ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ Α. ΣΤΑΪΚΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ
ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΚΑΙ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΤΟΥ ΒΟΗΘΟΥ
ΓΕΩΡΓΙΟΥ Λ. ΚΑΡΑΚΩΣΤΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΙΩΑΝΝΙΝΑ 1980

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
026000047548

131/95

Π.ΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
Βιβλιοθήκη
ΦΥΣΙΚΟ Τ

515.3
ΣΤΑ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ Α. ΣΤΑΪΚΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ
ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΚΑΙ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΤΟΥ ΒΟΗΘΟΥ
ΓΕΩΡΓΙΟΥ Λ. ΚΑΡΑΚΩΣΤΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΙΩΑΝΝΙΝΑ 1980

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τυπώθηκε στο Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο με δαπάνη του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Κ.Α. Πανεπιστημιακού Τυπογραφείου. .....

Ο.Τ. .....

Copyrigth : Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Απαγορεύεται η μερική ή ολική ανατύπωση, καθώς και η λήψη φωτοαντιγράφων από το βιβλίο χωρίς τη γραπτή άδεια του Τμήματος Δημοσιευμάτων του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων και του συγγραφέα.

Διατίθεται και στο Βιβλιοπωλείο του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, Δομπόλη, 451 10 Ιωάννινα τηλ. 21801.

ΔΙΑΝΕΜΕΤΑΙ ΔΩΡΕΑΝ στους φοιτητές.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ὁποιοδήποτε εἶναι λίγο δύσκολο νά μπορέση κάποιος νά χρονολογήση τήν ἀρχή τῆς ἐξελίξεως τοῦ Ἀπειροστικοῦ Λογισμοῦ. Ἄν ὅμως λάβη ὑπ'ὄψη του ὅτι οἱ ἔννοιες τῆς παραγώγου (διαφορικοῦ) καί τοῦ ὁλοκληρώματος ἀποτελοῦν τόν πυρῆνα τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως καί ἀναμφισβήτητα ἕνα ἀπαραίτητο μέσο στά χέρια τῶν Ἐφηρμοσμένων, τότε χοντρικά ἀρχίζει καί χρονομετρεῖ ἀπό τόν 17^{ο} αἰῶνα. Τοῦτο συμβαίνει, γιατί τήν ἐποχή αὐτή οἱ Leibniz καί Newton εἰσάγουν στά Μαθηματικά τίς παραπάνω ἔννοιες μέ τή βοήθεια τῶν "ἀπειροστῶν μεγεθῶν". Πλήν ὅμως, δέν μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι ἡ θεμελίωση αὐτή ἔγινε μέ τόσο αὐστηρό μαθηματικό τρόπο, ὅσο ἀπαιτοῦν οἱ Μαθηματικές Θεωρίες πού δόθηκαν ἀπ'τούς Ἀρχιμήδη, Εὐκλείδη, Πυθαγόρα, Διόφαντο καί τούς ἄλλους. Βέβαια, ἡ ἐφαρμογή στή Γεωμετρία καί Φυσική ἀπέρριψε κατά κάποιον τρόπο τίς κατηγορίες αὐτές, ἀλλά καί πάλι ἡ κριτική τῶν θεωρητικῶν ἦταν αὐστηρή. Λίγο ἀργότερα ὁ Euler προσπάθησε νά διατυπώση μέ αὐστηρότερο τρόπο τίς ἔννοιες τῶν Leibniz καί Newton δίνοντας στόν κλάδο αὐτό τῶν Μαθηματικῶν τόν γενικώτερο τίτλο "Ἀνάλυση". Σχεδόν ταυτόχρονα, τό ἴδιο θέμα ἀπασχολεῖ καί τούς Lagrange, Fourier, Gauss καί πολλές ἄλλες μαθηματικές διάνοιες τῆς ἐποχῆς. Καί πάλι ὅμως ἡ θεωρητική κριτική κρίνει ὅτι οἱ βασικές ἔννοιες δέν εἶναι αὐστηρά διατυπωμένες. Ὁ Γάλλος μαθηματικός Cauchy κατά τίς ἀρχές τοῦ 18^{ου} αἰῶνα καί λίγο ἀργότερα οἱ Weierstrass, Peano, Cantor, Dedekind καί ἄλλοι πέτυχαν νά θεμελιώσουν τή θεωρία τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καί νά διατυπώσουν ἐπί τέλους αὐστηρά τίς ἔννοιες τῆς συγκλίσεως καί συνέχειας συναρτήσεως καί μέ τή βοήθεια αὐτῶν καί τίς ἄλλες βασικές ἔννοιες τῆς Ἀναλύσεως. Ἔτσι ὁ κλάδος αὐτός τῶν Μαθηματικῶν, μπορεῖ νά πῆ κανείς, ὅτι κατά τά τέλη τοῦ 19^{ου} αἰῶνα ἔλαβε ἰσάξια θέση κοντά στίς μαθηματικές θεωρίες τῆς ἀρχαίας Ἑλληνικῆς περιόδου.

Μέ τήν εἰσαγωγή τῆς ἔννοιας τοῦ συνόλου στά Μαθηματικά ἀπό τόν Cantor, στό τέλος περίπου τοῦ προηγουμένου αἰῶνα καί μέ τήν ἐπέκταση τοῦ πεδίου λο-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

γικῆς τοῦ Ἀριστοτέλους ἀπ'τούς Hilbert, Frege καί ἄλλους, ἀνακαλύφτηκαν τά μέσα γιά μιά αὐστηρή διατύπωση τῶν κυριωτέρων Μαθηματικῶν ἐννοιῶν. Ὅπως εἶναι φυσικό, τοῦτο ἐπέδρασε καί στήν Ἀνάλυση καί βοήθησε, ὥστε τό οἰκοδόμημά της νά αὐτοθεμελιωθῆ καί νά ἀπαλλαγῆ ἀπό ἐξωμαθηματικές ἔννοιες.

Σκοπός τοῦ βιβλίου τούτου εἶναι νά φέρη τόν $A^{ετή}$ φοιτητή σέ μιά στενή ἐπαφή μέ τόν Ἀπειροστικό Λογισμό, ὅπως αὐτός ἔχει ἐξελιχθεῖ μέχρι σήμερα, πάνω σέ θέματα πού ἀφοροῦν τήν πραγματική συνάρτηση μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς. Ἔχει γίνει προσπάθεια, ὥστε ὅλες οἱ ἔννοιες νά εἶναι αὐστηρά διατυπωμένες καί νά μή δημιουργοῦνται κενά στόν ἀναγνώστη.

Θεωρῶ καθῆκον μου νά εὐχαριστήσω τόν βοηθό μου κ. Γεώργιο Καρακώστα μέ τή συνεργασία καί ἐπιμέλεια τοῦ ὁποίου κατέστη δυνατή ἡ ἔκδοση αὐτή τῶν σημειώσεων τῶν μαθημάτων μου.

Ἐπίσης εὐχαριστῶ θερμά τόν συνάδελφό μου κ. Ἰωάννη Σφήκα γιά τίς ἐποικοδομητικές παρατηρήσεις του πού συνέβαλαν στή σημερινή βελτιωμένη παρουσίαση τῶν σημειώσεων αὐτῶν.

Τέλος, εὐχαριστῶ καί τήν Παρασκευάστρια τοῦ Μαθηματικοῦ Ἐργαστηρίου δ. Ἁγνή Παπαβρανούση γιά τήν προσεκτική δακτυλογράφιση τοῦ κειμένου.

Ἰωάννινα, Σεπτέμβριος 1980

Β.Α. Στάϊκος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

	Σελίδα
Εἰσαγωγικές ἐπεξηγήσεις	1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ. ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΑΥΤΩΝ

1.1 Συμβολισμοί καί ὁρισμοί	3
1.2 Μονότονες συναρτήσεις	5
1.3 Ἀντίστροφες συναρτήσεις	5
1.4 Ἡ ἔννοια τῆς ἀκολουθίας	6
1.5 Ὑπακολουθία	7
1.6 Σύγκλιση ἀκολουθίας	8
1.7 Ἰδιότητες συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν	9
1.8 Κριτήρια συγκλίσεως ἀκολουθιῶν	12
Α. Σύγκλιση σέ σχέση μέ τή μονοτονία	12
Β. Σημεῖα συσσωρεύσεως ἀκολουθίας	16
Γ. Κριτήριο συγκλίσεως τοῦ Cauchy	17
1.9 Σύγκλιση συναρτήσεων	19
1.10 Ἰδιότητες συγκλίσεως	24
1.11 Συνθῆκες συγκλίσεως συναρτήσεων	27
1.12 Συνέχεια συναρτήσεως	31
1.13 Γενικές ἰδιότητες συνεχῶν συναρτήσεων	34
1.14 Συνέχεια ἀντίστροφης συναρτήσεως	39
1.15 Ἀσκήσεις	40

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

2.1 Δυνάμεις - Ρίζες	45
2.2 Ἐκθετικές συναρτήσεις	50
2.3 Λογαριθμικές συναρτήσεις	53

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2.4 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις 54
2.5 Κυκλομετρικές συναρτήσεις 61
2.6 Ὑπερβολικές συναρτήσεις 63
2.7 Ἀντίστροφες ὑπερβολικές συναρτήσεις 66
2.8 Στοιχειώδεις συναρτήσεις 68
2.9 Ἀσκήσεις 70

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

3.1 Ὁρισμός παραγώγου 73
3.2 Γεωμετρική ἑρμηνεία τῆς παραγώγου 77
3.3 Ἰδιότητες τῆς παραγώγου 81
3.4 Παράγωγοι τῶν στοιχειωδῶν συναρτήσεων 85
3.5 Παράγωγοι ὁποιασδήποτε τάξεως 91
3.6 Διαφορικό συναρτήσεως 96
3.7 Βασικοί κανόνες διαφορίσεως 99
3.8 Ἀνώτερα διαφορικά 99
3.9 Βασικά θεωρήματα τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ 101
3.10 Ἀπροσδιόριστες μορφές 111
3.11 Ἀσκήσεις 120

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

4.1 Μονοτονία συναρτήσεως 127
4.2 Ἀκρότατα συναρτήσεως 130
4.3 Κυρτές καί κοῖλες συναρτήσεις 135
4.4 Ἀσύμπτωτες συναρτήσεως 143
4.5 Μελέτη συναρτήσεως 146
4.6 Ἀσκήσεις 150

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΑΟΡΙΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

5.1 Ὁρισμός ἀορίστου ὁλοκληρώματος 152

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5.2 Γενικές ἰδιότητες ὁλοκληρώσεως 154
5.3 Ἀναγωγικοί τύποι 157
5.4 Ὁλοκλήρωση ρητῶν συναρτήσεων 165
5.5 Ὁλοκλήρωση μερικῶν ἀλγεβρικῶν συναρτήσεων 169
5.6 Ὁλοκλήρωση ρητῶν ἐκφράσεων τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων 176
5.7 Ἀσκήσεις 179

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΟΡΙΣΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

6.1 Ὁρισμός τοῦ κατά Riemann ὁλοκληρώματος 182
6.2 Συνθῆκες γιά τήν ὕπαρξη τοῦ ὁρισμένου ὁλοκληρώματος 190
6.3 Ἰδιότητες τοῦ ὁρισμένου ὁλοκληρώματος 196
6.4 Σχέση ὁρισμένου καί ἀορίστου ὁλοκληρώματος 209
6.5 Γεωμετρική ἑρμηνεία τοῦ ὁρισμένου ὁλοκληρώματος 216
Α. Ἐμβαδό ἐπιπέδου χωρίου 216
Β. Μῆκος ἐπίπεδης καμπύλης 220
Γ. Ὄγκος στερεοῦ ἀπό περιστροφή καμπύλης 224
Δ. Ἐμβαδό ἐπιφάνειας ἀπό περιστροφή καμπύλης 225
6.6 Ἀσκήσεις 229

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LAPLACE

7.1 Ὁλοκληρώματα συναρτήσεων ὁρισμένων ἐπί ἀπεράντων διαστημάτων 233
7.2 Ὁλοκληρώματα συναρτήσεων πού δέν ὁρίζονται σέ ἕνα σημεῖο 240
7.3 Μετασχηματισμοί τοῦ Laplace 252
7.4 Ἀσκήσεις 259

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΣΕΙΡΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

8.1 Ἔννοια καί ἄθροισμα σειρᾶς 263
8.2 Ἰδιότητες συγκλινουσῶν σειρῶν 267
8.3 Κριτήρια συγκλίσεως σειρῶν 271

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Α. Σειρές μέ μή ἀρνητικούς ὅρους 271
Β. Ἐναλλασσόμενες σειρές 280
Γ. Ἀπόλυτη καί ὑπό συνθήκη σύγκλιση σειρῶν 281
8.4 Ὑποσειρές καί ἀναδιατάξεις σειρῶν 286
8.5 Δεκαδική παράσταση πραγματικῶν ἀριθμῶν 294
8.6 Ἀσκήσεις 303

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

Σ'αὐτό τό βιβλίο θά θεωρήσωμε γνωστές ἀπό τά Γυμνασιακά Μαθήματα τίς παρακάτω ἔννοιες μέ τούς ἀντίστοιχους συμβολισμούς :

$\mathbb{R}$	τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν - ἡ πραγματική εὐθεῖα.
$\mathbb{N}$	τό σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.
$\mathbb{Z}$	τό σύνολο τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.
$\mathbb{Q}$	τό σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.
$\emptyset$	τό κενό σύνολο.
$[\alpha]$	τό ἀκέραιο μέρος τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ α.
$x \in A$	x εἶναι στοιχεῖο τοῦ A.
$x \notin A$	x δέν εἶναι στοιχεῖο τοῦ A.
$\{\alpha,\ldots,\omega\}$	τό σύνολο μέ στοιχεῖα $\alpha,\ldots,\omega$.
$\{x \in A:\ldots\}$	τό σύνολο ὅλων τῶν στοιχείων x τοῦ A πού εἶναι τέτοια ὥστε...
$A \cup B$	$\{x: x \in A$ ἤ $x \in B\}$.
$A \cap B$	$\{x: x \in A$ καί $x \in B\}$.
$A - B$	$\{x: x \in A$ καί $x \notin B\}$.
$A \subseteq B$, $B \supseteq A$	A ὑποσύνολο τοῦ B , B ὑπερσύνολο τοῦ A : κάθε στοιχεῖο τοῦ A εἶναι καί στοιχεῖο τοῦ B.
(α,β)	διατεταγμένο ζεῦγος μέ πρῶτο στοιχεῖο τό α καί δεύρο τό β.
$A \times B$	$\{(x,y): x \in A$ καί $y \in B\}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$p \Rightarrow q$	"p συνεπάγεται q" ἤ "ἄν p, τότε q" ἤ "q ἕπεται ἀπ'τήν p".
$\forall$	ὁ καθολικός ποσοδείκτης "διά κάθε".
$\exists$	ὁ ὑπαρξιακός ποσοδείκτης "ὑπάρχει".
$\blacktriangle$	τέλος ἀποδείξεως.

Ἕνα σύνολο A εἶναι πεπερασμένο ἄν μπορῆ νά ἐξαντληθοῦν ὅλα τά στοιχεῖα του ἀπαριθμῶντας τα ἕνα πρός ἕνα, ὅπως τό σύνολο $\{1, \frac{2}{3}, 7\}$ κ.ἄ.

Ἕνα σύνολο B εἶναι ἀπέραντο ἄν τοῦτο δέν εἶναι πεπερασμένο, ὅπως τά σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ κ.ἄ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 1

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ. ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΑΥΤΩΝ

Στά δυό πρῶτα κεφάλαια παραθέτονται στοιχεῖα ὁρολογίας πού ἀφοροῦν τίς (πραγματικές) συναρτήσεις, μερικές βασικές ἰδιότητες αὐτῶν, καθώς καί τίς συνηθέστερες στοιχειώδεις συναρτήσεις. Στήν πραγματικότητα γίνεται μιά σύντομη ἐπανάληψη σέ ὅ,τι σχετικό θεωρεῖται ὅτι ἔχει διδαχτῆ στό Γυμνάσιο καί πού θά χρειαστῆ στά ἑπόμενα κεφάλαια.

1.1 ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Θεωροῦμε ἕνα ὑποσύνολο A τοῦ συνόλου $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἐάν κάθε στοιχεῖο x τοῦ συνόλου A ἀντιστοιχίζεται κατά κάποιο τρόπο σέ ἕνα καί μόνο στοιχεῖο y τοῦ συνόλου $\mathbb{R}$, τότε ὁρίζεται μιά "(πραγματική) συνάρτηση" (ἤ "ἀπεικόνιση", ἤ "μετασχηματισμός") f "τοῦ A στό $\mathbb{R}$". Δηλαδή συνάρτηση εἶναι "μιά διαδικασία" μέ τήν ὁποία τό στοιχεῖο x ἀντιστοιχίζεται σέ ἕνα καί μόνο στοιχεῖο y. Τό σύνολο A εἶναι τότε "τό πεδίο ὁρισμοῦ" τῆς συναρτήσεως f καί θά γράφεται $A = \mathcal{D}(f)$, τό στοιχεῖο x εἶναι ἡ "μεταβλητή" (ἤ τό "πρότυπο"), τό στοιχεῖο y ποί θά παριστάνεται μέ $f(x)$ εἶναι ἡ "τιμή τῆς συναρτήσεως f στό x", τό σύνολο $\mathcal{R}(f)$ ὅλων τῶν τιμῶν τῆς f εἶναι "τό πεδίο τιμῶν" τῆς συναρτήσεως f καί ἡ f λέμε ὅτι εἶναι "ὁρισμένη στό A". Ἡ συνάρτηση f μέ $\mathcal{D}(f) = A$ θά συμβολίζεται ἀκόμη καί μέ τούς τρόπους

$$y = f(x)\ ,\ x \in A\ ,\ f : A \to \mathbb{R}\ ,\ f|A \quad \text{κ.λ.π.}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παράδειγμα 1.1.1

Αντιστοιχίζοντας κάθε πραγματικό αριθμό x στό τετράγωνό του $y = x^2$, ορίζεται μιά συνάρτηση $f(x) = x^2$ μέ $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ καί $\mathcal{R}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

Συχνά θά αναφέρωνται συναρτήσεις ορισμένες πάνω σέ σύνολα πραγματικών αριθμών πού ονομάζονται " διαστήματα ". Αν α,β είναι πραγματικοί αριθμοί μέ $\alpha < \beta$, τότε ορίζομε τά παρακάτω διαστήματα:

$(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R}: \alpha < x < \beta\}$, ανοικτό μέ άκρα α, β

$[\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R}: \alpha \leq x < \beta\}$, κλειστό αριστερά, ανοικτό δεξιά μέ άκρα α,β

$(\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R}: \alpha < x \leq \beta\}$, ανοικτό αριστερά, κλειστό δεξιά μέ άκρα α,β

$[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R}: \alpha \leq x \leq \beta\}$, κλειστό μέ άκρα α,β

$(\alpha, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}: \alpha < x\}$, απέραντο δεξιά, ανοικτό αριστερά μέ άκρο α

$(-\infty, \beta) = \{x \in \mathbb{R}: x < \beta\}$, απέραντο αριστερά, ανοικτό δεξιά μέ άκρο β

$[\alpha, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}: \alpha \leq x\}$, απέραντο δεξιά, κλειστό αριστερά μέ άκρο α

$(-\infty, \beta] = \{x \in \mathbb{R}: x \leq \beta\}$, απέραντο αριστερά, κλειστό δεξιά μέ άκρο β

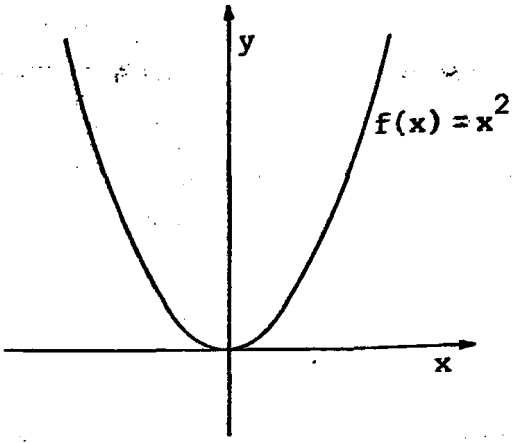
Επίσης σάν διάστημα $(-\infty, +\infty)$ απέραντο δεξιά καί αριστερά γράφεται καί ολόκληρη ή πραγματική εύθεια, ήτοι $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Γεωμετρικά, μιά συνάρτηση f ταυτίζεται μέ "τό γράφημά" της, δηλαδή τό σύνολο

$$\{(x,y) : y = f(x), x \in \mathcal{D}(f)\}.$$

Έτσι ή συνάρτηση τοῦ παραδείγματος 1.1.1, γεωμετρικά, ταυτίζεται μέ τό γράφημά της πού εἶναι ή παραβολή τοῦ σχήματος 1.

Εἶναι ἀξιοσημείωτο τό γεγονός ὅτι τό γράφημα μιᾶς συναρτήσεως χαρακτηρίζεται ἀπό τήν ἰδιότητα ὅτι κάθε εὐθεῖα γραμμή παράλληλη πρός τόν y-ἄξονα τέμνει αὐτό σέ ἕνα τό πολύ σημεῖο.



ΣΧΗΜΑ 1

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1.2 ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Έστω X ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της συναρτήσεως f· η συνάρτηση f ονομάζεται "γνησίως αύξουσα επί του X" άν $f(x) < f(x')$ για κάθε x, x' του X με $x < x'$. Εάν το πρώτο σύμβολο "<" αντικατασταθή με το "$\leq$", τότε η συνάρτηση f ονομάζεται "αύξουσα επί του X". Ανάλογα, άν η συνθήκη $x < x'$ συνεπάγεται την $f(x) > f(x')$ (αντίστοιχα $f(x) \geq f(x')$) για κάθε x,x' του συνόλου X, τότε η συνάρτηση f ονομάζεται "γνησίως φθίνουσα επί του X" (αντίστοιχα "φθίνουσα επί του X"). Ο προσδιορισμός "επί του X" παραλείπεται άν $X = \mathcal{D}(f)$. Γνησίως αύξουσες και γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις ονομάζονται "γνησίως μονότονες" ενώ αύξουσες και φθίνουσες συναρτήσεις ονομάζονται απλά "μονότονες".

Παράδειγμα 1.2.1

Η συνάρτηση· $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στό σύνολο $[0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στό $(-\infty,0]$ (βλ. ΣΧ. 1).

1.3 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Μιά συνάρτηση $y = f(x)$ για τήν οποία ισχύει

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x') \tag{1.3.1}$$

ονομάζεται "αμφιμονοσήμαντη". Δηλαδή μιά συνάρτηση f είναι αμφιμονοσήμαντη άν για κάθε $y \in \mathcal{R}(f)$ η εξίσωση

$$y = f(x) \tag{1.3.2}$$

έχει μόνο μιά λύση $x \in \mathcal{D}(f)$. Μπορούμε, λοιπόν, σέ μιά αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση f να θεωρήσωμε, αντίστροφα, ότι σέ κάθε στοιχείο y αντιστοιχίζεται η μοναδική λύση x της εξισώσεως (1.3.2), οπότε ορίζεται μιά συνάρτηση g με τύπο

$$x = g(y) .$$

Η συνάρτηση g λέγεται "η αντίστροφη" της συναρτήσεως f και παριστάνεται με f^{-1}. Σ'αυτή την περίπτωση και η f είναι η αντίστροφη της g κι επομένως για κάθε $x \in \mathcal{D}(f)$ και $y \in \mathcal{R}(f)$ ισχύουν οι ισότητες

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{καί} \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

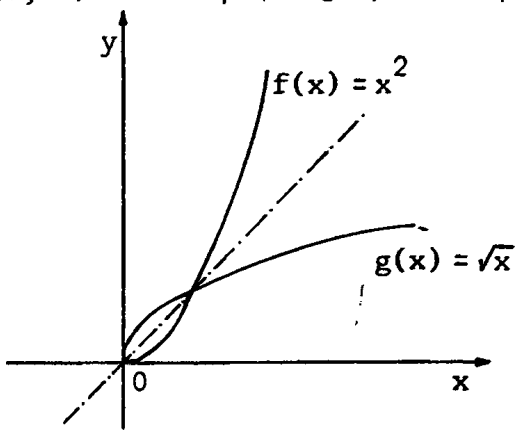
καί ἀκόμη

$$\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f) \quad \text{καί} \quad \mathcal{R}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f)$$

Εἶναι φανερό ὅτι κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση f ἱκανοποιεῖ τήν συνθήκη (1.3.1) καί τοῦτο διότι, ἄν $y \in \mathcal{R}(f)$ καί x_1, x_2 εἶναι τέτοια ὥστε $x_1 \neq x_2$ (ἔστω $x_1 < x_2$), τότε $f(x_1) < f(x_2)$ (ἄν f εἶναι γνησίως αὔξουσα) ἤ $f(x_1) > f(x_2)$ (ἄν f εἶναι γνησίως φθίνουσα), δηλαδή πάντοτε $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ἄρα κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση f εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη καί ἑπομένως ὑπάρχει ἡ ἀντίστροφή της f^{-1}. ▲

Παράδειγμα 1.3.1

Ἐπειδή ἡ συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \in [0,+\infty)$ εἶναι γνησίως μονότονη (γνησίως αὔξουσα) ἔχει ἀντίστροφη πού παριστάνεται μέ $g(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,+\infty)$ (βλ. ΣΧ. 2).



ΣΧΗΜΑ 2

Γεωμετρικά, μιά συνάρτηση πού ἔχει ἀντίστροφη χαρακτηρίζεται ἀπ'τό γεγονός ὅτι τό γράφημά της τέμνεται σέ ἕνα τό πολύ σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου, ἀπό κάθε εὐθεῖα γραμμή παράλληλη πρός τόν x-ἄξονα. Πρέπει, ἐπίσης, νά σημειωθῆ ὅτι τό γράφημα τῆς f^{-1} εἶναι μιά καμπύλη συμμετρική πρός τήν καμπύλη πού παριστάνει τό γράφημα τῆς f μέ ἄξονα συμμετρίας τήν πρώτη διχοτόμο τῶν ἀξόνων (βλ. ΣΧ. 2).

1.4 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

Οἱ πιό ἁπλές πραγματικές συναρτήσεις εἶναι ἐκεῖνες μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο $\mathbb{N}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καί πού ὀνομάζονται "ἀκολουθίες". Μιά ἀκολουθία $y = \alpha(\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$ θά παριστάνεται ἁπλᾶ α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ ἤ $(\alpha_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, ἤ ἀναλυτικά

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὅπως π.χ. ἡ ἀκολουθία τοῦ Fibonacci

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

πού προκύπτει ἀπ'τόν γενικό ἀναγωγικό τύπο $\alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ μέ $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Ἐδῶ ἡ εἰκόνα α_ν τοῦ στοιχείου ν ὀνομάζεται "ν-οστός ὅρος" τῆς ἀκολουθίας καί ἡ μεταβλητή ν "δείκτης".

Μποροῦμε νά δοῦμε ὅτι ἐνῶ μιά ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ ἔχει ἄπειρους ὅρους εἶναι δυνατό τό σύνολο τῶν ὅρων της (δηλαδή τό πεδίο τιμῶν της), πού συχνά θά παριστάνωμε μέ $\{\alpha_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$, νά εἶναι πεπερασμένο, ὅπως, γιά παράδειγμα, συμβαίνει ὅταν $\alpha_\nu = (-1)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$.

Ἐπειδή καί ἡ ἀκολουθία εἶναι μιά συνάρτηση, σύμφωνα μέ τήν παράγραφο 1.2, ἡ μονοτονία εἶναι ἤδη γνωστή. Ἔτσι ἔχομε τήν ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$.

"γνησίως αὔξουσα" ἄν $\alpha_\nu < \alpha_{\nu+1}$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$,

"αὔξουσα" ἄν $\alpha_\nu \leqq \alpha_{\nu+1}$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$,

"γνησίως φθίνουσα" ἄν $\alpha_\nu > \alpha_{\nu+1}$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$,

"φθίνουσα" ἄν $\alpha_\nu \geqq \alpha_{\nu+1}$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$,

Ἀκόμη, πρέπει ν'ἀναφερθῆ, ὅτι, μιά ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι

"(ἄνω, ἤ) δεξιά φραγμένη" ἄν ὑπάρχη $M \in \mathbb{R}$ μέ $\alpha_\nu \leqq M$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$,

"(κάτω, ἤ) ἀριστερά φραγμένη" ἄν ὑπάρχη $m \in \mathbb{R}$ μέ $m \leqq \alpha_\nu$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$,

"φραγμένη" ἄν εἶναι δεξιά καί ἀριστερά φραγμένη, ἤτοι ἄν ὑπάρχη $\vartheta \in \mathbb{R}$ μέ $|\alpha_\nu| \leqq \vartheta$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

Ὁ ἀριθμός M ὀνομάζεται "(ἄνω, ἤ) δεξιό φράγμα", ὁ m "(κάτω, ἤ) ἀριστερό φράγμα" καί ὁ ϑ, γενικά "φράγμα" τῆς ἀκολουθίας.

1.5 ΥΠΑΚΟΛΟΥΘΙΑ

Θεωροῦμε μιά γνησίως αὔξουσα ἀκολουθία $(k_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ φυσικῶν ἀριθμῶν (δεικτῶν) τότε γιά κάθε ἀκολουθία $(\alpha_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ ἡ ἀκολουθία $(\alpha_{k_\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$, πού προκύπτει ἀπ'τήν $(\alpha_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ παίρνοντας μόνο ἐκείνους τούς ὅρους πού ἀντιστοιχοῦν στούς δεῖκτες k_ν, ὀνομάζεται "ὑπακολουθία" τῆς $(\alpha_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$. Ἔτσι, μέ $k_\nu = 2\nu - 1$, $\nu \in \mathbb{N}$ προκύπτει ἡ $\alpha_{k_\nu} = \frac{2\nu}{2\nu - 1}$, $\nu \in \mathbb{N}$ σάν ὑπακο-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

λουθία τῆς $\alpha_\nu = \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} + 1$, $\nu \in \mathbb{N}$.

1.6 ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

Ἀπό τίς ἀκολουθίες σημαντικό ρόλο παίζουν οἱ μηδενικές.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6.1. **Μιά ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ ὀνομάζεται "μηδενική" ἄν γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχη δείκτης $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ὥστε γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ἡ σχέση $\nu > n$ νά συνεπάγεται τήν $|\alpha_\nu| < \varepsilon$, ἤ συντομώτερα ἄν**

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, n \in \mathbb{N})(\forall\, \nu \in \mathbb{N}) \quad \nu > n \Rightarrow |\alpha_\nu| < \varepsilon.$$

Στήν περίπτωση μηδενικῆς ἀκολουθίας χρησιμοποιοῦμε τούς συμβολισμούς

$\lim\limits_\nu \alpha_\nu = 0$, ἤ $\alpha_\nu \underset{\nu}{\to} 0$, ἤ ἁπλούστερα $\lim \alpha_\nu = 0$, ἤ $\alpha_\nu \to 0$

καί μποροῦμε νά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ **"τείνει πρός τό μηδέν"** ἤ **"ἔχει ὅριο τό μηδέν"**.

Παράδειγμα 1.6.1

Ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι μηδενική, ἀφοῦ ἄν δοθῆ ὁποιοδήποτε $\varepsilon > 0$, ὑπάρχει δείκτης n καί μάλιστα ὁ $n = [\frac{1}{\varepsilon}]$, τέτοιος ὥστε $|\alpha_\nu| < \varepsilon$ γιά κάθε $\nu > n$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6.2. **Μιά ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει πρός τόν ἀριθμό $\ell \in \mathbb{R}$ ὅταν ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu - \ell$, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι μηδενική, ἤ ἰσοδύναμα, ἄν**

(1.6.1) $$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, n \in \mathbb{N})(\forall\, \nu \in \mathbb{N}) \quad \nu > n \Rightarrow |\alpha_\nu - \ell| < \varepsilon.$$

Ἡ ἰδιότητα αὐτή παριστάνεται τότε μέ

$\lim\limits_\nu \alpha_\nu = \ell$, ἤ $\alpha_\nu \underset{\nu}{\to} \ell$, ἤ ἁπλούστερα $\lim \alpha_\nu = \ell$ ἤ $\alpha_\nu \to \ell$

καί λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ **"συγκλίνει πρός τό ℓ"** ἤ **"τείνει πρός τό ℓ"**, ἤ **"ἔχει ὅριο τό ℓ"**.

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ σχέση (1.6.1) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν

(1.6.2) $$\ell - \varepsilon < \alpha_\nu < \ell + \varepsilon, \quad \nu > n,$$

ὁπότε, ἄν ὁρίσωμε σάν περιοχή ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ℓ κάθε ὑποσύνολο U τῆς πραγματικῆς εὐθείας γιά τό ὁποῖο ὑπάρχει ἀνοικτό διάστημα Δ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τέτοιο ὥστε $\ell \in \Delta \subseteq U$, μποροῦμε τήν ἰδιότητα (1.6.2) νά ἐκφράσωμε μέ λόγια ὡς ἑξῆς:

"Σέ κάθε περιοχή τοῦ ὁρίου μιᾶς συγκλινούσης ἀκολουθίας ἀνήκουν τελικῶς ὅλοι οἱ ὅροι αὐτῆς, ἤτοι ὅλοι οἱ ὅροι της ἐκτός ἀπό ἕνα πεπερασμένο πλῆθος αὐτῶν".

Ἔτσι εἶναι φανερό ὅτι ἄν μιά συγκλίνουσα ἀκολουθία ἔχη ὅριο τό ℓ, τότε καί κάθε ὑπακολουθία της ἔχει ὅριο τό ℓ.

Ἐπίσης θά πρέπει νά σημειωθῆ ὅτι

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6.3. **Μιά ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει πρός τόν ℓ**

i) **ἀπό δεξιά, ἄν** $\lim \alpha_\nu = \ell$ **καί** $(\exists\, \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall\, \nu \in \mathbb{N})\ \nu \geq \nu_0 \Rightarrow \ell \leq \alpha_\nu$

ii) **ἀπό ἀριστερά, ἄν** $\lim \alpha_\nu = \ell$ **καί** $(\exists\, \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall\, \nu \in \mathbb{N})\ \nu \geq \nu_0 \Rightarrow \alpha_\nu \leq \ell$

iii) **ἀπό τίς δυό πλευρές, ἄν** $\lim \alpha_\nu = \ell$ **καί** $(\forall\, n \in \mathbb{N})(\exists\, \nu_1, \nu_2 > n)$ **μέ** $\alpha_{\nu_1} \leq \ell \leq \alpha_{\nu_2}$.

Γιά παράδειγμα, ἡ ἀκολουθία $\frac{1}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει στό 0 ἀπό δεξιά, ἡ $-\frac{1}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει στό 0 ἀπό ἀριστερά καί ἡ $\frac{(-1)^\nu}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει στό 0 ἀπό τίς δύο πλευρές.

1.7 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

Ἀκολουθεῖ μιά σειρά προτάσεων πού χαρακτηρίζουν τίς συγκλίνουσες ἀκολουθίες καί πού βοηθοῦν στήν εὕρεση τῶν ὁρίων τους.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.7.1. **Κάθε συγκλίνουσα ἀκολουθία ἔχει μόνο ἕνα ὅριο.**

Ἀπόδειξη. Ἄν $\lim \alpha_\nu = \ell_1$ καί $\lim \alpha_\nu = \ell_2$ μέ $\ell_1 \neq \ell_2$, θέτομε $\varepsilon = |\ell_1 - \ell_2|$· τότε ὅμως ὑπάρχουν $n_1 \in \mathbb{N}$ καί $n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοια ὥστε

$$|\alpha_\nu - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{γιά κάθε} \quad \nu > n_1;$$

$$|\alpha_\nu - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{γιά κάθε} \quad \nu > n_2.$$

Ἄρα, γιά κάθε $\nu > \max\{n_1, n_2\}$ οἱ δυό ἀνισότητες ἰσχύουν μαζί καί ἔτσι

$$0 < |\ell_1 - \ell_2| \leq |\alpha_\nu - \ell_1| + |\alpha_\nu - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon = |\ell_1 - \ell_2|$$

ἄτοπο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$|\ell_1-\ell_2| < |\ell_1-\ell_2|$$

πού εἶναι ἄτοπο· ἑπομένως $\ell_1 = \ell_2$ καί ἔτσι τό ὅριο εἶναι μοναδικό. ▲

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.7.2. **Κάθε συγκλίνουσα ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι φραγμένη καί μάλιστα ἄν $|\alpha_\nu| \leq \vartheta$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, τότε καί $|\ell| \leq \vartheta$, ὅπου $\ell = \lim \alpha_\nu$.**

Ἀπόδειξη. Ἀπ'τόν ὁρισμό 1.6.2 προκύπτει ὅτι $\exists n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ὥστε $|\alpha_\nu - \ell| < 1$ γιά κάθε $\nu > n$. Ἄρα

$$|\alpha_\nu| = |(\alpha_\nu-\ell) + \ell| \leq |\alpha_\nu-\ell| + |\ell| \leq 1 + |\ell| \quad \text{ὅταν} \quad \nu > n$$

καί ἄν πάρωμε σάν ϑ τόν $\max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots |\alpha_n|, 1+|\ell|\}$, τότε

$$(1.7.1) \qquad |\alpha_\nu| \leq \vartheta \quad \text{γιά κάθε} \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Τώρα ἄν ἴσχυε $|\ell| > \vartheta$, γιά τό $\varepsilon = |\ell| - \vartheta > 0$ θά ὑπῆρχε $\hat{n} \in \mathbb{N}$ τέτοιο ὥστε $|\alpha_\nu-\ell| < \varepsilon$ γιά κάθε $\nu > \hat{n}$. Ἀλλά τότε

$$|\alpha_\nu| = |\ell + (\alpha_\nu-\ell)| \geq |\ell| - |\alpha_\nu-\ell| > |\ell| - \varepsilon = \vartheta$$

γιά κάθε $\nu > \hat{n}$, πού εἶναι ἄτοπο, ἀπ'τήν ἀνισότητα (1.7.1). ▲

Ἀκολουθεῖ μιά σειρά προτάσεων γιά τίς ἀποδείξεις τῶν ὁποίων ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ νά ἀνατρέξη στά βιβλία: Η. ΝΤΖΙΩΡΑ: Μαθηματικά Β΄ Λυκείου καί Β. ΣΤΑΪΚΟΥ: Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.7.3. **Ἄν α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι μηδενική ἀκολουθία, τότε καί κάθε ἀκολουθία β_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ μέ $|\beta_\nu| \leq K|\alpha_\nu|$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ καί κάποιο $K > 0$, εἶναι μηδενική.**

Ἐπειδή, βάσει τοῦ ὁρισμοῦ τῆς μηδενικῆς ἀκολουθίας, μιά ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι μηδενική, τότε καί μόνο τότε, ἄν ἡ ἀκολουθία $|\alpha_\nu|$, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι μηδενική, ἀπό τήν πρόταση 1.7.3 παίρνομε τήν παρακάτω πρόταση:

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.7.4. **Ἄν ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι μηδενική καί ἡ β_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ φραγμένη, τότε καί ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu\beta_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι ἐπίσης μηδενική.**

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.7.5. **Ἄν α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, γ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι ἀκολουθίες τέτοιες ὥστε $\lim \alpha_\nu = \ell = \lim \gamma_\nu$, τότε καί γιά κάθε ἀκολουθία β_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ μέ $\alpha_\nu \leq \beta_\nu \leq \gamma_\nu$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, ἰσχύει $\lim \beta_\nu = \ell$.**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.7.6. **Αν $\alpha_\nu \neq 0$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ καί $\lim \alpha_\nu = \ell$, $\ell \neq 0$ τότε ἰσχύει $\lim \frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{1}{\ell}$.**

Μιά μή φραγμένη ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ δέν μπορεῖ νά συγκλίνη πρός πραγματικό ἀριθμό, γιατί ἄν τοῦτο συνέβαινε, σύμφωνα μέ τήν πρόταση 1.7.2, αὐτή θά ἦταν φραγμένη. Στήν περίπτωση πού μιά μή φραγμένη ἀκολουθία εἶναι καί αὔξουσα λέμε ὅτι ἔχει ὅριο τό $+\infty$ (ἤ ὅτι ἀπειρίζεται θετικά), ἐνῶ ἄν εἶναι φθίνουσα, τό $-\infty$ (ἤ ὅτι ἀπειρίζεται ἀρνητικά). Τά σύμβολα $+\infty$ καί $-\infty$, τά ὁποῖα ὀνομάζονται καί **"κατ'ἐκδοχήν σημεῖα"**, εἶναι διάφορα ἀπό κάθε πραγματικό ἀριθμό. Γι'αὐτό τούς πραγματικούς ἀριθμούς ὀνομάζομε συχνά καί **"πεπερασμένους"** ἀριθμούς. Σχετικά μέ τή διάταξη δεχόμαστε ὅτι

$$-\infty < +\infty$$

καί

$$(\forall\, x \in \mathbb{R})\ -\infty < x \quad \text{καί} \quad x < \infty .$$

Τέλος, κάτω ἀπό τίς παραπάνω παραδοχές, τό σύνολο $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ὀνομάζεται **γενικευμένη εὐθεῖα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.**

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.7.1. **Μιά ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ ἔχει ὅριο τό $+\infty$ $(-\infty)$, ἄν γιά κάποιο $\hat{\nu} \in \mathbb{N}$ ἔχει ἔννοια ἡ ἀκολουθία $\frac{1}{\alpha_{\nu+\hat{\nu}}}$, $\nu \in \mathbb{N}$ καί συγκλίνει πρός τό 0 ἀπό δεξιά (ἀριστερά), ἤ ἰσοδύναμα, ἄν**

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, n \in \mathbb{N})(\forall\, \nu \in \mathbb{N}) \quad \nu > n \Rightarrow \alpha_\nu > \frac{1}{\varepsilon} \quad \left(\alpha_\nu < -\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Ἀκολουθίες πραγματικῶν ἀριθμῶν πού συγκλίνουν πρός πραγματικό ἀριθμό ἤ πρός ἕνα ἀπό τά κατ'ἐκδοχήν σημεῖα λέμε ὅτι συγκλίνουν στό $\mathbb{R}^*$ ἤ ὅτι εἶναι συγκλίνουσες στό $\mathbb{R}^*$.

Ἡ παρακάτω πρόταση πού δίνεται χωρίς ἀπόδειξη περιέχει τήν ἀριθμητική τῶν ὁρίων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.7.7. **Αν α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, β_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι συγκλίνουσες στό $\mathbb{R}^*$ ἀκολουθίες, τότε ἰσχύουν τά ἀκόλουθα:**

1) $\lim (\alpha_\nu + \beta_\nu) = \lim \alpha_\nu + \lim \beta_\nu$
2) $\lim (\alpha_\nu - \beta_\nu) = \lim \alpha_\nu - \lim \beta_\nu$
3) $\lim (\alpha_\nu \cdot \beta_\nu) = \lim \alpha_\nu \cdot \lim \beta_\nu$
4) $\lim (\alpha_\nu : \beta_\nu) = \lim \alpha_\nu : \lim \beta_\nu$
5) $\lim \alpha_\nu^k = (\lim \alpha_\nu)^k$, $k \in \mathbb{Z}$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

μέ τήν προϋπόθεση ὅτι οἱ παραπάνω πράξεις ἔχουν ἔννοια. Γιά τίς ἐπιτρεπτές, ἤ μή, πράξεις στά ὅρια ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ νά συμβουλευτῆ τό βιβλίο Β. ΣΤΑΪΚΟΥ: Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου.

1.8 ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΕΩΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

Σχεδόν πάντοτε μᾶς ἐνδιαφέρει ἄν μιά ἀκολουθία συγκλίνη ἤ ὄχι. Γιά τόν λόγο αὐτό ἀκολουθοῦν μερικά βασικά κριτήρια πού μᾶς ἐξυπηρετοῦν στά παρακάτω.

Α. ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

Ἄν Α εἶναι ἕνα μή κενό σύνολο πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε ὑπάρχουν στοιχεῖα α,β τοῦ συνόλου $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ τέτοια ὥστε

$$\alpha \leq x \leq \beta \quad \text{γιά κάθε} \quad x \in A .$$

Τό στοιχεῖο α ὀνομάζεται "κάτω φράγμα" τοῦ συνόλου Α καί τό β "ἄνω φράγμα" αὐτοῦ. Ἄν τό α εἶναι πεπερασμένος ἀριθμός, λέμε ὅτι, τό σύνολο Α εἶναι "κάτω φραγμένο" καί παρόμοια, ἄν β εἶναι πεπερασμένος ἀριθμός, ὅτι τό Α εἶναι "ἄνω φραγμένο". Τό σύνολο Α εἶναι "φραγμένο" ἄν τοῦτο εἶναι κάτω καί ἄνω φραγμένο. Ἄν $\hat{\alpha}$ εἶναι ἕνα κάτω φράγμα τέτοιο ὥστε $\alpha \leq \hat{\alpha}$ γιά κάθε κάτω φράγμα α, τοῦτο ὀνομάζεται "infimum" τοῦ συνόλου Α καί θά συμβολίζεται μέ $\inf A$. Εἶναι φανερό ὅτι τοῦτο εἶναι μοναδικό καί ὅτι ἄν εἶναι πεπερασμένος ἀριθμός τότε τό σύνολο Α εἶναι κάτω φραγμένο. Ἀπ' τόν ὁρισμό τοῦ $\inf A$, ἄν τό Α εἶναι κάτω φραγμένο, ἔχομε ὅτι

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists x \in A)\ \inf A \leq x < \inf A + \varepsilon .$$

Ἀνάλογα, ἄν $\hat{\beta}$ εἶναι ἕνα ἄνω φράγμα τοῦ συνόλου Α τέτοιο ὥστε $\hat{\beta} \leq \beta$ γιά κάθε ἄλλο ἄνω φράγμα β, τοῦτο ὀνομάζεται "supremum" τοῦ συνόλου Α καί θά συμβολίζεται μέ $\sup A$. Εἶναι φανερό ὅτι τοῦτο εἶναι μοναδικό καί ὅτι ἄν εἶναι πεπερασμένος ἀριθμός τότε τό σύνολο Α εἶναι ἄνω φραγμένο. Ἀπ' τόν ὁρισμό τοῦ $\sup A$, ἄν τό Α εἶναι ἄνω φραγμένο, ἔχομε ὅτι

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, x \in A)\ \sup A - \varepsilon < x \leq \sup A .$$

Τέλος παρατηροῦμε ὅτι ἄν $\inf A$ καί $\sup A$ εἶναι πεπερασμένοι ἀριθμοί, τότε τό σύνολο Α εἶναι φραγμένο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἂν ἰσχύη $\inf A \in A$ καί $\sup A \in A$, τότε αὐτά λέγονται, ἀντίστοιχα, "ἐλάχιστο (minimum)" καί "μέγιστο (maximum)" τοῦ A καί συμβολίζονται μέ $\min A$ καί $\max A$, ἀντίστοιχα. Ἔτσι γιά τά διαστήματα $[0,1]$ καί $(0,1)$ ἔχομε $\inf[0,1] = 0 = \min[0,1]$, $\sup[0,1] = 1 = \max[0,1]$ καί $\inf(0,1) = 0$, $\sup(0,1) = 1$, ἐνῶ ἐλάχιστο καί μέγιστο τοῦ συνόλου $(0,1)$ δέν ὁρίζονται.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.8.1 (Κριτήριο συγκλίσεως μέ τήν μονοτονία). **Οἱ ἀκόλουθες προτάσεις εἶναι ἰσοδύναμες:**

1) **Κάθε μονότονη καί φραγμένη ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν συγκλίνει.**
2) **Κάθε κάτω φραγμένο σύνολο πραγματικῶν ἀριθμῶν ἔχει (πεπερασμένο) infimum.**
3) **Κάθε ἄνω φραγμένο σύνολο πραγματικῶν ἀριθμῶν ἔχει (πεπερασμένο) supremum.**

Ἀπόδειξη. 1) $\Rightarrow$ 2). Ἂν A εἶναι ἕνα κάτω φραγμένο σύνολο θ'ἀποδείξωμε ὅτι ἔχει infimum. Ἔστω α_0 ἕνα κάτω φράγμα τοῦ A καί γ_0 κάποιο στοιχεῖο τοῦ A. Ὀνομάζομε $[\alpha_1,\gamma_1]$ τό διάστημα $[\frac{\alpha_0+\gamma_0}{2}, \gamma_0]$ ἤ τό $[\alpha_0, \frac{\alpha_0+\gamma_0}{2}]$ ἄν, ἀντίστοιχα, τό σημεῖο $\frac{\alpha_0+\gamma_0}{2}$ εἶναι ἤ δέν εἶναι κάτω φράγμα τοῦ A. Ἐπίσης ὀνομάζομε $[\alpha_2,\gamma_2]$ τό διάστημα $[\frac{\alpha_1+\gamma_1}{2}, \gamma_1]$ ἤ τό $[\alpha_1, \frac{\alpha_1+\gamma_1}{2}]$ ἄν, ἀντίστοιχα, τό σημεῖο $\frac{\alpha_1+\gamma_1}{2}$ εἶναι ἤ δέν εἶναι κάτω φράγμα τοῦ A. Ἔτσι προχωρῶντας δημιουργοῦνται οἱ ἀκολουθίες α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, γ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ τέτοιες ὥστε ἡ α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ νά εἶναι αὔξουσα καί φραγμένη (ἀφοῦ $(\forall\, \nu \in \mathbb{N})\ \alpha_\nu \leqq \gamma_0$) ἄρα, ἀπό τήν 1), συγκλίνουσα καί ἡ γ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ νά εἶναι φθίνουσα καί φραγμένη (ἀφοῦ $(\forall\, \nu \in \mathbb{N})\ \alpha_0 \leqq \gamma_\nu$) ἄρα καί συγκλίνουσα. Ἂν $\hat{\alpha} = \lim \alpha_\nu$, τότε ἀφοῦ

$$\gamma_\nu - \alpha_\nu = \frac{1}{2}(\gamma_{\nu-1} - \alpha_{\nu-1}) = \ldots = \frac{1}{2^\nu}(\gamma_0 - \alpha_0) \underset{\nu}{\to} 0$$

ἔχομε καί $\lim \gamma_\nu = \lim \alpha_\nu = \hat{\alpha}$. Ἐπειδή ὅλοι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι κάτω φράγματα, ἕπεται, ὅτι, γιά κάθε $\gamma \in A$, ἰσχύει

$$\alpha_\nu \leqq \gamma \quad \text{γιά κάθε} \quad \nu \in \mathbb{N},$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὁπότε καί $\lim \alpha_\nu = \hat{\alpha} \leq \gamma$, δηλαδή τό $\hat{\alpha}$ εἶναι κάτω φράγμα τοῦ συνόλου A. Ἄν τώρα α εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε κάτω φράγμα τοῦ A, ἰσχύει

$$\alpha \leq \gamma_\nu \quad \text{γιά κάθε} \quad \nu \in \mathbb{N}$$

ἄρα καί $\alpha \leq \lim \gamma_\nu = \hat{\alpha}$. Ἔτσι $\hat{\alpha} = \inf A$.

2) ⟹ 3) Ἄν A εἶναι ἄνω φραγμένο σύνολο, ὑπάρχει $M \in \mathbb{R}$ μέ $x \leq M$ γιά κάθε $x \in A$· τότε $-M \leq -x$ γιά κάθε $x \in A$, ἤ $-M \leq y$ γιά κάθε $y \in B = \{y : -y \in A\}$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τό σύνολο B εἶναι κάτω φραγμένο καί, ὅπως προκύπτει ἀπ'τήν 2), ἔχει infimum β. Τότε τό $-\beta = \hat{\beta}$ εἶναι τό supremum τοῦ A, γιατί ἄν ὑπῆρχε $x \in A$ μέ $x > \hat{\beta}$, θά εἴχαμε $-\hat{\beta} > -x$ ἤ $\beta > -x = y \in B$ πού εἶναι ἄτοπο. Ἀκόμη ἄν ὑπῆρχε $\beta_1 < \hat{\beta}$ μέ $x \leq \beta_1$ γιά κάθε $x \in A$, τότε $\beta < -\beta_1 \leq -x \in B$, πού εἶναι, πάλι, ἄτοπο. Ἄρα $\hat{\beta} = \sup A$.

Τώρα ἀπό τή μεταβατική ἰδιότητα τῆς συνεπαγωγῆς ἀρκεῖ ν'ἀποδειχτῆ ὅτι 3) ⟹ 1).

3) ⟹ 1) Ἄς εἶναι α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ μιά μονότονη καί φραγμένη ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἐπειδή ὅταν ἡ α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι αὔξουσα, τότε ἡ $-\alpha_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι φθίνουσα, χωρίς βλάβη τῆς γενικότητας, θεωροῦμε παρακάτω ὅτι ἡ α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι αὔξουσα. Ἄρα τό σύνολο $A = \{\alpha_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$ εἶναι ἄνω φραγμένο κι ἔτσι, ἀπ'τήν 3), ἔχει supremum β. Ἄν δοθῆ ἕνα ὁποιοδήποτε $\varepsilon > 0$, ὑπάρχει ἕνα στοιχεῖο $\alpha_n \in A$ μέ $\beta - \varepsilon < \alpha_n \leq \beta < \beta + \varepsilon$. Ἀλλά τότε $\alpha_\nu \geq \alpha_n$ γιά κάθε $\nu \geq n$· ἔτσι ἄν $\nu > n$, ἰσχύει $\beta - \varepsilon < \alpha_n \leq \alpha_\nu < \beta < \beta + \varepsilon$, ἤ $\beta - \varepsilon < \alpha_\nu < \beta + \varepsilon$ δηλαδή

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, n \in \mathbb{N})(\forall\, \nu \in \mathbb{N}) \quad \nu > n \Rightarrow |\alpha_\nu - \beta| < \varepsilon,$$

πού σημαίνει ὅτι $\lim \alpha_\nu = \beta$. ▲

Ἡ μιά ἀπ'τίς παραπάνω τρεῖς ἰσοδύναμες προτάσεις ἀποτελεῖ ἀξίωμα στή θεμελίωση τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἰδιαίτερα ἡ πρώτη χρησιμοποιεῖται σάν τέτοιο ἀξίωμα σέ μαθήματα ὅπου τό ἐπίπεδο δέν ἐπιτρέπει τήν ἐπέκταση σέ ἔννοιες, ὅπως τῶν infimum καί supremum.

Παρατήρηση 1.8.1

Ἄν ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι φραγμένη καί αὔξουσα, τότε ἀπό τήν παραπάνω ἀπόδειξη προκύπτει ὅτι

$$\lim \alpha_\nu = \sup \alpha_\nu = \sup\{\alpha_\nu : \nu \in \mathbb{N}\},$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἐνῶ ἂν εἶναι φραγμένη καί φθίνουσα, τότε

$$\lim \alpha_\nu = \inf \alpha_\nu = \inf\{\alpha_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}.$$

Θά χρησιμοποιήσωμε τό παραπάνω κριτήριο γιά τόν ὁρισμό τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ e, ὁ ὁποῖος ἔχει ἰδιαίτερη σημασία.

Θεωροῦμε τήν ἀκολουθία $\alpha_\nu = (1+\frac{1}{\nu})^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ καί θ'ἀποδείξωμε ὅτι εἶναι γνησίως αὔξουσα· πραγματικά, χρησιμοποιώντας τή γνωστή ἀνισότητα τοῦ Bernoulli (βλ. ἄσκηση 12), ἔχομε ὅτι

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{(1+\frac{1}{\nu+1})^{\nu+1}}{(1+\frac{1}{\nu})^\nu} = \left(\frac{1+\frac{1}{\nu+1}}{1+\frac{1}{\nu}}\right)^{\nu+1} \cdot (1+\frac{1}{\nu}) = (1-\frac{1}{(\nu+1)^2})^{\nu+1} \cdot (1+\frac{1}{\nu}) >$$

$$> (1-(\nu+1)\cdot\frac{1}{(\nu+1)^2})\cdot(1+\frac{1}{\nu}) = 1$$

δηλαδή $\alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

Ἐπίσης, θεωροῦμε τήν ἀκολουθία $\beta_\nu = (1+\frac{1}{\nu})^{\nu+1}$ καί παρατηροῦμε ὅτι εἶναι γνησίως φθίνουσα, διότι

$$\frac{\beta_\nu}{\beta_{\nu+1}} = \frac{(1+\frac{1}{\nu})^{\nu+1}}{(1+\frac{1}{\nu+1})^{\nu+2}} = \left(1+\frac{1}{\nu^2+2\nu}\right)^{\nu+1} \cdot \frac{\nu+1}{\nu+2} > (1+(\nu+1)\cdot\frac{1}{\nu^2+2\nu})\cdot\frac{\nu+1}{\nu+2} >$$

$$> (1+\frac{\nu+1}{\nu^2+2\nu+1})\cdot\frac{\nu+1}{\nu+2} = 1$$

δηλαδή $\beta_\nu > \beta_{\nu+1}$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Ἀλλά ἀπό τά παραπάνω ἔχομε

$$2 = \alpha_1 \leq \alpha_\nu < \beta_\nu \leq \beta_1 = 4 \quad \text{γιά κάθε } \nu \in \mathbb{N}$$

κι ἑπομένως ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι αὔξουσα καί φραγμένη. Ἄρα, ἀπ'τό θεώρημα 1.8.1, συγκλίνει πρός ἕνα πραγματικό ἀριθμό πού συμβολίζεται μέ e. Ἀκόμη, $\lim \beta_\nu = \lim \alpha_\nu \cdot (1+\frac{1}{\nu}) = e.1 = e$ καί ἔτσι, ἀπ'τήν παραπάνω παρατήρηση 1.8.1, ἔχομε

$$2 = \alpha_1 \leq \alpha_\nu < \lim \alpha_\nu = e = \lim \beta_\nu < \beta_\nu \leq \beta_1 = 4 . \blacktriangle$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μπορεῖ ν'ἀποδειχτῆ ὅτι ὁ ἀριθμός e εἶναι ἄρρητος (βλ. ἄσκηση 5) καί ὅτι μιά προσεγγιστική τιμή του εἶναι ἡ 2,718281.

B. ΣΗΜΕΙΑ ΣΥΣΣΩΡΕΥΣΕΩΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

Εἶναι εὔκολο νά δοῦμε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = (-1)^\nu + \frac{1}{\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ δέν συγκλίνει. Ὅμως, παρατηροῦμε ὅτι, σέ κάθε περιοχή τῶν ἀριθμῶν -1 καί 1 ὑπάρχουν ἄπειροι ὅροι της καί ὅτι ἀκόμη οἱ ὑπακολουθίες της $\alpha_{k_\nu} = -1 + \frac{1}{2\nu-1}, \nu \in \mathbb{N}$ καί $\alpha_{\lambda_\nu} = 1 + \frac{1}{2\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ ἔχουν ἀντίστοιχα ὅρια τούς ἀριθμούς -1 καί 1. Δηλαδή στίς περιοχές τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν συσσωρεύονται ἄπειροι ὅροι τῆς ἀκολουθίας α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8.1. Τό σημεῖο ℓ ὀνομάζεται "σημεῖο συσσωρεύσεως" μιᾶς ἀκολουθίας α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, ἄν ὑπάρχη ὑπακολουθία α_{k_ν}, $\nu \in \mathbb{N}$ τῆς α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ τέτοια ὥστε $\lim \alpha_{k_\nu} = \ell$.

Σχετικά μέ τήν ὕπαρξη σημείων συσσωρεύσεως μιᾶς ἀκολουθίας, ἀποδείχνομε παρακάτω ἕνα βασικό θεώρημα. Γιά μιά ἄλλη πιό αὐστηρή ἀπόδειξη (ὅπου χρησιμοποιεῖται τό Ἀξίωμα τῆς ἐπιλογῆς), ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ νά ἀνατρέξη στό βιβλίο Β. ΣΤΑΪΚΟΥ: Μαθήματα Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως, Μέρος ΙΙ.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.8.2. (Bolzano - Weierstrass). Κάθε φραγμένη ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν ἔχει τουλάχιστον ἕνα σημεῖο συσσωρεύσεως.

Ἀπόδειξη. Θά ἀποδείξωμε ὅτι ἄν α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι μιά φραγμένη ἀκολουθία τότε ὑπάρχει μιά συγκλίνουσα ὑπακολουθία της.

Ἀφοῦ ἡ α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι φραγμένη, ὑπάρχουν πραγματικοί ἀριθμοί m, M τέτοιοι ὥστε $m \leq \alpha_\nu \leq M$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Χωρίζομε τό διάστημα $[m,M]$ στά δύο καί τότε στό ἕνα τουλάχιστον ἀπ'αὐτά ὑπάρχουν ἄπειροι ὅροι τῆς ἀκολουθίας α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$. Ὀνομάζομε αὐτό $[m_1,M_1]$, ὅπου προφανῶς $M_1 - m_1 = \frac{M-m}{2}$ καί τό χωρίζομε στά δύο, ἔτσι ὥστε πάλι στό ἕνα τουλάχιστον ἀπ'αὐτά ὑπάρχουν ἄπειροι ὅροι τῆς α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$. Τό ὀνομάζομε $[m_2,M_2]$, ὅπου, πάλι, $M_2 - m_2 = \frac{M-m}{2^2}$ κι ἔτσι προχωρώντας κατασκευάζομε δύο ἀκολου-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

θίες m_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, M_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ πραγματικῶν ἀριθμῶν μέ $M_\nu - m_\nu = \frac{M-m}{2^\nu}$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ καί τέτοιες ὥστε ἡ m_ν νά εἶναι αὔξουσα καί φραγμένη (ἀφοῦ $m_\nu < M$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$) ἄρα καί συγκλίνουσα (θεώρημα 1.8.1) καί ἡ M_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ φθίνουσα καί φραγμένη (ἀφοῦ $m < M_\nu$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$) ἄρα καί συγκλίνουσα. Ἄν $\ell = \lim m_\nu$, τότε ἔχομε $\lim(M_\nu - m_\nu) = 0$ καί ἔτσι

$$\lim M_\nu = \lim[(M_\nu - m_\nu) + m_\nu] = \lim m_\nu = \ell \tag{1.8.1}$$

Τώρα ἀπ' τό διάστημα $[m_1, M_1]$ παίρνομε ἕναν ὅρο α_{k_1} τῆς α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, καί ἀφοῦ τό διάστημα $[m_2, M_2]$ ἔχει ἄπειρους ὅρους της, μποροῦμε νά βροῦμε δείκτη k_2 μέ $k_2 > k_1$ καί $m_2 \leqq \alpha_{k_2} \leqq M_2$. Ἔτσι προχωρώντας κατασκευάζεται μιά ἀκολουθία α_{k_ν}, $\nu \in \mathbb{N}$ πού εἶναι ὑπακολουθία τῆς α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ (δηλαδή $(\forall\, \nu \in \mathbb{N})\ k_\nu < k_{\nu+1}$), τέτοια ὥστε $m_\nu \leqq \alpha_{k_\nu} \leqq M_\nu$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Ἄρα, ἀπ' τή σχέση (1.8.1) καί τήν πρόταση 1.7.5, ἔχομε $\lim \alpha_{k_\nu} = \ell$ καί ἔτσι τό σημεῖο ℓ εἶναι σημεῖο συσσωρεύσεως τῆς ἀκολουθίας α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$. ▲

Γ. ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΣΥΓΚΛΙΣΕΩΣ ΤΟΥ CAUCHY

Ἕνα ἀπ' τά βασικώτερα κριτήρια συγκλίσεως ἀκολουθιῶν εἶναι αὐτό πού ἀκολουθεῖ.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.8.3. **Ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη γιά νά συγκλίνη ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ πρός ἕνα πεπερασμένο ἀριθμό, εἶναι**

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, n \in \mathbb{N})(\forall\, \nu, \mu \text{ τοῦ } \mathbb{N})\quad \nu > n \text{ καί } \mu > n \Rightarrow |\alpha_\nu - \alpha_\mu| < \varepsilon$$

Πρίν ἀποδειχτῆ τό θεώρημα αὐτό, ἄς σημειωθῆ ὅτι μιά ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ γιά τήν ὁποία ἰσχύει ἡ παραπάνω συνθήκη, ὀνομάζεται **"βασική"** ἀκολουθία, ἤ ἀκολουθία **"τοῦ Cauchy"**. Τό κριτήριο, λοιπόν, τοῦ Cauchy διατυπώνεται καί ἔτσι: **Μιά ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι συγκλίνουσα, τότε καί μόνο τότε, ἄν εἶναι βασική.**

Ἀπόδειξη. Τ ό ἀ ν α γ κ α ῖ ο. Ἄν ℓ εἶναι τό πεπερασμένο ὅριο τῆς ἀκολουθίας α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, τότε πρέπει

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, n \in \mathbb{N})(\forall\, \nu \in \mathbb{N})\quad \nu > n \Rightarrow |\alpha_\nu - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μπορεῖ ν'ἀποδειχτῆ ὅτι ὁ ἀριθμός e εἶναι ἄρρητος (βλ. ἄσκηση 5) καί ὅτι μιά προσεγγιστική τιμή του εἶναι ἡ 2,718281.

Β. ΣΗΜΕΙΑ ΣΥΣΣΩΡΕΥΣΕΩΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

Εἶναι εὔκολο νά δοῦμε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = (-1)^\nu + \frac{1}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ δέν συγκλίνει. Ὅμως, παρατηροῦμε ὅτι, σέ κάθε περιοχή τῶν ἀριθμῶν -1 καί 1 ὑπάρχουν ἄπειροι ὅροι της καί ὅτι ἀκόμη οἱ ὑπακολουθίες της $\alpha_{k_\nu} = -1 + \frac{1}{2\nu-1}$, $\nu \in \mathbb{N}$ καί $\alpha_{\lambda_\nu} = 1 + \frac{1}{2\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ ἔχουν ἀντίστοιχα ὅρια τούς ἀριθμούς -1 καί 1. Δηλαδή στίς περιοχές τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν συσσωρεύονται ἄπειροι ὅροι τῆς ἀκολουθίας α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8.1. **Τό σημεῖο ℓ ὀνομάζεται "σημεῖο συσσωρεύσεως" μιᾶς ἀκολουθίας α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, ἄν ὑπάρχη ὑπακολουθία α_{k_ν}, $\nu \in \mathbb{N}$ τῆς α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ τέτοια ὥστε $\lim \alpha_{k_\nu} = \ell$.**

Σχετικά μέ τήν ὕπαρξη σημείων συσσωρεύσεως μιᾶς ἀκολουθίας, ἀποδείχνομε παρακάτω ἕνα βασικό θεώρημα. Γιά μιά ἄλλη πιό αὐστηρή ἀπόδειξη (ὅπου χρησιμοποιεῖται τό 'Αξίωμα τῆς ἐπιλογῆς), ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ νά ἀνατρέξη στό βιβλίο Β. ΣΤΑΪΚΟΥ: Μαθήματα Μαθηματικῆς 'Αναλύσεως, Μέρος ΙΙ.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.8.2. (Bolzano - Weierstrass). **Κάθε φραγμένη ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν ἔχει τουλάχιστον ἕνα σημεῖο συσσωρεύσεως.**

'Απόδειξη. Θά ἀποδείξωμε ὅτι ἄν α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι μιά φραγμένη ἀκολουθία τότε ὑπάρχει μιά συγκλίνουσα ὑπακολουθία της.

'Αφοῦ ἡ α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι φραγμένη, ὑπάρχουν πραγματικοί ἀριθμοί m, M τέτοιοι ὥστε $m \leq \alpha_\nu \leq M$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Χωρίζομε τό διάστημα $[m,M]$ στά δύο καί τότε στό ἕνα τουλάχιστον ἀπ'αὐτά ὑπάρχουν ἄπειροι ὅροι τῆς ἀκολουθίας α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$. 'Ονομάζομε αὐτό $[m_1,M_1]$, ὅπου προφανῶς $M_1 - m_1 = \frac{M-m}{2}$ καί τό χωρίζομε στά δύο, ἔτσι ὥστε πάλι στό ἕνα τουλάχιστον ἀπ'αὐτά ὑπάρχουν ἄπειροι ὅροι τῆς α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$. Τό ὀνομάζομε $[m_2,M_2]$, ὅπου, πάλι, $M_2 - m_2 = \frac{M-m}{2^2}$ κι ἔτσι προχωρώντας κατασκευάζομε δύο ἀκολου-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

θίες m_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, M_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ πραγματικῶν ἀριθμῶν μέ $M_\nu - m_\nu = \frac{M-m}{2^\nu}$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ καί τέτοιες ὥστε ἡ m_ν νά εἶναι αὔξουσα καί φραγμένη (ἀφοῦ $m_\nu < M$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$) ἄρα καί συγκλίνουσα (θεώρημα 1.8.1) καί ἡ M_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ φθίνουσα καί φραγμένη (ἀφοῦ $m < M_\nu$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$) ἄρα καί συγκλίνουσα. Ἄν $\ell = \lim m_\nu$, τότε ἔχομε $\lim(M_\nu - m_\nu) = 0$ καί ἔτσι

$$\lim M_\nu = \lim[(M_\nu - m_\nu) + m_\nu] = \lim m_\nu = \ell \tag{1.8.1}$$

Τώρα ἀπ'τό διάστημα $[m_1, M_1]$ παίρνομε ἕναν ὅρο α_{k_1} τῆς α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, καί ἀφοῦ τό διάστημα $[m_2, M_2]$ ἔχει ἄπειρους ὅρους της, μποροῦμε νά βροῦμε δείκτη k_2 μέ $k_2 > k_1$ καί $m_2 \leq \alpha_{k_2} \leq M_2$. Ἔτσι προχωρώντας κατασκευάζεται μιά ἀκολουθία α_{k_ν}, $\nu \in \mathbb{N}$ πού εἶναι ὑπακολουθία τῆς α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ (δηλαδή $(\forall\, \nu \in \mathbb{N})\ k_\nu < k_{\nu+1}$), τέτοια ὥστε $m_\nu \leq \alpha_{k_\nu} \leq M_\nu$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Ἄρα, ἀπ'τή σχέση (1.8.1) καί τήν πρόταση 1.7.5, ἔχομε $\lim \alpha_{k_\nu} = \ell$ καί ἔτσι τό σημεῖο ℓ εἶναι σημεῖο συσσωρεύσεως τῆς ἀκολουθίας α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$. ▲

Γ. ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΣΥΓΚΛΙΣΕΩΣ ΤΟΥ CAUCHY

Ἕνα ἀπ'τά βασικώτερα κριτήρια συγκλίσεως ἀκολουθιῶν εἶναι αὐτό πού ἀκολουθεῖ.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.8.3. **Ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη γιά νά συγκλίνη ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ πρός ἕνα πεπερασμένο ἀριθμό, εἶναι**

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, n \in \mathbb{N})(\forall\, \nu, \mu \text{ τοῦ } \mathbb{N})\quad \nu > n \text{ καί } \mu > n \Rightarrow |\alpha_\nu - \alpha_\mu| < \varepsilon$$

Πρίν ἀποδειχτῆ τό θεώρημα αὐτό, ἄς σημειωθῆ ὅτι μιά ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ γιά τήν ὁποία ἰσχύει ἡ παραπάνω συνθήκη, ὀνομάζεται **"βασική"** ἀκολουθία, ἤ ἀκολουθία **"τοῦ Cauchy"**. Τό κριτήριο, λοιπόν, τοῦ Cauchy διατυπώνεται καί ἔτσι: **Μιά ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι συγκλίνουσα, τότε καί μόνο τότε, ἄν εἶναι βασική.**

Ἀπόδειξη. Τ ό ἀ ν α γ κ α ῖ ο. Ἄν ℓ εἶναι τό πεπερασμένο ὅριο τῆς ἀκολουθίας α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, τότε πρέπει

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, n \in \mathbb{N})(\forall\, \nu \in \mathbb{N})\quad \nu > n \Rightarrow |\alpha_\nu - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Άρα γιά δείκτες $\mu > n$ καί $\nu > n$ έχομε

$$|\alpha_\mu - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{καί} \quad |\alpha_\nu - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

καί έπομένως $|\alpha_\mu - \alpha_\nu| \leqq |\alpha_\mu - \ell| + |\alpha_\nu - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Δηλαδή

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, n \in \mathbb{N})(\forall\, \mu,\nu \text{ τοῦ } \mathbb{N})\ \mu > n \text{ καί } \nu > n \Rightarrow |\alpha_\mu - \alpha_\nu| < \varepsilon.$$

Τ ό ἱ κ α ν ό. Ὑποθέτοντας ὅτι ἡ παραπάνω συνθήκη βασικότητας ἰσχύει, γιά τό $\varepsilon = 1 > 0$ ὑπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ὥστε $|\alpha_\nu - \alpha_{n+1}| < 1$ ὅταν $\nu > n$. Άρα, τότε, $|\alpha_\nu| \leqq |\alpha_\nu - \alpha_{n+1}| + |\alpha_{n+1}| < 1 + |\alpha_{n+1}|$ καί ἔτσι $|\alpha_\nu| < \vartheta = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots |\alpha_{n+1}|, 1 + |\alpha_{n+1}|\}$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Ἡ ἀκολουθία $\{\alpha_\nu\}$, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι, έπομένως, φραγμένη καί ἀπ'τό θεώρημα Bolzano-Weierstrass 1.8.2, προκύπτει ὅτι ἔχει μιά ὑπακολουθία α_{k_ν}, $\nu \in \mathbb{N}$ πού συγκλίνει πρός ἕνα $\ell \in \mathbb{R}$. Θεωροῦμε ἕνα $\varepsilon > 0$, ὁπότε ὑπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ὥστε

$$|\alpha_{k_\nu} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{γιά κάθε} \quad \nu > n.$$

Ἀκόμη ἀφοῦ ἡ α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι βασική, ὑπάρχει $\hat{n} \in \mathbb{N}$ τέτοιος ὥστε

$$|\alpha_\mu - \alpha_\nu| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{γιά κάθε} \quad \mu > \hat{n} \text{ καί } \nu > \hat{n}$$

Ἐπειδή k_1 εἶναι φυσικός ἀριθμός, ἰσχύει $k_1 \geqq 1$, ἔτσι $k_2 \geqq 2$ καί ἐπαγωγικά $k_\nu \geqq \nu$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Άρα γιά $\nu > \hat{n}$ ἰσχύει καί $k_\nu > \hat{n}$ καί ἔτσι

$$|\alpha_\mu - \alpha_{k_\nu}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ὅταν } \mu > \hat{n} \text{ καί } \nu > \hat{n}$$

Άν, έπομένως, $\nu_0 > \max\{n, \hat{n}\}$, θά έχωμε

$$|\alpha_\mu - \ell| \leqq |\alpha_\mu - \alpha_{k_{\nu_0}}| + |\alpha_{k_{\nu_0}} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{γιά κάθε} \quad \mu > \hat{n}.$$

Έτσι, λοιπόν,

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \hat{n} \in \mathbb{N})(\forall\, \mu \in \mathbb{N})\ \mu > \hat{n} \Rightarrow |\alpha_\mu - \ell| < \varepsilon$$

δηλαδή $\lim \alpha_\nu = \ell$. ▲

Παρατήρηση 1.8.2

Ἡ συνθήκη βασικότητας, πού ἐκφράζεται στό θεώρημα 1.8.3, εἶναι ἰσοδύναμη καί μέ αὐτές πού ἀκολουθοῦν:

1. $(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, n \in \mathbb{N})(\forall\, \nu \in \mathbb{N})\ \nu > n \Rightarrow |\alpha_\nu - \alpha_n| < \varepsilon$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2. $(\exists\, \vartheta > 0)(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, n \in \mathbb{N})(\forall\, \mu,\nu$ τοῦ $\mathbb{N})\mu > n, \nu > n \Rightarrow |\alpha_\mu - \alpha_\nu| < \vartheta\varepsilon$

3. $(\exists\, \vartheta > 0)(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, n \in \mathbb{N})(\forall\, \nu \in \mathbb{N})\ \ \nu > n \Rightarrow |\alpha_\nu - \alpha_n| < \vartheta\varepsilon$.

1.9 ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Στήν παράγραφο 1.6 ἔχει δοθῆ ἡ ἔννοια τῆς συγκλίσεως γιά μιά ἁπλή κατηγορία συναρτήσεων, δηλαδή γιά τίς ἀκολουθίες. Εἶναι, ἑπομένως, φυσικό νά γίνη προσπάθεια γιά τήν ἐπέκταση τῆς ἔννοιας αὐτῆς γενικά σ' ὅλες τίς συναρτήσεις. Γιά τόν σκοπό αὐτό θά χρησιμοποιηθῆ ἡ σύγκλιση ἀκολουθιῶν πρός ἕνα πεπερασμένο ἤ κατ'ἐκδοχήν σημεῖο. Ἄς ξεκινήσωμε ὅμως πρῶτα μέ τήν ἔννοια τοῦ σημείου συσσωρεύσεως ἑνός συνόλου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.9.1. Ἕνα σημεῖο ξ ὀνομάζεται "σημεῖο συσσωρεύσεως" ἑνός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$, ἄν ὑπάρχη ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ μέ ὅρους στό σύνολο $A-\{\xi\}$ τέτοια ὥστε $\lim \alpha_\nu = \xi$. Τό ξ ὀνομάζεται "ἀπό ἀριστερά σημεῖο συσσωρεύσεως" τοῦ A ἄν τοῦτο εἶναι σημεῖο συσσωρεύσεως τοῦ $A \cap (-\infty,\xi]$ καί "ἀπό δεξιά σημεῖο συσσωρεύσεως" τοῦ A ἄν τοῦτο εἶναι σημεῖο συσσωρεύσεως τοῦ $A \cap [\xi,+\infty)$. Ἕνα σημεῖο $\xi \in A$ πού δέν εἶναι σημεῖο συσσωρεύσεως τοῦ A λέγεται "μεμονωμένο σημεῖο" τοῦ A.

Ἔτσι κάθε σημεῖο τῶν διαστημάτων (α,β), $[\alpha,\beta)$, $(\alpha,\beta]$ καί $[\alpha,\beta]$, ὅπου α,β εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί, εἶναι σημεῖο συσσωρεύσεως αὐτῶν, ἀκόμη καί τά σημεῖα α καί β (διότι τά σημεῖα α καί β εἶναι τά ἀντίστοιχα ὅρια τῶν ἀκολουθιῶν

$$\alpha_\nu = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{\nu+1},\ \nu \in \mathbb{N} \quad \text{καί} \quad \beta_\nu = \beta - \frac{\beta-\alpha}{\nu+1},\ \nu \in \mathbb{N}).$$

Ἐπίσης σημεῖα συσσωρεύσεως τῶν $(-\infty,\beta)$, $(-\infty,\beta]$, $(\alpha,+\infty)$ καί $[\alpha,+\infty)$ εἶναι τά ἄκρα τους μαζί μέ ὅλα τά σημεῖα τους.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.9.2. Θεωροῦμε μιά συνάρτηση f καί ἕνα σημεῖο συσσωρεύσεως ξ τοῦ συνόλου $\mathcal{D}(f)$. Θά λέμε ὅτι "ἡ συνάρτηση f συγκλίνει πρός ἕνα σημεῖο ℓ (πεπερασμένο ἤ $\pm\infty$) στό σημεῖο ξ", ἄν γιά κάθε ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ μέ ὅρους στό σύνολο $\mathcal{D}(f)-\{\xi\}$ καί $\lim \alpha_\nu = \xi$, ἰσχύη $\lim f(\alpha_\nu) = \ell$.

Σ' αὐτή τήν περίπτωση θά γράψωμε $\lim\limits_{\xi} f = \ell$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καί τό σημεῖο ℓ θά ὀνομάζεται "τό ὅριο τῆς συναρτήσεως f στό σημεῖο ξ". Ἀκόμη θά γράφωμε

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell$$

καί θά διαβάζωμε "τό σημεῖο ℓ εἶναι τό ὅριο τῆς συναρτήσεως f ὅταν x τείνη πρός τό ξ", ἤ "τό ὅριο τῆς συναρτήσεως f στό σημεῖο ξ εἶναι τό σημεῖο ℓ".

Παράδειγμα 1.9.1

Θεωροῦμε τή συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Ἐπειδή τό σημεῖο 0 εἶναι σημεῖο συσσωρεύσεως τοῦ $\{x \in \mathbb{R}: x \neq 0\}$ μποροῦμε νά ἐξετάσωμε τή σύγκλιση τῆς συναρτήσεως f στό σημεῖο αὐτό.

Ἄς εἶναι α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ μιά μηδενική ἀκολουθία τέτοια ὥστε $\alpha_\nu \neq 0$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Τότε καί ἡ ἀκολουθία $|\alpha_\nu|$, $\nu \in \mathbb{N}$, πού ἔχει ὅρους θετικούς, συγκλίνει πρός τό 0 καί ἑπομένως, ἀπ'τόν ὁρισμό 1.7.1, ἡ ἀκολουθία $\frac{1}{|\alpha_\nu|}$, $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει πρός τό $+\infty$, δηλαδή

$$\lim f(\alpha_\nu) = \lim \frac{1}{|\alpha_\nu|} = +\infty ,$$

ἤτοι $\lim_{0} f = +\infty$. ▲

Γιά κάθε συνάρτηση f καί ὑποσύνολο A τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της $\mathcal{D}(f)$ ὁρίζομε τόν "περιορισμό τῆς συναρτήσεως f στό A", νά εἶναι μιά συνάρτηση g πού δίνεται ἀπ'τόν τύπο

$$g(x) = f(x), \quad x \in A$$

καί συνήθως συμβολίζεται μέ $f|A$. Ἔτσι, ὁ περιορισμός τῆς συναρτήσεως τοῦ παραδείγματος 1.9.1 στό σύνολο $(0,+\infty)$ εἶναι ἡ συνάρτηση g μέ

$$g(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (0,+\infty).$$

Θεωροῦμε τώρα ἕνα σημεῖο συσσωρεύσεως ξ τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ $\mathcal{D}(f)$ μιᾶς συναρτήσεως f.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.9.3. Θά λέμε ὅτι "ἡ συνάρτηση f συγκλίνει πρός ἕνα σημεῖο ℓ (πεπερασμένο ἤ $\pm\infty$) στό σημεῖο ξ ἀπό δεξιά", ἄν ὁ περιορισμός τῆς f στό σύνολο $(\xi,+\infty) \cap \mathcal{D}(f)$ συγκλίνη πρός

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τό ℓ στό σημεῖο ξ.

Στήν περίπτωση αὐτή γράφομε

$$\lim_{x\to\xi+0} f(x) = \ell$$

ἤ, συντομώτερα

$$\lim_{\xi+0} f = \ell ,$$

θά ὀνομάζωμε τό ℓ "τό δεξιά ὅριο τῆς συναρτήσεως f στό σημεῖο ξ" καί θά τό παριστάνωμε μέ $f(\xi+0)$, ἤτοι

$$\ell = f(\xi+0).$$

Ἀνάλογα, δίνεται καί ὁ ὁρισμός τοῦ ἀριστερά ὁρίου· ἤτοι

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.9.4. Θά λέμε ὅτι "ἡ συνάρτηση f συγκλίνει πρός ἕνα σημεῖο ℓ (πεπερασμένο ἤ $\pm\infty$) στό σημεῖο ξ ἀπό ἀριστερά", ἄν ὁ περιορισμός τῆς f στό σύνολο $(-\infty,\xi)\cap\mathcal{D}(f)$ συγκλίνη πρός τό ℓ στό σημεῖο ξ.

Κι ἐδῶ θά γράφωμε

$$\lim_{x\to\xi-0} f(x) = \ell$$

ἤ, συντομώτερα,

$$\lim_{\xi-0} f = \ell ,$$

θά ὀνομάζωμε τό ℓ "τό ἀριστερά ὅριο τῆς συναρτήσεως f στό σημεῖο ξ" καί θά τό παριστάνωμε μέ $f(\xi-0)$, ἤτοι

$$\ell = f(\xi-0).$$

Ἄς σημειωθῆ ὅτι ἄν τό σημεῖο ξ εἶναι ἕνα ἀπ'τά κατ'ἐκδοχήν σημεῖα τότε ἔχομε:

$$\lim_{+\infty} f = f(+\infty -0) \quad \text{καί} \quad \lim_{-\infty} f = f(-\infty +0).$$

Παρατήρηση 1.9.1

Ἀπ'τούς παραπάνω ὁρισμούς 1.9.3, 1.9.4 προκύπτουν ἀντίστοιχα τά ἀκόλουθα:

α) Μιά συνάρτηση f συγκλίνει πρός ἕνα σημεῖο ℓ (πεπερασμένο ἤ $\pm\infty$) στό σημεῖο ξ ἀπό δεξιά, ἄν γιά κάθε ἀκολουθία α_ν, $\nu\in\mathbb{N}$ μέ ὅρους

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

στό $\mathcal{D}(f)$ καί τέτοια ὥστε $\alpha_\nu > \xi$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ καί $\lim \alpha_\nu = \xi$, ἰσχύη $\lim f(\alpha_\nu) = \ell$.

β) Μιά συνάρτηση f συγκλίνει πρός ἕνα σημεῖο ℓ (πεπερασμένο ἤ $\pm\infty$) στό σημεῖο ξ ἀπό ἀριστερά, ἄν γιά κάθε ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ μέ ὅρους στό $\mathcal{D}(f)$ καί τέτοια ὥστε $\alpha_\nu < \xi$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ καί $\lim \alpha_\nu = \xi$, ἰσχύη $\lim f(\alpha_\nu) = \ell$.

Εἶναι πολύ εὔκολο νά δοῦμε τώρα ὅτι ἄν τά δεξιά καί ἀριστερά ὅρια στό σημεῖο ξ μιᾶς συναρτήσεως f ὑπάρχουν καί ταυτίζωνται, τότε καί τό ὅριο αὐτῆς στό ξ ὑπάρχει καί μάλιστα ἰσχύει

$$\lim_{\xi} f = f(\xi-0) = f(\xi+0).$$

Φυσικά, δέν πρέπει νά πιστεύωμε ὅτι πάντοτε ὑπάρχει τό $\lim_{\xi} f$ σέ κάθε σημεῖο συσσωρεύσεως ξ τοῦ $\mathcal{D}(f)$. Εἶναι δυνατό νά μήν ὑπάρχουν οὔτε καί τά "πλευρικά" ὅρια, δηλαδή τά δεξιά καί ἀριστερά, στό σημεῖο ξ. Τό γεγονός αὐτό ἐπιβεβαιώνεται μέ τό παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα 1.9.2

Ἡ συνάρτηση D(x) τοῦ Dirichlet εἶναι ἐκείνη πού ὁρίζεται ἔτσι:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{ἄν } x \text{ εἶναι ρητός} \\ 0, & \text{ἄν } x \text{ εἶναι ἄρρητος.} \end{cases}$$

Θ'ἀποδείξωμε ὅτι σέ ὁποιοδήποτε σημεῖο $\xi \in \mathbb{R}$ δέν ὑπάρχουν τά ὅρια $\lim_{\xi-0} D$ καί $\lim_{\xi+0} D$.

Πραγματικά: 1) ξ εἶναι ρητός· ἄν α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι μιά ἀκολουθία ρητῶν ἀριθμῶν τέτοια ὥστε $\alpha_\nu < \xi$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ καί $\lim \alpha_\nu = \xi$, τότε ἔχομε

$$\lim D(\alpha_\nu) = \lim 1 = 1,$$

ἐνῶ ἄν β_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι μιά ἀκολουθία ἀρρήτων μέ $\beta_\nu < \xi$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ καί $\lim \beta_\nu = \xi$ (θεωρεῖται γνωστό ὅτι κάθε ρητός ἀριθμός εἶναι ὅριο ἀκολουθίας ἀρρήτων ἀριθμῶν), τότε ἔχομε

$$\lim D(\beta_\nu) = \lim 0 = 0 \neq 1$$

καί ἑπομένως δέν ὑπάρχει τό $\lim_{\xi-0} D$. Παρόμοια μπορεῖ ν'ἀποδειχτῆ ὅτι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δέν ὑπάρχει καί τό $\lim\limits_{\xi+0} D$.

2) ξ εἶναι ἄρρητος· ἄν α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι μιά ἀκολουθία ρητῶν ἀριθμῶν μέ $\alpha_\nu < \xi$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ καί $\lim \alpha_\nu = \xi$ (ἀκόμη, θεωρεῖται γνωστό ὅτι κάθε ἄρρητος ἀριθμός εἶναι ὅριο ἀκολουθίας ρητῶν ἀριθμῶν - βλέπε γιά ἕνα παράδειγμα στήν ἄσκηση 6), τότε ἔχομε

$$\lim D(\alpha_\nu) = \lim 1 = 1 ,$$

ἐνῶ ἄν β_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι μιά ἀκολουθία ἀρρήτων ἀριθμῶν μέ $\beta_\nu < \xi$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ καί $\lim \beta_\nu = \xi$, ἔχομε

$$\lim D(\beta_\nu) = \lim 0 = 0 \neq 1$$

καί ἔτσι, πάλι, τό $\lim\limits_{\xi-0} D$ δέν ὑπάρχει. Ἀνάλογα μπορεῖ ν'ἀποδειχτῆ ὅτι καί τό $\lim\limits_{\xi+0} D$ δέν ὑπάρχει. ▲

Σημείωση.

Ὁ ὁρισμός 1.9.1 ἀφορᾶ καί τήν περίπτωση πού τό σημεῖο ξ εἶναι κατ'ἐκδοχήν σημεῖο. Εἰδικώτερα, τότε, ὁ ὁρισμός 1.9.2 μπορεῖ νά διατυπωθῆ καί ἔτσι:

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.9.5. Θεωροῦμε μιά συνάρτηση f τῆς ὁποίας τό πεδίο ὁρισμοῦ $\mathcal{D}(f)$ ἔχει σημεῖο συσσωρεύσεως τό $+\infty$ (ἤ $-\infty$). Θά λέμε ὅτι "ἡ συνάρτηση f συγκλίνει πρός ἕνα σημεῖο ℓ — πεπερασμένο ἤ $\pm\infty$ — στό σημεῖο $+\infty$ (ἤ $-\infty$)", ἄν γιά κάθε ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ μέ ὅρους στό σύνολο $\mathcal{D}(f)$ καί $\lim \alpha_\nu = +\infty$ (ἤ $-\infty$), ἰσχύη $\lim f(\alpha_\nu) = \ell$.

Ἔτσι, γιά παράδειγμα, ἔχομε ὅτι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} , \quad \lim_{x\to+\infty} (1 - \frac{1}{x}) = 1 = \lim_{x\to-\infty} (1 - \frac{1}{x}).$$

ἐνῶ, ἄς σημειωθῆ ἐδῶ ὅτι (βλ. ἑπόμενο κεφάλαιο 2) οἱ τριγωνομετρικές συναρτήσεις δέν ἔχουν ὅρια στά σημεῖα $+\infty$, $-\infty$.

Τέλος, ἄν μιά συνάρτηση συγκλίνη στό σημεῖο ξ πρός ἕνα ἀπ'τά κατ' ἐκδοχήν σημεῖα, θά λέμε, ὅπως καί στίς ἀκολουθίες, ὅτι ἔχομε κατ'ἐκδοχήν σύγκλιση τῆς f στό ξ. Ἀνάλογα ἔχομε καί τήν κατ'ἐκδοχήν σύγκλιση

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

στά σημεῖα $\xi-0$ καί $\xi+0$.

Ἡ παρακάτω πρόταση μπορεῖ νά θεωρηθῆ ὡς ἕνα κριτήριο μή συγκλίσεως μιᾶς συναρτήσεως.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.9.1. **Ἄν ξ εἶναι σημεῖο συσσωρεύσεως τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ μιᾶς συναρτήσεως f γιά τήν ὁποία τό $\lim_{\xi} f$ δέν ὑπάρχει, τότε ὑπάρχει μιά ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ μέ ὅρους στό $\mathcal{D}(f)-\{\xi\}$ καί $\lim \alpha_\nu = \xi$, τέτοια ὥστε ἡ ἀκολουθία $f(\alpha_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$ δέν συγκλίνει.**

Ἀπόδειξη. Ὑποθέτομε ὅτι τό συμπέρασμα τῆς προτάσεως δέν ἰσχύει, δηλαδή ὅτι γιά κάθε τέτοια ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ ἡ ἀκολουθία $f(\alpha_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει. Ἐπειδή τό $\lim_{\xi} f$ δέν ὑπάρχει, μποροῦμε νά βροῦμε δυό ἀκολουθίες β_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ καί γ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ μέ ὅρους στό σύνολο $\mathcal{D}(f)-\{\xi\}$ καί

$$\lim \beta_\nu = \xi = \lim \gamma_\nu$$

ἀλλά τέτοιες ὥστε

$$\lim f(\beta_\nu) \neq \lim f(\gamma_\nu).$$

Τότε ὅμως παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἀκολουθία

$$\beta_1, \gamma_1, \beta_2, \gamma_2, \ldots, \beta_\nu, \gamma_\nu, \ldots$$

πού παριστάνεται μέ δ_μ, $\mu \in \mathbb{N}$ εἶναι τέτοια ὥστε (βλ. ἄσκηση 1.15.4)

$$\lim \delta_\mu = \xi \quad \text{καί} \quad \delta_\mu \neq \xi \quad \text{γιά κάθε} \quad \mu \in \mathbb{N},$$

ἐνῶ ἡ $f(\delta_\mu)$, $\mu \in \mathbb{N}$ δέν συγκλίνει, ἀφοῦ οἱ ὑπακολουθίες της $f(\delta_{2k-1}) = f(\beta_k)$, $k \in \mathbb{N}$ καί $f(\delta_{2k}) = f(\gamma_k)$, $k \in \mathbb{N}$ συγκλίνουν σέ διαφορετικά ὅρια. Τοῦτο ἔρχεται σέ ἀντίθεση μέ τήν ὑπόθεση πού κάναμε καί ἔτσι τό συμπέρασμα τῆς προτάσεως ἀληθεύει. ▲

1.10 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΓΚΛΙΣΕΩΣ

Οἱ παρακάτω ἰδιότητες συγκλίσεως συναρτήσεων εἶναι ἄμεση συνέπεια ἐκείνων τῆς παραγράφου 1.7 πού ἀφοροῦν τίς ἀκολουθίες.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.10.1. **Ὑποθέτοντας τήν ὕπαρξη τῶν ὁρίων $\lim_{\xi} f$**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καί $\lim_{\xi} g$ έχομε τά άκόλουθα:

1) $\lim_{x\to\xi} [f(x)+g(x)] = \lim_{x\to\xi} f(x) + \lim_{x\to\xi} g(x)$

2) $\lim_{x\to\xi} [f(x)-g(x)] = \lim_{x\to\xi} f(x) - \lim_{x\to\xi} g(x)$

3) $\lim_{x\to\xi} [f(x) . g(x)] = \lim_{x\to\xi} f(x) . \lim_{x\to\xi} g(x)$

4) $\lim_{x\to\xi} [f(x) : g(x)] = \lim_{x\to\xi} f(x) : \lim_{x\to\xi} g(x)$

μέ τήν προϋπόθεση ότι οί παραπάνω πράξεις είναι έπιτρεπτές.

Άπόδειξη. Η πρόταση μπορεί ν'άποδειχτή μέ βάση τήν πρόταση 1.7.7. ▲

Ένα άμεσο έπακόλουθο τοῦ ὁρισμοῦ 1.7.1 (βλ. καί ἄσκηση 2.i) εἶναι καί τό έπόμενο συμπέρασμα:

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.10.2. Αν οί συναρτήσεις f,g έχουν κοινό πεδίο ὁρισμοῦ καί γιά κάθε x σ'αύτό ίσχύη $f(x) \leqq g(x)$, τότε

1) $\lim_{\xi} f = +\infty \Rightarrow \lim_{\xi} g = +\infty$, 2) $\lim_{\xi} g = -\infty \Rightarrow \lim_{\xi} f = -\infty$.

Άκόμη μέ τή βοήθεια τῆς προτάσεως 1.7.5 μποροῦμε ν'ἀποδείξωμε καί ὅτι:

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.10.3. Η άνισότητα $f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$, γιά κάθε x, μέ τήν ίδιότητα $\lim_{\xi} f = \lim_{\xi} g$ δίνουν τήν $\lim_{\xi} h = \lim_{\xi} f = \lim_{\xi} g$.

Ας σημειωθῆ ὅτι οί παραπάνω προτάσεις ἀληθεύουν καί γιά τά μονόπλευρα ὅρια στό σημεῖο ξ.

Όμως τί συμβαίνει μέ τή σύνθεση συναρτήσεων; Σέ τοῦτο ἀπαντᾶ ἡ ἐπόμενη πρόταση, πού ἰσχύει ἐπίσης καί γιά τά πλευρικά ὅρια.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.10.4. Θεωροῦμε τίς συναρτήσεις f καί g μέ $\mathcal{R}(f) \subseteq \mathcal{D}(g)$. Αν ξ καί η εἶναι σημεῖα συσσωρεύσεως τῶν συνόλων $\mathcal{D}(f)$ καί $\mathcal{D}(g)$ ἀντίστοιχα, τέτοια ὥστε γιά κάθε $x \in \mathcal{D}(f)$ $x \neq \xi \Rightarrow f(x) \neq \eta$ μέ $\lim_{\xi} f = \eta$ καί $\lim_{\eta} g = \ell$, γιά κάποιο $\ell \in \mathbb{R}^*$, τότε ἰσχύει $\lim_{\xi} g \circ f = \ell$.

Άπόδειξη. Αν x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι μιά ἀκολουθία μέ ὅρους ἀπ'τό σύνολο $\mathcal{D}(f) - \{\xi\}$ τέτοια ὥστε $\lim x_\nu = \xi$, τότε καί $\lim f(x_\nu) = \eta$. Θέτοντας $y_\nu = f(x_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$ ἔχομε $y_\nu \neq \eta$, $\nu \in \mathbb{N}$ καί $\lim y_\nu = \eta$. Άρα lim

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$g(y_\nu) = \lim g[f(x_\nu)] = \ell$ καί ἔτσι ἀπ'τόν ὁρισμό 1.9.2 $\lim_{\xi} g \circ f = \ell$. ▲

Ἰδιαίτερα ἔχομε τήν ἀκόλουθη πρόταση πού τόν ὑπολογισμό τοῦ ὁρίου στά κατ'ἐκδοχήν σημεῖα μεταφέρει στόν ὑπολογισμό αὐτοῦ σ'ἕνα πεπερασμένο σημεῖο.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.10.5. Θεωροῦμε δυό συναρτήσεις F καί G τέτοιες ὥστε

$$G(x) = F(\frac{1}{x})$$

α) Ἄν τουλάχιστον ἕνα ἀπ'τά ὅρια

$$\lim_{+\infty} F \quad \text{καί} \quad \lim_{0+0} G$$

ὑπάρχη, τότε ὑπάρχει καί τό ἄλλο καί ἰσχύει

$$\lim_{+\infty} F = \lim_{0+0} G .$$

β) Ἄν τουλάχιστον ἕνα ἀπ'τά ὅρια

$$\lim_{-\infty} F \quad \text{καί} \quad \lim_{0-0} G$$

ὑπάρχη, τότε ὑπάρχει καί τό ἄλλο καί ἰσχύει

$$\lim_{-\infty} F = \lim_{0-0} G .$$

Ἀπόδειξη. Θ'ἀποδειχτῆ μόνον ἡ α) διότι ἡ β) ἀποδείχνεται ἀνάλογα. Θέτοντας $f(x) = \frac{1}{x}$, ἔχομε

$$G = F \circ f \quad \text{καί} \quad F = G \circ f.$$

Ἀπ'τήν πρόταση 1.10.4, ἐπειδή $\lim_{0+0} f = +\infty$ καί $\lim_{+\infty} f = 0+0$, ἔχομε ὅτι ἄν ὑπάρχη τό $\lim_{+\infty} F$, τότε,

$$\lim_{0+0} G = \lim_{0+0} F \circ f = \lim_{+\infty} F ,$$

ἐνῶ, ἄν ὑπάρχη τό $\lim_{0+0} G$, τότε

$$\lim_{+\infty} F = \lim_{+\infty} G \circ f = \lim_{0+0} G . ▲$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1.11. ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΣΥΓΚΛΙΣΕΩΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Στήν παράγραφο αὐτή θά δοθοῦν συνθῆκες συγκλίσεως μιᾶς συναρτήσεως. Βασικά αὐτές εἶναι ἀνάλογες μ'ἐκεῖνες τίς συνθῆκες πού ἀφοροῦν τίς ἀκολουθίες. Πρῶτα θά δοῦμε ὅτι ἡ μονοτονία καί τό φραγμένο μιᾶς συναρτήσεως μποροῦν νά χαρακτηρίσουν τήν ὕπαρξη τοῦ ὁρίου αὐτῆς σέ ἕνα σημεῖο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.11.1. Ἄν ξ εἶναι σημεῖο συσσωρεύσεως τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ $\mathcal{D}(f)$ μιᾶς μονότονης συναρτήσεως f πού εἶναι καί φραγμένη (δηλαδή ὑπάρχει $M > 0$ μέ $|f(x)| \leq M$ γιά κάθε $x \in \mathcal{D}(f)$), τότε τουλάχιστον ἕνα ἀπό τά ὅρια $f(\xi-0)$, $f(\xi+0)$ ὑπάρχει καί μάλιστα ὁπωσδήποτε τό $f(\xi-0)$ ἄν τό ξ εἶναι ἀπό ἀριστερά σημεῖο συσσωρεύσεως τοῦ $\mathcal{D}(f)$ καί τό $f(\xi+0)$ ἄν τό ξ εἶναι ἀπό δεξιά σημεῖο συσσωρεύσεως τοῦ $\mathcal{D}(f)$.

Ἀπόδειξη. Ἄν f εἶναι φθίνουσα, τότε ἡ $-f$ εἶναι αὔξουσα καί ἄν ξ εἶναι κατ'ἐκδοχήν σημεῖο, τότε, μέ τή βοήθεια τῆς προτάσεως 1.10.5, ἡ σύγκλιση σ'αὐτό μεταφέρεται στή σύγκλιση στό $0+0$ ἤ $0-0$. Ἔτσι χωρίς βλάβη τῆς γενικότητας ἐξετάζομε τήν περίπτωση πού ἡ f εἶναι αὔξουσα καί τό ξ εἶναι πεπερασμένο. Ἐπί πλέον περιοριζόμαστε στήν περίπτωση πού τό ξ εἶναι ἀπό ἀριστερά σημεῖο συσσωρεύσεως τοῦ $\mathcal{D}(f)$, διότι ἡ ἄλλη περίπτωση εἶναι ἀνάλογη.

Θέτομε $\ell = \sup\limits_{x \in (-\infty,\xi) \cap \mathcal{D}(f)} f(x)$. Θά δείξωμε ὅτι $\lim\limits_{\xi-0} f = \ell$. Πραγματικά, ἔστω x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ μιά ἀκολουθία μέ $x_\nu \in (-\infty,\xi) \cap \mathcal{D}(f)$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ καί $x_\nu \to \xi$ καί ἔστω $\varepsilon > 0$. Ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ supremum ἑνός συνόλου προκύπτει τότε ὅτι ὑπάρχει $x_0 \in (-\infty,\xi) \cap \mathcal{D}(f)$ μέ

$$\ell-\varepsilon < f(x_0) \leq \ell.$$

Ἐπειδή $x_\nu \to \xi$ ὑπάρχει δείκτης ν_0 μέ $x_0 < x_\nu < \xi$, γιά κάθε $\nu \geq \nu_0$. Ἑπομένως, ἐπειδή f εἶναι αὔξουσα, ἔχομε $f(x_0) \leq f(x_\nu)$, γιά κάθε $\nu \geq \nu_0$. Ἄρα

$$\ell-\varepsilon < f(x_\nu) \leq \ell, \text{ γιά κάθε } \nu \geq \nu_0$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δηλαδή $0 \leq \ell - f(x_\nu) < \varepsilon$, ἤ

$$|\ell - f(x_\nu)| < \varepsilon, \text{ γιά κάθε } \nu \geq \nu_0$$

καί ἑπομένως $\lim f(x_\nu) = \ell$. ▲

Παρατήρηση 1.11.1. Ἀπό τήν ἀπόδειξη τοῦ προηγουμένου θεωρήματος ἔχομε ὅτι ἄν f εἶναι φραγμένη, τότε

α) $\lim\limits_{\xi-0} f = \sup\limits_{x \in \mathcal{D}(f) \cap (-\infty,\xi)} f(x)$

ἄν f εἶναι αὔξουσα καί ξ εἶναι ἀπό ἀριστερά σημεῖο συσσωρεύσεως τοῦ $\mathcal{D}(f)$. Παρόμοια μπορεῖ νά δειχτῆ ὅτι

β) $\lim\limits_{\xi-0} f = \inf\limits_{x \in \mathcal{D}(f) \cap (-\infty,\xi)} f(x)$

ἄν f εἶναι φθίνουσα καί ξ εἶναι ἀπό ἀριστερά σημεῖο συσσωρεύσεως τοῦ $\mathcal{D}(f)$,

γ) $\lim\limits_{\xi+0} f = \inf\limits_{x \in \mathcal{D}(f) \cap (\xi,+\infty)} f(x)$

ἄν f εἶναι αὔξουσα καί ξ εἶναι ἀπό δεξιά σημεῖο συσσωρεύσεως τοῦ $\mathcal{D}(f)$,

δ) $\lim\limits_{\xi+0} f = \sup\limits_{x \in \mathcal{D}(f) \cap (\xi,+\infty)} f(x)$

ἄν f εἶναι φθίνουσα καί ξ εἶναι ἀπό δεξιά σημεῖο συσσωρεύσεως τοῦ $\mathcal{D}(f)$.

Γιά τήν περίπτωση πού τό ξ εἶναι ἕνα κατ'ἐκδοχήν σημεῖο μπορεῖ νά δοθῆ καί ἄλλη μιά ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος 1.11.1 ἀνάλογη πρός τήν παραπάνω. Τοῦτο ἀφήνεται γιά ἄσκηση τοῦ ἀναγνώστη.

Καί τώρα ἀκολουθεῖ ἕνα θεώρημα πού ἀποτελεῖ τόν κατά Cauchy ὁρισμό τῆς συγκλίσεως μιᾶς συναρτήσεως σέ ἕνα σημεῖο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.11.2. Ὑποθέτομε ὅτι τά σημεῖα ℓ καί ξ εἶναι πεπερασμένα. Τότε μιά ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά ἰσχύη $\lim\limits_{\xi} f = \ell$, εἶναι ὅτι γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ὥστε γιά κάθε $x \in \mathcal{D}(f)$ ἡ ἀνισότης

$$0 < |x - \xi| < \delta$$

νά συνεπάγεται τήν

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Ἀπόδειξη. Τ ό ἀ ν α γ κ α ῖ ο. Ἄν $\lim\limits_{\xi} f = \ell$ καί τό συμπέρασμα τοῦ θεωρήματος δέν ἰσχύη, τότε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$(\exists\, \varepsilon > 0)(\forall\, \delta > 0)(\exists\, x \in \mathcal{D}(f))\ 0 < |x-\xi| < \delta \quad \text{καί} \quad |f(x)-\ell| \geqq \varepsilon.$$

Ἰδιαίτερα γιά $\delta = \frac{1}{\nu}$, ὅπου $\nu \in \mathbb{N}$, προκύπτει μιά ἀκολουθία x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ τέτοια ὥστε γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ νά ἰσχύη $0 < |x_\nu - \xi| < \frac{1}{\nu}$ καί

$$(1.11.1) \qquad |f(x_\nu)-\ell| \geqq \varepsilon .$$

Ὅμως ἡ ἀνισότητα $0 < |x_\nu - \xi| < \frac{1}{\nu}$ δίνει $\lim x_\nu = \xi$ καί ἄρα $\lim f(x_\nu) = \ell$, πού δέν συμφωνεῖ μέ τή σχέση (1.11.1).

Τ ό ἱ κ α ν ό. Θεωροῦμε μιά ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ τέτοια ὥστε $\lim \alpha_\nu = \xi$ καί $\alpha_\nu \in \mathcal{D}(f) - \{\xi\}$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, ἕνα ὁποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ καί ἕνα $\delta > 0$ πού δίνει ἡ ὑπόθεση. Τότε γιά τό δ αὐτό, ὑπάρχει $\nu \in \mathbb{N}$ τέτοιο ὥστε

$$|\alpha_\nu - \xi| < \delta, \quad \text{γιά κάθε} \quad \nu > n ,$$

ἄρα καί

$$|f(\alpha_\nu) - \ell| < \varepsilon, \quad \text{γιά κάθε} \quad \nu > n .$$

δηλαδή $\lim f(\alpha_\nu) = \ell$, πού ἀποδείχνει ὅτι $\lim\limits_{\xi} f = \ell$. ▲

Παρατήρηση 1.11.2

Ἡ συνθήκη πού ἀναφέρεται στό παραπάνω θεώρημα θεωρεῖται ἀπό πολλούς ὡς ὁρισμός τῆς συγκλίσεως μιᾶς συναρτήσεως καί ὀνομάζεται **ε-τικός ὁρισμός** τῆς συγκλίσεως, ἐνῶ ὁ 1.9.2 , πού δώσαμε ἐμεῖς, **ἀκολουθιακός ὁρισμός**. Στήν περίπτωση πού θά ξεκινούσαμε μέ τόν ε-τικό ὁρισμό θά ἔπρεπε πάλι ν'ἀποδειχτῆ ἡ ἰσοδυναμία τῶν δυό ὁρισμῶν μέ θεώρημα πού ὀνομάζεται τότε **θεώρημα μεταφορᾶς**. Τοῦτο, γιατί μέ τόν ἀκολουθιακό ὁρισμό, ὅπως ἄλλως τε εἴδαμε, οἱ πιό πολλές ἰδιότητες ἀκολουθιῶν πού ἀφοροῦν τή σύγκλιση μεταφέρονται σέ ἀντίστοιχες ἰδιότητες συναρτήσεων.

Τό ἑπόμενο θεώρημα ἀντιστοιχεῖ στό θεώρημα τοῦ Cauchy 1.8.3 πού ἀφορᾶ τίς ἀκολουθίες.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.11.3. (τοῦ Cauchy). **Μιά ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά τήν ὕπαρξη πεπερασμένου ὁρίου μιᾶς συναρτήσεως f σέ ἕνα πεπερασμένο σημεῖο συσσωρεύσεως ξ τοῦ $\mathcal{D}(f)$ εἶναι ὅτι, γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ὥστε γιά κάθε x_1, x_2 στό $\mathcal{D}(f)$ νά ἰσχύη**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \text{ὅταν}$$

(1.11.2) $$0 < |x_1 - \xi| < \delta \quad \text{καί} \quad 0 < |x_2 - \xi| < \delta.$$

Ἀπόδειξη. Τ ό ἀ ν α γ κ α ῖ ο. Ὑποθέτοντας ὅτι $\lim_{\xi} f = \ell$, γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει $\delta > 0$ μέ $|f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ ὅταν $0 < |x - \xi| < \delta$. Ἄρα, ἄν οἱ συνθῆκες (1.11.2) ἀληθεύουν, τότε

$$|f(x_1) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{καί} \quad |f(x_2) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ἀπό ὅπου, μέ πρόσθεση κατά μέλη, παίρνομε ὅτι $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Τ ό ἱ κ α ν ό. Ἄν ὑποτεθῆ ὅτι τό $\lim_{\xi} f$ δέν ὑπάρχει, τότε ἀπ' τήν πρόταση 1.9.1, ὑπάρχει μιά ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ μέ ὅρους στό $\mathcal{D}(f) - \{\xi\}$, τέτοια ὥστε $\lim \alpha_\nu = \xi$ καί τό

(1.11.3) $$\lim f(\alpha_\nu) \quad \text{δέν ὑπάρχει.}$$

Ἐπειδή $\lim \alpha_\nu = \xi$, γιά κάθε $\delta > 0$ ὑπάρχει $n \in \mathbb{N}$, τέτοιο ὥστε

$$0 < |\alpha_\nu - \xi| < \delta \quad \text{γιά κάθε} \quad \nu > n,$$

ὁπότε γιά $\mu > n$ καί $\nu > n$ ἡ (1.11.2) ἰσχύει γιά $x_1 = \alpha_\mu$ καί $x_2 = \alpha_\nu$. Ἀλλά

$$|f(\alpha_\nu) - f(\alpha_\mu)| < \varepsilon \quad \text{γιά κάθε} \quad \nu > n \quad \text{καί} \quad \mu > n.$$

πού δηλώνει ὅτι ἡ ἀκολουθία $f(\alpha_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι βασική. Ἄρα εἶναι καί συγκλίνουσα, πρᾶγμα πού ἔρχεται σέ ἀντίθεση μέ τήν (1.11.3). ▲

Παρατήρηση 1.11.3

Γιά $\xi = +\infty$ ἰσχύουν ἀντίστοιχα τά παρακάτω θεωρήματα πού μποροῦν ν'ἀποδειχτοῦν ἀνάλογα πρός τά 1.11.2 καί 1.11.3. Ἐπίσης, αὐτά μποροῦν νά προκύψουν ἀπό τά 1.11.2 καί 1.11.3 σέ συνδυασμό μέ τήν πρόταση 1.10.5 καί τοῦτο ἀφήνεται σάν ἄσκηση γιά τόν ἀναγνώστη.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.11.2΄. **Μιά ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά ἰσχύη ἡ $\lim_{+\infty} f = \ell$, ὅπου ℓ πεπερασμένο, εἶναι ὅτι**

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, r > 0)(\forall\, x \in \mathcal{D}(f) \quad x > r \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.11.3΄. **Μιά ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά τήν ὕπαρξη τοῦ πεπερασμένου ὁρίου $\lim_{+\infty} f$ εἶναι ὅτι**

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, r > 0)(\forall\, x_1, x_2 \text{ τοῦ } \mathcal{D}(f))$$
$$x_1 > r \text{ καί } x_2 > r \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἀνάλογα, γιά $\xi = -\infty$, ἔχομε:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.11.2΄΄. Μιά ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά ἰσχύη ἡ $\lim\limits_{-\infty} f = \ell$, ὅπου ℓ πεπερασμένο, εἶναι ὅτι

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, r > 0)(\forall\, x \in \mathcal{D}(f)) \quad x < -r \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.11.3΄΄. Μιά ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά τήν ὕπαρξη τοῦ πεπερασμένου ὁρίου $\lim\limits_{-\infty} f$ εἶναι ὅτι

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, r > 0)(\forall\, x_1, x_2 \text{ τοῦ } \mathcal{D}(f))$$
$$x_1 < -r \text{ καί } x_2 < -r \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Παρατήρηση 1.11.4

Τά παραπάνω θεωρήματα ἰσχύουν γιά τήν περίπτωση πού τό ℓ εἶναι πεπερασμένο. Ἄν $\ell = \pm\infty$, ἔχομε

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.11.2΄΄΄. Μιά ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά ἰσχύη ἡ $\lim\limits_{\xi} f = +\infty$, ὅπου ξ πεπερασμένο, εἶναι ὅτι

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in \mathcal{D}(f)) \quad 0 < |x - \xi| < \delta \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.11.3΄΄΄. Μιά ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά ἰσχύη ἡ $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, εἶναι ὅτι

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, r > 0)(\forall\, x \in \mathcal{D}(f)) \quad x > r \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Ἀνάλογα θεωρήματα ἰσχύουν καί γιά τήν ὕπαρξη τῶν

$$\lim_{-\infty} f = +\infty \quad , \quad \lim_{-\infty} f = -\infty \quad , \quad \lim_{+\infty} f = -\infty \quad , \quad \lim_{\xi} f = -\infty$$

ὅπου ξ πεπερασμένο.

1.12 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Μιά γραμμή στό ἐπίπεδο θεωρεῖται **συνεχής** ὅταν δέν ἔχη καμμιά διακοπή, δηλαδή ὅταν μπορῆ νά γραφῆ μέ μονοκοντυλιά. Ἀναζητώντας σέ βάθος τήν ἐμπειρική αὐτή ἰδιότητα στά γραφήματα τῶν συναρτήσεων ὁδηγούμαστε στό νά ὁρίσωμε τή συνέχεια τῶν ἴδιων τῶν συναρτήσεων. Δίνονται δυό ὁρισμοί, πού, ὅπως προκύπτει ἀπ'τό θεώρημα 1.11.2, εἶναι ἰσοδύναμοι.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.12.1 (τοῦ Heine). Μιά συνάρτηση f εἶναι "συνεχής σ'ἕνα σημεῖο $x_0 \in \mathcal{D}(f)$" ἄν τό x_0 εἶναι μεμονωμένο σημεῖο τοῦ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$\mathcal{D}(f)$ ή $\lim\limits_{x_0} = f(x_0)$ στήν περίπτωση πού τό x_0 εἶναι σημεῖο συσσωρεύσεως τοῦ $\mathcal{D}(f)$.

Παράδειγμα 1.12.1

Ἡ συνάρτηση $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ εἶναι συνεχής σέ κάθε σημεῖο τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της. Τοῦτο προκύπτει ἀπ'τό γεγονός ὅτι ἄν μιά ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνη πρός τό ℓ, τότε ἀπ'τήν

$$\big||\alpha_\nu| - |\ell|\big| \leq |\alpha_\nu - \ell|, \text{ γιά κάθε } \nu \in \mathbb{N},$$

ἕπεται ὅτι ἡ ἀκολουθία $|\alpha_\nu|$, $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει πρός τό $|\ell|$.

Παράδειγμα 1.12.2

Ἡ συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ἄν } x > 0 \\ 0, & \text{ἄν } x = 0 \\ 2-x, & \text{ἄν } x < 0 \end{cases}$$

εἶναι συνεχής σέ κάθε $x_0 \neq 0$, ἐνῶ δέν εἶναι στό 0, διότι

$$\lim_{0-0} f = 2 \neq 0 = \lim_{0+0} f,$$

δηλαδή τό $\lim\limits_{0} f$ δέν ὑπάρχει.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.12.2 (τοῦ Cauchy). **Μιά συνάρτηση f εἶναι "συνεχής σ'ἕνα σημεῖο x_0 τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της" ἄν γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχη $\delta > 0$ τέτοιο ὥστε γιά κάθε $x \in \mathcal{D}(f)$ ἰσχύει**

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{ὅταν} \quad |x - x_0| < \delta.$$

Ἐκφράζοντας μέ λόγια τόν δεύτερο ὁρισμό μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι μιά συνάρτηση f εἶναι συνεχής, ἄν γιά κατάλληλα μικρές αὐξομειώσεις τῆς μεταβλητῆς ἔχομε ἀρκετά μικρές αὐξομειώσεις τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως, δηλαδή πρέπει ἡ συνθήκη $|h| < \delta$ νά συνεπάγεται τήν $|f(x_0+h) - f(x_0)| < \varepsilon$ ὅπου ε ὁσοσδήποτε μικρός ἀριθμός καί δ κατάλληλα ἐκλεγμένος.

Φαίνεται εὔκολα ἀπ'τούς παραπάνω ὁρισμούς ὅτι ἡ ἰδιότητα τῆς συνέχειας μιᾶς συναρτήσεως σέ ἕνα σημεῖο x_0 εἶναι **τοπική**, δηλαδή ἐξαρτᾶται ἀπ'τήν συμπεριφορά τῆς συναρτήσεως σέ σημεῖα τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της πού ἀνήκουν σέ ἀρκετά μικρές περιοχές τοῦ σημείου x_0. Γιά νά δοῦμε, λοιπόν, ἄν μιά συνάρτηση f εἶναι συνεχής σέ ἕνα σημεῖο x_0, πρέπει νά γνωρίζωμε αὐτή καί στά γειτονικά σημεῖα τοῦ x_0.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἄν μιά συνάρτηση f εἶναι συνεχής σέ κάθε σημεῖο τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της τότε αὐτή λέμε ὅτι εἶναι **"συνεχής"**.

Ἀπ'τόν ὁρισμό 1.12.1 καί τήν πρόταση 1.10.1 προκύπτει ἀμέσως ὅτι οἱ ἀριθμητικές πράξεις συνεχῶν συναρτήσεων δίνουν συνεχεῖς συναρτήσεις, ἐνῶ ἀπ'τήν πρόταση 1.10.4, ὅτι καί ἡ σύνθεση συνεχῶν συναρτήσεων δίνει συνεχή συνάρτηση. Τό δεύτερο αὐτό συμπέρασμα, ἀκριβέστερα, λέει ὅτι **ἄν ἡ f εἶναι συνεχής συνάρτηση στό x_0 καί ἡ g συνεχής στό $y_0=f(x_0)$, τότε καί ἡ $g\circ f$** (δηλαδή ἡ συνάρτηση $g[f(x)]$, $x\in\mathcal{D}(f)$) **εἶναι συνεχής στό σημεῖο x_0**. Ἔτσι, ἐπειδή οἱ συναρτήσεις $\frac{x}{2}$, $x\in\mathbb{R}$, $3x+1$, $x\in\mathbb{R}$ καί x^2, $x\in\mathbb{R}$ εἶναι συνεχεῖς, ἕπεται π.χ. ὅτι καί οἱ συναρτήσεις $\frac{x}{2}+3(x^2)+1$, $x\in\mathbb{R}$, $3(\frac{x}{2})^2+1$, $x\in\mathbb{R}$ εἶναι ἐπίσης συνεχεῖς.

Ἀνάλογα μέ τά παραπάνω μποροῦμε νά ὁρίσωμε καί τήν πλευρική συνέχεια μιᾶς συναρτήσεως σέ ἕνα σημεῖο τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.12.3. **Μιά συνάρτηση f εἶναι "δεξιά συνεχής σ'ἕνα σημεῖο x_0 τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της"** ἄν ὁ περιορισμός τῆς f στό σύνολο $\mathcal{D}(f)\cap[x_0,+\infty)$ εἶναι συνεχής στό x_0.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.12.4. **Μιά συνάρτηση f εἶναι "ἀριστερά συνεχής σ'ἕνα σημεῖο x_0 τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της"** ἄν ὁ περιορισμός τῆς f στό σύνολο $\mathcal{D}(f)\cap(-\infty,x_0]$ εἶναι συνεχής στό x_0.

Ἔτσι, στή περίπτωση πού τά πλευρικά ὅρια $f(x_0+0)$ καί $f(x_0-0)$ ὑπάρχουν, τότε ἡ δεξιά καί ἡ ἀριστερά συνέχεια στό x_0 χαρακτηρίζονται ἀντίστοιχα ἀπό τίς συνθῆκες

$$\lim_{x_0+0} f=f(x_0) \quad \text{καί} \quad \lim_{x_0-0} f=f(x_0).$$

Στό παραπάνω παράδειγμα 1.12.2 ἡ συνάρτηση f εἶναι δεξιά συνεχής στό σημεῖο 0 ἀφοῦ $\lim_{0+0} f=0=f(0)$, ἐνῶ δέν εἶναι ἀριστερά συνεχής ἀφοῦ $\lim_{0-0} f=2\neq 0=f(0)$.

Ἄς σημειωθῆ ἐδῶ ὅτι **ἄν μιά συνάρτηση εἶναι δεξιά καί ἀριστερά συνεχής σ'ἕνα σημεῖο, τότε εἶναι καί συνεχής σ'αὐτό.**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1.13 ΓΕΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Θεωροῦμε τή συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\in(0,1]$ καί ἕνα $x_0\in(0,1]$. Παρατηροῦμε ὅτι γιά κάθε $\varepsilon>0$ ὑπάρχει $\delta=\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}$, δηλαδή ἕνα δ πού ἐκτός ἀπό τό ε ἐξαρτᾶται καί ἀπό τό σημεῖο x_0, τέτοιο ὥστε γιά κάθε $x\in(0,1]$ μέ $|x-x_0|<\delta$ νά ἰσχύη $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ f εἶναι συνεχής στό σημεῖο x_0.

Ἐπίσης θεωροῦμε τή συνάρτηση $f(x)=x^2$, $x\in[0,+\infty)$. Πάλι γιά ὁποιοδήποτε $x_0\in[0,+\infty)$ καί $\varepsilon>0$ ὑπάρχει $\delta=-x_0+\sqrt{x_0^2+\varepsilon}$, δηλαδή ἕνα δ πού ἐξαρτᾶται ἐπίσης ἀπ'τό ε καί τό x_0, τέτοιο ὥστε γιά κάθε $x\in[0,+\infty)$ μέ $|x-x_0|<\delta$ νά ἰσχύη $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Ἔτσι καί ἡ f εἶναι συνεχής στό σημεῖο x_0.

Καί στίς δυό παραπάνω περιπτώσεις παρατηροῦμε ὅτι ὁ ἀριθμός δ ἐξαρτᾶται πάντοτε ἀπ'τό σημεῖο x_0, ὅπου ἐξετάζομε τή συνέχεια τῆς f. Ἄς δοῦμε ὅμως τή συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{5}$, $x\in[0,+\infty)$. Γιά κάθε $\varepsilon>0$, ὑπάρχει $\delta=5\varepsilon$ τέτοιο ὥστε γιά κάθε x_0 καί x μέ $|x-x_0|<\delta$ νά ἰσχύη $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Τό δ τοῦτο ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τό ε, δηλαδή εἶναι ὁμοιόμορφα ἐκλεγμένο γιά κάθε $x_0\in[0,+\infty)$. Μιά συνέχεια τοῦ εἴδους αὐτοῦ ὀνομάζεται **ὁμοιόμορφη συνέχεια.**

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.13.1. **Μιά συνάρτηση f εἶναι "ὁμοιομόρφως συνεχής" ἄν γιά κάθε $\varepsilon>0$ ὑπάρχει $\delta>0$ πού ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τό ε, τέτοιο ὥστε νά ἰσχύη**

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

γιά κάθε x_1, x_2 τοῦ $\mathcal{D}(f)$ μέ $|x_1-x_2|<\delta$.

Ἑπομένως ἡ συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{5}$, $x\in[0,+\infty)$ εἶναι, ὅπως δείχτηκε παραπάνω, ὁμοιομόρφως συνεχής, ἐνῶ οἱ συναρτήσεις τῶν δυό πρώτων παραδειγμάτων δέν εἶναι. Πρός δικαιολόγηση τούτου, ἄς περιοριστοῦμε στό δεύτερο παράδειγμα καί ἄς ὑποθέσωμε ὅτι ἡ συνάρτηση $f(x)=x^2$, $x\in[0,+\infty)$ εἶναι ὁμοιομόρφως συνεχής. Τότε

$$(\forall\ \varepsilon>0)(\exists\ \delta>0)(\forall\ x,y \text{ τοῦ } [0,+\infty))\quad |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Γιά ὁποιοδήποτε x τοῦ $[0,+\infty)$, παίρνομε σάν y τό $x+\frac{\delta}{2}$, ὁπότε ἐπειδή $|y-x|=\frac{\delta}{2}<\delta$, πρέπει καί $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Τότε ὅμως ἔχομε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\varepsilon > |x^2 - (x+\frac{\delta}{2})^2| = x\delta + \frac{\delta^2}{4} \quad \text{ή} \quad x < \frac{4\varepsilon - \delta^2}{4\delta} \quad \text{γιά κάθε } x\in[0,+\infty),$$

πού εἶναι ἄτοπο. Ἔτσι ἡ συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x\in[0,+\infty)$ δέν εἶναι ὁμοιομόρφως συνεχής. Ἄν ὅμως πάρωμε τόν περιορισμό τῆς f στό διάστημα $[0, \alpha]$, ὅπου $\alpha > 0$, δηλαδή τή συνάρτηση x^2, $x\in[0, \alpha]$ τότε αὐτή εἶναι ὁμοιομόρφως συνεχής. Πραγματικά, γιά ὁποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει τό $\delta = \frac{\varepsilon}{2\alpha}$ γιά νά πληροῖ τόν ὁρισμό 1.13.1. Ἑπομένως ἡ κλειστότητα τοῦ διαστήματος ὁρισμοῦ μιᾶς συναρτήσεως παίζει σημαντικώτατο ρόλο στήν ὁμοιόμορφη συνέχεια. Γενικώτερα, ἰσχύει τό παρακάτω θεώρημα πού εἶναι ἕνα κριτήριο γιά τήν ὁμοιόμορφη συνέχεια μιᾶς συναρτήσεως.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.13.1. **Ἄν μιά συνάρτηση εἶναι συνεχής σ'ἕνα κλειστό διάστημα τῆς πραγματικῆς εὐθείας, τότε εἶναι καί ὁμοιομόρφως συνεχής σ'αὐτό.**

Ἀπόδειξη. Ὑποθέτομε ὅτι ἡ συνάρτηση f εἶναι συνεχής στό διάστημα $[\alpha,\beta]$, ἀλλά ὄχι ὁμοιομόρφως συνεχής. Τότε ἔχομε ὅτι

$$(\exists\, \varepsilon > 0)(\forall\, \delta > 0)(\exists\, x,y \text{ στό } [\alpha,\beta]) \quad |x-y| < \delta \text{ καί } |f(x) - f(y)| \geqq \varepsilon.$$

Ἰδιαίτερα, γιά $\delta = \frac{1}{\nu}$ καί γιά κάθε $\nu\in\mathbb{N}$, προκύπτουν ἀκολουθίες x_ν, $\nu\in\mathbb{N}$ καί y_ν, $\nu\in\mathbb{N}$ τέτοιες ὥστε γιά κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ νά ἰσχύουν οἱ ἀνισότητες

$$(1.13.1) \qquad \alpha \leqq x_\nu \leqq \beta,\ \alpha \leqq y_\nu \leqq \beta,\ |x_\nu - y_\nu| < \frac{1}{\nu} \text{ καί } |f(x_\nu) - f(y_\nu)| \geqq \varepsilon.$$

Ἡ ἀκολουθία x_ν, $\nu\in\mathbb{N}$ εἶναι φραγμένη καί, ἀπ'τό θεώρημα Bolzano - Weierstrass 1.8.2, ἔχει μιά ὑπακολουθία x_{k_ν}, $\nu\in\mathbb{N}$ μέ $\lim x_{k_\nu} = \ell\in[\alpha,\beta]$. Ἀλλά ἡ f εἶναι συνεχής στό ℓ καί ἄρα $\lim f(x_{k_\nu}) = f(\ell)$. Ἀπό τήν (1.13.1), ὅμως, ἔχομε ὅτι $\lim x_{k_\nu} = \lim y_{k_\nu} = \ell$, ἐνῶ, ἐπίσης ἀπό τή συνέχεια τῆς f, $\lim f(y_{k_\nu}) = f(\ell)$. Ἑπομένως $\lim[f(x_{k_\nu}) - f(y_{k_\nu})] = 0$, πού ἀντίκειται πρός τήν τελευταία ἀνισότητα τῶν 1.13.1. ▲

Ἄν A εἶναι ὑποσύνολο τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ $\mathcal{D}(f)$ μιᾶς συναρτήσεως f καί $f|A$ εἶναι ὁ περιορισμός τῆς f στό A, τότε ὁρίζομε

$$\sup_A f = \sup \mathcal{R}(f|A) \quad \text{καί} \quad \inf_A f = \inf \mathcal{R}(f|A)$$

Ἄν ὑπάρχουν τά $\max \mathcal{R}(f|A)$ καί $\min \mathcal{R}(f|A)$ ὁρίζομε "τό μέγιστο (maximum) τῆς f ἐπί τοῦ A" καί "τό ἐλάχιστο (minimum) τῆς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

f ἐπί τοῦ A" νά εἶναι

$$\max_A f = \max \mathcal{R}(f|A) \text{ καί } \min_A f = \min \mathcal{R}(f|A).$$

Συχνά χρησιμοποιοῦνται καί οἱ ἀναλυτικώτεροι συμβολισμοί $\max_{x\in A} f(x)$ καί $\min_{x\in A} f(x)$ ἀντίστοιχα. Εἶναι, βέβαια, φανερό ὅτι ἄν μιά συνάρτηση $f|A$ ἔχη μέγιστο καί ἐλάχιστο, τότε ὑπάρχουν x_0 καί y_0 στό σύνολο A, τέτοια ὥστε $\max_A f = f(x_0)$ καί $\min_A f = f(y_0)$. Ἐπίσης, ἰσχύει ὅτι

$$(\forall\, x\in A)\quad \min_A f \leq f(x) \leq \max_A f(x).$$

Ἄν $A = \mathcal{D}(f)$, τότε γράφομε ἁπλούστερα $\max f$ καί $\min f$ ἀντί τῶν $\max_{\mathcal{D}(f)} f$ καί $\min_{\mathcal{D}(f)} f$, ὁπότε ἔχομε

$$\max f = \max \mathcal{R}(f) \text{ καί } \min f = \min \mathcal{R}(f).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.13.2. **Μιά συνάρτηση συνεχής σέ κλειστό διάστημα ἔχει μέγιστο καί ἐλάχιστο σ'αὐτό.**

Ἀπόδειξη. Θ'ἀποδειχτῆ πρῶτα ὅτι μιά συνεχής στό $[\alpha,\beta]$ συνάρτηση g εἶναι φραγμένη.

Πρός τοῦτο ὑποθέτομε τό ἀντίθετο, δηλαδή ὅτι

$$(\forall\, M>0)\ (\exists\, x\in[\alpha,\beta])\ |g(x)|>M.$$

Θέτοντας $M=\nu$, ὅπου $\nu\in\mathbb{N}$, προκύπτει ὅτι ὑπάρχει ἀκολουθία x_ν, $\nu\in\mathbb{N}$ τέτοια ὥστε $x_\nu\in[\alpha,\beta]$ καί

$$|g(x_\nu)|>\nu \tag{1.13.2}$$

γιά κάθε $\nu\in\mathbb{N}$. Ἐπειδή ἡ ἀκολουθία x_ν, $\nu\in\mathbb{N}$ εἶναι φραγμένη ἐφαρμόζοντας τό θεώρημα 1.8.2 τοῦ Bolzano-Weierstras μποροῦμε νά ὑποθέσωμε ὅτι $\lim x_\nu = \xi$, γιά κάποιο $\xi\in[\alpha,\beta]$. Ἀπό τή συνέχεια τῆς g ἔχομε τότε ὅτι $\lim g(x_\nu) = g(\xi)$. Ἀλλά ἡ (1.13.2) δίνει $\lim|g(x_\nu)|=+\infty$, δηλαδή $|g(\xi)|=+\infty$, πού εἶναι ἄτοπο. Ἑπομένως τό σύνολο $\mathcal{R}(g)$ εἶναι φραγμένο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τώρα θ'ἀποδείξουμε ὅτι ἄν f εἶναι συνεχής στό $[\alpha,\beta]$ τότε τά $\sup f = M$ καί $\inf f = m$, πού εἶναι (πεπερασμένοι) πραγματικοί ἀριθμοί, εἶναι ἀντίστοιχα μέγιστο καί ἐλάχιστο τῆς συναρτήσεως f.

Ἄν δέν ὑπάρχη $x_0 \in [\alpha,\beta]$ μέ $f(x_0) = M = \sup f$, πρέπει $f(x) < M$, γιά κάθε $x \in [\alpha,\beta]$· ἄρα ἡ συνάρτηση

$$g(x) = \frac{1}{M-f(x)}, \quad x \in [\alpha,\beta]$$

εἶναι, ὅπως μόλις δείξαμε, φραγμένη. Ἔτσι ὑπάρχει $K > 0$ μέ $|g(x)| < K$, ἤ $M-f(x) > \frac{1}{K}$, δηλαδή

$$f(x) < M - \frac{1}{K} < M,$$

πράγμα πού σημαίνει ὅτι ὁ ἀριθμός $M - \frac{1}{K}$ εἶναι ἄνω φράγμα τοῦ συνόλου $\mathcal{R}(f)$ καί ταυτόχρονα μικρότερος ἀπ'τόν $M = \sup \mathcal{R}(f)$. Τοῦτο δέν μπορεῖ νά ἀληθεύη καί ἄρα ὑπάρχει $x_0 \in [\alpha,\beta]$ μέ $f(x_0) = M$, ἤτοι $M = \max f$.

Ἀνάλογα ἀποδείχνομε ὅτι ὑπάρχει $y_0 \in [\alpha,\beta]$ μέ $f(y_0) = \inf f$, ἤτοι $\inf f = \min f$. ▲

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.13.3 (Bolzano). **Ἄν ἡ συνάρτηση f εἶναι συνεχής στό διάστημα $[\alpha,\beta]$ καί τέτοια ὥστε $f(\alpha) \neq f(\beta)$, τότε γιά κάθε y μεταξύ τῶν τιμῶν $f(\alpha)$ καί $f(\beta)$ (δηλαδή $f(\alpha) < y < f(\beta)$, ἤ $f(\beta) < y < f(\alpha)$) ὑπάρχει $x \in (\alpha,\beta)$ μέ $y = f(x)$.**

Ἀπόδειξη. Ὑποθέτομε ὅτι $f(\alpha) < f(\beta)$ (ἡ ἄλλη περίπτωση εἶναι παρόμοια) καί θεωροῦμε ἕνα $y \in (f(\alpha), f(\beta))$. Ἄν δέν ὑπάρχη $x \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ὥστε $y = f(x)$, τότε ἡ συνάρτηση

$$h(x) = \frac{1}{|y-f(x)|}, \quad x \in [\alpha,\beta]$$

ὡς συνεχής συνάρτηση ὁρισμένη στό κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, εἶναι φραγμένη (βλ. θεώρημα 1.13.2) καί ἄρα ὑπάρχει $M > 0$ μέ $0 < h(x) < M$ ἤ

(1.13.3) $$|y - f(x)| > \frac{1}{M} \quad \text{γιά κάθε } x \in [\alpha,\beta].$$

Ἀκόμη ἡ συνάρτηση f εἶναι ὁμοιομόρφως συνεχής στό διάστημα $[\alpha,\beta]$ καί ἑπομένως, γιά $\varepsilon = \frac{1}{M} > 0$, ἔχομε ὅτι

$$(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x_1, x_2 \text{ τοῦ } [\alpha,\beta])\ |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{M}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἄν μέ τά σημεῖα $\alpha=\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu=\beta$ χωρίσωμε τό διάστημα $[\alpha,\beta]$ σέ τόσα διαστήματα ὥστε τό μῆκος καθενός νά εἶναι μικρότερο ἀπ'τό δ, τότε ὑπάρχει $\mu\in\{1,2,\ldots,\nu\}$ τέτοιο ὥστε y νά βρίσκεται στό κλειστό διάστημα μέ ἄκρα $f(\alpha_{\mu-1})$, $f(\alpha_\mu)$. Δηλαδή

$$0\leq|y-f(\alpha_\mu)|\leq|f(\alpha_{\mu-1})-f(\alpha_\mu)|.$$

ἐνῶ, ἀπ'τήν ἐκλογή τοῦ δ πρέπει $|f(\alpha_\mu)-f(\alpha_{\mu-1})|<\varepsilon=\frac{1}{M}$. Ἄρα

$$|y-f(\alpha_\mu)|<\frac{1}{M}$$

πού ἔρχεται σέ ἀντίθεση μέ τήν ἀνισότητα (1.13.3). ▲

Παρατήρηση 1.13.1

Ἄν συνδυάσωμε τά δυό παραπάνω θεωρήματα 1.13.2 καί 1.13.3 μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι τό πεδίο τιμῶν μιᾶς συναρτήσεως f πού εἶναι ὁρισμένη καί συνεχής σέ κλειστό διάστημα τῆς πραγματικῆς εὐθείας εἶναι τό κλειστό διάστημα $[\min f,\max f]$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.13.1. **Ἄν γιά μιά συνεχή συνάρτηση $f(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ ὑπάρχη $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ὥστε $f(\xi)\neq\eta$ γιά κάποιο $\eta\in\mathbb{R}$, τότε ὑπάρχει περιοχή U τοῦ ξ τέτοια ὥστε $f(x)\neq\eta$ γιά κάθε $x\in U\cap\mathcal{D}(f)$.**

Ἀπόδειξη. Ἄν ἴσχυε τό ἀντίθετο, γιά κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ θά ὑπῆρχε x_ν μέ $\xi-\frac{1}{\nu}<x_\nu<\xi+\frac{1}{\nu}$, $x_\nu\in\mathcal{D}(f)$ καί $f(x_\nu)=\eta$ γιά κάθε $\nu\in\mathbb{N}$. Ἀλλά τότε $\lim x_\nu=\xi$ καί $f(\xi)=f(\lim x_\nu)=\lim f(x_\nu)=\eta$ πού εἶναι ἄτοπο. ▲

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.13.4. **Κάθε ἀμφιμονοσήμαντη συνάρτηση f συνεχής στό κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ εἶναι γνησίως μονότονη.**

Ἀπόδειξη. Ἀφοῦ $\alpha\neq\beta$ ἔχομε καί $f(\alpha)\neq f(\beta)$. Ὑποθέτομε ὅτι $f(\alpha)<f(\beta)$ καί θά δείξωμε ὅτι ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα στό $[\alpha,\beta]$.

Πρῶτα θ'ἀποδείξωμε ὅτι γιά ὁποιοδήποτε $u\in[\alpha,\beta)$ μέ $f(u)<f(\beta)$ ἰσχύει

(1.13.4) $$f(u)<f(x)<f(\beta)\quad\text{γιά κάθε } x\in(u,\beta).$$

Πραγματικά· ἄν ὑπάρχη ἕνα $\xi\in(u,\beta)$ μέ $f(\xi)<f(u)<f(\beta)$ ἀπ'τό θεώρημα τοῦ Bolzano 1.13.3, ὑπάρχει $x_0\in(\xi,\beta)$ μέ $f(u)=f(x_0)$ ἐνῶ $u<\xi<x_0$, πού εἶναι ἀδύνατο ἀφοῦ ἡ f εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη. Ἀδύνατο εἶναι ἐπίσης καί νά ἰσχύη $f(u)<f(\beta)<f(\xi)$ γιά κάποιο $\xi\in(u,\beta)$. Ἄρα ἡ (1.13.4) ἀληθεύει.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θεωροῦμε ὁποιαδήποτε x_1, x_2 στό $[\alpha,\beta]$ μέ $x_1 < x_2$. Ἐφαρμόζομε τήν (1.13.4) πρῶτα γιά $u = \alpha$, ὁπότε ἔχομε $f(x_1) < f(\beta)$ καί ἔπειτα γιά $u = x_1$, ὁπότε παίρνομε $f(x_1) < f(x_2)$, δηλαδή

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{ὅταν} \quad x_1 < x_2$$

καί ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα.

Τέλος, ἄν $f(\alpha) > f(\beta)$, τότε ἐφαρμόζομε τά προηγούμενα γιά τήν $-f$ καί ἔτσι παίρνομε ὅτι ἡ f εἶναι γνησίως φθίνουσα. ▲

1.14 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Στήν παράγραφο 1.3 εἴδαμε ὅτι μιά συνάρτηση f γιά νά ἔχη ἀντίστροφη πρέπει νά εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.14.1. **Ἄν μιά ἀμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $f(x)$, $x \in [\alpha,\beta]$ εἶναι συνεχής, τότε ἡ ἀντίστροφή της f^{-1} εἶναι ἐπίσης συνεχής.**

Ἀπόδειξη. Θεωροῦμε ὁποιαδήποτε $y \in \mathcal{R}(f)$ καί ἀκολουθία $\upsilon_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ μέ ὅρους στό σύνολο $\mathcal{R}(f)$ τέτοια ὥστε $\lim \upsilon_\nu = y$. Πρέπει νά δείξωμε ὅτι

$$\lim f^{-1}(\upsilon_\nu) = f^{-1}(y). \tag{1.14.1}$$

Θέτοντας $u_\nu = f^{-1}(\upsilon_\nu)$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, ἔχομε $\upsilon_\nu = f(u_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$. Ἡ ἀκολουθία u_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι φραγμένη (ἀφοῦ $u_\nu \in [\alpha,\beta]$, γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$) καί ἄρα, ἀπ'τό θεώρημα Bolzano - Weierstrass 1.8.2, ἔχει μιά ὑπακολουθία u_{k_ν}, $\nu \in \mathbb{N}$ πού συγκλίνει σέ κάποιο $x \in [\alpha,\beta]$. Ἀπό τή συνέχεια τῆς f στό x, ἔχομε

$$y = \lim \upsilon_{k_\nu} = \lim f(u_{k_\nu}) = f(x).$$

Ἀλλά ἰσχύει καί

$$\lim u_\nu = x \tag{1.14.2}$$

γιατί ἀλλιῶς ἡ ἀκολουθία u_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ θά εἶχε μιά ὑπακολουθία u_{λ_ν}, $\nu \in \mathbb{N}$ τέτοια ὥστε $\lim u_{\lambda_\nu} = \hat{x} \neq x$. Τότε, ὅμως, θά εἴχαμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$y = \lim v_{\lambda_\nu} = \lim f(u_{\lambda_\nu}) = f(\hat{x}),$$

ἤτοι

$$f(x) = f(\hat{x})$$

πού εἶναι ἀδύνατο, ἀφοῦ $x \neq \hat{x}$ καί ἡ f εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη. Ἄρα ἡ (1.14.2), ἤτοι ἡ (1.14.1) ἀληθεύει. ▲

1.15 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἄν γιά κάθε συνάρτηση f καί ὑποσύνολο X τοῦ $\mathbb{R}$ παραστήσωμε μέ $f(X)$ τό σύνολο $\{y : [\exists\, x \in X \cap \mathcal{D}(f)]\, y = f(x)\}$ καί θεωρήσωμε δυό ὑποσύνολα A, B τοῦ $\mathbb{R}$, ν'ἀποδειχτῆ ὅτι

α) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,

β) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$,

γ) ἄν f εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη, τότε στήν (β) ἰσχύει ἡ ἰσότητα.

2. Ἔστωσαν οἱ ἀκολουθίες α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ καί β_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ μέ

$$\alpha_\nu \leqq \beta_\nu \quad \text{γιά κάθε} \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

i) Ν'ἀποδειχτῆ ὅτι

1) $\lim \alpha_\nu = +\infty \Rightarrow \lim \beta_\nu = +\infty$

2) $\lim \beta_\nu = -\infty \Rightarrow \lim \alpha_\nu = -\infty$

ii) Ἄν οἱ παραπάνω ἀκολουθίες συγκλίνουν πρός πεπερασμένο ἤ κατ' ἐκδοχήν σημεῖο, ν'ἀποδειχτῆ ὅτι

$$\lim \alpha_\nu \leqq \lim \beta_\nu .$$

3. Νά μελετηθῆ ὡς πρός τή σύγκλιση ἡ ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, ὅπου

$$\alpha_1 = 10 , \quad \alpha_{\nu+1} = \frac{\beta + \gamma\alpha_\nu}{\gamma + \beta\alpha_\nu} , \quad \nu \in \mathbb{N}$$

καί β, γ πραγματικοί.

4. Ν'ἀποδειχτῆ ὅτι ἄν οἱ ἀκολουθίες α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ καί β_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ ἔχουν τό ἴδιο ὅριο, τότε καί ἡ ἀκολουθία $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots$ ἔχει ἐπίσης τό ἴδιο ὅριο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5. Ν'ἀποδειχτῆ ὅτι

α) $\lim(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{\nu!})=e$

β) $(\forall\ \nu\in\mathbb{N})\quad 0<e-(1+\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{\nu!})<\frac{1}{\nu!\nu}$,

γ) ὁ ἀριθμός e εἶναι ἄρρητος.

6. Ν'ἀποδειχτῆ ὅτι ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu\in\mathbb{N}$, ὅπου

$$\alpha_1^2>2 \quad \text{καί} \quad \alpha_{\nu+1}=\frac{1}{2}(\alpha_\nu+\frac{2}{\alpha_\nu}),\ \nu\in\mathbb{N}$$

συγκλίνει καί νά βρεθῆ τό ὅριό της.

7. Γιά κάθε ἀκολουθία α_ν, $\nu\in\mathbb{N}$ ὁρίζομε τίς ἀκολουθίες

$$\beta_\mu=\inf\{\alpha_{\mu+\nu}:\ \nu\in\mathbb{N}\},\ \mu\in\mathbb{N}$$

$$\gamma_\mu=\sup\{\alpha_{\mu+\nu}:\ \nu\in\mathbb{N}\},\ \mu\in\mathbb{N}$$

Ν'ἀποδειχτῆ ὅτι

α) ἡ ἀκολουθία β_μ, $\mu\in\mathbb{N}$ εἶναι αὔξουσα καί ἡ γ_μ, $\mu\in\mathbb{N}$ φθίνουσα,

β) τά ὅρια τῶν ἀκολουθιῶν β_μ, $\mu\in\mathbb{N}$ καί γ_μ, $\mu\in\mathbb{N}$ πού παριστάνονται μέ "lim inf α_ν" (limes inferior τῆς α_ν, $\nu\in\mathbb{N}$) καί "lim sup α_ν" (limes superior τῆς α_ν, $\nu\in\mathbb{N}$), εἶναι σημεῖα συσσωρεύσεως τῆς ἀκολουθίας α_ν, $\nu\in\mathbb{N}$ καί μάλιστα τό lim inf α_ν εἶναι τό μικρότερο, ἐνῶ τό lim sup α_ν τό μεγαλύτερο,

γ) ἄν α_{k_ν}, $\nu\in\mathbb{N}$ εἶναι μιά ὑπακολουθία τῆς ἀκολουθίας α_ν, $\nu\in\mathbb{N}$, τότε ἰσχύει

$$\liminf\alpha_\nu\leq\liminf\alpha_{k_\nu}\leq\limsup\alpha_{k_\nu}\leq\limsup\alpha_\nu,$$

δ) ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη γιά νά εἶναι ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu\in\mathbb{N}$ φραγμένη εἶναι τά lim inf α_ν καί lim sup α_ν νά εἶναι πεπερασμένα,

ε) ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη γιά νά συγκλίνη ἡ α_ν, $\nu\in\mathbb{N}$ εἶναι

$$\liminf\alpha_\nu=\limsup\alpha_\nu.$$

8. Ν'ἀποδειχτῆ ὅτι ὁ ὁρισμός συγκλίσεως μιᾶς ἀκολουθίας α_ν, $\nu\in\mathbb{N}$ πρός ἕνα ἀριθμό ℓ εἶναι ἰσοδύναμος μέ τή συνθήκη

$$(\exists\ \vartheta>0)(\forall\ \varepsilon>0)(\exists\ n\in\mathbb{N})(\forall\ \nu\in\mathbb{N})\quad \nu>n\Rightarrow|\alpha_\nu-\ell|<\vartheta\cdot\varepsilon.$$

9. Ν'ἀποδειχτοῦν οἱ προτάσεις 1.7.3, 1.7.4, 1.7.5 καί 1.7.6.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

10. Χρησιμοποιώντας μόνο τή συνθήκη βασικότητας ν'άποδειχτῆ ὅτι κάθε βασική ἀκολουθία

α) εἶναι φραγμένη,

β) ἔχει τό πολύ ἕνα σημεῖο συσσωρεύσεως,

γ) εἶναι συγκλίνουσα.

11. Θεωροῦμε τά κλειστά διαστήματα $[\alpha_\nu,\beta_\nu]$, $\nu\in\mathbb{N}$ τέτοια ὥστε $[\alpha_\nu,\beta_\nu]\supseteq[\alpha_{\nu+1},\beta_{\nu+1}]$ γιά κάθε $\nu\in\mathbb{N}$. Ν'άποδειχτῆ ὅτι

α) ὑπάρχει τουλάχιστον ἕνα ξ τέτοιο ὥστε $\xi\in[\alpha_\nu,\beta_\nu]$ γιά κάθε $\nu\in\mathbb{N}$.

β) ἄν ἐπί πλέον ἡ ἀκολουθία $(\beta_\nu-\alpha_\nu)$, $\nu\in\mathbb{N}$ εἶναι μηδενική, τότε ὑπάρχει ἀκριβῶς ἕνα τέτοιο ξ.

12. Ν'άποδειχτῆ ὅτι γιά κάθε $\alpha\geqq-1$ καί $\nu\in\mathbb{N}$ ἰσχύει

$$(1+\alpha)^\nu\geqq 1+\nu\alpha$$

(ἀνισότητα τοῦ Bernoulli) ὅπου ἡ ἰσότητα ἰσχύει μόνο γιά $\nu=1$ ἤ $\alpha=0$.

13. Ν'άποδειχτοῦν οἱ προτάσεις 1.10.1, 1.10.2 καί 1.10.3.

14. Ἔστω A ἕνα μή κενό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}$. Ἕνα σημεῖο $x\in A$ ὀνομάζεται "μεμονωμένο σημεῖο τοῦ A", ἄν ὑπάρχη περιοχή U τοῦ x τέτοια ὥστε $U\cap A=\{x\}$. Ἕνα σημεῖο y (πεπερασμένο ἤ κατ'ἐκδοχήν) ὀνομάζεται "σημεῖο ἐπαφῆς" τοῦ A, ἄν γιά κάθε περιοχή V τοῦ y, ἰσχύη $V\cap A\neq\emptyset$.

Ν'άποδειχτῆ ὅτι ἕνα σημεῖο ξ ἑνός συνόλου εἶναι σημεῖο ἐπαφῆς τοῦ A, τότε καί μόνο τότε, ἄν τοῦτο εἶναι σημεῖο συσσωρεύσεως τοῦ A, ἤ μεμονωμένο σημεῖο τοῦ A.

15. Ἔστω f μιά συνάρτηση ὁρισμένη σ'ἕνα σύνολο $A\subseteq\mathbb{R}$.

α) Νά ἐξεταστῆ ἄν σέ κάθε μεμονωμένο σημεῖο x_0 τοῦ A

i) ὑπάρχουν τά πλευρικά ὅρια τῆς f,

ii) ἡ f εἶναι δεξιά καί ἀριστερά συνεχής,

iii) ἡ f εἶναι συνεχής.

β) Ν'άποδειχτῆ ὅτι, ἄν x_0 εἶναι σημεῖο συσσωρεύσεως τῶν συνόλων $A\cap(-\infty, x_0)$ καί $A\cap(x_0, +\infty)$, ἡ συνάρτηση f εἶναι συνεχής στό x_0, τότε καί μόνο τότε, ἄν εἶναι δεξιά καί ἀριστερά συνεχής σ'αὐτό.

16. Θεωροῦμε μιά φραγμένη συνάρτηση $f(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ καί μιά ὁποια-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δήποτε "διαμέριση" τοῦ διαστήματος $[\alpha,\beta]$, δηλαδή ἕνα πεπερασμένο σύνολο $\{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu\}$ στοιχείων μέ $\alpha=\alpha_0<\alpha_1<\ldots<\alpha_\nu=\beta$. Ὁρίζομε τό ἄθροισμα

$$\sigma=|f(\alpha_1)-f(\alpha_0)|+|f(\alpha_2)-f(\alpha_1)|+\ldots+|f(\alpha_\nu)-f(\alpha_{\nu-1})|.$$

Ἄν τό σύνολο τῶν ἀριθμῶν σ, πού προκύπτουν μέ τόν παραπάνω τρόπο γιά ὅλες τίς διαμερίσεις τοῦ διαστήματος $[\alpha,\beta]$, εἶναι φραγμένο, τότε λέμε ὅτι ἡ συνάρτηση f εἶναι "φραγμένης μεταβολῆς".

Ν'ἀποδειχτῆ ὅτι

α) τό ἄθροισμα δύο συναρτήσεων φραγμένης μεταβολῆς εἶναι συνάρτηση φραγμένης μεταβολῆς.

β) κάθε μονότονη συνάρτηση εἶναι φραγμένης μεταβολῆς.

17. Ν'ἀποδειχτῆ ὅτι κάθε συνεχής συνάρτηση πού ἱκανοποιεῖ τή σχέση

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \quad \text{γιά κάθε} \quad x,y \quad \text{τοῦ} \quad \mathcal{D}(f)$$

ἔχει τή μορφή $f(x)=\alpha x$, ὅπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

18. Θεωροῦμε δυό συναρτήσεις f καί g ὁρισμένες στό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Ν'ἀποδειχτῆ ὅτι ἄν αὐτές εἶναι συνεχεῖς, τότε καί οἱ συναρτήσεις πού ὁρίζονται ἀπ'τούς τύπους

$$h^*(x) = \max\{f(x),\ g(x)\},\ x\in[\alpha,\beta]$$
$$h_*(x) = \min\{f(x),\ g(x)\},\ x\in[\alpha,\beta]$$

εἶναι συνεχεῖς.

19. Θά λέμε ὅτι μιά συνάρτηση f ἱκανοποιεῖ τή "συνθήκη Lipschitz" ἄν ὑπάρχη $L>0$, τέτοιο ὥστε

$$|f(x)-f(y)|\leq L|x-y| \quad \text{γιά κάθε} \quad x,y \quad \text{τοῦ} \quad \mathcal{D}(f).$$

Ν'ἀποδειχτῆ ὅτι ἄν μιά συνάρτηση ἱκανοποιῆ τή συνθήκη Lipschitz, εἶναι ὁμοιομόρφως συνεχής. Νά δοθῆ ἕνα παράδειγμα ὅπου τό ἀντίστροφο τοῦ γεγονότος αὐτοῦ δέν ἰσχύει.

20. Ν'ἀποδειχτῆ ὅτι ἡ σύνθεση ὁμοιομόρφως συνεχῶν συναρτήσεων δίνει ὁμοιομόρφως συνεχή συνάρτηση.

21. Θεωροῦμε μιά συνεχή συνάρτηση $f(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ τέτοια ὥστε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$f(\alpha) < 0$ καί $f(\beta) > 0$.

α) Ὁρίσατε διαστήματα $[\alpha_\nu, \beta_\nu]$, $\nu \in \mathbb{N}$, ὅπου $\alpha_0 = \alpha$ καί $\beta_0 = \beta$, τέτοια ὥστε $\lim(\beta_\nu - \alpha_\nu) = 0$ καί γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$

$$f(\alpha_\nu) < 0 \ , \ f(\beta_\nu) > 0$$

καί

$$\alpha_\nu \leqq \alpha_{\nu+1} \leqq \beta_{\nu+1} \leqq \beta_\nu \ .$$

β) Ν'ἀποδειχτῆ ὅτι ὑπάρχει τό $\max\{x \in [\alpha,\beta] : f(x) \leqq 0\}$.

γ) Ν'ἀποδειχτῆ ὅτι ἡ ἐξίσωση

$$f(x) = 0$$

ἔχει τουλάχιστον μιά ρίζα.

δ) Μέ τή βοήθεια τῆς γ) νά δοθῆ μιά ἄλλη ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος τοῦ Bolzano 1.13.3.

22. Ἄν f εἶναι μιά συνεχής συνάρτηση ν'ἀποδειχτῆ ὅτι

α) Γιά κάθε κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta] \subseteq \mathcal{D}(f)$ τό $f([\alpha,\beta])$ εἶναι ἐπίσης κλειστό διάστημα.

β) Ἄν $[\gamma,\delta] \subseteq \mathcal{R}(f)$ τί συμπεραίνετε γιά τό $f^{-1}([\gamma,\delta])$.

γ) Νά ἐξεταστοῦν οἱ περιπτώσεις α) καί β) γιά ἀνοικτά διαστήματα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Γιά τή μελέτη τῶν πιό βασικῶν συναρτήσεων τῆς Ἀναλύσεως εἶναι σκόπιμο νά προηγηθῆ μιά σύντομη ἀνασκόπηση τῶν δυνάμεων καί ριζῶν.

2.1 ΔΥΝΑΜΕΙΣ - ΡΙΖΕΣ

Θεωροῦμε ὁποιοδήποτε $\alpha \in \mathbb{R}$ καί ὁρίζομε τά παρακάτω:

1) $\alpha^0 = 1$.
2) $\alpha^\nu = \alpha^{\nu-1} . \alpha$, γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.
3) $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$, γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, $\alpha \neq 0$.
4) Ἄς εἶναι α, β ὁποιοιδήποτε πραγματικοί ἀριθμοί καί $\nu \in \mathbb{N}$. Ἄν

$$\alpha\beta \geq 0 \quad \text{καί} \quad \beta^\nu = \alpha,$$

τότε καί μόνο τότε τό β ὀνομάζεται "ν-οστή ρίζα" τοῦ α. Εἶναι φανερό ὅτι ἄν ὑπάρχη ν-οστή ρίζα τοῦ α, τότε αὐτή εἶναι μοναδική καί συμβολίζεται μέ $\alpha^{\frac{1}{\nu}}$ ἤ $\sqrt[\nu]{\alpha}$.

Ἐπίσης παρατηροῦμε ὅτι

$$\sqrt[\nu]{0} = 0 \quad \text{καί} \quad \sqrt[\nu]{1} = 1.$$

Ἄν ν εἶναι ἄρτιος καί $\alpha < 0$, φαίνεται ἀμέσως ὅτι δέν ὑπάρχει ἡ ν-οστή ρίζα τοῦ α, ἐνῶ σέ ὅλες τίς ἄλλες περιπτώσεις, ἐξασφαλίζεται ἡ ὕπαρξη τῆς ν-οστῆς ρίζης ἀπ'τήν παρακάτω πρόταση:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1.1. **Ἄν δέν ἰσχύουν ταυτόχρονα $\alpha<0$ καί ν ἄρτιος, τότε ὑπάρχει μία ν-οστή ρίζα τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ α.**

Ἀπόδειξη. i) $\alpha \geqq 0$ καί $\nu \in \mathbb{N}$. Ἐπειδή ἡ ν-οστή ρίζα τοῦ 0 ὑπάρχει, ὑποθέτομε ὅτι $\alpha>0$. Ὁρίζομε τή συνάρτηση

$$f(z)=z^{\nu}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

καί παρατηροῦμε ὅτι αὐτή εἶναι συνεχής στό διάστημα $[0, \alpha+1]$ καί τέτοια ὥστε $f(0)=0<\alpha$ καί $f(\alpha+1)=(\alpha+1)^{\nu} \geqq 1+\nu\alpha>\alpha$. Ἄρα, ἀπ'τό θεώρημα τοῦ Bolzano 1.13.3, ὑπάρχει $\beta \in (0, \alpha+1)$ μέ $f(\beta)=\alpha$, δηλαδή $\beta^{\nu}=\alpha$, ἤτοι ὑπάρχει ἡ $\sqrt[\nu]{\alpha}$.

ii) $\alpha \in \mathbb{R}$ καί ν περιττός. Ἄν μέν $\alpha \geqq 0$ τότε σύμφωνα μέ τήν i), ὑπάρχει ἡ $\sqrt[\nu]{\alpha}$. Ἄς εἶναι $\alpha<0$. Ὁρίζομε πάλι τή συνάρτηση

$$f(z)=z^{\nu}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Ἡ f εἶναι συνεχής στό διάστημα $[0, 1-\alpha]$ καί ἀκόμη τέτοια ὥστε $f(0)=$ $=0<-\alpha$ καί $f(1-\alpha)=(1-\alpha)^{\nu} \geqq 1-\nu\alpha>-\alpha$. Ἄρα, ἀπ'τό θεώρημα τοῦ Bolzano 1.13.3, ὑπάρχει $-\beta \in (0, 1-\alpha)$ μέ $f(-\beta)=-\alpha$, δηλαδή $(-\beta)^{\nu}=-\alpha$, ἤ $\beta^{\nu}=\alpha$, ἀφοῦ ν περιττός. Ἔτσι ὑπάρχει ἡ ν-οστή ρίζα τοῦ α καί ἡ πρόταση ἀποδείχτηκε. ▲

5. Ἄν ρ εἶναι ρητός πραγματικός ἀριθμός, τότε μπορεῖ νά βρεθῆ μόνο ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος (μ,ν), ὅπου $\mu \in \mathbb{Z}$ καί $\nu \in \mathbb{N}$ καί μάλιστα τέτοιο ὥστε $\rho=\frac{\mu}{\nu}$ καί ὁ ν νά μή διαιρῆ τόν μ, δηλαδή τό κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$ νά εἶναι ἀνάγωγο. Στήν περίπτωση αὐτή, γιά ὁποιοδήποτε $\alpha \in \mathbb{R}$, ὁρίζομε

$$\alpha^{\rho}=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=(\alpha^{\mu})^{\frac{1}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$$

Ὁ ἀριθμός α^{ρ} ὀνομάζεται **"δύναμη"** μέ **"βάση τό α"** καί **"ἐκθέτη τό ρ"**.

Εἶναι εὔκολο νά δοῦμε ὅτι γιά κάθε $\rho \in \mathbb{Q}$ μέ $\rho \neq 0$ ἰσχύει

$$0^{\rho}=0 \quad \text{καί} \quad 1^{\rho}=1.$$

καί ἀκόμη ὅτι ἰσχύουν οἱ παρακάτω ἰδιότητες:

α) $\alpha^{\rho_1} \cdot \alpha^{\rho_2}=\alpha^{\rho_1+\rho_2}$, β) $\alpha^{\rho_1} : \alpha^{\rho_2}=\alpha^{\rho_1-\rho_2}$,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

γ) $(\alpha\beta)^{\rho} = \alpha^{\rho} \cdot \beta^{\rho}$, δ) $(\alpha : \beta)^{\rho} = \alpha^{\rho} : \beta^{\rho}$,

ε) $(\alpha^{\rho_1})^{\rho_2} = \alpha^{\rho_1 \cdot \rho_2}$,

όπου, βέβαια, οἱ παραπάνω δυνάμεις ἔχουν ἔννοια: Ἐπίσης ἔχομε καί ὅτι

στ) ($\alpha > 1$ καί $\rho > 0$) ἤ ($0 < \alpha < 1$ καί $\rho < 0$) $\Rightarrow \alpha^{\rho} > 1$,

ζ) ($\alpha > 1$ καί $\rho < 0$) ἤ ($0 < \alpha < 1$ καί $\rho > 0$) $\Rightarrow \alpha^{\rho} < 1$,

ἀπό τίς ὁποῖες προκύπτει

η) ($\alpha > 1$ καί $\rho_1 > \rho_2$) ἤ ($0 < \alpha < 1$ καί $\rho_1 < \rho_2$) $\Rightarrow \alpha^{\rho_1} > \alpha^{\rho_2}$,

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1.2. Γιά κάθε φυσικό ἀριθμό k ἰσχύουν:

i) $e^{\frac{1}{k}} \geq 1 + \frac{1}{k}$, i′) $e^{-\frac{1}{k}} \geq 1 - \frac{1}{k}$

ii) $e^{\frac{1}{k}} \geq k(e^{\frac{1}{k}} - 1) \geq 1$, ii′) $1 \geq -k(e^{-\frac{1}{k}} - 1) \geq e^{-\frac{1}{k}}$.

Ἀπόδειξη. i): $e^{\frac{1}{k}} = [\lim_{\nu}(1 + \frac{1}{\nu k})^{\nu k}]^{\frac{1}{k}} = \lim_{\nu}(1 + \frac{1}{\nu k})^{\nu} \geq \lim_{\nu}(1 + \frac{1}{\nu k}\nu) =$
$= \lim_{\nu}(1 + \frac{1}{k}) = 1 + \frac{1}{k}$.

i′): $e^{-\frac{1}{k}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{\lim_{\nu}(1 + \frac{1}{\nu k})^{\nu}} = \lim_{\nu}[1/(1 + \frac{1}{\nu k})]^{\nu} = \lim_{\nu}(1 - \frac{1}{\nu k + 1})^{\nu} \geq$

$\geq \lim_{\nu}(1 - \frac{\nu}{\nu k + 1}) = 1 - \frac{1}{k}$.

ii): Ἀπό τήν i) ἔχομε $1 \leq k(e^{\frac{1}{k}} - 1)$, ἐνῶ ἀπό τήν i′)
$e^{-\frac{1}{k}}(e^{\frac{1}{k}} - 1) = 1 - e^{-\frac{1}{k}} \leq 1 - (1 - \frac{1}{k}) = \frac{1}{k}$ ἤτοι $k(e^{\frac{1}{k}} - 1) \leq e^{\frac{1}{k}}$ καί μέ συνδυασμό τῶν δύο $1 \leq k(e^{\frac{1}{k}} - 1) \leq e^{\frac{1}{k}}$.

ii′): Πολλαπλασιάζοντας τή ii) ἐπί $e^{-\frac{1}{k}}$, βρίσκομε $e^{-\frac{1}{k}} \leq k(1 - e^{-\frac{1}{k}}) \leq 1$,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δηλαδή $e^{-\frac{1}{k}} \leq -k(e^{-\frac{1}{k}} - 1) \leq 1$. ▲

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1.3. Αν $\alpha > 0$, τότε $\lim \alpha^{\frac{1}{\nu}} = 1$.

Απόδειξη. Επειδή γιά $\alpha < 1$, ισχύει $\frac{1}{\alpha} > 1$, αρκεῖ ν'αποδειχτῆ ἡ πρόταση μόνο γιά τήν περίπτωση $\alpha > 1$. Ετσι απ'τήν ιδιότητα στ) έχομε και $\alpha^{\frac{1}{\nu}} > 1$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Θέτομε $\delta_\nu = \alpha^{\frac{1}{\nu}} - 1$, οπότε

$$\delta_\nu > 0 \quad \text{και} \quad \alpha^{\frac{1}{\nu}} = 1 + \delta_\nu \text{, γιά κάθε } \nu \in \mathbb{N}.$$

Απ'τήν ανισότητα τοῦ Bernoulli, έχομε

$$\alpha = (1 + \delta_\nu)^\nu \geq 1 + \nu.\delta_\nu \text{, γιά κάθε } \nu \in \mathbb{N},$$

ἤ

$$0 \leq \delta_\nu \leq \frac{\alpha - 1}{\nu} \text{, γιά κάθε } \nu \in \mathbb{N}.$$

Αρα, επειδή

$$\lim \frac{\alpha - 1}{\nu} = 0,$$

προκύπτει $\lim \delta_\nu = 0$, ἤ $\lim(\alpha^{\frac{1}{\nu}} - 1) = 0$, δηλαδή $\lim \alpha^{\frac{1}{\nu}} = 1$. ▲

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1.4. Αν $\alpha > 0$ και ρ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι μιά μηδενική ακολουθία ρητῶν αριθμῶν, τότε $\lim \alpha^{\rho_\nu} = 1$.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη τῆς γενικότητας περιοριζόμαστε και πάλι στήν περίπτωση $\alpha > 1$. Επειδή $\lim \rho_\nu = 0$, έχομε ὅτι

$$(\forall\, k \in \mathbb{N})(\exists\, n \in \mathbb{N})(\forall\, \nu \in \mathbb{N}) \quad \nu > n \Rightarrow |\rho_\nu| < \frac{1}{k}, \text{ δηλαδή}$$

$$-\frac{1}{k} < \rho_\nu < \frac{1}{k}.$$

Αρα, από τήν η), έχομε και

$$\alpha^{-\frac{1}{k}} - 1 < \alpha^{\rho_\nu} - 1 < \alpha^{\frac{1}{k}} - 1 \quad \text{γιά κάθε } \nu > n.$$

Από τήν πρόταση 2.1.3, ὅμως, έχομε

$$\lim(\alpha^{\frac{1}{k}} - 1) = 0 \quad \text{και} \quad \lim(\alpha^{-\frac{1}{k}} - 1) = \frac{1}{\lim \alpha^{\frac{1}{k}}} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἔτσι γιά ὁποιοδήποτε $\varepsilon > 0$

$$(\exists\, n_1 \in \mathbb{N})(\forall\, k \in \mathbb{N}) \quad k > n_1 \Rightarrow |\alpha^{\frac{1}{k}} - 1| < \varepsilon, \text{ δηλαδή}$$

$$-\varepsilon < \alpha^{\frac{1}{k}} - 1 < \varepsilon$$

καί

$$(\exists\, n_2 \in \mathbb{N})(\forall\, k \in \mathbb{N}) \quad k > n_2 \Rightarrow |\alpha^{-\frac{1}{k}} - 1| < \varepsilon, \text{ δηλαδή}$$

$$-\varepsilon < \alpha^{-\frac{1}{k}} - 1 < \varepsilon.$$

Ἄρα, γιά $\hat{n} = \max\{n, n_1, n_2\}$ καί γιά κάθε $\nu > \hat{n}$ ἔχομε

$$-\varepsilon < \alpha^{-\frac{1}{k}} - 1 < \alpha^{\rho_\nu} - 1 < \alpha^{\frac{1}{k}} - 1 < \varepsilon, \text{ γιά σταθερό } k > \hat{n}$$

καί ἑπομένως

$$|\alpha^{\rho_\nu} - 1| < \varepsilon,$$

ἤτοι $\lim \alpha^{\rho_\nu} = 1$. ▲

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1.5. Ἄν $\alpha > 0$, τότε γιά κάθε ἀκολουθία ρητῶν ἀριθμῶν s_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ πού συγκλίνει πρός πεπερασμένο σημεῖο καί ἡ ἀκολουθία α^{s_ν}, $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει ἐπίσης πρός πεπερασμένο σημεῖο. Ἀκόμη ἄν r_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι ὁποισδήποτε ἄλλη ἀκολουθία ρητῶν ἀριθμῶν μέ $\lim r_\nu = \lim s_\nu$, τότε ἰσχύει καί

$$\lim \alpha^{r_\nu} = \lim \alpha^{s_\nu}.$$

Ἀπόδειξη. Ὑποθέτομε πάλι ὅτι $\alpha > 1$. Ἐπειδή ἡ ἀκολουθία s_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει, εἶναι φραγμένη καί ἄς εἶναι $\rho \in \mathbb{Q}$ τέτοιος ὥστε $|s_\nu| \leqq \rho$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Ἀλλά

$$(2.1.1) \qquad |\alpha^{s_\mu} - \alpha^{s_\nu}| = \alpha^{s_\nu}|\alpha^{s_\mu - s_\nu} - 1| \leqq \alpha^{\rho}|\alpha^{s_\mu - s_\nu} - 1|$$

γιά κάθε μ, ν τοῦ $\mathbb{N}$. Ἡ ἀκολουθία s_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι βασική καί ἑπομένως

$$(\forall\, k \in \mathbb{N})(\exists\, n \in \mathbb{N})(\forall\, \mu, \nu \text{ τοῦ } \mathbb{N}) \quad \mu > n \text{ καί } \nu > n \Rightarrow |s_\mu - s_\nu| < \frac{1}{k}, \text{ δηλαδή}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$-\frac{1}{k} < s_\mu - s_\nu < \frac{1}{k}$$

καί ἀπ'τήν ἰδιότητα η),

$$\alpha^{-\frac{1}{k}} - 1 < \alpha^{s_\mu - s_\nu} - 1 < \alpha^{\frac{1}{k}} - 1. \tag{2.1.2}$$

Ἐπειδή, ἀπ'τήν πρόταση 2.1.3, ἰσχύει $\lim(\alpha^{-\frac{1}{k}} - 1) = 0 = \lim(\alpha^{\frac{1}{k}} - 1)$, γιά ὁποιοδήποτε $\varepsilon > 0$, μποροῦμε νά ἐκλέξωμε ἕνα $k \in \mathbb{N}$, τέτοιο ὥστε

$$|\alpha^{\frac{1}{k}} - 1| < \varepsilon \quad \text{καί} \quad |\alpha^{-\frac{1}{k}} - 1| < \varepsilon.$$

Ἄρα, γιά κάθε $\mu > n$ καί $\nu > n$ ἀπό τήν (2.1.2) λαμβάνομε

$$-\varepsilon < \alpha^{s_\mu - s_\nu} - 1 < \varepsilon, \text{ δηλαδή } |\alpha^{s_\mu - s_\nu} - 1| < \varepsilon .$$

Ἔτσι, ἀπ'τήν (2.1.1) προκύπτει ὅτι

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, n \in \mathbb{N})(\forall\, \mu,\nu \text{ τοῦ } \mathbb{N})\ \ \mu > n \text{ καί } \nu > n \Rightarrow |\alpha^{s_\mu} - \alpha^{s_\nu}| < \alpha^{\rho} . \varepsilon$$

πού σημαίνει ὅτι ἡ ἀκολουθία α^{s_ν}, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι βασική. Ἑπομένως συγκλίνει πρός πεπερασμένο σημεῖο.

Τέλος παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἀκολουθία $r_\nu - s_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι μηδενική καί ἀπ'τήν πρόταση 2.1.4, προκύπτει ὅτι $\lim \alpha^{r_\nu - s_\nu} = 1$. Ἑπομένως

$$\lim|\alpha^{r_\nu} - \alpha^{s_\nu}| = \lim \alpha^{s_\nu} . |\alpha^{r_\nu - s_\nu} - 1| \leqq \alpha^{\rho} . 0 = 0$$

ἤτοι $\lim \alpha^{r_\nu} = \lim \alpha^{s_\nu}$. ▲

Ἀπ'τήν παραπάνω πρόταση 2.1.5 ἡ δύναμη α^β μέ βάση α καί ἐκθέτη ὁποιονδήποτε πραγματικό ἀριθμό β, ὁρίζεται μονοσήμαντα ἀπ'τόν τύπο

$$\alpha^\beta = \lim \alpha^{s_\nu}$$

ὅπου s_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι ὁποιαδήποτε ἀκολουθία ρητῶν ἀριθμῶν μέ ὅριο τό β.

2.2 ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Γιά θετικό α, ὁ τύπος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$y = \alpha^x$$

ὁρίζει μιά συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ ὁλόκληρη τήν πραγματική εὐθεῖα, παίρνει τιμές στό διάστημα $(0, +\infty)$, ὀνομάζεται ἐκθετική συνάρτηση μέ βάση τό α καί παριστάνεται μέ $\exp_\alpha$, ἤτοι ἔχομε

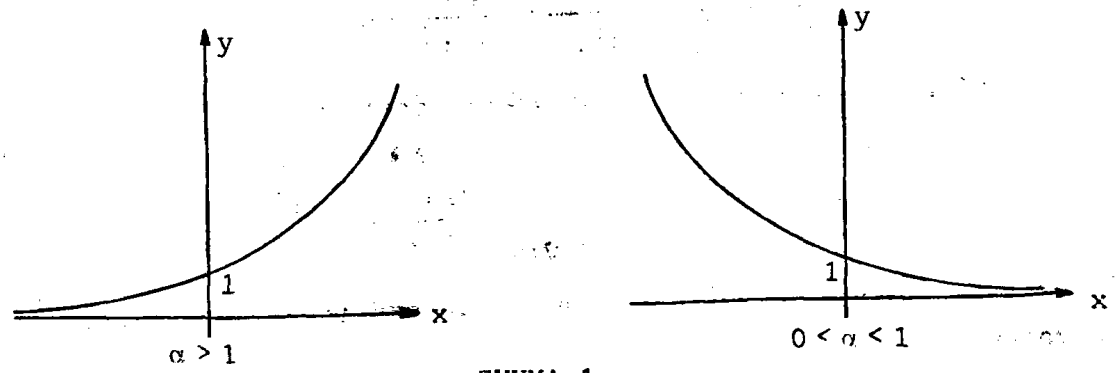
$$\exp_\alpha x = \alpha^x .$$

Ἰδιαίτερα ἄν $\alpha = e$, τότε γράφομε ἁπλούστερα exp ἀντί $\exp_e$, ἤτοι

$$\exp x = e^x .$$

Οἱ ἐκθετικές συναρτήσεις εἶναι συνεχεῖς στό πεδίο ὁρισμοῦ τους $\mathbb{R}$ (βλ. ἄσκηση 2.9.3)· ἑπομένως οἱ ἰδιότητες α) ἕως καί η) τῆς παραγράφου 2.1 ἰσχύουν γιά ὅλους τούς πραγματικούς ἀριθμούς καί ὄχι μόνο γιά ρητούς. Ἔτσι ἀπ' τήν ἰδιότητα η) προκύπτει ὅτι ἡ συνάρτηση α^x, $x \in \mathbb{R}$ εἶναι γνησίως αὔξουσα γιά $\alpha > 1$ καί γνησίως φθίνουσα γιά $0 < \alpha < 1$. Ἑπομένως γιά $\alpha \neq 1$ ἡ ἐκθετική συνάρτηση εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη.

Τό γράφημα, ἤ μέ ἄλλα λόγια ἡ γραφική παράσταση, μιᾶς ἐκθετικῆς συναρτήσεως δίνεται στό Σχ. 1.



ΣΧΗΜΑ 1

Ἐπειδή $\lim \alpha^\nu = +\infty$, $\lim \alpha^{-\nu} = 0$ ἄν $\alpha > 1$ καί $\lim \alpha^\nu = 0$, $\lim \alpha^{-\nu} = +\infty$ ἄν $0 < \alpha < 1$, ἔχομε

i) $\alpha > 1$: $\lim\limits_{+\infty} \exp_\alpha = +\infty$, $\lim\limits_{-\infty} \exp_\alpha = 0$,

ii) $0 < \alpha < 1$: $\lim\limits_{+\infty} \exp_\alpha = 0$, $\lim\limits_{-\infty} \exp_\alpha = +\infty$,

ἀπό ὅπου προκύπτει ἀμέσως ὅτι τό πεδίο τιμῶν τῆς συναρτήσεως $\exp_\alpha$ εἶναι ὁλόκληρο τό διάστημα $(0, +\infty)$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἰδιαίτερα γιά τήν ἐκθετική συνάρτηση e^x, $x \in \mathbb{R}$ ἰσχύει ἡ ἑπόμενη πρόταση:

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.2.1. Ἰσχύει $\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

Ἀπόδειξη. Χωρίς βλάβη τῆς γενικότητας περιοριζόμαστε σέ σημεῖα $h \neq 0$ τοῦ διαστήματος $(-1,1)$.

Θέτομε $k(h) = [\frac{1}{|h|}]$, ὁπότε $k(h) \leqq \frac{1}{|h|} < k(h) + 1$, δηλαδή

$$\frac{1}{k(h)+1} < |h| \leqq \frac{1}{k(h)} .$$

Ἀπ' τήν ἰδιότητα η), ἄρα, ἔχομε καί

$$e^{\frac{1}{k(h)+1}} - 1 \leqq e^{|h|} - 1 \leqq e^{\frac{1}{k(h)}} - 1$$

καί ἑπομένως

$$k(h)(e^{\frac{1}{k(h)+1}} - 1) \leqq \frac{e^{|h|} - 1}{|h|} \leqq (k(h)+1)(e^{\frac{1}{k(h)}} - 1) ,$$

ὁπότε, ἀπ' τήν πρόταση 2.1.2 ii), προκύπτει

$$\frac{k(h)}{k(h)+1} \leqq \frac{e^{|h|} - 1}{|h|} \leqq \frac{k(h)+1}{k(h)} e^{\frac{1}{k(h)}} . \tag{2.2.1}$$

Ἄρα, ἐπειδή γιά $h > 0$ ἔχομε $\lim\limits_{h\to 0+0} k(h) = +\infty$, ἕπεται ὅτι

$$\lim_{h\to 0+0} \frac{k(h)}{k(h)+1} = 1 = \lim_{h\to 0+0} \frac{k(h)+1}{k(h)} \cdot e^{\frac{1}{k(h)}} ,$$

ὁπότε ἔχοντας ὑπ' ὄψη καί τήν πρόταση 1.10.3 ἀπό τή σχέση (2.2.1) μποροῦμε νά βροῦμε

$$\lim_{h\to 0+0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Ἐπίσης, ἐπειδή γιά $h < 0$, ἡ (2.2.1) γίνεται

$$e^h \cdot \frac{k(h)}{k(h)+1} \leqq \frac{e^h - 1}{h} \leqq e^h \cdot \frac{k(h)+1}{k(h)} e^{\frac{1}{k(h)}}$$

καί ἐπειδή $\lim\limits_{h\to 0-0} k(h) = +\infty$, ἔχομε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\lim_{h\to 0-0} e^h \cdot \frac{k(h)}{k(h)+1} = 1 = \lim_{h\to 0-0} e^h \cdot \frac{k(h)+1}{k(h)} \cdot e^{\frac{1}{k(h)}} .$$

Άρα, άπ'τήν πρόταση 1.10.3, βρίσκομε

$$\lim_{h\to 0-0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Έπομένως

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 . \quad \blacktriangle$$

2.3 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Όπως είδαμε παραπάνω γιά τήν έκθετική συνάρτηση $\exp_\alpha$, όπου $\alpha > 0$, καί $\alpha \neq 1$, έχομε $\mathcal{D}(\exp_\alpha) = \mathbb{R}$ καί $\mathcal{R}(\exp_\alpha) = (0,+\infty)$. Έπίσης αύτή είναι άμφιμονοσήμαντη καί έπομένως ύπάρχει ή άντίστροφή της $\exp_\alpha^{-1}$ πού παριστάνεται μέ $\log_\alpha$ καί όνομάζεται **"λογαριθμική συνάρτηση μέ βάση τό α"**. Κατά συνέπεια ή λογαριθμική συνάρτηση $\log_\alpha$ έχει $\mathcal{D}(\log_\alpha) = (0,+\infty)$, $\mathcal{R}(\log_\alpha) = \mathbb{R}$, είναι συνεχής καί γνησίως μονότονη (γνησίως αύξουσα άν $\alpha > 1$ καί γνησίως φθίνουσα άν $0 < \alpha < 1$).

Ιδιαιτέρα, άν $\alpha = e$, τότε, άντί $\log_e$, γράφομε άπλούστερα $\log$ ή καί $\ln$. Ή τιμή $\log x$, ή **άλλιῶς** $\ln x$, όνομάζεται **ό νεπέρειος** λογάριθμος τοῦ x.

Έπειδή, ίσχύει $\alpha^0 = 1$ καί $\alpha^1 = \alpha$ έπεται ότι γιά κάθε $\alpha > 0$

$$\log_\alpha 1 = 0 \quad \text{καί} \quad \log_\alpha \alpha = 1.$$

Έξ άλλου άπ'τίς ιδιότητες τῶν έκθετικῶν συναρτήσεων προκύπτουν οί παρακάτω άντίστοιχες τῶν λογαριθμικῶν:

α) $\log_\alpha(x\,y) = \log_\alpha x + \log_\alpha y$,

β) $\log_\alpha(x : y) = \log_\alpha x - \log_\alpha y$,

γ) $\log_\alpha(x^y) = y.\log_\alpha x$,

δ) $\log_\alpha x = (\log_\beta x) : (\log_\beta \alpha)$,

ε) $\exp_\alpha(\log_\alpha x) = x$, $\log_\alpha(\exp_\alpha x) = x$,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

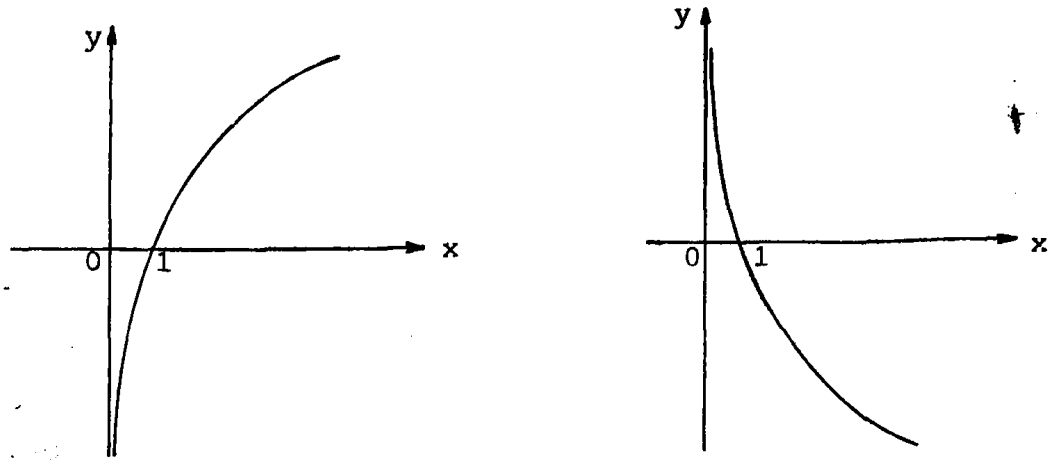
ὅπου $\alpha > 0$ καί $\beta > 0$.

Ἀκόμη εἶναι προφανεῖς καί οἱ ἑξῆς ἰδιότητες:

στ) $(\alpha > 1$ καί $x > 1)$ ἤ $(0 < \alpha < 1$ καί $0 < x < 1) \Rightarrow \log_\alpha x > 0$,

ζ) $(0 < \alpha < 1$ καί $x > 1)$ ἤ $(\alpha > 1$ καί $0 < x < 1) \Rightarrow \log_\alpha x < 0$.

Τό γράφημα τῆς λογαριθμικῆς συναρτήσεως $\log_\alpha x$, $x \in (0,+\infty)$ δίνεται στό παρακάτω Σχ. 2.



$\alpha > 1$ $\qquad$ $0 < \alpha < 1$

ΣΧΗΜΑ 2

Ἀπό τή μονοτονία τῆς λογαριθμικῆς συναρτήσεως καί ἐπειδή $\mathcal{D}(\log_\alpha) = (0,+\infty)$ καί $\mathcal{R}(\log_\alpha) = \mathbb{R}$, προκύπτουν τά ἑξῆς:

η) $\alpha > 1$: $\lim\limits_{x \to 0+0} \log_\alpha x = -\infty$ καί $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_\alpha x = +\infty$,

θ) $0 < \alpha < 1$: $\lim\limits_{x \to 0+0} \log_\alpha x = +\infty$ καί $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_\alpha x = -\infty$.

2.4 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Οἱ τριγωνομετρικές συναρτήσεις ἔχουν ὁρισθῆ στή στοιχειώδη τριγωνομετρία. Ἐδῶ θά διατηρήσωμε τούς ἴδιους ὁρισμούς πού δίνονται μέ τή βοήθεια τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου καί θ'ἀσχοληθοῦμε μόνο μέ μερικές βασικές ἰδιότητες.

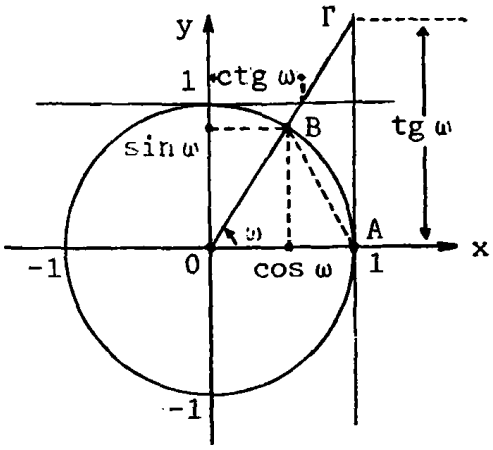
Οἱ κύριες τριγωνομετρικές συναρτήσεις εἶναι οἱ συναρτήσεις ἡμίτονο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

sin καί συνημίτονο cos, ἀπό τίς ὁποῖες προκύπτουν οἱ συναρτήσεις ἐφαπτομένη tg καί συνεφαπτομένη ctg, πού ὁρίζονται ὡς ἑξῆς:

$$\mathrm{tg} = \frac{\sin}{\cos} \quad \text{καί} \quad \mathrm{ctg} = \frac{\cos}{\sin}\,.$$

Στό ΣΧ. 3 ἀπεικονίζεται ὁ τριγωνομετρικός κύκλος καί οἱ τιμές τῶν παραπάνω τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων. Ἄς θεωρηθῆ γνωστό ὅτι ὁ πραγματικός ἀριθμός ω, πού ἀντιστοιχεῖ στή γωνία AOB, μετρᾶ τό μῆκος τοῦ ἀντίστοιχου τόξου AB σέ ἀκτίνια.



ΣΧΗΜΑ 3

Α. Οἱ συναρτήσεις ἡμίτονο καί συνημίτονο

Οἱ συναρτήσεις ἡμίτονο καί συνημίτονο ὁρίζονται πάνω στό σύνολο $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καί παίρνουν τιμές στό διάστημα [-1,1]. Εἶναι ἐπίσης προφανές ὅτι οἱ συναρτήσεις αὐτές εἶναι "περιοδικές" μέ "περίοδο" 2π, δηλαδή εἶναι τέτοιες ὥστε

$$\sin(x+2\pi) = \sin x \quad \text{καί} \quad \cos(x+2\pi) = \cos x \quad \text{γιά κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Ἔτσι, γιά τή μελέτη τῶν συναρτήσεων sin καί cos μποροῦμε νά περιοριστοῦμε σέ διαστήματα μέ μῆκος 2π, ὅπως τά [0,2π], [-π,π], $[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ κ.λ.π.

Εἶναι γνωστό ὅτι ἡ συνάρτηση sin εἶναι στά διαστήματα

$$[-\tfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ \tfrac{\pi}{2}+2k\pi],\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{γνησίως αὔξουσα}$$

καί στά

$$[\tfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ \tfrac{3\pi}{2}+2k\pi],\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{γνησίως φθίνουσα}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἐνῶ ἡ συνάρτηση cos εἶναι στά διαστήματα

$$[-\pi + 2k\pi,\ 2k\pi],\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{γνησίως αὔξουσα}$$

καί στά

$$[2k\pi,\ 2k\pi + \pi],\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{γνησίως φθίνουσα .}$$

Μερικές ἀξιοσημείωτες τιμές τῶν συναρτήσεων τούτων εἶναι

$$\sin 0 = 0, \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin\pi = 0, \quad \sin\frac{3\pi}{2} = -1$$

καί

$$\cos 0 = 1, \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \cos\pi = -1, \quad \cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

καί γενικά

$$\sin k\pi = 0, \qquad \sin(k\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^k$$

καί

$$\cos k\pi = (-1)^k, \qquad \cos(k\pi + \frac{\pi}{2}) = 0,$$

γιά κάθε ἀκέραιο ἀριθμό k.

Ἐπίσης μερικές βασικές ἰδιότητες τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων sin καί cos εἶναι καί οἱ ἀκόλουθες:

α) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$

β) $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y,$

γ) $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x,$

δ) $\cos(-x) = \cos x,$

ε) $\sin(-x) = -\sin x,$

στ) $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x,$

ζ) $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x,$

η) $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)],$

θ) $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2},$

ι) $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)],$

ια) $\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)],$

ιβ) $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2},$

ιγ) $|\sin x| \leq |x|$.

Τέλος παρατηροῦμε ὅτι ἀπ'τίς β) , γ) προκύπτουν καί οἱ παρακάτω ἰδιότητες πού συνδέουν τίς συναρτήσεις sin καί cos:

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x \ , \ \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x .$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παρατήρηση

Μέ ἀφορμή τίς ἰδιότητες δ) καί ε), θά λέμε ὅτι μιά συνάρτηση f εἶναι "ἄρτια" ἄν $f(-x)=f(x)$ γιά κάθε $x\in\mathcal{D}(f)$ καί "περιττή" ἄν $f(-x)=-f(x)$ γιά κάθε $x\in\mathcal{D}(f)$.

Χρησιμοποιώντας μερικές ἀπ'τίς παραπάνω ἰδιότητες θ'ἀποδείξωμε ὅτι οἱ συναρτήσεις sin καί cos εἶναι συνεχεῖς, καί μάλιστα ὁμοιομόρφως, στό σύνολο $\mathbb{R}$. Πραγματικά γιά ὁποιοδήποτε $\varepsilon>0$, θέτομε $\delta=\varepsilon$, ὁπότε γιά κάθε x,y τοῦ $\mathbb{R}$ τέτοια ὥστε $|x-y|<\delta$, ἔχομε

$$|\sin x-\sin y|=|\sin x+\sin(-y)|=2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x+y}{2}\right|\leqq 2\,\frac{|x-y|}{2}\cdot 1=$$
$$=|x-y|<\delta=\varepsilon.$$

Ἑπομένως ἡ συνάρτηση sin εἶναι ὁμοιομόρφως συνεχής, ἄρα καί συνεχής.

Ἀνάλογα συνάγεται καί ἡ ὁμοιόμορφη συνέχεια τῆς συναρτήσεως cos. Ἀλλά αὐτή μπορεῖ νά προκύψη καί ἀπό τήν ἄσκηση 20 τοῦ κεφαλαίου I, διότι $\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ καί οἱ συναρτήσεις sin καί $\frac{\pi}{2}-x$, $x\in\mathbb{R}$ εἶναι ὁμοιομόρφως συνεχεῖς.

Μιά ἀξιοσημείωτη ἰδιότητα χρήσιμη στό διαφορικό λογισμό εἶναι καί ἡ ἑξῆς:

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.4.1. Ἰσχύει $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Ἀπόδειξη. Στό σχῆμα 3, συγκρίνοντας τά ἐμβαδά τῶν τριγώνων OAB καί OAΓ μέ τό ἐμβαδό τοῦ κυκλικοῦ τομέα OAB, βρίσκομε $\sin\omega<\omega<\mathrm{tg}\,\omega$, ὅπου $\omega\in(0,\frac{\pi}{2})$· ἑπομένως

$$\frac{\sin\omega}{\omega}<1<\frac{\sin\omega}{\omega}\cdot\frac{1}{\cos\omega},$$

δηλαδή

$$\cos\omega<\frac{\sin\omega}{\omega}<1.$$

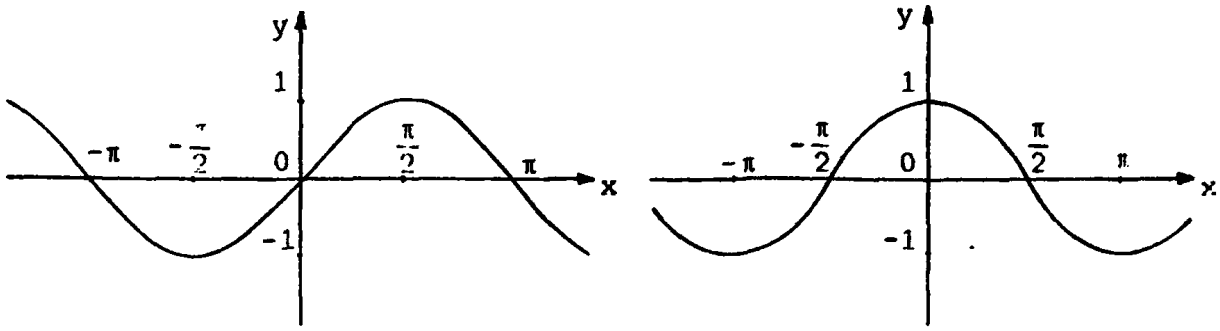
Ἀλλά $\lim\limits_{\omega\to 0+0}\cos\omega=\cos 0=1$, ἀφοῦ ἡ συνάρτηση cos εἶναι συνεχής στό σημεῖο 0, καί ἄρα $\lim\limits_{\omega\to 0+0}\frac{\sin\omega}{\omega}=1$.

Τώρα, ἀπ'τήν $\frac{\sin(-\omega)}{-\omega}=\frac{\sin\omega}{\omega}$, ἔχομε καί $\lim\limits_{\omega\to 0-0}\frac{\sin\omega}{\omega}=1$ καί ἑπομένως

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{\sin\omega}{\omega}=1.\ \blacktriangle$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τά γραφήματα τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων sin καί cos εἶναι:



sin cos

ΣΧΗΜΑ 4

Παρατηρώντας ὅτι

$$\lim \sin \nu\pi = 0 \quad , \quad \lim \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\nu\pi\right) = 1$$

καί

$$\lim \cos 2\nu\pi = 1 \quad , \quad \lim \cos\left(\frac{\pi}{2} + \nu\pi\right) = 0$$

προκύπτει ὅτι τά ὅρια τῶν συναρτήσεων sin καί cos στά κατ'ἐκδοχήν σημεῖα δέν ὑπάρχουν.

Β. Οἱ συναρτήσεις ἐφαπτομένη καί συνεφαπτομένη

Οἱ συναρτήσεις ἐφαπτομένη καί συνεφαπτομένη ὁρίζονται πάνω στό σύνολο $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἐκτός ἀπ'τά σημεῖα πού μηδενίζουν τό συνημίτονο καί ἡμίτονο ἀντίστοιχα, ἤτοι

$$\mathcal{D}(tg) = \mathbb{R} - \{x: (\exists\, k \in \mathbb{Z})\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi\}$$

καί

$$\mathcal{D}(ctg) = \mathbb{R} - \{x: (\exists\, k \in \mathbb{Z})\ x = k\pi\}.$$

Φυσικά οἱ συναρτήσεις tg καί ctg παίρνουν τιμές στό σύνολο $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Μιά συνέπεια τῆς συνέχειας καί περιοδικότητας τῶν συναρτήσεων sin καί cos εἶναι ἡ συνέχεια καί ἡ περιοδικότητα τῶν tg καί ctg. Προσοχή ὅμως, στήν περίπτωση αὐτή ἡ περίοδος εἶναι ἴση μέ π, διότι

$$tg(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = tgx \quad \text{γιά κάθε} \quad x \in \mathbb{R}$$

καί

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\operatorname{ctg}(x+\pi)=\frac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)}=\frac{-\cos x}{-\sin x}=\operatorname{ctg} x \quad \text{γιά κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Ἑπομένως κι ἐδῶ μποροῦμε νά μελετήσωμε τίς συναρτήσεις tg καί ctg ἀφοῦ περιοριστοῦμε σέ διαστήματα μήκους π. Ἔτσι εἶναι εὔκολο νά δοῦμε ὅτι ἡ συνάρτηση tg εἶναι γνησίως αὔξουσα σέ διαστήματα τῆς μορφῆς $(\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$ καί ἡ ctg γνησίως φθίνουσα σέ διαστήματα τῆς μορφῆς $(k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$. Πράγματι, ἄν x_1, x_2 εἶναι τέτοια ὥστε

$$-\frac{\pi}{2}<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$$

τότε ἐπειδή $0<x_2-x_1<\pi$, ἔχομε

$$\operatorname{tg} x_1-\operatorname{tg} x_2=\frac{\sin x_1}{\cos x_1}-\frac{\sin x_2}{\cos x_2}=\frac{\sin x_1\cdot\cos x_2-\sin x_2\cdot\cos x_1}{\cos x_1\cdot\cos x_2}=$$

$$=-\frac{\sin(x_2-x_1)}{\cos x_1\cdot\cos x_2}<-\frac{\sin(x_2-x_1)}{1\cdot 1}=-\sin(x_2-x_1)<0,$$

ὁπότε

$$\operatorname{tg} x_1<\operatorname{tg} x_2 .$$

Ἀνάλογα, τώρα, μπορεῖ ν'ἀποδειχτῆ καί ἡ μονοτονία τῆς ctg.

Τέλος παρατηροῦμε ὅτι

$$\operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{2}-x)=\operatorname{ctg} x \quad \text{καί} \quad \operatorname{ctg}(\tfrac{\pi}{2}-x)=\operatorname{tg} x .$$

καί ἀκόμη ὅτι

α) $1+\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$,

β) $1+\operatorname{ctg}^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}$,

γ) $\operatorname{tg}(x+y)=\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y}$,

δ) $\operatorname{ctg}(x+y)=\dfrac{1+\operatorname{ctg} x\cdot\operatorname{ctg} y}{\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} y}$,

ε) $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}$,

στ) $\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} y=\dfrac{\sin(x+y)}{\sin x\cdot\sin y}$,

ζ) $\operatorname{tg} 2x=\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

η) $\operatorname{ctg} 2x = \dfrac{1+\operatorname{ctg}^2 x}{2\operatorname{ctg} x}$,

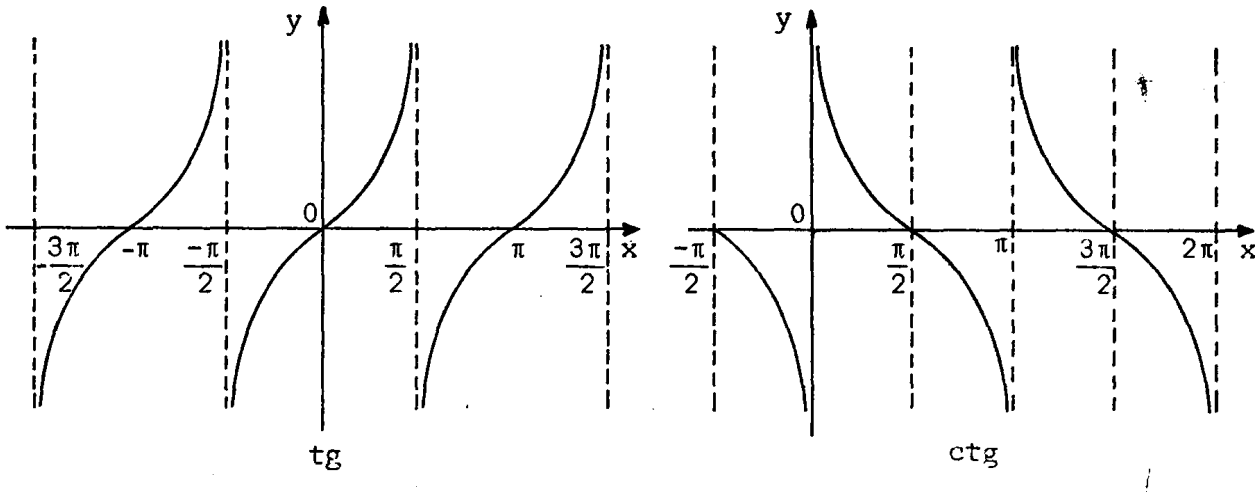
θ) $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$,

ι) $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$,

ια) $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}$,

ιβ) $|x| \leq |\operatorname{tg} x|$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Τά γραφήματα τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων tg καί ctg δίνονται στό ΣΧ. 5.



ΣΧΗΜΑ 5

Στό σημεῖο τοῦτο εἶναι εὔκολο νά δοῦμε ὅτι

$$\lim_{\frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} = +\infty \quad , \quad \lim_{\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} = -\infty \ , \quad \lim_{0+0} \operatorname{ctg} = +\infty \quad , \quad \lim_{\pi-0} \operatorname{ctg} = -\infty \ .$$

Πράγματι, αὐτές προκύπτουν ἀπ'τό γεγονός ὅτι οἱ συναρτήσεις tg καί ctg εἶναι γνησίως μονότονες καί ἀκόμη ὅτι

$$\lim \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\nu}\right) = \lim \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\nu}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\nu}\right)} = \lim \frac{\cos\frac{1}{\nu}}{\sin\frac{1}{\nu}} = +\infty \ ,$$

$$\lim \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\nu}\right) = \lim\left[-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\nu}\right)\right] = -\lim \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\nu}\right) = -\infty \ ,$$

$$\lim \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{\nu}\right) = \lim \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\nu}\right) = +\infty \ ,$$

καί

$$\lim \operatorname{ctg}\left(\pi-\frac{1}{\nu}\right) = \lim \operatorname{ctg}\left(-\frac{1}{\nu}\right) = -\lim \operatorname{ctg}\frac{1}{\nu} = -\infty \ .$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Εἶναι τώρα φανερό ὅτι

$$\mathcal{R}(\mathrm{tg}) = \mathbb{R} \quad \text{καί} \quad \mathcal{R}(\mathrm{ctg}) = \mathbb{R}.$$

2.5 ΚΥΚΛΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ὅπως εἴδαμε παραπάνω ἡ συνάρτηση ἡμίτονο εἶναι γνησίως αὔξουσα στό διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ καί συνεχής σ'αὐτό. Ἄρα ὑπάρχει ἡ ἀντίστροφη τῆς $\sin|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ καί εἶναι ἐπίσης συνεχής καί γνησίως αὔξουσα. Τήν παριστάνομε μέ $\mathrm{Ar}\sin$, ἀντί τοῦ συνηθισμένου συμβολισμοῦ $\sin^{-1}$, εἶναι ὁρισμένη στό διάστημα $[-1,1]$ καί παίρνει τιμές στό διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Γενικώτερα, ἄν x, y εἶναι τέτοια ὥστε $\sin y = x$, τότε γράφομε

$$y = \mathrm{ar}\sin x. \tag{2.5.1}$$

Εἶναι φανερό ὅτι ὁ τύπος (2.5.1) δέν ὁρίζει συνάρτηση, διότι γιά σταθερό x ὑπάρχουν ἄπειρα τέτοια y. Ἄν ὅμως ἀπαιτήσωμε τό y νά ἱκανοποιῆ ἐπί πλέον καί τή συνθήκη

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi \leq y \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \ , \quad (k = \text{σταθερό}),$$

τότε ὁ τύπος (2.5.1) ὁρίζει συνάρτηση, ἡ ὁποία παριστάνεται μέ

$$\mathrm{ar}_k \sin .$$

Λέμε ὅτι ὁ παραπάνω τύπος (2.5.1) ὁρίζει τήν **"πλειότιμη συνάρτηση"** $\mathrm{ar}\sin$ καί ὅτι ἡ συνάρτηση $\mathrm{ar}_k \sin$ εἶναι ὁ k-κλάδος αὐτῆς. Προφανῶς ὁ 0-κλάδος τῆς πλειότιμης συναρτήσεως $\mathrm{ar}\sin$, πού ὀνομάζεται καί **"βασικός"** κλάδος, εἶναι ἡ συνάρτηση $\mathrm{Ar}\sin$. Μέσα στά πλαίσια τοῦ συγγράμματος τούτου εἶναι ἀρκετό νά περιοριστοῦμε μόνο στό βασικό κλάδο της.

Ἀπό τά θεωρήματα 1.14.1 καί 1.13.4, προκύπτει ὅτι ἡ συνάρτηση $\mathrm{Ar}\sin$ εἶναι συνεχής καί γνησίως αὔξουσα διότι καί ἡ $\sin|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ εἶναι τέτοια.

Ἀνάλογα, τώρα, μπορεῖ νά ὁριστῆ καί ἡ συνάρτηση $\mathrm{Ar}\cos$ σάν ἡ ἀντίστροφη τῆς $\cos|[0,\pi]$ γιά τήν ὁποία

$$\mathcal{D}(\mathrm{Ar}\cos) = [-1, 1] \quad \text{καί} \quad \mathcal{R}(\mathrm{Ar}\cos) = [0, \pi].$$

Ἐπίσης αὐτή εἶναι συνεχής καί γνησίως φθίνουσα στό διάστημα $[-1, 1]$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Οἱ συναρτήσεις Ar tg καί Ar ctg ὁρίζονται νά εἶναι οἱ ἀντίστροφες τῶν $\mathrm{tg}|(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ καί $\mathrm{ctg}|(0,\pi)$, ἀντίστοιχα. Ἔτσι ἔχομε

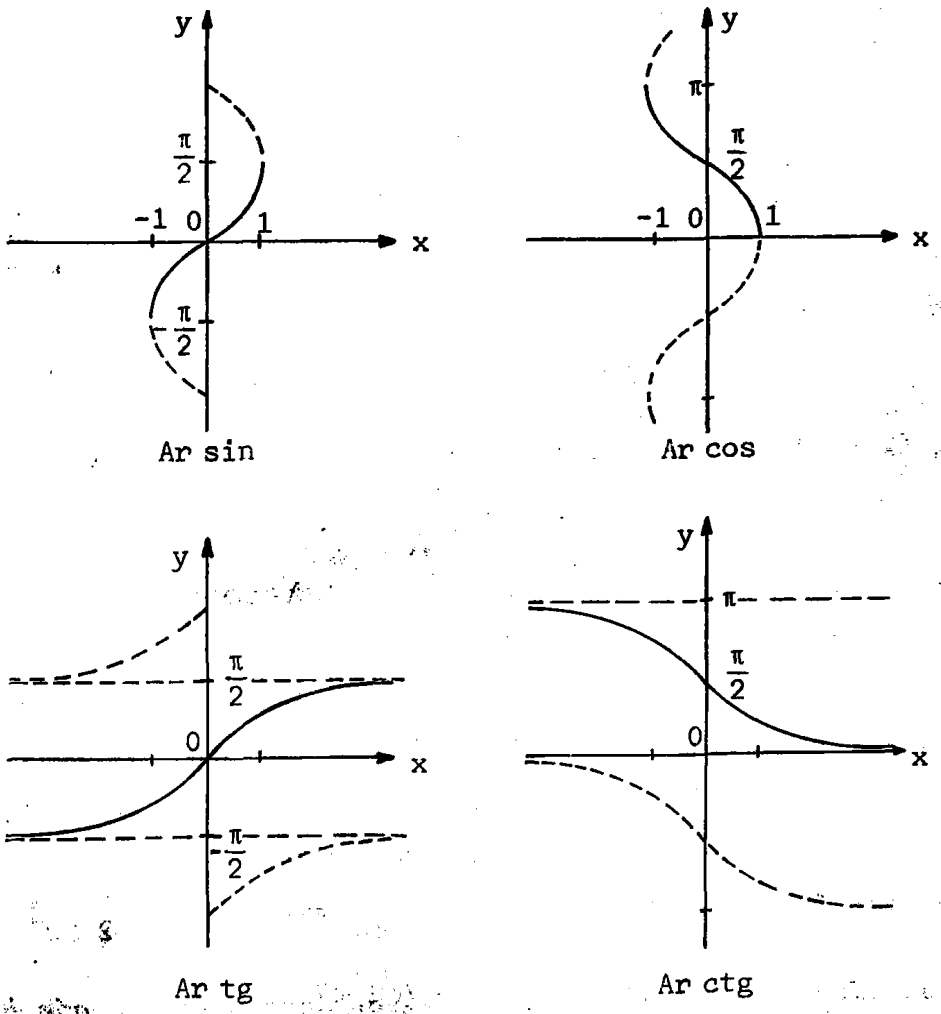
$$\mathcal{D}(\mathrm{Ar\,tg}) = \mathbb{R} \quad , \quad \mathcal{R}(\mathrm{Ar\,tg}) = (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$$

καί

$$\mathcal{D}(\mathrm{Ar\,ctg}) = \mathbb{R} \quad , \quad \mathcal{R}(\mathrm{Ar\,ctg}) = (0,\pi)$$

καί ἐπί πλέον ὅτι αὐτές εἶναι συνεχεῖς καί γνησίως μονότονες, ἡ Ar tg γνησίως αὔξουσα καί ἡ Ar ctg γνησίως φθίνουσα.

Στό ΣΧ. 6 παριστάνονται τά γραφήματα τῶν παραπάνω κυκλομετρικῶν συναρτήσεων.



ΣΧΗΜΑ 6

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2.6 ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ἡ παρουσία, πολλές φορές, τῶν συναρτήσεων $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$ σέ διάφορες μαθηματικές παραστάσεις καί ἡ ἀναλογία τῶν ἰδιοτήτων τους μέ ἐκεῖνες τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων sin καί cos μᾶς ὁδηγεῖ στό νά τίς συμβολίσωμε μέ

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

καί ν'ἀσχοληθοῦμε ἰδιαίτερα μέ τή θεωρία τους.

Ἔχουν πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο $\mathbb{R}$ καί ὀνομάζονται **"ὑπερβολικές συναρτήσεις"** καί μάλιστα ἡ sinh **"ὑπερβολικό ἡμίτονο"** καί ἡ cosh **"ὑπερβολικό συνημίτονο"**. Ἡ ὀνομασία τους αὐτή ὀφείλεται στό παρακάτω γεγονός:

Εἶναι εὔκολο νά δοῦμε ὅτι, γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$, ἰσχύει

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1. \tag{2.6.1}$$

ἡ ὁποία γιά $X = \cosh x + \sinh x$ καί $Y = \cosh x - \sinh x$ γράφεται

$$XY = 1$$

καί, ὅπως ξέρομε ἀπ'τήν στοιχειώδη Ἀναλυτική Γεωμετρία, παριστάνει στό ἐπίπεδο μιά ὑπερβολή.

Τά πεδία τιμῶν τῶν συναρτήσεων τούτων εἶναι

$$\mathcal{R}(\sinh) = \mathbb{R} \quad \text{καί} \quad \mathcal{R}(\cosh) = [1, +\infty).$$

Ἡ σχέση (2.6.1) εἶναι ἀνάλογη πρός τήν τριγωνομετρική σχέση $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Ἀκόμη, μποροῦμε νά διαπιστώσωμε τήν ἀλήθεια καί τήν ἀναλογία πρός τίς ἀντίστοιχες τριγωνομετρικές τῶν παρακάτω ἰδιοτήτων:

α) $\cosh(x+y) = \cosh x . \cosh y + \sinh x . \sinh y$,

β) $\sinh(x+y) = \sinh x . \cosh y + \cosh x . \sinh y$,

γ) $\cosh(-x) = \cosh x$,

δ) $\sinh(-x) = -\sinh x$,

ε) $\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1 = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 1 + 2\sinh^2 x$,

στ) $\sinh 2x = 2\sinh x . \cosh x$,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ζ) $\cosh x \,.\, \cosh y = \frac{1}{2}[\cosh(x+y) + \cosh(x-y)]$,

η) $\cosh x + \cosh y = 2\cosh\frac{x+y}{2} \,.\, \cosh\frac{x-y}{2}$,

θ) $\sinh x \,.\, \cosh y = \frac{1}{2}[\sinh(x+y) + \sinh(x-y)]$,

ι) $\sinh x \,.\, \sinh y = \frac{1}{2}[\cosh(x+y) - \cosh(x-y)]$,

ια) $\sinh x + \sinh y = 2\sinh\frac{x+y}{2} \,.\, \cosh\frac{x-y}{2}$,

ιβ) $|\sinh x| \geqq |x|$,

ιγ) $\cosh x > x$.

Ἐξ ἄλλου, εὔκολα μπορεῖ ν'ἀποδειχτῆ ὅτι οἱ συναρτήσεις sinh, $\cosh|[0,+\infty)$ καί $\cosh|(-\infty,0]$ εἶναι γνησίως μονότονες. Πράγματι, ἀπ'τή μονοτονία τῆς exp προκύπτει ὅτι

$$\text{ἄν } x_1 < x_2 \text{, τότε } \sinh x_1 < \sinh x_2 \text{,}$$

δηλαδή ἡ sinh εἶναι γνησίως αὔξουσα. Ἑπομένως, ἐπειδή $\sinh 0 = 0$, ὁπότε $\sinh x < 0$, ἄν $x < 0$ καί $\sinh x > 0$, ἄν $x > 0$, ἕπεται ὅτι

$$\text{ἄν } 0 \leqq x_1 < x_2\text{, τότε } \cosh x_1 - \cosh x_2 = 2\sinh\frac{x_1+x_2}{2} \cdot \sinh\frac{x_1-x_2}{2} < 0$$

δηλαδή ἡ $\cosh|[0,+\infty)$ εἶναι γνησίως αὔξουσα καί

$$\text{ἄν } x_1 < x_2 \leqq 0\text{, τότε } \cosh x_1 - \cosh x_2 = 2\sinh\frac{x_1+x_2}{2} \cdot \sinh\frac{x_1-x_2}{2} > 0$$

δηλαδή ἡ $\cosh|(-\infty,0]$ εἶναι γνησίως φθίνουσα.

Ἡ συνέχεια, βέβαια, τοῦ ὑπερβολικοῦ ἡμιτόνου καί ὑπερβολικοῦ συνημιτόνου εἶναι ἄμεση συνέπεια τῆς συνέχειας τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως exp.

Τώρα, ὅπως στήν τριγωνομετρία, ἔτσι κι ἐδῶ μποροῦμε νά ὁρίσωμε τήν "ὑπερβολική ἐφαπτομένη"

$$\mathrm{tgh} = \frac{\sinh}{\cosh}$$

καί τήν "ὑπερβολική συνεφαπτομένη"

$$\mathrm{ctgh} = \frac{\cosh}{\sinh}$$

καί νά βροῦμε πολλές ἰδιότητες αὐτῶν, ἀνάλογες μ' ἐκεῖνες τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων tg καί ctg. Ἔτσι, γιά παράδειγμα, ἔχομε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$1 - \mathrm{tgh}^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} \quad , \quad \mathrm{tgh}\, 2x = \frac{2\,\mathrm{tgh}\, x}{1 + \mathrm{tgh}^2 x}$$

$$1 - \mathrm{ctgh}^2 x = \frac{-1}{\sinh^2 x} \quad , \quad \mathrm{ctgh}\, 2x = \frac{1 + \mathrm{ctgh}^2 x}{2\,\mathrm{ctgh}\, x} .$$

Ἐξ ἄλλου, ἀπ' τόν ὁρισμό τῶν συναρτήσεων τούτων προκύπτει ὅτι

$$\mathcal{D}(\mathrm{tgh}) = \mathbb{R} \quad , \quad \mathcal{R}(\mathrm{tgh}) = (-1,1)$$

καί

$$\mathcal{D}(\mathrm{ctgh}) = \mathbb{R}-\{0\} \ , \quad \mathcal{R}(\mathrm{ctgh}) = (-\infty,-1) \cup (1,+\infty).$$

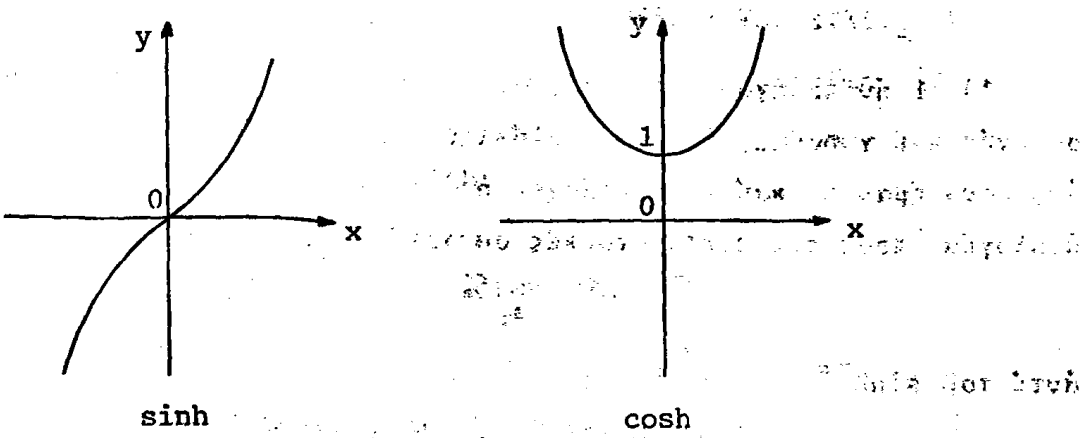
Ἡ συνέχεια τῶν tgh καί ctgh προκύπτει ἀπ' τή συνέχεια τῶν συναρτήσεων sinh καί cosh , ἐνῶ ἀπ' τούς τύπους

$$\mathrm{tgh}\, x_1 - \mathrm{tgh}\, x_2 = \frac{\sinh(x_1-x_2)}{\cosh x_1 \cdot \cosh x_2}$$

$$\mathrm{ctgh}\, x_1 - \mathrm{ctgh}\, x_2 = \frac{\sinh(x_2-x_1)}{\sinh x_1 \cdot \sinh x_2}$$

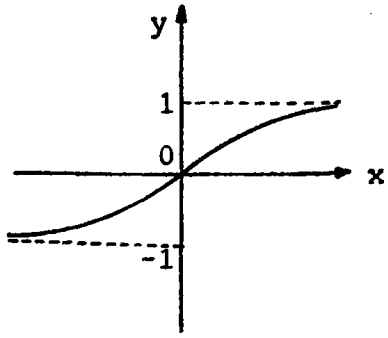
προκύπτει ὅτι ἡ tgh εἶναι γνησίως αὔξουσα συνάρτηση καί ἡ ctgh γνησίως φθίνουσα.

Οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν ὑπερβολικῶν συναρτήσεων δίνονται στά παρακάτω ΣΧ. 7 καί 8.

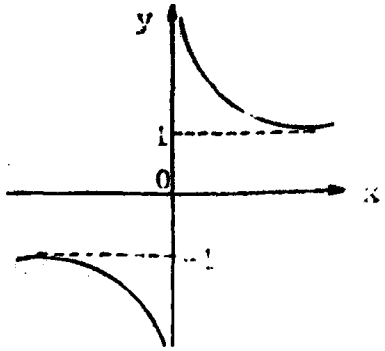


ΣΧΗΜΑ 7

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



tgh



ctgh

ΣΧΗΜΑ 8

Εἶναι σκόπιμο νά σημειωθοῦν καί τά ἑξῆς ὅρια:

$$\lim_{+\infty} \sinh = +\infty \quad , \quad \lim_{-\infty} \sinh = -\infty \ ,$$

$$\lim_{+\infty} \cosh = +\infty \quad , \quad \lim_{-\infty} \cosh = +\infty \ ,$$

$$\lim_{+\infty} \mathrm{tgh} = 1 \quad , \quad \lim_{-\infty} \mathrm{tgh} = -1 \ ,$$

$$\lim_{+\infty} \mathrm{ctgh} = 1 \quad , \quad \lim_{-\infty} \mathrm{ctgh} = -1 \ ,$$

$$\lim_{0+0} \mathrm{ctgh} = +\infty \quad , \quad \lim_{0-0} \mathrm{ctgh} = -\infty \ .$$

2.7 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1) Στήν προηγούμενη παράγραφο εἴδαμε ὅτι ἡ συνάρτηση sinh εἶναι συνεχής καί γνησίως αὔξουσα σ'ὁλόκληρο τό σύνολο $\mathbb{R}$. Ἑπομένως εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη καί ἔτσι ὑπάρχει ἡ ἀντίστροφή της τήν ὁποία, γιά χάρη ἀναλογίας πρός τίς κυκλομετρικές συναρτήσεις, παριστάνομε μέ

$$\mathrm{Ar}\sinh$$

ἀντί τοῦ $\sinh^{-1}$. Ἔτσι ἔχομε

$$\mathcal{D}(\mathrm{Ar}\sinh) = \mathbb{R} \quad , \quad \mathcal{R}(\mathrm{Ar}\sinh) = \mathbb{R}$$

ἐνῶ εἶναι εὔκολο νά δοῦμε ὅτι

$$\mathrm{Ar}\sinh x = \log(x + \sqrt{x^2+1}), \ x \in \mathbb{R}. \tag{2.7.1}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Πράγματι, ἀπ'τήν $x = \sinh y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$, βρίσκομε $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$ ἀπό ὅπου προκύπτει ἡ (2.7.1).

Τώρα τό ὅτι ἡ Ar sinh εἶναι συνεχής καί γνησίως αὔξουσα συμπεραίνεται ἀπ'τήν (2.7.1).

Ἀνάλογα, ὁρίζονται καί οἱ ἀντίστροφες τῶν ἄλλων ὑπερβολικῶν συναρτήσεων. Ἔτσι, ἔχομε:

2) Ἡ συνάρτηση cosh δέν εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη καί ἑπομένως δέν ἔχει ἀντίστροφη. Ἀντίθετα οἱ περιορισμοί της $\cosh|[0,+\infty)$ καί $\cosh|(-\infty,0]$ ἔχουν ἀντίστοιχα ἀντίστροφες τίς

$$\mathrm{Ar}_+\cosh \quad \text{καί} \quad \mathrm{Ar}_-\cosh$$

πού εἶναι συνεχεῖς καί ἡ μέν πρώτη γνησίως αὔξουσα, ἡ δέ δεύτερη γνησίως φθίνουσα.

Εἶναι φανερό ὅτι

$$\mathcal{D}(\mathrm{Ar}_+\cosh) = [1,+\infty) \quad , \quad \mathcal{R}(\mathrm{Ar}_+\cosh) = [0,+\infty)$$

καί

$$\mathcal{D}(\mathrm{Ar}_-\cosh) = [1,+\infty) \quad , \quad \mathcal{R}(\mathrm{Ar}_-\cosh) = (-\infty,0].$$

Ἐπίσης, ὅπως προκύπτει ἡ (2.7.1), ἔτσι προκύπτουν καί οἱ

$$\mathrm{Ar}_+\cosh x = \log(x + \sqrt{x^2-1}) \quad , \quad x\in[1,+\infty),$$

$$\mathrm{Ar}_-\cosh x = \log(x - \sqrt{x^2-1}) \quad , \quad x\in[1,+\infty).$$

3) Ἡ ἀντίστροφη τῆς tgh εἶναι μία συνεχής καί γνησίως αὔξουσα συνάρτηση, συμβολίζεται μέ

$$\mathrm{Ar\,tgh}$$

καί εἶναι τέτοια ὥστε

$$\mathcal{D}(\mathrm{Ar\,tgh}) = (-1,1) \ , \ \mathcal{R}(\mathrm{Ar\,tgh}) = \mathbb{R}$$

$$\mathrm{Ar\,tgh}\, x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} \quad , \quad x\in(-1,1).$$

4) Ἡ ἀντίστροφη τῆς ctgh συμβολίζεται μέ

$$\mathrm{Ar\,ctgh}\,,$$

εἶναι συνεχής καί γνησίως φθίνουσα καί τέτοια ὥστε

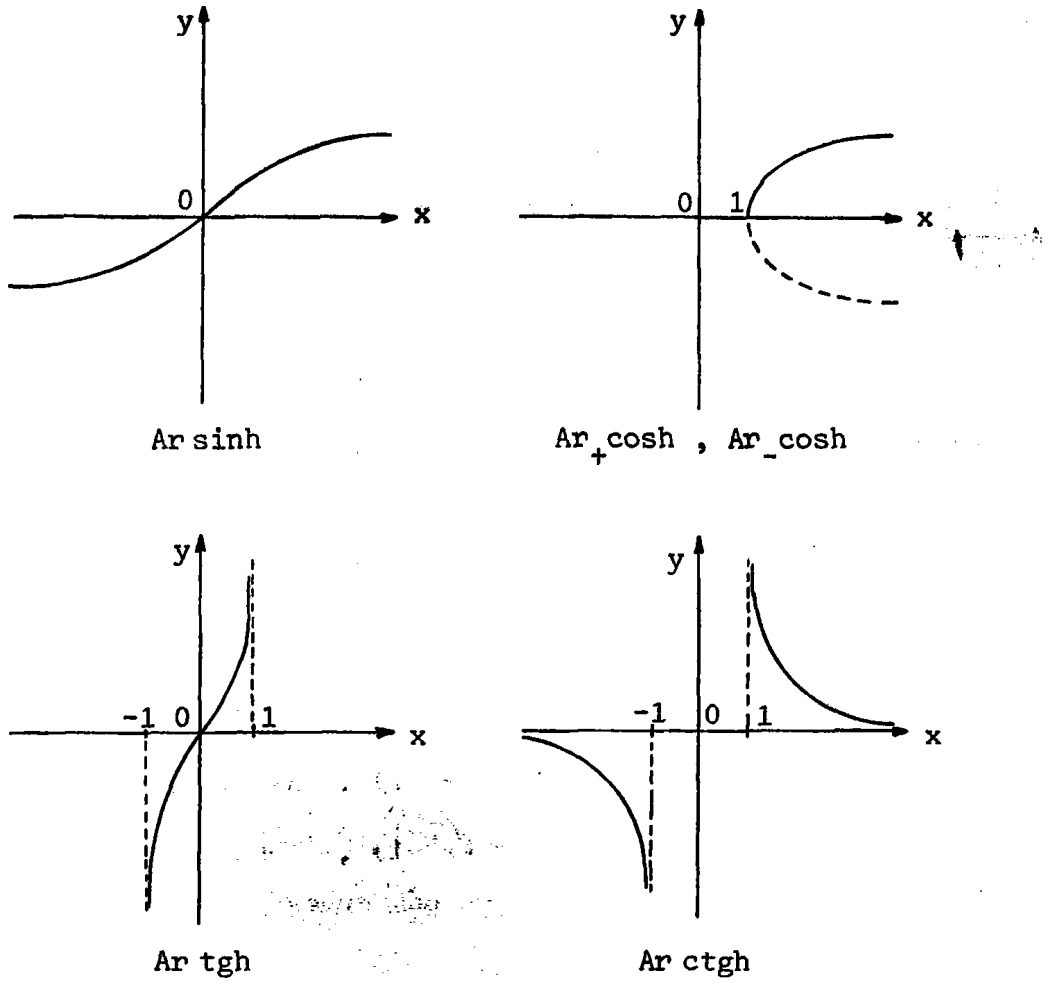
$$\mathcal{D}(\mathrm{Ar\,ctgh}) = (-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \quad \text{καί} \quad \mathcal{R}(\mathrm{Ar\,ctgh}) = \mathbb{R}-\{0\}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἐπίσης

$$\text{Ar ctgh}\, x = \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1}\ , \quad x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty).$$

Οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν ἀντιστρόφων ὑπερβολικῶν συναρτήσεων δίνονται στό ΣΧ. 9.



ΣΧΗΜΑ 9

2.8 ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Στίς προηγούμενες παραγράφους ὁρίστηκαν καί κατά κάποιο τρόπο μελετήθηκαν οἱ ἐκθετικές, λογαριθμικές, τριγωνομετρικές, κυκλομετρικές, ὑπερβολικές καί ἀντίστροφες ὑπερβολικές συναρτήσεις. Αὐτές μαζί μέ τίς σταθερές συναρτήσεις, τή συνάρτηση $y = x$, $x \in \mathbb{R}$ καθώς καί μέ ἐκεῖνες, πού

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

μποροῦν νά προκύψουν ἀπό ὅλες τίς παραπάνω μέ πεπερασμένου πλήθους προσθέσεις, ἀφαιρέσεις, πολλαπλασιασμούς, διαιρέσεις καί συνθέσεις, ὀνομάζονται **"στοιχειώδεις συναρτήσεις"**. Ἔτσι καί οἱ πολυωνυμικές (πραγματικές) συναρτήσεις, δηλαδή συναρτήσεις μέ τύπο

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad x \in \mathbb{R}$$

ὅπου $\nu \in \mathbb{N}$ καί $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu\} \subseteq \mathbb{R}$ καί οἱ ρητές (πραγματικές) συναρτήσεις, δηλαδή συναρτήσεις πού ἔχουν τή μορφή πηλίκου δύο πολυωνυμικῶν πραγματικῶν συναρτήσεων, εἶναι στοιχειώδεις συναρτήσεις.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.8.1. **Ἄν $P_0, P_1, \ldots, P_\nu$ εἶναι ὁποιεσδήποτε πολυωνυμικές (πραγματικές) συναρτήσεις, τότε κάθε συνάρτηση φ πού ἐκ ταυτότητος ἱκανοποιεῖ τήν**

$$P_\nu(x)[\varphi(x)]^\nu + P_{\nu-1}[\varphi(x)]^{\nu-1} + \ldots + P_1(x)\varphi(x) + P_0(x) = 0,$$

ὀνομάζεται "ἀλγεβρική συνάρτηση".

Ἑπομένως, οἱ συναρτήσεις

$\varphi(x) = c$, ὅπου c σταθερός ἀριθμός,

$\varphi(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$,

$\varphi(x) = 3x^2 + 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$,

$\varphi(x) = (x-1) : \sqrt[4]{x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

εἶναι ἀλγεβρικές συναρτήσεις, διότι μποροῦμε νά λάβωμε ἀντίστοιχα

$P_0(x) = c$, $P_1(x) = 1$

$P_0(x) = x$, $P_1(x) = 1$

$P_0(x) = -3x^2 - 2x - 1$, $P_1(x) = 1$

καί

$P_0(x) = -(x-1)^4$, $P_1(x) = P_2(x) = P_3(x) = 0$, $P_4(x) = x$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.8.2. **Κάθε στοιχειώδης συνάρτηση πού δέν εἶναι ἀλγεβρική ὀνομάζεται "ὑπερβατική".**

Στήν Ἀνάλυση ἀποδεικνύεται ὅτι οἱ συναρτήσεις $\exp_\alpha$, $\log_\alpha$, tg, Ar sin κ.λ.π. εἶναι ὑπερβατικές συναρτήσεις.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2.9 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἂν P, Q εἶναι δυό πολυωνυμικές συναρτήσεις νά ἀποδειχτῆ ὅτι τό

$$\lim_{+\infty} \frac{P}{Q}$$

πάντοτε ὑπάρχει. Νά ἐξεταστῆ πότε τοῦτο εἶναι πεπερασμένο καί πότε κατ' ἐκδοχήν.

2. Νά βρεθοῦν τά πεδία ὁρισμοῦ καί τιμῶν τῶν συναρτήσεων

$$f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}, \quad g(x) = \frac{x^2+1}{x^2-2x+1}, \quad h(x) = \frac{x^2+2x+\alpha}{x^2+4x+\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

3. Νά ἀποδειχτῆ ὅτι οἱ ἐκθετικές συναρτήσεις εἶναι συνεχεῖς στό πεδίο ὁρισμοῦ τους.

4. Ν'ἀποδειχτῆ ὅτι ἡ ἐξίσωση

$$x\,2^x = 1$$

ἔχει ἀκριβῶς μιά ρίζα στό διάστημα $(\frac{1}{2}, 1)$ καί ἡ

$$x^5 - 3x = 1$$

τουλάχιστο μία στό διάστημα $(1,2)$.

5. Ν'ἀποδειχτοῦν οἱ ἰδιότητες α) μέχρι η) τῆς παραγράφου 2.1 καί α) μέχρι ζ) τῆς παραγράφου 2.2.

6. Ν'ἀποδειχτῆ ὅτι

α) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_\alpha(1+x)}{x} = \log_\alpha e$,

β) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha^x-1}{x} = \log \alpha$,

γ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\mu-1}{x} = \mu$, ὅπου $\mu \in \mathbb{R}$.

7. Ν'ἀποδειχτῆ ὅτι γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$ ἰσχύει

$$e^x \geqq 1+x.$$

8. Ν'ἀποδειχτῆ ὅτι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

α) γιά κάθε $\rho\in\mathbb{Q}$ ἡ συνάρτηση $f(x)=x^{\rho}$ εἶναι συνεχής στό σύνολο ὅπου αὐτή ὁρίζεται,

β) γιά κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ ἡ συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $x\in(0,+\infty)$ εἶναι συνεχής,

γ) γιά κάθε $x\in\mathbb{R}$, ἰσχύει

$$\lim_{\nu}\left(1+\frac{x}{\nu}\right)^{\nu}=e^{x}.$$

{Ὑπόδειξη: θέτομε $k(\nu)=[\frac{\nu}{x}]$, ὁπότε ἡ γ) προκύπτει ἀπ' τή β) καί τό γεγονός ὅτι $\left(1+\frac{1}{k(\nu)+1}\right)^{k(\nu)x}<\left(1+\frac{x}{\nu}\right)^{\nu}\leq\left(1+\frac{1}{k(\nu)}\right)^{(k(\nu)+1)x}$}.

9. Ν'ἀποδειχτοῦν οἱ ἰδιότητες α) μέχρι καί ιγ) τῆς παραγράφου 2.6.

10. Νά βρεθοῦν τά παρακάτω ὅρια:

α) $\lim\limits_{\nu\to\infty}(\nu^2+\nu+1)^{-\frac{1}{\nu}}$, β) $\lim\limits_{\nu\to\infty}\alpha\nu^2:(\nu+\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}$,

γ) $\lim\limits_{\nu\to\infty}\nu\log(1-\frac{1}{\nu^2})$, δ) $\lim[\log\nu+\log(\log\frac{\nu+1}{\nu})]$.

11. Νά βρεθοῦν τά παρακάτω ὅρια:

α) $\lim\limits_{x\to2}(x^2-3x+2):(x^2-4)$, β) $\lim\limits_{x\to1}[(1-x)^{-1}-3(1-x^3)^{-1}]$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\alpha}-\sqrt{x})$, δ) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}$,

ε) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$, στ) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$,

ζ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x^2})^{x}$, η) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}$.

12. Νά βρεθοῦν τά ὅρια:

α) $\lim\limits_{\nu\to\infty}\sin(\frac{1}{2}\pi\sqrt[\nu]{\nu})$, β) $\lim\limits_{x\to1}(\sin\frac{1}{2}\pi[x])$, γ) $\lim\limits_{x\to1}[\sin\frac{1}{2}\pi x]$.

13. Νά μελετηθῆ ἡ συνέχεια τῶν συναρτήσεων:

α) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

β) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x > 0 \\ x, & x \leq 0 \end{cases}$

γ) $f(x) = 3^{x\,\mathrm{tg}\,(\sin \alpha x)}$, ὅπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

14. Ν'ἀποδειχτῆ ὅτι κάθε συνάρτηση γράφεται σάν ἄθροισμα μιᾶς ἄρτιας καί μιᾶς περιττῆς συναρτήσεως.

15. Νά βρεθοῦν οἱ ἀντίστροφες τῶν παρακάτω συναρτήσεων, ἤ ἄν τοῦτο δέν εἶναι δυνατό, οἱ ἀντίστροφες κατάλληλων περιορισμῶν τους:

α) $1:(x-1)$, $x \in \mathbb{R}-\{1\}$, β) $(x^2+1)^{\frac{1}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$, γ) $2\sin 3x$, $x \in \mathbb{R}$,

δ) $\dfrac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}} + 1$, $x \in \mathbb{R}$, ε) $e^{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}$, $x \neq k\pi$, στ) $\log\cosh x$, $x \in \mathbb{R}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 3

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

3.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Θεωροῦμε μιά πραγματική συνάρτηση $f(x)$, $x\in\Delta$ ὅπου Δ εἶναι ἕνα διάστημα τῆς πραγματικῆς εὐθείας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1.1. Ἡ συνάρτηση f λέμε ὅτι "παραγωγίζεται (ἤ ἔχει παράγωγο, ἤ εἶναι παραγωγίσιμη) σέ ἕνα σημεῖο $\alpha\in\Delta$, ἄν τό ὅριο

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$$

ὑπάρχη καί εἶναι πεπερασμένος ἀριθμός. Τό ὅριο τοῦτο λέγεται "ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως f στό α" καί παρατηρῶντας ὅτι ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τό σημεῖο α, παριστάνεται μέ τά σύμβολα:

$$f'(\alpha),\ \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=\alpha},\ \left[\frac{d}{dx}f(x)\right]_{x=\alpha},\ Df(\alpha).$$

Ἄν συμβολίσωμε μέ $g(h)$ τό πηλίκο διαφορῶν

$$\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$$

παρατηροῦμε ὅτι ἡ παράγωγος $f'(\alpha)$ τῆς συναρτήσεως f στό σημεῖο α δέν εἶναι τίποτε ἄλλο παρά ἡ κοινή τιμή τῶν δεξιά καί ἀριστερά ὁρίων τῆς g στό σημεῖο 0, ἐφ'ὅσον καί τά δύο πλευρικά αὐτά ὅρια ὑπάρχουν.

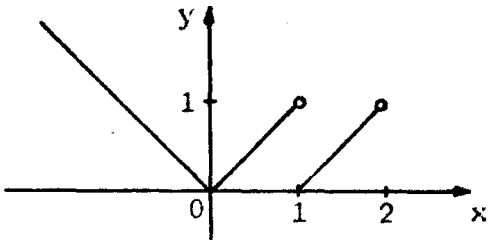
Παράδειγμα 3.1.1

Ἡ συνάρτηση

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$f(x) = \begin{cases} -x\ , & x \leq 0 \\ x-[x], & 0 < x < 2 \end{cases}$$

πού παριστάνεται γεωμετρικά στό ΣΧ. 1, εἶναι παραγωγίσιμη σέ κάθε σημεῖο α τοῦ διαστήματος $(-\infty,2)$ μέ $\alpha \neq 0,1$.



ΣΧΗΜΑ 1

Πραγματικά· ἄν

1) $\alpha < 0$, τότε διά $h < 0$ ἔχομε

$$\frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h} = -1$$

καί διά $0 < h < -\alpha$

$$\frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h} = -1 .$$

Ἑπομένως καί $f'(\alpha) = -1$.

2) $\alpha = 0$, τότε, διά $h < 0$, ἔχομε

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = -1,$$

ἐνῶ, διά $0 < h < 1$

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = 1 .$$

ἔτσι ἡ παράγωγος στό σημεῖο 0 δέν ὑπάρχει.

3) $\alpha \in (0,1) \cup (1,2)$, τότε ἄν μέν $\max\{-\alpha, -|1-\alpha|\} < h < 0$, ἔχομε $[\alpha+h] = [\alpha]$ ὁπότε

$$\frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h} = 1,$$

ἄν δέ $0 < h < \min\{|1-\alpha|, 2-\alpha\}$, ἔχομε πάλι $[\alpha+h] = [\alpha]$ ὁπότε

$$\frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h} = 1$$

καί ἄρα $f'(\alpha) = 1$.

4) $\alpha = 1$, τότε διά $-1 < h < 0$, ἔχομε

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 1 + \frac{1}{h}$$

δηλαδή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\lim_{h\to 0-0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0-0} (1+\frac{1}{h}) = -\infty ,$$

πού σημαίνει ὅτι ἡ παράγωγος τῆς f στό σημεῖο 1 δέν ὑπάρχει.

Παρατηροῦμε ἐδῶ ὅτι γιά $0<h<1$, ἔχομε

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

καί ἑπομένως

$$\lim_{h\to 0+0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 1. \quad \blacktriangle$$

Ἡ πρόταση πού ἀκολουθεῖ δίνει μιά συνθήκη μέ βάση τήν ὁποία εἰσάγεται ἡ ἔννοια τῆς παραγώγου σέ χώρους ὅπου δέν μποροῦμε νά λάβωμε πηλίκο, ὅπως εἶναι τό σύνολο τῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1.1. Μιά συνάρτηση f παραγωγίζεται σέ ἕνα σημεῖο $\alpha\in\Delta$, τότε καί μόνο τότε ἄν ὑπάρχουν ἕνας ἀριθμός A καί μιά πραγματική συνάρτηση ψ συνεχής στό 0 μέ $\psi(0)=0$ καί

$$f(\alpha+h) = f(\alpha) + A\,h + h\psi(h) \tag{3.1.1}$$

γιά κάθε h μέ $\alpha+h\in\Delta$. Ἐπί πλέον ὁ ἀριθμός αὐτός A εἶναι ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως f στό α.

Ἀπόδειξη. Ὑποθέτοντας ὅτι ἡ f ἔχει παράγωγο $f'(\alpha)$ στό α, θέτομε $A=f'(\alpha)$ καί

$$\psi(h) = \begin{cases} \dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} - A , & h\neq 0 \\ 0 , & h=0 \end{cases}$$

ὁπότε ἡ συνθήκη (3.1.1) τῆς προτάσεως ἱκανοποιεῖται.

Ἀντίστροφα, ἄν ἰσχύη ἡ συνθήκη (3.1.1), τότε διά $h\neq 0$, ἔχομε

$$\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} - A = \psi(h)$$

καί ἐπειδή $\lim_{0}\psi = 0$, $A = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ δηλαδή $A = f'(\alpha)$. $\blacktriangle$

Παρατήρηση 3.1.1.

Ἡ σχέση (3.1.1) μπορεῖ νά γραφῆ ἰσοδύναμα καί ὡς

$$f(\alpha+h) = f(\alpha)+Ah+|h|\psi(h) \tag{3.1.1$'$}$$

γιά κάθε h μέ $\alpha+h\in\Delta$. Ἡ (3.1.1)' χρησιμοποιεῖται στόν ὁρισμό τῆς πα-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ραγώγου συναρτήσεως σέ περιπτώσεις διανυσματικῶν χώρων πού εἶναι πιό γενικοί ἀπό τόν **R** καί στούς ὁποίους εἶναι ὡρισμένη μιά ἔννοια ἀνάλογη μέ τήν ἀπόλυτη τιμή πού ὀνομάζεται στάθμη (norm).

Ἀπό τή συνθήκη (3.1.1) παρατηροῦμε ὅτι $\lim_{h\to 0} f(\alpha+h) = f(\alpha)$ καί ἑπομένως ἰσχύει ἡ πρόταση:

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1.2. **Ἄν μιά συνάρτηση f ἔχη παράγωγο στό σημεῖο $\alpha\in\Delta$ τότε αὐτή εἶναι συνεχής στό α.**

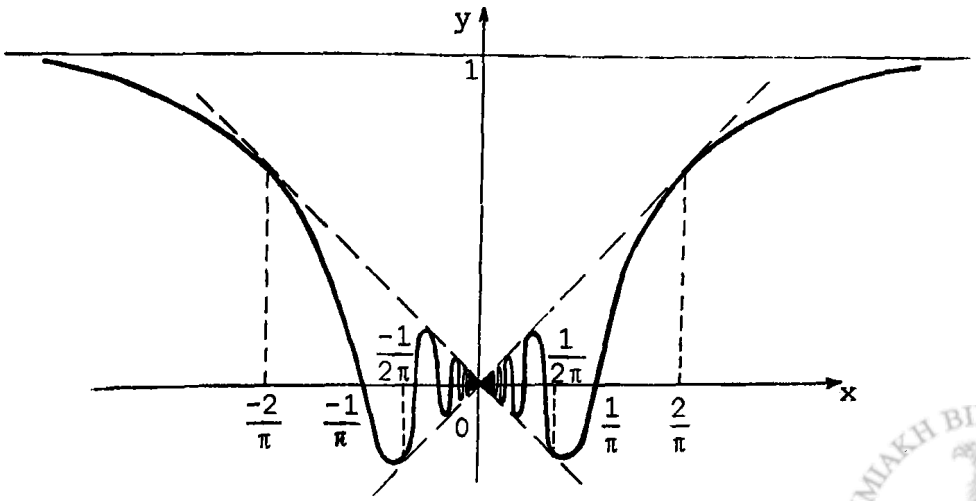
Τό ἀντίστροφο τῆς παραπάνω προτάσεως 3.1.2 δέν ἰσχύει γενικά. Δηλαδή ὑπάρχουν συναρτήσεις οἱ ὁποῖες εἶναι συνεχεῖς σέ ἕνα σημεῖο α, ἀλλά δέν εἶναι παραγωγίσιμες σ'αὐτό. Ἔτσι, γιά παράδειγμα, ἡ συνάρτηση τοῦ παραδείγματος 3.1.1 εἶναι μέν συνεχής στό 0, δέν εἶναι ὅμως παραγωγίσιμη. Ἐξ'ἄλλου, μποροῦμε γενικώτερα νά μιλᾶμε γιά πλευρικές παραγώγους μιᾶς συνεχοῦς συναρτήσεως f στό σημεῖο α, δηλαδή γιά δεξιά καί ἀριστερά παράγωγο πού παριστάνονται ἀντίστοιχα μέ $f'_+(\alpha)$ καί $f'_-(\alpha)$ ἤ $D_+f(\alpha)$ καί $D_-f(\alpha)$ καί ὁρίζονται νά εἶναι

$$f'_+(\alpha) = \lim_{h\to 0+0} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} \quad \text{καί} \quad f'_-(\alpha) = \lim_{h\to 0-0} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}.$$

Ἄς σημειωθῆ ὅτι ὑπάρχουν συναρτήσεις πού εἶναι συνεχεῖς καί δέν ἔχουν καμιά πλευρική παράγωγο. Μιά τέτοια δίνεται στό παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα 3.1.2

Στό ΣΧ. 2 παριστάνεται ἡ συνάρτηση



ΣΧΗΜΑ 2

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

ἡ ὁποία εἶναι συνεχής στό 0, ἀλλά δέν ἔχει πλευρικές παραγώγους.

Πραγματικά παρατηροῦμε ὅτι $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \sin\frac{1}{h}$, ὁπότε συνδυάζοντας τήν πρόταση 1.10.5 μέ τό γεγονός ὅτι τό ὅριο τῆς sin δέν ὑπάρχει στά κατ'ἐκδοχήν σημεῖα, προκύπτει ὅτι οἱ πλευρικές παράγωγοι τῆς f στό σημεῖο 0 δέν ὑπάρχουν. ▲

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1.2. Μιά συνάρτηση f εἶναι "παραγωγίσιμη" ἐπί ἑνός διαστήματος Δ ἄν αὐτή εἶναι παραγωγίσιμη, σέ κάθε σημεῖο του. Ἡ συνάρτηση $f'(x)$, $x \in \Delta$ πού συχνά παριστάνεται καί $[f(x)]'$, $x \in \Delta$ ὀνομάζεται "παράγωγος" τῆς f ἐπί τοῦ Δ.

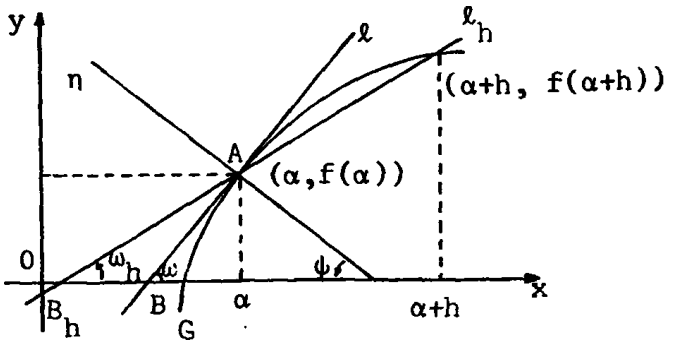
Φυσικά, στήν περίπτωση πού $\Delta = [\alpha,\beta]$, στό σημεῖο α θεωρεῖται ἡ δεξιά καί στό σημεῖο β ἡ ἀριστερά παράγωγος.

3.2 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Ἡ ἔννοια τῆς παραγώγου, γεωμετρικά, μπορεῖ νά ἑρμηνευτῆ ὡς ἑξῆς:

Ἔστω G ἡ καμπύλη πού παριστάνει τό γράφημα μιᾶς συνεχοῦς συναρτήσεως f πού εἶναι παραγωγίσιμη σ'ἕνα σημεῖο α, καθώς καί τά σημεῖα $(\alpha,f(\alpha))$ καί $(\alpha+h, f(\alpha+h))$ αὐτῆς, ὅπου $h \neq 0$ μέ $\alpha+h \in \mathcal{D}(f)$ (βλ. ΣΧ. 3). Ἡ εὐθεῖα γραμμή ℓ_h πού ὁρίζεται ἀπό τά σημεῖα αὐτά σχηματίζει μιά γωνία xB_hA μέ τή θετική διεύθυνση τοῦ x-ἄξονα, μέ μέτρο ω_h (σέ ἀκτίνια), τῆς ὁποίας ἡ (τριγωνομετρική) ἐφαπτομένη εἶναι

$$\operatorname{tg}\omega_h = \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} .$$



ΣΧΗΜΑ 3

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἡ ὁριακή θέση τῆς εὐθείας γραμμῆς ℓ_h ὅταν $h \to 0$, εἶναι ἡ ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμή ℓ τῆς καμπύλης G στό σημεῖο $(\alpha, f(\alpha))$. Σ'αὐτή τήν ὁριακή θέση ἡ γωνία xB_hA γίνεται xBA (γωνία πού σχηματίζεται ἀπ'τήν ℓ καί τή θετική διεύθυνση τοῦ x-ἄξονα) μέ μέτρο ω καί τέτοια ὥστε

$$tg\omega = \lim_{h \to 0} tg\omega_h,$$

δηλαδή

$$tg\omega = f'(\alpha).$$

Ἑπομένως ἡ παράγωγος $f'(\alpha)$ σέ ἕνα σημεῖο α μιᾶς συναρτήσεως f, ταυτίζεται μέ τήν κλίση τῆς ἐφαπτομένης εὐθείας στό σημεῖο $(\alpha, f(\alpha))$ τοῦ γραφήματός της G, δηλαδή μέ τήν (τριγωνομετρική) ἐφαπτομένη τοῦ μέτρου τῆς γωνίας πού σχηματίζεται ἀπό τή θετική διεύθυνση τοῦ x-ἄξονα καί τήν ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμή τοῦ γραφήματος τῆς συναρτήσεως στό σημεῖο $(\alpha, f(\alpha))$.

Γεωμετρικά, μποροῦμε νά ἑρμηνεύσωμε καί τήν μή ὕπαρξη τῆς παραγώγου. Ἔτσι ἡ παράγωγος μιᾶς συνεχοῦς συναρτήσεως f σέ ἕνα σημεῖο α δέν ὑπάρχει, ὅταν

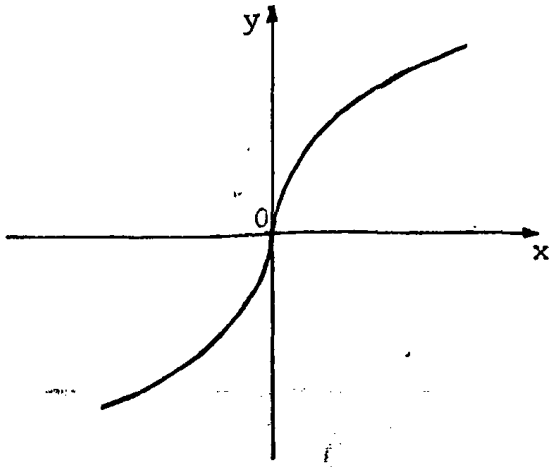
1) δέν ὑπάρχη ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμή τῆς καμπύλης (πού παριστάνει τό γράφημα τῆς συναρτήσεως) στό σημεῖο $(\alpha, f(\alpha))$. Ἡ συνάρτηση τοῦ παραδείγματος 3.1.1 ἔχει τέτοιο γράφημα πού στό σημεῖο (0,0) δέν ὑπάρχει ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμή. Ἐπίσης καί σ'ἐκείνη τοῦ παραδείγματος 3.1.2 βλέπομε ὅτι στό σημεῖο (0,0) τοῦ γραφήματός της δέν ὑπάρχει ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμή. Καί πραγματικά, εἴδαμε ὅτι, οἱ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων τούτων στό σημεῖο 0 δέν ὑπάρχουν.

2) ὑπάρχη μέν ἡ ἐφαπτομένη, ἀλλά εἶναι κάθετη πρός τόν x-ἄξονα, ὁπότε ἡ (τριγωνομετρική) ἐφαπτομένη τοῦ μέτρου τῆς γωνίας πού σχηματίζει αὐτή μέ τή θετική διεύθυνση τοῦ x-ἄξονα εἶναι $+\infty$ ἤ $-\infty$. Τοῦτο, γιά παράδειγμα, συμβαίνει μέ τή συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

πού στό σημεῖο (0,0) τό γράφημά της (βλ. ΣΧ. 4) ἔχει τή μοναδική ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμή κάθετη πρός τόν x-ἄξονα.



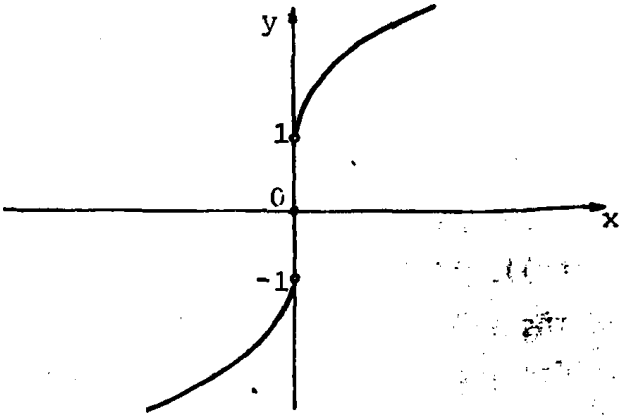
ΣΧΗΜΑ 4

Παρατήρηση 3.2.1.

Μέ ἀφορμή τά παραπάνω, μποροῦμε νά δεχτοῦμε τήν ὕπαρξη καί τῆς "κατ'ἐκδοχήν" παραγώγου, δηλαδή καί ὅταν αὐτή παίρνει τιμές $+\infty$, ἤ $-\infty$, ἀλλά πάντοτε μέ ἐπιφύλαξη. Καί τοῦτο γιατί μπορεῖ νά συμβαίνουν τά ἀκόλουθα:

1) Ἡ συνάρτηση νά εἶναι κατ'ἐκδοχήν παραγωγίσιμη, ἀλλά δέν εἶναι συνεχής. Τοῦτο φαίνεται στή συνάρτηση (βλ. ΣΧ. 5)

$$f(x) = \begin{cases} 1+\sqrt{x}\ , & x > 0 \\ 0\ , & x = 0 \\ -1-\sqrt{-x}\ , & x < 0 \end{cases}$$



ΣΧΗΜΑ 5

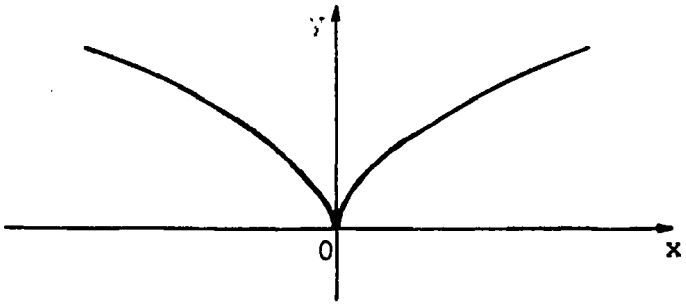
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὅπου $f'_+(0) = +\infty = f'_-(0)$, ἀλλά $f(0+0) = 1$, $f(0) = 0$ καί $f(0-0) = -1$, δηλαδή ἡ πρόταση 3.1.2 δέν ἰσχύει.

2) Ὅπως δείχνεται (βλ. ΣΧ. 6) στή συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{|x|}\ ,\quad x \in \mathbb{R}$$

στό σημεῖο (0,0), ἡ ἐφαπτομένη εὐθεῖα εἶναι κάθετη πρός τόν x-ἄξονα,



ΣΧΗΜΑ 6

ἡ συνάρτηση f εἶναι συνεχής στό 0, ἀλλά δέν εἶναι παραγωγίσιμη σ'αὐτό, ἀφοῦ $f'_-(0) = -\infty$ καί $f'_+(0) = +\infty$. Σ'αὐτή τήν περίπτωση ἡ συνάρτηση παρουσιάζει μιά "αἰχμή" στό σημεῖο 0.

Ὑποθέτοντας, τώρα, ὅτι ὑπάρχει ἡ (πεπερασμένη) παράγωγος μιᾶς συναρτήσεως f σ'ἕνα σημεῖο α, θά βροῦμε τή συνάρτηση πού τό γράφημά της παριστάνει τήν ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμή στό σημεῖο (α,f(α)), δηλαδή τήν ἐξίσωση πού περιγράφει τήν ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμή στό σημεῖο (α,f(α)) πάνω στό ἐπίπεδο.

Θεωροῦμε τό σημεῖο (x,y) πάνω στήν εὐθεῖα αὐτή γραμμή ℓ, ὁπότε θά πρέπει

$$\frac{y-f(\alpha)}{x-\alpha} = \operatorname{tg}\omega = f'(\alpha)$$

δηλαδή

$$y = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha).$$

Ἔστω η ἡ εὐθεῖα γραμμή πού εἶναι κάθετη (ΣΧ. 3) πρός τήν εὐθεῖα ℓ στό σημεῖο (α,f(α)). Θά βροῦμε καί αὐτῆς τήν ἐξίσωση. Πραγματικά, ἄν ψ εἶναι τό μέτρο τῆς γωνίας πού σχηματίζει ἡ η μέ τήν ἀρνητική διεύθυνση τοῦ x-ἄξονα, τότε $\psi + \omega = \frac{\pi}{2}$. Ἄν, λοιπόν, (x,y) εἶναι ὁποιοδήποτεση-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

μεῖο πάνω στήν η, τότε θά πρέπει νά ἰσχύη

$$\frac{y-f(\alpha)}{x-\alpha} = -\mathrm{tg}\,\psi = -\mathrm{ctg}\,\omega = -\frac{1}{\mathrm{tg}\,\omega} = -\frac{1}{f'(\alpha)}$$

ἄν $f'(\alpha) \neq 0$, ἐνῶ

$$x = \alpha$$

ἄν $f'(\alpha) = 0$. Ἐπομένως ἡ ἐξίσωση τῆς καθέτου η στό σημεῖο $(\alpha, f(\alpha))$ εἶναι

$$y = f(\alpha) - \frac{(x-\alpha)}{f'(\alpha)} \quad , \text{ ἄν } f'(\alpha) \neq 0$$

καί

$$x = \alpha \ , \quad \text{ἄν } f'(\alpha) = 0.$$

Μέ ἀφορμή τήν παραπάνω γεωμετρική θεώρηση τῆς ἔννοιας τῆς παραγώγου θά πρέπει νά ἀναφερθῆ ὅτι μέχρι τόν $17^{ον}$ αἰῶνα ὑπῆρχε τό πρόβλημα τῆς γενικεύσεως τῆς ἔννοιας τῆς εὐθείας γραμμῆς πού εἶναι ἐφαπτομένη σ'ἕνα σημεῖο μιᾶς καμπύλης. Ὁ Leibniz εἰσάγοντας τήν ἔννοια τῆς παραγώγου ἔλυσε τό πρόβλημα αὐτό ἀνακαλύπτοντας ταυτόχρονα καί πολλές ἄλλες ἐφαρμογές τῆς παραγώγου. Τήν ἴδια ἐποχή τόν Newton ἀπασχολοῦσε ἡ ἔκφραση τῆς ἔννοιας τῆς στιγμιαίας ταχύτητας καί ἐπιταχύνσεως κάποιου κινητοῦ. Μάλιστα δέ, ὁ Newton, ὁρίζοντας τήν παράγωγο ἄρχισε νά χρησιμοποιῆ τήν ἔννοια τῆς ταχύτητας, κάποιου σημείου πού κινεῖται σέ εὐθεῖα γραμμή, σάν τήν παράγωγο τοῦ διαστήματος πού διατρέχει τό σημεῖο, ὅπου ἡ ἀπόσταση αὐτή ἐκφράζεται σάν συνάρτηση τοῦ χρόνου. Γιά παράδειγμα, ἄν $s = f(t)$ εἶναι ἡ συνάρτηση ἀποστάσεως, τότε ἡ ταχύτητα υ, πού εἶναι καί αὐτή μιά συνάρτηση τοῦ χρόνου t, δίνεται ἀπ'τόν τύπο $\upsilon = \frac{ds}{dt}$. Πέρα ἀπ'τήν ταχύτητα καί ἡ ἐπιτάχυνση γ δίνεται ἀπ'τόν τύπο $\gamma = \frac{d\upsilon}{dt}$. Ἔτσι, λοιπόν, φαίνεται ὅτι ἡ ἔννοια τῆς παραγώγου γεννήθηκε ἀπ'τήν ἀνάγκη ἐπιλύσεως προβλημάτων ἀμέσου ἐφαρμογῆς. Ἀργότερα, βέβαια, ἀναπτύχτηκε μιά ὁλόκληρη θεωρία γιά τήν ἔννοια αὐτή, ὁ διαφορικός λογισμός καί ἀποδείχτηκε ὅτι εἶναι τό πρωταρχικό μέσο γιά τήν ἐπίλυση τῶν προβλημάτων πού προκύπτουν γενικά ἀπ'τήν ἐφαρμογή.

3.3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Εἶναι ἀναγκαῖο νά ἐξεταστῆ ἡ παραγωγισιμότητα τῶν στοιχειωδῶν συν-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

αρτήσεων καί νά βρεθοῦν τρόποι ὑπολογισμοῦ τῶν παραγώγων. Γιά τό σκοπό αὐτό πρέπει νά δώσωμε τίς ἰδιότητες τῶν παραγώγων πού ἀναφέρονται σέ πεπερασμένου πλήθους ἀριθμητικές πράξεις καί συνθέσεις συναρτήσεων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.3.1. Ἄν λ εἶναι πραγματικός ἀριθμός καί f,g δυό συναρτήσεις παραγωγίσιμες σέ ἕνα σημεῖο $\alpha \in \mathcal{D}(f)\cap\mathcal{D}(g)$, τότε καί οἱ συναρτήσεις λf, $f+g$ καί fg εἶναι παραγωγίσιμες στό α καί μάλιστα

i) $(\lambda f)'(\alpha) = \lambda f'(\alpha)$

ii) $(f+g)'(\alpha) = f'(\alpha)+g'(\alpha)$

iii) $(f\cdot g)'(\alpha) = f'(\alpha)\cdot g(\alpha)+f(\alpha)\cdot g'(\alpha)$.

Ἐπί πλέον ἄν $g(\alpha)\neq 0$, τότε καί οἱ συναρτήσεις $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ εἶναι παραγωγίσιμες στό α καί μάλιστα

iv) $(\frac{1}{g})'(\alpha) = -g'(\alpha)/g^2(\alpha)$

v) $(\frac{f}{g})'(\alpha) = [f'(\alpha)\cdot g(\alpha)-f(\alpha)\cdot g'(\alpha)]/g^2(\alpha)$.

Ἄν οἱ συναρτήσεις f καί g εἶναι παραγωγίσιμες τότε οἱ παραπάνω σχέσεις γράφονται

i)′ $(\lambda f)' = \lambda f'$

ii)′ $(f+g)' = f'+g'$

iii)′ $(fg)' = f'\cdot g+f\cdot g'$

καί ἄν ἡ συνάρτηση g δέν ἔχη καμιά ρίζα, τότε

iv)′ $(\frac{1}{g})' = -g'/g^2$

v)′ $(\frac{f}{g})' = [f'\cdot g-f\cdot g']/g^2$.

Ἀπόδειξη. Ἀπό τήν πρόταση 3.1.1 ἔχομε

$$f(\alpha+h) = f(\alpha)+f'(\alpha)\cdot h+h\,\psi_f(h)$$

καί

$$g(\alpha+h) = g(\alpha)+g'(\alpha)\cdot h+h\,\psi_g(h)$$

ὅπου $\lim_0 \psi_f = 0 = \lim_0 \psi_g$. Ἑπομένως ἰσχύει ὅτι

i)

$$\lambda f(\alpha+h) = \lambda f(\alpha)+\lambda f'(\alpha)h+h\cdot\lambda\psi_f(h)$$

ὅπου $\lim_0 \lambda\psi_f = \lambda\cdot\lim_0 \psi_f = 0$, ὁπότε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$(\lambda f)'(\alpha) = \lambda f'(\alpha)\cdot$$

ii)

$$(f+g)(\alpha+h) = f(\alpha+h) + g(\alpha+h) = [f(\alpha) + f'(\alpha)h + h\cdot\psi_f(h)] + [g(\alpha) +$$

$$+g'(\alpha)h + h\cdot\psi_g(h)] = (f+g)(\alpha) + (f'(\alpha) + g'(\alpha))h + h(\psi_f(h) + \psi_g(h)),$$

ὅπου $\lim\limits_{h\to 0} (\psi_f(h) + \psi_g(h)) = 0$, ὁπότε

$$(f+g)'(\alpha) = f'(\alpha) + g'(\alpha) .$$

iii)

$$(f\cdot g)(\alpha+h) = f(\alpha+h)\cdot g(\alpha+h) =$$

$$= [f(\alpha) + f'(\alpha)h + h\cdot\psi_f(h)] \cdot [g(\alpha) + g'(\alpha)\, h + h\cdot\psi_g(h)] =$$

$$= (f\cdot g)(\alpha) + [f'(\alpha)\cdot g(\alpha) + f(\alpha)\cdot g'(\alpha)]h + h[f(\alpha)\cdot\psi_g(h)+$$

$$+ hf'(\alpha)\cdot g'(\alpha)+hf'(\alpha)\cdot\psi_g(h)+g(\alpha)\cdot\psi_f(h)+$$

$$+hg'(\alpha)\cdot\psi_f(h)+h\psi_f(h)\cdot\psi_g(h)] ,$$

ὅπου

$$\lim_{h\to 0} [f(\alpha)\cdot\psi_g(h)+hf'(\alpha)\cdot g'(\alpha)+hf'(\alpha)\cdot\psi_g(h)+g(\alpha)\cdot\psi_f(h)+$$

$$+hg'(\alpha)\cdot\psi_f(h) + h\psi_f(h)\cdot\psi_g(h)] = 0$$

ὁπότε

$$(f\cdot g)'(\alpha) = f'(\alpha)\cdot g(\alpha) + f(\alpha)\cdot g'(\alpha).$$

iv) Ἐπειδή $g(\alpha)\neq 0$ ἀπ'τήν Πρόταση (1.13.1) ὑπάρχει περιοχή U τοῦ α μέ $g(\alpha+h)\neq 0$ γιά κάθε h μέ $\alpha+h \in U$. Περιοριζόμαστε στήν περιοχή U καί ἔχομε:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(\alpha) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot\left[\frac{1}{g(\alpha+h)} - \frac{1}{g(\alpha)}\right] = -\lim_{h\to 0} \frac{1}{g(\alpha)\cdot g(\alpha+h)}\cdot\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h} =$$

$$= -\frac{1}{g^2(\alpha)}\cdot g'(\alpha).$$

v) Ἀπ'τήν iii) καί iv) ἔχομε

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\alpha) = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(\alpha) = f'(\alpha)\cdot\frac{1}{g(\alpha)} - f(\alpha)\cdot\frac{g'(\alpha)}{g^2(\alpha)} = \frac{f'(\alpha)\cdot g(\alpha) - f(\alpha)\cdot g'(\alpha)}{g^2(\alpha)} . \blacktriangle$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.3.2 (Παράγωγος σύνθετης συναρτήσεως). Ἄν ἡ συνάρτηση f εἶναι παραγωγίσιμη σ'ἕνα σημεῖο α καί ἡ g παραγωγίσιμη στό f(α) τότε καί ἡ g o f εἶναι παραγωγίσιμη στό σημεῖο α καί μάλιστα

$$(g\circ f)'(\alpha) = g'[f(\alpha)]\cdot f'(\alpha).$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἂν ἐπί πλέον οἱ συναρτήσεις f καί g εἶναι παραγωγίσιμες, τότε τοῦτο ἰσχύει γιά κάθε $\alpha \in \mathcal{D}(g \circ f)$, ὁπότε ἔχομε

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f' .$$

Ἀπόδειξη. Ἀπ' τήν πρόταση 3.3.1 διά τυχόν h μέ $\alpha+h \in \mathcal{D}(f)$ ἔχομε

$$f(\alpha+h) = f(\alpha) + hf'(\alpha) + h\psi_f(h)$$

ὅπου $\lim_0 \psi_f = 0$. Θέτομε $\beta = f(\alpha)$ καί $k = f(\alpha+h) - f(\alpha)$· ἑπομένως καί

$$g(\beta+k) = g(\beta) + kg'(\beta) + k\psi_g(k)$$

ὅπου $\lim_0 \psi_g = 0$, διότι ἡ g εἶναι παραγωγίσιμη στό β. Ἄρα

$$(g \circ f)(\alpha+h) = g[f(\alpha+h)] = g(\beta+k) = g(\beta) + k.g'(\beta) + k.\psi_g(k) = g(f(\alpha)) +$$
$$+[h.f'(\alpha)+h\cdot\psi_f(h)]\cdot g'(f(\alpha))+[h\cdot f'(\alpha)+h\cdot\psi_f(h)]\cdot\psi_g(f(\alpha+h)-f(\alpha)) =$$
$$=(g \circ f)(\alpha)+h\cdot g'(f(\alpha))\cdot f'(\alpha)+h[\psi_f(h)\cdot g'(f(\alpha))+(f'(\alpha)+\psi_f(h))\cdot$$
$$\cdot\psi_g(f(\alpha+h)-f(\alpha))]$$

ὅπου

$$\lim_0[\psi_f(h)\cdot g'(f(\alpha))+(f'(\alpha)+\psi_f(h))\cdot\psi_g(f(\alpha+h)-f(\alpha))] = 0$$

ὁπότε

$$(g \circ f)'(\alpha) = g'(f(\alpha))\cdot f'(\alpha). \blacktriangle$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.3.3 (Παράγωγος ἀντίστροφης συναρτήσεως). Ἂν μιά συνάρτηση f εἶναι παραγωγίσιμη σέ ἕνα σημεῖο $\alpha \in \mathcal{D}(f)$ μέ $f'(\alpha) \neq 0$ καί ὑπάρχει ἡ ἀντίστροφή της f^{-1}, τότε καί ἡ f^{-1} εἶναι παραγωγίσιμη στό σημεῖο $\beta = f(\alpha)$ καί μάλιστα

$$(f^{-1})'(\beta) = 1/f'(\alpha) = 1/f'(f^{-1}(\beta)).$$

Ἐπί πλέον, ἄν ἡ f εἶναι παραγωγίσιμη καί $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathcal{D}(f)$, τότε καί ἡ ἀντίστροφή της f^{-1} εἶναι παραγωγίσιμη καί μάλιστα ἔχομε

$$(f^{-1})' = 1/f' \circ f^{-1} .$$

Ἀπόδειξη. Ἂν $k \neq 0$ εἶναι τέτοιο ὥστε $\beta+k \in \mathcal{D}(f^{-1})$, τότε θέτοντας $h = h(k) = f^{-1}(\beta+k) - f^{-1}(\beta)$, ἔχομε $h \neq 0$ καί $k = f(\alpha+h) - f(\alpha)$·

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$(\lambda f)'(\alpha) = \lambda f'(\alpha)\cdot$$

ii)

$$(f+g)(\alpha+h) = f(\alpha+h) + g(\alpha+h) = [f(\alpha) + f'(\alpha)h + h\cdot\psi_f(h)] + [g(\alpha) +$$

$$+g'(\alpha)h + h\cdot\psi_g(h)] = (f+g)(\alpha) + (f'(\alpha) + g'(\alpha))h + h(\psi_f(h) + \psi_g(h)),$$

ὅπου $\lim\limits_{h\to 0} (\psi_f(h) + \psi_g(h)) = 0$, ὁπότε

$$(f+g)'(\alpha) = f'(\alpha) + g'(\alpha) .$$

iii)

$$(f\cdot g)(\alpha+h) = f(\alpha+h)\cdot g(\alpha+h) =$$

$$= [f(\alpha) + f'(\alpha)h + h\cdot\psi_f(h)] \cdot [g(\alpha) + g'(\alpha)\ h + h\cdot\psi_g(h)] =$$

$$= (f\cdot g)(\alpha) + [f'(\alpha)\cdot g(\alpha) + f(\alpha)\cdot g'(\alpha)]h + h[f(\alpha)\cdot\psi_g(h)+$$

$$+ hf'(\alpha)\cdot g'(\alpha)+hf'(\alpha)\cdot\psi_g(h)+g(\alpha)\cdot\psi_f(h)+$$

$$+hg'(\alpha)\cdot\psi_f(h)+h\psi_f(h)\cdot\psi_g(h)] ,$$

ὅπου

$$\lim_{h\to 0} [f(\alpha)\cdot\psi_g(h)+hf'(\alpha)\cdot g'(\alpha)+hf'(\alpha)\cdot\psi_g(h)+g(\alpha)\cdot\psi_f(h)+$$

$$+hg'(\alpha)\cdot\psi_f(h) + h\psi_f(h)\cdot\psi_g(h)] = 0$$

ὁπότε

$$(f\cdot g)'(\alpha) = f'(\alpha)\cdot g(\alpha) + f(\alpha)\cdot g'(\alpha).$$

iv) Ἐπειδή $g(\alpha)\neq 0$ ἀπ' τήν Πρόταση (1.13.1) ὑπάρχει περιοχή U τοῦ α μέ $g(\alpha+h)\neq 0$ γιά κάθε h μέ $\alpha+h \in U$. Περιοριζόμαστε στήν περιοχή U καί ἔχομε:

$$(\frac{1}{g})'(\alpha) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot\left[\frac{1}{g(\alpha+h)} - \frac{1}{g(\alpha)}\right] = -\lim_{h\to 0} \frac{1}{g(\alpha)\cdot g(\alpha+h)}\cdot\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h} =$$

$$= -\frac{1}{g^2(\alpha)}\cdot g'(\alpha).$$

v) Ἀπ' τήν iii) καί iv) ἔχομε

$$(\frac{f}{g})'(\alpha) = (f\cdot\frac{1}{g})'(\alpha) = f'(\alpha)\cdot\frac{1}{g(\alpha)} - f(\alpha)\cdot\frac{g'(\alpha)}{g^2(\alpha)} = \frac{f'(\alpha)\cdot g(\alpha) - f(\alpha)\cdot g'(\alpha)}{g^2(\alpha)} . \blacktriangle$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.3.2 (Παράγωγος σύνθετης συναρτήσεως). Ἄν ἡ συνάρτηση f εἶναι παραγωγίσιμη σ' ἕνα σημεῖο α καί ἡ g παραγωγίσιμη στό f(α) τότε καί ἡ g o f εἶναι παραγωγίσιμη στό σημεῖο α καί μάλιστα

$$(g\circ f)'(\alpha) = g'[f(\alpha)]\cdot f'(\alpha).$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἄν ἐπί πλέον οἱ συναρτήσεις f καί g εἶναι παραγωγίσιμες, τότε τοῦτο ἰσχύει γιά κάθε $\alpha \in \mathcal{D}(g \circ f)$, ὁπότε ἔχομε

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f' .$$

Ἀπόδειξη. Ἀπ' τήν πρόταση 3.3.1 διά τυχόν h μέ $\alpha+h \in \mathcal{D}(f)$ ἔχομε

$$f(\alpha+h) = f(\alpha) + hf'(\alpha) + h\psi_f(h)$$

ὅπου $\lim_0 \psi_f = 0$. Θέτομε $\beta = f(\alpha)$ καί $k = f(\alpha+h) - f(\alpha)$· ἑπομένως καί

$$g(\beta+k) = g(\beta) + kg'(\beta) + k\psi_g(k)$$

ὅπου $\lim_0 \psi_g = 0$, διότι ἡ g εἶναι παραγωγίσιμη στό β. Ἄρα

$$(g \circ f)(\alpha+h) = g[f(\alpha+h)] = g(\beta+k) = g(\beta) + k.g'(\beta) + k.\psi_g(k) = g(f(\alpha)) +$$
$$+[h.f'(\alpha)+h\cdot\psi_f(h)]\cdot g'(f(\alpha))+[h\cdot f'(\alpha)+h\cdot\psi_f(h)]\cdot\psi_g(f(\alpha+h)-f(\alpha)) =$$
$$=(g \circ f)(\alpha)+h\cdot g'(f(\alpha))\cdot f'(\alpha)+h[\psi_f(h)\cdot g'(f(\alpha))+(f'(\alpha)+\psi_f(h))\cdot$$
$$\cdot\psi_g(f(\alpha+h)-f(\alpha))]$$

ὅπου

$$\lim_0[\psi_f(h)\cdot g'(f(\alpha))+(f'(\alpha)+\psi_f(h))\cdot\psi_g(f(\alpha+h)-f(\alpha))] = 0$$

ὁπότε

$$(g \circ f)'(\alpha) = g'(f(\alpha))\cdot f'(\alpha). \ \blacktriangle$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.3.3 (Παράγωγος ἀντίστροφης συναρτήσεως). Ἄν μιά συνάρτηση f εἶναι παραγωγίσιμη σέ ἕνα σημεῖο $\alpha \in \mathcal{D}(f)$ μέ $f'(\alpha) \neq 0$ καί ὑπάρχει ἡ ἀντίστροφή της f^{-1}, τότε καί ἡ f^{-1} εἶναι παραγωγίσιμη στό σημεῖο $\beta = f(\alpha)$ καί μάλιστα

$$(f^{-1})'(\beta) = 1/f'(\alpha) = 1/f'(f^{-1}(\beta)).$$

Ἐπί πλέον, ἄν ἡ f εἶναι παραγωγίσιμη καί $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathcal{D}(f)$, τότε καί ἡ ἀντίστροφή της f^{-1} εἶναι παραγωγίσιμη καί μάλιστα ἔχομε

$$(f^{-1})' = 1/f' \circ f^{-1} .$$

Ἀπόδειξη. Ἄν $k \neq 0$ εἶναι τέτοιο ὥστε $\beta+k \in \mathcal{D}(f^{-1})$, τότε θέτοντας $h = h(k) = f^{-1}(\beta+k) - f^{-1}(\beta)$, ἔχομε $h \neq 0$ καί $k = f(\alpha+h) - f(\alpha)$·

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἑπομένως

$$\frac{f^{-1}(\beta+k)-f^{-1}(\beta)}{k} = \frac{h}{f(\alpha+h)-f(\alpha)} = 1\Big/\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$$

ὁπότε, ἀφοῦ $\lim\limits_{k\to 0} h(k) = 0$, ἔχομε

$$(f^{-1})'(\beta) = \lim_{k\to 0}\frac{f^{-1}(\beta+k)-f^{-1}(\beta)}{k} = \lim_{h\to 0}\left[1\Big/\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}\right] = 1/f'(\alpha) =$$

$$= 1/f'(f^{-1}(\beta)). \blacktriangle$$

3.4 ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ἐφαρμόζοντας τόν ὁρισμό τῆς παραγώγου καί τίς ἰδιότητες τῆς ἔννοιας αὐτῆς θά ἐπιχειρήσωμε νά βροῦμε τίς παραγώγους συναρτήσεις τῶν στοιχειωδῶν συναρτήσεων.

Πρῶτα ἀπ'ὅλα παρατηροῦμε ὅτι γιά κάθε σταθερά $c \in \mathbb{R}$ ἡ παράγωγος τῆς σταθερῆς συναρτήσεως $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$ εἶναι 0, ἀφοῦ

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = 0,$$

ἤτοι

$$(c)' = 0.$$

I. Παράγωγοι τῶν ἐκθετικῶν καί λογαριθμικῶν συναρτήσεων

α) $\exp' x = \exp x$.

Ἀπό τήν πρόταση 2.2.1 ἔχομε

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = e^x\cdot 1 = e^x,$$

ἤτοι

$$(e^x)' = e^x.$$

Μέ τή βοήθεια τῆς προτάσεως 3.3.3 ἔχομε ἑπομένως

$$[\exp f(x)]' = f'(x)\exp f(x).$$

β) $\log' x = \frac{1}{x}$.

Θέτοντας $\log x = y$ ἔχομε $e^y = x$, ὁπότε ἀπ'τήν πρόταση 3.3.3 καί

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τήν α) ἔχομε

$$(\log x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x} \quad ,$$

ἤτοι

$$\log' x = \frac{1}{x} \quad .$$

Ἑπομένως καί

$$[\log f(x)]' = f'(x) / f(x).$$

β) $$\left[[f(x)]^{g(x)}\right]' = [f(x)]^{g(x)} \cdot \left\{g'(x) \cdot \log f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right\}.$$

Θέτοντας

$$h(x) = [f(x)]^{g(x)},$$

ἔχομε

$$\log h(x) = g(x) \cdot \log f(x) \ ,$$

ὁπότε ἀπ'τήν α) προκύπτει

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = [\log h(x)]' = g'(x) \cdot \log f(x) + g(x) \cdot [\log f(x)]' \ ,$$

δηλαδή

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = g'(x) \cdot \log f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$$

καί ἄρα

$$h'(x) = h(x)\left\{g'(x) \cdot \log f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right\} \ .$$

γ) $(\alpha^x)' = \alpha^x \cdot \log \alpha$.

Ἄν $f(x) = \alpha$ καί $g(x) = x$, τότε ἡ β) δίνει

$$(\alpha^x)' = \alpha^x(1 \cdot \log \alpha + x \cdot \frac{0}{\alpha}) = \alpha^x \cdot \log \alpha \ .$$

γ)' $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Ἄν $f(x) = x$ καί $g(x) = \alpha$, τότε πάλι ἡ β) δίνει

$$(x^\alpha)' = x^\alpha(0 \cdot \log x + \alpha \cdot \frac{1}{x}) = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1} \ .$$

II. Παράγωγοι τῶν τριγωνομετρικῶν καί κυκλομετρικῶν συναρτήσεων

α) $\sin' x = \cos x$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Πραγματικά, ἀπ'τήν πρόταση 2.4.1 ἔχομε

$$\sin' x = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\cdot\sin\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2})\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} =$$

$$= \cos x$$

καί ἀπ'τήν πρόταση 3.3.2, ἔχομε γενικά

$$[\sin f(x)]' = f'(x)\cdot\cos f(x) .$$

α)' $\quad \mathrm{Ar}\sin' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Θέτοντας $\mathrm{Ar}\sin x = y$, ἀπ'τήν πρόταση 3.3.3 καί τήν α), ἔχομε

$$(\mathrm{Ar}\sin x)' = \frac{1}{\sin' y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

καί γενικά

$$[\mathrm{Ar}\sin f(x)]' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} .$$

β) $\quad \cos' x = -\sin x$.

Ἀπό τήν α) ἔχομε

$$\cos' x = [\sin(\tfrac{\pi}{2}-x)]' = (\tfrac{\pi}{2}-x)'\cdot\cos(\tfrac{\pi}{2}-x) = -1\cdot\sin x = -\sin x$$

καί γενικά

$$[\cos f(x)]' = -f'(x)\cdot\sin f(x) .$$

β)' $\quad \mathrm{Ar}\cos' x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Θέτοντας $\mathrm{Ar}\cos x = y$, ἔχομε $x = \cos y$, ὁπότε

$$\mathrm{Ar}\cos' x = \frac{1}{\cos' y} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

καί γενικά

$$[\mathrm{Ar}\cos f(x)]' = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} .$$

γ) $\quad \mathrm{tg}' x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1+\mathrm{tg}^2 x$.

Ἀπ'τήν ἰδιότητα 3.3.1 ν) ἔχομε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$tg'x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cdot \cos x - \sin x . \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

καί γενικά

$$[tg\, f(x)]' = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} = f'(x)[1+tg^2 f(x)] .$$

γ)' $Ar\, tg'x = \frac{1}{1+x^2}$.

Θέτοντας $Ar\, tg\, x = y$, έχομε $x = tg\, y$, όπότε

$$Ar\, tg'x = \frac{1}{tg'y} = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

καί γενικά

$$[Ar\, tg\, f(x)]' = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} .$$

δ) $ctg'x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1+ctg^2 x).$

Πραγματικά

$$(ctg'x) = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\sin x \cdot \cos' x - \sin' x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

καί γενικά

$$[ctg\, f(x)]' = -\frac{f(x)}{\sin^2 f(x)} .$$

δ)' $Ar\, ctg'x = -\frac{1}{1+x^2}$.

Θέτοντας $Ar\, ctg\, x = y$, έχομε $x = ctg\, y$, όπότε

$$Ar\, ctg'x = \frac{1}{ctg'y} = \frac{1}{-(1+ctg^2 y)} = -\frac{1}{1+x^2}$$

καί γενικά

$$[Ar\, ctg\, f(x)]' = -\frac{f'(x)}{1+f^2(x)} .$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

III. Παράγωγοι τῶν ὑπερβολικῶν συναρτήσεων καί τῶν ἀντιστρόφων αὐτῶν

Γνωρίζοντας τήν παράγωγο τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως exp, εὔκολα μποροῦμε νά δοῦμε ὅτι

α) $\sinh' x = \cosh x$, ὁπότε $[\sinh f(x)]' = f'(x)\cdot\cosh f(x)$.

α)′ $\mathrm{Ar}\sinh' x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, ὁπότε $[\mathrm{Ar}\sinh f(x)]' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}$

β) $\cosh' x = \sinh x$, ὁπότε $[\cosh f(x)]' = f'(x)\cdot\sinh f(x)$.

β)′ $\mathrm{Ar}_+\cosh' x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, ὁπότε $[\mathrm{Ar}_+\cosh f(x)]' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x)-1}}$,

$\mathrm{Ar}_-\cosh' x = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}}$, ὁπότε $[\mathrm{Ar}_-\cosh f(x)]' = -\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x)-1}}$.

γ) $\mathrm{tgh}' x = \dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1-\mathrm{tgh}^2 x$, ὁπότε

$$[\mathrm{tgh}\, f(x)]' = \frac{f'(x)}{\cosh^2 f(x)} = f'(x)\,(1-\mathrm{tgh}^2 f(x)).$$

γ)′ $\mathrm{Ar}\,\mathrm{tgh}' x = \dfrac{1}{1-x^2}$, ὁπότε $[\mathrm{Ar}\,\mathrm{tgh}\, f(x)]' = \dfrac{f'(x)}{1-f^2(x)}$.

δ) $\mathrm{ctgh}' x = -\dfrac{1}{\sinh^2 x}$, ὁπότε $[\mathrm{ctgh}\, f(x)]' = -\dfrac{f'(x)}{\sinh^2 f(x)}$.

δ)′ $\mathrm{Ar}\,\mathrm{ctgh}' x = \dfrac{1}{1-x^2}$, ὁπότε $[\mathrm{Ar}\,\mathrm{ctg}\, f(x)]' = \dfrac{f'(x)}{1-f^2(x)}$.

Παρατήρηση 3.4.1.

Οἱ τύποι πού δόθηκαν παραπάνω γιά τίς παραγώγους τῶν στοιχειωδῶν συναρτήσεων καθορίζουν καί τά πεδία ὁρισμοῦ τῶν ἀντιστοίχων παραγώγων συναρτήσεων. Ἐπισημαίνομε, δηλαδή, ὅτι στά σημεῖα ὅπου οἱ τύποι αὐτοί δέν ἔχουν ἔννοια, οἱ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων δέν ὑπάρχουν.

Παραθέτομε ἕναν πίνακα μέ τίς παραγώγους τῶν στοιχειωδῶν συναρτήσεων πού βρέθηκαν παραπάνω:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΤΩΝ ΚΥΡΙΩΤΕΡΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x	$\log x$	$1/x$
α^x	$\alpha^x \cdot \log \alpha$	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathrm{Ar}\sin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathrm{Ar}\cos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
$\mathrm{tg}\, x$	$1+\mathrm{tg}^2 x = 1/\cos^2 x$	$\mathrm{Ar}\,\mathrm{tg}\, x$	$1/(1+x^2)$
$\mathrm{ctg}\, x$	$-(1+\mathrm{ctg}^2 x) = -1/\sin^2 x$	$\mathrm{Ar}\,\mathrm{ctg}\, x$	$-1/(1+x^2)$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\mathrm{Ar}\sinh x$	$1/\sqrt{1+x^2}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\mathrm{Ar}_+\cosh x$	$1/\sqrt{x^2-1}$
		$\mathrm{Ar}_-\cosh x$	$-1/\sqrt{x^2-1}$
$\mathrm{tgh}\, x$	$1-\mathrm{tgh}^2 x = 1/\cosh^2 x$	$\mathrm{Ar}\,\mathrm{tgh}\, x$	$1/(1-x^2)$
$\mathrm{ctgh}\, x$	$1-\mathrm{ctgh}^2 x = -1/\sinh^2 x$	$\mathrm{Ar}\,\mathrm{ctgh}\, x$	$1/(1-x^2)$

Παραδείγματα 3.4.1

1. Ἂν

$$f(x) = \sqrt{x},$$

τότε

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

ὅπου $\mathcal{D}(f) = [0,+\infty)$ καί $\mathcal{D}(f') = (0,+\infty)$.

2. Ἂν

$$f(x) = \alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_\nu x^\nu,$$

τότε

$$f'(x) = \alpha_1+2\alpha_2 x+\ldots+\nu\alpha_\nu x^{\nu-1},$$

ὅπου $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} = \mathcal{D}(f')$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

3. Ἂν

$$f(x) = e^{\operatorname{tg} x} \log(x+\sin x+1) ,$$

τότε

$$f'(x) = e^{\operatorname{tg} x} \frac{1}{\cos^2 x} \log(x+\sin x+1) + e^{\operatorname{tg} x} \frac{1+\cos x}{x+\sin x+1} ,$$

ὅπου $\mathcal{D}(f) = [0,+\infty) - \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} = \mathcal{D}(f')$.

4. Ἂν

$$f(x) = \operatorname{Ar}\sin(\operatorname{tgh} x) + \operatorname{Ar}\sinh(\operatorname{tg} x) ,$$

τότε

$$f'(x) = \frac{1}{\cosh x} + \frac{1}{\cos x} ,$$

ὅπου $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} = \mathcal{D}(f')$.

3.5 ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΟΠΟΙΑΣΔΗΠΟΤΕ ΤΑΞΕΩΣ

Ἡ παράγωγος τῆς παραγώγου συναρτήσεως μιᾶς συναρτήσεως f ὀνομάζεται "ἡ δεύτερη παράγωγος" τῆς f. Παρόμοια, "ἡ τρίτη παράγωγος" εἶναι ἡ παράγωγος τῆς δεύτερης παραγώγου. Γενικά "ἡ ν-οστή παράγωγος" μιᾶς συναρτήσεως f εἶναι ἡ παράγωγος τῆς (ν-1)-οστῆς παραγώγου της. Θά δηλώνωμε ἀντίστοιχα τύς παραγώγους πρώτης, δεύτερης,... ..., ν-οστῆς τάξεως μιᾶς συναρτήσεως f μέ τά σύμβολα

$$f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(\nu)}$$

ἤ

$$\frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, \ldots, \frac{d^\nu f}{dx^\nu} .$$

Γιά χάρη πληρότητας τοῦ συμβολισμοῦ γράφομε καί

$$f^{(0)} \quad \text{ἀντί τῆς } f .$$

Ἔτσι ἀπ'τόν ὁρισμό ἔχομε

$$\frac{d^\nu f}{dx^\nu} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{\nu-1} f}{dx^{\nu-1}}\right), \quad \nu \in \mathbb{N} .$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Συχνά γιά $\nu = 1,2,3,4$ συνηθίζονται οἱ συμβολισμοί

$$f', f'', f''', f''''$$

ἀντί τῶν

$$f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}, f^{(4)}.$$

Μιά συνάρτηση τῆς ὁποίας ὑπάρχει ἡ ν-οστή παράγωγος, θά λέμε ὅτι εἶναι "ν φορές παραγωγίσιμη", ἐνῶ θά λέμε ὅτι εἶναι "ἄπειρως παραγωγίσιμη" ἄν εἶναι ν φορές παραγωγίσιμη γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

Στά παραδείγματα πού ἀκολουθοῦν ἀναφέρονται μερικές ἀπείρως παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

Παραδείγματα 3.5.1

1. $$\frac{d^\nu}{dx^\nu} x^\alpha = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-\nu+1)x^{\alpha-\nu}, \quad \text{ὅπου } \alpha \in \mathbb{R}.$$

2. Ἡ ἐκθετική συνάρτηση exp ἔχει τήν ἰδιότητα ὅτι κάθε παράγωγός της ταυτίζεται μ'αὐτή' δηλαδή

$$\frac{d^\nu e^x}{dx^\nu} = e^x$$

3. Γιά τή συνάρτηση sin ἔχομε

$$\sin' x = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\sin'' x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

καί γενικά

$$\sin^{(\nu)} x = \sin\left(x + \nu\cdot\frac{\pi}{2}\right), \quad \nu = 0,1,2,\dots.$$

Ἀνάλογα, γιά τή συνάρτηση cos ἔχομε

$$\cos^{(\nu)} x = \cos\left(x + \nu\cdot\frac{\pi}{2}\right), \quad \nu = 0,1,2,\dots.$$

4. Στό δεύτερο ἀπό τά παραδείγματα 3.4.1 εἴδαμε ὅτι ἄν

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_\nu x^\nu$$

τότε

$$f'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + \dots + \nu\alpha_\nu x^{\nu-1}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παίρνοντας ἀκόμη τίς παραγώγους f'', f''', ... , $f^{(\nu)}$ καί θέτοντας $x=0$, βρίσκομε ὅτι

$$\alpha_0 = f(0)\ ,\ \alpha_1 = f'(0)\ ,\ \alpha_2 = \frac{1}{2!}\, f''(0),\ \ldots,\ \alpha_\nu = \frac{1}{\nu!}\, f^{(\nu)}(0).$$

Ἑπομένως ἡ πολυωνυμική συνάρτηση f γράφεται μέ τή μορφή

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}\, f'(0) + \frac{x^2}{2!}\, f''(0) + \ldots + \frac{x^\nu}{\nu!}\, f^{(\nu)}(0)\ ,$$

ἡ ὁποία θά γενικευτῆ παρακάτω (παρατήρηση 3.9.2) γιά τυχοῦσα ν φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Οἱ τύποι παραγωγίσεως τοῦ ἀθροίσματος καί γινομένου ν-φορές παραγωγισίμων συναρτήσεων μποροῦν νά ἐπεκταθοῦν καί γιά τή ν-οστή παράγωγο. Ἔτσι γιά τίς συναρτήσεις f καί g ἔχομε

$$(f+g)' = f'+g'$$

$$(f+g)'' = f''+g''$$

καί γενικά

$$(f+g)^{(\nu)} = f^{(\nu)} + g^{(\nu)}.$$

Ἐπίσης

$$(f\,g)' = f'.g + f.g'$$

$$(f\,g)'' = f''.g + 2f'.g' + f\,g''$$

καί γενικά ἰσχύει ἡ ἑξῆς πρόταση:

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.5.1 (Τύπος τοῦ Leibniz). **Γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ἰσχύει**

$$(f\,g)^{(\nu)} = \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} f^{(\nu-\mu)}.g^{(\mu)}\ ,$$

ὅπου $\binom{\nu}{\mu} = \dfrac{\nu!}{\mu!(\nu-\mu)!}$.

Ἀπόδειξη. Ἡ πρόταση θ'ἀποδειχτῆ ἐπαγωγικά. Γιά $\nu=1$ εἶναι προφανής. Ἄς ὑποτεθῆ ὅτι ἰσχύει γιά $\nu=k$, δηλαδή ὅτι

$$(f\,g)^{(k)} = \sum_{\mu=0}^{k} \binom{k}{\mu} f^{(k-\mu)} g^{(\mu)}$$

καί θ'ἀποδειχτῆ ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=k+1$. Πραγματικά, ἔχομε

$$(f\,g)^{(k+1)} = \left[(f\,g)^{(k)}\right]' = \left[\sum_{\mu=0}^{k} \binom{k}{\mu} f^{(k-\mu)} g^{(\mu)}\right]' = \sum_{\mu=0}^{k} \binom{k}{\mu} \left[f^{(k-\mu)} g^{(\mu)}\right]' =$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$= \sum_{\mu=0}^{k} \binom{k}{\mu}\left[f^{(k-\mu+1)}g^{(\mu)} + f^{(k-\mu)}g^{(\mu+1)}\right] = \sum_{\mu=0}^{k} \binom{k}{\mu} f^{(k-\mu+1)}g^{(\mu)}$$

$$+ \sum_{\mu=0}^{k} \binom{k}{\mu} f^{(k-\mu)}g^{(\mu+1)} = \binom{k}{0} f^{(k+1)}(0) + \sum_{\mu=1}^{k} \binom{k}{\mu} f^{(k-\mu+1)}g^{(\mu)} +$$

$$+ \sum_{\mu=0}^{k-1} \binom{k}{\mu} f^{(k-\mu)}g^{(\mu+1)} + \binom{k}{k} f^{(0)}g^{(k+1)} =$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{k} \binom{k}{\mu} f^{(k-\mu+1)}g^{(\mu)} + \sum_{\mu=1}^{k} \binom{k}{\mu-1} f^{(k-\mu+1)}g^{(\mu)} + f^{(0)}g^{(k+1)} =$$

$$= \binom{k+1}{0} f^{(k+1)}g^{(0)} + \sum_{\mu=1}^{k}\left[\binom{k}{\mu} + \binom{k}{\mu-1}\right] f^{(k-\mu+1)}g^{(\mu)}$$

$$+ \binom{k+1}{k+1} f^{(0)}g^{(k+1)}, \quad \text{διότι} \quad \binom{k+1}{0} = \binom{k+1}{k+1} = 1.$$ Αλλά έχουμε

$$\binom{k}{\mu} + \binom{k}{\mu-1} = \binom{k+1}{\mu},$$

ὁπότε παίρνουμε

$$(fg)^{(k+1)} = \binom{k+1}{0} f^{(k+1)}(0)g^{(0)} + \sum_{\mu=1}^{k} \binom{k+1}{\mu} f^{(k+1-\mu)}g^{(\mu)} + \binom{k+1}{k+1} f^{(0)}g^{(k+1)}$$

καὶ τελικά

$$(fg)^{(k+1)} = \sum_{\mu=0}^{k+1} \binom{k+1}{\mu} f^{(k+1-\mu)}g^{(\mu)},$$

πού σύμφωνα μέ τήν μέθοδο τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς ἀποδείχνει τήν πρόταση. ▲

Παραδείγματα 3.5.2

1. Θά βρεθῆ ἡ ν-οστή παράγωγος τῶν συναρτήσεων

$$e^x \sin x, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{καί} \quad e^x \cos x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Πράγματι

$$(e^x \sin x)^{(\nu)} = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} (e^x)^{(\nu-k)} (\sin x)^{(k)} = e^x \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right).$$

$$(e^x \cos x)^{(\nu)} = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} (e^x)^{(\nu-k)} (\cos x)^{(k)} = e^x \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$$

2. Θά βρεθῆ ἡ 100-οστή παράγωγος τῆς συναρτήσεως

$$x \cosh x \ , \ x \in \mathbb{R} \ .$$

Πράγματι, ἔχομε

$$(x \cosh x)^{(100)} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} x^{(100-k)} (\cosh x)^{(k)} =$$

$$\binom{100}{99} x^{(1)} (\cosh x)^{(99)} + \binom{100}{100} x^{(0)} (\cosh x)^{(100)} = 100 \sinh x + x \cosh x \ .$$

Ὅσον ἀφορᾶ τήν δεύτερη παράγωγο τῆς ἀντίστροφης μιᾶς 2-φορές παραγωγισίμου συναρτήσεως, ἰσχύει ἡ ἑξῆς πρόταση:

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.5.2. **Ἄν ἡ συνάρτηση f εἶναι 2-φορές παραγωγίσιμη, $f'(x) \neq 0$ γιά κάθε $x \in \mathcal{D}(f)$ καί ὑπάρχη ἡ ἀντίστροφή της f^{-1}, τότε καί ἡ f^{-1} εἶναι 2-φορές παραγωγίσιμη καί μάλιστα**

$$(f^{-1})'' = -\frac{f'' \circ f^{-1}}{(f' \circ f^{-1})^3} \ .$$

Ἀπόδειξη. Ὅπως γνωρίζομε

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Ἑπομένως ἔχομε

$$(f^{-1})'' = [(f^{-1})']' = \left(\frac{1}{f' \circ f^{-1}}\right)' = -\frac{(f' \circ f^{-1})'}{(f' \circ f^{-1})^2} =$$

$$= -\frac{(f'' \circ f^{-1}).(f^{-1})'}{(f' \circ f^{-1})^2} = -\frac{(f'' \circ f^{-1}) \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}}{(f' \circ f^{-1})^2} = -\frac{f'' \circ f^{-1}}{(f' \circ f^{-1})^3} \ . \ \blacktriangle$$

Ἐφαρμογή.

Θά ὑπολογίσωμε τήν δεύτερη παράγωγο τῆς συναρτήσεως $\mathrm{Ar}\sin$.

Πράγματι, θέτοντας

$$y = \mathrm{Ar}\sin x$$

ἔχομε $x = \sin y$, ὁπότε

$$(\mathrm{Ar}\sin x)'' = -\frac{(\sin'' \circ \mathrm{Ar}\sin)(x)}{[(\sin' \circ \mathrm{Ar}\sin)(x)]^3} = -\frac{(-\sin \circ \mathrm{Ar}\sin)(x)}{[(\cos \circ \mathrm{Ar}\sin)(x)]^3} = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} \ .$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Στίς ἐφαρμογές τῆς φυσικῆς ἡ δεύτερη παράγωγος ἔχει μεγάλη σημασία. Γιά παράδειγμα, ἡ ἐπιτάχυνση κάποιου κινητοῦ εἶναι ἡ πρώτη παράγωγος τῆς ταχύτητας ὡς πρός τόν χρόνο καί ἐπομένως ἡ δεύτερη παράγωγος τοῦ διαστήματος s ὡς πρός τόν χρόνο t, δηλαδή $\gamma = \frac{d^2s}{dt^2}$. Ἄρα ἡ δύναμη πού ἐνεργεῖ πάνω στό κινητό, εἶναι ἴση πρός $m\frac{d^2s}{dt^2}$, ὅπου m δηλοῖ τή μᾶζα τοῦ κινητοῦ.

3.6 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Μιά ἄλλη ἔννοια ἐξ ἴσου σημαντική μέ τήν ἔννοια τῆς παραγώγου εἶναι καί τοῦ διαφορικοῦ. Θά δοθῆ ἕνας αὐστηρός ὁρισμός τοῦ διαφορικοῦ μιᾶς συναρτήσεως, διότι τοῦτο παίζει σπουδαῖο ρόλο σ'ὁλόκληρο τό διαφορικό καί ὁλοκληρωτικό λογισμό.

Ὅπως εἴδαμε στήν παράγραφο 3.1 μιά συνάρτηση f εἶναι παραγωγίσιμη σ'ἕνα σημεῖο x, τότε καί μόνον τότε ἄν ἰσχύη ἡ συνθήκη

$$f(x+h) = f(x) + A(x)h + h\,\psi_x(h) \tag{3.6.1}$$

ὅπου ψ_x εἶναι μιά συνάρτηση τέτοια ὥστε $\lim_{h\to 0}\psi_x(h) = 0$. Τότε ἡ A(x) εἶναι ἡ παράγωγος τῆς f στό σημεῖο x. Ὁ τύπος (3.6.1) ἰσχύει γιά κάθε h ὅπου βέβαια $x+h \in \mathcal{D}(f)$.

Γράφοντας $[\Delta f(x)](h) = f(x+h) - f(x)$ ἔχομε

$$[\Delta f(x)](h) = f'(x)\,h + h\,\psi_x(h)\ , \tag{3.6.2}$$

δηλαδή, γιά σταθερό x, ἡ $\Delta f(x)$ εἶναι μιά συνάρτηση τῆς ὁποίας ἡ τιμή σέ κάθε h δίνεται ἀπ'τήν (3.6.2) καί μάλιστα μέ τιμή 0 στό σημεῖο h = 0.

Ἄν τώρα τήν ποσότητα f'(x) h παραστήσωμε μέ [d f(x)](h) δηλαδή

$$[d\,f(x)](h) = f'(x)\,h \tag{3.6.3}$$

γιά σταθερό x καί κάθε h μέ $x+h \in \mathcal{D}(f)$, τότε προκύπτει ὅτι

$$[\Delta f(x)](h) = [d\,f(x)](h) + h\,\psi_x(h)\ . \tag{3.6.4}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.6.1. Ἡ συνάρτηση d f(x) πού σέ κάθε h, μέ $x+h \in \mathcal{D}(f)$,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

παίρνει τήν τιμή $f'(x)h$, όνομάζεται "τό διαφορικό" τῆς συναρτήσεως f στό σημεῖο x.

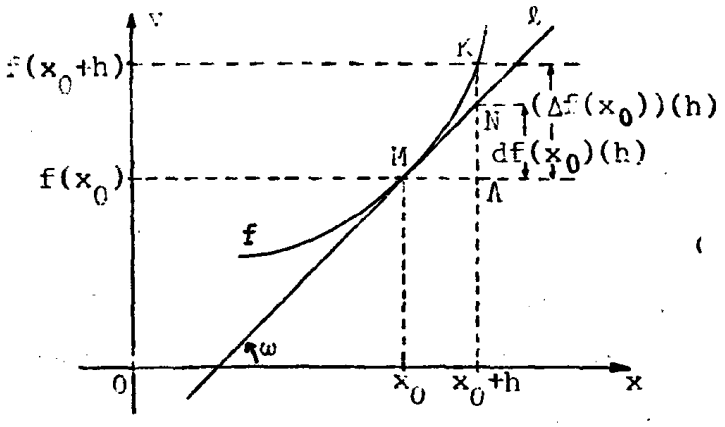
Ἐπειδή πρέπει νά ἀποσαφηνιστῆ ἡ ἔννοια τοῦ διαφορικοῦ, ἐπαναλαμβάνομε ὅτι τό διαφορικό μιᾶς πραγματικῆς συναρτήσεως f σέ ἕνα σημεῖο x εἶναι μιά συνάρτηση $df(x)$ πού ἐξαρτᾶται ἄμεσα ἀπό τό σημεῖο x καί τῆς ὁποίας ἡ τιμή σέ κάθε h, μέ $x+h \in \mathcal{D}(f)$, δίνεται ἀπ'τόν τύπο 3.6.3. Εἶναι, βέβαια, φανερό ὅτι τό διαφορικό μιᾶς συναρτήσεως σέ ἕνα σημεῖο ὑπάρχει μόνο ὅταν καί ἡ παράγωγος αὐτῆς στό ἴδιο σημεῖο ὑπάρχη.

Στό ΣΧ. 7 δίνεται μιά γεωμετρική ἑρμηνεία τῆς ἔννοιας τοῦ διαφορικοῦ:

Θεωροῦμε τό γράφημα μιᾶς συναρτήσεως f καί τό σημεῖο $M=(x_0,f(x_0))$ αὐτοῦ. Φέρομε τήν ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμή ℓ τῆς καμπύλης πού παριστᾶ τό γράφημα στό σημεῖο M καί αὐξάνομε κατά h τήν τιμή x_0. Τότε ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως αὐξάνει κατά τό μῆκος

$\Lambda K = f(x_0+h) - f(x_0) = [\Delta f(x_0)](h)$.

Ἀκόμη σ'αὐτή τήν αὔξηση h τοῦ x_0 ἀντιστοιχεῖ τό μῆκος ΛN ὅπου N βρίσκεται στήν ℓ. Ἔτσι ἔχομε



ΣΧΗΜΑ 7

$$\Lambda N = \operatorname{tg}\omega . M\Lambda = f'(x_0).h = [df(x_0)](h) .$$

Δηλαδή σέ ὁποιαδήποτε μεταβολή h τοῦ x_0 τό σημεῖο

$$(x_0+h, f(x_0)+[df(x_0)](h))$$

βρίσκεται πάνω στήν εὐθεῖα ℓ καί ἑπομένως τό διαφορικό $df(x_0)$ τῆς f στό σημεῖο x_0 εἶναι ἡ συνάρτηση τῆς ὁποίας τό γράφημα εἶναι ἡ ἐφαπτομένη στό σημεῖο $(x_0, f(x_0))$ τοῦ γραφήματος τῆς συναρτήσεως f. Ὅταν $h \to 0$ τότε τό K τείνει πρός τό M καί ἐπίσης καί $\Lambda K \to 0$. Ἄρα καί $\Lambda N \to 0$. Ἐξ'ἄλλου ἀπ'τή σχέση (3.6.4) ἔχομε $NK = h\,\psi_{x_0}(h)$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἐνῶ ἀφοῦ $\lim_{h\to 0} \psi_{x_0}(h) = 0$, μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι ἡ ποσότητα $h\,\psi_{x_0}(h)$ τείνει πολύ πιό γρήγορα στό 0 ἀπ'τήν $[d\,f(x_0)](h)$. Τό γεγονός αὐτό ἐκφράζομε λέγοντας ὅτι τό μέγεθος $h\,\psi_{x_0}(h)$ εἶναι **"ἀπειροστό"** ἀνώτερης τάξεως ὡς πρός τό $[d\,f(x_0)](h)$. Ἑπομένως ἡ διαφορά $[\Delta f(x_0)](h) - [d\,f(x_0)](h)$ εἶναι ἀπειροστό ἀνώτερης τάξεως ὡς πρός τό $[d\,f(x_0)](h)$ ἀπό ὅπου συμπεραίνομε ὅτι

$$(3.6.5) \qquad [\Delta f(x_0)](h) \to [d\,f(x_0)](h) \quad \text{ὅταν} \quad h \to 0 .$$

Ἡ σχέση (3.6.5) λέει ὅτι μποροῦμε νά ἀντικαταστήσωμε τήν καμπύλη τοῦ γραφήματος σέ μιά ἀπειροστή (δηλ. κατάλληλα μικρή) περιοχή τοῦ x_0 μέ ἕνα τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης στό σημεῖο x_0 εὐθείας γραμμῆς.

Ἄς λάβωμε τήν ταυτοτική συνάρτηση, δηλαδή τήν $f(x) = x$. Τό διαφορικό της στό σημεῖο x εἶναι ἡ συνάρτηση μέ τύπο

$$(d\,x)(h) = [d\,f(x)](h) = f'(x)\,h = 1.h = h$$

δηλαδή

$$(3.6.6) \qquad (d\,x)(h) = h, \quad \text{γιά κάθε } h .$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι τό διαφορικό τῆς ταυτοτικῆς συναρτήσεως εἶναι πάλι ἡ ταυτοτική συνάρτηση. Θέτοντας $h = (d\,x)(h)$ στή σχέση (3.6.3) βρίσκομε

$$(3.6.7) \qquad [d\,f(x)](h) = f'(x)(d\,x)(h)$$

γιά κάθε h μέ $x+h \in \mathcal{D}(f)$. Ἑπομένως ἔχομε

$$(3.6.8) \qquad d\,f(x) = f'(x)d\,x .$$

Ὁ τύπος (3.6.8) δίνει τό διαφορικό μιᾶς συναρτήσεως στό σημεῖο x. Ἔτσι φαίνεται ὅτι τό διαφορικό ὁποιασδήποτε συναρτήσεως f σέ ἕνα σημεῖο εἶναι ἴσο πρός τό γινόμενο τῆς παραγώγου $f'(x)$ στό σημεῖο αὐτό ἐπί τό διαφορικό τῆς ταυτοτικῆς συναρτήσεως. Τονίζεται ἰδιαίτερα ὅτι ἡ σχέση (3.6.8) εἶναι ἰσότητα συναρτήσεων καί ὄχι τιμῶν συναρτήσεων (δηλαδή πραγματικῶν ἀριθμῶν). Τό νά ἐργαζώμαστε νά βροῦμε τό διαφορικό μιᾶς συναρτήσεως ἐκφράζεται μέ τό ὅτι **"διαφορίζομε"** τή συνάρτηση, ἤ κάνομε **"διαφόριση"** τῆς συναρτήσεως. Μιά συνάρτηση γιά τήν

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὁποία ὁρίζεται τό διαφορικό της σ'ένα σημεῖο x λέμε ὅτι εἶναι "διαφορίσιμη στό x" καί εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό νά εἶναι παραγωγίσιμη σέ x. Ἀκόμη λέμε ὅτι μιά συνάρτηση εἶναι "διαφορίσιμη" ἄν εἶναι διαφορίσιμη σέ κάθε σημεῖο τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της.

3.7 ΒΑΣΙΚΟΙ ΚΑΝΟΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΣΕΩΣ

Ἐπειδή, ἀπό τόν τύπο (3.6.8) τό διαφορικό εἶναι γινόμενο τῆς παραγώγου ἐπί dx, ἀπό τούς νόμους παραγωγίσεως παίρνομε ἀμέσως τούς ἀντίστοιχους γιά τή διαφόριση. Ἔτσι γιά δύο διαφορίσιμες συναρτήσεις f καί g ἔχομε:

1) $d(f+g) = df + dg$, 2) $d(f-g) = df - dg$,

3) $d(fg) = f\,dg + g\,df$, 4) $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}$,

5) $d(cf) = c\,df$, ὅπου c εἶναι σταθερός ἀριθμός.

3.8 ΑΝΩΤΕΡΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ

Παράλληλα πρός τόν ὁρισμό τῆς ν-οστῆς παραγώγου, γιά κάθε $\nu = 1,2,\ldots$, μιᾶς συναρτήσεως, δίνομε καί τόν ὁρισμό τοῦ ν-οστοῦ διαφορικοῦ αὐτῆς σέ ἕνα σημεῖο.

Ὅπως φαίνεται ἀπ'τή σχέση (3.6.8), τό διαφορικό $df(x)$ μιᾶς συναρτήσεως, πού στό σημεῖο h, μέ $x+h \in \mathcal{D}(f)$, παίρνει τήν τιμή $f'(x)h$, εἶναι μιά συνάρτηση καί τοῦ x. Γιά τυχόν ἀλλά σταθερό $\hat{h}$, ὁρίζεται ἡ πραγματική συνάρτηση $[df(\ )](\hat{h})$ ἤ ἀναλυτικώτερα

$$df(x)(\hat{h}), \quad x \in \{z : z \in \mathcal{D}(f) \text{ καί } z+\hat{h} \in \mathcal{D}(f)\}.$$

Ὑποθέτομε ὅτι τό διαφορικό τῆς συναρτήσεως αὐτῆς σέ ἕνα σημεῖο x ὑπάρχει καί ἑπομένως, σύμφωνα μέ τόν τύπο (3.6.8) θά δίνεται ἀπ'τή σχέση

$$d\left([df(x)](\hat{h})\right) = \frac{d}{dx}\left([df(x)](\hat{h})\right) dx.$$

Ἄρα, ἀπ'τήν (3.6.3), ἔχομε

$$d\left\{[d\,f(x)](\hat{h})\right\} = \frac{d}{d\,x}\,(f'(x).\hat{h})d\,x = f''(x).\hat{h}.d\,x$$

ὁπότε, ἀπ'τήν (3.6.6), παίρνομε

$$d\left\{[d\,f(x)](\hat{h})\right\} = f''(x).(d\,x)(\hat{h}).d\,x$$

ἤ, ἐπειδή τό $\hat{h}$ εἶναι τυχόν τοῦτο ἰσχύει γιά κάθε $\hat{h}$, μέ $x+\hat{h} \in \mathcal{D}(f)$, ὁπότε μποροῦμε νά γράφωμε

$$d[d\,f(x)] = f''(x).d\,x.d\,x = f''(x)(d\,x)^2 .$$

Ὁρίζομε τώρα σάν δεύτερο διαφορικό $d^2f(x)$ τῆς f στό σημεῖο x τήν συνάρτηση $d[d\,f(x)]$ καί ἑπομένως ἔχομε

$$d^2f(x) = f''(x)\,d\,x^2 , \quad \text{ὅπου} \quad d\,x^2 = (d\,x)^2$$

Ἀνάλογα τώρα μποροῦμε νά ὁρίσωμε καί τό διαφορικό (ἀνωτέρας τάξεως) τῆς συναρτήσεως f στό x, μέ τόν ἐπαγωγικό τύπο

$$d^{k+1}f(x) = d[d^kf(x)] , \quad k \in \mathbb{N} ,$$

ὁπότε ἀκολουθώντας τήν ἴδια πορεία ἐπαγωγικά παίρνομε

$$d^\nu f(x) = f^{(\nu)}(x)\,d\,x^\nu \tag{3.8.1}$$

γιά τό ν-οστό διαφορικό (ἤ διαφορικό ν-οστῆς τάξεως) καί γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Τέλος, ἀνάλογα μέ τήν μηδενική παράγωγο, τό μηδενικό διαφορικό ὁρίζεται νά εἶναι

$$d^0 f = f .$$

Ἀπό τή σχέση (3.8.1) δικαιολογεῖται ὁ συμβολισμός

$$\frac{d^\nu f(x)}{d\,x^\nu}$$

τῆς ν-οστῆς παραγώγου

$$f^{(\nu)}(x) .$$

Μέ τή βοήθεια τῆς σχέσεως (3.8.1) μποροῦμε νά προσαρμόσωμε τόν τύπο τοῦ Leibniz (βλ. πρόταση 3.5.1) καί στά διαφορικά:
Πραγματικά, γιά δυό συναρτήσεις f καί g τῶν ὁποίων τά διαφορικά ν-οστῆς τάξεως ὑπάρχουν, ἔχομε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$d^{\nu}(fg) = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} d^{\nu-k} f . d^{k} g .$$

3.9 ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Μέ τή βοήθεια τῶν παραγώγων μιᾶς συναρτήσεως εἴμαστε ἐν γένει σέ θέση νά γνωρίζωμε πολλές "ποιοτικές" ἰδιότητες πού περιγράφουν τή συμπεριφορά τῆς συναρτήσεως. Τά θεωρήματα πού ἀκολουθοῦν εἶναι μερικά βασικά μέσα γιά νά πετύχουμε σ'αὐτό τό σκοπό.

Ἀρχίζομε μέ ἕνα θεώρημα πού φέρει τό ὄνομα τοῦ Fermat. Ἄς σημειωθῆ ὅτι ὁ Fermat (1601-1665) ἔζησε πρίν δοθῆ ἡ ἔννοια τῆς παραγώγου καί τό θεώρημα τοῦτο τό διατύπωσε καί τό ἀπέδειξε γεωμετρικά.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.9.1 (τοῦ Fermat). **Ὑποθέτομε ὅτι μιά συνάρτηση f ὁρισμένη σέ ἕνα διάστημα Δ τῆς πραγματικῆς εὐθείας παίρνει μέγιστο ἤ ἐλάχιστο στό σημεῖο ξ τοῦ Δ, διάφορο τῶν ἄκρων τοῦ διαστήματος Δ. Τότε, ἄν ὑπάρχη ἡ (πεπερασμένη) παράγωγος $f'(\xi)$, ἀναγκαστικά θά πρέπει $f'(\xi) = 0$.**

Ἀπόδειξη. Ἄν $f(\xi) = \max f$, θά πρέπει νά ἰσχύη

$$f(x) \leq f(\xi), \quad \text{γιά κάθε } x \in \Delta . \tag{3.9.1}$$

Ἀπό τήν ὕπαρξη τῆς $f'(\xi)$ συμπεραίνομε ὅτι

$$f'_{-}(\xi) = f'(\xi) = f'_{+}(\xi) . \tag{3.9.2}$$

Ἀλλά ἀπό τήν (3.9.1)

$$\frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} \geq 0 , \quad \text{γιά κάθε } h < 0 \text{ μέ } \xi+h \in \Delta$$

καί

$$\frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} \leq 0 , \quad \text{γιά κάθε } h > 0 \text{ μέ } \xi+h \in \Delta$$

ὁπότε

$$f'_{-}(\xi) \geq 0 \quad \text{καί} \quad f'_{+}(\xi) \leq 0$$

καί ἑπομένως ἀπ'τήν (3.9.2) προκύπτει $f'(\xi) = 0$. Ἀνάλογα γίνεται ἡ ἀπόδειξη καί ἄν $f(\xi) = \min f$. ▲

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ένα μεγάλο πλήθος θεωρημάτων καί τύπων τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ καί τῶν ἐφαρμογῶν του βασίζεται στό ἀκόλουθο ἁπλό ἀλλά σημαντικό θεώρημα τοῦ Rolle.

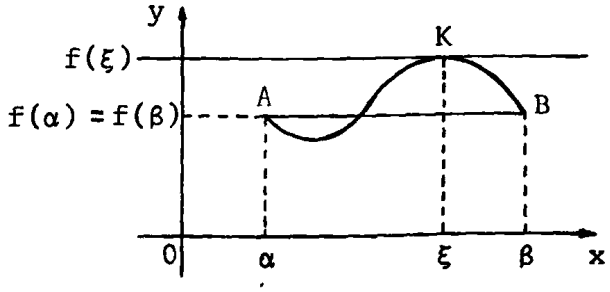
ΘΕΩΡΗΜΑ 3.9.2 (τοῦ Rolle). **Ὑποθέτομε ὅτι μιά συνεχής συνάρτηση f ὁρισμένη στό κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ εἶναι παραγωγίσιμη στό (α,β) καί τέτοια ὥστε $f(\alpha) = f(\beta)$. Τότε ὑπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ μέ $f'(\xi)=0$**

Ἀπόδειξη. Ἄν ἡ συνάρτηση f εἶναι σταθερά, τότε τό συμπέρασμα εἶναι φανερό.

Ὑποθέτομε ὅτι ἡ f δέν εἶναι σταθερά, ὁπότε, σύμφωνα μέ τό θεώρημα 1.13.2, παίρνει μέγιστο καί ἐλάχιστο, τά ὁποῖα εἶναι διάφορα μεταξύ τους. Ἑπομένως, ἐπειδή $f(\alpha)=f(\beta)$, ἡ συνάρτηση f παίρνει ἕνα τουλάχιστον ἀπό τά max f καί min f σέ ἕνα σημεῖο ξ διάφορο τῶν α,β, δηλαδή $\xi\in(\alpha,\beta)$. Γι' αὐτό τό σημεῖο ξ, σύμφωνα μέ τό θεώρημα 3.9.1, ἔχομε ὅτι $f'(\xi)=0$. ▲

Ἄς δοθῆ μιά γεωμετρική ἑρμηνεία τοῦ θεωρήματος τοῦ Rolle:

Θεωροῦμε τό γράφημα μιᾶς συναρτήσεως f πού πληροῖ τίς ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος τοῦ Rolle καί πού παριστάνεται ἀπ' τήν καμπύλη γραμμή τοῦ ΣΧ. 8 πού περιέχεται μεταξύ τῶν σημείων A καί B. Τό συμπέρασμα τοῦ θεωρήματος εἶναι ὅτι ὑπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ὥστε ἡ ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμή στό σημεῖο $K\equiv(\xi,f(\xi))$ νά εἶναι παράλληλη πρός τόν x-ἄξονα.



ΣΧΗΜΑ 8

Ἕνα πόρισμα τοῦ θεωρήματος τοῦ Rolle εἶναι τό ἑξῆς:

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.9.1 **Μεταξύ δυό ριζῶν μιᾶς παραγωγίσιμης συναρτήσεως ὑπάρχει μιά τουλάχιστον ρίζα τῆς παραγώγου της.**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἐπίσης ἕνα πολύ σπουδαῖο ἐπακόλουθο τοῦ θεωρήματος τοῦ Rolle εἶναι καί τό παρακάτω θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς πού εἶναι ἐπίσης γνωστό καί σάν θεώρημα τῶν πεπερασμένων αὐξήσεων καί ὀφείλεται στόν Lagrange.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.9.3 (τῆς μέσης τιμῆς τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ). Ἄν f εἶναι μιά συνεχής συνάρτηση στό κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ μέ (πεπερασμένη) παράγωγο σέ κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, τότε ὑπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ὥστε

$$f(\beta)-f(\alpha) = (\beta-\alpha)f'(\xi). \tag{3.9.3}$$

Ἀπόδειξη. Εἶναι φανερό ὅτι ἡ συνάρτηση

$$F(x) = f(x)-f(\alpha)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)\ ,\quad x\in[\alpha,\beta]$$

εἶναι συνεχής, παραγωγίσιμη ἐπί τοῦ (α,β) μέ παράγωγο

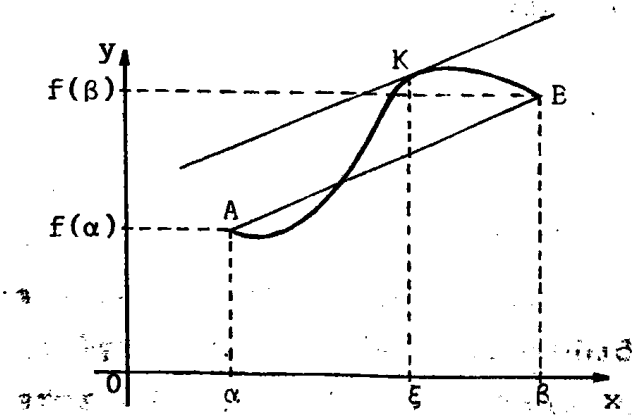
$$F'(x) = f'(x)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\ ,\quad x\in(\alpha,\beta)$$

καί τέτοια ὥστε $F(\alpha)=0=F(\beta)$. Ἄρα γιά τή συνάρτηση F πληροῦνται οἱ ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος τοῦ Rolle καί ἔτσι ὑπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ μέ $F'(\xi)=0$, ἤτοι

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\ ,$$

πού εἶναι ἡ σχέση (3.9.3). ▲

Γεωμετρικά, τό θεώρημα τοῦτο ἑρμηνεύεται ὡς ἑξῆς: Ἄν f εἶναι μιά συνάρτηση πού ἱκανοποιεῖ τίς ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς, τότε ὑπάρχει σημεῖο $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ὥστε ἡ ἐφαπτομένη στό σημεῖο $K\equiv(\xi,f(\xi))$ τοῦ γραφήματός της νά εἶναι παράλληλη πρός τήν εὐθεῖα γραμμή πού ὁρίζουν τά ἄκρα A καί B αὐτοῦ.



ΣΧΗΜΑ 9

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τό θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς ἔχει γενικευτῆ ἀπ'τόν Cauchy καί δόθηκε μέ τήν παρακάτω μορφή.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.9.4 (Γενικευμένο θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ). **Ὑποθέτομε ὅτι οἱ συναρτήσεις f καί g εἶναι συνεχεῖς στό διάστημα $[\alpha,\beta]$ καί παραγωγίσιμες ἐπί τοῦ (α,β), ἐνῶ $g'(x)\neq 0$ γιά κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Τότε ὑπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ὥστε**

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad . \tag{3.9.4}$$

Ἀπόδειξη. Προφανῶς $g(\alpha)\neq g(\beta)$, διότι ἀλλιῶς, ἀπ'τό θεώρημα τοῦ Rolle, θά ὑπῆρχε $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ὥστε $g'(\xi)=0$ πού εἶναι ἄτοπο.

Ἔτσι, ὁρίζεται ἡ συνάρτηση

$$F(x)=f(x)-f(\alpha)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}\,(g(x)-g(\alpha)) \ , \quad x\in[\alpha,\beta]$$

πού εἶναι συνεχής, παραγωγίσιμη ἐπί τοῦ (α,β) μέ παράγωγο

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}\cdot g'(x) \ , \quad x\in(\alpha,\beta)$$

καί ἀκόμη $F(\alpha)=0=F(\beta)$. Ἄρα, ἀπ'τό θεώρημα τοῦ Rolle, ὑπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ μέ $F'(\xi)=0$, πού δίνει τή σχέση (3.9.4). ▲

Παρατήρηση 3.9.1

Ἄν στό παραπάνω θεώρημα θέσωμε $g(x)=x$, $x\in[\alpha,\beta]$, παίρνομε τό θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς 3.9.3.

Ἕνα ἄλλο ἐνδιαφέρον θεώρημα, ἀνάλογο πρός τό γενικευμένο θεώρημα τῆς μέσης, εἶναι καί τό ἑξῆς:

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.9.5. **Ἄν f καί g εἶναι συναρτήσεις συνεχεῖς στό διάστημα $[\alpha,\beta]$ καί παραγωγίσιμες ἐπί τοῦ (α,β) καί ἐπί πλέον $g'(x)\neq 0$ γιά κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, τότε ὑπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ὥστε**

$$\frac{f(\xi)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad .$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἀπόδειξη. Εἶναι φανερό, ὅτι ἡ συνάρτηση

$$\Gamma(x) = f(\alpha)g(x) + f(x)g(\beta) - f(x)g(x) \ , \quad x\in[\alpha,\beta]$$

εἶναι συνεχής, παραγωγίσιμη ἐπί τοῦ (α,β), μέ παράγωγο

$$F'(x) = f(\alpha)g'(x) + f'(x)g(\beta) - f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$$

καί τέτοια ὥστε

$$\Gamma(\alpha) = f(\alpha)g(\beta) = F(\beta) \ .$$

Ἄρα, ἀπ'τό θεώρημα τοῦ Rolle, ὑπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ὥστε $\Gamma'(\xi) = 0$, δηλαδή

$$f(\alpha)g'(\xi) + f'(\xi)g(\beta) - f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi) = 0$$

ἤ

$$\frac{f(\xi) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \ . \ \blacktriangle$$

Μιά γενίκευση τοῦ θεωρήματος 3.9.3 τῆς μέσης τιμῆς, πού εἶναι γνωστή σάν τύπος τοῦ Taylor, μπορεῖ νά βρεθῆ μέ τή βοήθεια τοῦ θεωρήματος τοῦ Rolle.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.9.6 (Τύπος τοῦ Taylor). Ὑποθέτομε ὅτι ἡ συνάρτηση f εἶναι τέτοια ὥστε, ἡ $(\nu-1)$-οστή παράγωγός της εἶναι ὁρισμένη καί συνεχής στό κλειστό διάστημα $\bar{\Delta}_\alpha^\beta$ μέ ἄκρα α,β καί ἡ ν-οστή παράγωγος ὑπάρχει στό ἀνοικτό διάστημα Δ_α^β μέ ἄκρα α,β. Ἄν ψ εἶναι συνάρτηση ὁρισμένη καί συνεχής στό $\bar{\Delta}_\alpha^\beta$ καί παραγωγίσιμη ἐπί τοῦ Δ_α^β μέ $\psi'(x)\neq 0$ γιά κάθε $x\in\Delta_\alpha^\beta$, τότε ὑπάρχει σημεῖο $\xi\in\Delta_\alpha^\beta$, πού ἐξαρτᾶται ἀπό τή συνάρτηση ψ, τέτοιο ὥστε νά ἰσχύη

$$f(\beta) = f(\alpha) + \frac{(\beta-\alpha)}{1!}\cdot f'(\alpha) + \ldots + \frac{(\beta-\alpha)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\cdot f^{(\nu-1)}(\alpha) + R_\nu$$

ὅπου

$$R_\nu = \frac{\psi(\beta) - \psi(\alpha)}{\psi'(\xi)} \cdot \frac{(\beta-\xi)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} f^{(\nu)}(\xi) \ , \tag{3.9.5}$$

τό ὁποῖο ὀνομάζεται "ὑπόλοιπο τοῦ Schlömilch".

Ἄν τεθῆ $\psi(x) = x$, $x\in\bar{\Delta}_\alpha^\beta$ καί $\psi(x) = (\beta-x)^\nu$, $x\in\bar{\Delta}_\alpha^\beta$, τότε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

παίρνομε άντίστοιχα

$$R_\nu = \frac{(\beta-\alpha)(\beta-\xi)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} f^{(\nu)}(\xi) \qquad \text{(ὑπόλοιπο κατά Cauchy)}$$

καί

$$R_\nu = \frac{(\beta-\alpha)^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(\xi) \qquad \text{(ὑπόλοιπο κατά Lagrange).}$$

Ἀπόδειξη. Ἐκεῖνο πού πρέπει νά κάνωμε, εἶναι νά προσδιορίσωμε τό ὑπόλοιπο

$$R_\nu = f(\beta) - \left\{ f(\alpha) + \frac{\beta-\alpha}{1!} f'(\alpha) + \ldots + \frac{(\beta-\alpha)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} f^{(\nu-1)}(\alpha) \right\}$$

καί μάλιστα ν'ἀποδείξωμε ὅτι δίνεται ἀπ'τή σχέση (3.9.5)

Πραγματικά· ὁρίζομε τή συνάρτηση

$$F(x) = f(x) + \frac{(\beta-x)}{1!} f'(x) + \ldots + \frac{(\beta-x)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} f^{(\nu-1)}(x) + \frac{\psi(\alpha)-\psi(x)}{\psi(\beta)-\psi(\alpha)} R_\nu, \; x \in \bar{\Delta}_\alpha^\beta$$

ὁπότε παρατηροῦμε ὅτι εἶναι συνεχής, παραγωγίσιμη ἐπί τοῦ Δ_α^β μέ παράγωγο

$$F'(x) = \frac{(\beta-x)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} f^{(\nu)}(x) - \frac{\psi'(x)}{\psi(\beta)-\psi(\alpha)} R_\nu, \quad x \in \Delta_\alpha^\beta$$

καί εἶναι τέτοια ὥστε

$$F(\alpha) = f(\alpha) + \frac{(\beta-\alpha)}{1!} f'(\alpha) + \ldots + \frac{(\beta-\alpha)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} f^{(\nu-1)}(\alpha) = F(\beta).$$

Ἑπομένως, πληροῦνται οἱ ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος τοῦ Rolle, ὁπότε ὑπάρχει σημεῖο $\xi \in \Delta_\alpha^\beta$, τέτοιο ὥστε $F'(\xi) = 0$ καί ἄρα

$$\frac{(\beta-\xi)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} f^{(\nu)}(\xi) - \frac{\psi'(\xi)}{\psi(\beta)-\psi(\alpha)} R_\nu = 0$$

δηλαδή

$$R_\nu = \frac{\psi(\beta)-\psi(\alpha)}{\psi'(\xi)} \cdot \frac{(\beta-\xi)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} f^{(\nu)}(\xi). \; \blacktriangle$$

Παρατήρηση 3.9.2

Θεωροῦμε τυχόντα σημεῖα x, α τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως f τέτοια ὥστε στό διάστημα $\bar{\Delta}_\alpha^x$ νά πληροῦνται οἱ ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος 3.9.6. Τότε ἔχομε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$(3.9.6)\quad f(x) = f(\alpha) + \frac{x-\alpha}{1!} f'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2!} f''(\alpha) + \ldots + \frac{(x-\alpha)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} f^{(\nu-1)}(\alpha) + R_\nu .$$

Ειδικότερα, αν $\alpha = 0$ μπορεί ν' αναπτυχθεί ο τύπος

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)!} f^{(\nu-1)}(0) + R_\nu$$

πού ονομάζεται τύπος του Mac-Laurin.

Με τόν τύπο αυτό μπορούμε νά προσεγγίσωμε τήν τιμή μιάς συναρτήσεως μέ τιμές ένός πολυωνύμου. Για παράδειγμα, ή συνάρτηση sin μπορεί νά προσεγγιστή μέ ένα πολυώνυμο π.χ. 9ου βαθμού. Πραγματικά, έπειδή $\sin^{(k)} x = \sin(x + k\frac{\pi}{2})$, έχουμε

$$\sin' 0 = \sin^{(5)} 0 = \sin^{(9)} 0 = 1 ,$$

$$\sin''(0) = \sin'''' 0 = \sin^{(6)} 0 = \sin^{(8)} 0 = 0 , \qquad (3.9.7)$$

$$\sin'''(0) = \sin^{(7)} 0 = -1$$

Ετσι ο τύπος (3.9.7) δίνει τήν τιμή 0, βέβαια $\alpha = 0$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{10}}{10!} \sin \xi$$

όπου ξ βρίσκεται μεταξύ τών 0 καί x. Η ποσότητα $\frac{x^{10}}{10!} \sin \xi$ είναι τό σφάλμα πού έχομε στήν προσέγγιση πού sin x από τό

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}.$$

Υποθέτομε, τώρα, ότι ή συνάρτηση f είναι άπειρως παραγωγίσιμη έπί ένός διαστήματος Δ καθώς έπίσης καί ότι α, x, είναι δύο σημεία τοῦ Δ. Τότε ο τύπος (3.9.6) ισχύει γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, όπου θεωρούμε ότι $R_\nu = 0$, όταν $\alpha = x$. Όπως είδαμε στό θεώρημα (3.9.6) τό υπόλοιπο R_ν έξαρτάται από τόν αριθμό ξ, ο οποίος πάλι εξαρτάται από τό διάστημα Δ_α^x. Άρα καί τό υπόλοιπο R_ν εξαρτάται από τό διάστημα αυτό, δηλαδή από τό x όταν τό α είναι σταθερό.

Υποθέτομε ότι γιά τό παραπάνω x τό υπόλοιπο R_ν είναι τέτοιο ώστε

$$\lim R_\nu = 0 .$$

Επομένως

$$\lim_{\nu} \left[f(x) - \left(f(\alpha) + \frac{x-\alpha}{1!} f'(\alpha) + \ldots + \frac{(x-\alpha)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} f^{(\nu-1)}(\alpha) \right) \right] = \lim_{\nu} R_\nu = 0$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δηλαδή

$$(3.9.7)\qquad f(x) = \lim_{\nu} \left(f(\alpha) + \frac{x-\alpha}{1!} f'(\alpha) + \ldots + \frac{(x-\alpha)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} f^{(\nu-1)}(\alpha)\right).$$

Τό δεύτερο μέλος τῆς σχέσεως (3.9.7) συνήθως παριστάνεται καί μέ

$$f(\alpha) + \frac{x-\alpha}{1!} f'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2!} f''(\alpha) + \ldots$$

ἤ γιά συντομία

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(x-\alpha)^{\nu}}{\nu!} f^{(\nu)}(\alpha)$$

καί ὀνομάζεται "ἀπειροάθροισμα" ἤ "σειρά κατά Taylor" μέ κέντρο τό α. Ἔτσι ἀπ'τήν (3.9.7) ἔχομε

$$(3.9.8)\qquad f(x) = f(\alpha) + \frac{x-\alpha}{1!} f'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \ldots$$

καί λέμε ὅτι ἡ συνάρτηση f ἀναπτύσσεται σέ μιά "δυναμοσειρά μέ κέντρο τό α" ἤ, γενικώτερα, σέ μιά "σειρά Taylor μέ κέντρο τό α". Εἶναι φανερό ὅτι ὁ τύπος (3.9.8) ἰσχύει καί γιά $\alpha = x$.

Ὑποθέτοντας ὅτι τό α μπορεῖ νά πάρη τήν τιμή 0, θέτομε $\alpha = 0$, ὁπότε ἔχομε

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots$$

ὁπότε λέμε ὅτι ἡ f ἀναπτύσσεται σέ σειρά κατά Mac-Laurin. Ἔτσι ἀποδείχτηκε ἡ πρόταση:

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.9.1. Ὑποθέτομε ὅτι ἡ συνάρτηση f εἶναι ἀπείρως παραγωγίσιμη ἐπί ἑνός διαστήματος Δ καί ἔστω $\alpha \in \Delta$. Ἄν γιά κάθε $x \in \Delta$ τό ἀντίστοιχο πρός τό $\bar{\Delta}_{\alpha}^{x}$ ὑπόλοιπο R_{ν} τοῦ τύπου τοῦ Taylor εἶναι τέτοιο ὥστε

$$\lim R_{\nu} = 0 ,$$

τότε ἡ συνάρτηση f μπορεῖ ν'ἀναπτυχθῆ σέ μιά δυναμοσειρά τῆς μορφῆς

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{x-\alpha}{1!} f'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2!} f''(\alpha) + \ldots$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.9.1. Ὑποθέτομε ὅτι ἡ συνάρτηση f εἶναι ἀπείρως παραγωγίσιμη ἐπί ἑνός διαστήματος Δ καί ἔστω $\alpha \in \Delta$. Ἄν

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

γιά κάθε $x \in \Delta$ οἱ παράγωγοι $f^{(\nu)}$ εἶναι ὁμοιομόρφως φραγμένες ἐπί τοῦ $\bar{\Delta}_\alpha^x$, δηλαδή ἄν ὑπάρχη $M > 0$ τέτοιο ὥστε

$$(\forall \nu \in \mathbb{N})(\forall y \in \Delta_\alpha^x)\ |f^{(\nu)}(y)| \leq M,$$

τότε ἡ συνάρτηση f ἀναπτύσσεται σέ σειρά Taylor μέ κέντρον τό α.

Ἀπόδειξη. Παίρνοντας τό κατά Lagrange ὑπόλοιπο R_ν, ἔχομε

$$0 \leq |R_\nu| \leq \frac{|\alpha - x|^\nu}{\nu!} M \underset{\nu}{\to} 0$$

ὁπότε καί

$$\lim R_\nu = 0.$$

Ἔτσι, ἐφαρμόζοντας τήν πρόταση 3.9.1, παίρνομε τό συμπέρασμα. ▲

Στό σημεῖο τοῦτο μποροῦμε νά παρατηρήσωμε ὅτι τό πόρισμα 3.9.1 ἐφαρμόζεται γιά τίς συναρτήσεις exp, sin, cos, διότι οἱ παράγωγοι κάθε τάξεως αὐτῶν εἶναι ὁμοιομόρφως φραγμένες σέ κάθε διάστημα τῆς μορφῆς $\bar{\Delta}_0^x$, ἀφοῦ γιά κάθε $y \in \bar{\Delta}_0^x$ ἔχομε

1) $\exp^{(k)} y = \exp y \leq \max\{1, \exp x\}$

2) $|\sin^{(k)}(y)| = |\sin(y + k\frac{\pi}{2})| \leq 1$

3) $|\cos^{(k)}(y)| = |\cos(y + k\frac{\pi}{2})| \leq 1$.

Ἀντίθετα γιά τίς συναρτήσεις $\log(1+x)$, $x \in (-1,1]$ καί $(1+x)^\alpha$, $x \in (-1,1)$ δέν ἐφαρμόζεται τό πόρισμα 3.9.1. Γι'αὐτές ὅμως ἔχομε ἀντίστοιχα ὅτι:

4) Ἄν R_ν εἶναι τό ὑπόλοιπο τοῦ τύπου τοῦ Taylor, τότε αὐτό ἔχει κατά Lagrange τήν μορφή

$$R_\nu = (-1)^{\nu-1} \frac{x^\nu}{\nu!} \frac{(\nu-1)!}{(1+\xi)^\nu} = \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} \left(\frac{x}{1+\xi}\right)^\nu$$

ἐνῶ κατά Cauchy τήν

$$R_\nu = (-1)^{\nu-1} \frac{(x-\eta)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \frac{(\nu-1)!}{(1+\eta)^\nu} x = \frac{(\eta-x)^{\nu-1}}{(1+\eta)^\nu}$$

ὅπου ξ, η εἶναι σημεῖο μεταξύ 0 καί x. Ὅταν $0 \leq x \leq 1$, τότε ἀπό τήν κατά Lagrange μορφή τοῦ ὑπολοίπου ἔχομε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$|R_\nu| = \frac{1}{\nu}\left(\frac{x}{1+\xi}\right)^\nu \leqq \frac{1}{\nu} \quad \text{καί} \quad \lim R_\nu = 0.$$

Όταν $-1 < x < 0$, τότε $\frac{1}{1+\eta} \leqq \frac{1}{1+x}$ καί άπό τήν κατά Cauchy μορφή τοῦ ὑπολοίπου ἔχομε

$$|R_\nu| = \frac{(\eta-x)^{\nu-1}}{(1+\eta)^\nu}\,|x| = \left(\frac{\eta-x}{1+\eta}\right)^{\nu-1}\frac{|x|}{1+\eta} \leqq \left(\frac{\eta-x}{1+\eta}\right)^{\nu-1}\frac{|x|}{1+x}.$$

Ἀλλά στήν περίπτωση αὐτή ἰσχύει καί

$$0 \leqq \frac{\eta-x}{1+\eta} \leqq \frac{\eta(-x)-x}{1+\eta} = -x = |x|$$

καί ἑπομένως

$$|R_\nu| \leqq \frac{|x|^\nu}{1+x} \quad \text{καί} \quad \lim R_\nu = 0.$$

5) Ἄν R_ν εἶναι τό κατά Cauchy ὑπόλοιπο τοῦ τύπου τοῦ Taylor τότε

$$R_\nu = \frac{x(x-\xi)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\,\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\nu+1)(1+\xi)^{\alpha-\nu}.$$

Ἐπειδή ξ βρίσκεται μεταξύ 0 καί x, ὑπάρχει $\partial \in (0,1)$ μέ $\xi = \partial x$, ὁπότε ἔχομε

$$R_\nu = \frac{x^\nu}{1+\partial x}\left(\frac{1-\partial}{1+\partial x}\right)^{\nu-1}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\nu+1)}{(\nu-1)!}\,(1+\partial x)^\alpha.$$

Ἀλλά γιά $x \in (-1,1)$ ἔχομε $0 < \left(\frac{1-\partial}{1+\partial x}\right) \leqq 1$ καί ἑπομένως

$$|R_\nu| \leqq \frac{|\alpha_\nu|}{1+\partial x}\,K \leqq \frac{K}{1-|x|}\,|\alpha_\nu|$$

ὅπου $\alpha_\nu = \frac{x^\nu\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\nu+1)}{(\nu-1)!}$ καί $K = \max\{1,(1+x)^\alpha\}$. Τώρα παρατηροῦμε ὅτι

$$\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| = |x|\cdot\frac{|\alpha-\nu|}{\nu} \to |x| < 1$$

καί ἑπομένως ἄν ω εἶναι τέτοιος ὥστε $|x| < \omega < 1$ τότε ὑπάρχει $n \in \mathbb{N}$ μέ

$$(\forall\ \nu \in \mathbb{N})\nu > n \Rightarrow \left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| < \omega.$$

Ἔτσι γιά κάθε $\nu > n$ ἔχομε

$$|\alpha_\nu| < \frac{|\alpha_n|}{\omega^n}\,\omega^\nu,$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δηλαδή $\alpha_\nu \to 0$. Ἄρα $\lim R_\nu = 0$.

Ὕστερα ἀπό τά παραπάνω μποροῦμε, σύμφωνα μέ τήν πρόταση 3.9.1, νά γράψωμε καί τά κατά Mac-Laurin ἀναπτύγματα τῶν συναρτήσεων αὐτῶν.

Συνοψίζοντας, ἔχομε ἀντίστοιχα τά παρακάτω κατά Mac-Laurin ἀναπτύγματα:

1)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

ὁπότε διά $x = 1$, ἔχομε τόν ἀριθμό e σέ μορφή ἀπειροαθροίσματος:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

2)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

3)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^{2\nu}}{(2\nu)!} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

4)

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^{\nu+1}}{\nu+1} \quad , \quad x \in (-1,1]$$

5)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\nu+1)}{\nu!} x^\nu \, , \, x \in (-1,1)$$

3.10 ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

Πολλές φορές κατά τήν ἀναζήτηση τοῦ ὁρίου μιᾶς συναρτήσεως σέ ἕνα σημεῖο συσσωρεύσεως τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της, εἶναι δυνατό νά παρουσιαστοῦν στά ὅρια πράξεις μή ἐπιτρεπτές, σάν τίς

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 0.\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

πού συνηθίζεται νά λέγωνται "ἀπροσδιόριστες μορφές" σέ σχέση μέ τά ὅρια.

Χρησιμοποιώντας ὅμως τά ὅσα εἴδαμε γιά τίς παραγώγους, μποροῦμε πολλές φορές νά ἐξαλείψωμε τήν ἀρχικά παρουσιαζόμενη ἀπροσδιοριστία. Ἡ μέθοδος πού χρησιμοποιεῖται γι'αὐτό τό σκοπό εἶναι γνωστή σάν "κα-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

νόνας τοῦ l'Hospital" καί περιγράφεται παρακάτω ἀπό τά θεωρήματα 3.10.1 καί 3.10.2. Στήν πραγματικότητα ὁ κανόνας αὐτός ἀρχικά διατυπώθηκε ὑπό τήν μορφή τοῦ πορίσματος 3.10.1.

Ι. Ἀπροσδιόριστη μορφή τοῦ τύπου $\frac{0}{0}$

Ὁριακές τιμές τῆς μορφῆς

$$\lim_{\xi} \frac{f}{g}\ , \quad \text{ὅπου} \quad \lim_{\xi} f = 0 = \lim g$$

ὀνομάζονται **ἀπροσδιόριστες μορφές τοῦ τύπου** $\frac{0}{0}$ καί ὑπολογίζονται μέ τή βοήθεια τοῦ ἑξῆς θεωρήματος:

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.10.1 **Ὑποθέτουμε ὅτι οἱ συναρτήσεις f καί g ἔχουν κοινό πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα σύνολο τῆς μορφῆς (α,ξ) ἤ (ξ,β) ἤ (α,ξ) (ξ,β), εἶναι παραγωγίσιμες καί ἡ g' δέν ἔχει ρίζες. Ἄν $\lim_{\xi} f = 0 = \lim_{\xi} g$ καί τό $\lim_{\xi} \frac{f'}{g'}$ ὑπάρχη, τότε ὑπάρχει καί τό $\lim_{\xi} \frac{f}{g}$ καί μάλιστα ἰσχύει**

$$\lim_{\xi} \frac{f}{g} = \lim_{\xi} \frac{f'}{g'}.$$

Ἀπόδειξη. Θά ἐξετάσωμε μόνο τήν περίπτωση ὅπου τό πεδίο ὁρισμοῦ τῶν συναρτήσεων f καί g εἶναι τῆς μορφῆς (α,ξ). Ἡ περίπτωση πού αὐτό εἶναι τῆς μορφῆς (ξ,β) ἐξετάζεται ἀνάλογα, ἐνῶ ἡ τρίτη περίπτωση προκύπτει ἀπό τίς δυό ἄλλες. Ἐπίσης ὑποθέτουμε ὅτι $\xi < \infty$, διότι γιά $\xi = +\infty$ τό συμπέρασμα προκύπτει μέ τή βοήθεια τοῦ μετασχηματισμοῦ $x = \frac{1}{t}$.

Ἐπειδή $g' \neq 0$, ἡ g δέν μπορεῖ νά ἔχη περισσότερες ἀπό μία ρίζες σέ μιά ἀριστερά περιοχή τοῦ ξ, θεωροῦμε λοιπόν ἕνα $y \in (\alpha,\xi)$ μέ $g(\zeta) \neq 0$ γιά κάθε $\zeta \in [y,\xi)$ καί ὁρίζομε τή συνάρτηση

$$\Phi(x) = \begin{cases} f(x) - \frac{f(y)}{g(y)}\, g(x) & , \quad x \in [y,\xi) \\ 0 & , \quad x = \xi \end{cases}$$

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ Φ εἶναι συνεχής στό κλειστό διάστημα $[y,\xi]$ καί παραγωγίσιμη στό ἀνοικτό διάστημα (y,ξ). Ἐπί πλέον ἰσχύει

$$\Phi(y) = 0 = \Phi(\xi)$$

καί ἑπομένως, σύμφωνα μέ τό θεώρημα 3.9.2 τοῦ Rolle, ὑπάρχει $z = z(y) \in (y,\xi)$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τέτοιο ὥστε $\Phi'(z) = 0$. Ἄρα, ἔχομε

$$\frac{f(y)}{g(y)} = \frac{f'(z)}{g'(z)} \quad . \tag{3.10.1}$$

Ἐπειδή $y < z < \xi$, ἔχομε $\lim\limits_{y\to\xi} z(y) = \xi$, ὁπότε παίρνοντας τά ὅρια στά δυό μέλη τῆς (3.10.1) ἔχομε

$$\lim_{y\to\xi} \frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{y\to\xi} \frac{f'(z(y))}{g'(z(y))} = \lim_{\xi} \frac{f'}{g'} \quad . \ \blacktriangle$$

Παρατήρηση 3.10.1

Στό παραπάνω θεώρημα εἶναι φανερό ὅτι τά σημειωμένα ὅρια μπορεῖ νά εἶναι πλευρικά. Τό ἴδιο ἰσχύει καί σέ ὅλα ὅσα ἀκολουθοῦν σέ σχέση μέ τίς ἀπροσδιόριστες μορφές.

Ἕνα ἄλλο συμπέρασμα σχετικό μέ τό θεώρημα 3.10.1 εἶναι καί ἡ παρακάτω πρόταση ἡ ὁποία ἔχει σάν μοναδικό πλεονέκτημα σέ σχέση μέ τό θεώρημα αὐτό ὅτι μπορεῖ νά ἐφαρμοστῆ καί ὅταν τό $\lim\limits_{\xi} \frac{f'}{g'}$ δέν ὑπάρχει. Ἡ ἀπόδειξή της βασίζεται ἀπ'εὐθείας στόν ὁρισμό τῆς παραγώγου καί ἀφήνεται σάν ἄσκηση στόν ἀναγνώστη.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.10.1. **Θεωροῦμε τίς συναρτήσεις f καί g μέ κοινό πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα σύνολο τῆς μορφῆς $(\alpha,\xi]$ ἤ $[\xi,\beta)$ ἤ (α,β) μέ $\xi\in(\alpha,\beta)$ οἱ ὁποῖες παραγωγίζονται στό ξ. Ἄν $f(\xi) = 0 = g(\xi)$ καί $g'(\xi) \neq 0$, τότε**

$$\lim_{\xi} \frac{f}{g} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad .$$

Παράδειγμα 3.10.1

Οἱ συναρτήσεις $f(x) = 1-2\cos x + \cos^2 x$, $g(x) = x^4$ εἶναι τέτοιες ὥστε $\lim\limits_{0} f = 0 = \lim\limits_{0} g$ καί ἑπομένως $\lim\limits_{0} \frac{f}{g}$ εἶναι μιά ἀπροσδιόριστη μορφή τοῦ τύπου $\frac{0}{0}$. Ἀλλά ἰσχύει καί

$$\lim_{0} f' = \lim_{x\to 0} (2\sin x - 2\sin x\cos x) = 0 = \lim_{x\to 0} 4x^3 = \lim_{0} g' \ ,$$

$$\lim_{0} f'' = \lim_{x\to 0} (2\cos x - 2\cos 2x) = 0 = \lim_{x\to 0} 12x^2 = \lim_{0} g'' \ ,$$

$$\lim_{0} f''' = \lim_{x\to 0} (-2\sin x + 4\sin 2x) = 0 = \lim_{x\to 0} 24x = \lim_{0} g'''$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἐνῶ

$$\lim_{0} f'''' = \lim_{x\to 0} (-2\cos x + 8\cos 2x) = 6 \ , \quad \lim_{0} g'''' = 24.$$

Ἐπειδή $\lim_{0} \frac{f''''}{g''''} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$, ἐφαρμόζοντας τό θεώρημα 3.10.1 διαδοχικά, ἔχομε

$$\lim_{0} \frac{f}{g} = \lim_{0} \frac{f'}{g'} = \lim_{0} \frac{f''}{g''} = \lim_{0} \frac{f'''}{g'''} = \lim_{0} \frac{f''''}{g''''} = \frac{1}{4} \ .$$

II. Ἀπροσδιόριστη μορφή τοῦ τύπου $\frac{\infty}{\infty}$

Ὁριακές τιμές τῆς μορφῆς

$$\lim_{\xi} \frac{f}{g} \ , \quad \text{ὅπου} \quad \lim_{\xi} f = +\infty = \lim_{\xi} g$$

ὀνομάζονται **ἀπροσδιόριστες μορφές τοῦ τύπου** $\frac{\infty}{\infty}$ καί ὑπολογίζονται μέ τόν παρακάτω τρόπο:

Θέτοντας $F = \frac{1}{f}$ καί $G = \frac{1}{g}$ παρατηροῦμε ὅτι

$$\frac{f}{g} = \frac{G}{F} \ , \quad \text{ὅπου} \quad \lim_{\xi} G = 0 = \lim_{\xi} F$$

ὁπότε ἔχομε ἀπροσδιόριστη μορφή τοῦ τύπου $\frac{0}{0}$.

Παράδειγμα 3.10.2

Θεωροῦμε τίς συναρτήσεις tg καί $\mathrm{ctg}(-2x)$, $x \in \mathbb{R}$ καί ἀναζητοῦμε τό

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \frac{\mathrm{tg}\, x}{\mathrm{ctg}(-2x)} \ , \quad \text{ὅπου} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \mathrm{tg}\, x = +\infty = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \mathrm{ctg}(-2x) \ .$$

Ἐφαρμόζοντας τήν προηγούμενη μέθοδο ἔχομε

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} = \frac{\mathrm{tg}\, x}{\mathrm{ctg}(-2x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \frac{\mathrm{tg}(-2x)}{\mathrm{ctg}\, x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \frac{[\mathrm{tg}(-2x)]'}{[\mathrm{ctg}\, x]'} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \frac{-2[1+\mathrm{tg}^2(-2x)]}{-(1+\mathrm{ctg}^2 x)} = \frac{-2(1+0)}{-(1+0)} = 2.$$

Πολλές φορές ὅμως ἡ παραπάνω μέθοδος δέν ἐξυπηρετεῖ στόν ὑπολογισμό τοῦ ὁρίου τῆς μορφῆς αὐτῆς. Τοῦτο φαίνεται στό ἑξῆς παράδειγμα:

Παράδειγμα 3.10.3

Ἀναζητοῦμε τό

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}\ ,\quad \text{ὅπου}\quad \lim_{x\to+\infty}\log x = +\infty = \lim_{x\to+\infty} x\ .$$

Ὅμως

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1/\log x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(1/x)'}{(1/\log x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log^2 x}{x}\ ,$$

ὁπότε ἐφαρμόζοντας ν φορές τόν παραπάνω κανόνα προκύπτει ὅτι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log^{\nu+1} x}{\nu!\ x}\ ,$$

ὅπου πάλι

$$\lim_{x\to+\infty}\log^{\nu+1} x = +\infty = \lim_{x\to+\infty}(\nu!\ x)\ .$$

Ἐπομένως δέν μποροῦμε νά ἐξαλείψωμε τήν ἀπροσδιοριστία μέ αὐτό τόν τρόπο. Τοῦτο, ὁδηγεῖ σέ μιά μέθοδο ὅμοια μέ ἐκείνη πού περιγράφει τό θεώρημα 3.10.1 καί ἡ ὁποία ἔχει ὡς ἑξῆς:

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.10.2. Ὑποθέτομε ὅτι οἱ συναρτήσεις f καί g ἔχουν κοινό πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα σύνολο τῆς μορφῆς (α,ξ) ἤ (ξ,β) ἤ $(\alpha,\xi)\cup(\xi,\beta)$, εἶναι παραγωγίσιμες καί ἡ g' δέν ἔχει ρίζες. Ἄν $\lim_{\xi} f = +\infty = \lim_{\xi} g$, καί τό $\lim_{\xi}\frac{f'}{g'}$ ὑπάρχη, τότε καί τό $\lim_{\xi}\frac{f}{g}$ ὑπάρχει καί μάλιστα ἰσχύει

$$\lim_{\xi}\frac{f}{g} = \lim_{\xi}\frac{f'}{g'}\ .$$

Ἀπόδειξη. Ὅπως καί στό θεώρημα 3.10.1 ἐξετάζομε μόνο τήν περίπτωση ὅπου τό πεδίο ὁρισμοῦ εἶναι τό (α,ξ). Θέτομε

$$\lim_{\xi}\frac{f'}{g'} = \ell$$

καί ὑποθέτομε πρῶτα ὅτι $\ell\in\mathbb{R}$.

Ἐπομένως, γιά $\varepsilon>0$, ὑπάρχει $\eta\in(\alpha,\xi)$ τέτοιο ὥστε γιά κάθε $x\in(\eta,\xi)$ νά ἰσχύη

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-\ell\right| \leq \frac{\varepsilon}{4}\quad \text{καί}\quad g(x)>0.$$

Γιά ὁποιοδήποτε $x\in(\eta,\xi)$, ἔχομε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \ell = \frac{f(\eta) - \ell\, g(\eta)}{g(x)} + \left[1 - \frac{g(\eta)}{g(x)}\right] \cdot \left[\frac{f(x) - f(\eta)}{g(x) - g(\eta)} - \ell\right].$$

Ἀλλά γιά σταθερό η ἔχομε

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(\eta) - \ell\, g(\eta)}{g(x)} = 0$$

καί

$$\lim_{x \to \xi} \left(1 - \frac{g(\eta)}{g(x)}\right) = 1$$

ὁπότε ὑπάρχει $\zeta \in (\eta, \xi)$ τέτοιο ὥστε γιά κάθε $x \in (\zeta, \xi)$ νά ἰσχύη

$$\left|\frac{f(\eta) - \ell\, g(\eta)}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{καί} \quad \left|1 - \frac{g(\eta)}{g(x)}\right| < 2$$

καί ἀπ'τό γενικευμένο θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς, διά τυχόν ἀλλά σταθερό $x \in (\zeta, \xi)$, ὑπάρχει $z \in (\eta, x)$ τέτοιο ὥστε

$$\frac{f(x) - f(\eta)}{g(x) - g(\eta)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Ἄρα

$$(3.10.2) \qquad \frac{f(x)}{g(x)} - \ell = \frac{f(\eta) - \ell\, g(\eta)}{g(x)} + \left[1 - \frac{g(\eta)}{g(x)}\right] \cdot \left[\frac{f'(z)}{g'(z)} - \ell\right]$$

Ἄρα, ἀπ'τήν (3.10.2), προκύπτει ὅτι, γιά κάθε $x \in (\zeta, \xi)$, ἰσχύει

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\,\frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

καί ἔτσι ἐπειδή τό ε εἶναι τυχόν, ἔχομε

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell\,.$$

Ὑποθέτομε τώρα ὅτι $\ell = +\infty$, δηλαδή

$$\lim_{\xi} \frac{f'}{g'} = +\infty\,.$$

Ἔτσι, χωρίς βλάβη τῆς γενικότητας, δεχόμαστε ὅτι ἰσχύει

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > 0 \quad \text{γιά κάθε} \quad x \in (\alpha, \xi)$$

πού δίνει ὅτι, ἐκτός ἀπό τήν g', καί ἡ f' δέν ἔχει ρίζες. Ἐπειδή

$$\lim_{\xi} \frac{g'}{f'} = 0, \quad \text{ἀπό δεξιά}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἀναγόμαστε στήν περίπτωση πεπερασμένου ὁρίου πού μελετήσαμε. Ἔτσι παίρνομε

$$\lim_{\xi}\frac{f}{g} = 1/\lim_{\xi}\frac{g}{f} = 1/\lim_{\xi}\frac{g'}{f'} = +\infty \ . \ \blacktriangle$$

Παράδειγμα 3.10.4

Τώρα μποροῦμε εὔκολα νά ὑπολογίσωμε τό ὅριο τῆς συναρτήσεως τοῦ παραδείγματος 3.10.3, διότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

III. Ἀπροσδιόριστη μορφή τοῦ τύπου $\infty-\infty$

Ὁριακές τιμές τῆς μορφῆς

$$\lim_{\xi}(f-g) \ , \quad \text{ὅπου} \quad \lim_{\xi} f = +\infty = \lim_{\xi} g$$

ὀνομάζονται **ἀπροσδιόριστες μορφές τοῦ τύπου** $\infty-\infty$. Τέτοιες ὁριακές τιμές ὑπολογίζονται ὡς ἑξῆς:

Παρατηροῦμε ὅτι

$$f-g = \frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{g}\cdot\frac{1}{f}} \ ,$$

ὅπου τώρα

$$\lim_{\xi}\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{f}\right) = 0 = \lim_{\xi}\frac{1}{gf}$$

καί ἑπομένως χρησιμοποιοῦμε τό θεώρημα 3.10.1.

Παράδειγμα 3.10.5

Ἀναζητοῦμε τό

$$\lim_{x\to0+0}\left(\operatorname{ctg} x-\frac{1}{x}\right),$$

ὅπου

$$\lim_{x\to0+0}\operatorname{ctg} x = +\infty = \lim_{x\to0+0}\frac{1}{x} \ .$$

Ὅμως, ἔχομε

$$\lim_{x\to0+0}\left(\operatorname{ctg} x-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to0+0}\frac{x-\operatorname{tg} x}{x\operatorname{tg} x} \quad \left(\text{ἀπροσδιόριστη μορφή τοῦ τύπου } \frac{0}{0}\right) =$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{(x-\operatorname{tg} x)'}{(x\operatorname{tg} x)'} = \lim_{x\to 0+0} \frac{-2\sin^2 x}{\sin 2x + 2x} \quad (\text{ἀπροσδιόριστη μορφή τοῦ τύπου } \tfrac{0}{0}) =$$

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{[-2\sin^2 x]'}{[\sin 2x + 2x]'} = \lim_{x\to 0+0} \frac{-2\sin 2x}{2\cos 2x + 2} = 0.$$

IV. Ἀπροσδιόριστη μορφή τοῦ τύπου $0.\infty$

Ὁριακές τιμές τῆς μορφῆς

$$\lim_{\xi} f g \ , \quad \text{ὅπου} \quad \lim_{\xi} f = 0 \quad \text{καί} \quad \lim_{\xi} g = \infty$$

ὀνομάζονται **ἀπροσδιόριστες μορφές τοῦ τύπου** $0.\infty$. Τέτοιες ἀπροσδιόριστες μορφές ὑπολογίζονται ὡς ἑξῆς:

Παρατηροῦμε ὅτι

$$f g = \frac{f}{1/g} \ , \quad \text{ὅπου} \quad \lim_{\xi} f = 0 = \lim_{\xi-0} (1/g)$$

καί

$$f g = \frac{g}{1/f} \ , \quad \text{ὅπου} \quad \lim_{\xi-0} g = +\infty = \lim_{\xi-0} (1/f)$$

ἑπομένως χρησιμοποιοῦμε τά θεωρήματα 3.10.1 καί 3.10.2.

Παράδειγμα 3.10.6

Ἀναζητοῦμε τό

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} (\tfrac{\pi}{2} - x)\operatorname{tg} x$$

ὅπου $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \frac{\pi}{2} - x = 0$ καί $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty$. Ἄρα ἔχομε

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} (\tfrac{\pi}{2} - x)\operatorname{tg} x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\operatorname{ctg} x} \quad (\text{ἀπροσδιόριστη μορφή τοῦ τύπου } \tfrac{0}{0}) =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \frac{(\frac{\pi}{2} - x)'}{(\operatorname{ctg} x)'} = \lim_{x\ \frac{\pi}{2}-0} \frac{-1}{1+\operatorname{ctg}^2 x} = \frac{-1}{1+0} = -1.$$

V. Ἀπροσδιόριστες μορφές τῶν τύπων 0^0, ∞^0, 1^∞

Ὁριακές τιμές τῆς μορφῆς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\lim_{\xi} f^g \ , \quad \text{ὅπου} \quad \lim_{\xi} f = 0 = \lim_{\xi} g$$

$$\lim_{\xi} f^g \ , \quad \text{ὅπου} \quad \lim_{\xi} f = \infty \ , \quad \lim_{\xi} g = 0$$

καί

$$\lim_{\xi} f^g \ , \quad \text{ὅπου} \quad \lim_{\xi} f = 1 \ , \quad \lim_{\xi} g = \infty$$

ὀνομάζονται, ἀντίστοιχα, ἀπροσδιόριστη μορφή τοῦ τύπου 0^0, ἀπροσδιόριστη μορφή τοῦ τύπου ∞^0 καί ἀπροσδιόριστη μορφή τοῦ τύπου 1^∞. Ὑπολογίζονται δέ μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:

Παρατηροῦμε ὅτι

$$f^g = e^{-g\,(-\log f)} \quad \text{καί} \quad f^g = e^{g \log f}$$

καί ἐπομένως, ἐπειδή ἡ ἐκθετική συνάρτηση exp εἶναι συνεχής, ἀναγόμαστε στήν ἀπροσδιόριστη μορφή $0.\infty$ πού ἐμφανίζεται στόν ἐκθέτη.

Παράδειγμα 3.10.7

Ἀναζητοῦμε τό

$$\lim_{x \to 0+0} x^x$$

ὅπου $\lim\limits_{x \to 0+0} x = 0$. Ὅμως, ἔχομε

$$\lim_{x \to 0+0} x \log x = -\lim_{x \to 0+0} \frac{-\log x}{1/x} \quad (\text{ἀπροσδιόριστη μορφή τοῦ τύπου } \tfrac{\infty}{\infty}) =$$

$$= -\lim_{x \to 0+0} \frac{(-\log x)'}{(1/x)'} = -\lim_{x \to 0+0} x = 0 \, ,$$

ὁπότε

$$\lim_{x \to 0+0} x^x = \lim_{x \to 0+0} e^{x \log x} = e^{\lim\limits_{x \to 0+0} x \log x} = e^0 = 1 \, .$$

Παράδειγμα 3.10.8

Ἀναζητοῦμε τό

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$$

ὅπου $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ καί $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Ὅμως, ἔχομε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\log x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}} = e^0 = 1 ,$$

ὅπου χρησιμοποιήθηκε τό παράδειγμα 3.10.4.

Παράδειγμα 3.10.9

Ἀναζητοῦμε τό ὅριο

$$\lim_{x\to0+0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$$

ὅπου $\lim\limits_{x\to0+0} \cos x = 1$ καί $\lim\limits_{x\to0+0} \frac{1}{x} = +\infty$. Ὅμως

$$\lim_{x\to0+0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0+0} e^{\frac{\log\cos x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to0+0}\frac{\log\cos x}{x}} = e^0 = 1 ,$$

διότι

$$\lim_{x\to0+0} \frac{\log\cos x}{x} \quad (\text{ἀπροσδιόριστη μορφή τοῦ τύπου } \tfrac{0}{0}) =$$

$$= \lim_{x\to0+0} \frac{(\log\cos x)'}{x'} = \lim_{x\to0+0} (-\operatorname{tg} x) = 0 .$$

3.11 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά βρεθοῦν οἱ $f'_+(0)$ καί $f'_-(0)$ ὅταν

α) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, β) $f(x) = \sqrt{|x|}$

γ) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{x-1}} , & x \neq 0 \\ 0 , & x = 0 \end{cases}$ δ) $f(x) = e^{-x}\sin 3x$.

2. Σέ ποιό σημεῖο ἡ ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμή τῆς καμπύλης πού παριστάνει τό γράφημα τῆς συναρτήσεως $f(x) = x^2$

α) σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ μέ τή θετική φορά τοῦ x-ἄξονα.

β) εἶναι παράλληλη πρός τήν εὐθεῖα πού παριστάνει ἡ $f(x) = 4x-5$.

γ) εἶναι κάθετος πρός τήν εὐθεῖα πού παριστάνει ἡ $f(x) = 3x+1$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

3. Νά γραφῆ ἡ ἐξίσωση τῆς ἐφαπτομένης καθώς καί τῆς κάθετης εὐθείας γραμμῆς τῆς καμπύλης τοῦ γραφήματος τῆς $f(x) = x^3$ στό σημεῖο (2,8).

4. Ἡ ἐξίσωση κινήσεως κάποιου κινητοῦ εἶναι

$$s(t) = 2t^3-12t^2+18t-3.$$

Νά βρεθῆ ἡ ἐπιτάχυνση πού ἔχει τή στιγμή πού ἡ ταχύτητά του εἶναι ἴση πρός μηδέν.

5. Ν'ἀποδειχτῆ ὅτι ἄν μιά συνάρτηση f εἶναι παραγωγίσιμη σέ ἕνα σημεῖο x, τότε

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} .$$

6. Ν'ἀποδειχτῆ ὅτι γιά τή συνάρτηση

$$f(x) = \frac{|x|}{1+x^2} , \quad x \in \mathbb{R}$$

τό ὅριο τῆς ἀσκήσεως 5 ὑπάρχει στό σημεῖο $x = 0$ καί εἶναι πεπερασμένο, ἐνῶ ἀντίθετα ἡ $f'(0)$ δέν ὑπάρχει.

7. Νά βρεθῆ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως f καί τά πεδία ὁρισμοῦ τῶν f καί f', ὅταν:

α) $f(x) = (1+\sqrt{x})(1+\sqrt{2x})(1+\sqrt{3x})$, β) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}$

γ) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, δ) $f(x) = \frac{x}{2\sqrt[3]{x}+2}$

ε) $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$, στ) $f(x) = (2x-1)^{-\frac{1}{3}} + 5(x^2-\sqrt{x})^{\frac{3}{4}}$.

8. Νά βρεθῆ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως f καί τά πεδία ὁρισμοῦ τῶν f καί f' ὅταν:

α) $f(x) = x^{\alpha}e^{\beta x}$, β) $f(x) = 2^x + 3^{x^2}$

γ) $f(x) = x\,e^{-x}$, δ) $f(x) = x\,e^{x}$

ε) $f(x) = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$, στ) $f(x) = x^{\sqrt{1+e^x}}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

9. Νά βρεθῆ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως f καί τά πεδία ὁρισμοῦ τῶν f καί f' ὅταν:

α) $f(x) = 10\sqrt{x} - 20\log(1+x^{\frac{1}{x}})$, β) $f(x) = e^{\sqrt{\log(\alpha x^2+\beta x+\gamma)}}$

γ) $f(x) = (1+\log\log x)^x$, δ) $f(x) = \frac{x-1}{\log_2 x}$

ε) $f(x) = \log_x 2 - x^{2x}$, στ) $f(x) = x^2\log_3 x$.

10. Νά βρεθῆ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως f καί τά πεδία ὁρισμοῦ τῶν f καί f' ὅταν:

α) $f(x) = \frac{\sin x}{x} + \frac{x}{\sin x}$, β) $f(x) = \cos^2(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}})$

γ) $f(x) = |\mathrm{tg}\, x|$, δ) $f(x) = \mathrm{tg}|x|^3$

ε) $f(x) = \frac{x\sin x}{1+\mathrm{tg}\, x}$, στ) $f(x) = \mathrm{ctg}\sqrt[3]{1+x^2}$

ζ) $f(x) = \cos\frac{1}{x}$, η) $f(x) = \sin\sqrt{1+x^2} + \cos\sqrt{1-x^2}$

θ) $f(x) = \sqrt{1+\mathrm{tg}(x+\frac{1}{x})}$, ι) $f(x) = \sin(\cos x)$

ια) $f(x) = \mathrm{tg}(\sin x)$, ιβ) $f(x) = \sin(\mathrm{tg}\, x)$.

11. Ν'ἀποδειχτοῦν οἱ τύποι:

α) $(\sin^\nu x\cos\nu x)' = \nu\sin^{\nu-1}x\cos(\nu+1)x$

β) $(\sin^\nu x\sin\nu x)' = \nu\sin^{\nu-1}x\sin(\nu+1)x$

γ) $(\cos^\nu x\sin\nu x)' = \nu\cos^{\nu-1}x\cos(\nu+1)x$

δ) $(\cos^\nu x\cos\nu x)' = -\nu\cos^{\nu-1}x\sin(\nu+1)x$.

12. Νά βρεθῆ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως f καί τά πεδία ὁρισμοῦ τῶν f καί f' ὅταν:

α) $f(x) = x\,\mathrm{Ar}\sin x$, β) $f(x) = \frac{1}{2}\log\mathrm{tg}\frac{x}{2} - \frac{\cos x}{1+\mathrm{Ar}\sin x}$

γ) $f(x) = \mathrm{Ar}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\sin\alpha\sin x}{1-\cos\alpha\cos x}\right)$, δ) $f(x) = \mathrm{Ar}\,\mathrm{ctg}(x-\sqrt{1+x^2})$

ε) $f(x) = \mathrm{Ar}\cos\frac{\beta+\alpha\cos x}{\alpha+\beta\cos x}$, στ) $f(x) = (\mathrm{Ar}\sin x + \mathrm{Ar}\cos x)^\nu$.

13. Νά βρεθῆ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως f καί τά πεδία ὁρισμοῦ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τῶν f καί f' ὅταν:

α) $f(x) = \mathrm{Ar}\sin(\mathrm{tg}\, x) + \mathrm{Ar}\sin(\mathrm{tgh}\, x)$

β) $f(x) = \sinh \mathrm{Ar}\cos x^x$, γ) $f(x) = \cosh \mathrm{Ar}\sin x^x$

δ) $f(x) = \dfrac{x\sinh x + \cos x}{x\cosh x - \sin x}$, ε) $f(x) = \log\sinh(\sin x + 1)$

στ) $f(x) = \mathrm{Ar}\,\mathrm{tgh}\sqrt{x}$, ζ) $f(x) = x\,\mathrm{Ar}\sinh x + \cosh x$.

14. Νά βρεθῆ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως f καί τά πεδία ὁρισμοῦ τῶν f καί f' ὅταν:

α) $f(x) = \mathrm{Ar}\,\mathrm{tgh}\dfrac{1}{x}$, β) $f(x) = x\,\mathrm{Ar}\sinh(\dfrac{1-x}{1+x})$

γ) $f(x) = \cos \mathrm{Ar}\sinh\sqrt{1-x^2}$, δ) $f(x) = \sin \mathrm{Ar}\cosh x^x$.

15. Νά βρεθῆ ἡ παράγωγος τῶν συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^{xe^x}$, β) $f(x) = x^{x^x}$, γ) $f(x) = (1+\dfrac{1}{x})^x$.

16. Ν'ἀποδειχτῆ ὅτι ἡ συνάρτηση $y(t) = A\sin(\omega t+\omega_0) + B\cos(\omega t+\omega_0)$ (A,B,ω,ω_0 εἶναι σταθεροί ἀριθμοί), ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωση (ἐξίσωση κύματος):

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 .$$

17. Νά βρεθῆ ἡ ν-οστή παράγωγος τῆς συναρτήσεως f ὅταν:

α) $f(x) = x^\alpha e^x$, β) $f(x) = x^{\nu-1}e^{\frac{1}{x}}$

γ) $f(x) = x^{-1}e^x$, δ) $f(x) = x^2\mathrm{tg}(\alpha x+\beta)$

ε) $f(x) = e^{\alpha x}\sin\alpha x$, στ) $f(x) = (x-1)^{\nu-1}\log x$

ζ) $f(x) = (1+x^2)\varphi'(x)+2x\varphi(x)$, ὅπου φ εἶναι ν+1 φορές παραγωγίσιμη.

18. Ν'ἀποδειχτῆ ὅτι

α) $1-\dfrac{1}{x} \leq \log x \leq x-1$, γιά κάθε $x > 0$

β) $\dfrac{x-y}{\cos^2 y} \leq \mathrm{tg}\, x - \mathrm{tg}\, y \leq \dfrac{x-y}{\cos^2 x}$, γιά κάθε x, y μέ $0 \leq x \leq y < \dfrac{\pi}{2}$

γ) $\nu x^{\nu-1}(x-y) < x^\nu - y^\nu < \nu y^{\nu-1}(x-y)$, γιά κάθε x, y μέ $0 < x < y$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

19. Ἔστω μία συνάρτηση $f|[\alpha,\beta]$, γιά τήν ὁποία ὑπάρχει ἡ $f'|[\alpha,\beta]$. Ἄν $f'(\alpha) \neq f'(\beta)$ καί η εἶναι τυχών πραγματικός ἀριθμός μεταξύ τῶν $f'(\alpha)$ καί $f'(\beta)$, νά ἀποδειχτῆ ὅτι

i) ὑπάρχει $h_0 > 0$ τέτοιο ὥστε ἡ συνάρτηση πού ὁρίζεται ἀπ'τόν τύπο

$$F(x) = \frac{f(x+h_0) - f(x)}{h_0} \quad \text{ὅπου } x \in [\alpha, \beta - h_0]$$

εἶναι τέτοια ὥστε τό η νά εἶναι μεταξύ τῶν $F(\alpha)$ καί $F(\beta - h_0)$.

ii) (Darboux) ὑπάρχουν ξ_0 καί ξ τέτοια ὥστε

$$\eta = F(\xi_0) = f'(\xi).$$

20. Ἄν γιά τίς παραγωγίσιμες συναρτήσεις f καί φ στό $[\alpha,\beta]$ ἰσχύη ὅτι $f(\alpha) \geq \varphi(\alpha)$ καί $f'(x) > \varphi'(x)$ στό (α,β), τότε ἰσχύει καί $f(x) > \varphi(x)$ στό (α,β).

21. Ν'ἀναπτυχτῆ τό πολυώνυμο $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ κατά τίς δυνάμεις τοῦ $x-2$.

22. Νά γραφῆ ὁ τύπος τοῦ Taylor γιά τή συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

στό σημεῖο $x_0 = 1$, μέ ὑπόλοιπο R_ν πού νά ἐκφράζεται κατά Lagrange.

23. Νά ἀναπτυχτοῦν κατά Mac-Laurin οἱ συναρτήσεις:

$$f(x) = xe^x, \quad g(x) = \sqrt{1+x}, \quad h(x) = \frac{1}{1+x}.$$

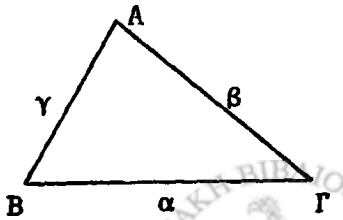
24. Ν'ἀναπτυχτοῦν κατά Mac-Laurin οἱ συναρτήσεις:

Ar tg, sinh, cosh.

25. Ἔστω τρίγωνο ΑΒΓ μέ α,β,γ τά μήκη τῶν πλευρῶν του καί A,B,Γ ἀντίστοιχα τά μέτρα τῶν γωνιῶν του (βλ. ΣΧ. 10). Ἄν α,β εἶναι σταθερά ν'ἀποδειχτῆ ὅτι:

i) $\frac{d\gamma}{d\Gamma} = -\frac{1}{\gamma}\frac{d}{d\Gamma}\left(\gamma^2 \frac{dA}{d\Gamma}\right) = \alpha \sin B$

ii) $\gamma \frac{dA}{d\Gamma} = \frac{d^2\gamma}{d\Gamma^2} - \gamma\left(\frac{dA}{d\Gamma}\right)^2 = -\alpha \cos B$.



ΣΧΗΜΑ 10

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

26. Ἂν $f(x)$, $x \in [0, 1]$ καί ἡ παράγωγός της εἶναι συνεχής καί ἐπί πλέον ἰσχύη $f(0)=0$ καί $f'(x) \geqq \mu > 0$ γιά κάθε $x \in [0, 1]$, τότε ὑπάρχει ἕνα ὑποδιάστημα τοῦ διαστήματος $[0, 1]$ μέ μῆκος ἴσο μέ $\frac{1}{2}$, τέτοιο ὥστε νά ἰσχύη $f(x) \geqq \frac{\mu}{2}$.

27. Ἂν $f(x) = x^2$ καί $g(x) = x^3$ γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$, νά ἀποδειχτῆ ὅτι δέν ὑπάρχει $x \in (-1,1)$ τέτοιο ὥστε

$$\frac{f(1) - f(-1)}{g(1) - g(-1)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

28. Νά ἀποδειχτῆ ὅτι ἄν γιά μιά συνάρτηση $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ ἰσχύη

$$|f(x) - f(y)| \leqq (x - y)^2 \text{ γιά κάθε } x \text{ καί } y$$

τότε αὐτή εἶναι σταθερά συνάρτηση.

29. Ἂν $f(x)$, $x > 0$ εἶναι μιά παραγωγίσιμη συνάρτηση μέ $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$, καί τεθῆ $g(x) = f(x+1) - f(x)$, νά ἀποδειχτῆ ὅτι ἰσχύει $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.

30. Ὑποθέτομε ὅτι f καί g εἶναι δύό συναρτήσεις συνεχεῖς στό διάστημα $[\alpha, \beta]$ καί παραγωγίσιμες στό (α, β). Ἂν ἀκόμη ὑποτεθῆ ὅτι $g'(x) \neq 0$ γιά κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε νά ἀποδειχτῆ ὅτι ὑπάρχει τουλάχιστο ἕνα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ὥστε

$$\begin{vmatrix} f(\beta) - f(\alpha) & g(\beta) - g(\alpha) \\ f'(\xi) & g'(\xi) \end{vmatrix} = 0.$$

31 Νά βρεθοῦν τά παρακάτω ὅρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x} - \cos \alpha x}{e^{\beta x} - \cos \beta x}$, β) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{tg} x} - e^{x}}{\operatorname{tg} x - x}$

γ) $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\log x}{\log \sin x}$, δ) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\log \log x}{\log x}$

ε) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$, στ) $\lim\limits_{x\to 0+0} \operatorname{tg} x \log x$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ζ) $\lim\limits_{x\to 0} (e^x+x)^{\frac{1}{x}}$, η) $\lim\limits_{x\to \alpha} \left(2-\frac{x}{\alpha}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2\alpha}}$

θ) $\lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{\log(1+x)^{1+x}}{x^2}-\frac{1}{x}\right]$, ι) $\lim\limits_{x\to 0} (e^{\frac{1}{x}}-\operatorname{ctg} x)$

ια) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$, ιβ) $\lim\limits_{x\to 0+0} (\log x)^x$

ιγ) $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ctg} x)^x$, ιδ) $\lim\limits_{x\to \infty} (\log x)^{\frac{1}{x}}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Στίς ἐφαρμογές τίς περισσότερες φορές τό γράφημα μιᾶς συναρτήσεως ὑποδηλώνει πληρέστερα καί φανερώνει καλύτερα τίς ἰδιότητες, τή συμπεριφορά καί τή μεταβολή αὐτῆς τῆς ἴδιας τῆς συναρτήσεως. Μέ τή **μελέτη τῆς συναρτήσεως**, πού θά γίνη μέ τή χρήση τῶν παραγώγων, ἀποκομίζονται γιά τή συνάρτηση ὅσο τό δυνατόν περισσότερες πληροφορίες, πού χρησιμοποιοῦνται γιά ὑποβοηθητικά στοιχεῖα στή σχεδίαση τοῦ γραφήματός της.

4.1 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Ἡ ἔννοια τῆς μονοτονίας πού δόθηκε στό Κεφάλαιο 1, γιά παραγωγίσιμες συναρτήσεις, μπορεῖ νά ἐλεγχθῆ ἀπό τό πρόσημο τῆς παραγώγου. Συγκεκριμένα ἔχομε τό ἑξῆς κριτήριο μονοτονίας.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1.1. Ἄν f εἶναι μιά παραγωγίσιμη συνάρτηση, Δ ἕνα διάστημα ὑποσύνολο τοῦ $\mathcal{D}(f)$ καί ἡ f' δέν ἀλλάζη πρόσημο στό Δ, τότε ἡ f εἶναι μονότονη ἐπί τοῦ Δ. Μάλιστα δέ

α) ἄν $f'(x) > 0$, γιά κάθε $x \in \Delta$, τότε ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα ἐπί τοῦ Δ,

β) ἄν $f'(x) \geq 0$, γιά κάθε $x \in \Delta$, τότε ἡ f εἶναι αὔξουσα ἐπί τοῦ Δ,

γ) ἄν $f'(x) < 0$, γιά κάθε $x \in \Delta$, τότε ἡ f εἶναι γνησίως φθίνουσα ἐπί τοῦ Δ,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δ) **ἄν $f'(x) \leq 0$, γιά κάθε $x \in \Delta$, τότε ἡ f εἶναι φθίνουσα ἐπί τοῦ Δ.**

Ἀπόδειξη. Ἀπ'τό θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς, προκύπτει ὅτι γιά κάθε x_1, x_2 τοῦ Δ μέ $x_1 < x_2$, ὑπάρχει $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq \Delta$, τέτοιο ὥστε

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) f'(\xi).$$

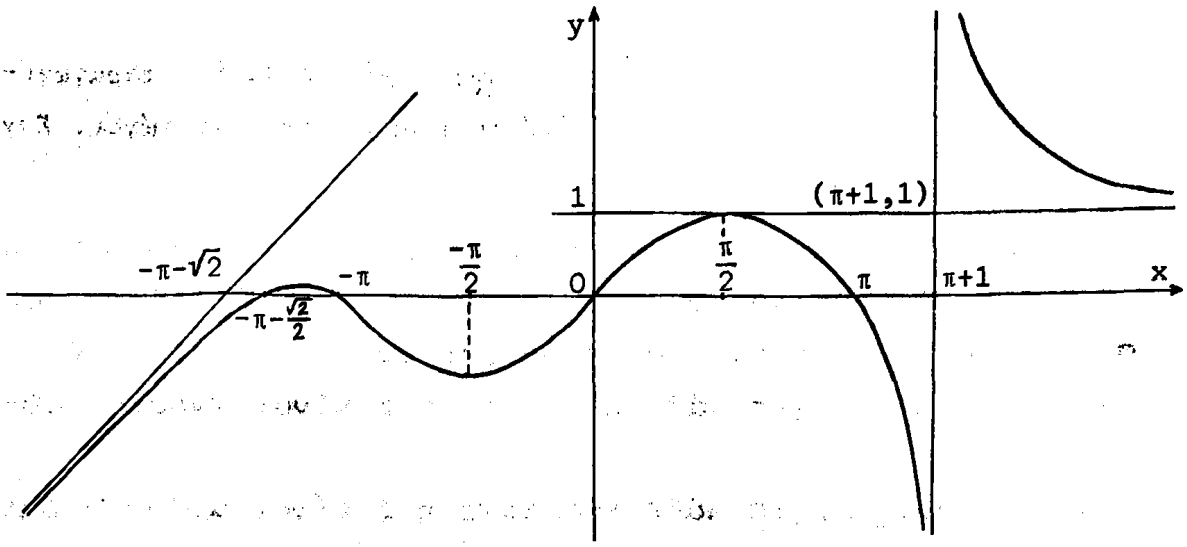
Ἔτσι, ἄν $f'(x) > 0$ γιά κάθε $x \in \Delta$, τότε καί $f'(\xi) > 0$, δηλαδή $(x_1 - x_2) f'(\xi) < 0$. Ἄρα $f(x_1) < f(x_2)$, πού ἀποδεύχνει τήν α). Παρόμοια προκύπτουν καί οἱ β), γ) καί δ). ▲

Παράδειγμα 4.1.1

Ἡ συνάρτηση $f(x)$, $x \in \mathbb{R} - \{\pi+1\}$ πού ὁρίζεται ἀπ'τόν τύπο

$$f(x) = \begin{cases} (x+\pi)\dfrac{\sqrt{2}(x+\pi)+1}{\sqrt{2}(x+\pi)-1}, & \text{ἄν } x \leq -\pi \\ \sin x, & \text{ἄν } -\pi < x \leq \pi \\ \dfrac{x-\pi}{x-\pi-1}, & \text{ἄν } x > \pi,\ x \neq \pi+1 \end{cases}$$

εἶναι συνεχής καί ἔχει γράφημα πού παριστάνεται στό παρακάτω ΣΧ. 1.



ΣΧΗΜΑ 1

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παρατηροῦμε ὅτι:

i) γιά κάθε $x\in(-\infty,-\pi-1+\frac{\sqrt{2}}{2}]$, ἔχομε

$$f'(x)=1-\frac{2}{(\sqrt{2}(x+\pi)-1)^2}>0$$

καί ἄρα ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα ἐπί τοῦ διαστήματος $(-\infty,-\pi-1+\frac{\sqrt{2}}{2}]$.

ii) γιά κάθε $x\in[-\pi-1+\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{2})$, ἔχομε

$$f'(x)=\begin{cases}1-\dfrac{2}{(\sqrt{2}(x+\pi)-1)^2}, & \text{ἄν } x\in[-\pi-1+\frac{\sqrt{2}}{2},-\pi]\\ \cos x, & \text{ἄν } x\in(-\pi,-\frac{\pi}{2})\end{cases}, \quad \text{ἄρα καί } f'(x)<0$$

ὁπότε ἡ f εἶναι γνησίως φθίνουσα ἐπί τοῦ διαστήματος $[-\pi-1+\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{2})$ καί ἄρα καί ἐπί τοῦ κλειστοῦ διαστήματος $[-\pi-1+\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\pi}{2}]$ ἀφοῦ εἶναι συνεχής.

iii) γιά κάθε $x\in(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ἔχομε

$$f'(x)=\cos x>0$$

ὁπότε ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα ἐπί τοῦ διαστήματος $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ καί ἄρα καί ἐπί τοῦ κλειστοῦ διαστήματος $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ ἀφοῦ εἶναι συνεχής.

iv) γιά κάθε $x\in(\frac{\pi}{2},+\infty)-\{\pi+1\}$, ἔχομε

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{ἄν } x\in(\frac{\pi}{2},\pi]\\ -\dfrac{1}{(x-\pi-1)^2}, & \text{ἄν } x\in(\pi,+\infty)-\{\pi+1\}\end{cases} \quad \text{ὁπότε } f'(x)<0$$

καί ἑπομένως ἡ f εἶναι γνησίως φθίνουσα χωριστά ἐπί τῶν διαστημάτων $[\frac{\pi}{2},\pi+1)$ καί $(\pi+1,+\infty)$. ▲

Ἕνα ἄμεσο ἐπακόλουθο τοῦ θεωρήματος 4.1.1 εἶναι καί τό ἑξῆς πόρισμα:

ΠΟΡΙΣΜΑ 4.1.1 Ἄν ἡ παράγωγος f' μιᾶς συναρτήσεως f εἶναι συνεχής καί τέτοια ὥστε $f'(\xi)\neq 0$ γιά κάποιο $\xi\in\mathcal{D}(f)$, τότε ὑπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ὥστε ὁ περιορισμός g τῆς συναρτήσεως f ἐπί τοῦ $\mathcal{D}(f)\cap(\xi-\delta,\xi+\delta)$, ἤτοι ἡ συνάρτηση

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$g = f\,|\mathcal{D}(f)\cap(\xi-\delta\,.\,\xi+\delta)$$

νά εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη.

Ἀπόδειξη. Ἀπ' τή συνέχεια τῆς f' καί τήν πρόταση 1.13.1 προκύπτει ὅτι ὑπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ὥστε $f'(x) \neq 0$, γιά κάθε $x \in \mathcal{D}(f)\cap(\xi-\delta, \xi+\delta)$. Ἄρα ἡ $f\,|\mathcal{D}(f)\cap(\xi-\delta\,,\xi+\delta)$, δηλαδή ἡ

$$g = f\,|\mathcal{D}(f)\cap(\xi-\delta\,,\xi+\delta)$$

εἶναι γνησίως μονότονη καί ἄρα εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη.

Ἄς σημειωθῆ ὅτι, ἔτσι ὁρίζεται ἡ g^{-1}, ἡ ὁποία εἶναι ἐπίσης παραγωγίσιμη μέ παράγωγο $\dfrac{1}{g'(\xi)}$ στό σημεῖο $f(\xi)$. ▲

4.2 ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Ἔστω f μιά συνάρτηση ὁρισμένη σέ μιά περιοχή ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ α.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.2.1. **Θά λέμε ὅτι ἡ συνάρτηση f ἔχει**

i) **ἕνα "γνήσιο τοπικό μέγιστο" στό α, ἄν ὑπάρχη $\delta > 0$, τέτοιο ὥστε**

$$f(\alpha+h) < f(\alpha), \text{ γιά κάθε } h \text{ μέ } 0<|h|<\delta$$

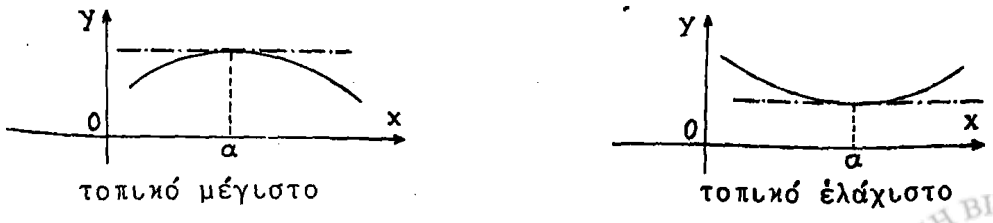
ii) **ἕνα "τοπικό μέγιστο" στό α, ἄν ὑπάρχη $\delta > 0$, τέτοιο ὥστε**

$$f(\alpha+h) \leq f(\alpha), \text{ γιά κάθε } h \text{ μέ } |h| < \delta.$$

iii) **ἕνα "γνήσιο τοπικό ἐλάχιστο" στό α, ἄν ἡ $-f$ ἔχη ἕνα γνήσιο τοπικό μέγιστο στό α.**

iv) **ἕνα "τοπικό ἐλάχιστο" στό α, ἄν ἡ $-f$ ἔχη ἕνα τοπικό μέγιστο στό α.**

Στό ΣΧ. 2 φαίνεται ἡ μορφή τοῦ γραφήματος μιᾶς συναρτήσεως f



ΣΧΗΜΑ 2

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

σέ μιά περιοχή ἑνός σημείου $\alpha \in \mathcal{D}(f)$, ὅπου αὐτή ἔχει "γνήσια τοπικά ἀκρότατα" δηλαδή γνήσιο τοπικό μέγιστο καί ἐλάχιστο.

Ἐκεῖνο πού μᾶς ἀπασχολεῖ εἶναι νά βροῦμε συνθῆκες γιά τήν ὕπαρξη τῶν "τοπικῶν ἀκροτάτων" (δηλαδή, τοπικῶν μεγίστων καί ἐλαχίστων) μιᾶς συναρτήσεως, συνθῆκες γιά τή διάκρισή τους σέ τοπικά μέγιστα καί ἐλάχιστα, καθώς καί ἰδιότητες πού ὑποβοηθοῦν στήν εὕρεσή τους.

Ξαναγράφοντας τή συνθήκη τοῦ τοπικοῦ μεγίστου μιᾶς συναρτήσεως f σέ ἕνα σημεῖο $\alpha \in \mathcal{D}(f)$, πρέπει νά ἰσχύη

$$f(x) \leq f(\alpha), \quad \text{γιά κάθε} \quad x \in \mathcal{D}(f) \cap (\alpha-\delta, \alpha+\delta),$$

ὅπου δ εἶναι κατάλληλος πραγματικός ἀριθμός. Ἔτσι, ἄν στό σημεῖο α ἡ συνάρτηση f παρουσιάζη τοπικό μέγιστο, τότε αὐτή παίρνει τιμή, μεγαλύτερη ἤ ἴση ἀπό ὅλες τίς ἄλλες τιμές πού παίρνει στά γειτονικά σημεῖα τοῦ α. Ἐπίσης, ἄν στό α ἡ f παρουσιάζη τοπικό ἐλάχιστο, τότε παίρνει τιμή μικρότερη ἤ ἴση συγκριτικά μέ ὅλες τίς ἄλλες τιμές πού παίρνει στά γειτονικά σημεῖα τοῦ α. Ἑπομένως ἐφαρμόζοντας τό θεώρημα 3.9.1 τοῦ Fermat γιά τόν περιορισμό τῆς f σέ μιά κατάλληλη περιοχή ἑνός σημείου α, ὅπου ἡ f παρουσιάζει τοπικό ἀκρότατο μποροῦμε νά πάρωμε τό παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2.1. Ὑποθέτομε ὅτι ἡ συνάρτηση f εἶναι παραγωγίσιμη σέ μιά περιοχή ἑνός σημείου $\alpha \in \mathcal{D}(f)$. Ἄν αὐτή ἔχη τοπικό ἀκρότατο (μέγιστο ἤ ἐλάχιστο) στό α, τότε πρέπει $f'(\alpha) = 0$.

Ἐπίσης πολλές φορές τό πρόσημο τῆς παραγώγου χαρακτηρίζει τό εἶδος τοῦ ἀκροτάτου μιᾶς συναρτήσεως. Συγκεκριμένα ἀπ'τό θεώρημα 4.1.1 προκύπτει ὅτι:

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2.2. Ὑποθέτομε ὅτι ἡ συνάρτηση f εἶναι συνεχής σ'ἕνα σημεῖο α καί ὑπάρχει $\delta > 0$ ὥστε ἡ f νά εἶναι παραγωγίσιμη ἐπί τοῦ συνόλου $(\alpha-\delta, \alpha) \cup (\alpha, \alpha+\delta)$.

i) Ἄν $f'(x) < 0$ γιά κάθε $x \in (\alpha-\delta, \alpha)$ καί $f'(x) > 0$ γιά κάθε $x \in (\alpha, \alpha+\delta)$, τότε ἡ f στό α παρουσιάζει (γνήσιο) τοπικό ἐλάχιστο,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ii) Ἄν $f'(x)>0$ γιά κάθε $x\in(\alpha-\delta,\alpha)$ καί $f'(x)<0$ γιά κάθε $x\in(\alpha,\alpha+\delta)$, τότε ἡ f στό α παρουσιάζει (γνήσιο) τοπικό μέγιστο.

Παρατήρηση 4.2.1.

Ἄν στό θεώρημα 4.2.2 ὑπάρχη ἡ παράγωγος f' τῆς f καί στό α, τότε πρέπει $f'(\alpha)=0$, δηλαδή ἡ ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμή στό σημεῖο $(\alpha,f(\alpha))$ τῆς καμπύλης εἶναι παράλληλη πρός τόν x-ἄξονα (βλ. ΣΧ. 2). Ἄν ἰσχύουν οἱ ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος 4.2.2 καί ἀκόμη οἱ πλευρικές παράγωγοι τῆς f στό α δέν εἶναι πεπερασμένες τότε ἡ f στό α παρουσιάζει "αἰχμή" (βλ. ΣΧ. 6 τοῦ Κεφ. 3).

Στήν περίπτωση πού ὑπάρχει ἡ f'' στό α τῆς συναρτήσεως f ἰσχύει τό παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2.3. Ἄν ἡ συνάρτηση f ἔχη πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα ἀνοικτό διάστημα Δ, ἡ f'' ὑπάρχη καί εἶναι συνεχής στό Δ καί γιά κάποιο σημεῖο $\alpha\in\Delta$ ἰσχύη $f'(\alpha)=0$, $f''(\alpha)\neq 0$ τότε

i) ἄν $f''(\alpha)>0$, ἡ συνάρτηση f ἔχει (γνήσιο) τοπικό ἐλάχιστο στό α,

ii) ἄν $f''(\alpha)<0$, ἡ συνάρτηση f ἔχει (γνήσιο) τοπικό μέγιστο στό α.

Ἀπόδειξη. Ἄν $f''(\alpha)>0$, τότε ὑπάρχει $\delta>0$ ὥστε $f''(y)>0$ γιά κάθε $y\in(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$. Ἔτσι f' εἶναι αὔξουσα ἐπί τοῦ $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$ καί ἐπειδή $f'(\alpha)=0$ ἕπεται ὅτι $f'(y)<0$ γιά $y\in(\alpha-\delta,\alpha)$ καί $f'(y)>0$ γιά $y\in(\alpha,\alpha+\delta)$. Τώρα, ἐφαρμόζοντας τό θεώρημα 4.2.2 ἔχομε τό συμπέρασμα i). Ἀνάλογα ἐργαζόμαστε καί γιά τήν περίπτωση ii). ▲

Τό παραπάνω θεώρημα μπορεῖ ν'ἀποδειχτῆ καί μέ βάση τόν τύπο τοῦ Taylor. Ὅμως ἡ μέθοδος αὐτή μπορεῖ νά χρησιμοποιηθῆ ὥστε νά ἐξαχθῆ ἕνα γενικώτερο συμπέρασμα πού ἔχει ὡς ἑξῆς:

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2.4. Ἄν ἡ συνάρτηση f ἔχη πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα ἀνοικτό διάστημα Δ, ἡ $f^{(\nu)}$, ὅπου ν ἄρτιος, ὑπάρχη καί εἶναι συνεχής στό Δ καί γιά κάποιο σημεῖο $\alpha\in\Delta$ ἰσχύη

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$f'(\alpha)=f''(\alpha)=\ldots=f^{(\nu-1)}(\alpha)=0,\ f^{(\nu)}(\alpha)\neq 0,$$

τότε

i) ἄν $f^{(\nu)}(\alpha)>0$, ἡ συνάρτηση f ἔχει (γνήσιο) τοπικό ἐλάχιστο στό α,

ii) ἄν $f^{(\nu)}(\alpha)<0$, ἡ συνάρτηση f ἔχει (γνήσιο) τοπικό μέγιστο στό α.

Ἀπόδειξη. Μέ τόν τύπο τοῦ Tavlor

$$f(x)=f(\alpha)+\frac{x-\alpha}{1!}f'(\alpha)+\ldots+\frac{(x-\alpha)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}f^{(\nu-1)}(\alpha)+\frac{(x-\alpha)^{\nu}}{\nu!}f^{(\nu)}(\xi)$$

ὅπου ξ εἶναι μεταξύ τῶν x καί α, παίρνομε

$$f(x)-f(\alpha)=\frac{(x-\alpha)^{\nu}}{\nu!}f^{(\nu)}(\xi). \tag{4.2.1}$$

Ἐπειδή $f^{(\nu)}(\alpha)\neq 0$, ἄς εἶναι $f^{(\nu)}(\alpha)>0$· ἀπό τή συνέχεια τῆς $f^{(\nu)}$ καί τήν Πρόταση 1.13.1 ὑπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ὥστε $f^{(\nu)}(y)>0$ γιά κάθε $y\in(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$. Ἔτσι ἄν στόν τύπο τό x εἶναι τέτοιο ὥστε $x\in(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$, τότε ἔχομε καί $\xi\in(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$, ὁπότε $f^{(\nu)}(\xi)>0$ καί ἐπειδή ν ἄρτιος ἀπό τήν (4.2.1) $f(x)>f(\alpha)$ γιά κάθε $x\in(\alpha-\delta,\alpha+\delta)-\{\alpha\}$

πού ἀποδείχνει τήν i).

Ἡ ii) μπορεῖ ν'ἀποδειχτῆ παρόμοια, ἤ καί ἀκόμη ἐφαρμόζοντας τήν i) γιά τήν -f. ▲

Ἄς ἐφαρμόσωμε τά παραπάνω γιά νά βροῦμε τά τοπικά ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως τοῦ παραδείγματος 4.1.1.

Πραγματικά· γιά $x\leq-\pi$, ἔχομε $f(x)=(x+\pi)\frac{\sqrt{2}(x+\pi)+1}{\sqrt{2}(x+\pi)-1}$. Ἔτσι

$$f'(x)=\frac{2(x+\pi)^2-2\sqrt{2}(x+\pi)-1}{(\sqrt{2}(x+\pi)-1)^2}$$

ὁπότε ἡ σχέση

$$f'(x)=0\ ,\quad x\leq-\pi$$

ἱκανοποιεῖται διά $x=-\pi-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ καί ἑπομένως τό $f(-\pi-1+\frac{\sqrt{2}}{2})$ εἶναι τοπικό ἀκρότατο. Ἐπίσης

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$f''(x) = \frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{2}(x+\pi)-1)^3}, \quad x \leq -\pi$$

καί έπομένως $f''(-\pi-1+\frac{\sqrt{2}}{2}) = -2 < 0$. Άρα ή f στό σημεῖο $-\pi-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ ἔχει τοπικό μέγιστο καί εἶναι τό $f(-\pi-1+\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2$.

Γιά $x \in (-\pi,\pi)$, ἔχομε $f(x) = \sin x$. Ἔτσι

$$f'(x) = \cos x, \quad x \in (-\pi,\pi)$$

ὁπότε ή $f'(x) = 0$ ἔχει ρίζες $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ καί $x_2 = \frac{\pi}{2}$ καί έπομένως τά σημεῖα $f(-\frac{\pi}{2})$, $f(\frac{\pi}{2})$ εἶναι τοπικά ἀκρότατα τῆς f. Βρίσκοντας τήν f'', ἔχομε $f''(-\frac{\pi}{2}) = -\sin(-\frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 > 0$ καί ἄρα $f(-\frac{\pi}{2}) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ εἶναι τοπικό ἐλάχιστο τῆς f, ἐνῶ $f''(\frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2}) = -1 < 0$ καί ἄρα $f(\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ εἶναι τοπικό μέγιστο τῆς f.

Τέλος γιά $x \in (\pi,+\infty) - \{\pi+1\}$, ἔχομε $f(x) = \frac{x-\pi}{x-\pi-1}$. Ἔτσι

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-\pi-1)^2}, \quad \text{δηλαδή } f'(x) < 0 \text{ γιά κάθε } x \in (\pi,+\infty) - \{\pi+1\}.$$

Ἐπομένως ή $f'(x) = 0$ δέν ἔχει πραγματική ρίζα καί ἄρα ή f δέν ἔχει τοπικά ἀκρότατα στό σύνολο τοῦτο.

Ἔτσι ή συνάρτηση f τοῦ παραδείγματος 4.1. ἔχει τά σημεῖα $f(-\pi-1+\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2$ καί $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ τοπικά μέγιστα καί τό $f(-\frac{\pi}{2}) = -1$ τοπικό ἐλάχιστο.

Παράδειγμα 4.2.2

Μεταξύ ὅλων τῶν ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων μέ σταθερή περίμετρο νά βρεθῆ ἐκεῖνο πού ἔχει μέγιστο ἐμβαδό.

Ἄν α εἶναι ή ἡμιπερίμετρος ἑνός παραλληλογράμμου, καί ἄν s εἶναι ή μιά πλευρά τότε α-s θά εἶναι ή ἄλλη. Ἔτσι τό ἐμβαδό του εἶναι $E = s(\alpha-s)$ πού θεωρεῖται ὡς μιά συνάρτηση τοῦ s, ἤτοι

$$E = E(s) = s(\alpha-s), \quad s \in (0,\alpha).$$

Βρίσκοντας τήν πρώτη παράγωγο $E'(s)$ τῆς συναρτήσεως E ὡς πρός s, ἔχομε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$E'(s) = \alpha - 2s$$

ὁπότε $E'(s) = 0$ μόνο διά $s = \frac{\alpha}{2}$. Ἐξ ἄλλου $E''(S) = -2 < 0$ καί ἑπομένως τό τετράγωνο πλευρᾶς $\frac{\alpha}{2}$ εἶναι τό ζητούμενο ὀρθογώνιο μέ τό μέγιστο ἐμβαδό. ▲

4.3 ΚΥΡΤΕΣ ΚΑΙ ΚΟΙΛΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Θεωροῦμε μιά συνάρτηση f ὁρισμένη καί παραγωγίσιμη σέ ἕνα διάστημα (α,β) καί ἔστω $x_0 \in (\alpha,\beta)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.3.1. Λέμε ὅτι ἡ συνάρτηση f εἶναι

α) "κυρτή στό x_0" ἄν γιά κάθε $x \in (\alpha,\beta)$ ἰσχύη

$$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) \geqq 0.$$

β) "κοίλη στό x_0" ἄν γιά κάθε $x \in (\alpha,\beta)$ ἰσχύη

$$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) \leqq 0,$$

γ) "γνησίως κυρτή στό x_0" ἄν γιά κάθε $x \in (\alpha,\beta)$ μέ $x \neq x_0$ ἰσχύη

$$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) > 0,$$

δ) "γνησίως κοίλη στό x_0" ἄν γιά κάθε $x \in (\alpha,\beta)$ μέ $x \neq x_0$ ἰσχύη

$$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) < 0.$$

Ἐξηγώντας γεωμετρικά τόν ὁρισμό αὐτό μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι ἄν δοθῆ μιά συνάρτηση f παραγωγίσιμη στό (α,β) τότε γράφοντας τήν εὐθεία γραμμή πού ἐφάπτεται τῆς καμπύλης στό σημεῖο $(x_0,f(x_0))$, ἡ καμπύλη βρίσκεται πάνω ἀπ'αὐτή ἄν ἡ f εἶναι γνησίως κυρτή στό x_0 καί κάτω ἄν εἶναι γνησίως κοίλη στό x_0. Γι'αὐτό πολλές φορές ἀντί γιά τούς ὅρους "κυρτή" καί "κοίλη" χρησιμοποιοῦνται ἀντίστοιχα οἱ ὅροι "ὑπεργραμμική" καί "ὑπογραμμική".

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.3.2. Μιά συνάρτηση $f(x)$, $x \in (\alpha,\beta)$ λέγεται "κυρτή", "κοίλη", "γνησίως κυρτή", "γνησίως κοίλη" ἄν, ἀντίστοιχα, εἶναι τέτοια σέ κάθε σημεῖο τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της.

Ἀπ'τόν ὁρισμό 4.3.1 προκύπτει ὅτι

f εἶναι κυρτή στό $x_0 \iff -f$ εἶναι κοίλη στό x_0

f εἶναι γνησίως κυρτή στό $x_0 \iff -f$ εἶναι γνησίως κοίλη στό x_0.

Ὁ προηγούμενος ὁρισμός 4.3.1 δίνεται μέ τή βοήθεια τῆς παραγώγου τῆς συναρτήσεως. Πολλές φορές ὅμως μποροῦμε νά ἀποφανθοῦμε ἄν μιά συνάρτηση εἶναι κυρτή ἤ κοίλη χωρίς νά χρησιμοποιήσωμε τήν παράγωγό της. Τοῦτο φαίνεται στό ἀκόλουθο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.3.1. Ἔστω f μιά συνάρτηση ὁρισμένη καί παραγωγίσιμη σ'ἕνα διάστημα (α,β). Τότε ἡ f εἶναι

(i) κυρτή, τότε καί μόνο τότε, ἄν γιά κάθε x_1,x_2 στό (α,β) καί $\lambda \in (0,1)$ ἰσχύη

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2). \tag{4.3.1}$$

(ii) κοίλη, τότε καί μόνο τότε, ἄν γιά κάθε x_1,x_2 στό (α,β) καί $\lambda \in (0,1)$ ἰσχύη

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

(iii) γνησίως κυρτή, τότε καί μόνο τότε, ἄν γιά κάθε x_1,x_2 στό (α,β) μέ $x_1 \neq x_2$ ἰσχύη

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2). \tag{4.3.2}$$

(iv) γνησίως κοίλη, τότε καί μόνο τότε, ἄν γιά κάθε x_1,x_2 στό (α,β) μέ $x_1 \neq x_2$ ἰσχύη

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) > \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

Ἀπόδειξη. Θ'ἀποδείξωμε μόνο τίς (i), (iii) διότι οἱ (ii),(iv) ἀποδείχνονται ἀνάλογα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἀπόδειξη τῆς (i). Ὑποθέτομε ὅτι ἰσχύει ἡ (4.3.1) καί θεωροῦμε δυό σημεῖα x καί x_0 στό (α,β) καί $\lambda \in (0,1)$. Θέτομε

$$\hat{x} = \lambda x_0+(1-\lambda)x \tag{4.3.3}$$

ὁπότε ἀπ'τήν (4.3.1) ἔχομε

$$f(\hat{x})-f(x_0) = f(\lambda x_0+(1-\lambda)x)-f(x_0) \leqq (1-\lambda)(f(x)-f(x_0)). \tag{4.3.4}$$

Ἀπ'τήν παραγωγισιμότητα τῆς f στό x_0, ἔχομε

$$f(\hat{x})-f(x_0) = f'(x_0)(\hat{x}-x_0)+(\hat{x}-x_0)\psi(\hat{x}-x_0) \tag{4.3.5}$$

ὅπου ψ εἶναι συνάρτηση συνεχής στό 0 μέ $\lim\limits_{0} \psi = 0$. Τότε ἀπ'τήν (4.3.3) ἡ (4.3.5) δίνει

$$f(\hat{x})-f(x_0) = (1-\lambda)f'(x_0)(x-x_0)+(1-\lambda)(x-x_0)\psi((1-\lambda)(x-x_0))$$

ὁπότε, ἀπ'τήν (4.3.4), βρίσκομε

$$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) \geqq (x-x_0)\psi((1-\lambda)(x-x_0)). \tag{4.3.6}$$

Στήν (4.3.6) τό πρῶτο μέλος δέν ἐξαρτᾶται ἀπ'τό λ. Ἄρα ἀφοῦ $\lim\limits_{\lambda\to 1} (1-\lambda) = 0$ καί $\lim\limits_{0} \psi = 0$, ἔχομε

$$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) \geqq 0 \tag{4.3.7}$$

καί ἑπομένως ἡ f εἶναι κυρτή.

Ἀντίστροφα. Θεωροῦμε ὁποιαδήποτε σημεῖα x_1, x_2 τοῦ (α,β). Ἄν $x_1 \neq x_2$ τότε προφανῶς ἡ (4.3.1) ἰσχύει γιά κάθε $\lambda \in (0,1)$. Ἔστω ὅτι $x_1 < x_2$. Τότε γιά κάθε $x_0 \in (x_1,x_2)$ ἰσχύει

$$f(x_1)-f(x_0) \geqq f'(x_0)(x_1-x_0)$$

καί

$$f(x_2)-f(x_0) \geqq f'(x_0)(x_2-x_0)$$

ὁπότε

$$f'(x_0) \geqq \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}$$

καί

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} .$$

Ἑπομένως

$$\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} \geq \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}$$

ἀπ'ὅπου γιά $\lambda = \frac{x_1-x_0}{x_2-x_1}$ παίρνομε $x_0 = \lambda x_1+(1-\lambda)x_2$ καί ἀκόμη

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),$$

δηλαδή τήν (4.3.1).

Ἀπόδειξη τῆς (iii). Ὑποθέτομε ὅτι ἡ f ἱκανοποιεῖ τήν (4.3.2). Τότε ἔχοντας ὑπ'ὄψη τήν (i) εἶναι ἀρκετό νά ἀποδείξωμε ὅτι ἡ ἰσότητα στήν (4.3.7) ἰσχύει μόνο ὅταν $x = x_0$. Πρός τοῦτο ὑποθέτομε ὅτι ὑπάρχει $y \in (\alpha,\beta)$ μέ $y \neq x_0$ καί τέτοια ὥστε

$$f(y)-f(x_0) = f'(x_0)(y-x_0).$$

Τότε ὅμως γιά κάθε x μεταξύ τῶν x_0 καί y ἔχομε

$$x = \lambda x_0+(1-\lambda)y, \text{ γιά κάποιο } \lambda \in (0,1)$$

καί ἑπομένως ἔχοντας ὑπ'ὄψη τίς (4.3.2) καί (4.3.7) παίρνομε

$$\begin{aligned} f'(x_0)(x-x_0) &\leq f(x)-f(x_0) = f(\lambda x_0+(1-\lambda)y)-f(x_0) < \\ &< \lambda f(x_0)+(1-\lambda)f(y)-f(x_0) = (1-\lambda)(f(y)-f(x_0)) = \\ &= (1-\lambda)f'(x_0)(y-x_0) = f'(x_0)((1-\lambda)y-(1-\lambda)x_0)) = \\ &= f'(x_0)(x-x_0) \end{aligned}$$

δηλαδή

$$f'(x_0)(x-x_0) < f'(x_0)(x-x_0)$$

πράγμα ἄτοπο. Ἄρα στήν (4.3.7) ἰσχύει ἡ ἀνισότητα.

Ἀντίστροφα. Τό ἀντίστροφο προκύπτει ἀκριβῶς ὅπως καί ἐκεῖνο τῆς (i) ἀντικαθιστώντας τίς ἀνισότητες "$\geq$" καί "$\leq$" μέ τίς "$>$" καί "$<$" ἀντίστοιχα. ▲

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$f(y) - f(x) - f'(x)(y-x) > 0,$$

γιά κάθε $y \neq x$, δηλαδή ή f εἶναι γνησίως κυρτή συνάρτηση. ▲

Ἄν Δ εἶναι ἕνα διάστημα, ὑποσύνολο τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ μιᾶς συ αρτήσεως f, θά λέμε:

f εἶναι κυρτή στό $\Delta \iff f|\Delta$ εἶναι κυρτή συνάρτηση

f εἶναι κοίλη στό $\Delta \iff f|\Delta$ εἶναι κοίλη συνάρτηση

f εἶναι γνησίως κυρτή στό $\Delta \iff f|\Delta$ εἶναι γνησίως κυρτή συνάρτησ

f εἶναι γνησίως κοίλη στό $\Delta \iff f|\Delta$ εἶναι γνησίως κοίλη συνάρτησ

Ἄν ὁ περιορισμός μιᾶς συναρτήσεως f σέ ἕνα διάστημα Δ τοῦ πεδίο ὁρισμοῦ της εἶναι κυρτή συνάρτηση θά λέμε ὅτι ἡ f εἶναι κυρτή στό Δ. Ι ρόμοια συμφωνία ἰσχύει γιά συνάρτηση κοίλη, γνησίως κυρτή, γνησίως κο

Παράδειγμα 4.3.1.

Θεωροῦμε τή συνάρτηση τοῦ παραδείγματος 4.1.1. Αὐτή εἶναι παραγω γίσιμη στό πεδίο ὁρισμοῦ της καί μάλιστα ἡ δεύτερη παράγωγος εἶναι συ εχής στό σύνολο $\mathbb{R} - \{-\pi, \pi, \pi+1\}$. Πράγματι, ἔχομε:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{4\sqrt{2}}{[\sqrt{2}(x+\pi)-1]^3}, & x \leq -\pi \\ -\sin x, & -\pi < x \leq \pi \\ \dfrac{2}{(x-\pi-1)^3}, & \pi < x, \quad x \neq \pi+1. \end{cases}$$

Ἐπειδή $f''(x) > 0$, γιά κάθε $x \in (-\pi, 0) \cup (\pi+1, +\infty)$ καί $f''(x) < 0$, γιά κάθε $x \in (-\infty, -\pi) \cup (0, \pi+1)$, ἕπεται ὅτι ἡ καμπύλη πού παριστάνει τό γράφημα τῆς f εἶναι στά διαστήματα $(-\pi, 0)$, $(\pi+1, +\infty)$ γνησίως κυρτή καί στά διαστήματα $(-\infty, -\pi)$, $(0, \pi+1)$ γνησίως κοίλη.

Δίνομε τώρα τόν παρακάτω ὁρισμό:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.3.2. Θεωροῦμε μιά συνάρτηση f συνεχή σ' ἕνα ἀνοικτό διάστημα καί τυχόν σημεῖο x_0 τοῦ διαστήματος τούτου, στό ὁποῖο ἡ f παραγωγίζεται. Τό σημεῖο x_0 ὀνομάζεται "σημεῖο καμπῆς", ἄν γιά κάποιο $\delta > 0$ ἡ συνάρτηση f εἶναι γνησίως κυρτή στό $(x_0-\delta, x_0)$ καί γνησίως κοίλη στό $(x_0, x_0+\delta)$, ἤ γνησίως κοίλη στό $(x_0-\delta, x_0)$ καί γνησίως κυρτή στό $(x_0, x_0+\delta)$.

Ἕνα σημαντικό κριτήριο γιά τήν ὕπαρξη καί εὕρεση τῶν σημείων καμπῆς μιᾶς συναρτήσεως ἀποτελεῖ τό παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.3.3 Ἄν ἡ f ἔχη πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα ἀνοικτό διάστημα Δ, ἡ $f^{(\nu+1)}$ ὅπου ν ($\nu \geq 2$) ἄρτιος ὑπάρχη καί εἶναι συνεχής στό Δ καί γιά κάποιο σημεῖο $x_0 \in \Delta$ ἰσχύη

$$f''(x_0)=f'''(x_0)=\ldots=f^{(\nu)}(x_0)=0, \quad , \quad f^{(\nu+1)}(x_0)\neq 0$$

τότε τό x_0 εἶναι σημεῖο καμπῆς τῆς συναρτήσεως f.

Ἀπόδειξη.

Ἄν ἐφαρμόσωμε τόν τύπο τοῦ Taylor

$$f(x)=f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^{\nu}}{\nu!}f^{(\nu)}(x_0)+\frac{(x-x_0)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}f^{(\nu+1)}(\xi)$$

ὅπου ξ εἶναι μεταξύ τῶν x καί x_0, ἔχομε

$$f(x)-f(x_0)-(x-x_0)f'(x_0)=\frac{(x-x_0)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}f^{(\nu+1)}(\xi).$$

Ἐπειδή $f^{(\nu+1)}(x_0)\neq 0$ καί ἡ $f^{(\nu+1)}$ εἶναι συνεχής, ὑπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ὥστε $f^{(\nu+1)}(y)\neq 0$ γιά κάθε $y \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$. Ἄρα, ἄν $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ τότε καί $\xi \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$. Ἔτσι, ἄν $f^{(\nu+1)}(x_0) < 0$, τότε καί $f^{(\nu+1)}(\xi) < 0$, ὁπότε ἐπειδή $\nu+1$ εἶναι περιττός ἔχομε

$$f(x)-f(x_0)-(x-x_0)f'(x_0) > 0 \quad , \quad \text{ἄν} \quad x \in (x_0-\delta, x_0)$$

καί

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$f(x)-f(x_0)-(x-x_0)f'(x_0)<0 \quad , \quad \text{ἄν} \quad x\in(x_0,\ x_0+\delta)$$

δηλαδή, ἡ f εἶναι γνησίως κυρτή στό $(x_0-\delta,\ x_0)$ καί γνησίως κοίλη στό $(x_0,\ x_0+\delta)$ καί ἑπομένως τό x_0 εἶναι σημεῖο καμπῆς τῆς f. Ἐπίσης, ἄν $f^{(\nu+1)}(x_0)>0$, τότε καί $f^{(\nu+1)}(\xi)>0$, ὁπότε ἐπειδή $\nu+1$ εἶναι περιττός ἔχομε

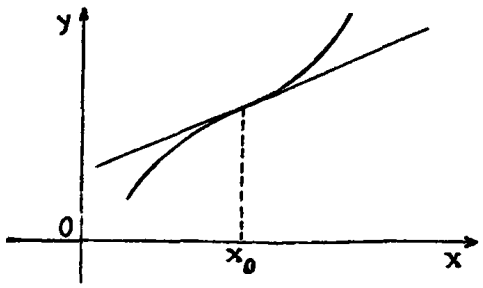
$$f(x)-f(x_0)-(x-x_0)f'(x_0)<0 \quad , \quad \text{ἄν} \quad x\in(x_0-\delta,\ x_0)$$

καί

$$f(x)-f(x_0)-(x-x_0)f'(x_0)>0 \quad , \quad \text{ἄν} \quad x\in(x_0,\ x_0+\delta)$$

δηλαδή, ἡ f εἶναι γνησίως κοίλη στό $(x_0-\delta,\ x_0)$ καί γνησίως κυρτή στό $(x_0,\ x_0+\delta)$ καί ἑπομένως τό σημεῖο x_0 εἶναι σημεῖο καμπῆς τῆς f. ▲

Εἶναι φανερό ὅτι ἄν x_0 εἶναι σημεῖο καμπῆς μιᾶς συναρτήσεως, τότε ἡ καμπύλη τοῦ γραφήματος διαπερνᾶται ἀπ'τήν εὐθεῖα γραμμή πού ἐφάπτεται τῆς καμπύλης στό σημεῖο x_0 (βλ. ΣΧ. 4).



ΣΧΗΜΑ 4

Παράδειγμα 4.3.2.

Ἄς προσπαθήσωμε νά βροῦμε τά σημεῖα καμπῆς τῆς συναρτήσεως τοῦ παραδείγματος 4.1.1.

Σύμφωνα μέ τά παραπάνω, πρέπει νά βροῦμε ἐκεῖνα τά σημεῖα τοῦ $\mathcal{D}(f)$ στά ὁποῖα ἡ συνάρτηση f εἶναι παραγωγίσιμη καί ἀπό γνησίως κοίλη γίνεται γνησίως κυρτή, ἤ ἀντίστροφα. Ἔτσι, ἀπ'τό παράδειγμα 4.3.1 προκύπτει ὅτι τά σημεῖα καμπῆς τῆς f εἶναι τά σημεῖα $-\pi$ καί 0.

Σημείωση.

Μερικές φορές εἶναι δυνατό νά ὑπάρχη $x_0\in\mathcal{D}(f)-\mathcal{D}(f')$, ὁπότε δέν μποροῦμε εὔκολα ν'ἀποφανθοῦμε γιά τό εἶδος του. Ὅμως, ἄν ὑπάρχη $\delta>0$ τέτοιο ὥστε ἡ f νά εἶναι παραγωγίσιμη ἐπί τῶν διαστημάτων $(x_0-\delta,\ x_0)$, $(x_0,\ x_0+\delta)$, καί

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\lim_{x_0} f' = \pm\infty$$

τότε τό σημεῖο x_0 εἶναι σημεῖο καμπῆς τῆς συναρτήσεως, ἐφ'ὅσον ἡ f εἶναι γνησίως κυρτή στό $(x_0-\delta,x_0)$ καί γνησίως κοίλη στό $(x_0,x_0+\delta)$, ἤ γνησίως κοίλη στό $(x_0-\delta,x_0)$ καί γνησίως κυρτή στό $(x_0,x_0+\delta)$.

Παράδειγμα 4.3.3.

Ἡ συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , \text{ ἄν } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & , \text{ ἄν } x < 0 \end{cases}$$

τῆς ὁποίας τό γράφημα παριστάνεται στό ΣΧ. 4 τοῦ Κεφ. 3 εἶναι κυρτή στό διάστημα $(-\infty,0)$ καί κοίλη στό $(0, +\infty)$, ἐνῶ $\lim_0 f' = +\infty$. Ἄρα τό σημεῖο 0 εἶναι σῆμεῖο καμπῆς τῆς f.

4.4 ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Στή μελέτη τῶν συναρτήσεων ὁρισμένες εὐθεῖες γραμμές πού ὀνομάζονται "ἀσύμπτωτες", βοηθοῦν πολύ στήν κατανόηση τῆς συμπεριφορᾶς τῆς καμπύλης πού παριστάνει τό γράφημα τῆς συναρτήσεως, καθώς καί στήν σχεδίαση αὐτῆς.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.4.1. **Ἡ συνάρτηση $\varphi(x) = \alpha x+\beta$, $x \in \mathbb{R}$, πού γεωμετρικά παριστάνει μιά εὐθεῖα, ὀνομάζεται "ἀσύμπτωτη" τῆς συναρτήσεως f, ἄν ἰσχύη**

$$\alpha = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{καί} \quad \beta = \lim_{x\to+\infty} (f(x)-\alpha x)$$

ἤ

$$\alpha = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{καί} \quad \beta = \lim_{x\to-\infty} (f(x)-\alpha x)$$

Ὁ παραπάνω ὁρισμός 4.4.1, γεωμετρικά, σημαίνει ὅτι ἡ καμπύλη τῆς συναρτήσεως $f(x)$, $x \in \mathcal{D}(f)$ πλησιάζει "ἀσυμπτωτικά" τήν εὐθεῖα πού παριστάνει ἡ $\varphi(x) = \alpha x+\beta$, $x \in \mathbb{R}$ ὅταν $x \to +\infty$ (ἤ ὅταν $x \to -\infty$).

Ἄν ἡ συνάρτηση f εἶναι παραγωγίσιμη, τότε ἰσχύει τό ἀκόλουθο θεώ-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.4.1. Αν ἡ παράγωγος f' τῆς συναρτήσεως f ὑπάρ σ'ἕνα διάστημα τῆς μορφῆς $[a,+\infty)$ καί εἶναι τέτοια ὥστε τό ριο $\lim\limits_{+\infty} f'$ (ἤ τό $\lim\limits_{-\infty} f'$) νά εἶναι πεπρασμένο, τότε ἡ συνάρτη

$$\varphi(x) = \alpha x+\beta \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

ὅπου

$$\alpha = \lim_{+\infty} f' \qquad (\text{ἤ} \quad \alpha = \lim_{-\infty} f')$$

καί

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} (f(x)-\alpha x) \qquad (\text{ἤ} \quad \beta = \lim_{x\to-\infty} (f(x)-\alpha x))$$

εἶναι ἀσύμπτωτη τῆς συναρτήσεως f.

Ἀπόδειξη. Θ'ἀποδείξωμε μόνο τήν περίπτωση ὅπου τό $\lim\limits_{+\infty} f$ εἶν πεπερασμένο, διότι ἡ ἄλλη περίπτωση εἶναι ἀνάλογη.

Πραγματικά, ὑποθέτομε ὅτι $\lim\limits_{+\infty} f' = \alpha$ καί ἔστω $\varepsilon > 0$. Ἑπομένως

$$(\exists\, r > a)(\forall\, x \in \mathcal{D}(f'))\ \ x > r \Rightarrow |f'(x)-\alpha| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Ἐπίσης

$$(\exists\, x_0 > r)(\forall\, x \in \mathcal{D}(f'))\ \ x > x_0 \Rightarrow \frac{|f(r)-\alpha r|}{x} < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Τώρα παρατηροῦμε ὅτι γιά κάθε $x > x_0$ ἰσχύει

$$\frac{f(x)}{x} - \alpha = \frac{f(x)-f(r)}{x} + \frac{f(r)}{x} - \alpha =$$

$$= \frac{x-r}{x}\,\frac{f(x)-f(r)}{x-r} + \frac{f(r)}{x} - \frac{(x-r)+r}{x}\,\alpha$$

$$= \frac{x-r}{x}\left[\frac{f(x)-f(r)}{x-r} - \alpha\right] + \frac{f(r)-r\alpha}{x}$$

$$= \left(1-\frac{r}{x}\right)[f'(z)-\alpha] + \frac{f(r)-r\alpha}{x}$$

ὅπου $z \in (r,x)$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Επομένως παίρνομε ότι

$$\left|\frac{f(x)}{x}-\alpha\right| \leq \left|1-\frac{r}{x}\right| \left|f'(z)-\alpha\right| + \left|\frac{f(r)-\alpha r}{x}\right|$$

$$\leq 2\,\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

για κάθε $x > x_0$, δηλαδή

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\alpha.$$

Τούτο αποδείχνει τό θεώρημα. ▲

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.4.2. Αν υπάρχη $x_0 \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε

$$\lim_{x_0-0} f = \pm\infty, \text{ ή } \lim_{x_0+0} f = \pm\infty,$$

τότε λέμε ότι ή εύθεία $x = x_0$ είναι (κατακόρυφη) ασύμπτωτη της συναρτήσεως f.

Παράδειγμα 4.4.1.

Ας προσπαθήσωμε νά βρούμε τίς ασύμπτωτες εύθείες γραμμές της καμπύλης πού παριστά τή συνάρτηση f τοῦ παραδείγματος 4.1.1.

Πραγματικά, ἄν ή $y = \alpha x+\beta$ εἶναι ασύμπτωτη της f, τότε πρέπει

$$\alpha = \lim_{-\infty} f', \text{ ή } \alpha = \lim_{+\infty} f'$$

καί

$$\beta = \lim_{x\to-\infty}(f(x)-\alpha x), \text{ ή } \beta = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-\alpha x) \text{ αντίστοιχα.}$$

Αλλά $\lim_{-\infty} f' = \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{[\sqrt{2}(x+\pi)-1]^2}\right) = 1$ καί ἄρα $\alpha = 1$. Επίσης

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-1\cdot x) = \lim_{x\to-\infty}\left[(x+\pi)\cdot\frac{\sqrt{2}(x+\pi)+1}{\sqrt{2}(x+\pi)-1}-x\right] = \pi\sqrt{2}$$

καί ἄρα ή εύθεία $y = x+\pi+\sqrt{\ }$ εἶναι ασύμπτωτη της f. Εξ ἄλλου

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$\lim\limits_{+\infty} f' = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{(x-\pi-1)^2} = 0$, δηλαδή $\alpha = 0$ καί έπίσης

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - \alpha x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-\pi}{x-\pi-1} = 1.$$

Άρα ή $y = \alpha x + \beta = 0x + 1 = 1$ εἶναι (ὁριζόντια) ἀσύμπτωτη τῆς f.

Τέλος παρατηροῦμε ὅτι γιά τό σημεῖο $\pi + 1$ ὅπου ἡ f δέν ὁρίζεται, ἰσχύει

$$\lim_{\pi+1-0} f = \lim_{x\to\pi+1-0} \frac{x-\pi}{x-\pi-1} = -\infty \quad \text{καί} \quad \lim_{\pi+1+0} f = \lim_{\pi+1+0} \frac{x-\pi}{x-\pi-1} = +\infty$$

καί ἄρα ἡ $x = \pi+1$ εἶναι μιά (κατακόρυφη) ἀσύμπτωτη τῆς f.

4.5 ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Στήν παράγραφο αὐτή γίνεται ἐφαρμογή ὅλων τῶν παραπάνω ἰδιοτήτων καί δίνεται ὁ τρόπος μελέτης τῶν συναρτήσεων. Έτσι, γιά τήν μελέτη μιᾶς συναρτήσεως τῆς ὁποίας δίνεται ὁ τύπος ἀναζητοῦμε ἤ ἐξετάζομε τά παρακάτω:

α) Τό πεδίο ὁρισμοῦ της.

β) Τή συνέχεια τῆς συναρτήσεως, βρίσκοντας συγχρόνως τά σημεῖα ὅπου αὐτή δέν εἶναι συνεχής.

γ) Τήν περιοδικότητα.

δ) Τή συμμετρία της, δηλαδή ἄν εἶναι ἄρτια, ἤ περιττή.

ε) Τήν παραγωγισιμότητα πρώτης καί δεύτερης τάξεως, καθώς καί τά πεδία ὁρισμοῦ τῶν ἀντιστοίχων παραγώγων συναρτήσεων.

στ) Τίς ἀσύμπτωτες εὐθεῖες γραμμές.

ζ) Τή μονοτονία.

η) Τά τοπικά ἀκρότατα.

θ) Τό κυρτό ἤ κοῖλο τῆς συναρτήσεως.

ι) Τά σημεῖα καμπῆς.

Στή συνέχεια καταστρώνομε ἕνα πίνακα μεταβολῆς καί ἀναγραφῆς τῶν παραπάνω στοιχείων καί χαράσσομε τήν καμπύλη πού παριστάνει τό γράφημα τῆς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

συναρτήσεως. Εἶναι ἐνδεχόμενο, στήν κατασκευή τῆς καμπύλης ν'ἀναζητηθοῦν καί μερικές τιμές τῆς συναρτήσεω; γιά τήν ἀκριβέστερη σχεδίασή της.

Στό παράδειγμα 4.1.1 δόθηκε μιά συνάρτηση ἡ ὁποία μελετήθηκε σταδιακά καί ἡ ὁποία κατά τμήματα παρουσιάζει ὅλες τίς παραπάνω ἰδιότητες. Τώρα ἀκολουθεῖ ἕνα ἄλλο παράδειγμα στό ὁποῖο γίνεται συγκεντρωτικά καί πληρέστερα ἡ μελέτη μιᾶς συναρτήσεως.

Παράδειγμα 4.5.1

Θεωροῦμε τόν τύπο

$$y = \sqrt[3]{2kx^2 - x^3} \qquad (k > 0)$$

καί θά μελετήσωμε τήν συνάρτηση πού ὁρίζει.

α) Εἶναι φανερό ὅτι γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$ ὁ τύπος αὐτός ἔχει ἔννοια καί ἑπομένως ὁρίζει μιά συνάρτηση f μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό $\mathbb{R}$, δηλαδή

$$f(x) = \sqrt[3]{2kx^2 - x^3}\ , \quad x \in \mathbb{R}.$$

β) Ἡ συνάρτηση f εἶναι συνεχής, διότι $f = g \circ h$, ὅπου $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbb{R}$ καί $h(x) = 2kx^2 - x^3$, $x \in \mathbb{R}$ καί αἱ συναρτήσεις g καί h εἶναι, ὡς γνωστόν, συνεχεῖς.

γ) Δέν εἶναι περιοδική,

δ) οὔτε συμμετρική, ἀφοῦ $f(-x) = \sqrt[3]{2kx^2 + x^3} \neq -f(x)$ καί $f(-x) \neq f(x)$.

ε) Ἡ πρώτη παράγωγος τῆς f εἶναι ἡ συνάρτηση

$$f'(x) = \frac{4k - 3x}{3\sqrt[3]{x(2k-x)^2}}$$

τῆς ὁποίας πεδίο ὁρισμοῦ εἶναι ὅλο τό $\mathbb{R}$ ἐκτός ἀπ'τά σημεῖα 0 καί 2k.

Η δεύτερη παράγωγος τῆς f εἶναι

$$f''(x) = -\frac{8k^2}{9x^{4/3}(2k-x)^{5/3}}$$

τῆς ὁποίας πεδίο ὁρισμοῦ εἶναι ἐπίσης τό σύνολο $\mathbb{R} - \{0, 2k\}$.

στ) Παρατηροῦμε ὅτι

$$\alpha = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{2k}{x} - 1} = -1$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καί

$$\beta = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)+x) = \lim_{x\to\pm\infty} [\sqrt[3]{2kx^2-x^3}+x] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2kx^2-x^3+x^3}{\sqrt[3]{(2kx^2-x^3)^2}-x\sqrt[3]{2kx^2-x^3}+x^2} = \frac{2k}{3}.$$

Ἐπομένως ἡ $y=-x+\frac{2k}{3}$ εἶναι ἀσύμπτωτη τῆς f καί μάλιστα ἡ μοναδική.

ζ) Ἐπειδή γιά $x\in(-\infty,0)\cup(\frac{4k}{3},+\infty)$, ἔχομε $f'(x)<0$ καί γιά $x\in(0,\frac{4k}{3})$ ἔχομε $f'(x)>0$ ἕπεται ὅτι

ἡ f εἶναι γνησίως φθίνουσα ἐπί τοῦ $(-\infty,0)$,

ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα ἐπί τοῦ $(0,\frac{4k}{3})$,

ἡ f εἶναι γνησίως φθίνουσα ἐπί τοῦ $(\frac{4k}{3},+\infty)$.

η) Ἐπειδή γιά κάθε $x<2k$ καί $x\neq 0$ ἰσχύει

$$f(x)>0=f(0),$$

ἕπεται ὅτι τό σημεῖο $f(0)=0$ εἶναι τοπικό ἐλάχιστο τῆς f.

Ἐπίσης ἡ f' μηδενίζεται μόνο γιά $x=\frac{4k}{3}$, ὁπότε τό σημεῖο

$$f(\frac{4k}{3})=\frac{2k}{3}\sqrt[3]{4}$$

εἶναι τοπικό μέγιστο, ἀφοῦ ἀριστερά τοῦ $\frac{4k}{3}$ ἡ f εἶναι αὔξουσα καί δεξιά φθίνουσα.

θ) Θά ἐξετάσωμε τό κυρτόν ἤ κοῖλον τῆς συναρτήσεως f.

Πράγματι, γιά $x\in(-\infty,0)\cup(0,2k)$ ἔχομε $f''(x)<0$, ἐνῶ γιά $x\in(2k,+\infty)$, $f''(x)>0$. Ἐπομένως στά διαστήματα $(-\infty,0)$ καί $(0,2k)$ ἡ f εἶναι γνησίως κοίλη καί στό $(2k,+\infty)$ γνησίως κυρτή.

ι) Ἐπίσης γιά τό σημεῖο 2k, παρατηροῦμε ὅτι

$$\lim_{2k} f' = -\infty$$

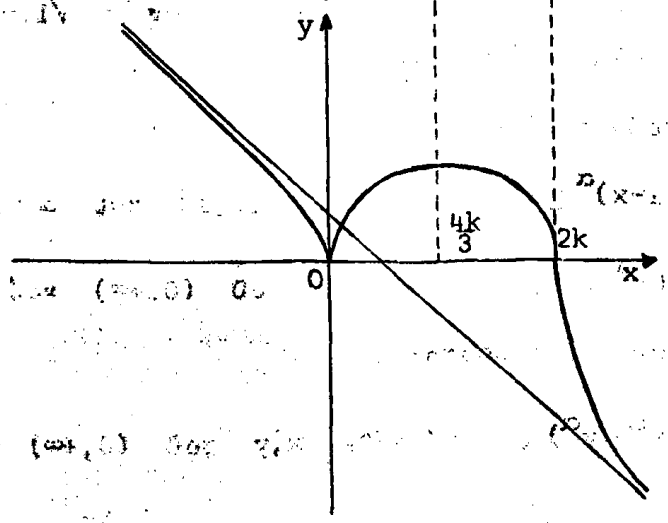
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὁπότε τό σημεῖο τοῦτο εἶναι σημεῖο καμπῆς τῆς συναρτήσεως, διότι ἀριστερά τοῦ 2k ἡ f εἶναι γνησίως κοίλη καί δεξιά γνησίως κυρτή.

ια) Ὁ πίνακας πού παρέχει ὅλα τά στοιχεῖα πού βρήκαμε καί πού δείχνει τή μεταβολή τῆς συναρτήσεως εἶναι ὁ παρακάτω ὅπου τό σύμβολο "↘" δηλώνει ὅτι ἡ συνάρτηση εἶναι κοίλη καί φθίνουσα, τό "↗" κοίλη αὔξουσα, τό "↘" κυρτή φθίνουσα καί Τ.Ε., Τ.Μ., Σ.Κ. εἶναι τοπικό ἐλάχιστο, τοπικό μέγιστο καί σημεῖο καμπῆς ἀντίστοιχα.

Πίνακας στοιχείων καί μεταβολῆς τῆς $\sqrt[3]{2kx^2-x^3}$, $x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$\frac{4k}{3}$		$2k$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	$\frac{5}{3}\sqrt[3]{2}$	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	$-\infty$	$+\infty$ $+$	0	$-$	$-\infty$	$-$	
$f''(x)$		$-$		$-$		$-$		$+$	
Μεταβολή		↘	Τ.Ε.	↗	Τ.Μ.	↘	Σ.Κ.	↘	



ΣΧΗΜΑ 5

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

4.6 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά ἐξεταστῆ ἡ μονοτονία καί νά βρεθοῦν τά τοπικά ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως f ὅταν:

α) $f(x) = \cos x + \sin x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

β) $f(x) = x + \log x$, $x \in (0, +\infty)$,

γ) $f(x) = x\sqrt{1-x}$ $x \in (-\infty, 1]$,

δ) $f(x) = x \log x$, $x \in (0, +\infty)$,

ε) $f(x) = \alpha^2 x^{-1} + \beta^2 (\alpha - x)^{-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{0, \alpha\}$,

στ) $f(x) = \mathrm{Ar}\sin(\cos x)$, $x \in \mathbb{R}$,

ζ) $f(x) = \sin 2x - x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

η) $f(x) = (x-1)(x+1)^{-1}$, $x \in [0,4]$.

2. Ν'ἀποδειχτῆ ὅτι

$$\frac{\mathrm{tg}\, x_2}{\mathrm{tg}\, x_1} > \frac{x_2}{x_1} \quad \text{ἄν} \quad 0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2} .$$

3. Ν'ἀποδειχτοῦν οἱ ἀνισότητες

α) $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$, $x > 1$, β) $1 + x \log(x + \sqrt{1+x^2}) \geqq \sqrt{1+x^2}$

γ) $\sin x + \mathrm{tg}\, x > 2x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

4. Ν'ἀποδειχτοῦν οἱ ἀνισότητες

α) $\frac{1}{2^{\alpha-1}} \leqq x^\alpha + (1-x)^\alpha \leqq 1$, γιά κάθε $x \in [0,1]$ καί $\alpha > 1$

β) $(x+y)^\alpha < x^\alpha + y^\alpha$, γιά κάθε x,y τοῦ $(0,+\infty)$ καί $\alpha \in (0,1)$.

5. Ν'ἀποδειχτοῦν οἱ ἀνισότητες

α) $(\frac{x+y}{2})^\alpha \leqq \frac{1}{2}(x^\alpha + y^\alpha)$, γιά κάθε x,y τοῦ $(0,+\infty)$ καί $\alpha > 1$

β) $x^{\frac{1}{p}} \cdot y^{\frac{1}{q}} \leqq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}$, γιά κάθε x,y τοῦ $(0,+\infty)$ καί $p,q > 0$ τέτοια ὥστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

6. Ν'ἀποδειχτῆ ὅτι ἡ σύνθεση δύο κυρτῶν συναρτήσεων εἶναι κυρτή καί δύο κοίλων εἶναι ἐπίσης κοίλη. Μποροῦμε νά ἀποφανθοῦμε γιά τή σύν-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

θεση μιᾶς κυρτῆς καί μιᾶς κοίλης ἤ ἀντίστροφα;

7. Νά μελετηθοῦν οἱ παραστάσεις

α) $\frac{1}{x}+\frac{x^2}{2}$, β) $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}$,

γ) $\frac{\alpha}{x-1}-\frac{\beta}{x}$ $\beta>\alpha>0$, δ) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$,

ε) $\frac{9x+x^3}{x-x^3}$, στ) $\frac{x^4-1}{x}$,

ζ) $x^{\frac{5}{2}}-x^{\frac{1}{2}}$, $x>0$, η) $\log\frac{1+x}{1-x}$, $|x|<1$,

θ) $\frac{x^2}{2}-\log x$, $x>0$, ι) $\cos x^2$,

ια) $x-\sin x$, ιβ) $\frac{\sin^2 x}{2+\sin x}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΑΟΡΙΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

5.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΑΟΡΙΣΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Στό Κεφάλαιο 3 λύθηκε ἕνα πρόβλημα τοῦ ὁποίου ἡ διατύπωση εἶναι ἡ ἑξῆς: νά βρεθῆ ἡ παράγωγος συνάρτηση μιᾶς συναρτήσεως, ἄν αὐτή ὑπάρχη. Ἄς σημειωθῆ ἐδῶ, ὅτι ἡ συνάρτηση F, τῆς ὁποίας παράγωγος εἶναι ἡ $f \equiv F'$, ὀνομάζεται "**ἀρχική**" ἤ "**παράγουσα**" συνάρτηση τῆς f. Γιά παράδειγμα, ἡ συνάρτηση sin εἶναι μιά ἀρχική συνάρτηση τῆς συναρτήσεως cos, διότι $\sin' = \cos$. Τώρα, τό ἀντίστροφο τοῦ παραπάνω προβλήματος εἶναι: νά βρεθῆ ἡ ἀρχική συνάρτηση μιᾶς συναρτήσεως, ἄν αὐτή ὑπάρχη. Ἡ μέθοδος ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος τούτου ὀνομάζεται "**ὁλοκλήρωση**" καί γενικά, ἀπό ὑπολογιστικῆς ἀπόψεως, εἶναι δυσκολώτερη ἀπ' τήν παραγώγιση.

Χρησιμοποιώντας τίς ἰδιότητες τῆς παραγώγου καί τό γεγονός ὅτι ἡ παράγωγος ὁποιασδήποτε σταθερᾶς συναρτήσεως εἶναι ἡ συνάρτηση 0, προκύπτει ἡ ἀκόλουθη πρόταση:

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.1.1. Ἄν F εἶναι μιά ἀρχική συνάρτηση μιᾶς συναρτήσεως καί ἔχη πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα διάστημα, τότε οἱ ἀρχικές συναρτήσεις αὐτῆς εἶναι οἱ

$$F + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Μέ ἄλλα λόγια ἡ ἔκφραση $F + c$, ὅπου $c \in \mathbb{R}$, εἶναι ἡ γενική μορφή τῆς ἀρχικῆς συναρτήσεως τῆς συναρτήσεως f.

Ἡ γενική μορφή τῆς ἀρχικῆς συναρτήσεως τῆς f ἐκφράζεται μέ τό

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

σύμβολο

$$\int f(x)\,dx$$

καί ὀνομάζεται "**τό ἀόριστο ὁλοκλήρωμα**" τῆς συναρτήσεως f. Δηλαδή, ἄν

$$F' = f$$

τότε γράφομε

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

γιά ὁποιαδήποτε σταθερά c. Ἑπομένως, ἔχομε

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$$

καί

$$\int \frac{dF(x)}{dx}\,dx = F(x) + c.$$

Βασικά, στό κεφάλαιο αὐτό θά δοθοῦν διάφοροι τρόποι ὁλοκληρώσεως, δηλαδή μέθοδοι ὑπολογισμοῦ τοῦ ἀορίστου ὁλοκληρώματος στοιχειωδῶν συναρτήσεων. Ἄν καί γιά τό σκοπό αὐτό δέν μᾶς ἐνδιαφέρει νά γνωρίζωμε ἐκ τῶν προτέρων τήν ὕπαρξη τοῦ ἀορίστου ὁλοκληρώματος, πληροφοροῦμε μόνο ὅτι, ὅπως θά δοῦμε στό ἑπόμενο κεφάλαιο, **τό ἀόριστο ὁλοκλήρωμα κάθε συνεχοῦς συναρτήσεως ὑπάρχει.**

Πρίν ἀπ'ὅλα, παρατηροῦμε ὅτι μέ βάση καί μόνο τόν ὁρισμό τοῦ ἀορίστου ὁλοκληρώματος, ἀπ'τόν πίνακα τῶν παραγώγων τῶν στοιχειωδῶν συναρτήσεων, εὔκολα παίρνομε τόν παρακάτω πίνακα ἀορίστων ὁλοκληρωμάτων.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΩΝ ΑΟΡΙΣΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΚΥΡΙΩΤΕΡΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

$f(x)$	$\int f(x)dx$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
e^x	$e^x + c$	$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert + c$
$a^x,\ a \neq 1$	$\frac{a^x}{\log a} + c$	$x^a,\ a \neq -1$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + c$
$\cos x$	$\sin x + c$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$\mathrm{Ar}\sin x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$	—	—

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$f(x)$	$\int f(x)dx$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
$1/\cos^2 x$	$\operatorname{tg} x + c$	$1/(1+x^2)$	$\operatorname{Ar\,tg} x + c$
$1/\sin^2 x$	$-\operatorname{ctg} x + c$	——	——
$\cosh x$	$\sinh x + c$	$1/\sqrt{1+x^2}$	$\operatorname{Ar\,sinh} x + c$
$\sinh x$	$\cosh x + c$	$1/\sqrt{x^2-1}$	$\operatorname{Ar}_+\cosh x + c$
$1/\cosh^2 x$	$\operatorname{tgh} x + c$	$1/(1-x^2)$	$\operatorname{Ar\,tgh} x + c$
$1/\sinh^2 x$	$-\operatorname{ctgh} x + c$	——	——

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.1.1. Ἄν γιά τή συνάρτηση $f(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ ὑπάρχη τό ἀόριστο ὁλοκλήρωμα, τότε, γιά κάθε $\xi\in(\alpha,\beta)$ καί $\eta\in\mathbb{R}$ ὑπάρχει ἀκριβῶς μία ἀρχική συνάρτηση F τῆς f τέτοια ὥστε $F(\xi)=\eta$.

Ἀπόδειξη. Ἄν G εἶναι μιά ἀρχική συνάρτηση τῆς f, θέτοντας $c=\eta-G(\xi)$, πρέπει καί ἡ $F=G+c$ νά εἶναι ἀρχική, σύμφωνα μέ τήν πρόταση 5.1.1. Μάλιστα δέ $F(\xi)=G(\xi)+c=G(\xi)+\eta-G(\xi)=\eta$. Ἄν ὑπῆρχε καί ἄλλη ἀρχική συνάρτηση H τῆς f μέ $H(\xi)=\eta$, θά ἔπρεπε $F=H+\hat{c}$ ὅπου $\hat{c}\in\mathbb{R}$, ὁπότε $\hat{c}=F(\xi)-H(\xi)=\eta-\eta=0$ καί ἄρα $F=H$. ▲

Γεωμετρικά, τό θεώρημα τοῦτο λέει ὅτι ἀπό κάθε σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου διέρχεται ἀκριβῶς μία "ὁλοκληρωτική καμπύλη τῆς f" (δηλαδή καμπύλη πού παριστάνει τό γράφημα μιᾶς ἀρχικῆς συναρτήσεως τῆς f). Ἑπομένως ὅλες οἱ ὁλοκληρωτικές καμπῦλες τῆς συναρτήσεως f εἶναι ξένες μεταξύ τους.

5.2 ΓΕΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ

Ἐδῶ θά δοθοῦν μερικές βασικές ἰδιότητες ὁλοκληρώσεως, χρήσιμες γιά τόν ὑπολογισμό τῶν ἀορίστων ὁλοκληρωμάτων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.2.1. i) Ἄν $\alpha\in\mathbb{R}$ καί τά ἀόριστα ὁλοκληρώματα τῶν συναρτήσεων f καί g ὑπάρχουν, τότε ὑπάρχουν καί τά ἀό-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ριστα ὁλοκληρώματα τῶν συναρτήσεων f+g καί αf καί μάλιστα

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

καί

$$\int \alpha f(x) = \alpha \int f(x)dx.$$

ii) $$\int f(x)\,g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)\,g(x)dx.$$

iii) $$\int g(f(x))\,f'(x)dx = \left[\int g(y)dy\right]_{y=f(x)}$$

ὅπου στό δεξιό μέλος τοῦ τύπου ἐννοοῦμε ὅτι μετά τόν ὑπολογισμό τοῦ $\int g(y)dy$ πρέπει ν'ἀντικαταστήσωμε τό y μέ τό f(x).

Ἀπόδειξη. i) Ἀπ'τόν ὁρισμό τοῦ ἀορίστου ὁλοκληρώματος ἔχομε

$$\left[\int [f(x)+g(x)]dx\right]' = f(x)+g(x) = \left[\int f(x)dx\right]' + \left[\int g(x)dx\right]'$$

καί

$$\left[\int \alpha f(x)dx\right]' = \alpha f(x) = \alpha\left[\int f(x)dx\right]'.$$

ii) Ἐπίσης ἔχομε

$$\left[\int f(x)\,g'(x)dx\right]' = f(x)g'(x) = [f(x)g'(x)+f'(x)g(x)] -$$

$$-f'(x)g(x) = [f(x)g(x)]' - \left[\int f'(x)\,g(x)dx\right]' =$$

$$[f(x)g(x)]' - \left[\int f'(x)\,g(x)dx\right]' = [f(x)g(x) - \int f'(x)\,g(x)dx]'.$$

iii) θέτοντας $F(y) = \int g(y)dy$ (ὁπότε $F'(y) = f(y)$) ἀρκεῖ ν'ἀποδειχτῆ ὅτι

$$F(f(x)) = \int g(f(x))f'(x)dx.$$

Ἀλλά, τοῦτο ἀληθεύει διότι

$$[F(f(x))]' = F'(f(x))f'(x) = g(f(x))\cdot f'(x). \blacktriangle$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παραδείγματα 5.2.1

Στά παρακάτω τρία παραδείγματα έφαρμόζονται άντίστοιχα οί ίδιότητες (i), (ii) καί (iii).

(i) Τό άόριστο όλοκλήρωμα ένός πολυωνύμου εΐναι

$$\int(\alpha_0+\alpha_1 x+\ldots+\alpha_\nu x^\nu)dx = c+\alpha_0 x+\alpha_1\frac{x^2}{2}+\ldots+\alpha_\nu\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}.$$

(ii) Ἄς ὑπολογίσωμε τό ὁλοκλήρωμα $\int \log x\, dx$· ἔχομε

$$\int \log x\, dx = \int \log x . x' \cdot dx = x\log x - \int x \log' x\, dx =$$

$$= x\log x - \int x\frac{1}{x}dx = x\log x - \int dx = x\log x - x + c.$$

(iii) Ἄς ὑπολογίσωμε τό ὁλοκλήρωμα $\int\sqrt{1-x^2}dx$. Θέτοντας $x=\sin t$, $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ἔχομε

$$\int\sqrt{1-x^2}dx = \int \cos t\,\frac{d\sin t}{dt}\,dt = \int \cos^2 t\,dt = \int[\tfrac{1}{2}(1+\cos 2t)]dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t\,dt = \frac{1}{2}t + c_1 + \frac{1}{2}\int \cos 2t\,dt.$$

Γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ τελευταίου ὁλοκληρώματος θέτομε $2t=y$, ὁπότε ἔχομε

$$\int \cos 2t\,dt = \frac{1}{2}\int \cos y\,dy = \frac{1}{2}\sin y + c_2 = \frac{1}{2}\sin 2t + c_2 = \sin t\cdot\cos t + c_2.$$

Ἐπομένως, διά $c = c_1 + \frac{1}{2}c_2$ βρίσκομε

$$\int\sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}t + c_1 + \frac{1}{2}\sin t\cdot\cos t + \frac{1}{2}c_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Ar}\sin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c.$$

Σημείωση

Στόν ὑπολογισμό ένός ὁλοκληρώματος ἡ σταθερά πού έμφανίζε[illegible] στή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

γενική μορφή του πολλές φορές θά παραλείπεται καί τοῦτο γιατί, κατά κανόνα, τό πρός ὑπολογισμό ὁλοκλήρωμα ἐκφράζεται σάν ἄθροισμα δύο ἤ περισσοτέρων ὁλοκληρωμάτων, ὁπότε ἡ ἐμφάνιση πολλῶν σταθερῶν δέν ἐπιδρᾶ καθόλου στό τελικό ἀποτέλεσμα, ὅπου μπορεῖ (χωρίς νά εἶναι ἀπαραίτητο) ἐκ τῶν ὑστέρων νά προστεθῆ ἡ σταθερά.

Ἐπίσης, ὁ ὑπολογισμός ἑνός ὁλοκληρώματος μπορεῖ νά γίνεται καί μέ πολλούς τρόπους. Γιά παράδειγμα τό τελευταῖο ἀπό τά παραπάνω ὁλοκληρώματα μπορεῖ νά ὑπολογιστῆ καί ὡς ἑξῆς:

$$\int\sqrt{1-x^2}dx = \int x'\sqrt{1-x^2}dx = x\sqrt{1-x^2} - \int x(\sqrt{1-x^2})'dx =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int x\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\sqrt{1-x^2} -$$

$$-\int\frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\sqrt{1-x^2} - \int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int\sqrt{1-x^2}dx + \mathrm{Ar}\sin x + \hat{c}$$

ὁπότε

$$\int\sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\mathrm{Ar}\sin x + c$$

ὅπου τέθηκε $c = \frac{1}{2}\hat{c}$.

5.3 ΑΝΑΓΩΓΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

Πολλές φορές ὁ ὑπολογισμός ὁλοκληρωμάτων γίνεται μέ τή βοήθεια ἀναγωγικῶν τύπων. Παρακάτω θά δοθοῦν μερικοί ἀπ'τούς πιό ἀξιόλογους τύπους μέ τούς ὁποίους ἀναγόμαστε σέ ἁπλούστερες περιπτώσεις ὁλοκληρωμάτων πού ὑπολογίζονται εὔκολα.

ΤΥΠΟΣ 5.3.1. Ἄν

$$I_\mu = \int\frac{dx}{(1+x^2)^\mu} \quad , \quad \mu\in\mathbb{N}$$

τότε

$$I_1 = \mathrm{Ar\,tg}\,x + c$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καί

(5.3.1) $$I_\nu = \frac{x}{2(\nu-1)(1+x^2)^{\nu-1}} + \frac{2\nu-3}{2(\nu-1)} I_{\nu-1} \quad , \quad \nu \geq 2$$

Ὁ ὑπολογισμός τοῦ I_1 προκύπτει εὔκολα ἀπ' τόν πίνακα τῶν ὁλοκληρωμάτων πού δόσαμε παραπάνω. Ἐξ ἄλλου παρατηροῦμε ὅτι

$$I_\nu = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^\nu} dx = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{\nu-1}} - \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^\nu} = I_{\nu-1} - \int \frac{x\, x\, dx}{(1+x^2)^\nu} =$$

$$= I_{\nu-1} - \frac{1}{2} \int x \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^\nu} = I_{\nu-1} - \frac{1}{2} \int x\, d\left(\frac{(1+x^2)^{-\nu+1}}{-\nu+1} \right) =$$

$$= I_{\nu-1} - \frac{1}{2} \left[x \frac{(1+x^2)^{-\nu+1}}{-\nu+1} - \int \frac{(1+x^2)^{-\nu+1}}{-\nu+1} dx \right] =$$

$$= I_{\nu-1} - \frac{1}{2} \frac{x}{(1-\nu)(1+x^2)^{\nu-1}} + \frac{1}{2(1-\nu)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{\nu-1}} =$$

$$= I_{\nu-1} + \frac{x}{2(\nu-1)(1+x^2)^{\nu-1}} + \frac{1}{2(1-\nu)} I_{\nu-1} .$$

Ἔτσι

$$I_\nu = \frac{x}{2(\nu-1)(1+x^2)^{\nu-1}} + \frac{2\nu-3}{2(\nu-1)} I_{\nu-1} \quad , \quad \nu \geq 2 . \blacktriangle$$

ΤΥΠΟΣ 5.3.2. Ἄν

$$S_\mu = \int \sin^\mu x\, dx \quad , \quad \mu \in \mathbb{N}$$

τότε

$$S_1 = -\cos x + c, \quad S_2 = -\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2} x + c$$

καί

(5.3.2) $$S_\nu = -\frac{\sin^{\nu-1} x \cos x}{\nu} + \frac{\nu-1}{\nu} S_{\nu-2} \quad , \quad \nu \geq 3 .$$

Ἡ πρώτη εἶναι φανερή ἐνῶ ἡ δεύτερη ἀποδείχνεται ὡς ἑξῆς:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$S_\nu = \int \sin^\nu x\,dx = \int \sin^{\nu-1}x\ \sin x\,dx = -\int \sin^{\nu-1}x\,d\cos x =$$

$$= -\sin^{\nu-1}x\cos x + \int \cos^2 x\,(\nu-1)\sin^{\nu-2}x\,dx =$$

$$= -\sin^{\nu-1}x\cos x + (\nu-1)\int (1-\sin^2 x)\ \sin^{\nu-2}x\,dx =$$

$$= -\sin^{\nu-1}x\cos x + (\nu-1)\int \sin^{\nu-2}x\,dx - (\nu-1)\int \sin^\nu x\,dx =$$

$$= -\sin^{\nu-1}x\cos x + (\nu-1)\,S_{\nu-2} - (\nu-1)\,S_\nu\ .$$

Ἔτσι

$$S_\nu = -\frac{\sin^{\nu-1}x\cos x}{\nu} + \frac{\nu-1}{\nu}\,S_{\nu-2}\ . \ \blacktriangle$$

ΤΥΠΟΣ 5.3.3. Ἂν

$$C_\mu = \int \cos^\mu x\,dx \quad , \quad \mu \in \mathbb{N}$$

τότε

$$C_1 = \sin x + c \quad , \quad C_2 = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + c$$

καί

$$C_\nu = \frac{\cos^{\nu-1}x\sin x}{\nu} + \frac{\nu-1}{\nu}\,C_{\nu-2} \quad , \quad \nu \geqq 3\ . \tag{5.3.3}$$

Πάλι ἡ πρώτη εἶναι φανερή, ἐνῶ ἡ δεύτερη βρίσκεται ἀνάλογα μέ τόν Τύπο 5.3.2, ἤ μέ τή βοήθεια τοῦ Τύπου 5.3.2 καί τοῦ ὅ,τι

$$C_\nu = \int \cos^\nu x\,dx = \int \sin^\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx = -\left[\int \sin^\nu y\,dy\right]_{y=\frac{\pi}{2}-x} = -[S_\nu]_{y=\frac{\pi}{2}-x}. \ \blacktriangle$$

ΤΥΠΟΣ 5.3.4. Ἂν

$$T_\mu = \int \mathrm{tg}^\mu x\,dx \quad , \quad \mu \in \mathbb{N}$$

τότε

$$T_1 = -\log|\cos x| + c \quad , \quad T_2 = \mathrm{tg}\,x - x + c$$

καί

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

(5.3.4) $$T_\nu = \frac{tg^{\nu-1}x}{\nu-1} - T_{\nu-2} \quad , \quad \nu \geq 3 .$$

Πρῶτα παρατηροῦμε ὅτι

$$T_1 = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\left[\int \frac{dt}{t}\right]_{t=\cos x} = -[\log|t|]_{t=\cos x} + c =$$

$$= -\log|\cos x| + c .$$

καί

$$T_2 = \int tg^2 x\, dx = \int (1+tg^2 x - 1)dx = \int (1+tg^2 x)dx - \int dx = tg\, x - x + c .$$

Ἐπίσης γιά $\nu \geq 3$ ἔχομε

$$T_\nu = \int tg^\nu x\, dx = \int tg^{\nu-2} x\, tg^2 x\, dx = \int tg^{\nu-2} x\,(1+tg^2 x-1)dx =$$

$$= \int tg^{\nu-2} x\,(1+tg^2 x)dx - \int tg^{\nu-2} x\, dx =$$

$$= \int tg^{\nu-2} x\, dtg\, x - T_{\nu-2} = \left[\int t^{\nu-2} dt\right]_{t=tg\, x} - T_{\nu-2} =$$

$$= \left[\frac{t^{\nu-1}}{\nu-1}\right]_{t=tg\, x} - T_{\nu-2} =$$

$$= \frac{tg^{\nu-1}x}{\nu-1} - T_{\nu-2} . \blacktriangle$$

Ἐξ ἄλλου εὔκολα προκύπτουν καί οἱ παρακάτω ἀναγωγικοί τύποι:

ΤΥΠΟΣ 5.3.5. Ἂν

$$\hat{S}_\mu = \int \frac{dx}{\sin^\mu x} \quad , \quad \mu \in \mathbb{N}$$

τότε

$$\hat{S}_1 = -\frac{1}{2} \log\left[\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right] + c$$

$$\hat{S}_2 = -\operatorname{ctg} x + c$$

καί

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

(5.3.5) $$\hat{S}_\nu = -\frac{1}{\nu-1}\frac{\cos x}{\sin^{\nu-1}x} + \frac{\nu-2}{\nu-1}\hat{S}_{\nu-2} \quad , \quad \nu \geqq 3.$$

Πραγματικά, οἱ δύο πρῶτες εἶναι φανερές, ἐνῶ ὁ ἐπαγωγικός τύπος ἰσχύει, διότι

$$\hat{S}_\nu = \int \frac{dx}{\sin^\nu x} = \int \frac{dx}{\sin^{\nu-2}x \sin^2 x} = -\int \frac{d\,\mathrm{ctg}\,x}{\sin^{\nu-2}x} =$$

$$= -\frac{\mathrm{ctg}\,x}{\sin^{\nu-2}x} + \int \mathrm{ctg}\,x\, d\left(\frac{1}{\sin^{\nu-2}x}\right) =$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin^{\nu-1}x} + \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\frac{-(\nu-2)\sin^{\nu-3}x\cos x}{\sin^{2\nu-4}x}\,dx =$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin^{\nu-1}x} - (\nu-2)\int \frac{\cos^2 x}{\sin^\nu x}\,dx =$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin^{\nu-1}x} - (\nu-2)\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^\nu x}\,dx =$$

$$= \frac{-\cos x}{\sin^{\nu-1}x} - (\nu-2)\int \frac{dx}{\sin^\nu x} + (\nu-2)\int \frac{dx}{\sin^{\nu-2}x} =$$

$$= \frac{-\cos x}{\sin^{\nu-1}x} - (\nu-2)\hat{S}_\nu + (\nu-2)\hat{S}_{\nu-2}$$

καί ἑπομένως

$$\hat{S}_\nu = \frac{-\cos x}{(\nu-1)\sin^{\nu-1}x} + \frac{\nu-2}{\nu-1}\hat{S}_{\nu-2} \quad , \quad \nu \geqq 3. \ \blacktriangle$$

ΤΥΠΟΣ 5.3.6. Ἄν

$$\hat{C}_\mu = \int \frac{dx}{\cos^\mu x} \quad , \quad \mu \in \mathbb{N}$$

τότε

$$\hat{C}_1 = \frac{1}{2}\log\left[\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right] + c$$

$$\hat{C}_2 = \mathrm{tg}\,x + c$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$E_1 = xe^x - e^x + c$$

$$E_\nu = x^\nu e^x - \nu E_{\nu-1} \quad , \quad \nu \geqq 2 \, ,$$

ὁπότε καί

$$(5.3.8) \qquad E_\mu = \mu!\, e^x \left[\frac{x^\mu}{\mu!} - \frac{x^{\mu-1}}{(\mu-1)!} + \ldots + (-1)^{\mu-1}\frac{x^1}{1!} + (-1)^\mu\right] + c$$

Πραγματικά, ἔχομε

$$E_1 = \int xe^x dx = \int x\, dx^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

καί

$$E_\nu = \int x^\nu e^x dx = \int x^\nu de^x = x^\nu e^x - \int e^x dx^\nu = x^\nu e^x - \nu \int x^{\nu-1} e^x dx = x^\nu e^x - \nu E_{\nu-1}$$

δηλαδή

$$E_\nu = x^\nu e^x - \nu E_{\nu-1} \quad , \quad \nu \geqq 2.$$

Ὁ τύπος (5.3.8) προφανῶς ἰσχύει γιά $\mu = 1$. Ἔτσι ὑποθέτομε ὅτι $\mu \geqq 2$, ὁπότε πολλαπλασιάζοντας τήν τελευταία σχέση ἐπί $\frac{1}{\nu!}(-1)^{\mu-\nu}$ παίρνομε

$$(-1)^{\mu-\nu}\frac{E_\nu}{\nu!} = (-1)^{\mu-\nu} e^x \frac{x^\nu}{\nu!} + (-1)^{\mu-\nu+1}\frac{E_{\nu-1}}{(\nu-1)!}.$$

Τέλος, θέτοντας $\nu = 2, \ldots, \mu$ καί ἀθροίζοντας κατά μέλη καταλήγομε στόν τύπο 5.3.8. ▲

ΤΥΠΟΣ 5.3.9. Ἄν

$$A_\mu = \int x^\mu \sin x\, dx \qquad \text{καί} \qquad B_\mu = \int x^\mu \cos x\, dx \quad , \quad \mu \in \mathbb{N}$$

τότε

$$A_1 = -x\cos x + \sin x + c \quad , \quad B_1 = x\sin x + \cos x + c$$

καί διά $\nu \geqq 2$

$$A_\nu = -x^\nu \cos x + \nu B_{\nu-1} \, ,$$

$$B_\nu = x^\nu \sin x - \nu A_{\nu-1} \, .$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἔτσι παίρνομε

$$A_2 = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c$$

$$B_2 = x^2\sin x + 2\cos x - 2\sin x + c$$

καί

(5.3.9) $$A_\nu = -x^\nu\cos x + \nu x^{\nu-1}\sin x - \nu(\nu-1)A_{\nu-2}$$

(5.3.10) $$B_\nu = x^\nu\sin x + \nu x^{\nu-1}\cos x - \nu(\nu-1)B_{\nu-2}$$

Πραγματικά, τά A_1, B_1 ὑπολογίζονται εὔκολα ἐνῶ οἱ τύποι (5.3.9) καί (5.3.10) προκύπτουν ὡς ἑξῆς:

$$A_\nu = \int x^\nu\sin x\,dx = -\int x^\nu d\cos x = -x^\nu\cos x + \int \cos x\,dx^\nu =$$

$$= -x^\nu\cos x + \nu\int x^{\nu-1}\cos x\,dx = -x^\nu\cos x + \nu B_{\nu-1}$$

καί

$$B_\nu = \int x^\nu\cos x\,dx = \int x^\nu d\sin x = x^\nu\sin x - \int \sin x\,dx^\nu =$$

$$= x^\nu\sin x - \nu\int x^{\nu-1}\sin x\,dx = x^\nu\sin x - \nu A_{\nu-1}\ .$$

Σημείωση.

Εἶναι εὔκολο νά δοῦμε ὅτι γιά $\nu \geq 2$ ἰσχύουν οἱ τύποι

(5.3.11) $$\int \frac{e^x}{x^\nu}\,dx = \frac{-e^x}{(\nu-1)x^{\nu-1}} + \frac{1}{\nu-1}\int \frac{e^x}{x^{\nu-1}}\,dx$$

καί

(5.3.12) $$\int \frac{\sin x}{x^\nu}\,dx = \frac{-\sin x}{(\nu-1)x^{\nu-1}} + \frac{1}{\nu-1}\int \frac{\cos x}{x^{\nu-1}}\,dx$$

ἐνῶ

(5.3.13) $$\int \frac{\cos x}{x^\nu}\,dx = \frac{\cos x}{(\nu-1)x^{\nu-1}} - \frac{1}{\nu-1}\int \frac{\sin x}{x^{\nu-1}}\,dx$$

Ἔτσι, γιά τόν ὑπολογισμό αὐτῶν τῶν ὁλοκληρωμάτων ἀπαιτεῖται τελικά ὁ ὑπολογισμός τῶν

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx\ , \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx\ , \quad \int \frac{\cos x}{x}\,dx$$

τά ὁποῖα ὅπως ἀναφέρεται στή βιβλιογραφία δέν ὁρίζουν στοιχειώδεις συναρτήσεις καί δέν ὑπολογίζονται μέ ἁπλό τρόπο, παρά μέ τή βοήθεια σειρῶν.

5.4 ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ἄν P, Q εἶναι δυό πολυωνυμικές συναρτήσεις, θά προσπαθήσωμε νά ὑπολογίσωμε τό ἀόριστο ὁλοκλήρωμα τῆς ρητῆς συναρτήσεως

$$R = \frac{P}{Q}$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 5.4.1. $P = 1$, $Q(x) = (\alpha x + \beta)^k$, $\alpha \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Ἔχομε δηλαδή νά ὑπολογίσωμε τό ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{(\alpha x+\beta)^k}\ .$$

Ἀλλά

$$\int \frac{dx}{(\alpha x+\beta)^k} = \frac{1}{\alpha}\left[\int \frac{dt}{t^k}\right]_{t=\alpha x+\beta} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}[\log|t|]_{t=\alpha x+\beta} + c, & \text{ἄν } k = 1 \\ \frac{1}{\alpha(1-k)} \cdot \left[\frac{1}{t^{k-1}}\right]_{t=\alpha x+\beta} + c, & \text{ἄν } k \neq 1, \end{cases}$$

ὁπότε παίρνομε τόν τύπο

$$(5.4.1) \qquad \int \frac{dx}{(\alpha x+\beta)^k} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\log|\alpha x+\beta| + c\ , & \text{ἄν } k = 1 \\ \frac{1}{\alpha(1-k)}\ \frac{1}{(\alpha x+\beta)^{k-1}} + c\ , & \text{ἄν } k \neq 1. \end{cases}$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 5.4.2. $P = 1$, $Q(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^\lambda$, ὅπου $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$, $\alpha \neq 0$ καί $\lambda \in \mathbb{N}$.

Ἔχομε, δηλαδή, νά ὑπολογίσωμε τό ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^\lambda}\ .$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἀλλά

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(y^2 + \delta^2)$$

ὅπου $y = x + \frac{\beta}{2\alpha}$ καί $\delta = \sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2} / 2\alpha$. Ἑπομένως ἔχομε

$$\int \frac{dx}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^\lambda} = \frac{1}{\alpha^\lambda}\left[\int \frac{dy}{(y^2+\delta^2)^\lambda}\right]_{y = x + \frac{\beta}{2\alpha}}$$

ὁπότε ἀρκεῖ νά ὑπολογιστῆ τό ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{dy}{(y^2+\delta^2)^\lambda}, \quad \delta \neq 0, \quad \lambda \in \mathbb{N}.$$

Θέτοντας $y = \delta \operatorname{tg} t$, ἔχομε $y^2+\delta^2 = \delta^2(1+\operatorname{tg}^2 t) = \frac{\delta^2}{\cos^2 t}$ καί $dy = \frac{\delta\, dt}{\cos^2 t}$. Ἔτσι

$$\int \frac{dy}{(y^2+\delta^2)^\lambda} = \frac{1}{\delta^{2\lambda-1}}\left[\int \cos^{2(\lambda-1)} t\, dt\right]_{t = \operatorname{Ar\,tg}\frac{y}{\delta}}$$

ὅπου τό τελευταῖο ὁλοκλήρωμα ὑπολογίζεται μέ βάση τόν Τύπο 5.3.3.

Γιά παράδειγμα, ἄς ὑπολογιστῆ τό ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}, \quad \beta^2-4\alpha\gamma < 0, \quad \alpha \neq 0.$$

Ἄν $\delta = \sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2} / 2\alpha$, ἔχομε

$$\int \frac{dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \frac{1}{\alpha}\left[\int \frac{dy}{y^2+\delta^2}\right]_{y = x + \frac{\beta}{2\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\delta}\left[\int dt\right]_{t = \operatorname{Ar\,tg}\frac{1}{\delta}(x + \frac{\beta}{2\alpha})} + c$$

δηλαδή

$$\int \frac{dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \frac{2}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}} \operatorname{Ar\,tg} \frac{2\alpha x+\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}} + c. \tag{5.4.2}$$

Ἐπίσης θά ὑπολογίσωμε τό ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^2}, \quad \beta^2-4\alpha\gamma < 0, \quad \alpha \neq 0.$$

Θέτοντας $\delta = \sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2} / 2\alpha$ ἔχομε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\int \frac{dx}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^2} = \frac{1}{\alpha\delta^3}\left[\int \cos^2 t\, dt\right]_{t = \mathrm{Ar\,tg}\frac{1}{\delta}(x+\frac{\beta}{2\alpha})} + c =$$

$$= \frac{2\sqrt{2\alpha}}{(4\alpha\gamma-\beta^2)^{3/2}}\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_{t = \mathrm{Ar\,tg}\frac{2\alpha x+\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}} + c$$

δηλαδή

$$(5.4.3)\quad \int \frac{dx}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^2} = \frac{\sqrt{2\alpha}}{(4\alpha\gamma-\beta^2)^{3/2}}\left[\mathrm{Ar\,tg}\frac{2\alpha x+\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}} + \frac{1}{2}\sin 2\mathrm{Ar\,tg}\frac{2\alpha x+\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}\right] + c$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 5.4.3. $P(x) = Ax+B$, $Q(x) = (\alpha x^2+\beta x+\gamma)^k$ ὅπου $A \neq 0$, $\alpha \neq 0$, $\beta^2-4\alpha\gamma < 0$ καί $k \in \mathbb{N}$.

Ἔχομε, δηλαδή νά ὑπολογίσωμε τό ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{Ax+B}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^k}\, dx .$$

Ἀλλά ἰσχύει ὅτι

$$\int \frac{Ax+B}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^k}\, dx = \int \frac{\frac{A}{2\alpha}(2\alpha x+\beta) + B - \frac{A\beta}{2\alpha}}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^k}\, dx =$$

$$= \frac{A}{2\alpha}\int \frac{d(\alpha x^2+\beta x+\gamma)}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^k} + (B - \frac{A\beta}{2\alpha})\int \frac{dx}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^k}$$

καί ἄρα

$$(5.4.4)\quad \int \frac{Ax+B}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^k}\, dx = (B-\frac{A\beta}{2\alpha})\int \frac{dx}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^k} + \begin{cases} \frac{A}{2\alpha}\log|\alpha x^2+\beta x+\gamma| + c, & \text{ἄν } k = 1 \\ \frac{-A}{2\alpha(k-1)(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^{k-1}} + c, & \text{ἄν } k \neq 1 \end{cases}$$

ὅπου τό δεύτερο ὁλοκλήρωμα ὑπολογίζεται μέ βάση τήν Περίπτωση 5.4.2.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 5.4.4. (Γενική περίπτωση). Ὁ ὑπολογισμός τοῦ ὁλοκληρώματος

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὅπου P, Q εἶναι δυό πολυωνυμικές συναρτήσεις, ἀνάγεται στόν ὑπολογισμό ὁλοκληρωμάτων τῶν Περιπτώσεων 5.4.1 καί 5.4.3. Πρός τοῦτο θά χρησιμοποιηθῆ τό παρακάτω θεώρημα τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόδειξη συνήθως εὑρίσκεται στά βιβλία ἀλγέβρας (βλ. καί ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Α΄, Δ. ΚΑΠΠΟΥ θεώρ. 7.4.1). Πρῶτα ὅμως ἄς σημειωθῆ ὅτι "**βαθμός**" μιᾶς πολυωνυμικῆς συναρτήσεως μέ τύπο

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_\nu x^\nu, \text{ ὅπου } \alpha_\nu \neq 0$$

ὀνομάζεται ὁ φυσικός ἀριθμός ν.

ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἄν P, Q εἶναι δυό πολυωνυμικές συναρτήσεις τέτοιες ὥστε ὁ βαθμός τῆς P νά εἶναι μικρότερος ἀπ'τό βαθμό τῆς Q, τότε τό κλάσμα $\frac{P}{Q}$ μπορεῖ νά γραφῆ σάν ἕνα ἄθροισμα κλασμάτων πού καθένα ἔχει τή μορφή

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k}$$

ἤ τή μορφή

$$\frac{Ax+B}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^\lambda} \quad \text{μέ} \quad \beta^2-4\alpha\gamma < 0$$

ὅπου $A, B, \alpha, \beta, \gamma$ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί, k καί λ φυσικοί ἀριθμοί καί οἱ παρονομαστές τῶν κλασμάτων αὐτῶν νά εἶναι παράγοντες τοῦ Q, δηλαδή οἱ συναρτήσεις μέ τύπους

$$y = \frac{Q(x)}{(x-\alpha)^k} \quad \text{καί} \quad y = \frac{Q(x)}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^\lambda}$$

νά εἶναι ἐπίσης πολυωνυμικές συναρτήσεις.

Ἔτσι ὅταν δοθῆ ἕνα κλάσμα π.χ. τό $\frac{x-2}{x^4-x^3-x+1}$, προσπαθοῦμε μέ τή "**μέθοδο προσδιορισμοῦ τῶν συντελεστῶν**" νά τό ἀναλύσωμε σέ ἄθροισμα κλασμάτων μέ παρονομαστές, παράγοντες τοῦ παρανομαστοῦ. Ἐδῶ, δηλαδή, ἀρκεῖ νά προσδιορίσωμε τούς ἀριθμούς A, B, Γ, Δ ὥστε γιά κάθε x νά ἰσχύη

$$\frac{x-2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{\Gamma x+\Delta}{x^2+x+1} .$$

Πραγματικά, μέ τήν "**ἀπαλειφή**" τῶν παρανομαστῶν ἔχομε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$x-2 = (A+\Gamma)x^3 + (B-2\Gamma+\Delta)x^2 + (B+\Gamma-2\Delta)x + (-A+B+\Delta)$$

ὁπότε πρέπει νά ἔχωμε

$$A+\Gamma = 0 \quad , \quad B-2\Gamma+\Delta = 0$$

$$B+\Gamma-2\Delta = 1 \quad , \quad -A+B+\Delta = -2.$$

Ἔτσι, βρίσκομε $A=\frac{2}{3}$, $B=\frac{-1}{3}$, $\Gamma=\frac{-2}{3}$, $\Delta=-1$, δηλαδή

$$\frac{x-2}{x^4-x^3-x+1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2x+3}{x^2+x+1}$$

Τώρα μποροῦμε νά ὑπολογίσωμε εὔκολα καί τό ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{x-2}{x^4-x^3-x+1}\,dx \ .$$

Παρατηροῦμε, λοιπόν, ὅτι

$$\int \frac{dx}{x-1} = \int \frac{d(x-1)}{x-1} = \log|x-1| \ ,$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} = \int (x-1)^{-2}d(x-1) = -\frac{1}{x-1}$$

καί

$$\int \frac{2x+3}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \int \frac{2dx}{x^2+x+1} =$$

$$= \int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} + 2\int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$= \log(x^2+x+1) + 2\,\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Ar\,tg}\frac{2}{\sqrt{3}}\,(x+\frac{1}{2}) \ ,$$

ὅπου ἐφαρμόσαμε τήν Περίπτωση 5.4.2.

Ἔτσι, ἔχομε

$$\int \frac{x-2}{x^4-x^3-x+1}\,dx = \frac{2}{3}\log|x-1| + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3}\log(x^2+x+1) - \frac{4}{3\sqrt{3}}\,\mathrm{Ar\,tg}\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})+c.$$

5.5 ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΜΕΡΙΚΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Παντοῦ παρακάτω θά παριστάνωμε μέ $R[u_1,u_2,\ldots,u_\nu]$ κάθε ρητή ἐκ-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

φραση τῶν $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$, δηλαδή κάθε ἔκφραση πού προκύπτει μέ ἐφαρμογή τῶν τεσσάρων ἀριθμητικῶν πράξεων πάνω στά $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 5.5.1. Ὁλοκλήρωση συναρτήσεων μέ τύπο

$$y = R\left[x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right], \quad \text{ὅπου } m \in \mathbb{N}.$$

Στήν περίπτωση αὐτή θέτομε

$$t = \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$$

ὁπότε προκύπτει

$$x = \frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m}.$$

Ἔτσι ἀναγόμαστε στή συνάρτηση μέ τύπο

$$y = R\left[\frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m}, t\right]$$

πού εἶναι μία ρητή συνάρτηση τοῦ t καί ἡ ὁλοκλήρωσή της γίνεται σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη παράγραφο 5.4.

Γιά παράδειγμα, ἄς ὑπολογιστῆ τό ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}.$$

Ἔχομε

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{x+1}$$

ὁπότε, θέτοντας

$$t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}, \quad \text{ἔχομε} \quad x = \frac{t^3+1}{t^3-1} \quad \text{καί} \quad dx = -\frac{6t^2}{(t^3-1)^2}\, dt$$

καί ἔτσι

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^3}} = \left[\int \frac{-3}{t^3-1}\, dt\right]_{t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}} = \left[\int \left(\frac{-1}{t-1} + \frac{t+2}{t^2+t+1}\right) dt\right]_{t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}} =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\log\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} + \sqrt{3}\,\mathrm{Ar\,tg}\,\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right]_{t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}} + c =$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$= \frac{1}{2}\log\frac{2}{(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1})^3} + \sqrt{3}\,\mathrm{Ar\,tg}\,\frac{2\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}}{3\sqrt[3]{x-1}} + c\ .$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 5.5.2. **Ὁλοκλήρωση συναρτήσεων μέ τύπο**

$$y = R\left[x,\ \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\rho_1},\ \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\rho_2},\ldots,\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\rho_k}\right]$$

ὅπου $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_k$ εἶναι ρητοί ἀριθμοί.

Γράφομε τούς ρητούς $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_k$ μέ παρονομαστές φυσικούς ἀριθμούς καί θεωροῦμε τό ἐλάχιστο κοινό πολλαπλάσιο m τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν. Θέτομε

$$t = \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{1}{m}},\ \text{ὁπότε}\quad x = \frac{\delta t^m-\beta}{\alpha-\gamma t^m}\ .$$

Ἔτσι προκύπτει ἡ συνάρτηση μέ τύπο

$$y = R\left[\frac{\delta t^m-\beta}{\alpha-\gamma t^m},\ t^{m\rho_1},\ t^{m\rho_2},\ldots,t^{m\rho_k}\right]$$

ὅπου οἱ ἐκθέτες $m\rho_1,\ m\rho_2,\ldots,\ m\rho_k$ εἶναι προφανῶς ἀκέραιοι ἀριθμοί καί ἑπομένως ἀναγόμαστε σέ ὁλοκλήρωση ρητῆς συναρτήσεως.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 5.5.3. **Ὁλοκλήρωση συναρτήσεων μέ τύπο**

$$y = x^m(\alpha+\beta x^n)^p$$

ὅπου α,β εἶναι σταθεροί πραγματικοί ἀριθμοί καί οἱ ἐκθέτες m,n,p εἶναι ρητοί.

Γιά τήν ὁλοκλήρωση μιᾶς τέτοιας συναρτήσεως, ἄν p εἶναι ἀκέραιος ἐφαρμόζομε τήν Περίπτωση 5.5.2. Ἄν p δέν εἶναι ἀκέραιος θέτομε

$$z = x^n$$

καί ἐξετάζομε τίς ἑξῆς περιπτώσεις:

1) Ἄν $\frac{m+1}{n}$ εἶναι ἀκέραιος, τότε ἔχομε

$$\int x^m(\alpha+\beta x^n)^p dx = \frac{1}{n}\left[\int(\alpha+\beta z)^p z^q dz\right]_{z=x^n},\ \text{ὅπου}\quad q = \frac{m+1}{n}-1$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὁπότε ἐφαρμόζομε τήν περίπτωση 5.5.1.

2) Ἄν $\frac{m+1}{n}$ δέν εἶναι ἀκέραιος καί $\frac{m+1}{n}+p$ εἶναι ἀκέραιος, τότε ἐπειδή

$$\int x^m(\alpha+\beta x^n)^p dx = \frac{1}{n}\left[\int \left(\frac{\alpha+\beta z}{z}\right)^p z^{p+q} dz\right]_{z=x^n}, \quad \text{ὅπου} \quad q=\frac{m+1}{n}-1$$

μποροῦμε νά ἐφαρμόσωμε πάλι τήν περίπτωση 5.5.1.

Ἐξ ἄλλου ἀξίζει ἐδῶ νά παρατηρήσωμε ὅτι τό ὁλοκλήρωμα μιᾶς τέτοιας συναρτήσεως, ὅπως ὁ Tchebychev ἔχει ἀποδείξει, μπορεῖ νά ὑπολογιστῆ μέ συνηθισμένες μεθόδους (δηλαδή αὐτές πού τελικά ὁδηγοῦν σέ πεπερασμένο τό πλῆθος ὁλοκληρώματα τά ὁποῖα δίνονται ἀπ'τόν πίνακα τῶν ἀορίστων ὁλοκληρωμάτων τῶν κυριωτέρων στοιχειωδῶν συναρτήσεων) μόνο σέ μιά ἀπό τίς παραπάνω περιπτώσεις, δηλαδή πού ἕνας τουλάχιστον ἀπ' τούς ἀριθμούς

$$p, \quad \frac{m+1}{n}, \quad \frac{m+1}{n}+p$$

εἶναι ἀκέραιος.

Ἄς δοῦμε μερικά παραδείγματα:

i) $$I = \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\, dx .$$

Τοῦτο μπορεῖ νά γραφῆ καί ὡς

$$I = \int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} dx ,$$

ὁπότε ἐξετάζοντας, σύμφωνα μέ τά παραπάνω, ἄν κάποιος ἀπ'τούς ἀριθμούς

$$p=\frac{1}{3}, \quad \frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2, \quad \frac{m+1}{2}+p=\frac{7}{3}$$

εἶναι ἀκέραιος βλέπομε ὅτι βρισκόμαστε στήν περίπτωση 1). Ἔτσι, θέτοντας

$$z = x^{\frac{1}{4}} \quad \text{ἔχομε} \quad x = z^4,$$

ὁπότε

$$I = 4\left[\int z(1+z)^{\frac{1}{3}} dz\right]_{z=x^{\frac{1}{4}}} .$$

Ἄν τεθῆ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$(1+z)^{\frac{1}{3}} = t, \quad \text{τότε} \quad z = t^3 - 1$$

καί ἐπομένως

$$I = 4\left[\int (t^3-1)t\,3t^2 dt\right]_{t=(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}} =$$

$$= \frac{3}{7}\left[t^4(4t^3-7)\right]_{t=(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}} + c =$$

$$= \frac{3}{7}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{4}{3}}(-3+x^{\frac{1}{4}}) + c\ .$$

ii) $$I = \int \sqrt{x}\sqrt{1+x^3}\,dx.$$

Ἐδῶ ἔχομε $p = \frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n} = \frac{1}{2}$ καί $\frac{m+1}{n} + p = 1$, ὁπότε εἴμαστε στήν περίπτωση 2). Ἔτσι θέτοντας

$$z = x^3 \quad \text{ἔχομε} \quad x = z^{\frac{1}{3}}$$

καί

$$I = \frac{1}{3}\int \left(\frac{1+z}{z}\right)^{\frac{1}{2}} dz.$$

θέτομε

$$\left(\frac{1+z}{z}\right)^{\frac{1}{2}} = t, \quad \text{ὁπότε} \quad z = \frac{1}{t^2-1}$$

καί ἐπομένως

$$I = \frac{1}{3}\left[\int t\,d\,\frac{1}{t^2-1}\right]_{t=\left(\frac{1+x^3}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3}\left[t\,\frac{1}{t^2-1} - \int \frac{dt}{t^2-1}\right]_{t=\left(\frac{1+x^3}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{t}{t^2-1} - \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_{t=\left(\frac{1+x^3}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}}} + c =$$

$$= \frac{1}{3}(x^3+x^6)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}\log\left|1+2x^3-2(x^3+x^6)^{\frac{1}{2}}\right| + c.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 5.5.4. Ὁλοκλήρωση συναρτήσεων μέ τύπο

$$y = R[x, \sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}], \quad \alpha \neq 0$$

Ἐδῶ ἐφαρμόζομε μιά μέθοδο, γνωστή σάν **"μέθοδος τοῦ Euler"** καί πού ἔχει ὡς ἑξῆς:

1) $\alpha > 0$. Θέτομε

$$\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = t - \sqrt{\alpha}\, x \qquad (\text{ἤ } \sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = t + \sqrt{\alpha}\, x)$$

ὁπότε

$$x = \frac{t^2-\gamma}{2t\sqrt{\alpha}+\beta} \qquad \left(\text{ἤ } x = \frac{\gamma-t^2}{2t\sqrt{\alpha}-\beta}\right)$$

καί ἔτσι προκύπτει ἡ συνάρτηση μέ τύπο

$$y = R\left[\frac{t^2-\gamma}{2t\sqrt{\alpha}+\beta}, \quad t - \sqrt{\alpha}\,\frac{t^2-\gamma}{2t\sqrt{\alpha}+\beta}\right]$$

$$\left(\left(\text{ἤ } y = R\left[\frac{\gamma-t^2}{2t\sqrt{\alpha}-\beta}, \quad t + \sqrt{\alpha}\,\frac{\gamma-t^2}{2t\sqrt{\alpha}-\beta}\right]\right)\right)$$

δηλαδή ρητή συνάρτηση τοῦ t.

2) $\alpha < 0$. Ἐπειδή προϋποτίθεται ὅτι ὁ τύπος

$$y = \sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$$

ὁρίζει πραγματική συνάρτηση, τό τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ἔχει δυό πραγματικές ρίζες $\rho_1 \lesseqgtr \rho_2$. Ἔτσι ἔχομε

$$\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \sqrt{-\alpha}\,(x-\rho_1)\sqrt{\frac{\rho_2-x}{x-\rho_1}}$$

ὁπότε προκύπτει ἡ συνάρτηση μέ τύπο

$$y = R\left[x, \sqrt{-\alpha}\,(x-\rho_1)\sqrt{\frac{\rho_2-x}{x-\rho_1}}\right]$$

ἡ ὁποία μπορεῖ νά ὁλοκληρωθῆ μέ βάση τήν Περίπτωση 5.5.1

Παρατήρηση 5.5.1. Ἄν στήν τελευταία περίπτωση, ὅπου $\alpha < 0$, εἶναι καί $\gamma > 0$, τότε θέτοντας

$$x = \frac{1}{z}$$

προκύπτει ἡ συνάρτηση μέ τύπο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$y = R\left[\frac{1}{z}, \frac{1}{z}\sqrt{\gamma z^2+\beta z+\alpha}\right]$$

καί ἔτσι ἀναγόμαστε στήν περίπτωση 1).

Γιά παράδειγμα, ἄς ὑπολογίσωμε τά ὁλοκληρώματα

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}, \quad I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}, \quad I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}$$

Γιά τό I_1 θέτοντας

$$\sqrt{x^2+\alpha^2} = t - x$$

βρίσκομε

$$x = \frac{t^2-\alpha^2}{2t}$$

ὁπότε

$$I_1 = \left[\int \frac{dt}{t}\right]_{t = x+\sqrt{x^2+\alpha^2}} = \log(x+\sqrt{x^2+\alpha^2}) + c.$$

Γιά τό I_2, θέτοντας

$$\sqrt{x^2-\alpha^2} = t - x$$

βρίσκομε

$$x = \frac{t^2+\alpha^2}{2t}$$

ὁπότε

$$I_2 = \left[\int \frac{dt}{t}\right]_{t = x+\sqrt{x^2-\alpha^2}} = \log|x+\sqrt{x^2-\alpha^2}| + c.$$

Γιά τό I_3, παρατηροῦμε ὅτι

$$\sqrt{\alpha^2-x^2} = (\alpha-x)\sqrt{\frac{\alpha+x}{\alpha-x}}$$

ὁπότε θέτοντας

$$t = \sqrt{\frac{\alpha+x}{\alpha-x}}$$

ἔχομε

$$x = \frac{\alpha(t^2-1)}{t^2+1}.$$

Ἄρα

$$I_3 = 2\left[\int \frac{dt}{t^2+1}\right]_{t=\sqrt{\frac{\alpha+x}{\alpha-x}}} = 2\left[\operatorname{Ar\,tg} t\right]_{t=\sqrt{\frac{\alpha+x}{\alpha-x}}} + c =$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$= 2\,\mathrm{Ar\,tg}\sqrt{\frac{\alpha+x}{\alpha-x}}+c.$$

Ἐξ ἄλλου τό ὁλοκλήρωμα I_3 μπορεῖ νά ὑπολογιστῆ καί μέ βάση τήν Παρατήρηση 5.5.1. Πραγματικά, ἄν

$$x = \frac{1}{z}$$

ἔχομε

$$I_3 = \left[-\int \frac{dz}{z\sqrt{\alpha^2z^2-1}}\right]_{z=\frac{1}{x}}$$

Τώρα, θέτοντας

$$\sqrt{\alpha^2z^2-1} = t-\alpha z$$

ἔχομε

$$t = \alpha z+\sqrt{\alpha^2z^2-1}.$$

Ἔτσι

$$z = \frac{t^2+1}{2\alpha t}$$

καί ἑπομένως

$$I_3 = -2\left[\int \frac{dt}{t^2+1}\right]_{t=\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-x^2}}{x}} = -2\,\mathrm{Ar\,tg}\,\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-x^2}}{x}+c\,.$$

ὅπου ἡ τελευταία συνάρτηση διαφέρει ἀπό ἐκείνη πού βρέθηκε μέ τήν πρώτη μέθοδο κατά σταθερά c καί μάλιστα εὔκολα διαπιστώνεται ὅτι $c=\frac{\pi}{2}$.

5.6 ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΩΝ ΕΚΦΡΑΣΕΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Θεωροῦμε μιά ρητή ἔκφραση R τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων sin καί cos.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 5.6.1. Ὁλοκλήρωση συναρτήσεων μέ τύπο

$$y = R[\sin x\,,\ \cos x\,]$$

Στήν περίπτωση αὐτή μποροῦμε νά χρησιμοποιοῦμε πάντοτε τήν ἀντικατάσταση

$$t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$$

διότι, τότε ἔχομε

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

καί

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt\,.$$

Ἄρα, ἀρκεῖ νά ὑπολογιστῆ τό ἀόριστο ὁλοκλήρωμα τῆς ρητῆς συναρτήσεως μέ τύπο

$$y = R\left[\frac{2t}{1+t^2}\,,\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right]\frac{2}{1+t^2}\,.$$

Γιά παράδειγμα, ἄς ὑπολογίσωμε τά ὁλοκληρώματα

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sin x}\,,\ I_2 = \int \frac{dx}{\cos x}\,.$$

Μέ τόν μετασχηματισμό $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, ἔχομε

$$I_1 = \left[\int \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt\right]_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \left[\int\frac{dt}{t}\right]_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \left[\log|t|\right]_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + c = \log\left|\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right| + c$$

καί ἐπομένως καί

$$I_2 = \int\frac{dx}{\cos x} = \int\frac{dx}{\sin(\frac{\pi}{2}-x)} = \int\frac{d(x+\frac{\pi}{2})}{\sin(x+\frac{\pi}{2})} = \log\left|\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x+\frac{\pi}{2})\right| + c.$$

Σέ μερικές περιπτώσεις εἶναι προτιμώτερο ἀντί τῆς ἀντικαταστάσεως $t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}x$ νά γίνωνται ἄλλες ἀντικαταστάσεις.

Εἰδικώτερα:

α) Ἄν ἡ ἔκφραση $R[\sin x\,,\ \cos x]$ εἶναι τέτοια, ὥστε

$$R[-\sin x\,,\ \cos x] = -R[\sin x\,,\ \cos x]$$

τότε θέτομε $t = \cos x$.

β) Ἄν ἡ ἔκφραση $R[\sin x\,,\ \cos x]$ εἶναι τέτοια, ὥστε

$$R[\sin x\,,\ -\cos x] = -R[\sin x\,,\ \cos x]$$

τότε θέτομε $t = \sin x$.

γ) Ἄν ἡ ἔκφραση $R[\sin x\,,\ \cos x]$ εἶναι τέτοια, ὥστε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$R[-\sin x, -\cos x] = R[\sin x, \cos x]$$

τότε θέτομε $t = \operatorname{tg} x$.

Καί στίς τρεῖς παραπάνω περιπτώσεις ἀναγόμαστε στήν ὁλοκλήρωση μιᾶς ρητῆς συναρτήσεως.

Γιά παράδειγμα, ἄς ὑπολογίσωμε τά ὁλοκληρώματα

$$I_\alpha = \int \sin^3 x \cos^2 x \, dx, \quad I_\beta = \int \sin^2 x \cos x \, dx, \quad I_\gamma = \int \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x} dx.$$

Γιά τό I_α ἐφαρμόζομε τήν περίπτωση α), ὁπότε θέτοντας

$$t = \cos x$$

ἔχομε

$$I_\alpha = -\int \sin^2 x \cos^2 x \, d\cos x = -\int (1-\cos^2 x)\cos^2 x \, d\cos x = -\left[\int (1-t^2)t^2 dt\right]_{t=\cos x} =$$

$$= \left[-\int t^2 dt + \int t^4 dt\right]_{t=\cos x} = \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right]_{t=\cos x} + c = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + c.$$

Γιά τό I_β ἐφαρμόζομε τήν περίπτωση β), ὁπότε θέτοντας

$$t = \sin x$$

ἔχομε

$$I_\beta = \int \sin^2 x \, d\sin x = \left[\int t^2 dt\right]_{t=\sin x} = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{t=\sin x} + c = \frac{\sin^3 x}{3} + c.$$

Γιά τό I_γ, σύμφωνα μέ τήν περίπτωση γ), θέτομε

$$t = \operatorname{tg} x$$

ὁπότε ἔχομε

$$I_\gamma = \left[\int \frac{dt}{(1+2t^2)(1+t^2)}\right]_{t=\operatorname{tg} x} =$$

$$= \left[2\int \frac{dt}{1+2t^2}\right]_{t=\operatorname{tg} x} - \left[\int \frac{dt}{1+t^2}\right]_{t=\operatorname{tg} x} =$$

$$= [\sqrt{2}\,\operatorname{Ar\,tg} \sqrt{2}\,t - \operatorname{Ar\,tg} t]_{t=\operatorname{tg} x} + c =$$

$$= \sqrt{2}\,\operatorname{Ar\,tg} \sqrt{2}\operatorname{tg} x - x + c.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5.7 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά ὑπολογιστῆ τό ἀόριστο ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως f ὅταν:

α) $f(x) = \sqrt[5]{(8-3x)^3}$, β) $f(x) = 2x\sqrt{x^2+1}$

γ) $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt[3]{x^4+1}}$, δ) $f(x) = \dfrac{1}{(\mathrm{Ar}\sin x)^3\sqrt{1-x^2}}$.

ε) $f(x) = e^{x^2}x$, στ) $f(x) = e^{\sin x}\cos x$

ζ) $f(x) = \dfrac{1}{(x+\sqrt{x^2-1})^2}$, η) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-25x^2}}$.

2. Νά ὑπολογιστῆ τό ἀόριστο ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως f ὅταν:

α) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}$, β) $f(x) = x\sin 2x$

γ) $f(x) = \dfrac{\mathrm{Ar}\sin x}{\sqrt{x+1}}$, δ) $f(x) = \mathrm{Ar\,tg}\sqrt{x}$

ε) $f(x) = (\mathrm{Ar}\sin x)^2$, στ) $f(x) = x^2e^x\sin x$

ζ) $f(x) = \sin\alpha x\,\sin\beta x$, η) $f(x) = \sin\alpha x\,\cos\beta x$

θ) $f(x) = \cos\alpha x\,\cos\beta x$, ι) $f(x) = \dfrac{1}{\alpha\sin x+\beta\cos x}$.

3. Νά ὑπολογιστῆ τό ἀόριστο ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως f ὅταν:

α) $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$, β) $f(x) = e^{2x^2}+\log x$

γ) $f(x) = \dfrac{1-\mathrm{tg}\,x}{1+\mathrm{tg}\,x}$, δ) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$

ε) $f(x) = \dfrac{1}{(\alpha x+\beta)\sqrt{x}}$, στ) $f(x) = \dfrac{\log(x+1)-\log x}{x(x+1)}$

ζ) $f(x) = \log(x+\sqrt{1+x^2})$, η) $f(x) = \dfrac{\log(\log x)}{x}$

θ) $f(x) = x^\alpha\log x$, ι) $f(x) = x^\alpha(\log x)^\nu$

ια) $f(x) = \cos x\,\cos 2x\,\cos 3x$, ιβ) $f(x) = \dfrac{\mathrm{Ar}\sin x}{x^3}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

4. Μέ τή χρήση καί μόνο μεθόδων ὁλοκληρώσεως ν'ἀποδειχτοῦν οἱ παρακάτω ἀναγωγικοί τύποι:

α) $I_\nu = x(\log x)^\nu - \nu I_{\nu-1}$, ὅπου $I_\mu = \int (\log x)^\mu dx$

β) $I_\nu = -\dfrac{e^x}{(\nu-1)x^{\nu-1}} + \dfrac{1}{\nu-1} I_{\nu-1}$, ὅπου $I_\mu = \int \dfrac{e^x dx}{x^\mu}$

γ) $\nu I_\nu = (\nu-1)I_{\nu-2} + \cosh^{\nu-1} x \sinh x$, ὅπου $I_\mu = \int \cosh^\mu x\, dx$

δ) $\nu I_\nu = -(\nu-1)I_{\nu-2} + \sinh^{\nu-1} x \cosh x$, ὅπου $I_\mu = \int \sinh^\mu x\, dx$

ε) $(\nu\rho+1)I_\nu = x(\alpha+\beta x^\rho)^\nu + \alpha\nu\rho I_{\nu-1}$, ὅπου $I_\mu = \int (\alpha+\beta x^\rho)^\mu dx$.

5. Νά ὑπολογιστῆ τό ἀόριστο ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως f ὅταν:

α) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2+x^4}$, β) $f(x) = \dfrac{x^2-x+4}{(x^2-1)(x+2)}$

γ) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}$, δ) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^3-x^2}$

ε) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$, στ) $f(x) = \dfrac{2x}{(1+x)(1+x^2)^2}$

ζ) $f(x) = \dfrac{x^9}{(x^4-1)^2}$, η) $f(x) = \dfrac{(x^2-1)^3}{(1+x)(1+x^2)^3}$.

6. Νά ὑπολογιστῆ τό ἀόριστο ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως f ὅταν:

α) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$, β) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$

γ) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$, δ) $f(x) = \sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})^4$

ε) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$, στ) $f(x) = \sqrt[3]{x(1-x^2)}$

ζ) $f(x) = \dfrac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}$ η) $f(x) = \dfrac{1}{x(1+\sqrt[3]{x})^3}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

7. Νά ὑπολογιστῆ τό ἀόριστο ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως f ὅταν:

α) $f(x) = \sqrt{x^2-2x-1}$, β) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{-x^2+x+2}}$

γ) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}$, δ) $f(x) = \dfrac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

8. Μέ τή χρήση καί μόνο μεθόδων ὁλοκληρώσεως ν'ἀποδειχτοῦν οἱ σχέσεις:

α) $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = e^{\alpha x}\,\dfrac{\beta\sin\beta x + \alpha\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2} + c$

β) $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx = e^{\alpha x}\,\dfrac{\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2} + c$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 6

ΟΡΙΣΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Τό ὁρισμένο ὁλοκλήρωμα θά δοθῆ ἐδῶ σέ μιά σχετικά γενική μορφή ὅπως δόθηκε ἀπ'τόν Riemann. Ἡ ἔννοια τοῦ κατά Riemann ὁλοκληρώματος βρίσκει πολλές ἐφαρμογές καί, ὅπως θά δοῦμε, ὁ ὑπολογισμός του στήν πράξη ἀνάγεται στόν ὑπολογισμό ἀορίστων ὁλοκληρωμάτων.

6.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΚΑΤΑ RIEMANN ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Θεωροῦμε ἕνα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ τῆς πραγματικῆς εὐθείας. Ὅταν θά λέμε ὅτι δ εἶναι μιά "διαμέριση" τοῦ διαστήματος $[\alpha,\beta]$, θά ἐννοοῦμε ἕνα πεπερασμένο σύνολο τῆς μορφῆς

$$\delta = \{x_0, x_1,\ldots,x_k\}, \quad \text{ὅπου} \quad \alpha = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = \beta$$

καί θά ὀνομάζωμε "λεπτότητα" τῆς διαμερίσεως δ τόν (θετικό) ἀριθμό

$$\lambda(\delta) = \max\{(x_i - x_{i-1}): \ i = 1,2,\ldots,k\} .$$

Ἐπίσης θεωροῦμε μιά φραγμένη συνάρτηση $f(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ καί γιά $i = 1,2,\ldots,k$ ὁρίζομε τούς πραγματικούς ἀριθμούς

$$m_i(f) = \inf\{f(x): x\in[x_{i-1}, x_i]\}$$

καί

$$M_i(f) = \sup\{f(x): x\in[x_{i-1}, x_i]\}.$$

Τέλος, θέτομε

$$\bar{E}_f(\delta) = \sum_{i=1}^{k} M_i(f)(x_i - x_{i-1})$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καί

$$\underline{E}_f(\delta) = \sum_{i=1}^{k} m_i(f)(x_i - x_{i-1})$$

καί παρατηροῦμε ἀμέσως ὅτι ἰσχύουν:

$$\underline{E}_f(\delta) \leq \overline{E}_f(\delta)$$

(6.1.1) $$\underline{E}_{(-f)}(\delta) = -\overline{E}_f(\delta)\,,\quad \overline{E}_{-f}(\delta) = -\underline{E}_f(\delta)\,.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.1.1. Ἄν δ, $\hat{\delta}$ εἶναι διαμερίσεις τοῦ διαστήματος $[\alpha,\beta]$ μέ $\delta \subseteq \hat{\delta}$, τότε ἔχομε

$$\underline{E}_f(\delta) \leq \underline{E}_f(\hat{\delta}) \leq \overline{E}(\hat{\delta}) \leq \overline{E}(\delta).$$

Ἀπόδειξη. Θεωροῦμε τή διαμέριση

$$\delta_* = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$$

καί θέτομε $\delta^* = \delta_* \cup \{y\}$ ὅπου $y \neq x_i$, $i = 0,1,\ldots,k$. Ἑπομένως ὑπάρχει $\mu \in \{1,2,\ldots,k\}$ μέ $y \in [x_{\mu-1}, x_\mu]$. Ἔτσι ἔχομε

$$m_\mu(f)(x_\mu - x_{\mu-1}) = m_\mu(f)(y - x_{\mu-1}) + m_\mu(f)(x_\mu - y) \leq$$

$$\leq (\inf\{f(x):\ x \in [x_{\mu-1}, y]\})(y - x_{\mu-1}) + (\inf\{f(x):\ x \in [y, x_\mu]\})(x_\mu - y)$$

καί ἑπομένως

$$\underline{E}_f(\delta_*) = \sum_{i \neq \mu} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) + m_\mu(f)(x_\mu - x_{\mu-1}) \leq$$

$$\leq \sum_{i \neq \mu} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) + (\inf\{f(x):\ x \in [x_{\mu-1}, y]\})(y - x_{\mu-1}) +$$

$$+ (\inf\{f(x):\ x \in [y, x_\mu]\})(x_\mu - y) = \underline{E}_f(\delta^*)$$

δηλαδή

(6.1.2) $$\underline{E}_f(\delta_*) \leq \underline{E}_f(\delta^*)\,.$$

Τώρα, ἄν δ, $\hat{\delta}$ εἶναι διαμερίσεις τοῦ $[\alpha,\beta]$ τέτοιες ὥστε $\delta \subseteq \hat{\delta}$ καί $\hat{\delta} - \delta = \{y_1, y_2, \ldots, y_\lambda\}$, ὁρίζομε τίς διαμερίσεις

$$\delta_1 = \delta \cup \{y_1\},\ \delta_2 = \delta_1 \cup \{y_2\}, \ldots, \delta_\lambda = \delta_{\lambda-1} \cup \{y_\lambda\} = \hat{\delta}$$

ὁπότε ἐφαρμόζοντας διαδοχικά τήν ἀνισότητα (6.1.2) ἔχομε

$$\underline{E}_f(\delta) \leq \underline{E}_f(\delta_1) \leq E_f(\delta_2) \leq \ldots \leq \underline{E}_f(\delta_\lambda) = \underline{E}_f(\hat{\delta})$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δηλαδή

$$\underline{E}_f(\delta) \leq \underline{E}_f(\hat{\delta})$$

Ἐπίσης, ἀπ' τήν (6.1.1) ἔχομε

$$\overline{E}_f(\hat{\delta}) = \overline{E}_{-(-f)}(\hat{\delta}) = -\underline{E}_{(-f)}(\hat{\delta}) \leq -\underline{E}_{(-f)}(\delta) = \overline{E}_f(\delta)$$

δηλαδή

$$\overline{E}_f(\hat{\delta}) \leq \overline{E}_f(\delta)$$

καί ἡ πρόταση ἀποδείχτηκε. ▲

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.1.2. Γιά ὁποιεσδήποτε διαμερίσεις δ_1, δ_2 τοῦ διαστήματος $[\alpha,\beta]$ ἰσχύει ὅτι

$$\underline{E}_f(\delta_1) \leq \overline{E}_f(\delta_2).$$

Ἀπόδειξη. Θεωροῦμε τίς διαμερίσεις

$$\delta_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\},$$

καί

$$\delta_2 = \{y_0, y_1, \ldots, y_\lambda\}$$

καί ὁρίζομε $\delta = \delta_1 \cup \delta_2$. Ἄρα, ἀπ' τήν Πρόταση 6.1.1 παίρνομε

$$\underline{E}_f(\delta_1) \leq \underline{E}_f(\delta) \leq \overline{E}_f(\delta) \leq \overline{E}_f(\delta_2)$$

δηλαδή

$$\underline{E}_f(\delta_1) \leq \overline{E}_f(\delta_2). \ ▲$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.1.3. Ἄν δ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι μιά ἀκολουθία διαμερίσεων τοῦ διαστήματος $[\alpha,\beta]$ μέ $\lim \lambda(\delta_\nu) = 0$ καί τέτοια ὥστε τά

$$\lim \underline{E}_f(\delta_\nu) \quad \text{καί} \quad \lim \overline{E}_f(\delta_\nu)$$

νά ὑπάρχουν, τότε γιά ὁποιαδήποτε διαμέριση δ τοῦ $[\alpha,\beta]$ τά

$$\lim \underline{E}_f(\delta_\nu \cup \delta) \quad \text{καί} \quad \lim \overline{E}_f(\delta_\nu \cup \delta)$$

ἐπίσης ὑπάρχουν καί μάλιστα

$$\lim \underline{E}_f(\delta_\nu) = \lim \underline{E}_f(\delta \cup \delta_\nu) \quad \text{καί} \quad \lim \overline{E}_f(\delta_\nu) = \lim \overline{E}_f(\delta_\nu \cup \delta).$$

Ἀπόδειξη. Ἄν $z \in [\alpha,\beta]$ καί $\delta^* = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ εἶναι μιά

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

διαμέριση τοῦ $[\alpha,\beta]$, τότε ὑπάρχει $\mu\in\{1,2,\ldots,k\}$ τέτοιο ὥστε $z\in[x_{\mu-1},x_\mu]$. Ἀλλά τότε προκύπτει ὅτι

$$\begin{aligned}\underline{E}_f(\delta^*\cup\{z\}) &= \underline{E}_f(\delta^*) - m_\mu(f)(x_\mu - x_{\mu-1}) + \\ &+ \inf\{f(x):\ x\in[x_{\mu-1},z]\}(z-x_{\mu-1}) + \inf\{f(x):\ x\in[z,x_\mu]\}(x_\mu - z) \leqq \\ &\leqq \underline{E}_f(\delta^*) - m_\mu(f)(x_\mu - x_{\mu-1}) + \\ &+ f(z)(z-x_{\mu-1}) + f(z)(x_\mu - z) = \\ &= \underline{E}_f(\delta^*) + [f(z) - m_\mu(f)](x_\mu - x_{\mu-1}) \leqq \\ &\leqq \underline{E}_f(\delta^*) + 2(M-m)\lambda(\delta^*),\end{aligned}$$

ὅπου m, M εἶναι πεπερασμένα ἄνω καί κάτω, ἀντίστοιχα, φράγματα τῆς f.

Ἐπειδή, τώρα, $\lim\lambda(\delta_\nu)=0$, γιά κάθε $\varepsilon>0$, ὑπάρχει $n\in\mathbb{N}$ τέτοιο ὥστε

$$\text{γιά κάθε } \nu>n \text{ νά ἰσχύη } \lambda(\delta_\nu) < \frac{\varepsilon}{2(M-m)}.$$

Ἀλλά τότε

$$|\underline{E}_f(\delta_\nu\cup\{z\}) - \underline{E}_f(\delta_\nu)| \leqq 2(M-m)\lambda(\delta_\nu) < 2(M-m)\cdot\frac{\varepsilon}{2(M-m)} = \varepsilon$$

πού σημαίνει ὅτι $\lim\underline{E}_f(\delta_\nu\cup\{z\}) = \lim\underline{E}_f(\delta_\nu)$. Ἔτσι, ἄν $\delta=\{z_0,z_1,\ldots,z_k\}$ εἶναι μιά διαμέριση τοῦ $[\alpha,\beta]$, ἔχομε

$$\lim\underline{E}_f(\delta_\nu) = \lim\underline{E}_f(\delta_\nu\cup\{z_1\}) = \lim\underline{E}_f(\delta_\nu\cup\{z_1,z_2\}) = \ldots = \lim\underline{E}_f(\delta_\nu\cup\delta).$$

Ἐπίσης

$$\begin{aligned}\lim\overline{E}_f(\delta_\nu\cup\delta) &= \lim[-\underline{E}_{(-f)}(\delta_\nu\cup\delta)] = -\lim\underline{E}_{(-f)}(\delta_\nu\cup\delta) = \\ &= -\lim\underline{E}_{(-f)}(\delta_\nu) = \lim[-\underline{E}_{(-f)}(\delta_\nu)] = \lim\overline{E}_f(\delta_\nu). \ \blacktriangle\end{aligned}$$

Γιά τυχοῦσα διαμέριση $\delta=\{x_0,x_1,\ldots,x_k\}$ κάθε σύνολο

$$\xi=\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k\}$$

τέτοιο ὥστε γιά κάθε $i=1,2,\ldots,k$ νά ἰσχύη

$$x_{i-1}\leqq\xi_i\leqq x_i,$$

λέμε ὅτι ἀποτελεῖ μιά "ἐπιλογή" ἐνδιαμέσων σημείων αὐτῆς. Θέτομε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$E_f(\delta,\xi) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

καί ὀνομάζομε αὐτό "ἐνδιάμεσο ἄθροισμα" ἤ "ἄθροισμα κατά Riemann" πού ἀντιστοιχεῖ στή διαμέριση δ καί στήν ἐπιλογή ξ τῶν ἐνδιαμέσων σημείων της.

Εἶναι εὔκολο νά δοῦμε ὅτι γιά κάθε διαμέριση δ καί ἐπιλογή ξ ἐνδιαμέσων σημείων της ἰσχύει

$$\underline{E}_f(\delta) \leq E_f(\delta,\xi) \leq \overline{E}_f(\delta).$$

Ἀκόμη παρατηροῦμε ὅτι

$$\underline{E}_f(\delta) = \inf\{E_f(\delta,\xi) : \xi \text{ εἶναι ἐπιλογή ἐνδιαμέσων σημείων τῆς } \delta\}$$

καί

$$\overline{E}_f(\delta) = \sup\{E_f(\delta,\xi) : \xi \text{ εἶναι ἐπιλογή ἐνδιαμέσων σημείων τῆς } \delta\}.$$

Πραγματικά ἔχομε

$$\underline{E}_f(\delta) = \sum_{i=1}^{k} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{k} \inf\{f(\xi_i) : \xi_i \in [x_{i-1},x_i]\}\cdot(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \inf\{\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) : (\forall\, i=1,2,\ldots,k)\ x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i\} =$$

$$= \inf\{E_f(\delta,\xi) : \xi \text{ εἶναι ἐπιλογή ἐνδιαμέσων σημείων τῆς } \delta\}.$$

καί ἀνάλογα

$$\overline{E}_f(\delta) = \sum_{i=1}^{k} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{k} \sup\{f(\xi_i) : \xi_i \in [x_{i-1},x_i]\}\cdot(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sup\{\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) : (\forall\, i=1,2,\ldots,k)\ x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i\} =$$

$$= \sup\{E_f(\delta,\xi) : \xi \text{ εἶναι ἐπιλογή ἐνδιαμέσων σημείων τῆς } \delta\}.$$

Ἐπίσης παριστάνομε μέ

$$\underline{E}_f = \sup\{\underline{E}_f(\delta) : \delta \text{ εἶναι διαμέριση τοῦ } [\alpha,\beta]\}$$

καί

$$\overline{E}_f = \inf\{\overline{E}_f(\delta) : \delta \text{ εἶναι διαμέριση τοῦ } [\alpha,\beta]\}.$$

καί δίνομε τό παρακάτω θεώρημα:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.1.1. Ἄν $f(x), x\in[\alpha,\beta]$ εἶναι μιά φραγμένη συνάρτηση καί A ἕνας πραγματικός ἀριθμός, τότε οἱ ἀκόλουθες προτάσεις εἶναι ἰσοδύναμες:

i) Ἰσχύει $\underline{E}_f = A = \overline{E}_f$.

ii) Γιά κάθε $\varepsilon > 0$, ὑπάρχει $\eta > 0$ τέτοιο ὥστε γιά κάθε διαμέριση δ τοῦ διαστήματος $[\alpha,\beta]$ νά ἰσχύη

$$\lambda(\delta) < \eta \Rightarrow |\underline{E}_f(\delta) - A| < \varepsilon \quad \text{καί} \quad |\overline{E}_f(\delta) - A| < \varepsilon.$$

iii) Γιά κάθε $\varepsilon > 0$, ὑπάρχει $\eta > 0$ τέτοιο ὥστε γιά κάθε διαμέριση δ τοῦ διαστήματος $[\alpha,\beta]$ καί κάθε ἐπιλογή ξ ἐνδιαμέσων σημείων της νά ἰσχύη

$$\lambda(\delta) < \eta \Rightarrow |E_f(\delta,\xi) - A| < \varepsilon.$$

Ἀπόδειξη. i) $\Rightarrow$ ii). Δηλαδή θά δείξωμε ὅτι

ii)$_1$ γιά κάθε $\varepsilon > 0$, ὑπάρχει $\eta > 0$ τέτοιο ὥστε γιά κάθε διαμέριση δ τοῦ διαστήματος $[\alpha,\beta]$ νά ἰσχύη

$$\lambda(\delta) < \eta \Rightarrow |\underline{E}_f(\delta) - A| < \varepsilon$$

καί

ii)$_2$ γιά κάθε $\varepsilon > 0$, ὑπάρχει $\eta > 0$ τέτοιο ὥστε γιά κάθε διαμέριση δ τοῦ διαστήματος $[\alpha,\beta]$ νά ἰσχύη

$$\lambda(\delta) < \eta \Rightarrow |\overline{E}_f(\delta) - A| < \varepsilon.$$

Ὑποθέτοντας ὅτι ἡ ii)$_1$ δέν ἰσχύει, ὑπάρχει $\varepsilon > 0$ καί μιά ἀκολουθία διαμερίσεων δ_ν, $\nu\in\mathbb{N}$, τέτοια ὥστε $\lim\lambda(\delta_\nu) = 0$ καί γιά κάθε $\nu\in\mathbb{N}$

$$|\underline{E}_f(\delta_\nu) - \underline{E}_f| \geqq \varepsilon, \text{ ἤ ἰσοδύναμα } \underline{E}_f - \underline{E}_f(\delta_\nu) \geqq \varepsilon$$

ὁπότε καί

$$\underline{E}_f > \underline{E}_f(\delta_\nu) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ἄρα ὑπάρχει διαμέριση δ τοῦ $[\alpha,\beta]$ μέ $\underline{E}_f(\delta) > \underline{E}_f(\delta_\nu) + \frac{\varepsilon}{2}$, ὁπότε ἐπειδή ἀπ' τήν Πρόταση 6.1.1, ἰσχύει $\underline{E}_f(\delta) \leqq \underline{E}_f(\delta\cup\delta_\nu)$, ἔχομε

$$\underline{E}_f(\delta\cup\delta_\nu) - \underline{E}_f(\delta_\nu) \geqq \underline{E}_f(\delta) - \underline{E}_f(\delta_\nu) > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ἄρα

$$\lim \underline{E}_f(\delta\cup\delta_\nu) - \lim \underline{E}_f(\delta_\nu) \geqq \frac{\varepsilon}{2}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

πρᾶγμα πού, ἀπ'τήν Πρόταση 6.1.3, εἶναι ἄτοπο.

Παρόμοια καταλήγομε σέ ἄτοπο καί ἄν δεχθοῦμε ὅτι ἡ $ii)_2$ δέν ἰσχύει.

ii) $\Rightarrow$ iii). Γιά κάθε $\varepsilon > 0$, ὑπάρχει $\eta > 0$, τέτοιο ὥστε γιά κάθε διαμέριση δ τοῦ $[\alpha,\beta]$, μέ $\lambda(\delta) < \eta$, νά ἰσχύη

$$|\underline{E}_f(\delta) - A| < \varepsilon \quad \text{καί} \quad |\overline{E}_f(\delta) - A| < \varepsilon$$

ἤ

$$A-\varepsilon < \underline{E}_f(\delta) < A+\varepsilon \quad \text{καί} \quad A-\varepsilon < \overline{E}_f(\delta) < A+\varepsilon$$

ὁπότε καί

$$A-\varepsilon < \underline{E}_f(\delta) \leqq \overline{E}_f(\delta) < A+\varepsilon. \tag{6.1.3}$$

Τώρα, γιά ὁποιαδήποτε ἐπιλογή ξ ἐνδιαμέσων σημείων κάθε διαμερίσεως δ, ἔχομε

$$\underline{E}_f(\delta) \leqq E_f(\delta,\xi) \leqq \overline{E}_f(\delta),$$

ὁπότε, ἐπειδή $\lambda(\delta) < \eta$, ἀπ'τήν (6.1.3), παίρνομε ὅτι

$$A-\varepsilon < E_f(\delta,\xi) < A+\varepsilon$$

δηλαδή ὅτι

$$|E_f(\delta,\xi) - A| < \varepsilon.$$

iii) $\Rightarrow$ i). Ἔστω ὅτι $A < \underline{E}_f$. Ἐκλέγομε ἀριθμούς M, N μέ $A < M < N < \underline{E}_f$. Γιά κάθε ἀκολουθία διαμερίσεων δ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ μέ $\lim \lambda(\delta_\nu) = 0$ καί τυχοῦσα ἀκολουθία ἀντιστοίχων ἐπιλογῶν ξ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ ὑπάρχει $n \in \mathbb{N}$ καί διαμέριση δ τοῦ $[\alpha,\beta]$ τέτοια ὥστε

$$E_f(\delta_\nu,\xi_\nu) < M < N < \underline{E}_f(\delta) \quad \text{γιά κάθε} \quad \nu > n.$$

Ἀλλά τότε ἰσχύει καί

$$\underline{E}_f(\delta_\nu) \leqq E_f(\delta_\nu,\xi_\nu) < M < N < \underline{E}_f(\delta) \leqq \underline{E}_f(\delta \cup \delta_\nu) \quad \text{γιά κάθε} \quad \nu > n$$

ὁπότε

$$\underline{E}_f(\delta \cup \delta_\nu) - \underline{E}_f(\delta_\nu) > N-M \quad \text{γιά κάθε} \quad \nu > n.$$

Ἔτσι, ἐπειδή $\lim \lambda(\delta_\nu) = 0$, ἀπ'τήν Πρόταση 6.1.3, παίρνομε ὅτι

$$0 = \lim \underline{E}_f(\delta \cup \delta_\nu) - \lim \underline{E}_f(\delta_\nu) \geqq N-M > 0$$

πού εἶναι ἄτοπο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Έστω $\underline{E}_f < A$· τότε εκλέγομε έναν αριθμό K με $\underline{E}_f < K < A$, οπότε για κάθε ακολουθία δ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με $\lim \lambda(\delta_\nu) = 0$ και κάθε ακολουθία αντιστοίχων επιλογών ξ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, ισχύει

$$\underline{E}_f < K < E_f(\delta_\nu, \xi_\nu) \quad \text{τελικώς για όλα τα } \nu \in \mathbb{N}.$$

Άρα για κάποιο $\mu \in \mathbb{N}$, έχομε

$$\underline{E}_f < K < E_f(\delta_\mu, \xi_\mu),$$

οπότε και

$$\underline{E}_f < K \leq \inf\{E_f(\delta_\mu, \xi_\mu) : \xi_\mu \text{ είναι επιλογή πού αντιστοιχεί στή } \delta_\mu\}$$

ήτοι

$$\underline{E}_f < K \leq \underline{E}_f(\delta_\mu)$$

πού είναι άτοπο.

Έτσι αποδείξαμε ότι $\underline{E}_f = A$, ενώ ανάλογα βρίσκομε και ότι $\overline{E}_f = A$. ▲

Δίνομε τώρα τόν παρακάτω ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.1.1. Μιά φραγμένη συνάρτηση $f(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$ θά λέμε ότι είναι "κατά Riemann ολοκληρώσιμη", ή απλά "ολοκληρώσιμη", άν πληροί τή μία απ' τίς ισοδύναμες προτάσεις τοῦ παραπάνω θεωρήματος 6.1.1 (οπότε πληροί και τίς άλλες). Ο αριθμός A θά ονομάζεται τό "κατά Riemann ολοκλήρωμα" τῆς f και θά παριστάνεται μέ

$$A = \int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

Τά α και β ονομάζονται αντίστοιχα κάτω και άνω άκρο ολοκληρώσεως.

Η μεταβλητή x πού υπεισέρχεται στόν παραπάνω συμβολισμό δέν παίζει κανένα ούσιώδη ρόλο. Έτσι, ισοδύναμα γράφομε και

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt \quad \text{ή} \quad \int_\alpha^\beta f(z)dz.$$

Απ' τόν ορισμό 6.1.1 προκύπτει άμεσως ότι, άν δ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι μιά ακολουθία διαμερίσεων τοῦ διαστήματος $[\alpha, \beta]$ με $\lim \lambda(\delta_\nu) = 0$, τότε ισχύει

$$\underline{E}_f = \lim_\nu \underline{E}_f(\delta_\nu) = \int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_\nu \overline{E}_f(\delta_\nu) = \overline{E}_f$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἐπειδή ἡ f θεωρεῖται φραγμένη, τά $\underline{E}_f$ καί $\overline{E}_f$ εἶναι πεπερασμένοι ἀριθμοί, ὀνομάζονται ἀντίστοιχα "τό ἄνω καί τό κάτω κατά Darboux ὁλοκλήρωμα" τῆς f καί παριστάνονται συνήθως μέ

$$\underline{\int_\alpha^\beta} f(x)dx \quad \text{καί} \quad \overline{\int_\alpha^\beta} f(x)dx.$$

Ἔτσι, ἀπ'τόν ὁρισμό 6.1.1 προκύπτει ἡ ἑξῆς πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.1.4. **Μιά συνάρτηση f εἶναι κατά Riemann ὁλοκληρώσιμη τότε καί μόνο τότε ἄν τά ἄνω καί κάτω κατά Darboux ὁλοκληρώματα αὐτῆς ταυτίζωνται.**

Ἐπίσης, ἄν Δ εἶναι ἕνα κλειστό διάστημα τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ μιᾶς συναρτήσεως f, τότε ἡ f λέμε ὅτι εἶναι "**(κατά Riemann) ὁλοκληρώσιμη ἐπί τοῦ Δ**", ἄν ὁ περιορισμός $f|\Delta$ αὐτῆς εἶναι κατά Riemann ὁλοκληρώσιμη συνάρτηση.

Παρατήρηση 6.1.1.

Εἶναι εὔκολο νά δοῦμε ὅτι κάθε σταθερά συνάρτηση ἐπί τοῦ $[\alpha,\beta]$ εἶναι ὁλοκληρώσιμη καί μάλιστα ἄν $f(x)=c$, $x\in[\alpha,\beta]$ τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = c(\beta-\alpha).$$

Πραγματικά, γιά κάθε διαμέριση δ τοῦ $[\alpha,\beta]$ καί κάθε ἐπιλογή ξ ἐνδιαμέσων σημείων της, ἔχομε

$$E_f(\delta,\xi) = c(\beta-\alpha).$$

6.2 ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΥΠΑΡΞΗ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Ἡ ὕπαρξη τοῦ κατά Riemann ὁρισμένου ὁλοκληρώματος ἐξασφαλίζεται βασικά ἀπό τή **συνθήκη τοῦ Riemann**, πού δίνεται στό παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.2.1. (Συνθήκη τοῦ Riemann). **Μιά φραγμένη συνάρτηση $f(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ εἶναι κατά Riemann ὁλοκληρώσιμη, τότε καί μόνο τότε, ἄν γιά κάθε $\varepsilon>0$ ὑπάρχη $\eta>0$ τέτοιο, ὥστε γιά κάθε διαμέριση δ τοῦ διαστήματος $[\alpha,\beta]$, νά ἰσχύη**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

(6.2.1) $$\lambda(\delta) < \eta \Rightarrow \overline{E}_f(\delta) - \underline{E}_f(\delta) < \varepsilon.$$

Απόδειξη. Υποθέτομε ότι ή f είναι ολοκληρώσιμη καί θέτομε $A = \int_\alpha^\beta f(x)dx$. Άρα, από τήν πρόταση ii) τοῦ θεωρήματος 6.1.1., γιά κάθε $\varepsilon > 0$, ὑπάρχει $\eta > 0$ τέτοιο ὥστε γιά κάθε διαμέριση δ τοῦ $[\alpha,\beta]$, νά ἰσχύη

$$\lambda(\delta) < \eta \Rightarrow |\overline{E}_f(\delta)-A| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ καί } |\underline{E}_f(\delta)-A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ή

$$\lambda(\delta) < \eta \Rightarrow \overline{E}_f(\delta)-A < \frac{\varepsilon}{2} \text{ καί } A-\underline{E}_f(\delta) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Άρα μέ πρόσθεση κατά μέλη παίρνομε τήν (6.2.1).

Υποθέτομε τώρα ότι ἰσχύει ή (6.2.1) καί θεωροῦμε μιά ἀκολουθία διαμερίσεων δ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ τοῦ $[\alpha,\beta]$ τέτοια ὥστε $\lim \lambda(\delta_\nu) = 0$. Τότε ἀπ' τή συνθήκη (6.2.1) προκύπτει ότι καί

$$\lim[\overline{E}_f(\delta_\nu)-\underline{E}_f(\delta_\nu)] = 0$$

Αλλά

$$0 \leqq \overline{E}_f-\underline{E}_f \leqq \overline{E}_f(\delta_\nu)-\underline{E}_f(\delta_\nu), \text{ γιά κάθε } \nu \in \mathbb{N}$$

ὁπότε καί

$$0 \leqq \overline{E}_f-\underline{E}_f \leqq \lim[\overline{E}_f(\delta_\nu)-\underline{E}_f(\delta_\nu)] = 0.$$

Άρα $\underline{E}_f = \overline{E}_f$ καί σύμφωνα μέ τήν Πρόταση 6.1.4 ή f είναι ολοκληρώσιμη. ▲

ΠΟΡΙΣΜΑ 6.2.1. **Κάθε συνεχής συνάρτηση $f(x)$, $x \in [\alpha,\beta]$ είναι κατά Riemann ολοκληρώσιμη.**

Απόδειξη. Θεωροῦμε ένα $\varepsilon > 0$. Επειδή ή f έχει πεδίο ὁρισμοῦ κλειστό διάστημα, σύμφωνα μέ τό θεώρημα 1.13.1 είναι καί ὁμοιομόρφως συνεχής. Άρα ὑπάρχει $\eta > 0$, τέτοιο ὥστε γιά κάθε x, y στό $[\alpha,\beta]$ νά ἰσχύη

(6.2.2) $$|x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}.$$

Θεωροῦμε τώρα μιά διαμέριση

$$\delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$$

τέτοια ὥστε $\lambda(\delta) < \eta$. Επειδή ή f είναι συνεχής στά διαστήματα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$[x_{\mu-1},x_\mu]$, $\mu=1,2,\ldots,k$, ἕπεται, σύμφωνα μέ τό θεώρημα 1.13.2, ὅτι παίρνει μέγιστο καί ἐλάχιστο σ'αὐτά. Ἔτσι γιά κάθε $i=1,2,\ldots,k$, ἀπ'τήν (6.2.2) παίρνομε

$$0 \leq M_i(f)-m_i(f) < \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}$$

Ἄρα

$$\overline{E}_f(\delta)-\underline{E}_f(\delta)=\sum_{i=1}^{k} M_i(f)(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{k} m_i(f)(x_i-x_{i-1}) =$$

$$=\sum_{i=1}^{k} (M_i(f)-m_i(f))(x_i-x_{i-1}) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}\sum_{i=1}^{k} (x_i-x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}(\beta-\alpha)=\varepsilon,$$

ἤτοι

$$\overline{E}_f(\delta)-\underline{E}_f(\delta)<\varepsilon, \quad \text{ὅταν} \quad \lambda(\delta)<\eta.$$

Ἔτσι, σύμφωνα μέ τό θεώρημα 6.2.1, ἡ f εἶναι ὁλοκληρώσιμη. ▲

ΠΟΡΙΣΜΑ 6.2.2. Ἄν μιά φραγμένη συνάρτηση $f(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ ἔχη μόνο ἕνα σημεῖο ἀσυνεχείας, τότε αὐτή εἶναι κατά Riemann ὁλοκληρώσιμη.

Ἀπόδειξη. Ἄν z εἶναι τό σημεῖο ἀσυνεχείας τῆς f, διακρίνομε τίς ἑξῆς περιπτώσεις:

α) $\alpha<z<\beta$.

Θεωροῦμε τυχόν $\varepsilon>0$· ἐπειδή ἡ f εἶναι φραγμένη, ὑπάρχουν πραγματικοί ἀριθμοί m, M μέ $m\leq f(x)\leq M$ γιά κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Θέτομε

$$\hat{\varepsilon} = \min\{\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha+4(M-m)}, z-\alpha, \beta-z\}$$

Ἐπειδή ὁ περιορισμός $f|[\alpha,z-\hat{\varepsilon}]\cup[z+\hat{\varepsilon},\beta]$ εἶναι συνεχής συνάρτηση ὑπάρχει $\hat{\eta}>0$ τέτοιο ὥστε, γιά κάθε x,y στό $[\alpha,z-\varepsilon]\cup[z+\varepsilon,\beta]$ νά ἰσχύη

$$|x-y|<\hat{\eta} \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\hat{\varepsilon}.$$

Θεωροῦμε, τώρα, τυχοῦσα διαμέριση $\delta=\{x_0,x_1,\ldots,x_k\}$ τοῦ $[\alpha,\beta]$ μέ λεπτότητα $\lambda(\delta)<\eta=\min\{\hat{\eta},\hat{\varepsilon}\}$. Ἄρα ὑπάρχουν λ,μ στό $\{1,2,\ldots,k\}$ μέ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$x_{\lambda-1} \leq z-\hat{\varepsilon} \leq x_\lambda$ καί $x_{\mu-1} \leq z+\hat{\varepsilon} \leq x_\mu$. Ἐξ ἄλλου ἰσχύει ὅτι

$$M_i(f) - m_i(f) < \hat{\varepsilon}, \quad \text{γιά κάθε } i \text{ μέ } i < \lambda \text{ ἤ } i > \mu$$

καί

$$M_i(f) - m_i(f) \leq M-m, \quad \text{γιά κάθε } i \text{ μέ } \lambda \leq i \leq \mu.$$

Ἔτσι, ἄν $\lambda(\delta) < \eta$, ἔχομε

$$\overline{E}_f(\delta) - \underline{E}_f(\delta) = \sum_{i=1}^{k} (M_i(f) - m_i(f))(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i<\lambda \text{ ἤ } i>\mu} (M_i(f)-m_i(f))(x_i-x_{i-1}) + \sum_{i=\lambda}^{\mu} (M_i(f)-m_i(f))(x_i-x_{i-1}) <$$

$$< \hat{\varepsilon}[(x_{\lambda-1}-\alpha) + (\beta-x_\mu)] + (M-m)(x_\mu - x_{\lambda-1}) <$$

$$< \hat{\varepsilon}(\beta-\alpha) + (M-m)(2\hat{\varepsilon} + 2\eta) <$$

$$< \hat{\varepsilon}(\beta-\alpha) + 4(M-m)\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}[(\beta-\alpha) + 4(M-m)] < \varepsilon,$$

ὁπότε, σύμφωνα μέ τό θεώρημα 6.2.1 ἡ f εἶναι ὁλοκληρώσιμη.

β) $z = \alpha$, ἤ $z = \beta$.

Στήν περίπτωση αὐτή ἐργαζόμαστε ὅπως καί παραπάνω ὁρίζοντας

$$\hat{\varepsilon} = \min\{\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha+2(M-m)}, \beta-\alpha\}$$

καί χρησιμοποιώντας ἀντίστοιχα τήν ὁμοιόμορφη συνέχεια τῶν περιορισμῶν $f|[z+\hat{\varepsilon},\beta]$, $f|[\alpha,z-\hat{\varepsilon}]$. ▲

Παρατήρηση 6.2.1

Στό παραπάνω πόρισμα ὑποθέσαμε ὅτι ἡ f ἔχει μόνο ἕνα σημεῖο ἀσυνεχείας. Στό Πόρισμα 6.3.1 θά δείξωμε ὅτι καί ὅταν μιά συνάρτηση f ἔχη περισσότερα ἀπό ἕνα σημεῖα ἀσυνεχείας ἀλλά πεπερασμένο πλῆθος τότε εἶναι ὁλοκληρώσιμη. Ἀλλά τοῦτο ἰσχύει καί στήν περίπτωση ἀριθμησίμου πλήθους σημείων ἀσυνεχείας καί μάλιστα ὅπως μπορεῖ ν'ἀποδειχτῆ γενικώτερα (βλ. TOM APOSTOL, Mathematical Analysis, A modern approach to advanced calculus, Addison-Wesley Publishing Company) ἰσχύει καί στήν περίπτωση ἄλλων συνόλων τά ὁποῖα χαρακτηρίζονται σάν σύνολα "μηδενικοῦ μέτρου"

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὅπως συμβαίνει νά εἶναι καί τά παραπάνω.

Τό παρακάτω παράδειγμα ἀποτελεῖ μιά ἀκραία περίπτωση ἀσυνεχοῦς καί φραγμένης συναρτήσεως τῆς ὁποίας τό κατά Riemann ὁλοκλήρωμα δέν ὑπάρχει.

Παράδειγμα 6.2.1

Θεωροῦμε τή συνάρτηση D τοῦ Dirichlet (βλ. Παράδειγμα 1.9.2)

$$D(x) = \begin{cases} 1 \text{ , ἄν } x \text{ εἶναι ρητός} \\ 0 \text{ , ἄν } x \text{ εἶναι ἄρρητος} \end{cases} \quad , \quad x \in [0,1]$$

Αὐτή εἶναι φραγμένη, διότι $0 \leq D(x) \leq 1$ γιά κάθε $x \in [0,1]$ καί παντοῦ ἀσυνεχής. Τό κατά Riemann ὁλοκλήρωμα τῆς D στό [0,1] δέν ὑπάρχει διότι, ὅπως εὔκολα μπορεῖ ν'ἀποδειχτῆ, γιά κάθε διαμέριση δ τοῦ [0,1] ἰσχύει

$$\underline{E}_D(\delta) = 0 \quad \text{καί} \quad \overline{E}_D(\delta) = 1.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 6.2.3. Ἄν $f(x)$, $x \in [\alpha,\beta]$ εἶναι μιά μονότονη συνάρτηση, τότε αὐτή εἶναι ὁλοκληρώσιμη.

Ἀπόδειξη. Ἐπειδή ἄν $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε $f(x) = f(\alpha)$ γιά κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ καί ἡ f ὡς σταθερά εἶναι, ὅπως στήν Παρατήρηση 6.1.1 εἴδαμε, ὁλοκληρώσιμη, ὑποθέτομε ὅτι $f(\alpha) < f(\beta)$· δηλαδή ὅτι f εἶναι αὔξουσα.

Γιά τυχόν $\varepsilon > 0$ παίρνομε

$$\eta = \frac{\varepsilon}{f(\beta) - f(\alpha)},$$

ὁπότε γιά κάθε διαμέριση δ τοῦ $[\alpha,\beta]$, ὅπου

$$\delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$$

μέ $\lambda(\delta) < \eta$, ἔχομε

$$M_i(f) = f(x_i) \quad \text{καί} \quad m_i(f) = f(x_{i-1}).$$

Ἑπομένως

$$\overline{E}_f(\delta) - \underline{E}_f(\delta) \leq \lambda(\delta) \sum_{i=1}^{k} [f(x_i) - f(x_{i-1})] =$$

$$= \lambda(\delta)\,[f(\beta) - f(\alpha)] < \frac{\varepsilon}{f(\beta) - f(\alpha)}\,[f(\beta) - f(\alpha)] = \varepsilon$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

ὁπότε, ἀπ' τό θεώρημα 6.2.1, ἕπεται τό συμπέρασμα. ▲

Παράδειγμα 6.2.2.

Ἔστω ἡ συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \in [\alpha,\beta]$, $\alpha \geq 0$. Αὐτή εἶναι συνεχής στό $[\alpha,\beta]$ καί ἑπομένως ὁλοκληρώσιμη. Θά ὑπολογίσωμε τό ὁλοκλήρωμα

$$\int_\alpha^\beta x^2 dx.$$

Πρός τοῦτο θά χρησιμοποιήσωμε τό γεγονός ὅτι

$$\int_\alpha^\beta x^2 dx = \lim \underline{E}_f(\delta_\nu)$$

ὅπου δ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι μιά ἀκολουθία διαμερίσεων τοῦ $[\alpha,\beta]$ τέτοια ὥστε ἡ ἀκολουθία $\lambda(\delta_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$ νά εἶναι μηδενική. Ἔτσι, παίρνοντας σάν διαμέριση δ_ν τήν

$$\delta_\nu = \{\alpha,\ \alpha + \frac{\beta-\alpha}{\nu},\ \alpha + \frac{2(\beta-\alpha)}{\nu}, \ldots, \alpha + \frac{(\nu-1)(\beta-\alpha)}{\nu}, \beta\},\ \nu \in \mathbb{N}$$

παρατηροῦμε ὅτι

$$\lim \lambda(\delta_\nu) = \lim \frac{\beta-\alpha}{\nu} = 0.$$

Ἀλλά ἐδῶ ἔχομε $m_i(f) = \left(\alpha + i\frac{\beta-\alpha}{\nu}\right)^2$ $(i = 0,1,\ldots,\nu-1)$

ὁπότε

$$\underline{E}_f(\delta_\nu) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \left(\alpha + \frac{k(\beta-\alpha)}{\nu}\right)^2 \frac{\beta-\alpha}{\nu} = \frac{(\beta-\alpha)}{\nu} \sum_{k=0}^{\nu-1} \left(\alpha^2 + 2\alpha(\beta-\alpha)\frac{k}{\nu} + \frac{k^2(\beta-\alpha)^2}{\nu^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{\beta-\alpha}{\nu}\right)\left[\nu\alpha^2 + 2\alpha(\beta-\alpha)\frac{\nu(\nu-1)}{2\nu} + \frac{(\beta-\alpha)^2}{\nu^2}\frac{(\nu-1)\nu(2\nu-1)}{6}\right] =$$

$$= (\beta-\alpha)\left[\alpha^2 + \alpha(\beta-\alpha)\frac{\nu-1}{\nu} + \frac{(\beta-\alpha)^2}{6}\frac{(\nu-1)(2\nu-1)}{\nu^2}\right]$$

ὁπότε

$$\int_\alpha^\beta x^2 dx = \lim \underline{E}_f(\delta_\nu) = (\beta-\alpha)\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{3} = \frac{\beta^3}{3} - \frac{\alpha^3}{3}.$$

Παρατήρηση 6.2.2.

Στό ἴδιο συμπέρασμα καταλήγομε, ὅπως ἄλλωστε καί ἀναμένεται, ἄν

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

χρησιμοποιήσωμε τή σχέση

$$\int_{\alpha}^{\beta} x^2 dx = \lim \overline{E}_f(\delta_\nu)$$

καί τήν ἴδια ἀκολουθία διαμερίσεων.

6.3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Ἐδῶ θά δοθοῦν μερικές χρήσιμες ἰδιότητες τοῦ κατά Riemann ὁρισμένου ὁλοκληρώματος. Καί πρῶτα δίνομε τό ἀκόλουθο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.3.1. Ἄν f εἶναι μιά ὁλοκληρώσιμη συνάρτηση ἐπί τοῦ $[\alpha,\beta]$ καί $[\alpha_1,\beta_1]$ εἶναι ἕνα ὑποδιάστημα τοῦ $[\alpha,\beta]$, τότε ἡ f εἶναι ὁλοκληρώσιμη καί ἐπί τοῦ $[\alpha_1,\beta_1]$.

Ἀπόδειξη. Χωρίς βλάβη τῆς γενικότητας ὑποθέτομε ὅτι ἰσχύει τουλάχιστον ἕνα ἀπ' τά $\alpha_1 \neq \alpha$ καί $\beta_1 \neq \beta$.

Ἐπειδή ἡ f εἶναι ὁλοκληρώσιμη ἐπί τοῦ $[\alpha,\beta]$, γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει $\eta > 0$ τέτοιο ὥστε γιά κάθε διαμέριση δ τοῦ $[\alpha,\beta]$ μέ $\lambda(\delta) < \eta$ νά ἰσχύη

$$\overline{E}_f(\delta) - \underline{E}_f(\delta) < \varepsilon.$$

Θεωροῦμε μιά διαμέριση δ τοῦ διαστήματος $[\alpha_1,\beta_1]$ μέ $\lambda(\delta) < \eta$ καί τυχοῦσα διαμέριση $\hat{\delta} = \{x_0,x_1,\ldots,x_k\}$ τοῦ $[\alpha,\beta]$ μέ $\lambda(\hat{\delta}) < \eta$ καί $\delta = \hat{\delta} \cap [\alpha_1,\beta_1] = \{x_\mu,x_{\mu+1},\ldots,x_\lambda\}$· τότε ἔχομε

$$\overline{E}_f(\delta)-\underline{E}_f(\delta) = \sum_{i=\mu+1}^{\lambda} (M_i(f)-m_i(f))(x_i-x_{i-1}) \leq$$

$$\leq \sum_{i\leq\mu \text{ ἤ } i>\lambda} (M_i(f)-m_i(f))(x_i-x_{i-1}) + \sum_{i=\mu+1}^{\lambda} (M_i(f)-m_i(f))(x_i-x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (M_i(f)-m_i(f))(x_i-x_{i-1}) = \overline{E}_f(\hat{\delta})-\underline{E}_f(\hat{\delta}) < \varepsilon$$

δηλαδή

$$\lambda(\delta) < \eta \Rightarrow \overline{E}_f(\delta) - \underline{E}_f(\delta) < \varepsilon$$

πρᾶγμα πού σημαίνει ὅτι ἡ f εἶναι ὁλοκληρώσιμη καί ἐπί τοῦ $[\alpha_1,\beta_1]$. ▲

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.3.1. Ἂν $f(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ εἶναι ὁλοκληρώσιμη συνάρτηση καί $\gamma\in(\alpha,\beta)$, τότε καί οἱ περιορισμοί της $f|[\alpha,\gamma]$ καί $f|[\gamma,\beta]$ εἶναι ὁλοκληρώσιμες συναρτήσεις καί μάλιστα

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx. \tag{6.3.1}$$

Ἀπόδειξη. Τό ὅτι οἱ περιορισμοί της $f|[\alpha,\gamma]$ καί $f|[\gamma,\beta]$ εἶναι ὁλοκληρώσιμες συναρτήσεις προκύπτει ἀπ'τό θεώρημα 6.3.1.

Τώρα ἄν δ_1,δ_2 εἶναι διαμερίσεις τῶν διαστημάτων $[\alpha,\gamma]$ καί $[\gamma,\beta]$ ἀντίστοιχα, τότε ἡ ἕνωσή τους $\delta_1\cup\delta_2$ εἶναι διαμέριση τοῦ $[\alpha,\beta]$. Ἀλλά τότε ἔχομε

$$\underline{E}_f(\delta_1)+\underline{E}_f(\delta_2)=\underline{E}_f(\delta_1\cup\delta_2)\leq\sup\{\underline{E}_f(\delta):\ \delta \text{ εἶναι διαμέριση τοῦ } [\alpha,\beta]\} = \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

καί ἑπομένως

$$\int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx = \sup\{\underline{E}_f(\delta_1):\ \delta_1 \text{ εἶναι διαμέριση τοῦ } [\alpha,\gamma]\} + \sup\{\underline{E}_f(\delta_2):\ \delta_2 \text{ εἶναι διαμέριση τοῦ } [\gamma,\beta]\} \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx,$$

ἤτοι

$$\int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

Ἀπ'τήν ἄλλη πλευρά

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \inf\{\overline{E}_f(\delta):\ \delta \text{ εἶναι διαμέριση τοῦ } [\alpha,\beta]\} \leq \overline{E}_f(\delta_1\cup\delta_2)=\overline{E}_f(\delta_1)+\overline{E}_f(\delta_2)\ .$$

καί ἑπομένως

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \inf\{\overline{E}_f(\delta_1):\ \delta_1 \text{ εἶναι διαμέριση τοῦ } [\alpha,\gamma]\} + \inf\{\overline{E}_f(\delta_2):\ \delta_2 \text{ εἶναι διαμέριση τοῦ } [\gamma,\beta]\} = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Έτσι προκύπτει ή (6.3.1). ▲

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.3.2. Αν γιά μιά (φραγμένη) συνάρτηση $f(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ τά ὁλοκληρώματα $\int_\alpha^\gamma f(x)dx$ καί $\int_\gamma^\beta f(x)dx$, γιά κάποιο $\gamma\in(\alpha,\beta)$, ὑπάρχουν, τότε καί τό $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ ὑπάρχει καί μάλιστα ἰσχύει

$$\int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

Ἀπόδειξη. Ἔστω M καί m ἄνω καί κάτω, ἀντίστοιχα, φράγματα τῆς συναρτήσεως f. Ἐπειδή οἱ συναρτήσεις $f|[\alpha,\gamma]$ καί $f|[\gamma,\beta]$ εἶναι ὁλοκληρώσιμες, γιά κάθε $\varepsilon>0$, ὑπάρχει $\eta>0$ τέτοιο ὥστε γιά κάθε διαμέριση δ_1 τοῦ $[\alpha,\gamma]$ καί δ_2 τοῦ $[\gamma,\beta]$ μέ $\lambda(\delta_1)<\eta$ καί $\lambda(\delta_2)<\eta$ νά ἰσχύουν ἀντίστοιχα

$$\overline{E}_f(\delta_1)-\underline{E}_f(\delta_1)<\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{καί} \quad \overline{E}_f(\delta_2)-\underline{E}_f(\delta_2)<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Ἀλλά τότε γιά μιά διαμέριση $\delta=\{x_0,x_1,\dots,x_k\}$ τοῦ $[\alpha,\beta]$ μέ $\lambda(\delta)<\min\{\eta,\frac{\varepsilon}{3(M-m)}\}$ θέτομε $\delta_1=[\alpha,\gamma]\cap(\delta\cup\{\gamma\})$ καί $\delta_2=[\gamma,\beta]\cap(\delta\cup\{\gamma\})$. Εἶναι φανερό ὅτι ὑπάρχει $\mu\in\{1,2,\dots,k\}$ μέ $\gamma\in[x_{\mu-1},x_\mu]$ καί ἀκόμα ὅτι $\lambda(\delta_1)<\eta$ καί $\lambda(\delta_2)<\eta$. Ἄρα

$$\overline{E}_f(\delta)-\underline{E}_f(\delta)=\sum_{i<\mu \text{ ἢ } i>\mu}(M_i(f)-m_i(f))(x_i-x_{i-1})+(M_\mu(f)-m_\mu(f))(x_\mu-x_{\mu-1})$$

$$<([\overline{E}_f(\delta_1)-\underline{E}_f(\delta_1)]+[\overline{E}_f(\delta_2)-\underline{E}_f(\delta_2)])+(M-m)\lambda(\delta)<$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+(M-m)\frac{\varepsilon}{3(M-m)}=\varepsilon.$$

Τώρα, τό ὑπόλοιπο τμῆμα τῆς ἀποδείξεως προκύπτει ἀπ'τήν Πρόταση 6.3.1. ▲

ΠΟΡΙΣΜΑ 6.3.1. Αν μιά φραγμένη συνάρτηση $f(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ ἔχη πεπερασμένου πλήθους σημεῖα ἀσυνεχείας, τότε αὐτή εἶναι κατά

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Riemann ὁλοκληρώσιμη.

Ἀπόδειξη. Ὑποθέτοντας ὅτι $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$ εἶναι τά σημεῖα ἀσυνεχείας τῆς f θεωροῦμε σημεῖα $y_i \in (z_i, z_{i-1})$, $i = 1, 2, \ldots, \mu-1$. Τότε καθένας ἀπ'τούς περιορισμούς $f|[\alpha, y_1]$, $f|[y_1, y_2], \ldots, f|[y_{\mu-1}, \beta]$ ἔχει μόνο ἕνα σημεῖο ἀσυνεχείας, ὁπότε σύμφωνα μέ τό Πόρισμα 6.2.2 εἶναι ὁλοκληρώσιμες συναρτήσεις. Ἀλλά ἐφαρμόζοντας διαδοχικά τήν Πρόταση 6.3.1 παίρνομε

$$\int_\alpha^{y_1} f(x)dx + \int_{y_1}^{y_2} f(x)dx + \ldots + \int_{y_{\mu-1}}^{\beta} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

δηλαδή ὅτι καί ἡ f εἶναι ὁλοκληρώσιμη συνάρτηση. ▲

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.3.2. Ἄν c, d εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί καί f, g συναρτήσεις ὁλοκληρώσιμες ἐπί τοῦ $[\alpha, \beta]$, τότε καί ἡ συνάρτηση $cf + dg$ εἶναι ὁλοκληρώσιμη ἐπί τοῦ $[\alpha, \beta]$ καί μάλιστα

$$\int_\alpha^\beta [cf(x) + dg(x)]dx = c\int_\alpha^\beta f(x)dx + d\int_\alpha^\beta g(x)dx.$$

Εἰδικά, ἔχομε

$$\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \lambda \int_\alpha^\beta f(x)dx, \text{ ὅπου } \lambda \in \mathbb{R}$$

καί

$$\int_\alpha^\beta [f(x) + g(x)]dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx,$$

$$\int_\alpha^\beta [f(x) - g(x)]dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx - \int_\alpha^\beta g(x)dx$$

Ἀπόδειξη. Προκύπτει ἀμέσως ἀπ'τό γεγονός ὅτι

$$E_{cf+dg}(\delta, \xi) = cE_f(\delta, \xi) + dE_g(\delta, \xi)$$

γιά κάθε διαμέριση δ καί ἐπιλογή ἐνδιαμέσων σημείων της. ▲

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.3.3. Ἄν $f(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ εἶναι μιά ὁλοκληρώσιμη συνάρτηση μέ $f(x)\geq 0$ γιά κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε καί

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0.$$

Ἄν ἐπί πλέον ὑπάρχη σημεῖο συνεχείας ξ τῆς f μέ $f(\xi)>0$ τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0.$$

Ἀπόδειξη. Ἐπειδή $f(x)\geq 0$ γιά κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, θά ἔχωμε καί $\overline{E}_f(\delta)\geq 0$ γιά κάθε διαμέριση δ τοῦ $[\alpha,\beta]$. Ἄρα καί

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \overline{E}_f \geq 0.$$

Τώρα, ἄν ὑπάρχη $\xi\in[\alpha,\beta]$ μέ $f(\xi)>0$ καί ἡ f εἶναι συνεχής στό ξ, τότε, ἀπ' τήν Πρόταση 1.13.1 προκύπτει ὅτι ὑπάρχει $r>0$ καί διάστημα $[\alpha_1,\beta_1]\subseteq[\alpha,\beta]$ τέτοιο ὥστε $f(x)\geq r$ γιά κάθε $x\in[\alpha_1,\beta_1]$. Ἄρα γιά κάθε διαμέριση δ τοῦ $[\alpha_1,\beta_1]$ ἔχωμε $\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(x)dx \geq \underline{E}_f(\delta) \geq r(\beta_1-\alpha_1)$ καί ἑπομένως

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^{\alpha_1} f(x)dx + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(x)dx + \int_{\beta_1}^{\beta} f(x)dx \geq 0 + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} r\,dx + 0 = r(\beta_1-\alpha_1) > 0. \blacktriangle$$

Ἕνα ἄλλο συμπέρασμα πού προκύπτει ἄμεσα ἀπ' τό θεώρημα αὐτό εἶναι τό ἑξῆς:

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.3.3. Ἄν f,g εἶναι ὁλοκληρώσιμες ἐπί τοῦ $[\alpha,\beta]$ συναρτήσεις μέ $f(x)\leq g(x)$ γιά κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta g(x)dx$$

Ἄν ἐπί πλέον ὑπάρχη σημεῖο συνεχείας ξ τῶν f καί g μέ $f(\xi)<g(\xi)$, τότε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx < \int_\alpha^\beta g(x)dx .$$

Ἀπόδειξη. Προκύπτει ἀμέσως ἐφαρμόζοντας τό θεώρημα 6.3.3 γιά τή συνάρτηση $g(x)-f(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$. ▲

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.3.4. Ἄν $f(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ εἶναι ὁλοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε καί ἡ $|f(x)|$, $x\in[\alpha,\beta]$ εἶναι ὁλοκληρώσιμη, Ἐπί πλέον ἰσχύει ὅτι

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \leq \int_\alpha^\beta |f(x)|dx.$$

Ἀπόδειξη. Θ'ἀποδειχτῆ πρῶτα ὅτι καί ἡ $|f(x)|$, $x\in[\alpha,\beta]$ εἶναι ὁλοκληρώσιμη. Πραγματικά, ἄν $\delta=\{x_0,x_1,\ldots,x_k\}$ εἶναι μιά διαμέριση τοῦ $[\alpha,\beta]$ καί y_1,y_2 εἶναι δυό τυχόντα σημεῖα τοῦ $[x_{i-1},x_i]$, τότε ἰσχύει

$$|f(y_1)|-|f(y_2)| \leq |f(y_1)-f(y_2)| \leq M_i(f)-m_i(f).$$

Ἄρα παίρνομε

$$M_i(|f|)-m_i(|f|) \leq M_i(f)-m_i(f)$$

καί ἑπομένως

$$\overline{E}_{|f|}(\delta)-\underline{E}_{|f|}(\delta) \leq \overline{E}_f(\delta)-\underline{E}_f(\delta)$$

ὁπότε ἀπ'τή συνθήκη ὁλοκληρώσεως τοῦ Riemann προκύπτει ἡ ὁλοκληρωσιμότητα καί τῆς $|f|$.

Τώρα, ἐπειδή γιά κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ἰσχύει

$$f(x) \leq |f(x)| \quad \text{καί} \quad -f(x) \leq |f(x)|,$$

ἀπ'τήν Πρόταση 6.3.3 παίρνομε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta |f(x)|dx \quad \text{καί} \quad -\int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta |f(x)|dx$$

ἤτοι

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \leq \int_\alpha^\beta |f(x)|dx. \ ▲$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.3.5. Ἄν $f(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ εἶναι ὁλοκληρώσιμη καί τέτοια ὥστε

$$m \leq f(x) \leq M, \text{ γιά κάθε } x\in[\alpha,\beta],$$

τότε

$$m(\beta-\alpha) \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq M(\beta-\alpha).$$

Ἀπόδειξη. Ἀπ' τήν

$$m \leq f(x) \leq M$$

καί τήν Πρόταση 6.3.3 παίρνομε

$$\int_\alpha^\beta m\,dx \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta M\,dx$$

ὁπότε, ἀπ' τήν Παρατήρηση 6.1.1, ἔχομε

$$m(\beta-\alpha) \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq M(\beta-\alpha). \quad \blacktriangle$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.3.6. (Τῆς μέσης τιμῆς τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ). Ἄν $f(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ εἶναι μιά ὁλοκληρώσιμη συνάρτηση μέ

$$m \leq f(x) \leq M, \; x\in[\alpha,\beta]$$

τότε ὑπάρχει $\eta\in[m,M]$ τέτοιο ὥστε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \eta(\beta-\alpha).$$

Ἐπί πλέον ἄν ἡ συνάρτηση f εἶναι συνεχής, τότε ὑπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ὥστε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = f(\xi)(\beta-\alpha).$$

Ἀπόδειξη. Ἀπ' τό προηγούμενο Θεώρημα 6.3.5 ἔχομε ὅτι

$$m \leq \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx \leq M$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὁπότε θέτοντας

$$\eta = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

ἔχομε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \eta(\beta-\alpha).$$

Ἂν ἐπί πλέον ἡ f εἶναι συνεχής, παίρνοντας $m = \min f$ καί $M = \max f$, ἀπ'τό θεώρημα 1.13.3, προκύπτει ὅτι ὑπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ μέ

$$f(\xi) = \eta.$$

Ἔτσι ἔχομε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \eta(\beta-\alpha) = f(\xi)(\beta-\alpha). \quad \blacktriangle$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.3.7. (Γενικευμένο θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ). Θεωροῦμε δύο συναρτήσεις $f(x)$, $g(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ τέτοιες ὥστε g καί fg νά εἶναι ὁλοκληρώσιμες. Ἂν ἡ g εἶναι σταθεροῦ προσήμου (δηλαδή $\forall x\in[\alpha,\beta]$ $g(x)\geq 0$ ἤ $\forall x\in[\alpha,\beta]$ $g(x)\leq 0$) καί ἡ f τέτοια ὥστε

$$m\leq f(x)\leq M \text{ γιά κάθε } x\in[\alpha,\beta]$$

τότε ὑπάρχει $\eta\in[m,M]$ τέτοιο ὥστε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx = \eta\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx.$$

Ἐπί πλέον ἂν ἡ συνάρτηση f εἶναι συνεχής, τότε ὑπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ὥστε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx.$$

Ἀπόδειξη. Χωρίς βλάβη τῆς γενικότητας, μποροῦμε νά ὑποθέσωμε ὅτι $g(x)\geq 0$ γιά κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Ἔτσι, ἔχομε

$$m\,g(x)\leq f(x)g(x)\leq M\,g(x)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καί ἀπ'τήν Πρόταση 6.3.3.

$$m\int_\alpha^\beta g(x)dx \leq \int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx \leq M\int_\alpha^\beta g(x)dx. \tag{6.3.1}$$

Τώρα, ἄν

$$\int_\alpha^\beta g(x)dx = 0,$$

ἀπ'τήν παραπάνω ἀνισότητα προκύπτει καί ὅτι

$$\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx = 0,$$

ὁπότε τό συμπέρασμα ἰσχύει. Ἄν

$$\int_\alpha^\beta g(x)dx > 0$$

τότε ἀπ'τήν (6.3.1) ἔχομε

$$m \leq \frac{\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx}{\int_\alpha^\beta g(x)dx} \leq M,$$

ὁπότε, θέτοντας

$$\eta = \frac{\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx}{\int_\alpha^\beta g(x)dx}$$

προκύπτει τό συμπέρασμα τοῦ θεωρήματος.

Ἄν ἐπί πλέον ἡ f εἶναι συνεχής, παίρνοντας $m = \min f$ καί $M = \max f$ ἀπ'τό Θεώρημα 1.13.3, προκύπτει ὅτι ὑπάρχει $\xi \in [\alpha,\beta]$ μέ $f(\xi) = \eta$. Ἔτσι ἔχομε

$$\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_\alpha^\beta g(x)dx. \blacktriangle$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μέχρι τώρα γιά τό ὁλοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, ὑποθέταμε ὅτι $\alpha < \beta$ καί $[\alpha,\beta] \subseteq \mathcal{D}(f)$. Ἐδῶ ὁρίζομε καί τό ὁλοκλήρωμα

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx, \quad \text{ὅπου} \quad \alpha > \beta$$

μέ τόν τύπο

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx$$

ὅπου βέβαια ὑποθέτομε ὅτι $[\beta,\alpha] \subseteq \mathcal{D}(f)$.
Τέλος, γιά νά καλύψωμε ὅλες τίς περιπτώσεις, ὁρίζομε καί

$$\int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0$$

γιά ὁποιοδήποτε $\alpha \in \mathcal{D}(f)$.

Τώρα, συνδυάζοντας τά παραπάνω μέ τήν (6.3.1), παίρνομε ὅτι

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$$

γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς α,β,γ, ἀρκεῖ καί τά τρία ὁλοκληρώματα νά ἔχουν ἔννοια.

Ἐπί πλέον καί στά παραπάνω θεωρήματα 6.3.2, 6.3.6 καί 6.3.7, μποροῦμε νά θεωροῦμε καί τήν περίπτωση ὅπου τό κάτω ἄκρο ὁλοκληρώσεως εἶναι μεγαλύτερο ἀπ'τό ἄνω.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.3.8. Ἄν ἡ συνάρτηση $f(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$ εἶναι ὁλοκληρώσιμη, τότε ἡ συνάρτηση

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt, \quad x \in [\alpha,\beta]$$

εἶναι συνεχής.

Ἀπόδειξη. Ἡ ὁλοκληρώσιμη συνάρτηση $f(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$ εἶναι βέβαια φραγμένη καί ἄς εἶναι M καί m ἀντίστοιχα ἄνω καί κάτω φράγματα αὐτῆς. Γιά τυχόν $x \in [\alpha,\beta]$, θεωροῦμε ἕνα h μέ $x+h \in [\alpha,\beta]$, ὁπότε ἔχομε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$F(x+h)-F(x)=\int_{\alpha}^{x+h} f(t)dt-\int_{\alpha}^{x} f(t)dt=\int_{\alpha}^{x+h} f(t)dt+\int_{x}^{\alpha} f(t)dt=$$

$$=\int_{x}^{\alpha} f(t)dt+\int_{\alpha}^{x+h} f(t)dt=\int_{x}^{x+h} f(t)dt\,.$$

Ἀλλά ἀπ'τό θεώρημα 6.3.6 τῆς μέσης τιμῆς τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ ὑπάρχει η μέ $m\leq\eta\leq M$ τέτοιο ὥστε

$$\int_{x}^{x+h} f(t)dt=\eta(x+h-x)=\eta\, h$$

καί ἑπομένως

$$|F(x+h)-F(x)|\leq\max\{|m|,|M|\}\,|h|$$

ἀπ'ὅπου παίρνομε

$$\lim_{h\to 0}|F(x+h)-F(x)|=0$$

καί τό θεώρημα ἀποδείχτηκε. ▲

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.3.9. (Δεύτερο γενικευμένο θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ). Ὑποθέτομε ὅτι $g(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$, $f(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις, ἡ g εἶναι σταθεροῦ προσήμου. Ἄν A,B εἶναι δυό πραγματικοί ἀριθμοί μέ

$$A\leq f(x)\leq B\quad\forall\, x\in[\alpha,\beta]$$

τότε ὑπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ μέ

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx=A\int_{\alpha}^{\xi} g(x)dx+B\int_{\xi}^{\beta} g(x)dx.$$

Ἀπόδειξη. Ἄν $A=B$, τότε ἡ f εἶναι σταθερά, ὁπότε τό συμπέρασμα ἰσχύει. Ὑποθέτομε ὅτι $A<B$ καί θέτομε

$$\psi(x)=\frac{B-f(x)}{B-A}\,,\quad \text{ὁπότε}\quad 0\leq\psi(x)\leq 1\quad \text{γιά κάθε}\quad x\in[\alpha,\beta].$$

Τότε εὔκολα προκύπτει πώς εἶναι ἀρκετό νά δείξωμε ὅτι ὑπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ μέ

$$\int_{\alpha}^{\beta}\psi(x)g(x)dx=\int_{\alpha}^{\xi} g(x)dx. \tag{6.3.2}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Γιά ν'ἀποδείξωμε αὐτό, παρατηροῦμε ὅτι, ἀπ'τό παραπάνω θεώρημα 6.3.8, ἡ συνάρτηση

$$F(z) = \int_\alpha^z g(x)dx - \int_\alpha^\beta \psi(x)g(x)dx, \quad z\in[\alpha,\beta]$$

εἶναι συνεχής καί ὅπως προκύπτει, ἀπ'τό θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς 6.3.7, ὑπάρχουν ξ_1, ξ_2 στό $[\alpha,\beta]$ τέτοια ὥστε

$$F(\alpha) = -\int_\alpha^\beta \psi(x)g(x)dx = -\psi(\xi_1)\int_\alpha^\beta g(x)dx$$

καί

$$F(\beta) = \int_\alpha^\beta [1-\psi(x)]g(x)dx = [1-\psi(\xi_2)]\int_\alpha^\beta g(x)dx.$$

Τώρα, ἄν $\psi(\xi_1)=0$ ἤ $\psi(\xi_2)=1$, ἡ (6.3.2) ἰσχύει ἄν πάρωμε ἀντίστοιχα $\xi=\beta$. Ἔτσι, ὑποθέτομε ὅτι $\psi(\xi_1)\neq 0$ καί $\psi(\xi_2)\neq 1$, ὁπότε ἰσχύει $0\leq F(\beta)$ ἤ $F(\alpha)\geq 0\geq F(\beta)$. Ἄρα ἀπ'τή συνέχεια τῆς F καί τό θεώρημα τοῦ Bolzano προκύπτει ὅτι ὑπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ μέ $F(\xi)=0$, δηλαδή πάλι ἡ (6.3.2). ▲

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.3.10. (Ὁλοκλήρωση μέ ἀντικατάσταση). Ἔστω $f(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ μιά ὁλοκληρώσιμη συνάρτηση. Ὑποθέτομε ὅτι $\varphi(t)$, $t\in[\sigma,\tau]$ μιά συνεχής καί γνησίως αὐξουσα (ἤ γνησίως φθίνουσα) συνάρτηση τέτοια ὥστε $\alpha=\varphi(\sigma)$, $\beta=\varphi(\tau)$ (ἤ $\alpha=\varphi(\tau)$, $\beta=\varphi(\sigma)$ ἀντίστοιχα) καί νά ὑπάρχη μιά συνάρτηση $\psi(t)$, $t\in[\sigma,\tau]$ τέτοια ὥστε

$$\varphi(t) = \alpha + \int_\sigma^t \psi(s)ds \quad \text{γιά κάθε } t\in[\sigma,\tau].$$

ὥστε ὑπάρχει τό ὁλοκλήρωμα $\int_\sigma^\tau f[\varphi(t)]\psi(t)dt$ καί μάλιστα ἰσχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\sigma^\tau f[\varphi(t)]\psi(t)dt.$$

Ἀπόδειξη. Ἄν $\delta=\{t_0,t_1,\ldots,t_k\}$ εἶναι μιά διαμέριση τοῦ $[\sigma,\tau]$ καί $\xi=\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k\}$ μιά ἐπιλογή ἐνδιαμέσων σημείων της, ἡ $\varphi(\delta)=\{\varphi(t_0), \varphi(t_1),\ldots,\varphi(t_k)\}$ εἶναι μιά διαμέριση τοῦ $[\alpha,\beta]$ καί ἡ $\varphi(\xi)=\{\varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2), \ldots,\varphi(\xi_k)\}$ μιά ἐπιλογή τῆς $\varphi(\delta)$.

Ἔστω τώρα δ τυχοῦσα διαμέριση τοῦ $[\sigma,\tau]$ καί ξ ἐπιλογή ἐνδιαμέσων σημείων αὐτοῦ. Παρατηροῦμε ὅτι ἔχουμε:

$$E_f(\varphi(\delta),\varphi(\xi)) - E_f(\delta,\xi) = \sum_{i=1}^{k} f[\varphi(\xi_i)](\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})) - \sum_{i=1}^{k} f[\varphi(\xi_i)]\psi(\xi_i)(t_i-t_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} f[\varphi(\xi_i)][\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}) - \psi(\xi_i)(t_i-t_{i-1})].$$

Ἀλλά γιά κάθε $i=1,2,\dots,k$ ἔχουμε

$$\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}) - \psi(\xi_i)(t_i-t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi(s)\,ds - \psi(\xi_i)(t_i-t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\psi(s)-\psi(\xi_i)]\,ds.$$

Ἄρα

$$E_f(\varphi(\delta),\varphi(\xi)) - E_f(\delta,\xi) = \sum_{i=1}^{k} f[\varphi(\xi_i)]\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} [\psi(s)-\psi(\xi_i)]\,ds\right].$$

Ἔστω M ἕνα φράγμα τῆς f ὅπως ἔχουμε $|f[\varphi(x)]| \le M$ γιά κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Ἄρα τότε

$$\left|E_f(\varphi(\delta),\varphi(\xi)) - E_f(\delta,\xi)\right| \le M\sum_{i=1}^{k}\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} [\psi(s)-\psi(\xi_i)]\,ds\right| \le M\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\psi(s)-\psi(\xi_i)|\,ds \le M\,(E_\psi(\delta)-E_\psi(\delta)).$$

Ἀλλά ἡ f εἶναι ὀλοκληρώσιμη ἐπί τοῦ $[\alpha,\beta]$ καί ἑπομένως γιά κάθε $\varepsilon>0$ ὑπάρχει $\eta_1>0$ τέτοιο ὥστε γιά κάθε διαμέριση $\hat\delta$ τοῦ $[\alpha,\beta]$ μέ $\lambda(\hat\delta)<\eta_1$ καί κάθε ἐπιλογή ἐνδιαμέσων σημείων $\hat\xi$ αὐτῆς νά ἰσχύη

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx - E_f(\hat\delta,\hat\xi)\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.3.3}$$

Ἡ φ εἶναι συνεχής συνάρτηση στό $[\sigma,\tau]$ καί ἄρα ὁμοιομόρφως συνεχής στό $[\sigma,\tau]$. Ἑπομένως ὑπάρχει $\eta_2>0$ τέτοιο ὥστε γιά κάθε διαμέριση δ τοῦ $[\sigma,\tau]$ μέ $\lambda(\delta)<\eta_2$ νά ἔχουμε $|\varphi(t)-\varphi(t')|<\eta_1$ ἡνίκα $t,t'\in[\sigma,\tau]$ εἶναι ἡνίκα ὁποιωνδήποτε δύο διαδοχικῶν σημείων τῆς διαμέρισης δ $\{t_0,t_1,\dots,t_k\}$ ἡ $\varphi(\xi)=\{\varphi(\xi_1),\dots,\varphi(\xi_k)\}$ εἶναι ἡνίκα ὁποιουδήποτε $[\alpha,\beta]$ καί ἡ $\varphi(\delta)$ ἡ ἐπιλογή τῆς $\varphi(\xi)$ ἔχει

$$\lambda(\varphi(\delta)) < \eta_1. \tag{6.3.4}$$

Τέλος, ἡ ψ εἶναι ὁλοκληρώσιμη ἐπί τοῦ [σ,τ] καί ἄρα ὑπάρχει $\eta_3 > 0$ τέτοιο ὥστε γιά κάθε διαμέριση δ τοῦ [σ,τ] μέ $\lambda(\delta) < \eta_3$ νά ἰσχύη

$$\overline{E}_\psi(\delta) - \underline{E}_\psi(\delta) < \frac{\varepsilon}{2M}. \tag{6.3.5}$$

Θέτοντας $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ θεωροῦμε μιά διαμέριση δ τοῦ [σ,τ] μέ $\lambda(\delta) < \eta$ καί τυχοῦσα ἐπιλογή ξ ἐνδιαμέσων σημείων της.

Ἄρα ἀπό τίς (6.3.5) καί (6.3.4) παίρνομε

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx - E_{(f\circ\varphi)\psi}(\delta,\xi)\right| \leq \left|\int_\alpha^\beta f(x)dx - E_f(\varphi(\delta),\varphi(\xi))\right| +$$

$$+ \left|E_f(\varphi(\delta),\varphi(\xi)) - E_{(f\circ\varphi)\psi}(\delta,\xi)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + M\left(\overline{E}_\psi(\delta) - \underline{E}_\psi(\delta)\right) < \frac{\varepsilon}{2} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

δηλαδή

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx - E_{(f\circ\varphi)\psi}(\delta,\xi)\right| < \varepsilon$$

Ἔτσι

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\sigma^\tau f[\varphi(t)]\psi(t)dt. \quad \blacktriangle$$

6.4 ΣΧΕΣΗ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΚΑΙ ΑΟΡΙΣΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Ὅπως θά δοῦμε στήν παράγραφο αὐτή, τό γεγονός ὅτι ὁ συμβολισμός τοῦ ὁρισμένου ὁλοκληρώματος περιέχει τό σύμβολο τοῦ ἀορίστου ὁλοκληρώματος δέν εἶναι τυχαῖο.

Ἀπ'τό θεώρημα 6.3.1 προκύπτει ὅτι ἄν μιά συνάρτηση f εἶναι ὁλοκληρώσιμη ἐπί τοῦ διαστήματος [α,β], τότε αὐτή εἶναι ὁλοκληρώσιμη καί ἐπί κάθε διαστήματος [α,x] μέ $x\in[\alpha,\beta]$. Ἔτσι ἀπ'τόν τύπο

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$$

ὁρίζεται μιά συνάρτηση μέ μεταβλητή τό ἄνω ἄκρο ὁλοκληρώσεως.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.4.1 Ἄν ἡ συνάρτηση f(t), $t\in[\alpha,\beta]$ εἶναι συνεχής (ἄρα καί ὁλοκληρώσιμη), τότε ἡ συνάρτηση

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt, \quad x\in[\alpha,\beta]$$

εἶναι παραγωγίσιμη καί μάλιστα

$$F' = f.$$

Ἀπόδειξη. Ἔστω τυχόν $x\in[\alpha,\beta]$. Ἀπ'τό θεώρημα 6.3.6 τῆς μέσης τιμῆς τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ, σέ κάθε h μέ $x+h\in[\alpha,\beta]$ ἀντιστοιχίζομε ἕνα $\xi=\xi(h)$ πού εἶναι μεταξύ τῶν x καί $x+h$ καί τέτοιο ὥστε

$$\int_{x}^{x+h} f(t)dt = f(\xi)h$$

ὁπότε γιά $h\neq 0$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(\xi).$$

Ἄρα

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| = |f(x)-f(\xi)|.$$

Ἀλλά $\lim\limits_{h\to 0}\xi(h) = x$, ὁπότε ἀπ'τή συνέχεια τῆς f στό x προκύπτει

$$\lim_{h\to 0}|f(x)-f(\xi(h))| = |f(x)-f(x)| = 0$$

ὁπότε καί

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| = 0$$

δηλαδή

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x). \quad \blacktriangle$$

Παρατήρηση 6.4.1

Μέ τό θεώρημα 6.4.2 ἀποδείχτηκε τελικά ὅτι κάθε συνεχής συνάρτηση $f(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ ἔχει ἀρχικές συναρτήσεις, ἤ μέ ἄλλα λόγια, ὅτι τό ἀόριστο ὁλοκλήρωμα τῆς συνεχοῦς συναρτήσεως f πάντοτε ὑπάρχει.

ΠΟΡΙΣΜΑ 6.4.1 Ὑποθέτομε ὅτι f εἶναι μιά συνεχής συνάρτηση στό $[\alpha,\beta]$ καί $\varphi(t)$, $t\in[\sigma,\tau]$ συνεχής καί γνησίως αὔξουσα (ἤ γνησίως φθίνουσα) συνάρτηση μέ $\alpha=\varphi(\sigma)$, $\beta=\varphi(\tau)$ (ἤ $\alpha=\varphi(\tau)$, $\beta=\varphi(\sigma)$). Ἄν ἡ φ εἶναι παραγωγίσιμη τότε ἔχομε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\sigma}^{\tau} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τό θεώρημα πού ἀκολουθεῖ θεωρεῖται σάν τό βασικώτερο θεώρημα τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.4.2. Ἄν $f(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$ εἶναι μιά συνεχής συνάρτηση καί G τυχοῦσα ἀρχική της συνάρτηση, τότε

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha).$$

Ἀπόδειξη. Ἀπ'τό θεώρημα 6.4.1 προκύπτει ὅτι ἡ συνάρτηση

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt,\ x\in[\alpha,\beta]$$

πληροῖ τήν $F' = f$. Ἄρα ἡ F εἶναι μιά ἀρχική συνάρτηση τῆς f, ὁπότε σύμφωνα μέ τήν Πρόταση 5.1.1, ἡ ὁποιαδήποτε ἀρχική συνάρτηση G τῆς f θά γράφεται μέ τή μορφή

$$G(x) = F(x) + c\ ,$$

ὅπου c σταθερός πραγματικός ἀριθμός. Θέτοντας $x = \alpha$, βρίσκομε

$$G(\alpha) = F(\alpha) + c = 0+c = c$$

ὁπότε

$$F(x) = G(x) - G(\alpha).$$

Θέτοντας $x = \beta$, παίρνομε τελικά

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = F(\beta) = G(\beta) - G(\alpha),$$

δηλαδή

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha). \ \blacktriangle$$

Παρατήρηση 6.4.2

Ἀπ'τό θεώρημα 6.4.2 φαίνεται πιά καθαρά ἡ σχέση τοῦ ὁρισμένου μέ τό ἀόριστο ὁλοκλήρωμα. Συγκεκριμένα ἡ εὕρεση τοῦ ὁρισμένου ὁλοκληρώματος συνεχοῦς συναρτήσεως ἀνάγεται στόν ὑπολογισμό τοῦ ἀορίστου ὁλοκληρώματος αὐτῆς, ὁπότε καί γράφομε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = F(x)\Big|_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha), \text{ ὅπου } F(x) = \int f(x)dx.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 6.4.2. Ἄν f, g εἶναι δυό παραγωγίσιμες συναρτήσεις ἐπί τοῦ $[\alpha,\beta]$, τότε ἰσχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = f(\beta)g(\beta) - f(\alpha)g(\alpha) - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$$

Ἀπόδειξη. Χρησιμοποιώντας τήν ἰδιότητα παραγωγίσεως γινομένου ἔχομε

$$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = \int_\alpha^\beta ([f(x)g(x)]' - f'(x)g(x))dx =$$

$$= \int_\alpha^\beta [f(x)g(x)]'dx - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx =$$

$$= f(x)g(x)\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx =$$

$$= f(\beta)g(\beta) - f(\alpha)g(\alpha) - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx. \quad \blacktriangle$$

Παρατήρηση 6.4.3. Ὕστερα ἀπ' τά παραπάνω καί ἰδιαίτερα ἀπό τό θεώρημα 6.4.2 φαίνεται πιά καθαρά ὅτι ὅλες οἱ ἰδιότητες τῶν ἀορίστων ὁλοκληρωμάτων ἐφαρμόζονται παράλληλα καί στήν περίπτωση τῶν ὁρισμένων ὁλοκληρωμάτων.

Παράδειγμα 6.4.1

Τώρα εἶναι εὔκολο νά ὑπολογιστῆ τό ὁλοκλήρωμα τοῦ παραδείγματος 6.2.2. Πραγματικά, ἔχομε

$$\int x^2dx = \frac{x^3}{3},$$

ὁπότε

$$\int_\alpha^\beta x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_\alpha^\beta = \frac{\beta^3}{3} - \frac{\alpha^3}{3}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παράδειγμα 6.4.2. (Τύπος τοῦ Wallis).

Ὁ τύπος τοῦ Wallis

$$\pi = \lim_{\nu} \left(\frac{2.4.6\ldots(2\nu)}{1.3.5\ldots(2\nu-1)}\right)^2 \frac{2}{2\nu+1}$$

δίνει τόν ἀριθμό π σάν ὅριο μιᾶς ἀκολουθίας καί μπορεῖ νά προκύψη μετά τόν ὑπολογισμό τοῦ ὁρισμένου ὁλοκληρώματος

$$I_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\nu x\, dx\,, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ I_ν, ἀπ'τόν τύπο 5.3.2 ἔχομε ὅτι

$$S_\nu = \frac{-\sin^{\nu-1} x \cos x}{\nu} + \frac{\nu-1}{\nu} S_{\nu-2}\,, \quad \nu \geq 2$$

ὅπου

$$S_\mu = \int \sin^\mu x\, dx\,.$$

Ἄρα ἰσχύει

$$I_\nu = -\left.\frac{\sin^{\nu-1} x \cos x}{\nu}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\nu-1}{\nu} I_{\nu-2}$$

ἤτοι

$$I_\nu = \frac{\nu-1}{\nu} I_{\nu-2}\,.$$

Ἔτσι, ἄν $\nu = 2\mu$, ἔχομε

$$I_{2\mu} = \frac{2\mu-1}{2\mu} I_{2\mu-2} = \frac{2\mu-1}{2\mu}\,\frac{2\mu-3}{2\mu-4}\cdots\frac{5.3.1}{4.2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{1.3.5\ldots(2\mu-1)}{2.4.6\ldots(2\mu)}\,\frac{\pi}{2}$$

ἐνῶ, ἄν $\nu = 2\mu+1$, ἔχομε

$$I_{2\mu+1} = \frac{2.4.6\ldots(2\mu)}{1.3.5\ldots(2\mu+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx \;\; \frac{2.4.6\ldots(2\mu)}{1.3.5\ldots(2\mu+1)}\,.$$

Ἑπομένως

$$(6.4.1) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\nu x\, dx = \begin{cases} \dfrac{1.3.5\ldots(\nu-1)}{2.4.6\ldots\nu}\,\dfrac{\pi}{2}\,, & \text{ἄν } \nu \text{ εἶναι ἄρτιος,} \\[2ex] \dfrac{2.4.6\ldots\nu-1}{1.3.5\ldots\nu}\,, & \text{ἄν } \nu \text{ εἶναι περιττός.} \end{cases}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τώρα γιά ν'ἀποδείξωμε τόν τύπο τοῦ Wallis παρατηροῦμε ὅτι γιά κάθε x μέ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ἰσχύει

$$\sin^{2\nu+1}x < \sin^{2\nu}x < \sin^{2\nu-1}x.$$

Ἔτσι ἀπ'τό Πόρισμα 6.3.2 ἔχομε

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\nu+1}x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\nu}x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\nu-1}x\,dx$$

ὁπότε ἀπ'τόν τύπο (6.4.1) προκύπτει ὅτι

$$\frac{2.4.6\ldots(2\nu)}{1.3.5\ldots(2\nu+1)} < \frac{1.3.5\ldots(2\nu-1)}{2.4.6\ldots(2\nu)}\,\frac{\pi}{2} < \frac{2.4.6\ldots(2\nu-2)}{1.3.5\ldots(2\nu-1)}$$

ἤ

$$\left(\frac{2.4.6\ldots(2\nu)}{1.3.5\ldots(2\nu-1)}\right)^2 \frac{1}{2\nu+1} < \frac{\pi}{2} < \left(\frac{2.4.6\ldots(2\nu)}{1.3.5\ldots(2\nu-1)}\right)^2 \frac{1}{2\nu}\,.$$

Τώρα θέτοντας

$$A_\nu = \left[\frac{2.4.6\ldots(2\nu)}{1.3.5\ldots(2\nu-1)}\right]^2$$

ἔχομε

$$A_\nu \frac{1}{2\nu+1} < \frac{\pi}{2} < A_\nu \frac{1}{2\nu}\,,$$

μέ

$$A_\nu \frac{1}{2\nu} - A_\nu \frac{1}{2\nu+1} = A_\nu \frac{1}{2\nu(2\nu+1)} < \frac{1}{2\nu}\,\frac{\pi}{2}\,,$$

ὁπότε

$$\lim_\nu \left[A_\nu \frac{1}{2\nu} - A_\nu \frac{1}{2\nu+1}\right] \leq \frac{\pi}{2} \lim_\nu \frac{1}{2\nu} = 0.$$

Ἑπομένως, ἐπειδή ἡ $A_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ εἶναι καί αὔξουσα, ἔχομε

$$\lim_\nu A_\nu \frac{1}{2\nu+1} = \lim_\nu A_\nu \frac{1}{2\nu} = \frac{\pi}{2}\,,$$

δηλαδή

$$\frac{\pi}{2} = \lim_\nu \left[\frac{2.4.6\ldots(2\nu)}{1.3.5\ldots(2\nu-1)}\right]^2 \frac{1}{2\nu+1}\,,$$

ὁπότε παίρνομε τόν τύπο τοῦ Wallis

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\pi = \lim_{\nu} \left[\frac{2.4.6...2\nu}{1.3.5...(2\nu-1)}\right]^2 \frac{2}{2\nu+1} .$$

Στό Κεφάλαιο 3 (θεώρημα 3.9.6) δόθηκε ὁ τύπος τοῦ Taylor μέ ὑπόλοιπο R_ν πού ἐξαρτᾶται ἀπ'τήν τιμή τῆς ν-οστῆς παραγώγου τῆς συναρτήσεως σ'ἕνα σημεῖο. Ἐπειδή ὁ καθορισμός τοῦ σημείου αὐτοῦ, ἄρα καί ὁ ἀκριβής ὑπολογισμός τοῦ R_ν, εἶναι πρακτικά ἀδύνατο νά γίνη, γι'αὐτό δίνομε ἐδῶ μιά ἄλλη ἔκφραση τοῦ R_ν μέ τή βοήθεια ὁρισμένου ὁλοκληρώματος. Συγκεκριμένα ἰσχύει τό παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.4.3. Ὑποθέτομε ὅτι ἡ ν-οστή παράγωγος μιᾶς συναρτήσεως f εἶναι συνεχής στό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Τότε γιά κάθε x καί x_0 τοῦ $[\alpha,\beta]$ ἰσχύει

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0)+...+\frac{(x-x_0)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} f^{(\nu-1)}(x_0) + R_\nu$$

ὅπου τό ὑπόλοιπο R_ν δίνεται ἀπ'τόν τύπο

$$R_\nu = \frac{1}{(\nu-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{\nu-1} f^{(\nu)}(t)dt.$$

Ἀπόδειξη. Ἀπ'τό θεώρημα 6.4.2 ἔχομε ὅτι

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(t)\Big|_{x_0}^{x} = f(x) - f(x_0)$$

καί ἄρα

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t)^{1-1} f'(t)dt .$$

Ἀλλά

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)dt = \int_{x_0}^{x} f'(t)d(-(x-t)) = -f'(t)(x-t)\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} (x-t)f''(t)dt =$$

$$= f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t)f''(t)dt .$$

Ἔτσι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t)^{2-1} f''(t)dt$$

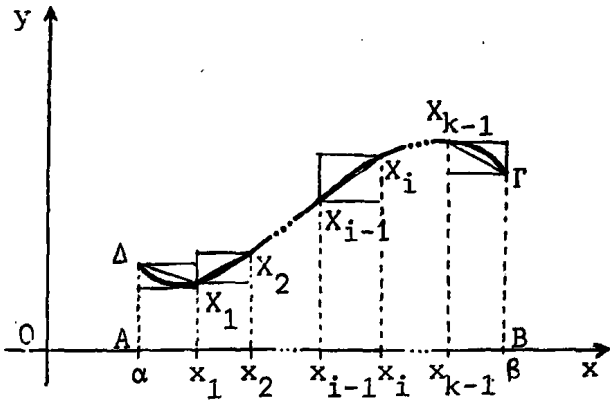
ὁπότε ἐπαναλαμβάνοντας τήν ἴδια μέθοδο ν φορές προκύπτει ἡ ἔκφραση πού δίνει τό θεώρημα. ▲

6.5 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Στήν παράγραφο αὐτή θά ἀσχοληθοῦμε μέ τήν ἐφαρμογή τοῦ ὁρισμένου ὁλοκληρώματος στόν ὑπολογισμό ἐμβαδῶν καί ὄγκων.

Α. ΕΜΒΑΔΟ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΟΥ

Θεωροῦμε τό γράφημα μιᾶς συνεχοῦς συναρτήσεως $f(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ στό ἐπίπεδο (βλ. Σχ. 1). Ἀναζητοῦμε τό ἐμβαδό τοῦ χωρίου ΑΒΓΔ πού περικλείνεται μεταξύ τοῦ γραφήματος τῆς f, τῶν καθέτων στά σημεῖα $(\alpha,0)$, $(\beta,0)$ καί τοῦ X-ἄξονα.



ΣΧΗΜΑ 1

Ὑποθέτομε πρῶτα ὅτι $f(x)\geq 0$ γιά κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Θεωροῦμε τυχοῦσα διαμέριση $\delta=\{x_0,x_1,\ldots,x_k\}$ τοῦ διαστήματος $[\alpha,\beta]$. Οἱ τομές τῶν καθέτων πρός τόν X-ἄξονα στά σημεῖα τῆς διαμερίσεως μέ τό γράφημα τῆς συναρτήσεως ὁρίζουν τίς χορδές $\Delta X_1, X_1X_2, \ldots, X_{i-1}X_i, \ldots, X_{k-1}\Gamma$ τῆς καμπύλης. Ἄν $E_i(\delta)$ εἶναι τό ἐμβαδό τοῦ τραπεζίου μέ βάση $X_{i-1}X_i$, τότε

$$E_i(\delta) = \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}(x_i-x_{i-1})$$

καί ἄρα τό συνολικό ἐμβαδό $E(\delta)$ τῶν σχηματιζομένων τραπεζίων εἶναι

$$E(\delta) = \sum_{i=1}^{k} \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}(x_i-x_{i-1}).$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἀλλά γιά τή συνάρτηση f καί τή διαμέριση δ ἔχουμε

$$\underline{E}_f(\delta) = \sum_{i=1}^{k} m_i(f)(x_i - x_{i-1})$$

καί

$$\overline{E}_f(\delta) = \sum_{i=1}^{k} M_i(f)(x_i - x_{i-1})$$

ὅπου

$$m_i(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

καί

$$M_i(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

γιά κάθε $i = 1,2,\ldots,k$. Ἐπί πλέον εἶναι εὔκολο νά δοῦμε ὅτι

(6.5.1) $$\underline{E}_f(\delta) \leqq E(\delta) \leqq \overline{E}_f(\delta).$$

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι τό ἐμβαδό E πού ζητοῦμε εἶναι (ὅπως ὁρίστηκε ἀπ'τόν Ἀρχιμήδη) τό ὅριο

$$E = \lim E(\delta_\nu)$$

ὅπου δ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι μιά ἀκολουθία διαμερίσεων τοῦ $[\alpha,\beta]$ μέ $\lambda(\delta_\nu) \to 0$. Ἑπομένως ἡ (6.5.1) δίνει ὅτι

$$\underline{E}_f = \lim \underline{E}_f(\delta_\nu) \leqq E \leqq \lim \overline{E}_f(\delta_\nu) = \overline{E}_f .$$

Ἀλλά ἡ f εἶναι ὁλοκληρώσιμη καί ἑπομένως, ἀπ'τόν Ὁρισμό 6.1.1 ἔχομε

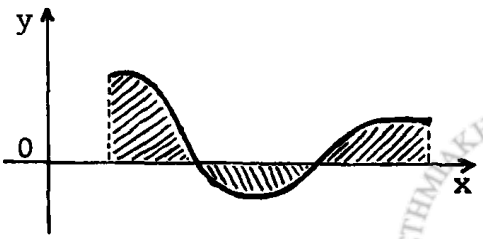
$$\underline{E}_f = E = \overline{E}_f$$

ἤτοι

(6.5.2) $$E = \int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

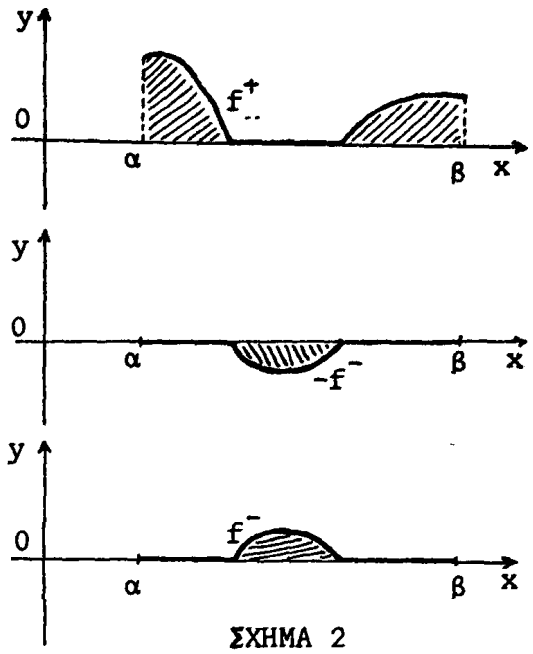
Ὁ τύπος (6.5.2) δίνει τό ἐμβαδό τοῦ χωρίου, ὅταν $f(x) \geqq 0 \quad \forall x \in [\alpha,\beta]$.

Στή γενική περίπτωση, ἡ συνάρτηση f διασπᾶται σέ δυό μή ἀρνητικές συναρτήσεις f^+ καί f^- μέ $f^+(x) = \max\{0, f(x)\}$ καί $f^-(x) = \max\{0, -f(x)\}$ (βλ. Σχ. 2). Παρατηροῦμε δέ ὅτι $f = f^+ - f^-$ καί ἀκόμη ὅτι $|f| = f^+ + f^-$. Ἐξ ἄλλου τό ἐμβαδό πού περικλεύεται ἀπ'τίς εὐθεῖες $x = \alpha$, $x = \beta$,



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἀπ'τήν καμπύλη τῆς f καί τόν X--ἄξονα, εἶναι ἐκεῖνο πού περικλείεται ἀπ'τίς παραπάνω εὐθεῖες ἀπ' τήν καμπύλη τῆς f^+ καί τόν X - ἄξονα, μαζί μ'ἐκεῖνο πού περικλείεται πάλι ἀπ'τίς ἴδιες εὐθεῖες, ἀπ'τήν καμπύλη τῆς $-f^-$ καί τόν X - ἄξονα, ὅπου τό τελευταῖο τοῦτο εἶναι ἴσο μ'ἐκεῖνο πού περικλείεται ἀπ'τίς $x = \alpha$, $x = \beta$, ἀπ'τήν καμπύλη τῆς f^- καί τόν X - ἄξονα. Ἑπομένως τό ἐμβαδό πού ζητοῦμε εἶναι



ΣΧΗΜΑ 2

$$E = \int_\alpha^\beta f^+(x)dx + \int_\alpha^\beta f^-(x)dx = \int_\alpha^\beta [f^+(x) + f^-(x)]dx = \int_\alpha^\beta |f(x)|dx$$

δηλαδή

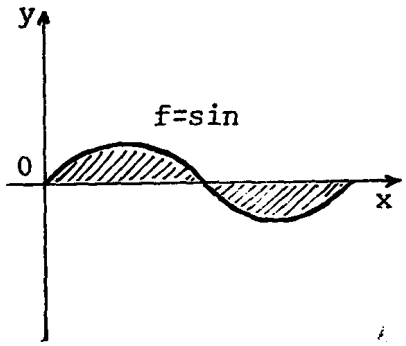
$$E = \int_\alpha^\beta |f(x)|dx.$$

Γιά παράδειγμα, ἄς ὑπολογιστῆ τό ἐμβαδό τοῦ χωρίου τοῦ Σχ. 3. Ἔτσι ἔχουμε

$$E = \int_0^{2\pi} |\sin x|\, dx = \int_0^{\pi} \sin x\, dx + \int_\pi^{2\pi} (-\sin x)dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \sin x\, dx - \int_\pi^{2\pi} \sin x\, dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_\pi^{2\pi} =$$

$$= -\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi = 1+1+1+1 = 4.$$



ΣΧΗΜΑ 3

Στήν περίπτωση πού θέλομε νά βροῦμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἀλλά γιά τή συνάρτηση f καί τή διαμέριση δ ἔχουμε

$$\underline{E}_f(\delta) = \sum_{i=1}^{k} m_i(f)(x_i - x_{i-1})$$

καί

$$\overline{E}_f(\delta) = \sum_{i=1}^{k} M_i(f)(x_i - x_{i-1})$$

ὅπου

$$m_i(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

καί

$$M_i(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

γιά κάθε $i = 1,2,\ldots,k$. Ἐπί πλέον εἶναι εὔκολο νά δοῦμε ὅτι

$$\underline{E}_f(\delta) \leqq E(\delta) \leqq \overline{E}_f(\delta). \tag{6.5.1}$$

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι τό ἐμβαδό E πού ζητοῦμε εἶναι (ὅπως ὁρίστηκε ἀπ'τόν Ἀρχιμήδη) τό ὅριο

$$E = \lim E(\delta_\nu)$$

ὅπου δ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι μιά ἀκολουθία διαμερίσεων τοῦ $[\alpha,\beta]$ μέ $\lambda(\delta_\nu) \to 0$. Ἑπομένως ἡ (6.5.1) δίνει ὅτι

$$\underline{E}_f = \lim \underline{E}_f(\delta_\nu) \leqq E \leqq \lim \overline{E}_f(\delta_\nu) = \overline{E}_f .$$

Ἀλλά ἡ f εἶναι ὁλοκληρώσιμη καί ἑπομένως, ἀπ'τόν Ὁρισμό 6.1.1 ἔχομε

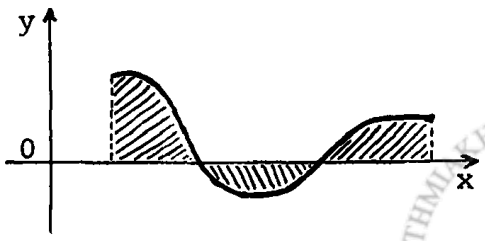
$$\underline{E}_f = E = \overline{E}_f$$

ἤτοι

$$E = \int_\alpha^\beta f(x)dx. \tag{6.5.2}$$

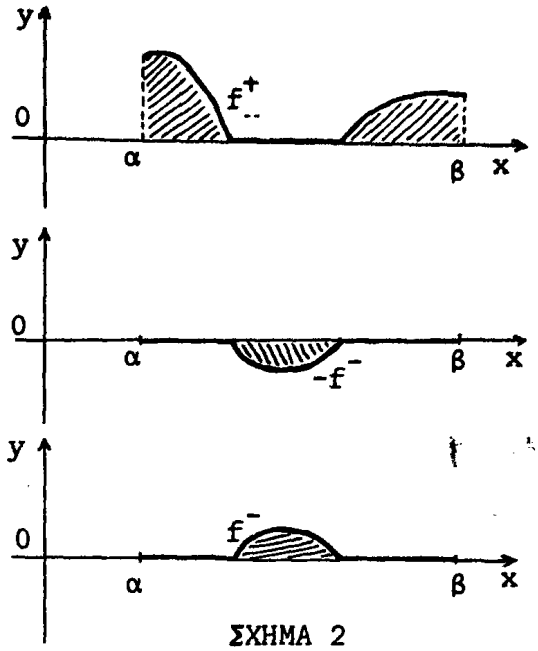
Ὁ τύπος (6.5.2) δίνει τό ἐμβαδό τοῦ χωρίου, ὅταν $f(x) \geqq 0$ $\forall x \in [\alpha,\beta]$.

Στή γενική περίπτωση, ἡ συνάρτηση f διασπᾶται σέ δυό μή ἀρνητικές συναρτήσεις f^+ καί f^- μέ $f^+(x) = \max\{0, f(x)\}$ καί $f^-(x) = \max\{0, -f(x)\}$ (βλ. Σχ. 2). Παρατηροῦμε δέ ὅτι $f = f^+ - f^-$ καί ἀκόμη ὅτι $|f| = f^+ + f^-$. Ἐξ ἄλλου τό ἐμβαδό πού περικλείεται ἀπ'τίς εὐθεῖες $x = \alpha$, $x = \beta$,



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἀπ'τήν καμπύλη τῆς f καί τόν X-ἄξονα, εἶναι ἐκεῖνο πού περικλείεται ἀπ'τίς παραπάνω εὐθεῖες ἀπ' τήν καμπύλη τῆς f^+ καί τόν X-ἄξονα, μαζί μ'ἐκεῖνο πού περικλείεται πάλι ἀπ'τίς ἴδιες εὐθεῖες, ἀπ'τήν καμπύλη τῆς $-f^-$ καί τόν X-ἄξονα, ὅπου τό τελευταῖο τοῦτο εἶναι ἴσο μ'ἐκεῖνο πού περικλείεται ἀπ'τίς $x=\alpha$, $x=\beta$, ἀπ'τήν καμπύλη τῆς f^- καί τόν X-ἄξονα. Ἑπομένως τό ἐμβαδό πού ζητοῦμε εἶναι



ΣΧΗΜΑ 2

$$E=\int_\alpha^\beta f^+(x)dx+\int_\alpha^\beta f^-(x)dx=\int_\alpha^\beta [f^+(x)+f^-(x)]dx=\int_\alpha^\beta |f(x)|dx$$

δηλαδή

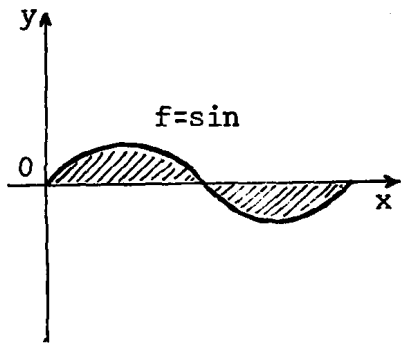
$$E=\int_\alpha^\beta |f(x)|dx.$$

Γιά παράδειγμα, ἄς ὑπολογιστῆ τό ἐμβαδό τοῦ χωρίου τοῦ Σχ. 3. Ἔτσι ἔχουμε

$$E=\int_0^{2\pi}|\sin x|\,dx=\int_0^{\pi}\sin x\,dx+\int_\pi^{2\pi}(-\sin x)dx=$$

$$=\int_0^{\pi}\sin x\,dx-\int_\pi^{2\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_\pi^{2\pi}=$$

$$=-\cos\pi+\cos 0+\cos 2\pi-\cos\pi=1+1+1+1=4.$$



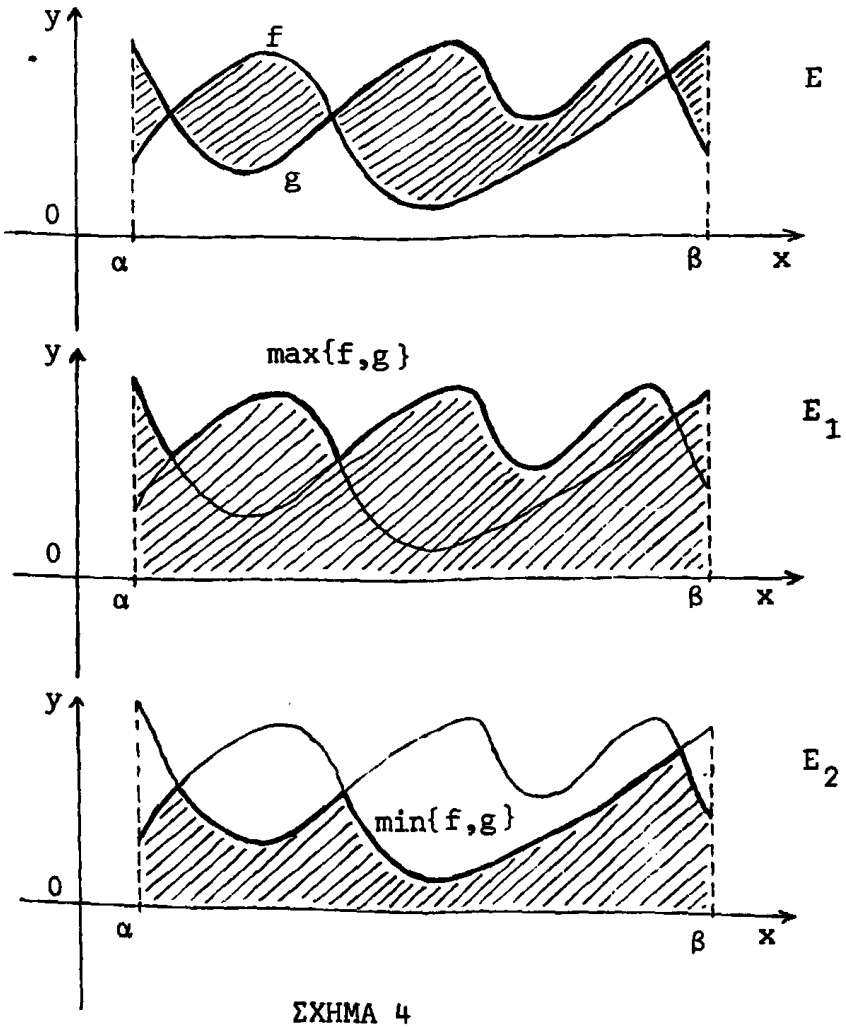
ΣΧΗΜΑ 3

Στήν περίπτωση πού θέλομε νά βροῦμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τό ἐμβαδό κάποιου χωρίου πού περιέχεται μεταξύ δυό καμπύλων, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: θεωροῦμε δυό συνεχεῖς συναρτήσεις $f(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ καί $g(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$. Ἀναζητοῦμε τό ἐμβαδό πού περιέχεται μεταξύ τῶν εὐθειῶν $x=\alpha$, $x=\beta$ καί τῶν καμπυλῶν πού παριστάνουν τά γραφήματα τῶν συναρτήσεων τούτων. Εἶναι φανερό ὅτι τό ἐμβαδό τοῦτο ἰσοῦται μέ τή διαφορά E τοῦ ἐμβαδοῦ E_1 πού περιέχεται μεταξύ τῶν $x=\alpha$, $x=\beta$, τῆς καμπύλης τῆς συναρτήσεως $\max\{f(x), g(x)\}$, $x\in[\alpha,\beta]$ καί τοῦ X-ἄξονα καί τοῦ E_2 πού περιέχεται μεταξύ τῶν $x=\alpha$, $x=\beta$ τῆς καμπύλης τῆς συναρτήσεως $\min\{f(x), g(x)\}$, $x\in[\alpha,\beta]$ καί τοῦ X-ἄξονα (βλ. Σχ. 4). Δηλαδή

$$E = E_1 - E_2.$$



ΣΧΗΜΑ 4

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἀλλά

$$\max\{f(x),g(x)\} - \min\{f(x),g(x)\} = |f(x) - g(x)|$$

καί ἑπομένως

$$E = E_1 - E_2 = \int_\alpha^\beta \max\{f(x),g(x)\}dx - \int_\alpha^\beta \min\{f(x),g(x)\}dx =$$

$$= \int_\alpha^\beta [\max\{f(x),g(x)\} - \min\{f(x),g(x)\}]dx =$$

$$= \int_\alpha^\beta |f(x) - g(x)|dx$$

δηλαδή

$$E = \int_\alpha^\beta |f(x) - g(x)|dx.$$

Παράδειγμα 6.5.1

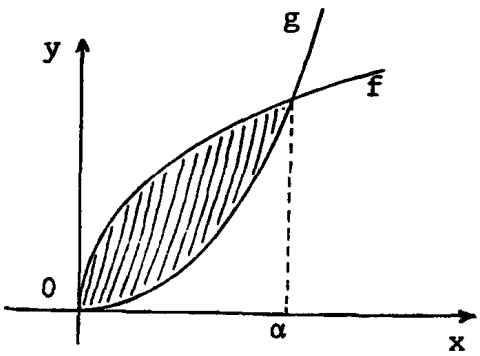
Θά βροῦμε τό ἐμβαδό τοῦ χωρίου πού δείχνεται στό ΣΧ. 5 ὅπου $f(x) = 2\sqrt{x}$ καί $g(x) = \frac{x^2}{2}$. Τό σημεῖο α, ὅπου αὐτές τέμνονται, εἶναι ἐκεῖνο πού πληροῖ τήν ἰσότητα

$$f(\alpha) = g(\alpha)$$

Ἄρα

$$2\sqrt{\alpha} = \frac{\alpha^2}{2}$$

ὁπότε $\alpha = 0$ καί $\alpha = 2\sqrt[3]{2}$. Ἔτσι τό ζητούμενο ἐμβαδό εἶναι



ΣΧΗΜΑ 5

$$\int_0^{2\sqrt[3]{2}} [f(x)-g(x)]dx = \int_0^{2\sqrt[3]{2}} [2\sqrt{x} - \frac{x^2}{2}]dx = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2\sqrt[3]{2}} - \frac{x^3}{6}\Big|_0^{2\sqrt[3]{2}} = \frac{16}{3} - \frac{8}{3} = \frac{8}{3}.$$

Β. ΜΗΚΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Θεωροῦμε μιά καμπύλη στό ἐπίπεδο ἡ ὁποία καθορίζεται παραμετρικά

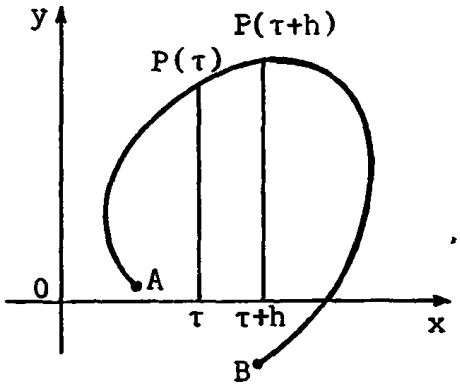
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἀπό δυό συναρτήσεις τῆς μορφῆς

$$x = \varphi(t) \ , \ t \in [\alpha,\beta]$$
$$y = \psi(t) \ , \ t \in [\alpha,\beta]$$

ὅπου φ καί ψ εἶναι συναρτήσεις μέ συνεχεῖς πρῶτες παραγώγους. Θέλομε νά ὑπολογίσωμε τό μῆκος L αὐτῆς.

Θά παριστάνωμε μέ $L(\tau)$, $\tau \in [\alpha,\beta]$ τό μῆκος ἐκείνου τοῦ τμήματος τῆς καμπύλης AB πού ὁρίζεται παραμετρικά ἀπ' τίς συναρτήσεις $\varphi(t)$, $\psi(t)$ γιά $t \in [\alpha,\tau]$ καί ἔστω $P(\tau)$ τό σημεῖο $(\varphi(\tau),\psi(\tau))$ (βλέπε Σχ. 6).



ΣΧΗΜΑ 6

Θεωροῦμε ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο $\tau \in [\alpha,\beta]$ καί ἔστω h τέτοιο ὥστε $\tau+h \in [\alpha,\beta]$. Ἄν $|P(\tau)P(\tau+h)|$ παριστάνει τό μῆκος τῆς χορδῆς μέ ἄκρα τά σημεῖα $P(\tau)$, $P(\tau+h)$ παρατηροῦμε ὅτι

$$|L(\tau+h)-L(\tau)| \geqq |P(\tau)P(\tau+h)|. \tag{6.5.3}$$

Ἐκφράζοντας τό μῆκος $|P(\tau)P(\tau+h)|$ μέ τίς συντεταγμένες τῶν σημείων $P(\tau)$ καί $P(\tau+h)$ ἀπ'τήν (6.5.3) βρίσκομε

$$|L(\tau+h)-L(\tau)| \geqq ([\varphi(\tau+h)-\varphi(\tau)]^2 + [\psi(\tau+h)-\psi(\tau)]^2)^{1/2}$$

καί ἑπομένως

(6.5.4)

$$\left|\frac{L(\tau+h)-L(\tau)}{h}\right| \geqq \left(\left[\frac{\varphi(\tau+h)-\varphi(\tau)}{h}\right]^2 + \left[\frac{\psi(\tau+h)-\psi(\tau)}{h}\right]^2\right)^{1/2}.$$

Ἔστω τώρα $\nu \in \mathbb{N}$ καί $\delta_\nu = \{t_0,t_1,\ldots,t_{\nu-1},t_\nu\}$ μία διαμέρηση τοῦ κλειστοῦ διαστήματος $\bar{\Delta}_\tau^{\tau+h}$ μέ ἄκρα τά σημεῖα τ, τ+h. Τότε ἔχομε

$$\sum_{i=1}^{\nu} |P(t_{i-1})P(t_i)| = \sum_{i=1}^{\nu} ([\varphi(t_{i-1})-\varphi(t_i)]^2+[\psi(t_{i-1})-\psi(t_i)]^2)^{1/2} \tag{6.5.5}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

'Απ'τό θεώρημα 3.9.3 τῆς μέσης τιμῆς τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ τό δεξιά μέλος τῆς (6.5.5) γράφεται ὡς

$$(6.5.6)\qquad \sum_{i=1}^{\nu}([\varphi'(\xi_i)]^2+[\psi'(\eta_i)]^2)^{1/2}(t_i-t_{i-1})$$

ὅπου ξ_i, η_i ἀνήκουν στό $[t_{i-1},t_i]$, $i=1,2,\ldots\nu$.

'Επειδή $(\varphi')^2$ καί $(\psi')^2$ εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις ὑπάρχουν σημεῖα ξ καί η στό $\overline{\Delta}_\tau^{\tau+h}$ ὅπου αὐτές παίρνουν ἀντίστοιχα τή μεγαλύτερη τιμή σ'αὐτό τό διάστημα. Τότε ἀπ'τίς (6.5.5), (6.5.6) ἔχομε

$$(6.5.7)\qquad \sum_{i=1}^{\nu}|P(t_{i-1})P(t_i)|\leqq([\varphi'(\xi)]^2+[\psi'(\eta)]^2)^{1/2}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-t_{i-1})$$

$$=([\varphi'(\xi)]^2+[\psi'(\eta)]^2)^{1/2}|h|.$$

'Αλλά τό μῆκος $|L(\tau+h)-L(\tau)|$ τοῦ τόξου $P(\tau)P(\tau+h)$ ὅπως ὁρίσθηκε ἀπ' τόν 'Αρχιμήδη δίνεται ἀπό τόν τύπο

$$|L(\tau+h)-L(\tau)|=\lim_{\lambda(\delta_\nu)\to 0}\sum_{i=1}^{\nu}|P(t_{i-1})P(t_i)|$$

καί ἄρα ἀπ'τήν (6.5.7) ἔχομε

$$(6.5.8)\qquad \left|\frac{L(\tau+h)-L(\tau)}{h}\right|\leqq([\varphi'(\xi)]^2+[\psi'(\eta)]^2)^{1/2}.$$

'Επειδή ξ, η ἀνήκουν στό $\overline{\Delta}_\tau^{\tau+h}$ συνδιάζοντας τήν (6.5.4) μέ τήν (6.5.8) καί παίρνοντας τά ὅρια ὅταν $h\to 0$ προκύπτει ὅτι

$$(6.5.9)\qquad L'(\tau)=([\varphi'(\tau)]^2+[\psi'(\tau)]^2)^{1/2}.$$

Τώρα, φ', ψ' εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις καί ἄρα ὁλοκληρώσιμες. 'Επομένως ἡ (6.5.9) πού ἰσχύει γιά κάθε $\tau\in[\alpha,\beta]$ δίνει

$$(6.5.10)\qquad L=L(\beta)=\int_\alpha^\beta([\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2)^{1/2}dt$$

διότι $L(\alpha)=0$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ὁ τύπος (6.5.10) δίνει τό μῆκος τῆς καμπύλης πού παριστάνεται ἀπ' τίς δυό παραμετρικές ἐξισώσεις πού δόθηκαν ἀρχικά.

Ἄν φ εἶναι ἡ ταυτοτική συνάρτηση, δηλαδή $x = \varphi(t) = t$, $t \in [\alpha,\beta]$ τότε ἔχομε καί $y = f(t) = f(x)$, $x \in [\alpha,\beta]$, ὁπότε ὁ τύπος (6.5.10) παίρνει τή μορφή

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} (1+[f'(x)]^2)^{\frac{1}{2}}\, dx . \tag{6.5.11}$$

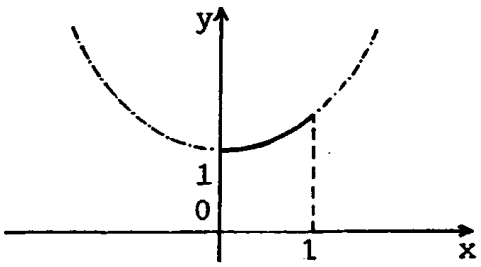
Παράδειγμα 6.5.2

Θά βροῦμε τό μῆκος τῆς καμπύλης πού παριστάνει ἡ συνάρτηση $f(x) = \cosh x$, $x \in [0,1]$. (βλ. ΣΧ. 7). Πρός τοῦτο, ἀπ' τόν τύπο (6.5.11) ἔχομε

$$L = \int_0^1 (1+[\cosh' x]^2)^{\frac{1}{2}}\, dx =$$

$$= \int_0^1 (1+\sinh^2 x)^{\frac{1}{2}}\, dx =$$

$$= \int_0^1 \cosh x\, dx = \sinh x \Big|_0^1 = \sinh 1 = \frac{1}{2e}(e^2-1).$$



ΣΧΗΜΑ 7

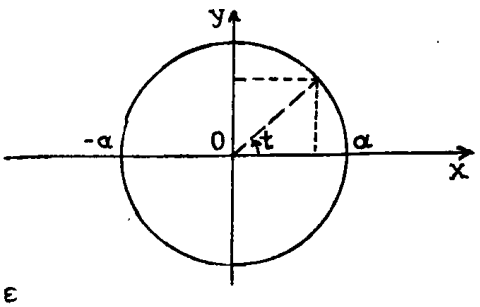
Παράδειγμα 6.5.3

Θά ὑπολογίσωμε τό μῆκος τῆς καμπύλης πού ὁρίζεται ἀπ' τίς συναρτήσεις

$$\varphi(t) = \alpha \cos t,\ t \in [0,2\pi]$$

$$\psi(t) = \alpha \sin t,\ t \in [0,2\pi]$$

πού παριστάνουν τήν περιφέρεια μέ ἀκτίνα α.



ΣΧΗΜΑ 8

Πρός τοῦτο ἀπ' τόν τύπο (6.5.10) ἔχομε

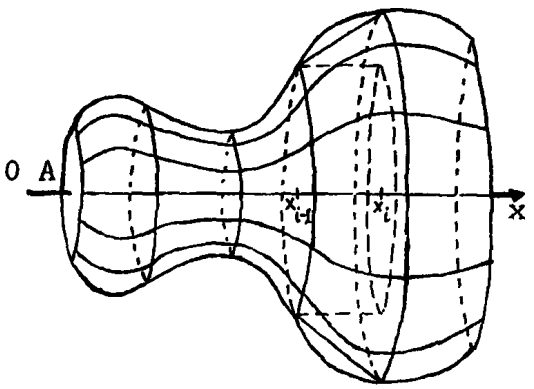
$$L = \int_0^{2\pi} \alpha(\sin^2 t + \cos^2 t)^{\frac{1}{2}}\, dt = \int_0^{2\pi} \alpha\, dt = 2\pi\alpha.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

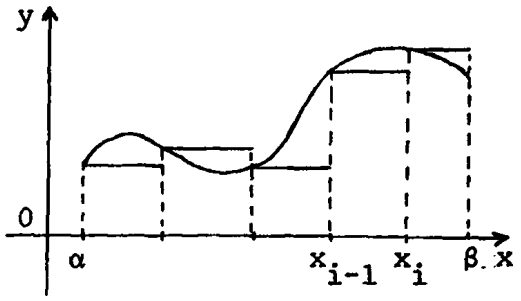
Γ. ΟΓΚΟΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΑΠΟ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Θεωροῦμε μιά μή ἀρνητική συνάρτηση $f(x)$, $x \in [\alpha,\beta]$ καί ὑποθέτουμε ὅτι ἡ καμπύλη πού παριστάνει τό γράφημά της περιστρέφεται περί τόν X-ἄξονα. Ἔτσι σχηματίζεται ἕνα στερεό σάν ἐκεῖνο τοῦ ΣΧ. 9, τό ὁποῖο δημιουργεῖται ἀπ'τό χωρίο τοῦ ΣΧ. 10. Ἀκόμα ὑποθέτομε ὅτι ἡ f εἶναι συνεχής στό $[\alpha,\beta]$.

Θεωροῦμε μιά διαμέριση $\delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ τοῦ $[\alpha,\beta]$. Αὐτή ὁρίζει k τό πλῆθος κυλίνδρους ὅπου ὁ κύλινδρος μέ δείκτη i ἔχει βάση μέ ἀκτίνα



ΣΧΗΜΑ 9



ΣΧΗΜΑ 10

$f(x_{i-1})$ καί ὕψος $x_i - x_{i-1}$. Ἄρα ὁ ὄγκος V_i τοῦ κυλίνδρου αὐτοῦ εἶναι

$$V_i = \pi f^2(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

ὁπότε ὁ ὄγκος $V(\delta)$ ὅλων τῶν κυλίνδρων εἶναι

$$V(\delta) = \sum_{i=1}^{k} V_i = \pi \sum_{i=1}^{k} f^2(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}).$$

Ὁ ὄγκος V στερεοῦ ὁρίζεται νά εἶναι τό ὅριο

$$V = \lim V(\delta_\nu) \tag{6.5.12}$$

ὅπου δ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι μιά ἀκολουθία διαμερίσεων τοῦ $[\alpha,\beta]$ μέ $\lambda(\delta_\nu) \to 0$.

Ἀλλά, ἀπ'τήν ὑπόθεση ἡ συνάρτηση μέ τύπο

$$H(x) = \pi f^2(x)$$

εἶναι συνεχής καί ἑπομένως ὁλοκληρώσιμη. Ἑπομένως, γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει $\eta > 0$, τέτοιο ὥστε γιά κάθε διαμέριση δ τοῦ $[\alpha,\beta]$ μέ $\lambda(\delta) < \eta$ καί

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἐπιλογή ξ αὐτῆς νά ἰσχύη

$$\left|\sum_{i=1}^{k} H(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) - \int_\alpha^\beta H(x)dx\right| < \varepsilon.$$

Ἄρα γιά τήν ἐπιλογή $\xi = \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}\}$ ἔχομε

$$\left|V(\delta) - \int_\alpha^\beta H(x)dx\right| < \varepsilon \text{ , ὅταν } \lambda(\delta) < \eta$$

Ἔτσι ἀπ' τήν (6.5.12)

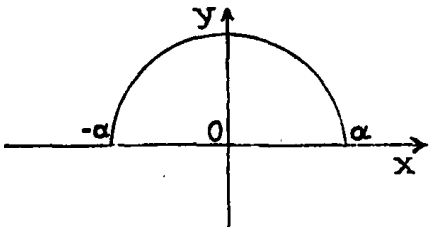
$$V = \pi\int_\alpha^\beta f^2(x)dx \,. \tag{6.5.13}$$

Ὁ τύπος (6.5.13) δίνει τόν ὄγκο τοῦ στερεοῦ πού παράγεται ἀπ' τήν περιστροφή τῆς καμπύλης τῆς μή ἀρνητικῆς καί συνεχοῦς συναρτήσεως $f(x)$ $x\in[\alpha,\beta]$ γύρω ἀπ' τόν Χ-ἄξονα. Τέλος στή γενική περίπτωση πού ἡ f δέν εἶναι κατ' ἀνάγκη μή ἀρνητική παρατηροῦμε ὅτι οἱ καμπῦλες καί τῶν δύο συναρτήσεων f καί $|f|$ ὅταν περιστραφοῦν γύρω ἀπ' τόν Χ-ἄξονα σχηματίζουν τό ἴδιο στερεό. Ἑπομένως ὁ τύπος (6.5.13) ἰσχύει καί στή γενική περίπτωση.

Παράδειγμα 6.5.4

Ἡ σφαῖρα μέ κέντρο τό 0 καί ἀκτίνα $\alpha > 0$ παράγεται ἀπ' τήν περιστροφή τῆς καμπύλης πού παριστάνει τό γράφημα τῆς συναρτήσεως

$$f(x) = \sqrt{\alpha^2-x^2} \text{ , } x\in[-\alpha,\alpha].$$



Ἑπομένως ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας αὐτῆς, σύμφωνα μέ τόν τύπο (6.5.13) εἶναι

$$V = \pi\int_{-\alpha}^{\alpha}(\alpha^2-x^2)dx = \pi\alpha^2\int_{-\alpha}^{\alpha}dx - \pi\int_{-\alpha}^{\alpha}x^2dx =$$

$$= \pi\alpha^2 x\Big|_{-\alpha}^{\alpha} - \pi\frac{x^3}{3}\Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \pi\alpha^2(\alpha+\alpha) - \pi\left(\frac{\alpha^3}{3}+\frac{\alpha^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi\alpha^3.$$

Δ. ΕΜΒΑΔΟ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΑΠΟ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Θεωροῦμε μιά μή ἀρνητική συνάρτηση $f(x), x\in[\alpha,\beta]$ μέ συνεχή παράγωγο καί ὑποθέτομε ὅτι ἡ καμπύλη πού παριστάνει τό γράφημά της περιστρέφεται γύρω ἀπ' τόν Χ-ἄξονα. Ἔτσι σχηματίζεται τό στερεό τοῦ ΣΧ. 9, τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια παράγεται ἀπ' τήν περιστροφή τῆς καμπύλης

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τοῦ ΣΧ. 10.

Θεωροῦμε μιά διαμέριση $\delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ τοῦ $[\alpha,\beta]$. Ἡ διαμέριση αὐτή ὁρίζει k τό πλῆθος κόλουρους κώνους ὅπου ὁ κόλουρος κῶνος μέ δείκτη i ἔχει βάσεις μέ ἀκτῖνες $f(x_{i-1})$ καί $f(x_i)$ καί γενέτειρα τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τό εὐθύγραμμο τμῆμα πού ἔχει ἄκρα $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ καί $(x_i, f(x_i))$. Τό μῆκος τῆς γενέτειρας αὐτῆς εἶναι

$$\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2 + (f(x_i)-f(x_{i-1}))^2} = \sqrt{1+[f'(\hat{\xi}_i)]^2}\,(x_i-x_{i-1})$$

ὅπου $\hat{\xi}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ γιά κάθε $i = 1,2,\ldots,k$. Ἑπομένως τό ἐμβαδό B_i τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τοῦ κόλουρου κώνου αὐτοῦ εἶναι

$$B_i = \pi(f(x_i) + f(x_{i-1}))\sqrt{1+[f'(\hat{\xi}_i)]^2}\,(x_i-x_{i-1})$$

ὁπότε τό ὁλικό ἐμβαδό $B(\delta)$ (πού ἐξαρτᾶται ἀπ' τή διαμέριση δ) ὅλων αὐτῶν τῶν κολούρων κώνων εἶναι

$$(6.5.14)\qquad B(\delta) = \sum_{i=1}^{k} B_i = \pi \sum_{i=1}^{k} (f(x_i) + f(x_{i-1}))\sqrt{1+[f'(\hat{\xi}_i)]^2}\,(x_i-x_{i-1}).$$

Τό ἐμβαδό B, τώρα, τῆς ἐπιφάνειας πού ζητοῦμε ὁρίζεται νά εἶναι τό ὅριο

$$(6.5.15)\qquad B = \lim B(\delta_\nu)$$

ὅπου δ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι μιά ἀκολουθία διαμερίσεων τοῦ $[\alpha,\beta]$ μέ $\lambda(\delta_\nu) \to 0$.

Ἀπ' τήν ὑπόθεση ὅτι ἡ f ἔχει συνεχῆ παράγωγο, ἡ συνάρτηση μέ τύπο

$$A(x) = 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}$$

εἶναι συνεχής στό $[\alpha,\beta]$ καί ἄρα ὁλοκληρώσιμη. Ἔστω

$$M = \max\{\sqrt{1+[f'(x)]^2} : x \in [\alpha,\beta]\}.$$

Θεωροῦμε ἕνα $\varepsilon > 0$. Ἐπειδή ἡ συνάρτηση f εἶναι καί ὁμοιομόρφως συνεχής στό $[\alpha,\beta]$, ὑπάρχει $\eta > 0$ τέτοιο ὥστε γιά κάθε x,y τοῦ $[\alpha,\beta]$ νά ἰσχύη

$$(6.5.16)\qquad |x-y| < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδή ἡ συνάρτηση $A(x)$, $x \in [\alpha,\beta]$ εἶναι ὁλοκληρώσιμη, ἀπ' τόν Ὁρισμό 6.1.1, προκύπτει ὅτι ὑπάρχει $\eta_2 > 0$ τέτοιο ὥστε γιά κάθε διαμέριση $\delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ τοῦ $[\alpha,\beta]$ νά ἰσχύη

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$(6.5.17)\qquad \lambda(\delta) < \eta_2 \Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{k} A(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_\alpha^\beta A(x)dx\right| < \varepsilon$$

γιά κάθε ἐπιλογή ξ τῆς δ.

Τώρα θέτομε

$$\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$$

καί θεωροῦμε μιά διαμέριση δ τοῦ $[\alpha,\beta]$ μέ $\lambda(\delta) < \eta$.

Θέτοντας $\xi_i = \hat{\xi}_i$ στήν (6.5.17) ἔχομε

$$\left|\sum_{i=1}^{k} A(\hat{\xi}_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_\alpha^\beta A(x)dx\right| < \varepsilon.$$

Ἑπομένως

$$\left|B(\delta) - \int_\alpha^\beta A(x)dx\right| \leq \left|B(\delta) - \sum_{i=1}^{k} A(\hat{\xi}_i)(x_i - x_{i-1})\right| +$$

$$+\left|\sum_{i=1}^{k} A(\hat{\xi}_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_\alpha^\beta A(x)dx\right| = \left|\pi \sum_{i=1}^{k} (f(x_i)+f(x_{i-1}))\sqrt{1+[f'(\hat{\xi}_i)]^2}(x_i - x_{i-1}) -\right.$$

$$\left. - 2\pi \sum_{i=1}^{k} f(\hat{\xi}_i)\sqrt{1+[f'(\hat{\xi}_i)]^2}(x_i - x_{i-1})\right| + \varepsilon \leq \pi \sum_{i=1}^{k} (|f(x_i) - f(\hat{\xi}_i)| +$$

$$+|f(x_{i-1}) - f(\hat{\xi}_i)|)\sqrt{1+[f'(\hat{\xi}_i)]^2}(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon \leq \pi \sum_{i=1}^{k} (\varepsilon+\varepsilon)M(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon =$$

$$= \varepsilon(2\pi M(\beta-\alpha) + 1)$$

διότι $|x_i - \hat{\xi}_i| < \eta$ καί $|x_{i-1} - \hat{\xi}_i| < \eta$ καί ἰσχύει ἡ (6.5.16). Ἔτσι ἀποδείχτηκε ὅτι

$$\lambda(\delta) < \eta \Rightarrow \left|B(\delta) - \int_\alpha^\beta A(x)dx\right| < \varepsilon(2\pi M(\beta-\alpha) + 1)$$

καί ἀπ' τήν (6.5.15)

$$B = \lim B(\delta_\nu) = \int_\alpha^\beta A(x)dx = 2\pi \int_\alpha^\beta f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$$

δηλαδή

$$(6.5.18)\qquad B = 2\pi \int_\alpha^\beta f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ὁ τύπος (6.5.18) δίνει τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τοῦ στερεοῦ ὅταν $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [\alpha,\beta]$. Στήν περίπτωση πού ἡ f εἶναι μή θετική παρατηροῦμε ὅτι οἱ καμπύλες καί τῶν δύο συναρτήσεων f καί -f ὅταν περιστραφοῦν γύρω ἀπ'τόν X-ἄξονα σχηματίζουν τό ἴδιο στερεό. Ἑπομένως σ'αὐτή τήν περίπτωση ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια δίνεται ἀπ'τόν τύπο

$$B=-2\pi \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$$

Ὁ τύπος αὐτός καί ὁ παραπάνω τύπος (6.5.18) ἑνοποιοῦνται στόν

$$B=2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}dx \tag{6.5.19}$$

στήν περίπτωση πού ἡ συνάρτηση f ἔχει σταθερό πρόσημο. Ἐπίσης ὅταν ἡ f δέν εἶναι σταθεροῦ προσήμου ἀλλά ἔχει πεπερασμένο πλῆθος ριζῶν τότε ἐργαζόμενοι στά ὑποδιαστήματα πού αὐτές χωρίζουν τό ἀρχικό διάστημα $[\alpha,\beta]$ καταλήγουμε εὔκολα στόν παραπάνω τύπο (6.5.19). Τέλος παρατηροῦμε ὅτι ὁ παραπάνω τύπος ἰσχύει καί στήν γενική περίπτωση ἀλλά ἡ ἀπόδειξή του ξεφεύγει ἀπό τά πλαίσια τοῦ παρόντος βιβλίου.

Παράδειγμα 6.5.5.

Θά ὑπολογίσωμε τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας τῆς σφαίρας μέ ἀκτίνα $\alpha > 0$.

Ἡ σφαῖρα αὐτή θεωρεῖται ὅτι παράγεται ἀπ'τήν περιστροφή τῆς καμπύλης πού παριστάνει τό γράφημα (βλ. ΣΧ. 10) τῆς συναρτήσεως

$$f(x) = \sqrt{\alpha^2-x^2}\ , \quad x\in[-\alpha,\alpha].$$

Ἑπομένως τό ἐμβαδό B τῆς ἐπιφάνειας τῆς σφαίρας εἶναι

$$B = 2\pi \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx = 2\pi \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{\alpha^2-x^2}\ \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}\ dx =$$

$$= 2\pi\alpha \int_{-\alpha}^{\alpha} dx = 2\pi\alpha\ 2\alpha = 4\pi\alpha^2.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

6.6 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά ὑπολογιστοῦν τά παρακάτω ὁρισμένα ὁλοκληρώματα:

α) $\int_0^4 \sqrt{x^2+9}\,dx$ β) $\int_{-1}^1 \sqrt{2-x^2}\,dx$ γ) $\int_3^4 \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}}$

δ) $\int_3^5 x^2\sqrt{x^2-9}\,dx$ ε) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4-3\cos x}$ στ) $\int_0^{\log 2} \frac{dx}{1-\sinh x}$

ζ) $\int_0^{\log 2} \frac{dx}{1+\cosh x}$ η) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}$ θ) $\int_0^1 x^8(1-x^3)^{5/4}dx$

ι) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$ ια) $\int_0^2 \frac{\sqrt{x+1}\,dx}{1+\sqrt{x+2}}$ ιβ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2-\sin x}$

ιγ) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ ιδ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x+\cos 2x}$ ιε) $\int_0^{\log 2} \frac{\sinh 2x\,dx}{1+\cosh x}$.

2. Νά ὑπολογιστοῦν τά παρακάτω ὁρισμένα ὁλοκληρώματα:

α) $\int_0^{\pi} \sin x \sinh x\,dx$ β) $\int_0^1 x^3\cosh x^2 dx$ γ) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3\sin x^2 dx$

δ) $\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{Ar}\cos x\,dx$ ε) $\int_0^1 (x^2+2)e^{-2x}dx$ στ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos 2x\,dx$

ζ) $\int_1^{e^{\pi}} \sin(\log x)\,dx$ η) $\int_0^1 x^8 e^{-x^3}dx$ θ) $\int_1^t x^n\log x\,dx$.

3. Νά ὑπολογιστοῦν τά παρακάτω ὁρισμένα ὁλοκληρώματα:

α) $\int_0^1 x^5(1-x^2)^{2/3}dx$ β) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}$ γ) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x+2}$

δ) $\int_1^2 x^3(x^2-1)^{2/3}dx$ ε) $\int_0^1 x^2e^{-x^3}dx$ στ) $\int_2^3 \log(x-1)dx$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ζ) $\int_0^1 \sqrt{1-x}\,\sqrt{2-x}\,dx$ η) $\int_1^4 \sqrt{x}\,\log x\,dx$ θ) $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx$

ι) $\int_e^{e^2} \frac{\log(\log x)dx}{x\log x}$ ια) $\int_0^1 x^2 \operatorname{Ar\,tg} x\,dx$ ιβ) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{1-x}\,dx$

ιγ) $\int_1^e \frac{dx}{x[1+\log^2 x]}$ ιδ) $\int_1^{\frac{5}{4}} \operatorname{Ar\,cosh} x\,dx$ ιε) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$.

4. Ἔστω $f_0(x)$, $x \geqq 0$ μιά συνεχής συνάρτηση μέ $f_0(x) > 0$ $\forall x \geqq 0$. Ὁρίζομε

$$f_\nu(x) = \int_0^x f_{\nu-1}(t)dt \ , \quad \nu = 1,2,\ldots , \quad x \geqq 0.$$

Ν'ἀποδειχτῆ ὅτι

$$\frac{f_\nu(x)}{x^\nu} > \frac{f_{\nu+1}(x)}{x^{\nu+1}} \qquad \forall \nu \in \mathbb{N} \text{ καί } x > 0$$

καί ἀκόμη

$$f_\nu(x) = \frac{1}{(\nu-1)!}\int_0^x (x-t)^{\nu-1} f_0(t)dt$$

γιά $\nu \geqq 1$ καί $x \geqq 0$.

5. Ἄν f καί g εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις στό $[\alpha,\beta]$ ν'ἀποδειχτῆ ὅτι ἰσχύει ἡ ἀνισότητα τῶν Cauchy-Schwartz

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx\right| \leqq \left(\int_\alpha^\beta f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\alpha^\beta g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} .$$

6. Νά βρεθῆ τό ἐμβαδό τοῦ χωρίου πού περιέχεται μεταξύ τῶν καμπύλων:

α) $y = \log x$, $x = e$, $x = e^{-1}$

β) $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 2x$

γ) $y = 2x - x^3$, $y = x$

δ) $y = \operatorname{Ar\,sin} x$, $y = \operatorname{Ar\,cos} x$, $y = 0$

ε) $y = \frac{\log x}{4x}$, $y = x\log x$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

7. Νά βρεθῆ τό ἐμβαδό τοῦ χωρίου πού περιέχεται μεταξύ τῆς καμπύλης $y = e^{-x}(x^2+3x+1) + e^2$, τοῦ X - ἄξονα καί τῶν εὐθειῶν πού εἶναι παράλληλες πρός τόν Y - ἄξονα καί διέρχονται ἀπ' τά τοπικά ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως.

8. Νά βρεθῆ τό ἐμβαδό τοῦ καρδιοειδοῦς

$$\begin{aligned} x &= \alpha(2\cos t - \cos 2t) \\ y &= \alpha(2\sin t - \sin 2t) \end{aligned}, \quad t \in [0,2\pi]$$

9. Νά βρεθῆ τό μῆκος τῆς καμπύλης πού δίνεται ἀπό τίς παραμετρικές ἐξισώσεις:

α) $x = 2\cos t - \cos 2t$, $y = 2\sin t - \sin 2t$, $t \in [0,2\pi]$

β) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ $(0 \leq t \leq 2)$

γ) $x = \cos t$, $y = \frac{1}{2}\sin^2 t$.

10. Νά βρεθῆ τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας καί ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ πού προκύπτει μέ περιστροφή γύρω ἀπ' τόν X - ἄξονα τῶν καμπύλων:

α) $y = \frac{1}{9}x^3$, $x \in [0,2]$

β) $y = 3\sqrt{x}$, $x \in [0,2]$

γ) $y = e^{-x}$, $x \in [0,1]$.

δ) $y = \sin x$, $x \in [0,\pi]$.

11. Νά ὑπολογιστῆ τό $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{1}{\nu} \sum\limits_{k=1}^{\nu} \sin \frac{k\pi\alpha}{\nu}$.

12. Νά ἀποδειχτῆ ὅτι:

α) $\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{\nu}}{\nu\sqrt{\nu}} \to \frac{2}{3}$

β) $\frac{1}{\nu^{\rho+1}} \sum\limits_{k=1}^{\nu} k^{\rho} \to \frac{1}{\rho+1}$.

γ) $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\nu} \frac{\nu}{\nu^2+k^2} = \frac{\pi}{4}$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

β) $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\nu} \frac{k^p}{\nu^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$, όπου $p > -1$

ε) $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\nu} \frac{1}{\sqrt{\nu^2+k^2}} = \log(1+\sqrt{2})$

στ) $\lim\limits_{\nu\to\infty} \Sigma \frac{\sqrt{\nu+k}}{\nu^{3/2}} = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 7

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ - ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LAPLACE

Οἱ πραγματικές συναρτήσεις τῶν ὁποίων τά ὁλοκληρώματα εἴδαμε μέχρι τώρα εἶναι φραγμένες καί ἔχουν πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα κλειστό διάστημα, δηλαδή ἕνα φραγμένο ὑποσύνολο τῆς πραγματικῆς εὐθείας. Εἶναι ἑπομένως φυσικό νά ἐπεκτείνωμε τόν ὁρισμό τοῦ ὁρισμένου ὁλοκληρώματος καί γιά μή φραγμένες πραγματικές συναρτήσεις καθώς ἐπίσης καί γιά συναρτήσεις πού ὁρίζονται σέ μή φραγμένα ὑποσύνολα τοῦ συνόλου $\mathbb{R}$.

7.1 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΕΠΙ ΑΠΕΡΑΝΤΩΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ

Θεωροῦμε μιά πραγματική συνάρτηση f τέτοια ὥστε γιά κάποιο $T \in \mathbb{R}$ νά ἰσχύη $[T,+\infty) \subseteq \mathcal{D}(f)$ ἤ $(-\infty,T] \subseteq \mathcal{D}(f)$ καί γιά κάθε x οἱ περιορισμοί $f|[T,x]$ ἤ $f|[x,T]$ νά εἶναι ἀντίστοιχα ὁλοκληρώσιμες συναρτήσεις.

ΟΡΙΣΜΟΣ 7.1.1. Ὀνομάζομε "γενικευμένο ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως f ἀπό T ὡς $+\infty$", καί παριστάνομε τοῦτο μέ

$$\int_T^{+\infty} f(x)dx,$$

τό ὅριο

$$\lim_{x\to+\infty} F_1(x),$$

ὅπου F_1 εἶναι ἡ συνάρτηση πού ὁρίζεται ἀπ' τόν τύπο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$F_1(x) = \int_T^x f(t)dt,\ x\in[T,+\infty).$$

Δηλαδή

$$\int_T^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} \int_T^x f(t)dt.$$

Σ'αὐτή τήν περίπτωση λέμε ὅτι τό γενικευμένο ὁλοκλήρωμα $\int_T^{+\infty} f(x)dx$ "συγκλίνει".

Ἐπίσης, ὀνομάζομε "γενικευμένο ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως f ἀπό $-\infty$ ὡς T", καί παριστάνομε τοῦτο μέ

$$\int_{-\infty}^T f(x)dx,$$

τό ὅριο

$$\lim_{x\to-\infty} F_2(x)$$

ὅπου F_2 εἶναι ἡ συνάρτηση πού ὁρίζεται ἀπ'τόν τύπο

$$F_2(x) = \int_x^T f(t)dt,\ x\in(-\infty,T].$$

Δηλαδή

$$\int_{-\infty}^T f(x)dx = \lim_{x\to-\infty} \int_x^T f(t)dt$$

Πάλι, σ'αὐτή τήν περίπτωση λέμε ὅτι τό γενικευμένο ὁλοκλήρωμα $\int_{-\infty}^T f(x)dx$ "συγκλίνει".

Ἄν τό γενικευμένο ὁλοκλήρωμα $\int_T^{+\infty} f(x)dx$ ἤ $\int_{-\infty}^T f(x)dx$ ὁρίζεται ὡς ἕνα ἀπ'τά κατ'ἐκδοχήν σημεῖα τότε λέμε ὅτι αὐτό ὑπάρχει "κατ'ἐκδοχήν"

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καί μάλιστα ὅτι "ἀπειρίζεται θετικά" ἄν εἶναι $+\infty$ καί "ἀπειρίζεται ἀρνητικά" ἄν εἶναι $-\infty$.

Παρατήρηση 7.1.1

Ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ γενικευμένου ὁλοκληρώματος προκύπτουν καί οἱ ἑξῆς ἰδιότητες

$$\int_T^{+\infty} f(x)dx = \int_T^{T_1} f(x)dx + \int_{T_1}^{+\infty} f(x)dx, \text{ γιά κάθε } T_1 \in [T,+\infty)$$

καί

$$\int_{-\infty}^{T} f(x)dx = \int_{-\infty}^{T_1} f(x)dx + \int_{T_1}^{T} f(x)dx, \text{ γιά κάθε } T_1 \in (-\infty,T].$$

Σημείωση.

Τό ὁλοκλήρωμα $\int_T^{+\infty} |f(x)|dx$ ἤ $\int_{-\infty}^{T} |f(x)|dx$ γεωμετρικά παριστάνει ἀκριβῶς τό ἐμβαδό τοῦ "μή φραγμένου χωρίου" πού περικλείεται ἀπ' τόν X-ἄξονα, τήν καμπύλη πού παριστάνει τό γράφημα τῆς f καί τήν εὐθεῖα $x = T$.

Παραδείγματα 7.1.

1) Γιά τή συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $x \in [T,+\infty)$, ὅπου $T > 0$, ἔχομε

$$\int_T^x f(t)dt = \int_T^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} \log\frac{x}{T}, & \text{ἄν } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{x^{\alpha-1}} - \frac{1}{T^{\alpha-1}}\right], & \text{ἄν } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

καί ἑπομένως

$$\int_T^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \text{ἄν } \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{(\alpha-1)T^{\alpha-1}}, & \text{ἄν } \alpha > 1. \end{cases}$$

2) Γιά τή συνάρτηση sin παρατηροῦμε ὅτι γιά κάθε $T \in \mathbb{R}$ ἰσχύει

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\int_T^x \sin t\,dt = \cos T - \cos x$$

καί ἐπειδή τό ὅριο γιά $x\to+\infty$ στό δεύτερο μέλος δέν ὑπάρχει, ἕπεται ὅτι καί τό γενικευμένο ὁλοκλήρωμα τῆς sin ἀπό T ὡς $+\infty$ δέν ὑπάρχει.

Παρόμοια, καί τά γενικευμένα ὁλοκληρώματα $\int_T^{+\infty} \cos x\,dx$, $\int_{-\infty}^T \sin x\,dx$ καί $\int_{-\infty}^T \cos x\,dx$ δέν ὑπάρχουν.

Σχετικά μέ τήν ὕπαρξη τοῦ γενικευμένου ὁλοκληρώματος δίνομε τήν παρακάτω πρόταση:

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.1.1. Ἄν ἡ συνάρτηση f διατηρῆ πρόσημο ἐπί τοῦ διαστήματος $[T,+\infty)$ ἤ $(-\infty,T]$, τότε τό γενικευμένο ὁλοκλήρωμα $\int_T^{+\infty} f(x)dx$ ἤ $\int_{-\infty}^T f(x)dx$, ἀντίστοιχα, ὑπάρχει στό $\mathbb{R}^*$. Ἀκριβέστερα ἰσχύουν:

i) ἄν τό ὁλοκλήρωμα $\int_T^{+\infty} f(x)dx$ δέν εἶναι πραγματικός ἀριθμός, τότε τοῦτο ἀπειρίζεται θετικά ἄν $f(x)\geq 0$ γιά κάθε $x\in[T,+\infty)$ καί ἀρνητικά ἄν $f(x)\leq 0$ γιά κάθε $x\in[T,+\infty)$.

ii) ἄν τό ὁλοκλήρωμα $\int_{-\infty}^T f(x)dx$ δέν εἶναι πραγματικός ἀριθμός, τότε τοῦτο ἀπειρίζεται θετικά ἄν $f(x)\geq 0$ γιά κάθε $x\in(-\infty,T]$ καί ἀρνητικά ἄν $f(x)\leq 0$ γιά κάθε $x\in(-\infty,T]$.

Ἀπόδειξη. Ἐπειδή $\int_x^T f(t)dt = \int_{-T}^{-x} f(-t)dt$ ἔχομε ὅτι

$$\int_{-\infty}^T f(x)dx = \int_{-T}^{+\infty} f(-x)dx$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καί ἐπομένως ἀρκεῖ ν'ἀποδείξωμε μόνο τήν i). Πρός τοῦτο θέτομε

$$F(x) = \int_T^x f(t)dt \ , \ x \in [T,+\infty).$$

Τώρα παρατηροῦμε ὅτι ἡ συνάρτηση $F(x)$, $x \in [T,+\infty)$ εἶναι αὔξουσα ἤ φθίνουσα καθόσον ἡ f εἶναι μή ἀρνητική ἤ μή θετική ἀντίστοιχα. Ἄρα τό

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_T^{+\infty} f(x)dx$$

ὑπάρχει στό $\mathbb{R}^*$ καί μάλιστα ἄν τοῦτο δέν εἶναι πραγματικός ἀριθμός θά εἶναι $+\infty$, ἄν ἡ f εἶναι μή ἀρνητική καί $-\infty$, ἄν ἡ f εἶναι μή θετική. ▲

Ἀκολουθεῖ ἕνα θεώρημα πού συχνά χρησιμοποιεῖται ὡς κριτήριο γιά τή σύγκλιση ἑνός γενικευμένου ὁλοκληρώματος πρός πραγματικό ἀριθμό.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7.1.1. Ἄν $[T,+\infty) \subseteq \mathcal{D}(f)$, τότε ἡ συνθήκη

$$(\forall\ \varepsilon>0)(\exists r>0)(\forall\ x_1,x_2 \text{ στό } [T,+\infty))x_1>r \text{ καί } x_2>r \Rightarrow \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right|<\varepsilon$$

εἶναι ἱκανή καί ἀναγκαία γιά νά συγκλίνη τό $\int_T^{+\infty} f(x)dx$ πρός πραγματικό ἀριθμό, ἐνῶ ἄν $(-\infty,T] \subseteq \mathcal{D}(f)$, τότε ἡ συνθήκη

$$(\forall\ \varepsilon>0)(\exists r>0)(\forall\ x_1,x_2 \text{ στό } (-\infty,T])x_1<-r \text{ καί } x_2<-r \Rightarrow \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right|<\varepsilon$$

εἶναι ἱκανή καί ἀναγκαία γιά νά συγκλίνη τό $\int_{-\infty}^{T} f(x)dx$ πρός πραγματικό ἀριθμό.

Ἀπόδειξη. Ὅπως εἴδαμε καί στήν ἀπόδειξη τῆς Προτάσεως 7.1.1, εἶναι ἀρκετό ν'ἀποδείξωμε μόνο τήν πρώτη περίπτωση τοῦ θεωρήματος.

Ἀπό τόν ὁρισμό προκύπτει ὅτι τό γενικευμένο ὁλοκλήρωμα $\int_T^{+\infty} f(x)dx$ συγκλίνει πρός πραγματικό ἀριθμό, τότε καί μόνο τότε, ἄν ἡ συνάρτηση

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

F μέ $F(x)=\int_T^x f(t)dt$ συγκλίνη γιά $x\to+\infty$ πρός πραγματικό άριθμό, πού, σύμφωνα μέ τό θεώρημα 1.11.4΄, σημαίνει ὅτι

$$(\forall\ \varepsilon>0)(\exists\ r>0)(\forall\ x_1,x_2 \text{ στό } [T,+\infty))x_1>r \text{ καί } x_2>r \Rightarrow |F(x_2)-F(x_1)|<\varepsilon.$$

Ἐπειδή ὅμως

$$F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt,$$

ἡ παραπάνω συνθήκη γράφεται

$$(\forall\ \varepsilon>0)(\exists\ r>0)(\forall\ x_1,x_2 \text{ στό } [T,+\infty))x_1>r \text{ καί } x_2>r \Rightarrow \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right|<\varepsilon. \blacktriangle$$

Παρατήρηση 7.1.2. Ἐπειδή γιά κάθε x_1,x_2 ἔχομε

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| \leq \left|\int_{x_1}^{x_2} |f(x)|dx\right|$$

προκύπτει ὅτι ἄν $\int_T^\infty |f(x)|dx<\infty$ τότε καί τό ὁλοκλήρωμα $\int_T^\infty f(x)dx$ συγκλίνει πρός πραγματικό ἀριθμό.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7.1.2. Ἔστω ὅτι f καί g εἶναι συναρτήσεις μέ πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα διάστημα τῆς μορφῆς $[T,+\infty)$ ἤ $(-\infty,T]$ τέτοιες ὥστε

$$0\leq f(x)\leq g(x) \quad \text{γιά κάθε } x.$$

Τότε ἔχομε:

i) Ἄν τό γενικευμένο ὁλοκλήρωμα $\int_T^{+\infty} g(x)dx$ συγκλίνει, τότε συγκλίνει καί τό $\int_T^{+\infty} f(x)dx$ καί μάλιστα ἰσχύει

$$\int_T^{+\infty} f(x)dx \leq \int_T^{+\infty} g(x)dx.$$

Εἰδικά, ἄν τό $\int_T^{+\infty} g(x)dx$ συγκλίνη πρός πεπερασμένο ἀριθμό,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τότε καί τό $\int_T^{+\infty} f(x)dx$ συγκλίνει πρός πεπερασμένο άριθμό.

ii) Άν τό γενικευμένο ὁλοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{T} g(x)dx$ συγκλίνει, τό τε συγκλίνει καί τό $\int_{-\infty}^{T} f(x)dx$ καί μάλιστα ἰσχύει

$$\int_{-\infty}^{T} f(x)dx \leq \int_{-\infty}^{T} g(x)dx.$$

Εἰδικά, ἄν τό $\int_{-\infty}^{T} g(x)dx$ συγκλίνη πρός πεπερασμένο άριθμό, τότε καί τό $\int_{-\infty}^{T} f(x)dx$ συγκλίνει πρός πεπερασμένο άριθμό.

Ἀπόδειξη. Πάλι, ὅπως εἴδαμε στήν ἀπόδειξη τῆς Προτάσεως 7.1.1, ἀρκεῖ ν'ἀποδείξωμε μόνο τήν περίπτωση i).

Πρός τοῦτο, παρατηροῦμε ὅτι ἐπειδή $g(x) \geq 0$ γιά κάθε $x \in [T,+\infty)$, θά ἰσχύη καί

$$\int_T^{x} g(t)dt \leq \int_T^{+\infty} g(t)dt.$$

Ἐπομένως γιά κάθε $x \in [T,\infty)$ ἔχομε

$$F(x) = \int_T^{x} f(t)dt \leq \int_T^{x} g(t)dt \leq \int_T^{+\infty} g(t)dt$$

δηλαδή

$$F(x) \leq \int_T^{+\infty} g(t)dt, \text{ γιά κάθε } x \in [T,+\infty).$$

Ἀλλά ἡ F εἶναι αὔξουσα, ἀφοῦ $f(x) \geq 0$ καί ἔτσι ὑπάρχει τό $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ γιά τό ὁποῖο θά ἰσχύη καί

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) \leq \int_T^{+\infty} g(t)dt$$

ήτοι

$$\int_T^{+\infty} f(x)dx \leq \int_T^{+\infty} g(x)dx. \blacktriangle$$

7.2 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΥ ΔΕΝ ΟΡΙΖΟΝΤΑΙ ΣΕ ΕΝΑ ΣΗΜΕΙΟ

Θεωρούμε μιά πραγματική συνάρτηση f ὁρισμένη τουλάχιστον σ'ἕνα διάστημα τῆς μορφῆς $[\alpha,\beta)$ ἤ $(\alpha,\beta]$ τέτοια ὥστε οἱ περιορισμοί $f|[\alpha,x]$ γιά κάθε $x\in[\alpha,\beta)$, ἤ $f|[x,\beta]$ γιά κάθε $x\in(\alpha,\beta]$, ἀντίστοιχα, νά εἶναι ὁλοκληρώσιμες συναρτήσεις.

ΟΡΙΣΜΟΣ 7.2.1. Ὀνομάζομε "γενικευμένο ὁλοκλήρωμα τῆς $f(x)$, $x\in[\alpha,\beta)$ ἀπό α ὡς β", καί παριστάνομε τοῦτο μέ

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

τό ὅριο

$$\lim_{x\to\beta-0} F_1(x)$$

ὅπου F_1 εἶναι ἡ συνάρτηση πού ὁρίζεται ἀπ'τόν τύπο

$$F_1(x) = \int_\alpha^x f(t)dt,\ x\in[\alpha,\beta).$$

Δηλαδή

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{x\to\beta-0} \int_\alpha^x f(t)dt.$$

Σ'αὐτή τήν περίπτωση λέμε ὅτι τό γενικευμένο ὁλοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ "συγκλίνει".

Ἐπίσης, ὀνομάζομε "γενικευμένο ὁλοκλήρωμα τῆς $f(x)$, $x\in(\alpha,\beta]$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἀπό α ὡς β", καί παριστάνομε τοῦτο μέ

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

τό ὅριο

$$\lim_{x\to\alpha+0} F_2(x)$$

ὅπου F_2 εἶναι ἡ συνάρτηση πού ὁρίζεται ἀπ'τόν τύπο

$$F_2(x) = \int_{x}^{\beta} f(t)dt,\ x\in(\alpha,\beta].$$

Δηλαδή

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{x\to\alpha+0} \int_{x}^{\beta} f(t)dt.$$

Πάλι, σ'αὐτή τήν περίπτωση λέμε ὅτι τό γενικευμένο ὁλοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ "συγκλίνει".

Συνδυάζοντας τίς δυό παραπάνω περιπτώσεις δίνομε καί τόν ἑξῆς ὁρισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ 7.2.2. "Γενικευμένο ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως h(x), $x\in(\alpha,\beta)$" γιά τήν ὁποία τά γενικευμένα ὁλοκληρώματα $\int_{\alpha}^{\gamma} h(x)dx$ καί $\int_{\gamma}^{\beta} h(x)dx$ συγκλίνουν γιά κάθε $\gamma\in(\alpha,\beta)$, θά ὀνομάζωμε τό ἄθροισμα τῶν δύο τούτων ὁλοκληρωμάτων. Δηλαδή

$$\int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} h(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} h(x)dx.$$

Παραδείγματα 7.2.1.

1) Γιά τή συνάρτηση $\frac{1}{1-x}$, $x\in[0,1)$ ἔχομε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t} = \log \frac{1}{1-x}$$

καί ἑπομένως

$$\int_0^1 \frac{dt}{1-t} = \lim_{x\to 1-0} \log \frac{1}{1-x} = +\infty.$$

2) Γιά τή συνάρτηση $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x\in(0,1]$ ἔχομε

$$\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2-2\sqrt{x}$$

καί ἑπομένως

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{x\to 0+0} (2-2\sqrt{x}) = 2.$$

3) Θεωροῦμε τή συνάρτηση $\frac{1+x}{1+x^2}$, $x\in(-\infty,+\infty)$ καί παρατηροῦμε ὅτι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx + \int_0^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx .$$

Ἀλλά

$$\frac{1+x}{1+x^2} \geqq \frac{1}{x} \quad \text{γιά κάθε} \quad x\in[1,+\infty)$$

καί ἑπομένως, σύμφωνα μέ τό θεώρημα 7.1.2, ἔχομε

$$\int_0^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx \geqq \int_1^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx \geqq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty$$

δηλαδή τό $\int_0^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$ δέν συγκλίνει πρός πραγματικό ἀριθμό. Τό ἴδιο συμβαίνει καί μέ τό $\int_{-\infty}^{0} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$ πού σημαίνει ὅτι τό $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$ δέν συγκλίνει πρός πραγματικό ἀριθμό. Παρατηροῦμε, ὅμως, ὅτι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\int_{-x}^{x} \frac{1+t}{1+t^2}\,dt = \int_{-x}^{0} \frac{1+t}{1+t^2}\,dt + \int_{0}^{x} \frac{1+t}{1+t^2}\,dt = \int_{0}^{x} \frac{1-t}{1+t^2}\,dt + \int_{0}^{x} \frac{1+t}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int_{0}^{x} \frac{2dt}{1+t^2} = 2\,\mathrm{Artg}\,x$$

καί ἑπομένως

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} \frac{1+t}{1+t^2}\,dt = 2\,\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Τήν τιμή αὐτή τήν ὀνομάζομε "πρωτεύουσα τιμή κατά Cauchy" τοῦ ὁλοκληρώματος $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$.

Γενικά, ἄν h εἶναι μιά πραγματική συνάρτηση ὁρισμένη στό σύνολο $\mathbb{R}$, ὀνομάζομε "πρωτεύουσα τιμή κατά Cauchy (Cauchy Principal Value) τοῦ $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx$" καί τήν παριστάνομε μέ

$$\text{C.P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx$$

τό ὅριο

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} h(t)dt$$

ἄν τοῦτο ὑπάρχη. Δηλαδή

$$\text{C.P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx = \lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} h(t)dt.$$

Ἔτσι, γιά παράδειγμα, ἔχομε

$$\text{C.P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} t\,dt = \lim_{x\to+\infty} 0 = 0,$$

ἐνῶ τό

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δέν ὑπάρχει, πού σημαίνει ὅτι εἶναι δυνατόν γιά μιά συνάρτηση h ἡ πρωτεύουσα τιμή κατά Cauchy νά εἶναι πραγματικός ἀριθμός, ἐνῶ τό $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx$ νά μήν ὑπάρχη στό $\mathbb{R}^*$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.2.1. Ἄν $h(x)$, $x \in \mathbb{R}$ εἶναι μιά πραγματική συνάρτηση καί $A \in \mathbb{R}$, τότε ἰσχύει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx = A \Rightarrow \text{C.P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx = A.$$

Ἀπόδειξη. Ἐξ ὁρισμοῦ τῆς ὑπάρξεως τοῦ ὁλοκληρώματος $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx$ προκύπτει ὅτι καί τά ὁλοκληρώματα $\int_{-\infty}^{0} h(x)dx$ καί $\int_{0}^{+\infty} h(x)dx$ ὑπάρχουν. Ἀλλά τότε ἔχομε

$$A = \int_{-\infty}^{0} h(x)dx + \int_{0}^{+\infty} h(x)dx = \lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{0} h(t)dt + \lim_{x\to+\infty} \int_{0}^{x} h(t)dt =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\int_{-x}^{0} h(t)dt + \int_{0}^{x} h(t)dt\right] = \lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} h(t)dt =$$

$$= \text{C.P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt. \quad \blacktriangle$$

Ἕνα θεώρημα ἀνάλογο πρός τό θεώρημα 7.1.1 εἶναι καί τό ἑξῆς:

ΘΕΩΡΗΜΑ 7.2.1. Ἄν $[\alpha,\beta) \subseteq \mathcal{D}(f)$, τότε ἡ συνθήκη

$$(\forall\, \varepsilon>0)(\exists\, \delta>0)(\forall\, x_1,x_2 \text{ στό } [\alpha,\beta))|x_1-\beta|<\delta \text{ καί } |x_2-\beta|<\delta \Rightarrow \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right|<\varepsilon$$

εἶναι ἱκανή καί ἀναγκαία γιά νά συγκλίνη τό $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ πρός πραγματικό ἀριθμό, ἐνῶ ἄν $(\alpha,\beta] \subseteq \mathcal{D}(f)$, τότε ἡ συνθήκη

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$(\forall\ \varepsilon>0)(\exists\ \delta>0)(\forall\ x_1,x_2 \text{ στό } (\alpha,\beta])|x_1-\alpha|<\delta \text{ καί } |x_2-\alpha|<\delta \Rightarrow \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right|<\varepsilon$$

εἶναι ἱκανή καί ἀναγκαία γιά νά συγκλίνη τό $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ πρός πραγματικό ἀριθμό.

Ἀπόδειξη. Τό γενικευμένο ὁλοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ τῆς συναρτήσεως $f(x)$, $x\in[\alpha,\beta)$ συγκλίνει πρός πραγματικό ἀριθμό, τότε καί μόνον τότε, ἄν ἡ συνάρτηση F μέ $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$, $x\in[\alpha,\beta)$ συγκλίνη γιά $x\to\beta-0$ πρός πραγματικό ἀριθμό. Τοῦτο σύμφωνα μέ τό θεώρημα 1.11.4, σημαίνει ὅτι

$$(\forall\ \varepsilon>0)(\exists\ \delta>0)(\forall\ x_1,x_2 \text{ στό } [\alpha,\beta))|x_1-\beta|<\delta \text{ καί } |x_2-\beta|<\delta \Rightarrow |F(x_2)-F(x_1)|<\varepsilon.$$

Ἀλλά

$$F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$$

καί ἑπομένως ἡ παραπάνω συνθήκη γράφεται

$$(\forall\ \varepsilon>0)(\exists\ \delta>0)(\forall\ x_1,x_2 \text{ στό } [\alpha,\beta))|x_1-\beta|<\delta \text{ καί } |x_2-\beta|<\delta \Rightarrow \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right|<\varepsilon.$$

Ἡ ἄλλη περίπτωση, τώρα, προκύπτει ἐντελῶς ἀνάλογα. ▲

Ἐξ ἄλλου, σχετικά μέ τήν ἀριθμητική τῶν ὁλοκληρωμάτων τῆς μορφῆς αὐτῆς, ἰσχύει τό παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 7.2.2. Θεωροῦμε δυό συναρτήσεις f καί g ὁρισμένες τουλάχιστον σ'ἕνα διάστημα τῆς μορφῆς $[\alpha,\beta)$, ὅπου β μπορεῖ νά εἶναι καί τό $+\infty$, ἤ $(\alpha,\beta]$, ὅπου α μπορεῖ νά εἶναι καί τό $-\infty$. Ἄν τά ὁλοκληρώματα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ καί $\int_\alpha^\beta g(x)dx$ συγκλίνουν στό

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$\mathbb{R}^*$, τότε γιά κάθε c,d στό $\mathbb{R}$ τό ὁλοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta [cf(x)+dg(x)]dx$ ἐπίσης συγκλίνει καί μάλιστα ἰσχύει

$$\int_\alpha^\beta [cf(x)+dg(x)]dx = c\int_\alpha^\beta f(x)dx + d\int_\alpha^\beta g(x)dx$$

μέ τήν προϋπόθεση ὅτι οἱ πράξεις πού σημειώνονται εἶναι ἐπιτρεπτές. Εἰδικά, γιά $c=d=1$ ἔχομε

$$\int_\alpha^\beta [f(x)+g(x)]dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx$$

καί γιά $c=\lambda$, $d=0$

$$\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

Ἀπόδειξη. Ὑποθέτομε πρῶτα ὅτι $[\alpha,\beta)\subseteq \mathcal{D}(f)\cap\mathcal{D}(g)$. Τότε γιά τυχόν $x\in[\alpha,\beta)$ ἔχομε

$$\int_\alpha^x [cf(t)+dg(t)]dt = c\int_\alpha^x f(t)dt + d\int_\alpha^x g(t)dt$$

ὁπότε παίρνοντας τό ὅριο γιά $x\to\beta-0$ ἔχομε

$$\int_\alpha^\beta [cf(t)+dg(t)]dt = c\int_\alpha^\beta f(t)dt + d\int_\alpha^\beta g(t)dt.$$

Ἀνάλογα προκύπτει καί ἡ ἄλλη περίπτωση. ▲

Ὕστερα ἀπό τά παραπάνω φαίνεται ὅτι ὅλες οἱ ἰδιότητες τῶν ἁπλῶν ὁλοκληρωμάτων μεταφέρονται καί ἐδῶ ἐφαρμόζοντας μόνο τίς ἰδιότητες τῶν ὁρίων τῶν συναρτήσεων. Π.χ. εὔκολα μποροῦμε νά δοῦμε ὅτι

$$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = \lim_{x\to\beta-0} f(x)g(x) - f(\alpha)g(\alpha) - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$$

ἄν $[\alpha,\beta)\subseteq \mathcal{D}(f)\cap\mathcal{D}(g)$ καί

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = f(\beta)g(\beta) - \lim_{x\to\alpha+0} f(x)g(x) - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$$

ἄν $(\alpha,\beta]\subseteq \mathcal{D}(f)\cap\mathcal{D}(g)$, μέ τήν προϋπόθεση, πάλι, ὅτι οἱ πράξεις πού σημειώνονται εἶναι ἐπιτρεπτές.

Παραδείγματα 7.2.2

1) $$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^\nu} = \frac{1.3\ldots(2\nu-3)}{2.4\ldots(2\nu-2)}\,\frac{\pi}{2}\,.$$

Πραγματικά, θέτοντας $x = \operatorname{tg} t$ παρατηροῦμε ὅτι $0 = \operatorname{tg} 0$ καί $+\infty = \lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} t$. Ἑπομένως θά ἔχωμε

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^\nu} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\nu-2} t\, dt = \frac{1.3\ldots(2\nu-3)}{2.4\ldots(2\nu-2)}\,\frac{\pi}{2}$$

ὅπου ἐφαρμόσαμε τόν τύπο 5.3.3.

2) $$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$ (ὁλοκλήρωμα τοῦ Poisson).

Πρῶτα παρατηροῦμε ὅτι γιά $x = z\sqrt{\nu}$, ὅπου $\nu\in\mathbb{N}$, προκύπτει

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\nu}\int_0^{+\infty} e^{-\nu z^2} dz. \tag{7.2.1}$$

Ἐξ ἄλλου γιά κάθε x ἰσχύει

$$1-x^2 \leqq e^{-x^2} \leqq \frac{1}{1+x^2}$$

πού προκύπτει ἀπ' τή γνωστή ἀνισότητα $e^t \geqq 1+t$ θέτοντας διαδοχικά $t = -x^2$ καί $t = x^2$. Ἔτσι ἔχομε

$$(1-x^2)^\nu \leqq e^{-\nu x^2} \leqq \frac{1}{(1+x^2)^\nu} \quad \text{γιά κάθε } x\in[0,1],$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἀπό ὅπου παίρνομε ὅτι

$$(7.2.2)\qquad \int_0^1 (1-x^2)^\nu dx \leq \int_0^1 e^{-\nu x^2} dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-\nu x^2} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^\nu}\ .$$

Ἀλλά γιά $x = \sin t$ τό πρῶτο ὁλοκλήρωμα δίνει

$$\int_0^1 (1-x^2)^\nu dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\nu+1} x dx = \frac{2.4\ldots(2\nu)}{3.5\ldots(2\nu+1)}$$

ὅπου χρησιμοποιήθηκε ὁ τύπος 5.3.3. Ἔτσι σέ συνδυασμό μέ τό προηγούμενο παράδειγμα ἡ (7.2.2) γίνεται

$$\sqrt{\nu}\ \frac{2.4\ldots(2\nu)}{3.5\ldots(2\nu+1)} \leq \int_0^\infty e^{-x^2} dx \leq \frac{1.3\ldots(2\nu-3)}{2.4\ldots(2\nu-2)}\ \frac{\pi}{2}\ \sqrt{\nu}.$$

Θέτοντας, ὅμως,

$$\gamma_{\nu+1} = \frac{1}{2\sqrt{\nu}}\ \frac{2.4\ldots(2\nu)}{1.3\ldots(2\nu-1)}$$

ἡ παραπάνω διπλή ἀνισότητα γράφεται

$$\gamma_{\nu+1}\ \frac{2\nu}{2\nu+1} \leq \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \frac{1}{\gamma_{\nu+1}}\ \frac{2\nu}{2\nu-1}\ \frac{\pi}{4}\ .$$

Ἀλλά, σύμφωνα μέ τόν τύπο τοῦ Wallis ἔχομε

$$\lim \gamma_{\nu+1} \cdot \frac{2\nu}{2\nu+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ 1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

καί

$$\lim \frac{1}{\gamma_{\nu+1}} \cdot \frac{2\nu}{2\nu-1}\ \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\ 1\ \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

καί ἑπομένως

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ .$$

3) Ἡ Γάμμα συνάρτηση $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt,\ x > 0.$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θά μελετήσωμε τό ὁλοκλήρωμα τοῦτο ἐξετάζοντας ξεχωριστά τά ὁλοκληρώματα

$$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt \quad \text{καί} \quad \int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

Τό δεύτερο ὁλοκλήρωμα εἶναι γενικευμένο στό $+\infty$ καί θά ἀποδείξωμε ὅτι συγκλίνει πρός πραγματικό ἀριθμό. Πραγματικά· πρῶτα παρατηροῦμε ὅτι

$$t^{x-1}e^{-t} = \frac{t^{x+1}}{e^t}\frac{1}{t^2}$$

καί ἀκόμα ὅτι

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = 0.$$

Ἄρα ὑπάρχει $t_0 \geqq 1$ μέ

$$\frac{t^{x+1}}{e^t} \leqq 1, \quad \text{γιά κάθε} \quad t \geqq t_0$$

ὁπότε καί

$$t^{x-1}e^{-t} \leqq \frac{1}{t^2}, \quad \text{γιά κάθε} \quad t \geqq t_0.$$

Ἀλλά

$$\int_{t_0}^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \leqq \int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{t_0}$$

καί ἑπομένως τό $\int_{t_0}^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ ὑπάρχει καί εἶναι πραγματικός ἀριθμός. Τοῦτο ὅμως συνεπάγεται ὅτι καί τό $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ ὑπάρχει καί εἶναι πραγματικός ἀριθμός, ἀφοῦ ἰσχύει

$$\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = \int_1^{t_0} t^{x-1}e^{-t}dt + \int_{t_0}^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt .$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τό πρῶτο ὁλοκλήρωμα $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ εἶναι γιά $x \geq 1$ ἕνα συνηθισμένο κατά Riemann ὁλοκλήρωμα, ἐνῶ γιά $x < 1$ εἶναι γενικευμένο καί μάλιστα συγκλίνει πρός πραγματικό ἀριθμό.

Πραγματικά· παρατηροῦμε ὅτι

$$0 < t^{x-1}e^{-t} < t^{x-1}, \text{ γιά κάθε } t\in(0,1].$$

Ἀλλά

$$\int_0^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{x}$$

καί ἄρα καί τό $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ συγκλίνει πρός πραγματικό ἀριθμό. Ἔτσι γιά κάθε $x > 0$ τό ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

συγκλίνει πρός πραγματικό ἀριθμό καί ὁρίζει μιά πραγματική συνάρτηση τοῦ x τήν ὁποία παριστάνομε μέ Γ καί τήν ὀνομάζομε Γάμμα συνάρτηση, ἤτοι

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt, \quad x > 0.$$

Θ'ἀποδείξωμε τώρα ὅτι γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ἰσχύει

$$\Gamma(\nu) = (\nu-1)! \tag{7.2.3}$$

Πρός τοῦτο παρατηροῦμε ὅτι γιά $x > 1$ ἰσχύει

$$\Gamma(x) = -\int_0^{+\infty} t^{x-1}(e^{-t})'dt = -[t^{x-1}e^{-t}]_0^{+\infty} + (x-1)\int_0^{+\infty} t^{x-2}e^{-t}dt = (x-1)\Gamma(x-1)$$

ἀπ'ὅπου μέ διαδοχική ἐφαρμογή παίρνομε

$$\Gamma(\nu) = (\nu-1)!\Gamma(1)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τό ὁποῖο καί δίνει τήν (7.2.3), ἀφοῦ

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$$

Ἀκόμα παρατηροῦμε ὅτι ἡ τιμή τοῦ ὁλοκληρώματος τοῦ Poisson εἶναι τό μισό τῆς τιμῆς τῆς Γάμμα συναρτήσεως γιά $x = \frac{1}{2}$, ἐπειδή γιά $t = z^2$ ἔχομε

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz = 2\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

Τέλος, μιά ἄλλη συνάρτηση πού ὁρίζεται ἐπίσης μέ (γενικευμένο) ὁλοκλήρωμα εἶναι ἡ Βῆτα συνάρτηση ἡ ὁποία καί ἔχει στενή σχέση μέ τή Γάμμα συνάρτηση.

4) Ἡ Βῆτα συνάρτηση $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt,\ x > 0,\ y > 0.$

Τό ὁλοκλήρωμα τοῦτο εἶναι γενικευμένο γιά $x < 1$ ἤ $y < 1$ ἀλλά πάντα συγκλίνει πρός πραγματικό ἀριθμό, ἀφοῦ ἰσχύει

$$0 < \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt + \int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}\,\frac{(1-t)^y}{1-t}\, dt + \int_{1/2}^1 \frac{t^x}{t}\,(1-t)^{y-1} dt <$$

$$< \int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}\cdot 2\cdot dt + \int_{1/2}^{t} 2\cdot(1-t)^{y-1} dt =$$

$$= \frac{2}{x2^x} + \frac{2}{y2^y}.$$

Βέβαια, ἡ συνάρτηση αὐτή εἶναι συνάρτηση δύο μεταβλητῶν καί ἡ μελέτη της ξεφεύγει ἀπό τά πλαίσια τοῦ βιβλίου τούτου. Πληροφοριακά ἀναφέρομε μόνο ὅτι αὐτή συνδέεται μέ τή Γάμμα συνάρτηση μέ τόν τύπο

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὁ ὁποῖος δέν μπορεῖ ν'ἀποδειχθῆ μέ τίς μέχρι τώρα γνώσεις ἀλλά μέ τή χρήση διπλῶν ὁλοκληρωμάτων.

7.3 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΤΟΥ LAPLACE

"Αν f εἶναι μιά πραγματική συνάρτηση ὁρισμένη στό διάστημα $[0,+\infty)$, τότε μέ τόν τύπο

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

ὁρίζεται μιά συνάρτηση F μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο ὅλων τῶν s γιά τά ὁποῖα τό γενικευμένο τοῦτο ὁλοκλήρωμα συγκλίνει πρός πραγματικό ἀριθμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 7.3.1. Ὀνομάζομε "μετασχηματισμό ἤ τελεστή κατά Laplace" μιά ἀπεικόνιση $\mathcal{L}$ ἡ ὁποία στήν συνάρτηση f ἀντιστοιχεῖ τήν F πού βρίσκεται μέ τόν παραπάνω τύπο. Τότε ἔχομε

$$F = \mathcal{L}\{f\}, \text{ ἤ ἀναλυτικά } F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

καί πολλές φορές ἀντί τοῦ $\mathcal{L}\{f\}$ γράφομε καί

$$\mathcal{L}\{f(t),\ t\in[0,+\infty)\}$$

ἤ ἀπλούστερα

$$\mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Φυσικά, ἀπό τόν ὁρισμό, ἕπεται ὅτι ὅλες οἱ συναρτήσεις δέν μποροῦν νά μετασχηματισθοῦν κατά Laplace, ἀφοῦ εἶναι δυνατόν τό παραπάνω ὁλοκλήρωμα νά μήν συγκλίνη πρός πραγματικό ἀριθμό. Πάντως ὅλες οἱ φραγμένες συναρτήσεις μποροῦν νά μετασχηματισθοῦν κατά Laplace, ὅπως φαίνεται στήν παρακάτω πρόταση:

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.3.1. Κάθε φραγμένη συνάρτηση μπορεῖ νά μετασχηματισθῆ κατά Laplace σέ μιά συνάρτηση πού ὁρίζεται τουλάχιστον στό $(0,+\infty)$.

Ἀπόδειξη. "Αν $f(t)$, $t\in[0,+\infty)$ εἶναι μιά φραγμένη συνάρτηση μέ φράγμα $M>0$, τότε ἔχομε

$$|\mathcal{L}\{f\}(s)| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt\right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-st}|f(t)|dt \leq M\int_0^{+\infty} e^{-st}dt$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὅπου τό $\int_0^{+\infty} e^{-st}dt$ συγκλίνει πρός πραγματικό ἀριθμό γιά $s\in(0,+\infty)$. ▲

Παραδείγματα 7.3.1

1) Γιά τή συνάρτηση e^{kt}, $t\in[0,+\infty)$ γιά $s>k$ ἔχομε

$$\mathcal{L}\{e^{kt}\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{kt}dt = \frac{1}{s-k}$$

2) θέτοντας

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-st}\cos kt\,dt, \quad J = \int_0^{+\infty} e^{-st}\sin kt\,dt$$

ἔχομε

$$kI-sJ = \int_0^{+\infty} e^{-st}[k\cos kt - s\sin kt]dt =$$

$$= [e^{-st}\sin kt]_0^{+\infty} = 0, \text{ ἄν } s>0$$

καί

$$sI+kJ = \int_0^{+\infty} e^{-st}[s\cos kt + k\sin kt]dt =$$

$$= -[e^{-st}\cos kt]_0^{+\infty} = 1, \text{ ἄν } s>0 .$$

Ἑπομένως

$$kI-sJ = 0 \quad \text{καί} \quad sI+kJ = 1$$

ἀπό ὅπου προκύπτει ὅτι

$$I = \frac{s}{s^2+k^2} \quad \text{καί} \quad J = \frac{k}{s^2+k^2}$$

δηλαδή

$$\mathcal{L}\{\cos kt\}(s) = \frac{s}{s^2+k^2} \quad \text{καί} \quad \mathcal{L}\{\sin kt\}(s) = \frac{k}{s^2+k^2}, \quad s>0.$$

3) Γιά τή συνάρτηση t^ν, $t\in[0,+\infty)$ ὅπου $\nu\in\mathbb{N}$ παρατηροῦμε ὅτι

$$\mathcal{L}\{t^\nu\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}t^\nu dt = \frac{\nu}{s}\int_0^{+\infty} e^{-st}t^{\nu-1}dt = \dots$$

$$= \frac{\nu}{s}\,\frac{\nu-1}{s}\cdots\frac{1}{s}\int_0^{+\infty} e^{-st}dt =$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$=\frac{\nu!}{s^{\nu}}\frac{1}{s}=\frac{\nu!}{s^{\nu+1}}\ , \quad s>0.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 7.3.1. Ἄν οἱ συναρτήσεις f_1 καί f_2 μποροῦν νά μετασχηματισθοῦν κατά Laplace, τότε γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς γ,δ καί ἡ συνάρτηση $\gamma f_1+\delta f_2$ μπορεῖ νά μετασχηματισθῆ κατά Laplace. Μάλιστα δέ ἰσχύει

$$\mathcal{L}\{\gamma f_1+\delta f_2\}=\gamma\,\mathcal{L}\{f_1\}+\delta\,\mathcal{L}\{f_2\}.$$

Ἀπόδειξη. Ἡ ἰσότητα πού θέλομε ν'ἀποδείξωμε γράφεται

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}[\gamma f_1(t)+\delta f_2(t)]dt=\gamma\int_0^{+\infty} e^{-st}f_1(t)dt+\delta\int_0^{+\infty} e^{-st}f_2(t)dt$$

ἡ ὁποία, ὅπως γνωρίζομε, ἀληθεύει. ▲

ΘΕΩΡΗΜΑ 7.3.2. Ἄν $F=\mathcal{L}\{f\}$ τότε γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό λ ἰσχύει

$$\mathcal{L}\{e^{-\lambda t}f(t)\}(s)=F(s+\lambda).$$

Ἀπόδειξη. Τοῦτο εἶναι φανερό, ἀφοῦ

$$F(s+\lambda)=\int_0^{+\infty} e^{-(s+\lambda)t}f(t)dt=\int_0^{+\infty} e^{-st}[e^{-\lambda t}f(t)]dt. \ ▲$$

Μιά σπουδαία κατηγορία συναρτήσεων ἀποτελοῦν οἱ περιοδικές συναρτήσεις.

Ξαναθυμίζουμε τήν ἔννοια αὐτή λέγοντας ὅτι μιά συνάρτηση f εἶναι "περιοδική" μέ "περίοδο" ω, ἄν ἰσχύη

$$f(t+\omega)=f(t) \quad \text{γιά κάθε } t.$$

Μιά τέτοια συνάρτηση καθορίζεται ἀπό τίς τιμές της πού παίρνει σ'ἕνα διάστημα μέ μῆκος ω.

Θεωροῦμε τώρα μιά περιοδική συνάρτηση $f(t)$, $t\in[0,+\infty)$ μέ περίοδο ω. Παρατηροῦμε ὅτι γιά μιά τέτοια συνάρτηση ἰσχύει

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt =$$

$$= \int_0^{\omega} e^{-st} f(t)dt + \int_{\omega}^{2\omega} e^{-st} f(t)dt + \ldots + \int_{\nu\omega}^{(\nu+1)\omega} e^{-st} f(t)dt + \ldots =$$

$$= \int_0^{\omega} e^{-st} f(t)dt + e^{-s\omega} \int_0^{\omega} e^{-st} f(t)dt + \ldots + e^{-\nu s} \int_0^{\omega} e^{-st} f(t)dt + \ldots =$$

$$= \int_0^{\omega} e^{-st} f(t)dt \; (1 + e^{-s\omega} + e^{-2s\omega} + \ldots) =$$

$$= \int_0^{\omega} e^{-st} f(t)dt \; \frac{1}{1-e^{-s\omega}},$$

ἀφοῦ $e^{-s\omega} < 1$· ἄρα

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{1-e^{-s\omega}} \int_0^{\omega} e^{-st} f(t)dt$$

καί ἔτσι βλέπομε ὅτι καί ἡ συνάρτηση $\mathcal{L}\{f\}$ καθορίζεται ἀπ'τίς τιμές τῆς f στό διάστημα $[0,\omega]$.

Δίνομε τώρα τόν ἑξῆς ὁρισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ 7.3.2. Μιά συνάρτηση $f(t)$, $t\in[0,+\infty)$ ὀνομάζεται "συνάρτηση ἐκθετικῆς τάξεως" ἄν ὑπάρχουν σταθεροί πραγματικοί ἀριθμοί M καί α τέτοιοι, ὥστε νά ἰσχύη

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t} \quad \text{γιά κάθε} \quad t > 0.$$

Ὁ ἀριθμός α ὀνομάζεται καί "τάξη" τῆς f.

Γιά μιά τέτοια συνάρτηση ἰσχύει τό παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 7.3.3. Ἄν $f(t)$, $t\in[0,+\infty)$ εἶναι μία ν-φορές παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση ἐκθετικῆς τάξεως μέ τάξη α τέτοια,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὥστε οἱ παράγωγοι αὐτῆς νά μποροῦν νά μετασχηματισθοῦν κατά Laplace, τότε γιά κάθε $\mu = 1,2,\ldots,\nu$ ἰσχύει

$$(7.3.1.)\qquad \mathcal{L}\{f^{(\mu)}(t)\}(s) = s^{\mu}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - \sum_{i=0}^{\mu-1} s^{\mu-i-1}f^{(i)}(0),$$

$$s > \alpha.$$

Ἀπόδειξη. Θ'ἀποδείξωμε τόν τύπο ἐπαγωγικά. Πρός τοῦτο γιά $\mu = 1$ αὐτός γράφεται

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - f(0).$$

Πραγματικά, ἔχομε

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}f'(t)dt = e^{-st}f(t)\Big|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt =$$

$$= -f(0) + s\,\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

διότι, ἀφοῦ ἡ f εἶναι συνάρτηση ἐκθετικῆς τάξεως, πληροῖ τήν ἀνισότητα

$$|e^{-st}f(t)| \leq e^{-(s-\alpha)t}M \quad \text{γιά κάθε} \quad t > 0 \quad \text{καί} \quad s > \alpha$$

καί ἔτσι

$$e^{-st}f(t) \to 0 \quad \text{ὅταν} \quad t \to +\infty,$$

ὅπου M, εἶναι ὁ ἀριθμός πού προκύπτει ἀπ'τόν Ὁρισμό 7.3.2.

Ὑποθέτομε τώρα ὅτι ὁ τύπος (7.3.1) ἰσχύει γιά k ($k = 1,2,\ldots,\nu-1$) δηλαδή ὅτι

$$\mathcal{L}\{f^{k}(t)\}(s) = s^{k}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - \sum_{i=0}^{k-1} s^{k-i-1}f^{(i)}(0)$$

καί θ'ἀποδείξωμε ὅτι ἰσχύει καί γιά k+1.

Πραγματικά, ἔχομε

$$\mathcal{L}\{f^{(k+1)}(t)\}(s) = \mathcal{L}\{(f^{(k)}(t))'\}(s) = s\,\mathcal{L}\{f^{(k)}(t)\}(s) - f^{(k)}(0) =$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$= s[s^k \mathcal{L}\{f(t)\}(s) - \sum_{i=0}^{k-1} s^{k-i-1} f^{(i)}(0)] - f^{(k)}(0) =$$

$$= s^{k+1} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) - [\sum_{i=0}^{k-1} s^{k-i} f^{(i)}(0) + f^{(k)}(0)] =$$

$$= s^{k+1} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) - \sum_{i=0}^{k} s^{(k+1)-i-1} f^{(i)}(0). \quad \blacktriangle$$

Μέχρι τώρα εἴδαμε μέ ποιόν τρόπο ἀπό μιά συνάρτηση f πηγαίνομε σέ μιά ἄλλη F τέτοια ὥστε

$$F = \mathcal{L}\{f\} .$$

Ἴσης σημασίας εἶναι καί ὁ τρόπος μέ βάση τόν ὁποῖο ἀπό μιά συνάρτηση F βρίσκομε μιά f γιά τήν ὁποία

$$\mathcal{L}\{f\} = F.$$

Ἀναφέρομε μόνο χωρίς ἀπόδειξη ὅτι ἄν f,g εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις μέ $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$ τότε $f = g$ (θεώρημα τοῦ Lerch). Ἔτσι ἄν f εἶναι συνεχής καί $F = \mathcal{L}(f)$ τότε γράφομε

$$f = \mathcal{L}^{-1}\{F\}$$

ἤ καί

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F\}(t).$$

καί λέμε ὅτι $\mathcal{L}^{-1}$ εἶναι ὁ "ἀντίστροφος τελεστής τοῦ Laplace". Βασικά γιά νά βροῦμε τήν f ὅταν δοθῆ ἡ F στηριζόμαστε στό συμπέρασμα πού ξέρομε γιά τόν τελεστή $\mathcal{L}$. Ἔτσι, ἰσχύει ὅτι

$$\mathcal{L}^{-1}\{\gamma F_1 + \delta F_2\} = \gamma \mathcal{L}^{-1}\{F_1\} + \delta \mathcal{L}^{-1}\{F_2\},$$

ἀφοῦ

$$\mathcal{L}\{\gamma \mathcal{L}^{-1}\{F_1\} + \delta \mathcal{L}^{-1}\{F_2\}\} = \gamma \mathcal{L}\{\mathcal{L}^{-1}\{F_1\}\} + \delta \mathcal{L}\{\mathcal{L}^{-1}\{F_2\}\} = \gamma F_1 + \delta F_2.$$

Παραδείγματα 7.3.2

1) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s(s+1)^2}\}(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t}.$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Πραγματικά· πρῶτα παρατηροῦμε ὅτι

$$\frac{1}{s(s+1)^2}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2}$$

καί ἔπειτα

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\}(t)=e^{0t}=1$$

καί

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\}(t)=\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-(-1)}\}(t)=e^{-t},$$

σύμφωνα μέ τό παράδειγμα 7.3.2, 1).

Ἐπίσης, ἀπ'τό παράδειγμα 7.3.1, 3) ἔχομε

$$\mathcal{L}\{t\}(s)=\frac{1}{s^2}=F(s)$$

καί ἀπ'τό Θεώρημα 7.3.2

$$\frac{1}{(s+1)^2}=F(s+1)=\mathcal{L}\{e^{-t}t\}(s)\,.$$

Ἔτσι

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s+1)^2}\}(t)=t\,e^{-t}$$

καί ἑπομένως

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s(s+1)^2}\}(t)=\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2}\}(t)=$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\}(t)-\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\}(t)-\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s+1)^2}\}(t)=$$

$$=1-e^{-t}-t\,e^{-t}\,.$$

2) $$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s^3-s^2+2s-1}{(s^2+1)(s^2+2)}\}(t)=\cos t-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\sqrt{2}\,t)\,.$$

Πραγματικά· πρῶτα παρατηροῦμε ὅτι

$$\frac{s^3-s^2+2s-1}{(s^2+1)(s^2+2)}=\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+2}\,.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἀλλά ἀπ' τό παράδειγμα 7.3.1, 2) ἔχομε

$$\frac{s}{s^2+1} = \mathcal{L}\{\cos t\}(s) \quad \text{καί ἄρα} \quad \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\}(t) = \cos t,$$

ἐνῶ $\frac{1}{s^2+2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{s+(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathcal{L}\{\sin\sqrt{2}\,t\}(s)$

καί ἄρα

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+2}\}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\sqrt{2}\,t\,.$$

Ἔτσι

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s^3-s^2+2s-1}{(s^2+1)(s^2+2)}\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+2}\}(t) =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\}(t) - \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+2}\}(t) =$$

$$= \cos t - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\sqrt{2}\,t\,.$$

7.4 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά ἐξεταστῆ ποιά ἀπ' τά ἀκόλουθα γενικευμένα ὁλοκληρώματα συγκλίνουν στό σύνολο $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν:

α) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{2/3}}\,dx$ β) $\displaystyle\int_{\alpha-1}^{\alpha+1} \frac{1}{(x-\alpha)^{1/3}}\,dx$

γ) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ δ) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$

ε) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{1+t}\,dt$ στ) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^{1/2}}\,dx$

ζ) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x\cos x\,dx$ η) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx\,.$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2. Ν'άποδειχτῆ ὅτι

α) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3}\,dx = \frac{1}{2}$ β) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx = \frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$.

3. Ν'άποδειχτῆ ὅτι τό $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos u^2\,du$ συγκλίνει στό $\mathbb{R}$.

4. Νά ἐξεταστῆ γιά ποιά ἀπ' τά ἀκόλουθα ὁλοκληρώματα ἡ βασική τιμή κατά Cauchy ὑπάρχει στό $\mathbb{R}$:

α) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin t\,dt$ β) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\sin t|\,dt$

γ) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ δ) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$.

5. Νά βρεθοῦν οἱ ἑξῆς τιμές τῆς Γ συναρτήσεως:

α) $\dfrac{\Gamma(7)}{2\Gamma(3)}$ β) $\dfrac{3\Gamma(\frac{7}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})}$

γ) $\Gamma(\frac{9}{2})$ δ) $\dfrac{\Gamma(4)\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{9}{2})}$.

6. Νά ἐπαληθευτῆ ὁ παρακάτω πίνακας

f			
1	$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$	$\dfrac{\mathcal{L}\{f\}}{\frac{1}{s}\,,\ s>0}$	$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\,dx$
t	$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$	$\dfrac{1}{s^2}\,,\ s>0$	$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{1+t}\,dt$
$t^\nu\ (\nu\in\mathbb{N})$	$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$.	$\dfrac{\nu!}{s^{\nu+1}}\,,\ s>0$	$\displaystyle\int_1^{+\infty} x\cos x\,dx$

$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$, $s > \alpha$
$te^{\alpha t}$	$\frac{1}{(s-\alpha)^2}$, $s > \alpha$
$t^{\nu}e^{\alpha t}$ $(\nu \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{(s-\alpha)^{\nu+1}}$, $s > \alpha$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$, $s > 0$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$, $s > 0$
$e^{\alpha t}\cos \omega t$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$, $s > \alpha$
$e^{\alpha t}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$, $s > \alpha$
$\frac{t^{\nu}}{\nu!}$	$\frac{1}{s^{\nu+1}}$, $s > 0$
$(\pi t)^{-\frac{1}{2}}$	$s^{-\frac{1}{2}}$, $s > 0$
$\cos h\alpha t$	$\frac{s}{s^2-\alpha^2}$, $s > \alpha$
$\sin h\alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$, $s > \alpha$
$\frac{t}{2\alpha}\sin \alpha t$	$\frac{s}{(s^2+\alpha^2)^2}$, $s > 0$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$\dfrac{\sin \alpha t - \alpha t \cos \alpha t}{2\alpha^3}$	$\dfrac{1}{(s^2+\alpha^2)^2}$,	$s > 0$
$\dfrac{t}{2\alpha} \sinh \alpha t$	$\dfrac{s}{(s^2-\alpha^2)^2}$,	$s > \alpha$
$\dfrac{\alpha t \cosh \alpha t - \sinh \alpha t}{2\alpha^3}$	$\dfrac{1}{(s^2-\alpha^2)^2}$,	$s > \alpha$

7. Νά μετασχηματισθοῦν κατά Laplace οἱ παρακάτω συναρτήσεις:

α) $e^{-\lambda t}\cosh kt$ β) $e^{-\lambda t}\sinh kt$

γ) $t^{\nu}e^{-\lambda t}$ δ) $(1+3t+t^2)e^t$

ε) $3t^2-2t+1$ στ) $(t+1)\sin 2t - \cos(t-1)$

ζ) $e^{2t}-3\sin t+t$ η) $t\sin 3(t+2)$.

8. Νά βρεθοῦν οἱ συναρτήσεις $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$ ὅπου F εἶναι οἱ συναρτήσεις πού ὁρίζονται ἀπ'τούς ἑξῆς τύπους:

α) $\dfrac{s}{(s-1)(s-2)}$ β) $\dfrac{2s+1}{(s-2)s^3}$

γ) $\dfrac{2s^2}{(s-1)(s+2)(s^2+1)}$ δ) $\dfrac{1}{(s-1)(s+2)(s-3)}$

ε) $\dfrac{s-2}{s(s+1)(s+5)}$ στ) $\dfrac{s^2}{s(s+1)(s-2)^2}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΣΕΙΡΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Στό κεφάλαιο τοῦτο θ'ἀναπτυχτῆ ἡ βασική θεωρία τῶν σειρῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν πού φυσιολογικά θά μποροῦσε νά τοποθετηθῆ ἀμέσως μετά ἀπό τή θεωρία τῶν ἀκολουθιῶν. Τοῦτο ὅμως δέν εἶναι ἀπαραίτητο νά γίνη σέ ἕνα βιβλίο σάν αὐτό ἐδῶ, πού σκοπό ἔχει νά εἰσαγάγη τόν σπουδαστή ὅσο τό δυνατό γρηγορώτερα στήν ἀνάπτυξη τῆς βασικῆς θεωρίας τοῦ 'Απειροστικοῦ Λογισμοῦ, δηλαδή στόν Διαφορικό καί 'Ολοκληρωτικό Λογισμό.

8.1 ΕΝΝΟΙΑ ΚΑΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΣΕΙΡΑΣ

Θεωροῦμε μιά ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ πραγματικῶν ἀριθμῶν καί τήν ἀπό αὐτή παραγόμενη ἐπίσης ἀκολουθία σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, ὅπου

$$\sigma_1 = \alpha_1,\ \sigma_2 = \alpha_1+\alpha_2, \ldots, \sigma_\nu = \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu, \ldots$$

'Η ἀκολουθία σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ ὀνομάζεται "**ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῆς** α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$". Μάλιστα δέ γράφομε

$$\sigma_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k$$

γιά τόν ν-οστό ὅρο τῆς σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$. 'Επί πλέον, ἄν συμβαίνη $\lim \sigma_\nu = \ell$, ὅπου $\ell \in \mathbb{R}^*$, τότε γράφομε

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \ell \quad \text{ἤ} \quad \ell = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καί ἀναλυτικώτερα

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots=\ell \quad \text{ἤ} \quad \ell=\alpha_1+\alpha_2+\ldots$$

καί λέμε ὅτι ἡ σειρά **"συγκλίνει στό $\mathbb{R}^*$"**, ἤ **"εἶναι συγκλίνουσα στό $\mathbb{R}^*$"**.

Τό συμβολικό τοῦτο ἄθροισμα ὀνομάζεται **"σειρά τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν α_ν, $\nu\in\mathbb{N}$"**. Οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας ὀνομάζονται καί **"ὅροι"** τῆς σειρᾶς, ἐνῶ ἡ παραπάνω ἀκολουθία σ_ν, $\nu\in\mathbb{N}$ ὀνομάζεται καί **"ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων"** αὐτῆς. Ὁ ὅρος α_ν ὀνομάζεται **"ν-οστός ὅρος"**, ἐνῶ τό σ_ν **"ν-οστό μερικό ἄθροισμα"**. Τέλος ἄν $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu=\ell$, τό ℓ ὀνομάζεται **"ἄθροισμα ἤ ὅριο"** τῆς σειρᾶς. Στήν περίπτωση αὐτή θά λέμε ὅτι ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$

"συγκλίνει" ἤ **"εἶναι συγκλίνουσα"**, ἄν $\ell\in\mathbb{R}$.

"ἀπειρίζεται θετικά", ἄν $\ell=+\infty$,

"ἀπειρίζεται ἀρνητικά", ἄν $\ell=-\infty$.

Στίς δύό τελευταῖες περιπτώσεις λέμε ἀκόμη ὅτι ἡ σειρά **"συγκλίνει κατ' ἐκδοχήν"**.

Τώρα, γιά ἕναν ὁποιονδήποτε ἀκέραιο ἀριθμό λ, θεωροῦμε τό σύνολο

$$N_\lambda=\{\lambda,\ \lambda+1,\ \lambda+2,\ldots\}=\{\nu+\lambda-1:\ \nu\in\mathbb{N}\}$$

καί μιά ἀπεικόνιση $\alpha: N_\lambda\to\mathbb{R}$. Ἡ ἀπεικόνιση αὐτή παριστάνεται μέ

$$\alpha_\nu,\ \nu\in N_\lambda$$

καί ὀνομάζεται **"ἀκολουθία μέ σύνολο δεικτῶν τό N_λ"**. Θέτοντας $\beta_\nu=\alpha_{\nu+\lambda-1}$, $\nu\in\mathbb{N}$ παίρνεμε τήν ἀκολουθία

$$\beta_1,\ \beta_2,\ldots,\beta_\nu,\ldots$$

δηλαδή τήν

$$\alpha_\lambda,\ \alpha_{\lambda+1},\ldots,\alpha_{\lambda+\nu-1},\ldots$$

Πολλές φορές χρησιμοποιοῦμε τό σύμβολο $\sum_{\nu=\lambda}^{\infty}\alpha_\nu$ πού ἐπίσης ὀνομάζεται **"σειρά"** καί πού ὁρίζεται ἀπό τόν τύπο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\sum_{\nu=\lambda}^{\infty} \alpha_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu+\lambda-1} = \alpha_\lambda + \alpha_{\lambda+1} + \dots$$

Ἐξ ἄλλου, ἄν $\mu \geqq \lambda$, τότε γράφομε

$$\sum_{\nu=\lambda}^{\infty} \alpha_\nu = \sum_{\nu=\lambda}^{\mu} \alpha_\nu + \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} \alpha_\nu = (\alpha_\lambda + \dots + \alpha_\mu) + (\alpha_{\mu+1} + \dots)$$

καί ἔτσι γιά $\lambda = 0 = \mu$ ἔχομε

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu = \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu .$$

Παραδείγματα 8.1.1

1) Ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu$ ἀπειρίζεται θετικά, ἀφοῦ ἡ ἀκολουθία

$$\sigma_1 = 1,\ \sigma_2 = 1+2 = 3, \dots,\ \sigma_\nu = 1+2+\dots+\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}, \dots$$

ἔχει ὅριο τό $+\infty$.

2) Ἡ ἁρμονική σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$ ἀπειρίζεται θετικά. Πραγματικά, ἀρκεῖ ν'ἀποδειχτῆ ὅτι ἡ ἀκολουθία

$$\sigma_\nu = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\nu},\ \nu \in \mathbb{N}$$

ἀπειρίζεται θετικά. Εἶναι εὔκολο νά δοῦμε ὅτι αὐτή εἶναι γνησίως αὔξουσα καί, ἄν ὑποτεθῆ ὅτι εἶναι φραγμένη, θά συγκλίνη πρός κάποιο πραγματικό ἀριθμό ℓ. Τότε ὅμως καί $\lim \sigma_{2\nu} = \ell$, ἐνῶ ἀπό τήν ἄλλη πλευρά

$$\sigma_{2\nu} - \sigma_\nu = \frac{1}{\nu+1} + \dots + \frac{1}{2\nu} \geqq \frac{1}{2\nu} + \dots + \frac{1}{2\nu} = \frac{1}{2},$$

δηλαδή

$$\sigma_{2\nu} - \sigma_\nu \geqq \frac{1}{2} \quad \text{γιά κάθε} \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Ἔτσι μεταβαίνοντας στά ὅρια ἔχομε

$$\lim \sigma_{2\nu} - \lim \sigma_\nu = \lim(\sigma_{2\nu} - \sigma_\nu) \geqq \frac{1}{2},$$

ὁπότε

$$0 = \ell - \ell \geqq \frac{1}{2},$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

πού εἶναι ἄτοπο. Ἄρα ἡ σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ δέν εἶναι φραγμένη καί ἐπειδή εἶναι καί γνησίως αὔξουσα, θά ἀπειρίζεται θετικά. Δηλαδή $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} = +\infty$.

3) Ἡ γεωμετρική σειρά $\sum_{\nu=0}^{\infty} \omega^\nu$ ἀπειρίζεται θετικά γιά $\omega \geq 1$, ἐνῶ γιά $|\omega| < 1$ συγκλίνει καί μάλιστα ἰσχύει $\sum_{\nu=0}^{\infty} \omega^\nu = \frac{1}{1-\omega}$. Πραγματικά, γράφοντας

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \omega^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \omega^{\nu-1}$$

παίρνομε τήν ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῆς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \omega^{\nu-1}$ καί παρατηροῦμε ὅτι:

Ἄν $\omega \geq 1$, τότε

$$\sigma_\nu = 1+\omega+\omega^2+\ldots+\omega^{\nu-1} \geq 1+1+1+\ldots+1 = \nu$$

γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ καί ἄρα $\lim \sigma_\nu = +\infty$, ἤτοι $\sum_{\nu=0}^{\infty} \omega^\nu = +\infty$.

Ἄν $|\omega| < 1$, τότε

$$\sigma_\nu = 1+\omega+\omega^2+\ldots+\omega^{\nu-1} = \frac{1-\omega^\nu}{1-\omega}$$

γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ καί ἐπειδή $\lim \omega^\nu = 0$, θά ἔχωμε καί $\lim \sigma_\nu = \frac{1}{1-\omega}$ ἤτοι $\sum_{\nu=0}^{\infty} \omega^\nu = \frac{1}{1-\omega}$.

Ἄν $\omega \leq -1$, τότε τό ἄθροισμα τῆς σειρᾶς $\sum_{\nu=0}^{\infty} \omega^\nu$ δέν ὑπάρχει. Πραγματικά ἄν $\omega = -1$, τοῦτο φαίνεται ἀμέσως γιατί ἡ ἀκολουθία σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων δέν συγκλίνει οὔτε πρός πραγματικό ἀριθμό οὔτε καί κατ' ἐκδοχήν, ἀφοῦ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ἔχομε

$$\sigma_{2\nu} = 1-1+\ldots+1-1 = 0$$

καί

$$\sigma_{2\nu-1} = 1-1+\ldots+1-1+1 = 1.$$

Ἄν $\omega < -1$, παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων

$$\sigma_\nu = \frac{1-\omega^\nu}{1-\omega} = \frac{1-(-1)^\nu|\omega|^\nu}{1-\omega}, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

εἶναι τέτοια ὥστε

$$\lim \sigma_{2\nu} = \lim \frac{1-|\omega|^{2\nu}}{1-\omega} = \frac{1-(+\infty)}{1-\omega} = \frac{-\infty}{1-\omega} = -\infty$$

καί

$$\lim \sigma_{2\nu-1} = \lim \frac{1+|\omega|^{2\nu-1}}{1-\omega} = \frac{1+(+\infty)}{1-\omega} = \frac{+\infty}{1-\omega} = +\infty ,$$

ὁπότε ἡ σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ δέν συγκλίνει οὔτε ἀπειρίζεται θετικά ἤ ἀρνητικά. Σ'αὐτή τήν τελευταία περίπτωση, δηλαδή ὅταν $\omega \leqq -1$, λέμε ὅτι ἡ σειρά $\sum_{\nu=0}^{\infty} \omega^\nu$ "**ἀποκλίνει**" (ἤ "**κυμαίνεται**").

Γενικά, σειρές (σάν τήν παραπάνω σειρά $\sum_{\nu=0}^{\infty} \omega^\nu$, μέ $\omega \leqq -1$) πού οἱ ἀκολουθίες τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων των δέν συγκλίνουν οὔτε πρός πραγματικό ἀριθμό οὔτε καί κατ'ἐκδοχήν ὀνομάζονται "**ἀποκλίνουσες**" (ἤ "**κυμαινόμενες**").

8.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΩΝ ΣΕΙΡΩΝ

Θά δοῦμε τώρα μερικές βασικές ἰδιότητες τῶν συγκλινουσῶν στό $\mathbb{R}^*$ σειρῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.2.1. **Ἄν ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ εἶναι συγκλίνουσα, τότε ἰσχύει**

$$\lim \alpha_\nu = 0.$$

Ἀπόδειξη. Τοῦτο προκύπτει ἀμέσως ἀπό τό γεγονός ὅτι $\alpha_\nu = \sigma_\nu - \sigma_{\nu-1}$, $\nu \in \mathbb{N}$. ▲

Παρατήρηση 8.2.1.

Τό ἀντίστροφο τοῦ παραπάνω θεωρήματος δέν ἰσχύει, ὅπως φαίνεται ἀπό τό παράδειγμα 8.1.1, 2). Ἐξ ἄλλου τό θεώρημα τοῦτο χρησιμοποιεῖται συχνά καί ὡς κριτήριο διά νά διαπιστωθῆ ὅτι μιά σειρά δέν συγκλίνει. Ἔτσι π.χ. ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu-1}{\nu}$ δέν συγκλίνει, ἀφοῦ ἡ ἀκολουθία $\frac{\nu-1}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ δέν εἶναι μηδενική.

Τό θεώρημα πού ἀκολουθεῖ χρησιμοποιεῖται πολλές φορές γιά νά ὑπολο-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

γιστή τό ἄθροισμα μιᾶς σειρᾶς.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.2.2. Ἄν α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι μιά ἀκολουθία καί $\ell \in \mathbb{R}^*$, τότε

$$\lim \alpha_\nu = \ell \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1}) = \alpha_1 - \ell.$$

Ἀπόδειξη. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῆς σειρᾶς $\sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1})$ εἶναι ἡ

$$\sigma_\nu = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + \ldots + (\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1}) = \alpha_1 - \alpha_{\nu+1}, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Ἄρα, ἄν $\lim \alpha_\nu = \ell$, τότε

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1}) = \lim \sigma_\nu = \lim(\alpha_1 - \alpha_{\nu+1}) = \alpha_1 - \lim \alpha_{\nu+1} = \alpha_1 - \ell. \quad \blacktriangle$$

Παράδειγμα 8.2.1.

Θά ὑπολογίσωμε τό ἄθροισμα τῆς σειρᾶς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)}$. Πρός τοῦτο παρατηροῦμε ὅτι γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ἰσχύει

$$\frac{1}{\nu(\nu+1)} = \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}$$

καί ἔτσι θέτοντας

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N},$$

ἀπό τό παραπάνω θεώρημα παίρνομε

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1}) = \alpha_1 - \lim \alpha_\nu = 1 - \lim \frac{1}{\nu} = 1.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.2.3. Ἄν ξ, η εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί καί $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$, $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ σειρές πραγματικῶν ἀριθμῶν μέ

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \ell_1 \quad \text{καί} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu = \ell_2,$$

τότε

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (\xi\alpha_\nu + \eta\beta_\nu) = \xi\ell_1 + \eta\ell_2$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καί εἰδικά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \xi\alpha_\nu = \xi\ell_1$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu+\beta_\nu) = \ell_1+\ell_2 \quad \text{καί} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu-\beta_\nu) = \ell_1-\ell_2 ,$$

μέ τήν προϋπόθεση ὅτι οἱ πράξεις πού σημειώνονται στά ὅρια εἶναι ἐπιτρεπτές.

Ἀπόδειξη. Παρατηροῦμε ὅτι ἄν σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, τ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι οἱ ἀκολουθίες τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῶν σειρῶν $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$, $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ ἀντίστοιχα καί s_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῆς $\sum_{\nu=1}^{\infty} (\xi\alpha_\nu+\eta\beta_\nu)$, τότε, ὅπως ξέρομε, ἰσχύει

$$s_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} (\xi\alpha_k+\eta\beta_k) = \xi \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k+\eta \sum_{k=1}^{\nu} \beta_k = \xi\sigma_\nu+\eta\tau_\nu ,$$

δηλαδή γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$

$$s_\nu = \xi\sigma_\nu+\eta\tau_\nu .$$

Ἔτσι ἔχομε

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (\xi\alpha_\nu+\eta\beta_\nu) = \lim s_\nu = \lim(\xi\sigma_\nu+\eta\tau_\nu) = \xi \lim \sigma_\nu+\eta \lim \tau_\nu = \xi\ell_1+\eta\ell_2 .$$

Εἰδικά, τώρα, ἄν $\eta = 0$ ἔχομε

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \xi\alpha_\nu = \xi \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \xi\ell_1 ,$$

ἐνῶ ἄν $\xi = \eta = 1$ ἤ $\xi = 1$, $\eta = -1$, τότε ἀντίστοιχα ἔχομε

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu+\beta_\nu) = \ell_1+\ell_2 \quad \text{καί} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu-\beta_\nu) = \ell_1-\ell_2 . \quad \blacktriangle$$

Παρατήρηση 8.2.2.

Ὁ τύπος πού δίνεται στό παραπάνω θεώρημα μπορεῖ νά γραφῆ καί μέ τή μορφή

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (\xi\alpha_\nu+\eta\beta_\nu) = \xi \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu+\eta \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu .$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αὐτή τή μορφή θά τή χρησιμοποιοῦμε πολλές φορές, ἀλλά θά προσέχωμε ὅτι οἱ σειρές πού ἐμφανίζονται δεξιά δέν εἶναι ἀποκλίνουσες καί ὅτι θά ὁδηγούμαστε σέ ἐπιτρεπτές πράξεις. Ἀνάλογα μποροῦμε νά ἐφαρμόσωμε καί γενικώτερους τύπους, ὅπως π.χ. τόν

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(\xi\alpha_\nu+\eta\beta_\nu+\zeta\gamma_\nu)=\xi\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu+\eta\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu+\zeta\sum_{\nu=1}^{\infty}\gamma_\nu .$$

Ἐπίσης ἕνα θεώρημα πού χρησιμοποιεῖται καί ὡς κριτήριο γιά τήν κατ'ἐκδοχή σύγκλιση τῶν σειρῶν εἶναι τό ἑξῆς:

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.2.4. Ἄν $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ καί $\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu$ εἶναι δυό σειρές πραγματικῶν ἀριθμῶν μέ

$$\alpha_\nu\leq\beta_\nu \quad \text{γιά κάθε } \nu\in\mathbb{N}$$

καί

1) ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ ἀπειρίζεται θετικά, τότε καί ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu$ ἀπειρίζεται θετικά,

2) ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu$ ἀπειρίζεται ἀρνητικά, τότε καί ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ ἀπειρίζεται ἀρνητικά.

Ἀπόδειξη. Ἄν σ_ν, $\nu\in\mathbb{N}$ καί τ_ν, $\nu\in\mathbb{N}$ εἶναι οἱ ἀκολουθίες τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῶν σειρῶν $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ καί $\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu$ ἀντίστοιχα, τότε γιά κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ ἔχομε

$$\sigma_\nu\leq\tau_\nu .$$

Ἔτσι

1) ἄν ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ ἀπειρίζεται θετικά, δηλαδή $\lim\sigma_\nu=+\infty$, τότε καί $\lim\tau_\nu=+\infty$, πού σημαίνει ὅτι $\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu=+\infty$.

2) ἄν ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu$ ἀπειρίζεται ἀρνητικά, δηλαδή $\lim\tau_\nu=-\infty$, τότε καί $\lim\sigma_\nu=-\infty$, πού σημαίνει ὅτι $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu=-\infty$. ▲

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παραδείγματα 8.2.2.

1) Ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2+\sin \nu^3}{\nu}$ **ἀπειρίζεται θετικά.** Πραγματικά, ἐπειδή γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ἰσχύει

$$\frac{1}{\nu} \leq \frac{2+\sin \nu^3}{\nu}$$

καί ἡ ἁρμονική σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$ ἀπειρίζεται θετικά, ἀπό τό παραπάνω θεώρημα, προκύπτει ὅτι καί ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2+\sin \nu^3}{\nu}$ ἀπειρίζεται θετικά.

2) Ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\rho}$, **ὅπου $\rho \leq 1$ ἀπειρίζεται θετικά.** Πραγματικά, ἐπειδή γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ἰσχύει

$$\frac{1}{\nu} \leq \frac{1}{\nu^\rho}$$

καί ἡ ἁρμονική σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$ ἀπειρίζεται θετικά, προκύπτει ὅτι καί ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\rho}$ ἀπειρίζεται θετικά.

3) Ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{(\nu+1)\sqrt{\nu}}$ **ἀπειρίζεται θετικά.** Πραγματικά, ἐπειδή γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ἰσχύει

$$\frac{\nu}{(\nu+1)\sqrt{\nu}} = \frac{\nu}{\nu+1}\,\frac{1}{\sqrt{\nu}} \geq \frac{1}{2}\,\frac{1}{\nu^{1/2}}$$

καί ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2}\,\frac{1}{\nu^{1/2}} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{1/2}} = \frac{1}{2}(+\infty) = +\infty$, προκύπτει ὅτι καί ἡ σειρά, πού δόθηκε, ἀπειρίζεται ἐπίσης θετικά.

8.3 ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΕΩΣ ΣΕΙΡΩΝ

Ἀκολουθοῦν τά βασικώτερα κριτήρια γιά τή σύγκλιση τῶν σειρῶν πού ἀφοροῦν πρῶτα τίς σειρές μέ μή ἀρνητικούς ὅρους.

Α. ΣΕΙΡΕΣ ΜΕ ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΟΥΣ ΟΡΟΥΣ

Θεωροῦμε μιά σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ τέτοια ὥστε

$$\alpha_\nu \geq 0 \quad \text{γιά κάθε } \nu \in \mathbb{N}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μιά τέτοια σειρά ὀνομάζεται "σειρά μή ἀρνητικῶν ὅρων". Εἶναι εὔκολο νά δοῦμε ὅτι μιά σειρά μή ἀρνητικῶν ὅρων ἔχει τήν ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων της αὔξουσα καί ἄρα αὐτή συγκλίνει στό $\mathbb{R}^*$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.3.1. Ὑποθέτουμε ὅτι $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ καί $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ εἶναι σειρές μή ἀρνητικῶν ὅρων τέτοιες ὥστε, γιά κάποια σταθερά K, νά ἰσχύη

$$\alpha_\nu \leq K\beta_\nu, \text{ τελικῶς γιά κάθε } \nu \in \mathbb{N}.$$

Ἄν ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ εἶναι συγκλίνουσα, τότε καί ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ εἶναι ἐπίσης συγκλίνουσα.

Ἀπόδειξη. Ἄν σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ καί τ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι οἱ ἀκολουθίες τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῶν σειρῶν $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ καί $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ ἀντίστοιχα, τότε προφανῶς ὑπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ὥστε νά ἰσχύη

$$\sigma_\nu \leq \sigma_{k_0} + K \sum_{\nu=k_0+1}^{\infty} \beta_\nu \leq \sigma_{k_0} + K \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu \text{ γιά κάθε } \nu \geq k_0.$$

Ἔτσι ἄν $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu < +\infty$, τότε ἡ σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι φραγμένη καί ἐπειδή εἶναι καί αὔξουσα ἕπεται ὅτι συγκλίνει. Ἄρα καί ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ ἐπίσης συγκλίνει. ▲

Παράδειγμα 8.3.1

Ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\rho}$, ὅπου $\rho > 1$ συγκλίνει. Πραγματικά θά βροῦμε πρῶτα μιά ὑπακολουθία τῆς ἀκολουθίας τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων ἡ ὁποία νά εἶναι φραγμένη.

Πρός τοῦτο θέτομε $k_\nu = 2^\nu - 1$, $\nu \in \mathbb{N}$ καί παρατηροῦμε ὅτι

$$\sigma_{k_1} = \sigma_1 = 1$$

$$\sigma_{k_2} = \sigma_3 = 1 + \frac{1}{2^\rho} + \frac{1}{3^\rho} < 1 + \frac{1}{2^\rho} + \frac{1}{2^\rho} = 1 + \frac{1}{2^{\rho-1}}$$

$$\sigma_{k_3} = \sigma_7 = \sigma_3 + \frac{1}{4^\rho} + \frac{1}{5^\rho} + \frac{1}{6^\rho} + \frac{1}{7^\rho} < 1 + \frac{1}{2^{\rho-1}} + \frac{1}{4^{\rho-1}} = 1 + \frac{1}{2^{\rho-1}} + \frac{1}{(2^{\rho-1})^2}$$

καί ἔτσι ἐπαγωγικά

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\sigma_{k_\nu} < 1 + \frac{1}{2^{\rho-1}} + \frac{1}{(2^{\rho-1})^2} + \ldots + \frac{1}{(2^{\rho-1})^{\nu-1}} = \frac{1 - \frac{1}{(2^{\rho-1})^\nu}}{1 - \frac{1}{2^{\rho-1}}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\rho-1}}}$$

δηλαδή

$$\sigma_{k_\nu} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\rho-1}}} \quad \text{γιά κάθε } \nu \in \mathbb{N}.$$

Ἄρα ἡ παραπάνω ὑπακολουθία σ_{k_ν}, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι φραγμένη. Ἐπειδή, ὅμως, πρόκειται γιά σειρά θετικῶν ὅρων, ἔχομε

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\rho} = \ell, \text{ ὅπου } \ell \in \mathbb{R}^*$$

πού σημαίνει ὅτι ἡ σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ καί ἡ παραπάνω ὑπακολουθία της σ_{k_ν}, $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνουν πρός τό ℓ. Ἀλλά ἡ σ_{k_ν}, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι φραγμένη καί ἔτσι ἔχουμε ὅτι $\ell \in \mathbb{R}$. Δηλαδή ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\rho}$, ὅπου $\rho > 1$, συγκλίνει.

Στό σημεῖο τοῦτο ἐπανερχόμαστε στήν ἔννοια τοῦ lim sup καί lim inf μιᾶς ἀκολουθίας (βλ. ἄσκηση 1.15.7). Ἄν Y εἶναι τό σύνολο τῶν σημείων συσσωρεύσεως μιᾶς ἀκολουθίας x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ τότε

$$\limsup x_\nu = \sup Y$$

καί

$$\liminf x_\nu = \inf Y$$

Σημειώνομε ἀκόμη ὅτι καί τά $\limsup x_\nu$, $\liminf x_\nu$ εἶναι σημεῖα συσσωρεύσεως τῆς ἀκολουθίας x_ν, ἐνῶ ἰσχύει $\lim x_\nu = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}^*$ τότε καί μόνον τότε, ἄν

$$\liminf x_\nu = \ell = \limsup x_\nu.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.3.1. Ὑποθέτομε ὅτι οἱ σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ καί $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$; $\alpha_\nu \geqq 0$ καί $\beta_\nu > 0$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι τέτοιες ὥστε

$$\limsup \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} < +\infty.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τότε ἄν ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ εἶναι συγκλίνουσα, τό ἴδιο ἰσχύει καί γιά τή σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$.

Ἀπόδειξη. Θ'ἀποδείξωμε πρῶτα ὅτι ὑπάρχει $K > 0$ τέτοιο ὥστε

(8.3.1) $$\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} \leqq K \quad \text{τελικῶς γιά κάθε } \nu \in \mathbb{N}.$$

Πραγματικά, ἀλλιῶς θά ἔπρεπε γιά κάθε $k \in \mathbb{N}$ νά ὑπάρχη $\nu_\lambda \in \mathbb{N}$ μέ $\frac{\alpha_{\nu_\lambda}}{\beta_{\nu_\lambda}} > \lambda$. Ἀλλά τότε

$$\lim \frac{\alpha_{\nu_\lambda}}{\beta_{\nu_\lambda}} \geqq \lim \lambda = +\infty, \quad \text{δηλαδή} \quad \limsup \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = +\infty$$

πού εἶναι ἄτοπο. Ἄρα ἡ (8.3.1) ἀληθεύει.

Ὥστε ὑπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ὥστε

$$\alpha_\nu \leqq K \beta_\nu \quad \text{γιά κάθε} \quad \nu \geqq k_0.$$

Ἔτσι ἐφαρμόζοντας τό προηγούμενο θεώρημα συμπεραίνομε ὅτι καί ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ εἶναι ἐπίσης συγκλίνουσα. ▲

Ἰσοδύναμη διατύπωση τῆς προτάσεως αὐτῆς εἶναι καί τό ἑξῆς πόρισμα:

ΠΟΡΙΣΜΑ 8.3.1. Ὑποθέτομε ὅτι οἱ σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ καί $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ μέ $\alpha_\nu > 0$ καί $\beta_\nu \geqq 0$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, εἶναι τέτοιες ὥστε

$$\limsup \frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu} < +\infty.$$

Τότε, ἄν ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ ἀπειρίζεται θετικά, τό ἴδιο ἰσχύει καί γιά τή σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$.

Ἀπόδειξη. Ἄν ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ δέν ἀπειρίζεται θετικά, τότε ὡς σειρά θετικῶν ὅρων θά εἶναι συγκλίνουσα. Ἀλλά τότε, ἐφαρμόζοντας τήν Πρόταση 8.3.1 θά ἔχωμε καί τήν $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ συγκλίνουσα, πού εἶναι ἄτοπο. ▲

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.3.2. (Κριτήριο πηλίκων τοῦ d'Alembert). Ὑποθέτομε ὅτι γιά τή σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ ἰσχύει $\alpha_\nu > 0$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Ἄν

(i) $\limsup \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} < 1$, τότε ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει,

(ii) $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \geqq 1$ τελικῶς γιά ὅλα τά $\nu \in \mathbb{N}$, τότε ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ ἀπειρίζεται θετικά.

Ἀπόδειξη. (i) Θεωροῦμε ἕναν (θετικό) ἀριθμό ω μέ

$$\limsup \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} < \omega < 1,$$

ὁπότε, τότε, ὑπάρχει δείκτης $k_0 > 1$ τέτοιος ὥστε

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} < \omega, \text{ γιά κάθε } \nu \geqq k_0.$$

Ἄρα ἔχομε

$$\alpha_{k_0+1} < \omega\, \alpha_{k_0}$$

$$\alpha_{k_0+2} < \omega\, \alpha_{k_0+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_{k_0+\mu} < \omega\, \alpha_{k_0+\mu-1}$$

καί ἑπομένως

$$\alpha_{k_0+\mu} < \omega^\mu \alpha_{k_0}$$

Ἔτσι

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \sum_{\nu=1}^{k_0-1} \alpha_\nu + \sum_{\nu=k_0}^{\infty} \alpha_\nu = \sum_{\nu=1}^{k_0-1} \alpha_\nu + \sum_{\mu=0}^{\infty} \alpha_{k_0+\mu} = \sum_{\nu=1}^{k_0-1} \alpha_\nu + \alpha_{k_0} \sum_{\mu=0}^{\infty} \omega^\mu < +\infty,$$

τό ὁποῖο σημαίνει ὅτι ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει.

(ii) Εἶναι φανερό ὅτι ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι τελικῶς αὔξουσα καί ἑπομένως, ὡς ἀκολουθία μή ἀρνητικῶν ὅρων, δέν εἶναι μηδενική. Τοῦτο σύμφωνα μέ τό θεώρημα 8.2.1 λέγει ὅτι ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ δέν εἶναι συγκλίνουσα καί ἑπομένως ὡς σειρά μή ἀρνητικῶν ὅρων ἀπειρίζεται θετικά. ▲

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παράδειγμα 8.3.2

Ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu$ ὅπως εἴδαμε ἀπειρίζεται θετικά. Ἐξ ἄλλου ἔχομε

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{\nu+1}{\nu} > 1$$

γιά κάθε ν καί ἔτσι ἐπαληθεύεται τό θεώρημα.

Παρατήρηση 8.3.1

Στήν περίπτωση ὅπου

$$\liminf \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \leqq 1 \leqq \limsup \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$$

δέν μποροῦμε νά ποῦμε ἄν ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνη, ἤ δέν συγκλίνη. Πραγματικά γιά τίς σειρές

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)} \quad \text{καί} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$$

εἴδαμε παραπάνω (παράδειγμα 8.1.1. 2) καί παράδειγμα 8.2.1) ὅτι ἡ πρώτη συγκλίνει καί ἡ δεύτερη ἀπειρίζεται θετικά. Ὅμως, ἔχομε ἀντίστοιχα

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}}{\frac{1}{\nu(\nu+1)}} = \frac{\nu}{\nu+2} \quad \text{καί} \quad \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{\frac{1}{\nu+1}}{\frac{1}{\nu}} = \frac{\nu}{\nu+1}$$

καί ἑπομένως καί γιά τίς δυό ἔχομε $\lim \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = 1$, δηλαδή

$$\liminf \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = 1 = \limsup \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} .$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.3.3. (Κριτήριο ριζῶν τοῦ Cauchy). Ὑποθέτομε ὅτι γιά τή σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ ἰσχύει $\alpha_\nu \geqq 0$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Τότε ἄν

(i) $\limsup \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} < 1$, ἡ σειρά συγκλίνει

(ii) $\limsup \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} > 1$, ἡ σειρά ἀπειρίζεται θετικά.

Ἀπόδειξη. (i) θεωροῦμε ἕναν (θετικό) ἀριθμό ω μέ

$$\limsup \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} < \omega < 1$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὁπότε, τότε, ὑπάρχει δείκτης $k_0 > 1$ τέτοιος ὥστε

$$\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} < \omega \quad \text{γιά κάθε} \quad \nu \geqq k_0.$$

Ἄρα ἔχομε

$$\alpha_{k_0+\mu} < \omega^{k_0} \cdot \omega^{\mu}$$

καί ἔτσι

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \sum_{\nu=1}^{k_0-1} \alpha_\nu + \sum_{\nu=k_0}^{\infty} \alpha_\nu = \sum_{\nu=1}^{k_0-1} \alpha_\nu + \omega^{k_0} \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} \omega^{\mu} < +\infty$$

πού σημαίνει ὅτι ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει.

(ii) Στήν περίπτωση ὅπου $\limsup \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} > 1$, ὅπως εἶναι γνωστό (βλ. ἄσκηση 1.15.7) ἰσχύει

$$\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} > 1, \text{ ἤ ἰσοδύναμα } \alpha_\nu > 1$$

γιά ἄπειρο πλῆθος δεικτῶν $\nu \in \mathbb{N}$. Ἔτσι ἡ α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ δέν εἶναι μηδενική καί, σύμφωνα μέ τό θεώρημα 8.2.1, ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ ἀπειρίζεται θετικά. ▲

Παράδειγμα 8.3.3

Ἡ σειρά

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{2^\nu}+\frac{1}{3^\nu}+\ldots$$

συγκλίνει, γιατί ἐφαρμόζοντας τό κριτήριο ριζῶν τοῦ Cauchy βλέπομε ὅτι

$$\limsup \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = \lim \sqrt[2\nu-1]{\frac{1}{2^\nu}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

Παρατήρηση 8.3.2

Στήν περίπτωση ὅπου

$$\limsup \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = 1$$

δέν μποροῦμε νά ποῦμε ἄν ἡ σειρά συγκλίνη ἤ δέν συγκλίνει. Πραγματικά, γιά τίς σειρές

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)} \quad \text{καί} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$$

ἰσχύει

$$\limsup \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = \lim \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = \lim \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = 1,$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἐνῶ, ξέρομε ὅτι, ἡ πρώτη ἀπό αὐτές συγκλίνει καί ἡ δεύτερη ἀπειρίζεται θετικά.

Παρατήρηση 8.3.3

Εἶναι δυνατό πολλές φορές τά δυό παραπάνω κριτήρια νά μή μποροῦν νά ἐφαρμοστοῦν στήν ἴδια σειρά. Ἔτσι χρησιμοποιῶντας τήν ἀνισότητα (ἀφήνεται ὡς ἄσκηση)

$$\limsup \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} \leq \limsup \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu},$$

μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι τό κριτήριο ριζῶν εἶναι πιό καλό γιά νά διαπιστώσωμε ὅτι μιά σειρά συγκλίνει, ἐνῶ τό κριτήριο πηλίκων γιά νά διαπιστώσωμε ὅτι μιά σειρά ἀπειρίζεται θετικά. Τοῦτο π.χ. φαίνεται στά παραδείγματα 8.3.2 καί 8.3.3. Πραγματικά, γιά τή σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu$ ἔχομε

$$\limsup \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = \lim \sqrt[\nu]{\nu} = 1$$

καί

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{\nu+1}{\nu} > 1 \quad \text{γιά κάθε} \quad \nu \in \mathbb{N},$$

δηλαδή μέ τό κριτήριο ριζῶν δέν μποροῦμε νά δοῦμε ἄν ἡ σειρά συγκλίνη ἤ ἀπειρίζεται θετικά. Ἐπίσης γιά τή σειρά

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{2^\nu}+\frac{1}{3^\nu}+\ldots$$

εἴδαμε ὅτι

$$\limsup \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = \lim \sqrt[2\nu-1]{\frac{1}{2^\nu}} = \frac{1}{2} < 1$$

ἐνῶ

$$\limsup \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lim \frac{\frac{1}{2^{\nu-1}}}{\frac{1}{3^\nu}} = \frac{1}{2} \lim \left(\frac{3}{2}\right)^\nu = +\infty,$$

δηλαδή μέ τό κριτήριο πηλίκων δέν μποροῦμε νά δοῦμε ἄν ἡ σειρά αὐτή συγκλίνη ἤ ἀπειρίζεται θετικά.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.3.4. (Κριτήριο ὁλοκληρώματος τοῦ Cauchy). Ἄν γιά τή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ μέ μή ἀρνητικούς ὅρους ὑπάρχη μία φθίνουσα συνεχής συνάρτηση f πάνω σ'ἕνα διάστημα τῆς μορφῆς $[c,+\infty)$ τέτοια ὥστε νά ἰσχύη

$$f(\nu)=\alpha_\nu \quad \text{τελικῶς γιά ὅλα τά } \nu\in\mathbb{N},$$

τότε οἱ παρακάτω προτάσεις εἶναι ἰσοδύναμες:

(i) ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ εἶναι συγκλίνουσα,

(ii) τό γενικευμένο ὁλοκλήρωμα $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ συγκλίνει.

Ἀπόδειξη. Θεωροῦμε ἕνα δείκτη $\nu_0 \geqq c$ καί τήν ἀκολουθία $\beta_\nu=\alpha_{\nu_0+\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}$ πού προφανῶς εἶναι φθίνουσα καί ἀκόμη γιά κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ ἰσχύει

$$\beta_\nu=\alpha_{\nu_0+\nu}\geqq\int_{\nu_0+\nu}^{\nu_0+\nu+1} f(x)dx\geqq\alpha_{\nu_0+\nu+1}=\beta_{\nu+1}.$$

Ἔτσι, ἄν σ_ν εἶναι τό μερικό ἄθροισμα τῆς σειρᾶς $\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu$, ἔχομε

$$\sigma_\nu=\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu\geqq\int_{\nu_0+1}^{\nu_0+2} f(x)dx+\int_{\nu_0+2}^{\nu_0+3} f(x)dx+\ldots+\int_{\nu_0+\nu}^{\nu_0+\nu+1} f(x)dx$$

$$\geqq\beta_2+\beta_3+\ldots+\beta_{\nu+1}=\sigma_{\nu+1}-\beta_1,$$

δηλαδή

$$\sigma_\nu\geqq\int_{\nu_0+1}^{\nu_0+\nu+1} f(x)dx\geqq\sigma_{\nu+1}-\beta_1,$$

ἀπό ὅπου προκύπτει ὅτι ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu=\sum_{\nu=\nu_0+1}^{\infty}\alpha_\nu$ συγκλίνει, τότε καί μόνο τότε, ἄν τό $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ συγκλίνη. Αὐτό, βέβαια, ἀποδείχνει καί τήν ἰσοδυναμία τῶν προτάσεων (i) καί (ii). ▲

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παράδειγμα 8.3.3

Ἡ ἁρμονική σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{\rho}}$, $\rho \geq 0$, πού ἔχομε μελετήσει παραπάνω, εἶναι συγκλίνουσα γιά $\rho > 1$ καί ἀπειρίζεται θετικά γιά $\rho \leq 1$.

Τοῦτο προκύπτει ἀπό τό παραπάνω κριτήριο καί τό γεγονός ὅτι

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\rho}} = \begin{cases} \frac{1}{\rho-1}, & \text{ἄν } \rho > 1 \\ +\infty, & \text{ἄν } \rho \leq 1. \end{cases}$$

Β. ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

Θεωροῦμε τή σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1}\alpha_{\nu} = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - + \ldots,$$ ὅπου $\alpha_{\nu} \geq 0$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$

τήν ὁποία ὀνομάζομε "ἐναλλασσόμενη σειρά" ἤ "σειρά μέ ὅρους ἐναλλασσομένου προσήμου". Π.χ. ἡ σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \ldots$$

εἶναι μιά ἐναλλασσόμενη σειρά.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.3.5. Ἄν α_{ν}, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι μιά φθίνουσα μηδενική ἀκολουθία μή ἀρνητικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε ἡ σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1}\alpha_{\nu}$$

συγκλίνει.

Ἀπόδειξη. Πρῶτα παρατηροῦμε ὅτι ἡ ὑπακολουθία $\sigma_{2\nu-1}$, $\nu \in \mathbb{N}$ τῶν περιττῶν δεικτῶν τῆς ἀκολουθίας τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων σ_{ν}, $\nu \in \mathbb{N}$ τῆς σειρᾶς εἶναι συγκλίνουσα. Πραγματικά, ἔχομε

$$\sigma_{2(\nu+1)-1} - \sigma_{2\nu-1} = \alpha_{2\nu+1} - \alpha_{2\nu} \leq 0,$$

δηλαδή

$$\sigma_{2(\nu+1)-1} \leq \sigma_{2\nu-1} \quad \text{γιά κάθε } \nu \in \mathbb{N}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καί ἄρα ἡ $\sigma_{2\nu-1}$, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι φθίνουσα. Ἐπίσης ἰσχύει ὅτι

$$\sigma_{2\nu-1} = (\alpha_1-\alpha_2) + (\alpha_3-\alpha_4)+\ldots+(\alpha_{2\nu-3}-\alpha_{2\nu-2}) + \alpha_{2\nu-1} \geq 0$$

καί ἔτσι εἶναι καί φραγμένη. Ἄρα ἡ $\sigma_{2\nu-1}$, $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει πρός κάποιο πραγματικό ἀριθμό ℓ.

Ἐπειδή

$$\sigma_{2\nu} = \sigma_{2\nu-1}+\alpha_{2\nu} \quad \text{γιά κάθε} \quad \nu \in \mathbb{N},$$

παίρνομε ὅτι

$$\lim \sigma_{2\nu} = \lim(\sigma_{2\nu-1}+\alpha_{2\nu}) = \lim \sigma_{2\nu-1} + \lim \alpha_{2\nu} = \ell+0 = \ell$$

καί ἄρα καί

$$\lim \sigma_\nu = \ell,$$

πού σημαίνει ὅτι

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1}\alpha_\nu = \ell. \quad \blacktriangle$$

Παραδείγματα 8.3.4

1) Ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu}$ συγκλίνει. Πραγματικά, αὐτή εἶναι ἐναλλασσομένη καί ἡ ἀκολουθία $\frac{1}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ φθίνουσα καί μηδενική.

2) Ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu^\rho}$ συγκλίνει γιά κάθε $\rho > 0$. Πραγματικά, ἡ ἀκολουθία $\frac{1}{\nu^\rho}$, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι φθίνουσα καί μηδενική καί ἔτσι, ἐπειδή πρόκειται γιά ἐναλλασσόμενη σειρά, σύμφωνα μέ τό παραπάνω θεώρημα, αὐτή συγκλίνει.

Γ. ΑΠΟΛΥΤΗ ΚΑΙ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΕΙΡΩΝ

Μιά σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ θά λέμε ὅτι "συγκλίνει ἀπόλυτα", ἄν ἡ σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu|$$

εἶναι συγκλίνουσα. Ἄν ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ εἶναι συγκλίνουσα ἀλλά ὄχι καί

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἀπόλυτα συγκλίνουσα, τότε αὐτή ὀνομάζεται **"συγκλίνουσα ὑπό συνθήκη"**.

Στήν περίπτωση σειρῶν μή ἀρνητικῶν ὅρων οἱ ἔννοιες **"συγκλίνουσα"** καί **"ἀπόλυτα συγκλίνουσα"** σειρά εἶναι, προφανῶς, ταυτόσημες. Γιά σειρές ὅμως μέ θετικούς καί ἀρνητικούς ὅρους ὑπάρχουν οἱ παρακάτω τρεῖς δυνατότητες: **τῆς ἀπολύτου συγκλίσεως, τῆς ὑπό συνθήκη συγκλίσεως καί τῆς μή συγκλίσεως.**

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.3.2. **Ἄν ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ εἶναι ἀπόλυτα συγκλίνουσα τότε αὐτή εἶναι καί συγκλίνουσα.**

Ἀπόδειξη. Θέτοντας

$$\sigma_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k \quad \text{καί} \quad \tau_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} |\alpha_k|$$

ἔχομε

$$|\sigma_\nu - \sigma_\mu| = \left|\sum_{k=\mu+1}^{\nu} \alpha_k\right| \leq \sum_{k=\mu+1}^{\nu} |\alpha_k| = \tau_\nu - \tau_\mu = |\tau_\nu - \tau_\mu|.$$

Ἀλλά ἡ ἀκολουθία τ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι συγκλίνουσα καί ἄρα βασική. Ἔτσι καί ἡ σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι βασική καί ἄρα συγκλίνουσα, πρᾶγμα πού σημαίνει ὅτι ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ εἶναι συγκλίνουσα. ▲

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.3.3. **Ἄν α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ καί β_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι ἀκολουθίες πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ἰσχύει (ὁ τύπος τοῦ Abel):**

$$\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k \beta_k = \alpha_\nu \sum_{k=1}^{\nu} \beta_k - \sum_{k=1}^{\nu-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \sum_{i=1}^{k} \beta_i .$$

Ἀπόδειξη. Θέτοντας

$$s_\mu = \alpha_\mu \sum_{k=1}^{\mu} \beta_k - \sum_{k=1}^{\mu-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \sum_{i=1}^{k} \beta_i$$

γιά $\mu > 2$, ἔχομε

$$s_\mu = \alpha_\mu \beta_\mu + \alpha_\mu \sum_{k=1}^{\mu-1} \beta_k - \left((\alpha_\mu - \alpha_{\mu-1}) \sum_{i=1}^{\mu-1} \beta_i + \sum_{k=1}^{\mu-2} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \sum_{i=1}^{k} \beta_i \right) =$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$= \alpha_\mu \beta_\mu + \alpha_{\mu-1} \sum_{i=1}^{\mu-1} \beta_i - \sum_{k=1}^{\mu-2} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \sum_{i=1}^{k} \beta_i = \alpha_\mu \beta_\mu + s_{\mu-1},$$

δηλαδή

$$\alpha_\mu \beta_\mu = s_\mu - s_{\mu-1}.$$

Επομένως

$$\sum_{\mu=3}^{\nu} \alpha_\mu \beta_\mu = s_\nu - s_2 = s_\nu - (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2),$$

δηλαδή

$$\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k \beta_k = s_\nu = \alpha_\nu \sum_{k=1}^{\nu} \beta_k - \sum_{k=1}^{\nu-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \sum_{i=1}^{k} \beta_i. \blacktriangle$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.3.6. (Κριτήριο τοῦ Dirichlet). Ἄν α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι μιά φθίνουσα μηδενική ἀκολουθία καί β_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ μιά ἀκολουθία γιά τήν ὁποία ὑπάρχει σταθερά K τέτοια ὥστε νά ἰσχύη

$$\left| \sum_{k=1}^{\nu} \beta_k \right| \leqq K \quad \text{γιά κάθε } \nu \in \mathbb{N},$$

τότε ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \beta_\nu$ εἶναι συγκλίνουσα.

Ἀπόδειξη. Σύμφωνα μέ τόν τύπο τοῦ Abel, γιά τήν ἀκολουθία σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῆς σειρᾶς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \beta_\nu$, ἔχομε

$$\sigma_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k \beta_k = \alpha_\nu \sum_{k=1}^{\nu} \beta_k - \sum_{k=1}^{\nu-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \sum_{i=1}^{k} \beta_i = s_\nu - \tau_{\nu-1}, \quad \nu > 1$$

ὅπου τέθηκε

$$s_\nu = \alpha_\nu \sum_{k=1}^{\nu} \beta_k \quad \text{καί} \quad \tau_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \sum_{i=1}^{k} \beta_i.$$

Ἀλλά

$$|s_\nu| = \left|\alpha_\nu \sum_{k=1}^{\nu} \beta_k\right| = \alpha_\nu \left| \sum_{k=1}^{\nu} \beta_k \right| \leqq K \alpha_\nu \to 0,$$

δηλαδή

$$\lim s_\nu = 0$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καί ἀκόμη

$$\sum_{k=1}^{\nu} \left|(\alpha_{k+1}-\alpha_k)\sum_{i=1}^{k}\beta_i\right| = \sum_{k=1}^{\nu}(\alpha_k-\alpha_{k+1})\left|\sum_{i=1}^{k}\beta_i\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\nu} K(\alpha_k-\alpha_{k+1}) = K\alpha_1 ,$$

τό ὁποῖο, σύμφωνα μέ τήν Πρόταση 8.3.2, συνεπάγεται ὅτι καί ἡ ἀκολουθία τ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι συγκλίνουσα. Ἄρα καί ἡ σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι συγκλίνουσα, δηλαδή ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu\beta_\nu$. ▲

Σημείωση

Μέ μιά ἁπλή ἐφαρμογή τοῦ θεωρήματος τούτου μποροῦμε νά πάρωμε τώρα καί μιάν ἄλλη ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος 8.3.5. Πραγματικά, ἀρκεῖ νά δοῦμε ὅτι μιά ἐναλλασσόμενη σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1}\alpha_\nu$$

γράφεται καί μέ τή μορφή

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu\beta_\nu , \quad \text{ὅπου} \quad \beta_\nu = (-1)^{\nu+1}.$$

Παραδείγματα 8.3.5

1) **Ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu}$ συγκλίνει ὑπό συνθήκη.** Πραγματικά· αὐτή εἶναι ἐναλλασσόμενη καί ἐπί πλέον ἡ ἀκολουθία $\left|\frac{(-1)^\nu}{\nu}\right| = \frac{1}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι φθίνουσα καί μηδενική. Ἄρα ἡ σειρά συγκλίνει. Ἀπόλυτα ὅμως ἡ σειρά δέν συγκλίνει ὅπως εἴδαμε στό παράδειγμα 8.1.1. 2).

2) **Ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \log\nu}{\nu}$ συγκλίνει ὑπό συνθήκη.** Πραγματικά· αὐτή εἶναι ἐναλλασσόμενη καί γιά τήν ἀκολουθία τῶν ὅρων της ἰσχύει

$$\lim|\alpha_\nu| = \lim \frac{1}{\nu}\log\nu = \lim \log \nu^{\frac{1}{\nu}} = \lim \log \sqrt[\nu]{\nu} = \log \lim \sqrt[\nu]{\nu} = \log 1 = 0$$

καί ἐπί πλέον

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$|\alpha_\nu| = \frac{\log \nu}{\nu} \geqq \frac{\log(\nu+1)}{\nu+1} = |\alpha_{\nu+1}|.$$

(Τό τελευταῖο τοῦτο προκύπτει ἀπό τό γεγονός ὅτι ἰσχύει

$$\left[\frac{\log x}{x}\right]' = \frac{1-\log x}{x^2} < 0 \quad \text{γιά κάθε} \quad x > e)$$

Ἄρα ἡ σειρά αὐτή εἶναι συγκλίνουσα. Ἀπόλυτα συγκλίνουσα ὅμως δέν εἶναι ἀφοῦ

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^\nu \log \nu}{\nu}\right| = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\log \nu}{\nu} = +\infty ,$$

διότι οἱ ὑποθέσεις τοῦ Πορίσματος 8.3.1 ἐπαληθεύονται ἀφοῦ

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} = +\infty$$

καί

$$\limsup \frac{\frac{1}{\nu}}{\frac{\log \nu}{\nu}} = \lim \frac{1}{\log \nu} = 0 < +\infty .$$

3) Ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \omega\nu}{\nu^2}$ εἶναι ἀπόλυτα συγκλίνουσα. Πραγματικά γιά τήν ἀκολουθία τῶν ὅρων της $\alpha_\nu = \frac{\sin \omega\nu}{\nu^2}$ ἰσχύει

$$|\alpha_\nu| = \frac{|\sin \omega\nu|}{\nu^2} \leqq \frac{1}{\nu^2}$$

καί τό συμπέρασμα προκύπτει ἀμέσως ἀπό τό θεώρημα 8.3.1 καί τό γεγονός ὅτι ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}$ συγκλίνει.

4) Ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \omega\nu}{\nu}$, $\frac{\omega}{\pi} \notin \mathbb{Z}$, συγκλίνει ὑπό συνθήκη. Γιά νά δοῦμε τό γεγονός τοῦτο θά ἐφαρμόσωμε τό κριτήριο τοῦ Dirichlet παίρνοντας

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\nu} \quad \text{καί} \quad \beta_\nu = \cos \omega\nu .$$

Προφανῶς ἡ α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι φθίνουσα καί μηδενική ἀκολουθία. Γιά νά ἀπο-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δείξωμε ὅτι τά μερικά ἀθροίσματα $\sum_{k=1}^{\nu} \cos \omega k$, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι φραγμένα, παρατηροῦμε ὅτι

$$\sin \frac{\omega}{2} \sum_{k=1}^{\nu} \cos \omega k = \sum_{k=1}^{\nu} \sin \frac{\omega}{2} \cos \omega k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{2} [\sin \omega (k + \frac{1}{2}) - \sin \omega (k - \frac{1}{2})] =$$

$$= \frac{1}{2} [\sin \omega (\nu + \frac{1}{2}) - \sin \frac{\omega}{2}] .$$

Ἑπομένως, ἀφοῦ $\frac{\omega}{\pi} \notin \mathbb{Z}$, τότε $\sin \frac{\omega}{2} \neq 0$, ὁπότε ἔχομε

$$\left| \sum_{k=1}^{\nu} \cos \omega k \right| = \frac{\left|\sin \omega (\nu + \frac{1}{2}) - \sin \frac{\omega}{2}\right|}{2\left|\sin \frac{\omega}{2}\right|} \leq \frac{2}{2\left|\sin \frac{\omega}{2}\right|} = \frac{1}{\left|\sin \frac{\omega}{2}\right|} .$$

Ἄρα ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \omega\nu}{\nu}$ εἶναι συγκλίνουσα.

Ἡ σειρά αὐτή ὅμως δέν συγκλίνει ἀπόλυτα. Πραγματικά, ἔχομε

$$|\cos \omega k| \geq \cos^2 \omega k = \frac{1+\cos 2\omega k}{2}$$

καί ἑπομένως

$$\sum_{k=1}^{\nu} \frac{|\cos \omega k|}{k} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1+\cos 2\omega k}{k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\cos 2\omega k}{k} .$$

Ἀλλά ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$ ἀπειρίζεται θετικά ὡς ἐπίσης καί ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos 2\omega\nu}{\nu}$ ὅταν $\frac{\omega}{\pi} \in \mathbb{Z}$, ἐνῶ διά $\frac{\omega}{\pi} \notin \mathbb{Z}$, ὅπως δείξαμε παραπάνω συγκλίνει. Ἔτσι πάντοτε ἰσχύει

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|\cos \omega\nu|}{\nu} = +\infty.$$

8.4 ΥΠΟΣΕΙΡΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΣΕΙΡΩΝ

Ἄν δοθῆ μιά ἀκολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ ὁρίζομε τίς ἀκολουθίες α_ν^+, $\nu \in \mathbb{N}$ καί α_ν^-, $\nu \in \mathbb{N}$ ὡς ἑξῆς:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\alpha_\nu^+ = \begin{cases} \alpha_\nu \ , & \text{ἄν} \quad \alpha_\nu \geqq 0 \\ 0 \ , & \text{ἄν} \quad \alpha_\nu < 0 \end{cases}$$

καί

$$\alpha_\nu^- = \begin{cases} -\alpha_\nu \ , & \text{ἄν} \quad \alpha_\nu \leqq 0 \\ 0 \ , & \text{ἄν} \quad \alpha_\nu > 0 \ . \end{cases}$$

Εὔκολα φαίνεται ὅτι ἰσχύουν τά ἑξῆς:

$$\alpha_\nu = \alpha_\nu^+ - \alpha_\nu^-$$
$$|\alpha_\nu| = \alpha_\nu^+ + \alpha_\nu^-$$
$$\alpha_\nu^+ = \frac{1}{2}(|\alpha_\nu| + \alpha_\nu)$$
$$\alpha_\nu^- = \frac{1}{2}(|\alpha_\nu| - \alpha_\nu) .$$

Ἀναφέρομε τώρα τίς παρακάτω προτάσεις τῶν ὁποίων ὅμως οἱ ἀποδείξεις, πού στηρίζονται στίς παραπάνω σχέσεις, εἶναι προφανεῖς καί γι' αὐτό παραλείπονται.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.4.1. Ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει ἀπόλυτα, τότε καί μόνο τότε, ἄν οἱ σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu^+$ καί $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu^-$ συγκλίνουν.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.4.2. Ἄν ἡ μία ἀπό τίς σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu^+$ καί $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu^-$ εἶναι συγκλίνουσα καί ἡ ἄλλη ἀπειρίζεται θετικά, τότε ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει κατ'ἐκδοχήν.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.4.3. Ἄν ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει ὑπό συνθήκη, τότε οἱ σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu^+$ καί $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu^-$ ἀπειρίζονται θετικά.

Θεωροῦμε, τώρα, μιά ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ καί μιά ἀμφιμονοσήμαντη ἀκολουθία φυσικῶν ἀριθμῶν μ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$. Τότε ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\mu_\nu}$ ὀνομάζεται "ὑποσειρά" τῆς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$. Ἄν συμβαίνη

$$\{\mu_\nu : \nu \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N},$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

τότε ἡ α_{μ_ν}, $\nu \in \mathbb{N}$ ὀνομάζεται "**ἀντίγραφο**" τῆς α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, ἐνῶ ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\mu_\nu}$ ὀνομάζεται "**ἀναδιάταξη**" τῆς σειρᾶς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$.

Ἡ ἀναδιάταξη τῶν ὅρων μιᾶς σειρᾶς πολλές φορές ἐπιδρᾶ πάνω στό ἄθροισμά της. Τοῦτο γιά παράδειγμα φαίνεται μέ τή σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

Ἄν α εἶναι τό ἄθροισμα τῆς σειρᾶς αὐτῆς, τότε καί γιά τήν ἀκολουθία σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων της ἰσχύει

$$\lim \sigma_\nu = \alpha \quad \text{καί ἄρα} \quad \lim \sigma_{2\nu} = \alpha.$$

Ὅμως ἡ ἀκολουθία $\sigma_{2\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι αὔξουσα ἀκολουθία θετικῶν ὅρων, τό ὁποῖο σημαίνει ὅτι $\alpha > 0$ (μάλιστα δέ $\alpha = \log 2$). Ἀλλά

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \dots = \alpha$$

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + \dots = \frac{1}{2}\alpha$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + 0 + \dots = \frac{3}{2}\alpha$$

ἤτοι

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{3}{2}\alpha.$$

Ἀλλά ἡ τελευταῖα σειρά εἶναι, ὅπως μπορεῖ νά διαπιστωθῆ εὔκολα, μιά ἀναδιάταξη τῆς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu}$.

Πρίν ἀναφέρομε ἕνα βασικό θεώρημα γιά τίς ἀναδιατάξεις τῶν σειρῶν θά δώσωμε ἕνα σημαντικό λῆμμα.

ΛΗΜΜΑ 8.4.1. **Ἄν ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνη ὑπό συνθήκη, τότε ὑπάρχει μή συγκλίνουσα ἀναδιάταξη αὐτῆς.**

Ἀπόδειξη. Σύμφωνα μέ τήν Πρόταση 8.4.3 καί οἱ δυό οἱ σειρές

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^+$ καί $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^-$ ἀπειρίζονται θετικά. Κατασκευάζομε τώρα μιά μή συγκλίνουσα ἀναδιάταξη τῆς σειρᾶς $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ ὡς ἑξῆς:

Παίρνομε τά ἄθροισμα τῶν πρώτων μή ἀρνητικῶν ὅρων μέχρις ὅτου τοῦτο γίνη μεγαλύτερο τοῦ 1 καί ἔπειτα προσθέτομε σ'αὐτό τόν πρῶτο ἀρνητικό ὅρο. Ἔπειτα προσθέτομε τούς πρώτους ἀπ'τούς ὑπόλοιπους μή ἀρνητικούς ὅρους μέχρις ὅτου τό ἄθροισμα πού προκύπτει γίνη μεγαλύτερο τοῦ 2 καί ἔπειτα προσθέτομε σ'αὐτό τόν δεύτερο ἀρνητικό ὅρο. Ἡ διαδικασία αὐτή μπορεῖ νά συνεχιστῆ γιατί ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^+$ ἀπειρίζεται θετικά. Ἔτσι, ἄν στό σχηματιζόμενο ἄθροισμα ἔχη περιληφθῆ ὁ $(\nu-1)$-στός ἀρνητικός ὅρος, τότε προσθέτομε τούς πρώτους ἀπ'τούς ὑπόλοιπους μή ἀρνητικούς ὅρους μέχρις ὅτου τό ἄθροισμα πού προκύπτει γίνη μεγαλύτερο τοῦ ν καί ἔπειτα προσθέτομε σ'αὐτό τόν ν-στό ἀρνητικό ὅρο. Ἔτσι ἐπαγωγικά κατασκευάστηκε μιά ἀναδιάταξη τῆς σειρᾶς $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ ἡ ὁποία, προφανῶς, δέν συγκλίνει. ▲

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.4.1. **Γιά ὁποιαδήποτε σειρά οἱ παρακάτω προτάσεις εἶναι ἰσοδύναμες:**

(i) **ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ συγκλίνει ἀπόλυτα,**

(ii) **κάθε ὑποσειρά τῆς $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ εἶναι συγκλίνουσα,**

(iii) **κάθε ἀναδιάταξη τῆς $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ εἶναι συγκλίνουσα.**

Ἀπόδειξη. Ἔστω $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\mu_\nu}$ μιά ὁποιαδήποτε ὑποσειρά τῆς $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$. Τότε γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ἰσχύει

$$\sum_{k=1}^{\nu} |a_{\mu_k}| \leq \sum_{k=1}^{m_\nu} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

ὅπου

$$m_\nu = \max\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu\}.$$

Ἄρα ἡ (i) συνεπάγεται τή (ii). Τό ὅτι ἡ (ii) συνεπάγεται τήν (iii) εἶναι φανερό, ἀφοῦ ἀπό τόν ὁρισμό μιά ἀναδιάταξη εἶναι καί ὑποσειρά. Ἀπομένει, λοιπόν, νά ἀποδειχτῆ ὅτι ἡ (iii) συνεπάγεται τήν (i). Ἀλλά ἡ (iii) δηλώνει ὅτι καί ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ εἶναι συγκλίνουσα ἐνῶ τό Λῆμμα 8.4.1

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ὅτι αὐτή δέν μπορεῖ νά συγκλίνη ὑπό συνθήκη καί ἔτσι τό θεώρημα ἀποδείχτηκε. ▲

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.4.4. Ἄν $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ εἶναι μιά συγκλίνουσα σειρά μή ἀρνητικῶν ὅρων, τότε κάθε ἀναδιάταξη αὐτῆς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\mu_\nu}$ εἶναι ἐπίσης συγκλίνουσα καί μάλιστα ἰσχύει

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\mu_\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu .$$

Ἀπόδειξη. Θέτομε

$$\sigma_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k \quad \text{καί} \quad \tau_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_{\mu_k}$$

καί

$$m_\nu = \max\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu\}.$$

Τότε, προφανῶς, ἰσχύει

$$\tau_\nu \leq \sigma_{m_\nu} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$$

καί ἑπομένως

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\mu_\nu} = \lim \tau_\nu \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu .$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ἀναδιάταξη συγκλίνει καί τό ἄθροισμά της εἶναι μικρότερο ἤ ἴσο τοῦ ἀθροίσματος τῆς ἀρχικῆς σειρᾶς. Ἀλλά καί ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ εἶναι μιά ἀναδιάταξη τῆς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\mu_\nu}$ καί ἔτσι θά ἰσχύη καί

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\mu_\nu}$$

καί ἑπομένως

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\mu_\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu . \ ▲$$

Θεωροῦμε τώρα δυό σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ καί $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$. Ὀνομάζομε "κατά Cauchy γινόμενο" τῶν σειρῶν τούτων τή σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu$ μέ ν-στό ὅρο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\gamma_\nu = \alpha_1\beta_\nu + \alpha_2\beta_{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu\beta_1 = \sum_{k=0}^{\nu-1} \alpha_{k+1}\beta_{\nu-k} .$$

Γιά τό κατά Cauchy γινόμενο τῶν σειρῶν ἰσχύει τό παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.4.2. (τῶν Cauchy - Mertens). Ἄν οἱ σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ καί $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ εἶναι συγκλίνουσες καί ἀκόμη ἡ μία ἀπό αὐτές εἶναι καί ἀπόλυτα συγκλίνουσα, τότε τό κατά Cauchy γινόμενο αὐτῶν $\sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu$ συγκλίνει καί μάλιστα ἰσχύει

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu = \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu\right)\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu\right).$$

Ἀπόδειξη. Χωρίς βλάβη τῆς γενικότητας, ὑποθέτομε ὅτι ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ εἶναι ἀπόλυτα συγκλίνουσα. Ἔπειτα θέτομε

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \ell_1 , \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu = \ell_2$$

$$\sigma_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k , \quad \tau_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \beta_k , \quad s_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \gamma_k , \quad \delta_\nu = \tau_\nu - \ell_2$$

καί ἔτσι ἔχομε

$$\begin{aligned} s_\nu &= \alpha_1\beta_1 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + \ldots + (\alpha_1\beta_\nu + \alpha_2\beta_{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu\beta_1) \\ &= \alpha_1\tau_\nu + \alpha_2\tau_{\nu-1} + \ldots + \alpha_{\nu-1}\tau_2 + \alpha_\nu\tau_1 \\ &= \alpha_1(\ell_2+\delta_\nu) + \alpha_2(\ell_2+\delta_{\nu-1}) + \ldots + \alpha_{\nu-1}(\ell_2+\delta_2) + \alpha_\nu(\ell_2+\delta_1) \\ &= \sigma_\nu\ell_2 + \alpha_1\delta_\nu + \alpha_2\delta_{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu\delta_1, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$s_\nu = \sigma_\nu\ell_2 + \eta_\nu,$$

ὅπου θέσαμε

$$\eta_\nu = \alpha_1\delta_\nu + \alpha_2\delta_{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu\delta_1.$$

Θεωροῦμε τώρα ἕναν θετικό ἀριθμό ε, ὁπότε, ἐπειδή $\lim \delta_\nu = 0$, ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ τέτοιος ὥστε γιά κάθε $\nu > \nu_0$ νά ἰσχύη

$$|\delta_\nu| < \varepsilon.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἑπομένως γιά κάθε $\nu > \nu_0$ ἰσχύει

$$|\eta_\nu| = |(\alpha_\nu\delta_1+\ldots+\alpha_{\nu-\nu_0}\delta_{\nu_0}) + \alpha_{\nu-(\nu_0+1)}\delta_{\nu_0+1}+\ldots+\alpha_1\delta_\nu|$$

$$\leq |\alpha_\nu\delta_1+\ldots+\alpha_{\nu-\nu_0}\delta_{\nu_0}| + |\alpha_{\nu-(\nu_0+1)}||\delta_{\nu_0+1}|+\ldots+|\alpha_1||\delta_\nu|$$

$$\leq |\alpha_\nu\delta_1+\ldots+\alpha_{\nu-\nu_0}\delta_{\nu_0}| + \varepsilon(|\alpha_{\nu-(\nu_0+1)}|+\ldots+|\alpha_1|)$$

$$\leq |\alpha_\nu\delta_1+\ldots+\alpha_{\nu-\nu_0}\delta_{\nu_0}| + \varepsilon\,\ell,$$

ὅπου ℓ εἶναι τό ἄθροισμα τῆς σειρᾶς $\sum_{\nu=1}^{\infty}|\alpha_\nu|$.

Ἀλλά ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu\in\mathbb{N}$ εἶναι μηδενική καί ἑπομένως

$$\lim_\nu|\alpha_\nu\delta_1+\ldots+\alpha_{\nu-\nu_0}\delta_{\nu_0}| = 0.$$

Ἄρα ἰσχύει

$$\limsup|\eta_\nu| \leq \varepsilon\ell$$

καί τοῦτο γιά κάθε $\varepsilon > 0$, πού σημαίνει ὅτι

$$\limsup|\eta_\nu| = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad \lim|\eta_\nu| = 0 \quad \text{καί} \quad \lim\eta_\nu = 0.$$

Ἔχομε, λοιπόν,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\gamma_\nu = \lim s_\nu = (\lim\sigma_\nu)\,\ell_2 + \lim\eta_\nu = (\lim\sigma_\nu)(\lim\tau_\nu)$$

$$= \Big(\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu\Big)\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu\Big). \quad \blacktriangle$$

Παρατήρηση 8.4.1

Τό κατά Cauchy γινόμενο δυό σειρῶν εἶναι δυνατό νά συγκλίνη ὑπό συνθήκη, ὅπως π.χ. συμβαίνει μέ τίς σειρές

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu^2} \quad \text{καί} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu}.$$

Πραγματικά· τό κατά Cauchy γινόμενο $\sum_{\nu=1}^{\infty}\gamma_\nu$ τῶν σειρῶν τούτων, σύμφωνα μέ τό παραπάνω θεώρημα, ἀποτελεῖ συγκλίνουσα σειρά. Ἐπί πλέον

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ἔχομε

$$\gamma_\nu = \frac{(-1)^1}{1^2}\cdot\frac{(-1)^\nu}{\nu} + \frac{(-1)^2}{2^2}\cdot\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu-1} + \ldots + \frac{(-1)^{\nu-1}}{(\nu-1)^2}\cdot\frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^\nu}{\nu^2}\cdot\frac{(-1)^1}{1}$$

$$= (-1)^{\nu+1}\left[\frac{1}{\nu} + \frac{1}{2^2(\nu-1)} + \ldots + \frac{1}{(\nu-1)^2 2} + \frac{1}{\nu^2}\right]$$

καί ἑπομένως

$$|\gamma_\nu| \geqq \frac{1}{\nu},$$

πού προφανῶς δίνει

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\gamma_\nu| = +\infty,$$

δηλαδή ὅτι ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu$ συγκλίνει ὑπό συνθήκη.

ΠΟΡΙΣΜΑ 8.4.1. Ἄν καί οἱ δυό σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ καί $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ συγκλίνουν ἀπόλυτα, τότε καί τό κατά Cauchy γινόμενο αὐτῶν $\sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu$ συγκλίνει ἀπόλυτα.

Ἀπόδειξη. Οἱ σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu|$ καί $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\beta_\nu|$ ἱκανοποιοῦν τίς ὑποθέσεις τοῦ παραπάνω θεωρήματος καί ἑπομένως τό κατά Cauchy γινόμενο $\sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu$ αὐτῶν συγκλίνει. Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ἰσχύει

$$|\gamma_\nu| = \left|\sum_{k=1}^{\nu-1} \alpha_{k+1}\beta_{\nu-k}\right| \leqq \sum_{k=1}^{\nu-1} |\alpha_{k+1}||\beta_{\nu-k}| = \delta_\nu$$

καί ἄρα ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\gamma_\nu|$ συγκλίνει. Ἐξ ἄλλου εἶναι φανερό ὅτι ἰσχύει καί

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\gamma_\nu| \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu = \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu|\right)\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |\beta_\nu|\right). \blacktriangle$$

Στό παραπάνω παράδειγμα τῆς παρατηρήσεως 8.4.1 παρατηροῦμε ὅτι ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu}$ δέν συγκλίνει ἀπόλυτα. Σ'αὐτό, ἀκριβῶς, τό γεγονός ὀφείλεται καί τό ὅτι τό γινόμενο συγκλίνει ὑπό συνθήκη.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

8.5 ΔΕΚΑΔΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Οἱ συγκλίνουσες σειρές μποροῦν νά θεωρηθοῦν καί ὡς διαφορετικοί τρόποι συμβολισμοῦ τῶν ὁρίων τους, δηλαδή τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἕνας τέτοιος τρόπος συμβολισμοῦ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι καί ἐκεῖνος πού, ὅπως θά δοῦμε παρακάτω, προκύπτει ἀπό τά **"δεκαδικά ἀναπτύγματα"**, πού εἶναι μιά εἰδική μορφή σειρῶν.

Θεωροῦμε μιά ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν τῆς μορφῆς

$$\alpha_\nu = \frac{\psi_\nu}{10^\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N},$$

ὅπου ψ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, μέ

$$0 \leqq \psi_\nu \leqq 9 \quad \text{γιά κάθε} \quad \nu \in \mathbb{N}$$

καί ὀνομάζονται **"ψηφία"**. Μιά σειρά τῆς μορφῆς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\psi_\nu}{10^\nu}$ ὀνομάζεται **"δεκαδικό ἀνάπτυγμα"** καί παριστάνεται μέ

$$0,\psi_1\psi_2\ldots \quad \text{ἤ} \quad 0,\psi_1\psi_2\ldots\psi_\nu\ldots$$

Ἰσχύει τό παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.5.1. **Κάθε δεκαδικό ἀνάπτυγμα συγκλίνει πρός ἕναν πραγματικό ἀριθμό τοῦ διαστήματος** $[0,1]$.

Ἀπόδειξη. Τό δεκαδικό ἀνάπτυγμα

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\psi_\nu}{10^\nu}$$

εἶναι μιά σειρά, τῆς ὁποίας ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι

$$\sigma_\nu = \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \ldots + \frac{\psi_\nu}{10^\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Πρῶτα παρατηροῦμε ὅτι γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ἰσχύει

$$\sigma_{\nu+1} - \sigma_\nu = \frac{\psi_{\nu+1}}{10^{\nu+1}} \geqq 0,$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δηλαδή

$$\sigma_\nu \leqq \sigma_{\nu+1} \quad \text{γιά κάθε} \quad \nu \in \mathbb{N},$$

πού σημαίνει ὅτι ἡ ἀκολουθία σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι αὔξουσα.

Ἀκόμη ἰσχύει ὅτι

$$\sigma_\nu = \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \ldots + \frac{\psi_\nu}{10^\nu} \leqq \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \ldots + \frac{9}{10^\nu}$$

$$= \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10^{\nu-1}}\right) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1 - \frac{1}{10^\nu}}{1 - \frac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{10^\nu} < 1,$$

δηλαδή

$$\sigma_\nu < 1 \quad \text{γιά κάθε} \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ σ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, πού εἶναι αὔξουσα εἶναι καί φραγμένη. Ἄρα συγκλίνει πρός ἕναν πραγματικό ἀριθμό u. Ἀλλά ἰσχύει

$$0 \leqq \sigma_\nu < 1 \quad \text{γιά κάθε} \quad \nu \in \mathbb{N}$$

καί ἄρα

$$0 \leqq \lim \sigma_\nu \leqq 1, \quad \text{δηλαδή} \quad 0 \leqq u \leqq 1.$$

Ἑπομένως ἔχομε

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\psi_\nu}{10^\nu} = u \quad \text{ὅπου} \quad u \in [0,1]. \ \blacktriangle$$

Τώρα, ἄν ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\psi_\nu}{10^\nu}$ συγκλίνη πρός τό $u \in [0,1]$, τότε λέμε ὅτι τό u ἔχει δεκαδικό ἀνάπτυγμα τή σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\psi_\nu}{10^\nu}$ καί θά γράφωμε

$$u = 0,\psi_1\psi_2\ldots$$

Ἔτσι κάθε σειρά τῆς μορφῆς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\psi_\nu}{10^\nu}$ εἶναι τό δεκαδικό ἀνάπτυγμα κάποιου ἀριθμοῦ u τοῦ διαστήματος [0,1].

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παραδείγματα 8.5.1

1) Ὁ ἀριθμός 0 ἔχει δεκαδικό ἀνάπτυγμα τή σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{0}{10^{\nu}}$ καί ἔτσι ἔχομε

$$0 = 0,00...$$

2) Ὁ ἀριθμός 1 ἔχει δεκαδικό ἀνάπτυγμα τή σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{9}{10^{\nu}}$ καί ἔτσι ἔχομε

$$1 = 0,99...$$

3) Ὁ ἀριθμός $\frac{1}{2}$ ἔχει δεκαδικά ἀναπτύγματα τίς σειρές $\frac{5}{10} + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{0}{10^{\nu}}$ καί $\frac{4}{10} + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{9}{10^{\nu}}$ καί ἔτσι ἔχομε

$$\frac{1}{2} = 0,500... \quad \text{καί} \quad \frac{1}{2} = 0,499...$$

4) Ὁ ἀριθμός $\frac{31}{50}$ ἔχει δεκαδικά ἀναπτύγματα τίς σειρές $\frac{6}{10} + \frac{2}{10^2} + \sum_{\nu=3}^{\infty} \frac{0}{10^{\nu}}$ καί $\frac{6}{10} + \frac{1}{10^2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{9}{10^{\nu}}$ καί ἔτσι ἔχομε

$$\frac{31}{50} = 0,6200... \quad \text{καί} \quad \frac{31}{50} = 0,6199...$$

Ἀπό τά παραπάνω παραδείγματα βλέπομε ὅτι ὑπάρχουν ἀριθμοί μέ δυό δεκαδικά ἀναπτύγματα. Ἐπί πλέον παρατηροῦμε ὅτι τό ἕνα ἀπό τά δυό δεκαδικά αὐτά ἀναπτύγματα ἀπό κάπου καί πέρα συνεχίζεται μόνο μέ τό ψηφίο 9.

Πολλές φορές ἕνα δεκαδικό ἀνάπτυγμα ἀπό κάπου καί πέρα συνεχίζεται μέ τό ψηφίο 0, ὅπως τό

$$0,\psi_1\psi_2...\psi_\lambda 000...$$

Τότε τά μηδενικά ψηφία πού ἀκολουθοῦν τό ψ_λ παραλείπονται καί γράφομε ἁπλούστερα

$$0,\psi_1\psi_2...\psi_\lambda.$$

Στήν περίπτωση αὐτή τό παραπάνω ἀνάπτυγμα ἐκφράζεται καί μέ ἕνα ἁπλό γενικευμένο ἄθροισμα, δηλαδή ἔχομε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$0,\psi_1\psi_2\ldots\psi_\lambda = \frac{\psi_1}{10}+\frac{\psi_2}{10^2}+\ldots+\frac{\psi_\lambda}{10^\lambda} = \sum_{\nu=1}^{\lambda}\frac{\psi_\nu}{10^\nu}\ .$$

Γιά παράδειγμα

ἀντί τοῦ 0,510200... γράφομε 0,5102

καί μάλιστα ἔχομε

$$0,5102 = \frac{5}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{0}{10^3}+\frac{2}{10^4}\ .$$

Ἐπίσης, ἄς θεωρήσωμε ἕνα **περιοδικό δεκαδικό ἀνάπτυγμα**, δηλαδή ἕνα δεκαδικό ἀνάπτυγμα τῆς μορφῆς

$$0,\psi_1\psi_2\ldots\psi_k x_1 x_2\ldots x_\mu x_1 x_2\ldots x_\mu x_1\ldots$$

ὅπου τά μ ψηφία πού ἀκολουθοῦν τό ψ_k ἐπαναλαμβάνονται μέ τήν ἴδια διαδοχή. Ὑποθέτομε ὅτι αὐτό εἶναι τό δεκαδικό ἀνάπτυγμα κάποιου ἀριθμοῦ $u\in[0,1]$, δηλαδή

$$u = 0,\psi_1\psi_2\ldots\psi_k x_1 x_2\ldots x_\mu\ldots$$

θέτοντας

$$\upsilon = 0,x_1x_2\ldots x_\mu x_1\ldots = \left(\frac{x_1}{10}+\frac{x_2}{10^2}+\ldots+\frac{x_\mu}{10^\mu}\right)+\left(\frac{x_1}{10^{\mu+1}}+\ldots\right)+\ldots$$

ἔχομε

$$10^\mu\upsilon = (10^{\mu-1}x_1+10^{\mu-2}x_2+\ldots+x_\mu)+\left(\frac{x_1}{10}+\ldots+\frac{x_\mu}{10^\mu}+\ldots\right)$$

$$= X+\upsilon,$$

ὅπου $X = 10^{\mu-1}x_1+10^{\mu-2}x_2+\ldots+x_\mu$. Ἄρα

$$\upsilon = \frac{X}{10^\mu-1}\ .$$

Παρόμοια, θέτοντας $Y = 10^{k-1}\psi_1+10^{k-2}\psi_2+\ldots+\psi_k$, ἔχομε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$10^k u = (10^{k-1}\psi_1 + 10^{k-2}\psi_2 + \ldots + \psi_k) + \left(\frac{X_1}{10} + \frac{X_2}{10^2} + \ldots\right)$$

$$= Y + \upsilon = Y + \frac{X}{10^\mu - 1}$$

καί ἄρα

$$u = \frac{Y}{10^k} + \frac{X}{10^k(10^\mu - 1)} .$$

Ἀποδείξαμε, λοιπόν, ὅτι ὁ ἀριθμός u εἶναι ρητός ἀριθμός ἀφοῦ οἱ ἀριθμοί X καί Y εἶναι ἀκέραιοι καί ἔτσι ἔχομε τήν ἑξῆς πρόταση:

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.5.1. **Κάθε περιοδικό δεκαδικό ἀνάπτυγμα παριστάνει ἕναν ρητό ἀριθμό τοῦ διαστήματος [0,1].**

Παραπάνω ἀποδείξαμε ὅτι κάθε δεκαδικό ἀνάπτυγμα ἔχει ὅριο ἕναν ἀριθμό τοῦ διαστήματος [0,1]. Τώρα θά δοῦμε τό ἀντίστροφο, δηλαδή ὅτι κάθε ἀριθμός τοῦ [0,1] ἔχει τουλάχιστο ἕνα δεκαδικό ἀνάπτυγμα. Συγκεκριμένα ἰσχύει τό παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.5.2. **Κάθε πραγματικός ἀριθμός τοῦ διαστήματος [0,1] ἔχει ἕνα τουλάχιστο δεκαδικό ἀνάπτυγμα.**

Ἀπόδειξη. Θεωροῦμε ἕναν πραγματικό ἀριθμό $u \in [0,1]$ καί ἐξετάζομε τίς παρακάτω δυό περιπτώσεις:

(i) Ὁ ἀριθμός u μπορεῖ νά γραφῆ μέ τή μορφή $\frac{k}{10^\mu}$, ὅπου k εἶναι ἀκέραιος καί $\mu \in \mathbb{N}$.

Ἐπειδή στό δεκαδικό σύστημα ἀριθμήσεως ὁ k ἐκφράζεται ὡς τό ἄθροισμα

$$10^{\mu-1}\psi_1 + 10^{\mu-2}\psi_2 + \ldots + \psi_\mu, \quad \text{ὅπου } \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\mu \text{ εἶναι ψηφία}$$

ἔχομε

$$u = \frac{10^{\mu-1}\psi_1 + 10^{\mu-2}\psi_2 + \ldots + \psi_\mu}{10^\mu} = \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \ldots + \frac{\psi_\mu}{10^\mu}$$

δηλαδή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$u=\frac{\psi_1}{10}+\frac{\psi_2}{10^2}+\ldots+\frac{\psi_\mu}{10^\mu}+\frac{0}{10^{\mu+1}}+\ldots=0,\psi_1\psi_2\ldots\psi_\mu 00\ldots$$

(ii) Ὁ ἀριθμός u δέν μπορεῖ νά γραφῆ μέ τή μορφή $\frac{k}{10^\mu}$, ὅπου k,μ εἶναι φυσικοί ἀριθμοί.

Τότε ὁ ἀριθμός u ἀνήκει σέ ἕνα ἀπό τά δέκα διαστήματα

$$(0,\frac{1}{10}),(\frac{1}{10},\frac{2}{10}),\ldots,(\frac{9}{10},1)$$

πού χωρίζεται τό (0,1). Ὑποθέτομε ὅτι $u\in\left[\frac{\psi_1}{10},\frac{\psi_1+1}{10}\right)$, ὅπου εἶναι φανερό ὅτι, τό ψ_1 εἶναι ψηφίο. Ἄρα

$$0<u-0,\psi_1<\frac{1}{10}.$$

Ἀνάλογα, ἔχομε ὅτι τό u ἀνήκει σέ ἕνα ἀπό τά δέκα διαστήματα

$$\left[\frac{\psi_1}{10},\frac{\psi_1}{10}+\frac{1}{10^2}\right),\left[\frac{\psi_1}{10}+\frac{1}{10^2},\frac{\psi_1}{10}+\frac{2}{10^2}\right),\ldots,\left[\frac{\psi_1}{10}+\frac{9}{10^2},\frac{\psi_1+1}{10}\right).$$

Ὑποθέτομε, λοιπόν, ὅτι ἀνήκει στό

$$\left[\frac{\psi_1}{10}+\frac{\psi_2}{10^2},\frac{\psi_1}{10}+\frac{\psi_2+1}{10^2}\right),$$

ὅπου βέβαια καί τό ψ_2 εἶναι ψηφίο. Ἔτσι παίρνομε

$$0<u-0,\psi_1\psi_2<\frac{1}{10^2}.$$

Προχωρώντας μ'αὐτό τόν τρόπο βρίσκομε μιά ἀκολουθία ψηφίων ψ_ν, $\nu\in\mathbb{N}$ τέτοια ὥστε

$$0<u-0,\psi_1\psi_2\ldots\psi_\nu<\frac{1}{10^\nu},$$

δηλαδή

$$0<u-\sum_{k=1}^{\nu}\frac{\psi_k}{10^k}<\frac{1}{10^\nu}\quad\text{γιά κάθε}\quad\nu\in\mathbb{N}.$$

Τώρα, ἄν σ_ν, $\nu\in\mathbb{N}$ εἶναι ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῆς σειρᾶς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\psi_\nu}{10^\nu},$$

ἔχομε

$$0 < u-\sigma_\nu < \frac{1}{10^\nu}, \ \nu \in \mathbb{N}$$

καί ἄρα, ἀφοῦ $\lim \frac{1}{10^\nu} = 0$,

$$\lim(u-\sigma_\nu) = 0, \quad \text{ἤτοι} \quad u = \lim \sigma_\nu,$$

πού σημαίνει ὅτι

$$u = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\psi_\nu}{10^\nu} = 0,\psi_1\psi_2\ldots$$

Παρατήρηση 8.5.1

Ὁ τρόπος πού ἀκολουθήσαμε στήν παραπάνω ἀπόδειξη, γιά τόν καθορισμό τῶν ψηφίων τοῦ δεκαδικοῦ ἀναπτύγματος ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ τοῦ διαστήματος [0,1] οὐσιαστικά συμπίπτει μέ τόν τρόπο πού βρίσκονται τά ψηφία τοῦ ἀναπτύγματος αὐτοῦ μέ τή βοήθεια τοῦ γνωστοῦ κανόνα διαιρέσεως. Ἀκολουθώντας αὐτόν τόν πρακτικό κανόνα γιά τήν εὕρεση τοῦ δεκαδικοῦ ἀναπτύγματος ἑνός ρητοῦ ἀριθμοῦ $\frac{k}{\mu}$ (ἐκτελώντας τή διαίρεση k διά μ) παρατηροῦμε ὅτι τά ὑπόλοιπα πού παρουσιάζονται εἶναι τό πολύ μ τό πλῆθος (δηλαδή πεπερασμένα). Ἔτσι, ἐπειδή καί τά διαφορετικά ψηφία πού προκύπτουν εἶναι καί αὐτά πεπερασμένα τό πλῆθος, εἶναι φανερό ὅτι θά προκύψη ἕνα ψηφίο πού θά εἶναι ἴδιο μέ κάποιο προηγούμενό του καί θά ἔχη μ'ἐκεῖνο τό ἴδιο ἀντίστοιχο ὑπόλοιπο. Τότε καί ὅλα τά ψηφία πού προέκυψαν ἐνδιάμεσα κατά τήν ἐκτέλεση τῆς πράξεως θά ἐπαναληφθοῦν πάλι μέ τήν ἴδια διαδοχή κ.ο.κ. θά ἐμφανίζεται συνέχεια ἡ ἴδια ὁμάδα διαδοχικῶν ψηφίων. Ἄρα ἕνας ρητός ἀριθμός τοῦ διαστήματος [0,1] θά ἔχη ἕνα περιοδικό δεκαδικό ἀνάπτυγμα.

Ὥστε, σέ συνδυασμό μέ τό γεγονός ὅτι τά περιοδικά δεκαδικά ἀναπτύγματα εἶναι δεκαδικά ἀναπτύγματα ρητῶν, βλέπομε ὅτι **ἀπό τούς ἀριθμούς τοῦ διαστήματος [0,1], μόνο οἱ ρητοί ἔχουν περιοδικά δεκαδικά ἀναπτύγματα.**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Στά προηγούμενα παραδείγματα 8.5.1 3) καί 4) εἴδαμε ὅτι ὑπάρχουν ἀριθμοί πού ἔχουν δυό δεκαδικά ἀναπτύγματα καί μάλιστα παρατηρήσαμε ὅτι τό ἕνα ἀπό αὐτά ἀπό κάπου καί πέρα συνεχίζεται μόνο μέ τό ψηφίο 9. Ἄν ἐξαιρέσωμε τά ἀναπτύγματα αὐτοῦ τοῦ εἴδους, τό παρακάτω θεώρημα μᾶς λέγει ὅτι τό ἄλλο ἀνάπτυγμα εἶναι μοναδικό.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.5.3. **Κάθε πραγματικός ἀριθμός τοῦ διαστήματος [0,1] ἔχει ἀκριβῶς ἕνα δεκαδικό ἀνάπτυγμα τοῦ ὁποίου τά ψηφία δέν εἶναι ἀπό κάπου καί πέρα ὅλα 9.**

Ἀπόδειξη. Ἄς ὑποθέσωμε ὅτι ὁ ἀριθμός $u\in[0,1]$ ἔχει δεκαδικά ἀναπτύγματα $0,\psi_1\psi_2\ldots$ καί $0,\chi_1\chi_2\ldots$ τά ὁποῖα εἶναι διαφορετικά καί τά ψηφία κανενός ἀπό αὐτά δέν εἶναι ἀπό κάπου καί πέρα 9. Ἀφοῦ τά παραπάνω δεκαδικά ἀναπτύγματα ἔχουν ὑποτεθῆ διαφορετικά, ὑπάρχει φυσικός ἀριθμός k τέτοιος ὥστε νά ἰσχύη

$$\psi_{k+1}\neq\chi_{k+1} \quad \text{καί} \quad \psi_\nu=\chi_\nu \quad \text{γιά κάθε } \nu=1,2,\ldots,k.$$

Χωρίς βλάβη τῆς γενικότητας, ὑποθέτομε ὅτι $\psi_{k+1}>\chi_{k+1}$. Ἄρα $\psi_{k+1}\geqq\chi_{k+1}+1$ καί ἔτσι

$$\begin{aligned}0,\psi_{k+1}00\ldots &\geqq 0,\chi_{k+1}00\ldots+0,100\ldots\\ &=0,\chi_{k+1}00\ldots+0,099\ldots\\ &=0,\chi_{k+1}99\ldots>0,\chi_{k+1}\chi_{k+2}\ldots,\end{aligned}$$

ἀφοῦ τά ψηφία $\chi_{k+\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}$ δέν εἶναι ὅλα 9. Ἀλλά τότε

$$0,\psi_{k+1}\,\psi_{k+2}\ldots\geqq 0,\psi_{k+1}00\ldots>0,\chi_{k+1}\chi_{k+2}\ldots$$

καί ἄρα, ἐπειδή $\psi_\nu=\chi_\nu$ γιά κάθε $\nu=1,2,\ldots,k$, ἔχομε

$$0,\psi_1\psi_2\ldots\psi_k\psi_{k+1}\ldots>0,\chi_1\chi_2\ldots\chi_k\chi_{k+1}\ldots,$$

δηλαδή $u>u$, πού εἶναι ἄτοπο. ▲

Τό μονοσήμαντα ὁρισμένο μέ τό παραπάνω θεώρημα δεκαδικό ἀνάπτυγμα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ένός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ $u \in [0,1]$ ὀνομάζεται **δεκαδική παράσταση τοῦ** u, γιά διάκριση ἀπό κάποιο ἄλλο ἀνάπτυγμα πού μπορεῖ νά ἔχη ὁ u. Τήν ἔννοια τῆς δεκαδικῆς παραστάσεως θά τήν ἐπεκτείνωμε τώρα γιά ὁποιοδήποτε πραγματικό ἀριθμό.

Ὅπως γνωρίζομε γιά ὁποιοδήποτε $x \in \mathbb{R}$ ὁρίζεται τό **"ἀκέραιο μέρος"** του $[x]$ καί εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος ἀπό τούς ἀκεραίους πού εἶναι μικρότεροι ἤ ἴσοι τοῦ x. Ὁ μοναδικός αὐτός ἀκέραιος $\psi_0 = [x]$ εἶναι τέτοιος ὥστε

$$\psi_0 \leq x < \psi_0 + 1.$$

Θέτομε τώρα $u = x - \psi_0$ καί παρατηροῦμε ὅτι $u \in [0,1]$. Ἀπό τό προηγούμενο θεώρημα, ὅμως, ἔχομε τή δεκαδική παράσταση τοῦ u:

$$u = 0,\psi_1\psi_2\ldots$$

καί ἄρα

$$x = \psi_0 + u = \psi_0 + 0,\psi_1\psi_2\ldots$$

Ἡ σειρά

$$\psi_0 + 0,\psi_1\psi_2\ldots = \psi_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\psi_\nu}{10^\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\psi_\nu}{10^\nu},$$

πού γιά συντομία γράφεται καί ὡς

$$\psi_0,\ \psi_1\psi_2\ldots,$$

εἶναι, βέβαια, μοναδική καί ὀνομάζεται **δεκαδική παράσταση τοῦ** x, ὅταν ὁ ἀκέραιος ψ_0 ἐκφράζεται στό δεκαδικό σύστημα ἀριθμήσεως. Ὥστε γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$ ἔχομε κατά ἕνα καί μοναδικό τρόπο τή (δεκαδική) παράσταση

$$x = \psi_0,\ \psi_1\psi_2\ldots$$

ὅπου ψ_0 εἶναι τό ἀκέραιο μέρος τοῦ x καί τά ψηφία ψ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ δέν εἶναι ἀπό κάπου καί πέρα ὅλα 9.

Ἄν στήν παραπάνω δεκαδική παράσταση γιά κάποιο φυσικό ἀριθμό λ ἰσχύει $\psi_\nu = 0$ γιά κάθε $\nu = \lambda+1, \lambda+2, \ldots$, τότε τή δεκαδική αὐτή παράσταση τή γράφομε καί

$$x = \psi_0,\ \psi_1\psi_2\ldots\psi_\lambda.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἔτσι π.χ. ἔχομε τίς παρακάτω δεκαδικές παραστάσεις:

$$\frac{5}{3}=1,666\ldots,\quad \frac{75}{8}=9,375\,,\quad \frac{-48}{7}=(-7),\underline{14285}714\ldots,\quad \frac{-1}{6}=(-1),8333\ldots$$

Ἄν ὁ πραγματικός ἀριθμός x εἶναι ἀρνητικός, τότε τό ἀκέραιο μέρος του εἶναι ἐπίσης ἀρνητικός ἀριθμός, ὅπως π.χ. φαίνεται στά δυό τελευταῖα παραδείγματα. Ἔτσι στή δεκαδική παράσταση (-7),14285714... οἱ παρενθέσεις πού μπαίνουν στό ἀκέραιο μέρος εἶναι ἀπαραίτητες γιατί ὁ συμβολισμός -7,14285714... χρησιμοποιεῖται γιά τόν ἀντίθετο ἀριθμό πού ἔχει δεκαδική παράσταση τήν 7,14285714... Οἱ δυό αὐτοί συμβολισμοί, λοιπόν, παριστάνουν διαφορετικούς ἀριθμούς, ἐπειδή

$$(-7),14285714\ldots = -7 + 0,14285714\ldots,$$

ἐνῶ

$$-7,14285714\ldots = -7 - 0,14285714\ldots\ .$$

Ἀκόμη παρατηροῦμε ὅτι ἡ δεκαδική παράσταση τοῦ τελευταίου ἀριθμοῦ εἶναι ἡ (-8), 85714285..., δηλαδή

$$-7,14285714 = (-8),85714285\ldots$$

Ἐπίσης γιά τή δεκαδική παράσταση

$$(-7),14285714\ldots \quad \text{γράφομε καί } \bar{7},14285714\ldots$$

καί παρόμοια γιά τήν

$$(-1),8333\ldots \quad \text{γράφομε καί } \bar{1},8333\ldots$$

Οἱ τελευταῖοι συμβολισμοί, ὅπως γνωρίζομε, χρησιμοποιοῦνται στούς λογαριθμικούς πίνακες.

8.6 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά βρεθοῦν τά ἀθροίσματα τῶν παρακάτω σειρῶν:

α) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{11}{12}\right)^{\nu}$ β) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6^{\nu}}+\frac{1}{3^{\nu}}+\frac{1}{2^{\nu}}\right)$ γ) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{\nu}+\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^{\nu}\right]$

$\alpha > 0\ ,\ \beta > 0.$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

2. Νά ἀποδειχτῆ ὅτι

α) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \sin^{2\nu}\alpha = 1+\mathrm{tg}^2\alpha$, ὅπου $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ β) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2^\nu-1}{3^\nu} = \frac{3}{2}$.

3. Νά βρεθοῦν τά ἀθροίσματα τῶν παρακάτω σειρῶν:

α) $\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{(\nu-1)(\nu+1)}$ β) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(3\nu-2)(3\nu+1)}$ γ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)(\nu+4)}$

δ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu+1}{1^2+2^2+\ldots+\nu^2}$ ε) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1+2+\ldots+\nu}{1^3+2^2+\ldots+\nu^3}$ στ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)}$.

4. Νά ἐξεταστῆ ἄν οἱ παραπάνω σειρές συγκλίνουν:

α) $\sum_{\nu=1}^{\infty} (1+\frac{1}{\nu})^\nu$ β) $\sum_{\nu=1}^{\infty} (1-\frac{1}{2^\nu})$ γ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\nu}\,\sqrt{\nu+1}}{2\nu+1}$.

5. Νά ἐξεταστῆ ἄν οἱ παρακάτω σειρές συγκλίνουν:

α) $\sum_{\nu=1}^{\infty} (\frac{1}{\nu^2}+\frac{1}{\nu})$ β) $\sum_{\nu=1}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{\nu}}+\frac{1}{10^\nu})$.

6. Ἄν α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι φθίνουσα ἀκολουθία μή ἀρνητικῶν ὅρων καί ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνη, ν'ἀποδειχτῆ ὅτι ἡ ἀκολουθία $\nu\alpha_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι μηδενική (θεώρημα τοῦ Pringsheim).

7. Νά ὑπολογιστῆ τό ἄθροισμα τῆς σειρᾶς

$$1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+\nu-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+\nu)}, \quad \alpha > \beta > 0.$$

8. Ποιές ἀπό τίς παρακάτω σειρές συγκλίνουν καί ποιές ὄχι;

α) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\nu}}{\nu+\sqrt{\nu}}$ β) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^2+3\nu+2}{\nu^5}$

γ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^2+3\nu+2}{\nu^3}$ δ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\nu}}{\nu^2+\nu}$.

9. Ἄν α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι μιά ἀκολουθία θετικῶν ἀριθμῶν καί ἡ σειρά

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνη, τότε καί οἱ σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu^2$ καί $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \alpha_{\nu+1}$ συγκλίνουν.
Ἄν εἶναι $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \alpha$, $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu^2 = A$ καί $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \alpha_{\nu+1} = \beta$, τότε $\alpha^2 > A$ καί $\alpha^2 > 2\beta$.

10. Μιά ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ λέμε ὅτι εἶναι "σημεῖο τοῦ χώρου τοῦ Hilbert", ἄν $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu^2 < +\infty$. Ἄν α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ καί β_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι σημεῖα τοῦ χώρου τοῦ Hilbert, ν'ἀποδειχτῆ ὅτι

(i) ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \beta_\nu$ συγκλίνει καί μάλιστα ἀπόλυτα,

(ii) ἡ ἀκολουθία $\lambda\alpha_\nu + \mu\beta_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ ὅπου λ, μ εἶναι σημεῖο τοῦ χώρου τοῦ Hilbert καί ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu - \beta_\nu)^2$ συγκλίνει,

(iii) ἰσχύει ἡ ἀνισότητα τῶν Cauchy-Schwarz

$$\left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \beta_\nu \right| \leq \sqrt{\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu^2} \sqrt{\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu^2} .$$

11. Ἄν ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει καί $\alpha_\nu \geq 0$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, νά ἀποδειχτῆ ὅτι καί ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\alpha_\nu}}{\nu}$ συγκλίνει.

12. Ἄν α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι μιά ἀκολουθία μή ἀρνητικῶν ὅρων, μέ $\alpha_1 > 0$, ν'ἀποδειχτοῦν τά παρακάτω:

(i) ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha_\nu}{c+\alpha_\nu}$, ὅπου $c > 0$, συγκλίνει, τότε καί μόνο τότε, ἄν ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνη,

(ii) ἄν ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ ἀπειρίζεται θετικά καί ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι μονότονη, τότε καί ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha_\nu}{c+\nu\alpha_\nu}$, $c > 0$ ἀπειρίζεται θετικά.

(iii) ἄν ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ ἀπειρίζεται θετικά, τότε ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha_\nu}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}$ ἀπειρίζεται θετικά, ἐνῶ ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha_\nu}{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)^2}$ συγκλίνει.

(iv) ἄν ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνη καί ἰσχύη $\alpha_\nu > 0$ γιά ἄπειρο πλῆθος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δεικτῶν $\nu \in \mathbb{N}$, τότε ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu+\alpha_{\nu+1}+\dots}$ ἀπειρίζεται θετικά, ἐνῶ ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha_\nu}{\sqrt{\alpha_\nu+\alpha_{\nu+1}+\dots}}$ συγκλίνει.

13. Νά ἐξεταστῆ ποιές ἀπό τίς παρακάτω σειρές συγκλίνουν:

α) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^2}{3^\nu}$ β) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu!}{\nu^\nu}$

γ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2^\nu \nu!}{\nu^\nu}$ δ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{(\nu+1)!}$

ε) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{\nu+1}}$ στ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 \sin \frac{\pi}{2^\nu}$

η) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\nu+1)!}{2^\nu \nu}$ ζ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu e^{-\nu^2}$.

14. Νά ἐξεταστῆ ἄν οἱ παρακάτω σειρές συγκλίνουν:

α) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{\nu^2}$ β) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\operatorname{Ar\,tg}\frac{1}{\nu}\right)^\nu$

γ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\log^\nu(\nu+1)}$ δ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{\nu^2}}{3^\nu}$

ε) $\sum_{\nu=1}^{\infty} (\sqrt[\nu]{\nu}-1)^\nu$ ζ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^3[\sqrt{2}+(-1)^\nu]^\nu}{3^\nu}$

15. Νά ἐξεταστῆ ἄν οἱ παρακάτω σειρές συγκλίνουν:

α) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\sqrt{\nu}}$ β) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^\nu}+\frac{(-1)^\nu}{\nu^2}\right)$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

γ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}\nu}{\nu^3+(-1)^{\nu}}$ δ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)^{\nu}}{\nu\beta+\gamma}$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$

ε) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\alpha + \frac{(-\alpha)^{\nu}}{\nu}\right]$, $0 < \alpha \leq 1$ στ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-\alpha)^{\nu}}{\nu!}\right]$.

16. Νά ἀποδειχτῆ ὅτι ἄν ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu}$ εἶναι ἀπόλυτα συγκλίνουσα, τότε ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu}^{\mu}$, ὅπου $\mu \in \mathbb{N}$, εἶναι ἐπίσης ἀπόλυτα συγκλίνουσα.

17. Νά ἐξεταστῆ ἄν οἱ παρακάτω σειρές συγκλίνουν ὑπό συνθήκη:

α) $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu}(1-\cos\frac{1}{\nu})$ β) $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu}\frac{\nu^2}{1+\nu^2}$

γ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\sqrt{\nu}+(-1)^{\nu}}$ δ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1}\frac{\nu^3}{2^{\nu}}$

ε) $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu}\sin\nu^{-\frac{3}{2}}$ στ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu+1}{(-\nu)^{\nu}}$

ζ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos\nu}{1+\nu^2}$ η) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\sqrt{\nu}}$.

18. Νά ἀποδειχτῆ ὅτι:

(i) ἄν $\liminf \nu\left(\left|\frac{\alpha_{\nu}}{\alpha_{\nu+1}}\right|-1\right) > 1$, τότε ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu}$ συγκλίνει

(ii) ἄν $\limsup \nu\left(\frac{\beta_{\nu}}{\beta_{\nu+1}}-1\right) < 1$, ὅπου $\beta_{\nu} > 0$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, τότε $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_{\nu} = +\infty$. (κριτήριο Raabe - Duhamel)

19. Νά ἀποδειχτῆ ὅτι οἱ παρακάτω σειρές συγκλίνουν:

α) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin\nu^2}{\log(\nu+1)}$ β) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \operatorname{tg}\nu}{\nu}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

20. Νά βρεθοῦν τά δεκαδικά ἀναπτύγματα καί οἱ δεκαδικές παραστάσεις τῶν ἀριθμῶν.

$$\frac{12}{7}, \quad \frac{-5}{7}, \quad \frac{45}{61}, \quad \frac{-28}{9}, \quad \frac{83}{90}.$$

21. Ποιούς (ρητούς) ἀριθμούς ὁρίζουν τά παρακάτω δεκαδικά ἀναπτύγματα:

0,5125125... 0,78127999...

0,7812812... 0,45214521...

22. Ποιούς (ρητούς) ἀριθμούς ὁρίζουν οἱ παρακάτω δεκαδικές παραστάσεις:

(-4),782157821... 7,45114511...

12,3289595... (-3),12347234...

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ