕτως, ἔχομεν:

$$\{2,3\} \subset \{1,2,3\}, \quad \mathbb{N} \not\subset \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Z} \not\supset \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

"Αμεσοι συνέπειαι τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ γνησίου ὑποσυνόλου εἶναι :

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1.6.4 Ἂν $A \subset B$, τότε καί $A \subseteq B$.

1.6.5 Ἂν $A \subset B$ καί $B \subseteq \Gamma$, τότε $A \subset \Gamma$.

1.6.6 Ἂν $A \subseteq B$ καί $B \subset \Gamma$, τότε $A \subset \Gamma$.

1.6.7 Ἂν $A \subset B$ καί $B \subset \Gamma$, τότε $A \subset \Gamma$.

Συχνά χρησιμοποιοῦνται συμβολισμοί, ὅπως π.χ. :

$$A \subseteq B \subseteq \Gamma,\quad A \supseteq B \supseteq \Gamma,\quad A \subset B = \Gamma,\quad A \subset B \subset \Gamma,\quad A \subseteq B \subseteq \Gamma \subseteq \Delta \text{ κ.ο.κ.}$$

Οἱ συμβολισμοί οὗτοι ἀποτελοῦν συντομογραφίας ὑπό τήν ἑξῆς ἔννοιαν:

$A \subseteq B \subseteq \Gamma$	σημαίνει	$A \subseteq B$	καί	$B \subseteq \Gamma$
$A \supseteq B \supseteq \Gamma$	»	$A \supseteq B$	»	$B \supseteq \Gamma$
$A \subset B = \Gamma$	»	$A \subset B$	»	$B = \Gamma$
$A \subset B \subset \Gamma$	»	$A \subset B$	»	$B \subset \Gamma$
$A \subseteq B \subseteq \Gamma \subseteq \Delta$	»	$A \subseteq B$, $B \subseteq \Gamma$ καί $\Gamma \subseteq \Delta$		κ.ο.κ.

Συντομογραφίαι, εἰς τάς ὁποίας τό σύμβολον τοῦ ὑποσυνόλου ἤ τοῦ γνησίου ὑποσυνόλου ἐμφανίζεται κατ' ἀντιθέτους κατευθύνσεις, ὅπως π.χ. $A \subseteq B \supseteq \Gamma$, $A \supseteq B \subset \Gamma$, $A \subset B \supseteq \Gamma$, δέν συνηθίζεται νά χρησιμοποιοῦνται.

1.7 ΤΟ ΚΕΝΟΝ ΣΥΝΟΛΟΝ

Χάριν ἁπλοποιήσεως τῆς μαθηματικῆς ἐκφράσεως δεχόμεθα τήν ὕπαρξιν ἑνός συνόλου, τό ὁποῖον χαρακτηρίζεται ἐκ τοῦ ὅτι δέν ἔχει στοιχεῖα. Ἐπειδή ἕν σύνολον καθορίζεται ἀπό τά στοιχεῖα του, εἶναι φυσικόν νά δεχθῶμεν, ὅτι ὑπάρχει ἀκριβῶς ἕν σύνολον, τό ὁποῖον οὐδέν στοιχεῖον ἔχει καί τό ὁποῖον καλεῖται *κενόν σύνολον*. Τό κενόν σύνολον παρίσταται μέ $\emptyset$ καί θεωρεῖται ἐξ ὁρισμοῦ ὡς ὑποσύνολον παντός συνόλου, ἤτοι διά κάθε σύνολον A ἰσχύει

$$\emptyset \subseteq A.$$

Ἂν τό σύνολον A ἔχῃ στοιχεῖα, τότε προφανῶς ἰσχύει $A \neq \emptyset$ καί ἐπομένως εἶναι φυσικόν νά δεχθῶμεν ὅτι

$$\emptyset \subset A$$

διά κάθε σύνολον A, τό ὁποῖον ἔχει στοιχεῖα, δηλαδή διά κάθε μή κενόν

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

σύνολον A.

Ἂν A εἶναι ἓν μὴ κενὸν σύνολον, τότε κάθε ὑπερσύνολόν του B εἶναι ἐπίσης μὴ κενόν, διότι τὸ B ἔχει ὡς στοιχεῖα τουλάχιστον τὰ στοιχεῖα τοῦ A. Ἑπομένως ὁδηγούμεθα εἰς τὸ νὰ δεχθῶμεν ὅτι τὸ κενὸν σύνολον εἶναι ὑπερσύνολον μόνον τοῦ ἑαυτοῦ του, δηλαδὴ ὅτι ἰσχύει

$$A \subseteq \emptyset \text{ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν } A = \emptyset.$$

Παρατήρησις. Εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον 1.6 ὅλα τὰ θεωρηθέντα σύνολα ἦσαν προφανῶς μὴ κενά. Ἐν τούτοις, αἱ ἰδιότητες 1.6.1 – 1.6.7 τῆς προηγουμένης παραγράφου ἰσχύουν καὶ χωρὶς τὸν περιορισμόν, ὅπως τὰ θεωρούμενα σύνολα εἶναι μὴ κενά.

1.8 ΒΑΣΙΚΟΝ ΣΥΝΟΛΟΝ

Κατὰ τὴν ἐπεξεργασίαν ἑνὸς μαθηματικοῦ θέματος ὑπεισέρχονται κατὰ κανόνα τὰ στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου Ω, ὡς καὶ διάφορα ὑποσύνολα αὐτοῦ. Τὸ σύνολον Ω, τοῦ ὁποίου τὰ στοιχεῖα καὶ τὰ ὑποσύνολά του ἐμφανίζονται ἀποκλειστικῶς κατὰ τὴν ἐπεξεργασίαν τοῦ ὑπ' ὄψιν θέματος, καλεῖται *βασικὸν σύνολον* ἢ *σύνολον ἀναφορᾶς*. Τὸ βασικὸν σύνολον διαφέρει ἀπὸ πρόβλημα εἰς πρόβλημα καὶ μάλιστα πολλάκις δὲν γίνεται ἰδιαιτέρα μνεία τούτου, καθ' ὅσον τότε ἀπὸ τὸ περιεχόμενον τοῦ προβλήματος καθορίζεται καὶ τὸ βασικὸν σύνολον.

1.9 ΔΥΝΑΜΟΣΥΝΟΛΟΝ

Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ὑποσυνόλων ἑνὸς συνόλου E συμβολίζεται μὲ $\mathcal{P}(E)$ καὶ καλεῖται *δυναμοσύνολον* τοῦ E. Οὕτω π.χ. τὸ δυναμοσύνολον τοῦ συνόλου $\{1, 2\}$ εἶναι τὸ σύνολον

$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

Τὸ $\emptyset$ καὶ τὸ E εἶναι προφανῶς στοιχεῖα τοῦ δυναμοσυνόλου $\mathcal{P}(E)$ ἤτοι

$$\emptyset \in \mathcal{P}(E) \text{ καὶ } E \in \mathcal{P}(E).$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1.10 ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟΝ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ

Ἡ ἔννοια τοῦ διατεταγμένου ζεύγους (α,β) ὁρίζεται ὡς ἑξῆς :

$$(\alpha,\beta) = \{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\}.$$

Ἀποδεικνύεται τότε ὅτι :

$(\alpha,\beta) = (\alpha',\beta')$ *τότε καί μόνον τότε, ἄν* $\alpha=\alpha'$ *καί* $\beta=\beta'$.

Πράγματι· τό ὅτι διά $\alpha=\alpha'$ καί $\beta=\beta'$, ἔχομεν καί $(\alpha,\beta)=(\alpha',\beta')$ εἶναι ἄμεσος συνέπεια τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ διατεταγμένου ζεύγους. Πρός ἀπόδειξιν τοῦ ὅτι ἐκ τῆς $(\alpha,\beta)=(\alpha',\beta')$ προκύπτουν αἱ $\alpha'=\alpha'$ καί $\beta=\beta'$ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ $(\alpha,\beta)=(\alpha',\beta')$ γράφεται

$$(1)\qquad \{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\} = \{\{\alpha'\},\{\alpha',\beta'\}\}$$

καί ἐπομένως $\{\alpha\}=\{\alpha'\}$ ἤ $\{\alpha\}=\{\alpha',\beta'\}$, ὁπότε εἰς ἀμφοτέρας τάς περιπτώσεις ἰσχύει $\alpha'\in\{\alpha\}$ δηλαδή $\alpha'=\alpha$. Ἄρα ἡ (1) γίνεται

$$\{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\} = \{\{\alpha\},\{\alpha,\beta'\}\},$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει ὅτι $\{\alpha,\beta\}=\{\alpha,\beta'\}$ καί ἐκ ταύτης ὅτι $\beta=\beta'$. Ὥστε ἐδείχθη ὅτι $\alpha=\alpha'$ καί $\beta=\beta'$.

Τό στοιχεῖον α καλεῖται *πρῶτον στοιχεῖον* τοῦ διατεταγμένου ζεύγους (α,β), τό δέ β *δεύτερον στοιχεῖον* αὐτοῦ.

Ἄν A καί B εἶναι μή κεναί σύνολα, τότε τό σύνολον ὅλων τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (α,β) μέ πρῶτον στοιχεῖον $\alpha\in A$ καί δεύτερον στοιχεῖον $\beta\in B$ καλεῖται *καρτεσιανόν γινόμενον* τῶν A καί B καί παρίσταται μέ $A\times B$. Εἰς τήν περίπτωσιν, ὅπου τουλάχιστον ἕν ἐκ τῶν A, B εἶναι κενόν, ὁρίζομεν ὡς $A\times B$ τό κενόν σύνολον, ἤτοι διά τυχόν σύνολον A ὁρίζομεν $A\times\emptyset=\emptyset$ καί $\emptyset\times A=\emptyset$.

Ἐπειδή ἐκ τῆς $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$ προκύπτει ὅτι $\alpha=\beta$, εἶναι προφανές ὅτι δέν ἰσχύει ἐν γένει $A\times B = B\times A$. Οὕτω π.χ. διά $A=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ καί $B=\{1,2\}$, ἔχομεν :

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

$$A \times B = \{(\alpha,1),(\alpha,2),(\beta,1),(\beta,2),(\gamma,1),(\gamma,2)\}$$

$$B \times A = \{(1,\alpha),(1,\beta),(1,\gamma),(2,\alpha),(2,\beta),(2,\gamma)\}$$

καὶ ἑπομένως $A \times B \neq B \times A$.

Τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον $A \times A$ παρίσταται συντόμως με A^2, τὸ δὲ σύνολον τῶν ζευγῶν (α,α) μὲ $\alpha \in A$ παρίσταται μὲ Δ καὶ καλεῖται *διαγώνιος* τοῦ A^2. Προφανῶς $\Delta \subseteq A^2$.

2. ΛΟΓΙΚΗ

2.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΡΟΤΑΣΕΩΣ

Ἡ ἔννοια τῆς προτάσεως, ὅπως ἀκριβῶς καὶ ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου, θεωρεῖται εἰς τὰ μαθηματικὰ ὡς μία πρωταρχικὴ ἔννοια. Διὰ τοῦ ὅρου *πρότασις* ἢ καὶ ἄλλως *λογικὴ πρότασις* ἐννοοῦμεν μίαν ἔκφρασιν μὲ πλῆρες νόημα, ἡ ὁποία ἐπιδέχεται ἕνα ἀκριβῶς ἐκ τῶν χαρακτηρισμῶν *ἀληθής, ψευδής* καὶ μὲ τὴν αὐτὴν πάντοτε σημασίαν. Οὕτως, π.χ. αἱ ἐκφράσεις :

ὁ *ἀριθμὸς* 6 *εἶναι ἄρτιος* (ἀληθὴς)

ὁ *ἀριθμὸς* $\sqrt{2}$ *εἶναι ῥητός* (ψευδὴς)

εἶναι (λογικαὶ) προτάσεις. Ἀντιθέτως, ὡρισμέναι ἐκφράσεις τοῦ συνήθους λόγου, ὅπως π.χ. αἱ :

ὁ Γεώργιος εἶναι ἔξυπνος

ὁ Ἰωάννης εἶναι ἀσθενής,

αἱ ὁποῖαι ἔχουν πλῆρες νόημα καὶ εἰς τὸ συντακτικὸν χαρακτηρίζονται ὡς προτάσεις, εἰς τὰ μαθηματικὰ δὲν ἔχουν ἔννοιαν (λογικῆς) προτάσεως. Οὕτως, ἡ πρώτη τούτων ἐκφράζει μίαν γνώμην, διότι δὲν ἐπιδέχεται πάντοτε τὸν αὐτὸν χαρακτηρισμόν, δι' ἄλλους αὕτη εἶναι ἀληθὴς καὶ δι' ἄλλους ψευδής. Ἡ δευτέρα τούτων δυνατὸν νὰ εἶναι ἀληθὴς κατὰ μίαν ὡρισμένην χρονικὴν στιγμὴν καὶ ψευδὴς εἰς μίαν ἄλλην χρονικὴν στιγμήν.

Ὥστε εἰς τὰ μαθηματικὰ τὸ περιεχόμενον μιᾶς προτάσεως ἐπιδέχεται ἀναγκαστικῶς ἕνα καὶ μόνον ἕνα τῶν χαρακτηρισμῶν *ἀληθές*,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ψευδές καὶ πάντοτε τὸν αὐτόν. Τὰς διαφόρους (λογικὰς) προτάσεις παριστῶμεν γενικῶς μὲ μικρὰ γράμματα τοῦ λατινικοῦ ἀλφαβήτου καὶ κατὰ προτίμησιν μὲ τὰ γράμματα p, q, r. Ἐπίσης αἱ ἐκφράσεις « ἰσχύει p » καὶ « ἀληθεύει p » χρησιμοποιοῦνται ἰσοδυνάμως μὲ τὴν « p εἶναι ἀληθής ».

2.2 ΛΟΓΙΚΟΙ ΣΥΝΔΕΣΜΟΙ

Εἰς τὰ μαθηματικὰ εἶναι σκόπιμον νὰ μελετηθῇ ἀρχικῶς κατὰ ποῖον τρόπον ἐπιδροῦν εἰς τὴν σημασίαν τῶν προτάσεων ὡρισμέναι λέξεις καὶ ἐκφράσεις, ὅπως αἱ « *καί* », « *ἤ* », « *ὄχι (δέν)* », « *ἐάν . . . , τότε* » καὶ « *τότε καὶ μόνον τότε, ἄν* », τὰς ὁποίας ὀνομάζομεν *λογικοὺς συνδέσμους*.

2.2.1 Σύζευξις. Ἡ λέξις *καί* χρησιμοποιεῖται εἰς τὰ μαθηματικὰ ἀκριβῶς κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ὡς καὶ εἰς τὸν συνήθη λόγον. Οὕτως ἡ πρότασις

p καὶ q

εἶναι ἀληθὴς μέν, ἄν αἱ συνθέτουσαι αὐτὴν προτάσεις p, q εἶναι ἀμφότεραι ἀληθεῖς, ψευδὴς δέ, ἄν τουλάχιστον μία ἐκ τῶν p, q εἶναι ψευδής. Ἡ πρότασις *p καί q* συντόμως παρίσταται μὲ p ∧ q καὶ καλεῖται *σύζευξις* τῶν p καὶ q.

2.2.2 Διάζευξις. Ἡ λέξις *ἤ* ἔχει εἰς τὸν συνήθη λόγον δύο διακεκριμένας ἐννοίας. Οὕτως, ὅταν λέγωμεν

σήμερον ὁ Γεώργιος θὰ δώσῃ διάλεξιν ἤ θὰ παρακολουθήσῃ μίαν θεατρικὴν παράστασιν,

δὲν ἀποκλείομεν οὗτος νὰ δώσῃ διάλεξιν καὶ νὰ παρακολουθήσῃ θεατρικὴν παράστασιν. Ἀντιθέτως, ὅταν λέγωμεν

ὁ Γεώργιος θὰ ἐπιστρέψῃ ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ τὴν προσεχῆ Δευτέραν ἤ Τρίτην,

ἀποκλείομεν οὗτος νὰ ἐπιστρέψῃ καὶ τὴν Δευτέραν καὶ τὴν Τρίτην.

Εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν λέγομεν, ὅτι ἡ λέξις *ἤ* ἔχει

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἐγκλειστικήν ἔννοιαν, εἰς δὲ τὴν δευτέραν περίπτωσιν *ἀποκλειστικήν* ἔννοιαν. Εἰς τὰ μαθηματικὰ εἰς τὴν λέξιν ἤ ἀποδίδομεν τὴν ἐγκλειστικήν της ἔννοιαν, ὅταν δὲ θέλωμεν νὰ ἐκφράσωμεν τὴν ἀποκλειστικήν ἔννοιαν, χρησιμοποιοῦμεν ἐκφράσεις, ὅπως αἱ « ἤ μόνον ... ἤ μόνον » « ἀκριβῶς ἕν, ... ἤ » κλπ.

Ἐγκλειστικὴ διάζευξις. Τὴν πρότασιν

$$p \ \ddot{\eta} \ q$$

καλοῦμεν *ἐγκλειστικὴν διάζευξιν* τῶν p, q καὶ παριστῶμεν συντόμως μὲ $p \vee q$. Αὕτη εἶναι ἀληθὴς μέν, ἂν τουλάχιστον μία ἐκ τῶν συνθετουσῶν αὐτὴν προτάσεων p, q εἶναι ἀληθής, ψευδὴς δέ, ἂν ἀμφότεραι αἱ προτάσεις p, q εἶναι ψευδεῖς.

Ἀποκλειστικὴ διάζευξις. Τὴν πρότασιν

$$\ddot{\eta} \ \mu\acute{o}\nu o\nu \ p \ \ddot{\eta} \ \mu\acute{o}\nu o\nu \ q$$

καλοῦμεν *ἀποκλειστικὴν διάζευξιν* τῶν p, q καὶ παριστῶμεν συντόμως μὲ $p \veebar q$. Αὕτη εἶναι ἀληθὴς μέν, ἂν ἡ μία ἐκ τῶν προτάσεων p, q εἶναι ἀληθὴς καὶ ἡ ἄλλη ψευδής, ψευδὴς δέ, ἂν αἱ προτάσεις p, q εἶναι ἀμφότεραι ἀληθεῖς ἢ ἀμφότεραι ψευδεῖς. Ἡ ἀποκλειστικὴ διάζευξις $p \veebar q$ ἀναγιγνώσκεται καὶ ἄλλως, ὡς « ἀκριβῶς ἕν, p ἢ q », « p ἢ q καὶ μόνον ἕν » καὶ « p ἢ q, ἀλλ' ὄχι ἀμφότερα ».

2.2.3 Ἄρνησις. Ἂν p εἶναι μία πρότασις, τότε μὲ *ὄχι* − p παριστῶμεν τὴν *λογικὴν ἄρνησιν* τῆς προτάσεως p. Αὕτη εἶναι μία πρότασις, ἡ ὁποία εἶναι ψευδής, ὅταν ἡ p εἶναι ἀληθὴς καὶ ἀληθής, ὅταν ἡ p εἶναι ψευδής. Τὴν λογικὴν ἄρνησιν τῆς προτάσεως p, δηλαδὴ τὴν πρότασιν *ὄχι* − p παριστῶμεν καὶ ἄλλως μὲ $\sim p$. Ἂν ἡ πρότασις p ἐκφράζεται μὲ λέξεις, συνήθως σχηματίζομεν τὴν λογικὴν της ἄρνησιν $\sim p$ εἰσάγοντες (ἢ ἀπαλείφοντες) τὴν λέξιν *δέν* εἰς μίαν κατάλληλον θέσιν τοῦ κειμένου τῆς p καὶ προσαρμόζοντες καταλλήλως τὸ κείμενον συμφώνως πρὸς τοὺς κανόνας τῆς γραμ-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ματικῆς. Ὅταν ὅμως ἡ πρότασις ἐκφράζεται μὲ σύμβολα, τότε πρὸς σχηματισμὸν τῆς λογικῆς ἀρνήσεως αὐτῆς συχνὰ εἰσάγομεν μίαν διαγραφὴν / εἰς μίαν κατάλληλον θέσιν. Οὕτως, ἂν ὡς p ληφθῇ ἡ πρότασις $2\in A$ ἡ (λογικὴ) ἄρνησις $\sim p$ παρίσταται τότε καὶ μὲ $2\notin A$. Ὁμοίως ἡ ἄρνησις τῆς προτάσεως $2=5$ παρίσταται μὲ $2\neq 5$; τῆς δὲ $A\subseteq B$ μὲ $A\not\subseteq B$ κ.ο.κ.

2.2.4 Συνεπαγωγή. Εἰς τὸν συνήθη λόγον ἐκφράσεις, ὅπως ἡ «ἐάν p, τότε q» προϋποθέτουν συνήθως κάποιαν λογικὴν συσχέτισιν μιᾶς αἰτίας (τὴν ὁποίαν ἐκφράζει ἡ p) καὶ ἑνὸς ἀποτελέσματος (τὸ ὁποῖον ἐκφράζει ἡ q). Τοῦτο π.χ. ἐμφαίνεται εἰς τὸ παράδειγμα:

ἐάν βρέξῃ σήμερον, τότε θὰ παραμείνω εἰς τὴν οἰκίαν μου.

Ὅταν ὅμως αἱ προτάσεις p, q δὲν συσχετίζωνται κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον, ὅπως συμβαίνει εἰς τὸ παράδειγμα:

ἐάν ὁ καιρὸς εἶναι καλός, τότε $3\cdot 4=12$,

τότε ἡ ἔκφρασις *ἐάν* p, *τότε* q θεωρεῖται εἰς τὸν *συνήθη λόγον*, ὅτι στερεῖται νοήματος.

Ἀντιθέτως εἰς τὰ μαθηματικὰ εἰς ἐκφράσεις τῆς μορφῆς

ἐάν p, *τότε* q

ἀποδίδεται πάντοτε ἔννοια (λογικῆς) προτάσεως, ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀληθὴς μέν, ὅταν ἡ p εἶναι ψευδὴς ἢ ἡ q εἶναι ἀληθής, ψευδὴς δέ, ὅταν ἡ p εἶναι ἀληθὴς καὶ ἡ q εἶναι ψευδής. Τὸν λογικὸν σύνδεσμον *ἐάν . . ., τότε* ὀνομάζομεν *ὑποθετικόν* σύνδεσμον, τὴν δὲ πρότασιν *ἐάν* p, *τότε* q *ὑποθετικὴν* πρότασιν ἢ *συνεπαγωγήν*. Ταύτην παριστῶμεν συντόμως μὲ $p\Longrightarrow q$ καὶ σπανίως μὲ $q\Longleftarrow p$. Ἡ συνεπαγωγὴ $p\Longrightarrow q$ ἀναγιγνώσκεται καὶ ἄλλως ὡς «p συνεπάγεται q», «q, συνάγεται ἐκ τῆς p», «p, ἄρα q», «ὑπόθεσις p, συμπέρασμα q», «p εἶναι ἱκανὴ συνθήκη διὰ q» καὶ «q εἶναι ἀναγκαία συνθήκη διὰ p».

2.2.5 Λογικὴ ἰσοδυναμία. Προτάσεις τῆς μορφῆς

p *συνεπάγεται* q *καὶ* q *συνεπάγεται* p

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

παρουσιάζονται συχνότατα εἰς τὰ μαθηματικά, παρίστανται δὲ συντόμως μὲ $p \iff q$. Ἡ πρότασις $p \iff q$ εἶναι ἀληθής, ὅταν αἱ προτάσεις p, q εἶναι ἀμφότεραι ἀληθεῖς ἢ ἀμφότεραι ψευδεῖς, ψευδὴς δὲ εἰς τὰς λοιπὰς περιπτώσεις. Ἡ πρότασις $p \iff q$ καλεῖται *(λογικὴ) ἰσοδυναμία* τῶν p, q, ἀναγιγνώσκεται δὲ καὶ ἄλλως, ὡς « p ἰσοδύναμον q », « p τότε καὶ μόνον τότε, ἂν q », « p εἶναι ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη διὰ q » κ.λ.π.

2.3 ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

Εἰς τὰ μαθηματικὰ χρησιμοποιοῦνται καὶ ἐκφράσεις, ὡς π.χ. ἡ

ὁ x *εἶναι ἄρτιος ἀριθμός*,

ὅπου τὸ σύμβολον x *δὲν* ἔχει μίαν μόνιμον σημασίαν. Οὕτω π.χ. τὸ x δυνατὸν νὰ ὑποδηλοῖ τὸν ἀριθμὸν 3 ἢ τὸν $\sqrt{2}$ ἢ καὶ οἱονδήποτε ἄλλου ἀριθμόν. Τὸ σύμβολον x καλεῖται τότε *μεταβλητή*.

Ἐκφράσεις, ὡς ἡ ἀνωτέρω, εἰς τὰς ὁποίας τὸ σύμβολον x δὲν ἔχει μόνιμον σημασίαν, δηλαδὴ παριστᾷ μίαν μεταβλητήν, καὶ αἱ ὁποῖαι καθίστανται προτάσεις, ὅταν ἡ μεταβλητὴ x ἀντικατασταθῇ ἀπὸ τυχὸν *συγκεκριμένου* στοιχεῖον a ἑνὸς μὴ κενοῦ συνόλου E, ἢ ὡς ἄλλως λέγομεν, ὅταν ἡ μεταβλητὴ x λάβῃ ὡς *τιμήν* τὸ a, καλοῦνται *προτασιακοὶ τύποι* ἢ *ἀνοικταὶ προτάσεις*. Τὸ σύνολον E καλεῖται τότε *σύνολον ἀναφορᾶς* τοῦ ὑπ' ὄψιν προτασιακοῦ τύπου.

Τοὺς διαφόρους προτασιακοὺς τύπους μὲ μεταβλητὴν x παριστῶμεν π.χ. μὲ $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$· χρησιμοποιοῦντες συνήθως κεφαλαῖα γράμματα τοῦ λατινικοῦ ἀλφαβήτου. Τὴν πρότασιν, ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τοῦ προτασιακοῦ τύπου $P(x)$, ὅταν ἡ μεταβλητὴ x λάβῃ ὡς τιμὴν τὸ a, συμβολίζομεν μὲ $P(a)$. Οὕτω π.χ. ἔχομεν :

$P(x)$: ὁ x *εἶναι φυσικὸς ἀριθμός*

$P(3)$: ὁ 3 *εἶναι φυσικὸς ἀριθμός* (ἀληθὴς)

$P(-1)$: ὁ -1 *εἶναι φυσικὸς ἀριθμός* (ψευδής).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Εἰς μίαν ἔκφρασιν δυνατόν νὰ περιέχωνται δύο μεταβληταί, ὡς π.χ. εἰς τὰς ἐκφράσεις :

$$x \in y$$

$$x \prec y.$$

Αἱ ἐκφράσεις αὗται δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὅτι περιέχουν μίαν μεταβλητήν, τὸ ζεῦγος (x,y) καὶ μάλιστα εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι αὗται εἶναι προτασιακοὶ τύποι ὡς πρὸς τὴν νέαν ταύτην μεταβλητήν. Λέγομεν δὲ τότε ὅτι αἱ ἐκφράσεις $x \in y$, $x \prec y$ εἶναι προτασιακοὶ τύποι δύο μεταβλητῶν, τῶν x, y.

Εἷς προτασιακὸς τύπος δύο μεταβλητῶν x, y παρίσταται συνήθως μὲ $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $R(x,y)$ κλπ. Τὸ *σύνολον ἀναφορᾶς* E ἑνὸς προτασιακοῦ τύπου $P(x,y)$ ἀπαρτίζεται προφανῶς ἀπὸ ζεύγη (α,β), τὰ ὁποῖα καθιστοῦν τοῦτον πρότασιν, ὅταν ἡ μεταβλητὴ x λάβῃ ὡς τιμὴν τὸ α καὶ ἡ y τὸ β.

Διάφοροι προτασιακοὶ τύποι δύναται νὰ συνδεθοῦν μεταξύ των διὰ τῶν λογικῶν συνδέσμων $\wedge, \vee, \veebar, \sim, \Rightarrow$ καὶ $\Leftrightarrow$ ὡς συμβαίνει καὶ μὲ τὰς προτάσεις. Αἱ οὕτω προκύπτουσαι ἐκφράσεις, ὡς π.χ. αἱ :

$$P(x,y) \wedge Q(x,y), \quad P(x) \vee P(y), \quad P(x,y) \Rightarrow Q(y)$$

εἶναι ἐπίσης προτασιακοὶ τύποι. Οὗτοι ἀναγιγνώσκονται κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον, ὡς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν προτάσεων.

2.4 ΠΟΣΟΔΕΙΚΤΑΙ

Ὡς γνωστόν, ὅταν ἡ μεταβλητὴ x ἑνὸς προτασιακοῦ τύπου $P(x)$ λάβῃ ὡς τιμὴν ἓν ὡρισμένον στοιχεῖον τοῦ συνόλου ἀναφορᾶς αὐτοῦ, τότε ὁ προτασιακὸς τύπος καθίσταται πρότασις. Ἐκτὸς τοῦ τρόπου τούτου ὑπάρχουν καὶ ἄλλοι τρόποι, διὰ τῶν ὁποίων εἷς προτασιακὸς τύπος δύναται νὰ καταστῇ πρότασις. Κατ' αὐτοὺς χρησιμοποιοῦνται διάφοροι ἐκφράσεις, ὡς αἱ « δι' ὅλα » , « διὰ μερικά » , « δι' ἕν ἀκριβῶς » , « δι' ἓν τὸ πολύ » , « δι' οὐδέν » κλπ, αἱ ὁποῖαι ὀνομάζονται *ποσοδείκται*. Οὕτω π.χ. ἔχομεν τὰς προτάσεις :

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δί ὅλα τά $x\in\mathbb{R}$ *ἰσχύει* $x^2+1\geq 1$ (ἀληθής)
διά μερικά $x\in\mathbb{R}$ *ἰσχύει* $x^2=-1$ (ψευδής)
δί ἕν ἀκριβῶς $x\in\mathbb{R}$ *ἰσχύει* $x^3=8$ (ἀληθής)
δί ἕν τό πολύ $x\in\mathbb{N}$ *ἰσχύει* $x<\frac{2}{3}$ (ἀληθής)
δί οὐδέν $x\in\mathbb{R}$ *ἰσχύει* $x^2=9$ (ψευδής).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω οἱ ποσοδείκται « δί ὅλα » καί « διά μερικά » ἔχουν ἰδιαιτέραν σημασίαν εἰς τά μαθηματικά καί ὀνομάζονται ἀντιστοίχως *καθολικός ποσοδείκτης* καί *ὑπαρξιακός ποσοδείκτης*.

2.4.1 Καθολικός ποσοδείκτης. Ἄν $P(x)$ εἶναι εἷς προτασιακός τύπος μέ σύνολον ἀναφορᾶς E, τότε ἡ ἔκφρασις

δί ὅλα τά $x\in E$ *ἰσχύει* $P(x)$

εἶναι μία πρότασις, ἡ ὁποία εἶναι ἀληθής μόνον, ὅταν δί ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ E ὁ προτασιακός τύπος $P(x)$ καθίσταται ἀληθής πρότασις. Τήν ἀνωτέρω πρότασιν γράφομεν συντόμως, ὡς ἑξῆς :

$$(\forall x\in E)\,P(x).$$

Ἐνίοτε καί ἐφ' ὅσον δέν δημιουργεῖται σύγχυσις τό σύνολον ἀναφορᾶς E τοῦ προτασιακοῦ τύπου $P(x)$ παραλείπεται, ὁπότε γράφομεν:

$$(\forall x)\,P(x).$$

Τό σύμβολον $\forall$ παριστᾷ τόν καθολικόν ποσοδείκτην καί ἀναγιγνώσκεται « δί ὅλα », « διά κάθε », « δί ἕκαστον », « δί οἱονδήποτε » κλπ.

Παρατήρησις. Εἰς τήν περίπτωσιν $E=\{\alpha,\beta\}$ ἡ πρότασις $(\forall x\in E)\,P(x)$ σημαίνει τό αὐτό πρᾶγμα μέ τήν πρότασιν $P(\alpha)$ *καί* $P(\beta)$. Δηλαδή ἰσχύει

$$(\forall x\in\{\alpha,\beta\})\,P(x)\iff P(\alpha)\wedge P(\beta).$$

Διά τόν λόγον τοῦτον ἀντί τοῦ συμβόλου $\forall$ χρησιμοποιεῖται ἐνίοτε ὑπό διαφόρων συγγραφέων τό σύμβολον $\wedge$. Οὕτω π.χ. ἀντί

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$(\forall x \in E)\, P(x)$ γράφουν $(\wedge x \in E)\, P(x)$.

Ἐνίοτε ἡ πρότασις $(\forall x \in E)\, P(x)$ παρίσταται ἐπίσης καὶ μὲ

$$P(x) \quad \forall\, x \in E.$$

2.4.2 Ὑπαρξιακὸς ποσοδείκτης. Ἂν $P(x)$ εἶναι εἷς προτασιακὸς τύπος μὲ σύνολον ἀναφορᾶς E, τότε ἡ ἔκφρασις

διά μερικά $x \in E$ *ἰσχύει* $P(x)$

εἶναι μία πρότασις, ἡ ὁποία εἶναι ἀληθὴς μόνον, ὅταν διά κάποιο στοιχεῖον τοῦ E ὁ προτασιακός τύπος $P(x)$ καθίσταται ἀληθὴς πρότασις. Τὴν ἀνωτέρω πρότασιν γράφομεν συντόμως, ὡς ἑξῆς :

$$(\exists x \in E)\, P(x).$$

Ἐνίοτε καὶ ἐφ' ὅσον δὲν δημιουργεῖται σύγχυσις τὸ σύνολον ἀναφορᾶς E τοῦ προτασιακοῦ τύπου $P(x)$ παραλείπεται, ὁπότε γράφομεν :

$$(\exists x)\, P(x).$$

Τὸ σύμβολον $\exists$ παριστᾶ τὸν *ὑπαρξιακὸν ποσοδείκτην* καὶ ἀναγιγνώσκεται « διὰ μερικὰ », « ὑπάρχει (τουλάχιστον) ἕν », « δι' ἕν » κλπ.

Παρατήρησις. Εἰς τὴν περίπτωσιν $E = \{\alpha, \beta\}$ ἡ πρότασις $(\exists x \in E)\, P(x)$ σημαίνει τὸ αὐτὸ πρᾶγμα μὲ τὴν πρότασιν $P(\alpha)$ ἢ $P(\beta)$. Δηλαδὴ ἰσχύει :

$$(\exists x \in \{\alpha, \beta\})\, P(x) \longleftrightarrow P(\alpha) \vee P(\beta).$$

Διὰ τὸν λόγον τοῦτον ἀντὶ τοῦ συμβόλου $\exists$ χρησιμοποιεῖται ἐνίοτε ὑπὸ διαφόρων συγγραφέων τὸ σύμβολον $\vee$. Οὕτω π.χ. ἀντὶ $(\exists x \in E)\, P(x)$ γράφουν $(\vee x \in E)\, P(x)$.

2.4.3 Ἄρνησις καὶ ποσοδείκται. Ἂς θεωρήσωμεν τὰς προτάσεις

δι' ὅλα τά $x \in \mathbb{R}$ *ἰσχύει* $x^2+1 \geq 2$, δηλαδὴ $(\forall x \in \mathbb{R})\, x^2+1 \geq 2$

διά μερικά $x \in \mathbb{N}$ *ἰσχύει* $x < 10$, δηλαδὴ $(\exists x \in \mathbb{N})\, x < 10$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μὲ προσεκτικὴν ἐξέτασιν συνάγομεν, ὅτι αἱ ἀρνήσεις τῶν προτάσεων τούτων εἶναι ἀντιστοίχως :

διά μερικά $x\in\mathbb{R}$ *δέν ἰσχύει* $x^2+1\geq 2$, δηλαδὴ $(\exists x\in\mathbb{R})[\sim(x^2+1\geq 2)]$

δι' ὅλα τά $x\in\mathbb{N}$ *δέν ἰσχύει* $x<10$, δηλαδὴ $(\forall x\in\mathbb{N})[\sim(x<10)]$

Ὥστε :

$$\sim[(\forall x\in\mathbb{R})\, x^2+1\geq 2] \iff (\exists x\in\mathbb{R})[\sim(x^2+1\geq 2)]$$

$$\sim[(\exists x\in\mathbb{N})\, x<10] \iff (\forall x\in\mathbb{N})[\sim(x<10)]$$

Γενικῶς, ἂν $P(x)$ εἶναι εἷς προτασιακὸς τύπος μὲ σύνολον ἀναφορᾶς E, τότε ἰσχύουν αἱ ἰσοδυναμίαι :

$$\sim[(\forall x\in E)\, P(x)] \iff (\exists x\in E)[\sim P(x)]$$

$$\sim[(\exists x\in E)\, P(x)] \iff (\forall x\in E)[\sim P(x)].$$

Ἐφαρμόζοντες τὰς ἀνωτέρω ἰσοδυναμίας εἰς τὴν περίπτωσιν $E=\{\alpha,\beta\}$, λαμβάνομεν :

$$\sim[P(\alpha)\wedge P(\beta)] \Leftrightarrow \sim[(\forall x\in E)\, P(x)] \Leftrightarrow (\exists x\in E)[\sim P(x)] \Leftrightarrow [\sim P(\alpha)]\vee[\sim P(\beta)]$$

$$\sim[P(\alpha)\vee P(\beta)] \Leftrightarrow \sim[(\exists x\in E)\, P(x)] \Leftrightarrow (\forall x\in E)[\sim P(x)] \Leftrightarrow [\sim P(\alpha)]\wedge[\sim P(\beta)]$$

ὁπότε θέτοντες $P(\alpha)=p$ καὶ $P(\beta)=q$, ἔχομεν τὰς ἰσοδυναμίας :

$$\sim(p\wedge q)\leftrightarrow(\sim p)\vee(\sim q)$$

$$\sim(p\vee q)\leftrightarrow(\sim p)\wedge(\sim q),$$

αἱ ὁποῖαι εἶναι γνωσταὶ ὡς *νόμοι τοῦ De Morgan*.

2.4.4 Ποσοδείκται καὶ προτασιακοὶ τύποι δύο μεταβλητῶν. Ἡ χρησιμοποίησις τῶν ποσοδεικτῶν καθιστᾷ, ὡς εἴδομεν, ἕνα προτασιακὸν τύπον $P(x)$, πρότασιν. Οὕτω π.χ. αἱ ἐκφράσεις

$$(\forall x)\, P(x),\ (\exists x)\, P(x)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

εἶναι προτάσεις, ἡ δὲ μεταβλητὴ x δὲν ἔχει προφανῶς ἔννοιαν μεταβλητῆς προτασιακοῦ τύπου καὶ καλεῖται *βωβὴ μεταβλητή*.

Ἐπειδὴ εἷς προτασιακὸς τύπος $P(x,y)$ δύο μεταβλητῶν x,y δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς προτασιακὸς τύπος μιᾶς μεταβλητῆς, τοῦ ζεύγους (x,y), δυνάμεθα προφανῶς νὰ σχηματίσωμεν προτάσεις ὡς αἱ :

$$[\forall(x,y)]\,P(x,y) \quad \text{ἢ ἁπλούστερον} \quad (\forall x,y)\,P(x,y)$$

$$[\exists(x,y)]\,P(x,y) \quad \text{ἢ ἁπλούστερον} \quad (\exists x,y)\,P(x,y),$$

εἰς τὰς ὁποίας ἡ μεταβλητὴ (x,y) εἶναι βωβὴ ἢ ὅπως ἄλλως λέγομεν, αἱ x,y εἶναι *βωβαὶ μεταβληταί*.

Εἰς πολλὰς περιπτώσεις παρουσιάζεται ἡ ἀνάγκη χρησιμοποιήσεως τῶν ποσοδεικτῶν κεχωρισμένως δι' ἑκάστην τῶν μεταβλητῶν. Οὕτω διὰ τὸν προτασιακὸν τύπου $P(x,y)$ δύο μεταβλητῶν x,y αἱ ἐκφράσεις:

$$(\forall x)\,P(x,y),\ (\exists x)\,P(x,y)$$

ὁρίζουν ἐπίσης προτασιακοὺς τύπους, ἀλλὰ μιᾶς μεταβλητῆς, τῆς y. Ἡ ἄλλη μεταβλητὴ x δὲν ἔχει ἔννοιαν μεταβλητῆς προτασιακοῦ τύπου, εἶναι, ὡς λέγομεν, *βωβὴ μεταβλητή*. Ὁμοίως αἱ ἐκφράσεις :

$$(\forall y)\,P(x,y),\ (\exists y)\,P(x,y)$$

ὁρίζουν προτασιακοὺς τύπους μιᾶς μεταβλητῆς, τῆς x. Ἡ ἄλλη μεταβλητὴ y εἶναι *βωβή*.

Ἐκ νέου χρησιμοποίησις τῶν ποσοδεικτῶν ὁδηγεῖ εἰς προτάσεις. Π.χ. :

$$(\forall x)(\forall y)\,P(x,y),\ (\forall y)(\exists x)P(x,y),(\exists y)(\forall x)\,P(x,y).$$

Εἰς τὰς προτάσεις ταύτας ἀμφότεραι αἱ μεταβληταὶ εἶναι *βωβαί*. Παρατηροῦμεν ἐδῶ ὅτι

$$(\forall x)(\forall y)\,P(x,y) \Leftrightarrow (\forall x,y)\,P(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)P(x,y)$$

$$(\exists x)(\exists y)\,P(x,y) \Leftrightarrow (\exists x,y)\,P(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y).$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἀντιθέτως, εἰς τὴν περίπτωσιν διαδοχικῆς χρησιμοποιήσεως ποσοδεικτῶν διαφορετικοῦ εἴδους, ἐναλλαγὴ τούτων ἀδηγεῖ ἐν γένει εἰς διαφορετικὰ ἀποτελέσματα. Οὕτω π.χ., ἂν $P(x,y)$ εἶναι ὁ προτασιακὸς τύπος $x<y$, τότε ἡ πρότασις $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$ εἶναι ἀληθής, ἐνῶ ἡ πρότασις $(\exists y)(\forall x)P(x,y)$ εἶναι ψευδής.

2.4.5 Παρατήρησις. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ποσοδεικτῶν, ὡς ἀνωτέρω, ὑπετέθη ὅτι αἱ μεταβληταὶ τῶν προτασιακῶν τύπων διατρέχουν μὴ κενὰ σύνολα. Ἐν τούτοις εἶναι σκόπιμον χάριν ἁπλοποιήσεως τῆς μαθηματικῆς ἐκφράσεως, ὅπως καὶ ἐκφράσεις ὡς αἱ $(\forall x\in\emptyset)P(x)$, $(\exists x\in\emptyset)P(x)$ θεωρηθοῦν ὡς (λογικαὶ) προτάσεις καὶ μάλιστα, δι' οἱονδήποτε προτασιακὸν τύπον $P(x)$, ἡ μὲν πρώτη ὁρίζεται ὡς ἀληθής, ἡ δὲ δευτέρα ὡς ψευδής.

2.5 ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΣΥΝΟΛΟΥ ΔΙΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗΣ

Λέγομεν, ὅτι ἕν συγκεκριμένον στοιχεῖον a *πληροῖ* τὸν προτασιακὸν τύπον $P(x)$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν $P(a)$ εἶναι ἀληθὴς πρότασις. Τὰ διάφορα στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα πληροῦν τὸν προτασιακὸν τύπον $P(x)$ ἀπαρτίζουν ἐν γένει ἕν σύνολον, τὸ ὁποῖον παρίσταται ὡς ἑξῆς:

$$\{x : P(x)\} \text{ ἢ } \{x \mid P(x)\}$$

καὶ ἀναγιγνώσκεται συνήθως ὡς « τὸ σύνολον ὅλων τῶν x τοιούτων, ὥστε νὰ ἰσχύῃ $P(x)$ » ἢ « τὸ σύνολον ὅλων τῶν x, τὰ ὁποῖα πληροῦν τὸν $P(x)$ ».

Ὅταν θέλωμεν νὰ δηλώσωμεν τὸ σύνολον ἀναφορᾶς E τοῦ προτασιακοῦ τύπου, τότε γράφομεν:

$$\{x\in E : P(x)\} \text{ ἢ } \{x\in E \mid P(x)\}.$$

Ἂν $A=\{x : P(x)\}$, τότε ὁ προτασιακὸς τύπος $P(x)$ *περιγράφει* τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου A, δηλαδὴ ἀποτελεῖ οὗτος ἕν συγκεκριμένον κριτήριον, διὰ τοῦ ὁποίου δυνάμεθα νὰ ἀποφανθῶμεν πότε ἕν στοιχεῖον ἀνήκει εἰς τὸ A. Πράγματι·

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$(\forall x)\ \ x\in A \longleftrightarrow P(x).$$

Παραδείγματα :

1. $N = \{ x : x$ είναι φυσικός αριθμός $\}$
2. $\emptyset = \{ x : x \neq x \}$
3. $\{ x : (\exists y\in\mathbb{Z})\ x = 2y \}$ είναι το σύνολον των αρτίων ακεραίων.
4. $\{ x : (\exists y\in\mathbb{Z})\ x = 2y+1 \}$ είναι το σύνολον των περιττών ακεραίων.

Ενίοτε εις την παράστασιν συνόλου διά περιγραφής των στοιχείων του υπό ενός προτασιακού τύπου γίνονται ωρισμέναι συντομογραφίαι, ως π.χ. η

$$\{ 5x : x\in\mathbb{Z} \}$$

προς παράστασιν του συνόλου

$$\{ y : (\exists x\in\mathbb{Z})\ y = 5x \}.$$

Αξιοσημείωτον είναι επίσης, ότι τυχόν σύνολον B δύναται να παρασταθή, ως ανωτέρω, τη βοηθεία ενός προτασιακού τύπου π.χ. του $x\in B$, δηλαδή έχομεν :

$$B = \{ x : x\in B \}.$$

Είναι προφανές, ότι εις τον συμβολισμόν $\{ x : P(x) \}$ το x παριστά μίαν βωβήν μεταβλητήν. Ούτω π.χ. έχομεν :

$$\{ x : P(x) \} = \{ y : P(y) \}.$$

Τέλος παρατηρούμεν, ότι δύο διαφορετικοί προτασιακοί τύποι δυνατόν να περιγράφουν τα στοιχεία του αυτού συνόλου, ως π.χ. οι προτασιακοί τύποι :

$$x \text{ είναι φυσικός αριθμός}$$
$$x > 0 \text{ και } x\in\mathbb{Z},$$

οι οποίοι περιγράφουν αμφότεροι τα στοιχεία του συνόλου N.

Γενικώς η ισότης

$$\{ x : P(x) \} = \{ x : Q(x) \}$$

δηλοί την αλήθειαν της προτάσεως

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$(\forall x)\ P(x) \longleftrightarrow Q(x)$$

Ὁμοίως ἡ

$$\{x : P(x)\} \subseteq \{x : Q(x)\}$$

δηλοῖ τὴν ἀλήθειαν τῆς προτάσεως

$$(\forall x)\ P(x) \longrightarrow Q(x)\ .$$

Ἡ ἀξία τῆς θεωρίας τῶν συνόλων, ὡς μέσου τοῦ μαθηματικοῦ συλλογισμοῦ, ἔγκειται κατὰ μέγα μέρος εἰς τὴν δυνατότητα τῆς ἐλευθέρας ἐναλλαγῆς τῶν συνόλων καὶ τῶν προτασιακῶν τύπων. Εἰς ἕνα προτασιακὸν τύπον δυνατὸν νὰ περιέχωνται πολύπλοκοι ἔννοιαι, ἀλλὰ τὸ σύνολον, τὸ ὁποῖον οὗτος περιγράφει, εἶναι, τουλάχιστον ἐνορατικῶς, πολὺ ἁπλοῦν. Αὐτὴ ἡ ἁπλοποίησις ἐξυπηρετεῖ εἰς τὸ νὰ αὐξήσωμεν τὴν ἱκανότητά μας πρὸς ἀφομοίωσιν τῶν μαθηματικῶν.

Παρατήρησις. Ἐπειδὴ εἷς προτασιακὸς τύπος $P(x,y)$ δύο μεταβλητῶν x, y δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς προτασιακὸς τύπος μιᾶς μεταβλητῆς, τοῦ ζεύγους (x,y), εἶναι προφανές, ὅτι διὰ τοῦ προτασιακοῦ τύπου $P(x,y)$ περιγράφεται ἓν σύνολον διατεταγμένων ζευγῶν, τὸ ὁποῖον βεβαίως παρίσταται μὲ :

$$\{(x,y) : P(x,y)\}\ .$$

Οὕτω, τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον $A \times B$ δύναται νὰ περιγραφῇ διὰ τοῦ προτασιακοῦ τύπου $x \in A$ *καί* $y \in B$, ἤτοι :

$$A \times B = \{(x,y) : x \in A \wedge y \in B\}\ .$$

2.6 ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Ἀναλόγως πρὸς τὴν περίπτωσιν τῶν προτασιακῶν τύπων δύο μεταβλητῶν θεωροῦνται καὶ προτασιακοὶ τύποι τριῶν ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν. Οἱ ποσοδείκται δύνανται ἐπίσης νὰ χρησιμοποιηθοῦν διὰ τὰς διαφόρους μεταβλητὰς καθ' ὅμοιον τρόπον ὡς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν προτασιακῶν τύπων δύο μεταβλητῶν.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

3. ΑΛΓΕΒΡΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

3.1 ΤΟΜΗ ΣΥΝΟΛΩΝ

Ἂν Α καὶ Β εἶναι τυχόντα σύνολα, τότε τὸ σύνολον, τὸ ὁποῖον περιγράφει ὁ προτασιακὸς τύπος $x\in A$ *καί* $x\in B$, καλεῖται *τομὴ* τῶν Α καὶ Β καὶ παρίσταται μὲ $A\cap B$. Ὥστε :

$$A\cap B=\{x : x\in A \text{ καὶ } x\in B\}=\{x : x\in A\wedge x\in B\}.$$

Ἡ τομὴ $A\cap B$ ἀπαρτίζεται λοιπὸν ἀπὸ τὰ κοινὰ στοιχεῖα τῶν συνόλων Α καὶ Β. Ἄρα ἰσχύουν $A\cap B\subseteq A$ καὶ $A\cap B\subseteq B$.

Ἂν τὰ σύνολα Α καὶ Β παρίστανται διὰ περιγραφῆς, ὡς κατωτέρω:

$$A=\{x : P(x)\},\ B=\{x : Q(x)\},$$

τότε τὸ σύνολον, τὸ ὁποῖον περιγράφει ὁ προτασιακὸς τύπος $P(x)\wedge Q(x)$, συμπίπτει μὲ τὴν τομὴν $A\cap B$, ἤτοι :

$$A\cap B=\{x : P(x)\wedge Q(x)\}.$$

Ἂν $A\cap B=\emptyset$, δηλαδὴ τὰ Α καὶ Β οὐδὲν κοινὸν στοιχεῖον ἔχουν, τότε τὰ Α καὶ Β καλοῦνται *ξένα*. Τὸ κενὸν σύνολον εἶναι ξένον πρὸς οἱονδήποτε σύνολον Α, διότι ἰσχύουν :

$$A\cap\emptyset=\emptyset \text{ καὶ } \emptyset\cap A=\emptyset.$$

3.2 ΕΝΩΣΙΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

Ἂν Α καὶ Β εἶναι τυχόντα σύνολα, τότε τὸ σύνολον, τὸ ὁποῖον περι-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

γράφει ὁ προτασιακὸς τύπος $x\in A$ ἢ $x\in B$, καλεῖται *ἕνωσις* τῶν συνόλων A καὶ B καὶ παρίσταται μὲ $A\cup B$. Ὥστε :

$$A\cup B=\{x: x\in A \text{ ἢ } x\in B\}=\{x: x\in A \vee x\in B\}.$$

Ἡ ἕνωσις $A\cup B$ ἀπαρτίζεται λοιπὸν ἀπὸ ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου A καὶ ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου B. Ἄρα ἰσχύουν $A\subseteq A\cup B$ καὶ $B\subseteq A\cup B$. Ἐπίσης εἶναι προφανές, ὅτι διὰ τυχὸν συνόλου A ἰσχύουν :

$$A\cup\emptyset=A \text{ καὶ } \emptyset\cup A=A.$$

Ἂν τὰ σύνολα A καὶ B παρίστανται διὰ περιγραφῆς, ὡς κατωτέρω :

$$A=\{x: P(x)\},\ B=\{x: Q(x)\},$$

τότε τὸ σύνολον, τὸ ὁποῖον περιγράφει ὁ προτασιακὸς τύπος $P(x)\vee Q(x)$, συμπίπτει μὲ τὴν ἕνωσιν $A\cup B$, ἤτοι :

$$A\cup B=\{x: P(x)\vee Q(x)\}.$$

3.3 ΔΙΑΦΟΡΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

Ἂν A καὶ B εἶναι τυχόντα σύνολα, τότε τὸ σύνολον, τὸ ὁποῖον περιγράφει ὁ προτασιακὸς τύπος $x\in A$ *καὶ* $x\notin B$, καλεῖται *διαφορὰ* τοῦ συνόλου B ἐκ τοῦ A καὶ παρίσταται μὲ $A-B$. Ὥστε :

$$A-B=\{x: x\in A \text{ καὶ } x\notin B\}=\{x: x\in A\wedge x\notin B\}.$$

Ἡ διαφορὰ $A-B$ ἀπαρτίζεται λοιπὸν ἀπὸ ἐκεῖνα τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου A, τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ σύνολον B. Ἄρα ἰσχύει $A-B\subseteq A$. Ἐπίσης εἶναι προφανές, ὅτι διὰ τυχὸν συνόλου A ἰσχύουν :

$$A-A=\emptyset,\ A-\emptyset=A \text{ καὶ } \emptyset-A=\emptyset.$$

Ἂν τὰ σύνολα A καὶ B παρίστανται διὰ περιγραφῆς, ὡς κατωτέρω :

$$A=\{x: P(x)\},\ B=\{x: Q(x)\},$$

τότε τὸ σύνολον, τὸ ὁποῖον περιγράφει ὁ προτασιακὸς τύπος $P(x)\wedge[\sim Q(x)]$, συμπίπτει μὲ τὴν διαφορὰν $A-B$, ἤτοι :

$$A-B=\{x: P(x)\wedge[\sim Q(x)]\}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

3.4 ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Αἱ κυριώτεραι ἰδιότητες τῆς τομῆς, τῆς ἑνώσεως καὶ τῆς διαφορᾶς συνόλων συνοψίζονται εἰς τὰ ἀκόλουθα θεωρήματα :

3.4.1 ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν A,B,Γ εἶναι τυχόντα σύνολα, τότε ἰσχύουν τὰ κάτωθι :

(i) $A \cap A = A$	(i′) $A \cup A = A$
(ii) $A \cap B = B \cap A$	(ii′) $A \cup B = B \cup A$
(iii) $A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$	(iii′) $A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$
(iv) $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$	(iv′) $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$.

Ἀπόδειξις. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων αἱ (i), (ii) ὡς ἐπίσης καὶ αἱ (i′), (ii′) εἶναι προφανεῖς. Αἱ λοιπαὶ ἰδιότητες ἀποδεικνύονται, ὡς ἑξῆς :

(iii) Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$(\forall x) \quad x \in A \cap (B \cap \Gamma) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap \Gamma.$$

Πράγματι· $x \in A \cap (B \cap \Gamma) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cap \Gamma \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in \Gamma)$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in \Gamma \Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge x \in \Gamma \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap \Gamma.$

(iii′) Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$(\forall x) \quad x \in A \cup (B \cup \Gamma) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup \Gamma.$$

Πράγματι· $x \in A \cup (B \cup \Gamma) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cup \Gamma \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in \Gamma)$

$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in \Gamma \Leftrightarrow x \in A \cup B \vee x \in \Gamma \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup \Gamma.$

(iv) Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$(\forall x) \quad x \in A \cap (B \cup \Gamma) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma).$$

Πράγματι· $x \in A \cap (B \cup \Gamma) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup \Gamma \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in \Gamma)$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in \Gamma) \Leftrightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap \Gamma \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma).$

(iv′) Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$(\forall x) \quad x \in A \cup (B \cap \Gamma) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma).$$

Πράγματι· $x \in A \cup (B \cap \Gamma) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cap \Gamma \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in \Gamma)$

$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in \Gamma) \Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup \Gamma \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma).$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παρατήρησις. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω οἱ τύποι (i), (i′) εἶναι γνωστοὶ ὡς νόμοι τοῦ *ἀδυνάμου*, οἱ (ii), (ii′) ὡς νόμοι τῆς *ἀντιμεταθέσεως*, οἱ (iii), (iii′) ὡς νόμοι τῆς *προσεταιριστικότητος* καὶ οἱ (iv), (iv′) ὡς νόμοι τῆς *ἐπιμεριστικότητος*.

Εἶναι φυσικόν, λόγῳ τῶν νόμων τῆς προσεταιριστικοτητος, νὰ ὁρίσωμεν τὴν τομὴν καὶ τὴν ἕνωσιν τριῶν ἢ περισσοτέρων συνόλων, ὡς ἑξῆς :

$A \cap B \cap \Gamma = (A \cap B) \cap \Gamma$	$A \cup B \cup \Gamma = (A \cup B) \cup \Gamma$
$A \cap B \cap \Gamma \cap \Delta = (A \cap B \cap \Gamma) \cap \Delta$	$A \cup B \cup \Gamma \cup \Delta = (A \cup B \cup \Gamma) \cup \Delta$
κ. ο. κ.	κ. ο. κ.

3.4.2 ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν A, B, Γ εἶναι τυχόντα σύνολα, τότε ἰσχύουν τὰ κάτωθι :

(i) $A \subseteq B \leftrightarrow A \cap B = A$	(i′) $A \subseteq B \leftrightarrow A \cup B = B$
(ii) $(A \supseteq \Gamma) \wedge (B \supseteq \Gamma) \leftrightarrow A \cap B \supseteq \Gamma$	(ii′) $(A \subseteq \Gamma) \wedge (B \subseteq \Gamma) \leftrightarrow A \cup B \subseteq \Gamma$
(iii) $A \subseteq B \rightarrow A \cap \Gamma \subseteq B \cap \Gamma$	(iii′) $A \subseteq B \rightarrow A \cup \Gamma \subseteq B \cup \Gamma$

Ἀπόδειξις. (i) Ἔστω $A \subseteq B$. Ἰσχύει τότε $(\forall x)\, x \in A \Rightarrow x \in B$ καὶ ἐπομένως $(\forall x)\, x \in A \rightarrow x \in A \cap B$, δηλαδὴ $A \subseteq A \cap B$. Ἀλλὰ προφανῶς ἰσχύει καὶ $A \cap B \subseteq A$. Ἄρα $A \cap B = A$. Ὥστε ἐδείχθη, ὅτι

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A.$$

Ἀντιστρόφως, ἔστω $A \cap B = A$. Ἰσχύει τότε $(\forall x)\, x \in A \rightarrow x \in A \cap B \rightarrow x \in B$, δηλαδὴ $A \subseteq B$. Ὥστε ἐδείχθη, ὅτι ἰσχύει καὶ

$$A \cap B = A \rightarrow A \subseteq B.$$

(i′) Ἔστω $A \subseteq B$. Ἰσχύει τότε $(\forall x)\, x \in A \rightarrow x \in B$ καὶ ἐπομένως $(\forall x)\, x \in A \cup B \rightarrow x \in A \vee x \in B \rightarrow x \in B$, δηλαδὴ $A \cup B \subseteq B$. Ἀλλὰ προφανῶς ἰσχύει καὶ $B \subseteq A \cup B$. Ἄρα $A \cup B = B$. Ὥστε ἐδείχθη ὅτι

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B.$$

Ἀντιστρόφως, ἔστω $A \cup B = B$. Ἰσχύει τότε $(\forall x)\, x \in A \rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$x \in B$, δηλαδή $A \subseteq B$. Ώστε έδειχθη ότι ισχύει και

$$A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B.$$

(ii) Έστω $(A \supseteq \Gamma) \wedge (B \supseteq \Gamma)$. Ισχύει τότε $(\forall x)\, x \in \Gamma \Rightarrow x \in A$ και $(\forall x)\, x \in \Gamma \Rightarrow x \in B$, επομένως $(\forall x)\, x \in \Gamma \Rightarrow x \in A \cap B$, δηλαδή $A \cap B \supseteq \Gamma$. Ώστε έδειχθη ότι

$$(A \supseteq \Gamma) \wedge (B \supseteq \Gamma) \Rightarrow A \cap B \supseteq \Gamma.$$

Αντιστρόφως, έστω $A \cap B \supseteq \Gamma$. Ισχύει τότε $A \supseteq A \cap B \supseteq \Gamma$ και $B \supseteq A \cap B \supseteq \Gamma$, δηλαδή $A \supseteq \Gamma$ και $B \supseteq \Gamma$. Ώστε έδειχθη ότι ισχύει και

$$A \cap B \supseteq \Gamma \Rightarrow (A \supseteq \Gamma) \wedge (B \supseteq \Gamma).$$

(ii′) Έστω $(A \subseteq \Gamma) \wedge (B \subseteq \Gamma)$. Ισχύει τότε $(\forall x)\, x \in A \Rightarrow x \in \Gamma$ και $(\forall x)\, x \in B \Rightarrow x \in \Gamma$, επομένως $(\forall x)\, x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in \Gamma$, δηλαδή $(\forall x)\, x \in A \cup B \Rightarrow x \in \Gamma$, ήτοι $A \cup B \subseteq \Gamma$. Ώστε έδειχθη ότι

$$(A \subseteq \Gamma) \wedge (B \subseteq \Gamma) \Rightarrow A \cup B \subseteq \Gamma.$$

Αντιστρόφως, έστω $A \cup B \subseteq \Gamma$. Ισχύει τότε $A \subseteq A \cup B \subseteq \Gamma$ και $B \subseteq A \cup B \subseteq \Gamma$, δηλαδή $A \subseteq \Gamma$ και $B \subseteq \Gamma$. Ώστε έδειχθη ότι ισχύει και

$$A \cup B \subseteq \Gamma \Rightarrow (A \subseteq \Gamma) \wedge (B \subseteq \Gamma).$$

(iii) Εκ της $A \subseteq B$ προκύπτει ότι $(\forall x)\, x \in A \Rightarrow x \in B$ και επομένως $(\forall x)\, x \in A \cap \Gamma \Rightarrow x \in A \wedge x \in \Gamma \Rightarrow x \in B \wedge x \in \Gamma \Rightarrow x \in B \cap \Gamma$, δηλαδή $A \cap \Gamma \subseteq B \cap \Gamma$.

(iii′) Εκ της $A \subseteq B$ προκύπτει ότι $(\forall x)\, x \in A \Rightarrow x \in B$ και επομένως $(\forall x)\, x \in A \cup \Gamma \Rightarrow x \in A \vee x \in \Gamma \Rightarrow x \in B \vee x \in \Gamma \Rightarrow x \in B \cup \Gamma$, δηλαδή $A \cup \Gamma \subseteq B \cup \Gamma$.

3.4.3 ΘΕΩΡΗΜΑ. Άν A, B, Γ είναι τυχόντα σύνολα, τότε ισχύουν τά κάτωθι :

$$\text{(i)}\quad A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$$

(ii) $(A \cap B) - \Gamma = A \cap (B - \Gamma)$	(ii′) $(A \cup B) - \Gamma = (A - \Gamma) \cup (B - \Gamma)$
(iii) $\Gamma - (A \cap B) = (\Gamma - A) \cup (\Gamma - B)$	(iii′) $\Gamma - (A \cup B) = (\Gamma - A) \cap (\Gamma - B)$.

Απόδειξις. (i) Έστω $A \subseteq B$. Ισχύει τότε $(\forall x)\, x \in A \Rightarrow x \in B$ και έ-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

πομένως $(\forall x)\ x\in A-B \Rightarrow x\in A \wedge x\notin B \Rightarrow x\in B \wedge x\notin B \Rightarrow x\in B-B \Rightarrow x\in\emptyset$, δηλαδή $A-B\subseteq\emptyset$. Άρα $A-B=\emptyset$. Ώστε έδείχθη ότι

$$A\subseteq B \Rightarrow A-B=\emptyset.$$

Αντιστρόφως, έστω $A-B=\emptyset$. Ισχύει τότε και $A\subseteq B$, διότι άλλως υπάρχει στοιχείου $a\in A$ μέ $a\notin B$, οπότε και $a\in A-B$, δηλαδή $a\in\emptyset$, όπερ άτοπον. Ώστε έδείχθη ότι ισχύει και

$$A-B=\emptyset \Rightarrow A\subseteq B.$$

(ii) Αρκεί νά δειχθῆ ότι :

$$(\forall x)\ x\in[(A\cap B)-\Gamma] \leftrightarrow x\in A\cap(B-\Gamma).$$

Πράγματι· $x\in[(A\cap B)-\Gamma]\leftrightarrow x\in A\cap B\wedge x\notin\Gamma \leftrightarrow (x\in A\wedge x\in B)\wedge x\notin\Gamma$ $\leftrightarrow x\in A\wedge(x\in B\wedge x\notin\Gamma)\leftrightarrow x\in A\wedge x\in B-\Gamma \leftrightarrow x\in A\cap(B-\Gamma)$.

(ii′) Αρκεί νά δειχθῆ ότι :

$$(\forall x)\ x\in[A\cup B-\Gamma] \leftrightarrow x\in(A-\Gamma)\cup(B-\Gamma).$$

Πράγματι· $x\in[A\cup B-\Gamma]\leftrightarrow x\in A\cup B\wedge x\notin\Gamma \leftrightarrow (x\in A\vee x\in B)\wedge x\notin\Gamma \leftrightarrow$ $(x\in A\wedge x\notin\Gamma)\vee(x\in B\wedge x\notin\Gamma)\leftrightarrow x\in(A-\Gamma)\vee x\in(B-\Gamma)\leftrightarrow x\in(A-\Gamma)\cup(B-\Gamma)$.

(iii) Αρκεί νά δειχθῆ ότι :

$$(\forall x)\ x\in[\Gamma-(A\cap B)] \leftrightarrow x\in(\Gamma-A)\cup(\Gamma-B).$$

Πράγματι· λαμβάνοντες υπ' όψιν και τούς γνωστούς νόμους τοῦ De Morgan (Πρβλ. § 2.4.3), έχομεν :

$$x\in[\Gamma-(A\cap B)]\leftrightarrow x\in\Gamma\wedge x\notin A\cap B\leftrightarrow x\in\Gamma\wedge(\sim x\in A\cap B)\leftrightarrow x\in\Gamma\wedge[\sim(x\in A\wedge x\in B)]$$

$$\leftrightarrow x\in\Gamma\wedge[(\sim x\in A)\vee(\sim x\in B)]\leftrightarrow[x\in\Gamma\wedge(\sim x\in A)]\vee[x\in\Gamma\wedge(\sim x\in B)]\leftrightarrow$$

$$(x\in\Gamma\wedge x\notin A)\vee(x\in\Gamma\wedge x\notin B)\leftrightarrow x\in(\Gamma-A)\vee x\in(\Gamma-B)\leftrightarrow x\in(\Gamma-A)\cup(\Gamma-B).$$

(iii′) Αρκεί νά δειχθῆ ότι :

$$(\forall x)\ x\in[\Gamma-(A\cup B)] \leftrightarrow x\in(\Gamma-A)\cap(\Gamma-B).$$

Πράγματι· δυνάμει τῶν νόμων τοῦ De Morgan, έχομεν :

$$x\in[\Gamma-(A\cup B)]\leftrightarrow x\in\Gamma\wedge x\notin A\cup B\leftrightarrow x\in\Gamma\wedge(\sim x\in A\cup B)\leftrightarrow x\in\Gamma\wedge[\sim(x\in A\vee x\in B)]$$

$$\leftrightarrow x\in\Gamma\wedge[(\sim x\in A)\wedge(\sim x\in B)]\leftrightarrow[x\in\Gamma\wedge(\sim x\in A)]\wedge[x\in\Gamma\wedge(\sim x\in B)]\leftrightarrow$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$(x\in\Gamma \wedge x\notin A)\wedge(x\in\Gamma\wedge x\notin B)\leftrightarrow x\in(\Gamma-A)\wedge x\in(\Gamma-B)\leftrightarrow x\in(\Gamma-A)\cap(\Gamma-B)$.

Παρατήρησις. Οἱ ἀποδειχθέντες ἀνωτέρω τύποι (iii) καὶ (iii′) εἶναι γνωστοὶ ὡς τύποι τοῦ De Morgan.

3.5 Η ΑΛΓΕΒΡΑ $\mathcal{P}(\Omega)$

Ἔστωσαν Ω ἓν βασικὸν σύνολον καὶ $\mathcal{P}(\Omega)$ τὸ δυναμοσύνολον αὐτοῦ, δηλαδὴ τὸ σύνολον ὅλων τῶν ὑποσυνόλων τοῦ Ω. Διὰ τυχόντα σύνολα A, B, ὑποσύνολα τοῦ Ω, ἡ τομὴ $A\cap B$, ἡ ἕνωσις $A\cup B$ καὶ ἡ διαφορὰ $A-B$ εἶναι ἐπίσης ὑποσύνολα τοῦ βασικοῦ συνόλου Ω. Ὥστε διὰ τυχὸν ζεῦγος $(A,B)\in\mathcal{P}(\Omega)\times\mathcal{P}(\Omega)$ ἰσχύουν :

$$A\cap B\in\mathcal{P}(\Omega),\ A\cup B\in\mathcal{P}(\Omega) \text{ καὶ } A-B\in\mathcal{P}(\Omega).$$

Ἡ τομή, ἡ ἕνωσις καὶ ἡ διαφορὰ μεταξὺ συνόλων, στοιχείων τοῦ $\mathcal{P}(\Omega)$ καλοῦνται *πράξεις* εἰς τὸ $\mathcal{P}(\Omega)$.

Εἶναι προφανὲς ὅτι διὰ τυχὸν συνόλου $A\in\mathcal{P}(\Omega)$ ἰσχύουν :

$$A\cap\Omega=A=\Omega\cap A \text{ καὶ } A\cup\Omega=\Omega=\Omega\cup A.$$

Διὰ τυχὸν σύνολου $A\in\mathcal{P}(\Omega)$, τὸ σύνολον $\Omega-A$ καλεῖται *συμπλήρωμα* τοῦ A καὶ παρίσταται συνήθως μὲ A^c, ἤτοι :

$$A^c=\Omega-A=\{x\in\Omega : x\notin A\}.$$

Προφανῶς ἰσχύουν :

$$\emptyset^c=\Omega \text{ καὶ } \Omega^c=\emptyset.$$

3.5.1 ΘΕΩΡΗΜΑ. Διὰ τυχὸν σύνολου A, στοιχεῖου τοῦ $\mathcal{P}(\Omega)$ ἰσχύουν τὰ κάτωθι :

(i) $A\cap A^c=\emptyset$ (ii) $A\cup A^c=\Omega$ (iii) $(A^c)^c=A$.

Ἀπόδειξις. (i) Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$(\forall x)\quad x\in A\cap A^c\leftrightarrow x\in\emptyset.$$

Πράγματι· $x\in A\cap A^c\leftrightarrow x\in A\wedge x\in A^c\leftrightarrow x\in A\wedge(x\in\Omega\wedge x\notin A)\leftrightarrow$

$x\in\Omega\wedge(x\in A\wedge x\notin A)\leftrightarrow x\in\Omega\wedge x\in(A-A)\leftrightarrow x\in\Omega\wedge x\in\emptyset\leftrightarrow x\in\Omega\cap\emptyset\leftrightarrow x\in\emptyset$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

(ii) Αρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$(\forall x) \quad x\in A\cup A^c \Leftrightarrow x\in\Omega .$$

Πράγματι· $x\in A\cup A^c \Leftrightarrow x\in A \vee x\in A^c \Leftrightarrow x\in A \vee (x\in\Omega \wedge x\notin A) \Leftrightarrow$
$(x\in A \vee x\in\Omega) \wedge (x\in A \vee x\notin A) \Leftrightarrow x\in A \vee x\in\Omega \Leftrightarrow x\in A\cup\Omega \Leftrightarrow x\in\Omega .$

(iii) Αρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$(\forall x) \quad x\in(A^c)^c \Leftrightarrow x\in A .$$

Πράγματι· $x\in(A^c)^c \Leftrightarrow x\in\Omega \wedge x\notin A^c \Leftrightarrow x\in\Omega \wedge (\sim x\in A^c) \Leftrightarrow$
$x\in\Omega \wedge [\sim(x\in\Omega \wedge x\notin A)] \Leftrightarrow x\in\Omega \wedge [(\sim x\in\Omega) \vee (\sim x\notin A)] \Leftrightarrow x\in\Omega \wedge (x\notin\Omega \vee x\in A) \Leftrightarrow$
$(x\in\Omega \wedge x\notin\Omega) \vee (x\in\Omega \wedge x\in A) \Leftrightarrow x\in\Omega \wedge x\in A \Leftrightarrow x\in\Omega\cap A \Leftrightarrow x\in A .$

3.5.2 ΘΕΩΡΗΜΑ. Διὰ τυχόντα σύνολα A, B, στοιχεῖα τοῦ $\mathcal{P}(\Omega)$ ἰσχύουν οἱ κάτωθι τύποι (τύποι τοῦ De Morgan) :

(i) $(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$ (ii) $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$.

Ἀπόδειξις. Ἐφαρμόζοντες τοὺς γενικοὺς τύπους (iii) καὶ (iii′) τοῦ θεωρήματος 3.4.3 διὰ $\Gamma=\Omega$, λαμβάνομεν

$$\Omega-(A\cap B) = (\Omega-A)\cup(\Omega-B) \text{ καὶ } \Omega-(A\cup B)=(\Omega-A)\cap(\Omega-B),$$

δηλαδὴ τοὺς τύπους

$$(A\cap B)^c = A^c\cup B^c \text{ καὶ } (A\cup B)^c = A^c\cap B^c.$$

Παρατήρησις. Ἂν τὸ σύνολον A, στοιχεῖον τοῦ $\mathcal{P}(\Omega)$ παρίσταται διὰ περιγραφῆς, ὡς κατωτέρω :

$$A = \{ x\in\Omega : P(x) \},$$

τότε τὸ συμπλήρωμα τοῦ συνόλου A συμπίπτει μὲ τὸ σύνολον $\{x\in\Omega : \sim P(x)\}$, ἤτοι

$$A^c = \{ x\in\Omega : \sim P(x) \}.$$

3.6 ΓΕΝΙΚΕΥΣΙΣ ΤΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΤΟΜΗΣ ΚΑΙ ΕΝΩΣΕΩΣ

Ἂν $\mathcal{C}$ εἶναι μία συλλογὴ συνόλων, δηλαδὴ ἓν σύνολον μὲ στοιχεῖα ἐπίσης σύνολα, τότε οἱ προτασιακοὶ τύποι

$$(\forall X\in\mathcal{C})\, x\in X, \quad (\exists X\in\mathcal{C})\, x\in X,$$

οἱ ὁποῖοι προφανῶς ἔχουν μεταβλητὴν τὴν x, περιγράφουν δύο σύνολα, τὰ ὁποῖα καλοῦνται ἀντιστοίχως *τομὴ* καὶ *ἕνωσις* τῆς συλλογῆς $\mathcal{C}$ καὶ παρίστανται μὲ $\cap\mathcal{C}$ καὶ $\cup\mathcal{C}$, ἤτοι :

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\cap \mathcal{C} = \{x : (\forall X \in \mathcal{C})\, x \in X\}$$
$$\cup \mathcal{C} = \{x : (\exists X \in \mathcal{C})\, x \in X\}.$$

Προφανώς εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου $\mathcal{C} = \{A, B\}$, ἔχομεν :

$$\cap \mathcal{C} = \{x : (\forall X \in \mathcal{C})\, x \in X\} = \{x : x \in A \wedge x \in B\} = A \cap B$$

$$\cup \mathcal{C} = \{x : (\exists X \in \mathcal{C})\, x \in X\} = \{x : x \in A \vee x \in B\} = A \cup B.$$

Ὁμοίως, ἂν $\mathcal{C} = \{A, B, \Gamma\}$, τότε $\cap \mathcal{C} = A \cap B \cap \Gamma$ καὶ $\cup \mathcal{C} = A \cup B \cup \Gamma$ κ.ο.κ.

Μία συλλογὴ συνόλων $\mathcal{C}$ καλεῖται μία *κάλυψις* ἑνὸς συνόλου E τότε καὶ μόνον τότε, ἂν

$$E \subseteq \cup \mathcal{C}.$$

Λέγομεν ὅτι μία συλλογὴ συνόλων $\mathcal{C}$ εἶναι συλλογὴ *ξένων* συνόλων τότε καὶ μόνον τότε, ἂν

$$(\forall X, Y \text{ ἐν } \mathcal{C})\ X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset.$$

Ἂν E εἶναι τυχὸν σύνολον καὶ $\mathcal{C}$ μία συλλογὴ ξένων συνόλων μὲ $E = \cup \mathcal{C}$, τότε λέγομεν ὅτι ἡ $\mathcal{C}$ εἶναι μία *διαμέρισις* τοῦ συνόλου E.

3.7 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δείξατε, ὅτι διὰ τυχόντα σύνολα A, B, Γ ἰσχύουν οἱ κάτωθι τύποι :

$$A \cap (A \cup B) = A = A \cup (A \cap B)$$
$$A - (B - \Gamma) = (A - B) \cup (B \cap \Gamma)$$
$$(A - B) - \Gamma = A - (B \cup \Gamma)$$
$$(A - B) \cap \Gamma = (A \cap \Gamma) - (B \cap \Gamma).$$

2. Δείξατε, ὅτι διὰ τυχόντα σύνολα A, B, Γ ἰσχύει :

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \Gamma - B \subseteq \Gamma - A.$$

3. Δείξατε, ὅτι διὰ τυχόντα σύνολα A, B, Γ, στοιχεῖα τοῦ $\mathcal{P}(\Omega)$ ἰσχύουν :

$$A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$$
$$A - B = A \cap B^c$$
$$(A - B) \cup \Gamma = (A \cup \Gamma) \cap (B^c \cup \Gamma).$$

4. Δείξατε, ὅτι διὰ τυχόντα σύνολα A, B ἰσχύουν οἱ τύποι :

$$A - (A - B) = A \cap B$$
$$(A - B) \cup B = A \cup B$$
$$(A - B) \cap B = \emptyset.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5. Δείξατε, ὅτι διὰ τυχόντα σύνολα A, B, Γ, Δ ἰσχύουν οἱ κάτωθι τύποι :

$$(A \cup B) \times \Gamma = (A \times \Gamma) \cup (B \times \Gamma)$$
$$(A \cap B) \times \Gamma = (A \times \Gamma) \cap (B \times \Gamma)$$
$$(A \times B) \cap (\Gamma \times \Delta) = (A \cap \Gamma) \times (B \cap \Delta).$$

6. Τὸ σύνολον $A \div B = (A - B) \cup (B - A)$ καλεῖται *συμμετρικὴ διαφορὰ* τῶν συνόλων A καὶ B. Δείξατε, ὅτι διὰ τυχόντα σύνολα A, B, Γ ἰσχύουν οἱ κάτωθι τύποι :

$$A \div A = \emptyset \qquad A \div \emptyset = A \qquad A \div B = B \div A$$
$$A \div (B \div \Gamma) = (A \div B) \div \Gamma \qquad A \cap (B \div \Gamma) = (A \cap B) \div (A \cap \Gamma).$$

7. Δείξατε, ὅτι διὰ τυχόντα σύνολα A, B ἰσχύουν οἱ κάτωθι τύποι:

$$A \cup B = A \div B \div (A \cap B) \qquad A - B = A \div (A \cap B).$$

8. Δείξατε, ὅτι διὰ τυχόντα σύνολα A, B, στοιχεῖα τοῦ $\mathcal{P}(\Omega)$ ἰσχύει καὶ $A \div B \in \mathcal{P}(\Omega)$. Ἐπὶ πλέον δείξατε, ὅτι διὰ τυχόντα σύνολα A, B, στοιχεῖα τοῦ $\mathcal{P}(\Omega)$ ἰσχύουν οἱ κάτωθι τύποι :

$$A \div \Omega = A^c \qquad A \div A^c = \Omega \qquad A^c \div B^c = A \div B.$$

9. Δείξατε, ὅτι ἂν $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ εἶναι διαμερίσεις τοῦ αὐτοῦ συνόλου, τότε

$$\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2 \Longrightarrow \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

4. ΣΧΕΣΕΙΣ

4.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΣΕΩΣ

Λογικαί συσχετίσεις μεταξύ στοιχείων τού αὐτού ἤ διαφορετικῶν συνόλων ἀποδίδονται διά προτασιακῶν τύπων. Αὗται χαρακτηρίζονται εἰς τά μαθηματικά ὡς *σχέσεις*. Π.χ. γνωσταί εἰς ἡμᾶς σχέσεις εἶναι αἱ ἀποδιδόμεναι ὑπό τῶν κάτωθι προτασιακῶν τύπων :

x καί y παριστοῦν τό αὐτό στοιχεῖον τοῦ συνόλου E $(x=y)$

ὁ φυσικός ἀριθμός x διαιρεῖ τόν φυσικόν ἀριθμόν y $(x|y)$

ὁ ἀριθμός x εἶναι μικρότερος τοῦ y $(x \prec y)$

ἡ εὐθεῖα x εἶναι κάθετος πρός τήν εὐθεῖαν y $(x \perp y)$

τό σύνολον x εἶναι ὑποσύνολον τοῦ συνόλου y $(x \subseteq y)$.

Ὁ συμβολισμός $a\sigma\beta$ εἶναι συνήθης καί χρησιμοποιεῖται, ἵνα δηλώσωμεν ὅτι *τά στοιχεῖα* a, β *συνδέονται λογικῶς διά τῆς σχέσεως* σ, ἤ, ὅπως καί ἀλλως λέγομεν, ὅτι *τό* a *εὑρίσκεται εἰς τήν σχέσιν* σ *μέ τό* β. Μία σχέσις σ, ὡς αἱ ἀνωτέρω, εἶναι πλήρως γνωστή, ἐάν γνωρίζωμεν ἐπακριβῶς τά ζεύγη τῶν στοιχείων, τά ὁποῖα συνδέονται δι' αὐτῆς, δηλαδή, ἐάν γνωρίζωμεν τό σύνολον

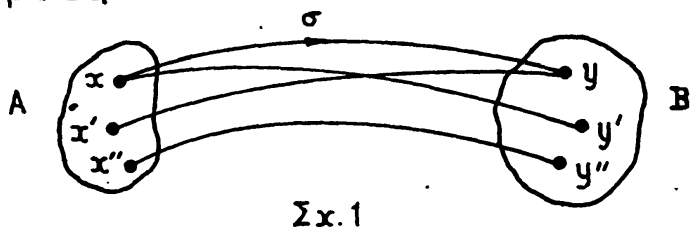
$$\{(a,\beta) : a\sigma\beta\}.$$

Τό τελευταῖον τοῦτο σύνολον καλεῖται συνήθως τό *γράφημα* τῆς σχέσεως σ. Χάριν ἁπλότητος εἶναι σκόπιμον, ὅπως ἡ ἔννοια τῆς σχέσεως ταυτίζεται μέ τό γράφημά της. Οὕτω δίδομεν τόν ἀκόλουθον ὁρισμόν :

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ. Μία σχέσις σ ἐκ τοῦ συνόλου A εἰς τὸ σύνολον B εἶναι ἓν ὑποσύνολου τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου A×B. Ἂν $(\alpha,\beta)\in\sigma$, τότε λέγομεν ὅτι «τὰ α, β συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως σ» ἢ καί ἄλλως ὅτι «τὸ α εὑρίσκεται εἰς τὴν σχέσιν σ μὲ τὸ β», συνηθίζομεν δὲ νὰ γράφωμεν ασβ ἀντί $(\alpha,\beta)\in\sigma$.

Μία σχέσις σ ἐκ τοῦ συνόλου A εἰς τὸ σύνολον B παρίσταται συνήθως μὲ $\sigma : A \to B$. Αὕτη δύναται νὰ ἑρμηνευθῇ ἐποπτικῶς διὰ τοῦ κάτωθι σχήματος.



Σχ.1

Τὸ *πεδίον ὁρισμοῦ* $\mathcal{D}(\sigma)$ καὶ τὸ *πεδίον τιμῶν* $\mathcal{R}(\sigma)$ μιᾶς σχέσεως $\sigma : A \to B$ ὁρίζονται ὡς κάτωθι :

$$\mathcal{D}(\sigma) = \{ x\in A : (\exists\, y\in B)\, x\sigma y \}$$

$$\mathcal{R}(\sigma) = \{ y\in B : (\exists\, x\in A)\, x\sigma y \}.$$

Προφανῶς ἰσχύουν $\mathcal{D}(\sigma)\subseteq A$ καὶ $\mathcal{R}(\sigma)\subseteq B$.

Ἔστω μία σχέσις $\sigma : A \to B$. Ἂν $\mathcal{D}(\sigma) = A$, τότε λέγομεν ὅτι ἡ σχέσις σ εἶναι μία σχέσις *τοῦ* A εἰς τὸ B καὶ γράφομεν $\sigma : A \rightarrowtail B$. Ἂν $\mathcal{R}(\sigma) = B$, τότε λέγομεν ὅτι ἡ σχέσις σ εἶναι μία σχέσις ἐκ τοῦ A *ἐπί τοῦ* B, τέλος δέ, ἂν $\mathcal{D}(\sigma) = A$ καὶ $\mathcal{R}(\sigma) = B$, λέγομεν ὅτι ἡ σχέσις σ εἶναι μία σχέσις *τοῦ* A *ἐπί τοῦ* B.

Ἂν σ εἶναι μία σχέσις ἐκ τοῦ A εἰς τὸ B, τότε τὸ σύνολον

$$\{ (x,y) : y\sigma x \}$$

εἶναι ἓν ὑποσύνολον τοῦ B×A καὶ ὁρίζει μίαν σχέσιν ἐκ τοῦ B εἰς τὸ A, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν *ἀντίστροφον σχέσιν* τῆς σ καὶ συμβολίζομεν μὲ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

σ^{-1}, ὅπου

$$\sigma^{-1} = \{(x,y) : y\sigma x\}.$$

Προφανῶς ἰσχύει $(\forall x,y)\, x\sigma^{-1}y \Longleftrightarrow y\sigma x$ καὶ ἐπομένως ἡ σ^{-1} ἔχει πεδίον ὁρισμοῦ τὸ πεδίον τιμῶν τῆς σ καὶ πεδίον τιμῶν τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῆς σ, δηλαδὴ ἰσχύουν

$$\mathcal{D}(\sigma^{-1}) = \mathcal{R}(\sigma) \quad \text{καὶ} \quad \mathcal{R}(\sigma^{-1}) = \mathcal{D}(\sigma).$$

Ἐπειδὴ αἱ σχέσεις ὁρίζονται ὡς σύνολα, δυνατὸν αὐταὶ νὰ συνδέωνται διὰ τῆς σχέσεως τοῦ ὑποσυνόλου. Οὕτως, ἂν διὰ τὰς σχέσεις σ, τ ἰσχύῃ $\tau \subseteq \sigma$, τότε λέγομεν ὅτι ἡ σχέσις τ εἶναι εἰς *περιορισμόν* τῆς σ, ἡ δὲ σ μία *ἐπέκτασις* τῆς τ.

5. ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ-ΔΙΑΤΑΞΙΣ

5.1 ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΙΣ ΣΥΝΟΛΟΝ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΑΙ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑΙ ΑΥΤΩΝ

Μία σχέσις $\sigma : E \to E$ ἐκ τοῦ συνόλου E εἰς τὸν ἑαυτόν του καλεῖται *(διμελὴς) σχέσις εἰς τὸ* E. Ἕνεκα τῆς σπουδαιότητος μερικῶν ἰδιοτήτων, αἱ ὁποῖαι ἀφοροῦν εἰς τοιαύτας σχέσεις, διακρίνομεν τὰς κατωτέρω βασικὰς κατηγορίας σχέσεων :

Ἀνακλαστικαὶ σχέσεις. Μία σχέσις σ εἰς τὸ σύνολον E καλεῖται *ἀνακλαστική (ἢ αὐτοπαθὴς)* τότε καὶ μόνον τότε, ἂν

$$(\forall x)\ x\sigma x.$$

Συμμετρικαὶ σχέσεις. Μία σχέσις σ εἰς τὸ σύνολον E καλεῖται *συμμετρική* τότε καὶ μόνον τότε, ἂν

$$(\forall x,y)\ x\sigma y \Rightarrow y\sigma x.$$

Διὰ μίαν συμμετρικὴν σχέσιν σ προφανῶς ἰσχύει

$$(\forall x,y)\ x\sigma y \Leftrightarrow y\sigma x,$$

τὸ ὁποῖον ὁδηγεῖ εἰς τὸ ὅτι $\sigma = \sigma^{-1}$. Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως, $\sigma = \sigma^{-1}$ συνεπάγεται ὅτι

$$(\forall x,y)\ x\sigma y \Leftrightarrow y\sigma^{-1}x \Leftrightarrow y\sigma x,$$

δηλαδὴ ὅτι ἡ σ εἶναι συμμετρική. Ὥστε ἐδείχθη ὅτι

$$\sigma \text{ } \textit{εἶναι συμμετρική} \Leftrightarrow \sigma = \sigma^{-1}.$$

Ἀντισυμμετρικαὶ σχέσεις. Μία σχέσις σ εἰς τὸ σύνολον E καλεῖ-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ται *ἀντισυμμετρική* τότε καὶ μόνον τότε, ἄν

$$(\forall x,y)\quad x\sigma y \text{ καί } y\sigma x \Rightarrow x=y.$$

Μεταβατικαί σχέσεις. Μία σχέσις σ εἰς τὸ σύνολον Ε καλεῖται *μεταβατική* τότε καὶ μόνον τότε, ἄν

$$(\forall x,y,z)\quad x\sigma y \text{ καί } y\sigma z \Rightarrow x\sigma z.$$

Ἄν σ εἶναι μία σχέσις εἰς τὸ Ε καὶ Α τυχόν ὑποσύνολον τοῦ Ε, τότε τὴν σχέσιν $\sigma \cap A^2$, ἡ ὁποία εἶναι προφανῶς μία σχέσις εἰς τὸ Α, παριστῶμεν συνήθως μὲ σ_A. Αὕτη εἶναι εἷς περιορισμός τῆς σ καὶ καλεῖται περιορισμὸς τῆς σ *εἰς τὸ σύνολον* Α. Εὐκόλως συνάγεται ὅτι ἄν ἡ σχέσις σ εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρική, ἀντισυμμετρική ἢ μεταβατική, τότε καὶ ἡ σ_A εἶναι ὁμοίως ἀνακλαστική, συμμετρική, ἀντισυμμετρική ἢ μεταβατική σχέσις.

5.2 ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΙ – ΚΛΑΣΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

Εἰς πολλὰς περιπτώσεις δύο ἔννοιαι, ἄν καὶ διαφορετικαί, ἐξυπηρετοῦν ἐξ ἴσου καλῶς ἕνα συγκεκριμένον σκοπόν, καὶ συχνὰ λέγομεν ὅτι αἱ δύο αὗται ἔννοιαι εἶναι *ἰσοδύναμοι*. Κατωτέρω δίδομεν ἕνα ἀκριβῆ ὁρισμὸν τοῦ ὅρου τούτου, ὡς χρησιμοποιεῖται εἰς τὰ μαθηματικά.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Μία σχέσις εἰς τὸ σύνολον Ε, ἡ ὁποία εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρική καὶ μεταβατική καλεῖται ἰσοδυναμία ἢ σχέσις ἰσοδυναμίας εἰς τὸ Ε.

Μία ἰσοδυναμία συμβολίζεται συνήθως μὲ $\sim$ ἢ $\approx$ ἢ καὶ $\equiv$. Ἄν δέ $a \sim \beta$, τότε τὰ στοιχεῖα a, β καλοῦνται *ἰσοδύναμα*.

Ἔστω $\sim$ μία ἰσοδυναμία εἰς τὸ σύνολον Ε. Τυχὸν στοιχεῖον $a \in E$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ἑαυτὸ $(a \sim a)$ καὶ ἐνδεχομένως πρὸς ἄλλα στοιχεῖα τοῦ Ε. Τὸ σύνολον τῶν στοιχείων τοῦ Ε, τὰ ὁποῖα εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὸ a καλεῖται *κλάσις ἰσοδυναμίας* τοῦ a. Αὕτη συμ-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

βολίζεται συνήθως μὲ $[a]$ ἢ $\kappa\lambda(a)$ καὶ ἐνίοτε, πρὸς ἀποφυγὴν συγχύσεως, μὲ $[a]_\sim$ ἢ $\kappa\lambda_\sim(a)$, ἵνα δηλωθῇ καὶ ἡ ἰσοδυναμία $\sim$, ὡς πρὸς τὴν ὁποίαν θεωρεῖται ἡ κλάσις ἰσοδυναμίας τοῦ a. Ὥστε

$$\kappa\lambda_\sim(a) = \{ x : x \sim a \}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι :

5.2.1 Αἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας εἶναι μὴ κεναὶ σύνολα.

Πράγματι· ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς κλάσεως ἰσοδυναμίας ἑνὸς στοιχείου a, προκύπτει ὅτι αὕτη ἔχει ὡς στοιχεῖον τουλάχιστον τὸ a.

5.2.2 Αἱ κλάσεις δύο ἰσοδυνάμων στοιχείων ταυτίζονται.

Πράγματι· ἂν $a \sim \beta$, τότε λόγῳ τῆς μεταβατικότητος τῆς $\sim$,

$$(\forall x)\ x \sim a \Leftrightarrow x \sim \beta$$

καὶ ἐπομένως $\kappa\lambda(a) = \kappa\lambda(\beta)$.

5.2.3 Αἱ κλάσεις δύο μὴ ἰσοδυνάμων στοιχείων οὐδὲν κοινὸν στοιχεῖον ἔχουν, ἤτοι εἶναι ξέναι.

Πράγματι· ἂν $a \not\sim \beta$, τότε αἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας τῶν a, β εἶναι ξέναι, διότι ἄλλως θὰ ὑπῆρχε $\gamma \in \kappa\lambda(a) \cap \kappa\lambda(\beta)$, ὁπότε βεβαίως $a \sim \gamma$ καὶ $\gamma \sim \beta$, ἄρα, δυνάμει τῆς μεταβατικότητας τῆς $\sim$, $a \sim \beta$, ὅπερ ἄτοπον.

Τὸ σύνολον τῶν κλάσεων ἰσοδυναμίας καλεῖται *σύνολον πηλίκον τοῦ* E *διὰ τῆς* $\sim$ καὶ συμβολίζεται μὲ $E/\sim$. Τὸ σύνολον πηλίκου $E/\sim$ ἀποτελεῖ μίαν διαμέρισιν τοῦ συνόλου E, διότι τοῦτο προφανῶς εἶναι μία συλλογὴ ξένων συνόλων καὶ ἐπὶ πλέον κάθε στοιχεῖον τοῦ E ἀνήκει εἰς τὴν κλάσιν του, δηλαδὴ εἰς ἓν σύνολον, στοιχεῖον τοῦ $E/\sim$, ἄρα

$$\cup(E/\sim) = E.$$

Ἀντιστρόφως, ἂν $\mathcal{C}$ εἶναι τυχοῦσα διαμέρισις τοῦ συνόλου E, τότε ὑπάρχει μία σχέσις ἰσοδυναμίας $\sim$ εἰς τὸ E τοιαύτη, ὥστε νὰ ἰσχύῃ $\mathcal{C} = E/\sim$. Πράγματι· ἂν ὁρίσωμεν

$$(\forall x, y)\ x \sim y \Leftrightarrow (\exists C \in \mathcal{C})\ x \in C \wedge y \in C$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καί θεωρήσωμεν τυχόν σύνολον C ἐκ τῆς συλλογῆς $\mathcal{C}$ καί ἕν συγκεκριμένον στοιχεῖον $a \in C$, τότε

$$(\forall x) \quad x \sim a \leftrightarrow x \in C,$$

ἤτοι $C = \kappa\lambda(a)$. Ἄρα $\mathcal{C} \subseteq E/\sim$ καί ἐπειδή τόσον ἡ συλλογή $\mathcal{C}$, ὅσον καί τό σύνολον πηλίκον $E/\sim$ εἶναι διαμερίσεις τοῦ συνόλου E, ἕπεται ὅτι $\mathcal{C} = E/\sim$ (Πρβλ. ἄσκησιν 9, § 3.7).

5.3 ΔΙΑΤΑΞΙΣ

Ἡ μαθηματική ἔννοια τῆς διατάξεως εἶναι μία γενίκευσις ἐννοιῶν, αἱ ὁποῖαι ἀποδίδονται π.χ. ὑπό ἐκφράσεων, ὡς αἱ «$x > y$», «$X \subseteq Y$», «x εἶναι πλησιέστερον τοῦ y» κλπ.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Μία σχέσις εἰς τό σύνολον E, ἡ ὁποία εἶναι ἀνακλαστική, ἀντισυμμετρική καί μεταβατική καλεῖται σχέσις μερικῆς διατάξεως εἰς τό E ἤ καί ἁπλῶς, μερική διάταξις εἰς τό E.

Π.χ. αἱ σχέσεις $\leqq$, $\subseteq$ εἶναι μερικαί διατάξεις, ἡ μέν πρώτη εἰς τό σύνολον $\mathbb{R}$, ἡ δέ δευτέρα εἰς τό σύνολον $\mathcal{P}(\Omega)$, ὅπου Ω ἕν βασικόν σύνολον.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Μία σχέσις σ εἰς τό σύνολον E, ἡ ὁποία εἶναι μεταβατική καί τοιαύτη, ὥστε :

$$(\forall x, y) \quad x \sigma y \Rightarrow x \neq y$$

καλεῖται σχέσις γνησίας διατάξεως εἰς τό E ἤ καί ἁπλῶς, γνησία διάταξις εἰς τό E.

Π.χ. αἱ σχέσεις $\prec$, $\subset$ εἶναι γνήσιαι διατάξεις, ἡ μέν πρώτη εἰς τό σύνολον $\mathbb{R}$, ἡ δέ δευτέρα εἰς τό σύνολον $\mathcal{P}(\Omega)$, ὅπου Ω ἕν βασικόν σύνολον.

Ἄν σ εἶναι μία γνησία διάταξις εἰς τό E, τότε ἡ σχέσις $\tau = \sigma \cup \Delta$, ὅπου Δ εἶναι ἡ διαγώνιος τοῦ E^2, εἶναι, ὡς εὐκόλως συνάγεται, μία σχέσις μερικῆς διατάξεως εἰς τό E. Προφανῶς ἰσχύει

$$(\forall x, y) \quad x \tau y \leftrightarrow x \sigma y \quad \text{ἤ} \quad x = y.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἀντιστρόφως, ἂν τ εἶναι μία σχέσις μερικῆς διατάξεως, τότε ἡ σχέσις $\sigma = \tau - \Delta$ εἶναι, ὡς εὐκόλως συνάγεται, μία σχέσις γνησίας διατάξεως εἰς τὸ E. Προφανῶς ἰσχύει

$$(\forall x,y)\quad x\sigma y \iff x\tau y \text{ καὶ } x\neq y.$$

Οὕτω, μία σχέσις διατάξεως εἰς ἕν σύνολον E καθορίζει, ὡς ἀνωτέρω, καὶ μίαν ἄλλην σχέσιν διατάξεως εἰς τὸ E, ἐξ ὧν ἡ μία εἶναι μερικὴ διάταξις καὶ ἡ ἄλλη γνησία διάταξις. Αὗται καλοῦνται *συμφυεῖς* διατάξεις εἰς τὸ E. Ἐκ τούτων τὴν μερικὴν διάταξιν παριστῶμεν συνήθως μὲ $\preceq$, τὴν δὲ γνησίαν μὲ $\prec$. Π.χ. εἰς τὸ σύνολον $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν αἱ σχέσεις διατάξεως $\leqq$ καὶ $<$ εἶναι συμφυεῖς. Ὁμοίως εἰς τὸ σύνολον $\mathcal{P}(\Omega)$, ὅπου Ω ἕν βασικὸν σύνολον, αἱ σχέσεις διατάξεως $\subseteq$ καὶ $\subset$ εἶναι ἐπίσης συμφυεῖς.

Ἕν σύνολον E, εἰς τὸ ὁποῖον ἔχει ὁρισθῇ μία σχέσις διατάξεως, μερικὴ ἢ γνησία, καλεῖται *διατεταγμένον σύνολον* (ὡς πρὸς τὴν ὑπ' ὄψιν διάταξιν). Τὸ σύνολον E θεωρεῖται τότε ἐφωδιασμένον καὶ μὲ τὰς δύο συμφυεῖς σχέσεις διατάξεως $\preceq$ καὶ $\prec$.

Ἂν E εἶναι ἕν διατεταγμένον σύνολον καὶ $\preceq$, $\prec$ αἱ συμφυεῖς του διατάξεις, τότε ἰσχύει προφανῶς

$$(\forall x,y)\quad x\preceq y \text{ ἢ } y\preceq x \iff x\prec y \text{ ἢ } x=y \text{ ἢ } y\prec x.$$

Δύο στοιχεῖα α, β τοῦ συνόλου E καλοῦνται *συγκρίσιμα* (ὡς πρὸς τὴν διάταξιν) τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύῃ $\alpha\preceq\beta$ ἢ $\beta\preceq\alpha$. Π.χ. οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ $1, \frac{5}{8}$ εἶναι συγκρίσιμοι (ὡς πρὸς τὴν σχέσιν διατάξεως $\leqq$), διότι $1 \leqq \frac{5}{8}$. Γενικῶς παρατηροῦμεν, ὅτι τυχόντες πραγματικοὶ ἀριθμοὶ α, β εἶναι συγκρίσιμοι, δηλαδὴ ἰσχύει $\alpha\leqq\beta$ ἢ $\beta\leqq\alpha$. Ἂν οἱαδήποτε στοιχεῖα τοῦ διατεταγμένου συνόλου E, ἀνὰ δύο θεωρουμένων, εἶναι συγκρίσιμα, τότε τὸ σύνολον E καλεῖται *γραμμικῶς* ἢ *ὁλικῶς διατεταγμένον* σύνολον, αἱ δὲ διατάξεις $\preceq$ καὶ $\prec$ *γραμμικαὶ ἢ ὁλικαὶ διατάξεις* εἰς τὸ σύνολον E. Ὥστε τὸ διατεταγμένον σύνολον E εἶναι *γραμμικῶς* διατεταγμένον σύνολον τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύῃ μία ἐκ τῶν κάτωθι ἰσοδυνάμων προτάσεων:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$(\forall x,y)\quad x \preceq y \ \ \ddot{\eta}\ \ \ y \preceq x$$
$$(\forall x,y)\quad x \prec y \ \ \ddot{\eta}\ \ \ x = y \ \ \ddot{\eta}\ \ \ y \prec x.$$

"Εστωσαν πάλιν ἕν διατεταγμένου σύνολον E καὶ $\preceq$ ἡ μερικὴ του διάταξις. Ἕν σύνολον A, ὑποσύνολον τοῦ E, καλεῖται *φραγμένον πρὸς τὰ ἄνω* τότε καὶ μόνον τότε, ἄν

$$(\exists a\epsilon E)(\forall x\epsilon A)\ x \preceq a.$$

Ἕν στοιχεῖον a μὲ τὴν ἰδιότητα ταύτην καλεῖται ἕν *ἄνω φράγμα* τοῦ A. Τὸ σύνολον A καλεῖται *φραγμένον πρὸς τὰ κάτω* τότε καὶ μόνον τότε, ἄν

$$(\exists\beta\epsilon E)(\forall x\epsilon A)\ \beta \preceq x.$$

Ἕν στοιχεῖον β μὲ τὴν ἰδιότητα ταύτην καλεῖται ἕν *κάτω φράγμα* τοῦ A. Τὸ σύνολον A καλεῖται *φραγμένον* τότε καὶ μόνον τότε, ἄν εἶναι φραγμένον καὶ πρὸς τὰ ἄνω καὶ πρὸς τὰ κάτω.

5.3.1 ΘΕΩΡΗΜΑ. "Εστωσαν E ἕν διατεταγμένου σύνολον, $\preceq$ ἡ μερικὴ διάταξις αὐτοῦ καὶ A ἕν ὑποσύνολον τοῦ E. Ὑπάρχει τότε τὸ πολὺ ἕν ἄνω φράγμα $\tilde{a}$ τοῦ A τοιοῦτον, ὥστε

(1) δι' ὅλα τὰ ἄνω φράγματα a τοῦ A, $\tilde{a} \preceq a$,

ὡς ἐπίσης καὶ ἕν τὸ πολὺ κάτω φράγμα $\tilde{\beta}$ τοῦ A τοιοῦτον, ὥστε

(2) δι' ὅλα τὰ κάτω φράγματα β τοῦ A, $\beta \preceq \tilde{\beta}$.

Ἀπόδειξις. "Εστωσαν $\tilde{a}_1$ καὶ $\tilde{a}_2$ ἄνω φράγματα τοῦ A διὰ τὰ ὁποῖα πληροῦται τὴ (1), δηλαδή

(3) δι' ὅλα τὰ ἄνω φράγματα a τοῦ A, $\tilde{a}_1 \preceq a$

(4) δι' ὅλα τὰ ἄνω φράγματα a τοῦ A, $\tilde{a}_2 \preceq a$.

Ἐπειδὴ τὰ $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ εἶναι ἄνω φράγματα τοῦ A, θὰ ἔχωμεν, δυνάμει τῆς (3), ὅτι $\tilde{a}_1 \preceq \tilde{a}_2$ καὶ δυνάμει τῆς (4), ὅτι $\tilde{a}_2 \preceq \tilde{a}_1$, ὁπότε, λόγῳ τῆς ἀντισυμμετρικότητος τῆς $\preceq$, $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2$. Ἡ ἀπόδειξις διὰ τὰ κάτω φράγματα εἶ-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ναι ὁμοία.

Ἂν ὑπάρχῃ ἓν ἄνω φράγμα $\bar{\alpha}$ τοῦ συνόλου A, τὸ ὁποῖον πληροῖ τὴν (1), τότε τοῦτο εἶναι βεβαίως μονοσημάντως ὡρισμένον καὶ καλεῖται *ἄνω πέρας (supremum)* τοῦ συνόλου A, συντόμως $\bar{\alpha} = \sup A$. Ὁμοίως, ἓν κάτω φράγμα $\underline{\beta}$ τοῦ συνόλου A, τὸ ὁποῖον πληροῖ τὴν (2), εἶναι μονοσημάντως ὡρισμένον καὶ καλεῖται *κάτω πέρας (infimum)* τοῦ συνόλου A, συντόμως $\underline{\beta} = \inf A$. Τὰ $\sup A$ καὶ $\inf A$, τὰ ὁποῖα προφανῶς εἶναι στοιχεῖα τοῦ διατεταγμένου συνόλου E, δὲν εἶναι, ἐν γένει, καὶ στοιχεῖα τοῦ συνόλου A. Εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ $\sup A$ ἢ τὸ $\inf A$ εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ A, τοῦτο καλεῖται ἀντιστοίχως *μέγιστον (maximum)* ἢ *ἐλάχιστον (minimum)* τοῦ συνόλου A, ὁπότε γράφομεν ἀντιστοίχως $\max A$ ἢ $\min A$. Εὐκόλως προκύπτει ὅτι ἰσχύουν :

$$\alpha = \max A \iff \alpha \in A \quad \text{καὶ} \quad (\forall x \in A)\, x \preceq \alpha$$
$$\beta = \min A \iff \beta \in A \quad \text{καὶ} \quad (\forall x \in A)\, \beta \preceq x.$$

Ἂν δί ἓν στοιχεῖον $\alpha \in A$ ἰσχύῃ

$$(\forall x \in A)\ \alpha \preceq x \Rightarrow \alpha = x,$$

τότε τὸ στοιχεῖον α δὲν εἶναι ἐν γένει καὶ μέγιστον τοῦ A, καλεῖται δὲ τοῦτο *γενομέγιστον (maximal)* στοιχεῖον τοῦ συνόλου A. Ὁμοίως, ἂν δί ἓν στοιχεῖον $\beta \in A$ ἰσχύῃ

$$(\forall x \in A)\ x \preceq \beta \Rightarrow x = \beta,$$

τότε τοῦτο καλεῖται *γενοελάχιστον (minimal)* στοιχεῖον τοῦ συνόλου A.

5.3.2 ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἔστω E ἓν διατεταγμένον σύνολον. Ἂν τὸ σύνολον E ἔχῃ μίαν ἀπὸ τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας, τότε ἔχει ἀμφοτέρας :

(i) κάθε μὴ κενὸν ὑποσύνολον τοῦ E, τὸ ὁποῖον εἶναι φραγμένον πρὸς τὰ ἄνω, ἔχει ἄνω πέρας (supremum).

(ii) κάθε μὴ κενὸν ὑποσύνολον τοῦ E, τὸ ὁποῖον εἶναι φραγμένον πρὸς τὰ κάτω, ἔχει κάτω πέρας (infimum).

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι ἰσχύει ἡ (i) καὶ ἔστω $\preceq$ ἡ μερικὴ διάταξις τοῦ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ε. Ἂν Α εἶναι τυχὸν μὴ κενόν, φραγμένον πρὸς τὰ κάτω ὑποσύνολον τοῦ Ε, τότε τὸ σύνολον Β τῶν κάτω φραγμάτων τοῦ Α εἶναι προφανῶς μὴ κενὸν καὶ φραγμένον πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἄνω φράγμα τυχόν στοιχεῖου τοῦ Α. Δυνάμει τῆς (i), τὸ Β ἔχει ἄκρον πέρας, ἔστω $\tilde{\beta} = \sup B$. Τὸ $\tilde{\beta}$ εἶναι ἓν κάτω φράγμα τοῦ Α, διότι τυχόν στοιχεῖου τοῦ Α εἶναι ἄνω φράγμα διὰ τὸ Β καὶ ἑπομένως

$$(\forall x \in A)\ \tilde{\beta} \preceq x.$$

Ἄρα $\tilde{\beta} = \inf A$, διότι διὰ τυχὸν κάτω φράγμα β τοῦ Α, δηλαδὴ διὰ τυχόν $\beta \in B$, προφανῶς ἰσχύει $\beta \preceq \tilde{\beta}$. Ὥστε ἐδείχθη ὅτι (i) ⟹ (ii). Ἡ ἀπόδειξις τοῦ ἀντιστρόφου, δηλαδὴ τῆς συνεπαγωγῆς (ii) ⟹ (i), εἶναι ὁμοία.

Ἓν διατεταγμένον σύνολον Ε, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς ἰδιότητας (i) καὶ (ii) τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος καλεῖται *κεκαρεσμένον*.

5.4 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δώσατε ἓν παράδειγμα σχέσεως εἰς ἓν μὴ κενὸν σύνολον, ἡ ὁποία εἶναι συμμετρικὴ καὶ μεταβατική, ἀλλὰ ὄχι ἀνακλαστική.

2. Ἔστω m εἷς ὡρισμένος ἀκέραιος. Δείξατε, ὅτι ἡ σχέσις $\equiv$ εἰς τὸ σύνολον $\mathbb{Z}$ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἡ ὁποία ὁρίζεται ὡς ἑξῆς :

$$(\forall x, y \text{ ἐν } \mathbb{Z})\ \ x \equiv y \iff (\exists z \in \mathbb{Z})\ x - y = mz$$

εἶναι μία ἰσοδυναμία.

3. Ἂν σ εἶναι μία σχέσις ἰσοδυναμίας εἰς ἓν σύνολον Ε, τότε ὁ περιορισμὸς αὐτῆς σ_A εἰς τυχὸν ὑποσύνολον Α τοῦ Ε εἶναι ἐπίσης μία ἰσοδυναμία. Δείξατε ὅτι :

$$(\forall a \in A)\ \ \kappa\lambda_{\sigma_A}(a) = \kappa\lambda_{\sigma}(a) \cap A$$

4. Δείξατε, ὅτι ἡ διαγώνιος τοῦ E^2 (ταυτοτικὴ σχέσις) εἶναι ἡ μόνη σχέσις, ἡ ὁποία εἶναι ταυτοχρόνως ἰσοδυναμία καὶ μερικὴ διάταξις.

5. Δείξατε, ὅτι ἡ σχέσις σ εἰς τὸ σύνολον $\mathbb{R}^+$ τῶν θετικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἡ ὁποία ὁρίζεται ὡς ἑξῆς :

$$(\forall x, y \text{ ἐν } \mathbb{R}^+)\ \ x \sigma y \iff 3x \leqq y$$

εἶναι μία σχέσις γνησίας διατάξεως. Εἶναι αὐτὴ σχέσις γραμμικῆς διατάξεως ;

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

6. Ἔστωσαν $\preceq$ καὶ $\prec$ συμφυεῖς σχέσεις μερικῆς καὶ γνησίας διατάξεως εἰς ἓν σύνολον E. Δείξατε ὅτι :

$$\alpha \preceq \beta \quad \text{καὶ} \quad \beta \prec \gamma \Rightarrow \alpha \prec \gamma.$$

7. Ἔστω σ μία ἀντισυμμετρικὴ καὶ μεταβατικὴ σχέσις εἰς ἓν σύνολον E. Δείξατε, ὅτι ὑπάρχουν δύο συμφυεῖς διατάξεις $\preceq$ καὶ $\prec$ εἰς τὸ E τοιαῦται, ὥστε ἡ $\preceq$ νὰ εἶναι ἐπέκτασις καὶ ἡ $\prec$ περιορισμὸς τῆς σ, ἤτοι $\prec \subseteq \sigma \subseteq \preceq$.

8. Ἔστωσαν E ἓν διατεταγμένον σύνολον καὶ $\preceq$ ἡ μερικὴ του διάταξις. Δείξατε ὅτι :

(α) Ἂν τὸ σύνολον E ἔχῃ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον στοιχεῖον, τότε ἰσχύει ἀντιστοίχως :

$$\inf \emptyset = \max E \quad \text{ἢ} \quad \sup \emptyset = \min E.$$

(β) Ἂν A εἶναι τυχὸν μὴ κενὸν ὑποσύνολον τοῦ E, τότε ἰσχύει

$$\inf A \preceq \sup A.$$

9. Ἔστω τὸ διατεταγμένον σύνολον $\mathcal{P}(\Omega)$, ὅπου Ω τυχὸν σύνολον, μὲ μερικὴν διάταξιν τὴν σχέσιν τοῦ ὑποσυνόλου. Ἂν $\mathcal{A}$ εἶναι τυχὸν ὑποσύνολον τοῦ $\mathcal{P}(\Omega)$, δείξατε ὅτι ὑπάρχουν τὰ $\sup \mathcal{A}$ καὶ $\inf \mathcal{A}$.

10. Ἔστωσαν E ἓν διατεταγμένον σύνολον καὶ $\preceq$ ἡ μερικὴ του διάταξις. Δείξατε, ὅτι ἂν A καὶ B εἶναι ὑποσύνολα τοῦ E διὰ τὰ ὁποῖα ὑπάρχουν τὰ ἄνω πέρατα, τότε ἰσχύουν :

(i) ἂν $A \subseteq B$, τότε $\sup A \preceq \sup B$

(ii) ἂν $(\forall \alpha \in A)(\exists \beta \in B)\ \alpha \preceq \beta$, τότε $\sup A \preceq \sup B$.

11. Ἔστωσαν E ἓν διατεταγμένον σύνολον καὶ $\mathcal{C}$ μία συλλογὴ συνόλων, ὑποσυνόλων τοῦ E, τοιαύτη, ὥστε διὰ κάθε $C \in \mathcal{C}$ νὰ ὑπάρχῃ τὸ $\sup C$. Ἂν

$$A = \cup \mathcal{C} \quad \text{καὶ} \quad B = \{ x \in E : (\exists C \in \mathcal{C})\ x = \sup C \},$$

δείξατε ὅτι τὸ $\sup A$ ὑπάρχει τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ τὸ $\sup B$ καὶ μάλιστα εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου ταῦτα ὑπάρχουν, ἰσχύει $\sup A = \sup B$.

12. Ἔστωσαν E ἓν κεκορεσμένον διατεταγμένον σύνολον μὲ μερικὴν διάταξιν $\preceq$ καὶ A, B τυχόντα ὑποσύνολα αὐτοῦ μὲ $A \subseteq B$. Δείξατε, ὅτι, ἂν ὑπάρχῃ τὸ ἄνω πέρας τοῦ B, τότε ὑπάρχει καὶ τοῦ A καὶ μάλιστα ἰσχύει $\sup A \preceq \sup B$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

13. Διατυπώσατε καὶ ἀποδείξατε ἀναλόγους προτάσεις πρὸς τὰς ἀσκήσεις 10, 11 καὶ 12 διὰ τὰ κάτω πέρατα.

14. Ἂν Ε εἶναι ἓν γραμμικῶς διατεταγμένον σύνολον, τότε ἓν ψευδομέγιστον στοιχεῖου τοῦ Ε εἶναι καὶ μέγιστον στοιχεῖον αὐτοῦ. ἐνῶ ἓν ψευδοελάχιστον στοιχεῖον τοῦ Ε εἶναι καὶ ἐλάχιστον στοιχεῖον αὐτοῦ.

15. Ἂν α εἶναι τυχόν στοιχεῖον ἑνὸς διατεταγμένου συνόλου Ε καὶ Α εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν συγκρισίμων πρὸς τὸ α στοιχείων τοῦ Ε, τότε ἰσχύουν :

α εἶναι ψευδομέγιστον στοιχεῖον τοῦ Ε $\Longleftrightarrow$ $\alpha = \max A$

α εἶναι ψευδοελάχιστον στοιχεῖου τοῦ Ε $\Longleftrightarrow$ $\alpha = \min A$.

16. Εἶναι ἢ ὄχι κεκορεσμένον ἓν τυχόν ὑποσύνολον ἑνὸς κεκορεσμένου διατεταγμένου συνόλου ;

17. Δείξατε, ὅτι τὸ διατεταγμένου σύνολον $\mathcal{P}(\Omega)$, ὅπου Ω τυχόν σύνολον, μὲ μερικὴν διάταξιν τὴν σχέσιν τοῦ ὑποσυνόλου εἶναι κεκορεσμένον.

18. Δείξατε, ὅτι τὸ σύνολου ὅλων τῶν σχέσεων ἰσοδυναμίας εἰς ἓν ὡρισμένον σύνολον, διατεταγμένον μὲ τὴν σχέσιν τοῦ ὑποσυνόλου, εἶναι κεκορεσμένον.

19. Ἔστω $\mathcal{M}(E)$ τὸ σύνολον ὅλων τῶν μερικῶν διατάξεων εἰς τὸ σύνολον Ε, διατεταγμένον μὲ τὴν σχέσιν τοῦ ὑποσυνόλου. Δείξατε, ὅτι:

(i) τὸ $\mathcal{M}(E)$ ἔχει ἐλάχιστου καὶ μέγιστον στοιχεῖου.

(ii) τὸ $\mathcal{M}(E)$ εἶναι κεκορεσμένον.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

6. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ-ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑΙ

6.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως εἶναι ἀπό τάς θεμελιώδεις μαθηματικάς ἐννοίας. Τήν ὁρίζομεν ὡς μίαν εἰδικήν σχέσιν.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Μία σχέσις σ καλεῖται συνάρτησις τότε καί μόνον τότε, ἄν

$$(\forall x,y,z)\ x\sigma y \text{ καί } x\sigma z \Rightarrow y=z.$$

Ἄν f εἶναι μία συνάρτησις, συνηθίζομεν, ὅπως ἀντί xfy γράφωμεν $y=f(x)$ ἤ καί $y=f[x]$, ὁπότε τό y καλοῦμεν *τιμήν τῆς συναρτήσεως f εἰς τό x*. Τήν ἐκφρασιν $y=f(x)$ καλοῦμεν *τύπον* τῆς συναρτήσεως f, τήν μεταβλητήν x *ἀνεξάρτητον μεταβλητήν* καί τήν y *ἐξηρτημένην μεταβλητήν*.

Ἄν f καί g εἶναι συναρτήσεις, τότε ὁ τύπος

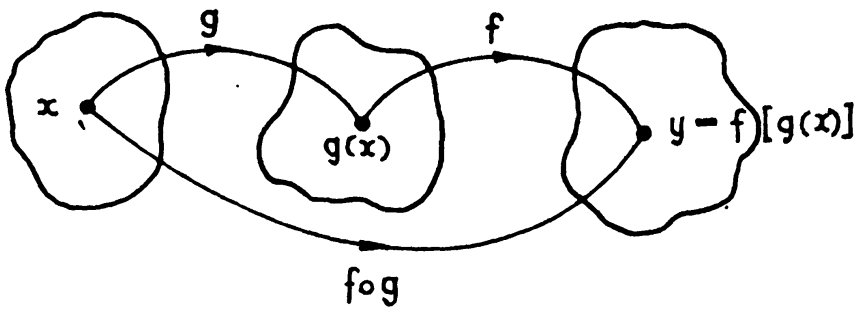
$$y=f[g(x)]$$

ὁρίζει μίαν συνάρτησιν μέ πεδίον ὁρισμοῦ

$$\{x : x\in\mathcal{D}(g) \text{ καί } g(x)\in\mathcal{D}(f)\},$$

τήν ὁποίαν καλοῦμεν *σύνθεσιν τῶν g καί f* καί παριστῶμεν μέ fog. Μία ἐποπτική ἑρμηνεία τῆς συνθέσεως συναρτήσεως δίδεται εἰς τό κάτωθι σχῆμα :

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Σχ. 2

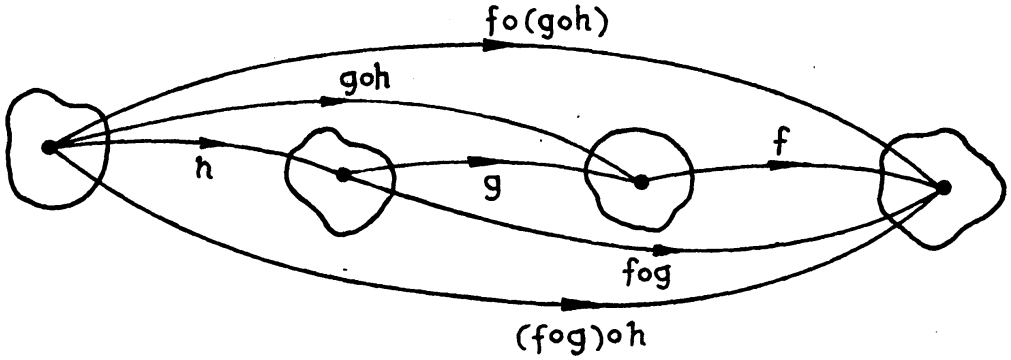
Ἡ σύνθεσις συναρτήσεων ἔχει τὴν καλουμένην *προσεταιριστικήν* ἰδιότητα, δηλαδὴ ἰσχύει

$$fo(goh) = (fog)oh,$$

διότι ἀμφότεραι αἱ συναρτήσεις $fo(goh)$ καὶ $(fog)oh$ ὁρίζονται ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ τύπου $y = f[g[h(x)]]$ καὶ ἔχουν κοινὸν πεδίον ὁρισμοῦ, δηλαδή

$$\{x : x\in\mathcal{D}(goh) \text{ καὶ } goh(x)\in\mathcal{D}(f)\} = \{x : x\in\mathcal{D}(h) \text{ καὶ } h(x)\mathcal{D}(fog)\}$$

Ἡ προσεταιριστικότης τῆς συνθέσεως συναρτήσεων ἐρμηνεύεται ἐποπτικῶς εἰς τὸ κάτωθι σχῆμα :



Σχ. 3

Διὰ τὴν συνάρτησιν $f : A \to B$, ἡ ὁποία βεβαίως εἶναι μία σχέσις, ὁρίζεται ἡ ἀντίστροφος σχέσις $f^{-1} : B \to A$ καὶ μάλιστα, ὡς γνωστόν, ἰσχύουν :

$$\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f) \quad \text{καὶ} \quad \mathcal{R}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f).$$

Ἂν τώρα καὶ ἡ σχέσις $f^{-1} : B \to A$ εἶναι μία συνάρτησις, τότε αὕτη καλεῖται *ἀντίστροφος συνάρτησις* τῆς f. Προφανῶς ἰσχύουν :

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$(\forall\, x\in\mathcal{D}(f))\quad f^{-1}[f(x)] = x$$
$$(\forall\, x\in\mathcal{R}(f))\quad f[f^{-1}(x)] = x,$$

ἄρα ἡ σύνθεσις $f^{-1}\circ f$ ἔχει ὡς τιμήν εἰς τό τυχόν $x\in\mathcal{D}(f)$ αὐτό τοῦτο τό x, εἶναι, ὅπως λέγομεν, ἡ ταυτοτικὴ συνάρτησις ἐπὶ τοῦ $\mathcal{D}(f)$. Ὁμοίως καὶ ἡ σύνθεσις $f\circ f^{-1}$ εἶναι ἡ ταυτοτικὴ συνάρτησις ἐπὶ τοῦ $\mathcal{R}(f)$.

Μία συνάρτησις $f: A\to B$ καλεῖται *ἀμφιμονοσήμαντος* τότε καὶ μόνον τότε, ἄν

$$(\forall\, x,y \text{ ἐν } \mathcal{D}(f))\quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

ἤ ἰσοδυνάμως, ἄν

$$(\forall\, x,y \text{ ἐν } \mathcal{D}(f))\quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

6.1.1 ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἡ συνάρτησις f εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος τότε καὶ μόνον τότε, ἄν ὑπάρχῃ ἡ ἀντίστροφος αὐτῆς συνάρτησις f^{-1}.

Ἀπόδειξις. (i) *Ἡ f εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος.* Ἔχομεν τότε

$$xf^{-1}y \text{ καὶ } xf^{-1}z \Rightarrow x = f(y) \text{ καὶ } x = f(z) \Rightarrow f(y) = f(z)$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ f εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος,

$$f(y) = f(z) \Rightarrow y = z.$$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι

$$(\forall\, x,y,z)\ xf^{-1}y \text{ καὶ } xf^{-1}z \Rightarrow y = z,$$

δηλαδὴ ὅτι ἡ f^{-1} εἶναι συνάρτησις.

(ii) *Ἡ f^{-1} εἶναι συνάρτησις.* Ἔστω $f(x) = f(y)$, ὁπότε, ἐπειδὴ ἡ f^{-1} εἶναι συνάρτησις, θὰ ἔχωμεν $f^{-1}[f(x)] = f^{-1}[f(y)]$, δηλαδὴ $x = y$. Ὥστε ἐδείχθη ὅτι

$$(\forall\, x,y \text{ ἐν } \mathcal{D}(f))\quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y,$$

δηλαδὴ ὅτι ἡ f εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος.

Ἄν f εἶναι μία συνάρτησις καὶ $S \subseteq \mathcal{D}(f)$, τότε λέγομεν ὅτι ἡ f *ὁρίζεται ἐπὶ τοῦ* S ἤ καὶ ἄλλως ὅτι ἡ f *εἶναι ὡρισμένη ἐπὶ τοῦ* S. Ἡ συνάρτησις g, ἡ ὁποία ὁρίζεται ὡς κάτωθι :

$$(\forall\, x\in S)\ g(x) = f(x)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

εἶναι εἷς περιορισμός τῆς f, καλεῖται δὲ περιορισμός τῆς f *ἐπὶ τοῦ συνόλου* S καὶ παρίσταται μὲ $f|S$, ἤτοι $g = f|S$.

Ἂν $X \subseteq \mathcal{D}(f)$, τότε τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τῆς f διὰ τὰ διάφορα στοιχεῖα τοῦ X παριστῶμεν μὲ $f(X)$, ἤτοι ὁρίζομεν :

$$f(X) = \{ y : (\exists\, x \in X)\ y = f(x) \}.$$

Ὁμοίως ὁρίζομεν :

$$f^{-1}(Y) = \{ x : (\exists\, y \in Y)\ y = f(x) \}.$$

Προφανῶς $f(X) \subseteq \mathcal{R}(f)$ καὶ $f^{-1}(Y) \subseteq \mathcal{D}(f)$.

Ἂν $f : A \mapsto B$ εἶναι μία συνάρτησις τοῦ A εἰς τὸ B ἤ, ὅπως ἀλλως συνηθίζομεν νὰ λέγωμεν, μία *συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ A καὶ τιμὰς εἰς τὸ* B, τότε διὰ κάθε X, X_1, X_2 ἐν $\mathcal{P}(A)$ καὶ διὰ κάθε Y, Y_1, Y_2 ἐν $\mathcal{P}(B)$, ἰσχύουν τὰ κάτωθι (αἱ ἀποδείξεις ἀφίενται εἰς τὸν ἀναγνώστην) :

$f^{-1}[f(X)] \supseteq X$	$f[f^{-1}(Y)] \subseteq Y$
$f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$	$f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$
$f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$	$f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.

Ἂν f εἶναι μία συνάρτησις μὲ τιμὰς εἰς ἕν διατεταγμένον σύνολον, τότε ὁρίζονται αἱ ἔννοιαι *ἄνω ἢ κάτω φραγμένη συνάρτησις, φραγμένη συνάρτησις, ἄνω ἢ κάτω φράγμα συναρτήσεως, ἄνω ἢ κάτω πέρας συναρτήσεως*, ὡς κάτωθι :

f εἶναι ἄνω φραγμένη $\Leftrightarrow$ $\mathcal{R}(f)$ εἶναι πρὸς τὰ ἄνω φραγμένον

f εἶναι κάτω φραγμένη $\Leftrightarrow$ $\mathcal{R}(f)$ εἶναι πρὸς τὰ κάτω φραγμένον

f εἶναι φραγμένη $\Leftrightarrow$ $\mathcal{R}(f)$ εἶναι φραγμένον

α εἶναι ἕν ἄνω φράγμα τῆς f $\Leftrightarrow$ α εἶναι ἕν ἄνω φράγμα τοῦ $\mathcal{R}(f)$

β εἶναι ἕν κάτω φράγμα τῆς f $\Leftrightarrow$ β εἶναι ἕν κάτω φράγμα τοῦ $\mathcal{R}(f)$.

Ὡς ἄνω ἢ κάτω πέρας τῆς συναρτήσεως f ὁρίζομεν ἀντιστοίχως τὸ $\sup \mathcal{R}(f)$ ἢ $\inf \mathcal{R}(f)$, ἐφ' ὅσον ταῦτα ὑπάρχουν. Ἂν $S \subseteq \mathcal{D}(f)$, τότε τὸ ἄνω ἢ κάτω πέρας τῆς συναρτήσεως $f|S$, δηλαδὴ τοῦ περιορισμοῦ τῆς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

f ἐπὶ τοῦ S, καλεῖται ἀντιστοίχως *ἄνω ἢ κάτω πέρας τῆς* f *ἐπὶ τοῦ* S καὶ παρίσταται ἀντιστοίχως μὲ $\sup_{x\in S} f(x)$ καὶ $\inf_{x\in S} f(x)$. Ὥστε ἐξ ὁρισμοῦ:

$$\sup_{x\in S} f(x) = \sup \mathcal{R}(f|S) \quad \text{καὶ} \quad \inf_{x\in S} f(x) = \inf \mathcal{R}(f|S)$$

ἢ, ὅπερ τὸ αὐτό:

$$\sup_{x\in S} f(x) = \sup f(S) \quad \text{καὶ} \quad \inf_{x\in S} f(x) = \inf f(S).$$

Εἰδικῶς, τὸ ἄνω καὶ κάτω πέρας τῆς f, δηλαδὴ τὰ $\sup_{x\in\mathcal{D}(f)} f(x)$ καὶ $\inf_{x\in\mathcal{D}(f)} f(x)$, παρίστανται ἁπλούστερον καὶ ὡς κάτωθι:

$$\sup_{x\in\mathcal{D}(f)} f(x) = \sup_{x} f(x) = \sup f(x), \quad \inf_{x\in\mathcal{D}(f)} f(x) = \inf_{x} f(x) = \inf f(x).$$

Παρατήρησις. Αἱ λέξεις *ἀπεικόνισις, ἀντιστοιχία* καὶ *μετασχηματισμός* χρησιμοποιοῦνται συχνὰ ὡς συνώνυμα τοῦ ὅρου *συνάρτησις*. Ἐνίοτε αἱ λέξεις αὗται ἀποδίδονται εἰς συγκεκριμένα εἴδη συναρτήσεων. Ὅταν χρησιμοποιῆται ὁ ὅρος "ἀπεικόνισις" ἢ "μετασχηματισμός", ἡ τιμὴ y εἰς ἓν στοιχεῖον x συνηθίζεται νὰ ὀνομάζεται *εἰκὼν τοῦ* x, ἐνῷ, ὅταν χρησιμοποιῆται ὁ ὅρος "ἀντιστοιχία", *ἀντίστοιχον τοῦ* x.

6.2 ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑΙ

Μία συνάρτησις συχνὰ ἀναφέρεται καὶ ὡς *οἰκογένεια*, τὸ πεδίον ὁρισμοῦ της, ὡς τὸ *σύνολον δεικτῶν* τῆς οἰκογενείας καὶ αἱ τιμαί της, ὡς τὰ *μέλη* τῆς οἰκογενείας. Ἡ ὁρολογία αὕτη χρησιμοποιεῖται κυρίως, ὅταν τὸ κατ' ἐξοχὴν ἐνδιαφέρον μας συγκεντρώται ἐπὶ τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως, δηλαδὴ ἐπὶ τῶν μελῶν τῆς οἰκογενείας. Τὰ μέλη μιᾶς οἰκογενείας a μὲ σύνολον δεικτῶν I συνηθίζεται νὰ παρίστανται μὲ a_i ἀντὶ $a(i)$, ἡ δὲ οἰκογένεια μὲ a_i, $i\in I$ ἢ $(a_i)_{i\in I}$ ἢ ἀκόμη καὶ μὲ (a_i), ἐφ' ὅσον δὲν ὑπάρχει κίνδυνος συγχύσεως. Τὸ σύνολον τῶν μελῶν τῆς οἰκογενείας a_i, $i\in I$, δηλαδὴ τὸ $\mathcal{R}(a)$, συνηθίζεται νὰ παρίσταται μὲ $\{a_i : i\in I\}$. Ἂν ἰσχύῃ $\{a_i : i\in I\} \subseteq E$, τότε λέγομεν ὅτι ἡ οἰκογένεια a_i, $i\in I$ εἶναι μία *οἰκογένεια στοιχείων τοῦ* E ἢ συντομώτερον, μία *οἰκογένεια ἐν* E. Οἰκογένειαι μὲ σύνολον δεικτῶν τὸ σύνολον $\mathbb{N}$ τῶν φυσικῶν

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἀριθμῶν καλοῦνται *ἀκολουθίαι*, τὰ δὲ μέλη των *ὅροι*.

Ἔστω τώρα μία οἰκογένεια A_i, $i\in I$ μὲ μέλη σύνολα. Ὁρίζομεν τότε ὡς *τομήν* καὶ *ἕνωσιν τῆς οἰκογενείας* A_i, $i\in I$, τὴν τομὴν καὶ τὴν ἕνωσιν ἀντιστοίχως τῆς συλλογῆς συνόλων, τὴν ὁποίαν ἀπαρτίζουν τὰ μέλη ταύτης, ἤτοι :

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap \{A_i : i\in I\} \quad \text{καὶ} \quad \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup \{A_i : i\in I\}.$$

Εἰδικῶς, ἂν $I = \{1,2,\cdots,\nu\}$, τότε ἀντὶ τῶν συμβολισμῶν $\bigcap_{i\in I} A_i$ καὶ $\bigcup_{i\in I} A_i$ χρησιμοποιοῦνται καὶ ἄλλοι, ὡς κάτωθι :

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i=1}^{\nu} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_\nu$$

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{\nu} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_\nu .$$

Ὁμοίως καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν $I = \mathbb{N}$, δηλαδὴ ἀκολουθίας συνόλων, χρησιμοποιοῦνται συμβολισμοί, ὡς κάτωθι :

$$\bigcap_{i\in \mathbb{N}} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots$$

$$\bigcup_{i\in \mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots .$$

Ἂν $\mathcal{A}$ εἶναι μία συλλογὴ συνόλων, λαβωμεν δὲ ὡς σύνολον δεικτῶν αὐτὴν ταύτην τὴν συλλογὴν $\mathcal{A}$ καὶ θεωρήσωμεν τὴν ταυτοτικὴν οἰκογένειαν, δηλαδὴ τὴν οἰκογένειαν τῆς ὁποίας τὸ μέλος μὲ δείκτην $A\in\mathcal{A}$ συμπίπτει μὲ αὐτὸ τοῦτο τὸ A, τότε, δυνάμει τῶν ἀνωτέρω, προκύπτουν

$$\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = \bigcap \mathcal{A} \quad \text{καὶ} \quad \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \bigcup \mathcal{A}.$$

Ὥστε οἱ συμβολισμοὶ $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$ καὶ $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$ εἶναι ἰσοδύναμοι πρὸς τοὺς $\bigcap\mathcal{A}$ καὶ $\bigcup\mathcal{A}$ ἀντιστοίχως.

Μία οἰκογένεια a_i, $i\in\{1,2\}$ δύναται νὰ παρασταθῇ δι' ἑνὸς πίνακος, ὡς κάτωθι :

1	2
a_1	a_2

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἤ καὶ ἁπλούστερον δι' ἑνὸς διατεταγμένου ζεύγους, τοῦ ζεύγους (a_1, a_2). Τὰ διατεταγμένα ζεύγη δύνανται ἐπομένως νὰ θεωρηθοῦν καὶ ὡς οἰκογένειαι μὲ σύνολον δεικτῶν τὸ $\{1,2\}$. Ἡ παρατήρησις αὕτη μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἐπεκτείνωμεν τὴν ἔννοιαν τοῦ διατεταγμένου ζεύγους, ὁρίζοντες γενικῶς τυχοῦσαν οἰκογένειαν a_i, $i \in \{1, 2, \cdots, \nu\}$, ὡς *διατεταγμένην νιάδα*. Αὕτη δύναται νὰ παρασταθῇ καὶ ἄλλως, μὲ τὸν κάτωθι πίνακα :

1	2	...	ν
a_1	a_2	...	a_ν

ἤ καὶ ἁπλούστερον, μὲ $(a_1, a_2, \cdots, a_\nu)$. Τὸ a_1 καλεῖται *πρώτου* στοιχεῖον, τὸ a_2 *δεύτερου*, κ.ο.κ. τὸ a_ν *νιοστόν* στοιχεῖον τῆς διατεταγμένης νιάδος $(a_1, a_2, \cdots, a_\nu)$. Τὸ *καρτεσιανόν γινόμενον ν συνόλων* $A_1, A_2, \cdots, A_\nu$ ἢ ὅπερ τὸ αὐτό, *τὸ καρτεσιανόν γινόμενον τῆς οἰκογενείας συνόλων* A_i, $i \in \{1, 2, \cdots, \nu\}$, ὁρίζεται ὡς τὸ σύνολον ὅλων τῶν διατεταγμένων νιάδων, τῶν ὁποίων τὸ πρῶτον στοιχεῖον ἀνήκει εἰς τὸ A_1, τὸ δεύτερον εἰς τὸ A_2, κ.ο.κ. τὸ νιοστὸν εἰς τὸ A_ν. Τὸ καρτεσιανόν γινόμενον τῶν συνόλων $A_1, A_2, \cdots, A_\nu$ παρίσταται μὲ $\overset{\nu}{\underset{i=1}{\times}} A_i$ ἢ $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_\nu$, ὅπου :

$$\overset{\nu}{\underset{i=1}{\times}} A_i = \left\{ (a_1, a_2, \cdots, a_\nu) : (\forall i \in \{1, 2, \cdots, \nu\}) a_i \in A_i \right\}.$$

Γενικῶς, τὸ *καρτεσιανόν γινόμενον τῆς οἰκογενείας συνόλων* A_i, $i \in I$ παρίσταται μὲ $\underset{i \in I}{\times} A_i$ καὶ ὁρίζεται ὡς κάτωθι :

$$\underset{i \in I}{\times} A_i = \left\{ (a_i)_{i \in I} : (\forall i \in I) a_i \in A_i \right\}.$$

Εἰδικῶς, εἰς τὴν περίπτωσιν $I = \mathbb{N}$, δηλαδὴ ἀκολουθίας συνόλων, χρησιμοποιοῦνται καὶ ἄλλοι συμβολισμοί, ὡς κάτωθι :

$$\underset{i \in \mathbb{N}}{\times} A_i = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\times}} A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots$$

Ἂν $J \subseteq I$ καὶ $(a_i)_{i \in J}$ εἶναι ὁ περιορισμὸς τῆς $(a_i)_{i \in I}$ ἐπὶ τοῦ συνόλου J, τότε τὸ σύνολον

$$\left\{ ((a_i)_{i \in I}, (a_i)_{i \in J}) : (a_i)_{i \in I} \in \underset{i \in I}{\times} A_i \right\}$$

ὁρίζει μίαν ἀπεικόνισιν τοῦ $\underset{i \in I}{\times} A_i$ ἐπὶ τοῦ $\underset{i \in J}{\times} A_i$, ἡ ὁποία καλεῖται ἡ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

J-*προβολή* τοῦ $\underset{i\in I}{X} A_i$. Κατ' αὐτὴν εἰκὼν τῆς οἰκογενείας $(a_i)_{i\in I}$ εἶναι προφανῶς ὁ περιορισμός της $(a_i)_{i\in J}$. Ἂν $j\in I$, τότε ἡ $\{j\}$-προβολὴ τοῦ $\underset{i\in I}{X} A_i$ καλεῖται ἁπλούστερον j-*προβολή* τοῦ $\underset{i\in I}{X} A_i$ καὶ εἶναι αὕτη μία ἀπεικόνισις τοῦ $\underset{i\in I}{X} A_i$ ἐπὶ τοῦ A_j.

Παρατήρησις. Ἂν μία οἰκογένεια ἔχῃ μέλη εἰς ἓν διατεταγμένον σύνολον, τότε, ὡς εἴδομεν καὶ διὰ τὰς συναρτήσεις, ἔχουν ἔννοιαν οἱ ὅροι *ἄνω ἢ κάτω φραγμένη οἰκογένεια*, *φραγμένη οἰκογένεια*, *ἄνω ἢ κάτω φράγμα οἰκογενείας*, *ἄνω ἢ κάτω πέρας οἰκογενείας*. Τὸ ἄνω καὶ τὸ κάτω πέρας μιᾶς οἰκογενείας $a_i, i\in I$ ἐπὶ ἑνὸς συνόλου δεικτῶν $J\subseteq I$ παρίστανται τότε μὲ $\sup\limits_{i\in J} a_i$ καὶ $\inf\limits_{i\in J} a_i$ ἀντιστοίχως. Εἰδικῶς τὰ $\sup\limits_{i\in I} a_i$ καὶ $\inf\limits_{i\in I} a_i$ παρίστανται ἁπλούστερον καὶ ὡς κάτωθι :

$$\sup_{i\in I} a_i = \sup_{i} a_i = \sup a_i \ , \quad \inf_{i\in I} a_i = \inf_{i} a_i = \inf a_i \ .$$

6.3 ΜΟΝΟΤΟΝΟΝ

Ἔστω μία συνάρτησις $f : A \longmapsto B$ μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ διατεταγμένον σύνολον A καὶ τιμὰς εἰς τὸ ἐπίσης διατεταγμένον σύνολον B. Ἂν $\preceq_A$ καὶ $\preceq_B$ παριστοῦν ἀντιστοίχως τὰς μερικὰς διατάξεις τῶν συνόλων A καὶ B, τότε ὁρίζομεν τὰς ἐννοίας *αὔξουσα* καὶ *φθίνουσα* συναρτήσεις, ὡς κάτωθι :

f εἶναι *αὔξουσα* $\iff (\forall x,y \text{ ἐν } A)\ x \preceq_A y \Rightarrow f(x) \preceq_B f(y)$

f εἶναι *φθίνουσα* $\iff (\forall x,y \text{ ἐν } A)\ x \preceq_B y \Rightarrow f(y) \preceq_B f(x)$.

Μία συνάρτησις καλεῖται *μονότονος* τότε καὶ μόνον τότε, ἂν αὕτη εἶναι αὔξουσα ἢ φθίνουσα.

Αἱ ἔννοιαι τῆς *γνησίως αὐξούσης* καὶ *γνησίως φθινούσης* συναρτήσεως ὁρίζονται, ὡς κάτωθι :

f εἶναι γνησίως αὔξουσα $\iff (\forall x,y \text{ ἐν } A)\ x \prec_A y \Rightarrow f(x) \prec_B f(y)$

f εἶναι γνησίως φθίνουσα $\iff (\forall x,y \text{ ἐν } A)\ x \prec_A y \Rightarrow f(y) \prec_B f(x)$.

Μία συνάρτησις καλεῖται *γνησίως μονότονος* τότε καὶ μόνον τότε, ἂν αὕτη

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

εἶναι *γνησίως αὔξουσα* ἢ *γνησίως φθίνουσα*.

Ἂν f εἶναι μία συνάρτησις καὶ $S \subseteq \mathcal{D}(f)$, τότε ἡ συνάρτησις f καλεῖται *αὔξουσα ἐπὶ τοῦ* S τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ὁ περιορισμός της $f|S$ εἶναι αὔξουσα συνάρτησις. Ὁμοίως ὁρίζονται καὶ αἱ ἔννοιαι *φθίνουσα ἐπὶ τοῦ* S, *μονότονος ἐπὶ τοῦ* S, *γνησίως αὔξουσα ἐπὶ τοῦ* S, *γνησίως φθίνουσα ἐπὶ τοῦ* S καὶ *γνησίως μονότονος ἐπὶ τοῦ* S.

6.3.1 ΘΕΩΡΗΜΑ (*σταθεροῦ σημείου τοῦ Knaster*). Ἔστω E ἕν κεκορεσμένον διατεταγμένον σύνολον μὲ μέγιστον καὶ ἐλάχιστον στοιχεῖον. Ἂν φ εἶναι μία μονότονος συνάρτησις (ἀπεικόνισις) τοῦ E εἰς τὸν ἑαυτόν του, τότε ὑπάρχει ἕν στοιχεῖον $a \in E$ τοιοῦτον, ὥστε $\varphi(a) = a$ (ἕν τοιοῦτον στοιχεῖον καλεῖται *σταθερὸν σημεῖον* τῆς φ).

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι ἡ φ εἶναι αὔξουσα συνάρτησις καὶ ὅτι $\preceq$ εἶναι ἡ μερικὴ διάταξις τοῦ E. Ἂν $A = \{x \in E : x \preceq \varphi(x)\}$, τότε τοῦτο εἶναι ἀφ' ἑνὸς μὲν μὴ κενόν, διότι ἔχει ὡς στοιχεῖον τὸ ἐλάχιστον στοιχεῖον τοῦ E, ἀφ' ἑτέρου δὲ φραγμένον μὲ ἕν ἄνω φράγμα τὸ μέγιστον στοιχεῖον τοῦ E. Ἑπομένως, ἐπειδὴ τὸ E εἶναι κεκορεσμένον, ὑπάρχει τὸ $\sup A$ καὶ ἔστω τοῦτο a. Ἔστω τώρα τυχὸν $\beta \in A$, ὁπότε $\beta \preceq \varphi(\beta)$ καὶ $\beta \preceq a$. Ἐπειδὴ ἡ φ εἶναι αὔξουσα, ἰσχύει καὶ $\varphi(\beta) \preceq \varphi(a)$, ἄρα $\beta \preceq \varphi(a)$. Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι τὸ $\varphi(a)$ εἶναι ἕν ἄνω φράγμα τοῦ A καὶ ἑπομένως $a = \sup A \preceq \varphi(a)$. Χρησιμοποιοῦντες πάλιν τὸ ὅτι ἡ φ εἶναι αὔξουσα, λαμβάνομεν $\varphi(a) \preceq \varphi(\varphi(a))$ δηλαδὴ $\varphi(a) \in A$ καὶ ἑπομένως $\varphi(a) \preceq \sup A = a$. Ὥστε $\varphi(a) = a$. Ἡ ἀπόδειξις εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου ἡ φ εἶναι φθίνουσα εἶναι ὁμοία.

Παρατήρησις. Ἀνάλογος ὁρολογία, ὡς πρὸς τὸ μονότονον, ἰσχύει προφανῶς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν οἰκογενειῶν, ὡς π.χ. *αὔξουσα οἰκογένεια, φθίνουσα οἰκογένεια* κλπ. Ἂν $A_i, i \in I$ εἶναι μία οἰκογένεια συνόλων μὲ σύνολον δεικτῶν ἕν διατεταγμένον σύνολον I, τότε τὸ μονότονον τῆς οἰκογενείας $A_i, i \in I$ ἀναφέρεται ὡς πρὸς τὴν σχέσιν τοῦ *ὑποσυνόλου*, χωρὶς νὰ γίνεται ἑκάστοτε ἰδιαιτέρα μνεία περὶ τούτου. Οὕτω π.χ. ἂν $\preceq$ εἶναι ἡ μερικὴ διάταξις τοῦ I, τότε

$$A_i, i \in I \text{ εἶναι αὔξουσα} \iff (\forall\, i, j \cdot \text{ἐν } I)\ i \preceq j \rightarrow A_i \subseteq A_j .$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν $I = \mathbb{N}$, δηλαδὴ ἀκολουθίας συνόλων, τότε τὸ σύνολον $\mathbb{N}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν θεωρεῖται πάντοτε διατεταγμένον ὡς πρὸς τὴν *φυσικὴν διάταξίν* του $\leqq$. Οὕτω π.χ.

$$A_i, i\in\mathbb{N} \text{ εἶναι φθίνουσα} \longleftrightarrow (\forall i,j \text{ ἐν } \mathbb{N})\ i \leqq j \rightarrow A_j \subseteq A_i .$$

6.4 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δείξατε, ὅτι διὰ τυχοῦσαν οἰκογένειαν συνόλων $A_i, i\in I$ καὶ τυχόν σύνολον Ω ἰσχύουν οἱ τύποι (γενικοὶ τύποι τοῦ De Morgan) :

$$\Omega - \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} (\Omega - A_i) \quad \text{καὶ} \quad \Omega - \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup (\Omega - A_i).$$

Εἰδικῶς, ἂν ἡ οἰκογένεια $A_i, i\in I$ εἶναι μία οἰκογένεια ἐν $\mathcal{P}(\Omega)$, τότε προκύπτουν οἱ τύποι :

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c \quad \text{καὶ} \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c .$$

2. Δείξατε, ὅτι διὰ τυχούσας οἰκογενείας συνόλων $A_i, i\in I$ καὶ $B_j, j\in J$ ἰσχύουν οἱ τύποι :

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j), \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cup B_j).$$

3. Ἔστω τυχοῦσα συνάρτησις $f : A \mapsto B$. Δείξατε, ὅτι ἂν $X_i, i\in I$ εἶναι τυχοῦσα οἰκογένεια ἐν $\mathcal{P}(A)$ καὶ $Y_i, i\in I$ τυχοῦσα οἰκογένεια ἐν $\mathcal{P}(B)$, τότε ἰσχύουν :

$$f\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(X_i) \qquad f\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(X_i)$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} Y_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(Y_i) \qquad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} Y_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(Y_i).$$

4. Ἔστωσαν f, g συναρτήσεις ὡρισμέναι ἀμφότεραι ἐπὶ ἑνὸς συνόλου S καὶ λαμβάνουσαι τιμὰς εἰς ἕν διατεταγμένον σύνολον μὲ μερικὴν διάταξιν $\preceq$. Δείξατε, ὅτι :

(i) ἂν ὑπάρχουν τὰ ἄνω πέρατα $\sup_{x\in S} f(x)$ καὶ $\sup_{x\in S} g(x)$, τότε ἰσχύει

$$(\forall x\in S)\ f(x) \preceq g(x) \rightarrow \sup f(x) \preceq \sup g(x).$$

(ii) ἂν τὸ σύνολον εἰς τὸ ὁποῖον λαμβάνουν τιμὰς αἱ f, g εἶναι ἐπὶ πλέον κεκορεσμένον, ὑπάρχῃ τὸ $\sup_{x\in S} g(x)$ καὶ ἰσχύῃ

$$(\forall x\in S)\ f(x) \preceq g(x),$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τότε ὑπάρχει καὶ τὸ $\sup_{x\in S} f(x)$ καὶ μάλιστα ἰσχύει

$$\sup_{x\in S} f(x) \preceq \sup_{x\in S} g(x).$$

Διατυπώσατε καὶ ἀποδείξατε ἀναλόγους προτάσεις καὶ διὰ τὰ κάτω πέρατα.

5. Δείξατε, ὅτι μία συνάρτησις $f : A \to B$ μὲ A, B διατεταγμένα σύνολα εἶναι ταυτοχρόνως αὔξουσα καὶ φθίνουσα τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ f εἶναι σταθερὰ συνάρτησις, δηλαδὴ ἂν τὸ $\mathcal{R}(f)$ εἶναι μονοστοιχειακὸν σύνολον.

6. Ἂν g, f εἶναι μονότονοι ἢ γνησίως μονότονοι συναρτήσεις, τί συμπεραίνεται διὰ τὸ εἶδος τῆς μονοτονίας τῆς συνθέσεως fog αὐτῶν ;

7. Δείξατε, ὅτι ἂν πληροῦνται αἱ ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος 6.3.1 (θεώρημα σταθεροῦ σημείου τοῦ Knaster), τότε ὑπάρχει ἓν μέγιστον καὶ ἓν ἐλάχιστον σταθερὸν σημεῖον.

8. Ἔστω I ἓν διατεταγμένον σύνολον δεικτῶν μὲ μερικὴν διάταξιν $\preceq_I$ τοιοῦτον, ὥστε κάθε ὑποσύνολόν του νὰ ἔχῃ ἓν ἐλάχιστον στοιχεῖον, ἢ ὅπως ἄλλως λέγομεν, I εἶναι ἓν *καλῶς διατεταγμένον* σύνολον. Δείξατε, ὅτι ἂν $A_i, i\in I$ εἶναι μία οἰκογένεια διατεταγμένων συνόλων καὶ $\preceq_i$ ἡ μερικὴ διάταξις τοῦ A_i, τότε τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον $\underset{i\in I}{\times} A_i$ ἐφοδιάζεται μὲ μίαν μερικὴν διάταξιν $\preceq$, τῆς ὁποίας ἡ συμφυὴς γνησία διάταξις $\prec$ ὁρίζεται, ὡς κάτωθι :

$$(\forall (\alpha_i),(\beta_i) \text{ ἐν } \underset{i\in I}{\times} A_i)\ (\alpha_i) \prec (\beta_i) \iff (\exists j\in I)\ [\alpha_j \prec_j \beta_j \text{ καὶ } (\forall i\in I) i \prec_I j \to \alpha_i \doteq \beta_i\ ].$$

Ἡ οὕτως ὁριζομένη ἐν $\underset{i\in I}{\times} A_i$ διάταξις καλεῖται *λεξικογραφική*.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

7. ΣΩΜΑΤΑ

7.1 ΠΡΑΞΕΙΣ

Ἀπό τό πρῶτον στάδιον τῆς μαθήσεώς μας ἔχομεν ἐξοικειωθῆ μέ τάς καλουμένας "πράξεις", ὅπως π.χ. ἡ πρόσθεσις, ἡ ἀφαίρεσις, ὁ πολλαπλασιασμός καί ἡ διαίρεσις. Κοινόν χαρακτηριστικόν ὅλων αὐτῶν τῶν πράξεων εἶναι ὅτι ἐκκινοῦμεν ἀπό *δύο* στοιχεῖα ἑνός συνόλου διά νά καταλήξωμεν διά μιᾶς διαδικασίας (ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπό τήν συγκεκριμένην πρᾶξιν) εἰς ἕν τρίτον στοιχεῖον (τό καλούμενον "ἀποτέλεσμα" τῆς πράξεως) τοῦ αὐτοῦ συνόλου. Οὕτω π.χ. ἀπό τούς ἀριθμούς 3 καί 5 διά μέν τῆς διαδικασίας τῆς προσθέσεως καταλήγομεν εἰς τόν ἀριθμόν 8, διά δέ τῆς διαδικασίας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἰς τόν 15. Ἐπειδή εἰς ὡρισμένας πράξεις ἀλλάσσει τό ἀποτέλεσμα, ὅταν ἁπλῶς καί μόνον ἐναλλάξωμεν τήν διαδοχήν τῶν στοιχείων, τά ὁποῖα τό δημιουργοῦν, ὅπως π.χ. εἰς τήν ἀφαίρεσιν ἀριθμῶν, διά τοῦτο θά θεωροῦμεν ὅτι εἰς μίαν πρᾶξιν ἐκκινοῦμεν ἀπό *διατεταγμένον ζεῦγος* στοιχείων, διά νά καταλήξωμεν εἰς ἕν τρίτον στοιχεῖον, τό *ἀποτέλεσμα* τῆς πράξεως. Οὕτω δίδομεν τόν ἀκόλουθον γενικόν ὁρισμόν:

ΟΡΙΣΜΟΣ. Διμελής πρᾶξις ἤ ἁπλῶς, πρᾶξις εἰς ἕν σύνολον E καλεῖται μία ἀπεικόνισις (συνάρτησις) ἐκ τοῦ συνόλου $E \times E = E^2$ εἰς τό σύνολον E.

Ἄν $*$ παριστᾶ μίαν πρᾶξιν εἰς τό σύνολον E, τότε ἡ εἰκών $*(x,y)$ τοῦ ζεύγους $(x,y) \in E^2$ συνηθίζεται νά παρίσταται μέ $x * y$ καί καλεῖ-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ται τὸ *ἀποτέλεσμα* τῆς πράξεως $*$ ἐπὶ τῶν x, y. Ἐπίσης χρησιμοποιεῖται συχνὰ καὶ ἡ ἔκφρασις *ἡ πρᾶξις* $\alpha * \beta$ *εἶναι ἐπιτρεπτή*, ἵνα δηλώσωμεν ὅτι ὑπάρχει τὸ ἀποτέλεσμα τῆς πράξεως $*$ ἐπὶ τῶν α, β. Οὕτω π.χ. εἰς τὸ σύνολον $\mathbb{N}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἡ πρᾶξις $\alpha+\beta$ εἶναι ἐπιτρεπτὴ δι' οἱουσδήποτε φυσικοὺς ἀριθμοὺς α, β, δηλαδὴ ἡ πρόσθεσις εἶναι μία ἀπεικόνισις *τοῦ* $\mathbb{N}^2$ εἰς τὸ $\mathbb{N}$. Ἀντιθέτως, ἡ ἀφαίρεσις *δέν* εἶναι μία ἀπεικόνισις τοῦ $\mathbb{N}^2$ εἰς τὸ $\mathbb{N}$, διότι $(7-10) \notin \mathbb{N}$, δηλαδὴ ἡ πρᾶξις $7-10$ δὲν εἶναι ἐπιτρεπτή.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μία πρᾶξις $*$ εἰς τὸ σύνολον E καλεῖται πρᾶξις ἐπὶ τοῦ E τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ πρᾶξις $\alpha * \beta$ εἶναι ἐπιτρεπτὴ δι' οἱαδήποτε στοιχεῖα α, β τοῦ E, δηλαδὴ ἂν ἡ πρᾶξις $*$ εἶναι μία ἀπεικόνισις τοῦ E^2 εἰς τὸ E.

Π.χ. ἡ πρόσθεσις καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι πράξεις ἐπὶ τοῦ $\mathbb{N}$, ἐνῶ ἡ διαίρεσις δὲν εἶναι πρᾶξις ἐπὶ τοῦ $\mathbb{N}$, διότι $(3:5) \notin \mathbb{N}$. Ἡ "ὕψωσις εἰς δύναμιν", διὰ τὴν ὁποίαν ἀντὶ $\alpha * \beta$ γράφομεν α^β, εἶναι πρᾶξις ἐπὶ τοῦ $\mathbb{N}$, ἐνῶ αὕτη δὲν εἶναι πρᾶξις ἐπὶ τοῦ συνόλου $\mathbb{Q}$ τῶν ρητῶν, διότι ἡ πρᾶξις $(-2)^{\frac{1}{2}}$ δὲν εἶναι ἐπιτρεπτή. Ἐπίσης ἡ ἕνωσις καὶ ἡ τομὴ συνόλων εἶναι πράξεις ἐπὶ τοῦ $\mathcal{P}(\Omega)$.

Ἀντιμεταθετικαὶ πράξεις. Μία πρᾶξις $*$ ἐπὶ τοῦ E καλεῖται *ἀντιμεταθετικὴ* τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύῃ

$$(\forall\, x, y \text{ ἐν } E)\quad x * y = y * x\,.$$

Οὕτως, ἡ πρόσθεσις καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ τοῦ $\mathbb{R}$ εἶναι πράξεις ἀντιμεταθετικαί, ἐνῶ ἡ ἀφαίρεσις ἐπὶ τοῦ $\mathbb{R}$ δὲν εἶναι ἀντιμεταθετική.

Προσεταιριστικαὶ πράξεις. Μία πρᾶξις $*$ ἐπὶ τοῦ E καλεῖται *προσεταιριστικὴ* τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύῃ

$$(\forall\, x, y, z \text{ ἐν } E)\quad x * (y * z) = (x * y) * z\,.$$

Οὕτως, ἡ πρόσθεσις καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ τοῦ $\mathbb{R}$, ὡς ἐπίσης ἡ ἕνωσις καὶ ἡ τομὴ ἐπὶ τοῦ $\mathcal{P}(\Omega)$ εἶναι πράξεις προσεταιριστικαί, ἐνῶ ἡ ἀφαίρεσις ἐπὶ τοῦ $\mathbb{R}$ δὲν εἶναι προσεταιριστική.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Οὐδέτερου στοιχείου πράξεως. Ἔστω $*$ μία πράξις εἰς τὸ σύνολον E. Ἓν στοιχεῖου $\omega \in E$ καλεῖται *οὐδέτερου στοιχείου* τῆς $*$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν αἱ πράξεις $\omega * x$ καὶ $x * \omega$ εἶναι ἐπιτρεπταὶ διὰ κάθε $x \in E$ καὶ ἰσχύῃ

$$(\forall x \in E)\ \omega * x = \omega = x * \omega.$$

Οὕτως:

οὐδέτερον στοιχεῖον τῆς προσθέσεως ἐπὶ τοῦ $\mathbb{R}$ εἶναι τὸ 0

» » τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τοῦ $\mathbb{R}$ εἶναι τὸ 1

» » τῆς ἑνώσεως ἐπὶ τοῦ $\mathcal{P}(\Omega)$ εἶναι τὸ $\emptyset$

» » τῆς τομῆς ἐπὶ τοῦ $\mathcal{P}(\Omega)$ εἶναι τὸ Ω.

Τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον μιᾶς πράξεως εἶναι *μονοσημάντως* ὡρισμένον. Πράγματι· ἂν ἡ πρᾶξις $*$ ἔχῃ οὐδέτερα στοιχεῖα τὰ ω καὶ ω', τότε ἀφ' ἑνὸς μὲν $\omega * \omega' = \omega'$, διότι τὸ ω εἶναι οὐδέτερον στοιχεῖον τῆς $*$, ἀφ' ἑτέρου δὲ $\omega * \omega' = \omega$, διότι καὶ τὸ ω' εἶναι οὐδέτερον στοιχεῖον τῆς $*$. Ἄρα $\omega = \omega'$.

Συμμετρικὰ στοιχεῖα ὡς πρὸς πρᾶξιν. Ἔστω $*$ μία πρᾶξις εἰς τὸ E, ἡ ὁποία ἔχει οὐδέτερον στοιχεῖον τὸ ω. Τὰ στοιχεῖα α, β τοῦ E καλοῦνται *συμμετρικὰ* ὡς πρὸς τὴν $*$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύῃ

$$\alpha * \beta = \omega = \beta * \alpha.$$

Τὸ α λέγεται τότε *συμμετρικὸν τοῦ* β ὡς πρὸς τὴν $*$ καὶ ἰσοδυνάμως τὸ β *συμμετρικὸν τοῦ* α ὡς πρὸς τὴν $*$. Οὕτω, συμμετρικὸν τοῦ $\alpha \in \mathbb{R}$ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν εἶναι ὁ ἀντίθετός του $-\alpha$, ἐνῷ ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμὸν εἶναι ὁ ἀντίστροφός του $\frac{1}{\alpha}$, ἐφ' ὅσον βεβαίως $\alpha \neq 0$.

Ἐπιμεριστικὴ πρᾶξις ὡς πρὸς ἄλλην. Ἔστωσαν δύο πράξεις $*$ καὶ $\blacksquare$ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ συνόλου E. Ἡ πρᾶξις $*$ καλεῖται ἐπιμεριστικὴ ὡς πρὸς τὴν $\blacksquare$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν

$$(\forall x, y, z \text{ ἐν } E)\ x * (y \blacksquare z) = (x * y) \blacksquare (x * z) \text{ καὶ } (y \blacksquare z) * x = (y * x) \blacksquare (z * x).$$

Ἂν ἡ πρᾶξις $*$ εἶναι ἀντιμεταθετική, τότε προφανῶς ἰσχύει

$$(\forall x, y, z \text{ ἐν } E)\ x * (y \blacksquare z) = (x * y) \blacksquare (x * z) \Longleftrightarrow (y \blacksquare z) * x = (y * x) \blacksquare (z * x)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καὶ ἑπομένως μία ἀντιμεταθετικὴ πρᾶξις $*$ ἐπὶ τοῦ E εἶναι ἐπιμεριστικὴ ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν $\blacksquare$ (ἐπὶ τοῦ E) τότε καὶ μόνον τότε, ἂν

$$(\forall\, x,y,z \text{ ἐν } E)\quad x*(y\blacksquare z)=(x*y)\blacksquare(x*z).$$

Οὕτως εἰς τὸ $\mathbb{R}$ ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι ἐπιμεριστικὴ πρᾶξις ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν, διότι αὗτος εἶναι ἀντιμεταθετικὴ πρᾶξις καὶ ἰσχύει

$$(\forall\, x,y,z \text{ ἐν } \mathbb{R})\quad x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z).$$

Ἀντιθέτως, ἡ πρόσθεσις δὲν εἶναι ἐπιμεριστικὴ ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμόν, διότι $2+(3\cdot 5)\neq(2+3)\cdot(2+5)$.

Κλειστὰι πράξεις εἰς σύνολον. Ἔστω $*$ μία πρᾶξις εἰς ἓν σύνολον E καὶ $H\subseteq E$. Ἡ πρᾶξις $*$ καλεῖται *κλειστὴ* εἰς τὸ σύνολον H τότε καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ κάθε $(\alpha,\beta)\in H^2$, διὰ τὸ ὁποῖον ἡ πρᾶξις $\alpha*\beta$ εἶναι ἐπιτρεπτή, τὸ ἀποτέλεσμα $\alpha*\beta$ ἀνήκει εἰς τὸ H.

Οὕτως, αἱ πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἰς τὸ $\mathbb{R}$ εἶναι κλειστὰι εἰς τὸ σύνολον $\mathbb{N}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, διότι τόσον τὸ ἄθροισμα, ὅσον καὶ τὸ γινόμενον φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε φυσικὸς ἀριθμός. Ἀντιθέτως, ἡ ἀφαίρεσις καὶ ἡ διαίρεσις δὲν εἶναι κλειστὰι εἰς τὸ $\mathbb{N}$, διότι $5-8\notin\mathbb{N}$ καὶ $3:5\notin\mathbb{N}$.

Παρατήρησις. Μία πρᾶξις εἰς ἓν σύνολον E συχνὰ συμβολίζεται μὲ $+$ καὶ τὴν καλοῦμεν *πρόσθεσιν* ἢ μὲ $\cdot$ καὶ τὴν καλοῦμεν *πολλαπλασιασμόν*. Τότε συμβολίζομεν ἀντιστοίχως :

τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον μὲ 0 (*μηδέν*) ἢ 1 (*μονάς*)
τὸ συμμετρικὸν τοῦ α μὲ $-\alpha$ (*ἀντίθετον τοῦ* α) ἢ $\frac{1}{\alpha}$ καὶ α^{-1} (*ἀντίστροφον τοῦ* α).

Τὸ ἀποτέλεσμα $\alpha+\beta$ καλεῖται *ἄθροισμα* τῶν α καὶ β, τὸ δὲ ἀποτέλεσμα $\alpha\cdot\beta$ *γινόμενον* τῶν α καὶ β.

Ἂν μία πρᾶξις συμβολίζεται μὲ $\cdot$, τότε τὸ ἀποτέλεσμα αὐτῆς $\alpha\cdot\beta$ συνηθίζεται νὰ γράφεται καὶ ὡς $\alpha\beta$, παραλειπομένου τοῦ συμβόλου $\cdot$ τῆς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

πράξεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ἐπίσης εἰς ἐκφράσεις, ὡς ἡ $(x\cdot y)+(x\cdot z)$, ὅπου ἐκτὸς τῆς πράξεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐμφανίζεται καὶ ἄλλη πρᾶξις, γράφομεν ἁπλούστερον $x\cdot y+x\cdot z$, παραδεχόμενοι γενικῶς, ὅπως ὁ πολλαπλασιασμὸς προηγῆται κάθε ἄλλης πράξεως, ἐκτὸς ἐὰν ἄλλως σημειώται, τῇ βοηθείᾳ παρενθέσεων ἢ ἀγκυλῶν.

7.2 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΟΜΑΔΟΣ

Ἔστωσαν ἓν σύνολον E καὶ $*$ μία πρᾶξις ἐπὶ τούτου.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Τὸ σύνολον E καλεῖται ὁμὰς ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν $*$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ πρᾶξις $*$ εἶναι προσεταιριστική, ἔχῃ οὐδέτερον στοιχεῖον καὶ τέλος, ἂν κάθε στοιχείου τοῦ E ἔχῃ συμμετρικὸν στοιχεῖον ὡς πρὸς τὴν $*$.

Ἂν ἡ πρᾶξις $*$ εἶναι ἐπὶ πλέον καὶ ἀντιμεταθετική, τότε ἡ ὁμὰς E καλεῖται *ἀντιμεταθετικὴ ὁμὰς* ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν $*$.

Οὕτω τὸ σύνολον $\mathbb{Z}$ τῶν ἀκεραίων εἶναι ὁμὰς ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν, διότι ἡ πρόσθεσις εἶναι προσεταιριστική, ἔχει οὐδέτερον στοιχεῖον τὸ 0 $(0\in\mathbb{Z})$ καὶ κάθε ἀκέραιος α ἔχει συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν τὸν ἐπίσης ἀκέραιον $-\alpha$. Τὸ $\mathbb{Z}$ εἶναι ἐπὶ πλέον ἀντιμεταθετικὴ ὁμὰς ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν, διότι ἡ πρόσθεσις εἶναι, ὡς γνωστόν, ἀντιμεταθετικὴ πρᾶξις.

Εἰς μίαν ὁμάδα E μὲ πρᾶξιν $*$ τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον ω τῆς $*$ εἶναι, ὡς γνωστόν, μονοσημάντως ὡρισμένον. Ἀλλὰ καὶ τὸ συμμετρικὸν τυχόντος στοιχείου $\alpha\in E$ εἶναι ἐπίσης μονοσημάντως ὡρισμένον, διότι ἂν β καὶ γ εἶναι συμμετρικὰ τοῦ α ὡς πρὸς τὴν $*$, τότε θὰ ἔχωμεν:

$$\alpha*\beta=\omega=\beta*\alpha \quad\text{καὶ}\quad \alpha*\gamma=\omega=\gamma*\alpha,$$

ὁπότε, ἐπειδὴ ἡ $*$ εἶναι προσεταιριστική, θὰ ἔχωμεν καὶ

$$\beta=\beta*\omega=\beta*(\alpha*\gamma)=(\beta*\alpha)*\gamma=\omega*\gamma=\gamma.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

7.3 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Ἔστωσαν E ἕν σύνολον καὶ $+, \cdot$ δύο πράξεις ἐπὶ τούτου.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Τὸ σύνολον E καλεῖται σῶμα ὡς πρὸς τὰς πράξεις $+$ καὶ $\cdot$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν τὸ E εἶναι ἀντιμεταθετικὴ ὁμὰς ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν $+$, $E^* = E - \{0\}$ εἶναι ἀντιμεταθετικὴ ὁμὰς ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν $\cdot$ καὶ ἡ πρᾶξις $\cdot$ εἶναι ἐπιμεριστικὴ ὡς πρὸς τὴν $+$.

Διὰ κάθε α, β, γ εἰς ἕν σῶμα E ἰσχύουν τὰ κάτωθι :

$\alpha+\beta = \beta+\alpha$	$\alpha\beta = \beta\alpha$
$\alpha+(\beta+\gamma) = (\alpha+\beta)+\gamma$	$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$
$\alpha+0 = \alpha = 0+\alpha$	$\alpha 1 = \alpha = 1\alpha$
$\alpha+(-\alpha) = 0 = (-\alpha)+\alpha$	$\alpha\alpha^{-1} = 1 = \alpha^{-1}\alpha, \alpha \neq 0$

$$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Ὅλα τὰ ἀνωτέρω εἶναι ἄμεσοι συνέπειαι τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ σώματος, πλὴν τῶν $\alpha\beta = \beta\alpha$, $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ καὶ $\alpha 1 = \alpha = 1\alpha$, αἱ ὁποῖαι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ σώματος ἰσχύουν διὰ α, β, γ ἐν E^*, δηλαδὴ διὰ $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ καὶ $\gamma \neq 0$. Ἀποδεικνύεται ὅμως ὅτι αὗται ἰσχύουν καὶ διὰ α, β, γ ἐν E, ὡς εὐκόλως συνάγεται, δυνάμει τῆς :

$$(\forall x \in E)\ 0x = 0 = x0\ ,$$

ἡ ὁποία προκύπτει ἀμέσως, ὡς κάτωθι :

$$0x = 0x+0 = 0x+[0x+(-0x)] = (0x+0x)+(-0x) = (0+0)x+(-0x) = 0x+(-0x) = 0$$

$$x0 = x0+0 = x0+[x0+(-x0)] = (x0+x0)+(-x0) = x(0+0)+(-x0) = x0+(-x0) = 0.$$

Εἰς ἕν σῶμα E, ἐκτὸς τῶν πράξεων τῆς προσθέσεως $+$ καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ $\cdot$, ὁρίζονται καὶ δύο νέαι πράξεις, ἡ ἀφαίρεσις $-$ καὶ ἡ διαίρεσις $:$. Αὗται ὁρίζονται, ὡς κάτωθι :

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

$$\alpha : \beta = \alpha\beta^{-1},\ \beta \neq 0.$$

Ἐκ τούτων, ἡ μὲν ἀφαίρεσις εἶναι μία πρᾶξις ἐπὶ τοῦ σώματος E, ἡ δὲ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

διαίρεσις εἶναι μία πρᾶξις εἰς τὸ σῶμα Ε, ἀλλ' ὄχι ἐπὶ τοῦ Ε. Τὸ μὲν ἀποτέλεσμα α-β καλεῖται *διαφορὰ τοῦ* β *ἐκ τοῦ* α, τὸ δὲ α:β *πηλίκον τοῦ* α *διὰ* β. Τὸ πηλίκον α:β παρίσταται καὶ ἄλλως μὲ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἢ α/β.

Εἰς τὰ ἀκολουθοῦντα θεωρήματα 7.3.1 καὶ 7.3.2 δίδονται ὡρισμέναι βασικαὶ ἰδιότητες, ἀναφερόμεναι εἰς τὴν στοιχειώδη ἀριθμητικὴν τῶν σωμάτων, μὲ τὴν ὁποίαν ὑποθέτομεν ὅτι ὁ ἀναγνώστης εἶναι ἐξοικειωμένος ἀπὸ τὴν περίπτωσιν τοῦ σώματος τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Αἱ ἀποδείξεις τῶν ἰδιοτήτων τοῦ θεωρήματος 7.3.1 ἀφίενται εἰς τὸν ἀναγνώστην.

7.3.1 ΘΕΩΡΗΜΑ. Εἰς ἓν σῶμα Ε ἰσχύουν τὰ κάτωθι :

$-(-\alpha)=\alpha$	$1/\frac{1}{\alpha}=\alpha\,,\ \alpha\neq 0$
$\alpha-0=\alpha$	$\frac{\alpha}{1}=\alpha$
$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta}\,,\ \beta\neq 0,\delta\neq 0$	$\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\beta\delta}\,,\ \beta\neq 0,\delta\neq 0$
$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}\,,\ \beta\neq 0,\delta\neq 0$	$\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}\,,\ \beta\neq 0,\gamma\neq 0,\delta\neq 0.$

7.3.2 ΘΕΩΡΗΜΑ. Εἰς ἓν σῶμα Ε ἰσχύουν τὰ κάτωθι :

(i) $(-\alpha)\beta=\alpha(-\beta)=-\alpha\beta$ καὶ $(-\alpha)(-\beta)=\alpha\beta$

(ii) $\alpha\beta=0 \iff (\alpha=0 \text{ ἢ } \beta=0)$.

Ἀπόδειξις. (i) $\alpha\beta+(-\alpha)\beta=[\alpha+(-\alpha)]\beta=0\beta=0$

$$\alpha\beta+\alpha(-\beta)=\alpha[\beta+(-\beta)]=\alpha 0=0,$$

ὁπότε, λόγῳ τοῦ μονοσημάντου τοῦ ἀντιθέτου εἰς μίαν ὁμάδα, ἰσχύει

$$-\alpha\beta=(-\alpha)\beta=\alpha(-\beta).$$

Θέτοντες εἰς τὴν $(-\alpha)\beta=\alpha(-\beta)$, ὅπου β τὸ $-\beta$ καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν, ὅτι $-(-\beta)=\beta$, συνάγομεν καὶ :

$$(-\alpha)(-\beta)=\alpha[-(-\beta)]=\alpha\beta.$$

(ii) Τὸ ὅτι $(\alpha=0 \text{ ἢ } \beta=0)\Rightarrow\alpha\beta=0$ εἶναι προφανές. Πρὸς ἀπό-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δειξιν τοῦ ἀντιστρόφου, δηλαδὴ τοῦ ὅτι $\alpha\beta=0 \Rightarrow (\alpha=0$ ἢ $\beta=0)$ παρατηροῦμεν ὅτι :

$$(\alpha\beta=0 \text{ καὶ } \alpha\neq 0)\Rightarrow \frac{1}{\alpha}(\alpha\beta)=0 \Rightarrow (\frac{1}{\alpha}\alpha)\beta=0 \Rightarrow 1\beta=0 \Rightarrow \beta=0$$

$$(\alpha\beta=0 \text{ καὶ } \beta\neq 0)\Rightarrow (\alpha\beta)\frac{1}{\beta}=0 \Rightarrow \alpha(\beta\frac{1}{\beta})=0 \Rightarrow \alpha\cdot 1=0 \Rightarrow \alpha=0.$$

Ἓν ὑποσύνολον H ἑνὸς σώματος E καλεῖται *ὑποσῶμα* τοῦ E τότε καὶ μόνον τότε, ἂν αἱ πράξεις $+$ καὶ $\cdot$ εἶναι κλεισταὶ εἰς τὸ H καὶ τὸ H εἶναι ἓν σῶμα ὡς πρὸς τὰς πράξεις ταύτας.

7.3.3 ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἔστω H ἓν ὑποσύνολον ἑνὸς σώματος E. Τὸ H εἶναι ἓν ὑποσῶμα τοῦ E τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύουν τὰ κάτωθι :

(i) Αἱ πράξεις $+$ καὶ $\cdot$ εἶναι κλειστὰι εἰς τὸ H

(ii) Τὰ οὐδέτερα στοιχεῖα 0 καὶ 1 τοῦ E ἀνήκουν εἰς τὸ H

(iii) Ἂν $a\in H$, τότε $-a\in H$, καὶ ἂν $a\in H-\{0\}$, τότε $a^{-1}\in H$.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι τὸ H εἶναι ἓν ὑποσῶμα τοῦ E. Ἡ (i) εἶναι τὸ τε προφανὴς. Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς (ii), ἔστωσαν 0_H καὶ 1_H τὰ οὐδέτερα στοιχεῖα τοῦ σώματος H, ὁπότε ἔχομεν :

$$0_H=0_H+0=0_H+[0_H+(-0_H)]=(0_H+0_H)+(-0_H)=0_H+(-0_H)=0$$

$$1_H=1_H\cdot 1=1_H(1_H1_H^{-1})=(1_H1_H)1_H^{-1}=1_H1_H^{-1}=1.$$

Ἡ (iii) συνάγεται τώρα ὡς ἑξῆς : Ἂν $(-a)_H$ εἶναι τὸ ἀντίθετον στοιχεῖον τοῦ a εἰς τὸ σῶμα H, τότε $a+(-a)_H=0_H=0$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι τὸ $(-a)_H$ εἶναι τὸ ἀντίθετου στοιχεῖον τοῦ a εἰς τὸ σῶμα E, ἤτοι $-a=(-a)_H\in H$. Ὁμοίως, ἂν a_H^{-1} εἶναι τὸ ἀντίστροφον στοιχεῖον τοῦ $a\neq 0$ εἰς τὸ σῶμα H, τότε $aa_H^{-1}=1_H=1$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι τὸ a_H^{-1} εἶναι τὸ ἀντίστροφον στοιχεῖον τοῦ a εἰς τὸ σῶμα E, ἤτοι $a^{-1}=a_H^{-1}\in H$.

Ἀντιστρόφως, δεχόμεθα ὅτι ἰσχύουν αἱ (i), (ii) καὶ (iii). Εὐκόλως συνάγεται τότε ὅτι τὸ H εἶναι μία ἀντιμεταθετικὴ ὁμὰς ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν $+$ καὶ ὅτι τὸ $H-\{0\}$ εἶναι ἐπίσης ἀντιμεταθετικὴ ὁμὰς ὡς πρὸς τὴν

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

πράξιν $\cdot$, δηλαδή τὸ H εἶναι σῶμα ὡς πρὸς τὰς πράξεις $+$ καὶ $\cdot$, ἄρα ὑποσῶμα τοῦ E.

Ἔστω ἓν σῶμα E. Ἓν σύνολον S, ὑποσύνολον τοῦ E καλεῖται *ἐπαγωγικόν* τότε καὶ μόνον τότε, ἂν

$$(i)\ 1\in S \quad \text{καὶ} \quad (ii)\ x\in S \Rightarrow x+1\in S.$$

Προφανὼς τὸ σῶμα E εἶναι ἓν ἐπαγωγικὸν σύνολον. Δυνατὸν ὅμως νὰ ὑπάρχουν καὶ ἄλλα ἐπαγωγικὰ σύνολα, ὅπως π.χ. εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ σώματος $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ὅπου τὰ σύνολα $\mathbb{Q}$ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν καὶ $\mathbb{N}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι προφανῶς ἐπαγωγικὰ σύνολα.

7.3.4 Ἡ τομὴ μιᾶς μὴ κενῆς συλλογῆς $\mathcal{C}$ ἐπαγωγικῶν συνόλων, ὑποσυνόλων τοῦ σώματος E, εἶναι ἐπίσης ἓν ἐπαγωγικὸν σύνολον.

Πράγματι· (i) $1\in\cap\mathcal{C}$, διότι $(\forall C\in\mathcal{C})\ 1\in C$

(ii) $x\in\cap\mathcal{C}\Rightarrow x+1\in\cap\mathcal{C}$, διότι $x\in\cap\mathcal{C}\Leftrightarrow(\forall C\in\mathcal{C})\ x\in C$, ἀλλὰ ἐπειδὴ C εἶναι ἐπαγωγικὸν σύνολον $x\in C\Rightarrow x+1\in C$. Ἄρα $x\in\cap\mathcal{C}\Rightarrow(\forall C\in\mathcal{C})x+1\in C$ $\Rightarrow x+1\in\cap\mathcal{C}$.

7.3.5 Ὑπάρχει ἓν ἐλάχιστον ἐπαγωγικὸν σύνολον $N(E)$, ὑποσύνολον τοῦ σώματος E.

Πραγματι· δυνάμει τῆς 7.3.4, ἡ τομὴ τῆς συλλογῆς ὅλων τῶν ἐπαγωγικῶν συνόλων, ὑποσυνόλων τοῦ E, εἶναι προφανῶς τὸ ἐλάχιστον ἐπαγωγικὸν σύνολον.

7.3.6 Αἱ πράξεις $+$ καὶ $\cdot$ εἶναι κλεισταὶ εἰς τὸ $N(E)$.

Πράγματι· ἂν m καὶ n εἶναι τυχόντα στοιχεῖα τοῦ $N(E)$, τότε τὸ σύνολον $S_m=\{x\in N(E):\ m+x\in N(E)\}$ εἶναι ἐπαγωγικόν, διότι $1\in S_m$ καὶ $x\in S_m\Rightarrow m+x\in N(E)\Rightarrow(m+x)+1\in N(E)\Rightarrow m+(x+1)\in N(E)\Rightarrow x+1\in S_m$. Ἄρα $S_m=N(E)$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι

$$[\forall x\in N(E)]\ m+x\in N(E)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καί ἐπομένως $m+n \in N(E)$.

Ὁμοίως, τό σύνολον $P_m = \{x \in N(E) : mx \in N(E)\}$ εἶναι ἐπαγωγικόν, διότι $1 \in P_m$ καί, λόγῳ τῆς κλειστότητος τῆς πράξεως + εἰς τό $N(E)$, $x \in P_m \Rightarrow mx \in N(E) \Rightarrow mx+m \in N(E) \Rightarrow m(x+1) \in N(E) \Rightarrow x+1 \in P_m$. Ἄρα $P_m = N(E)$, τό ὁποῖον σημαίνει ὅτι

$$[\forall x \in N(E)]\ mx \in N(E)$$

καί ἐπομένως $mn \in N(E)$.

Ἔστω $Z(E)$ τό σύνολον τῶν στοιχείων τοῦ E, τό ὁποῖον ἀπαρτίζεται ἀπό τό θ, τά στοιχεῖα τοῦ $N(E)$ καί τά ἀντίθετά των, ἤτοι

$$Z(E) = N(E) \cup \{0\} \cup \{x : -x \in N(E)\}.$$

7.3.7 Ἕν στοιχεῖον τοῦ E ἀνήκει εἰς τό $Z(E)$ τότε καί μόνον τότε, ἄν δύναται νά ἐκφρασθῇ ὡς διαφορά δύο στοιχείων τοῦ $N(E)$.

Πράγματι· ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι :

$$(\forall n) \quad n \in N(E) \Rightarrow n-1 \in Z(E),$$

διότι τό σύνολον $\{x : x-1 = 0 \text{ ἤ } x-1 \in N(E)\}$ εἶναι προφανῶς ἓν ἐπαγωγικόν σύνολον καί ἐπομένως ὑπερσύνολον τοῦ $N(E)$.
Τώρα διά τυχόν $m \in N(E)$, τό σύνολον $S_m = \{x : m-x \in Z(E)\}$ εἶναι ἐπαγωγικόν, διότι ἀφ' ἑνός μέν $m \in N(E) \Rightarrow m-1 \in Z(E)$, δηλαδή $1 \in S_m$, ἀφ' ἑτέρου δέ

$$(\forall x) \quad x \in S_m \Rightarrow x+1 \in S_m,$$

διότι :

(i) ἄν $m-x \in N(E)$, τότε $m-(x+1) = (m-x)-1 \in Z(E)$

(ii) ἄν $m-x = 0$, τότε $m-(x+1) = -1 \in Z(E)$

(iii) ἄν $-(m-x) \in N(E)$, τότε $-[m-(x+1)] = -(m-x)+1 \in N(E)$,

δηλαδή $m-(x+1) \in Z(E)$.
Ἐδείχθη, λοιπόν, ὅτι $N(E) \subseteq S_m$, διότι τό $N(E)$ εἶναι τό ἐλάχιστον ἐπαγωγικόν ὑποσύνολον τοῦ E, τό ὁποῖον σημαίνει ὅτι

$$(\forall m, n \text{ ἐν } N(E))\ \ m-n \in Z(E),$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δηλαδή, ὅτι κάθε στοιχεῖον, τό ὁποῖον δύναται νά ἐκφρασθῇ ὡς διαφορά δύο στοιχείων τοῦ N(E), ἀνήκει εἰς τό Z(E).

Ἀντιστρόφως, διά τυχόν στοιχεῖον $a \in Z(E)$:

(i′). ἄν $a \in N(E)$, τότε $a = (a+1)-1$

(ii′) ἄν $a = 0$, τότε $a = 1-1$

(iii′) ἄν $-a \in N(E)$, τότε $a = 1-(-a+1)$

καί ἐπομένως τό a ἐκφράζεται πάντοτε ὡς διαφορά δύο στοιχείων τοῦ N(E)

7.3.8 Αἱ πράξεις +, − καί · εἶναι κλειστοί εἰς τό Z(E).

Πράγματι· ἔστωσαν x, y τυχόντα στοιχεῖα τοῦ Z(E). Δυνάμει τῆς 7.3.7 ὑπάρχουν k, ℓ, m, n ἐν N(E) τοιαῦτα, ὥστε

$$x = k-\ell \quad \text{καί} \quad y = m-n.$$

Ἔχομεν τότε

$x+y = (k+m)-(\ell+n)$, $x-y = (k+n)-(\ell+m)$, $xy = (km+\ell n)-(kn+\ell m)$, ἄρα, δυνάμει τῆς 7.3.6, τά $x+y$, $x-y$ καί xy ἐκφράζονται ὡς διαφορά δύο στοιχείων τοῦ N(E) καί ἐπομένως, δυνάμει τῆς 7.3.7, ταῦτα ἀνήκουν ἐν Z(E).

7.3.9 Τό σύνολον $Q(E) = \{ x \in E : [\exists\, a, \beta \text{ ἐν } Z(E)]\ x = \frac{a}{\beta} \}$ εἶναι ἕν ὑποσῶμα τοῦ E καί μάλιστα τό ἐλάχιστον ὑποσῶμα τοῦ E.

Πράγματι· δυνάμει τοῦ θεωρήματος 7.3.1, αἱ πράξεις + καί · εἶναι κλειστοί εἰς τό Q(E). Τά αὐδέτερα στοιχεῖα $0 = \frac{0}{1}$ καί $1 = \frac{1}{1}$ εἶναι προφανῶς στοιχεῖα τοῦ Q(E) καί ἐπί πλέον διά τυχόν στοιχεῖον $x = \frac{a}{\beta}$ τοῦ Q(E), ἰσχύει $-x = \frac{-a}{\beta} \in Q(E)$ καί $x^{-1} = \frac{\beta}{a} \in Q(E)$, ἐφ' ὅσον εἰς τήν τελευταίαν περίπτωσιν $x \neq 0$, δηλαδή $a \neq 0$. Ἄρα δυνάμει τοῦ θεωρήματος 7.3.3, τό Q(E) εἶναι ἕν ὑποσῶμα τοῦ E.

Ἄν H εἶναι τυχόν ὑποσῶμα τοῦ E, τότε ἰσχύουν αἱ συνθῆκαι (i), (ii) καί (iii) τοῦ θεωρήματος 7.3.3. Ἄρα, δυνάμει τῶν συνθηκῶν (i) καί (ii), τό H εἶναι ἕν ἐπαγωγικόν ὑποσύνολον τοῦ E καί ἐπομένως $N(E) \subseteq H$. Τώρα, δυνάμει τῶν συνθηκῶν (ii) καί (iii) τοῦ αὐτοῦ θεωρήματος, προκύπτει ὅτι $Z(E) \subseteq H$ καί ἐπομένως $Q(E) \subseteq H$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

7.4 ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΑ ΣΩΜΑΤΑ

Συχνά ενδιαφέρουν σώματα, εἰς τὰ ὁποῖα ὁρίζεται διάταξις συνδεομένη καταλλήλως μὲ τὰς πράξεις τοῦ σώματος. Οὕτως ὁρίζεται ἡ ἔννοια τοῦ *διατεταγμένου* σώματος, ὡς κάτωθι :

ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἓν σῶμα E καλεῖται διατεταγμένον τότε καὶ μόνον τότε, ἂν τοῦτο εἶναι ἓν γραμμικῶς διατεταγμένον σύνολον μὲ συμφυεῖς διατάξεις $\leqq$ καὶ $\prec$ τοιαύτας, ὥστε διὰ κάθε x, y, z ἐν E νὰ ἰσχύουν :

$$x \prec y \Rightarrow x+z \prec y+z$$

$$0 \prec x \text{ καὶ } 0 \prec y \Rightarrow 0 \prec xy.$$

Χάριν εὐκολίας χρησιμοποιοῦνται καὶ τὰ σύμβολα $\geqq$ καὶ $\succ$ ὑπὸ τὴν ἑξῆς ἔννοιαν :

$$x \geqq y \Leftrightarrow y \leqq x \ , \quad x \succ y \Leftrightarrow y \prec x.$$

Τὰ στοιχεῖα ἑνὸς διατεταγμένου σώματος E, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει $x>0$, $x\prec 0$, $x \geqq 0$, $x \leqq 0$, καλοῦνται ἀντιστοίχως *θετικά, ἀρνητικά, μὴ ἀρνητικά, μὴ θετικά* στοιχεῖα τοῦ διατεταγμένου σώματος E. Τὸ σύνολον τῶν θετικῶν, ἀρνητικῶν, μὴ ἀρνητικῶν, μὴ θετικῶν στοιχείων τοῦ διατεταγμένου σώματος E παρίσταται ἀντιστοίχως μὲ E^+, E^-, E_0^+, E_0^-.

7.4.1 ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ σύνολον E^+ τῶν θετικῶν στοιχείων ἑνὸς διατεταγμένου σώματος E πληροῖ τὰ κάτωθι :

(i) ἡ πρόσθεσις καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι κλεισταὶ πράξεις εἰς τὸ σύνολον E^+, δηλαδὴ διὰ κάθε x, y ἐν E^+ ἰσχύει $x+y \in E^+$ καὶ $xy \in E^+$.

(ii) διὰ κάθε $x \in E$ ἰσχύει ἀκριβῶς ἓν ἐκ τῶν :

$$x \in E^+, \ x=0, \ -x \in E^+.$$

Ἀντιστρόφως, ἂν E^+ εἶναι ἓν ὑποσύνολον ἑνὸς σώματος E, τὸ ὁποῖον πληροῖ τὰς ἀνωτέρω συνθήκας (i) καὶ (ii), τότε ὑπάρχει ἀκριβῶς μία διάταξις εἰς τὸ σῶμα E, ἡ ὁποία καθιστᾷ τὸ E διατεταγμένον σῶμα μὲ E^+ τὸ σύνολον τῶν θετικῶν στοιχείων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

γμένον σῶμα μὲ σύνολον θετικῶν στοιχείων τὸ E^+.

Ἀπόδειξις. Ἡ συνθήκη (ii) εἶναι ἄμεσος συνέπεια τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ διατεταγμένου σώματος. Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν συνθήκην (i), παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ κλειστότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἰς τὸ σύνολον E^+ εἶναι προφανής, ἐνῷ διὰ τὴν πρόσθεσιν ἔχομεν, ὅτι $x>0 \Rightarrow x+y>y$ καὶ ἐπειδὴ $y>0$, λόγῳ τῆς μεταβατικότητος τῆς σχέσεως $\prec$, $x+y>0$. Ὥστε :

$$(x>0 \text{ καὶ } y>0) \Rightarrow x+y>0,$$

δηλαδὴ καὶ ἡ πρόσθεσις εἶναι κλειστὴ εἰς τὸ E^+.

Ἀντιστρόφως, ὁρίζομεν ἐν E μίαν διάταξιν ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$x \prec y \Leftrightarrow (y-x) \in E^+,$$

ἡ ὁποία, ὡς εὐκόλως διαπιστοῦται, καθιστᾷ τὸ E διατεταγμένον σῶμα μὲ σύνολον θετικῶν στοιχείων τὸ E^+. Ἐπειδὴ δὲ εἰς τυχὸν διατεταγμένον σῶμα μὲ σύνολον θετικῶν στοιχείων τὸ E^+, ἰσχύει πάντοτε

$$x \prec y \Leftrightarrow (y-x) \in E^+,$$

προκύπτει καὶ τὸ μονοσήμαντον τῆς σχέσεως διατάξεως.

Ἡ στοιχειώδης ἀριθμητικὴ τῶν διατεταγμένων σωμάτων συμπληροῦται διὰ τῶν ἀκολούθων θεωρημάτων 7.4.2 καὶ 7.4.3, αἱ ἀποδείξεις τῶν ὁποίων ἀφίενται εἰς τὸν ἀναγνώστην.

7.4.2 ΘΕΩΡΗΜΑ. Εἰς ἓν διατεταγμένον σῶμα ἰσχύουν τὰ κάτωθι :

1. $\alpha > 0 \Leftrightarrow -\alpha \prec 0$
2. ἂν $\alpha > \beta$ καὶ $\gamma > \delta$, τότε $\alpha+\gamma > \beta+\delta$
3. ἂν $\alpha > 0$ καὶ $\beta \prec 0$, τότε $\alpha\beta \prec 0$
4. ἂν $\alpha \prec 0$ καὶ $\beta \prec 0$, τότε $\alpha\beta > 0$
5. ἂν $\alpha > \beta$ καὶ $\gamma > 0$, τότε $\alpha\gamma > \beta\gamma$
6. ἂν $\alpha > \beta$ καὶ $\gamma \prec 0$, τότε $\alpha\gamma \prec \beta\gamma$
7. ἂν $\alpha > \beta \geq 0$ καὶ $\gamma > \delta \geq 0$, τότε $\alpha\gamma > \beta\delta$
8. $\alpha^2 \geq 0$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

9. ἀκριβῶς ἐν $\alpha^2+\beta^2>0$ ἤ $\alpha=\beta=0$
10. $1>0$
11. ἄν $\alpha>0$, τότε $\frac{1}{\alpha}>0$
12. ἄν $\alpha>\beta>0$, τότε $\frac{1}{\beta}>\frac{1}{\alpha}$.

7.4.3 ΘΕΩΡΗΜΑ. Εἰς ἕν διατεταγμένον σῶμα E ἰσχύουν τά κάτωθι :

1. $N(E)=E^+\cap Z(E)$
2. $0\notin N(E)$
3. $1=\min N(E)$
4. $[\forall\, x,y \text{ ἐν } Z(E)]\ x\prec y+1 \leftrightarrow x\leqq y$.

Παρατήρησις. Ἄν E εἶναι ἕν διατεταγμένον σῶμα καί n τυχόν στοιχεῖον τοῦ $N(E)$, τότε τά n, $n+1$ εἶναι διαδοχικά στοιχεῖα τοῦ $N(E)$, δηλαδή δί οὐδέν $x\in N(E)$, ἰσχύει $n\prec x\prec n+1$. Πράγματι· ἀφ' ἑνός μέν $x\prec n+1 \Rightarrow x-1\prec n$, ἀφ' ἑτέρου δέ, δυνάμει τῆς ἰδιότητος 4 τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος, $n\prec x \Rightarrow n\leqq x-1$. Ἄρα $n\leqq x-1\prec n$, δηλαδή $n\prec n$, ὅπερ ἄτοπον.

Ὡς καί εἰς τήν περίπτωσιν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, τό στοιχεῖον $1+1$ τοῦ $N(E)$ παριστῶμεν μέ 2, τό $2+1$ μέ 3 κ.ο.κ. Προφανῶς :

$$1\prec 2\prec 3\prec\cdots .$$

7.4.4 ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἄν E εἶναι ἕν διατεταγμένον σῶμα, τότε κάθε μή κενόν ὑποσύνολον τοῦ $N(E)$ ἔχει ἐλάχιστον στοιχεῖον.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τυχόν μή κενόν ὑποσύνολον S τοῦ $N(E)$ καί ὑποθέτομεν, ὅτι τοῦτο δέν ἔχει ἐλάχιστον στοιχεῖον. Ἄν

$$M=\left\{x\in N(E) : (\forall s\in S)\ x\prec s\right\},$$

προφανῶς ἰσχύει $S\cap M=\emptyset$. Ἐπί πλέον τό M εἶναι ἕν ἐπαγωγικόν σύνολον, διότι :

(1) $1\in M$, ἐπειδή τό S δέν ἔχει ἐλάχιστον στοιχεῖον καί ἐπομένως $1\notin S$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

(ii) $(\forall x)\ x\in M \Rightarrow x+1\in M$, ἄλλως ὑπάρχει $m\in M$ μὲ $m+1\notin M$, ὁπότε ὑπάρχει $s_1\in S$ μὲ $s_1 \leqq m+1$ καὶ ἐπειδὴ τὸ S δὲν ἔχει ἐλάχιστον στοιχεῖον, ὑπαρχει καὶ $s_2\in S$ μὲ $s_2 < m+1$, δηλαδὴ μὲ $s_2 \leqq m$, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὸ ὅτι $m\in M$.

Τὸ M, ὡς ἐπαγωγικὸν ὑποσύνολον τοῦ $N(E)$, προφανῶς ταυτίζεται μὲ τὸ $N(E)$, ἤτοι $M = N(E)$ καὶ ἑπομένως $S\cap M = S\cap N(E) = S \neq \emptyset$, ὅπερ ἄτοπον.

Ὡς *ἀπόλυτος τιμή* $|x|$ τυχόντος στοιχείου x ἑνὸς διατεταγμένου σώματος, ὁρίζεται εἰς μὲν τὴν περίπτωσιν $x \geqq 0$ αὐτὸ τοῦτο τὸ στοιχεῖον x, εἰς δὲ τὴν περίπτωσιν $x < 0$, τὸ $-x$, ἤτοι :

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ἂν } x \geqq 0 \\ -x, & \text{ἂν } x < 0. \end{cases}$$

Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ ἔχει τὰς κάτωθι βασικὰς ἰδιότητας :

1. $|0| = 0$
2. $|x| > 0$, ἂν $x \neq 0$
3. $|xy| = |x||y|$
4. $|x+y| \leqq |x| + |y|$ (τριγωνικὴ ἰδιότης).

Αἱ 1. καὶ 2. εἶναι προφανεῖς. Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς 3, παρατηροῦμεν ὅτι ἂν x^2 παριστᾷ, ὡς συνήθως τὸ γινόμενον xx, τότε εὐκόλως συνάγεται ὅτι

$$|x^2| = x^2 = |x|^2,$$

ὁπότε $|xy|^2 = (xy)^2 = x^2y^2 = |x|^2|y|^2 = (|x||y|)^2$ ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει ἡ 3. (διατί ;).

Ἡ ἀπόδειξις τῆς τριγωνικῆς ἰδιότητος γίνεται ὡς ἑξῆς :

$$\begin{aligned} |x+y|^2 &= (x+y)^2 \\ &= x^2+2xy+y^2 \\ &\leqq |x|^2+2xy+|y|^2 \end{aligned}$$

καὶ ἐπειδὴ $xy \leqq |xy| = |x||y|$,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$|x+y|^2 \leqq |x|^2+2\,|x||y|+|y|^2 = (|x|+|y|)^2,$$

έκ τῆς ὁποίας προκύπτει $|x+y| \leqq |x|+|y|$ (διατί ;).

Παρατήρησις. Ἡ σχέσις διατάξεως εἰς ἕν διατεταγμένον σῶμα Ε καθιστᾷ τυχόν ὑποσῶμα Η αὐτοῦ διατεταγμένου, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι τὸ Η μὲ διάταξιν τὸν περιορισμόν τῆς διατάξεως τοῦ Ε μεταξύ τῶν στοιχείων τοῦ Η (δηλαδὴ τὴν τομὴν τῆς διατάξεως τοῦ Ε μετὰ τοῦ συνόλου $H\times H$) ἀποτελεῖ ἕν διατεταγμένον σῶμα. Οὕτω τὸ ἐλάχιστον ὑποσῶμα $Q(E)$ τοῦ διατεταγμένου σώματος Ε εἶναι διατεταγμένον.

7.5 ΚΕΚΟΡΕΣΜΕΝΑ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΑ ΣΩΜΑΤΑ

Ἕν διατεταγμένον σῶμα Ε καλεῖται *κεκορεσμένον* τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ διάταξις τοῦ σώματος καθιστᾷ τὸ Ε κεκορεσμένον.

Εἰς ἕν κεκορεσμένον σῶμα Ε τὸ σύνολον $N(E)$ δὲν εἶναι φραγμένον πρὸς τὰ ἄνω, δηλαδὴ ἰσχύει τὸ ἀκόλουθον θεώρημα, τὸ ὁποῖον ἐκφράζει τὴν καλουμένην *Ἀρχιμήδειον ἰδιότητα*.

7.5.1 ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ἂν Ε εἶναι ἕν κεκορεσμένον διατεταγμένον σῶμα, τότε διὰ κάθε $x\in E$ ὑπάρχει $n\in N(E)$ τοιοῦτον, ὥστε $n > x$, ἤτοι :**

$$(\forall x\in E)(\exists n\in N(E))\ n > x.$$

Ἀπόδειξις. Δεχόμεθα ὅτι δὲν ἰσχύει τὸ συμπέρασμα, ὁπότε (πρβλ. § 2.4.3)

$$(\exists x\in E)(\forall n\in N(E))\ n \leqq x,$$

δηλαδὴ τὸ $N(E)$ εἶναι φραγμένον πρὸς τὰ ἄνω καὶ ἐπειδὴ τὸ Ε εἶναι κεκορεσμένον, ὑπάρχει τὸ $\sup N(E)$. Τότε ὅμως διὰ τυχόν $n\in N(E)$ ἰσχύει $n+1\in N(E)$ καὶ ἑπομένως $n+1 \leqq \sup N(E)$, ἄρα $n \leqq \sup N(E)-1$. Ὥστε $(\forall n\in N(E))\ n \leqq \sup N(E)-1$, δηλαδὴ τὸ $\sup N(E)-1$ εἶναι ἕν ἄνω φράγμα τοῦ $N(E)$, ὅπερ ἄτοπον.

Ὡς συνέπειαι τῆς Ἀρχιμηδείου ἰδιότητος συνάγονται καὶ τὰ ἑξῆς :

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$(\forall x>0)(\forall y\in E)(\exists n\in N(E))\ nx>y$$

$$(\forall x>0)(\exists n\in N(E))\ \frac{1}{n}<x,$$

αἱ ἀποδείξεις τῶν ὁποίων ἀφίενται εἰς τὸν ἀναγνώστην.

Ἀκολούθως θά δείξωμεν ὅτι τὸ ἐλάχιστον ὑποσῶμα $Q(E)$ ἑνός κεκορεσμένου διατεταγμένου σώματος E εἶναι *πυκνόν ἐν* E, ὑπό τὴν ἔννοιαν, ὅτι ἰσχύει τὸ ἀκόλουθον θεώρημα.

7.5.2 ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἄν E εἶναι ἕν κεκορεσμένον διατεταγμένον σῶμα, τότε διά κάθε x, y ἐν E μέ $x<y$, ὑπάρχει $r\in Q(E)$ τοιοῦτον, ὥστε

$$x<r<y.$$

Ἀπόδειξις. Διακρίνομεν τάς ἑξῆς περιπτώσεις:

(i) $x>0$. Θεωροῦμεν, δυνάμει τῆς Ἀρχιμηδείου ἰδιότητος, ἕν ὡρισμένον $n\in N(E)$ μέ $n>\frac{1}{y-x}$, ὡς ἐπίσης καί τό σύνολον $\{z\in N(E): z>nx\}$, τό ὁποῖον, δυνάμει πάλιν τῆς Ἀρχιμηδείου ἰδιότητος, εἶναι μή κενόν καί ἐπομένως, κατά τό θεώρημα 7.4.4, ἔχει ἐλάχιστον στοιχεῖον, ἔστω m. Προφανῶς (ἐπειδή $x>0$) $m-1\leqq nx<m$, ἄρα $nx<m\leqq nx+1$ καί ἐπειδή

$$n>\frac{1}{y-x}\Rightarrow nx+1<ny,$$

προκύπτει $nx<m<ny$, ἤτοι $x<\frac{m}{n}<y$, δηλαδή τό συμπέρασμα τοῦ θεωρήματος.

(ii) $x\leqq 0$. Θεωροῦμεν, δυνάμει τῆς Ἀρχιμηδείου ἰδιότητος, ἕν ὡρισμένον $k\in N(E)$ μέ $k>-x$, ὁπότε $0<x+k<y+k$ καί ἐπομένως, κατά τήν προηγουμένην περίπτωσιν, ὑπάρχει $r_1\in Q(E)$ τοιοῦτον, ὥστε $x+k<r_1<y+k$. Θέτοντες τώρα $r=r_1-k$ (προφανῶς $r\in Q(E)$) ἔχομεν καί εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην $x<r<y$, δηλαδή τό συμπέρασμα τοῦ θεωρήματος.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

7.5.3 ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν E εἶναι ἓν κεκορεσμένον διατεταγμένον σῶμα, z τυχὸν στοιχεῖον αὐτοῦ καὶ

$$A_z = \{ x \in Q(E) : x \prec z \}$$

$$B_z = \{ x \in Q(E) : x \succ z \}$$

τότε ὑπάρχουν τὰ $\sup A_z$, $\inf B_z$ καὶ ἰσχύει

$$\sup A_z = z = \inf A_z .$$

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα ὑπάρχει $x \in Q(E)$ μὲ $z-1 \prec x \prec z$ καὶ ἑπομένως $A_z \neq \emptyset$. Ἐπειδὴ προφανῶς τὸ z εἶναι ἄνω φράγμα τοῦ A_z, ὑπάρχει τὸ $\sup A_z$ καὶ μάλιστα $\sup A_z \leqq z$. Ἂν τώρα δεχθῶμεν ὅτι $\sup A_z \prec z$, τότε κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα ὑπάρχει $r \in Q(E)$ μὲ $\sup A_z \prec r \prec z$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον, διότι $r \prec z$ συνεπάγεται $r \in A_z$ καὶ τοῦτο $r \leqq \sup A_z$. Ὥστε ἰσχύει $\sup A_z = z$. Ἡ ἀπόδειξις ὅτι ὑπάρχει τὸ $\inf B_z$ καὶ ἰσοῦται μὲ τὸ z εἶναι ὁμοία.

Ἂν α, β εἶναι μὴ ἀρνητικὰ στοιχεῖα ἑνὸς διατεταγμένου σώματος τοιαῦτα, ὥστε $\alpha = \beta^2$, τότε τὸ β καλεῖται *τετραγωνικὴ ρίζα* τοῦ α καὶ παρίσταται μὲ $\sqrt{\alpha}$, ἤτοι $\beta = \sqrt{\alpha}$.

7.5.4 ΘΕΩΡΗΜΑ. Εἰς ἓν κεκορεσμένον διατεταγμένον σῶμα κάθε μὴ ἀρνητικὸν στοιχεῖον ἔχει μίαν μονοσημάντως ὡρισμένην τετραγωνικὴν ρίζαν.

Ἀπόδειξις. Ἔστω E ἓν κεκορεσμένον διατεταγμένον σῶμα καὶ α τυχὸν μὴ ἀρνητικὸν στοιχεῖον τοῦ E. Ἐπειδὴ εἰς τὸ σύνολον E_0^+ τῶν μὴ ἀρνητικῶν στοιχείων τοῦ E ἰσχύει, ὡς εὐκόλως συνάγεται, ἡ ἰσοδυναμία

$$x^2 \prec y^2 \Leftrightarrow x \prec y ,$$

εἶναι προφανές, ὅτι ὑπάρχει τὸ πολὺ μία τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ α.

Θεωροῦμεν τώρα τὸ σύνολον $A = \{ x \in E : 0 \leqq x \leqq 1+\alpha \}$ (προφανῶς $(1+\alpha)^2 > \alpha$ καὶ ἑπομένως, ἂν ὑπάρχῃ ἡ $\sqrt{\alpha}$, τότε $\sqrt{\alpha} \in A$). Τὸ σύνολον τοῦτο μὲ τὴν ἐνυπάρχουσαν εἰς αὐτὸ διάταξιν τοῦ E ἀποτε-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

λεῖ. ἓν κεκορεσμένον διατεταγμένον σύνολον μὲ μέγιστον καὶ ἐλάχιστον στοιχεῖον. Θεωροῦμεν ἐπίσης καὶ τὴν συνάρτησιν φ, ἡ ὁποία ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\varphi(x) = x+\lambda(a-x^2),\ x\in A,$$

ὅπου λ εἶναι ἓν ὡρισμένον στοιχεῖον μὲ $0<\lambda\leq\frac{1}{2(1+a)}$. Ἡ συνάρτησις φ εἶναι γνησίως αὔξουσα, διότι διὰ τυχόντα x,y ἐν A μὲ $x<y$ ἔχομεν ἀφ' ἑνὸς μὲν

$$\varphi(x)-\varphi(y) = x-y+\lambda(y^2-x^2) = (x-y)[1-\lambda(x+y)],$$

ἀφ' ἑτέρου δὲ

$$1-\lambda(x+y) > 1-\lambda 2(1+a) \geq 0$$

καὶ ἐπομένως $\varphi(x)-\varphi(y)<0$, ἤτοι $\varphi(x)<\varphi(y)$. Ἡ φ ὡς μονότονος καὶ τοιαύτη, ὥστε $\varphi(0)\geq 0$ καὶ $\varphi(1+a)\leq 1+a$ εἶναι προφανῶς μία ἀπεικόνισις τοῦ A εἰς τὸν ἑαυτόν του.

Δυνάμει τοῦ θεωρήματος 6.3.1 (θεώρημα σταθεροῦ σημείου τοῦ Knaster) ὑπάρχει ἓν στοιχεῖον $\beta\in A$ (τοῦτο προφανῶς εἶναι μὴ ἀρνητικόν) τοιοῦτον, ὥστε $\varphi(\beta)=\beta$, ἤτοι $\beta=\beta+\lambda(a-\beta^2)$, τὸ ὁποῖον δίδει $a=\beta^2$ καὶ ἀποδεικνύει τὴν ὕπαρξιν τῆς $\sqrt{a}$.

Ὡρισμέναι χρήσιμοι ἰδιότητες τῆς τετραγωνικῆς ρίζης εἶναι αἱ κάτωθι:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

ἂν a,β εἶναι μὴ ἀρνητικά, τότε $\sqrt{a\beta}=\sqrt{a}\sqrt{\beta}$

$$\sqrt{(a+\gamma)^2+(\beta+\delta)^2} \leq \sqrt{a^2+\beta^2}+\sqrt{\gamma^2+\delta^2}$$

αἱ ἀποδείξεις τῶν ὁποίων ἀφίενται εἰς τὸν ἀναγνώστην.

Παρατήρησις. Εἰς ἓν κεκορεσμένον διατεταγμένον σῶμα E τὸ σύνολον τῶν θετικῶν στοιχείων του συμπίπτει μὲ τὸ $\{x\in E: x\neq 0$ καὶ $(\exists y\in E)\ x=y^2\}$, τὸ ὁποῖον προφανῶς ὁρίζεται ἀνεξαρτήτως τῆς διατάξεως τοῦ E. Ἑπομένως ὑπάρχει τὸ πολὺ μία διάταξις, ἡ ὁποία καθιστᾷ ἓν σῶμα, κεκορεσμένον διατεταγμένον σῶμα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

7.6 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δείξατε, ὅτι τὸ δυναμοσύνολον $\mathcal{P}(\Omega)$, ὅπου Ω εἶναι τυχὸν μὴ κενὸν σύνολον, ἀποτελεῖ ἀντιμεταθετικὴν ὁμάδα ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν $\dot{+}$ *(συμμετρικὴ διαφορά)*, τὴν ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ τύπου

$$A \dot{+} B = (A - B) \cup (B - A).$$

2. Δείξατε, ὅτι :

(i) Ἡ τομὴ μιᾶς μὴ κενῆς συλλογῆς ὑποσωμάτων ἑνὸς σώματος E εἶναι ἐπίσης ἕν ὑποσῶμα τοῦ E.

(ii) Ἂν $\mathcal{H}$ εἶναι ἡ συλλογὴ ὅλων τῶν ὑποσωμάτων ἑνὸς σώματος E, τότε

$$Q(E) = \bigcap \mathcal{H}.$$

3. Ἔστωσαν E, G δύο σώματα καὶ $\varphi : E \mapsto G$ μία συνάρτησις τοιαύτη, ὥστε διὰ κάθε x, y ἐν E

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \text{καὶ} \quad \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y).$$

Δείξατε, ὅτι :

(i) $(\forall\, x, y \text{ ἐν } E) \quad \varphi(x-y) = \varphi(x) - \varphi(y)$.

(ii) Ἂν $\mathcal{R}(\varphi) \neq \{0\}$, τότε :

(α) $\varphi(1) = 1$

(β) $(\forall\, x, y \neq 0 \text{ ἐν } E) \quad \varphi\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(y)}$

(γ) φ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος

(δ) $\mathcal{R}(\varphi)$ εἶναι ἕν ὑποσῶμα τοῦ G.

4. Ἔστωσαν $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ τὸ σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ $+, \cdot$ πράξεις ἐπὶ τοῦ $\mathbb{C}$, ὁριζόμεναι ὑπὸ τῶν τύπων :

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Δείξατε, ὅτι τὸ $\mathbb{C}$ ἀποτελεῖ σῶμα ὡς πρὸς τὰς πράξεις ταύτας, καλούμενον *σῶμα τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν*, τὸ ὁποῖον ὅμως δὲν εἶναι διατεταγμένον σῶμα.

5. Δείξατε, ὅτι διὰ τὸ σῶμα $\mathbb{C}$ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν ἰσχύουν :

$$N(\mathbb{C}) = \{ (x, 0) : x \in N \}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$Z(\mathbb{C}) = \{(x,0) : x \in \mathbb{Z}\}$$

$$Q(\mathbb{C}) = \{(x,0) : x \in \mathbb{Q}\}.$$

6. Ἔστωσαν A τυχὸν ὑποσύνολον ἑνὸς διατεταγμένου σώματος E καὶ $-A = \{x \in E : -x \in A\}$. Δείξατε, ὅτι :

(i) τὸ στοιχεῖον α εἶναι ἕν ἄνω φράγμα τοῦ A τότε καὶ μόνον τότε, ἂν τὸ $-\alpha$ εἶναι ἕν κάτω φράγμα τοῦ $-A$.

(ii) τὸ στοιχεῖον $\beta \in E$ εἶναι ἕν κάτω φράγμα τοῦ A τότε καὶ μόνον τότε, ἂν τὸ $-\beta$ εἶναι ἕν ἄνω φράγμα τοῦ $-A$.

(iii) τὸ $\inf A$ ὑπάρχει τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ τὸ $\sup(-A)$ καὶ μάλιστα, ἐφ' ὅσον ταῦτα ὑπάρχουν, ἰσχύει

$$\inf A = -\sup(-A).$$

(iv) τὸ $\sup A$ ὑπάρχει τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ τὸ $\inf(-A)$ καὶ μάλιστα, ἐφ' ὅσον ταῦτα ὑπάρχουν, ἰσχύει

$$\sup A = -\inf(-A).$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

8. ΕΠΑΓΩΓΗ

Η *μαθηματική επαγωγή* αποτελεί μίαν θεμελιώδη τεχνικήν δι' όλους τούς κλάδους των μαθηματικών. Ενταύθα θά δώσωμεν τάς έννοίας της *επαγωγικής αποδείξεως* και του *επαγωγικού ορισμού*.

8.1 ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΠΑΓΩΓΙΚΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΣ

Έστωσαν Ε ένν διατεταγμένον σώμα, $N(E)$ τό ελάχιστον επαγωγικόν υποσύνολόν του και διά τυχόν $x\in N(E)$, $N_x(E)=\{y\in N(E): 1\leqq y\leqq x\}$. Άν $P(x)$ είναι είς προτασιακός τύπος με σύνολον αναφοράς τό $N(E)$ και υποθέσωμεν αφ' ενός μέν ότι ή πρότασις $P(1)$ είναι αληθής, αφ' ετέρου δέ ότι διά τυχόν $x\in N(E)$ ισχύει

$$(\forall y\in N_x(E))\ P(y) \longrightarrow P(x+1),$$

τότε τό σύνολον

$$S=\{x\in N(E): (\forall y\in N_x(E))\ P(y)\}$$

είναι επαγωγικόν υποσύνολον του $N(E)$. Πράγματι:

$1\in S$, διότι $N_1(E)=\{1\}$ και $P(1)$ αληθής

$$x\in S \longrightarrow (\forall y\in N_x(E))\ P(y) \longrightarrow P(x+1).$$

Άρα τό S, ως επαγωγικόν υποσύνολον του $N(E)$, συμπίπτει με τούτο και επομένως διά τυχόν x

$$x\in N(E) \longrightarrow (\forall y\in N_x(E))\ P(y) \longrightarrow P(x),$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δηλαδή ισχύει

$$(\forall x \in N(E))\ P(x).$$

Ὥστε ἐδείχθη τὸ κάτωθι θεώρημα γνωστὸν ὡς *ἀρχὴ τῆς ἐπαγωγικῆς ἀποδείξεως*.

8.1.1 ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν Ε εἶναι ἓν διατεταγμένον σῶμα καὶ P(x) εἷς προτασιακὸς τύπος μὲ σύνολον ἀναφορᾶς τὸ N(E) τοιοῦτος, ὥστε:

$$P(1) \text{ εἶναι ἀληθὴς πρότασις}$$

καὶ διὰ τυχὸν $x \in N(E)$,

$$(\forall y \in N_x(E))\ P(y) \longrightarrow P(x+1),$$

τότε ὁ προτασιακὸς τύπος P(x) ἰσχύει δι' ὅλα τὰ $x \in N(E)$, δηλαδὴ ἰσχύει

$$(\forall x \in N(E))\ P(x).$$

Ἡ συνθήκη

$$(\forall y \in N_x(E))\ P(y) \longrightarrow P(x+1),$$

ἡ ὁποία ἐμφανίζεται εἰς τὸ ἀνωτέρω θεώρημα εἶναι προφανῶς συνέπεια τῆς συνθήκης

$$P(x) \longrightarrow P(x+1),$$

ἡ ὁποία διαπιστοῦται συχνὰ εἰς διαφόρους (ἐπαγωγικὰς) ἀποδείξεις. Εἶναι ἐπομένως σκόπιμον νὰ διατυπώσωμεν τὸ ἀκόλουθον πόρισμα, τὸ ὁποῖον εὑρίσκει πολλὰς ἐφαρμογάς.

8.1.2 ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἂν Ε εἶναι ἓν διατεταγμένον σῶμα καὶ P(x) εἷς προτασιακὸς τύπος μὲ σύνολον ἀναφορᾶς τὸ N(E) τοιοῦτος, ὥστε:

$$P(1) \text{ εἶναι ἀληθὴς πρότασις}$$

καὶ διὰ τυχὸν $x \in N(E)$,

$$P(x) \longrightarrow P(x+1)$$

τότε ὁ προτασιακὸς τύπος P(x) ἰσχύει δι' ὅλα τὰ $x \in N(E)$, δηλαδὴ ἰσχύει

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$(\forall x \in N(E))\, P(x).$$

Ὁμοίως συχνὰ ἐφαρμόζεται καὶ τὸ ἑξῆς πόρισμα.

8.1.3 ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἂν E εἶναι ἓν διατεταγμένον σῶμα καὶ $P(x)$ εἷς προτασιακὸς τύπος μὲ σύνολον ἀναφορᾶς τὸ $N(E)$ τοιοῦτος, ὥστε:

$P(1)$ καὶ $P(2)$ εἶναι ἀληθεῖς προτάσεις

καὶ διὰ τυχὸν $x \in N(E) - \{1\}$,

$$P(x-1) \text{ καὶ } P(x) \Longrightarrow P(x+1),$$

τότε ὁ προτασιακὸς τύπος $P(x)$ ἰσχύει δι' ὅλα τὰ $x \in N(E)$, δηλαδὴ ἰσχύει

$$(\forall x \in N(E))\, P(x).$$

Ἀπόδειξις. Προφανῶς $P(1) \Longrightarrow P(2)$, διότι $P(1)$ καὶ $P(2)$ εἶναι ἀμφότεραι ἀληθεῖς προτάσεις, δηλαδὴ ἰσχύει

$$(\forall y \in N_1(E))\, P(y) \Longrightarrow P(1+1).$$

Διὰ $x \in N(E) - \{1\}$, ἰσχύει

$$(\forall y \in N_x(E))\, P(y) \Longrightarrow (P(x-1) \text{ καὶ } P(x)) \Longrightarrow P(x+1).$$

Ὥστε διὰ τυχὸν $x \in N(E)$

$$(\forall y \in N_x(E))\, P(y) \Longrightarrow P(x+1)$$

καὶ κατὰ τὸ θεώρημα 8.1.1 ἰσχύει καὶ

$$(\forall x \in N(E))\, P(x).$$

8.2 ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΕΠΑΓΩΓΙΚΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ

Δυνάμει τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπαγωγικῆς ἀποδείξεως συνάγεται ἐπίσης καὶ μία ἀρχὴ *ἐπαγωγικοῦ ὁρισμοῦ*, ἡ ὁποία ἀποδεικνύει τὴν ὕπαρξιν μιᾶς συναρτήσεως f, ὁριζομένης ἐπὶ τοῦ συνόλου $N(E)$, ὅπου E εἶναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἓν διατεταγμένον σῶμα, ὅταν ἔχῃ δοθῇ ἡ τιμὴ $f(1)$ αὐτῆς καὶ μία διαδικασία, διὰ τῆς ὁποίας διὰ κάθε $x\in N(E)$ νὰ καθορίζεται μονοσημάντως ἡ τιμὴ $f(x+1)$, τῇ βοηθείᾳ τῶν τιμῶν τῆς f διὰ τὰ διάφορα στοιχεῖα τοῦ συνόλου $N_x(E)$. Ἀκριβέστερον ἰσχύει τὸ κάτωθι θεώρημα.

8.2.1 ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἔστωσαν E ἓν διατεταγμένον σῶμα, A ἓν μὴ κενὸν σύνολον καὶ $\mathcal{G}$ τὸ σύνολον ὅλων τῶν συναρτήσεων $g: N_x(E)\mapsto A$, ὅπου x εἶναι τυχὸν στοιχεῖον τοῦ $N(E)$. Ἂν F εἶναι μία συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ $\mathcal{G}$ καὶ τιμὰς εἰς τὸ A καὶ a εἶναι στοιχεῖον τοῦ A, τότε ὑπάρχει ἀκριβῶς μία συνάρτησις $f: N(E)\mapsto A$ τοιαύτη, ὥστε $f(1)=a$ καὶ διὰ κάθε $x\in N(E)$

$$f(x+1)=F(f|N_x(E)).$$

Ἀπόδειξις. Ἔστω

$$\mathcal{F}=\{g\in\mathcal{G}: g(1)=a \text{ καὶ } (\forall x)\ x+1\in\mathcal{D}(g)\Rightarrow g(x+1)=F(g|N_x(E))\}.$$

Ἂν g,h εἶναι τυχοῦσαι συναρτήσεις ἐν $\mathcal{F}$, τότε ἰσχύει $g\subseteq h$ ἢ $h\subseteq g$, δηλαδὴ ἡ μία τούτων εἶναι περιορισμὸς τῆς ἄλλης. Πράγματι· εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν τὸ σύνολον $\{x\in\mathcal{D}(g)\cap\mathcal{D}(h): g(x)\neq h(x)\}$ εἶναι ἓν μὴ κενὸν ὑποσύνολον τοῦ $N(E)$, τὸ ὁποῖον κατὰ τὸ θεώρημα 7.4.4 ἔχει ἐλάχιστον στοιχεῖον, ἔστω y. Ἐπειδὴ $g(1)=a=h(1)$, ἔχομεν $y\neq 1$ καὶ $g|N_{y-1}(E)=h|N_{y-1}(E)$ καὶ ἑπομένως

$$g(y)=F(g|N_{y-1}(E))=F(h|N_{y-1}(E))=h(y),$$

ὅπερ ἄτοπον.

Τὸ σύνολον $f=\bigcup\mathcal{F}$, τὸ ὁποῖον προφανῶς εἶναι ἓν σύνολον διατεταγμένων ζευγῶν ἀποτελεῖ μίαν συνάρτησιν. Πράγματι· ἂν (x,y) καὶ (x,z) εἶναι τυχόντα στοιχεῖα τοῦ συνόλου f, τότε ὑπάρχουν συναρτήσεις g καὶ h ἐν $\mathcal{F}$ μὲ $(x,y)\in g$ καὶ $(x,z)\in h$. Ἀλλὰ ἡ μία τῶν g,h εἶναι περιορισμὸς τῆς ἄλλης καὶ ἑπομένως ἀμφότερα τὰ (x,y), (x,z) ἀνήκουν εἰς μίαν τῶν συναρτήσεων g,h, τὸ ὁποῖον συνεπάγεται, ὅτι $y=z$. Ὥστε ἐδείχθη, ὅτι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$(x,y)\in f \text{ και } (x,z)\in f \Rightarrow y=z,$$

δηλαδή, ὅτι τὸ f εἶναι συνάρτησις.

Διὰ τὴν συνάρτησιν f ἰσχύει

$$f(1)=a,$$

διότι διὰ τυχοῦσαν $g\in\mathcal{F}$ ἔχομεν $(1,a)\in g$ καὶ ἑπομένως $(1,a)\in\cup\mathcal{F}=f$.

Ἐπίσης διὰ τυχὸν $x\in N(E)$ μὲ $x+1\in\mathcal{D}(f)$ ὑπάρχει $g\in\mathcal{F}$ μὲ $x+1\in\mathcal{D}(g)$ καὶ ἑπομένως

$$f(x+1)=g(x+1)=F\left(g\,|\,N_x(E)\right)=F(f\,|\,N_x(E)).$$

Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι κάθε στοιχεῖον τοῦ $N(E)$ ἀνήκει εἰς τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῆς f. Πράγματι· εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν τὸ σύνολον $\{x\in N(E): x\notin\mathcal{D}(f)\}$ εἶναι μὴ κενὸν ὑποσύνολον τοῦ $N(E)$ καὶ κατὰ τὸ θεώρημα 7.4.4 ἔχει ἐλάχιστον στοιχεῖον, ἔστω y, τὸ ὁποῖον εἶναι διάφορον τοῦ 1, διότι προφανῶς $1\in\mathcal{D}(f)$. Ἄρα $N_{y-1}(E)\subseteq\mathcal{D}(f)$, ὁπότε, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ἡ συνάρτησις $f\,|\,N_{y-1}(E)$ ἀνήκει εἰς τὸ $\mathcal{F}$ καὶ ἑπομένως καὶ ἡ

$$(f\,|\,N_{y-1}(E))\cup\{(y,F(f\,|\,N_{y-1}(E)))\}$$

ἀνήκει εἰς τὸ $\mathcal{F}$. Συνεπῶς $(y,F(f\,|\,N_{y-1}(E)))\in\cup\mathcal{F}=f$, τὸ ὁποῖον συνεπάγεται, ὅτι $y\in\mathcal{D}(f)$, ὅπερ ἄτοπον.

Ὥστε ἐδείχθη ἡ ὕπαρξις μιᾶς συναρτήσεως f ἱκανοποιούσης τὰς συνθήκας τοῦ θεωρήματος. Ὑπολείπεται, ὅθεν, νὰ δειχθῇ τὸ μονοσήμαντον ταύτης. Πρὸς τοῦτο, ὑποθέτομεν, ὅτι ὑπάρχει καὶ ἄλλη συνάρτησις $\hat{f}: N(E)\mapsto A$ ἱκανοποιοῦσα τὰς συνθήκας τοῦ θεωρήματος, ὁπότε τὸ σύνολον $\{x\in N(E): f(x)\neq\hat{f}(x)\}$ εἶναι μὴ κενὸν ὑποσύνολον τοῦ $N(E)$ καὶ κατὰ τὸ θεώρημα 7.4.4 ἔχει ἐλάχιστον στοιχεῖον, ἔστω y, τὸ ὁποῖον εἶναι διάφορον τοῦ 1, διότι $f(1)=a=\hat{f}(1)$. Ἀλλὰ τότε ἔχομεν $f\,|\,N_{y-1}(E)=\hat{f}\,|\,N_{y-1}(E)$ καὶ ἑπομένως

$$f(y)=F(f\,|\,N_{y-1}(E))=F(\hat{f}\,|\,N_{y-1}(E))=\hat{f}(y),$$

ὅπερ ἄτοπον.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παράδειγμα : $A = E$, $a = 1$ · καί

$$F(g) = (x+1)\,g(x),$$

ὅπου $g \in \mathcal{F}$ καί $\mathcal{D}(g) = N_x(E)$. Δυνάμει τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ὑπάρχει ἀκριβῶς μία συνάρτησις $f : N(E) \longmapsto E$ τοιαύτη, ὥστε

$$f(1) = 1$$

καί διά κάθε $x \in N(E)$

$$f(x+1) = F\left(f \mid N_x(E)\right) = (x+1)\,f(x).$$

Ἡ τιμή $f(x)$ παρίσταται συνήθως μέ $x!$ καί ἀναγιγνώσκεται "x παραγοντικόν". Οὕτως ἔχομεν

$$1! = 1.$$

$$(\forall\, x \in N(E))\ (x+1)! = (x+1)(x!).$$

Παρατηρήσεις. 1. Ἄν ὁ προτασιακός τύπος $P(x)$ ἔχει σύνολον ἀναφορᾶς ἕν σύνολον τῆς μορφῆς $S_k = \{x \in Z(E) : k \leq x\}$, ὅπου k στοιχεῖον τοῦ $Z(E)$, τότε ὁ προτασιακός τύπος $Q(x) = P(x+k-1)$ ἔχει σύνολον ἀναφορᾶς τό $N(E)$ καί μάλιστα ἰσχύει

$$(\forall\, x \in N(E))\ Q(x) \Longleftrightarrow (\forall\, x \in S_k)\ P(x).$$

Ἄρα πρός διαπίστωσιν τῆς ἀληθείας τῆς προτάσεως $(\forall x \in S_k)\ P(x)$ δύναται νά ἐφαρμοσθῇ ἡ ἀρχή τῆς ἐπαγωγικῆς ἀποδείξεως διά τόν προτασιακόν τύπον $Q(x)$.

Ὁμοίως καί ἡ ἀρχή τοῦ ἐπαγωγικοῦ ὁρισμοῦ δύναται νά ἐφαρμοσθῇ, διά νά ὁρισθῇ μία συνάρτησις $f : S_k \longmapsto A$ μέ δεδομένην τιμήν $f(k) = a \in A$, διά μεταφορᾶς τοῦ προβλήματος εἰς τόν ὁρισμόν μιᾶς συναρτήσεως h, συνδεομένης μετά τῆς f διά τοῦ τύπου

$$h(x) = f(x+k-1),\ x \in N(E).$$

2. Εἰς τήν περίπτωσιν $E = \mathbb{R}$ τό σύνολον $N(\mathbb{R})$ συμπίπτει μέ τό σύνολον $\mathbb{N}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καί ἑπομένως εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην δύναται νά ἐφαρμοσθῇ τόσον ἡ ἀρχή τῆς ἐπαγωγικῆς ἀπο-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δείξεως, ὅσον καὶ ἡ ἀρχὴ τοῦ ἐπαγωγικοῦ ὁρισμοῦ.

8.3 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἔστωσαν E ἕν διατεταγμένον σῶμα, $S_k = \{y \in Z(E) : k \leqq y\}$ καὶ $S_{kx} = \{y \in Z(E) : k \leqq y \leqq x\}$, ὅπου k, x στοιχεῖα τοῦ $Z(E)$. Δείξατε, ὅτι ἂν $P(x)$ εἶναι εἷς προτασιακὸς τύπος μὲ σύνολον ἀναφορᾶς τὸ S_k τοιοῦτος, ὥστε

$P(k)$ εἶναι ἀληθὴς πρότασις

καὶ διὰ τυχὸν $x \in S_k$,

$$(\forall y \in S_{kx})\, P(y) \longrightarrow P(x+1),$$

τότε ὁ προτασιακὸς τύπος $P(x)$ ἰσχύει δι' ὅλα τὰ $x \in S_k$, δηλαδὴ ἰσχύει

$$(\forall x \in S_k)\, P(x).$$

2. Δείξατε, ὅτι ἂν E καὶ S_k ὡς ἐν τῇ ἀσκήσει 1 καὶ $P(x)$ εἶναι εἷς προτασιακὸς τύπος μὲ σύνολον ἀναφορᾶς τὸ S_k καὶ τοιοῦτος, ὥστε

$P(k)$ εἶναι ἀληθὴς πρότασις

καὶ διὰ τυχὸν $x \in S_k$,

$$P(x) \longrightarrow P(x+1),$$

τότε ὁ προτασιακὸς τύπος $P(x)$ ἰσχύει δι' ὅλα τὰ $x \in S_k$, δηλαδὴ ἰσχύει

$$(\forall x \in S_k)\, P(x).$$

3. Δείξατε, ὅτι ἂν E καὶ S_k ὡς ἐν τῇ ἀσκήσει 1 καὶ $P(x)$ εἶναι εἷς προτασιακὸς τύπος μὲ σύνολον ἀναφορᾶς τὸ S_k καὶ τοιοῦτος, ὥστε

$P(k)$ καὶ $P(k+1)$ εἶναι ἀληθεῖς προτάσεις

καὶ διὰ τυχὸν $x \in S_k - \{k\}$,

$$P(x-1) \text{ καὶ } P(x) \longrightarrow P(x+1),$$

τότε ὁ προτασιακὸς τύπος $P(x)$ ἰσχύει δι' ὅλα τὰ $x \in S_k$, δηλαδὴ ἰσχύει

$$(\forall x \in S_k)\, P(x).$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

4. Έστωσαν E, S_k καί S_{kx}, ώς ἐν τῇ ἀσκήσει 1, A ἄν μή κενόν σύνολον καί $\mathfrak{F}$ τό σύνολον ὅλων τῶν συναρτήσεων $g : S_{kx} \longmapsto A$. Δείξατε, ὅτι, ἄν F εἶναι μία συνάρτησις μέ πεδίον ὁρισμοῦ τό $\mathfrak{F}$ καί τιμάς εἰς τό A καί a εἶναι στοιχεῖον τοῦ A, τότε ὑπάρχει ἀκριβῶς μία συνάρτησις $f : S_k \longmapsto A$ τοιαύτη, ὥστε $f(k) = a$ καί διά κάθε $x \in S_k$

$$f(x+1) = F(f \mid S_{kx}).$$

9. ΙΣΟΜΟΡΦΙΣΜΟΣ ΙΣΟΜΟΡΦΑ ΣΩΜΑΤΑ

9.1 ΙΣΟΜΟΡΦΙΣΜΟΣ

Εἰς διάφορα προβλήματα θεωροῦνται σύνολα, τὰ ὁποῖα συνδέονται μεταξύ των διὰ μιᾶς ἀμφιμονοσημάντου ἀπεικονίσεως τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τοῦ ἄλλου. Μέσῳ μιᾶς τοιαύτης ἀπεικονίσεως, τυχὸν σχέσεις ἢ πράξεις εἰς τὸ ἕν σύνολον συνδέονται μὲ σχέσεις ἢ πράξεις τοῦ ἄλλου συνόλου.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἂν σ εἶναι μία σχέσις εἰς τὸ σύνολον A καὶ τ μία σχέσις εἰς τὸ B, τότε λέγομεν, ὅτι «(A,σ) εἶναι ἰσόμορφον τοῦ (B,τ)» τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις f τοῦ A ἐπὶ τοῦ B τοιαύτη, ὥστε

$$(\forall\, x,y \text{ ἐν } A)\; x\sigma y \Rightarrow f(x)\tau f(y).$$

Ἡ f καλεῖται τότε εἰς ἰσομορφισμὸς τοῦ (A,σ) ἐπὶ τοῦ (B,τ).

Προφανῶς ἡ f^{-1} εἶναι τότε εἷς ἰσομορφισμὸς τοῦ (B,τ) ἐπὶ τοῦ (A,σ), τὸ ὁποῖον σημαίνει, ὅτι, ἂν (A,σ) εἶναι ἰσόμορφον τοῦ (B,τ), τότε καὶ τὸ (B,τ) εἶναι ἰσόμορφον τοῦ (A,σ), διὰ τοῦτο δὲ λέγομεν καὶ ἁπλῶς, ὅτι τὰ (A,σ) καὶ (B,τ) εἶναι ἰσόμορφα.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἂν $*$ εἶναι μία πρᾶξις εἰς τὸ σύνολον A καὶ $\blacksquare$ μία πρᾶξις εἰς τὸ B, τότε λέγομεν, ὅτι «$(A,*)$ εἶναι ἰσόμορφου

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τοῦ $(B, \blacksquare)$ » τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις f τοῦ A ἐπὶ τοῦ B τοιαύτη, ὥστε

$$(\forall x, y \text{ ἐν } A)\ f(x*y) = f(x) \blacksquare f(y).$$

Ἡ f καλεῖται τότε εἷς ἰσομορφισμὸς τοῦ $(A, *)$ ἐπὶ τοῦ $(B, \blacksquare)$.

Προφανῶς ἡ f^{-1} εἶναι τότε εἷς ἰσομορφισμὸς τοῦ $(B, \blacksquare)$ ἐπὶ τοῦ $(A, *)$, τὸ ὁποῖον σημαίνει, ὅτι, ἂν $(A, *)$ εἶναι ἰσόμορφον τοῦ $(B, \blacksquare)$, τότε καὶ τὸ $(B, \blacksquare)$ εἶναι ἰσόμορφον τοῦ $(A, *)$, διὰ τοῦτο δὲ λέγομεν καὶ ἄλλως, ὅτι τὰ $(A, *)$ καὶ $(B, \blacksquare)$ εἶναι ἰσόμορφα.

Παρατήρησις. Ἂν f εἶναι εἷς ἰσομορφισμὸς τοῦ $(A, *)$ ἐπὶ τοῦ $(B, \blacksquare)$ καὶ ἡ πρᾶξις $*$ ἔχει οὐδέτερον στοιχεῖον τὸ ω, τότε ἡ πρᾶξις $\blacksquare$ ἔχει οὐδέτερον στοιχεῖον τὸ $f(\omega)$. Πράγματι· ἂν y εἶναι τυχὸν στοιχεῖον τοῦ B καὶ $x = f^{-1}(y)$, τότε, ἐπειδὴ τὸ ω εἶναι οὐδέτερον στοιχεῖον τῆς $*$, ἔχομεν $x*\omega = x = \omega*x$ καὶ ἐπομένως

$$f(x) * f(\omega) = f(x*\omega) = f(x) = f(\omega*x) = f(\omega) * f(x),$$

ὁπλαδὴ

$$y * f(\omega) = y = f(\omega) * y.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἂν $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_\kappa$ εἶναι σχέσεις καὶ $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\mu$ πράξεις εἰς τὸ σύνολον A, καὶ $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \cdots, \hat{\sigma}_\kappa$ εἶναι σχέσεις καὶ $\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2, \cdots, \hat{\omega}_\mu$ πράξεις εἰς τὸ σύνολον B, τότε λέγομεν ὅτι « $(A, \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_\kappa, \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\mu)$ εἶναι ἰσόμορφον τοῦ $(B, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \cdots, \hat{\sigma}_\kappa, \hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2, \cdots, \hat{\omega}_\mu)$ » τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ μία ἀμφιμονοσήμαντος συνάρτησις f τοῦ A ἐπὶ τοῦ B, ἡ ὁποία ἀφ' ἑνὸς μὲν νὰ εἶναι εἷς ἰσομορφισμὸς τοῦ (A, σ_i) ἐπὶ τοῦ $(B, \hat{\sigma}_i)$ διὰ κάθε $i \in \{1, 2, \cdots, \kappa\}$, ἀφ' ἑτέρου δὲ εἷς ἰσομορφισμὸς τοῦ (A, ω_i) ἐπὶ τοῦ $(B, \hat{\omega}_i)$ διὰ κάθε $i \in \{1, 2, \cdots, \mu\}$.

Ἡ f καλεῖται τότε εἷς ἰσομορφισμὸς τοῦ $(A, \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_\kappa, \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\mu)$ ἐπὶ τοῦ $(B, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \cdots, \hat{\sigma}_\kappa, \hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2, \cdots, \hat{\omega}_\mu)$.

Προφανῶς ἡ f^{-1} εἶναι τότε εἷς ἰσομορφισμὸς τοῦ $(B, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \cdots, \hat{\sigma}_\kappa,$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2, \cdots, \hat{\omega}_\mu$) επί του $(A, \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_\kappa, \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\mu)$, λέγομεν δε και ότι τα $(A, \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_\kappa, \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\mu)$ και $(B, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \cdots, \hat{\sigma}_\kappa, \hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2, \cdots, \hat{\omega}_\mu)$ είναι ισόμορφα.

9.1.1 Αν E, G είναι διατεταγμένα σώματα, τότε υπάρχει εις ισομορφισμός του $(N(E), \prec, +, \cdot)$ επί του $(N(G), \prec, +, \cdot)$.

Απόδειξις. Δυνάμει της αρχής του επαγωγικού ορισμού (Πρβλ. Θεώρημα 8.2.1) υπάρχει ακριβώς μία συνάρτησις $\varphi : N(E) \mapsto N(G)$ τοιαύτη, ώστε

$$\varphi(1) = 1$$

και

$$\varphi(x+1) = \varphi(x)+1.$$

Εν πρώτοις θα δείξωμεν, ότι διά κάθε x, y εν $N(E)$ ισχύει

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y). \tag{1}$$

Προς τούτο θεωρούμεν έν ωρισμένον $x \in N(E)$ και τον προτασιακόν τύπον $P(y)$, το οποίον ορίζει η (1). Προφανώς $P(1)$ είναι αληθής πρότασις. Αν ισχύη $P(y)$, δηλαδή $\varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y)$, τότε

$$\varphi(x+(y+1)) = \varphi((x+y)+1) = \varphi(x+y)+1 = [\varphi(x)+\varphi(y)]+1 =$$
$$= \varphi(x)+[\varphi(y)+1] = \varphi(x)+\varphi(y+1),$$

ήτοι $P(y) \rightarrow P(y+1)$ και επομένως, δυνάμει της αρχής της επαγωγικής αποδείξεως (Πρβλ. Πόρισμα 8.1.2), ισχύει $(\forall y \in N(E))\ P(y)$, δηλαδή η (1) ισχύει διά κάθε $y \in N(E)$ και επειδή το x είναι μέν ωρισμένον, αλλά τυχόν στοιχείον του $N(E)$, έπεται, ότι αύτη ισχύει και διά κάθε $x \in N(E)$.

Θα δείξωμεν τώρα, ότι η συνάρτησις φ είναι γνησίως αύξουσα, δηλαδή, ότι διά κάθε x, y εν $N(E)$ ισχύει

$$x \prec y \Rightarrow \varphi(x) \prec \varphi(y). \tag{2}$$

Προς τούτο παρατηρούμεν, ότι διά x, y εν $N(E)$, $x \prec y \rightarrow y-x > 0 \rightarrow y-x \in N(E)$ (Πρβλ. Θεωρήματα 7.3.8 και 7.3.1, 1.). Άρα, δυνάμει της (1), έχομεν $\varphi(y) = \varphi((y-x)+x) = \varphi(y-x)+\varphi(x)$ και επομένως

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$\varphi(y)-\varphi(x)=\varphi(y-x)>0$, διότι τὰ στοιχεῖα τοῦ $N(G)$ εἶναι θετικὰ στοιχεῖα (Πρβλ. θεώρημα 7.4.3,1.).

Διὰ τὴν συνάρτησιν φ ἰσχύει $R(\varphi)=N(G)$, διότι ἄλλως τὸ σύνολον $\{x\in N(G) : x\notin R(\varphi)\}$ εἶναι μὴ κενὸν ὑποσύνολον τοῦ $N(G)$ καὶ κατὰ τὸ θεώρημα 7.4.4, ἔχει ἐλάχιστον στοιχεῖον, ἔστω y, τὸ ὁποῖον προφανῶς εἶναι διάφορον τοῦ 1. Τὸ $y-1\in R(\varphi)$ καὶ ἑπομένως ὑπάρχει $x\in N(E)$ τοιοῦτον, ὥστε $y-1=\varphi(x)$ καὶ ἑπομένως $y=\varphi(x)+1=\varphi(x+1)$, δηλαδὴ καὶ τὸ $y\in R(\varphi)$, ὅπερ ἄτοπον.

Ὥστε ἡ φ, ὡς γνησίως αὔξουσα, εἶναι μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ $N(E)$ ἐπὶ τοῦ $N(G)$. Ὡς ἄμεσος συνέπεια τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει τώρα, ὅτι ἡ φ εἶναι εἰς ἰσομορφισμὸς τοῦ $(N(E),<,+)$ ἐπὶ τοῦ $(N(G),<,+)$. Ὑπολείπεται, ἄθεν, νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ φ εἶναι ἐπίσης εἰς ἰσομορφισμὸς τοῦ $(N(E),\cdot)$ ἐπὶ τοῦ $(N(G),\cdot)$, δηλαδή, ὅτι διὰ κάθε x,y ἐν $N(E)$ ἰσχύει

$$\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y). \tag{3}$$

Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν ἓν ὡρισμένον $x\in N(E)$ καὶ τὸν προτασιακὸν τύπον $Q(y)$, τὸν ὁποῖον ὁρίζει ἡ (3). Προφανῶς $Q(1)$ εἶναι ἀληθὴς πρότασις. Ἂν ἰσχύῃ $Q(y)$, δηλαδὴ $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$, τότε

$$\varphi(x(y+1))=\varphi(xy+x)=\varphi(xy)+\varphi(x)=\varphi(x)\varphi(y)+\varphi(x)=$$
$$=\varphi(x)[\varphi(y)+1]=\varphi(x)\varphi(y+1),$$

ἤτοι $Q(y)\Rightarrow Q(y+1)$ καὶ ἑπομένως, δυνάμει τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπαγωγικῆς ἀποδείξεως, ἰσχύει $(\forall y\in N(E))\,Q(y)$, δηλαδὴ ἰσχύει ἡ (3) διὰ κάθε $y\in N(E)$ καὶ ἐπειδὴ τὸ x εἶναι μὲν ὡρισμένον, ἀλλὰ τυχὸν στοιχεῖον τοῦ $N(E)$, ἕπεται, ὅτι αὐτὴ ἰσχύει καὶ διὰ κάθε $x\in N(E)$.

9.1.2 Ἂν E,G εἶναι διατεταγμένα σώματα, τότε ὑπάρχει εἰς ἰσομορφισμὸς τοῦ $(Z(E),<,+,\cdot)$ ἐπὶ τοῦ $(Z(G),<,+,\cdot)$.

Ἀπόδειξις. Ἔστω, δυνάμει τῆς προηγουμένης προτάσεως 9.1.1, εἰς ἰσομορφισμὸς φ τοῦ $(N(E),<,+,\cdot)$ ἐπὶ τοῦ $(N(G),<,+,\cdot)$. Ἂν $u,v,\hat{u},\hat{v}$ εἶναι τυχόντα στοιχεῖα τοῦ $N(E)$ μὲ $u-v=\hat{u}-\hat{v}$, δηλαδὴ μὲ $u+\hat{v}=\hat{u}+v$, τότε ἰσχύει

$$\varphi(u)+\varphi(\hat{v})=\varphi(u+\hat{v})=\varphi(\hat{u}+v)=\varphi(\hat{u})+\varphi(v)$$

καὶ ἑπομένως

$$u-v=\hat{u}-\hat{v}\Rightarrow\varphi(u)-\varphi(v)=\varphi(\hat{u})-\varphi(\hat{v}).$$

Ἄρα, ἂν διὰ τυχόν $x\in Z(E)$ θεωρήσωμεν, δυνάμει τῆς προτάσεως 7.3.7, στοιχεῖα u,v ἐν $N(E)$ μὲ $x=u-v$, τότε ὁ τύπος

$$h(x)=\varphi(u)-\varphi(v),$$

ὁρίζει μίαν συνάρτησιν h μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ $Z(E)$ καὶ τιμὰς εἰς τὸ $Z(G)$, ἡ ὁποία εἶναι μία ἐπέκτασις τῆς φ, διότι διὰ τυχόν $x\in N(E)$,

$$h(x)=\varphi(x+1)-\varphi(1)=[\varphi(x)+\varphi(1)]-\varphi(1)=\varphi(x).$$

Ἡ h εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος, διότι ἂν $x=u-v$ καὶ $y=\hat{u}-\hat{v}$, ὅπου u, v, $\hat{u}$, $\hat{v}$ ἐν $N(E)$, τότε

$$h(x)=h(y)\Rightarrow\varphi(u)-\varphi(v)=\varphi(\hat{u})-\varphi(\hat{v})\Rightarrow\varphi(u)+\varphi(\hat{v})=\varphi(\hat{u})+\varphi(v)$$

$$\Rightarrow\varphi(u+\hat{v})=\varphi(\hat{u}+v)\Rightarrow u+\hat{v}=\hat{u}+v\Rightarrow u-v=\hat{u}-\hat{v}\Rightarrow x=y.$$

Ἰσχύει ἐπίσης $R(h)=Z(G)$, διότι τυχόν στοιχείου $w\in Z(G)$ παρίσταται ὡς διαφορὰ $y-z$ στοιχείων τοῦ $N(G)$ καὶ ἑπομένως, ἂν u,v εἶναι στοιχεῖα τοῦ $N(E)$ μὲ $y=\varphi(u)$ καὶ $z=\varphi(v)$, τότε $w=\varphi(u)-\varphi(v)=$ $=h(u-v)=h(x)$, ὅπου $x=u-v\in Z(E)=\mathcal{D}(h)$, δηλαδὴ $w\in R(h)$.

Ὥστε ἐδείχθη, ὅτι ἡ h εἶναι μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ $Z(E)$ ἐπὶ τοῦ $Z(G)$. Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ ὅτι αὕτη εἶναι εἰς ἰσομορφισμὸς τοῦ $(Z(E),\prec,+,\cdot)$ ἐπὶ τοῦ $(Z(G),\prec,+,\cdot)$ θεωροῦμεν τυχόντα στοιχεῖα x,y ἐν $Z(E)$, τὰ ὁποῖα παρίστανται βεβαίως ὡς διαφοραὶ στοιχείων τοῦ $N(E)$, ἤτοι $x=u-v$ καὶ $y=\hat{u}-\hat{v}$, ὁπότε ἔχομεν:

$$x\prec y\Rightarrow u+\hat{v}\prec\hat{u}+v\Rightarrow\varphi(u+\hat{v})\prec\varphi(\hat{u}+v)\Rightarrow\varphi(u)+\varphi(\hat{v})\prec\varphi(\hat{u})+\varphi(v)\Rightarrow$$

$$\varphi(u)-\varphi(v)\prec\varphi(\hat{u})-\varphi(\hat{v})\Rightarrow h(x)\prec h(y).$$

$$h(x+y)=h([u+\hat{u}]-[v+\hat{v}])=\varphi(u+\hat{u})-\varphi(v+\hat{v})=[\varphi(u)+\varphi(\hat{u})]$$

$$-[\varphi(v)+\varphi(\hat{v})]=[\varphi(u)-\varphi(v)]+[\varphi(\hat{u})-\varphi(\hat{v})]=h(x)+h(y).$$

$$h(xy)=h([u\hat{u}+v\hat{v}]-[u\hat{v}+\hat{u}v])=\varphi(u\hat{u}+v\hat{v})-\varphi(u\hat{v}+\hat{u}v)=$$

$$=[\varphi(u\hat{u})+\varphi(v\hat{v})]-[\varphi(u\hat{v})+\varphi(\hat{u}v)]=[\varphi(u)\varphi(\hat{u})+\varphi(v)\varphi(\hat{v})]-$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$-[\varphi(u)\varphi(\hat{v})+\varphi(\hat{u})\varphi(v)]-[\varphi(u)-\varphi(v)][\varphi(\hat{u})-\varphi(\hat{v})]=h(x)h(y).$$

9.2 ΙΣΟΜΟΡΦΑ ΣΩΜΑΤΑ

Όταν λέγωμεν « τὰ σώματα E καὶ G εἶναι ἰσόμορφα » ἐννοοῦμεν, ὅτι ὑπάρχει εἷς ἰσομορφισμὸς τοῦ $(E,+,\cdot)$ ἐπὶ τοῦ $(G,+,\cdot)$, δηλαδὴ ὅτι ὑπάρχει μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις f τοῦ E ἐπὶ τοῦ G τοιαύτη, ὥστε διὰ κάθε x, y ἐν E

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$
$$f(xy)=f(x)f(y).$$

Ὁμοίως, ὅταν λέγωμεν « τὰ διατεταγμένα σώματα E καὶ G εἶναι ἰσόμορφα » ἐννοοῦμεν, ὅτι ὑπάρχει εἷς ἰσομορφισμὸς τοῦ $(E,\prec,+,\cdot)$ ἐπὶ τοῦ $(G,\prec,+,\cdot)$, δηλαδή, ὅτι ὑπάρχει μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις f τοῦ E ἐπὶ τοῦ G τοιαύτη, ὥστε διὰ κάθε x,y ἐν E

$$x\prec y \Rightarrow f(x)\prec f(y)$$
$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$
$$f(xy)=f(x)f(y).$$

9.2.1 ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν E καὶ G εἶναι διατεταγμένα σώματα, τότε τὰ ὑποσώματα $Q(E)$ καὶ $Q(G)$ αὐτῶν εἶναι ἰσόμορφα διατεταγμένα σώματα.

Ἀπόδειξις. Ἔστω, δυνάμει τῆς προτάσεως 9.1.2, εἷς ἰσομορφισμὸς h τοῦ $(Z(E),\prec,+,\cdot)$ ἐπὶ τοῦ $(Z(G),\prec,+,\cdot)$. Ἂν $\alpha,\beta\neq 0,\gamma,\delta\neq 0$ τυχόντα στοιχεῖα τοῦ $Z(E)$ μὲ $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, δηλαδὴ μὲ $\alpha\delta=\beta\gamma$, τότε ἰσχύει

$$h(\alpha)h(\delta)=h(\alpha\delta)=h(\beta\gamma)=h(\beta)h(\gamma)$$

καὶ ἑπομένως (διατί;)

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Rightarrow\frac{h(\alpha)}{h(\beta)}=\frac{h(\gamma)}{h(\delta)}.$$

Ἄρα, ἂν διὰ τυχὸν $x\in Q(E)$ θεωρήσωμεν στοιχεῖα α,β ἐν $Z(E)$ μὲ $x=\frac{\alpha}{\beta}$,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τότε ὁ τύπος

$$g(x)=\frac{h(a)}{h(\beta)}$$

ὁρίζει μίαν συνάρτησιν g μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ $Q(E)$ καὶ τιμὰς εἰς τὸ $Q(G)$, ἡ ὁποία εἶναι μία ἐπέκτασις τῆς h (διατί ;).

Ἡ g εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος, διότι ἂν $x=\frac{a}{\beta}$ καὶ $y=\frac{\gamma}{\delta}$, ὅπου a, $\beta\neq 0$, γ, $\delta\neq 0$ ἐν $Z(E)$, τότε

$$g(x)=g(y)\rightarrow\frac{h(a)}{h(\beta)}=\frac{h(\gamma)}{h(\delta)}\rightarrow h(a)h(\delta)=h(\beta)h(\gamma)\rightarrow h(a\delta)=h(\beta\gamma)$$

$$\rightarrow a\delta=\beta\gamma\rightarrow x=y.$$

Ἰσχύει ἐπίσης $\mathcal{R}(g)=Q(G)$, διότι τυχὸν στοιχεῖον $w\in Q(G)$ παρίσταται ὡς πηλίκον $\frac{y}{z}$, $z\neq 0$ στοιχείων τοῦ $Z(G)$ καὶ ἐπομένως ὑπάρχουν στοιχεῖα a, $\beta\neq 0$ τοῦ $Z(E)$ μὲ $y=h(a)$ καὶ $z=h(\beta)$, ὁπότε τότε ἰσχύει $w=\frac{h(a)}{h(\beta)}=h(\frac{a}{\beta})=h(x)$, ὅπου $x=\frac{a}{\beta}\in Q(E)=\mathcal{D}(g)$, δηλαδὴ $w\in\mathcal{R}(g)$.

Ὥστε ἐδείχθη, ὅτι ἡ g εἶναι μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ $Q(E)$ ἐπὶ τοῦ $Q(G)$. Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ ὅτι αὐτὴ εἶναι εἷς ἰσομορφισμὸς τοῦ $(Q(E),\prec,+,\cdot)$ ἐπὶ τοῦ $(Q(G),\prec,+,\cdot)$ θεωροῦμεν τυχόντα στοιχεῖα $x=\frac{a}{\beta}$, $y=\frac{\gamma}{\delta}$ ἐν $Q(E)$, ὅπου a,β,γ,δ στοιχεῖα τοῦ $Z(E)$, διὰ τὰ ὁποῖα, χωρὶς βλάβην τῆς γενικότητος, ὑποθέτομεν, ὅτι $\beta\delta>0$, ὁπότε καὶ $h(\beta)h(\delta)>0$ (διατί ;) :

$$x\prec y\rightarrow a\delta\prec\beta\gamma\rightarrow h(a\delta)\prec h(\beta\gamma)\rightarrow h(a)h(\delta)\prec h(\beta)h(\gamma)$$

$$\rightarrow\frac{h(a)}{h(\beta)}\prec\frac{h(\gamma)}{h(\delta)}\rightarrow g(x)\prec g(y).$$

$$g(x+y)=g\left(\frac{a\delta+\beta\gamma}{\beta\delta}\right)=\frac{h(a\delta+\beta\gamma)}{h(\beta\delta)}=\frac{h(a\delta)+h(\beta\gamma)}{h(\beta\delta)}=\frac{h(a)h(\delta)+h(\beta)h(\gamma)}{h(\beta)h(\delta)}$$

$$=\frac{h(a)}{h(\beta)}+\frac{h(\gamma)}{h(\delta)}=g(x)+g(y).$$

$$g(xy)=g\left(\frac{a\gamma}{\beta\delta}\right)=\frac{h(a\gamma)}{h(\beta\delta)}=\frac{h(a)h(\gamma)}{h(\beta)h(\delta)}=\frac{h(a)}{h(\beta)}\,\frac{h(\gamma)}{h(\delta)}=g(x)g(y).$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

9.2.2 ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν E καὶ G εἶναι κεκορεσμένα διατεταγμένα σώματα, τότε ταῦτα εἶναι ἰσόμορφα διατεταγμένα σώματα.

Ἀπόδειξις. Ἔστω δυνάμει τοῦ θεωρήματος 9.2.1, εἷς ἰσομορφισμὸς g τοῦ $(Q(E),\prec,+,\cdot)$ ἐπὶ τοῦ $(Q(G),\prec,+,\cdot)$. Διὰ τυχὸν $x\in E$ θέτομεν

$$A_x=\{u\in Q(E): u\prec x\}$$

$$B_x=\{u\in Q(E): x\prec u\},$$

ὁπότε, δυνάμει τοῦ θεωρήματος 7.5.3, ἔχομεν $\sup A_x = x = \inf B_x$.

Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις g εἶναι προφανῶς γνησίως αὔξουσα, συνάγεται εὐκόλως, ὅτι διὰ τυχόντα στοιχεῖα $z\in g(A_x)$ καὶ $w\in g(B_x)$ ἰσχύει $z\prec w$ καὶ ἐπομένως ὑπάρχουν τὰ $\sup g(A_x)$ καὶ $\inf g(B_x)$ καὶ μάλιστα ἰσχύει $\sup g(A_x)\leqq \inf g(B_x)$. Θὰ ἀποκλείσωμεν τώρα τὴν περίπτωσιν $\sup g(A_x)\prec \inf g(B_x)$, διότι τότε κατὰ τὸ θεώρημα 7.5.2, ὑπάρχει $r\in Q(G)$ τοιοῦτον, ὥστε $\sup g(A_x)\prec r\prec \inf g(B_x)$ καὶ μάλιστα, χωρὶς βλάβην τῆς γενικότητος, δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν διὰ τὸ r, ὅτι ἰσχύει $g^{-1}(r)\neq x$, ὁπότε $g^{-1}(r)\in A_x$ ἢ $g^{-1}(r)\in B_x$ καὶ ἐπομένως $r\in g(A_x)$ ἢ $r\in g(B_x)$, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὸ ὅτι $\sup g(A_x)\prec r\prec \inf g(B_x)$. Ὥστε ἐδείχθη, ὅτι $\sup g(A_x)=\inf g(B_x)$.

Θεωροῦμεν τώρα τὴν συνάρτησιν $f: E\mapsto G$, τῆς ὁποίας εἰκὼν εἰς τὸ τυχὸν στοιχεῖον $x\in E$ εἶναι ἡ κοινὴ τιμὴ τῶν $\sup g(A_x)$ καὶ $\inf g(B_x)$, ἤτοι

$$f(x)=\sup g(A_x)=\inf g(B_x).$$

Αὕτη εἶναι ἐπέκτασις τῆς g, διότι, λόγῳ τοῦ ὅτι ἡ g εἶναι γνησίως αὔξουσα, διὰ τυχὸν $x\in Q(E)$ ἡ τιμὴ $g(x)$ εἶναι ἀφ' ἑνὸς μὲν ἓν ἄνω φράγμα τοῦ $g(A_x)$, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἓν κάτω φράγμα τοῦ $g(B_x)$, ὁπότε ἰσχύει $g(x)\geqq \sup g(A_x)=f(x)$ καὶ $g(x)\leqq \inf g(B_x)=f(x)$, δηλαδὴ $g(x)=f(x)$.

Ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα. Πράγματι· διὰ τυχόντα x,y ἐν E ἔχομεν

$$x\prec y\Rightarrow A_x\subseteq A_y\Rightarrow g(A_x)\subseteq g(A_y)\Rightarrow \sup g(A_x)\leqq \sup g(A_y)\Rightarrow f(x)\leqq f(y).$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

θά ἀποκλείσωμεν τώρα τήν περίπτωσιν $f(x)=f(y)$, διότι τότε, ἄν θεωρήσωμεν u, v ἐν $Q(E)$ μέ $x \prec u \prec v \prec y$, θά ἔχωμεν προφανῶς $f(x) \leqq f(u) \leqq f(v) \leqq f(y)$ καί ἐπομένως καί $f(u)=f(v)$, δηλαδή $g(u)=g(v)$, τό ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τό γεγονός, ὅτι ἡ g εἶναι γνησίως αὔξουσα.

Ἰσχύει ἐπίσης καί $R(f)=G$. Πρός ἀπόδειξιν τούτου ἀρκεῖ νά δειχθῇ ὅτι διά τυχόν $y \in G$ ὑπάρχει $x \in E$ μέ $y=f(x)$. Πράγματι· ἔστωσαν ἡ συνάρτησις g^{-1} καί τά σύνολα

$$\hat{A}_y = \{v \in Q(G) : v \prec y\}$$
$$\hat{B}_y = \{v \in Q(G) : y \prec v\},$$

ὁπότε, ἀκριβῶς ὡς καί προηγουμένως, συνάγεται, ὅτι ὑπάρχουν τά $\sup g^{-1}(\hat{A}_y)$ καί $\inf g^{-1}(B_y)$ καί μάλιστα ἰσχύει $\sup g^{-1}(A_y) = \inf g^{-1}(B_y)$. Ἄν καλέσωμεν x τήν κοινήν τιμήν τούτων, τότε εὐκόλως συνάγεται ὅτι $A_x = g^{-1}(\hat{A}_y)$ καί $B_x = g^{-1}(B_y)$, ἄρα $g(A_x) \subseteq \hat{A}_y$ καί $g(B_x) \subseteq \hat{B}_y$ καί ἐπομένως

$$f(x) = \sup g(A_x) \leqq \sup \hat{A}_y = y \quad \text{καί} \quad f(x) = \inf g(B_x) \geqq \inf \hat{B}_y = y,$$

ἤτοι $y=f(x)$.

Ὥστε ἡ f, ὡς γνησίως αὔξουσα, εἶναι ἀφ' ἑνός μέν μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ E ἐπί τοῦ G, ἀφ' ἑτέρου δέ καί εἰς ἰσομορφισμός τοῦ $(E, \prec)$ ἐπί τοῦ $(G, \prec)$. Ὑπολείπεται τώρα νά δειχθῇ, ὅτι αὐτή εἶναι καί ἰσομορφισμός τοῦ $(E, +, \cdot)$ ἐπί τοῦ $(G, +, \cdot)$, δηλαδή ὅτι διά τυχόντα x, y ἐν E ἰσχύουν :

$$f(x+y) = f(x)+f(y) \tag{1}$$

$$f(xy) = f(x)f(y). \tag{2}$$

Πρός ἀπόδειξιν τῆς (1), παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις, ὅτι τυχόν $w \in A_{x+y}$ δύναται νά τεθῇ ὑπό τήν μορφήν $w=u+v$, ὅπου $u \in A_x$ καί $v \in A_y$, καθ' ὅσον $w \prec x+y \Longrightarrow w-x \prec y$, ὁπότε ἀρκεῖ νά θεωρήσωμεν ἕν $v \in Q(E)$ μέ $w-x \prec v \prec y$ καί νά θέσωμεν $u=w-v$. Ἔχομεν τώρα

$$g(w) = g(u)+g(v) \leqq \sup g(A_x)+\sup g(A_y) = f(x)+f(y),$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δηλαδή τὸ ἄθροισμα $f(x)+f(y)$ εἶναι ἕν ἄνω φράγμα τοῦ συνόλου $g(A_{x+y})$. καὶ ἑπομένως ἰσχύει

$$f(x+y) = \sup g(A_{x+y}) \leqq f(x)+f(y).$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ ὅτι τυχὸν $w \in B_{x+y}$ δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $w = u+v$, ὅπου $u \in B_x$ καὶ $v \in B_y$, ὁπότε

$$g(w) = g(u)+g(v) \geqq \inf g(B_x)+\inf g(B_y) = f(x)+f(y),$$

δηλαδή τὸ ἄθροισμα $f(x)+f(y)$ εἶναι ἕν κάτω φράγμα τοῦ συνόλου $g(B_{x+y})$ καὶ ἑπομένως ἰσχύει

$$f(x+y) = \inf g(B_{x+y}) \geqq f(x)+f(y).$$

Οὕτως, ἡ (1) ἀπεδείχθη.

Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς (2), περιοριζόμεθα κατ' ἀρχὴν εἰς τὰ θετικὰ στοιχεῖα τοῦ E. Οὕτως, ἂν $x>0$ καὶ $y>0$, τότε τυχὸν θετικὸν στοιχεῖον $w \in A_{xy}$ δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $w=uv$, ὅπου u, v θετικὰ στοιχεῖα μὲ $u \in A_x$ καὶ $v \in A_y$, καθ' ὅσον $w < xy \to \frac{w}{x} < y$, ὁπότε ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν ἕν $v \in Q(E)$ μὲ $\frac{w}{x} < v < y$ καὶ νὰ θέσωμεν $u = \frac{w}{v}$. Ἔχομεν τώρα

$$g(w) = g(u)g(v) \leqq \sup g(A_x)\sup g(A_y) = f(x)f(y)$$

καὶ ἑπομένως, ὡς εὐκόλως συνάγεται, τὸ γινόμενον $f(x)f(y)$ εἶναι ἕν ἄνω φράγμα τοῦ συνόλου $g(A_{xy})$. Ἄρα ἰσχύει

$$f(xy) = \sup g(A_{xy}) \leqq f(x)f(y).$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ τυχὸν $w \in B_{xy}$ δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $w=uv$, ὅπου $u \in B_x$ καὶ $v \in B_y$, ὁπότε

$$g(w) = g(u)g(v) \geqq \inf g(B_x)\inf g(B_y) = f(x)f(y),$$

δηλαδή τὸ γινόμενον $f(x)f(y)$ εἶναι ἕν κάτω φράγμα τοῦ συνόλου $g(B_{xy})$ καὶ ἑπομένως ἰσχύει

$$f(xy) = \inf g(B_{xy}) \geqq f(x)f(y).$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Οὕτως, ἡ (2) ἀπεδείχθη διὰ τὰ θετικὰ στοιχεῖα τοῦ E. Ἐπειδὴ ὅμως $f(0)=g(0)=0$, συνάγεται ἀμέσως, ὅτι ἡ (2) ἰσχύει καὶ διὰ κάθε $x\geqq 0$ καὶ $y\geqq 0$.

Δυνάμει τῆς (1), ἔχομεν, ὅτι διὰ τυχόν $z\in E$ ἰσχύει

$$f(z)+f(-z)=f[z+(-z)]=f(0)=0,$$

ἤτοι

$$f(z)=-f(-z),$$

ὁπότε ἡ (2) συνάγεται καὶ εἰς τὰς λοιπὰς περιπτώσεις, ὡς κάτωθι :

περίπτωσις $x>0$, $y<0$.

$$f(xy)=f[-x(-y)]=-f[x(-y)]=-f(x)f(-y)=-f(x)[-f(y)]=f(x)f(y).$$

περίπτωσις $x<0$, $y>0$. Ἀνάγεται εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν δι' ἐναλλαγῆς τοῦ ρόλου τῶν x καὶ y.

περίπτωσις $x<0$, $y<0$.

$$f(xy)=f[(-x)(-y)]=f(-x)f(-y)=[-f(x)][-f(y)]=f(x)f(y).$$

9.3 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἔστω ὅτι τὰ $(A,*)$ καὶ $(B,\blacksquare)$ εἶναι ἰσόμορφα, ὅπου $*$ πρᾶξις εἰς τὸ A καὶ $\blacksquare$ πρᾶξις εἰς τὸ B. Δείξατε, ὅτι ἡ $*$ εἶναι ἀντιμεταθετικὴ ἢ προσεταιριστικὴ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ $\blacksquare$ εἶναι ἀντιστοίχως ἀντιμεταθετικὴ ἢ προσεταιριστική.

2. Ἔστω ὅτι τὰ $(A,*,\bullet)$ καὶ $(B,\blacksquare,\blacktriangle)$ εἶναι ἰσόμορφα, ὅπου $*$, $\bullet$ πράξεις εἰς τὸ A καὶ $\blacksquare$, $\blacktriangle$ πράξεις εἰς τὸ B. Δείξατε, ὅτι ἡ $*$ εἶναι ἐπιμεριστικὴ ὡς πρὸς τὴν $\bullet$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ $\blacksquare$ εἶναι ἐπιμεριστικὴ ὡς πρὸς τὴν $\blacktriangle$.

3. Δείξατε, ὅτι ἂν E, G, εἶναι ἰσόμορφα σώματα, τότε διὰ τυχὸν ὑποσῶμα τοῦ ἑνὸς ὑπάρχει ἓν ὑποσῶμα τοῦ ἄλλου, τὰ ὁποῖα εἶναι ἐπίσης ἰσόμορφα σώματα.

Διατυπώσατε καὶ ἀποδείξατε ἀνάλογον πρότασιν διὰ τὴν περίπτωσιν, ὅπου τὰ E, G εἶναι ἰσόμορφα διατεταγμένα σώματα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

4. Δείξατε, ὅτι ὁ ἰσομορφισμός τῆς προτάσεως 9.1.1 εἶναι μονοσημάντως ὡρισμένος.

5. Δείξατε, ὅτι ὁ ἰσομορφισμός τῆς προτάσεως 9.1.2 εἶναι μονοσημάντως ὡρισμένος.

6. Δείξατε, ὅτι ὁ ἰσομορφισμός τοῦ θεωρήματος 9.2.1 εἶναι μονοσημάντως ὡρισμένος.

7. Δείξατε, ὅτι ὁ ἰσομορφισμός τοῦ θεωρήματος 9.2.2 εἶναι μονοσημάντως ὡρισμένος.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

10. ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

10.1 ΣΥΝΟΛΟΝ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Δεχόμεθα, ὡς *ἀξίωμα*, ὅτι ὑπάρχει τουλάχιστον ἓν κεκορεσμένον διατεταγμένον σῶμα. Ὡς ἔχομεν ἤδη ἀποδείξει, ἅλα τὰ κεκορεσμένα διατεταγμένα σώματα εἶναι οὐσιωδῶς τὰ αὐτὰ ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι ταῦτα εἶναι ἰσόμορφα διατεταγμένα σώματα (Πρβλ. Θεώρημα 9.2.2). Δυνάμεθα ὅθεν νὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι ὑπάρχει ἀκριβῶς ἓν κεκορεσμένον διατεταγμένον σῶμα, τὰ στοιχεῖα τοῦ ὁποίου ὀνομάζομεν *πραγματικοὺς ἀριθμούς*. Τὸ σῶμα τοῦτο, δηλαδὴ τὸ *σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν*, παριστῶμεν μὲ $\mathbb{R}$. *Φυσικοὶ ἀριθμοὶ* καλοῦνται τὰ στοιχεῖα τοῦ $N(\mathbb{R})$, *ἀκέραιοι ἀριθμοὶ* τὰ στοιχεῖα τοῦ $Z(\mathbb{R})$ καὶ *ῥητοὶ ἀριθμοὶ* τὰ στοιχεῖα τοῦ $Q(\mathbb{R})$. Τὸ *σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν* παρίσταται ἁπλούστερον μὲ $\mathbb{N}$, ἤτοι $\mathbb{N} = N(\mathbb{R})$· τὸ *σύνολον τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν* μὲ $\mathbb{Z}$, ἤτοι $\mathbb{Z} = Z(\mathbb{R})$· καὶ τέλος τὸ *σύνολον τῶν ῥητῶν ἀριθμῶν* μὲ $\mathbb{Q}$, ἤτοι $\mathbb{Q} = Q(\mathbb{R})$.

Ἡ συνάρτησις $s : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$, ἡ ὁποία ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$s(x) = x+1$$

ὀνομάζεται *διαδοχή*, ἡ δὲ τιμὴ ταύτης $s(x)$ *διάδοχος* ἢ *ἑπόμενος* τοῦ x. Ὡς καὶ ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ $\mathbb{N}$, ὡς τοῦ συνόλου $N(\mathbb{R})$, ἰσχύουν τὰ κάτωθι :

1. *Ὑπάρχει ἓν στοιχεῖον τοῦ* $\mathbb{N}$, *τὸ* 1, *τοιοῦτον, ὥστε*

$$(\forall x \in \mathbb{N})\ 1 \neq s(x)$$

2. $(\forall x, y$ *ἐν* $\mathbb{N})\ \ s(x) = s(y) \longrightarrow x = y.$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

3. *Ἂν* $N \subseteq N$ *καὶ ταυτόν, ὥστε*

$$1 \in N \quad \text{καὶ} \quad (\forall x \in N)\ s(x) \in N,$$

τότε $N = N$.

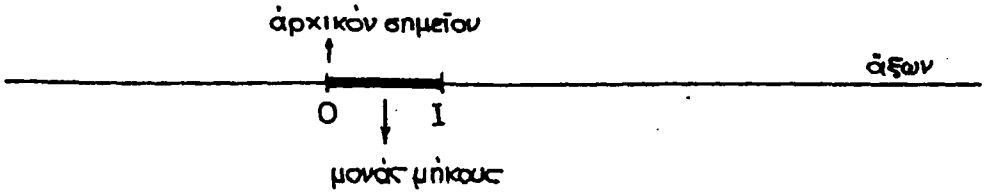
Τὸ σύνολον $\mathbb{R}$ δύναται καὶ ἄλλως νὰ ὁρισθῇ κατασκευαστικῶς, θεωρουμένου τοῦ συνόλου N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ὡς δεδομένου. Ὁ τρόπος οὗτος, ὁ ὁποῖος ἐκτίθεται π.χ. εἰς τὸ βιβλίον τοῦ E. Landau (Grundlagen der Analysis, Akademische Verlagsgellschaft m. b. H., Leipzig [1930]. Ἀγγλικὴ μετάφρασις: Foundations of Analysis, Chelsea [1966]), ἀκολουθεῖ διαδοχικῶς τὸν ὁρισμὸν τῶν συνόλων $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ καὶ τέλος τοῦ $\mathbb{R}$. Κατὰ τὸν κατασκευαστικὸν τοῦτον τρόπον ὁρισμοῦ τοῦ συνόλου $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, τὸ ὁποῖον καὶ ἀποτελεῖ τὴν βάσιν, ὁρίζεται τῇ βοηθείᾳ ὡρισμένων ἀξιωμάτων, τὰ ὁποῖα ἀρχικῶς ἐτέθησαν ὑπὸ τοῦ G. Peano [1891]. *Τὰ ἀξιώματα τοῦ Peano* κατ' οὐσίαν θεμελιώνουν τὴν ὕπαρξιν ἑνὸς μὴ κενοῦ συνόλου N (καλουμένου συνόλου τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν) καὶ μιᾶς συναρτήσεως $s: N \rightarrowtail N$ (καλουμένης διαδοχῆς), ἱκανοποιούσης τὰς ἀνωτέρω ἰδιότητας 1, 2 καὶ 3. Δυνάμει τούτων, ὁρίζονται τότε αἱ γνωσταὶ πράξεις εἰς τὸ σύνολον N καὶ ἡ συνήθης σχέσις διατάξεως, ἀποδεικνύονται δὲ ἅπαι αἱ στοιχειώδεις ἰδιότητες τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

Παρατήρησις. Τὸ σύνολον $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι προφανῶς ἐφωδιασμένον μὲ μίαν διάταξιν ἐνυπάρχουσαν εἰς αὐτὸ ὡς ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ του, ὡς κεκορεσμένου διατεταγμένου σώματος, ἡ ὁποία καλεῖται *φυσικὴ διάταξις* τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τυχὸν ἄλλας σχέσεις διατάξεως θεωρουμένας εἰς τὸ σύνολον $\mathbb{R}$.

10.2 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

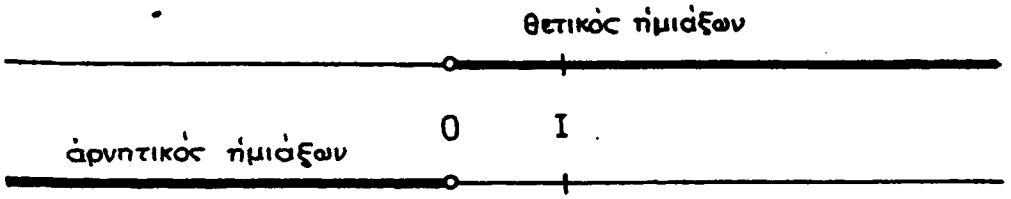
Μία εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ὁποίας ἔχουν ἐκλεγῇ δύο διάφορα σημεῖα O καὶ I καλεῖται *ἄξων* μὲ *ἀρχικὸν σημεῖον* τὸ O καὶ *μονάδα μήκους* τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα OI (βλ. σχ. 4).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



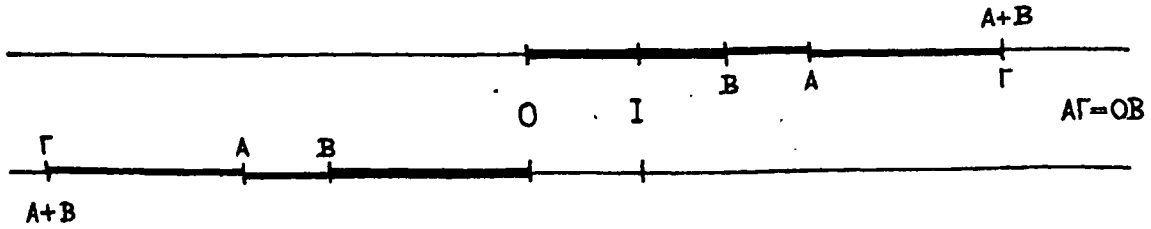
Σχ.4

Τὸ ἀρχικὸν σημεῖον O χωρίζει τὸν ἄξονα εἰς δύο *ἀνοικτὰς* ἡμιευθείας (δηλαδὴ μὴ περιεχούσας τὸ ἀρχικὸν σημεῖον). Ἐκ τῶν ἡμιευθειῶν τούτων, ἐκείνη ἡ ὁποία περιέχει τὸ σημεῖον I καλεῖται *θετικὸς ἡμιάξων*, ἡ δὲ ἄλλη *ἀρνητικὸς ἡμιάξων* (βλ. σχ. 5).



Σχ.5

Τῇ βοηθείᾳ γεωμετρικῶν κατασκευῶν δύναται νὰ ὁρισθοῦν καὶ μεταξὺ τῶν σημείων ἑνὸς ἄξονος δύο πράξεις, ἡ πρόσθεσις + καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς · . Οὕτως, ἂν A, B εἶναι τυχόντα σημεῖα τοῦ ἄξονος, τότε τὸ ἀποτέλεσμα A+B εἰς μὲ τὴν περίπτωσιν, ὅπου ἀμφότερα τὰ A, B δὲν ἀνήκουν εἰς τὸν ἀρνητικὸν ἡμιάξονα ἢ ἀμφότερα δὲν ἀνήκουν εἰς τὸν θετικὸν ἡμιάξονα, ὁρίζεται ὡς τὸ σημεῖον Γ διὰ τῆς κατασκευῆς τοῦ σχήματος 6, εἰς δὲ τὴν περίπτωσιν, ὅπου τὸ ἕν τῶν A, B ἀνήκει εἰς

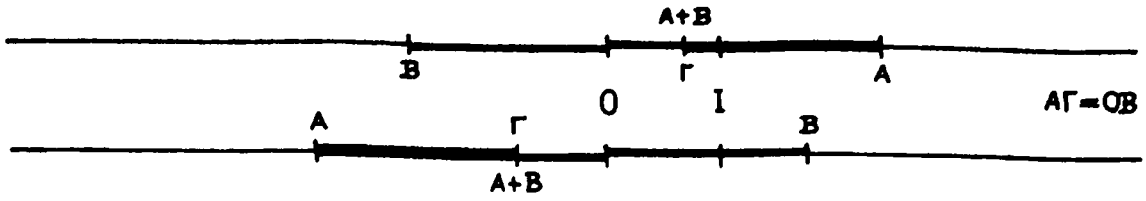


Σχ. 6

τὸν θετικὸν ἡμιάξονα καὶ τὸ ἕτερον εἰς τὸν ἀρνητικόν, ὁρίζεται ὡς τὸ σημεῖον Γ διὰ τῆς κατασκευῆς τοῦ σχήματος 7.

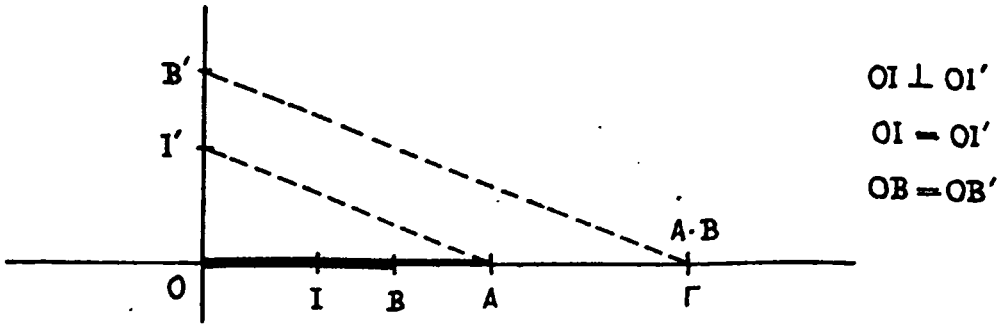
Ὁμοίως τὸ ἀποτέλεσμα A·B ὁρίζεται διὰ τῆς κατασκευῆς τοῦ σχήματος 8 ὡς τὸ σημεῖον Γ, εἰς τὸ ὁποῖον τέμνει τὸν ἄξονα OI ἡ ἐκ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



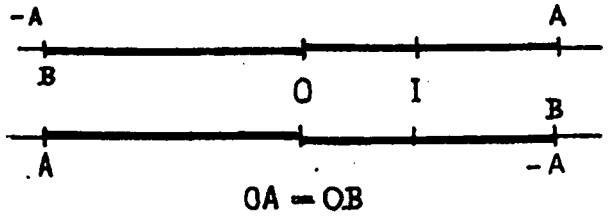
Σχ. 7

τοῦ Β΄ παράλληλος πρός τήν Ι΄Α.

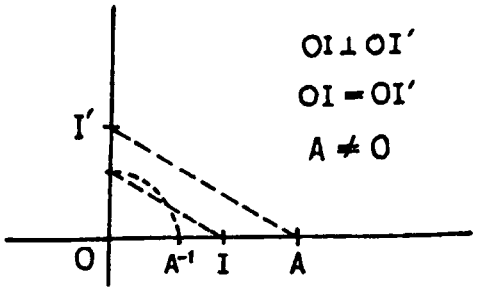


Σχ.8

Ἐκ τοῦ τρόπου ὁρισμοῦ τῶν ἀνωτέρω πράξεων εἶναι προφανές ὅτι τό ἀρχικόν σημεῖον 0 εἶναι οὐδέτερον στοιχεῖον τῆς προσθέσεως (μηδενικόν στοιχεῖον), ἐνῶ τό σημεῖον I οὐδέτερον στοιχεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (μοναδιαῖον στοιχεῖον). Τό ἀντίθετον $-A$ καί τό ἀντίστροφον A^{-1} στοιχεῖον ἑνός σημείου A τοῦ ἄξονος ὁρίζονται διά τῶν κατασκευῶν τῶν κάτωθι σχημάτων 9 καί 10.



Σχ. 9



Σχ. 10

Μέ μέσα τῆς Στοιχειώδους Γεωμετρίας συνάγονται αἱ ἀκόλουθοι ἰδιότητες :

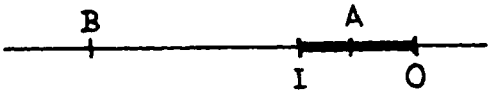
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$A+B=B+A$	$AB=BA$
$A+(B+\Gamma)=(A+B)+\Gamma$	$A(B\Gamma)=(AB)\Gamma$
$A+0=A=0+A$	$AI=A=IA$
$A+(-A)=0=(-A)+A$	$AA^{-1}=I=A^{-1}A\,,\ A\neq 0$

$$A(B+\Gamma)=AB+A\Gamma.$$

Ὥστε τὸ σύνολον τῶν σημείων ἑνὸς ἄξονος μὲ ἀρχικὸν σημεῖον O καὶ μονάδα μήκους OI ἀποτελεῖ ὡς πρὸς τὰς ἀνωτέρω ὁρισθείσας πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἕν *σῶμα* μὲ μηδενικὸν στοιχεῖον τὸ O καὶ μοναδιαῖον τὸ I. Ἐπίσης, ὡς ἐκ τοῦ τρόπου ὁρισμοῦ τῶν πράξεων τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, συνάγεται ἀμέσως ὅτι, τόσον τὸ ἄθροισμα, ὅσον καὶ τὸ γινόμενον σημείων τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονος εἶναι ἐπίσης σημεῖον τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονος καὶ ἐπομένως, δυνάμει τοῦ θεωρήματος 7.4.1, τὸ σύνολον τῶν σημείων ἑνὸς ἄξονος ἀποτελεῖ ἕν *διατεταγμένον σῶμα*. Προφανῶς $O \prec I$, ὁπότε εἰς μὲν τὴν περίπτωσιν τοῦ σχήματος 11, τὸ $A \prec B$ ἑρμηνεύεται ἐποπτικῶς μὲ τὸ ὅτι τὸ A εὑρίσκεται ἀριστερὰ τοῦ B, εἰς δὲ τὴν περίπτωσιν τοῦ σχήματος 12 μὲ τὸ ὅτι τὸ A εὑρίσκεται δεξιὰ τοῦ B.

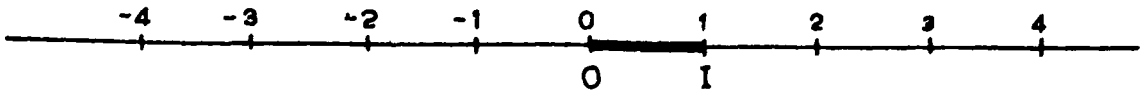
Σχ. 11



Σχ. 12

Δι' ἓν πρὸς τὰ ἄνω φραγμένον σύνολον σημείων ἑνὸς ἄξονος ἡ ἐποπτεία μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὸ νὰ δεχθῶμεν ὅτι ὑπάρχει τὸ ἐλάχιστον ἄνω φράγμα (ἄνω πέρας) αὐτοῦ, δηλαδὴ δεχόμεθα, ὅτι τὸ σύνολον τῶν σημείων ἑνὸς ἄξονος ἀποτελεῖ ἕν *κεκαρεσμένον* διατεταγμένον σῶμα καὶ ἐπομένως τοῦτο, δυνάμει τοῦ θεωρήματος 9.2.2, εἶναι *ἰσόμορφον* πρὸς τὸ σύνολον $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Κατὰ τὸν ἰσομορφισμὸν τοῦτον δυνάμεθα νὰ ταυτίσωμεν τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς μὲ τὰ σημεῖα ἑνὸς ἄξονος καὶ μάλιστα τὸν ἀριθμὸν 0 μὲ τὸ ἀρχικὸν σημεῖον O τοῦ ἄξονος καὶ τὸν ἀριθμὸν 1 μὲ τὸ μοναδιαῖον σημεῖον I τοῦ ἄξονος (βλ. σχ. 13).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



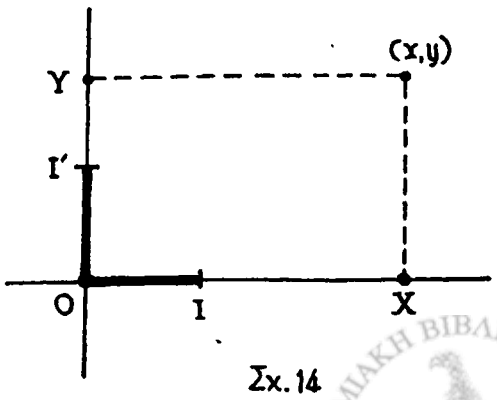
Σχ. 13

Κατελήξαμεν λοιπόν εἰς τὴν ἀκόλουθον πρότασιν, ἡ ὁποία εἰς τὴν Ἀναλυτικὴν Γεωμετρίαν τίθεται ὡς ἀξίωμα καὶ ἀποτελεῖ τὴν βάσιν αὐτῆς.

ΑΞΙΩΜΑ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ. *Τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἀπεικονίζεται ἀμφιμονοσημάντως ἐπὶ τῶν σημείων ἑνὸς ἄξονος μὲ ἀρχικὸν σημεῖον* O *καὶ μονάδα μήκους* OI *εἰς τρόπον, ὥστε ἡ εἰκὼν τοῦ ἀριθμοῦ* 0 *νὰ εἶναι τὸ ἀρχικὸν σημεῖον* O *καὶ τοῦ ἀριθμοῦ* 1 *τὸ σημεῖον* I.

Λόγῳ τῆς ἀνωτέρω γεωμετρικῆς παραστάσεώς του, τὸ σύνολον $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν συνηθίζεται νὰ ὀνομάζεται καὶ *πραγματικὴ εὐθεῖα* ἢ καὶ ἁπλῶς *εὐθεῖα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.*

Ἐπιπέδου τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας. Τὸ σύνολον $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ὅλων τῶν ζευγῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καλεῖται *ἐπίπεδον τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας*. Εἰς τὴν περίπτωσιν διατεταγμένου ζεύγους $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, τὰ στοιχεῖα x καὶ y αὐτοῦ ἀναφέρονται ὡς *συντεταγμέναι* τὸ x ὡς ἡ *πρώτη* καὶ τὸ y ὡς ἡ *δευτέρα* συντεταγμένη τοῦ ζεύγους (x,y). Τὰ στοιχεῖα τοῦ $\mathbb{R}^2$, δηλαδὴ τὰ διατεταγμένα ζεύγη πραγματικῶν ἀριθμῶν παρίστανται μὲ τὰ σημεῖα ἑνὸς ἐπιπέδου κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον: Ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου θεωροῦμεν δύο καθέτους ἄξονας, ὡς εἰς τὸ σχῆμα 14, μὲ κοινὸν ἀρχικὸν σημεῖον καὶ κοινὴν μονάδα μήκους. Πρὸς καθορισμὸν τῆς εἰκόνος τοῦ ζεύγους $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ λαμβάνομεν ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐπὶ τοῦ ἄξονος OI σημεῖον X, εἰκόνα τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ x ἐπὶ τοῦ ἄξονος τούτου, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἐπὶ τοῦ ἄξονος OI' τὸ σημεῖον Y, εἰκόνα τοῦ πραγμα-

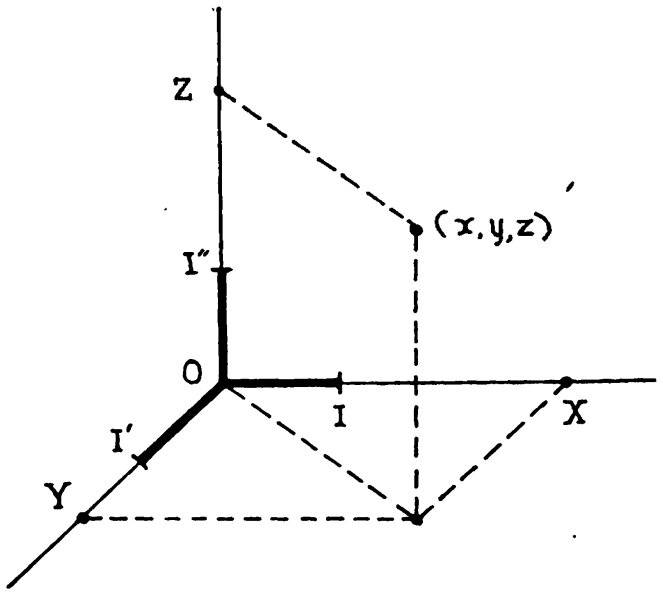


Σχ. 14

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τικοῦ ἀριθμοῦ y. Κατόπιν φέρομεν ἐκ τοῦ σημείου X παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα OI′ καὶ ἐκ τοῦ Y παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα OI, ὁπότε τὸ σημεῖον τομῆς τῶν παραλλήλων τούτων ὁρίζομεν ὡς εἰκόνα τοῦ (διατεταγμένου) ζεύγους (x, y). Εἶναι προφανές, ὅτι κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον τῆς παραστάσεως τῶν διατεταγμένων ζευγῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, διάφορα διατεταγμένα ζεύγη ἔχουν καὶ διαφόρους εἰκόνας.

Χῶρος τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας. Ὡς *χῶρος τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας* ὁρίζεται τὸ σύνολον $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ὅλων τῶν διατεταγμένων τριάδων πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τὰ στοιχεῖα μιᾶς διατεταγμένης τριάδος $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ἀναφέρονται ὡς *συντεταγμέναι* αὐτῆς, τὸ x ὡς ἡ *πρώτη*, τὸ y ὡς ἡ *δευτέρα* καὶ τὸ z ὡς ἡ *τρίτη* συντεταγμένη τῆς τριάδος (x, y, z). Τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, δηλαδὴ αἱ διατεταγμέναι τριάδες πραγματικῶν ἀριθμῶν δύνανται νὰ παρασταθοῦν μὲ σημεῖα τοῦ (γεωμετρικοῦ) χώρου. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν εἰς τὸν χῶρον τρεῖς ἄξονας, ὡς εἰς τὸ σχῆμα 15, οἱ ὁποῖοι ἔχουν κοινὸν ἀρχικὸν σημεῖον O, εἶναι κάθετοι μεταξύ των ἀνὰ δύο καὶ ἔχουν κοινὴν μονάδα μήκους. Ὁ καθορισμὸς τῆς εἰκόνος τῆς τριάδος (x, y, z) ἐμφαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 15, ὅπου ἐπὶ τῶν ἀξόνων OI, OI′, OI″ ἔχουν ληφθῆ τὰ σημεῖα X, Y, Z εἰκόνες ἀντιστοίχως τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν x, y, z.



Σχ. 15

Παρατήρησις. Κατὰ τὴν γεωμετρικὴν παράστασιν τόσον τοῦ ἐπιπέδου, ὅσον καὶ τοῦ χώρου τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας δὲν εἶ-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ναι· ἀπαραίτητον νὰ λαμβάνεται κοινὴ μονὰς μήκους ἐπὶ τῶν ἀξόνων ἢ ἀκόμη καὶ νὰ θεωροῦνται ὀρθογώνιοι ἄξονες. Ἐν ταύτοις, χάριν ἁπλότητος, κατὰ τὴν γεωμετρικὴν παράστασιν διαφόρων ὑποσυνόλων (σχέσεων, συναρτήσεων κλπ) τοῦ ἐπιπέδου ἢ τοῦ χώρου τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας θὰ χρησιμοποιοῦμεν πάντοτε ὀρθογωνίους ἄξονας μὲ κοινὴν μονάδα μήκους.

10.3 ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΕΝ $\mathbb{R}$

Ἀξιοσημείωτα ὑποσύνολα τοῦ $\mathbb{R}$ εἶναι τὰ ἀκόλουθα, καλούμενα *διαστήματα* ἐν $\mathbb{R}$ ἢ *διαστήματα* τῆς πραγματικῆς εὐθείας:

1. *Ἀνοικτὸν διάστημα μὲ ἄκρα* α, β $(\alpha < \beta)$:

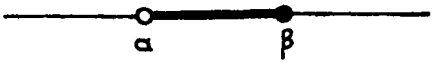
$$(\alpha, \beta) = \{ x \in \mathbb{R} : \alpha < x < \beta \}$$

2. *Κλειστὸν διάστημα μὲ ἄκρα* α, β $(\alpha \leq \beta)$:

$$[\alpha, \beta] = \{ x \in \mathbb{R} : \alpha \leq x \leq \beta \}$$

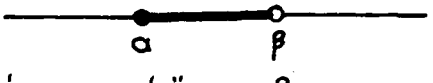
3. *Ἀνοικτὸν ἀριστερά, κλειστὸν δεξιὰ διάστημα μὲ ἄκρα* α, β $(\alpha < \beta)$:

$$(\alpha, \beta] = \{ x \in \mathbb{R} : \alpha < x \leq \beta \}$$



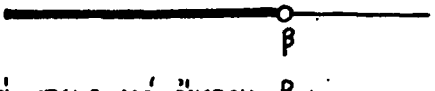
4. *Κλειστὸν ἀριστερά, ἀνοικτὸν δεξιὰ διάστημα μὲ ἄκρα* α, β $(\alpha < \beta)$:

$$[\alpha, \beta) = \{ x \in \mathbb{R} : \alpha \leq x < \beta \}$$



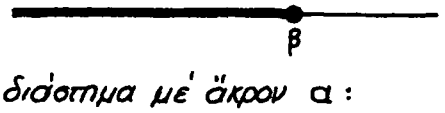
5. *Ἀπέραντον ἀριστερά, ἀνοικτὸν δεξιὰ διάστημα μὲ ἄκρον* β:

$$(-\infty, \beta) = \{ x \in \mathbb{R} : x < \beta \}$$



6. *Ἀπέραντον ἀριστερά, κλειστὸν δεξιὰ διάστημα μὲ ἄκρον* β:

$$(-\infty, \beta] = \{ x \in \mathbb{R} : x \leq \beta \}$$



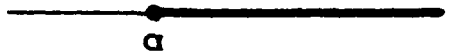
7. *Ἀπέραντον δεξιά, ἀνοικτὸν ἀριστερὰ διάστημα μὲ ἄκρον* α:

$$(\alpha, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} : \alpha < x \}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

8. *Ἀπέραντον δεξιά, κλειστόν ἀριστερά διάστημα μέ ἄκρον* α :

$$[\alpha,+\infty) = \{ x\in\mathbb{R} : \alpha \leqq x \}$$



Ἄν Δ_1,Δ_2 εἶναι διαστήματα τῆς πραγματικῆς εὐθείας μέ $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$, τότε τό διάστημα Δ_1 καλεῖται *ὑποδιάστημα* τοῦ Δ_2.

10.4 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Παραστήσατε γεωμετρικῶς τάς σχέσεις $=$, $<$, $>$, $\leqq$ καί $\geqq$, ὡς σχέσεις εἰς τό σύνολον $\mathbb{R}$.

2. Ἄν σ εἶναι μία σχέσις εἰς τό $\mathbb{R}$, πῶς συνδέονται αἱ γεωμετρικαί παραστάσεις ταύτης καί τῆς ἀντιστρόφου της ;

3. Ἔστω ἡ σχέσις $\sigma : A \to B$, ὅπου A,B ὑποσύνολα τοῦ $\mathbb{R}$. Ἑρμηνεύσατε ἐποπτικῶς διά γεωμετρικῆς παραστάσεως ταύτης τάς ἐννοίας « σχέσις ἐκ τοῦ A εἰς τό B », « σχέσις τοῦ A εἰς τό B», « σχέσις ἐκ τοῦ A ἐπί τοῦ B » καί « σχέσις τοῦ A ἐπί τοῦ B ».

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

11. ΑΞΙΩΜΑ ΤΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΛΗΜΜΑ ΤΟΥ ZORN

11.1 ΑΞΙΩΜΑ ΤΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Τὸ *ἀξίωμα τῆς ἐπιλογῆς* δηλοῖ ὅτι τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον μιᾶς οἰκογενείας μὴ κενῶν συνόλων εἶναι ἐπίσης μὴ κενὸν σύνολον, δηλαδὴ ὅτι:

ΑΞΙΩΜΑ ΤΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ. *Ἂν* $A_i, i\in I$ *εἶναι μία οἰκογένεια μὴ κενῶν συνόλων, τότε ὑπάρχει μία οἰκογένεια* $a_i, i\in I$ *τοιαύτη, ὥστε*

$$(\forall\, i\in I)\ a_i\in A_i .$$

Ἐπειδή, ὡς καὶ ἐν τῇ παραγράφῳ 6.2 παρετηρήσαμεν, τυχοῦσα συλλογὴ συνόλων $\mathcal{A}$ ὁρίζει, μέσῳ τῆς ταυτοτικῆς ἀπεικονίσεως, μίαν οἰκογένειαν συνόλων, τὸ ἀνωτέρω ἀξίωμα δύναται, ὡς εὐκόλως διαπιστοῦται, νὰ διατυπωθῇ καὶ οὕτω:

Διὰ τυχοῦσαν μὴ κενὴν συλλογὴν μὴ κενῶν συνόλων $\mathcal{A}$ *ὑπάρχει μία συνάρτησις* f *μὲ πεδίον ὁρισμοῦ* $\mathcal{D}(f)=\mathcal{A}$ *καὶ τοιαύτη, ὥστε*

$$(\forall\, A\in\mathcal{A})\ f(A)\in A .$$

Τοῦτο, ἁπλῶς δηλοῖ ὅτι, δοθείσης μιᾶς (μὴ κενῆς) συλλογῆς μὴ κενῶν συνόλων, εἶναι δυνατὸν ἀπὸ κάθε σύνολον τῆς συλλογῆς ταύτης νὰ ἐκλεγῇ (μέσῳ μιᾶς συναρτήσεως) ἓν ἀκριβῶς στοιχεῖον.

11.2 ΛΗΜΜΑ ΤΟΥ ZORN

Εἰς τὴν βιβλιογραφίαν ἐμφανίζονται πολυάριθμοι ἰσοδύναμοι προτάσεις πρὸς τὸ ἀξίωμα τῆς ἐπιλογῆς (διὰ περισσοτέρας

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τῶν 100 τοιούτων προτάσεων πρβλ. H. Rubin – J. E. Rubin : Equivalents of the Axiom of Choice, North – Holland [1963]) καὶ πολλαὶ ἐξ αὐτῶν ἀποτελοῦν μᾶλλον ἐκπληκτικὰ θεωρήματα. *Τὸ λῆμμα τοῦ Zorn* εἶναι μία ἀπὸ τὰς ἰσοδυνάμους ταύτας προτάσεις καὶ εἰς πολλὰς περιπτώσεις ἐξυπηρετεῖ καλύτερον τοῦ ἀξιώματος ἐπιλογῆς. Κατωτέρω ἀποδεικνύομεν τὸ λῆμμα τοῦ Zorn, ὄχι ὅμως καὶ τὴν ἰσοδυναμίαν του πρὸς τὸ ἀξίωμα τῆς ἐπιλογῆς, τὴν ὁποίαν δὲν κρίνομεν ἀπαραίτητον εἰς τὰ πλαίσια τοῦ παρόντος βιβλίου.

ΛΗΜΜΑ ΤΟΥ ZORN. *Ἂν* E *εἶναι ἕν διατεταγμένον σύνολον ταυτόν, ὥστε κάθε γραμμικῶς διατεταγμένου ὑποσυνόλου τοῦ* E *νὰ εἶναι ἄνω φραγμένον, τότε τὸ* E *ἔχει ψευδομέγιστα στοιχεῖα (τουλάχιστον ἕν).*

Ἐπεξηγοῦμεν, ὅτι διὰ τῆς ἐκφράσεως *γραμμικῶς διατεταγμένου ὑποσυνόλου τοῦ* E ἐννοοῦμεν, ὅτι τὸ ὑπ' ὄψιν ὑποσύνολον τοῦ E μὲ τὴν ἐνυπάρχουσαν εἰς αὐτὸ διάταξιν τοῦ E ἀποτελεῖ γραμμικῶς διατεταγμένον σύνολον. Τῆς ἀποδείξεως τοῦ λήμματος τοῦ Zorn προτάσσομεν τὸ ἀκόλουθον λῆμμα :

ΛΗΜΜΑ. *Ἂν* E *εἶναι τυχὸν μὴ κενὸν σύνολον καὶ* $\mathcal{E}$ *μία μὴ κενὴ συλλογὴ ὑποσυνόλων τοῦ* E *(ἡ ὁποία βεβαίως θεωρεῖται διατεταγμένη ὡς πρὸς τὴν σχέσιν τοῦ ὑποσυνόλου) ταυτόπ, ὥστε :*

(α) *κάθε ὑποσύνολον τυχόντος συνόλου τῆς* $\mathcal{E}$ *ἀνήκει εἰς τὴν* $\mathcal{E}$, *ἤτοι :*

$$(\forall A)\quad A \in \mathcal{E} \Longrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{E}$$

(β) *ἡ ἕνωσις τυχόντος γραμμικῶς διατεταγμένου ὑποσυνόλου τῆς συλλογῆς* $\mathcal{E}$ *ἀνήκει εἰς τὴν* $\mathcal{E}$, *ἤτοι :*

$$(\forall \mathcal{A})\ \mathcal{A} \text{ γραμμικῶς διατεταγμένον ὑποσύνολον τῆς } \mathcal{E} \Longrightarrow \cup \mathcal{A} \in \mathcal{E},$$

τότε ὑπάρχει ψευδομέγιστον στοιχεῖον τῆς συλλογῆς $\mathcal{E}$.

Ἀπόδειξις. Διὰ τυχὸν σύνολον $X \in \mathcal{E}$, ὁρίζομεν τὸ σύνολον X^* ὡς τὸ σύνολον ὅλων τῶν στοιχείων τοῦ E, τὰ ὁποῖα ἐπισυναπτόμενα εἰς τὸ X παράγουν σύνολον ἀνῆκον εἰς τὴν συλλογὴν $\mathcal{E}$, ἤτοι :

$$X^* = \{ x \in E : X \cup \{x\} \in \mathcal{E} \}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θεωρούμεν τώρα, δυνάμει τοῦ ἀξιώματος ἐπιλογῆς, μίαν συνάρτησιν f μέ πεδίον ὁρισμοῦ $\mathfrak{D}(f) = \mathcal{P}(E) - \{\emptyset\}$ τοιαύτην, ὥστε

$$(\forall A)\ f(A) \in A,$$

ὡς καί τήν συνάρτησιν $g : E \longmapsto E$ τήν ὁριζομένην ὑπό τοῦ τύπου

$$g(X) = \begin{cases} X \cup \{f(X^* - X)\}, & \text{ἄν } X^* - X \neq \emptyset \\ X, & \text{ἄν } X^* - X = \emptyset. \end{cases}$$

Ἐπειδή ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ X^* συνάγεται ὅτι ἕν σύνολον A εἶναι ψευδομέγιστον στοιχεῖον τῆς συλλογῆς E τότε καί μόνον τότε, ἄν $A^* = A$, ἀρκεῖ νά δειχθῇ ὅτι ἡ συνάρτησις g ἔχει σταθερόν σημεῖον, δηλαδή ὅτι ὑπάρχει $A \in E$ τοιοῦτον, ὥστε $g(A) = A$.

Τώρα, χάριν ἁπλότητος εἰσάγομεν προσωρινῶς τήν ἔννοιαν τῆς *παραδεκτῆς* ὑποσυλλογῆς τῆς E. Οὕτω θά λέγωμεν ὅτι μία συλλογή $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \subseteq E$ εἶναι μία παραδεκτή ὑποσυλλογή τῆς E τότε καί μόνον τότε, ἄν ἰσχύουν τά κάτωθι :

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

(ii) $(\forall A)\ A \in \mathcal{A} \Longrightarrow g(A) \in \mathcal{A}$

(iii) $(\forall C)$ C γραμμικῶς διατεταγμένον ὑποσύνολον τῆς $\mathcal{A} \Rightarrow \cup C \in \mathcal{A}$.

Κατά τόν ἀναπόφευκτον ὁρισμόν ὁλόκληρος ἡ συλλογή E εἶναι παραδεκτή. Ἐπειδή, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται, ἡ τομή τυχούσης συλλογῆς παραδεκτῶν ὑποσυλλογῶν τῆς E εἶναι ἐπίσης μία παραδεκτή ὑποσυλλογή τῆς E, ἕπεται ὅτι ἡ τομή C_0 ὅλων τῶν παραδεκτῶν ὑποσυλλογῶν τῆς E εἶναι προφανῶς ἡ ἐλαχίστη παραδεκτή ὑποσυλλογή τῆς E. Κατωτέρω θά ἀποδείξωμεν, ὅτι ἡ ἐλαχίστη παραδεκτή ὑποσυλλογή C_0 τῆς E εἶναι ἕν γραμμικῶς διατεταγμένον ὑποσύνολον τῆς E.

Λέγομεν, ὅτι ἕν σύνολον τῆς συλλογῆς C_0 εἶναι συγκρίσιμον ἐν C_0 τότε καί μόνον τότε, ἄν τοῦτο εἶναι συγκρίσιμον (ὡς πρός τήν σχέσιν τοῦ ὑποσυνόλου) μέ κάθε σύνολον ἐν C_0. Ἑπομένως, ἵνα δείξωμεν, ὅτι ἡ συλλογή C_0 εἶναι γραμμικῶς διατεταγμένον ὑποσύνολον τῆς E, ἀρκεῖ νά δείξωμεν, ὅτι τυχόν σύνολον τῆς C_0 εἶναι συγκρίσιμον ἐν C_0.

Σύνολα συγκρίσιμα ἐν C_0 ὑπάρχουν, π.χ. τό $\emptyset$. Θεωρούμεν λοιπόν

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἓν σύνολον $C \in \mathcal{C}_0$ συγκρίσιμον ἐν $\mathcal{C}_0$ καί τυχόν γνήσιον ὑποσύνολον X αὐτοῦ. Ἀποκλείεται τότε νά ἰσχύῃ $C \subset g(X)$, διότι ἡ $X \subset C \subset g(X)$ ἀντίκειται εἰς τό ὅτι, δυνάμει τοῦ ὁρισμοῦ τῆς g, ἡ διαφορά $g(X)-X$ δέν δύναται νά εἶναι παρά τό κενόν σύνολον ἤ μονοστοιχειακόν σύνολον. Ὥστε ἐδείχθη, ὅτι :

$$(1) \qquad (\forall X)\ X \subset C \Longrightarrow g(X) \subseteq C.$$

Θεωροῦμεν τώρα τήν συλλογήν $\mathcal{B}$,

$$\mathcal{B} = \left\{ X \in \mathcal{C}_0 : X \subseteq C \ \text{ἤ}\ g(C) \subseteq X \right\}$$

καί θά δείξωμεν, ὅτι αὕτη εἶναι μία παραδεκτή ὑποσυλλογή τῆς $\mathcal{E}$, ὁπότε βεβαίως θά ἰσχύῃ $\mathcal{B} = \mathcal{C}_0$, διότι ἡ $\mathcal{C}_0$ εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ ἡ ἐλαχίστη παραδεκτή ὑποσυλλογή τῆς $\mathcal{E}$. Πράγματι : Ἡ συνθήκη (i) εἶναι προφανής, διότι $\phi \subseteq C$ καί ἐπομένως $\phi \in \mathcal{B}$. Πρός ἀπόδειξιν τῆς (ii) θεωροῦμεν τυχόν $X \in \mathcal{B}$ καί διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις :

(i') $X \subset C$. Δυνάμει τῆς (1), ἔχομεν τότε $g(X) \subseteq C$, δηλαδή $g(X) \in \mathcal{B}$.

(ii') $X = C$. Προφανῶς ἰσχύει $g(C) \subseteq g(X)$ καί ἐπομένως $g(X) \in \mathcal{B}$.

(iii') $g(C) \subseteq X$. Δυνάμει τοῦ ὁρισμοῦ τῆς g, ἔχομεν καί $X \subseteq g(X)$, ἄρα $g(C) \subseteq g(X)$ καί ἐπομένως $g(X) \in \mathcal{B}$.

Πρός ἀπόδειξιν τῆς τελευταίας συνθήκης (iii), δηλαδή ὅτι ἡ ἕνωσις $\cup\mathcal{C} \in \mathcal{B}$, ὅπου $\mathcal{C}$ τυχόν γραμμικῶς διατεταγμένον ὑποσύνολον τῆς $\mathcal{B}$, διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

(i'') $(\forall X) X \in \mathcal{C} \longrightarrow X \subseteq C$. Προφανῶς, ἔχομεν τότε $\cup\mathcal{C} \subseteq C$ καί ἐπομένως $\cup\mathcal{C} \in \mathcal{B}$.

(ii'') $(\exists X) X \in \mathcal{C} \longrightarrow g(C) \subseteq X$. Ἔχομεν τότε $g(C) \subseteq X \subseteq \cup\mathcal{C}$ καί ἐπομένως $\cup\mathcal{C} \in \mathcal{B}$.

Ὥστε ἐδείχθη, ὅτι $\mathcal{B} = \mathcal{C}_0$, τό ὁποῖον συνεπάγεται ὅτι τό σύνολον $g(C)$ εἶναι συγκρίσιμον ἐν $\mathcal{C}_0$. Πράγματι· ἄν $X \in \mathcal{C}_0$, τότε ἡ $\mathcal{B} = \mathcal{C}_0$ δηλοῖ ὅτι $X \subseteq C$ (ὁπότε, δυνάμει τοῦ ὁρισμοῦ τῆς g, ἰσχύει καί $X \subseteq g(C)$) ἤ $g(C) \subseteq X$. Ἄρα διά τυχόν συγκρίσιμον ἐν $\mathcal{C}_0$ σύνολον C, τό σύνολον $g(C)$ εἶναι ἐπίσης συγκρίσιμον ἐν $\mathcal{C}_0$.

Ἡ ὑποσυλλογή τῆς $\mathcal{C}_0$ ὅλων τῶν συγκρισίμων ἐν αὐτῇ συνόλων εἶναι μία παραδεκτή ὑποσυλλογή τῆς $\mathcal{E}$, διότι : *Πρῶτον*, τό ϕ ἀνήκει εἰς αὐ-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τήν, διότι, ὡς γνωρίζομεν, εἶναι συγκρίσιμον ἐν $\mathcal{C}_0$. *Δεύτερον*, ἰσχύει ἡ συνθήκη (ii), ὡς ἀπεδείχθη εὐθὺς ἀνωτέρω. *Τρίτον*, ἰσχύει καὶ ἡ συνθήκη (iii), διότι, ὡς εὐκόλως συνάγεται (ἀπόδειξις ;), ἡ ἕνωσις $\cup\mathcal{C}$ τυχούσης γραμμικῶς διατεταγμένης συλλογῆς $\mathcal{C}$ συγκρισίμων ἐν $\mathcal{C}_0$ συνόλων εἶναι ἐπίσης συγκρίσιμον ἐν $\mathcal{C}_0$ σύνολον. Ἐπειδὴ ὅμως, ἡ $\mathcal{C}_0$ εἶναι ἡ ἐλαχίστη παραδεκτὴ ὑποσυλλογὴ τῆς $\mathcal{E}$, ἕπεται ὅτι ὅλα τὰ σύνολα αὐτῆς εἶναι συγκρίσιμα ἐν $\mathcal{C}_0$, τὸ ὁποῖον ἀποδεικνύει, ὅτι ἡ συλλογὴ $\mathcal{C}_0$ ἀποτελεῖ ἕν γραμμικῶς διατεταγμένον ὑποσύνολον τῆς $\mathcal{E}$.

Ἐφαρμόζοντες τὰς (ii) καὶ (iii) εἰς τὴν περίπτωσιν $\mathcal{A}=\mathcal{C}_0$ λαμβάνομεν ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐκ τῆς (iii), ὅτι τὸ σύνολον $A=\cup\mathcal{C}_0\in\mathcal{C}_0$ (δηλαδή, ὅτι τοῦτο εἶναι μέγιστον στοιχεῖον τῆς $\mathcal{C}_0$), ἀφ' ἑτέρου δὲ ἐκ τῆς (ii), ὅτι $g(A)\in\mathcal{C}_0$ καὶ ἑπομένως $g(A)\subseteq A$. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ὅμως τῆς g ἔχομεν καὶ $g(A)\supseteq A$, ἄρα ἰσχύει $g(A)=A$, τὸ ὁποῖον καὶ ἀποδεικνύει τὸ λῆμμα.

Ἀπόδειξις τοῦ λήμματος τοῦ Zorn. Θεωροῦμεν τὴν συλλογὴν $\mathcal{E}$ ὅλων τῶν γραμμικῶς διατεταγμένων ὑποσυνόλων τοῦ E, ἡ ὁποία ὡς περιέχουσα τὸ $\emptyset$ εἶναι μὴ κενή. Ἡ συλλογὴ $\mathcal{E}$ πληροῖ τὰς ὑποθέσεις τοῦ ἀνωτέρω λήμματος (ἀπόδειξις ;) καὶ ἑπομένως ἔχει ἓν μεγιστοπον σύνολον A. Τὸ A ὡς γραμμικῶς διατεταγμένον ὑποσύνολον τοῦ E ἔχει ἓν ἄνω φράγμα $a\in E$. Ἂν $\preceq$ παριστᾷ τὴν μερικὴν διάταξιν τοῦ E καὶ $a\preceq x$, τότε τὸ x εἶναι συγκρίσιμον μὲ κάθε στοιχεῖον τοῦ A, ὁπότε τὸ σύνολον $A\cup\{x\}$ εἶναι γραμμικῶς διατεταγμένον ὑποσύνολον τοῦ E καὶ ἐπειδὴ τὸ A εἶναι μεγιστοπον, θὰ ἰσχύῃ $A=A\cup\{x\}$, δηλαδὴ $x\in A$ καὶ ἑπομένως $x\preceq a$. Ἄρα $a=x$. Ὥστε ἐδείχθη, ὅτι

$$(\forall x\in E)\quad a\preceq x\longrightarrow a=x,$$

δηλαδή, ὅτι τὸ a εἶναι μεγιστοπον στοιχεῖον τοῦ E.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

12. ΙΣΧΥΣ ΣΥΝΟΛΟΥ

12.1 ΣΥΝΟΛΑ ΤΗΣ ΑΥΤΗΣ ΙΣΧΥΟΣ, ΥΠΕΡΙΣΧΥΟΝΤΑ ΣΥΝΟΛΑ

Αἱ συναρτήσεις μᾶς παρέχουν τὴν δυνατότητα συγκρίσεως δύο συνόλων στοιχεῖον πρὸς στοιχεῖον. Οὕτω λέγομεν, ὅτι δύο σύνολα A καὶ B *ἔχουν τὴν αὐτὴν ἰσχύν* ἢ καὶ ἄλλως *τὸν αὐτὸν πληθικὸν ἀριθμόν* (cardinal number) καὶ γράφομεν $A \simeq B$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις *τοῦ A ἐπὶ τοῦ B*. Εὐκόλως συνάγεται (ἀπόδειξις;) ὅτι διὰ τυχόντα σύνολα A, B, Γ ἰσχύουν τὰ κάτωθι :

$$A \simeq A$$

$$A \simeq B \longleftrightarrow B \simeq A$$

$$A \simeq B \quad \text{καὶ} \quad B \simeq \Gamma \longrightarrow A \simeq \Gamma.$$

Λέγομεν ἐπίσης, ὅτι τὸ σύνολον A *ὑπερισχύει τοῦ* B καὶ γράφομεν $A \succsim B$ ἢ $B \precsim A$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις *τοῦ B εἰς τὸ A*. Θὰ λέγωμεν δὲ ὅτι τὸ A *ὑπερισχύει γνησίως* τοῦ B καὶ θὰ γράφωμεν $A \succ B$ ἢ $B \prec A$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν $A \succsim B$ καὶ $A \not\simeq B$. Διὰ τυχόντα σύνολα A, B, Γ, Δ εὐκόλως συνάγονται τὰ κάτωθι :

$$A \precsim A$$

$$A \precsim B \quad \text{καὶ} \quad B \precsim \Gamma \longrightarrow A \precsim \Gamma$$

$$A \simeq B, \ \Gamma \simeq \Delta \quad \text{καὶ} \quad A \prec \Gamma \longrightarrow B \prec \Delta.$$

Θὰ ἀποδείξωμεν τώρα τὸ ἀκόλουθον βασικὸν θεώρημα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

12.1.1 ΘΕΩΡΗΜΑ (Schröder-Bernstein). Ἂν τὸ σύνολον A ὑπερισχύῃ τοῦ B καὶ τὸ B τοῦ A, τότε τὰ A καὶ B ἔχουν τὴν αὐτὴν ἰσχύν. Ἤτοι :

$$A \succeq B \text{ καὶ } A \preceq B \Longrightarrow A \simeq B.$$

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν αἱ ἀμφιμονοσήμαντοι ἀπεικονίσεις f τοῦ A εἰς τὸ B καὶ g τοῦ B εἰς τὸ A. Θεωροῦμεν τὸ διατεταγμένον σύνολον $\mathcal{P}(A)$ (μὲ μερικὴν διάταξιν τὴν σχέσιν τοῦ περιέχεσθαι). Τοῦτο ἀποτελεῖ ἓν κεκορεσμένον διατεταγμένον σύνολον (Πρβλ. ἐδάφιον 5, ἄσκ. 9) μὲ μέγιστον στοιχεῖον τὸ A καὶ ἐλάχιστον στοιχεῖον τὸ $\emptyset$. Θεωροῦμεν ἐπίσης καὶ τὴν συνάρτησιν $\varphi : \mathcal{P}(A) \longmapsto \mathcal{P}(A)$ τὴν ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\varphi(X) = A - g(B - f(X)),$$

ἡ ὁποία εἶναι αὔξουσα, διότι διὰ τυχόντα X, Y ἐν $\mathcal{P}(A)$ ἰσχύει

$$X \subseteq Y \Longrightarrow f(X) \subseteq f(Y) \Longrightarrow B - f(X) \supseteq B - f(Y) \Longrightarrow g(B - f(X))$$

$$\supseteq g(B - f(Y)) \Longrightarrow \varphi(X) = A - g(B - f(X)) \subseteq A - g(B - f(Y)) = \varphi(Y).$$

Δυνάμει τοῦ θεωρήματος 6.3.1 (σταθεροῦ σημείου τοῦ Knaster), ὑπάρχει ἓν σταθερὸν σημεῖον τῆς φ, δηλαδὴ ὑπάρχει σύνολον $\Gamma \in \mathcal{P}(A)$ τοιοῦτον, ὥστε

$$\Gamma = A - g(B - f(\Gamma)), \text{ ἄρα καὶ } A - \Gamma = g(B - f(\Gamma)).$$

Συνεπῶς, ἐπειδὴ ἡ g εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος, ἡ g^{-1} ὁρίζει μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ $A - \Gamma$ ἐπὶ τοῦ $B - f(\Gamma)$. Ἀλλὰ καὶ ἡ f προφανῶς ὁρίζει μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ Γ ἐπὶ τοῦ $f(\Gamma)$ καὶ ἑπομένως ἡ συνάρτησις h, ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τοῦ τύπου

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ἂν } x \in \Gamma \\ g^{-1}(x), & \text{ἂν } x \in A - \Gamma, \end{cases}$$

ἀποτελεῖ μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ A ἐπὶ τοῦ B, τὸ ὁποῖον καὶ ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

12.1.2 ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἂν $A \prec B$ καὶ $B \preceq \Gamma$, τότε $A \prec \Gamma$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Απόδειξις. Ἐν πρώτοις ἔχομεν

$$A \prec B \text{ καὶ } B \precsim \Gamma \longrightarrow A \precsim B \text{ καὶ } B \precsim \Gamma \longrightarrow A \prec \Gamma.$$

Ἰσχύει ὅμως $A \neq \Gamma$, διότι ἄλλως $A \simeq \Gamma$ καὶ $B \precsim \Gamma \rightarrow B \precsim A$ καὶ ἐπομένως $(A \prec B \text{ καὶ } B \precsim A) \rightarrow (A \precsim B \text{ καὶ } B \precsim A) \rightarrow A \simeq B$, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν $A \prec B$.

12.1.3 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. $\mathbf{N}^2 \simeq \mathbf{N}$.

Απόδειξις. Ὁ τύπος

$$f(x) = (x,1),\ x \in \mathbf{N}$$

ὁρίζει προφανῶς μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ $\mathbf{N}$ εἰς τὸ $\mathbf{N}^2$ καὶ ἐπομένως $\mathbf{N} \precsim \mathbf{N}^2$. Ἀρκεῖ, ὅθεν, νὰ δειχθῇ, ὅτι καὶ $\mathbf{N}^2 \precsim \mathbf{N}$. Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν g τὴν ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ τύπου

$$g(x,y) = (x+y)^2 + x,\ (x,y) \in \mathbf{N}^2,$$

ἡ ὁποία προφανῶς ἀποτελεῖ μίαν ἀπεικόνισιν τοῦ $\mathbf{N}^2$ εἰς τὸ $\mathbf{N}$. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αὕτη εἶναι καὶ ἀμφιμονοσήμαντος. Πράγματι· ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν, ὅτι

$$(\forall\, x,y,z,w \text{ ἐν } \mathbf{N})\ g(x,y) = g(z,w) \rightarrow x+y = z+w,$$

διότι ἄλλως, χωρὶς βλάβην τῆς γενικότητος, ὑποθέτομεν $x+y > z+w$, ὁπότε $x+y \geq z+w+1$ καὶ ἐπομένως ἡ $g(x,y) = g(z,w)$ συνεπάγεται τὴν

$$z-x = (x+y)^2 - (z+w)^2 \geq (z+w+1)^2 - (z+w) = 2z+2w+1 > z > z-x,$$

ὅπερ ἄτοπον. Ἑπομένως :

$$g(x,y) = g(z,w) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x+y)^2 + x = (z+w)^2 + z \\ x+y = z+w \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ x+y = z+w \end{array} \right\}$$

$$\longrightarrow x = z \quad \text{καὶ} \quad y = w,$$

τὸ ὁποῖον ἀποδεικνύει, ὅτι ἡ g εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος.

Ὥστε ἐδείχθη, ὅτι ἰσχύει καὶ $\mathbf{N}^2 \precsim \mathbf{N}$. Ἄρα $\mathbf{N}^2 \simeq \mathbf{N}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

12.2 ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΥΝΟΛΑ

Αἱ εἰς τὴν παράγραφον ταύτην προτάσεις συνιστῶν μίαν ἀφηρημένην περιγραφὴν γνώσεων, αἱ ὁποῖαι ἀφοροῦν εἰς πεπερασμένα σύνολα καὶ αἱ ὁποῖαι εἶναι ἤδη ἐνορατικῶς γνωσταὶ εἰς ἡμᾶς ἀπὸ τὸ περὶ ἀπαριθμήσεως κεφάλαιον τῆς Ἀριθμητικῆς.

Διὰ τυχόντα μὴ ἀρνητικὸν ἀκέραιον k, θέτομεν

$$T(k) = \{ x \in \mathbb{N} : x \leq k \}.$$

Τὰ σύνολα $T(k)$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ ἀναφέρονται ὡς *τμήματα* τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

Ἰσχύουν αἱ κάτωθι προτάσεις :

12.2.1 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Ἂν m, n τυχόντες μὴ ἀρνητικοὶ ἀκέραιοι, τότε

$$T(m) \precsim T(n) \Longleftrightarrow m \leq n.$$

Ἀπόδειξις. Ἂν $m \leq n$, τότε ἡ ταυτοτικὴ ἀπεικόνισις, ὁρίζει προφανῶς μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ $T(n)$ εἰς τὸ $T(m)$ καὶ ἐπομένως $T(m) \precsim T(n)$.

Δεχόμεθα τώρα $T(m) \precsim T(n)$ καὶ ὑποθέτομεν $m < n$. Ἂν καλέσωμεν k τὸν ἐλάχιστον μὴ ἀρνητικὸν ἀκέραιον, διὰ τὸν ὁποῖον ὑπάρχει $\ell \in \mathbb{N}_0$ τοιοῦτον, ὥστε

$$T(k) \precsim T(\ell) \quad \text{καὶ} \quad k < \ell$$

καὶ θεωρήσωμεν μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν f τοῦ $T(\ell)$ εἰς τὸ $T(k)$, τότε ἐπειδὴ $\ell > k \geq 0$, ἰσχύει $T(\ell) \neq \emptyset$ καὶ ἐπομένως $T(k) \neq \emptyset$, τὸ ὁποῖον δηλοῖ ὅτι καὶ $k > 0$. Ἄρα, τόσον ὁ $k-1$, ὅσον καὶ ὁ $\ell-1$ εἶναι μὴ ἀρνητικὸς ἀκέραιος.

Θεωροῦμεν τώρα καὶ τὴν συνάρτησιν $g : T(k) - \{f(\ell)\} \mapsto T(k-1)$ τὴν ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ τύπου

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{ἂν } x < f(\ell) \\ x-1, & \text{ἂν } x > f(\ell), \end{cases}$$

ἡ ὁποία εἶναι βεβαίως ἀμφιμονοσήμαντος, ὁπότε ἡ σύνθεσις $g \circ f$ ὁρίζει

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καὶ αὐτὴ μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ $T(\ell-1)$ εἰς τὸ $T(k-1)$. Ἑπομένως ἰσχύει

$$T(k-1) \gtrsim T(\ell-1) \quad \text{καὶ} \quad k-1 \prec \ell-1,$$

τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὸν ὁρισμὸν τοῦ k.

12.2.2 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Ἔστωσαν m, n τυχόντες μὴ ἀρνητικοὶ ἀκέραιοι. Ἂν ὑπάρχῃ μία ἀπεικόνισις τοῦ $T(m)$ ἐπὶ τοῦ $T(n)$, τότε $m \geq n$.

Ἀπόδειξις. Ἔστω f μία ἀπεικόνισις τοῦ $T(m)$ ἐπὶ τοῦ $T(n)$. Θεωροῦμεν καὶ τὴν συνάρτησιν $g: T(n) \longmapsto T(m)$ τὴν ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ τύπου

$$g(x) = \min f^{-1}(\{x\}),$$

ἡ ὁποία εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος, διότι

$$g(x)=g(y) \Rightarrow \min f^{-1}(\{x\}) = \min f^{-1}(\{y\}) \Rightarrow f^{-1}(\{x\}) \cap f^{-1}(\{y\})$$

$$\neq \emptyset \Rightarrow f^{-1}(\{x\} \cap \{y\}) \neq \emptyset \Rightarrow \{x\} \cap \{y\} \neq \emptyset \Rightarrow x = y.$$

Ἄρα $T(m) \gtrsim T(n)$, τὸ ὁποῖον, δυνάμει τῆς 12.2.1, δηλοῖ ὅτι $m \geq n$.

Ἓν σύνολον καλεῖται *πεπερασμένον* τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἔχῃ τὴν αὐτὴν ἰσχὺν μὲ ἓν τμῆμα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Ἓν σύνολον, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι πεπερασμένον καλεῖται *ἀπέραντον*. Εἶναι προφανὲς ὅτι σύνολα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν ἰσχὺν μὲ ἓν πεπερασμένον σύνολον εἶναι ἐπίσης πεπερασμένα, ἐνῶ σύνολα ἔχοντα τὴν αὐτὴν ἰσχὺν μὲ ἓν ἀπέραντον σύνολον εἶναι ἐπίσης ἀπέραντα.

12.2.3 ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν E εἶναι ἓν πεπερασμένον σύνολον, τότε ὑπάρχει ἀκριβῶς εἷς μὴ ἀρνητικὸς ἀκέραιος k τοιοῦτος, ὥστε $E \simeq T(k)$.

Ἀπόδειξις. Δυνάμει τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ πεπερασμένου συνόλου, ὑπάρχει $k \in \mathbb{N}_0$ τοιοῦτος, ὥστε $E \simeq T(k)$. Ἂν ὑποθέσωμεν ἐπίσης ὅτι $E \simeq T(m)$, ὅπου $m \in \mathbb{N}_0$, τότε προφανῶς $T(k) \simeq T(m)$ καὶ ἑπομένως λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν καὶ τὴν πρότασιν 12.2.1, ἔχομεν:

$$T(k) \simeq T(m) \Rightarrow T(k) \gtrsim T(m) \text{ καὶ } T(m) \gtrsim T(k) \Rightarrow k \geq m \text{ καὶ } m \geq k$$

$$\Rightarrow k = m.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τόν διά τοῦ θεωρήματος τούτου μονοσημάντως ὡρισμένου μή ἀρνητικόν ἀκέραιον k καλοῦμεν *πληθικόν ἀριθμόν* τοῦ πεπερασμένου συνόλου E ἤ καί ἄλλως *πλῆθος τῶν στοιχείων* τοῦ πεπερασμένου συνόλου E καί παριστῶμεν τοῦτον μέ card E.

12.2.4 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Τυχόν ὑποσύνολον πεπερασμένου συνόλου εἶναι ἐπίσης πεπερασμένον.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν τά σύνολα A, B μέ $A \subseteq B$ καί B πεπερασμένον. Ἄν $k = \text{card } B$, τότε $B \simeq T(k)$, δηλαδή ὑπάρχει μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ B ἐπί τοῦ $T(k)$, τῆς ὁποίας ὁ περιορισμός ἐπί τοῦ A ὁρίζει μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ A εἰς τό $T(k)$. Ἄν

$$n = \min \left\{ x \in \mathbb{N}_0 : (\exists\, f : A \rightarrowtail T(x))\ f \text{ ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις} \right\}$$

καί f μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ A εἰς τό $T(n)$, τότε αὕτη εἶναι καί ἐπί τοῦ $T(n)$, διότι ἄλλως ὑπάρχει $k \in T(n) - \mathcal{R}(f)$, ὁπότε ἡ συνάρτησις h, ἡ ὁριζομένη ὑπό τοῦ τύπου

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ἄν } f(x) < k \\ f(x)-1, & \text{ἄν } f(x) > k \end{cases}$$

ἀποτελεῖ μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ A εἰς τό $T(n-1)$, τό ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τόν ὁρισμόν τοῦ n.

Παρατήρησις. Εἰς τήν ἀνωτέρω ἀπόδειξιν, τό n, ὡς ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ του, πληροῖ τήν σχέσιν $n \leqq k$, δηλαδή $\text{card } A \leqq \text{card } B$.

12.2.5 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Ἡ ἕνωσις δύο πεπερασμένων συνόλων εἶναι ἐπίσης πεπερασμένου σύνολου.

Ἀπόδειξις. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι διά τυχόντα πεπερασμένα σύνολα X, Y, ἰσχύει

$$(1) \qquad \text{card } Y \leqq 1 \longrightarrow X \cup Y \text{ πεπερασμένου}$$

(ἡ ἀπόδειξις τούτου ἀφίεται ὡς ἄσκησις).

Δεχόμεθα τώρα, ὅτι διά τυχόντα πεπερασμένα σύνολα X, Y, ἰσχύει

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

(2) $\text{card}\, Y \leqq n \longrightarrow X \cup Y$ πεπερασμένον,

όπότε, άν θεωρήσωμεν τυχόντα πεπερασμένα σύνολα X, Y μέ $\text{card}\, Y = n+1$ καί λάβωμεν ἕν στοιχεῖον $y \in Y$, θά ἔχωμεν

$$X \cup Y = [X \cup (Y - \{y\})] \cup \{y\}.$$

Ἐπειδή δέ $\text{card}(Y - \{y\}) = n$ (διατί;), τό σύνολον $X \cup (Y - \{y\})$ εἶναι, δυνάμει τῆς (2), πεπερασμένον, ὁπότε, δυνάμει τῆς (1), καί τό σύνολον $[X \cup (Y - \{y\})] \cup \{y\}$, δηλαδή τό $X \cup Y$ εἶναι πεπερασμένον. Ὥστε ἐδείχθη, ὅτι διά τυχόντα πεπερασμένα σύνολα X, Y, ἰσχύει καί

$$\text{card}\, Y \leqq n+1 \Longrightarrow X \cup Y \text{ πεπερασμένον},$$

τό ὁποῖον, δυνάμει τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπαγωγικῆς ἀποδείξεως, ἀποδεικνύει τήν πρότασιν.

Παρατήρησις. Ἡ ἀνωτέρω πρότασις γενικεύεται καί εἰς τήν περίπτωσιν συλλογῶν συνόλων. Συγκεκριμένως ἰσχύει :

Ἡ ἕνωσις μιᾶς πεπερασμένης συλλογῆς πεπερασμένων συνόλων εἶναι ἐπίσης πεπερασμένον σύνολον.

Ἡ ἀπόδειξις ἐπιτυγχάνεται τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπαγωγικῆς ἀποδείξεως, ἐφαρμοζομένης ἐπί τοῦ πληθικοῦ ἀριθμοῦ τῆς συλλογῆς, ἀφίεται δέ εἰς τόν ἀναγνώστην.

12.2.6 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. **Τό καρτεσιανόν γινόμενον δύο πεπερασμένων συνόλων εἶναι ἐπίσης πεπερασμένον σύνολον.**

Ἀπόδειξις. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι διά τυχόντα πεπερασμένα σύνολα X, Y, ἰσχύει

(3) $\text{card}\, Y \leqq 1 \Longrightarrow X \times Y$ πεπερασμένον

καί δεχόμεθα, ὅτι ἰσχύει καί

(4) $\text{card}\, Y \leqq n \longrightarrow X \times Y$ πεπερασμένον,

ὁπότε, ἄν ὑποθέσωμεν, ὅτι δι' ἕν πεπερασμένου συνόλου Y ἰσχύει $\text{card}\, Y =$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$=n+1$ καὶ λάβωμεν $y\in Y$, θὰ ἔχωμεν

$$X\times Y = X\times[(Y-\{y\})\cup\{y\}] = [X\times(Y-\{y\})]\cup[X\times\{y\}].$$

Ἐπειδὴ δὲ $\operatorname{card}(Y-\{y\})=n$, δυνάμει τῆς (4), τὸ σύνολον $X\times(Y-\{y\})$ εἶναι πεπερασμένον. Ἀλλά, δυνάμει τῆς (3), καὶ τὸ σύνολον $X\times\{y\}$ εἶναι πεπερασμένον καὶ ἐπομένως, δυνάμει τῆς προηγουμένης προτάσεως 12.2.5, τὸ σύνολον $X\times Y$ εἶναι ἐπίσης πεπερασμένον. Ὥστε ἐδείχθη, ὅτι διὰ τυχόντα πεπερασμένα σύνολα X, Y, ἰσχύει

$$\operatorname{card} Y \leqq n+1 \longrightarrow X\times Y \text{ πεπερασμένον},$$

τὸ ὁποῖον καὶ ἀποδεικνύει τὴν πρότασιν.

Παρατήρησις. Ἡ ἀνωτέρω πρότασις γενικεύεται καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν μιᾶς οἰκογενείας πεπερασμένων συνόλων μὲ πεπερασμένον σύνολον δεικτῶν ἢ ὅπως ἄλλως λέγομεν μιᾶς *πεπερασμένης* οἰκογενείας πεπερασμένων συνόλων. Συγκεκριμένως ἰσχύει :

Τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον μιᾶς πεπερασμένης οἰκογενείας πεπερασμένων συνόλων εἶναι ἐπίσης πεπερασμένον σύνολον.

Ἡ ἀπόδειξις ἐπιτυγχάνεται τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπαγωγικῆς ἀποδείξεως, ἐφαρμοζομένης ἐπὶ τοῦ πληθικοῦ ἀριθμοῦ τοῦ συνόλου δεικτῶν τῆς οἰκογενείας, ἀφίεται δὲ εἰς τὸν ἀναγνώστην.

12.2.7 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. **Ἐν μὴ κενὸν πεπερασμένον ὑποσύνολον ἑνὸς γραμμικῶς διατεταγμένου συνόλου ἔχει μέγιστον καὶ ἐλάχιστον στοιχεῖον.**

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν E ἓν γραμμικῶς διατεταγμένον σύνολον καὶ $\preceq$ ἡ μερικὴ του διάταξις. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν, ὅτι διὰ τυχὸν μὴ κενὸν πεπερασμένον ὑποσύνολον X τοῦ E ἰσχύει.

(5) $\operatorname{card} X \leqq 2 \longrightarrow X$ ἔχει μέγιστον καὶ ἐλάχιστον στοιχεῖον.

Δεχόμεθα, ὅτι διὰ τυχὸν μὴ κενὸν πεπερασμένον ὑποσύνολον X τοῦ E ἰσχύει

$$\operatorname{card} X \leqq n,\ n \geqq 2 \longrightarrow X \text{ ἔχει μέγιστον καὶ ἐλάχιστον στοιχεῖον},$$

ὁπότε, ἂν θεωρήσωμεν τυχὸν πεπερασμένον ὑποσύνολον X τοῦ E μὲ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$\operatorname{card} X = n+1$ καὶ λάβωμεν τυχόν $x \in X$, τότε $\operatorname{card}(X-\{x\}) = n$. Προφανῶς, δυνάμει τῆς (5), ὑπάρχουν τὰ $\max\{\max(X-\{x\}), x\}$ καὶ $\min\{\min(X-\{x\}), x\}$. Ἀλλὰ προφανῶς

$$\max X = \max\{\max(X-\{x\}), x\} \text{ καὶ } \min X = \min\{\min(X-\{x\}), x\}.$$

Ὥστε ἐδείχθη, ὅτι διὰ τυχόν μὴ κενὸν πεπερασμένον ὑποσύνολον X τοῦ E ἰσχύει καὶ

$$\operatorname{card} X \leqq n+1 \Longrightarrow X \text{ ἔχει μέγιστον καὶ ἐλάχιστον στοιχεῖον},$$

τὸ ὁποῖον καὶ ἀποδεικνύει τὴν πρότασιν.

Παρατήρησις. Ὡς πόρισμα τῆς ἀνωτέρω προτάσεως, ἔχομεν, ὅτι τυχόν μὴ κενὸν πεπερασμένον ὑποσύνολον τῆς πραγματικῆς εὐθείας ἔχει μέγιστον καὶ ἐλάχιστον στοιχεῖον.

12.2.8 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. **Τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀπέραντον.**

Ἀπόδειξις. Ὑποθέτομεν ὅτι τὸ σύνολον $\mathbb{N}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι πεπερασμένον καὶ ἐπομένως, ἂν $\operatorname{card} \mathbb{N} = n$, ὑπάρχει μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ $\mathbb{N}$ ἐπὶ τοῦ τμήματος $T(n)$, ὁπότε ὁ περιορισμός ταύτης ἐπὶ τοῦ $T(n+1)$ ὁρίζει μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ $T(n+1)$ εἰς τὸ $T(n)$, ἄρα $T(n+1) \precsim T(n)$, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν πρότασιν 12.2.1.

12.3 ΑΡΙΘΜΗΣΙΜΑ ΣΥΝΟΛΑ

Ἐκ τῶν ἀπεράντων συνόλων, τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν ἰσχὺν μὲ τὸ σύνολον $\mathbb{N}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν χαρακτηρίζονται ὡς *ἀριθμήσιμα*.

12.3.1 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. **Τυχὸν ἀπεράντου ὑποσυνόλου τοῦ συνόλου $\mathbb{N}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμήσιμον.**

Ἀπόδειξις. Ἔστω S ἓν ἀπέραντον ὑποσύνολον τοῦ $\mathbb{N}$. Προφανῶς, διὰ τυχόντα φυσικὸν ἀριθμὸν x, ἰσχύει $\{y \in S : y > x\} \neq \emptyset$, ὁπότε, ἐφαρμόζοντες τὴν ἀρχὴν τοῦ ἐπαγωγικοῦ ὁρισμοῦ, θέτοντες ἐν τῷ θεωρήματι 8.2.1

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$a = \min S$$

$$F(g) = \min \{ y \in S : y > g(x) \},$$

έξασφαλίζομεν τὴν ὕπαρξιν μιᾶς ἀπεικονίσεως (συναρτήσεως) f τοῦ N εἰς τὸ S τοιαύτης, ὥστε

$$f(1) = \min S$$

$$(\forall x \in N) \quad f(x+1) = \min \{ y \in S : y > f(x) \}.$$

Διὰ τὴν f ἰσχύει ἐπομένως καὶ

$$(\forall x \in N) \; f(x+1) > f(x),$$

τὸ ὁποῖον συνεπάγεται, ὅτι ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα, ἄρα καὶ ἀμφιμονοσήμαντος. Ἰσχύει, ὅθεν, ὅτι $N \precsim S$ καὶ δεδομένου ὅτι ἡ $N \succsim S$ εἶναι προφανής, ἔχομεν $N \simeq S$, τὸ ὁποῖον καὶ ἀποδεικνύει τὴν πρότασιν.

12.3.2 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Ἓν σύνολον E εἶναι πεπερασμένον ἢ ἀριθμήσιμον τότε καὶ μόνον τότε, ἂν $E \precsim N$.

Ἀπόδειξις. Τὸ ὅτι δι' ἓν πεπερασμένον ἢ ἀριθμήσιμον σύνολον E ἰσχύει $E \precsim N$ εἶναι προφανές. Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ ἀντιστρόφου δεχόμεθα, ὅτι ἰσχύει $E \precsim N$ καὶ ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ E εἶναι ἀπέραντον. Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ E εἶναι ἀριθμήσιμον. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν f τοῦ E εἰς τὸ N, ὁπότε τὸ πεδίον τιμῶν $\mathcal{R}(f)$ τῆς f εἶναι ἓν ἀπέραντον ὑποσύνολον τοῦ N. Ἄρα, δυνάμει τῆς προηγουμένης προτάσεως 12.3.1, τὸ $\mathcal{R}(f)$ εἶναι ἀριθμήσιμον σύνολον καὶ ἐπειδὴ $E \simeq \mathcal{R}(f)$, ἕπεται, ὅτι τὸ E εἶναι ἀριθμήσιμον.

Ἓν σύνολον E, τὸ ὁποῖον εἶναι πεπερασμένον ἢ ἀριθμήσιμον, δηλαδὴ πληροῖ τὴν $E \precsim N$, καλεῖται *τὸ πολὺ ἀριθμήσιμον*.

12.3.3 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Ἓν μὴ κενὸν σύνολον E εἶναι τὸ πολὺ ἀριθμήσιμον τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ ἀπεικόνισις τοῦ N ἐπὶ τοῦ E.

Ἀπόδειξις. Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ E εἶναι μὴ κενὸν καὶ τὸ πολὺ ἀριθμή-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

σιμον. Ἂν f εἶναι μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ E εἰς τὸ N (τοιαύτη ὑπάρχει δυνάμει τῆς προτάσεως 12.3.2) καὶ θεωρήσωμεν ἓν ὡρισμένον στοιχεῖον $c\in E$, τότε ἡ συνάρτησις g ἡ ὁρικομένη ὑπὸ τοῦ τύπου

$$g(x)=\begin{cases} f^{-1}(x), \text{ ἂν } x\in R(f) \\ c, \text{ ἂν } x\in N-R(f) \end{cases}$$

ἀποτελεῖ πράγματι μίαν ἀπεικόνισιν τοῦ N ἐπὶ τοῦ E.

Ἀντιστρόφως, ἂν h εἶναι τυχοῦσα ἀπεικόνισις τοῦ N ἐπὶ τοῦ E, τότε διὰ κάθε $x\in E$ τὸ σύνολον $h^{-1}(\{x\})$ εἶναι μὴ κενὸν ὑποσύνολον τοῦ N καὶ ἐπομένως ὁ τύπος

$$\varphi(x)=\min h^{-1}(\{x\})$$

ὁρίζει μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ E εἰς τὸ N. Ἄρα $E\precsim N$, δηλαδὴ τὸ E εἶναι τὸ πολὺ ἀριθμήσιμον.

12.3.4 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. *Ἓν σύνολον E εἶναι ἀπέραντον τότε καὶ μόνον τότε, ἂν $N\precsim E$.*

Ἀπόδειξις. Ἐν πρώτοις ὑποθέτομεν ὅτι $N\precsim E$, ὁπότε, ἂν τὸ E ἦτο πεπερασμένον, δυνάμει τῆς προτάσεως 12.3.2, θὰ εἴχομεν $E\precsim N$ καὶ ἐπομένως $N\simeq E$, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν πρότασιν 12.2.8.

Ἀντιστρόφως, ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ σύνολον E εἶναι ἀπέραντον καὶ θεωροῦμεν τὴν συλλογὴν $\mathcal{P}(E)-\{\emptyset\}$. Ἔστω ἐπίσης, δυνάμει τοῦ ἀξιώματος ἐπιλογῆς, μία συνάρτησις h μὲ πεδίον ὁρισμοῦ $\mathcal{D}(h)=\mathcal{P}(E)-\{\emptyset\}$ καὶ τοιαύτη, ὥστε

$$(\forall X\in\mathcal{P}(E)-\{\emptyset\})\ h(X)\in X.$$

Ἐφαρμόζομεν τώρα τὴν ἀρχὴν τοῦ ἐπαγωγικοῦ ὁρισμοῦ, θέτοντες ἐν τῷ θεωρήματι 8.2.1

$$F(g)=h(E-R(g)),$$

ὁπότε ἐξασφαλίζομεν τὴν ὕπαρξιν μιᾶς ἀπεικονίσεως (συναρτήσεως) f τοῦ N εἰς τὸ E τοιαύτης, ὥστε

$$(\forall x\in N)\quad f(x+1)=h(E-\{f(1), f(2), \dots, f(x)\}),$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τό ὁποίου συνεπάγεται, ὅτι ἡ f εἶναι καί ἀμφιμονοσήμαντος. Ἑπομένως $\mathbb{N} \leq E$.

Ὡς πορίσματα τῆς ἀνωτέρω προτάσεως συνάγονται καί αἱ προτάσεις :

12.3.5 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. *Κάθε ἀπείραντον σύνολον ἔχει ἓν ἀριθμήσιμον ὑποσύνολον.*

12.3.6 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. *Ἓν σύνολον εἶναι ἀπέραντον τότε καί μόνον τότε, ἂν ἔχῃ τήν αὐτήν ἰσχύν μέ ἓν γνήσιον ὑποσύνολόν του.*

Παρατήρησις. Ἡ τελευταία πρότασις 12.3.6 χαρακτηρίζει τήν ἔννοιαν τοῦ ἀπεράντου συνόλου, ἄνευ ἀμέσου ἢ ἐμμέσου συγκρίσεως μετά τοῦ συνόλου τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Ἡ πρότασις αὐτη χρησιμοποιεῖται ἐνίοτε καί ὡς ὁρισμός τοῦ ἀπεράντου συνόλου, ὁπότε τό πεπερασμένον σύνολον ὁρίζεται ὡς μή ἀπέραντον. Διά μίαν τοιαύτην διαπραγμάτευσιν τοῦ θέματος παραπέμπομεν τόν ἀναγνώστην εἰς τό βιβλίον τοῦ S. T. Hu (Introduction to Contemporary Mathematics, Holden-Day Inc. [1966]).

12.3.7 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. *Ἡ ἕνωσις μιᾶς τό πολύ ἀριθμησίμου συλλογῆς τό πολύ ἀριθμησίμων συνόλων εἶναι ἐπίσης τό πολύ ἀριθμήσιμου συνόλου.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω $\mathcal{A}$ μία τό πολύ ἀριθμήσιμος συλλογή τό πολύ ἀριθμησίμων συνόλων. Ἂν $\mathcal{A} = \emptyset$ ἢ $\mathcal{A} = \{\emptyset\}$, τότε $\cup\mathcal{A} = \emptyset$ καί ἡ πρότασις ἰσχύει. Χωρίς βλάβην τῆς γενικότητος ὑποθέτομεν, ὅτι $\emptyset \notin \mathcal{A}$ καί θεωροῦμεν μίαν ἀπεικόνισιν G τοῦ $\mathbb{N}$ ἐπί τῆς συλλογῆς $\mathcal{A}$, ὁπότε $\cup\mathcal{A} = \cup_{\nu\in\mathbb{N}} G(\nu)$ καί ἑπομένως ἀρκεῖ νά δειχθῇ, ὅτι τό σύνολον $\cup_{\nu\in\mathbb{N}} G(\nu)$ εἶναι τό πολύ ἀριθμήσιμον. Πρός τοῦτο θεωροῦμεν τό σύνολον S_ν ὅλων τῶν ἀπεικονίσεων τοῦ $\mathbb{N}$ ἐπί τοῦ $G(\nu)$, ὁπότε παρατηροῦμεν, ὅτι $(\forall \nu\in\mathbb{N})\, S_\nu \neq \emptyset$. Ἄρα, δυνάμει τοῦ ἀξιώματος ἐπιλογῆς, ὑπάρχει συνάρτησις φ μέ πεδίον ὁρισμοῦ τό $\mathbb{N}$ τοιαύτη, ὥστε

$$(\forall x\in\mathbb{N})\ \varphi(x)\in S_x.$$

Ἡ συνάρτησις f ἡ ὁριζομένη ὑπό τοῦ τύπου

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$f(x,y) = [\varphi(x)](y)$$

ἀποτελεῖ μίαν ἀπεικόνισιν τοῦ N^2 ἐπὶ τοῦ $\bigcup_{\nu\in N} G(\nu)$, τὸ ὁποῖον, δυνάμει τῶν 12.1.3 καὶ 12.3.3, ἀποδεικνύει τὴν πρότασιν.

12.3.8 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον δύο τὸ πολὺ ἀριθμησίμων συνόλων εἶναι τὸ πολὺ ἀριθμήσιμον.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν A καὶ B δύο τὸ πολὺ ἀριθμήσιμα σύνολα. Ἡ περίπτωσις, ὅπου τουλάχιστον ἕν ἐξ αὐτῶν εἶναι τὸ κενὸν σύνολον, εἶναι προφανής. Ὑποθέτομεν λοιπόν, ὅτι ἀμφότερα εἶναι μὴ κενὰ σύνολα καὶ θεωροῦμεν δύο ἀπεικονίσεις f καὶ g τοῦ N ἐπὶ τῶν A καὶ B ἀντιστοίχως, ὁπότε ὁ τύπος

$$h(x,y) = (f(x), g(y))$$

ὁρίζει μίαν ἀπεικόνισιν τοῦ N^2 ἐπὶ τοῦ $A\times B$, τὸ ὁποῖον, δυνάμει τῶν 12.1.3 καὶ 12.3.3, ἀποδεικνύει τὴν πρότασιν.

Παρατήρησις. Ἡ ἀνωτέρω πρότασις γενικεύεται καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν πεπερασμένης οἰκογενείας τὸ πολὺ ἀριθμησίμων συνόλων. Συγκεκριμένως ἰσχύει

Τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον μιᾶς πεπερασμένης οἰκογενείας τὸ πολὺ ἀριθμησίμων συνόλων εἶναι τὸ πολὺ ἀριθμήσιμον σύνολον.

Ἡ ἀπόδειξις ἐπιτυγχάνεται τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπαγωγικῆς ἀποδείξεως, ἐφαρμοζομένης ἐπὶ τοῦ πληθικοῦ ἀριθμοῦ τοῦ συνόλου δεικτῶν τῆς οἰκογενείας, ἀφίεται δὲ εἰς τὸν ἀναγνώστην.

12.3.9 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Τὸ σύνολον $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν δὲν εἶναι ἀριθμήσιμον.

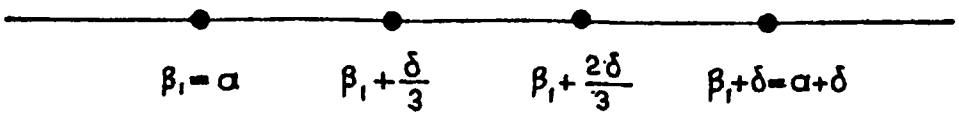
Ἀπόδειξις. Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι διὰ τυχοῦσαν ἀκολουθίαν πραγματικῶν ἀριθμῶν a_ν, $\nu\in N$, ὑπάρχει πραγματικὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος δὲν ἐμφανίζεται ὡς ὅρος τῆς ἀκολουθίας a_ν, $\nu\in N$. Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου θεωροῦμεν δύο πραγματικοὺς ἀριθμοὺς a καὶ $\delta > 0$ τοιούτους, ὥστε $a_1 \notin [a, a+\delta]$ καὶ ὁρίζομεν, δυνάμει τῆς ἀρχῆς τοῦ ἐπαγωγικοῦ ὁρισμοῦ, μίαν ἀκολουθίαν β_ν, $\nu\in N$ εἰς τρόπον, ὥστε :

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\beta_1 = a$$

$$\beta_2 = \min\left\{ y \in [\beta_1, \beta_1+\delta] : (\exists\, k \in \mathbb{N}_0)\ y = \beta_1 + \frac{k\delta}{3} \text{ καὶ } a_1 \notin \left[\beta_1 + \frac{k\delta}{3}, \beta_1 + \frac{(k+1)\delta}{3}\right] \right\}.$$

Ὁ ὁρισμὸς τοῦ β_2 ἔχει ἔννοιαν, διότι τὸ ἐμφανιζόμενον σύνολον εἶναι πεπερασμένου καὶ μὴ κενόν, διότι τουλάχιστον ἓν τῶν διαστημάτων



$[\beta_1, \beta_1+\frac{\delta}{3}]$, $[\beta_1+\frac{\delta}{3}, \beta_1+\frac{2\delta}{3}]$, $[\beta_1+\frac{2\delta}{3}, \beta_1+\delta]$ δὲν περιέχει τὸν ὅρον a_1.

Γενικῶς, ἂν ἔχῃ ὁρισθῇ ὁ ὅρος β_μ, τότε τῇ βοηθείᾳ τοῦ ἀνωτέρω συλλογισμοῦ, ὁρίζεται καὶ ὁ ὅρος $\beta_{\mu+1}$ διὰ τοῦ τύπου

$$\beta_{\mu+1} = \min\left\{ y \in [\beta_\mu, \beta_\mu + \tfrac{\delta}{3^{\mu-1}}] : (\exists k \in \mathbb{N}_0) y = \beta_\mu + \frac{k\delta}{3^\mu} \text{ καὶ } a_{\mu+1} \notin \left[\beta_\mu + \frac{k\delta}{3^\mu}, \beta_\mu + \frac{(k+1)\delta}{3^\mu}\right] \right\}.$$

Ὡς ἐκ τοῦ τρόπου ὁρισμοῦ τῆς ἀκολουθίας β_ν συνάγεται ἀμέσως, ὅτι διὰ κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ἰσχύουν :

$$\beta_\nu \leqq \beta_{\nu+1} \leqq \beta_\nu + \frac{\delta}{3^{\nu-1}} \text{ καὶ } a_\nu \notin \left[\beta_\nu, \beta_\nu + \frac{\delta}{3^{\nu-1}}\right].$$

Ἐπειδὴ προφανῶς ἡ ἀκολουθία β_ν εἶναι φραγμένη (ἓν ἄνω φράγμα αὐτῆς εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\beta_1+\delta = a+\delta$), ὑπάρχει τὸ ἄνω πέρας αὐτῆς, ἔστω s, ἤτοι $s = \sup \beta_\nu$. Παρατηροῦμεν ὅμως, ὅτι, ἂν $\nu \in \mathbb{N}$, τότε ἰσχύει καὶ

$$(\forall\, \mu > \nu)\quad \beta_\mu \leqq \beta_\nu + \frac{\delta}{3^{\nu-1}},$$

ὁπότε, δεδομένου ὅτι ἡ ἀκολουθία β_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι αὔξουσα, ἔχομεν καὶ

$$(\forall \nu \in \mathbb{N})\quad s \leqq \beta_\nu + \frac{\delta}{3^{\nu-1}}.$$

Ὥστε διὰ κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, ἰσχύει

$$\beta_\nu \leqq s \leqq \beta_\nu + \frac{\delta}{3^{\nu-1}}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καὶ δεδομένου ὅτι $a_\nu \notin [\beta_\nu, \beta_\nu + \frac{\delta}{3^{\nu-1}}]$, συμπεραίνομεν, ὅτι

$$(\forall\, \nu \in \mathbb{N})\ a_\nu \neq s,$$

τὸ ὁποῖον καὶ ἀποδεικνύει τὴν πρότασιν.

Παρατήρησις. Ἓν ἀπέραντον σύνολον, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι ἀριθμήσιμον, ὡς π.χ. τὸ $\mathbb{R}$, καλεῖται *ὑπεραριθμήσιμον*. Ὑπεραριθμήσιμα σύνολα εἶναι ἐπίσης καὶ τὰ διαστήματα τῆς πραγματικῆς εὐθείας ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν, ὅτι ταῦτα εἶναι ἀπέραντα ἢ τὰ ἄκρα αὐτῶν δὲν συμπίπτουν. Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἀκριβῶς ὁμοία τῆς προηγουμένης ὑπὸ τὸν περιορισμόν, ὅτι τὰ α καὶ $\delta > 0$ ἐκλέγονται εἰς τρόπον, ὥστε τὰ α, $\alpha+\delta$ νὰ ἀνήκουν εἰς τὸ ὑπ' ὄψιν διάστημα.

12.4 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δείξατε, ὅτι :

$$\mathbb{Z} \simeq \mathbb{N},\quad \mathbb{R} \simeq (0,1),\quad \mathbb{R} \sim \mathbb{R} - \mathbb{N}.$$

2. Δείξατε, ὅτι :

$$T(m) \succ T(n) \longleftrightarrow m > n.$$

3. Δείξατε, ὅτι ἂν $A \subset B$ καὶ B πεπερασμένον, τότε $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B$.

4. Δείξατε, ὅτι ἂν $A \subseteq B$, B πεπερασμένον καὶ $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$, τότε $A = B$.

5. Δείξατε, ὅτι ἂν A, B πεπερασμένα σύνολα, τότε

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - \operatorname{card}(A \cap B)$$

$$\operatorname{card}(A \times B) = (\operatorname{card} A)(\operatorname{card} B).$$

6. Δείξατε, ὅτι ἡ ἐν τῇ ἀποδείξει τῆς προτάσεως 12.3.1 ὁριζομένη γνησίως αὔξουσα συνάρτησις f ἀποτελεῖ μίαν ἀπεικόνισιν τοῦ $\mathbb{N}$ ἐπὶ τοῦ S.

7. Δείξατε, ὅτι τὸ σύνολον $\mathbb{Q}$ τῶν ῥητῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμήσιμον.

8. Δείξατε τὰς προτάσεις 12.3.5 καὶ 12.3.6.

9. Δείξατε, ὅτι ἡ ἕνωσις ἑνὸς μὴ κενοῦ τὸ πολὺ ἀριθμησίμου συνόλου καὶ ἑνὸς ἀριθμησίμου συνόλου εἶναι ἀριθμήσιμον σύνολον.

Γενικεύσατε τὴν πρότασιν ταύτην εἰς τὴν περίπτωσιν συλλογῆς συ-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

νόλων.

10. Δείξατε, ὅτι τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον ἑνὸς μὴ κενοῦ τὸ πολὺ ἀριθμησίμου συνόλου καὶ ἑνὸς ἀριθμησίμου συνόλου εἶναι ἀριθμήσιμον σύνολον.

Γενικεύσατε τὴν πρότασιν ταύτην εἰς τὴν περίπτωσιν πεπερασμένης οἰκογενείας συνόλων.

13. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΓΙΝΟΜΕΝΑ

13.1 ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΡΑΞΕΩΣ

Θὰ ἀποδείξωμεν εὐθὺς κατωτέρω ἓν γενικὸν θεώρημα ἀναφερόμενον εἰς μίαν ἀντιμεταθετικὴν καὶ προσεταιριστικὴν πρᾶξιν μὲ οὐδέτερον στοιχεῖον, τὸ ὁποῖον δηλοῖ, ὅτι μὲ τὴν πρᾶξιν ταύτην εἶναι συσχετισμένη καὶ μία συνάρτησις, ἐπέκτασις τῆς ὑπ' ὄψιν πράξεως, ἡ ὁποία ὁρίζει τιμὴν (γενικευμένον ἀποτέλεσμα) εἰς οἱανδήποτε πεπερασμένον πλῆθος στοιχείων, ἀνεξαρτήτως διατάξεως αὐτῶν.

13.1.1 ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἔστω E ἓν σύνολον καὶ $\bullet$ μία ἀντιμεταθετικὴ καὶ προσεταιριστικὴ πρᾶξις ἐπὶ τοῦ E μὲ οὐδέτερον στοιχεῖον ω. Ἂν $\mathcal{S}$ εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (f, X), ὅπου f συνάρτησις μὲ τιμὰς εἰς τὸ E καὶ X πεπερασμένον ὑποσύνολον τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ $\mathcal{D}(f)$ ταύτης, τότε ὑπάρχει ἀκριβῶς μία συνάρτησις O μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ $\mathcal{S}$ καὶ τιμὰς εἰς τὸ E τοιαύτη, ὥστε

$$O(f, \emptyset) = \omega \tag{1}$$

καὶ

$$O(f, X \cup \{x\}) = O(f, X) \bullet f(x) \tag{2}$$

διὰ κάθε (f, X), x μὲ $(f, X) \in \mathcal{S}$ καὶ $x \in \mathcal{D}(f) - X$.

Ἐπὶ πλέον ἰσχύουν τὰ κάτωθι :

(i) Ἂν τὰ X, Y εἶναι ξένα, τότε $O(f, X \cup Y) = O(f, X) \bullet O(f, Y)$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

(ii) ἂν $(\forall x\in X)\, f(x)=g(x)$, τότε $O(f,X)=O(g,X)$.

(iii) ἂν $(\forall x\in X)\, h(x)=f(x)\bullet g(x)$, τότε $O(h,X)=O(f,X)\bullet O(g,X)$

(iv) ἂν φ εἶναι μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ Y ἐπὶ τοῦ X, τότε $O(f,X)=O(f\circ\varphi,Y)$.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν f τυχοῦσα, ἀλλ' ὡρισμένη συνάρτησις μὲ τιμὰς ἐν E, καὶ $\mathcal{T}$ ἡ συλλογὴ ὅλων τῶν πεπερασμένων ὑποσυνόλων τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ $\mathfrak{D}(f)$ αὐτῆς. Ἔστω ἐπίσης

$$\mathcal{X}_\nu=\left\{X\in\mathcal{T}:\operatorname{card}X\leq\nu\right\},\quad \nu\in\mathbf{N}_0.$$

Ὁρίζομεν τὴν συνάρτησιν $F_1:\mathcal{X}_1\longmapsto E$ διὰ τοῦ τύπου

$$F_1(X)=\begin{cases}\omega, & \text{ἂν } X=\emptyset\\ f(x), & \text{ἂν } X=\{x\}\end{cases}$$

καὶ παρατηροῦμεν, ὅτι ἰσχύει (διατί;)

$$F_1(\emptyset)=\omega$$

καὶ

$$F_1(X\cup\{x\})=F_1(X)\bullet f(x)$$

διὰ κάθε $X\in\mathcal{X}_0$ καὶ $x\in\mathfrak{D}(f)-X$.

Δεχόμεθα τώρα, ὅτι ἔχει ὁρισθῆ μία συνάρτησις $F_\nu:\mathcal{X}_\nu\longmapsto E$ τοιαύτη, ὥστε

$$F_\nu(\emptyset)=\omega \tag{3}$$

καὶ

$$F_\nu(X\cup\{x\})=F_\nu(X)\bullet f(x) \tag{4}$$

διὰ κάθε $X\in\mathcal{X}_{\nu-1}$ καὶ $x\in\mathfrak{D}(f)-X$, ὁπότε, ἂν $X\in\mathcal{T}$, $\operatorname{card}X=n+1$ καὶ x,y εἶναι τυχόντα στοιχεῖα τοῦ X μὲ $x\neq y$, παρατηροῦμεν, ὅτι:

$$\begin{aligned}F_\nu(X-\{x\})\bullet f(y)&=[F_\nu(X-\{x,y\})\bullet f(y)]\bullet f(x)\\&=[F_\nu(X-\{x,y\})\bullet f(x)]\bullet f(y)\\&=F_\nu(X-\{y\})\bullet f(y).\end{aligned}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ ὁρίσωμεν τὴν συνάρτησιν $F_{\nu+1} : \mathcal{X}_{\nu+1} \mapsto E$ διὰ τοῦ τύπου

$$F_{\nu+1}(X) = \begin{cases} \omega, & \text{ἂν } X = \emptyset \\ F_\nu(X - \{x\}) \bullet f(x), & \text{ἂν } X \neq \emptyset \text{ καὶ } x \in X \end{cases}$$

καὶ παρατηροῦμεν, ὅτι αὕτη ἐκτὸς τῆς $F_{\nu+1}(\emptyset) = \omega$ πληροῖ καὶ τὴν $F_{\nu+1}(X \cup \{x\}) = F_{\nu+1}(X) \bullet f(x)$ διὰ κάθε $X \in \mathcal{X}_\nu$ καὶ $x \in \mathcal{D}(f) - X$. Ὥστε, δυνάμει τῆς ἀρχῆς τοῦ ἐπαγωγικοῦ ὁρισμοῦ, ὑπάρχει ἀκριβῶς μία ἀκολουθία συναρτήσεων $F_\nu : \mathcal{X}_\nu \mapsto E$, $\nu \in \mathbb{N}$ ἱκανοποιοῦσα τὰς (3) καὶ (4). Ἐπίσης, δυνάμει τῆς (4), παρατηροῦμεν, ὅτι διὰ τυχόντα φυσικὸν ἀριθμὸν ν καὶ διὰ κάθε $X \in \mathcal{X}_\nu$ ἰσχύει

$$F_\nu(X) = F_\nu[(X - \{x\}) \cup \{x\}] = F_\nu(X - \{x\}) \bullet f(x) = F_{\nu+1}(X)$$

ὁπλαδὴ ἡ $F_{\nu+1}$ εἶναι μία ἐπέκτασις τῆς F_ν καὶ ἑπομένως ἡ ἕνωσις $F = \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} F_\nu$ ὁρίζει μίαν συνάρτησιν μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ $\mathcal{J}$ καὶ τιμὰς εἰς τὸ E. Διὰ τὴν συνάρτησιν F διαπιστοῦνται εὐκόλως τὰ κάτωθι :

$$F(\emptyset) = \omega \tag{5}$$

$$F(X \cup \{x\}) = F(X) \bullet f(x) \tag{6}$$

διὰ κάθε $X \in \mathcal{J}$ καὶ $x \in \mathcal{D}(f) - X$.

Ἡ οὕτως ὁριζομένη συνάρτησις $F : \mathcal{J} \mapsto E$ εἶναι μονοσημάντως ὡρισμένη, διότι ἂν $G : \mathcal{J} \mapsto E$ εἶναι τυχοῦσα συνάρτησις ἔχουσα καὶ αὐτὴ τὰς ἰδιότητας (5) καὶ (6), τότε αἱ συναρτήσεις $G_\nu = G \mid \mathcal{X}_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ ἔχουν καὶ αὐταὶ τὰς ἰδιότητας (3) καὶ (4), ὁπότε, λόγῳ τοῦ μονοσημάντου τῆς ἀκολουθίας F_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, ἰσχύει $F_\nu = G_\nu$ διὰ κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ καὶ ἑπομένως

$$F = \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} F_\nu = \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} G_\nu = G.$$

Δυνάμεθα τώρα νὰ ὁρίσωμεν τὴν συνάρτησιν $O : \mathcal{S} \mapsto E$ ὡς τὸ σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν $((f,X),y)$, ὅπου $(f,X) \in \mathcal{S}$ καὶ $y = F(X)$ διὰ κάποιαν συνάρτησιν F ἱκανοποιοῦσαν τὰς (5) καὶ (6).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αἱ ἰδιότητες (i)-(iv) τῆς συναρτήσεως O ἀποδεικνύονται τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπαγωγικῆς ἀποδείξεως, ἐφαρμοζομένης εἰς μὲν τὴν περίπτωσιν τῶν (i) καὶ (iv) ἐπὶ τοῦ πληθικοῦ ἀριθμοῦ τοῦ συνόλου Y, εἰς δὲ τὴν περίπτωσιν τῶν (ii) καὶ (iii) ἐπὶ τοῦ πληθικοῦ ἀριθμοῦ τοῦ συνόλου X. Ἡ λεπτομερὴς ἀπόδειξις τῶν ἰδιοτήτων τούτων ἀφίεται, ὡς ἄσκησις, εἰς τὸν ἀναγνώστην.

Παρατήρησις. Ἐπειδὴ ἓν διατεταγμένον ζεῦγος $(a,\beta)\in E^2$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μία συνάρτησις $f:\{1,2\}\longmapsto E$ τοιαύτη, ὥστε $f(1)=a$ καὶ $f(2)=\beta$ (πρβλ. §6:2), παρατηροῦμεν, ὅτι, ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὰς (1) καὶ (2), ἔχομεν

$$O(f,\{1,2\}) = O(f,\{1\})\bullet f(2) = [O(f,\emptyset)\bullet f(1)]\bullet f(2) = [\omega\bullet f(1)]\bullet f(2)$$
$$= f(1)\bullet f(2) = a\bullet\beta.$$

καὶ ἑπομένως ἡ συνάρτησις O ἀποτελεῖ μίαν ἐπέκτασιν τῆς πράξεως $\bullet$

Ἐπαναλήψεις ὡς πρὸς πρᾶξιν. Ἂν $A\neq\emptyset$, τότε τὴν συνάρτησιν $f:A\longmapsto\{a\}$ καλοῦμεν σταθερὰν συνάρτησιν ἐπὶ τοῦ A μὲ τιμὴν a καὶ συνηθίζομεν νὰ τὴν παριστῶμεν πάλιν μὲ a προτάσσοντες, χάριν σαφηνείας, τὴν ἔκφρασιν "σταθερὰ συνάρτησις". Ἔστω ἡ σταθερὰ συνάρτησις a, $a\in E$ ἐπὶ τυχόντος πεπερασμένου συνόλου X μὲ πληθικὸν ἀριθμὸν ν. Δυνάμει τῆς ἰδιότητος (iv), ἡ τιμὴ $O(a,X)$ εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ συνόλου X καὶ ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τοῦ πληθικοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ, δηλαδὴ τοῦ ν. Τὴν τιμὴν ταύτην καλοῦμεν *νιοστὴν ἐπανάληψιν τοῦ στοιχείου* a *ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν* $\bullet$ καὶ τὴν συμβολίζομεν μὲ $\overset{\nu}{\bullet}a$, ἤτοι ὁρίζομεν

$$\overset{\nu}{\bullet}a = O(a,X),$$

ὅπου X τυχὸν πεπερασμένον σύνολον μὲ πληθικὸν ἀριθμὸν ν. Προφανῶς $\overset{0}{\bullet}a = O(a,\emptyset) = \omega$ καὶ $\overset{1}{\bullet}a = O(a,\{x\}) = O(a,\emptyset)\bullet a = \omega\bullet a = a$.

Ἂν θεωρήσωμεν τώρα δύο πεπερασμένα ξένα σύνολα X, Y μὲ πληθικοὺς ἀριθμοὺς μ, ν ἀντιστοίχως, τότε, δυνάμει τῆς ἰδιότητος (i), ἔχομεν

$$O(a,X)\bullet O(a,Y) = O(a,X\cup Y),$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὁπότε, ἐπειδή ὁ πληθικός ἀριθμός τοῦ συνόλου $X \cup Y$ εἶναι $\mu+\nu$ (πρβλ. § 12.4, ἀσκ.5), προκύπτει ὅτι

$$(7) \qquad (\overset{\mu}{\bullet}\, a) \bullet (\overset{\nu}{\bullet}\, a) = \overset{\mu+\nu}{\bullet}\, a .$$

Ἐπίσης ἰσχύει καὶ ἡ ἰδιότης

$$(8) \qquad \overset{\nu}{\bullet}(\overset{\mu}{\bullet}\, a) = \overset{\mu\nu}{\bullet}\, a$$

ἡ ὁποία ἀποδεικνύεται τῇ βοηθείᾳ τῆς (7) καὶ τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπαγωγικῆς ἀποδείξεως, ἐφαρμοζομένης ἐπὶ τοῦ ν.

13.2 ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΓΙΝΟΜΕΝΑ

Εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου ἡ πρᾶξις $\bullet$ εἶναι ἡ πρόσθεσις $+$ ἢ ὁ πολλαπλασιασμός $\cdot$, ἡ τιμὴ $O(f,X)$ τῆς συναρτήσεως O τοῦ θεωρήματος 13.1.1 συνηθίζεται νὰ παρίσταται μὲ $\sum_{x\in X} f(x)$ ἢ $\prod_{x\in X} f(x)$ ἀντιστοίχως. Ἡ τιμὴ $\sum_{x\in X} f(x)$ καλεῖται τότε *τὸ ἄθροισμα τῶν* $f(x)$ *δι' ὅλα τὰ* $x\in X$, ἐνῶ ἡ τιμὴ $\prod_{x\in X} f(x)$, *τὸ γινόμενον τῶν* $f(x)$ *δι' ὅλα τὰ* $x\in X$. Ἂν τὸ X εἶναι ἓν σύνολον διαδοχικῶν ἀκεραίων, ἤτοι, ἂν

$$X = \left\{ x\in \mathbf{Z} : k \leqq x \leqq \lambda \right\},$$

ὅπου k,λ ἐν $\mathbf{Z}$, τότε, ἀντὶ τῶν συμβολισμῶν $\sum_{x\in X} f(x)$, $\prod_{x\in X} f(x)$, χρησιμοποιοῦνται ἀντιστοίχως καὶ οἱ $\sum_{x=k}^{\lambda} f(x)$, $\prod_{x=k}^{\lambda} f(x)$. Ὑπάρχουν ἐπίσης ποικίλαι παραλλαγαὶ τῶν συμβολισμῶν αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι διατηροῦν μὲν τὰ σύμβολα Σ ἢ Π, ἀλλὰ παραλείπουν ἄλλα τοιαῦτα. Οὕτω, π.χ. χρησιμοποιοῦνται καὶ συμβολισμοί, ὡς οἱ $\sum_{X} f(x)$, $\prod_{X} f(x)$, $\sum_{P(x)} f(x)$ καὶ $\prod_{P(x)} f(x)$, ὅπου $P(x)$ εἷς προτασιακὸς τύπος, ὁ ὁποῖος περιγράφει τὸ σύνολον X. Τέλος παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς τοὺς ἀνωτέρω συμβολισμοὺς ἡ συνάρτησις f συχνὰ γράφεται ὑπὸ μορφὴν οἰκογενείας, δηλαδὴ ἀντὶ $\sum_{x\in X} f(x)$ ἢ $\prod_{x\in X} f(x)$, συνηθίζεται νὰ γράφεται καὶ $\sum_{x\in X} f_x$ ἢ $\prod_{x\in X} f_x$ ἀντιστοίχως.

Αἱ ἰδιότητες (i)–(iv) τοῦ θεωρήματος 13.1.1 λαμβάνουν εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὴν μορφήν:

(i′) *Ἂν τὰ* X,Y *εἶναι ξένα, τότε*

$$\sum_{x\in X\cup Y} f(x) = \sum_{x\in X} f(x) + \sum_{x\in Y} f(x) \quad \text{καί} \quad \prod_{x\in X\cup Y} f(x) = \Big(\prod_{x\in X} f(x)\Big)\Big(\prod_{x\in Y} f(x)\Big)$$

(ii′) *ἄν* $(\forall x\in X)\, f(x) = g(x)$, *τότε*

$$\sum_{x\in X} f(x) = \sum_{x\in X} g(x) \quad \text{καί} \quad \prod_{x\in X} f(x) = \prod_{x\in X} g(x).$$

(iii′) *ἄν* $(\forall x\in X)\, h(x) = f(x) + g(x)$, *τότε* $\sum_{x\in X} h(x) = \sum_{x\in X} f(x) + \sum_{x\in X} g(x)$

ἄν $(\forall x\in X)\, h(x) = f(x)g(x)$, *τότε* $\prod_{x\in X} h(x) = \Big(\prod_{x\in X} f(x)\Big)\Big(\prod_{x\in X} g(x)\Big)$.

(iv′) *ἄν* φ *εἶναι μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ* Y *ἐπί τοῦ* X, *τότε*

$$\sum_{x\in X} f(x) = \sum_{x\in Y} f[\varphi(x)] \quad \text{καί} \quad \prod_{x\in X} f(x) = \prod_{x\in Y} f[\varphi(x)].$$

Παρατήρησις. Ἡ (i′) δύναται νά γενικευθῇ, ὡς κάτωθι :

$$\sum_{x\in \bigcup_{i=1}^{\nu} X_i} f(x) = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{x\in X_i} f(x) \qquad \text{καί} \qquad \prod_{x\in \bigcup_{i=1}^{\nu} X_i} f(x) = \prod_{i=1}^{\nu} \prod_{x\in X_i} f(x),$$

ὅπου X_i, $i\in\{1,2,\cdots,\nu\}$ μία οἰκογένεια ξένων (πεπερασμένων) συνόλων. (Ἡ ἀπόδειξις ἐπιτυγχάνεται διά τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπαγωγικῆς ἀποδείξεως καί ἀφίεται, ὡς ἄσκησις, εἰς τόν ἀναγνώστην).

Πολλαπλάσια καί δυνάμεις. Αἱ νιοσταί ἐπαναλήψεις ἑνός στοιχείου a, ὡς πρός τάς πράξεις τῆς προσθέσεως καί τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, καλοῦνται ἀντιστοίχως *νιοστόν πολλαπλάσιον τοῦ* a καί *νιοστή δύναμις τοῦ* a, συνηθίζεται δέ νά παρίστανται μέ νa καί a^ν ἀντιστοίχως, ἀντί τῶν $\overset{\nu}{+}a$ καί $\overset{\nu}{\cdot}a$. Προφανῶς ἰσχύουν :

$$0a = 0 \quad \Big| \quad a^0 = 1$$
$$1a = a \quad \Big| \quad a^1 = a$$

Ἐπίσης αἱ ἰδιότητες (7) καί (8) λαμβάνουν εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν τήν μορφήν :

$$(9)\quad \begin{aligned} \mu a + \nu a &= (\mu+\nu)a \\ \nu(\mu a) &= (\nu\mu)a \end{aligned} \qquad \Big| \qquad (10)\quad \begin{aligned} a^\mu \cdot a^\nu &= a^{\mu+\nu} \\ (a^\mu)^\nu &= a^{\mu\nu} \end{aligned}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ πολλαπλασίου να ἡ τῆς δυνάμεως α$^{\nu}$, ὁ μὴ ἀρνητικὸς ἀκέραιος ν καλεῖται *πολλαπλασιαστὴς τοῦ* α ἢ *ἐκθέτης τοῦ* α ἀντιστοίχως.

13.3 ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΕΙΣ ΕΝ ΣΩΜΑ

Ἂν Ε εἶναι σῶμα, τότε ἔχομεν δύο πράξεις τὴν πρόσθεσιν + καὶ τὸν πολλαπλασιασμόν ·, ὁπότε πέραν τῶν ἰδιοτήτων (i′)–(iv′) τῆς προηγουμένης παραγράφου, ἰσχύουν καὶ ἄλλαι, ὡς π.χ. ἡ

$$(\forall x\in X)\ h(x)=\alpha f(x)+\beta g(x) \Longrightarrow$$

$$(11)\qquad \sum_{x\in X} h(x)=\alpha\sum_{x\in X} f(x)+\beta\sum_{x\in X} g(x),$$

ὅπου α, β τυχόντα στοιχεῖα τοῦ σώματος Ε. Ἐπίσης, ἂν τὸ σῶμα Ε ὑποτεθῇ διατεταγμένον σῶμα, τότε ἰσχύουν καὶ αἱ :

$$(12)\qquad (\forall x\in X)\ f(x)\leqq g(x) \longrightarrow \sum_{x\in X} f(x)\leqq\sum_{x\in X} g(x)$$

$$(13)\qquad \left|\sum_{x\in X} f(x)\right|\leqq\sum_{x\in X}|f(x)|.$$

Νιοστὴ ρίζα - Δύναμις μὲ ρητὸν ἐκθέτην. Εἰς ἓν διατεταγμένον σῶμα Ε δυνάμεθα, κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὴν περίπτωσιν τῆς τετραγωνικῆς ρίζης, νὰ ὁρίσωμεν τὴν ἔννοιαν τῆς νιοστῆς ρίζης. Οὕτως, ἂν α, β εἶναι στοιχεῖα τοῦ Ε μὲ $\alpha\beta\geqq 0$ καὶ $\alpha=\beta^{\nu}$, ὅπου ν φυσικὸς ἀριθμός, τότε ὁ ἀριθμὸς β καλεῖται *νιοστὴ ρίζα τοῦ* α καὶ παρίστανται μὲ $\sqrt[\nu]{\alpha}$, ἤτοι $\beta=\sqrt[\nu]{\alpha}$. Προφανῶς ἔχομεν :

$$(\forall\nu\in N)\ \sqrt[\nu]{0}=0,\quad (\forall\nu\in N)\ \sqrt[\nu]{1}=1,\quad (\forall a\in E)\ \sqrt[1]{a}=a.$$

Ἡ ἔννοια τῆς νιοστῆς ρίζης ἀποτελεῖ, ὡς ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ της, ἐπέκτασιν τῆς ἐννοίας τῆς τετραγωνικῆς ρίζης καὶ συγκεκριμένως τὰ σύμβολα $\sqrt[2]{\alpha}$ καὶ $\sqrt{\alpha}$ παριστοῦν τὴν αὐτὴν ἔννοιαν. Ἐπίσης παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ τρίτη ρίζα συνηθίζεται νὰ ὀνομάζεται *κυβικὴ ρίζα*.

Ἄμεσος συνέπεια τοῦ ὁρισμοῦ τῆς νιοστῆς ρίζης εἶναι, ὅτι εἰς τὴν

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

περίπτωσιν, ὅπου $\alpha < 0$ καὶ ν εἶναι ἄρτιος, δὲν ὁρίζεται ἡ ἔννοια τῆς $\sqrt[\nu]{\alpha}$.

13.3.1 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Διὰ τυχὸν στοιχεῖον $\alpha \in E$ ὑπάρχει τὸ πολὺ μία $\sqrt[\nu]{\alpha}$.

Ἀπόδειξις. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν, ὅτι, ἂν ν εἶναι περιττὸς καὶ β μία νιοστὴ ρίζα τοῦ α, τότε τὸ $-\beta$ εἶναι μία νιοστὴ ρίζα τοῦ $-\alpha$. Ἑπομένως, χωρὶς βλάβην τῆς γενικότητος, δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ α εἶναι μὴ ἀρνητικὸν στοιχεῖον τοῦ E, ὁπότε, ἂν x, y εἶναι νιοστοὶ ρίζαι αὐτοῦ, τότε καὶ αὗται εἶναι μὴ ἀρνητικὰ στοιχεῖα τοῦ E καὶ ἡ πρότασις εἶναι ἄμεσος συνέπεια τῆς ἰσοδυναμίας

$$x < y \Longleftrightarrow x^{\nu} < y^{\nu}.$$

Ἂν $\alpha \geq 0$, τότε ἰσχύει

$$\frac{k}{\lambda} = \frac{\mu}{\nu} \longrightarrow \sqrt[\lambda]{\alpha^{k}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}, \tag{14}$$

ὅπου λ, ν φυσικοὶ καὶ k, μ μὴ ἀρνητικοὶ ἀκέραιοι.

Πράγματι· ἂν $\beta = \sqrt[\lambda]{\alpha^{k}}$, τότε $\beta \geq 0$ καὶ $\beta^{\lambda} = \alpha^{k}$, ὁπότε ἰσχύει

$$\beta^{k\nu} = \beta^{\lambda\mu} = (\beta^{\lambda})^{\mu} = (\alpha^{k})^{\mu} = \alpha^{k\mu}, \text{ δηλαδὴ } (\beta^{\nu})^{k} = (\alpha^{\mu})^{k};$$

τὸ ὁποῖον εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου $k \neq 0$, συνεπάγεται $\beta^{\nu} = \alpha^{\mu}$, ἤτοι $\beta = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$ καὶ ἀποδεικνύει τὴν (14). Ἂν $k = 0$, τότε καὶ $\mu = 0$, ἡ δὲ (14) διαπιστοῦται ἀμέσως.

Δυνάμεθα τώρα, τῇ βοηθείᾳ τῆς (14), νὰ ὁρίσωμεν καὶ τὴν ἔννοιαν τῆς δυνάμεως ἑνὸς μὴ ἀρνητικοῦ στοιχείου α μὲ ἐκθέτην μὴ ἀρνητικὸν ῥητὸν ἀριθμὸν $\rho = \frac{\mu}{\nu}$ $(\mu \in \mathbb{N}_0, \nu \in \mathbb{N})$ διὰ τοῦ τύπου

$$\alpha^{\rho} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}.$$

Παρατηροῦμεν σχετικῶς, ὅτι διὰ τυχὸν μὴ ἀρνητικὸν στοιχεῖον α ἰσχύουν

$$\alpha^{\frac{\nu}{1}} = \sqrt[1]{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\nu} \quad \text{καὶ} \quad \alpha^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{1}} = \sqrt[\nu]{\alpha},$$

τὰ ὁποῖα δηλοῦν, ὅτι ἡ ἔννοια τῆς δυνάμεως ἑνὸς μὴ ἀρνητικοῦ στοιχείου μὲ ἐκθέτην μὴ ἀρνητικὸν ῥητὸν ἀριθμὸν ἀποτελεῖ κοινὴν ἐπέκτασιν τόσον τῆς ἐννοίας τῆς δυνάμεως μὲ ἐκθέτην μὴ ἀρνητικὸν ἀκέραιον, ὅσον καὶ τῆς ἐννοίας τῆς νιοστῆς ῥίζης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἡ ἀναπέρω ἔννοια τῆς δυνάμεως ἐπεκτείνεται εἰσέτι καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ἀρνητικοῦ ρητοῦ ἐκθέτου ρ, ὁρίζεται δὲ διὰ τοῦ τύπου

$$a^{\rho} = a^{-\rho} \quad (a > 0).$$

Αἱ ἰδιότητες (10) τῶν δυνάμεων τῆς παραγράφου 13.2 διατηροῦνται καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν δυνάμεων ἑνὸς θετικοῦ στοιχείου μὲ ρητὸν ἐκθέτην, ἤτοι ἰσχύουν :

$$(15) \qquad \begin{aligned} a^{\rho_1} \cdot a^{\rho_2} &= a^{\rho_1+\rho_2} \\ (a^{\rho_1})^{\rho_2} &= a^{\rho_1\rho_2}. \end{aligned}$$

Ἡ πρότασις 13.3.1 ἐξασφαλίζει μὲν τὸ μονοσήμαντον τῆς νιοστῆς ρίζης καὶ ἐπομένως καὶ τῆς δυνάμεως εἰς ρητὸν ἐκθέτην, ἀλλὰ ὄχι καὶ τὴν ὕπαρξιν τούτων. Ἡ ὕπαρξις τούτων ἐξασφαλίζεται εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου τὸ Ε εἶναι κεκορεσμένον διατεταγμένον σῶμα, δηλαδὴ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ συνόλου $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Συγκεκριμένως ἰσχύει τὸ θεώρημα.

13.3.2 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἂν δὲν ἰσχύουν ταυτοχρόνως $a < 0$ καὶ ν ἄρτιος, τότε ὑπάρχει μία μονοσημάντως ὡρισμένη νιοστὴ ρίζα τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ a.*

Ἀπόδειξις. Ὡς καὶ ἐν τῇ ἀποδείξει τῆς προτάσεως 13.3.1, δυνάμεθα, χωρὶς βλάβην τῆς γενικότητος, νὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς a εἶναι μὴ ἀρνητικός. Διὰ τὴν συνάρτησιν φ τὴν ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\varphi(x) = x + \lambda(a - x^{\nu}), \quad x \in [0, 1+a],$$

ὅπου λ εἷς πραγματικὸς ἀριθμὸς μὲ $0 < \lambda \leq \frac{1}{\nu(1+a)^{\nu-1}}$, δυνάμεθα, ὡς καὶ ἐν τῇ ἀποδείξει τοῦ θεωρήματος 7.3.4, νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι εἶναι αὔξουσα μὲ τιμὰς ἐπίσης εἰς τὸ διάστημα $[0, 1+a]$. Ἀκολούθως δὲ ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος σταθεροῦ σημείου τοῦ Knaster ἐξασφαλίζομεν τὴν ὕπαρξιν ἑνὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ $\beta \in [0, 1+a]$ μὲ $\varphi(\beta) = \beta$, τὸ ὁποῖον δίδει $a = \beta^{\nu}$ καὶ ἀποδεικνύει τὴν ὕπαρξιν τῆς $\sqrt[\nu]{a}$, τῆς ὁποίας τὸ μονοσήμαντον ἐξασφαλίζεται ἐκ τῆς προτάσεως 13.3.1.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παρατήρησις. Άμεσον πόρισμα τοῦ θεωρήματος τούτου καὶ τοῦ τρόπου ὁρισμοῦ τῆς δυνάμεως μὲ ρητὸν ἐκθέτην εἶναι, ὅτι ἡ δύναμις a^{ρ}, ὅπου $a \in \mathbb{R}^{+}$ καὶ $\rho \in \mathbb{Q}$, ὁρίζεται πάντοτε καὶ μάλιστα μονοσημάντως.

13.4 ΑΠΕΡΑΝΤΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΝ ΦΟΡΕΑ

Τὰ εἰς τὸ παρὸν ἐδάφιον θεωρηθέντα γενικευμένα ἀθροίσματα $\sum_{x \in X} f(x)$ καὶ γινόμενα $\prod_{x \in X} f(x)$ ἀναφέρονται ἀποκλειστικῶς εἰς πεπερασμένα σύνολα X καὶ καλοῦνται διὰ τοῦτο *πεπερασμένα* ἀθροίσματα καὶ γινόμενα. Εἰς τὴν παροῦσαν παράγραφον θὰ ἐπεκτείνωμεν τὰς ἐννοίας ταύτας καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου τὸ X εἶναι ἀπέραντον, ἀλλὰ ἐπιδρᾷ οὐσιαστικῶς, ὡς πεπερασμένον τοιοῦτον. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν, ὡς καὶ εἰς τὴν παράγραφον 13.1, ἓν σύνολον E καὶ μίαν ἀνταμεταθετικὴν καὶ προσεταιριστικὴν πρᾶξιν $\bullet$ μὲ οὐδέτερον στοιχεῖον ω. Ὡς φορεὰ (support) μιᾶς συναρτήσεως $f : X \longmapsto E$ ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν $\bullet$, ὁρίζομεν τὸ σύνολον

$$\{ x \in X : f(x) \neq \omega \}$$

καὶ παριστῶμεν τοῦτο μὲ $\mathrm{spt}\, f$ ἢ $\mathrm{spt}_{\bullet} f$, ἵνα δηλώσωμεν καὶ τὴν πρᾶξιν, ὡς πρὸς τὴν ὁποίαν τοῦτο θεωρεῖται. Εὐκόλως συνάγεται, ὅτι διὰ τυχούσας συναρτήσεις $f : X \longmapsto E$, $g : X \longmapsto E$ καὶ $h : X \longmapsto E$ μὲ $h(x) = f(x) \bullet g(x)$, ἰσχύει

$$\mathrm{spt}_{\bullet} h \subseteq \mathrm{spt}_{\bullet} f \cup \mathrm{spt}_{\bullet} g . \tag{16}$$

Ἐπίσης, ἂν φ εἶναι μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ Y ἐπὶ τοῦ X, τότε διὰ τυχοῦσαν συνάρτησιν $f : X \longmapsto E$ ἰσχύει

$$\varphi\left(\mathrm{spt}_{\bullet}(f \circ \varphi)\right) = \mathrm{spt}_{\bullet} f . \tag{17}$$

Τέλος παρατηροῦμεν, ὅτι, ἂν A εἶναι πεπερασμένον σύνολον μὲ $\mathrm{spt}_{\bullet} f \subseteq A \subseteq \mathfrak{D}(f)$, τότε, δυνάμει τῆς ἰδιότητος (i) τοῦ θεωρήματος 13.1.1, προκύπτει, ὅτι

$$o(f, \mathrm{spt}_{\bullet} f) = o(f, A) . \tag{18}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν πράξεων τῆς προσθέσεως + καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ·, ἔχομεν :

$$\mathrm{spt}_+ f = \{x\in X : f(x)\neq 0\} \text{ καὶ } \mathrm{spt}_\cdot f = \{x\in X : f(x)\neq 1\}.$$

Ἂν οἱ φορεῖς οὗτοι εἶναι πεπερασμένα σύνολα, τότε ὁρίζομεν :

$$\sum_{x\in X} f(x) = \sum_{x\in \mathrm{spt}_+ f} f(x), \quad \prod_{x\in X} f(x) = \prod_{x\in \mathrm{spt}_\cdot f} f(x).$$

Τὸ $\sum_{x\in X} f(x)$ ἢ $\prod_{x\in X} f(x)$ καλεῖται ἀντιστοίχως *ἄθροισμα* ἢ *γινόμενον μέ πεπερασμένον φορέα*, ἐφ' ὅσον δέ τὸ σύνολον X εἶναι ἀπέραντον, τὸ $\sum_{x\in X} f(x)$ ἢ $\prod_{x\in X} f(x)$ καλεῖται ἀντιστοίχως *ἀπέραντον ἄθροισμα* ἢ *ἀπέραντον γινόμενον μέ πεπερασμένον φορέα*.

Αἱ ἰδιότητες τῆς παραγράφου 13.2 αἱ ἀφορῶσαι εἰς ἀθροίσματα ἢ γινόμενα ἐπεκτείνονται εὐκόλως, δυνάμει τῶν (16), (17) καὶ (18), καὶ δι' ἀθροίσματα ἢ γινόμενα μέ πεπερασμένου φορέα. Ἐπίσης καὶ αἱ ἰδιότητες (11), (12) καὶ (13) τῆς παραγράφου 13.3 ἐπεκτείνονται καὶ δι' ἀθροίσματα μέ πεπερασμένον φορέα. Τοῦτο εἶναι προφανές διὰ τὰς (12) καὶ (13), ἐνῷ διὰ τὴν (11) συνάγεται τῇ βοηθείᾳ τοῦ ὅτι διὰ τυχούσας συναρτήσεις $f : X \longmapsto E$, $g : X \longmapsto E$ καὶ $h : X \longmapsto E$ μέ $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$, ἰσχύει

$$\mathrm{spt}_+ h \subseteq \mathrm{spt}_+ f \cup \mathrm{spt}_+ g. \tag{19}$$

13.5 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δείξατε, ὅτι διὰ τὴν συνάρτησιν O τοῦ θεωρήματος 13.1.1 ἰσχύει

$$O(f, X\cup Y)\bullet O(f, X\cap Y) = O(f, X)\bullet O(f, Y).$$

2. Διατυπώσατε ἀνάλογον θεώρημα πρὸς τὸ 13.1.1 εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου δέν ὑποτίθεται ἡ ὕπαρξις οὐδετέρου στοιχείου διὰ τὴν πρᾶξιν

3. Δείξατε τὴν ἰδιότητα (8) τῆς παραγράφου 13.1.

4. Δείξατε, ὅτι ἰσχύει

$$\check{\bullet}(\alpha\bullet\beta) = (\check{\bullet}\,\alpha)\bullet(\check{\bullet}\,\beta).$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Εἰδικῶς, ἂν τὰ α, β εἶναι στοιχεῖα ἑνὸς σώματος, δεῖξατε, ὅτι

$$\begin{array}{l|l} \nu(\alpha+\beta) = \nu\alpha+\nu\beta & (\alpha\beta)^\nu = \alpha^\nu\beta^\nu \\ \nu(\alpha-\beta) = \nu\alpha-\nu\beta & \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu},\ \beta\neq 0. \end{array}$$

5. Δεῖξατε, ὅτι ἂν α, β εἶναι στοιχεῖα ἑνὸς σώματος, τότε ἰσχύει

$$(\alpha+\beta)^\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} \alpha^{\nu-\mu}\beta^\mu,$$

ὅπου $\binom{\nu}{\mu} = \dfrac{\nu!}{\mu!(\nu-\mu)!}$.

Ὁ τύπος οὗτος εἶναι γνωστὸς ὡς *διωνυμικὸς τύπος τοῦ Newton.*

6. Δεῖξατε τὰς ἰδιότητας (11), (12) καὶ (13) τῆς παραγράφου 13.3.

7. Δεῖξατε, ὅτι $\sqrt[2\nu+1]{\alpha} = -\sqrt[2\nu+1]{-\alpha}$.

8. Δεῖξατε, ὅτι διὰ $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$ καὶ μ,ν φυσικοὺς ἀριθμοὺς ἰσχύουν τὰ κάτωθι :

$$\begin{array}{l|l} \sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha} & \sqrt[\nu]{\alpha} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha^\mu} \\ \sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta} & \dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}},\ \beta\neq 0 \end{array}$$

9. Δεῖξατε, ὅτι ἡ (14) δὲν ἰσχύει εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου τὸ α εἶναι ἀρνητικὸν στοιχεῖον.

10. Δεῖξατε τὰς ἰδιότητας (15) τῆς παραγράφου 13.3 καὶ ἐπὶ πλέον τὰς :

$$\frac{\alpha^{\rho_1}}{\alpha^{\rho_2}} = \alpha^{\rho_1-\rho_2}, \qquad \alpha^\rho\cdot\beta^\rho = (\alpha\beta)^\rho, \qquad \frac{\alpha^\rho}{\beta^\rho} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\rho.$$

11. Διεξέλθετε ἐν λεπτομερείᾳ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος 13.3.2.

12. Δεῖξατε τὰς ἰδιότητας (16), (17), (18) καὶ (19) τῆς παραγρ. 13.4.

13. Δεῖξατε καὶ δι' ἀθροίσματα ἢ γινόμενα μὲ πεπερασμένον φορεὰ τὰς ἰδιότητας τῶν παραγράφων 13.2 καὶ 13.3, τὰς ἀφορώσας εἰς ἀθροίσματα ἢ γινόμενα.

14. Δεῖξατε, ὅτι εἰς ἓν σῶμα ἰσχύει καὶ ἡ ἀκόλουθος ἰδιότης δι' ἀθροίσματα μὲ πεπερασμένον φορεὰ (γενικευμένη ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης):

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\left(\sum_{x\in X} f(x)\right)\left(\sum_{y\in Y} g(y)\right) = \sum_{(x,y)\in X\times Y} f(x)g(y).$$

15. Στηριζόμενοι εἰς τὴν

$$A\times B = \bigcup_{x\in A}(\{x\}\times B) = \bigcup_{y\in B}(A\times\{y\}),$$

δείξατε, ὅτι οἱ ἀθροίσματα ἢ γινόμενα μὲ πεπερασμένον φορεὰ ἰσχύουν ἀντιστοίχως

$$\sum_{(x,y)\in A\times B} f(x,y) = \sum_{x\in A}\sum_{y\in B} f(x,y) = \sum_{y\in B}\sum_{x\in A} f(x,y)$$

ἢ

$$\prod_{(x,y)\in A\times B} f(x,y) = \prod_{x\in A}\prod_{y\in B} f(x,y) = \prod_{y\in B}\prod_{x\in A} f(x,y),$$

ὅπου $f(x,y) = f[(x,y)]$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

14. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

14.1 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Ἔστωσαν ἓν σύνολον E καὶ ἓν σῶμα K. Θεωροῦμεν ἐπίσης μίαν πρᾶξιν + ἐπὶ τοῦ E καὶ μίαν ἀπεικόνισιν s τοῦ KxE εἰς τὸ E, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν *βαθμωτόν (scalar) πολλαπλασιασμόν*. Τὴν τιμὴν s(α,x) συνηθίζομεν νὰ παριστῶμεν μὲ αx καὶ τὴν καλοῦμεν *βαθμωτὸν γινόμενον*. Τὸ σύνολον E καλεῖται *διανυσματικός (ἢ γραμμικός) χῶρος ὑπεράνω τοῦ σώματος* K τότε καὶ μόνον τότε, ἂν τὸ E ἀποτελῇ ἀντιμεταθετικὴν ὁμάδα ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν + τῆς προσθέσεως καὶ ἐπὶ πλέον διὰ τυχόντα α, β ἐν K καὶ x, y ἐν E ἰσχύουν :

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$
$$(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$$
$$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$$
$$1x = x.$$

Εἰς τὸν διανυσματικὸν χῶρον E ἡ δευτέρα καὶ ἡ τρίτη ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τούτων γενικεύονται, δυνάμει τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπαγωγικῆς ἀποδείξεως, ὡς κάτωθι :

$$\left(\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i\right)x = \sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i x$$

$$\alpha\sum_{i=1}^{\nu}x_i = \sum_{i=1}^{\nu}\alpha x_i$$

Εἰς τὸν διανυσματικὸν χῶρον E ἰσχύει καὶ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$0x = 0,$$

ὅπου τὸ 0 παριστᾷ ἀριστερὰ μὲν τὸ μηδενικὸν στοιχεῖον τοῦ σώματος K, δεξιὰ δὲ τὸ μηδενικὸν στοιχεῖον τῆς ὁμάδος E ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν +. Πράγματι·

$$0x + 0x = (0+0)x = 0x \longrightarrow 0x = 0x - 0x = 0.$$

Ἐπίσης

$$(-1)x = -x,$$

διότι $x + (-1)x = 1x + (-1)x = [1 + (-1)]x = 0x = 0.$

Τὰ στοιχεῖα τοῦ διανυσματικοῦ χώρου E καλοῦνται συνήθως *διανύσματα* τοῦ E. Τὸ διάνυσμα 0 τοῦ E καλεῖται καὶ *μηδενικὸν διάνυσμα* τοῦ E.

Παραδείγματα :

1. Ἓν σῶμα E ἀποτελεῖ ἕνα διανυσματικὸν χῶρον ὑπεράνω οἱουδήποτε ὑποσώματός του μὲ πρᾶξιν + τὴν πρόσθεσιν τοῦ σώματος καὶ βαθμωτὸν πολλαπλασιασμὸν τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ σώματος. Οὕτω, π.χ. τὸ σύνολον $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἀποτελεῖ διανυσματικὸν χῶρον ὑπεράνω τοῦ σώματος Q. τῶν ρητῶν ἀριθμῶν, ὡς ἐπίσης καὶ ὑπεράνω τοῦ ἑαυτοῦ του.

2. Ἂν E εἶναι σῶμα, τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον $\overset{n}{\underset{i=1}{\times}} E_i$ μὲ $E_i = E$ διὰ κάθε $i = 1, 2, \cdots, n$, τὸ ὁποῖον συντόμως παρίσταται μὲ E^n, ἀποτελεῖ ἕνα διανυσματικὸν χῶρον ὑπεράνω τυχόντος ὑποσώματος τοῦ E, ἄρα καὶ ὑπεράνω τοῦ E, μὲ πρόσθεσιν καὶ βαθμωτὸν πολλαπλασιασμόν, ὡς κάτωθι:

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$

$$a(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (ax_1, ax_2, \cdots, ax_n)$$

3. Γενικώτερον, ἂν E_i, $i \in I$ εἶναι μία οἰκογένεια διανυσματικῶν χώρων ὑπεράνω τοῦ αὐτοῦ σώματος K, τότε τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον $\underset{i \in I}{\times} E_i$ ἀποτελεῖ ἕνα διανυσματικὸν χῶρον ὑπεράνω τοῦ K μὲ πρόσθεσιν καὶ βαθμωτὸν πολλαπλασιασμὸν ὡς κάτωθι :

$$(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i)$$

$$a(x_i) = (ax_i).$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ὁ διανυσματικός αὐτός χῶρος, δηλαδή ὁ $\underset{i\in I}{\times} E_i$ καλεῖται *καρτεσιανός* διανυσματικός χῶρος τῆς οἰκογενείας E_i, $i\in I$.

4. Ἄν E_1, E_2 εἶναι τυχόντες διανυσματικοί χῶροι ὑπεράνω τοῦ αὐτοῦ σώματος K, μία συνάρτησις f μέ πεδίον ὁρισμοῦ τόν E_1 καί τιμάς εἰς τόν E_2 καλεῖται *γραμμική* τότε καί μόνον τότε, ἄν διά τυχόντα α,β ἐν K καί x, y ἐν E_1 ἰσχύῃ

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y).$$

Τό σύνολον $\mathcal{L}(E_1,E_2)$ ὅλων τῶν γραμμικῶν συναρτήσεων μέ πεδίον ὁρισμοῦ τόν E_1 καί τιμάς εἰς τόν E_2 ἀποτελεῖ ἕνα διανυσματικόν χῶρον ὑπεράνω τοῦ σώματος K μέ πρόσθεσιν καί βαθμωτόν πολλαπλασιασμόν, ὡς κάτωθι:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(\alpha f)(x)=\alpha f(x).$$

Δυνάμει τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπαγωγικῆς ἀποδείξεως, συνάγεται εὐκόλως ὅτι διά τυχοῦσαν $f\in\mathcal{L}(E_1,E_2)$ ἰσχύει

$$f\Big(\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i x_i\Big)=\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i f(x_i).$$

Ἡ περίπτωσις, ὅπου $E_1=E$ καί $E_2=K$, παρουσιάζει ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον. Ὁ χῶρος $\mathcal{L}(E,K)$ καλεῖται τότε ὁ *(ἀλγεβρικός) δυϊκός (ἤ συζυγής) χῶρος* τοῦ E καί παρίσταται μέ E^*, τά δέ στοιχεῖα του καλοῦνται *γραμμικαί μορφαί* ἐπί τοῦ E.

14.2 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΥΠΟΧΩΡΟΙ

Ἄν E εἶναι εἷς διανυσματικός χῶρος ὑπεράνω ἑνός σώματος K, ἕν ὑποσύνολον A τοῦ E καλεῖται *διανυσματικός ὑποχῶρος* ἤ καί ἁπλούστερον *ὑποχῶρος* τοῦ E τότε καί μόνον τότε, ἄν τό A μέ τήν ἐνυπάρχουσαν εἰς αὐτό πρόσθεσιν καί τόν ἐνυπάρχοντα βαθμωτόν πολλαπλασιασμόν τοῦ διανυσματικοῦ χώρου E ἀποτελῇ ἐπίσης ἕνα διανυσματικόν χῶρον ὑπεράνω τοῦ σώματος K. Εὐκόλως συνάγεται (ἀπόδειξις;) ὅτι τό A εἶναι ὑποχῶρος τοῦ E τότε καί μόνον τότε, ἄν διά τυχόντα α,β ἐν K καί x, y ἐν A, ἰσχύῃ

$$\alpha x+\beta y\in A.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παραδείγματα :

1. Ὁλόκληρος ὁ διανυσματικὸς χῶρος E εἶναι εἷς ὑποχῶρος τοῦ ἑαυτοῦ του. Ἐπίσης τὸ σύνολον $\{0\}$, τὸ ὁποῖον ἀπαρτίζεται ἀπὸ τὸ μηδενικὸν διάνυσμα τοῦ E, ἀποτελεῖ καὶ αὐτὸ ἕνα διανυσματικὸν ὑποχῶρον τοῦ E καλούμενον *μηδενικὸν ὑποχῶρον*.

2. Ἂν $E_i, i\in I$ εἶναι μία οἰκογένεια διανυσματικῶν χώρων ὑπεράνω τοῦ αὐτοῦ σώματος K, τότε τὸ ὑποσύνολον τοῦ καρτεσιανοῦ διανυσματικοῦ χώρου $\underset{i\in I}{\times} E_i$, τὸ ὁποῖον ἀπαρτίζεται ἀπὸ ἐκείνας τὰς οἰκογενείας $(a_i)\in\underset{i\in I}{\times} E_i$ διὰ τὰς ὁποίας τὸ σύνολον $\{i\in I : a_i\neq 0\}$ εἶναι πεπερασμένον ἀποτελεῖ ἕνα διανυσματικὸν ὑποχῶρον τοῦ καρτεσιανοῦ διανυσματικοῦ χώρου $\underset{i\in I}{\times} E_i$, ὁ ὁποῖος συμπίπτει μὲ ὁλόκληρον τὸν $\underset{i\in I}{\times} E_i$, ὅταν τὸ I εἶναι πεπερασμένον.

3. Ἂν E εἶναι εἷς διανυσματικὸς χῶρος ὑπεράνω ἑνὸς σώματος K καὶ $x, x_1, x_2, \cdots, x_\nu$ εἶναι διανύσματα αὐτοῦ, λέγομεν ὅτι τὸ x εἶναι εἷς *γραμμικὸς συνδυασμὸς* τῶν $x_1, x_2, \cdots, x_\nu$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχουν στοιχεῖα $a_1, a_2, \cdots, a_\nu$ τοῦ σώματος K τοιαῦτα, ὥστε $x=\sum_{i=1}^{\nu} a_i x_i$. Ἂν τώρα S εἶναι ἓν μὴ κενὸν ὑποσύνολον τοῦ διανυσματικοῦ χώρου E, τότε τὸ σύνολον τῶν διανυσμάτων τοῦ E, τὰ ὁποῖα εἶναι γραμμικοὶ συνδυασμοὶ διανυσμάτων ἐν S, ἤτοι τὸ σύνολον

$$\left\{x\in E : x=\sum_{i=1}^{\nu} a_i x_i \text{ μὲ } a_i\in K \text{ καὶ } x_i\in S\right\}$$

ἀποτελεῖ ἕνα διανυσματικὸν ὑποχῶρον τοῦ E, ὁ ὁποῖος παρίσταται μὲ $[S]$ καὶ καλεῖται ὁ *παραγόμενος ὑπὸ τοῦ* S ὑποχῶρος τοῦ E. Ὁ ὑποχῶρος $[S]$ εἶναι ὁ ἐλάχιστος ὑποχῶρος τοῦ E, ὁ ὁποῖος περιέχει τὸ σύνολον S, διότι ἂν A εἶναι τυχὼν ὑποχῶρος τοῦ E μὲ $S\subseteq A$ καὶ $x\in[S]$, τότε $x=\sum_{i=1}^{\nu} a_i x_i$, ὅπου $a_i\in K$ καὶ $x_i\in S$, ἄρα $x_i\in A$, τὸ ὁποῖον, λόγῳ τοῦ ὅτι A εἶναι διανυσματικὸς χῶρος ὑπεράνω τοῦ K, συνεπάγεται ὅτι τὸ $\sum_{i=1}^{\nu} a_i x_i$, δηλαδὴ τὸ x, εἶναι διάνυσμα τοῦ A, ἤτοι $[S]\subseteq A$.

14.2.1 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. *Ἔστω E εἷς διανυσματικὸς χῶρος ὑπεράνω ἑνὸς σώματος K. Ἂν $\mathcal{A}$ εἶναι μία μὴ κενὴ συλλογὴ ὑποχώρων τοῦ E, τότε ἡ τομὴ $\cap\mathcal{A}$ αὐτῆς εἶναι ἐπίσης εἷς ὑποχῶρος τοῦ E.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν τυχόντα α,β ἐν K καὶ x,y ἐν $\cap\mathcal{A}$. Ἔχομεν τότε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$(\forall A\in\mathcal{A})\ x\in A \text{ καὶ } y\in A,$$

ὁπότε, ἐπειδὴ A εἶναι ὑποχῶρος τοῦ E,

$$(\forall A\in\mathcal{A})\ \alpha x+\beta y\in A,$$

τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι $\alpha x+\beta y\in\cap\mathcal{A}$ καὶ ἀποδεικνύει ὅτι ἡ τομὴ $\cap\mathcal{A}$ εἶναι ὑποχῶρος τοῦ E.

Ἂν A, B εἶναι διανυσματικοὶ ὑποχῶροι τοῦ E, οὗτοι καλοῦνται *ξένοι*, τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ τομή των εἶναι ὁ μηδενικὸς ὑποχῶρος τοῦ E, ἤτοι ἂν $A\cap B=\{0\}$. Δύο ξένοι ὑποχῶροι τοῦ E καλοῦνται *συμπληρωματικοί* τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ὁ ὑπὸ τῆς ἑνώσεως $A\cup B$ αὐτῶν παραγόμενος ὑποχῶρος τοῦ E εἶναι ὁλόκληρος ὁ E, ἤτοι ἂν $[A\cup B]=E$.

14.2.2 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. *Ἂν A εἶναι τυχὼν ὑποχῶρος τοῦ E, τότε ὑπάρχει πάντοτε ὑποχῶρος B τοῦ E, συμπληρωματικὸς τοῦ A.*

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τὸ σύνολον $\mathcal{E}$ ὅλων τῶν ὑποχώρων X τοῦ E, οἱ ὁποῖοι εἶναι ξένοι πρὸς τὸν ὑποχῶρον A, διατεταγμένου ὡς πρὸς τὴν σχέσιν τοῦ ὑποσυνόλου. Ἂν $\mathcal{A}$ εἶναι τυχὸν γραμμικῶς διατεταγμένον ὑποσύνολον τοῦ $\mathcal{E}$, τότε ἡ ἕνωσις $\cup\mathcal{A}$ εἶναι εἷς διανυσματικὸς ὑποχῶρος τοῦ E (ἀπόδειξις;), δηλαδὴ τὸ $\mathcal{A}$ εἶναι φραγμένον πρὸς τὰ ἄνω. Ὥστε πληροῦνται αἱ ὑποθέσεις τοῦ λήμματος τοῦ Zorn (πρβλ. ἐδάφιον 11) διὰ τὸ σύνολον $\mathcal{E}$ καὶ ἐπομένως ὑπάρχει μεγιστικὸν στοιχεῖον B αὐτοῦ. Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι οἱ ὑποχῶροι A, B τοῦ E εἶναι συμπληρωματικοί. Ἐπειδὴ $B\in\mathcal{E}$, εἶναι προφανὲς ὅτι οὗτοι εἶναι ξένοι, ὁπότε ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι $[A\cup B]=E$. Πρὸς τοῦτο ὑποθέτομεν ὅτι $[A\cup B]\neq E$ καὶ θεωροῦμεν ἓν $x\in E$ μὲ $x\notin[A\cup B]$, ὁπότε, ἐπειδὴ B εἶναι μεγιστικὸν στοιχεῖον τοῦ $\mathcal{E}$, οἱ ὑποχῶροι A καὶ $[B\cup\{x\}]$ δὲν εἶναι ξένοι. Ἄρα ὑπάρχει $y\in A$ μὲ $y\neq 0$ καὶ $y\in[B\cup\{x\}]$. Ἀλλὰ $y\notin B$, διότι οἱ A, B εἶναι ξένοι, ὁπότε τοῦτο, ὡς διάνυσμα τοῦ ὑποχώρου $[B\cup\{x\}]$, τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $y=z+\alpha x$, ὅπου $\alpha\neq 0$ καὶ $z\in B$. Ἔχομεν ἐπομένως $x=\frac{1}{\alpha}y+(-\frac{1}{\alpha})z$, ὅπου $y\in A$ καὶ $z\in B$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι $x\in[A\cup B]$, ὅπερ, ἄτοπον.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

14.2.3 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Ἂν A,B εἶναι συμπληρωματικοὶ ὑποχῶροι τοῦ E, τότε τυχόν διάνυσμα $z\in E$ τίθεται, κατὰ ἕνα καὶ μόνον τρόπον, ὑπὸ τὴν μορφὴν $z=x+y$, ὅπου $x\in A$ καὶ $y\in B$.

Ἀπόδειξις. Ἐφ' ὅσον $E=[A\cup B]$, τυχόν $z\in E$ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $z=\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i x_i$, ὅπου $\alpha_i\in K$ καὶ $x_i\in A\cup B$. Ἂν τώρα θέσωμεν

$$x=\sum_{i\in I}\alpha_i x_i \quad\text{καὶ}\quad y=\sum_{i\in J}\alpha_i x_i,$$ ὅπου $I=\{i : x_i\in A\}$ καὶ $J=\{i : x_i\in B\}$,

τότε προφανῶς ἰσχύουν :

$$x\in A,\ y\in B \quad\text{καὶ}\quad z=x+y.$$

Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ μονοσημάντου τῆς παραστάσεως ταύτης τοῦ z, δεχόμεθα ὅτι ἰσχύει καὶ $z=u+v$, ὅπου $u\in A$ καὶ $v\in B$, ὁπότε ἰσχύει $x+y=u+v$, δηλαδὴ $x-u=v-y=w$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι $w\in A$ καὶ $w\in B$, ἄρα $w\in A\cap B=\{0\}$, ἤτοι $w=0$, τὸ ὁποῖον καὶ ἀποδεικνύει τὸ μονοσήμαντον.

Λέγομεν ὅτι εἷς διανυσματικὸς χῶρος E ὑπεράνω ἑνὸς σώματος K εἶναι *εὐθὺ ἄθροισμα* τῶν διανυσματικῶν χώρων $A_1, A_2, \cdots, A_\nu$ καὶ γράφομεν

$$E=A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_\nu \quad\text{ἢ συντόμως}\quad E=\bigoplus_{i=1}^{\nu}A_i$$

τότε καὶ μόνον τότε, ἂν A_i $(i=1,2,\cdots,\nu)$ εἶναι ὑποχῶροι τοῦ E καὶ τυχὸν $x\in E$ τίθεται κατὰ ἕνα καὶ μόνον τρόπον ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$x=x_1+x_2+\cdots+x_\nu,$$

ὅπου $x_i\in A_i$ διὰ κάθε $i=1,2,\cdots,\nu$.

Δυνάμει τῆς προηγουμένης προτάσεως 14.2.3, ἂν A,B εἶναι συμπληρωματικοὶ ὑποχῶροι τοῦ διανυσματικοῦ χώρου E, τότε ἰσχύει

$$E=A\oplus B.$$

14.3 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΒΑΣΙΣ – ΔΙΑΣΤΑΣΙΣ

Ἔστωσαν εἷς διανυσματικὸς χῶρος E ὑπεράνω ἑνὸς σώματος K καὶ A ἓν μὴ κενὸν ὑποσύνολον τοῦ E. Λέγομεν ὅτι τὸ A εἶναι *γραμμικῶς ἀνεξάρτητον* τότε καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ τυχόντα $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu$ ἐν K καὶ $x_1,x_2,\cdots,x_\nu$ ἐν A ἰσχύῃ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\sum_{i=1}^{\nu} a_i x_i = 0 \longrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_\nu = 0.$$

Προφανῶς, ἂν A εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητον, τότε $0 \notin A$, διότι διὰ τυχὸν $a \in K$, ἰσχύει

$$a0 = a[x + (-1)x] = ax + (-a)x = [a + (-a)]x = 0x = 0.$$

Ἓν μὴ κενὸν ὑποσύνολον B τοῦ διανυσματικοῦ χώρου E καλεῖται *διανυσματικὴ βάσις* (*βάσις τοῦ Hamel*) ἢ καὶ ἁπλούστερον *βάσις* τοῦ E τότε καὶ μόνον τότε, ἂν τὸ B εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητον καὶ παράγῃ τὸν E, δηλαδὴ $E = [B]$.

Ἰσχύουν τὰ κάτωθι θεωρήματα :

14.3.1 ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν A εἶναι ἓν γραμμικῶς ἀνεξάρτητον ὑποσύνολον τοῦ διανυσματικοῦ χώρου E, τότε ὑπάρχει μία βάσις B τοῦ E μὲ $A \subseteq B$.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Ξ τὸ σύνολον ὅλων τῶν γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων ὑποσυνόλων X τοῦ διανυσματικοῦ χώρου E μὲ $A \subseteq X$ διατεταγμένον ὡς πρὸς τὴν σχέσιν τοῦ ὑποσυνόλου. Ἂν $\mathcal{A}$ εἶναι τυχὸν γραμμικῶς διατεταγμένον ὑποσύνολον τοῦ Ξ, τότε τοῦτο εἶναι φραγμένου πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἄνω φράγμα τὴν ἕνωσιν $U\mathcal{A}$, καθ' ὅσον αὕτη εἶναι ἓν γραμμικῶς ἀνεξάρτητον ὑποσύνολον τοῦ E. Πράγματι· ἂν $x_1, x_2, \cdots, x_\nu$ εἶναι τυχόντα διανύσματα ἐν $U\mathcal{A}$, τότε ὑπάρχουν $A_1, A_2, \cdots, A_\nu$ ἐν $\mathcal{A}$ μὲ $x_i \in A_i$ $(i = 1, 2, \cdots, \nu)$. Ἐπειδὴ $\mathcal{A}$ εἶναι γραμμικῶς διατεταγμένον (ὡς πρὸς τὴν σχέσιν $\subseteq$), ἓν ἐξ αὐτῶν, ἔστω τὸ A_κ εἶναι μέγιστον (πρβλ. Πρότασιν 12.2.7) καὶ ἑπομένως διὰ κάθε $i = 1, 2, \cdots, \nu$ ἰσχύει $x_i \in A_\kappa$, τὸ ὁποῖον, λόγῳ τῆς γραμμικῆς ἀνεξαρτησίας τοῦ A_κ, συνεπάγεται ὅτι

$$\sum_{i=1}^{\nu} a_i x_i = 0 \longrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_\nu = 0$$

καὶ ἀποδεικνύει τὴν γραμμικὴν ἀνεξαρτησίαν τῆς ἑνώσεως $U\mathcal{A}$. Ὥστε πληροῦνται αἱ ὑποθέσεις τοῦ λήμματος τοῦ Zorn διὰ τὸ σύνολον Ξ καὶ ἑπομένως ὑπάρχει μεγιστοῦν στοιχεῖον B αὐτοῦ. Τοῦτο εἶναι προφανῶς γραμμικῶς ἀνεξάρτητον, ὁπότε ὑπολείπεται νὰ δειχθῇ ὅτι $E = [B]$. Πρὸς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τοῦτο ὑποθέτομεν ὅτι $E \neq [B]$ καὶ θεωροῦμεν τυχόν $x \in E$ μὲ $x \notin [B]$, ὁπότε, ἐπειδὴ τὸ B εἶναι γενεσιμέγιστον στοιχεῖον τοῦ $\mathfrak{C}$, τὸ σύνολον $B \cup \{x\}$ δὲν εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητον. Ἄρα ὑπάρχουν μὴ μηδενικὰ στοιχεῖα $a_1, a_2, \cdots, a_\nu$ ἐν K καὶ διάφορα ἀνὰ δύο διανύσματα $x_1, x_2, \cdots, x_\nu$ ἐν $B \cup \{x\}$ τοιαῦτα, ὥστε

$$\sum_{i=1}^{\nu} a_i x_i = 0$$

Ἐπειδὴ τὸ B εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητον πρέπει, ὑποχρεωτικῶς, ἓν ἀκριβῶς ἐκ τῶν $x_1, x_2, \cdots, x_\nu$ νὰ εἶναι τὸ x, ὁπότε δυνάμεθα, χωρὶς βλάβην τῆς γενικότητος, νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι $x = x_\nu$ καὶ ἐπομένως

$$x = x_\nu = \sum_{i=1}^{\nu-1} \frac{a_i}{a_\nu} x_i ,$$

τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι $x \in [B]$, ὅπερ ἄτοπον.

14.3.2 ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ἂν E_0 εἶναι ὑποχῶρος τοῦ διανυσματικοῦ χώρου E καὶ B_0 μία βάσις τοῦ ὑποχώρου E_0, τότε ὑπάρχει βάσις B τοῦ E τοιαύτη, ὥστε $B_0 \subseteq B$.*

Ἀπόδειξις. Τὸ σύνολον B_0, ὡς βάσις τοῦ ὑποχώρου E_0, εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητον ὑποσύνολον τοῦ E καὶ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα 14.3.1, ὑπάρχει βάσις B τοῦ E μὲ $B_0 \subseteq B$.

14.3.3 ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ἂν ὁ διανυσματικὸς χῶρος E ἔχῃ μὴ μηδενικὰ διανύσματα, τότε ὑπάρχει βάσις αὐτοῦ.*

Ἀπόδειξις. Ἂν x εἶναι τυχὸν μὴ μηδενικὸν διάνυσμα τοῦ E, τότε τὸ σύνολον $\{x\}$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητον καὶ κατὰ τὸ θεώρημα 14.3.1, ὑπάρχει βάσις τοῦ E, ἡ ὁποία μάλιστα ἔχει ὡς στοιχεῖον της καὶ τὸ x.

14.3.4 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἂν B_1, B_2 εἶναι βάσεις τοῦ διανυσματικοῦ χώρου E, τότε αὗται ἔχουν τὴν αὐτὴν ἰσχύν.*

Ἀπόδειξις. Λόγῳ τῆς συμμετρίας τῶν ὑποθέσεων τοῦ θεωρήματος καὶ τοῦ θεωρήματος τῶν Schröder - Bernstein (πρβλ. § 12.1) ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ὑπάρχει μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τῆς βάσεως B_1 εἰς τὴν B_2. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τὸ σύνολον $\mathfrak{C}$ ὅλων τῶν ἀπεικονίσεων f ἐκ τῆς B_1 εἰς τὴν B_2 διὰ τὰς ὁποίας τὸ σύνολον $\mathfrak{R}(f) \cup (B_1 - \mathfrak{D}(f))$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητον. Τὸ σύνολον $\mathfrak{C}$ εἶναι προφανῶς διατεταγμέ-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

νον ὡς πρὸς τὴν σχέσιν τοῦ ὑποσυνόλου. Ἂν τώρα $\mathcal{A}$ εἶναι τυχὸν γραμμικῶς διατεταγμένον ὑποσύνολον τοῦ $\mathcal{E}$, τότε ταῦτο εἶναι φραγμένον πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἄνω φράγμα τὴν ἕνωσιν $U\mathcal{A}$, καθ' ὅσον αὕτη εἶναι μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις ἐκ τῆς B_1 εἰς τὴν B_2 (ἀπόδειξις;). Ὥστε πληροῦνται αἱ ὑποθέσεις τοῦ λήμματος τοῦ Zorn διὰ τὸ σύνολον $\mathcal{E}$ καὶ ἑπομένως ὑπάρχει μεγιστοποιητικὸν στοιχεῖον φ αὐτοῦ. Τοῦτο εἶναι προφανῶς μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις ἐκ τῆς B_1 εἰς τὴν B_2 διὰ τὴν ὁποίαν δεχόμεθα ὅτι $\mathcal{D}(\varphi) \neq B_1$, ὁπότε, ἐπειδὴ τὸ σύνολον $\mathcal{R}(\varphi) \cup (B_1 - \mathcal{D}(\varphi))$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητον, τυχὸν διάνυσμα $x \in B_1$ μὲ $x \notin \mathcal{D}(\varphi)$ δὲν εἶναι γραμμικὸς συνδυασμὸς διανυσμάτων ἐν $\mathcal{R}(\varphi)$ καὶ ἑπομένως $\mathcal{R}(\varphi) \neq B_2$. Ἔστω λοιπὸν ἓν $y \in B_2$ μὲ $y \notin \mathcal{R}(\varphi)$, ὁπότε διακρίνομεν τὰς περιπτώσεις:

(i) $y \in [\mathcal{R}(\varphi) \cup (B_1 - \mathcal{D}(\varphi))]$. Ἔχομεν τότε

$$y = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i y_i + \sum_{j=1}^{\kappa} \beta_j x_j ,$$

ὅπου $y_i \in \mathcal{R}(\varphi)$ καὶ $x_j \in (B_1 - \mathcal{D}(\varphi))$. Τουλάχιστον ἓν τῶν β_j εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός, διότι ἄλλως $y - \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i y_i = 0$, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὸ ὅτι B_2 εἶναι βάσις. Θεωροῦμεν ἕνα δείκτην j_0 μὲ $\beta_{j_0} \neq 0$ καὶ τὴν συνάρτησιν φ_0 τὴν ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{ἂν } x \in \mathcal{D}(\varphi) \\ y, & \text{ἂν } x = x_{j_0}, \end{cases}$$

ἡ ὁποία εἶναι προφανῶς μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις ἐκ τῆς B_1 εἰς τὴν B_2. Ὡς εὐκόλως συνάγεται, τὸ σύνολον $\mathcal{R}(\varphi_0) \cup (B_1 - \mathcal{D}(\varphi_0))$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητον καὶ ἑπομένως $\varphi_0 \in \mathcal{E}$. Τοῦτο ὅμως ἀντίκειται εἰς τὸ ὅτι φ εἶναι μεγιστοποιητικὸν στοιχεῖον τοῦ $\mathcal{E}$, διότι ἐνῷ $\varphi_0 \neq \varphi$, ἡ φ_0 εἶναι μία ἐπέκτασις τῆς φ.

(ii) $y \notin [\mathcal{R}(\varphi) \cup (B_1 - \mathcal{D}(\varphi))]$. Ἐκλέγομεν ἓν $x_0 \in (B_1 - \mathcal{D}(\varphi))$ καὶ θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν φ_0 τὴν ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{ἂν } x \in \mathcal{D}(\varphi) \\ x_0, & \text{ἂν } x = x_0, \end{cases}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἡ ὁποία εἶναι προφανῶς μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις ἐκ τῆς B_1 εἰς τὴν B_2. Ὡς εὐκόλως συνάγεται, τὸ σύνολον $\mathcal{R}(\varphi_0) \cup (B_1 - \mathcal{D}(\varphi_0))$ εἶναι καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην γραμμικῶς ἀνεξάρτητον. Ἄρα $\varphi_0 \in \Xi$, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὸ ὅτι ἡ φ εἶναι μεγιστοδομήσιμον στοιχεῖον τοῦ Ξ.

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι ἡ ὑπόθεσις $\mathcal{D}(\varphi) \neq B_1$ ὁδηγεῖ πάντοτε εἰς ἄτοπον. Ἄρα ἰσχύει $\mathcal{D}(\varphi) = B_1$ καὶ ἐπομένως ἡ φ εἶναι μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τῆς βάσεως B_1 εἰς τὴν βάσιν B_2, τὸ ὁποῖον καὶ ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

Ἂν ὁ διανυσματικὸς χῶρος E ἔχῃ μίαν πεπερασμένην βάσιν, τότε, δυνάμει τοῦ προηγουμένου θεωρήματος 14.3.4, ὅλαι αἱ βάσεις αὐτοῦ εἶναι πεπερασμέναι καὶ μάλιστα ἔχουν τὸν αὐτὸν πληθικὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος καλεῖται *διάστασις* τοῦ E, ὁπότε λέγομεν καὶ ὅτι ὁ διανυσματικὸς χῶρος E εἶναι *πεπερασμένης* διαστάσεως. Ἂν ὁ διανυσματικὸς χῶρος E ἔχῃ μίαν ἀπέραντον βάσιν, τότε βεβαίως αὐτὸς δὲν εἶναι πεπερασμένης διαστάσεως, ὁπότε λέγομεν ὅτι εἶναι *ἀπείρου* διαστάσεως.

14.4 ΥΠΕΡΕΠΙΠΕΔΑ

Ἔστωσαν E εἷς διανυσματικὸς χῶρος ὑπεράνω ἑνὸς σώματος K καὶ H ἓν γνήσιον ὑποσύνολον αὐτοῦ. Τὸ H καλεῖται *ὑπερεπίπεδον* ἐν E τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ $\xi \in E$ τοιοῦτον, ὥστε τὸ σύνολον

$$H_\xi = \{ x \in E : x + \xi \in H \}$$

νὰ εἶναι ὑποχῶρος τοῦ E καὶ δι' οἱονδήποτε ὑποχῶρον A τοῦ E νὰ ἰσχύῃ

$$H_\xi \subset A \rightarrow A = E$$

Ὡς ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ συνάγεται ὅτι ἂν H εἶναι ἓν ὑπερεπίπεδον, τότε $0 \in H_\xi$ καὶ ἐπομένως $\xi = 0 + \xi \in H$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι τὰ ὑπερεπίπεδα εἶναι μὴ κενὰ σύνολα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἂν E^* εἶναι ὁ δυϊκὸς χῶρος τοῦ E, δηλαδὴ ὁ διανυσματικὸς χῶρος ὅλων τῶν γραμμικῶν συναρτήσεων μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ E καὶ τιμὰς εἰς τὸ K (γραμμικῶν μορφῶν ἐπὶ τοῦ E), τότε ἰσχύουν τὰ κάτωθι :

14.4.1 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Ἂν $f\in E^*$, $f\neq 0$ καὶ $k\in K$, τότε τὸ σύνολον

$$H=\left\{x\in E : f(x)=k\right\}$$

εἶναι ἓν ὑπερεπίπεδον ἐν E.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν ἓν $\xi\in H$, ὁπότε $f(\xi)=k$ καὶ ἑπομένως

$$H_\xi=\left\{x\in E : x+\xi\in H\right\}=\left\{x\in E : f(x)+f(\xi)=f(x+\xi)=k\right\}=\left\{x\in E : f(x)=0\right\},$$

τὸ ὁποῖον, ὡς εὐκόλως διαπιστοῦται, εἶναι εἷς διανυσματικὸς ὑποχῶρος τοῦ E. Ἂν A εἶναι τώρα τυχὼν ὑποχῶρος τοῦ E μὲ $H_\xi\subset A$ καὶ θεωρήσωμεν ἓν $\eta\in A$ μὲ $\eta\notin H_\xi$, τότε προφανῶς $f(\eta)\neq 0$ καὶ ἑπομένως διὰ τυχόν $x\in E$ ἰσχύει

$$f\left(x-\frac{f(x)}{f(\eta)}\,\eta\right)=f(x)-\frac{f(x)}{f(\eta)}f(\eta)=0.$$

Ἄρα τὸ $\zeta=x-\frac{f(x)}{f(\eta)}\eta$ εἶναι διάνυσμα τοῦ ὑποχώρου H_ξ καὶ ἑπομένως καὶ τοῦ A, ὁπότε ἔχομεν ὅτι

$$x=\zeta+\frac{f(x)}{f(\eta)}\eta,$$

τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι τὸ x εἶναι διάνυσμα τοῦ ὑποχώρου A. Ὥστε ἐδείχθη ὅτι $A=E$ καὶ ἑπομένως ὅτι τὸ H εἶναι ὑπερεπίπεδον ἐν E.

14.4.2 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Ἂν H εἶναι ἓν ὑπερεπίπεδον ἐν E, τότε ὑπάρχουν $f\in E^*$, $f\neq 0$ καὶ $k\in K$ τοιαῦτα, ὥστε

$$H=\left\{x\in E : f(x)=k\right\}.$$

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τὸν ὑποχῶρον H_ξ ὡς εἰς τὸν ὁρισμὸν τοῦ ὑπερεπιπέδου καὶ ἓν ὡρισμένον $\eta\in E$ μὲ $\eta\notin H_\xi$, ὁπότε, ἐπειδὴ $H_\xi\subset[H_\xi\cup\{\eta\}]$, ἔχομεν $[H_\xi\cup\{\eta\}]=E$. Ἄρα τυχὸν διάνυσμα $x\in E$ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$x=\zeta(x)+f(x)\eta \qquad (\zeta(x)\in H_\xi\,,\ f(x)\in K)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καὶ μάλιστα κατὰ ἕνα καὶ μόνον τρόπον (ἀπόδειξις ;). Οὕτως ὁρίζεται μία συνάρτησις $f : E \longmapsto K$ μὲ $f \neq 0$, διότι $f(\eta) = 1$ καὶ ἡ ὁποία εἶναι γραμμική, διότι

$$\alpha x+\beta y = \alpha\,(\zeta(x)+f(x)\eta) + \beta\,(\zeta(y)+f(y)\,\eta)$$

$$= (\alpha\zeta(x)+\beta\zeta(y)) + (\alpha f(x)+\beta f(y))\eta$$

καὶ ἐπομένως $f(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x)+\beta f(y)$.

Ὡς ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς f, ἔχομεν

$$H_\xi = \left\{ x\in E : f(x) = 0 \right\},$$

ὁπότε, ἂν θέσωμεν $k = f(\xi)$, ἔχομεν καὶ

$$H = \left\{ x\in E : x-\xi\in H_\xi \right\} = \left\{ x\in E : f(x)-f(\xi) = f(x-\xi) = 0 \right\} = \left\{ x\in E : f(x) = k \right\}.$$

14.4.3 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Ἂν H εἶναι ἓν ὑπερεπίπεδον ἐν E καὶ

$$H = \left\{ x\in E : f_1(x) = k_1 \right\} = \left\{ x\in E : f_2(x) = k_2 \right\},$$

ὅπου f_1, f_2 ἐν E^*, τότε ὑπάρχει $\lambda\in K$ μὲ $\lambda \neq 0$ τοιοῦτον, ὥστε $f_1 = \lambda f_2$ καὶ $k_1 = \lambda k_2$.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν ἓν $\xi\in H$, ὁπότε, ὡς καὶ εἰς τὴν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως 14.4.1, λαμβάνομεν

$$H_\xi = \left\{ x\in E : f_1(x) = 0 \right\} = \left\{ x\in E : f_2(x) = 0 \right\}.$$

Ἂν θεωρήσωμεν καὶ ἓν ὡρισμένον διάνυσμα $\eta\in E$ μὲ $\eta\notin H_\xi$, τότε προφανῶς $f_1(\eta) \neq 0$ καὶ $f_2(\eta) \neq 0$, ὁπότε παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τυχὸν $x\in E$

$$f_2\left(x-\frac{f_2(x)}{f_2(\eta)}\,\eta\right) = f_2(x) - \frac{f_2(x)}{f_2(\eta)}\,f_2(\eta) = 0,$$

δηλαδή, ὅτι τὸ $x-\frac{f_2(x)}{f_2(\eta)}\,\eta$ εἶναι διάνυσμα ἐν H_ξ. Ἄρα διὰ τυχὸν $x\in E$ ἰσχύει καὶ

$$f_1\left(x-\frac{f_2(x)}{f_2(\eta)}\,\eta\right) = 0 \quad \text{ἢ} \quad f_1(x)-\frac{f_2(x)}{f_2(\eta)}\,f_1(\eta) = 0,$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὁπότε, ἂν τεθῇ $\lambda = \frac{f_1(\eta)}{f_2(\eta)}$, τότε $\lambda \neq 0$ καὶ $f_1 = \lambda f_2$. Ἐπίσης, ἐπειδὴ $\xi \in H$, $k_1 = f_1(\xi) = (\lambda f_2)(\xi) = \lambda f_2(\xi) = \lambda k_2$.

14.5 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ ΥΠΕΡΑΝΩ ΤΟΥ $\mathbb{R}$

Διανυσματικοὶ χῶροι ὑπεράνω τοῦ σώματος $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καλοῦνται ἁπλούστερον *διανυσματικοὶ χῶροι*, ὑπονοουμένου τοῦ σώματος $\mathbb{R}$. Ἐνταῦθα θὰ ἀσχοληθῶμεν κυρίως μὲ ἐννοίας ἀναφερομένας εἰς ἕνα διανυσματικὸν χῶρον E, αἱ ὁποῖαι εἶναι συνδεδεμέναι μὲ τὴν (φυσικὴν) διάταξιν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ἡμίχωροι. Ἂν H εἶναι ἓν ὑπερεπίπεδον ἐν E, τότε

$$H = \{x \in E : f(x) = k\},$$

ὅπου $f \in E^*$, $f \neq 0$ καὶ $k \in K$. Τὰ σύνολα

$$\{x \in E : f(x) > k\} \quad \text{καὶ} \quad \{x \in E : f(x) < k\}$$

εἶναι προφανῶς μὴ κενὰ (διατί;) καὶ καλοῦνται *ἀνοικτοὶ ἡμίχωροι* τοῦ E. Ὁμοίως τὰ σύνολα

$$\{x \in E : f(x) \geq k\} \quad \text{καὶ} \quad \{x \in E : f(x) \leq k\}$$

καλοῦνται *κλειστοὶ ἡμίχωροι* τοῦ E.

Ἓν ὑπερεπίπεδον H ὁρίζει δύο ἡμιχώρους τοῦ E ἀνοικτοὺς ἢ κλειστούς, οἱ ὁποῖοι ἐξαρτῶνται ἀποκλειστικῶς ἐκ τοῦ ὑπερεπιπέδου H καὶ εἶναι, δυνάμει τῆς προτάσεως 14.4.3, ἀνεξάρτητοι τῶν f, k ἐν τῇ, ὡς ἄνω, παραστάσει τοῦ H.

Κυρτὰ σύνολα. Ἂν x_1, x_2 εἶναι διανύσματα τοῦ διανυσματικοῦ χώρου E, τότε τὸ σύνολον

$$\{x \in E : x = tx_1 + (1-t)x_2, \ 0 \leq t \leq 1\}$$

καλεῖται *εὐθύγραμμον τμῆμα* μὲ ἄκρα x_1, x_2 καὶ παρίσταται συνήθως μὲ $\overline{x_1 x_2}$ ἢ $\underline{x_1 x_2}$. Ἓν σύνολον $A \subseteq E$ καλεῖται *κυρτὸν* τότε καὶ μόνον

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τότε, ἄν

$$(\forall\, x_1, x_2 \text{ ἐν } A)\ \overline{x_1 x_2} \subseteq A.$$

Π.χ. τό $\emptyset$ εἶναι κυρτόν σύνολον, τυχόν μονοστοιχειακόν ὑποσύνολον τοῦ E εἶναι κυρτόν σύνολον, ὁλόκληρος ὁ διανυσματικός χῶρος E εἶναι κυρτόν σύνολον, ὡς ἐπίσης καί τυχών ἡμίχωρος τοῦ E εἶναι κυρτόν σύνολον (διατί;).

14.5.1 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. *Ἄν $\mathcal{A}$ εἶναι τυχοῦσα συλλογή κυρτῶν συνόλων τοῦ διανυσματικοῦ χώρου E, τότε ἡ τομή $\cap\mathcal{A}$ εἶναι ἐπίσης κυρτόν σύνολον.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν x_1, x_2 τυχόντα διανύσματα ἐν $\cap\mathcal{A}$, ὁπότε

$$(\forall\, A \in \mathcal{A})\ x_1 \in A \text{ καί } x_2 \in A.$$

Ἄρα, λόγῳ τοῦ ὅτι τό A εἶναι κυρτόν, ἰσχύει καί

$$(\forall\, A \in \mathcal{A})\ \overline{x_1 x_2} \subseteq A\ ,\ \text{ἤτοι}\ \overline{x_1 x_2} \subseteq \cap\mathcal{A}\ ,$$

τό ὁποῖον σημαίνει ὅτι ἡ τομή $\cap\mathcal{A}$ εἶναι κυρτόν σύνολον.

Ἄν $x, x_1, x_2, \cdots, x_\nu$ εἶναι διανύσματα τοῦ διανυσματικοῦ χώρου E, λέγομεν ὅτι τό x εἶναι εἷς *κυρτός συνδυασμός* τῶν $x_1, x_2, \cdots, x_\nu$ τότε καί μόνον τότε, ἄν ὑπάρχουν μή ἀρνητικοί πραγματικοί ἀριθμοί $a_1, a_2, \cdots, a_\nu$ τοιοῦτοι, ὥστε

$$x = \sum_{i=1}^{\nu} a_i x_i \text{ καί } \sum_{i=1}^{\nu} a_i = 1.$$

14.5.2 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. *Ἕν σύνολον A εἶναι κυρτόν τότε καί μόνον τότε, ἄν κάθε κυρτός συνδυασμός διανυσμάτων ἐν A ἀνήκῃ ἐπίσης εἰς τό A.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι τό A εἶναι κυρτόν. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι οἱ κυρτοί συνδυασμοί ἑνός μόνον διανύσματος ἐν A ἀνήκουν προφανῶς εἰς τό A. Δεχόμεθα τώρα ὅτι οἱ κυρτοί συνδυασμοί n διανυσμάτων ἐν A ἀνήκουν ἐπίσης εἰς τό A καί θεωροῦμεν τυχόντα συνδυασμόν $n+1$ διανυσμάτων $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ ἐν A,

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i\ ,\ \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \quad \text{καί } a_i \geq 0,\ i = 1, 2, \cdots, n+1,$$

ὁπότε διακρίνομεν τάς περιπτώσεις :

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1) $a_{n+1}=1$. Ἔχομεν τότε $a_i=0$, $i=1,2,\cdots,n$ καὶ ἑπομένως $x=x_{n+1}\in A$.

2) $a_{n+1}<1$. Θέτομεν τότε $\beta_i=\dfrac{a_i}{1-a_{n+1}}$, ὁπότε $\beta_i\geq 0$, $i=1,2,\cdots,n$ καὶ $\sum_{i=1}^{n}\beta_i=1$. Ἄρα τὸ

$$y=\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i$$

ὡς κυρτὸς συνδυασμὸς n διανυσμάτων ἐν A ἀνήκει εἰς τὸ A. Ἀλλὰ παρατηροῦμεν ὅτι

$$x=a_{n+1}x_{n+1}+\sum_{i=1}^{n}a_i x_i=a_{n+1}x_{n+1}+(1-a_{n+1})\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i$$

$$=a_{n+1}x_{n+1}+(1-a_{n+1})\,y,$$

δηλαδή, ὅτι $x\in\overline{x_{n+1}y}$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι $x\in A$, διότι, λόγῳ τῆς κυρτότητος τοῦ A, $\overline{x_{n+1}y}\subseteq A$.

Ὥστε, δυνάμει τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπαγωγικῆς ἀποδείξεως, ἐδείχθη ὅτι, ἂν τὸ A εἶναι κυρτὸν σύνολον, τότε κάθε κυρτὸς συνδυασμὸς διανυσμάτων ἐν A ἀνήκει ἐπίσης εἰς τὸ A.

Ἀντιστρόφως, δεχόμεθα ὅτι κάθε κυρτὸς συνδυασμὸς διανυσμάτων ἐν A ἀνήκει εἰς τὸ A καὶ θεωροῦμεν τυχόντα διανύσματα x_1, x_2 ἐν A. Τυχὸν διάνυσμα $x\in\overline{x_1x_2}$ εἶναι κυρτὸς συνδυασμὸς τῶν x_1, x_2, διότι τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $x=tx_1+(1-t)x_2$. Ἄρα $x\in A$ καὶ ἑπομένως $\overline{x_1x_2}\subseteq A$, τὸ ὁποῖον ἀποδεικνύει ὅτι τὸ A εἶναι κυρτὸν σύνολον.

Ἐσωτερικὸν γινόμενον. Ἂν E εἶναι εἰς διανυσματικὸς χῶρος, μία ἀπεικόνισις (συνάρτησις) p τοῦ $E^2=E\times E$ εἰς τὸ $\mathbb{R}$ καλεῖται *ἐσωτερικὸν γινόμενον* εἰς τὸν E τότε καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ τυχόντα x,x_1,x_2,y ἐν E καὶ α,β ἐν $\mathbb{R}$ ἰσχύουν:

$$p(x,y)=p(y,x)$$

$$p(\alpha x_1+\beta x_2,y)=\alpha p(x_1,y)+\beta p(x_2,y)$$

$$x\neq 0\Rightarrow p(x,x)>0.$$

Δι' ἐφαρμογῆς τῶν δύο πρώτων ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τούτων λαμβάνομεν ὅτι διὰ τυχόντα x,y_1,y_2 ἐν E καὶ γ,δ ἐν $\mathbb{R}$ ἰσχύουν:

$$p(0,x)=0=p(x,0)$$

$$p(x,\gamma y_1+\delta y_2)=\gamma p(x,y_1)+\delta p(x,y_2).$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Πράγματι :

$$p(0,x) = p(0+(-1)0, x) = p(0,x) + (-1)\,p(0,x) = 0$$

$$p(x, \gamma y_1 + \delta y_2) = p(\gamma y_1 + \delta y_2, x) = \gamma p(y_1, x) + \delta p(y_2, x)$$
$$= \gamma p(x, y_1) + \delta p(x, y_2).$$

Την τιμήν $p(x,y)$ καλούμεν *εσωτερικόν γινόμενον* των x και y και παριστώμεν απλούστερον με (x,y).

14.5.3 ΠΡΟΤΑΣΙΣ (ανισότης των Cauchy - Schwarz). Διά κάθε x,y εν E ισχύει

$$|(x,y)| \leqq \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}\,.$$

Απόδειξις. Η περίπτωσις $y = 0$ είναι προφανής. Υποθέτομεν λοιπόν $y \neq 0$ και παρατηρούμεν ότι διά κάθε πραγματικόν αριθμόν t ισχύει $(x+ty, x+ty) \geq 0$. Αλλά

$$(x+ty, x+ty) = (x, x+ty) + t(y, x+ty) = (x,x) + t(x,y) + t(y,x) + t^2(y,y)$$

$$= t^2(y,y) + 2t(x,y) + (x,x)$$

και επομένως

$$t^2(y,y) + 2t(x,y) + (x,x) \geqq 0,$$

οπότε, αν θέσωμεν $t = -\dfrac{(x,y)}{(y,y)}$, λαμβάνομεν :

$$-\frac{(x,y)^2}{(y,y)} + (x,x) \geqq 0 \quad \text{ή} \quad (x,x)(y,y) \geqq (x,y)^2,$$

το οποίον και αποδεικνύει την πρότασιν.

Δύο διανύσματα x,y ενός διανυσματικού χώρου E με εσωτερικόν γινόμενον καλούνται *ορθογώνια* τότε και μόνον τότε, αν $(x,y) = 0$. Εν σύνολον A, υποσύνολον του διανυσματικού χώρου E, καλείται *ορθογωνίου* τότε και μόνον τότε, αν

$$(\forall\, x,y \text{ εν } A)\ x \neq y \longrightarrow (x,y) = 0.$$

Το σύνολον A καλείται *ορθοκανονικόν* τότε και μόνον τότε αν το A είναι ορθογώνιον και

$$(\forall\, x \in A)\ (x,x) = 1.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Στάθμη (norm). Μία ἀπεικόνισις (συνάρτησις) N τοῦ διανυσματικοῦ χώρου E εἰς τὸ $\mathbb{R}$ καλεῖται *στάθμη (norm)* εἰς τὸν E τότε καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ τυχόντα x,y ἐν E καὶ $a\in\mathbb{R}$ ἰσχύουν :

$$N(x)=0 \Longleftrightarrow x=0$$
$$N(ax)=|a|\,N(x)$$
$$N(x+y)\leq N(x)+N(y) \quad \text{(τριγωνικὴ ἰδιότης).}$$

Δυνάμει τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων μιᾶς στάθμης συνάγονται καὶ αἱ :

$$(\forall\, x\in E)\ N(x)\geq 0$$
$$(\forall\, x,y \text{ ἐν } E)\ |N(x)-N(y)|\leq N(x-y),$$

ἡ ἀπόδειξις τῶν ὁποίων ἀφίεται εἰς τὸν ἀναγνώστην. Ἐπίσης, δυνάμει τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπαγωγικῆς ἀποδείξεως, ἡ τριγωνικὴ ἰδιότης γενικεύεται ὡς κάτωθι :

$$N\Big(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\Big)\leq \sum_{i=1}^{\nu} N(x_i),$$

ὅπου x_i, $i=1,2,\cdots,\nu$ εἶναι τυχόντα διανύσματα τοῦ E.

Ὡς ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ της, ἡ ἔννοια τῆς στάθμης εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν ἔννοιαν τῆς ἀπολύτου τιμῆς καὶ συνηθίζεται νὰ παρίσταται αὐτὴ μὲ $|\,|$, $\|\,\|$ ἢ $\|\|$.

Εἷς διανυσματικὸς χῶρος E, εἰς τὸν ὁποῖον ἔχει ὁρισθῆ μία στάθμη N, καλεῖται *σταθμητὸς* διανυσματικὸς χῶρος καὶ παρίσταται συνήθως μὲ (E,N). Εἷς διανυσματικὸς χῶρος E μὲ ἐσωτερικὸν γινόμενον εἶναι καὶ σταθμητὸς διανυσματικὸς χῶρος μὲ στάθμην N ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ τύπου

$$N(x)=\sqrt{(x,x)}\,.$$

Πράγματι :

$$N(x)=0 \Longleftrightarrow (x,x)=0 \Longleftrightarrow x=0$$

$$N(ax)=\sqrt{(ax,ax)}=\sqrt{a^2(x,x)}=|a|\sqrt{(x,x)}=|a|\,N(x)$$

$$N(x+y)=\sqrt{(x+y,x+y)}=\sqrt{(x,x)+2(x,y)+(y,y)}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\leq \sqrt{(x,x)+2\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}+(y,y)} = \sqrt{(x,x)}+\sqrt{(y,y)} = N(x)+N(y),$$

ὅπου εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν, ἐχρησιμοποιήθη ἡ ἀνισότης τῶν Cauchy - Schwarz.

14.6 ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΙ ΧΩΡΟΙ

Ἂς θεωρήσωμεν τὸν διανυσματικὸν χῶρον $\mathbb{R}^n$ (πρβλ. § 14.1, παράδειγμα 2), τοῦ ὁποίου τὰ διανύσματα εἶναι διατεταγμέναι n-άδες, αἱ ὁποῖαι χάριν συντομίας παρίστανται ὡς ἑξῆς:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

Τὰ x_i, $i = 1,2,\cdots,n$ καλοῦνται τότε *συντεταγμέναι* τοῦ διανύσματος $\vec{x}$. Ὑπενθυμίζομεν ὅτι ἡ πρόσθεσις καὶ ὁ βαθμωτὸς πολλαπλασιασμὸς εἰς τὸν $\mathbb{R}^n$ ὁρίζονται ὡς κάτωθι:

$$\vec{x}+\vec{y} = \vec{z} \iff (\forall\, i = 1,2,\cdots,n)\ x_i+y_i = z_i$$
$$a\vec{x} = \vec{y} \iff (\forall\, i = 1,2,\cdots,n)\ ax_i = y_i.$$

Εὐκόλως συνάγεται ὅτι ἡ συνάρτησις p, ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τοῦ τύπου

$$p(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

εἶναι ἓν ἐσωτερικὸν γινόμενον εἰς τὸν διανυσματικὸν χῶρον $\mathbb{R}^n$, τὸ ὁποῖον καλεῖται *εὐκλείδειον ἐσωτερικὸν γινόμενον*. Τὸ εὐκλείδειον ἐσωτερικὸν γινόμενον τῶν $\vec{x}$ καὶ $\vec{y}$ συνηθίζεται νὰ παρίσταται μὲ $\vec{x}\cdot\vec{y}$ ἀντὶ τοῦ $p(\vec{x},\vec{y})$, ἤτοι:

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Ὁ διανυσματικὸς χῶρος $\mathbb{R}^n$ εἶναι ὅθεν καὶ σταθμητὸς διανυσματικὸς χῶρος μὲ στάθμην $|\,|$ ὁριζομένην, μέσῳ τοῦ εὐκλειδείου ἐσωτερικοῦ γινομένου, ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}},$$

ἡ ὁποία καλεῖται *εὐκλείδειος στάθμη*.

Τὸν διανυσματικὸν χῶρον $\mathbb{R}^n$ μὲ τὸ εὐκλείδειον ἐσωτερικὸν γινόμενον καὶ τὴν εὐκλείδειον στάθμην καλοῦμεν *εὐκλείδειον χῶρον* $\mathbb{R}^n$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἂν θεωρήσωμεν τὰ διανύσματα

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0, 0)$$
$$\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0, 0)$$
$$\vdots$$
$$\vec{e}_n = (0, 0, 0, \cdots, 0, 1),$$

τότε διὰ τυχὸν διάνυσμα $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, ἔχομεν :

$$\begin{aligned}\vec{x} &= (x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &= (x_1, 0, 0, \cdots, 0, 0) + (0, x_2, 0, \cdots, 0, 0) + \cdots + (0, 0, 0, \cdots, 0, x_n) \\ &= x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i ,\end{aligned}$$

ἤτοι

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i .$$

Ὥστε τὸ σύνολον $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ παράγει τὸν εὐκλείδειον χῶρον $\mathbb{R}^n$, δηλαδὴ ἰσχύει $\mathbb{R}^n = [B]$. Ἐπίσης τὸ B εἶναι καὶ γραμμικῶς ἀνεξάρτητον, διότι

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\vec{e}_i = \vec{0} \Rightarrow (a_1, a_2, \cdots, a_n) = \vec{0} \Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0.$$

Ἄρα τὸ σύνολον $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ εἶναι μία βάσις τοῦ εὐκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$. Ἡ βάσις αὐτὴ εἶναι μάλιστα ὀρθοκανονική, διότι ἀφ' ἑνὸς μὲν

$$i \neq j \Rightarrow \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$$

καὶ ἐπομένως εἶναι ὀρθογώνιος, ἀφ' ἑτέρου δὲ

$$(\forall\ i = 1, 2, \cdots, n)\ \ \vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1 .$$

Ὁ $\mathbb{R}^n$ εἶναι λοιπὸν διανυσματικὸς χῶρος διαστάσεως n δι' αὐτὸ δὲ καλεῖται καὶ *n-διάστατος εὐκλείδειος χῶρος*, τὰ δὲ στοιχεῖα του *n-διάστατα διανύσματα*.

Ἂν $\vec{a}$ εἶναι ἓν n-διάστατον διάνυσμα, τότε ἡ συνάρτησις f ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τοῦ τύπου

$$f(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x}$$

εἶναι προφανῶς γραμμική, δηλαδὴ εἶναι μία γραμμικὴ μορφὴ ἐπὶ τοῦ εὐ-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

κλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$. Αλλά καί άντιστρόφως, άν f είναι μία γραμμική μορφή έπί τοῦ εὐκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$, τότε τυχόν $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ τίθεται ὑπό τήν μορφήν

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$$

καί έπομένως

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(\vec{e}_i) = \vec{a}\cdot\vec{x},$$

ὅπου ἐτέθη $\vec{a} = (f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \cdots, f(\vec{e}_n))$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι ἕν ὑπερεπίπεδον H εἰς τόν εὐκλείδειον χῶρον $\mathbb{R}^n$ τίθεται ὑπό τήν μορφήν

$$H = \{\vec{x}\in\mathbb{R}^n : \vec{a}\cdot\vec{x} = k\},$$

ὅπου $\vec{a}$ εἶναι ἕν ὡρισμένον n-διάστατον διάνυσμα καί k εἷς πραγματικός ἀριθμός. Ἑπομένως οἱ ἡμίχωροι (ἀνοικτοί ἤ κλειστοί), οἱ ὁριζόμενοι ὑπό τοῦ H, εἶναι οἱ :

$$\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n : \vec{a}\cdot\vec{x} > k\}, \quad \{\vec{x}\in\mathbb{R}^n : \vec{a}\cdot\vec{x} < k\}$$

$$\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n : \vec{a}\cdot\vec{x} \geq k\}, \quad \{\vec{x}\in\mathbb{R}^n : \vec{a}\cdot\vec{x} \leq k\}.$$

Ἄν

$$H = \{\vec{x}\in\mathbb{R}^n : \vec{a}\cdot\vec{x} = k\} = \{\vec{x}\in\mathbb{R}^n : \vec{\beta}\cdot\vec{x} = \mu\},$$

τότε κατά τήν πρότασιν 14.4.3 ὑπάρχει $\lambda\neq 0$ μέ $k=\lambda\mu$ καί

$$(\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^n)\ \vec{a}\cdot\vec{x} = \lambda(\vec{\beta}\cdot\vec{x}) = (\lambda\vec{\beta})\cdot\vec{x},$$

ὁπότε διά κάθε $i=1,2,\cdots,n$ ἰσχύει καί

$$\vec{a}\cdot\vec{e}_i = (\lambda\vec{\beta})\cdot\vec{e}_i, \text{ ἤτοι } a_i = \lambda\beta_i,$$

δηλαδή $\vec{a}=\lambda\vec{\beta}$.

14.7 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἔστωσαν E εἷς διανυσματικός χῶρος ὑπεράνω ἑνός σώματος K καί f μία γραμμική μορφή ἐπί τοῦ E, ἤτοι $f\in E^*$. Ἄν A εἶναι ἕν ὑποσύνολον τοῦ E τοιοῦτον, ὥστε

$$(\forall x\in A)\ f(x) = 0,$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τότε ἰσχύει καί

$$(\forall x \in [A])\ f(x) = 0.$$

2. Ἔστω E εἷς διανυσματικός χῶρος (ὑπεράνω ἑνός σώματος K) διαστάσεως n. Δείξατε, ὅτι εἷς ὑποχῶρος τοῦ διανυσματικοῦ χώρου E εἶναι ὑπερεπίπεδον τότε καί μόνον τότε, ἄν αὐτός εἶναι διαστάσεως $n-1$.

3. Δείξατε, ὅτι ἄν E εἶναι εἷς διανυσματικός χῶρος καί S κυρτόν ὑποσύνολον αὐτοῦ, τότε διά τυχόν $\xi \in E$ καί $a \in \mathbb{R}$ τά σύνολα

$$\{x \in E : x+\xi \in S\} \quad \text{καί} \quad \{x \in E : ax \in S\}$$

εἶναι ἐπίσης κυρτά.

4. Δείξατε, ὅτι ἄν E εἶναι εἷς διανυσματικός χῶρος, τότε διά κάθε σύνολον S, ὑποσύνολον τοῦ E, ὑπάρχει ἓν ἐλάχιστον κυρτόν σύνολον $K(S)$, ὑπερσύνολον τοῦ S (τό $K(S)$ καλεῖται *κυρτή θήκη* τοῦ S).

5. Δείξατε, ὅτι ἄν E εἶναι εἷς διανυσματικός χῶρος καί S τυχόν ὑποσύνολον αὐτοῦ, τότε τό σύνολον τῶν κυρτῶν συνδυασμῶν στοιχείων τοῦ S εἶναι κυρτόν σύνολον καί συμπίπτει μέ τήν κυρτήν θήκην τοῦ S.

6. Πότε ἡ ἀνισότης τῶν Cauchy–Schwarz (πρβλ. πρότασιν 14.5.3) ἰσχύει ὡς ἰσότης; Διατυπώσατε ταύτην εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ εὐκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$.

7. Δείξατε, ὅτι εἰς ἕνα διανυσματικόν χῶρον E μέ ἐσωτερικόν γινόμενον ἰσχύουν:

(i) *Θεώρημα τοῦ Πυθαγόρου*: Ἄν x, y εἶναι ὀρθογώνια, τότε

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2.$$

(ii) *Νόμος τοῦ παραλληλογράμμου*:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2,$$

ὅπου $\|\ \|$ παριστᾶ τήν διά τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου ὁριζομένην εἰς τόν E στάθμην.

8. Δείξατε, ὅτι ἄν E εἶναι εἷς διανυσματικός χῶρος μέ ἐσωτερι-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

κόν γινόμενον καὶ B μία ὀρθογώνιος βάσις αὐτοῦ, τότε τὸ σύνολον

$$\left\{ x \in E : (\exists\, y \in B)\ x = \frac{y}{\|y\|} \right\},$$

ὅπου $\|\ \|$ παριστᾶ τὴν διὰ τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου ὁριζομένην εἰς τὸν E στάθμην, ἀποτελεῖ μίαν ὀρθοκανονικὴν βάσιν τοῦ E.

9. Δείξατε, ὅτι εἰς τὸν εὐκλείδειον χῶρον $\mathbb{R}^n$ ἰσχύουν:

$$\alpha(\vec{x}\vec{y}) = (\alpha\vec{x})\vec{y} = \vec{x}(\alpha\vec{y}) \quad \text{καὶ} \quad (\vec{x}+\vec{y})\vec{z} = \vec{x}\vec{z} + \vec{y}\vec{z}.$$

10. Δείξατε, ὅτι εἰς τὸν διανυσματικὸν χῶρον $\mathbb{R}^n$ αἱ συναρτήσεις N_1, N_2, αἱ ὁριζόμεναι ὑπὸ τῶν τύπων:

$$N_1(\vec{x}) = \sup_i |x_i| \quad \text{καὶ} \quad N_2(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

εἶναι στάθμαι εἰς τὸν $\mathbb{R}^n$. Ἐπὶ πλέον δείξατε, ὅτι διὰ κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ἰσχύουν:

$$N_1(\vec{x}) \leqq |\vec{x}| \leqq \sqrt{n}\, N_1(\vec{x})$$

$$\frac{1}{2} N_2(\vec{x}) \leqq |\vec{x}| \leqq N_2(\vec{x}).$$

11. Δύο διανυσματικοὶ χῶροι E_1 καὶ E_2 ὑπεράνω τοῦ αὐτοῦ σώματος K καλοῦνται *ἰσόμορφοι* τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις φ τοῦ E_1 ἐπὶ τοῦ E_2 τοιαύτη, ὥστε διὰ κάθε α, β ἐν K καὶ x, y ἐν E_1 νὰ ἰσχύῃ:

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y).$$

Δείξατε, ὅτι:

(i) Ὁ διανυσματικὸς χῶρος $\mathbb{R}^n$ καὶ ὁ δυϊκός του $(\mathbb{R}^n)^*$ εἶναι ἰσόμορφοι.

(ii) Οἱ διανυσματικοὶ χῶροι E_1, E_2 εἶναι ἰσόμορφοι τότε καὶ μόνον τότε, ἂν τυχοῦσαι βάσεις αὐτῶν ἔχουν τὴν αὐτὴν ἰσχύν.

12. Δείξατε, ὅτι ἂν E εἶναι εἰς στάθμητὸς διανυσματικὸς χῶρος μὲ στάθμην N, τότε ἡ συνάρτησις $N^*: E^* \longmapsto \mathbb{R}$, ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τοῦ τύπου

$$N^*(f) = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{N(x)} = \sup_{N(x)=1} |f(x)|,$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

εἶναι ἐπίσης μία στάθμη εἰς τὸν δυϊκὸν χῶρον E^n, καλουμένη *δυϊκὴ στάθμη* τῆς N. Ἐπὶ πλέον δείξατε, ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ εὐκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$ ἰσχύει

$$|f|^* = N_1(\vec{a}),$$

ὅπου $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{x}$ καὶ N_1 ἡ εἰς τὴν ἄσκησιν 9 ὁριζομένη στάθμη.

13. Ἔστωσαν, E_1, E_2 σταθμητοὶ διανυσματικοὶ χῶροι μὲ στάθμας N_1, N_2 ἀντιστοίχως. Δείξατε, ὅτι ὁ διανυσματικὸς χῶρος $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ ὅλων τῶν γραμμικῶν συναρτήσεων μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸν E_1 καὶ τιμὰς εἰς τὸν E_2 (πρβλ. § 4.1, παράδειγμα 4) εἶναι ἐπίσης σταθμητὸς διανυσματικὸς χῶρος μὲ στάθμην N ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$N(f) = \sup_{x \neq 0} \frac{N_2(f(x))}{N_1(x)} = \sup_{N_1(x)=1} N_2(f(x)).$$

Ἡ στάθμη N συνηθίζεται νὰ ὀνομάζεται *ἐπαγομένη* στάθμη εἰς τὸν διανυσματικὸν χῶρον $\mathcal{L}(E_1, E_2)$. Δείξατε, ἐπίσης, ὅτι ἡ δυϊκὴ στάθμη εἶναι μία εἰδικὴ περίπτωσις ἐπαγομένης στάθμης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

15. ΠΙΝΑΚΕΣ-ΟΡΙΖΟΥΣΑ

15.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΟΣ

Μία οἰκογένεια εἰς ἓν σῶμα K μὲ σύνολον δεικτῶν τὸ $\{1,2,\cdots,m\}\times\{1,2,\cdots,n\}$ ἀναφέρεται συχνὰ ὡς εἷς $m\times n$ *πίναξ* ὑπεράνω τοῦ σώματος K, τὰ δὲ μέλη της ὡς *στοιχεῖα* τοῦ πίνακος. Εἷς $m\times n$ πίναξ $(a_{(ij)})$ παρίσταται ἁπλούστερον μὲ (a_{ij}) ἢ A ἢ ἀναλυτικώτερον μὲ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ὁ $1\times n$ πίναξ

$$(a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in})$$

καλεῖται ἡ i-*γραμμή* καὶ ὁ $m\times 1$ πίναξ

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

ἡ j-*στήλη* τοῦ πίνακος (a_{ij}).

Ἂν $m=n$, τότε ὁ $m\times n$ πίναξ (a_{ij}) καλεῖται *τετραγωνικός*. Ὡς εὐκόλως συνάγεται (ἀπόδειξις;) τὸ σύνολον $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ ὅλων τῶν $m\times n$ πινάκων ὑπεράνω τοῦ σώματος K ἀποτελεῖ ἕνα διανυσματι-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

κόν χῶρον ὑπεράνω τοῦ σώματος K μὲ πρόσθεσιν καὶ βαθμωτὸν πολλαπλασιασμόν, ὡς κάτωθι :

$$(x_{ij}) + (y_{ij}) = (x_{ij} + y_{ij})$$
$$\alpha(x_{ij}) = (\alpha x_{ij}).$$

Τὸ μηδενικὸν διάνυσμα O τοῦ διανυσματικοῦ χώρου $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ εἶναι προφανῶς ὁ $m\times n$ πίναξ, τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ στοιχεῖα ἰσοῦνται μὲ τὸ μηδενικὸν στοιχεῖον 0 τοῦ σώματος K. Οὗτος καλεῖται ὁ *μηδενικὸς* $m\times n$ πίναξ.

Ἂν $A=(\alpha_{ij})$ εἶναι εἷς $m\times n$ πίναξ, τότε ὁ $n\times m$ πίναξ (β_{ij}) μὲ $\beta_{ij}=\alpha_{ji}$ καλεῖται *ἀνάστροφος* (transpose) τοῦ A καὶ παρίσταται μὲ A^T.

15.2 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Ὡς *γινόμενον* AB τοῦ $m\times n$ πίνακος $A=(\alpha_{ij})$ ἐπὶ τὸν $n\times k$ πίνακα $B=(\beta_{ij})$ ὁρίζεται ὁ $m\times k$ πίναξ $\Gamma=(\gamma_{ij})$ μὲ

$$\gamma_{ij}=\alpha_{i1}\beta_{1j}+\alpha_{i2}\beta_{2j}+\cdots+\alpha_{in}\beta_{nj}=\sum_{\lambda=1}^{n}\alpha_{i\lambda}\beta_{\lambda j}.$$

Εἶναι προφανὲς ὅτι, ἂν ὁ A εἶναι μηδενικὸς $m\times n$ πίναξ ἢ ὁ B εἶναι ὁ μηδενικὸς $n\times k$ πίναξ, τότε τὸ γινόμενον AB εἶναι ὁ μηδενικὸς $m\times k$ πίναξ, ἤτοι ἰσχύουν :

$$OB=O \text{ καὶ } AO=O.$$

Ἐπίσης δι' ἀπ' εὐθείας ὑπολογισμοῦ συνάγεται, ὅτι ἡ οὕτως ὁρισθεῖσα πρᾶξις τοῦ *πολλαπλασιασμοῦ* εἰς τὸ σύνολον τῶν πινάκων ἔχει τὰς κάτωθι ἀξιοσημειώτους ἰδιότητας (ἀπόδειξις ;) :

$$(AB)\Gamma = A(B\Gamma)$$
$$\Delta(E+Z)=\Delta E+\Delta Z \text{ καὶ } (E+Z)H=EH+ZH.$$

Ἂς περιορισθῶμεν τώρα εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν τετραγωνικῶν $n\times n$ πινάκων, ἤτοι εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ συνόλου $\mathcal{M}_{n\times n}(K)$, ὁπότε παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πινάκων εἶναι πάντοτε ἐπιτρεπτὴ μεταξὺ τῶν $n\times n$ πινάκων καὶ ἐπὶ πλέον αὐτὴ εἶναι κλειστὴ εἰς τὸ σύνολον $\mathcal{M}_{n\times n}(K)$. Ὁ $n\times n$ πίναξ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

χαρακτηρίζεται ἀπὸ τὴν ἰδιότητα :

$$(\forall\, A\in\mathcal{M}_{n\times n}(K))\quad AI=A=IA$$

καὶ καλεῖται ὁ *μοναδιαῖος* $n\times n$ πίναξ. Εἷς $n\times n$ πίναξ B καλεῖται *ἀντίστροφος* τοῦ $n\times n$ πίνακος A τότε καὶ μόνον τότε, ἂν

$$AB=I=BA.$$

Ὁ ἀντίστροφος τοῦ πίνακος A εἶναι *μονοσημάντως ὡρισμένος* καὶ παρίσταται (ἐφ' ὅσον ὑπάρχῃ) μὲ A^{-1}. Πράγματι· ἂν B καὶ Γ εἶναι ἀντίστροφοι τοῦ πίνακος A, τότε

$$AB=I=BA \quad\text{καὶ}\quad A\Gamma=I=\Gamma A$$

καὶ ἐπομένως

$$B=BI=B(A\Gamma)=(BA)\Gamma=I\Gamma=\Gamma.$$

15.3 ΟΡΙΖΟΥΣΑ

Μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις μ τοῦ συνόλου $\{1,2,\cdots,n\}$ ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του καλεῖται μία *μετάθεσις* τοῦ $\{1,2,\cdots,n\}$ καὶ παρίσταται συνήθως μὲ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix}$, ἤτοι

$$\mu=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix}.$$

Μία μετάθεσις μ, ὡς ἡ ἀνωτέρω, καλεῖται *ἀρτία* τότε καὶ μόνον τότε, ἂν τὸ σύνολον

$$\{(\mu_\kappa,\mu_\lambda):\ \kappa<\lambda \text{ καὶ } \mu_\kappa>\mu_\lambda\}$$

ἔχῃ πληθικὸν ἀριθμὸν ἄρτιον, ἄλλως, ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ συνόλου τούτου εἶναι περιττὸς καὶ ἡ μετάθεσις μ καλεῖται τότε *περιττή*. Ἂν μ εἶναι μία μετάθεσις τοῦ συνόλου $\{1,2,\cdots,n\}$, τότε ἡ ἀντί-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

κόν χῶρον ὑπεράνω τοῦ σώματος K μὲ πρόσθεσιν καὶ βαθμωτὸν πολλαπλασιασμόν, ὡς κάτωθι :

$$(x_{ij}) + (y_{ij}) = (x_{ij} + y_{ij})$$
$$\alpha(x_{ij}) = (\alpha x_{ij}).$$

Τὸ μηδενικὸν διάνυσμα O τοῦ διανυσματικοῦ χώρου $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ εἶναι προφανῶς ὁ $m\times n$ πίναξ, τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ στοιχεῖα ἰσοῦνται μὲ τὸ μηδενικὸν στοιχεῖον 0 τοῦ σώματος K. Οὗτος καλεῖται ὁ *μηδενικὸς* $m\times n$ πίναξ.

Ἂν $A=(\alpha_{ij})$ εἶναι εἷς $m\times n$ πίναξ, τότε ὁ $n\times m$ πίναξ (β_{ij}) μὲ $\beta_{ij}=\alpha_{ji}$ καλεῖται *ἀνάστροφος* (transpose) τοῦ A καὶ παρίσταται μὲ A^T.

15.2 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Ὡς *γινόμενον* AB τοῦ $m\times n$ πίνακος $A=(\alpha_{ij})$ ἐπὶ τὸν $n\times k$ πίνακα $B=(\beta_{ij})$ ὁρίζεται ὁ $m\times k$ πίναξ $\Gamma=(\gamma_{ij})$ μὲ

$$\gamma_{ij}=\alpha_{i1}\beta_{1j}+\alpha_{i2}\beta_{2j}+\cdots+\alpha_{in}\beta_{nj}=\sum_{\lambda=1}^{n}\alpha_{i\lambda}\beta_{\lambda j}.$$

Εἶναι προφανὲς ὅτι, ἂν ὁ A εἶναι μηδενικὸς $m\times n$ πίναξ ἢ ὁ B εἶναι ὁ μηδενικὸς $n\times k$ πίναξ, τότε τὸ γινόμενον AB εἶναι ὁ μηδενικὸς $m\times k$ πίναξ, ἤτοι ἰσχύουν :

$$OB=O \text{ καὶ } AO=O.$$

Ἐπίσης δι' ἀπ' εὐθείας ὑπολογισμοῦ συνάγεται, ὅτι ἡ οὕτως ὁρισθεῖσα πρᾶξις τοῦ *πολλαπλασιασμοῦ* εἰς τὸ σύνολον τῶν πινάκων ἔχει τὰς κάτωθι ἀξιοσημειώτους ἰδιότητας (ἀπόδειξις ;) :

$$(AB)\Gamma = A(B\Gamma)$$
$$\Delta(E+Z)=\Delta E+\Delta Z \quad \text{καὶ} \quad (E+Z)H=EH+ZH.$$

Ἂς περιορισθῶμεν τώρα εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν τετραγωνικῶν $n\times n$ πινάκων, ἤτοι εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ συνόλου $\mathcal{M}_{n\times n}(K)$, ὁπότε παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πινάκων εἶναι πάντοτε ἐπιτρεπτὴ μεταξὺ τῶν $n\times n$ πινάκων καὶ ἐπὶ πλέον αὕτη εἶναι κλειστὴ εἰς τὸ σύνολον $\mathcal{M}_{n\times n}(K)$. Ὁ $n\times n$ πίναξ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

χαρακτηρίζεται ἀπό τήν ἰδιότητα :

$$(\forall\, A\in\mathcal{M}_{n\times n}(K))\ AI=A=IA$$

καί καλεῖται ὁ *μοναδιαῖος* $n\times n$ πίναξ. Εἷς $n\times n$ πίναξ B καλεῖται *ἀντίστροφος* τοῦ $n\times n$ πίνακος A τότε καί μόνον τότε, ἄν

$$AB=I=BA.$$

Ὁ ἀντίστροφος τοῦ πίνακος A εἶναι *μονοσημάντως ὡρισμένος* καί παρίσταται (ἐφ' ὅσον ὑπάρχῃ) μέ A^{-1}. Πράγματι· ἄν B καί Γ εἶναι ἀντίστροφοι τοῦ πίνακος A, τότε

$$AB=I=BA \quad \text{καί} \quad A\Gamma=I=\Gamma A$$

καί ἐπομένως

$$B=BI=B(A\Gamma)=(BA)\Gamma=I\Gamma=\Gamma.$$

15.3 ΟΡΙΖΟΥΣΑ

Μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις μ τοῦ συνόλου $\{1,2,\cdots,n\}$ ἐπί τοῦ ἑαυτοῦ του καλεῖται μία *μετάθεσις* τοῦ $\{1,2,\cdots,n\}$ καί παρίσταται συνήθως μέ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix}$, ἤτοι

$$\mu=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix}.$$

Μία μετάθεσις μ, ὡς ἡ ἀνωτέρω, καλεῖται *ἀρτία* τότε καί μόνον τότε, ἄν τό σύνολον

$$\{(\mu_\kappa,\mu_\lambda):\ \kappa<\lambda \text{ καί } \mu_\kappa>\mu_\lambda\}$$

ἔχῃ πληθικόν ἀριθμόν ἄρτιον, ἄλλως, ὁ πληθικός ἀριθμός τοῦ συνόλου τούτου εἶναι περιττός καί ἡ μετάθεσις μ καλεῖται τότε *περιττή*. Ἄν μ εἶναι μία μετάθεσις τοῦ συνόλου $\{1,2,\cdots,n\}$, τότε ἡ ἀντί-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

στροφος ἀπεικόνισις μ^{-1} εἶναι προφανὰς· καὶ αὐτὴ μία μετάθεσις τοῦ $\{1,2,\cdots,n\}$ καὶ μάλιστα ἰσχύει :

15.3.1 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Αἱ μεταθέσεις μ καὶ μ^{-1} τοῦ συνόλου $\{1,2,\cdots,n\}$ ἤ εἶναι ἀμφότεραι ἄρτιαι ἤ ἀμφότεραι περιτταί.

Ὁρίζουσα (determinant) καλεῖται μία συνάρτησις $\det : \mathcal{M}_{n\times n}(K) \longmapsto K$ ὁριζομένη ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\det(x_{ij}) = \sum_{\mu\in M} \varepsilon_\mu x_{1\mu_1} x_{2\mu_2} \cdots x_{n\mu_n},$$

ὅπου M εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν μεταθέσεων $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix}$ τοῦ συνόλου $\{1,2,\cdots,n\}$ καὶ

$$\varepsilon_\mu = \begin{cases} 1, & \text{ἄν } \mu \text{ εἶναι ἀρτία} \\ -1, & \text{ἄν } \mu \text{ εἶναι περιττή} . \end{cases}$$

Τὴν τιμὴν $\det(x_{ij})$ καλοῦμεν *ὁρίζουσαν* τοῦ $n\times n$ πίνακος (x_{ij}).

Αἱ κάτωθι προτάσεις 15.3.2 καὶ 15.3.3 εἶναι ἄμεσοι συνέπειαι τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ὁριζούσης.

15.3.2 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Ἄν $A = (a_{ij})$ εἶναι εἷς $n\times n$ πίναξ καὶ δι' ἕνα δείκτην i ἰσχύῃ

$$a_{ij} = \beta_{ij} + \gamma_{ij} \quad \text{διὰ κάθε } j = 1,2,\cdots,n,$$

τότε

$$\det A = \det B + \det \Gamma,$$

ὅπου B καὶ Γ εἶναι οἱ πίνακες οἱ προκύπτοντες ἐκ τοῦ A δι' ἀντικαταστάσεως τῆς i-γραμμῆς ὑπὸ τῶν $(\beta_{i1}\ \beta_{i2}\ \cdots\ \beta_{in})$ καὶ $(\gamma_{i1}\ \gamma_{i2}\ \cdots\ \gamma_{in})$ ἀντιστοίχως.

15.3.3 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Ἄν $A = (a_{ij})$ εἶναι εἷς $n\times n$ πίναξ, τότε ἰσχύει

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

A_{ij} παριστᾷ τὴν ὁρίζουσαν τοῦ πίνακος, ὁ ὁποῖος προκύπτει ἐκ τοῦ A δι' ἀντικαταστάσεως τῆς i-γραμμῆς ὑπὸ τῆς $(\delta_{i1}\ \delta_{i2}\ \cdots\ \delta_{in})$,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου δ_{ij} είναι το δέλτα του Kronecker, ήτοι

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ αν } i \neq j \\ 1, \text{ αν } i = j \end{cases}.$$

Το A_{ij} εις την ανωτέρω παράστασιν της $\det A$ καλείται *συμπαράγων (cofactor)* του στοιχείου a_{ij}.

15.3.4 ΘΕΩΡΗΜΑ. Άν A είναι εις $n \times n$ πίναξ, τότε ο ανάστροφός του A^T έχει την αυτήν ορίζουσαν, ήτοι $\det A^T = \det A$.

Απόδειξις. Έστωσαν $A = (a_{ij})$ και $A^T = (a^T_{ij})$. Λαμβάνοντες υπ' όψιν την πρότασιν 15.3.1 συνάγομεν, ότι $\varepsilon_\mu = \varepsilon_{\mu^{-1}}$ διά κάθε μετάθεσιν μ του συνόλου $\{1, 2, \cdots, n\}$ και επομένως

$$\det A = \sum_\mu \varepsilon_\mu a_{1\mu_1} a_{1\mu_2} \cdots a_{n\mu_n} = \sum_\mu \varepsilon_{\mu^{-1}} a_{\mu_1^{-1}1} a_{\mu_2^{-1}2} \cdots a_{\mu_n^{-1}n}$$

$$= \sum_\mu \varepsilon_{\mu^{-1}} a^T_{1\mu_1^{-1}} a^T_{2\mu_2^{-1}} \cdots a^T_{n\mu_n^{-1}} = \det A^T.$$

15.3.5 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Η ορίζουσα του πίνακος, ο οποίος προκύπτει δι' εναλλαγής δύο γραμμών ενός πίνακος A ισούται με $-\det A$.

15.3.6 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Άν δύο γραμμαί του πίνακος A συμπίπτουν, τότε $\det A = 0$.

15.3.7 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Η ορίζουσα του πίνακος, ο οποίος προκύπτει εκ του $n \times n$ πίνακος $A = (a_{ij})$ δι' αντικαταστάσεως της i-γραμμής υπό της $(a_{i1} + \gamma a_{k1}\ a_{i1} + \gamma a_{k2} \cdots a_{in} + \gamma a_{kn})$, ισούται με την $\det A$.

Έπίσης ισχύει το ακόλουθον βασικόν θεώρημα.

15.3.8. ΘΕΩΡΗΜΑ. Άν A, B είναι τυχόντες $n \times n$ πίνακες, τότε ισχύει

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\det(AB)=(\det A)(\det B).$$

15.3.9 ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Εἷς $n\times n$ πίναξ $A=(a_{ij})$ ἔχει ἀντίστροφον τότε καὶ μόνον τότε, ἂν $\det A\neq 0$. Ἐπὶ πλέον δέ, ἂν $\det A\neq 0$, τότε

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}(A_{ij})^T.$$

15.4 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δείξατε, ὅτι
$(A+B)^T=A^T+B^T$, $(cA)^T=cA^T$, $(AB)^T=B^TA^T$.

2. Ἀποδείξατε τὴν πρότασιν 15.3.1.

3. Ἀποδείξατε τὴν πρότασιν 15.3.2 καὶ διατυπώσατε καὶ ἀποδείξατε ἀνάλογον τοιαύτην διὰ τὰς στήλας.

4. Δείξατε, ὅτι ἂν $A=(a_{ij})$ εἶναι εἷς $n\times n$ πίναξ, ὁ συμπαράγων A_{ij} τοῦ στοιχείου a_{ij} ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ $(-1)^{i+j}$ ἐπὶ τὴν ὁρίζουσαν τοῦ $(n-1)\times(n-1)$ πίνακος, ὁ ὁποῖος προκύπτει ἐκ τοῦ A διὰ διαγραφῆς τῆς i-γραμμῆς καὶ τῆς j-στήλης αὐτοῦ.

5. Ἀποδείξατε τὴν πρότασιν 15.3.3 καὶ ἐπὶ πλέον δείξατε, ὅτι

$$\det A=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}.$$

6. Ἀποδείξατε τὰς προτάσεις 15.3.5, 15.3.6 καὶ 15.3.7 ἐπὶ πλέον δέ, διατυπώσατε καὶ ἀποδείξατε ἀναλόγους τοιαύτας διὰ τὰς στήλας.

7. Δείξατε, ὅτι ἂν $A=(a_{ij})$ καὶ $B=(\beta_{ij})$ εἶναι $n\times n$ πίνακες, τότε:

(i)
$$\det(AB)=\det\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \hline -1 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n}\\ 0 & -1 & \cdots & 0 & \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nn} \end{array}\right)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

(ii)

$$\det\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} & 0 & 0\cdots 0 \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} & 0 & 0\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} & 0 & 0\cdots 0 \\ \hline -1 & 0\cdots 0 & \beta_{11} & \beta_{12}\cdots \beta_{1n} \\ 0 & -1\cdots 0 & \beta_{21} & \beta_{22}\cdots \beta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0\cdots -1 & \beta_{n1} & \beta_{n2}\cdots \beta_{nn} \end{array}\right) = \det\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} & \gamma_{11} & \gamma_{12}\cdots \gamma_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} & \gamma_{21} & \gamma_{22}\cdots \gamma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} & \gamma_{n1} & \gamma_{n2}\cdots \gamma_{nn} \\ \hline -1 & 0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 \\ 0 & -1\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0\cdots -1 & 0 & 0\cdots 0 \end{array}\right)$$

ὅπου $\gamma_{ij} = a_{i1}\beta_{1j} + a_{i2}\beta_{2j} + \cdots + a_{in}\beta_{nj}$.

(iii) ἰσχύει τὸ θεώρημα 15.3.8, ἤτοι

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

8. Ἀποδείξατε τὴν πρόταση 15.3.9.

9. Δείξατε, ὅτι τὸ σύνολον $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ ὅλων τῶν $m\times n$ πινάκων ὑπεράνω τοῦ σώματος $\mathbb{R}$ εἶναι εἰς σταθμητὸς διανυσματικὸς χῶρος μὲ στάθμην $\|\ \|$ ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ τύπου

$$|X| = \sqrt{\Sigma\, x_{ij}^2}\ .$$

Ἡ στάθμη $\|\ \|$ καλεῖται *εὐκλείδειος στάθμη* εἰς τὸν διανυσματικὸν χῶρον $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

10. Δείξατε, ὅτι αἱ συναρτήσεις $N_1 : \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \longmapsto \mathbb{R}$ καὶ $N_2 : \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \longmapsto \mathbb{R}$ αἱ ὁριζόμεναι ὑπὸ τῶν τύπων :

$$N_1(X) = \sup_{i,j} |x_{ij}| \quad \text{καὶ} \quad N_2(X) = \sum_{i,j} |x_{ij}|$$

εἶναι στάθμαι εἰς τὸν διανυσματικὸν χῶρον $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ καὶ μάλιστα ἰσχύουν :

$$N_1(X) \leqq |X| \leqq \sqrt{mn}\ N_1(X)$$

$$\frac{1}{mn} N_2(X) \leqq |X| \leqq N_2(X).$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

16. ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑΙ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

16.1 Η ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Συναρτήσεις, αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν τιμὰς εἰς τὸ σύνολον $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καλοῦνται συνήθως *πραγματικαί*. Εἰδικῶς, ἂν τὸ πεδίον ὁρισμοῦ μιᾶς πραγματικῆς συναρτήσεως ἀποτελῇ ἕνα διανυσματικὸν χῶρον, τότε αὐτὴ συνηθίζεται νὰ ὀνομάζεται *συναρτησοειδές* (functional). Εἰς τὸ σύνολον $\mathcal{F}=\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$ ὅλων τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων μὲ κοινὸν πεδίον ὁρισμοῦ ἓν μὴ κενὸν σύνολον A ὁρίζομεν πράξεις ὡς κατωτέρω :

Πρόσθεσις. Ὡς *ἄθροισμα* $f+g$ τῶν συναρτήσεων f, g ἐν $\mathcal{F}$, ὁρίζομεν τὴν συνάρτησιν $s\in\mathcal{F}$ τὴν ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ τύπου

$$s(x)=f(x)+g(x).$$

Ὡς εὐκόλως διαπιστοῦται, ἡ οὕτως ὁρισθεῖσα ἐπὶ τοῦ $\mathcal{F}$ πρᾶξις τῆς προσθέσεως πληροῖ τὰ κάτωθι :

1. *Εἶναι ἀντιμεταθετική,*

$$(\forall f,g \text{ ἐν } \mathcal{F})\quad f+g=g+f.$$

2. *Εἶναι προσεταιριστική,*

$$(\forall f,g,h \text{ ἐν } \mathcal{F})\quad f+(g+h)=(f+g)+h.$$

3. *Ὑπάρχει οὐδέτερον (μηδενικὸν) στοιχεῖον τῆς προσθέσεως καὶ εἶναι τοῦτο ἡ σταθερὰ συνάρτησις* 0 *(ἐπὶ τοῦ* A*),*

$$(\forall f\in\mathcal{F})\quad f+0=f=0+f.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

4. *Διά κάθε* $f\in\mathcal{F}$ *ὑπάρχει ἀντίθετον στοιχεῖον* $-f\in\mathcal{F}$ *καί εἶναι τοῦτο ἡ συνάρτησις, ἡ ὁριζομένη ὑπό τοῦ τύπου*

$$(-f)(x) = -f(x).$$

Ἤτοι ἰσχύει

$$(\forall f\in\mathcal{F})\ f+(-f)=0=(-f)+f.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει, ὅτι τό σύνολον $\mathcal{F}$ εἶναι μία *ἀντιμεταθετική ὁμάς* ὡς πρός τήν πρᾶξιν τῆς προσθέσεως.

Πολλαπλασιασμός. Ὡς *γινόμενον* $f\cdot g$ τῶν συναρτήσεων f,g ἐν $\mathcal{F}$, ὁρίζομεν τήν συνάρτησιν $p\in\mathcal{F}$ τήν ὁριζομένην ὑπό τοῦ τύπου

$$p(x) = f(x)\,g(x).$$

Εὐκόλως διαπιστοῦται, ὅτι ἡ οὕτως ὁρισθεῖσα ἐπί τοῦ $\mathcal{F}$ πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πληροῖ τά κάτωθι :

1. *Εἶναι ἀντιμεταθετική*,

$$(\forall f,g \text{ ἐν } \mathcal{F})\ fg=gf.$$

2. *Εἶναι προσεταιριστική*,

$$(\forall f,g,h \text{ ἐν } \mathcal{F})\ f(gh)=(fg)h.$$

3. *Ὑπάρχει ἀδέτερον (μοναδιαῖον) στοιχεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καί εἶναι τοῦτο ἡ σταθερά συνάρτησις* 1 *(ἐπί τοῦ* A*)*,

$$(\forall f\in\mathcal{F})\ f1=f=1f.$$

4. *Ἡ πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν πρόσθεσιν*,

$$(\forall f,g,h \text{ ἐν } \mathcal{F})\ f(g+h)=fg+fh.$$

Ἐπίσης παρατηροῦμεν ὅτι, ἄν f μία συνάρτησις εἰς τό $\mathcal{F}^*=\mathcal{F}-\{0\}$, τότε μέ $\frac{1}{f}$ συμβολίζομεν τήν συνάρτησιν τήν ὁριζομένην ὑπό τοῦ τύπου

$$\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Ἡ συνάρτησις $\frac{1}{f}$ δέν ἀνήκει ἐν γένει εἰς τό $\mathcal{F}^*$, διότι αὕτη ἔχει πεδίον ὁρισμοῦ τό σύνολον $B=\{x\in A: f(x)\neq 0\}$, τό ὁποῖον εἶναι ὑποσύνολον τοῦ A. Ἄν ὅμως $B=A$, δηλαδή $(\forall x\in A)\,f(x)\neq 0$, τότε ἡ συνάρτησις $\frac{1}{f}\in\mathcal{F}^*$ καί εἶναι τό ἀντίστροφον στοιχεῖον τῆς f, ἤτοι ἰσχύει

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{1}{f} f = 1 = f \frac{1}{f}.$$

Αφαίρεσις – Διαίρεσις. Επειδή το $\mathcal{F}$ είναι όμως ως προς την πρόσθεσιν, ορίζεται και η πράξις της *αφαιρέσεως* επί του $\mathcal{F}$, ως συνήθως, διά του τύπου

$$f - g = f + (-g).$$

Επίσης η πράξις της διαιρέσεως εις το $\mathcal{F}$ ορίζεται διά του τύπου

$$\frac{f}{g} = f \frac{1}{g},$$

όπου, προφανώς, υποτίθεται ότι $g \neq 0$, δηλαδή $(\forall x \in A)\, g(x) \neq 0$, ίνα ορίζεται η συνάρτησις $\frac{1}{g}$ ως στοιχείον του $\mathcal{F}^* = \mathcal{F} - \{0\}$. Επίσης παρατηρούμεν, ότι διά τυχόντα f_1, f_2 και $g_1 \neq 0$, $g_2 \neq 0$, ισχύουν:

$$\frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2} = \frac{f_1 g_2 + f_2 g_1}{g_1 g_2} \qquad \frac{f_1}{g_1} - \frac{f_2}{g_2} = \frac{f_1 g_2 - f_2 g_1}{g_1 g_2}$$

$$\frac{f_1}{g_1} \cdot \frac{f_2}{g_2} = \frac{f_1 f_2}{g_1 g_2} \qquad \frac{f_1}{g_1} : \frac{f_2}{g_2} = \frac{f_1 g_2}{g_1 f_2}, \; f_2 \neq 0.$$

16.2 ΤΟ ΣΩΜΑ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ιδιαίτερον ενδιαφέρον παρουσιάζουν πραγματικαί συναρτήσεις με πεδίον ορισμού A, έν υποσύνολον του ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$. Η τιμή $f(\vec{x})$ μιάς τοιαύτης συναρτήσεως f παρίσταται αναλυτικώτερον με $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ η δε συνάρτησις καλείται τότε πραγματική συνάρτησις *μιάς (n-διαστάτου) διανυσματικής μεταβλητής* ή και άλλως η *πραγματικών μεταβλητών*. Ωρισμένα ενδιαφέροντα παραδείγματα πραγματικών συναρτήσεων η (πραγματικών) μεταβλητών είναι τά κάτωθι:

Μονωνυμική συνάρτησις η μεταβλητών καλείται μία συνάρτησις m ορισμένη υπό ενός τύπου της μορφής

$$m(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_n^{\nu_n},$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου α εἷς πραγματικὸς ἀριθμὸς καὶ $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n$ μὴ ἀρνητικοὶ ἀκέραιοι. Εὐκόλως διαπιστοῦται, ὅτι τὸ γινόμενον μονωνυμικῶν συναρτήσεων εἶναι ἐπίσης μονωνυμικὴ συνάρτησις, ἐνῶ, ἀντιθέτως, τὸ ἄθροισμα μονωνυμικῶν συναρτήσεων δὲν εἶναι ἐν γένει μονωνυμικὴ συνάρτησις.

Πολυωνυμικὴ συνάρτησις n μεταβλητῶν καλεῖται μία συνάρτησις p ὁριζομένη ὑπὸ ἑνὸς τύπου τῆς μορφῆς

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{k} m_i(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

ὅπου $m_1, m_2, \cdots, m_k$ μονωνυμικαὶ συναρτήσεις n μεταβλητῶν. Εἶναι προφανὲς ὅτι, τόσον τὸ ἄθροισμα, ὅσον καὶ τὸ γινόμενον πολυωνυμικῶν συναρτήσεων, εἶναι ἐπίσης πολυωνυμικὴ συνάρτησις.

Ρητὴ συνάρτησις n μεταβλητῶν καλεῖται μία συνάρτησις r, ἡ ὁποία δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$r = \frac{p}{q},$$

ὅπου p, q πολυωνυμικαὶ συναρτήσεις n μεταβλητῶν καὶ $q \neq 0$.

Ἂν $\mathcal{R}$ εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν ρητῶν συναρτήσεων καὶ $r_1 = \frac{p_1}{q_1}$, $r_2 = \frac{p_2}{q_2}$ εἶναι τυχοῦσαι ρηταὶ συναρτήσεις, τότε ὁρίζομεν ἐν $\mathcal{R}$ μίαν ἰσοδυναμίαν, ὡς κάτωθι :

$$r_1 \approx r_2 \longleftrightarrow p_1 q_1 = p_2 q_1 .$$

Θεωροῦμεν τώρα τὸ σύνολον πηλίκον $\mathcal{R}/\approx$ καὶ παριστῶμεν μὲ $[r]$ τὴν κλάσιν ἰσοδυναμίας τῆς ρητῆς συναρτήσεως r. Ὁρίζομεν δὲ ἀκολούθως πρόσθεσιν καὶ πολλαπλασιασμὸν εἰς τὸ $\mathcal{R}/\approx$, ὡς κάτωθι :

Πρόσθεσις. Ὡς ἄθροισμα $\left[\frac{p_1}{q_1}\right] + \left[\frac{p_2}{q_2}\right]$, ὁρίζομεν τὴν κλάσιν $\left[\frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}\right]$, ἤτοι :

$$\left[\frac{p_1}{q_1}\right] + \left[\frac{p_2}{q_2}\right] = \left[\frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}\right].$$

Εὐκόλως συνάγεται, ὅτι ἡ οὕτως ὁρισθεῖσα πρᾶξις τῆς προσθέσεως

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἔχει τὰς κάτωθι ἰδιότητας :

$$[r_1] + [r_2] = [r_2] + [r_1]$$

$$[r_1] + ([r_2] + [r_3]) = ([r_1] + [r_2]) + [r_3]$$

$$[r] + [0] = [r] = [0] + [r]$$

$$[r] + [-r] = [0] = [-r] + [r] .$$

Ἄρα τὸ σύνολον πηλίκων $\mathcal{R}/\approx$ εἶναι μία ἀντιμεταθετικὴ ὁμὰς ὡς πρὸς τὴν οὕτως ὁρισθεῖσαν πρᾶξιν τῆς προσθέσεως. Τὸ μηδενικὸν στοιχεῖον εἶναι ἡ κλάσις $[0]$ καὶ τὸ ἀντίθετον στοιχεῖον τῆς κλάσεως $[r]$, ἡ κλάσις $[-r]$, ἤτοι $-[r] = [-r]$.

Πολλαπλασιασμός. Ὡς *γινόμενον* $\left[\frac{p_1}{q_1}\right]\left[\frac{p_2}{q_2}\right]$, ὁρίζομεν τὴν κλάσιν $\left[\frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}\right]$, ἤτοι

$$\left[\frac{p_1}{q_1}\right]\left[\frac{p_2}{q_2}\right] = \left[\frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}\right].$$

Ἡ οὕτως ὁρισθεῖσα πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἔχει τὰς κάτωθι ἰδιότητας :

$$[r_1]\,[r_2] = [r_2]\,[r_1]$$

$$[r_1]\,([r_2]\,[r_3]) = ([r_1]\,[r_2])\,[r_3]$$

$$[r]\,[1] = [r] = [1]\,[r]$$

$$[r]\left[\tfrac{1}{r}\right] = [1] = \left[\tfrac{1}{r}\right][r], \quad r \neq 0.$$

Ἄρα τὸ $(\mathcal{R}/\approx) - \{[0]\}$ εἶναι μία ἀντιμεταθετικὴ ὁμὰς ὡς πρὸς τὴν οὕτως ὁρισθεῖσαν πρᾶξιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Τὸ μοναδιαῖον στοιχεῖον εἶναι ἡ κλάσις $[1]$ καὶ τὸ ἀντίστροφον στοιχεῖον τῆς κλάσεως $[r]$,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἡ κλάσις $\left[\frac{1}{r}\right]$, ἤτοι $\frac{1}{[r]} = \left[\frac{1}{r}\right]$.

Ὥστε τὸ σύνολον πηλίκον $\mathcal{R}/\approx$ ἀποτελεῖ σῶμα ὡς πρὸς τὰς ἀνωτέρω ὁρισθείσας πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τὸ ὁποῖον καλεῖται *σῶμα τῶν ρητῶν συναρτήσεων*.

Ἂν θεωρήσωμεν τώρα τὸ σύνολον $\mathcal{R}_n$ ὅλων τῶν ρητῶν συναρτήσεων n μεταβλητῶν, τότε τὸ σύνολον πηλίκον $\mathcal{R}_n/\approx$ εἶναι προφανῶς ὑποσύνολον τοῦ $\mathcal{R}/\approx$ καὶ μάλιστα εἶναι κλειστὸν ὡς πρὸς τὰς πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Τὸ σύνολον πηλίκον $\mathcal{R}_n/\approx$ περιέχει ὡς στοιχεῖα του τὸ μηδενικὸν $[0]$ καὶ τὸ μοναδιαῖον $[1]$ στοιχεῖον τοῦ σώματος $\mathcal{R}/\approx$, ἐπὶ πλέον δὲ περιέχει ὡς στοιχεῖον του τόσον τὸ ἀντίθετον $-[r] = [-r]$ τυχόντος στοιχείου του $[r]$, ὅσον καὶ τὸ ἀντίστροφον $\frac{1}{[r]} = \left[\frac{1}{r}\right]$, ἐφ' ὅσον $r \neq 0$. Ἄρα, κατὰ τὸ θεώρημα 7.3.3, τὸ σύνολον πηλίκον $\mathcal{R}_n/\approx$ εἶναι ἓν ὑποσῶμα τοῦ σώματος τῶν ρητῶν συναρτήσεων, τὸ ὁποῖον καλεῖται *σῶμα τῶν ρητῶν συναρτήσεων* n *μεταβλητῶν*.

Ἂς θεωρήσωμεν τώρα τὸ σῶμα τῶν ρητῶν συναρτήσεων μιᾶς μεταβλητῆς, ἤτοι τὸ $\mathcal{R}_1/\approx$ καὶ ἂς ὁρίσωμεν εἰς αὐτὸ μίαν διάταξιν, ὡς κάτωθι :

$$[r_1] \prec [r_2] \longleftrightarrow (\exists a \in \mathbb{R})(\forall x > a)\ r_1(x) \prec r_2(x).$$

Διὰ τὴν διάταξιν ταύτην ἰσχύουν :

$$[r_1] \prec [r_2] \longrightarrow [r_1] + [r] \prec [r_2] + [r]$$

$$[0] \prec [r_1] \text{ καὶ } [0] \prec [r_2] \Rightarrow [0] \prec [r_1][r_2].$$

Ἄρα τὸ σῶμα τῶν ρητῶν συναρτήσεων μιᾶς μεταβλητῆς εἶναι ἓν διατεταγμένον σῶμα. Ἐπίσης παρατηροῦμεν, ὅτι

$$N(\mathcal{R}_1/\approx) = \{[1], [2], \cdots, [\nu], \cdots\}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καὶ ὅτι τὸ διατεταγμένον σῶμα $\mathbb{R}_1/\approx$ δὲν πληροῖ τὴν ἀρχιμήδειον ἰδιότητα (πρβλ. § 7.5), διότι, ἂν θεωρήσωμεν τὴν ρητὴν συνάρτησιν r μὲ $r(x) = x$, τότε δι' οὐδένα ν ἰσχύει $[\nu] > [r]$. Ἑπομένως τὸ διατεταγμένον σῶμα τῶν ρητῶν συναρτήσεων μιᾶς μεταβλητῆς δὲν εἶναι κεκορεσμένον, διότι τότε θὰ ἴσχυεν ἡ ἀρχιμήδειος ἰδιότης (πρβλ. θεώρημα 7.5.1).

16.3 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Συναρτήσεις, αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν τιμὰς εἰς ἕνα διανυσματικὸν χῶρον καλοῦνται συνήθως *διανυσματικαί*. Ἂν ἐπὶ πλέον τὸ πεδίον ὁρισμοῦ μιᾶς διανυσματικῆς συναρτήσεως ἀποτελῇ διανυσματικὸν χῶρον, τότε αὕτη συνηθίζεται νὰ ὀνομάζεται *τελεστής* (operator). Ἰδιαιτέρως ἐνδιαφέρουν διανυσματικαὶ συναρτήσεις μὲ τιμὰς εἰς τὸν εὐκλείδειον χῶρον $\mathbb{R}^m$, αἱ ὁποῖαι συχνὰ ἀναφέρονται ὡς m-*διάστατοι* διανυσματικαὶ συναρτήσεις καὶ παρίστανται συνήθως μὲ $\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}$ κλπ. Μία τοιαύτη συνάρτησις ἔχει ἐν γένει τύπον

$$\vec{y} = \vec{f}(x) \quad \text{ἢ} \quad \vec{y} = f_1(x)\vec{e}_1 + f_2(x)\vec{e}_2 + \cdots + f_m(x)\vec{e}_m .$$

Προφανῶς $\vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x))$ καὶ ἐπομένως μία m-διάστατος διανυσματικὴ συνάρτησις $\vec{f}$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μία διατεταγμένη m-ὰς $(f_1, f_2, \cdots, f_m)$ πραγματικῶν συναρτήσεων μὲ κοινὸν πεδίον ὁρισμοῦ τὸ $\mathcal{D}(\vec{f})$, ἤτοι

$$\vec{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_m).$$

Εὐκόλως συνάγεται (ἀπόδειξις;), ὅτι τὸ σύνολον $\mathcal{F}_m = \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$ ὅλων τῶν m-διαστάτων διανυσματικῶν συναρτήσεων μὲ κοινὸν πεδίον ὁρισμοῦ ἓν μὴ κενὸν σύνολον A ἀποτελεῖ ἕνα διανυσματικὸν χῶρον ὑπεράνω τοῦ σώματος $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν μὲ πρόσθεσιν καὶ βαθμωτὸν πολλαπλασιασμόν, ὡς κάτωθι :

$$(\vec{f} + \vec{g})(x) = \vec{f}(x) + \vec{g}(x)$$

$$(\lambda \vec{f})(x) = \lambda \vec{f}(x).$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Συχνά ή ανεξάρτητος μεταβλητή μιάς π-διαστάτου διανυσματικής συναρτήσεως $\vec{f}$ διατρέχει επίσης ένα υποσύνολον ενός ευκλειδείου χώρου. Ούτως, άν $\mathcal{D}(\vec{f}) \subseteq \mathbb{R}^n$, τότε ο τύπος της $\vec{f}$ γράφεται

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) \quad \text{ή} \quad \vec{y} = \vec{f}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

και λέγομεν ότι ή $\vec{f}$ είναι μία (π-διάστατος) διανυσματική συνάρτησις μιάς (η-διαστάτου) διανυσματικής μεταβλητής $\vec{x}$ ή καί άλλως η πραγματικών μεταβλητών $x_1, x_2, \cdots, x_n$.
Επίσης, άν $\mathcal{D}(\vec{f}) \subseteq \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, τότε ο τύπος της $\vec{f}$ δύναται νά γραφή:

$$\vec{y} = \vec{f}(t, \vec{x}) \quad \text{ή} \quad \vec{y} = f(t; x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

δηλαδή ή (π-διάστατος) διανυσματική συνάρτησις $\vec{f}$ δύναται νά θεωρηθή ώς συνάρτησις δύο μεταβλητών, μιάς πραγματικής, της t καί μιάς (η-διαστάτου) διανυσματικής, της $\vec{x}$, ή καί άλλως ώς συνάρτησις $n+1$ πραγματικών μεταβλητών $t; x_1, x_2, \cdots, x_n$.
Όμοίως, άν $\mathcal{D}(\vec{f}) \subseteq \mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, τότε ο τύπος της $\vec{f}$ δύναται νά γραφή:

$$\vec{z} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{y}) \quad \text{ή} \quad \vec{z} = \vec{f}(x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_k),$$

δηλαδή ή $\vec{f}$ δύναται νά θεωρηθή ώς συνάρτησις δύο διανυσματικών μεταβλητών, της (η-διαστάτου) μεταβλητής $\vec{x}$ καί της (κ-διαστάτου) μεταβλητής $\vec{y}$, ή, καί άλλως, ώς συνάρτησις $n+k$ πραγματικών μεταβλητών $x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_k$.
Αναλόγως, ο τύπος μιάς διανυσματικής συναρτήσεως $\vec{f}$ δύναται νά έχη την μορφήν

$$\vec{z} = \vec{f}(t, \vec{x}, \vec{y}) \quad \text{ή} \quad \vec{w} = \vec{f}(t, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \quad \text{ή} \quad \vec{w} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \text{ κ.ο.κ.}$$

Παραδείγματα:

1. Άν ορίσωμεν ώς *γινόμενον* $A\vec{x}$ *του* $m \times n$ *πίνακος* A (υπεράνω του σώματος $\mathbb{R}$) *επί το* n*-διάστατον διάνυσμα* $\vec{x}$, το γινόμενον των πινάκων $(x_1\ x_2 \cdots x_n)$ καί A^T, ήτοι:

$$A\vec{x} = (x_1\ x_2 \cdots x_n)\, A^T,$$

τότε διά τοῦ τύπου

$$\vec{f}(\vec{x}) = A\vec{x}$$

ὁρίζεται μία m-διάστατος διανυσματική συνάρτησις μιᾶς n-διαστάτου διανυσματικῆς μεταβλητῆς $\vec{x}$. Ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι γραμμική, ἤτοι $\vec{f} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, διότι ἰσχύει

$$\vec{f}(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) = A(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) = \alpha A\vec{x} + \beta A\vec{y} = \alpha\vec{f}(x)+\beta\vec{f}(y).$$

Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως, τυχοῦσα συνάρτησις $\vec{f} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ δίδεται δι' ἑνὸς τύπου τῆς μορφῆς

$$\vec{f}(\vec{x}) = A\vec{x},$$

ὅπου $A = (a_{ij})$ εἶναι εἷς $m \times n$ πίναξ (ὑπεράνω τοῦ σώματος $\mathbb{R}$). Πράγματι·

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{f}(\vec{e}_i)$$

ἢ ἀναλυτικώτερον

$$\begin{aligned}
f_1(\vec{x}) &= f_1(\vec{e}_1)\, x_1 + f_1(\vec{e}_2)\, x_2 + \cdots + f_1(\vec{e}_n)\, x_n \\
f_2(\vec{x}) &= f_2(\vec{e}_1)\, x_1 + f_2(\vec{e}_2)\, x_2 + \cdots + f_2(\vec{e}_n)\, x_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f_m(\vec{x}) &= f_m(\vec{e}_1)\, x_1 + f_m(\vec{e}_2)\, x_2 + \cdots + f_m(\vec{e}_n)\, x_n,
\end{aligned}$$

ὁπότε ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν $a_{ij} = f_i(\vec{e}_j)$.

2. Ἡ 3-διάστατος διανυσματική συνάρτησις $\vec{f}$ δύο διανυσματικῶν μεταβλητῶν $\vec{x}, \vec{y}$ ἐν $\mathbb{R}^n$, ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\vec{f}(\vec{x},\vec{y}) = (x_2y_3 - y_2x_3)\vec{e}_1 + (x_3y_1 - y_3x_1)\vec{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{e}_3$$

καλεῖται *ἐξωτερικόν* (ἢ *διανυσματικόν*) *γινόμενον*. Ἡ τιμὴ $\vec{f}(\vec{x},\vec{y})$ ταύτης καλεῖται ἐξωτερικὸν (ἢ διανυσματικὸν) γινόμενον *τοῦ διανύσματος* $\vec{x}$ *ἐπὶ τὸ* $\vec{y}$ καὶ συνηθίζεται νὰ παρίσταται μὲ $\vec{x}\times\vec{y}$.

16.4 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἔστωσαν ἐν σύνολον E, μία πρᾶξις $\bullet$ ἐπὶ τοῦ E καὶ μία σχέσις ἰσοδυναμίας $\sim$ εἰς τὸ E. Θὰ λέγωμεν ὅτι :

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἓν στοιχεῖον $\omega \in E$ εἶναι *οὐδέτερον στοιχεῖον τῆς πράξεως* $\bullet$ *ὡς πρὸς τὴν ἰσοδυναμίαν* $\sim$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν

$$(\forall x \in E)\ x \bullet \omega \sim x \sim \omega \bullet x.$$

Τὰ στοιχεῖα x, y ἐν E εἶναι *συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν* $\bullet$ *καὶ τὴν ἰσοδυναμίαν* $\sim$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν

$$x \bullet y \sim \omega \sim y \bullet x.$$

Τὸ σύνολον E εἶναι *ὁμὰς ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν* $\bullet$ *καὶ τὴν ἰσοδυναμίαν* $\sim$, συντόμως $(E, \bullet, \sim)$ εἶναι ὁμάς, τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύουν :

(i) $(\forall x, y, z \text{ ἐν } E)\ x \bullet (y \bullet z) \sim (x \bullet y) \bullet z$

(ii) Ὑπάρχει οὐδέτερον στοιχεῖον ω τῆς πράξεως $\bullet$ ὡς πρὸς τὴν ἰσοδυναμίαν $\sim$, ἤτοι :

$$(\forall x \in E)\ x \bullet \omega \sim x \sim \omega \bullet x.$$

(iii) Διὰ κάθε $x \in E$ ὑπάρχει συμμετρικὸν στοιχεῖον y αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν $\bullet$ καὶ τὴν ἰσοδυναμίαν $\sim$, ἤτοι :

$$x \bullet y \sim \omega \sim y \bullet x.$$

Ἂν εἰς τὴν ὁμάδα $(E, \bullet, \sim)$ ἰσχύῃ καὶ

$$(\forall x, y \text{ ἐν } E)\ x \bullet y \sim y \bullet x,$$

τότε ἡ ὁμὰς $(E, \bullet, \sim)$ καλεῖται *ἀντιμεταθετική*.

Δείξατε, ὅτι εἰς μίαν ὁμάδα $(E, \bullet, \sim)$ ἰσχύουν :

(α) Ἂν ω_1, ω_2 εἶναι οὐδέτερα στοιχεῖα τῆς πράξεως $\bullet$ ὡς πρὸς τὴν ἰσοδυναμίαν $\sim$, τότε $\omega_1 \sim \omega_2$.

(β) Ἂν y_1, y_2 εἶναι συμμετρικὰ στοιχεῖα τοῦ x ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν $\bullet$ καὶ τὴν ἰσοδυναμίαν $\sim$, τότε $y_1 \sim y_2$.

(γ) Ἂν $(E, \bullet, \sim)$ εἶναι ὁμάς, τότε τὸ σύνολον πηλίκον $E/\sim$ εἶναι ὁμὰς ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν $*$ τὴν ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ τύπου

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\kappa\lambda(x) * \kappa\lambda(y) = \kappa\lambda(x \bullet y).$$

Επί πλέον, άν ή όμάς $(E, \bullet, \sim)$ είναι άντιμεταθετική, τότε καί ή όμάς $E/\sim$ είναι άντιμεταθετική.

2. Έστωσαν έν σύνολον E, δύο πράξεις $+, \cdot$ επί τοῦ E καί μία σχέσις ισοδυναμίας $\sim$ εἰς τό E. Θά λέγωμεν ὅτι :

Τό σύνολον E εἶναι *σῶμα ὡς πρός τάς πράξεις* $+, \cdot$ *καί τήν ἰσοδυναμίαν* $\sim$, συντόμως $(E, +, \cdot, \sim)$ εἶναι *σῶμα* τότε καί μόνον τότε, ἄν τά $(E, +, \sim)$ καί $(E^*, \cdot, \sim)$ εἶναι ἀντιμεταθετικαί ὁμάδες, ὅπου E^* εἶναι τό σύνολον ὅλων τῶν στοιχείων τοῦ E, τά ὁποῖα δέν εἶναι οὐδέτερα στοιχεῖα ὡς πρός τήν πρᾶξιν $+$ καί τήν ἰσοδυναμίαν $\sim$.

Δείξατε, ὅτι, ἄν $(E, +, \cdot, \sim)$ εἶναι σῶμα, τότε τό σύνολον πηλίκον $E/\sim$ εἶναι σῶμα ὡς πρός τάς πράξεις $+, \cdot$ τάς ὁριζομένας ὑπό τῶν τύπων

$$\kappa\lambda(x) + \kappa\lambda(y) = \kappa\lambda(x+y) \quad \text{καί} \quad \kappa\lambda(x) \cdot \kappa\lambda(y) = \kappa\lambda(xy).$$

3. Δείξατε, ὅτι ἄν $\mathcal{R}$ εἶναι τό σύνολον ὅλων τῶν ρητῶν συναρτήσεων καί $\approx$ ἡ εἰς τήν παράγραφον 16.2 ὁρισθεῖσα σχέσις ἰσοδυναμίας εἰς τό $\mathcal{R}$, τότε τό $(\mathcal{R}, +, \cdot, \approx)$ εἶναι σῶμα μέ πράξεις $+$ καί $\cdot$ ὁριζομένας, ὡς κάτωθι :

$$\frac{P_1}{q_1} + \frac{P_2}{q_2} = \frac{P_1 q_2 + P_2 q_1}{q_1 q_2} \quad \text{καί} \quad \frac{P_1}{q_1} \cdot \frac{P_2}{q_2} = \frac{P_1 P_2}{q_1 q_2}.$$

4. Διατυπώσατε τήν ἔννοιαν τοῦ *ὑποσώματος* ἑνός σώματος $(E, +, \cdot, \sim)$ καί ἀποδείξατε ὅτι, ἄν $\mathcal{R}_n$ εἶναι τό σύνολον ὅλων τῶν ρητῶν συναρτήσεων n μεταβλητῶν, τότε τοῦτο εἶναι ἕν ὑποσῶμα τοῦ εἰς τήν προηγουμένην ἄσκησιν 3 σώματος $(\mathcal{R}, +, \cdot, \approx)$.

5. Δείξατε, ὅτι :

$$I\vec{x} = \vec{x} \quad \text{καί} \quad (AB)\vec{x} = A(B\vec{x}).$$

6. Δείξατε, ὅτι ἄν A εἶναι εἷς τετραγωνικός πίναξ καί $\det A \neq 0$, τότε

$$\vec{y} = A\vec{x} \iff \vec{x} = A^{-1}\vec{y}.$$

7. Δείξατε, ὅτι οἱ διανυσματικοί χῶροι $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ καί $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ εἶναι ἰσόμορφοι διανυσματικοί χῶροι. Ποία ἡ ἐπαγομένη στάθμη πί-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

νακος ; (πρβλ. § 14.7, ἀσκήσεις 11 καὶ 13).

8. Δείξατε, ὅτι τὸ ἐξωτερικὸν γινόμενον ἔχει τὰς κάτωθι ἰδιότητας :

$$\vec{x}\times\vec{y} = -\vec{y}\times\vec{x} \qquad \vec{x}\times(\vec{y}+\vec{z}) = \vec{x}\times\vec{y}+\vec{x}\times\vec{z}$$

$$|\vec{x}\times\vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2\,|\vec{y}|^2 - |\vec{x}\,\vec{y}|^2 \text{ (ταυτότης τοῦ Lagrange).}$$

9. Ὡς *μικτὸν γινόμενον* $\vec{x}$ *ἐπὶ* $\vec{y}$ *ἐπὶ* $\vec{z}$, ὁρίζεται τὸ $\vec{x}\cdot(\vec{y}\times\vec{z})$. Δείξατε, ὅτι :

$$\vec{x}\cdot(\vec{y}\times\vec{z}) = \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \text{ καὶ } \vec{x}\cdot(\vec{y}\times\vec{z}) = (\vec{x}\times\vec{y})\cdot\vec{z}.$$

10. Δείξατε, ὅτι διὰ τὴν πραγματικὴν συνάρτησιν f ἰσχύουν :

(i) Ἂν ἡ f εἶναι ἄνω φραγμένη, τότε ἡ $-f$ εἶναι κάτω φραγμένη καὶ μάλιστα ἰσχύει

$$\inf(-f(x)) = -\sup f(x).$$

(ii) Ἂν ἡ f εἶναι κάτω φραγμένη, τότε ἡ $-f$ εἶναι ἄνω φραγμένη καὶ μάλιστα ἰσχύει

$$\sup(-f(x)) = -\inf f(x).$$

11. Δείξατε, ὅτι ἂν διὰ τὰς πραγματικὰς συναρτήσεις f, g ἰσχύῃ

$$(\forall x\in A)\ f(x) \leqq g(x)$$

καὶ ἡ συνάρτησις $g|A$ εἶναι ἄνω φραγμένη, τότε καὶ ἡ $f|A$ εἶναι ἄνω φραγμένη καὶ μάλιστα ἰσχύει

$$\sup_{x\in A} f(x) \leqq \sup_{x\in A} g(x).$$

Τί συμβαίνει ὅταν ἡ $(\forall x\in A) f(x) \leqq g(x)$ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τῆς $(\forall x\in A) f(x) < g(x)$;

12. Δείξατε, ὅτι ἂν f εἶναι μία πραγματικὴ συνάρτησις, $A_1\times A_2 \subseteqq \mathcal{D}(f)$ καὶ ἡ συνάρτησις $f|A_1\times A_2$ εἶναι ἄνω φραγμένη, τότε

$$\sup_{(x_1,x_2)\in A_1\times A_2} f(x_1,x_2) = \sup_{x_1\in A_1}\Big(\sup_{x_2\in A_2} f(x_1,x_2)\Big).$$

13. Δείξατε, ὅτι ἂν f, g εἶναι πραγματικαὶ συναρτήσεις μὲ κοινὸν πεδίον

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὁρισμοῦ καὶ ἄνω φραγμέναι, τότε καὶ ἡ συνάρτησις $f+g$ εἶναι ἄνω φραγμένη καὶ μάλιστα ἰσχύει

$$\sup(f(x)+g(x)) \leq \sup f(x)+\sup g(x).$$

Ἂν ἐπὶ πλέον ἡ g εἶναι κάτω φραγμένη, τότε ἰσχύει καὶ

$$\sup(f(x)+g(x)) \geq \sup f(x)+\inf g(x).$$

Εἰδικῶς δείξατε, ὅτι

$$\sup(f(x)+c) = c+\sup f(x),$$

ὅπου c σταθερὸς πραγματικὸς ἀριθμός.

14. Δείξατε, ὅτι ἂν αἱ πραγματικαὶ συναρτήσεις f, g εἶναι ἄνω φραγμέναι, τότε ἡ συνάρτησις h ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τοῦ τύπου

$$h(x_1, x_2) = f(x_1)+g(x_2)$$

εἶναι ἐπίσης ἄνω φραγμένη καὶ μάλιστα ἰσχύει

$$\sup h(x_1, x_2) = \sup f(x_1)+\sup g(x_2).$$

15. Στηριζόμενοι εἰς τὴν ἄσκησιν 10, διατυπώσατε καὶ ἀποδείξατε ἀναλόγους προτάσεις πρὸς τὰς ἀσκήσεις 11-14 δι' ἐναλλαγῆς τῶν ὑποθέσεων *ἄνω φραγμένη* καὶ *κάτω φραγμένη συναρτήσεις*.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ ΟΡΩΝ

Α

Ἄθροισμα 61
γενικευμένον — 133
εὐθύ — 147
μὲ πεπερασμένον φορέα 139
πεπερασμένον — 138
Ἀκέραιοι ἀριθμοί 99
Ἀκολουθία 52
Ἀμφιμονοσήμαντος συνάρτησις 49
Ἀνακλαστική σχέσις 37
Ἀνάστροφος πίναξ 166
Ἀνεξάρτητος μεταβλητή 47
Ἀνοικτή πρότασις 15
Ἀντίθετον στοιχεῖου 61
Ἀντιμεταθετική ὁμάς 62
Ἀντιμεταθετική πρᾶξις 59
Ἀντισυμμετρική σχέσις 37
Ἀντιστοιχία 51
Ἀντίστροφοι στοιχεῖον 61
Ἀντίστροφος πίναξ 167
συνάρτησις 48
σχέσις 35
Ἄνω πέρας 43, 50
Ἄνω φράγμα 42, 50
Ἄνω φραγμένη συνάρτησις 50
Ἄξων 100
Ἀξίωμα τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρ. 104
τῆς ἐπιλογῆς 108
Ἀξιώματα τοῦ Peano 100
Ἀπεικόνισις 51
Ἀπέραντον σύνολον 117
Ἀποκλειστική διάζευξις 13
Ἀπόλυτος τιμή 72
Ἀποτέλεσμα πράξεως 58, 59
Ἀριθμήσιμον σύνολον 121
Ἀριθμοί, ἀκέραιοι — 99
πραγματικοί — 99
ρητοί — 99
φυσικοί — 99
Ἀριθμός, πληθικός — 113, 118
Ἄρνησις (λογική) 13
Ἀρνητικά στοιχεῖα 69
Ἀρνητικός πίναξ 101
Ἀρτία μετάθεσις 167
Ἀρχή ἐπαγωγικῆς ἀποδείξεως 79
ἐπαγωγικοῦ ὁρισμοῦ 81
Ἀρχιμήδειος ἰδιότης 73
Αὔξουσα οἰκογένεια 50
συνάρτησις 50

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αὐτοπαθὴς σχέσις 37
Ἀφαίρεσις 63

Β

Βαθμωτὸν γινόμενον 142
Βαθμωτὸς πολλαπλασιασμὸς 142
Βασικὴ ἰσότης 4
Βάσις, διανυσματικὴ — 148
τοῦ Hamel 148
Βασικὸν σύνολον 8
Βωβὴ μεταβλητὴ 20

Γ

Γενικευμένα ἀθροίσματα 133
γινόμενα 133
Γενικοὶ τύποι τοῦ De Morgan 56
Γινόμενον 61
βαθμωτὸν — 142
γενικευμένον — 133
διανυσματικὸν — 180
ἐξωτερικὸν — 180
ἐσωτερικὸν — 156
καρτεσιανὸν — 9, 53
μὲ πεπερασμένον φορέα 139
μικτὸν — 184
πεπερασμένον — 138
πίνακος ἐπὶ διάνυσμα 179
πινάκων 166
Γνησία διάταξις 49
Γνήσιον ὑπερσύνολον 6
ὑποσύνολον 6
Γνησίως αὔξουσα συνάρτησις 54
Γνησίως μονότονος συνάρτησις 55
φθίνουσα συνάρτησις 54
Γραμμὴ πίνακος 165
Γραμμικὴ διάταξις 41
μορφὴ 144
συνάρτησις 144
Γραμμικὸς συνδυασμὸς 145
χῶρος 142
Γραμμικῶς ἀνεξάρτητον σύνολον 147
διατεταγμένον σύνολον 41
διατεταγμένον ὑποσύνολον 109
Γράφημα 34

Δ

Διαδοχὴ 99
Διάζευξις 12
ἀποκλειστικὴ — 13
ἐγκλειστικὴ — 13
Διαίρεσις 63
Διαμέρισις 32
Διάνυσμα 143
μηδενικὸν — 143
ὀρθογώνια — 157
η- διάστατον -- 160
Διανυσματικὴ βάσις 148
συνάρτησις 178
Διανυσματικὸν γινόμενον 180
Διανυσματικὸς ὑποχῶρος 144
Διανυσματικὸς χῶρος 142
ἀπείρου διαστάσεως 151
πεπερασμένης διαστάσεως 151
σταθμητὸς — 158

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Διάστασις 151
Διαστήματα 106
Διάταξις 40
γνησία — 40
γραμμική — 40
λεξικογραφική — 57
μερική — 40
ὁλική — 41
συμφυεῖς — 41
φυσική — 100
Διατεταγμένη νιάς 53
Διατεταγμένον ζεῦγος 9
σύνολον 41
σῶμα 69
Διαφορά 25, 64
συμμετρική — 77
Διμελὲς σύνολον 6
Διμελὴς πρᾶξις 58
Διστοιχειακὸν σύνολον 6
Δυϊκὴ στάθμη 164
Δυϊκὸς χῶρος 144
Δύναμις 134, 136
Δυναμοσύνολον 8

Ε

Ἐγκλειστικὴ διάταξις 13
Ἕνωσις 24, 31, 52
Ἐξηρτημένη μεταβλητή 47
Ἐξωτερικὸν γινόμενον 180
Ἐπαγομένη στάθμη 164
Ἐπαγωγή 79
Ἐπαγωγικὸν σύνολον 66
Ἐπαναλήψεις ὡς πρὸς πρᾶξιν 132
Ἔπέκτασις 36
Ἐπιμεριστικὴ πρᾶξις 60
Ἐπίπεδον τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας 104
Ἐπιτρεπτὴ πρᾶξις 59
Ἐσωτερικὸν γινόμενον 156
εὐκλείδειον — 159
Εὐθὺ ἄθροισμα 147
Εὐθύγραμμον τμῆμα 154
Εὐκλείδειου ἐσωτερικὸν γινόμενου 159
Εὐκλείδειος στάθμη 159, 171
Εὐκλείδειος χῶρος 159
η- διάστατος — 160

Η

Ἡμιάξων, ἀρνητικὸς — 101
θετικὸς — 101
Ἡμίχωρος, ἀνοικτὸς — 154
κλειστὸς — 154

Θ

Θετικὰ στοιχεῖα 69
Θετικὸς ἡμιάξων 101
Θήκη, κυρτὴ — 162

Ι

Ἰσοδυναμία 38
λογική — 14
Ἰσόμορφα διατεταγμένα σώματα 92
σύνολα 87, 88
σώματα 92
Ἰσόμορφοι διανυσματικοὶ χῶροι 163

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ισομορφισμός 87, 88
Ισότης, βασική — 4
ταυτοτική — 4
Ισχύς συνόλου 113

Κ

Καθολικός ποσοδείκτης 16
Κάλυψις 32
Καλῶς διατεταγμένον σύνολον 57
Καρτεσιανόν γινόμενον 9, 53
Κάτω πέρας 43, 50
Κάτω φράγμα 42, 50
Κάτω φραγμένη συνάρτησις 50
Κεκορεσμένον σύνολον 44
Κενόν σύνολον 7
Κλάσις ισοδυναμίας 38
Κλειστή πρᾶξις 61
Κυβική ρίζα 135
Κυρτή θήκη 162
Κυρτόν σύνολον 154
Κυρτός συνδυασμός 155

Λ

Λεξικογραφική διάταξις 57
Λογική ισοδυναμία 14
πρότασις 11
Λογικοί σύνδεσμοι 12

Μ

Μαθηματική ἐπαγωγή 79
Μέγιστον 43
Μέλη οἰκογενείας 51
Μερική διάταξις 40
Μεταβατική σχέσις 38
Μεταβλητή 15
ἀνεξάρτητος — 47
βωβή — 20
ἐξηρτημένη — 47
Μετάθεσις 167
ἀρτία — 167
περιττή — 167
Μετασχηματισμός 51
Μή ἀρνητικά στοιχεῖα 69
Μή θετικά στοιχεῖα 69
Μηδενικόν διάνυσμα 143
Μηδενικός πίναξ 166
ὑποχῶρος 145
Μικτόν γινόμενον 184
Μοναδιαῖος πίναξ 167
Μονομελές σύνολον 5
Μονοστοιχειακόν σύνολον 5
Μονότονος συνάρτησις 55
Μονωνυμική συνάρτησις 174

Ν

ν-μελές σύνολον 6
Νόμοι τοῦ De Morgan 19
Νόμος τοῦ παραλληλογράμμου 162
Νιοστή ρίζα 135
ν-στοιχειακόν σύνολον 6

Ξ

Ξένα σύνολα 24
Ξένοι ὑποχῶροι 146

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ο

Οἰκογένεια 51
αὔξουσα — 55
φθίνουσα — 55
Ὁλική διάταξις 41
Ὁλικῶς διατεταγμένον σύνολον 41
Ὁμάς 62
ἀντιμεταθετική — 62
Ὀρθογώνια διανύσματα 157
Ὀρθογωνίου σύνολον 157
Ὀρθοκανονικόν σύνολον 157
Ὁρίζουσα 168
πίνακος 168
Οὐδέτερον στοιχεῖον 60

Π

Πεδίον ὁρισμοῦ 35
τιμῶν 35
Πεπερασμένον ἄθροισμα 138
γινόμενου 138
σύνολον 117
Πέρας, ἄνω — 43, 50
κάτω — 43, 50
Περιορισμός 36, 50
Περιττή μετάθεσις 167
Πηλίκον 64
Πίναξ 165
ἀνάστροφος — 166
ἀντίστροφος — 167
μηδενικός — 166
μοναδιαῖος — 167
τετραγωνικός — 165
Πληθικός ἀριθμός 113, 118
Πολλαπλασιασμός 61
βαθμωτός — 142
πινάκων 166
Πολλαπλάσιον 134
Πολυωνυμική συνάρτησις 175
Ποσοδείκτης 16
καθολικός — 17
ὑπαρξιακός — 17, 18
Πραγματική συνάρτησις 172
Πραγματικοί ἀριθμοί 99
Πρᾶξις 58
ἀντιμεταθετική — 59
Πράξις 58
διμελής — 58
ἐπιμεριστική — 60
ἐπιτρεπτή — 59
κλειστή — 61
Προβολή 54
Προσεταιριστική ἰδιότης 48
πρᾶξις 59
Πρόσθεσις 61
Προτασιακός τύπος 15
Πρότασις 11
ἀνοικτή — 15

Ρ

Ρητή συνάρτησις 175
Ρητοί ἀριθμοί 99
Ρίζα, τετραγωνική — 75
κυβική — 135
νιοστή — 135

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Σ

Σημείον 3
  σταθερόν — 55
Σταθερόν σημείον 55
Στάθμη 158
  δυϊκή — 164
  επαγομένη — 164
  ευκλείδειος — 159, 171
Σταθμητός διανυσματικός χώρος 158
Στήλη πίνακος 165
Στοιχείον 3
  άντίθετον — 61
  άντίστροφον — 61
  άρνητικά — 69
  θετικά — 69
  μή άρνητικά — 69
  μή θετικά — 69
  πίνακος 165
  συγκρίσιμα — 41
  συμμετρικά — 60
Συγκρίσιμα στοιχεία 41
Σύζευξις 12
Συζυγής χώρος 144
Συμμετρικά στοιχεία 60
Συμμετρική διαφορά 77
  σχέσις 37
Συμπαράγων 169
Συμπλήρωμα 30
Συμπληρωματικοί υποχώροι 146
Συμφυείς διατάξεις 41
Συνάρτησις 47
  άμφιμονοσήμαντος — 49
Συνάρτησις
  άντίστροφος — 48
  άνω φραγμένη — 50
  αὔξουσα — 54
  γνησίως αὔξουσα — 54
  γνησίως μονότονος — 55
  γνησίως φθίνουσα — 54
  γραμμική — 144
  διανυσματική — 178
  κάτω φραγμένη — 50
  μονότονος — 55
  μονωνυμική — 174
  πολυωνυμική — 175
  πραγματική — 172
  ρητή — 175
  τιμή — 47
  τύπος — 47
  φθίνουσα — 54
  φραγμένη — 50
Συναρτησοειδές 172
Σύνδεσμοι, λογικοί — 12
Συνεπαγωγή 14
Σύνθεσις συναρτήσεων 47
Σύνολον 3
  άναφορᾶς 8
  άπέραντον — 117
  άριθμήσιμον — 121
  βασικόν — 8
  γραμμικῶς ἀνεξάρτητον — 147
  γραμμικῶς διατεταγμένον — 41
  δεικτῶν 51
  διατεταγμένον — 41

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Σύνολον
διμελές – 6
διστοιχειακόν – 6
επαγωγικόν – 66
ισόμορφα – 87, 88
καλῶς διατεταγμένον – 57
κεκορεσμένον – 44
κενόν – 7
κυρτόν – 154
μονομελές – 5
μανοστοιχειακόν – 5
ν-μελές – 6
ν-στοιχειακόν – 6
ξένα – 24
ὁλικῶς διατεταγμένον – 41
ὀρθογώνιον – 157
ὀρθοκανονικόν – 157
πεπερασμένον – 117
πηλίκον 39
τὸ πολύ ἀριθμήσιμον – 122
ὑπεραριθμήσιμον – 127
φραγμένον – 42
φραγμένον πρὸς τὰ ἄνω – 42
φραγμένου πρὸς τὰ κάτω – 42
Συντεταγμέναι 104, 105
διανύσματος 159
Σχέσις 34, 35, 37
ἀνακλαστική – 37
ἀντίστροφος – 35
ἀντισυμμετρική – 37
αὐτοπαθής – 37
γνησίας διατάξεως 40
Σχέσις
γραμμικῆς διατάξεως 41
διατάξεως 40
ἰσοδυναμίας 38
μερικῆς διατάξεως 40
μεταβατική – 38
συμμετρική – 37
Σῶμα 63
διατεταγμένον – 69
ἰσόμορφα – 92
ἰσόμορφα διατεταγμένα – 92
μιγαδικῶν ἀριθμῶν 77
ρητῶν συναρτήσεων 177
ὡς πρὸς σχέσιν ἰσοδυναμίας 182

Τ

Τελεστής 178
Τετραγωνικὸς πίναξ 165
Τιμή, ἀπόλυτος – 72
συναρτήσεως 47
Τομή 24, 31, 52
Τύποι τοῦ De Morgan 30, 31, 56
Τύπος, προτασιακός – 15
συναρτήσεως 47

Υ

Ὑπαρξιακὸς ποσοδείκτης 17, 18
Ὑπεραριθμήσιμον σύνολον 127
Ὑπερεπίπεδον 151
Ὑπερσύνολον 6
γνήσιον – 6
Ὑποδιάστημα 107

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Υποσύνολον 6
γνήσιον — 6
γραμμικῶς διατεταγμένον — 109
Υποσῶμα 65
Ὑποχῶρος 144
διανυσματικός — 144
μηδενικός — 145
ξένοι — 146
παραγόμενος ὑπὸ συνόλου 145
συμπληρωματικοί — 146

Φ

Φθίνουσα οἰκογένεια 55
συνάρτησις 54
Φορεύς 138
Φράγμα, ἄνω — 42, 50, 54
κάτω — 42, 50, 54
Φραγμένη συνάρτησις 50
ἄνω — 50
κάτω — 50
Φραγμένη οἰκογένεια 54
Φραγμένη οἰκογένεια
ἄνω — 54
κάτω — 54
Φραγμένον σύνολον 42
πρὸς τὰ ἄνω 42
πρὸς τὰ κάτω 42
Φυσικὴ διάταξις 100
Φυσικοὶ ἀριθμοί 99

Χ

Χῶρος, γραμμικός — 142
διανυσματικός — 142
δυϊκός — 144
εὐκλείδειος — 159
σταθμητὸς διανυσματικός — 158
εὐκυγής — 144
τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας 105

Ψ

Ψευδοελάχιστον 43
Ψευδομέγιστον 43

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ ΟΝΟΜΑΤΩΝ

Bernstein 114, 149

Cauchy 157, 159, 162

De Morgan 19, 30, 31, 56

Hamel 148

Hu 124

Knaster 55, 57, 76, 114

Kronecker 169

Lagrange 184

Landau 100

Newton 140

Peano 100

Πυθαγόρας 162

Rubin 109

Schröder 114, 149

Schwarz 157, 159, 162

Zorn 108, 146, 148, 150

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ