ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ – ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ειδικες συναρτησεις της Κλασσικης αναλυσης

Δρ Χρ. Β. Μασσαλα – Καθηγητη

Β΄ εκδοση

Ιωαννινα 1988

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ – ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ειδικες συναρτησεις της Κλασσικης αναλυσης

Δρ Χρ. Β. Μασσαλα – Καθηγητη

Β΄ εκδοση

Ιωαννινα 1988

Ειδικες συναρτησεις
της
Κλασσικης Αναλυσης

Δρ Χρηστου Β. Μασσαλα

Στη Νίνα και το Μιχάλη
για την αγάπη τους.

Στις σελίδες που ακολουθούν γίνεται μια περιορισμένη ανάλυση ενός κλάδου των μαθηματικών που ενδιαφέρει εκείνους που ασχολούνται με τη λύση φυσικών προβλημάτων. Αντικειμενικός σκοπός αυτής της προσπάθειας είναι η σύντομη αλλά συστηματική παρουσίαση της θεωρίας και των εφαρμογών των πιο σπουδαίων ειδικών συναρτήσεων της κλασσικής ανάλυσης.

Η μελέτη του κειμένου προϋποθέτει βασικές γνώσεις της κλασσικής ανάλυσης, της μιγαδικής ανάλυσης και της θεωρίας των διαφορικών εξισώσεων. Παρόλα αυτά στη διάταξη της ύλης έγινε προσπάθεια ώστε οι προαπαιτούμενες γνώσεις να είναι όσο το δυνατό λιγότερες και το κάθε κεφάλαιο να μπορεί να μελετηθεί ανεξάρτητα. Για την πληρέστερη μελέτη του αναγνώστη στο κείμενο αναφέρονται οι πηγές στις οποίες πρέπει αυτός να ανατρέξει ώστε να εμβαθύνει στη κατανόηση του αντικειμένου.

Στην προσπάθεια για την ολοκλήρωση αυτού του έργου είχα αμέριστη τη βοήθεια των συναδέλφων μου Θ.Βιδάλη, Γ.Καρακώστα και των συνεργατών μου Β.Καλπακίδη και Γ.Τσολακίδη. Ακόμα οι συζητήσεις μου με τον Καθηγητή Ι.Σφήκα για τη διάρθρωση της ύλης ήταν πολύτιμες. Τέλος η φροντίδα της κ.Λουκίας Λάμπρου-Παπακώστα για την άρτια δακτυλογράφηση ήταν καθοριστική για την παρουσίαση αυτής της προσπάθειας.

Χρ. Μασσαλάς

Περιεχόμενα

Οι ορθογώνιες συναρτήσεις παίζουν σημαντικό ρόλο στη μαθηματική επεξεργασία πολλών προβλημάτων των εφαρμοσμένων μαθηματικών . Πολλά σπουδαία σύνολα τέτοιων συναρτήσεων εμφανίζονται κατά τη λύση διαφορικών εξισώσεων 2ας τάξης της μορφής

$$y')'+(q(x)+\lambda w(x))y=0 \qquad \text{(εξίσωση Sturm-Liouville)} .$$

Στην πρώτη παράγραφο του κεφαλαίου αυτού δίνονται οι βασικοί ορισμοί και ιδιότητες των ορθογωνίων συναρτήσεων και στη συνέχεια σχολιάζεται το πρόβλημα Sturm-Liouville.

Οι γραμμικές και ομογενείς διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές μπορούν να λυθούν με αλγεβρικές μεθόδους και οι λυσεις τους είναι στοιχειώδεις συναρτήσεις γνωστές από τον ολοκληρωτικό και διαφορικό λογισμό. Στην περίπτωση των διαφορικών εξισώσεων με μεταβλητούς συντελεστές το πρόβλημα επίλυσής τους εμφανίζεται πιο πολύπλοκο και οι λύσεις τους είναι τις περισσότερες φορές μη-στοιχειώδεις συναρτήσεις (π.χ. εξισώσεις Legendre, Bessel κ.τ.λ.). Επειδή τέτοιες εξισώσεις εμφανίζονται πολύ συχνά κατά την περιγραφή διαφόρων φυσικών προβλημάτων και οι λύσεις τους παίζουν σημαντικό ρόλο στα εφαρμοσμένα μαθηματικά, στη δεύτερη παράγραφο αυτού του κεφαλαίου θα σκιαγραφήσουμε τη μέθοδο επίλυσής τους που είναι γνωστή σαν μέθοδος των δυναμοσειρών.

ΚΕΦ. Α.

Ορθογωνιες συναρτησεις – προβλημα Sturm – Liouville

Μεθοδος των δυναμοσειρων για την επιλυση διαφορικων εξισωσεων

1. Ορθογώνιες συναρτήσεις. Πρόβλημα Sturm-Liouville.

Ας θεωρήσουμε δύο πραγματικές συναρτήσεις $f_m(x)$ και $f_n(x)$ που ορίζονται για $x\in[\alpha,b]$ και είναι τέτοιες ώστε το ολοκλήρωμα

(1) $$(f_m,f_n) = \int_\alpha^b f_m(x)f_n(x)dx$$

να υπάρχει.

Οι συναρτήσεις αυτές θα λέμε ότι είναι ορθογώνιες (orthogonal functions) στο διάστημα $[\alpha,b]$ αν το ολοκλήρωμα (1) είναι ίσο με το μηδέν, δηλαδή

(2) $$(f_m,f_n) = \int_\alpha^b f_m(x)f_n(x)dx = 0 \ , \quad m\neq n \ .$$

Ένα σύνολο συναρτήσεων $\{f_\kappa\}$ λέγεται ορθογώνιο σύνολο (orthogonal set) συναρτήσεων στο διάστημα $[\alpha,b]$ αν οι συναρτήσεις ορίζονται στο διάστημα αυτό και όλα τα ολοκληρώματα (f_m,f_n) υπάρχουν και είναι ίσα με το μηδέν για $m\neq n$.

Η μη αρνητική τετραγωνική ρίζα του (f_m,f_m) λέγεται στάθμη (norm) της $f_m(x)$ και συμβολίζεται με $\|f_m\|$, δηλαδή(*)

(3) $$\|f_m\| = \sqrt{(f_m,f_m)} = \left\{\int_\alpha^b f_m^2(x)dx\right\}^{1/2} \ .$$

Ένα ορθογώνιο σύνολο λέγεται ορθοκανονικό (orthonormal) αν

(4) $$(f_m,f_n) = \int_\alpha^b f_m(x)f_n(x)dx = \delta_{mn} \ , \qquad m,n=1,2,3,\ldots$$

όπου δ_{mn} είναι το σύμβολο του Kronecker.

Η στάθμη της $f_m(x)$ που ανήκει σένα ορθοκανονικό σύνολο είναι ίση με τη μονάδα ($\|f_m\| = 1$, $m=1,2,3,\ldots$) .

Είναι προφανές ότι, από ένα ορθογώνιο σύνολο συναρτήσεων μπορούμε νά πάρουμε ένα ορθοκανονικό αν διαιρέσουμε κάθε συνάρτησή του με τη στάθμη της στο διάστημα $[\alpha,b]$.

(*) Στη συνέχεια θα υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις είναι φραγμένες, τα ολοκληρώματα υπάρχουν και οι στάθμες είναι διάφορες από το μηδέν.

<u>Παράδειγμα</u> : Οι συναρτήσεις $f_m(x)=\sin mx$, $m=1,2,3,\ldots$ συνιστούν ένα ορθογώνιο σύνολο στο διάστημα $[-\pi,\pi]$ γιατί

$$(5)\qquad (f_m,f_n)=\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=0\ ,\quad (m\neq n).$$

Η στάθμη της f_m είναι

$$\|f_m\|=\{\int_{-\pi}^{+\pi}\sin^2 mx\,dx\}^{1/2}=\sqrt{\pi}\ ,\qquad (m=1,2,3,\ldots)\ .$$

Το ορθοκανονικό σύνολο που παράγεται από το σύνολο $\{f_k\}$ θα είναι

$$\{\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}f_k\ ,\quad k=1,2,\ldots\ \}.$$

<u>Παρατήρηση</u> : Οι συναρτήσεις $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x,\ldots$, που εμφανίζονται στις σειρές Fourier, σχηματίζουν ένα ορθογώνιο σύνολο στο διάστημα $[-\pi,\pi]$.

Από τη θεωρία των σειρών Fourier ξέρουμε ότι, ο προσδιορισμός των συντελεστών μιας τέτοιας σειράς βασίζεται στο γεγονός ότι οι συναρτήσεις που αναφέρθηκαν πιο πάνω είναι ορθογώνιες στο διάστημα $[-\pi,\pi]$. Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στο να προσπαθήσουμε να εκφράσουμε μια συνάρτηση $F(x)$ σε όρους ενός οποιουδήποτε ορθογώνιου συνόλου συναρτήσεων $\{f_k\}$ με τη μορφή

$$(6)\qquad F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_kf_k(x)=c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\ldots\ .$$

Αν η σειρά (6) συγκλίνει και εκφράζει τη συνάρτηση $F(x)$ λέγεται <u>γενικευμένη σειρά Fourier</u> (generalized Fourier series) της $F(x)$ και οι συντελεστές της λέγονται <u>σταθερές ή συντελεστές του Fourier</u> (Fourier constants or coefficients) ως προς το σύνολο των ορθογωνίων συναρτήσεων $\{f_k\}$. Για τον προσδιορισμό των c_k, $k=1,2,3,\ldots$ πολλαπλασιάζουμε την (6) με τη συνάρτηση $f_m(x)$ και ολοκληρώνουμε στο διάστημα $[\alpha,b]$,

$$(7)\qquad \int_{\alpha}^{b}F(x)f_m(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\int_{\alpha}^{b}f_mf_kdx=c_m\|f_m\|^2\ .$$

Από την (7) έχουμε

(8) $$c_m = \frac{1}{\|f_m\|^2}\int_\alpha^b F(x)f_m(x)dx \ .$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι με ορθοκανονικοποίηση του $\{f_k\}$ παράγουμε το ορθοκανονικό σύνολο $\{\phi_k\}$. Θα ζητήσουμε την προσέγγιση της $F(x)$, $x\in[\alpha,b]$, με το γραμμικό συνδυασμό των ϕ_k, δηλαδή

(9) $$F_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\phi_i(x) = \alpha_1\phi_1(x)+\alpha_2\phi_2(x)+\ldots+\alpha_n\phi_n(x)$$

ώστε το <u>μέσο τετραγωνικό σφάλμα</u> (mean square error) να είναι ελάχιστο:

(10) $$E \equiv \int_\alpha^b [F-(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\phi_i)]^2dx = \text{ελάχιστο} \ .$$

Η (10) γράφεται

(11) $$E \equiv \int_\alpha^b F^2dx-2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i c_i+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2$$

όπου

$$c_i = \int_\alpha^b F\phi_i dx \ , \qquad \int_\alpha^b \phi_i\phi_j dx = \delta_{ij} \ .$$

Επειδή

$$-2\alpha_i c_i+\alpha_i^2 = -c_i^2+(\alpha_i-c_i)^2$$

το σφάλμα E θα δίνεται και από την έκφραση

(12) $$E = \int_\alpha^b F^2dx-\sum_{i=1}^{n}c_i^2+\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-c_i)^2 \ .$$

Από την (12) παίρνουμε χρήσιμα συμπεράσματα :

α) Το σφάλμα E είναι μικρότερο αν οι συντελεστές α_i είναι οι σταθερές του Fourier, δηλαδή $\alpha_i=c_i$ και το σφάλμα θα είναι

(13) $$E = \int_\alpha^b F^2dx-\sum_{i=1}^{n}c_i^2 \ .$$

β) Επειδή όμως από την (10) ξέρουμε ότι $E \geq 0$ θα έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \leq \int_{\alpha}^{b} F^2 dx$$

και για $n \to \infty$

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \leq \int_{\alpha}^{b} F^2 dx \quad , \qquad \text{(ανισότητα του Bessel)} . \tag{14}$$

γ) Η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$ συγκλίνει και κατά συνέπεια $c_i \to 0$ για $i \to \infty$.

δ) Η σειρά Fourier (9), για $n \to \infty$, συγκλίνει στην $F(x)$ αν το τετραγωνικό σφάλμα τείνει στη μηδέν για $n \to \infty$, δηλαδή αν

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = \int_{\alpha}^{b} F^2 dx \; , \qquad \text{(ισότητα του Parseval)}. \tag{15}$$

Στις διάφορες εφαρμογές εμφανίζονται σύνολα πραγματικών συναρτήσεων $\{f$ που δεν είναι ορθογώνια αλλά έχουν την ιδιότητα ότι, για κάποια μη αρνητική συνάρτηση $w(x)$ που λέγεται συνάρτηση βάρους (weight function) να ισχύει

$$\int_{\alpha}^{b} w(x) f_m(x) f_n(x) dx = 0 \; , \qquad m \neq n . \tag{16}$$

Ένα τέτοιο σύνολο λέμε ότι είναι ορθογώνιο ως προς $w(x)$ στο διάστημα $[\alpha,b]$. Η στάθμη της $f_m(x)$ ως προς $w(x)$ ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο :

$$\| f_m \| = \{ \int_{\alpha}^{b} w(x) f_m^2(x) dx \}^{1/2} . \tag{17}$$

Αν ορίσουμε τις συναρτήσεις $g_m = \sqrt{w} f_m$, τότε η (16) παίρνει τη μορφή

$$\int_{\alpha}^{b} g_m(x) g_n(x) dx = 0 \; , \qquad m \neq n \; ,$$

και κατά συνέπεια οι συναρτήσεις $\{g_k\}$ αποτελούν ένα ορθογώνιο σύνολο που ικανοποιεί τον ορισμό (2).

Αν μια συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να εκφραστεί με μια γενικευμένη σειρά Fourier

(18) $$f(x) = c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\ldots$$

όπου $\{y_k\}$ είναι ορθογώνιες συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha,b]$ με συνάρτηση βάρους $w(x)$, τότε οι σταθερές Fourier θα είναι

(19) $$c_m = \frac{1}{\|y_m\|^2}\int_\alpha^b w(x)f(x)y_m(x)dx \quad , \quad m=1,2,3,\ldots$$

Πολλά ορθογώνια σύνολα συναρτήσεων εμφανίζονται σαν λύσεις διαφορικών εξισώσεων της μορφής

(20) $$(r(x)y')'+(q(x)+\lambda w(x))y = 0 \quad , \quad x\in[\alpha,b]$$

που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες

(21) $$\begin{aligned} &k_1y+k_2y' = 0 \quad , \quad \text{για} \quad x = \alpha \\ &\ell_1y+\ell_2y' = 0 \quad , \quad \text{για} \quad x = b \quad , \end{aligned}$$

όπου λ είναι μια παράμετρος και k_i,ℓ_i, $i=1,2$ είναι πραγματικές σταθερές από τις οποίες υποθέτουμε ότι σε κάθε συνθήκη τουλάχιστο μια είναι διάφορη από το μηδέν.

Η (20) με τις (21) αποτελούν ένα <u>πρόβλημα συνοριακών τιμών</u> (boundary value problem) που είναι γνωστό σαν πρόβλημα Sturm-Liouville.

Το πρόβλημα (20-21) έχει λύση την $y\equiv 0$ για κάθε τιμή της παραμέτρου λ. Οι λύσεις $y\neq 0$ λέγονται <u>χαρακτηριστικές συναρτήσεις</u> ή <u>ιδιοσυναρτήσεις</u> (eigenfunctions) του προβλήματος και οι τιμές της λ για τις οποίες υπάρχουν τέτοιες λύσεις, λέγονται <u>χαρακτηριστικές τιμές</u> ή <u>ιδιοτιμές</u> (eigenvalues) του προβλήματος.

<u>Παράδειγμα</u> : Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος

$$y''+\lambda y = 0 \quad , \quad y(0) = y(\pi) = 0 \quad .$$

Για $\lambda=-\nu^2$ ή $\lambda=0$ η λύση του προβλήματος είναι $y\equiv 0$. Για $\lambda=\nu^2$ η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y(x)=A\cos\nu x+B\sin\nu x \quad .$$

Από τις συνοριακές συνθήκες παίρνουμε

$$y(0)=A=0$$

$$y(\pi)=B\sin\nu\pi=0 \qquad \nu=\pm1,\pm2,\ldots$$

και κατά συνέπεια οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος (αν θέσουμε $B=1$) είναι

$$y(x)=\sin\nu x \ , \qquad \nu=1,2,3,\ldots$$

με αντίστοιχες ιδιοτιμές

$$\lambda=\nu^2 \ , \qquad \nu=1,2,3,\ldots$$

Θ ε ώ ρ η μ α 1 : Ας υποθέσουμε ότι στην εξίσωση (20) οι συναρτήσεις r,q και w είναι πραγματικές και συνεχείς για $x\in[\alpha,b]$. Ας υποθέσουμε ακόμα ότι $y_m(x)$ και $y_n(x)$ είναι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος (20-21) που αντιστοιχούν στις διακεκριμένες ιδιοτιμές λ_m και λ_n αντίστοιχα, και έχουν την πρώτη παράγωγό τους, $y_m'(x)$, $y_n'(x)$, συνεχή για $x\in[\alpha,b]$. Οι y_m και y_n είναι τότε ορθογώνιες στο διάστημα αυτό με συνάρτηση βάρους την w .

<u>Απόδειξη</u> : Οι y_m και y_n ικανοποιούν την (20), δηλαδή

$$(22) \qquad \begin{aligned} &(ry_m')'+(q+\lambda_m w)y_m=0 \\ &(ry_n')'+(q+\lambda_n w)y_n=0 \quad . \end{aligned}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τις (22 α,β) με y_n και $-y_m$, αντίστοιχα και τις προσθέσουμε, θα πάρουμε

$$(23) \qquad (\lambda_m-\lambda_n)wy_my_n=y_m(ry_n')'-y_n(ry_m')'=\{(ry_n')y_m-(ry_m')y_n\}' \ .$$

Ολοκληρώνοντας ως προς x από το $x=\alpha$ στο $x=b$ έχουμε

$$(24)\qquad (\lambda_m-\lambda_n)\int_\alpha^b w y_m y_n dx = \{r(y_n' y_m - y_n y'_m)\}\Big|_\alpha^b$$

$$= r(b)\{y_n'(b)y_m(b)-y_m'(b)y_n(b)\}$$

$$-r(\alpha)\{y_n'(\alpha)y_m(\alpha)-y_m'(\alpha)y_n(\alpha)\}\ .$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

1-περίπτωση : $r(\alpha)=r(b)=0$. Τότε το δεύτερο μέρος της (24) είναι ίσο με το μηδέν και επειδή $\lambda_m \neq \lambda_n$ έχουμε

$$\int_\alpha^b w y_m y_n dx = 0\ ,$$

δηλαδή το συμπέρασμα του θεωρήματος.

2-περίπτωση : $r(b)=0$, $r(\alpha)\neq 0$. Από την (21α) έχουμε

$$(25)\qquad \begin{aligned} &k_1 y_m(\alpha)+k_2 y_m'(\alpha) = 0 \\ &k_1 y_n(\alpha)+k_2 y_n'(\alpha) = 0\ . \end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε ότι $k_2 \neq 0$. Αν πολλαπλασιάσουμε τις (25 α,β) με $-y_n(\alpha)$ και $y_m(\alpha)$, αντίστοιχα και τις προσθέσουμε, παίρνουμε

$$k_2\{y_n'(\alpha)y_m(\alpha)-y_n(\alpha)y_m'(\alpha)\} = 0\ .$$

Επειδή $k_2 \neq 0$ η έκφραση { } είναι ίση με το μηδέν. Η έκφραση όμως αυτή συμπίπτει με το δεύτερο μέρος της (24) για $r(b)=0$ και κατά συνέπεια για την περίπτωση αυτή αποδεικνύεται το θεώρημα 1. Αν $k_2=0$ και $k_1\neq 0$ το θεώρημα 1 αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο.

3-περίπτωση : $r(\alpha)=0$, $r(b)\neq 0$. Η απόδειξη του θεωρήματος στην περίπτωση αυτή είναι ανάλογη εκείνης της 2-περίπτωσης.

4-περίπτωση : $r(\alpha)\neq 0$, $r(b)\neq 0$. Σαυτή την περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε όλες τις συνοριακές συνθήκες (21) και θα ακολουθήσουμε την πορεία των 2 και 3-περιπτώσεων.

5-περίπτωση : $r(\alpha)=r(b)$. Το δεύτερο μέρος της (22) γράφεται

(26) $$r(b)\{y_n'(b)y_m(b)-y_m'(b)y_n(b)-y_n'(\alpha)y_m(\alpha)+y_m'(\alpha)y_n(\alpha)\}\ .$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τις συνοριακές συνθήκες (21), όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις, θα καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι η (26) είναι ίση με το μηδέν και κατά συνέπεια στην απόδειξη του θεωρήματος 1.

Θ ε ώ ρ η μ α 2 : Αν το πρόβλημα (20-21) ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος 1 και η συνάρτηση w είναι θετική (ή αρνητική) σε όλο το διάστημα $[\alpha,b]$, τότε όλες οι ιδιοτιμές του προβλήματος είναι πραγματικές.

Απόδειξη : Ας υποθέσουμε ότι

$$\lambda=\alpha+i\beta$$

και

$$y(x)=u(x)+i\upsilon(x)\quad ,\qquad i=\sqrt{-1}$$

είναι μια ιδιοτιμή και μια ιδιοσυνάρτηση του προβλήματος που αντιστοιχεί στην λ. Αν εισάγουμε τις εκφράσεις αυτές στην εξίσωση (20) , θα πάρουμε

$$(ru'+ir\upsilon')'+(q+\alpha w+i\beta w)(u+i\upsilon)=0$$

ή

(27)
$$(ru')'+(q+\alpha w)u-\beta w\upsilon=0$$
$$(r\upsilon')'+(q+\alpha w)\upsilon+\beta wu=0\ .$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τις (27) με υ και $-u$, αντίστοιχα και τις προσθέσουμε, έχουμε

(28) $$-\beta(u^2+\upsilon^2)w=\{(r\upsilon')u-(ru')\upsilon\}'\ .$$

Ολοκληρώνοντας την (28) ως προς x από το $x=\alpha$ στο $x=b$, παίρνουμε

(29) $$-\beta\int_\alpha^b(u^2+\upsilon^2)wdx=\{r(u\upsilon'-u'\upsilon)\}\Big|_\alpha^b\ .$$

Από τις συνοριακές συνθήκες (21) μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι το δεύτερο μέρος της (29) είναι ίσο με το μηδέν και

(30) $$-\beta\int_{\alpha}^{b}(u^2+\upsilon^2)w\,dx = 0 \ .$$

Από την (30) βλέπουμε ότι επειδή η λ είναι ιδιοτιμή(*)$\rightarrow(u^2+\upsilon^2)\neq 0$ και ακόμα επειδή οι w και y είναι συνεχείς και $w>0$ (ή $w<0$) για όλες τις τιμές του $x\in[\alpha,b]$ το ολοκλήρωμα (30) είναι διάφορο από το μηδέν. Κατά συνέπεια $\beta=0$ και η ιδιοτιμή $\lambda=\alpha$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

Παράδειγμα : Ας θεωρήσουμε την εξίσωση

(31) $$((1-x^2)y')'+\lambda y = 0 \ , \quad \lambda=n(n+1), \quad x\in[-1,1] \ , \quad n=0,1,2,\ldots$$

που είναι της μορφής (20) και που είναι γνωστή σαν εξίσωση Legendre. Επειδή για $x=\pm1$, $r=1-x^2=0$ οι συνοριακές συνθήκες (21) δεν χρειάζονται για τη μελέτη του προβλήματος Sturm-Liouville στο διάστημα $[-1,1]$(**). Όπως θα δούμε στα επόμενα, για $n=0,1,2,\ldots$ οι λύσεις του προβλήματος (31) είναι πολυώνυμα , $P_m(x)$, που λέγονται πολυώνυμα Legendre. Τα πολυώνυμα $P_m(x)$ είναι κατά συνέπεια ιδιοσυναρτήσεις και επειδή έχουν συνεχείς παραγώγους, από το θεώρημα 1 συμπεραίνουμε ότι είναι ορθογώνια στο διάστημα $[-1,1]$, δηλαδή

$$\int_{-}^{1}P_m(x)P_n(x)dx = 0 \ , \quad m\neq n \ .$$

Η στάθμη των P_m είναι

$$\| P_m \|=\{\int_{-1}^{1} P_m^2(x)dx\}^{1/2} = \{\frac{2}{2m+1}\}^{1/2} \ , \qquad m=0,1,2,\ldots$$

(*) Για να είναι ιδιοσυνάρτηση η y πρέπει να είναι $\neq 0$ και κατά συνέπεια $|y|^2=u^2+\upsilon^2\neq 0$.

(**) 1-Περίπτωση (σελ.9, $r(1)=0$)

2. Η μέθοδος δυναμοσειρών για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων.

Μια δυναμοσειρά (power series) ως προς $x-a$ είναι μια σειρά που έχει τη μορφή(*)

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a)^1 + \dots$$

όπου c_i, $i=0,1,2,\dots$ είναι σταθερές της σειράς, a είναι μια σταθερά που λέγεται κέντρο (center) και x είναι η μεταβλητή.

Η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων με τη μέθοδο των δυναμοσειρών περιλαμβάνει διάφορες πράξεις επί των σειρών π.χ. διαφόριση, πρόσθεση και πολλαπλασιασμό δυναμοσειρών. Για την καλύτερη κατανόηση της μεθόδου θα πρέπει να υπενθυμίσουμε τα βασικά [illegible] των [illegible].

Η έκφραση

$$(2) \qquad s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k$$

είναι το n-οστό άθροισμα της (1), και η έκφραση

$$(3) \qquad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

είναι το υπόλοιπο της (1) μετά τον όρο $c_n(x-a)^n$. [illegible] των (2) έχουμε συνδέσει με τη σειρά (1) την ακολουθία των [illegible] $s_1(x)$, $s_2(x)$, ... Η ακολουθία αυτή για κάποιο $x=x_0$ μπορεί να συγκλίνει, δηλαδή,

$$(4) \qquad \lim_{n\to\infty} s_n(x_0) = s(x_0)$$

και τότε λέμε ότι η σειρά (1) είναι συγκλίνουσα στο σημείο $x=x_0$. [illegible] $s(x_0)$ καλείται [illegible] της σειράς (1) στο x_0 και είναι

(*) [illegible]

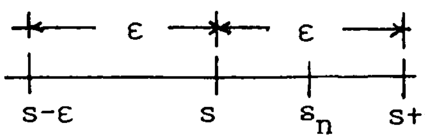
$$(5)\qquad s(x_0)=\sum_{m=0}^{\infty} c_m(x_0-\alpha)^m \ .$$

Αν η ακολουθία των $s_1(x)$, $s_2(x)$, ... αποκλίνει στο $x=x_0$ τότε η σειρά (1) λέμε ότι είναι <u>αποκλίνουσα</u> (divergent) στο $x=x_0$.

Μια ακολουθία $\{s_i\}$ λέμε ότι <u>συγκλίνει</u> στον αριθμό s ή ότι είναι συγκλίνουσα με όριο s , αν στον κάθε δοσμένο θετικό αριθμό ε (οσονδήποτε μικρό και διάφορο από το μηδέν) μπορούμε να βρούμε ένα αριθμό N τέτοιον ώστε

$$(6)\qquad |s_n-s|<\varepsilon \quad , \quad \text{για κάθε} \quad n>N^{(*)} \ .$$

Από γεωμετρική σκοπιά η (6) σημαίνει ότι το s_n για $n>N$ βρίσκεται μεταξύ του $s-\varepsilon$ και του $s+\varepsilon$.



Στην περίπτωση που εξετάζουμε, έχουμε $s=s_n+R_n$ ή $R_n=s-s_n$ και

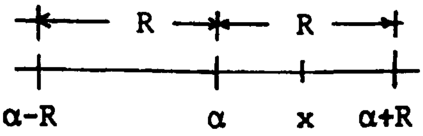
$$|s_n-s| = |R_n| \ .$$

Η σύγκλιση στο $x=x_0$ σημαίνει ότι μπορούμε να κάνουμε το υπόλοιπο $|R_n(x_0)|$ όσο μικρό θέλουμε παίρνοντας το n αρκετά μεγάλο. Με άλλα λόγια, στην περίπτωση της σύγκλισης το μερικό άθροισμα $s_n(x_0)$ είναι μια προσέγγιση του $s(x_0)$ και το σφάλμα $|R_n(x_0)|$ της προσέγγισης μπορεί να γίνει μικρότερο από κάθε δοσμένο θετικό αριθμό ε παίρνοντας το n ικανοποιητικά μεγάλο.

Για $x=x_0=\alpha$ η σειρά (1) ανάγεται σένα όρο, τον c_0 και κατα συνέπεια η σειρά συγκλίνει στο $x=\alpha$. Αν υπάρχουν άλλες τιμές της x για τις οποίες η (1) συγκλίνει , αυτές οι τιμές σχηματίζουν ένα διάστημα, το <u>διάστημα σύγκλισης</u> (convergence interval), που έχει μέσο το

(*) Ο N εξαρτάται από την εκλογή του ε .

$x=\alpha$ · τότε η σειρά συγκλίνει για όλες τις τιμές της x που βρίσκονται στο εσωτερικό του διαστήματος αυτού, $x \in (\alpha-R,\ \alpha+R)$,



δηλαδή για

(7) $$|x-\alpha|<R$$

και αποκλίνει για $|x-\alpha|>R$.

Η ποσότητα R λέγεται <u>ακτίνα σύγκλισης</u> (radius of convergence) της (1). Αν η (1) συγκλίνει για κάθε x , τότε $R=\infty$.

Η R μπορεί να προσδιοριστεί από τους συντελεστές της σειράς με έναν από τους παρακάτω τύπους

(8) $$\frac{1}{R} = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{|c_m|} \quad , \quad \frac{1}{R} = \lim_{m\to\infty} \left|\frac{c_{m+1}}{c_m}\right| ,$$

με την προϋπόθεση ότι τα όρια στις (8) υπάρχουν(*) .

Για καθε x για την οποία η (1) συγκλίνει, η σειρά έχει κάποια τιμή $s(x)$ που εξαρτάται από την x · αν η $R\neq 0$ έχουμε

$$s(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(x-\alpha)^m , \qquad |x-\alpha|<R$$

και λέμε ότι η σειρά (1) εκφράζει τη συνάρτηση $s(x)$ στο διάστημα σύγκλισης.

<u>Παράδειγμα</u> : Στην περίπτωση της σειράς

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1+x+\frac{x^2}{2!} + \ldots$$

(*) Αν τα όρια δεν υπάρχουν τότε

$$\frac{1}{R} = \lim_{m\to+\infty} \sqrt[m]{|c_m|} \equiv \lim_{m\to+\infty} \sup \sqrt[m]{|c_m|} \ .$$

Για περισσότερες πληροφορίες βλέπε Καρακώστας (1985, σελ. 20-39).

έχουμε

$$c_m = \frac{1}{m!}$$

και κατά συνέπεια

$$\frac{1}{R} = \lim_{m\to\infty} \frac{c_{m+1}}{c_m} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} = 0 \implies R = \infty$$

και η σειρά συγκλίνει για κάθε x .

Ας σχολιάσουμε τώρα τις πράξεις με τις δυναμοσειρές που χρησιμοποιούνται στη μέθοδο δυναμοσειρών.

Μια δυναμοσειρά είναι δυνατό να διαφοριστεί κατά όρο. Αν

(9) $$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x-\alpha)^m$$

συγκλίνει για $|x-\alpha|<R$, όπου $R>0$, τότε η σειρά που προκύπτει από διαφόριση κατά όρο της (9) συγκλίνει, για τις ίδιες τιμές της x , και εκφράζει την y' , δηλαδή,

(10) $$y'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m c_m (x-\alpha)^{m-1} \ .$$

Δυο δυναμοσειρές είναι δυνατό να προστεθούν κατά όρο. Αν οι σειρές

(11) $$\sum_{m=0}^{\infty} b_m (x-\alpha)^m, \qquad \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x-\alpha)^m$$

έχουν θετικές ακτίνες σύγκλισης και τα αθροίσματά τους είναι $f(x)$ και $\phi(x)$, αντίστοιχα, τότε η σειρά

$$\sum_{m=0}^{\infty} (b_m + c_m)(x-\alpha)^m$$

συγκλίνει και εκφράζει την $f(x)+\phi(x)$ για κάθε x που συγκλίνουν και δύο σειρές (11).

Δυο δυναμοσειρές είναι δυνατό να πολλαπλασιαστούν (κατά Cauchy).

Ας υποθέσουμε ότι οι σειρές (11) έχουν θετικές ακτίνες σύγκλισης και ότι τα αθροίσματά τους είναι $f(x)$ και $\phi(x)$, αντίστοιχα. Η σειρά που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό κάθε όρου της πρώτης σειράς με κάθε όρο της δεύτερης σειράς, μετά από ταξινόμηση των όρων ίσης δύναμης του $x-\alpha$, είναι

$$(12)\qquad \begin{aligned} & b_0c_0+(b_0c_1+b_1c_0)(x-\alpha)+\dots \\ & =\sum_{n=0}^{\infty}\{b_0c_n+b_1c_{n-1}+\dots+b_nc_0\}(x-\alpha)^n . \end{aligned}$$

Η (12) συγκλίνει και εκφράζει τη συνάρτηση $f(x)\phi(x)$ για κάθε x που συγκλίνουν και οι δύο σειρές (11).

Αν δυο δυναμοσειρές (11) που συγκλίνουν για $|x-\alpha|<R$, $R>0$, έχουν το ίδιο άθροισμα, τότε $b_m=c_m$, $m=0,1,2,\dots$

Οι παραπάνω ιδιότητες των δυναμοσειρών προκύπτουν σαν συνέπεια γενικότερων θεωρημάτων επί των δυναμοσειρών που εξετάζονται στα βιβλία "μιγαδικής ανάλυσης" (βλέπε Σφήκας (1984), Κατσάρας (1981),...).

Η βασική ιδέα επίλυσης διαφορικών εξισώσεων με τη μέθοδο των δυναμοσειρών είναι πολύ απλή. Σε πρώτο στάδιο θα περιγράψουμε την πρακτική διαδικασία εφαρμογής της γενικά και στη συνέχεια θα εξετάσουμε κλασσικά παραδείγματα.

Αν έχουμε να λύσουμε μια διαφορική εξίσωση, θα αναπτύξουμε σε δυναμοσειρά του x πρώτα όλες τις συναρτήσεις που εμφανίζονται σαυτή (ή του $x-\alpha$ αν θέλουμε λύση της μορφής (1)). Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε λύση της διαφορικής εξίσωσης της μορφής

$$(13)\qquad y=\sum_{m=0}^{\infty}c_mx^m=c_0+c_1x+c_2x^2+\dots \quad .$$

Τη (13) και τις παραγώγους της

$$(14)\qquad \begin{aligned} & y'=\sum_{m=1}^{\infty}mc_mx^{m-1}=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\dots , \\ & y''=\sum_{m=2}^{\infty}m(m-1)c_mx^{m-2}=2c_2+3\cdot 2c_3x+4\cdot 3c_4x^2+\dots \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

τις εισάγουμε στη διαφορική εξίσωση, από την οποία παίρνουμε μια αλγεβρική εξίσωση της μορφής

(15) $\quad k_0+k_1x+k_2x^2+\ldots=0$,

όπου οι σταθερές k_i, $i=0,1,2,\ldots$ είναι εκφράσεις που περιέχουν τους άγνωστους συντελεστές c_i , $i=0,1,2,\ldots$. Για να ισχύει η (15) για κάθε x σε κάποιο διάστημα , πρέπει

(16) $\quad k_0=0$, $k_1=0$, $k_2=0$, $\ldots$.

Από τις εξισώσεις (16) προσδιορίζονται διαδοχικά οι συντελεστές c_i .

<u>Παράδειγμα</u> : Θα λύσουμε τη διαφορική εξίσωση

$$y''+y=0 \quad .$$

Αν εισάγουμε σαυτή τις (13) και (14β) θα πάρουμε

$$2c_2+c_0=0 \ , \quad 3\cdot 2c_3+c_1=0 \ , \quad 4\cdot 3c_4+c_2= \ , \quad \ldots$$

και

$$c_2=-\frac{c_0}{2!} \ , \quad c_3=-\frac{c_1}{3!} \ , \quad c_4=\frac{c_0}{4!} \ , \quad \ldots$$

όπου c_0 και c_1 είναι αυθαίρετες σταθερές. Με τις τιμές αυτές των c_i , $i=2,3,\ldots$ η λύση της διαφορικής εξίσωσης θα είναι

$$y=c_0\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-+\ldots\right)+c_1\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-+\ldots\right)$$

δηλαδή η γνωστή γενική της λύση

$$y=c_0\cos x+c_1\sin x \quad .$$

Πολλές φορές δεν είναι σίγουρο ότι κάποιο πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί με τη βοήθεια των δυναμοσειρών. Μια ικανή συνθήκη για το σκοπό αυτό δίνει το ακόλουθο θεώρημα.

Θ ε ώ ρ η μ α 1 : Αν οι συναρτήσεις f , ϕ και r στη διαφορική εξίσωση

(17) $$y'' + f(x)y' + \phi(x)y = r(x)$$

είναι αναλυτικές(*) στο σημείο $x=\alpha$, τότε κάθε λύση της $y(x)$ είναι αναλυτική στο $x=\alpha$ και μπορεί έτσι να εκφραστεί με δυναμοσειρά του $x-\alpha$ με $R>0$.

Για την απόδειξη του θεωρήματος βλέπε Ince (1964 , Appendix I) .

Παράδειγμα : Για την κατανόηση της μεθόδου των δυναμοσειρών θα λύσουμε την εξίσωση (1.31), δηλαδή την εξίσωση Legendre ,

(18) $$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

όπου n είναι μια παράμετρος.

Αν διαιρέσουμε την (18) με $(1-x^2)$ θα πάρουμε εξίσωση της μορφής (17) της οποίας οι συντελεστές $f(x)$, $\phi(x)$ και $r(x)$ είναι αναλυτικές συναρτήσεις στο σημείο $x=0$ και έτσι σύμφωνα με το θεώρημα 1 μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των δυναμοσειρών. Αν εισάγουμε την

(19) $$y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \quad ,$$

και τις παραγώγους της στην (18), θα πάρουμε

$$(1-x^2)\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)c_m x^{m-2} - 2x\sum_{m=1}^{\infty} mc_m x^{m-1} + k\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = 0$$

ή

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)c_m x^{m-2} - \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)c_m x^m - 2\sum_{m=1}^{\infty} mc_m x^m + k\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = 0$$

(*) Μια συνάρτηση $f(x)$ λέμε ότι είναι αναλυτική στο σημείο $x=\alpha$ αν αυτή μπορεί να εκφραστεί με μια δυναμοσειρά σε δυνάμεις του $x-\alpha$ με $R>0$.

ή

$$(20) \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \{(m+2)(m+1)c_{m+2}-m(m-1)c_m-2mc_m+kc_m\}x^m = 0$$

όπου $k=n(n+1)$.

Από την (20) προκύπτει ο <u>αναγωγικός τύπος</u> (recursion formula)

$$(21) \qquad c_{m+2}=-\frac{(n-m)(n+m+1)}{(m+2)(m+1)}\,c_m\ , \qquad m=0,1,2,\ldots$$

από τον οποίο προσδιορίζονται οι συντελεστές c_m, $m\geq 2$ σαν συνάρτηση των c_0, c_1 που παραμένουν αυθαίρετοι. Οι συντελεστές με άρτιο δείκτη εκφράζονται σαν συνάρτηση του c_0 και εκείνοι με περιττό δείκτη εκφράζονται σαν συνάρτηση του c_1 , π.χ.

$$c_2=-\frac{n(n+1)}{2!}\,c_0\ , \qquad c_3=-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}\,c_1\ ,$$

$$c_4=-\frac{(n-2)(n+3)}{4\cdot 3}\,c_2 \qquad c_5=-\frac{(n-3)(n+4)}{5\cdot 4}\,c_3$$

$$=\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}\,c_0\ , \quad =\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}\,c_1$$

Η λύση της (18) θα είναι

$$(22) \qquad y(x)=c_0y_1(x)+c_1y_2(x)$$

όπου

$$(23) \qquad y_1(x)=1-\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4-+\ldots$$

$$(24) \qquad y_2(x)=x-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3+\frac{(n-3(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5-+\ldots$$

Η (22) είναι η γενική λύση της (18), γιατί οι $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις και συγκλίνει για $x\in(-1,1)$.

Σε πολλά φυσικά προβλήματα η παράμετρος n στην εξίσωση Legendre είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος. Στην περίπτωση αυτή το δεύτερο μέρος της (21) είναι ίσο με το μηδέν για $m=n$ και $c_{n+2}=0$, $c_{n+4}=0$,

$c_{n+6}=0,\ldots$. Κατά συνέπεια, αν n είναι άρτιος η $y_1(x)$. ανάγεται σένα πολυώνυμο n-βαθμού και αν n είναι περιττός η $y_2(x)$ αντίστοιχα. Τα πολυώνυμα αυτά , πολλαπλασιασμένα με κάποιες σταθερές, λέγονται πολυώνυμα του Legendre (Legendre polynomials).

Από την (21) παίρνουμε

$$c_m=-\frac{(m+2)(m+1)}{(n-m)(n+m+1)}\,c_{m+2}\,,\qquad m\leq n-2 \tag{25}$$

και μπορούμε να εκφράσουμε όλους τους μη μηδενικούς συντελεστές σε όρους του συντελεστού c_n , της μεγαλύτερης δύναμης του x στο πολυώνυμο, που θα είναι ένας αυθαίρετος αριθμός. Είναι συνηθισμένο για $n=0$ να εκλέγουμε $c_0=1$ και

$$c_n=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots(2n-1)}{n!}\,,\qquad n=1,2,3,\ldots \tag{26}$$

Ο λόγος για μια τέτοια εκλογή του c_n είναι ότι όλα τα πολυώνυμα για $x=1$ έχουν τιμή ίση με τη μονάδα. Από τις (25) και (26) έχουμε

$$c_{n-2}=-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}c_n=-\frac{n(n-1)(2n)!}{2(2n-1)2^n(n!)^2}$$

$$=-\frac{n(n-1)2n(2n-1)(2n-2)!}{2(2n-1)2^n n(n-1)!n(n-1)(n-2)!}$$

$$=-\frac{(2n-2)!}{2^n(n-1)!(n-2)!}\,,$$

$$c_{n-4}=-\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)}c_{n-2}=\frac{(2n-4)!}{2^n 2!(n-2)!(n-4)!}$$

και γενικά

$$c_{n-2k}=(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}\,,\qquad n-2k\geq0\ . \tag{27}$$

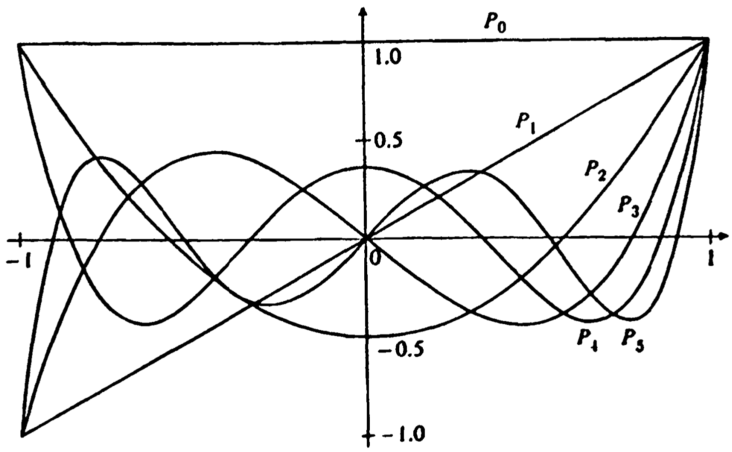
Μετά την (27), η λύση της (16) λέγεται πολυώνυμο του Legendre n-βαθμού και συμβολίζεται $P_n(x)$,

$$(28)\qquad P_n(x)=\sum_{k=0}^{M}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}$$

$$=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n-\frac{(2n-2)!}{2^n 1!(n-1)!(n-2)!}x^{n-2}+-\ldots$$

όπου $M=n/2$ ή $(n-1)/2$ (όποιος από τους δυο είναι ακέραιος). Στο σχήμα 1 φαίνονται γραφικές παραστάσεις των πολυωνύμων

$$(29)\qquad \begin{aligned} &P_0=1\ ,\quad P_1(x)=x\ ,\quad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\quad P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^2-3x)\\ &P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)\ ,\quad P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x). \end{aligned}$$



Σχ. 1. Πολυώνυμα Legendre

Μερικές διαφορικές εξισώσεις, που εμφανίζουν μεγάλο ενδιαφέρον στις πρακτικές εφαρμογές, έχουν συντελεστές που δεν είναι αναλυτικές συναρτήσεις στο σημείο $x=0$ (θεώρημα 1) αλλά είναι τέτοιες που βρίσκει εφαρμογή το παρακάτω θεώρημα.

Θ ε ώ ρ η μ α 2: Κάθε διαφορική εξίσωση της μορφής

$$(30) \qquad y'' + \frac{\alpha(x)}{x} y' + \frac{b(x)}{x^2} y = 0 \quad ,$$

όπου οι συναρτήσεις $\alpha(x)$ και $b(x)$ είναι αναλυτικές συναρτήσεις στο $x=0$, έχουν τουλάχιστο μια λύση που μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή

$$(31) \qquad y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

όπου r είναι κατάλληλος αριθμός πραγματικός ή μιγαδικός και τέτοιος ώστε $c_0 \neq 0$ (*) .

Για να λύσουμε την (30) την γράφουμε με τη μορφή

$$(32) \qquad x^2 y'' + x\alpha(x) y' + b(x) y = 0 \quad .$$

Επειδή οι συναρτήσεις $\alpha(x)$ και $b(x)$ είναι αναλυτικές για $x=0$ εκφράζονται σε δυναμοσειρές της μορφής

$$(33) \qquad \alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m x^m \quad , \qquad b(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m \quad .$$

Αν εισάγουμε τις (33), την (31) και τις παραγώγους της στην (30), θα πάρουμε

$$(34) \qquad x^r \{ \sum_{m=0}^{\infty} c_m (m+r)(m+r-1) x^m + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_k c_m (m+r) x^{k+m}$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b_k c_m x^{k+m} \} = 0 \quad .$$

Από την (34) προκύπτει το ακόλουθο αλγεβρικό σύστημα, για τον προσδιορισμό των c_m ,

$$(35) \qquad c_0 \{ r(r-1) + r\alpha_0 + b_0 \} = 0$$

(*) Για την απόδειξη του θεωρήματος βλέπε Ince (1964).

$$c_1\{(r+1)r+(r+1)\alpha_0+b_0\}=-(r\alpha_1+b_1)c_0$$

$$c_2\{(r+2)(r+1)+(r+2)\alpha_0+b_0\}=-(r\alpha_2+b_2)c_0-\{(r+1)\alpha_1+b_1\}c_1$$

(35) $$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_n\{(r+n)(r+n-1)+(r+n)\alpha_0+b_0\}$$

$$=-(r\alpha_n+b_n)c_0-+\ldots+-\{(r+n-1)\alpha_1+b_1\}c_{n-1} \quad .$$

Επειδή όμως έχουμε υποθέσει ότι $c_0\neq 0$, η (35α) μας δίνει την πληροφορία ότι το r πρέπει να είναι ρίζα της <u>δεικτοεξίσωσης</u> (indicial equation) ,

(36) $$r^2+(\alpha_0-1)r+b_0=0 \, .$$

Η μέθοδος αυτή, γνωστή σαν <u>μέθοδος Frobenius</u> , παράγει ένα βασικό σύστημα λύσεων. Η μία από τις λύσεις αυτές, σύμφωνα με το θεώρημα 2, θα έχει τη μορφή (31), η δε άλλη εξαρτάται από τη σχέση μεταξύ των ριζών r_1 και r_2 της (36).

Διακρίνουμε τώρα τρεις περιπτώσεις τις οποίες παρουσιάζουμε αναλυτικά :

1- περίπτωση : Οι r_1 και r_2 είναι διακεκριμένες και δεν διαφέρουν κατά ένα ακέραιο $(1,2,3,\ldots)$. Η περίπτωση αυτή είναι η πιό απλή. Αν r_1 και r_2 είναι ρίζες της (36), τότε οι λύσεις y_1 και y_2 είναι

(37) $$y_1(x)=x^{r_1}\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^m \, , \qquad y_2(x)=x^{r_2}\sum_{m=0}^{\infty}c_m^* x^m \, .$$

Οι (37) είναι γραμμικά ανεξάρτητες και αποτελούν ένα βασικό σύστημα της (32), στο διάστημα σύγκλισης των δύο σειρών (37).

<u>Παρατήρηση</u> : Από την (35) παρατηρούμε ότι το αριστερό μέρος κάθε αλγεβρικής εξίσωσης προκύπτει από εκείνο της προηγούμενης με αντικατάσταση του r με $r+1$. Η παρατήρηση αυτή μας λέει ότι αν $r_2=r_1+n$,

όπου n θετικός ακέραιος, τότε η εισαγωγή της r_1 στις (35) οδηγεί στο μηδενισμό του αριστερού μέρους κάποιας εξίσωσης (π.χ. k-εξίσωσης) και κατά συνέπεια ο συντελεστής c_k αυτής θα είναι απροσδιόριστος.

Παράδειγμα : Ας λύσουμε τη διαφορική εξίσωση

$$x^2y''+(x^2+\frac{5}{36})y=0 \ . \tag{38}$$

Αν εισάγουμε την (31) και τη δεύτερη παράγωγό της στην (38), παίρνουμε

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r}+\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+r+2}+\frac{5}{36}\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+r}=0$$

ή

$$\begin{aligned}&\{r(r-1)+\frac{5}{36}\}c_0x^r+\{(r+1)r+\frac{5}{36}\}c_1x^{r+1}\\ &+\sum_{m=2}^{\infty}\{(m+r)(m+r-1)c_m+c_{m-2}+\frac{5}{36}c_m\}x^{m+r}=0 \ ,\end{aligned} \tag{39}$$

απόπου προκύπτει η δεικτοεξίσωση

$$r(r-1)+\frac{5}{36}=0 \tag{40}$$

και

$$\begin{aligned}&\{(r+1)r+\frac{5}{36}\}c_1=0\\ &(m+r)(m+r-1)c_m+c_{m-2}+\frac{5}{36}c_m=0 \ , \qquad m=2,3,4,\ldots \ .\end{aligned} \tag{41}$$

Οι ρίζες της (40) είναι $r_1=\frac{5}{6}$ και $r_2=\frac{1}{6}$. Ας προσδιορίσουμε πρώτα τη λύση της (38) που αντιστοιχεί στη ρίζα $r_1=\frac{5}{6}$. Από την (41 α) παίρνουμε $c_1=0$, ενώ η (41 β) παίρνει τη μορφή

$$m(m+\frac{2}{3})c_m=c_{m-2} \ . \tag{42}$$

Επειδή $c_1=0$, από την (42) έχουμε $c_{2k+1}=0$, $k=1,2,3,\ldots$. Αν στην (42) αντικαταστήσουμε το m με $2k$, τότε παίρνουμε τον αναγωγικό τύπο

$$(43)\qquad c_{2k}=-\frac{3}{4}\frac{c_{2k-2}}{k(3k+1)}\qquad k=1,2,3,\ldots\ .$$

Από τον τύπο (43) έχουμε

$$c_2=-\frac{3}{4}\cdot\frac{c_0}{4}$$

$$c_4=-\frac{3}{4}\cdot\frac{c_2}{2\cdot 7}=(\frac{3}{4})^2\frac{c_0}{2!4\cdot 7}$$

$$c_6=-\frac{3}{4}\cdot\frac{c_4}{3\cdot 10}=-(\frac{3}{4})^3\frac{c_0}{3!4\cdot 7\cdot 10}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

και η λύση y_1 της (38) θα είναι

$$(44)\qquad y_1(x)=c_0\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\frac{3}{4})^k\frac{x^{2k+5/6}}{k!1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3k+1)}$$

$$=c_0x^{5/6}\{1-\frac{3}{16}x^2+\frac{9}{896}x^4-+\ldots\}\ .$$

Η λύση $y_2(x)$ που αντιστοιχεί στη ρίζα $r_2=1/6$ προσδιορίζεται με αντίστοιχο τρόπο (αφήνεται σαν άσκηση στον αναγνώστη) και είναι

$$(45)\qquad y_2(x)=c_0^*\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\frac{3}{4})^k\frac{x^{2k+1/6}}{k!2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3k-1)}$$

$$=c_0^*x^{1/6}\{1-\frac{3}{8}x^2+-\ldots\}\ .$$

Οι σειρές (44) και (45) συγκλίνουν για κάθε x και οι λύσεις y_1 και y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Κατά συνέπεια οι συναρτήσεις αυτές αποτελούν ένα βασικό σύστημα (για όλες τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x) της (38).

2-περίπτωση : Η δεικτοεξίσωση έχει διπλή ρίζα $(r_1=r_2)$. Η (36) έχει διπλή ρίζα αν και μόνο αν $(\alpha_0-1)^2-4b=0$ και τότε $r=r_1=$ $=r_2=(1-\alpha_0)/2$. Η μία λύση μιας τέτοιας διαφορικής εξίσωσης (θεώρημα

2) θα έχει τη μορφή

$$(46) \qquad y_1(x)=x^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

και προσδιορίζεται όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Για να βρούμε τη δεύτερη λύση θα εφαρμόσουμε τη <u>μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων</u> (method of variation of parameters). Θα αναζητήσουμε λύση της μορφής

$$(47) \qquad y_2(x) = u(x)y_1(x) \ .$$

Αν εισάγουμε τη (47) και τις παραγώγους της στην (32), έχουμε

$$(48) \qquad x^2(u''y_1+2u'y_1'+uy_1'')+xa(u'y_1+uy_1')+buy_1 = 0 \ .$$

Επειδή όμως η y_1 είναι λύση της (32), η (48) παίρνει τη μορφή

$$(49) \qquad x^2 y_1 u'' +2x^2 y_1' u' +xay_1 u' = 0 \ .$$

Αν διαιρέσουμε τώρα την (49) με $x^2 y_1$ και εισάγουμε σαυτή την (33α), θα πάρουμε

$$(50) \qquad u'' +(2\frac{y_1'}{y_1} + \frac{a_0}{x} +\ldots)u' = 0 \ .$$

Στην (50) και στη συνέχεια, οι τελείες ... σημαίνουν ότι οι όροι που ακολουθούν είναι σταθεροί ή περικλείουν θετικές δυνάμεις της ανεξάρτητης μεταβλητής x . Αν λάβουμε υπόψη ότι

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{x^{r-1}\{rc_0+(r+1)c_1x+\ldots\}}{x^r\{c_0+c_1x+ \ldots\ldots\ldots \}}$$

$$=\frac{1}{x}\{\frac{rc_0+(r+1)c_1x+\ldots}{c_0+c_1x+\ldots}\} = \frac{r}{x} + \ldots$$

η (50) παίρνει τη μορφή

$$(51) \qquad u'' +\{\frac{2r+a_0}{x}+ \ldots\}u' = 0 \ .$$

Επειδή όμως $r=(1-\alpha_0)/2$, η (51) γράφεται

(52) $$\frac{u''}{u'}=-\frac{1}{x}+\dots \; .$$

Ολοκληρώνοντας την (52), έχουμε

(53) $$\ell n u'=-\ell n x+\dots \quad \text{ή} \quad u'=\frac{1}{x}e^{(\dots)} \; .$$

Αν αναπτύξουμε την εκθετική συνάρτηση σε δυναμοσειρά της x και ολοκληρώσουμε την (53β), παίρνουμε

(54) $$u=\ell n x+k_1x+k_2x^2+\dots \; .$$

Η μορφή λοιπόν της y_2 θα είναι(*)

(55) $$y_2(x)=y_1(x)\ell n x+x^r\sum_{m=1}^{\infty}c_mx^m \; .$$

<u>Παράδειγμα</u> : Ας λύσουμε τη διαφορική εξίσωση

(56) $$x(x-1)y''+(3x-1)y'+y=0 \; .$$

Η (56) ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος 2. Αν εισάγουμε λοιπόν την (31) και τις παραγώγους της στην (56), θα πάρουμε

(57) $$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_mx^{m+r}-\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_mx^{m+r-1}\\&+3\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_mx^{m+r}-\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_mx^{m+r-1}+\sum_{m=0}^{\infty}c_mx^{m+r}=0 \; .\end{aligned}$$

Η δεικτοεξίσωση που προκύπτει από την (57) είναι

(58) $$\{-(r-1)r-r\}c_0=0 \Rightarrow r=r_1=r_2=0 \; .$$

Αν εισάγουμε τη διπλή ρίζα $r=0$ στην (57), θα πάρουμε τον αναγωγικό

(*) Αν το x είναι μιγαδική μεταβλητή η συνάρτηση $\ell n x$ αντιπροσωπεύει τον κύριο κλάδο (μπορεί και κάποιο αυθαίρετο κλάδο), Butkov (1975, Κεφ.3).

τύπο

$$m(m-1)c_m-(m+1)mc_{m+1}+3mc_m-(m+1)c_{m+1}+c_m=0$$

ή

(59) $$c_{m+1}=c_m \Rightarrow c_0=c_1=c_2=\dots \quad .$$

Αν εκλέξουμε $c_0=1$ η y_1 θα είναι

(60) $$y_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty} x^m=\frac{1}{1-x}\ , \qquad |x|\in(0,1) \quad .$$

Η λύση $y_2=uy_1$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$x(x-1)(u''y_1+2u'y_1')+(3x-1)u'y_1=0$$

που με την εισαγωγή της y_1 παίρνει τη μορφή

$$xu''+u'=0 \Rightarrow u=\ell nx \quad .$$

Η λύση λοιπόν y_2 θα είναι

(61) $$y_2(x)=uy_1=\frac{\ell nx}{1-x}\ , \qquad x\in(0,1) \quad .$$

3-περίπτωση : Οι ρίζες της δεικτοεξίσωσης διαφέρουν κατά ένα ακέραιο. Αν οι ρίζες r_1 και r_2 της (36) διαφέρουν κατά τον θετικό ακέραιο n , δηλαδή $r_2=r-n$, $r=r_1$, τότε μπορούμε πάντοτε να προσδιορίσουμε μία λύση της διαφορικής εξίσωσης της μορφής (31) που αντιστοιχεί στην $r_1=r$. Για τη ρίζα όμως r_2 , όπως σχολιάσαμε πιο πάνω, δεν είναι δυνατό να εφαρμόσουμε την πορεία της 1-περίπτωσης(*) και θα εργαστούμε όπως στη 2-περίπτωση.

(*) Υπάρχουν περιπτώσεις που οι ρίζες της δεικτοεξίσωσης διαφέρουν κατά θετικό ακέραιο και η μια μόνο ρίζα της προσδιορίζει τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης π.χ. $x^2y''+xy'+(x^2-1/4)y=0$. Η ρίζα $r_2=-1/2$ προσδιορίζει τη γενική της λύση, Butkov (1975, σελ. 134-135).

Από την (36) έχουμε ότι

$$r_1+r_2=-(\alpha_0-1)$$

και κατά συνέπεια

(62) $$2r+\alpha_0=n+1 \quad .$$

Αν εισάγουμε την (62) στην (51), θα πάρουμε

(63) $$\frac{u''}{u'}=-\{\frac{n+1}{x}+\ldots\} \quad .$$

Ολοκληρώνοντας την (63), έχουμε

$$\ell n u'=-(n+1)\ell n x+\ldots \quad \Rightarrow \quad u'=x^{-(n+1)}\cdot e^{(\cdots)}$$

όπου $\cdots$ σημαίνουν ότι οι όροι που ακολουθούν είναι σταθεροί ή περικλείουν θετικές δυνάμεις της x. Αν αναπτύξουμε την εκθετική συνάρτηση $e^{(\cdots)}$ σε δυναμοσειρά της x, θα πάρουμε μια σειρά της μορφής

(64) $$u'=\frac{1}{x^{n+1}}+\frac{k_1}{x^n}+\ldots+\frac{k_n}{x}+k_{n+1}+k_{n+2}x+\ldots \quad .$$

Η έκφραση για τη u, μετά από ολοκλήρωσή της (64), είναι

$$u=-\frac{1}{nx^n}-\ldots+k_n\ell n x+k_{n+1}x+\ldots$$

και η λύση $y_2=uy_1$, αφού λάβουμε υπόψη ότι $r_1-n=r_2$, θα έχει την ακόλουθη μορφή

(65) $$y_2(x)=k_n y_1(x)\ell n x+x^{r_2}\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^m \quad .$$

Οι λύσεις λοιπόν y_1 και y_2 που δίνονται από τις (31) και (65), αντίστοιχα, αποτελούν ένα βασικό σύστημα της (32) στην περίπτωση που οι ρίζες της (36) διαφέρουν κατά θετικό ακέραιο. Η λύση (31) αντιστοιχεί στη ρίζα που έχει το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος.

<u>Παράδειγμα</u> : Ας θεωρήσουμε τη διαφορική εξίσωση

(66) $$(x^2-1)x^2y''-(x^2+1)xy'+(x^2+1)y=0 \quad .$$

Η διαφορική εξίσωση (66) ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος 2. Αν εισάγουμε λοιπόν την (31) και τις παραγώγους της στην (66), θα πάρουμε

$$(67)\qquad \sum_{m=0}^{\infty} (m+r-1)^2 c_m x^{m+r+2} - \sum_{m=0}^{\infty} (m+r+1)(m+r-1)c_m x^{m+r} = 0 \ .$$

Η δεικτοεξίσωση που προκύπτει από την (67) είναι

$$(r+1)(r-1) = 0 \Rightarrow r_1 = 1 \ , \qquad r_2 = -1$$

$$(r_1 - r_2 = 2)$$

και αντιστοιχεί στο συντελεστή της r-δύναμης της x . Από το συντελεστή της $r+1$-δύναμης της x

$$-(r+2)rc_1 = 0$$

παίρνουμε την πληροφορία ότι $c_1 = 0$. Ο αναγωγικός τύπος

$$(68)\qquad (m+r-1)^2 c_m - (m+r+3)(m+r+1)c_{m+2} = 0 \ , \qquad m=0,1,2,\ldots$$

για $r=1$ μας δίνει

$$(69)\qquad c_{m+2} = \frac{m^2}{(m+4)(m+2)} c_m \ , \qquad m=0,1,2,\ \ldots \ .$$

Από την (69) παίρνουμε την πληροφορία ότι $c_3=0$, $c_4=0$, $c_5=0$, ... επειδή $c_1=0$ και για $m=0 \Rightarrow c_2=0$. Η λύση λοιπόν της (66) που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη ρίζα $r_1=1$ θα είναι

$$(70)\qquad y_1 = c_0 x \ .$$

<u>Παρατήρηση</u> : Αν εισάγουμε την $r_2=-1$ στον αναγωγικό τύπο (68) θα πάρουμε για $m=0$, $4c_0=0 \Rightarrow c_0=0$. Αλλά το αποτέλεσμα αυτό έρχεται σε αντίθεση με το θεώρημα 2 και κατά συνέπεια η (66) δεν έχει δεύτερη λύση της μορφής (31).

Η λύση y_2 της (66) θα είναι της μορφής (65), δηλαδή

$$(71)\qquad y_2(x) = k\, x\ell nx + \frac{1}{x} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \ .$$

Για τον προσδιορισμό των c_m θα εισάγουμε την (71) στην (66), οπότε θα έχουμε (μετά από απλοποιήσεις)

$$(72)\qquad -2kx+\sum_{m=0}^{\infty}(m-2)^2c_m x^{m+1}-\sum_{m=0}^{\infty}m(m-2)c_m x^{m-1}=0 .$$

Από την (72) παίρνουμε

$$k=2c_0\ ,\qquad c_1=0$$

$$c_{m+2}=\frac{(m-3)^2}{m^2-1}\,c_{m-1}\ ,\qquad m=2,3,\ldots$$

και κατά συνέπεια οι μόνοι μη-μηδενιζόμενοι συντελεστές (παραμένουν αυθαίρετοι) είναι οι c_0 και c_2. Η λύση λοιπόν y_2 θα είναι

$$(78)\qquad y_2(x)=2c_0x\ell nx+\frac{1}{x}(c_0+c_2x^2)=2c_0x\ell nx+\frac{c_0}{x}+c_2x .$$

Επειδή ο τελευταίος όρος είναι c_2y_1/c_0, το βασικό σύστημα της (66) θα είναι

$$(79)\qquad y_1(x)=x\ ,\qquad y_2(x)=x\ell nx+\frac{1}{2x} .$$

Πρέπει να τονιστεί στο σημείο αυτό ότι, μια γενική θεώρηση ως προς τη σύγκλιση των σειρών που εμφανίζονται στην επέκταση της μεθόδου των δυναμοσειρών δεν παρουσιάστηκε στην παράγραφο αυτή· είναι όμως δυνατό για κάθε περίπτωση ξεχωριστά να εφαρμοστούν τα γνωστά κριτήρια σύγκλισης των σειρών.

Αν και δεν έγινε στην παράγραφο αυτή συζήτηση από τη σκοπιά της μιγαδικής ανάλυσης, θα αντιμετωπίσουμε ένα απλό παράδειγμα διαφορικής εξίσωσης της οποίας η δεικτοεξίσωση έχει μιγαδικές ρίζες. Ας θεωρήσουμε την εξίσωση του Euler

$$(80)\qquad x^2y''+xy'+y=0 .$$

Αν εισάγουμε την (31) στην (80) παίρνουμε

$$c_m\{(r+m)^2+1\}=0\ ,\qquad m=0,1,2,\ldots$$

Η δεικτοεξίσωση $(m=0)$

$$c_0(r^2+1)=0$$

έχει ρίζες $r_{1,2}=\pm i$.

Οι συντελεστές c_m, $m=1,2,3,\ldots$ και για τις δύο περιπτώσεις, μηδενίζονται· κατά συνέπεια έχουμε

$$(81) \qquad y_1(x)=x^{i} \quad , \qquad y_2(x)=x^{-i} .$$

Οι συναρτήσεις (81) είναι πλειότιμες με κύριους κλάδους

$$y_1(x)=e^{i\ell nx} \quad , \qquad y_2(x)=e^{-i\ell nx} .$$

Η Wronskian των λύσεων αυτών είναι

$$W(y_1,y_2)=e^{i\ell nx}e^{-i\ell nx}\left(-\frac{i}{x}\right)-e^{-i\ell nx}e^{i\ell nx}\left(\frac{i}{x}\right)$$
$$=-\frac{i}{x}-\frac{i}{x}=-\frac{2i}{x}\neq 0 \qquad (\text{για πεπερασμένο } x)$$

και κατά συνέπεια οι λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες και η γενική λύση της (80) είναι

$$(82) \qquad y(x)=A_1e^{i\ell nx}+A_2e^{-i\ell nx}$$

όπου A_1 και A_2 είναι μιγαδικές σταθερές.

Αν θέλουμε την πραγματική λύση της (80), γράφουμε

$$e^{i\ell nx}=e^{i(\ell n|x|+i\arg x)} .$$

Για x πραγματικό και θετικό έχουμε

$$\arg x=0 \ , \qquad \ell n|x|=\ell nx$$

και

$$e^{i\ell nx}=\cos(\ell nx)+i\sin(\ell nx) .$$

Επειδή οι πραγματικές συναρτήσεις $\cos(\ell nx)$ και $\sin(\ell nx)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες και ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση , η γενική λύση της (80) θα είναι

(83) $y(x) = c_1\cos(\ell nx)+c_2\sin(\ell nx)$, $x>0$.

Σχόλιο :

Για να μην υπάρχει σύγχυση του σπουδαστή που θα ανατρέξει σε άλλες πηγές για την πληρέστερη μελέτη της μεθόδου των δυναμοσειρών , θα δώσουμε τους παρακάτω ορισμούς :

Ορισμός 1 : Αν οι συναρτήσεις $P(x)$ και $Q(x)$ στη διαφορική εξίσωση

(84) $y''+P(x)y'+Q(x)y = 0$

είναι αναλυτικές στο σημείο $x=0$, τότε το σημείο αυτό λέγεται συνηθισμένο σημείο (ordinary point) της διαφορικής εξίσωσης.

Ορισμός 2 : Αν οι συναρτήσεις $P(x)$ και $Q(x)$ δεν είναι και οι δύο αναλυτικές και είναι της μορφής

$$P(x)= \frac{\alpha(x)}{x} \quad , \qquad Q(x)= \frac{b(x)}{x^2}$$

όπου $\alpha(x)$ και $b(x)$ είναι αναλυτικές συναρτήσεις στο $x=0$, τότε το σημείο αυτό λέγεται κανονικό ανώμαλο σημείο (regular siingular point) Στην αντίθετη περίπτωση το σημείο λέγεται μη-κανονικό ανώμαλο σημείο (irregular singular point).

Η διατύπωση των θεωρημάτων 1 και 2 θα είναι τώρα :

Θεώρημα 1: Αν το σημείο $x=0$ είναι κανονικό σημείο, τότε κάθε λύση της διαφορικής εξίσωσης (34) είναι αναλυτική στο $x=0$.

Θεώρημα 2: Αν το σημείο $x=0$ είναι κανονικό ανώμαλο σημείο , τότε η λύση της διαφορικής εξίσωσης (84) είτε είναι αναλυτική στο $x=0$, (37) , είτε εκφράζεται με τη μορφή (55) ή (65) και έχει κλαδικό σημείο τύπου δύναμης ή λογάριθμου.

Προβλήματα .

1. Αν οι συναρτήσεις $\{\phi_k(x)\}$ αποτελούν ένα ορθογώνιο σύνολο στο

διάστημα $[\alpha,b]$, τότε οι συναρτήσεις $\{\phi_k(ct+\mu)\}$, $c\neq 0$, αποτελούν ένα ορθογώνιο σύνολο στο διάστημα $\left[\frac{(\alpha-\mu)}{c},\frac{(b-\mu)}{c}\right]$.

2. Να προσδιοριστούν οι σταθερές $\alpha_0, b_0, \ldots, c_2$ έτσι ώστε οι συναρτήσεις $\phi_1=\alpha_0, \phi_1=b_0+b_1x$, $\phi_3=c_0+c_1x+c_2x^2$ να είναι μεταξύ τους ορθογώνιες στο διάστημα $[-1,1]$. Να ορθοκανονικοποιηθούν οι ϕ_1, ϕ_2 και ϕ_3 .

3. Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης των σειρών

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{2^m m^2} , \quad \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (x-1)^m , \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m}(x-3)^{2m} .$$

4. Να εφαρμοστεί η μέθοδος των δυναμοσειρών στις διαφορικές εξισώσεις

$$xy'-3y = 3 , \quad y''-xy'+y = 0 .$$

5. Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις

$$y' = 2y , \quad y'' = y , \quad xy'+y = 0$$

σε δυναμοσειρές του $x-1$.

6. Να αποδειχτεί ότι

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0 , \quad n\neq m .$$

7. Να αποδειχτεί ότι κάθε πολυώνυμο n-βαθμού μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή

$$f(x) = c_0P_0+c_1P_1(x)+\ldots+c_nP_n(x) .$$

8. Να βρεθεί το βασικό σύστημα λύσεων των διαφορικών εξισώσεων

$$x^2y''+xy'+(x^2-1/4)y = 0$$

$$xy''+y' = 0 , \quad x^2y''+xy'+(x^2-1)y = 0$$

$$x^2y''+xy'+(x^2-\tfrac{1}{9})y = 0 .$$

9. Στη διαφορική εξίσωση

$$(1-x^2)y''-xy'+\lambda y=0$$

α) ποιά είναι τα ανώμαλα σημεία ;

β) να λυθεί με τη μέθοδο των δυναμοσειρών και να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου λ ώστε η μια από τις λύσεις να είναι αναλυτική στα ανώμαλα σημεία. Να αποδειχτεί ότι η λύση αυτή είναι ένα πολυώνυμο.

10. Να αποδειχτεί ότι η διαφορική εξίσωση

$$y''-xy=0$$

έχει δυο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις που είναι αναλυτικές στο $x=0$. Να υπολογιστούν οι λύσεις αυτές με τη μέθοδο των δυναμοσειρών.

11. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$x^2y''+(x^2+x)y'+y=0$$

με τη μέθοδο των δυναμοσειρών και να εκφραστούν οι λύσεις της με κλειστές μορφές.

12. Να μελετηθεί η διαφορική εξίσωση

$$x(1-x)u''+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}u'-\alpha\beta u=0$$

όπου α,β και γ είναι παράμετροι που μπορούν να πάρουν διάφορες πραγματικές ή μιγαδικές τιμές.

13. Να μελετηθεί η διαφορική εξίσωση

$$(1-x^2)u''-2xu'+\nu(\nu+1)u=0$$

με βάση την ανάλυση για το πρόβλημα 12.

ΚΕΦ. Β.

συναρτησεις Γ(α), Β(x,y), ψ(α), erfx, ολοκληρωματα Fresnel,

Si(x) , ci(x) ,ασυμπτωτικες σειρες

1. [illegible]

[illegible] μια συνάρτηση [illegible] Γάμμα συνάρτηση (Gamma function) [illegible]

(1) [illegible]

Η Γ(x) εμφανίζεται σε πολλά προβλήματα της μαθηματικής στατιστικής, φυσικής κ.τ.λ.

Το ολοκλήρωμα (1) [illegible] να [illegible]

(2) [illegible]

[illegible]

Μια κλάση συναρτήσεων ορίζεται από ολοκληρώματα που δεν μπορούν να υπολογιστούν σε όρους, πεπερασμένου αριθμού, στοιχειωδών συναρτήσεων. Η κλάση αυτή περιλαμβάνει τις Γ- , Β- και ψ- συναρτήσεις, τη συνάρτηση σφάλματος, τα ολοκληρώματα ημιτόνου και συνημιτόνου και τα ολοκληρώματα Fresnel(*). Κάποιες από τις συναρτήσεις αυτές (και άλλες που δεν αναφέρθηκαν) μπορούν να αναπτυχθούν σε ασυμπτωτικές σειρές. Οι σειρές αυτές μπορεί να μην είναι συγκλίνουσες αλλά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό αριθμητικών τιμών των συναρτήσεων αυτών για μεγάλες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής τους. Το χαρακτηριστικό τους είναι ότι, όσο μεγαλύτερες είναι οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής τόσο λιγότερους όρους της σειράς χρειαζόμαστε για τον υπολογισμό, με ικανοποιητική ακρίβεια, τιμών της συνάρτησης.

(*) Σε επόμενα κεφάλαια θα ασχοληθούμε με άλλη κλάση ειδικών συναρτήσεων π.χ. συναρτήσεις Bessel.

1. Συναρτήσεις $\Gamma(\alpha)$, $B(x,y)$ και $\psi(\alpha)$.

Μια από τις πιο σημαντικές μη στοιχειώδεις συναρτήσεις είναι η Γάμμα συνάρτηση (gamma function), $\Gamma(\alpha)$, που ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο :

$$(1)\qquad \Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt\ ,\qquad \alpha>0\qquad (\text{Euler})\ .$$

Η $\Gamma(\alpha)$ εμφανίζεται σε πολλά προβλήματα της μαθηματικής στατιστικής, φυσικής κ.τ.λ.

Το ολοκλήρωμα (1) έχει έννοια μόνο όταν $\alpha>0$ (*). Για να αποδειχτεί αυτό γράφουμε

$$(2)\qquad \Gamma(\alpha)=\int_0^{c} e^{-t}t^{\alpha-1}dt+\int_c^{\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt\ ,$$

όπου c είναι ένας θετικός αριθμός. Το δεύτερο ολοκλήρωμα στο δεξιό μέρος της (2) υπάρχει για κάθε $c>0$ και για κάθε α . Το πρώτο ολοκλήρωμα της (2), με την εφαρμογή του θεωρήματος της μέσης τιμής(**), γράφεται

$$(3)\qquad \int_0^{c} e^{-t}t^{\alpha-1}dt=e^{-b}\int_0^{c} t^{\alpha-1}dt=e^{-b}\,\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\Big|_0^{c}\qquad (\alpha\neq 0)$$

όπου b είναι ένας πραγματικός αριθμός μεταξύ 0 και c . Αν $\alpha>0$, τότε $t^{\alpha}\to 0$ για $t\to 0$ και κατά συνέπεια το ολοκλήρωμα (3) υπάρχει. Αν $\alpha<0$, θα έχουμε $t^{\alpha}\to\infty$ για $t\to 0$ και το ολοκλήρωμα (3) δεν υπάρχει. Για $\alpha=0$ το ολοκλήρωμα (3) είναι $e^{-b}\ell n t$ και απειρίζεται για $t\to 0$.

(*) Αν θεωρήσουμε και μιγαδικές τιμές, τότε το ολοκλήρωμα (1) έχει έννοια για $\mathrm{Re}\alpha>0$.

(**)
$$I(x')=\int_{\alpha}^{b} F(x)\phi(x,x')dx \xrightarrow{\Theta.M.T.} F(x^*)\int_{\alpha}^{b}\phi(x,x')dx,\qquad x^*\in(\alpha,b)\ .$$

Από την (1), έχουμε

(4) $$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha}dt=\underbrace{\cancel{-e^{-t}t^{\alpha}\Big|_0^\infty}}_{=0}+\alpha\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt\ , \quad \alpha>0$$

$$=\alpha\Gamma(\alpha)\ .$$

Αν α είναι ένας θετικός ακέραιος π.χ. $\alpha=k$, τότε με επαναληπτική εφαρμογή της (4), έχουμε

(5) $$\Gamma(k+1)=k\Gamma(k)=k(k-1)\Gamma(k-1)=\ldots$$

$$=k\cdot(k-1)\ldots3\cdot2\cdot1\cdot\Gamma(1)\ .$$

Από τον ορισμό (1) παίρνουμε

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=1$$

και η (5) γράφεται

(6) $$\Gamma(k+1)=k!\ .$$

Με επαναληπτική εφαρμογή της (4) παίρνουμε

(7) $$\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}=\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)}=\ldots=\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k)}$$

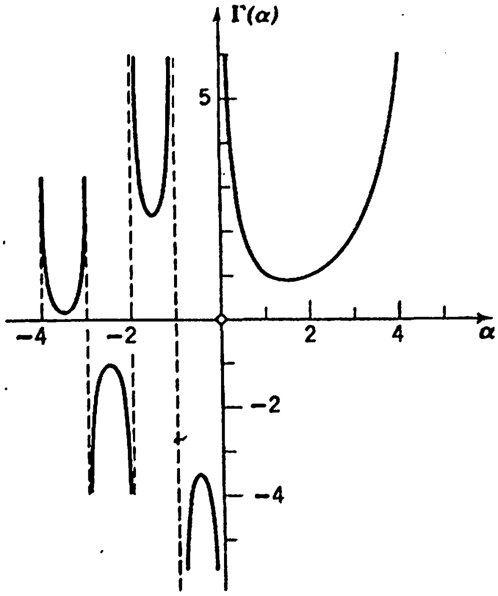
$$(\alpha\neq0,-1,-2,\ldots)\ .$$

Η (7) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό της Γ- συνάρτησης για αρνητικές τιμές του α , εκλέγοντας τον μικρότερο ακέραιο k ώστε $\alpha+k+1>0$. Η (1) μαζί με τον (7) δίνουν τον ορισμό της $\Gamma(\alpha)$ για όλες τις τιμές του $\alpha\neq0,\ -1,\ -2,\ -$ (σχ.1).

Στον πίνακα 1 φαίνονται οι τιμές της $\Gamma(\alpha)$ για $\alpha\in[1,2]$. Για άλλες τιμές του α οι τιμές της $\Gamma(\alpha)$ μπορούν να προσδιοριστούν με βάση την (4).

Εκτός από τον ορισμό (1), του Euler , η $\Gamma(\alpha)$ μπορεί να οριστεί και μένα από τους ακόλουθους τρόπους :

(8) $$\Gamma(\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)} \qquad \alpha\neq0,-1,-2,\ldots \quad \text{(Gauss)}$$



Σχ.1 Συνάρτηση Γ(α)

(9) $$\{\Gamma(\alpha)\}^{-1} = \alpha e^{\gamma\alpha} \prod_{n=1}^{\infty} (1+ \frac{\alpha}{n}) e^{-\alpha/n} \quad , \qquad \text{(Weierstrass)}$$

όπου γ είναι η σταθερά των Euler-Mascheroni ,

(10) $$\gamma = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \simeq 0.5772157 \ .$$

Παρατήρηση : Το άνω όριο της (10) υπάρχει . Ας θεωρήσουμε

$$u_k = \int_0^1 \frac{t}{k(t+k)}\, dt < \frac{1}{k^2} \int_0^1 t dt = \frac{1}{2k^2} \ .$$

Πίνακας 1 . $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$.

α	Γ(α)	α	Γ(α)	α	Γ(α)	α	Γ(α)	α	Γ(α)
1.00	1.000 000	1.20	0.918 169	1.40	0.887 264	1.60	0.893 515	1.80	0.931 384
1.02	0.988 844	1.22	0.913 106	1.42	0.886 356	1.62	0.895 924	1.82	0.936 845
1.04	0.978 438	1.24	0.908 521	1.44	0.885 805	1.64	0.898 642	1.84	0.942 612
1.06	0.968 744	1.26	0.904 397	1.46	0.885 604	1.66	0.901 668	1.86	0.948 687
1.08	0.959 725	1.28	0.900 718	1.48	0.885 747	1.68	0.905 001	1.88	0.955 071
1.10	0.951 351	1.30	0.897 471	1.50	0.886 227	1.70	0.908 639	1.90	0.961 766
1.12	0.943 590	1.32	0.894 640	1.52	0.887 039	1.72	0.912 581	1.92	0.968 774
1.14	0.936 416	1.34	0.892 216	1.54	0.888 178	1.74	0.916 826	1.94	0.976 099
1.16	0.929 803	1.36	0.890 185	1.56	0.889 639	1.76	0.921 375	1.96	0.983 743
1.18	0.923 728	1.38	0.888 537	1.58	0.891 420	1.78	0.926 227	1.98	0.991 708
1.20	0.918 169	1.40	0.887 264	1.60	0.893 515	1.80	0.931 384	2.00	1.000 000

Αλλά

$$u_k = \int_0^1 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{t+k}\right) dt = \frac{1}{k} + \ell n \frac{1}{k+1} - \ell n \frac{1}{k}$$

και

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ell n(n+1)$$

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} .$$

Από τους ορισμούς (8) και (9) γίνεται φανερό ότι η $\Gamma(\alpha)$ σαν συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής α έχει απλούς πόλους $\alpha=0,-1,-2,\ldots$. Το γεγονός αυτό μπορεί να διαπιστωθεί και από τον ορισμό (1). Το αριστερό μέρος της (3) για $c=1$ γράφεται

$$(11) \qquad \int_0^1 e^{-t} t^{\alpha-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{n+\alpha-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+\alpha)} , \qquad \mathrm{Re}\,\alpha>0.$$

Από την (11) φαίνεται ότι η $\Gamma(\alpha)$ έχει απλούς πόλους $\alpha=0,-1,-2,\ldots$. Τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα στους πόλους της $\Gamma(\alpha)$ θα είναι

$$(12)\qquad \lim_{\alpha\to -n} (\alpha+n)\Gamma(\alpha)= \frac{(-1)^n}{n!} .$$

Για να αποδείξουμε το ισοδύναμο των ορισμών (1),(8) και (9) θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα(*).

$$(13)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_0^n \{e^{-t}-(1-\frac{t}{n})^n\}t^{\alpha-1}dt = 0 , \qquad Re\alpha>0 .$$

Θεώρημα 1. Οι ορισμοί (1),(8) και (9) είναι ισοδύναμοι. Αν χρημοποιήσουμε το λήμμα (13) και τον ορισμό (1) έχουμε

$$(14)\qquad \Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-t}t^{\alpha-1}dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{\alpha-1}dt .$$

Αν κάνουμε την αντικατάσταση $t=n\tau$ στο τελευταίο ολοκλήρωμα και ολοκληρώσουμε κατά μέρη n-φορές θα πάρουμε

$$(15)\qquad \Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\int_0^1 (1-\tau)^n\tau^{\alpha-1}d\tau = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)} .$$

Με την απόδειξη της ύπαρξης του αριστερά ορίου αποδεικνύουμε ότι ο ορισμός (1) έχει σαν συνέπεια τον ορισμό (8).

Για να αποδείξουμε ότι ο ορισμός (8) έχει σαν συνέπεια τον ορισμό (9) γράφουμε

$$(16)\qquad \left[\Gamma(\alpha)\right]^{-1} = \lim_{n\to\infty} n^{-\alpha}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}{n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \alpha e^{-\alpha \ell n\, n}\prod_{k=1}^{n} e^{\alpha/k}\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{\alpha}{k})e^{-\alpha/k} .$$

(*) Για την απόδειξη, βλέπε Hochstadt (1971, σελ. 63-64).

Επειδή

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n = \gamma \ ,$$

έχουμε

$$(17) \qquad \lim_{n\to\infty} e^{-\alpha \ln n} \prod_{k=1}^{n} e^{\alpha/k} = e^{\gamma\alpha} \ .$$

Το γινόμενο

$$(18) \qquad \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{\alpha}{k}\right)e^{-\alpha/k} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{\alpha}{k}\right)e^{-\alpha/k}$$

υπάρχει, αφού για α σταθερό και k αρκετά μεγάλο έχουμε

$$(19) \qquad \left(1+\frac{\alpha}{k}\right)e^{-\alpha/k} = 1 - \frac{\alpha^2}{k^2} + \sigma\left(\frac{1}{k^3}\right) \ .$$

Το γινόμενο κατά συνέπεια συγκλίνει όπως το άθροισμα $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ και

$$(20) \qquad \left[\Gamma(\alpha)\right]^{-1} = \alpha e^{\gamma\alpha} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{\alpha}{k}\right)e^{-\alpha/k} \ ,$$

πράγμα που αποδεικνύει το ισοδύναμο των ορισμών (8) και (9).

Επειδή η $\Gamma(\alpha)$ παίρνει απότομα μεγάλες τιμές με την αύξηση του α, είναι πολλές φορές σκόπιμο να χρησιμοποιούμε προσεγγιστικές εκφράσεις για την $\Gamma(\alpha)$ όταν το α είναι μεγάλο. Μια τέτοια έκφραση για την Γ-συνάρτηση είναι εκείνη του Stirling ,

$$(21) \qquad \Gamma(\alpha+1) \simeq \sqrt{(2\pi\alpha)}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \qquad (\alpha\text{:μεγάλος θετικός αριθμός})$$

όπου e είναι η βάση των φυσικών λογαρίθμων .

Οι τιμές της $\Gamma(k+1/2)$, k=ακέραιος , μπορούν να υπολογιστούν με βάση την (4) και ότι :

$$(22) \qquad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \ .$$

Για να αποδείξουμε την (22) εισάγουμε στην (1) το μετασχηματισμό

$t=u^2$ και έχουμε

(23) $$\Gamma(1/2)=\int_0^\infty e^{-t}t^{-1/2}dt=2\int_0^\infty e^{-u^2}du$$

και

(24) $$\left[\Gamma(1/2)\right]^2=4\int_0^\infty e^{-u^2}du\int_0^\infty e^{-\upsilon^2}d\upsilon \quad .$$

Αν εισάγουμε πολικές συντεταγμένες r και ϕ

$$u=r\cos\phi \quad , \quad \upsilon=r\sin\phi$$

η (24) γράφεται

$$\left[\Gamma(1/2)\right]^2=4\int_0^{\pi/2}d\phi\int_0^\infty e^{-r^2}rdr=\pi \quad .$$

Οι συναρτήσεις $\Gamma(\alpha)$ για $\alpha=1/2\pm k$ $(k=0,1,2,...)$ γίνονται στοιχειώδεις συναρτήσεις και είναι

(25) $$\Gamma(1/2+k)=\sqrt{\pi}\,\frac{(2k)!}{4^k k!} \quad , \quad \Gamma(1/2-k)=(-1)^k\sqrt{\pi}\,\frac{4^k k!}{(2k)!} \quad .$$

Οι συναρτήσεις

(26) $$P(\alpha,x)=\int_0^x e^{-t}t^{\alpha-1}dt \quad , \quad Q(\alpha,x)=\int_x^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt \quad , \quad \alpha>0$$

διαφέρουν από τη Γ-συνάρτηση ως προς τα όρια ολοκλήρωσης και εμφανίζονται σε προβλήματα της μαθηματικής στατιστικής. Όπως θα δούμε αργότερα, οι συναρτήσεις (26) σχετίζονται με άλλες σπουδαίες ειδικές συναρτήσεις. Από την (1) έχουμε

(27) $$\Gamma(\alpha)=P(\alpha,x)+Q(\alpha,x) \quad .$$

<u>Η συνάρτηση Βήτα</u> (beta function) του Euler ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο :

(28) $$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \quad , \qquad (x,y>0)$$

και μπορεί να αντιπροσωπευτεί σε όρους Γ-συναρτήσεων.

(29) $$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(y,x) \quad .$$

Για να αποδείξουμε την (29) θα σχηματίσουμε πρώτα το γινόμενο $\Gamma(x)\Gamma(y)$,

(30) $$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt\int_0^\infty e^{-u}u^{y-1}du$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(t+u)}t^{x-1}u^{y-1}dtdu \quad .$$

θα εισάγουμε τις νέες μεταβλητές r και ϕ που συνδέονται με τις t και u με τις σχέσεις

(31) $$u = r\cos^2\phi \quad , \qquad t = r\sin^2\phi \quad .$$

Αν εκφράσουμε την υπό ολοκλήρωση έκφραση σε όρους των r και ϕ και αντικαταστ΄σουμε το $dtdu$ με το $drd\phi$ πολλαπλασιασμένο με την απόλυτη τιμή της Ιακωβιανής ορίζουσας ,

(32) $$\frac{\partial(t,u)}{\partial(r,\phi)} = \begin{vmatrix} \partial t/\partial r & \partial t/\partial\phi \\ \partial u/\partial r & \partial u/\partial\phi \end{vmatrix} = -2r\cos\phi\sin\phi \quad ,$$

η (30) γράφεται

(33) $$\Gamma(x)\Gamma(y) = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty e^{-r}(r\sin^2\phi)^{x-1}(r\cos^2\phi)^{y-1}r\cos\phi\sin\phi\,drd\phi$$

Η $\Gamma(\alpha)$ ικανοποιεί κάποιες βασικές σχέσεις που παίζουν σημαντικό ρόλο στους διάφορους μετασχηματισμούς και υπολογισμούς που περικλείουν την Γ-συνάρτηση π.χ.

(α) $$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha} \;,\quad \alpha\neq\pm0 \;,\quad \pm1 \;,\quad \pm2 \;,\ldots$$

(β) $$2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2\alpha) \;,\quad \alpha\neq0,\; -\tfrac{1}{2},\; -1\;,\; -\tfrac{3}{2}\;,\ldots \;.$$

Οι (α) και (β) αποδεικνύονται με βάση τον ορισμό (1). Η απόδειξη των (α) και (β) αφήνεται σαν άσκηση στον αναγνώστη.

$$= 2\int_0^\infty e^{-r} r^{x+y-1} dr \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}\phi \cos^{2y-1}\phi\, d\phi \quad .$$

Στην (33) το πρώτο ολοκλήρωμα είναι

$$(34) \qquad \int_0^\infty e^{-r} r^{x+y-1} dr = \Gamma(x+y)$$

ενώ το δεύτερο ολοκλήρωμα , με την αντικατάσταση $t=\sin^2\phi \to 1-t=\cos^2\phi$, $dt=2\sin\phi\cos\phi d\phi$, παίρνει τη μορφή

$$(35) \qquad 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}\phi \cos^{2y-1}\phi\, d\phi = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = B(x,y) \quad .$$

Από τις (33)-(35) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y)B(x,y) \quad ,$$

δηλαδή την (29).

Η θεωρία της Γ-συνάρτησης συνδέεται στενά με τη θεωρία της <u>ψ-συνάρτησης</u> που ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο :

$$(36) \qquad \psi(\alpha) = (\ell n\Gamma(\alpha))' = -\gamma + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+k} - \frac{1}{k+\alpha}\right) \quad .$$

Από την (36) είναι φανερό ότι η $\psi(\alpha)$ έχει απλούς πόλους $\alpha=-n$ (ακέραιος). Μία ολοκληρωτική έκφραση της $\psi(\alpha)$ είναι

$$(37) \qquad \psi(\alpha) = \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-\alpha t}}{1-e^{\alpha t}} \right\} dt \quad , \qquad \mathrm{Re}\alpha>0 \quad .$$

Αν πάρουμε τις λογαριθμικές παραγώγους των (4), (α) και (β) (υποσημείωση στη σελίδα 46), έχουμε

$$(38) \qquad \begin{aligned} &\psi(\alpha+1) = \frac{1}{\alpha} + \psi(\alpha) \\ &\psi(1-\alpha) - \psi(\alpha) = \pi\cot\pi\alpha \end{aligned}$$

και

$$(39) \qquad \psi(\alpha) + \psi(\alpha+\tfrac{1}{2}) + 2\ell n2 = 2\psi(2\alpha)$$

αντίστοιχα. Η απόδειξη των (33) και (39) αφήνεται σαν άσκηση στον αναγνώστη.

<u>Παράδειγμα 1</u> : Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα ,

$$I = \int_0^1 \{\ell n \frac{1}{x}\}^{1/2} dx \quad .$$

Αν θέσουμε $x=e^{-t}$ και λάβουμε υπόψη την (25) παίρνουμε

$$I = \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad .$$

<u>Παράδειγμα 2</u> : Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα ,

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(1-x^4)^{1/2}} \quad .$$

Αν θέσουμε $x^4=u$ έχουμε

$$I = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{u^{-3/4}}{(1-u)^{1/2}} du = \frac{1}{4} B(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{4\Gamma(\frac{3}{4})}$$

<u>Παράδειγμα 3</u> : Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha}\phi d\phi \quad .$$

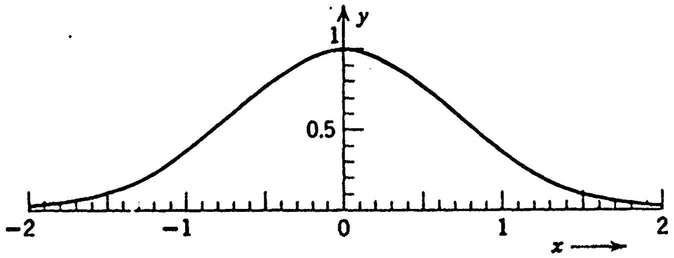
Αν θέσουμε $t=\sin^2\phi$ έχουμε

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{1/2-1}(1-t)^{1/2\cdot\alpha+1/2-1} dt \quad , \qquad \alpha > -1$$

$$= \frac{1}{2} B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}\alpha+1)} \quad .$$

2. <u>Συνάρτηση σφάλματος . Ολοκληρώματα Fresnel. Ολοκληρώματα ημιτόνου και συνημιτόνου</u> .

Η συνάρτηση e^{-x^2} είναι γνωστή σαν <u>κωδωνοειδής καμπύλη</u> (bell-shaped curve) και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο σχ. 1 . Η συνάρτηση αυτή και το ολοκλήρωμά της εμφανίζονται πολύ συχνά στα εφαρμοσμένα μαθηματικά .

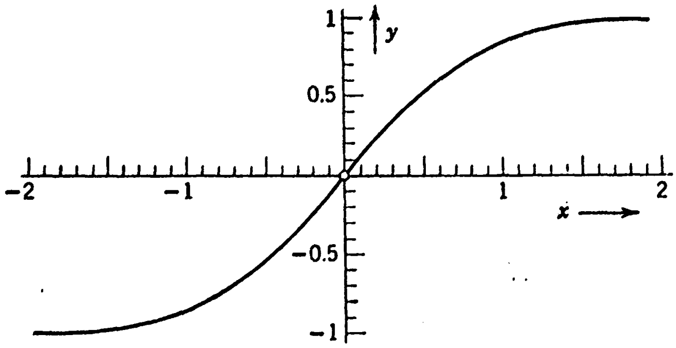


<u>Σχ.1</u> $y=e^{-x^2}$

Η συνάρτηση

(1) $$\text{erf}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt = -\text{erf}(-x)$$

λέγεται <u>συνάρτηση σφάλματος</u> (error function) σχ.2)



<u>Σχ.2</u> $y=\text{erf}x$

Από τις (1.22) και (1.23) βλέπουμε ότι ,

(2) $$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} .$$

Από τις (1) και (2) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

(3) $$\mathrm{erf}\infty = \lim_{x\to\infty} \mathrm{erf}x = 1$$

πράγμα που δικαιολογεί το συντελεστή $2/\sqrt{\pi}$ στην (1).

Η συνάρτηση σφάλματος δεν μπορεί να εκφραστεί σε όρους , πεπερασμένου αριθμού, στοιχειωδών συναρτήσεων. Στον πίνακα 1 φαίνονται τιμές της erfx και της παραγώγου της για $x \in [0,4]$.

Πίνακας 1. (erfx), (erfx)'

x	erf x	$(2/\sqrt{\pi})e^{-x^2}$	x	erf x	$(2/\sqrt{\pi})e^{-x^2}$
0.00	0.000 000	1.128 379	1.00	0.842 701	0.415 107
0.05	0.056 372	1.125 562	1.1	0.880 205	0.336 480
0.10	0.112 463	1.117 152	1.2	0.910 314	0.267 344
0.15	0.167 996	1.103 274	1.3	0.934 008	0.208 208
0.20	0.222 703	1.084 135	1.4	0.952 285	0.158 942
0.25	0.276 326	1.060 014	1.5	0.966 105	0.118 930
0.30	0.328 627	1.031 261	1.6	0.976 348	0.087 229
0.35	0.379 382	0.998 284	1.7	0.983 790	0.062 711
0.40	0.428 392	0.961 541	1.8	0.989 091	0.044 192
0.45	0.475 482	0.921 532	1.9	0.992 790	0.030 525
0.50	0.520 500	0.878 783	2.0	0.995 322	0.020 667
0.55	0.563 323	0.833 837	2.2	0.998 137	0.008 922
0.60	0.603 856	0.787 243	2.4	0.999 311	0.003 556
0.65	0.642 029	0.739 547	2.6	0.999 764	0.001 308
0.70	0.677 801	0.691 275	2.8	0.999 925	0.000 444
0.75	0.711 156	0.642 931	3.0	0.999 978	0.000 139
0.80	0.742 101	0.594 986	3.2	0.999 994	0.000 040
0.85	0.770 668	0.547 870	3.4	0.999 998	0.000 011
0.90	0.796 908	0.501 969	3.6	1.000 000	0.000 003
0.95	0.820 891	0.457 619	3.8	1.000 000	0.000 001
1.00	0.842 701	0.415 107	4.0	1.000 000	0.000 000

Για μικρές τιμές της $|x|$ μπορούμε να πάρουμε τιμές της erfx χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμά της σε σειρά Maclaurin

$$(4) \qquad \mathrm{erf}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \ldots\right) ,$$

που παίρνουμε μετά από ολοκλήρωση κατά όρο της σειράς Maclaurin της e^{-x^2}. Για μεγάλες τιμές της x μπορούμε να κάνουμε χρήση της ασυμπτωτικής ανάπτυξης της erfx , όπως θα δούμε σε επόμενη παράγραφο.

Η συνάρτηση

$$(5) \qquad \mathrm{erfc}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} e^{-t^2}\,dt$$

λέγεται <u>συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος</u> (complementary error function). Από τις (3) και (5) έχουμε

$$(6) \qquad \mathrm{erfc}x = 1-\mathrm{erf}x \quad .$$

Η συνάρτηση σφάλματος εμφανίζεται συχνά στα προβλήματα αγωγής της θερμότητας και για το λόγο αυτό θα λύσουμε ένα από τα πιο απλά προβλήματά της.

Η κατανομή της θερμοκρασίας T σένα ημίχωρο προκύπτει από την επίλυση του ακόλουθου προβλήματος :

$$(1') \qquad \frac{\partial T}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$T(x,t) = T_0 \quad \text{για} \quad x=0 , \quad t\geq 0 , \quad T(x,t)=0 \quad \text{για} \quad t=0 , \; x>0$$

$$T(\infty,t) = 0 .$$

Αν θεωρήσουμε ότι ,

$$(3') \qquad T = f(\zeta) , \qquad \zeta = \frac{x^2}{4\nu t} ,$$

η (1) γράφεται

$$(4') \qquad \zeta f'' + (\zeta + \tfrac{1}{2})f' = 0$$

και έχει λύση

$$(5') \qquad f(\zeta) = A_1 \int_0^{\zeta} \frac{e^{-\eta}}{\eta^{1/2}}\, d\eta + B_1 \quad ,$$

όπου A_1 και B_1 είναι σταθερές. Με την εισαγωγή της

$$\xi^2 = \zeta \quad ,$$

η (5') παίρνει τη μορφή

$$(6') \qquad T(x,t) = A\,\mathrm{erf}\,\xi + B \quad .$$

Αν εισάγουμε τις (2') στην (6') έχουμε

$$(7') \qquad \begin{aligned} T(0,t) &= 0 + B = T_0 \\ T(x,0) &= A + B = 0 \end{aligned}$$

και η λύση του προβλήματος είναι

$$(8') \qquad T(x,t) = T_0(1 - \mathrm{erf}\,\xi) = T_0\,\mathrm{erfc}\,\xi \quad , \qquad \xi = \frac{x}{2\sqrt{\nu t}} \quad .$$

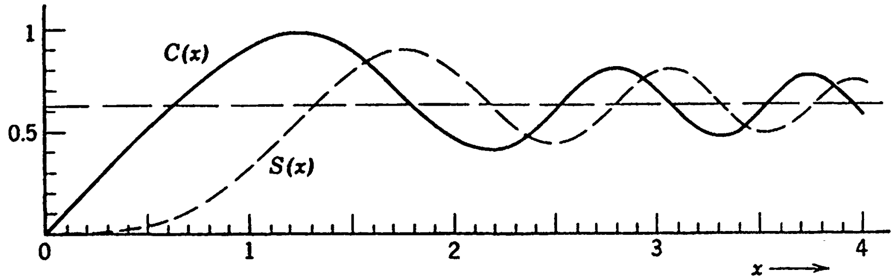
Στη συνέχεια θα σχολιάσουμε δυο σπουδαία ολοκληρώματα που δεν είναι δυνατόν να εκφραστούν σε όρους , πεπερασμένου αριθμού , στοιχειωδών συναρτήσεων. Τα ολοκληρώματα αυτά είναι (σχ.3)

$$(7) \qquad C(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,dt \quad , \qquad S(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,dt$$

και λέγονται <u>ολοκληρώματα του Fresnel</u>. Οι συμπληρωματικές συναρτήσεις των (7)

$$(8) \qquad c(x) = \int_x^{\infty} \cos(t^2)\,dt \quad , \qquad s(x) = \int_x^{\infty} \sin(t^2)\,dt$$

εμφανίζονται σε πολλά προβλήματα της φυσικής .

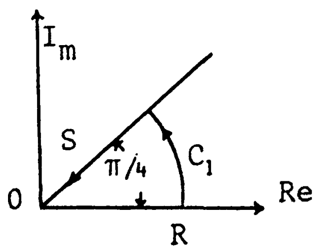


Σχ.3 $y=C(x)$, $y=S(x)$.

Από τις (7) και (8) έχουμε

(9) $c(x)=C(\infty)-C(x)$, $s(x)=S(\infty)-S(x)$.

Ο υπολογισμός των $C(\infty)=S(\infty)$ θα γίνει με τη βοήθεια της $\mathrm{erf}(\infty)=1$. Αν ολοκληρώσουμε τη συνάρτηση e^{-z^2} στο δρόμο $(0R-C_1-S)$, από το θεώρημα



Σχ.4 Δρόμος ολοκλήρωσης της e^{-z^2}.

του Cauchy, έχουμε

(10) $$\int_C e^{-z^2}dz=\int_0^R e^{-x^2}dx+\int_{C_1} e^{-z^2}dz+\int_S e^{-z^2}dz=0 \ .$$

Το ολοκλήρωμα κατά μήκος του δρόμου C_1 τείνει στο μηδέν για $R\to\infty$. Το τμήμα του δρόμου S μπορεί να αντιπροσωπευτεί με

$$z(t) = te^{i\pi/4} \quad , \qquad t\in[0,R]$$

και κατά συνέπεια

(11) $$\int_S e^{-z^2}dz = e^{i\pi/4}\int_R^0 e^{-it^2}dt \ .$$

Από τις (10) και (11) έχουμε

(12) $$\int_0^\infty e^{-it^2}dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-it^2}dt = e^{-i\pi/4}\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x^2}dx$$

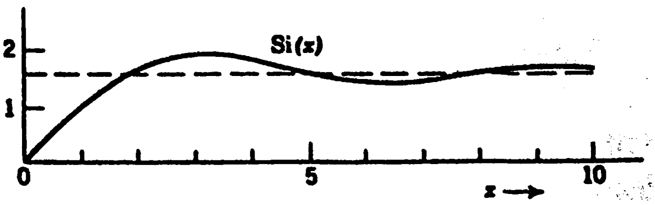
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\ e^{-i\pi/4} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ (1-i)$$

και η (9) γράφεται

(13) $$c(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} - C(x) \ , \qquad s(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} - S(x) \ .$$

Το ολοκλήρωμα του ημιτόνου (sine integral) ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο (σχ.5) :

(14) $$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \ .$$



Σχ.5 $y=Si(x)$.

Η συμπληρωματική της συνάρτηση είναι

$$(15) \qquad si(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt .$$

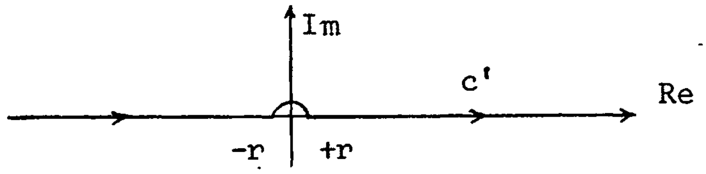
Από τις (14) και (15) έχουμε

$$(16) \qquad si(x) = Si(\infty) - Si(x) .$$

Για τον υπολογισμό του $Si(\infty)$ γράφουμε

$$(17) \qquad Si(\infty) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin z}{z}\, dz .$$

θα πραγματευτούμε το ολοκλήρωμα (17) σαν μιγαδικό ολοκλήρωμα με δρόμο ολοκλήρωσης c' .

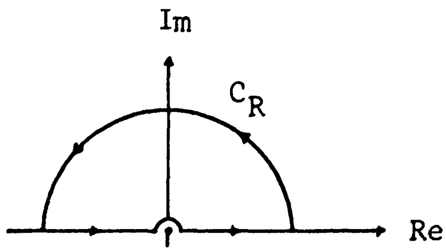


Επειδή $\sin z/z$ είναι συνεχής για $z=0$ ο δρόμος c (πραγματικός άξονας) μπορεί να παραμορφωθεί $c \to c'$ και

$$(18) \qquad 2Si(\infty) = \lim_{r \to 0} \int_{c'} \frac{\sin z}{z}\, dz = \frac{1}{2i} \lim_{r \to 0} \left(\int_{c'} \frac{e^{iz}}{z}\, dz - \int_{c'} \frac{e^{-iz}}{z}\, dz \right)$$

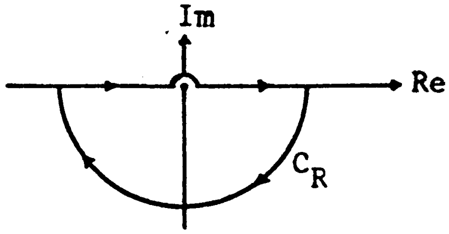
$$= \frac{1}{2i} (I_1 - I_2) .$$

Ο δρόμος ολοκλήρωσης για το I_1 είναι



και $I_1 = 0$.

Ο δρόμος ολοκλήρωσης για το I_2 είναι



και $I_2=-2\pi i\ \mathrm{Res}f(0) = -2\pi i$.

Η (16) γράφεται

$$si(x) = \frac{\pi}{2} - Si(x) \quad .$$

Η συνάρτηση

$$ci(x) = \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t}\, dt$$

λέγεται <u>ολοκλήρωμα του συνημιτόνου</u> (cosine integral).

Στον πίνακα 2 δίνονται για $x \in [0,15]$ τιμές των $Si(x)$ και $ci(x)$.

<u>Πίνακας 2</u> . $Si(x)$ και $ci(x)$.

x	$Si(x)$	$ci(x)$	x	$Si(x)$	$ci(x)$	x	$Si(x)$	$ci(x)$
0.0	0.0000	∞	2.0	1.6054	−0.4230	5	1.5499	0.1900
0.2	0.1996	1.0422	2.2	1.6876	−0.3751	6	1.4247	0.0681
0.4	0.3965	0.3788	2.4	1.7525	−0.3173	7	1.4546	−0.0767
0.6	0.5881	0.0223	2.6	1.8004	−0.2533	8	1.5742	−0.1224
0.8	0.7721	−0.1983	2.8	1.8321	−0.1865	9	1.6650	−0.0554
1.0	0.9461	−0.3374	3.0	1.8487	−0.1196	10	1.6583	0.0455
1.2	1.1080	−0.4205	3.2	1.8514	−0.0553	11	1.5783	0.0896
1.4	1.2562	−0.4620	3.4	1.8419	0.0045	12	1.5050	0.0498
1.6	1.3892	−0.4717	3.6	1.8219	0.0580	13	1.4994	−0.0268
1.8	1.5058	−0.4568	3.8	1.7934	0.1038	14	1.5562	−0.0694
2.0	1.6054	−0.4230	4.0	1.7582	0.1410	15	1.6182	−0.0463

3. Ασυμπτωτικά αναπτύγματα ή Ασυμπτωτικές σειρές.

Τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα (asymptotic expansions) είναι (γενικά αποκλίνουσες) σειρές που έχουν μεγάλη πρακτική σημασία για τον υπολογισμό τιμών μιας συνάρτησης $f(x)$ για μεγάλες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x. Ο υπολογισμός τιμών της $f(x)$ από το ανάπτυγμά της σε σειρά Maclaurin, όταν αυτή υπάρχει και συγκλίνει για μεγάλες τιμές της x, απαιτεί πολλούς όρους της σειράς για να πετύχουμε επιθυμητή ακρίβεια (ο αριθμός των όρων αυξάνει απότομα με την αύξηση της x). Η ίδια κατάσταση επικρατεί και για τη σειρά Taylor της $f(x)$ με κέντρο α, όπου α έχει μεγάλη τιμή, εκτός από τη θέση $x=\alpha$. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της x τόσο λιγότερους όρους χρειαζόμαστε από το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα για να πάρουμε με την επιθυμητή ακρίβεια την τιμή της $f(x)$.

Στην ανάπτυξη που θα ακολουθήσει θεωρούμε ότι οι μεταβλητές και οι συναρτήσεις είναι πραγματικές(*).

Μια σειοά της μορφής

$$c_0+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\ldots \qquad (c_0, c_1, \ldots \text{ σταθερές})$$

που δεν συγκλίνει για κάθε τιμής της x, λέγεται ασυμπτωτικό ανάπτυγμα ή ασυμπτωτική σειρά της συνάρτησης $f(x)$, η οποία ορίζεται για κάθε ικανοποιητικά μεγάλη τιμή της x, αν για κάθε σταθερό $n=0,1,2,\ldots$

$$\text{(1)} \qquad \left\{f(x)-\left(c_0+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\ldots\frac{c_n}{x^n}\right\}x^n \to 0\right., \quad \text{για} \quad x\to\infty$$

και τότε γράφουμε

$$f(x)\sim c_0+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\ldots \quad .$$

(*) εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά στο κείμενο αυτής της παραγράφου.

Αν μια συνάρτηση έχει ένα ασυμπτωτικό ανάπτυγμα, τότε αυτό είναι το μοναδικό που έχει αφού οι συντελεστές του $c_0, c_1, c_2 \ldots$ προσδιορίζονται κατά μοναδικό τρόπο από την (1). Από την (1) παίρνουμε

$$(2) \qquad \begin{aligned} &f(x)-c_0 \to 0 && \text{ή} \quad c_0 = \lim_{x\to\infty} f(x) \\ &\{f(x)-c_0-\frac{c_1}{x}\}\, x \to 0 && \text{ή} \quad c_1 = \lim_{x\to\infty} (f(x)-c_0)x\,, \qquad \text{κ.τ.λ.} \end{aligned}$$

Ενώ μια συνάρτηση έχει ένα και μόνο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα, είναι δυνατό δυο διαφορετικές συναρτήσεις να έχουν το ίδιο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα. Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=e^{-x}$. Επειδή

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = c_0 = 0\,, \qquad c_1 = \lim_{x\to\infty} (f(x)-c_0)x = 0 \qquad \text{κ.τ.λ.}$$

έχουμε

$$e^{-x} \sim 0 + \frac{0}{x} + \frac{0}{x^2} + \ldots \,.$$

Αν η συνάρτηση $g(x)$ έχει ένα ασυμπτωτικό ανάπτυγμα , τότε και η $g(x)+e^{-x}$ θα έχει το ίδιο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα.

Για τις εφαρμογές , είναι σκόπιμο να επεκτείνουμε τον ορισμό του ασυμπτωτικού αναπτύγματος γράφοντας

$$(3) \qquad f(x) \sim g(x)+h(x)\{c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots\}$$

όταν

$$\frac{f(x)-g(x)}{h(x)} \sim c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots$$

Οι συντελεστές c_i , $i=0,1,2,\ldots$ μόνο σε σπάνιες περιπτώσεις προσδιορίζονται από την (2) , γιατί υπάρχουν άλλες μέθοδοι πιο κατάλληλες για το σκοπό αυτό , όπως θα δούμε στο παράδειγμα με συνάρτηση $f(x) = \mathrm{erf}x$.

Από την (2.6) έχουμε

$$\text{erf}x = 1-\text{erfc}x \ ,$$

και αν κάνουμε το μετασχηματισμό

$$\tau = t^2 \quad , \qquad \rightarrow dt = d\tau/2\sqrt{\tau} \ ,$$

τότε

$$\text{(4)} \qquad \text{erfc}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{x^2}^\infty e^{-\tau}\tau^{-1/2}d\tau \ .$$

Μια επαναλαμβανόμενη κατά παράγοντες ολοκλήρωση θα οδογήσει σε ολοκληρώματα της μορφής

$$\text{(5)} \qquad F_n(x) = \int_{x^2}^\infty e^{-\tau}\tau^{-(2n+1)/2}d\tau \ , \qquad n=0,1,2,\dots$$

όπου

$$\text{erfc}x = F_0(x)/\sqrt{\pi}$$

Η (5) μπορεί να γραφτεί με την ακόλουθη μορφή

$$F_n(x) = -e^{-\tau}\tau^{-(2n+1)/2}\Big|_{x^2}^\infty - \frac{2n+1}{2}\int_{x^2}^\infty e^{-\tau}\tau^{-(2n+3)/2}d\tau$$

ή

$$\text{(6)} \qquad F_n(x) = \frac{1}{x^{2n+1}}e^{-x^2} - \frac{2n+1}{2}F_{n+1}(x) \ , \qquad n=0,1,2,\dots \ .$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την (6) με e^{x^2} ο αναγωγικός τύπος για την $F_n(x)$ παίρνει τη μορφή

$$\text{(7)} \qquad e^{x^2}F_n(x) = \frac{1}{x^{2n+1}} - \frac{2n+1}{2}e^{x^2}F_{n+1}(x) \ .$$

Μια επαναληπτική εφαρμογή του (7) δίνει

$$\text{(8)} \qquad e^{x^2}F_0(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}e^{x^2}F_1(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}e^{x^2}F_2(x)$$

....

$$=\{\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^3}+\frac{1\cdot 3}{2^2x^5}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3..(2n-3)}{2^{n-1}\ x^{2n-1}}\}$$

$$+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n}e^{x^2}F_n(x)\ .$$

Η σειρά που έχει προκύψει

(9) $$e^{x^2}F_0(x)\sim\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^3}+\frac{1\cdot 3}{2^2x^5}-+\ldots$$

είναι ένα ασυμπτωτικό ανάπτυγμα.

Αν συμβολίσουμε με S_{2n-1} την έκφραση { } στην (8), έχουμε

(10) $$\{e^{x^2}F_0(x)-S_{2n-1}\}x^{2n-1}=K_ne^{x^2}x^{2n-1}F_n(x)\quad ,$$

όπου

$$K_n=(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n}\ .$$

Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι , για κάθε σταθερό $n=1,2,\ldots$, η έκφραση στο δεξιό μέρος της (10) προσεγγίζει το μηδέν για $x\to\infty$. Στην (5) έχουμε

$$\frac{1}{\tau^{(2n+1)/2}}\leq\frac{1}{x^{2n+1}}\quad \text{για κάθε}\quad \tau\geq x^2$$

και κατά συνέπεια ισχύει η ανισότητα

(11) $$F_n(x)=\int_{x^2}^{\infty}\frac{e^{-\tau}}{\tau^{(2n+1)/2}}d\tau<\frac{1}{x^{2n+1}}\int_{x^2}^{\infty}e^{-\tau}d\tau=\frac{e^{-x^2}}{x^{2n+1}}\ ,$$

από την οποία οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι

(12) $$|K_n|e^{x^2}x^{2n-1}F_n(x)<\frac{|K_n|}{x^2}\to 0\quad ,\quad \text{για}\quad x\to\infty\quad .$$

Η (12) αποδεικνύει ότι η σειρά (9) είναι ένα ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της συνάρτησης $e^{x^2}F_0(x)$. Αλλά

(13) $$\operatorname{erf}x = 1-\operatorname{erfc}x = 1-\frac{F_0(x)}{\sqrt{\pi}}$$

και κατά συνέπεια

(14) $$\operatorname{erf}x \sim 1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\left\{\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^3}+\frac{1\cdot 3}{2^2x^5}+\ldots\right\} .$$

Για μεγάλες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x θα έχουμε την προσέγγιση

(15) $$\operatorname{erf}x \sim 1-\frac{1}{\sqrt{\pi}x}e^{-x^2} .$$

Μετά την παραπάνω ανάλυση θα πρέπει να δούμε τη χρήση της (14) στις αριθμητικές εφαρμογές. Από τις (10) και (11) έχουμε ότι

(16) $$|e^{x^2}F_0(x)-S_{2n-1}| = \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n}e^{x^2}F_n(x) < \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n}\frac{1}{x^{2n+1}}$$

και κατά συνέπεια για ικανοποιητικά μεγάλες τιμές της x το δεξιό μέρος της (16) είναι πολύ μικρό. Η (16) μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το S_{2n-1} είναι μια καλή προσέγγιση του $e^{x^2}F_0(x)$ για μεγάλες τιμές της x . Το αξιοσημείωτο όμως είναι ότι για σχετικά μικρές τιμές $|x|$ τα αποτελέσματα που παίρνουμε από την (14) έχουν ικανοποιητική ακρίβεια.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ότι $x=2$. Οι τιμές της $\operatorname{erf}x$ από την (14) , των συντελεστών $A_n=(-1)^n\, 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)/x^{2n-1}2^{n-1}$, της απόλυτης τιμής του σφάλματος και το επιθυμητό άνω φράγμα του σφάλματος φαίνονται στον πίνακα 1. Από τις τιμές του πίνακα βλέπουμε ότι οι όροι A_n στην αρχή μικραίνουν κατά απόλυτη τιμή και μετά $(n>5)$ αυξάνουν (τυπική συμπεριφορά για ένα ασυμπτωτικό ανάπτυγμα). Γενικά , η μεγαλύτερη ακρίβεια επιτυγχάνεται όταν παίρνουμε το άθροισμα των όρων μέχρι και το μικρότερο κατά απόλυτη τιμή όρο. Στην περίπτωση που εξετάζουμε το άθροισμα περιλαμβάνει μόνο πέντε πρώτους όρους. Αν λάβουμε περισσότερους όρους, τότε το σφάλμα αυξάνει και η ακρίβεια περιορίζεται μόνο στα τρία δεκαδικά ψηφία.

Αν για κάποια x η ανάπτυξη της $\mathrm{erf}x$ σε σειρά Maclaurin συγκλίνει, τότε μπορούμε να πετύχουμε όποια ακρίβεια θέλουμε, παίρνοντας υπόψη μας στο άθροισμα τον απαιτούμενο (μεγάλο) αριθμό όρων της σειράς. Το ανάπτυγμα της $\mathrm{erf}x$ σε σειρά Maclaurin είναι

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{erf}x = x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - + \ldots \tag{17}$$

Πίνακας 1. $\mathrm{erf}x$ για $x=2$ (με βάση την (14)).

n	$A_1 = 1/x$ $A_n = (-1)^{n-1}\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^{n-1}x^{2n-1}}$	$1 - \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\sum_{j=1}^{n} A_j$	Απόλυτη τιμή σφάλματ.	Φράγμα του σφάλμ. $k(2,n)$
1	0.500 000	0.994 83	0.000 49	0.000 65
2	−0.062 500	0.995 48	0.000 16	0.000 25
3	0.023 438	0.995 24	0.000 08	0.000 16
4	−0.014 648	0.995 39	0.000 07	0.000 14
5	0.012 817	0.995 26	0.000 06	0.000 15
6	−0.014 420	0.995 40	0.000 08	0.000 21
7	0.019 827	0.995 20	0.000 12	0.000 34
8	−0.032 219	0.995 53	0.000 21	0.000 63

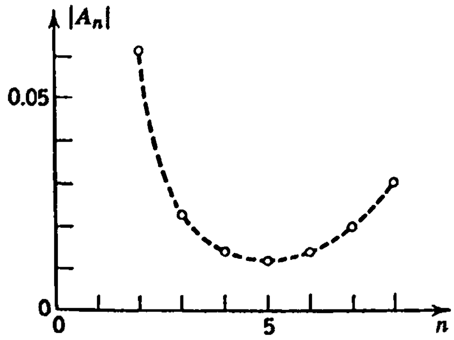
Για $x=2$ οι τιμές των όρων

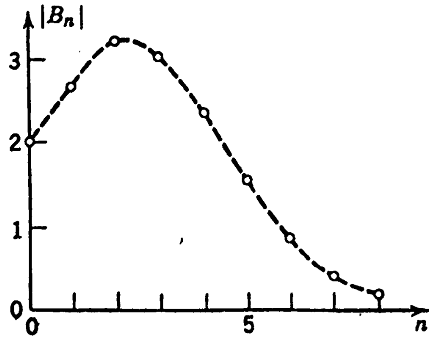
$$B_n = (-1)^n x^{2n+1}/n!(2n+1)$$

είναι

n→	0	1	2	3	4
B_n	2.00000	-2.66667	3.20000	-3.04762	2.37037
	5	6	7	8	9
	-1.55152	0.87521	-0.43344	0.19122	-0.07604
	10	11	12	13	14
	0.02752	-0.00914	0.00280	-0.00080	0.00021

Για να υπολογιστούν τα τρία πρώτα δεκαδικά ψηφία της erf 2 από την (17) χρειάζονται οι 14-πρώτοι όροι της σειράς. Ο τελευταίος όρος περιλαμβάνει το x^{27}. Στα σχ. 1-2 φαίνεται η μεταβολή της απόλυτης τιμής των όρων A_n και B_n με το n για $x=2$.





<u>Σχ.1</u> $|A_n|=|A_n(n)|$ <u>Σχ.2</u> $|B_n|=|B_n(n)|$.

Αν θέλουμε στην erf 2 ακρίβεια τεσσάρων ή και περισσοτέρων δεκαδικών ψηφίων, τότε όπως φαίνεται από το σφάλμα στον πίνακα, δεν είναι δυνατό να κάνουμε χρήση του ασυμπτωτικού αναπτύγματός της.

Από τη σχέση

$$\mathrm{erf}x = 1-\mathrm{erfc}x = 1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}F_0(x)$$

βλέπουμε ότι η απόλυτη τιμή του σφάλματος είναι

$$\frac{1\cdot 3\cdot .\cdot 2(n-1)}{2^n\sqrt{\pi}}|F_n(x)| \ .$$

Από την (11) παίρνουμε την πληροφορία ότι αυτή είναι μικρότερη από την

$$(13) \qquad k(x,n)=\frac{1\cdot 3\cdot ..\cdot(2n-1)}{2^n\sqrt{\pi}}\ \frac{e^{-x^2}}{x^{2n+1}} , \qquad x>0 , \qquad n=1,2,...$$

η οποία αντιπροσωπεύει και το επιθυμητό φράγμα του σφάλματος.

Για να γίνει κατανοητό το αποτέλεσμα της ασυμπτωτικής ανάπτυξης πρέπει να έχουμε στο μυαλό μας ότι η τιμή $x=2$ είναι σχετικά μικρή. Για $x=5$ από την (15) παίρνουμε

$$\mathrm{erf}5 \simeq 1-\frac{e^{-25}}{5\sqrt{\pi}} = 0.99999999998433... ,$$

όπου τα 13-δεκαδικά ψηφία είναι σωστά και το σφάλμα υπάρχει κατά 3-μονάδες στο 14το-δεκαδικό ψηφίο. Τα παραπάνω αποτελέσματα μπορεί να μας οδηγήσουν σε όχι σωστή αξιολόγηση της ασυμπτωτικής ανάπτυξης μιας συνάρτησης. Για άλλα ασυμπτωτικά αναπτύγματα τα αντίστοιχα αποτελέσματα μπορούμε να πετύχουμε για $x=20$ ή $x=100$.

Για την εφαρμογή των ασυμπτωτικών σειρών είναι χρήσιμο να ξέρουμε ότι αυτές μπορούν κατά όρο να προστεθούν, πολλαπλασιαστούν και κάτω από ορισμένες συνθήκες να ολοκληρωθούν και να διαφοριστούν. Τις ιδιότητες αυτές θα τις διατυπώσουμε στη συνέχεια με ακριβή τρόπο.

Θ ε ώ ρ η μ α 1 . Αν

$$f(x) \sim \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \dots$$

και

$$g(x) \sim b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \dots ,$$

τότε η συνάρτηση $Af+Bg$, όπου A και B είναι σταθερές , έχει την ασυμπτωτική σειρά

(19) $$Af(x)+Bg(x) \sim A\alpha_0+Bb_0+ \frac{A\alpha_1+Bb_1}{x} + \frac{A\alpha_2+Bb_2}{x^2} + \dots$$

και η συνάρτηση fg έχει το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα

(20) $$f(x)g(x) \sim c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots ,$$

όπου οι συντελεστές c_i , $i=0,1,2,\dots$ δίνονται από τον τύπο

(21) $$c_n = \alpha_0 b_n + \alpha_1 b_{n-1} + \dots + \alpha_n b_0 .$$

Το πρώτο μέρος του θεωρήματος είναι συνέπεια του ορισμού της ασυμπτωτικής σειράς . Θα ασχοληθούμε με το δεύτερο μέρος του θεωρήματος. Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι για κάθε σταθερό μη-αρνητικό ακέραιο n

(22) $$(fg-S_n)x^n \to 0 \quad \text{για} \quad x \to \infty ,$$

όπου

(23) $$S_n(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots + \frac{c_n}{x^n}$$

Ας εκλέξουμε ένα αυθαίρετο σταθερό ακέραιο n και ας γράψουμε

$$(24)\qquad f(x)=s_n(x)+\frac{h(x)}{x^n}\ ,$$

όπου

$$s_n(x)=\alpha_0+\frac{\alpha_1}{x}+\ldots+\frac{\alpha_n}{x^n}\ .$$

Τότε θα έχουμε

$$(25)\qquad \{f(x)-s_n(x)\}x^n=h(x)$$

Από τον ορισμό της $f(x)$ και την (25) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $h(x)\to 0$ για $x\to\infty$. Με παρόμοιο τρόπο γράφουμε

$$(26)\qquad g(x)=s_n^*(x)+\frac{\ell(x)}{x^n}\ ,$$

όπου

$$s_n^*(x)=b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_n}{x^n}$$

και $\ell(x)\to 0$ για $x\to\infty$.

Από τις (24) και (26) , παίρνουμε

$$(27)\qquad fg=s_ns_n^*+\frac{\bar{h}+\bar{\ell}}{x^n}+\frac{h\ell}{x^{2n}}\ ,$$

όπου

$$(28)\qquad s_ns_n^*=S_n+T_n\ ,\qquad \bar{h}=s_n^*h\ ,\qquad \bar{\ell}=s_n\ell\ .$$

Ο T_n στην (28) αντιπροσωπεύει το άθροισμα των όρων που περικλείουν τις δυνάμεις $1/x^{n+1}$, .. , $1/x^{2n}$ και είναι $T_nx^n\to 0$ για $x\to\infty$. Η (27) , μετά από πολλαπλασιασμό της με x^n, γράφεται

$$(29)\qquad (fg-S_n)x^n=T_nx^n+(\bar{h}+\bar{\ell})+\frac{h\ell}{x^n}\ .$$

Αλλά το δεύτερο μέρος της (29) $\to 0$ για $x\to\infty$ και κατά συνέπεια ισχύει η (22).

Θ ε ώ ρ η μ α 2 . Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής για ικανοποιητικά μεγάλες τιμές της x και ότι ,

$$f(x) \sim \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_3}{x^3} + \ldots$$

Τότε , για τέτοιες τιμές της x , θα έχουμε

$$\int_x^\infty f(t)dt \sim \frac{c_2}{x} + \frac{c_3}{2x^2} + \frac{c_4}{3x^3} + \ldots \quad . \tag{30}$$

Ας συμβολίσουμε με $F(x)$ το ολοκλήρωμα στην (30) και με $S_{n-1}(x)$ το ολοκλήρωμα της

$$s_n(x) = \frac{c_2}{x^2} + \ldots + \frac{c_n}{x^n} , \tag{31}$$

δηλαδή

$$S_{n-1}(x) = \int_x^\infty s_n(t)dt = \frac{c_2}{x} + \frac{c_3}{2x^2} + \ldots + \frac{c_n}{(n-1)x^{n-1}} \quad . \tag{32}$$

Από τον ορισμό του ασυμπτωτικού αναπτύγματος , για κάθε $n=0,1,2,\ldots$, έχουμε

$$|f(x)-s_n(x)|x^n \to 0 \quad \text{για} \quad x\to\infty \quad . \tag{33}$$

Η συνέχεια της $f(x)$ έχει σαν συνέπεια ότι, για ένα δοσμένο $\varepsilon>0$ μπορούμε να βρούμε ένα x_0 τέτοιο ώστε για κάθε $x>x_0$

$$|f(x)-s_n(x)|x^n<\varepsilon \quad \to \quad |f(x)-s_n(x)|< \frac{\varepsilon}{x^n} \quad . \tag{34}$$

Από την (34) , για κάθε $x>x_0$, παίρνουμε

$$|F(x)-S_{n-1}(x)| = \left|\int_x^\infty f(t)dt - \int_x^\infty s_n(t)dt\right| \tag{35}$$

$$\leq \int_x^\infty |f(t)-s_n(t)|dt < \varepsilon \int_x^\infty \frac{dt}{t^n} = \frac{\varepsilon}{(n-1)x^{n-1}} \quad .$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την (35) με τη θετική ποσότητα x^{n-1}, έχουμε

(36) $$|F(x)-S_{n-1}(x)|x^{n-1} < \frac{\varepsilon}{n-1} \quad , \quad \text{για} \quad x > x_0(\varepsilon) \quad .$$

Από την (36), επειδή $\varepsilon(>0)$ μπορεί να εκλεγεί όσο μικρό θέλουμε, έχουμε

$$|F(x)-S_{n-1}(x)|x^{n-1} \to 0 \quad \text{για} \quad x\to\infty \quad .$$

Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής για κάθε ικανοποιητικά μεγάλη τιμή της x και

$$f(x) \sim c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots \quad ,$$

τότε, από το θεώρημα 2, έχουμε

(37) $$\int_x^\infty \{f(t)-c_0-\frac{c_1}{t}\}\,dt \sim \frac{c_2}{x} + \frac{c_3}{2x^2} + \frac{c_4}{3x^3} + \dots$$

Αν η $f(x)$ έχει ασυμπτωτικό ανάπτυγμα δεν σημαίνει ότι θα έχει επίσης και η $f'(x)$. Για παράδειγμα, από την (2) παίρνουμε

$$f(x) = e^{-x}\sin(e^x) \sim 0 + \frac{0}{x} + \frac{0}{x^2} + \dots \quad ,$$

αλλά η $f'(x)$ που δίνεται από την έκφραση

$$f'(x) = -e^{-x}\sin(e^x)+\cos(e^x) = -f(x)+\cos(e^x)$$

δεν έχει ασυμπτωτικό ανάπτυγμα. Αν όμως η $f'(x)$ έχει ασυμπτωτικό ανάπτυγμα, τότε αυτό μπορεί να προκύψει από διαφόριση κατά παράγοντα του αναπτύγματος της $f(x)$.

Θεώρημα 3 : Αν

$$f(x) \sim c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots$$

και η $f(x)$ έχει συνεχή παράγωγο $f'(x)$ που έχει ασυμπτωτικό ανάπτυγμα , τότε αυτό θα είναι

$$(38) \qquad f'(x) \sim -\frac{c_1}{x^2} - \frac{2c_2}{x^3} - \frac{3c_3}{x^4} - \dots \quad .$$

Σύμφωνα με τον ορισμό (1) έχουμε

$$(39) \qquad f'(x) \sim \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \dots \quad .$$

και πρέπει να αποδείξουμε ότι οι συντελεστές των (38) και (39) συμπίπτουν. Από τις (2) έχουμε

$$(40) \qquad \lim_{x\to\infty} f'(x) = \alpha_0 \ , \qquad \lim_{x\to\infty}\{f'(x)-\alpha_0\}x = \alpha_1 \ .$$

Οι f και f' σχετίζονται με τον ακόλουθο τρόπο :

$$(41) \qquad f(x) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt+k \ , \qquad x_0>0 \qquad k=\sigma\tau\alpha\vartheta.$$

Από την (2α) έχουμε ότι

$$(42) \qquad \lim_{x\to\infty} \int_{x_0}^{x} f'(t)dt+k = c_0 \quad .$$

Από την (40α) γίνεται φανερό ότι, αν το $\alpha_0 \neq 0$ το όριο του ολοκληρώματος δεν υπάρχει και κατά συνέπεια $\alpha_0 = 0$. Η (40β) παίρνει τότε τη μορφή

$$(43) \qquad \lim_{x\to\infty} xf'(x) = \alpha_1 \ .$$

Η (43) σημαίνει ότι για $\varepsilon>0$ και για κάθε ικανοποιητικά μεγάλη τιμή της x

$$\alpha_1-\varepsilon<xf'(x)<\alpha_1+\varepsilon$$

ή

$$(44)\qquad \frac{\alpha_1-\varepsilon}{x}<f'(x)<\frac{\alpha_1+\varepsilon}{x}\ .$$

Από την (2β) και την (41) παίρνουμε

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\int_{x_0}^{x} f'(t)dt+k-c_0\right\}x=c_1\ .$$

Το όριο αυτό για $\alpha_1\neq 0$, όπως φαίνεται από την (44) , δεν υπάρχει και κατά συνέπεια $\alpha_1=0$. Η (39) παίρνει τότε τη μορφή

$$f'(x)\sim\frac{\alpha_2}{x^2}+\frac{\alpha_3}{x^3}+\ldots\ .$$

Από την (41) και το θεώρημα 2 θα έχουμε

$$(45)\qquad f(x)=\int_{x_0}^{\infty} f'(t)dt-\int_{x}^{\infty} f'(t)dt+k\sim\int_{x_0}^{\infty} f'(t)dt+k-\frac{\alpha_2}{x}-\frac{\alpha_3}{2x^2}-\ldots$$

όπου το ολοκλήρωμα $\int_{x_0}^{\infty} f'(t)dt$ είναι μια σταθερά.

Όπως είναι γνωστό, μια συνάρτηση έχει (αν έχει) ένα και μόνο ένα ασυμπτωτικό ανάπτυγμα και κατά συνέπεια στην (45) θα είναι $\alpha_2=-c_1$, $\alpha_3=-2c_2$, κ.τ.λ. και η σειρά (38) είναι η ίδια με την (39).

<u>Παρατήρηση</u> : Αν γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος 3 και είναι λύση μιας διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης , τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε τους συντελεστές της ασυμπτωτικής σειράς με την αντικατάσταση των $f(x)$ και $f'(x)$ στη διαφορική εξίσωση .

<u>Παράδειγμα</u> : Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση

(46) $$y = f(x) = e^x \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt \quad , \qquad x>0 \ .$$

θα έχουμε

$$y' = f'(x) = e^x \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt - e^x \frac{e^{-x}}{x} = y - \frac{1}{x} \ .$$

Η $f(x)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

(47) $$y' - y + \frac{1}{x} = 0 \ .$$

Η διαφορική εξίσωση μπορεί να αποδειχτεί ότι έχει μόνο μια λύση y τέτοια ώστε y και y' υπάρχουν για κάθε θετικό x και έχουν ασυμπτωτικά αναπτύγματα. Αν εισάγουμε τα αναπτύγματα των $f(x)$ και $f'(x)$ στη (47) και θεωρήσουμε την εξίσωση που θα προκύψει σαν ένα μηδενικό πολυώνυμο της x, θα πάρουμε

$$c_0 = 0 \ , \quad c_1 = 1 \ , \quad c_2 = -1 \ , \ \ldots \ , \qquad c_{n+1} = (-1)^n n!$$

και

(48) $$f(x) \sim \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \ldots \ .$$

Η συνάρτηση $Q(0,x)$, (1.26) , είναι

(49) $$Ei(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt = Q(0,x) \ ,$$

και λέγεται εκθετικό ολοκλήρωμα (exponential integral). Από την (48) παίρνουμε το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της $Ei(x)$, δηλαδή

(50) $$Ei(x) = e^{-x} f(x) = e^{-x} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + - \ldots \right\} \ .$$

Ασυμπτωτικά αναπτύγματα ορισμένων ολοκληρωμάτων που περικλείουν μια παράμετρο μπορούν να βρεθούν με επαναλαμβανόμενη κατά παράγοντες ολοκλήρωση . Για το μετασχηματισμό Laplace

(51) $$L(x)=\int_0^\infty e^{-xt}q(t)dt \quad ,$$

υποθέτουμε ότι ο πυρήνας $q(t)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμος στο διάστημα $[0,\infty)$ και για κάθε s

(52) $$q^{(s)}(t)=\sigma(e^{\sigma t}) \quad , \quad ^{(*)} \qquad t\in[0,\infty)$$

όπου σ είναι μια κατάλληλη σταθερά . Τότε για $x>\sigma$

(53) $$L(x)=\frac{q(0)}{x}+\frac{q'(0)}{x^2}+\ldots+\frac{q^{(n-1)}(0)}{x^{n-1}}+\varepsilon_n(x)$$

όπου (**)

(54) $$\varepsilon_n(x)=\frac{1}{x^n}\int_0^\infty e^{-xt}q^{(n)}(t)dt \ .$$

και n είναι ένας αυθαίρετος μη αρνητικός ακέραιος. Από τη συνθήκη (52) και την (54) παίρνουμε

(55) $$|\varepsilon_n(x)|\leq\frac{A_n}{x^n}\int_0^\infty e^{-xt}e^{\sigma t}dt=\frac{A_n}{x^n(x-\sigma)} \quad , \qquad x>\sigma$$

όπου A_n είναι κατάλληλος αριθμός . Από την (55) έχουμε $\varepsilon_n(x)=\sigma(x^{-n-1})$ και

(56) $$L(x)\sim\sum_{s=0}^{\infty}\frac{q^{(s)}(0)}{x^{s+1}} \quad , \text{ για } \quad x\to\infty \quad .$$

(*) ο δείκτης (s) στον εκθέτη σημαίνει την s-παράγωγο της συνάρτησης $q(t)$ ως προς t .

(**) $\int_0^\infty e^{-xt}q(t)dt=-\frac{1}{x}\int_0^\infty q(t)de^{-xt}=-\frac{1}{x}\{q(t)e^{-xt}|_0^\infty-\int_0^\infty e^{-xt}q^{(1)}(t)dt\}$

$=\frac{q(0)}{x}+\frac{1}{x^2}\int_0^\infty q^{(1)}(t)de^{-xt}=\ldots=\frac{q(0)}{x}+\frac{q'(0)}{x^2}+\ldots+\frac{q^{(n-1)}(0)}{x^n}+\varepsilon_n(x).$

Για παράδειγμα , ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$(57)\qquad \tilde{P}(0,x) = e^{-x}x^{\alpha}\int_0^{\infty} e^{-xt}(1+t)^{\alpha-1}dt$$

$$\sim e^{-x}x^{\alpha-1}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1\cdot(\alpha-1)(\alpha-2)\,\ldots\,(\alpha-s)}{x^s}\ , \quad \text{για}\quad x\to\infty$$

όπου α είναι ένας σταθερός αριθμός .

Η μέθοδος προσδιορισμού ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων που χρησιμοποιείται πιο συχνά βασίζεται στο λήμμα του Watson(*). Ας υποθέσουμε ότι η $q(t)$ είναι μια πραγματική ή μιγαδική συνάρτηση της πραγματικής και θετικής μεταβλητής t , που μπορεί να έχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών και πόλων , και την ιδιότητα

$$(58)\qquad q(t)\sim\sum_{s=0}^{\infty}\alpha_s t^{(s+\lambda-\mu)/\mu}\ , \qquad \text{για}\quad t\to 0+$$

όπου λ και μ είναι σταθερές τέτοιες ώστε , $\mathrm{Re}\lambda>0$ και $\mu>0$. Ας υποθέσουμε ακόμα ότι ο μετασχηματισμός Laplace της $q(t)$ συγκλίνει στο διάστημα ολοκλήρωσης της για ικανοποιητικά μεγάλες τιμές της t . Μετά από κατά παράγοντα ολοκλήρωση παράγεται το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα,

$$(59)\qquad \int_0^{\infty} e^{-xt}q(t)dt\sim\sum_{s=0}^{\infty}\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{\mu}\right)\frac{\alpha_s}{x^{(s+\lambda)/\mu}}\ , \qquad \text{για}\quad x\to\infty\ .$$

Επειδή έχουμε υποθέσει ότι η $q(t)$ μπορεί να έχει ασυνέχειες , είναι εύλογο ότι το λήμμα του Watson περιλαμβάνει και την περίπτωση που τα όρια ολοκλήρωσης στην (59) είναι πεπρασμένοι αριθμοί.

Σχόλιο :

Την όλη διαδικασία προσδιορισμού του ασυμπτωτικού αναπτύγματος μιας συνάρτησης , από πρακτική σκοπιά , θα μπορούσαμε να την σκιαγραφήσουμε με τον ακόλουθο τρόπο :

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τη συνάρτηση $f(x)$, με ανεξάρτητη με-

(*) Για περισσότερες πληροφορίες βλ. Copson (1976 , σελ. 48-62) .

ταβλητή τη μιγαδική x και θέλουμε να περιγράψουμε τη συμπεριφορά της για $|x|\to\infty$ και $\arg x\in[\alpha,\beta]$. Για το σκοπό αυτό είναι χρήσιμο να βρούμε μια έκφραση της μορφής

$$(\alpha)\qquad f(x)=\phi(x)\{1+r(x)\}\ ,$$

όπου η $\phi(x)$ είναι μια συνάρτηση απλούστερης δομής από εκείνη της $f(x)$ και $r(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο μηδέν για $|x|\to\infty$ και $\arg x\in[\alpha,\beta]$. Από την (α) βλέπουμε ότι

$$(\beta)\qquad f(x)\sim\phi(x)\ ,\quad \text{για}\quad |x|\to\infty\ ,\quad \arg x\in[\alpha,\beta]\ .$$

Η εκτίμηση της $r(x)$ δίνει το μέγεθος του σφάλματος κατά την προσέγγιση της $f(x)$ με την $\phi(x)$.

Μια πιο ακριβής περιγραφή της (α) είναι

$$(\gamma)\qquad f(x)=\phi(x)\{\sum_{n=0}^{N}\alpha_n x^{-n}+r_N(x)\},\qquad \alpha_0=1\ ,\qquad N=1,2,3,\ldots$$

όπου $x^N r_N(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο μηδέν για $|x|\to\infty$, $\arg x\in[\alpha,\beta]$. Για $N=0$ η (γ) συμπίπτει με την (α). Από την (γ) παίρνουμε λοιπόν το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της $f(x)$.

$$f(x)\sim\phi(x)\sum_{n=0}^{N}\alpha_n x^{-n}\quad \text{για}\quad |x|\to\infty\qquad \arg x\in[\alpha,\beta]\ .$$

Για παράδειγμα, το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της $\Gamma(\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, είναι

$$\Gamma(\alpha)=\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha}\{1+r(\alpha)\}\qquad ,$$

όπου

$$r(\alpha)=\frac{1}{12\alpha}+\frac{1}{288\alpha^2}-\frac{139}{51840\alpha^3}-\sigma(|\alpha|^{-4}).$$

Προβλήματα

1. Να αποδειχτεί η (25) .

2. Να υπολογιστούν

$$\Gamma(2,3) \quad , \quad \Gamma(-0.4) \quad , \quad \Gamma(-2,7)$$

$$B(1,2) \quad , \quad B(3,3) \quad , \quad B(1.9,0.6)$$

$$\psi(1) \quad , \quad \psi(1/2) \quad , \quad \psi(k+1/2) \quad .$$

3. Να αποδειχτεί ότι

$$\Gamma(3\alpha) = \frac{3^{3\alpha-1/2}}{2\pi} \Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\frac{1}{3})\,\Gamma(\alpha+\frac{2}{3})$$

με τη βοήθεια της (α) και στη συνέχεια να αποδειχτεί ότι

$$3\psi(3\alpha) = \psi(\alpha)+\psi(\alpha+\frac{1}{3})+\psi(\alpha+\frac{2}{3})+3\ell n3 \ .$$

4. Να αποδειχτεί ότι

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}\phi d\phi = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \ , \qquad n=0,1,2,\ldots \ .$$

5. Να βρεθούν οι σειρές Maclaurin των

$$C(x) \ , \ S(x) \ , \ Si(x) \ .$$

6. Να προσδιοριστούν οι θέσεις των μεγίστων και ελαχίστων των $C(x)$, $S(x)$ και $Si(x)$.

7. Να αποδειχτεί ότι

α. $C(x)= \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{\cos\tau}{\sqrt{\tau}}\,d\tau$,

β. $S(x)= \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{\sin\tau}{\sqrt{\tau}}\,d\tau$

γ. $\mathrm{erf}x = P(\frac{1}{2},x^2)/\sqrt{\pi}$

δ. $\mathrm{erfc}x = Q(\frac{1}{2}, x^2)/\sqrt{\pi}$

ε. $C(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\{e^{i\pi/4}\mathrm{erf}(xe^{-i\pi/4}) + e^{-i\pi/4}\mathrm{erf}(xe^{i\pi/4})\}$

στ. $S(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{4i}\{e^{i\pi/4}\mathrm{erf}(xe^{-i\pi/4}) - e^{-i\pi/4}\mathrm{erf}(xe^{i\pi/4})\}$

8. Να βρεθούν τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα των συναρτήσεων

$$\mathrm{erf}x\ ,\quad Q(1/2,x)\ ,\quad Q(\alpha,x)$$

με τη μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε για το εκθετικό ολοκλήρωμα.

9. Με χρήση της κατά παράγοντα ολοκλήρωσης ,να βρεθούν τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα των συναρτήσεων

$$si(x)\ ,\quad ci(x)\ ,\quad s(x)\ ,\quad Q(\alpha,x)\ .$$

10. Αν

$$\ell i(x) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{\ell nt}\ ,$$

να αποδειχτεί ότι $\ell i(e^{-x}) = -Ei(x)$.

11. Με χρήση των αποτελεσμάτων της 9 να βρέθούν τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα των

$$Si(x)\ ,\quad C(c)\ ,\quad S(x)\ ,\quad P(\alpha,x)\ .$$

ΚΕΦ. Γ.

Συναρτησεις Bessel

Οι συναρτήσεις Bessel είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

(α) $$y'' + \frac{1}{x} y' + (1 - \frac{v^2}{x^2}) y = 0 \quad , \qquad \text{(εξίσωση Bessel)}$$

όπου x είναι μιγαδική ή πραγματική μεταβλητή και η παράμετρος v μπορεί να παίρνει πραγματικές ή μιγαδικές τιμές. Η εξίσωση Bessel v-τάξης εμφανίζεται κατά τη μελέτη προβλημάτων συνοριακών τιμών της θεωρίας δυναμικού για κυλινδρικούς τόπους και για το λόγο αυτό οι λύσεις της (α) λέγονται κυλινδρικές συναρτήσεις. Στο κεφάλαιο αυτό για όλη την κλάση των κυλινδρικών συναρτήσεων θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο "συναρτήσεις Bessel".

Επειδή η εφαρμογή των συναρτήσεων αυτών είναι ευρύτατη , η διεθνής βιβλιογραφία είναι πλούσια σαυτό το αντικείμενο. Οι συναρτήσεις Bessel είναι ίσως οι πιο σπουδαίες από τις ειδικές συναρτήσεις και έχουν εφαρμογή από τη θεωρία αριθμών μέχρι τα προβλήματα του μηχανικού της πράξης. Μερικές από τις εφαρμογές τους σχολιάζονται στο τέλος αυτού του κεφαλαίου. Για μια πληρέστερη μελέτη των συναρτήσεων αυτών ο αναγνώστης παραπέμπεται στην αναφερόμενη στο κείμενο ειδική βιβλιογραφία.

1. Εξισώσεις Bessel και Legendre .

Η εφαρμογή της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών (separation of variables) σε κάποιες από τις πιο γνωστές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους της μαθηματικής φυσικής, παράγει συνήθεις διαφορικές εξισώσεις της μορφής (A.2.84). Για παράδειγμα , ας εφαρμόσουμε τη μέθοδο αυτή στην 3-διάστατη εξίσωση κύματος (wave equation),

$$(1) \qquad \nabla^2 f = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} ,$$

όπου c είναι η ταχύτητα του κύματος , ∇^2 είναι ο τελεστής του Laplace και t συμβολίζει το χρόνο.

Η εξίσωση (1) σε καρτεσιανές (x,y,z), κυλινδρικές (r,θ,z) και σφαιρικές (r,θ,ϕ) συντεταγμένες, γράφεται

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \qquad f = f(x,y,z;t)$$

$$(3) \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \qquad f = f(r,\theta,z;t)$$

και

$$(4) \qquad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \qquad f = f(r,\theta,\phi;t) ,$$

αντίστοιχα

Οι εξισώσεις (2-4) είναι ισοδύναμες. Η εκλογή του συστήματος περιγραφής της (1) εξαρτάται από τη γεωμετρία του προβλήματος.

Σε πρώτο στάδιο θα γράψουμε τη συνάρτηση(*) f με τη μορφή

(*) Σιωπηρά κάνουμε την παραδοχή ότι η συνάρτηση f και οι παράγωγοί της είναι συνεχείς και φραγμένες.

(5) $f = f(\mathbf{r};t) = F(\mathbf{r})T(t)$.

Αν εισάγουμε την (5) στην (1) παίρνουμε τις εξισώσεις

(6) $\frac{d^2T}{dt^2} = \lambda c^2 T \quad , \qquad \nabla^2 F = \lambda F \quad ,$

όπου λ είναι η σταθερά του χωρισμού.

Τις πιο πολλές φορές ενδιαφερόμαστε για λύση που είναι αρμονική με το χρόνο και κατά συνέπεια $\lambda<0$. Αν εκλέξουμε

$$\lambda = -k^2 \quad , \qquad k = \frac{\omega}{c}$$

και πάρουμε σαν δυνατή λύση της (1) την

$$f(\mathbf{r};t) = F(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad ,$$

όπου οι τιμές της ω έχουν εξάρτηση από τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Η (6β) γράφεται

(7) $\nabla^2 F + k^2 F = 0$.

Η (7) είναι γνωστή σαν <u>εξίσωση του Helmholtz</u> . Στο σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων η (7) έχει τη μορφή

(8) $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + k^2 F = 0$.

Με την εισαγωγή της $F(r,\theta,z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$ στην εξίσωση (8) παίρνουμε

(9) $\frac{1}{rR}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{r^2\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 = 0$.

Στην (9) , οι δυό πρώτοι όροι έχουν εξάρτηση από τις ανεξάρτητες μεταβλητές r και θ , ενώ οι δύο τελευταίοι είναι ανεξάρτητοι από τις r και θ . Για να μπορεί να συμβεί αυτό πρέπει

(10) $\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 = \sigma\tau\alpha\vartheta. \Rightarrow \frac{d^2 Z}{dz^2} - \lambda_1 Z = 0$, $(\lambda_1 = \sigma\tau\alpha\vartheta.)$

Αν κάνουμε χρήση της (10), η (9) πολλαπλασιασμένη με r^2 παίρνει τη μορφή

(11) $$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+(k^2+\lambda_1)r^2=0 \quad .$$

Επειδή ο δεύτερος όρος είναι ανεξάρτητος από την r, πρέπει

(12) $$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=\lambda_2\Theta \qquad (\lambda_2=\sigma\tau\alpha\vartheta.)$$

και η (11) γράφεται

(13) $$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\{r(k^2+\lambda_1)+\frac{\lambda_2}{r}\}R=0 \quad .$$

Αν εισάγουμε τη νέα ανεξάρτητη μεταβλητή

(14) $$x=r(k^2+\lambda_1)^{\frac{1}{2}} \quad .$$

τότε η (13) παίρνει τη μορφή

(15) $$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1+\frac{\lambda_2}{x^2}\right)y=0 \quad , \qquad y(x)=R(x/(k^2+\lambda_1)^{\frac{1}{2}}) \quad .$$

Αν συμβολίσουμε $\lambda_2=-v^2$, η (15) γράφεται

(16) $$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{v^2}{x^2}\right)y=0 \quad , \qquad (\varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ \text{Bessel}) \quad .$$

<u>Παρατήρηση</u> : Για τη συνάρτηση F, συνήθως, υπάρχει η απαίτηση να είναι περιοδική ως προς θ και τότε $\lambda_2=-m^2$, $m=1,2,3,\ldots$.Η σταθερά λ_1 προσδιορίζεται από επιπρόσθετες συνοριακές συνθήκες π.χ. $F(r,\theta,0)=F(r,\theta,L)=0 \Rightarrow Z(0)=Z(L)=0$, οπότε η λύση της (10) θα είναι $Z_n=\sin(n\pi z/L)$ (ιδιοσυνάρτηση) με αντίστοιχη ιδιοτιμή $\lambda_1=-n^2\pi^2/L^2$.

Η εξίσωση του Helmholtz , (6β) , σε σφαιρικές συντεταγμένες , έχει τη μορφή

(17) $$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial F}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\theta}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial\phi^2}+k^2F=0 \quad .$$

Με την εισαγωγή της $F(r,\theta,\phi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ στην (17) και ακολουθώντας την παραπάνω πορεία παίρνουμε

$$\frac{d^2\Phi}{d^2\phi}-\lambda_1\Phi=0 \quad ,$$

(18) $$\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta})+\{-\sin\theta\cdot\lambda_2+\frac{\lambda_1}{\sin\theta}\}\Theta=0 \quad ,$$

$$\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr})+\{r^2k^2+\lambda_2\}R=0 \quad .$$

Στο σύστημα των σφαιρικών συντεταγμένων έχουμε την απαίτηση η $F(r,\theta,\phi)$ να είναι περιοδική ως προς ϕ. Το γεγονός αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι στην εξίσωση (18α) η σταθερά λ_1 είναι

$$\lambda_1=-m^2 \quad , \qquad (m=0,1,2,\dots) \quad .$$

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση $m=0$, όπου η $F(r,\theta,\phi)$ είναι ανεξάρτητη από την $\phi \Rightarrow \Phi=c$ (η λύση $\Phi=c\phi$ δεν είναι περιοδική). Η εξίσωση (18β) παίρνει τότε τη μορφή

(19) $$\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta})-\lambda_2\sin\theta\cdot\Theta=0 \quad .$$

Αν εισάγουμε στην (19) τη νέα ανεξάρτητη μεταβλητή $x=\cos\theta$, τότε έχουμε

(20) $$((1-x^2)y')'-\lambda_2 y=0 \quad , \qquad \text{(εξίσωση Legendre)}$$

όπου $y(x)=\Theta(\arccos x)$ και $(\ )'=d(\ )/dx$.

Η (20) είναι μία εξίσωση Sturm-Liouville (A·1·31 , A·2·18). Για να έχουμε μια φραγμένη λύση της (20) για $x=\pm1$ ή $\theta=0,\pi$, πρέπει

(21) $$\lambda_2=-n(n+1) \quad , \qquad n=0,1,2,\dots \quad .$$

Αν η $F(r,\theta,\phi)$ δεν αναμένεται να είναι ανεξάρτητη της ϕ, τότε η εξίσωση (18β) για $\lambda_1=-m^2$ και $x=\cos\theta$ θα πάρει τη μορφή

(22) $$((1-x^2)y')'-(\lambda_2+\frac{m^2}{1-x^2})y=0 \quad , \qquad m=0,1,2,3,\dots$$

και λέγεται προσαρτημένη εξίσωση Legendre (associated Legendre equation). Για να υπάρχει λύση της (22) φραγμένη για $x=\pm 1$ πρέπει

(23) $\lambda_2=-n(n+1)$, $n=0,1,2,\ldots$, $n\geq m$.

Η ακτινική εξίσωση (18γ) θα έχει τη μορφή

(24) $$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\{r^2k^2-n(n+1)\}R=0$$

και είναι μια εξίσωση Sturm-Liouville. Αν εισάγουμε στην (24) τη νέα μεταβλητή $x=kr$, έχουμε

(25) $$(x^2u')'+(x^2-n(n+1))u=0 \;, \qquad R\left(\frac{x}{k}\right)=u(x) \;.$$

Η (25), με την αντικατάσταση $u(x)=y(x)/\sqrt{x}$, παίρνει τη μορφή

(27) $$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{1}{x^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)y=0$$

που είναι εκείνη της εξίσωσης Bessel $(n+1/2)$-τάξης.

2. Συναρτήσεις Bessel .

2.1 Πρώτου είδους .

Η μελέτη της εξίσωσης του Helmholtz σε κυλινδρικές συντεταγμένες οδηγεί στη διαφορική εξίσωση Bessel ,

(1) $$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0 \;.$$

Η παράμετρος ν είναι πολύ συχνά ένας ακέραιος , αλλά μπορεί όμως να είναι και ένας οποιοσδήποτε αριθμός. Ας υποθέσουμε ότι ν είναι ένας μη-αρνητικός πραγματικός αριθμός. Η (1) ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος 2 (Α-2 , σελ. 21-22) και κατά συνέπεια θα έχει μια λύση της μορφής

(2) $$y(x)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+r} \qquad (c_0\neq 0) \;.$$

Αν εισάγουμε τη (2) και τις παραγώγους της στην (1) θα πάρουμε

(3) $$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r}+\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r}+\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+r+2}-v^2\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+r}=0$$

και

(4)
$$r(r-1)c_0+rc_0-v^2c_0=0 \quad , \qquad m=0$$
$$(r+1)rc_1+(r+1)c_1-v^2c_1=0 \quad , \qquad m=1$$
$$(m+r)(m+r-1)c_m+(m+r)c_m+c_{m-2}-v^2c_m=0 \quad , \quad m\geq 2 \quad .$$

Η (4α) γράφεται

(5) $$(r+v)(r-v)=0$$

και έχει ρίζες $r_1=v$ (≥ 0) , $r_2=-v$. Για τη ρίζα $r_1=v$, από την (4β), έχουμε $c_1=0$ και η (4γ) γράφεται

(6) $$(m+2v)mc_m+c_{m-2}=0 \quad .$$

Επειδή όμως $c_1=0$ και $v\geq 0$ θα έχουμε $c_3=0$, $c_5=0$,... . Η (6) μπορεί να γραφτεί με τη μορφή $(m\to 2m)$

(7) $$c_{2m}=-\frac{1}{2^2m(v+m)}c_{2m-2} \quad , \qquad m=1,2,\ldots$$

απόπου μπορούν να προσδιοριστούν οι συντελεστές $c_2,c_4,\ldots$. Ο συντελεστής c_0 είναι αυθαίρετος , αλλά στη διεθνή βιβλιογραφία συνηθίζεται να εκλέγεται

(8) $$c_0=\frac{1}{2^v\Gamma(v+1)} \quad ,$$

όπου $\Gamma(v+1)$ είναι η γνωστή Γ-συνάρτηση (Β·1).

Από τις (7) και (8) παίρνουμε

$$c_2=\frac{c_0}{2^2(v+1)}=-\frac{1}{2^{2+v}1!\Gamma(v+2)}$$

$$c_4 = -\frac{c_2}{2^2 2(v+2)} = \frac{1}{2^{4+v} 2!\Gamma(v+3)}$$

....

(9) $$c_{4m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+v} m!\Gamma(v+m+1)}$$

Αν εισάγουμε την (9) στη (2) και λάβουμε υπόψη ότι , $c_1=0$, $c_3=0$, ... θα πάρουμε μια μερική λύση της (1) , δηλαδή

(10) $$J_v(x) = x^v \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+v} m!\Gamma(v+m+1)}$$

Η λύση $J_v(x)$ είναι γνωστή σαν <u>συνάρτηση Bessel πρώτου είδους και v-τάξης</u> (Bessel function of the first kind of order v) και συγκλίνει για κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής x .

Για v ακέραιο $n(\geq 0)$

(11) $$J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n} m!(n+m)} .$$

Αν στην (10) αντικαταστήσουμε τη ρίζα $r_1=v$ με τη ρίζα $r_2=-v$ θα πάρουμε

(12) $$J_{-v}(x) = x^{-v} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m-v} m!\Gamma(m-v+1)}$$

Οι (10) και (12) είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Θ ε ώ ρ η μ α 1 . Αν v δεν είναι ακέραιος , τότε η γενική λύση της (1) είναι

(13) $$y(x) = \alpha_1 J_v(x) + \alpha_2 J_{-v}(x) \ , \quad \text{για κάθε} \quad x \neq 0 \ .$$

Αν όμως v είναι ακέραιος η (13) δεν θα είναι η γενική λύση της (1).

Θ ε ώ ρ η μ α 2 . Για $v=n$ (n ακέραιος) οι συναρτήσεις $J_n(x)$ και $J_{-n}(x)$ είναι γραμμικά εξαρτημένες , γιατί

$$(14) \qquad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) , \qquad n=1,2,3,\ldots \quad .$$

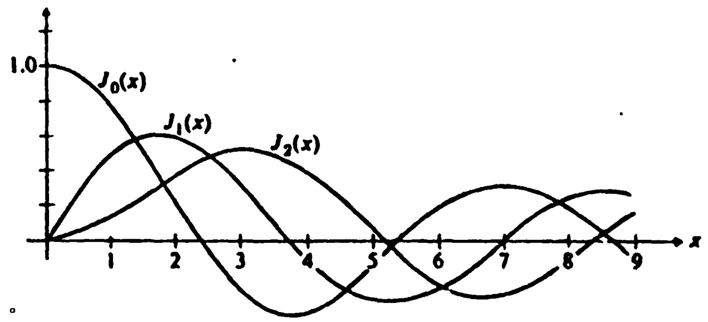
<u>Απόδειξη</u> : Ας υποθέσουμε ότι στην (12) η ν προσεγγίζει ένα θετικό ακέραιο n . Τότε , οι Γ-συναρτήσεις στους συντελεστές των πρώτων n-όρων απειρίζονται (B.1 , σελ. 41 , σχ.1) και κατά συνέπεια οι συντελεστές αυτοί μηδενίζονται , η δε άθροιση στην (12) θα αρχίσει από $m=n$. Επειδή $\Gamma(m-n+1)=(m-n)!$ θα έχουμε

$$(15) \qquad J_{-n}(x)= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-n}}{2^{2m-n} m!(m-n)!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} x^{2s+n}}{2^{2s+n}(n+s)!s!}$$

$$=(-1)^n J_n(x) , \qquad m=n+s$$

και κατά συνέπεια οι συναρτήσεις $J_n(x)$ και $J_{-n}(x)$ είναι γραμμικά εξαρτημένες.

Οι γραφικές παραστάσεις των $J_0(x)$, $J_1(x)$ και $J_2(x)$ φαίνονται στο σχ.1 .



Σχ.1 : Συναρτήσεις Bessel .

Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση κατά την οποία η παράμετρος ν είναι μισός ακέραιος· τότε ο αριθμός 2ν είναι ένας περιττός ακέραιος. Ο αναγωγικός τύπος (7) προσδιορίζει όλους τους άρτιους συντελεστές σε όρους του c_0 , όπως ακριβώς και στην περίπτωση κατά την οποία η παράμετρος ν είναι ένας πραγματικός και μη-αρνητικός αριθμός . Για τους συντελεστές όμως $c_1, c_3, \ldots, c_{2\nu-2}$ δεν συμβαίνει πάντα να είναι ίσοι με το μηδέν (ο συντελεστής c_{2s} δεν είναι πάντα ίσος με το μηδέν(*)). Το γεγονός αυτό δεν μας εμποδίζει , από δική μας εκλογή, να πάρουμε $c_{2s}=0$ και κατά συνέπεια όλοι οι επόμενοι περιττοί συντελεστές θα είναι ίσοι με το μηδέν. Με την εκλογή αυτή μπορούμε να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση $J_{-v}(x)$ με τον ίδιο τρόπο που προσδιορίσαμε την (12). Το πλεονέκτημα που έχουμε με την εκλογή αυτή είναι ότι η συνάρτηση $J_{-v}(x)$ παραμένει μια συνεχής συνάρτηση του v για τιμές του $2v=1,3,5,\ldots$ και η γενική λύση της (1) θα είναι

$$y(x)=\alpha_1 J_v(x)+\alpha_2 J_{-v}(x) \quad , \quad 2v=1,3,5,\ldots \quad .$$

Παράδειγμα 1 : Ας υποθέσουμε ότι $v=1/2$. Η (10) γράφεται

$$\begin{aligned}(16)\qquad J_{1/2}(x) &= x^{1/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+1/2}m!\,\Gamma(\frac{1}{2}+m+1)}\\ &= \sqrt{\frac{2}{x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2^{2m+1}m!\Gamma(1/2)\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})\ldots(m+\frac{1}{2})}\\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2^m m!(1\cdot3\cdot\ldots\cdot 2m+1)}\\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\end{aligned}$$

γιατί από το Β·1 ξέρουμε ότι $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ και $\Gamma(\alpha+k+1)=\Gamma(\alpha)\alpha(\alpha+1)\ldots$ $\ldots(\alpha+k)$, $\alpha\neq 0,-1,-2,\ldots$. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$(17)\qquad J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

και η γενική λύση της (1) , για $v=1/2$, θα είναι

(*) Για $r=-1/2=-v$ η (14) γράφεται $0\cdot c_1=0$ και κατά συνέπεια ο c_1 μπορεί να είναι ένας αυθαίρετος αριθμός. Η ρίζα $r_1=-1/2$ παρέχει τη γενική λύση της (1)˙ (βλέπε υποσημείωση στη σελ. 28) .

(18) $$y(x)=\alpha_1 J_{1/2}(x)+\alpha_2 J_{-1/2}(x) \quad .$$

Ας δούμε τώρα πως μπορούμε να πάρουμε κάποιες σπουδαίες σχέσεις μεταξύ των συναρτήσεων Bessel πρώτου είδους.

Από την (10) παίρνουμε

(19) $$x^v J_v(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+2v}}{2^{2m+v}m!\Gamma(v+m+1)} \quad .$$

Αν διαφορίσουμε την (19) και λάβουμε υπόψη ότι $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$ έχουμε

(20) $$(x^v J_v(x))'=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m 2(m+v)x^{2m+2v-1}}{2^{2m+v}m!\Gamma(v+m+1)}$$

$$=x^v x^{v-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+v-1}m!\Gamma(v+m)}=x^v J_{v-1}(x) \quad .$$

Με όμοιο τρόπο , από την (12) παίρνουμε

(21) $$(x^{-v}J_v)'=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m+v-1}(m-1)!\Gamma(v+m+1)}$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{s+1}x^{2s+1}}{2^{2s+v+1}s!\Gamma(v+s+2)}=-x^{-v}J_{v+1}(x) \;, \quad m=s+1 \quad .$$

Οι (20) και (21) , μετά από πολλαπλασιασμό της (21) με x^{2v} , γράφονται

(22) $$vx^{v-1}J_v+x^v J_v'=x^v J_{v-1}$$

και

(23) $$-vx^{v-1}J_v+x^v J_v'=-x^v J_{v+1} \quad ,$$

αντίστοιχα.

Από τις (22) και (23) παίρνουμε τις αναγωγικές σχέσεις

(24) $$J_{v-1}(x)+J_{v+1}(x)=\frac{2v}{x}J_v(x)$$

και

(25) $$J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)=2J'_{\nu}(x) \quad ,$$

από τις οποίες μπορούμε να εκφράσουμε τις συναρτήσεις Bessel ανώτερης τάξης σε όρους συναρτήσεων κατώτερης τάξης.

<u>Παράδειγμα 2</u> : Θα εκφράσουμε τη $J_3(x)$ σε όρους των $J_0(x)$ και $J_1(x)$. Από την (24) έχουμε

$$J_2(x)=\frac{2}{x}J_1(x)-J_0(x)$$

και

$$J_3(x)=\frac{4}{x}J_2(x)-J_1(x)=(\frac{8}{x^2}-1)J_1(x)-\frac{4}{x}J_0(x) \quad .$$

<u>Παράδειγμα 3</u> : Από το παράδειγμα 1 έχουμε

$$J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \quad , \qquad J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x \quad .$$

Αν εφαρμόσουμε τον αναγωγικό τύπο (24) παίρνουμε

$$J_{3/2}(x)=\frac{1}{x}J_{1/2}(x)-J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x\right) \quad ,$$

$$J_{-3/2}(x)=-\frac{1}{x}J_{-1/2}(x)-J_{1/2}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\cos x}{x}+\sin x\right)$$

κ.τ.λ.

Από τον τρόπο υπολογισμού των συναρτήσεων $J_\nu(x)$, $\nu=\pm 1/2$, $\pm 3/2$, $\pm 5/2$, ... προκύπτει το συμπερασμα ότι οι συναρτήσσεις αυτές είναι στοιχειώδεις συναρτήσεις.

Οι συναρτήσεις $J_\nu(x)$ και $J_{-\nu}(x)$ έχουν τα ακόλουθα ασυμπτωτικά αναπτύγματα (*):

(26) $$J_{\pm\nu}(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x\mp\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4})+O(x^{-3/2}) \quad ,$$

(*) Η (26) δεν ισχύει πάντα όταν η x είναι μιγαδική μεταβλητή και για το σκοπό αυτό στην (26) θα υποθέσουμε ότι $x\in\mathbb{R}$.

όπου $\sigma(x^{-3/2})$ συμβολίζει μία ποσότητα μικρότερη από $cx^{-3/2}$, όπου c είναι μία θετική σταθερά.

Ας εξετάσουμε τώρα την ορθογωνικότητα των συναρτήσεων J_n. Επειδή οι $J_n(s)$ είναι λύσεις της (1) θα έχουμε

$$s^2 J_{n,ss} + sJ_{n,s} + (s^2 - n^2)J_n = 0 \quad , \tag{27}$$

όπου $(\ )_{,s} = d(\ )/ds$.

Θα θεωρήσουμε ότι η παράμετρος n είναι ένας μη-αρνητικός ακέραιος. Αν κάνουμε το μετασχηματισμό $s=\lambda x$, όπου λ είναι μια μη-μηδενική σταθερά, θα έχουμε $dx/ds = 1/\lambda$ και η (27) γράφεται

$$x^2 J_n''(\lambda x) + xJ_n'(\lambda x) + (\lambda^2 x^2 - n^2)J_n(\lambda x) = 0 \quad , \tag{28}$$

όπου $(\ )' = d(\ )/dx$.

Η (28) μπορεί να γραφτεί, για κάθε n, με τη μορφή της εξίσωσης Sturm-Liouville, δηλαδή,

$$(xJ_n'(\lambda x))' + \left(-\frac{n^2}{x} + \lambda^2 x\right)J_n(x) = 0 \quad , \tag{29}$$

όπου εδώ έχουμε

$$r(x) = x \ , \qquad q(x) = \frac{-n^2}{x} \ , \qquad \lambda \to \lambda^2 \quad , \qquad w(x) = x \quad .$$

Επειδή η συνάρτηση $r(x) = 0$ στο $x = 0$, από το θεώρημα 1 (Α·1 σελ.8) οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι οι λύσεις της (29) σένα διάστημα $x \in [0,R]$ που ικανοποιούν τη συνοριακή συνθήκη

$$J_n(\lambda R) = 0 \quad , \tag{30}$$

αποτελούν ένα ορθογώνιο σύνολο(*), στο διάστημα αυτό με συνάρτηση βάρους $w(x)=x$. Η εξίσωση $J_n(z)=0$ έχει άπειρες πραγματικές ρίζες, (βλέπε Watson (1944)), $z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \ldots$ και μπορεί να αποδειχτεί ότι,

(*) Πρέπει να σημειωθεί ότι η $q(x)|_{x=0}$ είναι ασυνεχής για $n \neq 0$, αλλά αυτό δεν επηρεάζει την απόδειξη αυτού του θεωρήματος.

$$z_j^{(n+1)} > z_j^{(n)} > z_j^{(n-1)} \qquad \text{(εκτός από την αρχή)}$$

και

$$z_{j+1}^{(n)} > z_j^{(n)} \quad .$$

Για δύο διαδοχικές ρίζες της J_n έχουμε

$$\lim_{j\to\infty} (z_{j+1}^{(n)} - z_j^{(n)}) = \pi \ .$$

Πίνακας 1: Ρίζες της $J_n(x)$

Αριθμός Ρίζας	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$
(1)	2.4048	3.8317	5.1356	6.3802
(2)	5.5201	7.0156	8.4172	9.7610
(3)	8.6537	10.1735	11.6198	13.0152
(4)	11.7915	13.3237	14.7960	16.2235
(5)	14.9309	16.4706	17.9598	19.4094
(6)	18.0711	19.6159	21.1170	22.5827

Ας συμβολίσουμε τις θετικές ρίζες της (30) με α_{mn} , $\alpha_{1n}<\alpha_{2n}<$ $<\alpha_{3n}$ ... . Τότε θα έχουμε

(31) $$\lambda R = \alpha_{mn} \to \lambda = \lambda_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{R} , \qquad m=1,2,3,\ldots$$

και επειδή η J_n' είναι συνεχής στο $x=0$ παίρνουμε το ακόλουθο συμπέρασμα :

Θ ε ώ ρ η μ α 3 : Για κάθε $n=0,1,2,\ldots$ οι συναρτήσεις Bessel $J_n(\lambda_{1n}x)$, $J_n(\lambda_{2n}x)$, $J_n(\lambda_{3n}x)$, $J_n(\lambda_{4n}x)$,..., όπου λ_{mn} δίνονται από την (31) , σχηματίζουν ένα ορθογώνιο σύνολο για $x\in[0,R]$ με συνάρτηση βάρους $w(x)=x$, δηλαδή

(32) $$\int_0^R xJ_n(\lambda_{mn}x)J_n(\lambda_{kn}x)dx = 0 \ , \qquad (k\neq m) \ .$$

Από το παραπάνω θεώρημα γίνεται φανερό ότι παίρνουμε άπειρο αριθμό ορθογωνίων συνόλων που το καθένα αντιστοιχεί σε μια τιμή του n.

Αν θέλουμε να εκφράσουμε μια συνάρτηση με τη γενικευμένη σειρά Fourier

$$f(x) = c_1 J_n(\lambda_{1n} x) + c_2 J_n(\lambda_{2n} x) + \ldots = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_n(\lambda_{mn} x) \quad , \tag{33}$$

πρέπει να γνωρίζουμε τις στάθμες , $\|J_n(\lambda_{mn} x)\|$, αυτών των συναρτήσεων· πράγμα που θα κάνουμε στη συνέχεια.

Αν πολλαπλασιάσουμε την (29) με $2xJ_n'(\lambda x)$ θα πάρουμε

$$\{(xJ_n'(\lambda x))^2\}' + (\lambda^2 x^2 - n^2)\{J_n^2(\lambda x)\}' = 0 \quad . \tag{34}$$

Ολοκληρώνοντας την (34) στο διάστημα $[0,R]$, έχουμε

$$(xJ_n'(\lambda x))^2 \Big|_0^R = -\int_0^R (\lambda^2 x^2 - n^2)\{J_n^2(\lambda x)\}' dx \quad . \tag{35}$$

Από την (23) , γράφοντας αντί x και ν , s και n , αντίστοιχα , έχουμε

$$s^{-n} J_{n,s}(s) = ns^{-n-1} J_n(s) - s^{-n} J_{n+1}(s) \quad . \tag{36}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε με s^{n+1} την (36) και θέσουμε $s=\lambda x$ θα πάρουμε

$$\lambda x J_{n,\lambda x}(\lambda x) = xJ_n'(\lambda x) = nJ_n(\lambda x) - \lambda x J_{n+1}(\lambda x)$$

και κατά συνέπεια

$$(xJ_n'(\lambda x))^2 \Big|_0^R = \{(nJ_n(\lambda x) - \lambda x J_{n+1}(\lambda x)\}^2 \Big|_0^R \quad . \tag{37}$$

Αν $\lambda = \lambda_{mn}$, τότε $J_n(\lambda R)=0$ · επειδή όμως και $J_n(0)=0$, $n=1,2,3,\ldots$, η (37) γράφεται

$$(xJ_n'(\lambda_{mn} x))^2 \Big|_0^R = \lambda_{mn}^2 R^2 J_{n+1}^2(\lambda_{mn} R) \quad . \tag{38}$$

Το δεξιό μέρος της (35) , μετά από ολοκλήρωση κατά μέρη , παίρνει τη μορφή

(39) $$-\int_0^R (\lambda^2x^2-n^2)\{J_n^2(\lambda x)\}'dx = -\{(\lambda^2x^2-n^2)J_n^2(\lambda x)\}\Big|_0^R+2\lambda^2\int_0^R xJ_n^2(\lambda x)dx.$$

Όταν $\lambda=\lambda_{mn}$ η (35) , μετά τις (38) και (39) , γίνεται :

(40) $$\|J_n(\lambda_{mn}x)\|^2 = \int_0^R xJ_n^2(\lambda_{mn}x)dx = \frac{R^2}{2} J_{n+1}^2(\lambda_{mn}R) \quad ,$$

γιατί η πρώτη έκφραση του δεύτερου μέρους της (39) για $\lambda=\lambda_{mn}$ είναι ίση με το μηδέν. Η (40) δίνει το τετράγωνο της στάθμης της $J_n(\lambda_{mn}x)$(*).

Οι συντελεστές λοιπόν της σειράς (33), που λέγεται σειρά Fourier-Bessel , θα είναι (Α·1 , σελ.10)

(41) $$c_m = \frac{2}{R^2J_{n+1}^2(\alpha_{mn})}\int_0^R xf(x)J_n(\lambda_{mn}x)dx \qquad m=1,2,3,\ldots$$

όπου $\lambda_{mn}=\alpha_{mn}/R$.

Σχόλιο :

Οι συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους $J_n(x)$ σχετίζονται πολύ απλά με τους συντελεστές της σειράς Laurent στην οποία αναπτύσσεται η συνάρτηση

(α) $$w(x,t) = e^{x(t-1/t)/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(x)t^n \quad , \qquad |t|\in(0,\infty) \quad .$$

Για τον προσδιορισμό των συντελεστών $c_n(x)$ πολλαπλασιάζουμε τις δυναμοσειρές

(*) για τις άλλες συνοριακές συνθήκες που αναφέρονται στο Κεφ.Α, παρ. 1 σελ. 7 , ακολουθούμε την ίδια πορεία.

Η (40) ισχύει για κάθε ν>-1, βλέπε Lebedev (1972, σελ. 128-129).

$$(\beta)\qquad \begin{aligned} e^{xt/2} &= 1+\frac{(x/2)}{1!}t+\frac{(x/2)^2}{2!}t^2+\dots \\ e^{-x/2t} &= 1-\frac{(x/2)}{1!}t^{-1}+\frac{(x/2)^2}{2!}t^{-2}-+\dots \end{aligned}$$

και εξισώνουμε τους συντελεστές ίδιας δύναμης ως προς t του πρώτου και δεύτερου μέρους της (α) , οπότε παίρνουμε

$$(\gamma)\qquad \begin{aligned} c_n(x) &= J_n(x)\ , \qquad n=0,1,2,\dots \\ c_n(x) &= (-1)^n J_{-n}(x)\ , \qquad n=-1,-2,\dots \ . \end{aligned}$$

Η (α) μετά τις (γ) γράφεται

$$(\delta)\qquad w(x,t)=e^{x(t-1/t)/2}=J_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}J_n(x)\{t^n+(-1)^n t^{-n}\}\quad |t|\in(0,\infty).$$

Η συνάρτηση $w(x,t)$ λέγεται <u>γεννήτρια συνάρτηση</u> (generating function) των συναρτήσεων Bessel $J_n(x)$, $n=0,1,2,\dots$. Η (δ) παίζει σημαντικό ρόλο στη θεωρία των συναρτήσεων Bessel (βλέπε εφαρμογή 4).

2.2. <u>Δευτέρου είδους</u>

Για ακέραιο $\nu=n$, οι συναρτήσεις Bessel $J_n(x)$ και $J_{-n}(x)$ είναι γραμμικά εξαρτημένες και δεν αποτελούν ένα βασικό σύστημα της (2.1.1). Στη συνέχεια , σε πρώτο στάδιο, θα ασχοληθούμε με την εύρεση μιας δεύτερης ανεξάρτητης λύσης της (2.1.1) για $n=0$. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση Bessel γράφεται

$$(1)\qquad xy''+y'+xy=0\ .$$

Η δεικτοεξίσωση της (1) έχει τη διπλή ρίζα $r=0$ και όπως ξέρουμε (Α. 2, σελ.28, εξ.58) η ζητούμενη λύση της (1) πρέπει να έχει τη μορφή

$$(2)\qquad y_2(x)=J_0(x)\ln x+\sum_{m=1}^{\infty}c_m x^m\ .$$

Αν αντικαταστήσουμε τη (2) και τις παραγώγους της

$$y_2'(x) = J_0'\ell n x + \frac{J_0}{x} + \sum_{m=1}^{\infty} m C_m x^{m-1}$$

$$y_2''(x) = J_0''\,\ell n x + \frac{2J_0'}{x} - \frac{J_0}{x^2} + \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1) C_m x^{m-2}$$

στην (1) και λάβουμε υπόψη ότι η J_0 είναι λύση της (1), θα πάρουμε

(3) $$2J_0' + \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1)C_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} mC_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} C_m x^{m+1} = 0 \ .$$

Από την (2.1.10), μετά από παραγώγιση , έχουμε

(4) $$J_0'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m-1} m!(m-1)!}$$

και η (3) παίρνει τη μορφή

(5) $$2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m-1} m!(m-1)!} + \sum_{m=1}^{\infty} m^2 C_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} C_m x^{m+1} = 0 \ .$$

Από την (5) βλέπουμε ότι ο συντελεστής του x^0 είναι $0 \cdot C_1 + C_1 = 0$.Το άθροισμα των συντελεστών της δύναμης x^{2k} είναι

(6) $$(2k+1)^2 C_{2k+1} + C_{2k-1} = 0 \ , \qquad k=1,2,3,\ldots$$

και επειδή $C_1 = 0$, από την (6) παίρνουμε ότι $C_3=0$, $C_5=0$, $C_7=0$,.... Το άθροισμα των συντελεστών της δύναμης x^{2k+1} είναι

(7) $$\begin{aligned} &(4C_2-1) = 0 \qquad \text{για} \quad k=0 \\ &\frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k}(k+1)!k!} + (2k+2)^2 C_{2k+2} + C_{2k} = 0 \ , \qquad \text{για} \quad k=1,2,3,\ldots \ . \end{aligned}$$

Από τις (7) παίρνουμε

$$C_2 = \frac{1}{4} \ , \qquad C_4 = -\frac{3}{128}$$

και γενικά

$$(8) \qquad C_{2m} = \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}(m!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}\right). \qquad m=1,2,3,\ldots$$

Αν κάνουμε χρήση της συντομογραφίας

$$h_m = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}$$

και εισάγουμε στη (2) την (8) και το συμπέρασμα της (6), ($C_1=C_3=C_5=\ldots=0$) , θα πάρουμε

$$(9) \qquad y_2(x) = J_0(x)\ell nx + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}h_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m}$$

$$= J_0(x)\ell nx + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{128}x^4 + - \ldots \quad .$$

Οι συναρτήσεις J_0 και y_2 αποτελούν ένα βασικό σύστημα της (1). Ένα άλλο βασικό σύστημα της (1) μπορούμε να πάρουμε αν αντικαταστήσουμε την y_2 με μια ανεξάρτητη της J_0 μερική λύση της μορφής $\alpha(y_2+bJ_0)$, όπου $\alpha(\neq 0)$ και b είναι σταθερές. Στη διεθνή βιβλιογραφία οι σταθερές αυτές εκλέγονται $\alpha=2/\pi$ και $b=\gamma-\ell n2$, όπου γ είναι η σταθερά των Euler-Mascheroni (B.1, σελ. 41). Η λύση

$$(10) \qquad Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\{J_0(x)(\ell n\frac{x}{2}+\gamma) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}h_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}\}$$

είναι γνωστή σαν <u>συνάρτηση Bessel δευτέρου είδους και μηδενικής τάξης ή συνάρτηση του Neumann μηδενικής τάξης</u>.

Αν $\nu=n=1,2,3,\ldots$ μια δεύτερη λύση της εξίσωσης (2.1.1) μπορούμε να πάρουμε με παρόμοιο τρόπο(*). Το μειονέκτημα από τη διαδικασία αυ-

---

(*) Στο τέλος αυτής της παραγράφου θα σχολιαστεί το σχετικό κατασκευής της δεύτερης λύσης της (2.1.1).

Η συνάρτηση Neumann συμβολίζεται και N_m .

τή είναι ότι ο προσδιορισμός της δεύτερης λύσης εξαρτάται από το αν ή όχι η παράμετρος ν είναι ακέραιος αριθμός. Για να πετύχουμε μια ομοιόμορφη διατύπωση για την y_2 πρέπει να υιοθετήσουμε μια μορφή της που να ισχύει για όλες τις τιμές της ν. Για το σκοπό αυτό εισάγουμε τη δεύτερη λύση με τη μορφή

$$(11)\qquad \begin{aligned} Y_\nu(x) &= \frac{1}{\sin\nu\pi}\{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)\} \\ Y_n(x) &= \lim_{\nu\to n} Y_\nu(x) \quad . \end{aligned}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι γνωστή σαν συνάρτηση Bessel δευτέρου είδους και ν-τάξης ή συνάρτηση Neumann ν-τάξης.

'Οταν ν είναι μη-ακέραιος οι συναρτήσεις $J_\nu(x)$ και $Y_\nu(x)$ αποτελούν ένα βασικό σύστημα και η γενική λύση της εξίσωσης του Bessel είναι

$$(12)\qquad y(x) = \alpha_1 J_\nu(x) + \alpha_2 Y_\nu(x) \quad .$$

Στην περίπτωση που η παράμετρος $\nu=n$, $n=1,2,3,\ldots$ υπολογίζουμε το όριο

$$\lim_{\nu\to n} \frac{\cos\nu\pi\cdot J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$$

εφαρμόζοντας τον κανόνα του L'Hopital και έχουμε

$$(13)\qquad Y_n(x) = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu} - (-1)^\nu \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right\}\Bigg|_{\nu=n} \quad .$$

Αν διαφορίσουμε τις εκφράσεις για τις $J_\nu(x)$ και $J_{-\nu}(x)$ ως προς ν μπορούμε να πάρουμε την έκφραση για τη συνάρτηση του Newmann, δηλαδή

$$(14)\qquad Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x)\left(\ell n\frac{x}{2} + \gamma\right) + \frac{x^n}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}(h_m + h_{m+n})}{2^{2m+n} m!(m+n)!} x^{2m} -$$

$$- \frac{x^{-n}}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{2^{2m-n} m!} x^{2m} , \qquad x>0 \quad , \qquad n=0,1,2,\ldots$$

όπου

$$h_0 = 0 \, , \qquad h_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} \, , \qquad k=1,2,3,\ldots$$

και όταν $n=0$ το τελευταίο άθροισμα πρέπει να αντικατασταθεί με το μηδέν. Για $n=0$ η (14) παίρνει τη μορφή (10). Από την (14), παίρνουμε

(15) $$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x) \; .$$

Θ ε ώ ρ η μ α 1: Η γενική λύση της εξίσωσης Bessel για όλες τις τιμές της παραμέτρου ν είναι

(16) $$y(x) = \alpha_1 J_\nu(x) + \alpha_2 Y_\nu(x) \quad .$$

Από την έκφραση (14) βλέπουμε ότι, η $Y_n(x)$ έχει ένα <u>κλαδικό σημείο</u> (branch point) για $x=0$ (από την παρουσία του $\ell n x$). Για μικρές τιμές της x η $Y_n(x)$ συμπεριφέρεται όπως

(17) $$Y_n(x) \sim -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^n, \quad \text{για} \quad x \to 0 \quad ,$$

με εξαίρεση την $Y_0(x)$, η οποία δεν έχει αρνητικές δυνάμεις της x, και που για μικρές τιμές της x συμπεριφέρεται όπως

(18) $$Y_0(x) \sim \frac{2}{\pi}(\ell n x - \ell n 2 + \gamma) \; , \quad \text{για} \quad x \to 0 \; .$$

Οι συναρτήσεις Neumann ικανοποιούν τις παρακάτω αναγωγικές σχέσεις:

$$(x^\nu Y_\nu(x))' = x^\nu Y_{\nu-1}(x)$$

(19) $$(x^{-\nu} Y_\nu(x))' = -x^{-\nu} Y_{\nu+1}(x)$$

$$Y_{\nu-1}(x) + Y_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} Y_\nu(x)$$

(19) $$Y_{\nu-1}(x)-Y_{\nu+1}(x)=2Y'_{\nu}(x) \quad .$$

Το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της $Y_\nu(x)$ είναι(*)

(20) $$Y_{\pm\nu}(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x\mp\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O(x^{-3/2}) \quad .$$

Από τα πιο σπουδαία αόριστα ολοκληρώματα της $Y_n(x)$ είναι τα ακόλουθα :

$$\int\{Y_0(x)\}^2 x\,dx=\frac{x^2}{2}\{(Y_0(x))^2+(Y_1(x))^2\}$$

$$\int\{Y_n(x)\}^2 x\,dx=\frac{x^2}{2}\{(Y_n(x))^2+Y_{n+1}(x)Y_{n-1}(x)\} \;, \qquad n\neq 0$$

$$\int Y_0(x)x\,dx=xY_1(x) \;, \qquad \int Y_1(x)dx=-Y_0(x) \quad .$$

Οι γραφικές παραστάσεις των Y_0, Y_1 και Y_2 φαίνονται στο σχ.1.

Στο σημείο αυτό αναφέρεται ότι υπάρχει πρακτική ανάγκη για λύσεις της εξίσωσης Bessel που είναι μιγαδικές για πραγματικές τιμές της x. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται συχνά οι λύσεις

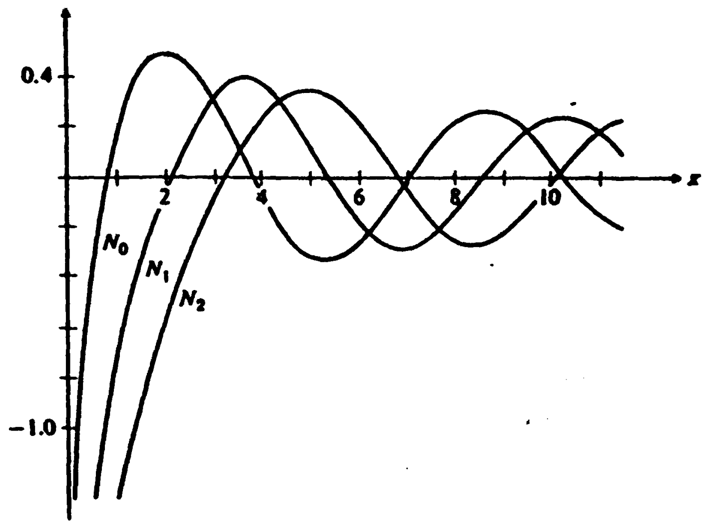
(22) $$H_\nu^{(1)}(x)=J_\nu(x)+iY_\nu(x)$$
$$H_\nu^{(2)}(x)=J_\nu(x)-iY_\nu(x) \quad .$$

(*) $$Y_{\pm\nu}(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\{A_\nu(x)\sin(x\mp\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})+B_\nu(x)\cos(x\mp\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})\}$$
$$J_{\pm\nu}(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\{A_\nu(x)\cos(x\mp\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})+B_\nu(x)\sin(x\mp\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})\}$$

όπου
$$A_\nu(x)=1-\frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)}{2!(8x)^2}+\frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)(4\nu^2-25)(4\nu^2-49)}{4!(8x)^4}-+\ldots$$

$$B_\nu(x)=\frac{4\nu^2-1}{8x}-\frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)(4\nu^2-25)}{3!(8x)^3}+-\ldots$$

Για μιγαδικές τιμές της x πρέπει $|\arg x|<\pi$.(βλέπε G.Korn (1968) σελ. 868-867). Για $x\to 0$, $J_0(x)\sim 1-\frac{1}{2}(\frac{x}{2})^2$, $J_n(x)\sim\frac{1}{\Gamma(n+1)}(\frac{x}{2})^n$, $n>0$.



Σχ.1 : Συναρτήσεις Neumann .

Οι γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις (22) λέγονται <u>συναρτήσεις Bessel τρίτου είδους και ν-τάξης ή συναρτήσεις Hankel (πρώτη και δεύτερη)(*) ν-τάξης</u>. Στον πίνακα 1 δίνονται τιμές των $Y_0(x)$ και $Y_1(x)$ για $x\in[0,7]$.

<u>Πίνακας 1:</u> Συναρτήσεις Bessel $Y_0(x)$ και $Y_1(x)$.

x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$
0.0	$(-\infty)$	$(-\infty)$	2.5	0.498	0.146	5.0	-0.309	0.148
0.5	-0.445	-1.471	3.0	0.377	0.325	5.5	-0.340	-0.024
1.0	0.088	-0.781	3.5	0.189	0.410	6.0	-0.288	-0.175
1.5	0.382	-0.412	4.0	-0.017	0.398	6.5	-0.173	-0.274
2.0	0.510	-0.107	4.5	-0.195	0.301	7.0	-0.026	-0.303

(*) Η συμπεριφορά των $H_\nu^{(P)}(x)$, P=1,2 για μικρές και μεγάλες τιμές της x είναι η ακόλουθη :

$$H_\nu^{(P)}(x) \sim \mp i\left(\frac{2}{x}\right)^\nu \frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\ , \quad x\to 0\ , \quad \nu>0$$

$$H_\nu^{(P)}(x) \sim \sqrt{2/\pi x}\; e^{\pm i(x-1/2\,\nu\pi-1/4\,\pi)}\ , \quad x\to\infty$$

$$H_0^{(P)}(x) \sim \mp i\,\frac{2}{\pi}\,\ell n\,\frac{2}{x}\ , \quad x\to 0$$

όπου το άνω σημείο για P=1 και το κάτω για P=2 .

$H_\nu^{(P)}(x)\to\infty$ για $x\to 0$.

Σχόλιο:

Από την ασυμπτωτική μορφή της J_ν ,

(α) $$J_{\pm\nu}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x\mp\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4})+0(x^{-3/2}) \quad , \quad x\in\mathbb{R}$$

βλέπουμε ότι, για $\nu\to n$ (ακέραιος) έχουμε

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x).$$

Για να αποφύγουμε τη γραμμική εξάρτηση της δεύτερης λύσης της εξίσωσης Bessel, στην περίπτωση που $\nu=n$ (ακέραιος) , η (α) μας δίνει την ιδέα να κατασκευάσουμε μια λύση που να συμπεριφέρεται ασυμπτωτικά όπως

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}) \quad , \quad \text{για} \quad x\in\mathbb{R} \quad .$$

Η λύση αυτή κατασκευάζεται με τον ακόλουθο τρόπο. Γράφουμε

(β) $$\sin(t-\delta)=A\cos(t-\delta)+B\cos(t+\delta)$$

και απαιτούμε όπως τα A και B έχουν εξάρτηση μόνο από το δ . Με την απαίτηση αυτή , από την (β) , παίρνουμε

$$A=\cos 2\delta \quad , \quad B=-\csc 2\delta \quad .$$

Αν

$$t=x-\frac{\pi}{4} \quad , \quad \delta=-\frac{\pi\nu}{2} \quad ,$$

τότε από τη δεύτερη λύση της εξίσωσης Bessel (συνάρτηση Neumann) που ορίζεται από την(*)

(*) Για $\nu=k+1/2$ (k=ακέραιος)

$$Y_{k+1/2}(x)=(-1)^{k+1}J_{-k-1/2} \quad .$$

$$(\gamma) \qquad Y_\nu(x) = \frac{\cos\nu\pi \cdot J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} , \qquad \nu \neq n \text{ (ακέραιος)}$$

οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι

$$(\delta) \qquad Y_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) + \sigma(x^{-3/2}) ,$$

και κατά συνέπεια εξασφαλίζεται η γραμμική ανεξαρτησία της $J_\nu(x)$ με την $Y_\nu(x)$ για $\nu \neq n$ (ακέραιος). Όταν η παράμετρος ν είναι ακέραιος, τότε το δεύτερο μέρος της (γ) γίνεται απροσδιόριστο και η $Y_n(x)$ ορίζεται από το όριο

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \to n} \frac{\cos\nu\pi \cdot J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$$

που μπορεί να αποδειχτεί ότι υπάρχει (βλέπε G.Watson (1944), Appendix 1).

2.3. Σφαιρικές

Από την εξίσωση του Helmholtz σε σφαιρικές συντεταγμένες (1.17), προέκυψε η ακτινική εξίσωση (1.25) που με την αντικατάσταση $x = kr$ παίρνει τη μορφή

$$(1) \qquad (x^2 u')' + (x^2 - n(n+1))u = 0 , \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Οι λύσεις της (1) είναι γνωστές σαν σφαιρικές συναρτήσεις Bessel n-τάξης (spherical functions of order n) ή συναρτήσεις Newmann n-τάξης. Ο λόγος για την ονοματολογία αυτή είναι ότι με την αντικατάσταση $u(x) = y(x)/\sqrt{x}$ η (1) ανάγεται στην $(n+1/2)$-τάξης διαφορική εξίσωση του Bessel ,

$$(2) \qquad y'' + \frac{1}{x} y' + (1 - \frac{1}{x^2} (n + \frac{1}{2})^2) y = 0 , \qquad n = 0,1,2,\ldots \quad .$$

Οι λύσεις της (1) μπορούν να εκφραστούν με τη μορφή

(3) $$u(x) = \alpha_1 \frac{J_{n+1/2}(x)}{\sqrt{x}} + \alpha_2 \frac{J_{-n-1/2}(x)}{\sqrt{x}} \quad .$$

Για να είναι λοιπόν η σφαιρική συνάρτηση Bessel , j_n , λύση της (1), πεπερασμένη στο $x=0$, πρέπει να είναι πολλαπλάσιο της $J_{n+1/2}(x)/\sqrt{x}$. Ο συντελεστής αναλογίας εκλέγεται $\sqrt{\pi/2}$ και έτσι

(4) $$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, J_{n+1/2}(x) \quad .$$

Η (4) μας επιτρέπει να εκφράσουμε τις $j_n(x)$ σε όρους της $j_0(x)$. Από την (2.1.21) έχουμε

(5) $$J_{v+1}(x) = -x^{v}(x^{-v}J_v(x))' \quad .$$

Αν θέσουμε στην (5) $v=n+1/2$ και διαιρέσουμε με $x^{n+3/2}$, θα πάρουμε

(6) $$\frac{J_{n+3/2}(x)}{x^{n+3/2}} = -\frac{1}{x}\left(\frac{J_{n+1/2}(x)}{x^{n+1/2}}\right)' \quad .$$

Από την (6) και την (4) οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι ,

(7) $$\frac{j_{n+1}(x)}{x^{x+1}} = -\frac{1}{x}\left(\frac{j_n(x)}{x^n}\right)' \quad , \qquad n=0,1,2,3,\ldots$$

Από την (7) , με επαναληπτική εφαρμογή της, παίρνουμε

(8) $$j_n(x) = x^n\left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n j_0(x) \quad , \qquad n=1,2,3,\ldots \quad .$$

Η (1) για $n=0$ έχει τη μορφή

(9) $$u'' + \frac{2}{x}u' + u = 0 \quad .$$

Αν λύσουμε την (9) με τη μέθοδο των δυναμοσειρών θα δούμε ότι οι συναρτήσεις $\sin/x$ και $\cos x/x$ είναι μεταξύ των λύσεών της. Αν εκλέξουμε

(10) $\quad j_0(x) = \sin x/x \quad ,$

επειδή $J_{1/2}(x) = \sqrt{2/\pi x}\,\sin x$, η (10) ικανοποιεί την (4) , δηλαδή

$$j_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,J_{1/2}(x) \quad ,$$

πράγμα που δικαιολογεί την εκλογή του συντελεστή αναλογίας στην (4) ίσο με $\sqrt{\pi/2}$.

Οι σφαιρικές συναρτήσεις Neumann παράγονται με τον ίδιο τρόπο από τον αναγωγικό τύπο

(11) $\quad n_k(x) = x^k\left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^k n_0(x) \quad , \quad k=1,2,3,\ldots$

όπου

(12) $\quad n_0(x) = -\cos x/x \quad .$

Επειδή $J_{-1/2}(x) = \sqrt{2/\pi x}\cos x$, ο συντελεστής αναλογίας , στην αντίστοιχη της (4) σχέση , εκλέγεται $-\sqrt{\pi/2}$.

Οι συναρτήσεις Hankel στην περίπτωση αυτή είναι

(13) $$\begin{aligned} h_k^{(1)} &= j_k(x)+in_k \\ h_k^{(2)} &= j_k(x)-in_k \quad . \end{aligned} \qquad k=0,1,2,\ldots$$

Από τις (13) και τους ορισμούς των j_0 και n_0 , παίρνουμε

(14) $\quad h_0^{(1)}(x) = -\frac{ie^{ix}}{x} \quad , \quad h_0^{(2)}(x) = \frac{ie^{-ix}}{x} \quad .$

Οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel $j_k(x)$, $n_k(x)$, $h_k^{(1)}(x)$ και $h_k^{(2)}(x)$ συνδέονται με τις αντίστοιχες $J_k(x)$, $Y_k(x)$, $H_k^{(1)}(x)$ και $H_k^{(2)}(x)$ με τις σχέσεις

$$(15)\qquad j_k(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,J_{k+1/2}(x)\;,\qquad n_k(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,Y_{k+1/2}(x)$$

$$h_k^{(1)}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,H_{k+1/2}^{(1)}(x)\;,\qquad h_k^{(2)}=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,H_{k+1/2}^{(2)}(x)\;.$$

Για $x\to\infty$, οι παραπάνω συναρτήσεις , γράφονται

$$(16)\qquad j_k(x)\sim\frac{1}{x}\cos\left(x-\frac{k+1}{2}\pi\right),\qquad n_k(x)\sim\frac{1}{x}\sin\left(x-\frac{k+1}{2}\pi\right),$$

$$h_k^{(1)}(x)\sim\frac{1}{x}(-i)^{k+1}e^{ix}\;,\qquad h_k^{(2)}(x)\sim\frac{1}{x}i^{k+1}e^{-ix}\;.$$

Για $k=1,2,3,\ldots$ από τις (15 αβ), έχουμε

$$(17)\qquad j_1(x)=\frac{\sin x}{x^2}-\frac{\cos x}{x}\;,\qquad j_2(x)=\left(\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x}\right)\sin x-\frac{3}{x^2}\cos x$$

$$j_3=\left(\frac{15}{x^4}-\frac{6}{x^2}\right)\sin x-\left(\frac{15}{x^3}-\frac{1}{x}\right)\cos x\;,\ \ldots$$

$$n_1(x)=-\frac{\cos x}{x^2}-\frac{\sin x}{x}\;,\qquad n_2(x)=-\left(\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}\right)\cos x-\frac{3}{x^2}\sin x$$

$$n_3(x)=-\left(\frac{15}{x^4}-\frac{6}{x^2}\right)\cos x-\left(\frac{15}{x^3}-\frac{1}{x}\right)\sin x\;,\ \ldots$$

Από την παραπάνω ανάλυση γίνεται φανερό ότι για μεγάλες τιμές της x οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel συμπεριφέρονται όπως

$$\pm\sin x/x \quad \text{ή} \quad \pm\cos x/x\;.$$

Επειδή όμως

$$(j_k(x),\ n_k(x))=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,(J_{k+1/2}(x)\;,\ Y_{k+1/2}(x))\;,$$

οι συναρτήσεις $J_{k+1/2}(x)$ και $Y_{k+1/2}(x)$ συμπεριφέρονται όπως

$$\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\qquad \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\;.$$

2.4. Τροποποιημένες

Η διαφορική εξίσωση(*)

(1) $$y'' + \frac{1}{x} y' + (-1 - \frac{v^2}{x^2}) y = 0$$

διαφέρει από την εξίσωση Bessel (1.16) μόνο ως προς το σημείο ενός όρου. Αν κάνουμε την αντικατάσταση $x=\pm iz$, τότε η (1) παίρνει τη μορφή της εξίσωσης Bessel , δηλαδή

(2) $$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dw}{dz} + (1 - \frac{v^2}{z^2}) w = 0$$

όπου $y(x) \equiv w(z)$.

Οι λύσεις της (1)

$$J_v(ix) \quad \text{και} \quad Y_v(ix)$$

δεν είναι πάντα πραγματικές συναρτήσεις. Στη διεθνή βιβλιογραφία ορίζεται η <u>τροποποιημένη (modified) συνάρτηση Bessel πρώτου είδους</u>

(3) $$I_v(x) = \frac{1}{i^v} J_v(ix)$$

που είναι πάντα πραγματική συνάρτηση. Αν εισάγουμε την (2.1.10) στην (3) παίρνουμε

(4) $$I_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2m+v}}{2^{2m+v} m!\Gamma(v+m+1)} .$$

Οι συναρτήσεις I_v ικανοποιούν τις παρακάτω αναγωγικές σχέσεις :

$$(x^v I_v(x))' = x^v I_{v-1}(x)$$

(5) $$(x^{-v} I_v(x))' = x^{-v} I_{v+1}(x)$$

(*) Η (1) εμφανίζεται συχνά στη μαθηματική φυσική π.χ. αγωγή θερμότητας.

$$I_{v-1}(x)-I_{v+1}(x)=\frac{2v}{x}\,I_v(x)$$

(5) $$I_{v-1}(x)+I_{v+1}(x)=2I_v'(x)\ .$$

Για μεγάλες τιμές της x (βλέπε Abramowitz and Stegun (1972) σελ.377) έχουμε(*)

(6) $$I_v(x)\sim\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}+\mathcal{O}(x^{-3/2})\quad,\qquad x\in\mathbb{R}\ .$$

<u>Η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel δευτέρου είδους</u> ορίζεται με τον <u>ακόλουθο τρόπο</u>(**) :

(7) $$K_v(x)=\frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-v}(x)-I_v(x)}{\sin v\pi}\quad,$$

για v μη ακέραιο αριθμό. Οι συναρτήσεις $I_v(x)$ και $K_v(x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις.

Στην περίπτωση που η παράμετρος $v=n$, $n=1,2,3,\ldots$ εφαρμόζοντας τον κανόνα του L'Hopital παίρνουμε

(8) $$K_n(x)=\frac{(-1)^n}{2}\left\{\frac{\partial I_{-v}(x)}{\partial v}-\frac{\partial I_v(x)}{\partial v}\right\}\Bigg|_{v=n}\ .$$

Από την (8) έχουμε (***)

(9) $$K_0(x)=-I_0(x)\{\ell n\,\frac{x}{2}+\gamma\}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^{2k}}{(k!)^2}\,h_k$$

και

$$K_n(x)=(-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^{n+2k}}{k!(n+k)!}\{\ell n\,\frac{x}{2}-\frac{1}{2}(h_k+h_{k+n})+\gamma\}+$$

(*) Για μιγαδικές τιμές της x πρέπει $|\arg x|<\frac{\pi}{2}$.

(**) $I_{-v}(x)=i^vJ_{-v}(ix)$, $I_n(x)=I_{-n}(x)$, $n=1,2,3,\ldots$

(***) Για μιγαδική μεταβλητή x πρέπει $|\arg x|<\pi$.

$$(10) \qquad + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} \qquad \text{για} \quad n=1,2,3,\dots$$

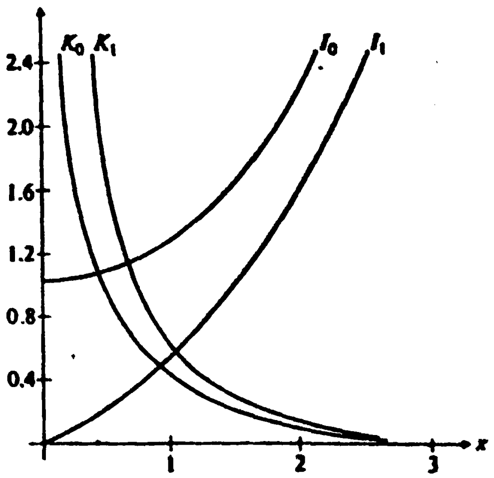
Οι αναγωγικές σχέσεις για τις K_v-συναρτήσεις διαφέρουν ελάχιστα από εκείνες για της I_v-συναρτήσεις :

$$(11) \qquad \begin{aligned} (x^v K_v(x))' &= -x^v K_{v-1}(x) \\ (x^{-v} K_v(x))' &= -x^{-v} K_{v+1}(x) \\ K_{v-1}(x) - K_{v+1}(x) &= -\frac{2v}{x} K_v(x) \\ K_{v-1}(x) + K_{v+1}(x) &= -2K_v'(x) \quad . \end{aligned}$$

Για μεγάλες τιμές της x (βλέπε Abramowitz and Stegun (1972), σελ. 377) , έχουμε

$$(12) \qquad K_v(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x} + \sigma(x^{-3/2}) \quad , \qquad x \in \mathbb{R} \quad .$$

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων I_0, I_1, K_0 και K_1 φαίνονται στο σχ.1 .



Σχ.1: Τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel.

(*) Για μικρές τιμές της x έχουμε

$$I_v(x) \sim x^v/2^v\Gamma(v+1) \quad , \qquad x \to 0$$
$$K_v(x) \sim 2^{v-1}\Gamma(v)/x^v \quad , \qquad x \to 0$$
$$K_0(x) \sim \ln 2/x \quad , \qquad x \to 0$$
$$I_v(0) = 0 \quad \text{για} \quad v>0 \quad , \qquad I_0(0)=1 \quad , \quad K_v(0) = \infty \quad .$$

Η λύση της (1) θα έχει τη μορφή

(13) $$y(x)=\alpha_1 I_\nu(x)+\alpha_2 K_\nu(x) \quad .$$

Στον αναγνώστη αφήνεται σαν άσκηση η απόδειξη των παρακάτω ειδικών περιπτώσεων τροποποιημένων συναρτήσεων Bessel:

(14) $$I_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sinh x$$
$$I_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cosh x$$

και της σχέσης

(15) $$K_n(x)=\frac{\pi i}{2}e^{in\pi/2}H_n^{(1)}(x) \quad .$$

Οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel , για $x\neq 0$, δεν έχουν πραγματικές ρίζες και κατά συνέπεια δεν υπάρχει μια γενική σχέση ορθογωνικότητας αυτών των συναρτήσεων.

Σχόλιο :

Με τις συναρτήσεις Bessel είναι στενά δεμένες οι συναρτήσεις Kelvin που είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης(*)

$$x^2y''+xy'-(ix^2+\nu^2)y=0 \quad ,$$

δηλαδή

$$y=\mathrm{ber}_\nu x+i\,\mathrm{bei}_\nu x\ , \qquad \mathrm{ber}_{-\nu}x+i\,\mathrm{bei}_{-\nu}x\ ,$$
$$\mathrm{ker}_\nu x+i\,\mathrm{kei}_\nu x\ , \qquad \mathrm{ker}_{-\nu}x+i\,\mathrm{kei}_{-\nu}x$$

όπου

$$\mathrm{ber}_\nu x=\left(\frac{1}{2}x\right)^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\{(3/4\,\nu+1/2k)\pi\}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{1}{4}x^2\right)^k$$

(*) $\nu\in\mathbb{R}$, $x\geq 0$.

$$\mathrm{bei}_v x = (\tfrac{1}{2}x)^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\{(3/4\, v+1/2k)\pi\}}{k!\Gamma(v+k+1)} (\tfrac{1}{4}x^2)^k$$

κ.τ.λ. (βλέπε Abramowitz and Stegun (1972) σελ. 379-383).

Οι συναρτήσεις Kelvin ορίζονται με τον ακόλουθο τρόπο :

$$\mathrm{ber}_v x + \mathrm{bei}_v x = J_v(xe^{3\pi i/4}) = e^{v\pi i} J_v(xe^{-\pi i/4})$$

$$= e^{v\pi i/2} I_v(xe^{\pi i/4}) = e^{3v\pi i/2} I_v(xe^{-3\pi i/4})$$

$$\mathrm{ker}_v x + i\,\mathrm{kei}_v x = e^{-v\pi i/2} K_v(xe^{\pi i/4}) = \tfrac{1}{2}\pi i\, H_v^{(1)}(xe^{3\pi i/4})$$

$$= -\tfrac{1}{2}\pi i e^{-v\pi i} H_v^{(2)}(xe^{-\pi i/4}).$$

Για μεγάλες τιμές της x έχουμε

$$\mathrm{ber}_v x \sim \frac{e^{x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi x}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi v}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \mathcal{O}(x^{-3/2})$$

$$\mathrm{bei}_v x \sim \frac{e^{x\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi x}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi v}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \mathcal{O}(x^{-3/2})$$

$$\mathrm{ker}_v x \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x/\sqrt{2}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi v}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + \mathcal{O}(x^{-3/2})$$

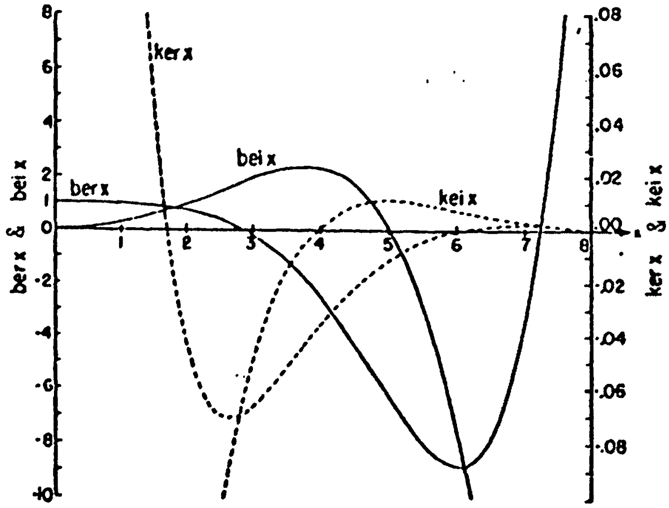
$$\mathrm{kei}_v x \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x/\sqrt{2}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi v}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + \mathcal{O}(x^{-3/2}) \quad .$$

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων Kelvin για $v=0$ φαίνονται στο σχ. 2 .

2.5. Εφαρμογές.

2.5.1. Ταλαντώσεις κυκλικής μεμβράνης.

Το πρόβλημα των ταλαντώσεων μιας μεμβράνης έχει την ακόλουθη μαθηματική περιγραφή :



Σχ.2 : berx , beix , kerx , keix .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u \quad , \qquad u = u(x,y,t)$$

(1) $\qquad u = 0$, επί του συνόρου για $t \geq 0$

$$\left.\begin{array}{l} u(x,y,0) = f(x,y) \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x,y) \end{array}\right\} \quad \text{αρχικές συνθήκες}$$

όπου f και g είναι γνωστές συναρτήσεις. Ας θεωρήσουμε πρώτα τις ακτινικά συμμετρικές ταλαντώσεις μίας κυκλικής μεμβράνης ακτίνας R. Στην περίπτωση αυτή , η περιγραφή του προβλήματος (1) είναι

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \quad , \qquad u = u(r,t)$$

$$u(R,t) = 0\ , \quad \text{για} \quad t \geq 0$$

$$\left.\begin{aligned} &u(r,0) = f(r) \\ (2) \qquad &\dot{u}(r,0) = g(r) \end{aligned}\right\} \text{αρχικές συνθήκες} .$$

Θα αναζητήσουμε λύση της μορφής

(3) $$u(r,t) = W(r)T(t) \quad .$$

Αν εισάγουμε την (3) και τις παραγώγους της στην (2α) παίρνουμε

(4) $$\frac{\ddot{T}}{c^2 T} = \frac{1}{W}\{W'' + \frac{1}{r} W'\} \quad ,$$

όπου $(\dot{\ })=d(\ )dt$ και $(\ )'=d(\ )/dr$.

Από την (4) έχουμε

(5) $$\ddot{T}+\lambda^2 T = 0\ , \qquad \lambda = ck \quad , \qquad k=\text{σταθ}.$$

και

(6) $$W''+ \frac{1}{r} W'+k^2 W = 0 \quad .$$

Ας θεωρήσουμε πρώτα την εξίσωση (6). Αν εισάγουμε το μετασχηματισμό $s=kr$ η (6) παίρνει τη μορφή

(7) $$W,_{ss}+ \frac{1}{s} W,_{s}+W = 0 \quad .$$

Η (7) είναι μία εξίσωση Bessel (2.2.1). Η γενική της λύση είναι

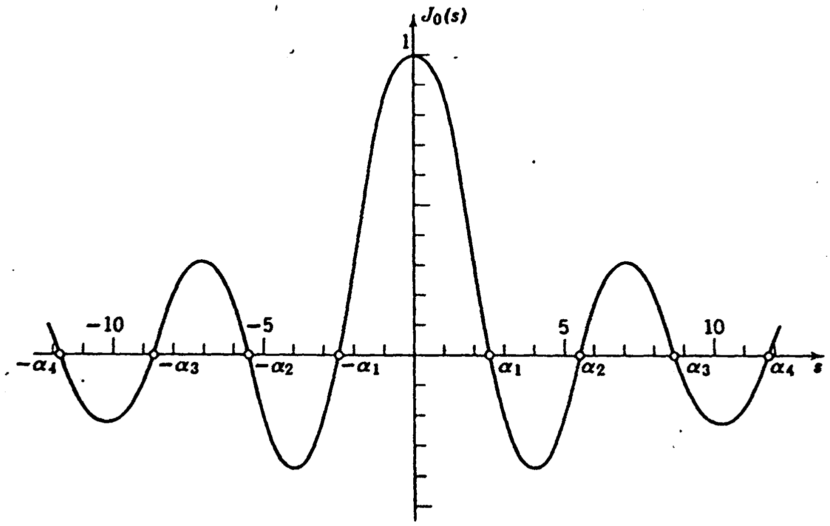
(8) $$W = C_1 J_0(s)+C_2 Y_0(s) \quad ,$$

όπου J_0 και Y_0 είναι οι συναρτήσεις Bessel μηδενικής τάξης , πρώτου και δευτέρου είδους αντίστοιχα. Επειδή η μετατόπιση u της μεμβράνης είναι πάντα πεπερασμένη ενώ η Y_0 απειρίζεται για $s \to 0$ θα έχουμε $C_2 = 0$, $C_1 \neq 0$.

Στο σύνορο $r=R$ θα έχουμε

(9) $\qquad W(R)=0 \quad \Rightarrow \quad J_0(kR)=0$.

Αν συμβολίσουμε με $s=\alpha_1,\alpha_2,\ldots$ τις θετικές ρίζες της $J_0(s)$ (σχ.1),



<u>Σχ. 1:</u> Συνάρτηση Bessel $J_0(s)$.

θα έχουμε

(10) $\qquad kR=\alpha_m \quad \rightarrow \quad k=k_m=\dfrac{\alpha_m}{R} \quad : \qquad m=1,2,3,\ldots$

και οι συναρτήσεις

(11) $\qquad W_m(r)=J_0(k_m r)=J_0\left(\dfrac{\alpha_m}{R}\, r\right)$

θα είναι λύσεις της (7) που μηδενίζονται στο σύνορο $r=R$.

Οι γενικές λύσεις της (5) για $\lambda=\lambda_m=ck_m$ είναι

(12) $\qquad T_m(t)=c_m\cos\lambda_m t+b_m\sin\lambda_m t$

Οι συναρτήσεις

(12) $\qquad u_m(r,t)=W_m(r)T_m(t)=J_0(k_m r)(c_m\cos\lambda_m t+b_m\sin\lambda_m t)$,

όπου $m=1,2,3,\ldots$ είναι λύσεις της εξίσωσης κύματος (1) που ικανοποιούν τη συνοριακή συνθήκη (2β). Οι (12) είναι οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος (2) με αντίστοιχες ιδιοτιμές τις λ_m .

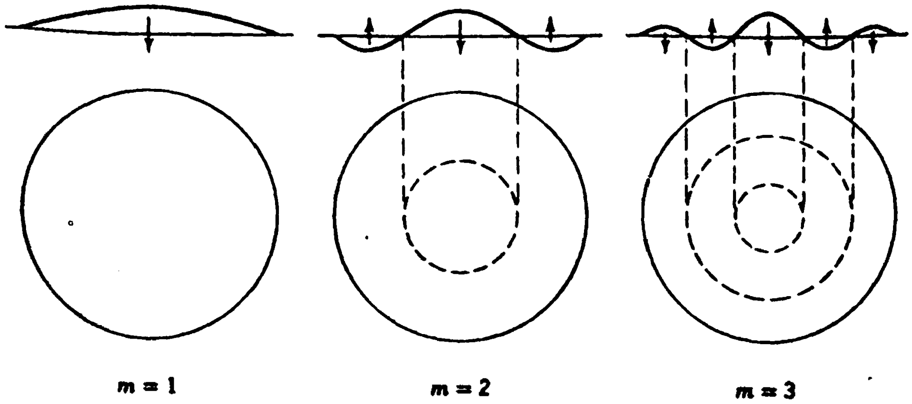
Η ταλάντωση της μεμβράνης που αντιστοιχεί στην u_m λέγεται <u>m-κανονική μορφή</u> (normal mode) και έχει συχνότητα $\lambda_m/2\pi$ κύκλους ανά μονάδα χρόνου.

<u>Παρατήρηση</u> : Επειδή οι ρίζες της $J_0(s)$ δεν χωρίζουν τον άξονα s σε ίσα διαστήματα , πράγμα που συμβαίνει στην ταλάντωση μιας χορδής, ο ήχος του drum είναι εντελώς διαφορετικός από εκείνον του βιολιού.

Οι τρεις πρώτες κανονικές μορφές της μεμβράνης φαίνονται στο σχ. 2. Για να πάρουμε τη λύση που ικανοποιεί και τις αρχικές συνθήκες (2γ) θα θεωρήσουμε τη σειρά

$$(13) \qquad u(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(r)T_m(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \{c_m\cos\lambda_m t+b_m\sin\lambda_m t)\cdot J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right)\}.$$

Αν στην (13) εισάγουμε την πρώτη των αρχικών συνθηκών έχουμε



<u>Σχ.2:</u> Κανονικές μορφές κυκλικής μεμβράνης.

$$(14) \qquad u(r,0)=\sum_{m=1}^{\infty} c_m J_0\left(\frac{\alpha_m r}{R}\right) = f(r) \quad .$$

Για να ικανοποιεί η (13) την αρχική συνθήκη $u(r,0)=f(r)$, πρέπει οι c_m να είναι οι συντελεστές της σειράς Fourier-Bessel που εκφράζει την $f(r)$ σε όρους της $J_0(\alpha_m r/R)$, δηλαδή(*) (2.1 , εξ. 41).

$$c_m = \frac{2}{R^2 J_1^2(\alpha_m)} \int_0^R r f(r) J_0\left(\frac{\alpha_m r}{R}\right) dr \ , \qquad m=1,2,3,\ldots \tag{15}$$

Οι συντελεστές b_m προσδιορίζονται με ανάλογο τρόπο(**) .

Ας συζητήσουμε τώρα το πρόβλημα των ταλαντώσεων της κυκλικής μεμβράνης στην περίπτωση που $u=u(r,\theta,t)$. Στην περίπτωση αυτή η περιγραφή του προβλήματος είναι

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \ ,$$

(16) $u(R,\theta,t)=0$, συνοριακή συνθήκη για $t\geq 0$

$$\left.\begin{aligned} u(r,\theta,0) &= f(r,\theta) \\ \dot{u}(r,\theta,0) &= g(r,\theta) \end{aligned}\right\} \text{ αρχικές συνθήκες} \ .$$

Αν θέσουμε $u=W(r)\Theta(\theta)T(t)$ από την (16α) παίρνουμε

$$\ddot{T} = \lambda c^2 T \ ,$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = \lambda_1 \Theta \tag{17}$$

$$\frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dW}{dr} + \left(-\lambda+\frac{\lambda_1}{r^2}\right)W = 0 \ .$$

(*) Για την ύπαρξη της (14) είναι ικανή η διαφορισιμότητα της $f(r)$ στο διάστημα $[0,R]$, Watson (1944).

(**)
$$b_m = \frac{2}{c\alpha_m R J_1^2(\alpha_m)} \int_0^R r g(r) J_0\left(\frac{\alpha_m r}{R}\right) dr \ , \qquad m=1,2,3,\ldots$$

Από φυσική σκοπιά έχουμε $\lambda=-k^2$, $k\in\mathbb{R}$ και η συνθήκη περιοδικότητας ως προς θ απαιτεί όπως

(18) $$\lambda_1=-m^2 \quad , \quad m=0,1,2,\ldots \quad .$$

Η λύση της (17β) θα είναι

(19) $$\Theta_m(\theta)=A_m\cos m\theta+B_m\sin m\theta \quad .$$

Η ακτινική εξίσωση παίρνει τη μορφή

(20) $$W_{,rr}+\frac{1}{r}W_{,r}+(k^2-\frac{m^2}{r^2})W=0 \quad , \qquad m=0,1,2,\ldots \quad .$$

Η γενική λύση της (20) είναι

(21) $$W(r)=C_1J_m(kr)+C_2Y_m(kr) \quad .$$

Η $T(t)$ μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή

(22) $$T(t)=e^{-i\omega t} \quad , \qquad \omega=kc \quad .$$

Για να αποφύγουμε το μηδενισμό της C_2 , θα υποθέσουμε ότι η μορφή της μεμβράνης είναι εκείνη του κυκλικού δακτυλίου με συνοριακές συνθήκες

(23) $$u(R_1,\theta,t)=0 \quad , \qquad u(R,\theta,t)=0$$

όπου R_1 είναι η εσωτερική ακτίνα του δακτυλίου.

Αν εισάγουμε την (21) στις (23) παίρνουμε

(24) $$C_1J_m(kR)+C_2Y_m(kR)=0$$
$$C_1J_m(kR_1)+C_2Y_m(kR_1)=0 \quad .$$

Οι (24) έχουν λύση $(C_1,C_2)\neq(0,0)$ μόνο αν

(25) $$J_m(kR)Y_m(kR_1)-J_m(kR_1)Y_m(kR)=0 \quad .$$

Από τις θετικές ρίζες της (25) προσδιορίζονται οι ιδιοτιμές (ιδιοσυχνότητες της μεμβράνης). Η (25) έχει άπειρες ρίζες και κατά συνέπεια θα έχουμε διπλά άπειρες ιδιοτιμές k_{mn} , $m=0,1,2,3,\ldots$.

Οι ακτινικές ιδιοσυναρτήσεις μπορούν να εκλεγούν με τον ακόλουθο τρόπο:

(26) $$W_{mn}(r) = Y_m(k_{mn}R)J_m(k_{mn}r)-J_m(k_{mn}R)Y_m(k_{mn}r) .$$

Οι συναρτήσεις (26) δεν είναι κανονικοποιημένες αλλά είναι σύμφωνα με τη γενική θεωρία Sturm-Liouville , ορθογώνιες.

Μια κίνηση της κυκλικής μεμβράνης, με μορφή δακτυλίου , μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή σειράς

(27) $$u(r,\theta,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(r)e^{-ik_{mn}ct}(A_{mn}\cos m\theta+B_{mn}\sin m\theta) \quad ;$$

όπου οι συντελεστές A_{mn} και B_{mn} προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

2.5.2. Θερμοκρασιακή κατανομή σε στερεό κύλινδρο.

Ας θεωρήσουμε ένα στερεό κυκλικό κύλινδρο άπειρου μήκους και ακτίνας R . Ο κύλινδρος θερμαίνεται στη θερμοκρασία $u_0=f(r)$ και ακτινοβολεί θερμότητα στο περιβάλον που βρίσκεται σε θερμοκρασία ίση με το μηδέν. Από μαθηματική σκοπιά το πρόβλημα ανάγεται στη λύση της εξίσωσης αγωγής της θερμότητας

(1) $$\lambda_T\nabla^2u = c_\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} \quad , \qquad \kappa = \lambda_T/c_\varepsilon = \text{σταθ.}$$

που υπόκειται στη θερμική συνθήκη

(2) $$(u_{,r}+hu)\Big|_{r=R} = 0 \quad , \qquad h = \text{σταθ.}$$

και την αρχική συνθήκη

(3) $$u(r,0) = f(r) \quad .$$

Αν εισάγουμε στην (1) λύση της μορφής $u=W(r)T(t)$, θα πάρουμε

$$(4) \qquad \dot{T}+\kappa\lambda^2 T = 0$$

$$\frac{1}{r}\,(rW_{,r})_{,r}+\lambda^2 W = 0$$

όπου $-\lambda^2$ είναι η σταθερά χωρισμού. Οι (4) έχουν λύσεις

$$(5) \qquad T = C_3 e^{-\kappa\lambda^2 t} \quad ,$$

$$W = C_1 J_0(\lambda r)+C_2 Y_0(\lambda r) \quad .$$

Επειδή $J_0(\lambda r)\to 1$, $Y_0(\lambda r)\to\infty$ για $r\to 0$ και η W πρέπει να έχει πεπερασμένη τιμή στον άξονα του κυλίνδρου , η σταθερά $C_2=0$.

Αν εισάγουμε την (5β) στη (2) έχουμε

$$(6) \qquad hJ_0(\lambda R)-\lambda J_1(\lambda R) = 0 \quad .$$

Αν γράψουμε $\alpha=\lambda R$, τότε η (6) γίνεται

$$(7) \qquad h\,RJ_0(\alpha)-\alpha J_1(\alpha) = 0 \quad .$$

Η (7) έχει μόνο πραγματικές ρίζες. Έστω ότι $0<\alpha_1<\alpha_2\ldots<\alpha_n<\ldots$ είναι οι θετικές ρίζες της. Οι επιτρεπτές τιμές της παραμέτρου λ είναι $\lambda_n=\alpha_n/R$ και κατά συνέπεια οι μερικές λύσεις της (1) είναι

$$(8) \qquad u_n = A_n J_0(\alpha_n r/R)e^{-\kappa\alpha^2_n t/R^2} \quad , \qquad n=1,2,3,\ldots$$

Η υπέρθεση των (8) δίνει

$$(9) \qquad u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r/R)e^{-\kappa\alpha_n^2 t/R^2} \quad .$$

Οι συντελεστές A_n προσδιορίζονται από την αρχική συνθήκη

$$(10) \qquad f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r/R) \quad .$$

Η (10) είναι μία γενίκευση της σειράς Fourier-Bessel(*). Στην περίπτωση της (10) οι αριθμοί α_n είναι ρίζες της (7) ενώ στην περίπτωση της σειράς Fourier-Bessel της $J_0(\alpha)=0$. Οι συντελεστές A_n της (10) είναι

(11) $$A_n = \frac{2}{R^2\{J_0^2(\alpha_n)+J_1^2(\alpha_n)\}} \int_0^R rf(r)J_0(\alpha_n r/R)dr \quad .$$

Αν η θερμοκρασία είναι ανεξάρτητη από το χρόνο , τότε η (1) παίρνει τη μορφή

$$\nabla^2 u = 0 \ , \qquad u = u(r,\theta,z)$$

ή

(12) $$\frac{1}{r}(ru,_r),_r + \frac{1}{r^2}u,_{\theta\theta} + u,_{zz} = 0 \quad .$$

Ας υποθέσουμε ότι ο κύλινδρος έχει πεπερασμένο μήκος L και η $u(r,\theta,z)$ ικανοποιεί τις συνθήκες

(13) $$u(R,\theta,z) = u_1 \ , \qquad u(r,\theta,0) = u(r,\theta,L) = 0 \ , \qquad u_1 = \text{σταθ.}$$
$$u(r,\theta,z) = u(r,\theta+2\pi,z) \quad .$$

(*) Οι συντελεστές της σειράς

(α) $$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_n J_\nu(\alpha_{\nu n} r/R) \quad ,$$

όπου οι αριθμοί

$$0<\alpha_{\nu 1}<\alpha_{\nu 2}<\ldots<\alpha_{\nu n}<$$

είναι ρίζες της εξίσωσης

$$C_1 J_\nu(\alpha)+C_2\alpha J_\nu'(\alpha) = 0 \quad ,$$

δίνονται από τον τύπο

(β) $$A_n = \frac{2}{R^2\{J_\nu'^2(\alpha_{\nu n})+(1-\nu^2/\alpha_{\nu n}^2)J_\nu^2(\alpha_{\nu n})\}} \int_0^R rf(r)J_\nu(\alpha_{\nu n} r/R)dr \ .$$

Η σειρά (α) με συντελεστές που δίνονται από τον τύπο (β) λέγεται σειρά Dini (βλέπε Lebedev (1972) σελ. 128-130). Για τις συνθήκες σύγκλισης της (α) βλέπε Watson (1944), σελ. 591) , Tolstov (1976, σελ. 237-243).

Με την εισαγωγή της $u=W(r)Z(z)$ (αξονική συμμετρία) παίρνουμε

$$
(14) \quad \begin{aligned} &Z,_{zz} = \lambda_1 Z \\ &(rW,_r),_r + \lambda_1 rW = 0 \quad . \end{aligned}
$$

Από την (14α), έχουμε

$$
(15) \qquad \lambda_1 = -n^2\pi^2/L^2 \quad , \qquad n=1,2,3,\ldots
$$

και η (14β) παίρνει τη μορφή

$$
(16) \qquad (rW,_r),_r - \frac{n^2\pi^2}{L^2}\, rW = 0 \quad .
$$

Οι λύσεις της (16) είναι

$$
(17) \qquad W_n(r) = A_n I_0\left(\frac{n\pi r}{L}\right) + B_n K_0\left(\frac{n\pi r}{L}\right) \quad , \qquad n=1,2,3,\ldots
$$

Επειδή όμως $K_0 \to \infty$ για $r \to 0$, πρέπει $B_n = 0$ και η λύση του προβλήματος θα είναι

$$
(18) \qquad u(r,\theta,z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi z}{L}\, I_0\left(\frac{n\pi r}{L}\right) \quad .
$$

Οι συντελεστές A_n προσδιορίζονται από τη συνοριακή συνθήκη

$$
(19) \qquad u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi z}{L}\, I_0\left(\frac{n\pi R}{L}\right)
$$

και είναι

$$
A_n = \frac{4u_1}{n\pi I_0\left(\frac{n\pi R}{L}\right)} \quad , \qquad n=1,3,5,\ldots \quad .
$$

Η λύση λοιπόν του προβλήματος γράφεται

$$
u(r,\theta,z) = \frac{4u_1}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n}\, \frac{I_0(n\pi r/L)\sin(n\pi z/L)}{I_0(n\pi R/L)} \quad .
$$

2.5.3. Θερμοκρασιακή κατανομή σε στερεά σφαίρα.

Μία στερεά σφαίρα ακτίνας R έχει μια αρχική κατανομή θερμοκρασίας $u=f(r)$ και ψύχεται η επιφάνειά της σύμφωνα με το νόμο ψύξης του Newton

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial r}+(u-u_1)h\Big|_{r=R}=0 \quad , \qquad h=\sigma\tau\alpha\vartheta.$$

όπου u_1 είναι η θερμοκρασία του περιβάλλοντος μέσου. Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη θερμοκρασία στο εσωτερικό της σφαίρας.

Η θερμοκρασιακή κατανομή $u(r,\phi,\theta;t)$ ικανοποιεί την εξίσωση αγωγής της θερμότητας

$$(2) \qquad \nabla^2 u=\frac{1}{\kappa}\frac{\partial u}{\partial t} \ .$$

Επειδή ή u πρέπει να έχει σφαιρική συμμετρία θα έχουμε $u=u(r,t)$. Αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών $u=W(r)T(t)$ στην (2), παίρνουμε

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\dot{T}=-\kappa\lambda^2 T \\ &\frac{1}{r^2}(r^2 W_{,r})_{,r}+\lambda^2 W=0 \quad , \qquad \lambda\neq 0 \ . \end{aligned}$$

Οι λύσεις των (3) είναι

$$T(t)=e^{-\kappa\lambda^2 t} \quad , \qquad W(r)=j_0(\lambda r)=\frac{\sin\lambda r}{\lambda r} \ .$$

Οι τιμές που μπορεί να πάρει η παράμετρος λ προσδιορίζονται από τη συνοριακή συνθήκη (1) η οποία είναι μη-ομογενής, δηλαδή

$$(4) \qquad \frac{\partial u}{\partial r}+hu=hu_1=\sigma\tau\alpha\vartheta.$$

Αν εισάγουμε τη νέα μεταβλητή $\upsilon=u-u_1$, τότε η υ ικανοποιεί την (2) και η (1) γράφεται

$$(5) \qquad \frac{\partial \upsilon}{\partial r}+h\upsilon\Big|_{r=R}=0 \ .$$

Αν εισάγουμε τη λύση της (3β) στην (5) παίρνουμε

$$(6) \qquad -\frac{\sin\lambda R}{\lambda R^2}+\frac{\cos\lambda R}{R}+h\frac{\sin\lambda R}{\lambda R}=0 \quad .$$

Η εξίσωση (6) για $hR\neq 1$ γράφεται

$$(7) \qquad \frac{\tan\lambda R}{\lambda R}=\frac{1}{(1-hR)}$$

και μπορεί να λυθεί αριθμητικά.

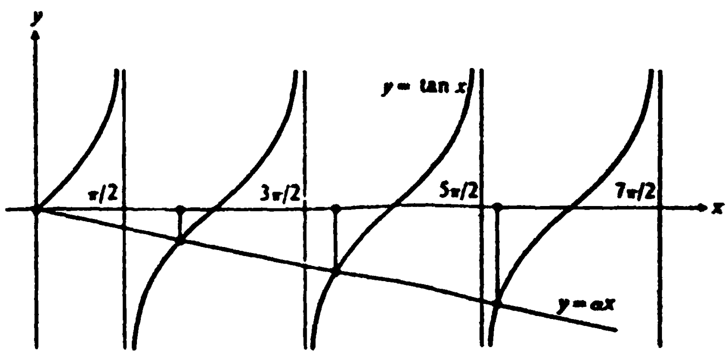
Η (6) για $hR=1$ ανάγεται στην

$$(8) \qquad \cos\lambda R=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=n\pi/2R \ , \qquad n=1,3,5,\ldots \quad .$$

Οι ρίζες της (7) μπορούν να προσδιοριστούν και γραφικά. Αν θέσουμε $x=\lambda R$, $(1-hR)^{-1}=\alpha$ η (7) γράφεται

$$(9) \qquad y=\tan x=\alpha x \quad .$$

Από τις αλληλοτομίες των καμπυλών $y=\tan x$ και $y=\alpha x$ (σχ.1) προσδιορίζονται οι ζητούμενες ρίζες της (7) που είναι οι ιδιοτιμές του εξεταζόμενου προβλήματος.



Σχ.1 : Ρίζες της (7) .

Η λύση του προβλήματος μπορεί τώρα να γραφτεί με τη μορφή σειράς

$$(10) \qquad \upsilon(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin\lambda_n r}{\lambda_n r} e^{-\kappa\lambda^2{}_n t} \quad .$$

Οι συντελεστές A_n προσδιορίζονται από την αρχική συνθήκη

$$(11) \qquad f(r)-u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin\lambda_n r}{\lambda_n r} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n j_0(\lambda_n r) \quad .$$

'Οπως μπορεί πολύ εύκολα να διαπιστωθεί, οι συναρτήσεις $j_0(\lambda_n r)$ είναι ορθογώνιες στο διάστημα $[0,R]$ με συνάρτηση βάρους r^2 και κατά συνέπεια έχουμε

$$(12) \qquad \int_0^R \{f(r)-u_1\} r^2 j_0(\lambda_n r)dr = A_n \int_0^R r^2 j_0^2(\lambda_n r)dr$$

$$= A_n \int_0^R r^2 \frac{\sin^2\lambda_n r}{\lambda_n^2 r^2} dr = \frac{1}{\lambda_n^2} A_n \int_0^R \sin^2\lambda_n r dr$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^2} A_n \{\frac{r}{2} - \frac{\sin 2\lambda_n r}{4\lambda_n}\}\Big|_0^R = \frac{1}{4\lambda_n^3} A_n \{2\lambda_n R - \sin 2\lambda_n R\} \quad .$$

Από την (12) προσδιορίζονται οι συντελεστές A_n και η λύση του προβληματος είναι

$$u(r,t) = u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\lambda_n^3 \int_0^R \{f(r)-u_1\} r^2 j_0(\lambda_n r)dr}{2\lambda_n R - \sin 2\lambda_n R} \frac{\sin\lambda_n r}{\lambda_n R} e^{-\kappa\lambda_n^2 t} \quad .$$

2.5.4. <u>Διάθλαση από αγώγιμο κύλινδρο.</u>

Ας θεωρήσουμε τη <u>διάθλαση</u> (diffraction) επίπεδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος από ένα αγώγιμο κυκλικό κύλινδρο ακτίνας R . Θα υποθέσουμε ότι ο άξονας z συμπίπτει με τον άξονα του κυλίνδρου και ότι η γωνία θ στο σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων (r,θ,z) μετριέται από τη διεύθυνση διάδοσης του προσπίπτοντος (incident) κύματος. Θα υποθέσουμε ακόμα ότι η χρονική εξάρτηση περιγράφεται από τον παράγοντα $e^{i\omega t}$, όπου ω είναι η γωνιακή συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας και ότι το ηλεκτρικό διάνυσμα του προσπίπτοντος κύματος είναι παράλληλο προς τον άξονα του κυλίνδρου. Το πρόβλημα τότε ανάγεται στην εύρεση του μιγαδικού πλάτους του δευτερεύοντος πεδίου E που ικανοποιεί την εξίσωση του Helmholtz , δηλαδή

$$(1) \qquad \frac{1}{r}(rE,_r),_r + \frac{1}{r^2}E,_{\theta\theta} + k^2E = 0 \quad ,$$

τη συνοριακή συνθήκη

$$(2) \qquad E\big|_{r=R} + E_0 e^{-ikR\cos\theta} = 0$$

και τις συνθήκες ακτινοβολίας (radiation conditions)

$$(3) \qquad E = O(r^{-1/2}) \quad , \qquad \lim_{r\to\infty} r^{1/2}(E,_r + ikE) = 0$$

όπου $k=\omega/c$ είναι ο κυματαριθμός και E_0 είναι το πλάτος του προσπίπτοντος κύματος (βλέπε Tikhonov and Samarski (1959),σελ. 497).

Με την εφαρμογή της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών καταλήγουμε στο συμπερασμα ότι, οι μερικές λύσεις της (1) (περιοδικές ως προς θ) είναι της μορφής

$$(4) \qquad E_n = \{A_n H_n^{(1)}(kr) + B_n H_n^{(2)}(kr)\} \begin{matrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{matrix} \qquad n=0,1,2,\ldots$$

όπου $H_n^{(i)}(kr)$, $i=1,2,$, είναι οι συναρτήσεις Hankel (Γ .2.2 σελ. 99, εξ.22). Από τη συνθήκη συμμετρίας βγαίνει το συμπέρασμα ότι , E είναι μια άρτια συνάρτηση και κατά συνέπεια πρέπει να θεωρήσουμε λύσεις της (1) μόνο εκείνες που περιέχουν $\cos n\theta$. Αν λάβουμε υπόψη μας την ασυμπτωτική συμπεριφορά των συναρτήσεων Hankel στο άπειρο θα δούμε ότι , οι συνθήκες ακτινοβολίας θα ικανοποιούνται μόνο αν $A_n=0$ (αυτό από φυσική σκοπία ερμηνεύεται ότι δεν έχουμε εισερχόμενα (incoming) κύματα). Η λύση λοιπόν του προβλήματός μας θα έχει τη μορφή

(5) $$E=\sum_{n=0}^{\infty} B_n H_n^{(2)}(kr)\cos n\theta \quad .$$

Αν εισάγουμε την (5) στη συνοριακή συνθήκη (2) , παίρνουμε

(6) $$\sum_{n=0}^{\infty} B_n H_n^{(2)}(kR)\cos n\theta+E_0 e^{-ikR\cos\theta}=0 \quad .$$

Αν στη γεννήτρια συνάρτηση

$$e^{x(t-1/t)/2}=J_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)\{t^n+(-1)^n t^{-n}\}$$

θέσουμε $x=kR$ και $t=-ie^{i\theta}$, θα πάρουμε

(7) $$e^{-ikR\cos\theta}=J_0(kR)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n J_n(kR)\cos n\theta \quad .$$

Από τις (6) και (7) έχουμε

$$B_0 H_0^{(2)}(kR)=-E_0 J_0(kR)$$

και

$$B_n H_n^{(2)}(kR)=-2E_0(-i)^n J_n(kR) \quad .$$

Η λύση λοιπόν του προβλήματος είναι

(8) $$E=-E_0\left\{\frac{J_0(kR)}{H_0^{(2)}(kR)}\,H_0^{(2)}(kr)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n\,\frac{J_n(kR)}{H_n^{(2)}(kR)}\,H_n^{(2)}(kr)\cos n\theta\right\}.$$

Προβλήματα

1. Να αποδειχτεί ότι

α. $$\int_0^{\infty} J_n(\alpha x)\,dx=\frac{1}{\alpha} \quad , \qquad n>-1$$

β. $$\int_0^{\infty} J_n(\alpha x)\,\frac{dx}{x}=\frac{1}{\alpha} \quad , \qquad n=1,2,3,\ldots$$

γ. $\int_0^\infty e^{-\alpha x} J_0(\beta x)dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$,

δ. $\int_0^\infty e^{-\alpha x} J_1(\beta x)dx = \frac{1}{\beta}\left(1-\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)$

ε. $\int_0^\infty J_n(\alpha x)\sin\beta x dx$

$$= \begin{cases} \dfrac{\sin(n\sin^{-1}(\beta/\alpha))}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}} & 0<\beta<\alpha \\ \dfrac{\alpha^n\cos(n\pi/2)}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha^2})^n} & 0<\alpha<\beta \end{cases} \qquad n>-2$$

στ. $\int_0^\infty J_n(\alpha x)\cos\beta x dx$

$$= \begin{cases} \dfrac{\cos(n\cos^{-1}(\beta/\alpha))}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}} & 0<\beta<\alpha \\ \dfrac{-\alpha^n\sin(n\pi/2)}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha^2})^n} & 0<\alpha<\beta \end{cases} \qquad n>-1$$

ζ. $$\int_0^\infty \frac{J_m(x)J_n(x)}{x}dx = \begin{cases} \dfrac{2}{(m^2-n^2)\pi}\sin\dfrac{(m-n)\pi}{2} & m\neq n \\ & m+n>0 \\ \dfrac{1}{\alpha m} & m=n \end{cases}$$

2. Η γεννήτρια συνάρτηση (βλέπε Γ. 2.1, σελ.16) , αν θέσουμε $t=e^{i\theta}$, παίρνει τη μορφή

(α) $e^{ixsin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{-\infty} e^{im\theta} J_m(x)$.

Να αποδειχτεί με βάση την (α) η ολοκληρωτική έκφραση της $J_m(x)$, (β) $J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ix\sin\theta} e^{-im\theta} d\theta$.

Επειδή $J_m(x)$ είναι πραγματική συνάρτηση , παίρνουμε το συμπέρασμα

$$J_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\cos m\theta d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x\sin\theta)\sin m\theta d\theta .$$

Να αποδειχτεί ότι , η $J_m(x)$ είναι άρτια ή περιττή αν m είναι άρτιος ή περιττός αριθμός , αντίστοιχα . Από το γεγονός αυτό να αποδειχτεί ότι

$$J_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\cos m\theta d\theta , & m=\text{άρτιος} \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x\sin\theta)\sin m\theta d\theta , & m=\text{περιττός} \end{cases} .$$

3. Να διαπιστωθεί ότι

(α) $\int_0^x J_v(t)dt = 2 \sum_{k=0}^{\infty} J_{v+2k+1}(x)$, $\mathrm{Re}v>-1$.

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθούν οι αναγωγικές σχέσεις για τις J_v και να αποδειχτεί ότι και τα δύο μέρη της (α) έχουν την ίδια παράγωγο.

4. Να αποδειχτεί ότι

(α) $\int_0^{\infty} \frac{J_v(x)}{x^{\mu}} dx = \frac{\Gamma(\frac{v+1-\mu}{2})}{2^{\mu}\Gamma(\frac{v+1+\mu}{2})}$, $\mathrm{Re}\mu>1/2$, $\mathrm{Re}(v-\mu)>-1$.

(β) $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} J_v(bx)dx = \frac{\{(\alpha^2+b^2)^{1/2}-\alpha\}^v}{b^v(\alpha^2+b^2)^{1/2}}$, $\mathrm{Re}v\ -1$, $\alpha>0$, $b>0$

5. Να αποδειχτεί ότι οι συντελεστές της σειράς

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_m(\alpha_{mn} \frac{r}{R}) , \qquad m\geq 1 ,$$

όπου α_{mn} είναι η n-στή ρίζα της $J_m'(x)=0$, είναι

$$A_n = \frac{2\int_0^R f(r)J_m(\alpha_{mn}r/R)dr}{R^2\{1-m^2/\alpha_{mn}^2\}J_m^2(\alpha_{mn})} , \qquad m>1 .$$

6. Να αποδειχτεί ότι

$$K_n(x)I_n'(x)-K_n'(x)I_n(x)=\frac{1}{x} , \qquad x\neq 0 .$$

7. Να αποδειχτεί ότι οι συναρτήσεις

$$Ai(x) = \frac{x^{1/2}}{3}\{I_{-1/3}(\frac{2x^{3/2}}{3})-I_{1/3}(\frac{2x^{3/2}}{3})\}$$

$$\equiv \frac{1}{\pi}(\frac{x}{3})^{1/2}K_{1/3}(\frac{2x^{3/2}}{3})$$

$$Bi(x) = (\frac{x}{3})^{1/2}\{I_{-1/3}(\frac{2x^{3/2}}{3})+I_{1/3}(\frac{2x^{3/2}}{3})\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$u''-xu=0 .$$

Παρατήρηση: Οι συναρτήσεις $A_i(x)$ και $B_i(x)$ λέγονται συναρτήσεις Airy. Για μιγαδικές τιμές της x , $|\arg x|<\frac{2\pi}{3}$.

8. Να αποδειχτεί ότι

$$Ai(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{3k}}{3^{2k+2/3}k!(k+2/3)} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{3k+1}}{3^{2k+4/3}k!(k+4/3)} , \qquad |x|<\infty$$

$$Bi(x) = 3^{1/2}\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{3k}}{3^{2k+2/3}k!\Gamma(k+2/3)} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{3k+1}}{3^{2k+4/3}k!\Gamma(k+4/3)} .$$

9. Να αποδειχτεί ότι

(α) $e^{i\xi x} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell}(2\ell+1)j_{\ell}(\xi)P_{\ell}(x)$.

Υπόδειξη : Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int_{-1}^{+1} e^{i\xi x} P_{\ell}(x)dx$$

να αναπτυχτεί η $e^{i\xi x}$ σε δυνάμεις της x , οπότε έχουμε να υπολογίσουμε ολοκληρώματα της μορφής $\int_{-1}^{+1} x^m P_{\ell}(x)dx$,

$$\left(\int_0^{+1} x^m P_{\ell}(x)dx = \frac{m(m-1)\ldots(m-\ell+2)}{(m+\ell+1)(m+\ell-1)\ldots(m-\ell+3)}\,, \qquad m \geq \ell\,, \qquad \ell \geq 2\right).$$

10. Η Wronskian ενός ζεύγους λύσεων $u_1(x)$, $u_2(x)$ μιας γραμμικής και ομογενούς διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης είναι

$$W\{u_1(x), u_2(x)\} = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix} .$$

Να αποδειχτεί ότι

$$W\{J_\nu(x)\ ,\ J_{-\nu}(x)\} = \frac{-2\sin\nu\pi}{\pi x}$$

$$W\{J_\nu(x)\ ,\ Y_\nu(x)\} = \frac{2}{\pi x}$$

$$W\{J_\nu(x)\ ,\ H_\nu^{(2)}(x)\} = -\frac{2i}{\pi x}$$

$$W\{H_\nu^{(1)}(x),\ H_\nu^{(2)}(x)\} = -\frac{4i}{\pi x}$$

$$W\{I_\nu(x),\ K_\nu(x)\} = -\frac{1}{x} .$$

11. Να αποδειχτεί ότι

$$\int_0^{\infty} J_\nu(Rx)J_\nu(R'x)\cdot x\,dx = \frac{1}{R}\,\delta(R-R')$$

όπου $\delta(R-R')$ είναι η συνάρτηση του Dirac (βλ. Morse and Feshbach, Sect. 6.3).

ΚΕΦ. Δ.

Ορθογωνια πολυωνυμα

Μια σπουδαία κλάση ορθογωνίων συστημάτων συνίσταται από ορθογώνια πολυώνυμα $P_n(x)$, $n=1,2,3,\ldots$, όπου n είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $P_n(x)$. Η κλάση αυτή περιλαμβάνει πολλές σπουδαίες συναρτήσεις που εμφανίζονται στις εφαρμογές π.χ. τα πολυώνυμα Legendre , Chebyshev , Jacobi , Laguerre και Hermite. Οι συναρτήσεις αυτές έχουν εκτός από την ιδιότητα της ορθογωνικότητας, πολλές άλλες σπουδαίες ιδιότητες. Για παράδειγμα , οι συναρτήσεις αυτές είναι λύσεις απλών διαφορικών εξισώσεων και μπορούν ακόμα να οριστούν σαν οι συντελεστές της ανάπτυξης σε δυναμοσειρές του t κάποιων συναρτήσεων $w(x,t)$ που λέγονται γεννήτριες συναρτήσεις . Τα ορθογώνια πολυώνυμα είναι ένα σημαντικό μαθηματικό εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων της μαθηματικής φυσικής , της θεωρίας προσεγγίσεων κ.τ.λ.

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια ανάπτυξη της θεωρίας των πολυωνύμων Legendre και στη συνέχεια δίνονται οι απαραίτητες πληροφορίες για τα πολυώνυμα Chebyshev , Jacobi , Laguerre και Hermite , όπως επίσης και οι μεταξύ τους σχέσεις , ώστε ο αναγνώστης να είναι σε θέση να τα χρησιμοποιήσει για τη λύση διαφόρων προβλημάτων. Για μια πληρέστερη ενημέρωση στο αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου ο αναγνώστης παραπέμπεται στην αναφερόμενη στο κείμενο ειδική βιβλιογραφία.

1. Πολυώνυμα Legendre

Τα πολυώνυμα Legendre ορίζονται από τον τύπο του Rodrigues ,

(1) $$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \quad , \qquad n=0,1,2,\ldots$$

για πραγματικές ή μιγαδικές τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x . Τη γενική έκφραση για τα πολυώνυμα $P_n(x)$ παίρνουμε από τον τύπο (1) , με τη χρήση της διωνυμικής ανάπτυξης

(2) $$(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{M} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!} x^{2n-2k} \quad ,$$

και είναι

(3) $$P_n(x) = \sum_{k=0}^{M} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$$

όπου $M=n/2$ ή $(n-1)/2$ (όποιος από τους δύο είναι ακέραιος).

Οι ιδιότητες των πολυωνύμων $P_n(x)$ μπορούν να οριστούν πολύ απλά αν αποδείξουμε ότι η συνάρτηση

(4) $$w(x,t) = (1-2xt+t^2)^{-1/2} \quad ,$$

όπου η τιμή της τετραγωνικής ρίζας της (4) λαμβάνεται ίση με 1 για $t=0$, είναι η γεννήτρια συνάρτηση των πολυωνύμων Legendre , δηλαδή ότι , η ανάπτυξη

(5) $$w(x,t) = (1-2xt+t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

ισχύει για ικανοποιητικά μικρές τιμές της $|t|$. Ας υποθέσουμε ότι r_1 και r_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης

(6) $$1-2xt+t^2 = 0 \quad , \qquad r = \min\{|r_1|,|r_2|\} \; .$$

Αν θεωρήσουμε την $w(x,t)$ σαν συνάρτηση του t αυτή είναι αναλυτική για $|t|<r^{(*)}$. Από τη μιγαδική ανάλυση ξέρουμε ότι

$$(7) \qquad w(x,t) = (1-2xt+x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x)t^n \quad , \qquad |t|<r \quad ,$$

όπου

$$(8) \qquad c_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_c (1-2xt+x^2)^{-1/2}t^{-n-1}dx$$

και c είναι ένας κλειστός δρόμος που περιβάλλει το σημείο $t=0$ και βρίσκεται στο εσωτερικό του δίσκου $|t|<r$. Αν κάνουμε την αντικατάσταση

$$(9) \qquad 1-ut = (1-2xt+t^2)^{1/2} \quad ,$$

τότε η (8) μετασχηματίζεται στο ακόλουθο ολοκλήρωμα , που υπολογίζεται κατά μήκος του κλειστού δρόμου c' που περιβάλλει το σημείο $u=x$,

$$(10) \qquad c_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c'} \frac{(u^2-1)^n}{2^n(u-x)^{n+1}}\,du \quad .$$

Το ολοκλήρωμα (10) μπορεί να υπολογιστεί με τη θεωρία των ολοκληρωτικών υπολοίπων (residue theory) δηλαδή ,

$$(11) \qquad c_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left\{\frac{d^n(u^2-1)^n}{du^n}\right\}_{u=x} \equiv P_n(x)$$

και κατά συνέπεια η $w(x,t)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση των πολυωνύμων του Legendre.

Από την (5), για $x=1$, -1 , 0 και ανάπτυξη του αριστερού μέρους σε δυνάμεις του t , παίρνουμε

$$(12) \qquad \begin{aligned} &P_n(1) = 1 \ , \quad P_n(-1) = (-1)^n \ , \\ &P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n} \ , \qquad P_{2n+1}(0) = 0 \ . \end{aligned}$$

(*) Από πρακτική σκοπιά $x\in[-1,1]$ και τότε $r=1$.

Αν εισάγουμε τη σειρά (5) στην ταυτότητα

$$(13) \qquad (1-2xt+t^2)\frac{\partial w}{\partial t}+(t-x)w=0 \quad ,$$

έχουμε

$$(14) \qquad (1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}+(t-x)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n=0 \quad .$$

Από την (14) παίρνουμε την αναγωγική σχέση

$$(15) \qquad (n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0 \quad , \quad n=1,2,3,\ldots \quad .$$

Με παρόμοιο τρόπο , από την ταυτότητα

$$(16) \qquad (1-2xt+t^2)\frac{\partial w}{\partial x}-tw=0 \quad ,$$

παίρνουμε

$$(17) \qquad P'_{n+1}(x)-2xP'_n(x)+P'_{n-1}(x)-P_n(x)=0 \quad , \quad n=1,2,3,\ldots \quad .$$

Από τις (15) και (17), με απλή αλγεβρική διαδικασία, καταλήγουμε στις ακόλουθες αναγωγικές σχέσεις

$$(18) \qquad \begin{aligned} &P'_{n+1}(x)-xP'_n(x)=(n+1)P_n(x) \quad , && n=0,1,2,3,\ldots \\ &xP'_n(x)-P'_{n-1}(x)=nP_n(x) \quad , && n=1,2,3,\ldots \end{aligned}$$

$$(19) \qquad P'_{n+1}(x)P'_{n-1}(x)=(2n+1)P_n(x) \quad , \quad n=1,2,3,\ldots \quad .$$

Αν στην (18α) κάνουμε την αντικατάσταση $n\to(n-1)$ και από την εξίσωση που θα προκύψει και την (18β) απαλείψουμε το $P'_{n-1}(x)$ θα πάρουμε

$$(20) \qquad (1-x^2)P'_n(x)=nP_{n-1}(x)-nxP_n(x) \quad , \quad n=1,2,\ldots \quad .$$

Αν τώρα παραγωγίσουμε ως προς x την (20) και χρησιμοποιήσουμε την

(18β) για να απαλείψουμε το $P'_{n-1}(x)$, θα καταλήξουμε στη σχέση

(21) $$((1-x^2)P'_n(x))'+n(n+1)P_n(x)=0 \quad , \qquad n=0,1,2,...$$

από την οποία παίρνουμε την πληροφορία ότι τα πολυώνυμα Legendre είναι μερικές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

(22) $$((1-x^2)y')'+n(n+1)y=0$$

που είναι γνωστή σαν εξίσωση του Legendre (A.2.18, Γ.1.20).

Μια από τις πιο σπουδαίες ιδιότητες των πολυωνύμων Legendre είναι η ορθογωνικότητά τους στο διάστημα $[-1,1]$. Αν τη διαφορική εξίσωση (21) για το $P_n(x)$ την πολλαπλασιάσουμε με το $P_m(x)$ και την αφαιρέσουμε από την εξίσωση (21) για το $P_m(x)$ πολλαπλασιασμένη με το $P_n(x)$, θα πάρουμε

(23) $$\{(1-x^2)(P'_m(x)P_n(x)-P'_n(x)P_m(x))\}'+(m-n)(m+n+1)P_m(x)P_n(x)=0 \ .$$

Η (23) , μετά από ολοκλήρωση στο διάστημα $[-1,1]$, μας δίνει

$$(m-n)(m+n+1)\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=0$$

και

(24) $$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=0 \ , \quad \text{για} \quad m\neq n$$

Τα πολυώνυμα Legendre είναι ορθογώνια με συνάρτηση βάρους $w(x)=1$.

Η ιδιότητα της ορθογωνικότητας των $P_n(x)$ παίζει σπουδαίο ρόλο, όπως θα δούμε στα επόμενα , στην ανάπτυξη συναρτήσεων σε σειρές πολυωνύμων Legendre.

Αν την (15) για $n\to n-1$ την πολλαπλασιάσουμε με $(2n+1)P_n(x)$ και την αφαιρέσουμε από την (15) πολλαπλασιασμένη με $(2n-1)P_{n-1}(x)$, θα πάρουμε

$$n(2n+1)P_n^2(x)+(n-1)(2n+1)P_{n-2}(x)P_n(x)-$$

$$-(n+1)(2n-1)P_{n-1}(x)P_{n+1}(x)-n(2n-1)P^2_{n-1}(x)=0 \quad ,$$

που μετά από ολοκλήρωση στο διάστημα $[-1,1]$ οδηγεί στην

$$(25) \qquad \int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{1} P^2_{n-1}(x)dx \quad , \qquad n=2,3,\ldots \quad .$$

Μετά από επαναλαμβανόμενη εφαρμογή της (25) παίρνουμε

$$(26) \qquad \int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{3}{2n+1}\int_{-1}^{1} P_1^2(x)dx = \frac{2}{2n+1} \quad .$$

Η (26) , με άμεσο υπολογισμό του ολοκληρώματος του πρώτου μέρους, ισχύει επίσης και για $n=0,1$ και κατά συνέπεια έχουμε

$$(27) \qquad \int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1} \quad , \qquad n=0,1,2,\ldots$$

και οι συναρτήσεις

$$(23) \qquad \phi_n(x) = \sqrt{n+1/2}\; P_n(x) \quad , \qquad n=0,1,2,\ldots$$

αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύνολο στο διάστημα $[-1,1]$.

Το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του πολυωνύμου $P_n(\cos\theta)^{(*)}$, $x=\cos\theta$, είναι

$$(29) \qquad P_n(\cos\theta) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin\theta}}\,\sin\{(n+1/2)\theta+\frac{\pi}{4}\} \quad , \quad n\to\infty \quad , \quad \theta\in[\delta,\pi-\delta]$$

όπου δ είναι ένας σταθερός θετικός αριθμός.

Στις εφαρμογές είναι πολύ συχνά αναγκαίο να αναπτύξουμε μια δοσμένη πραγματική συνάρτηση $f(x)$, $x\in(-1,1)$ σε σειρά πολυωνύμων του Legendre , δηλαδή

(*) βλέπε Lebedev (1972) , σελ. 51-53 .

$$(30) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \quad .$$

Οι συντελεστές c_n υπολογίζονται με βάση τη σχέση ορθογωνικότητας των $P_n(x)$. Αν πολλαπλασιάσουμε την (30) με $P_m(x)$ και ολοκληρώσουμε στο διάστημα $[-1,1]$ θα πάρουμε

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2m+1}\, c_m$$

και

$$(31) \qquad c_n = (n+\frac{1}{2})\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx \,, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Το αν η συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά της μορφής (30) δεν είναι προκαταβολικά γνωστό, όπως επίσης δεν είναι γνωστό ότι είναι επιτρεπτή η κατά όρο ολοκλήρωση που χρησιμοποιήθηκε στον προσδιορισμό των c_n .

Θ ε ώ ρ η μ α 1 : Αν η πραγματική συνάρτηση $f(x)$ είναι κατά τμήματα λεία στο διάστημα $(-1,1)$ και αν το ολοκλήρωμα

$$(32) \qquad \int_{-1}^{1} f^2(x)dx$$

είναι πεπερασμένο , τότε η σειρά (30) , με συντελεστές c_n που υπολογίζονται από την (31), συγκλίνει στην $f(x)$ σε κάθε σημείο που η $f(x)$ είναι συνεχής.

Η απόδειξη του θεωρήματος βασίζεται στο ακόλουθο λήμμα(*): Αν η πραγματική συνάρτηση $\phi(x)$ είναι κατά τμήματα συνεχής στο διάστημα $(-1,1)$ και αν το ολοκλήρωμα

$$(33) \qquad \int_{-1}^{1} \phi^2(x)dx$$

(*) Για την απόδειξη βλέπε Lebedev (1972) σελ. 54-57 .

είναι πεπερασμένο , τότε

(34) $$\lim_{n\to\infty} (n+1/2)^{1/2}\int_{-1}^{1} \phi(x)P_n(x)dx = 0 \ .$$

Στην περίπτωση που το x είναι σημείο ασυνέχειας της $f(x)$ (και ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος 1) η σειρά (30) συγκλίνει στο όριο

(35) $$\lim_{m\to\infty} S_m(x) = \frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\} \ ,$$

όπου

$$S_m(x) = \sum_{n=0}^{m} c_nP_n(x) \ .$$

Το θεώρημα 1 μας δίνει ικανές συνθήκες για την ανάπτυξη της $f(x)$ σε σειρά της μορφής (30). Ένα θεώρημα που ισχύει για μια ευρύτατη κλάση συναρτήσεων αναφέρεται στο βιβλίο του Hobson (1931, σελ.39) .

Παράδειγμα 1 . Αν υποθέσουμε ότι η $f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο m-βαθμού

(36) $$f(x) = \sum_{n=0}^{m} \alpha_n x^n \ ,$$

τότε η (30) παίρνει τη μορφή

(37) $$f(x) = \sum_{n=0}^{m} c_nP_n(x) \ .$$

Στην περίπτωση αυτή δεν είναι ανάγκη να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα (31), αφού οι συντελεστές c_n μπορούν πολύ εύκολα να υπολογιστούν λύνοντας ένα σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων που λαμβάνεται με την αντικατάσταση των εκφράσεων για τα πολυώνυμα $P_n(x)$ στην (37) και την εξίσωση των συντελεστών ίσων δυνάμεων της x του αριστερού και δεξιού μέρους της (37) . Για παράδειγμα ,

$$x^2 = c_0P_0(x)+c_1P_1(x)+c_2P_2(x) = c_0+c_1x+\frac{1}{2}c_2(3x^2-1) \ .$$

και

$$c_0=\frac{1}{3}\ ,\quad c_1=0\ ,\quad c_2=\frac{2}{3}\ ,\ \Rightarrow\ x^2=\frac{1}{3}P_0(x)+\frac{2}{3}P_2(x)\quad .$$

<u>Παράδειγμα 2</u>. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τη συνάρτηση

(38) $$f(x)=\begin{cases} 0 & x\in[-1,\alpha) \\ 1 & x\in(\alpha,1]\ . \end{cases}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα 1, η $f(x)$ μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά της μορφής (30) με συντελεστές

(39) $$c_n=(n+\frac{1}{2})\int_\alpha^1 P_n(x)dx\ .$$

Αν εισάγουμε την (19) στην (39) και λάβουμε υπόψη ότι $P_n(1)=1$, έχουμε

(40) $$c_n=-\frac{1}{2}\{P_{n+1}(\alpha)-P_{n-1}(\alpha)\}\quad ,\qquad c_0=\frac{1}{2}(1-\alpha)$$

και

(41) $$f(x)=\frac{1}{2}(1-\alpha)-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\{P_{n+1}(\alpha)-P_{n-1}(\alpha)\}P_n(x)\quad ,\qquad x\in(-1,1)\ .$$

Στο σημείο ασυνέχειας $x=\alpha$ θα πρέπει να ισχύει η (35). Αν με $S_m(x)$ συμβολίσουμε το άθροισμα των $m+1$ -όρων της σειράς (41) θα έχουμε

(42) $$S_m(\alpha)=\frac{1}{2}(1-\alpha)-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\{P_{n+1}(\alpha)P_n(\alpha)-P_n(\alpha)P_{n-1}(\alpha)\}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}P_{m+1}(\alpha)P_m(\alpha)\quad .$$

Από την (29) έχουμε

$$P_n(\alpha)\to 0\qquad \text{για}\qquad n\to\infty$$

και κατά συνέπεια

$$\lim_{m\to\infty} S_m(\alpha) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\{f(\alpha+0)+f(\alpha-0)\} .$$

Παράδειγμα 3. Η συνάρτηση

$$f(x) = \left(\frac{1-x}{2}\right)^{1/2} \tag{43}$$

ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος 1 και κατά συνέπεια μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά της μορφής (30). Αν πολλαπλασιάσουμε την (5) με την $f(x)$ και την ολοκληρώσουμε στο διάστημα $[-1,1]$ θα πάρουμε

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2t}\{1+t-\frac{(1-t)^2}{2\sqrt{t}}\ln\frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-1}^{1} \left(\frac{1-x}{2}\right)^{1/2} P_n(x)dx \quad , \qquad |t|<1 \quad , \end{aligned} \tag{44}$$

όπου η κατά όρο ολοκλήρωση δικαιολογείται από την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς (30) στο διάστημα $[-1,1]$. Αν αναπτύξουμε το αριστερό μέρος της (44) σε δυνάμεις της t θα πάρουμε(*)

$$\frac{4}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(4n^2-1)(2n+3)} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-1}^{1} \left(\frac{1-x}{2}\right)^{1/2} P_n(x)dx$$

και κατά συνέπεια

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{1-x}{2}\right)^{1/2} P_0(x)dx = \frac{4}{3} \quad , \quad \int_{-1}^{1} \left(\frac{1-x}{2}\right)^{1/2} P_n(x)dx = -\frac{4}{(4n^2-1)(2n+3)} . \tag{45}$$

Αν κάνουμε χρήση των (31) και (45), η συνάρτηση $f(x)$ γράφεται

$$f(x) = \left(\frac{1-x}{2}\right)^{1/2} = \frac{2}{3}P_0(x) - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(x)}{(2n-1)(2n+3)} \quad , \qquad x\in(-1,1) .$$

(*) $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\{\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots\} \quad , \qquad |x|<1$

Η k-ρίζα του $P_n(x)$ είναι·

$$x_k^{(n)} = 1 - \frac{j_{0,k}^2}{2n^2}\{1 - \frac{1}{n} + \mathcal{O}(n^{-2})\} ,$$

όπου $j_{0,k}$ είναι η k-θετική ρίζα της $J_0(x)$.

2. Πολυώνυμα Chebyshev

Το n-στό πολυώνυμο Chebyshev $T_n(x)$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωση

(1) $$(1-x^2)T_n'' - xT_n' + n^2T_n = 0 .$$

Αν M είναι $n/2$ ή $(n-1)/2$ (όποιος από τους δύο είναι ακέραιος), τότε

(2) $$T_n(x) = \frac{n}{2}\sum_{k=0}^{M} \frac{(-1)^k(n-k-1)!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}$$

(3) $$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta .$$

Για παράδειγμα

(4)
$$T_0(x) = 1 , \quad T_1(x) = x , \quad T_2(x) = 2x^2-1 ,$$
$$T_3(x) = 4x^3-3x , \quad T_4(x) = 8x^4-8x^2+1$$
$$T_5(x) = 16x^5-20x^3+5x , \quad T_6(x) = 32x^6-48x^4+18x^2-1 .$$

Ο τύπος του Rodrigues στην περίπτωση αυτή είναι

(5) $$T_n(x) = \frac{(-1)^n\sqrt{\pi}}{2^{n+1}\Gamma(n+1/2)}(1-x^2)^{1/2}\frac{d^n}{dx^n}\{(1-x^2)^{n-1/2}\} .$$

Τα πολυώνυμα $T_n(x)$ ικανοποιούν τις ακόλουθες αναγωγικές σχέσεις :

(6) $$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

(6) $$(1-x^2)T_n'(x) = -nxT_n(x)+nT_{n-1}(x)$$

και τη σχέση ορθογωνικότητας

(7) $$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2}T_m(x)T_n(x)dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\,\delta_{mn} & \text{για} \quad n\neq 0 \\ \pi\delta_{m0} & \text{για} \quad n=0 \end{cases}$$

Η γεννήτρια συνάρτηση των $T_n(x)$ είναι

(8) $$w(x,t) = \frac{1-xt}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n T_n(x) \quad , \quad |t|<1 \; .$$

Αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι τέτοια ώστε το ολοκλήρωμα

(9) $$\int_{-1}^{1}|f(x)|^2(1-x^2)^{-1/2}dx$$

υπάρχει, τότε η σειρά

(10) $$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}f(x')(1-x'^2)^{-1/2}dx' + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int_{-1}^{1}f(x')(1-x'^2)^{-1/2}T_n(x')dx'\right\}T_n(x)$$

συγκλίνει στην $f(x)$. Αν η $f(x)$ είναι κατά τμήματα λεία, τότε η σειρά στα σημεία ασυνέχειας συγκλίνει στο όριο

(11) $$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\} \; .$$

Η k-ρίζα του $T_n(x)$ είναι

(12) $$x_k^{(n)} = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi \; .$$

3. Πολυώνυμα Jacobi

Το n-στό πολυώνυμο Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

(1) $$(1-x^2)P_n''^{(\alpha,\beta)}+\{\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x\}P_n'^{(\alpha,\beta)}+$$

$$+n(n+\alpha+\beta+1)P_n^{(\alpha,\beta)}=0 \quad ,$$

όπου $\alpha>-1$ και $\beta>-1$,

(2) $$P_n^{(\alpha,\beta)}=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+\alpha)!(n+\beta)!}{(n+\alpha-k)!k!(k+\beta)!(n-k)!}(x-1)^{n-k}(x+1)^k \quad .$$

Ο τύπος του Rodrigues στην περίπτωση αυτή είναι

(3) $$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{1}{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}\frac{d^n}{dx^n}\{(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\} \quad .$$

Τα πολυώνυμα $P_n^{(\alpha,\beta)}$ ικανοποιούν τις ακόλουθες αναγωγικές σχέσεις :

$$2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)$$

$$=\{(2n+\alpha+\beta+1)(\alpha^2-\beta^2)+\frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+3)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta)}x\}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

(4) $$-2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) \quad ,$$

$$(2n+\alpha+\beta)(1-x^2)P_n'^{(\alpha,\beta)}(x)$$

$$=n\{\alpha-\beta-(2n+\alpha+\beta)x\}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)+2(n+\alpha)(n+\beta)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) \quad .$$

και τη σχέση ορθογωνικότητας

(5) $$\int_{-1}^{1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_m^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)dx$$

$$=\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\delta_{mn} \quad .$$

Η γεννήτρια συνάρτηση των $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ είναι

(6) $$w(x,t)=(1-2xt+t^2)^{-1/2}(1-t+\sqrt{1-2xt+t^2})^{-\alpha}(1+t+\sqrt{1-2xt+t^2})^{-\beta}$$

$$=\frac{1}{2^{\alpha+\beta}}\sum_{n=0}^{\infty}t^nP_n^{(\alpha,\beta)}(x) \quad , \qquad |t|<1 \quad .$$

Αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι τέτοια ώστε το ολοκλήρωμα

(7) $$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}|f(x)|^2dx$$

υπάρχει , τότε η σειρά

(8) $$\sum_{n=0}^{\infty}\{\int_{-1}^{1}(\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1}\cdot\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)})^{-1}\cdot$$
$$\cdot P_n^{(\alpha,\beta)}(x')f(x')dx'\}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

συγκλίνει στην $f(x)$. Αν η $f(x)$ είναι κατά τμήματα λεία , τότε η σειρά στα σημεία ασυνέχειας συγκλίνει στο όριο

(9) $$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\} .$$

Η <u>k-ρίζα</u> του $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ είναι

(10) $$\cos^{-1}x_k^{(n)}=\frac{j_{\alpha,k}}{n}\{1+\sigma(n)\} ,$$

όπου $j_{\alpha,k}$ είναι η k-θετική ρίζα της $J_{\alpha}(x)$.

4. Πολυώνυμα Laguerre

Το n-στό <u>πολυώνυμο Laguerre</u> $L_n^{(\alpha)}(x)$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

(11) $$xL_n''^{(\alpha)}+(\alpha+1-x)L_n'^{(\alpha)}+nL_n^{(\alpha)}=0$$

όπου $\alpha>-1$,

(2) $$L_n^{(\alpha)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)(-x)^k}{\Gamma(k+\alpha+1)k!(n-k)!} .$$

Για παράδειγμα

$$L_0(x) = 1 \ , \quad L_1(x) = -x+1 \ , \quad L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2-4x+2)$$

(3) $$L_3(x) = \frac{1}{6}(-x^3+9x^2-18x+6) \ ,$$

$$L_4(x) = \frac{1}{24}(x^4-16x^3+72x^2-96x+24) \ .$$

Ο τύπος του Rodrigues στην περίπτωση αυτή είναι

(4) $$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha}e^{-x}) \ .$$

Τα πολυώνυμα $L_n^{(\alpha)}(x)$ ικανοποιούν τις ακόλουθες αναγωγικές σχέσεις:

(5) $$(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (2n+\alpha+1-x)L_n^{(\alpha)}(x)-(n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) \ ,$$

$$xL_n'^{(\alpha)}(x) = nL_n^{(\alpha)}(x)-(n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)$$

και τη σχέση ορθογωνικότητας

(6) $$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}L_m^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(x)dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\delta_{mn} \ .$$

Η γεννήτρια συνάρτηση των $L_n^{(\alpha)}(x)$ είναι

(7) $$w(x,t) = (1-t)^{-\alpha-1}e^{xt/(t-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n^{(\alpha)}(x) \ , \qquad |t|<1 \ .$$

Αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι τέτοια ώστε το ολοκλήρωμα

(8) $$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}|f(x)|^2dx$$

υπάρχει , τότε η σειρά

(9) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\int_0^\infty x'^\alpha e^{-x'}f(x')L_n^{(\alpha)}(x')dx'L_n^{(\alpha)}(x)$$

συγκλίνει στην $f(x)$. Αν η $f(x)$ είναι κατά τμήματα λεία σε κάθε πεπερασμένο διάστημα , τότε η σειρά στα σημεία ασυνέχειας συγκλίνει στο όριο

(10) $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$.

Η <u>k-ρίζα</u> του $L_n^{(\alpha)}(x)$ είναι

(11) $$x_k^{(n)} = \frac{j_{\alpha,k}^2}{4n+2(\alpha+1)}\,(1+\mathcal{O}(n^{-2})) \quad ,$$

όπου $j_{\alpha,k}$ είναι η k-θετική ρίζα της $J_\alpha(x)$.

5. Πολυώνυμα Hermite

Το n-στό πολυώνυμο Hermite $H_n(x)$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

(1) $$H_n''-2xH_n'+2nH_n = 0 \quad .$$

Αν θέσουμε $u=e^{-x^2/2}H_n(x)$, η (1) παίρνει τη μορφή

(2) $$u_n''+(2n+1-x^2)u_n = 0 \quad .$$

Αν M είναι $n/2$ η $(n-1)/2$ (όποιος από τους δύο είναι ακέραιος), τότε

(3) $$H_n(x) = \sum_{k=0}^{M} \frac{(-1)^k n!}{2^k k!(n-2k)!}\, x^{n-2k} \quad .$$

Για παράδειγμα

(4) $$\begin{gathered} H_0(x)=1 \;,\quad H_1(x)=2x \;,\quad H_2(x)=4x^2-2 \\ H_3(x)=8x^3-12x \;,\quad H_4(x)=16x^4-48x^2+12 \\ H_5(x)=32x^5-160x^3+120x \;. \end{gathered}$$

Ο <u>τύπος του Rodrigues</u> στην περίπτωση αυτή είναι

$$(5) \qquad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) \; .$$

Τα πολυώνυμα $H_n(x)$ ικανοποιούν τις ακόλουθες αναγωγικές σχέσεις :

$$(6) \qquad \begin{aligned} &H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \\ &H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \end{aligned}$$

και τη σχέση ορθογωνικότητας

$$(7) \qquad \int_{-\infty}^{-\infty} e^{-x^2} H_m(x)H_n(x)dx = 2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{mn} \; .$$

<u>Η γεννήτρια συνάρτηση</u> των $H_n(x)$ είναι

$$(8) \qquad w(x,t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) \; .$$

Αν μία συνάρτηση $f(x)$ είναι τέτοια ώστε το ολοκλήρωμα

$$(9) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} |f(x)|^2 dx$$

υπάρχει , τότε η σειρά

$$(10) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x'^2} H_n(x')dx' H_n(x)$$

συγκλίνει στην $f(x)$. Αν η $f(x)$ είναι κατά τμήματα λεία σε κάθε πεπερασμένο διάστημα , τότε η σειρά στα σημεία ασυνέχειας συγκλίνει στο όριο

$$\frac{1}{2}\{ f(x+0)+f(x-0)\} \; .$$

<u>Σχόλιο</u> :

Τα πολυώνυμα $P_n(x)$, $T_n(x)$, $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $L_n^{(\alpha)}(x)$ και $H_n(x)$ συνδέονται μεταξύ τους με τις σχέσεις (α) $P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x)$

(β) $T_n^{(x)} = \frac{n!\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+1/2)} P_n^{(-1/2,-1/2)}(x)$

(γ) $L_n^{(-1/2)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^{2n}n!} H_{2n}(\sqrt{x})$

(δ) $L_n^{(1/2)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}n!\sqrt{x}} H_{2n+1}(\sqrt{x})$.

Τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα των $L_n^{\alpha}(x)$ και $H_n(x)$ είναι

$$L_n^{\alpha}(x) \sim \pi^{-1/2} e^{x/2} n^{1/2\,\alpha-1/4} x^{-1/2\alpha-1/4} \cos(2\sqrt{nx} - \frac{\alpha\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) \;, \quad n\to\infty$$

και

$$H_n(x) \sim 2^{(n+1)/2} n^{n/2} e^{-n/2} e^{x^2/2} \cos(\sqrt{2n+1}\; x - \frac{n\pi}{2}) \;, \quad n\to\infty$$

αντίστοιχα.

<u>Παρατήρηση</u> : Για περισσότερες πληροφορίες βλέπε Abramowitz and Stegun (1972) σελ. 784-802.

<u>Προβλήματα</u>

Να αποδειχτεί ότι :

1. $$x^{v} = \Gamma(v+\alpha+1)\Gamma(v+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n L_n^{\alpha}(x)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(v-n+1)}$$

$x \in (0,\infty)$, $\alpha > -1$, $v > -1/2(\alpha+1)$.

2. $$e^{-bx} = (b+1)^{-\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{b}{b+1})^n L_n^{\alpha}(x) \;,$$

$x \in [0,\infty)$, $b > -1/2$.

3. $$(bx)^{-\alpha/2} J_{\alpha}(2\sqrt{bx}) = e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_n^{\alpha}(x) \;,$$

$x > 0$, $b > 0$, $\alpha > -1$.

4. $$\int_0^\infty e^{-bx}(b+1)^{\alpha-1}db = \sum_{n=0}^\infty \frac{L_n^\alpha(x)}{n+1}$$

$x \in (0,\infty)$, $\alpha > -1$.

5. $$x^{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}} \sum_{n=0}^\infty \frac{H_{2p}(x)}{(2n)!(p-n)!} ,$$

$x \in (-\infty,\infty)$, $p=0,1,2,\ldots$

6. $$e^{\alpha x} = e^{\alpha^2/4} \sum_{n=0}^\infty \frac{\alpha^n}{2^n n!} H_n(x) ,$$

$x \in (-\infty,\infty)$

7. $$e^{-\alpha^2 x^2} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n \alpha^{2n}}{2^{2n} n!(1+\alpha^2)^{n+1/2}} H_{2n}(x) ,$$

$x \in (-\infty,\infty)$, $Re\alpha^2 > -1$.

8. $$sgnx = \begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

$$sgnx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=}^\infty \frac{(-1)^n}{2^{2n}(2n+1)n!} H_{2n+1}(x) ,$$

$x \in (-\infty,\infty)$.

9. $$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} H_n^2(x)dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

10. $$\int_{-\infty}^\infty e^{-x} H_n^2(x)x^2 dx = 2^n n! \sqrt{\pi}(n+1/2) .$$

11. $$\int_{-\infty}^\infty e^{-2x^2} H_n^2(x)dx = 2^{n-1/2}\Gamma(n+1/2) .$$

12. $$e^{t^2}\cos 2xt = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n H_{2n}(x)}{(2n)!} t^{2n} , \quad |t|<\infty$$

13. $$e^{t^2}\sin 2xt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n+1}(x)}{(2n+1)!}\, t^{2n+1}, \qquad |t|<\infty$$

14. $$(1-x^2)^{1/4}\,|P_n(x)| < \left(\frac{2}{n\pi}\right)^{1/2},$$

$$x \in [-1,1], \qquad n=1,2,3,\ldots$$

ΚΕΦ. Ε.

Προσαρτημενες συναρτησεις Legendre

Υπεργεωμετρικες συναρτησεις

Με τον όρο σφαιρικές αρμονικές αναφερόμαστε στις λύσεις της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$(\alpha) \qquad ((1-x^2)y')' + \{\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-x^2}\}y = 0$$

όπου x είναι πραγματική ή μιγαδική μεταβλητή και μ, ν είναι παράμετροι που μπορούν να πάρουν πραγματικές ή μιγαδικές τιμές. Η εξίσωση (α) εμφανίζεται στη μαθηματική φυσική όταν χρησιμοποιούμε ορθογώνια καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων για να λύσουμε προβλήματα συνοριακών τιμών της θεωρίας δυναμικού για διάφορους τόπους (π.χ. σφαίρα, torus). Ο απλούστερος τόπος είναι η σφαίρα από την οποία προέρχεται και ο όρος "σφαιρικές αρμονικές". Στην περίπτωση της σφαίρας $x\in(-1,1)$ και οι παράμετροι μ και ν είναι μη αρνητικοί ακέραιοι, πράγμα που δεν συμβαίνει για πολύπλοκες γεωμετρίες. Στο κεφάλαιο αυτό θα σχολιαστούν

i) οι προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre που βρίσκουν τη μεγαλύτερή τους εφαρμογή στην ανάπτυξη συναρτήσεων που ορίζονται στην επιφάνεια σφαίρας και

ii) Οι υπεργεωμετρικές συναρτήσεις των οποίων ειδικές περιπτώσεις είναι αρκετές από τις γνωστές συναρτήσεις.

Για τη μελέτη των αντικειμένων αυτού του κεφαλαίου, που είναι και σοβαρά και πολύπλοκα, γίνεται σύσταση στον αναγνώστη να ανατρέξει στην αναφερόμενη στο κείμενο ειδική βιβλιογραφία.

1. Προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre .

Η προσαρτημένη διαφορική εξίσωση Legendre (Γ.22) είναι(*)

(1) $$((1-x^2)y')'-(\lambda_2+\frac{m^2}{1-x^2})y=0$$

οι λύσεις της οποίας λέγονται προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre . Αν κάνουμε την αντικατάσταση (βλέπε Butkov (1978), σελ. 373)

(2) $$y(x)=(1-x^2)^{m/2}u(x)\ , \quad m\geq 0$$

(*) Από το Κεφ. Α σελ. 18-21 γνωρίζουμε ότι , για $m=0$, $\lambda_2=-n(n+1)$, $n=0,1,2,3,\ldots$, η διαφορική εξίσωση (1) έχει μερική λύση την

(α) $$P_n(x)=\sum_{k=0}^{M}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-2k)!(n-k)!}x^{n-2k}\ ,$$

όπου οι συναρτήσεις $P_n(x)$ είναι γνωστές σαν πολυώνυμα του Legendre (Δ.1.3). Η δεύτερη μερική λύση της εξίσωσης Legendre για $m=0$, $n=0,1,2,\ldots$ παράγεται με ανάλογη της (α) διαδικασία (βλέπε Collins (1968), σελ. 83-87) και είναι

(β) $$Q_n(x)=\frac{1}{2}P_n(x)\ln\frac{1+x}{1-x}-\sum_{k=0}^{N}(-1)^{n-2k}\frac{(2n-4k-1)}{(2k+1)(n-k)}P_{n-2k-1}(x)\ ,\ x\in(-1,1)$$

όπου $N=(n-1)/2$ ή $(n-2)/2$ (όποιος από τους δύο είναι ακέραιος). Οι συναρτήσεις $Q_n(x)$, λέγονται συναρτήσεις Legendre δευτέρου είδους και n-τάξης , εμφανίζονται σπάνια σε προβλήματα συνοριακών τιμών και ικανοποιούν τις ίδιες αναγωγικές σχέσεις με τα πολυώνυμα $P_n(x)$. Για τις συναρτήσεις $P_n(x)$ και $Q_n(x)$ έχουμε την ισότητα

(γ) $$(P_n(x),Q_n(x))=(-1)^n(P_n(-x),-Q_n(-x))\ .$$

στην (1) , έχουμε

(3) $$(1-x^2)u''-2(m+1)xu'-(\lambda_2+m+m^2)u=0 .$$

Η λύση της (3) με μορφή σειράς

(4) $$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{r+k}$$

μας οδηγεί στον αναγωγικό τύπο

(5) $$c_{k+2}=\frac{k(k-1)+2(m+1)k+\lambda_2+m(m+1)}{(k+1)(k+2)}c_k \quad , \quad k\geq 0 .$$

Από την ανάλυση της (5) γίνεται φανερό ότι η (4) αποκλίνει για $|x|=1$ (βλέπε Burkov (1973), σελ 137) εκτός αν η σειρά έχει πεπερασμένο αριθμό όρων , δηλαδή

$$k(k-1)+2(m+1)k+\lambda_2+m(m+1)=0$$

(6) $$\Rightarrow \quad \lambda_2=-(m+k)(m+k+1) .$$

Η (6) μας δίνει τις πληροφορίες i) η παράμετρος λ_2 είναι της μορφής $-n(n+1)$, $n\geq m$ και ii) η σειρά θα περατώνεται στον $(n-m)$-όρο. Οι λύσεις $u(x)$ (πεπερασμένες στα ανώμαλα σημεία $x=\pm 1$) είναι πολυώνυμα του x .

Για τον προσδιορισμό της $u(x)$ θα θεωρήσουμε τη διαφορική εξίσωση

(7) $$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$$

που ικανοποιούν τα πολυώνυμα $P_n(x)$. Αν διαφορίσουμε την (7) m- φορές(*) θα πάρουμε

(*) $$\frac{d^m}{dx^m}(xf(x))=x\frac{d^m f}{dx^m}+m\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}f \quad .$$

$$(8)\qquad (1-x^2)\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)'' - 2(m+1)x\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)'$$

$$+\{n(n+1)-2m-m(m-1)\}\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0 \quad .$$

Από σύγκριση των (3) και (8) βλέπουμε ότι η (8) είναι η διαφορική εξίσωση για την $u(x)$ και κατά συνέπεια

$$(9)\qquad u(x) = C\,\frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \quad ,$$

όπου C είναι μία αυθαίρετη σταθερά που εκλέγεται (για κανονικοποίηση) ίση με τη μονάδα. Η $u(x)$ δεν είναι ανάλογη της $d^m Q_n(x)/dx^m$ επειδή η $Q_n(x)$ δεν είναι αναλυτική στα σημεία $x=\pm 1$. Η (9) οδηγεί στην προσαρτημένη συνάρτηση Legendre πρώτου είδους με τη μορφή

$$(10)\qquad P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\,\frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \quad , \qquad m\in[0,n] \; .$$

Αν εφαρμόσουμε τον τύπο του Rodrigues για τα πολυώνυμα $P_n(x)$ (Δ.1.1) θα πάρουμε τον τύπο του Rodrigues για τα πολυώνυμα $P_n^m(x)$:

$$(11)\qquad P_n^m(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^n n!}\,\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n \quad , \qquad m\in[0,n] \quad .$$

Στη διεθνή βιβλιογραφία ορίζονται και οι συναρτήσεις $P_n^m(x)$ για αρνητικές τιμές του m , οπότε ο τύπος (11) στη περίπτωση αυτή θα έχει τη μορφή

$$(12)\qquad P_n^{-m}(x) = \frac{(1-x^2)^{-m/2}}{2^n n!}\,\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^2-1)^n \quad , \qquad m\in(0,n] \quad .$$

Οι (11) και (12) συνδέονται με τη σχέση

$$(13)\qquad P_n^{-m}(x) = (-1)^m\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,P_n^m(x) \quad , \qquad m\in[-n,n] \; .$$

(να αποδειχτεί η (13)).

Μερικές από τα $P_n^m(x)$ είναι :

$$P_1^1(x)=(1-x^2)^{1/2}\ ,\qquad P_2^1(x)=3x(1-x^2)^{1/2}\ ,$$

(14) $$P_2^2(x)=3(1-x^2)\ ,\qquad P_3^1(x)=\frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2}$$

$$P_3^2(x)=15x(1-x^2)\ ,\qquad P_3^3(x)=15(1-x^2)^{3/2}\ ,\ldots\ .$$

Από τον ορισμό των προσαρτημένων συναρτήσεων Legendre , $P_n^m(x)$, έχουμε

(15) $$P_n^0(x)=P_n(x)\ .$$

Η <u>γεννήτρια συνάρτηση</u> των $P_n^m(x)$ είναι

(16) $$w(x,t)=\frac{(2m)!(1-x^2)^{m/2}}{2^m m!(1-2xt+t^2)^{m+1/2}}=\sum_{k=0}^{\infty}P_{k+m}^m(x)t^k$$

και δεν χρησιμοποιείται συχνά επειδή είναι πολύπλοκη και ακόμα γιατί δεν υπάρχει μια άμεση φυσική εφαρμογή της.

Όπως είναι φυσικό , οι συναρτήσεις $P_n^m(x)$ ικανοποιούν κάποιες αναγωγικές σχέσεις και μάλιστα μεγάλη ποικιλία τέτοιων σχέσεων αφού είναι εφοδιασμένες με άνω και κάτω δείκτη , π.χ.

$$P_n^{m+1}(x)-\frac{2mx}{(1-x^2)^{1/2}}P_n^m+\{n(n+1)-m(m-1)\}P_n^{m-1}=0$$

$$(2n+1)xP_n^m=(n+m)P_{n-1}^m+(n-m+1)P_{n+1}^m$$

(17) $$(2n+1)(1-x^2)^{1/2}P_n^m(x)=P_{n+1}^{m+1}-P_{m-1}^{m+1}$$

$$=(n+m)(n+m-1)P_{n-1}^{m-1}-(n-m+1)(n-m+2)P_{n+1}^{m-1}$$

$$(1-x^2)^{1/2}P_n^{m'}=\frac{1}{2}P_n^{m+1}-\frac{1}{2}(n+m)(n-m+1)P_n^{m-1}.$$

Η απόδειξη των (17) και άλλων παρόμοιων σχέσεων μπορεί να γίνει με την αναγωγή τους στις αντίστοιχες σχέσεις που ικανοποιούν τα πολυώνυμα Legendre και αντίστροφα. Για παράδειγμα , ας θεωρήσουμε την αναγωγική σχέση (Δ.1.19) ,

(18) $$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x) \quad .$$

Αν διαφορίσουμε την (18) m-φορές θα πάρουμε

(19) $$\begin{aligned}(2n+1)\frac{d^m}{dx^m}P_n(x) &= \frac{d^m}{dx^m}P'_{m+1}(x)-\frac{d^m}{dx^m}P'_{n-1}(x)\\ &= \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P_{n+1}(x)-\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P_{n-1}(x) \quad .\end{aligned}$$

Αν τώρα πολλαπλασιάσουμε την (19) με $(1-x^2)^{(m+1)/2}$ και κάνουμε χρήση του ορισμού (10) , θα πάρουμε την (17γ).

Από τον ορισμό (10) και την ισότητα

$$P_n(x) = (-1)^n P_n(-x)$$

καταλήγουμε στην

(20) $$P_n^m(-x) = (-1)^{n+m}P_n^m(x) \quad .$$

Για $x=\pm 1$, και $m>0$ από τον ορισμό (10) έχουμε ακόμα ότι ,

(21) $$P_n^m(\pm 1) = 0 \quad .$$

Οι προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre που έχουν τον ίδιο άνω δείκτη m και διαφορετικό κάτω δείκτη n είναι μεταξύ τους ορθογώνιες γιατί είναι ιδιοτιμές ενός προβλήματος Sturm-Liouville (Α.1 , θεωρ.1), δηλαδή

(22) $$\int_{-1}^{1} P_n^m(x)P_{n'}^m(x)dx = 0 \quad , \qquad \text{για} \qquad n\neq n' \quad .$$

Ο προσδιορισμός της στάθμης των $P_n^m(x)$ γίνεται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$(23)\qquad \int_{-1}^{1}\{P_n^m(x)\}^2dx=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^m\ \frac{d^mP_n}{dx^m}\ \frac{d^mP_n}{dx^m}\,dx$$

$$=-\int_{-1}^{1}\frac{d^{m-1}P_n}{dx^{m-1}}\ \frac{d}{dx}\ \{(1-x^2)^m\ \frac{d^mP_n}{dx^m}\}\,dx\ .$$

Αν λάβουμε υπόψη ότι

$$\frac{d}{dx}\ \{(1-x^2)^m\ \frac{d^mP_n}{dx^m}\}=(1-x^2)^m\ \frac{d^{m+1}P_n}{dx^{m+1}}\ -2mx(1-x^2)^{m-1}\ \frac{d^mP_n}{dx^m}\ ,$$

και η συνάρτηση $d^{m-1}P_n/_{dx}m-1=u_{m-1}(x)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$(1-x^2)u''_{m-1}-2mxu'_{m-1}+\{n(n+1)-(m-1)m\}u_{m-1}=0\ ,$$

έχουμε

$$(24)\qquad \begin{aligned}\frac{d}{dx}\{(1-x^2)^m\ \frac{d^mP_n}{dx^m}\}&=(1-x^2)^{m-1}\{(1-x^2)u''_{m-1}-2mxu'_{m-1}\}\\&=-(1-x^2)^{m-1}\{n(n+1)-m(m-1)\}u_{m-1}\\&=-(1-x^2)^{m-1}\{(n+m)(n-m+1)\}\ \frac{d^{m-1}P_n}{dx^{m-1}}\ .\end{aligned}$$

Η (23) , μετά την (24) , γράφεται

$$(25)\qquad \int_{-1}^{1}\{P_n^m(x)\}^2dx=(n+m)(n-m+1)\int_{-1}^{1}\{P_n^{m-1}(x)\}^2dx\ .$$

Αν εφαρμόσουμε την (25) m-φορές θα πάρουμε

$$(26)\qquad \int_{-1}^{1}\{P_n^m(x)\}^2dx=\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\int_{-1}^{1}\{P_n(x)\}^2dx=\frac{2}{2n+1}\ \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\ .$$

Για τις προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre με ίδιο κάτω δείκτη και διαφορετικό πάνω δείκτη έχουμε την ακόλουθη σχέση ορθογωνικότητας , (Arfken (1970) σελ. 562).

(27) $$\int_{-1}^{1} P_n^m(x) P_n^{m'} (1-x^2)^{-1} dx = \frac{(n+m)!}{m(n-m)!}\,\delta_{mk} \quad .$$

Σχόλιο:

Για $x\in(-1,1)$ οι προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre δευτέρου είδους , $Q_n^m(x)$, ορίζονται με τον ακόλουθο τρόπο :

$$Q_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\,\frac{d^m Q_n(x)}{dx^m}\,, \qquad x\in(-1,1)$$

και ικανοποιούν αντίστοιχες με τις (17) αναγωγικές σχέσεις.

2. Υπεργεωμετρικές συναρτήσεις.

Η διαφορική εξίσωση

(1) $$x(1-x)u''+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}u'-\alpha\beta u = 0 \quad ,$$

όπου x είναι πραγματική ή μιγαδική μεταβλητή και α,β,γ είναι παράμετροι που μπορούν να πάρουν διάφορες πραγματικές ή μιγαδικές τιμές , λέγεται υπεργεωμετρική εξίσωση (hypergeometric equation). Από την (1) προκύπτουν , σαν ειδικές περιπτώσεις , πολλές από τις γνωστές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης π.χ. εξίσωση Legendre ($\alpha=-n$, $\beta=n+1$, $\gamma=1$). Η (1) με τη μορφή της Α.2.84 είναι μία εξίσωση της οποίας οι συντελεστές είναι αναλυτικές συναρτήσεις για $|x|\in(0,1)$ και έχουν το σημείο $x=0$ σαν απλό πόλο ή κανονικό ανώμαλο σημείο (αυτό έχει εξάρτηση από τις τιμές των α,β και γ). Από το Κεφ. Α ξέρουμε ότι, η (1) έχει μία μερική λύση της μορφής

(2) $$u = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{r+k}$$

όπου $c_0\neq 0$ και η δυναμοσειρά (2) συγκλίνει για $|x|<1$.

Αν εισάγουμε τη (2) στην (1) , θα έχουμε

(3) $$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(r+k)(r+k-1+\gamma)x^{r+k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k(r+k+\alpha)(r+k+\beta)x^{r+k} = 0$$

Από την (3) παίρνουμε τη δεικτοεξίσωση

(4) $$c_0 r(r-1+\gamma) = 0$$

και τον αναγωγικό τύπο

(5) $$c_k(r+k)(r+k-1+\gamma) - c_{k-1}(r+k-1+\alpha)(r+k-1+\beta) = 0 \;, \quad k=1,2,3,\ldots$$

Από την (4) έχουμε

$$r = 0 \quad \text{ή} \quad r = 1-\gamma \quad .$$

Αν υποθέσουμε ότι $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$ και εκλέξουμε $r=0$ οι συντελεστές c_k υπολογίζονται από τον αναγωγικό τύπο

(6) $$c_k = \frac{(k-1+\alpha)(k-1+\beta)}{k(k-1+\gamma)}\, c_{k-1} \;, \qquad k=1,2,3,\ldots \quad .$$

Αν θέσουμε $c_0=1$ και εισάγουμε τη συντομογραφία

(7) $$(\lambda)_0 = 1 \;, \qquad (\lambda)_k = \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1) \;, \qquad k=1,2,3,\ldots \;,$$

η (6) γράφεται

(8) $$c_k = \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{k!(\gamma)_k} \;, \qquad k=0,1,2,\ldots \quad .$$

Για $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$ μια μερική λύση της (1) θα είναι η

(9) $$u_1 = F(\alpha,\beta;\gamma;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{k!(\gamma)_k}\, x^k \;, \qquad |x|<1 \;,$$

όπου η σειρά στο δεξιό μέρος της (9) είναι γνωστή σαν <u>υπεργεωμετρική σειρά</u> (hypergeometric series).

Αν εκλέξουμε $r=1-\gamma$ και θεωρήσουμε ότι , $\gamma \neq 2,3,4,\ldots$ θα πάρουμε τον αναγωγικό τύπο

$$c_k = \frac{(k-\gamma+\alpha)(k-\gamma+\beta)}{k(k+1-\gamma)}\, c_{k-1} \quad , \qquad k=1,2,3,\ldots$$

ή

$$(10) \qquad c_k = \frac{(1-\gamma+\alpha)_k(1-\gamma+\beta)_k}{k!(2-\gamma)_k} \quad , \qquad k=0,1,2,\ldots$$

όπου έχουμε υποθέσει ότι $c_0=1$.
Η δεύτερη λοιπόν μερική λύση της (9), $\gamma\neq 2,3,4,\ldots$, θα είναι

$$(11) \qquad u_2 = x^{1-\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-\gamma+\alpha)_k(1-\gamma+\beta)_k}{k!(2-\gamma)_k}\, x^k$$

$$= x^{1-\gamma}F(1-\gamma+\alpha,\ 1-\gamma+\beta;\ 2-\gamma;x) \quad , \qquad |x|<1 \ , \qquad |\arg x|<\pi \ .$$

Από την παραπάνω ανάλυση γίνεται φανερό ότι για $x\neq 0,-1,\pm 2,\pm 3,\ldots$ οι λύσεις (9) και (10) υπάρχουν συγχρόνως και είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Η γενική λύση της (1), θα είναι

$$(12) \qquad u = AF(\alpha,\beta;\gamma;x)+Bx^{1-\gamma}F(1-\gamma+\alpha,1-\gamma+\beta;2-\gamma;x) \ ,$$

όπου , $|x|<1$, $|\arg x|<\pi$ και A,B είναι αυθαίρετες σταθερές.

Παρατήρηση : Αν γ είναι ένας ακέραιος αριθμός η μέθοδος που έχει εφαρμοστεί για τη λύση της (1) μας δίνει μόνο μία μερική λύση και θα πρέπει , για το λόγο αυτό, να τροποποιήσουμε τη μέθοδο που θα μας δώσει τη λύση που θα περικλείει γενικά λογαριθμικούς όρους (βλέπε Goddington (1961) σελ. 123).

Αν κάνουμε αλλαγή των μεταβλητών στην (1) μπορούμε να πάρουμε άλλες διαφορικές εξισώσεις των οποίων οι λύσεις μπορούν να εκφραστούν σε όρους υπεργεωμετρικών σειρών , π.χ. για $x=t^2$ η (1) γράφεται

$$(13) \qquad t(1-t^2)u_{,tt}+2\{\gamma-\tfrac{1}{2}-(\alpha+\beta+\tfrac{1}{2})\,t^2\}u_{,t}-4\alpha\beta t u = 0$$

και έχει μερικές λύσεις

$$u_1 = F(\alpha;\beta;\gamma;t^2)\ , \qquad \gamma\neq 0,-1,-2,\ldots$$

$$u_2 = t^{2-2\gamma}F(1-\gamma+\alpha,1-\gamma+\beta;2-\gamma;t^2)\ , \quad |t|<1, |\arg t|<\pi, \ \gamma\neq 2,3,4\ldots$$

Οι (14) για γ μη ακέραιο είναι γραμμικά ανεξάρτητες αν $|t|\in(0,1)$.

<u>Παράδειγμα 1</u>: Να μελετηθεί με βάση την παραπάνω ανάλυση η εξίσωση του Legendre

(15) $$(1-x^2)u''-2xu'+v(v+1)u = 0\ ,$$

όπου v είναι ένας πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός.

Για να προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις Legendre, θα ανάγουμε την (15) σε υπεργεωμετρικη εξίσωση κάνοντας αλλαγές των μεταβλητών. Με την αντικατάσταση $t= \frac{1}{2}(1-x)$ η (15) μετατρέπεται στην

(16) $$t(1-t)u_{,tt}+(1-2t)u_{,t}+v(v+1)u = 0$$

που είναι μία ειδική μορφή της (1) με

$$\alpha = -v\ , \quad \beta = v+1\ , \quad \gamma = 1\ ,$$

ενώ με την αντικατάσταση $t=x^{-2}$, $u=x^{-v-1}\upsilon$ η (15) μετατρέπεται στην εξίσωση

(17) $$t(1-t)\upsilon_{,tt}+\{(v+\tfrac{3}{2})-(v+\tfrac{5}{2})t\}\upsilon_{,t}-(\tfrac{v}{2}+1)(\tfrac{v}{2}+\tfrac{1}{2})\upsilon = 0$$

που αντιστοιχεί στην (1) για

$$\alpha = \frac{v}{2}+1\ , \qquad \beta = \frac{v}{2}+\frac{1}{2}\ , \qquad \gamma = v+\frac{3}{2}\ .$$

Από τις (16) και (17) παίρνουμε τις δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (15) , π.χ. από την (16) έχουμε

(18) $$u_1 = F(-v,v+1;1;\frac{1-x}{2})\ , \qquad |x-1|<2\ ,$$

όπου $F(\alpha,\beta;\gamma;x)$ είναι η υπεργεωμετρική σειρά (9). (Για περισσότερες λεπτομέρεις βλέπε Lebedev, 1972 σελ. 165). Η συνάρτηση u_1 για v μη αρνητικό ακέραιο ανάγεται στην $P_n(x)$ (πολυώνυμα Legendre).

Οι προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre μπορούν επίσης να εκφραστούν με υπεργεωμετρικές σειρές σε μια κατάλληλα περιορισμένη περιοχή του x-επιπέδου. Μια ανάπτυξη των $P_v^m(x)$ που ισχύει στην περιοχή $|x-1|<2$, $|\arg(x-1)|<\pi$, μπορούμε να πάρουμε με m-φορές διαφόριση της σειράς (18)(*) ,

Από τον ορισμό , (9) , της υπεργεωμετρικής συνάρτησης , έχουμε

(19) $F(\alpha,\beta;\gamma;x)=F(\beta,\alpha;\gamma;x)$, ιδιότητα συμμετρίας .

Αν διαφορίσουμε την (9) ως προς x παίρνουμε

(20) $$\frac{d}{dx}F(\alpha,\beta;\gamma;x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k(k-1)!}x^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{k+1}(\beta)_{k+1}}{(\gamma)_{k+1}k!}x^k$$

$$=\frac{\alpha\beta}{\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_k(\beta+1)_k}{(\gamma+1)_k k!}x^k=\frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;x),$$

όπου $|x|<1$ και $(\lambda)_{k+1}=\lambda(\lambda+1)_k$.

Μετά από επαναληπτική εφαρμογή της (20) έχουμε

(21) $$\frac{d^m}{dx^m}F(\alpha,\beta;\gamma;x)=\frac{(\alpha)_m(\beta)_m}{(\gamma)_m}F(\alpha+m,\beta+m;\gamma+m;x) , \quad m=0,1,2,...$$

Ας εισάγουμε τώρα τους συμβολισμούς

(*)
$$P_v^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}F(-v,v+1;1;\frac{1-x}{2})$$

$$=\frac{(1-x^2)^{m/2}(-1)^m}{2^m}\frac{(-v)_m(v+1)_m}{(1)_m}F(m-v,v+m+1;m+1;\frac{1-x}{2})$$

$$=\frac{(1-x^2)^{m/2}\Gamma(v+m+1)}{2^m(m+1)\Gamma(v-m+1)}F(m-v,v+m+1;m+1;\frac{1-x}{2}).$$

$$F(\alpha,\beta;\gamma;x) \equiv F \;, \qquad F(\alpha\pm1,\beta;\gamma;x) \equiv F(\alpha\pm1)$$

(22)

$$F(\alpha,\beta\pm1;\gamma;x) \equiv F(\beta\pm1) \;, \qquad F(\alpha,\beta;\gamma\pm1;x) \equiv F(\gamma\pm1) \;,$$

όπου οι συναρτήσεις $F(\alpha\pm1)$, $F(\beta\pm1)$ και $F(\gamma\pm1)$ λέγονται <u>συναφείς</u> (contigous) της F συναρτήσεις. Η F και κάθε δύο από τις συναφείς της F συναρτήσεις σχετίζονται με αναγωγικές σχέσεις π.χ.

$$(\gamma-\alpha-\beta)F+\alpha(1-x)F(\alpha+1)-(\gamma-\beta)F(\beta-1)=0$$

(23)
$$(\gamma-\alpha-1)F+\alpha F(\alpha+1)-(\gamma-1)F(\gamma-1)=0$$

$$\gamma(1-x)F-\gamma F(\alpha-1)+(\gamma-\beta)xF(\gamma+1)=0 \;,$$

που μπορούν να αποδειχτούν με απλή αντικατάσταση στις (23) της σειράς (9). Εκτός από αναγωγικές σχέσεις της μορφής των (23) υπάρχουν παρόμοιες σχέσεις μεταξύ της συνάρτησης $F(\alpha,\beta;\gamma;x)$ και κάθε ζεύγους συναρτήσεων της μορφής $F(\alpha+\ell,\beta+m;\gamma+n;x)$, όπου ℓ,m και n είναι αυθαίρετοι ακέραιοι αριθμοί (βλέπε Lebedev, 1972 σελ. 243)

<u>Σχόλιο</u>:

Επειδή οι υπεργεωμετρικές συναρτήσεις είναι ενσωματωμένες στους σύγχρονους ηλεκτρονικούς υπολογιστές , είναι ανάγκη να γνωρίζουμε την έκφραση διαφόρων συναρτήσεων σε όρους υπεργεωμετρικών συναρτήσεων. Για παράδειγμα, θα αναφέρουμε κάποιες γνωστές συναρτήσεις της μαθηματικής ανάλυσης που είναι ειδικές περιπτώσεις της $F(\alpha,\beta;\gamma;x)$ και που αντιστοιχούν σε κατάλληλη εκλογή των παραμέτρων α,β,γ και της ανεξάρτητης μεταβλητής x .

Η $F(\alpha,\beta;\gamma;x)$ ανάγεται σε πολυώνυμο αν $\alpha=0,-1,-2,$ ή $\beta=0,-1,-2,..$ π.χ.

(24)
$$F(\alpha,0;\gamma;x)=1 \;, \quad F(\alpha,-2;\gamma;x)=1-2\,\frac{\alpha}{\gamma}\,x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\,x^2 \;.$$

Από το μετασχηματισμό (Lebedev (1972) σελ. 258-260)

(25) $$F(\alpha,\beta;\gamma;x)=(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;\gamma;x) \qquad |\arg(1-x)|<\pi$$

βλέπουμε ότι η $F(\alpha,\beta;\gamma;x)$ ανάγεται σε αλγεβρικό πολυώνυμο αν $\gamma-\alpha=0, -1,-2,\ldots$ ή $\gamma-\beta=0,-1,-2,\ldots$, π.χ.

$$F(\alpha,\beta;\beta;x)=(1-x)^{-\alpha}, \qquad |\arg(1-x)|<\pi ,$$

$$(1-x)^{v}=F(-v,1;1;x), \qquad (1-x)^{-1/2}=F(1/2,1;1;x),$$

$$x^{n}=F(-n,1;1;1-x), \qquad n=0,1.2.3\ldots .$$

Από την ανάπτυξη σε σειρά

$$\ell n(1-x)=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1}=-x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1)_k(1_k)}{(2)_k k!}x^{k}, \qquad |x|<1$$

καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

(27) $$\ell n(1-x)=-xF(1,1;2;x), \qquad |\arg(1-x)|<\pi .$$

Με παρόμοιο τρόπο έχουμε

$$\arctan x=xF(\tfrac{1}{2},1;\tfrac{3}{2};-x^2), \qquad |\arg(1\pm xi|<\pi$$

$$\arcsin x=xF(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2};x^2) \qquad |\arg(1\pm x)|<\pi .$$

Τα πλήρη ελλειπτικά ολοκληρώματα

$$K(x)=\int_0^{\pi/2}(1-x^2\sin^2\phi)^{-1/2}d\phi$$

$$E(x)=\int_0^{\pi/2}(1-x^2\sin^2\phi)^{1/2}d\phi$$

του πρώτου και δεύτερου είδους,αντίστοιχα , όπου x είναι μιγαδική μεταβλητή και $|\arg(1\pm x)|<\pi$, μπορούν να εκφραστούν σε όρους της υπεργεωμετρικής συνάρτησης. Αν θεωρήσουμε ότι $|x|<1$ και χρησιμοποιήσουμε τη διωνυμική ανάπτυξη, θα πάρουμε

(28) $$K(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})_k}{k!}\cdot x^{2k}\int_0^{\pi/2}\sin^{2k}\phi d\phi=\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})_k(\frac{1}{2})_k}{(1)_k k!}x^{2k}$$

$$=\frac{\pi}{2}F(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;x^2).$$

Με παρόμοιο τρόπο παίρνουμε

(29) $$E(x)=\frac{\pi}{2}F(-\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;x^2),\quad |\arg(1\pm x)|<\pi .$$

3. Συρρέουσα υπεργεωμετρική συνάρτηση.

Η διαφορική εξίσωση

(1) $$xu''+(\gamma-x)u'-\alpha u=0$$

μπορεί να θεωρηθεί σαν η οριακή περίπτωση της υπεργεωμετρικής εξίσωσης (2.1) στην οποία το ανώμαλο σημείο $x=1$ έχει μετακινηθεί στο άπειρο ενώ τα ανώμαλα σημεία $x=0,\infty$ παραμένουν. Πρέπει να σημειωθεί ότι το σημείο $x=\infty$ δεν είναι πια ένα ομαλό ανώμαλο σημείο αλλά ένα μη-κανονικό ανώμαλο σημείο(*). Η (1) λέγεται συρρέουσα (confluent) υπεργεωμετρική εξίσωση.

Η (1) για $\gamma\neq 0,-1,-2,\ldots$ έχει μερική λύση τη συνάρτηση

(2) $$\phi(\alpha,\gamma;x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k x^k}{(\gamma)_k k!},\qquad |x|<\infty$$

που είναι γνωστή σαν συρρέουσα υπεργεωμετρική συνάρτηση(**)(confluent

---

(*) Αν κάνουμε την αντικατάσταση $x\to 1/x$ στην (1) θα δούμε ότι στη διαφορική εξίσωση που θα προκύψει το $x=0$ είναι μη-κανονικό ανώμαλο σημείο.

(**) Η (2) είναι μια ακέραια (entire) συνάρτηση και κατά συνέπεια συγκλίνει για όλες τις πεπερασμένες τιμές της x .

hypergeometric function). Αν εισάγουμε τη (2) στην (1) μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι

$$x\phi''+(\gamma-x)\phi'-\alpha\phi =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k-1)(\alpha)_k}{(\gamma)_k k!} x^{k-1}+(\gamma-x)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_k k}{(\gamma)_k k!} x^{k-1}-\alpha\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\gamma_k)k!} x^{k}$$

$$=\{\gamma\frac{(\alpha)_1}{(\gamma)_1}-\alpha\}+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_k x^k}{(\gamma)_k k!}\{k\frac{\alpha+k}{\gamma+k}+\gamma\frac{\alpha+k}{\gamma+k}-k-\alpha\}\equiv 0 \quad .$$

Για να πάρουμε μια δεύτερη, γραμμικά ανεξάρτητη, λύση της (1) θα θεωρήσουμε ότι , $|\arg x|<\pi$ και θα κάνουμε την αντικατάσταση $u=x^{1-\gamma}\upsilon$. Η (1) παίρνει τότε τη μορφή

(3) $$x\upsilon''+(\gamma'-x)\upsilon'-\alpha'\upsilon = 0 \;,$$

όπου $\alpha'=1+\alpha-\gamma$, $\gamma'=2-\gamma$. Η (3) θα έχει λύση τη συνάρτηση

(4) $$u = u_2 = x^{1-\gamma}\phi(1+\alpha-\gamma,2-\gamma;x) \quad .$$

Για $\gamma\neq 0,\pm1,\pm2,\ldots$ οι λύσεις (2) και (4) συνυπάρχουν και είναι γραμμικά ανεξάρτητες, οπότε η γενική λύση της (1) θα είναι

(5) $$u = A\phi(\alpha,\gamma;x)+Bx^{1-\gamma}\phi(1+\alpha-\gamma,2-\gamma;x) \quad .$$

Από τις (2) και (4) ορίζεται η <u>συρρέουσα υπεργεωμετρική συνάρτηση δεύτερου είδους</u>,

(6) $$\Psi(\alpha,\beta;x) = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)}\,\phi(\alpha,\gamma;x)+\frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)}\,x^{1-\gamma}\phi(1+\alpha-\gamma,2-\gamma;x)$$

$$\gamma\neq 0,\pm1,\pm2,\ldots \qquad |\arg x|<\pi \;.$$

Από τον ορισμό της $\phi(\alpha,\gamma;x)$ προκύπτουν οι ταυτότητες

$$\frac{d}{dx}\,\phi(\alpha,\gamma;x) = \frac{\alpha}{\gamma}\,\phi(\alpha+1,\gamma+1;x)$$

$$\frac{d^m}{dx^m}\,\phi(\alpha,\gamma;x) = \frac{(\alpha)_m}{(\gamma)_m}\,\phi(\alpha+m,\gamma+m;x) \qquad m=1,2,3,\ldots$$

και οι αναγωγικές σχέσεις

$$(\mathrm{d})\quad \begin{aligned}
&(\gamma-\alpha-1)\phi+\alpha\phi(\alpha+1)-(\gamma-1)\phi(\gamma-1) = 0\\
&\gamma\phi-\gamma\phi(\alpha-1)-x\phi(\gamma+1) = 0\\
&(\alpha-1+x)\phi+(\gamma-\alpha)\phi(\alpha-1)-(\gamma-1)\phi(\gamma-1) = 0\\
&\gamma(\alpha+x)\phi-\alpha\gamma\phi(\alpha+1)-(\gamma-\alpha)x\phi(\gamma+1) = 0\\
&(\gamma-\alpha)\phi(\alpha-1)+(2\alpha-\gamma+x)\phi-\alpha\phi(\alpha+1) = 0\\
&\gamma(\gamma-1)\phi(\gamma-1)-\gamma(\gamma-1+x)\phi+(\gamma-\alpha)x\phi(\alpha+1) = 0
\end{aligned}$$

που σχετίζουν την $\phi(\alpha,\gamma;x)$ με δύο από τις συναφείς της συναρτήσεις $\phi(\alpha\pm1) \equiv \phi(\alpha\pm1,\gamma;x)$ και $\phi(\gamma\pm1) \equiv \phi(\alpha,\gamma\pm1;x)$.

Η συνάρτηση $\Psi(\alpha,\gamma;x)$ έχει αντίστοιχες ιδιότητες με εκείνες της $\phi(\alpha,\gamma;x)$. Για παράδειγμα , η Ψ ικανοποιεί τις ταυτότητες

$$\frac{d}{dx}\,\Psi(\alpha,\gamma;x) = -\alpha\Psi(\alpha+1,\gamma+1;x)$$

$$\frac{d^m}{dx^m}\,\Psi(\alpha,\gamma;x) = (-1)^m(\alpha)_m\Psi(\alpha+m,\gamma+m;x) \qquad m=1,2,3,\ldots$$

και τις αναγωγικές σχέσεις

$$(10)\quad \begin{aligned}
&\Psi-\alpha\Psi(\alpha+1)-\Psi(\gamma-1) = 0\\
&(\gamma-\alpha)\Psi+\Psi(\alpha-1)-x\Psi(\gamma+1) = 0\\
&(\alpha-1+x)\Psi-\Psi(\alpha-1)+(\alpha-\gamma+1)\Psi(\gamma-1) = 0\\
&(\alpha+x)\Psi+\alpha(\gamma-\alpha-1)\Psi(\alpha+1)-x\Psi(\gamma+1) = 0\\
&\Psi(\alpha-1)-(2\alpha-\gamma+x)\Psi+\alpha(\alpha-\gamma+1)\Psi(\alpha+1) = 0\\
&(\gamma-\alpha-1)\Psi(\gamma-1)-(\gamma-1+x)\Psi+x\Psi(\gamma+1) = 0 \quad ,
\end{aligned}$$

όπου

$$\Psi \equiv \Psi(\alpha,\gamma, ;x) \ , \qquad \Psi(\alpha\pm1) \equiv \Psi(\alpha\pm1,\gamma;x) \ ,$$

$$\Psi(\gamma\pm1) \equiv \Psi(\alpha,\gamma\pm1;x) \ .$$

Όπως συμβαίνει για την υπεργεωμετρική συνάρτηση $F(\alpha,\beta;\gamma,x)$, πολλές από τις γνωστές συναρτήσεις της μαθηματικής ανάλυσης μπορούν να εκφραστούν σε όρους των $\phi(\alpha,\gamma;x)$ και $\Psi(\alpha,\gamma;x)$ και αντιστοιχούν σε κατάλληλη εκλογή των παραμέτρων α,γ και της ανεξάρτητης μεταβλητής x , π.χ.

i) Στοιχειώδεις συναρτήσεις

$$\phi(\alpha,\alpha;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

(11)
$$\phi(1,2;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = \frac{e^x-1}{x}$$

$$\phi(-2,1;x) = 1-2x+\frac{1}{2}x^2 \ .$$

ii) Συνάρτηση σφάλματος.

(12)
$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\text{erf}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(2k+1)} = x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_k(-x^2)^k}{(\frac{3}{2})_k k!}$$

$$= x\phi(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -x^2) \ .$$

iii) Ολοκληρώματα Fresnel

(13)
$$C(x) = \frac{x}{2}\{\phi(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{\pi i x^2}{2}) + \phi(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{-\pi i x^2}{2})\} \ , \qquad C(x) = \int_0^x \cos\frac{\pi t^2}{2}\,dt$$

$$S(x) = \frac{x}{2i}\{\phi(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{\pi i x^2}{2}) - \phi(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{-\pi i x^2}{2})\} \ , \qquad S(x) = \int_0^x \sin\frac{\pi t^2}{2}\,dt \ .$$

iv) Εκθετικό ολοκλήρωμα.

$$\text{(14)}\qquad Ei(-x) = -\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = -e^{-x}\Psi(1,1;x)\ , \quad |\arg x|<\pi$$

$$Ei(x) = \qquad -e^{x}\Psi(1,1;-x)\ , \quad |\arg(-x)|<\pi \quad .$$

Για την απόδειξη των (14) χρειάζεται η ολοκληρωτική αναπαράσταση της συνάρτησης Ψ που δεν σχολιάστηκε σαυτή την παράγραφο,(βλέπε Lebedev (1972), σελ. 266-268) .

v) Πολυώνυμα Hermite και Laguerre.

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}\,\phi(-n, \tfrac{1}{2}\,; x^2)$$

$$\text{(15)}\qquad H_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{(2n+1)!}{n!}\,2x\phi(-n, \tfrac{3}{2}\,; x^2)$$

$$L_n^{\alpha}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\,\phi(-n,\alpha+1; x) \quad .$$

Παράδειγμα : Να μελετηθεί η διαφορική εξίσωση

$$\text{(16)}\qquad u''+(2v+1-x^2)u = 0 \quad ,$$

όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή x μπορεί να είναι πραγματική ή μιγαδική όπως επίσης και η παράμετρος v .

Αν κάνουμε την αντικατάσταση

$$\text{(17)}\qquad u = e^{-x^2/2}\,\upsilon$$

η (16) παίρνει τη μορφή

$$\text{(18)}\qquad \upsilon''-2x\upsilon'+2v\upsilon = 0 \ .$$

Η (18) για $v=n$ $(n=0,1,2,\dots)$ είναι η (Δ.5.1), δηλαδή η εξίσωση που ικανοποιούν τα πολυώνυμα του Hermite. Για v αυθαίρετο τις λύσεις της (13) είναι φυσικό να τις λέμε συναρτήσεις Hermite. Αν κάνουμε το μετασχηματισμό $t=x^2$ η (13) θα πάρει τη μορφή

$$(19) \qquad t\upsilon_{,tt}+(\frac{1}{2}-t)\upsilon_{,t}+\frac{v}{2}\upsilon=0$$

που είναι μια ειδική μορφή της (1) με

$$\alpha=-\frac{v}{2}\ , \qquad \gamma=\frac{1}{2}\ .$$

Η λύση λοιπόν της (19), θα είναι

$$(20) \qquad \upsilon=A\phi(-\frac{v}{2}\,,\,\frac{1}{2}\,;t)+B\sqrt{t}\,\phi\,(\frac{1-v}{2}\,,\,\frac{3}{2}\,;\,t\,)$$

ή

$$(21) \qquad \upsilon=A\phi(-\frac{v}{2}\,,\,\frac{1}{2}\,;x^2)+Bx\phi(\frac{1-v}{2}\,,\,\frac{3}{2}\,;x^2)\ .$$

Αν εκλέξουμε τις σταθερές A και B να είναι

$$A=\frac{2^v\Gamma(1/2)}{\Gamma(\frac{1-v}{2})}\ , \qquad B=\frac{2^v\Gamma(-1/2)}{\Gamma(-\frac{v}{2})}$$

η (21) γράφεται

$$(22) \qquad \upsilon=H_v(x)=\frac{2^v\Gamma(1/2)}{\Gamma(\frac{1-v}{2})}\phi(-\frac{v}{2}\,,\,\frac{1}{2}\,;x^2) + \frac{2^v\Gamma(-1/2)}{\Gamma(-\frac{v}{2})}x\phi(\frac{1-v}{2}\,,\,\frac{3}{2}\,;x^2)\ .$$

Η συνάρτηση (22) λέγεται <u>συνάρτηση του Hermite v-βαθμού</u>. Για $v=n$ $(n=0,1,2,\ldots)$ η $H_v(x)$ ανάγεται στις (15 α,β). Για $v=0,\pm1,\pm2,\ldots$ η γενική λύση της (18) μπορεί να εκφραστεί σε όρους των συναρτήσεων Hermite. Επειδή για $x\to -x$ η (18) δεν αλλάζει, η συνάρτηση $\upsilon_2=H_v(-x)$ θα είναι επίσης λύση της και θα έχουμε

$$(23)\qquad W\{\upsilon_1,\upsilon_2\}= Ce^{x^2}$$

όπου C είναι μια σταθερά. Αν λάβουμε υπόψη ότι ,

$$(24)\qquad H_v(0)=\frac{2^v\Gamma(1/2)}{\Gamma(\frac{1-v}{2})}\ , \qquad H'_v(0)=\frac{2^v\Gamma(-1/2)}{\Gamma(-\frac{v}{2})}\ ,$$

τότε

$$(25)\qquad C=W\{\upsilon_1,\upsilon_2\}_{x=0}=-\frac{2^{2v+1}\Gamma(1/2)\Gamma(-1/2)}{\Gamma(\frac{1-v}{2})\Gamma(-\frac{v}{2})}=\frac{2^{v+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-v)}$$

και η (23) γράφεται

$$(26)\qquad W\{H_v(x),\ H_v(-x)\}=\frac{2^{v+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-v)}e^{x^2}\neq 0\ .$$

Από την (26) παίρνουμε την πληροφορία ότι για $v\neq 0,1,2,\ldots$ οι λύσεις $H_v(x)$ και $H_v(-x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες και η γενική λύση της (18) θα είναι

$$(27)\qquad \upsilon=C_1H_v(x)+C_2\ H_v(-x)\ .$$

Για $v=n$ $(n=0,1,2,\ldots)$ θα έχουμε $W\equiv 0$ και οι συναρτήσεις $H_v(x)$ και $H_v(-x)$ είναι γραμμικά εξαρτημένες

$$(28)\qquad H_n(-x)=(-1)^nH_n(x)\ .$$

4. Εφαρμογή των προσαρτημένων συναρτήσεων Legendre.

Οι προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre έχουν την πιο μεγάλη τους εφαρμογή στην ανάπτυξη σε σειρά μιας συνάρτησης που ορίζεται στην επιφάνεια σφαίρας.

Ας θεωρήσουμε την εξίσωση του Helmholtz (Γ.1.7)

$$(1)\qquad \nabla^2F_k+k^2F_k=0\ ,$$

όπου η F_k (ιδιοσυνάρτηση) αντιστοιχεί στη συχνότητα $\omega=kc$.
Αν εισάγουμε στην (1) την

(2) $$F_k(r,\theta,\phi) = R(r)Y(\theta,\phi)$$

θα πάρουμε (χωρισμός των μεταβλητών)

(3) $$(r^2R,_r),_r+\{k^2r^2+\lambda\}R = 0$$

και

(4) $$\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta Y,_\theta),_\theta+\frac{1}{\sin^2\theta}Y,_{\phi\phi}+\lambda Y = 0 \quad .$$

Η ιδιοτιμή λ θα προσδιοριστεί από την (4). Στην κάθε ιδιοτιμή λ θα αντιστοιχεί , αν δεν υπάρχει εκφυλισμός (degeneracy)(*), μία ιδιοσυνάρτηση $Y_\lambda(\theta,\phi)$. Η συνάρτηση λοιπόν F_k μπορεί να εκφραστεί με τη σειρά

(5) $$F_k(r,\theta,\phi) = \sum_\lambda c_\lambda R_\lambda(r)Y_\lambda(\theta,\phi) \quad ,$$

όπου ο δείκτης λ έχει συμβολικό χαρακτήρα αφού ακόμα δεν έχει διερευνηθεί η δομή του φάσματος των λ (διακεκριμένο ή συνεχές και αν υπάρχει εκφυλισμός).

Για τον προσδιορισμό των τιμών της λ εισάγουμε στην (4) λύση της μορφής

(6) $$Y(\theta,\phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

και παίρνουμε τις εξισώσεις

(7) $$\Phi,_{\phi\phi}-\lambda_1\Phi = 0$$

(8) $$(\sin\theta\cdot\Theta,_\theta)+\{-\lambda\sin\theta+\frac{\lambda_1}{\sin\theta}\}\Theta = 0$$

(*) εκφυλισμό λέμε ότι έχουμε αν κάποιες από τις ιδιοτιμές αντιστοιχούν σε περισσότερες από μία ιδιοσυναρτήσεις.

που έχουν συζητηθεί στο Κεφ.Γ.
Από την (7) έχουμε

$$\lambda_1=-m^2\ ,\qquad m=0,1,2,...$$

και

(9)
$$\tilde{\Phi}_0(\phi)=1 \qquad \text{για} \quad m=0$$
$$\tilde{\Phi}_m(\phi)=\{\text{ή}\ \begin{matrix}\cos m\phi\\ \sin m\phi\end{matrix} \qquad \text{για} \quad m\neq 0\ .$$

Οι συναρτήσεις (9) είναι μεταξύ τους ορθογώνιες με στάθμες

(10)
$$\|\tilde{\Phi}_0(\phi)\|^2=\int_0^{2\pi}\{\Phi_0(\phi)\}^2 d\phi=2\pi$$
$$\|\tilde{\Phi}_m(\phi)\|^2=\int_0^{2\pi}\{\Phi_m(\phi)\}^2 d\phi=\pi \qquad .$$

Οι ορθοκανονικές συναρτήσεις που παίρνονται από τις (10) είναι

(11)
$$\Phi_0(\phi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \qquad \text{για} \qquad m=0$$
$$\Phi_m^{(+)}(\phi)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos m\phi$$
$$\qquad\qquad\qquad \text{για} \qquad m\neq 0$$
$$\Phi_m^{(-)}(\phi)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin m\phi$$

όπου τα σύμβολα + και - δηλώνουν άρτια ή περιττή συνάρτηση ως προς την εναλλαγή $\phi \leftrightarrow -\phi$, αντίστοιχα .

Από την παρ.1 είναι γνωστό ότι το φάσμα των λ στην εξίσωση (3) είναι διακεκριμένο, δηλαδή ,

$$\lambda=-n(n+1)\ ,\qquad n=0,1,2,...n\geq m$$

και οι λύσεις της είναι οι προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre $P_n^m(\cos\theta)$

που ικανοποιούν τη σχέση ορθογωνικότητας (1.26).
Αν εισάγουμε τις συναρτήσεις

$$(12)\qquad \Theta_n^m(\cos\theta) = \left\{\frac{2n+1}{2}\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right\}^{1/2} P_n^m(\cos\theta) \quad ,$$

θα έχουμε

$$(13)\qquad \int_0^\pi \{\Theta_n^m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = \frac{2n+1}{2}\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_{-1}^{1}\{P_n^m(x)\}^2 dx = 1 \quad ,$$

δηλαδή το σύστημα των συναρτήσεων $\Theta_n^m(\cos\theta)$ είναι ορθοκανονικό.

Από την παραπάνω ανάλυση γίνεται φανερό ότι η διαφορική εξίσωση (4) έχει ιδιοτιμές

$$\lambda = -n(n+1) \quad , \qquad n=0,1,2,\ldots$$

που είναι εκφυλισμένες (εκτός αν $n=0$), γιατί για κάθε τιμή του n έχουμε τις ιδιοσυναρτήσεις

$$(14)\qquad \begin{array}{lll} \Theta_n^0(\cos\phi)\Phi_0(\phi) & & \\ \Theta_n^1(\cos\theta)\Phi_1^{(+)}(\phi) & \text{και} & \Theta_n^1(\cos\theta)\Phi_1^{(-)}(\phi) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ \Theta_n^n(\cos\theta)\Phi_n^{(+)}(\phi) & \text{και} & \Theta_n^n(\cos\phi)\Phi_n^{(-)}(\phi) \quad , \end{array}$$

δηλαδή σε κάθε τιμή του n αντιστοιχούν $(2n+1)$ διαφορετικές ιδιοσυναρτήσεις και κατά συνέπεια έχουμε $(2n+1)$-πολλαπλότητα εκφυλισμού.

Οι βασικές λύσεις της (4) θα είναι

$$Y_{n0}(\theta,\phi) = \Theta_n^0(\cos\phi)\Phi_0(\phi) \quad , \qquad \text{για} \qquad m=0$$

$$\left.\begin{array}{l} Y_{nm}^{(+)}(\theta,\phi) = \Theta_n^m(\cos\phi)\Phi_m^{(+)}(\phi) \\ Y_{nm}^{(-)}(\phi,\theta) = \Theta_n^m(\cos\phi)\Phi_m^{(-)}(\phi) \quad . \end{array}\right. \qquad \text{για} \qquad m\neq 0$$

Οι λύσεις (15) λέγονται <u>σφαιρικές αρμονικές</u> (spherical harmonics).

Αν εισάγουμε τις (15) στην (5) έχουμε

$$(16)\qquad F_k(r,\theta,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(r)\{c_{n0}Y_{n0}(\theta,\phi)+\sum_{m=1}^{n} c_{nm}^{(+)}Y_{nm}^{(+)}(\theta,\phi) + \sum_{m=1}^{n} c_{nm}^{(-)}Y_{nm}^{(-)}(\theta,\phi)\} \quad .$$

Αν μια συνάρτηση $f(\theta,\phi)$ ορίζεται στην επιφάνεια μιας σφαίρας και ικανοποιεί συνθήκες παρόμοιες εκείνων που απαιτούνται για την ανάπτυξη μιας συνάρτησης σε γενικευμένη σειρά Fourier π.χ. Fourier-Bessel , τότε αυτή μπορεί να αναπτυχθεί στη σειρά

$$(17)\qquad f(\theta,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \{c_{n0}Y_{n0}(\theta,\phi)+\sum_{m=1}^{n}(c_{nm}^{(+)}Y_{nm}^{(+)}(\theta,\phi)+c_{nm}^{(-)}Y_{nm}^{(-)}(\theta,\phi))\}$$

όπου

$$(18)\qquad \begin{aligned} c_{n0} &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,\phi)Y_{n0}(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi \,, && \text{για} \quad m=0 \\ c_{nm}^{(\pm)} &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,\phi)Y_{nm}^{(\pm)}(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi && \text{για} \quad m\neq 0 \;. \end{aligned}$$

<u>Παρατήρηση</u>: Ο συντελεστής $\sin\theta$ οφείλεται στο ότι $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$, όπου $d\Omega$ συμβολίζει το διαφορικό της στερεάς γωνίας ($d\Omega = ds/_{r^2} = r^2\sin\theta d\theta d\phi/_{r^2}$).

Στη κβαντομηχανική οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$\Phi,_{\phi\phi}+m^2\Phi = 0$$

λαμβάνονται με τη μορφή

$$(19)\qquad \tilde{\Phi}_m = e^{im\phi} \quad , \qquad e^{-im\phi} \quad .$$

Οι (19) ικανοποιούν τη σχέση ορθογωνικότητας

$$(20)\qquad \int_0^{2\pi} e^{im\phi}e^{-ik\phi}d\phi = \int_0^{2\pi}\tilde{\Phi}_m\tilde{\Phi}_k^{*}\phi = 2\pi\delta_{mk}$$

Οι ορθοκανονικές συναρτήσεις που αντιστοιχούν στις (19) είναι

(21) $$\Phi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-im\phi} \quad .$$

Οι σφαιρικές αρμονικές στην περίπτωση αυτή θα έχουν τη μορφή *

(22) $$Y_{nm}(\theta,\phi) = \left\{\frac{2n+1}{4} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right\}^{1/2} P_n^m(\cos\theta)e^{im\phi}$$

και το πλήρες ολοκλήρωμα της ορθογωνικότητας θα είναι

(23) $$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{n_1 m_1} Y^*_{n_2 m_2} \sin\theta d\theta d\phi = \delta_{n_1 n_2} \delta_{m_1 m_2} \quad ,$$

όπου (*) συμβολίζει τη μιγαδική συζυγή συνάρτηση.

Σε προβλήματα της φυσικής π.χ. κατασκευή της συνάρτησης Green (στον τριδιάστατο χώρο)της εξίσωσης του Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες , είναι ανάγκη να γνωρίζουμε το θεώρημα άθροισης των σφαιρικών αρμονικών. Αν έχουμε δύο διανύσματα που ορίζονται από τα ζεύγη των γωνιών (θ_1,ϕ_1) και (θ_2,ϕ_2) και σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία γ , τότε

(24) $$P_n(\cos\gamma) = \frac{4}{2n+1} \sum_{m=-n}^{n} (-1)^m Y^*_{nm}(\theta_1,\phi_1) Y_{nm}(\theta_2,\phi_2)$$

(*) Στο δεύτερο μέλος της (22) οι Condon-Shortley έχουν εισάγει το συντελεστή $(-1)^m\{\ldots..\}\ P_n^m(\theta,\phi)e^{im\phi}$ (συντελεστή φάσης -phase factor). Μερικές από τις σφαιρικές συναρτήσεις, που περικλείουν το συντελεστή $(-1)^m$, είναι :

$$Y_{00}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad , \quad Y_{11}(\theta,\phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\phi} \quad , \quad Y_{10}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$$

$$Y_{21}(\theta,\phi) = -\sqrt{\frac{5}{24\pi}}\, 3\sin\theta\cos\theta e^{i\phi} \quad , \quad Y_{22}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{96\pi}}\, 3\sin^2\theta e^{2i\phi} \quad ,$$

$$Y_{20}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) \quad , \quad \text{κ.τ.λ.}$$

όπου $Y^*_{nm}=Y_{n(-m)}$, (βλέπε Arfken (1970), σελ. 581-584).

Παράδειγμα 1 : Θα αναζητήσουμε τις λύσεις της εξίσωσης Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες

(25) $\nabla^2 u = 0$, $r\in[0,\infty)$, $\theta\in[0,\pi]$, $\phi\in(-\pi,\pi]$,

που είναι φραγμένες στο κέντρο της σφαίρας. Η εξίσωση του Helmholtz για $k=0$ ανάγεται στην (25) και κατά συνέπεια από τις (1-4) παίρνουμε

(26) $(r^2 R,_r),_r - n(n+1)R = 0$

(27) $\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta Y,_\theta),_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta} Y,_{\phi\phi} - n(n+1)Y = 0$.

Η γενική λύση της (26) (εξ.Euler) είναι

(28) $R(r) = c_1 r^n + c_2 r^{-n-1}$.

Η λύση της (25) θα προκύψει από την (16), δηλαδή ,

(29) $u(r,\theta,\phi) = \sum_n \sum_m (A_{nm} r^m + B_{nm} r^{-n-1}) Y_{nm}(\theta,\phi)$.

Για να είναι η λύση της (25) φραγμένη στο $r=0$ πρέπει $c_2=0$ και η (29) παίρνει τη μορφή

(30) $u(r,\theta,\phi) = \sum_n \sum_m A_{nm} r^n Y_{nm}(\theta,\phi)$.

Παράδειγμα 2. Στο εσωτερικό μιας σφαιρικής κοιλότητας ακτίνας $r=\alpha$ γεννιούνται ηχητικά κύματα (sound waves) και θέλουμε να μελετήσουμε τα στάσιμα κύματα και τις συχνότητές τους.

Η περιγραφή του προβλήματος σε όρους του δυναμικού της ταχύτητας $\bar{\upsilon}=-\nabla\phi$ είναι

(31) $\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\ddot{\phi} = 0$, $\phi,_r\Big|_{r=\alpha} = 0$.

θα αναζητήσουμε λύσεις της μορφής

(32) $\phi_k(\mathbf{r};t) = F_k(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, $\omega = kc$,

οπότε η περιγραφή του προβλήματος θα είναι

(33) $\nabla^2 F_k + k^2 F_k = 0$, $F_{k,r}|_{r=\alpha} = 0$.

Η λύση της (33) δίνεται από την (16), όπου η $R_n(r)$ ικανοποιεί την ακτινική διαφορική εξίσωση (3 ή Γ.1.24)

(34) $(r^2 R_{n,r})_{,r} + \{k^2 r^2 - n(n+1)\}R = 0$, $n=0,1,2,\ldots$.

Η λύση της (34) είναι

(35) $R_n(r) = A_n j_n(kr) + B_n n_n(kr)$.

Επειδή η σφαιρική συνάρτηση Neumann , $n_n(kr)$, δεν είναι πεπερασμένη στο $r=0$ θα πρέπει $B_n=0$. Οι τιμές της k προσδιορίζονται από τη συνοριακή συνθήκη

(36) $(j_n(kr))_{,r}|_{r=\alpha} = 0$.

Από τις ρίζες της (36), υπάρχουν σε πίνακες, προσδιορίζονται οι συχνότητες των στάσιμων κυμάτων στο εσωτερικό της σφαιρικής κοιλότητας , π.χ. οι ρίζες της

(37) $(j_n(\pi\alpha))_{,\alpha} = 0$

είναι

n	0	1	2	0	3
ℓ	1	1	1	2	1
$\alpha_{n\ell}$	0	0.6626	1.0638	1.4303	1.4369

και οι αντίστοιχες συχνότητες

(38) $$\omega_{n\ell} = \frac{c\pi\alpha_{n\ell}}{\alpha} \ .$$

Η λύση λοιπόν του προβλήματος θα είναι

(39) $$\phi(r;t) = \sum_{\ell}\sum_{n}\sum_{m} D_{\ell nm} j_n(kr) Y_{nm}(\theta,\phi) e^{-i\omega t} \ ,$$

όπου οι συντελεστές $D_{\ell nm}$ προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

Προβλήματα

1. Να αποδειχτεί ότι

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x)$$

$$P_{2n}^1(0) = 0$$

$$P_{2n+1}^1(0) = (-1)^n \frac{(2n+1)!}{(2^n n!)^2} = (-1)^n \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}$$

$$P_n^m(\cos\theta) = (2n-1)!! \sin\theta^n \ , \quad n = 0,1,2,\ldots \quad ,$$

όπου

$$2n(2n-2)\ldots\cdot 6\cdot 4\cdot 2 \equiv (2n)!!$$

$$(2n+1)(2n-1)\ldots\cdot 5\cdot 3\cdot 1 \equiv (2n+1)!! \quad .$$

2. Να αποδειχτεί ότι

$$\sin\theta P_n^1(\cos\theta) = P_n^1(\cos\theta) \quad .$$

3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi} \sin^2\theta P_n^1(\cos\theta) d\theta \quad .$$

4. Να αποδειχτεί ότι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $\phi(\alpha,\gamma;x)$ είναι

$$\mathcal{L}(\phi(\alpha,\gamma;x))=\frac{1}{s}\,F(\alpha,1;\gamma;\frac{1}{s})\ .$$

5. Να αποδειχτεί ότι

$$F(2\alpha,2\beta;\alpha+\beta+\frac{1}{2};\frac{1}{2})=\frac{\Gamma(\alpha+\beta+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\,\Gamma(\beta+\frac{1}{2})}\ ,\quad \alpha+\beta+\frac{1}{2}\neq 0,-1,-2,\ldots$$

$$F(\alpha,\beta;1+\alpha-\beta;-1)=2^{-\alpha}\,\frac{\Gamma(1+\alpha-\beta)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1-\beta+\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2})}\ ,\quad 1+\alpha-\beta\neq 0,-1,-2,\ldots$$

6. Να αποδειχτεί ότι η γενική λύση της εξίσωσης Laplace $\nabla^2 u=0$ σε σφαιρικές συντεταγμένες που ισχύει για το εσωτερικό της σφαίρας $(r\leq\alpha)$ μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή

$$u(r,\phi,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(A_{nm}\cos m\phi+B_{nm}\sin m\phi)r^n P_n(\cos\theta)\ .$$

α) Αν υποθέσουμε ότι δίνεται η συνοριακή συνθήκη $u(\alpha,\phi,\theta)=f(\theta,\phi)$ να βρεθούν οι εκφράσεις για τους συντελεστές A_{nm} και B_{nm}.

β) Ποια είναι η αντίστοιχη λύση για $r>\alpha$;

7. Στο παράδειγμα 2 της παρ. 4 να συζητηθεί το πρόβλημα του εκφυλισμού των τρόπων ταλάντωσης της σφαιρικής κοιλότητας.

Βιβλιογραφία

1. M. Abramowitz and Stegun, "Handbook of Mathematical Functions", Dover Publications, 1972.
2. G. Arfken, "Mathematical Methods for Physicists", Academic Press, New York, 1970.
3. I. Βέργαδου, "Μαθηματικές Μέθοδοι Φυσικής I - II ", Γιάννινα, 1982.
4. E. Butkov, "Mathematical Physics", Addison - Wesley, New York, 1975.
5. E. Coddington, "An Introduction to Ordinary Differential Equations", Prentice - Hall Inc. Englewood Cliffs, New York, 1961.
6. E. Collins, "Mathematical Methods for Physicists and Engineers", Reinhold Physics Text Book Series, New York, 1968.
7. E. Copson, "Asymptotic Expansions", Cambridge University Press, London, 1976.
8. R. Courant and D. Hilbert, "Methods of Mathematical Physics Vols I - II ", Interscience Publishers, New York, 1953.
9. P. Dennery and A. Krzuwicki, "Mathematics for Physicists", Harper and Row, New York, 1967.
10. Γ. Δάσιος, "Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις", Πάτρα, 1983.
11. A. Erdēlyi, "Asymptotic Expansions", Dover Publications, 1965.
12. A. Erdēlyi et al., "Higher Transcendental Functions, Vols I-II", McGraw - Hill Book Company, New York, 1953.
13. B. Friedmann, "Principles and Techniques of Applied Mathematics", John Wiley and Sons, New York, 1957.
14. H. Hobson, "The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics", Cambridge University Press, London, 1931.
15. H. Hochstadt, "The Functions of Mathematical Physics", Wiley - Interscience, New York, 1971.
16. E. Ince, "Ordinary Differential Equations", Dover Publications, 1964.

17. Γ. Καρακώστα , "Πραγματική Ανάλυση", Γιάννινα, 1985.
18. Α. Κατσάρα, "Μιγαδική Ανάλυση", Γιάννινα, 1981.
19. G. Korn, "Mathematical Handbook for Scientists and Engineers", McGraw-Hill Book Company, New York, 1968.
20. E. Kreyszing, "Advanced Engineering Mathematics", John Wiley and Sons, Inc., New York, 1968.
21. N. Lebenev, "Special Functions and their Applications", Dover Publications, 1972.
22. W. Magnus and F. Oberhettinger, "Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics", Chelsea, New York, 1949.
23. P. Morse and H. Feshbach, "Methods of Theoretical Physics, Vols I - II ", McGraw-Hill Book Company, New York, 1953.
24. C. Pearson, "Handbook of Applied Mathematics (Selected Results and Methods)", Van Norstrand Reinhold Company, New York, 1974.
25. Ι. Σφήκα, "Εισαγωγή στη Θεωρία Μιγαδικών Συναρτήσεων", Γιάννινα, 1984.
26. A. Tikhonov and A. Samarski, "Differential-Gleichungen der Mathematischen Physik", VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1959.
27. G. Tolstov, "Fourier Series", Dover Publications, 1976.
28. G. Watson, "Treatise on the Theory of Bessel Functions", Macmillan, New York, 1944.
29. E. Whittaker and G. Watson, "A course of Modern Analysis", Macmillan, New York, 1947.

Ευρετήριο όρων