**Ανδρέα Ράπτη**
*Αναπληρωτή Καθηγητή*
*Πανεπιστημίου Ιωαννίνων*

# ΜΑΘΗΜΑΤΑ
# ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

**ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006**

[illegible]

[illegible]

[illegible]

# ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

[illegible]

221.012

**Ανδρέα Ράπτη**
*Αναπληρωτή Καθηγητή*
*Πανεπιστημίου Ιωαννίνων*

# ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ



**ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006**

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ


ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Κινηματική του υλικού σημείου ή σωματίου

1.1 Υλικό σημείο - Διάνυσμα θέσης 4
1.2 Ορισμός της ταχύτητας 6
1.3 Ορισμός της επιτάχυνσης 6
1.4 Κίνηση με παράμετρο το μήκος του τόξου s — Φυσικές συντεταγμένες 7
1.5 Περί καμπυλογράμμων συντεταγμένων 10
1.6 Ειδικές περιπτώσεις ορθογωνίων καμπυλογράμμων συντεταγμένων 12
1.6.α Ταχύτητα και επιτάχυνση σε πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο 12
1.6.β Ταχύτητα και επιτάχυνση σε κυλινδρικές συντεταγμένες 15
1.6.γ Ταχύτητα και επιτάχυνση σε σφαιρικές συντεταγμένες 18
1.7 Γωνιακή ταχύτητα — Διάνυσμα γωνιακής ταχύτητας 21
1.8 Εμβαδική ταχύτητα 22

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Θεμελιώδεις έννοιες και αρχές της Μηχανικής του Νεύτωνα — Δυναμική του υλικού σημείου

2.1 Θεμελιώδεις έννοιες 25
2.2 Αξιώματα της Μηχανικής 25
2.3 Αξιώματα του Νεύτωνα 26
2.4 Εξισώσεις κίνησης υλικού σημείου σε Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων — Ολοκληρώματα της κίνησης 29
2.5 Αρχή διατήρησης της ορμής 31
2.6 Έργο δύναμης — Κινητική ενέργεια — θεωρήματα μεταβολής της κινητικής ενέργειας 32
2.6.α Ισχύς
2.7 Συντηρητικές δυνάμεις — Δυναμικό ή Δυναμική ενέργεια 34
2.8 Έργο συντηρητικών δυνάμεων — Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας 35

2.9 Ροπή δύναμης – Στροφορμή – Θεώρημα μεταβολής της στροφορμής – Αρχή διατήρησης της στροφορμής 37
2.9α Ώθηση δύναμης 39
2.10 Ροπή της ώθησης ή Γωνιώδης ώθηση 40
2.11 Ισορροπία υλικού σημείου 41
2.12 Αναγκαστική κίνηση 43
2.12α Κινητική τριβή ή τριβή ολίσθησης πάνω σε επιφάνεια 43
2.13 Κεντρικές δυνάμεις 48
2.14 Ελκτικές δυνάμεις αντιστρόφως ανάλογες του τετραγώνου της απόστασης 55
2.15 Παγκόσμια έλξη 57
2.16 Νόμοι του Kepler για την κίνηση των πλανητών 60
2.17 Ομογενές ή ομοιόμορφο πεδίο δυνάμεων – Ομογενές πεδίο βαρύτητας πλησίον της Γης – Δυναμική ενέργεια του πεδίου βαρύτητας πλησίον της Γης 62
2.18 Δύναμη ελατηρίου – Δυναμική ενέργεια ελατηρίου 65
2.19 Μη αδρανειακά συστήματα συντεταγμένων 66
2.20 Κίνηση υλικού σημείου πλησίον της επιφάνειας της Γης ως προς παρατηρητή, που είναι πάνω στην επιφάνεια της Γης 76

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3**

Δυναμική συστήματος υλικών σημείων

3.1 Κέντρο μάζας – Κέντρο βάρους 84
3.2 Δυνάμεις σε σύστημα υλικών σημείων 86
3.3 Ορμή συστήματος υλικών σημείων 87
3.4 Εξισώσεις κίνησης συστήματος υλικών σημείων – Θεώρημα κίνησης κέντρου μάζας – Κλειστό σύστημα – Αρχή διατήρησης της ορμής συστήματος υλικών σημείων 88
3.5 Στροφορμή συστήματος υλικών σημείων – Ολική ροπή εξωτερικών δυνάμεων – Θεώρημα μεταβολής της στροφορμής – Αρχή διατήρησης της στροφορμής συστήματος υλικών σημείων 92

3.6 Ολική κινητική ενέργεια συστήματος υλικών σημείων — Ολικό έργο συστήματος υλικών σημείων — Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας 96
3.7 Εξωτερικές και εσωτερικές συντηρητικές δυνάμεις συστήματος υλικών σημείων — Αρχή διατήρησης της ολικής μηχανικής ενέργειας 99
3.8 Ολική ώθηση εξωτερικής δύναμης — Σχέση ολικής ώθησης εξωτερικής δύναμης και ορμής του συστήματος 104
3.9 Θεωρήματα για κίνηση ως προς το κέντρο μάζας 105
3.10 Στροφορμή συστήματος υλικών σημείων ως προς το κέντρο μάζας — Στροφορμή της ολικής μάζας 107
3.11 Ολική εξωτερική ροπή ως προς το κέντρο μάζας — Παράγωγος ως προς το χρόνο της στροφορμής συστήματος υλικών σημείων ως προς το κέντρο μάζας — Θεώρημα μεταβολής της στροφορμής ως προς το κέντρο μάζας 109
3.12 Ολική κινητική ενέργεια ως προς το κέντρο μάζας — Κινητική ενέργεια της ολικής μάζας του συστήματος 112
3.13 Ισορροπία συστήματος υλικών σημείων 115

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4**

Δεσμοί — Αρχή δυνατών έργων — Αρχή D'Alembert — Εξισώσεις Lagrange — Εξισώσεις Hamilton

4.1 Δεσμοί — Είδη δεσμών 120
4.2 Δεσμικές δυνάμεις — Επιβεβλημένες δυνάμεις — Εξισώσεις κίνησης του συστήματος υλικών σημείων 126
4.3 Πραγματική μετατόπιση — Δυνατή μετατόπιση 127
4.4 Αναστρέψιμοι και μη αναστρέψιμοι δεσμοί 130
4.5 Δυνατό έργο — Καθαρά μηχανικό σύστημα 130
4.6 Αρχή δυνατών έργων 132
4.7 Αρχή D'Alembert 134
4.8 Γενικευμένες συντεταγμένες — Γενικευμένες ταχύτητες — Σχέσεις γενικευμένων συντεταγμένων με Καρτεσιανές συντεταγμένες 135

4.9α Βαθμός ελευθερίας συστήματος υλικών σημείων που υπόκεινται σε ολόνομους δεσμούς 138
4.9β Βαθμός ελευθερίας συστήματος υλικών σημείων που υπόκεινται σε ανολόνομους δεσμούς 140
4.10 Γενικευμένες δυνάμεις 140
4.11 Ολική κινητική ενέργεια συστήματος 142
4.12 Εξισώσεις Lagrange για την περίπτωση ολόνομων δεσμών όταν οι γενικευμένες συντεταγμένες είναι ανεξάρτητες 144
4.13 Ειδικές περιπτώσεις των εξισώσεων Lagrange 148
4.13α Όλες οι επιβεβλημένες δυνάμεις είναι συντηρητικές (Σύστημα συντηρητικό) 148
4.13β Μερικές από τις επιβεβλημένες δυνάμεις είναι συντηρητικές 150
4.13γ Οι γενικευμένες δυνάμεις προέρχονται από δυναμικό που είναι συνάρτηση των γενικευμένων συντεταγμένων, των γενικευμένων ταχυτήτων και του χρόνου 152
4.14 Πρώτα ολοκληρώματα των εξισώσεων Lagrange — Γενικευμένη ορμή — Κυκλικές συντεταγμένες — Ολοκλήρωμα του Jacobi 153
4.15 Εξισώσεις Lagrange για την περίπτωση ολόνομων δεσμών, όταν οι γενικευμένες συντεταγμένες δεν είναι ανεξάρτητες 158
4.16 Εξισώσεις Lagrange για την περίπτωση ολόνομων δεσμών, όταν οι γενικευμένες συντεταγμένες δεν είναι ανεξάρτητες και οι επιβεβλημένες δυνάμεις είναι συντηρητικές 161
4.17 Εξισώσεις Lagrange για την περίπτωση ανολόνομων δεσμών 162
4.18 Εξισώσεις Hamilton 166

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5**

**Γενικευμένη Αρχή του Hamilton**

5.1 Δυνατή μεταβολή γενικευμένης συντεταγμένης 178
5.2 Δυνατή μεταβολή γενικευμένης ταχύτητας 178
5.3 Δυνατή μεταβολή συνάρτησης 179
5.4 Πόρισμα 179

5.5 Πόρισμα 179
5.6 Πόρισμα 180
5.7 Πόρισμα 180
5.8 Μορφικός χώρος 180
5.9 Πραγματική τροχιά στο μορφικό χώρο 181
5.10 Γενικευμένη Αρχή του Hamilton 181
5.11 Ειδική περίπτωση της γενικευμένης αρχής του Hamilton όταν το σύστημα είναι συντηρητικό 182
5.12 Οι εξισώσεις Lagrange ως ειδική περίπτωση της γενικευμένης αρχής του Hamilton 183
5.13 Οι εξισώσεις Hamilton ως ειδική περίπτωση της αρχής του Hamilton 185
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

## Γενικά

Η Μηχανική είναι ένας κλάδος των εφαρμοσμένων Μαθηματικών και της Φυσικής, που ασχολείται με τη μελέτη της ισορροπίας και της κίνησης των σωμάτων.

Διαιρείται σε τρεις μεγάλες περιοχές, τη Στατική, την Κινηματική και τη Δυναμική.

Η Στατική εξετάζει την ισορροπία των σωμάτων.

Η Κινηματική εξετάζει την κίνηση των σωμάτων, χωρίς να λαμβάνει υπόψη τις αιτίες της κίνησής τους.

Η Δυναμική εξετάζει την κίνηση των σωμάτων λαμβάνοντας υπόψη τις αιτίες της κίνησής τους, δηλαδή τις δυνάμεις που ενεργούν στο σώμα.

Με τον όρο κίνηση εννοούμε τη μεταβολή της θέσης ενός σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο. Για να γίνει όμως αντιληπτή η κίνηση του σώματος πρέπει να συγκρίνουμε τις θέσεις του σχετικά με κάποιο σημείο αναφοράς. Γι' αυτό κάθε φορά που ασχολούμαστε με οποιοδήποτε πρόβλημα, θα πρέπει να καθορίζουμε το σημείο αναφοράς.

Όλες οι συναρτήσεις που εμφανίζονται στα επόμενα κεφάλαια θεωρούνται μονότιμες και συνεχείς, με παραγώγους μέχρι της απαιτούμενης τάξης. Επίσης οι συναρτήσεις που θα ορίζονται θα πληρούν καί όλες τις άλλες απαιτήσεις των επί μέρους προβλημάτων.

# ΚΕΦ.1

## Κινηματικη του υλικου σημειου η σωματιου

## Γενικά

Σκοπός του παρόντος Κεφαλαίου είναι η μελέτη της κινηματικής του υλικού σημείου.

Θα δοθούν οι ορισμοί της ταχύτητας και της επιτάχυνσης και θα βρεθούν οι μορφές, που λαμβάνουν αυτές σε διάφορα συστήματα συντεταγμένων.

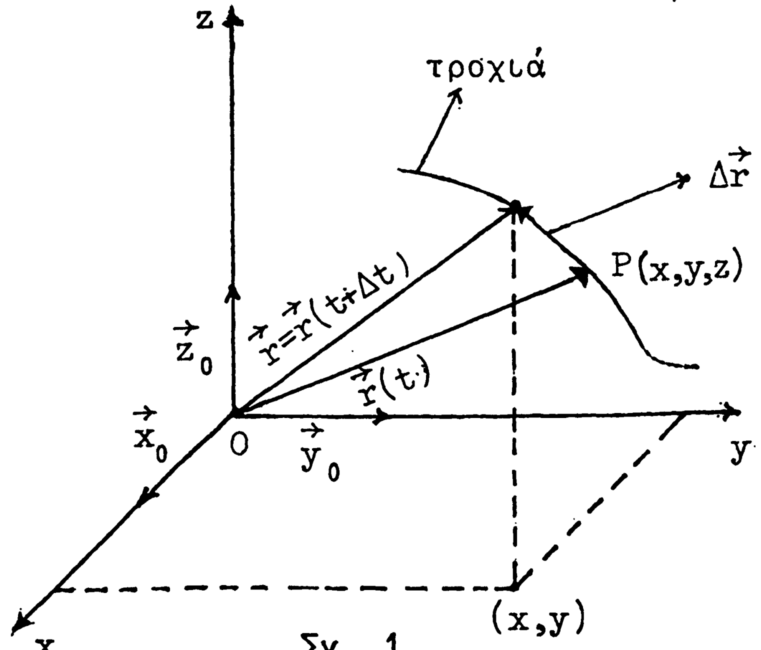
## 1.1. Υλικό σημείο - Διάνυσμα θέσης

Στην πράξη η μελέτη της κίνησης των σωμάτων είναι πολύπλοκη και για να επιτευχθεί χρειάζεται να γίνει μελέτη της κίνησης του υλικού σημείου ή σωματίου.

Ονομάζουμε υλικό σημείο ή σωμάτιο, ένα σώμα, που δεν έχει διαστάσεις και είναι εφοδιασμένο με ένα θετικό αριθμό, τη μάζα του. Με άλλα λόγια, είναι ένα μαθηματικό σημείο με μάζα. Στη φύση το υλικό σημείο δεν υπάρχει. Όμως η εισαγωγή του όρου αυτού είναι χρήσιμη, γιατί τα σώματα σε ορισμένες περιπτώσεις συμπεριφέρονται σχεδόν σαν υλικά σημεία, ανεξάρτητα από τις διαστάσεις τους. Επίσης με την εισαγωγή της έννοιας του υλικού σημείου αποφεύγεται η περιστροφή, που πιθανόν να εκτελούσε το σώμα κατά την κίνησή του.

Η κινηματική του υλικού σημείου ή σωματίου εξετάζει την κίνησή του, χωρίς να λαμβάνει υπόψη τις αιτίες της κίνησής του.

Η θέση του υλικού σημείου θα αναφέρεται ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς. Εάν $O$ είναι η αρχή του συστήματος αναφοράς και $P$ η θέση του υλικού σημείου, τότε το διάνυσμα $\vec{OP}$ ονομάζεται διάνυσμα θέσης του υλικού σημείου. Συνήθως συμβολίζεται με $\vec{r}$ και είναι συνάρτηση του χρόνου $t$, δηλαδή $\vec{r}=\vec{r}(t)$.




Σχ. 1

θεωρούμε το σημείο αναφοράς O ακίνητο και ως αρχή οποιουδήποτε συστήματος συντεταγμένων του τριδιάστατου χώρου.

Κάθε υλικό σημείο διαγράφει κατά την κίνησή του, ως προς αυτό το σύστημα, μια καμπύλη που λέγεται "τροχιά". Η τροχιά έχει τις ιδιότητες της λείας καμπύλης.

Το απλούστερο σύστημα συντεταγμένων είναι το ορθογώνιο (Καρτεσιανό) σύστημα Oxyz, (Σχ.1) με μοναδιαία διανύσματα $\vec{x}_0, \vec{y}_0$ και $\vec{z}_0$ στους άξονες x,y και z αντίστοιχα. Το Καρτεσιανό αυτό σύστημα θεωρείται ακίνητο, δηλαδή τα $\vec{x}_0, \vec{y}_0$ και $\vec{z}_0$ είναι σταθερά, και δεξιόστροφο. Το διάνυσμα θέσης υλικού σημείου ως προς το σύστημα, καθορίζεται από το διάνυσμα $\vec{r}$,

$$\boxed{\vec{r} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0}$$

όπου $x=x(t)$, $y=y(t)$ και $z=z(t)$ είναι οι συντεταγμένες του υλικού σημείου.

## 1.2. Ορισμός της ταχύτητας

Θεωρούμε κάποιο σύστημα συντεταγμένων του τριδιάστατου χώρου με αρχή το ακίνητο σημείο O . Ως προς αυτό το σύστημα συντεταγμένων έστω ότι το υλικό σημείο κινείται από τη θέση P στη θέση P′ σε χρόνο $\Delta t$. Τα διανύσματα θέσης του υλικού σημείου στις θέσεις P και P′ είναι αντίστοιχα $\vec{r}(t)$ και $\vec{r}(t+\Delta t)$, (Σχ.1).

Ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ του υλικού σημείου στη θέση P, ορίζεται το όριο

$$\boxed{\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}} \qquad (1)$$

Συνεπώς, η ταχύτητα του υλικού σημείου P είναι εφαπτόμενη της τροχιάς.

Σε ορθογώνιο (Καρτεσιανό) σύστημα συντεταγμένων, η (1) λαμβάνει τη μορφή

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0)}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{x}_0 + \frac{dy}{dt}\vec{y}_0 + \frac{dz}{dt}\vec{z}_0$$

ή

$$\boxed{\vec{\upsilon} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 + \dot{z}\vec{z}_0\ ,} \qquad (2)$$

όπου με $\dot{\vec{r}}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ συμβολίζουμε αντίστοιχα τις πρώτες παραγώγους ως προς το χρόνο $\frac{d\vec{r}}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ και $\frac{dz}{dt}$ . Οι συναρτήσεις $\dot{x}, \dot{y}$ και $\dot{z}$ είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxyz.

## 1.3. Ορισμός της επιτάχυνσης

Έστω ότι η ταχύτητα του υλικού σημείου P είναι $\vec{\upsilon}(t)$ . Η ταχύτητα του ίδιου υλικού σημείου στη θέση P′ είναι $\vec{\upsilon}(t+\Delta t)$.

Επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ του υλικού σημείου στη θέση P, ορίζεται το όριο

$$\boxed{\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{\upsilon}(t+\Delta t)-\vec{\upsilon}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}} \qquad (3)$$

Σε ορθογώνιο (Καρτεσιανό) σύστημα συντεταγμένων, η (3) λαμβάνει τη μορφή

$$\vec{\alpha} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2(x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0)}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{x}_0 + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{y}_0 + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{z}_0 .$$

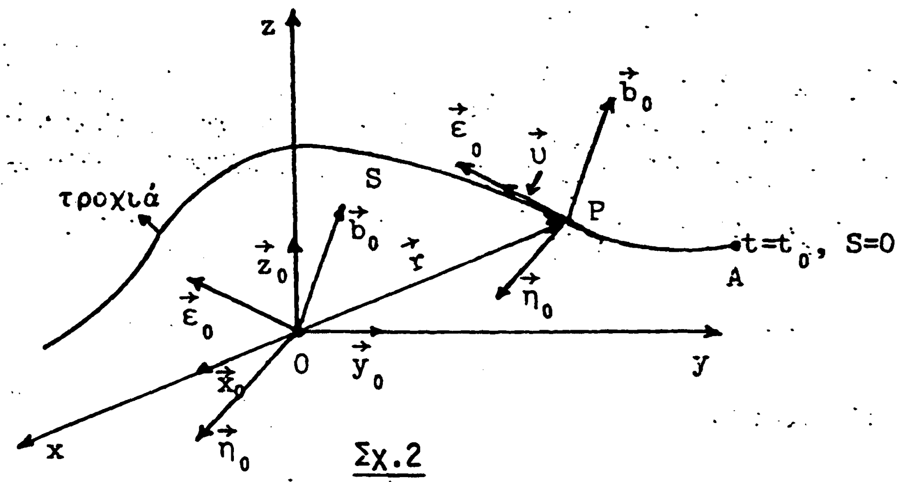
ή

$$\boxed{\vec{\alpha} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{x}_0 + \ddot{y}\vec{y}_0 + \ddot{z}\vec{z}_0 ,} \qquad (4)$$

όπου με $\ddot{\vec{r}}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ συμβολίζουμε αντίστοιχα τις δεύτερες παραγώγους ως προς το χρόνο $\frac{d\vec{r}}{dt^2}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ και $\frac{d^2z}{dt^2}$. Οι συναρτήσεις $\ddot{x}, \ddot{y}$ και $\ddot{z}$ είναι οι συνιστώσες της επιτάχυνσης στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$.

## 1.4. Κίνηση με παράμετρο το μήκος του τόξου $S$ - Φυσικές συντεταγμένες.

Μέχρι τώρα θεωρήσαμε ότι το διάνυσμα θέσης του υλικού σημείου $P$ είναι συνάρτηση του χρόνου. Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε ότι το διάνυσμα θέσης του $P$ είναι συνάρτηση του μήκους τόξου $S$ πάνω στην τροχιά, μετρουμένου από κάποια αρχή.




Σχ.2

Ορίζουμε ως μήκος τόξου $S$ πάνω στην τροχιά το ολοκλήρωμα

$$\boxed{S = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}\,dt = S(t) ,} \qquad (5)$$

όπου $t_0$ είναι η χρονική στιγμή, που ξεκίνησε το υλικό σημείο και $t$ η τυχούσα χρονική στιγμή κατά την οποία το υλικό σημείο βρίσκεται στην τυχούσα θέση P . (Σχ.2). Τη χρονική στιγμή $t=t_0$ είναι $S=0$.

Γνωρίζουμε ότι $\vec{r}=\vec{r}(t)$ . Λαμβάνοντας υπόψη την (5), μπορούμε να έχουμε

$$\vec{r} = \vec{r}(S) \quad , \tag{6}$$

Έτσι δικαιολογείται η μελέτη της κίνησης με παράμετρο το τόξο S .

Θεωρούμε δεξιόστροφο και ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με αρχή O και μοναδιαία διανύσματα τα $\vec{\varepsilon}_0, \vec{\eta}_0$ και $\vec{b}_0$ , όπου $\vec{\varepsilon}_0$ είναι η διανυσματική μονάδα κατά την διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς με φορά της κίνησης (κατά τα αύξοντα S), $\vec{\eta}_0$ είναι η διανυσματική μονάδα της πρώτης καθέτου και $\vec{b}_0$ η διανυσματική μονάδα της δευτέρας καθέτου. Ισχύει λοιπόν ότι,

$$\left\{ \vec{b}_0 = \vec{\varepsilon}_0 \times \vec{\eta}_0 \right. \quad . \tag{7}$$

Το σύστημα αυτών των συντεταγμένων ονομάζεται σύστημα "φυσικών συντεταγμένων" και σχετίζεται με την εκάστοτε θέση του υλικού σημείου.

Θα προσδιορίσουμε τώρα τις συνιστώσες των διανυσμάτων της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ και της επιτάχυνσης $\vec{\alpha}$ του υλικού σημείου στο σύστημα των φυσικών συντεταγμένων.

Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ υλικού σημείου είναι ίση με

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad . \tag{7α}$$

Η (7α) γράφεται

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dS}\frac{dS}{dt} = \dot{S}\vec{\varepsilon}_0 \quad \text{ή} \quad \vec{\upsilon} = |\upsilon|\vec{\varepsilon}_0 = \dot{S}\vec{\varepsilon}_0 \quad , \tag{8}$$

όπου $d\vec{r}=dS\vec{\varepsilon}_0$ , $dS=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$ , $|\upsilon|=\dot{S}=\frac{dS}{dt}$ .

Η (8) δίνει την ταχύτητα του υλικού σημείου σε φυσικές συντεταγμένες.

Παραγωγίζοντας την (8) ως προς την χρόνο, παίρνουμε την επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ του υλικού σημείου,

$$\vec{\alpha}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{d(\dot{S}\vec{\varepsilon}_0)}{dt}=\frac{d\dot{S}}{dt}\vec{\varepsilon}_0+\dot{S}\frac{d\vec{\varepsilon}_0}{dt}=$$

$$=\ddot{S}\vec{\varepsilon}_0+\dot{S}\frac{d\vec{\varepsilon}_0}{dS}\frac{dS}{dt}=\ddot{S}\vec{\varepsilon}_0+\dot{S}^2\frac{d\vec{\varepsilon}_0}{dS} \qquad (9)$$

Ισχύει ότι

$$\vec{\varepsilon}_0\cdot\vec{\varepsilon}_0=1 \implies \frac{d(\vec{\varepsilon}_0\cdot\vec{\varepsilon}_0)}{dS}=0\ , \qquad (9\alpha)$$

Από την (9α) προκύπτει

$$\frac{d\vec{\varepsilon}_0}{dS}\cdot\vec{\varepsilon}_0+\vec{\varepsilon}_0\cdot\frac{d\vec{\varepsilon}_0}{dS}=0 \quad \text{ή} \quad 2\vec{\varepsilon}_0\cdot\frac{d\vec{\varepsilon}_0}{dS}=0\ .$$

'Αρα

$$\vec{\varepsilon}_0\cdot\frac{d\vec{\varepsilon}_0}{dS}=0\ . \qquad (10)$$

Το συμπέρασμά μας είναι ότι $\vec{\varepsilon}_0 \perp \frac{d\vec{\varepsilon}_0}{dS}$ .

'Αρα

$$\frac{d\vec{\varepsilon}_0}{dS}=\kappa\vec{\eta}_0 \quad \text{ή} \quad \frac{d\vec{\varepsilon}_0}{dS}=\frac{1}{\rho}\vec{\eta}_0\ . \qquad (11)$$

Το $\kappa$ ονομάζεται καμπυλότητα. Το $\rho$ ονομάζεται ακτίνα καμπυλότητας. ($\kappa=\frac{1}{\rho}$).

Λαμβάνοντας υπόψη την (11), η (9) γράφεται ,

$$\boxed{\vec{\alpha}=\ddot{S}\vec{\varepsilon}_0+\frac{\dot{S}^2}{\rho}\vec{\eta}_0 \quad \text{ή} \quad \vec{\alpha}=|\dot{\upsilon}|\vec{\varepsilon}_0+\frac{|\upsilon|^2}{\rho}\vec{\eta}_0\ .} \qquad (12)$$

<u>Η (12) δίνει την επιτάχυνση του υλικού σημείου σε φυσικές συντεταγμένες.</u>

Η συνιστώσα $\boxed{\ddot{S} \text{ ή } |\dot{\upsilon}|}$ λέγεται "εφαπτομενική επιτάχυνση ή <u>επιτρόχιος ε-</u>

πιτάχυνση ενώ η $\boxed{\frac{\dot{s}^2}{\rho} \quad ή \quad \frac{\upsilon^2}{\rho}}$ λέγεται "κεντρομόλος επιτάχυνση".

## 1.5. Περί καμπυλογράμμων συντεταγμένων

Υποθέτουμε ότι οι ορθογώνιες (Καρτεσιανές) συντεταγμένες $x,y,z$ του υλικού σημείου $P$ μπορούν να εκφραστούν σαν συναρτήσεις των παραμέτρων $u,\upsilon$ και $w$, δηλαδή

$$x = x(u,\upsilon,w) \ , \quad y = y(u,\upsilon,w) \ , \quad z = z(u,\upsilon,w) \ . \tag{13}$$

Υποθέτουμε ότι οι (13) μπορούν να λυθούν ως προς $u,\upsilon,w$

$$u = u(x,y,z) \ , \quad \upsilon = \upsilon(x,y,z) \ , \quad w = w(x,y,z) \ . \tag{14}$$

Τούτο συμβαίνει εφ'όσον

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,\upsilon,w)} \neq 0 \ . \tag{15}$$

Τότε σε κάθε τριάδα $(u,\upsilon,w)$ αντιστοιχεί μία μόνο τριάδα $(x,y,z)$ και σε κάθε τριάδα $(x,y,z)$ αντιστοιχεί μία μόνο τριάδα $(u,\upsilon,w)$. Η αντιστοιχία μεταξύ $(x,y,z)$ και $(u,\upsilon,w)$ είναι δηλαδή μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία.

Τα $(u,\upsilon,w)$ λέγονται καμπυλόγραμμες συντεταγένες του σημείου $P$.

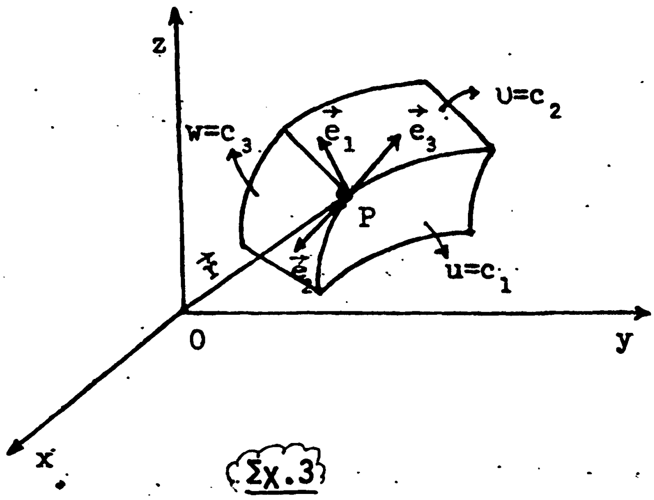
Θεωρούμε τώρα την εξίσωση

$$u = C_1 \tag{16}$$

όπου $C_1$ μια σταθερά. Η (16) είναι η εξίσωση μιας επιφάνειας στον τριδιάστατο χώρο. Ομοίως οι εξισώσεις

$$\upsilon = C_2 \ , \quad w = C_3 \ , \tag{17}$$

όπου $C_2$, $C_3$ σταθερές είναι εξισώσεις επιφανειών. Οι τρεις επιφάνειες (16) και (17) τέμνονται στο σημείο $P$, που αντιστοιχεί στις τιμές των $u = C_1$ , $\upsilon = C_2$ , $w = C_3$ . Οι τιμές δηλαδή $(C_1,C_2,C_3)$ είναι οι καμπυλόγραμμες συντεταγμένες του $P$ (Σχ.3)




Σχ.3

Το διάνυσμα θέσης του σημείου $P$ ως προς το $O$ είναι τώρα

$$\vec{r} = \vec{r}(u,\upsilon,w) \quad . \tag{18}$$

Οι επιφάνειες $\upsilon=C_2$ , $w=C_3$ τέμνονται κατά μία καμπύλη, που προκύπτει από την (18) αν θέσουμε $\upsilon=C_2$, $w=C_3$ . Η καμπύλη αυτή αντιστοιχεί στη διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{r} = \vec{r}(u,C_2,C_3) \quad , \tag{19}$$

με παράμετρο το $u$ . Ομοίως οι επιφάνειες $u=C_1$ , $w=C_3$ τέμνονται κατά την καμπύλη

$$\vec{r} = \vec{r}(C_1,\upsilon,C_3) \tag{20}$$

και οι επιφάνειες $u=C_1$ , $\upsilon=C_2$ κατά την καμπύλη

$$\vec{r} = \vec{r}(C_1,C_2,w) \quad . \tag{21}$$

Ορίζουμε τώρα τρεις διανυσματικές μονάδες $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ και $\vec{e}_3$ με τις σχέσεις

$$\vec{e}_1 = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right|}\ , \quad \vec{e}_2 = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \upsilon}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \upsilon}\right|}\ , \quad \vec{e}_3 = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\right|}\ , \qquad (22)$$

όπου $\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right|$, $\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \upsilon}\right|$ , $\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\right|$ είναι τα μέτρα των διανυσμάτων $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ , $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \upsilon}$ και $\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}$ αντίστοιχα.

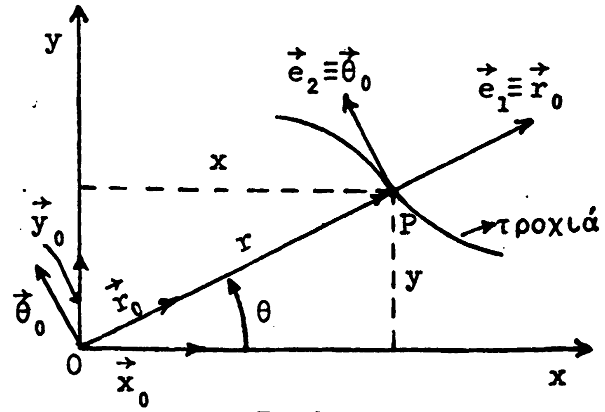
Οι διανυσματικές μονάδες $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ και $\vec{e}_3$ είναι εφαπτόμενες των καμπύλων (19), (20) και (21) αντίστοιχα, στο κοινό τους σημείο P .

Εάν οι διανυσματικές μονάδες $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ και $\vec{e}_3$ αποτελούν ορθογώνιο σύστημα, τότε λέμε ότι οι καμπυλόγραμμες συντεταγμένες είναι ορθογώνιες.

## 1.6 Ειδικές περιπτώσεις ορθογωνίων καμπυλογράμμων συντεταγμένων

Θα αποδείξουμε στις επόμενες παραγράφους 1.6.α , 1.6.β και 1.6.γ ότι οι κυλινδρικές και οι σφαιρικές συντεταγμένες είναι ειδικές περιπτώσεις ορθογωνίων καμπυλογράμμων συντεταγμένων.

### 1.6.α Ταχύτητα και επιτάχυνση σε πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο




Σχ.4

Η θέση του υλικού σημείου P στο επίπεδο Oxy προσδιορίζεται , αν δοθεί η απόσταση r του σημείου P από την αρχή O και η γωνία θ, που σχηματίζεται μεταξύ του διανύσματος θέσης $\vec{r} \equiv \vec{OP}$ και του άξονα Ox.

(Σχ.4). Η γωνία $\theta$ μετρείται κατά την ορθή φορά. Τα $(r,\theta)$ ονομάζονται πολικές συντεταγμένες του σημείου $P$.

Εφαρμόζοντας τα όσα είπαμε στις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες, έχουμε τις αντιστοιχίες

$$u \longleftrightarrow r \quad , \quad \upsilon \longleftrightarrow \theta \quad . \tag{23}$$

Οι εξισώσεις μετασχηματισμού είναι,

$$\boxed{x = x(r,\theta) = r\cos\theta \;, \quad y = y(r,\theta) = r\sin\theta \;,} \tag{24}$$

όπου $r \geq 0$ και $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Είναι

$$\vec{r} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 \, . \tag{25}$$

Αντικαθιστώντας τις (24) στην (25) λαμβάνουμε

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}(r,\theta) = r\cos\theta\vec{x}_0 + r\sin\theta\vec{y}_0 \; .} \tag{26}$$

Έχουμε λοιπόν

$$\vec{e}_1 \equiv \vec{e}_r \equiv \vec{r}_0 = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right|} = \frac{\cos\theta\vec{x}_0 + \sin\theta\vec{y}_0}{1} = \cos\theta\vec{x}_0 + \sin\theta\vec{y}_0 \tag{27}$$

$$\vec{e}_2 \equiv \vec{e}_\theta \equiv \vec{\theta}_0 = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right|} = \frac{-r\sin\theta\vec{x}_0 + r\cos\theta\vec{y}_0}{r} = -\sin\theta\vec{x}_0 + \cos\theta\vec{y}_0 \; . \tag{28}$$

Προκύπτει ότι $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta \equiv \vec{r}_0 \cdot \vec{\theta}_0 = (\cos\theta\vec{x}_0 + \sin\theta\vec{y}_0)\cdot(-\sin\theta\vec{x}_0 + \cos\theta\vec{y}_0) = 0$.
Άρα, οι πολικές συντεταγμένες είναι ορθογώνιες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες και αποτελούν κατά την τάξη $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων.

Θα εκφράσουμε τώρα το διάνυσμα της ταχύτητας σε πολικές συντεταγμένες

$$\vec{e}_1 = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right|}\ , \quad \vec{e}_2 = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \upsilon}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \upsilon}\right|}\ , \quad \vec{e}_3 = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\right|}\ , \qquad (22)$$

όπου $\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right|$, $\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \upsilon}\right|$, $\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\right|$ είναι τα μέτρα των διανυσμάτων $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \upsilon}$ και $\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}$ αντίστοιχα.

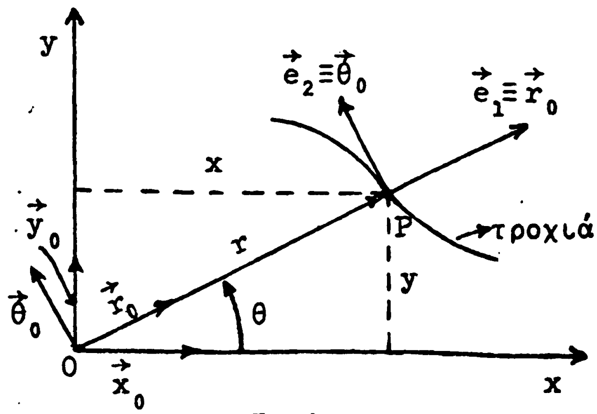
Οι διανυσματικές μονάδες $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ και $\vec{e}_3$ είναι εφαπτόμενες των καμπύλων (19), (20) και (21) αντίστοιχα, στο κοινό τους σημείο P.

Εάν οι διανυσματικές μονάδες $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ και $\vec{e}_3$ αποτελούν ορθογώνιο σύστημα, τότε λέμε ότι οι καμπυλόγραμμες συντεταγμένες είναι ορθογώνιες.

## 1.6 Ειδικές περιπτώσεις ορθογωνίων καμπυλογράμμων συντεταγμένων

Θα αποδείξουμε στις επόμενες παραγράφους 1.6.α , 1.6.β και 1.6.γ ότι οι κυλινδρικές και οι σφαιρικές συντεταγμένες είναι ειδικές περιπτώσεις ορθογωνίων καμπυλογράμμων συντεταγμένων.

### 1.6.α Ταχύτητα και επιτάχυνση σε πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο




Σχ.4

Η θέση του υλικού σημείου P στο επίπεδο Oxy προσδιορίζεται , αν δοθεί η απόσταση r του σημείου P από την αρχή O και η γωνία θ, που σχηματίζεται μεταξύ του διανύσματος θέσης $\vec{r} \equiv \vec{OP}$ και του άξονα Ox.

(Σχ.4). Η γωνία $\theta$ μετρείται κατά την ορθή φορά. <u>Τα $(r,\theta)$ ονομάζονται πολικές συντεταγμένες του σημείου $P$</u>.

Εφαρμόζοντας τα όσα είπαμε στις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες, έχουμε τις αντιστοιχίες

$$u \longleftrightarrow r \quad , \quad \upsilon \longleftrightarrow \theta \; . \tag{23}$$

Οι εξισώσεις μετασχηματισμού είναι,

$$\boxed{x = x(r,\theta) = r\cos\theta \; , \quad y = y(r,\theta) = r\sin\theta \; ,} \tag{24}$$

όπου $r \geq 0$ και $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Είναι

$$\underline{\underline{\vec{r} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0}} \; . \tag{25}$$

Αντικαθιστώντας τις (24) στην (25) λαμβάνουμε

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}(r,\theta) = r\cos\theta\vec{x}_0 + r\sin\theta\vec{y}_0 \; .} \tag{26}$$

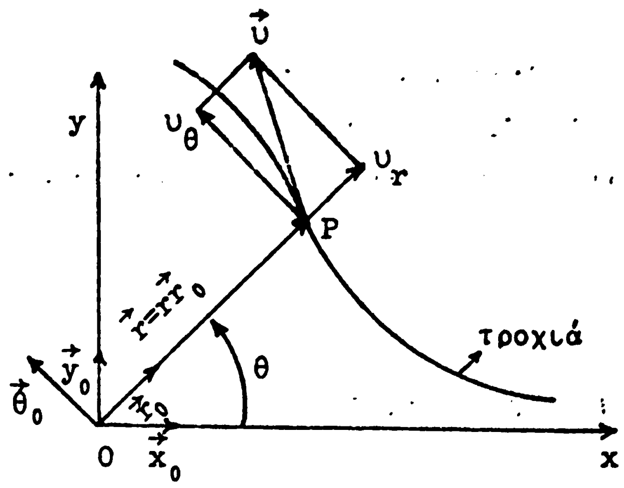
Έχουμε λοιπόν

$$\vec{e}_1 \equiv \vec{e}_r \equiv \vec{r}_0 = \frac{\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial r}}{\left|\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right|} = \frac{\cos\theta\vec{x}_0 + \sin\theta\vec{y}_0}{1} = \cos\theta\vec{x}_0 + \sin\theta\vec{y}_0 \tag{27}$$

$$\vec{e}_2 \equiv \vec{e}_\theta \equiv \vec{\theta}_0 = \frac{\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}}{\left|\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right|} = \frac{-r\sin\theta\vec{x}_0 + r\cos\theta\vec{y}_0}{r} = -\sin\theta\vec{x}_0 + \cos\theta\vec{y}_0 \; . \tag{28}$$

Προκύπτει ότι $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta \equiv \vec{r}_0 \cdot \vec{\theta}_0 = (\cos\theta\vec{x}_0 + \sin\theta\vec{y}_0)\cdot(-\sin\theta\vec{x}_0 + \cos\theta\vec{y}_0) = 0$.
Άρα, οι πολικές συντεταγμένες είναι ορθογώνιες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες και αποτελούν κατά την τάξη $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων.

Θα εκφράσουμε τώρα το διάνυσμα της ταχύτητας σε πολικές συντεταγμένες




Σχ.5

στο επίπεδο.

Ισχύει ότι

$$\vec{r} = r\vec{r}_0 \ . \tag{29}$$

Η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ του P είναι

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\vec{r}_0)}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{r}_0 + r\frac{d\vec{r}_0}{dt} = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\vec{r}}_0 \ . \tag{30}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (27) έχουμε

$$\dot{\vec{r}}_0 = -\sin\theta\dot{\theta}\vec{x}_0 + \cos\theta\dot{\theta}\vec{y}_0 \tag{31}$$

ή

$$\dot{\vec{r}}_0 = \dot{\theta}(-\sin\theta\vec{x}_0 + \cos\theta\vec{y}_0) \ , \quad (\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}) \ . \tag{32}$$

Αντικαθιστώντας την (28) στην (32) προκύπτει

$$\boxed{\dot{\vec{r}}_0 = \dot{\theta}\vec{\theta}_0 \ .} \tag{33}$$

Αντικαθιστώντας την (33) στην (30) λαμβάνουμε

$$\boxed{\vec{\upsilon} = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\theta}\vec{\theta}_0 \equiv \upsilon_r\vec{r}_0 + \upsilon_\theta\vec{\theta}_0 \ .} \tag{34}$$

Η (34) δίνει τη μορφή της ταχύτητας σε πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο. Οι συνιστώσες $\upsilon_r=\dot{r}$ και $\upsilon_\theta=r\dot{\theta}$ φαίνονται στο Σχ.5 και λέγονται "ακτινική" και "εγκάρσια" συνιστώσα της ταχύτητας αντίστοιχα.

Η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ του P είναι :

$$\vec{\alpha}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{d(\dot{r}\vec{r}_0+r\dot{\theta}\vec{\theta}_0)}{dt}=$$

$$=\frac{d\dot{r}}{dt}\vec{r}_0+\dot{r}\frac{d\vec{r}_0}{dt}+\frac{dr}{dt}(\dot{\theta}\vec{\theta}_0)+r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{\theta}_0+r\dot{\theta}\frac{d\vec{\theta}_0}{dt}=$$

$$=\ddot{r}\vec{r}_0+\dot{r}\dot{\vec{r}}_0+\dot{r}\dot{\theta}\vec{\theta}_0+r\ddot{\theta}\vec{\theta}_0+r\dot{\theta}\dot{\vec{\theta}}_0\ . \tag{35}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (28) έχουμε

$$\dot{\vec{\theta}}_0=(-\cos\theta\dot{\theta}\vec{x}_0-\sin\theta\dot{\theta}\vec{y}_0)=-\dot{\theta}(\cos\theta\vec{x}_0+\sin\theta\vec{y}_0)\ . \tag{36}$$

Αντικαθιστώντας την (27) στην (36) προκύπτει

$$\dot{\vec{\theta}}_0=-\dot{\theta}\vec{r}_0\ . \tag{37}$$

Αντικαθιστώντας τις (33) και (37) στην (35) λαμβάνουμε

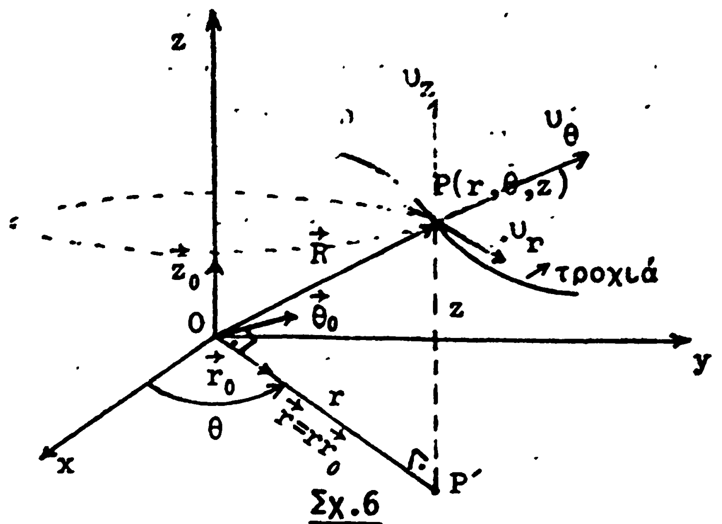
$$\vec{\alpha}=\ddot{r}\vec{r}_0+2\dot{r}\dot{\theta}\vec{\theta}_0+r\ddot{\theta}\vec{\theta}_0-r\dot{\theta}^2\vec{r}_0 \Rightarrow$$

$$\vec{\alpha}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\vec{r}_0+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\vec{\theta}_0\equiv\boxed{\alpha_r\vec{r}_0+\alpha_\theta\vec{\theta}_0=\vec{\alpha}} \tag{38}$$

Η (38) δίνει τη μορφή της επιτάχυνσης σε επίπεδες πολικές συντεταγμένες. Οι συνιστώσες $\alpha_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$ και $\alpha_\theta=2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}$ λέγονται "ακτινική" και "εγκάρσια" συνιστώσα της επιτάχυνσης αντίστοιχα.

## 1.6.β. Ταχύτητα και επιτάχυνση σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Η θέση του υλικού σημείου P στο χώρο σε κυλινδρικές συντεταγμένες, προσδιορίζεται αν δοθεί η απόσταση r του σημείου P′ (P′ είναι η προβολή του P στο επίπεδο Oxy) από την αρχή O , η γωνία θ που σχηματίζεται μεταξύ του διανύσματος OP′ και του άξονα Ox καθώς και




Σχ.6

η συντεταγμένη z του P , (Σχ.6) .

Εφαρμόζοντας τα όσα είπαμε στις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες, κάνουμε τις αντιστοιχίες

$$u \longleftrightarrow r \ , \quad \upsilon \longleftrightarrow \theta \ , \quad w \longleftrightarrow z \ . \tag{39}$$

Οι εξισώσεις μετασχηματισμού είναι ,

$$\underline{\underline{x = r\cos\theta}} \ , \quad \underline{\underline{y = r\sin\theta}} \ , \quad z = z \tag{40}$$

όπου $r \geq 0$ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , $-\infty < z < +\infty$ .

<u>Το διάνυσμα θέσης $\vec{R}$ του P είναι</u> ,

$$\boxed{\vec{R} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0} \ . \tag{41}$$

Αντικαθιστώντας τις (40) στην (41) λαμβάνουμε

$$\boxed{\vec{R} = \vec{R}(r,\theta,z) = r\cos\theta\vec{x}_0 + r\sin\theta\vec{y}_0 + z\vec{z}_0} \ . \tag{42}$$

'Εχουμε λοιπόν

$$\vec{e}_1 \equiv \vec{e}_r \equiv \vec{r}_0 = \frac{\frac{\partial\vec{R}}{\partial r}}{\left|\frac{\partial\vec{R}}{\partial r}\right|} = \frac{\cos\theta\vec{x}_0 + \sin\theta\vec{y}_0}{1} = \cos\theta\vec{x}_0 + \sin\theta\vec{y}_0 \tag{43}$$

$$\vec{e}_2 \equiv \vec{e}_\theta \equiv \vec{\theta}_0 = \frac{\frac{\partial \vec{R}}{\partial \theta}}{\left|\frac{\partial \vec{R}}{\partial \theta}\right|} = \frac{-r\sin\theta \vec{x}_0 + r\cos\theta \vec{y}_0}{r} = -\sin\theta \vec{x}_0 + \cos\theta \vec{y}_0 \ . \qquad (44)$$

$$\vec{e}_3 \equiv \vec{e}_z \equiv \vec{z}_0 \ . \qquad (45)$$

Προκύπτει ότι,

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = (\cos\theta \vec{x}_0 + \sin\theta \vec{y}_0)\cdot(-\sin\theta \vec{x}_0 + \cos\theta \vec{y}_0) = 0$$

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = (\cos\theta \vec{x}_0 + \sin\theta \vec{y}_0)\cdot \vec{z}_0 = \cos\theta \underbrace{\vec{x}_0 \cdot \vec{z}_0}_{=0} + \sin\theta \underbrace{\vec{y}_0 \cdot \vec{z}_0}_{=0} = 0 \qquad (46)$$

$$\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_z = (-\sin\theta \vec{x}_0 + \cos\theta \vec{y}_0)\cdot \vec{z}_0 = -\sin\theta \underbrace{\vec{x}_0 \cdot \vec{z}_0}_{=0} + \cos\theta \underbrace{\vec{y}_0 \cdot \vec{z}_0}_{=0} = 0 \ .$$

'Αρα οι κυλινδρικές συντεταγμένες είναι ορθογώνιες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες και αποτελούν κατά την τάξη $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ και $\vec{e}_z$ δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων.

Θα εκφράσουμε τώρα το διάνυσμα της ταχύτητας σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

Ισχύει ότι,

$$\vec{R} = \vec{OP'} + \vec{P'P} = r\vec{r}_0 + z\vec{z}_0 \ . \qquad (47)$$

Η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ του P είναι

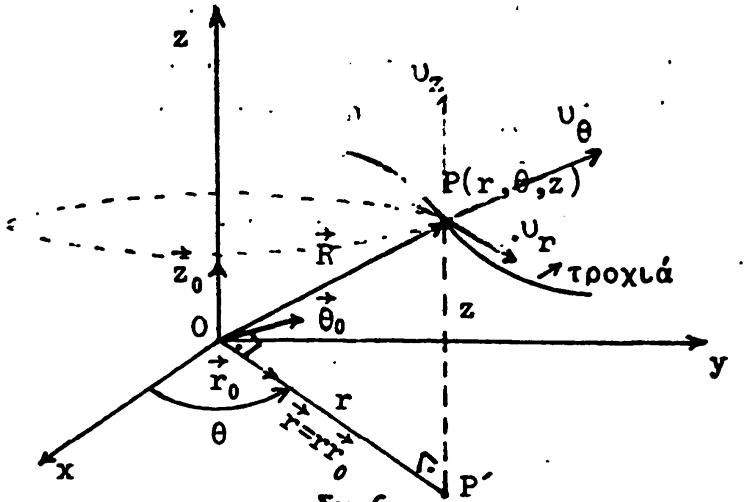
$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d(r\vec{r}_0 + z\vec{z}_0)}{dt} =$$

$$= \frac{dr}{dt}\vec{r}_0 + r\frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{z}_0 = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\vec{r}}_0 + \dot{z}\vec{z}_0 \ .$$

Αντικαθιστώντας το $\dot{\vec{r}}_0$ από την (32), προκύπτει

$$\boxed{\vec{\upsilon} = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\theta}\vec{\theta}_0 + \dot{z}\vec{z}_0 = \upsilon_r\vec{r}_0 + \upsilon_\theta\vec{\theta}_0 + \upsilon_z\vec{z}_0} \qquad (48)$$

Η (48) δίνει τη μορφή της ταχύτητας σε κυλινδρικές συντεταγμένες, όπου




Σχ.6

η συντεταγμένη $z$ του $P$, (Σχ.6).

Εφαρμόζοντας τα όσα είπαμε στις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες, κάνουμε τις αντιστοιχίες

$$u \longleftrightarrow r \ , \quad \upsilon \longleftrightarrow \theta \ , \quad w \longleftrightarrow z \ . \tag{39}$$

Οι εξισώσεις μετασχηματισμού είναι,

$$\underline{\underline{x = r\cos\theta}} \ , \quad \underline{\underline{y = r\sin\theta}} \ , \quad z = z \tag{40}$$

όπου $r \gtrsim 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$.

<u>Το διάνυσμα θέσης $\vec{R}$ του $P$ είναι</u>,

$$\boxed{\vec{R} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0} \ . \tag{41}$$

Αντικαθιστώντας τις (40) στην (41) λαμβάνουμε

$$\boxed{\vec{R} = \vec{R}(r,\theta,z) = r\cos\theta\vec{x}_0 + r\sin\theta\vec{y}_0 + z\vec{z}_0} \ . \tag{42}$$

'Εχουμε λοιπόν

$$\vec{e}_1 \equiv \vec{e}_r \equiv \vec{r}_0 = \frac{\dfrac{\partial\vec{R}}{\partial r}}{\left|\dfrac{\partial\vec{R}}{\partial r}\right|} = \frac{\cos\theta\vec{x}_0 + \sin\theta\vec{y}_0}{1} = \cos\theta\vec{x}_0 + \sin\theta\vec{y}_0 \tag{43}$$

$$\vec{e}_2 \equiv \vec{e}_\theta \equiv \vec{\theta}_0 = \frac{\frac{\partial\vec{R}}{\partial\theta}}{\left|\frac{\partial\vec{R}}{\partial\theta}\right|} = \frac{-r\sin\theta\vec{x}_0 + r\cos\theta\vec{y}_0}{r} = -\sin\theta\vec{x}_0 + \cos\theta\vec{y}_0 \ . \qquad (44)$$

$$\vec{e}_3 \equiv \vec{e}_z \equiv \vec{z}_0 \ . \qquad (45)$$

Προκύπτει ότι,

$$\vec{e}_r\cdot\vec{e}_\theta = (\cos\theta\vec{x}_0 + \sin\theta\vec{y}_0)\cdot(-\sin\theta\vec{x}_0 + \cos\theta\vec{y}_0) = 0$$

$$\vec{e}_r\cdot\vec{e}_z = (\cos\theta\vec{x}_0 + \sin\theta\vec{y}_0)\cdot\vec{z}_0 = \cos\theta\underbrace{\vec{x}_0\cdot\vec{z}_0}_{=0} + \sin\theta\underbrace{\vec{y}_0\cdot\vec{z}_0}_{=0} = 0 \qquad (46)$$

$$\vec{e}_\theta\cdot\vec{e}_z = (-\sin\theta\vec{x}_0 + \cos\theta\vec{y}_0)\cdot\vec{z}_0 = -\sin\theta\underbrace{\vec{x}_0\cdot\vec{z}_0}_{=0} + \cos\theta\underbrace{\vec{y}_0\cdot\vec{z}_0}_{=0} = 0 \ .$$

Άρα οι κυλινδρικές συντεταγμένες είναι ορθογώνιες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες και αποτελούν κατά την τάξη $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ και $\vec{e}_z$ δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων.

Θα εκφράσουμε τώρα το διάνυσμα της ταχύτητας σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

Ισχύει ότι,

$$\vec{R} = \vec{OP'} + \vec{P'P} = r\vec{r}_0 + z\vec{z}_0 \ . \qquad (47)$$

Η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ του P είναι

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d(r\vec{r}_0 + z\vec{z}_0)}{dt} =$$

$$= \frac{dr}{dt}\vec{r}_0 + r\frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{z}_0 = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\vec{r}}_0 + \dot{z}\vec{z}_0 \ .$$

Αντικαθιστώντας το $\dot{\vec{r}}_0$ από την (32), προκύπτει

$$\boxed{\vec{\upsilon} = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\theta}\vec{\theta}_0 + \dot{z}\vec{z}_0 = \upsilon_r\vec{r}_0 + \upsilon_\theta\vec{\theta}_0 + \upsilon_z\vec{z}_0} \qquad (48)$$

Η (48) δίνει τη μορφή της <u>ταχύτητας σε κυλινδρικές συντεταγμένες</u>, όπου

$$\upsilon_r = \dot{r} , \quad \upsilon_\theta = r\dot{\theta} , \quad \upsilon_z = \dot{z} \tag{48α}$$

είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας στις διευθύνσεις $\vec{r}_0$, $\vec{\theta}_0$ και $\vec{z}_0$ αντίστοιχα.

Η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ του P είναι

$$\vec{\alpha} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d(\dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\theta}\vec{\theta}_0 + \dot{z}\vec{z}_0)}{dt}$$

ή

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{\alpha} &= \frac{d\dot{r}}{dt}\vec{r}_0 + \dot{r}\frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\vec{\theta}_0 + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{\theta}_0 + r\dot{\theta}\frac{d\vec{\theta}_0}{dt} + \frac{d\dot{z}}{dt}\vec{z}_0 = \\ &= \underline{\underline{\ddot{r}\vec{r}_0 + \dot{r}\dot{\vec{r}}_0 + \dot{r}\dot{\theta}\vec{\theta}_0 + r\ddot{\theta}\vec{\theta}_0 + r\dot{\theta}\dot{\vec{\theta}}_0 + \ddot{z}\vec{z}_0}} . \end{aligned} \right. \tag{49}$$

Αντικαθιστώντας στην (49) τις (33) και (37) προκύπτει

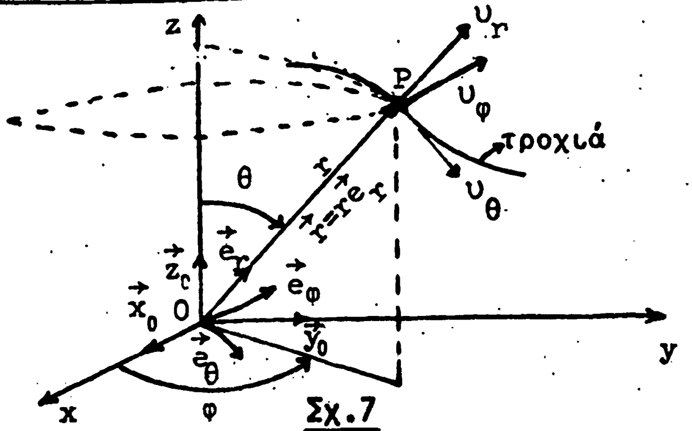
$$\vec{\alpha} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{r}_0 + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{\theta}_0 + \ddot{z}\vec{z}_0 = \boxed{\alpha_r\vec{r}_0 + \alpha_\theta\vec{\theta}_0 + \alpha_z\vec{z}_0 = \vec{\alpha}} \tag{50}$$

Η (50) δίνει τη μορφή της επιτάχυνσης σε κυλινδρικές συντεταγμένες, όπου

$$\alpha_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 , \quad \alpha_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} , \quad \alpha_z = \ddot{z} , \tag{50α}$$

είναι οι συνιστώσες της επιτάχυνσης στις διευθύνσεις $\vec{r}_0$ , $\vec{\theta}_0$ και $\vec{z}_0$ αντίστοιχα.

## 1.6.γ. Ταχύτητα και επιτάχυνση σε σφαιρικές συντεταγμένες




Σχ.7

Η θέση του υλικού σημείου P στο χώρο, σε σφαιρικές συντεταγμένες, προσδιορίζεται αν δοθεί η απόσταση r της αρχής O από το υλικό σημείο P καθώς και οι γωνίες φ και θ (Σχ.7).

Εφαρμόζοντας τα όσα είπαμε στις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες, θέτουμε τις αντιστοιχίες,

$$u \leftrightarrow r \ , \quad v \leftrightarrow \theta \ , \quad w \leftrightarrow \varphi \ .$$

Οι εξισώσεις μετασχηματισμού είναι ,

$$\boxed{x = r\cos\varphi\sin\theta \ , \quad y=r\sin\varphi\sin\theta \ , \quad z=r\cos\theta}, \tag{51}$$

όπου $r>0$ , $0\leq\varphi\leq2\pi$ $\quad 0\leq\theta\leq\pi$ .

Το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ του P είναι

$$\vec{r} = x\vec{x}_0+y\vec{y}_0+z\vec{z}_0 \ . \tag{52}$$

Αντικαθιστώντας τις (51) στην (52) λαμβάνουμε

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}(r,\varphi,\theta) = r\cos\varphi\sin\theta\vec{x}_0+r\sin\varphi\sin\theta\vec{y}_0+r\cos\theta\vec{z}_0} \tag{53}$$

Έχουμε λοιπόν

$$\vec{e}_r = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right|} = \frac{\sin\theta\cos\varphi\vec{x}_0+\sin\theta\sin\varphi\vec{y}_0+\cos\theta\vec{z}_0}{1} =$$

$$= \sin\theta\cos\varphi\vec{x}_0+\sin\theta\sin\varphi\vec{y}_0+\cos\theta\vec{z}_0 = \frac{\vec{r}}{r} \ . \tag{54}$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right|} = \frac{-r\sin\theta\sin\varphi\vec{x}_0+r\sin\theta\cos\varphi\vec{y}_0}{r\sin\theta} = -\sin\varphi\vec{x}_0+\cos\varphi\vec{y}_0 \ . \tag{55}$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right|} = \frac{r\cos\theta\cos\varphi\vec{x}_0+r\cos\theta\sin\varphi\vec{y}_0-r\sin\theta\vec{z}_0}{r} =$$

$$= \cos\theta\cos\varphi\vec{x}_0+\cos\theta\sin\varphi\vec{y}_0-\sin\theta\vec{z}_0 \ . \qquad (56)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (54), (55) και (56) προκύπτει

$$\vec{e}_r\cdot\vec{e}_\varphi = 0 \ , \quad \vec{e}_r\cdot\vec{e}_\theta = 0 \ , \quad \vec{e}_\varphi\cdot\vec{e}_\theta = 0 \ . \qquad (57)$$

Άρα, οι σφαιρικές συντεταγμένες είναι ορθογώνιες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες και αποτελούν κατά την τάξη $\vec{e}_r$ , $\vec{e}_\theta$ , $\vec{e}_\varphi$ δεξιόστροφο σύστημα.

Από την (54) λαμβάνουμε

$$\vec{r} = r\vec{e}_r \ . \qquad (58)$$

Η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ του υλικού σημείου P είναι

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\vec{e}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r+r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\vec{e}}_r \ . \qquad (59)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (54),(55) και (56), η (59) δίνει

$$\vec{\upsilon} = \dot{r}\vec{e}_r+r\left[(\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi-\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi)\vec{x}_0+(\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi+\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi)\vec{y}_0-\right.$$

$$\left.-\dot{\theta}\sin\theta\vec{z}_0\right] = \dot{r}\vec{e}_r+r\left[\dot{\theta}(\cos\theta\cos\varphi\vec{x}_0+\cos\theta\sin\varphi\vec{y}_0-\sin\theta\vec{z}_0)\right]+$$

$$+r\left[\dot{\varphi}(-\sin\theta\sin\varphi\vec{x}_0+\sin\theta\cos\varphi\vec{y}_0)\right] = \dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta+r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi =$$

$$= \upsilon_r\vec{e}_r+\upsilon_\theta\vec{e}_\theta+\upsilon_\varphi\vec{e}_\varphi \ . \qquad (60)$$

Η (60) δίνει τη μορφή της ταχύτητας του P σε σφαιρικές συντεταγμένες όπου

$$\boxed{\upsilon_r = \dot{r} \ , \quad \upsilon_\theta = r\dot{\theta} \ , \quad \upsilon_\varphi = r\dot{\varphi}\sin\theta \ ,}$$

είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας στις διευθύνσεις $\vec{e}_r$ , $\vec{e}_\theta$ και $\vec{e}_\varphi$ αντίστοιχα.

Η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ είναι

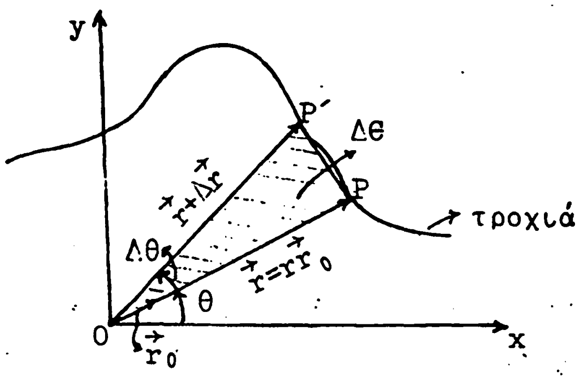
$$\vec{\alpha} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi)}{dt} \quad . \tag{61}$$

Εκτελώντας, κατά τα γνωστά, πράξεις στην (61) προκύπτει ότι η επιτάχυνση του $P$ σε σφαιρικές συντεταγμένες λαμβάνει τη μορφή

$$\vec{\alpha} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\theta +$$
$$+ (2\dot{r}\sin\theta\dot{\varphi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} + r\sin\theta\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi = \alpha_r\vec{e}_r + \alpha_\theta\vec{e}_\theta + \alpha_\varphi\vec{e}_\varphi \ , \tag{62}$$

όπου $\vec{\alpha}_r, \alpha_\theta, \vec{\alpha}_\varphi$ είναι οι συνιστώσες της επιτάχυνσης του $P$ στις διευθύνσεις $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ και $\vec{e}_\varphi$ αντίστοιχα.

## 1.7 Γωνιακή ταχύτητα - Διάνυσμα γωνιακής ταχύτητας




Σχ.8

Θεωρούμε υλικό σημείο $P$, που κινείται στο επίπεδο που ορίζεται από το ορθογώνιο (Καρτεσιανό) σύστημα $Oxy$ (Σχ.8). Σε χρόνο $\Delta t$ το υλικό σημείο πηγαίνει από τη θέση $P$ στη θέση $P'$ και έχει διαγράψει γωνία $\Delta\theta$. Ορίζουμε ως γωνιακή ταχύτητα $\omega$ του $P$, το όριο

$$\boxed{\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \equiv \dot{\theta}} \tag{63}$$

Το διάνυσμα $\vec{\omega}$ της γωνιακής ταχύτητας $\omega$ ορίζεται από τη σχέση

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{z}_0 \ , \tag{64}$$

όπου $\vec{z}_0$ η διανυσματική μονάδα κατά τη διεύθυνση του άξονα $z$ που είναι κάθετος στο επίπεδο $Oxy$ στο σημείο $O$ .

## 1.8 Εμβαδική ταχύτητα

Θεωρούμε, όπως στην προηγούμενη παράγραφο υλικό σημείο $P$ να κινείται στο επίπεδο $Oxy$ . Ορίζουμε, ως εμβαδική ταχύτητα του $P$ το όριο

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{dE}{dt} \tag{65}$$

όπου $\Delta E$ είναι το εμβαδό που διαγράφει το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ του $P$ στο χρόνο $\Delta t$ .

Όταν ο χρόνος $\Delta t$ μικρός, το εμβαδό του χωρίου $OPP'$ συμπίπτει με το εμβαδόν του τριγώνου $OPP'$ . Το εμβαδό του τριγώνου $OPP'$ είναι

$$\Delta E = \frac{1}{2}(OP)(OP')\sin\Delta\theta = \frac{1}{2} r(r+\Delta r)\sin\Delta\theta \cong \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta \ . \tag{66}$$

Άρα,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \ . \tag{67}$$

Η εμβαδική ταχύτητα του $P$ θεωρείται θετική, όταν η κίνηση γίνεται κατά τη θετική φορά $(\dot{\theta}>0)$ και αρνητική όταν η κίνηση γίνεται κατά την αρνητική φορά $(\dot{\theta}<0)$ .

# ΚΕΦ. 2

## Θεμελιωδεις εννοιες και αρχες της Μηχανικης του Νευτωνα – Δυναμικη του υλικου σημειου.

## 2.1 Θεμελιώδεις έννοιες

'Οπως σε κάθε επιστήμη, έτσι και στη Μηχανική χρησιμοποιούνται θεμελιώδεις έννοιες και αξιώματα.

Οι θεμελιώδεις έννοιες που χρησιμοποιούνται είναι ο χώρος, ο χρόνος και το υλικό σημείο ή σωμάτιο.

Ο χώρος θεωρείται Ευκλείδιος. Επί πλέον τέτοιος χώρος θεωρείται ομοιογενής και ισότροπος ως προς τη μετρική του δομή, δηλαδή οι ιδιότητές του είναι ίδιες σε όλα του τα σημεία και προς όλες τις διευθύνσεις του αντίστοιχα.

'Οσον αφορά το χρόνο $t$ θεωρείται ως μια παράμετρος και είναι ομοιογενής και απόλυτος.

'Οταν λέμε ομοιογενής εννοούμε ότι ρέει ομοιόμορφα. Δεν υφίσταται αρχή ή τέλος αυτού, ή μάλλον οιαδήποτε τιμή αυτού μπορεί να χρησιμεύσει ως αρχή ή τέλος.

Το ότι ο χρόνος είναι απόλυτος σημαίνει ότι είναι ανεξάρτητος του χώρου, δηλαδή δεν εξαρτάται από τη θέση στην οποία μετρείται. Ο χρόνος μπορεί να μετρηθεί με τη βοήθεια των διαδοχικών θέσεων κάποιου σώματος. Π.χ. η ημερήσια περιστροφή της Γης μπορεί να ληφθεί σαν μία τυπική κίνηση για την μέτρηση του χρόνου.

Η έννοια του υλικού σημείου ή σωματίου έχει δοθεί στο Κεφάλαιο 1.

## 2.2 Αξιώματα της Μηχανικής

Γνωρίζουμε ότι τα αξιώματα είναι προτάσεις, που δεν αποδεικνύονται και στα οποία στηρίζεται μια επιστήμη. 'Ετσι και στη Μηχανική υπάρχουν αξιώματα, βάσει των οποίων αναπτύσσεται η επιστήμη της Μηχανικής.

'Ενα σύνολο αξιωμάτων της Μηχανικής είναι τα αξιώματα του Νεύτωνα (1642-1727) με τα οποία αναπτύσσεται η Νευτώνεια Μηχανική. Υπάρχουν επίσης και άλλα αξιώματα, που έχουν θέσει άλλοι επιστήμονες και έχουν δημιουργήσει άλλες Μηχανικές.

## 2.3 Αξιώματα του Νεύτωνα

Η Νευτώνεια Μηχανική στηρίζεται σε τέσσερα αξιώματα, που μερικώς διατυπώθηκαν από τον Αριστοτέλη (384-322 π.Χ.) το Leonardo Da Vinci (1452-1519) και το Galileo (1564-1642). Την τελική μορφή έλαβαν από του Νεύτωνα στο βιβλίο "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica". Αυτά είναι τα εξής :

1ο Αξίωμα : Κάθε υλικό σημείο παραμένει σε κατάσταση ηρεμίας ή ευθύγραμμης ισοταχούς (ομαλής) κίνησης, εκτός αν εξαναγκάζεται από δύναμη να αλλάξει την κινητική του κατάσταση.

2ο Αξίωμα : Η μεταβολή της ορμής υλικού σημείου ως προς το χρόνου ισούται με τη δύναμη που ασκείται πάνω σ'αυτό.

(Ορμή ή γραμμική ορμή ή ποσότητα κίνησης υλικού σημείου λέγεται το διάνυσμα $\vec{p}=m\vec{\upsilon}$ , δηλαδή το γινόμενο της μάζας επί την ταχύτητα του υλικού σημείου).

3ο Αξίωμα : Οι δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ δύο υλικών σημείων είναι ίσες σε μέγεθος, έχουν αντίθετη φορά και ενεργούν πάνω στην ευθεία, που συνδέει τα υλικά σημεία.

4ο Αξίωμα : Οι δυνάμεις προστίθενται σύμφωνα με τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

Το πρώτο αξίωμα λέει ότι ένα υλικό σημείο δεν μπορεί μόνο του να αλλάξει την κινητική κατάσταση. Αντίθετα θέλει να τη διατηρήσει. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται αδράνεια και το πρώτο αξίωμα "Νόμος της αδράνειας".

Εάν με $\vec{F}$ συμβολίσουμε τη δύναμη που σκείται στο υλικό σημείο, το δεύτερο αξίωμα διατυπώνεται μαθηματικώς με τη μορφή

$$\frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} = \vec{F} \quad . \tag{1}$$

Εάν η μάζα του υλικού σημείου δεν μεταβάλλεται κατά την κίνηση, η εξίσωση (1) γράφεται

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}$$

ή

$$m\vec{\dot{\upsilon}} = \vec{F} \quad (2)$$

ή

$$m\vec{\alpha} = \vec{F},$$

όπου $\vec{\alpha}$ είναι η επιτάχυνση του υλικού σημείου.

Η εξίσωση (2) αποτελεί τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής, μέσω του οποίου, το αίτιο (δύναμη) συνδέεται ποσοτικά με το αποτέλεσμα (επιτάχυνση). Η μορφή (2) ονομάζεται και "Νόμος της επιτάχυνσης" ή θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής".

Δεν πρέπει η (2) να υποβιβαστεί σε απλό ορισμό της δύναμης. Αντίθετα, η δύναμη πρέπει να θεωρηθεί ως βασική έννοια της Φυσικής. Ίσως θα μπορούσαμε να πούμε, ότι δύναμη είναι αυτό που προκαλεί την παραμόρφωση ενός ελατηρίου. Πάντως το βασικό για ένα φυσικό μέγεθος δεν είναι να δώσουμε τον ακριβή ορισμό του αλλά να μπορούμε να το μετρήσουμε με ακρίβεια. Αυτό συμβαίνει με τη δύναμη.

Το πρώτο αξίωμα περιέχεται ως μερική περίπτωση στο δεύτερο αξίωμα. Πράγματι, αν $\vec{F}=0$, από την εξίσωση (2) προκύπτει $\vec{\alpha}=0$ ή $\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=0$. Άρα $\vec{\upsilon}=\vec{c}_1$=σταθερό διάνυσμα. Είναι λοιπόν φυσικό να τεθεί το ερώτημα. Γιατί ο Νεύτωνας διατύπωσε αυτό σαν ξεχωριστό αξίωμα; Για να απαντήσουμε σκεφτόμαστε ως εξής:

Το περιεχόμενο των αξιωμάτων του Νεύτωνα έχει νόημα, αν δοθεί το σύστημα αναφοράς. Συνεπώς, όταν αναφερόμαστε στο 1ο αξίωμα έχουμε ήδη ορίσει το σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο ηρεμεί ή κινείται ομαλά το υλικό σημείο που εξετάζουμε. Τότε το υλικό σημείο ή δεν δέχεται καμμία δύναμη ή συνολικά οι δυνάμεις, που ενεργούν πάνω σε αυτό έχουν συνισταμένη μηδέν (Η ύπαρξη συνισταμένης εξασφαλίζεται από το 4ο αξίωμα).

Αν π.χ. υλικό σημείο κινείται ομαλά ως προς σύστημα αναφοράς στερεωμένο στη Γη, δεν θα κινείται ομαλά ως προς σύστημα αναφοράς στερεωμένο στον Ήλιο, λόγω της κίνησης της Γης ως προς τον Ήλιο. Άρα, αν το αξίωμα ισχύει ως προς το ένα σύστημα αναφοράς, δεν ισχύει ως προς το άλλο. Για να ξεπεραστούν τέτοια εμπόδια, δεχόμαστε ότι υπάρχει ακίνητο σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο ισχύει το 1ο αξίωμα. Το σύστημα αυτό ονομάζεται "αδρανειακό σύστημα".

Στο αδρανειακό σύστημα ισχύουν όλα τα αξιώματα του Νεύτωνα.

Αποδεικνύεται ότι εάν ένα σύστημα είναι αδρανειακό, τότε και κάθε άλλο σύστημα, που κινείται ευθύγραμμα και ομαλά ως προς αυτό, ή είναι ακίνητο συμπεριφέρεται ως αδρανειακό. Επομένως, ισχύουν και στο άλλο τα αξιώματα του Νεύτωνα. Αυτό είναι γνωστό σαν "Αρχή της Σχετικότητας του Γαλιλαίου".

Το 3ο αξίωμα είναι γνωστό ως "Νόμος της δράσης και αντίδρασης". Εάν έχουμε δύο υλικά σημεία, η δύναμη που ασκεί το πρώτο στο δεύτερο λέγεται "δράση" και είναι ίση και αντίθετη προς τη δύναμη που ασκεί το δεύτερο στο πρώτο και λέγεται "αντίδραση". Οι δυνάμεις ενεργούν στην ίδια ευθεία.

Πρέπει να σημειωθεί ότι υπάρχουν περιπτώσεις (π.χ. στον ηλεκτρομαγνητισμό) όπου η δράση και η αντίδραση δεν ενεργούν στην ίδια ευθεία.

Το 4ο αξίωμα θα μπορούσε αμέσως να θεωρηθεί αυτονόητο, επειδή οι δυνάμεις, όπως προκύπτει από τη σχέση (1) είναι διανύσματα. Συνεπώς, πρέπει να προστίθενται κατά τα γνωστά. Στο βάθος όμως κρύβεται, όπως παρατήρησε ο Mach, μία πολύ σημαντική και αξιωματικής φύσης αρχή. Η αρχή αυτή είναι γνωστή ως "αρχή της ανεξαρτησίας των δυνάμεων" και λέει ότι η παρουσία της μιας δύναμης δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα της άλλης.

Στα επόμενα θα θεωρούμε ότι το σύστημα στο οποίο αναφερόμαστε είναι αδρανειακό. Εάν πάρουμε ένα σύστημα πάνω στη Γη, δεν είναι αδρανειακό. Όμως για πρακτικούς λόγους μπορεί να θεωρηθεί ως αδρανειακό, στις περισσότερες περιπτώσεις.

Η μάζα κατά τη διάρκεια της κίνησης θεωρείται σταθερή. Οι δυνάμεις θεωρούνται ότι είναι πεπερασμένες και ενεργούν σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα.

## 2.4 Εξισώσεις κίνησης υλικού σημείου σε Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων - Ολοκληρώματα της κίνησης.

Ο νόμος της επιτάχυνσης γράφεται, ως γνωστό

$$m\vec{\alpha} = \vec{F} \tag{1}$$

ή

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) \ . \tag{2}$$

Από τη διαφορική εξίσωση (2) μπορεί να προσδιορισθεί το διάνυσμα θέσης $\vec{r}=\vec{r}(t)$, δηλαδή η κίνηση ενός υλικού σημείου συναρτήσει του χρόνου $t$, όταν το υλικό σημείο υφίσταται την επίδραση δυνάμεων, των οποίων η συνισταμένη είναι $\vec{F}$.

Με τον συμβολισμό

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) \tag{3}$$

εκφράζουμε ότι οι δυνάμεις που επιδρούν στο υλικό σημείο, μπορούν να εξαρτώνται γενικά τόσο από τη θέση $\vec{r}$ όσο και από την ταχύτητα $\dot{\vec{r}}=\vec{\upsilon}$ του υλικού σημείου και ίσως εκπεφρασμένα από το χρόνο $t$. Η $\vec{F}$ δεν μπορεί να είναι συνάρτηση της επιτάχυνσης, διότι δεν θα ίσχυε το 4º αξίωμα, που στην ουσία μας λέει ότι υπάρχει ανεξαρτησία των δυνάμεων.

Στο ορθογώνιο (Καρτεσιανό) σύστημα συντεταγμένων η (2) λαμβάνει τη μορφή,

$$m\ddot{x}\vec{x}_0+m\ddot{y}\vec{y}_0+m\ddot{z}\vec{z}_0 = F_x\vec{x}_0+F_y\vec{y}_0+F_z\vec{z}_0 \ . \tag{4}$$

όπου

$$\vec{\alpha} = \ddot{x}\vec{x}_0+\ddot{y}\vec{y}_0+\ddot{z}\vec{z}_0 \ , \quad \boxed{\vec{F} = F_x\vec{x}_0+F_y\vec{y}_0+F_z\vec{z}_0} \ .$$

$F_x(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t) = m\cdot\ddot{x}$

Από την (4) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t) \ , \\ m\ddot{y} &= F_y(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t) \ , \\ m\ddot{z} &= F_z(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t) \ . \end{aligned} \tag{5}$$

Ολοκληρώνοντας το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (5) μπορούμε να βρούμε την κίνηση του υλικού σημείου, δηλαδή τα $x=x(t)$ , $y=y(t)$ και $z=z(t)$.

Κατά την ολοκλήρωση του συστήματος (5) θα προκύψουν έξι αυθαίρετες σταθερές, ο προσδιορισμός των οποίων γίνεται μέσω αρχικών συνθηκών.

Επειδή το σύστημα (5) πρακτικά είναι δύσκολο να λυθεί, πολλές φορές κάνουμε βήματα προς την ολοκλήρωση, βρίσκοντας σχέσεις της μορφής

$$f(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t) = c \qquad (c=\sigma\tau\alpha\theta.) \ , \tag{6}$$

που πληρούνται, εκ ταυτότητας, από τις συντεταγμένες $(x,y,z)$ και τις συνιστώσες $(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ της ταχύτητας του υλικού σημείου.

Κάθε σχέση της μορφής (6) λέγεται "πρώτο ολοκλήρωμα της κίνησης".

Εάν η συνάρτηση $f$ δεν εξαρτάται άμεσα από το χρόνο $t$ , δηλαδή,

$$f(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = c \qquad (c=\sigma\tau\alpha\theta.) \ , \tag{7}$$

η (7) λέγεται "σταθερά της κίνησης".

Ο μεγαλύτερος αριθμός "πρώτων ολοκληρωμάτων", που μπορούμε να έχουμε είναι έξι.

Δηλαδή,

$$\begin{aligned}
f_1(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t) &= c_1 \\
f_2(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t) &= c_2 \\
f_3(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t) &= c_3 \\
f_4(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t) &= c_4 \\
f_5(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t) &= c_5 \\
f_6(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t) &= c_6 \ ,
\end{aligned} \tag{8}$$

όπου $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ και $c_6$ σταθερές.

Εάν λύσουμε το σύστημα (8) θα βρούμε ,

$$\begin{aligned}
x &= x(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,t)\\
y &= y(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,t)\\
z &= z(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,t)\\
\dot{x} &= \dot{x}(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,t)\\
\dot{y} &= \dot{y}(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,t)\\
\dot{z} &= \dot{z}(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,t)\ .
\end{aligned} \tag{9}$$

Ο προσδιορισμός των σταθερών θα γίνει μέσω των αρχικών συνθηκών.

## 2.5 Αρχή διατήρησης της ορμής

Ο θεμελιώδης νόμος που καθορίζει την κίνηση του υλικού σημείου είναι

$$m\vec{\alpha} = \vec{F} \quad ή \quad m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} \quad ή \quad \frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} = \vec{F}\ . \tag{1}$$

Εάν $\vec{F}=0$ , από την (1) προκύπτει,

$$\frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} = 0 \iff m\vec{\upsilon} = \vec{c} \iff \vec{p} = \vec{c}\ , \tag{2}$$

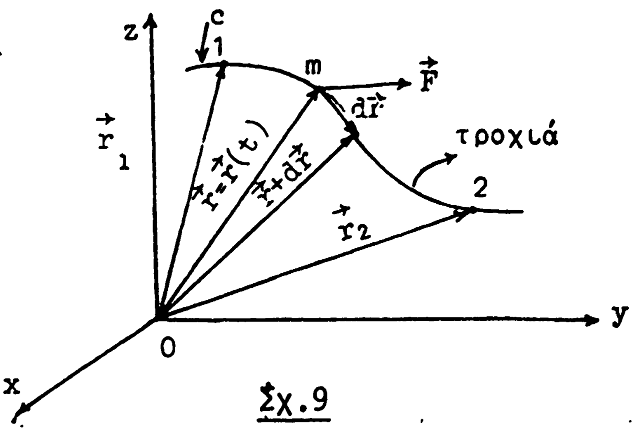
όπου $\vec{c}$ = σταθερό διάνυσμα.

Καταλήγουμε επομένως στο συμπέρασμα ότι, εάν σ' ένα υλικό σημείο δεν ενεργεί δύναμη, η ορμή παραμένει σταθερή. Το συμπέρασμα αυτό είναι γνωστό ως "αρχή διατήρησης της ορμής" ή "αρχή διατήρησης της γραμμικής ορμής".

Η σχέση (2) δίνει τρεις σταθερές της κίνησης.

## 2.6 Έργο δύναμης - Κινητική ενέργεια - Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας.

Θεωρούμε υλικό σημείο μάζας m που διαγράφει τροχιά c : $\vec{r}=\vec{r}(t)$ (Σχ.9). Όταν το υλικό σημείο μετατοπίζεται κατά το απειροστό διάνυσμα




Σχ.9

$d\vec{r}$ ονομάζουμε απειροστό έργο dW της δύναμης $\vec{F}$, την ποσότητα

$$\boxed{dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}} . \tag{1}$$

Το ολικό έργο W, που "παράγει" η δύναμη $\vec{F}$, όταν το υλικό σημείο πηγαίνει από την θέση 1 στη θέση 2 είναι

$$\boxed{W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}} , \tag{2}$$

όπου $\vec{r}_1$ είναι το αρχικό διάνυσμα θέσης και $\vec{r}_2$ το τελικό διάνυσμα θέσης του υλικού σημείου.

Επειδή

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \quad \text{και} \quad \vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} , \tag{3}$$

η (2) λαμβάνει τη μορφή

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdot\vec{\upsilon}dt = m\int_{\vec{\upsilon}_1}^{\vec{\upsilon}_2}\vec{\upsilon}\cdot d\vec{\upsilon} = \frac{1}{2}m\int_{\vec{\upsilon}_1}^{\vec{\upsilon}_2} d(\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon}) =$$

$$= \frac{1}{2}\, m \left[\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon}\right]_{\vec{\upsilon}_1}^{\vec{\upsilon}_2} = \frac{1}{2}\, m\vec{\upsilon}_2\cdot\vec{\upsilon}_2 - \frac{1}{2}\, m\vec{\upsilon}_1\cdot\vec{\upsilon}_1 = \frac{1}{2}\, m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}\, m\upsilon_1^2 ,$$

όπου $\vec{\upsilon}_1$ είναι η ταχύτητα του υλικού σημείου στη θέση 1 και $\vec{\upsilon}_2$ είναι η ταχύτητά του στη θέση 2. Επίσης, $|\upsilon_1|$ είναι το μέτρο της ταχύτητας στη θέση 1 και $|\upsilon_2|$ είναι το μέτρο της ταχύτητας στη θέση 2.

Η ποσότητα $\boxed{T = \frac{1}{2} m\, \upsilon^2}$ ονομάζεται κινητική ενέργεια του υλικού σημείου όταν αυτό βρίσκεται στην τυχούσα θέση $\vec{r}$, όπου έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ και μέτρο ταχύτητας $|\upsilon|$.

Λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό της κινητικής ενέργειας, η (4) γράφεται

$$\boxed{W = T_2 - T_1 ,} \qquad (5)$$

όπου $T_2$ είναι η κινητική ένεργεια του υλικού σημείου στη θέση 2 και $T_1$ η κινητική του ενέργεια στη θέση 1. Καταλήγουμε επομένως στο συμπέρασμα ότι " η μεταβολή της κινητικής ενέργειας υλικού σημείου μεταξύ των θέσεων 2 και 1 ισούται με το έργο που παράγεται ή καταναλώνεται από τη δύναμη που ασκείται στο υλικό σημείο κατά τη μετάβασή του από τη θέση 1 στη θέση 2".

Το συμπέρασμα αυτό είναι γνωστό ως "θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας".

## 2.6α Ισχύς

Ο ρυθμός με τον οποίο παράγεται το έργο πάνω σ'ένα υλικό σημείο λέγεται ισχύς. Συμβολίζεται με $P$ και ισούται με $P = \frac{dW}{dt}$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του απειροστού έργου προκύπτει ότι

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{\upsilon} .$$

## 2.7 Συντηρητικές δυνάμεις - Δυναμικό ή Δυναμική Ενέργεια.

Υποθέτουμε ότι η δύναμη $\vec{F}$ είναι συνάρτηση μόνο της θέσης. Η δύναμη $\vec{F}$ ονομάζεται συντηρητική, εάν υπάρχει συνάρτηση $V=V(x,y,z)$ , τέτοια ώστε

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}\,,\qquad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}\,,\qquad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}\,,\qquad \text{ή}\quad \vec{F} = -\nabla V\,, \tag{1}$$

όπου $\vec{F} = F_x\vec{x}_0+F_y\vec{y}_0+F_z\vec{z}_0$ . Η συνάρτηση $V$ ονομάζεται Δυναμικό ή Δυναμική ενέργεια και εξαρτάται μόνο από τη θέση.

'Οταν πληρούται η σχέση (1), δηλαδή η $\vec{F} = -\nabla V$ , τότε ισχύει $\nabla\times\vec{F}=0$ . Το πεδίο δυνάμεων $\vec{F}$ , που ικανοποιεί τη σχέση $\nabla\times\vec{F}=0$ , λέγεται "αστρόβιλο".

Θα αποδείξουμε ότι, εάν το πεδίο δυνάμεων $\vec{F}$ είναι συντηρητικό, τότε είναι και αστρόβιλο. Πράγματι :

$$\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{x}_0 - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\vec{y}_0 + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{z}_0 = \underbrace{\left(-\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial z\partial y}\right)}_{=0}\vec{x}_0 - \underbrace{\left(-\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial z\partial x}\right)}_{=0}\vec{y}_0 + \underbrace{\left(-\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial y\partial x}\right)}_{=0}\vec{z}_0 = 0\,. \tag{2}$$

Ισχύει, επίσης το αντίστροφο, δηλαδή όταν $\nabla\times\vec{F}=0$ τότε υπάρχει συνάρτη~~ση V τέτοια ώστε $\vec{F}=-\nabla V$ ..~~

~~Η σχέση (1), σε κυλινδρι~~κές συντεταγμένες λαμβάνει τη μορφή,

$$F_r = -\frac{\partial V}{\partial r}\ , \quad F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\ , \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}\ ,$$

όπου

$$V = V(r,\theta,z) \quad \text{και} \quad \vec{F} = F_r\vec{r}_0 + F\vec{\theta}_0 + F_z\vec{z}_0\ .$$

Σε σφαιρικές συντεταγμένες, η (1) λαμβάνει τη μορφή,

$$F_r = -\frac{\partial V}{\partial r}\ , \quad F_\varphi = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\ , \quad F_\theta = -\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial V}{\partial \theta}\ , \qquad (4)$$

όπου

$$V = V(r,\theta,\varphi) \quad \text{και} \quad \vec{F} = F_r\vec{r}_0 + F_\varphi\vec{\varphi}_0 + F_\theta\vec{\theta}_0\ .$$

## 2.8 Έργο συντηρητικών δυνάμεων - Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.

Γνωρίζουμε, από την παράγραφο (2.6) ότι

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = T_2 - T_1\ , \qquad (1)$$

όπου

$$\vec{r}_1 = x_1\vec{x}_0 + y_1\vec{y}_0 + z_1\vec{z}_0 \quad \text{και} \quad \vec{r}_2 = x_2\vec{x}_0 + y_2\vec{y}_0 + z_2\vec{z}_0\ .$$

Εάν η δύναμη $\vec{F}$ είναι συντηρητική, τότε σύμφωνα με τον ορισμό της

$$\boxed{\vec{F} = -\nabla V} \qquad (2)$$

όπου

$$V = V(x,y,z)\ .$$

● Λαμβάνοντας υπόψη ότι $d\vec{r} = dx\vec{x}_0 + dy\vec{y}_0 + dz\vec{z}_0$ και την (2), το πρώτο μέλος της (1) γίνεται

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 (F_x\vec{x}_0+F_y\vec{y}_0+F_z\vec{z}_0)\cdot(dx\vec{x}_0+dy\vec{y}_0+dz\vec{z}_0) =$$

$$= \int_1^2 (F_x dx+F_y dy+F_z dz) = -\int_1^2 (\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy+\frac{\partial V}{\partial z}dz) =$$

$$= -\int_1^2 dV = -\left[V\right]_1^2 = -V(2)+V(1) \equiv -V(x_2,y_2,z_2)+V(x_1,y_1,z_1). \quad (3)$$

Το συμπέρασμά μας είναι ότι όταν η δύναμη είναι συντηρητική, το έργο εξαρτάται από τα σημεία 1 και 2 και όχι από το δρόμο που θα ακολουθήσει το υλικό σημείο. Εξισώνοντας την (3) με το δεύτερο μέλος της (1) λαμβάνουμε

$$-V(x_2,y_2,z_2)+V(x_1,y_1,z_1) = T_2-T_1 ,$$

δηλαδή

$$\boxed{T_1+V(x_1,y_1,z_1) = T_2+V(x_2,y_2,z_2)} \quad (4)$$

Από την (4) συμπεραίνουμε ότι, "σε δύο τυχαίες θέσεις, το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας παραμένει σταθερό".

Μηχανική ενέργεια $E$ ονομάζουμε το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας ($E=T+V$).

Καταλήγουμε επομένως στο συμπέρασμα ότι, η μηχανική ενέργεια ενός υλικού σημείου, σε συντηρητικό πεδίο δυνάμεων, παραμένει σταθερή

$$\boxed{\frac{1}{2}m\upsilon^2+V = E = \sigma\tau\alpha\theta.} \quad (5)$$

Το συμπέρασμα αυτό είναι γνωστό ως "αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας".

Η σχέση (5) είναι μια σταθερά της κίνησης.

Επίσης, από τη σχέση (3), συμπεραίνουμε ότι, εάν η δύναμη που επιδρά στο υλικό σημείο είναι συντηρητική, τότε το έργο κατά μήκος μιας οποιασδήποτε κλειστής καμπύλης ισούται με το μηδέν.

Πράγματι

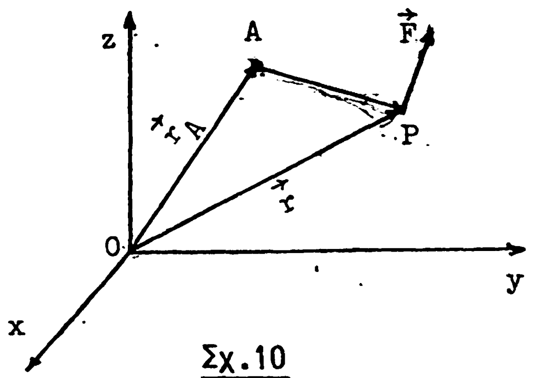
$$W = -V(x_2,y_2,z_2)+V(x_1,y_1,z_1) = 0 \;,$$

επειδή

$$V(x_1,y_1,z_1) \equiv V(x_2,y_2,z_2) .$$

## 2.9 Ροπή δύναμης - Στροφορμή - θεώρημα μεταβολής της στροφορμής - Αρχή διατήρησης της στροφορμής.

Έστω $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης του υλικού σημείου P πάνω στο οποίο επιδρά η δύναμη $\vec{F}$. Εάν $\vec{r}_A$ είναι το διάνυσμα θέσης ενός σημείου A




Σχ.10

του χώρου (Σχ.10), ονομάζουμε ροπή της δύναμης $\vec{F}$, ως προς το σημείο A, το εξωτερικό γινόμενο $(\vec{r}-\vec{r}_A)\times\vec{F}$. Επομένως η ροπή είναι διανυσματικό μέγεθος. Συνήθως συμβολίζεται με $\vec{M}$. Άρα

$$\vec{M} = (\vec{AP})\times\vec{F} = (\vec{r}-\vec{r}_A)\times\vec{F} \;. \tag{1}$$

Όταν το σημείο A ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων O, τότε

$$\vec{M} = (\vec{r}\times\vec{F}) \;. \tag{2}$$

Θεωρούμε ότι το υλικό σημείο P, με μάζα m, έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}$. Ονομάζουμε "στροφορμή" ή "γωνιακή ορμή" ή "ορμοροπή" του υλικού σημείου

$M = (r-r_A)\times F \rightsquigarrow$ ροπη, Ορμή $= p = m\cdot u$

Στροφορμή $= L = (r - r_A)\times p = (r - r_A)\times m u$

P , ως προς το σημείο A , το εξωτερικό γινόμενο $(\vec{r}-\vec{r}_A)\times\vec{p}$ , όπου $\vec{p}$ η ορμή του υλικού σημείου $(\vec{p}=m\vec{\upsilon})$ .

Επομένως η στροφορμή είναι διανυσματικό μέγεθος. Συνήθως συμβολίζεται με $\vec{L}$ . Άρα,

$$\vec{L} = (\vec{AP})\times\vec{p} = (\vec{r}-\vec{r}_A)\times\vec{p} \quad ή \quad \vec{L} = (\vec{r}-\vec{r}_A)\times m\vec{\upsilon} \; . \qquad (3)$$

Όταν το σημείο A ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων O , τότε

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} \quad ή \quad \vec{L} = \vec{r}\times m\vec{\upsilon} \; . \qquad (4)$$

O θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής για το υλικό σημείο P είναι

$$\boxed{\dot{\vec{p}} = \vec{F}} \; . \qquad (5)$$

Από την (5) προκύπτει

$$\vec{r}\times\dot{\vec{p}} = \vec{r}\times\vec{F}$$

ή

$$\vec{r}\times\frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} = \vec{r}\times\vec{F} \; . \qquad (6)$$

H (6) γράφεται

$$\frac{d(\vec{r}\times m\vec{\upsilon})}{dt} - \frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{\upsilon} = \vec{r}\times\vec{F}$$

ή

$$\frac{d(\vec{r}\times m\vec{\upsilon})}{dt} - \vec{\upsilon}\times m\vec{\upsilon} = \vec{r}\times\vec{F} \; . \qquad (7)$$

Επειδή $\vec{\upsilon}\times m\vec{\upsilon}=0$ , η (7) δίνει

$$\frac{d(\vec{r}\times m\vec{\upsilon})}{dt} = \vec{r}\times\vec{F} \; . \qquad (8)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τους ορισμούς της στροφορμής και της ροπής της δύναμης ως προς την αρχή των αξόνων O , η (8) λαμβάνει τη μορφή $\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}$

ροπή

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M} \quad ή \quad \dot{\vec{L}}=\vec{M}} . \tag{9}$$

Βάσει της (9), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι,

" Η παράγωγος της στροφορμής υλικού σημείου, ως προς το χρόνο , ισούται με την ροπή της δύναμης που ασκείται στο υλικό σημείο".

Το συμπέρασμα αυτό είναι γνωστό ως "θεώρημα μεταβολής της στροφορμής".

Τονίζουμε πάλι ότι η στροφορμή και η ορμή λαμβάνονται ως προς την αρχή O .

Στην περίπτωση που η ροπή (ως προς O) της δύναμης $\vec{F}$ , η οποία ασκείται στο υλικό σημείο P , είναι ίση με μηδέν ($\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=0$), η (9) δίνει

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=0 . \tag{10}$$

Από την (9) προκύπτει ότι,

$$\vec{L}=\vec{C} \qquad (\vec{C}=\text{σταθ.διάνυσμα}) \tag{11}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (11) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, όταν η ροπή της δύναμης, που ενεργεί σε υλικό σημείο P , ισούται με μηδέν, η στροφορμή του υλικού σημείου παραμένει σταθερή.

Το συμπέρασμα αυτό είναι γνωστό ως "αρχή ή νόμος διατήρησης της στροφορμής".

Η σχέση (11) δίνει τρεις σταθερές της κίνησης.

## 2.5α Ώθηση δύναμης

Ονομάζουμε ώθηση $\vec{\Omega}$ της δύναμης $\vec{F}$ , που ενεργεί στο υλικό σημείο κατά το χρονικό διάστημα $[t_0,t]$ , το διανυσματικό μέγεθος που ορίζεται από το ολοκλήρωμα

$$\vec{\Omega}=\int_{t_0}^{t}\vec{F}dt . \tag{1}$$

Με τη βοήθεια του θεμελιώδη νόμου της Μηχανικής ($\dot{\vec{p}}=\vec{F}$), η (1) γράφεται

$$\vec{\Omega}=\int_{t_0}^{t}\vec{F}dt=\int_{t_0}^{t}\frac{d\vec{p}}{dt}dt=\vec{p}_t-\vec{p}_{t_0}\quad, \tag{2}$$

όπου $\vec{p}_t$ και $\vec{p}_{t_0}$ είναι το διάνυσμα της ορμής του υλικού σημείου κατά τις χρονικές στιγμές $t$ και $t_0$ αντίστοιχα.

Από τη (2) συμπεραίνουμε ότι, η μεταβολή της ορμής του υλικού σημείου στο χρονικό διάστημα $(t-t_0)$ είναι ίση με την ώθηση της δύναμης $\vec{F}$, στο ίδιο χρονικό διάστημα.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα της μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού η (2) γράφεται

$$\vec{\Omega}=\vec{F}(t^*)(t-t_0)=\vec{p}_t-\vec{p}_{t_0}\quad, \tag{3}$$

όπου

$$t^*\in[t_0,t]\quad.$$

Συνεπώς, το γινόμενο του χρονικού διαστήματος $(t-t_0)$ επί το μέσο όρο της δύναμης που ασκείται κατά το χρονικό αυτό διάστημα ισούται με την ώθηση της δύναμης.

Η έννοια της ώθησης είναι πολύ χρήσιμη σε περιπτώσεις, που η δύναμη $\vec{F}$ έχει σχετικά μεγάλο μέτρο και ασκείται στο υλικό σημείο για μικρό χρονικό διάστημα. Στις περιπτώσεις αυτές είναι ανάγκη να γνωρίζουμε τη μεταβολή της ορμής, που ισούται με την ώθηση. Η σχέση μεταξύ ορμής και ώθησης προσφέρει το πλεονέκτημα ότι δεν χρειάζεται κάποιος να γνωρίζει τον τρόπο μεταβολής της δύναμης.

Όταν η δύναμη ασκείται σε μικρό χρονικό διάστημα, τότε λέμε ότι έχουμε "κρουστικό φαινόμενο" και η ασκούμενη δύναμη λέγεται "κρουστική δύναμη".

## 2.10 Ροπή της ώθησης ή Γωνιώδης ώθηση.

Η απειροστή ώθηση $d\vec{\Omega}$, που ασκείται σε υλικό σημείο με μάζα $m$

και διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ , ισούται με $d\vec{\Omega}=\vec{F}dt$ .

Ονομάζουμε απειροστή ροπή της ώθησης $d\vec{E}$ ή γωνιώδη ώθηση, τη διανυσματική ποσότητα $d\vec{E}=\vec{r}\times d\vec{\Omega}$ ή $d\vec{E}=\vec{r}\times\vec{F}dt$ .

Το ολοκλήρωμα της απειροστής ροπής της ώθησης στο χρονικό διάστημα $[t_0,t]$ ονομάζουμε ροπή της ώθησης ή γωνιώδη ώθηση.

Η ροπή της ώθησης $\vec{E}$ είναι διανυσματικό μέγεθος, που σύμφωνα με τον ορισμό ισούται με

$$\vec{E} = \int_{t_0}^{t} \vec{r}\times\vec{F}dt \quad . \tag{1}$$

Δεδομένου ότι $\dot{\vec{p}}=\vec{F}$ η (1) γράφεται

$$\vec{E} = \int_{t_0}^{t} \vec{r}\times\dot{\vec{p}}dt = \int_{t_0}^{t} \vec{r}\times \frac{d\vec{p}}{dt}\, dt = \int_{t_0}^{t} \vec{r}\times\frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt}\, dt = (\vec{r}\times m\vec{\upsilon})-(\vec{r}_0\times m\vec{\upsilon}_0) \tag{2}$$

όπου $\vec{r},\vec{\upsilon}$ είναι το διάνυσμα θέσης και η ταχύτητα αντίστοιχα του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή $t$ και $\vec{r}_0$ , $\vec{\upsilon}_0$ είναι το διάνυσμα θέσης και η ταχύτητα την χρονική στιγμή $t_0$ .

Από την (2) συμπεραίνουμε ότι , η ροπή της ώθησης ισούται με τη μεταβολή της στροφορμής του υλικού σημείου.

## 2.11 Ισορροπία υλικού σημείου

Λέμε ότι ένα υλικό σημείο ισορροπεί, όταν η συνισταμένη των δυνάμεων $\vec{F}$ , που ασκείται πάνω σε αυτό, ισούται με μηδέν ($\vec{F}=0$).

Εάν το υλικό σημείο είναι ακίνητο, θα είναι $\dot{\vec{r}}=0$ και $\ddot{\vec{r}}=0$ . Τότε, από το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής προκύπτει ότι, $\vec{F}=0$ , δηλαδή το υλικό σημείο ισορροπεί.

Εάν το υλικό σημείο ισορροπεί, από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής προκύπτει ότι,

$$\ddot{\vec{r}} = 0 \; . \tag{1}$$

Από την (1) συμπεραίνουμε ότι

$$\vec{\upsilon} = \vec{c} \quad , \quad \vec{r} = \vec{c}t+\vec{c}_1 \tag{2}$$

όπου

$$\vec{c} = \sigma\tau\alpha\vartheta . \quad , \quad \vec{c}_1 = \sigma\tau\alpha\vartheta .$$

Από τη (2) προκύπτει ότι, εάν $\vec{c}\neq 0$ το υλικό σημείο θα κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα. Εάν $\vec{c}=0$ , τότε το υλικό σημείο θα είναι ακίνητο. Άρα, η ισορροπία ενός υλικού σημείου συνεπάγεται είτε την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση είτε την ακινησία.

Η ισορροπία ενός υλικού σημείου μπορεί να είναι ευσταθής, ασταθής και αδιάφορος.

Ορίζουμε σαν θέση ευσταθούς ισορροπίας εκείνη στην οποία, για κάθε μικρή μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας, οι δυνάμεις που ενεργούν πάνω σε αυτό τείνουν να το επαναφέρουν στη θέση ισορροπίας.

Ορίζουμε σαν θέση ασταθούς ισορροπίας εκείνη στην οποία, για κάθε μικρή μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας, οι δυνάμεις που ενεργούν πάνω σε αυτό τείνουν να το απομακρύνουν από τη θέση ισορροπίας.

Ορίζουμε σαν θέση αδιάφορης ισορροπίας εκείνη στην οποία, για κάθε μικρή μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας, οι νέες θέσεις του υλικού σημείου είναι θέσεις ισορροπίας.

Μαθηματικώς, οι ορισμοί αυτοί εκφράζονται ως εξής:

Εάν στο υλικό σημείο, που βρίσκεται σε μια θέση ισορροπίας, δοθεί μια μικρή αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ , τότε θα έχει αρχική κινητική ενέργεια $T_0= \frac{1}{2} m\upsilon_0^2$ . Εάν $\vec{\upsilon}$ είναι η ταχύτητα του υλικού σημείου σε μια γειτονική θέση, ως προς τη θέση ισορροπίας και $T= \frac{1}{2} m\upsilon^2$ η αντίστοιχη κινητική ενέργεια, τότε στην περίπτωση κατά την οποία $T<T_0$ , η θέση ισορροπίας είναι ευσταθής. Στην περίπτωση κατά την οποία $T>T_0$ , η θέση ισορροπίας είναι ασταθής. Στην περίπτωση κατά την οποία $T=T_0$ , η θέση ισορροπίας είναι αδιάφορη.

## 2.12 Αναγκαστική κίνηση

Μέχρι εδώ έχουμε εξετάσει την κίνηση ενός υλικού σημείου, που δεν είναι υποχρεωμένο να πληροί ωρισμένες συνθήκες. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι έχουμε ελεύθερη κίνηση του υλικού σημείου.

Σκοπός μας τώρα είναι να μελετήσουμε την κίνηση ενός υλικού σημείου, που είναι υποχρεωμένο να ικανοποιεί ωρισμένες συνθήκες. Έστω οι συνθήκες είναι ότι το υλικό σημείο είναι αναγκασμένο να κινείται συνεχώς πάνω σε μια καμπύλη ή γνωστή επιφάνεια. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι έχουμε αναγκαστική κίνηση του υλικού σημείου στην καμπύλη ή την επιφάνεια και οι συνθήκες λέγονται δεσμοί ή δεσμικές σχέσεις.

### Κίνηση πάνω σε γνωστή επιφάνεια

Έστω ότι, ένα υλικό σημείο μάζας $m$ κινείται πάνω στη γνωστή επιφάνεια,

$$f(x,y,z,t) = 0 \quad . \tag{1}$$

Κίνηση του υλικού σημείου πάνω στην επιφάνεια σημαίνει ότι, δεσμεύουμε το υλικό σημείο να κινείται πάνω σε αυτή. Μεταφράζοντας τη δέσμευση μπορούμε να πούμε ότι την αντικαθιστούμε με μία δύναμη που ενεργεί πάνω στο υλικό σημείο. Τη δύναμη αυτή, που επιβάλλεται στο υλικό σημείο από τη γεωμετρία του δεσμού την ονομάζουμε "δεσμική δύναμη" και τη συμβολίζουμε με $\vec{F}^{(\delta)}$. Τη συνισταμένη όλων των άλλων δυνάμεων που ενεργούν πάνω στο υλικό σημείο την ονομάζουμε "επιβεβλημένη δύναμη" και τη συμβολίζουμε με $\vec{F}^{(\varepsilon)}$. Είναι λογικό, για την περίπτωσή μας, να υποθέσουμε ότι η δεσμική δύναμη $\vec{F}^{(\delta)}$ που επιβάλλεται στο υλικό σημείο είναι κάθετη στην επιφάνεια (1), διότι εμποδίζει την κίνηση του υλικού σημείου μόνο κάθετα προς την επιφάνεια. Επομένως, η δεσμική δύναμη μπορεί να περιγραφεί από τη σχέση

$$\vec{F}^{(\delta)} = \lambda \nabla f \quad , \tag{2}$$

όπου $\lambda$ πραγματικός αριθμός.

Η δεσμική δύναμη (2) ονομάζεται και "αντίδραση" της επιφάνειας στο υλικό σημείο.

Στο υλικό σημείο ενεργεί τώρα η συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$

$$\vec{F} = \vec{F}^{(\varepsilon)}+\vec{F}^{(\delta)} \quad . \tag{3}$$

Εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής, έχουμε

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}^{(\varepsilon)}+\vec{F}^{(\delta)}$$

ή λαμβάνοντας υπόψη την (2)

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}^{(\varepsilon)}+\lambda\nabla f \quad . \tag{4}$$

Σε ορθογώνιες (Καρτεσιανές) συντεταγμένες, η (4) γράφεται

$$m(\ddot{x}\vec{x}_0+\ddot{y}\vec{y}_0+\ddot{z}\vec{z}_0) = \vec{F}_x^{(\varepsilon)}\vec{x}_0+\vec{F}_y^{(\varepsilon)}\vec{y}_0+\vec{F}_z^{(\varepsilon)}\vec{z}_0+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}\vec{x}_0+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}\vec{y}_0+ +\lambda\frac{\partial f}{\partial z}\vec{z}_0 \quad , \tag{5}$$

όπου

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{x}_0+\ddot{y}\vec{y}_0+\ddot{z}\vec{z}_0 \quad , \quad \vec{F}^{(\varepsilon)} = F_x^{(\varepsilon)}\vec{x}_0+F_y^{(\varepsilon)}\vec{y}_0+F_z^{(\varepsilon)}\vec{z}_0 \quad ,$$

$$\vec{F}^{(\varepsilon)} = \lambda\frac{\partial f}{\partial x}\vec{x}_0+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}\vec{y}_0+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}\vec{z}_0 \quad .$$

Από την (5) προκύπτει

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x^{(\varepsilon)}+\lambda\frac{\partial f}{\partial x} \quad , \\ m\ddot{y} &= F_y^{(\varepsilon)}+\lambda\frac{\partial f}{\partial y} \quad , \\ m\ddot{z} &= F_z^{(\varepsilon)}+\lambda\frac{\partial f}{\partial z} \quad . \end{aligned} \tag{6}$$

Οι εξισώσεις (6) ονομάζονται "εξισώσεις Lagrange πρώτου είδους".

Από τη λύση του συστήματος των διαφορικων εξισώσεων (6), μέσω της

(1), μπορούμε να προσδιορίσουμε την κίνηση του υλικού σημείου

$$(x = x(t)\ ,\ y = y(t)\ ,\ z = z(t))$$

και επίσης το

$$\lambda = \lambda(t)\ .$$

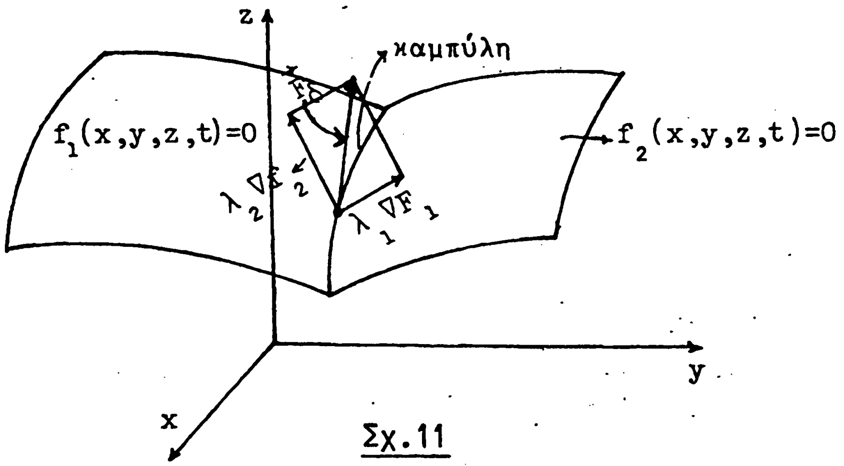
Ο υπολογισμός της αντίδρασης γίνεται από τη (2).

## Κίνηση πάνω σε γνωστή καμπύλη

Έστω ότι, ένα υλικό σημείο μάζας $m$ κινείται πάνω στη γνωστή καμπύλη (Σχ.11),

$$f_1(x,y,z,t) = 0 \quad \text{και} \quad f_2(x,y,z,t) = 0\ . \qquad (7)$$

Κίνηση του υλικού σημείου πάνω στην καμπύλη (7) σημαίνει ότι δεσμεύουμε το υλικό σημείο να κινείται πάνω σε αυτή. Μεταφράζοντας τη δέσμευση μπορούμε να πούμε ότι την αντικαθιστούμε με μια "δεσμική δύναμη" $\vec{F}^{(\delta)}$, που οφείλεται στη γεωμετρία του δεσμού. Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι εδώ η δεσμική δύναμη $\vec{F}^{(\delta)}$ είναι κάθετη στην καμπύλη (7), διότι εμποδίζει την κίνηση του υλικού σημείου μόνο κάθετα προς την καμπύλη.




Σχ.11

Επειδή η $\vec{F}^{(\delta)}$ είναι κάθετη στην καμπύλη, θα κείται στο επίπεδο των διανυσμάτων $\nabla f_1$ και $\nabla f_2$. Άρα η "δεσμική δύναμη" $\vec{F}^{(\delta)}$ μπορεί να περιγραφεί από τη σχέση

$$\vec{F}^{(\delta)} = \lambda_1 \nabla f_1 + \lambda_2 \nabla f_2 \quad , \tag{8}$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

Η δεσμική δύναμη (8) ονομάζεται και "αντίδραση" της καμπύλης στο υλικό σημείο.

Στο υλικό σημείο ενεργεί τώρα η συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$

$$\vec{F} = \vec{F}^{(\varepsilon)} + \vec{F}^{(\delta)} \quad , \tag{9}$$

όπου $\vec{F}^{(\varepsilon)}$, όπως αναφέρθηκε προηγούμενα, είναι η επιβεβλημένη δύναμη.

Εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής, έχουμε

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}^{(\varepsilon)} + \vec{F}^{(\delta)}$$

ή λαμβάνοντας υπόψη την (8)

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}^{(\varepsilon)} + \lambda_1 \nabla f_1 + \lambda_2 \nabla f_2 \ . \tag{10}$$

Σε ορθογώνιες (Καρτεσιανές) συντεταγμένες, η (10) γράφεται

$$\begin{aligned} m(\ddot{x}\vec{x}_0 + \ddot{y}\vec{y}_0 + \ddot{z}\vec{z}_0) &= F_x^{(\varepsilon)}\vec{x}_0 + F_y^{(\varepsilon)}\vec{y}_0 + F_z^{(\varepsilon)}\vec{z}_0 + \\ &+ \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x}\vec{x}_0 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y}\vec{y}_0 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z}\vec{z}_0 + \\ &+ \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}\vec{x}_0 + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}\vec{y}_0 + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}\vec{z}_0 \ . \end{aligned} \tag{11}$$

Από την (11) προκύπτει,

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x^{(\varepsilon)} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} \ , \\ m\ddot{y} &= F_y^{(\varepsilon)} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} \ , \end{aligned} \tag{12}$$

$$m\ddot{z} = F_z^{(\varepsilon)} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} \quad .$$

Οι εξισώσεις (12) ονομάζονται "εξισώσεις Lagrange πρώτου είδους".

Από τη λύση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (12), μέσω των (7), μπορούμε να προσδιορίσουμε την κίνηση του υλικού σημείου ($x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$) και επίσης τα $\lambda_1=\lambda_1(t)$, $\lambda_2=\lambda_2(t)$. Ο υπολογισμός της αντίδρασης γίνεται από την (8).

## 2.12α Κινητική τριβή ή τριβή ολίσθησης πάνω σε επιφάνεια

Η κινητική τριβή είναι μία δύναμη, που εμφανίζεται κατά την κίνηση υλικού σημείου πάνω σε επιφάνεια και αντιτίθεται στην κίνησή του.

Έχει φορά αντίθετη της ταχύτητας του υλικού σημείου, οφείλεται στις ισχυρές ενδομοριακές δυνάμεις μεταξύ υλικού σημείου και επιφανείας και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα $\vec{T}$. Είναι ίση με

$$\vec{T} = -\eta|F_k|\frac{\vec{\upsilon}}{|\upsilon|}$$

ή (1)

$$\vec{T} = -\eta|F_k|\vec{\varepsilon}_0 \; , \qquad \left(\vec{\varepsilon}_0 = \frac{\vec{\upsilon}}{|\upsilon|}\right)$$

όπου $\eta$ ο συντελεστής τριβής, $|F_k|$ το μέτρο της κάθετης δύναμης που ασκεί η επιφάνεια στο υλικό σημείο, $\vec{\upsilon}$ η ταχύτητα του υλικού σημείου, $|\upsilon|$ το μέτρο της και $\vec{\varepsilon}_0$ η διανυσματική μονάδα κατά τη φορά της ταχύτητας.

Ο συντελεστής τριβής εξαρτάται από τη φύση του υλικού σημείου και της επιφάνειας.

Εάν $f(x,y,z,t)=0$ είναι η εξίσωση της επιφάνειας, τότε η (1) γράφεται

$$\vec{T} = -\eta\,|\lambda \,\mathrm{grad} f|\frac{\vec{\upsilon}}{|\upsilon|}$$

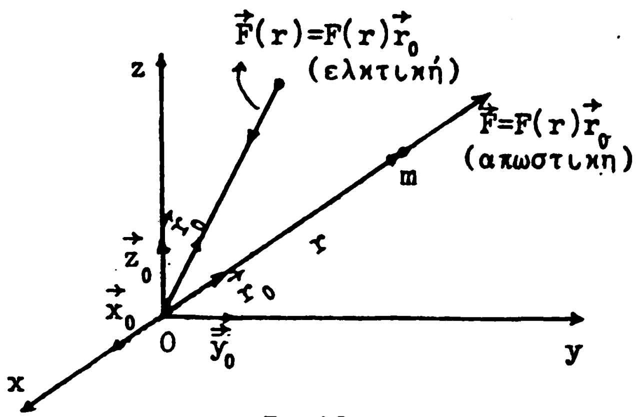
ή (2)

$$\vec{T} = -\eta\,|\lambda \,\mathrm{grad} f|\,\vec{\varepsilon}_0$$

όπου $\lambda$ πραγματικός αριθμός.

## 2.13 Κεντρικές δυνάμεις

Στην παράγραφο αυτή, θα ασχοληθούμε με μια ειδική μορφή δύναμης.




Σχ.12

Πάνω σε υλικό σημείο μάζας $m$ , ασκείται δύναμη $\vec{F}$ (Σχ.12) τέτοια ώστε:
α) Η $\vec{F}$ κείται πάντα στη διεύθυνση που συνδέει το υλικό σημείο με ένα σταθερό σημείο $O$ . Το $O$ ονομάζεται ελκτικό ή απωστικό κέντρο.
β) Η $\vec{F}$ εξαρτάται μόνο από την απόσταση $r$ του υλικού σημείου από το σταθερό σημείο $O$ . Μια τέτοια δύναμη ονομάζεται "κεντρική δύναμη".

Επομένως, οι "κεντρικές δυνάμεις" είναι της μορφής

$$\boxed{\vec{F} = F(r)\vec{r}_0} \qquad (1)$$

όπου $\vec{r}_0$ η διανυσματική μονάδα κατά τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{r}$ $(\vec{r}=r\vec{r}_0)$ .

Η κεντρική δύναμη είναι ελκτική ως προς το $O$ , αν $F(r)<0$ και απωστική, ως προς το ίδιο σημείο, αν $F(r)>0$ .

Θα προσπαθήσουμε τώρα να βρούμε τις εξισώσεις της κίνησης του υλικού σημείου, κάτω από την επίδραση κεντρικής δύναμης και τις ιδιότητες που διέπουν αυτή την κίνηση.

Η (1) μπορεί να γραφεί

$$\vec{F} = \frac{F(r)\vec{r}}{r} \qquad (2)$$

Επειδή $\vec{r} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$ , η (2), σε ορθογώνιες (Καρτεσιανές) σ
μένες, γράφεται

$$\vec{F} = F_x\vec{x}_0 + F_y\vec{y}_0 + F_z\vec{z}_0 = \frac{F(r)}{r}\,x\vec{x}_0 + \frac{F(r)}{r}\,y\vec{y}_0 + \frac{F(r)}{r}\,z\vec{z}_0 \quad . \tag{3}$$

Από την (3) προκύπτει

$$F_x = F(r)\,\frac{x}{r}\,, \quad F_y = F(r)\,\frac{y}{r}\,, \quad F_z = F(r)\,\frac{z}{r} \tag{4}$$

όπου

$$r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \ .$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (4), προκύπτει

$$\nabla\times\vec{F} = 0 \ . \tag{5}$$

Σύμφωνα με όσα αναπτύχθηκαν στην παράγραφο (2.7), θα υπάρχει συνάρτηση δυναμικού $V = V(x,y,z)$ , τέτοια ώστε

$$\vec{F} = -\nabla V \ . \tag{6}$$

Για να βρούμε εύκολα τη $V$ , μας συμφέρει να εκφράσουμε την (6) σε σφαιρικές συντεταγμένες και αυτό λόγω της μορφής των κεντρικών δυνάμεων.

Σε σφαιρικές συντεταγμένες, η κεντρική δύναμη $\vec{F}$ γράφεται

$$\vec{F} = F_r\vec{r}_0 + F_\theta\vec{\theta}_0 + F_\varphi\vec{\varphi}_0 = F(r)\vec{r}_0 + 0\vec{\theta}_0 + 0\vec{\varphi}_0 \ . \tag{7}$$

Άρα

$$F_r = F(r)\ , \quad F_\theta = 0\ , \quad F_\varphi = 0\ .$$

Θα πρέπει λοιπόν, σύμφωνα με τη σχέση (4) της §2.7 να ισχύει

$$-\frac{\partial V}{\partial r} = F(r) \tag{8}$$

$$-\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \qquad (9)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \; , \qquad (10)$$

όπου $V = V(r,\varphi,\theta)$.

Από τις (9) και (10) συμπεραίνουμε ότι $V=V(r)$.

'Αρα, η (8) γράφεται

$$F(r) = -\frac{dV}{dr} \; . \qquad (11)$$

Συνεπώς

$$V = -\int F(r)dr + c^{*} \; , \qquad (c^{*}=\sigma\tau\alpha\theta.) \qquad (12)$$

Η σταθερά, συνήθως, προσδιορίζεται μέσω τέτοιων συνθηκών που να μηδενίζεται.

'Εστω $\vec{M}$ η ροπή της $\vec{F}$ ως προς $O$ . Επειδή $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$ και $\vec{F} = \frac{F(r)\vec{r}}{r}$ έπεται ότι $\vec{M} = 0$ .

Συνεπώς, σύμφωνα με τα αποτελέσματα (11) της παραγράφου (2.9), η στροφορμή $\vec{L}$ του υλικού σημείου θα είναι σταθερά. 'Αρα

$$\vec{L} = \vec{c} \quad \text{ή} \quad \vec{r}\times m\vec{\upsilon} = \vec{c} \qquad (\vec{c}=\sigma\tau\alpha\theta.) \; . \qquad (13)$$

Αναλύουμε την (13) σε ορθογώνιες (Καρτεσιανές) συντεταγμένες

$$\vec{L} = \vec{r}\times m\vec{\upsilon} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ x & y & y \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} = \vec{c} \; , \qquad (14)$$

όπου

$$\vec{c} = c_1\vec{x}_0 + c_2\vec{y}_0 + c_3\vec{z}_0 \; .$$

Από την (14) προκύπτει

$$m(y\dot{z}-z\dot{y}) = c_1 \qquad (15)$$

$$m(z\dot{x}-x\dot{z}) = c_2 \qquad (16)$$

$$m(x\dot{y}-y\dot{x}) = c_3 \ . \qquad (17)$$

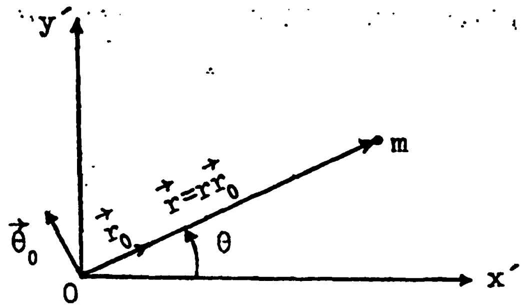
Εάν πολλαπλασιάσουμε την (15) επί $x$ την (16) επί $y$ και την (17) επί $z$ και προσθέσουμε τις εξισώσεις που προκύπτουν, παίρνουμε

$$c_1x+c_2y+c_3z = 0 \ . \qquad (18)$$

Από την (18) συμπεραίνουμε ότι, η τροχιά του υλικού σημείου, στο οποίο επιδρά "κεντρική δύναμη" βρίσκεται σε επίπεδο, που διέρχεται από το ελκτικό ή απωστικό κέντρο.

Συνεπώς, μπορούμε να μελετήσουμε την κίνηση του υλικού σημείου, που υπόκειται σε κεντρική δύναμη, στο επίπεδο που προαναφέραμε.

Έστω $Ox'y'$ το ορθογώνιο σύστημα στο οποίο μελετούμε την κίνηση




Σχ.13

(Σχ.13) και το οποίο θεωρούμε αδρανειακό. Για ευκολία χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες $(r,\theta)$.

Λαμβάνοντας υπόψη τα όσα αναπτύξαμε για την κίνηση υλικού σημείου σε πολικές συντεταγμένες, ο θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής, σε αυτές τις συντεταγμένες, γράφεται

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

ή

$$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\vec{r}_0+m(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\vec{\theta}_0 = F_r(r)\vec{r}_0+0\vec{\theta}_0 \quad , \tag{19}$$

διότι,

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\vec{r}_0+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\vec{\theta}_0 \quad , \quad \vec{F} = F_r\vec{r}_0+F_\theta\vec{\theta}_0 = F(r)\vec{r}_0+0\vec{\theta}_0 .$$

Από την (19) προκύπτει

$$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2) = F(r) \, , \tag{20}$$

$$m(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}) = 0 \, , \tag{21}$$

Συνεπώς, η μελέτη της κίνησης θα γίνει χρησιμοποιώντας το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (20) και (21).

Λαμβάνοντας υπόψη την (13) και επί πλέον ότι η κίνηση γίνεται σε επίπεδο μπορούμε να γράψουμε ότι, η στροφορμή $\vec{L}$ είναι ίση με

$$\vec{L} = L\vec{\kappa} \qquad (L \equiv C = \sigma\tau\alpha\theta.) \quad , \tag{22}$$

όπου $\vec{\kappa}$ η διανυσματική μονάδα του άξονα $Oz'$, που είναι κάθετος στο επίπεδο $Ox'y'$ .

Επειδή

$$\vec{L} = \vec{r}\times m\vec{\upsilon} \, , \tag{23}$$

η (23) γράφεται

$$L\vec{\kappa} = (r\vec{r}_0)\times m(\dot{r}\vec{r}_0+r\dot{\theta}\vec{\theta}_0)$$

ή

$$L\vec{\kappa} = mr^2\dot{\theta}\vec{\kappa} \quad . \tag{24}$$

'Αρα

$$L = mr^2\dot{\theta} \quad . \tag{25}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (25), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$r^2\dot{\theta} = \frac{L}{m} = \sigma\tau\alpha\vartheta. \quad (26)$$

διότι $L, m$ σταθερές.

Γνωρίζουμε από την παράγραφο (1.8) για την κίνηση που γίνεται στο επίπεδο ότι, η εμβαδική ταχύτητα $\frac{dE}{dt}$, είναι ίση με

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} r^2\dot{\theta} \quad . \quad (27)$$

Επειδή ισχύει $r^2\dot{\theta} = \sigma\tau\alpha\vartheta.$, προκύπτει το σημαντικό συμπέρασμα ότι, η εμβαδική ταχύτητα κατά την κεντρική κίνηση παραμένει σταθερή.

Το ότι η παράσταση $r^2\dot{\theta}$ παραμένει σταθερή, αποδεικνύεται επίσης χρησιμοποιώντας τη διαφορική εξίσωση της κίνησης (21). Αυτό προκύπτει ως εξής :

Η (21) γράφεται

$$m(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}) = 0$$

ή

$$\frac{m}{r}(2r\dot{r}\dot{\theta}+r^2\ddot{\theta}) = 0 \quad . \quad (28)$$

Από την (28) προκύπτει ότι

$$\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} = 0 \; . \quad (29)$$

Συνεπώς

$$r^2\dot{\theta} = \sigma\tau\alpha\vartheta. \quad (30)$$

Το συμπέρασμα λοιπόν (30) συμπίπτει με το συμπέρασμα (26).

Η διαφορική εξίσωση της κίνησης (20) μπορεί να απλοποιηθεί, εάν απαλείψουμε το $\dot{\theta}$, χρησιμοποιώντας την σχέση (26).

Θα έχουμε

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = F(r) \quad . \tag{31}$$

Από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης (31) μπορούμε να βρούμε το $r=r(t)$. Εάν αντικαταστήσουμε το $r=r(t)$ στη διαφορική εξίσωση (26), από τη λύση αυτής μπορούμε να βρούμε το $\theta=\theta(t)$. Συνεπώς, έχουμε προσδιορίσει την κίνηση του υλικού σημείου.

Έχοντας προσδιορίσει το $r=r(t)$ και $\theta=\theta(t)$ μπορούμε, εάν απαλείψουμε το χρόνο $t$, να βρούμε το $r=r(\theta)$, δηλαδή την τροχιά του υλικού σημείου σε πολικές συντεταγμένες.

Θα βρούμε τώρα μια διαφορική εξίσωση, της οποίας η λύση δίνει κατευθείαν την εξίσωση της τροχιάς σε πολικές συντεταγμένες.

Γνωρίζουμε ότι

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} \quad . \tag{32}$$

Αντικαθιστούμε το $\dot{\theta}$ από την (26), οπότε λαμβάνουμε

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\left(\frac{L}{mr^2}\right) . \tag{33}$$

Η (33) γράφεται

$$\dot{r} = -\frac{L}{m}\frac{d(\frac{1}{r})}{d\theta} \quad . \tag{34}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (34), προκύπτει ότι

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{L}{m}\frac{d(\frac{1}{r})}{d\theta}\right) = -\frac{L}{m}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d(\frac{1}{r})}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt} =$$

$$= -\frac{L}{m}\frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\theta^2}\dot{\theta} = -\frac{L^2}{m^2r^2}\frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\theta^2} \quad . \tag{35}$$

Αντικαθιστούμε την (35) στη διαφορική εξίσωση της κίνησης (31) και έχουμε

$$\frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\theta^2} + \frac{1}{r} + \frac{mr^2}{L^2} F(r) = 0 \quad . \tag{36}$$

Ορίζουμε μια νέα μεταβλητή $u$ με τη σχέση

$$u = \frac{1}{r} \quad , \tag{37}$$

οπότε η (36) λαμβάνει τη μορφή

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u + \frac{m}{L^2u^2} F(\frac{1}{u}) = 0 \quad . \tag{38}$$

Από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης (38) μπορούμε να βρούμε το $u=u(\theta)$. Χρησιμοποιώντας την (37), μπορούμε τελικά να βρούμε το $r=r(\theta)$.

## 2.14 Ελκτικές δυνάμεις αντιστρόφως ανάλογες του τετραγώνου της απόστασης.

Οι δυνάμεις αυτής της μορφής αποτελούν ειδική περίπτωση των κεντρικών δυνάμεων. Θα ισχύει

$$\vec{F} = -\frac{\kappa}{r^2}\vec{r}_0 \quad , \qquad (\kappa = \sigma\tau\alpha\vartheta > 0) \quad . \tag{1}$$

Η εξίσωση της τροχιάς του υλικού σημείου σε πολικές συντεταγμένες, για την περίπτωση αυτή, θα προκύψει από την λύση της διαφορικής εξίσωσης (38) της προηγούμενης παραγράφου, αρκεί να θέσουμε

$$F(r) = -\frac{\kappa}{r^2} \quad . \tag{2}$$

Αντικαθιστώντας την (2) στην (38) λαμβάνουμε

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{m\kappa}{L^2} \quad . \tag{3}$$

Η γενική λύση της (3) είναι ,

$$u = A\cos(\theta-\theta_0)+\frac{mK}{L^2} , \tag{4}$$

όπου $A,\theta_0$ σταθερές.

Αντικαθιστώντας στην (4) όπου $u=\frac{1}{r}$ λαμβάνουμε

$$r = \frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)} , \tag{5}$$

όπου

$$p = \frac{L^2}{mK} , \qquad e = \frac{AL^2}{mK} .$$

Οι σταθερές $p$ και $e$ εξαρτώνται από τις συνθήκες που έχουν δοθεί. Η εξίσωση (5) είναι εξίσωσης κωνικής τομής, που μια από τις εστίες είναι το ελκτικό κέντρο. Η σταθερά $e$ είναι η εκκεντρότητα.

Εάν $e<1$ , έχουμε ελλειπτική τροχιά.

Εάν $e=1$ , έχουμε παραβολική τροχιά.

Εάν $e>1$ , έχουμε υπερβολική τροχιά.

Εάν $e=0$ , έχουμε κυκλική τροχιά.

Η δυναμική ενέργεια για την περίπτωση αυτή, όπως προκύπτει από τη σχέση (12) της προηγούμενης παραγράφου, είναι

$$V = -\int F(r)dr+c^* = -\int\left(-\frac{K}{r^2}\right)dr+c^* = -\frac{K}{r}+c^* . \tag{6}$$

Με την συνθήκη ότι

$$V = 0 \qquad \text{όταν} \qquad r\to\infty \tag{7}$$

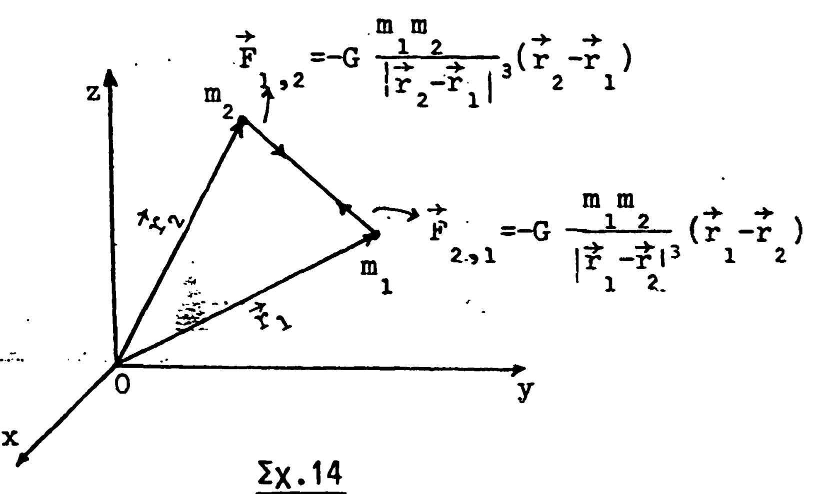
προκύπτει $c^*=0$ . Άρα

$$V = -\frac{K}{r} . \tag{8}$$

## 2.15 Παγκόσμια έλξη

Με την έννοια του υλικού σημείου είναι συνδεδεμένη και η ιδιότητα της έλξης μεταξύ των μαζών. Μέχρι τον 17ο αιώνα η μόνη μαρτυρία ύπαρξης αυτής της ιδιότητας ήταν η επιτάχυνση, που υφίστανται τα διάφορα σώματα στην επιφάνεια της Γης. Υπήρχε εικασία ότι κάποια δύναμη, που απορρέει από τον Ήλιο και εφαρμόζεται στους πλανήτες τους υποχρεώνει σε ελλειπτικές κινήσεις. Η άποψη αυτή διατυπώθηκε από τον Kepler (1571-1630), που ανακάλυψε τους νόμους κίνησης των πλανητών. Ο Kepler δεν εγνώριζε απόλυτα τις αρχές της Μηχανικής, που τις διατύπωσε αργότερα ο Νεύτωνας.

Την έκφραση της ελκτικής ιδιότητας μεταξύ δύο υλικών σημείων με μά-




Σχ.14

ζες $m_1$ και $m_2$ (Σχ.14) διατύπωσε ο Νεύτωνας. Η έκφραση αυτή αναφέρεται ως "Αρχή της παγκόσμιας έλξης" και δίνεται από την σχέση

$$\vec{F}_{1,2}=-G\frac{m_1m_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\,, \qquad (1)$$

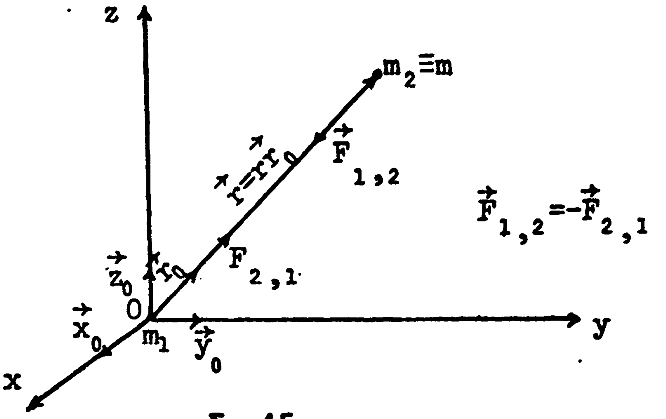
όπου $\vec{F}_{1,2}$ είναι η δύναμη, που εξασκεί το υλικό σημείο 1 με μάζα $m_1$ στο υλικό σημείο 2 με μάζα $m_2$. Η $G$ είναι σταθερά και ονομάζεται σταθερά της παγκόσμιας έλξης και $|\vec{r}_2-\vec{r}_1|$ είναι η απόσταση μεταξύ των υλικών σημείων 1 και 2.

Η αντίδραση της $\vec{F}_{1,2}$ είναι η $\vec{F}_{2,1}$. Η $\vec{F}_{2,1}$ είναι η δύναμη που εξασκεί το υλικό σημείο 2 στο υλικό σημείο 1 και ισούται με

$$\vec{F}_{1,2} = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}_1-\vec{r}_2) \quad , \qquad (2)$$

$$|\vec{r}_1-\vec{r}_2| \equiv |\vec{r}_1-\vec{r}_2| \quad .$$

Στην ειδική περίπτωση, που η μάζα $m_1$ έχει τοποθετηθεί στο σημείο O και η μάζα $m_2 \equiv m$ (Σχ.15) θα ισχύει




Σχ.15

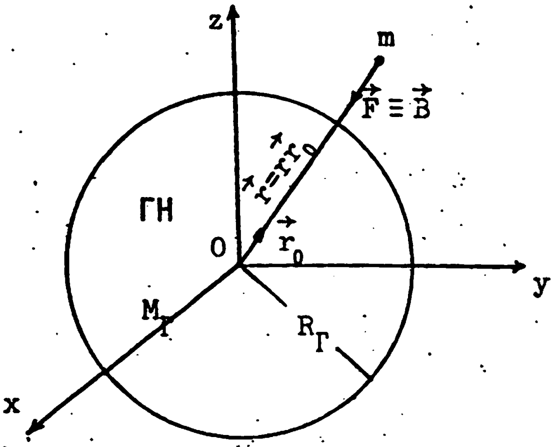
$$\vec{F}_{1,2} = -G\frac{m_1 m}{r^3}\vec{r} \qquad (3)$$

ή

$$\vec{F}_{1,2} = -G\frac{m_1 m}{r^2}\vec{r}_0 \quad . \qquad (4)$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (4) πολλές φορές με την υπόθεση ότι η μάζα της Γης κατανέμεται ομοιόμορφα, αποδεικνύεται τελικά ότι, η έλξη (Σχ.16) που δέχεται η μάζα m , που βρίσκεται έξω από τη Γη ($R_\Gamma \leq r < \infty$, $R_\Gamma$=ακτίνα Γης) ισούται με

$$\vec{F} = -G\frac{M_\Gamma m}{r^2}\vec{r}_0 \quad , \qquad (5)$$




Σχ.16

όπου $M_\Gamma$=μάζα Γης και $r$ η απόσταση του κέντρου της Γης από το υλικό σημείο μάζας $m$ . Από την (5) προκύπτει ότι , η μάζα της Γης συμπεριφέρεται σαν υλικό σημείο που βρίσκεται στο κέντρο της Γης. Η ελκτική δύναμη $\vec{F}$ λέγεται και Βάρος της μάζας $m$ του υλικού σημείου και το συμβολίζουμε με $\vec{B}$ .

Εάν διαιρέσουμε την (5) με την μάζα $m$ , παίρνουμε

$$\frac{\vec{F}}{m} = -G\frac{M_\Gamma}{r^2}\vec{r}_0 \quad . \tag{6}$$

Το διάνυσμα $\frac{\vec{F}}{m}$ συμβολίζεται συνήθως με $\vec{g}_r$ και ονομάζεται επιτάχυνση βαρύτητας της Γης

$$\vec{g}_r = -G\frac{M_\Gamma}{r^2}\vec{r}_0 \quad . \tag{7}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (7) μπορούμε να γράψουμε

$$\vec{B} = m\vec{g}_r \quad . \tag{8}$$

Όπως προκύπτει από τη σχέση (8), το βάρος δεν είναι σταθερό, διότι εξαρτάται από την απόσταση από τη κέντρο της Γης.

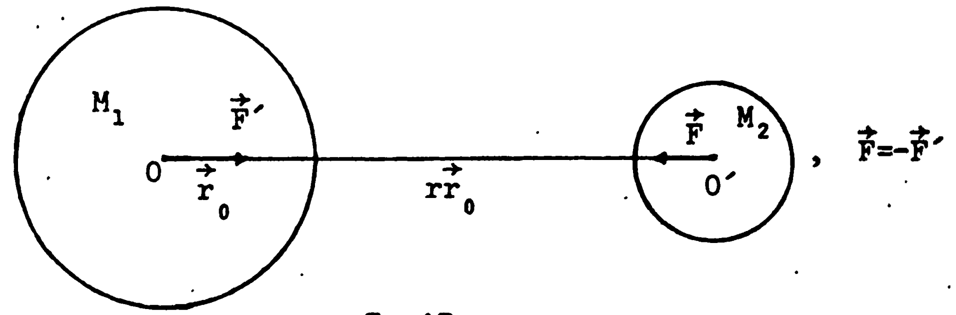
Στην περιοχή κοντά στην επιφάνεια της Γης ($r \cong R_\Gamma$) το $g_r$ θα παραμένει σταθερό και ίσο με

$$\vec{g}_{R_\Gamma} = -G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2}\vec{r}_0 \quad . \tag{9}$$

Συνήθως, το $\vec{g}_{R_\Gamma}$ συμβολίζεται με $\vec{g}(\vec{g}_{R_\Gamma} \equiv \vec{g})$ και οι σχέσεις (8) και (9) λαμβάνουν τώρα τη μορφή

$$\vec{B} = m\vec{g} \quad , \quad \vec{g} = -G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2}\vec{r}_0 \quad . \tag{10}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4) μπορούμε επίσης να αποδείξουμε ότι, η έλξη (Σχ.17) που δέχονται δύο σφαιρικές μάζες $M_1$ και $M_2$ με ομοιόμορ-




Σχ.17

φα κατανεμημένη τη μάζα τους, είναι

$$\vec{F} = -G\frac{M_1 M_2}{r^2}\vec{r}_0 = -\vec{F}' \quad , \tag{11}$$

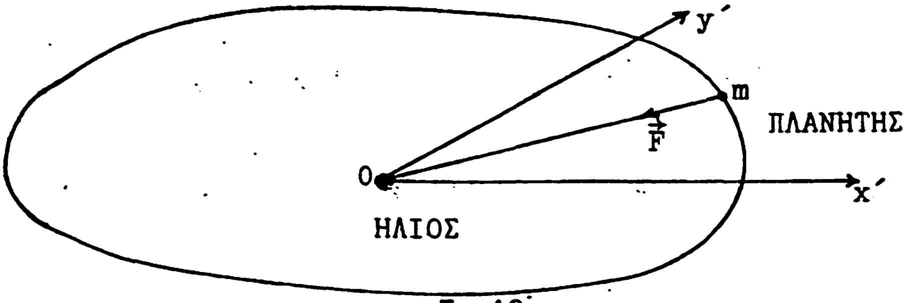
όπου $r$ η απόσταση των κέντρων των δύο σφαιρικών μαζών.

Από την (11) προκύπτει το συμπέρασμα ότι, οι δύο σφαιρικές μάζες συμπεριφέρονται σαν υλικά σημεία, που είναι τοποθετημένα στα κέντρα των σφαιρικών μαζών.

## 2.16 Νόμοι του Kepler για την κίνηση των πλανητών

Σύμφωνα με τα όσα εκθέσαμε στη προηγούμενη παράγραφο και ιδιαίτερα με το συμπέρασμα της σχέσης (11) προκύπτει ότι ο Ήλιος έλκει τους πλανήτες με δύναμη αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης των κέντρων τους.

Θεωρούμε ότι ο Ήλιος είναι ακίνητος και κατέχει τη θέση O (Σχ.18)




Σχ.18

του αδρανειακού συστήματος συντεταγμένων (Ox'y') και οι διευθύνσεις των αξόνων είναι σταθερές. Θεωρούμε επίσης ότι οι δυνάμεις που δέχεται κάθε πλανήτης από τα άλλα ουράνια σώματα παραλείπονται, σε σχέση με τη δύναμη που δέχεται από τον Ήλιο. Σύμφωνα με αυτές τις υποθέσεις, η μελέτη της κίνησης του πλανήτη ανάγεται στο πρόβλημα της παραγράφου (2.14) όπου $\kappa = GM_H m$ ($M_H$=μάζα Ήλιου, m=μάζα πλανήτου).

Ο Kepler διατύπωσε τους εξής νόμους για την κίνηση των πλανητών.

1. Οι πλανήτες κινούνται σε ελλειπτικές τροχιές με τον Ήλιο σε μία από τις εστίες.
2. Το εμβαδό που διαγράφει το διάνυσμα θέσης του πλανήτη ως προς τον Ήλιο είναι ανάλογο του χρόνου.
3. Τα τετράγωνα του χρόνου περιφοράς των πλανητών γύρω από τον Ήλιο είναι ανάλογα των κύβων των μεγάλων ημιαξόνων των τροχιών τους.

Επειδή οι Νόμοι του Kepler διατυπώθηκαν πρωτού ο Νεύτωνας διατυπώσει τα αξιώματα και το Νόμο της παγκόσμιας έλξης, θα αποδείξουμε ότι αυτοί πραγματικά ισχύουν.

Ο πρώτος Νόμος του Kepler αποδεικνύεται σύμφωνα με τα αποτελέσματα της παραγράφου (2.14).

Ο δεύτερος Νόμος του Kepler αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (26) και (27) της παραγράφου (2.13).

Πράγματι,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{L}{m} \qquad (L,m=\sigma\tau\alpha\theta.) \qquad (1)$$

Από την (1) προκύπτει

$$E = \int \frac{1}{2}\frac{L}{m}\, dt + G^{+} = \frac{1}{2}\frac{L}{m} t + C^{+} \qquad (C^{+}=\sigma\tau\alpha\theta.) \qquad (2)$$

Εάν για $t=0$ είναι $E=0$, από τη (2) προκύπτει ότι, $C^{+}=0$. Άρα

$$E = \frac{1}{2}\frac{L}{m} t \quad . \qquad (3)$$

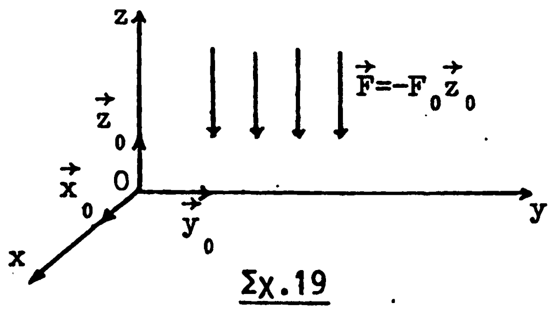
Από την (3) συμπεραίνουμε ότι το εμβαδό, που διαγράφει το διάνυσμα θέσης του πλανήτη ως προς τον Ήλιο, είναι ανάλογο της χρόνου.

Η απόδειξη του τρίτου νόμου του Kepler προκύπτει με συνδυασμό των αποτελεσμάτων των παραγράφων (2.13) και (2.14).

## 2.17 Ομογενές ή ομοιόμορφο πεδίο δυνάμεων - Ομογενές πεδίο βαρύτητας πλησίον της Γης - Δυναμική ενέργεια του πεδίου βαρύτητας πλησίον της Γης.

Ένα πεδίο δυνάμεων λέγεται ομογενές ή ομοιόμορφο, όταν η δύναμη σε οποιοδήποτε σημείο του έχει σταθερό μέτρο και φορά.

Παράδειγμα ομογενούς πεδίου δυνάμεων είναι το πεδίο της μορφής

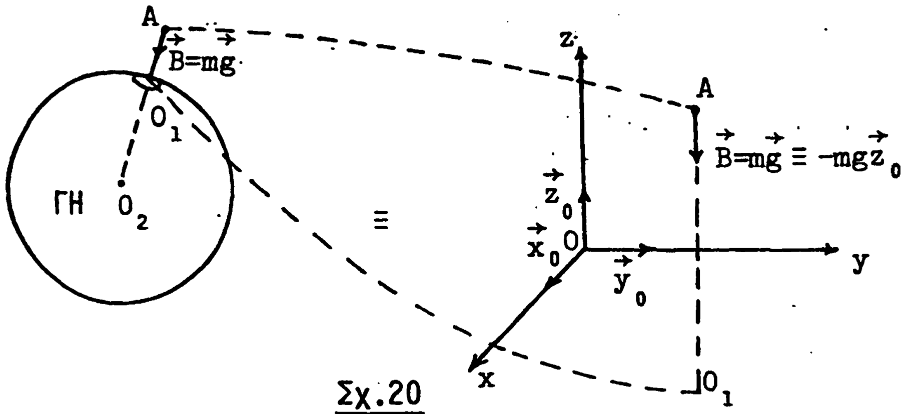



Σχ.19

$\vec{F}=-F_0\vec{z}_0$ , όπου $F_0=\sigma\tau\alpha\theta.>0$ . (Σχ.19).

Ειδική περίπτωση ομογενούς πεδίου δυνάμεων είναι το πεδίο βαρύτητας πλησίον της επιφάνειας της Γης. Λαμβάνοντας υπόψη όσα αναπτύξαμε στην παράγραφο (2.15) και ιδιαίτερα όσον αφορά το βάρος, μπορούμε να θέσουμε

$\vec{B}=-mg\vec{z}_0$ $(m,g=\sigma\tau\alpha\vartheta.>0)$ . Δηλαδή, το πεδίο βαρύτητας πλησίον της επιφάνειας της Γης είναι ομογενές (Σχ.20).




Σχ.20

(Η μικρή περιοχή στην επιφάνεια της Γης, έχει αντικατασταθεί από το επίπεδο $Oxy$ . Το ορθογώνιο (Καρτεσιανό) σύστημα $Oxyz$ είναι αδρανειακό με την προϋπόθεση ότι, δεν λαμβάνεται υπόψη η επίδραση της περιστροφής της Γης).

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\boxed{\vec{B}=-mg\vec{z}_0\equiv\vec{F}} \, , \tag{1}$$

έχουμε

$$\vec{F}=F_x\vec{x}_0+F_y\vec{y}_0+F_z\vec{z}_0 = 0\vec{x}_0+0\vec{y}_0-mg\vec{z}_0 \, .$$

Άρα

$$F_x=0 \, , \quad F_y=0 \, , \quad F_z=-mg \, . \tag{2}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (2) προκύπτει

$$\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & -mg \end{vmatrix} = 0 \, . \tag{3}$$

Άρα, σύμφωνα με όσα αναπτύχθηκαν στην παράγραφο (2.7), θα υπάρχει συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $V=V(x,y,z)$ , τέτοια ώστε

$$\vec{F} = -\nabla V \quad . \tag{4}$$

Από την (4) έπεται

$$\vec{F} \equiv \vec{B} = 0\vec{x}_0 + 0\vec{y}_0 - mg\vec{z}_0 = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{x}_0 - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{y}_0 - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{z}_0 \quad . \tag{5}$$

Από τις (2) και (5) παίρνουμε

$$0 = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad , \tag{6}$$

$$0 = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad , \tag{7}$$

$$-mg = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad . \tag{8}$$

Από τις (6) και (7) συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας $V$, είναι συνάρτηση μόνο του $z$, δηλαδή $V=V(z)$.

Άρα, η (8) γράφεται

$$-mgz = -\frac{dV}{dz} \quad . \tag{9}$$

Από την (9) προκύπτει

$$V = \int mg dz + C^* = mgz + C^* \quad . \qquad (C^* = \text{σταθ.}) \tag{10}$$

Η (10) μας δίνει τη δυναμική ενέργεια ή το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας πλησίον της επιφάνειας της Γης.

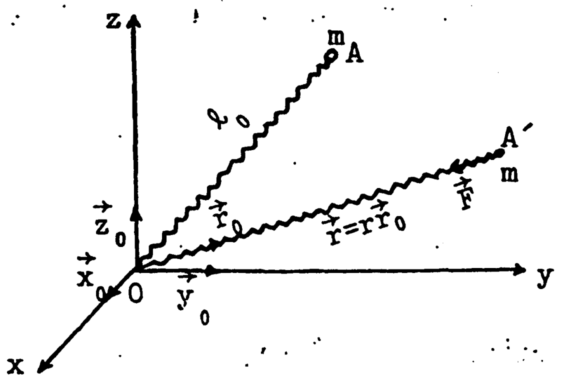
Εάν θέσουμε

$$V = 0 \quad \text{όταν} \quad z = 0 \tag{11}$$

από την (10) προκύπτει $C^*=0$. Άρα, η (10) λαμβάνει τη μορφή

$$V = mgz \quad . \tag{12}$$

## 2.18 Δύναμη ελατηρίου - Δυναμική ενέργεια ελατηρίου




Σχ.21

Θεωρούμε ένα ελατήριο πολύ μικρής μάζας, που έχει αρχικό μήκος $\ell_0$ (Σχ.21). Στην άκρη του ελατηρίου είναι στερεωμένο υλικό σημείο μάζας m. Το υλικό σημείο στη θέση A δεν δέχεται καμμία δύναμη από το ελατήριο. Όταν το υλικό σημείο βρίσκεται στη τυχούσα θέση A', πειραματικά αποδεικνύεται ότι δέχεται την επίδραση μιας δύναμης $\vec{F}$, που δίνεται από τη σχέση

$$\vec{F} = -\kappa(r-\ell_0)\vec{r}_0 \qquad (\ell_0=\sigma\tau\alpha\vartheta.) \qquad (1)$$

όπου $\kappa$=σταθ. και ονομάζεται σταθερά του ελατηρίου.

Η δύναμη της μορφής (1) είναι ειδική περίπτωση κεντρικής δύναμης, όπου το $F(r)$ είναι

$$F(r) = -\kappa(r-\ell_0) \ . \qquad (2)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (2) και την σχέση (12) της παραγράφου (2.13), η δυναμική ενέργεια V του υλικού σημείου, που οφείλεται στο ελατήριο, ισούται με

$$V = -\int F(r)dr + C^* = -\int -\kappa(r-\ell_0)d(r-\ell_0) + C^* = \frac{1}{2}\kappa(r-\ell_0)^2 + C^* \qquad (3)$$

Εάν θέσουμε

$$V = 0 \quad \text{για} \quad r = \ell_0 \tag{4}$$

προκύπτει $C^{*}=0$ .

Άρα, η δυναμική ενέργεια του υλικού σημείου, λόγω της παρουσίας του ελατηρίου, είναι

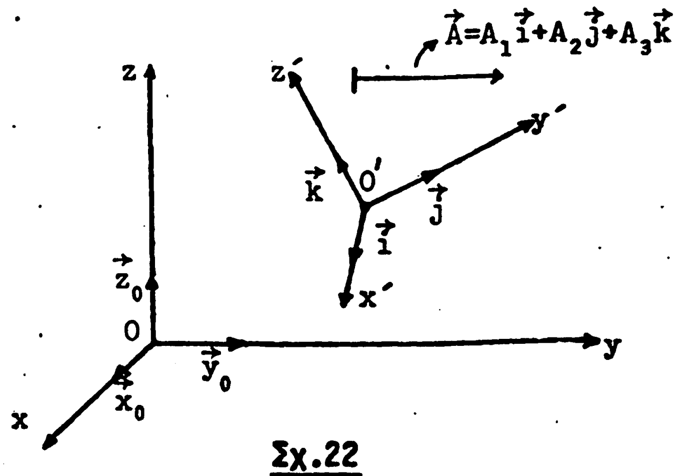
$$V = \frac{1}{2}\kappa(r-\ell_0)^2 \ , \tag{5}$$

όπου $r-\ell_0$ η μεταβολή του μήκους τους ελατηρίου.

## 2.19 Μη αδρανειακά συστήματα συντεταγμένων.

Στις προηγούμενες παραγράφους θεωρήσαμε ότι, το σύστημα συντεταγμένων στο οποίο αναφερόμαστε είναι αδρανειακό. Σε πολλές όμως περιπτώσεις δεν μπορούμε να θεωρούμε ότι το σύστημα συντεταγμένων στο οποίο αναφερόμαστε είναι αδρανειακό. Για το λόγο αυτό είναι αναγκαίο να βρούμε τις σχέσεις που συνδέουν την ταχύτητα και επιτάχυνση του υλικού σημείου σε αδρανειακό και μη αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων.

Θεωρούμε το ακίνητο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ και το κινούμενο μη αδρανειακό και ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $O'x'y'z'$. (Σχ.22).




Σχ.22

Παρατηρητής σταθερά στερεωμένος στην αρχή $O'$ του κινούμενου συστήματος $O'x'y'z'$ μετρά το διάνυσμα $\vec{A}$

$$\vec{A} = A_1\vec{i}+A_2\vec{j}+A_3\vec{k} \quad , \qquad (1)$$

όπου $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ είναι οι διανυσματικές μονάδες στο σύστημα $O'x'y'z'$.

Ορίζουμε σχετική παράγωνο ως προς το χρόνο του διανύσματος $\vec{A}$, ως προς το σύστημα $O'x'y'z'$, την ποσότητα $\frac{d\vec{A}}{dt}$ και τη συμβολίζουμε με $\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_M$,

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_M \equiv \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_1}{dt}\vec{i} + \frac{dA_2}{dt}\vec{j} + \frac{dA_3}{dt}\vec{k} \quad , \qquad (2)$$

ή

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_M = \dot{A}_1\vec{i}+\dot{A}_2\vec{j}+\dot{A}_3\vec{k} \quad . \qquad (3)$$

Εάν τώρα ζητήσουμε την παράγωγο ως προς το χρόνο του διανύσματος $\vec{A}$, ως προς το ακίνητο σύστημα $Oxyz$, τότε πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι, για παρατηρητή που κάθεται στην αρχή $O$ του συστήματος $Oxyz$ τα $\vec{i}$, $\vec{j}$ και $\vec{k}$ αλλάζουν θέση με το χρόνο. Η παράγωγος αυτή λέγεται απόλυτη παράγωγος ως προς το χρόνο και συμβολίζεται με $\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_F$.

Από την (1) έχουμε

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_F = \frac{dA_1}{dt}\vec{i}+A_1\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dA_2}{dt}\vec{j}+A_2\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dA_3}{dt}\vec{k}+A_3\frac{d\vec{k}}{dt} \quad . \qquad (4)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (2), η (4) γράφεται

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_F = \left(\frac{dA_1}{dt}\vec{i}+ \frac{dA_2}{dt}\vec{j}+ \frac{dA_3}{dt}\vec{k}\right)+A_1\frac{d\vec{i}}{dt} +A_2\frac{d\vec{j}}{dt} + A_3\frac{d\vec{k}}{dt} =$$
$$= \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_M +A_1\frac{d\vec{i}}{dt} + A_2\frac{d\vec{j}}{dt} + A_3\frac{d\vec{k}}{dt} \quad . \qquad (5)$$

Επειδή το $\vec{i}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα, θα ισχύει

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = 1 \quad . \qquad (6)$$

Από την (6) έπεται ότι

$$\frac{d(\vec{i}\cdot\vec{i})}{dt} = 0$$

ή

$$\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{i}+\vec{i}\cdot\frac{d\vec{i}}{dt} = 0 \ .$$

'Αρα

$$\vec{i}\cdot\frac{d\vec{i}}{dt} = 0 \ . \tag{7}$$

Από την (7) συμπεραίνουμε ότι, το διάνυσμα $\frac{d\vec{i}}{dt}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{i}$. Συνεπώς το διάνυσμα $\frac{d\vec{i}}{dt}$ βρίσκεται στο επίπεδο, που σχηματίζουν τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{j}$ και $\vec{k}$.

'Αρα το διάνυσμα $\frac{d\vec{i}}{dt}$ θα είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των $\vec{j}$ και $\vec{k}$, δηλαδή

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \alpha_1\vec{j}+\alpha_2\vec{k} \ . \tag{8}$$

Ομοίως προκύπτουν οι σχέσεις

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = \alpha_3\vec{k}+\alpha_4\vec{i} \ , \tag{9}$$

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \alpha_5\vec{i}+\alpha_6\vec{j} \ , \tag{10}$$

όπου $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ και $\alpha_6$ πραγματικοί αριθμοί.

Επειδή

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = 0 \ , \tag{11}$$

προκύπτει ότι

$$\frac{d(\vec{i}\cdot\vec{j})}{dt} = 0$$

ή

$$\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{j}+\vec{i}\cdot\frac{d\vec{j}}{dt} = 0 \ . \tag{12}$$

Από τις (8) και (9) παίρνουμε

$$\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{j} = \alpha_1\vec{j}\cdot\vec{j}+\alpha_2\vec{j}\cdot\vec{k} = \alpha_1 \qquad (13)$$

$$\vec{i}\cdot\frac{d\vec{j}}{dt} = \alpha_3\vec{i}\cdot\vec{k}+\alpha_4\vec{i}\cdot\vec{i} = \alpha_4 \qquad (14)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (13) και (14), η (12) δίνει

$$\alpha_1+\alpha_4 = 0 .$$

'Αρα,

$$\alpha_4 = -\alpha_1 . \qquad (15)$$

Ομοίως από την σχέση

$$\vec{i}\cdot\vec{k} = 0 ,$$

προκύπτει ότι

$$\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{k}+\vec{i}\cdot\frac{d\vec{k}}{dt} = 0 . \qquad (16)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (8) και (10), η (16) δίνει

$$\alpha_5 = -\alpha_2 . \qquad (17)$$

Τελικά από τη σχέση

$$\vec{j}\cdot\vec{k} = 0 ,$$

προκύπτει ότι

$$\frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{k}+\vec{j}\cdot\frac{d\vec{k}}{dt} = 0 . \qquad (18)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (9) και (10), η (18) δίνει

$$\alpha_6 = -\alpha_3 \,. \tag{19}$$

Επομένως, έχουμε τις σχέσεις

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \alpha_1\vec{j}+\alpha_2\vec{k} \,, \tag{20}$$

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = \alpha_3\vec{k}-\alpha_1\vec{i} \tag{21}$$

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = -\alpha_2\vec{i}-\alpha_3\vec{j} \,. \tag{22}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (20),(21) και (22) έχουμε

$$A_1\frac{d\vec{i}}{dt}+A_2\frac{d\vec{j}}{dt}+A_3\frac{d\vec{k}}{dt} = (-\alpha_1A_2-\alpha_2A_3)\vec{i}+$$

$$+(\alpha_1A_1-\alpha_3A_3)\vec{j}+(\alpha_2A_1+\alpha_3A_2)\vec{k} \,. \tag{23}$$

Η (23) μπορεί να γραφεί

$$A_1\frac{d\vec{i}}{dt}+A_2\frac{d\vec{j}}{dt}+A_3\frac{d\vec{k}}{dt} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_3 & -\alpha_2 & \alpha_1 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \,. \tag{24}$$

Θέτουμε

$$\omega_1 = \alpha_3 \,, \quad \omega_2 = -\alpha_2 \,, \quad \omega_3 = \alpha_1 \,. \tag{25}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (25), η (24) γράφεται

$$A_1\frac{d\vec{i}}{dt}+A_2\frac{d\vec{j}}{dt}+A_3\frac{d\vec{k}}{dt} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \vec{\omega}\times\vec{A} \,, \tag{26}$$

όπου $\vec{\omega}$ ,

$$\vec{\omega} = \omega_1\vec{i}+\omega_2\vec{j}+\omega_3\vec{k} \quad . \tag{26.α}$$

Η διανυσματική ποσότητα $\vec{\omega}$ ονομάζεται γωνιακή ταχύτητα του περιστρεφόμενου συστήματος, ως προς το ακίνητο σύστημα.

<u>Παρατήρηση</u>: Μπορεί να αποδειχτεί ότι για τα συστήματα συντεταγμένων $Oxyz$ και $O'x'y'z'$ για τα οποία, $O\equiv O'$ και $z\equiv z'$ ισχύει ότι $\vec{\omega}=0\vec{i}+0\vec{j}+\dot{\theta}\vec{z}_o$ όπου $\theta$ η γωνία, που σχηματίζει ο άξονας $Ox$ με τον άξονα $Ox'$ καθώς το σύστημα $Ox'y'z'$ περιστρέφεται.

Λαμβάνοντας υπόψη την (26), η (5) γράφεται

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_M + \vec{\omega}\times\vec{A} \quad . \tag{27}$$

Η (27) γράφεται

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_F = \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_M + \vec{\omega}\times\right)\vec{A} \quad . \tag{28}$$

Εάν εισάγουμε τους τελεστές

$$D_F \equiv \left.\frac{d}{dt}\right|_F \quad \text{και} \quad D_M \equiv \left.\frac{d}{dt}\right|_M \quad , \tag{29}$$

και λάβουμε υπόψη την (28), θα ισχύει μεταξύ των τελεστών η σχέση

$$D_F \equiv (D_M+\vec{\omega}\times) \quad . \tag{30}$$

θα έχουμε λοιπόν,

$$D_F\vec{A} \equiv (D_M+\vec{\omega}\times)\vec{A} = D_M\vec{A}+\vec{\omega}\times\vec{A} \quad . \tag{31}$$

Εάν στη σχέση (31) θέσουμε $\vec{A}=\vec{\omega}$ , θα πάρουμε

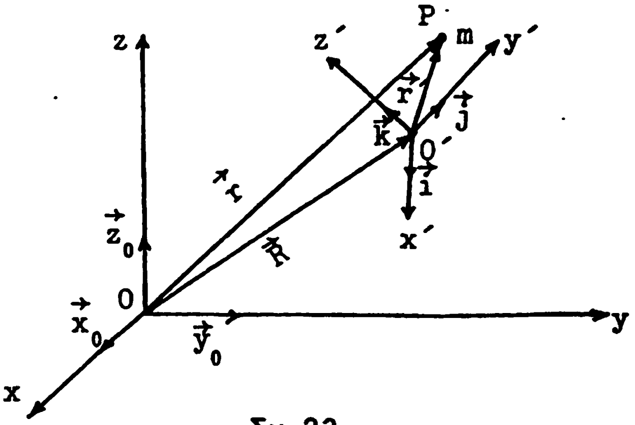
$$D_F\vec{\omega} = D_M\vec{\omega}+\overbrace{\cancel{\vec{\omega}\times\vec{\omega}}}^{=0} \quad . \tag{32}$$

Άρα

$$D_F\vec{\omega} = D_M\vec{\omega} \qquad \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_M . \tag{33}$$

Από την (33) συμπεραίνουμε ότι, η γωνιακή επιτάχυνση $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ είναι ίδια και στα δύο συστήματα συντεταγμένων.

Θεωρούμε πάλι τα δύο προηγούμενα συστήματα συντεταγμένων (Σχ.23)




Σχ.23

Υλικό σημείο P έχει διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ , ως προς το ακίνητο σύστημα Oxyz . Το ίδιο υλικό σημείο, ως προς το κινούμενο σύστημα O´x´y´z´, έχει διάνυσμα θέσης $\vec{r}\,'$ . Το διάνυσμα θέσης της αρχής του κινούμενου συστήματος, ως προς το ακίνητο, είναι $\vec{R}$ .

Σύμφωνα με το Σχ.23, θα ισχύει

$$\vec{r} = \vec{R}+\vec{r}\,' . \tag{34}$$

Η απόλυτη παράγωγος, ως προς το χρόνο, της (34)´δίνει

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\vec{R}}{dt}\right|_F + \left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right|_F . \tag{35}$$

Εάν στη σχέση (27) θέσουμε $\vec{A}=\vec{r}\,'$ , θα πάρουμε

$$\left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right|_M + \vec{\omega}\times\vec{r}\,' . \tag{36}$$

Η αντικατάσταση της (36) στην (35) παρέχει

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\vec{R}}{dt}\right|_F + \left.\frac{d\vec{r}'}{dt}\right|_M + \vec{\omega}\times\vec{r}' . \qquad (37)$$

Η (37) γράφεται επίσης ως εξής

$$\boxed{\vec{\upsilon} \equiv \vec{\upsilon}_F = \vec{\upsilon}_{O'} + \vec{\upsilon}_M + \vec{\omega}\times\vec{r}' .} \qquad (38)$$

Η σχέση (38) συνδέει την ταχύτητα του υλικού σημείου, ως προς το ακίνητο σύστημα (απόλυτη ταχύτητα) με α) την ταχύτητα της αρχής O΄ του κινούμενου συστήματος β) με την ταχύτητα του υλικού σημείου, ως προς το κινούμενο σύστημα (σχετική ταχύτητα) γ) με την γωνιακή ταχύτητα του κινούμενου συστήματος, ως προς το ακίνητο σύστημα και δ) με το διάνυσμα θέσης του υλικού σημείου ως προς το κινούμενο σύστημα.

Στον τύπο λοιπόν (8) είναι :

$\vec{\upsilon} \equiv \vec{\upsilon}_F = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_F$ = ταχύτητα του υλικού σημείου P ως προς το ακίνητο σύστημα (απόλυτη ταχύτητα του P ).

$\vec{\upsilon}_{O'} = \left.\frac{d\vec{R}}{dt}\right|_F$ = ταχύτητα της αρχής O΄ του κινούμενου συστήματος ως προς το ακίνητο (απόλυτη ταχύτητα του O΄)

$\vec{r}'$ = διάνυσμα θέσης του υλικού σημείου P ως προς το κινούμενο σύστημα.

$\vec{\upsilon}_M = \left.\frac{d\vec{r}'}{dt}\right|_M$ = ταχύτητα του υλικού σημείου P ως προς το κινούμενο σύστημα (σχετική ταχύτητα).

$\vec{\omega}$ = γωνιακή ταχύτητα του κινούμενου συστήματος ως προς το ακίνητο σύστημα.

Θα προσπαθήσουμε τώρα να βρούμε, τη σχέση που συνδέει την επιτάχυνση του υλικού σημείου P , ως προς ακίνητο σύστημα, με την επιτάχυνση του ίδιου υλικού σημείου, ως προς το κινούμενο σύστημα.

Η επιτάχυνση $\vec{\alpha}_F$ του υλικού σημείου P, ως προς το ακίνητο σύστημα (απόλυτη επιτάχυνση), δίνεται ως γνωστό από τη σχέση,

$$\vec{\alpha}_F = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\bigg|_F \ . \tag{39}$$

Η επιτάχυνση $\vec{\alpha}_M$ του υλικού σημείου P ως προς το κινούμενο σύστημα, (σχετική επιτάχυνση), δίνεται από τη σχέση

$$\vec{\alpha}_M = \frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2}\bigg|_M \ . \tag{40}$$

Χρησιμοποιώντας τους τελεστάς $D_F$ και $D_M$, οι σχέσεις (39) και (40) γράφονται

$$\vec{\alpha}_F = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\bigg|_F = D_F^2\vec{r} = D_F(D_F\vec{r}) \ . \tag{41}$$

$$\vec{\alpha}_M = \frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2}\bigg|_M = D^2{}_M\vec{r}\,' = D_M(D_M\vec{r}\,') \ . \tag{42}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την τελεστική σχέση (30) έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2}\bigg|_F &= D_F(D_F\vec{r}\,') = D_F(D_M\vec{r}\,'+\vec{\omega}\times\vec{r}\,')= \\
&= (D_M+\vec{\omega}\times)(D_M\vec{r}\,'+\vec{\omega}\times\vec{r}\,') = D_M(D_M\vec{r}\,'+\vec{\omega}\times\vec{r}\,')+\vec{\omega}\times(D_M\vec{r}\,'+\vec{\omega}\times\vec{r}\,')= \\
&= D_M^2\vec{r}\,'+D_M(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')+\vec{\omega}\times D_M\vec{r}\,'+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') = \\
&= D_M^2\vec{r}\,'+(D_M\vec{\omega})\times\vec{r}\,'+\vec{\omega}\times(D_M\vec{r}\,')+\vec{\omega}\times D_M\vec{r}\,'+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') = \\
&= D_M^2\vec{r}\,'+(D_M\vec{\omega})\times\vec{r}\,'+2\vec{\omega}\times(D_M\vec{r}\,')+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') \ .
\end{aligned} \tag{43}$$

Από την (34) είναι γνωστό ότι

$$\vec{r} = \vec{R}+\vec{r}\,' \ . \tag{44}$$

Από την (44) παίρνουμε

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\bigg|_F = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\bigg|_F + \frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2}\bigg|_F \ . \tag{45}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (41), (42) και (43), η (45) γράφεται

$$\left.\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|_F = \left.\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right|_F + \left.\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}\right|_M + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}' + 2\vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_M + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') \,. \qquad (46)$$

Η (46) συνδέει την επιτάχυνση του υλικού σημείου P , ως προς το ακίνητο σύστημα, με την επιτάχυνση του ιδίου του σημείου, ως προς το κινούμενο σύστημα.

Συμβολίζουμε με $\vec{\alpha}\equiv\vec{\alpha}_F = \left.\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|_F$ την απόλυτη επιτάχυνση του υλικού σημείου P και με $\vec{\alpha}_{0'} = \left.\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right|_F$ την απόλυτη επιτάχυνση της αρχής $0'$ του κινούμενου συστήματος.

Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς αυτούς, το συμβολισμό της σχέσης (42) καθώς και τους συμβολισμούς που χρησιμοποιήθηκαν για τις ταχύτητες, η (46) γράφεται

$$\boxed{\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_{0'} + \vec{\alpha}_M + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}' + 2(\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_M) + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')} \qquad (47)$$

Γνωρίζουμε ότι ο θεμελιώδης νόμος που καθορίζει την κίνηση του υλικού σημείου μάζας m , ως προς το αδρανειακό σύστημα Oxyz , είναι

$$m\vec{\alpha} = \vec{F} \,. \qquad (48)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (47), η (48) γράφεται

$$m(\vec{\alpha}_0 + \vec{\alpha}_M + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}' + 2(\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_M) + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')) = \vec{F} \,, \qquad (49)$$

ή

$$m\vec{\alpha}_M = \vec{F} - m\vec{\alpha}_{0'} - m(\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}') - 2m(\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_M) - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') \,. \qquad (50)$$

Συνεπώς, για ένα παρατηρητή στερεωμένο στην αρχή $0'$ συμπεραίνουμε ότι στο υλικό σημείο μάζας m εξασκείται εκτός από την πραγματική δύναμη $\vec{F}$ , η δύναμη $\vec{F}_r$

$$\vec{F}_r = -m(\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}') - 2m(\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_M) - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') - m\vec{\alpha}_{0'} \,. \qquad (51)$$

Η δύναμη $\vec{F}_r$ χωρίζεται σε επί μέρους δυνάμεις, που ονομάζονται "δυνάμεις αδράνειας".

Η αδρανειακή δύναμη $\vec{F}_e=-m(\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}')$ , ονομάζεται "δύναμη του Euler".

Η αδρανειακή δύναμη $\vec{F}_\varphi=-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$ ονομάζεται "φυγόκεντρη δύναμη".

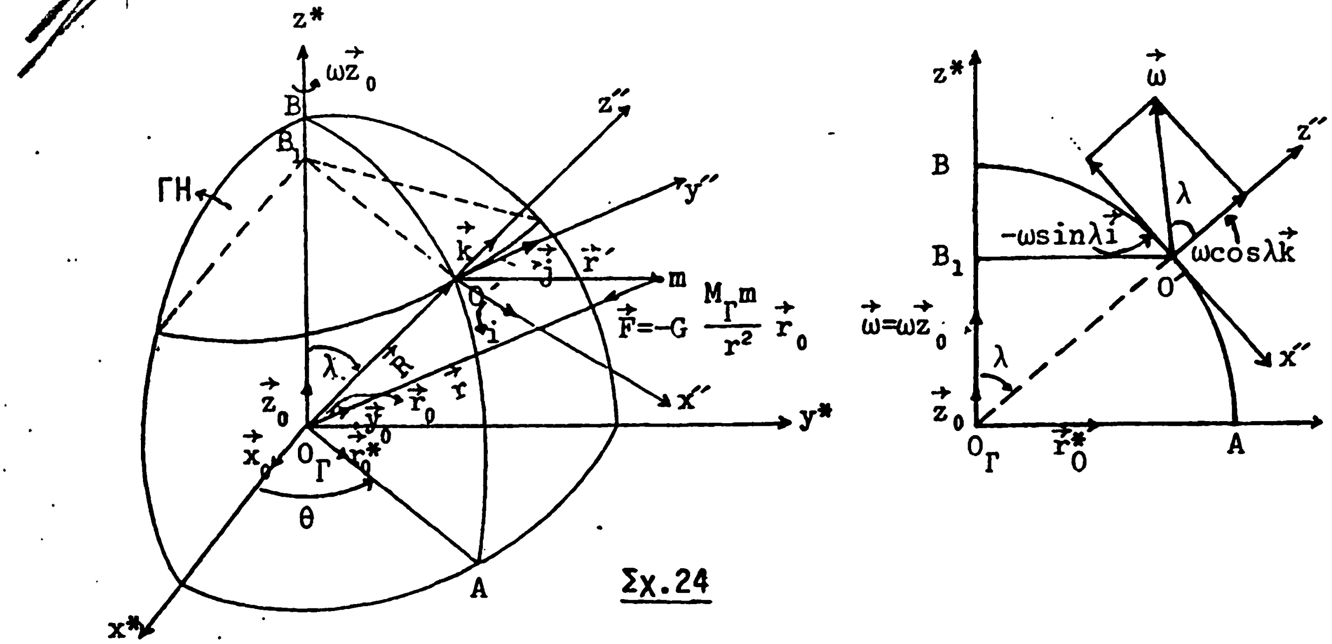
Η αδρανειακή δύναμη $\vec{F}_c=-2m\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_M$ ονομάζεται "δύναμη Coriolis".

Η αδρανειακή δύναμη $-m\vec{a}_{O'}$ εμφανίζεται, όταν η αρχή O′ κινείται με επιτάχυνση, ως προς το ακίνητο σύστημα.

Παρατήρηση : (Η δύναμη $m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$ ονομάζεται κεντρομόλος δύναμη).

Οι δυνάμεις αδράνειας δεν οφείλονται στη φυσική πραγματικότητα και γι' αυτό ονομάζονται και "συμβατικές" ή "φαινομενικές" δυνάμεις.

## 2.20 Κίνηση υλικού σημείου πλησίον της επιφάνειας της Γης ως προς παρατηρητή, που είναι πάνω στην επιφάνεια της Γης.




Σχ.24

Είναι γνωστό ότι, οι Νόμοι του Νεύτωνα ισχύουν σε αδρανειακό σύστημα. Ένα αδρανειακό σύστημα είναι το σύστημα (Ox′y′z′) του (Σχ.18) με αρχή το κέντρο του Ήλιου. Το σύστημα αυτό είναι αδρανειακό, διότι, ενώ οι Νόμοι του Kepler ήταν θεωρητικά αναπόδεικτοι, τους αποδείξαμε χρησιμοποιώντας τις αρχές του Νεύτωνα, που ισχύουν σε αδρανειακό σύστημα. Στην παράγραφο (2.16) αποδείξαμε ότι, ως προς το σύστημα αυτό ένας πλανήτης διαγράφει ελλειπτική τροχιά. Επομένως , το κέντρο της Γης διαγράφει ελλειπτική τροχιά. Στην ελλειπτική τροχιά, η διεύθυνση και το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου της Γης μεταβάλλονται.

Για μικρά χρονικά διαστήματα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι, το κέντρο της Γης $O_Γ$ (Σχ.24) κινείται ευθύγραμμα και ομαλά, ως προς το αδρανειακό σύστημα $Ox'y'z'$ του (Σχ.18). Με αρχή το κέντρο της Γης $O_Γ$ θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων $O_Γx^*y^*z^*$ (Σχ.24), με άξονα $O_Γz^*$ τον άξονα της Γης, του οποίου η διεύθυνση είναι σταθερή ως προς το αδρανειακό σύστημα, που προαναφέραμε.

Για μικρά χρονικά διαστήματα μπορούμε να υποθέσουμε ότι, το σύστημα $O_Γx^*y^*z^*$ του (Σχ.24) κινείται ευθύγραμμα και ομαλά, ως προς το αδρανειακό σύστημα $Ox'y'z'$ .

Πληρούνται λοιπόν οι υποθέσεις της "Αρχής Σχετικότητας του Galileo".

Άρα, το σύστημα $O_Γx^*y^*z^*$ είναι αδρανειακό και για τον παρατηρητή, που είναι στερεωμένος στην αρχή $O_Γ$ , φαίνεται ως ακίνητο.

Υλικό σημείο μάζας $m$ έχει διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ , ως προς το αδρανειακό σύστημα $O_Γx^*y^*z^*$ . Το ίδιο υλικό σημείο, ως προς το κινούμενο μη αδρανειακό σύστημα $O'x''y''z''$, έχει διάνυσμα θέσης $\vec{r}'$ . Το σύστημα $O'x''y''z''$ έχει την αρχή του στη επιφάνεια της Γης, η οποία περιστρέφεται και είναι στερεωμένο σ'αυτή. Ο άξονας $O'z''$ είναι προέκταση της ημιευθείας $O_ΓO'$ και ο άξονας $O'x''$ εφάπτεται ενός μεσημβρινού της Γης.

Επειδή ενδιαφερόμαστε για την κίνηση του υλικού σημείου, ως προς το μη αδρανειακό σύστημα, θα χρησιμοποιήσουμε τη διαφορική εξίσωση κίνησης (50) της παραγράφου (2.14).

Στην εξίσωση αυτή θα θέσουμε

$$\vec{\omega} = 0 \ , \qquad (1)$$

όπου $\vec{\omega}$ η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του συστήματος $O'x''y''z''$ , ως προς το σύστημα $O_Γx^*y^*z^*$ . Η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ συμπίπτει με τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης

$$\vec{\omega} = \omega\vec{z}_0 \ , \qquad \omega = σταθ. \ \ και \ \ \vec{z}_0 = σταθ. \qquad (2)$$

Από την (2) προκύπτει το συμπέρασμα (1).

θέτουμε

$$\vec{F} = -G\,\frac{M_\Gamma m}{r^2}\,\vec{r}_0\ , \tag{3}$$

όπου $\vec{F}$ η δύναμη, που ασκείται στο υλικό σημείο μάζας $m$ από τη Γη, λόγω του Νόμου της Παγκόσμιας Έλξης. Οποιαδήποτε άλλη πραγματική δύναμη παραλείπεται ως πολύ μικρή σε σύγκριση με αυτή.

Λαμβάνοντας υπόψη τις (1) και (3), η σχέση (50) της παραγράφου (2.19) γράφεται

$$m\,\frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2}\Big|_M = -m\,\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\Big|_F - G\,\frac{M_\Gamma m}{r^2}\,\vec{r}_0 - 2m(\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_M) - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')\ . \tag{4}$$

Το σημείο $O'$ βρίσκεται στην περιφέρεια του κύκλου με κέντρο $B_1$ και ακτίνα $B_1O'$. Ισχύει

$$B_1O' = R_\Gamma \sin\lambda = \sigma\tau\alpha\theta. \tag{4α}$$

όπου $R_\Gamma$ η ακτίνα της Γης.

Λαμβάνοντας υπόψη την σχέση (64) της παραγράφου (1.7), μπορούμε να θέσουμε

$$\vec{\omega} = \omega\vec{z}_0 = \dot{\theta}\vec{z}_0\ . \tag{5}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την σχέση (50) της παραγράφου (1.6.2) και το γεγονός ότι $\dot{\omega}=\ddot{\theta}=0$ (επειδή η γωνιακή ταχύτητα $\omega$ περιστροφής της Γης είναι σταθερή) προκύπτει ότι, η επιτάχυνση του σημείου $O'$, ως προς το αδρανειακό σύστημα $O_\Gamma x^*y^*z^*$, δίνεται από τη σχέση

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\Big|_F = -B_1O'\omega^2\vec{r}^{\,*}_0\ , \tag{6}$$

όπου $\vec{r}^{\,*}_0$ η διανυσματική μονάδα στη φορά του διανύσματος $\vec{O_\Gamma A}$ του (Σχ.24). Η (6) μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$\left.\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right|_F = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R}) \ . \qquad (7)$$

Αντικαθιστώντας την (7) στην (4) λαμβάνουμε

$$\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = -\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R}) - G\,\frac{M_\Gamma}{r^2}\,\vec{r}_0 - 2(\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_M) - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') \ . \qquad (8)$$

Ορίζουμε ως επιτάχυνση βαρύτητας $\vec{g}^*$ την ποσότητα

$$\vec{g}^* = -G\,\frac{M_\Gamma}{r^2}\,\vec{r}_0 - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R}) \ . \qquad (9)$$

(Η $\vec{g}^*$ είναι πιό γενική από την επιτάχυνση που ορίστηκε με τη σχέση (7) της παραγράφου (2.15)).

Λαμβάνοντας υπόψη την (9), η (8) γράφεται

$$\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \vec{g}^* - 2(\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_M) - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') \ . \qquad (10)$$

Πλησίον της επιφάνειας της Γης, ο όρος $\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$ μπορεί να παραληφθεί σε σύγκριση με τους άλλους, οπότε η σχέση (10) λαμβάνει τη μορφή

$$\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \vec{g}^* - 2(\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_M) \ . \qquad (11)$$

(Στην πράξη θεωρούμε το $\vec{g}^*$ σταθερό).

Από το (Σχ.24) έχουμε

$$\vec{\omega} = \omega\vec{z}_0 = -\omega\sin\lambda\vec{i} + \omega\cos\lambda\vec{k} \ . \qquad (12)$$

Οι συνιστώσες της (11), στο σύστημα συντεταγμένων $O'x''y''z''$, είναι

$$\ddot{x}'' = 2\omega\cos\lambda\dot{y}'' \qquad (13)$$

$$\ddot{y}'' = -2(\omega\cos\lambda\dot{x}'' + \omega\sin\lambda\dot{z}'') \qquad (14)$$

$$\ddot{z}'' = -g^* + 2\omega\sin\lambda\dot{y}'' \qquad (15)$$

όπου $90^\circ-\lambda$ είναι το γεωγραφικό πλάτος.

Οι εξισώσεις λοιπόν (13),(14) και (15) είναι οι διαφορικές εξισώσεις με τις οποίες θα εργαζόμαστε για να βρίσκουμε την κίνηση.

# ΚΕΦ.3

## Δυναμικη συστηματος υλικων σημειων

## Γενικά

Στο προηγούμενο Κεφάλαιο μελετήσαμε τη δυναμική του υλικού σημείου ή σωματίου με τη βοήθεια των αξιωμάτων του Νεύτωνα. Σε πολλές όμως περιπτώσεις το φυσικό αντικείμενο για το οποίο ενδιαφερόμαστε δεν μπορεί να περιγραφεί με ακρίβεια με το υλικό σημείο . Για να περιγραφεί με ακρίβεια πρέπει να θεωρηθεί σαν σύνολο υλικών σημείων ή σωματίων. Το σύνολο αυτό των υλικών σημείων ονομάζεται "σύστημα υλικών σημείων" του συστήματος.

Σκοπός του παρόντος Κεφαλαίου είναι η μελέτη της δυναμικής του συστήματος υλικών σημείων με βάση τα αξιώματα του Νεύτωνα. Στο σύστημα αυτό τα υλικά σημεία θεωρούνται χωριστά το ένα από το άλλο. Εάν τα υλικά σημεία του συστήματος δεν μπορούν να θεωρηθούν χωριστά το ένα από το άλλο, τότε λέμε ότι έχουμε ένα "συνεχές σύστημα".

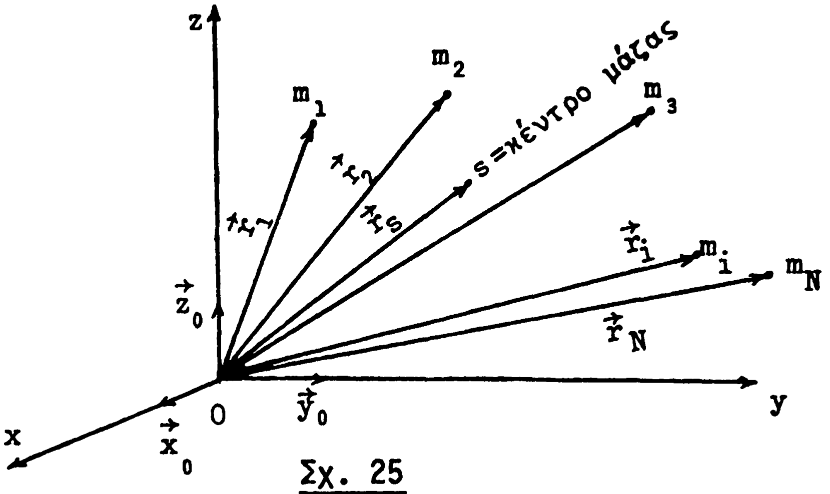
Στην πράξη οι δυνάμεις, που ακούνται σε σύστημα υλικών σημείων μεταβάλλουν γενικά τις αποστάσεις μεταξύ των υλικών σημείων.

Όταν οι αποστάσεις μεταξύ των υλικών σημείων του συστήματος μεταβάλλονται, τότε το σύστημα ονομάζεται "παραμορφώσιμο" ή "ελαστικό σώμα".

Όταν οι αποστάσεις μεταξύ των υλικών σημείων του συστήματος δεν μεταβάλλονται τότε το σύστημα ονομάζεται "στερεό σώμα" .

## 3.1 Κέντρο μάζας - Κέντρο βάρους

Έστω $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..\vec{r}_i, ..., \vec{r}_N$ τα διανύσματα θέσης συστήματος $N$ υλικών σημείων με μάζες $m_1, m_2, ...m_i, ..., m_N$ αντίστοιχα.




Σχ. 25

Ονομάζουμε "κέντρο μάζας" του συστήματος των $N$ υλικών σημείων, το σημείο $s$ (Σχ.25), που έχει διάνυσμα θέσης $\vec{r}_s$ και ορίζεται από τη σχέση

$$\vec{r}_s = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ... m_i\vec{r}_i + ... + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + ... + m_i + ... + m_N} . \qquad (1)$$

θέτουμε

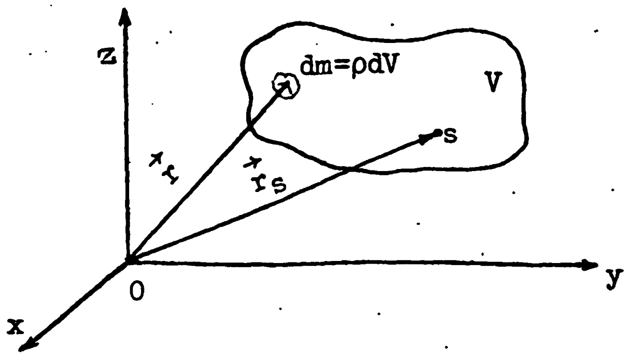
$$M = m_1 + m_2 + ... m_i + ... + m_N = \sum_{i=1}^{N} m_i , \qquad (2)$$

την ολική μάζα του συστήματος.

Λαμβάνοντας υπόψη την (2), η (1) γράφεται

$$\vec{r}_s = \frac{1}{M} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\right) . \qquad (3)$$

Εάν το "σύστημα των υλικών σημείων" είναι ένα "συνεχές σύστημα", η (1) γράφεται




Σχ. 26

$$\vec{r}_s = \frac{\iiint\limits_V \rho \vec{r} dV}{\iiint\limits_V \rho dV} , \tag{4}$$

όπου ρ η πυκνότητα στο τυχόν σημείο του συνεχούς συστήματος με διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ και V ο όγκος του. Θα πρέπει να τονιστεί εδώ ότι η έννοια του σημείου δεν ταυτίζεται με την έννοια του μαθηματικού σημείου με μάζα αλλά ως ένα απειροστό στοιχείο με όγκο, που μπορεί να απεικονιστεί σ'ένα σημείο του Ευκλείδιου χώρου.

Η πυκνότητα ρ σε τυχόν σημείο του χώρου ορίζεται, ως γνωστό, από τη σχέση

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} , \tag{5}$$

όπου $\Delta m$ είναι η μάζα, που περιέχεται σε όγκο $\Delta V$.

Στην περίπτωση που το συνεχές σύστημα είναι ομογενές, η πυκνότητα ρ είναι σταθερή και η (4) λαμβάνει τη μορφή

$$\vec{r}_s = \frac{\rho \iiint\limits_V \vec{r} dV}{M} = \frac{\rho \iiint\limits_V \vec{r} dV}{M} \tag{6}$$

όπου

$$M = \iiint_V \rho dV = \rho \iiint_V dV = \rho V .$$

Στην περίπτωση που το συνεχές σύστημα είναι μια επιφάνεια εμβαδού $S$ και αυτή είναι ομογενής ($\rho$=σταθ.), η (4) λαμβάνει τη μορφή

$$\vec{r}_s = \frac{\rho \iint_S \vec{r} dS}{M} , \qquad (7)$$

όπου

$$M = \rho \iint_S dS = \rho S .$$

Στην περίπτωση που το συνεχές σύστημα είναι μια καμπύλη μήκους $\ell$ και αυτή είναι ομογενής ($\rho$=σταθ.), η (4) λαμβάνει τη μορφή

$$\vec{r}_s = \frac{\rho \int_\ell \vec{r} d\ell}{M} , \qquad (8)$$

όπου

$$M = \rho \int_\ell d\ell = \rho \ell .$$

Εάν, γενικά, σύστημα υλικών σημείων βρίσκεται σε ομογενές πεδίο βαρύτητας, το κέντρο μάζας λέγεται μερικές φορές και "κέντρο βάρους".

## 3.2. Δυνάμεις σε σύστημα υλικών σημείων

Οι δυνάμεις που επιδρούν στο τυχόν υλικό σημείο $i$ συστήματος υλικών σημείων, μπορούν να χωριστούν σε δύο ομάδες.

α) Στις δυνάμεις που προέρχονται από την επίδραση των υπόλοιπων υλικών σημείων του συστήματος στο τυχόν υλικό σημείο του συστήματος. Οι δυνάμεις αυτές ονομάζονται "εσωτερικές δυνάμεις".

β) Στις δυνάμεις που οφείλονται σε αιτίες εκτός του συστήματος, στο τυ-

τυχόν υλικό σημείο του συστήματος.

Οι δυνάμεις αυτές ονομάζονται "εξωτερικές δυνάμεις".

## 3.3. Ορμή συστήματος υλικών σημείων

Έστω $\vec{\upsilon}_i$ η ταχύτητα του τυχόντος υλικού σημείου $i$ του συστήματος με μάζα $m_i$. Η ορμή $\vec{p}_i$ του υλικού σημείου, σύμφωνα με τον ορισμό που έχουμε δώσει στο προηγούμενο Κεφάλαιο είναι ίση με

$$\vec{p}_i = m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = m_i \vec{\upsilon}_i \quad . \tag{1}$$

Ονομάζουμε ορμή ή ολική ορμή ή γραμμική ορμή $\vec{p}$ του συστήματος υλικών σημείων το άθροισμα των ορμών όλων των υλικών σημείων αυτού, δηλαδή

$$\vec{p} = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 + \ldots + m_i\vec{\upsilon}_i + \ldots + m_N\vec{\upsilon}_N = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{\upsilon}_i \quad , \tag{2}$$

όπου $N$ το πλήθος των υλικών σημείων του συστήματος.

Λαμβάνοντας υπόψη την (1), η (2) γράφεται

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{\upsilon}_i \quad . \tag{3}$$

Από τη σχέση (3) της παραγράφου (3.1) γνωρίζουμε ότι, το κέντρο μάζας $\vec{r}_s$ ορίζεται από τη σχέση

$$\vec{r}_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i \quad . \tag{4}$$

Από την (4) προκύπτει ότι, η ταχύτητα $\vec{\upsilon}_s$ του κέντρου μάζας είναι

$$\vec{\upsilon}_s = \frac{d\vec{r}_s}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i\right) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \quad ,$$

ή

$$\vec{\upsilon}_s = \frac{1}{M}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{\upsilon}_i\right) \quad . \tag{5}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (5), η (3) γράφεται

$$\vec{p} = M\vec{\upsilon}_s \ .$$

Από την (6) συμπεραίνουμε ότι, "η ορμή συστήματος υλικών σημείων ισούται με την ολική μάζα $M$ του συστήματος επί την ταχύτητα του κέντρου μάζας".

## 3.4. Εξισώσεις κίνησης συστήματος υλικών σημείων - Θεώρημα κίνησης κέντρου μάζας - Κλειστό σύστημα - Αρχή διατήρησης της ορμής συστήματος υλικών σημείων.

Έστω σύστημα $N$ υλικών σημείων και $\vec{F}_{ij}$ η εσωτερική δύναμη, που ασκεί το υλικό σημείο $j$ στο υλικό σημείο $i$ και $\vec{F}_i$ η εξωτερική δύναμη που ασκείται στο υλικό σημείο $i$.

Η διαφορική εξίσωση, που διέπει την κίνηση του υλικού σημείου $i$ είναι ως γνωστό

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij} = m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} \ , \qquad i \neq j \tag{1}$$

όπου $\sum\limits_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij}$ η συνισταμένη των εσωτερικών δυνάμεων στη σημείο $i$. (Υποθέτουμε ότι $\vec{F}_{ii}=0$, δηλαδή το υλικό σημείο $i$ δεν ασκεί δύναμη στον εαυτό του).

Οι διαφορικές εξισώσεις, που διέπουν την κίνηση του συστήματος των υλικών σημείων είναι οι $N$ διανυσματικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij} = m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}, \qquad i \neq j \ , \qquad (i=1,2,\ldots,N). \tag{1α}$$

Αναλυτικά στους τρεις άξονες έχουμε $3N$ διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν από τις (1α).

Αθροίζοντας ως προς $i$ την εξίσωση (1), έχουμε

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ij} = \sum_{i=1}^{N}m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} \qquad i\neq j \quad . \tag{2}$$

Ισχύει

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ij} = 0$$

(Στο διπλό αυτό άθροισμα παρουσιάζεται κάθε δυνατός συνδυασμός των δεικτών $i$ και $j$. Συνεπώς εάν ένας από τους όρους είναι π.χ. ο $\vec{F}_{m\eta}$ θα υπάρχει και ο όρος $\vec{F}_{\eta m}$.

Σύμφωνα με το 3ο αξίωμα του Νεύτωνα $\vec{F}_{m\eta}=-\vec{F}_{\eta m}$. Άρα $\vec{F}_{m\eta}+\vec{F}_{\eta m} = =\vec{F}_{m\eta}-\vec{F}_{m\eta}= 0$. Εφ'όσον λοιπόν για κάθε όρο υπάρχει και ο αντίθετός του, το συνολικό άθροισμα μηδενίζεται $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ij}=0$).

Η εξίσωση (2) γράφεται

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N}m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} \quad , \tag{3}$$

ή

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N}m_i\frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt} \quad \text{ή} \quad \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{\upsilon}_i\right) = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad . \tag{3α}$$

Από την (3α) συμπεραίνουμε ότι η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων συστήματος υλικών σημείων ισούται με την παράγωγό της ως προς το χρόνο της ορμής του συστήματος.

Από τον ορισμό του κέντρου μάζας προκύπτει

$$\frac{d^2\vec{r}_s}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{r}_i\right) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} \quad . \tag{4}$$

Αντικαθιστώντας την (4) στην (3) παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i = M\frac{d^2\vec{r}_s}{dt^2} \quad . \tag{5}$$

Ονομάζουμε $\vec{F}$ τη συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \quad . \tag{6}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (6), η (5) λαμβάνει τη μορφή

$$\vec{F} = M \frac{d^2\vec{r}_s}{dt^2} \tag{7}$$

Από την (7) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, το κέντρο μάζας συστήματος υλικών σημείων κινείται σαν να ήταν υλικό σημείο μάζας ίσης με την ολική μάζα του συστήματος και πάνω του εφαρμοζόνταν δύναμη ίση με τη συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων του συστήματος.

Το συμπέρασμα αυτό είναι γνωστό ως "θεώρημα κίνησης του κέντρου μάζας".

Σύστημα υλικών σημείων πάνω στο οποίο δεν σκούνται εξωτερικές δυνάμεις ονομάζεται "κλειστό σύστημα ή μεμονωμένο σύστημα".

Εάν έχουμε ένα "κλειστό σύστημα", από την (7) και (4) προκύπτει

$$M \frac{d^2\vec{r}_s}{dt^2} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = 0 \; . \tag{8}$$

Η (8) γράφεται

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) = 0$$

ή

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{\upsilon}_i\right) = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \; . \tag{9}$$

Από την (9) παίρνουμε

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{\upsilon}_i = \vec{c}_1 = \text{σταθ.} \tag{10}$$

Από την (10) συμπεραίνουμε ότι, " η ορμή κλειστού συστήματος παραμένει σταθερή". Το συμπέρασμα αυτό είναι γνωστό ως "Αρχή ή θεώρημα διατήρησης της ορμής συστήματος υλικών σημείων".

Η σχέση (10) δίνει τρεις (3) σταθερές της κίνησης. Από τη σχέση (5) της παραγράφου (33) γνωρίζουμε ότι

$$M\vec{\upsilon}_s = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{\upsilon}_i \; . \tag{11}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (10), η (11) δίνει

$$M\vec{\upsilon}_s = \vec{c}_1 \; . \tag{11α}$$

Η (11α) γράφεται

$$M\frac{d\vec{r}_s}{dt} = \vec{c}_1 \; . \tag{11β}$$

Από την ολοκλήρωση της (11β) προκύπτει

$$M\vec{r}_s = \vec{c}_1 t+\vec{c}_2 \quad ή \quad \vec{r}_s = \frac{\vec{c}_1}{M}\, t+\frac{\vec{c}_2}{M} \;, \quad (\vec{c}_2=σταθ.) \; . \tag{12}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό του κέντρου μάζας $\vec{r}_s$ $\left(\vec{r}_s = \sum\limits_{i=1}^{N}\frac{m_i\vec{r}_i}{M}\right)$ η (12) γράφεται

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i = \vec{c}_1 t+\vec{c}_2 \; . \tag{13}$$

Από τη (12) συμπεραίνουμε ότι "όταν ένα σύστημα υλικών σημείων είναι κλειστό, το κέντρο μάζας του ή κινείται ευθύγραμμα και ομαλά ή είναι ακίνητο".

Άρα, εάν αρχικά το κέντρο μάζας ήταν ακίνητο, θα εξακολουθήσει να είναι ακίνητο εφ'όσον το σύστημα κινείται κάτω από την επίδραση μόνο εσωτερικών δυνάμεων. Δηλαδή, οι εσωτερικές δυνάμεις δεν μπορούν να κινήσουν το κέντρο μάζας.

Η σχέση (13) δίνει τρεις (3) σταθερές της κίνησης.

## 3.5. Στροφορμή συστήματος υλικών σημείων - Ολική ροπή εξωτερικών δυνάμεων - Θεώρημα μεταβολής της στροφορμής - Αρχή διατήρησης της στροφορμής συστήματος υλικών σημείων.

Από τη Μηχανική του υλικού σημείου γνωρίζουμε ότι, στροφορμή $\vec{L}_i$ του υλικού σημείου $i$, ως προς την αρχή συστήματος συντεταγμένων, ονομάζεται το εξωτερικό γινόμενο

$$\vec{L}_i = m_i(\vec{r}_i \times \vec{\upsilon}_i) \quad , \tag{1}$$

όπου $m_i$ είναι η μάζα του υλικού σημείου, $\vec{r}_i$ το διάνυσμα θέσης του και $\vec{\upsilon}_i$ η ταχύτητά του.

Το διάνυσμα $\vec{L}$ που δίνεται από τη σχέση

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{r}_i \times \vec{\upsilon}_i) \quad , \tag{2}$$

ονομάζεται "στροφορμή του συστήματος των υλικών σημείων ή ολική στροφορμή του συστήματος των υλικών σημείων ως προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων.

Από τη Μηχανική του υλικού σημείου γνωρίζουμε ότι, ροπή $\vec{M}_i$ του υλικού σημείου $i$, ως προς την αρχή συστήματος συντεταγμένων ονομάζεται το εξωτερικό γινόμενο

$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad , \tag{3}$$

όπου $\vec{r}_i$ το διάνυσμα θέσης του υλικού σημείου και $\vec{F}_i$ η δύναμη που ασκείται σε αυτό.

Εάν η δύναμη $\vec{F}_i$ είναι η εξωτερική δύναμη που ασκείται στο υλικό σημείο $i$ του συστήματος, το $\vec{M}$ που δίνεται από τη σχέση

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad , \tag{4}$$

ονομάζεται "ολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων" του συστήματος των υλικών σημείων, ως προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων.

Από τη σχέση (1) της παραγράφου (3.4) γνωρίζουμε ότι, η διαφορ... εξίσωση που διέπει την κίνηση του υλικού σημείου $i$ μάζας $m_i$ είναι

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij} = m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} \qquad (i \neq j)$$

ή

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij} = \frac{d(m_i \vec{\upsilon}_i)}{dt} \quad . \qquad (i \neq j) \quad . \tag{5}$$

Πολλαπλασιάζοντας εξωτερικά και τα δύο μέλη της (5) με το $\vec{r}_i$, έχουμε

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{r}_i \times \left( \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij} \right) = \vec{r}_i \times \frac{d(m_i \vec{\upsilon}_i)}{dt} \quad . \tag{6}$$

Το δεύτερο μέλος της (6) γράφεται

$$\vec{r}_i \times \frac{d(m_i \vec{\upsilon}_i)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ m_i (\vec{r}_i \times \vec{\upsilon}_i) \right] \quad , \tag{7}$$

επειδή

$$\frac{d}{dt} \left[ m_i (\vec{r}_i \times \vec{\upsilon}_i) \right] = m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{\upsilon}_i + m_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt} =$$

$$= \underbrace{\cancel{m_i \vec{\upsilon}_i \times \vec{\upsilon}_i}}_{=0} + \vec{r}_i \times \frac{d(m_i \vec{\upsilon}_i)}{dt} \quad .$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (7), η (6) γράφεται

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{r}_i \times \left( \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij} \right) = \frac{d}{dt} \left[ m_i (\vec{r}_i \times \vec{\upsilon}_i) \right] \quad . \tag{8}$$

Αθροίζοντας την (8) ως προς $i$, λαμβάνουμε

$$\sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt} \left[ m_i (\vec{r}_i \times \vec{\upsilon}_i) \right]$$

ή

$$\sum_{i=1}^{N}(\vec{r}_i\times\vec{F}_i)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(\vec{r}_i\times\vec{F}_{ij})=\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{N}m_i(\vec{r}_i\times\vec{\upsilon}_i)\right] . \qquad (9)$$

Το διπλό άθροισμα, που παρουσιάζεται στο αριστερό μέλος της (9) είναι ίσο με το μηδέν. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής: Στο διπλό άθροισμα εμφανίζονται όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί των δεικτών $i$ και $j$ . Συνεπώς, εάν υπάρχει π.χ. ο όρος $\vec{r}_\eta\times\vec{F}_{\eta m}$ θα υπάρχει και ο όρος $\vec{r}_m\times\vec{F}_{m\eta}$ . Από το 3ο αξίωμα του Νεύτωνα είναι γνωστό ότι :

$$\vec{F}_{m\eta}=-\vec{F}_{\eta m} . \qquad (10)$$

Από την (10) προκύπτει ότι,

$$\vec{r}_m\times\vec{F}_{m\eta}=-\vec{r}_m\times\vec{F}_{\eta m} . \qquad (11)$$

Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη την (11) προκύπτει ότι,

$$\vec{r}_\eta\times\vec{F}_{\eta m}+\vec{r}_m\times\vec{F}_{m\eta}=(\vec{r}_\eta-\vec{r}_m)\times\vec{F}_{\eta m} . \qquad (12)$$

Εάν τώρα υποθέσουμε ότι οι εσωτερικές δυνάμεις μεταξύ δύο οποιωνδήποτε υλικών σημείων κείνται στην ευθεία που συνδέει αυτά τα δύο υλικά σημεία προκύπτει ότι,

$$(\vec{r}_\eta-\vec{r}_m)\times\vec{F}_{\eta m}=0 . \qquad (13)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (13) η (12) γίνεται

$$\vec{r}_\eta\times\vec{F}_{\eta m}+\vec{r}_m\times F_{m\eta}=0 . \qquad (14)$$

Έχοντας τώρα υπόψη την (14) προκύπτει ότι το διπλό άθροισμα,

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(\vec{r}_i\times\vec{F}_{ij})=0 . \qquad (15)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (15), η (9) γράφεται

$$\sum_{i=1}^{N}(\vec{r}_i\times\vec{F}_i) = \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{r}_i\times\vec{\upsilon}_i)\right] . \qquad (16)$$

Το πρώτο μέλος της (16), σύμφωνα με τη σχέση (4), ισούται με $\vec{M}$. Η ποσότητα που βρίσκεται μέσα στην αγκύλη, στο δεύτερο μέλος της (16), σύμφωνα με τη σχέση (2), ισούται με $\vec{L}$.

Συνεπώς, η (16) μπορεί να γραφεί

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{ή} \quad \vec{M} = \dot{\vec{L}} \qquad (17)$$

Από την (17) συμπεραίνουμε ότι, "η ολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων του συστήματος των υλικών σημείων ως προς την αρχή συστήματος συντεταγμένων, είναι ίση με την παράγωγο ως προς το χρόνο της στροφορμής του συστήματος των υλικών σημείων, με την προϋπόθεση ότι, οι εσωτερικές δυνάμεις μεταξύ οποιωνδήποτε υλικών σημείων κείνται στην ευθεία, που συνδέει αυτά τα δύο υλικά σημεία".

Το συμπέρασμα αυτό είναι γνωστό ως "θεώρημα μεταβολής της στροφορμής".

Εάν θέσουμε στην (17)

$$\vec{M} = 0 , \qquad (18)$$

προκύπτει

$$\dot{\vec{L}} = 0 . \qquad (19)$$

Από την (19) παίρνουμε

$$\vec{L} = \text{σταθ.} \qquad \sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{r}_i\times\vec{\upsilon}_i) = \text{σταθ.} \qquad (20)$$

Από την (20) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, "αν η ολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων, ως προς την αρχή συστήματος συντεταγμένων, ισούται με το μηδέν, τότε η στροφορμή του συστήματος των υλικών σημείων παραμένει σταθερή, με την προϋπόθεση ότι, οι εσωτερικές δυνάμεις μεταξύ δύο οποιωνδήποτε υλικών σημείων κείνται στην ευθεία που συνδέει αυτά τα δύο υλικά σημεία".

Το συμπέρασμα αυτό είναι γνωστό ως "Αρχή διατήρησης της στροφορμής συστήματος υλικών σημείων".

Η σχέση (20) δίνει τρεις (3) σταθερές της κίνησης.

## 3.6. Ολική κινητική ενέργεια συστήματος υλικών σημείων - Ολικό έργο συστήματος υλικών σημείων - Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας.

Από τη Μηχανική του υλικού σημείου γνωρίζουμε ότι, η κινητική ενέργεια $T_i$ του υλικού σημείου $i$ είναι ίση με

$$T_i = \frac{1}{2} m_i |\upsilon_i|^2 , \tag{1}$$

όπου $m_i$ η μάζα του υλικού σημείου $i$ και $|\upsilon_i|$ το μέτρο της ταχύτητάς του.

Η ποσότητα $T$ που δίνεται από τη σχέση

$$T = \sum_{i=1}^{N} T_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{2} m_i \upsilon_i^2\right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \upsilon_i^2 , \tag{2}$$

ονομάζεται ολική κινητική ενέργεια του συστήματος των υλικών σημείων.

Από την παράγραφο (3.2) γνωρίζουμε ότι, στο τυχόν υλικό σημείο $i$ του συστήματος ενεργούν οι εσωτερικές δυνάμεις που τις συμβολίσαμε με $\sum_{j=1}^{n} F_{ij}$ και οι εξωτερικές δυνάμεις που τις συμβολίσαμε με $\vec{F}_i$.

Λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό του έργου από τη Μηχανική του υλικού σημείου μπορούμε να γράψουμε ότι, το έργο $W_i$ που "παράγει" η δύναμη $\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ij}$, όταν το υλικό σημείο $i$ πηγαίνει από μία κατάσταση (που τη συμβολίζουμε με 1) σε μία άλλη κατάσταση (που τη συμβολίζουμε με 2) είναι ίσο με

$$W_i = \int_1^2 \left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij}\right) \cdot d\vec{r}_i . \tag{3}$$

Το $W_{1\to 2}$ που δίνεται από τη σχέση

$$W_{1\to 2} = \sum_{i=1}^{N} W_i = \sum_{i=1}^{N} \int_1^2 (\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij})\cdot d\vec{r}_i \quad ,$$

ονομάζεται "ολικό έργο του συστήματος των υλικών σημείων".

Η διαφορική εξίσωση που διέπει την κίνηση του υλικού σημείου i με μάζα $m_i$ είναι, ως γνωστό

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij} = m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$$

ή

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij} = \frac{d(m_i\dot{\vec{r}}_i)}{dt} \quad , \qquad (\dot{\vec{r}}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}) \; . \qquad (4)$$

Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά με $\dot{\vec{r}}_i$ και τα δύο μέλη της (4). Έχουμε

$$\vec{F}_i\cdot\dot{\vec{r}}_i + (\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij})\cdot\dot{\vec{r}}_i = \left[\frac{d(m_i\dot{\vec{r}}_i)}{dt}\right]\cdot\dot{\vec{r}}_i \quad . \qquad (5)$$

Το δεύτερο μέλος της (5) γράφεται,

$$\left[\frac{d(m_i\dot{\vec{r}}_i)}{dt}\right]\cdot\dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{2}\,\frac{d(m_i\upsilon_i^2)}{dt} \quad , \qquad (6)$$

επειδή,

$$\frac{1}{2}\,\frac{d(m_i\vec{\upsilon}_i^2)}{dt} = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,(m_i\vec{\upsilon}_i\cdot\vec{\upsilon}_i) = \frac{1}{2}\,m_i\,\frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt}\cdot\vec{\upsilon}_i + \frac{1}{2}\,m_i\vec{\upsilon}_i\cdot\frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt} =$$

$$= m_i\vec{\upsilon}_i\cdot\frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt} = \vec{\upsilon}_i\cdot\frac{d(m_i\vec{\upsilon}_i)}{dt} = \frac{d(m_i\dot{\vec{r}}_i)}{dt}\cdot\dot{\vec{r}}_i \quad . \qquad (7)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (6), η (5) γράφεται

$$\vec{F}_i\cdot\dot{\vec{r}}_i + (\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij})\cdot\dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{2}\,\frac{d(m_i\vec{\upsilon}_i^2)}{dt} \quad . \qquad (8)$$

Αθροίζοντας την (8) ως προς i λαμβάνουμε

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\dot{\vec{r}}_i+\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ij}\right)\cdot\dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(m_i\vec{\upsilon}_i^2)\right]$$

ή

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\dot{\vec{r}}_i+\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ij}\right)\cdot\dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{d}{dt}(m_i\vec{\upsilon}_i^2)\right] . \tag{9}$$

Ολοκληρώνοντας την (9) ως προς t , από $t=t_1$ μέχρι $t=t_2$ , λαμβάνουμε

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_i\cdot\dot{\vec{r}}_i dt+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{ij}\cdot\dot{\vec{r}}_i dt = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}(m_i\vec{\upsilon}_i^2)dt. \tag{10}$$

Επειδή

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} , \tag{11}$$

η (10) λαμβάνει τη μορφή

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{1}^{2}\vec{F}_i\cdot d\vec{r}_i+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int_{1}^{2}\vec{F}_{ij}\cdot d\vec{r}_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_{1}^{2}d(m_i\vec{\upsilon}_i^2) . \tag{12}$$

Από την (12) λαμβάνουμε

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{1}^{2}\left(\vec{F}_i+\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ij}\right)\cdot d\vec{r}_i = \left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\upsilon_i^2\right]_2-\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\upsilon_i^2\right]_1 \tag{13}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τους ορισμούς για την ολική κινητική ενέργεια του συστήματος καθώς και το ολικό έργο, η (13) γράφεται

$$W_{1\to 2} = T_2-T_1 , \tag{14}$$

όπου $T_1$,$T_2$ είναι οι ολικές κινητικές ενέργειες του συστήματος στις καταστάσεις 1 και 2 αντίστοιχα.

Από την (14) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, "το ολικό έργο συστήματος υλικών σημείων που παράγεται από τις εσωτερικές και εξωτερικές δυνάμεις του συστήματος είναι ίσο με την μεταβολή της ολικής κινητικής ενέργειας".

Το συμπέρασμα αυτό είναι γνωστό ως "θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας συστήματος υλικών σημείων".

## 3.7. Εξωτερικές και εσωτερικές συντηρητικές δυνάμεις συστήματος υλικών σημείων - Αρχή διατήρησης της ολικής μηχανικής ενέργειας.

Έστω ότι οι εξωτερικές δυνάμεις του συστήματος των υλικών σημείων είναι συντηρητικές. Συμβολίζουμε με $V^{(\varepsilon\xi)}$ το δυναμικό ή τη δυναμική ενέργεια, από το οποίο προέρχονται όλες οι εξωτερικές δυνάμεις. Το δυναμικό αυτό πρέπει να είναι συνάρτηση των συντεταγμένων των υλικών σημείων του συστήματος. Δηλαδή,

$$V^{(\varepsilon\xi)} = V^{(\varepsilon\xi)}(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,\ldots x_i,y_i,z_i,\ldots x_N,y_N,z_N) \quad (1)$$

όπου $(x_1,y_1,z_1; x_2,y_2,z_2,\ldots x_i,y_i,z_i,\ldots x_N,y_N,y_N)$ είναι οι συντεταγμένες των υλικών σημείων.

Η εξωτερική δύναμη $\vec{F}_i$, ως συντηρητική, θα προκύπτει από τη σχέση

$$\vec{F}_i = -\nabla_i V^{(\varepsilon\xi)} \quad (2)$$

όπου οι δείκτης $i$ στο $\nabla_i$ σημαίνει ότι οι μερικές παράγωγοι λαμβάνονται ως προς τις συντεταγμένες του υλικού σημείου $i$.

Εάν συμβολίσουμε με $W^{\varepsilon\xi}_{1\to2}$ το ολικό έργο των εξωτερικών δυνάμεων, θα ισχύει

$$W^{(\varepsilon\xi)}_{1\to2} = \sum_{i=1}^{N} \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i \quad . \quad (3)$$

Γνωρίζουμε ότι, το διάνυσμα θέσης $\vec{r}_i$ του υλικού σημείου γράφεται

$$\vec{r}_i = x_i\vec{x}_0 + y_i\vec{y}_0 + z_i\vec{z}_0 \; . \tag{4}$$

Από την (4) προκύπτει

$$d\vec{r}_i = dx_i\vec{x}_0 + dy_i\vec{y}_0 + dz_i\vec{z}_0 \; . \tag{5}$$

Η σχέση (2) , ως γνωστό, γράφεται

$$\vec{F}_i = -\frac{\partial V^{(\varepsilon\xi)}}{\partial x_i}\vec{x}_0 - \frac{\partial V^{(\varepsilon\xi)}}{\partial y_i}\vec{y}_0 - \frac{\partial V^{(\varepsilon\xi)}}{\partial z_i}\vec{z}_0 \; . \tag{6}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (5) και (6), η (3) γίνεται

$$W^{(\varepsilon\xi)}_{1\to 2} = \sum_{i=1}^{N}\int_1^2 \vec{F}_i\cdot d\vec{r}_i = -\int_1^2 \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial V^{(\varepsilon\xi)}}{\partial x_i}\vec{x}_0 + \frac{\partial V^{(\varepsilon\xi)}}{\partial y_i}\vec{y}_0 + \frac{\partial V^{(\varepsilon\xi)}}{\partial z_i}\vec{z}_0\right)\cdot$$

$$\cdot(dx_i\vec{x}_0 + dy_i\vec{y}_0 + dz_i\vec{z}_0) = -\int_1^2 \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial V^{(\varepsilon\xi)}}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial V^{(\varepsilon\xi)}}{\partial y_i}dy_i + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial V^{(\varepsilon\xi)}}{\partial z_i}dz_i\right) \; . \tag{7}$$

Από τη σχέση (1) γνωρίζουμε ότι, $V^{(\varepsilon\xi)} = V^{(\varepsilon\xi)}(x_1, y_1, z_1, \ldots x_N, y_N, z_N)$.
Συνεπώς

$$dV^{(\varepsilon\xi)} = \frac{\partial V^{(\varepsilon\xi)}}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial V^{(\varepsilon\xi)}}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial V^{(\varepsilon\xi)}}{\partial z_1}dz_1 + \ldots + \frac{\partial V^{(\varepsilon\xi)}}{\partial x_N}dx_N +$$

$$+ \frac{\partial V^{(\varepsilon\xi)}}{\partial y_N} + \frac{\partial V^{(\varepsilon\xi)}}{z_N}dz_N =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial V^{(\varepsilon\xi)}}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial V^{(\varepsilon\xi)}}{\partial y_i}dy_i + \frac{\partial V^{(\varepsilon\xi)}}{\partial z_i}dz_i\right) \; . \tag{8}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (8) η (7) δίνει,

$$W^{(\varepsilon\xi)}_{1\to 2} = -\int_1^2 \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial V^{(\varepsilon\xi)}}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial V^{(\varepsilon\xi)}}{\partial y_i}dy_i + \frac{\partial V^{(\varepsilon\xi)}}{\partial z_i}dz_i\right) =$$

$$=-\int_1^2 dV^{(\varepsilon\xi)} = V_1^{(\varepsilon\xi)} - V_2^{(\varepsilon\xi)} \quad . \tag{9}$$

Άρα,

$$\boxed{W_{1\to 2}^{(\varepsilon\xi)} = V_1^{(\varepsilon\xi)} - V_2^{(\varepsilon\xi)}} \quad , \tag{10}$$

όπου ο δείκτης 1 και 2 στη συνάρτηση $V^{(\varepsilon\xi)}$ σημαίνει ότι, η $V^{(\varepsilon\xi)}$ θα υπολογιστεί στην αρχική θέση 1 και στην τελική θέση 2.

Από την (10) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι , "το ολικό έργο των εξωτερικών δυνάμεων, όταν αυτές είναι συντηρητικές, δεν εξαρτάται από το δρόμο που θα ακολουθήσει το κάθε υλικό σημείο του συστήματος, αλλά από την αρχική και τελική θέση των σημείων".

Έστω ότι οι εσωτερικές δυνάμεις $\vec{F}_i^{(\varepsilon\sigma)}$ $(\vec{F}_i^{(\varepsilon\sigma)} = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij})$ του συστήματος των υλικών σημείων είναι συντηρητικές. Ονομάζουμε $V^{(\varepsilon\sigma)}$ το δυναμικό ή τη δυναμική ενέργεια, από το οποίο προέρχονται όλες οι εσωτερικές δυνάμεις. Το δυναμικό $V^{(\varepsilon\sigma)}$ πρέπει να είναι συνάρτηση των σχετικών θέσεων όλων των υλικών σημείων του συστήματος. Δηλαδή,

$$V^{(\varepsilon\sigma)} = V^{(\varepsilon\sigma)}(x_2-x_1, x_3-x_1, x_3-x_2, x_4-x_1, x_4-x_2, x_4-x_3, \ldots x_i-x_j, \ldots)$$

$$\equiv V^{(\varepsilon\sigma)}(\vec{r}_i-\vec{r}_j) \quad , \qquad i>j \quad (i,j=1,2,3,\ldots,N). \tag{11}$$

Η εσωτερική δύναμη $\vec{F}_i^{(\varepsilon\sigma)}$, ως συντηρητική, θα προκύπτει από τη σχέση

$$\vec{F}_i^{(\varepsilon\sigma)} = -\nabla_i V^{(\varepsilon\sigma)} \quad . \tag{12}$$

Εάν συμβολίσουμε με $W_{1\to 2}^{(\varepsilon\sigma)}$ το ολικό έργο των εσωτερικών δυνάμεων, θα ισχύει

$$W_{1\to 2}^{(\varepsilon\sigma)} = \sum_{i=1}^{N}\int_1^2 \vec{F}_i^{(\varepsilon\sigma)} \cdot d\vec{r} = -\int_1^2 \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial V^{(\varepsilon\sigma)}}{\partial x_i}\vec{x}_0 + \frac{\partial V^{(\varepsilon\sigma)}}{\partial y_i}\vec{y}_0 + \frac{\partial V^{(\varepsilon\sigma)}}{\partial z_i}\vec{z}_0\right) \cdot$$

$$\cdot (dx_i\vec{x}_0 + dy_i\vec{y}_0 + dz_i\vec{z}_0) =$$

$$=-\int_1^2 \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial V^{(\varepsilon\sigma)}}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial V^{(\varepsilon\sigma)}}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial V^{(\varepsilon\sigma)}}{\partial z_i} dz_i\right) =$$

$$=-\int_1^2 dV^{(\varepsilon\sigma)} = V_1^{(\varepsilon\sigma)} - V_2^{(\varepsilon\sigma)} .$$

Άρα

$$W_{1\to 2}^{(\varepsilon\sigma)} = V_1^{(\varepsilon\sigma)} - V_2^{(\varepsilon\sigma)} , \tag{13}$$

όπου ο δείκτης 1 και 2 στη συνάρτηση $V^{(\varepsilon\sigma)}$ σημαίνει ότι η $V^{(\varepsilon\sigma)}$ θα υπολογιστεί στην αρχική θέση 1 και στην τελική 2.

Από την (13) καταλήγουμε επίσης στο συμπέρασμα ότι "το ολικό έργο των εσωτερικών δυνάμεων, όταν αυτές είναι συντηρητικές, δεν εξαρτάται από το δρόμο που θα ακολουθήσει το κάθε υλικό σημείο του συστήματος, αλλά από την αρχική και τελική θέση των σημείων".

Γνωρίζουμε από την παράγραφο (3.6) ότι, το ολικό έργο του συστήματος των υλικών σημείων είναι

$$W_{1\to 2} = \sum_{i=1}^{N} \int_1^2 \left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij}\right)\cdot d\vec{r}_i \tag{14}$$

ή

$$W_{1\to 2} = W_{1\to 2}^{(\varepsilon\xi)} + W_{1\to 2}^{(\varepsilon\sigma)} . \tag{15}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (10) και (13), από την (15) προκύπτει

$$W_{1\to 2} = (V_1^{(\varepsilon\xi)} - V_2^{(\varepsilon\xi)}) + (V_1^{(\varepsilon\sigma)} - V_2^{(\varepsilon\sigma)}) . \tag{16}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα της μεταβολής της κινητικής ενέργειας, που αποδείχτηκε στην παράγραφο (3.6), γνωρίζουμε ότι

$$W_{1\to 2} = T_2 - T_1 . \tag{17}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (16) και (17) προκύπτει

$$(V_1^{(\varepsilon\xi)}-V_2^{(\varepsilon\xi)})+(V_1^{(\varepsilon\sigma)}-V_2^{(\varepsilon\sigma)}) = T_2-T_1 ,$$

ή

$$V_1^{(\varepsilon\xi)}+V_1^{(\varepsilon\sigma)}+T_1 = V_2^{(\varepsilon\xi)}+V_2^{(\varepsilon\sigma)}+T_2 . \qquad (18)$$

Από την (18) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι "σε δύο τυχαίες θέσεις συστήματος υλικών σημείων που δέχεται την επίδραση δυνάμεων που προέρχονται από δυναμικό, το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας παραμένει σταθερό".

Ονομάζουμε "ολική μηχανική ενέργεια" $E$ συστήματος υλικών σημείων το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής του ενέργειας. Δηλαδή

$$E = T+V^{(\varepsilon\xi)}+V^{(\varepsilon\sigma)} , \qquad (19)$$

όπου

$$T = \sum_{i=1}^{N} (\frac{1}{2} m_i \upsilon_i^2) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2) .$$

Λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό της ολικής μηχανικής ενέργειας καθώς και το προηγούμενο συμπέρασμα, μπορούμε τώρα να επαναδιατυπώσουμε το συμπέρασμά μας ως εξής :

"Εάν οι εξωτερικές και εσωτερικές δυνάμεις συστήματος υλικών σημείων προέρχονται από δυναμικό, η ολική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή" .

$$\boxed{T+V^{(\varepsilon\xi)}+V^{(\varepsilon\sigma)} = E = \sigma\tau\alpha\vartheta} \qquad (20)$$

Το συμπέρασμα αυτό είναι γνωστό ως "αρχή ή θεώρημα διατήρησης της ολικής μηχανικής ενέργειας".

Η σχέση (20) είναι μια σταθερά της κίνησης.

## 3.8. Ολική ώθηση εξωτερικής δυνάμης - Σχέση ολικής ώθησης εξωτερικής δύναμης και ορμής του συστήματος

Από τη Μηχανική του υλικού σημείου γνωρίζουμε ότι, ώθηση $\vec{\Omega}_i$ της δύναμης $\vec{F}_i$ κατά το χρονικό διάστημα $[t_1,t_2]$ ονομάζουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\vec{\Omega}_i = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i dt \quad . \tag{1}$$

Το διάνυσμα $\vec{\Omega}$ που δίνεται από τη σχέση,

$$\vec{\Omega} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\Omega}_i = \sum_{i=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i dt$$

ή

$$\vec{\Omega} = \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \ , \qquad \left(\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i\right) \ , \tag{2}$$

ονομάζεται "ολική ώθηση εξωτερικής δύναμης", όπου $\vec{F}$ η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων του συστήματος.

Από το "θεώρημα κίνησης του κέντρου μάζας", που αποδείχτηκε στην παράγραφο (3.4) γνωρίζουμε ότι

$$\vec{F} = M \frac{d^2 \vec{r}_s}{dt^2} \qquad , \qquad (M = m_1 + m_2 + \ldots m_N) \ . \tag{3}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (3), η (2) δίνει

$$\vec{\Omega} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} M \frac{d^2 \vec{r}_s}{dt^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} M \frac{d\vec{\upsilon}_s}{dt} dt = M\vec{\upsilon}_s^{(2)} - M\vec{\upsilon}_s^{(1)} \ , \tag{4}$$

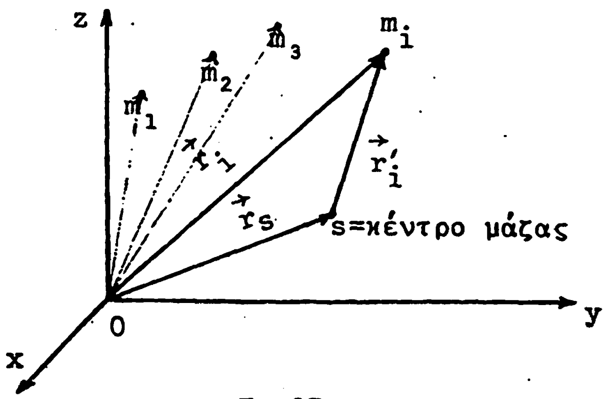
όπου $M\vec{\upsilon}_s^{(1)}$ και $M\vec{\upsilon}_s^{(2)}$ είναι οι ορμές του συστήματος (σύμφωνα με το συμπέρασμα της παραγράφου 3.3) τις χρονικές στιγμές $t_1$ και $t_2$ αντίστοιχα.

Λαμβάνοντας υπόψη την (4) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, "η ολική ώθηση της εξωτερικής δύναμης ισούται με τη μεταβολή της ορμής του συστήματος".

## 3.9. Θεωρήματα για κίνηση ως προς το κέντρο μάζας

Παρατήρηση : Τα μεγέθη που θα αναφέρονται ως προς το κέντρο μάζας, θα εννοείται ότι αναφέρονται σε σύστημα αξόνων που κινείται μαζί με το κέντρο μάζας s και έχει συνεχώς τους άξονές του παράλληλους προς εαυτούς.

3.9α. Θεώρημα : Εάν $\vec{r}_i'$ είναι το διάνυσμα θέσης υλικού σημείου μάζας $m_i$,




Σχ.27

ως προς το κέντρο μάζας , θα ισχύει

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i' = 0 \qquad (1)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Έστω 0 η αρχή του συστήματος συντεταγμένων Oxyz, $\vec{r}_i$ το διάνυσμα θέσης του υλικού σημείου μάζας $m_i$ ως προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων, $\vec{r}_s$ το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας και $\vec{r}_i'$ το διάνυσμα θέσης του υλικού σημείου μάζας $m_i$ , ως προς το κέντρο μάζας.

Θα ισχύει, σύμφωνα με το (Σχ.27)

$$\vec{r}_i = \vec{r}_s + \vec{r}_i' \quad . \tag{1}$$

Από τη σχέση (3) της παραγράφου (3.1) γνωρίζουμε ότι η θέση του κέντρου μάζας ορίζεται από το διάνυσμα $\vec{r}_s$ ,

$$\vec{r}_s = \frac{1}{M}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\right) , \tag{2}$$

όπου

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i \ .$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (1), η (2) δίνει

$$\vec{r}_s = \frac{1}{M}\left[\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{r}_s + \vec{r}_i')\right] = \frac{1}{M}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_s\right) + \frac{1}{M}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i'\right) =$$

$$= \frac{1}{M}\vec{r}_s\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right) + \frac{1}{M}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i'\right) = \frac{1}{\cancel{M}}\vec{r}_s \cancel{M} + \frac{1}{M}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i'\right)$$

'Αρα

$$\vec{r}_s = \frac{1}{M}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i'\right) + \vec{r}_s \quad . \tag{3}$$

Από την (3) προκύπτει το ζητούμενο συμπέρασμα

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i' = 0 \ . \tag{4}$$

**3.9β.** <u>Θεώρημα</u> : Εάν $\vec{\upsilon}_i'$ είναι η ταχύτητα υλικού σημείου μάζας $m_i$ ως προς το κέντρο μάζας του συστήματος των υλικών σημείου, θα ισχύει

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\upsilon}_i' = 0 \ . \tag{1}$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> : Από το συμπέρασμα του προηγούμενου θεωρήματος έχουμε

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i' = 0 \ . \tag{2}$$

Παραγωγίζοντας ως προς t την (2) παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i'}{dt} = 0$$

ή

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\upsilon}_i' = 0 \quad . \qquad (3)$$

Από την (3) συμπεραίνουμε ότι "η ολική ορμή συστήματος υλικών σημείων, ως προς το κέντρο μάζας, είναι ίση με το μηδέν".

## 3.10. Στροφορμή συστήματος υλικών σημείων ως προς το κέντρο μάζας - Στροφορμή της ολικής μάζας.

Ονομάζουμε στροφορμή του υλικού σημείου μάζας $m_i$, ως προς το κέντρο μάζας, την ποσότητα

$$\vec{L}_{i,s} = m_i(\vec{r}_i' \times \vec{\upsilon}_i') \ , \qquad (1)$$

όπου $\vec{r}_i'$, $\vec{\upsilon}_i'$ είναι το διάνυσμα θέσης και η ταχύτητα του υλικού σημείου αντίστοιχα ως προς το κέντρο μάζης.

Το διάνυσμα $\vec{L}_s$, που δίνεται από τη σχέση

$$\vec{L}_s = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{i,s} = \sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{r}_i' \times \vec{\upsilon}_i') \ , \qquad (2)$$

ονομάζεται "στροφορμή του συστήματος των υλικών σημείων ως προς το κέντρο μάζας".

Ονομάζουμε "στροφορμή της ολικής μάζας" του συστήματος των υλικών σημείων, ως προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων, το διάνυσμα

$$\vec{L}^* = M(\vec{r}_s \times \vec{\upsilon}_s) \ , \qquad (3)$$

όπου $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_N$, $\vec{r}_s$ το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας και $\vec{\upsilon}_s$ η ταχύτητά του.

Χρησιμοποιώντας το (Σχ.27), ισχύει

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{r}_s \quad . \tag{1}$$

Παραγωγίζοντας την (1), ως προς $t$, προκύπτει

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_i' + \dot{\vec{r}}_s \tag{2}$$

ή

$$\vec{\upsilon}_i = \vec{\upsilon}_i' + \vec{\upsilon}_s \quad , \tag{3}$$

όπου $\vec{\upsilon}_i$ είναι η ταχύτητα του υλικού σημείου μάζας $m_i$, ως προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων, $\vec{\upsilon}_i'$ η ταχύτητα του ίδιου υλικού σημείου ως προς το κέντρο μάζας και $\vec{\upsilon}_s$ η ταχύτητα του κέντρου μάζας.

Από τη σχέση (2) της παραγράφου (3.5) γνωρίζουμε ότι στροφορμή συστήματος υλικών σημείων ονομάζεται το διάνυσμα $\vec{L}$,

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_i \times \vec{\upsilon}_i) \quad . \tag{4}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (1) και (3), η (4) γράφεται

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_i \times \vec{\upsilon}_i) = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[(\vec{r}_i' + \vec{r}_s) \times (\vec{\upsilon}_i' + \vec{\upsilon}_s)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_i' \times \vec{\upsilon}_i') + \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_i' \times \vec{\upsilon}_s) + \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_s \times \vec{\upsilon}_i') + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)(\vec{r}_s \times \vec{\upsilon}_s) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_i' \times \vec{\upsilon}_i') + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i'\right) \times \vec{\upsilon}_s + \vec{r}_s \times \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\upsilon}_i'\right) + M(\vec{r}_s \times \vec{\upsilon}_s) . \tag{5}$$

Από το Θεώρημα (3.9α) ισχύει

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i' = 0 \quad . \tag{6}$$

Συνεπώς

$$\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i'\right) \times \vec{\upsilon}_s = 0 \quad . \tag{7}$$

Από το θεώρημα (3.9β) ισχύει

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\upsilon}_i' = 0 \,. \tag{8}$$

Συνεπώς

$$\vec{r}_s \times \Big( \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\upsilon}_i' \Big) = 0 \,. \tag{9}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (7) και (9), η (5) δίνει

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_i' \times \vec{\upsilon}_i') + M(\vec{r}_s \times \vec{\upsilon}_s) \,. \tag{10}$$

Έχοντας υπόψη τους ορισμούς των $\vec{L}_s$ και $\vec{L}^*$ από τις σχέσεις (2) και (3) αντίστοιχα, η (10) γράφεται

$$\vec{L} = \vec{L}_s + \vec{L}^* \,. \tag{11}$$

Από την (11) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, "η στροφορμή συστήματος υλικών σημείων ισούται με το άθροισμα της στροφορμής του συστήματος των υλικών σημείων ως προς το κέντρο μάζας και τη στροφορμή της ολικής μάζας".

## 3.11. Ολική εξωτερική ροπή ως προς το κέντρο μάζας - Παράγωγος ως προς το χρόνο της στροφορμής συστήματος υλικών σημείων ως προς το κέντρο μάζας - Θεώρημα μεταβολής της στροφορμής ως προς το κέντρο μάζας.

Ονομάζουμε ροπή εξωτερικής δύναμης, ως προς το κέντρο μάζας, το διάνυσμα $\vec{M}_{i,s}$

$$\vec{M}_{i,s} = \vec{r}_i' \times \vec{F}_i \,, \tag{1}$$

όπου $\vec{r}_i'$ το διάνυσμα θέσης του υλικού σημείου $i$, ως προς το κέντρο μάζας, και $\vec{F}_i$ η εξωτερική δύναμη που δρα σε αυτό το υλικό σημείο.

Το διάνυσμα $\vec{M}_s$

$$\vec{M}_s = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{i,s} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i' \times \vec{F}_i) \quad , \tag{2}$$

ονομάζεται "ολική εξωτερική ροπή" ως προς το κέντρο μάζας.

Από τη σχέση (2) της παραγράφου (3.10) γνωρίζουμε ότι, η στροφορμή του συστήματος των υλικών σημείων, ως προς το κέντρο μάζας είναι ίση με

$$\vec{L}_s = \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_i' \times \vec{\upsilon}_i') \quad . \tag{3}$$

Συνεπώς, η "παράγωγος ως προς το χρόνο της στροφορμής του συστήματος των υλικών σημείων, ως προς το κέντρο μάζας" ισούται με

$$\frac{d\vec{L}_s}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_i' \times \vec{\upsilon}_i') \right] \quad . \tag{4}$$

Η παράγωγος ως προς το χρόνο της ποσότητας $\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i' \times \vec{\upsilon}_i$ είναι

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i' \times \vec{\upsilon}_i \right) = \sum_{i=1}^{N} (m_i \dot{\vec{r}}_i' \times \vec{\upsilon}_i) + \sum_{i=1}^{N} (m_i \vec{r}_i' \times \dot{\vec{\upsilon}}_i) \tag{5}$$

Η διαφορική εξίσωση που διέπει την κίνηση του υλικού σημείου i είναι

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij} = m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt} \qquad (i \neq j)$$

ή

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij} = m_i \frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt} \qquad (i \neq j)$$

ή

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij} = m_i \dot{\vec{\upsilon}}_i \qquad (i \neq j) \tag{6}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (6), ο δεύτερος όρος του δευτέρου μέλους της (5) γράφεται

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i' \times \vec{\upsilon}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times m_i \dot{\vec{\upsilon}}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times (\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times \vec{F}_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_i' \times \vec{F}_{ij}}_{=0} \qquad (7)$$

(Το διπλό άθροισμα $\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_i' \times \vec{F}_{ij}$, που βρίσκεται στο δεύτερο μέλος της (7), ισούται με μηδεν. Αυτό αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο, που έγινε η απόδειξη, για το διπλό άθροισμα, που βρίσκεται στη σχέση (9) της παραγράφου (3.5.)).

Λαμβάνοντας υπόψη την (7), η (5) δίνει

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \vec{\upsilon}_i\right) = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \times \vec{\upsilon}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i \, . \qquad (8)$$

Λαμβάνοντας υπόψη το (Σχ.27) έχουμε

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{r}_s \, . \qquad (9)$$

Συνεπώς

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_i' + \dot{\vec{r}}_s$$

ή

$$\vec{\upsilon}_i = \vec{\upsilon}_i' + \vec{\upsilon}_s \, . \qquad (10)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (10), η (8) δίνει

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{N} \left[m_i \vec{r}_i' \times (\vec{\upsilon}_i' + \vec{\upsilon}_s)\right]\right] = \sum_{i=1}^{N} \left[m_i \dot{\vec{r}}_i' \times (\vec{\upsilon}_i' + \vec{\upsilon}_s)\right] + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times \vec{F}_i$$

ή

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i' \times \vec{\upsilon}_i' + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i'\right) \times \vec{\upsilon}_s\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i' \times \vec{\upsilon}_i' + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i'\right) \times \vec{\upsilon}_s + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times \vec{F}_i =$$

$$= \cancelto{=0}{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\upsilon}_i' \times \vec{\upsilon}_i'} + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\upsilon}_i'\right) \times \vec{\upsilon}_s + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times \vec{F}_i \quad . \tag{11}$$

Από τα θεωρήματα (3.9α,β) ισχύουν οι σχέσεις

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i' = 0 \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\upsilon}_i' = 0 \quad . \tag{12}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (12), η (11) δίνει

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i' \times \vec{\upsilon}_i'\right) = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times \vec{F}_i \quad . \tag{13}$$

Έχοντας υπόψη τους ορισμούς της ολικής εξωτερικής ροπής, ως προς το κέντρο μάζας, και της παραγώγου ως προς το χρόνο της στροφορμής του συστήματος των υλικών σημείων, ως προς το ίδιο σημείο, όπως έχουν δοθεί με τις σχέσεις (2) και (4), από την (13) προκύπτει

$$\frac{d\vec{L}_s}{dt} = \vec{M}_s \quad \text{ή} \quad M_s = \dot{\vec{L}}_s \quad . \tag{14}$$

Από την (14) συμπεραίνουμε ότι, "η ολική εξωτερική ροπή, ως προς το κέντρο μάζας, ισούται με την παράγωγο ως προς το χρόνο της στροφορμής του συστήματος των υλικών σημείων, ως προς το κέντρο μάζας.

Το συμπέρασμα αυτό είναι γνωστό ως "θεώρημα μεταβολής της στροφορμής, ως προς το κέντρο μάζας".

## 3.12. Ολική κινητική ενέργεια ως προς το κέντρο μάζας - Κινητική ενέργεια της ολικής μάζας του συστήματος.

Ονομάζουμε κινητική ενέργεια του υλικού σημείου μάζας $m_i$, ως προς το κέντρο μάζας την ποσότητα

$$T_{i,s} = \frac{1}{2} m_i |\upsilon_i'|^2 \quad , \tag{1}$$

όπου $\vec{\upsilon}_i'$ η ταχύτητα του υλικού σημείου $i$, ως προς το κέντρο μάζας.

Η ποσότητα $T_s$ που δίνεται από τη σχέση

$$T_s = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i |\upsilon_i'|^2 \quad , \tag{2}$$

ονομάζεται "ολική κινητική ενέργεια ως προς το κέντρο μάζας".

Ονομάζουμε "κινητική ενέργεια της ολικής μάζας του συστήματος", την ποσότητα

$$T^* = \frac{1}{2} M \upsilon_s^2 \quad , \tag{3}$$

όπου $M=m_1+m_2+\ldots m_N$ και $|\upsilon_s|$ το μέτρο της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_s$ του κέντρου μάζας.

Από τη σχέση (2) της παραγράφου (3.6) γνωρίζουμε ότι, η ολική κινητική ένέργεια του συστήματος των υλικών σημείων είναι ίση με

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \upsilon_i^2$$

ή

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\upsilon}_i \cdot \vec{\upsilon}_i \tag{4}$$

Χρησιμοποιώντας το (Σχ.27) ισχύει

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{r}_s \quad . \tag{5}$$

Από την (5) προκύπτει

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_i' + \dot{\vec{r}}_s$$

ή

$$\vec{\upsilon}_i = \vec{\upsilon}_i' + \vec{\upsilon}_s \quad . \tag{6}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (6), η (4) δίνει

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left[(\vec{\upsilon}_i'+\vec{\upsilon}_s)\cdot(\vec{\upsilon}_i'+\vec{\upsilon}_s)\right] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{\upsilon}_i'\cdot\vec{\upsilon}_i' + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{\upsilon}_i'\cdot\vec{\upsilon}_s +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{\upsilon}_s\cdot\vec{\upsilon}_i' + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{\upsilon}_s\cdot\vec{\upsilon}_s = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i|\upsilon_i'|^2 + \frac{1}{2}\vec{\upsilon}_s\cdot\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{\upsilon}_i'\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\vec{\upsilon}_s\cdot\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{\upsilon}_i'\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)\upsilon_s^2 \quad . \tag{7}$$

Από το θεώρημα (3.9β) ισχύει

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{\upsilon}_i' = 0 \quad . \tag{8}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (8), η (7) δίνει

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i|\upsilon_i'|^2 + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)\upsilon_s^2$$

ή

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i|\upsilon_i'|^2 + \frac{1}{2}M\upsilon_s^2 \quad . \tag{9}$$

'Εχοντας υπόψη τους ορισμούς της ολικής κινητικής ενέργειας ως προς το κέντρο μάζας και της κινητικής ενέργειας της ολικής μάζας του συστήματος, όπως έχουν δοθεί με τις σχέσεις (2) και (3), από την (9) προκύπτει

$$T = T_s + T^* \tag{10}$$

Από την (10) συμπεραίνουμε ότι, "η ολική κινητική ενέργεια συστήματος υλικών σημείων ισούται με το άθροισμα της ολικής κινητικής ενέργειας ως προς το κέντρο μάζας και της κινητικής ενέργειας της ολικής μάζας του συστήματος".

Η κινητική ενέργεια της ολικής μάζας του συστήματος αντιστοιχεί στην κίνηση ενός ιδεατού υλικού σημείου που συμπίπτει με το κινούμενο κέντρο μάζας και έχει μάζα ίση με τη συνολική μάζα του συστήματος. Η κινητική αυτή ενέργεια ονομάζεται πολλές φορές και "εσωτερική κινητική ενέργεια".

Η ολική κινητική ενέργεια ως προς το κέντρο μάζας ονομάζεται πολλές φορές και "εξωτερική κινητική ενέργεια".

### 3.13. Ισορροπία συστήματος υλικών σημείων.

Ένα σύστημα υλικών σημείων λέμε ότι βρίσκεται σε ισορροπία, όταν η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε κάθε υλικό σημείο του συστήματος είναι ίση με μηδέν.

# ΚΕΦ. 4

**Δεσμοι – Αρχη δυνατων εργων – Αρχη D'Alembert – Εξισωσεις Lagrange – Εξισωσεις Hamilton.**

## ΚΕΦ.4

Δράση - Αρχή δυνατών έργων - Αρχή d'Alembert - Εξισώσεις Lagrange - Εξισώσεις Hamilton.

## Γενικά

Στο προηγούμενο Κεφάλαιο δόθηκαν οι εξισώσεις κίνησης των υλικών σημείων συστήματος και βγήκαν ωρισμένα συμπεράσματα, ξεκινώντας από τα αξιώματα του Νεύτωνα και το χωρισμό των δυνάμων που ενεργούν σε κάθε υλικό σημείο σε "εσωτερικές" και "εξωτερικές".

Στο Κεφάλαιο αυτό οι δυνάμεις που ενεργούν σε κάθε υλικό σημείο θα χωριστούν σε "επιβεβλημένες" και "δεσμικές". Με βάση το χωρισμό αυτό θα διατυπωθούν θεωρήματα, που θα ισχύουν για την ισορροπία και την κίνηση του συστήματος των υλικών σημείων. Τα θεωρήματα αυτά είναι γνωστά ως "Αρχή των δυνατών έργων" και "Αρχή D'Alembert" αντίστοιχα.

Με βάση την αρχή D'Alembert θα προκύψουν διαφορικές εξισώσεις κίνησης για τα υλικά σημεία του συστήματος, γνωστές ως "εξισώσεις Lagrange". Στη συνέχεια, με τη βοήθεια των εξισώσεων Lagrange θα προκύψουν διαφορικές εξισώσεις κίνησης για τα υλικά σημεία του συστήματος, γνωστές ως "εξισώσεις Hamilton".

## 4.1 Δεσμοί - Είδη δεσμών

Συνήθως στην πράξη, η ισορροπία ή η κίνηση ενός υλικού σημείου ή συστήματος υλικών σημείων περιορίζεται. Π.χ. ένα υλικό σημείο περιορίζεται να κινείται ή να ισορροπεί στην επιφάνεια κάποιας σφαίρας ή η απόσταση μεταξύ δύο οποιωνδήποτε υλικών σημείων του συστήματος περιορίζεται να παραμένει σταθερή ή μπορεί να υπάρχουν και περιορισμοί για τις ταχύτητες.

Ονομάζουμε "δεσμούς" τους περιορισμούς που επιβάλλονται, κατά την ισορροπία ή την κίνηση, στα υλικά σημεία του συστήματος. Όταν δεν επιβάλλονται δεσμοί τότε λέμε ότι, το σύστημα είναι "ελεύθερο".

Οι "δεσμοί" που επιβάλλονται στα υλικά σημεία είναι διαφόρων μορφών. Εμείς θα χωρίσουμε τους δεσμούς σε δύο κατηγορίες, στους ολόνομους και ανολόνομους δεσμούς.

### (α) Ολόνομοι δεσμοί

Θεώρούμε σύστημα $N$ υλικών σημείων. Συμβολίζουμε με $(x_i,y_i,z_i)$, $(i=1,2,\dots,N)$, τις Καρτεσιανές συντεταγμένες κάθε υλικού σημείου και υποθέτουμε ότι, οι δεσμοί μπορούν να εκφραστούν στην παρακάτω μορφή

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,\dots,x_N,y_N,z_N,t) = 0 \quad ,\\
&\varphi_2(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,\dots,x_N,y_N,z_N,t) = 0 \quad ,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\varphi_i(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,\dots,x_N,y_N,z_N,t) = 0 \quad ,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\varphi_k(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,\dots,x_N,y_N,z_N,t) = 0 \quad ,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

όπου $k$ ο αριθμός των δεσμών με $k<3N$ .

Οι δεσμοί της μορφής (1) ονομάζονται "ολόνομοι δεσμοί".

Το πλήθος των ανεξάρτητων Καρτεσιανών συντεταγμένων που απαιτείται για να προσδιοριστεί η θέση ενός συστήματος υλικών σημείων είναι $3N-k$. Εάν οι "ολόνομοι δεσμοί" (1) περιέχουν εκπεφρασμένα το χρόνο $t$ , ονομάζονται "ολόνομοι - ρεόνομοι δεσμοί" εάν δεν περιέχουν εκπεφρασμένα το χρόνο ονομάζονται "ολόνομοι-σκληρόνομοι δεσμοί".

Π.χ. ο δεσμός της μορφής

$$\varphi_1(x_1,y_1,z_1,\ldots,x_N,y_N,z_N,t) = 0 , \tag{2}$$

είναι δεσμός "ολόνομος-ρεόνομος", ενώ οι δεσμοί της μορφής

$$\begin{aligned} &\varphi_2(x_1,y_1,z_1,\ldots,x_N,y_N,z_N) = 0 , \\ &\varphi_3(x_1,y_1,z_1,\ldots,x_N,y_N,z_N) = 0 , \end{aligned} \tag{3}$$

είναι "ολόνομοι-σκληρόνομοι".

Πιό ειδικά μπορούμε να δώσουμε το εξής παράδειγμα:

Σύστημα αποτελείται από τέσσερα (4) υλικά σημεία με συντεταγμένες $(x_1,y_1,z_1)$, $(x_2,y_2,z_2)$, $(x_3,y_3,z_3)$ και $(x_4,y_4,z_4)$. Τα υλικά σημεία με συντεταγμένες $(x_1,y_1,z_1)$ και $(x_2,y_2,z_2)$ κινούνται, το ένα πάνω στην επιφάνεια μιας σφαίρας της οποίας η ακτίνα μεταβάλλεται με το χρόνο και το κέντρο της βρίσκεται στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων, και το άλλο υλικό σημείο κρατείται σε απόσταση σταθερή από το προηγούμενο. Τα άλλα δύο υλικά σημεία κινούνται ελεύθερα στο χώρο.

Οι δεσμοί λοιπόν που επιβάλλονται για την κίνηση των υλικών σημείων είναι

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2 = R^2(t) , \quad R=\text{ακτίνα σφαίρας} \tag{4}$$

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} = \alpha , \quad \alpha=\text{σταθ.} \tag{5}$$

Τους δεσμούς (4) και (5) μπορούμε να τους γράψουμε στη μορφή

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2-R^2(t) = 0 \tag{6}$$

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-\alpha^2 = 0 . \tag{7}$$

Έχοντας υπόψη τις γενικές σχέσεις (1), οι δεσμοί (6) και (7) είναι "ολόνομοι δεσμοί". Ο μεν δεσμός (6) είναι "ολόνομος-ρεόνομος" ο δε δεσμός (7) είναι "ολόνομος-σκληρόνομος".

Το πλήθος των ανεξάρτητων Καρτεσιανών συντεταγμένων που απαιτούνται για να προσδιοριστεί η θέση των τεσσάρων υλικών σημείων του συστήματος είναι δέκα (10). Διότι, ο αριθμός των ανεξαρτήτων συντεταγμένων υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\text{αριθμός ανεξάρτητων συντεταγμένων} = 3N-k = 3.4-2 = 10$$

(N=αριθμός υλικών σημείων=4), (k=αριθμός ολόνομων δεσμών=2).

Εάν τώρα χρησιμοποιήσουμε την εξής αντιστοιχία για τις Καρτεσιανές συντεταγμένες των υλικών σημείων του συστήματος

$$\begin{gathered}(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,\ldots,x_N,y_N,z_N) \longleftrightarrow \\ (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,\ldots,x_{3N-2},x_{3N-1},x_{3N}) \quad , \end{gathered} \tag{7α}$$

οι σχέσεις (1) γράφονται

$$\begin{aligned}&\varphi_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,\ldots,x_{3N-2},x_{3N-1},x_{3N},t) = 0 \quad , \\ &\varphi_2(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,\ldots,x_{3N-2},x_{3N-1},x_{3N},t) = 0 \quad , \\ &\varphi_i(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,\ldots,x_{3N-2},x_{3N-1},x_{3N},t) = 0 \quad , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_k(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,\ldots,x_{3N-2},x_{3N-1},x_{3N},t) = 0 \quad . \end{aligned} \tag{8}$$

Διαφορίζοντας τις σχέσεις (8) παίρνουμε

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{3N}}dx_{3N} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial t}dt = 0 \quad , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_{3N}}dx_{3N}+\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}dt=0\ , \qquad (9)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_{3N}}dx_{3N}+\frac{\partial\varphi_k}{\partial t}dt=0\ .$$

Εάν θέσουμε

$$\alpha_{i,j}=\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\ ,\qquad \alpha_{i,0}=\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\qquad \begin{array}{l}(i=1,2,\ldots k)\\(j=1,2,\ldots 3N)\ ,\end{array}\qquad (10)$$

οι σχέσεις (9) λαμβάνουν τη μορφή

$$\begin{aligned}&\alpha_{1,1}dx_1+\alpha_{1,2}dx_2+\ldots+\alpha_{1,3N}dx_{3N}+\alpha_{1,0}dt=0\ ,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\alpha_{i,1}dx_1+\alpha_{i,2}dx_2+\ldots+\alpha_{i,3N}dx_{3N}+\alpha_{i,0}dt=0\ ,\\&\alpha_{k,1}dx_1+\alpha_{k,2}dx_2+\ldots+\alpha_{k,3N}dx_{3N}+\alpha_{k,0}dt=0\ .\end{aligned}\qquad (11)$$

Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε ότι, κάθε σχέση της μορφής (11), της οποίας το πρώτο μέλος είναι τέλειο διαφορικό, είναι ολόνομος-ρεόνομος δεσμός.

Στην ειδική περίπτωση που $\alpha_{i,0}=0$ , οι σχέσεις (11) λαμβάνουν τη μορφή

$$\begin{aligned}&\alpha_{1,1}dx_1+\alpha_{1,2}dx_2+\ldots+\alpha_{1,3N}dx_{3N}=0\ ,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\alpha_{i,1}dx_1+\alpha_{i,2}dx_2+\ldots+\alpha_{i,3N}dx_{3N}=0\ .\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\alpha_{k,1}dx_1+\alpha_{k,2}dx_2+\ldots+\alpha_{k,3N}dx_{3N}=0\ .\end{aligned}\qquad (12)$$

Οι σχέσεις (12) είναι δεσμοί ολόνομοι-σκληρόνομοι.

Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε, ότι κάθε σχέση της μορφής (12) της οποίας το πρώτο μέλος είναι τέλειο διαφορικό, είναι ολόνομος-σκληρόνομος δεσμός.

(β) Ανολόνομοι δεσμοί

Ονομάζονται "ανολόνομοι δεσμοί" οι δεσμοί που δεν μπορούν να λάβουν τη μορφή (1) ή (8).

Εάν οι ανολόνομοι δεσμοί περιέχουν εκπεφρασμένα το χρόνο $t$ ονομάζονται ανολόνομοι-ρεόνομοι δεσμοί. Εάν δεν περιέχουν εκπεφρασμένα το χρόνο $t$, ονομάζονται "ανολόνομοι-σκληρόνομοι δεσμοί".

Π.χ. οι δεσμοί που ορίζονται από τις σχέσεις

$$f_1(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,\ldots,x_N,y_N,z_N)\geq 0\ , \tag{13}$$

$$f_2(x_1,y_1,z_1,\dot{x}_2,\dot{y}_2,\dot{z}_2,\ldots,x_N,y_N,z_N)=0\ , \tag{14}$$

είναι "ανολόνομοι" δεσμοί.

(Η $f_1\geq 0$, δεν εμπίπτει στη μορφή (1), διότι είναι ανισότητα. Η $f_2=0$, δεν εμπίπτει στη μορφή (1), διότι περιέχει τους όρους $\dot{x}_2,\dot{y}_2,\dot{z}_2$, που είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας υλικού σημείου).

Πιο ειδικά μπορούμε να δώσουμε το εξής παράδειγμα : Υλικό σημείο με συντεταγμένες $(x_1,y_1,z_1)$ κινείται στην επιφάνεια ή στο εσωτερικό της σφαίρας, που έχει κέντρο το σημείο $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ και ακτίνα $R$=σταθ. Τότε ο δεσμός για την κίνηση του υλικού σημείου είναι

$$(x_1-\alpha_1)^2+(y_1-\alpha_2)^2+(z_1-\alpha_3)^2\leq R^2\ . \tag{15}$$

Η (15) γράφεται,

$$(x_1-\alpha_1)^2+(y_1-\alpha_2)^2+(z_1-\alpha_3)^2-R^2\leq 0\ . \tag{16}$$

Η (15) δεν είναι δεσμός της μορφής (1), διότι είναι ανισότητα. Επίσης δεν περιέχει εκπεφρασμένα το χρόνο.

Άρα είναι "ανολόνομος-σκληρόνομος" δεσμός.

Μία ειδική κατηγορία ανολόνομων δεσμών είναι οι δεσμοί της μορφής

$$f_j(\dot{x}_1,\dot{y}_1,\dot{z}_1,\dot{x}_2,\dot{y}_2,\dot{z}_2,\ldots,\dot{x}_N,\dot{y}_N,\dot{z}_N,t) = 0 \quad , \quad (j=1,2,\ldots,s) \quad (17)$$

όπου $\dot{x}_1,\dot{y}_1,\dot{z}_1,\ldots,\dot{x}_N,\dot{y}_N,\dot{z}_N$ οι συνιστώσες των ταχυτήτων των υλικών σημείων του συστήματος και $s$ το πλήθος των δεσμών.

Εάν χρησιμοποιήσουμε την αντιστοιχία (7α), η σχέση (17) γράφεται

$$f_j(\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{x}_3,\dot{x}_4,\dot{x}_5,\dot{x}_6,\ldots,\dot{x}_i,\ldots,\dot{x}_{3N-2},\dot{x}_{3N-1},\dot{x}_{3N},t) = 0 \quad (18)$$

$$(j=1,2,\ldots,s)$$

Διαφορίζοντας τη σχέση (18) προκύπτει

$$\frac{\partial f_j}{\partial \dot{x}_1}d\dot{x}_1 + \frac{\partial f_j}{\partial \dot{x}_2}d\dot{x}_2 + \cdots + \frac{\partial f_j}{\partial \dot{x}_i}d\dot{x}_i + \cdots + \frac{\partial f_j}{\partial x_{3N}}d\dot{x}_{3N} + \frac{\partial f_j}{\partial t}dt = 0 \quad (19)$$

$$(j=1,2,\ldots,s) .$$

Εάν θέσουμε

$$\alpha_{j,i} = \frac{\partial f_j}{\partial \dot{x}_i} \quad , \quad \alpha_{j,0} = \frac{\partial f_j}{\partial t} \quad \begin{matrix}(i=1,2,\ldots,3N)\\(j=1,2,\ldots,s)\end{matrix} \quad (20)$$

η σχέση (19) γράφεται

$$\alpha_{j,1}d\dot{x}_1+\alpha_{j,2}d\dot{x}_2+\ldots+\alpha_{j,3N}d\dot{x}_{3N}+\alpha_{j,0}dt = 0 \quad , \quad (j=1,2,\ldots,s) \quad (21)$$

Μετά από αυτά μπορούμε να πούμε ότι, κάθε σχέση της μορφής (21), που δεν είναι τέλειο διαφορικό (δεν ολοκληρώνεται) είναι ένας "ανολόνομος δεσμός".

Στην ειδική περίπτωση, που $\alpha_{j,0}=0$, η σχέση (21) λαμβάνει τη μορφή,

$$\alpha_{j,1}dx_1+\alpha_{j,2}dx_2+\ldots+\alpha_{j,3N}dx_{3N} = 0 \quad , \quad (j=1,2,\ldots,s) \quad (22)$$

Μετά από αυτά μπορούμε και εδώ να πούμε ότι, κάθε σχέση της μορφής (22) που δεν είναι τέλειο διαφορικό (δεν ολοκληρώνεται) είναι ένας "ανολόνομος-σκληρόνομος δεσμός".

## 4.2 Δεσμικές δυνάμεις - Επιβεβλημένες δυνάμεις - Εξισώσεις κίνησης του συστήματος υλικών σημείων.

Στο προηγούμενο Κεφάλαιο είχαμε χωρίσει τις δυνάμεις που ενεργούν σε υλικό σημείο του συστήματος σε δύο κατηγορίες, στις "εσωτερικές δυνάμεις" και στις "εξωτερικές δυνάμεις".

Τώρα θα χωρίσουμε τις δυνάμεις σε δύο άλλες κατηγορίες. Τη μία κατηγορία θα την ονομάσουμε "δεσμικές δυνάμεις" ή "αντιδράσεις" και την άλλη "επιβεβλημένες δυνάμεις" ή "δεδόμενες δυνάμεις". Οι δεσμικές δυνάμεις συμβολίζονται με $\vec{F}^{(\delta)}$, ενώ οι επιβεβλημένες με $\vec{F}^{(\varepsilon)}$. Θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε, τι αντιπροσωπεύει η κάθε κατηγορία.

Στην προηγούμενη παράγραφο είπαμε ότι, τα υλικά σημεία ενός συστήματος μπορεί να περιορίζονται από δεσμούς. Το γεγονός ότι τα υλικά σημεία περιορίζονται από δεσμούς, σημαίνει ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε τους δεσμούς με δυνάμεις που ενεργούν στα υλικά σημεία. Οι δυνάμεις αυτές ονομάζονται "δεσμικές δυνάμεις" ($\vec{F}^{(\delta)}$). Οφείλουν λοιπόν οι δεσμικές δυνάμεις αυτές να έχουν σχέση με τους δεσμούς.

Οι υπόλοιπες δυνάμεις που εξασκούνται στα ίδια υλικά σημεία λέγονται "επιβεβλημένες δυνάμεις" ($\vec{F}^{(\varepsilon)}$). Οι δυνάμεις αυτές μπορούμε να πούμε ότι έχουν "φυσική" προέλευση.

Για να γίνουν πιό αντιληπτά τα παραπάνω, θα δώσουμε το εξής παράδειγμα.

Υλικό σημείο βρίσκεται κάτω από την επίδραση του πεδίου βαρύτητας της Γης και κινείται πάνω σε ένα επίπεδο.

Κίνηση του υλικού σημείου πάνω στο επίπεδο σημαίνει ότι, το υλικό σημείο κινείται πάνω σε ένα δεσμό, που δίνεται από την εξίσωση του επιπέδου. Ο δεσμός αυτός εξασκεί μια "δεσμική" δύναμη πάνω στο υλικό σημείο. Αυτή είναι η γνωστή μας αντίδραση, την οποία εξασκεί το επίπεδο στο υλικό σημείο. Στο υλικό σημείο επί πλέον ενεργεί και το βάρος που οφείλεται στην έλξη της Γης. Η δύναμη αυτή έχει φυσική προέλευση και είναι η "επιβεβλημένη δύναμη", που εξασκείται στο υλικό σημείο. Συνεπώς το σύνολο των δυνάμεων που ασκούνται στο υλικό σημείο είναι η αντίδραση και το βάρος.

Γενικά μπορούμε να πούμε ότι, οι διαφορικές εξιώσεις κίνησης συστήματος $N$ υλικών σημείων είναι οι $3N$ διαφορικές εξισώσεις

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i^{(\delta)} + \vec{F}_i^{(\varepsilon)} \quad , \quad (i=1,2,3,\ldots,N)$$

όπου

$$\vec{F}_i^{(\delta)} = F_{ix}^{(\delta)}\vec{x}_0 + F_{iy}^{(\delta)}\vec{y}_0 + F_{iz}^{(\delta)}\vec{z}_0 \quad , \quad \vec{F}_i^{(\varepsilon)} = F_{ix}^{(\varepsilon)}\vec{x}_0 + F_{iy}^{(\varepsilon)}\vec{y}_0 + F_{iz}^{(\varepsilon)}\vec{z}_0 \quad (1)$$

και

$$\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \ddot{x}_{ix}\vec{x}_0 + \ddot{y}_{iy}\vec{y}_0 + \ddot{z}_{iz}\vec{z}_0 \ .$$

## 4.3 Πραγματική μετατόπιση - Δυνατή μετατόπιση

Για να καταλάβουμε τις έννοιες της "πραγματικής" και της "δυνατής" μετατόπισης και επιπλέον να είναι "συμβιβαστές" με τους δεσμούς, ας αρχίσουμε με παραδείγματα.

Θεωρούμε σύστημα $N$ υλικών σημείων. Συμβολίζουμε με $(x_i,y_i,z_i)$, $(i=1,2,\ldots,N)$ τις Καρτεσιανές συντεταγμένες κάθε υλικού σημείου του συστήματος.

Υποθέτουμε ότι, το σύστημα υπόκειται στον ολόνομο δεσμό

$$f(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,\ldots,x_N,y_N,z_N,t) = 0 \ . \qquad (1)$$

Έστω ότι τα υλικά σημεία μετατοπίζονται κατά $d\vec{r}_i = dx_i\vec{x}_0 + dy_i\vec{y}_0 + dz_i\vec{z}_0$ $(i=1,2,\ldots,N)$, σε χρόνο $dt \neq 0$.

Οι Καρτεσιανές συντεταγμένες των νέων θέσεων των υλικών σημείων θα είναι $(x_i+dx_i, y_i+dy_i, z_i+dz_i)$, $(i=1,2,3,\ldots,N)$.

Στη νέα θέση οι συντεταγμένες των υλικών σημείων του συστήματος, πρέπει να επαληθεύουν το δεσμό (1). Δηλαδή, θα ισχύει

$$f(x_1+dx_1,y_1+dy_1,z_1+dz_1,\dots x_N+dx_N,y_N+dy_N,z_N+dz_N,t+dt) \qquad (2)$$

Το πρώτο μέλος της (2) γράφεται

$$f(x_1+dx_1,y_1+dy_1,\dots,t+dt) \cong f(x_1,y_1,z_1,\dots,x_N,y_N,z_N,t)+$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial y_1}dy_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial z_N}dz_N+\frac{\partial f}{\partial t}dt+\underbrace{\text{όροι ανωτέρας τάξης}}_{=0}. \qquad (3)$$

Αφαιρώντας την (1) από την (2) και λαμβάνοντας υπόψη την (3), προκύπτει

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial y_1}dy_1+\frac{\partial f}{\partial z_1}dz_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial z_N}dz_N+\frac{\partial f}{\partial t}dt=0\,. \qquad (4)$$

Η (4) μας δίνει τη σχέση, που πρέπει να ισχύει ώστε, οι μετατοπίσεις $(dx_1,dy_1,dz_1,dx_2,\dots,dz_N)$ να είναι συμβιβαστές με τους δεσμούς.

Θεωρούμε πάλι τα ίδια υλικά σημεία με τις ίδιες συντεταγμένες και να υπόκεινται στον ίδιο δεσμό.

Έστω ότι τα υλικά σημεία μετατοπίζονται σε χρόνο μηδέν. Αυτή φυσικά είναι μια υποθετική μετατόπιση των υλικών σημείων. Για να την διακρίνουμε από την προηγούμενη τη συμβολίζουμε με $\delta\vec{r}_i$. Οι μετατοπίσεις των υλικών σημείων θα είναι $\delta\vec{r}_i=\delta x_i\vec{x}_0+\delta y_i\vec{y}_0+\delta z_i\vec{z}_0$, $(i=1,2,\dots,N)$, σε χρόνο $\delta t=0$.

Οι συντεταγμένες των νέων θέσεων των υλικών σημείων του συστήματος θα είναι $(x_i+\delta x_i,y_i+\delta y_i,z_i+\delta z_i)$, $(i=1,2,3,\dots,N)$.

Στη νέα θέση οι συντεταγμένες των υλικών σημείων του συστήματος πρέπει να επαληθεύουν το δεσμό (1). Δηλαδή θα ισχύει

$$f(x_1+\delta x_1,y_1+\delta y_1,z_1+\delta z_1,\dots, x_N+\delta x_N,y_N+\delta y_N,z_N+\delta z_N,t+\underbrace{\delta t}_{=0})=0. \qquad (5)$$

Το πρώτο μέλος της (5) γράφεται

$$f(x_1+\delta x_1, y_1+\delta y_1, z_1+\delta z_1, \ldots, z_N+\delta z_N, t) \equiv f(x_1, y_1, z_1, \ldots, z_N, t) +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1}\delta y_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial z_N}\delta z_N . \qquad (6)$$

Αφαιρώντας την (1) από την (5) και λαμβάνοντας υπόψη την (6), προκύπτει

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1}\delta z_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial z_N}\delta z_N = 0 . \qquad (7)$$

Η (7) μας δίνει τη σχέση που πρέπει να ισχύει ώστε, οι μετατοπίσεις $(\delta x_1, \delta y_1, \ldots, \delta z_N)$ να είναι συμβιβαστές με τους δεσμούς.

Με το ίδιο σκεπτικό μπορούμε να πούμε ότι οι σχέσεις (11),(12),(21) και (22) της παραγράφου (4.1) είναι σχέσεις, που ισχύουν έτσι ώστε, οι μετατοπίσεις να είναι συμβιβαστές με τους δεσμούς και να γίνονται σε χρόνο $dt \neq 0$.

Όταν οι μετατοπίσεις γίνονται σε χρόνο $\delta t=0$, οι προηγούμενες σχέσεις λαμβάνουν διάφορες μορφές.

Π.χ. η (11) της παραγράφου (4.1) γίνεται

$$\begin{aligned} &\alpha_{1,1}\delta x_1 + \alpha_{1,2}\delta x_2 + \ldots + \alpha_{1,3N}\delta x_{3N} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_{i,1}\delta x_1 + \alpha_{i,2}\delta x_2 + \ldots + \alpha_{i,3N}\delta x_{3N} = 0 , \qquad (8) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_{k,1}\delta x_1 + \alpha_{k,2}\delta x_2 + \ldots + \alpha_{k,3N}\delta x_{3N} = 0 . \end{aligned}$$

Η (12) θα έχει την ίδια μορφή με την προηγούμενη.

Η (22 ) γίνεται

$$\alpha_{j,1}\delta x_1 + \alpha_{j,2}\delta x_2 + \ldots + \alpha_{j,3N}\delta x_{3N} = 0 , \quad (j=1,2,\ldots,s) . \qquad (9)$$

Από τη μελέτη αυτή μπορούμε να δώσουμε τον ορισμό της "δυνατής μετατόπισης", την οποία συμβολίζουμε με $\delta\vec{r}$ .

"Δυνατή μετατόπιση ονομάζεται μία απειροστή μετατόπιση, συμβιβαστή με τους δεσμούς, που γίνεται σε χρόνο μηδέν ($\delta t=0$) ".

Η μετατόπιση αυτή είναι υποθετική.

"Πραγματική μετατόπιση ονομάζεται μία απειροστή μετατόπιση, συμβιβαστή με τους δεσμούς, που γίνεται σε χρόνο $dt\neq 0$".

## 4.4 Αναστρέψιμοι και μη αναστρέψιμοι δεσμοί.

Τους δεσμούς στους οποίους υπόκειται ένα σύστημα τους είχαμε χωρίσει σε "ολόνομους" και "ανολόνομους".

Τώρα θα κάνουμε ένα άλλο χωρισμό. Θα τους χωρίσουμε σε "αναστρέψιμους δεσμούς" και σε "μη αναστρέψιμους δεσμούς".

Ονομάζουμε αναστρέψιμο δεσμό, το δεσμό για τον οποίο, εάν υπάρχει η δυνατή μετατόπιση $\delta\vec{r}_i$ , $(i=1,2,3,\dots,N)$ , θα υπάρχει και η αντίθετη δυνατή μετατόπιση $-\delta\vec{r}_i$ .

Π.χ. οι δεσμοί της μορφής (1), (11), (17), (21) και (22) της παραγράφου (4.1) είναι αναστρέψιμοι δεσμοί.

"Ονομάζουμε μη αναστρέψιμο δεσμό, το δεσμό για τον οποίο σε κάθε δυνατή μετατόπιση δεν υπάρχει η αντίθετη δυνατή μετατόπιση"

Τούτο συμβαίνει όταν οι εξισώσεις των δεσμών εκφράζονται με ανισότητες. Π.χ. όταν υλικό σημείο κινείται στην επιφάνεια και στο εσωτερικό της σφαίρας, όταν υπάρχει δυνατή μετατόπιση προς το εσωτερικό της σφαίρας δεν υπάρχει η αντίθετη προς το εξωτερικό. Και αυτά γιατί είναι ασυμβίβαστα με το δεσμό.

Σε όλα τα επόμενα θα εξετάσουμε μόνο αναστρέψιμους δεσμούς.

## 4.5 Δυνατό έργο - Καθαρά μηχανικό σύστημα.

Ονομάζουμε δυνατό έργο $\delta W_i$ το στοιχειώδες έργο, που "παράγει" η συνολική δύναμη $\vec{F}_i$ που ενεργεί στο υλικό σημείο $i$ , κατά τη δυνατή μετατόπιση του υλικού σημείου κατά $\delta\vec{r}_i$

$$\delta W_i = \vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i \quad .$$

Εάν τη συνολική δύναμη, που ενεργεί στο υλικό σημείο, την εκφράσουμε συναρτήσει των δεσμικών και επιβεβλημένων δυνάμεων, που ενεργούν στο ίδιο υλικό σημείο, θα ισχύει

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(\delta)} + \vec{F}_i^{(\varepsilon)} \quad . \tag{2}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (2), η (1) δίνει

$$\delta W_i = \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = (\vec{F}_i^{(\delta)} + \vec{F}_i^{(\varepsilon)}) \cdot \delta\vec{r}_i = \vec{F}_i^{(\delta)} \cdot \delta\vec{r}_i + \vec{F}_i^{(\varepsilon)} \cdot \delta\vec{r}_i \quad ; \tag{3}$$

Η ποσότητα $\vec{F}_i^{(\delta)} \cdot \delta\vec{r}_i$ ονομάζεται δυνατό έργο $\delta W_i^{(\delta)}$ των "δεσμικών δυνάμεων".

$$\delta W_i^{(\delta)} = \vec{F}_i^{(\delta)} \cdot \delta\vec{r}_i \quad . \tag{4}$$

Η ποσότητα $\vec{F}_i^{(\varepsilon)} \cdot \delta\vec{r}_i$ ονομάζεται δυνατό έργο $\delta W_i^{(\varepsilon)}$, των "επιβεβλημένων δυνάμεων"

$$\delta W_i^{(\varepsilon)} = \vec{F}_i^{(\varepsilon)} \cdot \delta\vec{r}_i \quad . \tag{5}$$

Ονομάζουμε "καθαρά μηχανικό σύστημα", σύστημα υλικών σημείων για το οποίο το συνολικό δυνατό έργο των "δεσμικών δυνάμεων" για κάθε δυνατή μετατόπιση να ισούται με το μηδέν.

Δηλαδή για καθαρά μηχανικό σύστημα $N$ υλικών σημείων θα ισχύει

$$\vec{F}_1^{(\delta)} \cdot \delta\vec{r}_1 + \vec{F}_2^{(\delta)} \cdot \delta\vec{r}_2 + \ldots + \vec{F}_N^{(\delta)} \cdot \delta\vec{r}_N = 0$$

ή

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(\delta)} \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \tag{6}$$

όπου $\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2, \ldots, \delta\vec{r}_N$ είναι οι αντίστοιχες δυνατές μετατοπίσεις για το κάθε υλικό σημείο.

Η σχέση (6) ονομάζεται και αρχή της παθητικότητας των αντιδράσεων.

Ένα παράδειγμα "καθαρά μηχανικού συστήματος" είναι ένα υλικό σημείο που κινείται πάνω σε γνωστή επιφάνεια.

Πράγματι, σύμφωνα με όσα αναπτύξαμε στην παράγραφο (2.12), η δεσμική δύναμη $\vec{F}^{(\delta)}$ είναι

$$\vec{F}^{(\delta)} = \lambda \nabla f \quad , \quad f(x,y,z) = 0 \ . \tag{7}$$

Η $\vec{F}^{(\delta)}$ είναι κάθετη στην επιφάνεια. Η δυνατή μετατόπιση $\delta\vec{r}$ είναι εφαπτόμενη στην επιφάνεια. Άρα

$$\vec{F}^{(\delta)}\cdot\delta\vec{r} = 0 \ . \tag{8}$$

Συνεπώς υπακούει στη σχέση (6), όπως δηλαδή αυτή πρέπει να ισχύει για ένα υλικό σημείο. Επίσης μπορεί να αποδειχτεί ότι, σύστημα υλικών σημείων, που υπόκειται σε δεσμούς της μορφής (1),(11),(12),(17),(21) και (22) της παραγράφου (4.1), είναι "καθαρά μηχανικό σύστημα".

## 4.6 Αρχή δυνατών έργων

Υποθέτουμε ότι, έχουμε ένα καθαρά μηχανικό σύστημα $N$ υλικών σημείων σε ισορροπία. Επαναλαμβάνουμε ότι, οι δεσμοί στους οποίους υπόκειται ένα τέτοιο σύστημα είναι αναστρέψιμοι. Υπάρχει θεώρημα που μας λέγει, πότε αυτό το σύστημα θα βρίσκεται σε ισορροπία.

Το θεώρημα διατυπώνεται ως εξής :

"Καθαρά μηχανικό σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία, αν και μόνο αν, το συνολικό δυνατό έργο των επιβεβλημένων δυνάμεων ισούται με το μηδέν". Δηλαδή,

$$\vec{F}_1^{(\varepsilon)}\cdot\delta\vec{r}_1 + \vec{F}_2^{(\varepsilon)}\cdot\delta\vec{r}_2 + \ldots + \vec{F}_N^{(\varepsilon)}\cdot\delta\vec{r}_N = 0$$

ή

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(\varepsilon)}\cdot\delta\vec{r}_i = 0 \ . \tag{1}$$

Το θεώρημα αυτό είναι γνωστό σαν "Αρχή των δυνατών έργων".

Πράγματι, εάν τέτοιο σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία, σύμφωνα με τα όσα είπαμε στην παράγραφο (3.13), θα ισχύει

$$\vec{F}_i = 0 \ . \tag{2}$$

Πολλαπλασιάζουμε την (2) εσωτερικά με $\delta\vec{r}_i$, οπότε έχουμε

$$\vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \ . \tag{3}$$

Επειδή

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(\varepsilon)} + \vec{F}_i^{(\delta)} \ , \tag{4}$$

από την (3) προκύπτει

$$(\vec{F}_i^{(\varepsilon)} + \vec{F}_i^{(\delta)}) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \ . \tag{5}$$

Αθροίζοντας την (5) για όλα τα υλικά σημεία του συστήματος, έχουμε

$$\sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i^{(\varepsilon)} + \vec{F}_i^{(\delta)}) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \tag{6}$$

ή

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(\varepsilon)} \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(\delta)} \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \ . \tag{7}$$

Επειδή πρόκειται για καθαρά μηχανικό σύστημα, θα ισχύει

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(\delta)} \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \ . \tag{8}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (8), η (7) δίνει

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(\varepsilon)} \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \ . \tag{9}$$

Η (9) είναι η σχέση (1), που θέλαμε να αποδείξουμε.

Ισχύει επίσης και το αντίστροφο.

Το πλεονέκτημα της "αρχής των δυνατών έργων" έγκειται στο ότι δεν περιέχει τις δεσμικές δυνάμεις, οι οποίες δεν είναι γνωστές εκ των προτέρων.

Επίσης μία μόνο σχέση, δηλαδή η (1), μας δίνει την ισορροπία του μηχανικού συστήματος.

Σύστημα υλικών σημείων, που υπόκειται σε δεσμούς της μορφής (1), (11),(12),(17),(21) και (22) της παραγράφου (4.1), είναι όπως είπαμε στην παράγραφο (4.5) "καθαρά μηχανικό σύστημα". Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε σ'αυτό την "Αρχή των δυνατών έργων".

## 4.7 Αρχή D'Alembert

Θεωρούμε ένα καθαρά μηχανικό σύστημα. Έστω υλικό σημείο μάζας $m_i$ του συστήματος. Η διαφορική εξίσωση κίνησης του υλικού σημείου είναι

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{(\varepsilon)}+\vec{F}_i^{(\delta)} \quad . \tag{1}$$

Η εξίσωση (1) γράφεται

$$\vec{F}_i^{(\varepsilon)}-m_i\ddot{\vec{r}}_i+\vec{F}_i^{(\delta)} = 0 \quad . \tag{2}$$

Τον όρο $-m_i\ddot{\vec{r}}_i$ μπορούμε να τον ερμηνεύσουμε σαν μία επιβεβλημένη δύναμη. Η δύναμη αυτή ονομάζεται "δύναμη D' Alembert" ή "δύναμη αδράνειας".

Εάν την συμβολίσουμε με $\vec{F}_i^*$

$$\vec{F}_i^* = -m_i\ddot{\vec{r}}_i \quad , \tag{3}$$

η (2) γράφεται

$$\vec{F}_i^{(\varepsilon)}+\vec{F}_i^*+\vec{F}_i^{(\delta)}= 0 \quad . \tag{4}$$

Από την (4) προκύπτει ότι, η κίνηση του υλικού σημείου έχει αναχθεί σε ισορροπία του υλικού σημείου. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε την "αρχή των δυνατών έργων".

Άρα

$$\sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i^{(\varepsilon)} + \vec{F}_i^{*}) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \tag{5}$$

ή

$$\sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i^{(\varepsilon)} - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \ . \tag{6}$$

Η σχέση (6) είναι γνωστή σαν "Αρχή D' Alembert" και διατυπώνεται ως εξής:

"Καθαρά μηχανικό σύστημα υλικών σημείων κινείται κατά τέτοιο τρόπο ώστε, το συνολικό δυνατό έργο των επιβεβλημένων δυνάμεων και των δυνάμεων αδράνειας να ισούται με μηδέν.

Τα πλεονεκτήματα της "αρχής D' Alembert" έγκεινται στο ότι δεν περιέχει τις δεσμικές δυνάμεις και διακρίνεται για την μαθηματική της λιτότητα, αφού με μια μόνο σχέση εκφράζει την κίνηση.

## 4.8 Γενικευμένες συντεταγμένες - Γενικευμένες ταχύτητες - Σχέσεις γενικευμένων συντεταγμένων με Καρτεσιανές συντεταγμένες.

Θεωρούμε σύστημα $N$ υλικών σημείων των οποίων οι θέσεις αναφέρονται ως προς Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Ο προσδιορισμός της θέσης κάθε υλικού σημείου του συστήματος στο χώρο απαιτεί τρεις (3) Καρτεσιανές συντεταγμένες. Επομένως, για τα $N$ υλικά σημεία του συστήματος χρειάζονται $3N$ Καρτεσιανές συντεταγμένες.

Μπορούμε όμως, αντί να χρησιμοποιήσουμε Καρτεσιανές συντεταγμένες για να προσιδορίσουμε τις θέσεις των υλικών σημείων του συστήματος να χρησιμοποιήσουμε άλλες παραμέτρους.

Οι παράμετροι, που χρησιμοποιούνται γιά τον προσδιορισμό των θέσεων των υλικών σημείων του συστήματος ονομάζονται "γενικευμένες συντεταγμένες" και τις συμβολίζουμε κατά κανόνα με $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_\ell$ .

Οι γενικευμένες συντεταγμένες δεν είναι απαραίτητο να έχουν διαστάσεις μήκους. Μπορούν ακόμη να μην έχουν φυσική ή γεωμετρική σημασία. Η μόνη απαίτηση από αυτές είναι να περιγράφουν πλήρως τη θέση του συστήματος. Για κάθε περίπτωση υπάρχουν πολλά συστήματα γενικευμένων συντεταγμένων, που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν. Πρέπει όμως, χρησιμοποιώντας την εμπειρία, να αναζητηθεί εκείνο το σύστημα γενικευμένων συντεταγμένων που να οδηγεί σε απλούστερους υπολογισμούς.

Οι παράγωγοι, ως προς τον χρόνο, των γενικευμένων συντεταγμένων, $\dot{q}_1,\dot{q}_2,\dot{q}_3,\ldots,\dot{q}_\ell$, ονομάζονται "γενικευμένες ταχύτητες".

Οι Καρτεσιανές συντεταγμένες μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των γενικευμένων συντεταγμένων ως εξής:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= x_1(q_1,q_2,\ldots,q_\ell,t)\ ,\\
x_2 &= x_2(q_1,q_2,\ldots,q_\ell,t)\ ,\\
x_3 &= x_3(q_1,q_2,\ldots,q_\ell,t)\ ,\\
x_4 &= x_4(q_1,q_2,\ldots,q_\ell,t)\ ,\\
x_5 &= x_5(q_1,q_2,\ldots,q_\ell,t)\ ,\\
x_6 &= x_6(q_1,q_2,\ldots,q_\ell,t)\ ,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_{3N-2} &= x_{3N-2}(q_1,q_2,\ldots,q_\ell,t)\ ,\\
x_{3N-1} &= x_{3N-2}(q_1,q_2,\ldots,q_\ell,t)\ ,\\
x_{3N} &= x_{3N}(q_1,q_2,\ldots q_\ell,t)\ ,
\end{aligned}\right\}\ (3N\text{-σχέσεις}) \qquad (1)$$

όπου $(x_1,x_2,x_3)$ είναι οι Καρτεσιανές συντεταγμένες για το πρώτο υλικό σημείο, $(x_4,x_5,x_6)$ είναι οι Καρτεσιανές συντεταγμένες για το δεύτερο υλικό σημείο..., $(x_{3N-2},x_{3N-1},x_{3N})$ για το N-στό υλικό σημείο.

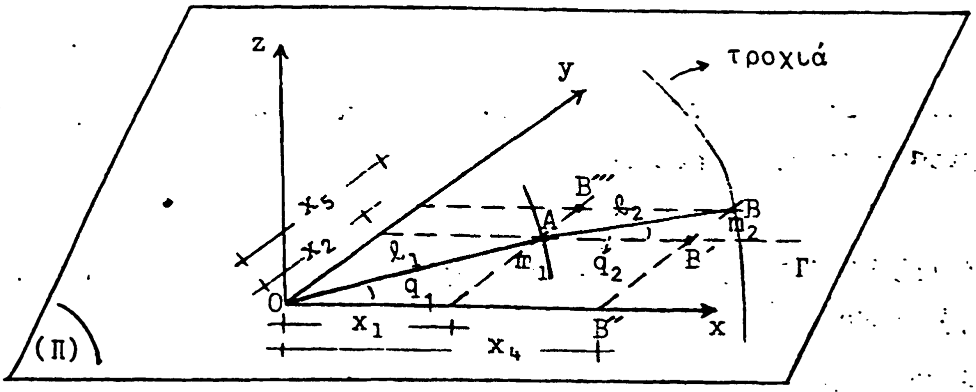
Οι σχέσεις (1) σε συνεπτυγμένη μορφή γράφονται

$$x_i = x_i(q_1,q_2,\ldots,q_\ell,t)\ , \quad (i=1,2,\ldots,3N) \qquad (2)$$

ή

$$x_i = x_i(q_m,t) \qquad (i=1,2,\ldots,3N)\ , \quad (m=1,2,\ldots,\ell)\ . \qquad (3)$$

Σαν παράδειγμα των όσων αναπτύξαμε, ας αναφέρουμε την κίνηση δύο υλικών σημείων $m_1$ και $m_2$ στο επίπεδο (Π) , (Σχ.27). Το υλικό σημείο




Σχ.27

$m_1$ συγκρατείται από αβαρές νήμα, του οποίου το μήκος $\ell_1$ μεταβάλλεται με το χρόνο, σύμφωνα με τη σχέση $\ell_1=5t$ . Το άλλο άκρο του νήματος, είναι δεμένο στο σταθερό σημείο O . Το υλικό σημείο $m_2$ συγκρατείται από το αβαρές νήμα $\ell_2$ του οποίου το μήκος παραμένει σταθερό. Το άλλο άκρο του νήματος αυτού είναι δεμένο στο υλικό σημείο $m_1$ . Ζητείται να βρεθεί σύστημα γενικευμένων συντεταγμένων και οι σχέσεις τους με τις Καρτεσιανές συντεταγμένες.

Θεωρούμε το σημείο O ως αρχή του Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων Oxyz . Ο άξονας Oz είναι κάθετος στο επίπεδο (Π) . Χρησιμοποιούμε για το υλικό σημείο $m_1$ τις Καρτεσιανές συντεταγμένες $(x_1,x_2,x_3)$ και για το υλικό σημείο $m_2$ τις Καρτεσιανές συντεταγμένες $(x_4,x_5,x_6)$. Ονομάζουμε $q_1$ τη γωνία, που σχηματίζει η $OA\equiv \ell_1$ με τον άξονα Ox και $q_2$ τη γωνία, που σχηματίζει η $AB\equiv \ell_2$ με την ΑΓ. Η ΑΓ είναι παράλληλη προς τον άξονα Ox . Γνωρίζοντας τις γενικευμένες συντεταγμένες $q_1$ και $q_2$ , μπορούμε να προσδιορίσουμε τις θέσεις των υλικών σημείων $m_1$ και $m_2$ , όπως θα δούμε αμέσως.

Από το (Σχ.27) προκύπτει

$$
\begin{array}{llll}
x_1 = \ell_1 \cos q_1 & ή & x_1 = 3t\cos q_1 & \\
x_2 = \ell_1 \cos q_2 & ή & x_2 = 3t\sin q_1 & \\
 & & x_3 = 0 & (4) \\
x_4 = x_1 + AB' & ή & x_4 = 3t\cos q_1 + \ell_2 \cos q_2 & \\
x_5 = x_2 + AB'' & ή & x_4 = 3t\sin q_1 + \ell_2 \sin q_2 & \\
 & & x_6 = 0 . &
\end{array}
$$

Οι (4) είναι οι σχέσεις που συνδέουν τις γενικευμένες συντεταγμένες με τις Καρτεσιανές συντεταγμένες.

## 4.9α Βαθμός ελευθερίας συστήματος υλικών σημείων που υπόκεινται σε ολόνομους δεσμούς.

Από την παράγραφο (4.1α) γνωρίζουμε ότι, το πλήθος $\nu$ των ανεξάρτητων Καρτεσιανών συντεταγμένων, που απαιτείται για να προσδιοριστεί η θέση ενός συστήματος υλικών σημείων, που υπόκειται σε ολόνομους δεσμούς, είναι $\nu=3N-k$, ($N$ ο αριθμός των υλικών σημείων του συστήματος και $k$ ο αριθμός των ολόνομων δεσμών, στους οποίους υπόκειται το σύστημα).

Το πλήθος $\nu$ αντιπροσωπεύει το "βαθμό ελευθερίας" όταν το σύστημα υπόκειται σε $\nu$ ολόνομους δεσμούς. Αν η θέση του συστήματος προσδιοριστεί με γενικευμένες συντεταγμένες, ο αριθμός των ανεξάρτητων γενικευμένων συντεταγμένων, που μπορούμε να έχουμε, είναι ίσος με το βαθμό ελευθερίας του συστήματος.

Έστω ότι τις $3N$ Καρτεσιανές συντεταγμένες του συστήματος τις γράφουμε συναρτήσει των γενικευμένων συντεταγμένων $q_1, q_2, \ldots, q_\nu$, που το πλήθος τους είναι ίσο με το βαθμό ελευθερίας του συστήματος

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x_1(q_1,q_2,\ldots,q_\nu,t)\ , \\ x_2 = x_2(q_1,q_2,\ldots,q_\nu,t)\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i = x_i(q_1,q_2,\ldots,q_\nu,t)\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{3N} = x_{3N}(q_1,q_2,\ldots,q_\nu,t), \end{array}\right\} (3N \text{ σχέσεις- } \nu \leq 3N) \qquad (1)$$

και έτσι ώστε οι k-δεσμικές σχέσεις, που δίνονται από την (8) της παραγράφου (4.1α), να επαληθεύονται εκ ταυτότητας τότε οι γενικευμένες συντεταγμένες είναι ανεξάρτητες.

Για να γίνουν πιο κατανοητά τα όσα αναπτύξαμε εδώ, ας επανέλθουμε στο παράδειγμα που δώσαμε στην παράγραφο (4.8), για να δούμε, ποιός είναι ο βαθμός ελευθερίας του συστήματος και αν είναι ανεξάρτητες οι γενικευμένες συντεταγμένες που εκλέξαμε.

Το σύστημα αυτό έχει τέσσερες (4) δεσμούς. Δύο (2) δεσμούς που αφορούν τα μήκη $\ell_1$ και $\ell_2$ και άλλους δύο (2) που αφορούν τις συντεταγμένες $x_3$ και $x_4$ , οι οποίες συνεχώς είναι ίσες με μηδέν.

$$\ell_1 = \sqrt{x_1^2+x_2^2} \quad \text{ή} \quad x_1^2+x_2^2-25t^2 = 0\ , \qquad (2)$$

$$\ell_2 = \sqrt{(x_4-x_1)^2+(x_5-x_2)^2} \quad \text{ή} \quad (x_4-x_1)^2+(x_5-x_2)^2-\ell_2^2 = 0\ , \qquad (3)$$

$$x_3 = 0, \qquad (4)$$

$$x_6 = 0\ . \qquad (5)$$

Οι δεσμοί (2),(3),(4) και (5) είναι ολόνομοι, διότι είναι της μορφής (8) της παραγράφου (4.1α).

Ο βαθμός ελευθερίας $\nu$ του συστήματος είναι

$$\nu = 3N-k = 3\cdot 2-4 = 2\ .$$

'Αρα οι γενικευμένες συντεταγμένες του συστήματος είναι δύο (2) και οι σχέσεις (4) της παραγράφου (4.8), επαληθεύουν τους δεσμούς (2),(3),(4) και (5) εκ ταυτότητας. Είναι λοιπόν οι γενικευμένες συντεταγμένες και ανεξάρτητες.

## 4.9β Βαθμός ελευθερίας συστήματος υλικών σημείων που υπόκεινται σε ανολόνομους δεσμούς.

Στην προηγούμενη παράγραφο είπαμε ότι ο βαθμός ελευθερίας συστήματος εξαρτάται από τον αριθμό των ολόνομων δεσμών. Εάν οι δεσμοί είναι ανολόνομοι τότε διακρίνουμε δύο είδη βαθμών ελευθερίας του συστήματος.
(α) Βαθμό ελευθερίας του συστήματος για πεπερασμένη κίνηση.
(β) Βαθμό ελευθερίας του συστήματος για απειροστή κίνηση.

Ονομάζουμε "βαθμό ελευθερίας του συστήματος για πεπερασμένη κίνηση" το πλήθος των ανεξάρτητων γενικευμένων συντεταγμένων, που απαιτείται για να προσδιοριστεί η θέση του συστήματος.

Ονομάζουμε "βαθμό ελευθερίας του συστήματος για απειροστή κίνηση" τον αριθμό των ανεξάρτητων τρόπων με τους οποίους μπορεί να μετακινηθεί το σύστημα από μια θέση σε μία γειτονική.

Αν π.χ. πρόκειται για τη δυνατή μετατόπιση των γενικευμένων συντεταγμένων που σχετίζονται με το βαθμό ελευθερίας του συστήματος για πεπερασμένη κίνηση, τότε ο βαθμός ελευθερίας για την απειροστή κίνηση ισούται με τον βαθμό ελευθερίας του συστήματος για πεπερασμένη κίνηση μείον τον αριθμό των ανολόνομων δεσμών.

## 4.10 Γενικευμένες δυνάμεις

Από τη σχέση (5) της παραγράφου (4.5) γνωρίζουμε ότι, το δυνατό έργο των "επιβεβλημένων δυνάμεων" που ασκούνται σε κάποιο υλικό σημείο, ισούται με

$$\delta W^{(\varepsilon)} = \vec{F}_i^{(\varepsilon)} \cdot \delta\vec{r}_i \quad , \tag{1}$$

όπου

$$\vec{F}_i^{(\varepsilon)} = F_{ix}^{(\varepsilon)}\vec{x}_0 + F_{iy}^{(\varepsilon)}\vec{y}_0 + F_{iz}^{(\varepsilon)}\vec{z}_0 \;, \qquad \delta\vec{r}_i = \delta x_i\vec{x}_0 + \delta y_i\vec{y}_0 + \delta z_i\vec{z}_0 \;.$$

Συνεπώς, το ολικό δυνατό έργο (για όλα τα υλικά σημεία) των επιβεβλημένων δυνάμεων είναι

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{(\varepsilon)}\cdot\delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N}(F_{ix}^{(\varepsilon)}\vec{x}_0+F_{iy}^{(\varepsilon)}\vec{y}_0+F_{iz}^{(\varepsilon)}\vec{z}_0)\cdot(\delta x_i\vec{x}_0+\delta y_i\vec{y}_0+\delta z_i\vec{z}_0) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}(F_{ix}^{(\varepsilon)}\delta x_i+F_{iy}^{(\varepsilon)}\delta y_i+F_{iz}^{(\varepsilon)}\delta z_i)\ . \qquad (2)$$

Χρησιμοποιώντας τις αντιστοιχίες

$$(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,\ldots,x_N,y_N,z_N)\longleftrightarrow(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,\ldots,x_{3N}), \qquad (2\alpha)$$

και

$$(F_{1x}^{(\varepsilon)},F_{1y}^{(\varepsilon)},F_{1z}^{(\varepsilon)},F_{2x}^{(\varepsilon)},F_{2y}^{(\varepsilon)},F_{2z}^{(\varepsilon)},\ldots,F_{Nx}^{(\varepsilon)},F_{Ny}^{(\varepsilon)},F_{Nz}^{(\varepsilon)})\longleftrightarrow$$

$$(F_1^{(\varepsilon)},F_2^{(\varepsilon)},F_3^{(\varepsilon)},F_4^{(\varepsilon)},F_5^{(\varepsilon)},\ldots,F_{3N}^{(\varepsilon)})\ , \qquad (2\beta)$$

η σχέση (2) γράφεται,

$$\sum_{i=1}^{N}(F_{ix}^{(\varepsilon)}\delta x_i+F_{iy}^{(\varepsilon)}\delta y_i+F_{iz}^{(\varepsilon)}\delta z_i) = \sum_{i=1}^{3N}F_i^{(\varepsilon)}\delta x_i\ . \qquad (3)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (1) της παραγράφου (4.9) δηλαδή,

$$x_i = x_i(q_1,q_2,\ldots,q_\nu,t)\ , \qquad (i=1,2,\ldots,3N) \qquad (4)$$

προκύπτει

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial x_i}{\partial q_2}\delta q_2+\cdots+\frac{\partial x_i}{\partial q_\nu}\delta q_\nu+\cancelto{=0}{\frac{\partial x_i}{\partial t}\delta t}\ , \qquad (5)$$

ή

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^{\nu}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k\ . \qquad (6)$$

Αντικαθιστώντας την (6) στην (3) προκύπτει ότι, το ολικό δυνατό έργο επιβεβλημένων δυνάμεων είναι

$$\sum_{i=1}^{3N} F_i^{(\varepsilon)}\delta x_i = \sum_{i=1}^{3N}\sum_{k=1}^{\nu} F_i^{(\varepsilon)}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k = \sum_{k=1}^{\nu}\Big(\sum_{i=1}^{3N} F_i^{(\varepsilon)}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\Big)\delta q_k \qquad (7)$$

Εάν τώρα θέσουμε

$$Q_k = \sum_{i=1}^{3N} F_i^{(\varepsilon)}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\ , \qquad (8)$$

το ολικό δυνατό έργο των επιβεβλημένων δυνάμεων λαμβάνει τη μορφή

$$\sum_{i=1}^{3N} F_i^{(\varepsilon)}\delta x_i = \sum_{k=1}^{\nu} Q_k\delta q_k\ . \qquad (9)$$

Η ποσότητα $Q_k$ ονομάζεται "γενικευμένη δύναμη". Η γενικευμένη δύναμη δεν είναι απαραίτητο να έχει διαστάσεις δύναμης.

## 4.11 Ολική κινητική ενέργεια συστήματος

Από την σχέση (2) της παραγράφου (3.6) γνωρίζουμε ότι, η ολική κινητική ενέργεια $T$, συστήματος είναι ίση με

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\upsilon_i^2 \qquad (1)$$

όπου

$$\upsilon_i^2 = \dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2\ .$$

Η (1) γράφεται

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2)\ . \qquad (2)$$

Χρησιμοποιώντας τις αντιστοιχίες

$$(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,\ldots,x_N,y_N,z_N)\longleftrightarrow(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{3N}) \qquad (3)$$

προκύπτει

$$(\dot{x}_1,\dot{y}_1,\dot{z}_1,\dot{x}_2,\dot{y}_2,\dot{z}_2,\ldots,\dot{x}_N,\dot{y}_N,\dot{z}_N) \longleftrightarrow (\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{x}_3,\ldots,\dot{x}_{3N}). \qquad (4)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (4) η (2) γράφεται

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2 \quad . \qquad (4\alpha)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (1) της παραγράφου (4.9α), δηλαδή

$$x_i = x_i(q_1,q_2,\ldots,q_\nu,t) \quad , \quad (i=1,2,\ldots,3N) \qquad (5)$$

προκύπτει

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu}\frac{dq_\nu}{dt} + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

ή

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu}\dot{q}_\nu + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

ή

$$\dot{x}_i = \Big(\sum_{k=1}^{\nu}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\Big) + \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad . \qquad (6)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (6), η (4α) γίνεται

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \Big(\sum_{k=1}^{\nu}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\Big)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i\Big(\frac{\partial x_i}{\partial t}\Big)^2 + \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial x_i}{\partial t}\Big(\sum_{k=1}^{\nu}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\Big). \qquad (7)$$

Έστω ότι το σύστημα είναι σκληρόνομο. Τότε, στις σχέσεις (1) της παραγράφου (4.9α) δεν θα περιέχεται εκπεφρασμένα ο χρόνος $t$. Δηλαδή, θα ισχύει

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_\nu) \ , \qquad (i=1,2,\ldots,3N). \qquad (8)$$

Από την (8) προκύπτει

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = 0 \ , \qquad (i=1,2,\ldots,3N) \ . \qquad (9)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (9), η (7) δίνει

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \Big(\sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\Big)^2 \ . \qquad (10)$$

Από την (10) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος, στην περίπτωση που το σύστημα είναι σκληρόνομο, είναι μία ομογενής συνάρτηση δευτέρου βαθμού ως προς τις γενικευμένες ταχύτητες.

## 4.12 Εξισώσεις Lagrange για την περίπτωση ολόνομων δεσμών όταν οι γενικευμένες συντεταγμένες είναι ανεξάρτητες.

Γνωρίζουμε ότι, όταν ένα σύστημα υλικών σημείων υπόκειται σε ολόνομους δεσμούς, πληρούνται όλες οι προϋποθέσεις για να εφαρμόσουμε την "Αρχή D' Alembert".

Σκοπός της παραγράφου αυτής είναι, ξεκινώντας από την αρχή D' Alembert, να βγάλουμε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης συναρτήσει των ανεξάρτητων γενικευμένων συντεταγμένων.

Από τη σχέση (6) της παραγράφου (4.7) γνωρίζουμε ότι, η αρχή D' Alembert είναι

$$\sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i^{(\varepsilon)} - m_i \ddot{\vec{r}}_i)\cdot\delta\vec{r}_i = 0 \ . \qquad (1)$$

Χρησιμοποιώντας τις αντιστοιχίες (2α) και (2β) της παραγράφου (4.10), η (1) λαμβάνει τη μορφή

$$\sum_{i=1}^{3N} (F_i^{(\varepsilon)} - m_i \ddot{x}_i)\delta x_i = 0 \ . \qquad (2)$$

θα προσπαθήσουμε τώρα να εκφράσουμε την (2) σε γενικευμένες συντεταγμένες.

Η (2) γράφεται

$$\sum_{i=1}^{3N} F_i^{(\varepsilon)}\delta x_i - \sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \delta x_i = 0. \tag{3}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (9) της παραγράφου (4.10), ο πρώτος όρος της (3) γράφεται

$$\sum_{i=1}^{3N} F_i^{(\varepsilon)}\delta x_i = \sum_{k=1}^{N} Q_k \delta q_k \quad . \tag{4}$$

Πρωτού μετασχηματίσουμε το δεύτερο όρο της (3), θα αποδείξουμε μερικές σχέσεις που θα μας χρησιμεύσουν.

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (1) της παραγράφου (4.9α) δηλαδή

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_\nu, t) \quad , \quad (i=1,2,\ldots,3N) \tag{5}$$

προκύπτει

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k \quad . \tag{6}$$

Από την (5) προκύπτει

$$\dot{x}_i = \sum_{m=1}^{\nu} \frac{\partial x_i}{\partial q_m}\dot{q}_m + \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad . \tag{7}$$

Από την (7), αν πάρουμε την μερική παράγωγο ως προς κάποια γενικευμένη συντεταγμένη $q_k$, προκύπτει

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} = \sum_{m=1}^{\nu} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_m}\dot{q}_m + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial t} \quad . \tag{8}$$

Από την (5) προκύπτει

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) = \sum_{m=1}^{\nu} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_m \partial q_k}\dot{q}_m + \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial q_k} \quad . \tag{9}$$

Η (9) γράφεται

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)^{\cdot} = \sum_{m=1}^{\nu} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_m}\dot{q}_m + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial t} \quad . \tag{10}$$

Συγκρίνοντας τις (8) και (10) συμπεραίνουμε ότι

$$\left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)^{\cdot} \quad . \tag{11}$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας την (7) προκύπτει

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \quad . \tag{12}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (6), (11) και (12), ο δεύτερος όρος της (3) γράφεται

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \delta x_i = \sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\nu}\left[\sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right]\delta q_k = \sum_{k=1}^{\nu}\sum_{i=1}^{3N}\left[m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} +\right.$$

$$\left. + m_i \dot{x}_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)^{\cdot} - m_i \dot{x}_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)^{\cdot}\right]\delta q_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\nu}\left[\sum_{i=1}^{3N}\left(m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)^{\cdot} - \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)^{\cdot}\right]\delta q_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\nu}\left[\sum_{i=1}^{3N}\left(m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)^{\cdot} - \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}\right]\delta q_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\nu}\left[\sum_{i=1}^{3N}(m_i\dot{x}_i\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial\dot{q}_k})^{\cdot} - \sum_{i=1}^{3N} m_i\dot{x}_i\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial q_k}\right]\delta q_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\nu}\left[\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3N}(m_i\dot{x}_i\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial\dot{q}_k}) - \sum_{i=1}^{3N} m_i\dot{x}_i\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial q_k}\right]\delta q_k \quad . \qquad (13)$$

Από την σχέση (4α) της παραγράφου (4.11) γνωρίζουμε ότι, η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i\dot{x}_i^2 \quad . \qquad (13α)$$

Παίρνοντας από την (13α) τις μερικές παραγώγους, ως προς $q_k$ και $\dot{q}_k$ της ολικής κινητικής ενέργειας του συστήματος, προκύπτει

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{3N} m_i\dot{x}_i\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial q_k} \qquad (14)$$

και

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k} = \sum_{i=1}^{3N} m_i\dot{x}_i\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial\dot{q}_k} \quad . \qquad (15)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (14) και (15), η (13) δίνει

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i\ddot{x}_i\delta x_i = \sum_{k=1}^{\nu}\left[\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}) - \frac{\partial T}{\partial q_k}\right]\delta q_k \quad . \qquad (16)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (4) και (16), η Αρχή D' Alembert, που εκφράζεται με την εξίσωση (3), γράφεται

$$\sum_{k=1}^{\nu}\left[Q_k - \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}) + \frac{\partial T}{\partial q_k}\right]\delta q_k = 0 \quad . \qquad (17)$$

Τα $\delta q_k$ είναι ανεξάρτητες μεταβολές. Για να ισχύει η (17), πρέπει κάθε συντελεστής των $\delta q_k$ να είναι ίσος με το μηδέν. Επομένως καταλήγουμε στις εξισώσεις

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \qquad (k=1,2,..,\nu). \qquad (18)$$

Οι διαφορικές εξισώσεις (18) ονομάζονται "εξισώσεις Lagrange" ή "εξισώσεις Lagrange 2ου είδους". Οι εξισώσεις αυτές ισχύουν, όταν το σύστημα υπόκειται σε ολόνομους δεσμούς και οι γενικευμένες συντεταγμένες $q_1, .. q_\nu$ είναι ισάριθμες προς το βαθμό ελευθερίας του συστήματος και ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Οι "εξισώσεις Lagrange" αποτελούν σύστημα $\nu$ διαφορικών εξισώσεων β' τάξεως ως προς $q_1, q_2, \ldots, q_\nu$. Η γενική λύση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων παρέχει την κίνηση του συστήματος των υλικών σημείων, δηλαδή τα $q_1=q_1(t)$, $q_2=q_2(t), \ldots, q_\nu=q_\nu(t)$. Κατά την ολοκλήρωση του συστήματος εμφανίζονται $2\nu$ αυθαίρετες σταθερές, οι οποίες προσδιορίζονται από τις συνθήκες του προβλήματος.

Τα βασικά πλεονεκτήματα των εξισώσεων Lagrange είναι ότι, στις εξισώσεις αυτές δεν παρουσιάζονται διανυσματικά μεγέθη αλλά μόνο αριθμητικά. Είναι επίσης ανεξάρτητες του συστήματος γενικευμένων συντεταγμένων, που θα χρησιμοποιηθεί και δεν παρουσιάζονται οι αντιδράσεις των δεσμών.

## 4.13 Ειδικές περιπτώσεις των εξισώσεων Lagrange.

### 4.13α Όλες οι επιβεβλημένες δυνάμεις είναι συντηρητικές (Σύστημα συντηρητικό).

Έστω ότι οι επιβεβλημένες δυνάμεις προέρχονται από ένα κοινό δυναμικό $V$. Το δυναμικό $V$ θα είναι συνάρτηση των θέσεων των υλικών σημείων του συστήματος. Δηλαδή

$$V = V(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{3N}) . \qquad (1)$$

Θα ισχύει, σύμφωνα με τον ορισμό της συντηρητικής δύναμης

$$F_i^{(\varepsilon)} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} , \qquad (i=1,2,\ldots,3N) . \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας τις (2) στη σχέση (8) της παραγράφου (4.10) προκύπτει ότι, η γενικευμένη δύναμη $Q_k$ λαμβάνει τη μορφή

$$Q_k = \sum_{i=1}^{3N} F_i^{(\varepsilon)} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{3N} \left(-\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \quad . \tag{3}$$

Αντικαθιστώντας την (3) στις "εξισώσεις Lagrange", που δίνονται από τη σχέση (18) της παραγράφου (4.12), προκύπτει

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \quad , \qquad (k=1,2,\ldots,\nu) \; . \tag{4}$$

Η (4) γράφεται

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_k} = 0 \quad , \qquad (k=1,2,\ldots,\nu) \; . \tag{5}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) τις σχέσεις (1) της παραγράφου (4.9α) παίρνουμε

$$V = V(q_1, q_2, \ldots, q_\nu, t) \; . \tag{6}$$

Από την (6) προκύπτει ότι, η μερική παράγωγος του δυναμικού ως προς κάποια γενικευμένη ταχύτητα θα είναι ίση με μηδέν. Δηλαδή ,

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad . \tag{7}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (7), η (5) γράφεται

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_k}\right] - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_k} = 0 \quad , \qquad (k=1,2,\ldots,\nu) \tag{8}$$

θέτουμε

$$L = T-V \; . \tag{9}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (9), η (8) γράφεται

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad , \qquad (k=1,2,\ldots,\nu) \; . \tag{10}$$

Οι διαφορικές εξισώσεις (10) ονομάζονται εξισώσεις Lagrange και ισχύουν για την περίπτωση, κατά την οποία οι επιβεβλημένες δυνάμεις είναι όλες συντηρητικές και προέρχονται από κοινό δυναμικό.

Η συνάρτηση $L=L(q_1,q_2,\dots,q_\nu,\dot q_1,\dot q_2,\dots,\dot q_\nu,t)$ ονομάζεται "συνάρτηση Lagrange".

Οι "εξισώσεις Lagrange" (10) αποτελούν σύστημα $\nu$ διαφορικών εξισώσεων, β΄τάξης , ως προς $q_1,q_2,\dots,q_\nu$ .

Η λύση του διαφορικού συστήματος θα μας δώσει τα $q_1=q_1(t),\dots,q_\nu=q_\nu(t)$ δηλαδή, την κίνηση των υλικών σημείων του συστήματος.

## 4.13β Μερικές από τις επιβεβλημένες δυνάμεις είναι συντηρητικές.

Έστω ότι οι επιβεβλημένες δυνάμεις, που ενεργούν στα $m$ από τα $N$ υλικά σημεία του συστήματος, είναι συντηρητικές. Το κοινό δυναμικό $V'$ , από το οποίο προέρχονται οι συντηρητικές δυνάμεις, θα είναι συνάρτηση των θέσεων των υλικών σημείων του συστήματος. Δηλαδή

$$V' = V'(x_1,x_2,x_3,x_4,\dots,x_{3m}) \; . \tag{1}$$

θα ισχύει, σύμφωνα με τον ορισμό της συντηρητικής δύναμης

$$F_\ell^{(\varepsilon)} = -\frac{\partial V'}{\partial x_\ell} \quad , \qquad (\ell=1,2,\dots,3m) \; . \tag{2}$$

Αντικαθιστώντας τη (2) στη σχέση (8) της παραγράφου (4.10), προκύπτει ότι η γενικευμένη δύναμη $Q_k$ λαμβάνει τη μορφή

$$Q_k = \sum_{i=1}^{3N} F_i^{(\varepsilon)} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{3m} \left(-\frac{\partial V'}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) + \sum_{i=3m+1}^{3N} F_i^{(\varepsilon)} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} =$$

$$= -\frac{\partial V'}{\partial q_k} + \sum_{i=3m+1}^{3N} F_i^{(\varepsilon)} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \quad , \qquad (k=1,2,3,\dots,\nu). \tag{3}$$

Συμβολίζουμε με $Q'_k$ τις γενικευμένες δυνάμεις, προέρχονται από τις μη συντηρητικές δυνάμεις

$$Q'_k = \sum_{i=3m+1}^{3N} F_i^{(\varepsilon)} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \; . \tag{4}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (4), η (3) γράφεται

$$Q_k = -\frac{\partial V'}{\partial q_k} + Q_k' \quad , \qquad (k=1,2,\ldots,\nu) \; . \tag{5}$$

Αντικαθιστώντας την (5) στις "εξισώσεις Lagrange" , που δίνονται από τη σχέση (18) της παραγράφου (4.12) προκύπτει

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial V'}{\partial q_k} + Q_k' \quad , \qquad (k=1,2,\ldots,\nu) \tag{6}$$

Η (6) γράφεται,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial (T-V')}{\partial q_k} = Q_k' \quad , \qquad (k=1,2,\ldots,\nu) \; . \tag{7}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) τις σχέσεις (1) της παραγράφου (4.9α) παίρνουμε

$$V' = V'(q_1, q_2, \ldots, q_\nu, t) \; . \tag{8}$$

Από την (8) προκύπτει ότι η μερική παράγωγος του δυναμικού ως προς κάποια γενικευμένη ταχύτητα θα είναι ίση με μηδέν . Δηλαδή

$$\frac{\partial V'}{\partial \dot{q}_k} = 0 \; . \tag{9}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (9), η (7) γράφεται

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial (T-V')}{\partial \dot{q}_k}\right] - \frac{\partial (T-V')}{\partial q_k} = Q_k' \quad , \qquad (k=1,\ldots,\nu) \; . \tag{10}$$

θέτουμε

$$L' = T - V' \; . \tag{11}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (11), η (10) γράφεται

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q_k} = Q_k' \quad , \qquad (k=1,\ldots,\nu) \; . \tag{12}$$

Οι διαφορικές εξισώσεις (12) ονομάζονται εξισώσεις Lagrange, που ισχύουν για την περίπτωση, κατά την οποία μερικές από τις επιβεβλημένες δυνάμεις είναι συντηρητικές.

Μία σπουδαία εφαρμογή της περίπτωσης αυτής είναι όταν εμφανίζονται κατά την κίνηση του συστήματος και δυνάμεις τριβής. Οι δυνάμεις τριβής δεν είναι συντηρητικές δυνάμεις.

**4.13γ.** <u>Οι γενικευμένες δυνάμεις προέρχονται από δυναμικό που είναι συνάρτηση των γενικευμένων συντεταγμένων, των γενικευμένων ταχυτήτων και του χρόνου.</u>

Έστω ότι η γενικευμένη δύναμη $Q_k$, είναι της μορφής

$$Q_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_k} , \qquad (k=1,2,\ldots,\nu) , \qquad (1)$$

όπου η συνάρτηση $U=U(q_1,\ldots,q_\nu,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_\nu,t)$ ονομάζεται "γενικευμένο δυναμικό".

Αντικαθιστώντας την (1) στις "εξισώσεις Lagrange" που δίνονται από τη σχέση (18) της παραγράφου (4.12) προκύπτει,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_k} , \qquad (k=1,\ldots,\nu) . \qquad (2)$$

Η (2) γράφεται

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_k}\right] - \frac{\partial (T-U)}{\partial q_k} = 0 , \qquad (k=1,\ldots,\nu) . \qquad (3)$$

Θέτουμε

$$L^* = T-U . \qquad (4)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (4), η (3) γράφεται

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L^*}{\partial q_k} = 0 , \qquad (k=1,2,\ldots,\nu) . \qquad (5)$$

Οι διαφορικές εξισώσεις (5) ονομάζονται "εξισώσεις Lagrange" που ισχύουν για την ειδική περίπτωση, κατά την οποία οι γενικευμένες δυνάμεις εκφράζονται με το γενικευμένο δυναμικό.

Μια σπουδαία εφαρμογή της περίπτωσης αυτής είναι όταν φορτίο κινείται μέσα σε ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο.

## 4.14 Πρώτα ολοκληρώματα των εξισώσεων Lagrange - Γενικευμένη ορμή - Κυκλικές συντεταγμένες - Ολοκλήρωμα του Jacobi.

Ονομάζουμε "πρώτο ολοκλήρωμα των εξισώσεων Lagrange" κάθε σχέση της μορφής

$$f(q_1,q_2,\ldots,q_\nu,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_\nu,t) = \sigma\tau\alpha\vartheta. \tag{1}$$

Κάθε πρώτο ολοκλήρωμα τως εξισώσεων Lagrange μας βοηθά να λύνουμε πιο εύκολα το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων Lagrange αλλά και να βγάζουμε αμέσως ωρισμένα συμπεράσματα, που αφορούν την κίνηση.

Ονομάζουμε "γενικευμένη ορμή" το μέγεθος $p_k$ ,

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad , \qquad (k=1,2,\ldots\nu) \ . \tag{2}$$

Το μέγεθος $p_k$ ονομάζεται "γενικευμένη ορμή", διότι στην περίπτωση που οι γενικευμένες συντεταγμένες συμπίπτουν με τις Καρτεσιανές συντεταγμένες, η γενικευμένη ορμή συμπίπτει με την γνωστή μας γραμμική ορμή.

Θεωρούμε ελεύθερο σύστημα $N$ υλικών σημείων, στο οποίο οι επιβλημένες δυνάμεις είναι συντηρητικές. Επειδή το σύστημα είναι ελεύθερο, ο βαθμός ελευθερίας $\nu$ του συστήματος συμπίπτει με τον αριθμό των Καρτεσιανών συντεταγμένων του συστήματος $(\nu=3N)$.

Παίρνουμε τότε τις γενικευμένες συντεταγμένες $q_1,q_2,\ldots,q_\nu$ να συμπίπτουν αντίστοιχα με τις Καρτεσιανές συντεταγμένες $x_1,x_2,\ldots,x_\nu$ . Δηλαδή

$$q_i \equiv x_i \quad , \qquad (i=1,2,\ldots,\nu) \ . \tag{2α}$$

Η ολική κινητική ενέργεια $T$ του συστήματος είναι, ως γνωστό

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2 \quad . \tag{3}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (2α) και ότι $\nu=3N$, η (3) γράφεται

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\nu} m_i \dot{q}_i^2 \quad , \qquad (i=1,2,\ldots,\nu) \quad . \tag{4}$$

Η συνάρτηση Lagrange είναι

$$L = T-V \quad , \tag{5}$$

όπου

$$V = V(q_1, q_2, \ldots, q_\nu, t) \quad . \tag{6}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (4), η (5) δίνει

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\nu} m_i \dot{q}_i^2 - V \quad . \tag{7}$$

Από την (7) προκύπτει

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = m_k \dot{q}_k \quad , \qquad (k=1,2,\ldots,\nu) \quad . \tag{8}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (2α), η (8) γράφεται

$$p_k = m_k \dot{x}_k \quad , \qquad (k=1,2,\ldots,\nu) \quad . \tag{9}$$

Από την (9) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, για την περίπτωση που εξετάζουμε, η γενικευμένη ορμή $p_k$ συμπίπτει με την γραμμική ορμή.

Ονομάζουμε κάποια γενικευμένη συντεταγμένη π.χ. την $q_k$ "αφανή" ή "κυκλική", όταν δεν περιέχεται στη συνάρτηση Lagrange $L$.

Μετά τους προηγούμενους ορισμούς θα προσπαθήσουμε να βρούμε "πρώτα ολοκληρώματα των εξισώσεων Lagrange".

Γνωρίσουμε ότι, η συνάρτηση Lagrange εξαρτάται από τις γενικευμένες συντεταγμένες, τις γενικευμένες ταχύτητες και το χρόνο,

$$L = L(q_1,q_2,\dots,q_\nu,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\dots,\dot{q}_\nu,t) \qquad (10)$$

και ισχύουν οι $\nu$ διαφορικές εξισώσεις,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \;, \qquad (k=1,2,\dots,\nu) \;. \qquad (11)$$

Εάν κάποια από τις γενικευμένες συντεταγμένες είναι αφανής (π.χ. η $q_m$ δεν υπάρχει στην συνάρτηση Lagrange), τότε από την (10) προκύπτει

$$\frac{\partial L}{\partial q_m} = 0 \;. \qquad (12)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (12), η (11) δίνει

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0 \;. \qquad (13)$$

Από την (13) παίρνουμε

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} = \text{σταθ.} \qquad (14)$$

Η (14) είναι ένα "πρώτο ολοκλήρωμα των εξισώσεων Lagrange", Έχοντας υπόψη τον ορισμό της γενικευμένης ορμής, η (14) γράφεται

$$p_m = \text{σταθ.} \qquad (15)$$

Από την (15) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, "η γενικευμένη ορμή που αντιστοιχεί σε μια αφανή γενικευμένη συντεταγμένη παραμένει σταθερή κατά την κίνηση".

Είναι προφανές ότι θα έχουμε τόσα πρώτα ολοκληρώματα των εξισώσεων Lagrange αυτής της μορφής, όσες είναι οι αφανείς γενικευμένες συντεταγμένες.

Θα προσπαθήσουμε τώρα να βγάλουμε ένα άλλο πρώτο ολοκλήρωμα των εξισώσεων Lagrange.

Η ολική παράγωγος, ως προς τον χρόνο της (10) είναι ίση με

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\partial L}{\partial q_k}\dot{q}_k + \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial t} \quad . \tag{16}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (11), η (16) γράφεται

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\dot{q}_k + \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{d\dot{q}_k}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\nu}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right)\right] + \frac{\partial L}{\partial t} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{\nu}\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right] + \frac{\partial L}{\partial t} \quad . \tag{17}$$

Η (17) γράφεται

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{\nu}\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right] - \frac{dL}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

ή

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{\nu}\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L\right] = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad . \tag{18}$$

Εάν η συνάρτηση Lagrange δεν περιέχει εκπεφρασμένα τον χρόνο, δηλαδή

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_\nu, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\nu) \quad , \tag{19}$$

προκύπτει

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad . \tag{20}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (20), η (18) δίνει

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{\nu}\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L\right] = 0 \quad . \tag{21}$$

Από την (21) παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{\nu}\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = \sigma\tau\alpha\vartheta. \tag{22}$$

Η (22) είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα των εξισώσεων Lagrange, γνωστό ως "ολοκλήρωμα του Jacobi".

Στην ειδική περίπτωση, που το μηχανικό σύστημα είναι "συντηρητικό", θα αποδείξουμε ότι το ολοκλήρωμα του Jacobi συμπίπτει με τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας.

Όταν λέμε ότι το μηχανικό σύστημα είναι συντηρητικό, σημαίνει ότι οι επιβεβλημένες δυνάμεις προέρχονται από το κοινό δυναμικό $V$, που είναι συνάρτηση των θέσεων των υλικών σημείων του συστήματος. Δηλαδή

$$V = V(x_1, x_2, \ldots, x_{3N}) \, . \tag{23}$$

Όταν λέμε ότι το σύστημα είναι σκληρόνομο, σημαίνει ότι οι καρτεσιανές συντεταγμένες των υλικών σημείων εκφράζονται συναρτήσει μόνο των γενικευμένων συντεταγμένων (δεν περιέχουν εκπεφρασμένα το χρόνο). Δηλαδή

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, \ldots, q_\nu) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{3N} &= x_{3N}(q_1, \ldots, q_\nu) \, . \end{aligned} \tag{24}$$

Αντικαθιστώντας τις (24) στην (23), παίρνουμε

$$V = V(q_1, q_2, \ldots, q_\nu) \, . \tag{25}$$

Από τη σχέση (10) της παραγράφου (4.11) γνωρίζουμε ότι, η ολική κινητική ενέργεια $T$ σκληρόνομου συστήματος είναι μία ομογενής συνάρτηση δευτέρου βαθμού ως προς τις γενικευμένες ταχύτητες.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Euler για τις ομογενείς συναρτήσεις, προκύπτει η παρακάτω σχέση για την ολική κινητική ενέργεια του συστήματος

$$\sum_{k=1}^{\nu} \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T \, . \tag{26}$$

Ισχύει, ως γνωστό

$$L = T-V \quad . \tag{27}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (26) και (27), η (22) δίνει

$$2T-(T-V) = \sigma\tau\alpha\vartheta.$$

ή

$$T+V = \sigma\tau\alpha\vartheta. \tag{28}$$

Από την (28) προκύπτει η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας.

## 4.15 Εξισώσεις Lagrange για την περίπτωση ολόνομων δεσμών, όταν οι γενικευμένες συντεταγμένες δεν είναι ανεξάρτητες.

Στην παράγραφο (4.12) δώσαμε τις εξισώσεις Lagrange, για την περίπτωση,που το σύστημα υπόκειται σε ολόνομους δεσμούς. Ο αριθμός των γενικευμένων συντεταγμένων,που καθόριζαν τη θέση του συστήματος ήταν ίσος με το βαθμό ελευθερίας του συστήματος και πληρούσαν εκ ταυτότητος τους δεσμούς. Δηλαδή οι γενικευμένες συντεταγμένες ήταν ανεξάρτητες.

Τώρα, θα δώσουμε τις εξισώσεις Lagrange, για την περίπτωση,που το σύστημα υπόκειται πάλι σε ολόνομους δεσμούς, αλλά ο αριθμός των γενικευμένων συντεταγμένων, που καθορίζουν τη θέση του συστήματος, είναι μεγαλύτερος από το βαθμό ελευθερίας του συστήματος.

Έστω ότι τις $3N$ Καρτεσιανές συντεταγμένες του συστήματος τις γράφουμε συναρτήσει των γενικευμένων συντεταγμένων $q_1,q_2,\ldots,q_\ell$, $(\ell>\nu)$.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1,q_2,\ldots,q_\ell,t) \\ x_2 &= x_2(q_1,q_2,\ldots,q_\ell,t) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{3N} &= x_{3N}(q_1,q_2,\ldots,q_\ell,t) \ . \end{aligned} \tag{1}$$

Οι k-δεσμικές σχέσεις, που δίνονται από τη σχέση (8) της παραγράφου

(4.1α), δεν επαληθεύουν εκ ταυτότητας τους δεσμούς. Δηλαδή οι γενικευμένες συντεταγμένες δεν είναι ανεξάρτητες.

Αντικαθιστώντας τις (1) στις σχέσεις (8) της παραγράφου (4.1α), προκύπτει

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1(q_1,q_2,\ldots,q_\ell,t) = 0\\ &\varphi_2(q_1,q_2,\ldots,q_\ell,t) = 0\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\varphi_i(q_1,q_2,\ldots,q_\ell,t) = 0\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\varphi_k(q_1,q_2,\ldots,q_\ell,t) = 0 \end{aligned}\right\}\ (k\text{-σχέσεις}) \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (2) προκύπτει

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}\delta q_2+\ldots+\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_\ell}\delta q_\ell = 0\\ &\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2}\delta q_2+\ldots+\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_\ell}\delta q_\ell = 0\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_2}\delta q_2+\ldots+\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_\ell}\delta q_\ell = 0\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\frac{\partial\varphi_k}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial\varphi_k}{\partial q_2}\delta q_1+\ldots+\frac{\partial\varphi_k}{\partial q_\ell}\delta q_\ell = 0\,. \end{aligned}\right\}(k\text{-σχέσεις}) \qquad (3)$$

Ακολουθώντας την ίδια πορεία, με εκείνη της παραγράφου 4.12 μέχρι τη σχέση (17), έχουμε

$$\sum_{m=1}^{\ell}\left[Q_m-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_m}\right)+\frac{\partial T}{\partial q_m}\right]\delta q_m = 0\,, \qquad (m=1,2,\ldots,\ell)\,. \qquad (4)$$

Επειδή εδώ τα $\delta q_1,\delta q_2,\ldots,\delta q_\ell$ δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους ($\ell$-k είναι ανεξάρτητα), θα χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή μέθοδο των πολλαπλασιαστών του Lagrange, για να καταλήξουμε στις εξισώσεις κίνησης.

Πολλαπλασιάζουμε κάθε μία από τις σχέσεις (3) με τους αντίστοιχους συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_k$. Οι σχέσεις (3) δίνουν

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}\,\delta q_1 + \lambda_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}\,\delta q_2 + \ldots + \lambda_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_\ell}\,\delta q_\ell = 0 \\
&\lambda_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}\,\delta q_1 + \lambda_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2}\,\delta q_2 + \ldots + \lambda_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_\ell}\,\delta q_\ell = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\lambda_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial q_1}\,\delta q_1 + \lambda_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial q_2}\,\delta q_2 + \ldots + \lambda_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial q_\ell}\,\delta q_\ell = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\lambda_k \frac{\partial\varphi_k}{\partial q_1}\,\delta q_1 + \lambda_k \frac{\partial\varphi_k}{\partial q_2}\,\delta q_2 + \ldots + \lambda_k \frac{\partial\varphi_k}{\partial q_\ell}\,\delta q_\ell = 0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (5) στις (4), έχουμε

$$\sum_{m=1}^{\ell}\left[Q_m - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_m}\right]\delta q_m + \sum_{i=1}^{k}\sum_{m=1}^{\ell}\lambda_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial q_m}\,\delta q_m = 0 \ . \tag{6}$$

Η (6) γράφεται

$$\sum_{m=1}^{\ell}\left[Q_m - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_m} + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial q_m}\right]\delta q_m = 0 \ . \tag{7}$$

Τα $\lambda_i$ εκλέγονται, έτσι ώστε να μηδενίζονται τα $\delta q_m$ στους k-πρώτους όρους του αθροίσματος (7). Δηλαδή θα ισχύει

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial q_m} \ , \qquad (m=1,2,\ldots,k) \tag{8}$$

Απομένουν στο άθροισμα (7) όροι πλήθους $(\ell-k)$. Τα $\delta q_m$ που παρουσιάζονται τώρα είναι τα $\delta q_{k+1}, \delta q_{k+2}, \ldots, \delta q_\ell$. Αυτά είναι ανεξάρτητα. Επομένως, πρέπει οι συντελεστές των $\delta q_{k+1}, \delta q_{k+2}, \ldots, \delta q_{\ell}$, να είναι όλοι ίσοι με μηδέν. Άρα

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_m}, \qquad (m=k+1,\ldots,\ell). \tag{9}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (8) και (9) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, πρέπει να ισχύουν οι εξισώσεις

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_m}, \qquad (m=1,2,\ldots,\ell). \tag{10}$$

Οι $\ell$ αυτές διαφορικές εξισώσεις είναι οι εξισώσεις Lagrange, για την περίπτωση ολόνομων δεσμών, όταν οι γενικευμένες συντεταγμένες δεν είναι ανεξάρτητες.

Από τη λύση του συστήματος αυτού θα προκύψουν τα $q_1=q_1(t),\ldots,q_{\ell}=q_{\ell}(t)$.

Στην πράξη, για να υπολογίσουμε τα $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$, $q_1,q_2,\ldots,q_{\ell}$ λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (2) και (10). Το σύστημα αυτό είναι ένα σύστημα $(k+\ell)$ εξισώσεων με $k+\ell$ αγνώστους.

Η ποσότητα

$$Q^{(\delta)}_{(m)} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_m}, \qquad (m=1,2,\ldots,\ell), \tag{11}$$

που παρουσιάζεται στο β΄ μέλος της (10), αποτελεί την "γενικευμένη δεσμική δύναμη". Έτσι, όταν προσδιορίζουμε τους συντελεστές $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ υπολογίζουμε έμμεσα την επίδραση των δυνάμεων των δεσμών.

## 4.16 Εξισώσεις Lagrange για την περίπτωση ολόνομων δεσμών, όταν οι γενικευμένες συντεταγμένες δεν είναι ανεξάρτητες και οι επιβεβλημένες δυνάμεις είναι συντηρητικές (Σύστημα συντηρητικό).

Το αντικείμενο αυτής της παραγράφου είναι μία ειδική περίπτωση της προηγούμενης.

Στην παράγραφο αυτή θεωρούμε ότι, οι επιβεβλημένες δυνάμεις προέρχονται από κοινό δυναμικό $V$ . Το δυναμικό θα είναι συνάρτηση των θέσεων των υλικών σημείων του συστήματος. Δηλαδή

$$V = V(x_1, x_2, \ldots, x_{3N}) \ . \tag{1}$$

θα ισχύει, σύμφωνα με τον ορισμό της συντηρητικής δύναμης

$$F_i^{(\varepsilon)} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \ , \qquad (i=1,2,\ldots,3N) \ . \tag{2}$$

Ακολουθώντας την ίδια πορεία που ακολουθήσαμε στην παράγραφο (4.13α) οι εξισώσεις (10) της παραγράφου (4.15) θα δώσουν

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_m} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_m} \ , \qquad (m=1,2,\ldots,\ell) \ . \tag{3}$$

όπου

$$L = T - V \ , \qquad V = V(q_1, q_2, \ldots, q_\ell, t) \ ,$$

$$L = L(q_1, q_2, \ldots, q_\ell, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_\ell, t) \ .$$

Οι $\ell$ αυτές διαφορικές εξισώσεις είναι οι εξισώσεις Lagrange , για την περίπτωση ολόνομων δεσμών όταν οι γενικευμένες συντεταγμένες δεν είναι ανεξάρτητες και οι επιβεβλημένες δυνάμεις είναι συντηρητικές. Από την λύση αυτών των διαφορικών εξισώσεων θα προκύψουν τα $q_1 = q_1(t)$, $q_2 = q_2(t)$, $\ldots, q_\ell = q_\ell(t)$.

Στην πράξη, για να υπολογίσουμε τα $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ , $q_1, q_2, \ldots, q_\ell$ λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (3) της παραγράφου αυτής και την (2) της προηγουμένης παραγράφου.

Το σύστημα αυτό είναι σύστημα $(k+\ell)$ εξισώσεων με $(k+\ell)$ αγνώστους.

## 4.17 Εξισώσεις Lagrange για την περίπτωση ανολόνομων δεσμών.

Μέχρι τώρα δώσαμε τις εξισώσεις Lagrange σε διάφορες περιπτώσεις, όταν το σύστημα υπόκειται σε ολόνομους δεσμούς.

Εδώ θα δώσουμε τις εξισώσεις Lagrange για την περίπτωση, που το σύστημα υπόκειται σε ανολόνομους δεσμούς.

Επειδή το σύστημα υπόκειται σε ανολόνομους δεσμούς, θα χρησιμοποιήσουμε τους ορισμούς για τους βαθμούς ελευθερίας που δώσαμε στην παράγραφο (3.1β). Έστω ότι το σύστημα έχει $\nu$ βαθμούς ελευθερίας για την πεπερασμένη κίνηση. Τότε, τις $3N$ Καρτεσιανές συντεταγμένες του συστήματος μπορούμε να τις εκφράσουμε συναρτήσει των γενικευμένων συντεταγμένων, $q_1, q_2, .., q_\nu$, οι οποίες είναι ανεξάρτητες.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1(q_1, q_2, \ldots, q_\nu, t) \\
x_2 &= x_2(q_1, q_2, \ldots, q_\nu, t) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_i &= x_i(q_1, q_2, \ldots, q_\nu, t) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{3N} &= x_{3N}(q_1, q_2, \ldots, q_\nu, t)\ .
\end{aligned} \qquad (1)
$$

Έστω ότι το σύστημα υπόκειται σε $s$ $(s<\nu)$ ανολόνομους δεσμούς της μορφής

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{11}dx_1 + \alpha_{12}dx_2 + \ldots + \alpha_{13N}dx_{3N} = 0 \\
&\alpha_{21}dx_1 + \alpha_{22}dx_2 + \ldots + \alpha_{23N}dx_{3N} = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\alpha_{s1}dx_1 + \alpha_{s2}dx_2 + \ldots + \alpha_{s\,3N}dx_{3N} = 0\ .
\end{aligned} \qquad (2)
$$

Γνωρίζουμε ότι, μηχανικό σύστημα, που υπόκειται σε δεσμούς της μορφής (2), συμπεριφέρεται σαν "καθαρά μηχανικό σύστημα".

Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε την "αρχή D' Alembert" , για να καταλήξουμε στις διαφορικές εξισώσεις κίνησης ως προς τις γενικευμένες συντεταγμένες.

Λαμβάνοντας υπόψη τις (1), οι (2) γράφονται

$$\left.\begin{array}{l}
A_{11}dq_1+A_{12}dq_2+\ldots+A_{1\eta}dq_\eta+B_1dt = 0 \\
A_{21}dq_1+A_{22}dq_2+\ldots+A_{2\eta}dq_\eta+B_2dt = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_{i1}dq_1+A_{i2}dq_2+\ldots+A_{i\eta}dq_\eta+B_\eta dt = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_{s1}dq_1+A_{s2}dq_2+\ldots+A_{s\eta}dq_\eta+B_sdt = 0 ,
\end{array}\right\} \text{(s-σχέσεις)} \qquad (3\alpha)$$

όπου οι συντελεστές είναι συναρτήσεις των γενικευμένων συντεταγμένων $q_1,q_2,\ldots,q_\nu$ και του χρόνου $t$ .

Για τη δυνατή μετατόπιση, οι αντίστοιχες σχέσεις προς τις (3α) είναι·

$$\left.\begin{array}{l}
A_{11}\delta q_1+A_{12}\delta q_2+\ldots+A_{1\eta}\delta q_\eta = 0 \\
A_{21}\delta q_1+A_{22}\delta q_2+\ldots+A_{2\eta}\delta q_\eta = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_{s1}\delta q_1+A_{s2}\delta q_2+\ldots+A_{s\eta}\delta q_\eta = 0 .
\end{array}\right\} \text{(s-σχέσεις)} \qquad (4)$$

Ακολουθώντας την ίδια πορεία που ακολουθήσαμε μέχρι και τη σχέση (17) της παραγράφου (4.12), θα προκύψει

$$\sum_{m=1}^{\nu}\left[Q_m-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right)+\frac{\partial T}{\partial q_m}\right]\delta q_m = 0 , \qquad (m=1,2,\ldots,\nu) . \qquad (5)$$

Επειδή εδώ τα $\delta q_1,\delta q_2,\ldots,\delta q_\nu$ δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους ($\nu$-s είναι ανεξάρτητα), θα χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή μέθοδο των πολλαπλασιαστών του Lagrange, για να καταλήξουμε στις εξισώσεις κίνησης.

Πολλαπλασιάζουμε κάθε μία από τις σχέσεις (4) με τους αντίστοιχους συντελεστές $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s$ .

Οι σχέσεις (4) δίνουν

$$\begin{array}{l}
\lambda_1A_{11}\delta q_1+\lambda_1A_{12}\delta q_2+\ldots+\lambda_1A_{1\eta}\delta q_\eta = 0 \\
\lambda_2A_{21}\delta q_1+\lambda_2A_{22}\delta q_2+\ldots+\lambda_2A_{2\eta}\delta q_\eta = 0
\end{array} \qquad (6)$$

..........................

$$\lambda_s A_{s1}\delta q_1+\lambda_s A_{s2}\delta q_2+\ldots+\lambda_s A_{s\eta}\delta q_\eta = 0 .$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (5) και (6), παίρνουμε

$$\sum_{m=1}^{\nu}\left[Q_m-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_m}\right)+\frac{\partial T}{\partial q_m}\right]\delta q_m+\sum_{i=1}^{s}\sum_{m=1}^{\nu}\lambda_i A_{im}\delta q_m = 0 . \qquad (7)$$

Η (7) γράφεται

$$\sum_{m=1}^{\nu}\left[Q_m-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_m}\right)+\frac{\partial T}{\partial q_m}+\sum_{i=1}^{s}\lambda_i A_{im}\right]\delta q_m = 0 . \qquad (8)$$

Τα $\lambda_i$ εκλέγονται· έτσι ώστε να μηδενίζονται τα $\delta q_m$ στους s πρώτους όρους του αθροίσματος (8).

Δηλαδή θα ισχύει

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_m}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m+\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_m} , \qquad (m=1,2,\ldots,s) \qquad (9)$$

Απομένουν τότε στο άθροισμα (8) όροι πλήθους $(\nu-s)$. Τα $\delta q_m$ που παρουσιάζονται τώρα είναι τα $\delta q_{s+1},\delta q_{s+2},\ldots,\delta q_\nu$. Σύμφωνα με τον ορισμό του βαθμού ελευθερίας για απειροστή κίνηση αυτά είναι ανεξάρτητα.

Επομένως, πρέπει οι συντελεστές $\delta q_{s+1},\delta q_{s+2},\ldots,\delta q_\nu$ να είναι όλοι ίσοι με μηδέν. Άρα

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_m}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m+\sum_{i=1}^{s}\lambda_i A_{im} , \qquad (m=s+1,\ldots,\nu) . \qquad (10)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (9) και (10) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, πρέπει να ισχύουν οι εξισώσεις

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_m}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m+\sum_{i=1}^{s}\lambda_i A_{im} , \qquad (m=1,2,\ldots,\nu) . \qquad (11)$$

Οι $\ell$ αυτές διαφορικές εξισώσεις είναι οι εξισώσεις Lagrange , για την περίπτωση ανολόνομων δεσμών.

Από τη λύση του συστήματος αυτού θα προκύψουν τα $q_1=q_1(t),\ldots,$ $q_\nu=q_\nu(t)$.

Στην πράξη, για να υπολογίσουμε τα $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s,q_1,q_2,\ldots,q_\nu$, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (3α) και (11). Το σύστημα αυτό είναι ένα σύστημα $(s+\nu)$ εξισώσεων με $(s+\nu)$ αγνώστους.

## 4.18 Εξισώσεις Hamilton

Στις προηγούμενες παραγράφους δώσαμε τις εξισώσεις Lagrange, με τις οποίες μπορούμε να εργαστούμε για να μελετήσουμε την κίνηση καθαρά μηχανικού συστήματος.

Σκοπός της παραγράφου αυτής είναι να δώσουμε, με τη βοήθεια των εξισώσεων Lagrange, άλλες διαφορικές εξισώσεις, με τις οποίες μπορούμε να εργαστούμε για να μελετήσουμε πάλι την κίνηση καθαρά μηχανικού συστήματος. Οι εξισώσεις αυτές είναι οι εξισώσεις Hamilton.

Για να βρούμε τις εξισώσεις του Hamilton, πρέπει να γράψουμε τις υποθέσεις που κάνουμε. Υποθέτουμε ότι :

(α) Το μηχανικό σύστημα υπόκειται σε ολόνομους δεσμούς.

(β) Οι γενικευμένες συντεταγμένες, που καθορίζουν τη θέση του συστήματος, είναι ίσες με το βαθμό ελευθερίας του συστήματος και είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

(γ) Το μηχανικό σύστημα είναι συντηρητικό.

Σύμφωνα με τις υποθέσεις αυτές, ισχύουν οι εξισώσεις Lagrange της μορφής :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0\ , \qquad (k=1,2,\ldots,\nu)\ , \tag{1}$$

όπως προκύπτει από τα αποτελέσματα της παραγράφου (4-13α).

Η συνάρτηση Lagrange, $L$, εξαρτάται από τις γενικευμένες συντεταγμένες, τις γενικευμένες ταχύτητες και το χρόνο. Δηλαδή,

$$L = L(q_1,q_2,\ldots,q_\nu,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_\nu,t)\ . \tag{2}$$

Εισάγουμε μια νέα συνάρτηση , $H$ , που ονομάζεται συνάρτηση Hamilton, με τη σχέση

$$H = p_1\dot{q}_1+p_2\dot{q}_2+\ldots+p_\nu\dot{q}_\nu-L \;. \tag{3}$$

Η (3) γράφεται

$$H = \sum_{k=1}^{\nu} p_k\dot{q}_k-L \;, \tag{4}$$

όπου $p_k$ η γενικευμένη ορμή.

Έχουμε ορίσει, ως γενικευμένη ορμή $p_k$ , την ποσότητα

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \;, \qquad (k=1,2,\ldots,\nu) \;. \tag{5}$$

Επειδή η συνάρτηση Lagrange , $L$ , εξαρτάται από τις γενικευμένες συντεταγμένες, τις γενικευμένες ταχύτητες και το χρόνο, το δεξιό μέλος της (5) θα εξακολουθήσει να εξαρτάται από τις ίδιες μεταβλητές.

Συνεπώς, οι $\nu$ εξισώσεις (5) μπορούν να αποτελούν σύστημα, ως προς τις γενικευμένες ταχύτητες $\dot{q}_1,\dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_\nu$ .

Από τη λύση του συστήματος αυτού θα προκύψει

$$\begin{aligned}
\dot{q}_1 &= \dot{q}_1(q_1,q_2,\ldots,q_\nu,p_1,p_2,\ldots,p_\nu,t)\\
\dot{q}_2 &= \dot{q}_2(q_1,q_2,\ldots,q_\nu,p_1,p_2,\ldots,p_\nu,t)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\dot{q}_\nu &= \dot{q}_\nu(q_1,q_2,\ldots,q_\nu,p_1,p_2,\ldots,p_\nu,t) \;.
\end{aligned} \tag{6}$$

Αντικαθιστώντας τις (6) στην (3), προκύπτει ότι, η συνάρτηση Hamilton , $H$ , εξαρτάται από τις γενικευμένες ορμές, τις γενικευμένες συντεταγμένες και τον χρόνο, δηλαδή

$$H = H(p_1,p_2,\ldots,p_\nu,q_1,q_2,\ldots,q_\nu,t) \;. \tag{7}$$

Από την (7) προκύπτει

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p_1}\, dp_1 + \frac{\partial H}{\partial p_2}\, dp_2 + \ldots + \frac{\partial H}{\partial p_\nu}\, dp_\nu + \frac{\partial H}{\partial q}\, dq_1 +$$

$$+ \frac{\partial H}{\partial q_2}\, dq_2 + \ldots + \frac{\partial H}{\partial q_\nu}\, dq_\nu + \frac{\partial H}{\partial t}\, dt \quad . \tag{8}$$

Η (8) γράφεται

$$dH = \sum_{k=1}^{\nu} \left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\, dp_k + \frac{\partial H}{\partial q_k}\, dq_k\right) + \frac{\partial H}{\partial t}\, dt \; . \tag{9}$$

Από τη σχέση (4) παίρνουμε

$$dH = \sum_{k=1}^{\nu} (p_k d\dot{q}_k + \dot{q}_k dp_k) - dL \quad . \tag{10}$$

Από τη σχέση (2) έχουμε

$$dL = \sum_{k=1}^{\nu} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\, dq_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\, d\dot{q}_k\right) + \frac{\partial L}{\partial t}\, dt \quad . \tag{11}$$

Επειδή

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad , \tag{12}$$

η σχέση (1) δίνει

$$\frac{dp_k}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad . \tag{13}$$

Η (13) γράφεται

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad . \tag{14}$$

Αντικαθιστώντας τις (12) και (14) στην (11), έχουμε

$$dL = \sum_{k=1}^{\nu} (\dot{p}_k dq_k + p_k d\dot{q}_k) + \frac{\partial L}{\partial t}\, dt \quad . \tag{15}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (15), η (10) γράφεται

$$dH = \sum_{k=1}^{\nu}(p_k d\dot{q}_k+\dot{q}_k dp_k)-\sum_{k=1}^{\nu}(\dot{p}_k dq_k+p_k d\dot{q}_k)-\frac{\partial L}{\partial t}\,dt \,.$$

ή

$$dH = \sum_{k=1}^{\nu}(\dot{q}_k dp_k-\dot{p}_k dq_k)-\frac{\partial L}{\partial t}\,dt \,. \tag{16}$$

Εξισώνοντας τις (9) και (16), έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\,dp_k+\frac{\partial H}{\partial q_k}\,dq_k\right)+\frac{\partial H}{\partial t}\,dt = \sum_{k=1}^{\nu}(\dot{q}_k dp_k-\dot{p}_k dq_k)-\frac{\partial L}{\partial t}\,dt \,. \tag{17}$$

Η (17) γράφεται

$$\sum_{k=1}^{\nu}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}-\dot{q}_k\right)dp_k+\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}+\dot{p}_k\right)dq_k\right]+\left(\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial L}{\partial t}\right)dt = 0 \,. \tag{18}$$

Επειδή τα $dp_k, dq_k$ και $dt$ είναι ανεξάρτητα, οι συντελεστές αυτών στην εξίσωση (18) πρέπει να μηδενίζονται. Δηλαδή, θα ισχύει

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k}\\ \dot{p}_k &= -\frac{\partial H}{\partial q_k}\end{aligned}\right]\quad (k=1,2,\ldots,\nu) \tag{19}$$

και

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{20}$$

όπου

$$H = H(p_1,p_2,\ldots,p_\nu,q_1,\ldots,q_\nu,t) \,.$$

Οι εξισώσεις (19) ονομάζονται "κανονικές εξισώσεις Hamilton" ή "εξισώσεις Hamilton".

Οι $q_k$ και $p_k$ ονομάζονται "συζυγείς μεταβλητές". Οι (19) αποτελούν σύστημα $2\nu$ διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως και μπορούμε αμέσως να το βρούμε, αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση Hamilton. Για να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση Hamilton, πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τη συνάρτηση Lagrange και μετά να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις (5) και (4).

Από τη λύση των $2\nu$ διαφορικών εξισώσεων (19) θα προκύψουν τα $q_1=q_1(t),\ldots,q_\nu=q_\nu(t)$ , $p_1=p_1(t),\ldots,p_\nu=p_\nu(t)$ .

Οι $2\nu$ "κανονικές εξισώσεις Hamilton" πρώτης τάξης αντικατέστησαν τις $\nu$ εξισώσεις Lagrange δευτέρας τάξης. Οι (19) διατηρούν επίσης όλα τα πλεονεκτήματα των εξισώσεων Lagrange.

Η μέθοδος που αναπτύχθηκε από τον Hamilton , για να βγούν οι κανονικές εξισώσεις, οδήγησε σε νέες ιδέες και θεωρήσεις στη Φυσική, που συνέβαλαν στην ανάπτυξη νέων κλάδων της, όπως η "Κβαντική Μηχανική" και η "Στατιστική Μηχανική".

Με ανάλογες σκέψεις μπορεί να προκύψει η μορφή των εξισώσεων Hamilton, όταν το σύστημα υπόκειται σε ανολόνομους δεσμούς ή για περιπτώσεις, που δεν καλύπτονται από τις υποθέσεις που στηρίχτηκε η θεωρία αυτή.

## 4.19 Πρώτα ολοκληρώματα των εξισώσεων Hamilton .

Ονομάζουμε "πρώτο ολοκλήρωμα των εξισώσεων Hamilton" κάθε σχέση της μορφής

$$f(p_1,p_2,\ldots,p_\nu,q_1,q_2,\ldots,q_\nu,t) = \sigma\tau\alpha\vartheta. \tag{1}$$

Κάθε πρώτο ολοκλήρωμα των εξισώσεων Hamilton μας βοηθά να λύνουμε πιό εύκολα το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων Hamilton, αλλά και να βγάζουμε αμέσως ορισμένα συμπεράσματα, που αφορούν την κίνηση.

Γνωρίζουμε ότι, η συνάρτηση Hamilton εξαρτάται από τις γενικευμένες ορμές, τις γενικευμένες συντεταγμένες και το χρόνο

$$H = H(p_1,p_2,\ldots,p_\nu,q_1,q_2,\ldots,q_\nu,t) \tag{2}$$

και ισχύουν οι εξισώσεις

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \;, \qquad (k=1,2,\ldots,\nu) \;, \tag{3}$$

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \;, \qquad (k=1,2,\ldots,\nu) \;. \tag{4}$$

Εάν μία από τις "συζυγείς μεταβλητές" δεν εμφανίζεται στη συνάρτηση Hamilton $H$, τότε η συζυγής της παραμένει σταθερή.

Πράγματι, εάν π.χ. η $q_m$ δεν υπάρχει στη συνάρτηση Hamilton, τότε

$$\frac{\partial H}{\partial q_m} = 0 \;. \tag{5}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (5), η (3) δίνει

$$\dot{p}_m = 0 \;. \tag{6}$$

Από την (6) παίρνουμε

$$p_m = \sigma\tau\alpha\vartheta. \tag{7}$$

Η (7) είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα των εξισώσεων Hamilton. Εάν τώρα η $p_m$ δεν υπάρχει στη συνάρτηση Hamilton, τότε

$$\frac{\partial H}{\partial p_m} = 0 \;. \tag{8}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (8), η (4) δίνει

$$\dot{q}_m = 0 \;. \tag{9}$$

Από την (9) παίρνουμε

$$q_m = \sigma\tau\alpha\vartheta. \tag{10}$$

Η (10) είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα των εξισώσεων Hamilton.

Μετά από αυτά προκύπτει το εξής συμπέρασμα : "Κάθε φορά που δεν εμφανίζεται στη συνάρτηση Hamilton κάποια γενικευμένη συντεταγμένη ή γενικευμένη ορμή, το πλήθος των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν την κίνηση ελαττώνεται κατά δύο. Αυτό είναι ένα πολύ σοβαρό βήμα για την απλούστευση του προσδιορισμού της κίνησης.

Επομένως , η προσπάθεια για τη λύση πολύπλοκων προβλημάτων συγκεντρώνεται στην εύρεση κατάλληλων γενικευμένων συντεταγμένων και ορμών, έτσι ώστε στη συνάρτηση Hamilton να εμφανίζονται όσο το δυνατό λιγότερες γενικευμένες συντεταγμένες και γενικευμένες ορμές.

Θα προσπαθήσουμε τώρα να πάρουμε ένα ακόμη πρώτο ολοκλήρωμα των εξισώσεων Hamilton.

Η ολική παράγωγος, ως προς το χρόνο της (2) είναι

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{k=1}^{\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) + \frac{\partial H}{\partial t} \quad . \tag{11}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (3) και (4), η (11) γίνεται

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{k=1}^{\nu}\left[\frac{\partial H}{\partial p_k}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_k}\right) + \frac{\partial H}{\partial q_k}\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\right)\right] + \frac{\partial H}{\partial t} \quad . \tag{12}$$

Από την (12) προκύπτει

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad . \tag{13}$$

Εάν η συνάρτηση Hamilton δεν περιέχει εκπεφρασμένα το χρόνο, δηλαδή

$$H = H(p_1, p_2, \ldots, p_\nu, q_1, q_2, \ldots, q_\nu) \quad , \tag{14}$$

παίρνουμε

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad . \tag{15}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (15), η (13) γίνεται

$$\frac{dH}{dt} = 0 \quad . \tag{16}$$

Από την (16) προκύπτει

$$H = σταθ. \tag{17}$$

Η (17) είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα των εξισώσεων Hamilton γνωστό ως "ολοκλήρωμα Jacobi".

Στην ειδική περίπτωση που το μηχανικό σύστημα είναι "συντηρητικό" και "σκληρόνομο", θα αποδείξουμε ότι το "ολοκλήρωμα Jacobi" συμπίτει με τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας.

Εφ' όσον το μηχανικό σύστημα είναι σκληρόνομο και συντηρητικό, σύμφωνα με τη σχέση (25) της παραγράφου (4.14), το κοινό δυναμικό $V$ είναι της μορφής

$$V = V(q_1, q_2, \ldots, q_\nu) \quad . \tag{18}$$

Επειδή το μηχανικό σύστημα είναι σκληρόνομο, σύμφωνα με τη σχέση (26) της παραγράφου (4.14) η ολική κινητική ενέργεια $T$ δίνεται από τη σχέση

$$\sum_{k=1}^{\nu} \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T \quad . \tag{19}$$

Επειδή

$$L = T - V \quad , \tag{20}$$

από την (18) έχουμε

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \quad , \qquad (k=1,2,\ldots,\nu) \quad . \tag{21}$$

Γνωρίζουμε ότι

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad , \qquad (k=1,2,\ldots,\nu) \quad . \tag{22}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (22), η (21) δίνει

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \tag{23}$$

Από την (23), η (19) γίνεται

$$\sum_{k=1}^{\nu} p_k \dot{q}_k = 2T \quad . \tag{24}$$

Γνωρίζουμε, από τη σχέση (4) της παραγράφου (4.18), ότι

$$H = \sum_{k=1}^{\nu} p_k \dot{q}_k - L \quad . \tag{25}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (20) και (24) η (25) δίνει

$$H = 2T-(T-V) \quad ,$$

ή

$$H = T+V \quad . \tag{26}$$

Έχοντας υπόψη την (17), η (26) παρέχει

$$H = T+V = \text{σταθ.} \tag{27}$$

Από την (27) προκύπτει η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας.

# ΚΕΦ. 5

## Γενικευμενη Αρχη του Hamilton

[illegible]

## Γενικά

Σκοπός του παρόντος Κεφαλαίου είναι η διατύπωση της "Γενικευμένης Αρχής του Hamilton".

Στην αρχή αυτή μπορεί να στηριχθεί η Μηχανική και θα προκύψουν ως ειδικές περιπτώσεις οι εξισώσεις Lagrange, Hamilton, κ.λ.π.

Πρωτού διατυπώσουμε τη "Γενικευμένη Αρχή του Hamilton" είναι απαραίτητο να δώσουμε μερικούς ορισμούς και να αποδείξουμε ωρισμένες σχέσεις, που είναι οι πλέον χρήσιμες για το λογισμό, που θα ακολουθήσει.

## 5.1. Δυνατή μεταβολή γενικευμένης συντεταγμένης

Έστω $q_k(t)$ είναι κάποια γενικευμένη συντεταγμένη. Ονομάζουμε δυνατή μεταβολή, $\delta q_k$, της γενικευμένης συντεταγμένης $q_k$ τη διαφορά,

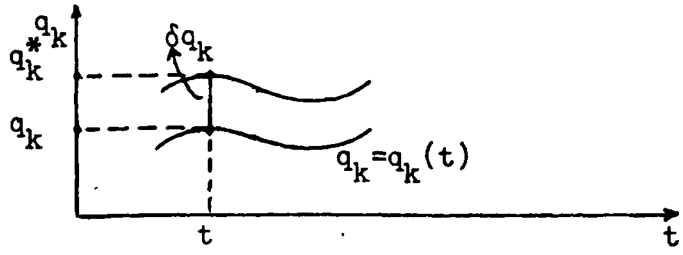
$$\delta q_k = q_k^*(t) - q_k(t) \quad (1)$$

όπου

$$q_k^*(t) = q_k(t) + \varepsilon\eta(t) \ . \quad (2)$$

ε είναι μία απειροστή ποσότητα και $\eta(t)$ μια συνάρτηση, που είναι παραγωγίσιμη.

Η δυνατή μεταβολή γενικευμένης συντεταγμένης είναι μία υποθετική μεταβολή, που γίνεται ακαριαία, $\delta t=0$ .(Σχ. 28).




Σχ. 28

## 5.2. Δυνατή μεταβολή γενικευμένης ταχύτητας

Έστω $\dot{q}_k(t)$ είναι κάποια γενικευμένη ταχύτητα. Ονομάζουμε δυνατή μεταβολή, $\delta\dot{q}_k$, της γενικευμένης ταχύτητας $\dot{q}_k$ τη διαφορά,

$$\delta\dot{q}_k = \dot{q}_k^*(t) - \dot{q}_k(t) \quad (1)$$

όπου

$$\dot{q}_k^*(t) = \dot{q}_k(t) + \varepsilon\dot{\eta}(t) \ . \quad (2)$$

Τα $\varepsilon, \eta(t)$ έχουν οριστεί προηγουμένως.

## 5.3. Δυνατή μεταβολή συνάρτησης

Έστω $f=f(q_1,q_2,\ldots,q_\ell,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_\ell,t)$. Ονομάζουμε δυνατή μεταβολή, $\delta f$, της συνάρτησης $f$ τη διαφορά,

$$\delta f = f(q_1+\delta q_1,q_2+\delta q_2,\ldots,\dot{q}_1+\delta\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_\ell+\delta\dot{q}_\ell,t+\cancel{\delta t}^{=0})$$
$$-f(q_1,q_2,\ldots,q_\ell,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_\ell,t)\,. \qquad (1)$$

Εάν αναπτύξουμε κατά Taylor το β' μέλος της (1) σε πρώτη προσέγγιση η (1) γράφεται,

$$\delta f = \sum_{k=1}^{\ell}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\,\delta q_k+\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_k}\,\delta\dot{q}_k\right)\,. \qquad (2)$$

## 5.4. Πόρισμα

Να δειχθεί ότι,

$$\delta\dot{q}_k = \frac{d}{dt}\,(\delta q_k) \quad \text{ή} \quad \delta\dot{q}_k = (\delta q_k)^{\cdot}\,.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Γνωρίζουμε ότι,

$$\delta\dot{q}_k = \dot{q}_k^*(t)-\dot{q}_k(t)\,. \qquad (1)$$

Η (1) γράφεται

$$\delta\dot{q}_k = \frac{dq_k^*}{dt}-\frac{dq_k}{dt} = \frac{d}{dt}\,(q_k^*-q_k) = \frac{d}{dt}\,(\delta q_k)\,.$$

Άρα

$$\delta\dot{q}_k = (\delta q_k)^{\cdot}\,.$$

## 5.5. Πόρισμα

Να δειχθεί ότι,

$$\delta(dq_k) = d(\delta q_k) \ ;$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Τούτο προκύπτει σαν συνέπεια του προηγουμένου πορίσματος.

## 5.6. Πόρισμα

Εάν $f = f(q_1, q_2, \ldots, q_\ell, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_\ell, t)$ να δειχθεί ότι ,

$$\delta(df) = d(\delta f) \ .$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Η απόδειξη προκύπτει ως συνέπεια των προηγούμενων ορισμών και πορισμάτων.

## 5.7. Πόρισμα

Να δειχθεί ότι ,

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta f)dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} f dt \ .$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Εάν $\Phi$ είναι η παράγουσα συνάρτηση της $f$ , θα ισχύει ως γνωστό ότι,

$$d\Phi = f dt \ .$$

Τότε θα έχουμε

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta f dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta d\Phi = \int_{t_1}^{t_2} d\delta\Phi = |\delta\Phi|_{t_1}^{t_2} = \delta \int_{t_1}^{t_2} f dt \ .$$

## 5.8. Μορφικός χώρος

Ονομάζουμε μορφικό χώρο τον $\nu$-διάστατο χώρο, που έχει συντεταγμένες τις $\nu$ ανεξάρτητες γενικευμένες συντεταγμένες $q_1, q_2, \ldots, q_\nu$ .

Για να καθορίσουμε λοιπόν τη "θέση" ενός μηχανικού συστήματος στο μορφικό χώρο χρειαζόμαστε να γνωρίζουμε τις ανεξάρτητες γενικευμένες συντεταγμένες.

## 5.9. Πραγματική τροχιά στο μορφικό χώρο

Η διαδοχή των θέσεων του μηχανικού συστήματος στο μορφικό χώρο, ονομάζεται πραγματική τροχιά στο μορφικό χώρο.

## 5.10. Γενικευμένη Αρχή του Hamilton

Θεωρούμε την κίνηση ενός μηχανικού συστήματος στο μορφικό χώρο. Το σύστημα υπόκειται σε ολόνομους δεσμούς. Τη χρονική στιγμή $t=t_1$ το σύστημα βρίσκεται στη θέση A και τη χρονική στιγμή $t=t_2$ στη θέση B. Η κίνηση περιγράφεται από την "πραγματική τροχιά C " και διαγράφεται στον πεπερασμένο χρόνο $(t_2-t_1)$. Θεωρούμε επίσης κάποια άλλη "δυνατή τροχιά C′ " του ίδιου συστήματος τέτοια ώστε :

(α) Η C′ να αρχίζει από το A και να καταλήγει στο B .

(β) Η C′ να διαγράφεται στον ίδιο χρόνο όπως και η C .

(γ) Η C′ είναι συμβιβαστή με τους δεσμούς του συστήματος.

Λόγω της (α) θα ισχύει ότι,

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Για} & t = t_1 , & \delta q_i = 0 \\ \text{Για} & t = t_2 ; & \delta q_i = 0 . \end{array}\right\} \quad (i = 1,2,\ldots,\nu) . \tag{1}$$

"Η Γενικευμένη Αρχή του Hamilton" διατυπώνεται ως εξής :

**Μεταξύ δύο δεδομένων καταστάσεων, που πληρούν τις παραπανω προϋποθέσεις, μεταξύ όλων των "δυνατών τροχιών" η "πραγματική τροχιά" είναι εκείνη για την οποία το ολοκλήρωμα $\int_{t_1}^{t_2}(\delta T+\sum_{i=1}^{3N} F_i^{(\epsilon)}\delta x_i)dt$ , ισούται με το μηδέν**

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta T+\sum_{i=1}^{3N} F_i^{(\epsilon)}\delta x_i)dt = 0 . \tag{2}$$

**($F_i^{(\epsilon)}$= επιβεβλημένες δυνάμεις , $T$ = Κινητική ενέργεια του συστήματος).**

## 5.11. Ειδική περίπτωση της γενικευμένης αρχής του Hamilton όταν το σύστημα είναι συντηρητικό.

Έστω ότι οι επιβεβλημένες δυνάμεις προέρχονται από το κοινό δυναμικό $V$. Το δυναμικό $V$ θα είναι συνάρτηση των θέσεων των υλικών σημείων του συστήματος. Δηλαδή

$$V = V(x_1,x_2,x_3,x_4,\dots,x_{3N}) . \tag{1}$$

Θα ισχύει, σύμφωνα με τον ορισμό της συντηρητικής δύναμης

$$F_i^{(\varepsilon)} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} , \qquad (i=1,2,\dots,3N) . \tag{2}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (1) και (2) η σχέση $\sum_{i=1}^{3N} F_i^{(\varepsilon)}\delta x_i$ λαμβάνει τη μορφή

$$\sum_{i=1}^{3N} F_i^{(\varepsilon)}\delta x_i = -\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial V}{\partial x_i}\delta x_i = -\delta V . \tag{3}$$

Συνεπώς η γενικευμένη αρχή του Hamilton (5.10.2) λαμβάνει τη μορφή

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta T-\delta V) = 0$$

ή

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T-V) = 0$$

ή

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T-V) = 0$$

ή

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 , \qquad L = T-V . \tag{4}$$

(Το ολοκλήρωμα $\int_{t_1}^{t_2} L dt$ ονομάζεται "συναρτησιακό" ή "συναρτησοειδές").

Η σχέση (7) μπορεί να διατυπωθεί ως εξής :

"Για συντηρητικό σύστημα μεταξύ δύο δεδομένων καταστάσεων, που πληρούν τις γενικές προϋποθέσεις της Αρχής του Hamilton, μεταξύ όλων των "δυνατών τροχιών" η "πραγματική τροχιά" είναι εκείνη για την οποία το ολοκλήρωμα , $\int_{t_1}^{t_2} L dt$ είναι στατικό,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \; . \tag{5}$$

Η σχέση (5) είναι γνωστή σαν "Αρχή του Hamilton".

## 5.12. Οι εξισώσεις Lagrange ως ειδική περίπτωση της "γενικευμένης αρχής του Hamilton".

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (1) της παραγράφου (4.9α),

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_\nu, t) \; , \qquad (i=1,2,\ldots,3N) \; , \tag{1}$$

προκύπτει

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu} \delta q_\nu + \frac{\partial x_i}{\partial t} \cancel{\delta t}^{=0}$$

ή

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k \; . \tag{2}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (2) προκύπτει

$$\sum_{i=1}^{3N} F_i^{(\varepsilon)} \delta x_i = \sum_{i=1}^{3N} \sum_{k=1}^{\nu} F_i^{(\varepsilon)} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^{\nu} \Big( \sum_{i=1}^{3N} F_i^{(\varepsilon)} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \Big) \delta q_k \; . \tag{3}$$

Εάν θέσουμε

$$Q_k = \sum_{i=1}^{3N} F_i^{(\varepsilon)} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} , \qquad (Q_k = \text{γενικευμένη δύναμη})$$

τότε η (3) λαμβάνει τη μορφή

$$\sum_{i=1}^{3N} F_i^{(\varepsilon)} \delta x_i = \sum_{k=1}^{\nu} Q_k \delta q_k . \tag{4}$$

Η ολική κινητική ενέργεια , T , του συστήματος ως γνωστό είναι ίση με

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2 . \tag{5}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (1) η κινητική ενέργεια , T , θα γίνει συνάρτηση των $q_1, q_2, \ldots, q_\nu, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_\nu, t$ . Δηλαδή

$$T = T(q_1, q_2, \ldots, q_\nu, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_\nu, t) . \tag{6}$$

Από τη σχέση (6) προκύπτει

$$\delta T = \sum_{k=1}^{\nu} \left( \frac{\partial T}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\nu} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) \right) \delta q_k + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right) \right] . \tag{7}$$

Γνωρίζουμε από τη σχέση (2) της παραγράφου (5.10) ότι η γενικευμένη αρχή του Hamilton είναι

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \delta T + \sum_{i=1}^{3N} F_i^{(\varepsilon)} \delta x_i \right) dt = 0 . \tag{8}$$

Αντικαθιστώντας τις (4) και (7) στην (8) λαμβάνουμε

$$\int_{t_1}^{t_2}\Big[\sum_{k=1}^{\nu}\Big(\frac{\partial T}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\Big)+Q_k\Big)\delta q_k\Big]dt=-\sum_{k=1}^{\nu}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\,\delta q_k\Big)\Big|_{t_1}^{t_2} \quad . \qquad (9)$$

Επειδή για $t=t_1$ και $t=t_2$ ισχύει $\delta q_k=0$ , το δεύτερο μέλος της (9) μηδενίζεται. Συνεπώς

$$\int_{t_1}^{t_2}\Big[\sum_{k=1}^{\nu}\Big(\frac{\partial T}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\Big)+Q_k\Big]\delta q_k=0 \ . \qquad (10)$$

Επειδή τα $\delta q_k$ είναι ανεξάρτητες μεταβολές από τη (10) προκύπτει ότι πρέπει να ισχύει,

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\Big)-\frac{\partial T}{\partial q_k}=Q_k \quad , \quad (k=1,2,\ldots,\nu) \ . \qquad (11)$$

Οι (11) είναι οι γνωστές εξισώσεις του Lagrange.

## 5.13. Οι εξισώσεις Hamilton ως ειδική περίπτωση της "Αρχής του Hamilton"

Θεωρούμε ότι το σύστημα είναι συντηρητικό. Εισάγουμε τη συνάρτηση Hamilton $H$ ,

$$H(p_k,q_k,t)=\sum_{i=1}^{\nu}p_k\dot{q}_k-L \ , \qquad \Big(p_k=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ , \quad k=1,2,\ldots,\nu\Big) \qquad (1)$$

στην εξίσωση ,

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}L\,dt=0 \ . \qquad (2)$$

Η εξίσωση (2) εκφράζει ως γνωστό την "Αρχή του Hamilton". Αντικαθιστώντας την (1) στην (2) λαμβάνουμε

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{k=1}^{\nu} p_k\dot{q}_k - H\right)dt = 0 \,. \qquad (3)$$

Συνεπώς από την (3) θα έχουμε

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{k=1}^{\nu}\left(p_k\delta\dot{q}_k + \dot{q}_k\delta p_k - \frac{\partial H}{\partial q_k}\delta q_k - \frac{\partial H}{\partial p_k}\delta p_k\right)dt = 0 \,. \qquad (4)$$

Ο όρος , $\int_{t_1}^{t_2} p_k\delta\dot{q}_k dt$ γράφεται,

$$\int_{t_1}^{t_2} p_k\delta\dot{q}_k dt = \int_{t_1}^{t_2} p_k \frac{d}{dt}(\delta q_k)dt = \left[p_k\delta q_k\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\delta q_k \frac{dp_k}{dt}\, dt. \qquad (5)$$

Επειδή για $t=t_1$ και $t=t_2$ είναι $\delta q_k=0$ , η (5) δίνει,

$$\int_{t_1}^{t_2} p_k\delta\dot{q}_k dt = -\int_{t_1}^{t_2}\delta q_k \frac{dp_k}{dt}\, dt$$

ή

$$\int_{t_1}^{t_2} p_k\delta\dot{q}_k dt = -\int_{t_1}^{t_2}\dot{p}_k\delta q_k dt \,. \qquad (6)$$

Αντικαθιστώντας την (6) στην (4) λαμβάνουμε

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{k=1}^{\nu}\left[\left(\dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k}\right)\delta p_k - \left(\dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial q_k}\right)\delta q_k\right]dt = 0 \,. \qquad (7)$$

Τα $\delta p_k$ και $\delta q_k$ είναι ανεξάρτητες μεταβολές. Άρα από την εξίσωση (7) προκύπτουν οι σχέσεις,

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \,, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \,, \qquad (k=1,2,\ldots,\nu) \,,$$

δηλαδή οι εξισώσεις του Hamilton.

# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ


1. Ames, Joseph Sweetman, and Francis D. Murnhaghan, Theoretical mechanics. Boston: Ginn and Company, 1929. New York: Dover, 1958.
2. Appel, Paul, Traité de mécanique rationelle, Tome 2: Dynamique des systèmes. Mèchanique analytique, 6th ed. Paris: Gauthier-Villars, 1953.
3. Barger, Vernon D., and Martin G. Olsson, Classical mechanics, a modern prespective. New York: McGraw-Hill, 1973.
4. Bartlett, James H., Classical and modern mechanics. University, Alabama: University of Alabama Press, 1975.
5. Bradbury, T.C., Theoretical mechanics. New York: Wiley, 1968.
6. Corben, H.C., and Philip Stehle, Classical mechanics, 2nd ed. New York: Wiley, 1960. New York: R.E. Krieger, 1974.
7. Γούδα, Κ. Μαθήματα μηχανικής, Τόμοι Α,Β, Αθήνα, 1972.
8. Γρατσιάτου, Γ., Μαθήματα θεωρητικής μηχανικής, Θεσσαλονίκη, 1967.
9. Finkelstein, Robert J., Nonrelativistic mechanics. Reading Mass.: W.A. Benjamin, 1973.
10. Fowles, Grant R., Analytical mechanics. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1962.
11. Gantmacher, F., Lectures in analytical mechanics. Translated from Russian. Moscow: Mir Publishers, 1970. Reprint, 1975.
12. Greenwood, Donald T., Principles of dynamics. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1965.
13. Hamel, Georg, Theoretische Mechanik, eine einhertliche einführung in die gesamte Mechanik. Berlin: Springer-Verlag, 1949. Corrected reprint, 1967.

14. Hauser, Walter, Introduction to the principles of mechanics, Reading, Mass: Addison-Wesley, 1965.

15. Kane, Thomas R., Dynamics. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1968.

16. Kilmister, C.W., Hamiltonian dynamics. New York: Wiley, 1964.

17. Kilmister, C.W., Lagrangian dynamics. New York: Plenum Press, 1967

18. Kilmister, C.W., and J.E. Reeve, Rational mechanics. New York: American Elsevier, 1966.

19. Lanczos, Cornelius, The variational principles of mechanics, 4th ed. Toronto: University of Toronto Press, 1970.

20. Landau, L.D., and E.M. Lifshitz, Mechanics, 3rd ed. Course of Theoretical Physics, vol. 1. Translated from Russian. Oxford: Pergamon Press, 1976.

21. MacMillan, William Duncan, Theoretical mechanics. Vol. 1: Statics and the dynamics of a particle. New York: McGraw-Hill, 1927.

22. Marion, Jerry B., Classical dynamics of particles and systems, 2nd ed. New York: Academic Press, 1970.

23. Meirovitch, Leonard, Methods of analytical dynamics. New York: McGraw-Hill, 1970.

24. Milne, E.A., Vectorial mechanics. New York: Interscience Publisher 1948.

25. Morgenstern, D., and I. Szabo, Vorlesungen über theoretiscne Mecha Berlin: Springer-Verlag, 1961.

26. Osgood, William F., Mechanics, New York: Macmillan, 1937.

27. Pars, L.A., A treatise on analytical dynamics. London: Heinemann, 1965.

28. Saletan, Eugene J., and Alan H. Cromer, Theoretical mechanics, New York: Wiley, 1971.

29. Schaefer, Cl. and Pasler, Max, Einführung in die theoretische physik. Walter De Gruyter & Co., 1970

30. Spiegel, M., Theorètical mechanics. Schaum's Outline Series-McGraw-Hill,Book company, 1967.

31. Sposito, Garrison, An introduction to classical dynamics. New York: Wiley, 1976.

32. Sudarshan, E.C.G., and N. Mukunda, Classical dynamics: A modern perspective. New York: Wiley, 1974.

33. Symon, Keith R., Mechanics, 3rd ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1971.

34. Synge, John L., Classical dynamics, in vol. 3, part 1 of Encyclopedia of physics. Berlin: Springer-Verlag, 1960.

35. Synge, John L., and Byron A. Griffith, Principles of mechanics, 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1959.

36. Ter Harr, D., Elements of Hamiltonian mechanics. Amsterdam: North-Holland, 1961. Second ed., Oxford; Pergamon Press, 1971.

37. Thirring, Walter, A course in mathematical physics I: Classical dynamical systems. Translated from German. New York. Springer-Verlag, 1978.

38. Thomson, William (Lord Kelvin), and Peter Guthrie Tait, Treatise on natural philosophy. Cambridge: Cambridge University Press, 1879. Slightly revised, 1896. Reprinted as Principle of mechanics and dynamics, New York: Dover, 1962.

39. Τζιβανίδη, Γ., Αναλυτική μηχανική, Ιωάννινα, 1987.

40. Χατζηδημητρίου, Ι. Θεωρητική μηχανική, Τόμος Ι. Θεσσαλονίκη, 1970.

29. [illegible] Walter de Gruyter, 1976 [illegible]

30. Spiegel, M.R., Theoretical mechanics, Schaum's Outline Series. McGraw-Hill Book Company, 1967.

31. [illegible] York: Wiley, 1970 [illegible]

32. Sudarshan, E.C.G., and N. Mukunda, Classical dynamics: A modern perspective. New York: Wiley, 1974.

33. Symon, Keith R., Mechanics, 3rd ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1971.

34. Synge, John L., Classical dynamics, in Vol. 3, part 1 of Encyclopedia of physics. Berlin: Springer-Verlag, 1960.

35. Synge, John L., and Byron A. Griffith, Principles of mechanics, 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1959.

36. ter Haar, D., Elements of Hamiltonian mechanics. Amsterdam: North-Holland, 1961. Second ed., Oxford: Pergamon Press, 1971.

37. Thirring, Walter, A course in mathematical physics I: Classical dynamical systems. Translated from German. New York: Springer-Verlag, 1978.

38. Thomson, William (Lord Kelvin) and Peter Guthrie Tait, Treatise on natural philosophy. Cambridge: Cambridge University Press, 1879. Slightly revised, 1896. Reprinted as Principles of mechanics and dynamics, New York: Dover, 1962.

39. Τζιβανίδης, Γ., Αναλυτική μηχανική. Αθήνα, 1987.

40. Χατζηδημητρίου, Ι., Θεωρητική μηχανική, Τόμος Ι. Θεσσαλονίκη, 1970.

Τυπώθηκε στο Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο
με δαπάνη του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ
ΤυπογραφείΟ
Διανέμεται Δωρεάν στους φοιτητές.