ΑΠΟΣΤ. ΧΑΤΖΗΔΗΜΟΥ

Τακτικοῦ Καθηγητῆ

Ἀριθμητικῆς Ἀναλύσεως

Πανεπιστημίου Ἰωαννίνων

ΕΙΣΑΓΩΓΗ
ΣΤΗΝ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 1977

ΑΠΟΣΤ. ΧΑΤΖΗΔΗΜΟΥ
Τακτικοῦ Καθηγητῆ
Ἀριθμητικῆς Ἀναλύσεως
Πανεπιστημίου Ἰωαννίνων

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 1977

Ἀφιερώνεται
στήν ἱερή μνήμη τοῦ πατέρα μου,
πού ἦταν ἕνας ἁπλός ἄνθρωπος.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

Τό βιβλίο αὐτό γράφτηκε ἀρχικά, γιά νά ἱκανοποιήσει τίς ἀνάγκες τοῦ νέου προγράμματος τῶν δευτεροετῶν φοιτητῶν τοῦ Μαθηματικοῦ Τμήματος τῆς Φυσικομαθηματικῆς Σχολῆς τοῦ Πανεπιστημίου Ἰωαννίνων, ἀπό τό ἀκαδημαϊκό ἔτος 1977-78. Καταβλήθηκε ὅμως μεγάλη προσπάθεια νά γραφτεῖ μέ τέτοιο τρόπο, ὥστε νά μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ ὡς ἕνα βασικό βιβλίο Ἀριθμητικῆς Ἀναλύσεως (Α.Α.), ὄχι μόνο ἀπό ἐκείνους, πού θά ἀσχοληθοῦν στό μέλλον θεωρητικά μέ τήν Α.Α., ἀλλά καί ἀπό ἐκείνους, πού θά χρησιμοποιήσουν μόνο τίς ἀριθμητικές μεθόδους της, ὅπως εἶναι π.χ. οἱ Φυσικοί, οἱ Μηχανικοί κ. ἄ.

Γιά τήν καλύτερη κατανόηση καί ἐμπέδωση τῆς ὕλης ἔχει δοθεῖ, μέσα στό κείμενο τοῦ βιβλίου, ἕνας μεγάλος ἀριθμός παραδειγμάτων καί ἐφαρμογῶν. Γιά τόν ἴδιο σκοπό ἔχει ἐπίσης δοθεῖ στό τέλος κάθε κεφαλαίου ἕνας ἀριθμός ἄλυτων ἀσκήσεων. Οἱ ἄλυτες αὐτές ἀσκήσεις εἶναι δύο κατηγοριῶν: θεωρητικές καί ἀριθμητικές. Σέ ὅσες ἀσκήσεις χρειάζεται, δίνονται καί οἱ ἀπαντήσεις τους, ὥστε νά βοηθήσουν ἐκείνους, πού θά ἀσχοληθοῦν μέ τή λύση τους. Οἱ περισσότερες ἀπό τίς ἀριθμητικές ἀσκήσεις μποροῦν νά λυθοῦν μέ τό χέρι, πάρα πολύ λίγες μέ τή βοήθεια μιᾶς ἀριθμομηχανῆς καί ἐλάχιστες μέ τή βοήθεια ἑνός Ἠλεκτρονικοῦ Ὑπολογιστῆ (Η.Υ.). Καταβλήθηκε ἰδιαίτερη προσπάθεια, ὥστε οἱ ἀριθμητικές ἀσκήσεις τοῦ βιβλίου, πού λύνονται εὔκολα μέ τό χέρι, μέ μιά μικρή μεταβολή στίς ἀριθμητικές παραμέτρους τους, νά μετατρέπονται σέ ἄλλες ἀντίστοιχες,πού γιά νά λυθοῦν εἶναι ἀναγκαία ἡ βοήθεια εἴτε μιᾶς ἀριθμομηχανῆς, εἴτε ἑνός Η.Υ. Αὐτό θεωρήθηκε σκόπιμο γιά νά μποροῦν ἐκεῖνοι, πού θά ἔχουν στή διάθεσή τους ἕνα ἀπό τά δύο αὐτά βοηθητικά μέσα, νά βοηθηθοῦν στήν ἐξοικείωσή τους μέ αὐτά καί ἔμμεσα μέ τήν ἀκόμη καλύτερη ἐμπέδωση τῆς ὕλης τοῦ βιβλίου.

Ἡ πείρα γιά τή δυνατότητα τῆς συγγραφῆς τοῦ παρόντος βιβλίου ἀποιήθηκε μέσα σέ δεκαπέντε περίπου χρόνια. Προέρχεται ἀπό τήν προσωπική μελέτη τοῦ συγγραφέα, ἀπό τήν παρακολούθηση σχετικῶν μαθημάτων καί σεμιναρίων Α.Α. στό ἐξωτερικό, ἀπό τή διδασκαλία τοῦ μαθήματος τῆς Α.Α. σέ διάφορες βαθμίδες ἐδῶ καί στό ἐξωτερικό, καί τέλος ἀπό ἐμπειρίες, πού ἀποκτήθηκαν στήν ἔρευνα, πού ἔγινε καί γίνεται στήν Ἕδρα τῆς Α.Α. τοῦ Πανεπιστημίου Ἰωαννίνων.

Ἐπειδή γενικά πιστεύω ὅτι μιά ἀτομική προσπάθεια γιά τήν ἐπίτευξη ἑνός ἀντικειμενικοῦ σκοποῦ, ὅσο φιλότιμη καί καλή καί ἄν εἶναι, θά εἶναι πάντοτε κατώτερη μιᾶς ἀντίστοιχης συλλογικῆς, νομίζω πώς ἡ συγγραφή τοῦ παρόντος βιβλίου δέν θά γινόταν πραγματικότητα, ἄν στηριζόμουν ἀποκλειστικά καί μόνο στίς δικές μου δυνάμεις. Μέ τόν ἕνα ἤ τόν ἄλλο τρόπο ἦταν ἀρκετοί αὐτοί, πού βοήθησαν στήν ὅλη προσπάθεια τῆς συγγραφῆς τοῦ βιβλίου. Ἔτσι, ἀπό τή θέση αὐτή θεωρῶ καθῆκον καί ὑποχρέωσή μου νά εὐχαριστήσω ὅλους αὐτούς πού συνέβαλαν σ'αὐτή.

Ἀρχικά εὐχαριστῶ ὅλο τό προσωπικό τῆς Ἕδρας καί τοῦ Ἐργαστηρίου Α.Α. γιά τήν μέ τόν ὁποιοδήποτε τρόπο συμβολή του στή συγγραφή αὐτοῦ τοῦ βιβλίου.

Ἰδιαίτερα εὐχαριστῶ τόν Ἐπιμελητή τῆς Ἕδρας Α.Α. δρα Γ. Ἀβδελᾶ ὄχι μόνο γιά τή βοήθειά του μέ παρατηρήσεις, ὑποδείξεις καί διορθώσεις, ἀλλά καί γιά τήν πενταετή συνεργασία μας στό Πανεπιστήμιο Ἰωαννίνων, στή διάρκεια τῆς ὁποίας, σχετικές συζητήσεις μας μέ βοήθησαν στό νά καταλήξω στή συγγραφή καί στή διαμόρφωση τῆς ὕλης τοῦ βιβλίου αὐτοῦ. Εὐχαριστῶ ἀκόμη τούς Βοηθούς τοῦ Ἐργαστηρίου Α.Α. κ.κ. Σ. Γαλάνη καί Α. Γέγιο γιά τή συμβολή τους στή διόρθωση τοῦ κειμένου καί ἰδιαίτερα στίς παρατηρήσεις καί ὑποδείξεις τους σέ ὅ,τι ἀφορᾶ τά παραδείγματα, τίς ἀσκήσεις καί τίς λύσεις τους. Τέλος εὐχαριστῶ τήν ἀνώνυμη μάζα τῶν φοιτητῶν, τοῦ Πανεπιστημίου μας ἰδιαίτερα, πού μέ τίς ἐρωτήσεις καί τίς παρατηρήσεις τους, στή διάρκεια τῶν μαθημάτων, τῶν φροντιστηριακῶν καί ἐργαστηριακῶν ἀσκήσεων καί μέ βοήθησαν ἔμμεσα στή διαμόρφωση τῆς ὕλης τοῦ βιβλίου.

Ἡ προσαρμογή τῆς γλώσσας τοῦ βιβλίου στή ζωντανή δημοτική ἔγινε ἀπό τόν Φιλόλογο καί Βοηθό τῆς Ἕδρας Μεσαιωνικῆς Ἑλληνικῆς Φιλολογίας τῆς Φιλοσοφικῆς Σχολῆς τοῦ Πανεπιστημίου Ἰωαννίνων κ. Γιάννη Μαυρομάτη, τόν ὁπο-

καί εὐχαριστῶ ἰδιαίτερα. Οἱ ἀποκλίσεις σέ διάφορες περιπτώσεις ἀπό τή ζωντανή δημοτική γλῶσσα δέν πρέπει νά ἀποδοθοῦν στόν κ. Μαυρομάτη, ἀλλά στήν ἐμμονή τοῦ συγγραφέα σέ λέξεις ἤ ἐκφράσεις ἀπό τίς ὁποῖες δέν μπόρεσε νά ἀπαλλαχτεῖ τόσο εὔκολα ἔπειτα ἀπό βιώματα τριανταέξι ἐτῶν ἐκπαιδεύσεως.

Τέλος θά ἦταν μεγάλη παράλειψή μου, ἄν δέν εὐχαριστοῦσα ἰδιαίτερα τήν Παρασκευάστρια τοῦ Ἐργαστηρίου Α.Α. κ. Ἀναστασία Μπαλάφα - Παππᾶ, γιά τήν ἀφοσίωση, προθυμία καί ἐπιμέλεια, πού ἔδειξε στή δακτυλογράφηση τῶν δυσανάγνωστων χειρογράφων μέ πληθώρα μαθηματικῶν συμβόλων καί τύπων.

Πιστεύοντας ὅτι κανένα ἀνθρώπινο κατασκεύασμα δέν μπορεῖ νά εἶναι τέλειο, ἔχω τή γνώμη πώς καί τό βιβλίο αὐτό θά πρέπει νά ἀπέχει ἀρκετά ἀπό τήν τελειότητα. Γιά τό σκοπό αὐτό παρακαλῶ τούς ἀναγνῶστες, στήν ἀντίληψη τῶν ὁποίων θά ὑποπέσουν λάθη, σφάλματα ἤ παραλήψεις, νά μή διστάσουν νά μοῦ τά ὑποδείξουν. Θά τούς εἶμαι ἰδιαίτερα ὑποχρεωμένος καί θά προσπαθήσω νά λάβω σοβαρά ὑπόψη μου τίς ὑποδείξεις τους σέ μιά πιθανή δεύτερη καί καλύτερη ἔκδοση.

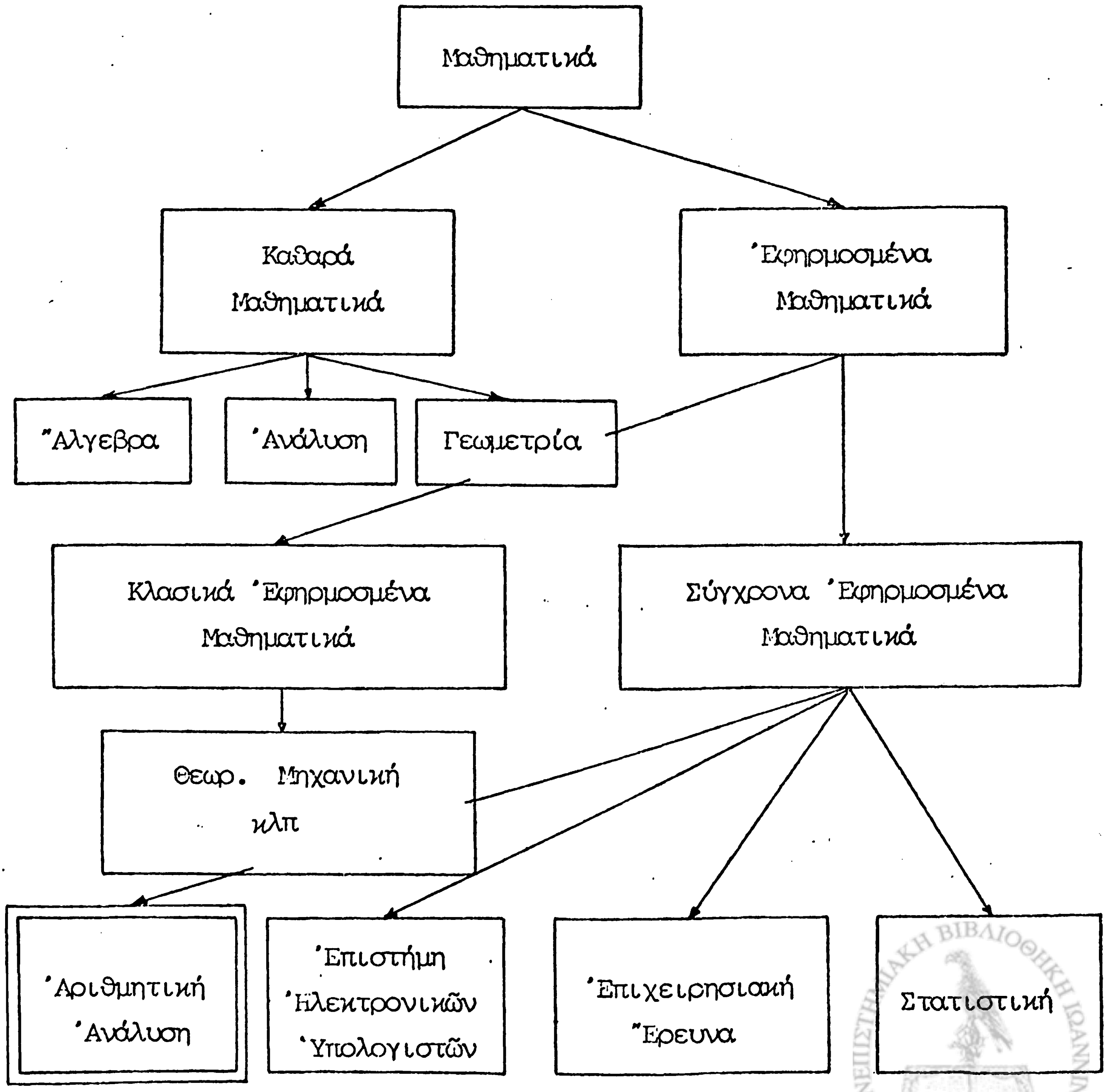
Ἰωάννινα - Ἰούνιος 1977

Α. Χατζηδῆμος

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1. Γενικά

'Η 'Αριθμητική 'Ανάλυση (Α.Α.) άποτελεῖ ἕναν άπό τούς κλάδους τῶν Σύγχρονων 'Εφηρμοσμένων Μαθηματικῶν. 'Η θέση της στό χῶρο τῆς Μαθηματικῆς 'Επιστήμης φαίνεται καθαρά στήν παρακάτω κατάταξη, ὅπου ὅμως τά ὅρια μεταξύ δύο διαφορετικῶν κλάδων δέν εἶναι πάντοτε σαφῆ



'Η Α.Α. σάν κλάδος τῶν Σύγχρονων 'Εφηρμοσμένων Μαθηματικῶν πῆρε τρομακτική ἀνάπτυξη μετά τό Δεύτερο Παγκόσμιο Πόλεμο. Αὐτό ἔγινε παράλληλα μέ τήν ἀνάπτυξη τῶν 'Ηλεκτρονικῶν 'Υπολογιστῶν (Η.Υ.) ἔτσι ὥστε τό ἕνα ἐπηρέασε καί βοήθησε τήν ἀνάπτυξη τοῦ ἄλλου. Ὅπως, ὅμως, ὅλοι οἱ κλάδοι τῶν Μαθηματικῶν ἔτσι ἔχει καί αὐτός τίς ρίζες του στήν ἀρχαιότητα. Πατέρες τῆς Α.Α. θά μποροῦσαν νά θεωρηθοῦν στή σειρά οἱ ἀρχαῖοι Βαβυλώνιοι, Αἰγύπτιοι καί Ἕλληνες. 'Από τούς Ἕλληνες ἀναφέρουμε χαρακτηριστικά τόν 'Αρχιμήδη (220 π.χ.), ὁ ὁποῖος, χρησιμοποιώντας τήν κλασική πιά στήν Α.Α. μέθοδο τῶν προσεγγίσεων, βρῆκε τιμή γιά τόν π (τό λόγο τοῦ μήκους τῆς περιφέρειας πρός τό μῆκος τῆς διαμέτρου κάθε κύκλου) μεταξύ $3\frac{10}{71}$ καί $3\frac{1}{7}$ καί τόν Ἥρωνα (100 π.χ.), ὁ ὁποῖος, ἔδωσε τόν ἐπαναληπτικό τύπο $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{\alpha}{x_n})$ γιά τήν εὕρεση τῆς τετραγωνικῆς ρίζας θετικοῦ ἀριθμοῦ α καί πού ἀποτελεῖ μερική περίπτωση τοῦ τύπου τῶν Newton - Raphson, πού βρέθηκε μετά ἀπό δεκαοκτώ αἰῶνες.

Γιά νά ἐξηγήσουμε τήν παράλληλη ἀνάπτυξη τῆς Α.Α. μέ τούς Η.Υ. θά πρέπει νά ποῦμε λίγα λόγια γιά τίς δυνατότητες τῶν Η.Υ. Εἶναι γνωστό ὅτι οἱ Η.Υ. εἶναι σέ θέση νά ἐκτελοῦν ὁρισμένες ἁπλές ἐργασίες μέ τρομακτικά ὑψηλές ταχύτητες. Σ' ὅ,τι ἀφορᾶ τίς ἀριθμητικές πράξεις οἱ Η.Υ. μποροῦν νά κάνουν μόνο πρόσθεση καί κατά κάποιο τρόπο ἀφαίρεση (σάν συμπλήρωμα τῆς προσθέσεως). Κατ' ἐπέκταση βέβαια μποροῦν νά ἐκτελοῦν πολλαπλασιασμό καί διαίρεση, ἀφοῦ οἱ δύο αὐτές πράξεις εἶναι ἀντίστοιχα διαδοχικές (ἐπαναληπτικές) προσθέσεις καί ἀφαιρέσεις. Μ' ἄλλα λόγια οἱ μαθηματικές δυνατότητες τῶν Η.Υ. ἐξαντλοῦνται στίς τέσσερις βασικές πράξεις τῆς 'Αριθμητικῆς. Τά προβλήματα ὅμως πού συναντοῦμε στήν πράξη περιέχουν καί ἄλλες πράξεις πέρα ἀπό τίς τέσσερις βασικές. Π.χ. Εὕρεση τετραγωνικῆς ρίζας, λογαρίθμου, φυσικῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν, παραγώγου, ὁλοκληρώματος κλπ. 'Επομένως δέν εἶναι ἀμέσως ἐπεξεργάσιμα ἀπό ἕναν Η.Υ. Ἕνας λοιπόν ἀπό τούς σκοπούς τῆς Α.Α. εἶναι ἡ ἀνάπτυξη μεθόδων γιά τήν μετατροπή ὅλων τῶν γνωστῶν Μαθηματικῶν σέ ἄλλα, κατά κάποια ἔννοια ἰσοδύναμα, στά ὁποῖα ὅμως μόνον οἱ τέσσερις πράξεις τῆς 'Αριθμητικῆς θά περιέχονται καί ἐπομένως θά τά κάνουν ἐπεξεργάσιμα ἀπό ἕναν Η.Υ. Ἕνας ἄλλος ἀπό τούς σκοπούς τῆς Α.Α. εἶναι νά ἀναπτύσσει μεθόδους, ὅπως ἀναφέρθηκε παραπάνω, οἱ ὁποῖες θά μᾶς δίνουν τό ἐπιδιωκόμενο ἀποτέλεσμα κάνοντας τίς λιγότερες δυνατές πράξεις.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα άναφέρεται στό βιβλίο τών Balfour καί Beveridge "Basic Numerical Analysis with FORTRAN" (σελ. 128). Γιά τήν έπίλυση ένός γραμμικοῦ συστήματος n έξισώσεων μέ n άγνώστους προτείνεται ή χρησιμοποίηση τῆς μεθόδου τοῦ Cramer ὅπου κάθε ὀρίζουσα άναπτύσσεται πλήρως ὡς πρός ὅλα τά στοιχεῖα της. Οἱ πράξεις πού περιέχονται εἶναι μόνον οἱ τέσσερις τῆς 'Αριθμητικῆς καί τό πλῆθος τῶν περιεχόμενων πολλαπλασιασμῶν καί διαιρέσεων εἶναι δυνατό νά άποδειχτεῖ ὅτι εἶναι, τῆς τάξης $(e-1)(n+1)!$. Γιά $n=100$, ἕνας άριθμός άρκετά συνηθισμένος στήν πράξη, ή προηγούμενη ἔκφραση δίνει 1.6×10^{160} πράξεις περίπου. 'Επομένως καί ἄν άκόμη χρησιμοποιούσαμε ἕναν τελευταίου τύπου Η.Υ. ἱκανό νά έκτελεῖ 1000000 πολλαπλασιασμούς καί διαιρέσεις στό δευτερόλεπτο άπαιτοῦνται 5×10^{144} αἰῶνες γιά τήν πλήρη έπίλυση τοῦ συστήματος. Σάν άντιπαράδειγμα στό παραπάνω άναφέρουμε ὅτι είδικῆς μορφῆς σύστημα 361 γραμμικῶν έξισώσεων μέ ἰσάριθμους άγνώστους λύθηκε άπό τήν ὁμάδα 'Αριθμητικῆς 'Αναλύσεως τοῦ Πανεπιστημίου 'Ιωαννίνων στόν Η.Υ. UNIVAC 1106 τοῦ Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης σέ 2 λεπτά περίπου.

Συνοψίζοντας τά παραπάνω θά μπορούσαμε νά ποῦμε ὅτι Α.Α. εἶναι ὁ κλάδος τῶν Σύγχρονων 'Εφηρμοσμένων Μαθηματικῶν πού άσχολεῖται μέ τήν κατασκευή καί άνάπτυξη άριθμητικῶν μεθόδων γιά τήν εὕρεση (ἤ τόν ὑπολογισμό) άριθμητικῶν άποτελεσμάτων άπό άριθμητικά δεδομένα. Λέγοντας ὅμως άριθμητικές μέθοδοι έννοοῦμε μεθόδους πού περιέχουν τίς τέσσερις πράξεις τῆς 'Αριθμητικῆς καί μόνο. Ἄρα ἡ Α.Α. εἶναι ὄχι μόνο χρήσιμη καί άπαραίτητη στούς ἄλλους κλάδους τῶν 'Εφηρμοσμένων Μαθηματικῶν ὅπως εἶναι ἡ Μηχανική , ἡ Στατιστική, ἡ 'Επιστήμη τῶν 'Ηλεκτρονικῶν 'Υπολογιστῶν, ἡ 'Επιχειρησιακή Ἔρευνα κλπ. άλλά καί σέ ὅλους τούς κλάδους τῶν 'Εφηρμοσμένων 'Επιστημῶν ὅπου είσχωρεῖ ὁ Η.Υ. γιά τήν έπίλυση τῶν προβλημάτων τους, ὅπως εἶναι ἡ Φυσική, ἡ 'Αστρονομία, ἡ Μετεωρολογία, ἡ Ναυπηγική, ἡ Τοπογραφία κλπ.

Τά άριθμητικά δεδομένα ένός προβλήματος λέμε ὅτι άποτελοῦν τίς πληροφορίες είσόδου, τά άριθμητικά άποτελέσματα τίς πληροφορίες έξόδου καί ἡ άριθμητική μέθοδος ὑπολογισμοῦ τόν άλγόριθμο. Οἱ ὑπολογισμοί γιά τήν άριθμητική έπίλυση ένός προβλήματος (δηλαδή γιά τήν έπίλυση ένός προβλήματος μέ τίς μεθόδους τῆς Α.Α.) εἶναι δυνατό νά γίνονται εἴτε μέ τό χέρι εἴτε μέ μιά ἀριθμομηχανή εἴτε μέ ἕναν Η.Υ. Τήν ἐκλογή ἐξαρτοῦν ἀπό τή μιά τό πλῆθος καί τό εἶδος τῶν πράξεων πού περιέχονται στόν ἀλγόριθμο τοῦ προβλήματος πού ἐπιλύεται καί ἀπό τήν ἄλλη τά διαθέσιμα μέσα.

1.2. Σφάλματα

1.2.1. Γενικά

Ὅπως ἀναφέραμε παραπάνω, ἕνας ἀπό τούς σκοπούς τῆς Α.Α. εἶναι νά μετατρέπει ὅλα τά Μαθηματικά σέ ἄλλα ἰσοδύναμα πού θά περιέχουν μόνο τίς τέσσερις πράξεις τῆς Ἀριθμητικῆς. Ἡ μετατροπή αὐτή θά γίνεται κατά κάποια ἔννοια προσεγγιστική πράγμα πού σημαίνει ὅτι ἀναγκαστικά θά εἰσχωροῦν, κατά τή μετατροπή αὐτή, σφάλματα τά ὁποῖα, προσπάθειά μας θά εἶναι, νά ἐντοπίζουμε καί νά περιορίζουμε κατά τό δυνατό. Συνεπῶς τά σφάλματα καί ἡ θεωρία γύρω ἀπό αὐτά ἀποτελοῦν ἕνα ἀπό τά βασικότερα ἀντικείμενα τῆς Α.Α.

Ἔστω ὅτι x εἶναι ἡ ἀληθής ἤ ἡ ἀκριβής τιμή μιᾶς ποσότητας καί x^* ἡ προσεγγιστική ἤ ἡ τιμή, πού ὑπολογίστηκε, τῆς ἴδιας ποσότητας. Καλοῦμε σφάλμα ε τή διαφορά

$$\varepsilon = x^* - x .$$

Τήν ποσότητα πού εἶναι ἀντίθετη πρός τό σφάλμα καλοῦμε διόρθωση. Δηλαδή ἄν r εἶναι ἡ διόρθωση θά ἔχουμε

$$r = -\varepsilon = x - x^* .$$

Στήν πράξη ἀντί γιά τό σφάλμα ἤ τή διόρθωση χρησιμοποιοῦμε τήν ἀπόλυτη τιμή τους, πού καλοῦμε ἀπόλυτο σφάλμα. Ἔτσι γιά τό ἀπόλυτο σφάλμα θά ἔχουμε

$$|\varepsilon| = |r| = |x^* - x| .$$

Ἄν μιά ἀληθινή ἀπόσταση 1 μέτρου τήν ἐκτιμήσουμε ἴση μέ 2 μέτρα, τότε εἶναι φανερό ὅτι κάνουμε ἕνα σφάλμα $\varepsilon_1 = 2-1 = 1$ μέτρο. Ἄν μιά ἀληθινή ἀπόσταση 999 μέτρων τή μετρήσουμε καί τή βροῦμε ἴση μέ 1000 μέτρα τότε πάλι κάνουμε ἕνα σφάλμα $\varepsilon_2 = 1000 - 999 = 1$ μέτρο δηλαδή ἴσο μέ τό προηγούμενο. Παρά τό γεγονός ὅτι καί στίς δυό περιπτώσεις τό σφάλμα πού γίνεται εἶναι τό ἴδιο (1 μέτρο), εἶναι φανερό ὅτι ἡ μέτρηση ἤ ἡ ἐκτίμηση στή δεύτερη περίπτωση εἶναι πιό ἀκριβής. Αὐτό γιατί εἰσχωρεῖ ὑποσυνείδητα μία ἔννοια, ὅπου, χωρίς νά τό θέλουμε, συγκρίνουμε τό σφάλμα πού κάνουμε μέ τό μέγεθος τῆς ποσότητας πού μετρᾶμε. Ὅσο δέ μικρότερος εἶναι ὁ λόγος αὐτός, τόσο καλύτερη εἶναι ἡ μέτρηση. Στά Μαθηματικά ἡ ἔννοια αὐτή καλεῖται σχετικό σφάλμα καί ὁρίζεται ἀπό τή σχέση

$$\delta = \frac{\varepsilon}{x} = \frac{x^* - x}{x} \overset{\circledast}{\approx} \frac{x^* - x}{x^*}$$

ὅπου δ τό σχετικό σφάλμα καί $x, x^* \neq 0$. Ἀντίστοιχα πρός τά προηγούμενα μπορεῖ νά εἰσαχτεῖ καί ἡ ἔννοια τοῦ ἀπόλυτου σχετικοῦ σφάλματος μέ τή σχέση

$$|\delta| = \left|\frac{\varepsilon}{x}\right| = \left|\frac{x^* - x}{x}\right| \approx \left|\frac{x^* - x}{x^*}\right| .$$

Παράδειγμα

Ἡ ἀκριβής τιμή μιᾶς ποσότητας εἶναι 2.5 ἐνῶ ἡ τιμή πού μετρήθηκε εἶναι 2.45. Νά βρεθοῦν τό σφάλμα, ἡ διόρθωση, τό ἀπόλυτο σφάλμα, τό σχετικό σφάλμα καί τό ἀπόλυτο σχετικό σφάλμα.

Λύση

Ἔχουμε κατά σειρά. Γιά τό σφάλμα ε

$$\varepsilon = x^* - x = 2.45 - 2.5 = -0.05 .$$

⊛ Τό σύμβολο ≈ σημαίνει περίπου ἴσον ἤ κατά προσέγγιση ἴσον. Ἰσοδύναμα πρός τό σύμβολο ≈ θεωροῦνται καί τά σύμβολα ≃ καί ≏.

Γιά τή διόρθωση r

$$r = -\varepsilon = 0.05 \;.$$

Γιά τό άπόλυτο σφάλμα $|\varepsilon|$

$$|\varepsilon| = |-0.05| = 0.05 \;.$$

Γιά τό σχετικό σφάλμα δ

$$\delta = \frac{\varepsilon}{x} = \frac{-0.05}{2.5} = -0.02 \;.$$

Καί τέλος γιά τό άπόλυτο σχετικό σφάλμα $|\delta|$

$$|\delta| = |-0.02| = 0.02 \;.$$

1.2.2. Σφάλματα στούς ὑπολογισμούς

Ἄν παραβλέψουμε τά σφάλματα πού ὑπάρχουν στά δεδομένα ἑνός προβλήματος καί τά ὁποῖα εἶναι δυνατό νά προέρχονται άπό συστηματικά ἤ τυχαῖα σφάλματα τῶν όργάνων μετρήσεως, άπό άμέλεια κλπ, δύο εἶναι τά κύρια εἴδη τῶν σφαλμάτων πού εἰσχωροῦν στούς ὑπολογισμούς. Τά σφάλματα άποκοπῆς καί τά σφάλματα στρογγυλεύσεως.

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ζητᾶμε νά βροῦμε τήν τιμή e^x γιά κάποιο γνωστό x. Εἶναι γνωστό άπό τήν Ἀνάλυση ὅτι $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Γιά νά βροῦμε λοιπόν τήν τιμή e^x θά πρέπει νά άντικαταστήσουμε τό x στό δεύτερο μέλος, νά βροῦμε τήν τιμή καθενός άπό τούς ἄπειρους τό πλῆθος ὅρους καί μετά νά βροῦμε τό ἄθροισμα τῶν ἄπειρων ὅρων. Αὐτό ὅμως πρακτικά εἶναι άδύνατο. Εἴμαστε λοιπόν άναγκασμένοι νά σταματήσουμε κάποτε νά προσθέτουμε καινούργιους ὅρους στό δεύτερο μέλος καί νά δώσουμε σάν άποτέλεσμα ἕνα ἄθροισμα τῆς μορφῆς $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ ὅπου n κατάλληλος, κατά τήν κρίση μας, φυσικός άριθμός. Ἔτσι ὅμως κάνουμε ἕνα σφάλμα ε ἴσο μέ

$$\varepsilon = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = -\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

καί τό όποῖο καλεῖται σφάλμα άποκοπῆς. Σφάλμα άποκοπῆς, λοιπόν, καλεῖται τό σφάλμα πού προκύπτει κατά τήν άντικατάσταση μιᾶς σειρᾶς (ἄθροισμα ἄπειρου πλήθους ὅρων) μέ ἕνα μερικό ἄθροισμά της (ἄθροισμα πεπερασμένου πλήθους ὅρων).

'Ακόμη στήν πράξη εἴτε έργαζόμαστε μέ τό χέρι, εἴτε μέ μία άριθμομηχανή, εἴτε μέ ἕναν Η.Υ., εἴμαστε άναγκασμένοι νά κάνουμε πράξεις χρησιμοποιώντας άριθμούς μέ περιορισμένο πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων (δ.ψ.). Ἔτσι κάθε άριθμός πού θά ἔχει μεγαλύτερο πλῆθος δ.ψ. άπό τό χρησιμοποιούμενο θά πρέπει νά άντικατασταθεῖ άπό κάποιον ἄλλον, πού θά ἔχει τόσα δ.ψ., ὅσα εἶναι στό μέγιστο χρησιμοποιούμενο πλῆθος. Μιά τέτοια άντικατάστατη λέγεται στρογγύλευση τό δέ σφάλμα πού προκύπτει κατά τήν στρογγύλευση (δηλαδή κατά τήν άντικατάσταση ένός άριθμοῦ άπό ἄλλον,πού ἔχει περιορισμένο πλῆθος δ.ψ.) καλεῖται σφάλμα στρογγυλεύσεως.'Η στρογγύλευση ένός άριθμοῦ σέ k δ.ψ. πετυχαίνεται ὡς ἑξῆς. Παραλείπουμε τά δ.ψ. πού ὑπάρχουν πέρα άπό τήν k δεκαδική θέση, τό ψηφίο ὅμως τῆς k δεκαδικῆς θέσης τό άφήνουμε ὅπως εἶναι ἤ τό αὐξάνουμε κατά μία μονάδα, άντίστοιχα μέ τό ἄν τό μέρος πού παραλείπεται εἶναι μικρότερο ἤ μεγαλύτερο άπό μισή μονάδα τῆς k δεκαδικῆς τάξης πού διατηρεῖται. Στήν κρίσιμη περίπτωση ὅπου τό μέρος πού παραλείπεται ἰσοῦται άκριβῶς μέ μισή μονάδα τῆς k δεκαδικῆς τάξης, τό ψηφίο τῆς k τάξης τό άφήνουμε ὅπως εἶναι ἤ τό αὐξάνουμε κατά μία μονάδα άντίστοιχα μέ τό ἄν αὐτό εἶναι ἄρτιο ἤ περιττό.

Παράδειγμα 1

Νά στρογγυλευτεῖ διαδοχικά ὁ άριθμός

$$\pi = 3.1415926535\ldots$$

σέ έπτά, ἕξι, πέντε, τέσσερα, τρία καί δύο δ.ψ.

Λύση

'Ακολουθώντας τό γενικό κανόνα στρογγυλεύσεως ένός άριθμοῦ σέ k δ.ψ. εἶναι εὔκολο νά βροῦμε ὅτι

$\pi \approx 3.1415927$ σέ έπτά δ.ψ.

$\pi \approx 3.141593$ σέ ἕξι δ.ψ.

$\pi \approx 3.14159$ σέ πέντε δ.ψ.

$\pi \approx 3.1416$	σέ τέσσερα	δ.ψ.
$\pi \approx 3.142$	σέ τρία	δ.ψ.
$\pi \approx 3.14$	σέ δύο	δ.ψ.

Παράδειγμα 2

Νά στρογγυλευτοῦν οἱ ἀριθμοί $\alpha = 0.385$ καί $\beta = 0.635$ σέ δύο δ.ψ.

Λύση

Καί οἱ δύο περιπτώσεις ἀνήκουν στήν κρίσιμη περίπτωση. Ἐφαρμόζοντας τόν ἀντίστοιχο κανόνα ἔχουμε ἀμέσως ὅτι

$\alpha \approx 0.38$ καί $\beta \approx 0.64$.

Εἶναι φανερό ἀπό τόν τρόπο πού πετυχαίνεται ἡ στρογγύλευση ἑνός ἀριθμοῦ σέ k δ.ψ. ὅτι ἄν ε εἶναι τό σφάλμα στρογγυλεύσεως θά ἔχουμε γιά γιά τό ἀπόλυτο σφάλμα $|\varepsilon|$ ὅτι

$$|\varepsilon| \leq \frac{1}{2}\, 10^{-k} \quad .$$

Ἐκτός ἀπό τήν ἔννοια τῶν δ.ψ. στήν παράσταση τῶν ἀριθμῶν εἰσχωρεῖ καί ἡ ἔννοια τῶν σημαντικῶν ψηφίων (σ.ψ.). Σημαντικά ψηφία ἑνός ἀριθμοῦ καλοῦνται ὅλα τά ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ πού δίνονται ἐκτός ἀπό τυχόν μηδενικά πού ὑπάρχουν στήν ἀρχή τοῦ ἀριθμοῦ. Τά σ.ψ. παίζουν μεγάλο ρόλο στήν ἐσωτερική παράσταση ἑνός ἀριθμοῦ ἀπό ἕναν Η.Υ. καί αὐτό, γιατί οἱ Η.Υ. ἐργάζονται συνήθως μέ σ.ψ. καί ὄχι μέ δ.ψ.

Παράδειγμα

Νά βρεθεῖ τό πλῆθος τῶν σ.ψ. τῶν ἀριθμῶν $\alpha = 320.7$, $\beta = 4.60$ καί $\gamma = 0.0058$.

Λύση

Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τῶν σ.ψ. ἔχουμε ὅτι ὁ ἀριθμός α ἔχει τέσσερα σ.ψ., ὁ β τρία καί ὁ γ δύο σ.ψ.

Παράδειγμα

Νά βρεθοῦν ἐλάχιστα φράγματα γιά τό ἀπόλυτο σφάλμα (ἀκριβῶς) καί τό ἀπόλυτο σχετικό σφάλμα (κατά προσέγγιση) τοῦ ἀριθμοῦ 5.0, πού δίνεται μέ προσέγγιση δύο σ.ψ.

Λύση

Ὁ ἀριθμός $x^* = 5.0$ δίνεται μέ προσέγγιση δύο σ.ψ. ἤ ἀκόμη μέ προσέγγιση ἑνός δ.ψ. Τό τελευταῖο σημαίνει ὅτι γιά τό ἀπόλυτο σφάλμα $|\varepsilon|$, δηλαδή γιά τό ἀπόλυτο σφάλμα στρογγυλεύσεως $|\varepsilon|$, θά ἔχουμε

$$|\varepsilon| \leqq \frac{1}{2}10^{-1} = 0.05 \ .$$

Ἑπομένως τό ἐλάχιστο φράγμα γιά τό ἀπόλυτο σφάλμα θά εἶναι ἀκριβῶς 0.05. Γιά τό ἀπόλυτο σχετικό σφάλμα ἔχουμε

$$|\delta| \approx \frac{|\varepsilon|}{|x^*|} \leqq \frac{0.05}{5.0} = 0.01 \ .$$

Συνεπῶς τό ἐλάχιστο φράγμα γιά τό ἀπόλυτο σχετικό σφάλμα θά εἶναι κατά προσέγγιση 0.01.

1.2.3. Μετάδοση σφαλμάτων κατά τούς ὑπολογισμούς

Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι κατά τήν ἐκτέλεση τῶν τεσσάρων πράξεων τῆς Ἀριθμητικῆς δέν εἰσχωροῦν νέα σφάλματα (πράγμα συνήθως ἀναληθές) τότε τά ἀρχικά σφάλματα πού ὑπάρχουν στίς πληροφορίες εἰσόδου μεταδίδονται καί ἔχουν σάν ἀποτέλεσμα νά λαβαίνουμε πληροφορίες ἐξόδου πού περιέχουν σφάλματα. Γιά τήν μετάδοση τῶν ἀπόλυτων καί ἀπόλυτων σχετικῶν σφαλμάτων ἰσχύουν, μεταξύ τῶν ἄλλων, καί τά ἀκόλουθα δύο βασικά θεωρήματα.

Θεώρημα 1

Τό μέγιστο τοῦ ἀπόλυτου σφάλματος τοῦ ἀθροίσματος (ἤ τῆς διαφορᾶς) δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσον μέ τό ἄθροισμα τῶν ἀπόλυτων σφαλμάτων τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν.

'Απόδειξη

('Η ἀπόδειξη δίνεται στήν περίπτωση τοῦ ἀθροίσματος καί μόνο).

'Υποθέτουμε ὅτι x_1, x_2 εἶναι οἱ ἀκριβεῖς τιμές τῶν δύο ἀριθμῶν, x_1^*, x_2^* οἱ ἀντίστοιχες προσεγγιστικές τιμές αὐτῶν καί ε_1 καί ε_2 τά ἀντίστοιχα σφάλματα. Ἄν ε εἶναι τό σφάλμα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἀριθμῶν θά ἔχουμε διαδοχικά

$$\varepsilon = (x_1^* + x_2^*) - (x_1 + x_2) = (x_1^* - x_1) + (x_2^* - x_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 .$$

'Επομένως παίρνοντας ἀπόλυτες τιμές θά ἔχουμε

$$|\varepsilon| = |\varepsilon_1 + \varepsilon_2| \leq |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|$$

δηλαδή τό ζητούμενο $\max|\varepsilon| = |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|$.

Θεώρημα 2

Τό μέγιστο τοῦ ἀπόλυτου σχετικοῦ σφάλματος τοῦ γινομένου (ἤ τοῦ πηλίκου) δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσο κατά προσέγγιση μέ τό ἄθροισμα τῶν ἀπόλυτων σχετικῶν σφαλμάτων τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν.

'Απόδειξη

('Η ἀπόδειξη δίνεται στήν περίπτωση τοῦ πηλίκου καί μόνο).

'Υποθέτουμε, ὅπως στήν ἀπόδειξη τοῦ προηγούμενου θεωρήματος, ὅτι x_1, x_2 $(\neq 0)$ οἱ ἀκριβεῖς τιμές δύο ἀριθμῶν, x_1^*, x_2^* $(\neq 0)$ οἱ προσεγγιστικές τιμές τους καί ε_1 καί ε_2 τά ἀντίστοιχα σφάλματά τους. Ἄν καλέσουμε ε τό σφάλμα τοῦ πηλίκου τῶν δύο ἀριθμῶν x_1 καί x_2 θά ἔχουμε

$$\varepsilon = \frac{x_1^*}{x_2^*} - \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1^* x_2 - x_2^* x_1}{x_2^* x_2} = \frac{(x_1+\varepsilon_1)x_2 - (x_2+\varepsilon_2)x_1}{x_2^* x_2} \quad \text{ἤ}$$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 x_2 - \varepsilon_2 x_1}{x_2^* x_2} .$$

Ἄν δ εἶναι τό σχετικό σφάλμα τοῦ πηλίκου καί δ_1, δ_2 τά σχετικά σφαλματα τῶν ἀριθμῶν $x_1(\neq 0)$ καί x_2 θά ἔχουμε

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\frac{x_1}{x_2}} = \frac{\varepsilon_1 x_2 - \varepsilon_2 x_1}{x_2^* \, x_1} \approx \frac{\varepsilon_1 x_2 - \varepsilon_2 x_1}{x_2 \, x_1} = \frac{\varepsilon_1}{x_1} - \frac{\varepsilon_2}{x_2} \quad \text{ἤ}$$

$$\delta \approx \delta_1 - \delta_2 \; .$$

Ἔτσι, παίρνοντας ἀπόλυτες τιμές βρίσκουμε

$$|\delta| \approx |\delta_1 - \delta_2| \leqq |\delta_1| + |\delta_2|$$

δηλαδή τό ζητούμενο $\max|\delta| \approx |\delta_1| + |\delta_2|$.

Παρατήρηση: Τά προηγούμενα Θεωρήματα 1 καί 2 γιά τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα καί τό γινόμενο μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ ἐπαγωγικά ὅτι ἰσχύουν καί στήν περίπτωση n ἀριθμῶν.

Παράδειγμα 1

Ἄν οἱ ἀριθμοί x_1 καί x_2 δίνονται στρογγυλεμένοι σέ δύο δ.ψ. νά δειχτεῖ ὅτι τό μέγιστο ἀπόλυτο σφάλμα τῆς ἐκφράσεως $1.3x_1 + 2.7x_2$ εἶναι ἴσον μέ 0.02. (Ὑποτίθεται ὅτι οἱ συντελεστές 1.3 καί 2.7 δίνονται ἀκριβῶς).

Λύση

Ἔστω ὅτι x_1, x_2 καί x_1^*, x_2^* εἶναι ἀντίστοιχα οἱ ἀκριβεῖς καί οἱ κατά προσέγγιση τιμές τῶν δύο ἀριθμῶν καί x καί x* ἡ ἀκριβής καί ἡ κατά προσέγγιση τιμή τῆς ἐκφράσεως πού δόθηκε. Ἄν ε εἶναι τό σφάλμα τῆς ἐκφράσεως θά ἔχουμε

$$\begin{aligned} \varepsilon = x^* - x &= (1.3x_1^* + 2.7x_2^*) - (1.3x_1 + 2.7x_2) \\ &= 1.3(x_1^* - x_1) + 2.7(x_2^* - x_2) = 1.3\varepsilon_1 + 2.7\varepsilon_2 \end{aligned}$$

ὅπου μέ ε_1 καί ε_2 καλέσαμε τά σφάλματα (σφάλματα στρογγυλεύσεως) τῶν x_1

καί x_2. Γιά τά ε_1 καί ε_2 ἰσχύει ὡς γνωστό ὅτι

$$|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2| \leq \frac{1}{2}10^{-2}$$

ἀφοῦ οἱ ἀριθμοί εἶναι στρογγυλεμένοι σέ δύο δ.ψ. Μέ βάση τά παραπάνω ἔχουμε ὅτι

$$|\varepsilon| = |1.3\varepsilon_1 + 2.7\varepsilon_2| \leq |1.3\varepsilon_1| + |2.7\varepsilon_2| = 1.3|\varepsilon_1| + 2.7|\varepsilon_2| \leq$$

$$\leq 1.3 \times \frac{1}{2} 10^{-2} + 2.7 \times \frac{1}{2} 10^{-2} = 0.02 .$$

Ἄρα τό μέγιστο ἀπόλυτο σφάλμα τῆς ἐκφράσεως πού δόθηκε εἶναι 0.02.

Παράδειγμα 2

Νά βρεθοῦν τό μέγιστο ἀπόλυτο σφάλμα (ἀκριβῶς) τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος $2.91 - 15.1 + 0.317$, καθώς καί τό μέγιστο ἀπόλυτο σχετικό σφάλμα τοῦ πηλίκου $\frac{2.50}{20.0}$ ἄν εἶναι γνωστό ὅτι ὅλοι οἱ παραπάνω ἀριθμοί πού δίνονται εἶναι στρογγυλεμένοι σέ τρία σ.ψ.

Λύση

Ἄν ε_1, ε_2, ε_3 εἶναι τά σφάλματα στρογγυλεύσεως τῶν ἀριθμῶν 2.91, 15.1 καί 0.317, τότε θά ἔχουμε

$$|\varepsilon_1| \leq \frac{1}{2}10^{-2}, \quad |\varepsilon_2| \leq \frac{1}{2}10^{-1} \text{ καί } |\varepsilon_3| \leq \frac{1}{2}10^{-3} .$$

Ἄν ἀκόμη ε παρασταίνει τό σφάλμα στρογγυλεύσεως τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος $2.91 - 15.1 + 0.317$ τότε σύμφωνα μέ τήν Παρατήρηση πού γενικεύει τό Θεώρημα 1 θά ἔχουμε

$$|\varepsilon| \leq |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + |\varepsilon_3| \leq \frac{1}{2}10^{-2} + \frac{1}{2}10^{-1} + \frac{1}{2}10^{-3} = 0.0555$$

ἐπομένως $\max |\varepsilon| = 0.0555$.

Ἔστω τώρα δ_1, δ_2 καί δ τά σχετικά σφάλματα τῶν ἀριθμῶν $x_1^* = 2.50$,

$x_2^* = 20.0$ καί $\frac{2.50}{20.0}$ καί ε_1 καί ε_2 τά σφάλματα τῶν x_1^* καί x_2^* ἀντίστοιχα. Σύμφωνα μέ τό Θεώρημα 2 θά ἔχουμε

$$|\delta| \lessapprox |\delta_1| + |\delta_2| \approx \frac{|\varepsilon_1|}{|x_1^*|} + \frac{|\varepsilon_2|}{|x_2^*|} \leqq \frac{\frac{1}{2}\,10^{-2}}{2.50} + \frac{\frac{1}{2}\,10^{-1}}{20.0} =$$

$$= 0.002 + 0.0025 = 0.0045$$

ὁπότε $\max |\delta| \approx 0.0045$.

Στό σημεῖο αὐτό καί πρίν νά κλείσουμε τήν παρούσα παράγραφο θά πρέπει νά τονίσουμε τά ἑξῆς. Στήν πράξη εἴμαστε πάντα ἀναγκασμένοι νά ἐργαζόμαστε χρησιμοποιώντας περιορισμένο πλῆθος δ. ἤ σ.ψ. Συνεπῶς καί ἄν ἀκόμη εἴμαστε σέ θέση νά ἀποφύγουμε ὅλα τά ἄλλα σφάλματα, δέν μποροῦμε νά ἀποφύγουμε τά σφάλματα στρογγυλεύσεως, τά ὁποῖα εἶναι ἔτσι πανταχοῦ παρόντα καί ἀποτελοῦν ἑπομένως ἕνα ἀναγκαῖο κακό. Ἡ παρουσία τῶν σφαλμάτων στρογγυλεύσεως ἐκτός τοῦ ὅτι ἔχει σάν μία πρώτη συνέπεια τήν μετάδοσή τους στίς πληροφορίες ἐξόδου ἔχει σάν μία δεύτερη συνέπεια νά ἐπηρεάζει τή σειρά ἐκτελέσεως τῶν πράξεων μέ ἀποτέλεσμα νά μήν ἰσχύουν πιά βασικοί νόμοι τῆς Ἀριθμητικῆς καί τῆς Ἄλγεβρας ὅπως π.χ. ὁ προσεταιριστικός νόμος. Γι'αὐτό ἀπαιτεῖται μεγάλη προσοχή κατά τήν ἐκτέλεση τῶν πράξεων, ἰδιαίτερα ὅταν χρησιμοποιεῖται ἕνας Η.Υ. γι'αὐτές. Αὐτό φαίνεται καθαρά στό ἑπόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα

Νά βρεθεῖ τό ἄθροισμα

$$0.000001 + 0.000001 + \ldots + 0.000001$$

πού ἀποτελεῖται ἀπό δύο ἑκατομμύρια ὅρους ἴσους μέ 0.000001 μέ τή βοήθεια ἑνός Η.Υ. ὁ ὁποῖος, ὑποτίθεται, μπορεῖ νά ἀπομνημονεύσει σέ μία θέση τῆς μνήμης του (ἀκριβῶς) ἀριθμούς μέ ἕξι τό πολύ σ.ψ.

Λύση

Ἄν ἡ πρόσθεση πού δόθηκε ἐκτελεστεῖ μέ τό γνωστό τρόπο, δηλαδή ὁ δεύτερος ὅρος νά προστεθεῖ στόν πρῶτο, ὁ τρίτος στό ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων κ.ο.κ., τό τελικό άθροισμα θά εἶναι ἴσον μέ 1 ἀντί τοῦ σωστοῦ 2. Αὐτό, γιατί ἐνῶ ὅλα θά πηγαίνουν κανονικά μέχρι καί τήν πρόσθεση τοῦ ἑκατομμυριοστοῦ 0.000001, ὁπότε τό ἄθροισμα θά εἶναι 1.00000,ἡ πρόσθεση τοῦ ἑκατομμυριοστοῦ πρώτου ὅρου θά ἀφήσει τό προηγούμενο ἄθροισμα ἀμετάβλητο γιατί τό σωστό ἄθροισμα 1.000001 ἔχει ἑπτά σ.ψ. καί ὁ Η. Υ. μπορεῖ νά ἀπομνημονεύσει μόνο ἕξι, τά ἕξι πρῶτα. Τό ἴδιο θά συμβαίνει καί μέ τήν πρόσθεση καθενός ἀπό τούς ὑπόλοιπους ὅρους. Γιά νά βρεθεῖ τό σωστό ἄθροισμα 2 ὑπάρχουν πολλοί τρόποι. Ἕνας ἀπό αὐτούς εἶναι νά βρεθεῖ χωριστά τό ἄθροισμα τῶν ἕνα ἑκατομμύριο πρώτων ὅρων καί χωριστά τό ἄθροισμα τῶν ἕνα ἑκατομμύριο τελευταίων ὅρων. Τέλος τά δύο μερικά ἀθροίσματα, πού εἶναι καθένα ἴσον μέ 1, ἄν προστεθοῦν θά δώσουν τό σωστό ἄθροισμα 2.

1.3. Ὑπολογισμός τῆς τιμῆς πολυωνύμου καί τῶν παραγώγων του σέ γνωστό σημεῖο.

1.3.1. Γενικά

Τά πολυώνυμα παίζουν ἕνα πάρα πολύ σπουδαῖο ρόλο στήν ἀνάπτυξη τῆς θεωρίας τῆς Α.Α. Αὐτό, γιατί ἀποτελοῦν τίς ἁπλούστερες μαθηματικές ἐκφράσεις πού, ὅπως θά δοῦμε, χρησιμοποιοῦνται γιά νά παραστήσουν ἤ νά προσεγγίσουν κατά κάποιο τρόπο ἄλλες συναρτήσεις. Ἔτσι θά χρειαστεῖ πάρα πολλές φορές στή συνέχεια νά βροῦμε τήν τιμή ἑνός πολυωνύμου μέ πραγματικούς συντελεστές ἤ μιᾶς παραγώγου του γιά κάποια πραγματική τιμή τῆς μεταβλητῆς του. Ἡ εὕρεση βέβαια τῆς τιμῆς ἑνός πολυωνύμου καί τῶν παραγώγων του ἀποτελεῖ ἕνα στοιχειῶδες πρόβλημα, πού ἀντιμετωπίζεται ἁπλούστατα ἀπό τόν καθένα μέ τίς τρεῖς πρῶτες πράξεις τῆς Ἀριθμητικῆς καί μόνο. Εἶναι ὅμως εὐκαιρία νά δοῦμε, ἀκριβῶς μέ τό στοιχειῶδες πρόβλημα αὐτό, τόν τρόπο μέ τόν ὁποῖο ἐργάζεται ἡ Α.Α. καί ἀναπτύσσει μεθόδους μέ τίς ὁποῖες φθάνει στό ἐπιδιωκόμενο ἀποτέλεσμα στό συντομότερο δυνατό χρόνο, κάνοντας δηλαδή τίς λιγότερες δυνατές πράξεις.

1.3.2. Ὑπολογισμός τῆς τιμῆς πολυωνύμου σέ γνωστό σημεῖο.

Ἔστω τό πολυώνυμο $p(x)\equiv \alpha_o x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-2}x^2 + \alpha_{n-1}x + \alpha_n$ βαθμοῦ $n(\alpha_o \neq 0)$. Ζητᾶμε νά βροῦμε τήν τιμή τοῦ πολυωνύμου $p(x)$ γιά $x = x_o$ δηλαδή τήν τιμή $p(x_o) = \alpha_o x_o^n + \alpha_1 x_o^{n-1} + \alpha_2 x_o^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-2}x_o^2 + \alpha_{n-1}x_o + + \alpha_n$.

Ἕνας τρόπος γιά νά βροῦμε τήν τιμή $p(x_o)$ εἶναι ὁ ἀκόλουθος. Βρίσκουμε πρῶτα τήν τιμή τοῦ μεγιστοβάθμιου ὅρου $\alpha_o x_o^n$ πολλαπλασιάζοντας τόν συντελεστή α_o ἐπί τόν ἀριθμό x_o, τό γινόμενο $\alpha_o x_o$ ἐπί τόν ἀριθμό x_o, τό νέο γινόμενο $\alpha_o x_o^2$ ξανά ἐπί x_o κ.ο.κ. μέχρι νά βροῦμε τόν ὅρο $\alpha_o x_o^n$. Ἔτσι γιά τήν εὕρεση τοῦ πρώτου ὅρου ἐκτελοῦμε συνολικά n πολλαπλασιασμούς. Γιά τήν εὕρεση τῆς τιμῆς τοῦ δεύτερου ὅρου $\alpha_1 x_o^{n-1}$ ἐργαζόμαστε πάλι μέ τόν ἴδιο τρόπο. Δηλαδή πολλαπλασιάζουμε τό συντελεστή α_1 ἐπί x_o, τό γινόμενο $\alpha_1 x_o$ ξανά ἐπί x_o κ.ο.κ. μέχρι νά βροῦμε τόν ὅρο $\alpha_1 x_o^{n-1}$. Κάνουμε ἔτσι γιά τήν εὕρεση τοῦ δεύτερου ὅρου $\alpha_1 x_o^{n-1}$ n-1 πολλαπλασιασμούς. Μέ τόν ἴδιο τρόπο συνεχίζουμε καί βρίσκουμε ὅλους τούς ὅρους μέχρι καί τόν προτελευταῖο $\alpha_{n-1}x_o$, πού γιά νά τόν βροῦμε κάνουμε ἕναν πολλαπλασιασμό. Μέχρι στιγμῆς λοιπόν γιά τήν εὕρεση ὅλων τῶν ὅρων τοῦ ἀθροίσματος $p(x_o) = \alpha_o x_o^n + \alpha_1 x_o^{n-1} + \alpha_2 x_o^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-2}x_o^2 + \alpha_{n-1}x_o + \alpha_n$ ἔχουμε κάνει

$$n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2} \text{ πολλαπλασιασμούς.}$$

Τέλος γιά τήν εὕρεση τοῦ ἀθροίσματος $p(x_o)$ πού ἀποτελεῖται ἀπό n+1 ὅρους ἀρκεῖ νά κάνουμε n προσθέσεις καί ἀφαιρέσεις (προσθαφαιρέσεις). Ἔτσι γιά νά βροῦμε τήν τιμή $p(x_o)$ μέ τόν τρόπο πού περιγράψαμε ἀπαιτοῦνται $\frac{n(n+1)}{2}$ πολλαπλασιασμοί καί n προσθαφαιρέσεις.

Ἕνας δεύτερος καί πιό σύντομος τρόπος γιά τήν εὕρεση τῆς τιμῆς $p(x_o)$ εἶναι αὐτός πού περιγράφουμε στή συνέχεια. Πρῶτα σχηματίζουμε τίς διαδοχικές δυνάμεις τῆς τιμῆς τοῦ x_o ὡς ἑξῆς. Πολλαπλασιάζουμε τό x_o ἐπί τό x_o καί βρίσκουμε τό x_o^2 κάνοντας ἔτσι ἕναν πολλαπλασιασμό. Μετά πολλαπλασιάζουμε τό x_o^2 ἐπί τό x_o καί βρίσκουμε τό x_o^3 κάνοντας ἔτσι ἕναν ἄλλον πολλαπλασιασμό κ.ο.κ. καί τέλος πολλαπλασιάζουμε τό

x_o^{n-1} ἐπί τό x_o καί βρίσκουμε τό x_o^n κάνοντας ἔτσι ἕναν τελευταῖο πολλαπλασιασμό. Μέ τόν τρόπο αὐτό ἔχουμε βρεῖ ὅλες τίς τιμές τῶν διαδοχικῶν δυνάμεων τοῦ x_o κάνοντας συνολικά, ὅπως εἶναι φανερό, n-1 πολλαπλασιασμούς. Στή συνέχεια μποροῦμε νά βροῦμε κάθε ἕναν ἀπό τούς ὅρους τοῦ ἀθροίσματος $p(x_o)$ πολλαπλασιάζοντας τό συντελεστή α_o ἐπί τήν τιμή x_o^n, τό συντελεστή α_1 ἐπί τήν τιμή x_o^{n-1} κ.ο.κ. καί τέλος τό συντελεστή α_{n-1} ἐπί x_o. Ἔτσι γιά τήν εὕρεση τῶν ὅρων τοῦ ἀθροίσματος $p(x_o)$ κάνουμε ἄλλους n πολλαπλασιασμούς. Δηλαδή συνολικά ἔχουμε κάνει μέχρι στιγμῆς $n-1+n=2n-1$ πολλαπλασιασμούς. Χρειαζόμαστε βέβαια ἀκόμη, ὅπως καί στήν προηγούμενη περίπτωση, νά κάνουμε n προσθαφαιρέσεις γιά τήν εὕρεση τοῦ ἀθροίσματος $p(x_o)$ πού ἀποτελεῖται ἀπό n+1 ὅρους. Ἔτσι ἐργαζόμενοι μέ τό δεύτερο τρόπο πού περιγράψαμε, γιά τήν εὕρεση τῆς τιμῆς $p(x_o)$, ἀπαιτοῦνται 2n-1 πολλαπλασιασμοί καί n προσθαφαιρέσεις.

Συγκρίνοντας τώρα τούς δύο τρόπους πού περιγράψαμε ἀπό τήν ἄποψη τοῦ πλήθους τῶν πράξεων, πού ἀπαιτοῦνται γιά τήν εὕρεση τῆς τιμῆς $p(x_o)$ βλέπουμε ὅτι καί στίς δύο περιπτώσεις χρειάζεται τό ἴδιο πλῆθος προσθαφαιρέσεων n ἐνῶ γιά τό πλῆθος τῶν πολλαπλασιασμῶν πού ἀπαιτοῦνται σχηματίζουμε τή διαφορά

$$\frac{n(n+1)}{2} - (2n-1) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\,.$$

Ἡ ἔκφραση τοῦ δεύτερου μέλους δείχνει ὅτι ἐκτός ἀπό τίς περιπτώσεις n=1 καί 2, ὁπότε ἡ διαφορά εἶναι μηδέν, γιά κάθε ἄλλη τιμή τοῦ $n \geq 3$ ἡ διαφορά εἶναι θετική καί ἐπομένως τό πλῆθος τῶν πολλαπλασιασμῶν, ἄρα καί τό πλῆθος τῶν πράξεων, στή δεύτερη περίπτωση εἶναι μικρότερο.

Ὅσο καί ἄν αὐτό φαίνεται κάπως παράξενο μέ τήν πρώτη ματιά ὑπάρχει ὡστόσο καί ἄλλος τρόπος γιά τήν εὕρεση τῆς τιμῆς $p(x_o)$ ταχύτερος ἀπό τούς δύο προηγούμενους. Ἡ μέθοδος μέ τήν ὁποία πετυχαίνεται αὐτό, ὅπως θά δοῦμε στή συνέχεια, στηρίζεται στήν παρατήρηση ὅτι ἡ τιμή $p(x_o)$ εἶναι τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $p(x)$ διά τοῦ διωνύμου $(x-x_o)$. Πραγματικά ἄν $q(x)$ καί r εἶναι ἀντίστοιχα τό πηλίκο καί τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $p(x)$ διά τοῦ $(x-x_o)$ ἔχουμε

$$p(x) \equiv (x-x_o)q(x)+r\,. \qquad (1.1)$$

Ἐπομένως γιά $x = x_o$ παίρνουμε ἀμέσως

$$p(x_o) = r .$$

Ἔστω τώρα ὅτι

$$q(x) \equiv \beta_o x^{n-1} + \beta_1 x^{n-2} + \beta_2 x^{n-3} + \ldots + \beta_{n-2} x + \beta_{n-1}$$

εἶναι ἡ μορφή τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως (1.1). Ἀντικαθιστώντας στήν ταυτότητα τῆς διαιρέσεως καί κάνοντας πράξεις λαβαίνουμε

$$\begin{aligned} p(x) &\equiv \alpha_o x_n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n \equiv \\ &\equiv (x - x_o)(\beta_o x^{n-1} + \beta_1 x^{n-2} + \beta_2 x^{n-3} + \ldots + \beta_{n-2} x + \beta_{n-1}) + p(x_o) \equiv \\ &\equiv \beta_o x^n + (\beta_1 - \beta_o x_o) x^{n-1} + (\beta_2 - \beta_1 x_o) x^{n-2} + \ldots + (\beta_{n-1} - \beta_{n-2} x_o) x + \\ &\quad + p(x_o) - \beta_{n-1} x_o . \end{aligned}$$

Ἐξισώνοντας τούς συντελεστές τῶν ἴδιων δυνάμεων τοῦ x στά δύο πολυώνυμα τῶν παραπάνω ταυτοτήτων λαβαίνουμε

$$\begin{aligned} \beta_o &= \alpha_o \\ \beta_1 - \beta_o x_o &= \alpha_1 \\ \beta_2 - \beta_1 x_o &= \alpha_2 \\ &\vdots \\ \beta_{n-1} - \beta_{n-2} x_o &= \alpha_{n-1} \\ p(x_o) - \beta_{n-1} x_o &= \alpha_n \end{aligned}$$

καί ἀπό αὐτές

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \alpha_0 + \beta_{-1}x_0 \\
\beta_1 &= \alpha_1 + \beta_0 x_0 \\
\beta_2 &= \alpha_2 + \beta_1 x_0 \\
&\vdots \\
\beta_{n-1} &= \alpha_{n-1} + \beta_{n-2}x_0 \\
\beta_n &= \alpha_n + \beta_{n-1}x_0
\end{aligned} \qquad (1.2)$$

ὅπου τέθηκε γιά χάρη τῆς ὁμοιομορφίας $\beta_{-1}=0$ καί $\beta_n = p(x_0)$. Εἶναι τώρα φανερό ὅτι γιά τήν εὕρεση τῆς τιμῆς $\beta_n = p(x_0)$ βρίσκουμε ἀπό τή δεύτερη σχέση τό συντελεστή β_1 κάνοντας ἕναν πολλαπλασιαμό τοῦ $\beta_0(=\alpha_0)$ ἐπί τό x_0 καί μία προσθαφαίρεση τῶν ὅρων α_1 καί $\beta_0 x_0$. Μέ τόν ἴδιο τρόπο βρίσκουμε ἀπό τήν τρίτη σχέση τό συντελεστή β_2 κάνοντας πάλι ἕναν πολλαπλασιασμό καί μία προσθαφαίρεση κ.ο.κ. καί τέλος βρίσκουμε ἀπό τήν τελευταία σχέση τό συντελεστή $\beta_n(=p(x_0))$ κάνοντας ἕναν ἀκόμη πολλαπλασιασμό καί μία προσθαφαίρεση. Μέ τόν τρόπο αὐτό βρίσκουμε τήν τιμή $p(x_0)$ κάνοντας συνολικά n πολλαπλασιασμούς καί n προσθαφαιρέσεις. Ὅπως παρατηροῦμε ὁ ἀριθμός τῶν προσθαφαιρέσεων εἶναι ὁ ἴδιος, ἐνῶ ὁ ἀριθμός τῶν πολλαπλασιασμῶν εἶναι, ἐκτός ἀπό τήν περίπτωση $n=1$, μικρότερος ἀπό ὅτι στήν προηγούμενη περίπτωση. Αὐτό βέβαια φαίνεται ἀπό τή διαφορά

$$2n-1-n = n-1$$

πού γιά $n \geq 2$ εἶναι πάντοτε θετική.

Ἡ μέθοδος, πού μόλις παρουσιάσαμε, γιά τήν εὕρεση τῆς τιμῆς $p(x_0)$ ἐκτός ἀπό τό ὅτι πλεονεκτεῖ ἀπό τίς δύο προηγούμενες ἀπό τήν ἄποψη τοῦ πλήθους τῶν ἀπαιτούμενων πράξεων ἔχει καί τό πλεονέκτημα νά βρίσκει τούς συντελεστές $\beta_i \mid i = 0(1)n-1$ ⊛ τοῦ πηλίκου $q(x)$ τῆς διαιρέσεως τοῦ $p(x)$ διά $(x - x_o)$ γεγονός πού μερικές φορές γίνεται χρησιμότατο ὅπως θά δοῦμε παρακάτω.

Οἱ παραπάνω $n+1$ ἐξισώσεις πού δίνονται στίς σχέσεις (1.2) εἶναι δυνατό νά γραφοῦν συνοπτικά ὡς ἑξῆς

$$\beta_i = \alpha_i + \beta_{i-1}x_o \quad \Big| i = 0(1)n \quad \text{μέ } \beta_{-1} = 0 \quad \text{καί } \beta_n = p(x_o). \qquad (1.3)$$

Πολλές φορές γιά τόν ἁπλούστερο ὑπολογισμό τῶν συντελεστῶν $\beta_i \mid i = 0(1)n$ καί ἀπό αὐτούς τῆς τιμῆς $p(x_o) = \beta_n$, πού βρίσκονται φυσικά χρησιμοποιώντας τίς σχέσεις (1.2) ἤ (1.3), ἀκολουθεῖται ἡ διάταξη τῶν συντελεστῶν καί τῶν πράξεων, πού δίνουν αὐτούς ὅπως στό ἑπόμενο διάγραμμα

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & \alpha_o & \alpha_1 & \alpha_2 \ \cdots & & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\
x_o & & \beta_o x_o & \beta_1 x_o \ \cdots & & \beta_{n-2}x_o & \beta_{n-1}x_o \\
\hline
 & \beta_o & \beta_1 & \beta_2 \ \cdots & & \beta_{n-1} & \beta_n = p(x_o)
\end{array}$$

Ὁ παραπάνω τρόπος γιά τήν εὕρεση τῆς τιμῆς $p(x_o)$ καλεῖται ἀλγόριθμος ἤ σχῆμα τοῦ Horner. Πολλές φορές ἡ ἴδια μέθοδος εἶναι γνωστή καί σάν μέθοδος τῆς συνθετικῆς διαιρέσεως.

Παρατήρηση: Εἶναι δυνατό ἐπεκτείνοντας κανείς κατάλληλα τό σχῆμα τοῦ Horner καί τή σχετική θεωρία νά καλύψει καί τήν περίπτωση τῆς εὑρέσεως τῆς τιμῆς ἑνός πολυωνύμου, μέ πραγματικούς συντελεστές, γιά κάποια μιγαδική τιμή $\alpha + \beta i$ τῆς μεταβλητῆς του.

Παράδειγμα

Νά βρεθεῖ μέ τήν ἐφαρμογή τοῦ σχήματος τοῦ Horner ἡ τιμή τοῦ πολυωνύμου $p(x) \equiv 3x^5 - 2x^3 + x$ στό σημεῖο $x_o = -2$.

⊛ Ὁ συμβολισμός $0(1)n-1$ δίνει σέ συντομογραφία ὅλους τούς ὅρους τῆς ἀριθμητικῆς προόδου μέ πρῶτο ὅρο 0 λόγο 1 καί τελευταῖο ὅρο $n-1$.

Λύση

Σύμφωνα μέ τή διάταξη τοῦ σχήματος τοῦ Horner ἔχουμε

	3	0	-2	0	1	0
-2		-6	12	-20	40	-82
	3	-6	10	-20	41	-82

Ἄρα $p(-2)=-82$.

1.3.3. Ὑπολογισμός τῶν τιμῶν τῶν παραγώγων πολυωνύμου σέ γνωστό σημεῖο.

Γιά τήν εὕρεση τῶν τιμῶν τῶν παραγώγων τοῦ πολυωνύμου $p(x) \equiv \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}x + \alpha_n$ $(\alpha_0 \neq 0)$ γιά $x = x_0$ ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς. Καταρχήν ἀπό τό θεώρημα τοῦ Taylor ἔχουμε

$$p(x) \equiv p(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}\,p'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}\,p''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\,p^{(n-1)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^n}{n!}\,p^{(n)}(x_0)\,. \tag{1.4}$$

Ἐφαρμόζοντας τώρα διαδοχικά τήν ταυτότητα τῆς διαιρέσεως τοῦ $p(x)$ διά τοῦ $(x-x_0)$ καί στή συνέχεια τῶν διαδοχικῶν πηλίκων διά $(x-x_0)$ λαβαίνουμε

$$p(x) \equiv (x-x_0)q_1(x) + r_0$$

$$q_1(x) \equiv (x-x_0)q_2(x) + r_1$$

$$q_2(x) \equiv (x-x_0)q_3(x) + r_2$$

$$\vdots$$

$$q_{n-1}(x) \equiv (x-x_o)q_n(x) + r_{n-1}$$

$$q_n(x) \equiv (x-x_o).0 + r_n.$$

Ἀπό τίς παραπάνω σχέσεις μέ διαδοχικές ἀντικαταστάσεις ἔχουμε

$$\begin{aligned} p(x) &\equiv (x-x_o)q_1(x) + r_o \equiv (x-x_o)^2 q_2(x) + r_1(x-x_o) + r_o \equiv \\ &\equiv (x-x_o)^3 q_3(x) + r_2(x-x_o)^2 + r_1(x-x_o) + r_o \equiv \ldots \equiv \\ &\equiv r_n(x-x_o)^n + r_{n-1}(x-x_o)^{n-1} + \ldots + r_2(x-x_o)^2 + \\ &+ r_1(x-x_o) + r_o . \end{aligned} \tag{1.5}$$

Ἐξισώνοντας τώρα τούς συντελεστές τῶν ἴδιων δυνάμεων τοῦ $(x-x_o)$ στά δύο ἀναπτύγματα τῶν δεξιῶν μελῶν τῶν σχέσεων (1.4) καί (1.5) λαβαίνουμε

$$\begin{aligned} r_o &= p(x_o) \\ r_1 &= p'(x_o) \\ r_2 &= \frac{p''(x_o)}{2!} \\ &\ \ \vdots \\ r_{n-1} &= \frac{p^{(n-1)}(x_o)}{(n-1)!} \\ r_n &= \frac{p^{(n)}(x_o)}{n!} \end{aligned}$$

ἤ γενικά

$$p^{(k)}(x_o) = k!\,r_k \quad |k = 0(1)n.$$

'Από τίς παραπάνω σχέσεις καί άπό τό γεγονός ότι οἱ συντελεστές r_k $|k=0(1)n$ εἶναι τά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων τῶν πολυωνύμων $q_k(x)$ $|k=0(1)n$ διά τοῦ διωνύμου $(x-x_o)$, μέ ἄλλα λόγια οἱ τιμές $q_k(x_o)$ $|k=0(1)n$, συμπεραίνεται ὅτι μέ έπανειλημμένες έφαρμογές τοῦ σχήματος τοῦ Horner εἶναι δυνατό νά βροῦμε τόσο τήν τιμή τοῦ πολυωνύμου ὅσο καί τῶν παραγώγων του στό σημεῖο $x=x_o$.

Παράδειγμα 1

Δίνεται τό πολυώνυμο $p(x) \equiv 6x^4-53x^3+184x^2-295x+186$. Μέ έπανειλημμένες έφαρμογές τοῦ σχήματος τοῦ Horner νά βρεθοῦν οἱ τιμές $p(2)$, $p'(2)$, $p''(2)$, $p'''(2)$ καί $p^{IV}(2)$.

Λύση

Διατάσσοντας σύμφωνα μέ τό σχῆμα τοῦ Horner βρίσκουμε διαδοχικά

	6	-53	184	-295	186
2		12	-82	204	-182
	6	-41	102	-91	$4=r_o$
2		12	-58	88	
	6	-29	44	$-3=r_1$	
2		12	-34		
	6	-17	$10=r_2$		
2		12			
	6	$-5=r_3$			
	‖				
	r_4				

'Εφαρμόζοντας τόν τύπο $p^{(k)}(x_o) = k!\,r_k$ γιά $k=0(1)4$ βρίσκουμε

$$p(2) = 0!\,r_o = 1\times 4 = 4$$

$$p'(2) = 1!\,r_1 = 1\times(-3) = -3$$

$$p''(2) = 2!\,r_2 = 2\times 10 = 20$$

$$p'''(2) = 3!\,r_3 = 6\times(-5) = -30$$

$$p^{IV}(2) = 4!\,r_4 = 24\times 6 = 144\,.$$

Παράδειγμα 2

Μέ ἐπανειλημμένες ἐφαρμογές τοῦ σχήματος τοῦ Horner καί μόνο νά γραφτεῖ τό πολυώνυμο $p(x) \equiv 3x^2 - 4x + 5$ μέ τή μορφή $p(x) \equiv \alpha + \beta(x-2) + \gamma(x-2)^2$.

Λύση

Χρησιμοποιώντας τό θεώρημα τοῦ Taylor μέ $x_o = 2$, τό πολυώνυμο πού δόθηκε μπορεῖ νά γραφτεῖ ὡς ἑξῆς

$$p(x) \equiv 3x^2 - 4x + 5 \equiv p(2) + \frac{(x-2)}{1!}\,p'(2) + \frac{(x-2)^2}{2!}\,p''(2)$$

ἤ ἐπειδή

$$p^{(k)}(x_o) = k!\,r_k \quad \Big|\, k = 0(1)2$$

θά ἔχουμε τελικά

$$p(x) \equiv r_o + r_1(x-2) + r_2(x-2)^2\,.$$

Ἑπομένως $\alpha = r_o$, $\beta = r_1$ καί $\gamma = r_2$. Τό σχῆμα τοῦ Horner δίνει

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 3 & -4 & 5 \\
2 & & 6 & 4 \\
\hline
 & 3 & 2 & 9 = r_o \\
2 & & 6 & \\
\hline
 & 3 & 8 = r_1 & \\
 & \shortparallel & & \\
 & r_2 & &
\end{array}$$

Ἄρα

$$p(x) \equiv 9 + 8(x-2) + 3(x-2)^2.$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Νά δειχτεῖ, μέ ἕνα παράδειγμα, ὅτι ἡ στρογγύλευση ἑνός ἀριθμοῦ σέ τρία δ.ψ. καί στή συνέχεια ἡ στρογγύλευση τοῦ ἀριθμοῦ, πού προκύπτει, σέ δύο δ.ψ., δέν δίνει πάντοτε τό ἴδιο ἀποτέλεσμα μέ τήν κατευθεῖαν στρογγύλευση τοῦ ἀρχικοῦ ἀριθμοῦ σέ δύο δ.ψ.

2. Δίνονται οἱ ἀκριβεῖς τιμές τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν $x_1 = 0.23750$, $x_2 = 0.23650$, $x_3 = 0.23652$ καί $x_4 = 0.29950$. Νά βρεθεῖ τό ἄθροισμά τους μέ τούς παρακάτω δύο τρόπους: α) εὕρεση τοῦ ἀθροίσματος καί στρογγύλευσή του σέ τρία δ.ψ. β) στρογγύλευση τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν σέ τρία δ.ψ. καί μετά εὕρεση τοῦ ἀθροίσματός τους. (Ἀπ. 1.010, 1.011)

3. Δίνονται οἱ ἀριθμοί 2.5 καί -0.020 στρογγυλεμένοι, ὁ καθένας, σέ δύο σ.ψ. Νά βρεθοῦν κατά προσέγγιση τά μέγιστα ἀπόλυτα σφάλματα τῶν δύο ἀριθμῶν. (Ἀπ. 0.02, 0.025) Λάθος εσφαλμένο

4. Νά βρεθεῖ τό μέγιστο ἀπόλυτο σφάλμα τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος $3.54 - 0.200 + 25.0$, ὅταν εἶναι γνωστό ὅτι ὅλοι οἱ ἀριθμοί, πού δίνονται, εἶναι στρογγυλεμένοι σέ τρία σ.ψ. (Ἀπ. 0.0555)

5. Νά βρεθεῖ, κατά προσέγγιση, τό μέγιστο ἀπόλυτο σχετικό σφάλμα γιά τή συνάρτηση $y = x_1x_2^2$, ἄν τά μέγιστα ἀπόλυτα σχετικά σφάλματα τῶν x_1 καί x_2 εἶναι 0.1 καί 0.2 ἀντίστοιχα. (Ἀπ. 0.5)

6. Ἄν οἱ ἀριθμοί $x_1 \approx 1.00$ καί $x_2 \approx 2.00$ δίνονται στρογγυλεμένοι σέ δύο δ.ψ., νά βρεθεῖ τό μέγιστο ἀπόλυτο σφάλμα τῆς ἐκφράσεως $x_1 + x_2 + x_1x_2$. (Ἀπ. 0.025025)

7. Σέ τρεῖς θέσεις μνήμης Η.Υ., ὁ ὁποῖος μπορεῖ νά ἀπομνημονεύει ἀριθμούς μέ δύο σ.ψ., βρίσκονται ἀπομνημονευμένοι οἱ ἀριθμοί 0.56, 0.65 καί

0.54. Νά δειχτεῖ ὅτι

$$(0.56 \times 0.65) \times 0.54 \neq 0.56 \times (0.65 \times 0.54),$$

δηλαδή ὅτι δέν ἰσχύει ἡ προσεταιριστική ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασια-σμοῦ. (Ἀπ. $0.19 \neq 0.20$)

8. Δίνεται τό πολυώνυμο $p(x) \equiv x^3 - x$. Νά βρεθοῦν, μέ ἐφαρμογές τοῦ σχήματος τοῦ Horner καί μόνο, οἱ τιμές $p(-1)$, $p'(0)$ καί $p''(1)$. (Ἀπ. 0, -1, 6)

9. Ἐφαρμόζοντας τό σχῆμα τοῦ Horner καί μόνο, ὅσες φορές χρειά-ζεται, νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῆς πρώτης παραγώγου τοῦ κλάσματος $\frac{p(x)}{q(x)}$, στό σημεῖο $x=2$, ὅταν $p(x) \equiv 3x^2 - 2x + 1$ καί $q(x) \equiv 3x^2 - 2$. (Ἀπ. -0.08)

10. Νά βρεθεῖ, μέ ἐπανειλημμένες ἐφαρμογές τοῦ σχήματος τοῦ Horner καί μέ τέλεια ἀποφυγή ὅλων τῶν περιττῶν πράξεων, ἡ τιμή τῆς τρίτης παραγώγου τοῦ πολυωνύμου $x^5 - x^3 + x$, στό σημεῖο $x = -2$. (Ἀπ. 234)

11. Νά βρεθεῖ τό ἐλάχιστο πλῆθος τῶν πράξεων, πού ἀπαιτοῦνται γιά τόν ὑπολογισμό τῆς δεύτερης παραγώγου πολυωνύμου βαθμοῦ n, μέ ἐπα-νειλημμένες ἐφαρμογές τοῦ σχήματος τοῦ Horner. (Ἀπ. προσθέσεις καί ἀφαιρέσεις $3n - 6$, πολλαπλασιασμοί $3n - 5$)

12. Δίνεται τό πολυώνυμο $p(x) \equiv x^3 - x^2 + x - 1$. Μέ ἐπανειλημμένες ἐ-φαρμογές τοῦ σχήματος τοῦ Horner καί μόνο, νά προσδιοριστοῦν οἱ συν-τελεστές $\alpha_i \; | i = 0(1)3$ στήν ἔκφραση $q(x) \equiv \alpha_0 + \alpha_1(x+1) + \alpha_2(x+1)^2 + \alpha_3(x+1)^3$ ἔτσι ὥστε $p(x) \equiv q(x)$. (Ἀπ. $\alpha_0 = -4$, $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = -4$, $\alpha_3 = 1$)

2. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ

2.1. Γενικά

Ἕνα ἀπό τά κύρια ἀντικείμενα τῆς Α.Α., ὅπως ἀναφέρθηκε στό προηγούμενο Κεφάλαιο, καί θά τό δοῦμε στό ἐπόμενο, εἶναι ἡ προσέγγιση συναρτήσεων μέ ἄλλες ἁπλούστερες καί σάν τέτοιες χρησιμοποιοῦνται τά πολυώνυμα. Σημαντικό ρόλο στήν ἀνάπτυξη τῆς ἀντίστοιχης θεωρίας παίζουν οἱ λεγόμενες πεπερασμένες διαφορές, τίς ὁποῖες εἰσάγουμε στή συνέχεια μέ ἕνα παράδειγμα.

Ἔστω ὅτι δίνονται οἱ τιμές μιᾶς συναρτήσεως f(x) γιά ὁρισμένες τιμές τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς x γραμμένες σέ μία στήλη. Ἀπό τίς τιμές αὐτές τῆς συναρτήσεως κατασκευάζουμε ἕναν πίνακα, πού καλεῖται πίνακας διαφορῶν, ὡς ἑξῆς. Γράφουμε σέ μία νέα στήλη πρός τά δεξιά τῶν προηγούμενων τίς διαφορές πού προκύπτουν, ἄν κάθε τιμή τῆς συναρτήσεως τοῦ πίνακα τήν ἀφαιρέσουμε ἀπό τήν ἑπόμενη τιμή της. Οἱ διαφορές αὐτές, πού γράφονται στή νέα στήλη μεταξύ τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως ἀπό τίς ὁποῖες προῆρθαν, καλοῦνται πρῶτες διαφορές ἤ διαφορές πρώτης τάξης. Μέ τόν ἴδιο τρόπο κατασκευάζουμε τώρα μία νέα στήλη πρός τά δεξιά τῆς στήλης τῶν πρώτων διαφορῶν, ὅπου γράφουμε τίς διαφορές πού βρίσκουμε μέ τόν ἴδιο τρόπο ἀπό τίς πρῶτες διαφορές ὅπως πρίν βρήκαμε τίς πρῶτες διαφορές ἀπό τίς τιμές τῆς συναρτήσεως.

x	f(x)	1ες διαφ.	2ες διαφ.	3ες διαφ.	4ες διαφ.
-3	-2				
		6			
-2	4		-7		
		-1		5	
0	3		-2		5
		-3		10	
1	0		8		
		5			
4	5				

Οἱ νέες διαφορές καλοῦνται δεύτερες διαφορές ἤ διαφορές δεύτερης τάξης κ.ο.κ. Στήν περίπτωση τοῦ παραδείγματος ὁ πίνακας τῶν διαφορῶν τελειώνει στή στήλη τῶν τέταρτων διαφορῶν. Γενικά, ἕνας πίνακας διαφορῶν πού κατασκευάζεται μέ βάση k+1 τιμές τῆς συναρτήσεως f(x) ἐξαντλεῖται στή στήλη τῶν διαφορῶν k τάξης. Ὅπως ἔγινε φανερό κατά τήν κατασκευή τοῦ πίνακα διαφορῶν οἱ τιμές τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς δέν τόν ἐπηρεάζουν καί μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν μόνο σάν σημεῖα ἀναφορᾶς.

Ἀνάλογα μέ τόν τρόπο πού χρησιμοποιοῦμε γιά νά συμβολίσουμε τίς διαφορές τοῦ πίνακα διαφορῶν μποροῦμε νά διακρίνουμε τρεῖς τύπους διαφορῶν ὅπως θά δοῦμε στήν ἑπόμενη παράγραφο.

2.2. Ὁρισμοί

2.2.1. Πρός τά ἐμπρός διαφορές.

Οἱ πρῶτες πρός τά ἐμπρός διαφορές ὁρίζονται ἀπό τή σχέση

$$\Delta f_n = f(x_{n+1}) - f(x_n) = f_{n+1} - f_n \,.$$

Οἱ δεύτερες πρός τά ἐμπρός διαφορές ὁρίζονται ἀπό τή σχέση

$$\Delta^2 f_n = \Delta(\Delta f_n) = \Delta f_{n+1} - \Delta f_n = (f_{n+2} - f_{n+1}) - (f_{n+1} - f_n) =$$

$$= f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n \,.$$

Τέλος, ἐπαγωγικά, ὁρίζονται οἱ πρός τά ἐμπρός διαφορές k τάξης ἀπό τίς πρός τά ἐμπρός διαφορές k-1 τάξης

$$\Delta^k f_n = \Delta(\Delta^{k-1} f_n) = \Delta^{k-1} f_{n+1} - \Delta^{k-1} f_n \,.$$

Ὅταν χρησιμοποιεῖται ὁ συμβολισμός τῶν πρός τά ἐμπρός διαφορῶν, τότε ὁ πίνακας τῶν διαφορῶν ἔχει τήν ἀκόλουθη μορφή

$$\begin{array}{cccccc}
x_{n-2} & f_{n-2} & & & & \\
 & & \Delta f_{n-2} & & & \\
x_{n-1} & f_{n-1} & & \Delta^2 f_{n-2} & & \\
 & & \Delta f_{n-1} & & \Delta^3 f_{n-2} & \\
x_n & f_n & & \Delta^2 f_{n-1} & & \Delta^4 f_{n-2} \\
 & & \Delta f_n & & \Delta^3 f_{n-1} & \\
x_{n+1} & f_{n+1} & & \Delta^2 f_n & & \\
 & & \Delta f_{n+1} & & & \\
x_{n+2} & f_{n+2} & & & &
\end{array}$$

Όπως μπορεῖ νά παρατηρήσει κανείς,οἱ ἴδιοι δεῖκτες ἐμφανίζονται κατά μῆκος διαγωνίων μέ φορά ἀπό πάνω ἀριστερά πρός τά κάτω δεξιά.

2.2.2. Πρός τά πίσω διαφορές

Οἱ πρῶτες πρός τά πίσω διαφορές ὁρίζονται ἀπό τή σχέση

$$\underline{\nabla f_n = f(x_n) - f(x_{n-1}) = f_n - f_{n-1}}.$$

Οἱ δεύτερες πρός τά πίσω διαφορές ὁρίζονται ἀπό τή σχέση

$$\nabla^2 f_n = \nabla(\nabla f_n) = \nabla f_n - \nabla f_{n-1} = (f_n - f_{n-1}) - (f_{n-1} - f_{n-2}) =$$

$$= f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2} .$$

Τέλος, ὁρίζονται ἐπαγωγικά οἱ πρός τά πίσω διαφορές k τάξης ἀπό τίς πρός τά πίσω διαφορές k-1 τάξης

$$\nabla^k f_n = \nabla(\nabla^{k-1} f_n) = \nabla^{k-1} f_n - \nabla^{k-1} f_{n-1} .$$

Ὁ πίνακας τῶν πρός τά πίσω διαφορῶν ἔχει τή μορφή

$$
\begin{array}{llllll}
x_{n-2} & f_{n-2} & & & & \\
 & & \nabla f_{n-1} & & & \\
x_{n-1} & f_{n-1} & & \nabla^2 f_n & & \\
 & & \nabla f_n & & \nabla^3 f_{n+1} & \\
x_n & f_n & & \nabla^2 f_{n+1} & & \nabla^4 f_{n+2} \\
 & & \nabla f_{n+1} & & \nabla^3 f_{n+2} & \\
x_{n+1} & f_{n+1} & & \nabla^2 f_{n+2} & & \\
 & & \nabla f_{n+2} & & & \\
x_{n+2}. & f_{n+2} & & & &
\end{array}
$$

όπου οἱ ἴδιοι δεῖκτες ἐμφανίζονται κατά μῆκος διαγωνίων μέ φορά ἀπό τά κάτω ἀριστερά πρός τά πάνω δεξιά.

2.2.3. Κ ε ν τ ρ ι κ έ ς δ ι α φ ο ρ έ ς

Οἱ πρῶτες κεντρικές διαφορές ὁρίζονται ἀπό τή σχέση

$$\delta f_{n+1/2} = f(x_{n+1}) - f(x_n) = f_{n+1} - f_n \,.$$

Οἱ δεύτερες κεντρικές διαφορές ὁρίζονται ἀπό τή σχέση

$$\delta^2 f_n = \delta(\delta f_n) = \delta f_{n+1/2} - \delta f_{n-1/2} = (f_{n+1} - f_n) - (f_n - f_{n-1}) =$$

$$= f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1} \,.$$

Τέλος, ἐπαγωγικά, ὁρίζονται οἱ κεντρικές διαφορές περιττῆς καί ἄρτιας τάξης ἀπό τίς σχέσεις

$$\delta^{2k-1} f_{n+1/2} = \delta(\delta^{2k-2} f_{n+1/2}) = \delta^{2k-2} f_{n+1} - \delta^{2k-2} f_n \quad \text{καί}$$

$$\delta^{2k} f_n = \delta(\delta^{2k-1} f_n) = \delta^{2k-1} f_{n+1/2} - \delta^{2k-1} f_{n-1/2} \,.$$

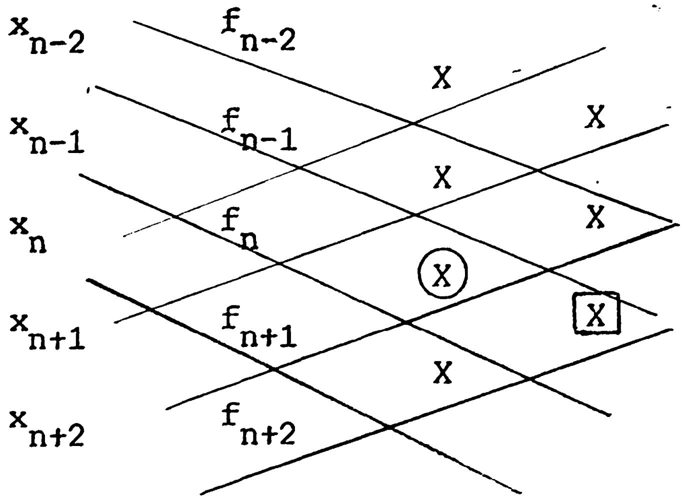
Σημειώνουμε ἐδῶ ὅτι οἱ κεντρικές διαφορές περιττῆς τάξης ἀναφέρονται (μέ τό συμβολισμό τους) σέ εἰκονικές τιμές τῆς συναρτήσεως οἱ ὁποῖες ἀντιστοιχοῦν σέ τιμές τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς πού εἶναι ἡμιαθροίσματα διαδοχικῶν τιμῶν αὐτῆς στόν πίνακα, ἐνῶ ἀντίθετα οἱ κεντρικές διαφορές ἄρτιας τάξης ἀναφέρονται σέ τιμές τῆς συναρτήσεως τοῦ πίνακα. Ὅταν χρησιμοποιεῖται ὁ συμβολισμός τῶν κεντρικῶν διαφορῶν, τότε ὁ πίνακας τῶν διαφορῶν ἔχει τήν παρακάτω μορφή.

$$
\begin{array}{cccccc}
x_{n-2} & f_{n-2} & & & & \\
 & & \delta_{n-3/2} & & & \\
x_{n-1} & f_{n-1} & & \delta^2_{n-1} & & \\
 & & \delta_{n-1/2} & & \delta^3_{n-1/2} & \\
x_{n} & f_{n} & & \delta^2_{n} & & \delta^4_{n} \\
 & & \delta_{n+1/2} & & \delta^3_{n+1/2} & \\
x_{n+1} & f_{n+1} & & \delta^2_{n+1} & & \\
 & & \delta_{n+3/2} & & & \\
x_{n+2} & f_{n+2} & & & &
\end{array}
$$

ὅπου οἱ ἴδιοι δεῖκτες ἐμφανίζονται κατά μῆκος τῆς ἴδιας ὁριζόντιας γραμμῆς.

2.3. Σχέσεις μεταξύ τῶν τριῶν τύπων διαφορῶν

Θά πρέπει νά τονιστεῖ ὅτι οἱ πίνακες τῶν διαφορῶν πού χρησιμοποιοῦν τίς πρός τά ἐμπρός, τίς πρός τά πίσω καί τίς κεντρικές διαφορές συμπίπτουν ἀπόλυτα. Περιέχουν δηλαδή τίς ἴδιες τιμές στίς ἴδιες θέσεις. Τό μόνο πού ἀλλάζει ἀπό τόν ἕναν πίνακα στόν ἄλλον εἶναι ὁ συμβολισμός πού χρησιμοποιεῖται. Ἔστω ὅτι κατασκευάζουμε ἕναν πίνακα διαφορῶν, ὅπως αὐτόν πού βρίσκεται στήν ἀρχή τῆς ἑπόμενης σελίδας, ὅπου ἀντί νά χρησιμοποιήσουμε συγκεκριμένο τύπο διαφορῶν, χρησιμοποιοῦμε σ'ὅλες τίς θέσεις τό ἴδιο σύμβολο X, γιά νά δηλώσουμε τήν ἀντίστοιχη τιμή τῆς διαφορᾶς. Εἶναι φανερό ὅτι ἡ τιμή τῆς διαφορᾶς πού προσω-



ρικά συμβολίζεται μέ X ταυτίζεται μέ τήν τιμή Δf_n ἄν χρησιμοποιήσουμε τό συμβολισμό τῶν πρός τά ἐμπρός διαφορῶν, μέ τήν τιμή ∇f_{n+1} ἄν χρησιμοποιήσουμε πρός τά πίσω διαφορές καί μέ τή $\delta f_{n+1/2}$, ἄν χρησιμοποιήσουμε κεντρικές διαφορές. Ἐπομένως ἔχουμε

$$\Delta f_n = \nabla f_{n+1} = \delta f_{n+1/2} \,.$$

Γιά τήν τιμή τῆς διαφορᾶς πού συμβολίζεται στόν παραπάνω πίνακα μέ $\boxed{X}$, ἄν κάνουμε τήν ἴδια σκέψη βρίσκουμε ὅτι συμπίπτει μέ τίς ταυτόσημες ἐκφράσεις

$$\Delta^2 f_n = \nabla^2 f_{n+2} = \delta^2 f_{n+1} \,.$$

Γενικά μποροῦμε νά βροῦμε ὅτι

$$\Delta^k f_n = \nabla^k f_{n+k} = \delta^k f_{n+k/2} \,.$$

Ἀπό τώρα καί στό ἑξῆς, ἐκτός ἀπό τήν περίπτωση πού θά τονίζεται ἰδιαίτερα, τό βῆμα τῆς πινακοποιήσεως (δηλαδή ἡ διαφορά μιᾶς τιμῆς τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς ἀπό τήν ἑπόμενή της) μιᾶς συναρτήσεως θά θεωρεῖται σταθερό καί ἴσο μέ $h>0$. Μέ ἄλλα λόγια θά θεωρεῖται ὅτι οἱ τιμές τῆς ὑπόψη συναρτήσεως $f(x)$ δίνονται γιά ἰσαπέχουσες τιμές τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς x. Ἔτσι εἴμαστε σέ θέση νά διατυπώσουμε καί νά ἀποδείξουμε ἕνα βασικό θεώρημα πού ἀναφέρεται στίς διαφορές.

Θεώρημα

Οἱ διαφορές m τάξης ἑνός πολυωνύμου βαθμοῦ m εἶναι σταθερές.

Ἀπόδειξη

Ἔστω τό πολυώνυμο βαθμοῦ m

$$f(x) \equiv \alpha_o x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-1} x + \alpha_m \quad (\alpha_o \neq 0).$$

Σχηματίζουμε τίς διαφορές πρώτης τάξης σέ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο x τοῦ πίνακα. Ἐπειδή τελικά οἱ τρεῖς τύποι διαφορῶν, ὅπως εἴδαμε πρίν, συμπίπτουν, παίρνουμε γιά εὐκολία πρός τά ἐμπρός διαφορές. Ἔτσι χρησιμοποιώντας καί τό ἀνάπτυγμα τοῦ διωνύμου τοῦ Newton λαβαίνουμε διαδοχικά

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = [\alpha_o(x+h)^m + \alpha_1(x+h)^{m-1} + \ldots +$$

$(x+h)^m = x^m + x^{m-1} h.m + \ldots$

$$+ \alpha_{m-1}(x+h) + \alpha_m] - (\alpha_o x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-1} x + \alpha_m) =$$

$$= [\alpha_o(x^m + mhx^{m-1} + \ldots) + \alpha_1(x^{m-1} + (m-1)hx^{m-2} + \ldots) +$$

$$+ \ldots + \alpha_{m-1}(x+h) + \alpha_m] - (\alpha_o x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-1} x + \alpha_m) =$$

$$= \alpha_o mhx^{m-1} + \text{ὅροι βαθμοῦ} < m-1.$$

Ὡς τώρα ἀποδείξαμε δηλαδή ὅτι οἱ διαφορές πρώτης τάξης ἑνός πολυωνύμου βαθμοῦ m πού ἔχει συντελεστή μεγιστοβάθμιου ὅρου α_o, ὅταν τό βῆμα τῆς πινακοποιήσεως εἶναι h, ἀποτελοῦν πολυώνυμο βαθμοῦ m-1 πού ἔχει συντελεστή μεγιστοβάθμιου ὅρου $\alpha_o mh$. Ἐφαρμόζοντας τό συμπέρασμα στό ὁποῖο μόλις καταλήξαμε μποροῦμε νά βροῦμε διαδοχικά. Γιά τίς διαφορές δεύτερης τάξης

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = \Delta(\alpha_o m h x^{m-1} + \text{ὅροι βαθμοῦ} < m-1) =$$

$$= \alpha_o mh(m-1)hx^{m-2} + \text{ὅροι βαθμοῦ} < m-2 \ .$$

Γιά τίς διαφορές τρίτης τάξης μέ τόν ἴδιο τρόπο

$$\Delta^3 f(x) = \alpha_o mh(m-1)h(m-2)hx^{m-3} + \text{ὅροι βαθμοῦ} < m-3 \ .$$

Καί τέλος ἐπαγωγικά βρίσκουμε ὅτι

$$\Delta^m f(x) = \alpha_o mh(m-1)h(m-2)h \ \ldots \ 2h1hx^{m-m} = \underline{\alpha_o m! h^m} \ .$$

Δηλαδή σταθερό.

Πόρισμα

Οἱ διαφορές m+1 καί ἀνώτερης τάξης ἑνός πολυωνύμου βαθμοῦ m εἶναι ἴσες μέ μηδέν.

Παράδειγμα

Δίνονται οἱ τιμές τῆς συναρτήσεως $f(x) = x^3$ στά σημεῖα $x = 2.5(\underline{0.2})3.5$. Νά βρεθοῦν οἱ διαφορές τρίτης, τέταρτης καί ἀνώτερης τάξης καί νά γίνει ἐπαλήθευση μέ τήν κατασκευή ἑνός πίνακα διαφορῶν.

Λύση

Ἀφοῦ ἡ συνάρτηση $f(x)$ εἶναι πολυώνυμο τρίτου βαθμοῦ, οἱ διαφορές τρίτης τάξης θά εἶναι σταθερές καί ἴσες μέ $\alpha_o m! h^3 = 1 \times 3!(0.2)^3 = 0.048$. Οἱ διαφορές τέταρτης καί ἀνώτερης τάξης θά εἶναι ἴσες μέ μηδέν. Ὁ πίνακας διαφορῶν γιά τή συνάρτηση πού δόθηκε καί γιά τίς ἀντίστοιχες τιμές της βρίσκεται στήν ἀρχή τῆς ἑπόμενης σελίδας. Εἶναι φανερό ὅτι οἱ τιμές τῶν τρίτων καί τέταρτων διαφορῶν τοῦ πίνακα πού κατασκευάστηκε ἐπαληθεύουν τίς ἀντίστοιχες τιμές πού βρέθηκαν πρίν μέ βάση τή θεωρία.

x	f(x)	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
2.5	15.625				
		4058⊛			
2.7	19.683		648		
		4706		48	
2.9	24.389		696		0
		5402		48	
3.1	29.791		744		0
		6146		48	
3.3	35.937		792		
		6938			
3.5	42.875				

2.4. Μετάδοση σφαλμάτων σέ πίνακα διαφορῶν

2.4.1. Γενικά

Ἄν ὑπάρχουν κάποια σφάλματα σέ μία ἤ περισσότερες ἀπό τίς τιμές μιᾶς συναρτήσεως, αὐτό ἔχει σάν συνέπεια, κατά τήν κατασκευή τοῦ πίνακα διαφορῶν τῆς συναρτήσεως, τή μετάδοσή τους στίς διαφορές ἀνώτερης τάξης τοῦ πίνακα αὐτοῦ. Ὁ τρόπος πού γίνεται ἡ σχετική μετάδοση θά μελετηθεῖ παρακάτω σέ δύο συγκεκριμένες περιπτώσεις.

2.4.2. Σφάλματα πού ὀφείλονται στήν παρουσία ἑνός καί μόνο ἀπομονωμένου σφάλματος σέ μία ἀπό τίς τιμές τῆς συναρτήσεως

Θεωροῦμε τίς τιμές μιᾶς συναρτήσεως πινακοποιημένες γιά διάφορες τιμές τοῦ x καί ὑποθέτουμε ὅτι σέ μία ἀπό τίς τιμές αὐτές, ἔστω σ' ἐκείνη πού ἀντιστοιχεῖ στό x_n , ὑπάρχει σφάλμα ἴσον μέ ε. Τότε εἶναι εὔκολο νά δοῦμε ὅτι ὁ πίνακας διαφορῶν τῆς συναρτήσεως θά ἔχει τήν ἀκόλουθη μορφή

⊛ Γιά τίς τιμές τῶν διαφορῶν στόν πίνακα διαφορῶν υἱοθετεῖται ἡ σύμβαση σύμφωνα μέ τήν ὁποία οἱ τιμές αὐτές ἐκφράζονται σέ ἀκέραιες μονάδες τῆς τελευταίας δεκαδικῆς τάξης πού διατηρεῖται.

x	$f(x)$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
x_{n-4}	f_{n-4}	⊛			
		Δ_{n-4}			
x_{n-3}	f_{n-3}		$\Delta^2{}_{n-4}$		
		Δ_{n-3}		$\Delta^3{}_{n-4}$	
x_{n-2}	f_{n-2}		$\Delta^2{}_{n-3}$		$\Delta^4{}_{n-4}+\varepsilon$
		Δ_{n-2}		$\Delta^3{}_{n-3}+\varepsilon$	
x_{n-1}	f_{n-1}		$\Delta^2{}_{n-2}+\varepsilon$		$\Delta^4{}_{n-3}-4\varepsilon$
		$\Delta_{n-1}+\varepsilon$		$\Delta^3{}_{n-2}-3\varepsilon$	
x_n	$f_n+\varepsilon$		$\Delta^2{}_{n-1}-2\varepsilon$		$\Delta^4{}_{n-2}+6\varepsilon$
		$\Delta_n-\varepsilon$		$\Delta^3{}_{n-1}+3\varepsilon$	
x_{n+1}	f_{n+1}		$\Delta^2{}_n+\varepsilon$		$\Delta^4{}_{n-1}-4\varepsilon$
		Δ_{n+1}		$\Delta^3{}_n-\varepsilon$	
x_{n+2}	f_{n+2}		$\Delta^2{}_{n+1}$		$\Delta^4{}_n+\varepsilon$
		Δ_{n+2}		$\Delta^3{}_{n+1}$	
x_{n+3}	f_{n+3}		$\Delta^2{}_{n+2}$		
		Δ_{n+3}			
x_{n+4}	f_{n+4}				

Σημειώνουμε στόν παραπάνω πίνακα διαφορῶν τήν παρουσία τῶν συντελεστῶν τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ διωνύμου τοῦ Newton γεγονός πού μᾶς ἐπιτρέπει σέ ὁρισμένες περιπτώσεις νά ἀνακαλύπτουμε ἕνα ἀπομονωμένο σφάλμα σέ μία ἀπό τίς τιμές τῆς συναρτήσεως. Τό ἀπομονωμένο σφάλμα, τότε, θά ἀντιστοιχεῖ σ' ἐκείνη τήν τιμή τῆς συναρτήσεως, πού βρίσκεται στήν ἴδια ὁριζόντια γραμμή μέ τή διαφορά, πού περιέχει τό μέγιστο ἀπόλυτο σφάλμα, ἄν αὐτή εἶναι μία, ἤ μεταξύ τῶν διαφορῶν, πού περιέχουν τό μέγιστο ἀπόλυτο σφάλμα, ἄν αὐτές εἶναι δύο.

⊛ Ἄν δέν ὑπάρχει περίπτωση νά γίνεται σύγχυση εἶναι δυνατό νά παραλείπεται ἀπό τό συμβολισμό τῶν διαφορῶν τό σύμβολο τῆς συναρτήσεως. Δηλαδή ἀντί γιά Δf_n μποροῦμε νά γράφουμε Δ_n.

Παράδειγμα

Νά κατασκευαστεῖ πίνακας διαφορῶν γιά τήν εὕρεση τοῦ ἀπομονωμένου σφάλματος πού ὑπάρχει σέ μία ἀπό τίς τιμές τῆς συναρτήσεως $f(x)$, πού δίνεται ἀπό τόν παρακάτω πίνακα τιμῶν, ὅταν εἶναι γνωστό ὅτι αὐτή εἶναι πολυώνυμο τρίτου βαθμοῦ καί ἔπειτα νά διορθωθεῖ ἡ ἀντίστοιχη τιμή της

x	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4
f(x)	-28	-9	-2	-1	1	7	26	63	124	215

Λύση

Σχηματίζουμε τόν πίνακα διαφορῶν τῆς συναρτήσεως $f(x)$

x	f(x)	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
-13	-28				
		19			
-12	-9		-12		
		7		6	
-11	-2		-6		1
		1		7	
-10	-1		1		-4
		2		3	
-9	1 → 0		4		6
		6		9	
-8	7		13		-4
		19		5	
-7	26		18		1
		37		6	
-6	63		24		0
		61		6	
-5	124		30		
		91			
-4	215				

Παρατηροῦμε ἀμέσως ὅτι στόν παραπάνω πίνακα θά ἔπρεπε οἱ τέταρτες διαφορές $\Delta^4 f(x)$ νά ἦταν ἴσες μέ μηδέν, ἀφοῦ ἡ $f(x)$ εἶναι πολυώνυμο τρίτου βαθμοῦ καί εἶναι πινακοποιημένη σέ σημεῖα πού ἰσαπέχουν. Ἐπομένως οἱ τέταρτες διαφορές πού δέν εἶναι ἴσες μέ μηδέν θά πρέπει νά εἶναι ἴσες μέ τά γινόμενα τοῦ ἀπομονωμένου σφάλματος ε ἐπί τούς ἀντίστοιχους διωνυμικούς συντελεστές (1, -4, 6, -4, 1). Ἑπομένως,

$$\varepsilon = \frac{1}{1} = 1 \text{ ἤ } \varepsilon = \frac{-4}{-4} = 1 \text{ ἤ } \varepsilon = \frac{6}{6} = 1 \text{ ἤ } \varepsilon = \frac{-4}{-4} = 1 \text{ ἤ } \varepsilon = \frac{1}{1} = 1.$$

Δηλαδή $\varepsilon = 1$. Στήν τιμή λοιπόν $f(-9)$ ὑπάρχει σφάλμα ἴσον μέ 1. Ἄρα ἡ ἀντίστοιχη διορθωμένη τιμή τῆς συναρτήσεως θά εἶναι $f(-9) = 1-1 = 0$.

2.4.3. Σφάλματα πού ὀφείλονται στά σφάλματα στρογγυλεύσεως τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως

Ὑποθέτουμε ὅτι οἱ τιμές τῆς συναρτήσεως εἶναι πινακοποιημένες καί ἔχουν στρογγυλευτεῖ σέ k δ.ψ. Αὐτό σημαίνει πώς ἄν $\varepsilon_n^{(o)}$ παριστάνει τό σφάλμα στρογγυλεύσεως πού ἀντιστοιχεῖ στήν ὁποιαδήποτε ἀληθή τιμή τῆς συναρτήσεως f_n, μέ ἀντίστοιχη προσεγγιστική τιμή f_n^*, θά ἔχουμε

$$|\varepsilon_n^{(o)}| = |f_n^* - f_n| \leq \frac{1}{2} 10^{-k}.$$

Ἄν τώρα $\varepsilon_n^{(1)}$ εἶναι τό σφάλμα πού ἀντιστοιχεῖ στήν ὁποιαδήποτε ἀληθή τιμή τῆς πρώτης διαφορᾶς Δf_n, μέ ἀντίστοιχη προσεγγιστική τιμή Δf_n^*, θά ἔχουμε

$$\varepsilon_n^{(1)} = \Delta f_n^* - \Delta f_n = (f_{n+1}^* - f_n^*) - (f_{n+1} - f_n) = (f_{n+1}^* - f_{n+1}) -$$

$$- (f_n^* - f_n) = \varepsilon_{n+1}^{(o)} - \varepsilon_n^{(o)}.$$

Ἑπομένως

$$|\varepsilon_n^{(1)}| = |\varepsilon_{n+1}^{(o)} - \varepsilon_n^{(o)}| \leq |\varepsilon_{n+1}^{(o)}| + |\varepsilon_n^{(o)}| \leq 2 \times \frac{1}{2} 10^{-k} = 10^{-k}.$$

Ἑπαγωγικά μπορεῖ, τέλος, νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ἄν $\varepsilon_n^{(m)}$ εἶναι τό σφάλμα πού ἀντιστοιχεῖ στήν ὁποιαδήποτε ἀληθή τιμή τῆς διαφορᾶς m τάξης $\Delta^m f_n$, μέ άντίστοιχη προσεγγιστική τιμή $\Delta^m f_n^*$, θά έχουμε

$$\varepsilon_n^{(m)} = \Delta^m f_n^* - \Delta^m f_n = (\Delta^{m-1} f_{n+1}^* - \Delta^{m-1} f_n^*) - (\Delta^{m-1} f_{n+1} - \Delta^{m-1} f_n) =$$

$$= (\Delta^{m-1} f_{n+1}^* - \Delta^{m-1} f_{n+1}) - (\Delta^{m-1} f_n^* - \Delta^{m-1} f_n) = \varepsilon_{n+1}^{(m-1)} - \varepsilon_n^{(m-1)} .$$

Έπομένως

$$|\varepsilon_n^{(m)}| = |\varepsilon_{n+1}^{(m-1)} - \varepsilon_n^{(m-1)}| \leq |\varepsilon_{n+1}^{(m-1)}| + |\varepsilon_n^{(m-1)}| \leq 2 \times 2^{m-2} \times 10^{-k} =$$

$$= 2^{m-1}\, 10^{-k} .$$

Παράδειγμα

Δίνεται ή συνάρτηση $f(x) \equiv x^3$ πινακοποιημένη στά σημεῖα $x = 2.5$ $(0.2) 3.5$ καί στρογγυλεμένη σέ δύο δ.ψ. Νά βρεθεῖ ένα φράγμα γιά τό άπόλυτο σφάλμα στίς τέταρτες διαφορές τῆς συναρτήσεως πού προέρχεται άπό τά σφάλματα στρογγυλεύσεως στίς τιμές της. Στή συνέχεια νά γίνει ή έπαλήθευση μέ τήν κατασκευή τοῦ πίνακα διαφορῶν τῆς ὑπόψη συναρτήσεως.

Λύση

Τά σφάλματα στρογγυλεύσεως πού ὑπάρχουν στίς πινακοποιημένες τιμές τῆς συναρτήσεως θά ἱκανοποιοῦν τή σχέση $|\varepsilon_n^{(o)}| \leq \frac{1}{2} 10^{-2}$. Έπομένως γιά τά σφάλματα στίς τέταρτες διαφορές τῆς συναρτήσεως θά ἰσχύει

$$|\varepsilon_n^{(4)}| \leq 2^{4-1}\, 10^{-2} = 0.08 .$$

Συνεπῶς ένα άπόλυτο φράγμα γιά τά σφάλματα αὐτά εἶναι ὁ άριθμός 0.08. Άν πάρουμε τώρα τίς τιμές τῆς συναρτήσεως $f(x) = x^3$ στά σημεῖα $x = 2.5$ $(0.2)\, 3.5$, στρογγυλέψουμε αὐτές σέ δύο δ.ψ. καί κατασκευάσουμε άπό τίς τιμές αὐτές τόν πίνακα διαφορῶν τῆς συναρτήσεως, τότε αὐτός θά εἶναι ὁ πίνακας πού βρίσκεται στήν άρχή τῆς έπόμενης σελίδας.

x	$f(x)\approx x^3$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
2.5	15.62				
		406			
2.7	19.68		65		
		471		4	
2.9	24.39		69		2
		540		6	
3.1	29.79		75		-2
		615		4	
3.3	35.94		79		
		694			
3.5	42.88				

Ἡ συνάρτηση $f(x)$ εἶναι πολυώνυμο τρίτου βαθμοῦ ἐπομένως θά ἔπρεπε οἱ τρίτες διαφορές $\Delta^3 f_n$ νά ἦταν σταθερές καί οἱ τέταρτες $\Delta^4 f_n$ ἴσες μέ μηδέν. Ἐπειδή ὅμως ὑπάρχουν τά σφάλματα στρογγυλεύσεως στίς τιμές τῆς συναρτήσεως οἱ τέταρτες διαφορές θά εἶναι ἴσες μέ

$$\Delta^4 f_n^* = \Delta^4 f_n + \varepsilon_n^{(4)} = 0 + \varepsilon_n^{(4)} = \varepsilon_n^{(4)} .$$

Δηλαδή οἱ τέταρτες διαφορές ἀποτελοῦν σφάλματα καί μόνο πού προέρχονται ἀπό τά σφάλματα στρογγυλεύσεως στίς τιμές τῆς συναρτήσεως. Ἐπομένως θά πρέπει αὐτά νά φράζονται ἀπόλυτα ἀπό τόν ἀριθμό 0.08. Πραγματικά ἰσχύει

$$|0.02| , |-0.02| \leq 0.08 .$$

2.5. Γραμμικοί Τελεστές Διαφορῶν

2.5.1. Γενικά

Στήν παράγραφο 2.2. χρησιμοποιήσαμε τά σύμβολα Δ, ∇ καί δ γιά νά συμβολίσουμε ἀντίστοιχα τίς πρός τά ἐμπρός, τίς πρός τά πίσω καί τίς κεντρικές διαφορές. Σύμβολα τοῦ τύπου αὐτοῦ στά Μαθηματικά καλοῦνται τελεστές. Στήν παροῦσα περίπτωση θά τά καλέσουμε τελεστές διαφορῶν. Οἱ τελεστές διαφορῶν καλοῦνται ειδικά, γραμμικοί τελεστές διαφορῶν γιατί ἱκανοποιοῦν τή σχέση

$$T(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha\, T f(x) + \beta\, T g(x) \tag{2.1}$$

όπου T είναι ένας όποιοσδήποτε άπό τούς τρεῖς τελεστές διαφορῶν, α καί β είναι σταθερές καί f(x) καί g(x) συναρτήσεις τοῦ x. Ἡ ίσχύς τῆς σχέσεως (2.1) γιά τούς τρεῖς τελεστές διαφορῶν εἶναι εὔκολο νά άποδειχτεῖ. Π.χ. γιά τόν τελεστή Δ έχουμε

$$\Delta(\alpha f(x) + \beta g(x)) = (\alpha f(x+h) + \beta g(x+h)) - (\alpha f(x) + \beta g(x)) =$$

$$= \alpha(f(x+h) - f(x)) + \beta(g(x+h) - g(x)) = \alpha\Delta f(x) + \beta\Delta g(x)\ .$$

Στό σημεῖο αὐτό θεωροῦμε σκόπιμο νά εἰσαγάγουμε δύο νέους γραμμικούς τελεστές τούς ὁποίους θά χρησιμοποιήσουμε πάρα πολύ στά ἑπόμενα Κεφάλαια. Ὁ πρῶτος άπό αὐτούς καλεῖται τελεστής μετατοπίσεως, συμβολίζεται μέ E, καί ὁρίζεται άπό τή σχέση

$$Ef(x) = f(x+h)\ .$$

Ὁ δεύτερος εἶναι ὁ γνωστός άπό τήν Ἀνάλυση τελεστής παραγωγίσεως ἤ τελεστής τῆς παραγώγου, πού συμβολίζεται μέ D καί ὁρίζεται άπό τή σχέση

$$Df(x) = \frac{df(x)}{dx}\ .$$

Εἶναι εὔκολο νά άποδειχτεῖ ὅτι οἱ δύο νέοι τελεστές E καί D εἶναι γραμμικοί τελεστές.

Στή συνέχεια θεωροῦμε άπαραίτητο νά δώσουμε μερικούς βασικούς ὁρισμούς πού άφοροῦν τούς τελεστές καί αὐτό γιατί ὁ άντίστοιχος λογισμός τῶν τελεστῶν θά χρησιμοποιηθεῖ πάρα πολύ άργότερα, στήν παραπέρα άνάπτυξη τῆς θεωρίας τῆς Α.Α. καί ἰδιαίτερα στήν παραγωγή τύπων.

2.5.2. Βασικοί ὁρισμοί γιά τούς τελεστές

Οἱ ὁρισμοί πού δίνονται παρακάτω άναφέρονται στήν ὁποιαδήποτε συνάρτηση καί στό όποιοδήποτε σημεῖο (σιωπηρά ὑποτίθεται τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ) x αὐτῆς.

α) Δύο τελεστές T_1 καί T_2 θά λέμε ὅτι εἶναι ἴσοι καί θά γράφουμε $T_1 = T_2$, ὅταν γιά κάθε συνάρτηση f(x) καί σέ κάθε σημεῖο x αὐτῆς ἰσχύει ἡ σχέση $T_1 f(x) = T_2 f(x)$.

β) Ὁ τελεστής T θά λέμε ὅτι εἶναι τό ἄθροισμα (ἤ ἡ διαφορά) δύο ἄλλων τελεστῶν T_1 καί T_2 καί θά γράφουμε $T = T_1 + T_2$ (ἤ $T_1 - T_2$), ὅταν γιά κάθε συνάρτηση f(x) καί σέ κάθε σημεῖο x αὐτῆς ἰσχύει ἡ σχέση $Tf(x) = T_1 f(x) + T_2 f(x)$ (ἤ $T_1 f(x) - T_2 f(x)$).

γ) Ὁ τελεστής T θά λέμε ὅτι εἶναι τό γινόμενο τῶν τελεστῶν T_1 καί T_2 στή σειρά αὐτή καί θά γράφουμε $T = T_1 T_2$ ὅταν γιά κάθε συνάρτηση f(x) καί σέ κάθε σημεῖο x αὐτῆς ἰσχύει ἡ σχέση $Tf(x) = T_1(T_2 f(x))$.

δ) Ὁ τελεστής I θά λέμε ὅτι εἶναι ὁ μοναδιαῖος ἤ ὁ ταυτοτικός τελεστής ὅταν γιά κάθε συνάρτηση f(x) καί σέ κάθε σημεῖο x αὐτῆς ἰσχύει ἡ σχέση $If(x) = f(x)$. Ὅταν δέν ὑπάρχει περίπτωση συγχύσεως ὁ τελεστής I θά μπορεῖ νά συμβολίζεται καί μέ τόν ἀριθμό 1.

ε) Τέλος ὁ τελεστής T_1 θά λέμε ὅτι εἶναι δεξιός ἀντίστροφος τοῦ τελεστῆ T ὅταν ἰσχύει ἡ σχέση $TT_1 = 1$. Συνήθως ὁ δεξιός ἀντίστροφος T_1 θά συμβολίζεται μέ T^{-1}. Ἄν τώρα συμβαίνει ὁ δεξιός ἀντίστροφος, T^{-1}, τοῦ T νά εἶναι συγχρόνως καί ἀριστερός ἀντίστροφος τοῦ T δηλαδή ἄν ἀκόμη ἰσχύει καί ἡ σχέση $T^{-1}T = 1$ τότε θά λέμε ἁπλά ὅτι ὁ T^{-1} εἶναι ἀντίστροφος τοῦ T. Στήν περίπτωση αὐτή ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετική ἰδιότητα μεταξύ τῶν T καί T^{-1} δηλαδή ἰσχύει ἡ σχέση $T^{-1}T = TT^{-1} = 1$.

Εἶναι δυνατό νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ἀπό τούς πέντε γραμμικούς τελεστές Δ, ∇, δ, E καί D μόνον ὁ E ἔχει ἀντίστροφο. Οἱ ἄλλοι τέσσερις ἔχουν μόνο δεξιό ἀντίστροφο. Γι' αὐτόν τό δεξιό ἀντίστροφο, μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ἰσχύει ἀκόμη ἡ σχέση

$$T^{-1}Tf(x) = f(x) + C$$

ὅπου T ὁ ὁποιοσδήποτε ἀπό τούς τέσσερις τελεστές Δ, ∇, δ καί D, T^{-1} ὁ δεξιός ἀντίστροφός του, f(x) ὁποιαδήποτε συνάρτηση, x τυχόν σημεῖο αὐτῆς καί C αὐθαίρετη σταθερά.

Εἶναι ἀκόμη δυνατό νά ἀποδειχτεῖ ὅτι δύο ὁποιοιδήποτε ἀπό τούς πέντε τελεστές ἀντιμετατίθενται στήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Π.χ. γιά νά ἀποδείξουμε ὅτι οἱ τελεστές Δ καί E ἀντιμετατίθενται στήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, δηλαδή γιά νά ἀποδείξουμε ὅτι $\Delta E = E\Delta$, ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε ὅτι τά γινόμενα τῶν τελεστῶν ΔE καί $E\Delta$ ὅταν ἐφαρμοστοῦν στήν ὁποιαδήποτε συνάρτηση $f(x)$ καί στό τυχόν σημεῖο x αὐτῆς δίνουν τά ἴδια ἀποτελέσματα. Πραγματικά ἔχουμε ἐφαρμόζοντας τούς ὁρισμούς στήν ἀρχή τῆς παραγράφου

$$\Delta Ef(x) = \Delta(Ef(x)) = \Delta f(x+h) = f(x+2h) - f(x+h)$$

καί

$$E\Delta f(x) = E(\Delta f(x)) = E(f(x+h) - f(x)) = f(x+2h) - f(x+h)$$

ἄρα

$$\Delta E = E\Delta.$$

Τέλος εἶναι δυνατό νά ἀποδειχτεῖ ὅτι οἱ πέντε τελεστές Δ, ∇, δ, E καί D ὑπακούουν σχεδόν σ' ὅλους τούς νόμους τῆς Ἄλγεβρας, μέ μόνη ἐξαίρεση τήν ἰδιότητα τοῦ ἀντιστρόφου γιά τούς Δ, ∇, δ καί D καί ὅ,τι προκύπτει ἀπό αὐτήν. Ἐπομένως μποροῦμε σχεδόν πάντοτε νά κάνουμε πράξεις μεταξύ τους μέ τόν ἴδιο τρόπο πού κάνουμε πράξεις μεταξύ πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ὁ ἀντίστοιχος λογισμός καλεῖται λογισμός τῶν τελεστῶν καί οἱ ἀντίστοιχες χρησιμοποιούμενες μέθοδοι καλοῦνται συμβολικές μέθοδοι.

Παράδειγμα

Χρησιμοποιώντας τό λογισμό τῶν τελεστῶν νά ἐκφραστοῦν οἱ τέσσερις τελεστές Δ, ∇, δ καί D σάν συναρτήσεις τοῦ τελεστῆ E.

Λύση

Γιά τόν τελεστή Δ ἔχουμε

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = Ef(x) - f(x) = (E-1)f(x)$$

άρα $\Delta = E-1$.

Γιά τόν τελεστή ∇ έχουμε

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h) = f(x) - E^{-1}f(x) = (1-E^{-1})f(x)$$

άρα $\nabla = 1-E^{-1}$.

Γιά τόν τελεστή δ έχουμε

$$\delta f(x) = f(x+\frac{h}{2}) - f(x-\frac{h}{2}) = E^{1/2} f(x) - E^{-1/2} f(x) = (E^{1/2} - E^{-1/2})f(x)$$

άρα $\delta = E^{1/2} - E^{-1/2}$.

Γιά νά βροῦμε τώρα τόν τελεστή D σάν συνάρτηση τοῦ τελεστῆ E ἐργαζόμαστε κάπως ἀντίστροφα. Βρίσκουμε δηλαδή τόν τελεστή E σάν συνάρτηση τοῦ τελεστῆ D πού ὅπως θά δοῦμε προκύπτει εὐκολότερα. Ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ τελεστῆ E ἔχουμε ὅτι

$$Ef(x) = f(x+h) \qquad (2.2)$$

Ἄν τώρα ὑποθέσουμε ὅτι ἡ συνάρτηση $f(x+h)$ ἀναπτύσσεται σέ συγκλίνουσα σειρά Taylor γύρω ἀπό τό σημεῖο x παίρνουμε

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}\frac{df(x)}{dx} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2f(x)}{dx^2} + \ldots =$$

$$= f(x) + \frac{h}{1!} Df(x) + \frac{h^2}{2!} D^2f(x) + \ldots = \qquad (2.3)$$

$$= \left[1 + \frac{hD}{1!} + \frac{(hD)^2}{2!} + \ldots\right] f(x) = e^{hD} f(x) .$$

Ἀπό τίς σχέσεις (2.2) καί (2.3) συμπεραίνουμε ὅτι $E = e^{hD}$ καί ἀπό αὐτή λαβαίνουμε εὔκολα $D = \frac{1}{h}\log E$.

2.5.3. Σχέσεις μεταξύ τῶν τελεστῶν

Ὅπως ἐργαστήκαμε στό παράδειγμα τῆς προηγούμενης παραγράφου γιά ουμε τούς τελεστές Δ, ∇, δ καί D σάν συναρτήσεις τοῦ τελεστῆ Ε, ... α μπορούμε νά έργαστοῦμε καί νά έκφράσουμε όποιοδήποτε άπό τούς πέντε τελεστές σάν συνάρτηση όποιουδήποτε άλλου. Οί άντίστοιχες έκφράσεις πού μποροῦν νά προκύψουν δίνονται στόν παρακάτω πίνακα

	Δ	∇	δ	E	D
Δ		$(1-\nabla)^{-1}-1$	$\frac{1}{2}\delta^2+\delta\sqrt{1+\frac{\delta^2}{4}}$	$E-1$	$e^{hD}-1$
∇	$1-(1+\Delta)^{-1}$		$-\frac{1}{2}\delta^2+\delta\sqrt{1+\frac{\delta^2}{4}}$	$1-E^{-1}$	$1-e^{-hD}$
δ	$\Delta(1+\Delta)^{-1/2}$	$\nabla(1-\nabla)^{-1/2}$		$E^{1/2}-E^{-1/2}$	$2\sinh(\frac{hD}{2}$
E	$\Delta+1$	$(1-\nabla)^{-1}$	$1+\frac{1}{2}\delta^2+\delta\sqrt{1+\frac{\delta^2}{4}}$		e^{hD}
D	$\frac{1}{h}\log(1+\Delta)$	$-\frac{1}{h}\log(1-\nabla)$	$\frac{2}{h}\sinh^{-1}\frac{\delta}{2}$	$\frac{1}{h}\log E$	

Παρατήρηση: Γιά νά άποδείξουμε μία ίσότητα μεταξύ δύο τελεστῶν, ὁ άπλούστερος ἴσως άπό τούς πολλούς τρόπους έργασίας, εἶναι νά έκφράζουμε τά δύο μέλη τῆς ίσότητας σάν συναρτήσεις τοῦ τελεστῆ Ε καί νά άποδείχνουμε ὅτι οί δύο έκφράσεις συμπίπτουν.

Παράδειγμα

Νά άποδειχτεῖ ὅτι

$$\Delta - \nabla = \Delta\nabla .$$

Λύση

Ἐπειδή $\Delta = E-1$ καί $\nabla = 1-E^{-1}$ ἔχουμε

$$\Delta - \nabla = E - 1 - (1-E^{-1}) = E - 2 + E^{-1}$$

$$\Delta\nabla = (E-1)(1-E^{-1}) = E - 1 - 1 + E^{-1} = E - 2 + E^{-1}$$

ἄρα

$$\Delta - \nabla = \Delta\nabla.$$

2.5.4. Ἡ ἰσχύς τῶν συμβολικῶν μεθόδων

Ἐπειδή στά ἐπόμενα Κεφάλαια θά γίνει μεγάλη χρήση τῶν συμβολικῶν μεθόδων γιά τήν παραγωγή τύπων, πού θά περιέχουν διαφορές, θεωροῦμε σκόπιμο νά τονίσουμε ἐδῶ ὁρισμένα σημεῖα πού ἀφοροῦν τήν ἰσχύ τῶν συμβολικῶν αὐτῶν μεθόδων.

α) Ὅταν χρησιμοποιοῦμε ἐκφράσεις τῆς μορφῆς $\log(1+\Delta)$ ἤ $(1-\nabla)^{-1}$ ἤ $\sinh^{-1}\frac{\delta}{2}$ κλπ , δέν ἐννοοῦμε φυσικά τόν λογάριθμο τοῦ τελεστῆ $1+\Delta$ ἤ τόν ἀντίστροφο τοῦ τελεστῆ $1-\nabla$ ἤ τήν ἀντίστροφη συνάρτηση τοῦ ὑπερβολικοῦ ἡμιτόνου τοῦ τελεστῆ $\frac{\delta}{2}$ κλπ ἀντίστοιχα, ἀφοῦ αὐτά δέν ἔχουν καμιά ἔννοια. Ἐννοοῦμε ὅμως τίς σειρές τοῦ τελεστῆ πού συνδέονται ἀπό τήν Ἀνάλυση μέ τίς ἀντίστοιχες συναρτήσεις. Π.χ. ὅταν γράφουμε καί χρησιμοποιοῦμε τό συμβολισμό $\log(1+\Delta)$ ἐννοοῦμε ἁπλούστατα τή σειρά $\Delta-\frac{\Delta^2}{2}+\frac{\Delta^3}{3}-\ldots$.

β) Μία σειρά ἑνός γραμμικοῦ τελεστῆ ἐπιτρέπεται νά χρησιμοποιεῖται ἀρκεῖ νά ἐξασφαλίζονται οἱ ἑξῆς δύο προϋποθέσεις i) ἡ σειρά νά ἐφαρμόζεται σέ πολυώνυμο καί ii) ἡ σειρά νά ἔχει διαταχτεῖ κατά τίς ἀνιοῦσες δυνάμεις τοῦ τελεστῆ, ὁ ὁποῖος ὅταν ἐφαρμόζεται σέ πολυώνυμο πρέπει νά ἐλαττώνει τό βαθμό του. Σέ μιά τέτοια περίπτωση πού οἱ δύο προηγούμενες προϋποθέσεις ἐξασφαλίζονται, τό ἄθροισμα τῶν ἄπειρων ὅρων τῆς σειρᾶς εἶναι στήν ούσία ἄθροισμα πεπερασμένου πλήθους ὅρων. Αὐτό ὅμως γιατί οἱ δυνάμεις τοῦ τελεστῆ τάξης $n+1$ καί ἀνώτερης ὅταν ἐφαρμόζονται σέ πολυώνυμο βαθμοῦ n θά δίνουν ἐξαγόμενα ἴσα μέ μηδέν. Εἶναι φανερό λοιπόν ὅτι οἱ τελεστές Δ, ∇, δ καί D ἱκανοποιοῦν τήν παραπάνω προϋπόθεση (ii) ἐνῶ ὁ τελεστής E ὄχι. Ἔτσι οἱ ἐκφράσεις $\log(1+\Delta)$, $(1-\nabla)^{-1}$, $\sinh^{-1}\frac{\delta}{2}$ πού δόθηκαν στήν παράγραφο (α) ἐπιτρέπεται νά χρησιμοποιοῦνται μέ τήν ἔννοια πού ἐπεξηγήθηκε, ἐνῶ ἡ ἔκφραση $\log(2+\Delta)=\log(1+E)=E-\frac{E^2}{2}+\frac{E^3}{3}-\ldots$ ὄχι.

γ) Στήν πράξη βέβαια ἡ συνάρτηση $f(x)$ στήν ὁποία ἐφαρμόζεται ἡ σειρά ἑνός ἀπό τούς πέντε γραμμικούς τελεστές, γιά τούς ὁποίους μιλᾶμε, δέν εἶναι συνήθως πολυώνυμο. Τό γεγονός αὐτό δέν ἐπηρεάζει οὐσιωδῶς τήν κατάσταση γιατί σύμφωνα μέ τό θεώρημα τῆς πολυωνυμικῆς προσεγγίσεως τοῦ Weierstrass, πού διατυπώνεται ὡς ἑξῆς: "Ὅταν δοθεῖ μιά συνάρτηση $f(x)$ ὁρισμένη καί συνεχής στό διάστημα $[a,b]$, τότε γιά κάθε αὐθαίρετο $\varepsilon>0$ ὑπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ τέτοιο ὥστε $|f(x)-p(x)|<\varepsilon$ γιά ὅλα τά $x\in[a,b]$", εἶναι δυνατό ἡ ὁποιαδήποτε συνάρτηση $f(x)$, ὁρισμένη καί συνεχής σέ διάστημα $[a,b]$ νά θεωρεῖται στό διάστημα αὐτό, μέ μεγάλη προσέγγιση, σάν πολυώνυμο κατάλληλου βαθμοῦ.

δ) Ὅταν χρησιμοποιοῦμε τή σειρά ἑνός τελεστῆ διαφορῶν, πού ἐφαρμόζεται σέ μιά συνάρτηση $f(x)$, θά πρέπει νά ἔχουμε ὑπόψη μας ὅτι οἱ διαφορές τῆς συναρτήσεως ἀνώτερης τάξης κυριαρχοῦνται ἀπό σφάλματα πού προέρχονται, ὅπως ἔχουμε δεῖ, ἀπό τή μετάδοση τῶν σφαλμάτων στρογγυλεύσεως, καί ἄλλων πιθανόν, πού ὑπάρχουν στίς τιμές αὐτῆς. Ἔτσι ἐνῶ προσπαθοῦμε νά πετύχουμε μεγαλύτερη ἀκρίβεια χρησιμοποιώντας ὅσο τό δυνατό περισσότερους ὅρους ἀπό τό ἀνάπτυγμα τῆς σειρᾶς τοῦ τελεστῆ πού ἐφαρμόζεται στήν $f(x)$, ἡ χρησιμοποίηση ἀκριβῶς περισσότερων ὅρων, δηλαδή διαφορῶν ἀνώτερης τάξης, κάνει τήν ἀκρίβεια πού ἐπιζητοῦμε μικρότερη. Γι' αὐτό στήν πράξη τή σειρά ἑνός τελεστῆ ἀντικαταστοῦμε πάντοτε μέ ἕνα μερικό ἄθροισμά της καί ὅσες φορές εἶναι δυνατό προσπαθοῦμε νά δίνουμε συγχρόνως μία ἔκφραση γιά τό ἀντίστοιχα σφάλμα ἀποκοπῆς.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Δίνεται ἡ συνάρτηση $f(x)\equiv 2x^4-1$. Νά κατασκευαστεῖ πίνακας διαφορῶν γιά τίς τιμές τοῦ $x: x_i=x_0+ih$ μέ $x_0=0, h=1$ καί $i=-1(1)4$. Μέ τή βοήθεια τοῦ πίνακα νά βρεθοῦν οἱ τιμές γιά τίς ἐκφράσεις $\delta f_{3/2}$, $\nabla^2 f_3$, $\Delta^3 f_1$. (Ἀπ. 30, 100, 120)

2. Νά δειχτεῖ ὅτι $\Delta^3(\alpha^x)=(\alpha^h-1)^3\alpha^x$, ὅπου h τό βῆμα τῆς πινακοποιήσεως καί α σταθερά.

3. Ἄν εἶναι γνωστό ὅτι τό βῆμα πινακοποιήσεως h γιά τή συνάρτηση x^3 εἶναι ἴσον μέ 1, νά ἁπλοποιηθεῖ ἡ ἔκφραση $\nabla\Delta^2 x^3$. (Ἀπ. 6)

4. Νά βρεθοῦν (χωρίς σχηματισμό πινάκων διαφορῶν) οἱ τρίτες πεπερασμένες διαφορές τοῦ πολυωνύμου $4x^3-3x^2+2x-1$, ὅταν ὡς σημεῖα πινακοποι -

ήσεως λαβαίνονται τά α) $x = 2i$ καί β) $x = 3i$, όπου ὁ i παίρνει όλες τίς ἀκέραιες τιμές. ('Απ. 192, 648)

~~5.~~ Δίνεται ἡ συνάρτηση $f(x) \equiv x^3$, πινακοποιημένη στά σημεῖα $x_i = i \mid i = -3(1)5$. "Αν στή τιμή $f_1 = f(x_1)$ εἰσχωρήσει ἕνα ἀπομονωμένο σφάλμα $\varepsilon = -0.2$, νά βρεθοῦν τά σφάλματα, πού θά εἰσχωρήσουν στίς τιμές Δf_o, $\nabla^2 f_1$. ('Απ. -0.2, -0.2)

~~6.~~ "Αν οἱ παρακάτω τιμές ἀποτελοῦν τίς τιμές ἑνός πολυωνύμου δεύτερου βαθμοῦ σέ σημεῖα, πού ἰσαπέχουν, νά βρεθεῖ τό ἀπομονωμένο σφάλμα, πού ὑπάρχει σέ μιά ἀπ' αὐτές καί νά διορθωθεῖ ἡ τιμή αὐτή

x	x_o	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$f(x)$	12	10	24	24	40	62	90	124

('Απ. 10, $f(x_2) = 14$)

~~7.~~ Στίς τιμές f_o καί f_1 τοῦ πίνακα τιμῶν μιᾶς συναρτήσεως f ὑπάρχουν σφάλματα $\varepsilon_o = \varepsilon_1 = 0.001$ ἀντίστοιχα. Νά βρεθεῖ τό σφάλμα, πού θά ὑπάρχει στήν τιμή $\Delta^2 f_o$ τοῦ πίνακα διαφορῶν τῆς ὑπόψη συναρτήσεως. ('Απ. -0.001)

~~8.~~ 'Αφοῦ δειχτοῦν οἱ σχέσεις $\Delta = \nabla E = \delta E^{1/2}$, νά δειχτεῖ στή συνέχεια πῶς εἶναι δυνατό νά προκύψει ἀπό αὐτές ὅτι $\Delta^k f_n = \nabla^k f_{n+k} = \delta^k f_{n+\frac{k}{2}}$.

~~9.~~ Νά ἀναπτυχτεῖ μέ ὁποιοδήποτε τρόπο τό πηλῖκο $\dfrac{1}{1-2\nabla+3\nabla^2}$ κατά τίς ἀνιοῦσες δυνάμεις τοῦ τελεστῆ ∇, βρίσκοντας συγχρόνως τούς τέσσερις πρώτους συντελεστές α_o, α_1, α_2 καί α_3 τοῦ ἀναπτύγματος $\alpha_o + \alpha_1 \nabla + \alpha_2 \nabla^2 + \alpha_3 \nabla^3 + \ldots$. ('Απ. 1, 2, 1, -4)

3. ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ

3.1. Γενικά

Ἡ παρεμβολή εἶναι ἕνα ἀπό τά σπουδαιότερα θέματα τῆς Α.Α., γιατί ἀποτελεῖ τή βάση τῆς πολυωνυμικῆς προσεγγίσεως, δηλαδή τῆς προσεγγίσεως μιᾶς συναρτήσεως ἀπό ἕνα πολυώνυμο. Τό πρόβλημα τῆς παρεμβολῆς μπορεῖ νά διατυπωθεῖ σύντομα ὡς ἑξῆς. Δίνονται πινακοποιημένες οἱ τιμές μιᾶς συναρτήσεως $f(x)$ γιά κάποιες τιμές τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς x καί ζητεῖται νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως γιά κάποια τιμή x πού δέν ὑπάρχει στόν πίνακα. Εἶναι φανερό ὅτι κάθε πραγματική τιμή μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὅτι εἶναι ἡ ζητούμενη τιμή τῆς συναρτήσεως στό σημεῖο x. Γιά μιά μεγάλη ὅμως κλάση συναρτήσεων, γιά τίς ὁποῖες ὑποθέτουμε μία ὁμαλή συμπεριφορά γύρω ἀπό τό σημεῖο x, εἶναι δυνατό νά προσδιορίσουμε μέ μεγάλη προσέγγιση τήν τιμή τῆς συναρτήσεως στό ὑπόψη σημεῖο. Γιά τό λόγο αὐτό ἡ παρεμβολή θεωρεῖται ἀπό πολλούς ὅτι εἶναι ἡ τέχνη τοῦ νά μπορεῖ νά διαβάζει κανείς μεταξύ τῶν γραμμῶν ἑνός πίνακα.

3.2. Τύποι παρεμβολῆς πού χρησιμοποιοῦν πεπερασμένες διαφορές

3.2.1. Τύπος παρεμβολῆς τῶν πρός τά ἐμπρός διαφορῶν τῶν Newton - Gregory

Ἔστω ὅτι x εἶναι ἡ τιμή τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς γιά τήν ὁποία ζητοῦμε τήν ἀντίστοιχη τιμή τῆς συναρτήσεως $f(x)$. Καλοῦμε μέ x_o μία ἀπό τίς πινακοποιημένες τιμές τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς, συνήθως τήν ἀμέσως μικρότερη τιμή ἀπό τή x, πού περιέχεται στόν πίνακα καί μέ θ τό λόγο

$$\theta = \frac{x - x_o}{h} \quad . \tag{3.1}$$

Εἶναι φανερό ὅτι στήν περίπτωση, πού τό x_o εἶναι ἡ ἀμέσως μικρότερη τιμή τοῦ x στόν πίνακα θά ἔχουμε $0 < \theta < 1$. Χρησιμοποιώντας τή σχέση (3.1) καί τούς τελεστές τοῦ προηγούμενου Κεφαλαίου μποροῦμε νά λάβουμε διαδοχικά

$$f(x) = f(x_o + \theta h) = E^{\theta} f(x_o) = (1+\Delta)^{\theta} f_o =$$

$$= \left[1 + \binom{\theta}{1}\Delta + \binom{\theta}{2}\Delta^2 + \ldots\right] f_o \qquad \text{καί}$$

$$f(x) = f_o + \binom{\theta}{1}\Delta f_o + \binom{\theta}{2}\Delta^2 f_o + \ldots \; . \tag{3.2}$$

Ὁ παραπάνω τύπος γράφεται συνήθως ὡς

$$f(x) = f_o + \binom{\theta}{1}\Delta f_o + \binom{\theta}{2}\Delta^2 f_o + \ldots + \binom{\theta}{n}\Delta^n f_o + R_{n+1}(x) \tag{3.3}$$

ὅπου ὁ ὅρος $R_{n+1}(x)$ καλεῖται διόρθωση καί θά βρεθεῖ ἀργότερα ἀναλυτικά, ἤ ἀκόμη καί ὡς

$$f(x) \approx f_o + \binom{\theta}{1}\Delta f_o + \binom{\theta}{2}\Delta^2 f_o + \ldots + \binom{\theta}{n}\Delta^n f_o \; . \tag{3.4}$$

Ὁ τύπος (3.2) ἤ ὁ (3.3) ἤ ὁ (3.4) εἶναι ὁ γνωστός σάν τύπος τῶν πρός τά ἐμπρός διαφορῶν τῶν Newton - Gregory.

Παρατηρήσεις:

i) Τό ἄθροισμα τοῦ δεύτερου μέλους τοῦ τύπου (3.2) ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα πεπερασμένο πλῆθος ὅρων ὅταν ἡ f(x) εἶναι πολυώνυμο. Συγκεκριμένα, ἀπό τόν (3.3) ἔχουμε ὅτι $R_{n+1}(x) = 0$ γιά πολυώνυμο n βαθμοῦ

ii) Ἡ παροῦσα παρεμβολή, γιά $0 < \theta < 1$, ἐφαρμόζεται καλύτερα στήν ἀρχή ἑνός πίνακα, γιατί τότε εἶναι δυνατό νά χρησιμοποιηθοῦν περισσότεροι ὅροι στό δεύτερο μέλος τοῦ τύπου (3.2). Αὐτό σημαίνει ὅτι μπορεῖ νά χρησιμοποιηθοῦν περισσότερες τιμές τῆς συναρτήσεως f(x) καί ἐπομένως περισσότερες πληροφορίες γιά τή συμπεριφορά της

iii) Ἡ παροῦσα παρεμβολή μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ καί γιά τιμές τοῦ $\theta < 0$ ἤ $\theta > 1$. Στίς περιπτώσεις ὅμως αὐτές οἱ ἄλλοι τύποι παρεμβολῆς δίνουν καλύτερα ἀποτελέσματα.

Παράδειγμα 1

Χρησιμοποιώντας ὅλες τίς πληροφορίες πού δίνονται στόν παρακάτω πίνακα τιμῶν

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	2	9	28

νά βρεθεῖ ἡ τιμή $f(1.5)$ μέ προσέγγιση τριῶν δ.ψ.

Λύση

Στήν ἀρχή κατασκευάζουμε τόν πίνακα διαφορῶν τῆς συναρτήσεως πού δόθηκε

x	$f(x)$	Δ	Δ^2	Δ^3
0	1			
		1		
1	2		6	
		7		6
2	9		12	
		19		
3	28			

Γιά νά χρησιμοποιήσουμε ὅλες τίς πληροφορίες τοῦ πίνακα καλοῦμε μέ x_o τήν πρώτη τιμή τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς. Ἔτσι ἔχουμε $x_o = 0$ καί $\theta = \frac{x - x_o}{h} = \frac{1.5 - 0}{1} = 1.5$. Ὁ τύπος πού θά χρησιμοποιηθεῖ εἶναι ὁ ἀκόλουθος

$$f(x) \approx f_o + \binom{\theta}{1}\Delta f_o + \binom{\theta}{2}\Delta^2 f_o + \binom{\theta}{3}\Delta^3 f_o$$

ὁπότε ἀντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$f(1.5) \approx 1 + \binom{1.5}{1}\times 1 + \binom{1.5}{2}\times 6 + \binom{1.5}{3}\times 6 =$$

$$= 1 + \frac{1.5}{1}\times 1 + \frac{1.5(1.5-1)}{2}\times 6 + \frac{1.5(1.5-1)(1.5-2)}{6}\times 6 =$$

$$= 1 + 1.5 + 2.25 - 0.375 = 4.375 .$$

Παράδειγμα 2

Δίνεται ὁ παρακάτω πίνακας τιμῶν τῆς συναρτήσεως f(x)

x	1	2	3	4
f(x)	3	6	13	24

Χρησιμοποιώντας τόν τύπο παρεμβολῆς τῶν πρός τά ἐμπρός διαφορῶν τῶν Newton - Gregory νά βρεθεῖ ἡ f(x) μέ τήν προϋπόθεση ὅτι αὐτή εἶναι πολυώνυμο δεύτερου βαθμοῦ.

Λύση

Κατασκευάζουμε τόν πίνακα διαφορῶν τῆς συναρτήσεως μέχρι τή στήλη τῶν δεύτερων διαφορῶν (οἱ τρίτες διαφορές θά εἶναι μηδέν).

x	f(x)	Δ	Δ^2
1	3		
		3	
2	6		4
		7	
3	13		4
		11	
4	24		

Χρησιμοποιώντας τώρα τόν τύπο τῶν πρός τά ἐμπρός διαφορῶν τῶν Newton - Gregory μέ x_o ἔστω ἴσο μέ 1, ὁπότε $\theta = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x-1}{1} = x - 1$, θά ἔχουμε

$$f(x) = f_o + \binom{\theta}{1}\Delta f_o + \binom{\theta}{2}\Delta^2 f_o =$$

$$= 3 + \binom{x-1}{1}3 + \binom{x-1}{2}4 = 3 + \frac{x-1}{1}\times 3 + \frac{(x-1)(x-2)}{2}\times 4 =$$

$$= 3 + 3x - 3 + 2x^2 - 6x + 4 = 2x^2 - 3x + 4 \ .$$

3.2.2. Τύπος παρεμβολῆς τῶν πρός τά πίσω διαφορῶν τῶν Newton-Gregory

Τό πρόβλημα παραμένει τό ἴδιο ὅπως διατυπώθηκε στήν προηγούμενη παράγραφο. Σ' αὐτή ὅμως τήν περίπτωση ἀρχίζουμε καλώντας μέ x_o, συνήθως, τήν ἀμέσως μεγαλύτερη τῆς x τιμή στόν πίνακα. Ἔτσι ἔχουμε ὅτι

$$\theta = \frac{x_o - x}{h} \quad \text{μέ} \quad 0 < \theta < 1 \,.$$

Χρησιμοποιώντας τούς κατάλληλους τελεστές μποροῦμε νά πάρουμε διαδοχικά

$$f(x) = f(x_o - \theta h) = E^{-\theta} f(x_o) = \left[(1-\nabla)^{-1}\right]^{-\theta} f_o = (1-\nabla)^{\theta} f_o =$$

$$= \left[1 - \binom{\theta}{1}\nabla + \binom{\theta}{2}\nabla^2 - \ldots\right] f_o \qquad \text{καί}$$

$$f(x) = f_o - \binom{\theta}{1}\nabla f_o + \binom{\theta}{2}\nabla^2 f_o - \ldots \,.$$

Ὁ τύπος πού βρέθηκε καί πού εἶναι ὁ τύπος παρεμβολῆς τῶν πρός τά πίσω διαφορῶν τῶν Newton - Gregory μπορεῖ νά γραφτεῖ καί ὡς

$$f(x) = f_o - \binom{\theta}{1}\nabla f_o + \binom{\theta}{2}\nabla^2 f_o - \ldots + (-1)^n \binom{\theta}{n}\nabla^n f_o + R_{n+1}(x)$$

ἤ ἀκόμη ὡς

$$f(x) \approx f_o - \binom{\theta}{1}\nabla f_o + \binom{\theta}{2}\nabla^2 f_o - \ldots + (-1)^n \binom{\theta}{n}\nabla^n f_o \,.$$

Παρατηρήσεις:

Μποροῦν νά γίνουν ἀκριβῶς οἱ ἴδιες παρατηρήσεις ὅπως στήν περίπτωση τοῦ τύπου πού χρησιμοποιεῖ τίς πρός τά ἐμπρός διαφορές. Ἡ μόνη διαφορά εἶναι ὅτι ἡ παροῦσα παρεμβολή ἐφαρμόζεται καλύτερα στό τέλος ἑνός πίνακα.

3.2.3. Τύπος παρεμβολῆς τῶν κεντρικῶν διαφορῶν τοῦ Bessel.

Ὁ τύπος παρεμβολῆς τοῦ Bessel χρησιμοποιεῖ κεντρικές διαφορές καί εἶναι τῆς παρακάτω γενικῆς μορφῆς

$$f(x) = B_o(f_o + f_1) + B_1\delta f_{1/2} + B_2(\delta^2 f_o + \delta^2 f_1) + B_3\delta^3 f_{1/2} + \ldots$$

ὅπου x_o εἶναι, συνήθως, ἡ ἀμέσως μικρότερη τῆς x τιμή στόν πίνακα διαφορῶν καί $B_i \,|\, i = 0,1,2 \ldots$ συντελεστές πού πρέπει νά προσδιοριστοῦν. Μέ μέθοδο ἡ ὁποία εἶναι πέρα ἀπό τό σκοπό τῆς παρούσας "Εἰσαγωγῆς στήν 'Αριθμητική 'Ανάλυση" εἶναι δυνατό νά βρεθοῦν ἀναλυτικές ἐκφράσεις πού νά δίνουν ὅλους τούς συντελεστές B_i. 'Εδῶ θά περιοριστοῦμε στήν εὕρεση τῶν τεσσάρων πρώτων ἀπό τούς συντελεστές ἀκολουθώντας μέθοδο ἁπλή. Γιά τό σκοπό αὐτό λαβαίνουμε τό δεύτερο μέλος τοῦ τύπου τοῦ Bessel καί προσπαθοῦμε ἐκτελώντας ἁπλούς μετασχηματισμούς νά βροῦμε μία ἔκφραση πού νά περιέχει τίς διαδοχικές δυνάμεις τοῦ τελεστῆ Δ ἐφαρμοζόμενες στήν τιμή f_o. Ἔτσι μποροῦμε νά πάρουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
f(x) &= B_o(f_o+f_1) + B_1(f_1-f_o) + B_2(\delta^2 f_o+\delta^2 f_1) + B_3(\delta^2 f_1-\delta^2 f_o) + \ldots = \\
&= (B_o-B_1)f_o + (B_o+B_1)f_1 + (B_2-B_3)\delta^2 f_o + (B_2+B_3)\delta^2 f_1 + \ldots = \\
&= (B_o-B_1)f_o + (B_o+B_1)Ef_o + (B_2-B_3)\delta^2 f_o + (B_2+B_3)\delta^2 Ef_o + \ldots = \\
&= \big[(B_o-B_1) + (B_o+B_1)(1+\Delta) + (B_2-B_3)\Delta^2(1+\Delta)^{-1} + (B_2+B_3)\Delta^2 + \\
&\quad + \ldots\big]f_o = \\
&= \big[(B_o-B_1) + (B_o+B_1)(1+\Delta) + (B_2-B_3)\Delta^2(1-\Delta+\Delta^2-\ldots) + (B_2+B_3)\Delta^2 + \\
&\quad + \ldots\big]f_o = \\
&= \big[2B_o + (B_o+B_1)\Delta + 2B_2\Delta^2 + (B_3-B_2)\Delta^3 + \text{ὅροι βαθμοῦ} \geq 4\big]f_o .
\end{aligned}$$

'Εξισώνοντας τώρα τόν τελεστή πού βρήκαμε παραπάνω νά ἐφαρμόζεται στήν τιμή f_o, μέ τόν ἀντίστοιχο τελεστή πού ἐφαρμόζεται στήν ἴδια τιμή f_o

στόν τύπο παρεμβολῆς τῶν πρός τά έμπρός διαφορῶν τῶν Newton - Gregory (2.2), βρίσκουμε γιά τούς συντελεστές τῶν τεσσάρων πρώτων δυνάμεων τοῦ Δ ὅτι

$$2B_0 = 1$$
$$B_0 + B_1 = \binom{\theta}{1}$$
$$2B_2 = \binom{\theta}{2}$$
$$B_3 - B_2 = \binom{\theta}{3}$$

'Από τήν έπίλυση τοῦ παραπάνω συστήματος παίρνουμε

$$B_0 = \frac{1}{2}\,,\quad B_1 = \theta - \frac{1}{2}\,,\quad B_2 = \frac{\theta(\theta-1)}{4} \quad \text{καί} \quad B_3 = \frac{\theta(\theta-1/2)(\theta-1)}{6}\,.$$

Παρατηρήσεις:

'Ισχύουν οἱ ἴδιες ὅπως καί στίς περιπτώσεις τῶν δύο τύπων παρεμβολῆς τῶν Newton - Gregory. 'Η μόνη διαφορά εἶναι ὅτι ἡ παρούσα παρεμβολή έφαρμόζεται καλύτερα στή μέση ένός πίνακα.

3.3. Πλῆθος ὅρων πού χρησιμοποιοῦν - ται στούς τύπους παρεμβολῆς

Κατά τήν έφαρμογή ένός όποιουδήποτε άπό τούς τρεῖς τύπους παρεμβολῆς πού βρήκαμε στήν προηγούμενη παράγραφο χρησιμοποιοῦμε φυσικά ένα πεπερασμένο πλῆθος ὅρων. Τό πλῆθος τῶν ὅρων πού χρησιμοποιοῦμε καθορί - ζεται άπό τήν άκόλουθη σύμβαση. Χρησιμοποιοῦμε ὅλους στή σειρά τούς πρώτους ὅρους, μέχρι τόν πρῶτο ὅρο τοῦ τύπου παρεμβολῆς, πού ἡ άπόλυτη τιμή του εἶναι μικρότερη ἤ ἴση άπό μισή μονάδα τῆς τελευταίας δεκαδικῆς τάξης τοῦ πίνακα διαφορῶν. 'Ο ὅρος αύτός καθώς καί ὅλοι οἱ έπόμενοί του παραλείπονται. Μέ στοιχειώδεις μεθόδους τῆς 'Αναλύσεως εἶναι δυνατό νά ὑπολογιστοῦν μέγιστες τιμές γιά τίς όποῖες, ἄν οἱ άντίστοιχες διαφορές λαβαίνουν άπόλυτες τιμές μικρότερες ἤ ἴσες άπό αύτές, τότε ὁ άντίστοιχος ὅρος τοῦ τύπου παρεμβολῆς θά ἔχει ἀπόλυτη τιμή μικρότερη ἤ ἴση ἀπό μισή μονάδα τῆς τελευταίας δεκαδικῆς τάξης τοῦ πίνακα διαφορῶν. Ἔτσι μπορεῖ νά καθοριστεῖ προκαταβολικά τό μέγιστο πλῆθος τῶν ὅρων πού θά χρησιμοποιηθοῦν στόν τύπο παρεμβολῆς.

Παράδειγμα 1

Στήν περίπτωση τοῦ τύπου παρεμβολῆς τῶν πρός τά ἐμπρός διαφορῶν τῶν Newton - Gregory μέ $0 < \theta < 1$ νά βρεθεῖ ἡ μέγιστη ἀπόλυτη τιμή πού μπορεῖ νά πάρει ἡ $\Delta^2 f_0$ ὥστε ὁ ἀντίστοιχος ὅρος νά ἔχει ἀπόλυτη τιμή μικρότερη ἤ ἴση ἀπό μισή μονάδα τῆς τελευταίας δεκαδικῆς τάξης τοῦ πίνακα διαφορῶν.

Λύση

Ὁ ὅρος τοῦ τύπου παρεμβολῆς τῶν πρός τά ἐμπρός διαφορῶν τῶν Newton - Gregory, πού περιέχει τή δεύτερη διαφορά $\Delta^2 f_0$, εἶναι ὁ $\binom{\theta}{2}\Delta^2 f_0$. Σύμφωνα μέ τήν ἀπαίτηση τοῦ προβλήματος, γιά τόν ὅρο αὐτόν, θά πρέπει νά ἔχουμε

$$\left|\binom{\theta}{2}\Delta^2 f_0\right| \leqq \frac{1}{2} \quad , \quad 0 < \theta < 1 .$$

Ἡ παραπάνω σχέση γράφεται

$$|\theta(\theta-1)|\,|\Delta^2 f_0| \leq 1 \, , \quad 0 < \theta < 1 . \tag{3.5}$$

Ἐξάλλου ἔχουμε

$$\max_{0<\theta<1} |\theta(\theta-1)| = \max_{0<\theta<1} \{\theta(1-\theta)\}$$

καί ἐπειδή θ, $1-\theta > 0$ μέ $\theta + (1-\theta) = 1$ (σταθερό) ἡ μέγιστη τιμή πετυχαίνεται γιά $\theta = 1-\theta$ ἤ $\theta = \frac{1}{2}$. Ὁπότε

$$\max_{0<\theta<1} |\theta(\theta-1)| = \frac{1}{4} .$$

Λαβαίνοντας ὑπόψη τό παραπάνω ἀποτέλεσμα βρίσκουμε ὅτι γιά νά ἰσχύει πάντοτε ἡ σχέση (3.5) ἀρκεῖ νά ἔχουμε

$$|\Delta^2 f_0| \leq 4 .$$

Ἄρα ἡ μέγιστη ἀπόλυτη τιμή πού μπορεῖ νά πάρει ἡ δεύτερη διαφορά $\Delta^2 f_0$ εἶναι τέσσερις μονάδες τῆς τελευταίας δεκαδικῆς τάξης τοῦ πίνακα διαφορῶν.

Μέ μεθόδους παραπλήσιες τῆς μεθόδου τοῦ παραπάνω παραδείγματος εἶναι δυνατό νά βρεθοῦν ἀκριβῶς ἤ μέ προσέγγιση μέγιστες ἀπόλυτες τιμές γιά τίς διαφορές ὁποιασδήποτε τάξης, σέ μονάδες τῆς τελευταίας δεκαδικῆς τάξης τοῦ πίνακα διαφορῶν, γιά τίς ὁποῖες τιμές ὁ ἀντίστοιχος ὅρος τοῦ τύπου παρεμβολῆς (συνεπῶς καί ὅλοι οἱ ἑπόμενοί του) παραλείπεται στήν πράξη. Στόν πίνακα πού ἀκολουθεῖ δίνονται οἱ πρῶτες στή σειρά ἀπό τίς τιμές αὐτές γιά $0 < \theta < 1$, πού ἀφοροῦν καί τούς τρεῖς τύπους παρεμβολῆς πού ἔχουν βρεθεῖ.

Τύπος παρεμβολῆς	δ^2	δ^3	δ^4	δ^5	δ^6
Newton - Gregory (καί οἱ δύο)	4	8	12	16	21
Bessel ⊛	4	60	20	500	100

Παράδειγμα 2

Δίνεται ὁ πίνακας διαφορῶν τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως f(x), πού βρίσκεται στήν ἀρχή τῆς ἑπόμενης σελίδας. Χρησιμοποιώντας διαδοχικά καί τούς τρεῖς τύπους παρεμβολῆς νά βρεθεῖ ἡ τιμή f(5.44).

⊛ Στόν τύπο παρεμβολῆς τοῦ Bessel, ὅταν ἐμφανίζεται ἄθροισμα διαφορῶν, π.χ. $(\delta^2 f_0 + \delta^2 f_1)$, οἱ τιμές τοῦ παραπάνω πίνακα θά πρέπει νά διπλασιάζονται γιά τό ἄθροισμα αὐτό.

x	f(x)	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
5.0	0.6989700					
		86002				
5.1	0.7075702		-1671			
		84331		66		
5.2	0.7160033		-1505		-8	
		82726		58		7
5.3	0.7242759		-1547		-1	
		81179		$\boxed{57}$		-2
$\boxed{5.4}$	0.7323938		-1490		-3	
		79689		54		1
5.5	0.7403627		$\boxed{-1436}$		-2	
		78253		52		-4
5.6	0.7481880		-1384		$\boxed{-6}$	
		76869		46		$\boxed{7}$
5.7	0.7558749		-1338		1	
		75531		47		
5.8	0.7634280		-1291			
		74240				
5.9	0.7708520					

Λύση

Όταν χρησιμοποιήσουμε τόν τύπο παρεμβολῆς τῶν πρός τά ἐμπρός διαφορῶν τῶν Newton - Gregory μέ $x_o = 5.4$, τήν ἀμέσως μικρότερη τιμή τοῦ $x = 5.44$ στόν πίνακα διαφορῶν, ἔχουμε

$$\theta = \frac{x - x_o}{h} = \frac{5.44 - 5.4}{0.1} = 0.4 \, .$$

Ἀπό τόν πίνακα διαφορῶν καί τόν πίνακα τῆς σελίδας 56 ἔχουμε

$$|\Delta^2 f_o| = 1436 > 4, \quad |\Delta^3 f_o| = 52 > 8 \quad \text{καί} \quad |\Delta^4 f_o| = 6 < 12 \, .$$

Ἄρα συμπεραίνουμε ὅτι θά χρησιμοποιήσουμε τούς τέσσερις πρώτους, τό πολύ, ὅρους τοῦ τύπου παρεμβολῆς. Ἀντικαθιστώντας λοιπόν παίρνουμε

$$
\begin{array}{lrr}
f_o & = 0.7323938 & \\
\theta\Delta f_o = 0.4 \times 79689 & = 31875 & 6^{\circledast} \\
\frac{1}{2}\theta(\theta-1)\Delta^2 f_o = \frac{1}{2}\times 0.4 \times (-0.6)\times(-1436) & = 172 & 32 \\
\frac{1}{6}\theta(\theta-1)(\theta-2)\Delta^3 f_o = \frac{1}{6}\times 0.4\times(-0.6)\times(-1.6)\times 52 & = 3 & 33 \\
\hline
 & 0.7355989 & 25
\end{array}
$$

Ἑπομένως

$$f(5.44) = 0.7355989 \; . \tag{3.6}$$

Ὅταν χρησιμοποιήσουμε τόν τύπο παρεμβολῆς τῶν πρός τά πίσω διαφορῶν τῶν Newton - Gregory καί πάρουμε $x_o = 5.5$ ἔχουμε

$$\theta = \frac{x_o - x}{h} = \frac{5.5 - 5.44}{0.1} = 0.6 \; .$$

Ὅπως καί πρίν, ἀπό τόν πίνακα διαφορῶν καί τόν πίνακα τῆς σελίδας 56 ἔχουμε

$$|\nabla^2 f_o| = 1490 > 4, \quad |\nabla^3 f_o| = 57 > 8 \quad \text{καί} \quad |\nabla^4 f_o| = 1 < 12 \; .$$

Ἄρα θά χρησιμοποιήσουμε τούς τέσσερις πρώτους, τό πολύ, ὅρους τοῦ τύπου παρεμβολῆς. Ἀντικαθιστώντας λαβαίνουμε

⊛ Στήν πράξη γιά νά βροῦμε ἕνα ἀποτέλεσμα πού νά ἔχει ἕνα συγκεκριμένο πλῆθος δ.ψ. διατηροῦμε στά ἐνδιάμεσα ἀποτελέσματα ἕνα ἤ δύο δ.ψ. παραπάνω, ὅταν ἐργαζόμαστε μέ τό χέρι, ἤ ὅλα τά διαθέσιμα δ.ψ. ὅταν ἐργαζόμαστε μέ μία ἀριθμομηχανή ἤ ἕναν Η.Υ. Στό τέλος βέβαια στρογγυλεύουμε τήν τιμή πού θά προκύψει στό συγκεκριμένο πλῆθος τῶν δ.ψ.

$$f_o \qquad = 0.7403627$$

$$-\theta\nabla f_o = -0.6\times 79689 \qquad =- \quad 47813\ 4$$

$$\frac{1}{2}\theta(\theta-1)\nabla^2 f_o = \frac{1}{2}\times 0.6\times(-0.4)\times(-1490) \qquad = \quad 178\ 8$$

$$-\frac{1}{6}\theta(\theta-1)(\theta-2)\nabla^3 f_o = -\frac{1}{6}\times 0.6\times(-0.4)\times(-1.4)\times 57 =- \quad 3\ 88$$

$$0.7355988\ 52$$

'Επομένως

$$f(5.44) = 0.7355989\ . \tag{3.7}$$

Τέλος, ὅταν χρησιμοποιήσουμε τόν τύπο παρεμβολῆς τῶν κεντρικῶν διαφορῶν τοῦ Bessel καί πάρουμε ὅπως στήν πρώτη περίπτωση $x_o = 5.4$ θά ἔχουμε $\theta = 0.4$. 'Επειδή ὅμως τώρα

$$|\delta^2 f_o + \delta^2 f_1| = 1490 + 1436 = 2926 > 8 \quad \text{καί} \quad |\delta^3 f_{1/2}| = 54 < 60$$

θά χρησιμοποιήσουμε, τό πολύ, τούς τρεῖς πρώτους ὅρους τοῦ τύπου παρεμβολῆς. Ἔτσι ἀντικαθιστώντας ἔχουμε

$$\frac{1}{2}(f_o + f_1) = \frac{1}{2}(0.7323938 + 0.7403627) \qquad = 0.7363782\ 5$$

$$(\theta - \frac{1}{2})\,\delta f_{1/2} = -0.1\times 79689 \qquad =- \quad 7968\ 9$$

$$\frac{1}{4}\theta(\theta-1)(\delta^2 f_o + \delta^2 f_1) = \frac{1}{4}\times 0.4\times(-0.6)\times(-1490-1436) = \quad 176\ 56$$

$$0.7355990\ 16$$

'Επομένως

$$f(5.44) = 0.7355990\ . \tag{3.8}$$

Ὅπως μπορεῖ νά παρατηρήσει κανείς οἱ τρεῖς τιμές στά ἀποτελέσματα (3.6), (3.7) καί (3.8), πού βρέθηκαν χρησιμοποιώντας διαδοχικά τούς τρεῖς τύπους παρεμβολῆς, εἶναι τέτοιες ὥστε οἱ δύο πρῶτες νά συμπίπτουν ἐνῶ ἡ τρίτη νά διαφέρει ἀπό αὐτές μόνο κατά μία μονάδα τῆς ἕβδομης δεκαδικῆς τάξης. Ἐπομένως ὁποιοδήποτε ἀπό αὐτές τίς τιμές μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως στό σημεῖο $x = 5.44$.

3.4. Τύπος παρεμβολῆς τοῦ Lagrange

Οἱ τύποι παρεμβολῆς πού βρέθηκαν στήν παράγραφο 3.2. χρησιμοποιοῦν διαφορές προερχόμενες ἀπό τιμές τῆς συναρτήσεως $f(x)$, πού δίνονται γιά ἰσαπέχουσες τιμές τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς x. Συνεπῶς δέν μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν οἱ τύποι αὐτοί σ' ἐκεῖνες τίς περιπτώσεις, ὅπου οἱ τιμές τῆς συναρτήσεως δίνονται γιά τιμές τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς πού δέν ἰσαπέχουν. Τό γενικότερο αὐτό πρόβλημα ἀντιμετωπίζουμε ἐδῶ. Θεωροῦμε, λοιπόν, ὅτι ἡ συνάρτηση $f(x)$ δίνεται ἀπό τίς τιμές της σέ $n+1$ σημεῖα $x_i \; | i = 0(1)n$, τά ὁποῖα, γενικά, δέν ἰσαπέχουν. Ὑποθέτουμε ἀκόμη ὅτι ἡ συνάρτηση, πού δόθηκε, προσεγγίζεται ἀπό ἕνα πολυώνυμο $p_n(x)$ βαθμοῦ τό πολύ n κατά τέτοιο τρόπο ὥστε οἱ τιμές τοῦ πολυωνύμου $p_n(x)$ νά συμπίπτουν μέ τίς ἀντίστοιχες τιμές τῆς συναρτήσεως $f(x)$ στά $n+1$ σημεῖα $x_i \; | i = 0(1)n$. Τό ὅλο πρόβλημα, δηλαδή, καταλήγει στήν εὕρεση ἑνός πολυωνύμου $p_n(x)$, βαθμοῦ τό πολύ n, τέτοιου ὥστε νά ἱκανοποιεῖ τίς σχέσεις

$$p_n(x_i) = f_i \qquad | i = 0(1)n \, . \tag{3.9}$$

Σ' αὐτήν τήν περίπτωση τά σημεῖα $x_i \; | i = 0(1)n$ καλοῦνται σημεῖα παρεμβολῆς, τό δέ πολυώνυμο $p_n(x)$ πολυώνυμο παρεμβολῆς τοῦ Lagrange. Εἶναι φανερό ὅτι ἀπό τίς σχέσεις (3.9) μπορεῖ νά προκύψει ὅτι ἡ μορφή τοῦ πολυωνύμου $p_n(x)$ εἶναι ἡ ἀκόλουθη

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f_i \tag{3.10}$$

μέ $L_i(x) \; | i = 0(1)n$ πολυώνυμα βαθμοῦ n, πού καλοῦνται συντελεστές τοῦ

Lagrange, καί ἱκανοποιοῦν τίς σχέσεις

$$L_i(x_i) = 1 \quad \text{καί} \quad L_i(x_j) = 0 \quad |i,j = 0(1)n \ , \ j \neq i \ . \tag{3.11}$$

Ἀπό τίς παραπάνω σχέσεις (3.11) εἶναι δυνατό νά προκύψουν οἱ συντελεστές $L_i(x)$ τοῦ Lagrange ὡς ἑξῆς. Ἀπό τή δεύτερη ὁμάδα τῶν σχέσεων (3.11), καί γιά ἕνα συγκεκριμένο δείκτη i, ἔχουμε ὅτι τό πολυώνυμο $L_i(x)$ μηδενίζεται γιά κάθε τιμή τοῦ $x = x_j \ |j = 0(1)n, \ j \neq i$. Ἄρα τό $L_i(x)$ θά διαιρεῖται μέ καθέναν παράγοντα $(x-x_j) \ |j = 0(1)n, \ j \neq i$, ἐπομένως καί μέ τό γινόμενό τους. Τό τελευταῖο δίνει σάν συμπέρασμα ὅτι ἡ μορφή τοῦ $L_i(x)$ θά εἶναι ἡ ἀκόλουθη

$$L_i(x) \equiv A(x-x_o) \ \ldots \ (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \ \ldots \ (x-x_n) \tag{3.12}$$

ὅπου A σταθερά. Γιά τήν εὕρεση τῆς τιμῆς τῆς σταθερᾶς A χρησιμοποιοῦμε τήν πρώτη ὁμάδα ἀπό τίς σχέσεις (3.11). Ἔτσι γιά $x = x_i$ ἀπό τήν (3.12) προκύπτει ὅτι

$$L_i(x_i) = 1 = A(x_i - x_o) \ \ldots \ (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ \ldots \ (x_i - x_n)$$

ὁπότε

$$A = \frac{1}{(x_i-x_o) \ \ldots \ (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \ \ldots \ (x_i-x_n)} \ .$$

Ἀντικαθιστώντας τήν παραπάνω τιμή τοῦ A στήν (3.12) βρίσκουμε ὅτι

$$L_i(x) = \frac{(x-x_o)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_o)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \ |i = 0(1)n \ . \tag{3.13}$$

Ἡ παραπάνω ἔκφραση γιά τούς συντελεστές τοῦ Lagrange μπορεῖ νά γραφτεῖ πιό συνοπτικά καί ὡς ἑξῆς

$$L_i(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x-x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i-x_j)} \quad \Big| \; i = 0(1)n \, . \tag{3.14}$$

Ὁποιαδήποτε ἀπό τίς δύο ἐκφράσεις (3.13) ἤ (3.14), γιά τούς συντελεστές τοῦ Lagrange, μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ στήν (3.10) γιά νά δώσει μία ἀναλυτική ἔκφραση γιά τό πολυώνυμο παρεμβολῆς τοῦ Lagrange. Ἔτσι ὁ τύπος παρεμβολῆς τοῦ Lagrange εἶναι ὁ ἀκόλουθος

$$f(x) = p_n(x) + R_{n+1}(x) \tag{3.15}$$

ἤ προσεγγιστικά ὁ

$$f(x) \approx p_n(x) \, . \tag{3.16}$$

Στούς παραπάνω δύο τύπους, $p_n(x)$ εἶναι τό πολυώνυμο παρεμβολῆς τοῦ Lagrange πού δίνεται ἀπό τή σχέση (3.10), μέ τούς συντελεστές του $L_i(x)$, συντελεστές τοῦ Lagrange, νά δίνονται ἀπό τίς ἐκφράσεις (3.13) ἤ (3.14) καί $R_{n+1}(x)$ εἶναι ἡ διόρθωση πού θά βρεθεῖ ἀναλυτικά στό τέλος τοῦ παρόντος Κεφαλαίου. Γιά συγκεκριμένες, τώρα, τιμές τοῦ n μποροῦμε νά βροῦμε καί συγκεκριμένες μορφές τοῦ τύπου παρεμβολῆς τοῦ Lagrange (3.16). Ἔτσι γιά $n = 1$ (γραμμική παρεμβολή) ἔχουμε

$$f(x) \approx p_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} f_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f_1 \, .$$

Γιά $n = 2$ (τετραγωνική παρεμβολή) ἔχουμε

$$f(x) \approx p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_o-x_1)(x_o-x_2)} f_o + \frac{(x-x_o)(x-x_2)}{(x_1-x_o)(x_1-x_2)} f_1 +$$

$$+ \frac{(x-x_o)(x-x_1)}{(x_2-x_o)(x_2-x_1)} f_2$$

κ.ο.κ.

Παρατηρήσεις:

i) Είναι φανερό ότι τό πολυώνυμο παρεμβολής τοῦ Lagrange, πού βρέθηκε άπό τήν έκφραση (3.10) μέ τούς συντελεστές του $L_i(x) \mid i = 0(1)n$ νά πληροῦν τίς σχέσεις (3.11), ίκανοποιεῖ τίς (3.9). Είναι εὔκολο λοιπόν νά συμπεράνουμε ότι καί κάθε άλλο πολυώνυμο, βαθμοῦ τό πολύ n, πού θά ίκανοποιεῖ τίς σχέσεις (3.9), θά ταυτίζεται μέ τό πολυώνυμο παρεμβολής τοῦ Lagrange (3.10). Καί αύτό γιατί τά δύο πολυώνυμα θά είναι βαθμοῦ τό πολύ n καί θά παίρνουν τίς ίδιες τιμές (f_i) γιά τίς n+1 διαφορετικές τιμές τῆς άνεξάρτητης μεταβλητῆς $x = x_i \mid i = 0(1)n$.

ii) Μέ βάση τήν προηγούμενη παρατήρηση μποροῦμε νά συμπεράνουμε ότι, άν χρησιμοποιοῦνται τελικά τά ίδια άκριβῶς n+1 σημεῖα παρεμβολής πού ίσαπέχουν, τότε οί άντίστοιχοι τύποι παρεμβολής τῶν πρός τά έμπρός διαφορῶν τῶν Newton - Gregory, τῶν πρός τά πίσω διαφορῶν τῶν Newton - Gregory, τῶν κεντρικῶν διαφορῶν τοῦ Bessel καί τοῦ Lagrange συμπίπτουν.

iii) Σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη παρατήρηση ή έκφραση γιά τή διόρθωση $R_{n+1}(x)$, πού θά βρεθεῖ στήν έπόμενη παράγραφο άναλυτικά, γιά τήν περίπτωση πολυωνύμου παρεμβολής τοῦ Lagrange ίσχύει καί γιά όλους τούς μέχρι τώρα τύπους παρεμβολής πού έχουν βρεθεῖ.

<u>Παράδειγμα 1</u>

Νά χρησιμοποιηθεῖ ό πίνακας διαφορῶν τοῦ Παραδείγματος 2 τῆς προηγούμενης παραγράφου 3.3. μαζί μέ τόν τύπο παρεμβολής τοῦ Lagrange, γιά τήν εὕρεση τῆς ἴδιας τιμῆς $f(5.44)$, παίρνοντας σάν σημεῖα παρεμβολῆς τά σημεῖα 5.3, 5.4, 5.5 καί 5.6 .

Λύση

Καλοῦμε $x_0 = 5.3$, $x_1 = 5.4$, $x_2 = 5.5$ καί $x_3 = 5.6$ καί ἔχουμε

$$f(x) \approx p_3(x) = \sum_{i=0}^{3} L_i(x) f_i \ .$$

Γιά $x = 5.44$ βρίσκουμε

$$L_0(5.44)f_0 = \frac{0.04\times(-0.06)\times(-0.16)}{-0.1\times(-0.2)\times(-0.3)}\times 0.7242759 = -0.0463536\ 58$$

$$L_1(5.44)f_1 = \frac{0.14\times(-0.06)\times(-0.16)}{0.1\times(-0.1)\times(-0.2)}\times 0.7323938 = 0.4921686\ 34$$

$$L_2(5.44)f_2 = \frac{0.14\times(0.04)\times(-0.16)}{0.2\times(0.1)\times(-0.1)}\times 0.7403627 = 0.3316824\ 90$$

$$L_3(5.44)f_3 = \frac{0.14\times(0.04)\times(-0.06)}{0.3\times 0.2\times 0.1}\times 0.7481880 = -0.0418985\ 28$$

$$0.7355989\ 38$$

Ἄρα

$$f(5.44) \approx 0.7355989 \ .$$

Παράδειγμα 2

Χρησιμοποιώντας κατάλληλο τύπο παρεμβολῆς νά βρεθεῖ πολυώνυμο δεύτερου βαθμοῦ, τό πολύ, πού νά ταυτίζεται στά σημεῖα $x = -1, 0, 2$ μέ τή συνάρτηση $f(x) \equiv x^3$.

Λύση

Ἀπό τούς τύπους παρεμβολῆς, πού βρήκαμε, μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε μόνο τόν τύπο παρεμβολῆς τοῦ Lagrange, ἀφοῦ τά σημεῖα παρεμβολῆς δέν ἰσαπέχουν. Ἄν τώρα καλέσουμε $x_o = -1$, $x_1 = 0$ καί $x_2 = 2$, τότε ἔχουμε $f_o = -1$, $f_1 = 0$ καί $f_2 = 8$. Χρησιμοποιώντας τόν τύπο παρεμβολῆς τοῦ Lagrange βρίσκουμε

$$f(x) \approx p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_o-x_1)(x_o-x_2)} f_o + \frac{(x-x_o)(x-x_2)}{(x_1-x_o)(x_1-x_2)} f_1 +$$

$$+ \frac{(x-x_o)(x-x_1)}{(x_2-x_o)(x_2-x_1)} f_2 =$$

$$= \frac{x(x-2)}{(-1)\times(-3)} \times(-1) + \frac{(x+1)(x-2)}{1\times(-2)} \times 0 + \frac{(x+1)x}{3\times 2} \times 8 =$$

$$= x^2 + 2x \ .$$

πού εἶναι τό ζητούμενο πολυώνυμο.

3.5. Διόρθωση στούς τύπους παρεμβολῆς

Ἡ διόρθωση $R_{n+1}(x)$ στόν τύπο παρεμβολῆς τοῦ Lagrange (3.15) μπορεῖ βέβαια, σέ μία πρώτη ἔκφραση, νά δοθεῖ ἀπό τή διαφορά

$$R_{n+1}(x) = f(x) - p_n(x) . \tag{3.17}$$

Εἶναι ὅμως δυνατό κάτω ἀπό ὁρισμένες προϋποθέσεις, πού ἀφοροῦν τή συνάρτηση $f(x)$, νά βρεθεῖ μία ἄλλη ἔκφραση πού, μερικές φορές, μπορεῖ νά εἶναι πιό χρήσιμη ἀπό τήν (3.17). Γιά τό σκοπό αὐτό διατυπώνουμε καί ἀποδεικνύουμε τό παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα

Ἄν I εἶναι τό μικρότερο διάστημα πού περιέχει ὅλα τά σημεῖα παρεμβολῆς $x_i \mid i=0(1)n$ καί τό τυχόν σημεῖον x (δηλαδή $I \equiv [\min(x,x_o,\ldots,x_n),\ \max(x,x_o,\ldots,x_n)]$) καί ἡ συνάρτηση $f(x)$ εἶναι τέτοια ὥστε $f(x) \in C^{n+1}(I)$ ⊛, τότε ἡ διόρθωση $R_{n+1}(x)$ τοῦ τύπου παρεμβολῆς τοῦ Lagrange δίνεται ἀπό τήν ἔκφραση

$$R_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \tag{3.18}$$

ὅπου $\xi \in I$.

'Απόδειξη

Στήν ἀρχή σχηματίζουμε τή συνάρτηση

$$g(t) = R_{n+1}(t) - \frac{R_{n+1}(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}\ \prod_{i=0}^{n}(t-x_i) \tag{3.19}$$

ὅπου t εἶναι ἡ ἀνεξάρτητη μεταβλητή καί $x \neq x_k \mid k=0(1)n$ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο. Σάν συνέπεια τῆς ὑποθέσεως ὅτι $f(t) \in C^{n+1}(I)$ καί τῆς σχέσης $R_{n+1}(t) = f(t) - p_n(t)$ ἔχουμε γιά τή συνάρτηση $g(t)$ ὅτι $g(t) \in C^{n+1}(I)$. 'Επειδή τώρα γνωρίζουμε ὅτι οἱ τιμές τοῦ πολυωνύμου παρεμβολῆς $p_n(t)$ στά σημεῖα παρεμβολῆς συμπίπτουν μέ τίς ἀντίστοιχες τιμές τῆς συναρτήσεως $f(t)$, οἱ τιμές τῆς διορθώσεως $R_{n+1}(t)=f(t)-p_n(t)$ στά ἴδια σημεῖα θά εἶναι ἴσες μέ μηδέν. Αὐτό μᾶς δίνει ἀμέσως σάν συμπέρασμα ὅτι

$$g(x_k) = 0 \qquad \mid k = 0(1)n\ .$$

'Ακόμη γιά τό σημεῖο $t = x \neq x_k$ ἔχουμε προφανῶς ὅτι

⊛ 'Η σχέση $f(x) \in C^{n+1}(I)$ δηλώνει ὅτι ἡ $f(x)$ ἔχει παραγώγους ἕως τήν τάξη $n+1$ καί μάλιστα συνεχεῖς στό διάστημα I.

$$g(x) = 0 .$$

Άρα ή συνάρτηση $g(t)$ έχει τουλάχιστον $n+2$ διαφορετικές ρίζες στό διάστημα I. Σύμφωνα όμως μέ τό θεώρημα τοῦ Rolle ή $g'(t)$ θά έχει $n+1$ διαφορετικές ρίζες στό διάστημα I. Γιά τόν ίδιο λόγο ή $g''(t)$ θά έχει n διαφορετικές ρίζες στό διάστημα I καί τέλος, έπαγωγικά, μπορεῖ νά δειχτεῖ ότι ή $g^{(n+1)}(t)$ έχει μία ρίζα, πού καλοῦμε ξ, στό διάστημα I. Παραγωγίζοντας τώρα τή σχέση (3.19) $n+1$ φορές, άντικαθιστώντας τήν τιμή $R_{n+1}^{(n+1)}(t)$ μέ $f^{(n+1)}(t) - p_n^{(n+1)} = f^{(n+1)}(t)$ καί θέτοντας όπου $t=\xi$ βρίσκουμε

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{R_{n+1}(x)}{\prod\limits_{i=0}^{n}(x-x_i)}(n+1)! .$$

Λύνοντας ώς πρός $R_{n+1}(x)$ έχουμε τελικά ότι

$$R_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\,\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} .$$

Παράδειγμα

Νά άποδειχτεῖ ότι ένα άπόλυτο φράγμα γιά τό σφάλμα άποκοπῆς, κατά τήν εύρεση τῆς τιμῆς τοῦ πολυωνύμου παρεμβολῆς τοῦ Lagrange, πού όρίζεται άπό τά σημεῖα $x=0$ καί 1 καί προσεγγίζει τή συνάρτηση $\sin\frac{\pi x}{2}$ στό σημεῖο 0.1, εἶναι τό $0.01125\pi^2$.

Λύση

Στήν περίπτωση αύτή ή συνάρτηση $f(x)$ εἶναι ή $\sin\frac{\pi x}{2}$ καί τά σημεῖα παρεμβολῆς τά $x_0=0$ καί $x_1=1$. Μία έκφραση γιά τό σφάλμα άποκοπῆς εἶναι ή

$$E = -R_2(x) = -\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\,\frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} .$$

μέ $\xi \in [\min(x, x_o, x_1), \max(x, x_o, x_1)]$.

'Αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$E = -\frac{1}{2}(x-0)(x-1)\left(-\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi\xi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{8}x(x-1)\sin\frac{\pi\xi}{2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{8}(0.1)(0.1-1)\sin\frac{\pi\xi}{2}$$

συνεπώς

$$E = -\,0.01125\,\pi^2 \sin\frac{\pi\xi}{2} \quad \text{μέ} \quad \xi \in [0,1] \,.$$

"Αρα

$$|E| = \left|-0.01125\,\pi^2 \sin\frac{\pi\xi}{2}\right| = 0.01125\,\pi^2 \left|\sin\frac{\pi\xi}{2}\right| \leq 0.01125\,\pi^2 \,.$$

'Επομένως ένα άπόλυτο φράγμα γιά τό σφάλμα άποκοπής είναι τό $0.01125\,\pi^2$.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Δίνεται ή συνάρτηση f(x) άπό τόν παρακάτω πίνακα τιμών

x	0	1	2	3
f(x)	-1	0	3	8

Χρησιμοποιώντας τόν τύπο παρεμβολής τοῦ Bessel καί όλες τίς πληροφορίες τοῦ πίνακα, νά βρεθεῖ ή τιμή f(1.4). ('Απ. 0.96)

2. Νά βρεθεῖ τό πολυώνυμο παρεμβολής τῶν σημείων $(-2, -5\alpha)$, $(0,\alpha)$ καί $(1, 4\alpha)$, όπου α σταθερά. ('Απ. $3\alpha x+\alpha$)

3. Νά δειχτεῖ ότι στήν περίπτωση τῆς τετραγωνικής παρεμβολής τοῦ Lagrange $\left[f(x) \approx p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_o-x_1)(x_o-x_2)}f_o + \frac{(x-x_o)(x-x_2)}{(x_1-x_o)(x_1-x_2)}f_1 + \frac{(x-x_o)(x-x_1)}{(x_2-x_o)(x_2-x_1)}f_2\right]$

ὅταν οἱ τιμές f_0, f_1 καί f_2 εἶναι σταθερές καί ἴσες μέ c, τό πολυώνυμο παρεμβολῆς $p_2(x)$, βαθμοῦ τό πολύ δύο, εἶναι τό σταθερό πολυώνυμο c.

4. Χρησιμοποιώντας κατάλληλο τύπο παρεμβολῆς, νά βρεθεῖ πολυώνυμο τό πολύ τρίτου βαθμοῦ, πού νά παίρνει, στά σημεῖα $x = 0, 1, 3, 5$ τίς τιμές $x_0 \; x_1 \; x_2 \; x_3$ $y = 3, 6, 18, 38$ ἀντίστοιχα. ('Απ. $x^2 + 2x + 3$)

5. Νά ἀποδειχτεῖ ἀναλυτικά ὅτι στή συγκεκριμένη περίπτωση τῶν τριῶν σημείων $x_i = x_0 + ih \; | i = 0(1)2$, ὁ τύπος παρεμβολῆς τοῦ Lagrange συμπίπτει μέ τόν τύπο παρεμβολῆς τῶν πρός τά ἐμπρός διαφορῶν τῶν Newton-Gregory.

6. Νά βρεθεῖ τό πολυώνυμο παρεμβολῆς, πού προσεγγίζει τή συνάρτηση $f(x) \equiv x^3 - 1$ στά σημεῖα $x = -2, -1, 1$ καί στή συνέχεια νά βρεθεῖ ἡ διόρθωση γιά τήν παρεμβολή αὐτή. ('Απ. $-2x^2 + x + 1$, $(x+2)(x+1)(x-1)$)

7. Ἡ συνάρτηση $\cos\frac{\pi x}{2}$ παίρνει τίς τιμές 1 καί 0 γιά $x = 0$ καί 1 ἀντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας τά δύο αὐτά σημεῖα ὡς σημεῖα παρεμβολῆς νά βρεθεῖ τό ἀντίστοιχο πολυώνυμο παρεμβολῆς, καθώς ἐπίσης καί ἕνα ἀπόλυτο φράγμα γιά τό σφάλμα ἀποκοπῆς στό διάστημα $[0,1]$. ('Απ. $\cancel{-}x+1$, $\frac{\pi^2}{32}$)

8. Γιά τή συνάρτηση $y(x) \equiv x^4$, νά βρεθεῖ τό πολυώνυμο παρεμβολῆς $p(x)$ χρησιμοποιώντας ὅλες τίς πληροφορίες τοῦ πίνακα

x	0	1	2
y(x)	0	1	16

καί στή συνέχεια νά βρεθεῖ μιά ἔκφραση γιά τή διόρθωση R(x). ('Απ. $7x^2 \cancel{-} 6x$, $x^4 - 7x^2 + 6x$ ἤ $4x(x-\cancel{1})(x-2)\xi$ μέ $\xi \in [\min(x,0), \max(x,2)]$)

4. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ

4.1. Γενικά

Στήν πράξη, μία συνάρτηση μιᾶς μεταβλητῆς x χρησιμοποιεῖται γιά τή μαθηματική περιγραφή ἑνός φαινομένου. Συνεπῶς τό μόνο πού ξέρουμε συνήθως γιά τή συνάρτηση αὐτή εἶναι ἕνα πλῆθος τιμῶν της, γιά ὁρισμένες τιμές τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς, πού προέρχονται ἀπό μετρήσεις ἤ παρατηρήσεις. Ἔτσι τό πρόβλημα τῆς εὑρέσεως τῆς παραγώγου μιᾶς συναρτήσεως πού δίνεται ἀπό ἕναν πίνακα τιμῶν της σέ ἕνα πλῆθος γνωστῶν σημείων δέν μπορεῖ νά ἀντιμετωπιστεῖ ἀλλιῶς,παρά μόνο μέ τίς μεθόδους τῆς Α.Α. Ἀκόμη θά πρέπει νά τονίσουμε πώς καί στήν περίπτωση πού ἡ συνάρτηση $f(x)$ δίνεται ἀπό τήν ἀναλυτική ἔκφρασή της εἶναι προτιμότερη, μερικές φορές, ἡ χρησιμοποίηση τῶν μεθόδων πού θά περιγράψουμε στή συνέχεια, γιά τήν εὕρεση τῆς παραγώγου σέ ἕνα γνωστό σημεῖο, παρά ἡ χρησιμοποίηση τῶν ἀντίστοιχων μεθόδων τῆς Ἀναλύσεως.

Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ συνάρτηση $f(x)$ δίνεται μέ τίς τιμές της στά $n+1$ σημεῖα $x_i \,|\, i=0(1)n$ καί ζητοῦμε νά βροῦμε τήν τιμή τῆς παραγώγου της σ' ἕνα γνωστό σημεῖο x. Ἡ βασική ἰδέα τῆς ἀριθμητικῆς παραγωγίσεως εἶναι πολύ ἁπλή. Ἀντί νά βροῦμε τήν τιμή τῆς παραγώγου τῆς $f(x)$ στό σημεῖο x βρίσκουμε τήν τιμή τῆς παραγώγου τοῦ πολυωνύμου παρεμβολῆς της $p_n(x)$ στό ἴδιο σημεῖο x, θεωρώντας σάν σημεῖα παρεμβολῆς τά $x_i \,|\, i=0(1)n$. Ἔτσι ἔχουμε κατά προσέγγιση ὅτι

$$f'(x) \approx p_n'(x).$$

Εἶναι φανερό πώς ἄν τά σημεῖα $x_i \,|\, i=0(1)n$ δέν ἰσαπέχουν,τότε σάν πολυώνυμο παρεμβολῆς χρησιμοποιοῦμε τό πολυώνυμο παρεμβολῆς τοῦ Lagrange, ἐνῶ στήν περίπτωση πού τά σημεῖα αὐτά ἰσαπέχουν, τότε ἐκτός ἀπό τό πολυώνυμο παρεμβολῆς τοῦ Lagrange, μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε καί τό ἀντίστοιχο πολυώνυμο πού προκύπτει ἀπό τούς τύπους παρεμβολῆς τῶν Newton - Gregory ἤ τόν τύπο τοῦ Bessel. Οἱ ἁπλούστεροι τύποι προκύπτουν φυσικά στήν περίπτωση πού τά σημεῖα παρεμβολῆς $x_i \,|\, i=0(1)n$ ἰσαπέχουν, δηλαδή ἱκανοποιοῦν τή σχέση

$$x_i = x_o + ih \quad \big| i = 0(1)n \ .$$

Μέ τήν παραγωγή τέτοιων τύπων καί μόνο θά άσχοληθοῦμε στό παρόν Κεφάλαιο.

4.2. Τύποι ἀριθμητικῆς παραγωγίσεως.

Ἀναχωροῦμε ἀπό τόν τύπο παρεμβολῆς τῶν πρός τά ἐμπρός διαφορῶν τῶν Newton - Gregory

$$f(x) \approx p_n(x) = f_o + \binom{\theta}{1}\Delta f_o + \binom{\theta}{2}\Delta^2 f_o + \dots + \binom{\theta}{n}\Delta^n f_o$$

μέ $\theta = (x-x_o)/h$. Παραγωγίζοντας ὡς πρός x λαβαίνουμε

$$f'(x) \approx p_n'(x) = \frac{dp_n(x)}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dx} = \quad = \frac{1}{h}$$

$$= \frac{1}{h}\frac{d}{d\theta}\left[f_o + \binom{\theta}{1}\Delta f_o + \binom{\theta}{2}\Delta^2 f_o + \dots + \binom{\theta}{n}\Delta^n f_o\right]$$

ὁπότε βρίσκουμε τόν πρῶτο τύπο ἀριθμητικῆς παραγωγίσεως

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta f_o + \frac{1}{2}(2\theta-1)\Delta^2 f_o + \frac{1}{6}(3\theta^2-6\theta+2)\Delta^3 f_o + \dots + \right.$$
$$\left. + \frac{d}{d\theta}\binom{\theta}{n}\Delta^n f_o\right] \ . \qquad (4.1)$$

Ὁ παραπάνω τύπος μπορεῖ νά ἀπλοποιειθεῖ, ὅταν ζητεῖται ἡ παράγωγος τῆς f(x) σ' ἕνα ἀπό τά σημεῖα παρεμβολῆς $x_i \ | i = 0(1)n$. Π.χ. ἡ παράγωγος στό σημεῖο $x = x_o$ προκύπτει ἀπό τόν τύπο (4.1) γιά $\theta = 0$. Ἔτσι ἔχουμε

$$f'(x_o) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta f_o - \frac{1}{2}\Delta^2 f_o + \frac{1}{3}\Delta^3 f_o - \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\Delta^n f_o\right). \qquad (4.2)$$

Γιά συγκεκριμένες τιμές τοῦ n μποροῦμε νά βροῦμε καί συγκεκριμένους προσεγγιστικούς τύπους γιά τήν $f'(x_o)$. Π.χ. γιά $n=1$ βρίσκουμε

$$f'(x_o) \approx \frac{1}{h}\,\Delta f_o = \frac{f_1-f_o}{h} \qquad (4.3)$$

γιά $n=2$

$$f'(x_o) \approx \frac{1}{h}(\Delta f_o - \frac{1}{2}\,\Delta^2 f_o) = -\frac{f_2-4f_1+3f_o}{2h} \qquad (4.4)$$

κ.ο.κ.

Γιά τήν παραγωγή τύπων πού νά δίνουν παραγώγους δεύτερης, τρίτης καί ἀνώτερης τάξης παραγωγίζουμε τή σχέση (4.1) διαδοχικά ὡς πρός x. Π.χ. γιά τή δεύτερη παράγωγο μπορούμε νά πάρουμε

$$f''(x) \approx \frac{1}{h}\;\frac{d}{dx}\Big[\Delta f_o + \frac{1}{2}(2\theta-1)\Delta^2 f_o + \frac{1}{6}(3\theta^2-6\theta+2)\Delta^3 f_o +$$

$$+ \dots + \frac{d}{d\theta}\binom{\theta}{n}\Delta^n f_o\Big] = \frac{1}{h^2}\;\frac{d}{d\theta}\;\Big[\Delta f_o + \frac{1}{2}(2\theta-1)\Delta^2 f_o +$$

$$+ \frac{1}{6}\,(3\theta^2-6\theta+2)\;\Delta^3 f_o + \dots + \frac{d}{d\theta}\binom{\theta}{n}\Delta^n f_o\Big] \quad \text{καί}$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}\;\Big[\Delta^2 f_o + (\theta-1)\Delta^3 f_o + \dots + \frac{d^2}{d\theta^2}\binom{\theta}{n}\Delta^n f_o\Big]\,. \qquad (4.5)$$

Ἀπό τήν παραπάνω σχέση γιά $x=x_o$ καί $n=2$ μπορούμε νά βρούμε

$$f''(x_o) \approx \frac{1}{h^2}\,\Delta^2 f_o = \frac{f_2-2f_1+f_o}{h^2}\,. \qquad (4.6)$$

Παράδειγμα

Χρησιμοποιώντας ὅλες τίς πληροφορίες τοῦ πίνακα

x	0	1	2	3
f(x)	0	1	6	15

νά βρεθοῦν οἱ τιμές $f'(1.5)$ καί $f''(2.5)$.

Λύση

Γιά νά χρησιμοποιήσουμε όλες τίς πληροφορίες τοῦ πίνακα παίρνουμε $x_0 = 0$, ὁπότε $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ καί $x_3 = 3$. Προφανῶς τά σημεῖα αὐτά ἰσαπέχουν καί τό βῆμα h εἶναι ἴσο μέ 1. Γιά νά βροῦμε τήν τιμή $f'(1.5)$, δηλαδή τήν τιμή τῆς παραγώγου τῆς $f(x)$ στό σημεῖο $x = 1.5$, θά χρησιμοποιήσουμε τόν τύπο (4.1) μέ $\theta = (x - x_0)/h = (1.5-0)/1 = 1.5$ καί $n = 3$. Γιά τήν εὕρεση τῆς τιμῆς $f''(2.5)$ θά ἐφαρμόσουμε τόν τύπο (4.5) μέ $\theta=(2.5-0)/1 = 2.5$ καί $n = 3$. Γιά τήν ἐφαρμογή ὅμως ὁποιουδήποτε ἀπό τούς τύπους (4.1) καί (4.5) χρειαζόμαστε τίς διαφορές, ἕως καί τρίτης τάξης, τῆς συναρτήσεως $f(x)$ στό σημεῖο x_0. Κατασκευάζουμε λοιπόν τόν πίνακα διαφορῶν τῆς συναρτήσεως $f(x)$ πού εἶναι ὁ ἀκόλουθος

x	$f(x)$	Δ	Δ^2	Δ^3
0	0			
		1		
1	1		4	
		5		0
2	6		4	
		9		
3	15			

Γιά τήν $f'(1.5)$ ἀντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$f'(1.5) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 + \frac{1}{2}(2\theta-1)\Delta^2 f_0 + \frac{1}{6}(3\theta^2-6\theta+2)\Delta^3 f_0\right] =$$

$$= \frac{1}{1}\left[1 + \frac{1}{2}(2\times1.5-1)\times4 + \frac{1}{6}(3\times1.5^2-6\times1.5+2)\times0\right] = 5 .$$

Γιά τήν $f''(2.5)$ βρίσκουμε ἀντίστοιχα

$$f''(2.5) \approx \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 f_0 + (\theta-1)\Delta^3 f_0\right] = \frac{1}{1^2}\left[4 + (2.5-1)\times 0\right] = 4 .$$

4.3. Τύποι ἀριθμητικῆς παραγωγίσεως πού προκύπτουν μέ τή χρησιμοποίηση συμβολικῶν μεθόδων

Οἱ τύποι πού βρέθηκαν στήν προηγούμενη παράγραφο μποροῦν νά προκύψουν, μερικοί ἴσως εὐκολότερα, χρησιμοποιώντας συμβολικές μεθόδους. Παρακάτω δείχνουμε τόν τρόπο εὑρέσεως τῆς πρώτης καί τῆς δεύτερης παραγώγου τῆς συναρτήσεως $f(x)$ στό σημεῖο x_0. Γιά τήν πρώτη παράγωγο παίρνουμε διαδοχικά

$$f'(x_0) = Df_0 = \frac{1}{h}\left[\log(1+\Delta)\right]f_0 = \frac{1}{h}\left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \ldots\right)f_0 .$$

Συνεπῶς

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 f_0 + \ldots\right) .$$

Εἶναι φανερό ὅτι ἄν στόν παραπάνω τύπο προσεγγίσουμε τό πρῶτο μέλος του μέ τούς n πρώτους ὅρους τοῦ δεύτερου μέλους θά ἔχουμε βρεῖ τόν τύπο (4.2). Γιά τή δεύτερη παράγωγο μποροῦμε νά βροῦμε ἀντίστοιχα

$$f''(x_0) = D^2 f_0 = \frac{1}{h^2}\left[\log(1+\Delta)\right]^2 f_0 = \frac{1}{h^2}\left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \ldots\right)^2 f_0 =$$

$$= \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12}\Delta^4 - \frac{5}{6}\Delta^5 + \ldots\right)f_0 .$$

Ἀπό τόν παραπάνω τύπο παίρνουμε

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 f_0 - \Delta^3 f_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 f_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 f_0 + \ldots\right) .$$

Εἶναι πάλι φανερό ὅτι οἱ n-1 πρῶτοι ὅροι τοῦ δεύτερου μέλους τοῦ παραπάνω τύπου ἀποτελοῦν μία προσέγγιση τοῦ πρώτου μέλους του. Ἔτσι ἔχουμε βρεῖ τόν τύπο (4.6).

4.4. Ἀριθμητική παραγώγιση μέ τή μέθοδο τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν

Στήν παράγραφο αὐτή μελετοῦμε τήν περίπτωση πού δίνεται ἐξαρχῆς ἕνας προσεγγιστικός τύπος ἀριθμητικῆς παραγωγίσεως μιᾶς προκαθορισμένης μορφῆς. Ὁ τύπος αὐτός γενικά δίνει τήν τιμή μιᾶς παραγώγου μιᾶς συγκεκριμένης τάξης ἐνῶ στό δεύτερο μέλος του περιέχει ἕναν ἀριθμό, ἔστω n, παραμέτρων. Τό πρόβλημα εἶναι ὁ προσδιορισμός τῶν παραμέτρων τοῦ δεύτερου μέλους ἔτσι ὥστε ὁ τύπος πού δόθηκε νά εἶναι ὅσο τό δυνατόν πιό ἀκριβής, δηλαδή νά εἶναι ἀκριβής γιά πολυώνυμα βαθμοῦ ὅσο τό δυνατόν μεγαλύτερου. Γιά τόν προσδιορισμό τῶν n παραμέτρων ἀπαιτοῦμε ὁ τύπος πού προτείνεται νά εἶναι ἀκριβής γιά τίς στοιχειώδεις συναρτήσεις $f(x) \equiv x^k \,|k = 0(1)n-1$. Ἔτσι προκύπτει ἕνα σύστημα n ἐξισώσεων μέ n ἀγνώστους ἡ ἐπίλυση τοῦ ὁποίου προσδιορίζει τίς τιμές τῶν n παραμέτρων. Εἶναι φανερό ὅτι ἐξαιτίας τῶν ἀπαιτήσεων πού θέτουμε γιά τόν προσδιορισμό τῶν n παραμέτρων, δηλαδή ὁ τύπος νά εἶναι ἀκριβής γιά $f(x) \equiv x^k \,|k = 0(1)n-1$, καί ἀκόμη τῆς γραμμικῆς ἰδιότητας τοῦ τελεστῆ τῆς παραγώγου, ὁ τύπος θά εἶναι ἐπίσης ἀκριβής καί γιά ὅλα τά πολυώνυμα βαθμοῦ ἕως καί n-1 τουλάχιστο. Στό σημεῖο αὐτό παρατηροῦμε ὅτι ἄν τό σύστημα πού προκύπτει γιά τήν εὕρεση τῶν n παραμέτρων ἔχει ἄπειρες λύσεις, τότε προσθέτουμε κατάλληλο πλῆθος νέων ἐξισώσεων σ'αὐτό ἔτσι ὥστε νά φτάσουμε σ' ἕνα σύστημα πού ἔχει μιά (ἤ πεπερασμένο πλῆθος λύσεων) ἤ καμιά λύση. Οἱ ἐξισώσεις πού προσθέτονται στό σύστημα, ὅπως ἀναφέρθηκε, εἶναι αὐτές πού προκύπτουν, ὅταν ἀπαιτήσουμε ὁ τύπος πού δόθηκε νά εἶναι ἀκριβής καί γιά $f(x) \equiv x^n$, $x^{n+1}, \ldots$. Γιά τήν καλύτερη κατανόηση τῆς μεθόδου τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν δίνουμε στή συνέχεια ἕνα παράδειγμα.

Παράδειγμα

Νά προσδιοριστοῦν οἱ συντελεστές α, β, γ στόν προσεγγιστικό τύπο τῆς ἀριθμητικῆς παραγωγίσεως

$$f'(x_o) \approx \frac{1}{h}\,(\alpha f_o + \beta f_1 + \gamma f_2)$$

μέ $f_i = f(x_o + ih)\ |i = 0,1,2$, ὥστε νά εἶναι αὐτός ὅσο τό δυνατόν πιό ἀκριβής.

Λύση

Γιά νά προσδιορίσουμε τίς τρεῖς παραμέτρους α, β, γ, σύμφωνα μέ τή θεωρία πού ἀναπτύξαμε, ἀπαιτοῦμε ὁ τύπος πού δόθηκε νά εἶναι ἀκριβής γιά $f(x) \equiv 1,\ x,\ x^2$, ἔτσι ὥστε νά μπορέσουμε νά σχηματίσουμε τρεῖς ἐξισώσεις πού νά περιέχουν τούς τρεῖς ἀγνώστους α, β, γ. Ἄν καλέσουμε μέ A τό πρῶτο μέλος καί μέ B τό δεύτερο μέλος τοῦ τύπου πού δόθηκε, τότε γιά $f(x) \equiv 1$ ἔχουμε

$$A = f'(x_o) = 0 \qquad \text{καί}$$

$$B = \frac{1}{h}\,(\alpha\times 1 + \beta\times 1 + \gamma\times 1) = \frac{1}{h}\,(\alpha + \beta + \gamma)\,.$$

Ἐπειδή πρέπει νά ἔχουμε $A \equiv B$, προκύπτει ἀμέσως ὅτι

$$\alpha + \beta + \gamma = 0\,. \tag{4.7}$$

Γιά $f(x) \equiv x$

$$A = f'(x_o) = 1 \qquad \text{καί}$$

$$B = \frac{1}{h}\,\left[\alpha x_o + \beta(x_o + h) + \gamma(x_o + 2h)\right] = \frac{1}{h}\left[x_o(\alpha+\beta+\gamma) + h(\beta+2\gamma)\right]$$

ἤ ἐξαιτίας τῆς (4.7)

$$B = \beta + 2\gamma\,.$$

Ἀπό τή σχέση $A \equiv B$ βρίσκουμε ὅτι

$$\beta + 2\gamma = 1\,. \tag{4.8}$$

Γιά $f(x) \equiv x^2$

$$A = f'(x_o) = 2x_o \qquad \text{καί}$$

$$B = \frac{1}{h}\left[\alpha x_o^2 + \beta(x_o+h)^2 + \gamma(x_o+2h)^2\right] = \frac{1}{h}\left[x_o^2(\alpha+\beta+\gamma) + 2x_o h(\beta+2\gamma) + \right.$$

$$\left. + h^2(\beta+4\gamma)\right] = 2x_o + h(\beta+4\gamma)$$

όπου γιά τήν εύρεση τοῦ δεξιοῦ μέλους χρησιμοποιήσαμε τίς σχέσεις (4.7) καί (4.8). Ἀπό τή σχέση τώρα $A \equiv B$ προκύπτει

$$\beta + 4\gamma = 0. \tag{4.9}$$

Ἡ ἐπίλυση τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (4.7), (4.8) καί (4.9) δίνει

$$\alpha = -\frac{3}{2}, \quad \beta = 2 \quad \text{καί} \quad \gamma = -\frac{1}{2}.$$

Μέ βάση τίς τιμές αὐτές ὁ τύπος πού δόθηκε γίνεται

$$f'(x_o) \approx -\frac{1}{2h}(3f_o - 4f_1 + f_2).$$

Παρατηροῦμε ὅτι ὁ τύπος πού βρέθηκε εἶναι ἀκριβής γιά πολυώνυμα μέχρι δεύτερου βαθμοῦ τουλάχιστον καί συμπίπτει μέ τόν τύπο (4.4).

4.5. Σφάλμα ἀποκοπῆς τῆς πρώτης παραγώγου

Τό σφάλμα ἀποκοπῆς E_n πού γίνεται κατά τήν εὕρεση τῆς πρώτης παραγώγου στήν περίπτωση τῶν n+1 σημείων παρεμβολῆς, πού γενικά μποροῦν νά θεωρηθοῦν ὅτι δέν ἰσαπέχουν, θά δίνεται ἀπό τήν παρακάτω διαφορά

$$E_n = p_n'(x) - f'(x).$$

'Επειδή γενικά ἰσχύει ὅτι $f(x) = p_n(x) + R_{n+1}(x)$, ἡ παραπάνω σχέση γράφεται

$$E_n = -R'_{n+1}(x).$$

'Εάν τώρα γιά τή διόρθωση $R_{n+1}(x)$ χρησιμοποιηθῆ ἡ ἔκφραση (3.18), μέ τήν προϋπόθεση φυσικά ὅτι ἰσχύουν οἱ ἀντίστοιχοι περιορισμοί γιά τή συνάρτηση $f(x)$, μποροῦμε νά ἔχουμε

$$E_n = -\frac{1}{(n+1)!}\left[f^{(n+1)}(\xi)\frac{d}{dx}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i) + \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\frac{d}{dx}f^{(n+1)}(\xi)\right].$$

ὅπου ξ εἶναι ἕνα ἄγνωστο σημεῖο τοῦ διαστήματος $I \equiv [\min(x,x_o,\ldots,x_n), \max(x,x_o,\ldots,x_n)]$ καί ἀποτελεῖ συνάρτηση τοῦ σημείου x. Μέ μεθόδους πού εἶναι πέρα ἀπό τό σκοπό τοῦ παρόντος βιβλίου καί μέ τήν προϋπόθεση ὅτι $f(x) \in C^{n+2}(I)$ εἶναι δυνατό νά ἀποδειχτεῖ ὅτι

$$\frac{d}{dx}f^{(n+1)}(\xi) = \frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)}, \qquad \eta \in I.$$

Χρησιμοποιώντας τό παραπάνω ἀποτέλεσμα στήν ἔκφραση τοῦ σφάλματος ἀποκοπῆς βρίσκουμε τελικά ὅτι

$$E_n = -\frac{1}{(n+1)!}\left[f^{(n+1)}(\xi)\frac{d}{dx}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i) + \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)}\right] \qquad (4.10)$$

μέ $\xi, \eta \in I$, $f \in C^{n+2}(I)$ καί $I \equiv [\min(x,x_o,\ldots,x_n), \max(x,x_o,\ldots,x_n)]$. 'Ο τύπος (4.10) μπορεῖ νά ἁπλοποιηθεῖ σημαντικά ὅταν τό τυχόν σημεῖον x εἶναι ἕνα ἀπό τά σημεῖα παρεμβολῆς $x_k \; | k = 0(1)n$, ὅπως συμβαίνει π.χ. στόν τύπο (4.2). Στήν περίπτωση αὐτή μποροῦμε νά βροῦμε ἀμέσως ὅτι

$$E_n = -\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(x_k-x_i),$$

$$\xi \in I \equiv [\min(x_o,\ldots,x_n), \max(x_o,\ldots,x_n)]. \qquad (4.11)$$

Παράδειγμα 1

Νά βρεθεῖ τό σφάλμα ἀποκοπῆς στήν περίπτωση χρησιμοποιήσεως τοῦ τύπου (4.3), δηλαδή τοῦ τύπου

$$f(x_0) \approx \frac{f_1 - f_0}{h} .$$

Λύση

Γιά νά βροῦμε τό σφάλμα ἀποκοπῆς εἶναι φανερό ὅτι θά ἐφαρμόσουμε τόν τύπο (4.11) μέ $n = 1$, $x_k = x_0$ καί ἔχοντας ὑπόψη ὅτι τά σημεῖα παρεμβολῆς ἰσαπέχουν. Ἀντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$E_1 = - \frac{1}{(1+1)!} f^{(1+1)}(\xi) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq 0}}^{1} (x_0 - x_i) ,$$

$$\xi \in I \equiv [\min(x_0, x_1), \max(x_0, x_1)] .$$

Ἀπό τά παραπάνω προκύπτει ὅτι

$$E_1 = \frac{h}{2} f^{(2)}(\xi) , \qquad \xi \in [x_0, x_1] .$$

Παράδειγμα 2

Νά βρεθεῖ, ὅπως στό προηγούμενο Παράδειγμα 1, τό σφάλμα ἀποκοπῆς στήν περίπτωση χρησιμοποιήσεως τοῦ τύπου (4.4), δηλαδή τοῦ τύπου

$$f(x_0) \approx - \frac{f_2 - 4f_1 + 3f_0}{2h} .$$

Λύση

Ἐργαζόμαστε ἀκριβῶς ὅπως καί πρίν, μέ $n = 2$ αὐτή τή φορά, ὁπότε βρίσκουμε εὔκολα ὅτι

$$E_2 = - \frac{1}{3!} f^{(3)}(\xi)(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) = - \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi), \quad \xi \in [x_0, x_2] .$$

Παράδειγμα 3

Γιά τήν εύρεση τῆς πρώτης παραγώγου τοῦ πολυωνύμου $f(x)=3x^3-2x^2+1$ στό σημεῖο $x=1.5$ χρησιμοποιεῖται ὁ τύπος (4.1) μέ σημεῖα παρεμβολῆς τά $x_o=0$, $x_1=1$ καί $x_2=2$. Νά βρεθεῖ, εφαρμόζοντας τόν τύπο (4.10), τό ἀντίστοιχο σφάλμα ἀποκοπῆς.

Λύση

Εἶναι φανερό ὅτι ὁ τύπος (4.10) θά ἐφαρμοστεῖ μέ $n=2$ καί $x=1.5$. Ἐπειδή ἡ συνάρτηση $f(x)$ εἶναι πολυώνυμο τρίτου βαθμοῦ, ἔχουμε ἀμέσως, ἀπό τήν ἀναλυτική ἔκφρασή της, ὅτι $f^{(3)}(\xi)=18$ καί $f^{(4)}(\eta)=0$. Ἐπομένως ὁ τύπος (4.10) δίνει

$$E_2=-\frac{1}{3!}\;18\left[(x-0)(x-1)(x-2)\right]'\Big|_{x=1.5}=$$

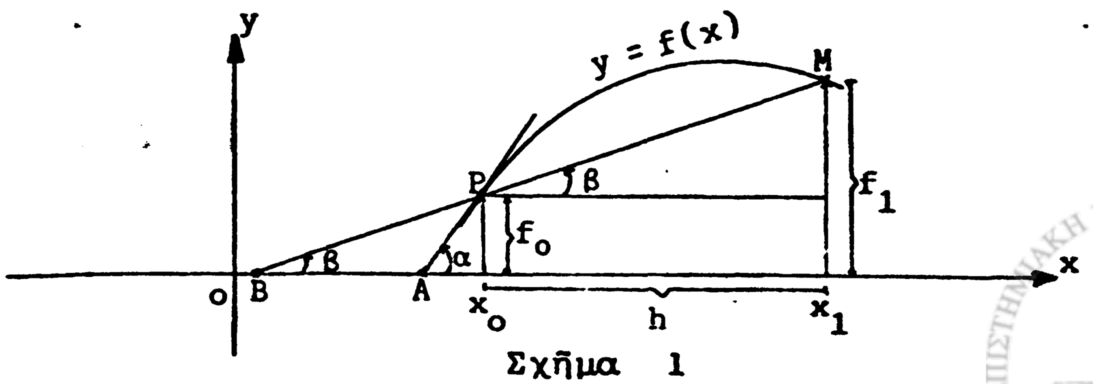
$$=-3(x^3-3x^2+2x)'\Big|_{x=1.5}=$$

$$=-3(3x^2-6x+2)\Big|_{x=1.5}=0.75\;.$$

Παρατηρήσεις:

Οἱ παρακάτω παρατηρήσεις, ἄν καί ἀναφέρονται στόν ἁπλούστερο τύπο πού βρήκαμε γιά τήν πρώτη παράγωγο, δηλαδή στόν $f'(x_o)=\dfrac{f_1-f_o}{h}$, εἶναι γενικῆς χρησιμότητας, γιατί μποροῦν εὔκολα νά γενικευτοῦν ἔτσι ὥστε νά καλύπτουν ὅλες τίς δυνατές περιπτώσεις

i) Ἄν ἡ τιμή τοῦ h εἶναι πολύ μεγάλη, τότε εἶναι φανερό ὅτι ἔχουμε μιά προσέγγιση τῆς παραγώγου πού δέν εἶναι ἀκριβής. Αὐτό μπορεῖ νά τό δεῖ κανείς μέ μιά γραφική παράσταση.



Σχῆμα 1

᾿Από τό Σχῆμα 1 ἔχουμε ὅτι $f'(x_o) = \tan\alpha$, ὅπου α εἶναι ἡ γωνία πού σχηματίζει ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης PA στό σημεῖο P τετμημένης x_o μέ τόν ἄξονα τῶν x ἐνῶ $\frac{f_1-f_o}{h} = \tan\beta$, ὅπου β εἶναι ἡ γωνία πού σχηματίζει ἡ εὐθεία PM, πού περνᾶ ἀπό τά σημεῖα τῆς καμπύλης P καί M τετμημένων x_o καί x_1 ἀντίστοιχα, μέ τόν ἄξονα τῶν x. Ὅπως φαίνεται ἀπό τό Σχῆμα 1 ἡ $\tan\beta$ ἀποτελεῖ μιά φτωχή προσέγγιση τῆς $\tan\alpha$.

ii) ᾿Από τήν προηγούμενη παρατήρηση φαίνεται καθαρά ὅτι γιά νά βροῦμε μιά καλή προσέγγιση τῆς παραγώγου πρέπει νά πάρουμε τό h ὅσο τό δυνατό πιό μικρό. Ἄν ὅμως ἡ τιμή τοῦ h εἶναι πολύ μικρή, τότε δημιουργοῦνται ἄλλου εἴδους προβλήματα. Πραγματικά, γιά τήν εὕρεση τοῦ δεύτερου μέλους τοῦ τύπου χρησιμοποιοῦνται τιμές τῆς συναρτήσεως οἱ ὁποῖες, ἄν ὄχι τίποτε ἄλλο, θά περιέχουν τουλάχιστον σφάλματα στρογγυλεύσεως. Ἔτσι ἄν f_1^*, f_o^* καί h^* εἶναι οἱ κατά προσέγγιση τιμές τῶν f_1, f_o καί h μέ ἀντίστοιχα σφάλματα στρογγυλεύσεως ε_1, ε_o καί ε_h, τότε θά ἔχουμε γιά τήν εὕρεση τῆς τιμῆς τῆς παραγώγου ὅτι

$$f'(x_o) \approx \frac{f_1^* - f_o^*}{h^*} = \frac{(f_1+\varepsilon_1)-(f_o+\varepsilon_o)}{h^*} \approx \frac{f_1-f_o}{h} + \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_o}{h^*} .$$

Εἶναι τώρα φανερό ὅτι ἡ τιμή τῆς $f'(x_o)$ εἶναι κατά προσέγγιση τό ἄθροισμα τῶν δύο ὅρων τοῦ δεξιοῦ μέλους. Ὁ πρῶτος ὅρος ἀποτελεῖ τήν προσέγγιση πού θέλουμε νά χρησιμοποιήσουμε. Γιά τό δεύτερο ὅμως ὅρο μποροῦμε νά παρατηρήσουμε τά ἑξῆς. Ἄν οἱ τιμές τῶν f_1, f_o καί h δίνονται μέ προσέγγιση m σ.ψ., τότε ἐπειδή ἡ τιμή f_o παραμένει κατά κάποιο τρόπο σταθερά ἐνῶ ἡ f_1 μεταβάλλεται, ὅταν τό h μεταβάλλεται καί τείνει στό μηδέν, τό πλῆθος τῶν δ.ψ. στίς τιμές τῶν f_1 καί f_o θά παραμείνει σταθερό καί ἴσο ἔστω μέ k. Τό γεγονός αὐτό μᾶς λέει ὅτι τά σφάλματα ε_1 καί ε_o θά εἶναι τέτοια ὥστε $|\varepsilon_o|, |\varepsilon_1| \leqq \frac{1}{2}10^{-k}$ πού σημαίνει ὅτι ἡ διαφορά τους θά εἶναι τῆς τάξης τοῦ 10^{-k}. Ἔτσι ἐνῶ ὁ παρονομαστής h τείνει στό μηδέν (γίνεται δηλαδή πολύ μικρός), ὁ ἀριθμητής $\varepsilon_1-\varepsilon_o$ παραμένει τῆς ἴδιας τάξης 10^{-k}. Τό τελευταῖο δίνει σάν συμπέρασμα ὅτι τό κλάσμα $\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_o}{h^*}$ τείνει στό ἄπειρο. Δηλαδή τό σφάλμα στήν εὕρεση τοῦ δεύτερου μέλους γίνεται πολύ μεγάλο, ὅταν τό h γίνεται πολύ μικρό.

iii) Ἐξαιτίας τῶν προηγούμενων παρατηρήσεων, στήν πράξη, θά πρέπει ἡ ἐκλογή τοῦ h νά γίνεται μέ μεγάλη προσοχή.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Χρησιμοποιώντας ὑποχρεωτικά ὅλα τά δεδομένα τοῦ πίνακα

x	0	1	2	3
f(x)	-1	1	15	53

νά βρεθεῖ ἡ τιμή $f'(0.5)$. (Ἀπ. 1.5)

2. Νά ἀποδειχτεῖ ὁ προσεγγιστικός τύπος

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{6h}(2f_3 - 9f_2 + 18f_1 - 11f_0)$$

ὅπου $x_i = x_0 + ih$ καί $f_i = f(x_i)\ |i = 0(1)3$.

3. Νά προσδιοριστοῦν οἱ συντελεστές α_0 καί α_1 ἔτσι ὥστε ὁ τύπος τῆς ἀριθμητικῆς παραγωγίσεως : $f'(x_0) = \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1)$, ὅπου x_0 καί x_1 γνωστοί ἀριθμοί, νά εἶναι ὅσο τό δυνατόν πιό ἀκριβής. (Ἀπ. $1/(x_0 - x_1), 1/(x_1 - x_0)$)

4. Νά ἀποδειχτεῖ μέ ὁποιοδήποτε τρόπο ὅτι

$$f''(x_0) \approx \frac{1}{h^2}(2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3)$$

ὅπου $x_i = x_0 + ih$ καί $f_i = f(x_i)\ |i = 0(1)3$.

5. Χρησιμοποιώντας τό πολυώνυμο παρεμβολῆς τοῦ Lagrange, πού ὁρίζεται ἀπό τά σημεῖα παρεμβολῆς x_0, x_1 καί x_2 μέ ἀντίστοιχες τιμές f_0, f_1 καί f_2, γιά τήν προσέγγιση τῆς συναρτήσεως f, νά βρεθοῦν προσεγγιστικές ἐκφράσεις, πού νά δίνουν τήν πρώτη καί τή δεύτερη παράγωγο τῆς f στό τυ-

χόν σημεῖον x.

['Απ. $$\frac{(2x-x_1-x_2)}{(x_o-x_1)(x_o-x_2)} f_o + \frac{(2x-x_o-x_2)}{(x_1-x_o)(x_1-x_2)} f_1 + \frac{(2x-x_o-x_1)}{(x_2-x_o)(x_2-x_1)} f_2 ,$$

$$\frac{2}{(x_o-x_1)(x_o-x_2)} f_o + \frac{2}{(x_1-x_o)(x_1-x_2)} f_1 + \frac{2}{(x_2-x_o)(x_2-x_1)} f_2 \Big]$$

6. Χρησιμοποιώντας τόν τύπο τοῦ Taylor, νά ἀποδειχτεῖ ὅτι τό σφάλμα ἀποκοπῆς, κατά τήν ἐφαρμογή τοῦ προσεγγιστικοῦ τύπου

$$f'(x_o) \approx \frac{1}{2h} (f_1 - f_{-1}) ,$$

ὅπου $f_1 = f(x_o+h)$ καί $f_{-1} = f(x_o-h)$, δίνεται ἀπό τήν ἔκφραση

$$E = -\frac{h^2}{6} f'''(\xi), \quad \text{μέ} \quad \xi \in [x_o-h,\ x_o+h] .$$

5. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

5.1. Γενικά

῾Η ἀριθμητική ὁλοκλήρωση ἀποτελεῖ ἕνα ἀπό τά σπουδαιότερα ἀντικείμενα τῆς Α.Α. Χρησιμοποιεῖται σέ μεγάλο βαθμό ἀπό ὅλους τούς ἐπιστήμονες θετικῆς κατευθύνσεως στίς ἐφαρμογές γιά τόν ὑπολογισμό τῶν ὁρισμένων ὁλοκληρωμάτων. Αὐτό ὀφείλεται σέ πολλούς λόγους. Ἕνας ἀπό αὐτούς εἶναι ὁ ἀντίστοιχος μέ ἐκεῖνον τῆς ἀριθμητικῆς παραγωγίσεως δηλαδή ἡ περίπτωση ὅπου δέν γνωρίζουμε τήν ἀναλυτική ἔκφραση τῆς συναρτήσεως πού εἶναι γιά ὁλοκλήρωση. Συγκεκριμένα, γιά τήν εὕρεση ἑνός ὁρισμένου ὁλοκληρώματος τῆς μορφῆς $\int_a^b f(x)dx$ στήν πράξη τό μόνο συνήθως πού ξέρουμε γιά τή συνάρτηση $f(x)$ εἶναι οἱ τιμές της γιά ὁρισμένες τιμές τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς x, πού προέρχονται ὅπως ἀναφέραμε ἀπό μετρήσεις ἤ παρατηρήσεις. ῾Η ἀνάγκη τῆς ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως στήν περίπτωση αὐτή εἶναι ἐπιτακτική. ᾿Ακόμη ὅμως καί ὅταν ξέρουμε τήν ἀναλυτική ἔκφραση τῆς συναρτήσεως $f(x)$ εἶναι δυνατό ἡ προσφυγή στίς μεθόδους τῆς ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως νά εἶναι ἀναγκαία. Αὐτό γίνεται φανερό στήν περίπτωση πού τό ἀόριστο ὁλοκλήρωμα, μιᾶς ἔστω καί σχετικά ἁπλῆς συναρτήσεως, νά ὑπάρχει, ἀλλά νά μήν ἐκφράζεται μέ ἕνα πεπερασμένο πλῆθος στοιχειωδῶν συναρτήσεων. Π.χ. στήν περίπτωση πού ἔχουμε τό ὁλοκλήρωμα $\int e^{-x^2}dx$. Γιά τό ὁλοκλήρωμα αὐτό ξέρουμε ἀπό τήν ᾿Ανάλυση ὅτι ὑπάρχει ἀλλά δέν μπορεῖ νά ἐκφραστεῖ μέ ἕνα πεπερασμένο πλῆθος στοιχειωδῶν συναρτήσεων. ᾿Επίσης γίνεται ἔμμεσα φανερό στήν περίπτωση πού τό ἀόριστο ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως, πού δίνεται ἀναλυτικά, εἶναι ἀρκετά πολύπλοκης μορφῆς. Π.χ. γιά τή συνάρτηση $f(x) \equiv \dfrac{1}{5-x^3}$ ἔχουμε ὅτι

$$\int \frac{dx}{5-x^3} = \frac{1}{5^{2/3}6}\log\left[\frac{5^{2/3}+5^{1/3}x+x^2}{(5^{1/3}-x)^2}\right] + \frac{1}{5^{2/3}3^{1/2}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+5^{1/3}}{5^{1/3}3^{1/2}}\right) + c\ .$$

Γιά νά βρεθεῖ τώρα ἡ τιμή ἑνός ὁρισμένου ὁλοκληρώματος τῆς μορφῆς $\int_a^b \dfrac{dx}{5-x^3}$, όπου $5^{1/3} \notin [a,b]$, μέ τή χρησιμοποίηση τοῦ προηγούμενου τύπου θά πρέπει νά χρησιμοποιηθοῦν προσεγγιστικές τιμές γιά τό $5^{1/3}$ καί τό $3^{1/2}$ καί στή συνέχεια, μετά άπό τήν έκτέλεση ὅλων τῶν πράξεων μέσα στήν άγκύλη καί στήν παρένθεση τοῦ δεύτερου μέλους, γιά $x = a$ καί $x = b$, θά πρέπει νά βρεθοῦν προσεγγιστικά πάλι οἱ ἀντίστοιχες τιμές γιά τίς συναρτήσεις log καί $\tan^{-1}$ καί στό τέλος νά γίνουν ὅλες οἱ πράξεις πού ἀπομένουν. Συνεπῶς τό τελικό ἀποτέλεσμα θά εἶναι ὁπωσδήποτε προσεγγιστικό καί μάλιστα μέ μιά προσέγγιση πού θά εἶναι δύσκολο νά έλέγξουμε, κυρίως ἐξαιτίας τῆς πολύπλοκης μορφῆς τῆς ἐκφράσεως τοῦ δεύτερου μέλους, καί θά προκύπτει ἔπειτα ἀπό ἕνα σχετικά μεγάλο ἀριθμό πράξεων. Οἱ μέθοδοι ὅμως τῆς ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως, ὅπως θά δοῦμε στή συνέχεια, μποροῦν νά μᾶς δώσουν τό ἀποτέλεσμα μέ καλύτερη καί ἐλεγχόμενη μάλιστα προσέγγιση καί κυρίως μέ πολύ μικρότερο ἀριθμό πράξεων.

Ἡ βασική ἰδέα τῆς ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως εἶναι ἡ ἴδια μέ τήν ἀντίστοιχη τῆς ἀριθμητικῆς παραγωγίσεως. Δηλαδή, ἀντί νά βροῦμε τό ὁρισμένο ὁλοκλήρωμα μιᾶς συγκεκριμένης συναρτήσεως βρίσκουμε τό ἴδιο ὁρισμένο ὁλοκλήρωμα ἑνός πολυωνύμου παρεμβολῆς της. Στίς περισσότερες περιπτώσεις ἡ συνάρτηση δίνεται μέ τίς τιμές της σ'ἕνα πλῆθος σημείων. Εἶναι ὅμως δυνατό νά δίνεται ἡ ἀναλυτική της ἔκφραση, ὁπότε θά μποροῦμε νά βροῦμε ὅσες τιμές της χρειαζόμαστε σέ διάφορα σημεῖα. Οἱ ἁπλούστεροι τύποι ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως προκύπτουν, φυσικά, ὅταν τά σημεῖα ἀπό τά ὁποῖα κατασκευάζεται τό πολυώνυμο παρεμβολῆς ἰσαπέχουν. Μέ τήν εὕρεση τέτοιων τύπων θά ἀσχοληθοῦμε κυρίως στή συνέχεια.

5.2. Κλειστοί τύποι ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως τῶν Newton-Cotes

Στήν παροῦσα παράγραφο, ὅπως καί στήν ἑπόμενη, θά ὑποθέτουμε ὅτι ἡ συνάρτηση $f(x)$ στό ὁρισμένο ὁλοκλήρωμα δίνεται ἤ μπορεῖ νά δοθεῖ σέ $n+1$ σημεῖα $x_i | i = 0(1)n$, πού ἰσαπέχουν, καί ὅτι ἐνδιαφερόμαστε γιά τόν ὑπολογισμό τῆς τιμῆς τοῦ ὁλοκληρώματος $\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$. Γιά τόν ὁρισμό τοῦ πολυωνύμου παρεμβολῆς $p_n(x)$ θά χρησιμοποιήσουμε τούς ἀντίστοιχους τύπους παρεμβολῆς τῶν σημείων πού ἰσαπέχουν καί συγκεκριμένα τόν τύπο τῶν πρός τά ἐμπρός διαφορῶν τῶν Newton - Gregory. Οἱ τύποι τῆς ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως πού θά προκύψουν στή συνέχεια καλοῦνται κλειστοί τύποι τῶν Newton - Cotes. Ἀνάλογα μέ τό βαθμό n τοῦ πολυωνύμου παρεμβολῆς πού χρησιμοποιεῖται προκύπτουν διάφοροι τύποι τῶν Newton - Cotes. Στή συνέχεια βρίσκουμε τούς τύπους ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως πού ἀντιστοιχοῦν στίς τιμές $n=1,2$ καί 3.

α) Γιά $n=1$ ἔχουμε

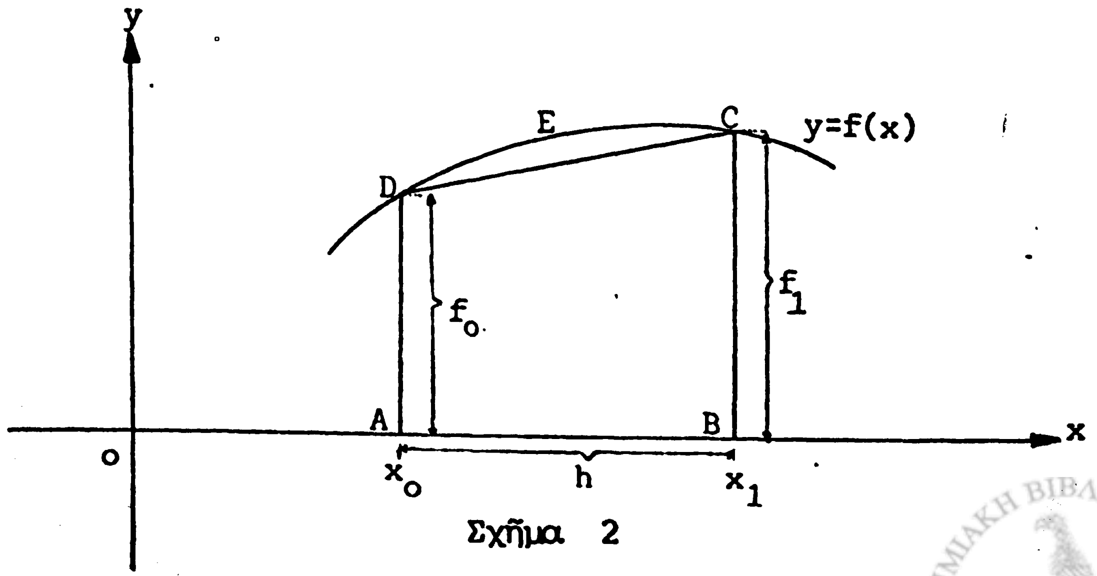
$$\int_{x_o}^{x_1} f(x)dx \approx \int_{x_o}^{x_1} p_1(x)dx = \int_0^1 \left[f_o + \binom{\theta}{1}\Delta f_o\right] h d\theta =$$

$$= h\int_0^1 (f_o + \theta\Delta f_o)d\theta = h\left[\theta f_o + \frac{\theta^2}{2}\Delta f_o\right]_0^1 = h\left[f_o + \frac{1}{2}(f_1 - f_o)\right] .$$

Καί τελικά

$$\int_{x_o}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f_o + f_1) . \tag{5.1}$$

Ὁ παραπάνω τύπος (5.1) ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως πού εἶναι ὁ ἁπλούστερος ἀπό ὅσους θά βροῦμε εἶναι γνωστός ὡς ὁ κανόνας τοῦ τραπεζίου. Κι' αὐτό, γιατί ὅπως εἶναι γνωστό τό ὁρισμένο ὁλοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ παρι-



Σχῆμα 2

στάνεται γραφικά άπό τό έμβαδό τοῦ σχήματος (ABCED) (Σχῆμα 2), ένῶ ἡ ἔκφραση τοῦ δεύτερου μέλους τοῦ τύπου (5.1), $\frac{h}{2}(f_o+f_1)$, άπό τό έμβαδό τοῦ τραπεζίου (ABCD).

Ὁ κανόνας τοῦ τραπεζίου μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ ὁρισμένου ὁλοκληρώματος τῆς συναρτήσεως f(x) στήν περίπτωση πού τό διάστημα ὁλοκληρώσεως ἀποτελεῖται άπό k διαδοχικά διαστήματα (ἴσο τό καθένα μέ τό βῆμα h). Στήν περίπτωση αὐτή ἔχουμε·

$$\int_{x_o}^{x_k} f(x)dx = \int_{x_o}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx\,.$$

Ἄν τώρα τόν κάθε ὅρο τοῦ δεύτερου μέλους στήν παραπάνω ἰσότητα ἀντικαταστήσουμε μέ τό κατά προσέγγιση ἴσο του, άπό τόν κανόνα τοῦ τραπεζίου θά πάρουμε

$$\int_{x_o}^{x_k} f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f_o+f_1) + \frac{h}{2}(f_1+f_2) + \ldots + \frac{h}{2}(f_{k-1}+f_k)\,.$$

Ἑπομένως ὁ γενικευμένος κανόνας τοῦ τραπεζίου θά εἶναι ὁ ἀκόλουθος

$$\int_{x_o}^{x_k} f(x)dx \approx h\left(\frac{f_o}{2}+f_1+f_2+\ldots+f_{k-1}+\frac{f_k}{2}\right)\,. \tag{5.2}$$

β) Γιά $n=2$ ἔχουμε

$$\int_{x_o}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_o}^{x_2} p_2(x)dx = \int_0^2 \left[f_o + \binom{\theta}{1}\Delta f_o + \binom{\theta}{2}\Delta^2 f_o\right]h\,d\theta =$$

$$= h\int_0^2 \left[f_o + \theta\Delta f_o + \frac{1}{2}(\theta^2-\theta)\Delta^2 f_o\right]d\theta =$$

$$= h\left[\theta f_o + \frac{\theta^2}{2}\Delta f_o + \frac{1}{2}\left(\frac{\theta^3}{3}-\frac{\theta^2}{2}\right)\Delta^2 f_o\right]_0^2 =$$

$$= h\left[2f_o + 2(f_1-f_o) + \frac{1}{3}(f_2-2f_1+f_o)\right]$$

καί τελικά

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) \,. \tag{5.3}$$

Ὁ τύπος (5.3) πού βρέθηκε παραπάνω εἶναι γνωστός ὡς ὁ κανόνας τοῦ 1/3 τοῦ Simpson.

Ὁ κανόνας (5.3) μπορεῖ νά ἐπεκταθεῖ γιά τήν εὕρεση ἑνός ὁρισμένου ὁλοκληρώματος πού ἀποτελεῖται ἀπό 2k διαδοχικά, ἴσα μέ h, διαστήματα. Στήν περίπτωση αὐτή ἔχουμε ὅπως καί πρίν

$$\int_{x_0}^{x_{2k}} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \dots + \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{h}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4) + \dots + \frac{h}{3}(f_{2k-2} + 4f_{2k-1} + f_{2k}) \,.$$

Ἑπομένως

$$\int_{x_0}^{x_{2k}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 2f_{2k-2} + 4f_{2k-1} + f_{2k}) \,. \tag{5.4}$$

γ) Γιά $n = 3$ ἔχουμε

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_3} p_3(x)dx = \int_0^3 \left[f_0 + \binom{\theta}{1}\Delta f_0 + \binom{\theta}{2}\Delta^2 f_0 + \binom{\theta}{3}\Delta^3 f_0\right] h\,d\theta =$$

$$= h\int_0^3 \left[f_0 + \theta\Delta f_0 + \frac{1}{2}(\theta^2 - \theta)\Delta^2 f_0 + \frac{1}{6}(\theta^3 - 3\theta^2 + 2\theta)\Delta^3 f_0\right] d\theta =$$

$$= h\left[\theta f_0 + \frac{\theta^2}{2}\Delta f_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\theta^3}{3} - \frac{\theta^2}{2}\right)\Delta^2 f_0 + \frac{1}{6}\left(\frac{\theta^4}{4} - \theta^3 + \theta^2\right)\Delta^3 f_0\right]_0^3 =$$

$$= h\left[3f_0 + \frac{9}{2}(f_1 - f_0) + \frac{9}{4}(f_2 - 2f_1 + f_0) + \frac{3}{8}(f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0)\right]$$

καί συνεπώς

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\,(f_0+3f_1+3f_2+f_3)\,.} \qquad (5.5)$$

Ὁ τύπος (5.5) εἶναι γνωστός ὡς κανόνας τῶν $^3\!/_8$. Μπορεῖ νά ἐπεκταθεῖ, ὅπως στίς δύο προηγούμενες περιπτώσεις, γιά νά καλύψει τήν περίπτωση τῶν 3k διαδοχικῶν ἴσων διαστημάτων. Ἔχουμε

$$\int_{x_0}^{x_{3k}} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_6} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{3k-3}}^{x_{3k}} f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{3h}{8}\,(f_0+3f_1+3f_2+f_3) + \frac{3h}{8}\,(f_3+3f_4+3f_5+f_6) + \ldots +$$

$$+\frac{3h}{8}\,(f_{3k-3}+3f_{3k-2}+3f_{3k-1}+f_{3k})\,.$$

Συνεπώς

$$\int_{x_0}^{x_{3k}} f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\,(f_0+3f_1+3f_2+2f_3+3f_4+3f_5+2f_6+\ldots+$$
$$+2f_{3k-3}+3f_{3k-2}+3f_{3k-1}+f_{3k})\,. \qquad (5.6)$$

Παράδειγμα 1

Χρησιμοποιώντας καί τούς τρεῖς γενικευμένους τύπους ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως τοῦ κανόνα τοῦ τραπεζίου, τοῦ κανόνα τοῦ $^1\!/_3$ τοῦ Simpson καί τοῦ κανόνα τῶν $^3\!/_8$, μέ $h = 0.1$ σ'ὅλες τίς περιπτώσεις, νά ὑπολογιστεῖ τό ὁρισμένο ὁλοκλήρωμα $\int_{5.0}^{5.6} f(x)dx$, ὅπου $f(x)$ εἶναι ἡ συνάρτηση πού δίνεται στό Παράδειγμα 2 τῆς σελίδας 56.

Λύση

Γιά τό γενικευμένο κανόνα τοῦ τραπεζίου ἄν ἀντικαταστήσουμε στόν τύπο (5.2) καί κάνουμε πράξεις βρίσκουμε διαδοχικά

$$\int_{5.0}^{5.6} f(x)dx \approx 0.1\left[\frac{f(5.0)}{2} + f(5.1) + f(5.2) + f(5.3) + f(5.4) +\right.$$

$$\left. + f(5.5) + \frac{f(5.6)}{2}\right] = 0.43441849 .$$

Γιά τό γενικεμένο κανόνα τοῦ ⅓ τοῦ Simpson ἀπό τόν τύπο (5.4), μέ τόν ἴδιο τρόπο, ἀντικαθιστώντας καί κάνοντας πράξεις βρίσκουμε

$$\int_{5.0}^{5.6} f(x)dx \approx \frac{0.1}{3}\left[f(5.0) + 4f(5.1) + 2f(5.2) + 4f(5.3) + 2f(5.4) +\right.$$

$$\left. + 4f(5.5) + f(5.6)\right] = 0.43442625 .$$

Τέλος γιά τό γενικεμένο κανόνα τῶν ⅜ ἀπό τόν τύπο (5.6) βρίσκουμε μέ τόν ἴδιο τρόπο

$$\int_{5.0}^{5.6} f(x)dx \approx \frac{3\times 0.1}{8}\left[f(5.0) + 3f(5.1) + 3f(5.2) + 2f(5.3) + 3f(5.4) +\right.$$

$$\left. + 3f(5.5) + f(5.6)\right] = 0.43442624 .$$

Παρατήρηση:

Γιά νά ὑπολογίσουμε στήν πράξη τό ὁρισμένο ὁλοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$, ὅταν ἡ συνάρτηση f(x) δίνεται ἀναλυτικά μέ τήν ἔκφρασή της, ἐργαζόμαστε πάντοτε ὡς ἑξῆς. Πρῶτα ἀποφασίζουμε γιά ποιό ἀπό τούς τρεῖς ἁπλούς τύπους ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως, δηλαδή τόν κανόνα τοῦ τραπεζίου, τόν κανόνα τοῦ ⅓ τοῦ Simpson ἤ τόν κανόνα τῶν ⅜, θά χρησιμοποιήσουμε. Στή συνέχεια παίρνουμε σάν διάστημα (βῆμα) h τό b-a ἄν χρησιμοποιοῦμε τόν κανόνα τοῦ τραπεζίου, τό $\frac{b-a}{2}$ ἄν χρησιμοποιοῦμε τόν κανόνα τοῦ ⅓ τοῦ Simpson, τό $\frac{b-a}{3}$ ἄν χρησιμοποιοῦμε τόν κανόνα τῶν ⅜ καί ἐφαρμόζουμε τόν τύπο πού διαλέξαμε. Μετά ἐπαναλαμβάνουμε τήν ἀριθμητική ὁλοκλήρωση χρησιμοποιώντας τώρα τόν ἀντίστοιχο γενικεμένο κανόνα μέ διάστημα (βῆμα) h τό μισό τοῦ προηγούμενου. Τό τελευταῖο βῆμα τῆς ἐργασίας ἐφαρμόζεται ἐπαναληπτικά. Τέλος ἡ παραπάνω ἐπαναληπτική ἐργασία σταματᾶ ὅταν δύο διαδοχικές τιμές τοῦ ὁλοκληρώματος πού προκύπτουν ἀπό τήν προηγούμενη ἐργασία συμπίπτουν σέ ἕναν προκαθορισμένο άριθμό δ.ψ. Συγκεκριμένα ἄν ζητοῦμε ἕνα ἀποτέλεσμα μέ προσέγγιση k δ.ψ. τότε ἡ παραπάνω ἐργασία σταματᾶ ὅταν ἡ ἀπόλυτη τιμή τῆς διαφορᾶς δύο διαδοχικῶν τιμῶν τοῦ ὁλοκληρώματος, πού προκύπτουν μέ τόν τρόπο πού περιγράψαμε παραπάνω, εἶναι μικρότερη ἤ ἴση ἀπό μισή μονάδα τῆς k δεκαδικῆς τάξης. Ὅταν αὐτό συμβαίνει, τότε τήν τελευταία τιμή τοῦ ὁλοκληρώματος πού βρήκαμε τή δεχόμαστε σάν τήν τιμή τοῦ ἀρχικοῦ ὁρισμένου ὁλοκληρώματος.

Παράδειγμα 2

Χρησιμοποιώντας ἕναν Η.Υ. καί ἐφαρμόζοντας τόν κανόνα τοῦ $1/3$ τοῦ Simpson ἐπαναληπτικά νά ὑπολογιστεῖ τό ὁρισμένο ὁλοκλήρωμα $I = \int_0^{\pi/2} \sin x dx$ μέ προσέγγιση ἕξι δ.ψ.

Λύση.

Χρησιμοποιώντας ἕναν Η.Υ. ἀρχίζουμε μέ $h = \frac{\pi/2 - 0}{2} = \pi/4$ καί ἐφαρμόζουμε τόν κανόνα τοῦ $1/3$ τοῦ Simpson. Στή συνέχεια ἐργαζόμαστε ἐπαναληπτικά ἐφαρμόζοντας τό γενικέμενο κανόνα τοῦ $1/3$ τοῦ Simpson παίρνοντας κάθε φορά σάν h τό μισό τοῦ προηγούμενου, δηλαδή $h = \pi/8$, $\pi/16$, $\pi/32$, ... Ἡ ἐργασία σταματᾶ ὅταν ἡ ἀπόλυτη τιμή τῆς διαφορᾶς δύο διαδοχικῶν τιμῶν τοῦ ὁλοκληρώματος πού βρίσκονται, μέ τόν τρόπο αὐτό, εἶναι μικρότερη ἤ ἴση ἀπό μισή μονάδα τῆς ἕκτης δεκαδικῆς τάξης. Ἡ τελευταία τιμή πού βρίσκεται μέ τόν τρόπο αὐτό γίνεται δεκτή ὡς ἡ τιμή τοῦ ὁλοκληρώματος, πού δόθηκε, μέ προσέγγιση ἕξι δ.ψ. Στή συγκεκριμένη περίπτωση ὁ Η.Υ. ἔδωσε τά παρακάτω ἀποτελέσματα

h	I
$\pi/4$	1.0022799
$\pi/8$	1.0001346
$\pi/16$	1.0000083
$\pi/32$	1.0000005
$\pi/64$	1.0000000

Ἡ παραπάνω ἐπαναληπτική ἐργασία σταμάτησε στήν τιμή $h = \pi/64$ γιατί $|1.0000005 - 1.0000000| = 0.0000005 \leq \frac{1}{2}\, 10^{-6}$. Ἡ τελευταία τιμή, πού βρέθηκε, 1.0000000 στρογγυλεμένη στά ἕξι δ.ψ. ἀποτελεῖ τήν τιμή τοῦ ὁλοκληρώματος πού δόθηκε. Δηλαδή I = 1.000000. Ἡ τιμή αὐτή συμβαίνει νά συμπίπτει μέ τήν ἀκριβή τιμή τοῦ ὁλοκληρώματος $\int_0^{\pi/2}\sin x dx$.

5.3. Σφάλμα ἀποκοπῆς κατά τήν ἀριθμητική ὁλοκλήρωση

Στήν ὁλοκλήρωση κατά Newton - Cotes πού ἀναπτύξαμε στήν προηγούμενη παράγραφο, τό ὁρισμένο ὁλοκλήρωμα, πού εἶναι γιά ὑπολογισμό, ἔχει τή γενική μορφή $\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$ καί ἡ συνάρτηση $f(x)$ δίνεται στά $n+1$ ἰσαπέχοντα σημεῖα $x_i \,|\, i=0(1)n$. Ὅπως εἶναι γνωστό ἡ προσέγγιση τῆς συναρτήσεως γίνεται ἀπό τό πολυώνυμο παρεμβολῆς της $p_n(x)$ πού ὁρίζεται ἀπό τά $n+1$ γνωστά σημεῖα $x_i \,|\, i=0(1)n$. Ἔτσι γιά τίς διάφορες τιμές τοῦ n μποροῦν νά προκύψουν διάφοροι τύποι ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως. Στήν προηγούμενη παράγραφο βρέθηκαν οἱ ἀντίστοιχοι τύποι τῶν Newton - Cotes γιά $n = 1, 2$ καί 3. Τό σφάλμα ἀποκοπῆς E_n πού γίνεται σέ μιά ἀριθμητική ὁλοκλήρωση τοῦ τύπου τῶν Newton - Cotes εἶναι φανερό ὅτι θά δίνεται ἀπό τή διαφορά

$$E_n = \int_{x_0}^{x_n} p_n(x)dx - \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$$

πού μπορεῖ νά γραφτεῖ καί ὡς ἑξῆς

$$E_n = \int_{x_0}^{x_n} \left[p_n(x) - f(x)\right]dx \quad .$$

Ἄν τώρα ὑποθέσουμε ὅτι ἰσχύουν οἱ προϋποθέσεις τοῦ θεωρήματος τῆς σελίδας 65, δηλαδή ὅτι $f(x) \in C^{n+1}(I)$, ὅπου $I \equiv [x_0, x_n]$, τότε χρησιμοποιώντας τήν ἔκφραση τοῦ τύπου (3.18) γιά τή διόρθωση $R_{n+1}(x)$ στήν παρεμβολή θά ἔχουμε ὅτι

$$E_n = - \int_{x_0}^{x_n} R_{n+1}(x)dx$$

ή τέλος ότι

$$E_n = -\frac{1}{(n+1)!}\int_{x_o}^{x_n}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i).f^{(n+1)}(\xi)dx\,. \qquad (5.7)$$

Στόν παραπάνω τύπο (5.7) τό σημεΐο ξ άποτελεΐ συνάρτηση τοῦ x καί άνήκει στό διάστημα $I \equiv [x_o,\ x_n]$.

Εἶναι δυνατό νά άποδειχτεΐ ότι τό ολοκλήρωμα τοῦ δεύτερου μέλους τοῦ τύπου (5.7) μπορεΐ νά άπλοποιηθεΐ. Ή άντίστοιχη έργασία γιά τήν άπλοποίηση, γιά όποιαδήποτε τιμή τοῦ n, εἶναι άρκετά έπίπονη καί όπωσδήποτε πέρα άπό τό σκοπό τοῦ παρόντος βιβλίου. Μόνο στήν περίπτωση τοῦ n=1 εἶναι δυνατό νά προκύψει άπλοποιημένη έκφραση σχετικά άπλά. Ή άντίστοιχη έργασία θά δοθεΐ στό Παράδειγμα 1 πού άκολουθεΐ. Άνεξάρτητα όμως άπό αύτά θά δώσουμε έδῶ τίς άπλοποιημένες μορφές τοῦ τύπου (5.7) ώστε νά μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν στήν πράξη. Αύτές εἶναι οἱ παρακάτω

$$E_n = \begin{cases} = -\dfrac{1}{(n+1)!}h^{n+2}f^{(n+1)}(\eta)\displaystyle\int_0^n \prod\nolimits_n(\theta)d\theta, & \text{γιά n περιττό} \\[2ex] = -\dfrac{1}{(n+2)!}h^{n+3}f^{(n+2)}(\eta)\displaystyle\int_0^n \prod\nolimits_{n+1}(\theta)d\theta, & \text{γιά n άρτιο} \end{cases} \qquad (5.8)$$

όπου η εἶναι ένα άγνωστο σημεΐο τοῦ διαστήματος $I \equiv [x_o,\ x_n]$, $\prod_k(\theta) = \prod_{i=0}^{k}(\theta-i)$. Τά παραπάνω ίσχύουν βέβαια μέ τήν προϋπόθεση ότι οἱ άντίστοιχες παράγωγοι τῆς συναρτήσεως f(x) ύπάρχουν καί εἶναι συνεχεΐς στό διάστημα I.

Παράδειγμα 1

Ξεκινώντας άπό τόν τύπο (5.7), νά έπαληθευτεΐ πρῶτα ό τύπος (5.8) γιά n=1, καί στή συνέχεια νά βρεθεΐ μία όσο τό δυνατό άπλοποιημένη έκφραση γιά τό σφάλμα άποκοπῆς E_1.

Λύση

Γιά n=1 ὁ τύπος (5.7) γιά τό σφάλμα ἀποκοπῆς γίνεται

$$E_1 = -\frac{1}{2}\int_{x_o}^{x_1}(x-x_o)(x-x_1)f^{(2)}(\xi)dx, \qquad \xi\in[x_o,\ x_1].$$

Παρατηροῦμε ὅμως ὅτι ἡ συνάρτηση $(x-x_o)(x-x_1)$ εἶναι συνεχής καί δέν ἀλλάζει σημεῖο στό διάστημα $[x_o,\ x_1]$ ἐνῶ ἡ συνάρτηση $f^{(2)}(x)$ εἶναι συνεχής στό ἴδιο διάστημα. Σύμφωνα ὅμως μέ τό θεώρημα μέσης τιμῆς τοῦ Ὁλοκληρωτικοῦ Λογισμοῦ θά ἔχουμε τότε

$$E_1 = -\frac{1}{2}f^{(2)}(\eta)\int_{x_o}^{x_1}(x-x_o)(x-x_1)dx, \qquad \eta\in[x_o,\ x_1].$$

Ἄν τώρα καλέσουμε μέ θ τό λόγο $(x-x_o)/h$ βρίσκουμε ἀμέσως ὅτι

$$E_1 = -\frac{1}{2}h^3f^{(2)}(\eta)\int_0^1\theta(\theta-1)d\theta. \tag{5.9}$$

Εἶναι εὔκολο νά δεῖ κανείς ὅτι τό δεύτερο μέλος τοῦ τύπου (5.9) συμπίπτει μέ τό δεύτερο μέλος τοῦ τύπου (5.8) γιά n=1. Εἶναι φανερό τώρα ὅτι τό δεύτερο μέλος τοῦ (5.9) μπορεῖ νά ἀπλοποιηθεῖ παραπέρα ἀρκεῖ νά ὑπολογιστεῖ ἡ τιμή τοῦ ὁλοκληρώματος $\int_0^1\theta(\theta-1)d\theta$. Αὐτή εὔκολα βρίσκεται ὅτι εἶναι ἴση μέ $-\frac{1}{6}$. Ἑπομένως ὁ (5.9) γράφεται τελικά

$$E_1 = \frac{1}{12}h^3f^{(2)}(\eta), \qquad \eta\in[x_o,\ x_1].$$

Παράδειγμα 2

Χρησιμοποιώντας τούς τύπους (5.8) νά βρεθοῦν ἀπλοποιημένες ἐκφράσεις γιά τά σφάλματα ἀποκοπῆς στούς κανόνες ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως τοῦ 1/3 τοῦ Simpson καί τῶν 3/8 .

Λύση

Γιά τόν κανόνα τοῦ 1/3 τοῦ Simpson ἔχουμε n=2. Παίρνοντας τό ἀντίστοιχο δεύτερο μέλος τῶν τύπων (5.8) βρίσκουμε ἀμέσως ὅτι

$$E_2 = -\frac{1}{24}h^5 f^{(4)}(\eta)\int_0^2 \prod{}_3(\theta)d\theta\ ,\quad \eta\in[x_o,\ x_2]\ . \tag{5.10}$$

Γιά τήν ἀπλοποίηση τῆς παραπάνω ἐκφράσεως γιά τό σφάλμα ἀποκοπῆς ἀρκεῖ νά ὑπολογιστεῖ τό ἀντίστοιχο ὁρισμένο ὁλοκλήρωμα. Εὔκολα μποροῦμε νά βροῦμε ὅτι

$$\int_0^2 \prod{}_3(\theta)d\theta = \int_0^2 \theta(\theta-1)(\theta-2)(\theta-3)d\theta = \int_0^2 (\theta^4-6\theta^3+11\theta^2-6\theta)d\theta =$$

$$= \left[\frac{1}{5}\theta^5 - \frac{3}{2}\theta^4 + \frac{11}{3}\theta^3 - 3\theta^2\right]_0^2 = -\frac{4}{15}\,.$$

Ἀντικαθιστώντας τήν τιμή πού βρήκαμε στόν τύπο (5.10) ἔχουμε ἀμέσως ὅτι

$$E_2 = \frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\eta)\ ,\quad \eta\in[x_o,\ x_2]\ . \tag{5.11}$$

Γιά τόν κανόνα τώρα τῶν $3/8$ ἔχουμε n=3. Ἐπομένως ὁ τύπος (5.8) δίνει γιά τό σφάλμα ἀποκοπῆς ὅτι

$$E_3 = -\frac{1}{24}h^5 f^{(4)}(\eta)\int_0^2 \prod{}_3(\theta)d\theta\ ,\quad \eta\in[x_o,\ x_3]. \tag{5.12}$$

Γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ ὁλοκληρώματος ἐργαζόμαστε ἀκριβῶς ὅπως καί στήν προηγούμενη περίπτωση, ὁπότε παίρνουμε διαδοχικά

$$\int_0^3 \prod{}_3(\theta)d\theta = \left[\frac{1}{5}\theta^5 - \frac{3}{2}\theta^4 + \frac{11}{3}\theta^3 - 3\theta^2\right]_0^3 = -\frac{9}{10}\,.$$

Ἡ τιμή πού βρέθηκε ἄν ἀντικατασταθεῖ στόν τύπο (5.12) δίνει

$$E_3 = \frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\eta)\ ,\quad \eta\in[x_o,\ x_3].$$

Παράδειγμα 3

Ἐφαρμόζοντας μιά φορά τόν κανόνα τοῦ $1/3$ τοῦ Simpson νά βρεθεῖ τό όλοκλήρωμα $\int_0^1 x^4dx$. Στή συνέχεια νά βρεθεῖ τό σφάλμα άποκοπῆς καί νά έπαληθευτεῖ ή τιμή πού θά βρεθεῖ γι'αύτό.

Λύση

Σ' αύτήν τήν περίπτωση ἔχουμε $f(x) \equiv x^4$, $x_0=0$ καί $x_2=1$. Ἄρα $h=0.5$ καί $x_1=0.5$. Ἐπομένως ὁ κανόνας τοῦ 1/3 τοῦ Simpson θά δώσει

$$\int_0^1 x^4dx \approx \frac{0.5}{3}\left[0^4+4\times 0.5^4+1^4\right]=\frac{0.625}{3}\approx 0.2083\ . \qquad (5.13)$$

Τό σφάλμα άποκοπῆς γιά τόν κανόνα τοῦ 1/3 τοῦ Simpson δίνεται άπό τόν τύπο (5.11) τοῦ προηγούμενου παραδείγματος. Ἔτσι στή περίπτωση αύτή ἔχουμε

$$E_2 = \frac{1}{90}(0.5)^5\times 24 = \frac{0.025}{3}\approx 0.0083\ . \qquad (5.14)$$

Ἡ άληθής τιμή τοῦ όλοκληρώματος πού δόθηκε εἶναι ἴση μέ

$$\int_0^1 x^4dx = \left.\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5} = 0.2\ . \qquad (5.15)$$

Ἐπομένως τό σφάλμα κατά τήν άριθμητική όλοκλήρωση μέ τόν κανόνα τοῦ 1/3 τοῦ Simpson θά εἶναι ἴσο μέ

$$E = \frac{0.625}{3} - 0.2 = \frac{0.025}{3}\approx 0.0083\ .$$

Ἡ τιμή πού βρέθηκε συμπίπτει μέ τήν άντίστοιχη τῆς σχέσης (5.14),πού ὑπολογίστηκε έφαρμόζοντας τόν τύπο (5.8) ἤ πιό συγκεκριμένα τόν (5.11).

5.4. Ἀριθμητική όλοκλήρωση μέ τή μέθοδο τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν

Ὅπως καί στήν παράγραφο 4.4.,στήν περίπτωση δηλαδή τῆς άριθμητικῆς παραγωγίσεως μέ τή μέθοδο τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν, ἔτσι καί στήν άριθμητική όλοκλήρωση μέ τήν ἴδια μέθοδο, δίνεται ἕνας τύπος ἀριθμητικῆς ὀλοκληρώσεως μιᾶς προκαθορισμένης μορφῆς πού περιέχει στό δεύτερο μέλος του ἕναν ἀριθμό n παραμέτρων. Τό πρόβλημα εἶναι ὁ κατάλληλος προσδιορισμός τῶν n αὐτῶν παραμέτρων ἔτσι ὥστε ὁ τύπος πού δόθηκε νά εἶναι ὅσο τό δυνατόν πιό ἀκριβής. Δηλαδή νά εἶναι ἀκριβής γιά πολυώνυμα βαθμοῦ ὅσο τό δυνατόν μεγαλύτερου. Ἡ θεωρία στήν περίπτωση τῆς ἀριθμητικῆς ὀλοκληρώσεως πού ἐδῶ παραλείπεται εἶναι ἀκριβῶς ἴδια μέ τήν ἀντίστοιχη θεωρία πού ἀναπτύχτηκε στήν περίπτωση τῆς ἀριθμητικῆς παραγωγίσεως στήν παράγραφο 4.4. Ἔτσι παραλείπεται ἐδῶ. Γιά τήν καλύτερη κατανόηση ὅμως τῆς μεθόδου τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν στήν παροῦσα περίπτωση τῆς ἀριθμητικῆς ὀλοκληρώσεως δίνουμε στή συνέχεια ἕνα παράδειγμα.

Παράδειγμα

Νά προσδιοριστοῦν οἱ συντελεστές α_o, α_1 καί α_2 στόν παρακάτω προσεγγιστικό τύπο ἀριθμητικῆς ὀλοκληρώσεως ἔτσι ὥστε νά εἶναι αὐτός ὅσο τό δυνατόν πιό ἀκριβής

$$\int_{x_o}^{x_2} f(x)dx \approx h(\alpha_o f_o + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2).$$

Δίνεται ὅτι $f_i = f(x_i)$ καί $x_i = x_o + ih \quad |i = 0,1,2.$

Λύση

Ἀφοῦ ἔχουμε νά προσδιορίσουμε τρεῖς παράμετρους α_o, α_1, α_2 προσπαθοῦμε νά σχηματίσουμε τρεῖς ἐξισώσεις, μέ ἀγνώστους αὐτές τίς παραμέτρους, πού νά εἶναι ὅμως ἀνεξάρτητες μεταξύ τους. Ἡ ἐπίλυση τοῦ ἀντίστοιχου συστήματος θά μᾶς δώσει τίς τιμές τῶν τριῶν συντελεστῶν. Γιά τό σκοπό αὐτό ἀπαιτοῦμε ὁ τύπος πού δόθηκε νά εἶναι ἀκριβής γιά $f(x) \equiv 1, x$ καί x^2. Γιά τήν ἁπλοποίηση τῶν συμβολισμῶν καλοῦμε μέ A τήν τιμή τοῦ πρώτου μέλους καί μέ B τήν ἀντίστοιχη τιμή τοῦ δεύτερου μέλους τοῦ τύπου ὀλοκληρώσεως πού δόθηκε. Ἔτσι γιά $f(x) \equiv 1$ ἔχουμε

$$A = \int_{x_o}^{x_2} 1dx = x\Big]_{x_o}^{x_2} = x_2 - x_o = 2h \qquad \text{καί}$$

$$B = h(\alpha_o\times 1 + \alpha_1\times 1 + \alpha_2\times 1) = (\alpha_o + \alpha_1 + \alpha_2)h \ .$$

'Επειδή πρέπει νά έχουμε $A \equiv B$ παίρνουμε άμέσως ότι

$$\alpha_o + \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \ . \tag{5.16}$$

Γιά $f(x) \equiv x$ λαβαίνουμε

$$A = \int_{x_o}^{x_2} x dx = \frac{x^2}{2}\Big]_{x_o}^{x_2} = \frac{1}{2}\left[(x_o + 2h)^2 - x_o^2\right] = 2x_o h + 2h^2$$

$$B = h(\alpha_o x_o + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = h\left[\alpha_o x_o + \alpha_1(x_o + h) + \alpha_2(x_o + 2h)\right] =$$

$$= (\alpha_o + \alpha_1 + \alpha_2)x_o h + (\alpha_1 + 2\alpha_2)h^2 \ .$$

'Από τήν ταυτότητα $A \equiv B$ καί τή σχέση (5.16) παίρνουμε

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2 \ . \tag{5.17}$$

Γιά $f(x) \equiv x^2$ έχουμε

$$A = \int_{x_o}^{x_2} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big]_{x_o}^{x_2} = \frac{1}{3}\left[(x_o + 2h)^3 - x_o^3\right] = 2x_o^2 h + 4x_o h^2 + \frac{8}{3}h^3$$

καί

$$B = h(\alpha_o x_o^2 + \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2) = h\left[\alpha_o x_o^2 + \alpha_1(x_o + h)^2 + \alpha_2(x_o + 2h)^2\right] =$$

$$= (\alpha_o + \alpha_1 + \alpha_2)x_o^2 h + (2\alpha_1 + 4\alpha_2)x_o h^2 + (\alpha_1 + 4\alpha_2)h^3 \ .$$

Λαβαίνοντας ύπόψη τίς σχέσεις (5.16) καί (5.17), στήν ταυτότητα $A \equiv B$, παίρνουμε

$$\alpha_1 + 4\alpha_2 = \frac{8}{3} \ . \tag{5.18}$$

Ἡ ἐπίλυση τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (5.16), (5.17) καί (5.18) δίνει

$$\alpha_0 = \frac{1}{3}\,, \quad \alpha_1 = \frac{4}{3} \quad \text{καί} \quad \alpha_2 = \frac{1}{3}\,.$$

Ἔτσι ὁ τύπος πού δόθηκε γίνεται

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\,(f_0 + 4f_1 + f_2)\,.$$

Μποροῦμε νά παρατηρήσουμε ὅτι ὁ τύπος πού βρέθηκε δέν εἶναι ἄλλος ἀπό τόν κανόνα τοῦ $^1/_3$ τοῦ Simpson.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

~~1.~~ Δίνεται τό ὁλοκλήρωμα $\int_{-3}^{3} x^2 dx$. Νά βρεθεῖ ἡ τιμή του, χρησιμοποιώντας τούς γενικεμένους κανόνες ~~α)~~ τοῦ τραπεζίου καί ~~β)~~ τοῦ $^1/_3$ τοῦ Simpson, μέ βῆμα h=1. (Ἀπ. 19, 18)

~~2.~~ Χρησιμοποιώντας ὅλες τίς πληροφορίες τοῦ πίνακα

x	0	1	2	3
f(x)	-1	0	3	8

καί κατάλληλο τύπο ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως, νά βρεθεῖ ἡ τιμή τοῦ ὁλοκληρώματος $\int_0^3 f(x)dx$. (Ἀπ. Ὁ γενικεμένος κανόνας τραπεζίου δίνει 6.5, ὁ κανόνας τῶν $^3/_8$ 6)

?

~~3.~~ Νά βρεθεῖ τό μέγιστο ἀπόλυτο σφάλμα, πού ὀφείλεται στά σφάλματα στρογγυλεύσεως τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως f(x) καί μόνο, κατά τήν ἐφαρμογή τοῦ γενικεμένου κανόνα τοῦ τραπεζίου

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\,(f_0 + 2f_1 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n)$$

μέ $x_i = x_0 + ih$, $f_i = f(x_i)$ $\,|\, i = 0(1)n$, ὅταν οἱ τιμές f_i δίνονται στρογγυλεμένες σέ k δ.ψ. (Ἀπ. $\frac{1}{2}\,(x_n - x_0)10^{-k}$)

~~4.~~ Νά δειχτεῖ, μέ ὁποιοδήποτε τρόπο, ὁ τύπος τῆς ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως

$$\int_{x_o}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{12}\,(5f_o + 8f_1 - f_2)$$

ὅπου $x_i = x_o + ih$ καί $f_i = f(x_i)$ $|i = 0(1)2$.

~~5.~~ Νά προσδιοριστοῦν τά α, x_o καί x_1 ἔτσι ὥστε ὁ τύπος τῆς ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \alpha[f(x_o) + f(x_1)]$ νά εἶναι ὅσο τό δυνατόν πιό ἀκριβής. ('Απ. $1,\ \frac{-\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}$ ἤ $1,\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{-\sqrt{3}}{3}$)

~~6.~~ Νά προσδιοριστοῦν οἱ συντελεστές α_o, α_1, α_2 καί α_3 στόν παρακάτω τύπο ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως

$$\int_{x_o}^{x_1} f(x)dx \approx \overset{A}{h(\alpha_o f_o + \alpha_1 f_1)} + \overset{B}{h^3(\alpha_2 f''_o + \alpha_3 f''_1)}$$

ὅπου $f_i = f(x_i)$, $f''_i = f''(x_i)$ καί $x_i = x_o + ih$ $|\ i = 0, 1$, ἔτσι ὥστε αὐτός νά εἶναι ὅσο τό δυνατόν πιό ἀκριβής. ('Απ. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{24}, -\frac{1}{24}$)

~~7.~~ Νά βρεθεῖ γιά μέχρι ποιοῦ βαθμοῦ πολυώνυμα ὁ παρακάτω τύπος ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως εἶναι ἀκριβής

$$\int_{x_o}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\,(f_o + f_1) + \frac{h^2}{12}\,(f'_o - f'_1)$$

ὅπου $h = x_1 - x_o$ καί $f_i = f(x_i)$, $f'_i = f'(x_i)$ $|i = 0,1$. ('Απ. $3^{ου}$)

8. Μέ τή χρησιμοποίηση συμβολικῶν μεθόδων νά ἀποδειχτεῖ ὁ τύπος ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως

$$\int_{x_o}^{x_o+h} f(x)dx \approx h(f_o + \frac{1}{2}\,\Delta f_o - \frac{1}{12}\,\Delta^2 f_o + \frac{1}{24}\,\Delta^3 f_o - \frac{19}{720}\,\Delta^4 f_o + \ldots)$$

ὅπου $f_o = f(x_o)$.

6. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

6.1. Γενικά

Εἶναι γνωστό ὅτι ἐλάχιστες μόνο κατηγορίες ἐξισώσεων εἶναι δυνατό νά ἐπιλυθοῦν μέ τίς μεθόδους τῆς Ἄλγεβρας καί τῆς Ἀναλύσεως. Γιά νά περιοριστοῦμε στίς ἁπλούστερες ἀπό τίς ἐξισώσεις μποροῦμε νά ἀναφέρουμε τίς πολυωνυμικές. Ἐκεῖνες δηλαδή πού εἶναι τῆς γενικῆς μορφῆς

$$f(x) = 0 \qquad (6.1)$$

μέ $f(x)$ πολυώνυμο βαθμοῦ n καί συντελεστές ἀπό τό σῶμα τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Εἶναι γνωστό γιά τίς ἐξισώσεις αὐτές ὅτι γιά $n \geq 5$, ἐκτός ἀπό ἐξαιρέσεις, ἡ ἀντίστοιχη ἐξίσωση δέν μπορεῖ νά ἐπιλυθεῖ. Δηλαδή δέν εἶναι δυνατό νά βρεθοῦν ἐκφράσεις, πού νά περιέχουν ἀκόμη καί ριζικά ὁποιασδήποτε τάξης, πού νά δίνουν τίς ρίζες τῆς ἐξισώσεως ἀναλυτικά σάν συναρτήσεις τῶν συντελεστῶν της. Φυσικά, ὅταν ἡ ἐξίσωση πού δίνεται εἶναι κάπως πιό πολύπλοκης μορφῆς (πράγμα πού εἶναι καί τό πιό συνηθισμένο στήν πράξη) ὅπως π.χ. ἡ ἐξίσωση

$$f(x) \equiv e^{x} - \sin x - 1 = 0$$

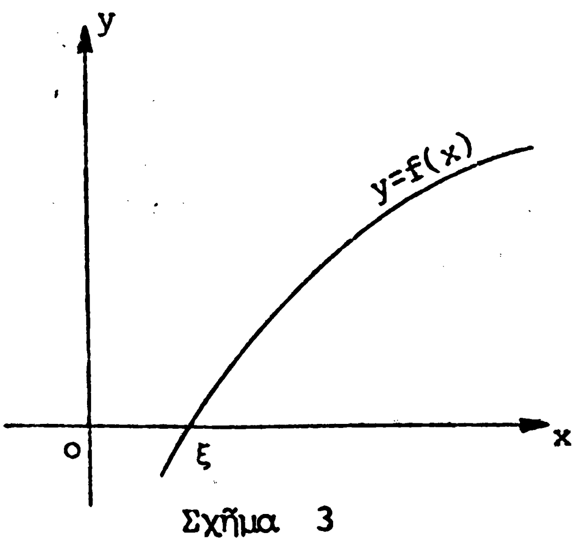
εἶναι ἀδιανόητο ἀκόμη καί νά σκεφτοῦμε πώς εἶναι δυνατό νά ὑπάρχουν ἀναλυτικές ἐκφράσεις πού νά δίνουν τίς ρίζες της. Συνεπῶς ἡ ἀνάγκη χρησιμοποιήσεως τῶν μεθόδων τῆς Α.Α. εἶναι κάτι περισσότερο ἀπό ἐπιτακτική.

Ἔτσι στό παρόν Κεφάλαιο θά ἀσχοληθοῦμε κυρίως μέ τήν ἀριθμητική εὕρεση μιᾶς ὁποιασδήποτε πραγματικῆς ρίζας ξ τῆς ἐξισώσεως τῆς γενικῆς μορφῆς (6.1) ὅπου $f(x)$ μία συνεχής συνάρτηση μέ πραγματικούς συντελεστές. Γιά τήν ἐφαρμογή μιᾶς ἀριθμητικῆς μεθόδου γιά τήν εὕρεση τῆς ρίζας ξ εἶναι ἀπαραίτητος ἕνας προηγούμενος ἐντοπισμός αὐτῆς. Μέ ἄλλα λόγια, γιά νά ἀρχίζουμε νά ἐφαρμόζουμε τήν ὁποιαδήποτε ἀριθμητική μέθοδο θά πρέπει νά ξέρουμε ένα διάστημα I στό έσωτερικό τοῦ όποίου νά βρίσκεται μόνο ή ρίζα ξ τῆς έξισώσεως καί καμιά άλλη. 'Η εὕρεση τοῦ διαστήματος αύτοῦ μπορεῖ νά γίνει μέ γραφικές ή άναλυτικές μεθόδους.

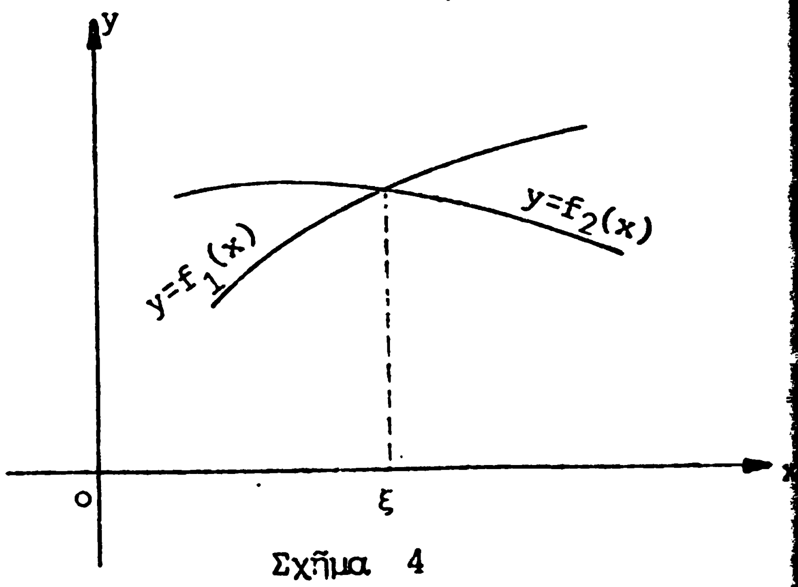
'Από τίς γραφικές μεθόδους άναφέρουμε τίς άκόλουθες δύο:

α) Παρασταίνουμε γραφικά τή συνάρτηση $y = f(x)$. Τότε οί τετμημένες τῶν σημείων τομῆς τῆς καμπύλης $y = f(x)$ μέ τόν άξονα τῶν x $(y=0)$ δίνουν τίς πραγματικές ρίζες τῆς έξισώσεως $f(x)=0$ (Σχῆμα 3), όπότε εὔκολα μπορεῖ νά βρεθεῖ διάστημα I πού νά περιέχει μιά ρίζα ξ.

β) "Αν ή συνάρτηση $f(x)$ εἶναι σχετικά πολύπλοκης μορφῆς καί μπορεῖ νά γραφτεῖ σάν διαφορά δύο άπλούστερων συναρτήσεων $f_1(x)$ καί $f_2(x)$ $(f(x) \equiv f_1(x) - f_2(x))$ τότε μποροῦμε νά κάνουμε τή γραφική παράσταση τῶν έξισώσεων $y = f_1(x)$ καί $y = f_2(x)$, όπότε οί τετμημένες τῶν σημείων τομῆς τῶν καμπύλων $y = f_1(x)$ καί $y = f_2(x)$ θά δίνουν τίς ρίζες τῆς έξισώσεως $f(x) = 0$ (Σχῆμα 4). Καί στήν περίπτωση αύτή μπορεῖ εὔκολα νά δοθεῖ άντίστοιχο διάστημα I.



Σχῆμα 3



Σχῆμα 4

'Από τίς άναλυτικές μεθόδους άναφέρουμε τήν άκόλουθη. "Αν $f(\alpha)f(\beta) < 0$ καί ή συνάρτηση $f(x)$, έκτός άπό συνεχής εἶναι καί γνήσια μονότονη στό διάστημα $I \equiv [\alpha, \beta]$, τότε εἶναι γνωστό άπό τήν 'Ανάλυση ότι θά ύπάρχει μία καί μόνο ρίζα ξ τῆς έξισώσεως $f(x) = 0$ τέτοια ὥστε $\xi \in (\alpha,\beta)$. "Ετσι τό διάστημα I άποτελεῖ ένα διάστημα έντοπισμοῦ τῆς ρίζας.

"Οταν έχουμε βρεῖ ένα διάστημα έντοπισμοῦ τῆς ρίζας, τότε παίρνουμε σάν μιά πρώτη προσέγγιση x_o τῆς άγνωστης ρίζας ξ ένα σημεῖο τοῦ διαστήματος αὐτοῦ. Μετά ἐφαρμόζουμε τήν ὑπόψη ἀριθμητική μέθοδο καί βρίσκουμε μέ βάση τήν x_0 καί τήν ἐξίσωση (6.1) μιά νέα προσέγγιση x_1 κ.ο.κ. Ἔτσι ἐπαναληπτικά ἐφαρμόζοντας τή μέθοδο παράγουμε μία ἀκολουθία $\{x_n\}$, ἡ ὁποία κάτω ἀπό ὁρισμένες προϋποθέσεις συγκλίνει στή ρίζα ξ. Σέ μιά τέτοια περίπτωση μποροῦμε μέ κατάλληλο ἀριθμό ἐπαναλήψεων νά βροῦμε ὅρο τῆς ἀκολουθίας $\{x_n\}$, πού νά προσεγγίζει τή ρίζα ξ μέ ὅση ἀκρίβεια θέλουμε. Στήν πράξη ὅμως, ἐπειδή ἡ τιμή τῆς ρίζας ξ εἶναι ἄγνωστη, ἡ ἐργασία τῶν ἐπαναλήψεων σταματᾶ μόλις βρεθοῦν δύο διαδοχικές προσεγγίσεις x_n καί x_{n+1} πού νά συμφωνοῦν σ' ἕνα προκαθορισμένο πλῆθος δ. ἤ σ.ψ. Μέ ἄλλα λόγια, ὅταν χρησιμοποιοῦμε μιά ὁποιαδήποτε ἐπαναληπτική μέθοδο γιά τήν εὕρεση τῆς ρίζας ξ τῆς ἐξισώσεως (6.1) μέ προσέγγιση k δ.ψ. καί χρησιμοποιοῦμε σάν κριτήριο γιά νά σταματήσουμε τίς ἐπαναλήψεις, αὐτό πού μόλις ἀναφέραμε, στήν οὐσία δέν βρίσκουμε τή ρίζα ξ. Ἁπλῶς καί μόνο πετυχαίνουμε μιά βελτίωση τῆς ἀρχικῆς προσεγγίσεως x_0, χωρίς νά ξέρουμε τελικά ἄν ἡ τιμή πού δεχόμαστε ἔχει καμιά σχέση μέ τή ρίζα ξ ἤ ὄχι. Συνεπῶς ὅταν λέμε ὅτι ἡ τελική προσέγγιση τῆς μεθόδου x_{n+1} συμπίπτει μέ τή ρίζα ξ σέ k δ.ψ. ἐννοοῦμε ὅτι οἱ δύο τελευταῖες προσεγγίσεις x_n καί x_{n+1} συμπίπτουν στά k δ.ψ. καί μόνο.

Γιά νά ἁπλουστευτεῖ ἡ θεωρία πού θά ἀναπτυχτεῖ στή συνέχεια θά ἀγνοήσουμε τελείως τήν παρουσία τῶν σφαλμάτων στρογγυλεύσεως. Θά ὑποθέτουμε δηλαδή σιωπηρά ὅτι ὅλες οἱ πράξεις μποροῦν νά ἐκτελεστοῦν χρησιμοποιώντας ἄπειρο πλῆθος δ.ψ.

6.2. Μέθοδος τῆς διχοτομήσεως ἤ Μέθοδος τοῦ Bolzano

6.2.1. Περιγραφή τῆς μεθόδου

Ἡ μέθοδος πού θά περιγράψουμε σ'αὐτή τήν παράγραφο ἀποτελεῖ τήν παλιότερη καί ἁπλούστερη μέθοδο. Ἡ μέθοδος τῆς διχοτομήσεως συγκλίνει πολύ ἀργά, ἀλλά συγχρόνως εἶναι ἡ μόνη μέθοδος γιά τήν ὁποία ξέρουμε προκαταβολικά μετά ἀπό πόσες τουλάχιστον ἐπαναλήψεις πετυχαίνουμε τήν ἐπιζητούμενη ἀκρίβεια, βρίσκουμε δηλαδή προσέγγιση x_n πού συμπίπτει μέ τή ρίζα ξ σ' ἕνα προκαθορισμένο πλῆθος δ.ψ. Ἀρχίζοντας καλοῦμε μέ $I_o \equiv [\alpha_o, \beta_o]$ τό ἀρχικό διάστημα ἐντοπισμοῦ τῆς ρίζας στό ὁποῖο βρίσκεται ἡ μία καί μόνο ἁπλή ρίζα ξ τῆς ἐξισώσεως $f(x) = 0$. Εἶναι φανερό ὅτι θά ἔχουμε $f(\alpha_o)\, f(\beta_o) < 0$. Θεωροῦμε τώρα σάν μιά ἀρχική προσέγγιση x_o τῆς ρίζας ξ τό μέσο τοῦ διαστήματος I_o. Δηλαδή $x_o = \frac{\alpha_o + \beta_o}{2}$. Ἄν τώρα $f(x_o) = 0$, τότε $\xi = x_o$ ἀλλιῶς θέτουμε

$$\alpha_1 = x_o \quad \text{καί} \quad \beta_1 = \beta_o \quad \text{ἄν} \quad f(x_o)\, f(\beta_o) < 0$$

ἤ

$$\alpha_1 = \alpha_o \quad \text{καί} \quad \beta_1 = x_o \quad \text{ἄν} \quad f(\alpha_o)\, f(x_o) < 0 \quad .$$

Ἔτσι ὁρίζουμε ἕνα νέο διάστημα $I_1 \equiv [\alpha_1, \beta_1]$ μέσα στό ὁποῖο ἐξακολουθεῖ νά βρίσκεται ἡ ρίζα ξ. Ἡ νέα προσέγγιση x_1 ὁρίζεται σάν τό μέσο τοῦ νέου διαστήματος I_1. Δηλαδή $x_1 = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}$ κ.ο.κ. Εἶναι δυνατό τώρα νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ ἀκολουθία $\{x_n\}\ |n = 0,1,2,\ldots$ πού παράγεται μέ τόν τρόπο πού περιγράψαμε συγκλίνει πάντοτε στή ρίζα ξ. Πραγματικά ἄν παρατηρήσουμε ὅτι τό μῆκος τοῦ διαστήματος I_1 εἶναι τό μισό τοῦ I_o, γιατί $\beta_1 - \alpha_1 = \frac{\beta_o - \alpha_o}{2}$, τό I_2 τό μισό τοῦ I_1 κ.ο.κ. μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ἐπαγωγικά ὅτι τό μῆκος τοῦ διαστήματος I_n εἶναι $\beta_n - \alpha_n = \frac{\beta_o - \alpha_o}{2^n}$. Ἑπομένως ἄν $\varepsilon_n = x_n - \xi$ εἶναι τό σφάλμα κατά τήν n ἐπανάληψη θά ἔχουμε διαδοχικά

$$|\varepsilon_n| = |x_n - \xi| = \left|\frac{\alpha_n + \beta_n}{2} - \xi\right| < \frac{\beta_n - \alpha_n}{2} = \frac{\beta_o - \alpha_o}{2^{n+1}} \qquad (6.2)$$

καί συνεπῶς $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ ἀφοῦ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\beta_o - \alpha_o}{2^{n+1}}\right) = 0$.

Ὅπως τονίσαμε καί στήν ἀρχή τῆς παρούσας παραγράφου ἡ μέθοδος τῆς διχοτομήσεως εἶναι ἡ μόνη στήν ὁποία εἶναι δυνατό νά γνωρίζουμε προκαταβολικά τό ἐλάχιστο πλῆθος τῶν ἐπαναλήψεων πού ἀπαιτοῦνται γιά νά βροῦμε τή ρίζα ξ μέ προσέγγιση k δ.ψ. Πραγματικά γιά νά τό ἐπιτύχουμε αὐτό πρέπει καί ἀρκεῖ

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{1}{2} 10^{-k}$$

ή επειδή ισχύουν οι σχέσεις (6.2), αρκεί

$$\frac{\beta_o - \alpha_o}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2} 10^{-k}$$

από την οποία παίρνουμε

$$n \geq \frac{\log(10^k(\beta_0 - \alpha_0))}{\log 2} . \tag{6.3}$$

Παράδειγμα

Ἡ ἐξίσωση $x^3 - 2x - 5 = 0$ ἔχει μιά καί μόνο ρίζα ξ στό διάστημα (2, 3). Νά ὑπολογιστεῖ τό ἐλάχιστο πλῆθος τῶν ἐπαναλήψεων πού ἀπαιτεῖται, ἐφαρμόζοντας τή μέθοδο τῆς διχοτομήσεως, γιά νά βρεθεῖ ἡ ρίζα ξ μέ προσέγγιση τριῶν δ.ψ.

Λύση

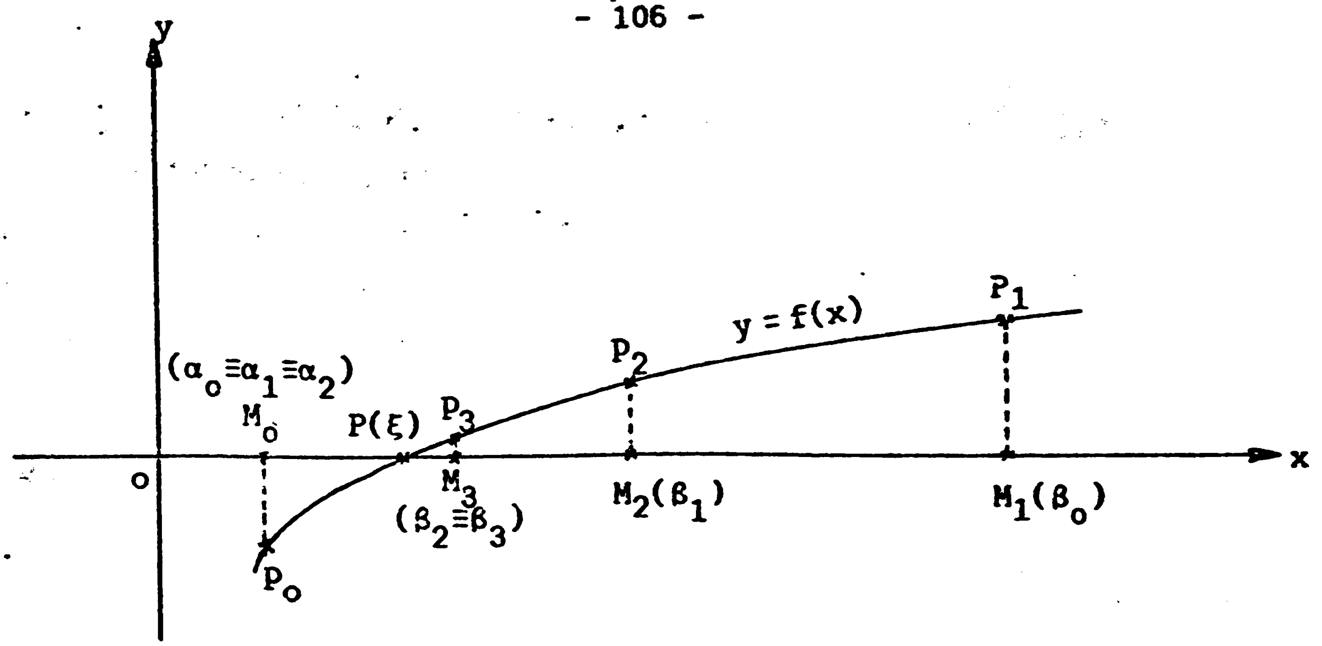
Ἄν πάρουμε σάν ἀρχικό διάστημα ἐντοπισμοῦ τῆς ρίζας ξ τό $I_o \equiv [2, 3]$, τότε ἔχουμε $\alpha_o = 2$ καί $\beta_o = 3$. Ἔτσι ἀντικαθιστώντας τίς τιμές αὐτές καθώς καί τήν τιμή $k = 3$ στόν τύπο (6.3) βρίσκουμε

$$n \geq \frac{\log(10^3(3-2))}{\log 2} \approx \frac{3}{0.30103} = 9.97 .$$

Ἄρα τό ἐλάχιστο πλῆθος τῶν ἐπαναλήψεων εἶναι $n = 10$.

6.2.2. Γεωμετρική ἑρμηνεία τῆς μεθόδου τῆς διχοτομήσεως

Ἔστω ὅτι ἡ καμπύλη $y = f(x)$ (Σχῆμα 5) παριστάνει γραφικά τή συνάρτηση $f(x)$. Εἶναι φανερό ὅτι ἡ τετμημένη τοῦ σημείου τομῆς της μέ τόν ἄξονα τῶν x P εἶναι ἡ ρίζα ξ τῆς ἐξισώσεως $f(x) = 0$. Αὐτή θά βρίσκεται στό διάστημα $I_o \equiv [\alpha_o, \beta_o]$, πού ὁρίζεται ἀπό τά σημεῖα M_o καί M_1 στό σχῆμα, μέ ἀντίστοιχες τετμημένες α_o καί β_o. Ἡ πρώτη προσέγγιση $x_o = \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2}$ εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ μέσου M_2 τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος M_oM_1. Ἐπειδή τό σημεῖο



Σχῆμα 5

P περιέχεται μεταξύ M_o καί M_2 καί ὄχι μεταξύ M_2 καί M_1 καλοῦμε $\alpha_1 = \alpha_o$ καί $\beta_1 = \frac{\alpha_o + \beta_o}{2}$. Γιά τήν εὕρεση τῆς ἑπόμενης προσεγγίσεως ἐργαζόμαστε μέ τόν ἴδιο τρόπο. Παίρνουμε τό μέσο M_3 τοῦ διαστήματος $I_1 \equiv [\alpha_1, \beta_1]$ πού ὁρίζεται στό σχῆμα ἀπό τά σημεῖα M_o καί M_2. Ἡ νέα προσέγγιση $x_1 = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}$ εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ M_3. Ἐπειδή τό σημεῖο P βρίσκεται μεταξύ M_o καί M_3 καί ὄχι μεταξύ M_3 καί M_2 καλοῦμε $\alpha_2 = \alpha_1$ καί $\beta_2 = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}$ κ.ο.κ. Εἶναι φανερό ὅτι οἱ διαδοχικές προσεγγίσεις x_o, x_1, x_2,... συγκλίνουν στή ρίζα ξ.

6.3. Μέθοδος τῆς γραμμικῆς παρεμβολῆς ἤ Μέθοδος τῆς ἐσφαλμένης θέσης (Regula Falsi)

6.3.1. Περιγραφή τῆς μεθόδου

Ἡ μέθοδος αὐτή ἀποτελεῖ κατά κάποιο τρόπο μιά βελτίωση τῆς προηγούμενης μεθόδου τῆς διχοτόμησεως, ὅπου ἀντί νά παίρνουμε σάν μιά νέα προσέγγιση $x_n \mid n = 0,1,2,...$ τό μέσο τοῦ ἀντίστοιχου διαστήματος I_n παίρνουμε τή ρίζα τοῦ γραμμικοῦ πολυωνύμου παρεμβολῆς πού ὁρίζεται ἀπό τά ἄκρα τοῦ διαστήματος I_n μέ τιμές ἴσες μέ τίς ἀντίστοιχες τιμές τῆς συναρτήσεως f(x). Στήν οὐσία δηλαδή ἀντικαθιστοῦμε τή συνάρτηση f(x) μέ τό πρωτοβάθμιο πολυώνυμο παρεμβολῆς της, χρησιμοποιώντας σάν σημεῖα παρεμβολῆς τά ἄκρα τοῦ διαστήματος πού ἔχουμε κάθε φορά. Ἔτσι, σάν μιά προσέγγιση τῆς ρίζας ξ θεωροῦμε τή ρίζα τοῦ πολυωνύμου παρεμβολῆς. Κάτω ἀπό ὁρισμένες συνθῆκες εἶναι δυνατό νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ μέθοδος συγκλίνει.

Ὑποθέτουμε, ὅπως καί στήν προηγούμενη μέθοδο, ὅτι γνωρίζουμε ἕνα διάστημα $I_o \equiv [\alpha_o, \beta_o]$ μέσα στό ὁποῖο βρίσκεται ἡ μιά καί μόνο ρίζα ξ τῆς ἐξισώσεως $f(x) = 0$. Ἔχουμε $f(\alpha_o)\, f(\beta_o) < 0$. Παίρνουμε τώρα τό πρωτοβάθμιο πολυώνυμο παρεμβολῆς μέ σημεῖα παρεμβολῆς τά α_o καί β_o. Αὐτό θά εἶναι τό ἀκόλουθο

$$p_1^o(x) = \frac{x-\beta_o}{\alpha_o-\beta_o}\, f(\alpha_o) + \frac{x-\alpha_o}{\beta_o-\alpha_o}\, f(\beta_o)\,. \tag{6.4}$$

Σάν πρώτη προσέγγιση τῆς ρίζας ξ παίρνουμε τή ρίζα x_o τῆς ἐξισώσεως $p_1^o(x) = 0$. Χρησιμοποιώντας καί τήν (6.4) λαβαίνουμε τελικά

$$x_o = \frac{\alpha_o f(\beta_o) - \beta_o f(\alpha_o)}{f(\beta_o) - f(\alpha_o)}\,.$$

Ἄν τώρα $f(x_o) = 0$ τότε $\xi = x_o$, ἀλλιῶς θέτουμε ὅπως καί στήν προηγούμενη μέθοδο τῆς διχοτομήσεως

$$\alpha_1 = x_o \quad \text{καί} \quad \beta_1 = \beta_o \quad \text{ἄν} \quad f(x_o)f(\beta_o) < 0$$

ἤ

$$\alpha_1 = \alpha_o \quad \text{καί} \quad \beta_1 = x_o \quad \text{ἄν} \quad f(\alpha_o)f(x_o) < 0\,.$$

Ἔτσι βρίσκουμε ἕνα νέο διάστημα $I_1 \equiv [\alpha_1, \beta_1]$ μέσα στό ὁποῖο βρίσκεται ἡ ρίζα ξ. Ἡ νέα προσέγγιση ὁρίζεται πάλι ὅπως ἡ προηγούμενη δηλαδή σάν ἡ ρίζα ἀντίστοιχου πολυωνύμου παρεμβολῆς $p_1^1(x)$, ὁπότε προκύπτει τελικά ὅτι

$$x_1 = \frac{\alpha_1 f(\beta_1) - \beta_1 f(\alpha_1)}{f(\beta_1) - f(\alpha_1)}$$

κ.ο.κ. Τέλος ἐπαγωγικά μπορεῖ νά βρεθεῖ ὅτι ἡ προσέγγιση x_n δίνεται ἀπό τήν ἴδια ἔκφραση ὅπως οἱ προηγούμενες δηλαδή

$$x_n = \frac{\alpha_n f(\beta_n) - \beta_n f(\alpha_n)}{f(\beta_n) - f(\alpha_n)} \qquad | n = 0,1,2,\ldots \qquad (6.5)$$

ὅπου α_n καί β_n τά ἄκρα τοῦ διαστήματος I_n πού ἔχει ὁριστεῖ ἀπό τήν προηγούμενη ἐπανάληψη.

Παράδειγμα

Νά βρεθεῖ ἡ μεταξύ 2 καί 3 ρίζα ξ τῆς ἐξισώσεως $x^3 - 2x - 5 = 0$ μέ προσέγγιση τριῶν δ.ψ.

Λύση

Ἔχουμε προφανῶς ὅτι $\alpha_o = 2$ καί $\beta_o = 3$. Ὁπότε ἐφαρμόζοντας τόν τύπο (6.5) γιά n=0 καί $f(x) \equiv x^3 - 2x - 5$ βρίσκουμε $x_o = 2.0588$. Ἀκόμη ἐπειδή $f(x_o).f(\beta_o) < 0$ καλοῦμε μέ $\alpha_1 = x_o = 2.0588$ καί $\beta_1 = \beta_o = 3$. Ἐφαρμόζοντας ξανά τόν τύπο (6.5) γιά n=1 βρίσκουμε $x_1 = 2.0813$. Συνεχίζοντας μέ τόν ἴδιο τρόπο βρίσκουμε διαδοχικά

$$x_2 = 2.0897$$

$$x_3 = 2.0928$$

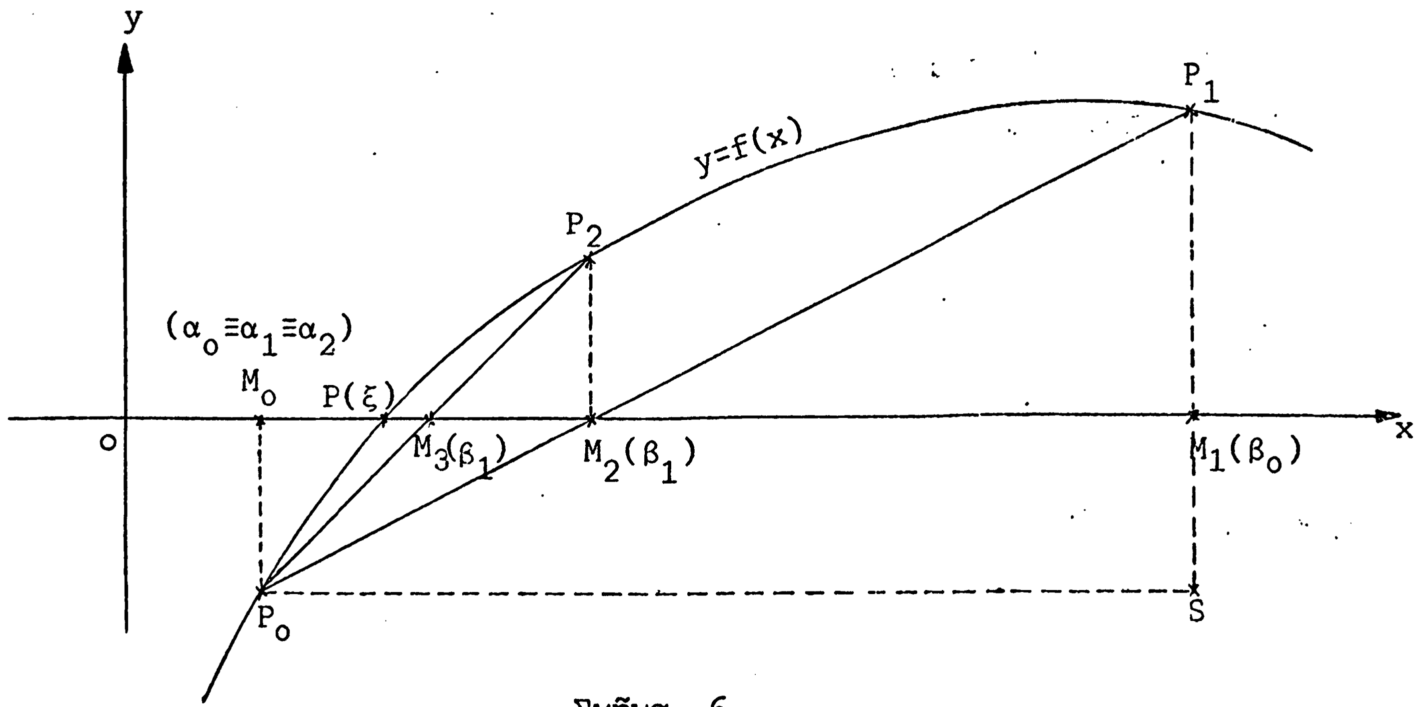
$$x_4 = 2.0939$$

$$x_5 = 2.0943$$

Ἐπομένως $\xi \approx 2.094$ ἀφοῦ $|x_4 - x_5| = 0.0004 \leq \frac{1}{2}10^{-3}$. Ὑπενθυμίζεται ὅτι οἱ τιμές τῆς $f(x)$ στά διάφορα σημεῖα, ἐπειδή αὐτή εἶναι πολυώνυμο, ὑπολογίζονται μέ τό σχῆμα τοῦ Horner. Ἀκόμη παρατηροῦμε ὅτι τό παρόν παράδειγμα εἶναι τό ἴδιο μέ τό παράδειγμα τῆς προηγούμενης μεθόδου τῆς διχοτομήσεως καί ἐπομένως ἐπαληθεύουμε μέ αὐτό ὅτι ἡ μέθοδος αὐτή τῆς γραμμικῆς παρεμβολῆς πού χρειάζεται στήν πράξη πέντε ἐπαναλήψεις γιά τήν εὕρεση τῆς ρίζας ξ εἶναι καλύτερη ἀπό τή μέθοδο τῆς διχοτομήσεως πού γιά τήν ἴδια ἐργασία χρειάζεται δέκα.

6.3.2. Γεωμετρική ἑρμηνεία τῆς μεθόδου Regula Falsi

Σ' αὐτή τή περίπτωση, ἄν $y = f(x)$ εἶναι ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως $f(x)$ (Σχῆμα 6) τότε τό σημεῖο τομῆς της P μέ τόν ἄξονα τῶν x ἔχει τετμημένη ξ, δηλαδή τή ρίζα τῆς ἐξισώσεως $f(x) = 0$.



Σχῆμα 6

Ἡ καμπύλη $y = f(x)$ ὁρίζεται μεταξύ τῶν σημείων P_0 καί P_1 ἀντίστοιχων τετμημένων α_0 καί β_0 καί τεταγμένων πού πληροῦν τή σχέση $f(\alpha_0)f(\beta_0) < 0$. Ἡ χορδή πού ὁρίζεται ἀπό τά σημεῖα P_0, P_1 καί ὁ ἄξονας τῶν x ἔχουν σημεῖο τομῆς τό M_2 μέ τετμημένη x_0, ὅπου ἀπό τό σχῆμα ἔχουμε

$$x_0 = (OM_1) - (M_2M_1)$$

Ἀπό τά ὅμοια τρίγωνα $M_2M_1P_1$ καί P_0SP_1 ἔχουμε

$$\frac{(M_2M_1)}{(P_0S)} = \frac{(M_1P_1)}{(SP_1)}$$

ἤ

$$(M_2M_1) = (\beta_o - \alpha_o)\frac{f(\beta_o)}{f(\beta_o)-f(\alpha_o)} .$$

Έτσι άντικαθιστώντας στήν έκφραση γιά τό x_o παραπάνω βρίσκουμε

$$x_o = \beta_o - (\beta_o-\alpha_o)\frac{f(\beta_o)}{f(\beta_o)-f(\alpha_o)} = \frac{\alpha_o f(\beta_o)-\beta_o f(\alpha_o)}{f(\beta_o)-f(\alpha_o)} .$$

Έστω τώρα τό σημεῖο P_2 τῆς καμπύλης μέ τετμημένη x_o. Ἡ χορδή πού ὁρίζεται ἀπό τά σημεῖα P_o καί P_2 μέ τετμημένες $\alpha_1 = \alpha_o$ καί $\beta_1 = x_o$ ὁρίζει πάνω στόν ἄξονα τῶν x σημεῖο M_3 μέ τετμημένη x_1, πού ἀπό τό σχῆμα βρίσκεται ὅτι εἶναι ἴση μέ

$$x_1 = \frac{\alpha_1 f(\beta_1) - \beta_1 f(\alpha_1)}{f(\beta_1) - f(\alpha_1)}$$

κ.ο.κ. Έτσι ὁρίζεται ἀκολουθία $\{x_n\}\ |n = 0,1,2,\ldots$, πού, στό σχῆμα τουλάχιστο, φαίνεται ὅτι συγκλίνει στή ρίζα ξ.

6.4. Γενική ἐπαναληπτική μέθοδος ἤ Μέθοδος τῶν Ricard-Peano

6.4.1. Περιγραφή τῆς μεθόδου

Στίς προηγούμενες δύο μεθόδους τῆς διχοτομήσεως καί τῆς Regula - Falsi, ἡ ὁποιαδήποτε προσέγγιση (ἤ ἐπανάληψη ὅπως μποροῦμε νά τήν καλοῦμε) $x_n\ |n = 1,2,3,\ldots$ βρισκόταν σάν συνάρτηση τῶν ἄκρων ἑνός διαστήματος, ἕνα ἀπό τά ὁποῖα ἦταν ἡ προηγούμενη ἐπανάληψη x_{n-1}. Ὅπως εἶναι γνωστό τό διάστημα αὐτό περιεῖχε τή ρίζα ξ τῆς ἐξισώσεως $f(x) = 0$. Στή μέθοδο πού θά περιγράψουμε στή συνέχεια, ἡ ὁποιαδήποτε ἐπανάληψη x_n βρίσκεται σάν συνάρτηση μόνο τῆς προηγούμενης ἐπαναλήψεως x_{n-1}. Τό ἀντίστοιχο ἐπαναληπτικό σχῆμα προκύπτει ὡς ἑξῆς. Ἀναχωροῦμε ἀπό τήν ἐξίσωση $f(x) = 0$ καί προβαίνουμε σέ μιά ἀναδιάταξη αὐτῆς γράφοντάς την μέ τή μορφή

$$x = g(x)\,. \tag{6.6}$$

Έτσι ή ρίζα ξ τής έξισώσεως $f(x) = 0$ είναι τώρα ρίζα τής έξισώσεως (6.6). Δηλαδή ίκανοποιεί τή σχέση $\xi = g(\xi)$. Ή έξίσωση (6.6) ύποδείχνει τήν έφαρμογή τοῦ παρακάτω έπαναληπτικοῦ σχήματος

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad |n = 0,1,2,\ldots \tag{6.7}$$

όπου x_o δεδομένο (άρχική προσέγγιση). Κάτω άπό όρισμένες συνθήκες τό σχῆμα (6.7) παράγει μιά άκολουθία πού συγκλίνει στή ρίζα ξ τής άρχικής έξισώσεως. Μιά τέτοια σύγκλιση δέν πετυχαίνεται πάντοτε. Έξαρτᾶται τόσο άπό τή συνάρτηση $g(x)$ όσο καί άπό τήν άρχική προσέγγιση x_o.

6.4.2. Σ ύ γ κ λ ι σ η τ ῆ ς γ ε ν ι κ ῆ ς έ π α ν α λ η π τ ι κ ῆ ς μ ε θ ό δ ο υ

Στή συνέχεια διατυπώνουμε καί άποδεικνύουμε ένα άπό τά πιό βασικά θεωρήματα πού έξασφαλίζουν τή σύγκλιση τής άκολουθίας πού παράγεται άπό τόν άλγόριθμο (6.7) στή ρίζα ξ τής άρχικής έξισώσεως $f(x) = 0$, πού ίκανοποιεί τή σχέση $\xi = g(\xi)$.

Θεώρημα

Άν $I \equiv [a,b]$ είναι ένα διάστημα πού περιέχει στό έσωτερικό του τή ρίζα ξ τής έξισώσεως $x = g(x)$ όπου $g(x) \in C^1(I)$ καί $|g'(x)| \leq \lambda < 1$ γιά όλα τά $x \in I$, τότε άν ή άρχική προσέγγιση x_o καί οί έπαναλήψεις x_n $|n = 1,2,3,\ldots$, πού παράγονται άπό τόν άλγόριθμο $x_{n+1} = g(x_n)$ $|n = 0,1,2,\ldots$ άνήκουν στό διάστημα I, ή άκολουθία τους θά συγκλίνει στή ρίζα ξ.

Άπόδειξη

Άν καλέσουμε μέ $\varepsilon_k = x_k - \xi$ τό σφάλμα τής k έπαναλήψεως, τότε έπειδή $x_{n+1} = g(x_n)$ άπό τόν άλγόριθμο καί $\xi = g(\xi)$, άφοῦ ξ είναι ή ρίζα τής έξισώσεως $x = g(x)$ θά έχουμε

$$\varepsilon_{n+1} = x_{n+1} - \xi = g(x_n) - g(\xi). \tag{6.8}$$

'Εφαρμόζοντας τώρα τό θεώρημα τοῦ Taylor μποροῦμε νά πάρουμε

$$g(x_n) - g(\xi) = (x_n - \xi)\, g'(\xi_n) = \varepsilon_n g'(\xi_n) \tag{6.9}$$

ὅπου $\min(x_n, \xi) < \xi_n < \max(x_n, \xi)$. 'Από τίς σχέσεις (6.8) καί (6.9) ἔχουμε

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n g'(\xi_n)\,.$$

Παίρνοντας ἀπόλυτες τιμές τῶν μελῶν τῆς παραπάνω σχέσης καί χρησιμοποιώντας τήν ὑπόθεση $|g'(x)| \leqq \lambda$ γιά κάθε $x \in I$ προκύπτει

$$|\varepsilon_{n+1}| \leqq \lambda\, |\varepsilon_n|\,. \tag{6.10}$$

'Από τήν (6.10) πού ἰσχύει γιά κάθε τιμή τοῦ n συμπεραίνεται εὔκολα ὅτι

$$|\varepsilon_n| \leqq \lambda^n\, |\varepsilon_o|$$

καί ἐπειδή $0 < \lambda < 1$ ἔχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda^n = 0$ καί ἄρα $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ ἤ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$.

Εἶναι εὔκολο νά ἀποδειχτεῖ πώς ἄν πληροῦνται οἱ προϋποθέσεις τοῦ θεωρήματος καί ἡ ἀρχική προσέγγιση x_o ἐκλεγεῖ ἀπό τό μικρότερο ἀπό τά δύο διαστήματα $[a,\xi]$ καί $[\xi,b]$ (ἤ γιά τήν ἁπλότητα σάν τό γνωστό ἄκρο τοῦ μικρότερου ἀπό τά δύο διαστήματα $[a,\xi]$ καί $[\xi,b]$), τότε ὅλες οἱ ἐπαναλήψεις πού παράγονται ἀπό τόν ἀλγόριθμο θά βρίσκονται στό διάστημα I καί ἐπομένως ἡ ἀκολουθία τους θά συγκλίνει στή ρίζα ξ.

Παράδειγμα

Δίνεται ὅτι ἡ ἐξίσωση $x^3-2x^2-1=0$ ἔχει μιά μόνο πραγματική ρίζα ξ τέτοια ὥστε $\xi \in (2,3)$. Νά δειχτεῖ ὅτι ἐφαρμόζοντας τόν ἀλγόριθμο $x_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{x_n^2} \,|\, n = 0,1,2,\ldots$ γιά κάθε $x_o \in [2,3]$ παράγεται ἀκολουθία πού συγκλίνει στή ρίζα ξ.

Λύση

Εἶναι φανερό ὅτι ὁ ἀλγόριθμος πού δόθηκε προκύπτει ἀπό τήν ἐξίσωση

$$x = 2 + \frac{1}{x^2} \equiv g(x)$$

πού μέ τή σειρά της εἶναι μιά ἀναδιάταξη τῆς ἐξισώσεως

$$f(x) \equiv x^3 - 2x^2 - 1 = 0 .$$

Γιά νά μπορέσουμε νά ἐφαρμόσουμε τό θεώρημα, παίρνοντας σάν διάστημα I τό διάστημα $[2,3]$, θά πρέπει, ἀφοῦ $x_0 \in [2,3]$, νά ἀποδείξουμε ὅτι οἱ ἐπαναλήψεις $x_n \,|\, n = 1,2,3,\ldots$ πού προκύπτουν ἀπό τόν ἀλγόριθμο ἀνήκουν στό διάστημα $I \equiv [2,3]$ καί ἀκόμη ὅτι $|g'(x)| \leq \lambda < 1$ γιά κάθε $x \in I$ (προφανῶς $g(x) \in C^1(I)$). Μέ τήν ὑπόθεση πού ἔχουμε $x_0 \in [2,3]$ μποροῦμε εὔκολα νά ἀποδείξουμε ὅτι καί $x_1 \in [2,3]$. Πραγματικά ἔχουμε ἀμέσως ὅτι

$$2 < 2 + \frac{1}{9} < 2 + \frac{1}{x_0^2} < 2 + \frac{1}{4} < 3$$

ἐπομένως $2 < x_1 < 3$. Μέ τόν ἴδιο τρόπο μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ἄν $x_n \in [2,3]$, τότε καί $x_{n+1} \in [2,3]$. Συνεπῶς σύμφωνα μέ τήν ἀρχή τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς θά ἔχουμε ὅτι ὅλες οἱ ἐπαναλήψεις ἀνήκουν στό διάστημα $[2,3]$. Γιά τήν παράγωγο $g'(x)$ ἔχουμε ὅτι $g'(x) = -\frac{2}{x^3}$ καί γιά κάθε $x \in [2,3]$ θά ἔχουμε $-\frac{2}{8} \leq g'(x) \leq \frac{2}{27}$. Ἐπομένως $|g'(x)| \leq \frac{2}{8} < 1$ γιά κάθε $x \in [2,3]$. Ἔτσι ἀποδείξαμε ὅτι ἱκανοποιοῦνται οἱ ἀπαιτήσεις τοῦ θεωρήματος καί συνεπῶς ὁ ἀλγόριθμος πού δόθηκε, γιά κάθε $x_0 \in [2,3]$, παράγει ἀκολουθία πού συγκλίνει στή ρίζα $\xi \in (2,3)$ τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως.

Παρατηρήσεις:

i) Ἄν εἶναι γνωστό ὅτι $|g'(\xi)| < 1$ καί ἡ συνάρτηση $g'(x)$ εἶναι συνεχής στό ξ, τότε εἶναι δυνατό νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ὑπάρχει μιά περιοχή τῆς ρίζας ξ τέτοια ὥστε ἄν τό x_0 ἐκλεγεῖ ἀπό τήν περιοχή αὐτή, ὅλες οἱ ἐπαναλήψεις ἀνήκουν στήν ὑπόψη περιοχή καί τό θεώρημα ἐφαρμόζεται

ii) Ἂν εἶναι γνωστό ὅτι $|g'(\xi)| \geq 1$ ἤ $|g'(x)| \geq 1$ σέ ἕνα διάστημα $I \ni \xi$, τότε, ἐκτός ἐξαιρέσεων, γιά ὁποιαδήποτε ἐκλογή τοῦ x_0 ἡ ἀκολουθία $x_{n+1} = g(x_n) \quad |n = 0,1,2,\ldots$ δέν θά συγκλίνει στή ρίζα ξ.

Παράδειγμα 1

Νά ἐξεταστεῖ, ἄν ὁ ἀλγόριθμος

$$x_{n+1} = 0.5 + x_n - 0.1\, x_n^3 \qquad |n = 0,1,2,\ldots \tag{6.11}$$

μπορεῖ μέ κατάλληλες προϋποθέσεις νά δώσει ἀκολουθία πού νά συγκλίνει.

Λύση

Ὁ ἀλγόριθμος πού δόθηκε προέρχεται ἀπό τήν ἐξίσωση

$$x = 0.5 + x - 0.1\, x^3 \equiv g(x)$$

πού ἀποτελεῖ μιά ἀναδιάταξη τῆς

$$f(x) \equiv x^3 - 5 = 0 . \tag{6.12}$$

Ἡ μόνη πραγματική ρίζα τῆς ἐξισώσεως (6.12) εἶναι ἡ $\xi = \sqrt[3]{5}$. Ἑπομένως ἄν ὁ ἀλγόριθμος (6.11) συγκλίνει θά συγκλίνει στή ρίζα $\xi = \sqrt[3]{5}$. Ἡ ἀπόλυτη τιμή τῆς παραγώγου τῆς συναρτήσεως $g(x)$ στό ξ εἶναι

$$|g'(\sqrt[3]{5})| = |1 - 0.3\, \sqrt[3]{25}| = 1 - 0.3\, \sqrt[3]{25} < 1 .$$

Ἄρα σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη παρατήρηση (i) μπορεῖ νά βρεθεῖ περιοχή τῆς $\sqrt[3]{5}$ τέτοια ὥστε ἄν τό x_0 ἐκλεγεῖ ἀπό αὐτή, ἡ ἀκολουθία πού παράγεται ἀπό τόν ἀλγόριθμο (6.11) νά συγκλίνει στήν $\sqrt[3]{5}$.

Παράδειγμα 2

Νά ἐξεταστεῖ, ἄν ὁ ἀλγόριθμος

$$x_{n+1} = x_n^3 + x_n - 2 \quad |n = 0,1,2,\ldots \tag{6.13}$$

μπορεῖ μέ κατάλληλες προϋποθέσεις νά δώσει ἀκολουθία πού νά συγκλίνει.

Λύση

Ὁ ἀλγόριθμος (6.13) προέρχεται ἀπό τήν ἐξίσωση

$$x = x^3 + x - 2 \equiv g(x)$$

πού εἶναι μιά ἀναδιάταξη τῆς ἐξισώσεως

$$f(x) \equiv x^3 - 2 = 0 . \qquad (6.14)$$

Ἡ ἐξίσωση (6.14) ἔχει σάν μόνη πραγματική ρίζα τήν $\xi = \sqrt[3]{2}$. Συνεπῶς ἄν ὁ ἀλγόριθμος πού δόθηκε συγκλίνει, θά συγκλίνει στήν $\sqrt[3]{2}$. Ἔχουμε ὅμως ὅτι $g'(x) = 3x^2 + 1$, ὁπότε εὔκολα συμπεραίνουμε ὅτι $|g'(x)| \geqq 1$ γιά κάθε πραγματικό x. Ἐπομένως καί $|g'(\sqrt[3]{2})| > 1$ καί σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη παρατήρηση (ii), γιά ὁποιαδήποτε ἐκλογή x_o ὁ ἀλγόριθμος (6.13) δέν θά συγκλίνει.

Παράδειγμα 3

Νά ἐξεταστεῖ μέ τόν ἴδιο τρόπο ὅπως καί στά προηγούμενα παραδείγματα ὁ ἀλγόριθμος

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}(5 + \sin x_n) \quad | \ n = 0,1,2,\ldots . \qquad (6.15)$$

Λύση

Ὁ ἀλγόριθμος (6.15) προέρχεται ἀπό τήν ἐξίσωση

$$x = \frac{1}{3}(5 + \sin x) \equiv g(x)$$

πού εἶναι ἀναδιάταξη τῆς

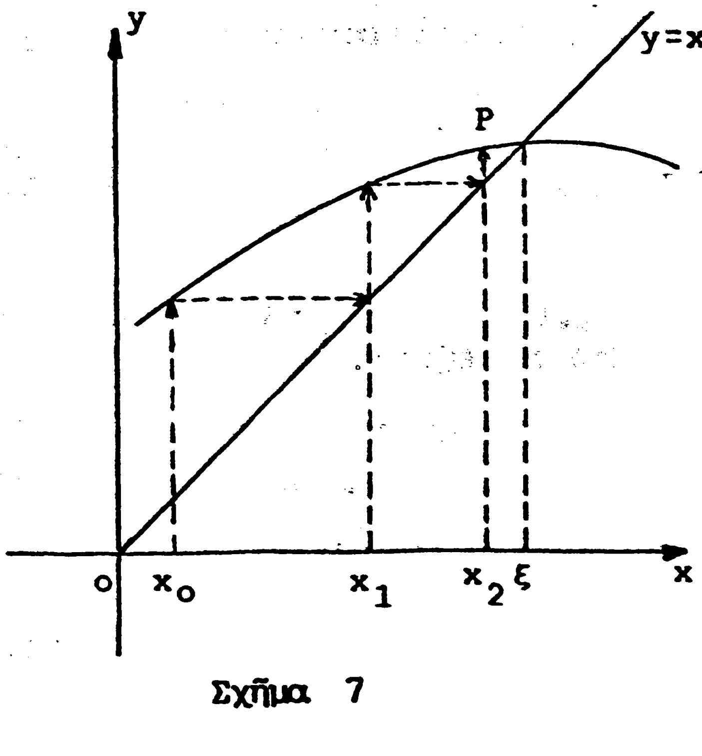
$$f(x) \equiv 3x - \sin x - 5 = 0 . \qquad (6.16)$$

Ἡ παραπάνω ἐξίσωση ἔχει μιά πραγματική ρίζα ξ. Προτοῦ παρατηρήσουμε ὅ,τιδήποτε ἄλλο πού νά ἀφορᾶ αὐτή, βλέπουμε ὅτι ἰσχύει $|g'(x)| = \left|\frac{\cos x}{3}\right| \leqq$ $\leqq \frac{1}{3} < 1$ γιά κάθε πραγματικό x. Ἐπομένως γιά ὁποιαδήποτε ἐκλογή x_o ὁ ἀλγόριθμος (6.15) παράγει ἀκολουθία πού συγκλίνει στή ρίζα ξ τῆς ἐξισώσεως

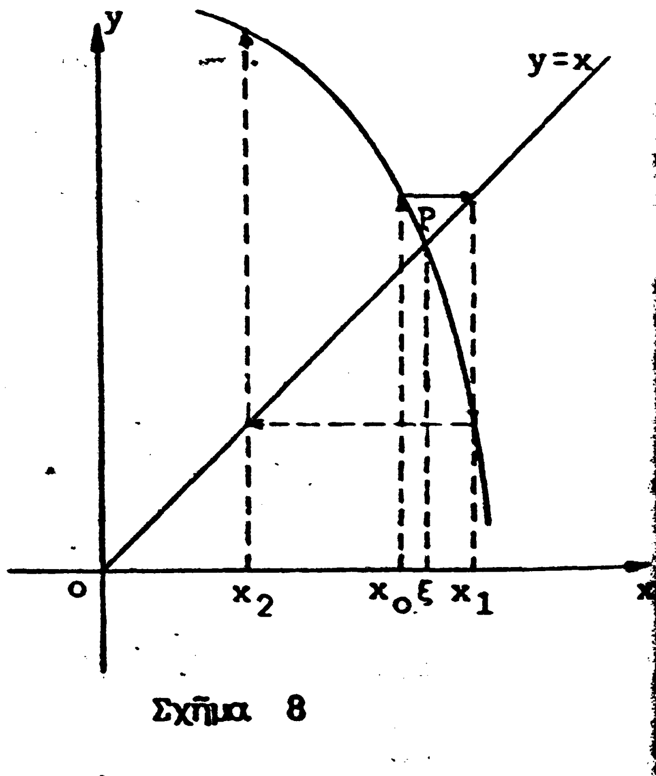
(6.16).

6.4.3. Γεωμετρική ἑρμηνεία τῆς γενικῆς ἐπαναληπτικῆς μεθόδου

Ὅπως εἶναι γνωστό ἀπό τήν ἀνάπτυξη τῆς θεωρίας στίς δυό προηγούμενες παραγράφους ἡ ρίζα ξ τῆς ἐξισώσεως $f(x)=0$ εἶναι καί ρίζα τῆς ἐξισώσεως $x=g(x)$. Ἡ τελευταία ἐξίσωση γράφεται καί σάν $x-g(x)=0$ ὁπότε ὅπως γνωρίζουμε ἡ τετμημένη ξ τοῦ σημείου τομῆς P τῶν καμπύλων $y=x$ καί $y=g(x)$ θά εἶναι ἡ ζητούμενη ρίζα τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως. Γιά τήν ἐφαρμογή τώρα τῆς γενικῆς ἐπαναληπτικῆς μεθόδου ξεκινοῦμε ἀπό τό σημεῖο τῆς καμπύλης $y=g(x)$ πού ἔχει τετμημένη x_o (Σχῆμα 7 καί 8) καί φέρνουμε παράλληλη πρός τόν ἄξονα τῶν x. Αὐτή συναντᾶ τήν εὐθεία $y=x$ στό σημεῖο, πού ἔχει τετμημένη $g(x_o)=x_1$. Συνεχίζοντας ἔτσι βρίσκουμε



Σχῆμα 7



Σχῆμα 8

τό σημεῖο τῆς καμπύλης πού ἔχει τετμημένη x_1 κ.ο.κ. Μέ τόν τρόπο αὐτό ὁ ἀλγόριθμος $x_{n+1}=g(x_n)$ $|n=0,1,2,\ldots$ παράγει μία ἀκολουθία $\{x_n\}$. Στήν περίπτωση τοῦ σχήματος 7 ἡ ἀκολουθία συγκλίνει στή ρίζα ξ, ἐνῶ στήν περίπτωση τοῦ σχήματος 8 ὄχι. Αὐτό συμβαίνει, γιατί στήν πρώτη περίπτωση ἔχουμε $|g'(x)| \leq \lambda < 1$ σέ μιά περιοχή τῆς ρίζας ξ πού περιέχει καί τήν ἀρχική προσέγγιση x_0, ἐνῶ στή δεύτερη περίπτωση ἔχουμε ἀντίστοιχα $|g'(x)| \geq 1$.

6.4.4. Εἶδος συγκλίσεως τῆς γενικῆς ἐπαναληπτικῆς μεθόδου

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι $I \equiv [a,b]$ εἶναι ἕνα διάστημα, πού περιέχει στό ἐσωτερικό του τή ρίζα ξ τῆς ἐξισώσεως $x = g(x)$ γιά τή συνάρτηση $g(x)$ τῆς ὁποίας ἰσχύει $g(x) \in C^k(I)$ μέ $k>1$. Ἄς ὑποθέσουμε ἀκόμη ὅτι ἰσχύουν οἱ σχέσεις $g^{(m)}(\xi) = 0 \quad |m = 1(1)k-1$ καί $g^{(k)}(\xi) \neq 0$ καί ὅτι ἡ ἀρχική προσέγγιση x_0 μαζί μέ ὅλες τίς ἐπαναλήψεις τοῦ ἀλγορίθμου $x_{n+1} = g(x_n) \quad |n = 0,1,2,\ldots$ ἀνήκουν στό I καί μάλιστα ἡ ἀκολουθία τους συγκλίνει στή ρίζα ξ. Τότε ἄν θεωρήσουμε τό σφάλμα ε_{n+1} κατά τήν $n+1$ ἐπανάληψη καί χρησιμοποιήσουμε τό θεώρημα τοῦ Taylor μποροῦμε νά πάρουμε

$$\varepsilon_{n+1} = x_{n+1} - \xi = g(x_n) - g(\xi) = (x_n - \xi)g'(\xi) + \frac{(x_n-\xi)^2}{2!} g''(\xi) + \ldots +$$

$$+ \frac{(x_n-\xi)^{k-1}}{(k-1)!} g^{(k-1)}(\xi) + \frac{(x_n-\xi)^k}{k!} g^{(k)}(\xi_n)$$

ὅπου $\min(x_n, \xi) < \xi_n < \max(x_n, \xi)$. Ἔχοντας ὑπόψη τίς ὑποθέσεις λαβαίνουμε

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^k}{k!} g^{(k)}(\xi_n) . \qquad (6.16)$$

Κάνοντας τώρα μιά ἀναδιάταξη στήν ἰσότητα (6.16) πού βρήκαμε, παίρνοντας ὅρια καί ἔχοντας ὑπόψη τή συνέχεια τῆς $g^{(k)}(x)$ στό διάστημα I προκύπτει τελικά ὅτι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^k} = \frac{1}{k!} g^{(k)}(\xi) \qquad (6.17)$$

Μέ ὅσα ἀναπτύξαμε μέχρι τώρα συμπεραίνουμε πώς ἄν $k = 1$ καί ἐπί πλέον

$|g'(\xi)| < 1$, τότε ὑπάρχει κατάλληλη περιοχή τῆς ρίζας ξ, ἔστω ἡ I_1, τέτοια ὥστε ἄν $x_o \in I_1$, τότε ἡ γενική ἐπαναληπτική μέθοδος συγκλίνει πάντοτε. Ἡ σύγκλιση πού πετυχαίνεται μέ τόν τρόπο αὐτό καλεῖται σύγκλιση πρώτης τάξης ἤ γραμμική σύγκλιση. Ἄν $k > 1$ τότε $|g'(\xi)| = 0 < 1$ καί ἐπομένως εἴμαστε βέβαιοι πώς ὑπάρχει πάντοτε περιοχή I_1 τῆς ρίζας ξ, τέτοια ὥστε ἄν $x_o \in I_1$, ἡ ἀκολουθία πού παράγεται ἀπό τόν ἀλγόριθμο $x_{n+1} = g(x_n) \; |n = 0,1,2,\ldots$ συγκλίνει στή ρίζα ξ. Στήν περίπτωση αὐτή ἡ σύγκλιση ὀνομάζεται k τάξης, ἐνῶ είδικά γιά $k = 2$ τετραγωνική καί γιά $k = 3$ κυβική.

Ὅπως φαίνεται ἀπό τή σχέση (6.17) σέ μιά σύγκλιση k τάξης ὁριακά θά ἰσχύει ὅτι τό σφάλμα σέ μιά ἐπανάληψη εἶναι ἀνάλογο τῆς k δυνάμεως τοῦ σφάλματος τῆς προηγούμενης ἐπαναλήψεως. Στήν πράξη αὐτό συμβαίνει γιά πολύ μεγάλες τιμές τοῦ n.

Παράδειγμα

Ἀφοῦ πρῶτα βρεθεῖ σέ τί μπορεῖ νά χρησιμεύσει ὁ ἀλγόριθμος

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + \alpha}{3x_n^2} \quad |n = 0,1,2,\ldots$$

μέ x_o γνωστό καί $\alpha \neq 0$, νά ἀποδειχτεῖ στή συνέχεια ὅτι αὐτός εἶναι δεύτερης τάξης συγκλίσεως.

Λύση

Ὅπως εἶναι γνωστό, ἄν ὁ ἀλγόριθμος πού δόθηκε συγκλίνει, τότε θά συγκλίνει στή ρίζα ξ τῆς ἐξισώσεως

$$x = \frac{2x^3 + \alpha}{3x^2} \equiv g(x)$$

ἤ τῆς ἐξισώσεως

$$f(x) \equiv x^3 - \alpha = 0 .$$

Μ' άλλα λόγια θά χρησιμεύει γιά τήν εύρεση τῆς $\xi = \sqrt[3]{\alpha}$. Γιά νά εἶναι τώρα ὁ ἀλγόριθμος πού δόθηκε δεύτερης τάξης συγκλίσεως θά πρέπει $g'(\xi) = 0$, ἐνῶ $g''(\xi) \neq 0$. Γιά τό σκοπό αὐτό βρίσκουμε

$$g'(x) = \frac{2(x^3 - \alpha)}{3x^3} \quad \text{καί} \quad g''(x) = \frac{2\alpha}{3x^4} \cdot$$

Ἐπομένως

$$g'(\xi) = g'(\sqrt[3]{\alpha}) = \frac{2\left[(\sqrt[3]{\alpha})^3 - \alpha\right]}{3(\sqrt[3]{\alpha})^3} = 0$$

καί

$$g''(\xi) = g''(\sqrt[3]{\alpha}) = \frac{2\alpha}{3(\sqrt[3]{\alpha})^4} = \frac{2}{3\sqrt[3]{\alpha}} \neq 0 \cdot$$

Ἄρα ὁ ἀλγόριθμος πού δόθηκε εἶναι δεύτερης τάξης (τετραγωνικῆς) συγκλίσεως.

Ὅπως εἴδαμε πρίν, ὅταν μία μέθοδος εἶναι γραμμικῆς συγκλίσεως, γιά νά ὑπάρχουν οἱ προϋποθέσεις συγκλίσεως θά πρέπει νά ἱκανοποιεῖται ἡ σχέση $|g'(\xi)| < 1$. Στήν περίπτωση ὅμως πού $k > 1$, δέν ὑπάρχει τέτοιος περιορισμός γιατί ἡ προηγούμενη σχέση ἱκανοποιεῖται αὐτόματα ἀφοῦ $|g'(\xi)| = 0 < 1$. Ἔτσι εἴμαστε σέ θέση νά ξέρουμε ὅτι σέ μία μέθοδο k τάξης συγκλίσεως $(k > 1)$ ὑπάρχει πάντοτε περιοχή I_1, τέτοια ὥστε ἄν ἡ ἀρχική προσέγγιση διαλεχτεῖ ἀπ' αὐτή, ἡ μέθοδος νά συγκλίνει. Βασιζόμενοι στήν παρατήρηση αὐτή προσπαθοῦμε στήν πράξη νά κατασκευάσουμε γενικές ἐπαναληπτικές μεθόδους, πού νά εἶναι τουλάχιστον τετραγωνικῆς συγκλίσεως.

Στήν συνέχεια περιγράφουμε τήν πορεία πού ἀκολουθοῦμε στήν πράξη γιά νά διαλέξουμε τό x_0 στήν περίπτωση μιᾶς μεθόδου τετραγωνικῆς συγκλίσεως.

Ἄν $I \equiv [a,b]$ εἶναι τό διάστημα στό ἐσωτερικό τοῦ ὁποίου βρίσκεται ἡ ρίζα ξ τῆς ἐξισώσεως $x = g(x)$ καί εἶναι τέτοιο ὥστε $g(x) \in C^2(I)$, τότε ἄν $g'(\xi) = 0$ καί $g''(\xi) \neq 0$ καί ἐφαρμόσουμε τόν ἀλγόριθμο $x_{n+1} = g(x_n)$

$n = 0,1,2,\ldots$ μέ x_o δεδομένο (άλλά άγνωστο πρός τό παρόν) θά ίσχύει ή σχέση (6.16). Στήν πρώτη έφαρμογή τοῦ άλγορίθμου ή σχέση (6.16) θά δίνει

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\,\varepsilon_o^2\, g''(\xi_o)\ , \quad \min\,(x_o,\xi) < \xi_o < \max\,(x_o,\xi). \tag{6.18}$$

Ἡ συνάρτηση ὅμως $g''(x)$ εἶναι συνεχής στό κλειστό διάστημα I. Ἄρα θά εἶναι καί φραγμένη. Ἔστω λοιπόν ὅτι

$$\frac{1}{2}\,|g''(x)| \leqq M \quad | \ \forall\, x \in I\,. \tag{6.19}$$

Χρησιμοποιώντας τήν (6.19) στήν (6.18) μποροῦμε νά πάρουμε

$$|\varepsilon_1| \leqq M|\varepsilon_o|^2\,.$$

Ἄν τώρα σκεφτοῦμε ὅτι

$$|\varepsilon_o| = |x_o - \xi| < b - a$$

τότε

$$|\varepsilon_1| < M(b-a)|\varepsilon_o|$$

ή άν θέσουμε $\lambda = M(b-a)$ θά έχουμε

$$|\varepsilon_1| < \lambda|\varepsilon_o|\,. \tag{6.20}$$

Ἄν τώρα $\lambda < 1$, τότε ή παραπάνω σχέση εἶναι τῆς ἴδιας μορφῆς μέ τή σχέση (6.10) τῆς προηγούμενης παραγράφου καί έπομένως ή μέθοδος θά συγκλίνει γιά κάθε x_o πού θά άνήκει στό μικρότερο άπό τά δύο διαστήματα $[a,\xi]$ καί $[\xi,b]$ άφοῦ τότε, άπό τήν (6.20), συμπεραίνεται ὅτι $x_1 \in I$. Στήν περίπτωση αὐτή ή σχέση (6.20) ίσχύει γενικά γιατί μπορεῖ τότε έπαγωγικά νά άποδειχτεῖ ὅτι

$$|\varepsilon_{n+1}| < \lambda\ |\varepsilon_n|$$

γιά κάθε $n = 0,1,2,\ldots$ καί έπομένως ό άλγόριθμος συγκλίνει στή ρίζα ξ.

Ἂν ὅμως $\lambda \geq 1$, τότε μικραίνουμε (π.χ. διχοτομοῦμε) τό ἀρχικό διάστημα ἐντοπισμοῦ τῆς ρίζας $\bar{I}$, βρίσκουμε ἔτσι ἕνα νέο διάστημα I, ἕνα νέο M, ἕνα νέο λ κ.ο.κ. Ἡ παραπάνω ἐργασία φαίνεται καθαρά στό ἑπόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα

Ὅπως εἶναι γνωστό, σύμφωνα μέ τό παράδειγμα τῆς προηγούμενης παραγράφου, ὁ ἀλγόριθμος

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + 3}{3x_n^2} \qquad \Big| n = 0,1,2,\ldots$$

μπορεῖ νά χρησιμέψει γιά τήν εὕρεση τῆς $\sqrt[3]{3}$ καί εἶναι δεύτερης τάξης συγκλίσεως. Ἐφαρμόζοντας τή θεωρία πού ἀναπτύχτηκε σ' αὐτή τήν παράγραφο νά βρεθεῖ διάστημα τέτοιο ὥστε, ἄν τό x_0 ἐκλεγεῖ ἀπό αὐτό, ὁ ἀλγόριθμος νά συγκλίνει στήν $\sqrt[3]{3}$.

Λύση

Ἀρχικά μᾶς χρειάζεται ἕνα διάστημα I ἐντοπισμοῦ τῆς ρίζας $\xi = \sqrt[3]{3}$ τῆς ἐξισώσεως

$$x = \frac{2x^3 + 3}{3x^2} \equiv g(x)$$

ἤ τῆς ἐξισώσεως

$$f(x) \equiv x^3 - 3 = 0.$$

Σάν τέτοιο μποροῦμε νά πάρουμε ὁποιοδήποτε πού νά περιέχει τήν ρίζα. Ἔστω $I \equiv [1,2]$. Στήν συνέχεια θά πρέπει νά βροῦμε ἕνα ἀπόλυτο φράγμα γιά τή συνάρτηση $g''(x)$ γιά ὅλα τά $x \in I$.
Ἐπειδή

$$g''(x) \equiv \frac{2}{x^4}$$

βρίσκουμε ἀμέσως ὅτι $|g''(x)| \leq 2$ γιά ὅλα τά $x \in I$. Ἄρα $M = \frac{1}{2} \times 2 = 1$. Θέτουμε τώρα $\lambda = M(b-a) = 1(2-1) = 1$. Ἐπειδή $\lambda = 1$ κάνουμε τήν ἴδια ἐργασία μέ ἕνα μικρότερο διάστημα, πού νά περιέχει τή ρίζα ξ. Ἄν διχοτομήσουμε τό ἀρχικό διάστημα εἶναι εὔκολο νά διαπιστώσουμε ὅτι τό διάστημα $[1, 1.5]$ περιέχει τή ρίζα ξ. Αὐτό γιατί $f(1) = -2 < 0$, $f(2) = 5 > 0$ καί $f(1.5) = 0.375 > 0$. Ἔτσι ἔχουμε ἕνα νέο $I \equiv [1, 1.5]$, γιά τό ὁποῖο βρίσκουμε ἕνα νέο φράγμα τῆς $g''(x)$ πού συμβαίνει νά εἶναι τό ἴδιο, γιατί $|g''(x)| \leq 2$ γιά ὅλα τά $x \in I$. Λαβαίνουμε ἔτσι ἕνα νέο $M = \frac{1}{2} \times 2 = 1$ καί ἕνα νέο $\lambda = M(b-a) = 1(1.5-1) = 0.5$. Ἐπειδή $\lambda < 1$ μποροῦμε νά διαλέξουμε τώρα τό x_0 ἀπό τό μικρότερο ἀπό τά δύο διαστήματα $[1, \xi]$ καί $[\xi, 1.5]$. Γιά τό σκοπό αὐτό βρίσκουμε τή θέση τοῦ μέσου τοῦ διαστήματος I ὡς πρός τή ρίζα ξ. Ἐπειδή $\frac{1+1.5}{2} = 1.25$ βρίσκουμε $f(1.25) = -1.046875 < 0$. Ἄρα τό διάστημα $[\xi, 1.5]$ εἶναι τό μικρότερο ἀπό τά δύο διαστήματα. Ἐπομένως γιά κάθε $x_0 \in [\xi, 1.5]$ ὁ ἀλγόριθμος θά συγκλίνει στήν $\sqrt[3]{3}$. Γιά εὐκολία μποροῦμε νά διαλέξουμε $x_0 = 1.5$ ἄν θέλουμε.

6.5. Μέθοδος τῶν Newton Raphson

6.5.1. Περιγραφή τῆς μεθόδου

Ἡ γενική ἐπαναληπτική μέθοδος πού ἀναπτύχτηκε στήν προηγούμενη παράγραφο εἶναι βέβαια ἁπλή στήν ἐφαρμογή της. Παρουσιάζει ὅμως μιά σημαντική δυσκολία τουλάχιστο στό ξεκίνημά της. Κι' αὐτό γιατί, ὅπως εἴδαμε, ἀπό τίς ἄπειρες ἀναδιατάξεις τῆς ἐξισώσεως $f(x) = 0$ τῆς μορφῆς $x = g(x)$ θά πρέπει νά βροῦμε μιά τέτοια ὥστε $|g'(\xi)| < 1$. Ἐκτός ἀπό τή δυσκολία αὐτή ὑπάρχει πάντοτε καί τό ἀναμφισβήτητο γεγονός τῆς ἀργῆς σχετικά συγκλίσεως τῆς μεθόδου, ἀφοῦ, ἐκτός ἐξαιρέσεων, ἴσως ἡ σύγκλιση θά εἶναι γραμμική. Σέ ἀντιδιαστολή πρός αὐτά, πού μόλις ἀναφέραμε ἡ μέθοδος τῶν Newton - Raphson εἶναι τῆς γενικῆς μορφῆς $x = g(x)$, ἀλλά ἡ $g(x)$ εἶναι πάντοτε ἡ ἴδια συνάρτηση τῶν x, $f(x)$ καί $f'(x)$· συγκεκριμένα ἔχουμε

$$g(x) \equiv x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad . \tag{6.21}$$

Ἐπιπρόσθετα ἡ νέα μέθοδος εἶναι τουλάχιστον τετραγωνικῆς συγκλίσεως στήν περίπτωση τῆς ἁπλῆς ρίζας ξ. Γιά τούς παραπάνω λόγους καί ἀκόμη γιά τό λόγο ὅτι ἡ μέθοδος προγραμματίζεται εὔκολα, σ' ἕναν Η.Υ. ἀποτελεῖ αὐτή τήν πιό δημοφιλή μέθοδο γιά τήν εὕρεση τῶν ριζῶν τῶν ἐξισώσεων μεταξύ ὅλων τῶν ἐπαναληπτικῶν μεθόδων. Ἔχοντας ὑπόψη τήν ἔκφραση (6.21) γιά τή συνάρτηση g(x) ἔχουμε ἀμέσως ὅτι ὁ ἀλγόριθμος τῶν Newton - Raphson εἶναι ὁ ἀκόλουθος

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \Big| \, n = 0,1,2,\ldots \tag{6.22}$$

μέ x_o δεδομένο. Γιά τήν ἐκλογή φυσικά τοῦ x_o ἰσχύει ὅτι ἀναφέραμε στό τέλος τῆς προηγούμενης παραγράφου, ἀφοῦ ἡ μέθοδος αὐτή εἶναι τουλάχιστον δεύτερης τάξης συγκλίσεως, ὅπως θά ἀποδείξουμε ἀμέσως στή συνέχεια.

Μέ τήν προϋπόθεση ὅτι ὑπάρχουν οἱ ἀντίστοιχες παράγωγοι τῆς συναρτήσεως f(x) καί εἶναι συνεχεῖς σ' ἕνα διάστημα, πού περιέχει στό ἐσωτερικό του τήν ἁπλή ρίζα ξ τῆς ἐξισώσεως $f(x) = 0$, γιά νά ἀποδείξουμε ὅτι ὁ ἀλγόριθμος (6.22) γιά κατάλληλο x_o εἶναι τουλάχιστον τετραγωνικῆς συγκλίσεως ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε γιά τή συνάρτηση g(x), πού δίνεται ἀπό τήν (6.21) ὅτι $g'(\xi) = 0$ καί $g''(\xi)$ ὄχι πάντοτε διάφορο ἀπό τό μηδέν. Πραγματικά εὔκολα βρίσκουμε ὅτι

$$g'(x) = \frac{f(x)\,f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

καί

$$g'(x) = \frac{f(\xi)f''(\xi)}{[f'(\xi)]^2} = 0$$

καί ἀκόμη ὅτι

$$g''(x) = \frac{[f'(x)]^2 f''(x) + f(x)f'(x)f'''(x) - 2f(x)[f''(x)]^2}{[f'(x)]^3}$$

ὁπότε

$$g''(\xi) = \frac{[f'(\xi)]^2 f''(\xi) + f(\xi)f'(\xi)f''(\xi) - 2f(\xi)[f''(\xi)]^2}{[f'(\xi)]^2} =$$

$$= \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \neq 0$$

γενικά.

6.5.2. Μέθοδος τῶν Newton - Raphson γιά τήν εὕρεση τῆς τετραγωνικῆς ρίζας

Εἶναι φανερό ὅτι ὁ ἀλγόριθμος τῶν Newton - Raphson (6.22) γιά συγκεκριμένες ἐκφράσεις τῆς συναρτήσεως f(x) παίρνει καί συγκεκριμένες μορφές. Ἐκμετάλλευση τοῦ γεγονότος αὐτοῦ γίνεται στήν περίπτωση πού θέλουμε νά βροῦμε τήν τετραγωνική ρίζα ἑνός θετικοῦ ἀριθμοῦ α. Στήν περίπτωση αὐτή ἄν καλέσουμε μέ x τήν τετραγωνική ρίζα τοῦ α θά ἔχουμε

$$f(x) \equiv x^2 - \alpha = 0$$

Ἐπειδή ἀκόμη $f'(x) = 2x$, τό σχῆμα τῶν Newton - Raphson θά εἶναι τό ἀκόλουθο

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - \alpha}{2x_n} = \frac{x_n^2 + \alpha}{2x_n} \qquad (6.23)$$

ἤ τέλος

$$x_{n+1} = 0.5\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right) \qquad \Big| \, n = 0,1,2,\ldots \qquad (6.24)$$

ὅπου x_0 μιά κατάλληλη ἀρχική προσέγγιση. Ἡ μορφή τοῦ ἀλγορίθμου (6.24) πρέπει νά προτιμᾶται ἀπό τήν τελική μορφή τοῦ ἀλγορίθμου (6.23), γιατί στόν ὑπολογισμό τῆς τιμῆς ἀπό τήν (6.23) κάνουμε δύο πολλαπλασιασμούς , μία πρόσθεση καί μία διαίρεση, ἐνῶ στόν ὑπολογισμό μέ βάση τήν (6.24) κάνουμε ἕναν πολλαπλασιασμό, μία πρόσθεση καί μία διαίρεση, δηλαδή λιγότερες πράξεις. Εἶναι φανερό, σύμφωνα μέ αὐτά πού ἀναπτύχτηκαν στήν παράγραφο 6.4.4. γιά τήν έκλογή τοῦ x_o, ὅτι ἄν αὐτή γίνει ἀπό τήν περιοχή πού θά περιέχει στό έσωτερικό της τήν $\sqrt{\alpha}$ τότε ὁ ἀλγόριθμος (6.24) θά συγκλίνει σ' αὐτή, ἐνῶ ἄν γίνει ἀπό τήν περιοχή, πού θά περιέχει τήν $-\sqrt{\alpha}$ τότε ὁ ἀλγόριθμος θά συγκλίνει στήν $-\sqrt{\alpha}$.

Εἶναι δυνατό τώρα νά ἀποδείξουμε κάτι γενικότερο γιά τήν έκλογή τοῦ x_o στήν περίπτωση τῆς εὑρέσεως τῆς τετραγωνικῆς ρίζας τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ α. Συγκεκριμένα μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ὅτι γιά κάθε $x_o > 0$ ὁ ἀλγόριθμος (6.24) παράγει ἀκολουθία, πού συγκλίνει στήν $\sqrt{\alpha}$. Πραγματικά γιά ὁποιοδήποτε $x_o > 0$, χρησιμοποιώντας τήν ἔκφραση (6.24), μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ἀμέσως ἐπαγωγικά ὅτι

$$x_n > 0 \quad | n = 0,1,2,\dots .$$

Μετά παρατηροῦμε ὅτι

$$x_{n+1} - \sqrt{\alpha} = 0.5\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right) - \sqrt{\alpha} = 0.5\left(\sqrt{x_n} - \frac{\alpha}{\sqrt{x_n}}\right) \geqq 0$$

ἐπομένως

$$x_n \geqq \sqrt{\alpha} \qquad | n = 1,2,3,\dots . \tag{6.25}$$

Ἀκόμη ἔχουμε ὅτι

$$x_n - x_{n+1} = 0.5\left(\frac{x_n^2 - \alpha}{x_n}\right) \geqq 0$$

σύμφωνα μέ τήν σχέση (6.25). Ἄρα

$$x_n \geqq x_{n+1} \qquad | n = 1,2,3,\dots . \tag{6.26}$$

Ἀπό τίς (6.25) καί (6.26) ἔχουμε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\{x_n\}$ $| n = 1,2,3,\dots$ εἶναι μονότονη καί φραγμένη ἀπό κάτω ἀπό τήν $\sqrt{\alpha}$. Ἐπομένως θά συγκλίνει. Ἐπειδή πρέπει νά συγκλίνει σέ μία ἀπό τίς ρίζες $\pm\sqrt{\alpha}$ τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως $f(x) \equiv x^2 - \alpha = 0$ καί ἡ ἀκολουθία εἶναι ἀκολουθία θετικῶν ὅρων θά συγκλίνει προφανῶς στήν $\sqrt{\alpha}$.

Παράδειγμα 1

Νά βρεθεῖ ἡ $\sqrt{2}$ μέ προσέγγιση τεσσάρων δ.ψ.

Λύση

Τό σχῆμα τῶν Newton - Raphson γιά $\alpha = 2$ παίρνει τή μορφή

$$x_{n+1} = 0.5\,(x_n + \frac{2}{x_n}) \quad | \; n = 0,1,2,\ldots$$

μέ x_o ὁποιοδήποτε θετικό ἀριθμό. Παίρνοντας $x_o = 1$ βρίσκουμε διαδοχικά

$$x_o = 1$$

$$x_1 = 1.5$$

$$x_2 = 1.41667$$

$$x_3 = 1.41422$$

$$x_4 = 1.41421$$

Ἄρα $\sqrt{2} \approx 1.4142$, ἀφοῦ $|x_3 - x_4| = 0.00001 \leqq .5\times10^{-4}$.

Παράδειγμα 2

Νά βρεθεῖ τό σχῆμα τῶν Newton - Raphson γιά τήν εὕρεση τῆς κυβικῆς ρίζας ἀριθμοῦ α.

Λύση

Ἔστω x ἡ μία καί μόνη πραγματική κυβική ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ α. Θά ἔχουμε $x = \sqrt[3]{\alpha}$ καί ἀπό αὐτήν

$$f(x) \equiv x^3 - \alpha = 0 .$$

Ἐπειδή $f'(x) = 3x^2$ βρίσκουμε ἀμέσως ὅτι

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - \alpha}{3x_n^2} = \frac{2x_n^3 + \alpha}{3x_n^2} \qquad | n = 0,1,2,\ldots$$

6.5.3. Σύγκλιση τῆς μεθόδου τῶν Newton - Raphson

Ὅπως ἀποδείχτηκε ἡ μέθοδος τῶν Newton - Raphson εἶναι τουλάχιστον τετραγωνικῆς συγκλίσεως. Αὐτό σημαίνει ὅτι γιά κατάλληλο x_0, πού θά ἐκλέγεται μέ τόν τρόπο πού ἀναπτύχτηκε στό τέλος τῆς παραγράφου 6.4.4., ἡ μέθοδος τῶν Newton - Raphson θά συγκλίνει πρός τή ρίζα ξ. Γιά νά ἐφαρμοστεῖ ἡ μέθοδος τῆς παραγράφου 6.4.4. χρειάζεται, ὅπως εἶναι γνωστό, νά βρεθεῖ ἕνα ἀπόλυτο ἄνω φράγμα τῆς $g''(x)$. Ἐπειδή σ' αὐτή τήν περίπτωση $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ εἶναι δυνατό ἡ ἔκφραση γιά τήν $g''(x)$ νά εἶναι σχετικά πολύπλοκης μορφῆς καί γιά τό λόγο αὐτό ἡ εὕρεση τοῦ φράγματος δύσκολη. Γι' αὐτό περιγράφουμε στή συνέχεια τήν πορεία πού μποροῦμε νά ἀκολουθήσουμε γιά τήν ἐκλογή τοῦ x_0 βασιζόμενοι στή συνάρτηση $f(x)$ καί ὄχι στήν $g(x)$. Φυσικά ἡ παρακάτω περιγραφή ἀναφέρεται στήν μέθοδο τῶν Newton - Raphson καί μόνο καί ὄχι στήν ὁποιαδήποτε μέθοδο δεύτερης τάξης συγκλίσεως.

Ὑποθέτουμε ὅτι $I \equiv [a,b]$ εἶναι τό διάστημα ἐντοπισμοῦ τῆς ρίζας ξ τῆς ἐξισώσεως $f(x) = 0$ καί ἀκόμη ὅτι $f(x) \in C^2(I)$ μέ $|f'(x)| \geqq K > 0$ καί $|f''(x)| \leqq \Lambda$ γιά ὅλα τά $x \in I$. Ἄν τώρα ἐφαρμόσουμε τόν ἀλγόριθμο τῶν Newton - Raphson μέ x_0 δεδομένο (ἀλλά ἄγνωστο πρός τό παρόν), τότε μέ τήν πρώτη ἐφαρμογή αὐτοῦ θά ἔχουμε

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} . \tag{6.27}$$

Ἐξάλλου ξεκινώντας ἀπό τήν προφανή σχέση $f(\xi) = 0$, πού τή γράφουμε $f(x_0 - \varepsilon_0) = 0$, ὅπου $\varepsilon_0 = x_0 - \xi$ τό ἀντίστοιχο σφάλμα, μποροῦμε νά πάρουμε ἄν ἀναπτύξουμε σύμφωνα μέ τό θεώρημα τοῦ Taylor ὅτι

$$f(x_0) - \varepsilon_0 f'(x_0) + \frac{1}{2}\varepsilon_0^2 f''(\xi_0) = 0 \tag{6.28}$$

ὅπου $\min(x_0,\xi) < \xi_0 < \max(x_0,\xi)$. Ἀντικαθιστώντας τώρα στήν (6.28) τήν ἔκφραση γιά τήν τιμή $f(x_0)$ ἀπό τήν (6.27) βρίσκουμε

$$(x_0 - x_1)f'(x_0) - \varepsilon f'(x_0) + \frac{1}{2}\varepsilon_0^2 f''(\xi_0) = 0$$

ἤ τέλος

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\,\frac{f''(\xi_0)}{f'(x_0)}\,\varepsilon_0^2 .$$

Ἀπό αὐτήν μπορεῖ νά προκύψει ἀμέσως

$$|\varepsilon_1| = \frac{1}{2}\,\frac{|f''(\xi_0)|}{|f'(x_0)|}\,|\varepsilon_0|^2 \leqq \frac{\Lambda}{2K}|\varepsilon_0|^2$$

καί ἄν καλέσουμε $M = \frac{\Lambda}{2K}$ ἔχουμε ὅτι

$$|\varepsilon_1| \leqq M|\varepsilon_0|^2 .$$

Ἔτσι καταλήγουμε στήν ἴδια ἀκριβῶς σχέση πού εἴχαμε καταλήξει καί στήν παράγραφο 6.4.4.. Ἐπομένως ἡ ἐργασία ἀπό ἐδῶ καί πέρα συνεχίζεται ἀκριβῶς μέ τόν ἴδιο τρόπο. Θά πρέπει νά τονίσουμε ὅτι ἡ διαφορά τῶν δύο διαδικασιῶν, δηλαδή τῆς παραγράφου 6.4.4.καί αὐτῆς τῆς παραγράφου βρίσκεται ἁπλά καί μόνο στόν ὁρισμό τοῦ φράγματος M. Ὅλα τά ἄλλα συμπίπτουν ἀπόλυτα. Γιά τήν καλύτερη κατανόηση τῆς θεωρίας δίνουμε στή συνέχεια ἕνα συγκεκριμένο παράδειγμα.

Παράδειγμα

Ἡ ἐξίσωση $f(x) \equiv x^3 - 2x - 5 = 0$ ἔχει μία καί μόνο πραγματική ρίζα ξ, πού βρίσκεται κοντά στόν ἀριθμό 2. Νά βρεθεῖ αὐτή μέ προσέγγιση τριῶν δ. ψ.

2,261

Λύση

Μποροῦμε εὔκολα νά βροῦμε ἕνα διάστημα ἐντοπισμοῦ τῆς ρίζας ξ,ἀφοῦ ξέρουμε ὅτι αὐτή βρίσκεται κοντά στόν ἀριθμό 2. Π.χ. μποροῦμε νά διαπιστώσουμε ὅτι $f(2) = -1 < 0$ καί $f(2.2) = 1.248 > 0$. Ἔτσι παίρνουμε $I \equiv [2,2.2]$. Ἔχουμε προφανῶς ὅτι $f(x) \in C^2(I)$. Γιά τήν εὕρεση τοῦ φράγματος $M = \frac{\Lambda}{2K}$ βρίσκουμε τά φράγματα Κ καί Λ μέ τή βοήθεια τοῦ παρακάτω πίνακα τιμῶν καί χρησιμοποιώντας τό σχῆμα τοῦ Horner, ὅσες φορές χρειάζεται, γιά τήν εὕρεση τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως f(x) καί τῶν παραγώγων της στά σημεῖα 2 καί 2.2.

x	2		2.2
f(x)	-1	↗	1.248
f′(x)	10	↗	12.52
f″(x)	12	↗	13.2
f‴(x)		6	

Ἀπό τόν παραπάνω πίνακα ἔχουμε ἀμέσως ὅτι $|f'(x)| \geq 10$ καί $|f''(x)| \leq 13.2$ γιά ὅλα τά $x \in I$. Ἐπομένως $K = 10$, $\Lambda = 13.2$ καί $M = \frac{\Lambda}{2K} = \frac{13.2}{2\times 10} = 0.66$. Ἄρα $\lambda = M(b-a) = 0.66(2.2-2) = 0.132 < 1$. Ἐπειδή βρέθηκε $\lambda < 1$, αὐτό σημαίνει ὅτι μποροῦμε νά ἐκλέξουμε τό x_0 σάν τό ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ μικρότερου ἀπό τά δύο διαστήματα $[2,\xi]$ καί $[\xi,2.2]$. Ἐπειδή $f(\frac{2.2+2}{2}) = f(2.1) = 0.061 > 0$, τό διάστημα $[2,\xi]$ εἶναι τό μικρότερο ἀπό τά δύο διαστήματα. Μποροῦμε λοιπόν νά πάρουμε τό $x_0 = 2$. Ἐφαρμόζουμε τώρα τόν ἀλγόριθμο τῶν Newton - Raphson ἐπαναληπτικά μέ $x_0 = 2$, χρησιμοποιώντας τό σχῆμα τοῦ Horner ὅπως παρακάτω, καί παίρνουμε

	1	0	-2	-5
2		2	4	4
	1	2	2	-1
2		2	8	
	1	4	10	

ἄρα

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{-1}{10} = 2-(-0.1) = 2.1$$

	1	0	-2	-5
2.1		2.1	4.41	5.061
	1	2.1	2.41	0.061
2.1		2.1	8.82	
	1	4.2	11.23	

ἄρα

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2.1 - \frac{0.061}{11.23} = 2.1 - 0.0054 = 2.0946$$

	1	0	-2	-5
2.0946		2.0946	4.3873	5.0004
	1	2.0946	2.3873	0.0004
2.0946		2.0946	8.7747	
	1	4.1892	11.1620	

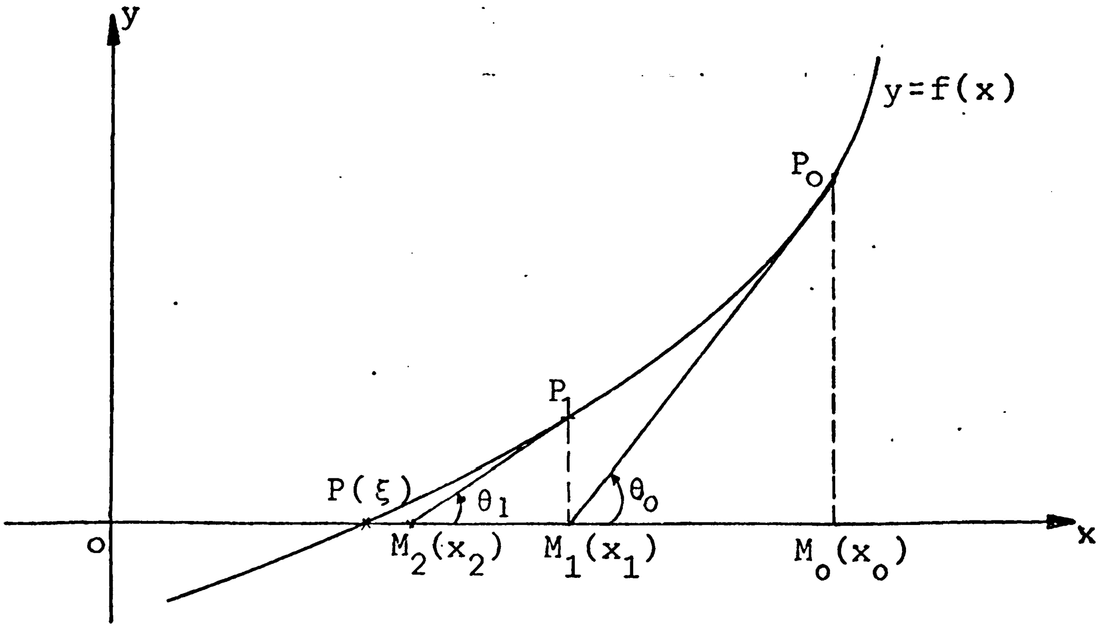
ἄρα

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2.0946 - \frac{0.0004}{11.1620} = 2.0946 - 0.0000 = 2.0946.$$

Ἑπομένως $\xi \approx 2.0946$, ἀφοῦ $|x_2 - x_3| = 0.0000 \leq \frac{1}{2} 10^{-3}$. Τό παρόν παράδειγμα εἶναι τό ἴδιο μέ τό παράδειγμα, πού δόθηκε στήν περίπτωση τῆς μεθόδου τῆς διχοτόμησεως, ὅπου χρειάζονται 10 ἐπαναλήψεις καί τῆς μεθόδου Regula-Falsi ὅπου χρειάστηκαν 5 ἐπαναλήψεις γιά τήν εὕρεση τῆς ρίζας μέ τήν ἴδια προσέγγιση. Σ' αὐτή τήν περίπτωση, ὅπως εἴδαμε, χρειάστηκαν μόνο 3 ἐπαναλήψεις.

6.5.4. Γεωμετρική ἑρμηνεία τῆς μεθόδου τῶν Newton-Raphson

Ἔστω $y = f(x)$ ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως $f(x)$. Ἄν ξ εἶναι ἡ ρίζα τῆς ἐξισώσεως $f(x) = 0$, τότε αὐτή θά εἶναι ἡ τετμημένη τῆς τομῆς P τῆς καμπύλης $y = f(x)$ μέ τόν άξονα τῶν x (Σχῆμα 9). Στό σχῆμα, P_o εἶναι τό σημεῖο τῆς καμπύλης, πού ἔχει τετμημένη τήν άρχική προσέγγιση. Ἄν τώρα M_1 εἶναι τό σημεῖο τομῆς τῆς έφαπτομένης τῆς καμπύλης



Σχῆμα 9

στό P_o μέ τόν άξονα τῶν x, τετμημένης x_1, θά ἔχουμε

$$x_1 = x_o - (M_1 M_o) = x_o - \frac{(M_o P_o)}{\tan \theta_o} = x_o - \frac{f(x_o)}{f'(x_o)} .$$

Δηλαδή, ὅπως βλέπουμε, ἡ τετμημένη τοῦ σημείου M_1 εἶναι ἡ έπανάληψη, πού προκύπτει μετά μία έφαρμογή τῆς μεθόδου τῶν Newton - Raphson. Συνεχίζοντας μέ τόν ἴδιο τρόπο φέρνουμε τώρα τήν έφαπτομένη τῆς καμπύλης στό σημεῖο P_1, τετμημένης x_1, πού συναντᾶ τόν ἄξονα τῶν x στό σημεῖο M_2, τετμημένης x_2. Ἡ τετμημένη x_2 βρίσκεται, ὅπως καί πρίν , ὅτι δίνεται άπό τήν ἔκφραση

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

κ.ο.κ. Ὅπως τουλάχιστο βλέπουμε στό σχῆμα ἡ άκολουθία x_o, x_1, x_2, ... συγκλίνει στή ρίζα ξ.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Ἡ ἐξίσωση $3x^3 - x^2 + 6x - 2 = 0$ ἔχει μιά καί μόνο πραγματική ρίζα ξ στό διάστημα (0,1). Νά ὑπολογιστεῖ τό ἐλάχιστο πλῆθος τῶν επαναλήψεων πού ἀπαιτεῖται μέ τή μέθοδο τῆς διχοτομήσεως, γιά νά βρεθεῖ ἡ ρίζα ξ μέ προσέγγιση δύο δ.ψ. καί στή συνέχεια νά βρεθεῖ αὐτή. (Ἀπ. 7, 0.33)

2. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ ρίζα ξ τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως μέ τή μέθοδο Regula Falsi καί μέ τήν ἴδια προσέγγιση. Νά δοθεῖ ἀκόμη καί τό πλῆθος τῶν ἀπαιτούμενων ἐπαναλήψεων. (Ἀπ. 0.33, 6)

3. Ἔστω ὅτι $I \equiv [\alpha_o, \beta_o]$ καί $f(x) \in C^2(I)$ μέ $f(\alpha_o)f(\beta_o) < 0$, $f''(x) \neq 0 | I$ καί $f(\alpha_o)f''(\alpha_o) > 0$. Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ὁ ἀλγόριθμος

$$x_n = \frac{\alpha_o f(\beta_n) - \beta_n f(\alpha_o)}{f(\beta_n) - f(\alpha_o)} \quad | n = 0,1,2,\ldots$$

ταυτίζεται μέ τή μέθοδο Regula-Falsi γιά τήν εὕρεση τῆς ρίζας $\xi \in (\alpha_o, \beta_o)$ τῆς ἐξισώσεως $f(x) = 0$.

4. Μέ τίς προϋποθέσεις τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως νά δειχτεῖ ὅτι ὁ ἀλγόριθμος πού δίνεται σ' αὐτήν συγκλίνει στή ρίζα ξ. (Ὑπόδειξη: Γιά τό σκοπό αὐτό νά ἀποδειχτεῖ πρῶτα ἐπαγωγικά ὅτι $\alpha_o = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n < \xi < x_n = \beta_{n+1} < x_{n-1} = \beta_n < \ldots < x_o = \beta_1 < \beta_o$)

5. Τί μπορεῖ νά λεχτεῖ γιά τή σύγκλιση τοῦ ἀλγορίθμου $x_{n+1} = \frac{1}{3\alpha}[\alpha\beta + \sin(\alpha x_n) - \cos(\beta x_n)]$ $| n = 0,1,2,\ldots$ μέ x_o δοσμένο καί α,β σταθερές τέτοιες ὥστε $|\beta/\alpha| < 2$. (Ἀπ. Συγκλίνει γιά κάθε x_o)

6. Σέ τί μπορεῖ νά χρησιμεύσει ὁ ἀλγόριθμος

$$x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2 \quad | n = 0,1,2,\ldots \;;$$

(Ἀπ. Στήν εὕρεση τῆς ρίζας $\xi = 1$ τῆς ἐξισώσεως $x^2 - 3x + 2 = 0$)

7. Νά προσδιοριστεῖ ἡ τιμή τῆς σταθερᾶς α, ὥστε ὁ ἀλγόριθμος

$$x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + \alpha \quad |n = 0,1,2,\ldots$$

μέ x_o δοσμένο νά εἶναι τετραγωνικῆς συγκλίσεως. ('Απ. 2)

8. Ἡ ἐξίσωση $f(x) \equiv x^2 - 3x + 2 = 0$ ἔχει σάν ρίζες τούς ἀριθμούς $\xi_1 = 1$ καί $\xi_2 = 2$. νά βρεθεῖ μιά ἀναδιάταξη αὐτῆς τῆς μορφῆς $x = ax^2 + bx + c \equiv g(x)$, ἔτσι ὥστε ὁ ἀλγόριθμος $x_{n+1} = g(x_n)$ $|n = 0,1,2,\ldots$ μέ x_o δοσμένο νά εἶναι τετραγωνικῆς συγκλίσεως καί νά συγκλίνει στή ρίζα $\xi_2 = 2$.
('Απ. $g(x) \equiv -x^2 + 4x - 2$) ? ξ

9. Γιά τήν εὕρεση τῆς ἄγνωστης ἁπλῆς ρίζας ξ τῆς ἐξισώσεως $f(x) = 0$ προτείνεται ὁ ἀλγόριθμος $x_{n+1} = x_n - \alpha(x_n)\, f(x_n)$. Νά προσδιοριστεῖ μιά τουλάχιστον συνάρτηση $\alpha(x)$, ὥστε ὁ ἀλγόριθμος πού δόθηκε νά εἶναι τουλάχιστον τετραγωνικῆς συγκλίσεως. ('Απ. $1/f'(x)$)

10. Δίνεται ὁ ἀλγόριθμος

$$x_{n+1} = x_n^3 + 6x_n^2 + (\beta+1)x_n + \gamma \quad |n = 0,1,2,\ldots$$

μέ x_o δοσμένο γιά τήν εὕρεση τῆς ἁπλῆς ρίζας ξ τῆς ἐξισώσεως $f(x) \equiv x^3 + 6x^2 + \beta x + \gamma = 0$. Νά βρεθοῦν τά β καί γ, ἔτσι ὥστε ὁ ἀλγόριθμος, πού δόθηκε νά εἶναι τρίτης τάξεως συγκλίσεως. ('Απ. 11, 6)

11. Νά χρησιμοποιηθεῖ τό σχῆμα τῶν Newton - Raphson γιά τήν εὕρεση τῆς $\sqrt[3]{7}$, μέ προσέγγιση ἑνός δ.ψ., παίρνοντας σάν ἀρχική προσέγγιση $x_o = 1$.
('Απ. 1.9)

12. Νά δειχτεῖ ὅτι ὁ ἀλγόριθμος τῶν Newton - Raphson

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad |n = 0,1,2,\ldots \text{ καί } x_o \text{ δοσμένο}$$

Αρκεί ν.δ.ο. $|g'(\xi)| < 1$

γιά τήν εὕρεση τῆς ρίζας ξ τῆς ἐξισώσεως $f(x) = 0$, εἶναι γραμμικῆς συγκλίσεως στήν περίπτωση πού ἡ ρίζα ξ εἶναι πολλαπλή μέ βαθμό πολλαπλότητας $k > 1$.

13. Νά δειχτεῖ ὅτι, ἄν ἡ ἐξίσωση $f(x) = 0$ ἔχει σάν ρίζα τήν ξ μέ βαθμό πολλαπλότητας $k \geq 1$, τότε τό σχῆμα

$$x_{n+1} = x_n - k\,\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \Big|\, n = 0,1,2,\ldots \quad \text{μέ } x_o \text{ δοσμένο}$$

γιά τήν εὕρεση τῆς ρίζας ξ εἶναι τουλάχιστον τετραγωνικῆς συγκλίσεως. (Ὑπόδειξη: Εἶναι δυνατόν νά διακριθοῦν δύο περιπτώσεις i) $k = 1$ καί ii) $k > 1$).

14. Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ὁ ἀλγόριθμος

$$x_{n+1} = x_n\,(2 - \alpha x_n) \;\Big|\; n = 0,1,2,\ldots \quad \text{καί } x_o \text{ δοσμένο,}$$

δέν ἀποτελεῖ παρά ἕναν ἀλγόριθμο τῶν Newton - Raphson γιά τήν εὕρεση τοῦ ἀντιστρόφου τοῦ ἀριθμοῦ $\alpha \neq 0$.

15. Γιά τήν εὕρεση τῆς μίας καί μόνον ρίζας ξ, τοῦ τριωνύμου x^3-x-4, πού ἀνήκει στό διάστημα (1.7, 1.8) πρόκειται νά χρησιμοποιηθεῖ ὁ ἀλγόριθμος τῶν Newton - Raphson μέ ἀρχική προσέγγιση $x_o = 1.7$. Νά δειχτεῖ ὅτι ἡ παραπάνω ἐκλογή τῆς ἀρχικῆς προσεγγίσεως x_o παράγει ἀκολουθία πού συγκλίνει στή ρίζα ξ.

7. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

7.1. Γενικά

Ἡ ἀριθμητική ἐπίλυση τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων ἀποτελεῖ ἕνα ἀπό τά πιό βασικά καί πιό σπουδαῖα ἀντικείμενα τῆς Α.Α., γιατί τά περισσότερα προβλήματα τῆς Φυσικῆς, τῆς Μηχανικῆς, τῆς Οἰκονομίας κλπ περιγράφονται μέ ἁπλές ἤ σύνθετες διαφορικές ἐξισώσεις. Γιά τίς περισσότερες ἀπ' αὐτές ἡ Κλασική Ἀνάλυση ἀδυνατεῖ νά δώσει ἀναλυτικές ἐκφράσεις γιά τή λύση τους καί ἡ χρησιμοποίηση μεθόδων τῆς Α.Α. γιά τήν ἐπίλυσή τους εἶναι κάτι περισσότερο ἀπό ἀναγκαία. Ὁ συνηθέστερος τρόπος ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως μιᾶς διαφορικῆς ἐξισώσεως, ὅπως θά δοῦμε στό ἑπόμενο Κεφάλαιο, εἶναι ἡ ἀντικατάστασή της μέ μία ἐξίσωση διαφορῶν, ἡ ὁποία καί ἐπιλύεται στή θέση της. Αὐτός εἶναι καί ὁ λόγος πού μελετοῦμε στό παρόν Κεφάλαιο τίς ἐξισώσεις διαφορῶν.

Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι $y_k \equiv y(k)$ εἶναι μία ἄγνωστη συνάρτηση τῆς ἀκέραιας μεταβλητῆς k καί θεωρήσουμε μία ἐξίσωση, πού περιέχει διαφορές τῶν γενικῶν μορφῶν $\Delta^p y_k$, $\nabla^q y_k$, $\delta^{2r} y_k$ καί $\delta^{2s+1} y_{k+1/2}$, ὅπου p, q, r καί s μή ἀρνητικοί ἀκέραιοι, τότε ἡ ἐξίσωση αὐτή καλεῖται ἐξίσωση διαφορῶν. Π.χ. ἡ ἐξίσωση

$$\Delta^2 y_k + 2\Delta y_k + 3y_k = 0 \tag{7.1}$$

εἶναι μία ἐξίσωση διαφορῶν. Ἐπειδή οἱ γενικές μορφές τῶν διαφορῶν, πού περιέχονται σέ μία ἐξίσωση διαφορῶν, δηλαδή οἱ $\Delta^p y_k$, $\nabla^q y_k$, $\delta^{2r} y_k$ καί $\delta^{2s+1} y_{k+1/2}$, μποροῦν, ὅπως εἶναι γνωστό ἀπό τό Κεφάλαιο 2, νά ἐκφραστοῦν σάν συναρτήσεις τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως καί μόνο καί ἀντίστροφα, εἶναι φανερό ὅτι σάν μιά ἐξίσωση διαφορῶν μπορεῖ νά θεωρηθεῖ καί μία ἐξίσωση, πού συνδέει διάφορες τιμές τῆς ἄγνωστης συναρτήσεως y_k. Π.χ. ἡ ἐξίσωση (7.1) μπορεῖ νά πάρει τή μορφή

$$(y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k) + 2(y_{k+1} - y_k) + 3y_k = 0$$

ἤ τελικά

$$y_{k+2} + 2y_k = 0 \quad .$$

Ἀπό τώρα καί στό ἑξῆς θά θεωροῦμε τίς ἐξισώσεις διαφορῶν μέ τή δεύτερή τους μορφή. Συγκεκριμένα θά καλοῦμε ἐξίσωση διαφορῶν μία ἐξίσωση τῆς μορφῆς

$$f(y_{k+n}, y_{k+n-1}, \ldots, y_k) = 0 \quad , k \text{ ὁποιοσδήποτε ἀκέραιος}$$

ὅπου f εἶναι μία γνωστή συνάρτηση τῶν $n+1$ διαδοχικῶν τιμῶν, $y_{k+i}\ |i = 0(1)n$, τῆς συναρτήσεως y_k. Στό παρόν Κεφάλαιο θά ἀσχοληθοῦμε μέ τίς ἁπλούστερες ἐξισώσεις διαφορῶν. Πιό συγκεκριμένα, θά ἀσχοληθοῦμε μέ τήν ἐπίλυση τῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων διαφορῶν, n τάξης, μέ σταθερούς συντελεστές. Αὐτές εἶναι τῆς γενικῆς μορφῆς

$$y_{k+n} + \alpha_1 y_{k+n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} y_{k+1} + \alpha_n y_k = g(k) \quad |\alpha_n \neq 0 \qquad (7.2)$$

ὅπου $\alpha_i\ |i = 1(1)n$ γνωστοί σταθεροί συντελεστές καί $g(k)$ γνωστή συνάρτηση τοῦ k. Ἄν $g(k) \equiv 0$ τότε ἡ ἐξίσωση διαφορῶν (7.2) θά καλεῖται ὁμογενής, ἀλλιῶς μή ὁμογενής. Ὅταν μιλοῦμε γιά ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως (7.2), ἐννοοῦμε τήν εὕρεση μιᾶς συναρτήσεως $y_k \equiv y(k)$, μέ k ἀκέραιο, πού νά τήν ἐπαληθεύει.

Εἶναι φανερό ὅτι οἱ τιμές τῆς συναρτήσεως y_k γιά ὅλες τίς ἀκέραιες τιμές τοῦ k μποροῦν νά βρεθοῦν μία-μία διαδοχικά ἀπό τήν (7.2) ἅμα δοθοῦν n διαδοχικές τιμές τῆς συναρτήσεως y_k π.χ. οἱ $y_i\ |i = 0(1)n-1$. Κι' αὐτό γιατί, ἡ τιμή y_n μπορεῖ νά προκύψει ἀμέσως ἀπό τήν (7.2) γιά $k = 0$, ἡ y_{n+1} γιά $k = 1$ κ.ο.κ. Ἐπίσης ἡ τιμή y_{-1} μπορεῖ νά προκύψει ἀπό τήν (7.2) γιά $k = -1$, ἡ y_{-2} γιά $k = -2$ κ.ο.κ.

7.2. Ἐπίλυση ὁμογενῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων n τάξης μέ σταθερούς συντελεστές

Ὑποθέτουμε ὅτι δίνεται γιά ἐπίλυση ἡ παρακάτω ὁμογενής γραμμική ἐξίσωση διαφορῶν n τάξης μέ σταθερούς συντελεστές

$$y_{k+n} + \alpha_1 y_{k+n-1} + \dots + \alpha_{n-1} y_{k+1} + \alpha_n y_k = 0 \quad | \alpha_n \neq 0 \,, \qquad (7.3)$$

Μποροῦμε νά παρατηρήσουμε ἀμέσως ὅτι ἄν θέσουμε στήν (7.3) $y_k = r^k$ λαβαίνουμε

$$r^k (r^n + \alpha_1 r^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} r + \alpha_n) = 0 \,.$$

Ἄν ἀποκλείσουμε τήν περίπτωση $r = 0$ πού ὁδηγεῖ στή λύση $y_k = 0$ γιά κάθε ἀκέραιο k σάν λύση τῆς (7.3), τότε συμπεραίνουμε ὅτι ἡ $y_k = r^k$ εἶναι μία λύση τῆς ἐξισώσεως (7.3), τότε καί μόνον τότε, ἄν τό r εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως

$$r^n + \alpha_1 r^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} r + \alpha_n = 0 \,. \qquad (7.4)$$

Ἡ ἐξίσωση (7.4) καλεῖται χαρακτηριστική ἐξίσωση τῆς ἐξισώσεως διαφορῶν (7.3) ἤ ἀκόμη καί τῆς (7.2). Ἔτσι ἄν μέ $r_i \; | i = 1(1)n$ συμβολίσουμε τίς n ρίζες τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως (7.4), τότε οἱ συναρτήσεις $y_k = r_i^k \; | i = 1(1)n$ εἶναι λύσεις τῆς ἐξισώσεως διαφορῶν (7.3).

Παράδειγμα

Νά βρεθοῦν λύσεις τῆς ἐξισώσεως διαφορῶν

$$y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = 0 \;, \quad k \text{ ἀκέραιος} \;. \qquad (7.5)$$

Λύση

Ἡ χαρακτηριστική ἐξίσωση τῆς ἐξισώσεως διαφορῶν πού δόθηκε εἶναι ἡ

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

μέ ρίζες $r_1 = 2$ καί $r_2 = 3$. Ἄρα οἱ συναρτήσεις $y_k = 2^k$ καί $y_k = 3^k$, ὅπου k ἀκέραιος, εἶναι λύσεις τῆς (7.5).

Γιά τήν εὕρεση ὅλων τῶν λύσεων τῆς ἐξισώσεως (7.3) δίνουμε καί ἀποδεικνύουμε στή συνέχεια μία σειρά θεωρημάτων. Γιά τήν καλύτερη κατανόησή τους καί ὅπου θεωρεῖται σκόπιμο δίνουμε καί ἀντίστοιχα παραδείγματα.

Θεώρημα 1

Ἄν $y_k = u_k$ καί $y_k = v_k$ εἶναι δύο λύσεις τῆς ἐξισώσεως (7.3), τότε καί κάθε γραμμικός συνδυασμός τους, $y_k = c_1 u_k + c_2 v_k$, μέ c_1 καί c_2 αὐθαίρετες σταθερές, θά εἶναι λύση τῆς ἴδιας ἐξισώσεως.

Ἀπόδειξη

Γιά νά ἀποδείξουμε ὅτι ἡ $y_k = c_1 u_k + c_2 v_k$ εἶναι λύση τῆς (7.3) πρέπει νά ἀποδείξουμε ὅτι ἡ συνάρτηση $c_1 u_k + c_2 v_k$ τήν ἐπαληθεύει. Ἀντικαθιστώντας στό πρῶτο μέλος τῆς (7.3) βρίσκουμε διαδοχικά

$$(c_1 u_{k+n} + c_2 v_{k+n}) + \alpha_1 (c_1 u_{k+n-1} + c_2 v_{k+n-1}) + \dots +$$

$$+ \alpha_{n-1} (c_1 u_{k+1} + c_2 v_{k+1}) + \alpha_n (c_1 u_k + c_2 v_k) =$$

$$= c_1 (u_{k+n} + \alpha_1 u_{k+n-1} + \dots + \alpha_{n-1} u_{k+1} + \alpha_n u_k) +$$

$$+ c_2 (v_{k+n} + \alpha_1 v_{k+n-1} + \dots + \alpha_{n-1} v_{k+1} + \alpha_n v_k) =$$

$$= c_1 . 0 + c_2 . 0 = 0$$

ἀφοῦ ἀπό τήν ὑπόθεση οἱ u_k καί v_k εἶναι λύσεις τῆς (7.3) καί ἐπομένως τήν ἐπαληθεύουν.

Πόρισμα

Ἄν $y_k = u_k^{(i)} \mid i = 1(1)m$ εἶναι λύσεις τῆς (7.3), τότε καί κάθε γραμμικός συνδυασμός τους

$$y_k = c_1 u_k^{(1)} + c_2 u_k^{(2)} + \dots + c_m u_k^{(m)}$$

ὅπου $c_i \mid i = 1(1)m$ αὐθαίρετες σταθερές, εἶναι λύση τῆς ἴδιας ἐξισώσεως.

'Απόδειξη

'Η απόδειξη είναι ή ίδια μέ τήν απόδειξη τοῦ θεωρήματος.

Θεώρημα 2

"Αν r εἶναι μιά διπλή ρίζα τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως (7.4), τότε ή ἐξίσωση (7.3), ἐκτός ἀπό τή λύση $y_k = r^k$, ἔχει σάν λύση καί τήν $y_k = kr^k$.

'Απόδειξη

'Από τήν ὑπόθεση ἔχουμε ὅτι ή (7.4) ἔχει διπλή ρίζα τήν r. Αὐτό σημαίνει ὅτι ή ρίζα r θά εἶναι ἁπλή ρίζα τῆς παραγώγου τοῦ πρώτου μέλους της. 'Η r, δηλαδή, θά ἐπαληθεύει καί τήν ἐξίσωση

$$nr^{n-1} + \alpha_1(n-1)r^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1} = 0 \cdot \qquad (7.6)$$

Γιά νά ἀποδείξουμε ὅτι ή ἐξίσωση διαφορῶν (7.3), ἐκτός ἀπό τή λύση $y_k = r^k$, ἔχει καί τή λύση $y_k = kr^k$, παίρνουμε τό πρῶτο μέλος αὐτῆς καί ἀντικαθιστοῦμε ὅπου $y_k = kr^k$. "Ετσι λαβαίνουμε διαδοχικά

$$(k+n)r^{k+n} + \alpha_1(k+n-1)r^{k+n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}(k+1)r^{k+1} + \alpha_n kr^k =$$

$$= kr^k(r^n + \alpha_1 r^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}r + \alpha_n) + r^{k+1}[nr^{n-1} + \alpha_1(n-1)r^{n-2} + \ldots$$

$$+ \alpha_{n-1}] = kr^k \times 0 + r^{k+1} \times 0 = 0$$

ἀφοῦ ή ρίζα r ἐπαληθεύει τήν (7.4) καί τήν (7.6). "Αρα ή ἐξίσωση διαφορῶν ἔχει σάν λύση καί τήν $y_k = kr^k$.

Πόρισμα

"Αν r εἶναι μιά ρίζα τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως (7.4) μέ βαθμό πολλαπλότητας m, τότε ή ἐξίσωση (7.3) ἐκτός ἀπό τή λύση $y_k = r^k$ ἔχει σάν λύσεις καί τίς

$$y_k = k^{\ell} r^k \quad | \ell = 1(1)m-1 \, .$$

'Απόδειξη

'Η απόδειξη ακολουθεί τό ίδιο σκεπτικό, όπως καί ή απόδειξη τοῦ θεωρήματος.

Παράδειγμα

Νά βρεθοῦν λύσεις τῆς εξισώσεως διαφορῶν

$$y_{k+2} - 4y_{k+1} + 4y_k = 0 \quad , k \text{ ἀκέραιος} . \tag{7.7}$$

Λύση

'Η χαρακτηριστική εξίσωση σ' αυτή τήν περίπτωση εἶναι ή

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

μέ διπλή ρίζα τήν $r = 2$. Ἄρα $y_k = 2^k$ καί $y_k = k2^k$, ὅπου k ἀκέραιος, εἶναι λύσεις τῆς εξισώσεως διαφορῶν πού δόθηκε. Θά πρέπει νά σημειωθεῖ ὅτι σύμφωνα μέ τό θεώρημα 1 καί ή ἔκφραση $y_k = C_1 2^k + C_2 k2^k = (C_1 + kC_2)2^k$, ὅπου C_1 καί C_2 αυθαίρετες σταθερές εἶναι λύση τῆς (7.7).

Θεώρημα 3

'Η εξίσωση (7.3) ἔχει πάντοτε n τουλάχιστο λύσεις, πού εἶναι μεταξύ τους γραμμικά ανεξάρτητες.

'Απόδειξη

Τό γεγονός ὅτι ή εξίσωση (7.3) ἔχει πάντοτε n τουλάχιστο λύσεις, αποτελεῖ άμεση συνέπεια τοῦ θεωρήματος 2 καί τοῦ Πορίσματός του. Πραγματικά, ἄν $r_i \; | i = 1(1)j$ εἶναι οἱ διάφορες μεταξύ τους, πλήθους j, ρίζες τῆς χαρακτηριστικῆς εξισώσεως (7.4), μέ αντίστοιχους βαθμούς πολλαπλότητας $m_i \; | i = 1(1)j$, ὅπου $\sum_{i=1}^{j} m_i = n$, τότε καί οἱ συναρτήσεις $y_k = k^{\ell} r_i^k \; | i = 1(1)j$ μέ $\ell = 0(1)m_i - 1$, πού εἶναι πλήθους n, εἶναι λύσεις τῆς (7.3). Εἶναι δυνατό νά αποδειχτεῖ, μέ τρόπο, πού στή γενική περίπτωση, εἶναι πέρα από τό σκοπό τοῦ παρόντος βιβλίου, ὅτι οἱ n αυτές λύσεις, πού δόθηκαν παραπάνω, εἶναι γραμμικά ανεξάρτητες. Στό Παράδειγμα 1 πού ακολουθεῖ δίνουμε τήν ἀντίστοιχη ἀπόδειξη στήν περίπτωση, πού ὅλες οἱ n ρίζες τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως εἶναι διάφορες μεταξύ τους.

Παράδειγμα 1

Νά ἀποδειχτεῖ, ὅτι στήν περίπτωση, πού ἡ χαρακτηριστική ἐξίσωση (7.4), τῆς ὁμογενοῦς γραμμικῆς ἐξισώσεως διαφορῶν n τάξης μέ σταθερούς συντελεστές (7.3), ἔχει ὅλες τίς ρίζες της διάφορες μεταξύ τους, τότε οἱ n λύσεις τῆς ἐξισώσεως (7.3) εἶναι γραμμικά ἀνεξάρτητες.

Λύση

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι $r_i \mid i = 1(1)n$ εἶναι οἱ n διάφορες μεταξύ τους ρίζες τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως (7.4). Τότε n λύσεις τῆς (7.3) εἶναι οἱ $r_i^k \mid i = 1(1)n$. Γιά νά εἶναι αὐτές γραμμικά ἀνεξάρτητες θά πρέπει ἀπό τή σχέση

$$C_1 r_1^k + C_2 r_2^k + \ldots + C_n r_n^k = 0$$

μέ $C_i \mid i = 1(1)n$ σταθερές νά προκύπτει $C_i = 0 \mid i = 1(1)n$. Ἡ παραπάνω σχέση πρέπει νά ἰσχύει γιά κάθε τιμή τοῦ k. Θεωροῦμε λοιπόν τίς ἀντίστοιχες ἐξισώσεις γιά τίς n διαδοχικές τιμές τοῦ $k = 0(1)n-1$. Θά ἔχουμε

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + \ldots + C_n &= 0 \\ C_1 r_1 + C_2 r_2 + \ldots + C_n r_n &= 0 \\ &\vdots \\ C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1} + \ldots + C_n r_n^{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

Τό παραπάνω σύστημα μέ ἀγνώστους τά $C_i \mid i = 1(1)n$ εἶναι ἕνα γραμμικό καί ὁμογενές σύστημα n ἐξισώσεων μέ n ἀγνώστους. Ἡ ὁρίζουσα D τοῦ πίνακα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων εἶναι τοῦ τύπου τοῦ Vandermonde. Συγκεκριμένα

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ r_1 & r_2 & \dots & r_n\\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \dots & r_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{\substack{i,j=1\\ i>j}}^{n}(r_i-r_j)\neq 0 .$$

Ἄρα τό σύστημα ἔχει μιά καί μόνο λύση τήν $c_i=0 \;|i=1(1)n$.

Παράδειγμα 2

Νά βρεθοῦν τρεῖς γραμμικά ἀνεξάρτητες λύσεις τῆς ἐξισώσεως διαφορῶν

$$y_{k+3}+4y_{k+2}-3y_{k+1}-18y_k=0, \quad k \text{ ἀκέραιος} .$$

Λύση

Ἡ χαρακτηριστική ἐξίσωση εἶναι

$$r^3+4r^2-3r-18=0$$

καί ἔχει ρίζες τίς $r_1=2$, $r_2=r_3=-3$ (σημειώνουμε ὅτι οἱ ρίζες αὐτές βρίσκονται μέ τό γνωστό τρόπο τῶν διαιρετῶν τοῦ σταθεροῦ ὅρου). Ἐπομένως τρεῖς γραμμικά ἀνεξάρτητες λύσεις τῆς ἐξισώσεως διαφορῶν εἶναι $y_k=2^k$, $y_k=(-3)^k$ καί $y_k=k(-3)^k$.

Θεώρημα 4

Ἄν οἱ τιμές δύο λύσεων, $y_k=u_k$ καί $y_k=v_k$, τῆς ἐξισώσεως (7.3) συμπίπτουν γιά n διαδοχικές τιμές τοῦ k, τότε οἱ δύο λύσεις συμπίπτουν γιά κάθε τιμή (ἀκέραια) τοῦ k.

Ἀπόδειξη

Ἔστω ὅτι $u_k=v_k \;|k=m(1)m+n-1$. Ἀφοῦ οἱ $y_k=u_k$ καί $y_k=v_k$ εἶναι λύσεις τῆς (7.3), τότε σύμφωνα μέ τό Θεώρημα 1 καί ἡ $w_k=u_k-v_k$ εἶναι λύση τῆς (7.3). Ἀπό τήν ὑπόθεση ἔχουμε ὅτι γιά τή λύση αὐτή ἰσχύει $w_k = 0 \mid k = m(1)m+n-1$. Στήν περίπτωση ὅμως αὐτή, ἀντικαθιστώντας στήν (7.3) γιά $k = m$ καί $k = m-1$ παίρνουμε ἀντίστοιχα

$$w_{m+n} + \alpha_1 w_{m+n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} w_{m+1} + \alpha_n w_m = 0$$

καί

$$w_{m+n-1} + \alpha_1 w_{m+n-2} + \ldots + \alpha_{n-1} w_m + \alpha_n w_{m-1} = 0 .$$

Ἀπό τήν πρώτη ἀπό τίς παραπάνω ἰσότητες βρίσκουμε ὅτι $w_{m+n} = 0$ καί ἀπό τή δεύτερη, ἐπειδή $\alpha_n \neq 0$, $w_{m-1} = 0$. Μέ τόν ἴδιο τρόπο ἀντικαθιστώντας στήν (7.3) γιά $k = m+1$ καί $k = m-2$ μποροῦμε νά βροῦμε $w_{m+n+1} = 0$ καί $w_{m-2} = 0$. Τέλος ἐπαγωγικά μποροῦμε νά δείξουμε ὅτι $w_k = 0$ γιά ὅλα τά $k > m+n+1$ καί $k < m-2$. Ἔτσι ἔχουμε $w_k = 0$ γιά κάθε ἀκέραια τιμή τοῦ k, ἄρα $u_k \equiv v_k$. Δηλαδή οἱ δύο λύσεις συμπίπτουν γιά κάθε τιμή τοῦ k.

Θεώρημα 5

Ὁποιαδήποτε λύση τῆς ἐξισώσεως διαφορῶν (7.3) μπορεῖ νά ἐκφραστεῖ μονοσήμαντα σάν γραμμικός συνδυασμός n λύσεών της (τίς ὁποῖες γιά χάρη εὐκολίας καλοῦμε $u_k^{(i)} \mid i = 1(1)n$) ἀρκεῖ ἡ ὁρίζουσα

$$\begin{vmatrix} u_k^{(1)} & u_k^{(2)} & \cdots & u_k^{(n)} \\ u_{k+1}^{(1)} & u_{k+1}^{(2)} & \cdots & u_{k+1}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{k+n-1}^{(1)} & u_{k+n-1}^{(2)} & \cdots & u_{k+n-1}^{(n)} \end{vmatrix} \qquad (7.8)$$

πού ἀντιστοιχεῖ σέ μιά ὁποιαδήποτε τιμή τοῦ k, νά εἶναι διάφορη ἀπό τό μηδέν.

Ἀπόδειξη

Ἔστω ὅτι y_k εἶναι μιά ὁποιαδήποτε λύση τῆς ἐξισώσεως (7.3), ἡ ὁποία γιά τίς n συγκεκριμένες διαδοχικές τιμές τοῦ $k = k(1)k+n-1$ παίρνει άντίστοιχα τίς τιμές $y_k \mid k=k(1)k+n-1$. Άπό τήν ύπόθεση ότι οί $u_k^{(i)} \mid i=1(1)n$ είναι λύσεις τῆς (7.3), έχουμε σύμφωνα μέ τό Πόρισμα τοῦ Θεωρήματος 1 ότι καί ή συνάρτηση

$$c_1u_k^{(1)} + c_2u_k^{(2)} + \ldots + c_nu_k^{(n)}$$

είναι λύση τῆς (7.3), όπου $c_i \mid i=1(1)n$ αύθαίρετες σταθερές. Γιά νά μπορεῖ ή όποιαδήποτε λύση y_k νά έκφράζεται σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν n λύσεων πού δόθηκαν, θά πρέπει νά μποροῦν νά προσδιοριστοῦν συντελεστές $c_i \mid i=1(1)n$ τέτοιοι ώστε ή σχέση

$$y_k = c_1u_k^{(1)} + c_2u_k^{(2)} + \ldots + c_nu_k^{(n)} \tag{7.9}$$

νά ίσχύει γιά κάθε τιμή τοῦ k. Αύτό όμως σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα 4 είναι δυνατό άρκεῖ ή ίσότητα (7.9) νά ίσχύει γιά n συγκεκριμένες διαδοχικές τιμές τοῦ k. Άρκεῖ δηλαδή τό σύστημα

$$\begin{aligned}
c_1u_k^{(1)} + c_2u_k^{(2)} + \ldots + c_nu_k^{(n)} &= y_k \\
c_1u_{k+1}^{(1)} + c_2u_{k+1}^{(2)} + \ldots + c_nu_{k+1}^{(n)} &= y_{k+1} \\
&\vdots \\
c_1u_{k+n-1}^{(1)} + c_2u_{k+n-1}^{(2)} + \ldots + c_nu_{k+n-1}^{(n)} &= y_{k+n-1}
\end{aligned} \tag{7.10}$$

μέ άγνώστους τούς συντελεστές $c_i \mid i=1(1)n$ νά έχει λύση. Αύτό όμως ίσχύει γιατί έχουμε ύποθέσει ότι ή όρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν άγνώστων τοῦ συστήματος (7.10), πού είναι ή όρίζουσα (7.8), είναι διάφορη άπό τό μηδέν. Άρα ή όποιαδήποτε λύση y_k μπορεῖ νά έκφραστεῖ σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν n λύσεων πού δόθηκαν, μέ τή μορφή (7.9).

Θεώρημα 6

Άν $u_k^{(i)} \mid i=1(1)n$ είναι οί n γραμμικά άνεξάρτητες λύσεις τῆς (7.3), πού όρίστηκαν στό θεώρημα 3, τότε ή $y_k = c_1u_k^{(1)} + c_2u_k^{(2)} + \ldots + u_k^{(n)}$, όπου c_i $|i=1(1)n$ αυθαίρετες σταθερές, αποτελεί τή γενική της λύση.

'Απόδειξη

Σύμφωνα μέ τήν υπόθεση, οί λύσεις $u_k^{(i)}$ $|i=1(1)n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Αυτό όμως σημαίνει ότι από τή σχέση

$$c_1u_k^{(1)}+c_2u_k^{(2)}+\ldots+c_nu_k^{(n)}=0 \tag{7.11}$$

όπου c_i $|i=1(1)n$ σταθερές, συμπεραίνεται ότι

$$c_1=c_2=\ldots=c_n=0 \tag{7.12}$$

γιά κάθε k. Άν τώρα πάρουμε n έξισώσεις από τίς (7.11), πού αντιστοιχοῦν στίς n συγκεκριμένες διαδοχικές τιμές τοῦ $k=k(1)k+n-1$ θά έχουμε

$$\begin{array}{l}
c_1u_k^{(1)}+c_2u_k^{(2)}+\ldots+c_nu_k^{(n)}=0\\
c_1u_{k+1}^{(1)}+c_2u_{k+1}^{(2)}+\ldots+c_nu_{k+1}^{(n)}=0\\
\vdots\\
c_1u_{k+n-1}^{(1)}+c_2u_{k+n-1}^{(2)}+\ldots+c_nu_{k+n-1}^{(n)}=0
\end{array}$$

Τό παραπάνω όμως σύστημα, μέ άγνώστους τά c_i $|i=1(1)n$, είναι ένα γραμμικό καί όμογενές, πού, λόγω τῆς γραμμικῆς ανεξαρτησίας, έχει μία καί μόνο λύση τήν (7.12). Αυτό όμως σημαίνει πώς ή ορίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν άγνώστων, πού συμπίπτει μέ τήν (7.8), είναι διάφορη από τό μηδέν. Έτσι ίκανοποιεῖται ή υπόθεση τοῦ προηγούμενου Θεωρήματος 5 καί έπομένως όποιαδήποτε λύση τῆς (7.3) μπορεῖ νά έκφραστεῖ σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν n γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων αυτῆς τοῦ Θεωρήματος 3.

Παράδειγμα 1

Νά έπιλυθοῦν οί παρακάτω έξισώσεις διαφορῶν δεύτερης τάξης

i) $y_{k+2}+3y_{k+1}-10y_k=0$

ii) $y_{k+2} - 6y_{k+1} + 9y_k = 0$

iii) $y_{k+2} + y_k = 0$.

Λύση

i) Ἡ χαρακτηριστική ἐξίσωση εἶναι ἡ

$$r^2 + 3r - 10 = 0$$

μέ ρίζες $r_1=2$ καί $r_2=-5$. Ἐπομένως ἡ γενική λύση τῆς ἐξισώσεως διαφορῶν εἶναι ἡ

$$y_k = c_1 2^k + c_2(-5)^k$$

ὅπου c_1 καί c_2 αὐθαίρετες σταθερές.

ii) Ἡ χαρακτηριστική ἐξίσωση εἶναι ἡ

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

μέ διπλή ρίζα $r_1 = r_2 = 3$. Ἐπομένως ἡ γενική λύση εἶναι ἡ

$$y_k = c_1 3^k + c_2 k3^k = (c_1 + c_2 k)3^k$$

ὅπου c_1 καί c_2 αὐθαίρετες σταθερές.

iii) Ἡ χαρακτηριστική ἐξίσωση εἶναι ἡ

$$r^2 + 1 = 0$$

μέ ρίζες $r_1=i$ καί $r_2=-i$. Ἐπομένως ἡ γενική λύση εἶναι ἡ

$$y_k = c_1 i^k + c_2(-i)^k$$

ὅπου c_1 καί c_2 αὐθαίρετες σταθερές. Ἡ γενική λύση πού βρέθηκε εἶναι δυνατό νά γραφτεῖ καί μέ διαφορετικό τρόπο, ἄν παρατηρήσουμε ὅτι

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \quad \text{καί} \quad -i = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} .$$

Ἑπομένως ἀντικαθιστώντας στήν ἔκφραση τῆς γενικῆς λύσεως μποροῦμε νά πάρουμε διαδοχικά

$$y_k = C_1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^k + C_2\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)^k =$$

$$= (C_1+C_2)\cos\frac{k\pi}{2} + i(C_1-C_2)\sin\frac{k\pi}{2} = c_1\cos\frac{k\pi}{2} + c_2\sin\frac{k\pi}{2}$$

ὅπου c_1 καί c_2 αὐθαίρετες σταθερές.

Παράδειγμα 2

Ἡ ἀκολουθία τοῦ Fibonacci

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

ὁρίζεται ἀπό τούς δύο πρώτους ὅρους της, $\alpha_0=0$, $\alpha_1=1$ καί ἀπό τή σχέση $\alpha_{n+2}=\alpha_{n+1}+\alpha_n \mid n=0,1,2,\ldots$. Νά βρεθεῖ ἡ ἔκφραση τοῦ γενικοῦ ὅρου αὐτῆς.

Λύση

Ἡ σχέση $\alpha_{n+2}=\alpha_{n+1}+\alpha_n$ πού μπορεῖ νά γραφτεῖ μέ τή μορφή

$$\alpha_{n+2}-\alpha_{n+1}-\alpha_n = 0 \qquad \mid n = 0,1,2,\ldots \tag{7.13}$$

εἶναι μιά γραμμική ἐξίσωση διαφορῶν μέ σταθερούς συντελεστές δεύτερης τάξης καί ὁμογενής. Γιά νά βροῦμε τή γενική της λύση σχηματίζουμε τή χαρακτηριστική της ἐξίσωση πού εἶναι ἡ

$$r^2-r-1 = 0$$

μέ ρίζες $r_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ καί $r_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Ἑπομένως ἡ γενική λύση τῆς (7.13) δίνεται ἀπό τήν ἔκφραση

$$\alpha_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad \mid n=0,1,2,\ldots \tag{7.14}$$

ὅπου C_1 καί C_2 αὐθαίρετες σταθερές. Ἐπειδή ὅμως ἔχουμε ἀπό τήν ὑπόθεση ὅτι $\alpha_0=0$ καί $\alpha_1=1$, συμπεραίνουμε ὅτι μποροῦμε νά προσδιορίσουμε τίς σταθερές C_1 καί C_2 στήν ἔκφραση (7.14) ἀρκεῖ νά ἀντικαταστήσουμε, γιά $n=0$ καί $n=1$, τίς ἀντίστοιχες τιμές καί νά ἐπιλύσουμε τό σύστημα πού θά προκύψει. Ἔτσι παίρνουμε τό σύστημα

$$C_1+C_2 = 0$$

$$C_1-C_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

ἡ ἐπίλυση τοῦ ὁποίου δίνει $C_1=-C_2=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Ἑπομένως ὁ γενικός ὅρος τῆς ἀκολουθίας τοῦ Fibonacci δίνεται ἀπό τήν ἔκφραση

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \qquad |n=0,1,2,\ldots$$

7.3. Ἐπίλυση μή ὁμογενῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων n τάξης μέ σταθερούς συντελεστές

Ἡ γενική μορφή μιᾶς μή ὁμογενοῦς γραμμικῆς ἐξισώσεως n τάξης μέ σταθερούς συντελεστές εἶναι ἡ (7.2) ὅπου $g(k)\neq 0$. Γιά τή γενική της λύση ἰσχύει τό παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα

Ἄν Y_k εἶναι μιά μερική λύση τῆς ἐξισώσεως (7.2) καί u_k ἡ γενική λύση τῆς ἀντίστοιχης ὁμογενοῦς, τότε ἡ γενική λύση τῆς (7.2) εἶναι ἡ

$$y_k=u_k+Y_k\,.$$

Ἀπόδειξη

Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι y_k εἶναι ἡ γενική λύση τῆς μή ὁμογενοῦς ἐξισώσεως (7.2) καί Y_k εἶναι μιά μερική λύση τῆς ἴδιας ἐξισώσεως θά ἔχουμε

$$y_{k+n} + \alpha_1 y_{k+n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} y_{k+1} + \alpha_n y_k = g(k)$$

$$Y_{k+n} + \alpha_1 Y_{k+n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} Y_{k+1} + \alpha_n Y_k = g(k)$$

Ἀφαιρώντας κατά μέλη τίς παραπάνω ἐξισώσεις παίρνουμε

$$u_{k+n} + \alpha_1 u_{k+n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} u_{k+1} + \alpha_n u_k = 0 \qquad (7.15)$$

ὅπου τέθηκε $u_\ell = y_\ell - Y_\ell \quad | \ell = k(1)k+n$. Ἄρα ἡ u_k εἶναι ἡ γενική λύση τῆς ὁμογενοῦς ἐξισώσεως διαφορῶν (7.15), πού εἶναι ἀντίστοιχη πρός τή μή ὁμογενή (7.2). Συνεπῶς ἡ γενική λύση y_k τῆς (7.2) εἶναι ἡ

$$y_k = u_k + Y_k$$

ὅπου Y_k μία μερική λύση τῆς (7.2) καί u_k ἡ γενική λύση τῆς ἀντίστοιχης ὁμογενοῦς.

Παρατήρηση: Ἡ δυσκολία στήν εὕρεση τῆς γενικῆς λύσης y_k μιᾶς μή ὁμογενοῦς γραμμικῆς ἐξισώσεως διαφορῶν τῆς μορφῆς (7.2) εἶναι ἡ εὕρεση μιᾶς μερικῆς λύσης Y_k αὐτῆς. Παρακάτω δίνουμε σέ πίνακα γιά διάφορες στοιχειώδεις ἐκφράσεις τῆς συναρτήσεως $g(k)$ τίς ἀντίστοιχες ἐκφράσεις τῆς μερικῆς λύσης Y_k. Στόν πίνακα αὐτόν τά $A, B, C, C_i | i=0(1)m$ καί x εἶναι σταθερές, δηλαδή ἀνεξάρτητες τοῦ k.

$g(k)$	Y_k ⊛
Ax^k	Cx^k
Ak^m	$C_0 + C_1 k + \ldots + C_m k^m$
$Ax^k k^m$	$x^k(C_0 + C_1 k + \ldots + C_m k^m)$
$B\cos Ak$ ἤ $B\sin Ak$	$C_1 \cos Ak + C_2 \sin Ak$
$Bx^k \cos Ak$ ἤ $Bx^k \sin Ak$	$x^k(C_1 \cos Ak + C_2 \sin Ak)$

⊛ Οἱ ἐκφράσεις πού δίνονται γιά Y_k θά πρέπει νά θεωροῦνται πολλαπλασιασμένες ἐπί τόν παράγοντα k^ℓ, ὅπου ὁ ℓ θά παίρνει στή σειρά τίς τιμές $\ell = 0,1,2,\ldots$ μέχρι νά βρεθεῖ ἡ μονοσήμαντα ὁρισμένη μερική λύση, πού ἱκανοποιεῖ τήν μή ὁμογενή ἐξίσωση διαφορῶν πού δόθηκε.

Παράδειγμα 1

Νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τῆς ἐξισώσεως

$$y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = 2 \; . \tag{7.16}$$

Λύση

Τό δεύτερο μέλος τῆς (7.16) εἶναι $g(k)\equiv 2$ καί ἐπομένως τῆς γενικῆς μορφῆς Ax^k μέ $A=2$ καί $x=1$ ἤ τῆς Ak^m (γιά $k\neq 0$) μέ $A=2$ καί $m=0$. Ὁπωσδήποτε καί ἄν τό θεωρήσουμε αὐτό, ἡ μορφή τῆς μερικῆς λύσης Y_k θά εἶναι $Y_k=C$ (σταθερά) ἤ γενικότερα $Y_k = Ck^{\ell}$ $|\ell = 0,1,2,\ldots$. Γιά $\ell=0$ ἔχουμε $Y_k = C$, ὁπότε ἀντικαθιστώντας στήν (7.16) παίρνουμε

$$C - 5C + 6C = 2 \; .$$

καί $C=1$. Ἄρα $Y_k=1$. Ἡ χαρακτηριστική ἐξίσωση τῆς (7.16) εἶναι ἡ

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

μέ ρίζες $r_1=2$ καί $r_2=3$. Συνεπῶς ἡ γενική λύση τῆς ὁμογενοῦς τῆς ἀντίστοιχης τῆς (7.16) εἶναι ἡ

$$u_k = C_1 2^k + C_2 3^k$$

ὅπου C_1 καί C_2 αὐθαίρετες σταθερές. Ἐπομένως ἡ γενική λύση τῆς (7.16) εἶναι ἡ

$$y_k = u_k + Y_k = C_1 2^k + C_2 3^k + 1$$

μέ C_1, C_2 αὐθαίρετες σταθερές.

Παράδειγμα 2

Νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τῆς ἐξισώσεως

$$y_{k+2} + 5y_{k+1} - 6y_k = 0 \; . \tag{7.17}$$

Λύση

Τό δεύτερο μέλος τῆς (7.17) εἶναι τό ἴδιο ὅπως καί στό προηγούμενο παράδειγμα. Ἑπομένως ἡ μερική λύση εἶναι τῆς μορφῆς $Y_k = C$ (σταθερά) ἤ γενικότερα $Y_k = Ck^{\ell}$ $|\ell = 0,1,2,\ldots$. Γιά $\ell=0$ ἔχουμε $Y_k = C$ καί ἀντικαθιστώντας στήν (7.17) βρίσκουμε

$$C + 5C - 6C = 2$$

ἤ 0=2 πράγμα τό ὁποῖο εἶναι ἄτοπο. Συνεχίζουμε γιά $\ell=1$ καί δοκιμάζουμε τή μερική λύση $Y_k = Ck$. Ἀντικαθιστώντας ξανά στήν (7.17) βρίσκουμε

$$C(k+2) + 5C(k+1) - 6Ck = 2$$

ἤ $7C = 2$ καί $C = 2/7$. Ἄρα $Y_k = \frac{2}{7}k$. Ἡ χαρακτηριστική ἐξίσωση σ' αὐτή τήν περίπτωση εἶναι ἡ

$$r^2 + 5r - 6 = 0$$

μέ ρίζες $r_1=1$ καί $r_2=-6$. Ἑπομένως ἡ γενική λύση τῆς ἀντίστοιχης ὁμογενοῦς εἶναι ἡ

$$u_k = C_1 1^k + C_2(-6)^k = C_1 + C_2(-6)^k$$

καί ἄρα ἡ γενική λύση τῆς (7.17) εἶναι ἡ

$$y_k = u_k + Y_k = C_1 + C_2(-6)^k + \frac{2}{7}k$$

ὅπου C_1 καί C_2 αὐθαίρετες σταθερές.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι, ἄν ἡ χαρακτηριστική ἐξίσωση τῆς ἐξισώσεως διαφορῶν

$$y_{k+n} + \alpha_1 y_{k+n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} y_{k+1} + \alpha_n y_k = 0 \quad |\alpha_n \neq 0$$

ἔχει σάν ρίζα τήν r μέ βαθμό πολλαπλότητας n, τότε οἱ n λύσεις τῆς ἐξισώσεως, πού δόθηκε, $k^{\ell}r^{k}\ |\ \ell = 0(1)n-1$ εἶναι γραμμικά ἀνεξάρτητες.

2. Νά βρεθεῖ ἡ μορφή τῆς γενικῆς ἐκφράσεως τοῦ ὅρου n τάξης μιᾶς ἀκολουθίας (μέ σχηματισμό καί ἐπίλυση ἐξισώσεως διαφορῶν), στήν ὁποία τό τριπλάσιο κάθε ὅρου της (ἀπό τόν τέταρτο καί μετά) εἶναι ἴσον μέ τό ἄθροισμα τῶν τριῶν προηγουμένων του. ('Απ.

$$c_1 + c_2\left(\frac{-1+i\sqrt{2}}{3}\right)^n + c_3\left(\frac{-1-i\sqrt{2}}{3}\right)^n$$ μέ c_1, c_2, c_3 αὐθαίρετες σταθερές)

3. Γνωρίζοντας ὅτι ὁ γενικός ὅρος τῆς ἀριθμητικῆς προόδου ὁρίζεται ἀπό τό ἄθροισμα τοῦ προηγουμένου του καί ἑνός σταθεροῦ ἀριθμοῦ ω (λόγου), νά βρεθεῖ χρησιμοποιώντας μιά ἐξίσωση διαφορῶν, ὁ γενικός ὅρος τάξης n, σάν συνάρτηση τοῦ n, τοῦ ω καί τοῦ πρώτου ὅρου της α. ('Απ. $\alpha+(n-1)\omega$)

4. Νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τῆς ἐξισώσεως διαφορῶν

$$3y_{k+2} + 4y_{k+1} - 7y_k = 5, \quad k \text{ ἀκέραιος}.$$

('Απ. $c_1 + c_2(-7/3)^k + k/2$ μέ c_1, c_2 αὐθαίρετες σταθερές)

5. 'Ο πίνακας διαφορῶν τῆς συναρτήσεως $f(k)$, γιά τίς τιμές $k = 0,1,2,\ldots$ εἶναι τέτοιος ὥστε οἱ δεύτερες διαφορές της νά εἶναι σταθερές καί ἴσες μέ 2. Νά βρεθεῖ ἡ γενική μορφή τῆς συναρτήσεως $f(k)$. ('Απ. $c_1+c_2k+k^2$ μέ c_1, c_2 αὐθαίρετες σταθερές)

6. Ἄν $y_o = 0$ καί $y_1 = -1$, νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τῆς ἐξισώσεως διαφορῶν $y_{k+2} + 2y_{k+1} + y_k = 2$. ('Απ. $(-\frac{1}{2} + 2k)(-1)^k + \frac{1}{2}$)

7. Νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τῆς ἐξισώσεως διαφορῶν

$$y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k = (-1)^k, \quad k \text{ ἀκέραιος}.$$

('Απ. $c_1 + c_2k + \frac{1}{4}(-1)^k$ μέ c_1, c_2 αὐθαίρετες σταθερές)

8. Νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τῆς ἐξισώσεως διαφορῶν

$$y_{k+3} - 2y_{k+2} + 4y_{k+1} - 8y_k = 3k, \quad k \text{ ἀκέραιος} .$$

('Απ. $c_1 2^k + c_2(2i)^k + c_3(-2i)^k - \frac{9}{25} - \frac{3}{5}k$ μέ c_1, c_2, c_3 αὐθαίρετες σταθερές)

9. Νά βρεθεῖ ἡ λύση τῆς ἐξισώσεως διαφορῶν

$$y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i = 1 \qquad |i = 0(1)n+1$$

ἄν εἶναι γνωστό ὅτι $y_o = y_{n+1} = 0$. ('Απ. $-\frac{1}{2}(n+1)i + \frac{1}{2}i^2$)

8. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

8.1. Γενικά

Όπως τονίσαμε καί στό προηγούμενο Κεφάλαιο, τά περισσότερα προβλήματα τῶν Ἐφηρμοσμένων Θετικῶν Ἐπιστημῶν διατυπώνονται μαθηματικά μέ τή μορφή διαφορικῶν ἐξισώσεων. Εἶναι ἐπόμενο λοιπόν ἕνας μεγάλος κλάδος τῶν Μαθηματικῶν νά ἀσχολεῖται μέ τήν ἀνάπτυξη τῆς θεωρίας πού ἀφορᾶ τίς διαφορικές ἐξισώσεις καί ἀναφέρεται κυρίως στήν ὕπαρξη καί στήν εὕρεση τῶν λύσεων τους. Δυστυχῶς ὅμως ἡ θεωρία τῶν Διαφορικῶν Ἐξισώσεων, ἄν καί ἔχει προχωρήσει ἀρκετά, κρίνεται τελείως ἀνεπαρκής στήν πράξη. Αὐτό φαίνεται καθαρά ἀπό ὅσα θά ποῦμε στή συνέχεια καί πού ἀναφέρονται σέ μιά ἀπό τίς ἁπλούστερες μορφές διαφορικῶν ἐξισώσεων, πού συναντοῦμε στή θεωρία καί στήν πράξη. Συγκεκριμένα ἀναφερόμαστε στή συνήθη διαφορική ἐξίσωση πρώτης τάξης τῆς μορφῆς

$$y' = f(x,y) \tag{8.1}$$

ὅπου $y = y(x)$ μιά ἄγνωστη συνάρτηση τοῦ x, πού ἱκανοποιεῖ τήν ἀρχική συνθήκη

$$y(x_o) = y_o \tag{8.2}$$

μέ x_o καί y_o δεδομένα. Ἀπό τή θεωρία τῶν Διαφορικῶν Ἐξισώσεων, εἶναι γνωστό, ὅτι γιά μιά περιορισμένη κλάση συναρτήσεων $f(x,y)$ τό πρόβλημα (8.1) - (8.2) ἔχει μιά καί μόνο λύση. Ἀκόμη ὅμως καί στήν περίπτωση πού ὑπάρχει μία καί μόνο λύση, ὅπως ξέρουμε ἀπό τή θεωρία, εἶναι δυνατό, πράγμα πού συνήθως συμβαίνει στήν πράξη, νά μήν ὑπάρχει ἔκφραση πού νά δίνει τή λύση αὐτή ἀναλυτικά. Εἶναι φανερό τότε ὅτι μόνο οἱ μέθοδοι τῆς Α.Α. μποροῦν νά βοηθήσουν ἀποφασιστικά γιά τήν ἐπίλυση μιᾶς τέτοιας ἐξισώσεως. Εἶναι ἐπίσης δυνατό ὅμως νά ὑπάρχει ἀναλυτική ἔκφραση πού νά δίνει τή λύση, ἀλλά αὐτή νά εἶναι τόσο πολύπλοκη, ὥστε νά εἶναι πρακτικά άσύμφορη ή χρησιμοποίησή της γιά τήν εὕρεση τιμῶν τῆς συναρτήσεως y γιά μιά ή περισσότερες τιμές τῆς άνεξάρτητης μεταβλητῆς x. Π.χ. ή λύση τῆς διαφορικῆς έξισώσεως

$$y' = \frac{2y}{1-x^4} + x \qquad \text{μέ} \qquad y(o) = 1$$

δίνεται άπό τήν ἕκφραση

$$y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2} e^{\tan^{-1}x}\left[1 + \int_o^x t\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{1/2} e^{-\tan^{-1}t}\,dt\right]. \qquad (8.3)$$

Μία ἕκφραση ὅπως ή παραπάνω εἶναι πρακτικά ἄχρηστη γιά τήν εὕρεση τῆς τιμῆς y γιά μιά, ἕστω, τιμή x. Αὐτό ὅμως γιατί άρχικά εἶναι άμφίβολο ἄν τό όλοκλήρωμα, πού ὑπάρχει στήν άναλυτική ἕκφραση τῆς λύσης, μπορεῖ νά έκφραστεῖ μ' ἕνα πεπερασμένο πλῆθος στοιχειωδῶν συναρτήσεων. Σέ μιά τέτοια περίπτωση θά εἵμαστε άναγκασμένοι νά χρησιμοποιήσουμε μεθόδους τῆς Α.Α., συγκεκριμένα μεθόδους άριθμητικῆς όλοκληρώσεως γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ όλοκληρώματος. Ἐκτός ὅμως άπό τό σφάλμα, πού θά παρουσιαστεῖ κατά τήν άριθμητική όλοκλήρωση, θά ὑπάρχουν όπωσδήποτε καί σφάλματα πού θά παρουσιάζονται κατά τήν εὕρεση τῶν διαφόρων τιμῶν τῆς συναρτήσεως $t\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{1/2} e^{-\tan^{-1}t}$ γιά τίς διάφορες τιμές τοῦ t, πού θά άπαιτεῖ ό τύπος άριθμητικῆς όλοκληρώσεως. Ἔτσι παρά τό γεγονός ὅτι ὑπάρχει ή άναλυτική ἕκφραση (8.3) γιά τή λύση τῆς διαφορικῆς έξισώσεως, τά σφάλματα πού παρουσιάζονται κατά τόν ὑπολογισμό μιᾶς τιμῆς y εἶναι τόσα πολλά ὥστε ἴσως νά ἦταν προτιμότερο νά άναζητούσαμε ἄλλες μεθόδους γιά τήν εὕρεση τῆς λύσης y γιά κάποιο x. Ἀκόμη,καί ἄν ὑποθέσουμε ὅτι τό όλοκλήρωμα στήν (8.3) μπορεῖ νά έκφραστεῖ μ' ἕνα πεπερασμένο πλῆθος στοιχειωδῶν συναρτήσεων εἶναι άμφίβολο ἄν άξίζει τόν κόπο καί τόν χρόνο γιά νά βρεθεῖ αὐτή. Γιατί, καί ἄν άκόμη βρεθεῖ, ὑπάρχει περίπτωση νά μήν εἶναι καθόλου άπλή καί ἔτσι τό πλῆθος καί τό εἶδος τῶν σφαλμάτων κατά τόν ὑπολογισμό τοῦ δεύτερου μέλους τῆς (8.3) νά εἶναι τέτοιο ὥστε θά ἦταν περισσότερο συμφέρουσα ή εὕρεση τῆς τιμῆς y μέ ἄλλες μεθόδους. Τέλος θεωροῦμε καί τήν περίπτωση, όπου τά πάντα είναι τόσο εύνοϊκά ώστε καί τό όλοκλήρωμα νά βρίσκεται σάν συνάρτηση ένός πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών συναρτήσεων καί ή συνάρτηση, αύτή είναι άπλή. 'Ακόμη όμως καί σέ μιά τέτοια άρκετά, εύνοϊκή περίπτωση θά έχουμε νά ύπολογίσουμε έκτός άπό τ' άλλα καί τήν τιμή τῆς συναρτήσεως $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2}$ γιά κάποιο x καθώς έπίσης καί τήν $\tan^{-1}x$ καί τήν $e^{\tan^{-1}x}$. Οί τιμές όμως αύτές, όπως είναι φανερό, ύπολογίζονται μόνο προσεγγιστικά καί μάλιστα μέ μεθόδους τῆς Α.Α. 'Η όλη προηγούμενη άνάπτυξη στή συγκεκριμένη πείπτωση τῆς λύσης (8.3) δείχνει άκριβῶς ότι άκόμη καί σέ περιπτώσεις όπου είναι γνωστή ή άναλυτική έκφραση τῆς λύσης, ή άριθμητική έργασία πού άπαιτεῖται γιά τόν ύπολογισμό τῆς τιμῆς y γιά κάποιο x, χρησιμοποιώντας τήν έκφραση τῆς λύσης, είναι άρκετά έπίπονη. Όπως όμως θά δοῦμε παρακάτω ή άντίστοιχη έργασία είναι όπωσδήποτε περισσότερο έπίπονη, συγκρινόμενη μέ μιά άπό τίς μεθόδους πού θά άναπτύξουμε στή συνέχεια.

Στίς έπόμενες παραγράφους θά άσχοληθοῦμε μέ τήν άριθμητική έπίλυση τοῦ προβλήματος (8.1) - (8.2). Θά άναπτύξουμε δηλαδή όρισμένες άπό τίς πιό κλασικές μεθόδους τῆς Α.Α., πού δίνουν τόν τρόπο ύπολογισμοῦ μιᾶς προσεγγιστικῆς τιμῆς τῆς άγνωστης συναρτήσεως y σ' ένα τυχόν σημεῖο $x \neq x_o$. Οί μέθοδοι, πού θά μελετηθοῦν, χαρακτηρίζονται σάν άμεσοι. Αύτό γιατί χρησιμοποιοῦν μόνο τή διαφορική έξίσωση (8.1) καί τήν άρχική συνθήκη (8.2). Δέν κάνουν δηλαδή χρήση τυχόν ύπάρχουσας άναλυτικῆς έκφράσεως γιά τή λύση.

Γιά τήν άριθμητική έπίλυση τοῦ ύπόψη προβλήματος έργαζόμαστε ώς έξῆς. 'Εκλέγουμε αύθαίρετα ένα φυσικό άριθμό n καί συμβολίζουμε μέ x_n τήν τιμή τοῦ x γιά τήν όποία ζητεῖται ή τιμή τῆς y. Στή συνέχεια διαιροῦμε τό διάστημα $[x_o, x_n]$ (άν ύποθέσουμε ότι $x_n > x_o$) σέ n ίσα ύποδιαστήματα μέ τά σημεῖα $x_i \;|i = 1(1)n-1$. Είναι φανερό ότι όλα τά σημεῖα x_i $|i = 0(1)n$ μποροῦν τότε νά όριστοῦν άπό τή σχέση

$$x_i = x_o + ih \quad |i = 0(1)n \;. \quad \text{μέ} \quad h = \frac{x_n - x_o}{n} \;.$$

Στή συνέχεια συμβολίζουμε μέ y_i τήν τιμή τῆς συνάρτησεως y γιά $x = x_i$ καί έφαρμόζοντας μιά άπό τίς άριθμητικές μεθόδους, πού θά άναπτύξουμε παρακάτω, βρίσκουμε πρῶτα τήν y_1, μετά μέ τήν ἴδια μέθοδο τήν y_2, κ.ο.κ. καί τέλος τήν y_n, πού εἶναι ἡ ζητούμενη τιμή. Στήν πράξη ὁ φυσικός ἀριθμός n δέν ἐκλέγεται συνήθως τελείως αὐθαίρετα. Παίρνουμε πρῶτα n=1 καί βρίσκουμε τήν τιμή $y_n(y_1)$ ἐφαρμόζοντας τήν ὑπόψη μέθοδο. Στή συνέχεια παίρνουμε n = 2 καί βρίσκουμε νέα τιμή γιά τήν $y_n(y_2)$ ἐργαζόμενοι μέ τόν τρόπο πού περιγράψαμε προηγούμενα. Μετά παίρνουμε n=4, n=8 κ.ο.κ. καί βρίσκουμε τίς τιμές $y_n(y_4)$, $y_n(y_8)$ κ.ο.κ. Σταματοῦμε, ὅταν, ὅπως καί σέ ἄλλες περιπτώσεις, βροῦμε δύο διαδοχικές τιμές γιά τήν y_n πού νά συμφωνοῦν σ' ἕνα προκαθορισμένο ἀριθμό δ. ἤ σ.ψ.

Οἱ μέθοδοι, πού θά ἀναπτυχτοῦν στή συνέχεια, εἶναι τέτοιες ὥστε γιά τήν εὕρεση τῆς κάθε τιμῆς y_{i+1} $|i = 0(1)n-1$ νά χρησιμοποιοῦν, ἀπό τίς προηγούμενες τιμές τῆς y, μόνο τήν τιμή y_i. Γιά τόν λόγο αὐτό εἶναι γνωστές σάν μέθοδοι τοῦ ἁπλοῦ βήματος. Ἡ βασική ἰδέα τῶν μεθόδων αὐτῶν εἶναι ἡ ἀκόλουθη. Ἡ τιμή μιᾶς παραγώγου τῆς συναρτήσεως y σ' ἕνα ἄγνωστο σημεῖο τοῦ διαστήματος $[x_i, x_{i+1}]$ $|i = 0(1)n-1$ προσεγγίζεται συνήθως μέ τήν τιμή τῆς ἴδιας παραγώγου στό σημεῖο x_i ἤ μέ μιά γραμμική ἔκφραση τιμῶν τῆς συναρτήσεως f σέ προκαθορισμένα γνωστά σημεῖα. Ἀπό τίς μεθόδους τῆς πρώτης κατηγορίας θά μελετήσουμε τίς μεθόδους τοῦ Euler καί τῆς σειρᾶς Taylor καί ἀπό τίς μεθόδους τῆς δεύτερης κατηγορίας τίς μεθόδους τῶν Runge-Kutta.

Προτοῦ ἀρχίσουμε νά μελετοῦμε τίς συγκεκριμένες μεθόδους, πού ἀναφέραμε παραπάνω, θά πρέπει νά τονίσουμε τό γεγονός ὅτι σ' αὐτές γίνεται χρήση τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ Taylor. Ὅσες φορές τό ἀνάπτυγμα αὐτό θά χρησιμοποιεῖται, θά ὑποθέτουμε σιωπηρά ὅτι οἱ διάφορες παράγωγοι τῆς συναρτήσεως y (ὅπως ἐπίσης καί τῆς f), πού ὑπεισέρχονται σ' αὐτό, ὑπάρχουν καί εἶναι συνεχεῖς στά ἀντίστοιχα διαστήματα.

8.2. Μέθοδος τοῦ Euler ἤ Μέθοδος τοῦ πολυγώνου

Ἡ μέθοδος αὐτή εἶναι παλιότερη, ἡ ἁπλούστερη καί ἡ λιγότερο ἀκριβής ἀπό ὅλες τίς μεθόδους ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως διαφορικῶν ἐξισώσεων. Ἀναφέρεται γιά λόγους ἱστορικούς καί ἀκόμη γιατί ἡ ἁπλότητά της μᾶς ἐπιτρέπει νά συνειδητοποιήσουμε πιό εὔκολα τόν τρόπο μέ τόν ὁποῖο ἐργαζόμαστε γιά νά άναπτύξουμε μεθόδους άριθμητικής έπιλύσεως διαφορικών έξισώσεων. Ἡ μέθοδος αὐτή δέ συστήνεται γιά πρακτικές έφαρμογές.

Ἀναχωροῦμε ἀπό τό ἀνάπτυγμα τοῦ Taylor μέ δύο ὅρους, ὁπότε μποροῦμε νά γράψουμε

$$y_1 = y(x_1) = y(x_o+h) = y(x_o) + hy'(x_o+\theta_o h) \tag{8.4}$$

ὅπου $0 < \theta_o < 1$. Ἄν προσεγγίσουμε τώρα τήν τιμή τῆς $y'(x_o+\theta_o h)$ στό ἄγνωστο σημεῖο $x_o+\theta_o h$ μέ τήν τιμή τῆς παραγώγου $y'(x_o)$ στό σημεῖο x_o καί χρησιμοποιήσουμε τό ἴδιο σύμβολο y_1 γιά νά παραστήσουμε τήν προσεγγιστική τιμή τῆς $y(x_1)$ ἔχουμε

$$y_1 = y_o + hy_o' \; . \tag{8.5}$$

Λαβαίνοντας ὑπόψη τήν (8.1), ἡ παραπάνω σχέση (8.5) γράφεται

$$y_1 = y_o + hf(x_o, y_o) \; . \tag{8.6}$$

Γενικεύοντας τώρα τή σχέση (8.6) παίρνουμε

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad \Big| i = 0(1)n-1 \tag{8.7}$$

πού ἀποτελεῖ καί τή γνωστή σάν μέθοδο τοῦ Euler ἤ μέθοδο τοῦ πολυγώνου.

Ὅταν πηγαίνουμε ἀπό τή σχέση (8.4) στήν (8.5) κάνουμε ἕνα σφάλμα πού εἶναι γνωστό σάν σφάλμα ἀποκοπῆς. Ἡ ἔκφρασή του μπορεῖ νά βρεθεῖ εὔκολα, ἀρκεῖ νά σχηματίσουμε τή διαφορά

$$y_1 - y(x_1) = y_o + hy_o' - \left[y_o + hy_o' + \frac{h^2}{2} y''(x_o + \theta_o^* h)\right]$$

ὅπου $0 < \theta_o^* < 1$. Κάνοντας τίς ἀναγωγές βρίσκουμε γιά τό σφάλμα ἀποκοπῆς τήν ἔκφραση

$$y_1 - y(x_1) = -\frac{h^2}{2} y''(x_o + \theta_o^* h) \, .$$

Τό σφάλμα αὐτό καλεῖται συνήθως τοπικό σφάλμα ἀποκοπῆς. Πολλές φορές στήν πράξη μᾶς ἐνδιαφέρει κυρίως ὄχι ἡ ἔκφραση γιά τό τοπικό σφάλμα ἀποκοπῆς, ἀλλά ἡ τάξη του ὡς πρός h. Στίς περιπτώσεις αὐτές, ἀντί γιά τήν προηγούμενη ἔκφραση, γράφουμε ἁπλά τό συμβολισμό $O(h^k)$. Αὐτό γιά νά ὑποδηλώσουμε ὅτι τό τοπικό σφάλμα ἀποκοπῆς εἶναι τάξης k, δηλαδή μιά ἔκφραση τῆς μορφῆς Ch^k, ὅπου C σταθερά. Σ' αὐτή τήν περίπτωση τῆς μεθόδου τοῦ Euler τό τοπικό σφάλμα ἀποκοπῆς μπορεῖ νά γραφτεῖ συμβολικά σάν $O(h^2)$.

Παράδειγμα 1

Μέ τή βοήθεια τῆς μεθόδου τοῦ Euler νά βρεθεῖ μία ἀναλυτική ἔκφραση, σάν συνάρτηση τῶν x καί n, γιά τή λύση τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως

$$y' = -y \qquad \text{μέ} \qquad y(0) = 1$$

στό τυχόν σημεῖο $x(\equiv x_n)$.

Λύση

Ὅπως εἶναι γνωστό ὁ τύπος τοῦ Euler εἶναι ὁ

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \qquad | i = 0(1)n-1 .$$

Στήν περίπτωση αὐτή ἔχουμε $f(x,y) \equiv -y$, $x_o = 0$, $y_o = 1$ καί $h = \frac{x_n - x_o}{n} = \frac{x-0}{n} = \frac{x}{n}$. Συνεπῶς ὁ τύπος τοῦ Euler γίνεται

$$y_{i+1} = y_i + \frac{x}{n}(-y_i) \qquad | i = 0(1)n-1$$

ἤ

$$y_{i+1} - (1 - \frac{x}{n})y_i = 0 \qquad | i = 0(1)n-1 . \tag{8.8}$$

Ἡ (8.8) ὅμως εἶναι μιά ὁμογενής ἐξίσωση διαφορῶν πρώτης τάξης μέ σταθερούς συντελεστές. Ἡ χαρακτηριστική ἐξίσωσή της εἶναι ἡ

$$r - (1 - \frac{x}{n}) = 0$$

μέ ρίζα τήν $r = 1 - \frac{x}{n}$. Ἐπομένως ἡ γενική λύση τῆς (8.8) εἶναι ἡ

$$y_i = C\,(1 - \frac{x}{n})^i \qquad | i = 0(1)n$$

όπου C αύθαίρετη σταθερά. Ἡ τιμή τῆς C μπορεῖ νά ὑπολογιστεῖ ἀπό τήν ἀρχική συνθήκη. Πραγματικά γιά i=0 ἔχουμε

$$y_o = C(1 - \frac{x}{n})^o = C$$

ὁπότε C=1. Ἔτσι ἡ λύση τῆς (8.8) εἶναι ἡ

$$y_i = (1 - \frac{x}{n})^i \qquad |i = 0(1)n$$

ἡ ὁποία γιά i=n δίνει

$$y(x) = y(x_n) = y_n = (1 - \frac{x}{n})^n$$

πού εἶναι τό ζητούμενο.

Παράδειγμα 2

Χρησιμοποιώντας τή μέθοδο τοῦ Euler, νά βρεθεῖ ἡ λύση τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως

$$y' = -xy^2 \quad \text{μέ} \quad y(o) = 2$$

στό σημεῖο $x = 0.2$, μέ προσέγγιση δύο δ.ψ.

Λύση

Γιά τήν ἐξίσωση, πού δόθηκε, ἔχουμε $f(x,y) \equiv -xy^2$, $x_o = 0$, $y_o = 2$ καί $x_n = 0.2$. Παίρνοντας n=1 βρίσκουμε $h = \frac{x_n - x_o}{n} = \frac{0.2-0}{1} = 0.2$ καί ἡ μέθοδος τοῦ Euler γίνεται

$$y_{i+1} = y_i + 0.2\,(-x_i y_i^2) \qquad |i = 0(1)0 .$$

Ἀπό αὐτήν, ἀντικαθιστώντας καί κάνοντας πράξεις λαβαίνουμε

$$y_1 = 2.000 .$$

Παίρνουμε τώρα n = 2. Γιά τή νέα τιμή τοῦ n βρίσκουμε $h = \frac{x_n - x_o}{n} = \frac{0.2-0}{2} = 0.1$. Ἐπομένως ἡ μέθοδος τοῦ Euler εἶναι τώρα ἡ

$$y_{i+1} = y_i + 0.1(-x_i y_i^2) \quad | \; i = 0(1)1 \; .$$

'Από αὐτή βρίσκουμε τελικά

$$y_1 = 2.000 \quad \text{καί} \quad y_2 = 1.960.$$

Συνεχίζουμε μέ $n = 4$, ὁπότε $h = 0.05$. 'Η μέθοδος τοῦ Euler γίνεται

$$y_{i+1} = y_i + 0.05(-x_i y_i^2) \quad | \; i = 0(1)3 \; .$$

'Από αὐτήν παίρνουμε διαδοχικά

$$y_1 = 2.000, \quad y_2 = 1.990, \quad y_3 = 1.970 \quad \text{καί} \quad y_4 = 1.941 \; .$$

Συνεχίζουμε τώρα μέ $n = 8$ καί ἀπό τήν ἀντίστοιχη μέθοδο τοῦ Euler παίρνουμε τά παρακάτω ἀποτελέσματα

$$y_1 = 2.000, \quad y_2 = 1.998, \quad y_3 = 1.993, \quad y_4 = 1.985,$$

$$y_5 = 1.975, \quad y_6 = 1.963, \quad y_7 = 1.949 \quad \text{καί} \quad y_8 = 1.932 \; .$$

Γιά $n = 16$ παίρνουμε ἀπό τή μέθοδο τοῦ Euler τίς ἀκόλουθες τιμές

$$y_1 = 2.000, \quad y_2 = 1.999, \quad y_3 = 1.998, \quad y_4 = 1.996,$$

$$y_5 = 1.994, \quad y_6 = 1.991, \quad y_7 = 1.987, \quad y_8 = 1.983,$$

$$y_9 = 1.978, \quad y_{10} = 1.972, \quad y_{11} = 1.966, \quad y_{12} = 1.959,$$

$$y_{13} = 1.952, \quad y_{14} = 1.945, \quad y_{15} = 1.936 \quad \text{καί} \quad y_{16} = 1.927 \; .$$

'Επειδή οἱ τιμές $y_n = y(0.2)$ πού βρέθηκαν γιά $n=8$ καί $n=16$ εἶναι τέτοιες ὥστε $|y_8 - y_{16}| = 0.005 \leq \frac{1}{2} 10^{-2}$, συμπεραίνουμε ὅτι ἡ προσεγγιστική λύση τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως, πού δόθηκε, στό σημεῖο $x=0.2$, μέ τή μέθοδο τοῦ Euler καί μέ προσέγγιση δύο δ.ψ. εἶναι ἡ $y(0.2) \approx 1.93$.

8.3. Μέθοδος τῆς σειρᾶς Taylor

Ἡ μέθοδος τῆς σειρᾶς Taylor ἀποτελεῖ κατά κάποιο τρόπο γενίκευση τῆς μεθόδου τοῦ Euler. Εἶναι περισσότερο ἀκριβής καί συστήνεται στήν περίπτωση, πού οἱ παράγωγοι ἀνώτερης τάξης μποροῦν νά ὑπολογιστοῦν εὔκολα.

Ὅπως καί στήν προηγούμενη μέθοδο ἀναχωροῦμε ἀπό τό ἀνάπτυγμα τοῦ Taylor μέ k+1 ὅρους, ὁπότε ἔχουμε

$$y(x_1) = y(x_o+h) = y(x_0)+hy'(x_o)+\ldots+\frac{h^{k-1}}{(k-1)!}\,y^{(k-1)}(x_o)+$$
$$+\frac{h^k}{k!}\,y^{(k)}(x_o+\theta_o h)$$

ὅπου $0<\theta_o<1$. Ἡ παραπάνω ἰσότητα μπορεῖ νά γραφτεῖ καί ὡς ἑξῆς

$$y(x_1) = y_o + hy_o' + \ldots + \frac{h^k}{k!}\,y_o^{(k)} + 0(h^{k+1}) \;.$$

Ἑπομένως, ἄν ὅπως καί πρίν, χρησιμοποιήσουμε τό σύμβολο y_1, γιά νά παραστήσουμε τήν προσεγγιστική τιμή τῆς $y(x_1)$ ἔχουμε ὅτι

$$y_1 = y_o + hy_o' + \ldots + \frac{h^k}{k!}\,y_o^{(k)}$$

πού ἀποτελεῖ καί τό πρῶτο βῆμα τῆς μεθόδου τῆς σειρᾶς Taylor. Ἑπομένως ἡ μέθοδος τῆς σειρᾶς Taylor εἶναι ἡ ἀκόλουθη

$$y_{i+1} = y_i + hy_i' + \ldots + \frac{h^k}{k!}\,y_i^{(k)} \qquad |\, i=0(1)n-1\,. \tag{8.9}$$

Εἶναι φανερό ὅτι ἡ μέθοδος τῆς σειρᾶς Taylor (8.9) συμπίπτει μέ τή μέθοδο τοῦ Euler (8.7) γιά $k=1$. Τονίζεται ἀκόμη ὅτι οἱ τιμές τῶν παραγώγων ἀνώτερης τάξης παίρνονται ἀπό τήν (8.1) μέ διαδοχικές παραγωγίσεις λαβαίνοντας ὑπόψη καί τήν ἀρχική συνθήκη (8.2).

Παράδειγμα 1

Νά βρεθεῖ μιά κατηγορία συναρτήσεων f(x,y), γιά τήν ὁποία ἡ εφαρμογή τῆς μεθόδου τῆς σειρᾶς Taylor μέ τρεῖς ὅρους

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i + \frac{h^2}{2} y''_i \qquad \Big| i = 0(1)n-1$$

γιά τήν ἐπίλυση τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως

$$y' = f(x,y) \quad \text{μέ} \quad y(x_o) = y_o$$

στό τυχόν σημεῖο x ($\equiv x_n$), ὅταν δέν ὑπάρχουν σφάλματα στρογγυλεύσεως, δίνει ἀκριβή λύση. (Δηλαδή τό ἀντίστοιχο τοπικό σφάλμα ἀποκοπῆς εἶναι μηδέν).

Λύση

Εἶναι εὔκολο νά διαπιστωθεῖ ὅτι τό τοπικό σφάλμα ἀποκοπῆς στή μέθοδο τῆς σειρᾶς Taylor μέ τρεῖς ὅρους, κατά τήν εὕρεση τῆς τιμῆς y_{i+1}, ἀπό τήν y_i $|i=0(1)n-1$ εἶναι

$$O(h^3) \equiv -\frac{h^3}{3!} y'''(x_i + \theta_i h), \quad 0 < \theta_i < 1 \quad \Big| i = 0(1)n-1 .$$

Ἀφοῦ θέλουμε ἡ προσεγγιστική λύση νά συμπίπτει μέ τήν ἀντίστοιχη ἀκριβή, θά πρέπει ὅλα τά τοπικά σφάλματα ἀποκοπῆς νά εἶναι μηδέν. Δηλαδή θά πρέπει

$$-\frac{h^3}{3!} y'''(x_i + \theta_i h) = 0 \qquad \text{ἤ}$$

$$y''' = 0 \qquad \text{ἤ}$$

$$y'' = c_1 \qquad \text{ἤ}$$

$$y' = c_1 x + c_2 .$$

Ἐπομένως

$$y' = f(x,y) = c_1 x + c_2$$

ὅπου c_1 καί c_2 αὐθαίρετες σταθερές.

Παράδειγμα 2

'Εφαρμόζοντας τή μέθοδο τῆς σειρᾶς Taylor μέ τρεῖς ὅρους, νά βρεθεῖ ἡ λύση τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως

$$y' = -xy^2 \quad \text{μέ} \quad y(o) = 2$$

στό σημεῖο $x = 0.2$, μέ προσέγγιση δύο δ.ψ.

Λύση

'Αρχικά ἔχουμε ὅτι $f(x,y) \equiv -xy^2, x_o = 0,\ y_o = 2$ καί $x_n = 0.2$. 'Η μέθοδος τώρα τῆς σειρᾶς Taylor μέ τρεῖς ὅρους εἶναι ἡ

$$y_{i+1} = y_i + hy_i' + \frac{h^2}{2} y_i'' \quad \Big| i = 0(1)n-1 \ . \tag{8.10}$$

Γιά τή χρησιμοποίηση τῶν σχέσεων (8.10) μᾶς χρειάζονται οἱ ἐκφράσεις τῆς πρώτης καί δεύτερης παραγώγου τῆς y. Ἔχουμε

$$y' = -xy^2 \tag{8.11}$$

ἀπό τήν ὑπόθεση, καί

$$y'' = -y^2 - x\,2\,yy' = -(y^2 + 2xyy') \tag{8.12}$$

παραγωγίζοντας τήν παραπάνω σχέση. Γιά n =1 τώρα ἔχουμε

$$y_{i+1} = y_i + hy_i' + \frac{h^2}{2} y_i'' \quad \Big| i = 0(1)0 \tag{8.13}$$

ὅπου $h = \frac{x_n - x_o}{n} = \frac{0.2-0}{1} = 0.2$. 'Από τήν (8.13), χρησιμοποιώντας τίς (8.11) καί (8.12) καί ἀντικαθιστώντας σ' αὐτή βρίσκουμε τελικά

$$y_1 = 1,920 \ .$$

Γιά n = 2 ἔχουμε

$$y_{i+1} = y_i + hy_i' + \frac{h^2}{2} y_i'' \quad \Big| i = 0(1)1 \tag{8.14}$$

μέ $h=\frac{x_n-x_o}{n}=\frac{0.2-0}{2}=0.1$. Ἐργαζόμαστε ὅπως στήν προηγούμενη περίπτωση, χρησιμοποιώντας ὅμως τήν (8.14) δύο φορές. Ἔτσι λαβαίνουμε τελικά

$$y_1=1.980 \qquad \text{καί} \qquad y_2=1.922.$$

Ἐπειδή οἱ τιμές $y_n=y(0.2)$, πού βρέθηκαν γιά $n=1$ καί $n=2$, εἶναι τέτοιες ὥστε $|y_1-y_2|=0.002\leqq\frac{1}{2}10^{-2}$, συμπεραίνουμε ὅτι ἡ ἀριθμητική λύση τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως, πού δόθηκε, στό σημεῖο $x=0.2$, μέ τή μέθοδο τῆς σειρᾶς Taylor μέ τρεῖς ὅρους καί μέ προσέγγιση δύο δ.ψ., εἶναι $y(0.2)\approx1.92$. Σημειώνουμε ὅτι τό παρόν παράδειγμα εἶναι τό ἴδιο μέ τό Παράδειγμα 2 τῆς παραγράφου 8.2 . Ἔτσι συγκρίνοντας τό πλῆθος τῶν ἐπαναλήψεων, πού χρειαστήκαμε στή μέθοδο τοῦ Euler μέ τό ἀντίστοιχο τῆς τωρινῆς μεθόδου, τῆς σειρᾶς Taylor, μέ τρεῖς ὅρους γιά τήν ἴδια προσέγγιση τῶν δύο δ.ψ., παρατηροῦμε ὅτι μέ τήν τωρινή μέθοδο φτάνουμε στό ἀποτέλεσμα πολύ γρηγορότερα.

8.4. Μέθοδοι τῶν Runge - Kutta

8.4.1. Γενικά

Οἱ μέθοδοι τῶν Runge-Kutta εἶναι ἀρκετά μεγάλης ἀκρίβειας καί ἀποτελοῦν τίς πιό δημοφιλεῖς μεθόδους, γιατί ὁ προγραμματισμός τους σ'ἕναν Η.Υ. εἶναι εὔκολος. Οἱ μέθοδοι τῶν Runge-Kutta διακρίνονται σέ κατηγορίες ἀνάλογα μέ τήν τάξη τῆς παραγώγου, ἡ ὁποία τελικά προσεγγίζεται. Στή συνέχεια θά μελετήσουμε τή μέθοδο δεύτερης τάξης καί θά περιγράψουμε μετά μιά ἀπό τίς μεθόδους τέταρτης τάξης.

8.4.2. Μέθοδος τῶν Runge - Kutta δεύτερης τάξης

Ἀρχίζουμε ἀπό τό ἀνάπτυγμα τοῦ Taylor μέ δύο ὅρους

$$y(x_1)=y(x_o+h)=y(x_o)+hy'(x_o+\theta_o h) \tag{8.15}$$

ὅπου $0<\theta_o<1$. Ἡ βασική ἰδέα τῆς μεθόδου τῶν Runge-Kutta εἶναι νά προσεγγίσουμε στό ἀνάπτυγμα (8.15) τήν πρώτη παράγωγο στό ἄγνωστο σημεῖο $x_o + \theta_o h$ μ' ἕνα γραμμικό συνδυασμό τιμῶν συναρτήσεως f σέ γνωστά σημεῖα. Γιά τό σκοπό αὐτό γράφουμε

$$y_1 = y_o + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 \tag{8.16}$$

ὅπου

$$k_1 = hf(x_o, y_o) \quad \text{καί} \quad k_2 = hf(x_o + \beta_1 h, y_o + \beta_2 k_1) \tag{8.17}$$

καί οἱ συντελεστές α_1, α_2, β_1 καί β_2 θά προσδιοριστοῦν κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε ἡ τιμή y_1 ἀπό τήν (8.16) νά προσεγγίζει κατά τόν καλύτερο δυνατό τρόπο τήν ἀληθή τιμή τῆς y στό σημεῖο x_1, πού δίνεται ἀπό τήν (8.15). Ἄν ἀντικαταστήσουμε τίς (8.17) στίς (8.16) καί ἀναπτύξουμε κατά Taylor παίρνουμε διαδοχικά

$$y_1 = y_o + \alpha_1 hf(x_o, y_o) + \alpha_2 hf(x_o + \beta_1 h, y_o + \beta_2 hf(x_o, y_o)) =$$

$$= y_o + \alpha_1 hf_o + \alpha_2 h[f_o + \beta_1 hf_{x,o} + \beta_2 hf_o f_{y,o} + 0(h^2)] \quad \text{καί}$$

$$y_1 = y_o + (\alpha_1 + \alpha_2)hf_o + h^2(\alpha_2\beta_1 f_{x,o} + \alpha_2\beta_2 f_o f_{y,o}) + 0(h^3) \tag{8.18}$$

ὅπου τέθηκε

$$f_o = f(x_o, y_o), \quad f_{x,o} = f_x(x_o, y_o) \quad \text{καί} \quad f_{y,o} = f_y(x_o, y_o).$$

Ἐξάλλου ἀπό τήν (8.15) ἀναπτύσσοντας παραπέρα μποροῦμε νά πάρουμε

$$y(x_1) = y_o + hy_o' + \frac{h^2}{2} y_o'' + 0(h^3) \quad \text{καί}$$

$$y(x_1) = y_o + hf_o + \frac{h^2}{2}(f_{x,o} + f_{y,o} f_o) + 0(h^3). \tag{8.19}$$

Εἶναι φανερό τώρα πώς ἄν τεθεῖ

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_2\beta_1 = 1/2 \quad \text{καί} \quad \alpha_2\beta_2 = 1/2 \tag{8.20}$$

τότε ἡ τιμή y_1 ἀπό τήν (8.18) θά προσεγγίζει μέχρι καί τόν ὅρο h^2, ἀπό τό ἀντίστοιχο ἀνάπτυγμα τοῦ Taylor, τήν ἀκριβή τιμή $y(x_1)$, πού δίνεται ἀπό τήν (8.19). Τό σύστημα (8.20) εἶναι ἕνα σύστημα τριῶν ἐξισώσεων μέ τέσσερις ἀγνώστους. Αὐτό ἔχει τή μονοπαραμετρική λύση

$$\alpha_1 = 1 - \lambda, \quad \alpha_2 = \lambda \quad \text{καί} \quad \beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2\lambda} \tag{8.21}$$

ὅπου $\lambda \neq 0$ αὐθαίρετος πραγματικός ἀριθμός. Ἔτσι ἡ (8.16) λόγω τῶν (8.17) καί (8.21) δίνει γενικά

$$y_{i+1} = y_i + h\left[(1-\lambda)f(x_i,y_i) + \lambda f(x_i + \frac{h}{2\lambda}, y_i + \frac{h}{2\lambda}f(x_i,y_i))\right] \tag{8.22}$$

$$|i = 0(1)n-1.$$

Ἡ (8.22) ἀποτελεῖ τή γενική μέθοδο τῶν Runge - Kutta δεύτερης τάξης. Ἀπό τή γενική μέθοδο (8.22) εἶναι δυνατό νά πάρουμε διάφορες συγκεκριμένες μεθόδους τῶν Runge - Kutta δεύτερης τάξης γιά διάφορες συγκεκριμένες τιμές τῆς παραμέτρου λ. Ἔτσι γιά $\lambda = 1/2$ παίρνουμε τή γνωστή σάν βελτιωμένη μέθοδο τοῦ Euler, συγκεκριμένα τήν

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i,y_i) + f(x_i + h,\ y_i + hf(x_i,y_i))\right] \quad |i = 0(1)n-1$$

καί γιά $\lambda = 1$ τή γνωστή σάν βελτιωμένη μέθοδο τοῦ πολυγώνου, συγκεκριμένα τήν

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{h}{2}f(x_i,y_i)) \qquad |i = 0(1)n-1.$$

Παράδειγμα 1

Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ βελτιωμένη μέθοδος τοῦ Euler

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i,y_i) + f(x_i+h,\ y_i+hf(x_i,y_i))\right] \quad |i = 0(1)n-1$$

γιά τήν εὕρεση τῆς λύσης τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως

$$y' = f(x,y) \quad \text{μέ} \quad y(x_0) = y_0$$

στό σημεῖο $x \equiv x_n \left(h = \frac{x_n - x_o}{n} \right)$, ὅταν $f(x,y) \equiv f(x)$, δέν εἶναι παρά ὁ γνωστός ἀπό τήν ἀριθμητική ὁλοκλήρωση κανόνας τοῦ τραπεζίου.

Λύση

Ὅταν $f(x,y) \equiv f(x)$, τότε ὁ τύπος τῆς βελτιωμένης μεθόδου τοῦ Euler παίρνει τή μορφή

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_i + h)\right] \quad \Big| i = 0(1)n-1 \qquad \text{ἤ}$$

$$y_{i+1} - y_i = \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right] \quad \Big| i = 0(1)n-1 \qquad \text{ἤ}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx = \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right] \Big| i = 0(1)n-1 \qquad \text{ἤ}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right] \quad \Big| i = 0(1)n-1$$

πού δέν εἶναι παρά ὁ γνωστός ἀπό τήν ἀριθμητική ὁλοκλήρωση κανόνας τοῦ τραπεζίου.

Παράδειγμα 2

Χρησιμοποιώντας α) τή βελτιωμένη μέθοδο τοῦ Euler καί β) τή βελτιωμένη μέθοδο τοῦ πολυγώνου, νά βρεθεῖ ἡ λύση τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως

$$y' = -xy^2 \qquad \text{μέ} \qquad y(o) = 2$$

στό σημεῖο $x = 0.2$, μέ προσέγγιση δύο δ.ψ.

Λύση

Στήν τωρινή περίπτωση ἔχουμε, ὅπως καί στά ἀντίστοιχα παραδείγματα τῶν παραγράφων 8.2 καί 8.3, ὅτι $f(x,y) \equiv -xy^2$, $x_o = 0$, $y_o = 2$ καί $x_n = x = 0.2$. Χρησιμοποιώντας χωριστά τίς δύο μεθόδους ἔχουμε

α) Γιά $n = 1$, $h = 0.2$ καί ἡ βελτιωμένη μέθοδος τοῦ Euler γίνεται

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i,y_i) + f(x_i+h,\ y_i + hf(x_i,y_i))\right] \ \Big|\, i = 0(1)0 \ .$$

Ἂν ἀντικαταστήσουμε καί ἐκτελέσουμε τίς πράξεις βρίσκουμε

$$y_1 = 1.920 \ .$$

Γιά $n = 2$, $h = 0.1$ καί ἡ μέθοδος γίνεται

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i,y_i) + f(x_i+h,\ y_i + hf(x_i,y_i))\right] \ \Big|\, i = 0(1)1 \ .$$

Ἂν ἀντικαταστήσουμε βρίσκουμε

$$y_1 = 1.980 \quad \text{καί} \quad y_2 = 1.923 \ .$$

Ἐπειδή οἱ τιμές y_n γιά $n=1$ καί 2 ἔχουν ἀπόλυτη τιμή διαφορᾶς μικρότερη ἀπό μισή μονάδα τῆς δεύτερης δεκαδικῆς τάξης συμπεραίνουμε ὅτι $y(0.2) \approx 1.92$.

β) Γιά $n = 1$, $h = 0.2$ καί ἡ βελτιωμένη μέθοδος τοῦ πολυγώνου εἶναι ἡ

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{h}{2} f(x_i,y_i)\right) \ \Big|\, i = 0(1)0 \ .$$

Ἂν ἀντικαταστήσουμε βρίσκουμε

$$y_1 = 1.920 \ .$$

Γιά $n = 2$, $h = 0.1$ καί ἡ μέθοδος γίνεται

$$y_{i+1} = y_i + h\, f\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{h}{2} f(x_i,y_i)\right) \ \Big|\, i = 0(1)1 \ .$$

Ἂν ἀντικαταστήσουμε παίρνουμε

$$y_1 = 1.980 \quad \text{καί} \quad y_2 = 1.922 \ .$$

Ὅπως καί στήν προηγούμενη μέθοδο οἱ δύο τιμές πού βρέθηκαν στό σημεῖο x_n γιά $n = 1$ καί 2 συμπίπτουν στά δύο δ.ψ. Ἐπομένως $y(0.2) \approx 1.92$.

Παρατηροῦμε ὅτι ὅπως καί στήν περίπτωση τοῦ ἀντίστοιχου ὅμοιου παραδείγματος στήν μέθοδο τῆς σειρᾶς Taylor, τά ἀποτελέσματα στό σημεῖο x=0.2 λαβαίνονται μέ τόν ἴδιο ἀριθμό ἐπαναλήψεων, πού εἶναι ἀσύγκριτα μικρότερος ἀπό τόν ἀντίστοιχο ἀριθμό στήν περίπτωση τοῦ ἴδιου παραδείγματος μέ τή μέθοδο τοῦ Euler.

8.4.3. Μέθοδος τῶν Runge-Kutta τέταρτης τάξης

Σ' αὐτή τήν περίπτωση ἐργαζόμαστε ὅπως ἀκριβῶς καί στήν περίπτωση τῆς ἀντίστοιχης μεθόδου τῆς δεύτερης τάξης ξεκινώντας ἀπό τό ἀνάπτυγμα (8.15) τοῦ Taylor μέ δύο ὅρους καί προσεγγίζουμε τήν πρώτη παράγωγο στό ἄγνωστο σημεῖο μ' ἕνα γραμμικό συνδυασμό τιμῶν τῆς συναρτήσεως f σέ τέσσερα γνωστά σημεῖα. Γιά τό σκοπό αὐτό γράφουμε σ' αὐτή τήν περίπτωση ὅτι

$$y_1 = y_o + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \alpha_3 k_3 + \alpha_4 k_4 \qquad (8.22)$$

ὅπου

$$k_1 = hf(x_o, y_o), \qquad k_2 = hf(x_o+\beta_1 h, y_o+\beta_2 k_1),$$

$$k_3 = hf(x_o+\gamma_1 h, y_o+\gamma_2 k_1+\gamma_3 k_2) \quad \text{καί} \qquad (8.23)$$

$$k_4 = hf(x_o+\delta_1 h, y_o+\delta_2 k_1+\delta_3 k_2+\delta_4 k_3).$$

Οἱ δεκατρεῖς συντελεστές $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ καί δ_4 θά προσδιοριστοῦν μέ τέτοιο τρόπο ὥστε ἡ τιμή y_1 ἀπό τήν (8.22) νά προσεγγίζει κατά τόν καλύτερο τρόπο τήν ἀληθή τιμή τῆς $y(x_1)$, πού δίνεται ἀπό τήν (8.15). Ἄν ἀντικαταστήσουμε τίς ἐκφράσεις (8.23) στήν (8.22) καί ἀναπτύξουμε κατά Taylor γύρω ἀπό τό σημεῖο (x_o, y_o) ἕως καί τούς ὅρους τέταρτης τάξης ὡς πρός h παίρνουμε ἕνα ἀνάπτυγμα τῆς γενικῆς μορφῆς

$$y_1 = A + hB + h^2\Gamma + h^3\Delta + h^4 E + O(h^5). \qquad (8.24)$$

ὅπου A, B, Γ, Δ καί E συναρτήσεις τῶν τιμῶν τῆς y, τῆς f καί τῶν παραγώγων της στό σημεῖο (x_o, y_o). Ἄν τώρα ἀναπτύξουμε τήν (8.15) ὡς ἑξῆς

$$y(x_1) = y_o + hy_o' + \frac{h^2}{2} y_o'' + \frac{h^3}{6} y_o''' + \frac{h^4}{24} y_o'''' + O(h^5) \tag{8.25}$$

καί ἀντικαταστήσουμε τίς τιμές τῶν παραγώγων τῆς y στό σημεῖο (x_o, y_o), ὅπως καί στήν προηγούμενη μέθοδο δεύτερης τάξης, μέ τίς ἀντίστοιχες τιμές τῆς f καί τῶν παραγώγων της στό ἴδιο σημεῖο, μποροῦμε, ἐξισώνοντας τούς συντελεστές στούς ἀντίστοιχους ὅρους τῶν δεύτερων μελῶν τῶν (8.24) καί (8.25), νά βροῦμε τελικά ἕνα σύστημα ἕντεκα ἐξισώσεων, πού νά περιέχει τίς δεκετρεῖς ἄγνωστες παραμέτρους. Τό σύστημα πού προκύπτει ἔχει μιά διπαραμετρική λύση. Μία λύση, ἀπό τή διπλή ἀπειρία λύσεων μέ προφανή πλεονεκτήματα, εἶναι ἡ ἀκόλουθη

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \alpha_4 = \frac{1}{6}, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3} \\ &\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2} \\ &\gamma_1 = \gamma_3 = \frac{1}{2}, \quad \gamma_2 = 0 \\ &\delta_1 = \delta_4 = 1, \quad \delta_2 = \delta_3 = 0 . \end{aligned} \tag{8.26}$$

Χρησιμοποιώντας τίς τιμές (8.26) ἔχουμε ὅτι μία ἀπό τίς μεθόδους Runge-Kutta τέταρτης τάξης εἶναι ἡ

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad | \; i = 0(1)n-1 \tag{8.27}$$

ὅπου

$$\begin{aligned} &k_1 = hf(x_i, y_i), \quad k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}), \\ &k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}), \quad k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3) . \end{aligned} \tag{8.28}$$

Παράδειγμα

Χρησιμοποιώντας τή μέθοδο τῶν Runge-Kutta τέταρτης τάξης, νά βρεθεῖ ἡ λύση τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως

$$y' = -xy^2 \quad \text{μέ} \quad y(0) = 2$$

στό σημεῖο $x = 0.2$, μέ προσέγγιση δύο δ.ψ.

Λύση

Σ'αὐτή τήν περίπτωση ἔχουμε, ὅπως καί στίς ἀντίστοιχες ὅμοιες περιπτώσεις τῶν παραδειγμάτων τῶν παραγράφων 8.2, 8.3 καί 8.4.2, ὅτι $f(x,y) \equiv -xy^2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ καί $x_n = 0.2$. Γιά $n = 1$, $h = 0.2$ καί ἡ μέθοδος (8.27) μέ βάση τίς (8.28) δίνει μέ ἀντίστοιχες ἀντικαταστάσεις

$$k_1 = 0, \quad k_2 = -0.080, \quad k_3 = -0.077 \quad \text{καί} \quad k_4 = -0.148$$

ὁπότε

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1.923.$$

Γιά $n = 2$, $h = 0.1$ βρίσκουμε ἀντίστοιχα ἀπό τήν (8.27) γιά $i = 0$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = -0.020, \quad k_3 = -0.020 \quad \text{καί} \quad k_4 = -0.039$$

ὁπότε

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1.980$$

καί γιά $i = 1$

$$k_1 = -0.039, \quad k_2 = -0.058, \quad k_3 = -0.057 \quad \text{καί} \quad k_4 = -0.074$$

ὁπότε

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1.923.$$

Ἀφοῦ, ὅπως διαπιστώνουμε γιά n=1 καί 2 οἱ ἀντίστοιχες τιμές y_n εἶναι ἀκριβῶς οἱ ἴδιες, συμπεραίνουμε πώς ἡ προσεγγιστική λύση στό σημεῖο $x=0.2$ μέ προσέγγιση δύο δ.ψ. εἶναι $y(0.2) \approx 1.92$. Καί στήν περίπτωση τοῦ παρόντος παραδείγματος σέ σύγκριση μέ τά ἀντίστοιχα ὅμοια παραδείγματα τῶν παραγράφων 8.2 καί 8.3 μπορεῖ νά γίνει ἡ ἴδια παρατήρηση, σέ ὅ,τι ἀφορᾶ τόν ἀριθμό τῶν ἀπαιτούμενων ἐπαναλήψεων, πού ἔγινε στό ἀντίστοιχο παράδειγμα τῆς παραγράφου 8.4.2 . Ἐκεῖνο ὅμως πού ἀξίζει νά σημειωθεῖ στό παρόν παράδειγμα εἶναι ὅτι, λόγω ἀκριβῶς τῆς μεγάλης ἀκρίβειας τῆς μεθόδου, ἡ ἀληθής λύση εἶχε ἤδη βρεθεῖ μέ τήν πρώτη ἐφαρμογή τῆς μεθόδου γιά $n=1$. Αὐτό βέβαια διαπιστώθηκε, ἀφοῦ ἐφαρμόσαμε τήν ἴδια μέθοδο καί γιά $n=2$, ὁπότε ὅπως παρατηρήσαμε βρήκαμε, ἐργαζόμενοι μέ τρία δ.ψ., ἀκριβῶς τό ἴδιο ἀποτέλεσμα.

8.5. Μετάδοση σφαλμάτων κατά τήν ἀριθμητική ἐπίλυση τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων

Ὅπως εἴδαμε κατά τήν περιγραφή τῶν μεθόδων γιά τήν ἀριθμητική ἐπίλυση τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων, πού ἀναπτύξαμε στίς προηγούμενες παραγράφους, ὅταν βρίσκουμε μιά ὁποιαδήποτε τιμή y_{i+1}, ἀπό τήν προηγούμενη τιμή y_i $|i=0(1)n-1$, ὑποθέτουμε ἀληθή, εἰσχωρεῖ ὁπωσδήποτε ἕνα σφάλμα, πού τό καλέσαμε τοπικό σφάλμα ἀποκοπῆς. Τά τοπικά σφάλματα ἀποκοπῆς μεταδίνονται ἀπό τό ἕνα βῆμα στό ἄλλο μέ ἀποτέλεσμα ἡ τιμή y_n, πού βρίσκεται τελικά, νά περιέχει, ἐκτός ἀπό τό τοπικό σφάλμα ἀποκοπῆς, πού εἰσχωρεῖ κατά τή μετάβαση ἀπό τήν τιμή y_{n-1} στήν τιμή y_n, καί ἕνα σφάλμα, πού θά προέρχεται ἀπό τή μετάδοση ὅλων τῶν προηγούμενων τοπικῶν σφαλμάτων ἀποκοπῆς. Τό σφάλμα στήν τιμή y_n, πού ὀφείλεται σ' ὅλα τά τοπικά σφάλματα ἀποκοπῆς, καλεῖται ὁλικό σφάλμα ἀποκοπῆς.

Ἐκτός ἀπό τήν παρουσία τῶν σφαλμάτων ἀποκοπῆς κατά τήν ἀριθμητική ἐπίλυση τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων θά πρέπει ὁπωσδήποτε νά τονιστεῖ καί ἡ παρουσία τῶν ἀναπόφευκτων σφαλμάτων στρογγυλεύσεως. Ὅπως ἔχουμε ἐπανειλημμένα τονίσει, στήν πράξη, εἴμαστε ὑποχρεωμένοι νά ἐργαζόμαστε μ' ἕνα πεπερασμένο καί προκαθορισμένο πλῆθος δ. ἤ σ.ψ. Τό γεγονός αὐτό εἰσάγει ἀναγκαστικά σφάλματα στούς διάφορους ὑπολογισμούς, ἐπομένως καί στήν ἀριθμητική ἐπίλυση τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων. Τά σφάλματα στρογγυλεύσεως, ὅπως ἀκριβῶς καί τά σφάλματα ἀποκοπῆς, μποροῦν νά διακριθοῦν σέ τοπικά καί ὁλικά. Ἔτσι θά καλοῦμε τοπικό σφάλμα στρογγυλεύσεως τό σφάλμα πού προκύπτει κατά τήν εὕρεση τῆς τιμῆς y_{i+1} ἀπό τήν προηγούμενη τιμή y_i $|i=0(1)n-1$, καί πού προέρχεται ἀπό τά σφάλματα στρογγυλεύσεως τῶν τιμῶν τῶν διάφορων παραμέτρων τοῦ τύπου πού δίνει τήν y_{i+1}, καθώς έπίσης καί άπό τά σφάλματα στρογγυλεύσεως κατά τήν έκτέλεση τῶν πράξεων γιά τήν εὕρεση τῆς τιμῆς αὐτῆς. 'Αντίστοιχα θά καλοῦμε ὁλικό σφάλμα στρογγυλεύσεως τό σφάλμα στήν τιμή y_n, πού προέρχεται άπό τό τοπικό σφάλμα στρογγυλεύσεως κατά τήν εὕρεση τῆς τιμῆς αὐτῆς άπό τήν προηγούμενή της y_{n-1}, καθώς έπίσης καί άπό τό σφάλμα πού θά προέρχεται άπό τήν μετάδοση ὅλων τῶν προηγούμενων τοπικῶν σφαλμάτων στρογγυλεύσεως.

'Από ὅλα τά παραπάνω συμπεραίνεται ὅτι, κάθε τιμή $y_{i+1}|i = 0(1)n-1$, θά περιέχει ἕνα σφάλμα πού θά καλεῖται ὁλικό σφάλμα. Αὐτό θά εἶναι τό ἄθροισμα τῶν ὁλικῶν σφαλμάτων άποκοπῆς καί στρογγυλεύσεως. 'Η εὕρεση έκφράσεων ἤ φραγμάτων γιά τά ὁλικά σφάλματα άποκοπῆς καί στρογγυλεύσεως στίς διάφορες άριθμητικές μεθόδους έπιλύσεως διαφορικῶν έξισώσεων, άποτελεῖ ἕνα άπό τά δυσκολότερα άντικείμενα τῆς θεωρίας τῆς Α.Α. καί έπομένως εἶναι πέρα άπό τό σκοπό τοῦ παρόντος βιβλίου.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Μέ τή μέθοδο τοῦ Euler, νά βρεθεῖ ἡ λύση τῆς διαφορικῆς έξισώσεως

$$y' = 1 - 2xy \quad \text{μέ} \quad y(1) = 0.538$$

στό σημεῖο $x = 1.1$ χρησιμοποιώντας $n=2$ καί διατηρώντας τρία δ.ψ. στούς ὑπολογισμούς. ('Απ. 0.528)

2. Νά βρεθεῖ μέ προσέγγιση τριῶν δ.ψ. ἡ λύση τῆς διαφορικῆς έξισώσεως $y' = xy$ μέ $y(0) = 1$ στό σημεῖο $x=1$, μέ τή χρησιμοποίηση τῆς μεθόδου τῆς σειρᾶς Taylor μέ τέσσερις ὅρους. ('Απ. 1.649)

3. Νά άποδειχτεῖ ὅτι ἡ μέθοδος

$$y_1 = y_o + hf(x_o + \frac{h}{2}, \ \ y_o + \frac{h}{2} f(x_o, y_o))$$

πού προτείνεται γιά τήν έπίλυση τῆς διαφορικῆς έξισώσεως $y' = f(x,y)$ μέ $y_o = y(x_o)$, x_o, y_o γνωστά, $y_1 = y(x_1)$ καί $h = x_1 - x_o$, άπό τήν ἄποψη τοῦ τοπικοῦ σφάλματος άποκοπῆς, εἶναι ἰσοδύναμη μέ τή μέθοδο τῆς σειρᾶς Taylor μέ τρεῖς ὅρους.

4. Νά ἐφαρμοστεῖ ἡ μέθοδος τῶν Runge-Kutta δεύτερης τάξης

$$y_{i+1} = y_i + h[(1-\lambda)f(x_i,y_i) + \lambda f(x_i + \frac{h}{2\lambda}, y_i + \frac{h}{2\lambda} f(x_i,y_i))]$$

$$|i = 0,1$$

μέ $\lambda = 0.25$, γιά τήν εὕρεση τῆς λύσης τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως $y' = x^2$ μέ $y(o) = 0$ στό σημεῖο $x = 1$. ('Απ. 0.5)

5. Γιά τήν ἀριθμητική ἐπίλυση τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως $y' = f(x,y)$ μέ $y(x_o) = y_o$ καί x_o, y_o γνωστά, προτείνεται ὁ ἀλγόριθμος

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}[f(x_i,y_i) + 3f(x_i + \frac{2}{3}h, y_i + \frac{2}{3}f(x_i,y_i))] \quad |i = 0(1)n-1$$

μέ $h = (x_n - x_o)/n$. Νά βρεθεῖ ἡ τάξη τοῦ τοπικοῦ σφάλματος ἀποκοπῆς. ('Απ. τρία)

6. Χρησιμοποιώντας μιά ἐξίσωση διαφορῶν νά δειχτεῖ ὅτι στήν περίπτωση πού εἶναι $f(x,y) \equiv \alpha x$ (α σταθερά) καί $y(o) = 0$, ἡ βελτιωμένη μέθοδος τοῦ Euler βρίσκει τήν ἀκριβή λύση τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως $y' = f(x,y)$ μέ $y(x_o) = y_o$ (x_o καί y_o γνωστά) στό τυχόν σημεῖο $x(\equiv x_n)$. (Δίνεται ὅτι ἡ θεωρητική λύση τῆς $y' = \alpha x$ μέ $y(o) = 0$ εἶναι ἡ $y = \frac{1}{2}\alpha x^2$).

7. Νά δοθεῖ ἡ γενική μορφή πού θά ἔχει μιά μέθοδος τῶν Runge-Kutta τρίτης τάξης καί στή συνέχεια μιά σύντομη περιγραφή τοῦ τρόπου πού θά βρεθοῦν οἱ διάφορες παράμετροι.

8. Νά βρεθεῖ μέ προσέγγιση τριῶν δ.ψ. ἡ λύση τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως $y' = xy$ μέ $y(o) = 1$ στό σημεῖο $x=1$, μέ τή χρησιμοποίηση τῆς μεθόδου τῶν Runge-Kutta τέταρτης τάξης. ('Απ. 1.648)

9. Νά δειχτεῖ ὅτι ἡ μέθοδος τῶν Runge-Kutta τέταρτης τάξης, γιά τήν ἐπίλυση τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως $y' = f(x,y)$ μέ $y(x_o) = y_o$, στήν περίπτωση πού $f(x,y) \equiv f(x)$, δέν εἶναι παρά ὁ κανόνας τοῦ $1/3$ τοῦ Simpson τῆς ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως.

9. NORMS ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΠΙΝΑΚΩΝ

9.1. Γενικά

Στό παρόν Κεφάλαιο, πού ἀποτελεῖ μιά εἰσαγωγή γιά τά ἑπόμενα τρία τελευταῖα, εἰσάγεται πρῶτα ἡ γνωστή ἀπό τήν Ἀνάλυση ἔννοια τῆς norm ἑνός n-διάστατου διανύσματος, στή συνέχεια ἡ ἀντίστοιχη ἔννοια τῆς norm ἑνός $n \times n$ πίνακα καί τέλος δίνονται ὁρισμένα θεωρήματα (μερικά ἀπό αὐτά χωρίς ἀπόδειξη), πού ἀναφέρονται στή σύγκλιση ἀκολουθιῶν διανυσμάτων καί ἀκολουθιῶν πινάκων.

9.2. Norms διανύσματος

Ἡ norm ἑνός n-διάστατου διανύσματος x, μέ μιγαδικές, γενικά, συνιστῶσες $x_i \mid i=1(1)n$, συμβολίζεται μέ $\|x\|$ καί δίνει, κατά κάποιο τρόπο, μιά ἰδέα γιά τό μέγεθος τοῦ διανύσματος, ἀκριβῶς ὅπως ἡ ἀπόλυτη τιμή καί τό μέτρο δίνουν μιά ἰδέα γιά τό μέγεθος ἑνός πραγματικοῦ καί ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ ἀντίστοιχα. Ἡ norm ἑνός διανύσματος, πού εἶναι ἕνας μή ἀρνητικός ἀριθμός, ὁρίζεται μέ τέτοιο τρόπο, ὥστε νά ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες τρεῖς ἰδιότητες

i) $\|x\| > 0$, ἐκτός ἄν $x = 0$, ὁπότε $\|0\| = 0$

ii) $\|Cx\| = |C|\,\|x\|$, ὅπου C σταθερά (9.1)

iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Στήν πράξη χρησιμοποιοῦνται, πάρα πολύ, τρεῖς διαφορετικές norms, πού προκύπτουν ὅλες ἀπό τόν παρακάτω γενικό τύπο

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \qquad \text{γιά } p=1,2,\infty \tag{9.2}$$

ὅπου θά πρέπει νά τονίσουμε πώς ὅταν στόν τύπο (9.2) χρησιμοποιοῦμε τήν τιμή $p=\infty$, ἐννοοῦμε βασικά τό ὅριο τῆς τιμῆς τοῦ δεύτερου μέλους, ὅταν τό p τείνει στό ἄπειρο. Ἀπό τόν τύπο τώρα (9.2) εὔκολα μποροῦμε νά πάρουμε γιά τίς τρεῖς διαφορετικές norms ὅτι

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \qquad (9.3)$$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

Θά πρέπει νά σημειωθεῖ ὅτι ἡ norm $\|x\|_2$, πού καλεῖται καί Εὐκλείδια norm, δέν ἐκφράζει τίποτε ἄλλο παρά τό μῆκος τοῦ διανύσματος x.

Εἶναι δυνατό νά ἀποδειχτεῖ, σχετικά εὔκολα, ὅτι οἱ τρεῖς διαφορετικές norms (9.2) ἤ (9.3), ἔχουν τίς τρεῖς βασικές ἰδιότητες (9.1).

Παράδειγμα

Νά βρεθοῦν οἱ τρεῖς norms τοῦ διανύσματος $x = [-2\ 3\ -1]^T$, ὅπου γενικά μέ A^T συμβολίζουμε τόν ἀνάστροφο ἑνός πίνακα A.

Λύση

Ἐφαρμόζοντας στή σειρά τούς τύπους (9.3) βρίσκουμε

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{3} |x_i| = |-2| + |3| + |-1| = 6 \ ,$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} = \left[|-2|^2 + |3|^2 + |-1|^2\right]^{1/2} = \sqrt{14} \quad \text{καί}$$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i| = \max(|-2|, |3|, |-1|) = 3 .$$

9.3. Norms πίνακα

Ἡ norm ἑνός $n \times n$ πίνακα A, μέ μιγαδικά, γενικά, στοιχεῖα a_{ij}, $i,j = 1(1)n$, συμβολίζεται μέ $\|A\|$ καί εἶναι ἕνας μή ἀρνητικός ἀριθμός.

Ἡ norm ἑνός πίνακα, ὁρίζεται μέ τέτοιο τρόπο, ὥστε νά ἰσχύουν οἱ παρακάτω τέσσερις ἰδιότητες, οἱ τρεῖς πρῶτες ἀπό τίς ὁποῖες συμπίπτουν μέ τίς ἀντίστοιχες (9.1) τῶν διανυσμάτων

$$\begin{aligned} &\text{i)} && \|A\| > 0, \text{ ἐκτός ἄν } A = 0, \text{ ὁπότε } \|0\| = 0 \\ &\text{ii)} && \|CA\| = |C|\,\|A\|, \text{ ὅπου } C \text{ σταθερά} \\ &\text{iii)} && \|A+B\| \leqq \|A\| + \|B\| \\ &\text{iv)} && \|AB\| \leqq \|A\|\,\|B\| . \end{aligned} \qquad (9.4)$$

Ὁ γενικός ὁρισμός τῆς norm ἑνός πίνακα βασίζεται στόν ὁρισμό τῆς norm ἑνός διανύσματος καί εἶναι ὁ παρακάτω

$$\|A\| = \max_{x} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \qquad (9.5)$$

ὅπου $x \neq 0$ εἶναι ὅλα τά διανύσματα τοῦ n-διάστατου μιγαδικοῦ, γενικά, χώρου. Χρησιμοποιώντας τήν ἰδιότητα (9.1 ii) εὔκολα μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ὁ παρακάτω ὁρισμός γιά τή norm ἑνός πίνακα εἶναι ἰσοδύναμος μέ τόν ὁρισμό (9.5)

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| . \qquad (9.6)$$

Ἀκόμη, χρησιμοποιώντας ὁποιοδήποτε ἀπό τούς δύο ὁρισμούς (9.5) καί (9.6) γιά τήν $\|A\|$, εἶναι δυνατό νά ἀποδειχτεῖ ὅτι οἱ τρεῖς ἀντίστοιχες, πρός τίς (9.3) norms γιά πίνακες, δίνονται ἀπό τούς τύπους

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_j \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| \\ \|A\|_2 &= [\rho(A^H A)]^{1/2} \\ \|A\|_\infty &= \max_i \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| \end{aligned} \qquad (9.7)$$

ὅπου μέ $\rho(B)$ συμβολίζουμε τή φασματική ἀκτίνα τοῦ πίνακα B, δηλαδή τή μεγαλύτερη ἀπό τίς ἀπόλυτες τιμές (μέτρα) τῶν ἰδιοτιμῶν τοῦ πίνακα B καί μέ A^H τό συζυγή ἀνάστροφο τοῦ A.

Παράδειγμα

Νά βρεθοῦν οἱ τρεῖς norms τοῦ πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

7 6

Λύση

Γιά τή $\|A\|_1$ ἔχουμε

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{2} |\alpha_{ij}| = \max\,(|1| + |3|,\ |2| + |4|) = 6 .$$

Ἀντίστοιχα γιά τή $\|A\|_2$ ἔχουμε

$$\|A\|_2 = [\rho(A^H A)]^{1/2} = \left[\rho\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right)\right]^{1/2} = \left[\rho\left(\begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{bmatrix}\right)\right]^{1/2} .$$

Γνωρίζουμε ὅμως ὅτι οἱ ἰδιοτιμές τοῦ πίνακα $\begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{bmatrix}$ εἶναι οἱ ρίζες τῆς ὁρίζουσας $\begin{vmatrix} 10-\lambda & 14 \\ 14 & 20-\lambda \end{vmatrix}$. Αὐτές μέ τή σειρά τους εἶναι οἱ ρίζες της ἐξισώσεως $\lambda^2 - 30\lambda + 4 = 0$, πού εἶναι ἴσες μέ $15 \pm \sqrt{221}$. Ἄρα

$$\|A\|_2 = \left[\max\,(|15 + \sqrt{221}|,\ |15 - \sqrt{221}|)\right]^{1/2} = \sqrt{15 + \sqrt{221}} .$$

Τέλος γιά τήν $\|A\|_\infty$ βρίσκουμε ὅτι

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{2} |\alpha_{ij}| = \max\left(|1| + |2|,\ |3| + |4|\right) = 7 .$$

9.4. Σύγκλιση ἀκολουθιῶν διανυσμάτων καί πινάκων

Στήν τωρινή παράγραφο δίνουμε πρῶτα μερικούς βασικούς ὁρισμούς, πού ἀναφέρονται στή σύγκλιση ἀκολουθιῶν διανυσμάτων καί πινάκων ὑποθέτοντας γνωστά ἀπό τήν Ἀνάλυση τά ἀντίστοιχα, πού ἀναφέρονται στή σύγκλιση ἀκολουθιῶν πραγματικῶν καί μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

Μιά ἀκολουθία n - διάστατων διανυσμάτων $\{x^{(k)}\}$ $|k=0,1,2,\ldots$, ἀντίστοιχων συνιστωσῶν $x_i^{(k)}$ $|i=1(1)n$, λέμε ὅτι ἔχει ὅριο τό μηδενικό διάνυσμα 0 ἤ ἰσοδύναμα ὅτι συγκλίνει στό μηδενικό διάνυσμα, τότε καί μόνο τότε, ἄν οἱ n ἀκολουθίες $\{x_i^{(k)}\}$ $|k=0,1,2,\ldots$, πού σχηματίζονται ἀπό τίς ἀντίστοιχες συνιστῶσες τῶν ὑπόψη διανυσμάτων, ἔχουν ὅριο τό μηδέν. Στήν περίπτωση αὐτή θά γράφουμε $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}=0$ ἤ $x^{(k)}\underset{k\to\infty}{\to} 0$.

Μιά ἀκολουθία n - διάστατων διανυσμάτων $\{x^{(k)}\}$ $|k=0,1,2,\ldots$, ἀντίστοιχων συνιστωσῶν $x_i^{(k)}$ $|i=1(1)n$, λέμε ὅτι ἔχει ὅριο τό σταθερό διάνυσμα x, ἀντίστοιχων συνιστωσῶν x_i $|i=1(1)n$ ἤ ἰσοδύναμα ὅτι συγκλίνει στό διάνυσμα x, τότε καί μόνο τότε, ἄν ἡ ἀκολουθία τῶν διανυσμάτων $\{x^{(k)}-x\}$ $|k=0,1,2,\ldots$ ἔχει ὅριο τό μηδενικό διάνυσμα. Στήν περίπτωση αὐτή θά γράφουμε $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}=x$ ἤ $x^{(k)}\underset{k\to\infty}{\to} x$.

Χρησιμοποιώντας τώρα ὁποιαδήποτε ἀπό τίς τρεῖς norms διανυσμάτων, πού ὁρίστηκαν μέ τίς σχέσεις (9.3), εἶναι δυνατό νά ἀποδειχτεῖ τό παρακάτω Θεώρημα 1, πού τό δίνουμε ἐδῶ χωρίς ἀπόδειξη.

Θεώρημα 1

Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά ἔχουμε

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)}=x \quad \text{εἶναι ἡ} \quad \lim_{k\to\infty} \|x^{(k)}-x\|=0 \ .$$

Ὅσα ἀναφέρθηκαν προηγούμενα σχετικά μέ τούς ὁρισμούς καί τίς ἰδιότητες ἀκολουθιῶν n - διάστατων διανυσμάτων, μποροῦν νά μεταφερθοῦν ἀντίστοιχα σέ ἀκολουθίες n×n πινάκων. Ἔτσι μποροῦμε νά ποῦμε τά παρακάτω.

Μιά ἀκολουθία n×n πινάκων $\{A^{(k)}\}$ $|k=0,1,2,\ldots$, ἀντίστοιχων στοιχείων $\alpha_{ij}^{(k)}$ $|i,j=1(1)n$, λέμε ὅτι ἔχει ὅριο τό μηδενικό πίνακα 0 ἤ ἰσοδύναμα ὅτι συγκλίνει στό μηδενικό πίνακα, τότε καί μόνο τότε, ἄν οἱ n×n ἀκολουθίες $\{\alpha_{ij}^{(k)}\}$ $|k=0,1,2,\ldots$, πού σχηματίζονται ἀπό τά ἀντίστοιχα στοιχεῖα τῶν ὑπόψη πινάκων, ἔχουν ὅριο τό μηδέν. Σέ μιά τέτοια περίπτωση θά γράφουμε $\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)}=0$ ἤ $A^{(k)}\underset{k\to\infty}{\to} 0$.

Μιά ἀκολουθία n×n πινάκων $\{A^{(k)}\}$ $|k=0,1,2,\ldots$, ἀντίστοιχων στοιχείων $\alpha_{ij}^{(k)}$ $|i,j=1(1)n$, λέμε ὅτι ἔχει ὅριο τό σταθερό πίνακα A, ἀντίστοιχων στοιχείων α_{ij} $|i,j=1(1)n$ ἤ ἰσοδύναμα ὅτι συγκλίνει πρός τό σταθερό πίνακα

A, τότε καί μόνο τότε, ἄν ἡ ἀκολουθία $\{A^{(k)}-A\}\,|k=0,1,2,\ldots$ ἔχει ὅριο τό μηδενικό πίνακα. Σέ μιά τέτοια περίπτωση θά γράφουμε $\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = A$ ἤ $A^{(k)} \underset{k\to\infty}{\to} A$.

Χρησιμοποιώντας ὁποιαδήποτε ἀπό τίς τρεῖς norms πινάκων, πού ὁρίστηκαν ἀπό τίς σχέσεις (9.7) εἶναι δυνατό νά ἀποδειχτεῖ τό παρακάτω Θεώρημα 2, πού δίνουμε ἐδῶ χωρίς ἀπόδειξη.

Θεώρημα 2

Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά ἔχουμε $\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = A$ εἶναι ἡ $\lim\limits_{k\to\infty} \| A^{(k)} - A\| = 0$.

Στή συνέχεια δίνουμε τέσσερα θεωρήματα (τό πρῶτο ἀπό αὐτά χωρίς ἀπόδειξη), πού ἀναφέρονται σέ n×n πίνακες. Τά θεωρήματα αὐτά θά χρησιμοποιηθοῦν πάρα πολύ στά ἑπόμενα Κεφάλαια.

Θεώρημα 3

Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά συγκλίνει ἡ ἀκολουθία τῶν διαδοχικῶν δυνάμεων ἑνός n×n πίνακα A (δηλαδή ἡ ἀκολουθία $A^k|k=0,1,2,\ldots$) πρός τό μηδενικό πίνακα 0 εἶναι ἡ $\rho(A)<1$.

Θεώρημα 4

Γιά κάθε n×n πίνακα A ἔχουμε $\|A^k\| \le \|A\|^k$.

Ἀπόδειξη

Ἀρχίζοντας ἀπό τό πρῶτο μέλος τῆς σχέσης πού ἔχουμε νά ἀποδείξουμε, καί ἐφαρμόζοντας κατάλληλα τήν ἰδιότητα (9.4 iv) k φορές παίρνουμε

$$\|A^k\| = \|A^{k-1}.A\| \le \|A^{k-1}\|\,\|A\| = \|A^{k-2}.A\|\,\|A\| \le$$

$$\le \|A^{k-2}\|\,\|A\|\,\|A\| = \|A^{k-2}\|\,\|A\|^2 \le \ldots \le \|A\|^k \ .$$

Θεώρημα 5

Ἱκανή συνθήκη γιά τή σύγκλιση τῆς ἀκολουθίας τῶν διαδοχικῶν δυνάμεων ἑνός n×n πίνακα A πρός τό μηδενικό πίνακα εἶναι ἡ $\|A\|<1$.

'Απόδειξη

'Από τό Θεώρημα 2 έχουμε ότι ικανή και άναγκαία συνθήκη, γιά νά ισχύει ή $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$, εἶναι ή $\lim_{k\to\infty} \|A^k\| = 0$. 'Επειδή όμως, άπό τό Θεώρημα 4, έχουμε ότι $\|A^k\| \leq \|A\|^k$, γιά νά ισχύει ή $\lim_{k\to\infty} \|A^k\| = 0$, άρκεῖ νά ισχύει ή σχέση $\lim_{k\to\infty} \|A\|^k = 0$. 'Αναγκαία και ικανή συνθήκη, γιά νά ισχύει τό τελευταῖο, εἶναι ή $\|A\| < 1$.

Θεώρημα 6

Γιά κάθε $n\times n$ πίνακα A έχουμε $\rho(A) \leq \|A\|$.

'Απόδειξη

"Αν $\lambda_i \mid i=1(1)n$ εἶναι μιά όποιαδήποτε άπό τίς ιδιοτιμές τοῦ πίνακα A και x_i τό άντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα θά έχουμε

$$Ax_i = \lambda_i x_i \qquad \mid i = 1(1)n .$$

Παίρνοντας τίς norms τῶν δύο μελῶν τῆς παραπάνω ισότητας βρίσκουμε

$$\|Ax_i\| = \|\lambda_i x_i\| \qquad \mid i = 1(1)n . \tag{9.8}$$

'Από τό γενικό όρισμό (9.5) τῆς norm ένός $n\times n$ πίνακα A, γιά τό όποιοδήποτε διάνυσμα $x_i \neq 0$, έχουμε τή σχέση

$$\|Ax_i\| \leq \|A\| \, \|x_i\| . \tag{9.9}$$

'Από τήν ιδιότητα (9.1 ii) τῶν norms ένός διανύσματος και γιά κάθε άριθμό λ_i, έχουμε

$$\|\lambda_i x_i\| = |\lambda_i| \, \|x_i\| . \tag{9.10}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τίς σχέσεις (9.9) και (9.10) στήν (9.8) παίρνουμε

$$|\lambda_i| \, \|x_i\| \leq \|A\| \, \|x_i\| \qquad \mid i = 1(1)n .$$

'Οπότε, διαιρώντας τά μέλη τῆς παραπάνω σχέσεως μέ $\|x_i\|$ (πού εἶναι διάφορο ἀπό τό μηδέν, ἀφοῦ τό x_i εἶναι ἰδιοδιάνυσμα) προκύπτει

$$|\lambda_i| \leqq \|A\| \qquad |i=1(1)n$$

δηλαδή

$$\max_i |\lambda_i| \leqq \|A\| .$$

Ἄρα

$$\rho(A) \leqq \|A\| .$$

Παράδειγμα 1

Νά βρεθοῦν οἱ ἀναγκαῖες καί ἱκανές συνθῆκες, ὥστε ἡ ἀκολουθία τῶν διαδοχικῶν δυνάμεων τοῦ $n\times n$ ἄνω τριγωνικοῦ πίνακα T νά συγκλίνει στό μηδενικό πίνακα.

Λύση

Σύμφωνα μέ τό Θεώρημα 3, ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά συγκλίνει ἡ ἀκολουθία τῶν διαδοχικῶν δυνάμεων τοῦ $n\times n$ πίνακα T στό μηδενικό πίνακα, εἶναι ἡ $\rho(T)<1$. Ἐπειδή ὅμως ὁ πίνακας T εἶναι ἄνω τριγωνικός, εἶναι φανερό ὅτι οἱ ἰδιοτιμές του δέν εἶναι παρά τά διαγώνια στοιχεῖα του α_{ii} $|i=1(1)n$. Συνεπῶς $\rho(T)=\max\limits_i|\alpha_{ii}|$. Ἐπομένως ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά τή σύγκλιση τῶν διαδοχικῶν δυνάμεων τοῦ $n\times n$ ἄνω τριγωνικοῦ πίνακα T στό μηδενικό πίνακα εἶναι ἡ

$$\max_i |\alpha_{ii}| < 1$$

ὅπου α_{ii} $|i=1(1)n$ εἶναι τά διαγώνια στοιχεῖα του.

Παράδειγμα 2

Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι, ἄν A εἶναι ἕνας $n\times n$ πραγματικός, συμμετρικός πίνακας τότε $\rho(A)=\|A\|_2$.

Λύση

Ὁ πίνακας A εἶναι ἕνας πραγματικός, συμμετρικός πίνακας. Αὐτό σημαίνει ὅτι $A^H = A$. Ἐπομένως

$$\| A \|_2 = [\rho(A^H A)]^{1/2} = [\rho(A^2)]^{1/2} \,. \tag{9.11}$$

Γιά νά ἀποδείξουμε τή σχέση πού δόθηκε, ἔχοντας ὑπόψη τήν (9.11), ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε ὅτι

$$\rho(A^2) = [\rho(A)]^2 \,. \tag{9.12}$$

Πραγματικά, ἄν $\lambda_i \,|\, i = 1(1)n$ εἶναι μιά ἰδιοτιμή τοῦ πίνακα A καί x_i τό ἀντίστοιχο ἰδιοδιάνυσμα ἔχουμε

$$Ax_i = \lambda_i x_i \qquad |\, i = 1(1)n \,. \tag{9.13}$$

Ἐπομένως, ἄν πολλαπλασιάσουμε τήν παραπάνω σχέση ἀπό τά ἀριστερά μέ τόν πίνακα A βρίσκουμε

$$AAx_i = \lambda_i Ax_i \qquad |\, i = 1(1)n$$

ἤ κάνοντας χρήση τῆς (9.13)

$$A^2 x_i = \lambda_i \lambda_i x_i \qquad |\, i = 1(1)n$$

ἤ

$$A^2 x_i = \lambda_i^2 x_i \qquad |\, i = 1(1)n \,.$$

Ἀπό τήν τελευταία σχέση συμπεραίνουμε πώς, ἄν λ_i εἶναι μιά ἰδιοτιμή τοῦ πίνακα A μέ ἰδιοδιάνυσμα x_i, τότε λ_i^2 εἶναι μιά ἰδιοτιμή τοῦ πίνακα A^2 μέ ἀντίστοιχο ἰδιοδιάνυσμα πάλι x_i. Ἐπομένως ἔχουμε

$$\rho(A^2) = \max_i |\lambda_i^2| = \max_i |\lambda_i|^2 = \left(\max_i |\lambda_i|\right)^2 = [\rho(A)]^2$$

καί ἡ σχέση (9.12) ἀποδείχτηκε. Ἄρα

$$\rho(A) = \|A\|_2 \quad .$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἄν x εἶναι ἕνα διάνυσμα τοῦ n-διάστατου χώρου μέ συνιστῶσες x_i $|i = 1(1)n$, νά ἀποδειχτεῖ ὅτι τό $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ εἶναι μιά norm διανύσματος.

2. Νά δειχτεῖ ὅτι $\|x\|_2^2 \leqq \|x\|_1 \|x\|_\infty$, ὅπου x ἕνα τυχόν n-διάστατο διάνυσμα.

3. Νά δειχτεῖ ὅτι $\|A\|_2^2 \leqq \|A\|_1 \|A\|_\infty$, ὅπου A ἕνας πραγματικός πίνακας τάξης n.

4. Ἄν A εἶναι ἕνας πραγματικός πίνακας τάξης n μέ στοιχεῖα α_{ij}, τότε μέ τή βοήθεια τοῦ ὁρισμοῦ τῆς norm ἑνός πίνακα : $\|A\| \equiv \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$, νά ἀποδειχτοῦν οἱ σχέσεις

i) $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}|$ καί

ii) $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|$

5. Μέ τήν εὕρεση τῶν τριῶν γνωστῶν norms καί τῆς φασματικῆς ἀκτίνας $\rho(A)$ τοῦ πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, νά ἐπαληθευτοῦν οἱ σχέσεις διατάξεως πού ἰσχύουν μεταξύ τῶν $\|A\|$ καί $\rho(A)$.

10. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

10.1. Γενικά

Τό πρόβλημα τῆς ἐπιλύσεως γραμμικῶν συστημάτων n ἐξισώσεων μέ n ἀγνώστους εἶναι γνωστό καί ἀντιμετωπίζεται μέ ἐπιτυχία ἀκόμη καί στά Στοιχειώδη Μαθηματικά, ὅπου ὁ ἀριθμός n εἶναι συνήθως ἀρκετά μικρός. Οἱ σύγχρονοι ὅμως κλάδοι τῆς Μηχανικῆς, τῆς Φυσικῆς, τῆς Ἐπιχειρησιακῆς Ἔρευνας κλπ, ἀπαιτοῦν στίς ἐφαρμογές τους τήν ἐπίλυση γραμμικῶν συστημάτων μέ ἀρκετά μεγάλο n. Πολλές φορές εἶναι n>100 ἤ ἀκόμη καί n>1000. Ὅπως τονίστηκε καί μέ τό παράδειγμα, πού παραθέσαμε στό Κεφάλαιο τῆς Εἰσαγωγῆς, ἡ ἐπίλυση, μέ τίς μεθόδους τῆς Ἄλγεβρας, ἑνός γραμμικοῦ συστήματος μέ μεγάλο n, ἀκόμη καί μέ τή βοήθεια ἑνός Η.Υ., εἶναι ἀπό τήν ἄποψη τοῦ χρόνου ἀσύμφορη ἄν ὄχι ἀδύνατη. Γιά τό σκοπό αὐτό θεωρήθηκαν καί ἀναπτύχτηκαν, μέ συστηματικό τρόπο, διάφορες μέθοδοι, γιά τήν ἐπίλυση γραμμικῶν συστημάτων. Αὐτές διακρίνονται σέ δύο μεγάλες κατηγορίες, στίς ἄμεσες καί στίς ἔμμεσες ἤ ἐπαναληπτικές μεθόδους.

Καί στίς δύο περιπτώσεις τῶν ἄμεσων καί ἐπαναληπτικῶν μεθόδων σάν γενική μορφή τοῦ συστήματος, πού θά ἐπιλύουμε, θά θεωροῦμε τήν ἀκόλουθη

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned} \tag{10.1}$$

Χρησιμοποιώντας πίνακες, τό παραπάνω σύστημα μπορεῖ νά γραφτεῖ συνοπτικά καί ὡς ἑξῆς

$$Ax = b \tag{10.2}$$

ὅπου

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad (10.3)$$

Στό σύστημα (10.1) ἤ (10.2) θά θεωροῦμε πάντοτε ὅτι $\det(A) \neq 0$ (ὅπου μέ $\det(A)$ συμβολίζουμε τήν ὀρίζουσα τοῦ πίνακα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων A) ἔτσι ὥστε τό σύστημα πού δόθηκε νά ἔχει μία καί μόνο λύση. Στήν περίπτωση πού θεωροῦμε, ἡ ἀναλυτική ἔκφραση τῆς λύσης τοῦ συστήματος (10.2) μπορεῖ νά δοθεῖ ἀμέσως, μέ τή βοήθεια πινάκων. Αὐτό γιατί στήν περίπτωσή μας ὑπάρχει ὁ ἀντίστροφος τοῦ A, ἔστω A^{-1}, ὁπότε πολλαπλασιάζοντας τά μέλη τῆς (10.2) ἀπό τά ἀριστερά ἐπί A^{-1} λαβαίνουμε τή μονοσήμαντα ὁρισμένη λύση $x = A^{-1}b$. Θεωρητικά ἡ ἱκανοποίηση τῆς συνθήκης $\det(A) \neq 0$ ἐξασφαλίζει καί τό μονοσήμαντο τῆς λύσης. Στήν πράξη ὅμως ἡ κατάσταση δέν εἶναι τόσο ἁπλή. Πολλές φορές ἐμφανίζονται κρίσιμες καταστάσεις σάν συνέπεια τοῦ γεγονότος ὅτι ἐργαζόμαστε πάντοτε χρησιμοποιώντας πεπερασμένο πλῆθος δ. ἤ σ.ψ. Στήν πράξη εἶναι δυνατό νά ἔχουμε $\det(A) = 0$, καί αὐτό νά ὀφείλεται ἀποκλειστικά καί μόνο στήν ἀκρίβεια, πού χρησιμοποιοῦμε. Προβλήματα ἀκόμη δημιουργοῦνται καί στήν περίπτωση ὅπου ἡ $\det(A)$ βρίσκεται στήν περιοχή τοῦ μηδενός γιά τήν ἀκρίβεια πού ἐργαζόμαστε. Στήν περίπτωση αὐτή μιά μικρή μεταβολή στούς συντελεστές τοῦ συστήματος εἶναι δυνατό νά ἐπιφέρει μεγάλη μεταβολή στή μονοσήμαντα ὁρισμένη λύση τοῦ συστήματος καί συνεπῶς νά μήν μπορεῖ νά θεωρηθεῖ αὐτή ἄξια ἐμπιστοσύνης. Αὐτό φαίνεται καθαρά στά δύο συστήματα, πού δίνουμε παρακάτω

$$\begin{aligned} 2x + 6y &= 8 \\ 2x + 6.00001y &= 8.00001 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + 6y &= 8 \\ 2x + 5.99999y &= 8.00002 \end{aligned} \qquad (10.4)$$

Τό δεύτερο σύστημα προκύπτει ἀπό τό πρῶτο μεταβάλοντας δύο ἀπό τούς ἕξι συντελεστές του, τόν πρῶτο κατά δύο μονάδες τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξης (ἀπό 6.00001 σέ 5.99999) καί τό δεύτερο κατά μιά μονάδα τῆς ἴδιας τάξης (ἀπό 8.00001 σέ 8.00002). Καί ὅμως, ἐνῶ ἡ λύση τοῦ πρώτου ἀπό τά δύο συστήματα (10.4) εἶναι ἡ x=1, y=1, ἡ λύση τοῦ δεύτερου συστήματος εἶναι ἡ x=10, y=-2. Δηλαδή βλέπουμε ὅτι εἶναι δυνατό μιά μικρή μεταβολή στούς συντελεστές νά ἐπιφέρει μεγάλη μεταβολή στή λύση. Αὐτό βέβαια συμβαίνει, γιατί ἡ ὀρίζουσα τοῦ πίνακα τῶν συντελεστῶν τοῦ πρώτου συστήματος, det(A) =0.00002, ὅπως καί τοῦ δεύτερου (-0.00002), βρίσκεται στήν περιοχή τοῦ μηδενός.γιά τήν ἀκρίβεια μέ τήν ὁποία ἐργαζόμαστε. Τέτοια συστήματα θά καλοῦνται ἀσταθή. Εἶναι φανερό ὅτι δέν μποροῦμε νά ἔχουμε καμιά ἐμπιστοσύνη στή λύση ἑνός ἀσταθοῦς συστήματος καί ἐπομένως δέ θά τή δεχόμαστε. Ἀντίθετα θά δεχόμαστε τή λύση ἑνός μή ἀσταθοῦς συστήματος, πού θά καλεῖται ἀπό ἐδῶ καί πέρα εὐσταθές. Στή συνέχεια θά ὑποθέτουμε ὅτι τό σύστημα, πού προσπαθοῦμε νά ἐπιλύσουμε, εἶναι εὐσταθές.

10.2. Ἄμεσες μέθοδοι

10.2.1. Μέθοδος ἀπαλοιφῆς τοῦ Gauss

10.2.1.1. Περιγραφή τῆς μεθόδου

Ἡ μέθοδος ἀπαλοιφῆς τοῦ Gauss, πού θά ἀναπτύξουμε, εἶναι ἡ ἁπλούστερη ἀπό ὅλες τίς ἄμεσες μεθόδους ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως γραμμικῶν συστημάτων τῆς μορφῆς (10.1) καί εἶναι γνωστή ἀπό τά Στοιχειώδη Μαθηματικά, μέ τή μόνη διαφορά ὅτι ἐδῶ ἀναπτύσσεται κατά τρόπο συστηματικό καί πού προγραμματίζεται εὔκολα σ' ἕνα Η.Υ.

Τό πρῶτο βῆμα γιά τήν ἐπίλυση τοῦ συστήματος (10.1) μέ τή μέθοδο ἀπαλοιφῆς τοῦ Gauss εἶναι νά φυλάξουμε τήν πρώτη ἀπό τίς ἐξισώσεις,γιά νά τή χρησιμοποιήσουμε ἀργότερα, καί νά ἀπαλείψουμε τόν ἄγνωστο x_1 ἀπό ὅλες τίς ὑπόλοιπες n-1 ἐξισώσεις, προσθέτοντας κατάλληλα πολλαπλάσια τῆς πρώτης ἐξισώσεως σέ κάθε μία ἀπό τίς ὑπόλοιπες. Ἔτσι, ἄν χρησιμοποιήσουμε τούς συμβολισμούς

$$\left.\begin{aligned} a_{ij}^{(1)} &= a_{ij} \\ b_i^{(1)} &= b_i \end{aligned}\right| \; i=1(1)n,\; j=1(1)n$$

γιά τούς άρχικούς συντελεστές τοῦ συστήματος, τότε, μέ τήν προϋπόθεση ὅτι $a_{11}^{(1)} \neq 0$, οἱ πολλαπλασιαστές, πού θά χρησιμοποιηθοῦν γιά τόν πολλαπλασιασμό τῆς πρώτης ἐξισώσεως, θά δίνονται ἀπό τίς σχέσεις

$$m_{i1} = -\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \qquad \Big| i=2(1)n\ .$$

Οἱ νέοι συντελεστές στίς τελευταῖες n-1 ἐξισώσεις, πού θά προκύψουν, ἄν πολλαπλασιάσουμε τήν πρώτη ἐξίσωση, πού φυλάξαμε, ἐπί m_{i1} $|i=2(1)n$ καί προσθέσουμε τά μέλη της στήν i κατά σειρά ἐξίσωση θά βρίσκονται ἀπό τίς σχέσεις

$$\left.\begin{aligned} a_{ij}^{(2)} &= a_{ij}^{(1)} + m_{i1}\,a_{1j}^{(1)} \\ b_i^{(2)} &= b_i^{(1)} + m_{i1}\,b_1^{(1)} \end{aligned}\right| \; i=2(1)n,\quad j=1(1)n$$

Εἶναι δυνατό νά ἐπαληθευτεῖ ἀμέσως ὅτι, μέ τόν παραπάνω τρόπο, ὁ ἄγνωστος x_1 ἀπαλείφεται ἀπό τίς n-1 τελευταῖες ἐξισώσεις. Ἄν, ὅπως ἀναφέραμε προηγούμενα φυλάξουμε τήν πρώτη ἐξίσωση καί θεωρήσουμε τό σύστημα τῶν τελευταίων n-1 ἐξισώσεων, αὐτό θά ἔχει τήν ἴδια γενική μορφή (10.1) μέ τή μόνη διαφορά ὅτι θά ἀποτελεῖται ἀπό n-1 ἐξισώσεις, πού θά περιέχουν τούς n-1 ἀγνώστους x_i $|i=2(1)n$. Συγκεκριμένα θά εἶναι τό ἑξῆς

$$\begin{aligned} a_{22}^{(2)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\ &\;\vdots \\ a_{n2}^{(2)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n &= b_n^{(2)} \end{aligned}$$

Ἔτσι, μέ τήν προϋπόθεση ὅτι $a_{22}^{(2)} \neq 0$, ἡ προηγούμενη διαδικασία μπορεῖ νά έπαναληφτεῖ γιά τήν άπαλοιφή τώρα τοῦ άγνώστου x_2 κ.ο.κ. Συνεπῶς ἄν ἡ αὐτή διαδικασία έπαναληφτεῖ n-1 φορές συνολικά θά πάρουμε τελικά μιά έξίσωση, πού θά περιέχει μόνο τόν ἄγνωστο x_n καί πού θά μπορεῖ νά λυθεῖ ἀμέσως.

Τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων, πού φυλᾶμε κάθε φορά μαζί μέ τήν τελευταία, πού θά προκύψει εἶναι τό ἀκόλουθο

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\ &\vdots \\ a_{nn}^{(n)}x_n &= b_n^{(n)} \end{aligned} \tag{10.5}$$

Εἶναι φανερό, ἀπό τόν τρόπο, πού προῆλθε τό σύστημα (10.5) ὅτι αὐτό εἶναι ἰσοδύναμο πρός τό ἀρχικό (10.1). Ἡ λύση τοῦ (10.5), πού θά εἶναι καί λύση τοῦ ἀρχικοῦ (10.1), μπορεῖ νά προκύψει εὔκολα ἐπιλύοντας πρῶτα τήν τελευταία ἐξίσωση (μέ τήν προϋπόθεση ὅτι $a_{nn}^{(n)} \neq 0$), μετά τήν προτελευταία κλπ καί τέλος τήν πρώτη.

Ἡ λύση λοιπόν τοῦ συστήματος βρίσκεται μέ τή βοήθεια τῶν σχέσεων

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}} \\ x_i &= \frac{1}{a_{ii}^{(i)}} \left(b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j \right) \Big| i = n-1(-1)1 \, . \end{aligned} \tag{10.6}$$

Οἱ ἐξισώσεις πού φυλάγονται καί σχηματίζουν τελικά τίς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (10.5) καλοῦνται ὁδηγοί ἐξισώσεις ἤ ὁδηγοί γραμμές καί οἱ πρῶτοι συντελεστές τῶν ὁδηγῶν ἐξισώσεων $a_{ii}^{(i)} \,|\, i = 1(1)n$ καλοῦνται ὁδηγά στοιχεῖα. Ἡ μέθοδος, πού περιγράψαμε, εἶναι γνωστή σάν μέθοδος ἀπαλοιφῆς τοῦ Gauss χωρίς ὁδήγηση.

Παράδειγμα

Νά ἐπιλυθεῖ, μέ τή μέθοδο ἀπαλοιφῆς τοῦ Gauss χωρίς ὁδήγηση, τό σύστημα

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1$$
$$3x_1 + x_2 + 4x_3 = 11$$
$$2x_1 - 4x_2 + 11x_3 = 28$$

Λύση

Ἡ πρώτη ἀπό τίς τρεῖς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος φυλάγεται καί γιά τήν ἀπαλοιφή τοῦ ἀγνώστου x_1, ἀπό τίς δύο τελευταῖες ἐξισώσεις, χρησιμοποιοῦνται οἱ πολλαπλασιαστές

$$m_{21} = -\frac{3}{4} = -0.75 \quad \text{καί} \quad m_{31} = -\frac{2}{4} = -0.5 \,.$$

Πολλαπλασιάζουμε τώρα τά μέλη τῆς πρώτης ἐξισώσεως, πού φυλάγαμε, πρῶτα μέ m_{21} ἔπειτα μέ m_{31} καί τά προσθέτουμε ἀντίστοιχα στά μέλη τῆς δεύτερης καί τρίτης ἐξισώσεως. Ἔτσι, μετά τήν ἀπαλοιφή τοῦ ἀγνώστου x_1, οἱ δύο τελευταῖες ἐξισώσεις θά ἔχουν τή μορφή

$$-0.5x_2 + 6.25x_3 = 10.25$$
$$-\ 5x_2 + 12.5x_3 = 27.5$$

Φυλάγουμε τώρα τήν πρώτη ἀπό τίς παραπάνω ἐξισώσεις καί γιά τήν ἀπαλοιφή τοῦ ἀγνώστου x_2 χρησιμοποιεῖται ὁ πολλαπλασιαστής

$$m_{32} = -\frac{-5}{-0.5} = -10 \,.$$

Ἔτσι προκύπτει ἡ ἐξίσωση

$$-50x_3 = -75 \,.$$

Συνεπῶς τό σύστημα πού δόθηκε εἶναι ἰσοδύναμο πρός τό

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \\
-0.5x_2 + 6.25x_3 &= 10.25 \\
-50x_3 &= -75
\end{aligned}
$$

Ἡ λύση τοῦ παραπάνω συστήματος βρίσκεται εὔκολα ἀπό τίς ἀντίστοιχες σχέσεις (10.6). Ἔτσι παίρνουμε

$$x_3 = \frac{-75}{-50} = 1.5$$

$$x_2 = \frac{1}{-0.5}\,(10.25 - 6.25x_3) = -1.75$$

$$x_1 = \frac{1}{4}\,(1 - 2x_2 + 3x_3) = 2.25$$

Στήν περίπτωση, πού ἡ ἐπίλυση τοῦ γραμμικοῦ συστήματος γίνεται μέ τό χέρι ἤ μέ τή βοήθεια μιᾶς ἀριθμομηχανῆς καί ὄχι μέ ἕναν Η.Υ., τότε στό χαρτί πού ἐργαζόμαστε ἀκολουθεῖται μία διάταξη, πού διευκολύνει τούς ὑπολογισμούς. Σ' αὐτήν παραλείπεται τελείως ἡ καταγραφή τῶν ἀγνώστων, οἱ ἐξισώσεις γράφονται μέ μορφή πινάκων, τά ὁδηγά στοιχεῖα ὑπογραμμίζονται καί οἱ πολλαπλασιαστές γράφονται ἀριστερά ἀπό τίς ἀντίστοιχες γραμμές σέ μιά νέα στήλη. Ἔτσι ἡ διάταξη πού ἀκολουθεῖται στήν περίπτωση τοῦ προηγούμενου παραδείγματος, θά εἶναι ἡ παρακάτω

m	A			b
	$\underline{4}$	2	-3	1
-0.75	3	1	4	11
-0.5	2	-4	11	28
		$\underline{-0.5}$	6.25	10.25
-10		-5	12.5	27.5
			$\underline{-50}$	-75
x^T	2.25	-1.75	1.50	

ὅπου x^T συμβολίζει τό διάνυσμα-γραμμή πού εἶναι ὁ ἀνάστροφος πίνακας τοῦ διανύσματος-στήλη x.

Στή θεωρία, πού ἀναπτύξαμε μέχρι τώρα, ἡ ἐκλογή τῶν ὁδηγῶν στοιχείων, πού γίνεται κατά μῆκος τῆς κύριας διαγωνίου, γίνεται γιά χάρη εὐκολίας. Ἡ ὅλη, ὅμως, διαδικασία εἶναι δυνατό νά σταματήσει, ἄν κάποιο ἀπό τά ὁδηγά στοιχεῖα (ἐκτός ἀπό τό τελευταῖο) εἶναι μηδέν, γιατί τότε οἱ ἀντίστοιχοι πολλαπλασιαστές δέν ὁρίζονται. Φυσικά ὅταν τό τελευταῖο ὁδηγό στοιχεῖο εἶναι μηδέν αὐτό σημαίνει ὅτι $\det(A)=0$, καί ἑπομένως τό ἀρχικό σύστημα δέν ἔχει μονοσήμαντα ὁρισμένη λύση.

Γιά τήν ὑπερνίκηση τῆς δυσκολίας, πού μπορεῖ νά παρουσιαστεῖ, ὅπως ἀναφέραμε παραπάνω, ἔχουν προταθεῖ κατά καιρούς διάφορες παραλλαγές τῆς μεθόδου πού περιγράψαμε. Μία ἀπό αὐτές εἶναι καί ἡ γνωστή σάν μέθοδος ἀπαλοιφῆς τοῦ Gauss μέ μερική ὁδήγηση. Στή μέθοδο αὐτή ἀντί νά ἐκλέγεται σάν ὁδηγό στοιχεῖο τό πρῶτο τῆς ὁδηγοῦ ἐξισώσεως, ἤ μέ ἄλλα λόγια τό πρῶτο στοιχεῖο τῆς πρώτης στήλης τοῦ ἐλάσσονα πίνακα, δηλαδή τοῦ πίνακα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων τοῦ συστήματος, πού ἀπομένει γιά ἐπίλυση σέ κάθε βῆμα, ἐκλέγεται τό στοιχεῖο τῆς πρώτης στήλης τοῦ ἐλάσσονα πίνακα, πού ἔχει τή μεγαλύτερη ἀπόλυτη τιμή. Εἶναι φανερό, τότε, πώς ἡ ἀντίστοιχη γραμμή ἀποτελεῖ τήν ὁδηγό γραμμή. Ἄν τό ἀπόλυτα μεγαλύτερο στοιχεῖο, πού ἐκλέγεται ἀπό τήν πρώτη στήλη τοῦ ἐλάσσονα πίνακα συμβαίνει νά εἶναι μηδέν, τότε ὁ ἀρχικός πίνακας εἶναι μή ὁμαλός, ἰσχύει δηλαδή $\det(A)=0$, καί ἑπομένως τό σύστημα δέν ἔχει μονοσήμαντα ὁρισμένη λύση. Ὁ τρόπος τῆς ἐκλογῆς τοῦ ὁδηγοῦ στοιχείου στή μέθοδο μέ μερική ὁδήγηση δίνει πολλαπλασιαστές, πού ἔχουν ἀπόλυτες τιμές μικρότερες ἤ ἴσες μέ τή μονάδα καί ἑπομένως παρουσιάζει ἀκόμη τό πλεονέκτημα, κατά τούς ἀντίστοιχους πολλαπλασιασμούς μέ τούς συντελεστές τῆς ὁδηγοῦ ἐξισώσεως, νά μή μεγαλώνει παραπέρα τά τυχόν σφάλματα, πού ὑπάρχουν σ' αὐτούς.

Παρακάτω δίνεται ἡ ἐπίλυση τοῦ συστήματος τοῦ προηγούμενου παραδείγματος ἀκολουθώντας ὅμως τώρα τή μέθοδο ἀπαλοιφῆς τοῦ Gauss μέ μερική ὁδήγηση. Σ' αὐτή τήν περίπτωση, ὅπως μέχρι τώρα ἀναφέραμε, οἱ ὁδηγοί ἐξισώσεις ὁρίζονται ἀφοῦ πρῶτα ὁριστοῦν τά "ὁδηγά στοιχεῖα" μέ τόν τρόπο πού περιγράψαμε, καί ὅτι τελικά οἱ ὁδηγοί ἐξισώσεις, ἀπό τή τελευταία πρός τήν πρώτη, χρησιμοποιοῦνται γιά τήν εὕρεση τῶν τιμῶν τῶν ἀντίστοιχων ἀγνώστων.

Ἡ ἀντίστοιχη διάταξη στό χαρτί ἐργασίας θά εἶναι ἡ ἀκόλουθη

m	A			b
	4	2	-3	1
-0.75	3	1	4	11
-0.5	2	-4	11	28
-0.1		-0.5	6.25	10.25
		-5	12.5	27.5
			5	7.5
x^T	2.25	-1.75	1.50	

10.2.1.2. Ἐπίλυση γραμμικῶν συστημάτων μέ τόν ἴδιο πίνακα συντελεστῶν ἀγνώστων

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἔχουμε γιά ἐπίλυση ℓ γραμμικά συστήματα, πού ἔχουν ὅλα τόν ἴδιο πίνακα συντελεστῶν ἀγνώστων A, ὅπως δίνεται στίς σχέσεις (10.3). Τότε τά ℓ αὐτά γραμμικά συστήματα μποροῦν νά γραφτοῦν μέ τή μορφή ἐξισώσεων πινάκων ὡς ἑξῆς

$$Ax_k = b_k \;|k = 1(1)\ell \tag{10.7}$$

ὅπου $x_k \;|k = 1(1)\ell$ εἶναι τό διάνυσμα-στήλη τῶν ἀγνώστων, στήν k στή σειρά ἐξίσωση, καί $b_k \;|k = 1(1)\ell$ τό διάνυσμα-στήλη τῶν δεύτερων μελῶν τῆς ἴδιας k ἐξισώσεως. Εἶναι δηλαδή

$$x_k = [x_{1k}\; x_{2k}\; \dots\; x_{nk}]^T \quad \text{καί} \quad b_k = [b_{1k}\; b_{2k}\; \dots\; b_{nk}]^T. \tag{10.8}$$

Τά ℓ γραμμικά συστήματα τῶν ἐξισώσεων (10.7) μποροῦν πάλι νά γραφτοῦν μέ τή μορφή πινάκων σέ μία καί μόνο ἐξίσωση πινάκων ὡς ἑξῆς

$$AX = B \tag{10.9}$$

ὅπου στήν παραπάνω ἐξίσωση (10.9) οἱ πίνακες X καί B εἶναι δύο $n\times\ell$ πίνακες, τίς στῆλες τῶν ὁποίων ἀποτελοῦν τά διανύσματα-στῆλες τῶν ἀγνώστων καί τῶν δεύτερων μελῶν τῶν ἐξισώσεων (10.7), πού δίνονται ἀναλυτικά ἀπό τίς (10.8). Συγκεκριμένα ἔχουμε

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1\ell} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2\ell} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{n\ell} \end{bmatrix} \text{ καί } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1\ell} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2\ell} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{n\ell} \end{bmatrix} \tag{10.10}$$

Θεωρητικά ἡ λύση τοῦ συστήματος (10.9) πετυχαίνεται εὔκολα, μέ τήν προϋπόθεση ὅτι $\det(A) \neq 0$ (ὁπότε ὁ ἀντίστροφος A^{-1} τοῦ A ὑπάρχει) πολλαπλασιάζοντας τήν (10.9) ἀπό τά ἀριστερά ἐπί A^{-1}. Ἔτσι βρίσκουμε

$$X = A^{-1} B$$

καί οἱ στῆλες τοῦ πίνακα, πού ἀποτελεῖ τό γινόμενο $A^{-1}B$ δίνουν στή σειρά τίς μονοσήμαντα ὁρισμένες λύσεις τῶν ℓ γραμμικῶν συστημάτων (10.7). Στήν πράξη, γιά τήν εὕρεση τῶν λύσεων τῶν συστημάτων (10.7), ἀκολουθοῦμε τή μέθοδο ἀπαλοιφῆς τοῦ Gauss χωρίς ὁδήγηση ἤ μέ μερική ὁδήγηση. Ἡ μόνη διαφορά εἶναι πώς, ἀντί νά ἔχουμε πρός τά δεξιά τοῦ πίνακα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων μιά στήλη δεύτερων μελῶν, ἔχουμε ℓ στῆλες δεύτερων μελῶν καί συνεπῶς οἱ πράξεις πού στήν προηγούμενη παράγραφο τίς ἐκτελούσαμε σέ μιά στήλη, τίς ἐκτελοῦμε τώρα συγχρόνως καί στίς ℓ στῆλες τῶν δεύτερων μελῶν. Γιά τήν καλύτερη κατανόηση τῆς θεωρίας, πού ἀναπτύχτηκε, δίνουμε στή συνέχεια ἕνα συγκεκριμένο παράδειγμα.

Παράδειγμα

Νά ἐπιλυθοῦν συγχρόνως μέ τή μέθοδο ἀπαλοιφῆς τοῦ Gauss μέ μερική ὁδήγηση τά παρακάτω δύο συστήματα

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 &= 11 \\ 2x_1 - 4x_2 + 11x_3 &= 28 \end{aligned} \qquad \text{καί} \qquad \begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 &= 8 \\ 2x_1 - 4x_2 + 11x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Λύση

Ἐπειδή ὁ πίνακας τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων στά δύο συστήματα εἶναι ὁ ἴδιος, αὐτά μποροῦν νά γραφτοῦν σέ μιά καί μόνο ἐξίσωση πινάκων καί ἐπομένως μποροῦν νά ἐπιλυθοῦν συγχρόνως. Ἔτσι παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 8 \\ 28 & 9 \end{bmatrix} \qquad (10.11)$$

ὅπου γιά νά διακρίνονται μεταξύ τους οἱ ἄγνωστοι τῶν δύο συστημάτων προστέθηκε καί δεύτερος δείκτης σ' αὐτούς, πού χαρακτηρίζει τό σύστημα (1 γιά τό πρῶτο σύστημα καί 2 γιά τό δεύτερο).

Ἄν τώρα γιά τήν ἐπίλυση τῆς παραπάνω ἐξισώσεως πινάκων (10.11) ἀκολουθήσουμε τή μέθοδο ἀπαλοιφῆς τοῦ Gauss μέ μερική ὁδήγηση, τότε ἡ διάταξη τῶν διάφορων στοιχείων στό χαρτί ἐργασίας θά εἶναι ὅπως δίνεται παρακάτω

m	A			B	
	$\underline{4}$	2	-3	1	3
-0.75	3	1	4	11	8
-0.5	2	-4	11	28	9
-0.1		-0.5	6.25	10.25	5.75
		$\underline{-5}$	12.5	27.5	7.5
			$\underline{5}$	7.5	5
x_1^T	2.25	-1.75	1.50		
x_2^T	1	1	1		

Ἐπομένως ἡ λύση τοῦ πρώτου συστήματος εἶναι ἡ

$$x_1 = 2.25, \quad x_2 = -1.75, \quad x_3 = 1.50$$

ἐνῶ ἡ λύση τοῦ δεύτερου συστήματος εἶναι ἡ

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1.$$

10.2.1.3. Ἀντιστροφή πίνακα

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι μᾶς δίνεται ἕνας πίνακας A τῆς γενικῆς μορφῆς (10.3), μέ $\det(A) \neq 0$, καί ζητεῖται νά βρεθεῖ ὁ ἀντίστροφός του. Ἄν γιά μιά στιγμή, καλέσουμε μέ X, τόν ἀντίστροφο τοῦ πίνακα A, καί μέ I, τό μοναδιαῖο πίνακα τῆς ἴδιας τάξης n, τότε θά ἰσχύει ἡ σχέση

$$AX = I. \tag{10.12}$$

Ἡ παραπάνω ὅμως ἐξίσωση πινάκων (10.12) εἶναι τῆς ἴδιας μορφῆς μέ τή (10.9), μέ τήν προϋπόθεση βέβαια ὅτι $B = I$. Ἐπομένως ἡ (10.12) μπορεῖ νά ἀναλυθεῖ σ' ἕνα πλῆθος n ἐξισώσεων πινάκων (γραμμικῶν συστημάτων) τῆς μορφῆς

$$Ax_k = b_k \quad |k = 1(1)n$$

ὅπου x_k $|k = 1(1)n$ εἶναι ἡ k στή σειρά στήλη τοῦ πίνακα $X(\equiv A^{-1})$ καί b_k $|k = 1(1)n$ ἡ k στήλη τοῦ μοναδιαίου πίνακα I. Ἐπομένως ἡ εὕρεση τοῦ ἀντίστροφου ἑνός πίνακα ἀνάγεται τελικά στήν ἐπίλυση ἑνός γραμμικοῦ συστήματος μέ περισσότερα ἀπό ἕνα (n συγκεκριμένα) δεύτερα μέλη. Αὐτή πετυχαίνεται εὔκολα, ἄν ἀκολουθήσουμε τή μέθοδο πού ἀναπτύχτηκε στήν προηγούμενη παράγραφο.

Παράδειγμα

Νά βρεθεῖ ὁ ἀντίστροφος τοῦ πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & 11 \end{bmatrix}$$

μέ τή μέθοδο άπαλοιφής τοῦ Gauss χωρίς ὁδήγηση.

Λύση

Ακολουθώντας τή διάταξη τοῦ παραδείγματος τῆς προηγούμενης παραγράφου, ὅπου ὅμως τώρα ὁ πίνακας B εἶναι ὁ μοναδιαῖος πίνακας τάξης 3, θά ἔχουμε

m	A			I		
	4	2	-3	1	0	0
-0.75	3	1	4	0	1	0
-0.5	2	-4	11	0	0	1
		-0.5	6.25	-0.75	1	0
-10		-5	12.5	-0.5	0	1
			-50	7	-10	1
x_1^T	0.27	-0.25	-0.14			
x_2^T	-0.10	0.50	0.20			
x_3^T	0.11	-0.25	-0.02			

Επομένως ὁ ἀντίστροφος τοῦ πίνακα A εἶναι ὁ

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.27 & -0.10 & 0.11 \\ -0.25 & 0.50 & -0.25 \\ -0.14 & 0.20 & -0.02 \end{bmatrix}$$

10.2.1.4 Ὑπολογισμός ὁρίζουσας

Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι ἔχουμε νά ὑπολογίσουμε τήν τιμή τῆς ὁρίζουσας, det(A), τοῦ πίνακα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων τοῦ συστήματος (10.1), πού ἔχει τή μορφή (10.3). Δηλαδή ζητοῦμε νά ὑπολογίσουμε τήν

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ἄν τώρα στόν ἀντίστοιχο πίνακα A, καί μόνο, ἐφαρμοστεῖ ἡ διαδικασία τῆς μεθόδου ἀπαλοιφῆς τοῦ Gauss χωρίς ὁδήγηση, τότε τό ἀποτέλεσμα θά εἶναι ἡ εὕρεση τοῦ πίνακα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων τοῦ συστήματος (10.5). Ἐπειδή ὅμως γιά τήν εὕρεση τοῦ τελευταίου πίνακα, ἀπό τόν πίνακα A, οἱ μόνες πράξεις πού ἔγιναν ἦταν προσθέσεις πολλαπλάσιων στοιχείων μιᾶς γραμμῆς στά ἀντίστοιχα στοιχεῖα μιᾶς ἄλλης γραμμῆς, πράξεις πού ὅπως γνωρίζουμε δέ μεταβάλουν τήν τιμή τῆς ἀντίστοιχης ὁρίζουσας θά ἔχουμε

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{vmatrix}$$

Ἐπειδή στήν παραπάνω ὁρίζουσα, ὁ ἀντίστοιχος πίνακας εἶναι ἄνω τριγωνικός, ἡ τιμή της θά εἶναι τό γινόμενο τῶν διαγώνιων στοιχείων της. Τά διαγώνια στοιχεῖα ὅμως εἶναι συγχρόνως καί τά ὁδηγά στοιχεῖα τοῦ ἀντίστοιχου πίνακα κατά τή διαδικασία τῆς ἀπαλοιφῆς τοῦ Gauss. Ἄρα ἡ τιμή τῆς ὁρίζουσας θά εἶναι τό γινόμενο τῶν ὁδηγῶν στοιχείων. Συγκεκριμένα

$$\det(A) = a_{11}^{(1)}\, a_{22}^{(2)} \cdots a_{nn}^{(n)} .$$

Παράδειγμα

Νά ὑπολογιστεῖ ἡ τιμή τῆς ὀρίζουσας

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & 11 \end{vmatrix} \qquad (10.13)$$

Λύση

Ἄν ἀκολουθήσουμε, ὅπως ἀναπτύχτηκε στή θεωρία, τή μέθοδο ἀπαλοιφῆς τοῦ Gauss χωρίς ὁδήγηση θά ἔχουμε

$$\begin{array}{cccc} m & & A & \\ & \underline{4} & 2 & -3 \\ -0.75 & 3 & 1 & 4 \\ -0.5 & 2 & -4 & 11 \\ & & & \\ & & \underline{-0.5} & 6.25 \\ -10 & & -5 & 12.5 \\ & & & \\ & & & \underline{-50} \end{array}$$

Ἄρα

$$\det(A) = 4 \times (-0.5) \times (-50) = 100\,.$$

Στήν περίπτωση πού, ἀντί νά ἀκολουθεῖται ἡ μέθοδος ἀπαλοιφῆς τοῦ Gauss χωρίς ὁδήγηση γιά τόν ὑπολογισμό τῆς τιμῆς τῆς ὀρίζουσας, ἀκολουθεῖται ἡ μέθοδος ἀπαλοιφῆς τοῦ Gauss μέ μερική ὁδήγηση, τότε ἡ τιμή τῆς ὀρίζουσας δέν εἶναι ἀκριβῶς τό γινόμενο τῶν ὁδηγῶν στοιχείων. Στήν περίπτωση αὐτή ἡ τιμή τῆς ὀρίζουσας εἶναι τό γινόμενο τῶν ὁδηγῶν στοιχείων ἐπί ἕναν παράγοντα $(-1)^k$, ὅπου k δείχνει τό πλῆθος τῶν ἀντιμεταθέσεων, πού ἀπαιτοῦνται μεταξύ τῶν ὁδηγῶν γραμμῶν, ἔτσι ὥστε ὁ τελικός πίνακάς τους νά γίνει ἄνω τριγωνικός. Αὐτό δικαιολογεῖται ἀπό τό γεγονός ὅτι κάθε ἀντιμετάθεση δύο γραμμῶν σέ μιά ὀρίζουσα ἀλλάζει τό σημεῖο της. Ἔτσι οἱ k συνολικά ἀντιμεταθέσεις θά ἀλλάξουν τό σημεῖο τῆς ἀρχικῆς ὁρίζουσας k φορές, καί ἐπομένως γιά νά βροῦμε τήν τιμή τῆς ἀρχικῆς θά πρέπει νά πολλαπλασιάσουμε τήν τιμή τῆς τελευταίας, πού εἶναι τό γινόμενο τῶν ὁδηγῶν στοιχείων, ἀφοῦ ὁ ἀντίστοιχος πίνακάς της εἶναι ἄνω τριγωνικός, ἐπί τόν παράγοντα $(-1)^k$. Στό παρακάτω παράδειγμα ὑπολογίζουμε τήν τιμή τῆς ὁρίζουσας τοῦ προηγούμενου παραδείγματος μέ τή μέθοδο ἀπαλοιφῆς τοῦ Gauss μέ μερική ὁδήγηση.

Παράδειγμα

Νά ὑπολογιστεῖ ἡ τιμή τῆς ὁρίζουσας (10.13) μέ τή μέθοδο ἀπαλοιφῆς τοῦ Gauss μέ μερική ὁδήγηση.

Λύση

Πρῶτα ἔχουμε τήν παρακάτω διάταξη

m	A		
	$\underline{4}$	2	-3
-0.75	3	1	4
-0.5	2	-4	11
-0.1		-0.5	6.25
		$\underline{-5}$	12.5
			$\underline{5}$

Εἶναι φανερό ὅτι ἡ ἐκλογή τῶν ὁδηγῶν γραμμῶν (ἐξισώσεων), οἱ ὁποῖες, ὅπως ἔχουμε πεῖ στήν περιγραφή τῆς μεθόδου ἀπαλοιφῆς τοῦ Gauss, φυλάγονται γιά νά ἀποτελέσουν τίς ἐξισώσεις τοῦ τελικοῦ συστήματος, εἶναι ἡ πρώτη, ἡ τρίτη καί ἡ δεύτερη. Σχηματικά ἡ ἐκλογή τῶν ὁδηγῶν γραμμῶν τοῦ πίνακα A φαίνεται χαρακτηριστικά παρακάτω, ὅπου μέ X συμβολίζονται τά διάφορα στοιχεῖα τῶν πινάκων στίς διάφορες φάσεις τῆς ἀπαλοιφῆς καί μέ 0 τά στοιχεῖα πού ἔχουν ἀπαλειφτεῖ.

$$\begin{bmatrix} \underline{X} & X & X \\ X & X & X \\ X & X & X \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \underline{X} & X & X \\ 0 & X & X \\ 0 & \underline{X} & X \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} X & X & X \\ 0 & 0 & \underline{X} \\ 0 & \underline{X} & X \end{bmatrix}$$

Εἶναι φανερό ὅτι μία ἀντιμετάθεση τῶν δύο τελευταίων γραμμῶν τοῦ τελευταίου πίνακα τόν κάνει ἄνω τριγωνικό. Ἐπομένως

$$\det(A) = (-1)^1 \times 4 \times (-5) \times 5 = 100.$$

10.2.2. Μέθοδος ἀπαλοιφῆς τοῦ Jordan

Εἶναι δυνατό ἡ μέθοδος ἀπαλοιφῆς τοῦ Gauss, τόσο ἡ μέθοδος χωρίς ὁδήγηση, ὅσο καί ἡ μέθοδος μέ μερική ὁδήγηση, νά τροποποιηθεῖ ἔτσι ὥστε οἱ τελικές ἐξισώσεις, μετά τήν ἀπαλοιφή, νά παίρνουν μιά μορφή στήν ὁποία ὁ πίνακας τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων νά εἶναι διαγώνιος ἀντί νά εἶναι ἄνω τριγωνικός. Ἡ διαγώνια μορφή τοῦ τελικοῦ πίνακα εὐκολύνει τόν ὑπολογισμό τῶν ἀγνώστων, γιατί κάθε ἕνας ἀπό αὐτούς μπορεῖ νά προκύψει μέ μιά ἀπλή διαίρεση.

Ὑποθέτουμε ὅτι ἔχουμε γιά ἐπίλυση τό σύστημα τῶν n γραμμικῶν ἐξισώσεων μέ n ἀγνώστους (10.1). Ἡ διαδικασία, γιά τήν ἐπίλυση, ἀρχίζει μ' ἕνα βῆμα, πού εἶναι ἀκριβῶς ἴδιο μέ τό ἀντίστοιχο στή μέθοδο ἀπαλοιφῆς τοῦ Gauss (χωρίς ὁδήγηση). Δηλαδή μέ τήν ἀπαλοιφή τοῦ ἀγνώστου x_1 ἀπό τίς τελευταῖες n-1 ἐξισώσεις. Ἔτσι καλοῦμε μέ

$$\left.\begin{aligned} a_{ij}^{(1)} &= a_{ij} \\ b_i^{(1)} &= b_i \end{aligned}\right| \; i = 1(1)n,\; j = 1(1)n$$

καί μέ τήν προϋπόθεση ὅτι $a_{11}^{(1)} \neq 0$, ὁρίζουμε τούς πολλαπλασιαστές

$$m_{i1} = -\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \quad \Big| \; i = 1(1)n,\; i \neq 1 \;.$$

Μέ τήν χρησιμοποίηση τῶν παραπάνω πολλαπλασιαστῶν καί μέ τό γνωστό τρόπο, δηλαδή πολλαπλασιάζοντας τά μέλη τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἐπί m_{i1} καί προσθέτοντας στήν i στή σειρά ἐξίσωση, γιά ὅλες τίς δυνατές τιμές τοῦ i, ἀπαλείφεται ὁ ἄγνωστος x_1 ἀπό τήν i ἐξίσωση καί οἱ συντελεστές πού ἀπομένουν στήν ἐξίσωση αὐτή δίνονται ἀπό τίς σχέσεις

$$\left.\begin{aligned} a_{ij}^{(2)} &= a_{ij}^{(1)} + m_{i1}a_{1j}^{(1)} \\ b_{i}^{(2)} &= b_{i}^{(1)} + m_{i1}b_{1}^{(1)} \end{aligned}\right| i = 1(1)n,\ i \neq 1,\ j = 1(1)n\ .$$

Στό σημεῖο αὐτό καί γιά λόγους ὁμοιομορφίας στούς συμβολισμούς θέτουμε

$$a_{1j}^{(2)} = a_{1j}^{(1)} \quad | j = 2(1)n, \quad b_1^{(2)} = b_1^{(1)}$$

καί προχωροῦμε στήν ἐφαρμογή τοῦ δεύτερου βήματος. Στό δεύτερο αὐτό βῆμα, ὅπως καί σέ ὅλα τά ἑπόμενα, ἡ μέθοδος ἀπαλοιφῆς τοῦ Jordan διαφέρει ἀπό τήν ἀντίστοιχη τοῦ Gauss στό ὅτι ὁ ἄγνωστος x_2 ἀπαλείφεται ὄχι μόνο ἀπό τίς n-2 τελευταῖες ἐξισώσεις, ἀλλά συγχρόνως καί ἀπό τήν πρώτη ἐξίσωση. Ἔτσι οἱ νέοι πολλαπλασιαστές θά εἶναι οἱ

$$m_{i2} = -\frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} \quad | i = 1(1)n,\ i \neq 2$$

μέ τήν προϋπόθεση φυσικά ὅτι $a_{22}^{(2)} \neq 0$. Πολλαπλασιάζοντας τώρα τή δεύτερη ἐξίσωση ἐπί m_{i2} καί προσθέτοντας στήν i στή σειρά ἐξίσωση ἀπαλείφεται ὁ ἄγνωστος x_2 ἀπό ὅλες τίς ἐξισώσεις ἐκτός ἀπό τή δεύτερη. Οἱ νέοι συντελεστές ὁρίζονται ἀπό τίς σχέσεις

$$\left.\begin{aligned} a_{ij}^{(3)} &= a_{ij}^{(2)} + m_{i2}a_{2j}^{(2)} \\ b_{i}^{(3)} &= b_{i}^{(2)} + m_{i2}b_{2}^{(2)} \end{aligned}\right| i = 1(1)n,\ i \neq 2,\ j = 2(1)n$$

ὅπου γιά τήν ὁμοιομορφία θέτουμε ἐπίσης

$$a_{2j}^{(3)} = a_{2j}^{(2)} \quad | j = 3(1)n \quad \text{καί}\quad b_2^{(3)} = b_2^{(2)}.$$

θά πρέπει νά τονιστεῖ ὅτι οἱ τιμές τῶν $a_{11}^{(1)}$ καί $a_{i1}^{(2)}=0 \;|i=3(1)n$ δέν θά ἀλλάξουν μέ τήν πρόσθεση πολλαπλασίων τῆς δεύτερης ἐξισώσεως σ'ὅλες τίς ἄλλες, γιατί $a_{21}^{(2)}=0$ ἀπό τήν προηγούμενη ἀπαλοιφή τοῦ x_1. Συνεχίζουμε τώρα στό τρίτο βῆμα τῆς διαδικασίας ἀπαλοιφῆς τοῦ Jordan ὁρίζοντας τούς πολλαπλασιαστές

$$m_{i3} = -\frac{a_{i3}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} \quad |i=1(1)n, \quad i \neq 3$$

καί ὑποθέτοντας ὅτι $a_{33}^{(3)} \neq 0$. Γιά τήν ἀπαλοιφή τοῦ ἀγνώστου x_3 προσθέτουμε τώρα τά ἀντίστοιχα πολλαπλάσια τῆς τρίτης ἐξισώσεως στίς δύο πρῶτες καθώς καί στίς n-3 τελευταῖες κ.ο.κ. Ἄν ἡ ὅλη διαδικασία ἐπαναληφτεῖ n συνολικά φορές θά προκύψει ~~τό παρακάτω~~ ένα σύστημα πού θά εἶναι ἰσοδύναμο πρός τό ἀρχικό (10.1)

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(1)} x_1 \qquad\qquad\qquad &= b_1^{(n+1)} \\
a_{22}^{(2)} x_2 \qquad\quad &= b_2^{(n+1)} \\
\ddots \qquad\qquad & \\
a_{nn}^{(n)} &= b_n^{(n+1)}
\end{aligned} \tag{10.14}$$

Ἡ λύση τοῦ συστήματος (10.14), ἐπομένως καί τοῦ ἀρχικοῦ, προκύπτει ἀμέσως ἀπό τίς σχέσεις

$$x_i = \frac{b_i^{(n+1)}}{a_{ii}^{(i)}} \quad |i=1(1)n\,.$$

Παράδειγμα

Νά ἐπιλυθεῖ μέ τή μέθοδο ἀπαλοιφῆς τοῦ Jordan τό σύστημα

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1$$
$$3x_1 + x_2 + 4x_3 = 11$$
$$2x_1 - 4x_2 + 11x_3 = 28$$

Λύση

Γιά τήν έπίλυση θά άκολουθήσουμε μιά άνάλογη συστηματική διάταξη στό χαρτί έργασίας,πού άκολουθήσαμε στή μέθοδο άπαλοιφῆς τοῦ Gauss χωρίς όδήγηση. Έτσι έχουμε

m	A			b
	4	2	-3	1
-0.75	3	1	4	11
-0.5	2	-4	11	28
4	4	2	-3	1
	0	-0.5	6.25	10.25
-10	0	-5	12.5	27.5
0.44	4	0	22	42
0.125	0	-0.5	6.25	10.25
	0	0	-50	-75
	4	0	0	9
	0	-0.5	0	0.875
	0	0	-50	-75
x^T	2.25	-1.75	1.50	

Δηλαδή $x_1 = 2.25$, $x_2 = -1.75$, $x_3 = 1.50$.

Θά πρέπει νά τονιστεῖ ὅτι ἡ μέθοδος τοῦ Jordan, πού άναπτύχτηκε, καί πού εἶναι άνάλογη πρός τή μέθοδο άπαλοιφῆς τοῦ Gauss χωρίς όδήγηση, εἶναι έπίσης γνωστή καί σάν μέθοδος άπαλοιφῆς τοῦ Jordan χωρίς όδήγηση.

Μπορούμε νά αναφέρουμε, χωρίς νά αναπτύξουμε αντίστοιχη θεωρία ή νά δώσουμε αντίστοιχο παράδειγμα, ότι μέ ανάλογο πρός τή μέθοδο τοῦ Gauss τρόπο, μπορεῖ νά αναπτυχτεῖ καί μέθοδος τοῦ Jordan μέ μερική οδήγηση. Καί οἱ δύο παραλλαγές, δηλαδή ἡ μέθοδος τοῦ Jordan χωρίς οδήγηση καί ἡ μέθοδος μέ μερική οδήγηση, μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν, όπως ἡ μέθοδος απαλοιφῆς τοῦ Gauss, σέ διάφορες εφαρμογές. Π.χ. γιά τήν επίλυση συστήματος n γραμμικών εξισώσεων μέ n αγνώστους, αλλά μέ περισσότερα από ένα δεύτερα μέλη ή γιά τήν εὕρεση τοῦ αντιστρόφου ενός πίνακα. Εἶναι φανερό ότι ἡ μέθοδος απαλοιφῆς τοῦ Jordan δέν πρέπει νά χρησιμοποιεῖται γιά τόν υπολογισμό τῆς τιμῆς μιᾶς ορίζουσας. Αὐτό γιατί ἡ εὕρεση τῶν οδηγῶν στοιχείων τοῦ αντίστοιχου πίνακα, πού τό γινόμενό τους μᾶς δίνει τήν τιμή τῆς ορίζουσας, στή μέθοδο απαλοιφῆς τοῦ Gauss, προκύπτει μέ τήν απαλοιφή τῶν στοιχείων τοῦ πίνακα πού εἶναι κάτω από τήν κύρια διαγώνιο, ενῶ στή μέθοδο απαλοιφῆς τοῦ Jordan προκύπτει καί μέ τή σύγχρονη απαλοιφή τῶν στοιχείων, πού εἶναι πάνω από τή διαγώνιο, δηλαδή μέ διπλάσιο αριθμό πράξεων.

Παρατήρηση:

Εἶναι δυνατό νά αποδειχτεῖ ότι γιά κάθε $n \geq 2$ ἡ μέθοδος απαλοιφῆς τοῦ Gauss απαιτεῖ μικρότερο αριθμό πράξεων από τήν αντίστοιχη μέθοδο απαλοιφῆς τοῦ Jordan. Ἑπομένως στήν πράξη θά πρέπει νά χρησιμοποιοῦμε τή μέθοδο τοῦ Gauss καί μόνο. Αὐτό τονίζεται ιδιαίτερα, γιατί πολλοί επιστήμονες συνηθίζουν καί χρησιμοποιοῦν τή μέθοδο τοῦ Jordan, πιθανόν γιατί ἡ άμεση εὕρεση τῶν αγνώστων στήν τελική φάση, από τούς τύπους (10.14), παρασύρει καί δίνει τήν ψεύτικη εντύπωση ότι ἡ όλη μέθοδος απαιτεῖ λιγότερες πράξεις.

10.3. Ἔμμεσες (ή επαναληπτικές) μέθοδοι

10.3.1. Γενικά

Οἱ έμμεσες ή επαναληπτικές μέθοδοι αριθμητικῆς επιλύσεως γραμμικῶν συστημάτων, σέ σχέση πρός τίς αντίστοιχες άμεσες, χρησιμοποιοῦνται κυρίως, ὅταν εἶναι γνωστό ἀπό πρίν ὅτι ἡ σύγκλισή τους εἶναι πολύ γρήγορη ἤ ὅταν ὁ πίνακας A εἶναι μεγάλης τάξης n καί ἔχει τά περισσότερα στοιχεῖα του ἴσα μέ τό μηδέν. Στίς περιπτώσεις αὐτές τό πλῆθος τῶν πράξεων, πού ἀπαιτεῖται γιά τήν εὕρεση τῆς λύσης μέ μιά ἐπαναληπτική μέθοδο, εἶναι συνήθως πολύ μικρότερο ἀπό τό ἀντίστοιχο πλῆθος μέ μιά ἄμεση μέθοδο. Στήν ἑπόμενη παράγραφο ἀναπτύσσουμε τή βασική ἀρχή πάνω στήν ὁποία στηρίζονται οἱ περισσότερες ἀπό τίς ἐπαναληπτικές μεθόδους.

10.3.2. Γενική ἐπαναληπτική μέθοδος

Θεωροῦμε τό σύστημα, πού εἶναι γιά ἐπίλυση, μέ τή μορφή τῆς ἐξισώσεως πινάκων (10.2) καί ἀναλύουμε τόν πίνακα A σέ ἄθροισμα δύο ἄλλων πινάκων B καί C (δηλαδή $A = B+C$) μέ τούς μόνους πρός τό παρόν περιορισμούς, ὁ πίνακας B νά ἔχει ἀντίστροφο (δηλαδή νά ἰσχύει $\det(B) \neq 0$) καί ἀκόμη ὁ ἀντίστροφος αὐτός νά βρίσκεται εὔκολα. Ἔτσι ἡ ἐξίσωση (10.2) μπορεῖ νά γραφτεῖ ὡς ἑξῆς

$$(B+C)x = b$$

ἤ ἀνακατατάσσοντάς την

$$Bx = -Cx+b \quad . \tag{10.15}$$

Ἡ ἐξίσωση (10.15) ὁδηγεῖ στήν ἐφαρμογή τοῦ παρακάτω ἐπαναληπτικοῦ σχήματος

$$Bx^{(k+1)} = -Cx^{(k)}+b \qquad |k=0,1,2,\ldots \tag{10.16}$$

μέ $x^{(o)}$ δεδομένο ἀρχικό διάνυσμα. Ἐπειδή ὁ ἀντίστροφος πίνακας B^{-1} ὑπάρχει, ὁ ἀλγόριθμος (10.16) γράφεται καί ὡς ἑξῆς

$$x^{(k+1)} = -B^{-1}Cx^{(k)}+B^{-1}b \qquad |k=0,1,2,\ldots \tag{10.17}$$

μέ $x^{(o)}$ δεδομένο. Ὁ ἀλγόριθμος (10.17) ὁρίζει μιά ἀκολουθία διανυσμάτων $\{x^{(k)}\}\ |k=0,1,2,\ldots$, ἡ ὁποία, ἄν συγκλίνει, θά συγκλίνει στή μονοσήμαντα ὁρισμένη λύση τοῦ συστήματος (10.2). Πραγματικά, ἄν $y=\lim_{k\to\infty} x^{(k)}$, τότε παίρνοντας τά ὅρια τῶν δύο μελῶν τῆς (10.17) θά ἔχουμε

$$y = -B^{-1}Cy + B^{-1}b$$

ἤ πολλαπλασιάζοντας ἀπό τά ἀριστερά ἐπί B

$$By = -Cy + b$$

ἤ

$$(B+C)y = b$$

ἤ τέλος

$$Ay = b\ .$$

Δηλαδή τό ὅριο y τῆς ἀκολουθίας $\{x^{(k)}\}\ |k=0,1,2,\ldots$, ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωση (10.2) καί, ἐπειδή αὐτή ἔχει μιά καί μόνο λύση, συμπεραίνουμε ὅτι τό y θά συμπίπτει μέ αὐτή.

Ἀπομένει λοιπόν, τώρα, νά καθοριστοῦν οἱ προϋποθέσεις κάτω ἀπό τίς ὁποῖες ὁ ἀλγόριθμος (10.17) θά παράγει ἀκολουθία συγκλίνουσα. Γιά τό σκοπό αὐτό, ἄν μέ $\varepsilon^{(k)}$ συμβολίσουμε τό διάνυσμα-σφάλμα στήν k επανάληψη, πού ὁρίζεται ἀπό τή σχέση

$$\varepsilon^{(k)} = x^{(k)} - x \qquad |k=0,1,2,\ldots\ , \tag{10.18}$$

ὅπου x εἶναι τώρα ἡ ἀληθής λύση τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος (10.2), καί ἀφαιρέσουμε ἀπό τά μέλη τῆς (10.17) τά ἀντίστοιχα μέλη τῆς (10.15) πολλαπλασιασμένα ἐπί B^{-1} θά ἔχουμε

$$x^{(k+1)} - x = -B^{-1}C(x^{(k)} - x) \qquad |k=0,1,2,\ldots$$

Λόγω τῆς (10.18), ὅμως, ἡ παραπάνω σχέση γράφεται

$$\varepsilon^{(k+1)} = T\varepsilon^{(k)} \qquad |k=0,1,2,\ldots\ , \tag{10.19}$$

ὅπου συγχρόνως τέθηκε

$$T \equiv -B^{-1}C \quad . \tag{10.20}$$

'Από τήν (10.19) μπορεῖ εὔκολα νά προκύψει ἐπαγωγικά ὅτι

$$\varepsilon^{(k)} = T^k\, \varepsilon^{(o)} \qquad \Big| k = 0,1,2,\ldots \tag{10.21}$$

'Επειδή θέλουμε ὁ ἀλγόριθμος (10.17) νά παράγει ἀκολουθία, πού νά συγκλίνει στήν ἀληθή λύση x τοῦ συστήματος (10.2), ἀπαιτοῦμε νά ἔχουμε

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$$

ἤ ἰσοδύναμα

$$\lim_{k\to\infty} (x^{(k)} - x) = 0$$

ἤ τέλος, λόγω τῆς (10.18),

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon^{(k)} = 0 \; .$$

'Από τήν παραπάνω σχέση καί τήν (10.21) προκύπτει ὅτι πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἰσχύει ἡ ἀκόλουθη σχέση

$$\lim_{k\to\infty} (T^k\, \varepsilon^{(o)}) = 0 \quad . \tag{10.22}$$

"Αν τώρα ἀπαιτήσουμε ἀκόμη ἡ (10.22) νά ἰσχύει γιά κάθε αὐθαίρετο $\varepsilon^{(o)}$ $(\equiv x^{(o)} - x)$, δηλαδή στήν οὐσία, γιά κάθε αὐθαίρετη ἐκλογή τῆς ἀρχικῆς προσεγγίσεως $x^{(o)}$, εἶναι δυνατό νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά ἰσχύει ἡ (10.22) εἶναι ἡ

$$\lim_{k\to\infty} T^k = 0 \quad . \tag{10.23}$$

Σύμφωνα μέ τό Θεώρημα 3 τοῦ προηγούμενου Κεφαλαίου 9, ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά ἰσχύει ἡ (10.23) εἶναι ἡ

$$\rho(T) \equiv \rho(-B^{-1}C) < 1 \,. \tag{10.24}$$

Ἔτσι συνοψίζοντας μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά τή σύγκλιση τῆς ἀκολουθίας, πού παράγεται ἀπό τόν ἀλγόριθμο (10.17) γιά ὁποιοδήποτε αὐθαίρετο ἀρχικό διάνυσμα $x^{(o)}$, εἶναι νά ἱκανοποιεῖται ἡ συνθήκη (10.24) γιά τόν πίνακα T, πού καλεῖται συνήθως ἐπαναληπτικός πίνακας τῆς μεθόδου. Ἐπειδή πολλές φορές ἡ εὕρεση τῆς φασματικῆς ἀκτίνας $\rho(T)$ τοῦ πίνακα T εἶναι ἐργασία ἐπίπονη, γι' αὐτό δίνουμε συγχρόνως καί τήν παρακάτω ἱκανή συνθήκη γιά τήν ἱκανοποίηση τῆς (10.23), πού προκύπτει κατ-ευθεῖαν ἀπό τό Θεώρημα 4 τοῦ προηγούμενου Κεφαλαίου

$$\|T\| \equiv \|-B^{-1}C\| < 1 \,. \tag{10.25}$$

Στίς πρακτικές ἐφαρμογές ἐξετάζουμε πρῶτα ἄν ἱκανοποιεῖται ἡ συνθήκη (10.25) θεωρώντας μιά ἀπό τίς δύο ἁπλούστερες norms $\|\ \|_1$ καί $\|\ \|_\infty$. Ἄν αὐτή δέν ἱκανοποιεῖται γιά καμιά ἀπό τίς δύο norms, τότε ἐξετάζουμε ἄν ἱκανοποιεῖται ἤ ὄχι ἡ συνθήκη (10.24). Ἐφόσον μιά ἀπό τίς συνθῆκες (10.25) ἤ (10.24) ἱκανοποιεῖται, τότε ἐκλέγουμε ἕνα αὐθαίρετο $x^{(o)}$ (συνήθως ἐκλέγουμε τό μηδενικό διάνυσμα) καί ἐφαρμόζουμε τό σχῆμα (10.17) γιά $k = 0,1,2,\dots$. Οἱ ἐπαναλήψεις σταματοῦν, ὅταν βρεθοῦν δύο διαδοχικά διανύσματα $x^{(k)}$ καί $x^{(k+1)}$, γιά τά ὁποῖα ἡ norm τῆς διαφορᾶς νά εἶναι μικρότερη ἤ ἴση ἀπό ἕναν προκαθορισμένο θετικό ἀριθμό. Τότε τό τελευταῖο διάνυσμα $x^{(k+1)}$ θεωρεῖται σάν ἡ λύση τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος. Ἄν σάν norm ληφτεῖ ἡ $\|\ \|_\infty$ καί σάν προκαθορισμένος θετικός ἀριθμός ληφτεῖ ὁ $\frac{1}{2}10^{-k}$, ὅπου k μή ἀρνητικός ἀκέραιος, τότε εἶναι φανερό πώς οἱ ἐπαναλήψεις θά σταματήσουν, ὅταν ὅλες οἱ ἀντίστοιχες συνιστῶσες δύο διαδοχικῶν διανυσμάτων, πού προκύπτουν ἀπό τόν ἀλγόριθμο, συμπίπτουν στά k δ.ψ.

Παράδειγμα

Ἀφοῦ βρεθεῖ σέ τί μπορεῖ νά χρησιμεύσει ὁ ἀλγόριθμος

$$x^{(k+1)} = Ax^{(k)} + b \qquad |\, k = 0,1,2,\dots \,,$$

ὅπου $x^{(o)}$ αὐθαίρετο ἀρχικό διάνυσμα,

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -^{13}/_{36}\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \quad \text{καί} \quad b=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

νά ἐξεταστεῖ ἡ σύγκλισή του.

Λύση

Ἄν ὁ ἀλγόριθμος πού δόθηκε συγκλίνει, τότε θά συγκλίνει στή λύση τοῦ συστήματος

$$(I-A)x = b$$

ἤ, ἀντικαθιστώντας, στή λύση τοῦ συστήματος

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & ^{13}/_{36}\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix} x = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} .$$

Γιά νά βροῦμε ἄν ὁ ἀλγόριθμος, πού δόθηκε, συγκλίνει ἤ ὄχι θεωροῦμε τόν ἐπαναληπτικό πίνακα T, πού σ' αὐτήν τήν περίπτωση εἶναι ὁ

$$T = A = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -^{13}/_{36}\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

καί βρίσκουμε, ἄν οἱ norms $\|T\|_1$ ἤ $\|T\|_\infty$ ἱκανοποιοῦν τήν ἱκανή συνθήκη (10.25). Ἔχουμε

$$\|T\|_1 = \max\,(|0|+|1|+|0|,\ |0|+|0|+|1|,\ |0|+|-^{13}/_{36}|+|1|) = \frac{49}{36} > 1$$

καί

$$\|T\|_\infty = \max\left(|0|+|0|+|0|,\ |1|+|0|+|-{}^{13}/_{36}|,\ |0|+|1|+|1|\right) = 2 > 1.$$

Ἐπειδή ἡ ἱκανή συνθήκη δέν ἱκανοποιεῖται γιά καμιά ἀπό τίς δύο norms, πού θεωρήσαμε, ἐξετάζουμε τώρα τή φασματική ἀκτίνα τοῦ ἐπαναληπτικοῦ πίνακα. Γιά τό σκοπό αὐτό βρίσκουμε τίς ἰδιοτιμές τοῦ πίνακα T, πού εἶναι ρίζες τῆς ἐξισώσεως

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & -{}^{13}/_{36} \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ἤ τῆς

$$\lambda^3 - \lambda^2 + {}^{13}/_{36}\,\lambda = 0 .$$

Αὐτές εἶναι $\lambda_1 = 0$ καί $\lambda_{2,3} = \dfrac{3 \pm 2i}{6}$. Ἄρα

$$\rho(T) = \max_i |\lambda_i| = \max\left(|0|,\ \left|\frac{3+2i}{6}\right|,\ \left|\frac{3-2i}{6}\right|\right) = \frac{\sqrt{13}}{6} < 1 .$$

Ἐπομένως ἡ ἀκολουθία διανυσμάτων πού παράγεται ἀπό τόν ἀλγόριθμο, πού δόθηκε, συγκλίνει πάντοτε.

Ἀπό τή θεωρία πού ἀναπτύξαμε εἶναι προφανές ὅτι γιά τή λύση ἑνός συγκεκριμένου συστήματος μποροῦν νά προκύψουν ἄπειρες ἐπαναληπτικές μέθοδοι τοῦ τύπου πού περιγράψαμε. Ἀπό αὐτές μελετοῦμε στή συνέχεια τή μέθοδο τοῦ Jacobi καί τή μέθοδο τῶν Gauss - Seidel.

10.3.3. Μέθοδος τοῦ Jacobi

Ἀναλύουμε τόν πίνακα A σέ ἄθροισμα τριῶν ἄλλων πινάκων L, D καί U

$$A = L + D + U , \tag{10.26}$$

ὅπου ὁ πίνακας D εἶναι διαγώνιος, ὁ L αὐστηρά κάτω τριγωνικός καί ὁ U αύστηρά άνω τριγωνικός. Είναι φανερό ότι μέ τόν τρόπο αύτό ή άνάλυση (10.26) είναι μονοσήμαντα όρισμένη. Έχοντας ύπόψη τήν άνάλυση τής προηγούμενης παραγράφου θέτουμε

$$B = D \quad \text{καί} \quad C = L + U \,, \tag{10.27}$$

όπότε ή έπαναληπτική μέθοδος τοῦ Jacobi είναι ή συγκεκριμένη περίπτωση, πού προκύπτει άπό τήν (10.17) λαβαίνοντας ύπόψη τίς (10.27), δηλαδή ή

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b \quad |k = 0,1,2,\ldots \tag{10.28}$$

μέ $x^{(o)}$ αύθαίρετο.

Προϋπόθεση γιά τήν ύπαρξη τής μεθόδου τοῦ Jacobi είναι νά ίκανοποιείται ό περιορισμός $\det(B) = \det(D) \neq 0$. Δηλαδή τά διαγώνια στοιχεῖα $a_{ii} \,|i=1(1)n$ τοῦ πίνακα A νά είναι όλα διάφορα άπό τό μηδέν. Έφόσον αύτό ίσχύει, ό πίνακας D έχει άντίστροφο καί ό άντίστροφός του βρίσκεται προφανῶς εὔκολα. Ύπενθυμίζουμε ότι ίκανή συνθήκη γιά τή σύγκλιση τοῦ έπαναληπτικοῦ σχήματος (10.28) είναι ή

$$\| -D^{-1}(L+U) \| < 1 \,,$$

ένῶ άναγκαία καί ίκανή συνθήκη γιά τή σύγκλιση είναι ή

$$\rho(-D^{-1}(L+U)) < 1 \,.$$

Άν καλέσουμε μέ $x_i^{(k)} \;|i = 1(1)n$ τίς συνιστῶσες τοῦ διανύσματος τής k έπαναλήψεως $x^{(k)}$, τότε ό άλγόριθμος (10.27) μπορεῖ νά γραφτεῖ μέ μιά άλλη ισόδυναμη μορφή, πού άποτελεῖται άπό n σχέσεις, καί καθεμιά δίνει τήν όποιαδήποτε συνιστώσα i $|i = 1(1)n$ τοῦ διανύσματος τής k+1 έπαναλήψεως σάν συνάρτηση τῶν συνιστωσῶν τοῦ διανύσματος τής προηγούμενης k έπαναλήψεως. Οί σχέσεις αύτές μποροῦν νά προκύψουν ώς έξής. Πολλαπλασιάζουμε τά μέλη τής έξισώσεως (10.27) άπό άριστερά έπί D. Έτσι παίρνουμε

$$Dx^{(k+1)} = -(L+U)x^{(k)} + b \quad |k = 0,1,2,\ldots$$

Ἄν τώρα γράψουμε ἀναλυτικά τούς πίνακες καί τά διανύσματα τῆς παραπάνω σχέσης, ἐκτελέσουμε ὅλες τίς πράξεις καί ἐξισώσουμε τίς $i|i=1(1)n$ συνιστῶσες τῶν διανυσμάτων τῶν δύο μελῶν, πού προκύπτουν τελικά, βρίσκουμε

$$a_{ii}\, x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}$$

ἤ τέλος

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \quad |i = 1(1)n \;\; |k=0,1,2,\ldots \quad (10.29)$$

ὅπου $x_i^{(o)}$ $|i = 1(1)n$ αὐθαίρετοι ἀριθμοί. Οἱ παραπάνω σχέσεις (10.29) μποροῦν, πρακτικά, νά προκύψουν εὔκολα ὡς ἑξῆς. Ἀρχικά θεωροῦμε τήν i στή σειρά ἐξίσωση τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος (10.1), πού γράφεται συνοπτικά μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \; .$$

Ἐπιλύουμε τώρα τήν παραπάνω σχέση ὡς πρός τόν ἄγνωστο x_i καί βρίσκουμε

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_i \right) .$$

Τό μόνο πού ἀπομένει εἶναι στή σχέση, πού βρήκαμε, νά βάλουμε ἄνω δεῖκτες στίς συνιστῶσες x_j $|j = 1(1)n$ τούς $(k+1)$ στό πρῶτο μέλος καί (k) στό δεύτερο. Ἔτσι ἔχουμε τελικά

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) ,$$

πού δέν εἶναι παρά ἡ i ἐξίσωση τῆς k ἐπαναλήψεως πού δίνεται στίς σχέσεις (10.29).

Παράδειγμα 1

Ἀφοῦ ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ μέθοδος τοῦ Jacobi γιά τήν ἐπίλυση τοῦ συστήματος

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 2x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_3 &= 3 \end{aligned} \qquad (10.30)$$

συγκλίνει, νά βρεθεῖ στή συνέχεια μέ τή μέθοδο αὐτή ἡ λύση, μέ προσέγγιση δύο δ.ψ.

Λύση

Ἀπό τή μορφή τοῦ συστήματος (10.30) βρίσκουμε ἀμέσως ὅτι ὁ πίνακας A, τό διάνυσμα x καί τό διάνυσμα b, πού ἀναφέρονται στήν ἐξίσωση (10.2), ἔχουν τίς ἀκόλουθες ἐκφράσεις

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{καί} \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Οἱ πίνακες L, D καί U, πού ἔχουν ἄθροισμα τόν πίνακα A, ἀπό τή σχέση (10.26), εἶναι στήν περίπτωση αὐτή οἱ ἀκόλουθοι

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (10.31)$$

Ἐπειδή τά διαγώνια στοιχεῖα τοῦ πίνακα A εἶναι διάφορα ἀπό τό μηδέν ἤ ἰσοδύναμα $\det(D)=3\times2\times2=12\neq0$, συμπεραίνουμε ὅτι ἱκανοποιεῖται ἡ προὑπόθεση γιά τήν ὕπαρξη τῆς μεθόδου τοῦ Jacobi. Ὁ ἐπαναληπτικός πίνακας τῆς μεθόδου προκύπτει εὔκολα, ἀπό τίς ἐκφράσεις (10.31), ὅτι εἶναι ὁ ἀκόλουθος

$$T \equiv -D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Βρίσκοντας τώρα μιά ἀπό τίς δύο πιό ἁπλές norms τοῦ ἐπαναληπτικοῦ πίνακα T, ἔστω τήν πρώτη, ἔχουμε

$$\|T\|_1 = \frac{2}{3} < 1 .$$

Ἑπομένως ἡ μέθοδος τοῦ Jacobi συγκλίνει. Γιά τήν εὕρεση τώρα τῶν διαδοχικῶν ὅρων τῆς ἀκολουθίας, πού παράγεται ἀπό τόν ἀλγόριθμο (10.28), ἐκλέγομαι αὐθαίρετα $x^{(o)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$ καί ἐφαρμόζουμε τόν ἀλγόριθμο διαδοχικά γιά $k = 0,1,2,\ldots$ Ὅπως τονίστηκε καί προηγούμενα ἡ διαδικασία τῶν ἐπαναλήψεων γίνεται ἁπλούστερη, ὅταν χρησιμοποιήσουμε τίς σχέσεις (10.29), πού μᾶς δίνουν τίς συνιστῶσες τῆς νέας ἐπαναλήψεως σάν συνάρτηση τῶν συνιστωσῶν τῆς προηγούμενης. Στήν περίπτωση αὐτή καί ἀπό τό σύστημα (10.30) ἔχουμε

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{3}\,(5-2x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{2}\,(3-x_3^{(k)}) \qquad |k = 0,1,2,\ldots \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{2}\,(3-x_1^{(k)}) \end{aligned}$$

Τά διαδοχικά διανύσματα $x^{(k)}$ $|k = 0,1,2,\ldots$, πού βρίσκονται ἐφαρμόζοντας τίς παραπάνω ἐξισώσεις, εἶναι τά ἀκόλουθα

$x^{(0)}=[0 \quad 0 \quad 0]^T,$ $\qquad x^{(1)}=[1.667 \quad 1.5 \quad 1.5\,]^T,$

$x^{(2)}=[0.667 \quad 0.75 \quad 0.666]^T,$ $\qquad x^{(3)}=[1.167 \quad 1.167 \quad 1.166]^T,$

$x^{(4)}=[0.889 \quad 0.917 \quad 0.916]^T,$ $\qquad x^{(5)}=[1.055 \quad 1.042 \quad 1.056]^T,$

$x^{(6)}=[0.972 \quad 0.972 \quad 0.972]^T,$ $\qquad x^{(7)}=[1.019 \quad 1.014 \quad 1.014]^T,$

$x^{(8)}=[0.991 \quad 0.993 \quad 0.991]^T,$ $\qquad x^{(9)}=[1.005 \quad 1.004 \quad 1.004]^T,$

$x^{(10)}=[0.997 \quad 0.998 \quad 0.998]^T,$ $\qquad x^{(11)}=[1.001 \quad 1.001 \quad 1.002]^T.$

'Επειδή οἱ ἀντίστοιχες συνιστῶσες τῶν δύο τελευταίων διανυσμάτων συμπίπτουν σέ δύο δ.ψ. (ἔχουμε δηλαδή $\|x^{(10)}-x^{(11)}\|_\infty \leq \frac{1}{2}10^{-2}$, ὅπως ἐξηγήθηκε στήν προηγούμενη παράγραφο) οἱ ἐπαναλήψεις σταματοῦν καί ἡ ἀριθμητική λύση τοῦ συστήματος (10.30) σέ δύο δ.ψ. εἶναι ἡ $x \approx [1.00 \quad 1.00 \quad 1.00]^T$, πού συμβαίνει νά συμπίπτει μέ τήν ἀληθή του λύση.

Παράδειγμα 2

Νά ἐξεταστεῖ, ἄν ἡ μέθοδος τοῦ Jacobi γιά τήν ἐπίλυση τοῦ συστήματος

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 2x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 \qquad + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

παράγει ἀκολουθία συγκλίνουσα.

Λύση

Γιά τό σύστημα, πού δόθηκε, ἔχουμε

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

καί ἐπομένως

$$L=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix}0&2&2\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

῾Ο ἐπαναληπτικός πίνακας τῆς μεθόδου τοῦ Jacobi βρίσκεται εὔκολα ὅτι εἶναι ὁ

$$T\equiv -D^{-1}(L+U)=\begin{bmatrix}0&-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\0&0&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&0\end{bmatrix}.$$

Γιά τόν παραπάνω πίνακα ἔχουμε ἀμέσως ὅτι

$$\|T\|_1=\frac{7}{6}>1 \quad \text{καί} \quad \|T\|_\infty=\frac{4}{3}>1.$$

᾿Επειδή δέν ἱκανοποιεῖται ἡ ἱκανή συνθήκη συγκλίσεως γι'αὐτό ἀνατρέχουμε στήν εὕρεση τῆς φασματικῆς ἀκτίνας τοῦ ἐπαναληπτικοῦ πίνακα T. Γιά τό σκοπό αὐτό θέτουμε

$$\begin{vmatrix}-\lambda&-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\0&-\lambda&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&-\lambda\end{vmatrix}=0$$

ἤ

$$6\lambda^3-2\lambda+1=0 \quad .$$

Οἱ ρίζες τῆς παραπάνω τριτοβάθμιας ἐξισώσεως, τουλάχιστον ἡ μιά, πού θά εἶναι ὁπωσδήποτε πραγματική, βρίσκονται συνήθως μέ μιά ἀπό τίς ἀριθμητικές μεθόδους ἐπιλύσεως ἐξισώσεων τοῦ Κεφαλαίου 6. Ἔτσι γιά τήν ἀπόλυτα μεγαλύτερη, ἀπό αὐτές, μποροῦμε τελικά νά βροῦμε ὅτι

$\rho(T) \approx 0.75 < 1$.

Ἐπομένως ἡ μέθοδος τοῦ Jacobi, ὅταν ἐφαρμόζεται στό σύστημα πού δόθηκε, παράγει ἀκολουθία πού συγκλίνει.

Παράδειγμα 3

Νά ἐξεταστεῖ ὅπως στό προηγούμενο Παράδειγμα 2 ἡ μέθοδος τοῦ Jacobi γιά τό σύστημα

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6.5 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 6.5 \\ 2x_1 \quad\quad + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Λύση

Στήν περίπτωση αὐτή ἔχουμε

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

καί ἐπομένως

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Συνεπῶς

$$T \equiv -D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Γιά τόν πίνακα T βρίσκουμε άμέσως ότι

$$\| T \|_1 = \frac{11}{6} > 1 \quad \text{καί} \quad \| T \|_\infty = \frac{3}{2} > 1 .$$

Έπομένως, όπως καί στό προηγούμενο Παράδειγμα 2, άνατρέχουμε στήν εὕρεση τῆς φασματικῆς άκτίνας τοῦ έπαναληπτικοῦ πίνακα T. Γι'αὐτή βρίσκουμε τελικά

$$\rho(T) \approx 1.1 > 1 \quad .$$

Ἄρα ἡ μέθοδος τοῦ Jacobi όταν έφαρμόζεται στό σύστημα πού δόθηκε, δέν παράγει άκολουθία συγκλίνουσα.

10.3.4. Μέθοδος τῶν Gauss-Seidel

Στήν μέθοδο αὐτή θεωροῦμε πάλι τήν μονοσήμαντη άνάλυση τοῦ πίνακα A, στούς τρεῖς πίνακες L, D καί U, τῆς σχέσης (10.26). Ἡ μόνη διαφορά εἶναι ὅτι τώρα, άντί νά ὁρίσουμε τούς πίνακες άπό τίς σχέσεις (10.27), θέτουμε

$$B = L + D \quad \text{καί} \quad C = U \ , \tag{10.32}$$

ὁπότε ἡ έπαναληπτική μέθοδος τῶν Gauss-Seidel εἶναι ἡ συγκεκριμένη μέθοδος, πού προκύπτει άπό τόν άλγόριθμο (10.17) λαβαίνοντας ὑπόψη τίς (10.32). Ἔτσι παίρνουμε

$$x^{(k+1)} = -(L+D)^{-1}Ux^{(k)} + (L+D)^{-1}b \ |k=0,1,2,... \quad \text{μέ } x^{(o)} \text{ αὐθαίρετο.} \tag{10.33}$$

Γιά νά ὑπάρχει ἡ παραπάνω μέθοδος πρέπει νά ἱκανοποιεῖται ὁ περιορισμός $\det(B)=\det(L+D) \neq 0$. Εἶναι εὔκολο νά διαπιστωθεῖ, άφοῦ ὁ πίνακας L+D εἶναι κάτω τριγωνικός, ὅτι ὁ περιορισμός ἱκανοποιεῖται, ὅταν τά διαγώνια στοιχεῖα a_{ii} $|i=1(1)n$ τοῦ πίνακα A εἶναι διάφορα άπό τό μηδέν. Μέ τήν προϋπόθεση αὐτή ὁ άντίστροφος τοῦ πίνακα L+D ὑπάρχει, εἶναι κάτω τριωνικός καί συνεπῶς ὑπολογίζεται εὔκολα μέ μιά ἀπό τίς μεθόδους ἀπαλοιφῆς τοῦ Gauss τῆς παραγράφου 10.2.1.3 . Ἱκανή συνθήκη γιά τή σύγκλιση τῆς μεθόδου (10.33) εἶναι ἡ

$$\| - (L+D)^{-1} U \| < 1$$

ἐνῶ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά τή σύγκλιση εἶναι ἡ

$$\rho\ (- (L+D)^{-1} U) < 1 \ .$$

Ὅπως στήν προηγούμενη μέθοδο τοῦ Jacobi ἔτσι καί στήν μέθοδο αὐτή τῶν Gauss-Seidel εἶναι δυνατό νά βροῦμε σχέσεις, ἀντίστοιχες πρός τίς (10.29), ἄν ἐργαστοῦμε ὡς ἑξῆς. Πολλαπλασιάζουμε πρῶτα τά μέλη τῆς (10.33) ἀπό τ'ἀριστερά ἐπί L+D. Ἔτσι παίρνουμε

$$(L+D)\, x^{(k+1)} = - U x^{(k)} + b \ .$$

Ἄς γράψουμε τώρα ἀναλυτικά τούς πίνακες καί τά διανύσματα τῶν δύο μελῶν τῆς παραπάνω σχέσης, ἐκτελέσουμε ὅλες τίς πράξεις καί ἐξισώσουμε τίς i $|i = 1(1)n$ συνιστῶσες τῶν τελικῶν διανυσμάτων τῶν δύο μελῶν, παίρνουμε

$$\sum_{j=1}^{i} a_{ij} x_j^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \ .$$

Τέλος λύνοντας τήν παραπάνω ἐξίσωση ὡς πρός $x_i^{(k+1)}$ βρίσκουμε

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \qquad (10.34)$$

$$|i = 1(1)n \quad |k = 0,1,2,\ldots$$

ὅπου $x_i^{(o)}$ $|i = 1(1)n$ αὐθαίρετοι ἀριθμοί. Οἱ παραπάνω σχέσεις, ὅπως καί στήν περίπτωση τῆς μεθόδου τοῦ Jacobi, μποροῦν νά προκύψουν πρακτικά ὡς ἑξῆς. Παίρνουμε τήν i στή σειρά ἐξίσωση τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος (10.1) καί επιλύουμε ώς πρός τόν άγνωστο x_i. Έτσι παίρνουμε όπως καί στήν προηγούμενη μέθοδο

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j\right).$$

Στό δεύτερο μέλος τῆς παραπάνω σχέσης χωρίζουμε τό άθροισμα, πού υπάρχει, σέ δύο μερικά άθροίσματα, όπου τό πρῶτο περιέχει όλους τούς όρους μέ δεῖκτες $j<i$ (έφόσον υπάρχουν) καί τό δεύτερο μέ δεῖκτες $j>i$. Συγκεκριμένα γράφουμε

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right).$$

Άν τώρα στούς άγνώστους x_i τοῦ πρώτου μέλους καί x_j τοῦ πρώτου άθροίσματος τοῦ δεύτερου μέλους βάλουμε άνω δεῖκτες $(k+1)$ ένῶ στούς άγνώστους x_j τοῦ δεύτερου άθροίσματος τοῦ δεύτερου μέλους άνω δεῖκτες (k) βρίσκουμε τίς σχέσεις (10.34), δηλαδή τίς

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)\Big|\, i=1(1)n \;\Big|\, k=0,1,2,\ldots \text{ όπου } x_i^{(o)} \;|\, i=1(1)n \text{ αὐθαίρετοι ἀριθμοί.}$$

Παράδειγμα

Άφοῦ άποδειχτεῖ ότι ή μέθοδος τῶν Gauss - Seidel γιά τή λύση τοῦ συστήματος

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} &= 5\\ 2x_2 + x_3 &= 3\\ x_1 \phantom{{}+2x_2} + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

συγκλίνει, νά βρεθεῖ στή συνέχεια ή λύση του μέ προσέγγιση δύο δ.ψ.

Λύση

Τό σύστημα αὐτό εἶναι τό ἴδιο μέ τό σύστημα στό Παράδειγμα 1 τῆς προηγούμενης παραγράφου, δηλαδή τό σύστημα (10.30). Ἐπομένως ἡ ἀνάλυση τοῦ πίνακα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων A στούς τρεῖς πίνακες L,D καί U θά εἶναι ἡ ἴδια καί οἱ τρεῖς αὐτοί πίνακες θά δίνονται ἀπό τίς ἐκφράσεις (10.31). Ἐπειδή ἔχουμε $\det(L+D) = 3.2.2 = 12 \neq 0$ συμπεραίνουμε ὅτι ἡ μέθοδος τῶν Gauss - Seidel ὑπάρχει. Ἀπό τή μορφή τοῦ πίνακα L+D, πού εἶναι ἡ παρακάτω

$$L+D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

εἶναι δυνατό νά βρεθεῖ, πολύ εὔκολα, ὁ $(L+D)^{-1}$ ἀκολουθώντας τή μέθοδο ἀπαλοιφῆς τοῦ Gauss ἤ τήν ἀντίστοιχη τοῦ Jordan. Ἡ ἀπαλοιφή σέ ὁποιαδήποτε ἀπό τίς δύο μεθόδους, πού εἶναι ἡ ἴδια, περιέχει ἕνα μικρό ἀριθμό πράξεων, ἀφοῦ τελικά σέ ὁποιοδήποτε ἀπό τούς δύο τρόπους ἀπαλοιφῆς μόνο τό στοιχεῖο 1 στήν κάτω ἀριστερή γωνία θά πρέπει νά ἀπαλειφτεῖ, ἀφοῦ ὁ πίνακας πού θά ἀπομείνει θά εἶναι ἤδη διαγώνιος. Ἐπομένως ὁ ἀντίστροφος προκύπτει εὔκολα. (Στό σημεῖο αὐτό θά πρέπει ἴσως νά κάνουμε τήν ἑξῆς ἀξιοσημείωτη παρατήρηση. Ὁ πίνακας L+D εἶναι κάτω τριγωνικός. Δηλαδή ἔχει μιά μορφή ἀντίστοιχη μέ τήν ἄνω τριγωνική μορφή τοῦ πίνακα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων στό σύστημα (10.5), πού προκύπτει γενικά ἀκολουθώντας τήν μέθοδο ἀπαλοιφῆς τοῦ Gauss χωρίς ὁδήγηση. Μποροῦμε λοιπόν νά ὑποθέσουμε ὅτι ἡ κάτω τριγωνική μορφή ἑνός πίνακα μπορεῖ νά προκύψει μέ τή μέθοδο ἀπαλοιφῆς τοῦ Gauss, ὅπου ὅμως ἡ ἀπαλοιφή τῶν ἀγνώστων καί ἡ σειρά τῶν ἐξισώσεων λαβαίνεται μέ τήν ἀντίστροφη ἀκριβῶς τάξη. Δηλαδή φυλάγουμε σάν ὁδηγό τήν τελευταία ἐξίσωση καί ἀπαλείφουμε τόν ἄγνωστο x_n ἀπό τίς $n-1$ πρῶτες ἐξισώσεις. Ἔπειτα φυλάγουμε τήν προτελευταία ἐξίσωση, πού δέν περιέχει τόν ἄγνωστο x_n καί ἀπαλείφουμε τόν ἄγνωστο x_{n-1} ἀπό τίς $n-2$ πρῶτες κ.ο.κ. Γιά τήν εὕρεση τῶν ἀγνώστων λύνουμε τό σύστημα, πού προκύπτει καί πού ἔχει πίνακα συντελεστῶν ἀγνώστων κάτω τριγωνικό, ἀρχίζοντας ἀπό τήν πρώτη ἐξίσωση καί καταλήγοντας στήν τελευταία, βρίσκοντας ἔτσι τούς ἀγνώστους στή φυσική τους σειρά, δηλαδή x_1, x_2, ..., x_n. Στηριζόμενοι τώρα στήν παρατήρηση αὐτή μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε τίς γραμμές τοῦ πίνακα L+D σάν ὁδηγούς καί μέ τίς ἁπλές ἐπιλύσεις τῆς τελευταίας φάσης τῆς διαδικασίας, ἀλλά σέ ἀντίστροφη τάξη, ἀπό τήν πρώτη πρός τήν τελευταία, νά βρίσκουμε τίς τιμές τῶν στοιχείων τῶν στηλῶν τοῦ ἀντίστροφου πίνακα). Ἡ σχετική διάταξη θά εἶναι ἡ παρακάτω

$$\begin{array}{cccccccc}
 & \overbrace{\quad\quad\quad\quad\quad\quad}^{L+D} & & & & \overbrace{\quad\quad\quad\quad\quad\quad}^{I} & & \\
 & 3 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 2 & 0 & & 0 & 1 & 0 \\
 & 1 & 0 & 2 & & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & \\
x_1^T & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} & & & & \\
x_2^T & 0 & \frac{1}{2} & 0 & & & & \\
x_3^T & 0 & 0 & \frac{1}{2} & & & &
\end{array}$$

Ἔτσι βρίσκουμε

$$(L+D)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} .$$

Ἐπομένως ὁ ἐπαναληπτικός πίνακας τῆς μεθόδου θά εἶναι ὁ

$$T \equiv -(L+D)^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

γιά τόν όποῖο βρίσκουμε ἀμέσως ὅτι

$$\|T\|_\infty = \frac{2}{3} < 1 .$$

Ἄρα ἱκανοποιεῖται ἡ ἱκανή συνθήκη γιά τή σύγκλιση τοῦ ἀλγορίθμου καί ἐπομένως ἡ μέθοδος τῶν Gauss - Seidel γιά τήν ἐπίλυση τοῦ συστήματος, πού δόθηκε, συγκλίνει. Γιά τήν εὕρεση τώρα τῆς ἀκολουθίας τῶν διανυσμάτων, πού παράγεται ἀπό τόν ἀλγόριθμο (10.33) ἤ (10.34), ἐκλέγουμε αὐθαίρετα $x^{(o)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$ καί ἐφαρμόζουμε αὐτόν μέ $k = 0,1,2,\ldots$ Οἱ διαδοχικοί ὅροι τῆς ἀκολουθίας θά προκύψουν φυσικά εὐκολότερα, ἄν χρησιμοποιήσουμε τίς σχέσεις (10.34), πού στήν περίπτωση αὐτή γιά τίς συνιστῶσες τῆς νέας ἐπαναλήψεως $x^{(k+1)}$ δίνουν

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \tfrac{1}{3}(5 - 2x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= \tfrac{1}{2}(3 - x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} &= \tfrac{1}{2}(3 - x_1^{(k+1)}) \end{aligned}\right| \; k = 0,1,2,\ldots$$

Ἐφαρμόζοντας τίς παραπάνω σχέσεις παίρνουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} &x^{(o)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T, && x^{(1)} = [1.667 \quad 1.5 \quad 0.666]^T, \\ &x^{(2)} = [0.667 \quad 1.167 \quad 1.167]^T, && x^{(3)} = [0.889 \quad 0.917 \quad 1.056]^T, \\ &x^{(4)} = [1.055 \quad 0.972 \quad 0.973]^T, && x^{(5)} = [1.019 \quad 1.014 \quad 0.991]^T, \\ &x^{(6)} = [0.991 \quad 1.004 \quad 1.004]^T, && x^{(7)} = [0.997 \quad 0.998 \quad 1.002]^T, \\ &x^{(8)} = [1.002 \quad 0.999 \quad 0.999]^T. \end{aligned}$$

Ἐπειδή οἱ ἀντίστοιχες συνιστῶσες τῶν δύο τελευταίων ἐπαναλήψεων συμπίπτουν σέ δύο δ.ψ., ἔχουμε δηλαδή $\|x^{(7)} - x^{(8)}\|_\infty \leq \frac{1}{2} 10^{-2}$, ἡ ἀριθμητική λύση τοῦ συστήματος, πού δόθηκε, μέ προσέγγιση δύο δ.ψ. εἶναι ἡ $x \approx [1.00 \quad 1.00 \quad 1.00]^T$, πού συμβαίνει νά συμπίπτει μέ τήν ἀληθή λύση τοῦ συστήματος, πού δόθηκε.

Παρατήρηση:

Παρατηρώντας προσεκτικά τίς άναλυτικές έπαναληπτικές σχέσεις τών δύο μεθόδων τοῦ Jacobi καί τῶν Gauss - Seidel, πού δίνονται άντίστοιχα άπό τίς (10.29) καί (10.34) εἶναι δυνατό νά δημιουργηθεῖ ή παρακάτω έντύπωση. Έπειδή γιά τήν εὕρεση τῆς τιμῆς μιᾶς συνιστώσας $x_i^{(k+1)}$ στή μέθοδο τοῦ Jacobi χρησιμοποιοῦνται οἱ τιμές τῶν ἄλλων συνιστωσῶν, πού βρέθηκαν στήν προηγούμενη έπανάληψη (δηλαδή οἱ $x_j^{(k)}$ $|j = 1(1)n,\ j \neq i$), ένῶ γιά τήν εὕρεση τῆς άντίστοιχης συνιστώσας στή μέθοδο τῶν Gauss - Seidel χρησιμοποιοῦνται ὅλες οἱ τελευταῖες διαθέσιμες πληροφορίες γιά τίς ἄλλες συνιστῶσες (δηλαδή οἱ $x_j^{(k+1)}$ $|j = 1(1)i-1$ τῆς τρέχουσας έπαναλήψεως καί οἱ $x_j^{(k)}$ $|j = i+1(1)n$ τῆς προηγούμενης), ή μέθοδος τῶν Gauss - -Seidel εἶναι ταχύτερη τῆς άντίστοιχης τοῦ Jacobi. Ἡ έντύπωση, πού πιθανόν νά δημιουργηθεῖ άπό τόν παραπάνω λόγο, εἶναι δυνατό νά ένισχυθεῖ καί άπό τήν παράθεση τῶν δύο ταυτόσημων παραδειγμάτων (Παράδειγμα 1 μεθόδου Jacobi καί Παράδειγμα μεθόδου Gauss - Seidel), ὅπου στήν πρώτη περίπτωση τοῦ Jacobi χρειάστηκαν ἕντεκα έπαναλήψεις, ένῶ στή δεύτερη τῶν Gauss - Seidel χρειάστηκαν μόνο όκτώ. Μιά τέτοια ὅμως έντύπωση δέν εἶναι όπωσδήποτε ή όρθή. Συγκεκριμένα μποροῦμε νά άναφέρουμε ὅτι εἶναι δυνατό ή μέθοδος τοῦ Jacobi νά εἶναι ταχύτερη άπό τή μέθοδο τῶν Gauss-Seidel ή καί άκόμη ή μέθοδος τοῦ Jacobi νά συγκλίνει ένῶ ή μέθοδος τῶν Gauss - - Seidel νά άποκλίνει. Τά πάντα έξαρτῶνται άπό τή φασματική άκτίνα $\rho(T)$ τῶν έπαναληπτικῶν πινάκων τῶν δύο μεθόδων. Μέ τήν προϋπόθεση ὅτι καί οἱ δύο μέθοδοι ἔχουν φασματικές άκτίνες έπαναληπτικῶν πινάκων μικρότερες άπό τή μονάδα, ταχύτερη τελικά εἶναι έκείνη ή μέθοδος, πού άντιστοιχεῖ στή μικρότερη φασματική άκτίνα.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Νά βρεθεῖ τό πλῆθος τῶν πράξεων προσθέσεων καί άφαιρέσεων (μαζί), πολλαπλασιασμῶν καί διαιρέσεων γιά τήν έπίλυση τοῦ παρακάτω συστήματος, ὅταν εἶναι γνωστό ὅτι $a_{ii} \neq 0$ $|i = 1(1)n$

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad = b_2 \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdot\ \cdot\ \cdot + a_{nn}x_n = b_n
\end{array}
$$

('Απ. προσθ. + ἀφαιρ. $= \frac{n(n-1)}{2}$, πολ.$= \frac{n(n-1)}{2}$, διαιρ. = n)

2. Νά λυθεῖ μέ τή μέθοδο ἀπαλοιφῆς τοῦ Gauss μέ μερική ὁδήγηση τό σύστημα

$$
\begin{array}{rcl}
2x_1 + x_2 & & = 3 \\
x_1 + 3x_2 + 2x_3 & & = 6 \\
x_2 + 4x_3 + 3x_4 & & = 8 \\
4x_3 + 5x_4 & & = 9
\end{array}
$$

('Απ. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 1, 1)$)

3. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ τιμή τῆς ὀρίζουσας

$$
\begin{vmatrix}
2 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 2
\end{vmatrix}
$$

χρησιμοποιώντας τή μέθοδο ἀπαλοιφῆς τοῦ Gauss χωρίς ὁδήγηση καί διατηρώντας δύο δ.ψ. στούς ὑπολογισμούς. ('Απ. 4.99)

4. Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῆς ὀρίζουσας

$$
\begin{vmatrix}
2 & 5 & 0 \\
-4 & 0 & 3 \\
1 & 2 & 3
\end{vmatrix},
$$

μέ τή μέθοδο ἀπαλοιφῆς τοῦ Gauss μέ μερική ὁδήγηση. (Ἀπ. 63)

5. Νά βρεθεῖ τό πλῆθος τῶν προσθέσεων καί ἀφαιρέσεων (μαζί), πολλαπλασιασμῶν καί διαιρέσεων, πού ἀπαιτοῦνται γιά τόν ὑπολογισμό τῆς παρακάτω ὁρίζουσας μέ τή μέθοδο ἀπαλοιφῆς τοῦ Gauss χωρίς ὁδήγηση

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & & & & \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & & 0 & \\ & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & 0 & & & \cdot & \\ & & & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ & & & & \alpha_n & \beta_n \end{vmatrix}$$

(Ἀπ. προσθ. + ἀφαιρ. = n-1, πολ. = 2n-2, διαιρ. = n-1)

6. Διατηρώντας δύο δ.ψ. στούς ὑπολογισμούς νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων

$$\begin{aligned} 2x + y &= 4.7 \\ x + 2y &= 4.9 \end{aligned}$$

μέ τίς ἁπλούστερες μεθόδους ἀπαλοιφῆς τῶν Gauss καί Jordan. (Ἀπ. (x,y)= =(1.50, 1.70))

7. Νά ἐπιλυθεῖ μέ τίς μεθόδους ἀπαλοιφῆς τῶν Gauss καί Jordan μέ μερική ὁδήγηση τό σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1 \qquad - x_3 &= 1.3 \\ 4x_2 + x_3 &= 8.1 \\ 8x_1 - 4x_2 \qquad &= 5.6 \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας τρία δ.ψ. στούς ὑπολογισμούς. (Ἀπ. (x_1, x_2, x_3) = (1.5, 1.6, 1.7))

8. Νά ἐπιλυθοῦν συγχρόνως, μέ ὁποιαδήποτε μέθοδο, τά τρία συστήματα

$$\begin{aligned} x+2y &= 3 \\ 2x+y &= 3 \end{aligned}, \quad \begin{aligned} x+2y &= 4 \\ 2x+y &= 5 \end{aligned} \quad \text{καί} \quad \begin{aligned} x+2y &= 1 \\ 2x+y &= 5 \end{aligned}.$$

('Απ. $(x,y)=(1,1),\ (2,1),\ (3,-1)$)

~~9.~~ Νά βρεθεῖ μέ ὁποιαδήποτε μέθοδο ἀπαλοιφῆς ὁ ἀντίστροφος τοῦ πίνακα

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$\left[\text{'Απ.}\right.$

$$\left.\begin{bmatrix} 0.3 & -1.25 & 2.3 \\ 0 & -0.5 & 1 \\ -0.1 & 0.25 & -0.1 \end{bmatrix}\right]$$

~~10.~~ Νά βρεθεῖ μέ ὁποιαδήποτε μέθοδο ἀπαλοιφῆς ὁ ἀντίστροφος τοῦ πίνακα

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\left[\text{'Απ.}\right.$

$$\left.\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right]$$

11. Γιά τήν έπίλυση τοῦ γραμμικοῦ συστήματος $x = Tx + g$, ὅπου T ἕνας $n \times n$ πίνακας καί x, g διανύσματα (ἄγνωστο καί γνωστό ἀντίστοιχα) τοῦ n-διάστατου χώρου, προτείνεται ὁ ἀλγόριθμος $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + g \;|k = 0,1,2,\ldots$ μέ $x^{(o)}$ αὐθαίρετη ἀρχική προσέγγιση τῆς λύσης τοῦ συστήματος. Ἄν $\varepsilon^{(k)} |k = 0,1,2,\ldots$ εἶναι τό διάνυσμα-σφάλμα στήν k ἐπανάληψη τοῦ ἀλγορίθμου, νά ἀποδειχτεῖ ἡ σχέση $\|\varepsilon^{(k)}\| \leq \|T\|^k \|\varepsilon^{(o)}\|$.

12. Γιά τήν ἀριθμητική ἐπίλυση τοῦ συστήματος $Ax = b$, ὅπου $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $x = [x_1 \;\; x_2]^T$ καί $b = [2 \;\; 7]^T$, προτείνεται ὁ ἀλγόριθμος

$$x^{(k+1)} = (I - \frac{1}{6}A)\,x^{(k)} + \frac{1}{6}b \quad |k = 0,1,2,\ldots$$

ὅπου I ὁ μοναδιαῖος πίνακας τάξης δύο καί $x^{(o)}$ αὐθαίρετο διδιάστατο διάνυσμα. Τί μπορεῖ νά λεχτεῖ γιά τή σύγκλιση τῆς ἀκολουθίας διανυσμάτων $\{x^{(k)}\} \;|k = 0,1,2,\ldots$, πού παράγεται ἀπό τόν ἀλγόριθμο σέ σχέση μέ τή λύση τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος; ('Απ. Συγκλίνει)

13. Σέ τί μπορεῖ νά χρησιμεύσει ὁ ἀλγόριθμος

$$x^{(n+1)} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 \end{bmatrix} x^{(n)} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad |n = 0,1,2,\ldots \text{ μέ } x^{(o)} \text{ αὐθαίρετο}$$

δοσμένο διάνυσμα καί

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{(n)} \quad |n = 0,1,2,\ldots$$

καί τί μπορεῖ νά λεχτεῖ γιά τή σύγκλισή του; ('Απ. Στή λύση τοῦ συστήματος $\begin{matrix} 1/2\,x_1 - 1/3\,x_2 = 1 \\ -1/3\,x_1 + 1/2\,x_2 = 2 \end{matrix}$, Συγκλίνει)

14. Γιά τήν ἀριθμητική ἐπίλυση τοῦ συστήματος $Ax = b$ προτείνεται ὁ ἀλγόριθμος

$$x^{(k+1)} = -(D+L)^{-1}(D+L+2U)\,x^{(k)} + 2(D+L)^{-1}b \quad |k = 0,1,2,\ldots$$

ὅπου $x^{(o)}$ δοσμένο αὐθαίρετο διάνυσμα καί D, L καί U τρεῖς πίνακες μέ ἄθροισμα $A(=D+L+U)$. Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ἄν ὁ ἀλγόριθμος, πού δόθηκε, συγκλίνει, τότε θά συγκλίνει στή λύση τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος.

15. Νά δειχτεῖ ὅτι ἡ ἐπαναληπτική μέθοδος τοῦ Jacobi, ὅταν ἐφαρμοστεῖ στό σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \phantom{{}-x_3} &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

συγκλίνει.

16. Νά δειχτεῖ ὅτι ἄν ὁ πίνακας A τάξης n εἶναι αὐστηρά διαγώνια ὑπέρτερος, τότε ἡ μέθοδος τοῦ Jacobi γιά τήν ἐπίλυση τοῦ συστήματος $Ax=b$ δίνει ἀκολουθία, πού συγκλίνει. (Ἕνας $n\times n$ πίνακας A μέ στοιχεῖα $\alpha_{ij} \mid i,j=1(1)n$ λέγεται αὐστηρά διαγώνια ὑπέρτερος, ὅταν ἰσχύουν οἱ σχέσεις

$$|\alpha_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |\alpha_{ij}| \quad |i=1(1)n).$$

17. Γιά τήν ἀριθμητική ἐπίλυση ἑνός γραμμικοῦ συστήματος δύο ἐξισώσεων μέ δύο ἀγνώστους καί πίνακα συντελεστῶν ἀγνώστων $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ πρόκειται νά ἐφαρμοστεῖ ἡ μέθοδος τῶν Gauss-Seidel. Τί μπορεῖ νά λεχτεῖ γιά τή σύγκλισή της; (Ἀπ. Συγκλίνει)

18. Γιά τήν ἐπίλυση τοῦ γραμμικοῦ συστήματος $Ax=b$, ὅπου $A\,(=D+L+U)$ γνωστός πίνακας τάξης n (D διαγώνιος μέ $\det(D)\neq 0$, L αὐστηρά κάτω τριγωνικός καί U αὐστηρά ἄνω τριγωνικός πίνακες), x ἄγνωστο καί b γνωστό n-διάστατα διανύσματα, προτείνεται ὁ ἀλγόριθμος

$$(D+rL)x^{(k+1)} = \left[(1-\omega)D + (r-\omega)L - \omega U\right]x^{(k)} + \omega b \quad |k=0,1,2,\ldots$$

μέ $x^{(o)}$ αὐθαίρετη ἀρχική προσέγγιση καί r καί $\omega\neq 0$ σταθερές. Νά ἀποδειχτεῖ i) πώς ἄν ὁ παραπάνω ἀλγόριθμος συγκλίνει, θά συγκλίνει στή λύση τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος καί ii) ὅτι γιά τά ζεύγη τῶν σταθερῶν $(r,\omega)=(0,1)$ καί $(r,\omega)=(1,1)$ μποροῦν νά προκύψουν δύο πολύ γνωστοί ἀλγόριθμοι.

11. ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΥΡΕΣΗ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΚΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

11.1. Γενικά

Στό παρόν Κεφάλαιο θά άναπτύξουμε μιά άπό τίς πιό κλασικές έπαναληπτικές μεθόδους, μέ τίς πιό χαρακτηριστικές παραλλαγές καί τροποποιήσεις της, γιά τήν εὕρεση μιᾶς ἤ μερικῶν άπό τίς ἰδιοτιμές ἑνός $n\times n$ πραγματικοῦ πίνακα A, καθώς έπίσης καί τῶν άντίστοιχων ἰδιοδιανυσμάτων τῶν ἰδιοτιμῶν τους. Ἡ μέθοδος, πού θά άναπτυχτεῖ, μπορεῖ νά έφαρμοστεῖ σέ πίνακες, οἱ όποῖοι ἔχουν ἕνα πλῆρες σύστημα n γραμμικά άνεξάρτητων ἰδιοδιανυσμάτων. Τέτοιοι πίνακες εἶναι π.χ. οἱ συμμετρικοί, έκεῖνοι πού ἔχουν ὅλες τίς ἰδιοτιμές τους διαφορετικές κλπ. Θά πρέπει νά τονιστεῖ ὅτι ὁ παραπάνω περιορισμός δέν άποτελεῖ ἕνα σοβαρό περιορισμό καθόσο ἡ πλειονότητα τῶν πινάκων, πού παρουσιάζονται στήν πράξη, άνήκει σέ μιά άπό τίς δύο προηγούμενες κατηγορίες, πού άναφέρθηκαν. Ἑπομένως ἡ μέθοδος, πού θά άναπτυχτεῖ, μπορεῖ νά έφαρμοστεῖ χωρίς κανένα δισταγμό. Γενικά,οἱ έπαναληπτικές μέθοδοι, γιά τήν εὕρεση τῶν ἰδιοτιμῶν τοῦ πίνακα A εἶναι προτιμότερες σέ σύγκριση μέ τήν άντίστοιχη ἄμεση καί προφανή μέθοδο, πού εἶναι ἡ έπίλυση τῆς πολυωνυμικῆς έξισώσεως

$$\det(A-\lambda I) = 0 \qquad (11.1)$$

ὅπου λ μία ἰδιοτιμή τοῦ πίνακα A καί I ὁ μοναδιαῖος πίνακας τάξης n.Αὐτό γιατί, έκτός άπό έξαιρέσεις, πού άφοροῦν, πολύ μικρές τιμές τοῦ n, ἡ έξίσωση (11.1) μπορεῖ νά άποδειχτεῖ ὅτι εἶναι άσταθής ὡς πρός τίς ρίζες της. Δηλαδή μικρές μεταβολές στούς συντελεστές της μποροῦν νά προκαλέσουν μεγάλες μεταβολές στίς ρίζες της. Συνεπῶς οἱ τιμές γιά τίς ἰδιοτιμές τοῦ πίνακα A, πού προκύπτουν άπό τήν άριθμητική έπίλυση τῆς έξισώσεως (11.1) δέν εἶναι άξιόπιστες.

11.2. Μέθοδος τῆς δυνάμεως

Ἡ μέθοδος αὐτή χρησιμοποιεῖται γιά τήν εὕρεση τῆς μιᾶς καί μόνο μεγαλύτερης κατ'ἀπόλυτη τιμή ἰδιοτιμῆς τοῦ πίνακα A, ἐφόσον ὑπάρχει τέτοια, καί τοῦ ἀντίστοιχου ἰδιοδιανύσματος. Ἄν $\lambda_i \,|\, i=1(1)n$ εἶναι οἱ ἰδιοτιμές τοῦ πίνακα A, τέτοιες ὥστε $|\lambda_1| > |\lambda_i| \;\, | i=2(1)n$, καί $x^{(i)} | i=1(1)n$ τά ἀντίστοιχα ἰδιοδιανύσματα, ἡ μέθοδος τῆς δυνάμεως εἶναι ἡ ἀκόλουθη ἐπαναληπτική μέθοδος

$$y^{(m+1)} = Ay^{(m)} \quad | m=0,1,2,\ldots \tag{11.2}$$

μέ $y^{(o)} \neq 0$ αὐθαίρετο διάνυσμα. Ἐπειδή ὑποθέτουμε ὅτι ὁ πίνακας A ἔχει ἕνα πλῆρες σύστημα n γραμμικά ἀνεξάρτητων ἰδιοδιανυσμάτων, τό διάνυσμα $y^{(o)}$ θά ἐπιδέχεται μιά ἀνάλυση τῆς μορφῆς

$$y^{(o)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{(i)} \,. \tag{11.3}$$

Ἡ ἐφαρμογή τώρα τῆς μεθόδου (11.2), μέ βάση τήν (11.3), δίνει διαδοχικά. Γιά $m=0$

$$y^{(1)} = Ay^{(o)} = A\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x^{(i)} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i A x^{(i)} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_i x^{(i)} \,.$$

Γιά $m=1$

$$y^{(2)} = Ay^{(1)} = A\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_i x^{(i)} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_i A x^{(i)} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_i^2 x^{(i)} .$$

Τέλος ἐπαγωγικά μποροῦμε νά βροῦμε ὅτι

$$y^{(m)} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_i^m x^{(i)} \quad | m=0,1,2,\ldots$$

Ἡ σχέση, πού μόλις βρέθηκε, γράφεται συνήθως καί ὡς ἑξῆς

$$y^{(m)} = \lambda_1^m \left[\alpha_1 x^{(1)} + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^m x^{(i)}\right] \quad | m = 0,1,2,\ldots \tag{11.4}$$

Ἄν τώρα ὑποθέσουμε ὅτι $\alpha_1 \neq 0$, σχηματίζουμε τό λόγο δύο ἀντίστοιχων καί διάφορων ἀπό τό μηδέν συνιστωσῶν, ἔστω τῶν j στή σειρά, δύο διαδοχικῶν διανυσμάτων $y^{(m)}$ καί $y^{(m-1)}$, πού προκύπτουν ἀπό τόν ἀλγόριθμο (11.4). Ἔτσι θά ἔχουμε ὅτι

$$\frac{y_j^{(m)}}{y_j^{(m-1)}} = \lambda_1 \frac{\alpha_1 x_j^{(1)} + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^m x_j^{(i)}}{\alpha_1 x_j^{(1)} + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{m-1} x_j^{(i)}} \quad | m=1,2,3,\ldots \tag{11.5}$$

ὅπου ὁ συμβολισμός z_j χρησιμοποιεῖται γιά τήν j στή σειρά συνιστώσα τοῦ διανύσματος z. Ἐπειδή, ἀπό τήν ὑπόθεση, ἔχουμε ὅτι $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1 \mid i = 2(1)n$ συμπεραίνουμε πώς ἄν πάρουμε τό ὅριο τῆς ἐκφράσεως (11.5) μέ $m \to \infty$ θά προκύψει ἀμέσως ὅτι,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{y_j^{(m)}}{y_j^{(m-1)}} = \lambda_1 \tag{11.6}$$

δηλαδή ἡ ἀπόλυτα μεγαλύτερη ἰδιοτιμή λ_1. Χρησιμοποιώντας τώρα τήν ἰδιοτιμή λ_1, πού βρίσκεται ἀπό τήν (11.6), μποροῦμε νά βροῦμε ἀπό τήν (11.4) ὅτι

$$\lim_{m\to\infty} \frac{y^{(m)}}{\lambda_1^m} = \alpha_1 x^{(1)} \tag{11.7}$$

δηλαδή τό ἰδιοδιάνυσμα πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἰδιοτιμή λ_1. (Ὑπενθυμίζουμε ὅτι, ἄν x εἶναι τό ἰδιοδιάνυσμα τοῦ πίνακα A, πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἰδιοτιμή λ, τότε καί Cx, ὅπου C σταθερά, εἶναι ἐπίσης ἰδιοδιάνυσμα τοῦ A, πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἴδια ἰδιοτιμή λ).

Παρατήρηση:

Ένα σοβαρό μειονέκτημα τῆς μεθόδου τῆς δυνάμεως, ὅπως περιγράφτηκε, εἶναι τό ἀκόλουθο. Γιά $|\lambda_1| > 1$ ἔχουμε ἀμέσως ἀπό τήν (11.4) ὅτι $\lim_{m\to\infty} y^{(m)} = \pm\infty$, ἐνῶ γιά $|\lambda_1| < 1$ ἔχουμε ἀντίστοιχα ὅτι $\lim_{m\to\infty} y^{(m)} = 0$. Έτσι, ἐκτός καί ἄν $|\lambda_1| = 1$, ὁ ἀλγόριθμος (11.2) θά παράγει ἀκολουθία διανυσμάτων $\{y^{(m)}\}\ |m = 0,1,2,\ldots$ πού θά τείνει στό ἄπειρο ἤ στό μηδενικό διάνυσμα. Συνεπῶς στήν πράξη καί κατά τήν εὕρεση τῆς λ_1 θά ἔχουμε νά ἐκτελέσουμε πράξεις μέ πάρα πολύ μεγάλους ἤ πάρα πολύ μικρούς ἀριθμούς. Αὐτό ὅμως ἔχει σάν συνέπεια ἀπώλεια σημαντικῶν ψηφίων κατά τή διάρκεια τῶν πράξεων καί συνεπῶς τήν εἰσαγωγή μεγάλων σφαλμάτων. Τό μειονέκτημα αὐτό μποροῦμε νά τό ἀποφύγουμε μέ μιά μικρή τροποποίηση τῆς μεθόδου τῆς δυνάμεως, πού περιγράφεται στήν ἑπόμενη παράγραφο.

Παράδειγμα

Νά βρεθεῖ, μέ τή μέθοδο τῆς δυνάμεως ἡ ἀπόλυτα μεγαλύτερη ἰδιοτιμή τοῦ πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ μέ προσέγγιση ἑνός δ.ψ., χρησιμοποιώντας σάν ἀρχικό διάνυσμα τό

$$y^{(o)} = [1 \quad 0]^T.$$

Λύση

Έχουμε $y^{(o)} = [1 \quad 0]^T$. Ἑπομένως ἐφαρμόζοντας τόν ἀλγόριθμο (11.2) μαζί μέ τίς σχέσεις (11.5) βρίσκουμε

$$y^{(1)} = Ay^{(o)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{y_1^{(1)}}{y_1^{(o)}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$y^{(2)} = Ay^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1^{(2)} = \frac{y_1^{(2)}}{y_1^{(1)}} = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$y^{(3)} = Ay^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1^{(3)} = \frac{y_1^{(3)}}{y_1^{(2)}} = \frac{14}{5} = 2.8$$

$$y^{(4)} = Ay^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1^{(4)} = \frac{y_1^{(4)}}{y_1^{(3)}} = \frac{41}{14} = 2.93$$

$$y^{(5)} = Ay^{(4)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 41 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 122 \\ 121 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1^{(5)} = \frac{y_1^{(5)}}{y_1^{(4)}} = \frac{122}{41} = 2.98$$

Ἐπειδή $|\lambda_1^{(4)} - \lambda_1^{(5)}| \leq \frac{1}{2}\, 10^{-1}$ βρίσκουμε ὅτι, μέ προσέγγιση ἑνός δ.ψ., $\lambda_1 \approx 3.0$, πού συμβαίνει νά συμπίπτει μέ τήν ἀληθή τιμή. Μέ βάση τήν τιμή αὐτή μποροῦμε νά βροῦμε ὅτι τό ἀντίστοιχο ἰδιοδιάνυσμα εἶναι τό $x^{(1)} \approx [122 \quad 121]^T/(3.0)^5 = [0.5 \quad 0.5]^T$, πού ἐπίσης συμβαίνει νά συμπίπτει μέ τήν ἀντίστοιχη ἀληθή τιμή.

11.3. Βασική παραλλαγή τῆς μεθόδου τῆς δυνάμεως

Ἡ τροποποίηση τῆς μεθόδου τῆς δυνάμεως πραγματοποιεῖται μέ τήν ἀντικατάσταση τοῦ ἀλγορίθμου (11.2) ἀπό τόν παρακάτω, πού ἀποτελεῖται ἀπό τρία ἐνδιάμεσα βήματα σέ κάθε ἐπανάληψη. Συγκεκριμένα θέτουμε

$$\begin{aligned} |y_j^{(m)}| &= \max_i |y_i^{(m)}| \\ z^{(m)} &= \frac{1}{y_j^{(m)}} y^{(m)} \qquad \Big| m = 0,1,2,\ldots \\ y^{(m+1)} &= Az^{(m)} \end{aligned} \tag{11.8}$$

Στά τρία παραπάνω ένδιάμεσα βήματα έκτελοῦμε τίς άκόλουθες έργασίες. Στό πρῶτο βρίσκουμε τήν άπόλυτα μεγαλύτερη συνιστώσα τοῦ διανύσματος $y^{(m)}$ καί ύποθέτουμε ὅτι αὐτή εἶναι ἡ j στή σειρά· στό δεύτερο διαιροῦμε τίς συνιστῶσες τοῦ διανύσματος $y^{(m)}$ μέ τή συνιστώσα $y_j^{(m)}$ καί τό διάνυσμα πού παίρνουμε καλοῦμε $z^{(m)}$, πού ἔχει ὅλες τίς συνιστῶσες του μέ άπόλυτη τιμή μικρότερη ἤ ἴση άπό τή μονάδα· τέλος βρίσκουμε τό νέο διάνυσμα $y^{(m+1)}$ πολλαπλασιάζοντας τόν πίνακα A ἐπί τό διάνυσμα $z^{(m)}$. Ἄν έργαστοῦμε τώρα, ὅπως καί στήν προηγούμενη παράγραφο, άναχωρώντας ὅμως άπό τόν άλγόριθμο (11.8) άντί νά άναχωρήσουμε άπό τόν (11.2), τότε ἡ άντίστοιχη ἔκφραση πρός τήν (11.4), πού θά προκύψει θά εἶναι ἡ άκόλουθη

$$y^{(m)} = \frac{1}{y_{j_o}^{(o)}\, y_{j_1}^{(1)} \ldots y_{j_{m-1}}^{(m-1)}}\, \lambda_1^m \left[\alpha_1 x^{(1)} + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^m x^{(i)} \right] \tag{11.9}$$

$$\Big| m = 0,1,2,\ldots$$

ὅπου οἱ δεῖκτες j_k στούς παράγοντες $y_{j_k}^{(k)}\ |k = 0(1)m-1$ δέν εἶναι άπαραίτητο νά εἶναι οἱ ἴδιοι. Ἀπό τήν (11.9) μπορεῖ νά προκύψει ἀμέσως σχέση άντίστοιχη πρός τήν (11.6), πού σ'αὐτή τήν περίπτωση θά εἶναι

$$\lim_{m\to\infty} y_{j_{m-1}}^{(m)} = \lambda_1 \ . \tag{11.10}$$

Τονίζεται ὅτι ἡ συνιστώσα j_{m-1} τοῦ διανύσματος $y^{(m)}$ τοῦ παραπάνω τύπου (11.10) εἶναι ἐκείνη, πού άντιστοιχεῖ στή μεγαλύτερη συνιστώσα τοῦ προηγούμενου διανύσματος $y^{(m-1)}$. Γιά τήν εὕρεση τοῦ άντίστοιχου ἰδιοδιανύσματος $x^{(1)}$ παρατηροῦμε τά ἑξῆς. Ἄν ὁ δείκτης j_m ἀπό μιά ὁρισμένη τιμή τοῦ m καί πέρα παραμένει σταθερός, τότε εἶναι εὔκολο νά διαπιστώσουμε ὅτι, ἡ σχέση ἡ ἀντίστοιχη πρός τήν (11.7), πού θά εἶναι τό ἰδιοδιάνυσμα, θά εἶναι ἡ ἀκόλουθη

$$\lim_{m\to\infty} z^{(m)} = Cx^{(1)} \tag{11.11}$$

ὅπου C σταθερά καί μάλιστα τέτοια ὥστε ἡ ἀπόλυτα μεγαλύτερη συνιστῶσα τοῦ ἰδιοδιανύσματος $Cx^{(1)}$ νά εἶναι ἴση μέ 1. Ἄν ὅμως ὁ δείκτης j_m δέν παραμένει τελικά σταθερός, τότε ἡ (11.11) θά πρέπει νά τροποποιηθεῖ στήν ἀκόλουθη

$$\lim_{m\to\infty} \frac{z^{(m)}}{z_k^{(m)}} = Cx^{(1)} \tag{11.12}$$

ὅπου ὁ δείκτης k θά παίρνεται τελικά σταθερός. Στή σχέση (11.12) ἡ C εἶναι μιά σταθερά καί μάλιστα τέτοια ὥστε ἡ k στή σειρά συνιστῶσα τοῦ διανύσματος $Cx^{(1)}$ νά εἶναι ἴση μέ 1.

Παρατήρηση:

Καί στίς δύο μεθόδους πού περιγράψαμε ἕως τώρα, δηλαδή στή μέθοδο τῆς δυνάμεως καί στή βασική παραλλαγή της, σάν ἀρχικό διάνυσμα $y^{(o)}$ ἐκλέγεται συνήθως ἐκεῖνο, πού ἔχει ὅλες τίς συνιστῶσες του ἴσες μέ 1.

Παράδειγμα

Ἐφαρμόζοντας τή βασική παραλλαγή τῆς μεθόδου τῆς δυνάμεως νά βρεθεῖ, μέ προσέγγιση δύο δ.ψ., ἡ ἀπόλυτα μεγαλύτερη ἰδιοτιμή καί τό ἀντίστοιχο ἰδιοδιάνυσμα τοῦ πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Λύση

Ἐφαρμόζοντας τήν παραλλαγή τῆς μεθόδου τῆς δυνάμεως μέ $y^{(o)}$ =

$= [1 \;\; 1 \;\; 1]^T$ παίρνουμε διαδοχικά

$$y^{(o)}=[1 \quad 1 \quad 1]^T, \quad |y_j^{(o)}|=1, \quad z^{(o)}=[1 \quad 1 \quad 1]^T$$

$$y^{(1)}=[5 \quad 0 \quad 7]^T, \quad |y_3^{(1)}|=7, \quad z^{(1)}=[0.714 \quad 0 \quad 1.000]^T$$

$$y^{(2)}=[3.714 \quad 1.714 \quad 5.142]^T, |y_3^{(2)}|=5.142, \quad z^{(2)}=[0.722 \; 0.333 \; 1.000]^T$$

$$y^{(3)}=[4.055 \quad 1.056 \quad 5.499]^T, |y_3^{(3)}|=5.499, \quad z^{(3)}=[0.737 \; 0.192 \; 1.000]^T$$

$$y^{(4)}=[3.929 \quad 1.353 \quad 5.403]^T, |y_3^{(4)}|=5.403, \quad z^{(4)}=[0.727 \; 0.250 \; 1.000]^T$$

$$y^{(5)}=[3.977 \quad 1.227 \quad 5.431], \; |y_3^{(5)}|=5.431, \quad z^{(5)}=[0.732 \; 0.226 \; 1.000]^T$$

$$y^{(6)}=[3.958 \quad 1.280 \quad 5.422], \; |y_3^{(6)}|=5.422, \quad z^{(6)}=[0.730 \; 0.236 \; 1.000]^T$$

$$y^{(7)}=[3.966 \quad 1.258 \quad 5.426], \; |y_3^{(7)}|=5.426, \quad z^{(7)}=[0.731 \; 0.232 \; 1.000]^T$$

Ἀπό τά παραπάνω ἀποτελέσματα καί μέ βάση τή θεωρία, πού ἀναπτύξαμε, εἶναι φανερό ὅτι ἀπό τίς σχέσεις (11.10) καί (11.11) καί μέ προσέγγιση δύο δ.ψ. ἔχουμε ὅτι

$$\lambda_1 \approx 5.43 \qquad \text{καί} \qquad x^{(1)} = [0.73 \quad 0.23 \quad 1.00]^T$$

11.4. Εὕρεση τῆς μεγαλύτερης καί μικρότερης ἰδιοτιμῆς

Μέ τήν προϋπόθεση ὅτι ὁ πίνακας A ἔχει ὅλες τίς ἰδιοτιμές του πραγματικές καί μάλιστα μιά ἀπό αὐτές μεγαλύτερη ἀπό ὅλες τίς ἄλλες (ἤ μικρότερη ἀπό ὅλες τίς ἄλλες) εἶναι δυνατό νά τή βροῦμε μέ μιά νέα τροποποίηση τῆς μεθόδου τῆς δυνάμεως ἤ ἀντίστοιχα τῆς βασικῆς παραλλαγῆς της. Γιά τό σκοπό αὐτό ἐργαζόμαστε ὅπως στή συνέχεια: Ἄν $\lambda_i \; |i = 1(1)n$ εἶναι οἱ ἰδιοτιμές τοῦ πίνακα A καί $x^{(i)} \; |i = 1(1)n$ τά ἀντίστοιχα ἰδιοδιανύσματα, τότε $\lambda_i - \mu \; |i = 1(1)n$ εἶναι οἱ ἰδιοτιμές τοῦ πίνακα $A - \mu I$, ὅπου μ ὁποιοσδήποτε ἀριθμός καί I ὁ μοναδιαῖος πίνακας τάξης n, τά ἀντίστοιχα ὅμως ἰδιοδιανύσματα ἐξακολουθοῦν νά εἶναι τά $x^{(i)}$ $|i=1(1)n$. Συνεπῶς ἄν ὑποθέσουμε ὅτι οἱ ἰδιοτιμές τοῦ A εἶναι τέτοιες ὥστε

$$\lambda_1 > \lambda_2 \geqq \lambda_3 \geqq \dots \geqq \lambda_{n-1} \geqq \lambda_n$$

ἤ τέτοιες ὥστε

$$\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \lambda_3 \geqq \dots \geqq \lambda_{n-1} > \lambda_n$$

τότε οἱ ἴδιες σχέσεις διατάξεως θά ἰσχύουν καί γιά τίς ἰδιοτιμές τοῦ πίνακα $A-\mu I$ δηλαδή

$$\lambda_1-\mu > \lambda_2-\mu \geqq \lambda_3-\mu \geqq \dots \geqq \lambda_{n-1}-\mu \geqq \lambda_n-\mu \tag{11.13}$$

καί

$$\lambda_1-\mu \geqq \lambda_2-\mu \geqq \lambda_3-\mu \geqq \dots \geqq \lambda_{n-1}-\mu > \lambda_n-\mu \tag{11.14}$$

ἀντίστοιχα. Ἀπό τό Θεώρημα 6 τοῦ Κεφαλαίου 9 ἔχουμε ὅτι

$$|\lambda_i| \leqq \|A\| \qquad |i=1(1)n$$

ἤ ἀκόμη, ἐπειδή οἱ ἰδιοτιμές λ_i $|i=1(1)n$ εἶναι πραγματικές

$$-\|A\| \leqq \lambda_i \leqq \|A\| \qquad |i=1(1)n \tag{11.15}$$

Ἄν λοιπόν σάν ἀριθμό μ χρησιμοποιήσουμε στήν (11.13) τόν $-\|A\|$ καί στήν (11.14) τόν $\|A\|$, τότε, λόγω τῶν (11.15), παίρνουμε ἀντίστοιχα

$$\begin{gathered}\lambda_1+\|A\| > \lambda_2+\|A\| \geqq \lambda_3+\|A\| \geqq \dots \geqq \lambda_{n-1}+\|A\| \geqq \\ \lambda_n+\|A\| \geqq 0\end{gathered} \tag{11.16}$$

καί

$$\begin{gathered}0 \geqq \lambda_1-\|A\| \geqq \lambda_2-\|A\| \geqq \lambda_3-\|A\| \geqq \dots \geqq \\ \lambda_{n-1}-\|A\| > \lambda_n-\|A\|\end{gathered} \tag{11.17}$$

Ἔτσι ἀπό τίς σχέσεις (11.16) ἔχουμε ὅτι ἡ ἀπόλυτα μεγαλύτερη (θετική) ἰδιοτιμή τοῦ πίνακα $A + \|A\| I$ εἶναι ἡ $\lambda_1 + \|A\|$. Ἐπομένως ἡ ἐφαρμογή τῆς μεθόδου τῆς δυνάμεως ἤ τῆς παραλλαγῆς της στόν πίνακα $A + \|A\| I$ θά δώσει τήν ἰδιοτιμή $\lambda_1 + \|A\|$, ὁπότε ἀφαιρώντας ἀπό αὐτή τόν ἀριθμό $\|A\|$ βρίσκουμε τήν λ_1. Ἀντίστοιχα ἀπό τήν (11.17) ἔχουμε ὅτι ἡ ἀπόλυτα μεγαλύτερη (ἀρνητική) ἰδιοτιμή τοῦ πίνακα $A - \|A\| I$ εἶναι ἡ $\lambda_n - \|A\|$ καί ἐπομένως ἡ μέθοδος τῆς δυνάμεως ἤ ἡ παραλλαγή της, ὅταν ἐφαρμοστεῖ στόν πίνακα $A - \|A\| I$ θά δώσει τήν ἰδιοτιμή $\lambda_n - \|A\|$, ὁπότε προσθέτοντας σ' αὐτή τόν ἀριθμό $\|A\|$ βρίσκουμε τήν λ_n.

Παράδειγμα

Ὁ πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

ἔχει ἰδιοτιμές $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$ καί $\lambda_3 = -2$, καί ἐπομένως ἡ μεγαλύτερη ἀπό αὐτές $\lambda_1 = 2$ δέν μπορεῖ νά βρεθεῖ μέ τή μέθοδο τῆς δυνάμεως, ἀφοῦ $|\lambda_1| = |\lambda_3| = 2 > 0 = |\lambda_2|$. Νά δοθεῖ μιά ὁποιαδήποτε (συγκεκριμένη) ἐπαναληπτική μέθοδος, μέ τήν ὁποία θά εἶναι δυνατός ὁ προσδιορισμός τῆς ἰδιοτιμῆς $\lambda_1 = 2$.

Λύση

Οἱ ἰδιοτιμές τοῦ πίνακα A εἶναι πραγματικές καί τέτοιες ὥστε $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$. Ἐπομένως ἡ μεγαλύτερη ἀπό αὐτές λ_1 θά μπορεῖ νά βρεθεῖ, σύμφωνα μέ τή θεωρία πού ἀναπτύχτηκε προηγούμενα, μέ τή μέθοδο τῆς δυνάμεως

$$y^{(m+1)} = By^{(m)} \quad | \; m = 0,1,2,\dots \tag{11.18}$$

ὅπου $y^{(o)} \neq 0$ αὐθαίρετο διάνυσμα καί B ὁ πίνακας $A + \|A\| I$ μέ $\|A\|$ μιά ἀπό τίς τρεῖς norms τοῦ A. Ἄν θεωρήσουμε τήν $\|A\|_\infty$, αὐτή βρίσκεται εὔκολα πώς εἶναι ἴση μέ 4, ὁ πίνακας B θά εἶναι ὁ

$$B=\begin{bmatrix}4 & 4 & 0\\ 1 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

Ἡ ἀπόλυτα μεγαλύτερη ἰδιοτιμή τοῦ πίνακα B, πού βρίσκεται ἀπό τό ἐπαναληπτικό σχῆμα (11.18), θά εἶναι ἡ λ_1+4, ὁπότε ἀφαιρώντας τόν ἀριθμό 4 θά βροῦμε τήν λ_1.

11.5. Εὕρεση τῆς ἀπόλυτα μικρότερης ἰδιοτιμῆς

Ἄν $\lambda_i \mid i=1(1)n$ εἶναι οἱ ἰδιοτιμές τοῦ πίνακα A καί ὑποθέσουμε ὅτι $0<|\lambda_n|<|\lambda_i| \mid i=1(1)n-1$, δηλαδή ὅτι ὑπάρχει μιά ἀπόλυτα μικρότερη ἰδιοτιμή τοῦ πίνακα A διάφορη ἀπό τό μηδέν, τότε εἶναι δυνατό νά τή βροῦμε στηριζόμενοι πάλι σέ μιά τροποποίηση τῆς μεθόδου τῆς δυνάμεως ἤ τῆς βασικῆς παραλλαγῆς της. Γιά τό σκοπό αὐτό ἐργαζόμαστε ὅπως στή συνέχεια: Ἄν $\lambda_i \mid i=1(1)n$ εἶναι οἱ ἰδιοτιμές τοῦ πίνακα $A(\det(A)\neq 0)$ καί $x^{(i)} \mid i=1(1)n$ τά ἀντίστοιχα ἰδιοδιανύσματα, τότε $\frac{1}{\lambda_i} \mid i=1(1)n$ εἶναι οἱ ἰδιοτιμές τοῦ πίνακα A^{-1}, τά ἀντίστοιχα ὅμως ἰδιοδιανύσματα ἐξακολουθοῦν νά εἶναι τά ἴδια $x^{(i)} \mid i=1(1)n$. Ἐπειδή ἀπό τήν ὑπόθεση ἔχουμε ὅτι $|\lambda_n|<|\lambda_i| \mid i=1(1)n-1$, συμπεραίνουμε ἀμέσως ὅτι $\frac{1}{|\lambda_n|}>\frac{1}{|\lambda_i|} \mid i=1(1)n-1$. Μέ ἄλλα λόγια ἡ $\frac{1}{\lambda_n}$ θά εἶναι ἡ ἀπόλυτα μεγαλύτερη ἰδιοτιμή τοῦ πίνακα A^{-1} καί ἑπομένως θά μπορεῖ νά βρεθεῖ αὐτή μέ τή μέθοδο τῆς δυνάμεως ἤ μέ τή βασική παραλλαγή της. Ἄν συνεπῶς στηριχτοῦμε στή μέθοδο τῆς δυνάμεως γιά τήν εὕρεση τῆς ἀπόλυτα μεγαλύτερης ἰδιοτιμῆς τοῦ πίνακα A^{-1} θά ἔχουμε

$$y^{(m+1)}=A^{-1}y^{(m)} \quad \mid m=0,1,2,\ldots \tag{11.19}$$

ὅπου $y^{(o)}\neq 0$ αὐθαίρετο διάνυσμα. Ἡ (11.19) μπορεῖ νά γραφτεῖ καί ὡς ἑξῆς

$$Ay^{(m+1)}=y^{(m)} \quad \mid m=0,1,2,\ldots \tag{11.20}$$

ὅπου γιά τήν εὕρεση τοῦ διανύσματος $y^{(m+1)}$ ἀπό τό $y^{(m)}$ θά ἐπιλύουμε κάθε φορά ἕνα σύστημα n γραμμικῶν ἐξισώσεων μέ n ἀγνώστους χρησιμοποιώντας μιά ἄμεση μέθοδο. Αὐτό τονίζεται ἰδιαίτερα, καθώς ἐπίσης καί τό γεγονός ὅτι ὅλα τά συστήματα, πού θά ἐπιλύονται καί θά προκύπτουν ἀπό τήν (11.20), θά ἔχουν τόν A κοινό πίνακα συντελεστῶν ἀγνώστων. Συνεπῶς γιά τήν ἐπίλυσή τους θά ἀκολουθεῖται ἡ διαδικασία τῆς ἐπιλύσεως γραμμικοῦ συστήματος μέ περισσότερα ἀπό ἕνα δεύτερα μέλη τῆς παραγράφου 10.2.1.2. Ἀπό τήν ἀκολουθία τῶν διανυσμάτων $y^{(m)}$ $|m=0,1,2,\ldots$ πού θά ὁριστοῦν, εἶναι δυνατό νά βρεθοῦν, ὅπως καί στήν περίπτωση τῆς μεθόδου τῆς δυνάμεως, τόσο ἡ ἀπόλυτα μεγαλύτερη ἰδιοτιμή τοῦ πίνακα A^{-1}, πού θά εἶναι ἡ $\frac{1}{\lambda_n}$, ὅσο καί τό ἀντίστοιχο ἰδιοδιάνυσμα $x^{(n)}$.

11.6. Εὕρεση μιᾶς ὁποιασδήποτε ἰδιοτιμῆς

Κάτω ἀπό ὁρισμένες προϋποθέσεις εἶναι δυνατό νά ἐφαρμοστεῖ μιά νέα τροποποίηση τῆς μεθόδου τῆς δυνάμεως ἤ τῆς βασικῆς παραλλαγῆς της καί νά βρεθεῖ ἔτσι μιά ὁποιαδήποτε ἁπλή πραγματική ἰδιοτιμή τοῦ πίνακα A, ἔστω ἡ λ_j. Γιά τό σκοπό αὐτό θά πρέπει νά γνωρίζουμε ἕναν πραγματικό ἀριθμό μ, πού νά ἀπέχει ἀπό τήν ὑπόψη ἰδιοτιμή λ_j στό μιγαδικό ἐπίπεδο ἀπόσταση μικρότερη ἀπό ὅτι ἀπό ὅλες τίς ἄλλες ἰδιοτιμές λ_i $|i=1(1)n,\ i\neq j$ τοῦ πίνακα A. Ἄν ἕνας τέτοιος ἀριθμός μ εἶναι γνωστός, τότε σχηματίζουμε πρῶτα τόν πίνακα $A-\mu I$, ὅπου I ὁ μοναδιαῖος πίνακας τάξης n. Ὁ πίνακας αὐτός, ὅπως ξέρουμε, θά ἔχει ἰδιοτιμές τίς $\lambda_i-\mu$ $|i=1(1)n$ καί ἀντίστοιχα ἰδιοδιανύσματα τά ἴδια $x^{(i)}$ $|i=1(1)n$ τοῦ πίνακα A. Ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ ἀριθμοῦ μ ἔχουμε ἀμέσως ὅτι $0<|\lambda_j-\mu|<|\lambda_i-\mu|$ $\;|i=1(1)n,\ i\neq j$. Ἔτσι ἡ ἰδιοτιμή $\lambda_j-\mu$ θά εἶναι ἡ ἀπόλυτα μικρότερη ἰδιοτιμή τοῦ πίνακα $A-\mu I$ καί ἐπομένως μπορεῖ νά βρεθεῖ σύμφωνα μέ αὐτά πού εἴπαμε στήν προηγούμενη παράγραφο. Εἶναι φανερό λοιπόν ὅτι ὁ ἀλγόριθμος, ὁ ἀντίστοιχος πρός τόν (11.20), θά ἔχει τώρα τή μορφή

$$(A-\mu I)y^{(m+1)}=y^{(m)} \qquad |m=0,1,2,\ldots \tag{11.21}$$

ὅπου $y^{(o)} \neq 0$ αὐθαίρετο διάνυσμα. Ἀπό τήν ἀκολουθία τῶν διανυσμάτων $y^{(m)}$ $|m = 0,1,2,\ldots$, πού θά παραχτεῖ ἀπό τόν ἀλγόριθμο (11.21), εἶναι δυνατό νά βρεθοῦν, ὅπως καί στήν περίπτωση τῆς μεθόδου τῆς δυνάμεως, τόσο ἡ ἀπόλυτα μεγαλύτερη ἰδιοτιμή τοῦ πίνακα $(A-\mu I)^{-1}$, δηλαδή ἡ $\dfrac{1}{\lambda_j - \mu}$, ὅσο καί τό ἀντίστοιχο ἰδιοδιάνυσμα $x^{(j)}$.

Παράδειγμα

Οἱ ἰδιοτιμές ἑνός γνωστοῦ 3x3 πίνακα A, μέ προσέγγιση ἀκέραιας μονάδας, εἶναι οἱ ἀκόλουθες $\lambda_1 \approx 2$, $\lambda_2 \approx 1$ καί $\lambda_3 \approx -1$. Νά δοθοῦν τρία επαναληπτικά σχήματα, τά ὁποῖα θά ἐπιτρέπουν τήν εὕρεση κάθε μιᾶς ἀπό τίς τρεῖς ἰδιοτιμές ἀντίστοιχα μέ ὁσηδήποτε ἀκρίβεια.

Λύση

Ἀπό τήν προσέγγιση μέ τήν ὁποία δίνονται οἱ τρεῖς ἰδιοτιμές ἔχουμε ἀμέσως ὅτι γιά τό σφάλμα ε, κάθε μιᾶς ἀπό αὐτές, θά ἰσχύει

$$|\varepsilon| \leqq \frac{1}{2}10^{0} = 0.5 \quad .$$

Αὐτό σημαίνει ὅτι οἱ τρεῖς ἰδιοτιμές θά ἱκανοποιοῦν τίς παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned} 2-0.5 &\leqq \lambda_1 \leqq 2+0.5 && \text{ἤ} && 1.5 \leqq \lambda_1 \leqq 2.5 \\ 1-0.5 &< \lambda_2 < 1+0.5 && \text{ἤ} && 0.5 < \lambda_2 < 1.5 \\ -1-0.5 &< \lambda_3 < -1+0.5 && \text{ἤ} && -1.5 < \lambda_3 < -0.5 \end{aligned} \qquad (11.22)$$

Στίς δύο τελευταῖες διπλές ἀνισότητες γιά τίς ἰδιοτιμές λ_2 καί λ_3 δέν ἰσχύει ἡ ἰσότητα καί αὐτό γιατί οἱ ἀριθμοί 0.5 καί 1.5 στρογγυλεύονται στό 0 καί 2 ἀντίστοιχα καί ὄχι στό 1, ἐνῶ οἱ ἀριθμοί -1.5 καί -0.5 στρογγυλεύονται στό -2 καί στό 0 ἀντίστοιχα καί ὄχι στό -1. Γιά τήν κατασκευή τώρα τῶν τριῶν ἐπαναληπτικῶν σχημάτων πού ζητοῦνται, εἶναι δυνατό νά ἐργαστοῦμε μέ διάφορους τρόπους. Ἕνας ἀπό αὐτούς, ὁ πιό σίγουρος στήν περίπτωση αὐτή, εἶναι αὐτός πού περιγράφεται στήν παράγραφο 11.6. Θεωροῦμε λοιπόν τό γενικό ἐπαναληπτικό σχῆμα

$$(A-\mu_i I)y^{(m+1)} = y^{(m)} \quad |i = 1(1)3, \quad m = 0,1,2,\ldots \qquad (11.23)$$

ὅπου $y^{(o)} \neq 0$ αὐθαίρετο διάνυσμα, I ὁ μοναδιαῖος πίνακας τάξης 3 καί μ_i $|i=1(1)3$ πραγματικοί ἀριθμοί, τέτοιοι ὥστε ὁ συγκεκριμένος ἀπό τούς τρεῖς μ_i νά ἀπέχει ἀπό τήν ἰδιοτιμή λ_i ἀπόσταση μικρότερη σέ σύγκριση ἀπό τίς ἄλλες δύο ἰδιοτιμές. Εἶναι φανερό πώς ἄν ὁρίσουμε

$$\mu_1 = 2\ , \qquad \mu_2 = 1 \qquad \text{καί} \qquad \mu_3 = -1 \tag{11.24}$$

τότε

$$|\lambda_1 - 2| < |\lambda_2 - 2|, |\lambda_3 - 2|$$

ἀφοῦ ἀπό τίς σχέσεις (11.22) μπορεῖ νά προκύψει ὅτι

$$|\lambda_1 - 2| \leqq 0.5, \quad |\lambda_2 - 2| > 0.5 \quad \text{καί} \quad |\lambda_3 - 2| > 2.5\ .$$

Μέ τόν ἴδιο τρόπο μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ ὅτι

$$|\lambda_2 - 1| < |\lambda_1 - 1|, \quad |\lambda_3 - 1|$$

καί

$$|\lambda_3 + 1| < |\lambda_1 + 1|, \quad |\lambda_2 + 1|\ .$$

Ἔτσι ὁ ἀλγόριθμος (11.23) μέ μ_i $|i=1(1)3$, πού ὁρίζονται ἀπό τίς (11.24), μᾶς ἐπιτρέπει νά βροῦμε στή σειρά κάθε μιά ἀπό τίς τρεῖς ἰδιοτιμές $\lambda_i|i=1(1)n$ μέ ὅση προσέγγιση θέλουμε.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι τό πρόβλημα τῆς εὑρέσεως τῶν ριζῶν τοῦ πολυωνύμου $\lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \alpha_2\lambda^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-2}\lambda^2 + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n$ εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό πρόβλημα τῆς εὑρέσεως τῶν ἰδιοτιμῶν τοῦ παρακάτω πίνακα τάξης n

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & \text{\huge 0} & \\ & & 0 & 1 & & \\ & \text{\huge 0} & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix}$$

2. Νά βρεθεῖ, μέ τήν ἐφαρμογή τῆς μεθόδου τῆς δυνάμεως ἡ ἀπόλυτα μεγαλύτερη ἰδιοτιμή τοῦ πίνακα

$$\begin{bmatrix} 0 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & -3/2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

μέ προσέγγιση δύο σ.ψ. ('Απ. 1.1)

3. Νά βρεθεῖ, μέ τήν ἐφαρμογή τῆς μεθόδου τῆς δυνάμεως ἤ τῆς βασικῆς παραλλαγῆς της ἡ ἀπόλυτα μεγαλύτερη ἰδιοτιμή τοῦ πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, χρησιμοποιώντας σάν ἀρχικό διάνυσμα τοῦ ἐπαναληπτικοῦ σχήματος τό $y^{(o)} = [1 \;\; 1]^T$. ('Απ. 3)

4. Νά δοθεῖ ἕνα ἐπαναληπτικό σχῆμα, γιά τήν εὕρεση τῆς μικρότερης ἀπό τίς δύο ἰδιοτιμές τοῦ πίνακα $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ καί νά ἐφαρμοστεῖ τρεῖς φορές μέ ἀρχικό διάνυσμα $x^{(o)} = [3 \;\; 2]^T$. ('Απ. $x^{(m+1)} = (A - \|A\|\, I)x^{(m)} | m = 0,1,2,\ldots$ $\quad x^{(1)} = [-1 \;\; 1]^T$, $x^{(2)} = [2 \;\; -2]^T$ καί $x^{(3)} = [-4 \;\; 4]^T$)

5. Μέ τήν ἐφαρμογή τῆς μεθόδου τῆς δυνάμεως στόν πίνακα B τάξης δύο, ὅπου $B = A - \frac{5}{2} I$, μέ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ καί I τό μοναδιαῖο πίνακα τάξης 2, νά δειχτεῖ ποιά ἀπό τίς δύο ἰδιοτιμές τοῦ πίνακα A εἶναι δυνατό νά βρεθεῖ καί γιατί; ('Απ. 4)

6. Χρησιμοποιώντας μιά κατάλληλη ἐπαναληπτική μέθοδο νά βρεθεῖ, μέ προσέγγιση δύο δ.ψ., ἡ ἀπόλυτα μικρότερη ἰδιοτιμή τοῦ πίνακα $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. ('Απ. - 0.62)

7. Χρησιμοποιώντας μιά κατάλληλη ἐπαναληπτική μέθοδο, νά βρεθεῖ, μέ προσέγγιση δύο δ.ψ., ἡ ἰδιοτιμή τοῦ πίνακα $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$, πού βρίσκεται πιό κοντά στόν ἀριθμό 0.8. ('Απ. 1.37)

12. Ε Ι Σ Α Γ Ω Γ Η Σ Τ Η Θ Ε Ω Ρ Ι Α Π Ρ Ο Σ Ε Γ Γ Ι - Σ Ε Ω Σ

12.1. Γ ε ν ι κ ά

Τό γενικότερο πρόβλημα τῆς προσεγγίσεως ἀπαρτίζεται ἀπό τήν παράσταση ἑνός πλήθους δεδομένων, πού εἶναι συνήθως ἐμπειρικά καί πού ἀντιστοιχοῦν στίς τιμές μιᾶς συναρτήσεως σέ ἕνα πλῆθος σημείων, ἀπό μιά στοιχειώδη συνάρτηση συγκεκριμένης μορφῆς ἤ ἀκόμη στήν παράσταση μιᾶς συναρτήσεως, πού δίνεται ἀναλυτικά μέ τήν ἔκφρασή της, ἀπό ἕνα συνδυασμό πεπερασμένου ἤ ἄπειρου πλήθους στοιχειωδῶν συναρτήσεων. Στό παρόν Κεφάλαιο θά περιοριστοῦμε σέ μιά στοιχειώδη εἰσαγωγή στή θεωρία τῆς λεγόμενης πολυωνυμικῆς προσεγγίσεως ἐμπειρικῶν δεδομένων. Στή θεωρία αὐτή ἡ στοιχειώδης συνάρτηση, πού χρησιμοποιεῖται γιά τήν παράσταση (ἤ προσέγγιση) τῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων, εἶναι πολυώνυμο. Στό σημεῖο αὐτό θά πρέπει νά παρατηρήσουμε ὅτι τό πρόβλημα τῆς παρεμβολῆς, πού μελετήθηκε στό Κεφάλαιο 3, ἀποτελεῖ μιά στοιχειώδη μορφή πολυωνυμικῆς προσεγγίσεως.

12.2. Π ο λ υ ω ν υ μ ι κ ή π ρ ο σ έ γ γ ι σ η ἐ μ π ε ι ρ ι κ ῶ ν δ ε δ ο μ έ ν ω ν

Ὑποθέτουμε ὅτι $y_i \; | i = 0(1)n$ εἶναι ἕνα πλῆθος ἐμπειρικῶν δεδομένων, συνήθως μετρήσεων ἤ παρατηρήσεων, πού ἀντιστοιχοῦν στίς τιμές μιᾶς συναρτήσεως στά σημεῖα $x_i \; | i = 0(1)n$ καί $u_i \; | i = 0(1)n$ οἱ ἀντίστοιχες τιμές τοῦ πολυωνύμου, πού θά προσεγγίζει τά ἐμπειρικά δεδομένα στά ἴδια σημεῖα. Ὑποθέτουμε ἀκόμη ὅτι $\varepsilon_i = u_i - y_i \; | i = 0(1)n$ εἶναι τά σφάλματα στά σημεῖα x_i καί ε τό διάνυσμα-σφάλμα, τοῦ ὁποίου συνιστῶσες εἶναι τά μερικά σφάλματα $\varepsilon_i \; | i = 0(1)n$. Γιά τήν εὕρεση τοῦ "ἄριστου" πολυωνύμου, πού θά προσεγγίζει κατά τόν καλύτερο δυνατό τρόπο τά ἐμπειρικά δεδομένα, ἤ ὅπως ἀλλιῶς λέμε γιά τήν προσαρμογή μιᾶς καμπύλης (πού εἶναι ἡ γραφική παράσταση τοῦ πολυωνύμου) στό πλῆθος τῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων, ἐπιβάλλεται, κατά κάποια έννοια, ή έλαχιστοποίηση τοῦ διανύσματος - σφάλμα ε. Τό φυσικότερο μέτρο ένός διανύσματος, όπως έχουμε πεῖ στό Κεφάλαιο 9, εἶναι ή norm του. Ἔτσι ή έλαχιστοποίηση ένός διανύσματος εἶναι φυσικό νά πετυχαίνεται μέ τήν έλαχιστοποίηση μιᾶς άπό τίς τρεῖς norms του. Σ' αὐτή λοιπόν τήν περίπτωση, τό ὅλο πρόβλημα ἀνάγεται στήν έλαχιστοποίηση μιᾶς άπό τίς τρεῖς norms τοῦ διανύσματος - σφάλμα ε, δηλαδή στήν έλαχιστοποίηση μιᾶς άπό τίς τρεῖς έκφράσεις

$$\|\varepsilon\|_1 = \sum_{i=0}^{n} |\varepsilon_i|, \quad \|\varepsilon\|_2 = \left(\sum_{i=0}^{n} |\varepsilon_i|^2\right)^{1/2}, \quad \|\varepsilon\|_\infty = \max_i |\varepsilon_i| .$$

Οἱ πιό γνωστές μέθοδοι πολυωνυμικῆς προσεγγίσεως έμπειρικῶν δεδομένων εἶναι αὐτές, πού ἀναφέρονται στήν έλαχιστοποίηση τῶν norms $\|\varepsilon\|_2$ καί $\|\varepsilon\|_\infty$. Οἱ ἀντίστοιχες μέθοδοι εἶναι γνωστές ὡς ή μέθοδος τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων (γιά τήν $\|\varepsilon\|_2$) καί ή τεχνική τοῦ Chebyshev (γιά τήν $\|\varepsilon\|_\infty$). Γενικοί κανόνες γιά τήν έκλογή τῆς μεθόδου καί τοῦ πολυωνύμου, πού θά προσεγγίζει τά έμπειρικά δεδομένα, δέν ὑπάρχουν στήν πράξη. Ὁποιαδήποτε ἔνδειξη μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ μέ βάση ὑποκειμενικά κυρίως κριτήρια. Στήν έπόμενη παράγραφο θά ἐξετάσουμε σέ γενικές γραμμές τή μέθοδο τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων.

12.3. Μέθοδος τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων

Ὑποθέτουμε ὅτι

$$p_m(x) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_m x^m \qquad (12.1)$$

πολυώνυμο βαθμοῦ τό πολύ m, ὅπου $\alpha_i \mid i = 0(1)m$ συντελεστές πού θά προσδιοριστοῦν, τό "ἄριστο" πολυώνυμο, πού προσεγγίζει τό πλῆθος τῶν έμπειρικῶν δεδομένων $y_i \mid i = 0(1)n$ στά σημεῖα $x_i \mid i = 0(1)n$. Εἶναι προφανές ὅτι στήν πράξη ένδιαφερόμαστε γιά τιμές $m < n$. Γιά $m = n$ τό πρόβλημα τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων ἐπιλύεται ἀμέσως, ἀρκεῖ σάν $p_n(x)$ νά πάρουμε τό πολυώνυμο παρεμβολῆς μέ σημεῖα παρεμβολῆς τά $x_i \mid i = 0(1)n$ καί ἀντίστοιχες τιμές τίς $y_i \mid i = 0(1)n$. Αὐτό γιατί θά ἔχουμε $u_i = p_n(x_i)$

$=y_i$, δηλαδή $\varepsilon_i = u_i - y_i = 0$, καί έπομένως $\|\varepsilon\|_2 = 0$, πού εἶναι ἡ ἐλάχιστη δυνατή τιμή. Γιά $m > n$, τό πρόβλημα ἀντιμετωπίζεται μέ ἀνάλογο τρόπο. Συγκεκριμένα ὡς $p_m(x)$ παίρνουμε τό πολυώνυμο

$$p_m(x) \equiv p_n(x) + p_{m-n-1}(x)\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

ὅπου $p_n(x)$ τό πολυώνυμο παρεμβολῆς πού ἀναφέρθηκε προηγούμενα καί $p_{m-n-1}(x)$ ἕνα ὁποιοδήποτε αὐθαίρετο πολυώνυμο βαθμοῦ $m-n-1$. Εἶναι προφανές ὅτι καί στήν περίπτωση αὐτή ἔχουμε $\|\varepsilon\|_2 = 0$, δηλαδή τήν ἐλάχιστη δυνατή τιμή.

Γιά τήν περίπτωση τώρα πού ἐνδιαφερόμαστε ἰδιαίτερα, καί γιά τήν ὁποία ἔχουμε $m < n$, πρέπει ὅπως καί προηγούμενα νά ἐλαχιστοποιήσουμε τήν $\|\varepsilon\|_2$ ἤ πράγμα πού εἶναι ἰσοδύναμο, νά ἐλαχιστοποιήσουμε τήν ποσότητα $E = \|\varepsilon\|_2^2$. Σ'αὐτή τήν περίπτωση ἔχει τήν ἀκόλουθη μορφή

$$E = \sum_{i=0}^{n} |\varepsilon_i|^2 = \sum_{i=0}^{n}(u_i - y_i)^2 = \sum_{i=0}^{n}(p(x_i) - y_i)^2$$

ἤ λόγω τῆς (12.1) τή μορφή

$$E = \sum_{i=0}^{n}\left[(\alpha_o + \alpha_1 x_i + \ldots + \alpha_m x_i^m) - y_i\right]^2. \qquad (12.2)$$

Γιά τήν ἐλαχιστοποίηση τῆς ἐκφράσεως (12.2) ἀρκεῖ νά ἔχουμε

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_j} = 2\sum_{i=0}^{n}(\alpha_o + \alpha_1 x_i + \ldots + \alpha_m x_i^m - y_i)x_i^j = 0 \quad \Big| j = 0(1)m$$

ἤ ἰσοδύναμα

$$\alpha_o \sum_{i=0}^{n} x_i^j + \alpha_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^{j+1} + \ldots + \alpha_m \sum_{i=0}^{n} x_i^{j+m} = \sum_{i=0}^{n} x_i^j y_i \qquad (12.3)$$

$$\Big| j = 0(1)m .$$

Ἄν χρησιμοποιήσουμε τούς συμβολισμούς

$$s_k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k \quad \text{καί} \quad v_k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k y_i \qquad k = 0(1)2m \tag{12.4}$$

τότε οἱ ἐξισώσεις (12.3), μέ βάση τίς (12.4), γράφονται ἀναλυτικά

$$\begin{aligned} s_o\alpha_o + s_1\alpha_1 + \ldots + s_m\alpha_m &= v_o \\ s_1\alpha_o + s_2\alpha_1 + \ldots + s_{m+1}\alpha_m &= v_1 \\ &\vdots \\ s_m\alpha_o + s_{m+1}\alpha_1 + \ldots + s_{2m}\alpha_m &= v_m \end{aligned} \tag{12.5}$$

ἤ συνοπτικά, μέ μορφή ἐξισώσεων πινάκων

$$S\alpha = v \tag{12.6}$$

ὅπου

$$S = \begin{bmatrix} s_o & s_1 \ldots & s_m \\ s_1 & s_2 \ldots & s_{m+1} \\ \vdots & & \\ s_m & s_{m+1} \ldots & s_{2m} \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_o \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_o \\ v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \tag{12.7}$$

Θά ἀποδείξουμε τώρα ὅτι τό σύστημα (12.5), ἤ τό ἰσοδύναμό του (12.6), ἔχει μιά καί μόνο λύση. Πρῶτα ὁρίζουμε τόν $(n+1)\times(m+1)$ πίνακα X καί τό $(n+1)$ - διάστατο διάνυσμα y ἀπό τίς ἐκφράσεις

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_o & x_o^2 & \ldots & x_o^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^m \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^m \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} y_o \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{12.8}$$

ὁπότε ἀπό τίς (12.3), (12.4) καί (12,7) παίρνουμε ἀμέσως

$$S = X^T X \ , \qquad v = X^T y \ , \tag{12.9}$$

Γιά νά δείξουμε ὅτι τό σύστημα (12.6) ἔχει μιά καί μόνο λύση ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε ὅτι τό ἀντίστοιχο ὁμογενές σύστημα

$$S\alpha = 0 \tag{12.10}$$

ἔχει μιά καί μόνο λύση, συγκεκριμένα τήν $\alpha = 0$. Γιά τό σκοπό αὐτό ὑποθέτουμε ὅτι $\alpha \neq 0$ καί πολλαπλασιάζουμε ἀπό ἀριστερά τά μέλη τῆς (12.10) ἐπί α^T, ὁπότε

$$\alpha^T S\alpha = 0 \ .$$

Χρησιμοποιώντας τήν πρώτη σχέση ἀπό τίς (12.9) στήν παραπάνω ἰσότητα παίρνουμε διαδοχικά

$$\alpha^T X^T X\alpha = (X\alpha)^T (X\alpha) = \| X\alpha \|_2^2 = 0 \ .$$

Ἄρα

$$X\alpha = 0 \ . \tag{12.11}$$

Ἡ παραπάνω σχέση γράφεται ἀναλυτικά

$$\alpha_0 + \alpha_1 x_i + \ldots + \alpha_m x_i^m = 0 \qquad | i = 0(1)n \ .$$

Οἱ παραπάνω σχέσεις ὅμως δείχνουν ὅτι τό πολυώνυμο (12.1) μηδενίζεται γιά $n+1 > m$ τιμές τῆς μεταβλητῆς του. Θά εἶναι ἑπομένως ἐκ ταυτότητας μηδέν. Συνέπεια αὐτοῦ εἶναι ὅτι $\alpha_i = 0 \ | i = 0(1)n$ ἤ ὅτι $\alpha = 0$ πράγμα πού εἶναι ἄτοπο. Τό σύστημα ἑπομένως (12.10) ἔχει ὡς μόνη λύση τήν $\alpha = 0$. Αὐτό σημαίνει ὅτι $\det(S) \neq 0$. Ἀπό τό τελευταῖο συμπεραίνουμε ὅτι καί τό σύστημα (12.6) ἔχει μιά καί μόνο λύση, ἡ ὁποία μέ μορφή πινάκων δίνεται ἀπό τήν ἔκφραση

$$\alpha = S^{-1} v \ . \tag{12.12}$$

Είναι δυνατό νά άποδειχτεῖ μέ μιά σειρά μετασχηματισμῶν ὅτι ἡ λύση (12.12) ἐλαχιστοποιεῖ πραγματικά τήν ἔκφραση (12.2).

Παρατήρηση:

Θά πρέπει νά τονιστεῖ ἰδιαίτερα ὅτι εἶναι δυνατό νά ἀποδειχτεῖ πώς τό σύστημα (12.5) ἤ (12.6) (πού συνήθως καλεῖται κανονικό σύστημα) γιά τιμές τοῦ $m \geq 7$, εἶναι ἀσταθές. Ἔχουμε δηλαδή $\det(S) \approx 0$ καί συνεπῶς τά ἀποτελέσματα, πού παίρνουμε ἀπό τήν ἐπίλυσή του, δέν εἶναι ἀξιόπιστα. Στήν πράξη χρησιμοποιοῦμε τή μέθοδο πού ἀναπτύξαμε γιά μικρές τιμές τοῦ m. Γιά τιμές τοῦ $m \geq 7$ καταφεύγουμε στή χρήση τῶν λεγόμενων ὀρθογώνιων πολυωνύμων, τά ὁποῖα ὅμως δέν θά ἀναφερθοῦν ἐδῶ.

Παράδειγμα 1

Νά προσαρμοστεῖ μιά γραμμική συνάρτηση στό ἀκόλουθο πλῆθος τῶν δεδομένων: $(x_i, y_i)\ |i = 0(1)n$

Λύση

Ὑποθέτουμε ὅτι $p_1(x) \equiv \alpha_o + \alpha_1 x$ εἶναι τό πρωτοβάθμιο πολυώνυμο (γραμμική συνάρτηση), πού πρόκειται νά προσαρμοστεῖ στά δεδομένα $(x_i, y_i)\ |i = 0(1)n$. Γιά τήν εὕρεση τῶν συντελεστῶν του α_o καί α_1 ἀρκεῖ νά ἐπιλύσουμε τό ἀντίστοιχο κανονικό σύστημα, τό ὁποῖο στήν περίπτωση αὐτή ἔχει τή μορφή

$$s_o\alpha_o + s_1\alpha_1 = v_o$$

$$s_1\alpha_o + s_2\alpha_1 = v_1$$

ὅπου

$$s_o = \sum_{i=0}^{n} x_i^o = n+1, \quad s_1 = \sum_{i=0}^{n} x_i, \quad s_2 = \sum_{i=0}^{n} x_i^2$$

$$v_o = \sum_{i=0}^{n} x_i^o y_i = \sum_{i=0}^{n} y_i \quad \text{καί} \quad v_1 = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i .$$

Ἡ ἐπίλυση τοῦ παραπάνω συστήματος δίνει ἀμέσως

$$\alpha_0 = \frac{\sum_{i=0}^{n} x_i^2 \sum_{i=0}^{n} y_i - \sum_{i=0}^{n} x_i \sum_{i=0}^{n} x_i y_i}{(n+1) \sum_{i=0}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=0}^{n} x_i \right)^2} \quad \text{καί}$$

$$\alpha_1 = \frac{(n+1) \sum_{i=0}^{n} x_i y_i - \sum_{i=0}^{n} x_i \sum_{i=0}^{n} y_i}{(n+1) \sum_{i=0}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=0}^{n} x_i \right)^2}$$

Παράδειγμα 2

Νά προσαρμοστεῖ μιά συνάρτηση τῆς μορφῆς $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ στό πλῆθος τῶν δεδομένων, πού δίνεται ἀπό τόν παρακάτω πίνακα

x	8	10	12	16	20	30	40	60	100
y	0.88	1.22	1.64	2.72	3.96	7.66	11.96	21.56	43.16

Λύση

Οἱ συντελεστές τοῦ πολυωνύμου $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$, πού πρόκειται νά προσαρμοστεῖ στό παραπάνω πλῆθος δεδομένων, θά προκύψουν ἀπό τήν ἐπίλυση τοῦ κανονικοῦ συστήματος (12.5) μέ $m = 2$, ὅπου οἱ συντελεστές του θά δίνονται ἀπό τίς (12.4) μέ $n = 8$. Γιά τόν εὐκολότερο προσδιορισμό τῶν συντελεστῶν τοῦ κανονικοῦ συστήματος κατασκευάζουμε τόν παρακάτω πίνακα, ἀπό τόν ὁποῖο μέ ἀθροίσεις τῶν στοιχείων κάθε στήλης βρίσκουμε ἀμέσως τούς συντελεστές τοῦ κανονικοῦ συστήματος.

i	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	y_i	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
0	8	64	512	4096	0.88	7.04	56.32
1	10	100	1000	10000	1.22	12.20	122.00
2	12	144	1728	20736	1.64	19.68	236.16
3	16	256	4096	65536	2.72	43.52	696.32
4	20	400	8000	160000	3.96	79.20	1584.00
5	30	900	27000	810000	7.66	229.80	6894.00
6	40	1600	64000	2560000	11.96	478.40	19136.00
7	60	3600	216000	12960000	21.56	1293.60	77616.00
8	100	10000	1000000	100000000	43.16	4316.00	431600.00
	296	17064	1322336	116590368	94.76	6479.44	537940.80

'Από τόν παραπάνω πίνακα έχουμε

$$s_o = 9,\quad s_1 = 296,\quad s_2 = 17064,\quad s_3 = 1322336,\quad s_4 = 116590368 \quad \text{καί}$$

$$v_o = 94.76,\quad v_1 = 6479.44,\quad v_2 = 537940.80$$

'Η επίλυση τοῦ κανονικοῦ συστήματος

$$\begin{aligned} s_o\alpha_o + s_1\alpha_1 + s_2\alpha_2 &= v_o \\ s_1\alpha_o + s_2\alpha_1 + s_3\alpha_2 &= v_1 \\ s_2\alpha_o + s_3\alpha_1 + s_4\alpha_2 &= v_2 \end{aligned}$$

μέ συντελεστές αὐτούς πού βρέθηκαν παραπάνω, δίνει μέ προσέγγιση τεσσάρων σ.ψ.

$$\alpha_o = -1.919,\quad \alpha_1 = 0.2782,\quad \alpha_2 = 0.001739 .$$

'Επομένως ή συνάρτηση πού ζητοῦμε εἶναι ή

$$p_2(x) \equiv -1.919 + 0.2782x + 0.001739x^2.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά προσαρμοστεῖ, μέ τή μέθοδο τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων, μιά γραμμική συνάρτηση, στό ἀκόλουθο πλῆθος δεδομένων: $(x_i, y_i) \mid i = 0(1)2$, ὅπου $x_i = i$ καί $y_i = i^2$. ('Απ. $-1/3 + 2x$)

2. Νά βρεθεῖ τό "ἄριστο" πρωτοβάθμιο πολυώνυμο, πού προσεγγίζει τό πλῆθος τῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων $y = 1, 3, -1$ στά σημεῖα $x = 1, 2, 3$ ἀντίστοιχα μέ τή μέθοδο τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων. ('Απ. $3 - x$)

3. Νά προσαρμοστεῖ, μέ τή μέθοδο τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων, ἕνα δευτεροβάθμιο πολυώνυμο, στό πλῆθος τῶν δεδομένων, πού δίνεται στόν παρακάτω πίνακα

x	0	1	2	3
y	1	2	9	28

('Απ. $1.3 - 4.7x + 4.5x^2$)

4. Ἕνα φυσικό φαινόμενο παριστάνεται ἀπό τή συνάρτηση $y = e^{\alpha x + \beta}$, ὅπου e ἡ βάση τῶν νεπερείων λογαρίθμων καί α καί β σταθερές. Διάφορες παρατηρήσεις ἔδωσαν τά ἀποτελέσματα τοῦ παρακάτω πίνακα

x	0	1	2	3	4
y	2	3	10	29	66

Νά δειχτεῖ πώς εἶναι δυνατό νά χρησιμοποιειθεῖ ἡ μέθοδος τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων, ὥστε νά βρεθοῦν οἱ τιμές τῶν σταθερῶν α καί β ('Υπόδειξη: θά χρησιμοποιηθοῦν ὁπωσδήποτε πίνακες λογαρίθμων). ('Απ. $\alpha = 0.927$, $\beta =$ $= 0.476$)

Β Ι Β Λ Ι Ο Γ Ρ Α Φ Ι Α

(Μερικά από τά βασικά βιβλία, πού χρησιμοποιήθηκαν γιά τή συγγραφή τοῦ παρόντος.)

A. ΕΛΛΗΝΙΚΑ

1. Ν. ΑΠΟΣΤΟΛΑΤΟΥ , Ἀριθμητική Ἀνάλυσις Ι, ΙΙ, Ἀθῆναι, 1971.

2. Κ. ΙΟΡΔΑΝΙΔΗ , Ἐφηρμοσμένη Ἀριθμητική Ἀνάλυσις Ι,Πάτραι, 1976.

3. Σ. ΠΕΡΣΙΔΗ , Ἀριθμητική Ἀνάλυση, ΕΣΠΙ, Ἀθήνα, 1976 (Μετάφραση τοῦ Β. 21.).

4. Α. ΧΑΤΖΗΔΗΜΟΥ , Εἰσαγωγή εἰς τήν Ἀριθμητικήν Ἀνάλυσιν Ι, ΙΙ, Ἰωάννινα, 1976.

B. ΞΕΝΑ

1. A. BALFOUR - W.T. BEVERIDGE , Basic Numerical Analysis with FORTRAN, Heinemann Educational Books, London, 1972.

2. I.S. BEREZIN - N.P. ZHIDKOV , (Translated by O.M. BLUNN), Computing Methods I, II, Pergamon Press and Addison-Wesley, 1965.

3. E.K. BLUM , Numerical Analysis and Computation: Theory and Practice, Addison-Wesley, London, 1972.

4. A.D. BOOTH , Numerical Methods, Butterworths, London, 1966.

5. R.A. BUCHINGHAM , Numerical Methods, Sir Isaac Pitman and Sons Ltd, London, 1962.

6. S.D. CONTE - C. DE BOOR , Elementary Numerical Analysis, McGraw-Hill, New York, 1972.

7. G. DAHLQUIST - Å. BJÖRCK , (Translated by N. ANDERSON), Numerical Methods, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1974.

8. C.E. FRÖBERG , Introduction to Numerical Analysis, Addison-Wesley, London, 1969.

9. C.F. GERALD, Applied Numerical Analysis, Addison-Wesley, London, 1970.

10. R.W. HAMMING , Numerical Methods for Scientists and Engineers, McGraw-Hill, New York, 1962.

11. F.B. HILDEBRAND , Introduction to Numerical Analysis, McGraw-Hill, New York, 1974.

12. E. ISAAKSON - H.B. KELLER , Analysis of Numerical Methods, John Wiley and Sons Inc, New York, 1966.

13. M.L. JAMES - G.M. SMITH - J.C. WOLFORD , Applied Numerical Methods for Digital Computation with FORTRAN, International Textbook Company, New York, 1967.

14. W. JENNINGS , First Course in Numerical Methods, The MacMillan Company, New York, 1964.

15. J. LEGRAS , Méthodes et Techniques de l'Analyse Numérique, Dunod, Paris, 1971.

16. H. MINEUR , Techniques de Calcul Numérique, Dunod, Paris, 1966.

17. D.G. MOURSUND - C.S. DURIS , Elementary Theory and Application of Numerical Analysis, McGraw-Hill, New York, 1967.

18. J.M. ORTEGA , Numerical Analysis: A second course, Academic Press, London, 1972.

19. A. RALSTON , A First Course in Numerical Analysis, McGraw-Hill, New York, 1965.

20. J.B. SCARBOROUGH , Numerical Mathematical Analysis, The Johns Hopkins Press, Baltimore, 1966.

21. F. SCHEID, Theory and Problems of Numerical Analyis, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York, 1968.

22. C.B. TOMPKINS - W.L. WILSON Jr, Elementary Numerical Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1969.