ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ ΧΡ. ΤΣΑΜΑΤΟΥ
Επίκ. Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών
του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Σύνολα και Αριθμοί

Για τους Φοιτητές του Παιδαγωγικού Τμήματος
Δημοτικής Εκπ/σης του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Α΄ ΜΕΡΟΣ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ· 1986

ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ ΧΡ. ΤΣΑΜΑΤΟΥ

Επίκ. Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών
του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Σύνολα και Αριθμοί

Για τους Φοιτητές του Παιδαγωγικού Τμήματος
Δημοτικής Εκπ/σης του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Ιωάννινα 1986

Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

Το βιβλίο αυτό γράφτηκε με σκοπό να χρησιμοποιηθεί σαν διδακτικό βιβλίο για το μάθημα "Σύνολα και Αριθμοί", του 1ου εξαμήνου του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Επειδή το παραπάνω μάθημα είναι εισαγωγικό, το βιβλίο αυτό περιέχει τις ελάχιστες από εκείνες τις μαθηματικές έννοιες, που πρέπει να αποτελούν την αφετηρία καθενός που θέλει ν'ασχοληθεί, λιγότερο ή περισσότερο συστηματικά, με τη μαθηματική γνώση. Τέτοιες έννοιες είναι η έννοια του συνόλου, της σχέσης, της συνάρτησης και της ισχύος των συνόλων. Είναι κοινή παραδοχή ότι οι έννοιες αυτές παίζουν θεμελιακό ρόλο στη σύγχρονη μαθηματική παιδεία.

Εκτός των παραπάνω αντικειμένων και δεδομένου του σκοπού του βιβλίου, αυτό περιέχει και ένα κεφάλαιο που αναφέρεται στα συστήματα αρίθμησης και τις αριθμητικές πράξεις, αντικείμενο, που από μόνο του έχει τεράστιο ενδιαφέρον για τον παιδαγωγό της Δημοτικής Εκπαίδευσης.

Το παρόν βιβλίο είναι καρπός δίχρονης διδακτικής εμπειρίας στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων. Με γνώμονα την εμπειρία αυτή, καταβλήθηκε προσπάθεια να δοθούν οι παραπάνω έννοιες με απλότητα χωρίς αυτό ν'αποβαίνει σε βάρος της μαθηματικής αυστηρότητας.

Θεωρώ υποχρέωσή μου να ευχαριστήσω τους συναδέλφους κ.κ. Γεώργιο Καρακώστα και Χρυσόστομο Πεταλά για τις εύστοχες παρατηρήσεις τους στην τελική διαμόρφωση του βιβλίου καθώς και την Παρασκευάστρια κ. Αγνή Παπαβρανούση για την προσεκτική δακτυλογράφηση του κειμένου.

Μάρτιος 1987 — Παναγ. Χρ. Τσαμάτος

П Е Р І Е Х О М Е Ν Α

1. ΛΟΓΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ. ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

2. ΣΥΝΟΛΑ

3. ΣΧΕΣΕΙΣ

1. ΛΟΓΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ. ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

.1. Η έννοια της λογικής πρότασης

Με τον όρο <u>λογική</u> <u>πρόταση</u> ή και απλά <u>πρόταση</u> στα Μαθηματικά ννοούμε μια έκφραση με πλήρες νόημα που επιδέχεται ένα μόνο από ους χαρακτηρισμούς <u>αληθής</u> ή <u>ψευδής</u>. Έτσι, π.χ., οι εκφράσεις:

"τα Ιωάννινα είναι πρωτεύουσα της Ηπείρου"

αι

"ο αριθμός 7 είναι πολλαπλάσιο του αριθμού 3"

ίναι λογικές προτάσεις και μάλιστα η πρώτη αληθής και η δεύτερη ευδής. Αντίθετα η έκφραση:

"η κλασσική μουσική είναι το πιο ευχάριστο είδος μουσικής"

αν και είναι πρόταση σύμφωνα με το Συντακτικό), δεν είναι λογιή πρόταση αφού δεν είναι σίγουρα αληθές ούτε ψευδές για όλους ους ανθρώπους αυτό που εκφράζει.

.2. Λογικοί σύνδεσμοι. Προτασιακός λογισμός

Αν σε κάποια πρόταση προταχθεί κάποιος λεκτικός σύνδεσμος ή ν συνδέσομε με κάποιο λεκτικό σύνδεσμο δυό προτάσεις, προκύπτει ια καινούργια πρόταση. Έτσι, π.χ. από τις προτάσεις, "ο αριθμός 3 είναι πρώτος αριθμός" και "ο αριθμός 7 είναι άρτιος αριθμός", ε την προσθήκη του διαζευκτικού <u>ή</u> προκύπτει η πρόταση, "ο αριθμός 3 είναι πρώτος αριθμός ή ο αριθμός 7 είναι άρτιος αριθμός".

Οι συνηθέστεροι λεκτικοί σύνδεσμοι που χρησιμοποιούνται για ο σκοπό αυτό είναι το "<u>όχι</u>", το "<u>και</u>", το "<u>ή</u>", το "<u>αν...</u>,<u>τότε</u>" (ή "<u>συνεπάγεται</u>"), το "<u>τότε</u> <u>και</u> <u>μόνο</u> <u>τότε</u> <u>αν</u>". Αυτοί οι λεκτικοί σύνδεσμοι ονομάζονται <u>λογικοί</u> <u>σύνδεσμοι</u>. Με τους παρακάτω πίνακες ορίζονται οι συνηθέστερες προτάσεις που μπορούν να προκύψουν από μια τέτοια διαδικασία. Σ'ό,τι ακολουθεί συμβολίζομε με p,q, r,... τις λογικές προτάσεις και με α (αληθής) και ψ (ψευδής) τις τιμές τους.

ΑΡΝΗΣΗ

"όχι p" (συμβολικά: $\sim p$)

(α)

p	~p
α	ψ
ψ	α

ΣΥΖΕΥΞΗ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ

"p και q" (συμβολικά: $p \wedge q$)

(β)

p	q	$p \wedge q$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	ψ
ψ	ψ	ψ

ΕΓΚΛΕΙΣΤΙΚΗ ΔΙΑΖΕΥΞΗ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ

"p ή q" (συμβολικά: $p \vee q$)

(γ)

p	q	$p \vee q$
α	α	α
α	ψ	α
ψ	α	α
ψ	ψ	ψ

ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΗ ΔΙΑΖΕΥΞΗ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ

"ή μόνο p ή μόνο q" (συμβολικά: $p \veebar q$)

(δ)

p	q	$p \veebar q$
α	α	ψ
α	ψ	α
ψ	α	α
ψ	ψ	ψ

ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗ

"αν p, τότε q" ή "p συνεπάγεται q" (συμβολικά: $p \Rightarrow q$)

(ε)

p	q	$p \Rightarrow q$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	α
ψ	ψ	α

Η έκφραση (πρόταση) "p συνεπάγεται q" αποδίδεται συχνά στα Μαθηματικά και με τις παρακάτω εκφράσεις:

"η p είναι ικανή συνθήκη για την q"

"η q είναι αναγκαία συνθήκη για την p".

ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ

"p συνεπάγεται q και q συνεπάγεται p" (συμβολικά: $p \Leftrightarrow q$)

(στ)

p	q	$p \Leftrightarrow q$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	ψ
ψ	ψ	α

Είναι φανερό ότι η πρόταση $p \Leftrightarrow q$ δεν είναι τίποτε περισσότερο από την σύζευξη των προτάσεων $p \Rightarrow q$ και $q \Rightarrow p$. Δηλαδή, η $p \Leftrightarrow q$ είναι άλλη μορφή της πρότασης $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Έτσι, ο πίνακας (στ) προκύπτει εύκολα από συνδυασμό των πινάκων (β) και (ε).

Οι παραπάνω πίνακες λέγονται <u>πίνακες αλήθειας</u> των αντίστοιχων προτάσεων και οι τιμές α, ψ <u>τιμές αλήθειας</u> των προτάσεων αυτών.

1.3. Ταυτολογίες

Είδαμε παραπάνω ότι οι συμβολισμοί $p \Leftrightarrow q$ και $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$ αποδίδουν την ίδια πρόταση. Αυστηρά, αυτό μπορούμε να το διατυπώσουμε ως εξής: Οι προτάσεις $p \Leftrightarrow q$ και $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$ παίρνουν τις ίδιες τιμές αλήθειας για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς τιμών αλήθειας των προτάσεων p και q. Έτσι, από τους πίνακες (β), (ε) και (στ) προκύπτει ότι η πρόταση-ισοδυναμία

$$[(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)]\Leftrightarrow(p\Leftrightarrow q)$$

είναι πάντοτε πρόταση αληθής ανεξάρτητα από τις τιμές των p και q. Τέτοιες ισοδυναμίες λέγονται <u>ταυτολογίες</u>. Μερικές χρήσιμες ταυτολογίες δίνονται αμέσως παρακάτω:

1) $p \Leftrightarrow p\wedge p$
2) $p \Leftrightarrow p\vee p$
3) $p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$
4) $\sim(p\wedge q) \Leftrightarrow (\sim p)\vee(\sim q)$
5) $\sim(p\vee q) \Leftrightarrow (\sim p)\wedge(\sim q)$
6) $(p\wedge q) \Leftrightarrow \sim((\sim p)\vee(\sim q))$
7) $(p\vee q) \Leftrightarrow \sim((\sim p)\wedge(\sim q))$
8) $(p\Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(p\wedge(\sim q)) \Leftrightarrow (\sim q\Rightarrow \sim p)$
9) $(p\Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [\sim(p\wedge(\sim q))]\wedge[\sim(q\wedge(\sim p))]$
10) $p\wedge(q\wedge r) \Leftrightarrow (p\wedge q)\wedge r$
11) $p\vee(q\vee r) \Leftrightarrow (p\vee q)\vee r$
12) $p\wedge(q\vee r) \Leftrightarrow (p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
13) $p\vee(q\wedge r) \Leftrightarrow (p\vee q)\wedge(p\vee r)$.

Η απόδειξη του ότι κάθε μια από τις παραπάνω προτάσεις είναι ταυτολογία, επιτυγχάνεται εύκολα με την κατασκευή του πίνακα αλήθειας. Για παράδειγμα, αποδεικνύομε με τους παρακάτω πίνακες ότι οι προτάσεις (4) και (5) είναι ταυτολογίες. Οι προτάσεις αυτές, ιδιαίτερα χρήσιμες, είναι γνωστές σαν <u>νόμοι του De Morgan</u>. Ακόμη, η ταυτολογία $(p\Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(p\wedge(\sim q))$ (8), είναι ιδιαίτερα σημαντική γιατί εκφράζει την πολύ γνωστή αποδεικτική διαδικασία της <u>απαγωγής σε άτοπο</u>. Σύμφωνα με αυτή τη διαδικασία, για να αποδείξομε ότι η $p\Rightarrow q$ είναι αληθής, πρέπει και αρκεί να δειχτεί ότι η πρόταση $p\wedge(\sim q)$ είναι ψευδής.

<u>Πίνακες αλήθειας για τους νόμους του De Morgan</u>

p	q	~p	~q	$p\wedge q$	$\sim(p\wedge q)$	$(\sim p)\vee(\sim q)$	$\sim(p\wedge q) \Leftrightarrow (\sim p)\vee(\sim q)$
α	α	ψ	ψ	α	ψ	ψ	α
α	ψ	ψ	α	ψ	α	α	α
ψ	α	α	ψ	ψ	α	α	α
ψ	ψ	α	α	ψ	α	α	α

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$	$\sim(p \vee q) \Longleftrightarrow (\sim p)\wedge(\sim q)$
α	α	ψ	ψ	α	ψ	ψ	α
α	ψ	ψ	α	α	ψ	ψ	α
ψ	α	α	ψ	α	ψ	ψ	α
ψ	ψ	α	α	ψ	α	α	α

Ας σημειωθεί εδώ ότι αν η πρόταση $p \Longleftrightarrow q$ είναι ταυτολογία, τότε οι προτάσεις p και q λέγονται <u>ισοδύναμες</u> και αντίστροφα.

<u>1.4.</u> <u>Ασκήσεις</u>

<u>1</u>. Να αποδειχτεί ότι οι προτάσεις 6 έως 13 της Παραγράφου 1.3 είναι ταυτολογίες.

<u>2</u>. Να εξεταστεί αν η πρόταση $p \vee (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ είναι ταυτολογία.

<u>3</u>. Αν p, q και r είναι λογικές προτάσεις, να αποδειχτεί ότι οι προτάσεις

α) $(\sim p) \vee p$

β) $\sim(p \wedge (\sim p))$

γ) $(p \wedge q) \Longrightarrow p$

δ) $p \Longrightarrow (p \vee q)$

ε) $(p \wedge q) \Longrightarrow (p \Longrightarrow q)$

στ) $[(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r)] \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)$

είναι πάντοτε αληθείς.

<u>4</u>. Να γίνει ο πίνακας αλήθειας για τις προτάσεις

α) $[(p \Longrightarrow q) \wedge (\sim q)] \Longrightarrow (\sim p)$

β) $(p \vee (\sim q)) \Longrightarrow q$

γ) $(p \wedge (p \vee q)) \Longleftrightarrow p$.

<u>5</u>. Να βρεθεί πότε η πρόταση

$$[p \wedge [q \Longrightarrow (p \vee r)]] \Longleftrightarrow [(q \Longrightarrow p) \vee (q \Longrightarrow r)]$$

είναι αληθής.

6. Αν p,q και r είναι λογικές προτάσεις, να δειχτεί ότι αν $q \Longleftrightarrow r$ είναι αληθής πρόταση, τότε και η $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \Longrightarrow r)$ είναι αληθής.

2. ΣΥΝΟΛΑ

2.1. Η έννοια του συνόλου

Η βασικώτερη ίσως μαθηματική έννοια είναι η έννοια του συνόλου. Η έννοια αυτή χρησιμοποιείται για τη θεμελίωση όλων των κλάδων των Μαθηματικών. Η αξία της έννοιας του συνόλου, εκτός των άλλων, συνίσταται στο ότι προσφέρεται για την ανάπτυξη μιας σύντομης, κομψής και φορμαλιστικής γλώσσας για έννοιες που χρησιμοποιούνται τόσο συχνά στα λεγόμενα Ανώτερα Μαθηματικά, όσο οι τέσσερις πράξεις της Αριθμητικής στα Στοιχειώδη Μαθηματικά.

Για τα επόμενα θα θεωρήσομε ότι η έννοια "σύνολο" είναι γνωστή τουλάχιστο διαισθητικά. Αυτό, γιατί κάθε απόπειρα ορισμού της έννοιας αυτής θα οδηγούσε σε μια εισαγωγή στην αξιωματική θεμελίωση της θεωρίας των συνόλων, που είναι κάτι που ξεφεύγει κατά πολύ από τις επιδιώξεις του βιβλίου αυτού. Αν θέλομε να δώσομε μια περιγραφή μόνο της έννοιας του συνόλου, μπορούμε να πούμε ότι, σύνολο είναι μια συλλογή καθορισμένων αντικειμένων που θεωρείται αυτή καθεαυτή σαν νέο αντικείμενο. Τα αντικείμενα που απαρτίζουν ένα σύνολο τα ονομάζομε <u>στοιχεία</u> του συνόλου. Τα σύνολα τα συμβολίζομε με κεφαλαία γράμματα και τα στοιχεία τους με μικρά γράμματα του Ελληνικού ή του Λατινικού αλφαβήτου.

Δεχόμαστε καταρχή ότι, δοθέντος ενός συνόλου Α, μπορούμε με βεβαιότητα να αποφαινόμαστε κάθε φορά αν ένα αντικείμενο x <u>ανήκει</u> στο σύνολο Α (δηλαδή <u>είναι στοιχείο</u> του Α) ή <u>δεν ανήκει</u> στο Α (δηλαδή <u>δεν είναι στοιχείο</u> του Α) και τα συμβολίζομε αυτά αντίστοιχα $x \in A$ και $x \notin A$. Είναι φανερό ότι $(\sim x \in A) \Longleftrightarrow x \notin A$.

Παριστάνοντας με Α και Β δυό σύνολα δίνομε τους παρακάτω ορισμούς.

Το σύνολο Α είναι υποσύνολο του συνόλου Β, και το συμβολίζομε $A \subseteq B$, αν κάθε στοιχείο που ανήκει στο Α ανήκει και στο Β. Στην περίπτωση αυτή το Β λέγεται υπερσύνολο του Α και συμβολίζεται $B \supseteq A$.

Δύο σύνολα Α και Β είναι ίσα, και το γράφομε $A = B$, αν ισχύει $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.

Αν το σύνολο Α δεν είναι υποσύνολο του συνόλου Β, πράγμα που το συμβολίζομε με $A \not\subseteq B$, σημαίνει ότι υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $x \notin B$.

Αν το σύνολο Α δεν είναι ίσο με το σύνολο Β, πράγμα που το συμβολίζομε με $A \neq B$, σημαίνει ότι $A \not\subseteq B$ ή $B \not\subseteq A$.

Το σύνολο Α είναι γνήσιο υποσύνολο του συνόλου Β αν ισχύει $A \subseteq B$ και $A \neq B$. Στην περίπτωση αυτή το σύνολο Β λέγεται γνήσιο υπερσύνολο του συνόλου Α και συμβολίζεται με $A \subset B$ ή $B \supset A$.

Από τους παραπάνω ορισμούς είναι φανερές οι παρακάτω ιδιότητες.

$A \subseteq A$, για κάθε σύνολο Α (ανακλαστική ιδιότητα)

$A \subseteq B$ και $B \subseteq A \Rightarrow A = B$ (αντισυμμετρική ιδιότητα)

$A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma \Rightarrow A \subseteq \Gamma$ (μεταβατική ιδιότητα).

Από τα πρώτα βήματα της θεωρίας των συνόλων, βρισκόμαστε στην ανάγκη να δεχτούμε την ύπαρξη ενός συνόλου που δεν περιέχει κανένα στοιχείο. Το σύνολο αυτό το ονομάζομε κενό σύνολο και το συμβολίζομε με $\emptyset$ (ή και $\{\}$). Για το κενό σύνολο κάνομε την παραδοχή ότι είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.

2.2. Παράσταση συνόλου

Έχει επικρατήσει, ένα σύνολο να παριστάνεται με αναγραφή των στοιχείων του μέσα σε δύο άγκιστρα. Έτσι, το σύνολο με στοιχεία τα γράμματα α,β,γ γράφεται στη μορφή

$$\{\alpha, \beta, \gamma\}.$$

Η αναγραφή των στοιχείων ενός συνόλου όπως παραπάνω, δεν είναι πάντοτε ο ενδεδειγμένος τρόπος για την παράσταση ενός συνόλου, ιδιαίτερα στην περίπτωση που έχομε σύνολα με άπειρο πλήθος στοιχείων. Σε τέτοιες περιπτώσεις (αλλά και σε άλλες, όπως θα δούμε) τα σύνολα παριστάνονται ευκολότερα με την βοήθεια των "προτασιακών τύπων".

2.3. Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α

1. Αν $A=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$, $B=\{\alpha,\beta\}$ και $\Gamma=\{\alpha,\beta,\varepsilon\}$ τότε είναι φανερό ότι

$$B\subseteq A,\ B\subseteq \Gamma \text{ και } \Gamma\not\subseteq A.$$

2. Η πρόταση $\emptyset\in\emptyset$ είναι ψευδής, ενώ η πρόταση $\emptyset\in\{\emptyset\}$ είναι αληθής.

3. Η πρόταση $\alpha\in A$ είναι ισοδύναμη με την $\{\alpha\}\subseteq A$.

4. Η πρόταση $\{x,y\}\subseteq\{\{x\},\{x,y\}\}$ είναι ψευδής, ενώ η $\{x,y\}\in\{\{x\},\{x,y\}\}$ είναι αληθής.

5. Αν για κάποιο σύνολο A ισχύει $A\subseteq\emptyset$, τότε έχομε ότι $A=\emptyset$. Αυτό ισχύει γιατί εκτός της $A\subseteq\emptyset$ ισχύει πάντοτε και η σχέση $\emptyset\subseteq A$.

2.4. Π ρ ο τ α σ ι α κ ο ί τ ύ π ο ι.

Προκειμένου να δώσομε σύντομα και με φορμαλιστικό τρόπο τους ορισμούς διαφόρων πράξεων μεταξύ συνόλων και άλλες έννοιες που ακολουθούν, είναι σκόπιμο να δώσομε εδώ την έννοια του "προτασιακού τύπου". Έτσι:

Εκφράσεις που περιέχουν μια μεταβλητή και τέτοιες ώστε αν η μεταβλητή πάρει συγκεκριμένες τιμές να γίνονται λογικές προτάσεις, ονομάζονται <u>προτασιακοί τύποι</u>.

Σαν παραδείγματα προτασιακών τύπων αναφέρομε τις παρακάτω εκφράσεις.

"Ο x είναι κάτοικος Ιωαννίνων"

"Ο αριθμός x διαιρεί τον αριθμό 12".

Εξυπακούεται, ότι ένας προτασιακός τύπος γίνεται πρόταση αν αντικαταστήσομε τη μεταβλητή του με τιμές από κάποιο κατάλληλο σύνολο. Ένα τέτοιο σύνολο λέγεται <u>σύνολο αναφοράς</u> του προτασιακού τύπου.

Η αντικατάσταση της μεταβλητής με μια συγκεκριμένη τιμή από κάποιο σύνολο αναφοράς, δεν είναι ο μόνος τρόπος για να καταστήσομε τον προτασιακό τύπο πρόταση. Αυτό μπορεί επίσης να γίνει με την προσθήκη καταλλήλων εκφράσεων στον προτασιακό τύπο που λέγονται ποσοδείκτες. Έτσι, ο προτασιακός τύπος "ο αριθμός x διαιρεί τον αριθμό 6", με την προσθήκη της λέξης "υπάρχει", γίνεται η (αληθής) πρόταση "υπάρχει αριθμός x που διαιρεί τον αριθμό 6". Ακόμη ο προτασιακός τύπος "$x \leq 3$", με την προσθήκη της έκφρασης "για κάθε" γίνεται η (ψευδής) πρόταση "για κάθε $x : x \leq 3$".

Έναν προτασιακό τύπο με μεταβλητή x τον συμβολίζομε με $P(x)$ ή $Q(x)$ ή $R(x)$ κ.λ.π. Ακόμη οι προτάσεις:

"υπάρχει x έτσι ώστε να ισχύει $P(x)$"

"για κάθε x ισχύει $P(x)$"

γράφονται σύντομα $(\exists x)P(x)$ και $(\forall x)P(x)$, αντίστοιχα.

Ο συμβολισμός "$\exists x$" χρησιμοποιείται με την έννοια "υπάρχει ένα τουλάχιστο x", ενώ ο συμβολισμός "$\forall x$" χρησιμοποιείται με την έννοια "για όλα τα x ανεξαίρετα". Έτσι, γίνεται φανερό ότι η άρνηση της πρότασης $(\exists x)P(x)$, είναι η $(\forall x)\sim P(x)$ και η άρνηση της πρότασης $(\forall x)P(x)$, είναι η $(\exists x)\sim P(x)$. Επομένως ισχύουν οι ταυτολογίες:

$$\sim[(\exists x)P(x)] \Longleftrightarrow (\forall x)\sim P(x)$$

$$\sim[(\forall x)P(x)] \Longleftrightarrow (\exists x)\sim P(x).$$

Άλλες συνηθισμένες εκφράσεις που δρουν σαν ποσοδείκτες στους προτασιακούς τύπους είναι: "υπάρχει το πολύ ένα x", "για μερικά x", "για ένα ακριβώς x", "για κανένα x" κ.λ.π.

Αν Ω είναι το σύνολο αναφοράς ενός προτασιακού τύπου $P(x)$, το σύνολο όλων των $x \in \Omega$ για τα οποία ο $P(x)$ γίνεται αληθής πρόταση, λέγεται σύνολο αλήθειας του προτασιακού τύπου $P(x)$. Σύντομα, το σύνολο αλήθειας του προτασιακού τύπου $P(x)$ παριστάνεται με

$$\{x : P(x)\}.$$

Ο τρόπος αυτός παράστασης ενός συνόλου, λέγεται παράσταση του συνόλου με περιγραφή.

2.5. Πράξεις στα σύνολα

α) Τομή συνόλων. Αν A, B είναι δυό τυχόντα σύνολα, τότε το σύνολο $\{x : x \in A \text{ και } x \in B\}$ λέγεται τομή των συνόλων A και B και συμβολίζεται με $A \cap B$. Έτσι:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ και } x \in B\}.$$

Απλούστερα, μπορούμε να πούμε ότι το σύνολο $A \cap B$ έχει στοιχεία τα κοινά στοιχεία των συνόλων A και B και μόνο αυτά.

Από τον παραπάνω ορισμό είναι άμεσες οι παρακάτω ιδιότητες για τυχόντα σύνολα A, B, Γ.

$$A \cap A = A$$
$$A \cap B = B \cap A$$
$$(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$$
$$A \cap B \subseteq A \text{ και } A \cap B \subseteq B$$
$$A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset.$$

Αν $A \cap B = \emptyset$ τότε τα σύνολα A, B ονομάζονται <u>ξένα</u>.

Η τρίτη από τις παραπάνω ιδιότητες μας επιτρέπει να ορίσομε: $A \cap B \cap \Gamma = (A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$.

β) <u>Ένωση συνόλων</u>. Αν A, B είναι δυό τυχόντα σύνολα, το σύνολο $\{x : x \in A \text{ ή } x \in B\}$ λέγεται <u>ένωση</u> των συνόλων A και B και συμβολίζεται με $A \cup B$. Έτσι:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ή } x \in B\}.$$

Απλούστερα, μπορούμε να πούμε ότι το σύνολο $A \cup B$ έχει στοιχεία όλα τα στοιχεία του A και όλα τα στοιχεία του B και μόνο αυτά.

Από τον παραπάνω ορισμό είναι άμεσες οι παρακάτω ιδιότητες, για τυχόντα σύνολα A, B, Γ.

$$A \cup A = A$$
$$A \cup B = B \cup A$$
$$(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$$
$$A \subseteq A \cup B \text{ και } B \subseteq A \cup B$$
$$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A.$$

Η τρίτη από τις παραπάνω ιδιότητες μας επιτρέπει να ορίσομε: $A \cup B \cup \Gamma = (A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$.

γ) <u>Διαφορά συνόλων</u>. Αν A, B είναι δυό τυχόντα σύνολα, το σύνολο $\{x : x \in A \text{ και } x \notin B\}$ λέγεται διαφορά του συνόλου B από το σύνολο A και συμβολίζεται με $A-B$. Έτσι:

$$A-B = \{x : x \in A \text{ και } x \notin B\}.$$

Απλούστερα, μπορούμε να πούμε ότι το σύνολο $A-B$ έχει στοιχεία εκείνα τα στοιχεία του συνόλου A που δεν ανήκουν στο B και μόνο αυτά.

Από τον παραπάνω ορισμό είναι άμεσες οι παρακάτω ιδιότητες:

$$A-A=\emptyset$$
$$\emptyset-A=\emptyset$$
$$A-B\subseteq A$$
$$B-A\subseteq B.$$

Η αμέσως επόμενη πρόταση μας δίνει μερικές χρήσιμες ισοδυναμίες.

2.5.1. ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν A,B είναι τυχόντα σύνολα έχομε:

α) $x\notin A\cup B \Longleftrightarrow x\notin A \wedge x\notin B$

β) $x\notin A\cap B \Longleftrightarrow x\notin A \vee x\notin B$

γ) $x\notin A-B \Longleftrightarrow x\notin A \vee x\in B$.

Απόδειξη.

α) $x\notin A\cup B \Longleftrightarrow \sim x\in A\cup B \Longleftrightarrow \sim(x\in A \vee x\in B) \Longleftrightarrow (\sim x\in A) \wedge (\sim x\in B) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x\notin A \wedge x\notin B$.

β) $x\notin A\cap B \Longleftrightarrow \sim x\in A\cap B \Longleftrightarrow \sim(x\in A \wedge x\in B) \Longleftrightarrow (\sim x\in A) \vee (\sim x\in B) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x\notin A \vee x\in B$.

γ) $x\notin A-B \Longleftrightarrow \sim x\in A-B \Longleftrightarrow \sim(x\in A \wedge x\notin B) \Longleftrightarrow (\sim x\in A) \vee [\sim(x\notin B)] \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x\notin A \vee x\in B$.

2.6. Παραδείγματα - Εφαρμογές

1. Αν $A=\{x : P(x)\}$ και $B=\{x : Q(x)\}$ είναι τα σύνολα αλήθειας των προτασιακών τύπων $P(x)$ και $Q(x)$ αντίστοιχα, τότε είναι φανερό από τα παραπάνω ότι:

$$A\cap B=\{x : P(x)\wedge Q(x)\},\ A\cup B=\{x : P(x)\vee Q(x)\} \text{ και}$$
$$A-B=\{x : P(x)\wedge(\sim Q(x))\}.$$

2. Αν $A=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ και $B=\{\alpha,\varepsilon,\delta,\eta\}$ τότε:

$$A\cup B=\{\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\zeta,\eta\}\quad A\cap B=\{\alpha\}$$
$$A-B=\{\beta,\gamma\} \text{ και } B-A=\{\varepsilon,\delta,\eta\}.$$

3. Αν $A=\{\alpha,\beta,\gamma\}$, $B=\{\alpha,\varepsilon,\zeta,\eta\}$ και $\Gamma=\{\vartheta,\alpha,\kappa\}$ τότε:

$$A\cap B\cap\Gamma=(A\cap B)\cap\Gamma=\{\alpha\}\cap\{\vartheta,\alpha,\kappa\}=\{\alpha\}$$
$$A\cup B\cup\Gamma=(A\cup B)\cup\Gamma=\{\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\zeta,\eta\}\cup\{\vartheta,\alpha,\kappa\}=\{\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\zeta,\eta,\vartheta,\kappa\}.$$

4. Αν Ω είναι το σύνολο αναφοράς των προτασιακών τύπων $P(x)$ και $Q(x)$ και A,B τα σύνολα αλήθειας των $P(x)$ και $Q(x)$ αντίστοιχα, τότε μπορούμε, χρησιμοποιώντας τον προτασιακό λογισμό, να βρούμε

τα σύνολα αλήθειας των διαφόρων προτασιακών τύπων που μπορούμε να δημιουργήσομε από τους $P(x)$ και $Q(x)$ και τους διάφορους λογικούς συνδέσμους. Για παράδειγμα ας βρούμε το σύνολο αλήθειας του προτασιακού τύπου $P(x) \Rightarrow Q(x)$.

Για τυχόν x στο Ω, σε συνδυασμό με τα σύνολα A,B, έχομε τις εξής περιπτώσεις:

α) $x \notin A$ και $x \notin B \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \in \Omega-(A \cup B)$

β) $x \in A$ και $x \in B \Leftrightarrow x \in A \cap B$

γ $x \in A$ και $x \notin B \Leftrightarrow x \in A-B$

δ) $x \notin A$ και $x \in B \Leftrightarrow x \in B-A$.

Έτσι έχομε:

α) $x \notin A \wedge x \notin B \Rightarrow P(x)$ ψευδής και $Q(x)$ ψευδής.
Άρα $P(x) \Rightarrow Q(x)$ αληθής.

β) $x \in A \wedge x \in B \Rightarrow P(x)$ αληθής και $Q(x)$ αληθής.
Άρα $P(x) \Rightarrow Q(x)$ αληθής.

γ) $x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow P(x)$ αληθής και $Q(x)$ ψευδής.
Άρα $P(x) \Rightarrow Q(x)$ ψευδής.

δ) $x \notin A \wedge x \in B \Rightarrow P(x)$ ψευδής και $Q(x)$ αληθής.
Άρα $P(x) \Rightarrow Q(x)$ αληθής.

Άρα ο προτασιακός τύπος $P(x) \Rightarrow Q(x)$ γίνεται αληθής πρόταση αν και μόνο αν $x \in \Omega-(A \cup B)$ ή $x \in A \cap B$ ή $x \in B-A$. Έτσι, το σύνολο αλήθειας του προτασιακού τύπου $P(x) \Rightarrow Q(x)$ είναι το σύνολο $[\Omega-(A \cup B)] \cup (B-A) \cup (A \cap B)$.

5. Αν $A = \{x : x$ παραλληλόγραμμο$\}$, $B = \{x : x$ ρόμβος$\}$, $\Gamma = \{x :$ x ορθογώνιο παραλληλόγραμμο$\}$ και $\Delta = \{x : x$ τετράγωνο$\}$, τότε ισχύουν τα εξής.

Αν x είναι ρόμβος ή ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ή τετράγωνο τότε το x είναι και παραλληλόγραμμο. Άρα, $B \subsetneq A$, $\Gamma \subsetneq A$ και $\Delta \subsetneq A$. Όμοια $\Delta \subsetneq \Gamma$ και $\Delta \subsetneq B$. Ακόμη, αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο και ρόμβος ταυτόχρονα, τότε είναι τετράγωνο και αντίστροφα. Έτσι, $(\forall x)\ x \in B \wedge x \in \Gamma \Leftrightarrow x \in \Delta$, και επομένως $B \cap \Gamma = \Delta$.

2.7. Ιδιότητες των πράξεων των συνόλων

Οι δύο παρακάτω προτάσεις δίνουν τις πιο σημαντικές ιδιότητες των πράξεων της τομής, της ένωσης και της διαφοράς συνόλων.

2.7.1. ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν Α,Β,Γ είναι τυχόντα σύνολα, τότε ισχύουν:

α) $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$

β) $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$.

Απόδειξη: α) Για τυχόν x˙ $x \in A \cap (B \cup \Gamma) \Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup \Gamma \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in \Gamma)$. Αν στο σημείο αυτό εφαρμόσομε την ταυτολογία 12 (σελ. 4) από τον προτασιακό λογισμό, παίρνομε ότι η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με την $(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in \Gamma)$ $\Longleftrightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap \Gamma \Longleftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$.
Έτσι αποδείξαμε ότι τυχόν στοιχείο του συνόλου $A \cap (B \cup \Gamma)$ είναι στοιχείο και του $(A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$ και αντίστροφα, δηλαδή $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$.

β) Για τυχόν x˙ $x \in A \cup (B \cap \Gamma) \Longleftrightarrow x \in A \vee x \in B \cap \Gamma \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in \Gamma)$. Σύμφωνα πάλι με την ταυτολογία 13 (σελ. 4), η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με την $(x \in A \vee x \in B) \wedge$ $\wedge (x \in A \vee x \in \Gamma) \Longleftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup \Gamma \Longleftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$. Έτσι, $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$.

Οι ιδιότητες της παραπάνω Πρότασης 2.7.1, δηλώνουν, η (α) ότι η τομή είναι πράξη επιμεριστική ως προς την ένωση και η (β) ότι η ένωση είναι πράξη επιμεριστική ως προς την τομή.

2.7.2. ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν Α,Β,Γ είναι τυχόντα σύνολα τότε ισχύουν:

α) $A \subseteq B \Longleftrightarrow A - B = \emptyset$

β) $A - B = A - (A \cap B)$

γ) $A \cap (B - \Gamma) = (A \cap B) - (A \cap \Gamma)$.

δ) $A \cup (B - A) = A \cup B$.

Απόδειξη: α) Έστω $A \subseteq B$ και $A - B \neq \emptyset$. Θα καταλήξομε σε άτοπο. Πραγματικά˙ $A - B \neq \emptyset \Longleftrightarrow (\exists x)\ x \in A - B \Longleftrightarrow (\exists x)\ x \in A \wedge x \notin B \Longleftrightarrow A \not\subseteq B$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού υποθέτομε ότι $A \subseteq B$. Αντίστροφα, έστω $A - B =$ $= \emptyset$ και $A \not\subseteq B$. Ακολουθώντας πάλι την διαδικασία της απαγωγής σε άτοπο, αποδεικνύομε εύκολα και το αντίστροφο.

β) Για τυχόν x˙ $x \in A - A \cap B \Longleftrightarrow x \in A \wedge x \notin A \cap B \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow x \in A \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \Longleftrightarrow (x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \notin B) \Longleftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$ $\Longleftrightarrow x \in A - B$.

γ) Για τυχόν x· $x \in (A \cap B) - (A \cap \Gamma) \Longleftrightarrow x \in A \cap B \wedge x \notin A \cap \Gamma \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \notin \Gamma) \Longleftrightarrow [(x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin A] \vee$
$[(x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin \Gamma] \Longleftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin \Gamma) \Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B - \Gamma \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x \in A \cap (B - \Gamma)$

δ) Για τυχόν x· $x \in A \cup (B-A) \Longleftrightarrow x \in A \vee x \in B - A \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \notin A) \Longleftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin A) \Longleftrightarrow x \in A \cup B$.
Άρα $A \cup (B-A) = A \cup B$.

Στην απόδειξη της παραπάνω πρότασης χρησιμοποιήθηκαν οι ισοδυναμίες της Πρότασης 2.5.1.

Η ισότητα (δ) της παραπάνω Πρότασης 2.7.2, δηλώνει ότι η ένωση δεν είναι επιμεριστική πράξη ως προς τη διαφορά. Πραγματικά αν αυτό συνέβαινε θα είχαμε $A \cup (B-A) = A \cup B - A \cup A = A \cup B - A \neq$
$\neq A \cup B$. Αντίθετα η ισότητα (γ) της Πρότασης 2.7.2, δηλώνει ότι η τομή είναι επιμεριστική πράξη ως προς τη διαφορά.

Οι παρακάτω σχέσεις δίνουν μερικές επιπλέον χρήσιμες ιδιότητες των πράξεων των συνόλων. Οι σχέσεις αυτές αποδεικνύονται εύκολα, όπως και οι παραπάνω προτάσεις και είναι οι εξής:

1) $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cap B = A$
2) $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cup B = B$
3) $(A \cap B) - \Gamma = A \cap (B - \Gamma)$
4) $(A \cup B) - \Gamma = (A - \Gamma) \cup (B - \Gamma)$
5) $\Gamma - (A \cap B) = (\Gamma - A) \cup (\Gamma - B)$
6) $\Gamma - (A \cup B) = (\Gamma - A) \cap (\Gamma - B)$.

2.8. Δυναμοσύνολο

Με τον όρο <u>δυναμοσύνολο</u> ενός συνόλου A εννοούμε το σύνολο που έχει στοιχεία όλα τα υποσύνολα του συνόλου A και μόνο αυτά. Για το δυναμοσύνολο του συνόλου A χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\mathcal{P}(A)$. Έτσι έχομε

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}.$$

Είναι εύκολο να αποδείξει κανείς ότι αν το σύνολο A έχει ν διαφορετικά στοιχεία το $\mathcal{P}(A)$ έχει ακριβώς 2^{ν} διαφορετικά στοιχεία. (Βλ. Ασκ. 4, Παράγρ. 6.10).

2.7. Ιδιότητες των πράξεων των συνόλων

Οι δύο παρακάτω προτάσεις δίνουν τις πιο σημαντικές ιδιότητες των πράξεων της τομής, της ένωσης και της διαφοράς συνόλων.

2.7.1. ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν Α,Β,Γ είναι τυχόντα σύνολα, τότε ισχύουν:

α) $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$

β) $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$.

Απόδειξη: α) Για τυχόν x· $x \in A \cap (B \cup \Gamma) \Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup \Gamma \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in \Gamma)$. Αν στο σημείο αυτό εφαρμόσομε την ταυτολογία 12 (σελ. 4) από τον προτασιακό λογισμό, παίρνομε ότι η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με την $(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in \Gamma)$ $\Longleftrightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap \Gamma \Longleftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$.
Έτσι αποδείξαμε ότι τυχόν στοιχείο του συνόλου $A \cap (B \cup \Gamma)$ είναι στοιχείο και του $(A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$ και αντίστροφα, δηλαδή $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$.

β) Για τυχόν x· $x \in A \cup (B \cap \Gamma) \Longleftrightarrow x \in A \vee x \in B \cap \Gamma \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in \Gamma)$. Σύμφωνα πάλι με την ταυτολογία 13 (σελ. 4), η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με την $(x \in A \vee x \in B) \wedge$ $\wedge (x \in A \vee x \in \Gamma) \Longleftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup \Gamma \Longleftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$. Έτσι, $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$.

Οι ιδιότητες της παραπάνω Πρότασης 2.7.1, δηλώνουν, η (α) ότι η τομή είναι πράξη επιμεριστική ως προς την ένωση και η (β) ότι η ένωση είναι πράξη επιμεριστική ως προς την τομή.

2.7.2. ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν Α,Β,Γ είναι τυχόντα σύνολα τότε ισχύουν:

α) $A \subseteq B \Longleftrightarrow A - B = \emptyset$

β) $A - B = A - (A \cap B)$

γ) $A \cap (B - \Gamma) = (A \cap B) - (A \cap \Gamma)$

δ) $A \cup (B - A) = A \cup B$.

Απόδειξη: α) Έστω $A \subseteq B$ και $A - B \neq \emptyset$. Θα καταλήξομε σε άτοπο. Πραγματικά· $A - B \neq \emptyset \Longleftrightarrow (\exists x)\ x \in A - B \Longleftrightarrow (\exists x)\ x \in A \wedge x \notin B \Longleftrightarrow A \not\subseteq B$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού υποθέτομε ότι $A \subseteq B$. Αντίστροφα, έστω $A - B =$ $= \emptyset$ και $A \not\subseteq B$. Ακολουθώντας πάλι την διαδικασία της απαγωγής σε άτοπο, αποδεικνύομε εύκολα και το αντίστροφο.

β) Για τυχόν x· $x \in A - A \cap B \Longleftrightarrow x \in A \wedge x \notin A \cap B \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow x \in A \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \Longleftrightarrow (x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \notin B) \Longleftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$ $\Longleftrightarrow x \in A - B$.

γ) Για τυχόν x· $x \in (A \cap B) - (A \cap \Gamma) \Longleftrightarrow x \in A \cap B \wedge x \notin A \cap \Gamma \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \notin \Gamma) \Longleftrightarrow [(x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin A] \vee$
$[(x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin \Gamma] \Longleftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin \Gamma) \Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B-\Gamma \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x \in A \cap (B-\Gamma)$

δ) Για τυχόν x· $x \in A \cup (B-A) \Longleftrightarrow x \in A \vee x \in B-A \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \notin A) \Longleftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin A) \Longleftrightarrow x \in A \cup B$.
Άρα $A \cup (B-A) = A \cup B$.

Στην απόδειξη της παραπάνω πρότασης χρησιμοποιήθηκαν οι ισοδυναμίες της Πρότασης 2.5.1.

Η ισότητα (δ) της παραπάνω Πρότασης 2.7.2, δηλώνει ότι η ένωση δεν είναι επιμεριστική πράξη ως προς τη διαφορά. Πραγματικά αν αυτό συνέβαινε θα είχαμε $A \cup (B-A) = A \cup B - A \cup A = A \cup B - A \neq$ $\neq A \cup B$. Αντίθετα η ισότητα (γ) της Πρότασης 2.7.2, δηλώνει ότι η τομή είναι επιμεριστική πράξη ως προς τη διαφορά.

Οι παρακάτω σχέσεις δίνουν μερικές επιπλέον χρήσιμες ιδιότητες των πράξεων των συνόλων. Οι σχέσεις αυτές αποδεικνύονται εύκολα, όπως και οι παραπάνω προτάσεις και είναι οι εξής:

1) $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cap B = A$
2) $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cup B = B$
3) $(A \cap B) - \Gamma = A \cap (B-\Gamma)$
4) $(A \cup B) - \Gamma = (A-\Gamma) \cup (B-\Gamma)$
5) $\Gamma - (A \cap B) = (\Gamma-A) \cup (\Gamma-B)$
6) $\Gamma - (A \cup B) = (\Gamma-A) \cap (\Gamma-B)$.

2.8. Δυναμοσύνολο

Με τον όρο δυναμοσύνολο ενός συνόλου Α εννοούμε το σύνολο που έχει στοιχεία όλα τα υποσύνολα του συνόλου Α και μόνο αυτά. Για το δυναμοσύνολο του συνόλου Α χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\mathcal{P}(A)$. Έτσι έχομε

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}.$$

Είναι εύκολο να αποδείξει κανείς ότι αν το σύνολο Α έχει ν διαφορετικά στοιχεία το $\mathcal{P}(A)$ έχει ακριβώς 2^{ν} διαφορετικά στοιχεία. (Βλ. Ασκ. 4, Παράγρ. 6.10).

2.9. Βασικό σύνολο. Συμπλήρωμα συνόλου

Συμβαίνει συχνά τα σύνολα που εμπλέκονται σε κάποιο πρόβλημα να είναι όλα υποσύνολα κάποιου συνόλου Ω. Στην περίπτωση αυτή το Ω λέγεται βασικό σύνολο. Τότε, αν A και B ανήκουν στο $\mathcal{P}(\Omega)$ και τα σύνολα $A\cup B$, $A\cap B$, $A-B$ και $B-A$ ανήκουν στο $\mathcal{P}(\Omega)$.

Ιδιαίτερα, αν $A\in\mathcal{P}(\Omega)$ το σύνολο $\Omega-A$ λέγεται συμπλήρωμα του A και συμβολίζεται με A^c (ή και A^c_Ω για να δηλωθεί το βασικό σύνολο Ω). Έτσι έχομε:

$$A^c=\Omega-A=\{x\in\Omega : x\notin A\}.$$

Από τον παραπάνω ορισμό είναι άμεσες οι παρακάτω ιδιότητες:

1) $A\cup A^c=\Omega$ 4) $\emptyset^c=\Omega$

2) $A\cap A^c=\emptyset$ 5) $\Omega^c=\emptyset$.

3) $(A^c)^c=A$

Η παρακάτω πρόταση δίνει μερικές πολύ χρήσιμες σχέσεις που αφορούν το συμπλήρωμα ενός συνόλου.

2.9.1. ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν A,B είναι υποσύνολα ενός βασικού συνόλου Ω ισχύουν τα παρακάτω:

α) $A\subseteq B \Longleftrightarrow B^c\subseteq A^c$

β) $A-B=A\cap B^c$

$$\left.\begin{array}{ll}\gamma) & (A\cap B)^c=A^c\cup B^c\\ \delta) & (A\cup B)^c=A^c\cap B^c\end{array}\right\}\text{ Τύποι του De Morgan.}$$

Απόδειξη. α) Έστω ότι ισχύει $A\subseteq B$. Για τυχόν x: $x\in B^c\Longrightarrow x\in\Omega\wedge x\notin B$. Τότε όμως, λόγω της $A\subseteq B$, παίρνομε $x\in\Omega$ και $x\notin A$ δηλ. $x\in A^c$. Άρα $B^c\subseteq A^c$.

Για το αντίστροφο, χρησιμοποιώντας την ήδη γνωστή συνεπαγωγή $A\subseteq B\Longrightarrow B^c\subseteq A^c$, παίρνομε:

$$B^c\subseteq A^c\Longrightarrow (A^c)^c\subseteq (B^c)^c\Longrightarrow A\subseteq B.$$

β) Έστω x τυχόν. Τότε: $x\in A-B\Longleftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\Longleftrightarrow x\in A\wedge(x\in\Omega\wedge x\notin B)$ $\Longleftrightarrow x\in A\wedge x\in B^c\Longleftrightarrow x\in A\cap B^c$.

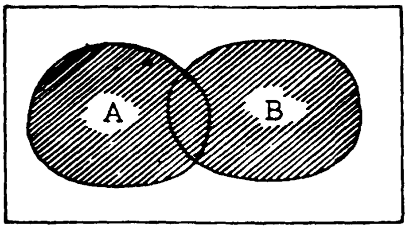
γ) Για τυχόν x: $x\in(A\cap B)^c\Longleftrightarrow x\in\Omega\wedge x\notin A\cap B\Longleftrightarrow x\in\Omega\wedge$ $\wedge(\sim x\in A\cap B)\Longleftrightarrow x\in\Omega\wedge[\sim(x\in A\wedge x\in B)]\Longleftrightarrow x\in\Omega\wedge[(\sim x\in A)\vee(\sim x\in B)]$ $\Longleftrightarrow x\in\Omega\wedge(x\notin A\vee x\notin B)\Longleftrightarrow(x\in\Omega\wedge x\notin A)\vee(x\in\Omega\wedge x\notin B)\Longleftrightarrow x\in A^c\vee x\in B^c$ $\Longleftrightarrow x\in A^c\cup B^c$.

δ) Για τυχόν x: $x\in(A\cup B)^c\Longleftrightarrow x\in\Omega\wedge x\notin A\cup B\Longleftrightarrow x\in\Omega\wedge(\sim x\in A\cup B)$

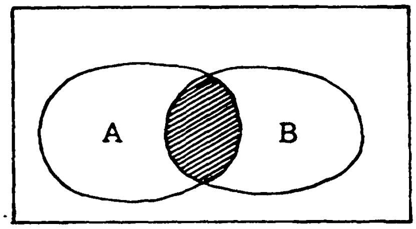
$\Longleftrightarrow x \in \Omega \wedge [\sim(x \in A \vee x \in B)] \Longleftrightarrow x \in \Omega \wedge [(\sim x \in A) \wedge (\sim x \in B)] \Longleftrightarrow x \in \Omega \wedge$ $(x \notin A \wedge x \notin B) \Longleftrightarrow (x \in \Omega \wedge x \notin A) \wedge (x \in \Omega \wedge x \notin B) \Longleftrightarrow x \in A^c \wedge x \in B^c \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow x \in A^c \cap B^c$.

2.10. Διαγράμματα του Venn.

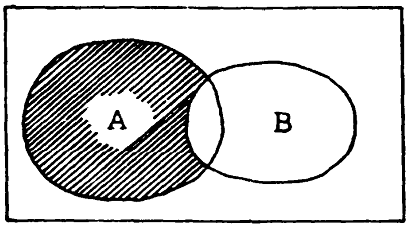
Ένας πολύ παραστατικός τρόπος για να αποδοθούν εποπτικά σχέσεις και πράξεις μεταξύ συνόλων, είναι τα λεγόμενα διαγράμματα του Venn. Τα διαγράμματα του Venn στηρίζονται στην ιδέα να παριστάνονται τα στοιχεία ενός συνόλου με σημεία στο επίπεδο που περικλείονται από μια κλειστή γραμμή. Δίνομε αμέσως παρακάτω μια σειρά τέτοιων σχημάτων. Κάτω από το κάθε σχήμα σημειώνεται ποιό είναι το σύνολο που αντιστοιχεί στο γραμμοσκιασμένο μέρος του σχήματος.



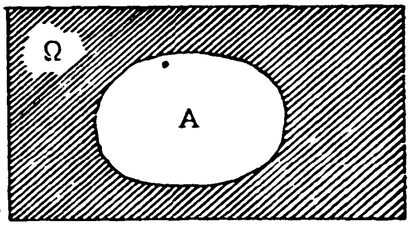
$A \cup B$



$A \cap B$

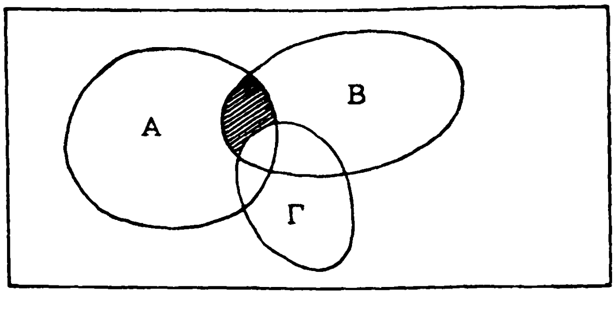


$A - B$



A^c

Τα διαγράμματα του Venn είναι πολύ χρήσιμα, όπως κάθε τι που βοηθάει την εποπτεία στα Μαθηματικά. Δεν μπορούν όμως να υποκαταστήσουν την απόδειξη μιας σχέσης μεταξύ συνόλων που πρέπει να στηρίζεται στον προτασιακό λογισμό. Έτσι, ενώ στο παρακάτω σχήμα,



έχομε μια πρώτη ένδειξη για την αλήθεια της ισότητας $A\cap(B-\Gamma) = (A\cap B)-(A\cap\Gamma)$, η απόδειξη της ισότητας αυτής δίνεται στην Πρόταση 2.7.2.

2.11. Παραδείγματα - Εφαρμογές

1. Για να αποδείξομε την ισότητα $A = B$, για δύο σύνολα A, B, αρκεί να αποδείξομε ότι: $(\forall x) : x\in A \Longleftrightarrow x\in B$. Έτσι έγιναν οι αποδείξεις των προτάσεων του κεφαλαίου αυτού. Αυτός δεν είναι ο μοναδικός τρόπος για μια τέτοια απόδειξη, που μπορεί να γίνει και πιο έμμεσα χρησιμοποιώντας τις μέχρι τώρα γνωστές προτάσεις. Αυτό δείχνει το παράδειγμα που ακολουθεί.

Αν A, B είναι υποσύνολα ενός βασικού συνόλου, να αποδειχτεί ότι:

$$(A^c\cup B)\cap(A\cup B^c) = (A\cap B)\cup(A\cup B)^c.$$

Πραγματικά:

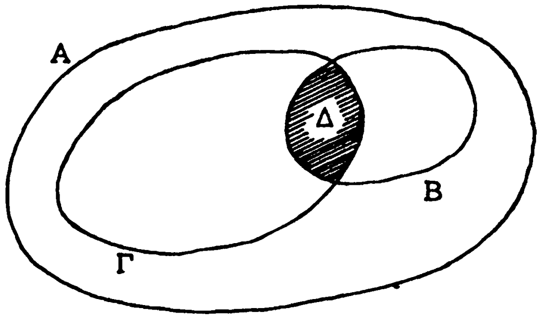
$$\begin{aligned}(A^c\cup B)\cap(A\cup B^c) &= [(A^c\cup B)\cap A]\cup[(A^c\cup B)\cap B^c] = \\ &= [(A^c\cap A)\cup(B\cap A)]\cup[(A^c\cap B^c)\cup(B\cap B^c)] = \\ &= [(\emptyset\cup(B\cap A)]\cup[(A^c\cap B^c)\cup\emptyset] = (B\cap A)\cup(A^c\cap B^c) = \\ &= (A\cap B)\cup(A\cup B)^c.\end{aligned}$$

2. Το δυναμοσύνολο του $\emptyset$ δεν είναι το κενό σύνολο, αφού το $\emptyset$ έχει σαν μοναδικό υποσύνολό του τον εαυτό του. Έτσι, $\mathcal{P}(\emptyset)=\{\emptyset\}$. Ακόμη, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$.

3. Αν $A = \{\alpha\}$, τότε $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset,\{\alpha\}\}$. Ακόμη, αν $B = \{\alpha,\beta,\gamma\}$ τότε:

$$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset,\{\alpha\},\{\beta\},\{\gamma\},\{\alpha,\beta\},\{\alpha,\gamma\},\{\beta,\gamma\},B\}.$$

4. Αν A, B, Γ και Δ είναι τα σύνολα του παραδείγματος 5 της παραγράφου 2.6, τότε ένα διάγραμμα του Venn γι'αυτό είναι το ακόλουθο:

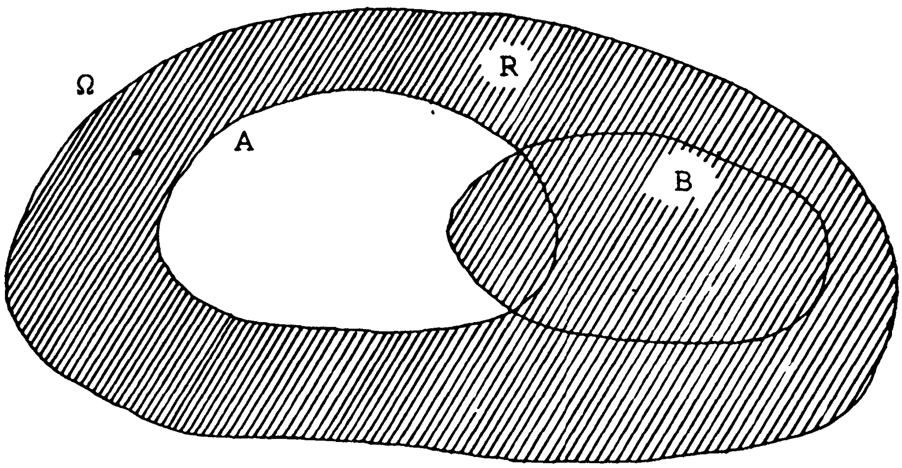


Το γραμμοσκιασμένο μέρος στο παραπάνω σχήμα αντιστοιχεί στο σύνολο Δ.

5. Αν Ω είναι ένα βασικό σύνολο, $A=\{x\in\Omega : P(x)\}$ και $B=\{x\in\Omega : Q(x)\}$, τότε, όπως είδαμε στο παράδειγμα 4 της παραγράφου 2.6, το σύνολο αλήθειας του προτασιακού τύπου $P(x)\Rightarrow Q(x)$ είναι το $R=[\Omega-(A\cup B)]\cup(B-A)\cup(A\cap B)$. Το σύνολο αυτό μπορεί να γραφεί και ως

$$R=(A\cup B)^c\cup(B-A)\cup(A\cap B).$$

Στο παρακάτω διάγραμμα του Venn το γραμμοσκιασμένο μέρος αντιστοιχεί στο σύνολο R.



Από το παραπάνω διάγραμμα του Venn φαίνεται ότι πρέπει να ισχύει

$$R=(A\cup B)^c\cup B \text{ και } R=(A-B)^c.$$

Ας αποδείξομε σαν άσκηση τις δύο παραπάνω σχέσεις.

Για να ισχύει η πρώτη, δηλαδή $(A\cup B)^c\cup(B-A)\cup(A\cap B)=$ $=(A\cup B)^c\cup B$, αρκεί να δείξομε ότι:

$$(B-A)\cup(A\cap B)=B.$$

Πράγματι: $(B-A)\cup(A\cap B)=[(B-A)\cup A]\cap[(B-A)\cup B]=[(B-A)\cup A]\cap B$, αφού $B-A\subseteq B$. Άρα:

$$(B-A)\cup(A\cap B)=[(B-A)\cup A]\cap B=[(B\cap A^c)\cup A]\cap B=$$
$$=[(B\cup A)\cap(A^c\cup A)]\cap B=[(B\cup A)\cap\Omega]\cap B=$$
$$=(B\cup A)\cap B=B, \text{ αφού } B\cup A\subseteq\Omega \text{ και } B\subseteq B\cup A.$$

Για τη δεύτερη ισότητα αρκεί να δειχτεί ότι $(A\cup B)^c\cup B=$

$= (A-B)^c$. Πράγματι· $(A \cup B)^c \cup B = (A^c \cap B^c) \cup B = (A^c \cup B) \cap (B^c \cup B) =$
$= (A^c \cup B) \cap \Omega = A^c \cup B = A^c \cup (B^c)^c = (A \cap B^c)^c = (A-B)^c$.

2.12. Καρτεσιανό γινόμενο συνόλων.

Αν A και B είναι δύο μη κενά σύνολα, θα ονομάζομε <u>καρτεσιανό γινόμενο</u> των συνόλων A,B, ένα νέο σύνολο που το συμβολίζομε με $A\times B$ και είναι:

$$A\times B = \{(\alpha,\beta) : \alpha \in A \text{ και } \beta \in B\}.$$

Το στοιχείο $(\alpha,\beta) \in A\times B$ ονομάζεται <u>διατεταγμένο</u> ζεύγος.(*) Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι το σύνολο $A\times B$ είναι το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (α,β), με $\alpha \in A$ και $\beta \in B$.

Η ισότητα μεταξύ των διατεταγμένων ζευγών ορίζεται ως εξής:

$$(\alpha,\beta) = (\alpha',\beta') \iff \alpha = \alpha' \text{ και } \beta = \beta'.$$

Για τυχόν σύνολο A ορίζομε

$$A\times\emptyset = \emptyset\times A = \emptyset.$$

Συμβολίζομε ακόμη $A\times A = A^2$ και με Δ το υποσύνολο του A^2 που ορίζεται με τον τύπο

$$\Delta = \{(x,x) : x \in A\}$$

και λέγεται <u>διαγώνιος</u> του A.

Το διατεταγμένο ζεύγος (β,α) λέγεται <u>αντίστροφο</u> του (α,β).

Είναι φανερό από τα παραπάνω, ότι γενικά για δυο σύνολα A, B ισχύει:

$$A\times B \neq B\times A.$$

Μερικές χρήσιμες ιδιότητες του καρτεσιανού γινομένου, σε συνδυασμό με τις ήδη γνωστές πράξεις των συνόλων, δίνουν οι παρακάτω σχέσεις:

1. $A\times B = B\times A \iff (A = B \lor A = \emptyset \lor B = \emptyset)$
2. $A\times(B\cap\Gamma) = (A\times B) \cap (A\times\Gamma)$
3. $(B\cap\Gamma)\times A = (B\times A) \cap (\Gamma\times A)$
4. $A\times(B\cup\Gamma) = (A\times B) \cup (A\times\Gamma)$

(*) <u>Σημείωση</u>. Η έννοια του διατεταγμένου ζεύγους μπορεί να δοθεί αυστηρά π.χ. με ένα από τους παρακάτω τύπους:

$$(\alpha,\beta) = \{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\} \text{ ή } (\alpha,\beta) = \{\{\alpha,\emptyset\},\{\beta,\{\emptyset\}\}\}.$$

5. $(B \cup \Gamma)\times A = (B\times A) \cup (\Gamma\times A)$
6. $A\times(B-\Gamma) = (A\times B)-(A\times\Gamma)$
7. $(B-\Gamma)\times A = (B\times A)-)\Gamma\times A)$.

Για παράδειγμα, ας αποδείξομε την ισότητα (6).

Για τυχόν (x,y) $\cdot$ $(x,y) \in A\times(B-\Gamma) \Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B-\Gamma \Leftrightarrow x\in A \wedge$ $\wedge (y\in B \wedge y\notin \Gamma) \Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\wedge y\notin\Gamma \Leftrightarrow (x,y)\in A\times B \wedge (x,y)\notin A\times\Gamma \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x,y)\in (A\times B)-(A\times\Gamma)$.

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες σχέσεις.

2.13. Παραδείγματα - Εφαρμογές

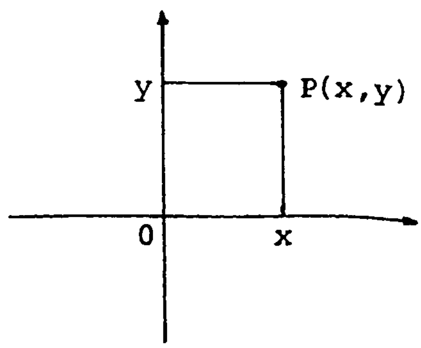
1) Αν $A=\{\alpha,\beta\}$ $B=\{1,2\}$, τότε, $A\times B=\{(\alpha,1),(\alpha,2),(\beta,1),(\beta,2)\}$ και $B\times A=\{(1,\alpha),(1,\beta),(2,\alpha),(2,\beta)\}$. Το παράδειγμα αυτό αποδεικνύει ότι $A\times B\neq B\times A$.

2) Ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών δεν είναι πάντοτε καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων. Έτσι, π.χ. το σύνολο $\{(\alpha,\beta),(\alpha,\gamma),(\beta,\gamma)\}$ δεν μπορεί να θεωρηθεί καρτεσιανό γινόμενο κανενός ζεύγους συνόλων. Μπορούμε όμως να γράψομε:

$$\{(\alpha,\beta),(\alpha,\gamma),(\beta,\gamma)\}\subseteq A\times B,$$

όπου, $A=\{\alpha,\beta\}$ και $B=\{\beta,\gamma\}$.

3) Η πιο χαρακτηριστική εφαρμογή της έννοιας του καρτεσιανού γινομένου είναι το γνωστό καρτεσιανό επίπεδο της Αναλυτικής Γεωμετρίας, όπου κάθε σημείο P του επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό διατεταγμένο ζεύγος (x,y) πραγματικών αριθμών, όπου x είναι η <u>τετμημένη</u> του σημείου P και y η <u>τεταγμένη</u> του σημείου P. Οι αριθμοί x,y βρίσκονται από τις ορθές προβολές του σημείου P σε δύο κάθετους προσανατολισμένους άξονες που αποτελούν το <u>σύστημα συντεταγμένων</u>. Το σημείο O της τομής των αξόνων αντιστοιχεί στο διατεταγμένο ζεύγος $(0,0)$.



2.14. Α σ κ ή σ ε ι ς

1. Να παρασταθούν με αναγραφή των στοιχείων τους τα παρακάτω σύνολα

α) $A = \{x:$ x φυσικός αριθμός και διαιρέτης του $20\}$

β) $B = \{x:$ x ακέραιος αριθμός και $x^2 < 36\}$

γ) $\Gamma = \{x:$ x γράμμα της λέξης "ιπποπόταμος"$\}$.

2. Να βοεθεί το σύνολο $\mathcal{P}(\{\alpha,\emptyset\})$.

3. Να αποδειχτεί ότι: $\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\} \Longleftrightarrow x = \alpha$ και $y = \beta$.

4. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις

α) $(\{1,2\} \cap \{1,2,3\}) \cup \{1,2,4\}$

β) $(\{1,2,3\} - \{1,5\}) \cap \{2,7,4\}$

γ) $\{\emptyset,\{1\}\} \cap \emptyset$

δ) $\mathcal{P}(\{1,2\}) \cap \mathcal{P}(\{1,3,5\})$.

5. Να αποδειχτούν οι σχέσεις 1 ως 6 της παραγράφου 2.7.

6. Με τι είναι ίσο το σύνολο $A \cap (B \cup \Gamma)$ αν:

α) τα σύνολα A,B είναι ξένα

β) $B = \Gamma$

γ) $A \subseteq \Gamma$.

7. Αν A,B είναι τυχόντα σύνολα, να δειχτεί ότι:

α) $A \cap B = A \cup B \Longleftrightarrow A = B$

β) $A \cap B = \emptyset \Longleftrightarrow \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$.

8. Για τυχόντα σύνολα A,B,Γ, υποσύνολα ενός βασικού συνόλου Ω, να δειχτεί ότι:

$$[(A \cap \Gamma) \cup B]^c = (A^c \cap B^c) \cup (\Gamma^c \cap B^c).$$

9. Το σύνολο $(A-B) \cup (B-A)$ λέγεται <u>συμμετρική</u> <u>διαφορά</u> των συνόλων A,B και συμβολίζεται $A \dotplus B$. Διαπιστώστε με ένα διάγραμμα του Venn ότι $A \dotplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

10. Για τυχόντα σύνολα A,B, να δειχτεί ότι

$$A - B = A \Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset.$$

11. Αν $A = \{1,2,3\}$ $B = \{2,\alpha,3\}$ να βρεθούν τα σύνολα

α) $A \times B$

β) $(A \cup B) \times (A \cap B)$

γ) $(A-B) \times A$.

12. Να αποδειχτούν οι σχέσεις της παραγράφου 2.12.

3. Σ Χ Ε Σ Ε Ι Σ

3.1. Η έ ν ν ο ι α τ η ς σ χ έ σ η ς

Ο συσχετισμός στοιχείων δύο διαφορετικών συνόλων ή και του ίδιου συνόλου, είναι μια καθημερινή διανοητική διαδικασία για τον καθένα.

Ας υποθέσομε ότι το σύνολο $A = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ είναι ένα σύνολο ανδρών και $B = \{\kappa,\lambda,\mu,\nu,\xi\}$ ένα σύνολο γυναικών και μάλιστα έτσι ώστε να συμβαίνουν:

ο α είναι σύζυγος της μ
" β " " " ξ
" δ " " " κ.

Με τον τρόπο αυτό συσχετίζομε στοιχεία του συνόλου Α με στοιχεία του συνόλου Β. Προκειμένου να δηλώσομε με σύντομο τρόπο αυτόν τον συσχετισμό, γράφομε αντί των παραπάνω, το σύνολο των ζευγών $\sigma = \{(\alpha,\mu),(\beta,\xi),(\delta,\kappa)\}$, με τη συμφωνία, το πρώτο στοιχείο του κάθε διατεταγμένου ζεύγους να δηλώνει τον σύζυγο και το δεύτερο στοιχείο την σύζυγο. Παρατηρούμε ότι το σύνολο σ είναι ένα υποσύνολο του $A\times B$.

Από τα παραπάνω οδηγούμαστε στον εξής ορισμό:

Σχέση σ από ένα σύνολο Α σ΄ένα σύνολο Β είναι ένα υποσύνολο του $A\times B$.

Το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών που ορίζει μια σχέση σ λέγεται συχνά και *γράφημα* της σχέσης.

Αν σ είναι μια σχέση από ένα σύνολο Α σ΄ένα σύνολο Β και $(x,y)\in\sigma$, λέμε ότι *το στοιχείο* x *συνδέεται μέσω της σχέσης* σ *με το* y. Αυτό το γράφομε ισοδύναμα $x\sigma y$. Επίσης, αντί του $(x,y)\notin\sigma$

γράφομε ισοδύναμα $x \not\sigma y$.

<u>Πεδίο</u> <u>ορισμού</u> μιας σχέσης $\sigma \subseteq A \times B$, ονομάζομε το σύνολο

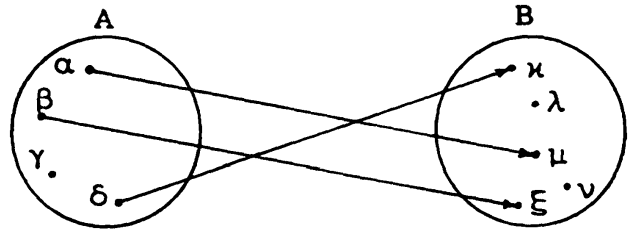
$$\mathcal{D}(\sigma) = \{x \in A : (\exists y \in B) x \sigma y\}$$

και <u>πεδίο</u> <u>τιμών</u> το σύνολο

$$\mathcal{R}(\sigma) = \{y \in B : (\exists x \in A) x \sigma y\}.$$

Πιο ελεύθερα, τα παραπάνω δηλώνουν ότι, πεδίο ορισμού μιας σχέσης είναι το σύνολο όλων των στοιχείων που είναι πρώτα μέλη των διατεταγμένων ζευγών που απαρτίζουν τη σχέση και, το σύνολο των δεύτερων μελών των ζευγών της σχέσης είναι ακριβώς το πεδίο τιμών αυτής. Στο παραπάνω παράδειγμα έχομε $\mathcal{D}(\sigma) = \{\alpha, \beta, \delta\}$ και $\mathcal{R}(\sigma) = \{\mu, \xi, \kappa\}$.

Μια σχέση $\sigma \subseteq A \times B$, δηλώνεται συμβολικά και με $\sigma : A \to B$. Επίσης πολλές φορές παριστάνεται με ένα <u>βελοειδές</u> <u>διάγραμμα</u>(*). Ένα τέτοιο βελοειδές διάγραμμα, που είναι το αμέσως παρακάτω σχήμα, αποδίδει τη σχέση σ του αρχικού παραδείγματος.



Αν $\sigma : A \to B$ είναι μια σχέση, αντιστρέφοντας την τάξη των μελών όλων των διατεταγμένων ζευγών της σ, παίρνομε μια καινούργια σχέση που την συμβολίζομε με σ^{-1}. Η σ^{-1} είναι σχέση από το B στο A ($\sigma^{-1} : B \to A$) και λέγεται <u>αντίστροφη</u> σχέση της σ. Σύντομα, η σ^{-1} ορίζεται από το σύνολο

$$\sigma^{-1} = \{(y, x) : x \sigma y\}.$$

3.2. <u>Ιδιότητες</u> <u>των</u> <u>σχέσεων</u>

Σε ότι ακολουθεί θεωρούμε σχέσεις σ από ένα σύνολο E στον εαυτό του. Τέτοιες σχέσεις $\sigma : E \to E$, τις ονομάζομε <u>διμελείς</u> σχέσεις στο σύνολο E. Αναφερόμενοι σε τέτοιες σχέσεις δίνομε τους παρακάτω ορισμούς.

(*) Αν και έχει επικρατήσει ο όρος "βελοειδές διάγραμμα", θα ήταν πιο σωστός ο όρος "διάγραμμα με βέλη".

Μια σχέση $\sigma : E \to E$, λέγεται <u>ανακλαστική</u> (ή <u>αυτοπαθής</u>) αν ισχύει:

$$x\sigma x \text{ για όλα τα } x \in E.$$

Απλούστερα, μπορούμε να πούμε ότι μια σχέση $\sigma : E \to E$ είναι ανακλαστική, αν και μόνο αν περιέχει όλα τα ζεύγη της μορφής (x,x), για όλα τα $x \in E$. Έτσι, είναι φανερό ότι η σ είναι ανακλαστική σχέση στο σύνολο Ε, αν και μόνο αν $\Delta \subseteq \sigma$, όπου Δ η διαγώνιος του Ε.

Μια σχέση $\sigma : E \to E$, λέγεται <u>συμμετρική</u> αν:

$$(\forall x,y \text{ εν } E): \ x\sigma y \Rightarrow y\sigma x.$$

Απλούστερα, μπορούμε να πούμε ότι μια σχέση $\sigma : E \to E$ είναι συμμετρική αν και μόνο αν δεν μεταβάλλεται αν αντιστρέψομε τα μέλη των ζευγών που την απαρτίζουν. Έτσι, μια σχέση είναι συμμετρική αν και μόνο αν $\sigma = \sigma^{-1}$.

Μια σχέση $\sigma : E \to E$ λέγεται <u>αντισυμμετρική</u> αν:

$$(\forall x,y \text{ εν } E): \ x\sigma y \text{ και } y\sigma x \Rightarrow x = y.$$

Απλούστερα, μπορούμε να πούμε ότι μια σχέση $\sigma : E \to E$ είναι αντισυμμετρική αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος $(x,y) \in \sigma$, με $x \neq y$, έχομε $(y,x) \notin \sigma$. Αυτό μπορούμε να το εκφράσομε και ως εξής: Τα μόνα ζεύγη (x,y), για τα οποία επιτρέπεται να ανήκουν σε μια αντισυμμετρική σχέση τα αντίστροφά τους, είναι εκείνα για τα οποία $x = y$.

Μια σχέση $\sigma : E \to E$, λέγεται <u>μεταβατική</u> αν:

$$(\forall x,y,z \text{ εν } E): \ x\sigma y \text{ και } y\sigma z \Rightarrow x\sigma z.$$

Απλούστερα, μπορούμε να πούμε ότι μια σχέση $\sigma : E \to E$ είναι μεταβατική αν και μόνο αν για κάθε δυο ζεύγη της μορφής (x,y) και (y,z) που περιέχει, περιέχει οπωσδήποτε και το ζεύγος (x,z).

<u>3.3. Παραδείγματα - Εφαρμογές</u>

<u>1</u>. Έστω $E = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ και $\sigma = \{(\alpha,\alpha),(\alpha,\beta),(\gamma,\beta)\}$. Το σύνολο σ είναι το γράφημα μιας σχέσης στο Ε. Η σχέση αυτή δεν είναι ανακλαστική γιατί π.χ., $(\beta,\beta) \notin \sigma$. Η σ δεν είναι ούτε συμμετρική· γιατί αν ήταν, θα έπρεπε, π.χ., το στοιχείο (β,α) να ανήκει στη σ, αφού $(\alpha,\beta) \in \sigma$. Επίσης, είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι η σ είναι αντισυμμετρική και μεταβατική σχέση.

<u>2</u>. Μια σχέση μπορεί να είναι ταυτόχρονα συμμετρική και αντισυμμετρική. Τέτοιες σχέσεις σ'ένα σύνολο είναι η διαγώνιος του

συνόλου και τα μη κενά υποσύνολά της. Π.χ., στο παραπάνω σύνολο Ε του Παραδείγματος 1, οι σχέσεις $\sigma_1 = \{(\alpha,\alpha),(\beta,\beta),(\gamma,\gamma),(\delta,\delta)\}$, $\sigma_2 = \{(\alpha,\alpha),(\beta,\beta)\}$, $\sigma_3 = \{(\gamma,\gamma)\}$ κ.λ.π., είναι όλες ταυτόχρονα συμμετρικές και αντισυμμετρικές σχέσεις.

3. Αν σ είναι μια σχέση σ'ένα σύνολο Ε, τότε και η σ^{-1} είναι επίσης σχέση στο Ε. Συμβαίνει μάλιστα μια σχέση σ να είναι αντισυμμετρική αν και μόνο αν $\sigma \cap \sigma^{-1} \subseteq \Delta$, όπου Δ η διαγώνιος του Ε. Πραγματικά· σ αντισυμμετρική $\Leftrightarrow [(\forall x,y)(x,y) \in \sigma \wedge (y,x) \in \sigma \Rightarrow x=y]$ $\Leftrightarrow [(\forall x,y)(x,y) \in \sigma \wedge (x,y) \in \sigma^{-1} \Rightarrow x=y] \Leftrightarrow [(\forall x,y)(x,y) \in \sigma \cap \sigma^{-1} \Rightarrow$ $\Rightarrow (x,y) \in \Delta] \Rightarrow \sigma \cap \sigma^{-1} \subseteq \Delta$.

3.4. Ισοδυναμία

Μια σχέση $\sigma: E \to E$, που είναι ταυτόχρονα ανακλαστική συμμετρική και μεταβατική λέγεται σχέση ισοδυναμίας (ή και ισοδυναμία) στο Ε.

Μια σχέση ισοδυναμίας σ'ένα σύνολο Ε συμβολίζεται συνήθως με το σύμβολο ~.

Έστω ~ μια ισοδυναμία σ'ένα σύνολο Ε και α τυχόν στοιχείο του Ε. Το σύνολο (υποσύνολο του Ε)

$$\{x \in E:\ x \sim \alpha\},$$

ονομάζεται κλάση ισοδυναμίας του α και συμβολίζεται με $\kappa\lambda_\sim(\alpha)$.

Σχετικά με τις κλάσεις ισοδυναμίας των στοιχείων του Ε ισχύει η παρακάτω πρόταση.

3.3.1. ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν ~ είναι μια ισοδυναμία σ'ένα σύνολο Ε, τότε ισχύουν:

i) Για κάθε $\alpha \in E$, $\kappa\lambda_\sim(\alpha) \neq \emptyset$

ii) Για κάθε α,β εν Ε, $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \kappa\lambda_\sim(\alpha) = \kappa\lambda_\sim(\beta)$

iii) Για κάθε α,β εν Ε, $\alpha \not\sim \beta \Leftrightarrow \kappa\lambda_\sim(\alpha) \cap \kappa\lambda_\sim(\beta) = \emptyset$.

Απόδειξη. i) Για τυχόν $\alpha \in E$ έχομε $\alpha \sim \alpha$. Άρα $\alpha \in \kappa\lambda_\sim(\alpha)$ και έτσι $\kappa\lambda_\sim(\alpha) \neq \emptyset$.

ii) Έστω α,β εν Ε, με $\alpha \sim \beta$. Τότε για κάθε x έχομε, $x \in \kappa\lambda_\sim(\alpha) \Leftrightarrow$ $\Rightarrow x \sim \alpha$. Επειδή όμως $\alpha \sim \beta$, λόγω της μεταβατικότητας της ~, παίρνομε, $x \sim \beta \Rightarrow x \in \kappa\lambda_\sim(\beta)$. Άρα $\kappa\lambda_\sim(\alpha) \subseteq \kappa\lambda_\sim(\beta)$. Όμοια αποδεικνύομε ότι $\kappa\lambda_\sim(\beta) \subseteq \kappa\lambda_\sim(\alpha)$. Έτσι έχομε $\kappa\lambda_\sim(\alpha) = \kappa\lambda_\sim(\beta)$.

Το αντίστροφο είναι φανερό.

iii) Έστω $\alpha \not\sim \beta$ και $\kappa\lambda_{\sim}(\alpha) \cap \kappa\lambda_{\sim}(\beta) \neq \emptyset$. Άρα, υπάρχει $x \in E$ με $x \in \kappa\lambda_{\sim}(\alpha) \cap \kappa\lambda_{\sim}(\beta) \Leftrightarrow x \in \kappa\lambda_{\sim}(\alpha)$ και $x \in \kappa\lambda_{\sim}(\beta) \Leftrightarrow x \sim \alpha$ και $x \sim \beta \Leftrightarrow \alpha \sim x$ και $x \sim \beta \Rightarrow \alpha \sim \beta$, που είναι άτοπο.

Αντίστροφα, έστω $\kappa\lambda_{\sim}(\alpha) \cap \kappa\lambda_{\sim}(\beta) = \emptyset$ και $\alpha \sim \beta$. Τότε όμως, επειδή $\alpha \sim \beta$, από το (ii) παίρνομε $\kappa\lambda_{\sim}(\alpha) = \kappa\lambda_{\sim}(\beta)$. Άρα $\kappa\lambda_{\sim}(\alpha) \cap \kappa\lambda_{\sim}(\beta) = \kappa\lambda_{\sim}(\alpha) \neq \emptyset$, που έρχεται σε αντίθεση με το ότι $\kappa\lambda_{\sim}(\alpha) \cap \kappa\lambda_{\sim}(\beta) = \emptyset$.

Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας σ'ένα σύνολο Ε, λέγεται <u>σύνολο πηλίκο</u> και συμβολίζεται με $E/\sim$. Τα σύνολα αυτά είναι μη κενά, ανά δύο ξένα και η ένωση όλων δίνει το Ε(*).

3.5. Παραδείγματα

1. Στο σύνολο $\mathbb{Z}^+$ των θετικών ακεραίων αριθμών, η σχέση, $x\sigma y \Leftrightarrow$ οι αριθμοί x,y όταν διαιρούνται με τον 3 δίνουν ίσα υπόλοιπα, είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Πραγματικά είναι προφανές ότι η σ είναι ανακλαστική συμμετρική και μεταβατική σχέση.

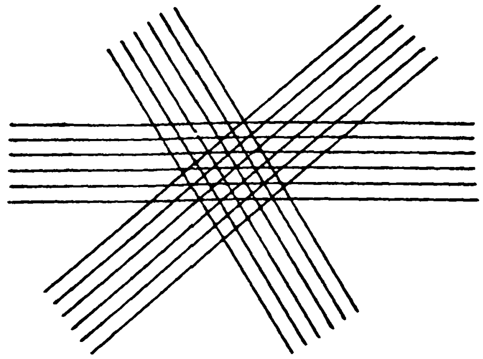
Ας υπολογίσομε το σύνολο $\kappa\lambda_{\sigma}(2)$. Ο αριθμός 2 διαιρούμενος με τον 3 δίνει πηλίκο 0 και υπόλοιπο 2. Έτσι, στο σύνολο $\kappa\lambda_{\sigma}(2)$ ανήκουν οι αριθμοί 2,5,8,11,14,.... Άρα: $\kappa\lambda_{\sigma}(2) = \{2,5,8,11,14,\ldots\} = \{x \in \mathbb{Z}^+ : x = 3k-1,\ k = 1,2,\ldots\}$. Όμοια, $\kappa\lambda_{\sigma}(1) = \{1,4,7,10,\ldots\} = \{x \in \mathbb{Z}^+ : x = 3k-2;\ k = 1,2,\ldots\}$ και $\kappa\lambda_{\sigma}(3) = \{3,6,9,12,\ldots\} = \{x : x = 3k,\ k = 1,2,\ldots\}$. Παρατηρούμε ότι τα σύνολα $\kappa\lambda_{\sigma}(1)$, $\kappa\lambda_{\sigma}(2)$ και $\kappa\lambda_{\sigma}(3)$ συνιστούν μια διαμέριση του συνόλου $\mathbb{Z}^+$.

2. Στο σύνολο των ευθειών του Ευκλειδείου επιπέδου η σχέση, "$x \,/\!/\, y \Leftrightarrow$ η ευθεία x συμπίπτει ή είναι παράλληλη με την ευθεία y", είναι φανερό ότι είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Στο παρακάτω σχήμα βλέπομε πως το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας της σχέσης $/\!/$, δημιουργεί μια διαμέριση του συνόλου όλων των ευθειών. Στο σχήμα αυτό, κάθε δέσμη παραλλήλων ευθειών συνιστά την κλάση ισοδυναμί-

---

(*) Ένα σύνολο υποσυνόλων του Ε, μη κενών, ξένων ανά δύο και που η ένωσή τους δίνει το Ε, ονομάζεται <u>διαμέριση</u> του Ε. Έτσι, το σύνολο πηλίκο $E/\sim$, μιας σχέσης ισοδυναμίας ~ σ'ένα σύνολο Ε, αποτελεί διαμέριση του Ε.

ας μιας οποιασδήποτε ευθείας της δέσμης αυτής.



3.6. Διάταξη

Μια σχέση σ : Ε→Ε, που είναι ταυτόχρονα ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική λέγεται σχέση μερικής διάταξης (ή και απλά διάταξη) στο Ε.

Μιά μερική διάταξη συμβολίζεται συνήθως με το σύμβολο $\leqq$. Αν για δύο στοιχεία α,β, συμβαίνει $\alpha \leqq \beta$, λέμε "το α προηγείται του β". (Στην περίπτωση αυτή γράφομε ισοδύναμα και $\beta \geqq \alpha$.) Ένα σύνολο εφοδιασμένο με μια σχέση διάταξης λέγεται διατεταγμένο σύνολο.

Αν $\leqq$ είναι μια μερική διάταξη σ'ένα σύνολο Ε και Δ είναι η διαγώνιος του Ε, τότε η διμελής σχέση $\leqq - \Delta$, λέγεται γνήσια διάταξη και συμβολίζεται με το σύμβολο $<$. Αν $\alpha < \beta$, λέμε ότι το στοιχείο α προηγείται γνήσια του στοιχείου β.

Σ'ένα σύνολο Ε, μια διάταξη με την ιδιότητα:

$$\forall x,y \text{ εν } E \text{ ισχύει: } x \leqq y \text{ ή } y \leqq x$$

λέγεται ολική ή γραμμική διάταξη και το σύνολο Ε ολικά ή γραμμικά διατεταγμένο.

3.7. Παραδείγματα - Εφαρμογές

1. Η σχέση $\geq$ στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών που ορίζεται με τον τύπο, $x \geq y \Leftrightarrow x-y$ μη αρνητικός αριθμός, είναι μια σχέση ολικής διάταξης στο σύνολο $\mathbb{R}$.

2. Αν Ω είναι ένα βασικό σύνολο, η σχέση $\subseteq$ είναι μια διάταξη στο $\mathcal{P}(\Omega)$. Η διάταξη αυτή είναι μη ολική. Πράγματι, αν $\Omega =$ $= \{\alpha,\beta,\gamma\}$ τότε για τα $\{\alpha,\beta\}$ και $\{\beta,\gamma\}$ εν $\mathcal{P}(\Omega)$, δεν ισχύει $\{\alpha,\beta\}$

$\subseteq \{\beta,\gamma\}$ ούτε $\{\beta,\gamma\} \subseteq \{\alpha,\beta\}$.

3. Στο σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών η σχέση $\sigma = \{(x,y):$ x διαιρεί τον $y\}$, είναι διάταξη αφού:

α) Για κάθε $x \in \mathbb{N}$ x διαιρεί τον $x \Rightarrow x\sigma x$

β) Για κάθε x,y εν $\mathbb{N}$· $x\sigma y$ και $y\sigma x \Rightarrow x$ διαιρεί τον y και y διαιρεί τον $x \Rightarrow x \leq y$ και $y \leq x \Rightarrow x = y$.

γ) Για κάθε x,y,z εν $\mathbb{N}$· $x\sigma y$ και $y\sigma z \Leftrightarrow x$ διαιρεί τον y και y διαιρεί τον $z \Leftrightarrow y = kx$ και $z = \lambda y$, με k,λ εν $\mathbb{N} \Rightarrow z = (\lambda k)x$ με k,λ εν $\mathbb{N} \Rightarrow x$ διαιρεί τον $z \Rightarrow x\sigma z$.

Η παραπάνω σχέση σ δεν είναι σχέση ολικής διάταξης, αφού έχομε $3 \not\sigma 5$ και $5 \not\sigma 3$.

4. Είναι πολύ εύκολο να αποδειχτεί ότι αν $\preceq$ είναι μια σχέση μερικής διάταξης, τότε και η αντίστροφη σχέση $\preceq^{-1}$ είναι επίσης μερική διάταξη. Θέτομε τότε $\preceq^{-1} = \succeq$. Αυτός είναι ο λόγος που δεχόμαστε ότι οι συμβολισμοί $\alpha \preceq \beta$ και $\beta \succeq \alpha$ είναι ταυτόσημοι.

3.8. Φραγμένα σύνολα

Έστω Ε ένα διατεταγμένο σύνολο (με διάταξη την $\preceq$) και Α ένα μη κενό υποσύνολο του Ε.

Ένα στοιχείο α του Ε ονομάζεται άνω φράγμα του Α αν και μόνο αν ισχύει $x \preceq \alpha$ για όλα τα $x \in A$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύνολο Α είναι άνω φραγμένο. Αποδεικνύεται (Βλ. Ασκ. 9, Παρ. 3.10) ότι υπάρχει ένα το πολύ άνω φράγμα α του Α τέτοιο ώστε $\alpha \in A$. Αυτό το μοναδικό άνω φράγμα του Α (όταν υπάρχει) το ονομάζομε μέγιστο (maximum) στοιχείο του Α και το συμβολίζομε με max A.

Ένα στοιχείο β του Ε ονομάζεται κάτω φράγμα του Α αν και μόνο αν ισχύει $\beta \preceq x$ για όλα τα $x \in A$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύνολο Α είναι κάτω φραγμένο. Αποδεικνύεται, όπως και παραπάνω, ότι υπάρχει ένα το πολύ κάτω φράγμα β του Α, με $\beta \in A$. Αυτό το μοναδικό κάτω φράγμα του Α (όταν υπάρχει) το ονομάζομε ελάχιστο (minimum) στοιχείο του Α και το συμβολίζομε με min A.

Αν το σύνολο Α είναι άνω φραγμένο τότε το ελάχιστο του συνόλου των άνω φραγμάτων του Α το ονομάζομε άνω πέρας (supremum) του Α και το συμβολίζομε με sup A.

Αν το σύνολο Α είναι κάτω φραγμένο τότε το μέγιστο του συνόλου των κάτω φραγμάτων του Α το ονομάζομε κάτω πέρας (infimum) του A και το συμβολίζομε με $\inf A$.

Ας σημειωθεί εδώ ότι, ενώ ισχύει πάντοτε $\max A \in A$ και $\min A \in A$, τα στοιχεία $\sup A$ και $\inf A$ δεν είναι εν γένει στοιχεία του A. Ειδικώτερα αν $\sup A \in A$, τότε $\max A = \sup A$ και αν $\inf A \in A$, τότε $\min A = \inf A$.

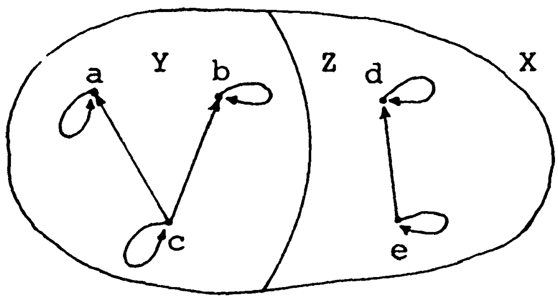
3.9. Παραδείγματα - Εφαρμογές

1. Αν $\mathbb{R}$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών εφοδιασμένο με τη συνηθισμένη διάταξη τότε το σύνολο $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, είναι κάτω φραγμένο από το στοιχείο 0. Το 0 είναι μάλιστα το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του $\mathbb{R}^+$. Πραγματικά, αν υποθέσομε ότι ένα στοιχείο $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι κάτω φράγμα του $\mathbb{R}^+$ και μάλιστα $\alpha > 0$, τότε, επειδή $\frac{\alpha}{2} > 0$, έχομε το άτοπο ότι υπάρχει στοιχείο του $\mathbb{R}^+$, το $\frac{\alpha}{2}$, μικρότερο από το α, που υποτέθηκε κάτω φράγμα του $\mathbb{R}^+$. Άρα $0 = \inf \mathbb{R}^+$. Παρατηρούμε εδώ ότι $\inf \mathbb{R}^+ \notin \mathbb{R}^+$.

Ανάλογα μπορεί κανείς να δεί ότι $0 = \min \mathbb{R}_0^+$, όπου $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geqq 0\}$ και ακόμη ότι $0 = \sup \mathbb{R}^-$, όπου $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : 0 > x\}$ και $0 = \max \mathbb{R}_0^-$, όπου $\mathbb{R}_0^- = \{x \in \mathbb{R} : 0 \geqq x\}$.

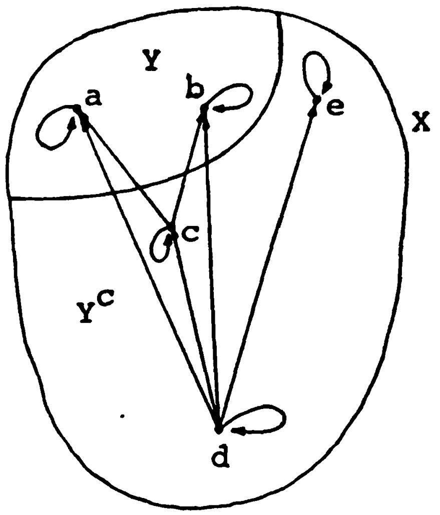
2. Αν Ω είναι ένα μη κενό σύνολο τότε το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(\Omega)$ του Ω με σχέση διατάξεως τη σχέση του υποσυνόλου ($\subseteq$), είναι ένα διατεταγμένο σύνολο και μάλιστα ισχύουν $\min \mathcal{P}(\Omega) = \emptyset$ και $\max \mathcal{P}(\Omega) = \Omega$.

3. Έστω $X = \{a,b,c,d,e\}$ και η σχέση $\preceq = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(c,a),(c,b),(e,d)\}$ που είναι μια μερική διάταξη στο X. Ένα βελοειδές διάγραμμα για τη σχέση $\preceq$ είναι το ακόλουθο σχήμα.



Στο διάγραμμα αυτό τα στοιχεία του συνόλου X τοποθετήθηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε τα στοιχεία εκείνα που είναι δεύτερα μέλη των ζευγών της $\preceq$ να βρίσκονται στο σχήμα σε "ψηλότερο" σημείο από τα στοιχεία που είναι πρώτα μέλη των ζευγών της $\preceq$. Αυτό μας δίνει εποπτικά αρκετές πληροφορίες για τη διάταξη $\preceq$. Π.χ. από το σχήμα φαίνεται ότι αν $Y = \{a,b,c\}$ και $Z = \{d,e\}$, τότε $\min Y = c$, $\min Z = e$ και $\max Z = d$. Επίσης προκύπτει ότι το σύνολο Y δεν έχει μέγιστο στοιχείο. Τις εικασίες αυτές μπορούμε να τις αποδείξομε αυστηρά. Έτσι, π.χ., για το ότι $\min Y = c$ έχομε: $c \in Y$ και $c \preceq a$, $c \preceq b$ και $c \preceq c$. Δηλαδή $c \in Y$ και για κάθε $x \in Y$ ισχύει $c \preceq Y$. Άρα $c = \min Y$.

Το παρακάτω βελοειδές διάγραμμα

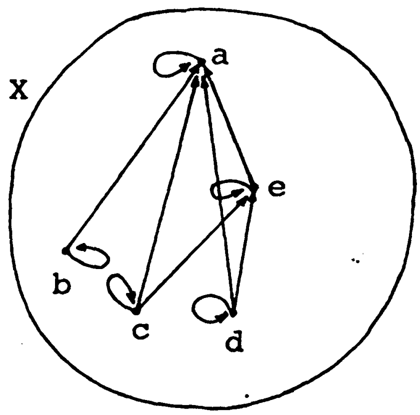


αποδίδει εποπτικά τη διάταξη $\preceq = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(c,a),(d,a),(c,b),(d,b),(d,e),(d,c)\}$ στο σύνολο $X = \{a,b,c,d,e\}$.

Ως προς τη διάταξη αυτή έχομε να παρατηρήσομε τα εξής:

$\min X = d$, ενώ το $\max X$ δεν υπάρχει. Το σύνολο $\{c,d\}$ είναι το σύνολο των κάτω φραγμάτων του $Y = \{a,b\}$ και επειδή $\max\{c,d\}=c$, έχομε $c = \inf Y$. Επίσης έχομε $\min Y^c = d$.

Μετά τα παραπάνω εύκολα μπορεί κανείς να κατανοήσει ότι από το σχήμα



έχομε:

$\max X = a, \quad \sup\{c,d\} = e, \quad \min\{a,c\} = c.$

$\sup\{b,c\} = a, \quad \min\{a,d,e\} = d$ και $\max\{a,d,e\} = a.$

3.10. Ασκήσεις

1. Δίνεται το σύνολο $E = \{1,2,3,4\}$ και οι σχέσεις $\sigma_1 = \{(1,2),(2,1),(3,2)\}$, $\sigma_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,3),(4,4)\}$, $\sigma_3 = \{(1,4)(2,1),(3,1),(1,2)\}$ και $\sigma_4 = E\times E$. Να εξεταστεί ποιές από τις γνωστές ιδιότητες έχει η κάθε μια από τις παραπάνω σχέσεις.

2. Αν E είναι ένα μη κενό σύνολο και σ_1,σ_2 δυο σχέσεις στο E, να αποδειχτεί ότι:

α) Αν οι σ_1,σ_2 είναι συμμετρικές, τότε και η $\sigma_1 \cup \sigma_2$ είναι συμμετρική.

β) Αν η σ_1 είναι ανακλαστική και η σ_2 τυχούσα, τότε και η $\sigma_1 \cup \sigma_2$ είναι ανακλαστική.

3. Στο σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών ορίζομε μια σχέση σ με τον εξής τύπο: $(\forall x,y)\quad x\sigma y \Leftrightarrow x-y = 3k$, όπου $k \in \mathbb{Z}$. Να αποδειχτεί ότι η σ είναι σχέση ισοδύναμίας στο $\mathbb{N}$ και να βρεθεί το σύνολο πηλίκο $\mathbb{N}/\sigma$.

4. Στο σύνολο $X = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ ορίζομε τη σχέση $\sigma = \{(\alpha,\alpha),(\beta,\beta),(\gamma,\gamma),(\delta,\delta),(\alpha,\beta),(\beta,\alpha),(\gamma,\delta),(\delta,\gamma)\}$. Να αποδειχτεί ότι η σ είναι σχέση ισοδυναμίας στο X και να βρεθεί το σύνολο πηλίκο X/σ.

5. Αν A είναι ένα μη κενό υποσύνολο ενός διατεταγμένου συνόλου E, να αποδειχτεί ότι αν υπάρχει άνω φράγμα α του A, με $\alpha \in A$, τότε αυτό το άνω φράγμα είναι μοναδικό.

6. Στο σύνολο $X = \{x,y,z\}$ ορίζομε τη σχέση $\leq = \{(x,x),(y,y),(z,z),(x,y),(y,z),(x,z)\}$. Να αποδειχτεί ότι η σ είναι σχέση διάταξης στο X και μάλιστα σχέση ολικής διάταξης. Να βρεθούν τα $\min X$ και $\max X$ ως προς τη διάταξη $\leq$.

7. Έστω $X = \{a,b,c,d,e\}$ και $\sigma = \{(a,c),(b,c),(d,e)\}$. Να αποδειχτεί ότι:

α) Η σ είναι γνήσια διάταξη στο X.

β) Η σ είναι μη ολική διάταξη.

γ) Να βρεθεί η ελάχιστη σχέση $\bar{\sigma} \supset \sigma$ τέτοια ώστε η $\bar{\sigma}$ να είναι μερική διάταξη.

8. Έστω $X = \{a,b,c,d\}$ και $\preceq = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,d),(b,d),(c,d)\}$. Να αποδειχτεί ότι:

α) Η σ είναι μερική διάταξη στο X.

β) Το στοιχείο d είναι το μέγιστο στοιχείο του X ως προς τη διάταξη $\preceq$.

γ) Δεν υπάρχει ελάχιστο του X ως προς τη $\preceq$.

9. Έστω $X = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$, $Y = \{\alpha,\beta\}$ και $\preceq = \{(\alpha,\alpha),(\beta,\beta),(\gamma,\gamma),(\delta,\delta),(\alpha,\gamma),(\beta,\gamma),(\alpha,\delta),(\beta,\delta),(\gamma,\delta)\}$. Να αποδειχτεί ότι:

α) Η $\preceq$ είναι μια μερική διάταξη στο X.

β) Τα στοιχεία γ και δ είναι άνω φράγματα του συνόλου Y ως προς τη διάταξη $\preceq$.

γ) $\sup Y = \gamma$

δ) Να διαπιστωθεί ότι η αντίστροφη σχέση της $\preceq$ είναι επίσης μια μερική διάταξη στο X, ως προς την οποία ισχύει $\gamma = \inf Y$.

10. Αν Ε είναι ένα μη κενό σύνολο, σ μια σχέση στο Ε και Δ η διανώνιος του Ε, ν'αποδειχτεί ότι:

$$\sigma \cap \sigma^{-1} \subseteq \Delta \Longleftrightarrow \sigma \text{ αντισυμμετρική}.$$

4. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

4.1. Γενικά

Καθημερινά απλοποιούμε πολλές καταστάσεις της ζωής μας χρησιμοποιώντας αριθμούς και απλές ή σύνθετες αριθμητικές πράξεις. Τα τελευταία μάλιστα χρόνια η εισβολή των ηλεκτρονικών υπολογιστών τείνει να καταστήσει τελείως μηχανιστική την επαφή του ανθρώπου με τους αριθμούς. Τι είναι όμως οι αριθμοί; Ποιές είναι οι βαθύτερες δομές και σχέσεις που οικοδομούν και συνδέουν αυτές τις τόσο απαραίτητες για τη ζωή μας έννοιες;

Σε ό,τι ακολουθεί θα δώσουμε σύντομα το περίγραμμα ενός τρόπου θεμελίωσης του συνόλου των πραγματικών αριθμών καθώς και τις βασικές ιδιότητες του συνόλου αυτού.

4.2. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών

Δεχόμαστε ότι υπάρχει ένα μη κενό σύνολο $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με δυο "πράξεις", την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό. Πιο συγκεκριμμένα, σε κάθε ζεύγος $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, αντιστοιχούμε ένα μοναδικό στοιχείο του $\mathbb{R}$, που το συμβολίζομε με $x+y$ και το ονομάζομε <u>άθροισμα</u> των στοιχείων x,y. Τη διαδικασία (πράξη) εύρεσης από τα τυχόντα στοιχεία x,y, του αθροίσματος $x+y$, την ονομάζομε <u>πρόσθεση</u>. Ανάλογα, σε κάθε ζεύγος $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, αντιστοιχούμε ένα μοναδικό στοιχείο του $\mathbb{R}$, που το συμβολίζομε με $x\cdot y$ (ή και απλούστερα xy) και το ονομάζομε <u>γινόμενο</u> των στοιχείων x,y. Την διαδικασία (πράξη) εύρεσης από τα τυχόντα στοιχεία x,y, του γινομένου xy, την ονομάζομε <u>πολλαπλασιασμό</u>.

Οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού δεχόμαστε ότι ικανοποιούν τα παρακάτω αξιώματα:

A_1) $x+y=y+x$ (αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης).

A_2) $x+(y+z)=(x+y)+z$ (προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης).

A_3) Υπάρχει ένα στοιχείο $0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x+0=x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Το 0 λέγεται ουδέτερο στοιχείο του $\mathbb{R}$ ως προς την πρόσθεση.

A_4) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει στοιχείο $z \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x+y=0$. Το z ονομάζεται αντίθετο στοιχείο του x και συμβολίζεται με $-x$. Επίσης συνηθίζομε να γράφομε $x-y$ αντί του $x+(-y)$.

A_5) $xy=yz$ (αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού).

A_6) $x(yz)=(xy)z$ (προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού).(*)

A_7) Υπάρχει ένα στοιχείο $1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $1x=x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Το 1 λέγεται ουδέτερο στοιχείο του $\mathbb{R}$ ως προς τον πολλαπλασιασμό.

A_8) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $x \neq 0$ υπάρχει στοιχείο $z \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $xz=1$. Το z ονομάζεται αντίστροφο του x και συμβολίζεται με x^{-1} ή $\frac{1}{x}$.

A_9) $x(y+z)=xy+xz$. (επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση).

Οι παραπάνω ιδιότητες καθιστούν το $\mathbb{R}$ σώμα.

Ορίζομε τώρα στο $\mathbb{R}$ μια σχέση ολικής διάταξης $\geq$ με τις ιδιότητες (αξιώματα):

A_{10}) Αν $x \leq y$ τότε $x+z \leq y+z$ για κάθε $z \in \mathbb{R}$.

A_{11}) $0<x$ και $0<y \Rightarrow 0<xy$.

Το σώμα $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με τη διάταξη αυτή ονομάζεται διατεταγμένο σώμα των πραγματικών αριθμών.

Με τη βοήθεια της παραπάνω διάταξης μπορούμε να ορίσομε τα σύνολα $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}: x>0\}$ και $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R}: 0>x\}$. Τα σύνολα αυτά ονομάζονται σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών και σύνολο

(*) Με βάση την ιδιότητα 6 μπορούμε να ορίσομε το γινόμενο $\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ φορές}}$, $x \in \mathbb{R}$, που το συμβολίζομε με x^n.

των αρνητικών πραγματικών αριθμών, αντίστοιχα.

Για το σύνολο $\mathbb{R}^+$ αποδεικνύονται οι εξής βασικές ιδιότητες.

1) Αν $x \in \mathbb{R}^+$ και $y \in \mathbb{R}^+$ τότε: $x+y \in \mathbb{R}^+$ και $xy \in \mathbb{R}^+$.

2) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ένα ακριβώς από τα ακόλουθα: $x \in \mathbb{R}^+$ ή $x=0$ ή $-x \in \mathbb{R}^+$.

3) Αν $x \in \mathbb{R}^+$ τότε $-x \in \mathbb{R}^-$.

Ορίζομε ακόμη $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ και $\mathbb{R}_0^- = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$.

4.3. Το σύνολο των φυσικών αριθμών.

Αποδεικνύεται ότι υπάρχει ένα υποσύνολο $\mathbb{N}$ του $\mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες.

1) $1 \in \mathbb{N}$.

2) $(\forall x)$: $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x+1 \in \mathbb{N}$.(*)

3) Το $\mathbb{N}$ είναι το ελάχιστο (ως προς την διάταξη $\subseteq$) υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που έχει τις ιδιότητες 1 και 2.

Το σύνολο $\mathbb{N}$ ονομάζεται <u>σύνολο των φυσικών αριθμών</u>.

Μερικές ενδιαφέρουσες ιδιότητες του συνόλου $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών είναι οι εξής.

4) Για κάθε x, y εν $\mathbb{N}$ έχομε: $x+y \in \mathbb{N}$ και $xy \in \mathbb{N}$.

5) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^+$.

6) $1 = \min \mathbb{N}$.

7) $0 \notin \mathbb{N}$.

Συμβολίζομε το στοιχείο 1+1 του $\mathbb{N}$ με 2, το στοιχείο 2+1 με 3, το στοιχείο 3+1 με 4 κ.ο.κ.. Έτσι έχομε

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\ldots\}.$$

4.4. Το σύνολο των ακεραίων αριθμών

Ορίζομε τώρα το υποσύνολο $\mathbb{Z}$ του $\mathbb{R}$ με τον τύπο:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : -x \in \mathbb{N}\}.$$

Το σύνολο $\mathbb{Z}$ ονομάζεται <u>σύνολο των ακεραίων αριθμών</u>. Οι πιο βασικές ιδιότητες των στοιχείων του συνόλου $\mathbb{Z}$ είναι οι εξής:

(*) Οι ιδιότητες (1) και (2) χαρακτηρίζουν τα λεγόμενα <u>επαγωγικά</u> σύνολα.

1) Για κάθε x,y εν $\mathbb{Z}$, έχομε: $x+y \in \mathbb{Z}$, $xy \in \mathbb{Z}$ και $x-y=x+(-y) \in \mathbb{Z}$.

2) $\mathbb{N} = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Z}$.

3) Αν x,y ανήκουν στο $\mathbb{Z}$, με $y > 0$, τότε υπάρχουν ακέραιοι q και r, μονοσήμαντα ορισμένοι, τέτοιοι ώστε να ισχύουν:

$$x = yq+r \text{ και } 0 \leq r < y.$$

4.5. Το σύνολο των ρητών αριθμών

Από το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων μπορεί να παραχθεί ένα νέο υποσύνολο $\mathbb{Q}$ του $\mathbb{R}$ με τον τύπο

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : x = \alpha\beta^{-1}, \text{ με } \alpha \in \mathbb{Z} \text{ και } \beta \in \mathbb{N}\}^{(*)}.$$

Το σύνολο $\mathbb{Q}$ ονομάζεται σύνολο των ρητών αριθμών.

Οι βασικές ιδιότητες που μπορούν ν'αποδειχτούν για το σύνολο $\mathbb{Q}$ είναι οι εξής:

1) Το $\mathbb{Q}$ είναι υποσώμα του $\mathbb{R}$. (Δηλ. ισχύουν και για το $\mathbb{Q}$ όλες οι ιδιότητες από A_1 μέχρι A_9 που ισχύουν και για το $\mathbb{R}$).

2) Το $\mathbb{Q}$ είναι το ελάχιστο υποσώμα του $\mathbb{R}$. (Δηλ. αν $A \subsetneq \mathbb{R}$ είναι υποσώμα του $\mathbb{R}$ τότε $\mathbb{Q} \subseteq A$).

4.6. Το κεκορεσμένο διατεταγμένο σώμα $\mathbb{R}$

Τα όσα εκτέθηκαν στην παράγραφο 4.2 και συγκεκριμμένα τα αξιώματα A_1 μέχρι και A_{11}, δεν χαρακτηρίζουν το $\mathbb{R}$, όπως αυτό μας είναι γνωστό από τις γυμνασιακές μας σπουδές. Π.χ., τα αξιώματα αυτά δεν εξασφαλίζουν ότι η εξίσωση $x \cdot x = x^2 = 2$ έχει λύση στο $\mathbb{R}$. Έτσι, απαιτούμε για το $\mathbb{R}$ το παρακάτω αξίωμα.

A_{12}) Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει άνω πέρας (supremum).

Το σύνολο $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με τα αξιώματα A_1 μέχρι και A_{12} ονομάζεται κεκορεσμένο διατεταγμένο σώμα.

Θα δώσομε τώρα μερικά συμπεράσματα που συμπληρώνουν τη γνώση μας για το $\mathbb{R}$. Τα συμπεράσματα αυτά αποδεικνύονται από τα αξιώματα A_1 μέχρι και A_{11} σε συνδυασμό και με το αξίωμα A_{12}.

1) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $n > x$. (Ιδιότητα του Αρχιμήδη).

2) Για κάθε x,y εν $\mathbb{R}$ με $x < y$, υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ τέτοιος ώστε

(*) Το στοιχείο $\alpha\beta^{-1}$ συμβολίζεται και με $\frac{\alpha}{\beta}$ και ονομάζεται κλάσμα με αριθμητή α και παρονομαστή β.

$x < q < y$.

3) Για κάθε $y \in \mathbb{R}^+$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}^+$ τέτοιος ώστε $x^2 = y$.

Αν x, y είναι όπως παραπάνω, γράφομε $x = \sqrt{y}$ και ονομάζομε τον x τετραγωνική ρίζα του y.

4) Ο πραγματικός αριθμός $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός.

Το παραπάνω συμπέρασμα 4 έχει ιδιαίτερη αξία γιατί μας εξασφαλίζει ότι το σύνολο $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ είναι μη κενό. Το σύνολο αυτό είναι γνωστό σαν σύνολο των άρρητων αριθμών. Για το σύνολο αυτό ισχύει η εξής πρόταση.

5) Για κάθε x, y εν $\mathbb{R}$ με $x < y$ υπάρχει άρρητος αριθμός p τέτοιος ώστε: $x < p < y$.

Παρατήρηση. α) Με τον ίδιο τρόπο που αποδεικνύεται ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός, αποδεικνύεται ότι και οι αριθμοί $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \ldots$ δεν είναι ρητοί. Γενικά ισχύει το εξής: Αν $x \in \mathbb{R}^+$ και δεν υπάρχει ρητός q τέτοιος ώστε $q^2 = x$, τότε ο αριθμός $\sqrt{x}$ είναι άρρητος.

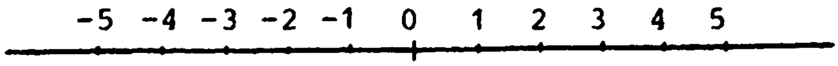
β) Το συμπέρασμα 3 Παρ.4.6 γενικεύται ως εξής: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $y \in \mathbb{R}^+$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}^+$ τέτοιος ώστε $x^n = y$. Αν x, y είναι δυο τέτοιοι αριθμοί από το $\mathbb{R}^+$ τότε γράφομε $x = \sqrt[n]{y}$ και ονομάζομε τον x n-στή ρίζα του y.

γ) Για τα σύνολα $\{x \in \mathbb{Z} : x > 0\}$ και $\{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$, χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς $\mathbb{Z}^+$ και $\mathbb{Q}^+$, αντίστοιχα. Ακόμη, θέτομε $\mathbb{Z}_0^+ = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ και $\mathbb{Q}_0^+ = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$. Ανάλογα ορίζομε $\mathbb{Z}^- = \{x \in \mathbb{Z} : x < 0\}$ και $\mathbb{Q}^- = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$.

4.7. Η ευθεία των πραγματικών αριθμών

Συχνά το σύνολο των πραγματικών αριθμών παριστάνεται γεωμετρικά σαν το σύνολο των σημείων μιας ευθείας γραμμής, που ονομάζεται ευθεία (ή άξονας) των πραγματικών αριθμών. Συγκεκριμένα, πάνω σε μια ευθεία επιλέγομε δύο σημεία για τους αριθμούς 0 και 1, όπως στο παρακάτω σχήμα.

Με τον τρόπο αυτό επιλέγομε ταυτόχρονα και μια μονάδα μήκους, πάνω στην ευθεία, ίση με την απόσταση των σημείων 0 και 1. Με μέτρο αυτή τη μονάδα τοποθετούμε πάνω στην ευθεία δεξιότερα του 1 τους άλλους φυσικούς αριθμούς και αριστερότερα του 0 τους αρνητικούς ακεραίους σε ίσες με την μονάδα μήκους αποστάσεις μεταξύ τους, όπως στο σχήμα.



Ανάλογα, μπορούμε να τοποθετήσομε πάνω στην ευθεία τους ρητούς αριθμούς. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια γνωστών προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, μπορούμε ν'αποδείξομε ότι σε κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί ένας πραγματικός αριθμός και αντίστροφα. Έτσι, συχνά ταυτίζομε την έννοια ενός σημείου της ευθείας των πραγματικών αριθμών με τον αριθμό που αντιστοιχεί στο σημείο αυτό. Η σχέση διάταξης $\leq$ με την οποία είναι εφοδιασμένο το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, μπορεί να δοθεί στην ευθεία των πραγματικών αριθμών πολύ απλά ως εξής:

Αν $x \leq y$ τότε, το σημείο που αντιστοιχεί στον αριθμό x βρίσκεται αριστερότερα ή ταυτίζεται με το σημείο που αντιστοιχεί στον αριθμό y.

Έτσι, όλοι οι αρνητικοί αριθμοί βρίσκονται αριστερά του σημείου 0 και οι θετικοί αριθμοί δεξιά του 0.

4.8. Διαστήματα

Στην παράγραφο αυτή θα δόσομε τους ορισμούς μιας κατηγορίας υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ που ονομάζονται διαστήματα.

Έστω α, β εν $\mathbb{R}$ και $\alpha < \beta$.

Το ανοικτό διάστημα (α,β) ορίζεται να είναι το σύνολο

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : \alpha < x < \beta\}.$$

Το κλειστό διάστημα $[a,b]$ είναι το σύνολο

$$[\alpha,\beta] = \{x \in \mathbb{R} : \alpha \leq x \leq \beta\}.$$

Ορίζομε ακόμη τα διαστήματα

$[\alpha,\beta) = \{x \in \mathbb{R} : \alpha \leq x < \beta\}$ (κλειστό αριστερά και ανοικτό δεξιά)

$(\alpha,\beta] = \{x \in \mathbb{R} : \alpha < x \leq \beta\}$ (ανοικτό αριστερά και κλειστό δεξιά).

Εκτός από τα διαστήματα αυτά, μπορούμε να ορίσομε και τα απέραντα διαστήματα ως εξής.

$$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, \quad [a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

$$(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \quad (-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\},$$

όπου $a \in \mathbb{R}$.

Μερικές φορές γράφομε: $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$.

Τα σύμβολα $+\infty$ και $-\infty$ χρησιμοποιούνται εδώ καθαρά σαν σύμβολα και τίποτε περισσότερο. Επομένως δεν πρέπει να θεωρηθούν σαν στοιχεία του συνόλου $\mathbb{R}$.

4.9. Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Για κάθε πραγματικό αριθμό x, συμβολίζομε με $|x|$ τον αριθμό που ορίζεται με τον τύπο,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x, & \text{αν } x < 0. \end{cases}$$

Η ποσότητα $|x|$ λέγεται απόλυτη τιμή του αριθμού x. Αν λάβομε υπόψη την ευθεία των πραγματικών αριθμών, η ποσότητα $|x|$, με $x \in \mathbb{R}$, είναι τό μήκος της απόστασης του σημείου που αντιστοιχεί στον αριθμό x από το σημείο που αντιστοιχεί στο μηδέν.

4.10 Επαγωγή

Η μαθηματική επαγωγή είναι μια απλή αποδεικτική διαδικασία που εφαρμόζεται πολύ συχνά στα Μαθηματικά. Εδώ θα εξηγήσομε αυτή τη διαδικασία με βάση τα όσα προηγήθηκαν στο κεφάλαιο αυτό. Για το σκοπό αυτό δίνομε το παρακάτω θεώρημα.

4.10.1 **ΘΕΩΡΗΜΑ**. Έστω $P(\nu)$ ένας προτασιακός τύπος με σύνολο αναφοράς το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών. Αν ισχύουν

(i) $P(1)$ αληθής πρόταση

και

(ii) $P(\nu) \Rightarrow P(\nu+1)$ για όλα τα $\nu \in \mathbb{N}$,

τότε το σύνολο αλήθειας του προτασιακού τύπου $P(\nu)$ είναι ολόκληρο το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών.

Απόδειξη. Έστω S το σύνολο αλήθειας του $P(\nu)$. Τότε, επειδή το σύνολο αναφοράς του $P(\nu)$ είναι το $\mathbb{N}$, ισχύει $S \subseteq \mathbb{N}$. Ακόμη λόγω της (i) ισχύει

$$1 \in S. \qquad (\alpha)$$

Επιπλέον, αν για τυχόν $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει $\nu \in S$ (άρα $P(\nu)$ αληθής πρόταση), λόγω της (ii) θα έχομε $P(\nu+1)$ αληθής πρόταση. Επομένως $\nu+1 \in S$. Δηλαδή αποδείχτηκε ότι για τυχόν $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\nu \in S \Rightarrow \nu+1 \in S. \qquad (\beta)$$

Οι σχέσεις (α) και (β) δίνουν ότι το S είναι επαγωγικό υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{N}$. Επειδή όμως το $\mathbb{N}$ είναι το ελάχιστο επαγωγικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, θα ισχύει τελικά $S = \mathbb{N}$.

Αν θέλομε να αποδώσομε με πιο ελεύθερη διατύπωση το παραπάνω θεώρημα, μπορούμε να πούμε τα εξής.

Έστω $P(\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$ ένας προτασιακός τύπος και θέλομε να αποδείξομε ότι η πρόταση

$$(\forall \nu \in \mathbb{N}) \quad (P(\nu)$$

είναι αληθής.

Τότε αρκεί να αποδείξομε ότι:

(i) $P(1)$ αληθής πρόταση

και

(ii) $\forall \nu \in \mathbb{N}$ $P(\nu)$ αληθής $\Rightarrow P(\nu+1)$ αληθής.

Η παραπάνω αποδεικτική διαδικασία είναι ακριβώς η μαθηματική επαγωγή.

Δίνομε αμέσως παρακάτω δύο παραδείγματα που αφορούν την τεχνική της επαγωγής.

1. Να αποδειχτεί ότι

$$1+2+\ldots+\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

<u>Απόδειξη</u>. Για $\nu = 1$, ο προτασιακός τύπος $1+2+\ldots+\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$ δίνει $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, που είναι αληθές.

Έστω τώρα ότι για κάποιο τυχαίο $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$1+2+\ldots+\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2} \qquad (\alpha).$$

Θα αποδείξομε, χρησιμοποιώντας την (α), ότι

$$1+2+\ldots+\nu+(\nu+1) = \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}.$$

Πραγματικά·

$$1+2+\ldots+\nu+(\nu+1) = (1+2+\ldots+\nu)+(\nu+1) \overset{(\alpha)}{=\!=}$$

$$\frac{\nu(\nu+1)}{2} + (\nu+1) = \frac{\nu(\nu+1)}{2} + \frac{2(\nu+1)}{2} = \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2} .$$

2. Να αποδειχτεί ότι

$$\nu < 2^{\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

<u>Απόδειξη</u>. Για $\nu = 1$, ο προτασιακός τύπος $\nu < 2^{\nu}$, δίνει $1 < 2^{1}$, που είναι αληθής πρόταση.

Έστω ότι για κάποιο τυχαίο ν ισχύει

$$\nu < 2^{\nu}. \qquad (\beta)$$

Με βάση το (β) θα αποδείξομε ότι ισχύει

$$\nu+1 < 2^{\nu+1}.$$

Έτσι έχομε

$$\nu < 2^{\nu} \Rightarrow \nu+1 < 2^{\nu}+1. \qquad (\gamma)$$

Αλλά για κάθε φυσικό αριθμό x, ισχύει

$$1 \leq x \Longleftrightarrow 1+x \leq x+x \Longleftrightarrow 1+x \leq 2x. \qquad (\delta)$$

Έτσι από τις σχέσεις (γ) και (δ) (για $x = 2^{\nu}$) παίρνομε

$$\nu+1 < 2^{\nu}+1 < 2\cdot 2^{\nu} = 2^{\nu+1}.$$

Άρα

$$\nu+1 < 2^{\nu+1}.$$

5. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

5.1. Η έννοια της συνάρτησης

Οι συναρτήσεις συνιστούν την πιο ενδιαφέρουσα κατηγορία σχέσεων στα Μαθηματικά. Με τον όρο συνάρτηση εννοούμε μια σχέση f από ένα σύνολο A σ'ένα σύνολο B τέτοιο ώστε:

$$\mathcal{D}(f) = A$$

και

$$xfy \text{ και } xfz \Rightarrow y = z \text{ για κάθε } x \in A \text{ και } y,z \text{ εν } B.$$

Πιο ελεύθερα, μπορούμε να πούμε ότι συνάρτηση είναι μια σχέση από ένα σύνολο A σ'ένα σύνολο B, που στο γράφημά της κάθε στοιχείο $x \in A$ εμφανίζεται ακριβώς σε ένα από τα διατεταγμένα ζεύγη σαν πρώτο μέλος.

Για κάθε $x \in A$ το μοναδικό $y \in B$ τέτοιο ώστε xfy συμβολίζεται με $f(x)$ και ονομάζεται τιμή της f στο x ή εικόνα του x διαμέσου της f. Επίσης, στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f απεικονίζει* το x στο y. Ακόμη, όπως και στις σχέσεις, η συνάρτηση f του συνόλου A στο σύνολο B αποδίδεται με τον συμβολισμό $f : A \to B$. Ειδικότερα, αν $\mathcal{R}(f) = B$, γράφομε $f : A \xrightarrow{\text{επί}} B$ και λέμε ότι η f είναι συνάρτηση του A επί του B.

Το σύνολο όλων των συναρτήσεων του συνόλου A στο σύνολο B συμβολίζεται συνήθως με τα σύμβολα B^A ή $\mathcal{F}(A,B)$. Γίνεται φανερό από τον ορισμό της συνάρτησης, ότι δύο συναρτήσεις f και g από το σύνολο B^A είναι ίσες αν και μόνο αν:

---

* Πολύ συχνά συναντά κανείς και τον όρο απεικόνιση ή μονοσήμαντη απεικόνιση αντί του όρου συνάρτηση.

$$f(x) = g(x) \text{ για όλα τα } x \in A.$$

Αν $f : A \to B$ είναι μια συνάρτηση και S είναι υποσύνολο του A, τότε το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών $\{(x, f(x)) : x \in S\}$ ορίζει μια καινούργια συνάρτηση $g : S \to B$ τέτοια ώστε

$$f(x) = g(x) \text{ για κάθε } x \in S.$$

Τη συνάρτηση g την συμβολίζομε με f/S και την ονομάζομε <u>περιορισμό της</u> f <u>πάνω στο</u> S. Ακόμη, αν $G \supseteq A$ και q είναι μια συνάρτηση του G στο B τέτοια ώστε

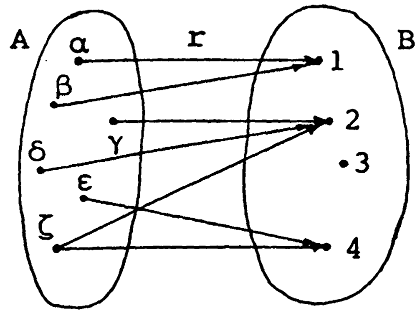
$$f(x) = q(x) \text{ για κάθε } x \in A,$$

λέμε ότι η q είναι μια επέκταση της f.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι αν g είναι περιορισμός μιας συνάρτησης f, τότε η f είναι επέκταση της g.

5.2. <u>Παραδείγματα-Εφαρμογές</u>

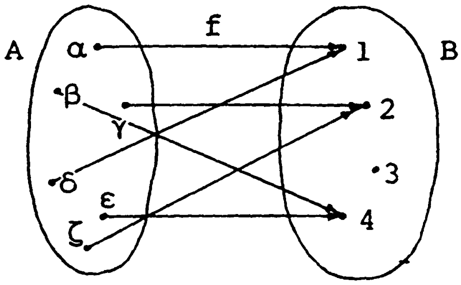
<u>1.</u> Το διπλανό βελοειδές διάγραμμα (α) παριστάνει μια σχέση r από ένα σύνολο A σ'ένα σύνολο B. Η σχέση αυτή δεν είναι συνάρτηση αφού συμβαίνει $\zeta r 2$, $\zeta r 4$ και $2 \neq 4$.



(α)

Αντίθετα, το βελοειδές διάγραμμα (β) παριστάνει μια συνάρτηση f του συνόλου A στο σύνολο B για την οποία έχομε:

$$\mathcal{R}(f) = \{1, 2, 4\}.$$



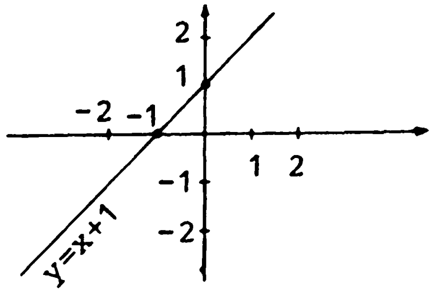
(β)

<u>2.</u> Αν $\mathbb{R}$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών, τότε η σχέση $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = x+1\}$, είναι μια συνάρτηση, γιατί για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η τιμή $x+1$ ορίζεται μονοσήμαντα από το x.

Σε συναρτήσεις όπως η παραπάνω του Παραδείγματος 2, η αναλυτική μαθηματική έκφραση που δίνει τη συνάρτηση, λέγεται <u>τύπος</u> της συνάρτησης. Συνηθέστατα στις εφαρμογές μια συνάρτηση δίνεται με τον τύπο της, $y = f(x)$, και το πεδίο ορισμού της. Στην περίπτωση αυτή, το x λέγεται <u>ανεξάρτητη μεταβλητή</u> και το y <u>εξαρτημένη μεταβλητή</u> της συνάρτησης.

'Οταν μια συνάρτηση f δίνεται από ένα τύπο $y = f(x)$, το x λέγεται <u>ανεξάρτητη μεταβλητή</u> και το y <u>εξαρτημένη μεταβλητή</u> της συνάρτησης.

<u>3.</u> Μια συνάρτηση f, με $\mathcal{R}(f) \subseteq \mathbb{R}$, λέγεται <u>πραγματική</u> συνάρτηση. Ειδικότερα, οι πραγματικές συναρτήσεις με πραγματική μεταβλητή, όπως αυτή του παραπάνω Παραδείγματος 2, έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Αυτό οφείλεται στο ότι, για τις συναρτήσεις αυτές μπορεί να γίνει γραφική παράσταση στο Καρτεσιανό επίπεδο. Πάνω σ'αυτήν την ιδέα στηρίζεται το οικοδόμημα της Αναλυτικής Γεωμετρίας. 'Ετσι, όπως είναι ήδη γνωστό, η συνάρτηση $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = x+1\}$ του προηγουμένου Παραδείγματος 2, έχει γραφική παράσταση μια ευθεία γραμμή, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα.



<u>4.</u> Ας είναι A,B δυό μη κενά σύνολα, και c ένα σταθερό στοιχείο του B. Η σχέση $f = A \times \{c\} = \{(x,c) : x \in A\}$, είναι μια συνάρτηση του A στο B. Η συνάρτηση αυτή είναι η <u>σταθερή συνάρτηση</u> του A στο B, με τιμή c και μπορεί να αποδοθεί το ίδιο καλά ως εξής: $y = f(x) = c$, $x \in A$, όπου $c \in B$.

<u>5.</u> Αν A είναι τυχόν μη κενό σύνολο, η διαγώνιος Δ του συνόλου A ορίζει μια συνάρτηση του A επί του A με τύπο $f(x) = x$, $x \in A$. Την συνάρτηση αυτή την ονομάζομε <u>ταυτοτική συνάρτηση του</u> A και χρησιμοποιούμε γι'αυτή τα σύμβολα i_A ή ι αντί του Δ.

<u>5.3. Αμφιμονοσήμαντη Συνάρτηση. Αντίστροφη Συνάρτηση</u>

Είδαμε στο Κεφάλαιο 3 ότι αν σ είναι μια σχέση, ορίζεται πάντοτε η αντίστροφή της σχέση σ^{-1}. 'Εχοντας υπόψη ότι μια συνάρτηση f είναι σχέση, έχομε αμέσως το συμπέρασμα ότι η f^{-1} είναι επίσης σχέση. Δεν ισχύει όμως γενικά ότι η αντίστροφη σχέση f^{-1} μιας συνάρτησης f, είναι συνάρτηση. Αυτό μπορεί εύκολα να το δεί κανείς, π.χ., στο Παράδειγμα 1 της προηγούμενης παραγράφου. Θα μελετήσομε εδώ μια κατηγορία συναρτήσεων για τις οποίες συμβαίνει η αντίστροφή τους να είναι επίσης συνάρτηση. Για το σκοπό αυτό δίνομε τον παρακάτω ορισμό.

Μια συνάρτηση $f : A \to B$ λέγεται αμφιμονοσήμαντη ή ένα προς ένα αν:

$$\text{για κάθε } x,y \text{ εν } A, \qquad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Χρησιμοποιώντας τη γνωστή ταυτολογία $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ από τον προτασιακό λογισμό, μπορούμε αντί του παραπάνω ορισμού να χρησιμοποιούμε τον εξής:

Μια συνάρτηση $f : A \to B$ λέγεται αμφιμονοσήμαντη αν:

$$\text{για κάθε } x,y \text{ εν } A, \qquad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

Είναι πολύ εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι οι συναρτήσεις των Παραδειγμάτων 2 και 5 της προηγούμενης παραγράφου είναι αμφιμονοσήμαντες, ενώ η του Παραδείγματος 4, της ίδιας παραγράφου, όχι, εκτός αν $A = \{a\}$.

Για τις αμφιμονοσήμαντες συναρτήσεις ισχύει η εξής σημαντική πρόταση.

5.3.1. ΠΡΟΤΑΣΗ. Μια συνάρτηση f είναι αμφιμονοσήμαντη αν και μόνο αν η f^{-1} είναι συνάρτηση.

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι αμφιμονοσήμαντη και ότι $xf^{-1}y$ και $xf^{-1}z$ για τυχόντα x,y,z. Τότε yfx και zfx. Άρα $x=f(y)=f(z)$, απ'όπου προκύπτει ότι $y = z$, αφού η f είναι αμφιμονοσήμαντη. Έτσι αποδείχτηκε ότι: $xf^{-1}y$ και $xf^{-1}z \Rightarrow y = z$, που σημαίνει ότι η f^{-1} είναι συνάρτηση.

Αντίστροφα· υποθέτομε ότι f^{-1} είναι συνάρτηση και ότι $f(x) = f(y)$ για δυό τυχόντα x,y. Θέτομε $f(x) = f(y) = z$ και παίρνομε $f(x) = f(y) = z \Rightarrow (x,z) \in f$ και $(y,z) \in f \Rightarrow (z,x) \in f^{-1}$ και $(z,y) \in f^{-1}$ $\Rightarrow zf^{-1}x$ και $zf^{-1}y$. Επειδή η f^{-1} είναι συνάρτηση, η τελευταία σχέση δίνει $x = y$. Άρα, επειδή η υπόθεση $f(x) = f(y)$ οδηγεί στο συμπέρασμα $x = y$, παίρνομε ότι η f είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση.

Παρατήρηση. Είναι πολύ εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι αν η f είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση τότε η f^{-1} είναι επίσης αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση. Αυτό γιατί αν $f^{-1}(x) = f^{-1}(y) = z$ τότε: $xf^{-1}z$ και $yf^{-1}z \Longrightarrow zfx$ και $zfy \xrightarrow{f\ \text{συνάρτηση}} x = y$.

5.4. Σύνθεση συναρτήσεων

Πολλές φορές σε διάφορες εφαρμογές τυχαίνει να "συνθέσομε" δυο συναρτήσεις f και g με τον εξής τρόπο. Για κάθε $x \in \mathcal{D}(f)$ σχηματίζομε την τιμή $f(x)$ και στη συνέχεια την τιμή $g(f(x))$, όταν αυτό είναι δυνατό (όταν δηλαδή, $f(x) \in \mathcal{D}(g)$). Η συνάρτηση που λαμβάνεται με τον τρόπο αυτό συμβολίζεται με $g \circ f$. Για παράδειγμα, αν f είναι μια συνάρτηση, με $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και τύπο $f(x) = x+1$ και g μια συνάρτηση, με $\mathcal{D}(g) = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$ και τύπο $g(x) = \sqrt{x}$, η σύνθεσή τους $g \circ f$ έχει τύπο $(g \circ f)(x) = \sqrt{x+1}$ και ορίζεται για $x \geq -1$. Δηλαδή, $\mathcal{D}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\}$.

Από τα παραπάνω οδηγούμαστε στον εξής ορισμό:

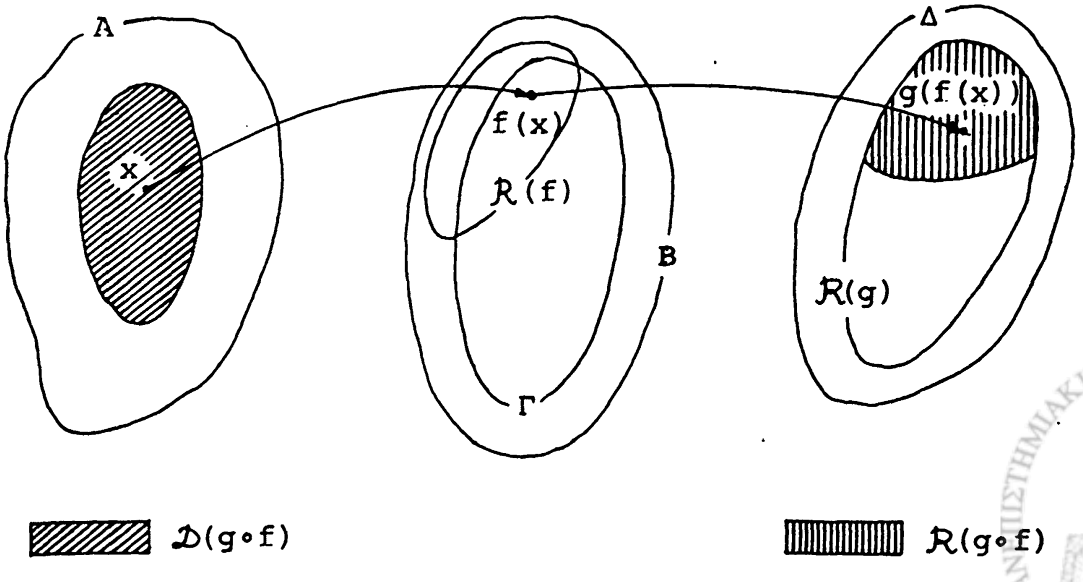
Αν f και g είναι συναρτήσεις με $f : A \to B$ και $g : \Gamma \to \Delta$, όπου $\Gamma \subseteq B$, τότε το σύνολο

$$\{(x,y) \in A \times \Delta: \text{Υπάρχει } b \in \Gamma \text{ τέτοιο ώστε } (x,b) \in f \text{ και } (b,y) \in g\},$$

ορίζει μια συνάρτηση h, που λέγεται <u>σύνθεση</u> των συναρτήσεων f και g και συμβολίζεται με $h = g \circ f$.

Πιο απλά, σύνθεση των συναρτήσεων $f : A \to B$ και $g : \Gamma \to \Delta$, όπου $\Gamma \subseteq B$, είναι μια συνάρτηση h, με τύπο $h(x) = g(f(x))$ και πεδίο ορισμού $\mathcal{D}(h) = \{x \in \mathcal{D}(f) : f(x) \in \mathcal{D}(g)\} = \{x \in A : f(x) \in \Gamma\}$.

Μια καλή εποπτική ερμηνεία της σύνθεσης δύο συναρτήσεων, δίνει το επόμενο σχήμα



Επαγωγικά, μπορούμε να ορίσομε τη σύνθεση τριών συναρτήσεων f, g και φ με τον εξής τρόπο

$$f \circ g \circ \varphi = (f \circ g) \circ \varphi$$

Για τη σύνθεση συναρτήσεων, περισσοτέρων των δύο, ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα (Βλ. Ασκ. 6 της Παραγρ. 5.6). Δηλαδή:

$$(f \circ g) \circ \varphi = f \circ (g \circ \varphi).$$

5.5. Παραδείγματα - Εφαρμογές

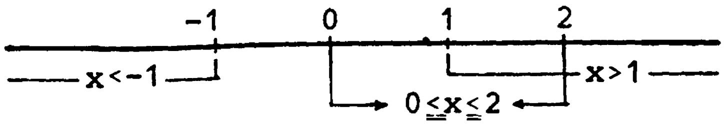
1) Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = x^2 - 1$ και $\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 2\}$ και g, με $g(x) = \frac{1}{x}$ και $\mathcal{D}(g) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Να βρεθεί ο τύπος και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g \circ f$.

Καταρχή ο τύπος της $g \circ f$ είναι $\quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Για το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ είναι γνωστό ότι $\mathcal{D}(g \circ f) = \{x \in \mathcal{D}(f) : f(x) \in \mathcal{D}(g)\}$. Άρα:

$$\mathcal{D}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 2 \text{ και } x^2 - 1 > 0\} =$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 2\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 > 0\}.$$

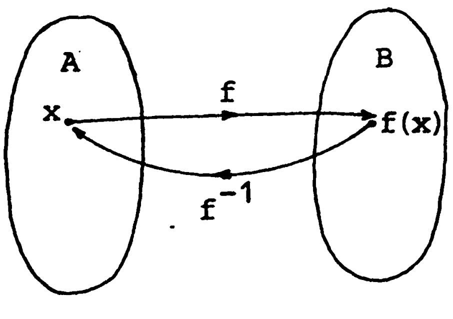
Αλλά $x^2 - 1 > 0 \Longleftrightarrow (x-1)(x+1) > 0 \Longleftrightarrow x > 1$ ή $x < -1$. Έτσι, από το σχήμα



παίρνομε

$$\mathcal{D}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 2\}.$$

2) Αν $f : A \xrightarrow{\text{επί}} B$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση, τότε, επειδή η f^{-1} είναι και αυτή συνάρτηση και μάλιστα $f^{-1} : B \xrightarrow{\text{επί}} A$, έχει νόημα να θεωρήσομε τις συναρτήσεις $f^{-1} \circ f$ και $f \circ f^{-1}$. Όπως εύκολα μπορεί κανείς να δεί ισχύουν (Βλ. σχήμα):



$$(\forall x \in \mathcal{D}(f) = A)\ (f^{-1} \circ f)(x) = x$$
$$(\forall y \in \mathcal{D}(f^{-1}) = B)\ (f \circ f^{-1})(y) = y$$

Άρα $f^{-1} \circ f = i_A$ και $f \circ f^{-1} = i_B$.

3) Αν $f: A \to B$ και $g: B \to \Gamma$ είναι αμφιμονοσήμαντες συναρτήσεις τότε η συνάρτηση $g \circ f : A \to \Gamma$ είναι αμφιμονοσήμαντη.

Πραγματικά: Έστω ότι $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(y))$. Επειδή όμως η g είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση, η τελευταία σχέση δίνει $f(x) = f(y)$. Έτσι, επειδή και η f είναι αμφιμονοσήμαντη, παίρνομε $x = y$.

4) Έστω $f: A \to B$ μια συνάρτηση. Αν $X \subseteq A$ και $Y \subseteq B$, τότε ορίζομε τα σύνολα

$$f(X) = \{y \in B : (\exists x \in X)\ y = f(x)\} \quad \text{και}$$

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A : (\exists y \in Y)\ y = f(x)\}.$$

Αν $f : \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\} \to \{1,2,3,4\}$ είναι μια συνάρτηση τέτοια ώστε $f = \{(\alpha,1),(\beta,1),(\gamma,2),(\delta,3)\}$, έχομε:

$$f(\{\alpha,\beta\}) = \{1\},\ f(\{\alpha,\delta,\varepsilon\}) = \{1,3\}$$

$$f(\{\varepsilon\}) = \emptyset, \text{ και ακόμη,}$$

$$f^{-1}(\{1\}) = \{\alpha,\beta\},\ f^{-1}\{1,3\} = \{\alpha,\beta,\delta\}$$

$$f^{-1}(\{2,4\}) = \{\gamma\},\ f^{-1}(\{4\}) = \emptyset.$$

5.6. Ασκήσεις

1. Να εξεταστεί ποιές από τις παρακάτω σχέσεις είναι συναρτήσεις:

α) $\sigma = \{(\alpha,\beta),(\gamma,\beta),(\kappa,\lambda),(\eta,\lambda),(\varepsilon,\delta)\}$

β) $\sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$

γ) $\sigma = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : y \geq x+1\}$

δ) $\sigma = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : 3x+y = 10\}$

ε) $\sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$.

2. Να αποδειχτεί ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι αμφιμονοσήμαντες.

α) $f(x) = x^2+1,\ x \in \mathbb{R}$ και $x \geq 0$

β) $f(x) = \frac{1}{2x+3},\ x \in \mathbb{R}$ και $x \neq -3/2$

γ) $f(x) = \sqrt{x-3},\ x \in \mathbb{R}$ και $x \geq 3$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$. Ας είναι

$A=\{x\in\mathbb{R}: -1\leq x\leq 0\}$ και $B=\{x\in\mathbb{R}: 0\leq x\leq 1\}$.

α) Να βρεθούν τα σύνολα $f(A\cap B)$ και $f(A)\cap f(B)$ και να συγκριθούν.

β) Να γίνει το ίδιο για τα σύνολα $f(A-B)$ και $f(A)-f(B)$.

4. Αν $f:A\to B$ είναι μια συνάρτηση, X,X_1,X_2 είναι υποσύνολα του A και Y,Y_1,Y_2 είναι υποσύνολα του B, να δειχτεί ότι

α) $f^{-1}(f(X))\supseteq X$

β) $f(X_1\cup X_2)=f(X_1)\cup f(X_2)$

γ) $f(X_1\cap X_2)\subseteq f(X_1)\cap f(X_2)$

δ) $f(f^{-1}(Y))\subseteq Y$

ε) $f^{-1}(Y_1\cup Y_2)=f^{-1}(Y_1)\cup f^{-1}(Y_2)$

στ) $f^{-1}(Y_1\cap Y_2)=f^{-1}(Y_1)\cap f^{-1}(Y_2)$.

5. Αν $f:A\to B$ και $g:A\to B$ είναι συναρτήσεις να αποδειχτεί ότι αν $f\subseteq g$, τότε $f=g$.

6. Αν $\varphi:A\to B$, $g:B\to\Gamma$ και $f:\Gamma\to\Delta$ είναι συναρτήσεις, ν'αποδειχτεί ότι $(f\circ g)\circ\varphi=f\circ(g\circ\varphi)$.

6. ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΣΥΝΟΛΑ

6.1. Γενικά

Το "μέτρημα" των στοιχείων ενός συνόλου, είναι κάτι με το οποίο ο άνθρωπος εξοικειώνεται από την προσχολική του ηλικία. Όταν μετρούμε τα στοιχεία ενός συνόλου, υποσυνείδητα αποκαθιστούμε μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση μεταξύ του συνόλου αυτού και ενός υποσυνόλου του συνόλου $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών. Για παράδειγμα, αν θελήσομε να μετρήσομε τα στοιχεία του συνόλου $A=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$, λέμε, 1 για το α, 2 για το β, 3 για το γ και 4 για το δ. Έτσι, έχομε την αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $f: A \to \{1,2,3,4\}$, με $f(\alpha)=1$, $f(\beta)=2$, $f(\gamma)=3$, $f(\delta)=4$. Κάνοντας το ίδιο για το σύνολο $B = \{\kappa,\lambda,\mu,\nu\}$, συμπεραίνομε ότι τα σύνολα A και B έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων ή, όπως αλλιώς λέμε, τον ίδιο "πληθικό αριθμό". Έτσι, χρησιμοποιώντας σαν "μέτρο" στοιχεία του συνόλου $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών μπορούμε να συγκρίνομε, με τον παραπάνω τρόπο, διάφορα σύνολα. Είναι όμως φανερό, ότι αυτό δεν μπορεί να γίνει για οποιαδήποτε σύνολα. Για παράδειγμα, αν θελήσομε να εκτιμήσομε τον πληθικό αριθμό του συνόλου των ευθειών του επιπέδου συγκρίνοντάς το με ένα υποσύνολο ή και ολόκληρο το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών, αυτό φαίνεται μάλλον αδύνατο.

Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι να ορίσομε με αυστηρό τρόπο την έννοια του πληθικού αριθμού ενός συνόλου, που περιγράψαμε παραπάνω, και να δώσουμε διάφορα συμπεράσματα σχετικά με τον πληθικό άριθμό γνωστών συνόλων

6.2. Ισοδύναμα σύνολα

Δυό σύνολα Α,Β θα λέμε ότι έχουν την ίδια ισχύ ή τον ίδιο πληθικό αριθμό ή ότι είναι ισοδύναμα, αν υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση του Α επί του Β. Στην περίπτωση αυτή γράφομε $A \approx B$.

Είναι φανερό ότι η σχέση "$\approx$" έχει τις εξής ιδιότητες:

$A \approx A$

$A \approx B \Longleftrightarrow B \approx A$

$A \approx B$ και $B \approx \Gamma \Rightarrow A \approx \Gamma$.

Επομένως, η σχέση "$\approx$" είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

6.3. Παραδείγματα-Εφαρμογές

1. Το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών έχει την ίδια ισχύ με το σύνολο $\mathbb{N}_\alpha = \{2,4,6,8,\ldots\}$ των άρτιων φυσικών αριθμών. Πραγματικά, η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_\alpha$, με τύπο $f(x) = 2x$, είναι μια συνάρτηση του $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{N}_\alpha$ και μάλιστα επί του $\mathbb{N}_\alpha$. Αυτό, γιατί αν $k \in \mathbb{N}_\alpha$, τότε ο αριθμός $k/2$ είναι φυσικός αριθμός, αφού ο k είναι άρτιος. Έτσι, έχομε $f(k/2) = 2\cdot k/2 = k$ και επομένως η f είναι συνάρτηση επί του $\mathbb{N}_\alpha$. Ακόμη, αν για δυο στοιχεία x,y εν $\mathbb{N}$ ισχύει $f(x) = f(y)$, τότε $2x = 2y$ και άρα $x = y$. Δηλαδή η f είναι και αμφιμονοσήμαντη. Επομένως, $\mathbb{N} \approx \mathbb{N}_\alpha$.

2. Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών έχει την ίδια ισχύ με το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών. Για να αποδειχτεί αυτό αρκεί να θεωρήσει κανείς τη συνάρτηση $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{αν } x < 0 \\ 2x+1, & \text{αν } x \geq 0. \end{cases}$$

Θα αποδείξομε ότι η f είναι αμφιμονοσήμαντη και επί του $\mathbb{N}$. Θεωρούμε δύο τυχόντα στοιχεία x,y εν $\mathbb{Z}$ και υποθέτομε ότι $f(x) = f(y)$. Για τα στοιχεία x,y διακρίνομε τις εξής περιπτώσεις:

(α) $x \geq 0$ και $y \geq 0$. Τότε $f(x) = f(y) \Rightarrow 2x+1 = 2y+1 \Rightarrow x = y$

(β) $x < 0$ και $y < 0$. Τότε $f(x) = f(y) \Rightarrow -2x = -2y \Rightarrow x = y$

(γ) $x \geq 0$ και $y < 0$

και

(δ) $x < 0$ και $y \geq 0$.

Οι περιπτώσεις (γ) και (δ) δεν μπορούν να ισχύουν ταυτόχρονα με την υπόθεση $f(x) = f(y)$, γιατί τότε, π.χ. στην περίπτωση (γ), θα έχομε $2x+1 = -2y$, που είναι αδύνατο, αφού ο αριθμός $2x+1$ είναι περιττός ακέραιος και ο $-2y$ άρτιος. Έτσι οι μόνες δυνατές περιπτώσεις είναι οι (α), (β) για τις οποίες αποδείχτηκε ότι $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. Άρα η f είναι αμφιμονοσήμαντη.

Για να αποδείξομε ότι η f είναι επι του $\mathbb{N}$, θεωρούμε τυχόν στοιχείο $k \in \mathbb{N}$ και διακρίνομε δύο περιπτώσεις

α) Έστω k άρτιος. Τότε $k/2 \in \mathbb{N}$. Άρα, $-k/2 \in \mathbb{Z}$ και μάλιστα $-k/2 < 0$. Άρα επειδή $-2(-k/2) = k$, έχομε $f(-k/2) = k$.

β) Έστω k περιττός. Τότε ο αριθμός $k-1$ είναι άρτιος και ακόμη $k-1 \geq 0$. Άρα ο αριθμός $\frac{k-1}{2}$ είναι ακέραιος και μάλιστα $\frac{k-1}{2} \geq 0$. Έτσι, $f(\frac{k-1}{2}) = 2\,\frac{k-1}{2} + 1 = k$.

Δηλαδή πάντοτε υπάρχει ακέραιος που απεικονίζεται μέσω της f στο τυχόν $k \in \mathbb{N}$ που θεωρήσαμε. Άρα η f είναι επί του $\mathbb{N}$.

<u>3</u>. Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών έχει την ίδια ισχύ με το διάστημα $(-1,1)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Κατ' αρχή παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$: $x \leq |x| \Rightarrow x < 1+|x| \Rightarrow \frac{x}{1+|x|} < 1$ και $x \geq -|x| \Rightarrow x > -1-|x| \Rightarrow \frac{x}{1+|x|} > -1$. Άρα $\mathcal{R}(f) \subseteq (-1,1)$.

Θα αποδείξομε τώρα ότι η f είναι αμφιμονοσήμαντη και επί του $(-1,1)$. Πραγματικά, αν $f(x) = f(y) \Leftrightarrow \frac{x}{1+|x|} = \frac{y}{1+|y|}$ (1)

Επειδή οι παρονομαστές στην ισότητα (1) είναι θετικοί πρέπει οι αριθμοί x,y να είναι ομόσημοι. Έτσι, αν $x \geq 0$ και $y \geq 0$ παίρνομε από την (1) $\frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y} \Rightarrow x(1+y) = y(1+x) \Rightarrow x = y$. Όμοια αν $x < 0$ και $y < 0$, η (1) δίνει $\frac{x}{1-x} = \frac{y}{1-y} \Rightarrow x(1-y) = y(1-x) \Rightarrow x = y$.
Άρα η f είναι αμφιμονοσήμαντη.

Για να αποδείξομε τώρα ότι η f είναι επί του $(-1,1)$, παρατηρούμε ότι $f(0) = 0$ και ακόμη, $-1 < f(x) < 0$, αν $x < 0$, και $0 < f(x) < 1$, αν $x > 0$. Έτσι, έστω $\lambda \in (-1,1)$, με $0 < \lambda < 1$. Τότε αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) = \lambda$ θα πρέπει $x > 0$. Άρα, $\frac{x}{1+|x|} = \lambda \Rightarrow \frac{x}{1+x} = \lambda \Rightarrow x = \frac{\lambda}{1-\lambda} > 0$.
Όμοια, αν $-1 < \lambda < 0$ η σχέση $\frac{x}{1+|x|} = \lambda$, δίνει $\frac{x}{1-x} = \lambda$ και τελικά $x = \frac{\lambda}{1+\lambda} < 0$.

<u>4</u>. Το διάστημα $(-1,1)$ και το τυχόν διάστημα (α,β), με $\alpha < \beta$, της ευθείας των πραγματικών αριθμών, έχουν την ίδια ισχύ.

Αυτό μπορεί εύκολα να το διαπιστώσει κανείς χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $f : (-1,1) \xrightarrow{\text{επί}} (\alpha,\beta)$, με τύπο $f(x) = \frac{(\beta-\alpha)x}{2} + \frac{\beta+\alpha}{2}$.

5. Αν συνδυάσομε τα συμπεράσματα των δύο παραπάνω παραδειγμάτων 3 και 4 προκύπτει το εξής σημαντικό συμπέρασμα:

Το σύνολο $\mathbb{R}$ έχει την ίδια ισχύ με κάθε διάστημά του της μορφής (α,β), με $\alpha < \beta$.

6. Το διάστημα $[-1,1]$ και το τυχόν διάστημα $[\alpha,\beta]$, με $\alpha < \beta$, της ευθείας των πραγματικών αριθμών, έχουν την ίδια ισχύ.

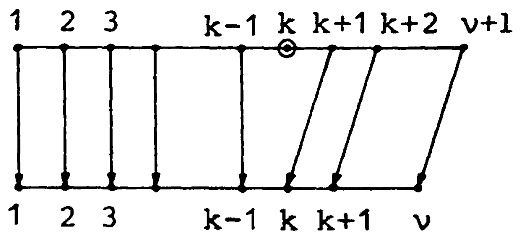
Χρησιμοποιώντας την ίδια συνάρτηση όπως και στο παραπάνω παράδειγμα 4, παίρνομε αμέσως το ζητούμενο.

7. Αν $\nu \in \mathbb{N}$ και $k \in \{1,2,\ldots,\nu+1\}$ τότε ισχύει: $\{1,2,\ldots,\nu+1\}-\{k\} \approx \{1,2,\ldots,\nu\}$.

Πραγματικά: θεωρούμε τη συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το σύνολο $\{1,2,\ldots,\nu+1\}-\{k\}$ και τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \in \{1,2,\ldots,k-1\} \\ x-1, & \text{αν } x \in \{k+1,\ldots,\nu+1\}. \end{cases}$$

Ένα βελοειδές διάγραμμα για τη συνάρτηση f βλέπομε στο ακόλουθο σχήμα:



Είναι φανερό ότι η συνάρτηση f του $\{1,2,\ldots,\nu+1\}-\{k\}$ στο $\{1,2,\ldots,\nu\}$ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί. Αυτό ακριβώς δηλώνει ότι $\{1,2,\ldots,\nu+1\}-\{k\} \approx \{1,2,\ldots,\nu\}$.

6.4. Τα τμήματα των φυσικών αριθμών

Αν ν είναι ένας φυσικός αριθμός συμβολίζομε με $T(\nu)$ το σύνολο $\{1,2,\ldots,\nu\}$. Έτσι έχομε: $T(1) = \{1\}$, $T(2) = \{1,2\}$, $T(3) = \{1,2,3\}$ κ.ο.κ.

Τα σύνολα $T(\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$, τα ονομάζομε <u>τμήματα των φυσικών αριθμών</u>. Επειδή, όπως θα δούμε παρακάτω, τα σύνολα αυτά χαρακτηρίζουν μια κατηγορία συνόλων, και συγκεκριμένα εκείνη των "πεπερασμένων" συνόλων, είναι σκόπιμο να δούμε κάποιες ιδιότητές τους.

Παραθέτομε δύο προτάσεις, χωρίς απόδειξη, που μας δίνουν δυό σημαντικές πληροφορίες για τα τμήματα των φυσικών αριθμών.

6.4.1. ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν A είναι μη κενό και γνήσιο υποσύνολο του $T(\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχει ακριβώς ένας φυσικός αριθμός k, με $k<\nu$, τέτοιος ώστε $A \approx T(k)$.

6.4.2. ΠΟΡΙΣΜΑ. Αν $T(\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι τυχόν τμήμα των φυσικών αριθμών, τότε δεν υπάρχει γνήσιο υποσύνολο του $T(\nu)$ που να έχει την ίδια ισχύ με το $T(\nu)$.

6.4.3. ΠΟΡΙΣΜΑ. Αν k και ν είναι φυσικοί αριθμοί τότε ισχύει η ισοδυναμία

$$T(k) \approx T(\nu) \Longleftrightarrow k = \nu.$$

Απόδειξη. Για να αποδείξομε ότι $T(k) \approx T(\nu) \Rightarrow k = \nu$, υποθέτομε ότι $T(k) \approx T(\nu)$ και ταυτόχρονα $k \neq \nu$. Έστω τότε $k<\nu$. Αυτό σημαίνει $T(k) \subset T(\nu)$. Αλλά τότε από το Πόρισμα 6.4.2, δεν μπορεί να ισχύει ότι $T(k) \approx T(\nu)$. Όμοια αν $\nu < k$.

Αντίστροφα, αν $k = \nu$, τότε $T(k) = T(\nu)$ και η ταυτοτική απεικόνιση του συνόλου $T(k)$ επί του ίσου του $T(\nu)$, μας δίνει ότι $T(k) \approx T(\nu)$.

6.5. Πεπερασμένα σύνολα

Ένα σύνολο A λέγεται πεπερασμένο σύνολο αν $A = \emptyset$ ή υπάρχει φυσικός αριθμός k τέτοιος ώστε $A \approx T(k)$.

Με βάση τον παραπάνω ορισμό, μπορούμε να συμπεράνομε ότι όλα τα τμήματα των φυσικών αριθμών είναι πεπερασμένα σύνολα αφού είναι ισοδύναμα προς τον εαυτό τους. Ακόμη, για το σύνολο $A = \{\alpha,\beta,\gamma\}$, λόγω της αμφιμονοσήμαντης συνάρτησης $f = \{(\alpha,1),(\beta,2),(\gamma,3)\}$, του A επί του $T(3)$, συμπεραίνομε ότι $A \approx T(3)$, και άρα το $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ είναι πεπερασμένο.

Για τα πεπερασμένα σύνολα ισχύει η εξής σημαντική πρόταση.

6.5.1. ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν A είναι μη κενό πεπερασμένο σύνολο, τότε υπάρχει ακριβώς ένας φυσικός αριθμός k τέτοιος ώστε $A \approx T(k)$.

Απόδειξη. Έστω A μη κενό και πεπερασμένο σύνολο. Τότε, από τον ορισμό, υπάρχει ένας τουλάχιστο φυσικός αριθμός k τέτοιος ώστε $A \approx T(k)$. Αν υποθέσομε ότι υπάρχει και ένας άλλος φυσικός αριθμός ν με $A \approx T(\nu)$, τότε θα έχομε: $T(k) \approx A$ και $A \approx T(\nu) \Rightarrow T(k) \approx T(\nu)$. Άρα, από το Πόρισμα 6.4.3 παίρνομε $k = \nu$.

Τον μοναδικό φυσικό αριθμό k, που ορίζει η Πρόταση 6.5.1, για κάθε πεπερασμένο σύνολο A, τον ονομάζομε <u>πληθικό</u> <u>αριθμό</u> του συνόλου A γράφοντας $\operatorname{card} A = k$. Στην περίπτωση αυτή λέμε επίσης ότι το σύνολο A <u>έχει</u> k <u>στοιχεία</u>. Είναι φανερό ότι ένα σύνολο A με k στοιχεία μπορεί να παρασταθεί με $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Ειδικά για το κενό σύνολο δεχόμαστε ότι

$$\operatorname{card} \emptyset = 0 .$$

Οι παρακάτω προτάσεις μας δίνουν μερικές σημαντικές ιδιότητες για τα πεπερασμένα σύνολα.

<u>6.5.2</u>. <u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>. Αν B είναι τυχόν υποσύνολο ενός πεπερασμένου συνόλου A τότε το B είναι πεπερασμένο και μάλιστα ισχύει:

$$\operatorname{card} B \leq \operatorname{card} A .$$

Ειδικότερα αν $B \subset A$, τότε $\operatorname{card} B < \operatorname{card} A$.

<u>Απόδειξη</u>. Στην περίπτωση $A = \emptyset$ η $\operatorname{card} A = 1$ το συμπέρασμα είναι φανερό. Το ίδιο αν $B = A$.

Έστω τώρα $A \neq \emptyset$ και $B \subset A$. Θέτομε τότε $\operatorname{card} A = \nu$ όπου $\nu \in \mathbb{N}$ και $\nu \geq 2$. Άρα υπάρχει αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $f : A \xrightarrow{\text{επί}} T(\nu)$. Έτσι, αφού $B \subset A$, έχομε ότι $f(B) \subset T(\nu)$ και μάλιστα $B \approx f(B)$. Άρα από τις Προτάσεις 6.4.1 και 6.5.1 παίρνομε ότι υπάρχει μοναδικός φυσικός αριθμός $k < \nu$ τέτοιος ώστε $f(B) \approx T(k)$. Αλλά τότε, λόγω της $B \approx f(B)$ παίρνομε $B \approx T(k)$ με $k < \nu$. Έτσι $\operatorname{card} B < \operatorname{card} A$.

<u>6.5.3</u>. <u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>. Για τυχόντα πεπερασμένα A και B ισχύουν:

α) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B$

β) $\operatorname{card}(A - B) = \operatorname{card} A - \operatorname{card}(A \cap B)$

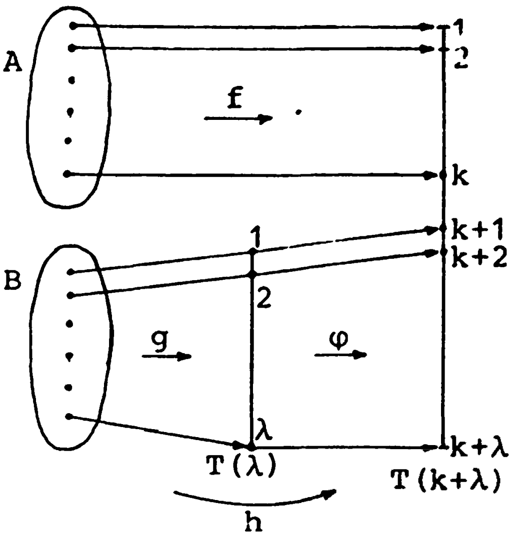
γ) $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - \operatorname{card}(A \cap B)$

<u>Απόδειξη</u>. α) Αν $A = \emptyset$ ή $B = \emptyset$ η σχέση (α) είναι φανερό ότι ισχύει. Έστω τώρα $\operatorname{card} A = k$ και $\operatorname{card} B = \lambda$ με k, λ εν $\mathbb{N}$. Θεωρούμε τις αμ-

φιμονοσήμαντες συναρτήσεις $f : A \xrightarrow{\text{επί}} T(k)$ και $g : B \xrightarrow{\text{επί}} T(\lambda)$. Τότε,αν φ είναι η αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση του $T(\lambda)$ επί του συνόλου $\{k+1,k+2,\dots,k+\lambda\}$, με τύπο $\varphi(x)=k+x$, $x\in T(\lambda)$, η συνάρτηση $h=\varphi\circ g$ είναι αμφιμονοσήμαντη του B επί του $\{k+1,k+2,\dots,k+\lambda\}$. Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση ℓ που ορίζεται ως εξής

$$\ell(x)=\begin{cases} f(x), & \text{αν } x\in A\\ h(x), & \text{αν } x\in B.\end{cases}$$

Η ℓ είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση του $A\cup B$ επί του συνόλου $T(k)\cup\{k+1,k+2,\dots,k+\lambda\}=T(k+\lambda)$. Το παρακάτω σχήμα δίνει μια εικόνα της συνάρτησης ℓ.



'Αρα έχομε ότι $A\cup B\approx T(k+\lambda)$, που σημαίνει $\text{card}\,A\cup B=k+\lambda=\text{card}\,A+\text{card}\,B$.

β) Για την απόδειξη της σχέσης (β), παρατηρούμε ότι $A=(A-B)\cup(A\cap B)$ και ότι τα σύνολα $A-B$, $A\cap B$ είναι ξένα. 'Ετσι από τη σχέση (α) παίρνομε:

$\text{card}\,A=\text{card}[(A-B)\cup(A\cap B)]=$
$\text{card}\,(A-B)+\text{card}(A\cap B)$.

'Αρα $\text{card}(A-B)=\text{card}\,A-\text{card}(A\cap B)$.

γ) Ανάλογα, για τη σχέση (γ) παρατηρούμε ότι $A\cup B=(A-B)\cup B$ και ότι τα σύνολα $A-B$, B είναι ξένα. 'Ετσι από τις σχέσεις (α) και (β) παίρνομε

$$\text{card}(A\cup B)=\text{card}[(A-B)\cup B]=\text{card}(A-B)+\text{card}\,B=$$
$$\text{card}\,A-\text{card}(A\cap B)+\text{card}\,B=\text{card}\,A+\text{card}\,B-\text{card}(A\cap B).$$

<u>6.5.4</u>. <u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>. Αν A,B είναι πεπερασμένα σύνολα τότε ισχύει

$$\text{card}(A\times B)=(\text{card}\,A)\cdot(\text{card}\,B).$$

<u>Απόδειξη</u>. Αν $A=\emptyset$ ή $B=\emptyset$ το συμπέρασμα είναι φανερό. 'Εστω ότι $\text{card}\,A=k$ και $\text{card}\,B=\lambda$, με κ,λ εν $\mathbb{N}$. Τότε θέτομε $A=\{x_1,x_2,\dots,x_k\}$ και $B=\{y_1,y_2,\dots,y_\lambda\}$. 'Αρα:

$A\times B=\{(x_1,y_1),(x_1,y_2),\dots,(x_1,y_\lambda),(x_2,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_2,y_\lambda),\dots$
$\dots,\dots,\dots,(x_k,y_1),(x_k,y_2),\dots,(x_k,y_\lambda)\}$.

Τα στοιχεία του συνόλου $A\times B$ μπορούν να παρασταθούν σχηματικά ως εξής:

$$\begin{array}{ll}(x_1,y_1),(x_1,y_2),\dots,(x_1,y_\lambda) & \longleftarrow 1^{\underline{\eta}} \text{ σειρά} \\ (x_2,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_2,y_\lambda) & \longleftarrow 2^{\underline{\eta}} \quad " \\ \cdot \quad \cdot \quad \dots \quad \cdot & \dots\dots\dots\dots \\ (x_k,y_1),(x_k,y_2),\dots,(x_k,y_\lambda) & \longleftarrow k^{\underline{\eta}} \text{ σειρά}\end{array}$$

σ'ένα ορθογώνιο δίκτυο k σειρών με λ ζεύγη στην κάθε σειρά. Έτσι το πλήθος των ζευγών-στοιχείων του $A\times B$ είναι $k\cdot\lambda$.

6.6. Απέραντα σύνολα

Ένα σύνολο A θα λέμε ότι είναι <u>απέραντο</u> αν το A δεν είναι πεπερασμένο σύνολο.

6.6.1. ΠΡΟΤΑΣΗ. Το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών είναι απέραντο.

Απόδειξη. Επειδή $\mathbb{N}\neq\emptyset$, αν υποθέσομε ότι το $\mathbb{N}$ είναι πεπερασμένο, θα υπάρχει $k\in\mathbb{N}$ με $\mathbb{N}\approx T(k)$. Άρα υπάρχει αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $f:\mathbb{N}\xrightarrow{\text{επί}} T(k)$. Αλλά τότε θα έχομε $f(T(k+1))\subsetneq f(\mathbb{N})=T(k)$. Άρα, σύμφωνα με την Πρόταση 6.5.2, $\operatorname{card} f(T(k+1))\leq \operatorname{card} T(k)\Rightarrow$ $\Rightarrow k+1\leq k$, που είναι άτοπο.

6.6.2. ΠΡΟΤΑΣΗ. Κάθε υπερσύνολο απέραντου συνόλου είναι απέραντο σύνολο.

Απόδειξη. Έστω A απέραντο σύνολο και B τυχόν υπερσύνολο του A. Αν το B ήταν πεπερασμένο τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 6.5.2, θα ήταν και το A πεπερασμένο, αφού $A\subsetneq B$. Αυτό όμως είναι άτοπο. Άρα το B είναι απέραντο.

6.6.3. ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν A είναι ένα απέραντο σύνολο, τότε υπάρχει υποσύνολο B του A, τέτοιο ώστε $B\approx\mathbb{N}$.

Απόδειξη. Επειδή το A είναι απέραντο θεωρούμε ένα στοιχείο του και το συμβολίζομε με x_1. Το σύνολο $A-\{x_1\}$ είναι επίσης απέραντο. Εκλέγομε ένα στοιχείο από το $A-\{x_1\}$ και το συμβολίζομε με x_2. Επαναλαμβάνομε την ίδια διαδικασία για το σύνολο $A-\{x_1,x_2\}$, και έτσι επαγωγικά, αν έχομε ορίσει τα στοιχεία $x_1,x_2,\dots,x_\nu$ από το σύνολο A, εύκολα μπορούμε να ορίσομε το στοιχείο $x_{\nu+1}\in A-\{x_1,\dots,x_\nu\}$. Η διαδικασία αυτή μας οδηγεί τελικά στην κατασκευή του συνόλου $B=\{x_1,x_2,x_3,\dots\}\subsetneq A$. Είναι φανερό ότι το σύνολο Β έχει την ίδια ισχύ με το $\mathbb{N}$, αφού η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to B$, με τύπο $f(\nu) = x_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι αμφιμονοσήμαντη του $\mathbb{N}$ επί του Β.

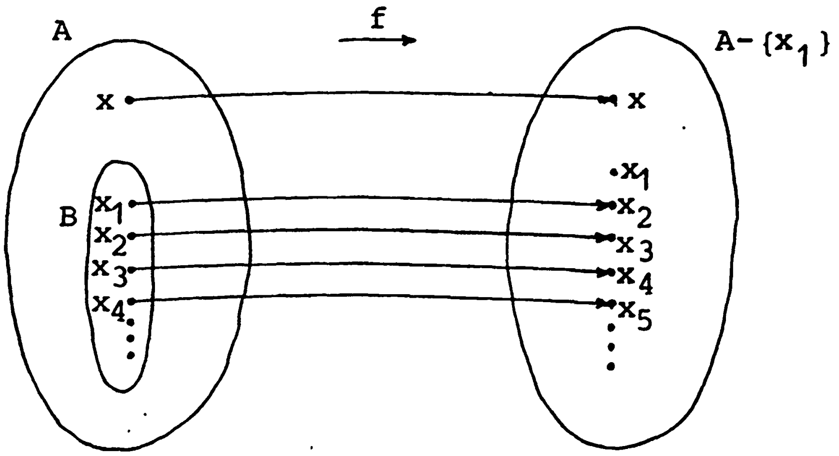
<u>Παρατήρηση</u>. Από την απόδειξη της παραπάνω πρότασης προκύπτει ότι αν Α είναι ένα σύνολο που έχει την ίδια ισχύ με το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών, τότε το Α μπορεί να συμβολιστεί με $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$.

<u>6.6.4</u>. <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>. Ένα σύνολο Α είναι απέραντο αν και μόνο αν υπάρχει γνήσιο υποσύνολό του που έχει την ίδια ισχύ με το Α.

<u>Απόδειξη</u>. Αφού το Α είναι απέραντο, σύμφωνα με την προηγούμενη Πρόταση 6.6.3, το Α έχει ένα υποσύνολό του $B = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, ισοδύναμο με το σύνολο $\mathbb{N}$. Ορίζομε τώρα τη συνάρτηση $f : A \to A - \{x_1\}$, με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \notin \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \\ x_{\nu+1}, & \text{αν } x = x_\nu, \quad \nu = 1, 2 \ldots . \end{cases}$$

Ένα διάγραμμα για τη συνάρτηση αυτή είναι το εξής



Είναι πολύ εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι η f είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση του Α επί του $A - \{x_1\}$. Άρα το σύνολο $A - \{x_1\}$ είναι ένα γνήσιο υποσύνολο του Α και ισοδύναμό του.

Αντίστροφα, έστω υπάρχει $B \subset A$ με $A \approx B$ και Α πεπερασμένο. Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 6.5.2, το Β θα είναι πεπερασμένο και μάλιστα $\operatorname{card} B < \operatorname{card} A$, που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι $A \approx B$.

Παρατήρηση. Το παραπάνω θεώρημα 6.6.4 δίνει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα σύνολο απέραντο. Έτσι, η συνθήκη που εκφράζει το θεώρημα αυτό μπορεί να ληφθεί σαν ορισμός της έννοιας του απέραντου συνόλου. Ο ορισμός αυτός του απέραντου συνόλου είναι γνωστός σαν ορισμός του Dedekind.

Ο ορισμός του Dedekind, αν και ξενίζει σε πρώτη εντύπωση, έχει το πλεονέκτημα να απλουστεύει τις αποδείξεις των προτάσεων που δίνουν τις ιδιότητες των απέραντων (και πεπερασμένων) συνόλων.

6.7. Αριθμήσιμα σύνολα

Ένα σύνολο A λέγεται αριθμήσιμο σύνολο αν $A \approx \mathbb{N}$.

Επειδή το σύνολο $\mathbb{N}$ είναι απέραντο σύνολο, είναι φανερό ότι κάθε αριθμήσιμο σύνολο είναι απέραντο. Επομένως αναφύεται αμέσως το ερώτημα: Υπάρχουν απέραντα σύνολα μη αριθμήσιμα; Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι καταφατική όπως δείχνει η παρακάτω πρόταση.

6.7.1. ΠΡΟΤΑΣΗ. Το διάστημα $(0,1)$ είναι ένα απέραντο και μη αριθμήσιμο σύνολο.

Δεν θα δώσομε εδώ την απόδειξη της πρότασης αυτής γιατί ξεφεύγει από τις επιδιώξεις του μαθήματος.

Σε συνδυασμό με το Παράδειγμα 5 της Παραγράφου 6.3 μπορούμε να πούμε ότι το $\mathbb{R}$ είναι ένα απέραντο σύνολο αλλά μη αριθμήσιμο. Το ίδιο συμβαίνει για κάθε μη τετριμμένο διάστημα της ευθείας των πραγματικών αριθμών.

Θα δώσομε τώρα μερικές ιδιότητες των αριθμήσιμων συνόλων.

6.7.2. ΠΡΟΤΑΣΗ. Η ένωση δυο αριθμήσιμων και ξένων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο

Απόδειξη. Έστω $A = \{x_1, x_2, \dots\}$ και $B = \{y_1, y_2, \dots\}$ δυο αριθμήσιμα σύνολα. Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 2\nu-1, & \text{αν } x = x_\nu \in A \\ 2\nu, & \text{αν } x = y_\nu \in B. \end{cases}$$

Επειδή τα σύνολα A,B είναι ξένα, ο παραπάνω τύπος ορίζει μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $A \cup B$, που απεικονίζει αμφιμονοσήμαντα τα στοιχεία του συνόλου A επί του συνόλου των περιττών φυσικών και του B επί του συνόλου των άρτιων. Άρα $A \cup B \approx \mathbb{N}$.

Το συμπέρασμα της παραπάνω πρότασης ισχύει και όταν τα σύνολα Α,Β είναι μη ξένα. (Βλ. Άσκηση 11, Παράγρ. 6.10).

<u>6.7.3</u>. <u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>. Για το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών ισχύει: $\mathbb{N} \simeq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

<u>Απόδειξη</u>. Γράφομε τα στοιχεία του συνόλου $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ στην παρακάτω σχηματική διάταξη.

$$\begin{array}{ccccc}
1^{\underline{o}} & 3^{\underline{o}} & 6^{\underline{o}} & 10^{\underline{o}} & \\
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & \cdots \\
2^{\underline{o}} & 5^{\underline{o}} & 9^{\underline{o}} & 14^{\underline{o}} & \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & \cdots \\
4^{\underline{o}} & 8^{\underline{o}} & 13^{\underline{o}} & 19^{\underline{o}} & \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & \cdots \\
7^{\underline{o}} & 12^{\underline{o}} & 18^{\underline{o}} & 25^{\underline{o}} & \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots
\end{array}$$

Όπως φαίνεται και στο σχήμα θεωρούμε σαν $1^{\underline{o}}$ στοιχείο του συνόλου $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ το $(1,1)$, $2^{\underline{o}}$ το $(2,1)$, $3^{\underline{o}}$ το $(1,2)$, $4^{\underline{o}}$ το $(3,1)$ κ.ο.κ. Μ'άλλα λόγια απεικονίζομε το σύνολο $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ στο $\mathbb{N}$, με τον τρόπο που υποδεικνύεται στο σχήμα. Η συνάρτηση που υπαγορεύει αυτή την αρίθμηση του $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ είναι η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(\mu,\nu) = \frac{(\mu+\nu-2)(\mu+\nu-1)}{2} + \nu, \quad (\mu,\nu) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}.$$

<u>6.8</u>. <u>Παραδείγματα-Εφαρμογές</u>

1) Αν $\{a\}$ είναι ένα μονοσύνολο και Α αριθμήσιμο σύνολο, τότε το σύνολο $A\cup\{a\}$ είναι αριθμήσιμο.

Αν $a\in A$, τότε $A\cup\{a\}=A$ και το συμπέρασμα είναι φανερό. Έστω τώρα $a\notin A$ και $A=\{x_1,x_2,x_3,\dots\}$. Τότε, $A\cup\{a\}=\{a,x_1,x_2,x_3,\dots\}$. Έτσι, η συνάρτηση f με τύπο

$$f(\nu) = \begin{cases} a, & \text{αν } \nu=1 \\ x_{\nu-1}, & \text{αν } \nu\in\{2,3,4,\dots\} \end{cases}, \quad \nu\in\mathbb{N}$$

είναι αμφιμονοσήμαντη του $\mathbb{N}$ επί του $\{a,x_1,x_2,x_3,\dots\}$, πράγμα που δηλώνει ότι το σύνολο $A \cup \{a\}$ είναι αριθμήσιμο.

Το συμπέρασμα αυτό γενικεύεται εύκολα με επαγωγή στο εξής: Αν B είναι πεπερασμένο σύνολο και A αριθμήσιμο τότε το $A \cup B$ είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Ακολουθώντας παρόμοια αποδεικτική διαδικασία με το παραπάνω μπορούμε ν'αποδείξομε ότι αν B είναι πεπερασμένο σύνολο και A αριθμήσιμο τότε το σύνολο $A-B$ είναι αριθμήσιμο.

6.9. Το θεώρημα των Schröder-Bernstein

Θα λέμε ότι το σύνολο A υπερισχύει του συνόλου B αν και μόνο αν υπάρχει υποσύνολο Γ του A τέτοιο ώστε $B \approx \Gamma$. Στην περίπτωση αυτή γράφομε $A \succsim B$ ή $B \precsim A$.

Αν $A \succsim B$ και $A \not\approx B$ (Δηλ. το A δεν έχει την ίδια ισχύ με το B) τότε λέμε ότι το A υπερισχύει γνήσια του B και το συμβολίζομε με $A \succ B$ ή $B \prec A$.

Είναι φανερό ότι αν $A \succsim B$ τότε υπάρχει αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση f τού B στο A. Ανάλογα, αν $A \succ B$, υπάρχει αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση του B στο A με $\mathcal{R}(f) \subset A$.

Για τη σχέση $\precsim$ είναι φανερές οι ιδιότητες, που ισχύουν για τυχόντα σύνολα A,B,Γ.

$A \precsim B \Longleftrightarrow A \approx B$ ή $A \prec B$.

$A \precsim A$.

$A \precsim B$ και $B \precsim \Gamma \Longrightarrow A \precsim \Gamma$.

$A \subseteq B \Longrightarrow A \precsim B$.

Την πιο σημαντική όμως ιδιότητα της σχέσης $\precsim$ δίνει το παρακάτω θεώρημα που παραθέτομε χωρίς απόδειξη. Το θεώρημα αυτό είναι γνωστό σαν Θεώρημα των Schröder-Bernstein.

6.9.1. ΘΕΩΡΗΜΑ. Για τυχόντα σύνολα A,B ισχύει:

$A \succsim B$ και $B \succsim A \Longleftrightarrow A \approx B$.

Σαν εφαρμογή του θεωρήματος 6.9.1 θα αποδείξομε τις παρακάτω προτάσεις.

6.9.2. ΠΡΟΤΑΣΗ. Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο.

Απόδειξη. Επειδή $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}^+$, όπου $\mathbb{Q}^+$ το σύνολο των θετικών ρητών, η ταυτοτική συνάρτηση $i_{\mathbb{N}}$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση του $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{Q}^+$. Άρα $\mathbb{N} \precsim \mathbb{Q}^+$. (1)

Θα αποδείξομε επιπλέον ότι $\mathbb{Q}^+ \precsim \mathbb{N}$. Για το σκοπό αυτό, παρατηρούμε ότι αν $\frac{\mu}{\nu} \in \mathbb{Q}^+$ και μάλιστα το $\frac{\mu}{\nu}$ είναι ανάγωγο κλάσμα, τότε $(\mu,\nu) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Άρα η συνάρτηση με τύπο $f(\frac{\mu}{\nu}) = (\mu,\nu)$ είναι αμφιμονοσήμαντη του $\mathbb{Q}^+$ στο $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Άρα $\mathbb{Q}^+ \precsim \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Επειδή όμως από την Πρόταση 6.7.3 $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \approx \mathbb{N}$, παίρνομε $\mathbb{Q}^+ \precsim \mathbb{N}$. (2)

Οι σχέσεις (1),(2) δίνουν σε συνδυασμό με το προηγούμενο θεώρημα 6.9.1 ότι $\mathbb{Q}^+ \approx \mathbb{N}$. Άρα το σύνολο $\mathbb{Q}^+$ είναι αριθμήσιμο. Αλλά τότε και το σύνολο $\mathbb{Q}^-$ των αρνητικών ρητών, είναι αριθμήσιμο, σαν ισοδύναμο προς το $\mathbb{Q}^+$. (Η συνάρτηση $f(\frac{\mu}{\nu}) = -\frac{\mu}{\nu}$, $(\mu,\nu) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, είναι αμφιμονοσήμαντη του $\mathbb{Q}^+$ επί του $\mathbb{Q}^-$). Άρα, κατά την Πρόταση 6.7.2 το σύνολο $\mathbb{Q}^- \cup \mathbb{Q}^+$ είναι αριθμήσιμο. Αν τώρα λάβομε υπ'όψη το Παράδειγμα 1 της Παραγράφου 6.8, παίρνομε ότι και το σύνολο $\mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$ είναι αριθμήσιμο. Αλλά $\mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+ = \mathbb{Q}$.

<u>6.9.3</u>. <u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>. Ένα σύνολο Α είναι απέραντο αν και μόνο αν $\mathbb{N} \precsim A$.

<u>Απόδειξη</u>. Έστω ότι το Α είναι απέραντο. Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 6.6.3 υπάρχει υποσύνολο Β του Α τέτοιο ώστε $\mathbb{N} \approx B$. Άρα $\mathbb{N} \precsim A$.

Αντίστροφα, αν $\mathbb{N} \precsim A$, υπάρχει υποσύνολο Β του Α τέτοιο ώστε $B \approx \mathbb{N}$. Επειδή όμως το $\mathbb{N}$ είναι απέραντο και το Β είναι απέραντο. Άρα το Α, σαν υπερσύνολο του απεράντου συνόλου Β, θα είναι απέραντο, σύμφωνα με την Πρόταση 6.6.2.

<u>6.10</u>. <u>Ασκήσεις</u>

<u>1</u>. Αν Α,Β και Γ είναι τυχόντα σύνολα να αποδειχτούν τα εξής:

α) $A \approx A$

β) $A \approx B \Longleftrightarrow B \approx A$

γ) $A \approx B$ και $B \approx \Gamma \Rightarrow A \approx \Gamma$

<u>2</u>. Αν ν είναι φυσικός αριθμός να βρεθεί ο πληθικός αριθμός του συνόλου $T(1) \cup T(2) \cup \ldots \cup T(\nu)$.

<u>3</u>. Αν ν είναι φυσικός αριθμός και $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k$, $k \leq \nu$ είναι στοιχεία του συνόλου $T(\nu)$, ανά δύο διαφορετικά, να δειχτεί ότι

$$\mathrm{card}(T(\nu) - \{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k\}) = \nu - k.$$

4. Αν $\nu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ είναι ο πληθικός αριθμός του πεπερασμένου συνόλου Α, να δειχτεί ότι $\text{card}(\mathcal{P}(A)) = 2^{\nu}$.

5. Αν Α είναι αριθμήσιμο σύνολο και Β πεπερασμένο, να δειχτεί ότι το σύνολο Α-Β είναι αριθμήσιμο σύνολο, ενώ το Β-Α είναι πεπερασμένο.

6. Αν Α,Β είναι τυχόντα σύνολα, να δειχτεί ότι

$$A-B \approx B-A \Longrightarrow A \approx B.$$

7. Αν Β είναι πεπερασμένο σύνολο, $A \subseteq B$ και $\text{card}\, A \geq \text{card}\, B$, να δειχτεί ότι $A = B$.

8. Αν Α,Β είναι πεπερασμένα σύνολα και $2\,\text{card}\,(A \cap B) = \text{card}\, A + \text{card}\, B$ να δειχτεί ότι $A = B$.

9. Αν Α,Β είναι τυχόντα σύνολα και τέτοια ώστε $A \approx B$, $a \in A$ και $b \in B$, να δειχτεί ότι $A-\{a\} \approx B-\{b\}$.

10. Αν Α,Β,Γ είναι τυχόντα σύνολα να αποδειχτούν τα εξής:

α) $A \precsim A$

β) $A \precsim B \Longleftrightarrow A \approx B$ ή $A \prec B$

γ) $A \precsim B$ και $B \precsim \Gamma \Longrightarrow A \precsim \Gamma$

δ) $A \subseteq B \Longrightarrow A \precsim B$.

11. Αν Α,Β είναι αριθμήσιμα σύνολα να αποδειχτεί ότι το σύνολο $A \cup B$ είναι αριθμήσιμο.

12. α) Αν α και β είναι πραγματικοί αριθμοί, με $\alpha < \beta$, να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση f, με τύπο $f(x) = \frac{(\beta-\alpha)x}{2} + \frac{\beta+\alpha}{2}$, $x \in (-1,1)$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση του $(-1,1)$ επί του (α,β).

β) Χρησιμοποιώντας το (α) να αποδειχτεί ότι $(\alpha,\beta) \approx (\gamma,\delta)$ όπου α,β,γ και δ είναι πραγματικοί αριθμοί με $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$.

7. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

7.1. Γενικά

Μια από τις πρώτες διανοητικές διαδικασίες που ανάπτυξε ο πρωτόγονος άνθρωπος ήταν η ομαδοποίηση διαφόρων ομοειδών αντικειμένων. Έτσι άρχισε να συνειδητοποιεί τις έννοιες, "το σύνολο των εργαλείων του" "το σύνολο των δέντρων γύρω από τη σπηλιά του", "το σύνολο των δακτύλων του" κ.ο.κ. Το επόμενο βήμα, ήταν η προσπάθειά του να απαντήσει σε ερωτήματα σαν τα εξής: "Πόσα δέντρα καταστράφηκαν στην τελευταία καταιγίδα;" ή "Πόσες μέρες πέρασαν από την τελευταία βροχή;" κ.τ.λ. Έτσι, η προσπάθεια του ανθρώπου για την αρίθμηση διαφόρων συνόλων ξεκίνησε πολύ νωρίς. Ο πρωτόγονος άνθρωπος στην προσπάθειά του να αριθμήσει τα διάφορα σύνολα, δεν μπορούσε να βρει καλύτερο "αριθμητήριο" από τα δάχτυλα των χεριών του. Επομένως, δεν είναι καθόλου συμπτωματικό το γεγονός ότι έχει επικρατήσει σ'όλο τον κόσμο το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης.

Τα πολύ γνωστά σε όλους μας σύμβολα 1,2,3,4,5,6,7,8,9, περίπου σ'αυτή τη μορφή, επινοήθηκαν από τους Ινδουϊστές πριν από δύο χιλιάδες διακόσια χρόνια περίπου. Το 0 (μηδέν) επινοήθηκε πάλι από τους Ινδουϊστές, αργότερα από τους άλλους αριθμούς. (Οι Ινδουϊστές το έλεγαν "σούνια" που σημαίνει "τίποτα".)

Οι Άραβες ήρθαν σε επαφή με το Ινδουϊστικό σύστημα αρίθμησης περίπου το 800 μ.Χ. και το μετέφεραν μέσω της Βόρειας Αφρικής στην αραβοκρατούμενη τότε Ισπανία. Η υπόλοιπη Ευρώπη, μέχρι τότε, ταλαιπωρούνταν με το ρωμαϊκό σύστημα αρίθμησης. Ο Μωχάμεντ Αλ-Χουαρίζμι, ήταν ο πρώτος Άραβας που εξέθεσε σε ένα βιβλίο (γύρω στο 820 μ.Χ.) το Ινδουϊστικό σύστημα γραφής των αριθμών. Το βιβλίο αυτό έπεσε, γύρω στο 970 μ.Χ., στα χέρια του Γάλλου Ζερμπέρ, που δεν είναι άλλος από τον Πάπα Σίλβεστρο ΙΙ. Ο Ζερμπέρ αν και από θέση ισχύος, δεν κατάφερε να πείσει τους Ευρωπαίους για τα πλεονεκτήματα του καινούργιου συστήματος. Αυτό έγινε 200 περίπου χρόνια αργότερα, όταν ο Ιταλός μαθηματικός Φιμπονάτσι με ένα βιβλίο του, το 1202 μ.Χ., έδειξε πόσο απλουστεύονται οι αριθμητικές πράξεις με το καινούργιο σύστημα.

Το Ινδουϊστικό σύστημα γραφής των αριθμών είναι γνωστό ως σήμερα, σαν Ινδο-Αραβικό σύστημα αρίθμησης.

Στο τέλος του παρόντος Κεφαλαίου υπάρχει πίνακας των αρχαίων ελληνικών και των ρωμαϊκών συμβόλων αρίθμησης.

7.2. Το δεκαδικό σύστημα

Το πρώτο σημαντικό βήμα για την ανάπτυξη του δεκαδικού συστήματος, ήταν ο τρόπος γραφής οποιουδήποτε αριθμού με τη χρησιμοποίηση των δέκα συμβόλων 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 και μόνον αυτών. Αυτό έγινε δυνατό με το να γράφομε μερικά από τα παραπάνω σύμβολα το ένα κατόπιν του άλλου με κάποια συγκεκριμένη διαδικασία. Έτσι γράφοντας το καινούργιο σύμβολο 52, υπονοούμε μ'αυτό τον αριθμό που έχει πέντε δεκάδες και δύο μονάδες. Όμοια το σύμβολο 204 αποδίδει τον αριθμό που έχει δύο εκατοντάδες, μηδέν δεκάδες και τέσσερις μονάδες. Πιο σύντομα και φορμαλιστικά έχομε για τα παραπάνω

$$52 = 5\cdot 10+2 = 5\cdot 10^1+2\cdot 10^0$$

$$204 = 2\cdot 100+0\cdot 10+4 = 2\cdot 10^2+0\cdot 10^1+4\cdot 10^0 ;$$

Γενικά, για τον αριθμό $a_\nu a_{\nu-1}\ldots a_1 a_0$, όπου $a_i \in \{0,1,2,\ldots,9\}$, $i=0,1,\ldots,\nu$ και $a_\nu \neq 0$, έχομε

$$a_\nu a_{\nu-1}\ldots a_1 a_0 = a_\nu\cdot 10^\nu + a_{\nu-1}10^{\nu-1}+\ldots+a_1 10^1+a_0 10^0 .$$

7.3. Άλλα συστήματα αρίθμησης

Το Ινδο-Αραβικό σύστημα αρίθμησης επεκράτησε όχι γιατί ο αριθμός 10, που είναι η βάση του, έχει κάποια πλεονεκτήματα σαν αριθμός από οποιονδήποτε άλλο αριθμό. Η επιλογή του δέκα σαν βάση, όπως αναφέραμε, οφείλεται στο πλήθος των δακτύλων των χεριών μας. Εκείνο που έκανε δημοφιλές αυτό το σύστημα, είναι ο έξυπνος συνδυασμός των δέκα βασικών στοιχείων του για τη γραφή οποιουδήποτε αριθμού και φυσικά, ο εύκολος μηχανισμός που προκύπτει από τη γραφή αυτή στην τέλεση των αριθμητικών πράξεων.

Είναι φανερό ότι ο καθένας μπορεί ακολουθώντας τον ίδιο τρόπο, όπως στο δεκαδικό, να κατασκευάσει διάφορα συστήματα αρίθμησης.

Για παράδειγμα αν σαν βάση αρίθμησης θεωρήσομε το 2, το σύμβολο 110 είναι ο αριθμός που έχει μηδέν μονάδες, μία δυάδα και μία τετράδα, δηλαδή ο αριθμός 6 του δεκαδικού συστήματος.

΄Ομοια έχομε τα παρακάτω. (Ο αριθμός μέσα στην παρένθεση κάτω δεξιά του κάθε αριθμού, δηλώνει τη βάση ως προς την οποία είναι γραμμένος ο αριθμός.)

$$1001_{(2)} = 1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0 = 9_{(10)}$$
$$210_{(3)} = 2\cdot 3^2+1\cdot 3^1+0\cdot 3^0 = 21_{(10)}$$
$$143_{(5)} = 1\cdot 5^2+4\cdot 5^1+3\cdot 5^0 = 48_{(10)}.$$

Γενικά, το σύμβολο $a_\nu a_{\nu-1}\dots a_1 a_{0(b)}$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον αριθμό

$$a_\nu b^\nu + a_{\nu-1}b^{\nu-1}+\dots+a_1 b^1 + a_0 b^0.$$

(Υποτίθεται στην παραπάνω γραφή ότι $a_i < b$, $i = 0,1,\dots,\nu$.)

<u>Παρατήρηση</u>. Από τα παραπάνω παραδείγματα γίνεται σαφές ότι για να γράψομε τους αριθμούς στο δεκαδικό σύστημα χρειαζόμαστε δέκα σύμβολα, για το εννεαδικό σύστημα εννέα σύμβολα, για το οκταδικό σύστημα οκτώ σύμβολα κ.ο.κ. ΄Ετσι, το δυαδικό σύστημα έχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να παραστήσει οποιονδήποτε αριθμό με δύο μόνο ψηφία, το 0 και το 1. Αυτή η οικονομία συμβόλων κάνει το σύστημα αυτό κατάλληλο για τη χρησιμοποίησή του στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές.

7.4. Αλλαγή βάσης στα συστήματα αρίθμησης

Το να μετατρέψομε τον τρόπο γραφής ενός αριθμού από ένα τυχαίο σύστημα στο δεκαδικό είναι απλούστατο. Π.χ. για τον αριθμό $1010_{(2)}$ έχομε:

$$1010_{(2)} = 1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2^1+0\cdot 2^0 = 8+2 = 10_{(10)}.$$

'Ομοια, για τους αριθμούς $4312_{(5)}$ και $1201_{(3)}$ έχομε:

$$4312_{(5)} = 4\cdot 5^3+3\cdot 5^2+1\cdot 5^1+2\cdot 5^0 = 500+75+5+2 = 582_{(10)}$$

$$1201_{(3)} = 1\cdot 3^3+2\cdot 3^2+0\cdot 3^1+1\cdot 3^0 = 27+18+1 = 46_{(10)}.$$

Γενικά για τον αριθμό $a_\nu a_{\nu-1}\ldots a_1 a_{0(b)}$ η ανάπτυξή του στη μορφή

$$a_\nu b^\nu+a_{\nu-1}b^{\nu-1}+\ldots+a_1 b^1+a_0 b^0,$$

δίνει τον τρόπο μετατροπής του στο δεκαδικό σύστημα.

Για το αντίστροφο, ας υποθέσομε ότι έχομε να μετατρέψομε τον αριθμό $158_{(10)}$ στο πενταδικό σύστημα. Ουσιαστικά θέλομε να γράψομε τον αριθμό $158_{(10)}$ στη μορφή $a_k 5^k+a_{k-1}5^{k-1}+\ldots+a_0 5^0$, όπου, $0 \leqq a_i < 5$, $i = 0,1,\ldots,k$.
Παρατηρούμε ότι

$$a_k\cdot 5^k+a_{k-1}5^{k-1}+\ldots+a_2 5^2+a_1 5^1+a_0 5^0 =$$

$$5(a_k\cdot 5^{k-1}+a_{k-1}\cdot 5^{k-2}+\ldots+a_2\cdot 5+a_1)+a_0.$$

'Ετσι ο αριθμός a_0 είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού $158_{(10)}$ δια του 5 (δηλαδή ο αριθμός 3), ενώ ο αριθμός $a_k 5^{k-1}+\ldots$ $\ldots+a_2\cdot 5+a_1$ είναι το πηλίκο της ίδιας διαίρεσης (ο αριθμός 31).
Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία έχομε:

$$a_k\cdot 5^{k-1}+a_{k-1}\cdot 5^{k-2}+\ldots+a_2\cdot 5+a_1 =$$

$$5(a_k\cdot 5^{k-2}+a_{k-1}\cdot 5^{k-3}+\ldots+a_2)+a_1.$$

'Αρα, ο αριθμός a_1 είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πηλίκου της πρώτης διαίρεσης, με τον αριθμό 5 (δηλ. 1) και ο αριθμός $a_k\cdot 5^{k-2}+\ldots+a_2$, είναι το πηλίκο της ίδιας διαίρεσης (δηλ. 6).

Με τον τρόπο αυτό υπολογίζονται όλοι οι αριθμοί $a_0, a_1, \ldots$ $\ldots, a_k$, που χρειάζονται για την παράσταση του αριθμού $158_{(10)}$ στο πενταδικό σύστημα.

Η παραπάνω διαδικασία δίνεται σύντομα ως εξής:

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
158 & 5 & & & \\
8 & 31 & 5 & & \\
3 & 1 & 6 & 5 & \\
a_0 & a_1 & 1 & 1 & 5 \\
 & & a_2 & 1 & 0 \\
 & & & a_3 &
\end{array}$$

'Αρα έχομε $158_{(10)} = 1\cdot 5^3+1\cdot 5^2+1\cdot 5^1+3\cdot 5^0 = 1113_{(5)}$.

'Ομοια, για τη μετατροπή του αριθμού $1243_{(10)}$ στο οκταδικό σύστημα έχομε:

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
1243 & 8 & & & \\
44 & 155 & 8 & & \\
43 & 75 & 19 & 8 & \\
3 & 3 & 3 & 2 & 8 \\
 & & & 2 & 0 \\
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 &
\end{array}$$

'Αρα: $1243_{(10)} = 2333_{(8)}$.

Παραθέτομε εδώ ένα πίνακα που δείχνει τον τρόπο γραφής των δέκα πρώτων αριθμών σε διάφορα συστήματα.

Δεκαδικό σύστημα	Δυαδικό σύστημα	Πενταδικό σύστημα	Εφταδικό σύστημα
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	10	5
6	110	11	6
7	111	12	10
8	1000	13	11
9	1001	14	12
10	1010	20	13

7.5. Οι πράξεις της Αριθμητικής

Ένα από τα βασικά αντικείμενα διδασκαλίας των πρώτων τάξεων του Δημοτικού Σχολείου είναι η εκτέλεση των τεσσάρων πράξεων της Αριθμητικής. Στόχος της παραγράφου αυτής είναι η ερμηνεία του μηχανισμού των πράξεων αυτών. Η κατανόηση αυτής της ερμηνείας δίνει τη δυνατότητα να εκτελεί κανείς τις πράξεις αυτές, όχι μόνο στο δεκαδικό σύστημα, αλλά σε οποιοδήποτε σύστημα αρίθμησης.

7.6. Πρόσθεση και Αφαίρεση

α) Πρόσθεση. Ας παρακολουθήσομε το παράδειγμα:

$$1243_{(10)}+514_{(10)} = (1\cdot 10^3+2\cdot 10^2+4\cdot 10+3)+(5\cdot 10^2+1\cdot 10+4) \overset{(\alpha)}{=}$$

$$1\cdot 10^3+(2\cdot 10^2+5\cdot 10^2)+(4\cdot 10+1\cdot 10)+(4+3) \overset{(\beta)}{=}$$

$$1\cdot 10^3+(2+5)10^2+(4+1)10+(4+3) \overset{(\gamma)}{=}$$

$$1\cdot 10^3+7\cdot 10^2+5\cdot 10+7 \overset{(\delta)}{=} 1757_{(10)}.$$

Στο παραπάνω παράδειγμα, η ισότητα (α), ερμηνεύει τον "κανόνα": Για να προσθέσομε δύο αριθμούς, τοποθετούμε τον ένα κάτω από τον άλλο, έτσι ώστε το ψηφίο των μονάδων του ενός να είναι κάτω από το ψηφίο των μονάδων του άλλου κ.ο.κ. Η ισότητες (β), (γ) και (δ) ερμηνεύουν τη συνέχεια του παραπάνω "κανόνα" που λέει: Προσθέτομε τα ψηφία των μονάδων των αριθμών και το αποτέλεσμα το θέτομε σαν ψηφίο των μονάδων στο άθροισμα, προσθέτομε τα ψηφία των δεκάδων των αριθμών και το αποτέλεσμα το θέτομε σαν ψηφίο των δεκάδων στο άθροισμα κ.ο.κ. Έτσι η παραπάνω πρόσθεση γίνεται σύντομα με την γνωστή διαδικασία ως εξής:

$$\begin{array}{r} 1243 \\ +\ \underline{514} \\ 1757 \end{array}$$

Ας δούμε τώρα το παράδειγμα που ακολουθεί.

$$541_{(10)}+393_{(10)} = (5\cdot 10^2+4\cdot 10+1)+(3\cdot 10^2+9\cdot 10+3) =$$

$$(5\cdot 10^2+3\cdot 10^2)+(4\cdot 10+9\cdot 10)+(1+3) =$$

$$(5+3)\cdot 10^2+(4+9)\cdot 10+(1+3) =$$

$$8\cdot 10^2+13\cdot 10+4 \overset{(\alpha)}{=}$$

$$8\cdot10^2+1\cdot10^2+3\cdot10+4 \overset{(\beta)}{=}$$

$$(8+1)\cdot10^2+3\cdot10+4 \overset{(\gamma)}{=}$$

$$9\cdot10^2+3\cdot10+4 =$$

$$934_{(10)}.$$

Στο παραπάνω παράδειγμα οι ισότητες (α),(β) και (γ) ερμηνεύουν τον γνωστό "κανόνα": Σε περίπτωση που το άθροισμα των ψηφίων μιας τάξης (όπως εδώ το άθροισμα των ψηφίων των δεκάδων) προκύψει μεγαλύτερο του δέκα (όπως εδώ προκύπτει 13), γράφομε σαν ψηφίο της αντίστοιχης τάξης στο άθροισμα το ψηφίο των μονάδων του αθροίσματος που προέκυψε (εδώ γράφομε 3) και το ψηφίο των δεκάδων (στο παράδειγμα το 1) το προσθέτομε στο άθροισμα των ψηφίων της επόμενης τάξης (εδώ στο ψηφίο 8 των εκατοντάδων).

'Ετσι, η παραπάνω πρόσθεση μπορεί να γίνει σύντομα με τον παρακάτω τρόπο:

$$\begin{array}{r} 541 \\ +\,393 \\ \hline 934 \end{array}$$

Η πράξη της πρόσθεσης στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, που το μηχανισμό της εξηγήσαμε με τα δύο παραπάνω παραδείγματα, είναι μια εύκολη υπόθεση γιατί ακριβώς γνωρίζομε από μνήμης τα αθροίσματα όλων των μονοψηφίων αριθμών. Μ'άλλα λόγια μπορεί κανείς να κάνει εύκολα οποιαδήποτε πρόσθεση εφ'όσον έχει απομνημονεύσει τον πίνακα:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Επομένως, αν κατασκευάσει κανείς ένα τέτοιο πίνακα για οποιοδήποτε σύστημα αρίθμησης, μπορεί να εκτελέσει την πρόσθεση στο σύστημα αυτό, ακολουθώντας ακριβώς τον τρόπο που γνωρίζει από το δεκαδικό σύστημα

Δίνονται αμέσως παρακάτω διάφορα παραδείγματα στο δυαδικό και πενταδικό σύστημα.

<u>Πίνακας</u> <u>πρόσθεσης</u> <u>στο</u>
<u>δυαδικό</u> <u>σύστημα</u>

+	0	1
0	0	1
1	1	10

$$\begin{array}{r} 1011_{(2)} \\ +\ 110_{(2)} \\ \hline 10001_{(2)} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 111_{(2)} \\ +\,111_{(2)} \\ \hline 1110_{(2)} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10110_{(2)} \\ +\,11011_{(2)} \\ \hline 110001_{(2)} \end{array}$$

<u>Πίνακας</u> <u>πρόσθεσης</u> <u>στο</u>
<u>πενταδικό</u> <u>σύστημα</u>

+	0	1	2	3	4
0	1	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10·
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

$$\begin{array}{r} 1232_{(5)} \\ +\ 241_{(5)} \\ \hline 2023_{(5)} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4344_{(5)} \\ +\,3341_{(5)} \\ \hline 13240_{(5)} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10434_{(5)} \\ +\ 2344_{(5)} \\ \hline 13333_{(5)} \end{array}$$

β) <u>Αφαίρεση</u>. Αν α και β είναι δύο φυσικοί αριθμοί με $\alpha \geq \beta$, τότε ο αριθμός $\alpha+(-\beta)=\alpha-\beta$, είναι μη αρνητικός ακέραιος και ονομάζεται <u>διαφορά</u> των αριθμών α και β. Την διαδικασία εύρεσης της διαφοράς α–β, από τους αριθμούς α και β, την ονομάζομε πράξη της <u>αφαίρεσης</u> και τους αριθμούς α και β <u>μειωτέο</u> και <u>αφαιρετέο</u> αντίστοιχα.

Όσα εκθέσαμε παραπάνω αναλυτικά για την πρόσθεση, μπορούν εύκολα να επεκταθούν με παράλληλο τρόπο και για την πράξη της αφαίρεσης. Για το λόγο αυτό δεν θα αναφερθούμε ιδιαίτερα αναλυτικά σ'αυτήν. Θα δώσομε όμως αμέσως παρακάτω μερικά παραδείγματα για την πράξη αυτή στα διάφορα συστήματα αρίθμησης

$$\begin{array}{r} 1485_{(10)} \\ -\ 799_{(10)} \\ \hline 686_{(10)} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5783_{(10)} \\ -\ 1837_{(10)} \\ \hline 3946_{(10)} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 43829_{(10)} \\ -\ 37989_{(10)} \\ \hline 5840_{(10)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 43012_{(5)} \\ -\ 2011_{(5)} \\ \hline 41001_{(5)} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 32421_{(5)} \\ -\ 4431_{(5)} \\ \hline 22440_{(5)} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24101_{(5)} \\ -\ 12423_{(5)} \\ \hline 11123_{(5)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1212_{(3)} \\ -\ 1101_{(3)} \\ \hline 111_{(3)} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1201_{(3)} \\ -\ 212_{(3)} \\ \hline 212_{(3)} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 21022_{(3)} \\ -\ 12121_{(3)} \\ \hline 1201_{(3)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11011_{(2)} \\ -\ 1010_{(2)} \\ \hline 10001_{(2)} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11001_{(2)} \\ -\ 1011_{(2)} \\ \hline 1110_{(2)} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100000_{(2)} \\ -\ 11111_{(2)} \\ \hline 1_{(2)} \end{array}.$$

<u>7.7. Π ο λ λ α π λ α σ ι α σ μ ό ς</u>

Ας παρακολουθήσομε το παράδειγμα

$$43\cdot 35 = (4\cdot 10+3)\cdot(3\cdot 10+5) =$$

$$(4\cdot 10+3)\cdot 3\cdot 10+(4\cdot 10+3)\cdot 5.$$

Άρα, για την εύρεση του γινομένου $43\cdot 35$ αρκεί να υπολογίσομε χωριστά τα δύο γινόμενα $(4\cdot 10+3)\cdot 3\cdot 10$ και $(4\cdot 10+3)\cdot 5$ και να τα προσθέσομε. Έτσι έχομε:

$1^{\underline{o}}$ γινόμενο: $(4\cdot 10+3)\cdot 3\cdot 10 = 12\cdot 10^2+9\cdot 10 =$
$= (10+2)\cdot 10^2+9\cdot 10 = 10^3+2\cdot 10^2+9\cdot 10 = 1\cdot 10^3+2\cdot 10^2+9\cdot 10+0 = 1290$

$2^{\underline{o}}$ γινόμενο: $(4\cdot 10+3)\cdot 5 = 20\cdot 10+15 =$
$= 2\cdot 10\cdot 10+10+5 = 2\cdot 10^2+1\cdot 10+5 = 215.$

'Αρα: $43\cdot 35 = 1290+215 = 1505.$

Σύντομα, η παραπάνω διαδικασία μπορεί να δοθεί ως εξής:

$$\begin{array}{r l}
43 & \\
\times\ \underline{35} & \\
215 & \longleftarrow 2^{\underline{o}} \text{ γινόμενο} \\
+\ \underline{1290} & \longleftarrow 1^{\underline{o}} \quad\quad " \\
1505 &
\end{array}$$

ή και απλούστερα:

$$\begin{array}{r}
43 \\
\times\ \underline{35} \\
215 \\
\underline{129} \\
1505
\end{array}$$

Θα εξετάσομε τώρα πως μπορούμε να επεκτείνομε τον παραπάνω τρόπο πολλαπλασιασμού από το δεκαδικό σ'οποιοδήποτε σύστημα αρίθμησης.

Η πράξη του πολλαπλασιασμού, με τον γνωστό σύντομο τρόπο στο δεκαδικό σύστημα (όπως αυτή εξηγήθηκε στα παραπάνω), είναι μια εύκολη διαδικασία γιατί ξέρομε από μνήμης τα αποτελέσματα πολλαπλασιασμών μεταξύ μονοψηφίων αριθμών. Π.χ., γνωρίζομε από μνήμης ότι $3\cdot 5 = 15$, $8\cdot 7 = 56$, $9\cdot 9 = 81$ κ.τ.λ. 'Ετσι, γίνεται φανερό ότι η εκτέλεση της πράξης του πολλαπλασιασμού σ'ένα οποιοδήποτε σύστημα αρίθμησης, προϋποθέτει την εκμάθηση της "προπαίδειας" του πολλαπλασιασμού στό σύστημα αυτό.

Οι παρακάτω πίνακες δίνουν τα αποτελέσματα του πολλαπλασιασμού μεταξύ μονοψηφίων αριθμών στο δυαδικό και το πενταδικό σύστημα (τέτοιους πίνακες μπορεί κανείς να κατασκευάσει για οποιοδήποτε σύστημα αρίθμησης).

Πίνακας πολλ/σμού στο δυαδικό σύστημα

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Πίνακας πολλ/σμού στο πενταδικό σύστημα

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

Με την βοήθεια των πινάκων αυτών μπορεί κανείς να κατανοήσει τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς.

$$\begin{array}{r} 110_{(2)} \\ \times\ 10_{(2)} \\ \hline 000 \\ 110 \\ \hline 1100_{(2)} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11101_{(2)} \\ \times\ 111_{(2)} \\ \hline 11101 \\ 11101 \\ 11101 \\ \hline 11001011_{(2)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 123_{(5)} \\ \times\ 24_{(5)} \\ \hline 1102 \\ 301 \\ \hline 4112_{(5)} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 243_{(5)} \\ \times\ 134_{(5)} \\ \hline 2132 \\ 1334 \\ 243 \\ \hline 100322_{(5)} \end{array}$$

7.8. Διαίρεση

Στο σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών, όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 4 (Παράγρ. 4.4., Ιδιότητα 3), ισχύει ότι: Για τυχόντα στοιχεία x,y εν $\mathbb{Z}$, με $y>0$, υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι q και r, τέτοιοι ώστε $x=yq+r$ και $0\leq r<y$. Έτσι, τίθεται το εξής "πρακτικό" πρόβλημα.

Αν $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^{+}$, να βρεθεί το ζεύγος $(q,r)\in\mathbb{Z}^{2}$, που ορίζει η παραπάνω ιδιότητα.

Η διαδικασία εύρεσης των αριθμών q και r στο παραπάνω πρόβλημα λέγεται <u>αλγοριθμική διαίρεση</u> ή και απλά <u>διαίρεση</u> του αριθμού x με τον y και συμβολίζεται σύντομα $x:y$.

Ο αριθμός q λέγεται <u>πηλίκο</u> και ο αριθμός r <u>υπόλοιπο</u> της διαίρεσης. Στη διαίρεση $x:y$ οι αριθμοί x και y ονομάζονται <u>διαιρετέος</u> και <u>διαιρέτης</u> αντίστοιχα.

Στόχος της παραγράφου αυτής είναι να δοθεί η ερμηνεία της τεχνικής της πράξης της διαίρεσης όπως την ξέρομε από το Δημοτικό Σχολείο. Για το σκοπό αυτό χρειαζόμαστε την εξής πρόταση.

<u>7.8.1</u>. <u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>. Ας είναι x,y φυσικοί αριθμοί και m μη αρνητικός ακέραιος. Αν q είναι το πηλίκο της διαίρεσης $x:y$ τότε έχομε:

$$10^m y \leq x < 10^{m+1} y \iff 10^m \leq q < 10^{m+1}.$$

<u>Απόδειξη</u>. Έχομε $x = yq+r$, $0 \leq r < y$. Άρα

$$yq \leq x < y(q+1). \quad (1)$$

Επομένως από τη σχέση (1) και την $10^m y \leq x < 10^{m+1} y$ παίρνομε:

$$10^m y \leq x \Rightarrow 10^m y < y(q+1) \Rightarrow 10^m < q+1 \Rightarrow 10^m \leq q \quad (3)$$

και

$$x < 10^{m+1} y \Rightarrow yq < 10^{m+1} y \Rightarrow q < 10^{m+1}. \quad (4)$$

Έτσι από τις σχέσεις (3),(4) παίρνομε την σχέση

$$10^m \leq q < 10^{m+1}.$$

Αντίστροφα. Αν υποθέσομε ότι $10^m \leq q < 10^{m+1}$, τότε σε συνδυασμό με την (1) παίρνομε:

$$10^m \leq q \Rightarrow 10^m y \leq qy \Rightarrow 10^m y \leq x \quad (5)$$

και

$$q < 10^{m+1} \Rightarrow q+1 \leq 10^{m+1} \Rightarrow y(q+1) \leq y10^{m+1} \Rightarrow x < 10^{m+1} y. \quad (6)$$

Οι σχέσεις (5) και (6) δίνουν:

$$10^m y \leq x < 10^{m+1} y.$$

Για να κατανοήσομε το συμπέρασμα της παραπάνω πρότασης ας παρακολουθήσομε το παράδειγμα:

Έστω ότι έχομε τη διαίρεση 14541:726.

Παρατηρούμε ότι:

$$7260 < 14541 < 72600$$

δηλαδή:

$$726 \cdot 10^1 \leq 14541 < 726 \cdot 10^{1+1}.$$

Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση, αν q είναι το πηλίκο της διαίρεσης 14541:726 θα έχομε ότι

$$10 \leq q < 100.$$

Δηλ. το πηλίκο q της διαίρεσης είναι αριθμός διψήφιος.

Επομένως, η παραπάνω πρόταση μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσομε το πλήθος των ψηφίων του πηλίκου μιας διαίρεσης χωρίς να εκτελέσομε την πράξη.

Απλούστερα διατυπωμένη η πρόταση μας δίνει το εξής συμπέρασμα:

Αν $m \in \mathbb{Z}_0^+$ είναι τέτοιος ώστε: $10^m y \leq x < 10^{m+1} y$, τότε το πηλίκο της διαίρεσης $x:y$ των φυσικών αριθμών x, y έχει ακριβώς $m+1$ ψηφία.

Ας υποθέσομε τώρα ότι έχομε να εκτελέσομε τη διαίρεση

$$248114 : 1352.$$

Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, επειδή

$$135200 \leq 248114 < 1352000 \text{ ή } 1352 \cdot 10^2 \leq 248114 < 1352 \cdot 10^3,$$

το πηλίκο της διαίρεσης, 248114 : 1352, έχει 3 ψηφία. Έτσι, έστω

$$q = a_2 a_1 a_{0(10)} = a_2 10^2 + a_1 10 + a_0.$$

Συμβολίζοντας με r $(0 \leq r < 1352)$ το υπόλοιπο της διαίρεσης, 248114 : 1352, παίρνομε

$$248114 = 1352 \cdot q + r \Rightarrow 248114 = 1352(a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0) + r.$$

Άρα,

$$248114 = (1352 \cdot 10^2) a_2 + [1352(19a_1 + a_0) + r]. \quad (\alpha)$$

Ισχύει όμως,

$$a_1 a_{0(10)} + 1 \leq 100.$$

Επομένως,

$$10a_1 + a_0 + 1 \leq 10^2 \Rightarrow 1352(10a_1 + a_0 + 1) \leq 1352 \cdot 10^2 \Rightarrow 1352(10a_1 + a_0) + 1352 \leq 1352 \cdot 10^2.$$

Επειδή $r < 1352$, η τελευταία σχέση δίνει

$$1352 \cdot (10a_1 + a_0) + r < 1352 \cdot 10^2. \quad (\beta)$$

Εφ'όσον ισχύει η σχέση (β), μπορούμε να πούμε ότι η σχέση (a) μας δίνει ότι: <u>ο αριθμός</u> a_2 <u>είναι</u> <u>το</u> <u>πηλίκο</u> <u>της</u> <u>διαίρεσης</u> 248114 : 135200. Έτσι παίρνομε

$$a_2 = 1.$$

Θέτοντας στη σχέση (α), $a_2 = 1$, παίρνομε $248114 = 135200\cdot 1+$ $+[1352(10a_1+a_0)+r]$ και τελικά,

$$1352(10a_1+a_0)+r = 112914. \quad (\gamma)$$

Το μέχρι εδώ 1º βήμα της διαίρεσης 248114:1352, μπορεί ν'αποδοθεί σχηματικά ως εξής:

$$\begin{array}{r|l} 248114 & 1352(00) \\ \cline{2-2} \underline{1352(00)} & 1=a_2 \\ 112914 & \end{array} \qquad (\delta)$$

Συνεχίζοντας τώρα από τη σχέση (γ) παίρνομε

$$112914 = (1352\cdot 10)a_1+(1352\cdot a_2+r). \quad (\varepsilon)$$

Εργαζόμενοι όπως ακριβώς στο 1º βήμα, μπορούμε ν'αποδείξομε ότι $1352\cdot a_0+r < 1352\cdot 10$. Άρα, η σχέση (ε) δίνει ότι <u>ο αριθμός</u> a_1 <u>είναι</u> <u>το</u> <u>πηλίκο</u> <u>της</u> <u>διαίρεσης</u> 112914:(1352·10), δηλ. $a_1 = 8$. Επομένως, το δεύτερο ψηφίο a_1, του πηλίκου q της διαίρεσης 248114:1352, είναι το ψηφίο 8. Θέτοντας $a_1 = 8$ στη σχέση (ε) παίρνομε:

$$112914 = 13520\cdot 8+1352\cdot a_0+r \Longrightarrow$$
$$4754 = 1352\cdot a_0+r. \quad (\sigma\tau)$$

Το βήμα αυτό της εύρεσης του ψηφίου a_1 του πηλίκου q αποδίδεται σχηματικά ως εξής:

$$\begin{array}{r|l} 112914 & 1352(0) \\ \cline{2-2} \underline{108160} & 8=a_1 \\ 4754 & \end{array} \qquad (\zeta)$$

Απομένει για την ολοκλήρωση της διαίρεσης 248114:1352 η εύρεση του ψηφίου a_0 του πηλίκου q.

Η σχέση (στ), επειδή $r < 1352$, δίνει ότι <u>ο αριθμός</u> a_0 <u>είναι</u> <u>το</u> <u>πηλίκο</u> <u>της</u> <u>διαίρεσης</u> 4754:1352, δηλαδή $a_0 = 3$. Έτσι, για $a_0=3$, η σχέση (στ) δίνει

$$r = 4754-1352\cdot 3 = 4754-4056 = 698.$$

Όπως και τα προηγούμενα βήματα, το βήμα αυτό μπορεί ν'αποδοθεί σύντομα με το σχήμα

```
 4754 | 1352
 ---- |------
 4056 | 3=a0          (η)
 ----
  698=r
```

Άρα, από τα παραπάνω προκύπτει ότι η διαίρεση 248114:1352 δίνει πηλίκο $q = 183$ και υπόλοιπο $r = 698$. Τα σχήματα (δ),(ζ) και (η) μπορούν να ενοποιηθούν στο εξής σχήμα:

```
248114 | 1352
       |------
1352   | 183
------
112914
10816
------
  4754
  4056
  ----
   698
```

Το σχήμα αυτό δεν είναι τίποτ'άλλο από την γνωστή σ'όλους μας τεχνική της διαίρεσης.

Όπως εύκολα μπορεί να αντιληφθεί κανείς, η επέκταση του παραπάνω μηχανισμού της πράξης της διαίρεσης στα άλλα συστήματα αρίθμησης, είναι μόνο θέμα γνώσης της προπαίδειας του πολλαπλασιασμού στο αντίστοιχο σύστημα. Αυτό, για να μπορεί κανείς να απαντάει άμεσα ποιό είναι το πηλίκο δυο αριθμών μέσα στη διαδικασία της διαίρεσης. Σ'ό,τι ακολουθεί θα περιοριστούμε σε μερικά παραδείγματα στο δυαδικό σύστημα. Ο λόγος είναι ότι το πηλίκο δυό αριθμών κατά την εκτέλεση μιας διαίρεσης στο δυαδικό σύστημα, θάναι 0 ή 1 αφού αυτά είναι τα μόνα ψηφία του συστήματος αυτού.

```
11111(2) | 10(2)              110101(2) | 11(2)
         |---------                     |---------
10       | 1111(2)            11        | 10001(2)
----                          ----
 11                            01
 10                            00
 ----                          ----
  11                            10
  10                            00
  ----                          ----
   11                           101
   10                            11
   ----                          ----
    1(2)                         10(2)
```

$$
\begin{array}{r|l}
11100001_{(2)} & 110_{(2)} \\ \cline{2-2}
\underline{110} & 100101_{(2)} \\
1000 & \\
\underline{110} & \\
1001 & \\
\underline{110} & \\
11_{(2)} &
\end{array}
$$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΩΝ ΑΡΧΑΙΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΡΩΜΑΪΚΩΝ ΣΥΜΒΟΛΩΝ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

1	α'	I	10	ι'	X	100	ρ'	C
2	β'	II	20	κ'	XX	200	σ'	CC
3	γ'	III	30	λ'	XXX	300	τ'	CCC
4	δ'	IV	40	μ'	XL	400	υ'	CD
5	ε'	V	50	ν'	L	500	φ'	D
6	ς'	VI	60	ξ'	LX	600	χ'	DX
7	ζ'	VII	70	ο'	LXX	700	ψ'	DCC
8	η'	IIX	80	π'	XXC	800	ω'	CCM
9	ϑ'	IX	90	ϟ' (κόππα)	XC	900	ϡ' (σαμπί)	CM
						1000	α'	M

7.9. Ασκήσεις

1. Να μετατραπούν οι παρακάτω αριθμοί στο δεκαδικό σύστημα:

$1101_{(2)}$, $11111_{(2)}$, $221_{(3)}$, $1012_{(3)}$, $6150_{(7)}$, $10_{(8)}$, $1001_{(9)}$.

2. Να μετατραπούν οι παρακάτω αριθμοί στο δυαδικό σύστημα:

$142_{(10)}$, $357_{(10)}$, $134_{(5)}$, $1222_{(3)}$, $155_{(7)}$.

3. Να εκτελεστούν οι παρακάτω προσθέσεις:

$$
\begin{array}{r}
10011_{(2)} \\
+\ \underline{1111_{(2)}}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1221_{(3)} \\
+\ \underline{102_{(3)}}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
10001_{(2)} \\
+\underline{11111_{(2)}}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1234_{(5)} \\
+\underline{1033_{(5)}}
\end{array}
.
$$

4. Να γίνουν οι παρακάτω αφαιρέσεις:

$$\begin{array}{r} 110011_{(2)} \\ -\ \ 1111_{(2)} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 101011_{(2)} \\ -\ 11110_{(2)} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24310_{(5)} \\ -\ \ 3414_{(5)} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 46552_{(7)} \\ -32515_{(7)} \\ \hline \end{array} .$$

5. Να γίνουν οι παρακάτω πολλαπλασιασμοί:

$$\begin{array}{r} 1101_{(2)} \\ \times\ 111_{(2)} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1001_{(2)} \\ \times\ 110_{(2)} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1340_{(5)} \\ \times\ 123_{(5)} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2223_{(5)} \\ \times\ 112_{(5)} \\ \hline \end{array} .$$

6. Να βρεθεί ο αριθμός των ψηφίων των πηλίκων των παρακάτω διαιρέσεων χωρίς να εκτελεστούν οι πράξεις:

14583:130, 81548:2859, 15421437:28513
7583135:35400, 1835439170:835342.

7. Να γίνουν οι παρακάτω διαιρέσεις και να επαληθευτούν:

$100101_{(2)} : 11_{(2)}$ $\quad 111110001_{(2)} : 111_{(2)}$ $\quad 11000111101_{(2)} : 11101_{(2)}$.

8. Να εξεταστεί αν υπάρχουν μονοψήφιοι αριθμοί a,b,c,d και e τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$3\cdot(1abcde_{(10)}) = abcde1_{(10)}\,.$$

Β Ι Β Λ Ι Ο Γ Ρ Α Φ Ι Α

1. A. DONEDDU, Arithmëtique Générale, Dunod, Paris, 1962.
2. W. FAIRCHILD and C.I. TULCEA, Sets, W.B. Saunders Co., Philadelphia, 1970.
3. P. HALMOS, Naive Set Theory, D. Van Nostrand Co. Inc., Princeton, 1966.
4. I. KAPLANSKY, Set Theory and Metric Spaces, Allyn and Bacon Inc., Boston, 1975.
5. S. LIPSCHUTZ, Set Theory and Related Topics, Schaum's Outline Series, New York, 1964.
6. B. ΣΤΑΪΚΟΥ, Μαθήματα Μαθηματικής Αναλύσεως, Μέρος I, Ιωάννινα, 1980.

<u>ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ</u>

<u>Παράγραφος 1.4.</u>

1) Αρκεί να κατασκευαστεί ο πίνακας αλήθειας για την κάθε πρόταση. Παραδείγματος χάρη για την ταυτολογία 12, δηλ. την $p \wedge (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, έχομε:

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \wedge (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
α	α	α	α	α	α	α	α	α
α	α	ψ	α	α	α	ψ	α	α
α	ψ	α	α	α	ψ	α	α	α
α	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	α
ψ	α	α	α	ψ	ψ	ψ	ψ	α
ψ	α	ψ	α	ψ	ψ	ψ	ψ	α
ψ	ψ	α	α	ψ	ψ	ψ	ψ	α
ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	α

2) Από τον πίνακα αλήθειας,

p	q	r	$q \wedge r$	$p \underline{\vee} (q \wedge r)$	$p \underline{\vee} q$	$p \underline{\vee} r$	$(p \underline{\vee} q) \wedge (p \underline{\vee} r)$	$p \underline{\vee} (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \underline{\vee} q) \wedge (p \underline{\vee} r)$
α	α	α	α	ψ	ψ	ψ	ψ	α
α	α	ψ	ψ	α	ψ	α	ψ	ψ
α	ψ	α	ψ	α	α	ψ	ψ	ψ
α	ψ	ψ	ψ	α	α	α	α	α
ψ	α	α	α	α	α	α	α	α
ψ	α	ψ	ψ	ψ	α	ψ	ψ	α
ψ	ψ	α	ψ	ψ	ψ	α	ψ	α
ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	α

προκύπτει ότι η πρόταση, $p \wedge (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \underline{\vee} (p \wedge r)$, δεν είναι ταυτολογία.

6) Από τον πίνακα αλήθειας,

p	q	r	$q \Longleftrightarrow r$	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (p \Rightarrow r)$
α	α	α	α	α	α	α
α	α	ψ	ψ	α	ψ	ψ
α	ψ	α	ψ	ψ	α	ψ
α	ψ	ψ	α	ψ	ψ	α
ψ	α	α	α	α	α	α
ψ	α	ψ	ψ	α	α	α
ψ	ψ	α	ψ	α	α	α
ψ	ψ	ψ	α	α	α	α

προκύπτει αμέσως το ζητούμενο.

<u>Παράγραφος 2.14</u>.

2) $\mathcal{P}(\{\alpha,\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\emptyset\}, \{\alpha,\emptyset\}\}$.

3) Αν $x=\alpha$ και $y=\beta$ τότε είναι φανερό ότι $\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\}$. Αντίστροφα, έστω ότι $\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\}$. Άρα $\{x\} \in \{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\} \Rightarrow \{x\} = \{\alpha\}$ ή $\{x\} = \{\alpha,\beta\}$. Αλλά αν $\{x\} = \{\alpha\}$, έχομε $x=\alpha$. Επίσης από τη σχέση $\{x\} = \{\alpha,\beta\}$, παίρνομε $\alpha \in \{x\}$ και άρα $x=\alpha$. Έτσι σε κάθε περίπτωση προκύπτει $x=\alpha$. Άρα η ισότητα $\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\}$, δίνει $\{\{\alpha\},\{\alpha,y\}\} = \{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\}$, απ' όπου παίρνομε αμέσως $y=\beta$.

5) 1) $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cap B = A$.

Έστω ισχύει. $A \subseteq B$. Θα αποδειχτεί ότι $A \cap B = A$. Επειδή $A \cap B \subseteq A$, αρκεί να δειχτεί ότι $A \subseteq A \cap B$. Πραγματικά· έστω τυχόν $x \in A$. Τότε, επειδή $A \subseteq B$, θα έχομε ότι $x \in A$ και $x \in B$. Δηλαδή $x \in A \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$. Άρα $A \subseteq A \cap B$.

Αντίστροφα. Έστω ισχύει $A \cap B = A$. Τότε για τυχόν x με $x \in A$, επειδή $A = A \cap B$, παίρνομε ότι $x \in A \cap B$ δηλαδή $x \in B$. Έτσι, για κάθε x, έχομε $x \in A \Rightarrow x \in B$. Άρα $A \subseteq B$.

2) $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cup B = B$.

Έστω ισχύει $A \subseteq B$. Τότε επειδή $B \subseteq A \cup B$, αρκεί να δειχτεί ότι

$A \cup B \subseteq B$. Έτσι, $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B \xrightarrow{A \subseteq B} x \in B \vee x \in B \Rightarrow x \in B$.

Αντίστροφα. Έστω $A \cup B = B$. Τότε έχομε για τυχόν x,
$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \xrightarrow{B = A \cup B} x \in B$. Άρα $A \subseteq B$.

3) $(A \cap B) - \Gamma = A \cap (B - \Gamma)$.

Για τυχόν x παίρνομε:

$$x \in (A \cap B) - \Gamma \Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge x \notin \Gamma \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin \Gamma \Leftrightarrow$$
$$x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin \Gamma) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B - \Gamma \Leftrightarrow$$
$$x \in A \cap (B - \Gamma).$$

4) $(A \cup B) - \Gamma = (A - \Gamma) \cup (B - \Gamma)$.

Για τυχόν x παίρνομε:

$$x \in (A \cup B) - \Gamma \Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \notin \Gamma \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin \Gamma \Leftrightarrow$$
$$(x \in A \wedge x \notin \Gamma) \vee (x \in B \wedge x \notin \Gamma) \Leftrightarrow (x \in A - \Gamma) \vee (x \in B - \Gamma) \Leftrightarrow$$
$$x \in (A - \Gamma) \cup (B - \Gamma).$$

5) $\Gamma - (A \cap B) = (\Gamma - A) \cup (\Gamma - B)$.

Για τυχόν x έχομε:

$$x \in \Gamma - (A \cap B) \Leftrightarrow x \in \Gamma \wedge x \notin A \cap \Gamma \Leftrightarrow x \in \Gamma \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \Leftrightarrow$$
$$(x \in \Gamma \wedge x \notin A) \vee (x \in \Gamma \wedge x \notin B) \Leftrightarrow (x \in \Gamma - A) \vee (x \in \Gamma - B) \Leftrightarrow$$
$$x \in (\Gamma - A) \cup (\Gamma - B).$$

6) $\Gamma - (A \cup B) = (\Gamma - A) \cap (\Gamma - B)$.

Για τυχόν x έχομε:

$$x \in \Gamma - (A \cup B) \Leftrightarrow x \in \Gamma \wedge x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \in \Gamma \wedge (x \notin A \wedge x \notin B) \Leftrightarrow$$
$$(x \in \Gamma \wedge x \notin A) \wedge (x \in \Gamma \wedge x \notin B) \Leftrightarrow (x \in \Gamma - A) \wedge (x \in \Gamma - B) \Leftrightarrow$$
$$x \in (\Gamma - A) \cap (\Gamma - B).$$

7) α) $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$.

Αν $A = B$, τότε $A \cup B = A = A \cap B$.

Αντίστροφα, έστω $A \cup B = A \cap B$. Τότε για τυχόν x έχομε:
$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \xrightarrow{A \cup B = A \cap B} x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in B$. Άρα $A \subseteq B$. Όμοια αποδεικνύεται ότι $B \subseteq A$. Άρα τελικά $A = B$.

β) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$.

Καταρχή επειδή $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ και $\emptyset \in \mathcal{P}(B)$ έχομε ότι $\emptyset \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Έστω τώρα $A \cap B = \emptyset$ και $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \neq \{\emptyset\}$. Έτσι θα υπάρχει σύνολο $X \neq \emptyset$, με $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Τότε όμως για τυχόν x έχομε:

$$x \in X \xrightarrow{X \subseteq A \text{ και } X \subseteq B} x \in A \text{ και } x \in B \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset,$$

που είναι άτοπο.

Αντίστροφα. Έστω $\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)=\{\emptyset\}$ και $A\cap B\neq\emptyset$. Επειδή $A\cap B\neq\emptyset$, θεωρούμε τυχόν x, με $x\in A\cap B$. Τότε $\{x\}\subseteq A$ και $\{x\}\subseteq B\Rightarrow$ $\Rightarrow\{x\}\in\mathcal{P}(A)$ και $\{x\}\in\mathcal{P}(B)\Rightarrow\{x\}\in\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)$, που είναι άτοπο, αφού $\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)=\{\emptyset\}$.

8) $[(A\cap\Gamma)\cup B]^c=(A\cap\Gamma)^c\cap B^c=(A^c\cup\Gamma^c)\cap B^c=(A^c\cap B^c)\cup(\Gamma^c\cap B^c)$.

10) Έστω $A-B=A$ και $A\cap B\neq\emptyset$. Τότε για τυχόν x, με $x\in A\cap B$ παίρνομε:

$$x\in A\cap B\Rightarrow x\in A\ \wedge\ x\in B\Rightarrow x\in A\ \wedge\ x\notin A-B.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο αφού $A=A-B$.

Αντίστροφα. Έστω $A\cap B=\emptyset$ και $A-B\neq A$. Επειδή ισχύει πάντοτε $A-B\subseteq A$, η σχέση $A-B\neq A$ συνεπάγεται $A-B\subset A$. Άρα υπάρχει x με $x\in A\wedge x\notin A-B\Rightarrow x\in A\wedge(x\notin A\vee x\in B)\Rightarrow(x\in A\wedge x\notin A)\vee(x\in A\wedge x\in B)\Rightarrow x\in A\wedge x\in B$ $\Rightarrow x\in A\cap B\Rightarrow A\cap B\neq\emptyset$, που είναι άτοπο, αφού υποθέσαμε $A\cap B=\emptyset$.

12) 2. $A\times(B\cap\Gamma)=(A\times B)\cap(A\times\Gamma)$.

Για τυχόν διατεταγμένο ζεύγος (x,y) έχομε:

$(x,y)\in A\times(B\cap\Gamma)\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cap\Gamma\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\wedge y\in\Gamma)\Leftrightarrow$ $(x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\in A\wedge y\in\Gamma)\Leftrightarrow(x,y)\in A\times B\wedge(x,y)\in A\times\Gamma\Leftrightarrow$ $(x,y)\in(A\times B)\cap(A\times\Gamma)$.

4. $A\times(B\cup\Gamma)=(A\times B)\cup(A\times\Gamma)$.

Για τυχόν διατεταγμένο ζεύγος (x,y) παίρνομε:

$(x,y)\in A\times(B\cup\Gamma)\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cup\Gamma\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in\Gamma)\Leftrightarrow$ $(x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in\Gamma)\Leftrightarrow(x,y)\in A\times B\vee(x,y)\in A\times\Gamma\Leftrightarrow$ $(x,y)\in(A\times B)\cup(A\times\Gamma)$.

7. Για τυχόν ζεύγος (x,y) έχομε:

$(x,y)\in(B-\Gamma)\times A\Leftrightarrow x\in B-\Gamma\wedge y\in A\Leftrightarrow(x\in B\wedge x\notin\Gamma)\wedge y\in A\Leftrightarrow$ $(x\in B\wedge y\in A)\wedge x\notin\Gamma\Leftrightarrow(x,y)\in B\times A\wedge(x,y)\notin\Gamma\times A\Leftrightarrow$ $(x,y)\in(B\times A)-(\Gamma\times A)$.

<u>Παράγραφος 3.10</u>.

2) α) Για τυχόν ζεύγος (x,y) παίρνομε:

$(x,y)\in\sigma_1\cup\sigma_2\Rightarrow(x,y)\in\sigma_1\vee(x,y)\in\sigma_2\xrightarrow{\sigma_1,\sigma_2\ \text{συμμετρ.}}(y,x)\in\sigma_1\vee(y,x)\in\sigma_2$ $\Rightarrow(y,x)\in\sigma_1\cup\sigma_2$.

β) Για τυχόν $x\in E$ έχομε $(x,x)\in\sigma_1$, επειδή σ_1 ανακλαστική.

Άρα, για κάθε $x \in E$ έχομε $(x,x) \in \sigma_1 \cup \sigma_2$. Αυτό ακριβώς σημαίνει ότι η σχέση $\sigma_1 \cup \sigma_2$ είναι ανακλαστική.

3) Για κάθε $x \in \mathbb{N}$ έχομε $x-x = 0 = 3\cdot 0$. Έτσι, για κάθε $x \in \mathbb{N}$ ισχύει $x\sigma x$. Άρα η σ είναι ανακλαστική. Επίσης, $(x,y) \in \sigma \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x-y = 3\kappa$, $\kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y-x = 3(-\kappa)$, $-\kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (y,x) \in \sigma$. Άρα η σ είναι συμμετρική. Ακόμη, $(x,y) \in \sigma$ και $(y,z) \in \sigma \Rightarrow x-y = 3\kappa$ και $y-z = 3\lambda$, κ,λ εν $\mathbb{Z} \Rightarrow x-z = 3(\kappa+\lambda)$, $\kappa+\lambda \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x,z) \in \sigma$. Άρα η σ είναι και μεταβατική σχέση και επομένως σχέση ισοδυναμίας.

Οι φυσικοί αριθμοί οι ισοδύναμοι, μέσω της σ, προς τον αριθμό 1 συνιστούν το σύνολο $\{1,4,7,10,\ldots\} = \{3\kappa+1 : \kappa=0,1,2,\ldots\} = A_1$. Όμοια, οι ισοδύναμοι προς τον αριθμό 2 συνιστούν το σύνολο $\{2,5,8,\ldots\} = \{3\kappa+2 : \kappa = 0,1,2,\ldots\} = A_2$ και οι ισοδύναμοι προς τον αριθμό 3 συνιστούν το σύνολο $A_3 = \{3,6,9,\ldots\} = \{3\kappa : \kappa = 1,2,\ldots\}$. Άρα $\mathbb{N}/\sigma = \{A_1, A_2, A_3\}$.

4) Διαπιστώνεται εύκολα ότι η σ είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική σχέση και άρα ισοδυναμία στο σύνολο X, Έτσι έχομε:

$$\kappa\lambda_\sigma(\sigma) = \{\alpha,\beta\},\ \kappa\lambda_\sigma(\gamma) = \{\gamma,\delta\}.\ \text{Άρα } X/\sigma = \{\{\alpha,\beta\},\{\gamma,\delta\}\}.$$

5) Έστω α,β δύο άνω φράγματα του A με $\alpha \in A$ και $\beta \in A$. Τότε, επειδή $\beta \in A$ και α άνω φράγμα του A παίρνομε $\beta \preceq \alpha$ (1). Όμοια, επειδή $\alpha \in A$ και β άνω φράγμα του A παίρνομε $\alpha \preceq \beta$ (2). Επειδή η διάταξη $\preceq$ είναι αντισυμμετρική σχέση, οι σχέσεις (1), (2) δίνουν $\alpha = \beta$.

6) Διαπιστώνεται εύκολα ότι η $\preceq$ είναι μια σχέση ολικής διάταξης στο X και μάλιστα $\min X = x$ και $\max X = z$.

7) $\tilde{\sigma} = \{(a,c),(b,c),(d,e),(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e)\}$.

8) Στα ερωτήματα β και γ μπορεί κανείς να απαντήσει εύκολα χρησιμοποιώντας το βελοειδές διάγραμμα της $\preceq$.

9) Χρησιμοποιείστε το βελοειδές διάγραμμα της $\preceq$.

Παράγραφος 5.6.

1. Συναρτήσεις είναι οι: α,δ και ε.

2. α) 'Εστω $f(x)=f(y)$ για x,y εν $\mathbb{R}$, με $x\geq 0$ και $y\geq 0$. Τότε: $x^2+1=y^2+1 \Rightarrow x^2=y^2$. Επειδή όμως $x\geq 0$ και $y\geq 0$ παίρνομε: $x^2=y^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x=y$.

β) 'Εστω $f(x)=f(y)$ για x,y εν $\mathbb{R}$ με $x\neq -\frac{3}{2}\neq y$. Τότε: $\frac{1}{2x+3}=\frac{1}{2y+3} \Rightarrow 2x+3=2y+3 \Rightarrow 2x=2y \Rightarrow x=y$.

γ) 'Εστω $f(x)=f(y)$ για x,y εν $\mathbb{R}$, με $x\geq 3$ και $y\geq 3$. Τότε: $\sqrt{x-3}=\sqrt{y-3}$ και επειδή $x\geq 3$ και $y\geq 3$ παίρνομε $\sqrt{x-3}=\sqrt{y-3} \Rightarrow$ $\Rightarrow x-3=y-3 \Rightarrow x=y$.

3. α) Επειδή $A=\{x\in\mathbb{R}: -1\leq x\leq 0\}$ και $B=\{x\in\mathbb{R}: 0\leq x\leq 1\}$, παίρνομε $A\cap B=\{0\}$. 'Αρα, $f(A\cap B)=f(\{0\})=\{0\}$. Ακόμη, $f(A)=[0,1]$ και $f(B)=[0,1]$. 'Αρα, $f(A)\cap f(B)=[0,1]$. 'Ετσι, παίρνομε $f(A\cap B)\subsetneq f(A)\cap f(B)$.

β) 'Ομοια· $A-B=[-1,0]-[0,1]=[-1,0)$. 'Αρα, $f(A-B)=$ $=f([-1,0))=(0,1]$. Ακόμη, $f(A)-f(B)=[0,1]-[0,1]=\emptyset$. Επομένως, $f(A)-f(B)\subsetneq f(A-B)$.

4. α) Θεωρούμε τυχόν x, με $x\in X$. Τότε, $f(x)\in f(X) \Rightarrow x\in f^{-1}(f(X))$. 'Αρα, $X\subseteq f^{-1}(f(X))$.

β) $(\forall y)\ y\in f(X_1\cup X_2) \Leftrightarrow (\exists x\in X_1\cup X_2)y=f(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\exists x\in X_1: y=f(x)) \vee (\exists x\in X_2: y=f(x)) \Leftrightarrow y\in f(X_1) \vee y\in f(X_2) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y\in f(X_1)\cup f(X_2)$.

γ) $(\forall y)\ y\in f(X_1\cap X_2) \Leftrightarrow (\exists x\in X_1\cap X_2)y=f(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\exists x: x\in X_1 \wedge x\in X_2)y=f(x) \Rightarrow [(\exists x\in X_1)y=f(x)] \wedge [(\exists x\in X_2)y=f(x)]$ $\Leftrightarrow y\in f(x_1) \wedge y\in f(X_1) \Leftrightarrow y\in f(X_1)\cap f(X_2)$.

δ) $(\forall y)\ y\in f(f^{-1}(Y)) \Leftrightarrow (\exists x\in f^{-1}(Y))y=f(x)$. (1)
Αλλά $x\in f^{-1}(Y) \Rightarrow (\exists y_1\in Y): y_1=f(x)$. (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνομε $y=y_1\in Y$. 'Αρα αποδείχτηκε ότι για κάθε y, $y\in f(f^{-1}(Y) \Rightarrow y\in Y$. Επομένως, $f(f^{-1}(Y)\subseteq Y$.

ε) $(\forall x)\ x\in f^{-1}(Y_1\cup Y_2) \Leftrightarrow (\exists y\in Y_1\cup Y_2)y=f(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow [(\exists y\in Y_1)y=f(x)] \vee [(\exists y\in Y_2)y=f(x)] \Leftrightarrow (x\in f^{-1}(Y_1)) \vee (x\in f^{-1}(Y_2))$ $\Leftrightarrow x\in f^{-1}(Y_1)\cup f^{-1}(Y_2)$.

στ) $(\forall x)\ x\in f^{-1}(Y_1\cap Y_2) \Leftrightarrow (\exists y\in Y_1\cap Y_2)y=f(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow [(\exists y)\ y\in Y_1 \wedge y\in Y_2]y=f(x) \Leftrightarrow [(\exists y\in Y_1)y=f(x)] \wedge$ $[(\exists y\in Y_2)y=f(x)] \Leftrightarrow x\in f^{-1}(Y_1) \wedge x\in f^{-1}(Y_2) \Leftrightarrow x\in f^{-1}(Y_1)\cap f^{-1}(Y_2)$.

5. Επειδή ισχύει $f \subseteq g$, αρκεί να δειχτεί $g \subseteq f$. Τότε θα έχομε $f = g$.

'Εστω (x,y) τυχόν ζεύγος, με $(x,y) \in g \Rightarrow y = g(x)$. (1) Τότε επειδή $x \in A$ και $f : A \mapsto B$, υπάρχει $y_1 \in B$ με $y_1 = f(x) \Rightarrow (x,y_1) \in f$. (2) Επειδή όμως $f \subseteq g$, θα έχομε $(x,y_1) \in g \Rightarrow y_1 = g(x)$. (3) Από τις σχέσεις (1) και (3) προκύπτει $y = y_1$. 'Ετσι, θέτοντας στην σχέση (2) $y_1 = y$ παίρνομε $(x,y) \in f$. 'Αρα αποδείχτηκε ότι για κάθε (x,y) με $(x,y) \in g$ ισχύει $(x,y) \in f$, δηλαδή $g \subseteq f$.

6. Επειδή για κάθε x έχομε, $(f\circ(g\circ\varphi))(x) = f[g(\varphi(x))] = ((f\circ g)\circ\varphi)(x)$, αρκεί να δειχτεί ότι $\mathcal{D}(f\circ(g\circ\varphi)) = \mathcal{D}((f\circ g)\circ\varphi)$.

Πραγματικά:

$$\mathcal{D}(f\circ(g\circ\varphi)) = \{x \in A : x \in \mathcal{D}(g\circ\varphi) \wedge (g\circ\varphi)(x) \in \mathcal{D}(f)\} =$$
$$= \{x \in A : [x \in \mathcal{D}(\varphi) \wedge \varphi(x) \in \mathcal{D}(g)] \wedge (g\circ\varphi)(x) \in \mathcal{D}(f)\} =$$
$$= \{x \in A : x \in \mathcal{D}(\varphi) \wedge [\varphi(x) \in \mathcal{D}(g) \wedge (g\circ\varphi)(x) \in \mathcal{D}(f)]\} =$$
$$= \{x \in A : x \in \mathcal{D}(\varphi) \wedge \varphi(x) \in \mathcal{D}(f\circ g)\} = \mathcal{D}((f\circ g)\circ\varphi).$$

<u>Παράγραφος 6.10</u>.

1. α) Αρκεί να θεωρήσει κανείς την ταυτοτική συνάρτηση $i_A : A \xrightarrow{\text{επί}} A$.

β) Επειδή $A \approx B$, υπάρχει αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $f : A \xrightarrow{\text{επί}} B$. Τότε η f^{-1} είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση και μάλιστα $f^{-1} : B \overset{\text{επί}}{\longmapsto} A$.

γ) Επειδή $A \approx B$ και $B \approx \Gamma$, υπάρχουν αμφιμονοσήμαντες συναρτήσεις $f : A \xrightarrow{\text{επί}} B$ και $g : B \xrightarrow{\text{επί}} \Gamma$. Τότε η $g\circ f$ είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση και μάλιστα, $g\circ f : A \xrightarrow{\text{επί}} \Gamma$. 'Αρα, $A \approx \Gamma$.

2. Αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι $T(1) \cup T(2) \cup \ldots \cup T(\nu) = T(\nu)$.

3. Σύμφωνα με την Πρόταση 6.5.3 (β), έχομε,
$\text{card}(A-B) = \text{card}\,A - \text{card}(A \cap B)$. 'Αρα,
$\text{card}(T(\nu)-\{\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_\kappa\}) = \text{card}\,T(\nu) - \text{card}(T(\nu) \cap \{\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_\kappa\}) = \nu - \text{card}\{\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_\kappa\} = \nu-\kappa$.

4. Θα αποδείξομε το ζητούμενο επαγωγικά.
Αν το A είναι μονοσύνολο, δηλαδή $A = \{\alpha\}$, τότε έχομε $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{\alpha\}\}$.

'Αρα card $\mathcal{P}(A) = 2 = 2^1$. 'Ομοια, αν card $A = 2$, δηλαδή $A = \{\alpha,\beta\}$, παίρνομε $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\alpha;\beta\}\}$. 'Αρα card $\mathcal{P}(A) = 4 = 2^2$.

Ας υποθέσομε τώρα ότι αποδείξαμε ότι ισχύει: card $A = \kappa \Rightarrow$ card $\mathcal{P}(A) = 2^\kappa$ για κάθε $\kappa \leq \nu$.

'Εστω τώρα A ένα σύνολο με $\nu+1$ στοιχεία, δηλαδή card $A = \nu+1$. Θέτομε τότε $A = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu,\alpha_{\nu+1}\} = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu\} \cup \{\alpha_{\nu+1}\}$. Παρατηρούμε ότι τα υποσύνολα του A είναι όλα τα υποσύνολα του συνόλου $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu\}$ και επιπλέον εκείνα που προκύπτουν από τα υποσύνολα αυτά αν τους επισυνάψομε το στοιχείο $\alpha_{\nu+1}$. Αλλά τα υποσύνολα του $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu\}$ είναι σύμφωνα με την υπόθεσή μας πλήθους 2^ν. Από κάθε ένα από τα υποσύνολα του $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu\}$, προκύπτει ένα επί πλέον υποσύνολο, για το σύνολο A, αν του επισυνάψομε το στοιχείο $\alpha_{\nu+1}$. 'Ετσι ο αριθμός των υποσυνόλων του A είναι διπλάσιος από τον αριθμό των υποσυνόλων του A είναι διπλάσιος από τον αριθμό των υποσυνόλων του $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu\}$. 'Αρα έχομε:

$$\text{card } A = 2 \text{ card } \mathcal{P}(\{\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu\}) = 2\cdot 2^\nu = 2^{\nu+1}.$$

5. Κατ'αρχή παρατηρούμε ότι επειδή $B-A \subseteq B$ και το B είναι πεπερασμένο, έχομε ότι και το σύνολο $B-A$ είναι πεπερασμένο.

Για να δείξομε ότι το σύνολο $A-B$ είναι αριθμήσιμο, όταν A αριθμήσιμο και B πεπερασμένο, θα περιοριστούμε στην περίπτωση που το B είναι μονοσύνολο. Στη συνέχεια, εύκολα με επαγωγή, μπορούμε να συμπληρώσομε την απόδειξη.

'Ετσι, υποθέτομε ότι A αριθμήσιμο και $B = \{\beta\}$. Αν $\beta \notin A$, τότε $A-B = A$ και το συμπέρασμα είναι φανερό. 'Εστω τώρα $\beta \in A$. Επειδή το A είναι αριθμήσιμο, θέτομε $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ και υποθέτομε ότι $\beta = x_\kappa$, $\kappa \in \mathbb{N}$. Τότε η συνάρτηση με τύπο

$$f(\nu) = \begin{cases} x_\nu, & \text{αν } \nu = 1,2,\ldots,\kappa-1 \\ \\ x_{\nu+1}, & \text{αν } \nu = \kappa, \kappa+1, \ldots \end{cases}$$

είναι μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση του $\mathbb{N}$ επί του συνόλου $\{x_1, x_2, \ldots, x_{\kappa-1}, x_{\kappa+1}, \ldots\} = A-\{x_\kappa\} = A-\{\beta\} = A-B$. 'Αρα το σύνολο $A-B$ είναι αριθμήσιμο.

6. 'Εστω $A \cap B = \emptyset$. Τότε $A-B = A$ και $B-A = B$, οπότε το συμπέρασμα είναι φανερό.

'Εστω $A \cap B \neq \emptyset$ και $A-B = B-A$. Τότε υπάρχει αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $f : A-B \xrightarrow{\text{επί}} B-A$. Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση φ με τύπο

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in A-B \\ x, & \text{αν } x \in A \cap B. \end{cases}$$

Είναι πολύ εύκολο ν'αποδείξει κανείς ότι η φ είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση του A επί του B. 'Αρα $A \approx B$.

7. Αν υποθέσομε ότι $A \neq B$ τότε, επειδή $A \subseteq B$, θα ισχύει $A \subset B$. 'Αρα, από την Πρόταση 6.5.2, $\text{card}\, A < \text{card}\, B$, που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση $\text{card}\, A \geq \text{card}\, B$.

8. Είναι γνωστό (Πρόταση 6.5.3 (α)) ότι:

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}\, A + \text{card}\, B - \text{card}(A \cap B). \quad (1)$$

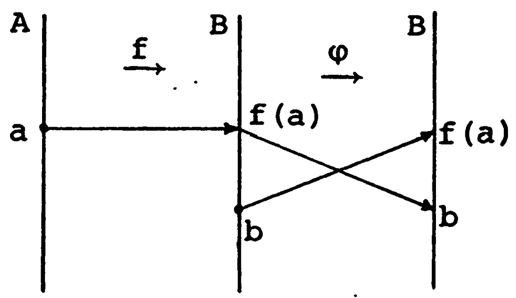
Από την (1), σε συνδυασμό με την $2\,\text{card}\,(A \cap B) = \text{card}\, A + \text{card}\, B$, παίρνομε $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A \cap B)$. Επειδή $A \cap B \subseteq A \cup B$, χρησιμοποιώντας την προηγούμενη 'Ασκηση 7, παίρνομε $A \cup B = A \cap B$.

'Ετσι, έχομε

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq A \cup B = A \cap B \subseteq B \\ \\ B \subseteq A \cup B = A \cap B \subseteq A \end{array}\right\} \Longrightarrow A = B.$$

9. Επειδή $A \approx B$, υπάρχει αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $f: A \xrightarrow{\text{επί}} B$. Αν $f(a) = b$, τότε ο περιορισμός $f/A-\{a\}$ της f πάνω στο σύνολο $A-\{a\}$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση του $A-\{a\}$ επί του $B-\{b\}$ και άρα $A-\{a\} \approx B-\{b\}$.

'Εστω τώρα $f(a) \neq b$. Τότε θεωρούμε τις συναρτήσεις f και φ όπως στο σχήμα



όπου η φ είναι συνάρτηση με τύπο:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \neq f(a) \text{ και } x \neq b \\ b, & \text{αν } x = f(a) \\ f(a), & \text{αν } x = b. \end{cases}$$

Είναι φανερό ότι η φ είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση του B επί του B. Άρα η συνάρτηση $\varphi\circ f$ είναι αμφιμονοσήμαντη του A επί του B και μάλιστα $(\varphi\circ f)(a) = \varphi(f(a)) = b$. Άρα, ο περιορισμός $\varphi\circ f/A-\{a\}$ της $\varphi\circ f$ είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση του $A-\{a\}$ επί του $B-\{b\}$. Επομένως $A-\{a\} \approx B-\{b\}$.

10. Αρκεί να εργαστεί κανείς όπως στην Άσκηση 1.

11. Αν τα σύνολα A,B είναι ξένα τότε έχομε αμέσως το συμπέρασμα από την Πρόταση 6.7.2.

Αν $A\cap B \neq \emptyset$ χρησιμοποιώντας την απόδειξη της ίδιας πρότασης παίρνομε $A\cup B \preceq \mathbb{N}$. (1)

Εξάλλου, από τη σχέση $A\cup B \supseteq A$, παίρνομε $A\cup B \succeq A$. Άρα, αφού $A \approx \mathbb{N}$, έχομε τελικά $A\cup B \succeq \mathbb{N}$. (2) Οι σχέσεις (1) και (2) δίνουν $A\cup B \approx \mathbb{N}$.

12. α) Έστω $f(x) = f(y)$, με x,y εν $(-1,1)$. Τότε $\frac{\beta-\alpha}{2}x + \frac{\beta+\alpha}{2} = \frac{\beta-\alpha}{2}x + \frac{\beta+\alpha}{2} \Rightarrow \frac{\beta-\alpha}{2}x = \frac{\beta-\alpha}{2}y$. Επειδή $\beta > \alpha$, παίρνομε $\beta-\alpha \neq 0$ και ακόμη $\frac{\beta-\alpha}{2} \neq 0$. Επομένως, $\frac{\beta-\alpha}{2}x = \frac{\beta-\alpha}{2}y \Rightarrow x = y$. Άρα η συνάρτηση f είναι αμφιμονοσήμαντη. Επειδή $\frac{\beta-\alpha}{2} > 0$, για τυχόν $x \in (-1,1)$ παίρνομε: $-1 < x < 1 \Rightarrow \frac{\beta-\alpha}{2}(-1) < \frac{\beta-\alpha}{2}x < \frac{\beta-\alpha}{2}\cdot 1 \Rightarrow \frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{\beta+\alpha}{2} < \frac{\beta-\alpha}{2}x + \frac{\beta+\alpha}{2} < \frac{\beta-\alpha}{2} + \frac{\beta+\alpha}{2} \Rightarrow \alpha < \frac{(\beta-\alpha)x}{2} + \frac{\beta+\alpha}{2} < \beta$. Άρα η f είναι συνάρτηση του $(-1,1)$ στο διάστημα (α,β).

Απομένει να αποδειχτεί ότι η f είναι επί του (α,β). Έστω y τυχόν, με $y \in (\alpha,\beta)$. Αρκεί να δειχτεί ότι υπάρχει $x \in (-1,1)$ με $y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{(\beta-\alpha)x}{2} + \frac{\beta+\alpha}{2}$. Επιλύοντας την τελευταία σχέση ως προς x, παίρνομε $x = \frac{2y-\beta-\alpha}{\beta-\alpha}$. Έτσι, αρκεί ν'αποδειχτεί ότι $x \in (-1,1)$. Για το σκοπό αυτό παίρνομε διαδοχικά $\alpha < y < \beta \Rightarrow 2\alpha < 2y < 2\beta \Rightarrow \beta-\alpha <$
$< 2\alpha-\beta-\alpha < 2y-\beta-\alpha < 2\beta-\beta-\alpha \Rightarrow \alpha-\beta < 2y-\beta-\alpha < \beta-\alpha$.

Επειδή $\beta-\alpha > 0$, η τελευταία σχέση δίνει $\frac{\alpha-\beta}{\beta-\alpha} < \frac{2y-\beta-\alpha}{\beta-\alpha} < \frac{\beta-\alpha}{\beta-\alpha} \Rightarrow$
$\Rightarrow -1 < \frac{2y-\beta-\alpha}{\beta-\alpha} < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \Rightarrow x \in (-1,1)$.

β) Από το (α) παίρνομε $(\alpha,\beta) = (-1,1)$ και $(\gamma,\delta) = (-1,1)$. 'Αρα: $(\alpha,\beta) = (-1,1)$ και $(-1,1) = (\gamma,\delta) \Rightarrow (\alpha,\beta) = (\gamma,\delta)$.

Παράγραφος 7.9. .

6) Αρκεί να εφαρμόσει κανείς την Πρόταση 7.8.1.

8) Η σχέση $3\cdot(1abcde_{(10)}) = abcde1_{(10)}$, γράφεται:
$3(1\cdot 10^5+a\cdot 10^4+b\cdot 10^3+c\cdot 10^2+d\cdot 10+e) = a\cdot 10^5+b\cdot 10^4+c\cdot 10^3+d\cdot 10^2+e\cdot 10+1$
$\Rightarrow 7e+70d+700c+7000b+70000a = 300000-1 \Rightarrow 7(e+10d+100c+1000b+10000a) =$
$= 299999 \Rightarrow 7(abcde_{(10)}) = 299999$.

Η τελευταία σχέση σημαίνει ότι ο αριθμός 7 πρέπει να διαιρεί τον αριθμό 299999 και να δίνει πηλίκο τον αριθμό $abcde_{(10)}$. Πραγματικά, η διαίρεση 299999 : 7 δίνει πηλίκο 42857 και υπόλοιπο 0. 'Ετσι έχομε: $a=4$, $b=2$, $c=8$, $d=5$ και $e=7$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν Α,Β και Γ είναι υποσύνολα ενός βασικού συνόλου, ν'αποδειχτούν οι σχέσεις:

α) $A-B = B^c - A^c$

β) $(A\cup B)\cap(A^c\cup\Gamma)\cap(B\cup\Gamma) = (A\cup B)\cap(A^c\cup\Gamma)$

γ) $[(A\cap\Gamma)^c\cup(A^c\cap B)]^c\cap(A\cup\Gamma) = A\cap\Gamma$.

2. Αν Α και Β είναι τυχόντα σύνολα, ν'αποδειχτούν οι σχέσεις:

α) $A-B = A \iff B-A = B$

β) $A-B = B-A \iff A = B$.

3. Αν $A\neq\emptyset$ και Β,Γ τυχόντα σύνολα, ν'αποδειχτεί ότι:

α) $A\times B\subseteq A\times\Gamma \Rightarrow B\subseteq\Gamma$

β) $A\times B = A\times\Gamma \Rightarrow B=\Gamma$.

4. Αν $\sigma : A\to B$ και $g : A\to B$ είναι τυχούσες σχέσεις, ν'αποδειχτεί ότι:

$$\sigma\subseteq g \iff \sigma^{-1}\subseteq g^{-1}.$$

5. Στο σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών ορίζουμε τη σχέση σ με τύπο:

$$x\sigma y \iff (\exists\, k\in\mathbb{N})\ \ xy = k^2.$$

Ν'αποδειχτεί ότι η σ είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{N}$.

6. Έστω $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ και $\sigma : A\to A$ μια σχέση που ορίζεται με τον τύπο, $x\sigma y \iff x+2 = y$. Να βρεθεί το γράφημα της σ.

7. Να γίνει το ίδιο για τη σχέση $\sigma : \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, που ορίζεται με τον τύπο $x\sigma y \iff x^2-y^2 = 0$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & \text{αν } x\neq 0 \\ 0, & \text{αν } x=0 \end{cases}$.

Να βρεθούν τα σύνολα $f([-1,+1])$, $f([0,2])$ και $f^{-1}((0,2))$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+2}{x-1}, & \text{αν } x\neq 1 \\ 3, & \text{αν } x=1 \end{cases}.$$

Ν'αποδειχτεί ότι η f είναι αμφιμονοσήμαντη και επί. Να βρεθεί η συνάρτηση f^{-1}.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x|x|$. Ν'αποδειχτεί ότι η f είναι αμφιμονοσήμαντη και επί και να βρεθεί η συνάρτηση f^{-1}.

11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ και $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπους $f(x)=\sqrt{x}$ και $\varphi(x)=2x+3$. Να βρεθεί η συνάρτηση $\varphi\circ f$.

12. Να γίνει το ίδιο για τις συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$, $x\in\mathbb{R}-\{1,-1\}$ και $\varphi(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,\infty)$.

13. N'αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ με τύπο $f(x,y)=2^x(2y+1)$ είναι αμφιμονοσήμαντη.

14. Αν A,B και Γ είναι πεπερασμένα σύνολα, ν'αποδειχθεί ότι:

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(A\cup B\cup\Gamma) &= \operatorname{card}A+\operatorname{card}B+\operatorname{card}\Gamma+\operatorname{card}(A\cap B\cap\Gamma)-\operatorname{card}(A\cap B)-\\ &\quad-\operatorname{card}(A\cap\Gamma)-\operatorname{card}(B\cap\Gamma).\end{aligned}$$

15. Αν $A\approx\mathbb{N}$ και B είναι ένα πεπερασμένο σύνολο ν'αποδειχτούν τα παρακάτω·

(i) $A\cup B\approx\mathbb{N}$

(ii) $A-B\approx\mathbb{N}$

(iii) $A\times B\approx\mathbb{N}$.

16. Να εξεταστεί αν υπάρχουν μονοψήφιοι αριθμοί a,b και c τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$2(3abc_{(10)})=abc8_{(10)}.$$

17. Να εξεταστεί αν μπορεί να ισχύει η ισότητα

$$2\cdot(1abc_{(3)})=abc1_{(3)}+1012_{(3)}.$$

18. Να βρεθούν τα ψηφία α και β ώστε να ισχύει η ισότητα

$$1\alpha\beta0_{(2)}\cdot 11_{(2)}=100100_{(2)}.$$

19. Να επιλυθούν οι εξισώσεις:

$$10_{(2)}\cdot(x+10001_{(2)})=11100110_{(2)}$$

$$212_{(3)}\cdot(x-21001_{(3)})+101_{(3)}=22220_{(3)}$$

$$\frac{x+11101_{(2)}}{1100_{(2)}} = 101_{(2)} .$$

20. Προκειμένου να γράψουμε αριθμούς στο εντεκαδικό σύστημα θέτουμε a = 10. Να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{x+a0_{(11)}}{1a_{(11)}} = 119_{(11)} + 8a_{(11)} .$$

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ

Α

Β

Γ

Δ

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]