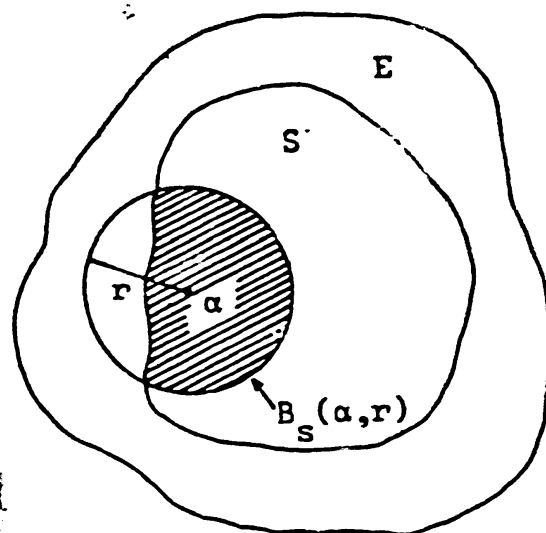


Παναγιώτη Χρ. Τσαμάτου
Καθηγητή Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΜΕΤΡΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ



ΙΩΑΝΝΙΝΑ 1999



ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



026000028317

514

T2A

454/2000

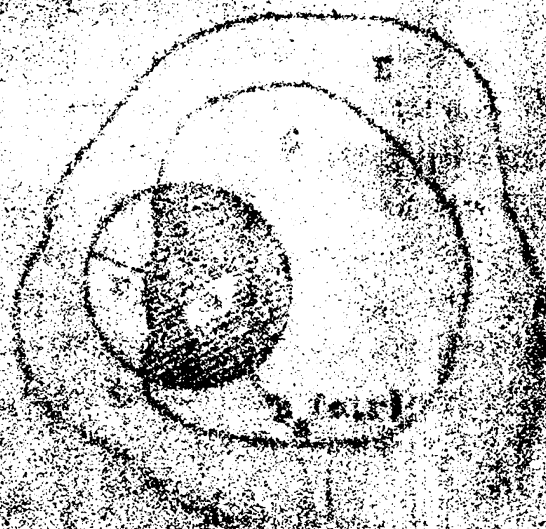


Παναγιώτης Δ.ρ. Γεωργίου

Καθηγητής Πανεπιστημίου

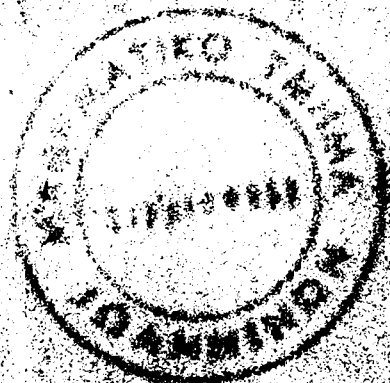
Πατρ. Σχολ. Π. Π.

**ΕΙΣΑΓΩΓΗ
ΣΤΗΝ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ
Μετρικοί Λόγοι**



RECEIVED
FBI - NEW YORK
JUN 10 1964
0260/175917

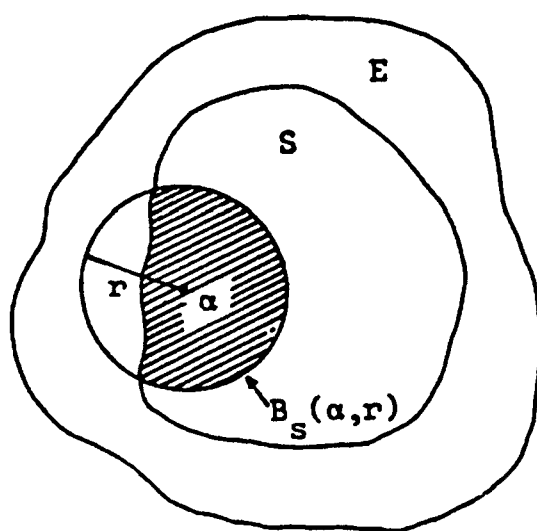
100-2-500



Παναγιώτη Χρ. Τσαμάτου
Καθηγητή Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

Μετρικοί Χώροι



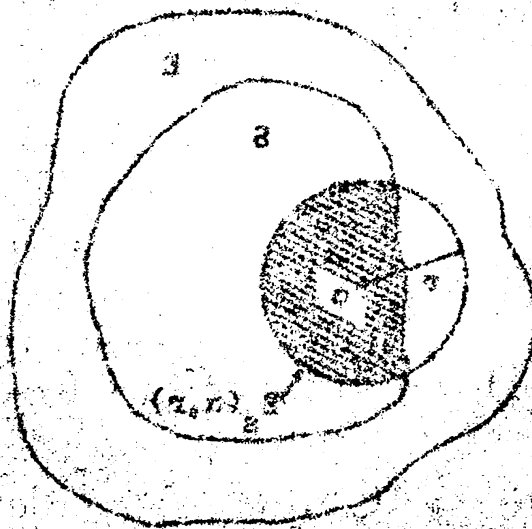
Ιωάννινα 1999



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

454/2000

ΑΙΤΗΣΗ ΓΙΑ ΕΙΣΑΓΩΓΗ
ΣΤΗΝ ΕΚΔΟΣΗ
ΤΟΥ ΕΛΛΗΝΙΚΟΥ



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ



ΠΡΟΛΟΓΟΣ 1ης ΕΚΔΟΣΗΣ

Το βιβλίο αυτό γράφτηκε για να καλύψει τις διδακτικές ανάγκες του μαθήματος "Εισαγωγή στην Τοπολογία" του 3ου Εξαμήνου του Προπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Η Τοπολογία μπορεί να θεωρηθεί κλάδος της Μαθηματικής Ανάλυσης. Εκτός από το τεράστιο ενδιαφέρον που παρουσιάζει ως αυτοδύναμος μαθηματικός κλάδος και παρά το σχετικά νεαρό της ηλικίας της, η Τοπολογία έχει καταξιωθεί ως ένα ισχυρό εργαλείο έρευνας και έκφρασης σ' όλους σχεδόν τους κλάδους της Μαθηματικής Επιστήμης. Σημαντική είναι η συνεισφορά της Τοπολογίας σ' όλα τα επιμέρους αντικείμενα της Μαθηματικής Ανάλυσης (Πραγματική Ανάλυση, Μιγαδική Ανάλυση, Συναρτησιακή Ανάλυση, Αρμονική Ανάλυση κ.τ.λ.). Επιπλέον, η Τοπολογία χρησιμοποιείται στη Γεωμετρία, στην Άλγεβρα αλλά και σε περισσότερο εφαρμοσμένους κλάδους των Μαθηματικών, όπως οι Διαφορικές Εξισώσεις, η Μηχανική κ.τ.λ. Δεν είναι υπερβολή να πει κανείς ότι έμμεσα ή άμεσα η Τοπολογία χρησιμοποιείται σ' όλες τις περιοχές της Μαθηματικής Επιστήμης.

Οι εισαγωγικές γνώσεις της Τοπολογίας που προσφέρονται σ' ένα προπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών ενός Τμήματος Μαθηματικών, καλύπτουν συνήθως δύο ενότητες. Τη θεωρία των Μετρικών Χώρων και μια εισαγωγή στη Γενική Τοπολογία.

Ένας τρόπος διδασκαλίας των ενοτήτων αυτών είναι να δοθεί αρχικά η θεωρία των Μετρικών Χώρων και στη συνέχεια, ως γενίκευση, η εισαγωγή στη Γενική Τοπολογία. Ο άλλος τρόπος είναι να ξεκινήσει κανείς με τη Γενική Τοπολογία και να δώσει, ως εφαρμογή της, στη συνέχεια τη θεωρία των Μετρικών Χώρων.

Στο βιβλίο αυτό επιλέχτηκε ο πρώτος δρόμος. Ο λόγος είναι ότι, στο 2ο έτος σπουδών που διδάσκεται το μάθημα, ο φοιτητής δεν έχει ακόμη τις γνώσεις και την ωριμότητα να δεχτεί και να αφομοιώσει τις γενικές και αφηρημένες έννοιες της Γενικής Τοπολογίας. Αντίθετα, μια διεξοδική μελέτη των Μετρικών Χώρων, εκτός του ότι προετοιμάζει τον φοιτητή να δεχτεί ομαλά τις αφηρημένες δομές της Γενικής Τοπολογίας, τον βοηθάει να κατανοήσει καλύτερα τη δομή του ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$, που μελετά ταυτόχρονα στο Λογισμό των Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών.

Το βιβλίο διαρθρώνεται σε ενότητες δύο ειδών σε κάθε κεφάλαιο. Συγκεκριμένα, μετά από κάθε ενότητα, όπου δίνονται οι ορισμοί και τα βασικά θεωρητικά συμπεράσματα για κάποια έννοια, ακολουθεί μια λιγότερο θεωρητική ενότητα με τίτλο Παραδείγματα-Εφαρμογές- Σχόλια. Ο αναγνώστης πρέπει να μελετήσει με την ίδια προσοχή και τις δυο ενότητες. Αυτό, γιατί σε κάθε ενότητα με τον τίτλο Παραδείγματα- Εφαρμογές- Σχόλια, δίνονται χρήσιμα παραδείγματα που εμποδίζουν τη θεωρητική γνώση, αλλά και θεωρητικά συμπεράσματα που αφορούν ειδικές ή δευτερεύουσες περιπτώσεις, χρησιμότερες όμως για την κατανόηση του εκάστοτε αντικειμένου και την παραπέρα μελέτη.



Ως κατακλείδα πρέπει να τονιστεί ότι προϋπόθεση για την άκοπη μελέτη και κατανόηση του περιεχομένου του βιβλίου αυτού, είναι η καλή γνώση του περιεχομένου του μαθήματος "Εισαγωγή στη Μαθηματική Ανάλυση" του 2^{ου} εξαμήνου σπουδών του Τμήματός μας.

Θεωρώ υποχρέωσή μου να ευχαριστήσω τον συνάδελφο κ. Χρυσόστομο Πεταλά για το χρόνο που διέθεσε να δει τα χειρόγραφα και τις χρησιμότητες υποδείξεις του καθώς επίσης και τη δακτυλογράφο του Τομέα Μαθηματικής Ανάλυσης κ. Αγνή Παπαβρανούση για την προσεκτική δακτυλογράφηση του κεμένου.

Ιωάννινα, Νοέμβριος 1988

Παναγιώτης Χρ. Τσαμάτος

ΠΡΟΛΟΓΟΣ 2^{ης} ΕΚΔΟΣΗΣ

Η 2η έκδοση του παρόντος βιβλίου προέκυψε από την ανάγκη να περιλάβω σ' αυτό, όσα η εμπειρία από τη χρήση του επί οχτώ συνεχή έτη ως διδακτικού στο μάθημα Εισαγωγή στην Τοπολογία, μου υπαγόρευσε ως χρήσιμα και απαραίτητα.

Η δομή του βιβλίου δεν άλλαξε σε σχέση με την πρώτη έκδοση. Έγιναν όμως σημαντικές προσθήκες, τόσο σε θεωρητικά λήμματα όσο και σε παραδείγματα και εφαρμογές, απαραίτητα για την κατανόηση ενός μαθήματος κατ' εξοχήν θεωρητικού όπως η Εισαγωγή στην Τοπολογία. Επίσης, εμπλουτίστηκε η συλλογή των ασκήσεων που προτείνονται για λύση, ώστε να υπάρχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερο πεδίο επιλογής για τον φοιτητή που θέλει να εμβαθύνει περισσότερο στο μάθημα.

Ευχαριστώ τον συνάδελφο κ. Θεόδωρο Βιδάλη για το χρόνο που διέθεσε συζητώντας μαζί μου θέματα σχετικά με το περιεχόμενο του βιβλίου καθώς και για τις χρήσιμες υποδείξεις του.

Ιωάννινα, Μάιος 1996

Παναγιώτης Χρ. Τσαμάτος



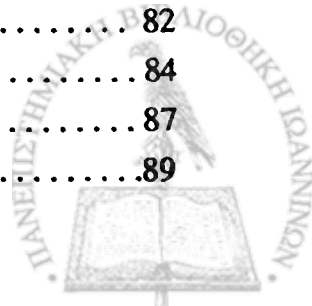
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΜΕΤΡΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

1.1. Γενικά	1
1.2. Η έννοια της μετρικής. Μετρικός χώρος	2
1.3. Παραδείγματα - Εφαρμογές	3
1.4. Απόσταση συνόλων- Διάμετρος συνόλου	9
1.5. Παραδείγματα - Εφαρμογές- Σχόλια	10
1.6. Σφαιρικές περιοχές- Περιοχές	13
1.7. Παραδείγματα - Εφαρμογές	16
1.8. Πυρήνας και θήκη συνόλου	20
1.9. Παραδείγματα - Εφαρμογές - Σχόλια	25
1.10. Παράγωγο σύνολο- Σύνορο συνόλου	32
1.11. Παραδείγματα - Εφαρμογές	36
1.12. Ανοιχτά και κλειστά σύνολα	37
1.13. Παραδείγματα - Εφαρμογές	41
1.14. Πυκνά σύνολα	44
1.15. Παραδείγματα - Εφαρμογές	45
1.16. Λυμένες Ασκήσεις	48
1.17. Ασκήσεις	55

2. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΣΕ ΜΕΤΡΙΚΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ

2.1. Ορισμός της ακολουθίας- Σύγκλιση	67
2.2. Παραδείγματα - Εφαρμογές - Σχόλια	69
2.3. Υπακολουθίες- Σημεία συσσώρευσης ακολουθίας	72
2.4. Παραδείγματα - Εφαρμογές	75
2.5. Βασικές ακολουθίες	77
2.6. Παραδείγματα - Εφαρμογές - Σχόλια	79
2.7. Ακολουθίες και κλειστά σύνολα	82
2.8. Παραδείγματα - Εφαρμογές	84
2.9. Λυμένες Ασκήσεις	87
2.10. Ασκήσεις	89



3. ΜΕΤΡΙΚΟΙ ΥΠΟΧΩΡΟΙ

3.1. Η έννοια του μετρικού υποχώρου	92
3.2. Παραδείγματα - Εφαρμογές	94
3.3. Λυμένες Ασκήσεις	95
3.4. Ασκήσεις	96

4. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΜΕΤΡΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

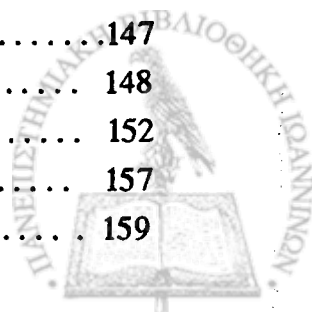
4.1. Συνέχεια συνάρτησης	98
4.2. Παραδείγματα - Εφαρμογές	104
4.3. Ομοιόμορφη συνέχεια συνάρτησης	111
4.4. Παραδείγματα - Εφαρμογές	112
4.5. Ισομετρία - Ομοιομορφισμός	116
4.6. Παραδείγματα - Εφαρμογές	117
4.7. Λυμένες Ασκήσεις	120
4.8. Ασκήσεις	126

5. ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΜΕΤΡΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ

5.1. Ορισμός της τοπολογίας	130
5.2. Παραδείγματα - Εφαρμογές	134
5.3. Η έννοια του τοπολογικού χώρου	138
5.4. Παραδείγματα - Εφαρμογές - Σχόλια	140
5.5. Λυμένες Ασκήσεις	142
5.5. Ασκήσεις	144

6. ΠΛΗΡΕΙΣ ΜΕΤΡΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

6.1. Η έννοια του πλήρους μετρικού χώρου	147
6.2. Ιδιότητες των πλήρων μετρικών χώρων	148
6.3. Παραδείγματα - Εφαρμογές	152
6.4. Η αρχή της συστολής	157
6.5. Παραδείγματα - Εφαρμογές - Σχόλια	159



6.6. Λυμένες Ασκήσεις	161
6.7. Ασκήσεις	164

7. ΟΛΙΚΑ ΦΡΑΓΜΕΝΟΙ ΜΕΤΡΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

7.1. Η έννοια του ολικά φραγμένου μετρικού χώρου	168
7.2. Ιδιότητες των ολικά φραγμένων μετρικών χώρων	169
7.3. Παραδείγματα - Εφαρμογές	175
7.5. Λυμένες Ασκήσεις	178
7.4. Ασκήσεις	179

8. ΣΥΜΠΑΓΕΙΣ ΜΕΤΡΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

8.1. Γενικά	180
8.2. Η έννοια του συμπαγούς μετρικού χώρου	181
8.3. Παραδείγματα - Εφαρμογές	181
8.4. Ισοδύναμα της συμπαγότητας	183
8.5. Παραδείγματα - Εφαρμογές	187
8.6. Ιδιότητες των συμπαγών μετρικών χώρων	191
8.7. Παραδείγματα - Εφαρμογές	193
8.8. Λυμένες Ασκήσεις	197
8.9. Ασκήσεις	201

9. ΔΙΑΧΩΡΙΣΙΜΟΙ ΧΩΡΟΙ

9.1. Διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι	207
9.2. Παραδείγματα - Εφαρμογές	210
9.3. Λυμένες Ασκήσεις	213
9.4. Ασκήσεις	214

10. ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΙ ΜΕΤΡΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

10.1. Η έννοια του συνεκτικού μετρικού χώρου	216
10.2. Παραδείγματα - Εφαρμογές - Σχόλια	219



10.3. Ιδιότητες των συνεκτικών συνόλων	224
10.4. Παραδείγματα - Εφαρμογές - Σχόλια	228
10.5. Συνεκτικές συνιστώσες	232
10.6. Παραδείγματα - Εφαρμογές	233
10.7. Οδική και πολυγωνική συνεκτικότητα	234
10.8. Παραδείγματα - Εφαρμογές	237
10.9. Λυμένες Ασκήσεις	242
10.7. Ασκήσεις	245
Βιβλιογραφία	249
Ευρετήριο όρων	251

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Εισαγωγή	1
2. Ορισμοί και παραδείγματα	16
3. Ορισμοί και παραδείγματα	28
4. Ορισμοί και παραδείγματα	32
5. Ορισμοί και παραδείγματα	33
6. Ορισμοί και παραδείγματα	34
7. Ορισμοί και παραδείγματα	38
8. Ορισμοί και παραδείγματα	38
9. Ορισμοί και παραδείγματα	39
10. Ορισμοί και παραδείγματα	39

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Εισαγωγή	1
2. Ορισμοί και παραδείγματα	16
3. Ορισμοί και παραδείγματα	28
4. Ορισμοί και παραδείγματα	32
5. Ορισμοί και παραδείγματα	33
6. Ορισμοί και παραδείγματα	34
7. Ορισμοί και παραδείγματα	38
8. Ορισμοί και παραδείγματα	38
9. Ορισμοί και παραδείγματα	39
10. Ορισμοί και παραδείγματα	39

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Εισαγωγή	1
2. Ορισμοί και παραδείγματα	16
3. Ορισμοί και παραδείγματα	28
4. Ορισμοί και παραδείγματα	32
5. Ορισμοί και παραδείγματα	33
6. Ορισμοί και παραδείγματα	34
7. Ορισμοί και παραδείγματα	38
8. Ορισμοί και παραδείγματα	38
9. Ορισμοί και παραδείγματα	39
10. Ορισμοί και παραδείγματα	39



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

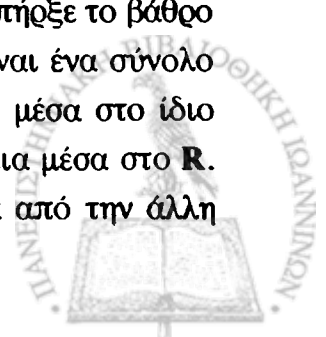
μετρικοί χώροι

1.1. Γενικά

Η έννοια της απόλυτης τιμής στο σύνολο $\mathbf{R}$ των πραγματικών αριθμών και ειδικότερα, η δυνατότητα που μας δίνει η έννοια αυτή να μιλάμε για την απόσταση $|x-y|$ δύο πραγματικών αριθμών x και y , παίζει θεμελιακό ρόλο στη μελέτη του συνόλου $\mathbf{R}$. Η έννοια αυτής της απόστασης στο $\mathbf{R}$ μας επιτρέπει, εκτός των άλλων, να ορίσουμε σύγκλιση μέσα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, πάνω στην οποία στηρίζεται ουσιαστικά το οικοδόμημα του Απειροστικού Λογισμού.

Από την παραπάνω απλή παρατήρηση και μόνο, γίνεται φανερό το πόσο σκόπιμο είναι να εξεταστεί η δυνατότητα ορισμού μιας έννοιας αντίστοιχης με την απόσταση στο $\mathbf{R}$, σ' ένα τυχαίο σύνολο καθώς και οι συνέπειες ενός τέτοιου ορισμού. Αυτή ακριβώς είναι η σκοπιμότητα του ορισμού των εννοιών της "μετρικής" και του "μετρικού χώρου" που ακολουθούν.

Εξάλλου, είναι γνωστό ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών υπήρξε το βάθρο για τις αφαιρετικές προσπάθειες των Μαθηματικών. Αυτό, γιατί το $\mathbf{R}$ είναι ένα σύνολο πλουσιότατο σε ιδιότητες. Η διαπλοκή όμως όλων αυτών των ιδιοτήτων μέσα στο ίδιο σύνολο, κάνει συχνά πολύ δύσκολο το να τις εξετάσει κανείς με αυτοτέλεια μέσα στο $\mathbf{R}$. Έτσι, μέσω των "μετρικών χώρων" θα μελετηθούν, ανεξάρτητα η μία από την άλλη



αλλά και σε συνδυασμό μεταξύ τους, ιδιότητες όπως η πληρότητα, το φραγμένο, η συμπαγότητα, η συνεκτικότητα αλλά και διάφορες βασικές μαθηματικές έννοιες όπως οι ακολουθίες, οι συναρτήσεις και γενικότερα η σύγκλιση. Οι “μετρικοί χώροι” είναι τα σύνολα μέσα στα οποία θα κινηθούμε στα επόμενα για να μελετήσουμε τις παραπάνω ιδιότητες και έννοιες.

1.2. Η έννοια της μετρικής – Μετρικός χώρος

Υποθέτουμε ότι E είναι ένα μη κενό σύνολο και $\varrho : E \times E \rightarrow \mathbf{R}$ μια συνάρτηση. Η πραγματική συνάρτηση ϱ ονομάζεται **μετρική (metric)** στο E αν για τυχόντα στοιχεία x, y και $z \in E$ ικανοποιούνται οι τρεις επόμενες ιδιότητες:

- i) $\varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x=y$,
- ii) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$,
- iii) $\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$.

Η ιδιότητα (iii) ονομάζεται **τριγωνική ιδιότητα της μετρικής ϱ** .

Για τα τυχόντα στοιχεία $x, y \in E$ η τιμή $\varrho(x, y)$ της μετρικής ϱ ονομάζεται **απόσταση (distance)** των στοιχείων x και y .

Ένα σύνολο E εφοδιασμένο με μια μετρική ϱ ονομάζεται **μετρικός χώρος (metric space)** και συμβολίζεται σύντομα με (E, ϱ) .

Είναι πολύ εύκολο ν’ αποδείξει κανείς ότι η τριγωνική ιδιότητα (iii) της μετρικής μπορεί να γενικευθεί επαγωγικά στην εξής:

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z_1) + \varrho(z_1, z_2) + \dots + \varrho(z_{n-1}, z_n) + \varrho(z_n, y)$$

για τυχόντα $x, y, z_1, \dots, z_n \in E$.

1.2.1. ΠΡΟΤΑΣΗ. Έστω (E, ϱ) ένας μετρικός χώρος. Για τυχόντα x, y, z και $w \in E$ ισχύουν οι σχέσεις:

- i) $\varrho(x, y) \geq 0$,
- ii) $|\varrho(x, y) - \varrho(z, w)| \leq \varrho(x, z) + \varrho(y, w)$,
- iii) $|\varrho(x, z) - \varrho(z, y)| \leq \varrho(x, y)$.

Απόδειξη.

$$i) \varrho(x, y) = \frac{\varrho(x, y) + \varrho(x, y)}{2} = \frac{\varrho(x, y) + \varrho(y, x)}{2} \geq \frac{\varrho(x, x)}{2} = 0.$$

ii) Λόγω της τριγωνικής ιδιότητας της μετρικής έχουμε
 $\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, w) + \varrho(w, y).$

Άρα

$$\varrho(x, y) - \varrho(z, w) \leq \varrho(x, z) + \varrho(y, w). \quad (1)$$

Ανάλογα, έχουμε

$$\varrho(z, w) - \varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(y, w). \quad (2)$$

Οι σχέσεις (1) και (2) δίνουν τη σχέση (ii).

iii) Λόγω της (ii) έχουμε

$$|\varrho(x, z) - \varrho(z, y)| \leq |\varrho(x, z) - \varrho(y, z)| \leq \varrho(x, y) + \varrho(z, z) = \varrho(x, y). \quad \blacklozenge$$

1.3. Παραδείγματα- Εφαρμογές

1.3.1. Αν E είναι ένας σταθμητός διανυσματικός χώρος με στάθμη N , τότε η συνάρτηση $\varrho: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο

$$\varrho(x, y) = N(x-y),$$

είναι μια μετρική στο E .

Απόδειξη.

Για τυχόντα στοιχεία x, y και z εν E έχουμε:

$$\varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow N(x-y) = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

$$\varrho(x, y) = N(x-y) = N(y-x) = \varrho(y, x).$$

$$\varrho(x, y) = N(x-y) = N[(x-z) + (z-y)] \leq N(x-z) + N(z-y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y). \quad \blacklozenge$$

1.3.2. Η συνάρτηση $\varrho: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο

$$\varrho(x, y) = |x-y|,$$

είναι μια μετρική στο $\mathbb{R}$.



Απόδειξη.

Αυτό είναι άμεσο συμπέρασμα της παραπάνω Εφαρμογής 1.3.1. ♦

Επιπλέον, είναι γνωστό ότι στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$ οι τύποι

$$|\vec{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

$$N_1(\vec{x}) = \sup_i |x_i|,$$

$$N_2(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

ορίζουν στάθμες.

Έτσι, σύμφωνα με την προηγούμενη Εφαρμογή 1.3.1., οι τύποι:

$$\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

$$\varrho_1(\vec{x}, \vec{y}) = N_1(\vec{x} - \vec{y}) = \sup_i |x_i - y_i|,$$

$$\varrho_2(\vec{x}, \vec{y}) = N_2(\vec{x} - \vec{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|,$$

ορίζουν μετρικές στον $\mathbb{R}^n$.

Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με μετρική την εισαγόμενη από την ευκλείδεια στάθμη $|\cdot|$, ονομάζεται **ευκλείδειος μετρικός χώρος (euclidean metric space)** και συμβολίζεται με $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$.

1.3.3. Αν E είναι τυχόν μη κενό σύνολο, η συνάρτηση $\varrho: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο

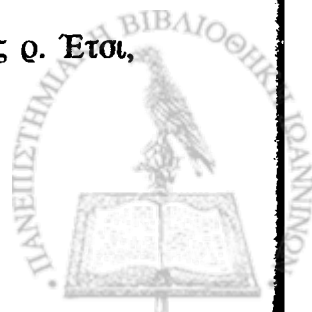
$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \neq y \\ 0, & \text{αν } x = y \end{cases},$$

είναι μια μετρική στο $\mathbb{R}$.

Απόδειξη.

Οι δυο πρώτες ιδιότητες της μετρικής είναι άμεσες από τον ορισμό της ϱ . Έτσι, αρκεί ν' αποδείξουμε ότι για τυχόντα στοιχεία x, y και z εν E έχουμε

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y). \quad (*)$$



Επειδή οι τιμές των αποστάσεων $\varrho(x, y)$, $\varrho(x, z)$ και $\varrho(z, y)$ είναι 0 ή 1, η μόνη περίπτωση που δεν θα ίσχυε η σχέση (*), θα ήταν η περίπτωση όπου $\varrho(x, y) = 1$ και $\varrho(x, z) = \varrho(z, y) = 0$. Αλλά τότε, από τον ορισμό της ϱ , θα είχαμε

$$\varrho(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \neq y$$

και ταυτόχρονα

$$\varrho(x, z) = \varrho(z, y) = 0 \Leftrightarrow x = z = y,$$

που είναι άτοπο. ♦

Η παραπάνω μετρική ϱ ονομάζεται **διακριτή (discrete) μετρική** και ο αντίστοιχος μετρικός χώρος **διακριτός μετρικός χώρος (discrete metric space)**.

Όπως θα δούμε στα παρακάτω, η διακριτή μετρική είναι μεταξύ των άλλων χρησιμότερη για την κατασκευή αντιπροσχεμάτων.

1.3.4. Αν $(E_1, \varrho_1), (E_2, \varrho_2), \dots, (E_n, \varrho_n)$ είναι μετρικοί χώροι, τότε το σύνολο, $E = \times_{i=1}^n E_i$ γίνεται μετρικός χώρος με μετρική τη συνάρτηση $\varrho: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, που ορίζεται με τον τύπο:

$$\varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \varrho_i^2(x_i, y_i)} = \sqrt{\varrho_1^2(x_1, y_1) + \dots + \varrho_n^2(x_n, y_n)},$$

όπου $x = (x_1, \dots, x_n)$ και $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Απόδειξη.

Για τυχόντα $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ και $z = (z_1, \dots, z_n)$ εν E έχουμε:

$$\varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\varrho_1^2(x_1, y_1) + \dots + \varrho_n^2(x_n, y_n)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\varrho_1(x_1, y_1) = \dots = \varrho_n(x_n, y_n) = 0 \Leftrightarrow x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n \Leftrightarrow x = y.$$

Επίσης,

$$\varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \varrho_i^2(x_i, y_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \varrho_i^2(y_i, x_i)} = \varrho(y, x).$$

Για την τριγωνική ιδιότητα, αρκεί ν' αποδείξουμε ότι για τυχόντα $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ και $z = (z_1, \dots, z_n)$ εν E ισχύει

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n \varrho_i^2(x_i, y_i)} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \varrho_i^2(x_i, z_i)} + \sqrt{\sum_{i=1}^n \varrho_i^2(z_i, y_i)}.$$



Για το σκοπό αυτό θέτουμε $q_i(x_i, y_i) = a_i$, $q_i(x_i, z_i) = b_i$, $q_i(z_i, y_i) = c_i$, $i=1, \dots, n$. Τότε, από την ανισότητα των Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\sum_{i=1}^n b_i c_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n b_i^2 + \sum_{i=1}^n c_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n b_i c_i &\leq \sum_{i=1}^n b_i^2 + \sum_{i=1}^n c_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2} \Leftrightarrow \\ \sum_{i=1}^n (b_i + c_i)^2 &\leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2} \right)^2 \end{aligned}$$

Επειδή όμως ισχύει $q_i(x_i, y_i) \leq q_i(x_i, z_i) + q_i(z_i, y_i)$, δηλαδή $a_i \leq b_i + c_i$, $i=1, \dots, n$, η τελευταία σχέση δίνει

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2} \right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2},$$

που είναι η ζητούμενη σχέση. ♦

Ο μετρικός χώρος (E, ρ) ονομάζεται **καρτεσιανός μετρικός χώρος** (*cartesian metric space*) των μετρικών χώρων (E_i, ρ_i) , $i=1, \dots, n$.

1.3.5. Στον καρτεσιανό μετρικό χώρο (E, ρ) των μετρικών χώρων (E_i, ρ_i) , $i=1, \dots, n$, για κάθε $x=(x_1, \dots, x_n)$ και $y=(y_1, \dots, y_n)$ εν E ισχύουν οι σχέσεις:

i) $\rho_i(x_i, y_i) \leq \rho(x, y)$, $i=1, \dots, n$

ii) $\rho(x, y) \leq \sum_{i=1}^n \rho_i(x_i, y_i)$

Απόδειξη.

i) Για τη σχέση (i) και για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$ έχουμε

$$\rho_i(x_i, y_i) \leq \sqrt{\rho_i^2(x_i, y_i)} \leq \sqrt{\rho_1^2(x_1, y_1) + \dots + \rho_n^2(x_n, y_n)} = \rho(x, y).$$

ii) Η σχέση (ii) είναι άμεση συνέπεια της γνωστής σχέσης

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 \leq (|a_1| + \dots + |a_n|)^2,$$

αν θέσουμε $a_i = \rho_i(x_i, y_i)$, $i=1, \dots, n$. ♦ $\rho \leq |a_1| + \dots + |a_n|$



1.3.6. Έστω ρ μια μετρική σ' ένα μη κενό σύνολο E . Τότε οι συναρτήσεις $\tau: E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ και $\sigma: E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους

$$\tau(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)} \quad \text{και} \quad \sigma(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\},$$

είναι επίσης μετρικές στο E .

Απόδειξη.

Για την τριγωνική ιδιότητα της τ παρατηρούμε ότι για τυχόντα x, y και z εν E έχουμε:

$$\begin{aligned} \tau(x, y) + \tau(y, z) &= \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)} + \frac{\rho(y, z)}{1 + \rho(y, z)} \geq \\ &= \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y) + \rho(y, z)} + \frac{\rho(y, z)}{1 + \rho(x, y) + \rho(y, z)} = \\ &= \frac{\rho(x, y) + \rho(y, z)}{1 + \rho(x, y) + \rho(y, z)} = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{\rho(x, y) + \rho(y, z)}} \geq \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{\rho(x, z)}} = \tau(x, z). \end{aligned}$$

Επίσης, για την τριγωνική ιδιότητα της σ

$$\sigma(x, z) \leq \sigma(x, y) + \sigma(y, z) \quad (*)$$

διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) $x = y = z$, β) $x = y \neq z$, γ) $x = z \neq y$, δ) $x \neq y = z$ και ε) $x \neq y \neq z \neq x$.

Θ' ασχοληθούμε ενδεικτικά με τις περιπτώσεις (δ) και (ε). Για την περίπτωση (δ), η (*) γίνεται $\sigma(x, z) \leq \sigma(x, y)$, που προφανώς ισχύει αφού $y = z$. Ακόμη, για την περίπτωση (ε)

διακρίνουμε τις υποπεριπτώσεις:

- ε₁) $\min\{1, \rho(x, y)\} = 1, \min\{1, \rho(x, z)\} = 1, \min\{1, \rho(y, z)\} = 1,$
- ε₂) $\min\{1, \rho(x, y)\} = \rho(x, y), \min\{1, \rho(x, z)\} = 1, \min\{1, \rho(y, z)\} = 1,$
- ε₃) $\min\{1, \rho(x, y)\} = \rho(x, y), \min\{1, \rho(x, z)\} = \rho(x, z), \min\{1, \rho(y, z)\} = 1,$
- ε₄) $\min\{1, \rho(x, y)\} = \rho(x, y), \min\{1, \rho(x, z)\} = 1, \min\{1, \rho(y, z)\} = \rho(y, z),$
- ε₅) $\min\{1, \rho(x, y)\} = 1, \min\{1, \rho(x, z)\} = 1, \min\{1, \rho(y, z)\} = \rho(y, z),$
- ε₆) $\min\{1, \rho(x, y)\} = 1, \min\{1, \rho(x, z)\} = \rho(x, z), \min\{1, \rho(y, z)\} = \rho(y, z),$
- ε₇) $\min\{1, \rho(x, y)\} = \rho(x, y), \min\{1, \rho(x, z)\} = \rho(x, z), \min\{1, \rho(y, z)\} = \rho(y, z),$
- ε₈) $\min\{1, \rho(x, y)\} = 1, \min\{1, \rho(x, z)\} = \rho(x, z), \min\{1, \rho(y, z)\} = 1.$

Για την περίπτωση (ε₆), π.χ., η (*) γίνεται $1 \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$, που προφανώς ισχύει, αφού στην περίπτωση αυτή έχουμε $1 \leq \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$. Όμοια εργαζόμαστε και στις άλλες περιπτώσεις.



Οι άλλες ιδιότητες είναι προφανείς τόσο για την τ όσο και για τη σ . ♦

1.3.7. Ας είναι (E_i, ρ_i) , $i=1, \dots, n$, μετρικοί χώροι και $E = \times_{i=1}^n E_i$. Τότε οι συναρτήσεις $\rho' : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ και $\rho'' : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$, που ορίζονται από τους τύπους:

$$\rho'(x, y) = \max_i \rho_i(x_i, y_i) \quad \text{και} \quad \rho''(x, y) = \sum_{i=1}^n \rho_i(x_i, y_i),$$

όπου $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$ και $y = (y_1, \dots, y_n) \in E$, είναι μετρικές στο E και μάλιστα για τυχόντα $x, y \in E$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} \rho'(x, y) &\leq \rho(x, y) \leq \sqrt{n} \rho'(x, y) \\ \frac{1}{n} \rho''(x, y) &\leq \rho(x, y) \leq \rho''(x, y) \end{aligned}$$

Απόδειξη.

Το ότι οι συναρτήσεις ρ' , ρ'' είναι μετρικές αποδεικνύεται εύκολα.

Για τις σχέσεις

$$\rho'(x, y) \leq \rho(x, y) \leq \sqrt{n} \rho'(x, y)$$

και

$$\frac{1}{n} \rho''(x, y) \leq \rho(x, y) \leq \rho''(x, y),$$

αρκεί ν' αποδείξουμε ότι για τυχόν $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ισχύουν

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq |\vec{x}| \leq \sqrt{n} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

και

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i| \leq |\vec{x}| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

αντίστοιχα.

Πραγματικά, αν $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = |x_k|$, παίρνουμε

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = |x_k| = \sqrt{x_k^2} \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = |\vec{x}|$$

και

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq \sqrt{n x_k^2} = \sqrt{n} |x_k| = \sqrt{n} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Επίσης, επειδή

$$|x_i| \leq |\vec{x}|, \quad i = 1, \dots, n,$$

παίρνουμε



$$\sum_{i=1}^n |x_i| \leq n |\vec{x}|.$$

Άρα

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i| \leq |\vec{x}|.$$

Ακόμη, από τη σχέση

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq x_1^2 + \dots + x_n^2 + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |x_i| |x_j| = (|x_1| + \dots + |x_n|)^2,$$

παίρνουμε τελικά

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq \sum_{i=1}^n |x_i|. \quad \blacklozenge$$

1.3.8. Αν ρ είναι μια μετρική σ' ένα σύνολο E τότε και η d , όπου $d = c\rho$, $c > 0$, είναι επίσης μια μετρική στο E .

Απόδειξη.

Για τυχόντα $x, y, z \in E$ έχουμε:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow c\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ (αφού } c > 0)$$

$$d(x, y) = c\rho(x, y) = c\rho(y, x) = d(y, x)$$

$$d(x, y) = c\rho(x, y) \leq c(\rho(x, z) + \rho(z, y)) = c\rho(x, z) + c\rho(z, y) = d(x, z) + d(z, y). \quad \blacklozenge$$

1.4. Απόσταση συνόλων – Διάμετρος συνόλου

Αν A και B είναι μη κενά υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (E, ρ) ορίζουμε ως **απόσταση (distance) των συνόλων A και B** τον πραγματικό αριθμό $\inf\{\rho(x, y) : (x, y) \in A \times B\}$ που τον συμβολίζουμε με $\rho(A, B)$.

Έτσι έχουμε

$$\rho(A, B) = \inf\{\rho(x, y) : (x, y) \in A \times B\} = \inf_{(x, y) \in A \times B} \rho(x, y).$$



Από τον παραπάνω ορισμό είναι άμεσες οι τρεις παρακάτω ιδιότητες, που ισχύουν για τυχόντα υποσύνολα A και B ενός μετρικού χώρου.

$$\rho(A, B) \geq 0,$$

$$\rho(A, B) = \rho(B, A),$$

$$A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \rho(A, B) = 0.$$

Έχοντας υπόψη τα παραπάνω, ορίζουμε την **απόσταση** $\rho(a, A)$ ενός σημείου a του E και ενός υποσυνόλου A του E με τον τύπο:

$$\rho(a, A) = \rho(\{a\}, A) = \inf_{x \in A} \rho(a, x).$$

Για κάθε σημείο $a \in E$ και για τυχόν μη κενό υποσύνολο A του E είναι φανερό ότι ισχύει

$$a \in A \Rightarrow \rho(a, A) = 0.$$

Η **διάμετρος (diameter)** $\delta(A)$ ενός υποσυνόλου A ενός μετρικού χώρου ορίζεται με τον τύπο:

$$\delta(A) = \sup\{\rho(x, y) : (x, y) \in A \times A\} = \sup_{(x, y) \in A \times A} \rho(x, y).$$

Για κάθε υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου ισχύει

$$0 \leq \delta(A) \leq \infty.$$

Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου λέγεται **φραγμένο (bounded)** αν η διάμετρος του είναι πεπερασμένη, δηλαδή αν $\delta(A) < \infty$.

Για το κενό σύνολο κάνουμε την παραδοχή ότι είναι φραγμένο σύνολο.

Αν ισχύει $\delta(E) < \infty$, τότε ο E ονομάζεται **φραγμένος μετρικός χώρος (bounded metric space)**.

1.5. Παραδείγματα - Εφαρμογές - Σχόλια

1.5.1. Στη σχέση $a \in A \Rightarrow \rho(a, A) = 0$, δεν ισχύει το αντίστροφο.

Απόδειξη.

Πραγματικά, στον ευκλείδειο μετρικό χώρο $(\mathbf{R}, |\cdot|)$, για το σύνολο $A = \{\frac{1}{v} : v \in \mathbf{N}\}$, παίρνουμε

$$\varrho(0, A) = \inf_{v \in \mathbf{N}} \left| \frac{1}{v} - 0 \right| = \inf_{v \in \mathbf{N}} \frac{1}{v} = 0 \text{ και ταυτόχρονα } 0 \notin A.$$

Όμοια, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι και στη σχέση

$$A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \varrho(A, B) = 0,$$

δεν ισχύει το αντίστροφο. Αρκεί, πάλι στον $(\mathbf{R}, |\cdot|)$, να πάρουμε $A = \{\frac{1}{v} : v \in \mathbf{N}\}$ και $B = \{0\}$. ♦

1.5.2. Η έννοια του φραγμένου σ' ένα μετρικό χώρο (E, ϱ) , εξαρτάται άμεσα από τη μετρική ϱ .

Πραγματικά, αν θεωρήσουμε τον διακριτό μετρικό χώρο $(\mathbf{R}, \varrho)$ (Βλέπε 1.3.3.), τότε ολόκληρος ο χώρος $\mathbf{R}$ αλλά και κάθε υποσύνολό του είναι φραγμένα σύνολα. Εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς ότι $\delta(\mathbf{R}) = 1$.

Τέτοιες μετρικές που καθιστούν ολόκληρο το χώρο φραγμένο σύνολο, ονομάζονται **φραγμένες μετρικές** (Βλέπε 1.3.6).

Αντίθετα, αν θεωρήσουμε τον ευκλείδειο μετρικό χώρο $(\mathbf{R}, |\cdot|)$, παίρνουμε $\delta(\mathbf{R}) = \infty$, δηλαδή η μετρική που εισάγεται στο $\mathbf{R}$ από την απόλυτη τιμή δεν είναι φραγμένη.

1.5.3. Για τυχόντα σημεία a, b ενός μετρικού χώρου (E, ϱ) και για τυχόν μη κενό υποσύνολο A του E ισχύει:

$$|\varrho(a, A) - \varrho(b, A)| \leq \varrho(a, b).$$

Απόδειξη.

Για τυχόν $x \in A$ έχουμε $\varrho(a, x) \leq \varrho(a, b) + \varrho(b, x)$. Έτσι,

$$\varrho(a, A) = \inf_{x \in A} \varrho(a, x) \leq \inf_{x \in A} \{\varrho(a, b) + \varrho(b, x)\} = \varrho(a, b) + \inf_{x \in A} \varrho(b, x) = \varrho(a, b) + \varrho(b, A).$$

Άρα

$$\varrho(a, A) - \varrho(b, A) \leq \varrho(a, b).$$

Όμοια, παίρνουμε

$$\varrho(b, A) - \varrho(a, A) \leq \varrho(a, b).$$

Επομένως, τελικά έχουμε



$$| \varrho(a, A) - \varrho(b, A) | \leq \varrho(a, b). \quad \blacklozenge$$

1.5.4. Αν A και B είναι φραγμένα υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (E, ϱ) , τότε και η ένωσή τους είναι φραγμένο σύνολο και μάλιστα ισχύει:

$$\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + \varrho(A, B).$$

Απόδειξη.

Θεωρούμε δύο τυχόντα στοιχεία x, y εν $A \cup B$.

Αν $x \in A$ και $y \in A$, τότε $\varrho(x, y) \leq \delta(A)$ και έτσι:

$$\varrho(x, y) \leq \delta(A) \leq \delta(A) + \delta(B) + \varrho(A, B).$$

Όμοια, αν $x \in B$ και $y \in B$.

Ας είναι $x \in A$ και $y \in B$. Τότε, επειδή $\varrho(A, B) = \inf_{(x, y) \in A \times B} \varrho(x, y)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$

υπάρχουν στοιχεία $z \in A$ και $w \in B$ τέτοια, ώστε

$$\varrho(z, w) \leq \varrho(A, B) + \left(\frac{1}{n}\right). \quad (*)$$

Πραγματικά αν δεν συνέβαινε η (*) θα είχαμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε για όλα τα $z \in A$ και $w \in B$ να συμβαίνει $\varrho(z, w) > \varrho(A, B) + \frac{1}{n_0}$. Άρα

$$\inf_{(z, w) \in A \times B} \varrho(z, w) = \varrho(A, B) \geq \varrho(A, B) + \frac{1}{n_0} \Rightarrow \frac{1}{n_0} \leq 0,$$

που είναι άτοπο.

Άρα η (*) ισχύει και επιπλέον

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, w) + \varrho(w, y),$$

που συνεπάγεται, λόγω της (*),

$$\varrho(x, y) \leq \delta(A) + \varrho(A, B) + \frac{1}{n} + \delta(B).$$

Έτσι, επειδή η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$, παίρνουμε

$$\varrho(x, y) \leq \delta(A) + \varrho(A, B) + \delta(B).$$

Επομένως, αποδείχτηκε ότι για τυχόντα x, y εν $A \cup B$ ισχύει

$$\varrho(x, y) \leq \delta(A) + \varrho(A, B) + \delta(B).$$

Άρα

$$\sup_{(x, y) \in (A \cup B)^2} \varrho(x, y) \leq \delta(A) + \varrho(A, B) + \delta(B),$$

δηλαδή

$$\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \varrho(A, B) + \delta(B). \quad \blacklozenge$$



1.5.5. Ας είναι (E, ρ) ο καρτεσιανός μετρικός χώρος των μετρικών χώρων (E_i, ρ_i) , $i=1, \dots, n$ και $S = \times_{i=1}^n S_i$, όπου $S_i \subseteq E_i$, $i=1, \dots, n$. Τότε ισχύει:

$$i) \max\{\delta(S_1), \dots, \delta(S_n)\} \leq \delta(S) \leq \delta(S_1) + \dots + \delta(S_n),$$

$$ii) S \text{ φραγμένο} \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, n\}) S_i \text{ φραγμένο.}$$

Απόδειξη.

i) Θεωρούμε τυχόν $i \in \{1, \dots, n\}$ και δυο τυχόντα στοιχεία x_i, y_i εν S_i . Τότε, επειδή $S = \times_{i=1}^n S_i$, υπάρχουν στοιχεία x και y εν S τέτοια, ώστε $\rho_i(x) = x_i$ και $\rho_i(y) = y_i$, όπου $\rho_i : S \rightarrow S_i$ είναι η i -προβολή του S . Άρα, $x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ και $y = (y_1, \dots, y_i, \dots, y_n)$ και, επειδή $\rho_i(x_i, y_i) \leq \rho(x, y)$ (Βλέπε 1.3.5.), παίρνουμε

$$\rho_i(x_i, y_i) \leq \rho(x, y) \leq \sup_{(z, w) \in S^2} \rho(z, w) = \delta(S).$$

Αφού τα στοιχεία x_i, y_i είναι τυχόντα εν S_i , η τελευταία σχέση δίνει

$$\delta(S_i) \leq \sup\{\rho_i(x_i, y_i) : (x_i, y_i) \in S_i^2\} \leq \delta(S).$$

Έτσι, αφού το i είναι τυχόν έχουμε

$$\max\{\delta(S_1), \dots, \delta(S_n)\} \leq \delta(S).$$

Επιπλέον, αν $x = (x_1, \dots, x_n)$ και $y = (y_1, \dots, y_n)$ είναι δύο τυχόντα στοιχεία του S , τότε έχουμε (Βλέπε 1.3.5.),

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \rho_i^2(x_i, y_i)} \leq |\rho_1(x_1, y_1)| + \dots + |\rho_n(x_n, y_n)| \leq \delta(S_1) + \dots + \delta(S_n).$$

Επομένως

$$\delta(S) = \sup_{(x, y) \in S^2} \rho(x, y) \leq \delta(S_1) + \dots + \delta(S_n).$$

ii) Προκύπτει άμεσα από την (i). ♦

1.6. Σφαιρικές περιοχές – Περιοχές

Ας είναι a είναι τυχόν σημείο ενός μετρικού χώρου (E, ρ) και r ένας θετικός πραγματικός αριθμός.

Ονομάζουμε **σφαιρική περιοχή (spherical neighborhood)** ή **σφαίρα (sphere)** με **κέντρο (center)** το σημείο a και **ακτίνα (radius)** r , το σύνολο $B(a, r)$ που ορίζεται με τον τύπο:

$$B(a, r) = \{x \in E : \rho(x, a) < r\}.$$



Δηλαδή σφαιρική περιοχή με κέντρο a και ακτίνα r , $r > 0$, είναι το σύνολο των σημείων του χώρου E που η απόστασή τους από το σημείο a είναι γνήσια μικρότερη του αριθμού r . Όταν απαιτείται, χρησιμοποιούμε το σύμβολισμό $B_o(a, r)$ αντί του $B(a, r)$ για να υποδηλώσουμε τη μετρική ως προς την οποία θεωρείται η περιοχή.

Αντίστοιχα, το σύνολο:

$$C(a, r) = \{x \in E: \varrho(x, a) \leq r\},$$

ονομάζεται **κλειστή (closed) σφαιρική περιοχή ή κλειστή σφαίρα** με κέντρο το σημείο a και ακτίνα r .

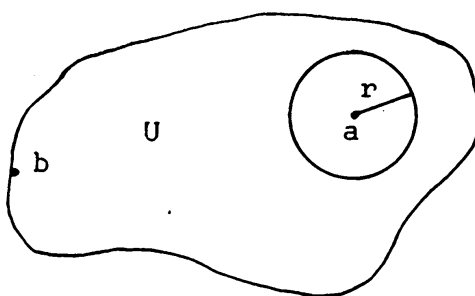
Ένα σύνολο U , $U \subseteq E$, ονομάζεται **περιοχή (neighborhood) του σημείου a** , $a \in E$, αν υπάρχει σφαιρική περιοχή $B(a, r)$ με κέντρο a και $r > 0$ τέτοια, ώστε:

$$B(a, r) \subseteq U.$$

Για να δηλώσουμε ότι ένα σύνολο U είναι περιοχή ενός σημείου a , θέτουμε συχνά

$$U = U(a).$$

Στο παρακάτω σχήμα το σύνολο U , θεωρούμενο ως υποσύνολο του ευκλείδειου μετρικού χώρου $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$, είναι περιοχή του σημείου a ενώ δεν είναι περιοχή του σημείου b .



Από τον παραπάνω ορισμό γίνεται φανερό ότι κάθε σφαιρική περιοχή είναι περιοχή του του κέντρου της. Ακριβέστερα για τις σφαιρικές περιοχές ισχύει η εξής πρόταση.

1.6.1. ΠΡΟΤΑΣΗ. Κάθε σφαιρική περιοχή είναι περιοχή οποιουδήποτε σημείου της.

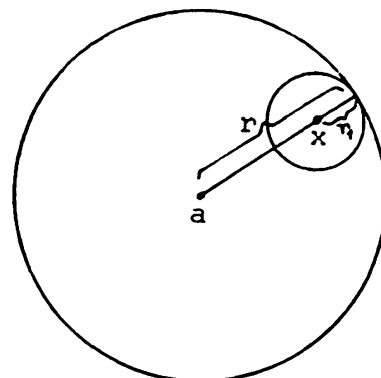
Απόδειξη.

Ας είναι $B(a, r)$ μια σφαιρική περιοχή και x τυχόν σημείο της. Επειδή $x \in B(a, r)$, ισχύει $\varrho(x, a) < r$ και επομένως $r - \varrho(x, a) > 0$. Θέτουμε $r_1 = r - \varrho(x, a)$ και θεωρούμε τη σφαίρα $B(x, r_1)$. Αρκεί ν' αποδείξουμε ότι $B(x, r_1) \subseteq B(a, r)$.

Πραγματικά, για τυχόν y παίρνουμε:

$$y \in B(x, r_1) \Rightarrow \varrho(x, y) < r_1 \Rightarrow \varrho(x, y) < r - \varrho(x, a) \Rightarrow$$

$$\varrho(x, a) + \varrho(x, y) < r \Rightarrow \varrho(y, a) < r \Rightarrow y \in B(a, r). \quad \blacklozenge$$



Για τις περιοχές σ' ένα μετρικό χώρο ισχύουν οι ιδιότητες που διαλαμβάνει η παρακάτω πρόταση.

1.6.2. ΠΡΟΤΑΣΗ. Σ' ένα μετρικό χώρο ισχύουν τα εξής:

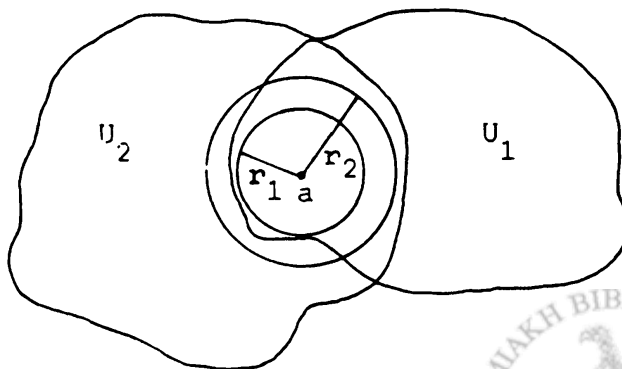
- i) Τυχόν σημείο ανήκει σε κάθε περιοχή του.
- ii) Αν U είναι μια περιοχή ενός σημείου a , τότε και κάθε υπερσύνολο V του U , είναι περιοχή του a .
- iii) Η τομή πεπερασμένου πλήθους περιοχών ενός σημείου a είναι περιοχή του a .
- iv) Για κάθε περιοχή U ενός σημείου a υπάρχει περιοχή V του a τέτοια, ώστε η U να είναι περιοχή κάθε σημείου της V .

Απόδειξη.

Τα (i) και (ii) είναι φανερά από τον ορισμό της περιοχής.

(iii) Αρκεί ν' αποδείξουμε ότι η τομή δύο περιοχών U_1 και U_2 ενός σημείου a είναι περιοχή του a . Αν αυτό ισχύει παίρνουμε εύκολα το συμπέρασμα επαγωγικά. Έτσι, ας είναι U_1 και U_2 περιοχές ενός σημείου a . Τότε υπάρχουν θετικοί αριθμοί r_1 και r_2 τέτοιοι, ώστε:

$$B(a, r_1) \subseteq U_1 \text{ και } B(a, r_2) \subseteq U_2.$$



Αν υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $r_1 \leq r_2$ τότε θα έχουμε $B(a, r_1) \subseteq B(a, r_2) \subseteq U_2$ και, επειδή $B(a, r_1) \subseteq U_1$, θα έχουμε τελικά $B(a, r_1) \subseteq U_1 \cap U_2$, που αποδεικνύει ότι το σύνολο $U_1 \cap U_2$ είναι περιοχή του σημείου a .

(iv) Έστω U είναι περιοχή του σημείου a . Άρα υπάρχει σφαιρική περιοχή $B(a, r)$ του σημείου a τέτοια, ώστε $B(a, r) \subseteq U$. Τότε όμως, κατά την Πρόταση 1.6.1., για τυχόν $x \in B(a, r)$, η περιοχή $B(a, r)$ είναι περιοχή του x και, επειδή $B(a, r) \subseteq U$, το σύνολο U είναι επίσης περιοχή του x . Έτσι, για το ζητούμενο αρκεί να ληφθεί $V = B(a, r)$. ♦

Αν είναι ένα σημείο ενός μετρικού χώρου E , το σύνολο $B(a, r) - \{a\}$ ονομάζεται **κατ' εκδοχήν σφαιρική περιοχή του a** και συμβολίζεται με $\underline{B}(a, r)$.

Έτσι,

$$\underline{B}(a, r) = B(a, r) - \{a\} = \{x \in E: 0 < \rho(x, a) < r\}.$$

Αντίστοιχα, αν $U(a)$ είναι περιοχή του σημείου a , το σύνολο $U(a) - \{a\}$ ονομάζεται **κατ' εκδοχήν περιοχή του a** και συμβολίζεται με $\underline{U}(a)$.

Έτσι,

$$\underline{U}(a) = U(a) - \{a\}.$$

Επεκτείνοντας την έννοια της σφαιρικής περιοχής με κέντρο ένα σημείο του μετρικού χώρου, μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της **σφαιρικής περιοχής $B(A, r)$ με κέντρο ένα υποσύνολο A του μετρικού χώρου και ακτίνα $r, r > 0$, με τον τύπο:**

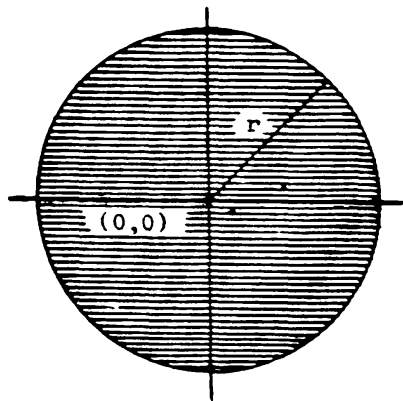
$$B(A, r) = \{x \in E: \rho(x, A) < r\}.$$

Αντίστοιχα, ένα υποσύνολο U ενός μετρικού χώρου, ονομάζεται **περιοχή του συνόλου A** αν υπάρχει σφαιρική περιοχή $B(A, r)$ του A τέτοια, ώστε: $B(A, r) \subseteq U$. Στην περίπτωση αυτή το σύνολο U συμβολίζεται συχνά και με $U(A)$.

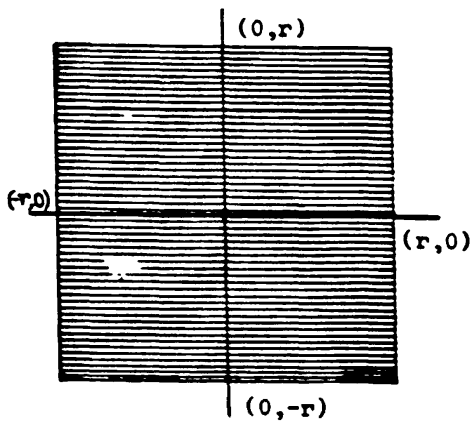
1.7. Παραδείγματα – Εφαρμογές

1.7.1. Στο επίπεδο αποδίδουμε σχηματικά μια σφαιρική περιοχή $B(a, r)$ με το εσωτερικό ενός κύκλου με κέντρο a και ακτίνα r . Αυτό είναι απόλυτα σωστό στην περίπτωση που το επίπεδο θεωρείται ως ο μετρικός χώρος $(\mathbb{R}^2, \rho)$, όπου $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$, δηλαδή ο ευκλείδειος μετρικός

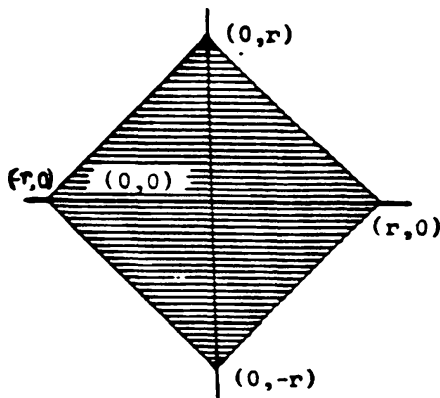
χώρος $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$. Το σχήμα της σφαιρικής περιοχής στους χώρους $\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$, όπου έχουμε εποπτεία, δεν διατηρείται αν αλλάξουμε τη μετρική. Τα παρακάτω σχήματα μας πείθουν για την αληθεια αυτού του ισχυρισμού. Καθένα από τα επόμενα σχήματα αποδίδει την εικόνα της σφαιρικής περιοχής $B(\vec{0}, r)$ στο μετρικό χώρο που σημειώνεται δίπλα.



$$(\mathbb{R}^2, \rho), \rho(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

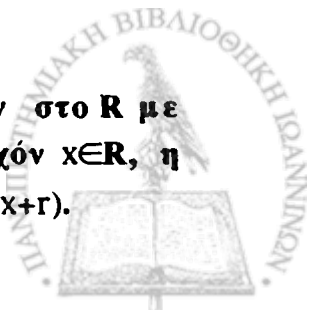


$$(\mathbb{R}^2, \rho_1), \rho_1(\vec{x}, \vec{y}) = N_1(\vec{x} - \vec{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$



$$(\mathbb{R}^2, \rho_2), \rho_2(\vec{x}, \vec{y}) = N_2(\vec{x} - \vec{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

Είναι αξιοσημείωτο ότι οι μετρικές ρ, ρ_1 και ρ_2 συμπίπτουν στο $\mathbb{R}$ με τη μετρική με τύπο $\rho(x, y) = |x - y|$, ως προς την οποία, για τυχόν $x \in \mathbb{R}$, η σφαιρική περιοχή $B(x, r)$ ταυτίζεται με το ανοιχτό διάστημα $(x - r, x + r)$.



1.7.2. Αν (E, ρ) είναι ο καρτεσιανός μετρικός χώρος των μετρικών χώρων (E_i, ρ_i) , $i=1, \dots, n$, τότε για τυχόν στοιχείο $a=(a_1, \dots, a_n) \in E$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$i) B(a_1, \frac{r}{\sqrt{n}}) \times \dots \times B(a_n, \frac{r}{\sqrt{n}}) \subseteq B(a, r), r > 0.$$

$$ii) B(a, r) \subseteq B(a_1, r_1) \times \dots \times B(a_n, r_n), r = \min\{r_1, \dots, r_n\}.$$

Απόδειξη.

i) Για να αποδείξουμε τη σχέση (i) θεωρούμε τυχόν στοιχείο $x = (x_1, \dots, x_n)$ του συνόλου $B(a_1, \frac{r}{\sqrt{n}}) \times \dots \times B(a_n, \frac{r}{\sqrt{n}})$, οπότε έχουμε:

$$x_1 \in B(a_1, \frac{r}{\sqrt{n}}) \Rightarrow \rho_1(x_1, a_1) < \frac{r}{\sqrt{n}}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_n \in B(a_n, \frac{r}{\sqrt{n}}) \Rightarrow \rho_n(x_n, a_n) < \frac{r}{\sqrt{n}}.$$

Άρα

$$\rho_1^2(x_1, a_1) + \dots + \rho_n^2(x_n, a_n) < n \frac{r^2}{n} \Rightarrow \rho^2(x, a) < r^2 \Rightarrow \rho(x, a) < r \Rightarrow x \in B(a, r).$$

ii) Για την απόδειξη της σχέσης (ii), παρατηρούμε ότι για κάθε $x = (x_1, \dots, x_n)$ έχουμε:

$$x \in B(a, r) \Rightarrow \rho(x, a) < r \Rightarrow \rho_1^2(x_1, a_1) + \dots + \rho_n^2(x_n, a_n) < r^2 \Rightarrow$$

$$\rho_i^2(x_i, a_i) < r^2, i=1, \dots, n.$$

Επειδή όμως $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$, η τελευταία σχέση γίνεται

$$\rho_1(x_1, a_1) < r_1, \dots, \rho_n(x_n, a_n) < r_n \Rightarrow x_1 \in B(a_1, r_1), \dots, x_n \in B(a_n, r_n) \Rightarrow$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in B(a_1, r_1) \times \dots \times B(a_n, r_n). \quad \blacklozenge$$

1.7.3. Όπως έχει τονιστεί, το κέντρο μιας σφαιρικής περιοχής είναι πάντοτε σημείο της σφαιρικής περιοχής, όπως επίσης και κάθε περιοχής του. Υπάρχει μάλιστα περίπτωση μια σφαιρική περιοχή να έχει ακριβώς ένα σημείο, το κέντρο της.

Απόδειξη.

Πραγματικά, θεωρούμε ένα διακριτό μετρικό χώρο (E, ρ) , όπου η μετρική ρ , όπως είναι γνωστό, ορίζεται με τον τύπο

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \neq y \\ 0, & \text{αν } x = y \end{cases}.$$



Θεωρούμε επίσης τυχόν στοιχείο $a, a \in E$ και τη σφαιρική περιοχή $B(a, 1)$ του a . Είναι φανερό ότι $a \in B(a, 1)$. Επιπλέον, για κάθε $x \in E$ έχουμε

$$x \neq a \Rightarrow \varrho(x, a) = 1 \Rightarrow x \notin B(a, 1).$$

Άρα

$$B(a, 1) = \{a\}.$$

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι για τυχόν στοιχείο a ενός διακριτού μετρικού χώρου E ισχύει:

$$B(a, r) = \begin{cases} \{a\}, & \text{αν } r \leq 1 \\ E, & \text{αν } r > 1 \end{cases}.$$

1.7.4. Σε τυχόντα μετρικό χώρο E και για κάθε $a \in E$ ισχύει:

$$\delta(B(a, r)) \leq 2r.$$

Απόδειξη.

Για τυχόντα στοιχεία $x, y \in B(a, r)$ έχουμε

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, a) + \varrho(z, a) < r + r = 2r.$$

Άρα

$$\sup_{(x, y) \in B^2(a, r)} \varrho(x, y) \leq 2r \Rightarrow \delta(B(a, r)) \leq 2r. \quad \blacklozenge$$

† Είναι ενδιαφέρον να εξεταστεί αν υπάρχουν μετρικοί χώροι και σφαιρικές περιοχές που να ισχύει

$$\delta(B(a, r)) < 2r.$$

Η σχέση αυτή μπορεί να ισχύει σ' ένα διακριτό μετρικό χώρο.

Πράγματι, όπως είναι γνωστό από την προηγούμενη Εφαρμογή 1.7.3., σ' ένα διακριτό μετρικό χώρο και για τυχόν a ισχύει $B(a, 1) = \{a\}$. Επομένως

$$\delta(B(a, 1)) = \delta(\{a\}) = 0 < 2 = 2 \cdot 1.$$

1.7.6. Έστω A τυχόν μη κενό και φραγμένο υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (E, ϱ) και x_0 τυχόν στοιχείο του E . Θέτουμε $r = \varrho(x_0, A) + \delta(A)$. Τότε ισχύει:

$$A \subseteq B(x_0, r).$$

Απόδειξη.

Για το τυχόν $x_0 \in E$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $z \in A$ τέτοιο, ώστε:



$$\varrho(x_0, z) < \varrho(x_0, A) + \frac{1}{v}. (*)$$

Αυτό, γιατί διαφορετικά θα είχαμε:

$$(\exists v_0 \in \mathbb{N})(\forall z \in A) \varrho(x_0, z) \geq \varrho(x_0, A) + \frac{1}{v_0} \Rightarrow (\exists v_0 \in \mathbb{N}) \inf_{z \in A} \varrho(x_0, z) = \varrho(x_0, A) \geq \varrho(x_0, A) + \frac{1}{v_0} \\ \Rightarrow (\exists v_0 \in \mathbb{N}) \frac{1}{v_0} \leq 0,$$

που είναι άτοπο.

Έτσι, χρησιμοποιώντας τη σχέση (*), για τυχόν $x \in A$ παίρνουμε

$$\varrho(x, x_0) \leq \varrho(x_0, z) + \varrho(x, z) < \varrho(x_0, A) + \frac{1}{v} + \delta(A).$$

Επειδή η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $v \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\varrho(x, x_0) \leq \varrho(x_0, A) + \delta(A) = r \Rightarrow x \in B(x_0, r),$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. ♦

1.8. Πυρήνας και θήκη συνόλου

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε αρχικά τη θέση ενός σημείου a ενός μετρικού χώρου (E, ϱ) σε σχέση με ένα υποσύνολο A του E . Είναι φανερό ότι για το σημείο a και το σύνολο A ισχύει αυστηρά ένα από τα δύο $a \in A$ ή $a \notin A$. Όμως η έννοια της μετρικής μας επιτρέπει να διακρίνουμε πολύ λεπτότερες διαβαθμίσεις στη θέση του σημείου a σε σχέση με το σύνολο A . Για το σκοπό αυτό δίνουμε τους παρακάτω ορισμούς:

| Ένα σημείο a θα λέμε ότι είναι **εσωτερικό σημείο (interior point)** του συνόλου A αν υπάρχει $r > 0$ τέτοιο, ώστε $B(a, r) \subseteq A$.

| Το σύνολο των εσωτερικών σημείων ενός συνόλου A το ονομάζουμε **πυρήνα** ή **εσωτερικό (interior)** του συνόλου A και το συμβολίζουμε με A° .

| Ένα σημείο a θα λέμε ότι είναι **σημείο επαφής (contact point)** του συνόλου A αν για κάθε $r > 0$ ισχύει $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$.

| Το σύνολο των σημείων επαφής ενός συνόλου A το ονομάζουμε **θήκη** ή **κάλυμμα (closure)** του συνόλου A και το συμβολίζουμε με $\bar{A}$.

Από τους ορισμούς αυτούς, γίνεται αμέσως φανερό ότι

$$E^\circ = E = \bar{E}.$$



Ορίζουμε επίσης

$$\emptyset^\circ = \emptyset = \bar{\emptyset}.$$

Δεν υπάρχει καμμία βλάβη αν στους παραπάνω ορισμούς αντικαταστήσουμε τον όρο “σφαιρική περιοχή” με τον όρο “περιοχή”. Αυτό είναι άμεση συνέπεια της παρακάτω Πρότασης 1.8.1.. Έτσι, στα επόμενα και σ’ ότι αφορά τις έννοιες εσωτερικό σημείο και σημείο επαφής, αντί του όρου “σφαιρική περιοχή” μπορούμε να χρησιμοποιούμε τον όρο “περιοχή” και αντίστροφα.

1.8.1. ΠΡΟΤΑΣΗ. Για τυχόν υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου E και για τυχόν σημείο a του E ισχύουν:

i) $a \in A^\circ \Leftrightarrow$ Υπάρχει περιοχή $U(a)$ του a τέτοια, ώστε $U(a) \subseteq A$.

ii) $a \in \bar{A} \Leftrightarrow$ Για κάθε περιοχή $U(a)$ του a ισχύει $U(a) \cap A \neq \emptyset$.

Απόδειξη.

i) Έστω $a \in A^\circ$. Τότε υπάρχει σφαιρική περιοχή $B(a, r)$ τέτοια, ώστε $B(a, r) \subseteq A$. Θέτοντας $B(a, r) = U(a)$, έχουμε το ζητούμενο.

Αντίστροφα, έστω ότι υπάρχει περιοχή $U(a)$ του a τέτοια, ώστε $U(a) \subseteq A$. Τότε όμως υπάρχει σφαιρική περιοχή $B(a, r)$ με $B(a, r) \subseteq U(a)$ οπότε, επειδή $U(a) \subseteq A$, παίρνουμε $B(a, r) \subseteq A$, δηλαδή $a \in A^\circ$.

ii) Έστω $a \in \bar{A}$ και $U(a)$ τυχούσα περιοχή του a . Τότε υπάρχει σφαιρική περιοχή $B(a, r)$ με $B(a, r) \subseteq U(a)$. Αλλά επειδή $a \in \bar{A}$, έχουμε $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$. Έτσι, επειδή $B(a, r) \subseteq U(a)$, παίρνουμε $B(a, r) \cap A \subseteq U(a) \cap A$, δηλαδή $U(a) \cap A \neq \emptyset$.

Αντίστροφα, έχουμε αμέσως το ζητούμενο θέτοντας $U(a) = B(a, r)$. ♦

Οι επόμενες προτάσεις συνοψίζουν τα σημαντικότερα συμπεράσματα που αφορούν τις παραπάνω έννοιες. Όπως μπορεί να διαπιστώσει κανείς αμέσως, υπάρχει μια αξιοσημείωτη δυϊκότητα στα συμπεράσματα αυτά.

1.8.2. ΠΡΟΤΑΣΗ. Για τυχόντα υποσύνολα A και B ενός μετρικού χώρου E ισχύουν οι σχέσεις:

i) $A^\circ \subseteq A$

i') $A \subseteq \bar{A}$

ii) $A \subseteq B \Rightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$

ii') $A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$

iii) $(A^\circ)^c = \bar{A}^c$

iii') $(\bar{A})^c = (A^c)^\circ$

Απόδειξη.

i) Έστω $x \in A^\circ$. Τότε υπάρχει $r > 0$ τέτοιο, ώστε $B(x, r) \subseteq A$. Έτσι, επειδή $x \in B(x, r)$, παίρνουμε $x \in A$.

i') Έστω $x \in A$ και $B(x, r)$ τυχούσα περιοχή του x . Έτσι, έχουμε:

$$x \in A \text{ και } x \in B(x, r) \Rightarrow x \in A \cap B(x, r) \Rightarrow A \cap B(x, r) \neq \emptyset.$$

Άρα, αφού η $B(x, r)$ είναι τυχούσα, παίρνουμε $x \in \bar{A}$.

ii) Υποθέτουμε ότι $A \subseteq B$ και έστω x τυχόν σημείο, με $x \in A^\circ$. Άρα, υπάρχει $r > 0$ τέτοιο, ώστε $B(x, r) \subseteq A$. Αλλά τότε, επειδή $A \subseteq B$, έχουμε $B(x, r) \subseteq B$. Επομένως $x \in B^\circ$, δηλαδή τελικά $A^\circ \subseteq B^\circ$.

ii') Υποθέτουμε ότι $A \subseteq B$ και έστω x τυχόν σημείο, με $x \in \bar{A}$. Τότε για κάθε $r > 0$ έχουμε $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$. Άρα, επειδή $A \subseteq B$, έχουμε $B(x, r) \cap B \neq \emptyset$ για κάθε $r > 0$. Αιπό όμως σημαίνει ότι $x \in \bar{B}$, δηλαδή τελικά $\bar{A} \subseteq \bar{B}$.

iii) Για τυχόν x έχουμε:

$$x \in (A^\circ)^c \Leftrightarrow \sim(x \in A^\circ) \Leftrightarrow \sim[(\exists r > 0) B(x, r) \subseteq A] \Leftrightarrow (\forall r > 0) B(x, r) \not\subseteq A \Leftrightarrow$$

$$(\forall r > 0) B(x, r) \cap A^c \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \bar{A}^c.$$

iii') Για τυχόν x έχουμε:

$$x \in (\bar{A})^c \Leftrightarrow \sim(x \in \bar{A}) \Leftrightarrow \sim[(\forall r > 0) B(x, r) \cap A \neq \emptyset] \Leftrightarrow (\exists r > 0) B(x, r) \cap A = \emptyset \Leftrightarrow$$

$$(\exists r > 0) B(x, r) \subseteq A^c \Leftrightarrow x \in (A^c)^\circ. \blacklozenge$$

1.8.3. ΠΡΟΤΑΣΗ. Για τυχόντα υποσύνολα A και B ενός μετρικού χώρου E ισχύουν οι σχέσεις:

$$i) A^{\circ\circ} = A^\circ$$

$$i') \bar{\bar{A}} = \bar{A}$$

$$ii) (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$$

$$ii') \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Απόδειξη.

i) Από την προηγούμενη Πρόταση 1.8.2.(i) παίρνουμε $A^{\circ\circ} \subseteq A^\circ$. Έτσι, αρκεί ν' αποδείξουμε ότι $A^\circ \subseteq A^{\circ\circ}$.

Πραγματικά για τυχόν $x \in A^\circ$ υπάρχει σφαιρική περιοχή $B(x, r)$ του x με $B(x, r) \subseteq A$. Θ' αποδείξουμε τότε ότι ισχύει και $B(x, r) \subseteq A^\circ$. Πραγματικά, αν y είναι τυχόν σημείο της $B(x, r)$ τότε η $B(x, r)$, ως περιοχή κάθε σημείου της, είναι και περιοχή του y . Άρα υπάρχει περιοχή $U(y)$ του y , η $U(y) = B(x, r)$, με $U(y) \subseteq A$. Επομένως $y \in A^\circ$ και έτσι, επειδή το y είναι τυχόν σημείο της $B(x, r)$, παίρνουμε $B(x, r) \subseteq A^\circ$, που σημαίνει ότι $x \in A^{\circ\circ}$. Άρα τελικά $A^\circ \subseteq A^{\circ\circ}$.

i') Από την Πρόταση 1.8.2.(i') παίρνουμε $\bar{A} \subseteq \bar{\bar{A}}$. Έτσι, αρκεί ν' αποδείξουμε ότι $\bar{\bar{A}} \subseteq \bar{A}$.

Θεωρούμε τυχόν $x \in \bar{\bar{A}}$ και τυχούσα περιοχή $B(x, r)$ του x . Τότε έχουμε $B(x, r) \cap \bar{A} \neq \emptyset$. Ακόμη, για τυχόν $y \in B(x, r) \cap \bar{A}$ θα έχουμε $y \in B(x, r)$ και άρα η $B(x, r)$ είναι περιοχή του y . Έτσι, επειδή $y \in \bar{A}$, θα έχουμε $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$, δηλαδή $x \in \bar{A}$.

ii) Από τις σχέσεις $A \cap B \subseteq A$ και $A \cap B \subseteq B$ και λόγω της Πρότασης 1.8.2.(ii), παίρνουμε $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ$ και $(A \cap B)^\circ \subseteq B^\circ$, οπότε $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$. Έτσι, αρκεί ν' αποδείξουμε ότι $A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ$.

Πραγματικά, για τυχόν x παίρνουμε:

$$x \in A^\circ \cap B^\circ \Leftrightarrow x \in A^\circ \wedge x \in B^\circ \Leftrightarrow [(\exists r_1 > 0) B(x, r_1) \subseteq A] \wedge [(\exists r_2 > 0) B(x, r_2) \subseteq B].$$

Άρα για $r = \min\{r_1, r_2\}$ παίρνουμε $B(x, r) \subseteq A$ και $B(x, r) \subseteq B$, οπότε $B(x, r) \subseteq A \cap B$. Επομένως $x \in (A \cap B)^\circ$, δηλαδή τελικά $A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ$.

ii') Από τις προφανείς σχέσεις $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$, λόγω της Πρότασης 1.8.2.(ii'), παίρνουμε $\bar{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ και $\bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$, οπότε $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

Για την απόδειξη της σχέσης $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$, υποθέτουμε ότι ισχύει το αντίθετο και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Άρα υπάρχει στοιχείο x τέτοιο, ώστε $x \in \overline{A \cup B}$ και $x \notin \bar{A} \cup \bar{B}$. Τότε όμως θα έχουμε $x \notin \bar{A}$ και $x \notin \bar{B}$, δηλαδή θα υπάρχουν περιοχές $B(x, r_1)$ και $B(x, r_2)$ του x τέτοιες, ώστε

$$B(x, r_1) \cap A = \emptyset \text{ και } B(x, r_2) \cap B = \emptyset.$$

Θέτοντας $r = \min\{r_1, r_2\}$, παίρνουμε $B(x, r) \cap A = \emptyset$ και $B(x, r) \cap B = \emptyset$, οπότε

$$B(x, r) \cap (A \cup B) = (B(x, r) \cap A) \cup (B(x, r) \cap B) = \emptyset.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο αφού ισχύει ότι $x \in \overline{A \cup B}$. ♦

1.8.4. ΠΟΡΙΣΜΑ. Αν $A_1, A_2, \dots, A_n$ είναι τυχόντα υποσύνολα ενός μετρικού χώρου E , τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$$\text{i) } \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)^\circ = \bigcap_{i=1}^n A_i^\circ \quad \text{i'') } \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i.$$



Απόδειξη.

Εργαζόμαστε με επαγωγή, αφού είναι γνωστό από την προηγούμενη Πρόταση 1.8.3. ότι για $n = 2$ οι σχέσεις ισχύουν. ♦

1.8.5. ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν $A_i, i \in I$ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου E , τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{array}{ll} \text{i) } (\bigcup_{i \in I} A_i)^\circ \supseteq \bigcup_{i \in I} A_i^\circ & \text{i') } \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \supseteq \bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \\ \text{ii) } (\bigcap_{i \in I} A_i)^\circ \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i^\circ & \text{ii') } \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subseteq \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} \end{array}$$

Απόδειξη.

i) Για κάθε $i \in I$ έχουμε

$$A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow A_i^\circ \subseteq (\bigcup_{i \in I} A_i)^\circ.$$

Άρα

$$\bigcup_{i \in I} A_i^\circ \subseteq (\bigcup_{i \in I} A_i)^\circ.$$

i') Για κάθε $i \in I$ έχουμε

$$A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}.$$

Άρα

$$\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}.$$

ii) Για κάθε $i \in I$ έχουμε

$$\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_i \Rightarrow (\bigcap_{i \in I} A_i)^\circ \subseteq A_i^\circ.$$

Άρα

$$(\bigcap_{i \in I} A_i)^\circ \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i^\circ.$$

ii') Για κάθε $i \in I$ έχουμε

$$\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_i \Rightarrow \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subseteq \overline{A_i}.$$

Άρα

$$\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subseteq \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}. \quad \blacklozenge$$



Μετά από αυτά, είναι ενδιαφέρον ν' αναζητηθούν παραδείγματα όπου οι σχέσεις της Πρότασης 1.8.5 να ισχύουν με τη σχέση του γνήσιου υποσυνόλου. Αυτό γίνεται παρακάτω στο Παράδειγμα 1.9.4.

1.9. Παραδείγματα- Εφαρμογές- Σχόλια

1.9.1. Σε τυχόντα μετρικό χώρο και για κάθε στοιχείο του a ισχύει

$$\overline{\{a\}} = \{a\}.$$

Απόδειξη.

Επειδή ισχύει πάντοτε $\{a\} \subseteq \overline{\{a\}}$, θ' αποδείξουμε ότι $\overline{\{a\}} \subseteq \{a\}$. Πραγματικά, έστω $x \in \overline{\{a\}}$. Τότε, για τυχούσα περιοχή $B(x, r)$ του x ισχύει $B(x, r) \cap \{a\} \neq \emptyset$. Δηλαδή, για κάθε $r > 0$ έχουμε $a \in B(x, r)$ και επομένως $\rho(x, a) < r$ για κάθε $r > 0$. Άρα $\rho(x, a) = 0$, που σημαίνει $x = a$. Τελικά $x \in \{a\}$, οπότε $\overline{\{a\}} \subseteq \{a\}$. ♦

1.9.2. Για τυχόντα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$, στον ευκλείδειο μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ισχύουν οι σχέσεις :

i) $(\alpha, \beta)^\circ = (\alpha, \beta]^\circ = [\alpha, \beta)^\circ = [\alpha, \beta]^\circ = (\alpha, \beta)$

ii) $\overline{(\alpha, \beta)} = \overline{(\alpha, \beta]} = \overline{[\alpha, \beta)} = \overline{[\alpha, \beta]} = [\alpha, \beta]$.

Επιπλέον, έχουμε:

iii) $(\alpha, \infty)^\circ = [\alpha, \infty)^\circ = (\alpha, \infty)$

iii') $(-\infty, \beta)^\circ = (-\infty, \beta]^\circ = (-\infty, \beta)$

iv) $\overline{(\alpha, \infty)} = \overline{[\alpha, \infty)} = [\alpha, \infty)$.

iv') $\overline{(-\infty, \alpha)} = \overline{(-\infty, \alpha]} = (-\infty, \alpha]$.

Απόδειξη.

i) Για τη σχέση $(\alpha, \beta)^\circ = (\alpha, \beta)$, αρκεί ν' αποδείξουμε ότι $(\alpha, \beta) \subseteq (\alpha, \beta)^\circ$.

Για τυχόν $x \in (\alpha, \beta)$ έχουμε ότι $(x-r, x+r) \subseteq (\alpha, \beta)$, όπου $r = \min\{|x-\alpha|, |\beta-x|\}$.

Έτσι, επειδή υπάρχει περιοχή $B(x, r) = (x-r, x+r)$ του x με $B(x, r) \subseteq (\alpha, \beta)$, παίρνουμε $x \in (\alpha, \beta)^\circ$.

Για τη σχέση $(\alpha, \beta]^\circ = (\alpha, \beta)$, όπως και προηγουμένως αποδεικνύεται ότι $(\alpha, \beta) \subseteq (\alpha, \beta]^\circ$. Για το αντίστροφο, επειδή $(\alpha, \beta) \subseteq (\alpha, \beta]^\circ \subseteq (\alpha, \beta]$, αρκεί ν' αποδείξουμε

ότι $\beta \notin (a, \beta)^\circ$. Αυτό όμως είναι φανερό αφού για κάθε $r > 0$ έχουμε:
 $B(\beta, r) = (\beta - r, \beta + r) \not\subseteq (a, \beta)$.

Όμοια αποδεικνύονται οι σχέσεις $[a, \beta]^\circ = [a, \beta]^\circ = (a, \beta)$.

ii) Για τη σχέση $\overline{[a, \beta]} = [a, \beta]$, αρκεί ν' αποδείξουμε ότι $\overline{[a, \beta]} \subseteq [a, \beta]$. Πραγματικά, για τυχόν $x \in \overline{[a, \beta]}$ έχουμε:

$$x \in \overline{[a, \beta]} \Rightarrow (\forall r > 0) B(x, r) \cap [a, \beta] \neq \emptyset, \text{ όπου } B(x, r) = (x - r, x + r).$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι $x \notin [a, \beta]$ και μάλιστα χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $x > \beta$, θα έχουμε ότι $(x - r_1, x + r_1) \cap [a, \beta] = \emptyset$, όπου $r_1 = \frac{x - \beta}{2}$. Δηλαδή, υπάρχει περιοχή $B(x, r_1) = (x - r_1, x + r_1)$ του x με $B(x, r_1) \cap [a, \beta] = \emptyset$, πράγμα που είναι άτοπο αφού $x \in \overline{[a, \beta]}$.

Για τη σχέση $\overline{[a, \beta]} = [a, \beta]$, καταρχήν παρατηρούμε ότι, επειδή για κάθε $r > 0$ ισχύει $(\beta - r, \beta + r) \cap [a, \beta] \neq \emptyset$, έχουμε $\beta \in \overline{[a, \beta]}$. Άρα $[a, \beta] \subseteq \overline{[a, \beta]}$. Επιπλέον, όπως και στα προηγούμενα, εύκολα αποδεικνύεται ότι για κάθε x ισχύει $x \notin [a, \beta] \Rightarrow x \notin \overline{[a, \beta]}$, δηλαδή $\overline{[a, \beta]} \subseteq [a, \beta]$, οπότε τελικά $\overline{[a, \beta]} = [a, \beta]$.

Οι σχέσεις (iii), (iii'), (iv) και (iv'), αποδεικνύονται ανάλογα. ♦

1.9.3. Ο πυρήνας και η θήκη ενός υποσυνόλου ενός μετρικού χώρου εξαρτώνται άμεσα από τη μετρική του χώρου.

Απόδειξη:

Υποθέτουμε ότι a, β είναι πραγματικοί αριθμοί με $a < \beta$. Τότε, στο διακριτό μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, \rho)$ έχουμε

$$\{a\}^\circ = \{a\} \text{ και } \overline{(a, \beta)} = (a, \beta).$$

Αντίθετα, στο μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, l)$ έχουμε

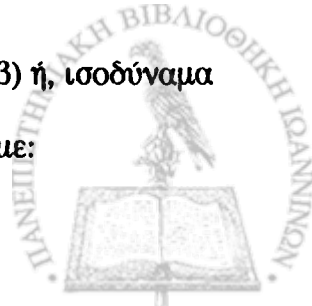
$$\{a\}^\circ = \emptyset \text{ και } \overline{(a, \beta)} = [a, \beta].$$

Ας αποδείξουμε τις παραπάνω σχέσεις.

Για τη σχέση $\{a\}^\circ = \{a\}$, αρκεί ν' αποδείξουμε ότι $\{a\} \subseteq \{a\}^\circ$ ή, ισοδύναμα ότι $a \in \{a\}^\circ$. Αυτό όμως είναι φανερό γιατί υπάρχει περιοχή του a , η $B(a, 1) = \{a\}$ (βλέπε 1.7.3.), με $B(a, 1) = \{a\} \subseteq \{a\}$.

Για τη σχέση $\overline{(a, \beta)} = (a, \beta)$, αρκεί ν' αποδείξουμε ότι $\overline{(a, \beta)} \subseteq (a, \beta)$ ή, ισοδύναμα ότι για κάθε x ισχύει $x \notin (a, \beta) \Rightarrow x \notin \overline{(a, \beta)}$. Πραγματικά, για κάθε x έχουμε:

$$x \notin (a, \beta) \Rightarrow \{x\} \cap (a, \beta) = \emptyset.$$



Άρα υπάρχει περιοχή του x , η $B(x, 1) = \{x\}$, τέτοια, ώστε $B(x, 1) \cap (\alpha, \beta) = \{x\} \cap (\alpha, \beta) = \emptyset$.

Έτσι, $x \notin \overline{(\alpha, \beta)}$.

Για τον ευκλείδιο μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, θ' αποδείξουμε μόνο τη σχέση $\{a\}^\circ = \emptyset$ αφού η σχέση $\overline{(\alpha, \beta)} = [\alpha, \beta]$ είναι γνωστή (Βλέπε 1.9.2.).

Έτσι, επειδή ισχύει $\{a\}^\circ \subseteq \{a\}$, αρκεί ν' αποδείξουμε ότι η υπόθεση $a \in \{a\}^\circ$ οδηγεί σε άτοπο. Πραγματικά:

$$a \in \{a\}^\circ \Rightarrow (\exists r > 0) B(a, r) = (a-r, a+r) \subseteq \{a\} \Rightarrow \frac{a+a+r}{2} \in \{a\} \Rightarrow \frac{2a+r}{2} = a \Rightarrow r = 0,$$

που είναι άτοπο. ♦

1.9.4. Οι σχέσεις

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \supseteq \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}, \quad (\bigcap_{i \in I} A_i)^\circ \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i^\circ$$

της Πρότασης 1.8.5., ισχύουν ως ισότητες όταν η οικογένεια $A_i, i \in I$ είναι πεπερασμένη, όπως προκύπτει από την Πρόταση 1.8.4. Όταν η οικογένεια $A_i, i \in I$ είναι απέραντη, οι σχέσεις αυτές μπορεί να ισχύουν και με τη σχέση του γνήσιου υποσυνόλου.

Απόδειξη.

Έστω $A_v = (\frac{1}{v}, \infty)$, $v \in \mathbb{N}$ μια οικογένεια υποσυνόλων στον ευκλείδιο μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Τότε

$$\bigcup_{v \in \mathbb{N}} A_v = (0, \infty),$$

οπότε:

$$\overline{\bigcup_{v \in \mathbb{N}} A_v} = \overline{\bigcup_{v \in \mathbb{N}} (\frac{1}{v}, \infty)} = \bigcup_{v \in \mathbb{N}} [\frac{1}{v}, \infty) = (0, \infty) \subset [0, \infty) = \overline{(0, \infty)} = \overline{\bigcup_{v \in \mathbb{N}} A_v}.$$

Για την άλλη σχέση θεωρούμε την οικογένεια $A_v = (-\frac{1}{v}, \frac{1}{v})$ $v \in \mathbb{N}$ πάλι στον ευκλείδιο μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Τότε, επειδή

$$\bigcap_{v \in \mathbb{N}} A_v = \{0\},$$

έχουμε:

$$(\bigcap_{v \in \mathbb{N}} A_v)^\circ = \{0\}^\circ = \emptyset \subset \{0\} = \bigcap_{v \in \mathbb{N}} A_v = \bigcap_{v \in \mathbb{N}} A_v^\circ. \quad \blacklozenge$$



Για τις σχέσεις

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^{\circ} \supseteq \bigcup_{i \in I} A_i^{\circ} \quad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subseteq \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$$

της Πρότασης 1.8.5., μπορούμε να βρούμε παραδείγματα που να ισχύουν με τη σχέση του γνήσιου υποσυνόλου, ακόμη και όταν η οικογένεια $A_i, i \in I$ είναι πεπερασμένη.

Πραγματικά, αν θεωρήσουμε την οικογένεια $\{A_1, A_2\}$ στον ευκλείδειο μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ με $A_1 = (1, 2]$ και $A_2 = (2, 3)$, έχουμε:

$$(A_1 \cup A_2)^{\circ} = [(1, 2] \cup (2, 3)]^{\circ} = (1, 3)^{\circ} = (1, 3) \supset (1, 2) \cup (2, 3) = (1, 2]^{\circ} \cup (2, 3)^{\circ} = A_1^{\circ} \cup A_2^{\circ}$$

και

$$\overline{A_1 \cap A_2} = \overline{(1, 2] \cap (2, 3)} = \overline{\emptyset} = \emptyset \subset \{2\} = [1, 2] \cap [2, 3] = \overline{(1, 2]} \cap \overline{(2, 3)} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}. \blacklozenge$$

1.9.5. Για τυχόντα υποσύνολα A, B ενός μετρικού χώρου τότε ισχύει:

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset \Rightarrow (A \cup B)^{\circ} = A^{\circ} \cup B^{\circ}.$$

Απόδειξη.

Επειδή πάντοτε ισχύει $A^{\circ} \cup B^{\circ} \subseteq (A \cup B)^{\circ}$, αρκεί ν' αποδειχτεί ότι

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset \Rightarrow (A \cup B)^{\circ} \subseteq A^{\circ} \cup B^{\circ}.$$

Πραγματικά:

$$x \in (A \cup B)^{\circ} \Rightarrow (\exists V(x)) V(x) \subseteq A \cup B. (*)$$

Επειδή $x \in V(x)$ έχουμε $x \in A \cup B$. Άρα $x \in A$ ή $x \in B$.

Έστω $x \in A$, οπότε, επειδή $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, $x \notin \overline{B}$. Έτσι, υπάρχει περιοχή $U(x)$ του x τέτοια, ώστε $U(x) \cap B = \emptyset$. Άρα, για την περιοχή $W(x) = U(x) \cap V(x)$ του x , λόγω της (*), παίρνουμε $W(x) \subseteq A$, δηλαδή $x \in A^{\circ}$ και επομένως $x \in A^{\circ} \cup B^{\circ}$.

Όμοια αν $x \in B$. $\blacklozenge$

1.9.6. Για κάθε υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου (E, ρ) ισχύουν οι σχέσεις:

i) $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \rho(x, A) = 0.$

ii) $\delta(\overline{A}) = \delta(A).$

iii) $\rho(x, A) = \rho(x, \overline{A}), x \in E.$

Απόδειξη.

i) Για τυχόν x έχουμε

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow (\forall r > 0) B(x, r) \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow (\forall r > 0) (\exists y) y \in B(x, r) \cap A \Leftrightarrow (\forall r > 0) (\exists y \in A)$$

$$\rho(x, y) < r \Leftrightarrow \rho(x, A) = 0.$$

ii) Αρχικά παρατηρούμε ότι από τη σχέση $A \subseteq \bar{A}$ προκύπτει $\delta(A) \leq \delta(\bar{A})$. Απομένει ν' αποδείξουμε ότι $\delta(\bar{A}) \leq \delta(A)$. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε δύο τυχόντα στοιχεία x, y εν $\bar{A}$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset \text{ και } B(y, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset.$$

Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν στοιχεία x_n, y_n εν A τέτοια, ώστε

$$\rho(x, x_n) < \frac{1}{n} \text{ και } \rho(y, y_n) < \frac{1}{n}.$$

Έτσι,

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, y) < \frac{1}{n} + \delta(A) + \frac{1}{n} = \delta(A) + \frac{2}{n}.$$

Επομένως, αφού η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$, παίρνουμε:

$$\rho(x, y) \leq \delta(A).$$

Επιπλέον, επειδή τα στοιχεία x, y είναι τυχόντα στο $\bar{A}$, έχουμε:

$$(\forall (x, y) \in \bar{A} \times \bar{A}) \rho(x, y) \leq \delta(A).$$

Άρα

$$\sup_{(x, y) \in \bar{A} \times \bar{A}} \rho(x, y) \leq \delta(A) \Rightarrow \delta(\bar{A}) \leq \delta(A).$$

iii) Επειδή $A \subseteq \bar{A}$, είναι φανερό ότι $\rho(x, \bar{A}) \leq \rho(x, A)$. Έτσι, αρκεί ν' αποδείξουμε ότι $\rho(x, A) \leq \rho(x, \bar{A})$. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$. Τότε, για το τυχόν $x \in E$, υπάρχει $y \in \bar{A}$ τέτοιο ώστε $\rho(x, y) \leq \rho(x, \bar{A}) + \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε όμως, επειδή $y \in \bar{A}$, υπάρχει $y_1 \in A$ τέτοιο, ώστε $\rho(y, y_1) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Άρα:

$$\rho(x, A) \leq \rho(x, y_1) \leq \rho(x, y) + \rho(y, y_1) \leq \rho(x, \bar{A}) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \rho(x, \bar{A}) + \varepsilon.$$

Τελικά, επειδή το ε είναι τυχόν, η τελευταία σχέση δίνει $\rho(x, A) \leq \rho(x, \bar{A})$. ♦



1.9.7. Στον καρτεσιανό μετρικό χώρο (E, ρ) των μετρικών χώρων (E_i, ρ_i) , $i=1, \dots, n$, έστω $A \subseteq E$, με $A = \prod_{i=1}^n A_i$, όπου $A_i \subseteq E_i$, $i=1, \dots, n$. Τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$$i) A^\circ = \left(\prod_{i=1}^n A_i \right)^\circ = \prod_{i=1}^n A_i^\circ$$

$$ii) \bar{A} = \overline{\prod_{i=1}^n A_i} = \prod_{i=1}^n \bar{A}_i.$$

Απόδειξη.

i) Έστω $x=(x_1, \dots, x_n)$ τυχόν σημείο με $x \in \prod_{i=1}^n A_i^\circ$. Τότε έχουμε

$$(\forall i) x_i \in A_i^\circ \Rightarrow (\forall i)(\exists r_i > 0) B(x_i, r_i) \subseteq A_i \Rightarrow \prod_{i=1}^n B(x_i, r_i) \subseteq \prod_{i=1}^n A_i.$$

Αλλά τότε, σε συνδυασμό με τη γνωστή (βλέπε 1.7.2.) σχέση

$$B(x, r) \subseteq \prod_{i=1}^n B(x_i, r_i), \quad r = \min\{r_1, \dots, r_n\},$$

παίρνουμε

$$B(x, r) \subseteq \prod_{i=1}^n A_i = A,$$

που σημαίνει

$$x \in \left(\prod_{i=1}^n A_i \right)^\circ = A^\circ.$$

Άρα

$$\prod_{i=1}^n A_i^\circ \subseteq \left(\prod_{i=1}^n A_i \right)^\circ = A^\circ.$$

Αντίστροφα, έστω $x=(x_1, \dots, x_n)$ τυχόν σημείο με $x \in \left(\prod_{i=1}^n A_i \right)^\circ$. Τότε

$$(\exists r > 0) B(x, r) \subseteq \prod_{i=1}^n A_i.$$

Αλλά τότε, από τη γνωστή (βλέπε 1.7.2.) σχέση

$$\prod_{i=1}^n B(x_i, \frac{r}{\sqrt{n}}) \subseteq B(x, r),$$



παίρνουμε

$$\bigcap_{i=1}^n B(x_i, \frac{r}{\sqrt{n}}) \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_i \Rightarrow (\forall i) B(x_i, \frac{r}{\sqrt{n}}) \subseteq A_i \Rightarrow (\forall i) x_i \in A_i^\circ \Rightarrow x = (x_1, \dots, x_n) \in \bigcap_{i=1}^n A_i^\circ.$$

Άρα

$$A^\circ = \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)^\circ \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_i^\circ.$$

Επομένως, τελικά έχουμε

$$A^\circ = \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)^\circ = \bigcap_{i=1}^n A_i^\circ.$$

ii) Έστω τυχόν $x = (x_1, \dots, x_n) \in \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}$ και $B(x, r)$ τυχούσα σφαιρική περιοχή του x . Θ' αποδείξουμε ότι $B(x, r) \cap \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) \neq \emptyset$. Πραγματικά:

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i} \Rightarrow (\forall i) x_i \in \overline{A_i} \Rightarrow (\forall i) B(x_i, \frac{r}{\sqrt{n}}) \cap A_i \neq \emptyset.$$

Αλλά, επειδή $\left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^n B(x_i, \frac{r}{\sqrt{n}}) \right) = \bigcap_{i=1}^n (A_i \cap B(x_i, \frac{r}{\sqrt{n}}))$, λόγω και της τελευταίας σχέσης

παίρνουμε

$$\left(\bigcap_{i=1}^n B(x_i, \frac{r}{\sqrt{n}}) \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) = \bigcap_{i=1}^n (B(x_i, \frac{r}{\sqrt{n}}) \cap A_i) \neq \emptyset.$$

Επομένως, επειδή $\bigcap_{i=1}^n B(x_i, \frac{r}{\sqrt{n}}) \subseteq B(x, r)$, παίρνουμε

$$B(x, r) \cap \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \overline{A}.$$

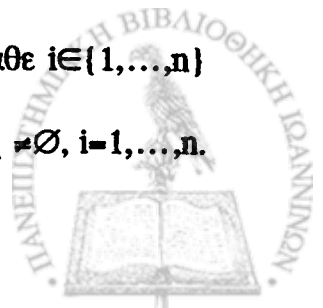
Δηλαδή αποδείχτηκε ότι

$$\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i}.$$

Αντίστροφα, έστω τυχόν $x = (x_1, \dots, x_n) \in \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}$. Επιπλέον, για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$

θεωρούμε τυχούσα περιοχή $B(x_i, r_i)$ του x_i . Θ' αποδείξουμε ότι $B(x_i, r_i) \cap A_i \neq \emptyset$, $i=1, \dots, n$.

Πραγματικά, θέτουμε $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$ οπότε,



$$B(x, r) \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, r_i).$$

Επιπλέον, επειδή $x \in \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}$, έχουμε $B(x, r) \cap (\bigcup_{i=1}^n A_i) \neq \emptyset$. Επομένως

$$\left(\bigcup_{i=1}^n B(x_i, r_i) \right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n (B(x_i, r_i) \cap A_i) \neq \emptyset \Rightarrow$$

$$(\forall i) B(x_i, r_i) \cap A_i \neq \emptyset \Rightarrow (\forall i) x_i \in \overline{A_i} \Rightarrow x = (x_1, \dots, x_n) \in \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}.$$

Άρα τελικά

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}. \quad \blacklozenge$$

1.10. Παράγωγο σύνολο – Σύνορο συνόλου

Μια κατηγορία σημείων που συγγενεύουν εννοιολογικά πάρα πολύ με τα σημεία επαφής ενός συνόλου, είναι τα “σημεία συσσώρευσης” ενός συνόλου.

Υποθέτουμε ότι A είναι ένα υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (E, ρ) .

Ένα σημείο $a \in E$ θα λέμε ότι είναι **σημείο συσσώρευσης (accumulation point ή limit point)** του συνόλου A αν για κάθε σφαιρική περιοχή $B(a, r)$ του a ισχύει:

$$\underline{B(a, r)} \cap A \neq \emptyset.$$

Είναι φανερό ότι, όπως και στην περίπτωση του ορισμού του σημείου επαφής, έτσι και εδώ μπορούμε ν’ αντικαταστήσουμε στον ορισμό του σημείου συσσώρευσης τον όρο “σφαιρική περιοχή” με τον όρο “περιοχή”.

Έτσι, ισοδύναμα έχουμε ότι ένα σημείο $a \in E$ θα λέμε ότι είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν για κάθε περιοχή $U(a)$ του a ισχύει $\underline{U(a)} \cap A \neq \emptyset$.

Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης ενός συνόλου A ονομάζεται **παράγωγο σύνολο (derived set)** του A και συμβολίζεται με A' ή A^d .

Ένα σημείο $a \in A$ θα λέμε ότι είναι **μεμονωμένο σημείο (isolated point)** του A αν το a δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A .



Ισοδύναμα, ο παραπάνω ορισμός σημαίνει ότι το a είναι μεμονωμένο σημείο του A αν υπάρχει σφαιρική περιοχή $B(a, r)$ (περιοχή $U(a)$, αντίστοιχα) του a τέτοια, ώστε $B(a, r) \cap A = \emptyset$ ($U(a) \cap A = \emptyset$, αντίστοιχα).

Από τους παραπάνω ορισμούς γίνεται φανερό ότι **ένα μεμονωμένο σημείο ενός συνόλου είναι πάντοτε σημείο του συνόλου, ενώ δε συμβαίνει το ίδιο με τα σημεία συσσώρευσης ενός συνόλου**. Ως παράδειγμα, μπορούμε ν' αναφέρουμε τον ευκλείδειο μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, όπου το σημείο 0 είναι σημείο συσσώρευσης του διαστήματος $(0, 1)$ και ταυτόχρονα $0 \notin (0, 1)$. Στον ίδιο χώρο εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το σημείο 2 είναι μεμονωμένο και ταυτόχρονα σημείο επαφής του συνόλου $(0, 1) \cup \{2\}$, ενώ τα σημεία 1 και $\frac{1}{2}$ είναι ταυτόχρονα σημεία συσσώρευσης και σημεία επαφής του ίδιου συνόλου.

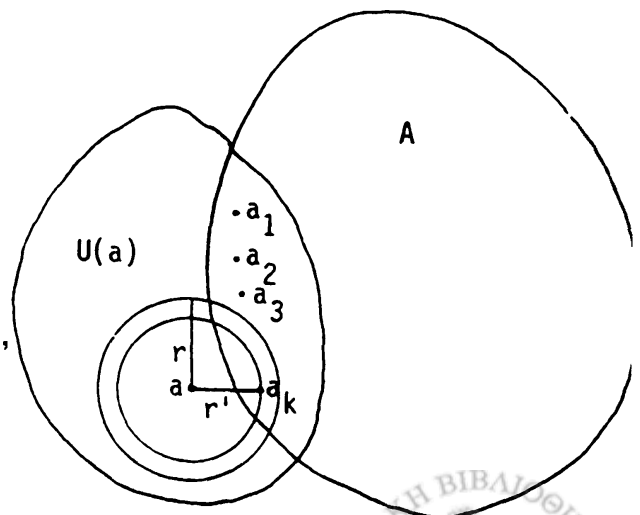
Οι έννοιες του σημείου επαφής και του σημείου συσσώρευσης εισάγονται με παραπλήσιους ορισμούς. Η επόμενη Πρόταση 1.10.1. δίνει μια σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο αυτών εννοιών. Πιο λεπτομερή σχέση μεταξύ των εννοιών αυτών δίνει η Πρόταση 1.10.3. παρακάτω.

1.10.1. ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν A είναι τυχόν υποσύνολο ενός μετρικού χώρου τότε ισχύει:

$a \in A' \Leftrightarrow$ Κάθε περιοχή του a περιέχει άπειρα σημεία του A .

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι $a \in A'$ και ταυτόχρονα ότι υπάρχει περιοχή $U(a)$ του a που περιέχει πεπερασμένο αριθμό στοιχείων του A . Ας είναι αυτά $a_1, a_2, \dots, a_k$. Υποθέτουμε επιπλέον, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $a \notin \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Έστω τώρα $B(a, r)$ μια σφαιρική περιοχή του a με $B(a, r) \subseteq U(a)$. Αν $r' = \min\{r, \rho(a_1, a), \dots, \rho(a_k, a)\}$, τότε είναι προφανές ότι η κατ' εκδοχήν σφαιρική περιοχή $B(a, r')$ δεν έχει σημεία του A , δηλαδή $B(a, r') \cap A = \emptyset$, που σημαίνει $a \notin A'$. Αυτό όμως είναι άτοπο.



Αντίστροφα, έστω κάθε περιοχή $U(a)$ του a περιέχει άπειρα σημεία του A . Τότε και η $U(a)$ περιέχει άπειρα σημεία του A . Άρα $U(a) \cap A \neq \emptyset$, δηλαδή $a \in A'$. ♦

Ένα σημείο a θα λέμε ότι είναι **εξωτερικό σημείο (exterior point)** ενός υποσυνόλου A του μετρικού χώρου E , αν το a είναι εσωτερικό σημείο του συνόλου A^c , δηλαδή $a \in (A^c)^\circ$.

Το σύνολο των εξωτερικών σημείων ενός συνόλου A το ονομάζουμε **εξωτερικό (exterior)** του συνόλου A και το συμβολίζουμε με $\text{ext}A$.

Από τον ορισμό του $\text{ext}A$ και σε συνδυασμό με την Πρόταση 1.8.2.(iii') παίρνουμε:

$$\text{ext}A = (A^c)^\circ = (\bar{A})^c.$$

Ένα σημείο ενός μετρικού χώρου μπορεί να μην είναι ούτε εσωτερικό σημείο ούτε εξωτερικό σημείο ενός συνόλου A . Για παράδειγμα, στον ευκλείδειο μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, το σημείο 1 δεν είναι εσωτερικό ούτε εξωτερικό σημείο του διαστήματος $(0, 1)$. Με αφορμή αυτή την παρατήρηση δίνουμε τον εξής ορισμό:

Ένα σημείο a θα λέμε ότι είναι **συνοριακό σημείο (boundary point)** ενός υποσυνόλου A του μετρικού χώρου E , αν το a δεν είναι εσωτερικό ούτε εξωτερικό σημείο του συνόλου A .

Το σύνολο των συνοριακών σημείων ενός συνόλου A το ονομάζουμε **σύνορο (boundary)** του συνόλου A και το συμβολίζουμε με ∂A .

Χρήσιμες εκφράσεις του συνόρου ενός συνόλου δίνει η παρακάτω πρόταση:

1.10.2. ΠΡΟΤΑΣΗ. Για τυχόν υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου E ισχύουν οι σχέσεις:

i) $\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c}$.

ii) $\partial A = \bar{A} - A^\circ$.

iii) $\partial A = \overline{A^c} - \text{ext}A$.



Απόδειξη.

Από τον ορισμό του συνόρου έχουμε αμέσως:

$$i) \partial A = (A^\circ)^c \cap (\text{ext} A)^c = \overline{A^c} \cap (\overline{A})^{cc} = \overline{A^c} \cap \overline{A} = \overline{A} \cap \overline{A^c}.$$

$$ii) \partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \overline{A} - (\overline{A^c})^c = \overline{A} - (A^\circ)^{cc} = \overline{A} - A^\circ.$$

$$iii) \partial A = \overline{A^c} \cap \overline{A} = \overline{A^c} - (\overline{A})^c = \overline{A^c} - \text{ext} A. \quad \blacklozenge$$

Η επόμενη πρόταση μας δίνει τις μερικές σημαντικές ιδιότητες του παραγώγου συνόλου και του συνόρου ενός συνόλου.

1.10.3. ΠΡΟΤΑΣΗ. Για τυχόν υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου E ισχύουν οι σχέσεις:

$$i) A' \subseteq \overline{A}$$

$$ii) \overline{A} = A \cup A'$$

$$iii) \overline{A} = A^\circ \cup \partial A = A \cup \partial A$$

$$iv) \partial A = \partial A^c.$$

Απόδειξη.

i) Έστω $a \in A'$. Τότε για κάθε περιοχή $U(a)$ του a ισχύει $\underline{U}(a) \cap A \neq \emptyset$. Επειδή όμως $\underline{U}(a) \subseteq U(a)$, τελικά έχουμε ότι για κάθε περιοχή $U(a)$ του a ισχύει $U(a) \cap A \neq \emptyset$, δηλαδή $a \in \overline{A}$. Άρα $A' \subseteq \overline{A}$.

ii) Επειδή $A \subseteq \overline{A}$ και $A' \subseteq \overline{A}$, παίρνουμε

$$A \cup A' \subseteq \overline{A}.$$

Έτσι, αρκεί ν' αποδείξουμε ότι $\overline{A} \subseteq A \cup A'$. Πραγματικά, για τυχόν $a \in \overline{A}$ έχουμε $a \in A$ ή $a \notin A$. Αν $a \in A$ το συμπέρασμα είναι φανερό. Έτσι, έστω $a \in \overline{A}$ και $a \notin A$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} a \in \overline{A} \wedge a \notin A &\Rightarrow [(\forall U(a)) U(a) \cap A \neq \emptyset] \wedge a \notin A \\ &\Rightarrow (\forall U(a)) \underline{U}(a) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow a \in A' \Rightarrow a \in A \cup A'. \end{aligned}$$

Δηλαδή, σε κάθε περίπτωση έχουμε $\overline{A} \subseteq A \cup A'$.

iii) Επειδή $A^\circ \subseteq \overline{A}$, έχουμε:

$$\overline{A} = A^\circ \cup (\overline{A} - A^\circ) = A^\circ \cup \partial A.$$



Επιπλέον, επειδή $A \subseteq \bar{A}$ και $\partial A \subseteq \bar{A}$ παίρνουμε $A \cup \partial A \subseteq \bar{A}$. Ακόμη, για τυχόν $x \in \bar{A}$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις: $x \in A$ και $x \notin A$. Αν $x \in A$ τότε $x \in A \cup \partial A$. Αν $x \notin A$, τότε $x \notin A^\circ$ και, επειδή $x \in \bar{A}$, έχουμε $x \in \bar{A} - A^\circ = \partial A \subseteq A \cup \partial A$.

$$\text{iv) } \partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c} = (\overline{A^c})^c \cap \overline{A^c} = \overline{A^c} \cap (\overline{A^c})^c = \partial A^c. \quad \blacklozenge$$

1.11. Παραδείγματα – Εφαρμογές

1.11.1. Σε τυχόντα μετρικό χώρο E και για κάθε $a \in E$ ισχύει

i) $\{a\}' = \emptyset$.

Ακόμη, στο μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ και για τυχόντα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$, ισχύει:

ii) $(\alpha, \beta)' = (\alpha, \beta]' = [\alpha, \beta)' = [\alpha, \beta]' = [\alpha, \beta]$,

iii) $(\alpha, \infty)' = [\alpha, \infty)' = [\alpha, \infty)$ και $(-\infty, \alpha)' = (-\infty, \alpha]' = (-\infty, \alpha]$,

iv) $\partial(\alpha, \beta) = \partial(\alpha, \beta] = \partial[\alpha, \beta) = \partial[\alpha, \beta] = \{\alpha, \beta\}$,

v) $\partial(\alpha, \infty) = \partial[\alpha, \infty) = \{\alpha\}$ και $\partial(-\infty, \alpha) = \partial(-\infty, \alpha] = \{\alpha\}$.

Απόδειξη.

Εργαζόμενοι με τρόπο τελείως ανάλογο εκείνου της Εφαρμογής 1.9.2., μπορούμε ν' αποδείξουμε εύκολα τα (i), (ii) και (iii).

Επιπλέον, με βάση τον τύπο $\partial A = \bar{A} - A^\circ$, παίρνουμε εύκολα:

$$\partial(\alpha, \beta) = \partial(\alpha, \beta] = \partial[\alpha, \beta) = \partial[\alpha, \beta] = \{\alpha, \beta\},$$

$$\partial(\alpha, \infty) = \partial[\alpha, \infty) = \{\alpha\} \text{ και } \partial(-\infty, \alpha) = \partial(-\infty, \alpha] = \{\alpha\}. \quad \blacklozenge$$

1.11.2. Για τυχόν υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου ισχύει:

$$E = A^\circ \cup (\partial A) \cup \text{ext} A.$$

Απόδειξη.

Η σχέση $A^\circ \cup (\partial A) \cup \text{ext} A \subseteq E$ είναι προφανής.

Για την απόδειξη του αντιστρόφου, έστω τυχόν $x \in E$. Τότε, σχετικά με το σύνολο A , το x θα είναι είτε εσωτερικό σημείο του A , είτε εξωτερικό σημείο του A είτε τίποτε από τα δύο, δηλαδή συνοριακό σημείο του A . Έτσι, έχουμε

$$x \in E \Rightarrow x \in A^\circ \vee x \in \text{ext} A \vee x \in \partial A \Rightarrow x \in A^\circ \cup (\partial A) \cup \text{ext} A. \quad \blacklozenge$$



1.11.3. Αν A, B είναι τυχόντα υποσύνολα ενός μετρικού χώρου E , τότε ισχύουν οι σχέσεις:

i) $A \subseteq B \Rightarrow A' \subseteq B'$.

ii) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

Επιπλέον, για τυχούσα οικογένεια $A_i, i \in I$, υποσυνόλων του E ισχύει ότι:

iv) $(\bigcup_{i \in I} A_i)' \supseteq \bigcup_{i \in I} A_i'$.

iv) $(\bigcap_{i \in I} A_i)' \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i'$.

Απόδειξη.

Η απόδειξη γίνεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο, όπως στις Προτάσεις 1.8.2.(ii'), 1.8.3.(ii'), και 1.8.5.(i'), 1.8.5.(ii'), αντίστοιχα. ♦

1.12. Ανοιχτά και κλειστά σύνολα

Έστω A ένα υποσύνολο ενός μετρικού χώρου E .

| Λέμε ότι το A είναι **ανοιχτό σύνολο (open set)** αν $A = A^\circ$.

| Αντίστοιχα, λέμε ότι το A είναι **κλειστό σύνολο (closed set)** αν $\bar{A} = A$.

Από τους ορισμούς αυτούς είναι φανερό ότι ένα σύνολο A είναι ανοιχτό αν και μόνο αν $A \subseteq A^\circ$ και κλειστό αν και μόνο αν $\bar{A} \subseteq A$.

1.12.1.ΠΡΟΤΑΣΗ. Έστω A τυχόν υποσύνολο ενός μετρικού χώρου E . Τότε ισχύουν τα εξής:

i) το A είναι ανοιχτό $\Leftrightarrow$ το A είναι περιοχή κάθε σημείου του.

ii) το A είναι ανοιχτό $\Leftrightarrow \partial A \subseteq A^c$.

i') το A είναι κλειστό $\Leftrightarrow A' \subseteq A$.

ii') το A είναι κλειστό $\Leftrightarrow \partial A \subseteq A$.



Απόδειξη.

i) Έστω ότι το A είναι ανοιχτό σύνολο, δηλαδή $A = A^\circ$. Τότε για τυχόν $a \in A$ έχουμε $a \in A^\circ$. Άρα υπάρχει σφαιρική περιοχή $B(a, r)$ του a τέτοια ώστε $B(a, r) \subseteq A$. Επομένως το A είναι περιοχή του τυχόντος σημείου του a .

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το A είναι περιοχή κάθε σημείου του. Θ' αποδείξουμε ότι $A \subseteq A^\circ$. Για το σκοπό αυτό, έστω a τυχόν σημείο του A . Τότε, από την υπόθεση, υπάρχει περιοχή του a , το ίδιο το σύνολο A , με $A \subseteq A$. Άρα το a είναι εσωτερικό σημείο του A , δηλαδή $a \in A^\circ$. Έτσι, αποδείχτηκε ότι $A \subseteq A^\circ$, που σημαίνει ότι το A είναι ανοιχτό σύνολο.

ii) Υποθέτουμε ότι το A είναι ανοιχτό σύνολο. Τότε για τυχόν a έχουμε:

$$a \in \partial A \Leftrightarrow a \in \bar{A} - A^\circ \Leftrightarrow a \in \bar{A} \text{ και } a \notin A^\circ \Rightarrow a \notin A^\circ.$$

Επειδή όμως το A είναι ανοιχτό, δηλαδή $A = A^\circ$, προκύπτει:

$$a \notin A^\circ \Rightarrow a \notin A \Rightarrow a \in A^c.$$

Άρα, τελικά $\partial A \subseteq A^c$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $\partial A \subseteq A^c$. Θ' αποδείξουμε ότι το A είναι ανοιχτό ή, ισοδύναμα, ότι $A \subseteq A^\circ$. Για τυχόν $a \in A$ έχουμε ότι $a \notin A^c$. Επειδή όμως $\partial A \subseteq A^c$, παίρνουμε

$$a \notin A^c \Rightarrow a \notin \partial A \Rightarrow a \notin \bar{A} - A^\circ \Rightarrow a \notin \bar{A} \vee a \in A^\circ.$$

Αλλά η σχέση $a \notin \bar{A}$ δεν μπορεί να ισχύει, αφού $a \in A$ και $A \subseteq \bar{A}$. Επομένως $a \in A^\circ$ και τελικά $A \subseteq A^\circ$.

i') Έχοντας υπόψη τη σχέση $\bar{A} = A \cup A'$ (Βλέπε Πρόταση 1.10.3.), παίρνουμε:

$$A \text{ κλειστό} \Leftrightarrow A = \bar{A} \Leftrightarrow A = A \cup A' \Leftrightarrow A' \subseteq A.$$

ii') Υποθέτουμε ότι το A είναι κλειστό. Τότε για τυχόν a έχουμε:

$$a \in \partial A \Leftrightarrow a \in \bar{A} - A^\circ \Leftrightarrow a \in \bar{A} \wedge a \notin A^\circ \Rightarrow a \in \bar{A}.$$

Επειδή όμως το A είναι κλειστό, δηλαδή $A = \bar{A}$, η τελευταία σχέση δίνει $a \in A$, οπότε τελικά $\partial A \subseteq A$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $\partial A \subseteq A$. Θ' αποδείξουμε ότι το A είναι κλειστό, δηλαδή $\bar{A} \subseteq A$. Ισοδύναμα, αρκεί ν' αποδείξουμε ότι για κάθε x ισχύει: $x \notin A \Rightarrow x \notin \bar{A}$.

Έτσι, για τυχόν x , με $x \notin A$, λόγω της υπόθεσης $\partial A \subseteq A$, παίρνουμε $x \notin \partial A$ και άρα $x \notin \bar{A} \vee x \notin A^\circ$. Αλλά η σχέση $x \notin A^\circ$ δεν μπορεί να ισχύει αφού $x \notin A$ και $A^\circ \subseteq A$. Άρα $x \notin \bar{A}$, που τελικά σημαίνει ότι $\bar{A} \subseteq A$. ♦



1.12.2. ΠΡΟΤΑΣΗ. Για τυχόν υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου E ισχύουν οι σχέσεις:

- i) A ανοιχτό $\Leftrightarrow A^c$ κλειστό.
- ii) A κλειστό $\Leftrightarrow A^c$ ανοιχτό.

Απόδειξη.

Έχοντας υπόψη την προηγούμενη πρόταση και τη σχέση $\partial A = \partial A^c$ (Βλέπε Πρόταση 1.10.3.), παίρνουμε:

- i) A ανοιχτό $\Leftrightarrow \partial A \subseteq A^c \Leftrightarrow \partial A^c \subseteq A^c \Leftrightarrow A^c$ κλειστό.
- ii) A κλειστό $\Leftrightarrow \partial A \subseteq A \Leftrightarrow \partial A^c \subseteq A \Leftrightarrow \partial A^c \subseteq (A^c)^c \Leftrightarrow A^c$ ανοιχτό. ♦

1.12.3. ΠΟΡΙΣΜΑ. Σε κάθε μετρικό χώρο E , τα σύνολα E και $\emptyset$ είναι ταυτόχρονα ανοιχτά και κλειστά υποσύνολα του E .

Απόδειξη.

Από ορισμό το E είναι ταυτόχρονα ανοιχτό και κλειστό σύνολο. Επειδή $E^c = \emptyset$, εφαρμόζοντας την προηγούμενη πρόταση παίρνουμε αμέσως το συμπέρασμα και για το κενό σύνολο. ♦

1.12.4. ΠΡΟΤΑΣΗ. Σ' ένα μετρικό χώρο E ισχύουν τα εξής:

- i) Η ένωση $\bigcup_{i \in I} A_i$ τυχούσας οικογένειας $A_i, i \in I$ ανοιχτών υποσυνόλων του E είναι ανοιχτό σύνολο.
- ii) Η τομή $\bigcap_{i \in I} A_i$ τυχούσας οικογένειας $A_i, i \in I$ κλειστών υποσυνόλων του E είναι κλειστό σύνολο.
- i') Η ένωση $\bigcup_{i=1}^n A_i$ πεπερασμένου πλήθους κλειστών υποσυνόλων $A_1, \dots, A_n$ του E είναι κλειστό σύνολο.
- ii') Η τομή $\bigcap_{i=1}^n A_i$ πεπερασμένου πλήθους ανοιχτών υποσυνόλων $A_1, \dots, A_n$ του E είναι ανοιχτό σύνολο.

Απόδειξη.

i) Επειδή για κάθε $i \in I$ το σύνολο A_i είναι ανοιχτό, έχουμε $A_i = A_i^\circ, i \in I$. Έτσι, εφαρμόζοντας την Πρόταση 1.8.5.(i), παίρνουμε:



$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} A_i^\circ \subseteq (\bigcup_{i \in I} A_i)^\circ \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i = (\bigcup_{i \in I} A_i)^\circ.$$

ii) Επειδή για κάθε $i \in I$ το σύνολο A_i είναι κλειστό, έχουμε $A_i = \overline{A_i}$, $i \in I$. Έτσι, εφαρμόζοντας την Πρόταση 1.8.5.(ii'), παίρνουμε:

$$\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subseteq \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} = \bigcap_{i \in I} A_i \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i = \overline{\bigcap_{i \in I} A_i}.$$

i') Επειδή για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$ το σύνολο A_i είναι κλειστό, ισχύει $A_i = \overline{A_i}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Έτσι, εφαρμόζοντας το Πρόγραμμα 1.8.4.(i'), παίρνουμε:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i} = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

ii') Επειδή για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$ το σύνολο A_i είναι ανοιχτό, ισχύει $A_i = A_i^\circ$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Έτσι, εφαρμόζοντας το Πρόγραμμα 1.8.4.(i), παίρνουμε:

$$(\bigcap_{i=1}^n A_i)^\circ = \bigcap_{i=1}^n A_i^\circ = \bigcap_{i=1}^n A_i. \quad \blacklozenge$$

1.12.5. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ας είναι E ένας μετρικός χώρος και A τυχόν υποσύνολό του. Τότε:

i) Το σύνολο A° είναι ανοιχτό και μάλιστα το μέγιστο ανοιχτό υποσύνολο του E που περιέχεται στο A .

ii) Το σύνολο $\overline{A}$ είναι κλειστό και μάλιστα το ελάχιστο κλειστό υποσύνολο του E που περιέχει το A .

Απόδειξη.

i) Επειδή ισχύει $A^{\circ\circ} = A^\circ$ (Βλέπε Πρόταση 1.8.3.), το A° είναι ανοιχτό σύνολο. Επιπλέον, αν B είναι ανοιχτό υποσύνολο του E , με $B \subseteq A$, τότε ισχύει $B^\circ \subseteq A^\circ$ (Βλέπε Πρόταση 1.8.2.). Επειδή όμως το B είναι ανοιχτό, έχουμε τελικά $B \subseteq A^\circ$, πράγμα που αποδεικνύει ότι το A° είναι το μέγιστο από τα ανοιχτά υποσύνολα του A .

ii) Επειδή ισχύει $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ (Βλέπε Πρόταση 1.8.3.), το $\overline{A}$ είναι κλειστό σύνολο. Επιπλέον, αν B είναι κλειστό υπερσύνολο του A θα έχουμε (Βλέπε Πρόταση 1.8.2.)

$$B \supseteq A \Rightarrow \overline{B} \supseteq \overline{A}.$$

Επειδή όμως το B είναι κλειστό σύνολο, έχουμε τελικά $B \supseteq \overline{A}$, πράγμα που αποδεικνύει ότι το $\overline{A}$ είναι το ελάχιστο κλειστό υπερσύνολο του A . $\blacklozenge$



1.12.6. ΠΟΡΙΣΜΑ. Αν E είναι ένας μετρικός χώρος και A τυχόν υποσύνολό του, τότε έχουμε:

$$A^\circ = \bigcup \mathcal{A}, \text{ όπου } \mathcal{A} = \{X: X \subseteq A \text{ και } X \text{ ανοιχτό}\}$$

$$\bar{A} = \bigcap \mathcal{C}, \text{ όπου } \mathcal{C} = \{X: X \supseteq A \text{ και } X \text{ κλειστό}\}.$$

Απόδειξη.

Το σύνολο $\bigcup \mathcal{A}$ είναι ανοιχτό ως ένωση ανοιχτών (Βλέπε 1.12.4.) και μάλιστα υποσύνολο του A ως ένωση υποσυνόλων του A . Ειδικότερα, ως ένωση όλων των ανοιχτών υποσυνόλων του A είναι το μέγιστο ανοιχτό υποσύνολο του A . Άρα κατά την Πρόταση 1.12.5 (i), $A^\circ = \bigcup \mathcal{A}$.

Το σύνολο $\bigcap \mathcal{C}$ είναι κλειστό ως τομή κλειστών (Βλέπε 1.12.4.) και μάλιστα υπερσύνολο του A , ως τομή υπερσυνόλων του A . Ειδικότερα, ως τομή όλων των κλειστών υπερσυνόλων του A είναι το ελάχιστο κλειστό υπερσύνολο του A . Άρα κατά την Πρόταση 1.12.5. (ii), $\bar{A} = \bigcap \mathcal{C}$. ♦

1.12.7. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ας είναι A ανοιχτό και B κλειστό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου E . Τότε το σύνολο $A - B$ είναι ανοιχτό και το $B - A$ είναι κλειστό.

Απόδειξη.

Θέτουμε $A - B = A \cap B^c$. Τότε, επειδή το B^c είναι ανοιχτό, ως συμπλήρωμα κλειστού συνόλου, το σύνολο $A \cap B^c$ είναι ανοιχτό ως τομή πεπερασμένου πλήθους ανοιχτών συνόλων.

Ανάλογα εργαζόμαστε και για το σύνολο $B - A = B \cap A^c$. ♦

1.13. Παραδείγματα - Εφαρμογές

1.13.1. Για κάθε υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου E τα σύνολα ∂A και A' είναι κλειστά.



Απόδειξη.

Επειδή $\partial A = \bar{A} - A^\circ$, όπου το σύνολο $\bar{A}$ είναι κλειστό και το A° ανοιχτό, το ∂A είναι κλειστό σύνολο σύμφωνα με την Πρόταση 1.12.7..

Για ν' αποδείξουμε ότι το A' είναι κλειστό,

αρκεί ν' αποδείξουμε ότι $\overline{A'} \subseteq A'$. Πραγματικά,

έστω $x \in \overline{A'}$ και $B(x, r)$, $r > 0$, τυχούσα σφαιρική περιοχή του x . Αφού $B(x, r) \cap A' \neq \emptyset$, θεωρούμε

ένα στοιχείο $y \in B(x, r) \cap A'$. Έστω ακόμη $B(y, r_1)$

μια περιοχή του y τέτοια, ώστε $B(y, r_1) \subseteq B(x, r)$

και $x \notin B(y, r_1)$ (αρκεί να ληφθεί $0 < r_1 < r$, όπου

$r = \min\{r - \rho(x, y), \rho(x, y)\}$). Αφού $y \in A'$, υπάρχει

$z \in A$ με $z \in B(y, r_1)$. Άρα, επειδή $B(y, r_1) \subseteq B(x, r)$ και

$x \notin B(y, r_1)$, έχουμε ότι $z \in B(x, r) \cap A$. Έτσι, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$, δηλαδή $x \in A'$. ♦

1.13.2. Κάθε υποσύνολο ενός διακριτού μετρικού χώρου είναι ανοιχτό και κλειστό ταυτόχρονα.

Απόδειξη.

Πραγματικά, έστω A ένα υποσύνολο ενός διακριτού μετρικού χώρου E . Αν $A = \emptyset$ το συμπέρασμα ισχύει. Έστω $A \neq \emptyset$ και a τυχόν στοιχείο του A . Τότε, επειδή $B(a, 1) = \{a\}$ (βλέπε 1.7.3.), έχουμε $B(a, 1) \subseteq A$. Άρα το A είναι περιοχή του τυχόντος σημείου του και επομένως ανοιχτό σύνολο.

Επιπλέον, για τυχόν υποσύνολο C του E και σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της απόδειξης, το σύνολο C^c είναι ανοιχτό σύνολο. Άρα το C είναι κλειστό ως συμπλήρωμα του ανοιχτού C^c . ♦

1.13.3. Αν A είναι ανοιχτό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου E και B τυχόν υποσύνολο του E , τότε ισχύει:

$$A \cap \bar{B} \neq \emptyset \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$$

Απόδειξη.

Επειδή $A \cap \bar{B} \neq \emptyset$, θεωρούμε τυχόν x με $x \in A$ και $x \in \bar{B}$. Αφού το A είναι ανοιχτό, υπάρχει περιοχή $U(x)$ του x με $U(x) \subseteq A$. Τότε όμως, επειδή $x \in \bar{B}$, έχουμε $U(x) \cap B \neq \emptyset$. Επομένως $U(x) \cap B \subseteq A \cap B$ και έτσι, $A \cap B \neq \emptyset$. ♦



1.13.4. Έστω E ο καρτεσιανός μετρικός χώρος των μετρικών χώρων $E_1, \dots, E_n$ και $A_1, \dots, A_n$ υποσύνολα των $E_1, \dots, E_n$, αντίστοιχα. Αν $A = \prod_{i=1}^n A_i$, τότε ισχύουν:

i) $(\forall i) A_i$ ανοιχτό εν $E_i \Leftrightarrow A$ ανοιχτό εν E .

ii) $(\forall i) A_i$ κλειστό εν $E_i \Leftrightarrow A$ κλειστό εν E .

Απόδειξη.

i) Χρησιμοποιώντας τη γνωστή σχέση $\left(\prod_{i=1}^n A_i\right)^\circ = \prod_{i=1}^n A_i^\circ$ (Βλέπε 1.9.7.(i)),

παίρνουμε:

$(\forall i) A_i$ ανοιχτό εν $E_i \Leftrightarrow (\forall i) A_i = A_i^\circ \Leftrightarrow A = \prod_{i=1}^n A_i = \prod_{i=1}^n A_i^\circ = \left(\prod_{i=1}^n A_i\right)^\circ = A^\circ \Leftrightarrow$
 A ανοιχτό εν E .

ii) Όμοια, χρησιμοποιώντας τη σχέση $\overline{\prod_{i=1}^n A_i} = \prod_{i=1}^n \overline{A_i}$ (Βλέπε 1.9.7.(ii)), παίρνουμε:

$(\forall i) A_i$ κλειστό εν $E_i \Leftrightarrow (\forall i) A_i = \overline{A_i} \Leftrightarrow A = \prod_{i=1}^n A_i = \prod_{i=1}^n \overline{A_i} = \overline{\prod_{i=1}^n A_i} = \overline{A} \Leftrightarrow$
 A κλειστό εν E . ♦

1.13.5. Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου E είναι ανοιχτό αν και μόνο αν μπορεί να παρασταθεί ως ένωση μιας οικογένειας σφαιρικών περιοχών.

Απόδειξη.

Επειδή κάθε σφαιρική περιοχή είναι ανοιχτό σύνολο, η ένωση οποιασδήποτε οικογένειας σφαιρικών περιοχών είναι ανοιχτό σύνολο. Έτσι, αρκεί ν' αποδείξουμε ότι, αν το A είναι ανοιχτό σύνολο, γράφεται ως ένωση μιας οικογένειας σφαιρικών περιοχών. Πραγματικά, επειδή το A είναι ανοιχτό, για κάθε $x \in A$ υπάρχει $r_x > 0$ τέτοιο, ώστε $B(x, r_x) \subseteq A$. Άρα $\bigcup_{x \in A} B(x, r_x) \subseteq A$. Επιπλέον, για κάθε $x \in A$, επειδή $x \in B(x, r_x)$, έχουμε $A \subseteq \bigcup_{x \in A} B(x, r_x)$, οπότε τελικά $A = \bigcup_{x \in A} B(x, r_x)$. ♦



1.13.6. Αν ρ είναι μια μετρική σ' ένα σύνολο E είναι γνωστό (Βλέπε 1.3.8.) ότι και η d , όπου $d=c\rho$, $c>0$, είναι επίσης μια μετρική στο E . Τότε:

i) $B_d(x, rc) = B_\rho(x, r)$, $x \in E$

ii) Οι μετρικοί χώροι (E, ρ) , (E, d) έχουν τα ίδια ανοιχτά σύνολα.

Απόδειξη.

i) Για κάθε y έχουμε

$$y \in B_d(x, rc) \Leftrightarrow d(y, x) < rc \Leftrightarrow c\rho(y, x) < rc \Leftrightarrow \rho(y, x) < r \Leftrightarrow y \in B_\rho(x, r).$$

Άρα $B_d(x, rc) = B_\rho(x, r)$, $x \in E$.

ii) Έστω $A \subseteq E$, A ανοιχτό στο μετρικό χώρο (E, ρ) και x τυχόν σημείο του A . Τότε υπάρχει $r > 0$ τέτοιο, ώστε $B_\rho(x, r) \subseteq A$. Αλλά, λόγω της σχέσης $B_d(x, rc) = B_\rho(x, r)$, ισχύει $B_d(x, rc) \subseteq A$. Δηλαδή, το τυχόν σημείο x του A είναι εσωτερικό σημείο του A και στον μετρικό χώρο (E, d) . Άρα το A είναι ανοιχτό και ως υποσύνολο του μετρικού χώρου (E, d) . Το αντίστροφο είναι τελείως ανάλογο. ♦

1.14. Πυκνά σύνολα.

Έστω A ένα υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (E, ρ) και ε ένας θετικός πραγματικός αριθμός.

Θα λέμε ότι το σύνολο A είναι **ε -πυκνό υποσύνολο** (*ε -dense subset*) του E αν ισχύει: $(\forall x \in E) (\exists y \in A) \rho(x, y) < \varepsilon$.

Θα λέμε ότι το σύνολο A είναι **πυκνό υποσύνολο** (*dense subset*) του E ή **πυκνό εν E** αν είναι ε -πυκνό υποσύνολο του E για κάθε $\varepsilon > 0$.

1.14.1. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου E είναι πυκνό υποσύνολο του E αν και μόνο αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:

i) $\bar{A} = E$.

ii) Για κάθε μη κενό και ανοιχτό υποσύνολο B του E ισχύει $A \cap B \neq \emptyset$.

Απόδειξη.

i) Έστω ότι το A είναι πυκνό εν E , δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ το A είναι ε -πυκνό υποσύνολο του E . Τότε, για τυχόν $x \in E$ έχουμε:



$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists y \in A) \varrho(x, y) < \varepsilon \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists y \in A) y \in B(x, \varepsilon) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \bar{A}.$$

Άρα $E \subseteq \bar{A}$, δηλαδή $E = \bar{A}$.

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει $E = \bar{A}$. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon, \varepsilon > 0$ και τυχόν $x \in E$. Άρα $x \in \bar{A}$ και έτσι $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Επομένως, υπάρχει y με $y \in B(x, \varepsilon) \cap A$, δηλαδή υπάρχει $y \in A$ με $\varrho(x, y) < \varepsilon$. Αυτό αποδεικνύει ότι το A είναι ε -πυκνό υποσύνολο του E για το τυχόν ε που θεωρήσαμε. Άρα το A είναι πυκνό εν E .

ii) Έστω ισχύει $A \cap B \neq \emptyset$ για κάθε μη κενό και ανοιχτό υποσύνολο B του E . Θεωρούμε τυχόν $x \in E$ και τυχούσα σφαιρική περιοχή $B(x, r)$ του x . Τότε, επειδή το σύνολο $B(x, r)$ είναι μη κενό και ανοιχτό, θα έχουμε $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$. Άρα $x \in \bar{A}$, αφού η $B(x, r)$ είναι τυχούσα σφαιρική περιοχή του x . Επομένως $E \subseteq \bar{A}$, οπότε $E = \bar{A}$. Έτσι, με βάση το (i), το σύνολο A είναι πυκνό εν E .

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το A είναι πυκνό εν E , οπότε $E = \bar{A}$. Επιπλέον, έστω B ένα μη κενό και ανοιχτό υποσύνολο του E . Τότε για τυχόν $x \in B$ υπάρχει σφαιρική περιοχή $B(x, r)$ του x , με $B(x, r) \subseteq B$. Επειδή όμως $x \in B \subseteq E = \bar{A}$, έχουμε $x \in \bar{A}$, οπότε $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. Άρα, επειδή $B(x, r) \cap A \subseteq B \cap A$, έχουμε τελικά $B \cap A \neq \emptyset$. ♦

1.15. Παραδείγματα- Εφαρμογές

1.15.1. Στον ευκλείδειο μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ισχύουν:

i) Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών είναι 1-πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

ii) Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, δηλαδή $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Απόδειξη.

i) Για τυχόν $x \in \mathbb{R}$ θέτουμε $z_x = \min\{y \in \mathbb{Z} : y \geq x\}$. Τότε έχουμε $|x - z_x| < 1$. Άρα ισχύει

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists z_x \in \mathbb{Z}) |x - z_x| < 1,$$

πράγμα, που αποδεικνύει ότι το $\mathbb{Z}$ είναι 1-πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.



ii) Αρκεί να θυμηθούμε ότι για το σύνολο Q των ρηττών αριθμών ισχύει
 $(\forall \varepsilon > 0) (\forall x \in \mathbb{R}) (\exists q \in Q) |x - q| < \varepsilon$. ♦

1.15.2. Έστω E ο καρτεσιανός μετρικός χώρος των μετρικών χώρων $E_1, \dots, E_n$ και $A_1, \dots, A_n$ υποσύνολα των $E_1, \dots, E_n$, αντίστοιχα. Αν $A = \prod_{i=1}^n A_i$, τότε ισχύει:
 $(\forall i) A_i \text{ πυκνό εν } E_i \Leftrightarrow A \text{ πυκνό εν } E$.

Απόδειξη.

Το παραπάνω είναι άμεσο συμπέρασμα της γνωστής σχέσης $\overline{A} = \prod_{i=1}^n \overline{A_i} = \prod_{i=1}^n \overline{A_i}$. ♦

1.15.3. Αν D είναι ένα πυκνό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου E και A ανοιχτό υποσύνολο του E , τότε ισχύει:

$$\overline{A} = \overline{D \cap A}.$$

Απόδειξη.

Επειδή $A \supseteq D \cap A$, η σχέση $\overline{A} \supseteq \overline{D \cap A}$ είναι προφανής. Θ' αποδειχτεί ότι ισχύει και $\overline{A} \subseteq \overline{D \cap A}$. Πραγματικά, έστω $x \in \overline{A}$. Τότε $(\forall r > 0) B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. Επιπλέον, το σύνολο $B(x, r) \cap A$ είναι ανοιχτό, ως τομή ανοιχτών συνόλων. Έτσι, επειδή το D είναι πυκνό έχουμε:

$$(B(x, r) \cap A) \cap D \neq \emptyset \Rightarrow B(x, r) \cap (D \cap A) \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{D \cap A}. \blacklozenge$$

1.15.4. Η έννοια του πυκνού συνόλου είναι συνδεδεμένη με την έννοια του "πουθενά πυκνού" συνόλου.

Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου E λέγεται **πουθενά πυκνό** (*nowhere dense*) εν E αν ισχύει:

$$(\overline{A})^\circ = \emptyset.$$

Η σχέση της έννοιας αυτής με την έννοια του πυκνού συνόλου προκύπτει από το παρακάτω συμπέρασμα.



1.15.4. Έστω E ένας μετρικός χώρος και A ένα μη κενό υποσύνολο του E . Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

i) Το A είναι πουθενά πυκνό εν E .

ii) Το σύνολο $\text{ext}A$ είναι πυκνό εν E .

iii) Κάθε μη κενό και ανοιχτό υποσύνολο B του E περιέχει ένα μη κενό και ανοιχτό υποσύνολο U του E τέτοιο, ώστε $U \cap A = \emptyset$.

Απόδειξη.

Θ' αποδείξουμε το παραπάνω κατά τον εξής τρόπο: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii) Έστω $(\bar{A})^\circ = \emptyset$. Τότε

$$E - \overline{\text{ext}A} = (\overline{\text{ext}A})^c = ((\bar{A}^c)^\circ)^c = ((\bar{A})^{cc})^\circ = (\bar{A})^\circ = \emptyset.$$

Επομένως

$$\overline{\text{ext}A} = E.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Υποθέτουμε ότι ισχύει (ii) η και όχι η (iii). Δηλαδή, υπάρχει μη κενό και ανοιχτό υποσύνολο B του E τέτοιο, ώστε για κάθε μη κενό και ανοιχτό υποσύνολο U του B να συμβαίνει $U \cap A \neq \emptyset$. Αυτό όμως σημαίνει ότι κάθε σημείο του B είναι σημείο επαφής του A , δηλαδή $B \subseteq \bar{A}$ και άρα το $E - \bar{A}$ δεν είναι πυκνό στο E , γιατί

$$B \cap \text{ext}A = B \cap (E - \bar{A}) = B \cap (E \cap (\bar{A})^c) = E \cap (B \cap (\bar{A})^c) = E \cap \emptyset = \emptyset.$$

Αυτό όμως αντίκειται στη (ii) που είναι υπόθεσή μας.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Έστω $B = (\bar{A})^\circ$ και ότι $B \neq \emptyset$. Επειδή το B είναι ανοιχτό και μη κενό, από την υπόθεση, υπάρχει μη κενό και ανοιχτό υποσύνολο U του B τέτοιο, ώστε $U \cap A = \emptyset$. Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί $U \subseteq B \subseteq \bar{A}$ και επομένως $U \cap A \neq \emptyset$, αφού το U είναι ανοιχτό. Έτσι, $B = \emptyset$, δηλαδή $(\bar{A})^\circ = \emptyset$. ♦

Σχετική με την έννοια του πουθενά πυκνού συνόλου είναι και η έννοια της "κατηγορίας".

Ένας χώρος λέγεται **χώρος πρώτης κατηγορίας** αν μπορεί να παρισταθεί ως αριθμήσιμη ένωση πουθενά πυκνών υποσυνόλων του.



Ένας χώρος που δεν είναι πρώτης κατηγορίας λέγεται **χώρος δεύτερης κατηγορίας**.

1.16. Λυμένες Ασκήσεις

1.16.1. Έστω $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο:

$$q(x, y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|.$$

Η q είναι μετρική στο $\mathbb{R}$ και μάλιστα τέτοια, ώστε:

$$q(x, y) \leq |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Λύση.

Για τη σχέση $q(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, έχουμε:

$$q(x, y) = 0 \Leftrightarrow \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right| = 0 \Leftrightarrow x(1+|y|) = y(1+|x|). \text{ Η σχέση όμως αυτή ισχύει μόνο στην}$$

περίπτωση όπου οι x, y είναι ομόσημοι. Τότε όμως έχουμε

$$x(1+y) = y(1+x) \text{ ή } x(1-y) = y(1-x).$$

Και οι δύο τελευταίες σχέσεις συνεπάγονται $x = y$.

Το αντίστροφο είναι άμεσο.

Οι σχέσεις $q(x, y) = q(y, x)$ και $q(x, y) \leq q(x, z) + q(z, y)$, είναι προφανείς.

Για τη σχέση $q(x, y) \leq |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) $x \geq 0$ και $y \geq 0$,

β) $x \leq 0$ και $y \leq 0$,

γ) $x \leq 0$ και $y \geq 0$

και

δ) $x \geq 0$ και $y \leq 0$.

Έτσι, π.χ., για την περίπτωση (γ) έχουμε:

$$q(x, y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right| \leq \left| \frac{x}{1+|x|} \right| + \left| \frac{y}{1+|y|} \right| \leq |x| + |y| = -x + y \leq |x - y|.$$

Όμοια εργαζόμαστε και στις άλλες περιπτώσεις. ♦



1.16.2. Έστω $B(I)$ ο διανυσματικός χώρος των φραγμένων πραγματικών συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα I της πραγματικής ευθείας. Η συνάρτηση $\varrho: B(I) \times B(I) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο

$$\varrho(f, g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|,$$

ορίζει μια μετρική στο σύνολο $B(I)$.

Λύση.

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι φραγμένες, η συνάρτηση ϱ είναι καλά ορισμένη. Επιπλέον, για τυχούσες συναρτήσεις f, g και h εν $B(I)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \varrho(f, g) = 0 &\Leftrightarrow \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)| = 0 \Leftrightarrow (\forall x \in I) |f(x) - g(x)| = 0 \Leftrightarrow (\forall x \in I) (f - g)(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow f - g = 0 \Leftrightarrow f = g. \end{aligned}$$

$$\varrho(f, g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in I} |g(x) - f(x)| = \varrho(g, f)$$

$$\begin{aligned} \varrho(f, g) &= \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in I} |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \leq \sup_{x \in I} (|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|) \\ &\leq \sup_{x \in I} |f(x) - h(x)| + \sup_{x \in I} |h(x) - g(x)| = \varrho(f, h) + \varrho(h, g). \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

Αφού κάθε συνεχής πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα $[a, b]$ ($a < b$) της πραγματικής ευθείας είναι φραγμένη συνάρτηση, ο ίδιος τύπος ορίζει μετρική στο σύνολο $C[a, b]$ των συνεχών συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα $[a, b]$ ($a < b$) της πραγματικής ευθείας.

1.16.3. Αν A, B και C είναι μη κενά υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (E, ϱ) και το C είναι φραγμένο σύνολο, τότε ισχύει:

$$\varrho(A, B) \leq \varrho(A, C) + \varrho(C, B) + \delta(C).$$

Λύση.

Για τυχόντα στοιχεία $x \in A, y \in B$ και $z, w \in C$ έχουμε

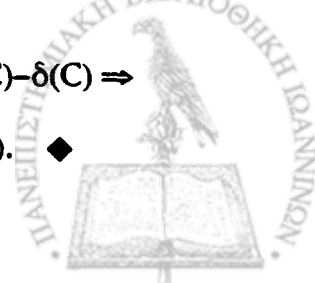
$$\varrho(x, w) \geq \varrho(x, z) - \varrho(z, w) \geq (\varrho(x, y) - \varrho(y, z)) - \delta(C) \geq \varrho(A, B) - \varrho(y, z) - \delta(C).$$

Άρα

$$\inf_{(x, w) \in A \times C} \varrho(x, w) \geq \varrho(A, B) - \varrho(y, z) - \delta(C) \Rightarrow \varrho(A, C) \geq \varrho(A, B) - \varrho(y, z) - \delta(C) \Rightarrow$$

$$\varrho(y, z) \geq \varrho(A, B) - \varrho(A, C) - \delta(C) \Rightarrow \inf_{(y, z) \in B \times C} \varrho(y, z) \geq \varrho(A, B) - \varrho(A, C) - \delta(C) \Rightarrow$$

$$\varrho(B, C) \geq \varrho(A, B) - \varrho(A, C) - \delta(C) \Rightarrow \varrho(A, B) \leq \varrho(A, C) + \varrho(B, C) + \delta(C). \quad \blacklozenge$$



1.16.4. Η σφαιρική περιοχή $B(A, r)$ με κέντρο ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου και ακτίνα $r > 0$, μπορεί να οριστεί και με τον τύπο:

$$B(A, r) = \bigcup_{x \in A} B(x, r).$$

Λύση.

Αρκεί ν' αποδείξουμε ότι

$$\{x \in E: \rho(x, A) < r\} = \bigcup_{x \in A} B(x, r).$$

Πραγματικά, για τυχόν z έχουμε

$$z \in \{x \in E: \rho(x, A) < r\} \Leftrightarrow \rho(z, A) < r \Leftrightarrow \inf_{y \in A} \rho(y, z) < r \Leftrightarrow (\exists x \in A) \rho(x, z) < r \Leftrightarrow$$

$$(\exists x \in A) z \in B(x, r) \Leftrightarrow z \in \bigcup_{x \in A} B(x, r). \quad \blacklozenge$$

1.16.5. Αν A είναι τυχόν μη κενό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου, ν' αποδειχτεί ότι:

$$\bar{A} = \bigcap_{r > 0} B(A, r).$$

Λύση.

$$\begin{aligned} x \in \bar{A} &\Leftrightarrow (\forall r > 0) B(x, r) \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow (\forall r > 0) \rho(x, A) < r \Leftrightarrow (\forall r > 0) x \in B(A, r) \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{r > 0} B(A, r). \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

1.16.6. Αν A είναι τυχόν υποσύνολο ενός μετρικού χώρου, ν' αποδειχτούν οι σχέσεις:

i) $\partial A^\circ \subseteq \partial A$

v) $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$

ii) $\partial \bar{A} \subseteq \partial A$

vi) $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset \Rightarrow \partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$

iii) $\partial(\partial A) \subseteq \partial A$

vii) $\partial(A \cap B) \subseteq \partial A \cup \partial B$

iv) $\partial(\partial(\partial A)) = \partial(\partial A)$

Λύση

i) $\partial A^\circ = \bar{A}^\circ - (A^\circ)^\circ = \bar{A}^\circ - A^\circ \subseteq \bar{A} - A^\circ = \partial A$



$$\text{ii)} \partial \bar{A} \subseteq \bar{A} - (\bar{A})^\circ = \bar{A} - (\bar{A})^\circ \subseteq \bar{A} - A^\circ = \partial A$$

$$\text{iii)} \partial(\partial A) = \overline{\partial A} - (\partial A)^\circ = \partial A - (\partial A)^\circ \subseteq \partial A.$$

iv) Λόγω της (iii) αρκεί ν' αποδειχτεί ότι: $\partial(\partial(\partial A)) \supseteq \partial(\partial A)$. Πράγματι για τυχόν x έχουμε:

$$x \in \partial(\partial A) \Rightarrow x \in \overline{\partial A} - (\partial A)^\circ \Rightarrow x \in \overline{\partial A} \wedge x \notin (\partial A)^\circ.$$

Επειδή $x \in \partial(\partial A)$ παίρνουμε $x \in \overline{\partial(\partial A)}$ και ακόμη, επειδή $x \notin (\partial A)^\circ$, λόγω και της (iii) παίρνουμε $x \in \overline{\partial(\partial A)} \wedge x \notin (\partial(\partial A))^\circ$ και άρα $x \in \partial(\partial(\partial A))$

$$\begin{aligned} \text{v)} \partial(A \cup B) &= \overline{A \cup B} - (A \cup B)^\circ \subseteq \overline{A \cup B} - (A^\circ \cup B^\circ) = [\bar{A} - (A^\circ \cup B^\circ)] \cup [\bar{B} - (A^\circ \cup B^\circ)] = \\ &= [(\bar{A} - A^\circ) \cap (\bar{A} - B^\circ)] \cup [(\bar{B} - A^\circ) \cap (\bar{B} - B^\circ)] \subseteq (\bar{A} - A^\circ) \cup (\bar{B} - B^\circ) = \partial A \cup \partial B. \end{aligned}$$

vi) Βάσει της Εφαρμογής 1.9.5., έχουμε ότι η σχέση $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$ συνεπάγεται την $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$. Λαμβάνοντας αυτό υπόψη και ακολουθώντας βήμα προς βήμα την απόδειξη του προηγούμενου ερωτήματος, παίρνουμε εύκολα την ισότητα $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.

vii) Έστω $x \in \partial(A \cap B)$. Τότε για κάθε $r > 0$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} B(x, r) \cap (A \cap B) &= \emptyset \wedge B(x, r) \cap (A \cap B)^c = \emptyset \Leftrightarrow \\ B(x, r) \cap A \cap B &= \emptyset \wedge (B(x, r) \cap A^c) \cup (B(x, r) \cap B^c) = \emptyset \Leftrightarrow \\ [B(x, r) \cap A \cap B &= \emptyset \wedge B(x, r) \cap A^c = \emptyset] \vee [B(x, r) \cap A \cap B = \emptyset \wedge B(x, r) \cap B^c = \emptyset] \Leftrightarrow \\ [B(x, r) \cap A &= \emptyset \wedge B(x, r) \cap A^c = \emptyset] \vee [B(x, r) \cap B = \emptyset \wedge B(x, r) \cap B^c = \emptyset] \Leftrightarrow x \in \partial A \vee x \in \partial B \Leftrightarrow \\ x &\in \partial A \cup \partial B. \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

1.16.7.i) Να δειχτεί ότι σε κάθε μετρικό χώρο τυχόν σύνολο μπορεί να παρασταθεί ως τομή ανοιχτών συνόλων.

ii) Αν ένας μετρικός χώρος E έχει την ιδιότητα:

“η τομή οσωνδήποτε ανοιχτών συνόλων να είναι ανοιχτό σύνολο” (*), ν' αποδειχτεί ότι ο E έχει όλα τα υποσύνολά του ανοιχτά και κλειστά.

Λύση.

i) Είναι γνωστό ότι κάθε μονοσύνολο είναι κλειστό σύνολο (Βλέπε 1.9.1.). Έτσι αρκεί να παρατηρήσουμε ότι για το τυχόν υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου έχουμε

$$A = \bigcap_{x \notin A} \{x\}^c,$$

που είναι το ζητούμενο.



ii) Έστω ότι ο E έχει την ιδιότητα (*). Τότε κάθε υποσύνολο του μετρικού χώρου E , είναι ανοιχτό σύνολο αφού βάσει του (i) μπορεί να παρασταθεί ως τομή ανοιχτών συνόλων. Τότε όμως κάθε υποσύνολο του E είναι προφανώς και κλειστό. ♦

1.16.8. Έστω (E, ρ) ένας μετρικός χώρος και F η οικογένεια των μη κενών, κλειστών και φραγμένων υποσυνόλων του E . Για τυχόντα $X, Y \in F$ θέτουμε

$$d(X, Y) = \max \left\{ \sup_{x \in X} \rho(x, Y), \sup_{y \in Y} \rho(y, X) \right\}.$$

Ν' αποδειχτεί ότι:

i) Για τυχόν $\varepsilon > 0$ ισχύει: $d(X, Y) \leq \varepsilon \Leftrightarrow X \subseteq B(Y, \varepsilon) \wedge Y \subseteq B(X, \varepsilon)$.

ii) Η d είναι μια μετρική στο F (Η d είναι γνωστή ως μετρική του Hausdorff).

Λύση.

i) Ας είναι $X \in F$ και $Y \in F$. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} d(X, Y) \leq \varepsilon &\Leftrightarrow \sup_{x \in X} \rho(x, Y) \leq \varepsilon \wedge \sup_{y \in Y} \rho(y, X) \leq \varepsilon \Rightarrow [(\forall x \in X) \rho(x, Y) \leq \varepsilon] \wedge \\ &[(\forall y \in Y) \rho(y, X) \leq \varepsilon] \Rightarrow [(\forall x \in X) x \in B(Y, \varepsilon)] \wedge [(\forall y \in Y) y \in B(X, \varepsilon)] \Rightarrow \\ &[X \subseteq B(Y, \varepsilon)] \wedge [Y \subseteq B(X, \varepsilon)]. \end{aligned}$$

Αντίστροφα, έχουμε:

$$\begin{aligned} [X \subseteq B(Y, \varepsilon)] \wedge [Y \subseteq B(X, \varepsilon)] &\Leftrightarrow [(\forall x \in X) \rho(x, Y) < \varepsilon] \wedge [(\forall y \in Y) \rho(y, X) < \varepsilon] \\ &\Leftrightarrow \sup_{x \in X} \rho(x, Y) \leq \varepsilon \wedge \sup_{y \in Y} \rho(y, X) \leq \varepsilon \Leftrightarrow d(X, Y) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

ii) Για τυχόντα $X \in F, Y \in F$ έχουμε:

$$d(X, Y) = 0 \Leftrightarrow \max \left\{ \sup_{x \in X} \rho(x, Y), \sup_{y \in Y} \rho(y, X) \right\} = 0 \Leftrightarrow \sup_{x \in X} \rho(x, Y) = 0 \wedge$$

$$\sup_{y \in Y} \rho(y, X) = 0 \Leftrightarrow (\forall x \in X) \rho(x, Y) = 0 \wedge (\forall y \in Y) \rho(y, X) = 0$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη την Εφαρμογή 1.9.6(i), και το ότι τα X, Y είναι κλειστά παίρνουμε:

$$\begin{aligned} (\forall x \in X) \rho(x, Y) = 0 \wedge (\forall y \in Y) \rho(y, X) = 0 &\Leftrightarrow (\forall x \in X) x \in \bar{Y} \wedge (\forall y \in Y) y \in \bar{X} \Leftrightarrow \\ (\forall x \in X) x \in Y \wedge (\forall y \in Y) y \in X &\Leftrightarrow X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X \Leftrightarrow X = Y. \end{aligned}$$

Η σχέση $d(X, Y) = d(Y, X)$ είναι προφανής.

Για τη σχέση $d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y)$, θεωρούμε τυχόντα $\varepsilon > 0$ και $x \in X$. Τότε ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει $z \in Z$ τέτοιο, ώστε



$$\rho(x, z) < d(X, Z) + \varepsilon.$$

Πράγματι, αν αυτό δεν συνέβαινε, θα είχαμε:

$$(\forall z \in Z) \rho(x, z) \geq d(X, Z) + \varepsilon \Rightarrow \inf_{z \in Z} \rho(x, z) \geq d(X, Z) + \varepsilon \Rightarrow \rho(x, Z) \geq d(X, Z) + \varepsilon.$$

Επειδή η τελευταία σχέση ισχύει για τυχόν $x \in X$, παίρνουμε: $\sup_{x \in X} \rho(x, Z) \geq d(X, Z) + \varepsilon.$

Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού από τον ορισμό της d έχουμε $\sup_{x \in X} \rho(x, Z) \leq d(X, Z).$

Όμοια υπάρχει $y \in Y$ τέτοιο, ώστε $\rho(z, y) < d(Z, Y) + \varepsilon.$

Άρα

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) < d(X, Z) + d(Z, Y) + 2\varepsilon \Rightarrow \inf_{y \in Y} \rho(x, y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y) + 2\varepsilon \Rightarrow$$

$$\rho(x, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y) + 2\varepsilon \Rightarrow X \subseteq B(Y, r),$$

όπου $r = d(X, Z) + d(Z, Y) + 2\varepsilon.$

Όμοια αποδεικνύεται ότι $Y \subseteq B(X, r).$ Άρα, σύμφωνα με το (i), παίρνουμε:

$$d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y) + 2\varepsilon.$$

Επειδή μάλιστα η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, έχουμε τελικά

$$d(X, Z) \leq d(X, Y) + d(Z, Y). \quad \blacklozenge$$

1.16.9. Αν A, B είναι τυχόντα υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (E, ρ) και τέτοια, ώστε $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$, ν' αποδειχτεί ότι υπάρχουν ανοιχτές περιοχές $U(A)$ και $U(B)$ τέτοιες, ώστε

$$U(A) \cap U(B) = \emptyset.$$

Λύση.

Θεωρούμε τα σύνολα

$$U(A) = \{x \in E: \rho(x, A) < \rho(x, B)\} \text{ και } U(B) = \{x \in E: \rho(x, B) < \rho(x, A)\}.$$

Τότε είναι φανερό ότι $U(A) \cap U(B) = \emptyset$. Θ' αποδείξουμε επιπλέον, ότι τα σύνολα $U(A)$ και $U(B)$ είναι ανοιχτά και μάλιστα $A \subseteq U(A)$ και $B \subseteq U(B)$. Για το σκοπό αυτό αρκεί να περιοριστούμε στο σύνολο $U(A)$.

Πράγματι, για τυχόν $x \in U(A)$ έχουμε

$$r = \frac{1}{2} (\rho(x, B) - \rho(x, A)) > 0.$$

Έτσι, για κάθε $y \in B(x, r)$, με βάση την Εφαρμογή 1.5.3., παίρνουμε:

$$|\rho(x, A) - \rho(y, A)| \leq \rho(x, y) < r$$

και



$$|q(x, B) - q(y, B)| \leq q(x, y) < r.$$

Άρα

$$q(y, A) < q(x, A) + r - \frac{1}{2}(q(x, B) - q(x, A)) = q(x, B) - r < q(y, B),$$

δηλαδή $y \in U(A)$. Αποδείχτηκε επομένως ότι $B(x, r) \subseteq U(A)$, δηλαδή ότι το σύνολο $U(A)$ είναι ανοιχτό.

Θ' αποδείξουμε τώρα ότι $A \subseteq U(A)$. Με βάση την υπόθεση $A \cap \bar{B} = \emptyset$ και την Εφαρμογή 1.9.6(i), παίρνουμε:

$$x \in A \Rightarrow q(x, A) = 0 \wedge x \notin \bar{B} \Rightarrow q(x, A) = 0 \wedge q(x, B) > 0 \Rightarrow q(x, A) < q(x, B) \Rightarrow x \in U(A). \blacklozenge$$

1.16.10. Αν A είναι υποσύνολο ενός μετρικού χώρου, ν' αποδειχτεί ότι:

$$A' \subseteq A'.$$

Να δοθεί παράδειγμα, όπου η παραπάνω σχέση να ισχύει με τη σχέση του γνήσιου υποσυνόλου.

Λύση.

Για κάθε x έχουμε

$$x \in A' \Rightarrow (\forall r > 0) \underline{B}(x, r) \cap A' \neq \emptyset.$$

Έτσι, για τυχόν $r > 0$ θεωρούμε ένα τυχόν επίσης $y \in \underline{B}(x, r) \cap A'$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} y \in \underline{B}(x, r) \cap A' &\Rightarrow y \in \underline{B}(x, r) \wedge y \in A' \Rightarrow (\exists r' > 0) \underline{B}(y, r') \subseteq \underline{B}(x, r) \wedge x \notin \underline{B}(y, r') \wedge \\ y \in A' &\Rightarrow \underline{B}(y, r') \cap A' \neq \emptyset. \text{ (Αρκεί να ληφθεί } r' = \min\{r - q(x, y), r - q(x, y)\}) \end{aligned}$$

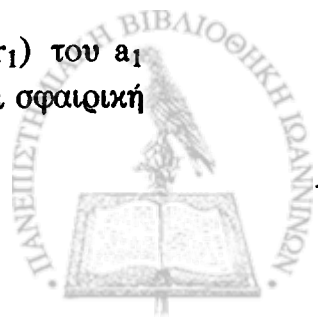
Επειδή όμως $\underline{B}(y, r') \subseteq \underline{B}(x, r) \wedge x \notin \underline{B}(y, r')$, η τελευταία σχέση δίνει $\underline{B}(x, r) \cap A' \neq \emptyset$, δηλαδή $x \in A'$, που είναι και το ζητούμενο.

Στον ευκλείδιο μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ θεωρούμε το σύνολο $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Τότε έχουμε $A' = \{0\}$ και $A' \subseteq A'$. $\blacklozenge$

1.16.11. Αν (E, ρ) είναι ο καρτεσιανός μετρικός χώρος των μετρικών χώρων (E_i, ρ_i) , $i=1, \dots, n$, $a=(a_1, \dots, a_n) \in E$ και $U(a_i)$, περιοχή εν E_i του a_i , $i=1, \dots, n$. Ν' αποδειχτεί ότι το σύνολο $U=U(a_1) \times \dots \times U(a_n)$ είναι περιοχή του a εν E .

Λύση.

Αφού $U(a_1)$ είναι περιοχή του a_1 υπάρχει σφαιρική περιοχή $B(a_1, r_1)$ του a_1 τέτοια, ώστε $B(a_1, r_1) \subseteq U(a_1)$. Όμοια, αφού $U(a_n)$ είναι περιοχή του a_n υπάρχει σφαιρική περιοχή $B(a_n, r_n)$ του a_n τέτοια, ώστε $B(a_n, r_n) \subseteq U(a_n)$.



Τότε όμως έχουμε $B(a, r) \subseteq B(a_1, r_1) \times \dots \times B(a_n, r_n) \subseteq U(a_1) \times \dots \times U(a_n) = U$, όπου $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$ (Βλέπε 1.7.2.), που αποδεικνύει ότι το σύνολο $U = U(a_1) \times \dots \times U(a_n)$ είναι περιοχή του a .

1.17. Ασκήσεις

✓ (1) Αν ρ είναι μια μετρική σ' ένα σύνολο E , ν' αποδειχτεί ότι και οι συναρτήσεις

$$\rho_1 = \sqrt{\rho}, \quad \rho_2 = \sqrt[3]{\rho},$$

είναι μετρικές στο E .

Να εξεταστεί αν ισχύει το ίδιο για τη συνάρτηση $\rho_3 = \rho^2$.

✓ (2) Έστω (E, ρ) ένας μετρικός χώρος και $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση ορισμένη με τον τύπο

$$d(x, y) = \begin{cases} \rho(x, y), & \text{αν } \rho(x, y) \leq 1 \\ 1, & \text{αν } \rho(x, y) > 1 \end{cases}.$$

Ν' αποδειχτεί ότι η d είναι μια μετρική στο E .

3. Έστω ένα σύνολο E και μια συνάρτηση $\rho: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια, ώστε για τυχόντα $x, y, z \in E$ να ισχύει:

α) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

β) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$

Ν' αποδειχτεί ότι η ρ είναι μετρική στο E .

4. Έστω ένα σύνολο E και μια συνάρτηση $\rho: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια, ώστε

α) $\rho(x, x) = 0$ για κάθε $x \in E$

β) $\rho(x, y) \neq 0$ για κάθε $x, y \in E$, με $x \neq y$.

γ) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$ για κάθε $x, y, z \in E$.

Ν' αποδειχτεί ότι η ρ είναι μετρική στο E .

5. Έστω $E = \{a, b\}$ και μια συνάρτηση $\rho: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ με $\rho(a, a) = \rho(b, b) = 0$ και $\rho(a, b) = \rho(b, a) = r > 0$. Ν' αποδειχτεί ότι η ρ είναι μετρική στο E .

6. Έστω $\rho_i, i \in I$ μια οικογένεια μετρικών σ' ένα σύνολο E με την ιδιότητα:



Για τυχόντα $x, y \in E$ υπάρχει σταθερά d_{xy} τέτοια, ώστε $q_i(x, y) \leq d_{xy}, i \in I$.

Ν' αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $q: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο, $q(x, y) = \sup_{i \in I} q_i(x, y)$ είναι μετρική στο E .

7. Ας είναι $\mathbb{R}^N$ και $\mathbb{R}_\varphi^N$ τα σύνολα των ακολουθιών πραγματικών αριθμών και των φραγμένων ακολουθιών πραγματικών αριθμών, αντίστοιχα. Ν' αποδειχτεί ότι οι συναρτήσεις $q: (\mathbb{R}^N)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ και $\sigma: (\mathbb{R}_\varphi^N)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους

$$q((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$$

και

$$\sigma((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|,$$

είναι μετρικές στα σύνολα $\mathbb{R}^N$ και $\mathbb{R}_\varphi^N$, αντίστοιχα.

8. Εστω $E = C([a, \beta])$ το σύνολο των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το διάστημα $[a, \beta]$. Ν' αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $q: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$q(f, g) = \int_a^\beta |f(x) - g(x)| dx,$$

είναι μια μετρική στο E .

10. Ν' αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $q: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$q(x, y) = \left| \frac{x}{1 + \sqrt{1+x^2}} - \frac{y}{1 + \sqrt{1+y^2}} \right|,$$

είναι μετρική στο $\mathbb{R}$.

Θεωρούμε επιπλέον το σύνολο $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ και θέτουμε

$$q'(x, \infty) = \lim_{y \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{1 + \sqrt{1+x^2}} - \frac{y}{1 + \sqrt{1+y^2}} \right|,$$

$$q'(\infty, y) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{1 + \sqrt{1+x^2}} - \frac{y}{1 + \sqrt{1+y^2}} \right|,$$

$$q'(\infty, \infty) = \lim_{x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{1 + \sqrt{1+x^2}} - \frac{y}{1 + \sqrt{1+y^2}} \right|.$$

Ν' αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $d: \mathbb{R}_\infty \times \mathbb{R}_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο



$$d(x, y) = \begin{cases} \varrho(x, y), & \text{αν } x \text{ και } y \text{ εν } \mathbf{R} \\ \varrho'(x, y), & \text{αν } x = -\infty \text{ ή } y = \infty \end{cases}$$

είναι μετρική στο $\mathbf{R}_\infty$.

11. Έστω E ένας διανυσματικός χώρος και ϱ μια μετρική στον E τέτοια, ώστε για τυχόντα $x, y, z \in E$ και $\lambda \in \mathbf{R}$ να ισχύει

$$\varrho(x+z, y+z) = \varrho(x, y) \text{ και } \varrho(\lambda x, 0) = |\lambda| \varrho(x, 0).$$

Ν' αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $N: E \rightarrow \mathbf{R}$ με τύπο $N(x) = \varrho(x, 0)$, είναι στάθμη στον E και μάλιστα η μετρική που ορίζεται από τη στάθμη αυτή είναι η ϱ .

12. Έστω E ένας διανυσματικός χώρος και ϱ η διακριτή μετρική. Ν' αποδειχτεί ότι δεν υπάρχει στάθμη στον E τέτοια, ώστε να παράγει τη ϱ .

13. Έστω φ μια αύξουσα πραγματική συνάρτηση με $\text{Dom} \varphi = [0, \infty)$ και τέτοια ώστε $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) > 0$ αν $x > 0$ και $\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$. Ν' αποδειχτεί ότι αν ϱ είναι μια μετρική σ' ένα σύνολο E , τότε και η ϱ_1 με τύπο:

$$\varrho_1(x, y) = \varphi(\varrho(x, y)), \quad x, y \in E$$

είναι μετρική στο E . (Εφαρμογή για $\varphi(x) = \log(1+x)$ και $\varphi(x) = \frac{x}{1+x}$).

14. Έστω ένα σύνολο E και μια συνάρτηση $\varrho: E \times E \rightarrow \mathbf{R}$, τέτοια ώστε για τυχόντα $x, y, z \in E$ να ισχύει

$$\alpha) \varrho(x, x) = 0$$

$$\beta) \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$$

$$\gamma) \varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y).$$

Μια τέτοια συνάρτηση λέγεται **ψευδομετρική (pseudometric)** στο E . Ορίζουμε στο E μια σχέση σ με τον τύπο: $x \sigma y \Leftrightarrow \varrho(x, y) = 0$. Ν' αποδειχτεί ότι

α) Η σ είναι ισοδυναμία στο E .

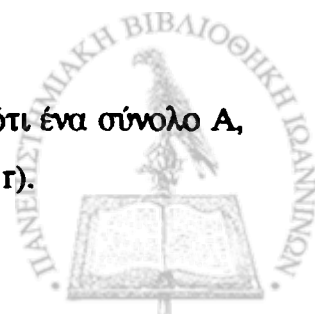
β) Αν στο σύνολο πηλίκου E/σ θέσουμε $d([x], [y]) = \varrho(x, y)$, $x, y \in E$, όπου $[x]$ δηλώνει την κλάση ισοδυναμίας του x , τότε η d είναι μια μετρική στο E/σ .

15. Έστω (E, ϱ) ένας μετρικός χώρος και A ένα υποσύνολό του. Ν' αποδειχτεί ότι:

$$\alpha) \varrho(x, y) \leq \varrho(x, A) + \delta(A) \text{ για τυχόντα } x \in E \text{ και } y \in A.$$

$$\beta) |\varrho(x, y) - \varrho(x, z)| \leq \delta(A) \text{ για τυχόντα } x \in E \text{ και } y, z \in A.$$

16. Στον ευκλείδειο μετρικό χώρο $(\mathbf{R}^n, |\cdot|)$, $n \in \mathbf{N}$, ν' αποδειχτεί ότι ένα σύνολο A , είναι φραγμένο αν και μόνο αν υπάρχει τ , $\tau > 0$, τέτοιο, ώστε $A \subseteq B(\vec{0}, \tau)$.



17. Έστω $E \neq \emptyset$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ τυχούσα συνάρτηση και $q : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με τύπο:

$$q(x, y) = |f(x) - f(y)|.$$

Ν' αποδειχτεί ότι η q είναι μια ψευδομετρική στο E .

18. Αν E είναι μετρικός χώρος, $a \in E$ και $r > 0$, ν' αποδειχτεί ότι για τυχόν $x \in E$ ισχύει:

$$x \notin B(a, r) \Rightarrow q(x, B(a, r)) \geq q(a, x) - r.$$

19. Αν a είναι τυχόν σημείο ενός μετρικού χώρου E και V υποσύνολο του E , ν' αποδειχτεί ότι:

$$\text{Το } V \text{ δεν είναι περιοχή του } a \Leftrightarrow a \in (V^\circ)^c = \overline{(V^c)}$$

20. Ν' αποδειχτεί ότι για τυχόντα υποσύνολα A, B ενός μετρικού χώρου ισχύουν οι σχέσεις:

$$(A-B)^\circ = A^\circ - \bar{B} \text{ και } \overline{A-B} \subseteq \bar{A} - B^\circ.$$

21. Αν A, B είναι υποσύνολα ενός μετρικού χώρου E τέτοια, ώστε το B να είναι ανοιχτό και επιπλέον $\bar{A} = E = \bar{B}$, ν' αποδειχτεί ότι $\bar{A} \cap B = E$.

22. Δύο υποσύνολα A, B ενός μετρικού χώρου λέγονται **διαχωρισμένα** αν

$$\bar{A} \cap B = \emptyset = A \cap \bar{B}.$$

Ν' αποδειχτεί ότι:

α) Αν σ' ένα μετρικό χώρο τα σύνολα A, B καθώς και τα B, C είναι διαχωρισμένα, τότε και τα $A \cup C, B$ είναι διαχωρισμένα.

β) Αν A, B είναι διαχωρισμένα υποσύνολα ενός μετρικού χώρου τότε $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$.

23. Να δοθεί παράδειγμα συνόλων A, B σ' ένα μετρικό χώρο E , όπου τα $\bar{A} \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B}$ να είναι όλα ανά δύο διαφορετικά.

24. Αν A είναι ανοιχτό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου και B τυχόν, ν' αποδειχτεί ότι

$$A \cap \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}.$$



Επιπλέον, να δοθεί παράδειγμα συνόλων A και B σ' ένα μετρικό χώρο E τέτοιων, ώστε $A \cap \overline{B} \not\subseteq \overline{A \cap B}$.

25. Αν A είναι τυχόν υποσύνολο ενός μετρικού χώρου, ν' αποδειχτεί ότι:

α) Το A είναι κλειστό αν και μόνο αν $\partial A = A \cap \overline{A^c}$

β) Το A είναι ανοιχτό αν και μόνο αν $\partial A = \overline{A} - A$.

26. Αν A είναι τυχόν υποσύνολο ενός μετρικού χώρου, ν' αποδειχτεί ότι

$$A^\circ = A - \partial A.$$

27. Αν A είναι τυχόν υποσύνολο ενός μετρικού χώρου, ν' αποδειχτεί ότι $\delta(A') \leq \delta(A)$. Να δοθεί παράδειγμα συνόλου A για το οποίο ισχύει $\delta(A') < \delta(A)$.

28. Αν A είναι τυχόν υποσύνολο ενός μετρικού χώρου, ν' αποδειχτεί ότι:

α) $A' = \{x \in E: \rho(x, A - \{x\}) = 0\}$.

β) $A \subseteq A' \Rightarrow \overline{A} = A'$.

29. Έστω A ένα πεπερασμένο και ανοιχτό υποσύνολο του μετρικού χώρου E . Να δειχτεί ότι κάθε σημείο του A είναι μεμονωμένο σημείο του E .

30. Αν E είναι ένας μετρικός χώρος, $x \in E$ και $A \subseteq E$, ν' αποδειχτεί ότι

$$x \in \text{ext} A \Leftrightarrow \rho(x, A) > 0.$$

31. Αν A, B είναι μη κενά υποσύνολα ενός μετρικού χώρου ν' αποδειχτεί ότι:

$$\rho(\overline{A}, B) = \rho(A, \overline{B}) = \rho(\overline{A}, \overline{B}) = \rho(A, B).$$

32. Έστω (E, ρ) ένας μετρικός χώρος και A, B, C υποσύνολά του. Ν' αποδειχτεί ότι:

α) $\rho(A, B \cup C) = \min\{\rho(A, B), \rho(A, C)\}$

β) $\rho(A, B) \leq \rho(A, C) + \rho(B, A \cup C) + \delta(C)$.

γ) Αν $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ τότε $\rho(x, A) = \rho(x, B)$ για κάθε $x \in E$.

33. Για τυχόν υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου E ν' αποδειχτεί ότι:



$$\partial A = (A \cap \bar{A}^c) \cup (\bar{A} \cap A^c).$$

34. Αν A και B είναι ανοιχτά υποσύνολα ενός μετρικού χώρου, ν' αποδειχτεί ότι:

α) $(A \cup B)^\circ - (A^\circ \cup B^\circ) \subseteq \partial A \cup \partial B$

β) $\bar{A} \cap \bar{B} - \overline{A \cup B} \subseteq \partial A \cap \partial B$.

35. Αν A και B είναι ανοιχτά υποσύνολα ενός μετρικού χώρου, ν' αποδειχτεί ότι:

α) $(A \cap \partial B) \cup (B \cap \partial A) \subseteq \partial(A \cap B) \subseteq (A \cap \partial B) \cup (B \cap \partial A) \cup (\partial A \cap \partial B)$

β) $A \cap B \cap \partial(A \cap B) = A \cap B \cap (\partial A \cup \partial B)$.

36. Αν A και B είναι τυχόντα υποσύνολα ενός μετρικού χώρου E τέτοια, ώστε $\partial A \cap \partial B = \emptyset$, ν' αποδειχτεί ότι:

α) $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$

β) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

γ) $\partial(A \cap B) = (\bar{A} \cap \partial B) \cup (\partial A \cap \bar{B})$.

37. Να δοθεί παράδειγμα συνόλου A σ' ένα μετρικό χώρο E , για το οποίο να ισχύουν οι σχέσεις:

α) $\partial A \neq \partial \bar{A} \neq \partial A^\circ \neq \partial A$

β) $\partial(\partial A) \subset \partial A$.

38. Αν A και B είναι τυχόντα υποσύνολα ενός μετρικού χώρου, ν' αποδειχτεί ότι

α) $\text{ext} A \subseteq A^c$

β) A κλειστό $\Leftrightarrow \text{ext} A = A^c$

γ) $A \subseteq B \Rightarrow \text{ext} A \supseteq \text{ext} B$

δ) $\text{ext} A = \text{ext}[(\text{ext} A)^c]$

ε) $\text{ext}(A \cup B) = (\text{ext} A) \cap (\text{ext} B)$.

39. Αν A είναι τυχόν υποσύνολο ενός μετρικού χώρου, ν' αποδειχτεί ότι:

α) $A' \cap \text{ext} A = \emptyset$

β) $(\partial A)^\circ = \emptyset \Leftrightarrow (\bar{A})^\circ \subseteq \bar{A}^\circ$.



40. Έστω (E, ρ) ένας μετρικός χώρος και A τυχόν υποσύνολο του E . Ν' αποδειχτεί ότι:

$$\overline{A \cup \text{ext} A} = E.$$

41. Αν A και B είναι τυχόντα υποσύνολα ενός μετρικού χώρου E , ν' αποδειχτεί ότι:

α) $A \cup B = E \Rightarrow \bar{A} \cup B^\circ = E$

β) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \bar{A} \cap B^\circ = \emptyset.$

42. Αν A είναι υποσύνολο ενός μετρικού χώρου E , ν' αποδειχτεί ότι:

$$E - \overline{\text{ext} A} = \bar{A}.$$

43. Αν A και B είναι υποσύνολα ενός μετρικού χώρου, ν' αποδειχτεί ότι:

α) $A^\circ - B^\circ \supseteq (A - B)^\circ$

β) $\bar{A} - \bar{B} \subseteq \overline{A - B}.$

Να δοθούν παραδείγματα, όπου οι παραπάνω σχέσεις να ισχύουν με τη σχέση του γνήσιου υποσυνόλου.

44. Έστω (E, ρ) ένας μετρικός χώρος και $A_i, i \in I$ μια οικογένεια υποσυνόλων του E . Ν' αποδειχτεί ότι:

α) $\bigcup_{i \in I} \bar{A}_i$ κλειστό $\Leftrightarrow \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i = \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$

β) $\bigcap_{i \in I} A_i^\circ$ είναι ανοιχτό $\Leftrightarrow \bigcap_{i \in I} A_i^\circ = \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^\circ$

γ) $\overline{\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^\circ} \supseteq \overline{\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^\circ}.$

45. Έστω $A_n, n \in \mathbb{N}$ μια φθίνουσα ακολουθία υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου E , με $A_n \neq \emptyset, n \in \mathbb{N}$ και $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$. Ν' αποδειχτεί ότι αν $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{A}_n$, τότε $x \in A_1'$.

46. Έστω (E, ρ) ένας μετρικός χώρος και F το σύνολο των μη κενών, κλειστών και φραγμένων υποσυνόλων του E . Στο σύνολο F θεωρούμε τη μετρική του Hausdorff που, όπως είναι γνωστό (Βλέπε 1.16.8.), ορίζεται με τον τύπο:



$$d(X, Y) = \max \left\{ \sup_{x \in X} \rho(x, Y), \sup_{y \in Y} \rho(y, X) \right\}.$$

για τυχόντα X, Y εν F .

Ν' αποδειχτεί ότι:

α) Για τυχόντα a, b εν E ισχύει $d(\{a\}, \{b\}) = \rho(a, b)$.

β) Για τυχόν $\varepsilon > 0$ ισχύει: $d(X, Y) \leq \varepsilon \Leftrightarrow [X \subseteq B(Y, \varepsilon)] \wedge [(\forall x \in Y) B(x, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset]$.

47. Έστω E ένας μετρικός χώρος και A ένα υποσύνολό του. Το A λέγεται **κανονικό ανοιχτό (regular open)** υποσύνολο του E αν $A = (\bar{A})^\circ$. Ν' αποδειχτεί ότι:

α) Να δοθεί παράδειγμα ανοιχτού αλλά μη κανονικού ανοιχτού υποσυνόλου του ευκλείδειου μετρικού χώρου $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

β) Αν το A είναι κανονικό ανοιχτό τότε είναι και ανοιχτό.

γ) Αν το A είναι κλειστό τότε το A° είναι κανονικό ανοιχτό.

δ) Αν τα A, B είναι κανονικά ανοιχτά, τότε $A \subseteq B$ αν και μόνο αν $\bar{A} \subseteq \bar{B}$.

ε) Αν τα A, B είναι κανονικά ανοιχτά, τότε και το $A \cap B$ είναι κανονικό ανοιχτό.

48. Αν A είναι υποσύνολο ενός μετρικού χώρου, ν' αποδειχτεί ότι το A είναι ανοιχτό και κλειστό ταυτόχρονα αν και μόνο αν ισχύει $\partial A = \emptyset$.

49. Αν a είναι τυχόν σημείο ενός μετρικού χώρου E και r, s θετικοί αριθμοί με $r < s$, ν' αποδειχτεί ότι το σύνολο $\{x \in E: r < \rho(x, a) < s\}$ είναι ανοιχτό.

50. Ν' αποδειχτεί ότι

α) Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι ανοιχτό ούτε κλειστό υποσύνολο του $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

β) Το σύνολο $\mathbb{Q} \cap [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ είναι ανοιχτό και κλειστό υποσύνολο του χώρου $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$.

γ) Κάθε υποσύνολο του υπόχωρου A του ευκλείδειου μετρικού χώρου $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, όπου $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, είναι ανοιχτό και κλειστό υποσύνολο του A .

51. Έστω A ένα μη κενό και φραγμένο υποσύνολο του ευκλείδειου χώρου $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Ν' αποδειχτεί ότι $\inf A \in \bar{A}$, $\sup A \in \bar{A}$. Ειδικότερα, ν' αποδειχτεί ότι $\inf A \in \partial A$, $\sup A \in \partial A$.

52. Ας είναι $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ ο n -διάστατος ευκλείδειος μετρικός χώρος, και $\vec{B}(0,1)$, $\vec{C}(0,1)$ αντίστοιχα, η σφαιρική περιοχή ακτίνας 1 και η αντίστοιχη κλειστή σφαιρική περιοχή ακτίνας 1 του σημείου $\vec{0}$ στον $\mathbb{R}^n$. Αν A είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$

τέτοιο, ώστε $B(0,1) \subset A \subset C(0,1)$, ν' αποδειχτεί ότι το A δεν είναι ανοιχτό ούτε κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

53. Ν' αποδειχτεί ότι σε κάθε μετρικό χώρο οι κλειστές σφαιρικές περιοχές είναι κλειστά σύνολα. Επιπλέον, να δοθεί παράδειγμα που η θήκη μιας σφαιρικής περιοχής να μη ταυτίζεται με την αντίστοιχη κλειστή σφαιρική περιοχή που έχει το ίδιο κέντρο και την ίδια ακτίνα.

54. Έστω (E, ρ) ένας μετρικός χώρος και A ένα πεπερασμένο υποσύνολό του. Θέτουμε $S = \{x \in E : (\exists y \in A) \rho(x, y) \leq 1\}$. Ν' αποδειχτεί ότι το S είναι κλειστό υποσύνολο του E .

55. Αν το D είναι πυκνό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου E και A ανοιχτό υποσύνολο του E , ν' αποδειχτεί ότι $\bar{A} = \overline{D \cap A}$.

56. Να βρεθεί ο πυρήνας, η θήκη, το παράγωγο σύνολο και το σύνολο των παρακάτω υποσυνόλων του ευκλείδειου χώρου $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$:

1) $A = (0,1) \cup \mathbb{N}$

2) $B = (-\infty, 0) \cup \{\frac{1}{v} : v \in \mathbb{N}\}$.

3) $\Gamma = \mathbb{Q}^2$

4) $C = \{(x, 1) : 1 < x < 2\}$

5) $D = \{(x, \frac{1}{x}) : 0 < x < 1\}$

6) $E = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$

7) $F = \{(x, y) : 0 < x + y \leq 2\}$

8) $G = \{(x, y) : x > 0 \text{ και } 0 < y < \frac{1}{x}\}$

9) $H = \{(\frac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{N}\}$

10) $K = \{(\frac{m}{n}, \frac{1}{n}) : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

11) $L = \{(x, y) : x + y = 2\}$

12) $M = \{(x, \sin \frac{1}{x}) : 0 < x \leq 1\}$.

57. Ν' αποδειχτεί ότι το A είναι πυκνό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου E αν και μόνο αν το μόνο κλειστό υπερσύνολο του A είναι το E .

58. Έστω A ένα υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (E, ρ) τέτοιο, ώστε



$$(\forall x \in A)(\exists a \in A) \rho(x, a) = \rho(x, A).$$

Ν' αποδειχτεί ότι το A είναι κλειστό σύνολο.

59. Για τυχόν υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου E , ν' αποδειχτεί ότι:

$$A \text{ ανοιχτό} \Leftrightarrow A \cap \partial A = \emptyset.$$

60. Ας είναι E ένας σταθμητός διανυσματικός χώρος και A ένα ανοιχτό υποσύνολο του E . Ν' αποδειχτεί ότι για τυχόν υποσύνολο B του E , το σύνολο

$$A+B = \{x+y: x \in A \text{ και } y \in B\}$$

είναι ανοιχτό.

61. Έστω E ένας σταθμητός διανυσματικός χώρος και V μια περιοχή του 0 . Ν' αποδειχτεί ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ υπάρχει περιοχή W του 0 τέτοια, ώστε $W \subseteq \lambda V$.

62. Έστω E ένας σταθμητός διανυσματικός χώρος και V ένας γνήσιος και κλειστός διανυσματικός υπόχωρος του E . Ν' αποδειχτεί ότι:

$$\alpha) \partial V = V \text{ και } \overline{V^c} = E.$$

β) Αν $A = \{x \in E: N(x)=1\}$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ τέτοιο, ώστε $\rho(x, V) \geq 1 - \varepsilon$.
(Λήμμα του Riesz).

63. Ν' αποδειχτεί ότι στον καρτεσιανό μετρικό χώρο E των μετρικών χώρων E_1, E_2 και για τυχόντα A_1, A_2 , υποσύνολα των E_1, E_2 αντίστοιχα, ισχύει:

$$(A_1 \times A_2)' = (A_1' \times \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} \times A_2').$$

64. Έστω A είναι τυχόν υποσύνολο ενός μετρικού χώρου E . Ν' αποδειχτεί ότι

α) Τα σύνολα $A \cap \overline{A^c}$ και $\overline{A} \cap A^c$ έχουν συμπλήρωμα πυκνό στον E .

β) Το σύνολο ∂A μπορεί να παρασταθεί ως ένωση δύο συνόλων που το συμπλήρωμά τους είναι πυκνό στον E .

65. Ν' αποδειχτεί ότι ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου E είναι πουθενά πυκνό αν και μόνο αν τυχούσα σφαιρική περιοχή του E περιέχει σφαιρική περιοχή ξένη προς το A .



66. Ν' αποδειχτεί ότι η τομή πεπερασμένου πλήθους πουθενά πυκνών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου είναι πουθενά πυκνό σύνολο.

67. Ας είναι (E, ρ) ο καρτεσιανός μετρικός χώρος των μετρικών χώρων (E_i, ρ_i) , $i=1, 2, \dots, n$ και για κάθε $i=1, 2, \dots, n$, A_i ένα πουθενά πυκνό υποσύνολο του E_i . Ν' αποδειχτεί ότι το σύνολο $\prod_{i=1}^n A_i$ είναι πουθενά πυκνό υποσύνολο του μετρικού χώρου (E, ρ) .

68. Ν' αποδειχτεί ότι ο μετρικός χώρος $(Q, |\cdot|)$ είναι ένας χώρος πρώτης κατηγορίας.

69. Ν' αποδειχτεί ότι το σύνολο τυχόντος υποσυνόλου A ενός μετρικού χώρου είναι πουθενά πυκνό σύνολο αν και μόνο αν $(\bar{A})^\circ \subseteq \bar{A}^\circ$.

70. Ν' αποδειχτεί ότι για τυχόν m , $1 \leq m \leq n$, το σύνολο $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 0\}$ είναι πουθενά πυκνό υποσύνολο του ευκλείδειου μετρικού χώρου $\mathbb{R}^n$.

71. Έστω ένα σύνολο E και μια συνάρτηση $\rho: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια, ώστε για τυχόντα $x, y, z \in E$ να ισχύει:

α) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x=y$

β) $\rho(x, y) \leq \max\{\rho(x, z), \rho(y, z)\}$

Μια συνάρτηση με τις ιδιότητες αυτές ονομάζεται *υπερμετρική* και ο χώρος (E, ρ) *υπερμετρικός χώρος*.

Ν' αποδειχτεί ότι:

i) Η ρ είναι μετρική στο E .

ii) Για τυχόντα $a, b \in E$ ισχύει

$$\rho(x, z) \neq \rho(y, z) \Rightarrow \rho(x, y) = \max\{\rho(x, z), \rho(y, z)\}.$$

iii) Για τυχόντα $a, b \in E$ ισχύει:

$$b \in B(a, r) \Rightarrow B(b, r) = B(a, r).$$

iv) Κάθε κλειστή σφαιρική περιοχή $C(a, r)$ είναι ανοιχτό και κλειστό σύνολο. Επιπλέον, για τυχόντα $a, b \in E$ ισχύει:

$$b \in C(a, r) \Rightarrow C(b, r) = C(a, r).$$

v) Αν δυο σφαιρικές περιοχές δεν είναι ξένες τότε η μια από τις δυο είναι υποσύνολο της άλλης



72. Θεωρούμε το γραμμικό χώρο E όλων των πραγματικών ακολουθιών. Αν $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $\beta = (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ανήκουν στο E , θέτουμε $K(\alpha, \beta) = \min \{n \in \mathbb{N} : \alpha_n \neq \beta_n\}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$d(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{K(\alpha, \beta)} & \text{αν } \alpha \neq \beta \\ 0, & \text{αν } \alpha = \beta \end{cases}$$

Ν' αποδειχτεί ότι η d είναι μια υπερμετρική στο E .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ακολουθίες σε μετρικούς χώρους

2.1. Ορισμός της ακολουθίας – Σύγκλιση

Έστω (E, ρ) ένας μετρικός χώρος.

Μια οικογένεια $a_n, n \in \mathbb{N}$, στοιχείων του μετρικού χώρου E , με σύνολο δεικτών ένα απέραντο και κάτω φραγμένο υποσύνολο N του συνόλου $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών, ονομάζεται **ακολουθία** (*sequence*) στο μετρικό χώρο E και συμβολίζεται συνήθως με $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Τις πιο πολλές φορές θεωρούμε ως σύνολο δεικτών των ακολουθιών το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών.

Έστω ℓ ένα στοιχείο του E και $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο E .



Θα λέμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έχει όριο (limit) το ℓ ή ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει (converges) ή τείνει στο ℓ και θα το συμβολίζουμε με $a_n \xrightarrow[n \in \mathbb{N}]{} \ell$, αν η πραγματική ακολουθία $(\varrho(a_n, \ell))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μηδενική.

Έτσι, έχουμε

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell \Leftrightarrow \lim_{n \in \mathbb{N}} \varrho(a_n, \ell) = 0$$

και με βάση τα γνωστά από τον Απειροστικό Λογισμό, παίρνουμε:

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell \Leftrightarrow [(\forall \varepsilon > 0) (\exists n \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}) n > n \Rightarrow \varrho(a_n, \ell) < \varepsilon]$$

Μερικές φορές αντί των συμβολισμών $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell$ και $a_n \xrightarrow[n \in \mathbb{N}]{} \ell$, χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς $\varrho - \lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell$ και $a_n \xrightarrow[n \in \mathbb{N}]{}^{\varrho} \ell$, κυρίως όταν χρειάζεται να δηλώσουμε και τη μετρική ως προς την οποία θεωρούμε τη σύγκλιση.

Όπως και στις πραγματικές ακολουθίες, έτσι και στους μετρικούς χώρους το όριο μιας ακολουθίας, όταν υπάρχει, είναι μοναδικό. Αυτό προκύπτει από την επόμενη πρόταση.

2.1.1. ΠΡΟΤΑΣΗ. Μια ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ σ' ένα μετρικό χώρο (E, ϱ) έχει το πολύ ένα όριο.

Απόδειξη.

ΑΣ υποθέσουμε ότι μια ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έχει δύο όρια ℓ_1 και ℓ_2 εν E , με $\ell_1 \neq \ell_2$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \varrho(\ell_1, \ell_2) &\leq \varrho(a_n, \ell_1) + \varrho(a_n, \ell_2), n \in \mathbb{N} \Rightarrow \varrho(\ell_1, \ell_2) \leq \lim_{n \in \mathbb{N}} \varrho(a_n, \ell_1) + \lim_{n \in \mathbb{N}} \varrho(a_n, \ell_2) \\ &\Rightarrow \varrho(\ell_1, \ell_2) \leq 0 + 0 \Rightarrow \varrho(\ell_1, \ell_2) = 0 \Rightarrow \ell_1 = \ell_2, \end{aligned}$$

που είναι άτοπο. ♦

Επειδή όταν υπάρχει το όριο μιας ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, αυτό ορίζεται μονοσήμαντα, δεν υπάρχει βλάβη να λέμε απλά την ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **συγκλίνουσα (convergent) ακολουθία** αντί να λέμε ότι η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει προς το σημείο ℓ .

Επίσης για τον ίδιο λόγο μπορούμε να χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell$ αντί του $a_n \xrightarrow[n \in \mathbb{N}]{} \ell$.



2.1.2. ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία σ' ένα μετρικό χώρο (E, ρ) και $\ell \in E$ τότε ισχύει:

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell \Leftrightarrow ((\forall U(\ell)) a_n \in U(\ell) \text{ τελικά για όλα τα } n \in \mathbb{N}).$$

Απόδειξη.

Έστω $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell$ και $U(\ell)$ τυχούσα περιοχή του ℓ . Άρα υπάρχει σφαιρική περιοχή $B(\ell, r)$ του ℓ τέτοια, ώστε $B(\ell, r) \subseteq U(\ell)$. Τότε όμως έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell &\Rightarrow [(\exists n \in \mathbb{R})(\forall n > n) \Rightarrow \rho(a_n, \ell) < r] \Rightarrow [(\exists n \in \mathbb{R})(\forall n > n) \Rightarrow a_n \in B(\ell, r)] \\ &\Rightarrow a_n \in B(\ell, r) \text{ τελικά για όλα τα } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Επειδή όμως $B(\ell, r) \subseteq U(\ell)$, η τελευταία σχέση γίνεται:

$$a_n \in U(\ell) \text{ τελικά για όλα τα } n \in \mathbb{N}.$$

Αντίστροφα, έχουμε:

$$\begin{aligned} ((\forall U(\ell)) a_n \in U(\ell) \text{ τελικά για όλα τα } n \in \mathbb{N}) &\Rightarrow ((\forall B(\ell, \varepsilon)) a_n \in B(\ell, \varepsilon) \text{ τελικά για} \\ &\text{όλα τα } n \in \mathbb{N}) \Rightarrow [(\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{R})(\forall n > n) \Rightarrow a_n \in B(\ell, \varepsilon)] \Rightarrow [(\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{R}) \\ &(\forall n > n) \Rightarrow \rho(a_n, \ell) < \varepsilon] \Rightarrow \lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell. \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

2.2. Παραδείγματα - Εφαρμογές - Σχόλια

2.2.1. Η σύγκλιση μιας ακολουθίας σ' ένα μετρικό χώρο (E, ρ) εξαρτάται άμεσα από τη μετρική ρ .

Απόδειξη.

Ακριβέστερα, μια ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ σ' ένα μετρικό χώρο (E, ρ) μπορεί να είναι συγκλίνουσα, ενώ η ίδια ακολουθία στον μετρικό χώρο (E, ρ') να μην είναι συγκλίνουσα.

Για παράδειγμα, θεωρούμε την ακολουθία $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ στο μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Είναι γνωστό ότι $|\cdot| - \lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = 0$. Θεωρούμε τώρα την ίδια ακολουθία $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ αλλά στον διακριτό μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, \rho)$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι υπάρχει $\ell \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$\rho - \lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell. \text{ Τότε:}$$



$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbf{R})(\forall n \in \mathbf{N}) n > n \Rightarrow \varrho(a_n, \ell) < \varepsilon.$$

Αν μάλιστα απαιτήσουμε η παραπάνω σχέση να ισχύει για $\varepsilon < 1$ παίρνουμε

$$(\exists n \in \mathbf{R})(\forall n \in \mathbf{N}) n > n \Rightarrow \varrho(a_n, \ell) < \varepsilon < 1,$$

δηλαδή,

$$[(\exists n \in \mathbf{R})(\forall n \in \mathbf{N}) n > n \Rightarrow \varrho(a_n, \ell) = 0] \Rightarrow [(\exists n \in \mathbf{R})(\forall n \in \mathbf{N}) n > n \Rightarrow a_n = \ell].$$

Άρα η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ είναι τελικά σταθερή και αυτό είναι άτοπο. Επομένως, η ακολουθία $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$ δεν συγκλίνει στο διακριτό μετρικό χώρο $(\mathbf{R}, \varrho)$. ♦

Η παραπάνω διαδικασία καθιστά προφανές και το εξής ενδιαφέρον συμπέρασμα:

Οι μόνες συγκλίνουσες ακολουθίες σ' ένα διακριτό μετρικό χώρο είναι εκείνες που είναι τελικά σταθερές.

2.2.2. Ας είναι (E, ϱ) ο καρτεσιανός μετρικός χώρος των μετρικών χώρων (E_i, ϱ_i) , $i=1, \dots, n$, $a_n = (a_{1n}, \dots, a_{nn})$, $n \in \mathbf{N}$, μια ακολουθία εν E και $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in E$. Τότε ισχύει:

$$\lim_{n \in \mathbf{N}} a_n = \ell \Leftrightarrow \lim_{n \in \mathbf{N}} a_{in} = \ell_i, i \in \{1, \dots, n\}.$$

Απόδειξη.

Εστω $\lim_{n \in \mathbf{N}} a_n = \ell$. Τότε έχουμε $\lim_{n \in \mathbf{N}} \varrho(a_n, \ell) = 0$. Επειδή όμως για κάθε i , $i=1, \dots, n$,

ισχύει $0 \leq \varrho_i(a_{in}, \ell_i) \leq \varrho(a_n, \ell)$ (Βλέπε 1.3. 5.), παίρνουμε $\lim_{n \in \mathbf{N}} \varrho_i(a_{in}, \ell_i) = 0$, $i=1, \dots, n$.

Αντίστροφα, έστω $\lim_{n \in \mathbf{N}} a_{in} = \ell_i$, δηλαδή $\lim_{n \in \mathbf{N}} \varrho_i(a_{in}, \ell_i) = 0$, $i=1, \dots, n$. Τότε,

επειδή $0 \leq \varrho(a_n, \ell) \leq \sum_{i=1}^n \varrho_i(a_{in}, \ell_i)$ (Βλέπε 1.3. 5.), παίρνουμε $\lim_{n \in \mathbf{N}} \varrho(a_n, \ell) = 0$. ♦

2.2.3. Είναι γνωστό ότι στον καρτεσιανό μετρικό χώρο (E, ϱ) των μετρικών χώρων (E_i, ϱ_i) , $i=1, \dots, n$, οι συναρτήσεις $\varrho' : E^2 \rightarrow \mathbf{R}$ και $\varrho'' : E^2 \rightarrow \mathbf{R}$ που ορίζονται από τους τύπους:

$$\varrho'(x, y) = \max_i \varrho_i(x_i, y_i) \text{ και } \varrho''(x, y) = \sum_{i=1}^n \varrho_i(x_i, y_i)$$



είναι μετρικές στο E και μάλιστα, σε σχέση με τη γνωστή μετρική ρ του καρτεσιανού μετρικού χώρου (E, ρ) , ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\rho'(x, y) \leq \rho(x, y) \leq \sqrt{n} \rho'(x, y) \text{ και } \frac{1}{n} \rho''(x, y) \leq \rho(x, y) \leq \rho''(x, y)$$

για κάθε x και y εν E .

Από τις σχέσεις αυτές συμπεραίνει εύκολα κανείς ότι αν μια ακολουθία (a_n) , $n \in \mathbb{N}$ εν E συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο ℓ ως προς μια από τις μετρικές ρ , ρ' , ρ'' , τότε συγκλίνει στο ℓ και ως προς τις άλλες δυό από τις μετρικές αυτές.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι $\rho' - \lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell$. Τότε $\lim_{n \in \mathbb{N}} \rho'(a_n, \ell) = 0$, οπότε, από τη σχέση $\rho(a_n, \ell) \leq \sqrt{n} \rho'(a_n, \ell)$, προκύπτει ότι $\lim_{n \in \mathbb{N}} \rho(a_n, \ell) = 0$, δηλαδή $\rho - \lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell$. Όμοια, από τη σχέση $\frac{1}{n} \rho''(a_n, \ell) \leq \rho(a_n, \ell)$ και, επειδή $\lim_{n \in \mathbb{N}} \rho(a_n, \ell) = 0$, παίρνουμε $\lim_{n \in \mathbb{N}} \rho''(a_n, \ell) = 0$ δηλαδή $\rho'' - \lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell$. ♦

Εξειδικεύοντας το παραπάνω συμπέρασμα, μπορούμε να πούμε ότι στον χώρο $\mathbb{R}^n$ και προκειμένου να μελετήσουμε τη σύγκλιση μιας ακολουθίας, το συμπέρασμά μας θα είναι το ίδιο οποιαδήποτε από τις μετρικές ρ , ρ' και ρ'' χρησιμοποιήσουμε, όπου:

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}, \quad \rho'(\vec{x}, \vec{y}) = \max_i |x_i - y_i|, \quad \rho''(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

2.2.4. Μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να θεωρούμε ότι το σύνολο των δεικτών μιας ακολουθίας είναι το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών.

Πραγματικά, αν $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία, τότε θέτοντας $\mu_1 = \min \mathbb{N}$, $\mu_2 = \min(\mathbb{N} - \{\mu_1\})$, ..., $\mu_{k+1} = \min(\mathbb{N} - \{\mu_1, \dots, \mu_k\})$... και $r_n = a_{\mu_n}$, $n \in \mathbb{N}$, παίρνουμε $\{r_n : n \in \mathbb{N}\} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.



Είναι φανερό ότι με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να θεωρούμε ως σύνολο δεικτών μιας ακολουθίας το σύνολο N_α των άρτιων φυσικών ή το σύνολο, N_π των περιττών φυσικών αριθμών. ♦

2.2.5. Ας είναι $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνουσες πραγματικές ακολουθίες και $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνουσες ακολουθίες σ' ένα σταθμητό διανυσματικό χώρο E . Τότε η ακολουθία $(p_n \alpha_n + q_n \beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα στον E και μάλιστα ισχύει:

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} (p_n \alpha_n + q_n \beta_n) = (\lim_{n \in \mathbb{N}} p_n) (\lim_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n) + (\lim_{n \in \mathbb{N}} q_n) (\lim_{n \in \mathbb{N}} \beta_n).$$

Να γίνει εφαρμογή για $p_n=1, q_n=1, n \in \mathbb{N}$ και $p_n=1, q_n=-1, n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη.

Θέτουμε $\lim_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = \alpha, \lim_{n \in \mathbb{N}} \beta_n = \beta, \lim_{n \in \mathbb{N}} p_n = p$ και $\lim_{n \in \mathbb{N}} q_n = q$. Τότε αν P είναι η

στάθμη του E έχουμε

$$\begin{aligned} Q(p_n \alpha_n + q_n \beta_n, p\alpha + q\beta) &= P(p_n \alpha_n + q_n \beta_n - p\alpha - q\beta) = \\ &P(p_n \alpha_n - p_n \alpha + q_n \beta_n - q_n \beta + p_n \alpha - p\alpha + q_n \beta - q\beta) \leq \\ &P(p_n (\alpha_n - \alpha)) + P(q_n (\beta_n - \beta)) + P(\alpha(p_n - p)) + P(\beta(q_n - q)) = \\ &|p_n| P(\alpha_n - \alpha) + |q_n| P(\beta_n - \beta) + |p_n - p| P(\alpha) + |q_n - q| P(\beta). \end{aligned}$$

Επειδή οι ακολουθίες $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ως συγκλίνουσες είναι και φραγμένες, η τελευταία σχέση δίνει άμεσα το ζητούμενο.

Για $p_n=1, q_n=1, n \in \mathbb{N}$ και $p_n=1, q_n=-1, n \in \mathbb{N}$ έχουμε αντίστοιχα:

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} (\alpha_n + \beta_n) = (\lim_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n) + (\lim_{n \in \mathbb{N}} \beta_n)$$

και

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} (\alpha_n - \beta_n) = (\lim_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n) - (\lim_{n \in \mathbb{N}} \beta_n). \quad \blacklozenge$$

2.3. Υπακολουθίες - Σημεία συσσώρευσης ακολουθίας

Μια ακολουθία $(\beta_\mu)_{\mu \in M}$ ονομάζεται **υπακολουθία (subsequence)** της ακολουθίας $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ αν υπάρχει μια γνήσια αύξουσα συνάρτηση $k: M \rightarrow \mathbb{N}$ τέτοια, ώστε:

$$\beta_\mu = \alpha_{k(\mu)}, \mu \in M.$$



Για την υπακολουθία $(\beta_\mu)_{\mu \in M}$, αντί του συμβολισμού $(\alpha_{k(\mu)})_{\mu \in M}$ χρησιμοποιούμε συνήθως τον απλούστερο συμβολισμό $(\alpha_{k_\mu})_{\mu \in M}$.

2.3.1. ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν $(\beta_\mu)_{\mu \in M}$ είναι τυχούσα υπακολουθία μιας συγκλίνουσας ακολουθίας $(\alpha_\nu)_{\nu \in N}$ σ' ένα μετρικό χώρο (E, ρ) , τότε η $(\beta_\mu)_{\mu \in M}$ είναι συγκλίνουσα και μάλιστα

$$\lim_{\mu \in M} \beta_\mu = \lim_{\nu \in N} \alpha_\nu.$$

Απόδειξη.

Έστω $\lim_{\nu \in N} \alpha_\nu = \ell$. Τότε η πραγματική ακολουθία $(\rho(\beta_\mu, \ell))_{\mu \in M}$, είναι υπακολουθία της μηδενικής πραγματικής ακολουθίας $(\rho(\alpha_\nu, \ell))_{\nu \in N}$. Άρα $\lim_{\mu \in M} (\rho(\beta_\mu, \ell)) = 0$, δηλαδή $\lim_{\mu \in M} \beta_\mu = \ell$. ♦

| Το όριο τυχούσας υπακολουθίας μιας ακολουθίας $(\alpha_\nu)_{\nu \in N}$ ονομάζεται **σημείο συσσώρευσης (accumulation point)** της ακολουθίας $(\alpha_\nu)_{\nu \in N}$.

Σχετικά με τα σημεία συσσώρευσης μιας ακολουθίας ισχύει η εξής σημαντική πρόταση:

2.3.2. ΠΡΟΤΑΣΗ Ας είναι $(\alpha_\nu)_{\nu \in N}$ μια ακολουθία σ' ένα μετρικό χώρο (E, ρ) και ℓ ένα σημείο του E . Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- i) Το ℓ είναι σημείο συσσώρευσης της $(\alpha_\nu)_{\nu \in N}$.
- ii) Για κάθε περιοχή $U(\ell)$ του ℓ ισχύει $\alpha_\nu \in U(\ell)$ για άπειρα $\nu \in N$.

Απόδειξη.

Έστω ότι ισχύει το (i) και $U(\ell)$ τυχούσα περιοχή του ℓ . Λόγω της (i), υπάρχει υπακολουθία $(\beta_\mu)_{\mu \in M}$ της $(\alpha_\nu)_{\nu \in N}$ τέτοια, ώστε $\lim_{\mu \in M} \beta_\mu = \ell$, που σημαίνει ότι

$$\beta_\mu \in U(\ell) \text{ τελικά για όλα τα } \mu \in M$$

ή, ισοδύναμα,

$$\alpha_{k_\mu} \in U(\ell) \text{ τελικά για όλα τα } \mu \in M.$$

Επειδή όμως για κάθε $\mu \in M$ ισχύει $k_\mu \in N$, η τελευταία σχέση γίνεται



$$a_n \in U(\ell) \text{ για άπειρα } n \in \mathbb{N}.$$

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει η (ii). Τότε για κάθε $\mu \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$a_n \in B(\ell, \frac{1}{\mu}) \text{ για άπειρα } n \in \mathbb{N}.$$

Έτσι, επιλέγουμε έναν δείκτη $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιον, ώστε

$$a_{n_1} \in B(\ell, \frac{1}{1}).$$

Ορίζουμε επίσης τον δείκτη $n_2 \in \mathbb{N}$,

$$n_2 = \min \{ n \in \mathbb{N} : n > n_1 \text{ και } a_n \in B(\ell, \frac{1}{2}) \},$$

οπότε έχουμε

$$n_2 > n_1 \text{ και } a_{n_2} \in B(\ell, \frac{1}{2}).$$

Έτσι, επαγωγικά, αν ορίσουμε τους δείκτες $n_1, \dots, n_k$, ορίζουμε και τον δείκτη n_{k+1} έτσι, ώστε

$$n_{k+1} = \min \{ n \in \mathbb{N} : n > n_k \text{ και } a_n \in B(\ell, \frac{1}{k+1}) \},$$

οπότε

$$n_{k+1} > n_k \text{ και } a_{n_{k+1}} \in B(\ell, \frac{1}{k+1}).$$

Με τον τρόπο αυτό ορίζεται η υπακολουθία $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ για την οποία ισχύει

$$(\forall \mu \in \mathbb{N}) \quad \rho(a_{n_\mu}, \ell) < \frac{1}{\mu} \Rightarrow \lim_{\mu \in \mathbb{N}} a_{n_\mu} = \ell.$$

πράγμα που αποδεικνύει το (i). ♦

2.3.3.ΠΡΟΤΑΣΗ. Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία σ' ένα μετρικό χώρο E και $\ell \in E$. Αν κάθε υπακολουθία $(b_\mu)_{\mu \in M}$ της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έχει υπακολουθία $(\gamma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ με $\lim_{\lambda \in \Lambda} \gamma_\lambda = \ell, \ell \in E$, τότε $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell$.

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι το ℓ δεν είναι όριο της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Τότε για τυχούσα περιοχή $U(\ell)$ του ℓ ισχύει $a_n \notin U(\ell)$ για άπειρο πλήθος δεικτών $n \in \mathbb{N}$. Τότε το σύνολο

$$M = \{ n \in \mathbb{N} : a_n \notin U(\ell) \}$$

είναι απέραντο και μάλιστα κανείς όρος της υπακολουθίας $(a_n)_{n \in M}$ της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν ανήκει στην $U(\ell)$. Αυτό όμως αντίκειται στην υπόθεση ότι υπάρχει υπακολουθία $(\gamma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ της $(a_n)_{n \in M}$ με $\lim_{\lambda \in \Lambda} \gamma_\lambda = \ell$. ♦



2.4. Παραδείγματα - Εφαρμογές

2.4.1. Κάθε ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία του εαυτού της.

Απόδειξη.

Αρκεί να θέσουμε $M=N$ και ως συνάρτηση $k:M=N \rightarrow N$ να θεωρήσουμε την ταυτοτική συνάρτηση. ♦

2.4.2. Αν $(b_\mu)_{\mu \in M}$ είναι υπακολουθία της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(c_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ είναι υπακολουθία της $(b_\mu)_{\mu \in M}$, τότε η $(c_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ είναι υπακολουθία της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Απόδειξη.

Πραγματικά, αφού η $(c_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ είναι υπακολουθία της $(b_\mu)_{\mu \in M}$ και η $(b_\mu)_{\mu \in M}$ υπακολουθία της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, υπάρχουν γνήσια αύξουσες συναρτήσεις $\varphi:\Lambda \rightarrow M$ και $g:M \rightarrow \mathbb{N}$ τέτοιες, ώστε $c_\lambda = b_{\varphi(\lambda)}$, $\lambda \in \Lambda$ και $b_\mu = a_{g(\mu)}$, $\mu \in M$. Τότε η συνάρτηση $g \circ \varphi: \Lambda \rightarrow \mathbb{N}$ είναι γνήσια αύξουσα και τέτοια, ώστε $c_\lambda = a_{g \circ \varphi(\lambda)}$, που σημαίνει ότι η $(c_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ είναι υπακολουθία της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. ♦

2.4.3. Ένα σημείο συσσώρευσης μιας ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι πάντοτε σημείο συσσώρευσης του συνόλου $\{a_n: n \in \mathbb{N}\}$.

Ένα παράδειγμα που αποδεικνύει τον παραπάνω ισχυρισμό είναι το εξής:

Στο μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που δίνεται από τον τύπο

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ 2, & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$$

Τα σημεία 0 και 2 είναι σημεία συσσώρευσης της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ως όρια των υπακολουθιών $b_\mu = \frac{1}{\mu}$, $\mu \in \mathbb{N}_a$ και $c_\mu = 2$, $\mu \in \mathbb{N}_\pi$, όπου $\mathbb{N}_a$ και $\mathbb{N}_\pi$ τα σύνολα των άρτιων και περιττών φυσικών αριθμών αντίστοιχα. Αντίθετα, ενώ το σημείο 0 είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου $\{a_n: n \in \mathbb{N}\} = \{2, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$, το σημείο 2 δεν είναι. ♦

Η ακριβής σχέση μεταξύ των δύο παραπάνω εννοιών δίνεται παρακάτω (βλέπε 2.8.2.)



2.4.4. Ας είναι Q_1, Q_2 μετρικές στο ίδιο σύνολο E τέτοιες, ώστε κάθε Q_1 -συγκλίνουσα ακολουθία στοιχείων του E να είναι και Q_2 -συγκλίνουσα. Τότε, για κάθε ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο E ισχύει:

$$Q_1\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell \Rightarrow Q_2\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell.$$

Απόδειξη.

Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο E με $Q_1\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell$, $\ell \in E$. Όπως είναι γνωστό (Βλέπε 2.2.4.), χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathbb{N} = \mathbb{N}_\pi$, όπου $\mathbb{N}_\pi$ το σύνολο των περιττών φυσικών αριθμών. Θεωρούμε τότε την ακολουθία $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που ορίζεται με τον τύπο:

$$\beta_n = \begin{cases} a_n, & \text{αν } n \in \mathbb{N}_\pi \\ \ell, & \text{αν } n \in \mathbb{N}_\alpha \end{cases},$$

όπου $\mathbb{N}_\alpha$ το σύνολο των άρτιων φυσικών αριθμών. Επειδή υποθέσαμε ότι $Q_1\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}_\pi} a_n = \ell$, είναι φανερό ότι ισχύει $Q_1\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} \beta_n = \ell$. Δηλαδή, η ακολουθία $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι Q_1 -συγκλίνουσα. Άρα, σύμφωνα με την υπόθεση, η ακολουθία $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι και Q_2 -συγκλίνουσα. Τότε και η ακολουθία $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}_\alpha}$, ως υπακολουθία της Q_2 -συγκλίνουσας ακολουθίας $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, είναι και Q_2 -συγκλίνουσα και μάλιστα ισχύει:

$$Q_2\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} \beta_n = Q_2\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}_\alpha} \beta_n.$$

Επειδή όμως η ακολουθία $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}_\alpha}$ είναι σταθερή ακολουθία με τιμή ℓ , έχουμε

$$\ell = Q_2\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} \beta_n = Q_2\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}_\alpha} \beta_n.$$

Άρα η ακολουθία $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}_\pi}$, δηλαδή η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_\pi}$, ως υπακολουθία της $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, θα είναι Q_2 -συγκλίνουσα και μάλιστα $Q_2\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}_\pi} a_n = \ell$, που αποδεικνύει το ζητούμενο. ♦

2.5. Βασικές ακολουθίες.

Μια ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ σ' ένα μετρικό χώρο (E, ρ) λέγεται **βασική ακολουθία** ή **ακολουθία του Cauchy** αν:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})(\forall \mu, \nu \in \mathbb{N}) \mu > n \text{ και } \nu > n \Rightarrow \rho(a_\mu, a_\nu) < \varepsilon.$$



Οι επόμενες προτάσεις μας δίνουν τις πιο σημαντικές ιδιότητες των βασικών ακολουθιών.

2.5.1. ΠΡΟΤΑΣΗ. Σε τυχόντα μετρικό χώρο (E, ρ) κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι και βασική.

Απόδειξη.

Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τυχούσα ακολουθία στον (E, ρ) με $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell$, $\ell \in E$ και ε τυχόν θετικός αριθμός. Τότε, έχουμε:

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell \Rightarrow [(\exists n \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}) n > n \Rightarrow \rho(a_n, \ell) < \frac{\varepsilon}{2}].$$

Έτσι, για τυχόντα μ, n εν $\mathbb{N}$, με $\mu > n$ και $n > n$, παίρνουμε

$$\rho(a_\mu, a_n) < \rho(a_\mu, \ell) + \rho(a_n, \ell) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Επομένως, αποδείχτηκε τελικά ότι

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{R})(\forall \mu, n \in \mathbb{N}) \mu > n \text{ και } n > n \Rightarrow \rho(a_\mu, a_n) < \varepsilon,$$

που είναι το ζητούμενο. ♦

2.5.2. ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν σ' ένα μετρικό χώρο μια βασική ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, τότε είναι συγκλίνουσα.

Απόδειξη.

Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία και $(b_\mu)_{\mu \in M}$ υπακολουθία της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $\lim_{\mu \in M} b_\mu = \ell$. Όπως είναι γνωστό, ισχύει $b_\mu = a_{k_\mu}$, $\mu \in M$, όπου $k: M \rightarrow \mathbb{N}$ μια γνήσια αύξουσα συνάρτηση. Θεωρούμε τυχόν ε , $\varepsilon > 0$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{\mu \in M} b_\mu = \ell \Rightarrow \lim_{\mu \in M} a_{k_\mu} = \ell \Rightarrow [(\exists n_1 \in \mathbb{R}) (\forall \mu \in M) k_\mu > n_1 \Rightarrow \rho(a_{k_\mu}, \ell) < \frac{\varepsilon}{2}].$$

Επιπλέον, επειδή η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική παίρνουμε:

$$(\exists n_2 \in \mathbb{R})(\forall \mu, n \in M) k_\mu > n_2 \text{ και } n > n_2 \Rightarrow \rho(a_{k_\mu}, a_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έτσι, επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\mu \in M$ ισχύει

$$\rho(a_n, \ell) < \rho(a_n, a_{k_\mu}) + \rho(a_{k_\mu}, \ell),$$

παίρνουμε τελικά ότι για κάθε $n > \max\{n_1, n_2\}$

$$\rho(a_n, \ell) < \varepsilon,$$



δηλαδή $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell$. ♦

Μια ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ σ' ένα μετρικό χώρο θα λέμε ότι είναι **φραγμένη ακολουθία** (*bounded sequence*) αν η διάμετρος του συνόλου $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πεπερασμένη, δηλαδή αν $\delta(\{a_n : n \in \mathbb{N}\}) < \infty$.

2.5.3. ΠΡΟΤΑΣΗ. Κάθε βασική ακολουθία σ' ένα μετρικό χώρο είναι φραγμένη ακολουθία.

Απόδειξη.

Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τυχούσα βασική ακολουθία σ' ένα μετρικό χώρο (E, ρ) . Τότε:

$$(\exists n \in \mathbb{N})(\forall \mu, \nu \in \mathbb{N}) \mu \geq n \text{ και } \nu \geq n \Rightarrow \rho(a_\mu, a_\nu) < 1.$$

Θέτουμε $r = \max\{\rho(a_\mu, a_\nu) : \mu \leq n \text{ και } \nu \leq n\}$ και $b = \max\{r, 1\}$, οπότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

i) Αν $\mu < n$ και $\nu < n$, τότε $\rho(a_\mu, a_\nu) \leq r \leq b < 2b$.

ii) Αν $\mu \geq n$ και $\nu \geq n$, τότε $\rho(a_\mu, a_\nu) < 1 \leq b < 2b$.

iii) Αν $\mu \geq n$ και $\nu < n$, τότε

$$\rho(a_\mu, a_\nu) \leq \rho(a_\mu, a_n) + \rho(a_n, a_\nu) \leq 1 + r \leq 2b.$$

iv) Αν $\mu < n$ και $\nu \geq n$, όμοια με την (iii), παίρνουμε $\rho(a_\mu, a_\nu) \leq 2b$.

Επομένως, αποδείξαμε ότι για κάθε $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ ισχύει $\rho(a_\mu, a_\nu) \leq 2b$. Άρα

$$\delta(\{a_n : n \in \mathbb{N}\}) = \sup_{(\mu, \nu) \in \mathbb{N}^2} \rho(a_\mu, a_\nu) \leq 2b,$$

που σημαίνει ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη. ♦

2.5.4. ΠΟΡΙΣΜΑ. Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία σ' ένα μετρικό χώρο είναι φραγμένη ακολουθία.

Απόδειξη.

Επειδή, σύμφωνα με την Πρόταση 2.5.1., κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι βασική, το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από την προηγούμενη πρόταση. ♦



2.6. Παραδείγματα - Εφαρμογές - Σχόλια

2.6.1. Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία στον καρτεσιανό μετρικό χώρο (E, ρ) των μετρικών χώρων (E_i, ρ_i) , $i=1, \dots, n$, με $a_n = (a_{1n}, \dots, a_{nn})$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε ισχύει:

i) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ βασική ακολουθία $\Leftrightarrow (a_{in})_{n \in \mathbb{N}}$ βασική ακολουθία, $i=1, \dots, n$.

ii) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία $\Leftrightarrow (a_{in})_{n \in \mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία, $i=1, \dots, n$.

Απόδειξη.

i) Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική. Τότε για τυχόν $\varepsilon > 0$, έχουμε

$$(\exists \tau \in \mathbb{R})(\forall \mu, \nu \in \mathbb{N}) \mu \geq \tau \text{ και } \nu \geq \tau \Rightarrow \rho(a_\mu, a_\nu) < \varepsilon.$$

Επειδή όμως ισχύει $\rho_i(a_{i\mu}, a_{i\nu}) \leq \rho(a_\mu, a_\nu)$, $i=1, \dots, n$ (Βλέπε 1.3.5.), παίρνουμε

$$(\forall \mu, \nu \in \mathbb{N}) \mu \geq \tau \text{ και } \nu \geq \tau \Rightarrow \rho_i(a_{i\mu}, a_{i\nu}) < \varepsilon, i=1, \dots, n,$$

που σημαίνει ότι για κάθε $i=1, \dots, n$ η ακολουθία $(a_{in})_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική.

Αντίστροφα, έστω ότι για κάθε $i=1, \dots, n$ η ακολουθία $(a_{in})_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική. Τότε για τυχόν $\varepsilon > 0$, έχουμε

$$(\exists \tau_i \in \mathbb{R})(\forall \mu, \nu \in \mathbb{N}) \mu \geq \tau_i \text{ και } \nu \geq \tau_i \Rightarrow \rho_i(a_{i\mu}, a_{i\nu}) < \frac{\varepsilon}{n}, i=1, \dots, n.$$

Επειδή όμως ισχύει (Βλέπε 1.3.5.)

$$\rho(a_\mu, a_\nu) \leq \sum_{i=1}^n \rho_i(a_{i\mu}, a_{i\nu}),$$

θέτοντας $\tau = \max\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ παίρνουμε

$$(\exists \tau \in \mathbb{R})(\forall \mu, \nu \in \mathbb{N}) \mu \geq \tau \text{ και } \nu \geq \tau \Rightarrow \rho(a_\mu, a_\nu) < \frac{\varepsilon}{n} n = \varepsilon,$$

που σημαίνει ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική.

ii) Έστω ότι η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια φραγμένη ακολουθία. Τότε έχουμε

$$\delta(\{a_n: n \in \mathbb{N}\}) = \sup_{(\mu, \nu) \in \mathbb{N}^2} \rho(a_\mu, a_\nu) < \infty.$$

Επειδή όμως ισχύει $\rho_i(a_{i\mu}, a_{i\nu}) \leq \rho(a_\mu, a_\nu)$, $i=1, \dots, n$, παίρνουμε

$$\delta(\{a_{in}: n \in \mathbb{N}\}) = \sup_{(\mu, \nu) \in \mathbb{N}^2} \rho_i(a_{i\mu}, a_{i\nu}) \leq \sup_{(\mu, \nu) \in \mathbb{N}^2} \rho(a_\mu, a_\nu) = \delta(\{a_n: n \in \mathbb{N}\}) < \infty, i=1, \dots, n,$$

δηλαδή η ακολουθία $(a_{in})_{n \in \mathbb{N}}$, $i=1, \dots, n$, είναι φραγμένη ακολουθία.

Αντίστροφα, έστω ότι για κάθε $i=1, \dots, n$, η ακολουθία $(a_{in})_{n \in \mathbb{N}}$, $i=1, \dots, n$, είναι φραγμένη ακολουθία. Τότε έχουμε

$$\delta(\{a_{in}: n \in \mathbb{N}\}) = \sup_{(\mu, \nu) \in \mathbb{N}^2} \rho_i(a_{i\mu}, a_{i\nu}) < \infty, i=1, \dots, n.$$



Επειδή όμως ισχύει $Q(a_\mu, a_\nu) \leq \sum_{i=1}^n Q_i(a_{i\mu}, a_{i\nu})$, παίρνουμε

$$\delta(\{a_\nu: \nu \in \mathbb{N}\}) = \sup_{(\mu, \nu) \in \mathbb{N}^2} Q(a_\mu, a_\nu) \leq \sum_{i=1}^n \sup_{(\mu, \nu) \in \mathbb{N}^2} Q_i(a_{i\mu}, a_{i\nu}) < \infty,$$

δηλαδή η ακολουθία $(a_{i\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$, $i=1, \dots, n$, είναι φραγμένη ακολουθία. ♦

2.6.2. Όπως είναι γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό, μια πραγματική ακολουθία $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, δηλαδή μια ακολουθία στο μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, λέγεται φραγμένη αν υπάρχει πραγματικός αριθμός b τέτοιος, ώστε $|a_\nu| \leq b$, $\nu \in \mathbb{N}$.

Για το μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, ο ορισμός αυτός είναι ισοδύναμος με τον ορισμό της φραγμένης ακολουθίας που δώσαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Απόδειξη.

Πραγματικά, έστω ότι για μια ακολουθία $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ στο μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ισχύει $\delta(\{a_\nu: \nu \in \mathbb{N}\}) = \theta < \infty$. Τότε για κάθε $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ θα έχουμε $|a_\nu - a_\mu| \leq \theta$. Άρα $|a_\nu - a_1| \leq \theta$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, οπότε τελικά

$$|a_\nu| \leq |a_1| + \theta, \nu \in \mathbb{N}.$$

Αντίστροφα, έστω ισχύει $|a_\nu| \leq b$, $\nu \in \mathbb{N}$. Τότε, για τυχόντα $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ θα έχουμε:

$$|a_\nu - a_\mu| \leq |a_\nu| + |a_\mu| \leq 2b.$$

Άρα

$$\delta(\{a_\nu: \nu \in \mathbb{N}\}) = \sup_{(\mu, \nu) \in \mathbb{N}^2} |a_\mu - a_\nu| \leq 2b < \infty. \quad \blacklozenge$$

Το παραπάνω συμπέρασμα μπορεί να γενικευθεί με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και σε τυχόντα σταθμητό διανυσματικό χώρο (E, N) , που γίνεται μετρικός χώρος με μετρική N εκείνη που εισάγεται από τη στάθμη (Βλέπε Άσκηση 2.10.6.).

2.6.3. Στον ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ κάθε βασική ακολουθία είναι συγκλίνουσα και αντίστροφα.



Απόδειξη.

Μια θεμελιώδης ιδιότητα του ευκλείδειου μετρικού χώρου $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι, όπως ξέρουμε, ότι κάθε βασική ακολουθία εν $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι συγκλίνουσα και αντίστροφα.

Συνδυάζοντας την ιδιότητα αυτή με τα συμπεράσματα των Εφαρμογών 2.2.2. και 2.6.1., παίρνουμε αμέσως το ζητούμενο. ♦

2.6.4. Η ιδιότητα ότι κάθε βασική ακολουθία είναι συγκλίνουσα, δεν ισχύει σε τυχόντα μετρικό χώρο.

Για παράδειγμα, στον μετρικό χώρο $((0, 1], |\cdot|)$ η ακολουθία $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, είναι βασική αλλά όχι συγκλίνουσα. ♦

2.6.5. Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία σ' ένα μετρικό χώρο (E, ϱ) . Η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική αν και μόνο αν ισχύει:

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \delta(\{a_n : n \geq n\}) = 0.$$

Απόδειξη.

Έστω ότι η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική. Θέτουμε $A_n = \{a_n : n \geq n\}$ και θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$. Επειδή η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε μ, n με $\mu > n_0$ και $n > n_0$ να ισχύει $\varrho(a_\mu, a_n) < \varepsilon$. Αλλά τότε έχουμε

$$\sup_{\mu > n_0} \varrho(a_\mu, a_n) = \delta(A_{n_0}) < \varepsilon.$$

Επομένως για κάθε $n > n_0$ επειδή $A_n \subseteq A_{n_0}$ παίρνουμε $\delta(A_n) < \varepsilon$.

Έτσι αποδείχτηκε ότι

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n > n_0) \delta(A_n) < \varepsilon$$

που σημαίνει

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \delta(A_n) = 0.$$

Αντίστροφα έστω ότι $\lim_{n \in \mathbb{N}} \delta(A_n) = 0$ και $\varepsilon > 0$ τυχόν. Τότε

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}) n > n_0 \Rightarrow \delta(A_n) < \varepsilon.$$

Άρα

$$\sup_{\mu > n_0} \varrho(a_\mu, a_n) < \varepsilon.$$

Δηλαδή

$$(\forall \mu, n \in \mathbb{N}) \mu > n_0 \text{ και } n > n_0 \Rightarrow \varrho(a_\mu, a_n) < \varepsilon$$

που σημαίνει ότι η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική. ♦



2.7 Ακολουθίες και κλειστά σύνολα.

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε, μεταξύ άλλων, πως μπορεί να εισαχθεί η έννοια του κλειστού συνόλου με τη βοήθεια των ακολουθιών.

2.7.1. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ας είναι A ένα υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (E, ρ) και ℓ ένα σημείο του E . Τότε:

$$\ell \in \bar{A} \Leftrightarrow \text{Υπάρχει ακολουθία } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ εν } A \text{ με } \lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell.$$

Απόδειξη.

Έστω $\ell \in \bar{A}$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$A \cap B(\ell, \frac{1}{n}) \neq \emptyset.$$

Με το αξίωμα της επιλογής θεωρούμε τα σημεία $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ τέτοια, ώστε

$$a_1 \in A \cap B(\ell, \frac{1}{1}) \neq \emptyset$$

$$a_2 \in A \cap B(\ell, \frac{1}{2}) \neq \emptyset$$

.....

$$a_n \in A \cap B(\ell, \frac{1}{n}) \neq \emptyset$$

.....

Έτσι, ορίζουμε την ακολουθία

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ για την οποία ισχύει

$$a_n \in A \cap B(\ell, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}.$$

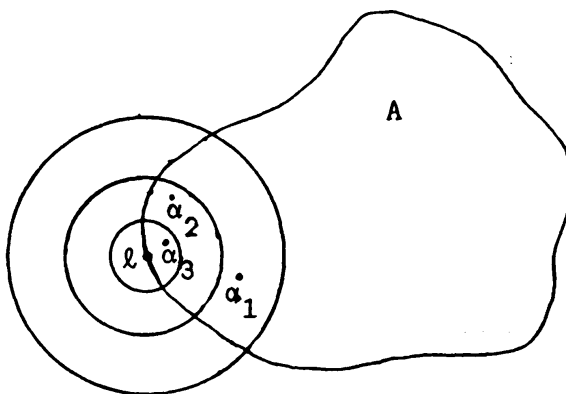
Δηλαδή η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία εν A και μάλιστα

$$a_n \in A \cap B(\ell, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N} \Rightarrow \rho(a_n, \ell) < \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}.$$

Άρα

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \rho(a_n, \ell) = 0 \Rightarrow \lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell.$$

Αντίστροφα, έστω ότι υπάρχει ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ εν A με $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell$. Τότε, για κάθε περιοχή $U(\ell)$ του ℓ έχουμε:



$a_n \in U(\ell)$ τελικά για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Επειδή όμως $a_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$, παίρνουμε:

$a_n \in A \cap U(\ell)$ τελικά για όλα τα $n \in \mathbb{N}$,

που σημαίνει

$$U(\ell) \cap A \neq \emptyset.$$

Άρα $\ell \in \bar{A}$, αφού η $U(\ell)$ είναι τυχούσα. ♦

Η επόμενη πρόταση είναι σημαντική γιατί μας δίνει μια εύχρηστη ικανή και αναγκαία συνθήκη για να διαπιστώνουμε τότε ένα υποσύνολο ενός μετρικού χώρου είναι κλειστό.

2.7.2. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου E είναι κλειστό αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ εν A , συγκλίνουσα στον E , ισχύει $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n \in A$.

Απόδειξη.

Έστω ότι το A είναι κλειστό δηλαδή $A = \bar{A}$ και $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τυχούσα ακολουθία εν A , συγκλίνουσα στο E με $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell \in E$. Τότε, σύμφωνα με την προηγούμενη Πρόταση 2.7.1.,

έχουμε $\ell \in \bar{A} = A$.

Αντίστροφα, έστω ότι για κάθε ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ εν A , συγκλίνουσα στο E ισχύει $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n \in A$. Επιπλέον, έστω ℓ τυχόν με $\ell \in \bar{A}$. Σύμφωνα πάλι με την προηγούμενη

πρόταση, υπάρχει ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ εν A με $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell$. Τότε όμως, από την υπόθεση,

παίρνουμε $\ell \in A$. Άρα τελικά $\bar{A} \subseteq A$, δηλαδή $A = \bar{A}$. ♦



2.8. Παραδείγματα - Εφαρμογές

2.8.1. Ας είναι A ένα υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (E, ρ) και ℓ ένα σημείο του E . Τότε:

$$\ell \in A' \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Υπάρχει ακολουθία } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ εν } A \text{ με } \lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell \text{ και τέτοια ώστε:} \\ \mu \neq \nu \Rightarrow a_\mu \neq a_\nu. \end{cases}$$

Απόδειξη.

Η απόδειξη του συμπεράσματος αυτού είναι παρόμοια με εκείνη της Πρότασης 2.7.1. Πραγματικά, έστω $\ell \in A'$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η κατ' εκδοχήν περιοχή $B(\ell, \frac{1}{n})$ περιέχει άπειρα σημεία του A (Βλέπε 1.10.1.). Έτσι, με το αξίωμα της επιλογής, θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ εν A τέτοια, ώστε

$$(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \in B(\ell, \frac{1}{n})$$

και επιπλέον

$$\mu \neq \nu \Rightarrow a_\mu \neq a_\nu.$$

Τότε έχουμε

$$\rho(a_n, \ell) < \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell.$$

Αντίστροφα, έστω υπάρχει ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ εν A , με $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell$ και τέτοια, ώστε να ισχύει

$$\mu \neq \nu \Rightarrow a_\mu \neq a_\nu.$$

Τότε για τυχούσα περιοχή $U(\ell)$ του ℓ έχουμε

$$a_n \in U(\ell) \text{ τελικά για όλα τα } n \in \mathbb{N}.$$

Επειδή όμως οι όροι της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι διάφοροι ανά δύο, η περιοχή $U(\ell)$ περιέχει άπειρα σημεία του A . Άρα, λόγω και της 1.10.1., $\ell \in A'$. ♦

2.8.2. Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία σ' ένα μετρικό χώρο E . Τότε:

i) Κάθε σημείο συσσώρευσης του συνόλου $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι και σημείο συσσώρευσης της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

ii) Τυχόν σημείο a είναι σημείο συσσώρευσης της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ αν και μόνο αν $a \in \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ή το a εμφανίζεται άπειρες φορές ως όρος της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Απόδειξη.

i) Προκύπτει αμέσως από την προηγούμενη εφαρμογή.

ii) Έστω το τυχόν σημείο a είναι σημείο συσσώρευσης της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Τότε υπάρχει υπακολουθία $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_{k_n} = a$. Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

α) Η $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ είναι τελικά σταθερή. Τότε το a εμφανίζεται άπειρες φορές ως όρος της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ άρα και της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

β) Η $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι τελικά σταθερή ακολουθία. Τότε για τυχούσα περιοχή $U(a)$ του a έχουμε $a_{k_n} \in U(a)$ τελικά ή $a_n \in U(a)$ για άπειρα $n \in \mathbb{N}$, που σημαίνει ότι $a \in \{a_n : n \in \mathbb{N}\}'$.

Αντίστροφα, έστω ότι $a \in \{a_n : n \in \mathbb{N}\}'$. Τότε το συμπέρασμα προκύπτει αμέσως από το (i). Έστω ακόμη ότι το a εμφανίζεται άπειρες φορές ως όρος της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Τότε προφανώς υπάρχει υπακολουθία της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με σταθερή τιμή a , άρα και όριο a , που σημαίνει ότι το a είναι σημείο συσσώρευσης της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. ♦

2.8.3. Σε τυχόντα μετρικό χώρο κάθε κλειστή σφαιρική περιοχή είναι κλειστό σύνολο.

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι (E, ρ) είναι τυχόν μετρικός χώρος $a \in E$, $r > 0$ και

$$C(a, r) = \{x \in E : \rho(x, a) \leq r\}$$

μια κλειστή σφαιρική περιοχή στον E . Τότε για κάθε ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ εν $C(a, r)$ με

$\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell \in E$ έχουμε:

$$|\rho(a_n, a) - \rho(\ell, a)| \leq \rho(a_n, \ell), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Επειδή όμως $\lim_{n \in \mathbb{N}} \rho(a_n, \ell) = 0$, παίρνουμε

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} |\rho(a_n, a) - \rho(\ell, a)| = 0,$$

δηλαδή

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \rho(a_n, a) = \rho(\ell, a).$$

Έχουμε όμως ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι εν $C(a, r)$, δηλαδή $\rho(a_n, a) \leq r$, $n \in \mathbb{N}$. Άρα

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \rho(a_n, a) \leq r \Rightarrow \rho(\ell, a) \leq r \Rightarrow \ell \in C(a, r),$$



που σημαίνει ότι το σύνολο $C(a, r)$ είναι κλειστό. ♦

2.8.4. Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία σ' ένα μετρικό χώρο E . Θέτουμε $A_n = \{a_n : n \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Αν A είναι το σύνολο των σημείων συσσώρευσης της ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, τότε $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}$.

Απόδειξη.

Έστω $a \in A$. Τότε για κάθε $r > 0$ το σύνολο

$$\{n \in \mathbb{N} : a_n \in B(a, r)\}$$

είναι προφανώς απέραντο. Έτσι,

$$A_n \cap B(a, r) \neq \emptyset, n \in \mathbb{N}.$$

Δηλαδή $a \in \overline{A_n}$, $n \in \mathbb{N}$, που σημαίνει ότι

$$a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}.$$

Αντίστροφα, έστω $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}$ και r τυχόν, $r > 0$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$B(a, r) \cap A_n \neq \emptyset.$$

Άρα το σύνολο $M_r = \{n \in \mathbb{N} : a_n \in B(a, r)\}$ είναι απέραντο σύνολο. Έτσι, με το αξίωμα της επιλογής θεωρούμε τους δείκτες $n_1, n_2, \dots, n_n, \dots$, $n \in \mathbb{N}$, έτσι, ώστε

$$n_n \in M_{1/n}, n \in \mathbb{N}.$$

Τότε η ακολουθία $(a_{n_n})_{n \in \mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και μάλιστα

$$a_{n_n} \in B(a, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N},$$

που σημαίνει ότι $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_{n_n} = a$. Άρα $a \in A$. ♦

2.8.5. Έστω E ένας σταθμητός διανυσματικός χώρος και A, B δύο υποσύνολα του E . Τότε $\overline{A+B} \subseteq \overline{A+B}$.

Απόδειξη.

Το συμπέρασμα αυτό μπορεί εύκολα ν' αποδειχτεί με τη βοήθεια της Πρότασης 2.7.1. Πραγματικά για τυχόν z έχουμε:



$$z \in \bar{A} + \bar{B} \Rightarrow (\exists x \in \bar{A}) \wedge (\exists y \in \bar{B}) : z = x + y \Rightarrow (\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ εν } A) \wedge (\exists (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ εν } B) \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = x$$

$$\wedge \lim_{n \in \mathbb{N}} y_n = y.$$

Τότε όμως, επειδή η ακολουθία $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι εν $A+B$ και μάλιστα

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n + \lim_{n \in \mathbb{N}} y_n = x + y = z,$$

έχουμε $z \in \overline{A+B}$, που τελικά σημαίνει ότι

$$\bar{A} + \bar{B} \subseteq \overline{A+B}. \quad \blacklozenge$$

2.9. Λυμένες Ασκήσεις

2.9.1. Ας είναι (E, ρ) ένας μετρικός χώρος και $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δύο ακολουθίες στον E . Αν $\lim_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = \ell, \ell \in E$, ν' αποδειχτεί ότι:

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \beta_n = \ell \Leftrightarrow \lim_{n \in \mathbb{N}} \rho(\alpha_n, \beta_n) = 0.$$

Λύση.

Έστω ότι $\lim_{n \in \mathbb{N}} \beta_n = \ell$. Για τυχόν $n \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\rho(\alpha_n, \beta_n) \leq \rho(\alpha_n, \ell) + \rho(\beta_n, \ell).$$

Άρα

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \rho(\alpha_n, \beta_n) \leq \lim_{n \in \mathbb{N}} \rho(\alpha_n, \ell) + \lim_{n \in \mathbb{N}} \rho(\beta_n, \ell) = 0 + 0 = 0.$$

Αντίστροφα, έστω ότι $\lim_{n \in \mathbb{N}} \rho(\alpha_n, \beta_n) = 0$. Για τυχόν $n \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\rho(\alpha_n, \beta_n) \leq \rho(\alpha_n, \ell) + \rho(\beta_n, \ell) \Leftrightarrow \rho(\beta_n, \ell) \leq \rho(\beta_n, \alpha_n) + \rho(\alpha_n, \ell).$$

Άρα

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \rho(\beta_n, \ell) \leq \lim_{n \in \mathbb{N}} \rho(\beta_n, \alpha_n) + \lim_{n \in \mathbb{N}} \rho(\alpha_n, \ell) = 0 + 0 = 0. \quad \blacklozenge$$



2.9.2. Έστω μια ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ σ' ένα μετρικό χώρο (E, ρ) και $\ell \in E$. Ν' αποδειχτεί ότι αν η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει στο ℓ , τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ και υπακολουθία $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τέτοια, ώστε $\rho(a_{k_n}, \ell) > \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Λύση.

Θεωρούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $N = \mathbb{N}$ και έστω ότι αν η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει στο ℓ . Τότε έχουμε:

$$\sim [(\forall \varepsilon > 0) (\exists n \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}) n > n \Rightarrow \rho(a_n, \ell) \leq \varepsilon] \Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0) (\forall n \in \mathbb{N}) (\exists n_n \in \mathbb{N})$$

$$n_n > n \text{ και } \rho(a_{n_n}, \ell) > \varepsilon.$$

Είναι αμέσως φανερό ότι η $(a_{n_n})_{n \in \mathbb{N}}$, είναι η ζητούμενη υπακολουθία της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. ♦

2.9.3. Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία σ' ένα μετρικό χώρο (E, ρ) και $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ μια υπακολουθία της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ν' αποδειχτεί ότι

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \rho(a_n, a_{k_n}) = 0.$$

Λύση.

Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$. Επειδή η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική, έχουμε:

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\mu, \nu \in \mathbb{N}) \mu > n_0 \text{ και } \nu > n_0 \Rightarrow \rho(a_\mu, a_\nu) < \frac{\varepsilon}{2}. (*)$$

Επίσης, επειδή ισχύει $k_n \geq n$, $n \in \mathbb{N}$, έχουμε $\nu > n_0 \Rightarrow k_\nu \geq n_0$, που σημαίνει

$$\rho(a_\mu, a_{k_\nu}) < \frac{\varepsilon}{2}. (**)$$

Οι σχέσεις (*) και (**) δίνουν

$$\rho(a_n, a_{k_n}) \leq \rho(a_n, a_\mu) + \rho(a_\mu, a_{k_n}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \nu > n_0,$$

δηλαδή,

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \rho(a_n, a_{k_n}) = 0.$$

2.9.4. Έστω E ένας σταθμητός διανυσματικός χώρος και V ένας διανυσματικός υπόχωρος του E . Ν' αποδειχτεί ότι και το σύνολο $\bar{V}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος



Λύση.

Η άσκηση αυτή μπορεί εύκολα να λυθεί με τη βοήθεια της Πρότασης 2.7.1. Πραγματικά για τυχόντα $x, y \in E$ και $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ έχουμε:

$$x \in \bar{V} \wedge y \in \bar{V} \Rightarrow (\exists (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ εν } V) \wedge (\exists (y_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ εν } V): \lim_{n \in \mathbf{N}} x_n = x \wedge \lim_{n \in \mathbf{N}} y_n = y.$$

Τότε όμως, επειδή ο V είναι υπόχωρος του E , για κάθε $n \in \mathbf{N}$ έχουμε:

$$\kappa x_n + \lambda y_n \in V$$

Άρα

$$\lim_{n \in \mathbf{N}} (\kappa x_n + \lambda y_n) = \kappa \lim_{n \in \mathbf{N}} x_n + \lambda \lim_{n \in \mathbf{N}} y_n = \kappa x + \lambda y \in \bar{V},$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. ♦

2.10. Ασκήσεις

1. Έστω μια ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ στο $E - B(y, r)$, όπου E μετρικός χώρος, $y \in E$ και $r > 0$. Αν $\lim x_n = x$, ν' αποδειχτεί ότι $\varrho(x, y) \geq r$.

2. Έστω μια ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ σ' ένα μετρικό χώρο τέτοια, ώστε οι υποακολουθίες της $(a_{2n-1})_{n \in \mathbf{N}}$ και $(a_{2n})_{n \in \mathbf{N}}$ να συγκλίνουν στο ίδιο όριο ℓ . Ν' αποδειχτεί ότι τότε και η $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ συγκλίνει στο ℓ .

3. Έστω μια ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ σ' ένα μετρικό χώρο τέτοια, ώστε οι υποακολουθίες της $(a_{2n})_{n \in \mathbf{N}}$, $(a_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ και $(a_{3n})_{n \in \mathbf{N}}$ να είναι συγκλίνουσες. Ν' αποδειχτεί ότι τότε και η $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ είναι συγκλίνουσα.

4. Έστω (E, ϱ) ένας μ.χ. και $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $(\beta_n)_{n \in \mathbf{N}}$ δύο ακολουθίες στον E τέτοιες, ώστε $\lim_{n \in \mathbf{N}} a_n = \lim_{n \in \mathbf{N}} \beta_n = \ell \in E$. Θεωρούμε την ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ με τύπο

$$x_n = \begin{cases} a_{(n+1)/2}, & \text{αν } n \in \mathbf{N}_\pi \\ \beta_{n/2}, & \text{αν } n \in \mathbf{N}_\alpha \end{cases},$$

όπου $\mathbf{N}_\pi$, $\mathbf{N}_\alpha$ τα σύνολα των περιττών και άρτιων φυσικών αριθμών, αντίστοιχα. Ν' αποδειχτεί ότι $\lim_{n \in \mathbf{N}} x_n = \ell$.



5. Έστω μια ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ σ' ένα μετρικό χώρο E , με $a_n = a_m$ για $n = m$ και $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = a$. Αν $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ και $f: A \xrightarrow{\text{επί}} A$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση, ν' αποδειχτεί ότι $\lim_{n \in \mathbb{N}} f(a_n) = a$.

6. Ας είναι E ένας σταθμητός διανυσματικός χώρος με στάθμη N και $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία εν E . Ν' αποδειχτεί ότι:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ φραγμένη} \Leftrightarrow (\exists b \in E)(\forall n \in \mathbb{N}) N(a_n) \leq b.$$

7. Έστω (E, ρ) ένας μετρικός χώρος και A ένα υποσύνολο του E . Ν' αποδειχτεί ότι το $x \in E$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ εν A τέτοια, ώστε $\rho(a_1, x) > \rho(a_2, x) > \rho(a_3, x) > \dots$ και $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = x$.

8. Ας είναι $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία σ' ένα μετρικό χώρο E και $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία στον E τέτοια, ώστε:

$$\rho(a_n, \beta_n) < \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}.$$

Ν' αποδειχτεί ότι η ακολουθία $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική.

9. Αν $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι δυο βασικές ακολουθίες σ' ένα μετρικό χώρο E , ν' αποδειχτεί ότι και η πραγματική ακολουθία $(\rho(a_n, \beta_n))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική στο μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

10. Χρησιμοποιώντας το συμπέρασμα της Πρότασης 2.7.1., να δοθεί μια

απόδειξη της σχέσης $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$, διαφορετική από εκείνη της Εφαρμογής 1.9.7.

11. Έστω E ένας μετρικός χώρος και A ένα υποσύνολο του E . Ν' αποδειχτεί ότι το A είναι ανοιχτό υποσύνολο του E , αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ σημείων του E που συγκλίνει σε σημείο του A , ισχύει $a_n \in A$ τελικά για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

12. Έστω μια ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ σ' ένα μετρικό χώρο E , $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ και B το σύνολο των σημείων συσσώρευσης της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ν' αποδειχτεί ότι $\bar{A} = A \cup B$.



13. Στον ευκλείδιο χώρο $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ θεωρούμε μια φραγμένη ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και ορίζουμε τις ακολουθίες $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με τους τύπους

$$x_n = \sup\{a_\mu : \mu \geq n\}, y_n = \inf\{a_\mu : \mu \geq n\}.$$

Ν' αποδειχτεί ότι

α) Οι ακολουθίες $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μονότονες και συγκλίνουσες στο $\mathbb{R}$.

β) $\liminf a_n \leq \overline{\lim} a_n$, όπου $\liminf_{n \in \mathbb{N}} a_n = \lim_{n \in \mathbb{N}} y_n$ και $\overline{\lim} a_n = \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n$.

γ) Για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $a_n \leq \overline{\lim} a_n - \varepsilon$ για άπειρο πλήθος $n \in \mathbb{N}$. Αντίστοιχα, ισχύει $a_n \geq \liminf a_n + \varepsilon$ για άπειρο πλήθος $n \in \mathbb{N}$.

δ) Η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και συγκλίνει αν και μόνο αν $\liminf a_n = \overline{\lim} a_n$.

ε) Υπάρχουν υποακολουθίες της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που συγκλίνουν στα $\liminf a_n$, $\overline{\lim} a_n$ αντίστοιχα.

14. Έστω E ένας σταθμητός διανυσματικός χώρος και A ένα κλειστό υποσύνολο του E . Ν' αποδειχτεί ότι για τυχόντα $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ τα σύνολα λA και $x + A$ είναι κλειστά υποσύνολα του E .

15. Ν' αποδειχτεί ότι σ' ένα υπερμετρικό χώρο κάθε σφαιρική περιοχή είναι ανοιχτό και κλειστό σύνολο.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

μετρικοί υπόχωροι

3.1. Η έννοια του μετρικού υποχώρου

Ας είναι (E, ρ) ένας μετρικός χώρος και S ένα μη κενό υποσύνολο του E . Είναι φανερό ότι ο περιορισμός της συνάρτησης ρ πάνω στο σύνολο $S \times S$ είναι μια μετρική στο σύνολο S . Τη συνάρτηση $\rho|_{S \times S}$ τη συμβολίζουμε απλούστερα με ρ_S .

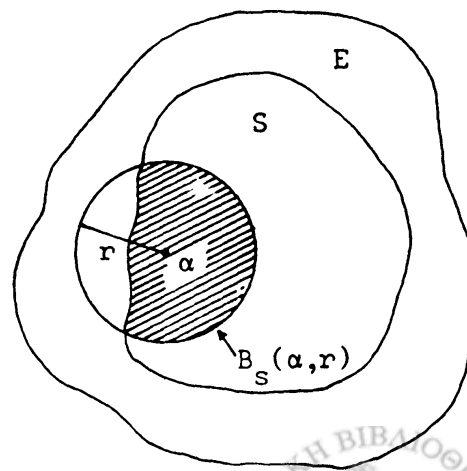
Τον μετρικό χώρο (S, ρ_S) τον ονομάζουμε **μετρικό υπόχωρο (metric subspace)** ή απλά **υπόχωρο (subspace)** του μετρικού χώρου (E, ρ) .

Αν a είναι τυχόν σημείο του μετρικού υποχώρου S , τότε μια σφαιρική περιοχή εν S του σημείου a , με ακτίνα $r, r > 0$, συμβολίζεται με τον τύπο:

$$B_S(a, r) = \{x \in S : \rho_S(x, a) < r\}.$$

Για μια τυχούσα σφαιρική περιοχή $B_S(a, r)$ εν S ενός σημείου $a \in S$ έχουμε:

$$B_S(a, r) = \{x \in S : \rho_S(x, a) < r\} = \{x \in E : \rho(x, a) < r\} \cap S = B(a, r) \cap S.$$



3.1.1. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ας είναι S ένας υπόχωρος ενός μετρικού (E, ρ) και A ένα υποσύνολο του S . Το σύνολο A είναι ανοιχτό υποσύνολο του υποχώρου S αν και μόνο αν υπάρχει υποσύνολο B του E , ανοιχτό στο μετρικό χώρο E και τέτοιο, ώστε $A = S \cap B$.

Απόδειξη.

Έστω ότι το σύνολο $A, A \subseteq S$, είναι ανοιχτό στον S . Τότε για κάθε $a \in A$ υπάρχει $r_a > 0$ τέτοιο, ώστε για τη σφαιρική περιοχή $B_S(a, r_a)$ του a στο S να ισχύει $B_S(a, r_a) \subseteq A$ ή $S \cap B(a, r_a) \subseteq A$. Τότε όμως ισχύει

$$\bigcup_{a \in A} (S \cap B(a, r_a)) = A \Rightarrow S \cap \left(\bigcup_{a \in A} B(a, r_a) \right) = A.$$

Θέτοντας $\bigcup_{a \in A} B(a, r_a) = B$, παρατηρούμε ότι το B είναι ανοιχτό στον E (βλέπε 1.12.4.).

Δηλαδή αποδείχτηκε ότι υπάρχει ανοιχτό υποσύνολο B του E τέτοιο, ώστε $A = S \cap B$.

Αντίστροφα, έστω $A = S \cap B$, όπου B ανοιχτό στον E και a τυχόν σημείο του A . Τότε $a \in S$ και $a \in B$. Επειδή το B είναι ανοιχτό στον E , υπάρχει σφαιρική περιοχή $B(a, r)$ του a τέτοια, $B(a, r) \subseteq B$. Επειδή $a \in S$, το σύνολο $B_S(a, r) = B(a, r) \cap S$, είναι περιοχή του a εν S και μάλιστα τέτοια, ώστε:

$$B_S(a, r) = B(a, r) \cap S \subseteq B \cap S = A.$$

Άρα το A είναι ανοιχτό στον μετρικό υπόχωρο S . ♦

3.1.2. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ας είναι S ένας υπόχωρος ενός μετρικού χώρου (E, ρ) και A ένα υποσύνολο του S . Το σύνολο A είναι κλειστό υποσύνολο του υποχώρου S αν και μόνο αν υπάρχει υποσύνολο C του E , κλειστό στο μετρικό χώρο E και τέτοιο, ώστε $A = S \cap C$.

Απόδειξη.

Έστω ότι το σύνολο $A, A \subseteq S$, είναι κλειστό στον S . Τότε το σύνολο $S - A$ είναι ανοιχτό στο S . Έτσι, σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, υπάρχει υποσύνολο B του E , ανοιχτό στον E , με $S - A = S \cap B$. Άρα

$$A = S - (S - A) = S - (S \cap B) = S - B = S \cap B^c.$$

Αλλά το B^c είναι κλειστό υποσύνολο του E ως συμπλήρωμα ανοιχτού. Θέτοντας $C = B^c$ έχουμε το ζητούμενο.

Αντίστροφα, έστω ότι υπάρχει κλειστό υποσύνολο C του E με $A = S \cap C$. Τότε

$$S - A = S - (S \cap C) = S - C = S \cap C^c.$$

Επειδή όμως το C^c είναι ανοιχτό στον E , ως συμπλήρωμα κλειστού, με βάση την προηγούμενη πρόταση, το σύνολο $S - A$ είναι ανοιχτό στον S . Άρα το σύνολο A , που



είναι το συμπλήρωμα του $S-A$ στον S , είναι κλειστό στον S , ως συμπλήρωμα ανοιχτού. ♦

3.2. Παραδείγματα - Εφαρμογές - Σχόλια

3.2.1. Ας είναι S ένας υπόχωρος ενός μετρικού χώρου (E, ρ) , $a \in S$ και V ένα υποσύνολο του S με $a \in V$. Το σύνολο V είναι περιοχή του a στον υπόχωρο S αν και μόνο αν υπάρχει περιοχή $U(a)$ του a στον E , τέτοια, ώστε $V = S \cap U(a)$.

Απόδειξη.

Έστω ότι το V είναι περιοχή του a στον S . Θέτουμε τότε $U = S^c \cup V$. Επειδή το V είναι περιοχή του a στον S , υπάρχει $r > 0$ τέτοιο, ώστε $B_S(a, r) = B(a, r) \cap S \subseteq V$. Αλλά τότε $S^c \cup (B(a, r) \cap S) \subseteq S^c \cup V \Rightarrow S^c \cup B(a, r) \subseteq U \Rightarrow B(a, r) \subseteq U$.

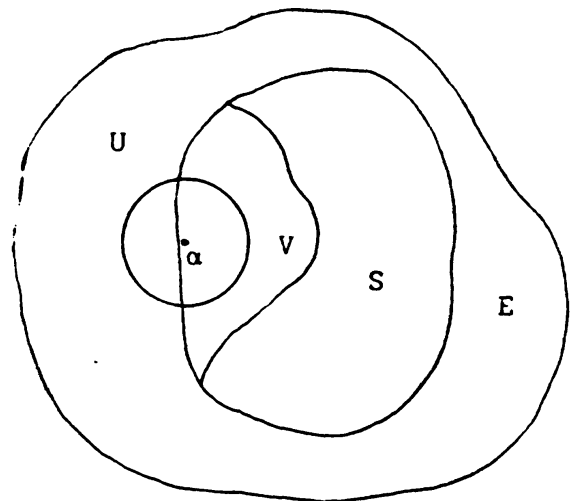
Άρα το σύνολο U είναι περιοχή του a στον E και μάλιστα, από τη σχέση $U = S^c \cup V$, προκύπτει $V = S \cap U$.

Αντίστροφα, αν $U(a)$ είναι περιοχή του a στον E , υπάρχει $r > 0$ τέτοιο, ώστε $B(a, r) \subseteq U(a)$.

Αλλά τότε

$$B(a, r) \cap S \subseteq U(a) \cap S \Rightarrow B_S(a, r) \subseteq U(a) \cap S,$$

που σημαίνει ότι το σύνολο $U(a) \cap S$ είναι περιοχή του a στον S . ♦



3.2.2. Ας είναι S ένας υπόχωρος ενός μετρικού χώρου (E, ρ) και A ένα υποσύνολο του S . Συμβολίζουμε με $\overline{A_S}$ και $\overline{A_E}$ τη θήκη του A ως προς τους χώρους S και E αντίστοιχα. Τότε ισχύει:

$$\overline{A_S} = S \cap \overline{A_E}.$$



Απόδειξη.

Έστω $a \in \overline{A_S}$. Τότε $a \in S$ και, επιπλέον, υπάρχει ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ εν A με

$\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = a$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $a \in S$ και $a \in \overline{A_E}$, δηλαδή $a \in S \cap \overline{A_E}$.

Αντίστροφα, έστω $a \in S \cap \overline{A_E}$. Τότε $a \in S$ και, επιπλέον, υπάρχει ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ εν A με $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = a$, που σημαίνει $a \in \overline{A_S}$. ♦

3.2.3. Αν συμβολίσουμε με A_E° και A_S° τον πυρήνα του A ως προς E και ως προς S αντίστοιχα, τότε δεν ισχύει ανάλογη σχέση με την παραπάνω, δηλαδή γενικά ισχύει ότι:

$$A_S^\circ \neq S \cap A_E^\circ.$$

Πραγματικά, αν $(E, \rho) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $S = [0, 2]$ και $A = [0, 1)$, έχουμε $A_E^\circ = (0, 1)$. Εξάλλου, το σύνολο A είναι ανοιχτό υποσύνολο του S γιατί γράφεται ως τομή του S με το σύνολο $B = (-1, 1)$ που είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}$ (βλέπε Πρόταση 3.1.1.). Άρα $A_S^\circ = [0, 1)$. Έτσι, παίρνουμε $A_S^\circ = [0, 1) \neq (0, 1) = [0, 2] \cap (0, 1) = S \cap A_E^\circ$.

3.2.4. Θεωρούμε τον υπόχωρο $[0, \infty)$ του μετρικού χώρου $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Το σύνολο $[0, 1)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $[0, \infty)$ σύμφωνα με την Πρόταση 3.1.1., γιατί $[0, 1) = [0, \infty) \cap (-1, 1)$ και το $(-1, 1)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αντίθετα, όπως είναι γνωστό, το σύνολο $[0, 1)$ δεν είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

3.3. Λυμένες Ασκήσεις

3.3.1. Στο μετρικό υπόχωρο $S = (0, \infty)$ του ευκλείδειου μετρικού χώρου $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ να βρεθούν τα σύνολα $\overline{(0, 1)}_S$, $(0, 1)_S^\circ$, $\overline{[2, 3]}_S$ και $[2, 3]_S^\circ$.

Λύση.

$$\overline{(0, 1)}_S = S \cap \overline{(0, 1)}_{\mathbb{R}} = (0, \infty) \cap [0, 1] = (0, 1]$$



Το σύνολο $(0, 1)$ είναι ανοιχτό εν $(0, \infty)$ υποσύνολο του $(0, \infty)$ γιατί
 $(0, 1) = (0, \infty) \cap (0, 1)$.

Άρα

$$(0, 1)_S^\circ = (0, 1).$$

Ακόμη,

$$[\overline{2, 3}]_S = S \cap [\overline{2, 3}]_R = (0, \infty) \cap [2, 3] = [2, 3].$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $2 \notin [2, 3)_S^\circ$ και ότι

$$[2, 3)_S^\circ = (2, 3),$$

γιατί το $(2, 3)$ είναι το μέγιστο (ως προς την διάταξη $\subseteq$) ανοιχτό εν $(0, \infty)$ υποσύνολο του $[2, 3)$. ♦

3.3.2. Ας είναι X, Y υπόχωροι ενός μετρικού χώρου E και A ένα υποσύνολο του $X \cap Y$, το οποίο είναι ανοιχτό (αντίστοιχα κλειστό) και ως προς τον X και ως προς τον Y . Ν' αποδειχτεί ότι το A είναι ανοιχτό (αντίστοιχα κλειστό) και ως προς τον υπόχωρο $X \cap Y$ του E .

Λύση.

Αφού το A είναι ανοιχτό εν X , υπάρχει ένα σύνολο G_1 ανοιχτό εν E τέτοιο, ώστε $A = X \cap G_1$. Όμοια, υπάρχει G_2 ανοιχτό εν E τέτοιο, ώστε $A = Y \cap G_2$. Άρα

$$A = (X \cap G_1) \cap (Y \cap G_2) = (X \cap Y) \cap (G_1 \cap G_2).$$

Επειδή όμως το σύνολο $G = G_1 \cap G_2$ είναι ανοιχτό εν E το σύνολο A ως τομή του ανοιχτού εν E συνόλου G με τον υπόχωρο $X \cap Y$, είναι ανοιχτό εν $X \cap Y$ υποσύνολο του $X \cap Y$.

Όμοια αν το A υποτεθεί κλειστό. ♦

3.4. Ασκήσεις

1. Έστω A ένα υποσύνολο του υπόχωρου S του μετρικού χώρου E . Ν' αποδειχτεί ότι $A_S' = A' \cap S$, όπου A_S' το παράγωγο σύνολο του A ως προς τον υπόχωρο S του E .

2. Έστω S ένας υπόχωρος ενός μετρικού χώρου E . Ν' αποδειχτεί ότι ένα κλειστό (αντίστοιχα ανοιχτό) υποσύνολο του S είναι κλειστό (αντίστοιχα ανοιχτό) και στον E αν και μόνο αν το S είναι κλειστό (αντίστοιχα ανοιχτό) υποσύνολο του E .



3. Έστω A ένα υποσύνολο του υπόχωρου S του μετρικού χώρου E . Ν' αποδειχτεί ότι το A είναι πυκνό στον S αν και μόνο αν $S \subseteq \overline{A_E}$.

4. Ας είναι $A_i, i \in I$ μια ανοιχτή κάλυψη ενός μετρικού χώρου E . Ν' αποδειχτεί ότι τυχόν υποσύνολο K του E είναι κλειστό στον E αν και μόνο αν για κάθε $i \in I$ το σύνολο $K \cap A_i$ είναι κλειστό στον υπόχωρο A_i του E .

5. Έστω (E, ρ) ένας μετρικός χώρος με άπειρο πλήθος στοιχείων. Ν' αποδειχτεί ότι υπάρχει απέραντο υποσύνολο S του E τέτοιο, ώστε κάθε υποσύνολο X του S να είναι ανοιχτό εν S .

6. Έστω E ένας μετρικός χώρος, $S \subseteq E$, $Z \subseteq E$, $A \subseteq S \cap Z$ και το A είναι ανοιχτό (αντίστοιχα κλειστό) υποσύνολο του S και του Z . Ν' αποδειχτεί ότι το A είναι ανοιχτό (αντίστοιχα κλειστό) υποσύνολο του $S \cup Z$.

7. Έστω (E, ρ) ένας μετρικός χώρος και X, Y, Z υποσύνολα του E . Ν' αποδειχτεί ότι:

α) Αν $Z \subseteq Y$ και $Y \subseteq \bar{Z}$, τότε το Z είναι πυκνό στο Y .

β) Αν $D \subseteq Y$, και το D είναι πυκνό στο Y , τότε το D είναι πυκνό και στο $\bar{Y}$.

γ) Αν $Z \subseteq Y \subseteq X$, το Z είναι πυκνό στο Y και το Y είναι πυκνό στο X , τότε το Z είναι πυκνό και στο X .

8. Έστω E ένας μετρικός χώρος, $E = X \cup Y$, όπου Y κλειστό υποσύνολο του E , $A \subseteq X$ και $A \cap Y \subseteq B$, όπου B ανοιχτό υποσύνολο του Y . Ν' αποδειχτεί ότι $A \subseteq (X \cup B)^\circ$.

9. Έστω (E, ρ) ένας μετρικός χώρος, S ένας μετρικός υποχώρος του E και $A \subseteq E$. Ν' αποδειχτεί ότι

$$\alpha) A^\circ \cap S \subseteq (A \cap S)_S^\circ$$

$$\beta) A^\circ = A_S^\circ \cap S^\circ$$

$$\gamma) \overline{(A \cap S)_S} \subseteq \bar{S}.$$



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

συναρτήσεις σε μετρικούς χώρους

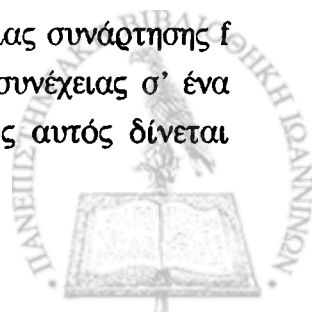
4.1. Συνέχεια συνάρτησης

Ας είναι (E_1, ρ_1) και (E_2, ρ_2) δύο μετρικοί χώροι, $f: E_1 \rightarrow E_2$ μια συνάρτηση και x_0 τυχόν σημείο του E_1 .

Θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι **συνεχής (continuous) στο σημείο** x_0 αν:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in E_1) \rho_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς, ο ορισμός της συνέχειας μιας συνάρτησης f σ' ένα σημείο ενός μετρικού χώρου, είναι γενίκευση του ορισμού της συνέχειας σ' ένα σημείο μιας πραγματικής συνάρτησης με πραγματική μεταβλητή, όπως αυτός δίνεται στον Απειροστικό Λογισμό.



Η επόμενη πρόταση δίνει ικανές και αναγκαίες συνθήκες για τη συνέχεια μιας συνάρτησης σ' ένα σημείο x_0 .

4.1.1. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ας είναι $(E_1, \rho_1), (E_2, \rho_2)$ δύο μετρικοί χώροι, $f: E_1 \rightarrow E_2$ μια συνάρτηση και x_0 τυχόν σημείο του E_1 . Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:

i) Για κάθε περιοχή $U(f(x_0))$ του $f(x_0)$ υπάρχει περιοχή $V(x_0)$ του x_0 τέτοια, ώστε:

$$f(V(x_0)) \subseteq U(f(x_0)).$$

ii) Για κάθε περιοχή $U(f(x_0))$ του $f(x_0)$ το σύνολο $f^{-1}(U(f(x_0)))$ είναι περιοχή του x_0 .

iii) Για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ εν E_1 με $\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = x_0$, ισχύει $\lim_{n \in \mathbb{N}} f(x_n) = f(x_0)$.

Απόδειξη.

(f συνεχής στο x_0) $\Rightarrow$ (i). Έστω ότι η f είναι συνεχής στο x_0 και $U(f(x_0))$ τυχούσα περιοχή του $f(x_0)$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο, ώστε $B(f(x_0), \varepsilon) \subseteq U(f(x_0))$. Αλλά επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 , υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε

$$\rho_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Αυτό ισοδύναμα γράφεται

$$x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon).$$

Άρα

$$f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon).$$

Έτσι, επειδή $B(f(x_0), \varepsilon) \subseteq U(f(x_0))$, έχουμε

$$f(B(x_0, \delta)) \subseteq U(f(x_0)).$$

Επομένως, θέτοντας $B(x_0, \delta) = V(x_0)$, έχουμε το ζητούμενο.

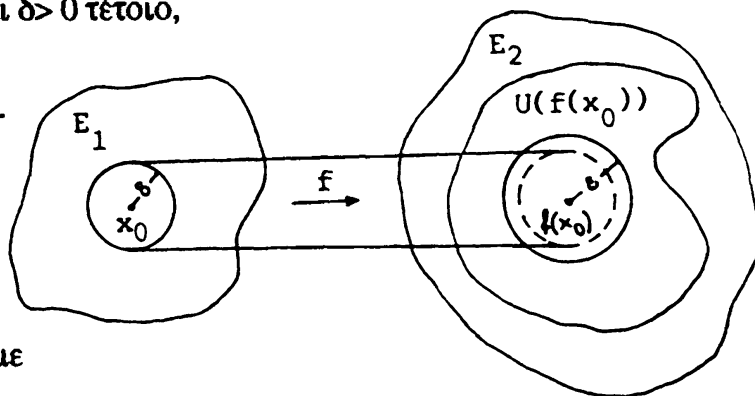
(i) $\Rightarrow$ (ii) Έστω ότι ισχύει το (i) και $U(f(x_0))$ τυχούσα περιοχή του $f(x_0)$. Τότε υπάρχει περιοχή $V(x_0)$ του x_0 τέτοια, ώστε

$$f(V(x_0)) \subseteq U(f(x_0)).$$

οπότε

$$V(x_0) \subseteq f^{-1}(f(V(x_0))) \subseteq f^{-1}(U(f(x_0))),$$

πράγμα που αποδεικνύει το ζητούμενο.



(ii) $\Rightarrow$ (iii) Έστω ότι ισχύει το (ii) και $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τυχούσα ακολουθία εν F_1 με $\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = x_0$. Έστω, επιπλέον, $U(f(x_0))$ τυχούσα περιοχή του $f(x_0)$, οπότε, σύμφωνα με το (ii), το σύνολο $f^{-1}(U(f(x_0)))$ είναι περιοχή του x_0 . Επειδή όμως $\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = x_0$, έχουμε $x_n \in f^{-1}(U(f(x_0)))$ τελικά για όλα τα $n \in \mathbb{N}$,

άρα

$$f(x_n) \in f(f^{-1}(U(f(x_0)))) \text{ τελικά για όλα τα } n \in \mathbb{N}.$$

Επειδή όμως $f(f^{-1}(U(f(x_0)))) \subseteq U(f(x_0))$, θα έχουμε

$$f(x_n) \in U(f(x_0)) \text{ τελικά για όλα τα } n \in \mathbb{N},$$

που, επειδή η $U(f(x_0))$ είναι τυχούσα, σημαίνει ότι $\lim_{n \in \mathbb{N}} f(x_n) = f(x_0)$.

(iii) $\Rightarrow$ (f συνεχής στο x_0) Υποθέτουμε ότι ισχύει το (iii) και ταυτόχρονα ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0 . Θα καταλήξουμε σε άτοπο. Το ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0 σημαίνει

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in E_1) \text{ έτσι, ώστε να ισχύει } \varrho_1(x, x_0) < \delta \text{ και } \varrho_2(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon.$$

Έτσι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (θέτοντας $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$) το σύνολο

$$A_n = \{x \in E_1 : \varrho_1(x, x_0) < \frac{1}{n} \text{ και } \varrho_2(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon\}$$

είναι μη κενό. Με το αξίωμα της επιλογής θεωρούμε μια ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ εν E_1 τέτοια, ώστε $x_n \in A_n, n \in \mathbb{N}$. Τότε όμως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\varrho_1(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \text{ και } \varrho_2(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon > 0.$$

Άρα, ενώ $\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = x_0$, λόγω της σχέσης $\varrho_2(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$, η ακολουθία $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$

δεν συγκλίνει στο σημείο $f(x_0)$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί αντίκειται στην (iii) που έχουμε υποθέσει. ♦

4.1.2. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ας είναι E_1, E_2, E_3 μετρικοί χώροι και $f: E_1 \rightarrow E_2$, $g: S \rightarrow E_3$, όπου $S \subseteq E_2$, συναρτήσεις. Αν $x_0 \in \hat{D}(g \circ f)$, η f είναι συνεχής στο x_0 και η g συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η συνάρτηση $g \circ f$ είναι συνεχής στο σημείο x_0 .

Απόδειξη.

Έστω $U(g(f(x_0)))$ τυχούσα περιοχή του $g(f(x_0))$. Τότε έχουμε:

$$(g \circ f)^{-1}(U(g(f(x_0)))) = (f^{-1} \circ g^{-1})(U(g(f(x_0)))) = f^{-1}(g^{-1}(U(g(f(x_0))))).$$



Επειδή η g είναι συνεχής, το σύνολο $g^{-1}(U(g(f(x_0))))$ είναι περιοχή εν S του σημείου $f(x_0)$. Έτσι, λόγω της συνέχειας της f , το σύνολο $(f^{-1}(g^{-1}(U(g(f(x_0)))))) = (g \circ f)^{-1}(U(g(f(x_0))))$, είναι περιοχή εν E_1 του σημείου x_0 , που σημαίνει ότι η συνάρτηση $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 . ♦

Μια συνάρτηση $f: E_1 \rightarrow E_2$, λέγεται **συνεχής στον E_1** ή απλά **συνεχής** αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του E_1 .

Έχοντας υπόψη τον παραπάνω ορισμό καθώς και την προηγούμενη Πρόταση 4.1.2., καταλήγουμε άμεσα στο επόμενο πόρισμα.

4.1.3. ΠΟΡΙΣΜΑ. Η σύνθεση δύο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.

Αν απαιτήσουμε οι συνθήκες (i), (ii) και (iii) της Πρότασης 4.1.1. να ισχύουν για κάθε $x \in E_1$ αντί του συγκεκριμένου x_0 , τότε είναι φανερό ότι η πρόταση αυτή δίνει ικανές και αναγκαίες συνθήκες για τη συνέχεια μιας συνάρτησης f σ' ολόκληρο το πεδίο ορισμού της f , δηλαδή στο χώρο E_1 . Εκτός των συνθηκών αυτών, οι επόμενες προτάσεις δίνουν μερικές σημαντικότητες ικανές και αναγκαίες συνθήκες για τη συνέχεια μιας συνάρτησης.

4.1.4. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ας είναι (E_1, ρ_1) , (E_2, ρ_2) δύο μετρικοί χώροι και $f: E_1 \rightarrow E_2$ τυχούσα συνάρτηση. Η συνάρτηση f είναι συνεχής αν και μόνο αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:

- i) Για κάθε ανοιχτό υποσύνολο A του E_2 το σύνολο $f^{-1}(A)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του E_1 .
- ii) Για κάθε κλειστό υποσύνολο K του E_2 το σύνολο $f^{-1}(K)$ είναι κλειστό υποσύνολο του E_1 .

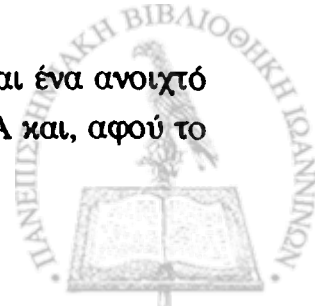
Απόδειξη.

Επειδή, λόγω της γνωστής σχέσης

$$f^{-1}(X^c) = (f^{-1}(X))^c,$$

η ισοδυναμία $(i) \Leftrightarrow (ii)$ είναι φανερή, αρκεί ν' αποδείξουμε την ισοδυναμία $(f \text{ συνεχής}) \Leftrightarrow (i)$.

$(f \text{ συνεχής}) \Rightarrow (i)$ Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής και ότι A είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του E_2 . Επιπλέον, έστω x τυχόν σημείο του $f^{-1}(A)$. Τότε $f(x) \in A$ και, αφού το



A είναι ανοιχτό, υπάρχει περιοχή $U(f(x))$ του $f(x)$ με $U(f(x)) \subseteq A$. Έτσι, λόγω της συνέχειας της f στο x (Βλέπε Πρόταση 4.1.1.(i)), υπάρχει περιοχή $V(x)$ του x τέτοια, ώστε $f(V(x)) \subseteq U(f(x)) \subseteq A$.

Άρα

$$V(x) \subseteq f^{-1}(f(V(x))) \subseteq f^{-1}(U(f(x))) \subseteq f^{-1}(A),$$

που σημαίνει ότι το σύνολο $f^{-1}(A)$ είναι περιοχή κάθε σημείου του x και επομένως ανοιχτό σύνολο.

(i) $\Rightarrow$ (f συνεχής) Υποθέτουμε ότι ισχύει το (i) και έστω x τυχόν σημείο του E_1 . Έστω ακόμη $U(f(x))$ τυχούσα περιοχή του $f(x)$ στον E_2 . Τότε υπάρχει σφαιρική περιοχή $B(f(x), r)$ του $f(x)$, με $B(f(x), r) \subseteq U(f(x))$. Επειδή το $B(f(x), r)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του E_2 και λόγω της υπόθεσης (i), το σύνολο $f^{-1}(B(f(x), r))$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του E_1 . Επιπλέον, επειδή $x \in f^{-1}(B(f(x), r))$, το σύνολο $f^{-1}(B(f(x), r))$ μπορεί να θεωρηθεί περιοχή του x . Έτσι, υπάρχει περιοχή του x , η $f^{-1}(B(f(x), r))$, τέτοια, ώστε

$$f(f^{-1}(B(f(x), r))) \subseteq B(f(x), r) \subseteq U(f(x)).$$

Αυτό, σύμφωνα με την Πρόταση 4.1.1.(i), σημαίνει ότι η f είναι συνεχής στο τυχόν σημείο $x \in E_1$. Άρα η f είναι συνεχής. ♦

4.1.5. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ας είναι $(E_1, \rho_1), (E_2, \rho_2)$ δύο μετρικοί χώροι και $f: E_1 \rightarrow E_2$ τυχούσα συνάρτηση. Η συνάρτηση f είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε υποσύνολο X του E_1 ισχύει: $f(\bar{X}) \subseteq \overline{f(X)}$.

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής, X είναι τυχόν υποσύνολο του E_1 και y τυχόν σημείο του $f(\bar{X})$. Τότε υπάρχει $x \in \bar{X}$, με $f(x) = y$. Επειδή όμως $x \in \bar{X}$, υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ εν X με $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Αλλά τότε, λόγω της συνέχειας της f , έχουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$ (Βλέπε Πρόταση 4.1.1.(iii)). Έτσι, επειδή η $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία του $f(X)$, παίρνουμε $y = f(x) \in \overline{f(X)}$, που σημαίνει $f(\bar{X}) \subseteq \overline{f(X)}$.

Αντίστροφα, έστω ισχύει $f(\bar{X}) \subseteq \overline{f(X)}$ για κάθε $X \subseteq E_1$. Θεωρούμε τυχόν κλειστό υποσύνολο K του E_2 . Αρκεί ν' αποδειχτεί ότι το $f^{-1}(K)$ είναι κλειστό υποσύνολο του E_1 . Πραγματικά, λόγω της υπόθεσης έχουμε

$$f(\overline{f^{-1}(K)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(K))}.$$

Αλλά $f(f^{-1}(K)) \subseteq K$, οπότε έχουμε



$$f(\overline{f^{-1}(K)}) \subseteq \bar{K}$$

ή

$$f(\overline{f^{-1}(K)}) \subseteq K,$$

επειδή το K είναι κλειστό. Έτσι, η τελευταία σχέση δίνει

$$f^{-1}(K) \supseteq f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(K)})) \supseteq \overline{f^{-1}(K)},$$

οπότε $f^{-1}(K) = \overline{f^{-1}(K)}$, που σημαίνει ότι το σύνολο $f^{-1}(K)$ είναι κλειστό και άρα η f είναι συνεχής. ♦

Ας είναι $(E_1, \varrho_1), (E_2, \varrho_2)$ δύο μετρικοί χώροι, $f: E_1 \rightarrow E_2$ τυχούσα συνάρτηση και A ένα μη κενό υποσύνολο του E_1 .

| Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο A αν η συνάρτηση $f|_A$ είναι συνεχής.

4.1.6. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ας είναι $(E_1, \varrho_1), (E_2, \varrho_2)$ δύο μετρικοί χώροι και $f: E_1 \rightarrow E_2$ τυχούσα συνεχής συνάρτηση. Αν A είναι ένα μη κενό υποσύνολο του E_1 , τότε η f είναι συνεχής στο A .

Απόδειξη.

Επειδή $f|_A = f \circ i_A$, όπου i_A είναι η ταυτοτική συνάρτηση του A , η οποία είναι προφανώς συνεχής, το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από το Πρόγραμμα 4.1.3. ♦

4.1.7. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ας είναι $(E_1, \varrho_1), (E_2, \varrho_2)$ δύο μετρικοί χώροι, $f: E_1 \rightarrow E_2$ τυχούσα συνάρτηση και A είναι ένα μη κενό υποσύνολο του E_1 . Αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A τότε η f είναι συνεχής στο A .

Απόδειξη.

Επειδή $f|_A = f \circ i_A$, όπου i_A είναι η ταυτοτική συνάρτηση του A , η $f|_A$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. ♦

Είναι αξιοσημείωτο ότι στην παραπάνω πρόταση δεν ισχύει το αντίστροφο (Βλέπε 4.2.11.).



4.2. Παραδείγματα - Εφαρμογές

4.2.1. Η εικόνα ενός ανοιχτού ή κλειστού συνόλου μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης δεν είναι γενικά ανοιχτό ή κλειστό αντίστοιχα, σύνολο.

Απόδειξη.

Πραγματικά, για τη συνεχή συνάρτηση $f(x)=x^2$, $x \in \mathbb{R}$, έχουμε $f((-1,1))=[0,1)$ και για την επίσης συνεχή συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{x}$, $x \in (0, \infty)$, έχουμε $g([1, \infty))=(0,1]$. ♦

4.2.2. Έστω (E_1, ρ_1) ένας διακριτός μετρικός χώρος και (E_2, ρ_2) τυχόν μετρικός χώρος. Τότε κάθε συνάρτηση $f:E_1 \rightarrow E_2$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Απόδειξη.

Πραγματικά, αν A είναι τυχόν ανοιχτό υποσύνολο του E_2 , το σύνολο $f^{-1}(A)$, ως υποσύνολο του διακριτού μετρικού χώρου E_1 , είναι ανοιχτό (βλέπε 1.13.2.) και άρα η f είναι συνεχής. ♦

4.2.3. Ας είναι (E_1, ρ_1) τυχόν μετρικός χώρος και (E_2, ρ_2) τυχόν σταθμητός διανυσματικός χώρος. Αν οι συναρτήσεις $a:E_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $b:E_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $f:E_1 \rightarrow E_2$ και $g:E_1 \rightarrow E_2$ είναι συνεχείς, τότε και η συνάρτηση $af+bg:E_1 \rightarrow E_2$ είναι συνεχής.

Απόδειξη.

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.1.1.(iii), καθώς και το συμπέρασμα της Εφαρμογής 2.2.5. παίρνουμε αμέσως το συμπέρασμα. ♦

4.2.4. Αν X είναι ένας μετρικός χώρος, (E, ρ) ο καρτεσιανός μετρικός χώρος των μετρικών χώρων (E_i, ρ_i) , $i=1, \dots, n$, και $f=(f_1, \dots, f_n)$ είναι μια συνάρτηση του X στον E , τότε η συνάρτηση f είναι συνεχής αν και μόνο αν όλες οι συναρτήσεις f_i , $i=1, \dots, n$ είναι συνεχείς.

Απόδειξη.

Το συμπέρασμα αυτό είναι άμεση συνέπεια της Εφαρμογής 2.2.2. και της Πρότασης 4.1.1.(iii). ♦

4.2.5. Ας είναι $(E_1, \rho_1), (E_2, \rho_2)$ δύο μετρικοί χώροι, A ένα πυκνό υποσύνολο του E_1 και $f: E_1 \rightarrow E_2, g: E_1 \rightarrow E_2$, συνεχείς συναρτήσεις, τέτοιες ώστε $f|_A = g|_A$. Τότε ισχύει $f = g$.

Απόδειξη.

Έστω ότι $f \neq g$. Τότε υπάρχει $x_0 \in E_1$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) \neq g(x_0)$. Επειδή όμως το A είναι πυκνό υποσύνολο του E_1 , δηλαδή $\bar{A} = E_1$, έχουμε $x_0 \in \bar{A}$. Έτσι, υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο A , με $\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = x_0$. Επειδή $f|_A = g|_A$ και $x_n \in A, n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$f(x_n) = g(x_n), n \in \mathbb{N},$$

οπότε λόγω της συνέχειας των f και g , παίρνουμε

$$f(x_0) = \lim_{n \in \mathbb{N}} f(x_n) = \lim_{n \in \mathbb{N}} g(x_n) = g(x_0),$$

που είναι άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι $f(x_0) \neq g(x_0)$. ♦

Το παραπάνω συμπέρασμα είναι σημαντικό γιατί απλούστερα διατυπωμένο λέει ότι μια συνεχής συνάρτηση είναι πλήρως ορισμένη από τις τιμές της σ' ένα πυκνό υποσύνολο του πεδίου ορισμού της.

Μια πολύ καλή εφαρμογή του συμπεράσματος αυτού συναντάμε στον ορισμό της συνάρτησης $f(x) = a^x, x \in \mathbb{R}, (a > 0)$. Η συνάρτηση αυτή ορίζεται αρχικά στο σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών, που είναι πυκνό υποσύνολο του συνόλου των $\mathbb{R}$ πραγματικών αριθμών και στη συνέχεια επεκτείνεται κατάλληλα σε μια μονοσήμαντα ορισμένη συνεχή συνάρτηση, επέκταση της αρχικής, σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Μέρος της διαδικασίας αυτής περιέχεται στην επόμενη εφαρμογή.



4.2.6. Ας είναι (E_1, ρ_1) , (E_2, ρ_2) δύο μετρικοί χώροι, A είναι ένα μη κενό υποσύνολο του E_1 και $f: A \rightarrow E_2$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε:

i) Αν $\ell \in A$ και για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο A , με $\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = \ell$, το $\lim_{n \in \mathbb{N}} f(x_n)$ υπάρχει στον E_2 , τότε για τυχούσες ακολουθίες $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο A , με $\lim_{n \in \mathbb{N}} y_n = \lim_{n \in \mathbb{N}} z_n = \ell$, ισχύει $\lim_{n \in \mathbb{N}} f(y_n) = \lim_{n \in \mathbb{N}} f(z_n) = f(\ell)$.

ii) Αν $\bar{A} = E_1$, και η ιδιότητα που εκφράσει το (i) ισχύει για όλα τα σημεία ℓ του A' , τότε υπάρχει μοναδική συνεχής επέκταση της f σ' ολόκληρο το μετρικό χώρο E_1 .

Απόδειξη.

i) Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $N = N_\pi$ και $M = N_\alpha$, όπου N_π και N_α είναι τα σύνολα των περιττών και άρτιων φυσικών αριθμών, αντίστοιχα. Θεωρούμε τότε την ακολουθία $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$, με

$$r_n = \begin{cases} y_n & , \text{ αν } n \in N_\pi \\ z_n & , \text{ αν } n \in N_\alpha \end{cases}.$$

Είναι φανερό ότι, επειδή $\lim_{n \in N_\pi} y_n = \lim_{n \in N_\alpha} z_n = \ell$, ισχύει $\lim_{n \in \mathbb{N}} r_n = \ell$. Άρα το $\lim_{n \in \mathbb{N}} f(r_n)$ υπάρχει στον E_2 . Επομένως, επειδή οι ακολουθίες $(f(y_n))_{n \in N_\pi}$, $(f(z_n))_{n \in N_\alpha}$ είναι υπακολουθίες της $(f(r_n))_{n \in \mathbb{N}}$, έχουμε

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} f(r_n) = \lim_{n \in N_\pi} f(y_n) = \lim_{n \in N_\alpha} f(z_n).$$

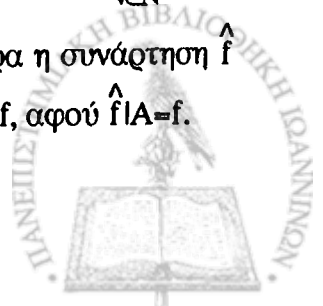
ii) Επειδή $\bar{A} = E_1$, κάθε σημείο $x \in E_1$ είναι σημείο επαφής του A . Άρα κάθε σημείο $x \in E_1 - A = \bar{A} - A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A . Έτσι, ορίζουμε

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ αν } x \in A \\ \lim_{n \in \mathbb{N}} f(x_n), & \text{ αν } x \in E_1 - A \end{cases},$$

όπου $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι τυχούσα ακολουθία στο A με $\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = x$. Τέτοια ακολουθία υπάρχει

πάντοτε γιατί $x \in E_1 - A = \bar{A} - A$. Εξάλλου, σύμφωνα με την (i) που ισχύει, η τιμή $\lim_{n \in \mathbb{N}} f(x_n)$,

υπάρχει πάντοτε και είναι ανεξάρτητη από την ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Άρα η συνάρτηση $\hat{f}$ είναι καλά ορισμένη και επιπλέον, είναι φανερό ότι είναι επέκταση της f , αφού $\hat{f}|_A = f$.



Θ' αποδείξουμε τώρα ότι η $\hat{f}$ είναι συνεχής. Έστω x_0 τυχόν σημείο του E_1 . Επειδή $\bar{A} = E_1$, το θα είναι είτε μεμονωμένο σημείο του A είτε σημείο συσσώρευσης του A . Υποθέτουμε καταρχήν ότι το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του A . Τότε για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ εν A , με $\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = x_0$, θα έχουμε ότι η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ θα είναι τελικά σταθερή με όρους ίσους προς το x_0 . Έτσι, θα έχουμε ότι $\lim_{n \in \mathbb{N}} \hat{f}(x_n) = \lim_{n \in \mathbb{N}} \hat{f}(x_0) = f(x_0)$. Αν το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A , τότε υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο A , με $\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = x_0$. Αλλά $\hat{f}(x_0) = \lim_{n \in \mathbb{N}} f(x_n)$ και μάλιστα, όπως είδαμε, η τιμή $\hat{f}(x_0)$ είναι ανεξάρτητη της ακολουθίας $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που επιλέγουμε κάθε φορά. Έτσι, τελικά έχουμε ότι για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ εν E_1 , με $\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = x_0$, ισχύει $\lim_{n \in \mathbb{N}} \hat{f}(x_n) = \hat{f}(x_0)$, που σημαίνει ότι η $\hat{f}$ είναι συνεχής στο τυχόν $x_0 \in E_1$, δηλαδή σ' ολόκληρο το E_1 .

Το μονοσήμαντο της συνάρτησης $\hat{f}$, ως επέκτασης της f , προκύπτει άμεσα από την προηγούμενη Εφαρμογή 4.2.5. ♦

4.2.7. Ας είναι E_1, E_2 μετρικοί χώροι και $f: E_1 \rightarrow E_2$ μια συνάρτηση. Ν' αποδειχτεί ότι αν ισχύει $f(A') \subseteq (f(A))'$ για κάθε $A \subseteq E_1$ τότε η f είναι συνεχής. Ισχύει το αντίστροφο;

Λύση.

Είναι γνωστό ότι για τυχόν $A \subseteq E_1$, ισχύει $\bar{A} = A \cup A'$ και, επιπλέον,

$$f \text{ συνεχής} \Leftrightarrow f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}. \quad (*)$$

Έτσι

$$f(\bar{A}) = f(A \cup A') = f(A) \cup f(A') \text{ και } \overline{f(A)} = f(A) \cup (f(A))'.$$

Έστω ότι $f(A') \subseteq (f(A))'$. Τότε

$$f(A) \cup f(A') \subseteq f(A) \cup (f(A))' \Rightarrow f(A \cup A') \subseteq \overline{f(A)} \Rightarrow f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

που, βάσει της (*), σημαίνει ότι η f είναι συνεχής.

Το αντίστροφο εν γένει δεν ισχύει. Πράγματι, θεωρούμε τη συνάρτηση $f: (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ με τύπο $f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε

$$f(\mathbb{R}') = f(\mathbb{R}) = \{0\} \supset \emptyset = \{0\}' = (f(\mathbb{R}))'. \quad \blacklozenge$$



4.2.8. Ας είναι E_1, E_2 μετρικοί χώροι και $f: E_1 \rightarrow E_2$ μια συνάρτηση. Τότε:

i) Αν $A_i, i \in I$ είναι μια οικογένεια ανοιχτών υποσυνόλων του E_1 , τέτοια, ώστε $E_1 = \bigcup_{i \in I} A_i$ και για κάθε $i \in I$ η συνάρτηση $f|_{A_i}$ είναι συνεχής, τότε και η f είναι συνεχής συνάρτηση.

ii) Αν $A_i, i \in I$ είναι μια πεπερασμένη οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του E_1 , τέτοια, ώστε $E_1 = \bigcup_{i \in I} A_i$ και για κάθε $i \in I$ η συνάρτηση $f|_{A_i}$ είναι συνεχής, τότε και η f είναι συνεχής συνάρτηση.

Απόδειξη.

i) Έστω x τυχόν σημείο του E και $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τυχούσα ακολουθία εν E με $\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = x$.

Τότε υπάρχει $j \in I$ τέτοιο, ώστε $x \in A_j$. Επειδή, μάλιστα το A_j είναι ανοιχτό και $\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = x$, έχουμε ότι $x_n \in A_j$ τελικά για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Άρα έχουμε $f(x_n) = (f|_{A_j})(x_n)$ τελικά για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Επιπλέον, επειδή η $f|_{A_j}$ είναι συνεχής έχουμε:

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} (f|_{A_j})(x_n) = (f|_{A_j})(x) = f(x).$$

Δηλαδή $\lim_{n \in \mathbb{N}} f(x_n) = f(x)$.

ii) Έστω x τυχόν σημείο του E και $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τυχούσα ακολουθία εν E με $\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = x$.

Τότε για κάθε υποακολουθία $(f(x_{\mu}))_{\mu \in M}$ της $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ισχύει ότι υπάρχει $i \in I$ τέτοιο ώστε $x_{\mu} \in A_i$ για άπειρα $\mu \in M$. Αυτό, γιατί το I είναι πεπερασμένο. Θεωρούμε τότε την υποακολουθία $(x_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ της $(x_{\mu})_{\mu \in M}$ με $x_{\lambda} \in A_i$, $\lambda \in \Lambda$. Τότε επειδή η $f|_{A_i}$ είναι συνεχής και $\lim_{\lambda \in \Lambda} x_{\lambda} = x \in A_i$, αφού A_i κλειστό, παίρνουμε

$$f(x) = (f|_{A_i})(x) = \lim_{\lambda \in \Lambda} (f|_{A_i})(x_{\lambda}) = \lim_{\lambda \in \Lambda} f(x_{\lambda}).$$

Τότε όμως, σύμφωνα με την Πρόταση 2.3.3., παίρνουμε $\lim_{n \in \mathbb{N}} f(x_n) = f(x)$, που αποδεικνύει τη συνέχεια της f . ♦

4.2.9. Ας είναι $(E_1, \rho_1), (E_2, \rho_2)$ δύο μετρικοί χώροι και $f: E_1 \xrightarrow{\text{επί}} E_2$ μια συνεχής συνάρτηση. Αν D είναι ένα πυκνό υποσύνολο του E_1 , τότε το σύνολο $f(D)$ είναι πυκνό υποσύνολο του E_2 .

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι A είναι ένα μη κενό και ανοιχτό υποσύνολο του E_2 . Αρκεί ν' αποδειχτεί ότι $f(D) \cap A \neq \emptyset$ (Βλέπε Πρόταση 1.14.1.(ii)). Έτσι, έχουμε:



$A \neq \emptyset$ και A ανοιχτό στον $E_2 \Rightarrow f^{-1}(A) \neq \emptyset$ και $f^{-1}(A)$ ανοιχτό στον E_1 (επειδή η f είναι συνεχής και επί του E_2) $\Rightarrow D \cap f^{-1}(A) \neq \emptyset$ (επειδή το D είναι πυκνό στον E_1) $\Rightarrow f(D \cap f^{-1}(A)) \neq \emptyset \Rightarrow f(D) \cap f(f^{-1}(A)) \neq \emptyset \Rightarrow f(D) \cap A \neq \emptyset$. ♦

4.2.10. Αν $(E, \rho_1), (E, \rho_2)$ είναι μετρικοί χώροι, η ταυτοτική συνάρτηση $i_E: (E, \rho_1) \rightarrow (E, \rho_2)$ δεν είναι πάντοτε συνεχής συνάρτηση.

Απόδειξη.

Στις Προτάσεις 4.1.6. και 4.1.7. χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η ταυτοτική συνάρτηση $i_E: (E, \rho) \rightarrow (E, \rho)$ είναι συνεχής συνάρτηση. Το συμπέρασμα αυτό δεν διατηρείται γενικά όταν η ταυτοτική συνάρτηση είναι του μετρικού χώρου (E, ρ_1) επί του μετρικού χώρου (E, ρ_2) , όπου οι μετρικές ρ_1, ρ_2 είναι διαφορετικές. Για παράδειγμα, η ταυτοτική συνάρτηση $i_{\mathbb{R}}: (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}, \rho)$, όπου ρ η διακριτή μετρική, δεν είναι συνεχής.

Αυτό, γιατί ενώ ισχύει $|\cdot| - \lim_{v \in \mathbb{N}} \frac{1}{v} = 0$, το όριο της ακολουθίας $i_{\mathbb{R}}(\frac{1}{v}) = \frac{1}{v}$, $v \in \mathbb{N}$, ως προς τη διακριτή μετρική, όπως είναι γνωστό (Βλέπε 2.2.1.), δεν υπάρχει. Αντίθετα, αν η $i_{\mathbb{R}}$ ήταν συνεχής, θα έπρεπε να έχουμε $\rho - \lim_{v \in \mathbb{N}} i_{\mathbb{R}}(\frac{1}{v}) = \rho - \lim_{v \in \mathbb{N}} \frac{1}{v} = 0$. ♦

4.2.11. Το αντίστροφο στην Πρόταση 4.1.7. δεν ισχύει.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{αν } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Είναι πολύ εύκολο ν' αποδείξει κανείς ότι η $f|_{\mathbb{Q}}$ είναι συνεχής συνάρτηση, δηλαδή ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{Q}$ και ταυτόχρονα ότι η f δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο του $\mathbb{Q}$. ♦

Ακριβέστερα, σχετικά με το αντίστροφο της Πρότασης 4.1.7. ισχύει το εξής:

Ας είναι $(E_1, \rho_1), (E_2, \rho_2)$ δύο μετρικοί χώροι, $f: E_1 \rightarrow E_2$ τυχούσα συνάρτηση και A είναι ένα μη κενό και ανοιχτό υποσύνολο του E_1 . Τότε η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A αν και μόνο αν η f είναι συνεχής στο A .



Απόδειξη.

Έστω ότι η $f|A$ είναι συνεχής, $x_0 \in A$ και $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τυχούσα ακολουθία εν E_1 με $\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = x$. Τότε, επειδή $x_0 \in A$ και το A είναι ανοιχτό σύνολο, μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $x_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$. Άρα επειδή η $f|A$ είναι συνεχής, παίρνουμε:

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} (f|A)(x_n) = (f|A)(x_0),$$

δηλαδή

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} f(x_n) = f(x_0).$$

Το αντίστροφο προκύπτει αμέσως από την Πρόταση 4.1.7. ♦

4.2.13. Έστω A ένα ανοιχτό διάστημα στο $\mathbb{R}$ και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Ν' αποδειχτεί ότι η f είναι συνεχής αν και μόνο αν τα σύνολα $A(a_-) = \{x \in A: f(x) < a\}$ και $A(a_+) = \{x \in A: f(x) > a\}$ είναι ανοιχτά για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη.

Έστω ότι η f είναι συνεχής και $a \in \mathbb{R}$ τυχόν. Είναι προφανές ότι η τα σύνολα $A(a_-)$ και $A(a_+)$ είναι και τα δύο κενά αν και μόνο αν $f(x) = a$, $x \in A$. Στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε ν' αποδείξουμε τίποτε, αφού τότε η f είναι συνεχής. Έτσι, υποθέτουμε ότι $A(a_-) \neq \emptyset$ και έστω $x_0 \in A(a_-)$, δηλαδή τέτοιο, ώστε $f(x_0) < a$. Θέτουμε $\varepsilon = \frac{1}{2}(a - f(x_0))$. Τότε έχουμε $f(x_0) + \varepsilon < a$. Λόγω της συνέχειας της f , υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \quad (*)$$

Αφού το A είναι ανοιχτό, υπάρχει σφαιρική περιοχή $B(x_0, r) \subseteq A$, με $r < \delta$. Τότε όμως από την (*) παίρνουμε

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon < a, \quad x \in B(x_0, r).$$

Άρα $B(x_0, r) \subseteq A(a_-)$, που αποδεικνύει ότι το $A(a_-)$ είναι ανοιχτό. Τελείως ανάλογα αποδεικνύουμε ότι το σύνολο $A(a_+)$ είναι ανοιχτό.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι τα σύνολα $A(a_-) = \{x \in A: f(x) < a\}$ και $A(a_+) = \{x \in A: f(x) > a\}$ είναι ανοιχτά για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Τότε το σύνολο $A((f(x_0) + \varepsilon)_-) = \{x \in A: f(x) < f(x_0) + \varepsilon\}$ είναι ανοιχτό. Επιπλέον, $x_0 \in A((f(x_0) + \varepsilon)_-)$. Αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχει περιοχή του x_0 τέτοια, ώστε $B(x_0, r_1) \subseteq A((f(x_0) + \varepsilon)_-)$. Άρα

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon, \quad x \in B(x_0, r_1).$$

Όμοια, το σύνολο $A((f(x_0) - \varepsilon)_+) = \{x \in A: f(x) > f(x_0) - \varepsilon\}$ είναι ανοιχτό και $x_0 \in A((f(x_0) - \varepsilon)_+)$. Αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχει περιοχή του x_0 τέτοια, ώστε $B(x_0, r_2) \subseteq A((f(x_0) - \varepsilon)_+)$. Δηλαδή



$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon, x \in B(x_0, r_2).$$

Θεωρούμε την περιοχή $B(x_0, r) = B(x_0, r_1) \cap B(x_0, r_2)$, οπότε από τις παραπάνω ανισότητες παίρνουμε

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, x \in B(x_0, r).$$

Άρα η f είναι συνεχής. ♦

4.3. Ομοιόμορφη συνέχεια συνάρτησης

Ας είναι $(E_1, \rho_1), (E_2, \rho_2)$ δύο μετρικοί χώροι και $f: E_1 \rightarrow E_2$ μια συνάρτηση.

Θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι **ομοιόμορφα συνεχής (uniformly continuous) επί του E_1** αν:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in E_1) \rho_1(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \rho_2(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$$

Συγκρίνοντας τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης σ' ένα σημείο x_0 , με τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας, συμπεραίνουμε ότι στον ορισμό της συνέχειας το δ εξαρτάται από το ε και το x_0 ενώ στην ομοιόμορφη συνέχεια το δ εξαρτάται μόνο από το ε .

Μια άλλη παρατήρηση είναι ότι ο ορισμός της απλής συνέχειας δίνεται κατ' αρχήν σημειακά κάτι που δεν μπορεί να γίνει για την ομοιόμορφη συνέχεια.

Άμεση συνέπεια του παραπάνω ορισμού είναι ότι **κάθε ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση είναι συνεχής.**

Παραδείγματα ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων καθώς και συνεχών συναρτήσεων που δεν είναι ομοιόμορφα συνεχείς, δίνονται στην επόμενη Παράγραφο 4.4.

4.3.1. ΠΡΟΤΑΣΗ. Η σύνθεση δύο ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.

Απόδειξη.

Ας είναι $(E_1, \rho_1), (E_2, \rho_2), (E_3, \rho_3)$ μετρικοί χώροι και $f: E_1 \rightarrow E_2, g: S \rightarrow E_3$, όπου $S \subseteq E_2$, ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. Έστω, επιπλέον, $\varepsilon > 0$. Τότε, επειδή η g είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, έχουμε:

$$(\exists \delta' > 0)(\forall x, y \in S) \rho_2(x, y) < \delta' \Rightarrow \rho_3(g(x), g(y)) < \varepsilon. \quad (*)$$

Επιπλέον, επειδή και η f είναι ομοιόμορφα συνεχής παίρνουμε:



$$(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in E_1) \varrho_1(x, y) < \delta \Rightarrow \varrho_2(f(x), f(y)) < \delta'. \quad (**)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (*) και (**) παίρνουμε

$$(\forall x, y \in \hat{D}(g \circ f)) \varrho_1(x, y) < \delta \Rightarrow \varrho_2(f(x), f(y)) < \delta' \Rightarrow \varrho_3(g(f(x)), g(f(y))) < \varepsilon.$$

Άρα

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in \hat{D}(g \circ f)) \varrho_1(x, y) < \delta \Rightarrow \varrho_3((g \circ f)(x), (g \circ f)(y)) < \varepsilon,$$

που σημαίνει ότι η συνάρτηση $g \circ f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. ♦

4.4. Παραδείγματα – Εφαρμογές

4.4.1. Η συνάρτηση $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, αν και συνεχής δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη.

Πραγματικά, αν υποθέσουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε για $\varepsilon=1$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x>0$ και $y>0$ να έχουμε

$$|x-y| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| < 1.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί αν $z = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\delta}{2}\}$, τότε

$$|2z - z| = z < \delta, \text{ ενώ } \left| \frac{1}{2z} - \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{2z} \geq 1. \quad \blacklozenge$$

4.4.2. Η συνάρτηση $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής, ενώ ο περιορισμός της $f|_{[1, 2]}$, είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.

Απόδειξη.

Όπως αποδείχτηκε η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$, δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Θέτουμε $f|_{[1, 2]} = g$ και θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$. Τότε, επειδή για κάθε $x, y \in [1, 2]$ έχουμε:

$$|g(x) - g(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{1}{xy} |x - y| \leq |x - y| = |x - y|.$$

Θέτοντας $\delta = \varepsilon$, παίρνουμε

$$|x - y| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = |g(x) - g(y)| < \delta = \varepsilon. \quad \blacklozenge$$



4.4.3. Ας είναι $(E_1, \rho_1), (E_2, \rho_2)$ δύο μετρικοί χώροι και $f: E_1 \rightarrow E_2$ μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Αν $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια βασική ακολουθία στον E_1 , τότε η ακολουθία $(f(\alpha_n))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική στον E_2 .

Απόδειξη.

Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon, \varepsilon > 0$. Λόγω της ομοιόμορφης συνέχειας της f , υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε:

$$\rho_1(\alpha_n, \alpha_m) < \delta \Rightarrow \rho_2(f(\alpha_n), f(\alpha_m)) < \varepsilon.$$

Επειδή όμως η $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε

$$(\forall \mu, n \in \mathbb{N}) \mu > n \text{ και } n > \mu \Rightarrow \rho_1(\alpha_n, \alpha_\mu) < \delta.$$

Άρα τελικά για το τυχόν $\varepsilon, \varepsilon > 0$, αποδείχτηκε ότι

$$(\exists n \in \mathbb{N})(\forall \mu, n \in \mathbb{N}) \mu > n \text{ και } n > \mu \Rightarrow \rho_2(f(\alpha_n), f(\alpha_\mu)) < \varepsilon,$$

που σημαίνει ότι η $(f(\alpha_n))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία στον E_2 . ♦

Το παραπάνω συμπέρασμα συνιστά μια σημαντική διαφορά μεταξύ των συνεχών και των ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων. Αυτό, γιατί αν η $f: E_1 \rightarrow E_2$ είναι μια συνεχής συνάρτηση και $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια βασική ακολουθία στον E_1 , τότε η ακολουθία $(f(\alpha_n))_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι πάντοτε βασική στον E_2 .

Πραγματικά, όπως είδαμε παραπάνω, η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$, δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής, ενώ είναι συνεχής. Ακόμη, η ακολουθία $\alpha_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, είναι μια βασική ακολουθία στο $(0, \infty)$. Παρ' όλα αυτά, η ακολουθία $f(\alpha_n) = n$, $n \in \mathbb{N}$, είναι φανερό ότι δεν είναι βασική στο $\mathbb{R}$. ♦

4.4.4. Ας είναι $(E_1, \rho_1), (E_2, \rho_2)$ δύο μετρικοί χώροι και $f: E_1 \rightarrow E_2$ μια συνάρτηση τέτοια, ώστε για κάθε $x, y \in E_1$ να ισχύει:

$$\rho_2(f(x), f(y)) \leq c \rho_1(x, y), \quad (*)$$

όπου c μη αρνητική σταθερά. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη.

Αν $c=0$ τότε από τη σχέση $(*)$ παίρνουμε $\rho_2(f(x), f(y))=0$, $x, y \in E_1$, δηλαδή $f(x)=f(y)$ για κάθε $x, y \in E_1$. Άρα η f είναι σταθερή συνάρτηση, που τότε είναι και ομοιόμορφα συνεχής.

Αν $c \neq 0$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \frac{\varepsilon}{c} > 0$ τέτοιο, ώστε αν $\rho_1(x, y) \leq \frac{\varepsilon}{c}$, λόγω της σχέσης $(*)$ να ισχύει:



$$Q_2(f(x), f(y)) \leq c Q_1(x, y) < c \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon,$$

που σημαίνει ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. ♦

Το παραπάνω συμπέρασμα μας δίνει πολλές χρήσιμες εφαρμογές, μερικές από τις οποίες δίνονται αμέσως παρακάτω.

i) Αν A είναι ένα μη κενό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (E, Q) , τότε η συνάρτηση $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = Q(x, A)$, είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη.

Το συμπέρασμα είναι άμεση συνέπεια της γνωστής (Βλέπε 1.5.3.) σχέσης

$$|f(x) - f(y)| = |Q(x, A) - Q(y, A)| \leq Q(x, y). \quad \blacklozenge$$

ii) Οι προβολές τυχόντος καρτεσιανού μετρικού χώρου είναι ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις.

Απόδειξη.

Έστω (E, Q) ο καρτεσιανός μετρικός χώρος των μετρικών χώρων (E_i, Q_i) , $i=1, \dots, n$. Όπως είναι γνωστό, αν $J = \{i_1, \dots, i_k\}$ είναι ένα υποσύνολο του συνόλου $\{1, \dots, n\}$,

ονομάζουμε J - προβολή του E τη συνάρτηση $P_J: E \rightarrow \prod_{j=1}^k E_{i_j}$, με τύπο

$$P_J(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}).$$

Αν το σύνολο J είναι το μονοσύνολο $J = \{r\}$, $1 \leq r \leq n$, τότε για την $\{r\}$ -προβολή, αντί του συμβόλου $P_{\{r\}}$ χρησιμοποιούμε το σύμβολο P_r .

Για τη J - προβολή του E και για τυχόντα στοιχεία $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, εν E ισχύει

$$Q_J(P_J(x), P_J(y)) = \sqrt{Q_{i_1}^2(x_{i_1}, y_{i_1}) + \dots + Q_{i_k}^2(x_{i_k}, y_{i_k})} \leq \sqrt{Q_1^2(x_1, y_1) + \dots + Q_n^2(x_n, y_n)} = Q(x, y).$$

Αλλά η σχέση.

$$Q_J(P_J(x), P_J(y)) \leq Q(x, y)$$

είναι μια σχέση της μορφής (*), που σημαίνει ότι η συνάρτηση P_J είναι ομοιόμορφα συνεχής. ♦



4.4.5. Σε τυχόντα μετρικό χώρο (E, ϱ) η μετρική ϱ (ως συνάρτηση του καρτεσιανού μετρικού χώρου (E^2, d) στο μετρικό χώρο $(R, | \cdot |)$) είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη.

Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και θέτουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$. Θεωρούμε ακόμη δύο τυχόντα στοιχεία $x, y \in E \times E$, με $x = (x_1, x_2)$ και $y = (y_1, y_2)$. Τότε η σχέση

$$d(x, y) = \sqrt{\varrho^2(x_1, y_1) + \varrho^2(x_2, y_2)} < \delta,$$

συνεπάγεται ότι

$$\varrho(x_1, y_1) < \delta \text{ και } \varrho(x_2, y_2) < \delta.$$

Άρα από τη γνωστή ανισότητα (Βλέπε Πρόταση 1.2.1.(ii))

$$|\varrho(x_1, x_2) - \varrho(y_1, y_2)| \leq \varrho(x_1, y_1) + \varrho(x_2, y_2),$$

παίρνουμε

$$|\varrho(x_1, x_2) - \varrho(y_1, y_2)| \leq \varrho(x_1, y_1) + \varrho(x_2, y_2) < \delta + \delta = \varepsilon,$$

πράγμα που αποδεικνύει την ομοιόμορφη συνέχεια της ϱ . ♦

4.4.6. Αν (X, d) είναι ένας μετρικός χώρος, (E, ϱ) ο καρτεσιανός μετρικός χώρος των μετρικών χώρων (E_i, ϱ_i) , $i=1, \dots, n$, και $f = (f_1, \dots, f_n)$ μια συνάρτηση του X στον E , τότε η συνάρτηση f είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν όλες οι συναρτήσεις f_i , $i=1, \dots, n$, είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Παρατηρούμε ότι

$$f_i = p_i \circ f, \quad i=1, \dots, n,$$

όπου p_i είναι η i -προβολή του E . Επειδή, όπως έχει αποδειχτεί (Βλέπε 4.4.4.(ii)), οι προβολές ενός καρτεσιανού μετρικού χώρου είναι ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις, κάθε συνάρτηση f_i , $i=1, \dots, n$, είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, ως σύνθεση ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων (Βλέπε 4.3.1.).

Αντίστροφα, έστω όλες οι συναρτήσεις f_i , $i=1, \dots, n$, είναι ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. Επιπλέον, έστω ε τυχόν, $\varepsilon > 0$. Τότε για κάθε $i=1, \dots, n$ υπάρχει $\delta_i > 0$ τέτοιο, ώστε

$$(\forall x, y \in X) \quad d(x, y) < \delta_i \Rightarrow \varrho_i(f_i(x), f_i(y)) < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Θέτοντας $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$, για κάθε $x, y \in X$ με $d(x, y) < \delta$, παίρνουμε



$$\varrho(f(x), f(y)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \varrho_i^2(f_i(x), f_i(y))} \leq \sum_{i=1}^n \varrho_i(f_i(x), f_i(y)) < n \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

που σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι ομοιόμορφα συνεχής. ♦

4.5. Ισομετρία – Ομοιομορφισμός

Ας είναι $(E_1, \varrho_1), (E_2, \varrho_2)$ δύο μετρικοί χώροι και $f: E_1 \xrightarrow{\text{επί}} E_2$ μια συνάρτηση.

Η συνάρτηση f ονομάζεται **ομοιομορφισμός (homeomorphism)** αν η f είναι αμφιμονοσήμαντη και οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Είναι άμεσο από τον παραπάνω ορισμό ότι αν η f είναι ομοιομορφισμός τότε και η f^{-1} είναι επίσης ομοιομορφισμός.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω με τα συμπεράσματα της Πρότασης 4.1.4., παίρνουμε άμεσα το εξής:

4.5.1. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ας είναι $(E_1, \varrho_1), (E_2, \varrho_2)$ δύο μετρικοί χώροι και $f: E_1 \xrightarrow{\text{επί}} E_2$ μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση. Η f είναι ομοιομορφισμός αν και μόνο αν για κάθε υποσύνολο A του E_1 ισχύει:

- i) A ανοιχτό στον $E_1 \Leftrightarrow f(A)$ ανοιχτό στον E_2 .
- ii) A κλειστό στον $E_1 \Leftrightarrow f(A)$ κλειστό στον E_2 .

Μια συνάρτηση $f: E_1 \rightarrow E_2$ λέγεται **ισομετρία (isometry)** αν για τυχόντα στοιχεία $x, y \in E_1$ ισχύει:

$$\varrho_2(f(x), f(y)) = \varrho_1(x, y).$$

Η επόμενη πρόταση μας δίνει τις πιο βασικές ιδιότητες της ισομετρίας.



4.5.2. ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν $(E_1, \varrho_1), (E_2, \varrho_2)$ είναι μετρικοί χώροι και $f: E_1 \xrightarrow{\text{επί}} E_2$ μια ισομετρία, τότε:

- i) Η f είναι αμφιμονοσήμαντη.
- ii) Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
- iii) Η f^{-1} είναι ισομετρία.
- iv) Η f είναι ομοιομορφισμός.

Απόδειξη.

i) Για τυχόντα στοιχεία x, y εν E_1 έστω $f(x)=f(y)$. Τότε

$$0 = \varrho_2(f(x), f(y)) = \varrho_1(x, y).$$

Άρα $x=y$, δηλαδή η f είναι αμφιμονοσήμαντη.

ii) Προκύπτει άμεσα από την Εφαρμογή 4.4.4.

iii) Ας είναι z, w δύο τυχόντα στοιχεία εν E_2 . Τότε, δεδομένου ότι η f είναι αμφιμονοσήμαντη και επί, υπάρχουν στοιχεία x, y εν E_1 με $x=f^{-1}(z)$ και $y=f^{-1}(w)$ ή $z=f(x)$ και $w=f(y)$. Επιπλέον, επειδή η f είναι ισομετρία, έχουμε

$$\varrho_2(f(x), f(y)) = \varrho_1(x, y) \Rightarrow \varrho_2(z, w) = \varrho_1(f^{-1}(z), f^{-1}(w)),$$

που σημαίνει ότι και η f^{-1} είναι ισομετρία.

iv) Ως ισομετρίες οι f και f^{-1} είναι και οι δύο ομοιόμορφα συνεχείς, άρα συνεχείς.

Επομένως η f είναι ομοιομορφισμός. ♦

Δύο μετρικοί χώροι $(E_1, \varrho_1), (E_2, \varrho_2)$ λέγονται **ομοιομορφικοί (homeomorphic)** αν υπάρχει ομοιομορφισμός $f: E_1 \xrightarrow{\text{επί}} E_2$.

Δύο μετρικοί χώροι $(E_1, \varrho_1), (E_2, \varrho_2)$ λέγονται **ισομετρικοί (isometric)** αν υπάρχει ισομετρία $f: E_1 \xrightarrow{\text{επί}} E_2$.

4.6. Παραδείγματα - Εφαρμογές

4.6.1. Ένας ομοιομορφισμός δεν είναι γενικά ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.



Απόδειξη.

Πραγματικά, η συνάρτηση $f:(0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{x}$, (Βλέπε 4.4.1.) δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Όμως η f είναι ομοιομορφισμός γιατί είναι αμφιμονοσήμαντη και τόσο η f όσο και η f^{-1} ($f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, \infty)$), είναι συνεχείς συναρτήσεις. ♦

4.6.2. Αν E είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με πεπερασμένη διάσταση $n, n \in \mathbb{N}$, τότε μπορεί να οριστεί μια στάθμη $|\cdot|$ στον E έτσι, ώστε ο μετρικός χώρος $(E, |\cdot|)$ να είναι ισομετρικός προς τον ευκλείδειο μετρικό χώρο $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$. Επιπλέον, αν N είναι τυχούσα στάθμη στον E υπάρχει θετικός αριθμός B τέτοιος, ώστε:

$$N(x) \leq B|x|, x \in E.$$

Απόδειξη.

Εστω $\{r_1, \dots, r_n\}$ μια βάση του n -διάστατου διανυσματικού χώρου E . Τότε, τυχόν $x \in E$ γράφεται στη μορφή

$$x = x_1 r_1 + \dots + x_n r_n,$$

όπου η n -άδα $(x_1, \dots, x_n)$ των πραγματικών αριθμών $(x_1, \dots, x_n)$ ορίζεται μονοσήμαντα για το x . Έτσι, θέτουμε $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ και

$$|x| = |\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Είναι φανερό ότι η συνάρτηση $|\cdot|: E \rightarrow \mathbb{R}$ είναι στάθμη. Επιπλέον, η συνάρτηση $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}^n$, με τύπο $\varphi(x) = \vec{x}$ είναι μια ισομετρία μεταξύ των μετρικών χώρων $(E, |\cdot|)$ και $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$.

Αυτό, γιατί για τυχόντα στοιχεία x, y εν E έχουμε

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\vec{x} - \vec{y}| = |x - y|.$$

Εστω τώρα N τυχούσα στάθμη στον E . Τότε για τυχόν $x = x_1 r_1 + \dots + x_n r_n$ εν E παίρνουμε:

$$N(x) = N(x_1 r_1 + \dots + x_n r_n) \leq N(x_1 r_1) + \dots + N(x_n r_n) = |x_1| N(r_1) + \dots + |x_n| N(r_n) \leq$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \sum_{i=1}^n N(r_i) \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \sum_{i=1}^n N(r_i) = |\vec{x}| \sum_{i=1}^n N(r_i) = |x| B,$$

όπου $B = \sum_{i=1}^n N(r_i)$.

Επειδή το σύνολο $\{r_1, \dots, r_n\}$ είναι βάση του E ισχύει

$$r_i \neq 0 \Rightarrow N(r_i) > 0, i = 1, \dots, n.$$

Άρα



$$B = \sum_{i=1}^n N(r_i) > 0$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. ♦

4.6.3. Αν E είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, τότε κάθε συνάρτηση $f \in E^*$ είναι συνεχής στο μετρικό χώρο $(E, \|\cdot\|)$.

Απόδειξη.

Υπενθυμίζουμε καταρχήν ότι E^* είναι ο αλγεβρικός δυϊκός χώρος του E , δηλαδή ο πραγματικός διανυσματικός χώρος όλων των πραγματικών γραμμικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το E .

Θ' αποδείξουμε αρχικά ότι κάθε συνάρτηση $f \in E^*$ είναι συνεχής στο σημείο 0.

Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τυχούσα ακολουθία εν E με $\| \cdot \| - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$x_n = x_{1n} r_1 + \dots + x_{pn} r_p,$$

όπου $\{r_1, \dots, r_p\}$ είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου E , που υποτίθεται p -διάστατος. Είναι φανερό ότι επειδή $\| \cdot \| - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{in} = 0$, $i=1, \dots, p$. Άρα, επειδή η f είναι γραμμική, παίρνουμε:

$$f(x_n) = x_{1n} f(r_1) + \dots + x_{pn} f(r_p), n \in \mathbb{N},$$

οπότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = (\lim_{n \rightarrow \infty} x_{1n}) f(r_1) + \dots + (\lim_{n \rightarrow \infty} x_{pn}) f(r_p) = 0 + \dots + 0 = 0.$$

Έτσι, επειδή $f(0) = 0$, έχουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(0)$.

Έστω τώρα x_0 τυχόν σημείο του E και τυχούσα ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ εν E με $\| \cdot \| - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Τότε, έχουμε $\| \cdot \| - \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_0) = 0$, οπότε, λόγω της συνέχειας της f στο 0,

παίρνουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n - x_0) = f(0) = 0$ και λόγω της γραμμικότητας της f , έχουμε τελικά:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n - x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(x_0)) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0). \quad \blacklozenge$$



Επειδή, σύμφωνα με την προηγούμενη Εφαρμογή 4.6.2., για κάθε στάθμη N στον E ισχύει $N(x) \subseteq B(x, \epsilon)$, $x \in E$, το παραπάνω συμπέρασμα ισχύει και στο μετρικό χώρο (E, N) , όπου N μια τυχούσα στάθμη στον E .

4.7. Λυμένες Ασκήσεις

4.7.1. Ας είναι E_1 και E_2 μετρικοί χώροι. Ν' αποδειχτεί ότι κάθε συνάρτηση $f: E_1 \rightarrow E_2$ είναι συνεχής αν και μόνο αν κάθε υποσύνολο του E_1 είναι ανοιχτό και κλειστό ταυτόχρονα.

Λύση.

Αν κάθε υποσύνολο του μετρικού χώρου E_1 είναι ανοιχτό και κλειστό ταυτόχρονα, τότε κάθε συνάρτηση $f: E_1 \rightarrow E_2$ είναι συνεχής. Αυτό γιατί για κάθε ανοιχτό σύνολο A του E_2 το σύνολο $f^{-1}(A)$, ως υποσύνολο του E_1 σύμφωνα με την υπόθεση είναι ανοιχτό.

Αντίστροφα, έστω ότι κάθε συνάρτηση $f: E_1 \rightarrow E_2$ είναι συνεχής. Θεωρούμε τυχόν σύνολο $X \neq \emptyset$, $X \subseteq E_1$ και δυό σημεία x_1, x_2 εν E_2 , με $x_1 \neq x_2$. (Αν $E_1 = \{x\}$ τότε έχουμε τετριμμένη περίπτωση.) Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $f: E_1 \rightarrow E_2$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x_1, & \text{αν } x \in X \\ x_2, & \text{αν } x \in X^c \end{cases},$$

Επειδή $x_1 \neq x_2$, έχουμε $\rho(x_1, x_2) = r > 0$. θέτουμε $A = B(x_1, \frac{r}{2})$. Το A είναι ανοιχτό υποσύνολο του E_2 , με $x_1 \in A$ και $x_2 \notin A$. Τότε, επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής, έχουμε ότι το σύνολο $f^{-1}(A)$ είναι ανοιχτό. Αλλά $f^{-1}(A) = X$. Αποδείχτηκε έτσι ότι κάθε υποσύνολο X του E_1 είναι ανοιχτό. ♦

4.7.2. Ας είναι E_1, E_2 μετρικοί χώροι και $f: E_1 \rightarrow E_2$ μια συνάρτηση. Ν' αποδειχτεί ότι καθεμιά από τις παρακάτω συνθήκες (i) και (ii) είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η f συνεχής.

i) Για κάθε υποσύνολο A του E_2 ισχύει $f^{-1}(A^\circ) \subseteq f^{-1}(A)^\circ$.

ii) Για κάθε υποσύνολο A του E_2 ισχύει $\overline{f^{-1}(A)} \subseteq f^{-1}(\bar{A})$.



Λύση.

$(f \text{ συνεχής}) \Rightarrow (i)$. Έστω ότι η f είναι συνεχής και A τυχόν υποσύνολο του E_2 . Τότε το σύνολο $f^{-1}(A^\circ)$ είναι ανοιχτό αφού η f είναι συνεχής και το A° ανοιχτό. Έτσι:

$$f^{-1}(A^\circ) = (f^{-1}(A^\circ))^\circ \subseteq f^{-1}(A)^\circ.$$

$(i) \Rightarrow (ii)$. Υποθέτουμε ότι για τυχόν υποσύνολο X του E_2 ισχύει $f^{-1}(X^\circ) \subseteq f^{-1}(X)^\circ$. Τότε για κάθε $A, A \subseteq E_2$, έχουμε:

$$f^{-1}(\bar{A}) = f^{-1}(((A^c)^\circ)^c) = f^{-1}((A^c)^\circ)^c.$$

Αλλά από την υπόθεση

$$f^{-1}((A^c)^\circ) \subseteq f^{-1}(A^c)^\circ.$$

Άρα

$$f^{-1}(\bar{A}) \supseteq (((f^{-1}(A))^\circ)^\circ)^c = \overline{f^{-1}(A)}.$$

$(ii) \Rightarrow (f \text{ συνεχής})$. Υποθέτουμε την (ii) και έστω X τυχόν υποσύνολο του E_1 .

Από την (ii) παίρνουμε:

$$\overline{f^{-1}(f(X))} \subseteq f^{-1}(\overline{f(X)}).$$

Άρα

$$f(\bar{X}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(\overline{f(X)}))} \subseteq \overline{f(f^{-1}(\overline{f(X)}))} \subseteq \overline{f(X)},$$

πράγμα που αποδεικνύει τη συνέχεια της f . ♦

4.7.3. Ας είναι $(E_1, \rho_1), (E_2, \rho_2)$ μετρικοί χώροι και $f: E_1 \rightarrow E_2$ μια συνάρτηση. Ονομάζουμε *ταλάντωση* της f τη συνάρτηση $\tau_f: E_1 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$\tau_f(x) = \inf\{\delta(f(B(x, r))) : r > 0\}.$$

Ν' αποδειχτεί ότι:

α) Η f είναι συνεχής στο x αν και μόνο αν $\tau_f(x) = 0$.

β) Για κάθε $b \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in E_1 : \tau_f(x) < b\}$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του E_1 .

Λύση.

α) Έστω ότι η f είναι συνεχής στο σημείο x και ε τυχόν, $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $r > 0$ τέτοιο, ώστε $f(B(x, r)) \subseteq B(f(x), \frac{\varepsilon}{2})$. Άρα

$$\delta(f(B(x, r))) \leq \delta(B(f(x), \frac{\varepsilon}{2})) \leq 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Έτσι, επειδή το ε είναι τυχόν έχουμε $\inf\{\delta(f(B(x, r))) : r > 0\} = 0$.



Αντίστροφα, έστω $\inf\{\delta(f(B(x, r))) : r > 0\} = 0$ και η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x . Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $r > 0$ να υπάρχει y έτσι, ώστε να ισχύουν $Q_1(x, y) < r$ και $Q_2(f(x), f(y)) > \varepsilon$.

Αυτό όμως σημαίνει ότι

$$\inf\{\delta(f(B(x, r))) : r > 0\} \geq \varepsilon > 0,$$

που είναι άτοπο.

β) Έστω $A = \{x \in E_1 : \tau_f(x) < b\}$ και $a \in A$. Τότε

$$\tau_f(a) < b \Rightarrow (\exists r > 0) \delta(f(B(a, r))) < b. \quad (*)$$

Θεωρούμε τυχόν $x \in B(a, r)$. Τότε υπάρχει $r' > 0$ τέτοιο, ώστε $B(x, r') \subseteq B(a, r)$. Άρα:

$$\begin{aligned} B(x, r') \subseteq B(a, r) &\Rightarrow f(B(x, r')) \subseteq f(B(a, r)) \Rightarrow f(B(x, r')) \subseteq f(B(a, r)) \\ &\Rightarrow \delta(f(B(x, r'))) \leq \delta(f(B(a, r))). \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση όμως, λόγω της (*), δίνει $\delta(f(B(x, r'))) < b$ και άρα

$$\tau_f(x) < b.$$

Επομένως $x \in A$ και, αφού το x είναι τυχόν εν $B(a, r)$, έχουμε τελικά

$$B(a, r) \subseteq A,$$

που αποδεικνύει ότι το A είναι ανοιχτό. ♦

4.7.4. Ας είναι (E_1, Q_1) , (E_2, Q_2) δύο μετρικοί χώροι και $f: E_1 \rightarrow E_2$ τυχούσα συνάρτηση. Ν' αποδειχτεί ότι αν η συνάρτηση f είναι συνεχής τότε για κάθε υποσύνολο X του E_1 ισχύει: $f(\bar{X}) \subseteq \overline{f(X)}$. (Να δοθεί μια απόδειξη χωρίς τη βοήθεια των ακολουθιών)

Λύση.

Έστω X τυχόν υποσύνολο του E_1 . Επειδή το σύνολο $\overline{f(X)}$ είναι κλειστό στον E_2 και η συνάρτηση f συνεχής, το σύνολο $f^{-1}(\overline{f(X)})$ είναι κλειστό στον E_1 . Άρα

$$\overline{f^{-1}(\overline{f(X)})} = f^{-1}(\overline{f(X)}).$$

Επίσης

$$X \subseteq f^{-1}(f(X)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(X)})$$

και έτσι

$$\bar{X} \subseteq \overline{f^{-1}(\overline{f(X)})} = f^{-1}(\overline{f(X)}),$$

οπότε

$$f(\bar{X}) \subseteq f(f^{-1}(\overline{f(X)})) \subseteq \overline{f(X)}. \quad \blacklozenge$$



4.7.5. Ν' αποδειχτεί ότι η εικόνα ενός ανοιχτού συνόλου μέσω μιας προβολής ενός καρτεσιανού μετρικού χώρου είναι ανοιχτό σύνολο. Ν' αποδειχτεί με κατάλληλο παράδειγμα ότι δεν ισχύει το ίδιο για κλειστά σύνολα.

Λύση.

Εστω X ένα ανοιχτό υποσύνολο του καρτεσιανού μετρικού χώρου (E, ρ) των μετρικών χώρων (E_i, ρ_i) , $i=1, \dots, n$ και $p_i: E \rightarrow E_i$ η i -προβολή του E . Θεωρούμε τυχόν σημείο $z \in p_i(X)$ και ένα σημείο $x \in X$ με $p_i(x) = z$. Επειδή το X είναι ανοιχτό, υπάρχει $r > 0$ τέτοιο, ώστε $B(x, r) \subseteq X$.

Θεωρούμε τώρα τυχόν σημείο $w \in B(z, r)$ και ένα $y \in E$ τέτοιο, ώστε $p_i(y) = w$ και $p_j(y) = p_j(x)$, $j \neq i$. Τότε έχουμε:

$$\rho(x, y) = \rho_i(p_i(x), p_i(y)) = \rho_i(z, w) < r.$$

Άρα

$$y \in B(x, r) \Rightarrow p_i(y) \in p_i(B(x, r)) \Rightarrow w \in p_i(B(x, r)).$$

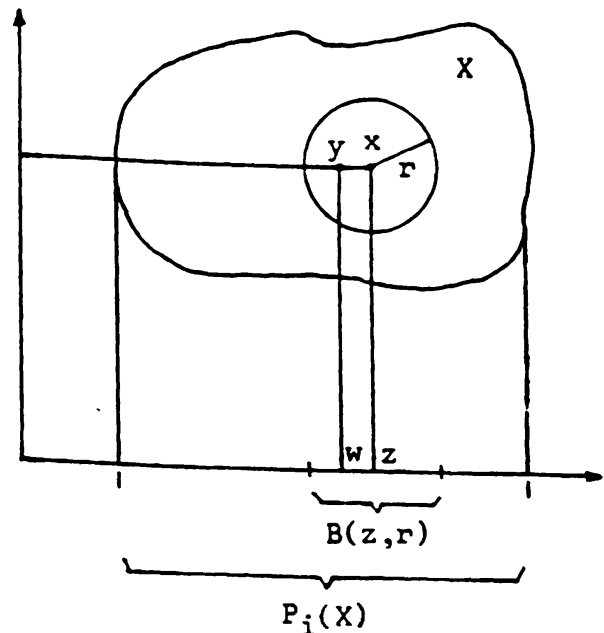
Ετσι, τελικά

$$B(z, r) \subseteq p_i(B(x, r)) \subseteq p_i(X).$$

Άρα το $p_i(X)$ είναι ανοιχτό, ως περιοχή του τυχόντος σημείου του z .

Αν το X είναι κλειστό σύνολο, το $p_i(X)$ δεν είναι εν γένει κλειστό σύνολο. Πράγματι

έστω ο ευκλείδειος μετρικός χώρος $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$ και το υποσύνολό του $X = \{(x, \frac{1}{x}) : 0 < x \leq 1\}$. Το σύνολο X είναι προφανώς κλειστό ενώ το $p_1(X) = (0, 1]$ δεν είναι κλειστό. ♦



4.7.6. Ας είναι E_1, E_2 , μετρικοί χώροι και $f: E_1 \rightarrow E_2$ μια συνάρτηση. Όπως είναι γνωστό, η συνάρτηση f λέγεται ανοιχτή (αντίστοιχα κλειστή) αν η εικόνα κάθε ανοιχτού (αντίστοιχα κλειστού) εν E_1 συνόλου είναι ανοιχτό (αντίστοιχα κλειστό) εν E_2 σύνολο.

α) Να βρεθεί μια συνεχής, κλειστή και όχι ανοιχτή συνάρτηση.

β) Να βρεθεί μια συνεχής, ανοιχτή και όχι κλειστή συνάρτηση.

γ) Να βρεθεί μια ανοιχτή, κλειστή αλλά όχι συνεχής συνάρτηση.

δ) Ν' αποδειχτεί ότι αν η f είναι αμφιμονοσήμαντη και επί η f είναι ανοιχτή αν και μόνο αν η f είναι κλειστή ή αν και μόνο αν η f^{-1} είναι συνεχής.

Λύση.

α) Η συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}$, με τύπο $f(x)=[x]$, όπου $[x]$ είναι το ακέραιο μέρος του x , είναι συνεχής. Πραγματικά, έστω $x_0 \in \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}$. Τότε υπάρχει ακέραιος m τέτοιος, ώστε $x_0 \in (m, m+1)$ και επομένως $f(x_0)=m$. Έτσι, για τυχούσα ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ με $\lim_{n \in \mathbf{N}} x_n = x_0$, μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $x_n \in (m, m+1)$ για όλα τα $n \in \mathbf{N}$. Έτσι, έχουμε $f(x_n)=m$ για όλα τα $n \in \mathbf{N}$ και έτσι

$$\lim_{n \in \mathbf{N}} f(x_n) = m = f(x_0),$$

πράγμα που αποδεικνύει ότι η f είναι συνεχής. Το ότι η f είναι κλειστή είναι προφανές.

Επιπλέον, η f δεν είναι ανοιχτή συνάρτηση γιατί παραδείγματος χάρη το σύνολο

$$f\left(\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)\right) = \{0\}$$

δεν είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbf{R}$.

β) Σύμφωνα με την Εφαρμογή 4.4.4.(ii) και την προηγούμενη Άσκηση 4.7.5., κάθε προβολή ενός καρτεσιανού μετρικού χώρου είναι συνεχής, ανοιχτή και όχι κλειστή συνάρτηση.

γ) Η συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}$, με τύπο $f(x)=[x]$, όπου $[x]$ είναι το ακέραιο μέρος του x , είναι ανοιχτή και κλειστή συνάρτηση αφού κάθε υποσύνολο του $\mathbf{Z}$ είναι ανοιχτό και κλειστό ταυτόχρονα υποσύνολο του $\mathbf{Z}$. Επιπλέον, η f είναι φανερό ότι δεν είναι συνεχής στα σημεία του $\mathbf{Z}$. πράγματι η ακολουθία $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$, έχει όριο το 1 και ταυτόχρονα

$$\lim_{n \in \mathbf{N}} f(a_n) = 0 \neq 1 = f(1).$$

δ) Έστω $f: E_1 \rightarrow E_2$ ανοιχτή συνάρτηση και A ένα κλειστό υποσύνολο του E_1 . Τότε, επειδή η f είναι ανοιχτή το σύνολο $f(A^c)$ είναι ανοιχτό. Επιπλέον, επειδή η f είναι αμφιμονοσήμαντη και επί, έχουμε

$$f(A) = f((A^c)^c) = (f(A^c))^c.$$

Αλλά, επειδή το σύνολο $f(A^c)$ είναι ανοιχτό, το $(f(A^c))^c$ είναι κλειστό σύνολο, δηλαδή η f είναι κλειστή συνάρτηση. Το ανίστροφο είναι προφανές επειδή η f είναι αμφιμονοσήμαντη και επί.

Επίσης, επειδή όταν η f είναι αμφιμονοσήμαντη και επί, είναι φανερό η ισοδυναμία

$$f \text{ ανοιχτή} \Leftrightarrow f^{-1} \text{ συνεχής},$$

η απόδειξη είναι πλήρης. ♦



4.7.7. Ας είναι $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Ν' αποδειχτεί ότι υπάρχουν σταθερές $a, b \in \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε: $|f(x)| \leq a|x| + b, x \in \mathbb{R}^n$.

Λύση.

Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε:

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1. (*)$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει μοναδικός φυσικός αριθμός k τέτοιος, ώστε

$$k \leq \frac{|x|}{\delta} < k+1. (**)$$

Θέτουμε $x_0 = 0, x_1 = \frac{\delta x}{|x|}, \dots, x_k = k \frac{\delta x}{|x|}$.

Τότε για κάθε ακέραιο $m, 0 \leq m < k-1$, έχουμε

$$|x_{m+1} - x_m| = \left| (m+1) \frac{\delta x}{|x|} - m \frac{\delta x}{|x|} \right| = \left| \frac{\delta x}{|x|} \right| = \delta$$

και λόγω της (**)

$$|x - x_k| = \left| x - k \frac{\delta x}{|x|} \right| = |x| - k\delta < \delta.$$

Έτσι, από την (*) προκύπτει

$$|f(x_{m+1}) - f(x_m)| < 1 \text{ για κάθε ακέραιο } m, 0 \leq m \leq k-1,$$

και

$$|f(x) - f(x_k)| \leq 1.$$

Άρα

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(0) + (f(x_1) - f(0)) + (f(x_2) - f(x_1)) + \dots + (f(x_k) - f(x_{k-1})) + (f(x) - f(x_k))| \\ &\leq |f(0)| + (k+1) \leq |f(0)| + 1 + \frac{|x|}{\delta}. \end{aligned}$$

Επομένως υπάρχουν σταθερές $a = \frac{1}{\delta}$ και $b = |f(0)| + 1$ τέτοιες ώστε

$$|f(x)| \leq a|x| + b, x \in \mathbb{R}^n. \blacklozenge$$

4.7.8. Ας είναι E_1, E_2 μετρικοί χώροι και $f: E_1 \rightarrow E_2$ μια συνάρτηση. Ν' αποδειχτεί ότι η f είναι συνεχής αν και μόνο αν η συνάρτηση $g: E_1 \rightarrow G_f \subseteq E_1 \times E_2$, με τύπο $g(x) = (x, f(x))$ είναι ομοιομορφισμός.

Λύση.

Η συνάρτηση g είναι άμφιμονοσήμαντη. Πραγματικά

$$g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow (x_1, f(x_1)) = (x_2, f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2.$$



Επιπλέον, η συνάρτηση g^{-1} είναι η πρώτη προβολή του G_f που, όπως είναι γνωστό, είναι συνεχής συνάρτηση. Έτσι, αν η f είναι συνεχής συνάρτηση τότε είναι φανερό ότι και η g είναι το ίδιο και επομένως η g είναι τότε ομοιομορφισμός.

Αντίστροφα, αν η g είναι ομοιομορφισμός, τότε και η $f=p_2 \circ g$, όπου $p_2 : G_f \rightarrow E_2$, η δεύτερη προβολή του G_f , είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. ♦

4.8. Ασκήσεις

1. Ας είναι (E, ρ) ένας μετρικός χώρος, $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ ο ευκλείδειος μετρικός χώρος, $f:E \rightarrow \mathbf{R}$ μια συνεχής συνάρτηση στο $a \in E$, με $f(a) > 0$. Ν' αποδειχτεί ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in B(a, \delta)$.

2. Ας είναι X ένας μετρικός χώρος, E ο καρτεσιανός μετρικός χώρος των μετρικών χώρων (E_i, ρ_i) , $i=1, \dots, n$ και $f : E \rightarrow X$ τυχούσα συνάρτηση. Ν' αποδειχτεί ότι αν η f είναι συνεχής στο σημείο $a=(a_1, \dots, a_n) \in E$, τότε για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$ και η συνάρτηση $f_i : E_i \rightarrow X$ με τύπο $f_i(x)=f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$ είναι συνεχής στο a_i .

Με κατάλληλο παράδειγμα ν' αποδειχτεί ότι δεν ισχύει γενικά το αντίστροφο.

3. Ας είναι E ένας μετρικός χώρος, A τυχόν μη κενό υποσύνολο του E και $\chi_A : E \rightarrow \mathbf{R}$, η χαρακτηριστική συνάρτηση του A . Ν' αποδειχτεί ότι:

$$\chi_A \text{ συνεχής στο σημείο } x_0 \in E \Leftrightarrow x_0 \notin \partial A.$$

4. Έστω $f: (\mathbf{R}^m, |\cdot|) \rightarrow (\mathbf{R}^n, |\cdot|)$ (m, n είναι φυσικοί αριθμοί) μια συνάρτηση τέτοια, ώστε $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για τυχόντα $x, y \in \mathbf{R}^m$. Ν' αποδειχτεί ότι αν η f είναι συνεχής στο σημείο 0 (μηδέν), τότε είναι συνεχής παντού στο $\mathbf{R}^m$.

5. Ας είναι f και g συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού ένα μετρικό χώρο E . Ν' αποδειχτεί ότι τα σύνολα

$$\{x \in E: f(x)=0\}, \{x \in E: f(x)=g(x)\} \text{ και } \{x \in E: f(x) \leq g(x)\}$$

είναι κλειστά υποσύνολα του E .

6. Έστω $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ η συνάρτηση με τύπο $f(x)=[x]$ (ακέραιο μέρος του x). Ν' αποδειχτεί ότι η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbf{R} - \mathbf{Z}$ ενώ είναι μη συνεχής σε κάθε



σημείο του $\mathbf{Z}$, των $\mathbf{R}-\mathbf{Z}$ και $\mathbf{Z}$ θεωρουμένων ως μετρικών υποχώρων του ευκλείδειου χώρου $(\mathbf{R}, |\cdot|)$.

7. Έστω E ένας μετρικός χώρος και A τυχόν υποσύνολο του E . Ν' αποδειχτεί ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση του A είναι συνεχής αν και μόνο αν το A είναι ανοιχτό και κλειστό.

8. Ας είναι A και B μη κενά κλειστά και ξένα υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (E, ρ) . Ν' αποδειχτεί ότι ο τύπος

$$f(x) = \frac{\rho(x, A) - \rho(x, B)}{\rho(x, A) + \rho(x, B)},$$

ορίζει μια συνάρτηση $f: E \rightarrow \mathbf{R}$, με τις ιδιότητες:

i) Η f είναι συνεχής.

$$\text{ii) } f(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } x \in A \\ 1, & \text{αν } x \in B \end{cases},$$

iii) $-1 < f(x) < 1, x \in A^c \cap B^c$.

9. Να δοθεί παράδειγμα μετρικών χώρων E_1, E_2 , συνεχούς συνάρτησης $f: E_1 \rightarrow E_2$ και ανοιχτού συνόλου A στο E_2 τέτοιων, ώστε το σύνολο $f^{-1}(\bar{A})$, να είναι διαφορετικό από το $\overline{f^{-1}(A)}$.

10. Ας είναι E_1, E_2 μετρικοί χώροι και $f: E_1 \rightarrow E_2$ μια συνάρτηση. Τότε, να δοθεί μια απόδειξη των παρακάτω χωρίς τη χρήση των ακολουθιών.

α) Αν $A_i, i \in I$ είναι μια οικογένεια ανοιχτών υποσυνόλων του E_1 , τέτοια, ώστε $E_1 = \bigcup_{i \in I} A_i$ και για κάθε $i \in I$ η συνάρτηση $f|_{A_i}$ είναι συνεχής, τότε και η f είναι συνεχής συνάρτηση.

β) Αν $A_i, i \in I$ είναι μια πεπερασμένη οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του E_1 , τέτοια, ώστε $E_1 = \bigcup_{i \in I} A_i$ και για κάθε $i \in I$ η συνάρτηση $f|_{A_i}$ είναι συνεχής, τότε και η f είναι συνεχής συνάρτηση.

11. Ας είναι E_1, E_2 , μετρικοί χώροι και $f: E_1 \rightarrow E_2$ μια συνάρτηση. Τότε η f είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε $x \in E_1$ υπάρχει μια περιοχή $U(x)$ του x τέτοια, ώστε η $f|_{U(x)}$ να είναι συνεχής.



12. Ας είναι E_1, E_2 , μετρικοί χώροι, $f: E_1 \rightarrow E_2$ μια συνάρτηση και $A \subseteq E_2$ τέτοιο, ώστε $f(E_1) \subseteq A$. Ν' αποδειχτεί ότι η f είναι συνεχής αν και μόνο αν η συνάρτηση $f: E_1 \rightarrow A$ είναι συνεχής.

13. Ας είναι E_1, E_2 , μετρικοί χώροι και $f: E_1 \rightarrow E_2$ μια συνάρτηση. Ν' αποδειχτεί ότι αν η f είναι συνεχής τότε $\partial(f^{-1}(A)) \subseteq f^{-1}(\partial A)$ για κάθε $A \subseteq E_2$.

14. Ας είναι $(E_1, \rho_1), (E_2, \rho_2)$ μετρικοί χώροι και $f: E_1 \rightarrow E_2$ μια συνάρτηση. Ν' αποδειχτεί ότι η f είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ του E_1 , συγκλίνουσα εν E_1 , η $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα εν E_2 .

15. Ας είναι E_1, E_2 μετρικοί χώροι και $f: E_1 \rightarrow E_2$ μια συνάρτηση που ο περιορισμός της σε κάθε φραγμένο υποσύνολο του E_1 είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Ν' αποδειχτεί ότι αν $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια βασική ακολουθία στον E_1 , τότε η $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία στον E_2 .

16. Ν' αποδειχτεί ότι η εικόνα ενός ανοιχτού συνόλου μέσω μιας προβολής ενός καρτεσιανού μετρικού χώρου είναι ανοιχτό σύνολο. Ν' αποδειχτεί με κατάλληλο παράδειγμα ότι δεν ισχύει το ίδιο για κλειστά σύνολα.

17. Ν' αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $f: (\mathbb{R}, |\cdot|) \xrightarrow{\text{επί}} (\mathbb{R}, |\cdot|)$, με τύπο $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση ενώ είναι ομοιομορφισμός.

18. Ας είναι E_1, E_2 , μετρικοί χώροι, $f: E_1 \xrightarrow{\text{επί}} E_2$ μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση και $(A_i)_{i \in I}$ μια ανοιχτή κάλυψη του E_2 . Αν για κάθε $i \in I$ η συνάρτηση $f|_{f^{-1}(A_i)}$ είναι ομοιομορφισμός του επί του A_i , ν' αποδειχτεί ότι η f είναι ομοιομορφισμός του E_1 επί του E_2 .

19. Ας είναι E_1, E_2 μετρικοί χώροι και $f: E_1 \xrightarrow{\text{επί}} E_2$ μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση. Ν' αποδειχτεί ότι η f είναι ομοιομορφισμός αν και μόνο αν για κάθε υποσύνολο A του E_1 ισχύει $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f: ([-2, -1] \cup [1, 2], |\cdot|) \rightarrow ([-1, 1], |\cdot|)$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -2 \leq x < -1 \\ x-1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}.$$



Ν' αποδειχτεί ότι η f είναι συνεχής και αμφιμονοσήμαντη αλλά όχι ομοιομορφισμός.

21. Ας είναι (E, ρ) ένας μετρικός χώρος και X τυχόν σύνολο που έχει την ίδια ισχύ με το E . Ν' αποδειχτεί ότι υπάρχουν μια μετρική d στο X και μια συνάρτηση $f: (E, \rho) \rightarrow (X, d)$, έτσι, ώστε η f να είναι ομοιομορφισμός.

23. Ν' αποδειχτεί ότι μια συνάρτηση αμφιμονοσήμαντη, επί και ομοιόμορφα συνεχής μεταξύ δύο μετρικών χώρων, δεν είναι πάντοτε ισομετρία.

24. Έστω (E, ρ) ένας μετρικός χώρος. Ν' αποδειχτεί ότι το σύνολο των ισομετριών του E επί του E , εφοδιασμένο με πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων, είναι ομάδα και, επιπλέον, ότι το σύνολο των ομοιομορφισμών είναι υποομάδα της παραπάνω ομάδας.

25. Να βρεθεί παράδειγμα μετρικού χώρου που να είναι ισομετρικός προς ένα γνήσιο υπόχωρό του.

26. Έστω $f: (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ μια συνάρτηση συνεχής, αμφιμονοσήμαντη και επί. Ν' αποδειχτεί ότι η f είναι ομοιομορφισμός.

27. Έστω (E, ρ) ένας μετρικός χώρος. Μια συνάρτηση $f: E \rightarrow E$ λέγεται **στροφή** αν υπάρχει $x \in E$ τέτοιο, ώστε

$$\rho(x, y) = \rho(x, f(y)) \text{ για κάθε } y \in E.$$

Το σημείο x λέγεται **κέντρο της στροφής**. Ν' αποδειχτεί ότι αν η στροφή f είναι επιπλέον ισομετρία, τότε το σύνολο των κέντρων της στροφής f ταυτίζεται με το σύνολο των σταθερών σημείων της f και, επιπλέον, το σύνολο αυτό είναι κλειστό υποσύνολο του E .



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

τοπολογία μετρικών χώρων

5.1. Ορισμός της Τοπολογίας

Ονομάζουμε **τοπολογία (topology)** ενός μετρικού χώρου (E, ρ) τη συλλογή όλων των ανοιχτών υποσυνόλων του E .

Η τοπολογία ενός μετρικού χώρου είναι πάντοτε μη κενό σύνολο γιατί, όπως είναι γνωστό, σε κάθε μετρικό χώρο E τα σύνολα E και $\emptyset$ είναι πάντοτε ανοιχτά σύνολα και άρα μέλη της τοπολογίας.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{T}$ την τοπολογία ενός μετρικού χώρου. Για την $\mathcal{T}$ είναι ήδη γνωστές οι εξής ιδιότητες:

- i) Αν C είναι τυχούσα υποσυλλογή της $\mathcal{T}$, τότε: $\cup C \in \mathcal{T}$
- ii) Αν C είναι πεπερασμένη υποσυλλογή της $\mathcal{T}$, τότε: $\cap C \in \mathcal{T}$.



Είναι φανερό ότι η τοπολογία $\mathcal{T}$ ενός μετρικού χώρου (E, ρ) εξαρτάται από τη μετρική ρ . Για παράδειγμα, η τοπολογία του διακριτού μετρικού χώρου $(\mathbf{R}, \rho)$ συμπίπτει με το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ του $\mathbf{R}$ (Βλέπε 1.12.2.), πράγμα που δε συμβαίνει για το μετρικό χώρο $(\mathbf{R}, |\cdot|)$. Για το λόγο αυτό και ειδικότερα όταν θέλουμε να υποδηλώσουμε και τη μετρική από την οποία προέρχεται η τοπολογία, συμβολίζουμε με $\mathcal{T}_\rho$ την τοπολογία του μετρικού χώρου (E, ρ) .

Αν ρ_1, ρ_2 είναι μετρικές στο ίδιο σύνολο E , λέμε ότι οι μετρικές ρ_1, ρ_2 είναι **ισοδύναμες (equivalent)** αν $\mathcal{T}_{\rho_1} = \mathcal{T}_{\rho_2}$.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{N}_\rho$ το σύνολο των περιοχών όλων των σημείων ενός μετρικού χώρου (E, ρ) . Προφανώς ισχύει $\mathcal{T}_\rho \subseteq \mathcal{N}_\rho$.

5.1.1. ΠΡΟΤΑΣΗ. Δύο μετρικές ρ_1, ρ_2 στο ίδιο σύνολο E είναι ισοδύναμες αν και μόνο αν $\mathcal{N}_{\rho_1} = \mathcal{N}_{\rho_2}$.

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι οι μετρικές, είναι ισοδύναμες και για ένα τυχαίο $a \in E$, θεωρούμε μια περιοχή $U(a) \in \mathcal{N}_{\rho_1}$. Τότε υπάρχει σφαιρική περιοχή $B_{\rho_1}(a, r)$, $r > 0$, $(B_{\rho_1}(a, r) = \{x \in E: \rho_1(x, a) < r\})$ τέτοια, ώστε $B_{\rho_1}(a, r) \subseteq U(a)$. Αλλά η σφαιρική περιοχή $B_{\rho_1}(a, r)$ είναι ανοιχτό σύνολο στο μετρικό χώρο (E, ρ_1) , δηλαδή $B_{\rho_1}(a, r) \in \mathcal{T}_{\rho_1}$. Επειδή όμως οι μετρικές ρ_1, ρ_2 είναι ισοδύναμες, δηλαδή $\mathcal{T}_{\rho_1} = \mathcal{T}_{\rho_2}$, παίρνουμε $B_{\rho_1}(a, r) \in \mathcal{T}_{\rho_2}$. Άρα υπάρχει σφαιρική περιοχή $B_{\rho_2}(a, r')$, $r' > 0$ ($B_{\rho_2}(a, r') = \{x \in E: \rho_2(x, a) < r'\}$) με $B_{\rho_2}(a, r') \subseteq B_{\rho_1}(a, r)$, οπότε, λόγω της σχέσης $B_{\rho_1}(a, r) \subseteq U(a)$, παίρνουμε $B_{\rho_2}(a, r') \subseteq U(a)$. Αλλά, η τελευταία σχέση σημαίνει ότι $U(a) \in \mathcal{N}_{\rho_2}$. Έτσι αποδείχτηκε ότι $\mathcal{N}_{\rho_1} \subseteq \mathcal{N}_{\rho_2}$. Λόγω της συμμετρίας των υποθέσεων παίρνουμε και $\mathcal{N}_{\rho_2} \subseteq \mathcal{N}_{\rho_1}$. Άρα τελικά $\mathcal{N}_{\rho_1} = \mathcal{N}_{\rho_2}$.

Αντίστροφα, έστω $\mathcal{N}_{\rho_1} = \mathcal{N}_{\rho_2}$ και A τυχόν ανοιχτό υποσύνολο του (E, ρ_1) , δηλαδή $A \in \mathcal{T}_{\rho_1}$. Τότε για τυχόν $a \in A$, υπάρχει περιοχή $U(a) \in \mathcal{N}_{\rho_1}$ με $U(a) \subseteq A$. Επειδή όμως $\mathcal{N}_{\rho_1} = \mathcal{N}_{\rho_2}$ παίρνουμε ότι $U(a) \in \mathcal{N}_{\rho_2}$ και $U(a) \subseteq A$. Επειδή αυτό συμβαίνει για κάθε $a \in A$ έχουμε ότι $A \in \mathcal{T}_{\rho_2}$, δηλαδή $\mathcal{T}_{\rho_1} \subseteq \mathcal{T}_{\rho_2}$. Όμοια παίρνουμε και $\mathcal{T}_{\rho_2} \subseteq \mathcal{T}_{\rho_1}$ οπότε, τελικά $\mathcal{T}_{\rho_1} = \mathcal{T}_{\rho_2}$. ♦

Αν ρ_1, ρ_2 είναι μετρικές στο ίδιο σύνολο E , τότε, όπως είναι γνωστό (Βλέπε 4.2.10.), η ταυτοτική συνάρτηση $i_E : (E, \rho_1) \rightarrow (E, \rho_2)$ δεν είναι γενικά συνεχής συνάρτηση.



Η επόμενη πρόταση μας δίνει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η ταυτοτική συνάρτηση να είναι συνεχής.

5.1.2. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ας είναι Q_1, Q_2 μετρικές στο ίδιο σύνολο E . Η ταυτοτική συνάρτηση $i_E : (E, Q_1) \rightarrow (E, Q_2)$ είναι συνεχής αν και μόνο αν $\mathcal{T}_{Q_2} \subseteq \mathcal{T}_{Q_1}$.

Απόδειξη.

Έστω ότι $\mathcal{T}_{Q_2} \subseteq \mathcal{T}_{Q_1}$, και A τυχόν ανοιχτό υποσύνολο του μετρικού χώρου (E, Q_2) . Τότε, $A \in \mathcal{T}_{Q_2}$ και, επειδή $\mathcal{T}_{Q_2} \subseteq \mathcal{T}_{Q_1}$, $A \in \mathcal{T}_{Q_1}$. Επειδή όμως $i_E^{-1}(A) = A \in \mathcal{T}_{Q_1}$, δηλαδή το $i_E^{-1}(A)$ είναι ανοιχτό στον μετρικό χώρο (E, Q_1) , παίρνουμε ότι η i_E είναι συνεχής.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η συναρτηση i_E είναι συνεχής. Έστω, επιπλέον, A τυχόν ανοιχτό υποσύνολο του χώρου (E, Q_2) , δηλαδή $A \in \mathcal{T}_{Q_2}$. Τότε όμως, επειδή η i_E είναι συνεχής, παίρνουμε ότι το σύνολο $i_E^{-1}(A)$ είναι ανοιχτό στο μετρικό χώρο (E, Q_1) , δηλαδή $i_E^{-1}(A) = A \in \mathcal{T}_{Q_1}$. Άρα $\mathcal{T}_{Q_2} \subseteq \mathcal{T}_{Q_1}$. ♦

5.1.3. ΠΡΟΤΑΣΗ. Δυο μετρικές Q_1, Q_2 στο ίδιο σύνολο E είναι ισοδύναμες αν και μόνο αν η ταυτοτική συνάρτηση $i_E : (E, Q_1) \rightarrow (E, Q_2)$ είναι ομοιομορφισμός.

Απόδειξη.

Έστω ότι οι μετρικές Q_1, Q_2 είναι ισοδύναμες, δηλαδή $\mathcal{T}_{Q_1} = \mathcal{T}_{Q_2}$. Τότε έχουμε $\mathcal{T}_{Q_2} \subseteq \mathcal{T}_{Q_1}$ και άρα σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, η i_E είναι συνεχής. Όμοια, από τη σχέση $\mathcal{T}_{Q_1} = \mathcal{T}_{Q_2}$, παίρνουμε $\mathcal{T}_{Q_1} \subseteq \mathcal{T}_{Q_2}$ και πάλι από την προηγούμενη πρόταση, η i_E^{-1} είναι συνεχής. Έτσι, επειδή επιπλέον η i_E είναι αμφιμονοσήμαντη και επί, η i_E είναι ομοιομορφισμός.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις i_E και i_E^{-1} είναι συνεχείς. Τότε, από την προηγούμενη πρόταση, παίρνουμε $\mathcal{T}_{Q_1} \subseteq \mathcal{T}_{Q_2}$ και $\mathcal{T}_{Q_2} \subseteq \mathcal{T}_{Q_1}$ δηλαδή τελικά $\mathcal{T}_{Q_1} = \mathcal{T}_{Q_2}$, που σημαίνει ότι οι μετρικές Q_1, Q_2 είναι ισοδύναμες. ♦

5.1.4. ΠΡΟΤΑΣΗ. Δυο μετρικές Q_1, Q_2 στο ίδιο σύνολο E είναι ισοδύναμες αν και μόνο αν το σύνολο των Q_1 -συγκλινουσών ακολουθιών του E ταυτίζεται με το σύνολο των Q_2 -συγκλινουσών ακολουθιών του.

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι οι ϱ_1, ϱ_2 είναι ισοδύναμες και ότι $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ϱ_1 -συγκλίνουσα ακολουθία του E , με $\varrho_1\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = \ell$. Έστω, επιπλέον, $U(\ell)$ τυχούσα περιοχή του ℓ στο μετρικό χώρο (E, ϱ_2) , δηλαδή $U(\ell) \in \mathcal{N}_{\varrho_2}$. Επειδή όμως οι μετρικές ϱ_1 και ϱ_2 είναι ισοδύναμες, έχουμε $\mathcal{N}_{\varrho_1} = \mathcal{N}_{\varrho_2}$ (Βλέπε Πρόταση 5.1.1.), οπότε $U(\ell) \in \mathcal{N}_{\varrho_1}$. Ακόμη, επειδή $\varrho_1\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = \ell$, έχουμε ότι αν $\alpha_n \in U(\ell)$ τελικά για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Άρα έχουμε ότι $\alpha_n \in U(\ell)$ τελικά για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και για τυχούσα περιοχή $U(\ell) \in \mathcal{N}_{\varrho_2}$, που σημαίνει $\varrho_2\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = \ell$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι κάθε ϱ_1 -συγκλίνουσα ακολουθία στον E είναι και ϱ_2 -συγκλίνουσα. Τότε, σύμφωνα με την Εφαρμογή 2.4.4., για κάθε ακολουθία $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στον E ισχύει

$$\varrho_1\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = \ell \Leftrightarrow \varrho_2\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = \ell.$$

Έτσι, αν θεωρήσουμε την ταυτοτική συνάρτηση $i_E : (E, \varrho_1) \rightarrow (E, \varrho_2)$, έχουμε ότι για κάθε $x \in E$ και για κάθε ακολουθία $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στον E ισχύει

$$\varrho_1\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = x \Rightarrow \varrho_2\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = x \Rightarrow \varrho_2\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} i_E(\alpha_n) = i_E(x).$$

που σημαίνει ότι η συνάρτηση i_E είναι συνεχής. Όμοια αποδεικνύεται ότι και η συνάρτηση $i_E^{-1} : (E, \varrho_2) \rightarrow (E, \varrho_1)$ είναι συνεχής. Άρα, αφού η i_E είναι επιπλέον αμφιμονοσήμαντη και επί, είναι τελικά ομοιομορφισμός. Αυτό, σύμφωνα με την Πρόταση 5.1.3., σημαίνει ότι οι μετρικές ϱ_1, ϱ_2 είναι ισοδύναμες. ♦

5.1.5. ΠΟΡΙΣΜΑ. Αν ϱ_1, ϱ_2 είναι μετρικές στο ίδιο σύνολο E και A, B είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε για κάθε x, y στο E να ισχύει

$$A \varrho_1(x, y) \leq \varrho_2(x, y) \leq B \varrho_1(x, y),$$

τότε οι μετρικές ϱ_1, ϱ_2 είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη.

Αρκεί ν' αποδείξουμε ότι κάθε ϱ_1 -συγκλίνουσα ακολουθία του E είναι και ϱ_2 -συγκλίνουσα και αντίστροφα.

Έστω $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία στον E με $\varrho_1\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = \ell$, $\ell \in E$. Τότε, από τη σχέση

$$0 \leq \varrho_2(\alpha_n, \ell) \leq B \varrho_1(\alpha_n, \ell), \quad n \in \mathbb{N}.$$



παίρνουμε

$$0 \leq \lim_{v \in \mathbb{N}} Q_2(a_v, \ell) \leq B \lim_{v \in \mathbb{N}} Q_1(a_v, \ell) = B \cdot 0 = 0.$$

δηλαδή $\lim_{v \in \mathbb{N}} Q_2(a_v, \ell) = 0$ ή, ισοδύναμα, $Q_2\text{-}\lim_{v \in \mathbb{N}} a_v = \ell$.

Ανάλογα αποδεικνύουμε ότι

$$Q_2\text{-}\lim_{v \in \mathbb{N}} a_v = \ell \Rightarrow Q_1\text{-}\lim_{v \in \mathbb{N}} a_v = \ell. \quad \blacklozenge$$

5.2. Παραδείγματα - Εφαρμογές

5.2.1. Στον καρτεσιανό μετρικό χώρο $E = \times_{i=1}^n E_i$ των μετρικών χώρων $(E_i, Q_i), i = 1, \dots, n$, οι μετρικές Q, Q', Q'' με τύπους:

$$Q(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n Q_i^2(x_i, y_i)},$$

$$Q'(x, y) = \max_i Q_i(x_i, y_i),$$

$$Q''(x, y) = \sum_{i=1}^n Q_i(x_i, y_i),$$

είναι ισοδύναμες μετρικές.

Απόδειξη.

Όπως είναι γνωστό (Βλέπε 1.3.7.), για τις μετρικές αυτές ισχύουν οι σχέσεις:

$$Q'(x, y) \leq Q(x, y) \leq \sqrt{n} Q'(x, y) \quad \text{και} \quad \frac{1}{n} Q''(x, y) \leq Q(x, y) \leq Q''(x, y).$$

Οι σχέσεις αυτές, σε συνδυασμό με το Πρόγραμμα 5.1.5., δίνουν αμέσως το ζητούμενο. $\blacklozenge$

5.2.2. Έστω (E, Q) ένας μετρικός χώρος. Είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $\tau: E \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $\tau(x, y) = \frac{Q(x, y)}{1+Q(x, y)}$ είναι μια μετρική στο E (Βλέπε 1.3.6.).

Επιπλέον, οι μετρικές Q, τ είναι ισοδύναμες.



Απόδειξη.

Έστω ότι για τυχούσα ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο E , έχουμε $q\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell$, δηλαδή

$\lim_{n \in \mathbb{N}} q(a_n, \ell) = 0$. Τότε, από την προφανή σχέση $\tau(a_n, \ell) \leq q(a_n, \ell)$, $n \in \mathbb{N}$, παίρνουμε ότι

$\lim_{n \in \mathbb{N}} \tau(a_n, \ell) = 0$ ή, ισοδύναμα, $\tau\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell$.

Αντίστροφα, έστω $\tau\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell$. Τότε έχουμε $\lim_{n \in \mathbb{N}} \tau(a_n, \ell) = 0$. Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\tau(a_n, \ell) \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Επομένως έχουμε $\frac{\tau(a_n, \ell)}{1 - \tau(a_n, \ell)} = q(a_n, \ell)$, $n \in \mathbb{N}$ και έτσι

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \frac{\tau(a_n, \ell)}{1 - \tau(a_n, \ell)} = \frac{0}{1 - 0} = 0 \Rightarrow \lim_{n \in \mathbb{N}} q(a_n, \ell) = 0 \Rightarrow q\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell. \blacklozenge$$

Αν και οι μετρικές q, τ είναι ισοδύναμες και ισχύει ότι $\tau(x, y) \leq q(x, y)$ για τυχόντα $x, y \in E$, δεν υπάρχει $B > 0$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $q(x, y) \leq B \tau(x, y)$ για όλα τα $x, y \in E$. Πραγματικά, αν υπήρχε τέτοιο B θα είχαμε $q(x, y) \leq B \cdot 1 = B$ για όλα τα $x, y \in E$. Έτσι, θα έπρεπε η q να είναι φραγμένη μετρική, πράγμα που δεν υποτίθεται γενικά για τη μετρική q .

Η παραπάνω παρατήρηση αποδεικνύει ότι το αντίστροφο του συμπεράσματος του Πορίσματος 5.1.5. γενικά δεν ισχύει.

5.2.3. Ας είναι $(E_1, q_1), (E_2, q_2)$ δύο μετρικοί χώροι και $f: E_1 \rightarrow E_2$ ένας ομοιομορφισμός. Για τυχόντα x, y στο E_1 ορίζουμε

$$q(x, y) = q_2(f(x), f(y)).$$

Τότε, η q είναι μετρική στον E_1 και μάλιστα οι μετρικές q, q_1 είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη.

Για τυχόντα x, y και $z \in E_1$ έχουμε:

$$q(x, y) = 0 \Leftrightarrow q_2(f(x), f(y)) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y,$$

αφού η f είναι αμφιμονοσήμαντη. Ακόμη

$$q(x, y) = q_2(f(x), f(y)) = q_2(f(y), f(x)) = q(y, x).$$

$$q(x, y) = q_2(f(x), f(y)) \leq q_2(f(x), f(z)) + q_2(f(z), f(y)) = q(x, z) + q(z, y).$$

Άρα η q είναι μια μετρική στο E_1 .

Για την απόδειξη του ότι οι μετρικές q, q_1 είναι ισοδύναμες, αρκεί ν' αποδείξουμε ότι κάθε q -συγκλίνουσα ακολουθία εν E_1 είναι και q_1 -συγκλίνουσα και αντίστροφα.



Πραγματικά, έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία εν E_1 με $Q - \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = \ell \in E_1$. Τότε έχουμε:

$$Q - \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = \ell \Rightarrow \lim_{n \in \mathbb{N}} Q(x_n, \ell) = 0 \Rightarrow \lim_{n \in \mathbb{N}} Q_2(f(x_n), f(\ell)) = 0 \Rightarrow Q_2 - \lim_{n \in \mathbb{N}} f(x_n) = f(\ell).$$

Λόγω της συνέχειας της συνάρτησης f^{-1} (η f είναι ομοιομορφισμός), η τελευταία σχέση συνεπάγεται ότι

$$Q_1 - \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = \ell.$$

Αντίστροφα, αν $Q_1 - \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = \ell$, λόγω της συνέχειας της f , παίρνουμε

$$Q_2 - \lim_{n \in \mathbb{N}} f(x_n) = f(\ell) \Leftrightarrow \lim_{n \in \mathbb{N}} Q_2(f(x_n), f(\ell)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \in \mathbb{N}} Q(x_n, \ell) = 0$$

Άρα τελικά

$$Q - \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = \ell \quad \blacklozenge$$

5.2.4.

Δύο στάθμες N_1 και N_2 σ' ένα διανυσματικό χώρο E λέγονται **ισοδύναμες στάθμες (equivalent norms)** αν υπάρχουν θετικοί αριθμοί A και B τέτοιοι ώστε για κάθε $x \in E$ να ισχύει:

$$AN_1(x) \leq N_2(x) \leq BN_1(x).$$

Από τον ορισμό αυτό και σε συνδυασμό με το Πρόγραμμα 5.1.5., προκύπτει ότι αν δύο στάθμες N_1 και N_2 είναι ισοδύναμες, τότε και οι μετρικές Q_1 και Q_2 , που εισάγουν οι N_1 και N_2 με τύπους $Q_1(x, y) = N_1(x-y)$ και $Q_2(x, y) = N_2(x-y)$, αντίστοιχα, είναι ισοδύναμες.

5.2.5. Ας είναι (E, Q) ένας μετρικός χώρος, S ένα υποσύνολο του E και $\mathcal{T}$ η τοπολογία του (E, Q) . Τότε, η τοπολογία $\mathcal{T}_S$ του μετρικού υποχώρου (S, Q) του μετρικού χώρου E δίνεται από τη σχέση:

$$\mathcal{T}_S = \{S \cap X : X \in \mathcal{T}\}.$$

Απόδειξη.

Το συμπέρασμα αυτό είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 3.1.1. $\blacklozenge$



5.2.6. Έστω (E, ρ) ένας μετρικός χώρος. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- α) H_ρ είναι ισοδύναμη με τη διακριτή μετρική.
- β) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον (E, ρ) είναι τελικά σταθερή.
- γ) Ο (E, ρ) δεν έχει σημεία συσσώρευσης.
- δ) Για κάθε μετρικό χώρο X τυχούσα συνάρτηση $f: E \rightarrow X$ είναι συνεχής.
- ε) Η θήκη κάθε ανοιχτού υποσυνόλου του E είναι ανοιχτό σύνολο.

Απόδειξη.

Έστω d η διακριτή μετρική.

$(\alpha \Rightarrow \beta)$ Υποθέτουμε το (α) και έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ρ -συγκλίνουσα ακολουθία εν E . Λόγω της υπόθεσης η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ θα είναι d -συγκλίνουσα ακολουθία. Τότε όμως ως γνωστόν (Βλέπε 2.2.1.), η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι τελικά σταθερή.

$(\beta \Rightarrow \alpha)$ Υποθέτουμε το (β) και έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ρ -συγκλίνουσα ακολουθία εν E . Λόγω της υπόθεσης η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ θα είναι τελικά σταθερή. Άρα η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ θα είναι d -συγκλίνουσα. Όμοια, αν υποθέσουμε ότι η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι d -συγκλίνουσα, η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι προφανώς και ρ -συγκλίνουσα ακολουθία. Άρα οι μετρικές ρ και d είναι ισοδύναμες.

$(\beta \Rightarrow \gamma)$ Έστω ισχύει το (β) και όχι το (γ) . Έστω, επιπλέον, x ένα σημείο συσσώρευσης του E . Τότε υπάρχει ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ εν E μη τελικά σταθερή με $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = x$ (Βλέπε 2.8.1.). Αυτό όμως είναι άτοπο.

$(\gamma \Rightarrow \beta)$ Έστω ισχύει το (γ) και όχι το (β) . Άρα υπάρχει ακολουθία συγκλίνουσα εν E και όχι τελικά σταθερή. Τότε όμως το όριο της ακολουθίας θα είναι σημείο συσσώρευσης του E πράγμα άτοπο.

$(\alpha \Leftrightarrow \delta)$ Η ισοδυναμία αυτή είναι γνωστή (Βλέπε 4.7.1.).

$(\alpha \Rightarrow \epsilon)$ Επειδή η ρ είναι ισοδύναμη με τη διακριτή μετρική, κάθε υποσύνολο του E είναι ταυτόχρονα ανοιχτό πράγμα που συνεπάγεται άμεσα το (ϵ) .

$(\epsilon \Rightarrow \alpha)$ Έστω ότι στο μετρικό χώρο (E, ρ) ισχύει το (ϵ) και ότι η ρ δεν είναι ισοδύναμη με τη διακριτή μετρική. Με βάση την ισοδυναμία $(\alpha) \Leftrightarrow (\gamma)$, ο (E, ρ) έχει ένα τουλάχιστον σημείο συσσώρευσης έστω a . Τότε υπάρχει ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = a$ και τέτοια, ώστε $a_n \neq a, n \in \mathbb{N}$. Κατασκευάζουμε μια ακολουθία σφαιρών $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ως εξής:

$$B_1 = B(a_1, r_1), \quad r_1 = \frac{\rho(a_1, a)}{2}.$$

Θέτουμε $a_1 = a_{n_1}$, θεωρούμε ένα δείκτη n_2 τέτοιο, ώστε $\rho(a_{n_2}, a) < \frac{\rho(a_{n_1}, a)}{4}$ και θέτουμε



$$B_2 = B(a_{n_2}, r), \quad r_2 = \frac{Q(a_{n_2}, a)}{2}.$$

Επίσης, θεωρούμε ένα δείκτη n_3 τέτοιο, ώστε $Q(a_{n_3}, a) < \frac{Q(a_{n_2}, a)}{4}$ και θέτουμε

$$B_3 = B(a_{n_3}, r), \quad r_3 = \frac{Q(a_{n_3}, a)}{2}$$

κ.ο.κ. Το σύνολο $B_2 \cup B_4 \cup B_6 \cup \dots$ είναι ανοιχτό. Άρα, από την υπόθεση, και το σύνολο

$\overline{B_2 \cup B_4 \cup B_6 \cup \dots} = K$ είναι ανοιχτό. Προφανώς $a \in K$. Άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο, ώστε $B(a, \varepsilon) \subseteq K$. Επιπλέον, επειδή για κάθε $\lambda \in \mathbb{N}$ η $B(a_{n_{2\lambda+1}}, r_{n_{2\lambda+1}})$ δεν τέμνει καμιά άλλη σφαίρα, έχουμε

$$B(a_{n_{2\lambda+1}}, r_{n_{2\lambda+1}}) \cap (B_2 \cup B_4 \cup B_6 \cup \dots) = \emptyset.$$

Άρα

$$a_{n_{2\lambda+1}} \notin \overline{B_2 \cup B_4 \cup B_6 \cup \dots} = K.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού λόγω της σχέσης $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = a$, έχουμε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{N}$ με $a_{n_{2\lambda+1}} \in B(a, \varepsilon) \subseteq K$ και ταυτόχρονα $a_{n_{2\lambda+1}} \notin K$.

5.3. Η έννοια του τοπολογικού χώρου

Η παράγραφος αυτή αποσκοπεί στο να δώσει κάποιες νύξεις για την έννοια του “τοπολογικού χώρου” που είναι γενίκευση της έννοιας του μετρικού χώρου.

Όπως είδαμε στα προηγούμενα, οι περισσότερες από τις έννοιες που ορίσαμε περιγράφονται με ικανές και αναγκαίες συνθήκες με τη βοήθεια της έννοιας της περιοχής και του ανοιχτού συνόλου. Η επισήμανση του γεγονότος αυτού οδηγεί στην ιδέα να οριστούν οι έννοιες της περιοχής και του ανοιχτού συνόλου και σε χώρους που δεν ορίζεται μετρική και επομένως δεν είναι αναγκαστικά μετρικοί χώροι. Στην παράγραφο αυτή θα σκιαγραφήσουμε το πως είναι δυνατό να οριστούν τέτοιοι χώροι που λέγονται τοπολογικοί χώροι. Η διεξοδική μελέτη των τοπολογικών χώρων είναι το αντικείμενο μελέτης ενός ιδιαίτερου κλάδου των Μαθηματικών που φέρει το όνομα **Γενική Τοπολογία (General Topology)**.

Υποθέτουμε ότι E είναι ένα μη κενό σύνολο και ότι σε κάθε στοιχείο $x \in E$ αντιστοιχεί ένα σύνολο $\mathcal{N}_x$ υποσυνόλων του E , που ονομάζεται **σύστημα περιοχών** του σημείου x . Κάθε στοιχείο $U \in \mathcal{N}_x$ ονομάζεται **περιοχή** του x .



(Συχνά γράφουμε $U(x)$ αντί του U , για να δηλώσουμε, όταν είναι απαραίτητο, τίνος σημείου περιοχή είναι το σύνολο U .)

Για το σύστημα των περιοχών του τυχόντος σημείου x απαιτούμε να ικανοποιούνται οι εξής ιδιότητες:

- i) $x \in U$ για κάθε $U \in \mathcal{N}_x$.
- ii) Αν $U \in \mathcal{N}_x$ και $V \supseteq U$, τότε $V \in \mathcal{N}_x$.
- iii) Αν $U_1 \in \mathcal{N}_x$ και $U_2 \in \mathcal{N}_x$, τότε $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{N}_x$.
- vi) Για κάθε $U \in \mathcal{N}_x$ υπάρχει $V \in \mathcal{N}_x$ τέτοιο, ώστε $U \in \mathcal{N}_y$ για κάθε $y \in V$.

| Ένα υποσύνολο A του E θα λέγεται **ανοιχτό** αν για κάθε $x \in A$ υπάρχει περιοχή U του x ($U \in \mathcal{N}_x$) τέτοια, ώστε $U \subseteq A$.

| Το $\emptyset$ ορίζεται να είναι ανοιχτό σύνολο.

| Το σύνολο $\mathcal{T}$ όλων των ανοιχτών υποσυνόλων του E ονομάζεται **τοπολογία (topology)** του E . Το σύνολο E εφοδιασμένο με μια τοπολογία $\mathcal{T}$ ονομάζεται **τοπολογικός χώρος (topological space)** και παριστάνεται με $(E, \mathcal{T})$.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι μια τοπολογία $\mathcal{T}$ σ' ένα σύνολο E έχει τις εξής ιδιότητες:

- i') $\emptyset \in \mathcal{T}$ και $E \in \mathcal{T}$.
- ii') Αν $C \subseteq \mathcal{T}$, τότε $\bigcup C \in \mathcal{T}$
- iii') Αν $C \subseteq \mathcal{T}$ και C πεπερασμένη συλλογή, τότε $\bigcap C \in \mathcal{T}$.

| Ένα υποσύνολο A του E ονομάζεται **κλειστό** αν $A^c \in \mathcal{T}$.

Αποδεικνύεται ότι αν για κάθε $x \in E$ ορίσουμε ένα σύστημα περιοχών $\mathcal{N}_x$ του x , τότε η τοπολογία $\mathcal{T}$, όπως ορίζεται παραπάνω, είναι μοναδική για τα συγκεκριμένα συστήματα περιοχών.

Μπορεί κανείς ν' ακολουθήσει αντίστροφη διαδικασία στους παραπάνω ορισμούς. Συγκεκριμένα, μπορεί να ορίσει κανείς πρώτα την έννοια της τοπολογίας απαιτώντας τις συνθήκες (i'), (ii') και (iii') και στη συνέχεια να ορίσει την έννοια της περιοχής ως εξής:

Για τυχόν σημείο $x \in E$ ένα σύνολο U , $U \subseteq E$, θα λέγεται **περιοχή** του x αν υπάρχει $A \in \mathcal{T}$ τέτοιο, ώστε $x \in A$ και $A \subseteq U$.



Μετά από αυτά, το σύνολο των περιοχών ενός σημείου x το ονομάζουμε σύστημα περιοχών του x και το συμβολίζουμε με $\mathcal{N}_x$.

Αποδεικνύεται ότι τα συστήματα περιοχών $\mathcal{N}_x$, $x \in E$, έχουν τις ιδιότητες (i), (ii) και (iii) και επιπλέον, ότι για κάθε $x \in E$ το σύστημα περιοχών $\mathcal{N}_x$ είναι μοναδικό για τη δεδομένη τοπολογία $\mathcal{T}$.

Έχοντας ορίσει ένα τοπολογικό χώρο $(E, \mathcal{T})$ μ' ένα από τους παραπάνω τρόπους, μπορούμε να ορίσουμε τις έννοιες: **εσωτερικό σημείο**, **σημείο επαφής**, **σημείο συσσώρευσης** και **συνοριακό σημείο συνόλου**, μέσω της έννοιας της περιοχής και με τρόπο ίδιο με εκείνον που ορίσαμε τις έννοιες αυτές στους μετρικούς χώρους. Με τον ίδιο επίσης τρόπο μπορούμε να ορίσουμε πότε μια ακολουθία συγκλίνει και πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής (Βλέπε 5.4.3.).

Είναι φανερό ότι κάθε μετρικός χώρος είναι και τοπολογικός χώρος με τοπολογία αυτή που εισάγει η μετρική του. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε.

Αν για κάποιο τοπολογικό χώρο $(E, \mathcal{T})$ υπάρχει μετρική ρ στο E τέτοια ώστε η τοπολογία $\mathcal{T}_\rho$ του μετρικού χώρου (E, ρ) να ταυτίζεται με την $\mathcal{T}$, τότε λέμε ότι ο τοπολογικός χώρος $(E, \mathcal{T})$ είναι **μετριοποιήσιμος (metrizable)**.

Μια ιδιότητα ενός μετρικού ή τοπολογικού χώρου E λέγεται **κληρονομική (hereditary)** αν αυτή είναι και ιδιότητα κάθε μετρικού ή τοπολογικού αντίστοιχα υπόχωρου του E .

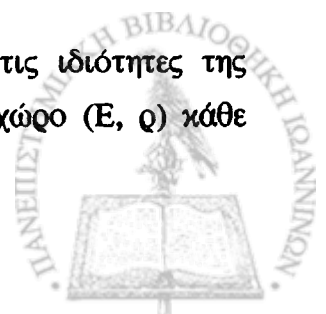
Μια ιδιότητα ενός μετρικού ή τοπολογικού χώρου E λέγεται **τοπολογική (topological)** αν αυτή είναι και ιδιότητα κάθε ομοιομορφικού προς τον E μετρικού ή τοπολογικού, αντίστοιχα, χώρου.

5.4. Παραδείγματα – Εφαρμογές

5.4.1. Το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(E)$ ενός συνόλου E , είναι μια τοπολογία στο E και μάλιστα ο τοπολογικός χώρος $(E, \mathcal{P}(E))$ είναι μετριοποιήσιμος.

Απόδειξη.

Είναι πολύ εύκολο να διαπιστωθεί ότι η συλλογή $\mathcal{P}(E)$ έχει τις ιδιότητες της τοπολογίας. Εξάλλου, αν ρ είναι η διακριτή μετρική, στο μετρικό χώρο (E, ρ) κάθε



υποσύνολο του E είναι ανοιχτό (Βλέπε 1.13.2.) Άρα $\mathcal{T}_0 = \mathcal{P}(E)$, που σημαίνει ότι ο τοπολογικός χώρος $(E, \mathcal{P}(E))$ είναι μετριοποιήσιμος.

5.4.2. Αν A είναι ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου $(E, \mathcal{T})$ ορίζουμε:

| Το a είναι **εσωτερικό σημείο** του A αν υπάρχει $U \in \mathcal{N}_a$ τέτοιο, ώστε $U \subseteq A$.

| Το a είναι **σημείο επαφής** του A αν για κάθε $U \in \mathcal{N}_a$ ισχύει $U \cap A \neq \emptyset$.

| Το a είναι **σημείο συσσώρευσης** του A αν για κάθε $U \in \mathcal{N}_a$ ισχύει $(U \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$.

Έχοντας υπόψη τα παραπάνω ορίζουμε τα σύμβολα A° , A και A' για τα σύνολα των εσωτερικών σημείων (**πυρήνας**) του A , των σημείων επαφής (**θήκη**) του A και των σημείων συσσώρευσης (**παράγωγο σύνολο**) του A , αντίστοιχα.

Με τρόπο ανάλογο εκείνου που ακολουθήσαμε στους μετρικούς χώρους, μπορούμε ν' αποδείξουμε σχεδόν το σύνολο των ιδιοτήτων των συνόλων αυτών που ισχύουν και στους μετρικούς χώρους, όπως παραδείγματος χάρη $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A} = A \cup A'$.

Είναι φανερό ότι υπάρχουν ιδιότητες των συνόλων αυτών που δεν γενικεύονται στους τοπολογικούς χώρους, όπως για παράδειγμα η ιδιότητα $\delta(A) = \delta(\overline{A})$ για τη θήκη ενός συνόλου και γενικά εκείνες που εμπλέκουν κατά τρόπο αναντικατάστατο την έννοια της μετρικής.

5.4.3.

| Ας είναι $(E, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία στον E και $\ell \in E$. Λέμε ότι το ℓ είναι **ένα όριο της ακολουθίας** $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, αν για κάθε $U(\ell)$, $U(\ell) \in \mathcal{N}_\ell$, ισχύει $a_n \in U(\ell)$ τελικά για όλους τους δείκτες $n \in \mathbb{N}$.

| Αν $(E_1, \mathcal{T}_1)$, $(E_2, \mathcal{T}_2)$ είναι δυο τοπολογικοί χώροι και $f: E_1 \rightarrow E_2$ μια συνάρτηση θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο σημείο** $x_0 \in E_1$ αν για κάθε περιοχή $U(f(x_0))$, $U(f(x_0)) \in \mathcal{N}_{f(x_0)}$, το σύνολο $f^{-1}(U(f(x_0)))$ είναι περιοχή του x_0 , δηλαδή $f^{-1}(U(f(x_0))) \in \mathcal{N}_{x_0}$.



Από τους παραπάνω ορισμούς βλέπει κανείς ότι υπάρχει σχεδόν απόλυτη αντιστοιχία, τόσο στις έννοιες όσο και τα περισσότερα συμπεράσματα, μεταξύ μετρικών και τοπολογικών χώρων. Παρόλα αυτά, είναι πολύ επιπόλαιο το να μεταφέρει κανείς αβασάνιστα συμπεράσματα από τους μετρικούς στους τοπολογικούς χώρους, ακόμη και για πολύ βασικές ιδιότητες.

Το επόμενο συμπέρασμα μας λέει ότι μια βασική ιδιότητα των μετρικών χώρων, το μονοσήμαντο του ορίου μιας ακολουθίας, δεν διατηρείται στους τοπολογικούς χώρους.

5.4.4. Στους τοπολογικούς χώρους μια ακολουθία μπορεί να έχει περισσότερα από ένα όρια.

Έστω E μη κενό σύνολο. Είναι φανερό ότι η συλλογή $\mathcal{J} = \{E, \emptyset\}$ είναι μια τοπολογία στο E . Για τυχόν $x \in E$ έχουμε $\mathcal{N}_x = \{E\}$. Αυτό γιατί ένα σύνολο U είναι περιοχή του x αν υπάρχει $A \in \mathcal{J}$ με $x \in A$ και $A \subseteq U$.

Έτσι, αν $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι τυχούσα ακολουθία στο E , αυτή έχει όριο κάθε στοιχείο x του E γιατί $a_n \in E$, $n \in \mathbb{N}$ και E είναι η μοναδική περιοχή του σημείου x .

5.5. Λυμένες Ασκήσεις

5.5.1. Στο σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών ορίζουμε $q(\mu, \nu) = \frac{|\mu - \nu|}{\mu\nu}$ για κάθε $\mu, \nu \in \mathbb{N}$. Ν' αποδειχτεί ότι η q είναι μετρική στο $\mathbb{N}$ και μάλιστα ισοδύναμη της διακριτής.

Λύση.

Για τυχόντα μ, ν και $z \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$q(\mu, \nu) = 0 \Leftrightarrow \frac{|\mu - \nu|}{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow |\mu - \nu| = 0 \Leftrightarrow \mu = \nu.$$

$$q(\mu, \nu) = \frac{|\mu - \nu|}{\mu\nu} = \frac{|\nu - \mu|}{\nu\mu} = q(\nu, \mu).$$

Για την απόδειξη της τριγωνικής ιδιότητας πρέπει ν' αποδειχτεί ότι

$$\frac{|\mu - \nu|}{\mu\nu} \leq \frac{|\mu - z|}{\mu z} + \frac{|z - \nu|}{z\nu}. \quad (*)$$



Πραγματικά αν $v \leq z \leq \mu$, η (*) γίνεται $\frac{\mu-v}{\mu v} \leq \frac{\mu-z}{\mu z} + \frac{z-v}{zv}$ που προφανώς ισχύει.

Όμοια αποδεικνύεται η (*) και στις άλλες περιπτώσεις.

Θ' αποδείξουμε τώρα ότι η ρ είναι ισοδύναμη με τη διακριτή μετρική. Για το σκοπό αυτό και για τυχόν $a \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη σφαίρα $B(a, \frac{1}{ka})$, $k > a+1$. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$x \in B(a, \frac{1}{ka}) \Leftrightarrow \rho(x, a) < \frac{1}{ka} \Leftrightarrow \frac{|x-a|}{xa} < \frac{1}{ka} \Leftrightarrow -\frac{x}{k} < x-a < \frac{x}{k}.$$

Άρα

$$\frac{ka}{k+1} < x < \frac{ka}{k-1} \quad (**)$$

Επειδή $k > a+1$, έχουμε:

$$k > a+1 \Rightarrow k > a-1 \Leftrightarrow \frac{ka}{k+1} > a-1 \text{ και } k > a+1 \Leftrightarrow \frac{ka}{k-1} < a+1.$$

Άρα από τη σχέση (**) παίρνουμε $a-1 < x < a+1$. Επειδή δε $a \in \mathbb{N}$ και $x \in \mathbb{N}$, έχουμε $x=a$.

Έτσι,

$$B(a, \frac{1}{ka}) = \{a\}.$$

Αυτό σημαίνει ότι τα μονοσύνολα του μετρικού χώρου $(\mathbb{N}, \rho)$ είναι ανοιχτά. Επομένως κάθε υποσύνολο του χώρου $(\mathbb{N}, \rho)$ είναι ανοιχτό (ως ένωση των ανοιχτών μονοσυνόλων με στοιχεία τα στοιχεία του). Άρα κάθε υποσύνολο του χώρου $(\mathbb{N}, \rho)$ είναι και κλειστό, δηλαδή

$$\mathcal{T}_\rho = \mathcal{P}(\mathbb{N}),$$

που σημαίνει ότι η μετρική ρ είναι ισοδύναμη της διακριτής μετρικής. ♦

5.5.2. Δύο μετρικές ρ_1 και ρ_2 σ' ένα σύνολο E ονομάζονται ομοιόμορφα ισοδύναμες μετρικές αν και μόνο αν η ταυτοτική συνάρτηση $i_E: (E, \rho_1) \rightarrow (E, \rho_2)$ και η αντίστροφή της είναι ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις.

Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ορίζουμε τις μετρικές $\rho(x, y) = |x-y|$ και $\rho'(x, y) = |x^3 - y^3|$, $x, y \in \mathbb{R}$. Ν' αποδειχτούν τα εξής:

- i) Οι ρ, ρ' είναι ισοδύναμες.
- ii) Κάθε ρ -βασική ακολουθία εν $\mathbb{R}$ είναι και ρ' -βασική και αντίστροφα.
- iii) Οι μετρικές ρ και ρ' δεν είναι ομοιόμορφα ισοδύναμες μετρικές.

Λύση.

i) Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια q -συγκλίνουσα ακολουθία και μάλιστα $q\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell$, όπου $\ell \in \mathbb{R}$. Τότε προφανώς έχουμε και $q\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n^3 = \ell^3$, δηλαδή $q'\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell$.

Αντίστροφα, επειδή

$$|a_n - \ell| = \frac{|a_n^3 - \ell^3|}{\ell^2 + \ell a_n + a_n^2} = \frac{|a_n^3 - \ell^3|}{(a_n + \frac{\ell}{2})^2 + \frac{3\ell^2}{4}} \leq \frac{4}{3\ell^2} |a_n^3 - \ell^3|, \quad (*)$$

ισχύει προφανώς ότι

$$q'\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell \Rightarrow q\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell.$$

ii) Αν η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια q -βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$ τότε αυτή είναι και q -συγκλίνουσα ακολουθία. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι τότε και q' -συγκλίνουσα άρα και q' -βασική.

Αντίστροφα, έστω ότι $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια q' -βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Σύμφωνα με την σχέση (*), η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι τότε και q -βασική ακολουθία.

iii) Αρκεί ν' αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = x^3$, δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Πραγματικά, αν η f ήταν ομοιόμορφα συνεχής, για $\varepsilon = 1$ θα έπρεπε να υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1.$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα έπρεπε να ισχύει

$$|f(x) - f(x + \delta)| = |x^3 - (x + \delta)^3| = |3x^2\delta + 3x\delta^2 + \delta^3| < 1,$$

που προφανώς δεν ισχύει. ♦

5.6. Ασκήσεις

1. Αν (E, ρ) είναι ένας μετρικός χώρος, ν' αποδειχτεί ότι οι μετρικές ρ και σ , όπου $\sigma(x, y) = \min\{\rho(x, y), 1\}$, $x, y \in E$, είναι ισοδύναμες.

2. Ας είναι ρ_i , $i = 1, \dots, n$ ισοδύναμες ανά δύο μετρικές στο σύνολο E . Ν' αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $\rho: E^2 \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $\rho(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \rho_i(x, y)$ είναι μετρική στον E και μάλιστα ισοδύναμη με καθεμιά από τις μετρικές ρ_i , $i = 1, \dots, n$.

3. Ν' αποδειχτεί ότι η ευκλείδια μετρική ορισμένη στο σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων είναι ισοδύναμη προς την διακριτή μετρική.



4. Για κάθε x, y εν $\mathbf{R}$ ορίζουμε

$$\varrho(x, y) = |\text{τοξεφ}x - \text{τοξεφ}y|$$

Ν' αποδειχτεί ότι:

α) Η ϱ είναι μετρική στο $\mathbf{R}$.

β) Η ϱ είναι ισοδύναμη με την ευκλείδια μετρική.

5. Ν' αποδειχτεί ότι κάθε μετρικός χώρος είναι ομοιομορφικός προς ένα φραγμένο μετρικό χώρο.

6. Θεωρούμε το σύνολο $\mathbf{R}_\infty = \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ και τη συνάρτηση $\varphi: \mathbf{R}_\infty \rightarrow [-1, 1]$ με τύπο

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+|x|}, & x \in \mathbf{R} \\ -1, & x = -\infty \\ 1, & x = \infty \end{cases}$$

Ν' αποδειχτεί ότι

α) Η φ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί.

β) Η συνάρτηση $d: \mathbf{R}_\infty^2 \rightarrow \mathbf{R}$ με τύπο $d(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$ είναι μετρική στο $\mathbf{R}_\infty$.

γ) Οι μετρικοί χώροι $(\mathbf{R}, d)$ και $((-1, 1), | \cdot |)$, υπόχωροι των $(\mathbf{R}_\infty, d)$ και $(\mathbf{R}, | \cdot |)$ αντίστοιχα, είναι ισομετρικοί.

7. Ας είναι $(E, \varrho), (E, d)$ μετρικοί χώροι, όπου $E = (0, 1)$, $\varrho(x, y) = |x - y|$ και $d(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$. Ν' αποδειχτεί ότι:

α) Οι μετρικές ϱ και d είναι ισοδύναμες.

β) Η βασικότητα των ακολουθιών δεν είναι τοπολογική ιδιότητα (Υπόδ.: Χρησιμοποιείστε την ακολουθία $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$).

8. Ας είναι $(E, \varrho_1), (E, \varrho_2)$ μετρικοί χώροι τέτοιοι, ώστε $\mathcal{T}_{\varrho_1} \subseteq \mathcal{T}_{\varrho_2}$ και $A \subseteq E$. Ν' αποδειχτεί ότι:

α) $A_{\varrho_1}^\circ \subseteq A_{\varrho_2}^\circ$

β) $\overline{A_{\varrho_2}} \subseteq \overline{A_{\varrho_1}}$

γ) $\partial_{\varrho_2} A \subseteq \partial_{\varrho_1} A$

δ) $\text{ext}_{\varrho_1} A \subseteq \text{ext}_{\varrho_2} A$



9. Ας είναι $(E, \mathcal{Q}_1)$, $(E, \mathcal{Q}_2)$ μετρικοί χώροι και $i: (E, \mathcal{Q}_1) \rightarrow (E, \mathcal{Q}_2)$ η ταυτοτική συνάρτηση. Ν' αποδειχθεί ότι:

$$i \text{ ανοιχτή} \Leftrightarrow \mathcal{J}_{\mathcal{Q}_1} \subseteq \mathcal{J}_{\mathcal{Q}_2} \Leftrightarrow i \text{ κλειστή.}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

πλήρεις μετρικοί χώροι

6.1. Η έννοια του πλήρους μετρικού χώρου

| Ένας μετρικός χώρος (E, ρ) λέγεται **πλήρης (complete) μετρικός χώρος** αν κάθε βασική ακολουθία του E είναι και συγκλίνουσα στον E .

Όπως είναι γνωστό, ο ευκλείδειος μετρικός χώρος $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, $n \in \mathbb{N}$, είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος ενώ ο μετρικός χώρος $((0,1], \|\cdot\|)$, δεν είναι πλήρης μετρικός χώρος (Βλέπε 2.6.4.).

| Ένα υποσύνολο S ενός μετρικού χώρου E θα λέγεται **πλήρες υποσύνολο** του μετρικού χώρου (E, ρ) αν ο μετρικός υπόχωρος (S, ρ_S) του (E, ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Ας σημειωθεί εδώ ότι αν ένας μετρικός χώρος είναι πλήρης δεν ισχύει ότι κάθε μετρικός υπόχωρός του είναι πλήρης. Τον ισχυρισμό αυτό επιβεβαιώνει η παραπάνω παρατήρηση ότι ο μετρικός χώρος $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$, είναι πλήρης ενώ ο υπόχωρός του $((0, 1], \|\cdot\|)$



δεν είναι πλήρης. Επομένως η πληρότητα ενός μετρικού χώρου δεν είναι κληρονομική ιδιότητα.

6.2. Ιδιότητες των πλήρων μετρικών χώρων

6.2.1. ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν (E, ρ) είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος και S ένα μη κενό και κλειστό υποσύνολο του E , τότε το S είναι πλήρες υποσύνολο του E .

Απόδειξη.

Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία στο S . Τότε η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία και στον E . Επειδή ο E είναι πλήρης μετρικός χώρος, η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα στο E , δηλαδή $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n \in E$. Επειδή όμως το S είναι κλειστό και $a_n \in S, n \in \mathbb{N}$, έχουμε $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n \in S$. Άρα, αποδείχτηκε ότι τυχούσα βασική ακολουθία του S είναι συγκλίνουσα στο S , δηλαδή ότι το S είναι πλήρες υποσύνολο του E . ♦

6.2.2. ΠΡΟΤΑΣΗ. Έστω S ένα πλήρες υποσύνολο ενός μετρικού χώρου E . Τότε το S είναι κλειστό υποσύνολο του E .

Απόδειξη.

Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο S συγκλίνουσα στο E . Επειδή η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα είναι και βασική. Επειδή το S είναι πλήρες, θα έχουμε ότι η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, όντας βασική ακολουθία στο S , θα είναι συγκλίνουσα στο S . Άρα $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n \in S$, που αποδεικνύει ότι το S είναι κλειστό υποσύνολο του E . ♦

Συνδυάζοντας τα συμπεράσματα των δύο παραπάνω προτάσεων παίρνουμε αμέσως το επόμενο πόρισμα.



6.2.3. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ένα υποσύνολο ενός πλήρους μετρικού χώρου είναι κλειστό αν και μόνο αν είναι πλήρες.

6.2.4. ΠΡΟΤΑΣΗ. Έστω (E, ρ) ο καρτεσιανός μετρικός χώρος των μετρικών χώρων $(E_i, \rho_i), i=1, \dots, n$. Τότε, ο (E, ρ) είναι πλήρης αν και μόνο αν για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$ ο (E_i, ρ_i) είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Απόδειξη.

Εστω ότι ο (E, ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος. Για τυχόν $k \in \{1, \dots, n\}$ έστω $(a_{k\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία στο μετρικό χώρο (E_k, ρ_k) . Θεωρούμε τυχόντα σημεία $\ell_1 \in E_1, \dots, \ell_{k-1} \in E_{k-1}, \ell_{k+1} \in E_{k+1}, \dots, \ell_n \in E_n$ με και την ακολουθία $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ στον E με

$$a_\nu = (\ell_1, \dots, \ell_{k-1}, a_{k\nu}, \ell_{k+1}, \dots, \ell_n), \nu \in \mathbb{N}.$$

Τότε για τυχόντα $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \rho(a_\mu, a_\nu) &= \sqrt{\rho_1^2(\ell_1, \ell_1) + \dots + \rho_{k-1}^2(\ell_{k-1}, \ell_{k-1}) + \rho_k^2(a_{k\mu}, a_{k\nu}) + \rho_{k+1}^2(\ell_{k+1}, \ell_{k+1}) + \dots + \rho_n^2(\ell_n, \ell_n)} \\ &= \rho_k(a_{k\mu}, a_{k\nu}) \end{aligned}$$

Άρα, αφού η $(a_{k\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$ είναι βασική θα είναι και η $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ βασική. Τότε, όμως, η $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, ως βασική ακολουθία του πλήρους μετρικού χώρου E , θα είναι συγκλίνουσα στον E . Αυτό όμως σημαίνει (Βλέπε 2.2.2.) ότι και η ακολουθία $(a_{k\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στον E_k . Άρα τελικά ο χώρος E_k είναι πλήρης και επειδή το k είναι τυχόν, για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$ ο μετρικός χώρος (E_i, ρ_i) είναι πλήρης.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι οι μετρικοί χώροι $E_1, \dots, E_n$ είναι πλήρεις και θεωρούμε τυχούσα βασική ακολουθία $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ στον E , με $a_\nu = (a_{1\nu}, \dots, a_{n\nu}), \nu \in \mathbb{N}$. Τότε (Βλέπε 2.6.1.), κάθε ακολουθία $(a_{i\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}, i=1, \dots, n$ είναι βασική και επομένως συγκλίνουσα στον E_i , αφού κάθε μετρικός χώρος $E_i, i=1, \dots, n$, είναι πλήρης. Άρα, για κάθε $i=1, \dots, n$ υπάρχει $\ell_i \in E_i$ με $\lim_{\nu \in \mathbb{N}} a_{i\nu} = \ell_i$. Τότε όμως έχουμε (Βλέπε 2.2.2.)

$\lim_{\nu \in \mathbb{N}} a_\nu = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in E$, που αποδεικνύει ότι ο E είναι πλήρης μετρικός χώρος. ♦

Η επόμενη πρόταση μας δίνει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένας μετρικός χώρος πλήρης. Η συνθήκη που εκφράζει η πρόταση αυτή τίθεται ως αξίωμα για την κατασκευή του συνόλου των πραγματικών αριθμών και είναι γνωστή με τον όρο **αξίωμα του κιβωτισμού**.



6.2.5. ΠΡΟΤΑΣΗ. Σ' ένα μετρικό χώρο (E, ϱ) τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- i) Ο (E, ϱ) είναι πλήρης μετρικός χώρος.
- ii) Για κάθε φθίνουσα (ως προς τη διάταξη $\subseteq$) ακολουθία $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μη κενών και κλειστών υποσυνόλων του E , με $\lim_{n \in \mathbb{N}} \delta(K_n) = 0$, ισχύει $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$.

Απόδειξη.

(i $\Rightarrow$ ii) Υποθέτουμε ότι ο E είναι πλήρης και ότι $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία μη κενών και κλειστών υποσυνόλων του E , με $\lim_{n \in \mathbb{N}} \delta(K_n) = 0$. Με το αξίωμα της επιλογής για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε ένα στοιχείο a_n , με $a_n \in K_n$. Έτσι, έχουμε μια ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ εν E . Θ' αποδείξουμε ότι η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική.

Πραγματικά, για τυχόν $\varepsilon, \varepsilon > 0$, επειδή $\lim_{n \in \mathbb{N}} \delta(K_n) = 0$, θεωρούμε ένα δείκτη $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $\delta(K_n) < \varepsilon$. Τότε όμως, για τυχόντα $m, n \in \mathbb{N}$, με $m > n_0$ και $n > n_0$ παίρνουμε $K_m \subseteq K_{n_0}$ και $K_n \subseteq K_{n_0}$, αφού η ακολουθία $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα. Άρα $a_n \in K_n \subseteq K_{n_0}$ και $a_m \in K_m \subseteq K_{n_0}$, οπότε τελικά έχουμε

$$\varrho(a_m, a_n) \leq \delta(K_{n_0}) < \varepsilon \text{ για κάθε } m, n \in \mathbb{N}, \text{ με } m > n_0 \text{ και } n > n_0.$$

Άρα η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική στον E .

Επειδή ο (E, ϱ) είναι πλήρης μετρικός χώρος, υπάρχει $\ell \in E$, με $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell$. Θ' αποδείξουμε ότι $\ell \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$.

Πραγματικά για τυχόν $k \in \mathbb{N}$ οι όροι της υπακολουθίας $(a_n)_{n \geq k}$ της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ανήκουν όλοι στο σύνολο K_k (γιατί η $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα). Αλλά, επειδή $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \ell$, έχουμε $\lim_{n \geq k} a_n = \ell$ και, επιπλέον, επειδή η $(a_n)_{n \geq k}$ είναι ακολουθία σημείων του κλειστού συνόλου K_k , παίρνουμε $\ell \in K_k$. Έτσι αποδείχτηκε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $\ell \in K_k$, οπότε $\ell \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} K_k = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$, δηλαδή $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$.

(ii $\Rightarrow$ i) Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ισχύει η (ii) και ότι $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια βασική ακολουθία στο μετρικό χώρο (E, ϱ) . Θεωρούμε τότε την ακολουθία $(\bar{K}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, όπου $K_n = \{a_\mu : \mu \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$, που είναι ακολουθία μη κενών και κλειστών υποσυνόλων του E .



Η ακολουθία $(\bar{K}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, είναι φθίνουσα αφού για κάθε $\mu, n \in \mathbb{N}$ με $\mu > n$ έχουμε $K_\mu \subseteq K_n$,
 οπότε $\bar{K}_\mu \subseteq \bar{K}_n$. Θ' αποδείξουμε ότι $\lim_{n \in \mathbb{N}} \delta(\bar{K}_n) = 0$.

Πραγματικά, για τυχόν $\varepsilon, \varepsilon > 0$, επειδή η ακολουθία $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε για τυχόντα $\mu, n \in \mathbb{N}$ να ισχύει:

$$\mu \geq n_0 \text{ και } n \geq n_0 \Rightarrow \varrho(\alpha_\mu, \alpha_n) < \varepsilon.$$

Άρα

$$\delta(K_{n_0}) = \sup\{\varrho(\alpha_\mu, \alpha_n) : n \geq n_0 \text{ και } \mu \geq n_0\} \leq \varepsilon.$$

Έτσι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, με $n \geq n_0$, παίρνουμε (Βλέπε 1.9.6(ii))

$$\delta(\bar{K}_n) \leq \delta(\bar{K}_{n_0}) = \delta(K_{n_0}) < \varepsilon,$$

που σημαίνει ότι $\lim_{n \in \mathbb{N}} \delta(\bar{K}_n) = 0$.

Έτσι, σύμφωνα με τη (ii) που υποθέτουμε, έχουμε $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{K}_n \neq \emptyset$. Άρα, αν $\ell \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{K}_n$,

επειδή $\alpha_n \in K_n \subseteq \bar{K}_n, n \in \mathbb{N}$, θα έχουμε:

$$\varrho(\alpha_n, \ell) \leq \delta(\bar{K}_n), n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \in \mathbb{N}} \varrho(\alpha_n, \ell) \leq \lim_{n \in \mathbb{N}} \delta(\bar{K}_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = \ell.$$

Επομένως, τελικά αποδείχτηκε ότι η τυχούσα βασική ακολουθία $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ του E είναι συγκλίνουσα στον E , που σημαίνει ότι ο E είναι πλήρης μετρικός χώρος. ♦

6.2.6. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ας είναι $(E_1, \varrho_1), (E_2, \varrho_2)$ μετρικοί χώροι, A ένα πυκνό υποσύνολο του E_1 και $f : A \rightarrow E_2$ μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Αν ο (E, ϱ_1) είναι πλήρης μετρικός χώρος, τότε υπάρχει ακριβώς μια συνεχής επέκταση $\hat{f} : E_1 \rightarrow E_2$ της f που, επιπλέον, είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.

Απόδειξη.

Όπως είναι γνωστό (Βλέπε 4.2.6.), οι υποθέσεις που έχουμε, εξασφαλίζουν την ύπαρξη μιας μοναδικής συνεχούς επέκτασης $\hat{f} : E_1 \rightarrow E_2$ της συνάρτησης f . Έτσι, αρκεί ν' αποδείξουμε ότι η $\hat{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Υπενθυμίζουμε ότι η συνάρτηση $\hat{f} : E_1 \rightarrow E_2$, ορίζεται με τον τύπο:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in A \\ \lim_{n \in \mathbb{N}} f(x_n), & \text{αν } x \in E_1 - A \end{cases},$$



όπου $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι τυχούσα ακολουθία στο A , με $\lim x_n = x \in E - A$.

Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon, \varepsilon > 0$. Τότε, επειδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $z, w \in A$ να έχουμε

$$Q_1(z, w) < \delta \Rightarrow Q_2(f(z), f(w)) < \varepsilon.$$

Ας είναι x, y τυχόντα στοιχεία του E_1 , με $Q_1(z, w) < \delta$. Θεωρούμε επίσης τις ακολουθίες $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο A , με $\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = x$ και $\lim_{n \in \mathbb{N}} y_n = y$. Τότε, επειδή $Q(x, y) < \delta$ και, λόγω της συνέχειας της μετρικής Q_1 , παίρνουμε $Q(x_n, y_n) < \delta$ τελικά για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Έτσι, από την ομοιόμορφη συνέχεια της f , έχουμε:

$$Q_2(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon \text{ τελικά για όλα τα } n \in \mathbb{N}.$$

Επομένως, επειδή η μετρική Q_2 είναι συνεχής συνάρτηση, παίρνουμε:

$$Q_2(\hat{f}(x), \hat{f}(y)) = \lim_{n \in \mathbb{N}} Q_2(f(x_n), f(y_n)) \leq \varepsilon.$$

Τελικά αποδείχτηκε ότι:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in E_1) Q_1(x, y) < \delta \Rightarrow Q_2(\hat{f}(x), \hat{f}(y)) < \varepsilon.$$

που σημαίνει ότι η $\hat{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. ♦

6.3. Παραδείγματα – Εφαρμογές

6.3.1. Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών δεν είναι πλήρες υποσύνολο του μετρικού χώρου $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ ενώ το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών είναι πλήρες υποσύνολο του $(\mathbb{R}, | \cdot |)$.

Απόδειξη.

Είναι γνωστό ότι $\mathbb{Q} = \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (Βλέπε 1.15.1(ii)). Άρα σύμφωνα με το Πρόγραμμα 6.2.3., το $\mathbb{Q}$ δεν είναι πλήρες υποσύνολο του μετρικού χώρου $(\mathbb{R}, | \cdot |)$.

Για ν' αποδείξουμε ότι το $\mathbb{Z}$ είναι πλήρες υποσύνολο του μετρικού χώρου $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ υποθέτουμε ότι $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια βασική ακολουθία στο $\mathbb{Z}$. Τότε για $\varepsilon = \frac{1}{2}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε για κάθε $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ με $\mu > n$ και $\nu > n$ να ισχύει

$$|\alpha_\mu - \alpha_\nu| < \frac{1}{2}.$$

Επειδή όμως $\alpha_n \in \mathbb{Z}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η τελευταία σχέση δίνει

$$\alpha_\mu = \alpha_\nu \text{ για κάθε } \mu, \nu \in \mathbb{N}, \text{ με } \mu > n \text{ και } \nu > n.$$



Δηλαδή η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι τελικά σταθερή και επομένως συγκλίνουσα στη σταθερή τιμή, που προφανώς ανήκει στο $\mathbb{Z}$. Άρα το $\mathbb{Z}$ είναι πλήρες υποσύνολο του μετρικού χώρου $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. ♦

6.3.2. Κάθε διακριτός μετρικός χώρος είναι πλήρης.

Απόδειξη.

Έστω (E, ρ) τυχών διακριτός μετρικός χώρος και $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τυχούσα βασική ακολουθία στον (E, ρ) . Επειδή ο (E, ρ) είναι διακριτός και η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ βασική, προκύπτει εύκολα ότι η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι τελικά σταθερή ακολουθία, άρα συγκλίνουσα. ♦

6.3.3. Αν A και B είναι πλήρη υποσύνολα ενός μετρικού χώρου, τότε και τα σύνολα $A \cap B$ και $A \cup B$ είναι πλήρη υποσύνολα του χώρου.

Απόδειξη.

Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ βασική ακολουθία εν $A \cap B$. Τότε, επειδή τα A, B είναι πλήρη σύνολα, παίρνουμε ότι $\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n \in A$ και $\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n \in B$, δηλαδή $\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n \in A \cap B$.

Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία εν $A \cup B$. Τότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- i) $x_n \in A$ για άπειρα $n \in \mathbb{N}$ και $x_n \in B$ για πεπερασμένα $n \in \mathbb{N}$
- ii) $x_n \in A$ για πεπερασμένα $n \in \mathbb{N}$ και $x_n \in B$ για άπειρα $n \in \mathbb{N}$
- iii) $x_n \in A$ για άπειρα $n \in \mathbb{N}$ και $x_n \in B$ για άπειρα $n \in \mathbb{N}$.

Αν ισχύει το (i) τότε αυτό σημαίνει ότι έχουμε $x_n \in A$ τελικά για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ οπότε το συμπέρασμα είναι προφανές. Όμοια, αν ισχύει το (ii). Στην περίπτωση (iii) θεωρούμε τα σύνολα $N_A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in A\}$ και $N_B = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in B\}$ και τις υπακολουθίες $(x_n)_{n \in N_A}$, $(x_n)_{n \in N_B}$ της $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Προφανώς οι $(x_n)_{n \in N_A}$ και $(x_n)_{n \in N_B}$ είναι βασικές και επειδή τα A, B είναι πλήρη, υπάρχουν τα $(\lim_{n \in N_A} x_n) \in A$ και $(\lim_{n \in N_B} x_n) \in B$. Επειδή όμως η

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική, έχει μοναδικό σημείο συσσώρευσης. Άρα

$$\lim_{n \in N_A} x_n = \lim_{n \in N_B} x_n = \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n. \quad \blacklozenge$$



6.3.4. Αν $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία μη κενών και κλειστών υποσυνόλων ενός πλήρους μετρικού χώρου (E, ρ) με $\lim_{n \in \mathbb{N}} \delta(K_n) = 0$, τότε το σύνολο $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ είναι μονοστοιχειακό σύνολο.

Απόδειξη.

Πραγματικά, από την Πρόταση 6.2.5. έχουμε ότι $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$. Υποθέτουμε ότι α, β είναι τυχόντα στοιχεία του συνόλου $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα έχουμε $\alpha \in K_n$ και $\beta \in K_n$, οπότε

$$\rho(\alpha, \beta) \leq \delta(K_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Άρα

$$0 \leq \rho(\alpha, \beta) \leq \lim_{n \in \mathbb{N}} \delta(K_n) = 0.$$

Επομένως

$$\rho(\alpha, \beta) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta,$$

που σημαίνει ότι το $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ είναι μονοσύνολο. ♦

6.3.5. Ισοδύναμο του αξιώματος του κιβωτισμού στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Από τα μαθήματα του Λυκείου είναι γνωστό ότι μια ακολουθία $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ κλειστών διαστημάτων στο $\mathbb{R}$, με $a_n < b_n$, $n \in \mathbb{N}$, λέγεται **ακολουθία κιβωτισμένων διαστημάτων** (*nested intervals sequence*) αν ισχύουν τα εξής:

i) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή η ακολουθία $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και

$$\text{ii) } \lim_{n \in \mathbb{N}} (b_n - a_n) = 0, \text{ δηλαδή } \lim_{n \in \mathbb{N}} \delta([a_n, b_n]) = 0.$$

Το **αξίωμα του κιβωτισμού**, όπως είναι γνωστό από τα μαθήματα του Λυκείου, διατυπώνεται ως εξής:

Για κάθε ακολουθία $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ κιβωτισμένων διαστημάτων του $\mathbb{R}$ η τομή $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ είναι μη κενή και μάλιστα μονοστοιχειακό σύνολο.

Συνδυάζοντας το αξίωμα αυτό με την Πρόταση 6.2.5. μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι ο μετρικός χώρος $(\mathbb{R}, ||)$ είναι πλήρης.



Το αξίωμα του κιβωτισμού στο $\mathbf{R}$ ή το ισοδύναμό του, ότι ο μετρικός χώρος $(\mathbf{R}, ||)$ είναι πλήρης, συμπληρώνει το σύστημα των γνωστών αξιωμάτων των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού καθώς και της διάταξης $\leq$ στο $\mathbf{R}$.

Αναφέρουμε αμέσως παρακάτω μερικά σημαντικά συμπεράσματα για το μετρικό χώρο $(\mathbf{R}, ||)$ που είναι ισοδύναμα με το αξίωμα του κιβωτισμού (ή το ισοδύναμό του της πληρότητας του $(\mathbf{R}, ||)$).

α) Το σύνολο $\mathbf{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι **κεκορεσμένο** (δηλαδή κάθε φραγμένο υποσύνολό του έχει supremum και infimum).

β) Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία στο $\mathbf{R}$ είναι **συγκλίνουσα**.

γ) Κάθε φραγμένη ακολουθία στο $\mathbf{R}$ έχει **συγκλίνουσα υπακολουθία**.

Τα συμπεράσματα αυτά είναι ισχυρότατα αποδεικτικά εργαλεία για τον Απειροστικό Λογισμό γι' αυτό και η σημασία τους είναι τεράστια.

Το αξίωμα του κιβωτισμού ή της πληρότητας του $\mathbf{R}$ (ή και καθένα από τα ισοδύναμά τους συμπεράσματα (α), (β) και (γ)) διαφοροποιούν το $\mathbf{R}$ ως διατεταγμένο σώμα, από το διατεταγμένο σώμα $\mathbf{Q}$, αφού κανένα από αυτά δεν ισχύει στο μετρικό χώρο $(\mathbf{Q}, ||)$.

6.3.6. Ορισμός της συνάρτησης $\varphi(x) = a^x$, $x \in \mathbf{R}$, όπου a πραγματικός θετικός αριθμός.

Μια άμεση εφαρμογή της Πρότασης 6.2.6. είναι ο ορισμός της συνάρτησης $\varphi(x) = a^x$, $x \in \mathbf{R}$, όπου a είναι ένας πραγματικός θετικός αριθμός.

Αρχικά ορίζουμε τη συνάρτηση $\gamma : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ με τύπο

$$\gamma(x) = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{x \text{ φορές}}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε τη συνάρτηση $g : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$, με τύπο

$$g(x) = \begin{cases} \gamma(x), & \text{αν } x \in \mathbf{N} \\ 1, & \text{αν } x = 0 \\ \frac{1}{\gamma(-x)}, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Από τον ορισμό ισχύει ότι $g|_{\mathbf{N}} = \gamma$, δηλαδή η g είναι επέκταση της γ .

Ορίζουμε τώρα τη συνάρτηση $f : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R}$ με τύπο

$$f(x) = (a^{1/v})^\mu, \text{ όπου } x = \frac{\mu}{v}, \text{ με } \mu \in \mathbf{Z} \text{ και } v \in \mathbf{N}.$$

Στο σημείο αυτό υποτίθεται ότι είναι γνωστός ο ορισμός της v -στής ρίζας του θετικού αριθμού a , $a^{1/v} = \sqrt[v]{a}$. Προφανώς η f είναι επέκταση της g άρα και της γ . Είναι γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση.



Ο περιορισμός $f_v = f|_{Q \cap [-v, v]}$, $v \in \mathbb{N}$ της f πάνω στο σύνολο $Q \cap [-v, v]$, $v \in \mathbb{N}$, είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.

Πραγματικά για τυχόν $\varepsilon > 0$ επειδή η f_v είναι συνεχής στο σημείο 0, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε x , με $|x| < \delta$, να έχουμε:

$$|f_v(x) - f_v(0)| = |a^x - 1| < \frac{\varepsilon}{m},$$

όπου $m = \max\{a^{-v}, a^v\}$. Έτσι, για τυχόντα q_1, q_2 εν $Q \cap [-v, v]$, με $|q_1 - q_2| < \delta$, παίρνουμε:

$$|a^{q_2} - a^{q_1}| = a^{q_2} |1 - a^{q_1 - q_2}| < m \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon,$$

που αποδεικνύει την ομοιόμορφη συνέχεια της f_v , $v \in \mathbb{N}$.

Επειδή για κάθε $v \in \mathbb{N}$ το σύνολο $Q \cap [-v, v]$ είναι πυκνό στο διάστημα $[-v, v]$ των πραγματικών αριθμών, υπάρχει μοναδική συνεχής επέκταση $\hat{f}_v$ της f_v στο διάστημα $[-v, v]$, $v \in \mathbb{N}$.

Επειδή όμως $f = \bigcup_{v \in \mathbb{N}} f_v$, η συνάρτηση $\hat{f} = \bigcup_{v \in \mathbb{N}} \hat{f}_v$, είναι συνεχής επέκταση της f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και μάλιστα η μοναδική συνεχής επέκταση της f . Θέτοντας $\hat{f} = \varphi$ έχουμε το ζητούμενο.

Ιδιαίτερα, λαμβάνοντας υπόψη την απόδειξη της Πρότασης 6.2.6., μπορούμε να πούμε ότι η συνάρτηση φ ορίζεται με τον τύπο:

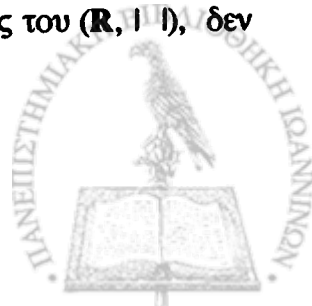
$$\varphi(x) = \begin{cases} a^x, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ \lim_{v \in \mathbb{N}} a^{x_v}, & \text{αν } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases},$$

όπου $(x_v)_{v \in \mathbb{N}}$ τυχούσα ακολουθία ρητών με $\lim x_v = x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. ♦

6.3.7. Η πληρότητα δεν είναι τοπολογική ιδιότητα.

Απόδειξη.

Για την απόδειξη του παραπάνω ισχυρισμού θεωρούμε τους μετρικούς χώρους $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ και $((-1, 1), |\cdot|)$, που είναι ομοιομορφικοί γιατί η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$, με τύπο $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, είναι ομφιμονοσήμαντη, επί και συνεχής με αντίστροφη τη συνάρτηση $f^{-1}: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$, που είναι επίσης συνεχής. Αλλά ο μετρικός χώρος $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι πλήρης ενώ ο $((-1, 1), |\cdot|)$, ως μη κλειστός υπόχωρος του $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, δεν είναι πλήρης. ♦



6.3.8. (Θεώρημα πυκνότητας του Baire) Σ' ένα πλήρη μετρικό χώρο (E, ρ) η τομή μιας αριθμήσιμης συλλογής πυκνών και ανοικτών υποσυνόλων του χώρου είναι πυκνό υποσύνολο του χώρου.

Απόδειξη.

Εστω $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια αριθμήσιμη συλλογή ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του μετρικού χώρου E . Για n' αποδείξουμε ότι το $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ είναι πυκνό εν E , αρκεί n'

αποδείξουμε ότι για τυχόν σημείο x του μετρικού χώρου και τυχούσα σφαιρική περιοχή $B(x, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, του x ισχύει $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Επειδή το A_1 είναι πυκνό και το $B(x, \varepsilon)$ ανοικτό και μη κενό, έχουμε $B(x, \varepsilon) \cap A_1 \neq \emptyset$. Θεωρούμε ένα σημείο $x_1 \in B(x, \varepsilon) \cap A_1$. Αφού το σύνολο είναι $B(x, \varepsilon) \cap A_1$ ανοικτό υπάρχει $\varepsilon_1 < \varepsilon$, τέτοια, ώστε $C(x_1, \varepsilon_1) \subseteq B(x, \varepsilon) \cap A_1$ ($C(x_1, \varepsilon_1)$ είναι η κλειστή σφαιρική περιοχή του σημείου x_1 με ακτίνα ε_1). Επειδή το A_2 είναι πυκνό, υπάρχει ένα σημείο $x_2 \in B(x_1, \varepsilon_1) \cap A_2$ και μάλιστα, αφού το σύνολο $B(x_1, \varepsilon_1) \cap A_2$ είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon_2 < \frac{1}{2}$, τέτοια, ώστε $C(x_2, \varepsilon_2) \subseteq B(x_1, \varepsilon_1) \cap A_2$. Συνεχίζοντας επαγωγικά, κατασκευάζουμε δύο ακολουθίες $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ εν E και $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ εν $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$\varepsilon_n < \frac{1}{n} \text{ και } C(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \subseteq B(x_n, \varepsilon_n) \cap A_{n+1}, n \in \mathbb{N}.$$

Έτσι, έχουμε

$$B(x, \varepsilon) \supseteq C(x_1, \varepsilon_1) \supseteq B(x_1, \varepsilon_1) \supseteq C(x_2, \varepsilon_2) \supseteq B(x_2, \varepsilon_2) \supseteq \dots \quad (*)$$

Αφού $x_n \in B(x_\mu, \varepsilon_\mu)$ για $n \geq \mu$ και $\varepsilon_n < \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, παίρνουμε

$$\rho(x_\mu, x_n) < \frac{1}{\mu}, n \geq \mu.$$

Άρα η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική.

Επειδή ο E είναι πλήρης, η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει σε κάποιο σημείο z του E . Αλλά, λόγω της σχέσης $(*)$, για κάθε $\mu \in \mathbb{N}$ οι όροι της ακολουθίας $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ανήκουν τελικά στο κλειστό σύνολο $C(x_\mu, \varepsilon_\mu)$. Άρα $z \in C(x_\mu, \varepsilon_\mu)$, $\mu \in \mathbb{N}$. Έτσι, επειδή $C(x_\mu, \varepsilon_\mu) \subseteq A_\mu$, $\mu \in \mathbb{N}$, και $C(x_\mu, \varepsilon_\mu) \subseteq B(x, \varepsilon)$, έχουμε $z \in A \cap B(x, \varepsilon)$. ♦

6.4. Η αρχή της συστολής.

Με τον όρο "αρχή της συστολής" είναι γνωστό ένα σημαντικότερο συμπέρασμα που ισχύει στους πλήρεις μετρικούς χώρους. Η σημασία του συμπεράσματος αυτού συνίσταται όχι μόνο στις πολλές του εφαρμογές, αλλά και στο ότι ανήκει στην



κατηγορία των **θεωρημάτων σταθερού σημείου** που είναι ισχυρότατα εργαλεία στη Μαθηματική Ανάλυση.

Πριν διατυπώσουμε την αρχή της συστολής, είναι σκόπιμο να δώσουμε τον εξής ορισμό:

Ας είναι (E, ρ) ένας μετρικός χώρος και $f : E \rightarrow E$ μια συνάρτηση. Η συνάρτηση f ονομάζεται **συστολή** αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $\theta, 0 \leq \theta < 1$, τέτοιος, ώστε για κάθε x, y στον E να ισχύει: $\rho(f(x), f(y)) \leq \theta \rho(x, y)$.

Είναι φανερό (Βλέπε 4.4.4.) ότι κάθε συστολή είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.

6.4.1. ΠΡΟΤΑΣΗ. (Αρχή της συστολής) Έστω (E, ρ) ένας πλήρης μετρικός χώρος και $f : E \rightarrow E$ μια συστολή. Τότε η f έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει ένα μοναδικό σημείο $\alpha \in E$ τέτοιο, ώστε $\alpha = f(\alpha)$.

Απόδειξη.

Σταθεροποιούμε ένα τυχαίο σημείο $x_0 \in E$ και θεωρούμε την ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που ορίζεται επαγωγικά με τον τύπο

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Θ' αποδείξουμε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\rho(x_n, x_{n+1}) = \rho(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq \theta \rho(x_{n-1}, x_n).$$

Άρα

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leq \theta^n \rho(x_0, x_1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας τη σχέση αυτή για τυχόντα $m, n \in \mathbb{N}$, με $m < n$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \rho(x_m, x_n) &\leq \rho(x_m, x_{m+1}) + \rho(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + \rho(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq \theta^m \rho(x_0, x_1) + \theta^{m+1} \rho(x_0, x_1) + \dots + \theta^{n-1} \rho(x_0, x_1) \\ &\leq \theta^m \rho(x_0, x_1) (1 + \theta + \dots + \theta^{n-m-1}). \end{aligned}$$

Επειδή όμως $0 \leq \theta < 1$, έχουμε

$$1 + \theta + \dots + \theta^{n-m-1} \leq \sum_{v=0}^{\infty} \theta^v = \frac{1}{1-\theta},$$

οπότε:

$$\rho(x_m, x_n) \leq \frac{\rho(x_0, x_1)}{1-\theta} \theta^m, \quad m, n \in \mathbb{N}, \text{ με } m < n.$$



Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon, \varepsilon > 0$. Τότε, επειδή $0 \leq \theta < 1$ και $\lim_{v \in \mathbb{N}} \theta^v = 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε για $m > n_0$ να ισχύει $\theta^m < \varepsilon$. Αλλά τότε, επειδή $n > m$, συμπεραίνουμε ότι για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ (χωρίς βλάβη υποθέτουμε $n > m$), με $m > n_0$ και $n > n_0$ ισχύει

$$\varrho(x_m, x_n) < \frac{\varrho(x_0, x_1)}{1-\theta} \varepsilon,$$

που σημαίνει ότι η ακολουθία $(x_v)_{v \in \mathbb{N}}$ είναι βασική.

Αφού η $(x_v)_{v \in \mathbb{N}}$ είναι βασική και ο (E, ϱ) πλήρης μετρικός χώρος, η $(x_v)_{v \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στον E . Έστω $\lim_{v \in \mathbb{N}} x_v = \alpha \in E$. Τότε, επειδή η f ως συστολή είναι συνεχής,

παίρνουμε:

$$f(\alpha) = f\left(\lim_{v \in \mathbb{N}} x_v\right) = \lim_{v \in \mathbb{N}} f(x_v) = \lim_{v \in \mathbb{N}} x_{v+1} = \alpha.$$

Άρα το α είναι σταθερό σημείο της f .

Θ' αποδείξουμε ότι το α είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της f . Πραγματικά, για τυχόν άλλο σταθερό σημείο β της f , $f(\beta) = \beta$, έχουμε:

$$\varrho(\alpha, \beta) = \varrho(f(\alpha), f(\beta)) \leq \theta \varrho(\alpha, \beta) \Rightarrow (1-\theta) \varrho(\alpha, \beta) \leq 0.$$

Επομένως, επειδή $1-\theta > 0$, παίρνουμε $\varrho(\alpha, \beta) \leq 0$, δηλαδή $\varrho(\alpha, \beta) = 0$. Άρα τελικά $\alpha = \beta$. ♦

6.5. Παραδείγματα – Εφαρμογές

6.5.1. Η ακολουθία $x_0, f(x_0), f(f(x_0)), \dots$ που θεωρήσαμε στην Πρόταση 6.4.1., λέγεται **ακολουθία διαδοχικών προσεγγίσεων** του σταθερού σημείου της συστολής. Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι:

Ενώ η ακολουθία αυτή εξαρτάται από τον πρώτο της όρο x_0 που επιλέγεται αυθαίρετα, το όριό της είναι ανεξάρτητο από την επιλογή αυτή και εξαρτάται μόνο από τη συνάρτηση f .

Επιπλέον, από τον τύπο

$$\varrho(x_m, x_n) \leq \frac{\varrho(x_0, x_1)}{1-\theta} \theta^m, m, n \in \mathbb{N}, \text{ με } m < n,$$

σταθεροποιώντας τον δείκτη m και παίρνοντας το όριο για $n \rightarrow \infty$, παίρνουμε

$$\varrho(x_m, \alpha) \leq \frac{\theta^m}{1-\theta} \varrho(x_0, f(x_0)).$$



Ο τελευταίος τύπος μας δίνει μια εκτίμηση για την απόσταση του τυχόντος όρου x_m της ακολουθίας των διαδοχικών προσεγγίσεων από το σταθερό σημείο a της συστολής f .

6.5.2. Ας είναι K ένα κλειστό υποσύνολο του ευκλείδειου μετρικού χώρου $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ και $f: K \rightarrow K$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια, ώστε $|f'(x)| \leq \theta < 1$ για κάθε $x \in K$. Τότε η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μοναδική λύση στο K .

Απόδειξη.

Αρχικά παρατηρούμε ότι η f είναι συστολή στο K γιατί για τυχόντα σημεία x, y εν K , με $x < y$, υπάρχει $s \in (x, y)$ τέτοιο, ώστε

$$|f(x) - f(y)| = |f'(s)| |x - y| \leq \theta |x - y| \quad (\text{Θεώρημα Μέσης Τιμής}).$$

Έτσι, επειδή το K , ως κλειστό υποσύνολο του πλήρους μετρικού χώρου $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, είναι πλήρες, η f έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο στο K , δηλαδή η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μοναδική λύση στο K . ♦

6.5.3. Ας είναι E ένας πλήρης μετρικός χώρος, $f: E \rightarrow E$ μια συνάρτηση και m ένας φυσικός αριθμός τέτοιος, ώστε η συνάρτηση $\overset{m}{\circ}f = f \circ f \circ \dots \circ f$ να είναι m φορές μια συστολή στον E . Τότε η f έχει ένα ακριβώς σταθερό σημείο στον E .

Απόδειξη.

Η συνάρτηση $\overset{m}{\circ}f$, ως συστολή στον πλήρη μετρικό χώρο E , έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο α στον E , δηλαδή $\overset{m}{\circ}f(\alpha) = \alpha$. Άρα

$$f(\alpha) = f(\overset{m}{\circ}f(\alpha)) = f(\underset{m \text{ φορές}}{f \circ f \circ \dots \circ f}(\alpha)) = (\underset{m \text{ φορές}}{f \circ f \circ \dots \circ f})(f(\alpha)) = (\overset{m}{\circ}f)(f(\alpha)).$$

Έτσι, το σημείο $f(\alpha)$ είναι και αυτό σταθερό σημείο για τη συστολή $\overset{m}{\circ}f$. Άρα $f(\alpha) = \alpha$, αφού η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο, δηλαδή το α είναι σταθερό σημείο της f .

Αν δεχτούμε ότι η f έχει και άλλο σταθερό σημείο, το β , οπότε $\beta = f(\beta)$, θα έχουμε:

$$\overset{m}{\circ}f(\beta) = (\overset{m-1}{\circ}f)(f(\beta)) = (\overset{m-1}{\circ}f)(\beta) = (\overset{m-2}{\circ}f)(f(\beta)) = (\overset{m-2}{\circ}f)(\beta) = \dots = f(\beta).$$

Δηλαδή το β είναι σταθερό σημείο της συστολής $\overset{m}{\circ}f$, οπότε $\alpha = \beta$. ♦



Με αφορμή την εφαρμογή αυτή, σημειώνουμε ότι μπορεί μια συνάρτηση f να μην είναι συστολή και ταυτόχρονα να υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε η συνάρτηση $\overset{m}{\circ} f$ να είναι συστολή.

Για παράδειγμα, θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases},$$

Η συνάρτηση f δεν είναι συστολή (Αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι η f δεν είναι καν συνεχής). Εντούτοις, η συνάρτηση $\overset{2}{\circ} f = f \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, έχει τύπο

$$(\overset{2}{\circ} f)(x) = 1$$

και είναι συστολή στον πλήρη μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ με μοναδικό σταθερό σημείο το 1.

6.5.4. Η συνθήκη $\varrho(f(x), f(y)) \leq \varrho(x, y)$, $x, y \in E$, όπου (E, ϱ) είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος και $f: E \rightarrow E$ μια συνάρτηση, δεν εξασφαλίζει γενικά την ύπαρξη σταθερού σημείου για την f .

Απόδειξη.

Πράγματι, η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x + \frac{1}{1 + e^x},$$

ικανοποιεί την συνθήκη $|f'(x)| < 1$, $x \in \mathbb{R}$, αφού $f'(x) = 1 - \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Άρα από το

Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Ταυτόχρονα, η f δεν έχει σταθερό σημείο αφού η εξίσωση $f(x) = x$ προφανώς δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$. ♦

6.6. Λυμένες Ασκήσεις

6.6.1. Υποθέτουμε ότι D είναι ένα πυκνό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου E και ότι κάθε βασική ακολουθία σημείων του D συγκλίνει στον E . Ν' αποδειχτεί ότι ο E είναι πλήρης.



Λύση.

Θεωρούμε τυχούσα βασική ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ εν E . Επειδή $\bar{D} = E$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$D \cap B(a_n, \frac{1}{n}) \neq \emptyset.$$

Με το αξίωμα της επιλογής θεωρούμε τα σημεία $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ τέτοια, ώστε

$$x_1 \in D \cap B(a_1, \frac{1}{1}) \neq \emptyset$$

$$x_2 \in D \cap B(a_2, \frac{1}{2}) \neq \emptyset$$

$$x_n \in D \cap B(a_n, \frac{1}{n}) \neq \emptyset$$

.....

Έτσι, ορίζουμε την ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ για την οποία ισχύει

$$x_n \in D \cap B(a_n, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}.$$

Δηλαδή η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία εν D και μάλιστα

$$x_n \in D \cap B(a_n, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N} \Rightarrow \rho(x_n, a_n) < \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}.$$

Έστω τυχόν $\varepsilon > 0$. Επειδή η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε:

$$n > n_1 \text{ και } m > n_1 \Rightarrow \rho(a_n, a_m) < \varepsilon.$$

Επίσης, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε

$$n > n_2 \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Άρα για κάθε $n > \max\{n_1, n_2\}$ και $m > \max\{n_1, n_2\}$ έχουμε

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, a_n) + \rho(a_n, a_m) + \rho(a_m, x_m) < \frac{1}{n} + \varepsilon + \frac{1}{m} < 3\varepsilon,$$

που αποδεικνύει ότι η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία εν D και έτσι, σύμφωνα με την υπόθεση, υπάρχει το $\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = \alpha \in E$. Αλλά λόγω της σχέσης

$$\rho(a_n, \alpha) \leq \rho(a_n, x_n) + \rho(x_n, \alpha) < \frac{1}{n} + \rho(x_n, \alpha), n \in \mathbb{N}$$

έχουμε προφανώς $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \alpha$. Άρα ο E είναι πλήρης.

6.6.2. Ν' αποδειχτεί ότι σ' ένα μετρικό χώρο E τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- α) Κάθε βασική ακολουθία στον E είναι τελικά σταθερή.**
- β) Ο E είναι πλήρης και κάθε υποσύνολό του είναι ανοιχτό.**
- γ) Κάθε υποσύνολο του E είναι πλήρες.**



Λύση.

($\alpha \Rightarrow \beta$) Έστω μια βασική ακολουθία στον E . Από την υπόθεση η ακολουθία αυτή, ως τελικά σταθερή, είναι συγκλίνουσα. Άρα ο E είναι πλήρης.

Επίσης, επειδή τυχούσα συγκλίνουσα ακολουθία του E είναι και βασική, από την υπόθεση και πάλι τυχούσα συγκλίνουσα ακολουθία του E είναι τελικά σταθερή. Έτσι, σύμφωνα με την Εφαρμογή 5.2.6. κάθε υποσύνολό του E είναι ανοιχτό.

($\beta \Rightarrow \gamma$) Λόγω της υπόθεσης κάθε υποσύνολό του E είναι κλειστό και επειδή ο E είναι πλήρης, κάθε υποσύνολό του E θα είναι και πλήρες.

($\gamma \Rightarrow \alpha$) Κατ' αρχήν ο E ως υποσύνολό του εαυτού του θα είναι πλήρης μετρικός χώρος. Επίσης, λόγω της υπόθεσης, κάθε υποσύνολό του E , ως πλήρες, είναι κλειστό. Άρα κάθε υποσύνολό του E θα είναι και ανοιχτό. Θεωρούμε τώρα τυχούσα βασική ακολουθία στον E . Σύμφωνα με τα παραπάνω, η ακολουθία αυτή θα είναι συγκλίνουσα και, κατά την Εφαρμογή 5.2.6., θα είναι τελικά σταθερή.

6.6.3. Ας είναι (E, ρ) ένας πλήρης μετρικός χώρος, και $f : E \rightarrow E$, $g : E \rightarrow E$ συναρτήσεις τέτοιες, ώστε η f είναι συστολή και $f \circ g = g \circ f$. Ν' αποδειχτεί ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x \in E$ τέτοιο ώστε $f(x) = g(x) = x$.

Λύση.

Επειδή η f είναι συστολή υπάρχει $x \in E$ τέτοιο, ώστε $f(x) = x$. Τότε όμως έχουμε $g(f(x)) = g(x)$ και επειδή $f \circ g = g \circ f$, $f(g(x)) = g(x)$. Άρα το $g(x)$ είναι σταθερό σημείο της f . Η f όμως, ως συστολή, έχει μοναδικό σταθερό σημείο. Επομένως $g(x) = x$. Τελικά για το μοναδικό σταθερό σημείο της f έχουμε $f(x) = g(x) = x$.

6.6.4.(Θεώρημα Baire) Ν' αποδειχτεί ότι κάθε πλήρης μετρικός χώρος είναι χώρος δεύτερης κατηγορίας.

Λύση.

Έστω E ένας πλήρης μετρικός χώρος. Σύμφωνα με την 1.15.4., αρκεί ν' αποδειχτεί ότι ο E δεν μπορεί να είναι ένωση μιας αριθμήσιμης συλλογής πουθενά πυκνών και κλειστών υποσυνόλων του. Υποθέτουμε ότι αυτό δεν συμβαίνει και έστω ότι

$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, όπου κάθε σύνολο A_n , $n \in \mathbb{N}$, είναι πουθενά πυκνό υποσύνολο του E .



Αφού το A_1 είναι πουθενά πυκνό, σύμφωνα με την 1.15.4.(iii), υπάρχει $\alpha_1 \in E$ και $\delta_1 > 0$ τέτοια, ώστε $B(\alpha_1, \delta_1) \cap A_1 = \emptyset$. Θέτουμε $\varepsilon_1 = \frac{\delta_1}{2}$. Τότε έχουμε

$$C(\alpha_1, \varepsilon_1) \cap A_1 = \emptyset.$$

Αφού το A_1 είναι πουθενά πυκνό, σύμφωνα με την 1.15.4.(iii), υπάρχει $\alpha_2 \in E$ και $\delta_2 > 0$ τέτοια, ώστε $B(\alpha_2, \delta_2) \subseteq B(\alpha_1, \varepsilon_1) \subseteq C(\alpha_1, \varepsilon_1)$ και $B(\alpha_2, \delta_2) \cap A_1 = \emptyset$. Θέτουμε $\varepsilon_2 = \frac{\delta_2}{2} \leq \frac{\varepsilon_1}{2} = \frac{\delta_1}{2}$. Τότε έχουμε

$$C(\alpha_2, \varepsilon_2) \subseteq C(\alpha_1, \varepsilon_1) \text{ και } C(\alpha_1, \varepsilon_1) \cap A_1 = \emptyset.$$

Συνεχίζοντας μ' αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε μια ακολουθία κλειστών και μη κενών συνόλων $(C(\alpha_n, \varepsilon_n))_{n \in \mathbb{N}}$ τέτοια, ώστε

$$C(\alpha_n, \varepsilon_n) \cap A_n = \emptyset \text{ και } \varepsilon_n \leq \frac{\delta_1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Επειδή $\lim_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon_n = 0$ και σύμφωνα με την Πρόταση 6.2.5., υπάρχει $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C(\alpha_n, \varepsilon_n)$. Τότε όμως, επειδή $C(\alpha_n, \varepsilon_n) \cap A_n = \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = E,$$

που είναι άτοπο.

6.7. Ασκήσεις

1. Ν' αποδειχτεί ότι κάθε μετρικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος σημείων είναι πλήρης.

2. Αν ο μετρικός χώρος (E, d) είναι πλήρης, ν' αποδειχτεί ότι και ο μετρικός χώρος (E, ρ) , όπου $d = \min\{1, \rho\}$, είναι πλήρης.

3. Έστω (E, ρ) ένας πλήρης μετρικός χώρος και $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δύο βασικές ακολουθίες στον E . Ν' αποδειχτεί ότι

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = \lim_{n \in \mathbb{N}} \beta_n \Leftrightarrow \lim_{n \in \mathbb{N}} \rho(\alpha_n, \beta_n) = 0.$$

4. Ν' αποδειχτεί ότι, αν κάθε το πολύ αριθμήσιμο υποσύνολο ενός μετρικού χώρου είναι πλήρες, τότε και ο μετρικός χώρος είναι πλήρης.



5. Ν' αποδειχτεί ότι αν κάθε κλειστή σφαιρική περιοχή τυχόντος σημείου σ' ένα μετρικό χώρο E είναι πλήρες σύνολο, τότε ο μετρικός χώρος E είναι πλήρης.

6. Έστω N το σύνολο των φυσικών αριθμών, a τυχόν στοιχείο, $a \notin N$ και $\varrho: (N \cup \{a\})^2 \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με τύπο

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in N^2 \text{ και } x \neq y \\ \varrho(a, x) = \varrho(x, a) = 1 + \frac{1}{x}, & x \in N \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Ν' αποδειχτεί ότι

- α) Η ϱ είναι μετρική στο $N \cup \{a\}$.
- β) Ο μετρικός χώρος $(N \cup \{a\}, \varrho)$ είναι πλήρης.

7. Ν' αποδειχτεί ότι αν κάθε φραγμένο και απέραντο υποσύνολο ενός μετρικού χώρου E έχει ένα τουλάχιστο σημείο συσσώρευσης, τότε ο E είναι πλήρης μετρικός χώρος.

8. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\sigma: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$\sigma(x, y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|.$$

Ν' αποδειχτεί ότι

- α) Η σ είναι μετρική στο $\mathbb{R}$.
- β) Η σ είναι ισοδύναμη προς την ευκλείδια μετρική.
- γ) Ο μετρικός χώρος $(\mathbb{R}, \sigma)$ δεν είναι πλήρης.

9. Θεωρούμε τον μετρικό χώρο (N, ϱ) , όπου N το σύνολο των φυσικών αριθμών και $\varrho(\mu, \nu) = \frac{|\mu - \nu|}{\mu\nu}$ για κάθε $\mu, \nu \in N$. Ν' αποδειχτεί ότι ο μετρικός χώρος (N, ϱ) δεν είναι πλήρης μετρικός χώρος (Βλέπε 5.5.1.).

10. Στο μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ να δοθεί παράδειγμα μιας φθίνουσας ακολουθίας μη κενών κλειστών συνόλων με κενή τομή (Βλέπε Πρόταση 6.2.5.).

11. Ν' αποδειχτεί ότι τυχούσα ισομετρία απεικονίζει τυχόντα πλήρη μετρικό χώρο σε πλήρη μετρικό χώρο.

12. Ν' αποδειχτεί ότι:

- α) Κάθε πλήρης μετρικός χώρος χωρίς μεμονωμένα σημεία είναι μη αριθμήσιμος.



β) Σ' ένα πλήρη μετρικό χώρο κάθε κλειστό σύνολο χωρίς μεμονωμένα σημεία είναι μη αριθμήσιμο.

13. Ας είναι E_1, E_2 μετρικοί χώροι. Υποθέτουμε ότι ο E_1 είναι πλήρης και ότι $f: E_1 \xrightarrow{\text{επί}} E_2$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη και συνεχής συνάρτηση. Ν' αποδειχτεί ότι αν η συνάρτηση $f^{-1}: E_2 \rightarrow E_1$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε ο E_2 είναι πλήρης μετρικός χώρος.

14. Με τη βοήθεια της αρχής της συστολής, ν' αποδειχτεί ότι η εξίσωση $2x = \cos x - 2$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}]$.

15. Θεωρούμε τον μετρικό υπόχωρο $S = [\frac{2}{3}, +\infty)$ του ευκλείδειου μετρικού χώρου $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ και τη συνάρτηση $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{2x+6}{3x+2}$. Ν' αποδειχτεί ότι

α) Ο S είναι πλήρης μετρικός χώρος.

β) $f(S) \subseteq S$.

γ) Η f είναι συστολή

δ) Να βρεθεί το μοναδικό σταθερό σημείο της f εν S .

16. Ας είναι (E, ρ) ένας πλήρης μετρικός χώρος και S ένα μη κενό υποσύνολο του E . Υποθέτουμε ότι $f: S \xrightarrow{\text{επί}} E$ είναι μια συνάρτηση για την οποία υπάρχει $\alpha > 1$ τέτοιο, ώστε:

$$\rho(f(x), f(y)) \geq \alpha \rho(x, y)$$

για κάθε x, y εν S . Ν' αποδειχτεί ότι η f έχει σταθερό σημείο στο S .

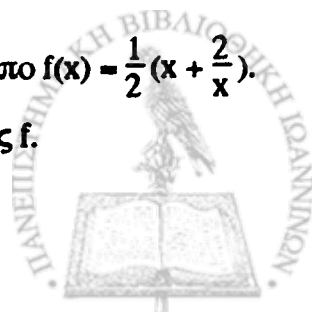
17. Ένας σταθμητός διανυσματικός χώρος λέγεται **χώρος του Banach** αν είναι πλήρης μετρικός χώρος ως προς τη μετρική που εισάγει η στάθμη.

Έστω B ένας χώρος του Banach και $f: B \rightarrow B$ μια συνάρτηση. Ν' αποδειχτεί ότι:

α) Αν η f είναι γραμμική συνάρτηση και συστολή τότε το μηδενικό στοιχείο του B είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της f .

β) Αν η f είναι γραμμική συνάρτηση και η συνάρτηση $(i_B + f): B \rightarrow B$ (i_B η ταυτοτική συνάρτηση του B) είναι συστολή, τότε η f είναι αμφιμονοσήμαντη.

18. Έστω $S = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ και $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$. Ν' αποδειχτεί ότι η f είναι συστολή και να βρεθεί το σταθερό σημείο της f .



19. Ας είναι (E_1, ρ_1) πλήρης μετρικός χώρος, (E_2, ρ_2) τυχόν μετρικός χώρος, $f : E_1 \rightarrow E_2$ μια συνεχής συνάρτηση και $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του E_1 , με $\lim_{n \in \mathbb{N}} \delta(f(K_n)) = 0$. Ν' αποδειχτεί ότι $f(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f(K_n)$.

20. Ένας μ.χ. (E, ρ) ονομάζεται **κυρτός** (*convex*) αν για τυχόντα x, y εν E , με $x \neq y$, υπάρχει $z \in E$, με $z \neq x$ και $z \neq y$ τέτοιο, ώστε $\rho(x, y) = \rho(x, z) + \rho(z, y)$. Ν' αποδειχτεί ότι, αν ένας μετρικός χώρος είναι κυρτός και πλήρης, τότε για κάθε x, y εν E , υπάρχει $z \in E$ τέτοιο, ώστε $2\rho(x, z) = 2\rho(y, z) = \rho(x, y)$.

21. Έστω E ένας πλήρης μετρικός χώρος και $E = \bigcup_{i \in I} A_i$, όπου $A_i, i \in I$ είναι μια οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του E . Ν' αποδειχτεί ότι υπάρχει $i \in I$ τέτοιο, ώστε το σύνολο A_i να περιέχει ένα μη κενό και ανοιχτό υποσύνολο του E .



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ολικά φραγμένοι μετρικοί χώροι

7.1. Η έννοια του ολικά φραγμένου μετρικού χώρου

Η έννοια του ολικά φραγμένου μετρικού χώρου είναι γενίκευση της έννοιας του φραγμένου μετρικού χώρου. Επιπλέον, είναι έννοια στενά συνδεδεμένη τόσο με εκείνη του πλήρους μετρικού χώρου, όσο και με την του συμπαγούς μετρικού χώρου που θα μελετήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Ένας μετρικός χώρος E ονομάζεται **ολικά φραγμένος (totally bounded)** μετρικός χώρος αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα πεπερασμένο και ε -πυκνό υποσύνολό του.

Ένα υποσύνολο S ενός μετρικού χώρου E ονομάζεται **ολικά φραγμένο** υποσύνολο του E , αν το S , ως υπόχωρος του E , είναι ολικά φραγμένος μετρικός χώρος.



Αντί του όρου ολικά φραγμένος μετρικός χώρος και ολικά φραγμένο σύνολο, χρησιμοποιούνται ισοδύναμα και οι όροι *προσυμπαγής (precompact) μετρικός χώρος* και *προσυμπαγές σύνολο*, αντίστοιχα.

7.1.1. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ένας μετρικός χώρος (E, ρ) είναι ολικά φραγμένος αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μια πεπερασμένη κάλυψή του από σφαιρικές περιοχές ακτίνας ε .

Απόδειξη.

Έστω ότι ο E είναι ολικά φραγμένος μετρικός χώρος και ε τυχόν θετικός πραγματικός αριθμός. Τότε, υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ του E που είναι ε -πυκνό στο E . Θ' αποδείξουμε ότι $E = \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \varepsilon)$. Πραγματικά, για τυχόν $x \in E$, επειδή το A είναι ε -πυκνό, υπάρχει $y \in A$ τέτοιο, ώστε $\rho(x, y) < \varepsilon$. Έστω $y = a_k$, $1 \leq k \leq n$. Τότε

$$\rho(x, y) < \varepsilon \Rightarrow \rho(x, a_k) < \varepsilon \Rightarrow x \in B(a_k, \varepsilon) \Rightarrow x \in \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \varepsilon).$$

Έτσι αποδείξαμε ότι $E \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \varepsilon)$, που σημαίνει ότι

$$E = \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \varepsilon).$$

Αντίστροφα, έστω ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μια πεπερασμένη κάλυψη του E από τις σφαιρικές περιοχές $B(a_1, \varepsilon), \dots, B(a_n, \varepsilon)$, με $a_1, \dots, a_n \in E$. Τότε, το σύνολο $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ είναι πεπερασμένο και ε -πυκνό υποσύνολο του E . Πραγματικά, αν x είναι τυχόν στοιχείο του E , από την υπόθεση, δηλαδή από τη σχέση $E = \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \varepsilon)$, παίρνουμε $x \in \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \varepsilon)$. Άρα υπάρχει $k \in \{1, \dots, n\}$ τέτοιο ώστε $x \in B(a_k, \varepsilon)$, δηλαδή υπάρχει $a_k \in A$, με $\rho(a_k, x) < \varepsilon$. Αυτό αποδεικνύει ότι το A είναι ε -πυκνό υποσύνολο του E και επομένως ο E είναι ολικά φραγμένος μετρικός χώρος. ♦

7.2. Ιδιότητες των ολικά φραγμένων μετρικών χώρων

Η επόμενη πρόταση αποδεικνύει ότι η έννοια του ολικά φραγμένου είναι γενίκευση της έννοιας του φραγμένου μετρικού χώρου.



7. 2. 1. ΠΡΟΤΑΣΗ. Κάθε ολικά φραγμένος μετρικός χώρος είναι φραγμένος μετρικός χώρος.

Απόδειξη.

Έστω (E, ρ) ένας ολικά φραγμένος μετρικός χώρος και, για $\varepsilon=1$, $\{B(a_1,1), \dots, B(a_n,1)\}$ μια πεπερασμένη κάλυψη του E από σφαιρικές περιοχές ακτίνας 1. Τότε, για δύο τυχόντα σημεία x, y στο E υπάρχουν δείκτες k, λ εν $\{1, \dots, n\}$ με $x \in B(a_k, 1)$ και $y \in B(a_\lambda, 1)$. Άρα

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, a_k) + \rho(a_k, a_\lambda) + \rho(a_\lambda, y) < 1 + \rho(a_k, a_\lambda) + 1$$

Θέτοντας $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ παίρνουμε

$$\rho(x, y) \leq 2 + \delta(A).$$

Άρα

$$\delta(E) = \sup_{(x, y) \in E^2} \rho(x, y) < 2 + \delta(A).$$

Επειδή το A είναι πεπερασμένο, έχουμε $\delta(A) < \infty$ και επομένως, η τελευταία σχέση δίνει $\delta(E) < \infty$. Άρα ο E είναι φραγμένος μετρικός χώρος. ♦

Η επόμενη πρόταση αποδεικνύει ότι η ιδιότητα του ολικά φραγμένου είναι κληρονομική ιδιότητα.

7. 2. 2. ΠΡΟΤΑΣΗ. Τυχόν μη κενό υποσύνολο ενός ολικά φραγμένου μετρικού χώρου είναι ολικά φραγμένο.

Απόδειξη.

Έστω S ένα μη κενό υποσύνολο ενός ολικά φραγμένου μετρικού χώρου (E, ρ) και ε τυχόν, $\varepsilon > 0$. Επειδή ο E είναι ολικά φραγμένος ισχύει:

$$E = \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \frac{\varepsilon}{2}),$$

όπου $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ κατάλληλο πεπερασμένο υποσύνολο του E . Τότε, το σύνολο $G = \{x \in A : B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap S \neq \emptyset\}$ είναι προφανώς μη κενό και πεπερασμένο. Έτσι για κάθε $x \in G$, επειδή $B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap S \neq \emptyset$, με το αξίωμα της επιλογής επιλέγουμε ένα σημείο $a_x \in S$ τέτοιο, ώστε

$$\rho(a_x, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θ' αποδείξουμε ότι



$$S = \bigcup_{x \in G} (B(a_x, \varepsilon) \cap S),$$

οπότε το S θα είναι ολικά φραγμένο.

Πραγματικά η σχέση $\bigcup_{x \in G} (B(a_x, \varepsilon) \cap S) \subseteq S$ είναι φανερή. Έστω τώρα $y \in S$. Τότε,

επειδή $S \subseteq E = \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \frac{\varepsilon}{2})$, υπάρχει $x \in A$ με

$y \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$. Δηλαδή υπάρχει $x \in A$ τέτοιο,

ώστε $\varrho(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε όμως, επειδή

$y \in S \cap B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ και $x \in A$, έχουμε ότι $x \in G$.

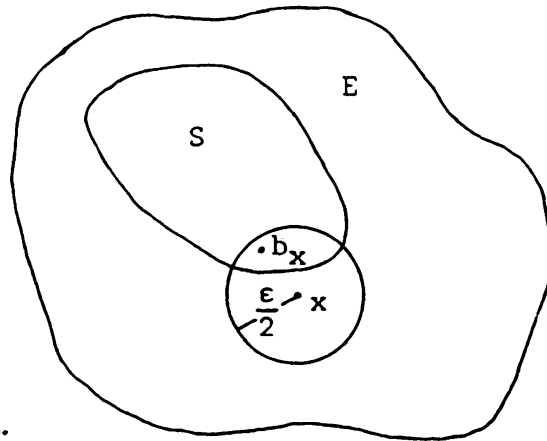
Έτσι, θεωρώντας το αντίστοιχο σημείο $a_x \in S$, παίρνουμε:

$$\varrho(y, a_x) \leq \varrho(x, y) + \varrho(x, a_x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \varrho(y, a_x) < \varepsilon.$$

Άρα υπάρχει $x \in G$ τέτοιο, ώστε $y \in B(a_x, \varepsilon)$. Επειδή όμως $y \in S$ έχουμε

$$y \in \bigcup_{x \in G} (B(a_x, \varepsilon) \cap S),$$

πράγμα που αποδεικνύει τελικά την πρόταση. ♦



7. 2. 3. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ας είναι (E_1, ϱ_1) , (E_2, ϱ_2) μετρικοί χώροι. Αν ο E_1 είναι ολικά φραγμένος και $f: E_1 \xrightarrow{\text{επί}} E_2$ είναι μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, τότε και ο E_2 είναι ολικά φραγμένος μετρικός χώρος.

Απόδειξη.

Έστω ε τυχόν, $\varepsilon > 0$. Επειδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε:

$$(\forall x, y \in E_1) \varrho_1(x, y) < \delta \Rightarrow \varrho_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Επιπλέον, επειδή ο E_1 είναι ολικά φραγμένος μετρικός χώρος, υπάρχει ένα πεπερασμένο και δ -πυκνό υποσύνολο του A . Θ' αποδείξουμε ότι το σύνολο $f(A)$ είναι ε -πυκνό και πεπερασμένο υποσύνολο του E_2 . Το ότι το $f(A)$ είναι πεπερασμένο σύνολο είναι φανερό, αφού το A είναι πεπερασμένο. Έστω τώρα z τυχόν, $z \in E_2$. Επειδή η f είναι επί, υπάρχει $x \in E_1$, με $z = f(x)$. Αλλά το A είναι δ -πυκνό στο E_1 και έτσι υπάρχει $y \in A$ με $\varrho_1(x, y) < \delta$. Τότε όμως, λόγω της ομοιόμορφης συνέχειας της f , έχουμε $\varrho_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Θέτοντας $f(y) = w$, παρατηρούμε ότι αποδείξαμε πως

$$(\forall z \in E_2) (\exists w \in f(A)) \varrho_2(z, w) < \varepsilon,$$



δηλαδή το $f(A)$ είναι τελικά ε -πυκνό και πεπερασμένο υποσύνολο του E_2 . Άρα ο E_2 είναι ολικά φραγμένος μετρικός χώρος. ♦

Η παραπάνω πρόταση δεν ισχύει αν παραλείψουμε την υπόθεση της ομοιόμορφης συνέχειας για την f έστω και αν η f παραμένει συνεχής (Βλέπε 7.3.3.) Έτσι, το ολικά φραγμένο δεν είναι τοπολογική ιδιότητα.

7. 2. 4. ΠΡΟΤΑΣΗ. Έστω (E, ρ) ο καρτεσιανός μετρικός χώρος των μετρικών χώρων (E_i, ρ_i) , $i = 1, \dots, n$. Τότε ο (E, ρ) είναι ολικά φραγμένος αν και μόνο αν για κάθε $i = 1, \dots, n$ ο (E_i, ρ_i) είναι ολικά φραγμένος μετρικός χώρος.

Απόδειξη.

Έστω ότι ο (E, ρ) είναι ολικά φραγμένος. Επειδή για κάθε $i = 1, \dots, n$ η προβολή $p_i: E \rightarrow E_i$ είναι συνάρτηση ομοιόμορφα συνεχής (Βλέπε 4.4. 4(ii).) και επί, σύμφωνα με την προηγούμενη Πρόταση 7.2.3., ο μετρικός χώρος (E_i, ρ_i) , $i = 1, \dots, n$ είναι ολικά φραγμένος.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι καθένας από τους μετρικούς χώρους (E_i, ρ_i) , $i = 1, \dots, n$ είναι ολικά φραγμένος και θεωρούμε ένα ε τυχόν, $\varepsilon > 0$. Επιπλέον, θεωρούμε τα πεπερασμένα σύνολα $A_1, \dots, A_n$ καθένα από τα οποία είναι $\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ - πυκνό στους

μετρικούς χώρους $E_1, \dots, E_n$, αντίστοιχα. Θ' αποδείξουμε ότι το σύνολο $A = \prod_{i=1}^n A_i$

είναι πεπερασμένο και ε -πυκνό υποσύνολο του E , οπότε θα έχουμε το ζητούμενο.

Καταρχήν το σύνολο A , ως καρτεσιανό γινόμενο πεπερασμένου πλήθους πεπερασμένων συνόλων, είναι πεπερασμένο. Έστω τώρα $x = (x_1, \dots, x_n)$ τυχόν στοιχείο του E . Τότε για κάθε $i = 1, \dots, n$, επειδή $x_i \in E_i$ και το σύνολο A_i είναι $\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ - πυκνό στο

E_i , υπάρχει $y_i \in A_i$, με $\rho_i(x_i, y_i) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, δηλαδή $y_i \in B(x_i, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}})$. Θέτοντας $y = (y_1, \dots, y_n)$

παίρνουμε

$$y \in A \text{ και } y \in B(x_1, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}) \times \dots \times B(x_n, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}),$$

οπότε, επειδή $\prod_{i=1}^n B(x_i, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}) \subseteq B(x, \varepsilon)$ (Βλέπε 1.7.2.),

$$y \in A \text{ και } y \in B(x, \varepsilon).$$

Έτσι, αποδείξαμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο A του E τέτοιο, ώστε:



$$(\forall x \in E) (\exists y \in A) \varrho(x, y) < \varepsilon,$$

που σημαίνει ότι ο (E, ϱ) είναι ολικά φραγμένος μετρικός χώρος. ♦

n

7. 2. 5. ΠΟΡΙΣΜΑ. Το καρτεσιανό γινόμενο $A = \times_{i=1}^n A_i$ είναι ολικά φραγμένο σύνολο αν και μόνο αν καθένα από τα σύνολα $A_i, i=1, \dots, n$, είναι ολικά φραγμένο.

Απόδειξη.

Είναι άμεση συνέπεια της προηγούμενης πρότασης. ♦

7. 2. 6. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ένας μετρικός χώρος (E, ϱ) είναι ολικά φραγμένος αν και μόνο αν κάθε ακολουθία σημείων του έχει βασική υπακολουθία.

Απόδειξη.

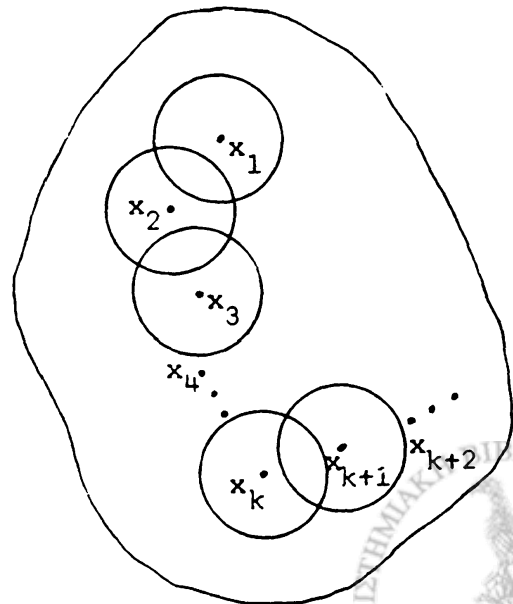
Εστω ότι ο (E, ϱ) είναι ολικά φραγμένος και $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τυχούσα ακολουθία στον E . Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι το σύνολο δεικτών της ακολουθίας είναι το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών (Βλέπε 2.2.4.). Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε μια πεπερασμένη κάλυψη C_n του E από σφαιρικές περιοχές ακτίνας $\frac{1}{n}$. Θεωρούμε μια (υπάρχει μία τουλάχιστον) από τις σφαιρικές περιοχές της κάλυψης C_1 που περιέχει άπειρους όρους της ακολουθίας $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Το σύνολο αυτών των άπειρων όρων της $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ αντιστοιχεί σε μια υπακολουθία της $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, που τη συμβολίζουμε με $(x_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$. Οι όροι της ακολουθίας αυτής ανήκουν όλοι σε μια σφαιρική περιοχή της κάλυψης C_1 , δηλαδή σε μια σφαιρική περιοχή ακτίνας 1. Άρα

$$\delta(\{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, \dots\}) \leq 2 \cdot 1 = 2$$

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για την ακολουθία $(x_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ και την κάλυψη C_2 και έτσι, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει υπακολουθία $(x_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$ της $(x_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ με

$$\delta(\{x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}, \dots\}) \leq 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μια ακολουθία $(x_n^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ τέτοια, ώστε για κάθε $\mu \in \mathbb{N}$, με $\mu < n$ η $(x_n^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ να είναι υπακολουθία της $(x_n^{(\mu)})_{n \in \mathbb{N}}$ και επιπλέον



$$\delta(\{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_v^{(n)}, \dots\}) \leq 2 \frac{1}{n} = \frac{2}{n}, n \in \mathbb{N}.$$

Θεωρούμε τώρα την ακολουθία $(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_v^{(v)}, \dots)$ δηλαδή μια ακολουθία που προφανώς είναι υπακολουθία της αρχικής ακολουθίας $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ακόμη, η $(x_v^{(v)})_{v \in \mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία.

Πραγματικά για τυχόν $\varepsilon, \varepsilon > 0$, επιλέγουμε ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ με $\frac{2}{n_0} < \varepsilon$. Τότε για τυχόντα $\mu, \lambda \in \mathbb{N}$ με $\mu > n_0$ και $\lambda > n_0$, οι ακολουθίες $(x_v^{(\mu)})_{v \in \mathbb{N}}$ και $(x_v^{(\lambda)})_{v \in \mathbb{N}}$ είναι υπακολουθίες της $(x_v^{(n_0)})_{v \in \mathbb{N}}$. Έτσι, έχουμε:

$$\rho((x_\mu^{(\mu)}), (x_\lambda^{(\lambda)})) \leq \delta(\{x_1^{(n_0)}, x_2^{(n_0)}, \dots, x_v^{(n_0)}, \dots\}) \leq \frac{2}{n_0} < \varepsilon,$$

που σημαίνει ότι η ακολουθία $(x_v^{(v)})_{v \in \mathbb{N}}$ είναι βασική.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι κάθε ακολουθία σημείων του E , έχει βασική υπακολουθία και, επιπλέον, ότι ο E δεν είναι ολικά φραγμένος. Τότε υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ τέτοιο, ώστε ο E δεν έχει καμμία πεπερασμένη κάλυψη από σφαιρικές περιοχές ακτίνας ε_0 . Θεωρούμε τυχόν σημείο $x_1 \in E$ και τη σφαιρική περιοχή $B(x_1, \varepsilon_0)$. Λόγω της υπόθεσης, έχουμε $B(x_1, \varepsilon_0) \subsetneq E$, δηλαδή $E - B(x_1, \varepsilon_0) \neq \emptyset$. Επιλέγουμε ένα σημείο $x_2 \in E - B(x_1, \varepsilon_0)$. Πάλι λόγω της υπόθεσης, η συλλογή $\{B(x_1, \varepsilon_0), B(x_2, \varepsilon_0)\}$ δεν κάλυψη του E , δηλαδή $E - (B(x_1, \varepsilon_0) \cup B(x_2, \varepsilon_0)) \neq \emptyset$. Έτσι, επιλέγουμε ένα σημείο x_3 με $x_3 \in E - (B(x_1, \varepsilon_0) \cup B(x_2, \varepsilon_0))$. Όμοια, αν έχουμε ορίσει το σημείο x_k , ορίζουμε το σημείο x_{k+1} έτσι, ώστε

$$x_{k+1} \in E - \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \varepsilon_0).$$

Με τον τρόπο αυτό ορίζουμε μια ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στον E , για την οποία ισχύει

$$\rho(x_n, x_\mu) \geq \varepsilon_0 \text{ για κάθε } \mu, n \in \mathbb{N}.$$

Άρα καμμία υπακολουθία της $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν μπορεί να είναι βασική. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί αντίκειται στην υπόθεσή μας. ♦

| Ένας μετρικός χώρος E λέμε ότι έχει την **ιδιότητα των Bolzano-Weierstrass** αν κάθε ακολουθία σημείων του έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στον E .

| Μετρικοί χώροι που έχουν την ιδιότητα των Bolzano-Weierstrass, λέγονται και **ακολουθιακά συμπαγείς (sequentially compact)** μετρικοί χώροι.

Η ιδιότητα των Bolzano-Weierstrass (σύντομα: ιδιότητα B-W) σ' ένα μετρικό χώρο είναι στενά συνδεδεμένη με τις ιδιότητες της πληρότητας και του ολικά φραγμένου. Τη σχέση αυτή πραγματεύεται η επόμενη πρόταση.



7.2.7. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ένας μετρικός χώρος έχει την ιδιότητα B-W αν και μόνο αν είναι πλήρης και ολικά φραγμένος.

Απόδειξη.

Ας είναι E ένας μετρικός χώρος με την ιδιότητα B-W και $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία στον E . Από την υπόθεση η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Αυτό όμως, σύμφωνα με την Πρόταση 2.5.2. και επειδή η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική, σημαίνει ότι είναι συγκλίνουσα. Άρα ο μετρικός χώρος E είναι πλήρης.

Υποθέτουμε τώρα ότι ο E δεν είναι ολικά φραγμένος. Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 7.2.6., υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στον E τέτοια, ώστε να μην έχει βασική υπακολουθία. Τότε όμως η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν μπορεί να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, πράγμα άτοπο, αφού για τον E υποθέτουμε την ιδιότητα B-W.

Αντίστροφα, έστω ότι ο E είναι πλήρης και ολικά φραγμένος και $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι τυχούσα ακολουθία στον E . Τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 7.2.6., η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έχει βασική υπακολουθία που, λόγω της πληρότητας του E , θα είναι και συγκλίνουσα. Άρα ο E έχει την ιδιότητα B-W. ♦

7.3. Παραδείγματα- Εφαρμογές

7.3.1. Κάθε φραγμένο διάστημα της πραγματικής ευθείας, θεωρούμενο ως υποσύνολο του μετρικού χώρου $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, είναι ολικά φραγμένο σύνολο.

Απόδειξη.

Θεωρούμε το διάστημα (α, β) , $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ και ε τυχόντα θετικό αριθμό.

Θεωρούμε ακόμη ένα φυσικό αριθμό n_0 , με $\frac{\beta - \alpha}{n_0} < \varepsilon$ και τους αριθμούς

$$x_1 = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{n_0}, x_2 = \alpha + 2 \frac{\beta - \alpha}{n_0}, \dots, x_{n_0-1} = \alpha + (n_0-1) \frac{\beta - \alpha}{n_0},$$

που είναι όλοι σημεία του (α, β) . Τότε οι πεπερασμένου πλήθους σφαιρικές περιοχές $B(x_n, \varepsilon) \cap (\alpha, \beta)$, $n = 1, \dots, n_0-1$, στο (α, β) , αποτελούν μια κάλυψη του (α, β) .

Όμοια, μπορούμε να αποδείξουμε ότι τα διαστήματα $[\alpha, \beta]$, $(\alpha, \beta]$ και $[\alpha, \beta)$ είναι ολικά φραγμένα σύνολα. ♦



7.3.2. Το αντίστροφο στην Πρόταση 7.2.1. δεν ισχύει, δηλαδή κάθε φραγμένος μετρικός χώρος δεν είναι αναγκαστικά και ολικά φραγμένος.

Θεωρούμε τον διακριτό μετρικό χώρο $(\mathbf{R}, \rho)$ Είναι γνωστό ότι αυτός είναι φραγμένος και μάλιστα $\delta(\mathbf{R}) = 1$. Υποθέτουμε ότι ο $(\mathbf{R}, \rho)$ είναι και ολικά φραγμένος. Τότε, για $\varepsilon = \frac{1}{2}$, υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο A του $\mathbf{R}$, που είναι $\frac{1}{2}$ -πυκνό στο $\mathbf{R}$. Θεωρούμε τυχόν $x \in \mathbf{R} - A$. Τότε υπάρχει $y \in A$ με $\rho(x, y) < \frac{1}{2}$. Επειδή όμως η ρ είναι η διακριτή μετρική, η σχέση $\rho(x, y) < \frac{1}{2}$ συνεπάγεται $x = y$, που είναι άτοπο, αφού $y \in A$ και $x \in \mathbf{R} - A$. ♦

Αν αντί του $\mathbf{R}$ στην παραπάνω απόδειξη θεωρήσουμε ένα τυχόν απέραντο σύνολο, η απόδειξη παραμένει ισχύουσα. Έτσι, έχουμε ότι:

Κάθε μη πεπερασμένος διακριτός μετρικός χώρος είναι μη ολικά φραγμένος.

7.3.3. Το ολικά φραγμένο δεν είναι τοπολογική ιδιότητα

Απόδειξη.

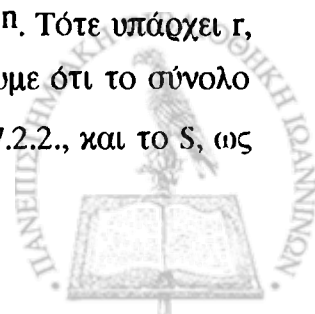
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : ((0,1), |\cdot|) \rightarrow ((0, \infty), |\cdot|)$, με τύπο $f(x) = \frac{x}{1-x}$ που προφανώς είναι συνεχής αμφιμονοσήμαντη και επί. Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι και η f^{-1} είναι συνεχής συνάρτηση. Άρα η f είναι ομοιομορφισμός. Παρόλα αυτά, όπως ξέρουμε, ο μετρικός χώρος $((0,1), |\cdot|)$ είναι ολικά φραγμένος (Βλέπε 7.3.1.), ενώ ο μετρικός χώρος $((0, \infty), |\cdot|)$, όντας μη φραγμένος, δεν είναι ολικά φραγμένος. ♦

7.3.4. Ένα υποσύνολο του ευκλείδειου μετρικού χώρου $(\mathbf{R}^n, |\cdot|)$, είναι φραγμένο αν και μόνο αν είναι ολικά φραγμένο.

Απόδειξη.

Έστω S ένα υποσύνολο του ευκλείδειου μετρικού χώρου $(\mathbf{R}^n, |\cdot|)$. Αν το S είναι ολικά φραγμένο, τότε το S είναι και φραγμένο, σύμφωνα με την Πρόταση 7.2.1.

Αντίστροφα, έστω ότι S είναι ένα φραγμένο υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$. Τότε υπάρχει r , $r > 0$ τέτοιο, ώστε $S \subseteq B(\vec{0}, r)$ (Βλέπε 1.7.6.) Έτσι, αρκεί ν' αποδείξουμε ότι το σύνολο $B(\vec{0}, r)$ είναι ολικά φραγμένο γιατί τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 7.2.2., και το S , ως υποσύνολό του, θα είναι ολικά φραγμένο.



Πραγματικά, το διάστημα $(-r, r)$ είναι ολικά φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (Βλέπε

7.3.1.). Έτσι, σύμφωνα με την Πρόταση 7.2.4. και το σύνολο $\prod_{i=1}^n (-r, r)$ είναι ολικά

φραγμένο υποσύνολο του $(\mathbb{R}^n, l_1)$. Επειδή όμως (Βλέπε 1.7. 2(ii).) ισχύει

$$B(\vec{0}, r) \subseteq \prod_{i=1}^n B(0, r) = \prod_{i=1}^n (-r, r),$$

το σύνολο $B(\vec{0}, r)$ είναι ολικά φραγμένο ως υποσύνολο του ολικά φραγμένου συνόλου $\prod_{i=1}^n (-r, r)$. ♦

7.3.5. Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο ενός μετρητικού χώρου. Το A είναι ολικά φραγμένο αν και μόνο αν το $\bar{A}$ είναι ολικά φραγμένο.

Απόδειξη.

Αν $\bar{A}$ είναι ολικά φραγμένο τότε και το A είναι το ίδιο αφού το ολικά φραγμένο είναι κληρονομική ιδιότητα.

Αντίστροφα, έστω ότι το A είναι ολικά φραγμένο και ε τυχόν $\varepsilon > 0$. Τότε

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \frac{\varepsilon}{2}),$$

όπου $x_i \in A$, $i=1, \dots, k$. Εξάλλου, για τυχόν y έχουμε:

$$\begin{aligned} y \in \bar{A} &\Rightarrow B(y, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow B(y, \frac{\varepsilon}{2}) \cap \left(\bigcup_{i=1}^k B(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \right) \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i=1}^k B(y, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow (\exists j \in \{1, \dots, k\}) B(y, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B(x_j, \frac{\varepsilon}{2}) \neq \emptyset \Rightarrow (\exists z) z \in B(y, \frac{\varepsilon}{2}) \wedge z \in B(x_j, \frac{\varepsilon}{2}) \Rightarrow \\ &(\exists z) \varrho(y, z) < \frac{\varepsilon}{2} \wedge \varrho(x_j, z) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Τότε όμως

$$\varrho(y, x_j) \leq \varrho(y, z) + \varrho(z, x_j) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow y \in B(x_j, \varepsilon) \Rightarrow y \in \bigcup_{j=1}^k B(x_j, \varepsilon).$$

Άρα τελικά:

$$\bar{A} \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \varepsilon) \Rightarrow \bar{A} \text{ ολικά φραγμένο. } \blacklozenge$$



7.4. Λυμένες Ασκήσεις

7.4.1. Αν A και B είναι δύο ολικά φραγμένα υποσύνολα ενός μετρικού χώρου E , ν' αποδειχτεί ότι και τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$ ($A \cap B \neq \emptyset$), είναι ολικά φραγμένα υποσύνολα του E .

Λύση.

Αφού το A είναι ολικά φραγμένο για τυχόν $\varepsilon > 0$ υπάρχει μια πεπερασμένη κάλυψη του από σφαιρικές περιοχές ακτίνας ε , $\mathcal{A} = \{B(a_i, \varepsilon) : i=1, \dots, n\}$. Όμοια, για το B υπάρχει μια πεπερασμένη κάλυψή του από σφαιρικές περιοχές ακτίνας ε , η $\mathcal{B} = \{B(b_i, \varepsilon) : i=1, \dots, m\}$. Τότε η συλλογή $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ είναι μια πεπερασμένη κάλυψη του $A \cup B$ από σφαιρικές περιοχές ακτίνας ε , που αποδεικνύει ότι το $A \cup B$ είναι ολικά φραγμένο.

Το σύνολο $A \cap B$ ως υποσύνολο του A είναι προφανώς ολικά φραγμένο αφού το ολικά φραγμένο είναι κληρονομική ιδιότητα.

7.4.2. Ας είναι (E_1, ρ_1) , (E_2, ρ_2) μετρικοί χώροι και $f: E_1 \rightarrow E_2$ μια συνάρτηση του Lipschitz. Ν' αποδειχτεί ότι αν S είναι ολικά φραγμένο υποσύνολο του E_1 , τότε και το $f(S)$ είναι ολικά φραγμένο υποσύνολο του E_2 .

Λύση.

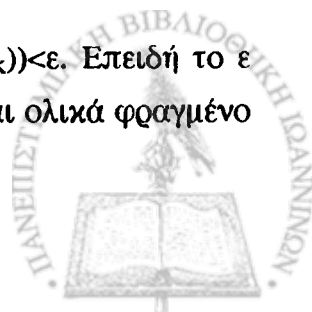
Έστω $\varepsilon > 0$ τυχόν. Αφού το S είναι ολικά φραγμένο, υπάρχει ένα πεπερασμένο $\frac{\varepsilon}{L}$ -πυκνό υποσύνολο A του S , όπου L η σταθερά Lipschitz της συνάρτησης f . Έστω $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Θ' αποδείξουμε ότι το πεπερασμένο υποσύνολο $f(A)$ του $f(S)$ είναι ε -πυκνό υποσύνολο του $f(S)$. Θεωρούμε τυχόν $y \in f(S)$. Τότε υπάρχει $x \in S$ με $f(x) = y$. Επειδή $x \in S$ και το A είναι πεπερασμένο και $\frac{\varepsilon}{L}$ -πυκνό υποσύνολο του S , υπάρχει $a_k \in A$ τέτοιο, ώστε $\rho_1(x, a_k) < \frac{\varepsilon}{L}$. Τότε όμως από την υπόθεση,

$$\rho_2(f(x), f(a_k)) < L \rho_1(x, a_k) < L \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon,$$

ή

$$\rho_2(y, f(a_k)) < \varepsilon.$$

Άρα για το τυχόν $y \in f(S)$ υπάρχει $f(a_k) \in f(A)$ τέτοιο, ώστε $\rho_2(y, f(a_k)) < \varepsilon$. Επειδή το ε είναι τυχόν και το $f(A)$ πεπερασμένο υποσύνολο του $f(S)$, το $f(S)$ είναι ολικά φραγμένο υποσύνολο του E_2 .



7.5. Ασκήσεις

1. Ν' αποδειχτεί ότι αν ο μετρικός χώρος (E, ρ) είναι ολικά φραγμένος τότε και ο μετρικός χώρος (E, d) είναι ολικά φραγμένος, όπου $d = \min\{1, \rho\}$.
2. Ν' αποδειχτεί ότι η διάμετρος ενός ολικά φραγμένου μετρικού χώρου είναι ίση με τη διάμετρο ενός το πολύ αριθμήσιμου και πυκνού υποσυνόλου του.
3. Ν' αποδειχτεί ότι ένα υποσύνολο του ευκλείδειου μετρικού χώρου $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι ακολουθιακά συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.
4. Έστω (E, ρ) ο καρτεσιανός μετρικός χώρος των μετρικών χώρων (E_i, ρ_i) $i=1, \dots, n$. Ν' αποδειχτεί ότι ο (E, ρ) είναι ακολουθιακά συμπαγής αν και μόνο αν για κάθε $i=1, \dots, n$ ο μετρικός χώρος (E_i, ρ_i) είναι ακολουθιακά συμπαγής.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

συμπαγείς μετρικοί χώροι

8.1. Γενικά

Η έννοια της "συμπαγότητας" είναι μια από τις πιο βασικές έννοιες στην Τοπολογία αλλά και γενικότερα στη Μαθηματική Ανάλυση. Αυτό, γιατί οι "συμπαγείς μετρικοί χώροι" εκτός του ότι είναι πολύ πλούσιοι σε ιδιότητες, έχουν μεγάλη συχνότητα εμφάνισης σ' όλους τους κλάδους της Μαθηματικής Ανάλυσης.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο δώσαμε τον ορισμό του ακολουθιακά συμπαγούς μετρικού χώρου. Όπως θα δούμε στο παρόν κεφάλαιο, οι έννοιες "συμπαγής μετρικός χώρος" και "ακολουθιακά συμπαγής μετρικός χώρος" είναι έννοιες ισοδύναμες στους μετρικούς χώρους. Επειδή όμως οι έννοιες αυτές διαφοροποιούνται στους τοπολογικούς χώρους, θα δώσουμε τον ορισμό του συμπαγούς μετρικού χώρου με τρόπο που να μπορεί αυτός να είναι ορισμός και για την περίπτωση των τοπολογικών χώρων. Στη συνέχεια, εκτός των άλλων, θα δούμε και την ισοδυναμία των δύο εννοιών που αναφέραμε παραπάνω.



8.2. Η έννοια του συμπαγούς μετρικού χώρου

Μια κάλυψη (*cover*) $\mathcal{C}$ ενός συνόλου E είναι μια συλλογή συνόλων C τέτοια ώστε $E \subseteq \cup \mathcal{C}$.

Μια συλλογή συνόλων $\mathcal{A}$ ονομάζεται υποκάλυψη (*subcover*) μιας κάλυψης $\mathcal{C}$ του E αν $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ και επιπλέον $E \subseteq \cup \mathcal{A}$.

Εστω S ένα υποσύνολο ενός μετρικού χώρου E . Μια κάλυψη $\mathcal{C}$ του S ονομάζεται ανοιχτή ή κλειστή στον E αν κάθε στοιχείο A , $A \in \mathcal{C}$, είναι ανοιχτό ή κλειστό αντίστοιχα, υποσύνολο του E .

Ένας μετρικός χώρος E λέγεται συμπαγής (*compact*) μετρικός χώρος αν κάθε ανοιχτή κάλυψή του έχει πεπερασμένη υποκάλυψη.

Ένα υποσύνολο S ενός μετρικού χώρου E λέγεται συμπαγές σύνολο αν το S , ως μετρικός υπόχωρος του E , είναι συμπαγής μετρικός χώρος.

Ο παραπάνω ορισμός του συμπαγούς μετρικού χώρου είναι γνωστός ως **ορισμός των Heine-Borel**.

8.3. Παραδείγματα - Εφαρμογές

8.3.1. Ένας μετρικός χώρος (E, ρ) με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων είναι συμπαγής μετρικός χώρος.

Απόδειξη.

Εστω $E = \{a_1, \dots, a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ και $\mathcal{C}$ μια ανοιχτή κάλυψη του E . Επειδή $E \subseteq \cup \mathcal{C}$, έχουμε $a_1 \in \cup \mathcal{C}$. Άρα, υπάρχει $A \in \mathcal{C}$ με $a_1 \in A$. Με το αξίωμα της επιλογής, επιλέγουμε ένα σύνολο $A_1 \in \mathcal{C}$ με $a_1 \in A_1$. Όμοια, για κάθε $v = 1, \dots, n$ θεωρούμε ένα ακριβώς σύνολο $A_v \in \mathcal{C}$ με $a_v \in A_v$. Τότε έχουμε

$$\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i \quad \text{ή} \quad E \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

Άρα υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη, η $\{A_1, \dots, A_n\}$, της τυχούσας κάλυψης $\mathcal{C}$ του E , που σημαίνει ότι ο E είναι συμπαγής μετρικός χώρος. ♦



8.3.2. Ένα υποσύνολο S ενός μετρικού χώρου (E, ρ) είναι συμπαγές αν και μόνο αν για κάθε ανοιχτή στον E κάλυψη του S υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψή της.

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι $A_i, i \in I$, είναι μια ανοιχτή στο E κάλυψη του S . Τότε $S \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$,
οπότε

$$S = S \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (S \cap A_i) = \bigcup_{i \in I} B_i,$$

όπου $B_i = S \cap A_i, i \in I$. Επειδή όμως τα σύνολα $A_i, i \in I$, είναι ανοιχτά στον E , τα σύνολα $B_i = S \cap A_i, i \in I$, είναι ανοιχτά στο μετρικό υπόχωρο S . Έτσι, αν το S είναι συμπαγές, δηλαδή ο μετρικός υπόχωρος S είναι συμπαγής, υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη της ανοιχτής κάλυψής του $B_i, i \in I$. Έστω $B_i, i \in J$, όπου J πεπερασμένο υποσύνολο του I , η πεπερασμένη υποκάλυψη της κάλυψης $B_i, i \in I$. Τότε, επειδή για κάθε $i \in I$ έχουμε $B_i = S \cap A_i$, παίρνουμε $B_i \subseteq A_i, i \in J$. Άρα

$$S = \bigcup_{i \in J} B_i \subseteq \bigcup_{i \in J} A_i,$$

δηλαδή η οικογένεια $A_i, i \in J$ είναι πεπερασμένη υποκάλυψη της $A_i, i \in I$.

Αντίστροφα, έστω ότι για κάθε ανοιχτή στον E κάλυψη του S υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψή της. Υποθέτουμε επιπλέον, ότι $B_i, i \in I$, είναι μια ανοιχτή στο S κάλυψη του S . Τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 3.1.1., για κάθε $i \in I$, δηλαδή για κάθε ανοιχτό στο S σύνολο B_i , επιλέγουμε ένα ανοιχτό στο E σύνολο A_i τέτοιο, ώστε $B_i = S \cap A_i$. Έτσι, $B_i \subseteq A_i, i \in I$, οπότε

$$S = \bigcup_{i \in I} B_i \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Τότε όμως, σύμφωνα με την υπόθεση και επειδή η οικογένεια $A_i, i \in I$, είναι ανοιχτή στο E κάλυψη του S , υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο J του I τέτοιο, ώστε $S \subseteq \bigcup_{i \in J} A_i$.

Άρα

$$S = S \cap \left(\bigcup_{i \in J} A_i \right) = \bigcup_{i \in J} (S \cap A_i) = \bigcup_{i \in J} B_i,$$

δηλαδή η οικογένεια $B_i, i \in J$, είναι πεπερασμένη υποκάλυψη της $B_i, i \in I$, που σημαίνει ότι ο S είναι συμπαγής μετρικός υπόχωρος του E , δηλαδή συμπαγές σύνολο. ♦

Το παραπάνω συμπέρασμα είναι ένα χρησιμότατο. Αυτό, γιατί μας επιτρέπει να συμπεραίνουμε τη συμπαγότητα των υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου μέσω καλύψεων τους ανοιχτών σ' ολόκληρο το μετρικό χώρο και όχι αναγκαστικά στον υπόχωρο που ορίζουν τα υποσύνολα αυτά, όπως θα έπρεπε με βάση τον ορισμό.



8.3.3. Κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι ολικά φραγμένος και επομένως φραγμένος μετρικός χώρος.

Απόδειξη.

Πραγματικά, έστω ε τυχόν θετικός αριθμός. Τότε, επειδή $E = \bigcup_{x \in E} B(x, \varepsilon)$ και λόγω της συμπαγότητας του E , υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη της ανοιχτής κάλυψης $B(x, \varepsilon)$, $x \in E$, του E . Άρα υπάρχουν σημεία $x_1, \dots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$, του E τέτοια, ώστε $E = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$. Αυτό όμως, σύμφωνα με την Πρόταση 7.1.1., σημαίνει ότι ο E είναι ολικά φραγμένος. Επιπλέον, ως ολικά φραγμένος, ο E είναι και φραγμένος μετρικός χώρος (Βλέπε Πρόταση 7.2.1.). ♦

8.4. Ισοδύναμα της συμπαγότητας

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε μερικούς άλλους τρόπους χαρακτηρισμού της συμπαγότητας που είναι ισοδύναμοι με τον κατά Heine-Borel χαρακτηρισμό της. Για το σκοπό αυτό δίνουμε αρχικά το επόμενο λήμμα.

8. 4. 1. ΛΗΜΜΑ. Ας είναι (E, ρ) ένας μετρικός χώρος ακολουθιακά συμπαγής και A_i , $i \in I$ μια ανοιχτή κάλυψή του. Τότε υπάρχει ε , $\varepsilon > 0$, τέτοιο, ώστε:

$$(\forall x \in E) (\exists i \in I) B(x, \varepsilon) \subseteq A_i.$$

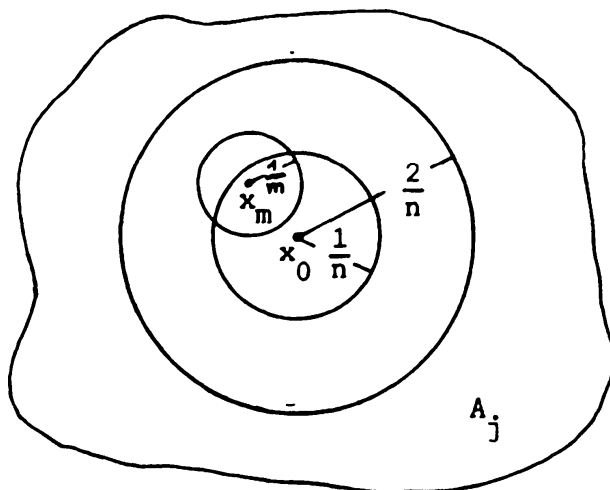
Απόδειξη.

Έστω ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα του λήμματος. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένα σημείο $x_n \in E$ τέτοιο, ώστε η σφαιρική περιοχή $B(x_n, \frac{1}{n})$ δεν είναι υποσύνολο κανενός από τα σύνολα A_i , $i \in I$. Ορίζεται έτσι μια ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ η οποία, επειδή ο E είναι ακολουθιακά συμπαγής, έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Έστω $x_0 \in E$ ένα σημείο



συσσώρευσης της $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Επειδή $x_0 \in E = \bigcup_{i \in I} A_i$, υπάρχει $j \in I$ τέτοιο, ώστε $x_0 \in A_j$.

Επιπλέον, επειδή το A_j είναι ανοιχτό, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $B(x_0, \frac{2}{n}) \subseteq A_j$. Επειδή το x_0



είναι σημείο συσσώρευσης της $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$, $m > n$ και τέτοιο, ώστε $x_m \in B(x_0, \frac{1}{n}) \subseteq B(x_0, \frac{2}{n})$. Τότε όμως ισχύει $B(x_m, \frac{1}{m}) \subseteq B(x_0, \frac{2}{n})$. Πραγματικά για τυχόν y έχουμε:

$$\begin{aligned} y \in B(x_m, \frac{1}{m}) &\Rightarrow \rho(x_m, y) < \frac{1}{m} \Rightarrow \rho(x_m, y) < \frac{1}{n} \Rightarrow \\ \rho(y, x_0) &< \rho(y, x_m) + \rho(x_m, x_0) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \Rightarrow \\ y &\in B(x_0, \frac{2}{n}). \end{aligned}$$

Άρα, από τη σχέση $B(x_0, \frac{2}{n}) \subseteq A_j$, παίρνουμε

$$B(x_m, \frac{1}{m}) \subseteq A_j,$$

που αντίκειται στην αρχική μας υπόθεση. ♦

Ο θετικός αριθμός ε , την ύπαρξη του οποίου εξασφαλίζει για τα ακολουθιακά συμπαγή σύνολα το παραπάνω λήμμα, λέγεται **αριθμός του Lebesgue**.

8.4.2. ΠΡΟΤΑΣΗ. Για τυχόντα μετρικό χώρο (E, ρ) τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- i) Ο (E, ρ) είναι συμπαγής.
- ii) Ο (E, ρ) είναι πλήρης και ολικά φραγμένος.
- iii) Ο (E, ρ) είναι ακολουθιακά συμπαγής.



Απόδειξη.

Από την Πρόταση 7.2.7., είναι γνωστή η ισοδυναμία (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Έτσι, αρκεί ν' αποδείξουμε την ισοδυναμία (i) $\Leftrightarrow$ (iii).

(i $\Rightarrow$ iii) Υποθέτουμε ότι ο (E, ρ) είναι συμπαγής και ταυτόχρονα όχι ακολουθιακά συμπαγής. Τότε υπάρχει ακολουθία $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στον E η οποία δεν έχει σημεία συσσώρευσης στον E . Έτσι, για κάθε $x \in E$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή $U(x)$ του E τέτοια, ώστε

$$\alpha_n \notin U(x) \text{ για πεπερασμένο πλήθος δεικτών } n \in \mathbb{N}.$$

Επειδή όμως

$$E = \bigcup_{x \in E} U(x)$$

και ο E είναι συμπαγής, υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους σημεία $x_1, \dots, x_n$ στον E τέτοια, ώστε

$$E = \bigcup_{i=1}^n U(x_i).$$

Αλλά τότε οδηγούμαστε σε άτοπο γιατί, αφού για κάθε $i = 1, \dots, n$ έχουμε

$$\alpha_n \notin U(x_i) \text{ για πεπερασμένο πλήθος δεικτών } n \in \mathbb{N},$$

παίρνουμε τελικά

$$\alpha_n \notin \bigcup_{i=1}^n U(x_i) = E \text{ για πεπερασμένο πλήθος δεικτών } n \in \mathbb{N}.$$

(iii $\Rightarrow$ i) Έστω ότι ο (E, ρ) είναι ακολουθιακά συμπαγής και $A_i, i \in I$ τυχούσα ανοιχτή κάλυψη του E . Έστω επιπλέον $\varepsilon, \varepsilon > 0$, ο αριθμός του Lebesgue για την κάλυψη $A_i, i \in I$ που εξασφαλίζει το Λήμμα 8.4.1. Ακόμη, ο E , ως ακολουθιακά συμπαγής, είναι ολικά φραγμένος. Έτσι, έστω $B(x_1, \varepsilon), \dots, B(x_n, \varepsilon)$ μια πεπερασμένη κάλυψη του E (Βλέπε Πρόταση 7.1.1.). Για κάθε περιοχή $B(x_\lambda, \varepsilon), \lambda = 1, \dots, n$ θεωρούμε, σύμφωνα με το Λήμμα 8.4.1., ένα σύνολο A_λ της κάλυψης $A_i, i \in I$ τέτοιο, ώστε $B(x_\lambda, \varepsilon) \subseteq A_\lambda$. Τότε όμως

$$E = \bigcup_{\lambda=1}^n B(x_\lambda, \varepsilon) \subseteq \bigcup_{\lambda=1}^n A_\lambda.$$

Άρα η κάλυψη $A_i, i \in I$ του E έχει πεπερασμένη υποκάλυψη, την $\{A_1, \dots, A_n\}$, που σημαίνει ότι ο E είναι συμπαγής. ♦

Η συμπαγότητα μπορεί να χαρακτηριστεί και με τη βοήθεια των κλειστών συνόλων. Για το σκοπό αυτό δίνουμε τον εξής ορισμό:

Μια συλλογή συνόλων $\mathcal{C}$ λέμε ότι έχει την **ιδιότητα των πεπερασμένων τομών (finite intersection property)** αν για κάθε πεπερασμένη υποσυλλογή B της $\mathcal{C}$ ισχύει $\bigcap B \neq \emptyset$.



8.4.3. ΠΡΟΤΑΣΗ Ένας μετρικός χώρος E είναι συμπαγής αν και μόνο αν κάθε οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του E , που έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών, έχει μη κενή τομή.

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι ο E είναι συμπαγής και ότι $G_i, i \in I$ είναι μια οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του E , που έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι $\bigcap_{i \in I} G_i = \emptyset$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Πραγματικά, έχουμε:

$$E = \emptyset^c = \left(\bigcap_{i \in I} G_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} G_i^c.$$

Άρα η οικογένεια $G_i^c, i \in I$ είναι μια κάλυψη του E και μάλιστα ανοιχτή, αφού για κάθε $i \in I$ το G_i είναι κλειστό σύνολο. Λόγω της συμπαγότητας του E , υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη της $G_i^c, i \in I$, δηλαδή υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο J του I τέτοιο, ώστε $E = \bigcup_{i \in J} G_i^c$. Τότε όμως παίρνουμε

$$\emptyset = E^c = \left(\bigcup_{i \in J} G_i^c \right)^c = \bigcap_{i \in J} G_i.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί αντίκειται στην ιδιότητα των πεπερασμένων τομών που υποθέσαμε για την οικογένεια $G_i, i \in I$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι κάθε οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του E που έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών, έχει μη κενή τομή. Θ' αποδείξουμε ότι ο E είναι συμπαγής.

Πραγματικά, έστω $A_i, i \in I$ τυχούσα ανοιχτή κάλυψη του E .

Τότε:

$$E = \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \emptyset = E^c = \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c.$$

Επειδή η συλλογή $A_i^c, i \in I$ είναι συλλογή κλειστών συνόλων και μάλιστα με κενή τομή, σύμφωνα με την υπόθεση, η $A_i^c, i \in I$ δεν μπορεί να έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών. Έτσι, υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $J, J \subseteq I$, τέτοιο, ώστε

$$\bigcap_{i \in J} A_i^c = \emptyset.$$

Τότε όμως έχουμε

$$E = \emptyset^c = \left(\bigcap_{i \in J} A_i^c \right)^c = \bigcup_{i \in J} A_i.$$

δηλαδή υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη της $A_i, i \in I$. Άρα ο E είναι συμπαγής μετρικός χώρος. ♦



8.5. Παραδείγματα – Εφαρμογές

8.5.1. Όπως τονίστηκε και στα προηγούμενα, οι έννοιες της συμπαγότητας και της ακολουθιακής συμπαγότητας, αν και είναι ισοδύναμες στους μετρικούς χώρους, δεν είναι ισοδύναμες στους τοπολογικούς χώρους.

Τα όσα εισαγωγικά αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο για τους τοπολογικούς χώρους, δεν μας δίνουν τη δυνατότητα να δώσουμε παραδείγματα χώρων ακολουθιακά συμπαγών και ταυτόχρονα μη συμπαγών. Τέτοια παραδείγματα μπορεί να βρεί κανείς σε βιβλία που πραγματεύονται τη θεωρία των τοπολογικών χώρων. (Π.χ. στο βιβλίο: *Foundations of General Topology* του W. Pervin, Academic Press 1965, στη σελίδα 59, υπάρχουν τέτοια παραδείγματα).

Σημειώνουμε εδώ ότι ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος είναι πάντοτε ακολουθιακά συμπαγής, όπως προκύπτει από την απόδειξη της Πρότασης 8.4.2 ($\Rightarrow$).

Η παραπάνω διαφορά μεταξύ μετρικών και τοπολογικών χώρων και τα συνακόλουθά της, είναι ο λόγος που οι απόδειξεις των περισσότερων προτάσεων του παρόντος κεφαλαίου στηρίζονται στον κατά Heine-Borel ορισμό της συμπαγότητας. Έτσι, οι αποδείξεις αυτές, χωρίς σημαντικές αλλαγές ισχύουν και για τους τοπολογικούς χώρους. Αυτό, αν και πολλές από τις αποδείξεις αυτές θα ήταν ευκολότερες αν βασιζόνταν στον χαρακτηρισμό της συμπαγότητας με βάση την ιδιότητα των Bolzano-Weierstrass.

8.5.2. Ένα υποσύνολο του ευκλείδειου μετρικού χώρου $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι A είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του μετρικού χώρου $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Σύμφωνα με την Πρόταση 8.4.2., το A είναι πλήρες, επομένως κλειστό (Βλέπε 6.2.2.) υποσύνολο του $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Επιπλέον το A είναι και φραγμένο (Βλέπε 8.3.3.)

Αντίστροφα, έστω ότι το A είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 6.2.1. και την Εφαρμογή 7.3.1., το A είναι πλήρες και ολικά φραγμένο άρα συμπαγές. ♦



Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μπορούμε ν' αποδείξουμε ότι: ένα υποσύνολο του ευκλείδειου μετρικού χώρου, $(\mathbb{R}^n, | \cdot |)$, $n \in \mathbb{N}$, είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.

8.5.3. Ένα μη κενό και συμπαγές υποσύνολο της πραγματικής ευθείας έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο.

Απόδειξη.

Έστω A ένα μη κενό και συμπαγές υποσύνολο του μετρικού χώρου $(\mathbb{R}, | \cdot |)$. Σύμφωνα με την προηγούμενη εφαρμογή το A είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Επειδή, επιπλέον, $A \neq \emptyset$, υπάρχουν τα $\sup A$ και $\inf A$ στο $\mathbb{R}$. Επειδή όμως το A είναι κλειστό (ως συμπαγές) τα $\sup A$ και $\inf A$, που είναι σημεία επαφής του A , ανήκουν στο A . Άρα $\sup A = \max A$ και $\inf A = \min A$. ♦

8.5.4. Η συμπαγότητα δεν είναι κληρονομική ιδιότητα

Απόδειξη.

Το διάστημα $[0,1]$ της πραγματικής ευθείας ως κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του μετρικού χώρου $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ είναι συμπαγές σύνολο. Αντίθετα, το σύνολο $(0,1)$, παρότι είναι υποσύνολο του συμπαγούς συνόλου $[0,1]$, δεν είναι συμπαγές γιατί δεν είναι κλειστό. ♦

8.5.5. Αν (E, ρ) είναι ο καρτεσιανός μετρικός χώρος των μετρικών χώρων (E_i, ρ_i) , $i=1, \dots, n$, τότε ισχύει ότι ο (E, ρ) είναι συμπαγής αν και μόνο αν για κάθε $i=1, \dots, n$ ο μετρικός χώρος (E_i, ρ_i) είναι συμπαγής.

Απόδειξη.

Πραγματικά, έστω ότι ο (E, ρ) είναι συμπαγής. Τότε ο (E, ρ) είναι πλήρης και ολικά φραγμένος. Έτσι, σύμφωνα με τις Προτάσεις 6.2.4. και 7.2.4. αντίστοιχα, για κάθε $i = 1, \dots, n$ ο χώρος (E_i, ρ_i) είναι πλήρης και ολικά φραγμένος και άρα συμπαγής.

Αντίστροφα, αν για κάθε $i = 1, \dots, n$ ο μετρικός χώρος (E_i, ρ_i) είναι συμπαγής και επομένως πλήρης και ολικά φραγμένος, τότε, σύμφωνα πάλι με τις Προτάσεις 6.2.4. και 7.2.4., ο (E, ρ) είναι πλήρης και ολικά φραγμένος και άρα συμπαγής. ♦



8. 5. 6. Η οικογένεια των συνόλων $A_v = (0, \frac{1}{v}]$, $v \in \mathbb{N}$ έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών γιατί $A_{v_1} \cap A_{v_2} \cap \dots \cap A_{v_k} = (0, \frac{1}{v_k}]$, όπου $v_k = \max\{v_1, \dots, v_k\}$. Ισχύει όμως $\bigcap_{v \in \mathbb{N}} A_v = \emptyset$.

Συνδυάζοντας το συμπέρασμα αυτό με το συμπέρασμα της Πρότασης 8.4.3. και, λαμβάνοντας υπόψη ότι για κάθε $v \in \mathbb{N}$ το σύνολο A_v είναι κλειστό υποσύνολο του μετρικού χώρου $((0,1], | \cdot |)$, συμπεραίνουμε ότι ο μετρικός χώρος $((0,1], | \cdot |)$ δεν είναι συμπαγής. ♦

8.5.7. Έστω E ένας μετρικός χώρος και C μια συλλογή μη κενών και κλειστών υποσυνόλων του E γραμμικά διατεταγμένη ως προς τη σχέση του υποσυνόλου. Αν ένα τουλάχιστον από τα στοιχεία της C είναι συμπαγές σύνολο, τότε $\bigcap C \neq \emptyset$.

Απόδειξη.

Έστω A ένα συμπαγές σύνολο της συλλογής C . Θεωρούμε τη συλλογή

$$A = \{X \in C : X \subseteq A\}.$$

Επειδή η C είναι γραμμικά διατεταγμένη και $A \subseteq C$, ισχύει $\bigcap A = \bigcap C$. Επιπλέον, η συλλογή A , ως γραμμικά διατεταγμένη, έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών και τα μέλη της είναι κλειστά υποσύνολα του συμπαγούς συνόλου A . Άρα $\bigcap A \neq \emptyset$, δηλαδή $\bigcap C \neq \emptyset$. ♦

8.5.8. Έστω E ένας μετρικός χώρος και $(X_v)_{v \in \mathbb{N}}$ μια φθίνουσα ακολουθία μη κενών και κλειστών υποσυνόλων του E . Αν ένας τουλάχιστον όρος της ακολουθίας $(X_v)_{v \in \mathbb{N}}$ είναι συμπαγές σύνολο, τότε $\bigcap_{v \in \mathbb{N}} X_v \neq \emptyset$ και μάλιστα

$$\delta\left(\bigcap_{v \in \mathbb{N}} X_v\right) = \lim_{v \in \mathbb{N}} \delta(X_v).$$

Επιπλέον, ισχύει:

$$\lim_{v \in \mathbb{N}} \delta(X_v) = 0 \Leftrightarrow \text{Το } \bigcap_{v \in \mathbb{N}} X_v \text{ είναι μονοστοιχειακό σύνολο.}$$

Απόδειξη.

Εφαρμόζοντας το συμπέρασμα της προηγούμενης εφαρμογής, παίρνουμε

$$\bigcap_{v \in \mathbb{N}} X_v \neq \emptyset.$$



Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $N = \mathbb{N}$ και ότι το X_1 είναι συμπαγές. Τότε κάθε X_v , $v \in \mathbb{N}$ ως κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς X_1 , είναι συμπαγές. Άρα για κάθε $v \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $a_v, b_v \in X_v$ τέτοια, ώστε:

$$\delta(X_v) = q(a_v, b_v).$$

Η ακολουθία $(a_v)_{v \in \mathbb{N}}$ ως ακολουθία σημείων του συμπαγούς συνόλου X_1 , έχει συγκλίνουσα εν X_1 υποακολουθία $(a_{k_v})_{v \in \mathbb{N}}$, με $\lim_{v \in \mathbb{N}} a_{k_v} = \ell_a$. Όμοια, η ακολουθία $(b_{k_v})_{v \in \mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα εν X_1 ακολουθία $(b_{l_v})_{v \in \mathbb{N}}$, με $\lim_{v \in \mathbb{N}} b_{l_v} = \ell_b$. Επειδή $\lim_{v \in \mathbb{N}} a_{k_v} = \ell_a$, παίρνουμε

$$\lim_{v \in \mathbb{N}} q(a_{k_v}, b_{l_v}) = q(\ell_a, \ell_b).$$

Επίσης, για τυχόν $\mu \in \mathbb{N}$ υπάρχει $v_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε $k_{v_0} \geq \mu$. Άρα $X_{k_v} \subseteq X_\mu$ για κάθε $v \geq v_0$. Επομένως, για κάθε $v_0 \geq v$ ισχύει $a_{k_v} \in X_\mu$, που σημαίνει $\ell_a = \lim_{v \in \mathbb{N}} a_{k_v} \in X_\mu$, αφού το X_μ είναι κλειστό. Έτσι, έχουμε

$$\ell_a \in \bigcap_{\mu \in \mathbb{N}} X_\mu.$$

Όμοια, παίρνουμε

$$\ell_b \in \bigcap_{\mu \in \mathbb{N}} X_\mu.$$

Άρα

$$q(\ell_a, \ell_b) = \lim_{v \in \mathbb{N}} q(a_{k_v}, b_{l_v}) = \lim_{v \in \mathbb{N}} \delta(X_{k_v}) \leq \delta\left(\bigcap_{\mu \in \mathbb{N}} X_\mu\right).$$

Προφανώς όμως ισχύει και $\delta\left(\bigcap_{v \in \mathbb{N}} X_v\right) \leq \lim_{v \in \mathbb{N}} \delta(X_{k_v})$. Άρα

$$\lim_{v \in \mathbb{N}} \delta(X_{k_v}) = \delta\left(\bigcap_{v \in \mathbb{N}} X_v\right).$$

Επειδή όμως η πραγματική μη αρνητική ακολουθία $(\delta(X_v))_{v \in \mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και άνω φραγμένη, το όριό της υπάρχει και άρα

$$\lim_{v \in \mathbb{N}} \delta(X_v) = \lim_{v \in \mathbb{N}} \delta(X_{k_v}) = \delta\left(\bigcap_{v \in \mathbb{N}} X_v\right).$$

Για την ισοδυναμία

$$\lim_{v \in \mathbb{N}} \delta(X_v) = 0 \Leftrightarrow \text{Το } \bigcap_{v \in \mathbb{N}} X_v \text{ είναι μονοστοιχειακό σύνολο,}$$

υποθέτουμε ότι α, β είναι τυχόντα στοιχεία του συνόλου $\bigcap_{v \in \mathbb{N}} X_v$. Τότε, για κάθε $v \in \mathbb{N}$ θα έχουμε $\alpha \in X_v$ και $\beta \in X_v$, οπότε

$$q(\alpha, \beta) \leq \delta(X_v), \quad v \in \mathbb{N}.$$

Άρα

$$0 \leq q(\alpha, \beta) \leq \lim_{v \in \mathbb{N}} \delta(X_v) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$$

Το αντίστροφο είναι προφανές. ♦



8.6. Ιδιότητες των συμπαγών μετρικών χώρων

8.6.1. ΠΡΟΤΑΣΗ. Κάθε συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού χώρου είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο.

Απόδειξη.

Εστω A ένα συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού χώρου E . Τότε το A είναι πλήρες και ολικά φραγμένο, οπότε, σύμφωνα με τις Προτάσεις 6.2.2. και 7.2.1. αντίστοιχα, είναι κλειστό και φραγμένο. ♦

Όπως είδαμε στην Εφαρμογή 8.5.2., στο μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ισχύει και το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης. Γενικά, όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, το αντίστροφο της Πρότασης 8.6.1. δεν ισχύει.

8.6.2. ΠΡΟΤΑΣΗ. Κάθε κλειστό υποσύνολο ενός συμπαγούς μετρικού χώρου είναι συμπαγές σύνολο.

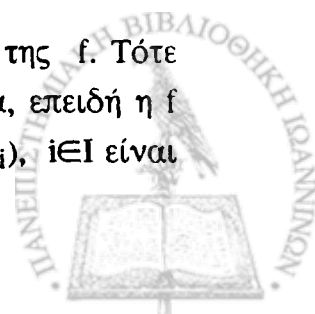
Απόδειξη.

Εστω K ένα κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς μετρικού χώρου E και C τυχούσα ανοιχτή στον E κάλυψη του K . Τότε η συλλογή $C' = C \cup \{K^c\}$ είναι ανοιχτή του E . Επειδή ο E είναι συμπαγής, υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη $\mathcal{K}$ της C' . Τότε όμως η συλλογή $\mathcal{K} - \{K^c\}$ είναι πεπερασμένη (ως υποσυλλογή της $\mathcal{K}$) υποκάλυψη της C για το σύνολο K . Αυτό, σύμφωνα με την Εφαρμογή 8.3.2., αποδεικνύει τη συμπαγότητα του K . ♦

8.6.3. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ας είναι E_1, E_2 μετρικοί χώροι και $f : E_1 \rightarrow E_2$ μια συνεχής συνάρτηση. Αν ο μετρικός χώρος E_1 είναι συμπαγής, τότε και το πεδίο τιμών $\mathcal{R}(f)$ της f είναι συμπαγές υποσύνολο του E_2 .

Απόδειξη.

Εστω $A_i, i \in I$ μια ανοιχτή στον E_2 κάλυψη του πεδίου τιμών $\mathcal{R}(f)$ της f . Τότε είναι φανερό ότι η συλλογή $f^{-1}(A_i), i \in I$ είναι κάλυψη του E_1 και μάλιστα, επειδή η f είναι συνεχής και η συλλογή $A_i, i \in I$, συλλογή ανοιχτών συνόλων, η $f^{-1}(A_i), i \in I$ είναι



ανοιχτή κάλυψη του E_1 . Έτσι, λόγω της συμπαγότητας του E_1 , υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη $f^{-1}(A_i)$, $i \in I$ της $f^{-1}(A_i)$, $i \in I$. Επομένως $E_1 = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$, οπότε:

$$\mathcal{R}(f) = f(E_1) = f\left(\bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)\right) = \bigcup_{i \in I} f(f^{-1}(A_i)) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Άρα η οικογένεια A_i , $i \in I$ είναι πεπερασμένη υποκάλυψη της κάλυψης A_i , $i \in I$ του $\mathcal{R}(f)$, πράγμα που αποδεικνύει ότι το $\mathcal{R}(f)$ είναι συμπαγές σύνολο. ♦

8.6.4. ΠΟΡΙΣΜΑ. Αν f είναι μια συνεχής πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα συμπαγή μετρικό χώρο, τότε η f είναι φραγμένη και μάλιστα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Απόδειξη.

Σύμφωνα με την προηγούμενη Πρόταση, το πεδίο τιμών $\mathcal{R}(f)$ της f είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbf{R}$. Άρα το $\mathcal{R}(f)$ είναι φραγμένο σύνολο και μάλιστα υπάρχουν τα $\max \mathcal{R}(f)$ και $\min \mathcal{R}(f)$ (Βλέπε 8.5.3.), πράγμα που αποδεικνύει το πόρισμα. ♦

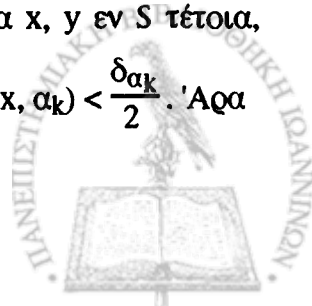
8.6.5. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ας είναι (E_1, ρ_1) , (E_2, ρ_2) μετρικοί χώροι, $f : E_1 \rightarrow E_2$ μια συνεχής συνάρτηση και S τυχόν συμπαγές υποσύνολο του E_1 . Τότε η συνάρτηση $f|_S$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη.

Θεωρούμε τυχόν ε , $\varepsilon > 0$. Τότε για τυχόν $\alpha \in S$, επειδή η f είναι συνεχής στο α , υπάρχει $\delta_\alpha > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in S$ με $\rho_1(x, \alpha) < \delta_\alpha$ να ισχύει $\rho_2(f(x), f(\alpha)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Με τον τρόπο αυτό για κάθε $\alpha \in S$, ορίζεται η σφαιρική περιοχή $B_\alpha = B(\alpha, \frac{\delta_\alpha}{2})$ έτσι, ώστε $f(B_\alpha) \subseteq B(f(\alpha), \frac{\varepsilon}{2})$. Η οικογένεια B_α , $\alpha \in S$ αποτελεί μια ανοιχτή κάλυψη του S . Επομένως, λόγω της συμπαγότητας του S , υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη $\{B_{\alpha_1}, B_{\alpha_2}, \dots, B_{\alpha_n}\}$ της B_α , $\alpha \in S$. Δηλαδή

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_{\alpha_i} \quad (*)$$

Θέτουμε $\delta = \frac{1}{2} \min\{\delta_{\alpha_1}, \dots, \delta_{\alpha_n}\}$ και θεωρούμε δυο τυχόντα στοιχεία $x, y \in S$ τέτοια, ώστε $\rho_1(x, y) < \delta$. Λόγω της σχέσης (*), υπάρχει $\alpha_k \in S$ τέτοιο, ώστε $\rho_1(x, \alpha_k) < \frac{\delta_{\alpha_k}}{2}$. Άρα



$$\varrho_1(y, \alpha_k) \leq \varrho_1(y, x) + \varrho_1(x, \alpha_k) < \delta + \frac{\delta_{\alpha_k}}{2} \leq \frac{\delta_{\alpha_k}}{2} + \frac{\delta_{\alpha_k}}{2} = \delta_{\alpha_k}.$$

Επομένως

$$\varrho_2(f(x), f(\alpha_k)) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ και } \varrho_2(f(y), f(\alpha_k)) < \frac{\varepsilon}{2},$$

οπότε

$$\varrho_2(f(x), f(y)) \leq \varrho_2(f(x), f(\alpha_k)) + \varrho_2(f(\alpha_k), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Έτσι, αποδείχτηκε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για τυχόντα x, y εν S , με $\varrho_1(x, y) < \delta$, να ισχύει $\varrho_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση $f|S$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. ♦

8.7. Παραδείγματα - Εφαρμογές

8.7.1. Για τυχόντα μη κενά υποσύνολα A και B ενός μετρικού χώρου (E, ϱ) ισχύουν τα παρακάτω:

i) Αν το A είναι συμπαγές και το B τυχόν, υπάρχει $\alpha \in A$ τέτοιο, ώστε $\varrho(A, B) = \varrho(\alpha, B)$.

ii) Αν το A είναι συμπαγές, το B κλειστό και $A \cap B = \emptyset$, τότε $\varrho(A, B) > 0$.

iii) Αν τα A, B είναι συμπαγή, υπάρχουν σημεία $\alpha \in A$ και $\beta \in B$ τέτοια, ώστε $\varrho(A, B) = \varrho(\alpha, \beta)$.

iv) Αν το A είναι συμπαγές, υπάρχουν σημεία $x_0 \in A$ και $y_0 \in A$ τέτοια, ώστε $\delta(A) = \varrho(x_0, y_0)$.

Απόδειξη.

i) Είναι γνωστό ότι $\varrho(A, B) = \inf_{x \in A} \varrho(x, B)$. Επιπλέον, η συνάρτηση $f(x) = \varrho(x, B)$, $x \in B$ είναι μια συνεχής πραγματική συνάρτηση (Βλέπε 4.4.4(i)). Επειδή το A είναι συμπαγές η f παίρνει ελάχιστη τιμή στο A , σύμφωνα με το Πρόγραμμα 8.6.4. Άρα υπάρχει $\alpha \in A$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\alpha) = \min_{x \in A} f(x).$$

Άρα

$$\varrho(\alpha, B) = f(\alpha) = \min_{x \in A} f(x) = \inf_{x \in A} \varrho(x, B) = \varrho(A, B).$$



ii) Επειδή το A είναι συμπαγές, σύμφωνα με το (i), υπάρχει $\alpha \in A$ τέτοιο, ώστε $\varrho(\alpha, B) = \varrho(A, B) \geq 0$. Ας υποθέσουμε ότι $\varrho(A, B) = 0$, δηλαδή $\varrho(\alpha, B) = 0$. Αλλά τότε (Βλέπε 1.9.5(i).), $\alpha \in \bar{B} = B$, δηλαδή $\alpha \in A \cap B$, που είναι άτοπο αφού $A \cap B = \emptyset$.

iii) Η συνάρτηση (μετρική) ϱ είναι μια συνεχής πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο $A \times B$ που είναι συμπαγές, ως καρτεσιανό γινόμενο συμπαγών συνόλων. Άρα η ϱ παίρνει ελάχιστη τιμή στο $A \times B$. Έτσι, υπάρχει ζεύγος $(\alpha, \beta) \in A \times B$ τέτοιο, ώστε:

$$\varrho(A, B) = \inf_{(x,y) \in A \times B} \varrho(x, y) = \min_{(x,y) \in A \times B} \varrho(x, y) = \varrho(\alpha, \beta).$$

(iv) Όμοια όπως και στο (iii), η συνάρτηση (μετρική) ϱ είναι συνεχής στο συμπαγές σύνολο $A \times A$ και παίρνει μέγιστη τιμή. Έτσι, υπάρχει ζεύγος $(x_0, y_0) \in A \times A$ τέτοιο, ώστε:

$$\delta(A) = \sup_{(x,y) \in A \times B} \varrho(x, y) = \max_{(x,y) \in A \times B} \varrho(x, y) = \varrho(x_0, y_0). \quad \blacklozenge$$

8.7.2. Αν E_1 και E_2 είναι μετρικοί χώροι, $f: E_1 \xrightarrow{\text{επί}} E_2$ είναι μια συνεχής και αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση και ο E_1 είναι συμπαγής, τότε η f^{-1} είναι συνεχής συνάρτηση.

Απόδειξη.

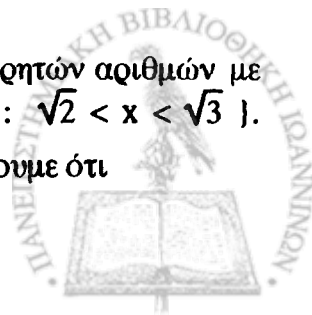
Έστω K ένα κλειστό υποσύνολο του E_1 . Τότε, επειδή ο E_1 είναι συμπαγής, το K είναι συμπαγές υποσύνολο του E_1 . Ακόμη, επειδή η f είναι συνεχής, το σύνολο $f(K)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του E_2 και άρα και κλειστό σύνολο. Έτσι, από τη σχέση

$$f(K) = (f^{-1})^{-1}(K),$$

προκύπτει ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής, αφού η αντίστροφη εικόνα $(f^{-1})^{-1}(K)$ του κλειστού συνόλου K είναι το κλειστό σύνολο $f(K)$. $\blacklozenge$

8.7.3. Όπως ξέρουμε (Βλέπε Πρόταση 8.6.1.), κάθε συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού χώρου είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο. Ειδικότερα, είναι γνωστό ότι στον ευκλείδειο μετρικό χώρο $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ισχύει και το αντίστροφο. Γενικά όμως, δεν ισχύει ότι ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο ενός μετρικού χώρου είναι συμπαγές. Ο ισχυρισμός αυτός αποδεικνύεται από το επόμενο παράδειγμα.

Θεωρούμε τον μετρικό χώρο $(\mathbb{Q}, \|\cdot\|)$, δηλαδή το σύνολο των ρητών αριθμών με μετρική αυτή που εισάγει η απόλυτη τιμή και το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{Q} : \sqrt{2} < x < \sqrt{3}\}$. Προφανώς, το A είναι ένα φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{Q}$. Επιπλέον, έχουμε ότι



$$A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{3}\} \cap \mathbb{Q} = [\sqrt{2}, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q},$$

δηλαδή το A είναι τομή του συνόλου $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ (που είναι κλειστό στο μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$) και του $\mathbb{Q}$. Άρα το A είναι κλειστό υποσύνολο του $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ (Βλέπε Πρόταση 3.1.2.). Θ' αποδείξουμε ότι το A , παρότι κλειστό και φραγμένο, δεν είναι συμπαγές υποσύνολο του $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$.

Πραγματικά, επειδή το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, υπάρχει ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ εν $\mathbb{Q}$ με $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sqrt{2}$. Μάλιστα, χωρίς βλάβη, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε όμως δεν υπάρχει καμιά συγκλίνουσα στο $\mathbb{Q}$ (άρα ούτε και στο A) υπακολουθία της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Αυτό, γιατί κάθε υπακολουθία της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $\sqrt{2}$ που δεν είναι στοιχείο του $\mathbb{Q}$, ούτε του A . Άρα το σύνολο A , ως μη ακολουθιακά συμπαγές, δεν είναι συμπαγές. ♦

8.7.4. Σ' ένα πραγματικό διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης δυο τυχούσες στάθμες είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη.

Το παραπάνω συμπέρασμα αποδεικνύεται με τη βοήθεια της θεωρίας των συμπαγών συνόλων.

Υπενθυμίζουμε ότι δυο στάθμες N_1 και N_2 σ' ένα διανυσματικό χώρο E είναι ισοδύναμες αν υπάρχουν θετικοί αριθμοί A και B τέτοιοι, ώστε για κάθε $x \in E$ να ισχύει:

$$AN_1(x) \leq N_2(x) \leq BN_1(x).$$

Έστω E ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με διάσταση n , $n \in \mathbb{N}$ και $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ μια βάση του E . Τότε, κάθε $x \in E$ γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή $x = x_1\gamma_1 + \dots + x_n\gamma_n$, όπου $(x_1, \dots, x_n) = \vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Έχουμε αποδείξει (Βλέπε 4.6.2.) ότι η συνάρτηση $|\cdot| : E \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $|x| = |\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, είναι στάθμη στον E και, επιπλέον, ότι η συνάρτηση $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, με τύπο $f(x) = \vec{x}$, είναι ισομετρία μεταξύ των μετρικών χώρων $(E, |\cdot|)$ και $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$.

Για ν' αποδείξουμε ότι δύο τυχούσες στάθμες στον E είναι ισοδύναμες, αρκεί ν' αποδείξουμε ότι τυχούσα στάθμη N στον E είναι ισοδύναμη με την $|\cdot|$. Έτσι, επειδή ξέρουμε (Βλέπε 4.6.2.) ότι για τυχούσα στάθμη N στον E υπάρχει $B > 0$ τέτοιο, ώστε $N(x) \leq B|x|$, $x \in E$, αρκεί ν' αποδειχτεί ότι υπάρχει $A > 0$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $A|x| \leq N(x)$, $x \in E$.

Πραγματικά, θεωρούμε το σύνολο $C = \{x \in E : |x| = 1\}$. Τότε, το σύνολο $f(C) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x}| = 1\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ επειδή είναι κλειστό και



φραγμένο. Επειδή όμως τα σύνολα C και $f(C)$ είναι ισομετρικά (άρα και ομοιομορφικά), το σύνολο C είναι και αυτό συμπαγές (Βλέπε Πρόταση 8.6.3.). Επιπλέον, λόγω της γνωστής σχέσης

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x-y) \leq B|x-y|, \quad x, y \in E,$$

η συνάρτηση N είναι συνεχής ως προς τη μετρική που εισάγει η στάθμη $|\cdot|$ (Βλέπε 4.4.4.).

Άρα η συνάρτηση N παίρνει ελάχιστη τιμή στο συμπαγές σύνολο C . Θέτουμε

$$A = \min_{x \in C} N(x).$$

Τότε, επειδή $0 \notin C$ και επομένως $N(x) > 0$ για κάθε $x \in C$, συμπεραίνουμε ότι $A > 0$. Ακόμη, για κάθε $x \in E$, με $x \neq 0$, έχουμε:

$$\left| \frac{x}{|x|} \right| = \frac{1}{|x|} |x| = 1.$$

Άρα $\frac{x}{|x|} \in C$ και έτσι

$$N\left(\frac{x}{|x|}\right) \geq A \Rightarrow \frac{1}{|x|} N(x) \geq A \Rightarrow N(x) \geq A|x|, \quad x \in E - \{0\}.$$

Επειδή όμως $N(0) = 0 = A|0|$, παίρνουμε τελικά

$$N(x) \geq A|x| \quad \text{για κάθε } x \in E,$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. ♦

Ένα άμεσο πόρισμα του παραπάνω συμπεράσματος είναι το εξής:

Όλες οι στάθμες στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, είναι ισοδύναμες.

8.7.5. Αν E είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, N μια στάθμη στον E και E^* ο χώρος των πραγματικών γραμμικών συναρτήσεων επί του E , τότε για κάθε $f \in E^*$ το

$$\sup\{|f(x)| : x \in E \text{ και } N(x) = 1\} = \sup_{N(x)=1} |f(x)|,$$

υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και μάλιστα ισχύει:

$$\sup_{N(x)=1} |f(x)| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{N(x)}, \quad f \in E^*.$$

Επιπλέον, ο τύπος $N'(f) = \sup_{N(x)=1} |f(x)| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{N(x)}$, ορίζει μια στάθμη στο διανυσματικό χώρο E^* .

Απόδειξη.

Αρχικά παρατηρούμε ότι το σύνολο $A = \{x \in E : N(x) = 1\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του διανυσματικού χώρου E , θεωρούμενου ως μετρικού με μετρική την εισαγόμενη από

τη στάθμη N (Βλέπε 8.8.1.). Άρα, για τυχούσα συνάρτηση $f \in E^*$, το $\sup_{N(x)=1} |f(x)|$ υπάρχει στο $\mathbf{R}$, αφού σύμφωνα με την Εφαρμογή 4.6.3. κάθε συνάρτηση f , $f \in E^*$, είναι συνεχής.

Για την απόδειξη της ισότητας $\sup_{N(x)=1} |f(x)| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{N(x)}$, αρκεί ν' αποδειχτεί ότι κάθε άνω φράγμα του συνόλου $\{|f(x)| : x \in E \text{ και } N(x)=1\}$ είναι άνω φράγμα του συνόλου $\left\{ \frac{|f(x)|}{N(x)} : x \in E - \{0\} \right\}$ και αντίστροφα.

Πραγματικά έστω ότι για κάποιο $\alpha \in \mathbf{R}$ ισχύει:

$$(\forall x \in E) N(x)=1 \Rightarrow |f(x)| \leq \alpha.$$

Τότε για κάθε $x \in E - \{0\}$, έχουμε $N\left(\frac{x}{N(x)}\right) = \frac{N(x)}{N(x)} = 1$, οπότε $f\left(\frac{x}{N(x)}\right) \leq \alpha$. Αλλά επειδή η f είναι γραμμική, παίρνουμε

$$\left| f\left(\frac{x}{N(x)}\right) \right| = \left| f\left(\frac{1}{N(x)} x\right) \right| = \frac{1}{N(x)} |f(x)| = \frac{|f(x)|}{N(x)} \leq \alpha.$$

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει

$$(\forall x \in E - \{0\}) \frac{|f(x)|}{N(x)} \leq \alpha.$$

Τότε, για κάθε x , με $N(x)=1$ (οπότε $x \neq 0$), έχουμε:

$$\frac{|f(x)|}{N(x)} = |f(x)| \leq \alpha.$$

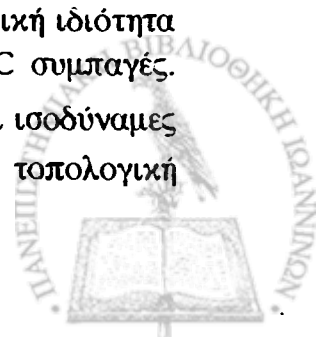
Εύκολα μπορεί ν' αποδείξει κανείς τις τρεις ιδιότητες της στάθμης για τη συνάρτηση N' . ♦

8.8. Λυμένες Ασκήσεις

8.8.1. Ν' αποδειχτεί ότι το σύνολο $A = \{x \in E : N(x)=1\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης E (του E θεωρούμενου ως μετρικού χώρου με μετρική την εισαγόμενη από τη στάθμη N).

Λύση.

Επειδή ο E είναι πεπερασμένης διάστασης, υπάρχει στάθμη N' στο E έτσι, ώστε ο μετρικός (E, N') να είναι ισομορφικός προς το μετρικό χώρο $(\mathbf{R}^n, |\cdot|)$, όπου n είναι η διάσταση του E (Βλέπε 4.6.2.). Το σύνολο $B = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^n : |\vec{x}|=1\}$ είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$ και άρα συμπαγές. Επειδή η συμπαγότητα είναι τοπολογική ιδιότητα και τα σύνολα A και $C = \{x \in E : N'(x)=1\}$ ισομορφικά, θα είναι και το C συμπαγές. Ακόμη, επειδή σύμφωνα με την Εφαρμογή 8.7.4., οι στάθμες N και N' είναι ισοδύναμες και το σύνολο A θα είναι συμπαγές, επειδή η συμπαγότητα είναι τοπολογική ιδιότητα. ♦



8.8.2. Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια συγκλίνουσα ακολουθία σ' ένα μετρικό χώρο E και $\ell = \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n$. Ν' αποδειχτεί ότι το σύνολο

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\},$$

είναι συμπαγές υποσύνολο του E .

Λύση.

Τυχούσα ακολουθία στο A θα είναι είτε υποκολουθία της $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και άρα συγκλίνουσα στο ℓ , είτε θα έχει ως όρο της το ℓ για άπειρα $n \in \mathbb{N}$, οπότε το όριό της θα είναι πάλι το ℓ . Επομένως το A είναι ακολουθιακά συμπαγές και άρα συμπαγές. ♦

8.8.3. Αν A και B είναι μη κενά και κλειστά υποσύνολα του ευκλείδειου μετρικού χώρου $\mathbb{R}^n$ και ένα τουλάχιστον από αυτά είναι φραγμένο, τότε υπάρχουν $\vec{a} \in A$ και $\vec{b} \in B$ τέτοια, ώστε

$$\rho(A, B) = |\vec{a} - \vec{b}|.$$

Λύση.

Θέτουμε $\rho(A, B) = \inf\{|\vec{x} - \vec{y}| : \vec{x} \in A, \vec{y} \in B\} = m$. Τότε υπάρχουν ακολουθίες $(\vec{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ εν A και $(\vec{y}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ εν B τέτοιες ώστε $\lim_{n \in \mathbb{N}} |\vec{x}_n - \vec{y}_n| = m$.

Υποθέτουμε ότι το A είναι κλειστό και φραγμένο δηλαδή συμπαγές, οπότε η $(\vec{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Άρα υπάρχει υπακολουθία $(\vec{x}_{k_\mu})_{\mu \in \mathbb{N}}$ της $(\vec{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, με $\lim_{\mu \in \mathbb{N}} \vec{x}_{k_\mu} = \vec{a}$. Τότε η ακολουθία $(|\vec{x}_{k_\mu} - \vec{y}_{k_\mu}|)_{\mu \in \mathbb{N}}$ ως υπακολουθία της $(|\vec{x}_n - \vec{y}_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει επίσης στο m , δηλαδή

$$\lim_{\mu \in \mathbb{N}} |\vec{x}_{k_\mu} - \vec{y}_{k_\mu}| = m.$$

Επειδή

$$|\vec{y}_{k_\mu}| \leq |\vec{x}_{k_\mu}| + |\vec{x}_{k_\mu} - \vec{y}_{k_\mu}|, \mu \in \mathbb{N},$$

και οι ακολουθίες $(|\vec{x}_{k_\mu}|)_{\mu \in \mathbb{N}}$ και $(|\vec{x}_{k_\mu} - \vec{y}_{k_\mu}|)_{\mu \in \mathbb{N}}$ ως συγκλίνουσες είναι φραγμένες, και η $(\vec{y}_{k_\mu})_{\mu \in \mathbb{N}}$ θα είναι φραγμένη. Άρα η $(\vec{y}_{k_\mu})_{\mu \in \mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία την $(\vec{y}_{k_{\mu\lambda}})_{\lambda \in \mathbb{N}}$ με $\lim_{\lambda \in \mathbb{N}} \vec{y}_{k_{\mu\lambda}} = \vec{b}$. Επιπλέον, επειδή η ακολουθία $(\vec{y}_{k_{\mu\lambda}})_{\lambda \in \mathbb{N}}$ είναι εν B και το B



είναι κλειστό, έχουμε $\lim_{\lambda \in \mathbb{N}} \vec{y}_{k_{\mu\lambda}} = \vec{b} \in B$. Επειδή η ακολουθία $(\vec{x}_{k_{\mu\lambda}})_{\lambda \in \mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της $(\vec{x}_{k_{\mu}})_{\mu \in \mathbb{N}}$, θα έχουμε $\lim_{\lambda \in \mathbb{N}} \vec{x}_{k_{\mu\lambda}} = \vec{a}$. Λόγω της συνέχειας της στάθμης, έχουμε τελικά:

$$m = \lim_{\lambda \in \mathbb{N}} |\vec{x}_{k_{\mu\lambda}} - \vec{y}_{k_{\mu\lambda}}| = |\lim_{\lambda \in \mathbb{N}} \vec{x}_{k_{\mu\lambda}} - \lim_{\lambda \in \mathbb{N}} \vec{y}_{k_{\mu\lambda}}| = |\vec{a} - \vec{b}|. \quad \blacklozenge$$

8.8.4. Ν' αποδειχτεί ότι σε τυχόντα μετρικό χώρο κάθε σύνολο με συμπαγή θήκη είναι ολικά φραγμένο σύνολο. Επιπλέον, ν' αποδειχτεί ότι, αν ο μετρικός χώρος είναι πλήρης, ισχύει και το αντίστροφο.

Λύση.

Έστω S ένα υποσύνολο ενός μετρικού χώρου E τέτοιο, ώστε το $\bar{S}$ να είναι συμπαγές. Έστω, επιπλέον, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία εν S . Τότε επειδή η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι και ακολουθία εν $\bar{S}$, η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ θα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{\mu})_{\mu \in \mathbb{M}}$ εν $\bar{S}$. Όμως η $(x_{\mu})_{\mu \in \mathbb{M}}$, ως συγκλίνουσα, θα είναι και βασική. Έτσι, αποδείχτηκε ότι κάθε ακολουθία εν S έχει βασική υπακολουθία, που σημαίνει ότι το S είναι ολικά φραγμένο.

Έστω τώρα ότι ο μετρικός χώρος E είναι πλήρης και S ένα ολικά φραγμένο υποσύνολό του. Έστω, επιπλέον, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία εν $\bar{S}$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$S \cap B(x_n, \frac{1}{n}) \neq \emptyset.$$

Με το αξίωμα της επιλογής θεωρούμε τα σημεία $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ τέτοια, ώστε

$$\alpha_1 \in S \cap B(x_1, \frac{1}{1}) \neq \emptyset$$

$$\alpha_2 \in S \cap B(x_2, \frac{1}{2}) \neq \emptyset$$

$$\alpha_n \in S \cap B(x_n, \frac{1}{n}) \neq \emptyset$$

.....

Έτσι, ορίζουμε την ακολουθία $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ για την οποία ισχύει

$$\alpha_n \in S \cap B(x_n, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}.$$

Δηλαδή η $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία εν S και μάλιστα $\alpha_n \in S \cap B(x_n, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$\rho(\alpha_n, x_n) < \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}. (*)$$

Επειδή το S είναι ολικά φραγμένο, η $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ θα έχει βασική υπακολουθία $(\alpha_{\mu})_{\mu \in \mathbb{M}}$ εν S . Τότε όμως λόγω της σχέσης (*) και η $(x_{\mu})_{\mu \in \mathbb{M}}$ θα είναι βασική (Βλέπε Άσκηση



2.10.9.). Έτσι, επειδή ο E είναι πλήρης, υπάρχει $\ell \in E$ τέτοιο, ώστε $\lim_{\mu \in M} x_\mu = \ell$. Επειδή όμως η $(x_\mu)_{\mu \in M}$ είναι μια ακολουθία εν $\bar{S}$ παίρνουμε $\ell \in \bar{S}$, πράγμα που αποδεικνύει τη συμπαγότητα του $\bar{S}$. ♦

8.8.5. Ας είναι E ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του E τέτοια, ώστε $X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n \neq \emptyset$. Ν' αποδειχτεί ότι για κάθε ανοιχτό σύνολο U του E , με $U \supseteq X$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε $X_n \subseteq U$ για κάθε $n \geq n_0$.

Λύση.

Αν για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ είχαμε $X_k \subseteq U$, τότε θα ισχυε $X_n \subseteq U$ για κάθε $n \geq k$. Έτσι, αν δεχτούμε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα, θα πρέπει να έχουμε $X_n \not\subseteq U$, $n \in \mathbb{N}$ δηλαδή $X_n \cap U^c \neq \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$. Αλλά τότε, η οικογένεια $\{X_n \cap U^c\}$, $n \in \mathbb{N}$ είναι μια οικογένεια κλειστών συνόλων που έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών. Έτσι, επειδή ο E είναι συμπαγής θα έχουμε

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X_n \cap U^c) \neq \emptyset \Rightarrow \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n \right) \cap U^c \neq \emptyset \Rightarrow X \cap U^c \neq \emptyset \Rightarrow X \not\subseteq U,$$

που είναι άτοπο. ♦

8. 8. 6. Έστω E ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $f: E \rightarrow E$ μια συνεχής συνάρτηση. Θέτουμε $E_1 = f(E)$ και $E_{n+1} = f(E_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Αν $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$, ν' αποδειχτεί ότι $A \neq \emptyset$ και $f(A) = A$.

Λύση.

Αν $f(E) = E$ τότε $A = E$. Έτσι, χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $E_1 = f(E) \subset E$ και γενικά $E_{n+1} \subset E_n$, $n \in \mathbb{N}$. Επίσης το E_1 ως εικόνα του συμπαγούς συνόλου E μέσω της συνεχούς συνάρτησης f είναι συμπαγές σύνολο και άρα κλειστό. Το ίδιο ισχύει προφανώς για καθένα από τα σύνολα E_n , $n \in \mathbb{N}$. Έτσι, η οικογένεια E_n , $n \in \mathbb{N}$ είναι μια φθίνουσα οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του E . Μάλιστα, επειδή η E_n , $n \in \mathbb{N}$ είναι φθίνουσα, ισχύει $\bigcap_{i=1}^k E_i = E_k \neq \emptyset$, δηλαδή η E_n , $n \in \mathbb{N}$ έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών. Επομένως, επειδή ο E είναι συμπαγής παίρνουμε

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \neq \emptyset.$$



Επιπλέον,

$$f(A) = f\left(\bigcap_{v \in \mathbb{N}} E_v\right) \subseteq \bigcap_{v \in \mathbb{N}} f(E_v) = \bigcap_{v \in \mathbb{N}} E_{v+1} = A. (*)$$

Αλλά

$$A = \bigcap_{v \in \mathbb{N}} E_v \subseteq E_{v-1}, v \in \mathbb{N} - \{1\} \Rightarrow f(A) \subseteq f(E_{v-1}) = E_v, v \in \mathbb{N} - \{1\}.$$

Δηλαδή

$$f(A) \subseteq \bigcap_{v \in \mathbb{N}} E_v = A (**)$$

Από τις σχέσεις (*) και (**) παίρνουμε τελικά $f(A) = A$. ♦

8. 8. 7. Ένας μετρικός χώρος E ονομάζεται τοπικά συμπαγής αν για κάθε σημείο x του E , υπάρχει συμπαγής περιοχή $U(x)$ του σημείου x .

Ν' αποδειχτεί ότι ο καρτεσιανός μετρικός χώρος τοπικά συμπαγών μετρικών χώρων είναι τοπικά συμπαγής.

Λύση.

Έστω ο καρτεσιανός μετρικός χώρος (E, ρ) των μετρικών χώρων (E_i, ρ_i) , $i=1, \dots, n$, για και $x=(x_1, \dots, x_n) \in E$. Επειδή $x_i \in E_i$, $i=1, \dots, n$, και κάθε μετρικός χώρος E_i είναι τοπικά συμπαγής, υπάρχει συμπαγής περιοχή $U(x_i)$ του x_i . Τότε όμως το σύνολο

$$U(x) = U(x_1) \times U(x_2) \times \dots \times U(x_n)$$

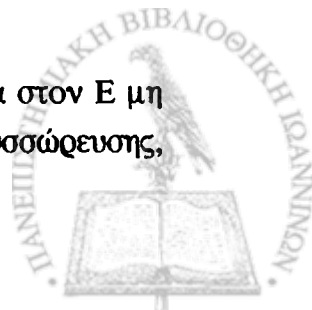
είναι περιοχή του x (Βλέπε 1.6.11.) και μάλιστα συμπαγής, ως καρτεσιανό γινόμενο συμπαγών συνόλων. ♦

8.9. Ασκήσεις

1. Με βάση τον κατά Heine-Borel ορισμό της συμπαγότητας ν' αποδειχτεί ότι το σύνολο $[0, \infty)$ δεν είναι συμπαγές υποσύνολο του ευκλείδειου χώρου $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

2. Ας είναι ρ_1, ρ_2 δύο μετρικές στο ίδιο σύνολο E τέτοιες, ώστε $\mathcal{T}_{\rho_2} \subseteq \mathcal{T}_{\rho_1}$. Ν' αποδειχτεί ότι αν ο μετρικός χώρος (E, ρ_1) είναι συμπαγής τότε και ο (E, ρ_2) είναι το ίδιο.

3. Έστω E ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία στον E μη τελικά σταθερή. Ν' αποδειχτεί ότι, αν η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έχει ένα μοναδικό σημείο συσσώρευσης,



τότε αυτή είναι συγκλίνουσα. Είναι αναγκαία η υπόθεση ότι ο E είναι συμπαγής μετρικός χώρος;

4. Αν $A_1, \dots, A_n$ είναι συμπαγή υποσύνολα ενός μετρικού χώρου E , ν' αποδειχτεί ότι το σύνολο $A_1 \cup \dots \cup A_n$ είναι συμπαγές υποσύνολο του E .

5. Έστω A ένα συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού χώρου. Ν' αποδειχτεί ότι και τα σύνολα A' και $\bar{A}$ είναι συμπαγή.

6. Ν' αποδειχτεί ότι για κάθε ανοιχτή κάλυψη ενός συμπαγούς μετρικού χώρου υπάρχει ένας αριθμός του Lebesgue. Να δοθεί μια απόδειξη διαφορετική από εκείνη του Λήμματος 8.4.1..

7. Ας είναι ρ_1, ρ_2 ισοδύναμες μετρικές στο σύνολο E . Ν' αποδειχτεί ότι ο μετρικός χώρος (E, ρ_1) είναι συμπαγής αν και μόνο αν ο μετρικός χώρος (E, ρ_2) είναι συμπαγής.

8. Ας είναι A, B δυο μη κενά υποσύνολα ενός μετρικού χώρου E . Αν το B είναι συμπαγές, ν' αποδειχτεί ότι:

$$\rho(A, B) = 0 \Leftrightarrow \bar{A} \cap B \neq \emptyset.$$

9. Ας είναι A ένα συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού χώρου E και z ένα σημείο του E , με $z \notin A$. Ν' αποδειχτεί ότι υπάρχει σφαιρική περιοχή $B(z, r)$ τέτοια, ώστε $B(z, r) \cap A = \emptyset$.

10. α) Να δοθεί παράδειγμα κλειστής σφαιρικής περιοχής σ' ένα μετρικό χώρο που να μην είναι συμπαγές σύνολο.

β) Ν' αποδειχτεί ότι αν σ' ένα μετρικό χώρο E κάθε κλειστή σφαιρική περιοχή είναι συμπαγές σύνολο, τότε ο E είναι πλήρης μετρικός χώρος.

11. Ν' αποδειχτεί ότι αν A είναι ένα υποσύνολο ενός μετρικού χώρου τέτοιο, ώστε κάθε ακολουθία στο A να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στο $\bar{A}$, τότε το $\bar{A}$ είναι συμπαγές.



12. Έστω E ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $K \subseteq E$. Ν' αποδειχτεί ότι το K είναι κλειστό αν και μόνο αν για κάθε συμπαγές υποσύνολο S του E ισχύει ότι το $S \cap K$ είναι κλειστό.

13. Έστω E ένας μετρικός χώρος και S ένα συμπαγές υποσύνολο του E . Ν' αποδειχτεί ότι για κάθε $x \in E$, με $x \notin S$, υπάρχουν περιοχές $U(x)$ του x και $V(S)$ του S τέτοιες, ώστε $U(x) \cap V(S) = \emptyset$.

14. Ας είναι E ένας μετρικός χώρος και A, B δύο συμπαγή υποσύνολα του E , με $A \cap B = \emptyset$. Ν' αποδειχτεί ότι υπάρχουν ανοιχτά σύνολα U και V , με $A \subseteq U$ και $B \subseteq V$ τέτοια, ώστε $U \cap V = \emptyset$.

15. Έστω E ένας μετρικός χώρος και $A \subseteq S \subseteq E$. Ν' αποδειχτεί ότι, αν το A είναι συμπαγές σύνολο στον μετρικό υπόχωρο S , τότε το A είναι συμπαγές και ως υποσύνολο του E .

16. Με βάση τον κατά Heine-Borel ορισμό της συμπαγότητας, ν' αποδειχτεί ότι αν E είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος, τότε κάθε απέραντο υποσύνολο A του E έχει ένα τουλάχιστον σημείο συσσώρευσης $a \in E$.

17. Ας είναι E ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $\mathcal{C}$ μια συλλογή μη κενών υποσυνόλων του E τέτοια, ώστε $X \cap Y \in \mathcal{C}$ για κάθε X και Y εν $\mathcal{C}$. Ν' αποδειχτεί ότι

$$\bigcap_{X \in \mathcal{C}} \bar{X} \neq \emptyset.$$

18. Έστω E ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών υποσυνόλων του E . Ν' αποδειχτεί ότι

$$\delta\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n\right) = \inf\{\delta(K_n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

19. Ν' αποδειχτεί ότι ένας συμπαγής μετρικός χώρος δεν μπορεί να είναι ισομετρικός με έναν γνήσιο υπόχωρό του.

20. Ας είναι E_1, E_2 μετρικοί χώροι και $f : E_1 \rightarrow E_2$ μια συνάρτηση. Ν' αποδειχτεί ότι η f είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε συμπαγές υποσύνολο S του E_1 η συνάρτηση $f|_S$ είναι συνεχής.



21. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ και $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Αν το E είναι συμπαγές σύνολο, ν' αποδειχτεί ότι η f είναι συνεχής αν και μόνο αν το γράφημά της, δηλαδή το σύνολο $\{(x, y) \in E \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$, είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

22. Ας είναι $(E_1, \rho_1), (E_2, \rho_2)$ μετρικοί χώροι, ο (E_1, ρ_1) συμπαγής και $f: E_1 \rightarrow E_2$ μια συνάρτηση συνεχής, αμφιμονοσήμαντη και επί. Ν' αποδειχτεί ότι οι μετρικοί χώροι (E_1, ρ_1) και (E_2, ρ_2) είναι ομοιομορφικοί.

23. Ας είναι ρ_1, ρ_2 ισοδύναμες μετρικές στο E . Ν' αποδειχτεί ότι, αν ο μετρικός χώρος (E, ρ_1) είναι συμπαγής, τότε και ο (E, ρ_2) είναι συμπαγής και, επιπλέον, οι μετρικές ρ_1, ρ_2 είναι ομοιόμορφα ισοδύναμες μετρικές.

24. Έστω (E, ρ) ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $f: E \rightarrow E$ μια συνεχής συνάρτηση τέτοια, ώστε $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in E$. Ν' αποδειχτεί ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο, ώστε $\rho(f(x), x) > \varepsilon$ για κάθε $x \in E$.

25. Έστω E ένας συμπαγής μετρικός χώρος, $f: E \rightarrow X$ μια συνεχής, αμφιμονοσήμαντη και επί συνάρτηση και X τυχόν μετρικός χώρος. Ν' αποδειχτεί ότι:

α) Η f^{-1} είναι συνεχής συνάρτηση.

β) Αν A είναι ανοιχτό υποσύνολο του E , το $f(A)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του X .

26. Έστω (E, ρ) ένας συμπαγής μετρικός χώρος, $f: E \rightarrow E$ μια συνάρτηση τέτοια, ώστε $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$ για κάθε $x, y \in E$ με $x \neq y$. Ν' αποδειχτεί ότι η f έχει σταθερό σημείο και μάλιστα μοναδικό..

27. Ν' αποδειχτεί ότι στον ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, το διάστημα $[0, 2]$ δεν μπορεί να είναι ομοιομορφικό με το σύνολο $[-1, 0) \cup (1, 2]$.

28. Ας είναι $(E_1, \rho_1), (E_2, \rho_2)$ μετρικοί χώροι, $f: E_1 \rightarrow E_2$ μια συνάρτηση και ο (E_2, ρ_2) συμπαγής. Ν' αποδειχτεί ότι, αν το γράφημα της f είναι κλειστό υποσύνολο του $E_1 \times E_2$, τότε η f είναι συνεχής.



29. Έστω E ένας μετρικός χώρος και A ένα υποσύνολο του E . Το A ονομάζεται **σχετικά συμπαγές (relatively compact)** υποσύνολο του E , αν το $\bar{A}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του E . Ν' αποδειχτεί ότι

α) Το A είναι σχετικά συμπαγές αν και μόνο αν κάθε ακολουθία εν A έχει συγκλίνουσα (όχι κατ' ανάγκη στο A) υπακολουθία.

β) Ν' αποδειχτεί ότι, αν E_1, E_2 είναι μετρικοί χώροι, $f: E_1 \rightarrow E_2$ μια συνεχής συνάρτηση και A ένα σχετικά συμπαγές υποσύνολο του E_1 , τότε και το $f(A)$ είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του E_2 .

30. Να εξεταστεί ποιό από τα παρακάτω υποσύνολα του ευκλείδειου μετρικού χώρου $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ είναι συμπαγές.

α) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 1\}$

β) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

γ) $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 < 1\}$

δ) $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x + y < 1 \text{ και } 0 \leq x \leq 2\}$

ε) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$

στ) $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x| + |y| \leq 1\}$

ζ) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$

31. Έστω E ένας σταθμητός διανυσματικός χώρος, K ένα κλειστό υποσύνολο του E και S ένα συμπαγές υποσύνολο του E . Ν' αποδειχτεί ότι:

α) Το σύνολο $K+S$ είναι κλειστό.

β) Αν και το K είναι συμπαγές, τότε το $K+S$ είναι συμπαγές.

32. Ν' αποδειχτεί ότι αν ένας E ένας σταθμητός διανυσματικός χώρος είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε η μοναδιαία κλειστή σφαιρική περιοχή είναι συμπαγές υποσύνολο του E .

33. Αν A είναι ένα υποσύνολο του ευκλείδειου χώρου $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$, ν' αποδειχτεί ότι το A είναι φραγμένο αν και μόνο αν το $\bar{A}$ είναι συμπαγές.

34. Ν' αποδειχτεί ότι ο υπόχωρος Q του ευκλείδειου χώρου $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ δεν είναι συμπαγής ούτε τοπικά συμπαγής.



35. Με βάση το χαρακτηρισισμό της συμπαιγνότητας με την ιδιότητα B-W να δοθούν αποδείξεις για τις Προτάσεις 8.6.2., 8.6.3., 8.6.5., διαφορετικές από τις υπάρχουσες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι

9.1. Διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι

Η έννοια της "διαχωρισιμότητας" είναι μια ενδιαφέρουσα γενίκευση τόσο της έννοιας της συμπαγότητας όσο και της έννοιας του ολικά φραγμένου.

| Ένας μετρικός χώρος ονομάζεται **διαχωρίσιμος (separable)** αν έχει
| ένα το πολύ αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο.

| Ένα υποσύνολο S ενός μετρικού χώρου E λέγεται **διαχωρίσιμο σύνολο**
| αν ο μετρικός υπόχωρος S του E είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

| Ένα υποσύνολο B της τοπολογίας $\mathcal{T}$ ενός μετρικού χώρου E λέγεται
| **βάση της τοπολογίας $\mathcal{T}$** αν για κάθε $A \in \mathcal{T}$ υπάρχει $C, C \subseteq B$, τέτοιο,
| ώστε $A = \bigcup C$.



Απλούστερα μια συλλογή $\mathcal{B}$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}$, ονομάζεται βάση της τοπολογίας $\mathcal{I}$ ενός μετρικού χώρου E , αν κάθε ανοιχτό υποσύνολο A του E μπορεί να παρασταθεί ως ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$.

Προκειμένου να διατυπώσουμε μια πρόταση που μας δίνει ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι ένας μετρικός χώρος διαχωρίσιμος, είναι σκόπιμο ν' αποδείξουμε το επόμενο λήμμα.

9.1.1. ΛΗΜΜΑ. Έστω D ένα το πολύ αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου E και $\mathcal{B} = \{B(a, r) : a \in D, r \in \mathbb{Q}\}$. Η συλλογή $\mathcal{B}$ είναι βάση της τοπολογίας του E .

Απόδειξη.

Έστω A ένα ανοιχτό υποσύνολο του E και y τυχόν στοιχείο του A . Θ' αποδείξουμε ότι υπάρχει στοιχείο της συλλογής $\mathcal{B}$ που περιέχει το y και ταυτόχρονα περιέχεται στο A .

Επειδή το A είναι ανοιχτό και $y \in A$, υπάρχει σφαιρική περιοχή $B(y, r)$, $r > 0$, του y τέτοια, ώστε $B(y, r) \subseteq A$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε μάλιστα ότι $r \in \mathbb{Q}$. Επειδή το σύνολο X είναι πυκνό στον E , το X είναι και $\frac{r}{2}$ -πυκνό στον E . Άρα, υπάρχει $x \in X$ τέτοιο, ώστε $\rho(x, y) < \frac{r}{2}$. Επομένως $y \in B(x, \frac{r}{2})$. Επιπλέον, για κάθε $z \in B(x, \frac{r}{2})$ έχουμε $\rho(z, x) < \frac{r}{2}$, οπότε

$$\rho(z, y) \leq \rho(z, x) + \rho(x, y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

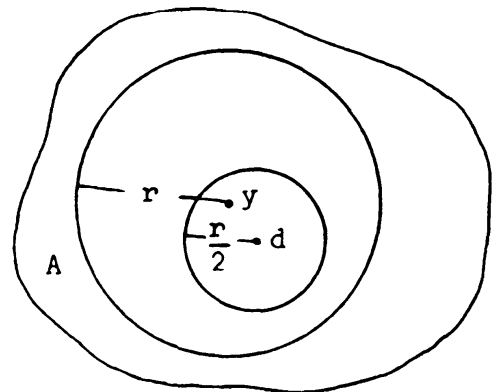
δηλαδή $z \in B(y, r) \subseteq A$. Επιπλέον, επειδή

$x \in X$ και $\frac{r}{2} \in \mathbb{Q}$, έχουμε $B(x, \frac{r}{2}) \in \mathcal{B}$. Έτσι

αποδείχτηκε ότι για κάθε στοιχείο y του τυχόντος ανοιχτού συνόλου $A \in \mathcal{I}$ υπάρχει σφαιρική περιοχή $B(x, \frac{r}{2}) \in \mathcal{B}$ τέτοια, ώστε

$$y \in B(x, \frac{r}{2}) \subseteq A.$$

Δηλαδή αποδείχτηκε ότι για κάθε $y \in A$ υπάρχει σύνολο $B_y \in \mathcal{B}$ με $y \in B_y \subseteq A$. Τότε όμως είναι φανερό ότι $\bigcup_{y \in A} B_y = A$, πράγμα που αποδεικνύει ότι η συλλογή $\mathcal{B}$ είναι βάση της τοπολογίας $\mathcal{I}$. ♦



9.1.2. ΠΡΟΤΑΣΗ. Για τυχόντα μετρικό χώρο E τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- i) Ο E είναι διαχωρίσιμος
- ii) Ο E έχει μια το πολύ αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του
- iii) Για κάθε ανοιχτή κάλυψη του E υπάρχει το πολύ αριθμήσιμη υποκάλυψη.

Απόδειξη.

(i $\Rightarrow$ ii) Έστω E ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Τότε ο E έχει ένα το πολύ αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο D , οπότε, σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα, η συλλογή $\mathcal{B} = \{B(x, r) : (x, r) \in D \times \mathbb{Q}\}$ είναι βάση της τοπολογίας $\mathcal{T}$. Αλλά η συλλογή $\mathcal{B}$ ή ισοδύναμα η οικογένεια $B(x, r), (x, r) \in D \times \mathbb{Q}$, είναι το πολύ αριθμήσιμη (το σύνολο των δεικτών της είναι καρτεσιανό γινόμενο δύο το πολύ αριθμησίμων συνόλων).

(ii $\Rightarrow$ iii) Έστω $\mathcal{B} = \{U_1, U_2, \dots\}$ μια το πολύ αριθμήσιμη βάση της τοπολογίας του E και $\mathcal{C}$ μια ανοιχτή κάλυψη του E . Θεωρούμε το σύνολο $M = \{n \in \mathbb{N} : (\exists X \in \mathcal{C}) U_n \subseteq X\}$. Είναι φανερό ότι το σύνολο M είναι μη κενό και το πολύ αριθμήσιμο. Θ' αποδείξουμε αρχικά ότι $E = \bigcup_{i \in M} U_i$. Πραγματικά, για τυχόν $x \in E$, επειδή $E = \bigcup \mathcal{C}$, υπάρχει $W \in \mathcal{C}$ με $x \in W$. Επειδή το W είναι ανοιχτό, υπάρχει $U_k \in \mathcal{B}$ με $U_k \subseteq W$. Άρα $k \in M$ και έτσι $x \in U_k \subseteq \bigcup_{i \in M} U_i$, οπότε $E \subseteq \bigcup_{i \in M} U_i$. Έτσι, σε συνδυασμό και με την προφανή σχέση $\bigcup_{i \in M} U_i \subseteq E$, παίρνουμε τελικά $\bigcup_{i \in M} U_i = E$. Με το αξίωμα της επιλογής για κάθε $i \in M$ θεωρούμε ένα σύνολο $X_i \in \mathcal{C}$ με $U_i \subseteq X_i$. Θέτουμε $X = \bigcup_{i \in M} X_i$ και έχουμε

$$E = \bigcup_{i \in M} U_i \subseteq \bigcup_{i \in M} X_i,$$

που, επειδή $X_i \subseteq E, i \in M$, δίνει τελικά

$$E = \bigcup_{i \in M} X_i.$$

Έτσι η οικογένεια $X_i, i \in M$ είναι μια το πολύ αριθμήσιμη υποκάλυψη της $\mathcal{C}$.

(iii $\Rightarrow$ i) Για τυχόν $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη συλλογή $\mathcal{C}_n = \{B(x, \frac{1}{n}) : x \in E\}$. Επειδή η συλλογή $\mathcal{C}_n$ είναι ανοιχτή κάλυψη του E , σύμφωνα με το (iii), υπάρχει το πολύ αριθμήσιμη υποκάλυψή της, έστω $\{B(x_{n1}, \frac{1}{n}), B(x_{n2}, \frac{1}{n}), \dots\}$. Θέτουμε $D_n = \{x_{n1}, x_{n2}, \dots\}$, $n \in \mathbb{N}$ και $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$. Το D είναι το πολύ αριθμήσιμο σύνολο ως αριθμήσιμη ένωση το πολύ αριθμησίμων συνόλων. Θ' αποδείξουμε ότι το D είναι πυκνό στο E ή ισοδύναμα, ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ το D είναι ε -πυκνό υποσύνολο του E . Πραγματικά, για τυχόν $x \in E$ και για τυχόν $\varepsilon > 0$ θεωρούμε ένα $n_0 \in \mathbb{N}$, με $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Τότε, επειδή η συλλογή $\{B(x_{n_0 1}, \frac{1}{n_0}), \dots\}$,

$B(x_{n_0}, \frac{1}{n_0}), \dots$ είναι κάλυψη του E , υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε $x \in B(x_{n_0k}, \frac{1}{n_0k})$, δηλαδή υπάρχει στοιχείο $x_{n_0k} \in D_{n_0} \subseteq D$ με $\rho(x, x_{n_0k}) < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Αυτό όμως αποδεικνύει ότι το D είναι ε -πυκνό υποσύνολο του E για κάθε $\varepsilon > 0$. Άρα το D είναι πυκνό και το πολύ αριθμήσιμο υποσύνολο του E , πράγμα που αποδεικνύει το ζητούμενο. ♦

Η ισοδυναμία (iii) $\Leftrightarrow$ (i) στην παραπάνω Πρόταση είναι γνωστή ως **θεώρημα κάλυψης του Lindelöf**.

9.1.3. ΠΟΡΙΣΜΑ. Κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος.

Απόδειξη.

Έστω E ένας συμπαγής μετρικός χώρος και C τυχούσα ανοιχτή κάλυψή του. Τότε υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη B της C . Η B ως πεπερασμένη είναι το πολύ αριθμήσιμη υποκάλυψη της C , πράγμα που σύμφωνα με την Πρόταση 9.1.2 αποδεικνύει το ζητούμενο. ♦

9.1.4. ΠΟΡΙΣΜΑ. Κάθε ολικά φραγμένος μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος.

Απόδειξη.

Έστω E ένας ολικά φραγμένος μετρικός χώρος. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει υποσύνολο D_n του E πεπερασμένο και $\frac{1}{n}$ -πυκνό. Τότε (Βλέπε απόδειξη (iii) $\Rightarrow$ (i) της Πρότασης 9.1.2.), το σύνολο $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ είναι πυκνό και το πολύ αριθμήσιμο υποσύνολο του E που σημαίνει ότι ο E είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. ♦

9.2. Παραδείγματα – Εφαρμογές

9.2.1. Ο μετρικός χώρος $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι διαχωρίσιμος.



Απόδειξη.

Επειδή το σύνολο Q των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο και πυκνό στο σύνολο R έχουμε άμεσα το συμπέρασμα. ♦

Ο μετρικός χώρος $(R, | \cdot |)$ είναι παράδειγμα διαχωρίσιμου μετρικού χώρου αλλά μη συμπαγούς (Ο μετρικός χώρος $(R, | \cdot |)$ δεν είναι συμπαγής αφού δεν είναι φραγμένος).

9.2.2. Αν $f: E_1 \rightarrow E_2$ είναι μια συνεχής συνάρτηση και ο E_1 είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, τότε το πεδίο τιμών $\mathcal{R}(f)$ της f είναι διαχωρίσιμο υποσύνολο του μετρικού χώρου E_2 .

Απόδειξη.

Πραγματικά, αν D είναι ένα πυκνό υποσύνολο του E_1 , το σύνολο $f(D)$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathcal{R}(f)$ (Βλέπε 4.2.9.) Επιπλέον, αν το D είναι το πολύ αριθμήσιμο, τότε, επειδή $f(D) \subseteq D$, το $f(D)$ είναι και αυτό το πολύ αριθμήσιμο. ♦

Σύμφωνα με το παραπάνω συμπέρασμα, η διαχωρισιμότητα είναι τοπολογική ιδιότητα.

9.2.3. Η διαχωρισιμότητα είναι κληρονομική ιδιότητα.

Απόδειξη.

Έστω E ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και $\mathcal{B}$ μια το πολύ αριθμήσιμη βάση της τοπολογίας του E . Τότε, για τυχόν υποσύνολο S του E η συλλογή $\mathcal{B}_S = \{S \cap X : X \in \mathcal{B}\}$ είναι φανερό ότι είναι βάση της σχετικής τοπολογίας του S και επιπλέον το πολύ αριθμήσιμη (αφού $\mathcal{B} \simeq \mathcal{B}_S$). ♦

9.2.4. Αν $A_n, n \in \mathbb{N}$ είναι μια οικογένεια διαχωρίσιμων υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου, τότε και το σύνολο $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ είναι διαχωρίσιμο.

Απόδειξη.

Θέτουμε $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Επειδή τα σύνολα $A_1, \dots, A_n, \dots$ είναι διαχωρίσιμα υπάρχουν το πολύ αριθμήσιμα σύνολα $D_1, \dots, D_n, \dots$ υποσύνολα των $A_1, \dots, A_n, \dots$, αντίστοιχα και τέτοια ώστε

$$\overline{D_{A_1}} = A_1, \dots, \overline{D_{A_n}} = A_n, \dots$$



Τότε όμως το σύνολο $D = \bigcup_{v \in N} D_v$ είναι το πολύ αριθμήσιμο υποσύνολο του A και μάλιστα:

$$A \supseteq \overline{D_A} = \overline{\left(\bigcup_{v \in N} D_v \right)_A} \supseteq \bigcup_{v \in N} \overline{(D_v)_A} \supseteq \bigcup_{v \in N} \overline{(D_v)_{A_v}} \supseteq \bigcup_{v \in N} A_v = A.$$

Άρα $\overline{D_A} = A$, που σημαίνει ότι το A είναι διαχωρίσιμο. ♦

9.2.5. Έστω E ο καρτεσιανός μετρικός χώρος των μετρικών χώρων $E_i, i=1, \dots, n$. Τότε ο E είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν για κάθε $i=1, \dots, n$ ο E_i είναι διαχωρίσιμος.

Απόδειξη.

Πραγματικά, αν ο E είναι διαχωρίσιμος, τότε επειδή για κάθε $i=1, \dots, n$ ισχύει $p_i(E) = E_i$, όπου p_i η i -προβολή που είναι συνεχής συνάρτηση, ο χώρος E_i θα είναι διαχωρίσιμος (Βλέπε 9.2.2.)

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε $i=1, \dots, n$ ο χώρος E_i είναι διαχωρίσιμος και D_i είναι το πολύ αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του E_i , δηλαδή $\overline{D_i} = E_i$, $i=1, \dots, n$. Θέτουμε $D = \bigtimes_{i=1}^n D_i$, οπότε από τη γνωστή σχέση $\overline{\bigtimes_{i=1}^n D_i} = \bigtimes_{i=1}^n \overline{D_i}$ (Βλέπε 1.9.7(ii)) παίρνουμε:

$$\overline{D} = \overline{\bigtimes_{i=1}^n D_i} = \bigtimes_{i=1}^n \overline{D_i} = \bigtimes_{i=1}^n E_i = E.$$

Άρα το D είναι πυκνό υποσύνολο του E και μάλιστα το πολύ αριθμήσιμο, ως καρτεσιανό γινόμενο πεπερασμένου πλήθους το πολύ αριθμησίμων συνόλων, πράγμα που αποδεικνύει ότι ο E είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. ♦

9.2.6. Όπως γνωρίζουμε (Βλέπε 1.16.2.), το σύνολο $C[a, b]$ των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το διάστημα $[a, b]$ είναι ένας μετρικός χώρος με μετρική ρ ορισμένη με τον τύπο

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|.$$

Αποδεικνύεται ότι ο μετρικός χώρος $(C[a, b], \rho)$ είναι πλήρης, διαχωρίσιμος και όχι συμπαγής. Το συμπέρασμα αυτό είναι μεταξύ άλλων συνέπεια δύο πολύ σημαντικών συμπερασμάτων της Θεωρίας Πραγματικών Συναρτήσεων. Συγκεκριμένα ισχύει ότι:



Κάθε συνάρτηση $f \in C[a, b]$ είναι όριο μιας ακολουθίας πολυωνυμικών συναρτήσεων με ρητούς συντελεστές και πεδίο ορισμού το διάστημα $[a, b]$.

Έτσι, το αριθμήσιμο σύνολο των πολυωνυμικών συναρτήσεων με ρητούς συντελεστές και πεδίο ορισμού το διάστημα $[a, b]$ είναι πυκνό στο μετρικό χώρο $(C[a, b], \rho)$ και επομένως ο $(C[a, b], \rho)$ είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

Επίσης, ισχύει ότι:

Θεώρημα του Ascoli. Ένα κλειστό υποσύνολο του μετρικού χώρου $(C[a, b], \rho)$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι φραγμένο και ισοσυνεχές. (Ένα υποσύνολο A του μετρικού χώρου $(C[a, b], \rho)$ λέγεται **ισοσυνεχές** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι, ώστε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ όταν $|x - y| < \delta$ για κάθε $f \in A$.)

Είναι φανερό ότι ο $(C[a, b], \rho)$ δεν είναι φραγμένος μετρικός χώρος. Άρα σύμφωνα με το παραπάνω συμπέρασμα, ο $(C[a, b], \rho)$ δεν μπορεί να είναι συμπαγής μετρικός χώρος.

9.3. Λυμένες Ασκήσεις

9. 3. 1. Έστω E ένα σύνολο και ρ, σ δυο ισοδύναμες μετρικές στο E . Ν' αποδειχτεί ότι ο μετρικός χώρος (E, ρ) είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν ο μετρικός χώρος (E, σ) είναι διαχωρίσιμος.

Λύση.

Επειδή οι μετρικές ρ και σ είναι ισοδύναμες, η ταυτοτική συνάρτηση $\text{id}_E: (E, \rho) \rightarrow (E, \sigma)$ είναι ομοιομορφισμός. Έτσι, επειδή η διαχωρισιμότητα είναι τοπολογική ιδιότητα, ο μετρικός χώρος (E, σ) θα είναι διαχωρίσιμος ως εικόνα, μέσω ομοιομορφισμού, του διαχωρίσιμου μετρικού χώρου (E, ρ) .

9. 3. 2. Ν' αποδειχτεί ότι σ' ένα διαχωρίσιμο μετρικό χώρο, κάθε συλλογή ξένων μη κενών και ανοιχτών υποσυνόλων του είναι το πολύ αριθμήσιμη.



Λύση.

Έστω E ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και $\mathcal{C}$ μια συλλογή ξένων μη κενών και ανοιχτών υποσυνόλων του E . Αφού ο E είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, υπάρχει ένα πυκνό και το πολύ αριθμήσιμο υποσύνολο D του E . Τότε θα ισχύει

$$X \cap D \neq \emptyset \text{ για κάθε } X \in \mathcal{C}.$$

Έτσι, για κάθε $X \in \mathcal{C}$, με το αξίωμα της επιλογής, θεωρούμε ένα στοιχείο $\alpha_X \in X \cap D$. Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $f: \mathcal{C} \rightarrow D$ με τύπο

$$f(X) = \alpha_X.$$

Θ' αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι αμφιμονοσήμαντη. Πραγματικά για τυχόντα X και Y εν $\mathcal{C}$ έχουμε:

$$X \neq Y \Rightarrow X \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow (X \cap D) \cap (Y \cap D) \neq \emptyset \Rightarrow \alpha_X \neq \alpha_Y \Rightarrow f(X) \neq f(Y).$$

Άρα η συλλογή $\mathcal{C}$ έχει το πολύ την ισχύ του D , που είναι το πολύ αριθμήσιμο και συνεπώς είναι και αυτή το πολύ αριθμήσιμη.

9.4. Ασκήσεις

1. Ν' αποδειχτεί ότι ένα υποσύνολο S ενός μετρικού χώρου E είναι διαχωρίσιμο αν και μόνο αν υπάρχει ένα το πολύ αριθμήσιμο σύνολο D τέτοιο, ώστε $D \subseteq S \subseteq \bar{D}$.

2. Ν' αποδειχτεί ότι κάθε σταθμητός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης είναι διαχωρίσιμος.

3. Αν A είναι ένα διαχωρίσιμο υποσύνολο ενός μετρικού χώρου, ν' αποδειχτεί ότι το $\bar{A}$ είναι διαχωρίσιμο σύνολο.

4. Ν' αποδειχτεί ότι σ' ένα διαχωρίσιμο μετρικό χώρο E το σύνολο όλων των μεμονωμένων σημείων του είναι το πολύ αριθμήσιμο.

5. Ένας μετρικός χώρος ονομάζεται **τοπικά διαχωρίσιμος** (*locally separable*) αν για κάθε σημείο του υπάρχει μια διαχωρίσιμη περιοχή του σημείου αυτού.

α) Να δοθεί παράδειγμα τοπικά διαχωρίσιμου και μη διαχωρίσιμου μετρικού χώρου.



β) Αν E_1 είναι ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και E_2 ένας τοπικά διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, ν' αποδειχτεί ότι ο καρτεσιανός μετρικός χώρος $E_1 \times E_2$ είναι ένας τοπικά διαχωρίσιμος και μη διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

γ) Έστω E ένας τοπικά διαχωρίσιμος και μη διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Ν' αποδειχτεί ότι ο τύπος:

$$g(x) = \sup\{r \in \mathbb{R} : B(x, r) \text{ είναι διαχωρίσιμο σύνολο}\}$$

ορίζει μια συνάρτηση $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ που επιπλέον είναι και ομοιόμορφα συνεχής. (Υπόδειξη: Ν' αποδειχτεί ότι για κάθε $x \in E$ η περιοχή $B(x, g(x))$ είναι διαχωρίσιμο σύνολο.)



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΙ ΜΕΤΡΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

10.1 Η έννοια του συνεκτικού μετρικού χώρου

Η έννοια της “συνεκτικότητας” στους μετρικούς χώρους είναι μια πολύ χρήσιμη έννοια με πολλές εφαρμογές στη Μαθηματική Ανάλυση, στη Γεωμετρία αλλά και σε άλλους κλάδους των Μαθηματικών.

Πρὶν δώσουμε τον ορισμό του συνεκτικού μετρικού χώρου είναι σκόπιμο να υπενθυμίσουμε ότι δύο σύνολα A και B , υποσύνολα ενός συνόλου E συνιστούν μια **διαμέριση (partition)** του E αν

$$A \neq \emptyset \neq B, A \cap B = \emptyset \text{ και } A \cup B = E.$$

Ιδιαίτερα, αν E είναι ένας μετρικός χώρος και $\{A, B\}$ μια διαμέρισή του, θα λέμε ότι η συλλογή $\{A, B\}$ είναι **ανοιχτή** (αντίστοιχα **κλειστή**) **διαμέριση** του E αν τα σύνολα A, B είναι ανοιχτά (αντίστοιχα κλειστά) υποσύνολα του E .

Σχετικά με τις ανοιχτές ή κλειστές διαμερίσεις ενός μετρικού χώρου ισχύει το εξής χρήσιμο συμπέρασμα.



10.1.1. ΛΗΜΜΑ. Αν $\{A, B\}$ είναι μια ανοιχτή διαμέριση ενός μετρικού χώρου E , τότε η $\{A, B\}$ τότε είναι και κλειστή διαμέριση του E και αντίστροφα.

Απόδειξη.

Επειδή $A \cap B = \emptyset$ και $A \cup B = E$, παίρνουμε $A = B^c$ και $B = A^c$. Άρα αν τα σύνολα A, B είναι ανοιχτά, λόγω των σχέσεων $A = B^c$ και $B = A^c$, αυτά θα είναι και κλειστά ως συμπληρώματα ανοιχτών συνόλων.

Το αντίστροφο είναι προφανές. ♦

Έχοντας υπόψη το συμπέρασμα του παραπάνω λήμματος, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ένας μετρικός χώρος E ονομάζεται **συνεκτικός (connected) μετρικός χώρος** αν δεν υπάρχει ανοιχτή ή κλειστή διαμέριση του E σε δύο υποσύνολά του.

Δύο χρήσιμες ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι ένας μετρικός χώρος συνεκτικός, δίνει η παρακάτω πρόταση.

10.1.2. ΠΡΟΤΑΣΗ. Για τυχόντα μετρικό χώρο E τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- i) Ο E είναι συνεκτικός μετρικός χώρος.
- ii) Τα σύνολα $\emptyset$ και E είναι τα μόνα υποσύνολα του E που είναι ταυτόχρονα ανοιχτά και κλειστά.
- iii) Για κάθε υποσύνολο A του E με $A \neq \emptyset$ και $A \neq E$, ισχύει $\partial A \neq \emptyset$.

Απόδειξη.

(i $\Rightarrow$ ii) Υποθέτουμε ότι ο E είναι συνεκτικός μετρικός χώρος και ότι δεν ισχύει το (ii). Τότε, υπάρχει γνήσιο και μη κενό υποσύνολο A του E , ανοιχτό και κλειστό ταυτόχρονα. Επομένως η συλλογή $\{A, A^c\}$ είναι μια ανοιχτή (και κλειστή) διαμέριση του E , πράγμα που αντίκειται στη συνεκτικότητα του E .

(ii $\Rightarrow$ iii) Έστω ισχύει η (ii) και όχι η (iii). Τότε υπάρχει γνήσιο και μη κενό υποσύνολο A του E , με $\partial A = \emptyset$. Τότε όμως έχουμε

$$\partial A = \emptyset \Rightarrow \bar{A} - A^\circ = \emptyset \Rightarrow \bar{A} \subseteq A^\circ \Rightarrow \bar{A} = A^\circ = A,$$



που σημαίνει ότι το σύνολο A είναι ανοιχτό και κλειστό ταυτόχρονα υποσύνολο του E . Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί αντίκειται στη (ii).

(iii) $\Rightarrow$ i) Υποθέτουμε ότι ισχύει η (iii) και όχι η (i). Τότε, αφού ο E είναι μη συνεκτικός, υπάρχει μια ανοιχτή και κλειστή διαμέριση $\{A, B\}$ του E . Αλλά τότε $A \neq \emptyset$ και επιπλέον, επειδή $B \neq \emptyset$ και $A = B^c$, έχουμε $A \neq E$. Ακόμη, επειδή το A είναι ανοιχτό και κλειστό ταυτόχρονα, έχουμε $\bar{A} = A^\circ = A$, οπότε $\partial A = \bar{A} - A^\circ = \emptyset$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί αντίκειται στη (iii). ♦

| Αν S είναι ένα υποσύνολο ενός μετρικού χώρου E , θα λέμε ότι το S είναι
| συνεκτικό σύνολο αν το S , ως υπόχωρος του μετρικού χώρου E είναι
| συνεκτικός μετρικός χώρος.

Η παρακάτω πρόταση είναι σημαντική γιατί μας επιτρέπει να μελετούμε τη συνεκτικότητα ενός υποσυνόλου S ενός μετρικού χώρου E χωρίς ν' αναφερόμαστε σε ανοιχτές ή κλειστές διαμερίσεις του υπόχωρου S .

10.1.3. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ένα υποσύνολο S ενός μετρικού χώρου E είναι συνεκτικό αν και μόνο αν δεν υπάρχει ανοιχτή (αντίστοιχα κλειστή) στο E κάλυψη $\{A, B\}$ του S τέτοια, ώστε

$$S \cap A \neq \emptyset, S \cap B \neq \emptyset \text{ και } S \cap A \cap B = \emptyset.$$

Απόδειξη.

Εστω S συνεκτικό υποσύνολο του μετρικού χώρου E και $\{A, B\}$ μια ανοιχτή (αντίστοιχα κλειστή) στο E κάλυψη του S , με $S \cap A \neq \emptyset$ και $S \cap B \neq \emptyset$. Επειδή τα A, B είναι ανοιχτά (αντίστοιχα κλειστά) υποσύνολα του E , τα $S \cap A, S \cap B$ είναι ανοιχτά (αντίστοιχα κλειστά) στο S υποσύνολα του S . Αν υποθέσουμε ότι $S \cap A \neq \emptyset, S \cap B \neq \emptyset$ και $S \cap A \cap B = \emptyset$ (οπότε $(S \cap A) \cap (S \cap B) = \emptyset$) θα έχουμε ότι η συλλογή $\{S \cap A, S \cap B\}$ είναι μια ανοιχτή στο S διαμέριση του S , πράγμα που αντίκειται στη συνεκτικότητα του S .

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει ανοιχτή (αντίστοιχα κλειστή) στο E κάλυψη $\{A, B\}$ του S τέτοια, ώστε

$$S \cap A \neq \emptyset, S \cap B \neq \emptyset \text{ και } S \cap A \cap B = \emptyset$$

και ότι το S είναι μη συνεκτικό. Θα καταλήξουμε σε άτοπο. Πραγματικά, η υπόθεση ότι το S είναι μη συνεκτικό σύνολο, συνεπάγεται την ύπαρξη μιας ανοιχτής (αντίστοιχα κλειστής) στο S διαμερίσεως $\{X, Y\}$ του S . Τότε όμως, επειδή τα σύνολα X και Y είναι ανοιχτά (αντίστοιχα κλειστά) στο S , υπάρχουν σύνολα A και B ανοιχτά (αντίστοιχα κλειστά) στο E τέτοια, ώστε $X = S \cap A$ και $Y = S \cap B$, οπότε

$$S = X \cup Y = (S \cap A) \cup (S \cap B) \subseteq A \cup B.$$



Δηλαδή η συλλογή $\{A, B\}$ είναι ανοιχτή (αντίστοιχα κλειστή) στο E κάλυψη του S . Επιπλέον, επειδή η συλλογή $\{X, Y\}$ είναι διαμέριση του S , έχουμε

$$X \neq \emptyset \Rightarrow S \cap A \neq \emptyset$$

$$Y \neq \emptyset \Rightarrow S \cap B \neq \emptyset$$

και

$$X \cap Y = \emptyset \Rightarrow (S \cap A) \cap (S \cap B) = \emptyset \Rightarrow S \cap A \cap B = \emptyset.$$

Η ύπαρξη όμως της συλλογής $\{A, B\}$, με τις παραπάνω ιδιότητες, αντίκειται στην υπόθεσή μας. ♦

10.2. Παραδείγματα- Εφαρμογές - Σχόλια

10.2.1. Από τόν ορισμό της, κάθε διαμέριση απαρτίζεται από μη κενά σύνολα. Έτσι, τα σύνολα των διαμερίσεων που εμπλέκονται στους ορισμούς και τις προτάσεις του παρόντος κεφαλαίου θεωρούνται πάντοτε μη κενά σύνολα.

Είναι αξιοσημείωτο ότι ο ορισμός της συνεκτικότητας δίνεται με την άρνηση μιας λογικής πρότασης. Έτσι, είναι φανερό ότι ο προσφορότερος τρόπος για ν' αποδείξει κανείς ότι ένας χώρος είναι συνεκτικός είναι η απαγωγή σε άτοπο.

10.2.2. Κάθε διακριτός μετρικός χώρος E με περισσότερα από ένα στοιχεία είναι μη συνεκτικός μετρικός χώρος.

Απόδειξη.

Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει άμεσα από την Εφαρμογή 1.13.2. ♦

10.2.3. Μια ενδιαφέρουσα συνθήκη που χαρακτηρίζει τη συνεκτικότητα ενός μετρικού χώρου είναι δυνατόν να δοθεί με τη βοήθεια της έννοιας των "διαχωρισμένων" συνόλων.

Δύο υποσύνολα A και B ενός μετρικού χώρου ονομάζονται **διαχωρισμένα** (*separated*) αν ισχύει $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$.

Είναι φανερό ότι, επειδή $A \cap B \subseteq \bar{A} \cap B$, δύο διαχωρισμένα σύνολα είναι ξένα ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει (π.χ. τα σύνολα $(0,1)$ και $[1, 2]$ είναι ξένα αλλά όχι διαχωρισμένα).

Σχετικά με τη συνεκτικότητα ενός μετρικού χώρου ισχύει το εξής:



Ένας μετρικός χώρος E είναι συνεκτικός αν και μόνο αν δεν υπάρχει διαμέρισή του σε δύο διαχωρισμένα υποσύνολά του.

Απόδειξη.

Για την απόδειξη του συμπεράσματος αυτού παρατηρούμε αρχικά ότι κάθε διαμέριση ενός μετρικού χώρου σε δύο διαχωρισμένα υποσύνολά του A και B , είναι ταυτόχρονα ανοιχτή και κλειστή διαμέριση. Πραγματικά από τις σχέσεις

$$\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset, \text{ και } A \cup B = E,$$

παίρνουμε

$$\bar{A} \subseteq B^c = A \text{ και } \bar{B} \subseteq A^c = B.$$

Άρα $\bar{A} = A = B^c$ και $\bar{B} = B = A^c$, δηλαδή η διαμέριση $\{A, B\}$ είναι ανοιχτή και κλειστή ταυτόχρονα.

Έτσι, αν ο E είναι συνεκτικός δεν υπάρχει διαμέρισή του σε δύο διαχωρισμένα υποσύνολά του, γιατί τότε αυτή θα ήταν ανοιχτή και κλειστή διαμέριση του E , πράγμα που αντίκειται στη συνεκτικότητα του E .

Αντίστροφα, έστω ότι δεν υπάρχει διαμέριση του E σε δύο διαχωρισμένα υποσύνολά του και επιπλέον ο E είναι μη συνεκτικός. Τότε υπάρχει ανοιχτή και κλειστή διαμέριση $\{A, B\}$ του E . Επειδή όμως τα A, B είναι κλειστά σύνολα έχουμε

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset.$$

Δηλαδή η συλλογή $\{A, B\}$ είναι διαμέριση του E σε δύο διαχωρισμένα σύνολα, πράγμα άτοπο. ♦

10.2.4. Το σύνολο $X = (0,1) \cup (1, 2]$ δεν είναι συνεκτικό σύνολο (στο μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$).

Παρατηρούμε ότι τα σύνολα $A = (0,1)$ και $B = (1,3)$ συνιστούν μια ανοιχτή εν $\mathbb{R}$ κάλυψη του X για την οποία ισχύει

$$X \cap A = (0,1) \neq \emptyset, X \cap B = (1, 2] \neq \emptyset \text{ και } X \cap A \cap B = \emptyset$$

Άρα, σύμφωνα με την Πρόταση 10.1.3., το X δεν είναι συνεκτικό υποσύνολο του $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

10.2.5. Ένα υποσύνολο του μετρικού χώρου $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι συνεκτικό σύνολο αν και μόνο αν είναι διάστημα.



Απόδειξη.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα υποσύνολο I της πραγματικής ευθείας είναι διάστημα αν για τυχόντα στοιχεία α και β ισχύει:

$$\alpha \in I \text{ και } \beta \in I, \text{ με } \alpha \leq \beta \Rightarrow [\alpha, \beta] \subseteq I.$$

Εστω τώρα I ένα συνεκτικό υποσύνολο του μετρικού χώρου $(\mathbf{R}, |\cdot|)$. Υποθέτουμε ότι το I δεν είναι διάστημα. Τότε, υπάρχουν σημεία α και β του I τέτοια, ώστε $[\alpha, \beta] \not\subseteq I$. Άρα υπάρχει $c \in [\alpha, \beta]$, με $c \notin I$. Τότε όμως η συλλογή $\{(-\infty, c), (c, +\infty)\}$ είναι ανοιχτή στο $\mathbf{R}$ κάλυψη του I και μάλιστα, επειδή $\alpha \neq c \neq \beta$, έχουμε:

$$\alpha \in I \cap (-\infty, c) \neq \emptyset$$

$$\beta \in I \cap (c, +\infty) \neq \emptyset$$

και

$$I \cap (-\infty, c) \cap (c, +\infty) = \emptyset.$$

Αυτό όμως αντίκειται στην υπόθεσή μας ότι το I είναι συνεκτικό. Άρα το I είναι διάστημα.

Αντίστροφα, έστω I ένα διάστημα. Υποθέτουμε ότι το I είναι μη συνεκτικό, οπότε υπάρχει μια κλειστή εν $\mathbf{R}$ κάλυψη $\{A, B\}$ του I τέτοια, ώστε

$$I \cap A \neq \emptyset \neq I \cap B \text{ και } I \cap A \cap B = \emptyset.$$

Θεωρούμε δύο σημεία $\alpha \in I \cap A$, και $\beta \in I \cap B$, υποθέτοντας χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $\alpha < \beta$. Θέτουμε

$$X = A \cap [\alpha, \beta] \text{ και } Y = B \cap [\alpha, \beta].$$

Προφανώς τα σύνολα X και Y είναι μη κενά, κλειστά ως τομές δυο κλειστών συνόλων και φραγμένα ως υποσύνολα του $[\alpha, \beta]$. Άρα τα X, Y είναι συμπαγή υποσύνολα του μετρικού χώρου $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ και μάλιστα ξένα γιατί

$$X \cap Y = (A \cap [\alpha, \beta]) \cap (B \cap [\alpha, \beta]) = [\alpha, \beta] \cap A \cap B \subseteq I \cap A \cap B = \emptyset.$$

Επομένως, σύμφωνα με την Εφαρμογή 8.7.1., υπάρχουν σημεία $x_0 \in X$ και $y_0 \in Y$ τέτοια, ώστε $\varrho(X, Y) = \varrho(x_0, y_0) > 0$. Θεωρούμε το σημείο $z_0 = \frac{x_0 + y_0}{2}$, οπότε έχουμε $x_0 < z_0 < y_0$, $z_0 \notin X$ και $z_0 \notin Y$, δηλαδή $z_0 \notin X \cup Y$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί

$$X \cup Y = (A \cap [\alpha, \beta]) \cup (B \cap [\alpha, \beta]) = [\alpha, \beta] \cap (A \cup B) = [\alpha, \beta]. \quad \blacklozenge$$

Επειδή ολόκληρη η πραγματική ευθεία $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ είναι ένα διάστημα, έχουμε ότι ο μετρικός χώρος $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ είναι συνεκτικός.

10.2.6. Η συνεκτικότητα δεν είναι κληρονομική ιδιότητα.



Απόδειξη.

Πραγματικά, από τις δύο προηγούμενες εφαρμογές, έχουμε ότι στο μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ το σύνολο $(0, 2]$ είναι συνεκτικό, ενώ το υποσύνολό του $(0, 1) \cup (1, 2]$, δεν είναι. ♦

10.2.7. Έστω $\{A, B\}$ μια ανοιχτή ή κλειστή διαμέριση ενός μετρικού χώρου E και S ένα συνεκτικό υποσύνολο του E . Τότε ισχύει $S \subseteq A$ ή $S \subseteq B$.

Απόδειξη.

Η συλλογή $\{A, B\}$ είναι μια ανοιχτή (αντίστοιχα κλειστή) εν E κάλυψη του συνόλου S , με $S \cap A \cap B = S \cap (A \cap B) = S \cap \emptyset = \emptyset$. Άρα, επειδή το S είναι συνεκτικό, θα έχουμε $S \cap A = \emptyset$ ή $S \cap B = \emptyset$ δηλαδή $S \subseteq A^c$ ή $S \subseteq B^c$. Επειδή όμως $A^c = B$ και $B^c = A$, παίρνουμε τελικά $S \subseteq A$ ή $S \subseteq B$. ♦

10.2.8. Αν $E = S \cup C$, όπου S και C είναι συνεκτικά και μη διαχωρισμένα υποσύνολα του μετρικού χώρου E , τότε ο E είναι συνεκτικός μετρικός χώρος.

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι ο μετρικός χώρος E δεν είναι συνεκτικός. Τότε υπάρχει κλειστή διαμέριση $\{A, B\}$ του E . Επειδή το S είναι συνεκτικό υποσύνολο του E , θα έχουμε (Βλέπε 10.2.7.)

$$S \subseteq A \text{ ή } S \subseteq B.$$

Όμοια, θα ισχύει

$$C \subseteq A \text{ ή } C \subseteq B.$$

Έστω τώρα ότι

$$S \subseteq A \text{ και } C \subseteq B.$$

Τότε:

$$A = (S \cup C) \cap A = (S \cap A) \cup (C \cap A) = S \cup \emptyset = S$$

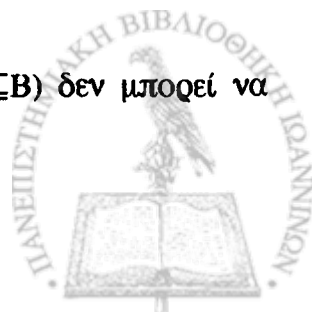
και

$$B = (S \cup C) \cap B = (S \cap B) \cup (C \cap B) = \emptyset \cup C = C.$$

Αλλά τότε πρέπει τα σύνολα S και C να είναι διαχωρισμένα, αφού τα ίσα προς αυτά A και B είναι διαχωρισμένα σύνολα. Αυτό όμως είναι άτοπο.

Όμοια είναι η απόδειξη στην περίπτωση όπου $C \subseteq A$ και $S \subseteq B$.

Η περίπτωση όπου $S \subseteq A$ και $C \subseteq A$ (αντίστοιχα $S \subseteq B$ και $C \subseteq B$) δεν μπορεί να υφίσταται γιατί τότε θα είχαμε $B = \emptyset$ (αντίστοιχα $A = \emptyset$). ♦



10.2.9. Έστω E ένας συνεκτικός μετρικός χώρος και S, D υποσύνολα του E . Αν το S είναι συνεκτικό υποσύνολο του E και τέτοιο, ώστε $S \cap D \neq \emptyset$ και $S \cap D^c \neq \emptyset$, τότε $S \cap \partial D \neq \emptyset$.

Απόδειξη.

Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι

$$S \cap \partial D = \emptyset \text{ και } S \cap D^o = \emptyset \Rightarrow S \cap D = \emptyset. (*)$$

Πραγματικά από τη γνωστή σχέση (Βλέπε 1.10.3.(iii)) $\bar{D} = D^o \cup \partial D$, παίρνουμε

$$S \cap D \subseteq S \cap \bar{D} = S \cap (D^o \cup \partial D) = (S \cap D^o) \cup (S \cap \partial D) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύουν οι υποθέσεις και όχι το συμπέρασμα της άσκησης.

Τότε, αν $S \cap \partial D = \emptyset$, επειδή $E = D^o \cup (\partial D) \cup (D^c)^o$, παίρνουμε:

$$S \subseteq D^o \cup (\partial D) \cup (D^c)^o \Rightarrow S \subseteq D^o \cup (D^c)^o$$

Επιπλέον, ισχύει

$$S \cap D^o \cap (D^c)^o \subseteq S \cap D \cap D^c = \emptyset.$$

Τότε, επειδή το S είναι συνεκτικό παίρνουμε

$$\sim(S \cap D^o \neq \emptyset \text{ και } S \cap (D^c)^o \neq \emptyset) \Leftrightarrow S \cap D^o = \emptyset \text{ ή } S \cap (D^c)^o = \emptyset.$$

Αλλά τώρα λόγω της σχέσης (*) και της υπόθεσης ότι $S \cap \partial D = \emptyset$, η τελευταία σχέση δίνει

$$S \cap D = \emptyset \text{ ή } S \cap D^c = \emptyset,$$

που είναι άτοπο. ♦

10.2.10. Στην παράγραφο αυτή θα δούμε ένα διαφορετικό τρόπο εισαγωγής της έννοιας της συνεκτικότητας.

Ένα πεπερασμένο σύνολο $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ υποσυνόλων του E , ονομάζεται **αλυσίδα** αν ισχύει $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset, i=1, \dots, n-1$.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα σύνολα A_1 και A_n **συνδέονται με μια αλυσίδα**.

Έστω E ένας μετρικός χώρος. Ο E είναι συνεκτικός αν και μόνο αν για κάθε ανοιχτή (αντίστοιχα, πεπερασμένη κλειστή) κάλυψη του A , δύο τυχόντα μέλη της συλλογής A μπορούν να συνδεθούν με μια αλυσίδα μελών της A .



Απόδειξη.

Έστω ότι ο E είναι συνεκτικός, $\mathcal{A}$ ανοιχτή κάλυψη του E και Λ τυχόν, $\Lambda \in \mathcal{A}$.
Θέτουμε:

$\mathcal{H} = \{X \in \mathcal{A} : \text{το } X \text{ μπορεί να συνδεθεί με μια αλυσίδα εν } \mathcal{A} \text{ με το } \Lambda\}$,
 $H_1 = \bigcup \mathcal{H}$ και $H_2 = \bigcup \mathcal{H}^c$. Τότε, τα σύνολα H_1, H_2 είναι ανοιχτά (αντίστοιχα, κλειστά) και προφανώς

$$H_1 \cup H_2 = \bigcup \mathcal{A} = E \text{ και } H_1 \cap H_2 = \emptyset.$$

Τότε, επειδή ο E είναι συνεκτικός και $H_1 \neq \emptyset$ ($\Lambda \subseteq H_1$), θα έχουμε $H_2 = \emptyset$. Άρα $\mathcal{H} = \mathcal{A}$, πράγμα που αποδεικνύει το ζητούμενο.

Αντίστροφα, έστω για κάθε ανοιχτή (αντίστοιχα, πεπερασμένη κλειστή) κάλυψη $\mathcal{A}$ του E , δύο τυχόντα μέλη της συλλογής $\mathcal{A}$ μπορούν να συνδεθούν με μια αλυσίδα μελών της $\mathcal{A}$ και ο E δεν είναι συνεκτικός. Τότε υπάρχει διαμέριση $\{A, B\}$ του E σε δύο ανοιχτά υποσύνολά του. Έτσι, επειδή $A \cap B = \emptyset$, έχουμε αμέσως άτοπο.

10.2.11. Έστω $\varepsilon > 0$.

Ένας μετρικός χώρος λέγεται ε -συνεκτικός αν για τυχόντα σημεία x, y αυτού υπάρχουν σημεία $a_1, \dots, a_n$ εν E με $a_1 = x$ και $a_n = y$ και τέτοια, ώστε $\rho(a_i, a_{i+1}) < \varepsilon, i=1, \dots, n-1$.

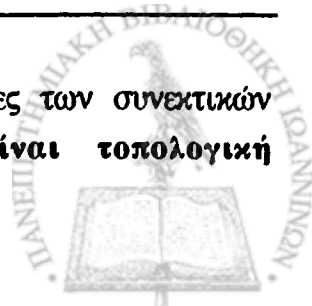
Έστω E ένας μετρικός χώρος. Αν ο E είναι συνεκτικός, τότε είναι και ε -συνεκτικός για κάθε $\varepsilon > 0$.

Απόδειξη.

Ας είναι ο E είναι συνεκτικός, $\varepsilon > 0$, a, b δύο τυχόντα στοιχεία του E και $\mathcal{B} = \{B(x, \frac{\varepsilon}{2}) : x \in E\}$ μια ανοιχτή κάλυψη του E . Επειδή $B(a, \frac{\varepsilon}{2}) \in \mathcal{B}$ και $B(b, \frac{\varepsilon}{2}) \in \mathcal{B}$, σύμφωνα με τη προηγούμενη εφαρμογή, υπάρχει αλυσίδα $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \subseteq \mathcal{B}$, με $A_1 = B(a, \frac{\varepsilon}{2})$ και $A_n = B(b, \frac{\varepsilon}{2})$. Τα κέντρα $a_1, \dots, a_n$ των σφαιρικών περιοχών $A_1, A_2, \dots, A_n$ είναι, προφανώς, τέτοια, ώστε $\rho(a_i, a_{i+1}) < \varepsilon, i=1, \dots, n-1$, πράγμα που αποδεικνύει το ότι ο E είναι ε -συνεκτικός.

10.3. Ιδιότητες των συνεκτικών συνόλων

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε τις πιο βασικές ιδιότητες των συνεκτικών συνόλων. Η πρώτη απ' αυτές είναι ότι η συνεκτικότητα είναι τοπολογική ιδιότητα.



10.3.1. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ας είναι E_1, E_2 μετρικοί χώροι, $f: E_1 \rightarrow E_2$ μια συνεχής συνάρτηση και S ένα συνεκτικό υποσύνολο του E_1 . Τότε το $f(S)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του E_2 .

Απόδειξη.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θέτουμε $S=E_1$ και $f(S)=E_2$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι ο E_2 δεν είναι συνεκτικός μετρικός χώρος. Τότε υπάρχει μη κενό και γνήσιο υποσύνολο A του E_2 ανοιχτό και κλειστό ταυτόχρονα. Επειδή όμως η f είναι συνεχής συνάρτηση, το σύνολο $f^{-1}(A)$ θα είναι ανοιχτό και κλειστό ταυτόχρονα υποσύνολο του E_1 . Επιπλέον, επειδή η συνάρτηση f υποτίθεται επί του E_2 και $\emptyset \neq A \neq E_2$, το σύνολο $f^{-1}(A)$ είναι μη κενό και γνήσιο υποσύνολο του E_1 . Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί αντίκειται στη συνεκτικότητα του $E_1=S$. ♦

10.3.2. ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν $C_i, i \in I$ είναι μια οικογένεια συνεκτικών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου, με $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$, τότε η ένωση $\bigcup_{i \in I} C_i$ της οικογένειας $C_i, i \in I$ είναι συνεκτικό σύνολο.

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι το σύνολο $\bigcup_{i \in I} C_i$ είναι ένα μη συνεκτικό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου E . Τότε υπάρχει μια ανοιχτή εν E κάλυψη $\{A, B\}$ του συνόλου $\bigcup_{i \in I} C_i$ ($\bigcup_{i \in I} C_i \subseteq A \cup B$) τέτοια, ώστε

$$(\bigcup_{i \in I} C_i) \cap A \neq \emptyset, (\bigcup_{i \in I} C_i) \cap B \neq \emptyset \text{ και } (\bigcup_{i \in I} C_i) \cap A \cap B = \emptyset.$$

Επειδή $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$, θεωρούμε ένα σημείο $\alpha \in \bigcap_{i \in I} C_i$. Τότε, επειδή

$$\bigcap_{i \in I} C_i \subseteq \bigcup_{i \in I} C_i \subseteq A \cup B,$$

έχουμε ότι $\alpha \in A$ ή $\alpha \in B$.

Εστω $\alpha \in A$. Τότε έχουμε $\alpha \in C_i \cap A, i \in I$. Επειδή όμως για κάθε $i \in I$ ισχύει

$$C_i \subseteq \bigcup_{i \in I} C_i \subseteq A \cup B \text{ και } C_i \cap A \cap B \subseteq (\bigcup_{i \in I} C_i) \cap A \cap B = \emptyset$$

και λόγω της συνεκτικότητας του κάθε συνόλου $C_i, i \in I$ παίρνουμε

$$C_i \cap B = \emptyset, i \in I$$



(αφού υποτίθεται ότι $a \in C_i \cap A$, $i \in I$, δηλαδή $C_i \cap A \neq \emptyset$, $i \in I$). Άρα τελικά έχουμε

$$C_i \cap B = \emptyset, i \in I \Rightarrow \left(\bigcup_{i \in I} C_i \right) \cap B = \emptyset,$$

που είναι άτοπο.

Όμοια, αν υποθέσουμε ότι $a \in B$, καταλήγουμε ότι $\left(\bigcup_{i \in I} C_i \right) \cap A = \emptyset$, που είναι πάλι άτοπο. ♦

10.3.3. ΠΟΡΙΣΜΑ. Έστω C ένα υποσύνολο ενός μετρικού χώρου τέτοιο, ώστε για κάθε $x, y \in C$ υπάρχει συνεκτικό υποσύνολο T του C με $x \in T$ και $y \in T$. Τότε το C είναι συνεκτικό.

Απόδειξη.

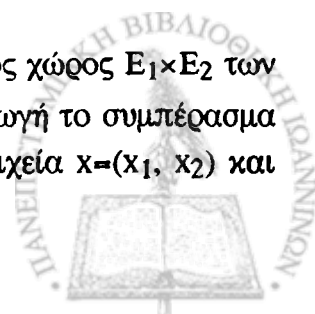
Θεωρούμε ένα σημείο $a \in C$. Τότε για κάθε $x \in C$ υπάρχει ένα συνεκτικό υποσύνολο T_x του C , με $a \in T_x$ και $x \in T_x$. Η οικογένεια των συνεκτικών συνόλων T_x , $x \in C$ έχει μη κενή τομή, γιατί $a \in T_x$ για κάθε $x \in C$. Δηλαδή $a \in \bigcap_{x \in C} T_x \neq \emptyset$. Άρα, σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, το σύνολο $\bigcup_{x \in C} T_x$ είναι συνεκτικό και μάλιστα $\bigcup_{x \in C} T_x \subseteq C$. Εξάλλου, για κάθε $y \in C$ ισχύει $y \in T_y$. Άρα $y \in \bigcup_{x \in C} T_x$. Έτσι, $C \subseteq \bigcup_{x \in C} T_x$ και τελικά $\bigcup_{x \in C} T_x = C$. Επομένως το C είναι συνεκτικό σύνολο. ♦

10.3.4. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ο καρτεσιανός μετρικός χώρος E των μετρικών χώρων $E_i, i=1, \dots, n$, είναι συνεκτικός αν και μόνο αν κάθε μετρικός χώρος $E_i, i=1, \dots, n$, είναι συνεκτικός.

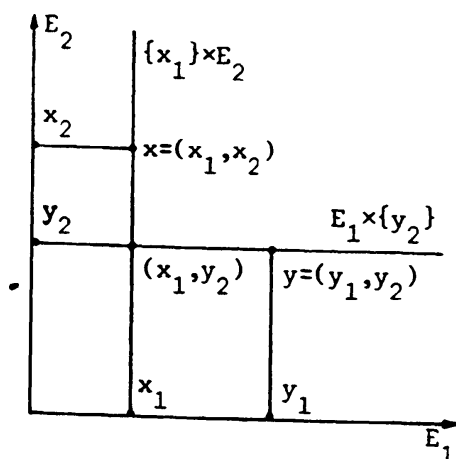
Απόδειξη.

Έστω ότι ο E είναι συνεκτικός. Τότε, επειδή $p_i(E) = E_i$, $i=1, \dots, n$ όπου p_i είναι η i -προβολή του E , κάθε μετρικός χώρος E_i , $i=1, \dots, n$ θα είναι συνεκτικός, ως εικόνα του συνεκτικού χώρου E μέσω της συνεχούς συνάρτησης p_i , $i=1, \dots, n$.

Αντίστροφα, αρκεί ν' αποδείξουμε ότι ο καρτεσιανός μετρικός χώρος $E_1 \times E_2$ των συνεκτικών μετρικών χώρων E_1, E_2 είναι συνεκτικός. Τότε, με επαγωγή το συμπέρασμα γενικεύεται εύκολα. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε δύο τυχόντα στοιχεία $x = (x_1, x_2)$ και



$y=(y_1, y_2)$ στο χώρο $E_1 \times E_2$. Τότε τα σύνολα $E_1 \times \{y_2\}$ και $\{x_1\} \times E_2$ είναι συνεκτικά υποσύνολα του $E_1 \times E_2$, γιατί είναι εικόνες των συνεκτικών χώρων E_1 και E_2 μέσω των συνεχών συναρτήσεων $f:E_1 \rightarrow E$ και $g:E_2 \rightarrow E$, αντίστοιχα, με τύπους $f(x)=(x, y_2)$ και $g(x)=(x_1, x)$ (σύμφωνα με την Πρόταση 10.3.1.).



Επιπλέον, για τα συνεκτικά σύνολα $E_1 \times \{y_2\}$ και $\{x_1\} \times E_2$, ισχύει

$$(E_1 \times \{y_2\}) \cap (\{x_1\} \times E_2) = \{(x_1, y_2)\} \neq \emptyset.$$

Άρα, σύμφωνα με την Πρόταση 10.3.2., το σύνολο $T = (E_1 \times \{y_2\}) \cup (\{x_1\} \times E_2)$ είναι συνεκτικό. Τελικά αποδείχτηκε ότι για δύο τυχόντα στοιχεία $x=(x_1, x_2)$ και $y=(y_1, y_2)$ του $E_1 \times E_2$, υπάρχει συνεκτικό υποσύνολο T του $E_1 \times E_2$, με $x \in T$ και $y \in T$. Έτσι, σύμφωνα με το προηγούμενο Πρόγραμμα 10.3.3., ο μετρικός χώρος $E_1 \times E_2$ είναι συνεκτικός. ♦

10.3.5. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ας είναι C και T δύο υποσύνολα ενός μετρικού χώρου E τέτοια, ώστε το C να είναι συνεκτικό σύνολο και $C \subseteq T \subseteq \bar{C}$. Τότε και το T είναι συνεκτικό σύνολο.

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι το T δεν είναι συνεκτικό. Τότε υπάρχει ανοιχτή εν E κάλυψη $\{A, B\}$ του T τέτοια, ώστε

$$T \cap A \neq \emptyset, T \cap B \neq \emptyset \text{ και } T \cap A \cap B = \emptyset.$$

Έτσι, θεωρούμε δύο στοιχεία α και β , με $\alpha \in T \cap A$ και $\beta \in T \cap B$. Τότε έχουμε:

$$\alpha \in T \cap A \Rightarrow \alpha \in T \text{ και } \alpha \in A \Rightarrow \alpha \in \bar{C} \text{ και } \alpha \in A.$$

Επειδή το A , ως ανοιχτό, είναι περιοχή του α και $\alpha \in \bar{C}$, παίρνουμε $C \cap A \neq \emptyset$. Όμοια, καταλήγουμε ότι $C \cap B \neq \emptyset$. Άρα η συλλογή $\{A, B\}$, ως ανοιχτή κάλυψη του T , είναι και



ανοιχτή κάλυψη του υποσυνόλου C του T και μάλιστα τέτοια, ώστε $C \cap A \neq \emptyset$, $C \cap B \neq \emptyset$. Αφού το C είναι συνεκτικό, οι σχέσεις αυτές συνεπάγονται $C \cap A \cap B \neq \emptyset$. Τότε όμως, από τις σχέσεις $C \subseteq T$ και $C \cap A \cap B \neq \emptyset$, παίρνουμε $T \cap A \cap B \neq \emptyset$, που είναι άτοπο. ♦

10.3.6. ΠΟΡΙΣΜΑ. Αν C είναι ένα συνεκτικό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου, τότε η θήκη $\bar{C}$ του C είναι συνεκτικό σύνολο.

Απόδειξη.

Επειδή $C \subseteq \bar{C} \subseteq \bar{\bar{C}}$, το συμπέρασμα είναι άμεσο από την προηγούμενη πρόταση. ♦

10.4. Παραδείγματα – Εφαρμογές – Σχόλια

10.4.1. Αν $\mathcal{C}$ είναι μια συλλογή συνεκτικών υποσυνόλων του E τέτοια, ώστε για κάθε $A, B \in \mathcal{C}$ να ισχύει $A \cap B \neq \emptyset$, ν' αποδειχτεί ότι το σύνολο $\bigcup \mathcal{C}$ είναι συνεκτικό.

Απόδειξη.

Θ' αποδείξουμε ότι για τυχόντα $x, y \in \bigcup \mathcal{C}$ υπάρχει συνεκτικό υποσύνολο S του $\bigcup \mathcal{C}$ με $x \in S$ και $y \in S$. Πραγματικά θεωρούμε τυχόντα $x, y \in \bigcup \mathcal{C}$. Τότε, υπάρχουν $A, B \in \mathcal{C}$, με $x \in A$ και $y \in B$. Επειδή όμως τα A, B είναι συνεκτικά και $A \cap B \neq \emptyset$, το σύνολο $A \cup B$ είναι συνεκτικό και μάλιστα $x \in A \cup B$ και $y \in A \cup B$. ♦

10.4.2. Ο ευκλείδειος χώρος $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$, $n \in \mathbb{N}$ είναι συνεκτικός μετρικός χώρος.

Απόδειξη.

Επειδή ο μετρικός χώρος $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι συνεκτικός (βλέπε 10.2.5.), σύμφωνα με την Πρόταση 10.3.4., και ο μετρικός χώρος $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$, $n \in \mathbb{N}$ είναι συνεκτικός. ♦

10.4.3. Μια σημαντική εφαρμογή της θεωρίας των συνεκτικών μετρικών χώρων είναι το γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών.



ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ. Ας είναι E ένας μετρικός χώρος και $f: E \rightarrow \mathbf{R}$ μια συνεχής πραγματική συνάρτηση. Αν S είναι ένα συνεκτικό υποσύνολο του E και a, b στοιχεία του S , με $f(a) < f(b)$, τότε για κάθε c με $f(a) < c < f(b)$, υπάρχει σημείο $x_0 \in S$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = c$.

Απόδειξη.

Σύμφωνα με την Πρόταση 10.3.1., το σύνολο $f(S)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbf{R}$ και επομένως διάστημα. Άρα $[f(a), f(b)] \subseteq f(S)$, οπότε, επειδή $c \in [f(a), f(b)]$, $c \in f(S)$. Έτσι, υπάρχει $x_0 \in S$ με $f(x_0) = c$. ♦

Στην ειδική περίπτωση όπου $E = \mathbf{R}$ και $S = [a, b]$ έχουμε την απλή κλασσική διατύπωση του θεωρήματος των ενδιάμεσων τιμών που έχει ως εξής:

Αν a, b είναι πραγματικοί αριθμοί με $a < b$ και $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ μια συνεχής συνάρτηση, τότε η f παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των αριθμών $f(a)$ και $f(b)$.

10.4.4. Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη, ώστε ένας μετρικός χώρος να είναι συνεκτικός, μπορεί να προκύψει με τη βοήθεια της Πρότασης 10.3.1. Συγκεκριμένα ισχύει το εξής:

Ένας μετρικός χώρος E είναι συνεκτικός αν και μόνο αν δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f: E \rightarrow \mathbf{R}$ τέτοια, ώστε $\mathcal{R}(f) = \{a, b\}$ με $a \neq b$.

Απόδειξη.

Εστω ότι ο E είναι συνεκτικός και υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f: E \rightarrow \mathbf{R}$, με $\mathcal{R}(f) = \{a, b\}$ και $a \neq b$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί, αφού ο E είναι συνεκτικός χώρος και η f συνεχής, θα έπρεπε το σύνολο $\mathcal{R}(f)$ να είναι διάστημα στο $\mathbf{R}$, πράγμα που δε μπορεί να είναι το σύνολο $\{a, b\}$ με $a \neq b$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο E δεν είναι συνεκτικός. Τότε υπάρχει σύνολο A , $\emptyset \neq A \subseteq E$, ανοιχτό και κλειστό ταυτόχρονα. Θεωρούμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση του A , $\chi_A: E \rightarrow \mathbf{R}$, που όπως είναι γνωστό ορίζεται με τον τύπο:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A \\ 0, & \text{αν } x \notin A \end{cases}$$

Θ' αποδείξουμε ότι η χ_A είναι συνεχής. Πραγματικά, έστω C τυχόν ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbf{R}$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1) $0 \in C$ και $1 \in C$. Τότε $\chi_A^{-1}(C) = E$.



2) $0 \in C$ και $1 \notin C$. Τότε $\chi_A^{-1}(C) = A^c$.

3) $0 \notin C$ και $1 \in C$. Τότε $\chi_A^{-1}(C) = A$.

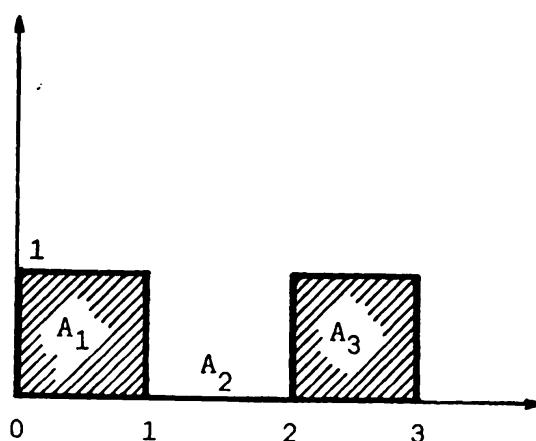
4) $0 \notin C$ και $1 \notin C$. Τότε $\chi_A^{-1}(C) = \emptyset$.

Έτσι, σε κάθε περίπτωση, η αντίστροφη εικόνα του ανοιχτού συνόλου C είναι ανοιχτό υποσύνολο του E , που σημαίνει ότι η συνάρτηση χ_A είναι συνεχής. ♦

10.4.5. Ενώ η θήκη ενός συνεκτικού συνόλου είναι πάντοτε συνεκτικό σύνολο (Βλέπε Πρόταση 10.3.6.), ο πυρήνας ενός συνεκτικού συνόλου δεν είναι πάντοτε συνεκτικό σύνολο.

Την αλήθεια αυτού του ισχυρισμού αποδεικνύει το επόμενο παράδειγμα.

Θεωρούμε το σύνολο $A = ([0, 1] \times [0, 1]) \cup ([1, 2] \times \{0\}) \cup ([2, 3] \times [0, 1])$ στο μετρικό χώρο $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$. Θέτουμε $A_1 = [0, 1] \times [0, 1]$, $A_2 = [1, 2] \times \{0\}$, $A_3 = [2, 3] \times [0, 1]$ και παρατηρούμε ότι τα σύνολα αυτά είναι συνεκτικά υποσύνολα του μετρικού χώρου $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$, ως καρτεσιανά γινόμενα συνεκτικών συνόλων (διαστημάτων). Επιπλέον, επειδή $A_1 \cap A_2 = \{(1, 0)\} \neq \emptyset$, το σύνολο $A_1 \cup A_2$ είναι συνεκτικό.



Όμοια, επειδή $(A_1 \cup A_2) \cap A_3 = \{(2, 0)\} \neq \emptyset$, το σύνολο $(A_1 \cup A_2) \cup A_3$ είναι συνεκτικό. Είναι εύκολο ν' αποδείξουμε ότι $A^\circ = ((0, 1) \times (0, 1)) \cup ((2, 3) \times (0, 1))$. Έτσι, το σύνολο A° , ως ένωση ξένων και ανοιχτών συνόλων (τα σύνολα $(0, 1) \times (0, 1)$ και $(2, 3) \times (0, 1)$ είναι ανοιχτά ως καρτεσιανά γινόμενα ανοιχτών συνόλων), δεν μπορεί να είναι συνεκτικό σύνολο. ♦

10.4.6. Έστω S ένα συνεκτικό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (E, ρ) . Αν το S έχει τουλάχιστον δύο διαφορετικά σημεία, τότε το S είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο.

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι a, b είναι σημεία του S , με $a \neq b$. Τότε, η συνάρτηση $f: S \rightarrow \mathbf{R}$, με τύπο $f(x) = \rho(x, a)$ είναι συνεχής (Βλέπε 4.4.5.) και έτσι το σύνολο $f(S)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbf{R}$, δηλαδή διάστημα. Επιπλέον, επειδή $f(a) = 0$ και $f(b) = \rho(a, b) = c > 0$, έχουμε $f(S) \supseteq [0, c]$. Άρα $f(S) \supsetneq [0, c]$ και, επειδή το διάστημα $[0, c]$, $c > 0$, είναι υπεραριθμήσιμο, το $f(S)$ είναι υπεραριθμήσιμο. Όμως, από γνωστό συμπέρασμα της θεωρίας της ισχύος των συνόλων, έχουμε ότι $S \supsetneq f(S)$, που σημαίνει ότι και το S είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο. ♦

10.4.7. Δεν, υπάρχει υποσύνολο της πραγματικής ευθείας ομοιομορφικό προς το μοναδιαίο κύκλο του ευκλείδειου μετρικού χώρου $(\mathbf{R}^2, |\cdot|)$, δηλαδή προς το σύνολο $K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Απόδειξη.

Αρχικά θ' αποδείξουμε ότι το σύνολο K καθώς και το σύνολο $K - \{(a, b)\}$, όπου (a, b) είναι τυχόν σημείο του K , είναι συνεκτικά.

Πραγματικά θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$, με τύπο

$$f(x) = (\sin x, \eta \mu x),$$

οπότε έχουμε

$$K = f([0, 2\pi)) \text{ και } K - \{(a, b)\} = f((x_0, x_0 + 2\pi)),$$

όπου x_0 είναι πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $a = \sin x_0$ και $b = \eta \mu x_0$. Έτσι, τα σύνολα K και $K - \{(a, b)\}$, είναι συνεκτικά γιατί είναι εικόνες των διαστημάτων $[0, 2\pi)$ και $(x_0, x_0 + 2\pi)$, αντίστοιχα, που είναι συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbf{R}$, μέσω της συνεχούς συνάρτησης f .

Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $\varphi: K \xrightarrow{\text{επί}} A$, όπου A είναι ένα υποσύνολο της πραγματικής ευθείας. Τότε, επειδή το K είναι συνεκτικό σύνολο και η φ συνεχής συνάρτηση, το A θα είναι διάστημα. Επιπλέον, επειδή τα σημεία $(0, 1)$, $(1, 0)$ και $(0, -1)$ είναι σημεία του K , τα σημεία $\varphi((0, 1))$, $\varphi((1, 0))$ και $\varphi((0, -1))$ είναι σημεία του A και μάλιστα διαφορετικά μεταξύ τους, αφού η φ είναι αμφιμονοσήμαντη. Έτσι, ένα τουλάχιστον από τα σημεία $\varphi((0, 1))$, $\varphi((1, 0))$ και $\varphi((0, -1))$ είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος A . Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι αυτό είναι το σημείο $\varphi((0, 1))$. Τότε όμως το σύνολο $A - \{\varphi((0, 1))\}$ δεν είναι διάστημα και επομένως δεν είναι συνεκτικό σύνολο. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί

$$A - \{\varphi((0, 1))\} = \varphi(K - \{(0, 1)\})$$

και το σύνολο $K - \{(0, 1)\}$ είναι συνεκτικό σύνολο, όπως αποδείχτηκε παραπάνω. ♦



10.5. Συνεκτικές συνιστώσες

Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε μια σημαντική εφαρμογή των προηγουμένων, που είναι η έννοια της “συνεκτικής συνιστώσας” ενός μετρικού χώρου.

Εστω E ένας μετρικός χώρος. Στον E ορίζουμε μια διμελή σχέση $\sim$ ως εξής:
 $(\forall x, y \in E) \quad x \sim y \Leftrightarrow$ Υπάρχει συνεκτικό υποσύνολο S του E τέτοιο, ώστε $x \in S$ και $y \in S$.

10.5.1. ΛΗΜΜΑ. Η σχέση $\sim$ είναι μια ισοδυναμία στον E .

Απόδειξη.

Πραγματικά, επειδή για κάθε $x \in E$ το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι συνεκτικό σύνολο, ισχύει $x \sim x$, οπότε η σχέση $\sim$ είναι ανακλαστική.

Επιπλέον, είναι άμεσο ότι η σχέση $\sim$ είναι συμμετρική.

Θ' αποδείξουμε ότι η σχέση $\sim$ είναι και μεταβατική. Υποθέτουμε ότι για τυχόντα στοιχεία x, y και $z \in E$ έχουμε $x \sim y$ και $y \sim z$. Άρα υπάρχουν συνεκτικά υποσύνολα S_1, S_2 του E με $x \in S_1, y \in S_1, y \in S_2$ και $z \in S_2$. Άρα $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, αφού $y \in S_1 \cap S_2$ και επομένως το σύνολο $S_1 \cup S_2$ είναι συνεκτικό σύνολο. Επιπλέον, $x \in S_1 \cup S_2$ και $z \in S_1 \cup S_2$, δηλαδή $x \sim z$. Έτσι η σχέση $\sim$ είναι και μεταβατική και επομένως ισοδυναμία.

Κάθε μια από τις κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης $\sim$ την ονομάζουμε **συνεκτική συνιστώσα (component)** του E .

10.5.2. ΠΡΟΤΑΣΗ. Για τις συνεκτικές συνιστώσες ενός μετρικού χώρου E ισχύουν τα εξής:

- i) Κάθε συνεκτική συνιστώσα είναι συνεκτικό σύνολο.
- ii) Κάθε συνεκτική συνιστώσα είναι ψευδομέγιστο στη συλλογή όλων των συνεκτικών υποσυνόλων του μετρικού χώρου και αντίστροφα.
- iii) Κάθε συνεκτική συνιστώσα είναι κλειστό σύνολο.

Απόδειξη.

i) Ας είναι C μια συνεκτική συνιστώσα του E και x, y δύο τυχόντα στοιχεία του συνόλου C . Τότε $x \sim y$ και επομένως υπάρχει συνεκτικό σύνολο S με $x \in S$ και $y \in S$.



Επιπλέον, ισχύει $S \subseteq C$. Πραγματικά, αν $S \not\subseteq C$, θα υπήρχε στοιχείο z , με $z \in S$ και $z \notin C$, δηλαδή $x \sim z$ και ταυτόχρονα $z \notin C = \text{κλ}_{\sim}(x)$, που είναι άτοπο. Έτσι, σύμφωνα με το Πόρισμα 10.3.3., προκύπτει ότι το C είναι συνεκτικό σύνολο.

ii) Έστω $\mathcal{A}$ η συλλογή όλων των συνεκτικών υποσυνόλων του E και C είναι ένα ψευδομέγιστο (ως προς τη διάταξη του υποσυνόλου) της συλλογής $\mathcal{A}$. Θεωρούμε τυχόν $x \in C$ και τη συνεκτική συνιστώσα $\text{κλ}_{\sim}(x)$. Θ' αποδείξουμε ότι $C = \text{κλ}_{\sim}(x)$. Πραγματικά, για τυχόν y έχουμε:

$$y \in \text{κλ}_{\sim}(x) \Rightarrow x \sim y \Rightarrow (\exists S \in \mathcal{A}) x \in S \text{ και } y \in S.$$

Επειδή όμως $x \in S \cap C$, δηλαδή $S \cap C \neq \emptyset$, και το C είναι ψευδομέγιστο της συλλογής $\mathcal{A}$, έχουμε $S \subseteq C$. Άρα $y \in C$ οπότε $\text{κλ}_{\sim}(x) \subseteq C$. Επιπλέον, για τυχόν $y \in C$ έχουμε

$$y \in C \Rightarrow x \sim y \text{ (επειδή } C \text{ συνεκτικό και } x \in C) \Rightarrow y \in \text{κλ}_{\sim}(x).$$

Άρα $C \subseteq \text{κλ}_{\sim}(x)$ και τελικά $C = \text{κλ}_{\sim}(x)$.

Αντίστροφα, έστω S μια συνεκτική συνιστώσα του E . Θ' αποδείξουμε ότι το S είναι ψευδομέγιστο στοιχείο της συλλογής $\mathcal{A}$, δηλαδή ότι δεν υπάρχει συνεκτικό υποσύνολο C του E με $S \subset C$. Πραγματικά, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει, τότε από τη σχέση $S \subset C$, θα έχουμε ότι υπάρχει $x \in C$ και $x \notin S$. Έτσι, αν a είναι τυχόν σημείο του S , επειδή το S είναι συνεκτική συνιστώσα, θα έχουμε $S = \text{κλ}_{\sim}(a)$. Εξάλλου, επειδή $a \in C$ και $x \in C$ θα έχουμε $x \sim a$, δηλαδή $x \in \text{κλ}_{\sim}(a) = S$, που είναι άτοπο.

iii) Αν C είναι συνεκτική συνιστώσα του E , τότε, επειδή $C \subseteq \bar{C}$ και $\bar{C}$ το είναι συνεκτικό σύνολο (Βλέπε Πόρισμα 10.3.6.), θα έχουμε $C = \bar{C}$, αφού το C είναι ψευδομέγιστο στη συλλογή όλων των συνεκτικών υποσυνόλων του E . ♦

10.6. Παραδείγματα- Εφαρμογές

10.6.1. i) Αν ένας μετρικός χώρος E είναι συνεκτικός, τότε ο E είναι η μόνη συνεκτική συνιστώσα του χώρου.

ii) Σ' ένα διακριτό μετρικό χώρο κάθε μονοσύνολο είναι συνεκτική συνιστώσα.

Απόδειξη.

i) Είναι προφανές αφού ο E είναι συνεκτικός και δεν υπάρχει κανένα συνεκτικό γνήσιο υπερσύνολο του E .



ii) Κάθε μονοσύνολο σε κάθε μετρικό χώρο είναι συνεκτικό. Επιπλέον, στο διακριτό μετρικό χώρο τα μονοσύνολα είναι τα μόνα συνεκτικά σύνολα του χώρου. Πραγματικά αν X είναι ένα υποσύνολο ενός διακριτού μετρικού χώρου με περισσότερα του ενός στοιχεία και $x \in X$, τότε η συλλογή $\{\{x\}, X - \{x\}\}$ είναι ανοιχτή και κλειστή διαμέριση του X , πράγμα που αποδεικνύει τη μη συνεκτικότητά του. Άρα δεν υπάρχει συνεκτικό γνήσιο υπερσύνολο ενός μονοσυνόλου. Αυτό αποδεικνύει ότι τα μονοσύνολα σ' ένα διακριτό μετρικό χώρο είναι συνεκτικές συνιστώσες.

10.7. Οδική και πολυγωνική συνεκτικότητα

Ας είναι (E, ρ) ένας μετρικός χώρος και x, y δύο τυχόντα στοιχεία του E .

Μια συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow E$ ($a, b \in \mathbb{R}$, με $a < b$), με $f(a) = x$ και $f(b) = y$ λέγεται **οδός (path)** που συνδέει τα σημεία x και y του E . Το σημείο x λέγεται **αρχικό (initial) σημείο** και το y **τελικό (terminal) σημείο της οδού**.

Ένας μετρικός χώρος E λέγεται **οδικά συνεκτικός (path connected) μετρικός χώρος** αν για τυχόντα δύο σημεία του E υπάρχει οδός συνδέουσα τα σημεία αυτά.

Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου E λέγεται **οδικά συνεκτικό σύνολο** αν το A , ως μετρικός υπόχωρος του E , είναι οδικά συνεκτικός μετρικός χώρος.

Η επόμενη πρόταση μας δίνει μια πρώτη σχέση μεταξύ των εννοιών της συνεκτικότητας και της οδικής συνεκτικότητας.

10.7.1. ΠΡΟΤΑΣΗ. Κάθε οδικά συνεκτικός μετρικός χώρος είναι και συνεκτικός μετρικός χώρος.

Απόδειξη.

Ας είναι x, y δύο τυχόντα στοιχεία ενός οδικά συνεκτικού μετρικού χώρου E . Τότε υπάρχει οδός f που συνδέει τα σημεία x και y . Επειδή το πεδίο ορισμού της f είναι το συνεκτικό (ως διάστημα) σύνολο $[a, b]$, το σύνολο $f([a, b])$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του



Ε και μάλιστα ισχύει $x \in f([a, b])$ και $y \in f([a, b])$. Έτσι, σύμφωνα με το Πρόρισμα 10.3.3., ο Ε είναι συνεκτικός μετρικός χώρος. ♦

Με κατάλληλα παραδείγματα μπορεί να διαπιστώσει κανείς ότι το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει (Βλέπε 10.8.1.).

Η έννοια της οδικής συνεκτικότητας αποκτά ιδιαίτερη σημασία στην περίπτωση που ο μετρικός χώρος Ε είναι ένας σταθμητός διανυσματικός χώρος. Αυτό, γιατί στην περίπτωση αυτή και για δύο τυχόντα σημεία x_1, x_2 , ορίζεται η έννοια του ευθύγραμμου τμήματος $[x_1 x_2]$ με τον τύπο:

$$[x_1 x_2] = \{x \in E: x = (1-t)x_1 + tx_2, t \in [0, 1]\}.$$

Έχοντας υπόψη τον ορισμό της οδού, παρατηρούμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα $[x_1 x_2]$ είναι μια οδός που συνδέει τα σημεία x_1 και x_2 και ορίζεται από τη συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow E$, με τύπο $f(t) = (1-t)x_1 + tx_2$.

| Ένα υποσύνολο Α του Ε θα λέγεται **κυρτό (convex) σύνολο** αν για τυχόντα x_1 και x_2 εν Ε ισχύει $[x_1 x_2] \subseteq A$.

Είναι φανερό ότι ένα κυρτό σύνολο είναι και οδικά συνεκτικό (άρα και συνεκτικό) σύνολο.

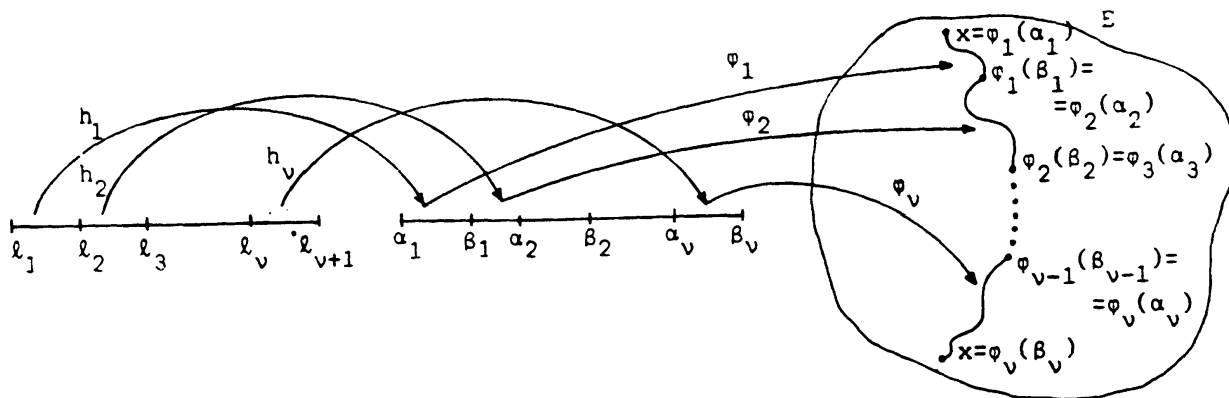
Μια γενίκευση της έννοιας της κυρτότητας στους σταθμητούς διανυσματικούς χώρους, είναι η έννοια της πολυγωνικής συνεκτικότητας που δίνουμε αμέσως παρακάτω.

| Αν $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι σημεία ενός σταθμητού διανυσματικού χώρου, με $x_i \neq x_{i+1}$, $i=1, 2, \dots, n-1$, τότε το σύνολο $\bigcup_{i=1}^{n-1} [x_i x_{i+1}]$ ονομάζεται **πολυγωνική γραμμή με αρχικό σημείο το x_1 και τελικό σημείο το x_n** .

| Τα ευθύγραμμα τμήματα $[x_1 x_2], [x_2 x_3], \dots, [x_{n-1} x_n]$ ονομάζονται **πλευρές της πολυγωνικής γραμμής**.

| Δύο σημεία x και y ενός σταθμητού διανυσματικού χώρου **συνδέονται με πολυγωνική γραμμή**, αν υπάρχει πολυγωνική γραμμή με αρχικό (ή τελικό) σημείο το x και τελικό (αντίστοιχα αρχικό) σημείο το y .





Επειδή ισχύει

$$(\varphi_i \circ h_i)(\tau_{i+1}) = \varphi_i(h_i(\tau_{i+1})) = \varphi_i(\beta_i) = \varphi_{i+1}(\alpha_i) = (\varphi_{i+1} \circ h_{i+1})(\tau_{i+1}), \quad i = 1, \dots, v-1,$$

η f είναι συνεχής συνάρτηση του $[\tau_1, \tau_{v+1}]$ στον E και μάλιστα

$$f(\tau_1) = \varphi_1(h_1(\tau_1)) = \varphi_1(\alpha_1) = x, \quad f(\tau_{v+1}) = \varphi_v(h_v(\tau_{v+1})) = \varphi_v(\beta_v) = y.$$

Άρα η f είναι μια οδός που συνδέει τα σημεία x και y . ♦

10.7.3. ΠΡΟΤΑΣΗ Σ' ένα σταθμητό διανυσματικό χώρο κάθε πολυγωνικά συνεκτικό σύνολο είναι και οδικά συνεκτικό σύνολο.

Απόδειξη.

Το συμπέρασμα αυτό είναι άμεση συνέπεια των ορισμών και του Λήμματος 10.5.2. ♦

| Μια πολυγωνική γραμμή που συνδέει δύο σημεία ενός σταθμητού διανυσματικού χώρου λέγεται και **πολυγωνική οδός**.

10.8. Παραδείγματα - Εφαρμογές

10.8.1. Ένα συνεκτικό σύνολο δεν είναι πάντοτε και οδικά συνεκτικό σύνολο.

Απόδειξη.

Ας είναι $A = \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$ και $B = \{(x, y) : x > 0 \text{ και } y = \sin \frac{1}{x}\}$ υποσύνολα του ευκλείδειου μετρικού χώρου $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Επειδή $A = \{0\} \times [-1, 1]$, το A είναι συνεκτικό σύνολο,



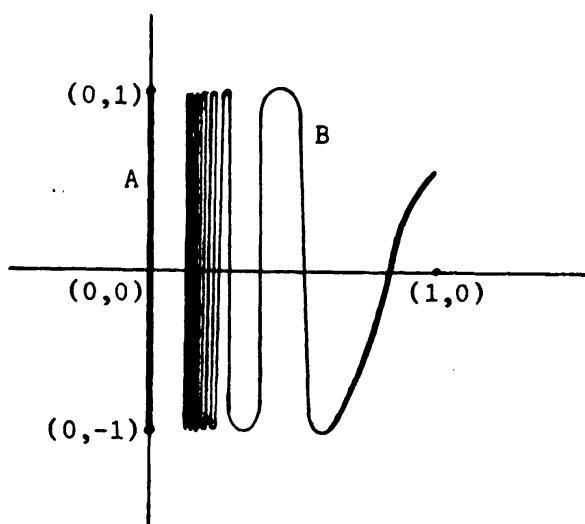
ως καρτεσιανό γινόμενο συνεκτικών συνόλων. Το σύνολο B είναι το γράφημα της συνεχούς συνάρτησης $y = \sin \frac{1}{x}$, $x > 0$ και επομένως είναι οδικά συνεκτικό σύνολο.

Επιπλέον, τα σύνολα A και B δεν είναι διαχωρισμένα γιατί ισχύει $A \cap \bar{B} \neq \emptyset$.

Πραγματικά, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ παίρνουμε $\sin \frac{1}{2\pi n} = \sin 2\pi n = 0$. Έτσι, η ακολουθία

$a_n = (\frac{1}{2\pi n}, 0)$, $n \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία σημείων του B και μάλιστα $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = (0, 0)$. Άρα

$(0, 0) \in \bar{B}$ και, επειδή $(0, 0) \in A$, έχουμε $A \cap \bar{B} \neq \emptyset$.



Επειδή τα σύνολα A, B είναι συνεκτικά και μη διαχωρισμένα, η ένωσή τους $A \cup B$ είναι συνεκτικό σύνολο (Βλέπε 10.2.8.). Το σύνολο $A \cup B$ δεν είναι όμως οδικά συνεκτικό. Πραγματικά, το γράφημα της συνάρτησης $y = \sin \frac{1}{x}$, $x > 0$, δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον άξονα $x=0$, που σημαίνει ότι δεν υπάρχει οδός στο $A \cup B$ που να συνδέει ένα σημείο του A με ένα σημείο του B . (Αν υπήρχε τέτοια οδός τότε αυτή θα έπρεπε να είναι μέρος του γραφήματος της συνάρτησης $y = \sin \frac{1}{x}$, $x > 0$). ♦

10.8.2. Σ' ένα σταθμητό διανυσματικό χώρο οι σφαιρικές περιοχές είναι κυρτά και επομένως συνεκτικά σύνολα.

Απόδειξη.

Ας είναι (E, N) ένας σταθμητός διανυσματικός χώρος, a τυχόν σημείο του E και $B(a, r) = \{x \in E: N(x-a) < r\}$, $r > 0$, τυχούσα σφαιρική περιοχή του a στον (E, N) . Αν x, y είναι τυχόντα σημεία της $B(a, r)$, θ' αποδείξουμε ότι $[x, y] \subseteq B(a, r)$. Θεωρούμε τυχόν $z \in [x, y]$. Τότε υπάρχει $t \in [0, 1]$ με $z = (1-t)x + ty$, οπότε

$$N(z-\alpha) = N((1-t)x + ty - \alpha) = N((1-t)x + ty - (1-t)\alpha + t\alpha) \leq \\ (1-t)N(x-\alpha) + tN(y-\alpha) < (1-t)r + tr = r.$$

Άρα

$$N(z-\alpha) < r \Rightarrow z \in B(\alpha, r), \text{ δηλαδή } [x, y] \subseteq B(\alpha, r),$$

που σημαίνει ότι το σύνολο $B(\alpha, r)$ είναι κυρτό. ♦

10.8.3. Όπως είδαμε παραπάνω ένα συνεκτικό σύνολο γενικά είναι μη οδικά συνεκτικό σύνολο. Μπορεί όμως, κάτω από κατάλληλες συνθήκες, ένα συνεκτικό σύνολο να είναι και οδικά (ειδικότερα πολυγωνικά) συνεκτικό σύνολο. Τον ισχυρισμό αυτό επιβεβαιώνει το παρακάτω συμπέρασμα:

Ένα ανοιχτό υποσύνολο ενός σταθμητού διανυσματικού χώρου είναι πολυγωνικά συνεκτικό σύνολο αν και μόνο αν είναι συνεκτικό σύνολο.

Απόδειξη.

Σύμφωνα με τα ήδη γνωστά, αρκεί ν' αποδείξουμε ότι αν A είναι ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο ενός σταθμητού διανυσματικού χώρου E , τότε το σύνολο A είναι πολυγωνικά συνεκτικό.

Θεωρούμε τυχόν $\alpha \in A$ και το σύνολο C με

$$C = \{x \in A : \text{υπάρχει πολυγωνική οδός που συνδέει το } \alpha \text{ με το } x\} \cup \{\alpha\}.$$

Το σύνολο C από τον ορισμό του, είναι υποσύνολο του A . Θ' αποδείξουμε ότι το C είναι ανοιχτό και κλειστό υποσύνολο του A .

Πραγματικά, έστω x τυχόν στοιχείο του C . Τότε $x \in A$ και, επειδή το A είναι ανοιχτό υποσύνολο του E , υπάρχει σφαιρική $B(x, r)$ περιοχή του x , με $B(x, r) \subseteq A$. Θ' αποδείξουμε ότι $B(x, r) \subseteq C$. Για τυχόν $z \in B(x, r)$ έχουμε $[x, z] \subseteq B(x, r)$ (βλέπε 10.6.2.). Έτσι, αν $[\alpha, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_n, x]$ είναι μια πολυγωνική γραμμή που συνδέει το α με το x (η ύπαρξη τέτοιας οδού εξασφαλίζεται από το ότι $x \in C$), τότε η πολυγωνική γραμμή $[\alpha, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_n, x] \cup [x, z]$ συνδέει το σημείο α με το σημείο z . Άρα $z \in C$ και έτσι το C είναι ανοιχτό σύνολο.

Θ' αποδείξουμε τώρα ότι το C είναι και κλειστό σύνολο, δηλαδή ότι το $B = A - C$ είναι ανοιχτό στο A . Πραγματικά, έστω x τυχόν στοιχείο του B . Τότε $x \in A$ και, επειδή το A είναι ανοιχτό υποσύνολο του E , υπάρχει σφαιρική $B(x, r)$ περιοχή του x , με $B(x, r) \subseteq A$. Αν αποδείξουμε ότι $B(x, r) \cap C = \emptyset$, τότε θα ισχύει $B(x, r) \subseteq A - C = B$ και έτσι, το B θα είναι ανοιχτό. Για το σκοπό αυτό υποθέτουμε ότι $B(x, r) \cap C \neq \emptyset$, οπότε έστω $z \in B(x, r) \cap C$. Τότε υπάρχει πολυγωνική οδός που συνδέει το α με το z και το z συνδέεται με ευθύγραμμο τμήμα με το x (γιατί $z \in B(x, r)$ και η σφαιρική περιοχή είναι κυρτό σύνολο). Άρα



υπάρχει πολυγωνική οδός που συνδέει το a με το x , δηλαδή $x \in C$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού $x \in B = A - C$.

Αποδείχτηκε ότι το σύνολο C είναι ανοιχτό και κλειστό υποσύνολο του A . Επιπλέον $a \in C$, οπότε $C \neq \emptyset$. Έτσι, αφού το A είναι συνεκτικό, πρέπει υποχρεωτικά να ισχύει $A = C$. Επομένως αν x, y είναι τυχόννα στοιχεία του A θα έχουμε $x \in C$ και $y \in C$. Άρα υπάρχει πολυγωνική οδός $[x, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_n, a]$ που συνδέει το x με το a και πολυγωνική οδός $[a, y_1] \cup [y_1, y_2] \cup \dots \cup [y_k, y]$ που συνδέει το a με το y . Τότε η πολυγωνική γραμμή $[x, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_n, a] \cup [a, y_1] \cup [y_1, y_2] \cup \dots \cup [y_k, y]$ είναι πολυγωνική οδός που συνδέει το x με το y . Άρα το A είναι πολυγωνικά συνεκτικό. ♦

10.8.4. Ν' αποδειχτεί ότι δεν υπάρχει μη κενό και ανοιχτό υποσύνολο του χώρου $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$, $n > 1$, ομοιομορφικό προς κάποιο υποσύνολο του $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι S είναι ένα μη κενό και ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ ομοιομορφικό προς ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Έστω $z = (z_1, \dots, z_n)$ τυχόν σημείο του S . Αφού το S είναι ανοιχτό, υπάρχει σφαιρική περιοχή $B(z, r)$ με $B(z, r) \subseteq S$. Τότε με τον τύπο

$$\varphi(x, y) = \left(\frac{r}{2}x + z_1, \frac{r}{2}y + z_2, z_3, \dots, z_n \right)$$

ορίζεται ένας ομοιομορφισμός $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$. Έτσι αν K είναι ο μοναδιαίος κύκλος στο $\mathbb{R}^2$ είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\varphi(K) \subseteq B(z, r) \subseteq S.$$

Άρα το σύνολο $\varphi(K)$ είναι ομοιομορφικό προς ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Έτσι και ο μοναδιαίος κύκλος K είναι ομοιομορφικός προς κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, πράγμα άτοπο σύμφωνα με την Εφαρμογή 10.4.6. ♦

10.8.5.

Ένας μετρικός χώρος λέγεται **τοπικά συνεκτικός (locally connected)** αν για κάθε σημείο του x και για κάθε περιοχή $U(x)$ του x υπάρχει συνεκτική περιοχή $V(x)$ του x τέτοια, ώστε $V(x) \subseteq U(x)$.

Ένας διακριτός μετρικός χώρος με περισσότερα του ενός στοιχεία είναι τοπικά συνεκτικός και μη συνεκτικός μετρικός χώρος.

Απόδειξη.

Το ότι ένας τέτοιος χώρος είναι μη συνεκτικός είναι γνωστό. Για το ότι ο χώρος αυτός είναι τοποικά συνεκτικός, παρατηρούμε ότι για κάθε σημείο p του χώρου, το σύνολο $\{p\}$ είναι συνεκτική περιοχή του p και περιέχεται σε κάθε ανοιχτό σύνολο που περιέχει το p .

Ο μετρικός χώρος $(Q, |\cdot|)$ είναι μη τοπικά συνεκτικός χώρος.

Απόδειξη.

Για την απόδειξη του γεγονότος αυτού θεωρούμε τη σφαιρική περιοχή $B(x, r) = (x-r, x+r) \cap Q$ εν $(Q, |\cdot|)$. Υποθέτουμε μάλιστα ότι υπάρχει η συνεκτική περιοχή $V(1)$ του 1 εν $(Q, |\cdot|)$ με $V(1) \subseteq B(x, r)$. Η $V(1)$ γράφεται στη μορφή $V(1) = U(1) \cap Q$, όπου $U(1)$ είναι μια περιοχή του 1 στον ευκλείδειο μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Έστω $a \in U(1)$ ένας άρρητος αριθμός. Τότε η συλλογή $\{(-\infty, a), (a, +\infty)\}$ είναι μια ανοιχτή εν $\mathbb{R}$ κάλυψη του $V(1)$ τέτοια, ώστε:

$$(-\infty, a) \cap V(1) \neq \emptyset \neq (a, +\infty) \cap V(1) \text{ και } (-\infty, a) \cap (a, +\infty) \cap V(1) = \emptyset,$$

πράγμα που αποδεικνύει η $V(1)$ είναι μη συνεκτική περιοχή, και επομένως, ο $(Q, |\cdot|)$ είναι μη τοπικά συνεκτικός χώρος.

10.8.6. Αν E_1, E_2 είναι μετρικοί χώροι, $f: E_1 \rightarrow E_2$ μια συνεχής συνάρτηση και ο E_1 είναι οδικά συνεκτικός μετρικός χώρος, τότε και το πεδίο τιμών $\mathcal{R}(f)$ της f είναι οδικά συνεκτικό υποσύνολο του E_2 .

Απόδειξη.

Αν z, w είναι τυχόντα σημεία στο $\mathcal{R}(f)$, υπάρχουν σημεία x, y εν E_1 με $z=f(x)$ και $w=f(y)$. Επειδή ο E_1 είναι οδικά συνεκτικός χώρος, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\varphi: [0, 1] \rightarrow E_1$, με $\varphi(0)=x$ και $\varphi(1)=y$. Τότε η συνάρτηση $g=f \circ \varphi$ είναι συνεχής και μάλιστα

$$D(g)=[0, 1] \text{ και } \mathcal{R}(g) \subseteq \mathcal{R}(f).$$

Επιπλέον,

$$g(0)=f(\varphi(0))=f(x)=z \text{ και } g(1)=f(\varphi(1))=f(y)=w.$$

Άρα η g είναι οδός εν $\mathcal{R}(f)$ που συνδέει τα τυχόντα σημεία z και w του $\mathcal{R}(f)$, πράγμα που αποδεικνύει την οδική συνεκτικότητα του $\mathcal{R}(f)$. ♦

Από το παραπάνω συμπέρασμα προκύπτει ότι η οδική συνεκτικότητα είναι τοπολογική ιδιότητα.



10.8.7.Ο καρτεσιανός μετρικός χώρος E των μετρικών χώρων E_i , $i=1, \dots, n$, είναι οδικά συνεκτικός αν και μόνο αν κάθε μετρικός χώρος E_i , $i=1, \dots, n$ είναι οδικά συνεκτικός.

Απόδειξη.

Έστω ότι ο E είναι οδικά συνεκτικός. Τότε, επειδή $p_i(E) = E_i$, $i=1, \dots, n$, όπου p_i είναι η i -προβολή του E , κάθε μετρικός χώρος E_i , $i=1, \dots, n$, θα είναι οδικά συνεκτικός, ως εικόνα του οδικά συνεκτικού χώρου E μέσω της συνεχούς συνάρτησης p_i , $i=1, \dots, n$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι οι χώροι $E_1, \dots, E_n$ είναι οδικά συνεκτικοί και ότι $x=(x_1, \dots, x_n)$ και $y=(y_1, \dots, y_n)$ είναι δύο τυχόντα σημεία του E . Τότε, επειδή οι χώροι $E_1, \dots, E_n$ είναι οδικά συνεκτικοί, υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις (οδοί) $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, με $\varphi_1: [0, 1] \rightarrow E_1, \dots, \varphi_n: [0, 1] \rightarrow E_n$ και $\varphi_1(0)=x_1, \varphi_1(1)=y_1, \dots, \varphi_n(0)=x_n$ και $\varphi_n(1)=y_n$. Επομένως, η συνάρτηση $\varphi: [0, 1] \rightarrow E$, με τύπο

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)),$$

είναι φανερό ότι είναι συνεχής και επιπλέον

$$\varphi(0) = (\varphi_1(0), \dots, \varphi_n(0)) = (x_1, \dots, x_n) = x$$

και

$$\varphi(1) = (\varphi_1(1), \dots, \varphi_n(1)) = (y_1, \dots, y_n) = y.$$

Άρα η φ είναι οδός στον E που συνδέει τα τυχόντα σημεία του x και y , πράγμα που αποδεικνύει την οδική συνεκτικότητά του. ♦

10.9. Λυμένες Ασκήσεις

10.9.1. Έστω A ένα συνεκτικό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου E και B ένα ανοιχτό και κλειστό υποσύνολο του E τέτοιο, ώστε $A \cap B = \emptyset$. Ν' αποδειχτεί ότι $A \subseteq B$.

Λύση.

Αφού το B είναι ανοιχτό και κλειστό υποσύνολο του E το $A \cap B$ θα είναι ανοιχτό και κλειστό υποσύνολο του συνεκτικού μετρικού υπόχωρου A . Τότε όμως (βλέπε 10.1.2.(ii)), θα έχουμε $A \cap B = \emptyset$ ή $A \cap B = A$. Επειδή από την υπόθεση $A \cap B = \emptyset$, θα ισχύει $A \cap B = A$, δηλαδή $A \subseteq B$. ♦



10.9.2. Αν S, S_1, S_2 είναι συνεκτικά υποσύνολα ενός μετρικού χώρου τέτοια, ώστε $S \cap S_1 \neq \emptyset \neq S \cap S_2$, ν' αποδειχτεί ότι το σύνολο $S \cup S_1 \cup S_2$ είναι συνεκτικό.

Λύση.

Αφού τα σύνολα S και S_1 είναι συνεκτικά και $S \cap S_1 \neq \emptyset$, το σύνολο $S \cup S_1$ είναι συνεκτικό. Όμοια, επειδή τα σύνολα $S \cup S_1$ και S_2 είναι συνεκτικά και $(S \cup S_1) \cap S_2 = (S \cap S_2) \cup (S_1 \cap S_2) \neq \emptyset$, το σύνολο $(S \cup S_1) \cup S_2 = S \cup S_1 \cup S_2$ είναι συνεκτικό. ♦

10.9.3. Έστω E ένας συνεκτικός μετρικός χώρος και S ένα συνεκτικό υποσύνολο του E . Αν A είναι υποσύνολο του S^c , ανοιχτό και κλειστό εν S^c , ν' αποδειχτεί ότι το $S \cup A$ είναι συνεκτικό σύνολο.

Λύση.

Έστω $\{H_1, H_2\}$ μια ανοιχτή εν $S \cup A$ διαμέριση του $S \cup A$. Αφού το S είναι συνεκτικό περιέχεται σε ένα από τα H_1, H_2 (Βλέπε 10.2.7.). Έστω $S \subseteq H_1$. Τότε έχουμε

$$H_1 \cup H_2 = S \cup A, H_1 \cap H_2 = \emptyset \text{ και } S \subseteq H_1 \Rightarrow H_2 \subseteq A.$$

Το H_2 ως ανοιχτό και κλειστό στο $S \cup A$ θα είναι ανοιχτό και κλειστό και στο A . Όμοια, αφού το A είναι ανοιχτό και κλειστό στο S^c και το H_2 θα είναι ανοιχτό και κλειστό και στο S^c . Τελικά, το H_2 θα είναι ανοιχτό και κλειστό και στο $S^c \cup (S \cup A) = E$, πράγμα που αντίκειται στη συνεκτικότητα του E . ♦

10.9.4. Έστω E ένας μετρικός χώρος και $\mathcal{C}$ μια κάλυψη του E που αποτελείται από συνεκτικά υποσύνολα του E και τέτοια ώστε για τυχόντα A, B εν $\mathcal{C}$, με $A \neq B$ ισχύει $\bar{A} \cap B \neq \emptyset$ ή $A \cap \bar{B} \neq \emptyset$. Ν' αποδειχτεί ότι ο E είναι συνεκτικός.

Λύση.

Αφού $E = \bigcup \mathcal{C}$, θ' αποδείξουμε ότι το σύνολο $\bigcup \mathcal{C}$ είναι συνεκτικό. Θεωρούμε δύο τυχόντα στοιχεία x και y εν $\bigcup \mathcal{C}$. Τότε αρκεί ν' αποδείξουμε ότι υπάρχει συνεκτικό υποσύνολο G του $\bigcup \mathcal{C}$ τέτοιο, ώστε $x \in G$ και $y \in G$. Επειδή $x \in \bigcup \mathcal{C}$ υπάρχει $A \in \mathcal{C}$ με $x \in A$. Όμοια, υπάρχει $B \in \mathcal{C}$ με $y \in B$. Επειδή όμως από την υπόθεση τα A, B είναι συνεκτικά και μη διαχωρισμένα, το σύνολο $A \cup B$ είναι συνεκτικό (Βλέπε 10.2.8.). Θέτουμε $G = A \cup B$ και η απόδειξη είναι πλήρης. ♦



10.9.5. Αν I είναι τυχόν διάστημα της πραγματικής ευθείας και $f:I \rightarrow \mathbb{R}$ τυχούσα συνεχής συνάρτηση, ν' αποδειχτεί ότι και το γράφημα της f είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

Λύση.

Η συνάρτηση $g:I \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο $g(x)=(x, f(x))$ είναι συνεχής αφού η f είναι συνεχής. Άρα, επειδή το πεδίο ορισμού της g είναι το συνεκτικό σύνολο I και το πεδίο τιμών $\mathcal{R}(g)$ της g θα είναι συνεκτικό σύνολο. Αλλά το $\mathcal{R}(g)$ είναι ακριβώς το γράφημα της f . ♦

10.9.6. Έστω $f:[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ μια συνεχής συνάρτηση. Ν' αποδειχτεί ότι η f έχει σταθερό σημείο.

Λύση.

Αν $f(0)=0$ ή $f(1)=1$ το συμπέρασμα ισχύει. Έστω $f(0)>0$ και $f(1)<1$. Επιπλέον, λόγω της προηγούμενης άσκησης και επειδή η f είναι συνεχής, το γράφημά της G_f είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Θεωρούμε τα σύνολα

$$G_1=\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x < y\} \text{ και } G_2=\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x > y\},$$

που προφανώς είναι ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$. Επιπλέον, $(0, f(0)) \in G_1$ και $(1, f(1)) \in G_2$. Υποθέτουμε τώρα ότι η f δεν έχει σταθερά σημεία δηλαδή ότι το γράφημα της f της δεν περιέχει στοιχεία της διαγωνίου $\Delta=\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x=y\}$. Τότε η συλλογή $\{G_1, G_2\}$ είναι μια ανοιχτή εν $\mathbb{R}^2$ κάλυψη του G_f και μάλιστα, τέτοια, ώστε

$$G_1 \cap G_f = \emptyset = G_2 \cap G_f \text{ και } G_1 \cap G_2 \cap G_f = \emptyset,$$

πράγμα που αντίκειται στη συνεκτικότητα του G_f . ♦

10.9.7. Ν' αποδειχτεί ότι αν A είναι ένα μη κενό, ανοιχτό, κλειστό και συνεκτικό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου E , τότε το A είναι συνεκτική συνιστώσα του E .

Λύση.

Έστω C ένα συνεκτικό υποσύνολο του E τέτοιο, ώστε $C \supseteq A$. Το A ως ανοιχτό και κλειστό υποσύνολο του E είναι ανοιχτό και κλειστό υποσύνολο και του μετρικού υπόχωρου C . Άρα $A=\emptyset$ ή $A=C$. Επειδή από την υπόθεση $A \neq \emptyset$, έχουμε υποχρεωτικά



$A=C$. Άρα το A είναι ψευδομέγιστο στη συλλογή όλων των συνεκτικών υποσυνόλων του E , δηλαδή συνεκτική συνιστώσα. ♦

10.9.8. Ν' αποδειχτεί ότι στον ευκλείδειο μετρικό χώρο $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$, $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο $A = \{\vec{x} : |\vec{x}| = 1\}$ είναι οδικά συνεκτικό σύνολο.

Λύση.

Θεωρούμε δύο τυχόντα σημεία $\vec{x}$ και $\vec{y}$ του συνόλου A καθώς και ένα τρίτο σημείο $\vec{z} \in A$ τέτοια, ώστε $-\vec{x} \neq \vec{z} \neq -\vec{y}$. Τότε οι συναρτήσεις $f_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ και $f_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ που ορίζονται με τους τύπους

$$f_1(t) = \frac{(1-t)\vec{x} + t\vec{z}}{|(1-t)\vec{x} + t\vec{z}|}, \quad f_2(t) = \frac{(1-t)\vec{z} + t\vec{y}}{|(1-t)\vec{z} + t\vec{y}|}$$

είναι συνεχείς με τιμές στο σύνολο A και τέτοιες, ώστε $f_1(0) = \vec{x}$, $f_1(1) = f_2(0) = \vec{z}$ και $f_2(1) = \vec{y}$. Έτσι, το διατεταγμένο ζεύγος (f_1, f_2) είναι μια οδός στο A που συνδέει τα σημεία $\vec{x}$ και $\vec{y}$. ♦

10.10. Ασκήσεις

1. Ν' αποδειχτεί ότι οι μετρικοί χώροι $(\mathbb{Z}, |\cdot|)$ και $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ δεν είναι συνεκτικοί.
2. Υποθέτουμε ότι A, B είναι συνεκτικά υποσύνολα ενός μετρικού χώρου. Ν' αποδειχτεί ότι τα σύνολα $A \cup B$ και $A \cap B$ δεν είναι εν γένει συνεκτικά.
3. Ας είναι ρ_1, ρ_2 δύο μετρικές στο ίδιο σύνολο E τέτοιες, ώστε $\mathcal{I}_{\rho_2} \subseteq \mathcal{I}_{\rho_1}$. Ν' αποδειχτεί ότι αν ο μετρικός χώρος (E, ρ_1) είναι συνεκτικός τότε και ο (E, ρ_2) είναι το ίδιο.
4. Ν' αποδειχτεί ότι κάθε κυρτό υποσύνολο του ευκλείδειου μετρικού χώρου $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ είναι συνεκτικό.



5. Αν $S_i, i \in I$ είναι μια οικογένεια συνεκτικών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου E τέτοια, ώστε να υπάρχει $\alpha \in I$ με $S_\alpha \cap S_i \neq \emptyset, i \in I$, ν' αποδειχτεί ότι το σύνολο $\bigcup_{i \in I} S_i$ είναι συνεκτικό.

6. Έστω E ένας μετρικός χώρος και S ένα συνεκτικό υποσύνολο του E τέτοιο, ώστε $E - S = A \cup B$, όπου τα A και B είναι διαχωρισμένα σύνολα. Ν' αποδειχτεί ότι τα σύνολα $A \cup S$ και $B \cup S$ είναι συνεκτικά.

7. Ας είναι A, B υποσύνολα ενός μετρικού χώρου E κλειστά εν $A \cup B$. Αν τα $A \cup B$ και $A \cap B$ είναι συνεκτικά υποσύνολα του E , ν' αποδειχτεί ότι τα σύνολα A και B είναι συνεκτικά υποσύνολα του E .

8. Ν' αποδειχτεί ότι στον ευκλείδειο μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ κάθε αριθμήσιμο υποσύνολό του με δύο τουλάχιστον στοιχεία καθώς και το συμπλήρωμά του δεν μπορεί είναι συνεκτικά σύνολα.

9. Με βάση την Εφαρμογή 10.4.4. να δοθεί μια διαφορετική απόδειξη της Πρότασης 10.3.2. καθώς και της Πρότασης 10.3.5.

10. Έστω E ένας μετρικός χώρος και C μια κάλυψη του E που αποτελείται από συνεκτικά υποσύνολα του E και τέτοια, ώστε για τυχόντα A, B εν C υπάρχουν σύνολα $A_1, A_2, \dots, A_n$ εν C τέτοια ώστε $A_1 = A, A_n = B$ και $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset, i = 1, 2, \dots, n-1$. Ν' αποδειχτεί ότι ο E είναι συνεκτικός.

11. Ας είναι E ένας μετρικός χώρος και x, y δυο στοιχεία του E . Ένα πεπερασμένο σύνολο $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ υποσυνόλων του E , ονομάζεται **απλή αλυσίδα που συνδέει τα x, y** αν το A_1 και μόνο αυτό, περιέχει το x , το A_n και μόνο αυτό, περιέχει το y και ισχύει $A_i \cap A_j = \emptyset$, αν και μόνο αν $|i-j| > 1$. Ν' αποδειχτεί ότι αν ο E είναι συνεκτικός και $\mathcal{A}$ είναι μια ανοιχτή κάλυψη του E , τότε κάθε ζεύγος σημείων του E μπορεί να συνδεθεί με μια απλή αλυσίδα από στοιχεία της συλλογής $\mathcal{A}$.

12. Ας είναι A, B μη κενά, κλειστά και ξένα υποσύνολα ενός συνεκτικού μετρικού χώρου E . Ν' αποδειχτεί ότι ο τύπος

$$f(x) = \frac{\varrho(x, A)}{\varrho(x, A) + \varrho(x, B)},$$

ορίζει μια συνάρτηση $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχή, με $f(E) = [0, 1]$.



13. Ας είναι A υποσύνολο ενός μετρικού χώρου, $x \in A$, $y \in A^c$ και φ μια οδός που συνδέει τα σημεία x και y . Ν' αποδειχτεί ότι υπάρχει $t_0 \in \mathcal{D}(\varphi)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(t_0) \in \partial A$.

14. Ν' αποδειχτεί ότι κάθε συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα συνεκτικό μετρικό χώρο και τιμές σ' ένα διακριτό μετρικό χώρο είναι σταθερή.

15. Ν' αποδειχτεί ότι στον ευκλείδειο μετρικό χώρο $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$ το σύνολο $(\mathbb{Q}^2)^c$ είναι συνεκτικό σύνολο ενώ το $(\mathbb{Q}^c)^2$ μη συνεκτικό.

16. Στον ευκλείδειο μετρικό χώρο $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$ θεωρούμε το σύνολο

$$S = (A \times [0, 1]) \cup \{(0, 0), (0, 1)\}, \text{ όπου } A = \left\{ \frac{1}{n} : n=1, 2, \dots \right\}.$$

Ν' αποδειχτεί ότι τα σύνολα $\{(0, 0)\}$, $\{(0, 1)\}$ είναι συνεκτικές συνιστώσες του S .

17. Έστω E ένας συμπαγής μετρικός χώρος. Ν' αποδειχτεί ότι ο E είναι συνεκτικός αν και μόνο αν είναι ε -συνεκτικός για κάθε $\varepsilon > 0$.

18. Να βρεθούν οι συνεκτικές συνιστώσες των μετρικών χώρων $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{Z}, |\cdot|)$ και $((0, 1] \cup \{2\} \cup [3, 4], |\cdot|)$.

19. Αν οι συνεκτικές συνιστώσες ενός μετρικού χώρου είναι πεπερασμένου πλήθους, ν' αποδειχτεί ότι καθεμιά τους είναι ταυτόχρονα ανοιχτό και κλειστό σύνολο.

20. Αν S είναι ένα συνεκτικό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου E , ν' αποδειχτεί ότι υπάρχει μια ακριβώς συνεκτική συνιστώσα C του E τέτοια, ώστε $S \subseteq C$.

21. Ένας μετρικός χώρος E είναι τοπικά συνεκτικός μετρικός χώρος, αν και μόνο αν για κάθε σημείο $a \in E$, κάθε περιοχή $U(a)$ του a περιέχει ένα συνεκτικό υποσύνολο S του E με $a \in S^\circ$.

22. Αν E_1, E_2 είναι δυο ομοιομορφικοί μετρικοί χώροι, τότε υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των συνεκτικών συνιστωσών τους.

23. Ν' αποδειχτεί ότι αν $S_i, i \in I$ είναι μια οικογένεια οδικά συνεκτικών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου E , με $\bigcap_{i \in I} S_i \neq \emptyset$, τότε το σύνολο $\bigcup_{i \in I} S_i$ είναι οδικά συνεκτικό.



24. Να εξεταστεί αν η οδική συνεκτικότητα είναι τοπολογική ή κληρονομική ιδιότητα. Να γίνει το ίδιο για την πολυγωνική συνεκτικότητα.

25. Ν' αποδειχτεί ότι οι συνεκτικές συνιστώσες ενός τοπικά συνεκτικού μετρικού χώρου είναι ανοιχτά σύνολα.

26. Ένα ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου λέγεται **τόπος**. Ν' αποδειχτεί ότι κάθε μη κενό και ανοιχτό υποσύνολο του χώρου $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$, $n \in \mathbb{N}$ είναι ένωση μιας το πολύ αριθμήσιμης συλλογής ξένων τόπων. Πως εξειδικεύεται το συμπέρασμα αυτό στην περίπτωση του $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

K. W. Anderson and D. W. Hall, Sets, Sequences and Mappings, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1963.

D. C. J. Burgess, Analytical Topology, D. Van Nostrand Co. Ltd., London, 1966.

E. Copson, Metric Spaces, Cambridge, University Press, 1968.

J. Diedonne, Foundations of Modern Analysis, Academic Press, New York, 1966.

J. Dugundji, Topology, Allyn and Bacon Inc., Bonston, 1978.

W. Franz, General Topology, G. G. Harrap and Co. Ltd., London, 1965.

S.- T. Hu, Introduction to General Topology, Holden-Day Inc., San Francisco, 1966.

T. Husain, Topology and Maps, Plenum Press, New York, 1977.

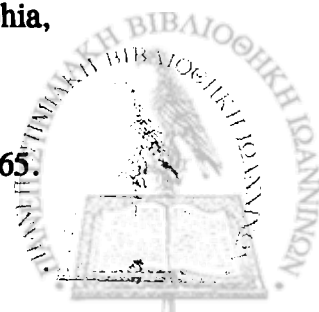
K. D. Joshi, Introduction to General Topology, Wiley Eastern Limited, New Delhi, 1986.

I. Kaplansky, Set Theory and Metric Spaces, Allyn and Bacon Inc., Bonston, 1975.

Χ. Καρυοφύλη και Χ. Κωνσταντιλάκη-Σαββοπούλου, Τοπολογία Ι, ΙΙ, Εκδ. Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 1985.

R. H. Kasriel, Undergraduate Topology, W. B. Saunders Co., Philadelphia, 1971.

J. L. Kelley, General Topology, D. Van Nostrand Co. Inc., Toronto, 1965.



S. Lipschutz, Theory and Problems of General Topology, Schaum's Outline Series, New York, 1965.

B. Mendelson, Introduction to Topology, Allyn and Bacon Inc., Bonston, 1975.

I. R. Muhkres, Topology, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1975.

M. G. Murdeshuar, General Topology, Wiley Eastern Limited, New Delhi, 1986.

Σ. Νεγρεπόντη, Θ. Ζαχαριάδη, Ν. Καλαμίδα, Β. Φαρμάκη, Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση, Εκδ. Αίθρα, Αθήνα 1989.

M. H. A. Newman, Elements of the Topology of Plane sets of Points, Cambridge, University Press, 1964.

W. J. Pervin, Foundations of General Topology, Academic Press, New York, 1964.

Β. Στάϊκου, Μαθήματα Μαθηματικής Αναλύσεως, Μέρος I, Ιωάννινα 1981.

Β. Στάϊκου, Μαθήματα Μαθηματικής Αναλύσεως, Μέρος II, Ιωάννινα 1981.

A. W. Schurle, Topics in Topology, North Holland, New York, 1979.

L. A. Steen, J. A. Seebach, Counterexamples in Topology, Springer Verlag, New York, 1970.

L. J. Ward, Topology, Marcel Dekker Inc., New York., 1972.



ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ

A

Ακολουθία 67

- " βασική 77
- " διαδοχικών προσεγγίσεων 159
- " κιβωτισμένων διαστημάτων 154
- " συγκλίνουσα 68
- " του Cauchy 68
- " φραγμένη 78

Ακολουθιακά συμπαγής μετρικός χώρος 174

Ακτίνα σφαιρικής περιοχής 13

Αλυσίδα 223, 246

Ανοιχτό σύνολο 37, 139

Αξίωμα του κιβωτισμού 149

Απόσταση 2

- " συνόλων 9

Αριθμός του Lebesgue 184

Αρχή της συστολής 158

B

Βάση τοπολογίας 208

Βασική ακολουθία 77

Δ

Διακριτή μετρική 5

Διακριτός μετρικός χώρος 5

Διαμέριση 217

Διαμέριση ανοιχτή 217

- " κλειστή 217

Διάμετρος συνόλου 10

Διαχωρίσιμο σύνολο 208

Διαχωρίσιμος μετρικός χώρος 208

Διαχωρισμένα σύνολα 58, 219



E

- Εξωτερικό σημείο 34
- " σύνολου 34
- Επαφής, σημείο 20
- ε- πυκνό σύνολο 44
- ε- συνεκτικός μετρικός χώρος 224
- Εσωτερικό σημείο 20
- " σύνολου 20
- Ευκλείδειος μετρικός χώρος 4

Θ

- Θεώρημα κάλυψης του Lindelöf 210
- Θεώρημα πυκνότητας του Baire 163
- Θεώρημα του Ascoli 213
- Θήκη συνόλου 20

I

- Ιδιότητα κληρονομική 140
- " τοπολογική 140
- " των Bolzano-Weierstrass 174
- " των πεπερασμένων τομών 185
- Ισοδύναμες μετρικές 131
- " στάθμες 136
- Ισομετρία 117
- Ισομετρικοί χώροι 117

K

- Κάλυμμα συνόλου 20
- Κάλυψη συνόλου 181
- " ανοιχτή 181
- " κλειστή 181
- Καρτεσιανός μετρικός χώρος 6
- Κατ' εκδοχήν περιοχή 16
- " " σφαιρική περιοχή 16
- Κεκορασμένο σύνολο 155
- Κέντρο σφαιρικής περιοχής 13
- Κιβωτισμού αξίωμα 149



Κλειστή σφαιρική περιοχή 14

Κλειστό σύνολο 37, 139

Κληρονομική ιδιότητα 140

Κυρτό σύνολο 235

Κυρτός χώρος 167

M

Μεμονωμένο σημείο 32

Μετρικές ισοδύναμες 131

" ομοιόμορφα ισοδύναμες 143

Μετρική 2

" διακριτή 5

" του Hausdorff 52

Μετριοποιήσιμος χώρος 140

Μετρικός υπόχωρος 92

" χώρος 2

" " ακολουθιακά συμπαγής 174

" " διακριτός 5

" " διαχωρίσιμος 208

" " ευκλείδειος 4

" " καρτεσιανός 6

" " κυρτός 167

" " ολικά φραγμένος 168

" " οδικά συνεκτικός 234

" " πλήρης 147

" " προσυμπαγής 169

" " συμπαγής 181

" " συνεκτικός 217

" " τοπικά διαχωρίσιμος 214

" " " συμπαγής 201

" " φραγμένος 10

O

Οδικά συνεκτικό σύνολο 234

" συνεκτικός μετρικός χώρος 234

Οδός 234

Ολικά φραγμένο σύνολο 168



- " φραγμένος μετρικός χώρος 168
- Ομοιόμορφα ισοδύναμες μετρικές 143
- Ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση 111
- Ομοιομορφικοί μετρικοί χώροι 117
- Ομοιομορφισμός 116
- Όριο ακολουθίας 68
- Ορισμός των Borel- Heine 181

Π

- Παράγωγο σύνολο 32
- Περιοχή 14, 138
 - " κλειστή 14
 - " κατ' εκδοχήν 16
 - " " " σφαιρική 16
 - " συνόλου 16
 - " σφαιρική 14
- Πλήρες σύνολο 147
- Πλήρης μετρικός χώρος 147
- Πολυγωνικά συνεκτικό σύνολο 236
- Πολυγωνική γραμμή 235
- Πουθενά πυκνό σύνολο 46
- Προσυμπαγές σύνολο 169
- Προσυμπαγής μετρικός χώρος 169
- Πυκνό σύνολο 44
- Πυρήνας συνόλου 20

Σ

- Σημείο εξωτερικό 34
 - " επαφής 20
 - " εσωτερικό 20
 - " μεμονωμένο 32
 - " συνοριακό 34
 - " συσσώρευσης ακολουθίας 73
 - " " συνόλου 32
- Στάθμες ισοδύναμες 136
- Συγκλίνουσα ακολουθία 68
- Συμπαγές σύνολο 181
- Συμπαγής μετρικός χώρος 181



Συνεκτική συνιστώσα 232
 Συνεκτικό σύνολο 218
 Συνεκτικός μετρικός χώρος 217
 Συνεχής συνάρτηση 98, 101, 103
 Σύνορο συνόλου 34
 Συνοριακό σημείο 34
 Σύστημα περιοχών 138
 Συστολή 158
 Σφαίρα 13
 Σφαιρική περιοχή 13
 Σχετικά συμπαγές σύνολο 205

T

Ταλάντωση συνάρτησης 121
 Τοπικά διαχωρίσιμος μετρικός χώρος 214
 " συμπαγής μετρικός χώρος 201
 " συνεκτικός μετρικός χώρος 240
 Τοπολογία 130
 Τοπολογική ιδιότητα 140
 Τοπολογικός χώρος 139
 Τόπος 248

Υ

Υπακολουθία 73
 Υπερμετρική 65
 Υποκάλυψη 181
 Υπόχωρος μετρικός 92

Φ

Φραγμένη μετρική 11
 " ακολουθία 78
 Φραγμένο σύνολο 10
 Φραγμένος μετρικός χώρος 10

X

Χώρος του Banach 166
 " μετριοποιήσιμος 140
 " μετρικός 1



- Χώρος πρώτης κατηγορίας 47
 " δεύτερης κατηγορίας 48
 " τοπολογικός 139
 " υπερμετρικός 65

Ψ

Ψευδομετρική 57

Ω

Ωάρδια και σφάλμα 12

Ωάρδια 14, 138

" κλάση 14

" κλάση 15

" κλάση 24

" κλάση 14

" κλάση 14

Ωάρδια 14, 138

Ωάρδια 14, 138

Ωάρδια 14, 138

Ωάρδια 14, 138

Ωάρδια 14, 138

Ωάρδια 14, 138

Ωάρδια 14, 138

Ωάρδια 14, 138

Ωάρδια 14, 138

Ζ

Ζάρδια 14, 138

Ζάρδια 14, 138

Ζάρδια 14, 138

Ζάρδια 14, 138

Ζάρδια 14, 138

Ζάρδια 14, 138

Ζάρδια 14, 138

Ζάρδια 14, 138

Ζάρδια 14, 138

Ζάρδια 14, 138

Ζάρδια 14, 138

Ζάρδια 14, 138

Ζάρδια 14, 138

Ζάρδια 14, 138

Ζάρδια 14, 138

Ζάρδια 14, 138

Ζάρδια 14, 138

Ζάρδια 14, 138

Ζάρδια 14, 138

Ζάρδια 14, 138

Ζάρδια 14, 138

Ζάρδια 14, 138

Τ

Τάρδια 14, 138

Τάρδια 14, 138

Τάρδια 14, 138

Τάρδια 14, 138

Τάρδια 14, 138

Τάρδια 14, 138

Τάρδια 14, 138

Τάρδια 14, 138

Υ

Υάρδια 14, 138

Υάρδια 14, 138

Υάρδια 14, 138

Υάρδια 14, 138

Φ

Φάρδια 14, 138

Φάρδια 14, 138

Φάρδια 14, 138

Φάρδια 14, 138

Χ

Χάρδια 14, 138

Χάρδια 14, 138

Χάρδια 14, 138



Τυπώθηκε στο Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο
με δαπάνη του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ
Τυπογραφείο

Διανέμεται Δωρεάν στους φοιτητές.

