ΚΟΛΕΖΑ ΕΥΓΕΝΙΑ

ΔΙΑΙΡΕΣΗ: Μια υπόθεση που ... μοιράζει

Ανιχνευτική έρευνα για τον εντοπισμό βασικών δυσκολιών κατά την εφαρμογή του αλγόριθμου και την επίλυση προβλημάτων διαίρεσης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κολέζα Ευγενία

ΔΙΑΙΡΕΣΗ: Μια υπόθεση που ... μοιράζει

Ανιχνευτική έρευνα για τον εντοπισμό βασικών δυσκολιών κατά την εφαρμογή του αλγόριθμου και την επίλυση προβλημάτων διαίρεσης

Εισαγωγή

Η λύση προβλημάτων είναι μια από τις πιο ουσιαστικές δραστη ριότητες της διδασκαλίας των μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο, κυρίως γιατί δίνει την αφορμή να εμφανισθούν και να συζητηθούν στην τάξη οι πολλές και ποικίλες πτυχές - κυρίως εννοιολογικού χαρακτήρα - βασικών αριθμητικών εννοιών όπως οι τέσσερις πράξεις, τα κλάσματα, οι δεκαδικοί κ.λπ. Δυστυχώς, τις περισσότερες φορές, οι μαθητές δεν έχουν την ευκαιρία να αποκτήσουν παρά μια στενή μόνο γνωστική αντίληψη τέτοιων εννοιών, είτε διότι τα είδη των προβλημάτων που περιέχουν τα εγχειρίδια καλύπτουν μέρος μόνο του όλου φάσματος της επιδιωκόμενης γνώσης, είτε διότι αυτή η γνώση εισάγεται μονομερώς από το δάσκαλο.

Σε αυτά τα πλαίσια, η αριθμητική πράξη της διαίρεσης παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον τόσο από καθαρά αλγοριθμική άποψη όσο και ως προς τις γνωστικές και διδακτικές της προεκτάσεις.

Οσον αφορά τον αλγόριθμο της διαίρεσης μια σειρά από έρευνες έχουν δείξει ότι δημιουργεί σοβαρά προβλήματα στο μισό τουλάχιστον μαθητικό πληθυσμό (FOXMAN, 1980 - BUXTON, 1981 - LAING AND MEYER, 1982), τα οποία συνεχίζουν να υπάρχουν και μετά το δημοτικό σχολείο (HART, 1981). Επιπλέον, όπου αυτό είναι δυνατό, τα παιδιά αποφεύγουν να χρησιμοποιούν τον αλγόριθμο της διαίρεσης και καταφεύγουν σε διάφορες άλλες, άτυπες διαδικασίες (διαδοχικές δοκιμές, επα ναλαμβανόμενες διαιρέσεις κ.λπ.) (BROWN 1982). Και όλα αυτά, παρά το γεγονός ότι ένα πολύ μεγάλο καμμάτι της διδασκαλίας αφιερώνεται από τη δευτέρα κιόλας δημοτικού στην εκτέλεση του αλγόριθμου της διαίρεσης. Βέβαια, θα μπορούσε κανείς να υποστηρίξει ότι η ευρεία διάδοση των αριθμομηχανών έχει καταστήσει σχετικά αδρανές το πρόβλημα του πως κάνουμε διαίρεση. Κατά πόσο, όμως, μια τέτοια διέξοδος είναι διδακτικά σωστή;

Πιο απλά: Πόσο σκόπιμο είναι ο δάσκαλος να "κουράζει" τους μαθητές του βάζοντάς τους να κάνουν διαιρέσεις όταν το πάτημα δύο κουμπιών θα τους έδινε αυτόματα το αποτέλεσμα;

Σχετικά με τη διαίρεση, όμως, δε μας ενδιαφέρει μόνο το **πως** αλλά και το **πότε** και **γιατί** κάνουμε διαίρεση.

Μη βιαστείτε να απαντήσετε ότι το θέμα είναι απλό: η ανάλυση των αποτελεσμάτων της εργασίας που θα παρουσιάσουμε δείχνει ότι περίπου το 65% των ατόμων που τους απευθύνεται άμεσα ή έμμεσα η ερώτηση "πότε διαιρούμε" απαντούν: "όταν μοιράζουμε κάτι".

Να, λοιπόν, ένα σημαντικό ερώτημα που θα μας απασχολήσει: η έννοια της διαίρεσης και ο βαθμός συνειδητοποίησής της από τους μαθητές του δημοτικού σχολείου.

Το θέμα της διαίρεσης θα προσπαθήσουμε να το προσεγγίσουμε θεωρητικά και εμπειρικά. Για το θεωρητικό κομμάτι θα επικαλεσθούμε την υπάρχουσα βιβλιογραφία και με βάση αυτή θα διατυπώσουμε κάποιες υποθέσεις. Τις υποθέσεις αυτές θα ελέγξουμε στη συνέχεια στηριζόμενοι στα αποτελέσματα της πρώτης φάσης μιας έρευνας που άρχισε κατά το παρελθόν έτος, τόσο σε δημοτικά σχολεία της πόλης των Ιωαννίνων όσο και σε πανεπιστημιακό πλαίσιο και που αποσκοπεί στον εντοπισμό των γνωστικών δυσκολιών που συναντούν οι μαθητές σε σχέση με τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις.

Πιο συγκεκριμένα το Μάιο του '92 δόθηκε ένα ερωτηματολόγιο 27 ερωτήσεων που αφορούσαν στην έννοια της διαίρεσης, σε 64 μαθητές της τετάρτης και 67 μαθητές της πέμπτης δημοτικού. Ο χαρακτήρας του ερωτηματολογίου ήταν διερευνητικός. Στόχος μας ήταν να παρατηρήσουμε τη συμπεριφορά των μαθητών απέναντι σε συγκεκριμένα θέματα σχετικά με τη διαίρεση και με βάση αυτές τις παρατηρήσεις να οργανώσουμε την τελική μας έρευνα.

Την ίδια χρονική περίοδο δόθηκε σε 100 φοιτητές του 4ου έτους του Π.Τ.Δ.Ε. το ερώτημα: "Φτιάξε ένα πρόβλημα διαίρεσης και αξιολόγησέ το ως προς τη δυσκολία του αν υποθέσουμε ότι απευθύνεσαι σε μαθητές του δημοτικού σχολείου". Το ερώτημα αυτό δόθηκε γιατί θεωρούμε ότι η ικανότητα του να φτιάχνεις προβλήματα είναι ίσως ουσιαστικότερη και προηγείται εκείνης του να μπορείς να λύνεις προβλήματα για λόγους που θα α ναπτύξουμε στις επόμενες σελίδες.

1. Φαινομενολογία[1] της διαίρεσης (Phenomenology of the division)

Η αριθμητική πράξη της διαίρεσης έχει διάφορες έννοιες που διαφέρουν μεταξύ τους φανομενολογικά.

Ετσι η διαίρεση μπορεί να αντιμετωπισθεί σαν:

-**Πράξη συντόμευσης της διαδικασίας των συνεχών αφαιρέσεων**[2]

π.χ. $\underbrace{((((((24-4)-4)-4)-4)-4)-4)}_{6 \text{ φορές}}=0 \longrightarrow 24:4=6$

- **Διαδικασία μοιράσματος σε ίσα μέρη.**
- **Διαδικασία αντίστροφη εκείνης του πολλαπλασιασμού.**

Να μερικές καταστάσεις της πραγματικής ζωής που οδηγούν στην πράξη της διαίρεσης μέσα από μια **διαδικασία συνεχών αφαιρέσεων:**

-Μεταφέρω 30 τούβλα από ένα σημείο σε ένα άλλο. Κάθε φορά μπορώ να μεταφέρω 3 τούβλα. Πόσες διαδρομές θα κάνω;

---

1 Σύμφωνα με τον H. Freudenthal (1983) οι μαθηματικές έννοιες, δομές και ιδέες έχουν εφευρεθεί για να οργανώσουν τα περιεχόμενα του φυσικού, κοινωνικού και νοητού μας κόσμου. Φαινομενολογία μιας έννοιας, δομής ή ιδέας είναι η περιγραφή της σε σχέση με τα φαινόμενα που προκάλεσαν τη δημιουργία της και τη σταδιακή επέκτασή της σαν αντικείμενο μιας μαθησιακής διαδικασίας.
Τα φαινόμενα που βρίσκονται κάτω από μαθηματικές έννοιες και δομές χρησι μοποιούνται σαν σημείο αφετηρίας αλλά και σαν εφαρμογή (TREFFERS AND GOFFREE, 1987).

2 Στα "Μαθηματικά Δευτέρας Δημοτικού, Βιβλίο για το Δάσκαλο", 1990: 313, διαβάζουμε: "Μπορούμε να πούμε πως η διαίρεση είναι μια πράξη επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης η μία (ενέργεια) πράξη αντίστροφη του πολλαπλασιασμού π.χ. α) to να διαιρέσω το (8:2) σημαίνει επίσης πόσες φορές θα επαναλάβω την αφαίρεση του 2, για να μείνει στο τέλος μηδέν ... β) αλλά το (8:2) σημαίνει επίσης πόσες φορές χωράει το 2 στο 8, ... που εκφράζει πόσες φορές πρέπει να πάρω το 2 για να κάνω 8 ...".

-Μετράω μια απόσταση παίρνοντας σαν μονάδα το άνοιγμα των ποδιών μου (~ 80 cm). Πόσες τέτοιες μονάδες καλύπτουν την απόστασή μου;

-Αδειάζω ένα βαρέλι κρασί χρησιμοποιώντας ένα τρίλιτρο δοχείο. Πόσα αδειάσματα θα κάνω;

Να κάποιες άλλες καταστάσεις όπου η διαίρεση είναι το αποτέλεσμα μιας διαδικασίας **μοιράσματος σε ίσα μέρη:**

Μοιράζουμε ίσες ποσότητες του ίδιου αντικειμένου σε π.χ. δέκα άτομα, κάθε ένα από αυτά τα άτομα παίρνει κάποιο ή κάποια "δέκατα" της συνολικής ποσότητας.

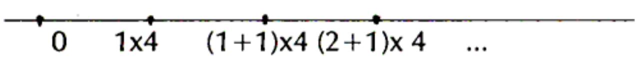
-Ας υποθέσουμε ότι μοιράζουμε μια τούρτα 15 κομματιών.

Αναφορικά με αυτή την κατάσταση δύο είναι οι πιθανές ερωτήσεις που ενδέχεται να διατυπώσουμε:

- Πόσα κομμάτια αντιστοιχούν σε κάθε άτομο, αν μοιράσουμε την τούρτα σε 4 άτομα;
- Πόσα άτομα θα δοκιμάσουν την τούρτα αν το κάθε άτομο παίρνει από 3 κομμάτια;

Σαν πράξη αντίστροφη του πολλαπλασιασμού η διαίρεση αντιμετωπίζεται ως εξής: Τα πολλαπλάσια ενός αριθμού δ ορίζουν στους φυσικούς αριθμούς διαστήματα [πδ, (π+1)δ]. Ο αριθμός Δ της σχέσης Δ=πδ+υ βρίσκεται μέσα σε ένα από αυτά τα διαστήματα ή συμπίπτει με κάποιο από τα άκρα του. Στην πρώτη περίπτωση ο Δ προσεγγίζεται μετά από π "μεγάλα βήματα" και υ "απλά βήματα".

Ας δούμε ένα παράδειγ μα: Για δ=4 έχουμε τα διαστήματα



Οποιοσδήποτε Δ της σχέσης Δ=πδ+υ θα βρίσκεται μέσα σε κάποιο από αυτά τα διαστήματα. Δεν έχουμε παρά να πάρουμε τα πολλαπλάσια του 4 και με την πρόσθεση απλών βημάτων υ, όπου υ<δ δημιουργούμε το σύνολο των πιθανών τιμών του Δ.

0	4	8	....
0 + 1	4 + 1	8 + 1	.....
0 + 2	4 + 2	8 + 2	....
0 + 3	4 + 3	8 + 3	.....

Με αυτόν τον τρόπο γίνεται η πρώτη επαφή των παιδιών με τη διαίρεση (Β' δημοτικού 2ο μέρος, 1989: 121). Το αν θα χρησιμοποιηθεί η αριθμογραμμή ή άλλες πραγματικές καταστάσεις (Γ' δημοτικού 2ο μέρος, 1990: 85) εξαρτάται από την ηλικία των παιδιών στα οποία απευθυνόμαστε και από παράγοντες που δεν θα θίξουμε στα πλαίσια αυτού του άρθρου.

Σύμφωνα με αυτό το σκεπτικό η αναζήτηση της λύσης της διαίρεσης π.χ. 15:4 ανάγεται στην αναζήτηση του διαστήματος μέσα στο οποίο βρίσκεται ο 15 (εδώ: 15 ∊ [3x4 , 4x4]. Το διάστημα αυτό θα μας φανερώσει και το πηλίκο καθ' υπεροχή (εδώ: 4) ή κατ' έλλειψη (εδώ: 3) ανάλογα με το πρόβλημα του οποίου λύση αποτελεί αυτή η διαίρεση.

Οι ρόλοι των διαιρέτη και πηλίκου δεν πρέπει να συγχέονται. Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας εξετάσουμε την περίπτωση της τέλειας διαίρεσης Δ=δ.π. Οσο και αν από καθαρά μαθηματική άποψη δ.π=π.δ (αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού), **η προηγούμενη ιδιότητα ισχύει μόνο στην περίπτωση που τα π και δ είναι καθαροί αριθμοί.**

Για παράδειγμα, συνηθίζουμε να διαβάζουμε τον πολλαπλασιασμό 21=3.7 σαν "3 φορές το 7" (7+7+7) ή "7 φορές το 3" (3+3+3+3+3+3+3).

Ακόμα κι αν και οι δύο εκφράσεις οδηγούν στο ίδιο αριθμητικό αποτέλεσμα, στην περίπτωση που τα 3 και 7 αντιπροσωπεύουν μεγέθη,η εναλλαγή των ρόλων είναι λανθασμένη: Οι 3 εβδομάδες (=3.7 ημέρες)=21 ημέρες, διαφέρουν εννοιολογικά από τα 7 τριήμερα (=7.3 ημέρες)= 21 ημέρες όσο και αν το τελικό αποτέλεσμα είναι το ίδιο.

Το ίδιο ισχύει π.χ. για τις 3 ντουζίνες αυγά (=3.12 αυγά).

Στη διδακτική πράξη αντιμετωπίζοντας τη διαίρεση σαν διαδικασία μοιράσματος σε ίσα μέρη ή σαν πράξη αντίστροφη του πολλαπλασιασμού, ενδέχεται να προσκρούσουμε σε κάποια εμπόδια (κοινά με εκείνα του πολλαπλασιασμού) που οφείλονται στην περιορισμένη εμβέλεια κάποιων ατελών μοντέλων που έχουν σχηματίσει οι νεαροί κυρίως μαθητές ως προς αυτή την πράξη (tacit knowledge κατά τον Fischbein - ή theorème èlève - κατά τον Vergnaud).

Από τα μοντέλα αυτά, δύο είναι τα επικρατέστερα :

- Η διαίρεση σαν επαναλαμβανόμενη αφαίρεση (και αντίστροφα: Ο πολλαπλασιασμός σαν επαναλαμβανόμενη πρόσθεση).

-Ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει ενώ η διαίρεση μικραίνει.

Και εάν μεν το πρόβλημα είναι της μορφής:

"Με ένα κιλό σιτάρι παίρνουμε 0,75 κιλά αλεύρι. Τα 18 κιλά αλεύρι από πόσα κιλά σιτάρι τα πήραμε; (ή αντίστροφα: Με 15 κιλά σιτάρι πόσα κιλά αλεύρι θα πάρουμε;)" το μοντέλο μπορεί να λειτουργήσει.

$$\underbrace{((18-0{,}75)-0{,}75)- \ldots 0{,}75)}_{24\ \text{φορές}}=0$$

$$(\text{ή αντίστροφα } \underbrace{0{,}75+0{,}75+ \ldots +0{,}75}_{15\ \text{φορές}}=11{,}25 \text{ κιλά αλεύρι})$$

Εάν όμως το πρόβλημα είναι της μορφής:

"Παίρνουμε ένα κιλό αλεύρι από 1,5 κιλό σιτάρι. Πόσο αλεύρι θα πάρουμε από 0,75 κιλά σιτάρι; "

Το πρώτο μοντέλο παύει να εφαρμόζεται, αλλά υπάρχει κίνδυνος τη θέση του να πάρει ενδεχόμενα το δεύτερο, σύμφωνα με το οποίο, αφού θα πάρουμε **λιγότερο** αλεύρι (δεδομένου ότι το σιτάρι είναι λιγότερο), η πράξη που θα κάνουμε για να βρούμε ακριβώς την ποσότητα είναι ... **διαίρεση!!!**

Ολες οι έρευνες γύρω από τον τρόπο αντιμετώπισης του αλγόριθμου της διαίρεσης απ' τα παιδιά του δημοτικού σχολείου, συγλίνουν στο ότι οι άτυπες στρατηγικές που συνήθως χρησιμοποιούνται είναι εκφράσεις διαφόρων προσθετικών, αφαιρετικών ή πολλαπλασιαστικών μοντέλων που υπάρχουν και λειτουργούν ήδη πριν τη διδασκαλία της διαίρεσης. Πιο συγκεκριμένα το πηλίκο μιας διαίρεσης Δ:δ (τελείας ή ατελούς) βάσει αυτών των μοντέλων υπολογίζεται με:

-διαδοχικές προσθέσεις,

-διαδοχικές αφαιρέσεις,

-διαδοχικές δοκιμές ως προς τον πιο κατάλληλο αριθμό ο οποίος πολλαπλασιαζόμενος με το δ προσεγγίζει όσο το δυνατό περισσότερο τον Δ.

Αξίζει να σημειώσουμε, επίσης, ότι η αντιμετώπιση της διαίρεσης σαν πράξη αντίστροφης του πολλαπλασιασμού και **η αναζήτηση του πηλίκου μέσω διαδοχικών δοκιμών, είναι η πιο συνηθισμένη στρατηγική** και ότι παρά το γεγονός ότι "η διαίρεση διδάσκεται στο σχολείο βασικά ως επαναλαμβανόμενη αφαίρεση, μόνο το 0,2% των μαθητών της τρίτης τάξης εφαρμόζει αυτή τη μέθοδο" (ΜΑΝΙΟΥ - ΒΑΚΑΛΗ, Μ, 1992).

2. Είδη διαίρεσης ως προς την έννοια της πράξης (Meaning of the division)

Η αριθμητική πράξη της διαίρεσης μπορεί να αντιμετωπισθεί από διάφορες οπτικές γωνίες ως προς την έννοιά της. Η διάκριση των διαφόρων εννοιών της διαίρεσης που προτείνουν οι BOERO, FERRARI, FERRERO (1989) είναι και η περισσότερο γνωστή.

Περιληπτικά, λοιπόν, έχουμε τις εξής κατηγορίες διαιρέσεων ως προς την έννοιά τους.

Α. Διαίρεση Μερισμού (Partitive division)

Αναφέρεται στο χωρισμό μιας ποσότητας σε ίσα μέρη (equal sharing or partition). Το πηλίκο μιας τέτοιας διαίρεσης είναι ένας αριθμός με διαστάσεις περισσότερο ή λιγότερο "τυποποιημένες", δηλαδή περισσότερο ή λιγότερο εν χρήσει σε κοινωνικό πλαίσιο. Ας δούμε κάποια παραδείγματα:

"Με 120 kg γάλα γεμίσαμε 15 μπουκάλια. Ποια είναι η περιεκτικότητα του κάθε μπουκαλιού;"

Απάντηση: 120 Kg : 15 μπουκάλια = 8 Kg / μπουκάλι (περιεκτικότητα).

"Για 18 Kg αλεύρι χρειαζόμαστε 27 Kg σιτάρι. Πόσα κιλά σιτάρι χρειαζόμαστε για 1 Kg αλεύρι;"

Απάντηση: 27 Kg αλεύρι : 18 Kg σιτάρι = 1,5 Kg σιτάρι / Kg αλεύρι.

"12 Kg πατάτες κοστίζουν 960 δραχμές. Πόσο κοστίζει το Kg;"

Απάντηση: 960 δραχμές : 12 Kg = 80 δρχ. / Kg **(τιμή κιλού)**.

Β. Διαίρεση Μέτρησης (Quotative or measurement division)

Αναφέρεται στη δημιουργία ομάδων με τον ίδιο αριθμό στοιχείων (equal grouping or quotition). Κάνουμε μια τέτοια διαίρεση όταν θέλουμε να βρούμε **πόσες φορές** μια ποσότητα ενός μεγέθους περιέχεται σε μια άλλη ποσότητα του **ίδιου μεγέθους**.

Ας δούμε ένα παράδειγμα:

"Για να πάρουμε 1 κιλό αλεύρι χρησιμοποιούμε 1,5 κιλό σιτάρι. Με 3 κιλά σιτάρι πόσα κιλά αλεύρι θα πάρουμε;"

Απάντηση: 3 κιλά σιτάρι : 1,5 κιλό σιτάρι = 2 (καθαρός αριθμός χωρίς μονάδες).Επειδή το σιτάρι που έχουμε είναι διπλάσιο του αρχικού, θα πάρουμε διπλάσια ποσότητα αλεύρι, δηλ. 2 κιλά αλεύρι.

Η απάντηση μπορεί να δοθεί και κάτω από τη μορφή:

$$\frac{3\ (\text{κιλά σιτάρι})}{1{,}5\ (\text{κιλά σιτάρι})} = \frac{(\text{κιλά αλεύρι})}{1\ (\text{κιλό αλεύρι})}$$

Γ. Η Διαίρεση σαν σύγκριση ομοειδών μεγεθών ή Λόγος (Ratio)

Κάνοντας διαίρεση αυτού του τύπου αναζητούμε **πόσες φορές** μια ποσότητα ενός μεγέθους είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από μια άλλη ποσότητα του **ίδιου** μεγέθους.

Να μερικά παραδείγματα:

"Για μια φούστα χρειαζόμαστε 2 μέτρα ύφασμα, ενώ για ένα κουστούμι 6 μέτρα. Πόσες φορές περισσότερο ύφασμα απαιτεί το κοστούμι;"

Απάντηση: 6 μέτρα : 2 μέτρα = 3 (καθαρός αριθμός).

"Δύο κούκλες Α και Β έχουν το ίδιο σχήμα, αλλά διαφορετικό μέγεθος. Αν το ύψος της Α είναι 14 cm και ξέρουμε ότι η Α έχει διπλάσιο ύψος από τη Β, να βρεθεί το ύψος της Β".

Απάντηση:

$$\frac{\text{ύψος A}}{\text{ύψος B}} = 2 \quad \text{άρα} \quad \frac{14\ \text{cm}}{\text{ύψος B}} = 2$$

άρα ύψος Β = 7 cm.

"Δύο κούκλες Α και Β έχουν το ίδιο σχήμα, αλλά διαφορετικό μέγεθος. Αν το ύψος της Α είναι 14 cm και το ύψος της Β είναι 20 cm, τι μέρος του ύψους της Β αποτελεί το ύψος της Α;" (ή "**ποιος είναι ο λόγος** μεταξύ του ύψους της Α και του ύψους της Β;")

Απάντηση:

$$\frac{\text{ύψος A}}{\text{ύψος B}} = \frac{14\text{ cm}}{20\text{ cm}} = \frac{7}{10} \quad \text{άρα} \quad \text{ύψος A}=7/10 \text{ ύψους B.}$$

Οι κατηγορίες Β και Γ είναι ίδιες από λογική και μαθηματική άποψη. Και στις δύο περιπτώσεις το πηλίκο είναι καθαρός αριθμός (χωρίς διαστάσεις). Παρουσιάζονται, όμως, σαν ξεχωριστές περιπτώσεις γιατί χρησιμοποιούνται διαφορετικά στη διδακτική πράξη.

Δ. Η Διαίρεση σαν εκφραστής της σχέσης μιας ποσότητας ενός μεγέθους με τη μονάδα μέτρησης μιας άλλης ποσότητας ενός άλλου μεγέθους

Σ' αυτή την περίπτωση, το πηλίκο είναι ένα αυθύπαρκτο μέγεθος όπως π.χ. ταχύτητα, πυκνότητα, ειδικό βάρος κ.λπ.

Ας δούμε δύο παραδείγματα:

"Ένα αυτοκίνητο καταναλώνει 26 λίτρα βενζίνης μετά από ταξίδι 325 Km. Πόσα χιλιόμετρα κάνει με 1 λίτρο βενζίνης;"

Απάντηση: 325 Km : 26 λίτρα = 12,5 Km/λίτρο **(κατανάλωση).**

"Ένα αυτοκίνητο διανύει 600 Km σε 5 h. Πόσα χιλιόμετρα διανύει σε 1 h;

Απάντηση: 600 Km : 5 h = 120 Km/h **(ταχύτητα).**

Αυτή η τελευταία κατηγορία δεν χρησιμοποιείται συχνά στο δημοτικό σχολείο, αλλά είναι παρούσα σε όλες σχεδόν τις επιστήμες.

Ερευνες (HADASS, R. and BRANSKY, J., 1991) έδειξαν ότι οι δάσκαλοι είναι ελάχιστα ενημερωμένοι για το χαρακτήρα και τη σπουδαιότητά της, πράγμα που μπορεί να αποδοθεί στην απομάκρυνση των μαθηματικών, ιδιαίτερα των σχολικών μαθηματικών, από τις άλλες επιστήμες, κυρίως τη Φυσική.

3. Περιγραφή και στόχοι της έρευνας

Σύμφωνα με τα σχολικά εγχειρίδια, ένας μαθητής τετάρτης δημοτικού, προς το τέλος της σχολικής χρονιάς, μέσα από μια πληθώρα ασκήσεων έχει διδαχθεί τον τρόπο εκτέλεσης του αλγόριθμου της διαίρεσης στα πλαίσια των ακεραίων και έχει λύσει προβλήματα διαίρεσης, όπου η έννοια παρουσιάζεται κάτω από ποικίλες μορφές (διαίρεση μερισμού, μέτρησης κ.λπ.).

Την ίδια χρονική περίοδο ένας μαθητής της πέμπτης δημοτικού υποτίθεται ότι έχει ολοκληρώσει τη γνωριμία του με την πράξη της διαίρεσης εφ' όσον έχει λύσει μια πληθώρα προβλημάτων, τα αριθμητικά δεδομένα των οποίων επεκτείνονται στους κλασματικούς και συμμιγείς αριθμούς.

Η εκλογή των ερωτήσεων που θέσαμε στο δείγμα των 131 μαθητών τετάρτης και πέμπτης δημοτικού έγινε με βάση τις παραπάνω σκέψεις. Όσο για κάποιες ασκήσεις, που η επίλυσή τους απαιτούσε τη γνώση των δεκαδικών αριθμών είμασταν εκ των προτέρων ενήμεροι ότι θα ήταν χωρίς νόημα για τους μαθητές της τετάρτης τάξης.

Παρ' όλα αυτά σκεφθήκαμε ότι θα ήταν ενδιαφέρον να δοθεί ένα κοινό ερωτηματολόγιο και για τις δύο τάξεις για δύο κυρίως λόγους:

Αφενός γιατί πιστεύουμε ότι όσο και αν είναι σημαντικό να μπορεί ο μαθητής να δίνει το σωστό αποτέλεσμα σε μια άσκηση, είναι εξίσου σημαντικό να μπορεί μετά από μια σειρά από λογικές σκέψεις να δίνει ένα προσεγγιστικό αποτέλεσμα. Και η δυνατότητα να δοθεί ένα τέτοιο αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από τα αριθμητικά δεδομένα της άσκησης. Για παράδειγμα στην άσκηση: "Πόσο κοστίζει το κιλό το αλεύρι αν για 2,5 κιλά πληρώσαμε 480 δρχ.;" Μια απάντηση της μορφής "περίπου 200 δρχ." από ένα μαθητή της τετάρτης, θα ήταν εξαιρετικά ικανοποιητική.

Ενας δεύτερος λόγος που συνηγόρησε υπέρ ενός κοινού ερωτηματολογίου ήταν το γεγονός ότι για να μπορέσουμε να συγκρίνουμε τις επιδόσεις των μαθητών των δύο τάξεων, έπρεπε να τους δώσουμε τον ίδιο αριθμό ασκήσεων. Και αυτό γιατί για δεδομένο χρόνο, ο αριθμός των ασκήσεων αποτελεί σημαντική παράμετρο που επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα.

Συνολικά, λοιπόν, δόθηκαν 27 ασκήσεις σε διάρκεια δύο διδακτικών ωρών. Όσοι από τους μαθητές ήθελαν, μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν και την ώρα του διαλείμματος.

Αν και ο αριθμός των ασκήσεων φαίνεται αρκετά μεγάλος, οι μαθητές είχαν το χρόνο να δουλέψουν και αυτό φαίνεται από το μικρό σχετικά ποσοστό αποχής.

Εξάλλου, κάποιες από τις ασκήσεις ήταν εξαιρετικά εύκολες ακόμα και για μαθητές τετάρτης δημοτικού (π.χ. διαιρέσεις με διαιρέτη μονοψήφιο αριθμό).

Στις σελίδες που ακολουθούν θα αναλύσουμε μόνο 24 ασκήσεις από το σύνολο των ερωτήσεων και αυτό γιατί οι υπόλοιπες ξεφεύγουν από το σκοπό της συγκεκριμένης εργασίας.

Με τις ασκήσεις αυτές θελήσαμε να ελέγξουμε τις παρακάτω συγκεκριμένες ικανότητες των μαθητών της τετάρτης και πέμπτης δημοτικού σχετικά με την έννοια (κι όχι απλά αλγόριθμο) της διαίρεσης:

1. Διάκριση των όρων μιας διαίρεσης και γνώση των μεταξύ τους σχέσεων.
2. Εκτέλεση του αλγόριθμου της διαίρεσης και διερεύνηση κάποιων εσφαλμένων πεποιθήσεων σχετικά με την πράξη της διαίρεσης.
3. Αναγνώριση και επίλυση προβλημάτων διαίρεσης.
4. Κριτική αντιμετώπιση της έννοιας της διαίρεσης.
5. Κατασκευή προβλημάτων με αφετηρία μια δεδομένη διαίρεση.

Πριν περάσουμε στην παρουσίαση και σχολιασμό των αποτελεσμάτων της πρώτης αυτής φάσης της έρευνάς μας, θα θέλαμε να εκθέσουμε τις βασικές θεωρητικές θέσεις μας σχετικά με το θέμα της επίλυσης και κατασκευής προβλημάτων διαίρεσης. Και αυτό γιατί βάσει αυτών των θέσεων θα γίνει η ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών.

4. Θεωρητικό πλαίσιο της έρευνας

4.1. Επίλυση προβλημάτων (διαίρεσης)

Συχνά, κάτω από τον όρο "επίλυση προβλήματος[1]" εννοούμε τη μετάφραση των δεδομένων του προβλήματος σε αριθμητικές ή αλγεβρικές πράξεις και την εκτέλεση αυτών των πράξεων. Αυτό, όμως, δεν αποτελεί παρά το τελευταίο στάδιο μιας πολύ πιο σύνθετης διαδικασίας που θα προσπαθήσουμε με σύντομο τρόπο να σκιαγραφήσουμε στις γραμμές που ακολουθούν.

Κατ' αρχήν, **δεχόμαστε σαν διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος την προσπάθεια για κατανόηση της δομής του, δηλαδή την αναζήτηση σχέσεων μεταξύ των δεδομένων του προβλήματος και στη συνέχεια τη μετάφραση αυτών των σχέσεων σε συγκεκριμένους αλγόριθμους, τους οποίους επεξεργαζόμαστε για να φτάσουμε στον τελικό μας στόχο.**

Πρώτο στάδιο, λοιπόν, της επίλυσης ενός προβλήματος είναι η προσπάθεια για κατανόηση της δομής του (struc ture). Κι αυτό γίνεται σε δύο επίπεδα. Αφενός μεν σε ένα καθαρά γλωσσικό επίπεδο και αφετέρου σε επίπεδο εννοιολογικών δομών. Απαιτούνται, δηλαδή, από το λύτη γλωσσικές (linguistic) και εννοιολογικές (semantic) γνώσεις.

Οι μοντέρνοι γλωσσολόγοι έχουν επηρεασθεί αρκετά από τη γλωσσική θεωρία του Chomsky (1965), ο οποίος κάνει διάκριση μεταξύ επιφανειακής και και σε βάθος δομής μιας πρότασης[2].

---

1 Ο όρος "πρόβλημα" χρησιμοποιείται καταχρηστικά δεδομένου ότι σε ένα πρόβλημα δεν είναι εύκολο να βρούμε αμέσως το δρόμο που οδηγεί στη λύση. Επειδή όμως ξεκινάμε από την υπόθεση ότι η αναγνώριση μιας κατάστασης "διαίρεσης" δεν είναι κάτι το προφανές για αρκετούς μαθητές αυτής της ηλικίας, κρατάμε αυτό το χαρακτηρισμό αντί του ακριβέστερου "διδακτική άσκηση" (ΚΟΛΕΖΑ, ΣΟΥΡΛΑΣ, 1990).

2 2. Μια ανάλογη αντιμετώπιση της διδασκαλίας επίλυσης ενός προβλήματος συναντάμε και στον Nesher (1982) ο οποίος αναφερόμενος στην εννοιολογική συνιστώσα της ανωτέρω διαδικασίας (semantic component) διαχωρίζει την lexical constituent (πως κατανοείται ξεχωριστά η κάθε λέξη της εκφώνηση) από την contextual constituent (πως κατανοείται στο σύνολό της η εκφώνηση).

Η επιφανειακή δομή (surface structure) μιας πρότασης είναι ο τρόπος με τον οποίο αυτή είναι γραμμένη ή μιλιέται, δηλαδή ο γραμματικός και συντακτικός χαρακτηρισμός της κάθε λέξης της (π.χ. υποκείμενο, κατηγόρημα κ.λπ.).

Η σε βάθος δομή (deep structure) μιας πρότασης είναι ο τρόπος με τον οποίο αυτή αναπαρίσταται στη μνήμη του λύτη.

Στην πρώτη περίπτωση μιλάμε για σύνταξη (syntax) μιας πρότασης, δηλαδή για τους κανόνες που διέπουν τη δομή της και το γραμματικό τύπο των λέξεων που την αποτελούν.

Στη δεύτερη μιλάμε για τη σημασιολογία της (semantics), δηλαδή τη νοηματική κανονικότητα της πρότασης, τους κανόνες που προσδιορίζουν την έννοιά της.

Κατά προέκταση, η επιφανειακή δομή ενός μαθηματικού προβλήματος που παρουσιάζεται με τη βοήθεια συμβόλων (π.χ. Κάνε τη διαίρεση 2/3:4/5) αφορά την απλή εκτέλεση του αλγορίθμου χωρίς να ενδιαφερόμαστε για το τι παριστά πραγματικά η έκφραση 2/3:4/5, πράγμα που θα αφορούσε την σε βάθος δομή της.

Σχετικά με τις συνέπειες που θα μπορούσε να έχει ένας τέτοιος διαχωρισμός στη δομή ενός προβλήματος για τη διδακτική πράξη ο Skemp (1971) παρατηρεί ότι κατά τη διδασκαλία η προσοχή του δασκάλου στρέφεται πολύ συχνά στην επιφανειακή δομή του υπό επίλυση προβλήματος και σπάνια στη σε βάθος δομή του.

Βέβαια, η εκμάθηση κάποιας τεχνικής είναι απαραίτητη και οι διαδικασίες θα τραβούσαν πολύ σε μάκρος αν κάθε φορά έπρεπε να αναλύουμε ό,τι κάνουμε. Παρόλα αυτά είναι σημαντικό να **διαθέτει ο μαθητής στοιχειώδη εργαλεία ελέγχου** ώστε να μπορεί να αξιολογεί τα συμπεράσματά του και να ανακαλύπτει εναλλακτικές λύσεις, αποκτώντας μ' αυτόν τον τρόπο αυτοπεποίθηση και σιγουριά.

Το να αρκούμαστε στην επιφανειακή δομή ενός (μαθηματικού) αντικειμένου κερδίζοντας ως προς την ποσότητα των αποκτούμενων γνώσεων δεν αποτελεί δικαιολογία. **Η γνώση δεν είναι συσσωρευτική διαδικασία.** Οπως παρατηρεί ο Mason (1987) μια τέτοια κατάσταση θυμίζει κάποιον που αρέσκεται στο να παρατηρεί τα πουλιά, ξέρει το καθένα με τ' όνομά του, τα ξεχωρίζει με επιτυχία ακόμα κι αν οι διαφορές τους είναι ελάχιστες, αλλά δεν ξέρει τίποτε για τις συνήθειές τους και τον τρόπο ζωής τους.

Είναι σα να ξεχωρίζεις έναν κύκλο από ένα τετράγωνο και να αρκείσαι σε μια τέτοια γνώση.Η αναζήτηση της δομής ενός προβλήματος, του τρόπου δηλαδή με τον οποίο συνδέονται τα δεδομένα, είναι δείγμα παραγωγικής σκέψης (productive thinking), σε αντίθεση με την αναπαραγωγική σκέψη (reproductive thinking), που έγκειται στην αναζήτηση και ανάκτηση από τη μνήμη εκείνων των εννοιών και ιδεών που σχετίζονται άμεσα με τα δεδομένα του προβλήματος[1].

Στην πρώτη πε ρίπτωση (Gestalt άποψη) μιλάμε για αναζήτηση εσωτερικών σχέσεων μεταξύ των στοιχείων του προβλήματος (internal relations), ενώ στη δεύτερη (Meaning Theory) για εξωτερικές σχέσεις μεταξύ στοιχείων του προβλήματος και σχημάτων (schemata) που υπάρχουν ήδη στη μνήμη μας (external relations). Σ' αυτή τη δεύτερη περίπτωση το πρόβλημα πρέπει να ενσωματωθεί στην προσωπική εμπειρία του λύτη και να μεταφρασθεί στον προσωπικό του κώδικα πληροφορίας.

Με άλλα λόγια, στην περίπτωση της αναπαραγωγικής σκέψης, ο λύτης αναζητάει στη μνήμη του ποιο σχήμα ή ποια παρελθούσα εμπειρία ταιριάζει καλύτερα με την παρούσα κατάσταση και βάσει αυτής της εκλογής του, μετασχηματίζει τη δεδομένη κατάσταση ώστε να προσαρμοσθεί στο σχήμα που επέλεξε.

Μια νέα έννοια διείσδυσε στις γραμμές του κειμένου μας και για αποφυγή συγχίσεων πρέπει να την διαλευκάνουμε. Πρόκειται **για την έννοια του σχήματος** (schema).

Σύμφωνα με τον Bartlett (1932), που ήταν από τους πρώτους που χρησιμοποίησε αυτό τον όρο[2] , "το σχήμα αναφέρεται σε μια ενεργό οργάνωση παρελθουσών τρόπων συμπεριφοράς, οι οποίοι υποτίθεται ότι μπορούν να ενεργοποιηθούν και πάλι στα πλαίσια μιας καλά-προσαρμοσμένης αντίδρασης". "Τα σχήματα, δηλαδή, αποτελούν δομικά στοιχεία του γνωστικού συστήματος αναπαριστάνοντας γνώση όλων των ειδών και συμβάλλοντας στη διεκπεραίωση θεμελιωδών γνωστικών λειτουργιών όπως της κατανόησης, της μηχανικής συγκράτησης και του συλλογισμού" (ΠΟΡΠΟΔΑΣ, 1991).

---

1 Η διάκριση μεταξύ παραγωγική και αναπαραγωγικής σκέψης είναι ένα από τα βασικά σημεία της Gestalt θεωρίας περί σκέψης και εμφανίζεται στη διεθνή βιβλιογραφία κάτω από μια ποικιλία εκφράσεων, όπως π.χ. σαν διάκριση μεταξύ "έμπνευσης" και "διαδικασίας δοκιμής-λάθους" (KOHLER, 1925) ή μεταξύ "δομικής κατανόησης" (structural understanding) και "μηχανικής μνήμης" (rote memory) (WERTHEIMER, 1959).

2 Μια έννοια παρεμφερής προς το σχήμα είναι η έννοια του πλαισίου (frame) που προτάθηκε αργότερα από τον Minsky (1975) και χρησιμοποιείται από όσους ασχολούνται με το θέμα της "Τεχνητής Νοημοσύνης".

Στην αναπαραγωγική σκέψη τίθεται, λοιπόν, θέμα ενσωμάτωσης της νέας πληροφορίας σε ένα ήδη γνωστό σχήμα, σε μια υπάρχουσα γνωστική δομή (AUSUBEL, 1968).

Εφόσον το θέμα που μας αφορά στην παρούσα παράγραφο, είναι η επίλυση προβλημάτων, θεωρούμε σημαντικό να αναφέρουμε ότι στη μνήμη του λύτη ενός προβλήματος υπάρχουν 2 βασικά είδη σχημάτων ή γνωστικών δομών (cognitive structures), δύο μορφές γνώσης:

-Η σημασιολογική (meaningful) ή προτασιακή (propositional) γνώση, που αποτελείται από έννοιες της γενικότερης (μαθηματικής) εμπειρίας μας π.χ. τα τετράγωνα είναι παραλληλόγραμμα και

-Η μηχανική (rote) ή αλγοριθμική (algorithmic)γνώση που αποτελείται από τύπους, κανόνες, αλγόριθμους κ.λπ. πχ. $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$.

Για τη λύση ενός προβλήματος ενδέχεται να απαιτείται μια από τις δύο μορφές γνώσης ή (πράγμα που συνήθως συμβαίνει) και οι δύο.

Εκτός, λοιπόν, από γλωσσικές (linguistic) και εννοιολογικές (semantic) γνώσεις, ο λύτης πρέπει να έχει και σχηματικές γνώσεις (schematic).

Πολλοί ερευνητές προσπάθησαν να καταλάβουν με ποιο τρόπο και με ποια κριτήρια τα παιδιά εντάσσουν τα προβλήματα σε κατηγορίες (σχήματα).

Οι Hinsley, Hanes και Simon (1977) έδωσαν σε παιδιά ένα μεγάλο αριθμό αλγεβρικών προβλημάτων από εκείνα που συναντάμε συνήθως στα σχολικά εγχειρίδια και παρατήρησαν ότι εκείνα σχημάτισαν 18 διαφορετικές κατηγορίες προβλημάτων με σχετική άνεση ως προς το χρόνο που χρειάστηκαν για να ολοκληρώσουν την ταξινόμηση. Κάποιες από τις κατηγορίες που σχηματίσθηκαν ήταν Αναλογίες, Προβλήματα max-min, Προβλήματα μιγμάτων, Κλίμακες κ.λπ. Από τους ίδιους ερευνητές, και από άλλους επίσης (MAYER, 1983) σχετικά με το θέμα της ένταξης ενός προβλήματος σε κάποιο γνωστικό σχήμα διατυπώθηκε η άποψη ότι πολλά από τα λάθη που γίνονται κατά την επίλυση προβλημάτων, οφείλονται σε λανθασμένη επιλογή σχήματος. Μια τέτοια συμπεριφορά αναφέρεται στη βιβλιογραφία (DUNCKER, 1945), (BARTLETT, 1958) σαν "λειτουργική προσήλωση" (functional fixedness) ή ακόμα σαν "αρνητική μεταφορά" (negative transfer) ή einstelhung (γερμανικός όρος για τη συμπεριφορά).

Η λανθασμένη επιλογή σχήματος μπορεί να οφείλεται (όπως θα δούμε στην ανάλυση του ερωτηματολογίου που έπεται) σε εσφαλμένη ερμηνεία κάποιων ενδείξεων (π.χ. λέξεων της εκφώνησης).

Τα λάθη όμως των μαθητών κατά τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος μπορεί να οφείλονται και στην παντελή έλλειψη του απαραίτητου για τη λύση του προβλήματος σχήματος. Για παράδειγμα το "σχήμα της αναλογίας" είναι πολύ δύσκολο να κατανοηθεί από παιδιά μικρότερα των 10 χρόνων (PIAGET, 1968). Το ίδιο ισχύει και για μια πληθώρα άλλων σχημάτων (π.χ. σχετική ταχύτητα, πιθανότητες κ.λπ.).

Χρειάζεται, λοιπόν, μεγάλη προσοχή πριν βιαστούμε να χαρακτηρίσουμε μια λανθασμένη λύση σαν έλλειψη αριθμητικών ή λογικών ικανοτήτων εκ μέρους του παιδιού.

Η γλωσσική, εννοιολογική και σχηματική γνώση, είναι απαραίτητη για να "καταλάβει" κάποιος το πρόβλημα που του έχει τεθεί.

Από τη στιγμή, όμως, που το έχει καταλάβει και έχει καταστρώσει ένα σχέδιο δράσης, για να φτάσει στο αποτέλεσμα χρειάζεται να διαθέτει επιπλέον γνώση συγκεκριμένων αριθμητικών ή αλγεβρικών διαδικασιών (αλγορίθμων). Χρειάζεται, δηλαδή, να έχει επιπλέον και διαδικαστική γνώση (procedural knowledge).

4.2. Κατασκευή προβλημάτων (διαίρεσης)

Το να μπορούν οι μαθητές μας να απαντούν σωστά σε μια ερώτηση ή να λύνουν σωστά ένα πρόβλημα, είναι, χωρίς αμφιβολία, ό,τι καλύτερο μπορούμε να περιμένουμε μετά το τέλος της διδασκαλίας μας, γιατί αυτό αποτελεί ένδειξη ότι τα παιδιά κατάλαβαν τα όσα τους διδάξαμε. Το δυσάρεστο είναι ότι κάτω από την πίεση του χρόνου και την πληθώρα της ύλης δεν είναι λίγες οι φορές που αρκούμαστε σ' αυτή την ένδειξη και "γυρίζουμε σελίδα".

Δεν θα σχολιάσουμε εδώ τις πολύ σημαντικές συνέπειες που μπορεί να έχει μια τέτοια συμπεριφορά, όπως π.χ. τη δημιουργία λανθασμένων εντυπώσεων στους μαθητές από την παρουσίαση στερεότυπων προβλημάτων (: "η διαίρεση μικραίνει" ή "στα προβλήματα διαίρεσης μοιράζουμε").

Θα θέλαμε απλά να διατυπώσουμε μια ερώτηση με ... καθόλου προφανή απάντηση: **Μπορούμε να διασφαλίσουμε την κατανόηση του αντικειμένου που διδάξαμε μόνο μέσα από την επίλυση προβλημάτων,** ακόμη και αν αυτά καλύπτουν όλο το φάσμα της έννοιας ή των εννοιών που επεξεργασθήκαμε;

Από τότε που δημιουργήθηκε το σχολείο σαν θεσμός το σκεπτικό είναι πάντα το ίδιο: ο δάσκαλος ρωτάει και οι μαθητές απαντούν. Και όταν ακόμα οι μαθητές ρωτούν είναι για να ζητήσουν επεξηγήσεις πάνω σε κάτι που έχει ήδη πει ο δάσκαλος.

Φαντασθείτε τώρα ένα δάσκαλο που, στα πλαίσια ενός μαθήματος σχετικά με τη διαίρεση ρωτάει: "Εχω 45 δραχμές. Φτιάξτε μου προβλήματα διαίρεσης με βάση αυτή την πληροφορία".

Δε χρειάζεται να προσπαθήσετε να μαντέψετε τις αντιδράσεις των μαθητών. Καταγράψτε απλά τις δικές σας. Πόσες φορές σας ζητήθηκε κάτι παρόμοιο σ'οποιαδήποτε βαθμίδα της εκπαίδευσής σας;

Κι όμως, **το να μπορείς να φτιάχνεις προβλήματα είναι εξίσου** (αν όχι περισσότερο) **σημαντικό με το να μπορείς να τα λύσεις.**

Η γνώση δεν είναι ένα μεταφερόμενο αγαθό, ούτε η μάθηση μια απλή διαδικασία μεταβίβασης γνώσεων. Πρόκειται για μια δημιουργική πράξη. Η κάθε είδους γνώση είναι το προϊόν προσωπικής προσπάθειας, που επικεντρώνεται στην οργάνωση της ατομικής μας εμπειρίας. Η επίλυση προβλημάτων είναι μια θαυμάσια ευκαιρία άσκησης σ' αυτή την οργάνωση και θα ήταν μεγάλο λάθος να περιορίζαμε αυτή τη δραστηριότητα στην απλή ανεύρεση λύσεων, όταν μας δίνονται πλήθος άλλες ευκαιρίες να ασκήσουμε την κρίση και την εφευρετικότητά μας.

Οταν φτιάχνεις ένα πρόβλημα αναγκάζεσαι να αντιμετωπίσεις μια έννοια από όλες τις πλευρές, να σκεφθείς συνθήκες ικανές και αναγκαίες των οποίων τη σημασία δεν υποψιάζεσαι όταν η εκφώνηση σου δίνεται έτοιμη.

Εκτός αυτού, η ίδια η διαδικασία, το γεγονός ότι εσύ ο ίδιος είσαι ο συντονιστής μιας κατάστασης, το ότι δημιουργείς κάτι ανεξάρτητο και καινοτόμο, σε απαλάσσει από το άγχος "της μιας λύσης" που βρίσκεται στο μυαλό κάποιου και που πρέπει απαραίτητα να μαντέψεις, και από το φόβο μήπως πεις κάτι λανθασμένο ή ανόητο. Μ' αυτόν τον τρόπο τα μαθηματικά γίνονται λιγότερο εκφοβιστικά.

Ενα άλλο γεγονός που συνηγορεί υπέρ μιας διαδικασίας κατασκευής ερωτήσεων και προβλημάτων από τους ίδιους τους μαθητές είναι και το ότι μ' αυτόν τον τρόπο έρχονται στην επιφάνεια λανθασμένες αντιλήψεις και παρανοήσεις των μαθητών.

Επιπλέον, εξωτερικεύοντας ο μαθητής γραπτά ή προφορικά την ιδέα που έχει για κάποια μαθηματικά αντικείμενα αναγκάζεται να τη συμπληρώσει για να μπορέσει να επικοινωνήσει με το περιβάλλον του.

Γι' αυτόν π.χ. ένα τρίγωνο μπορεί απλά να "έχει 3 γραμμές", αλλά σε μια κατάσταση γραπτής επι κοινωνίας με κάποιο συμμαθητή του δίνοντας την εντολή "φτιάξε ένα σχήμα με 3 γραμμές" το σχήμα που θα εμφανισθεί στο τετράδιο του συμμαθητή του ενδεχομένως να απέχει πολύ από αυτό που είχε αυτός αρχικά φαντασθεί. Μ' αυτόν τον τρόπο το όφελος για το σ υγκεκριμένο μαθητή είναι διπλό: αφενός μέσα από μια σωστή διατύπωση του ορισμού συμπληρώνει την εικόνα που είχε για το τρίγωνο, αφετέρου ανοίγει νέους ορίζοντες θέτοντας στον εαυτό του (ή στους άλλους) την ερώτηση:

"Και αν είχα 3 γραμμές χωρίς να έχω τρίγωνο;"

Στην κατασκευή προβλημάτων το θέμα δεν είναι να φτιάξεις ένα σωστό πρόβλημα, άλλωστε **δεν υπάρχουν σωστά ή λανθασμένα προβλήματα. Υπάρχουν καλές ερωτήσεις ή κακές ερωτήσεις που μπορεί να έχουν καλές ή όχι απαντήσεις.** Για αιώνες οι άνθρωποι προσπαθούσαν να αποδείξουν το 5ο αξίωμα του Ευκλείδη: "Από ένα σημείο εκτός ευθείας μπορούμε να φέρουμε μια μόνο ευθεία ...".

Η ερώτηση που διατύπωναν οι επιστήμονες σχετικά με αυτό το αξίωμα ήταν: "**Πως** μπορούμε να το αποδείξουμε στηριζόμενοι στα άλλα αξιώματα;"

Πέρασαν εκατοντάδες χρόνια για να αντιληφθούν ότι το "Πως" έκανε την ερώτηση αναπάντητη και ότι διαγράφοντάς το άνοιγαν το δρόμο για την απάντηση που στη συγκεκριμένη περίπτωση ήταν οι μη Ευκλείδειες - Γεωμετρίες.

Το πως μπορεί να διδαχθεί στους μαθητές η τέχνη του να φτιάχνεις προβλήματα και να ενσωματωθεί μια τέτοια διδαδικασία στη σχολική πραγματικότητα είναι ένα θέμα που ξεπερνάει τα όρια της παρούσας εργασίας.

Προτού, όμως, ολοκληρώσουμε την παράγραφο θα θέλαμε να κάνουμε δύο πολύ σημαντικές παρατηρήσεις:

-Η ικανότητα να φτιάχνει κάποιος προβλήματα και να θέτει καλές ερωτήσεις συνδέεται άμεσα με την ικανότητα να αντιμετωπίζει κριτικά τη διαδικασία λύσης ενός προβλήματος και αντίστροφα. Για να μπορέσει να λύσει κάποιος ένα πρόβλημα πρέπει να είναι ικανός να θέτει ερωτήσεις σχετικά με την κατάσταση που έχει να αντιμετωπίσει: "Τι μου ζητάει το πρόβλημα;", "Πώς μπορώ να διατυπώσω διαφορετικά την ερώτηση;" κ.λπ. (BROWN and WALTER, 1983).

-Η δεύτερη παρατήρηση αφορά και πάλι τη μεγάλη σημασία του να μπορείς να θέτεις καλές ερωτήσεις, όπως αυτή υπογραμμίζεται από τον S. Toulmin (1977): "Αν ξεχωρίσουμε τις επιστήμες τη μια από την άλλη ως προς το αντικείμενο έρευνάς τους, ακόμα και αυτά τα αντικείμενα διαφοροποιούνται όχι προς το περιεχόμενό τους, αλλά μάλλον ως προς τις ερωτήσεις που θέτουν ...

Ενα αντικείμενο θα εμπέσει στον τομέα π.χ. της βιοχημείας μόνον αν θέτει ερωτηματικά σχετικά με τη βιοχημεία ..."

Το να κοιτάζουμε για διαφορές ως προς το περιεχόμενο της κάθε επιστήμης είναι λανθασμένη τακτική. Γιατί οι θεωρίες και οι έννοιες είναι μεταβατικές και αλλάζουν με τον καιρό.

5. Αποτελέσματα της έρευνας

5.1. Ικανότητα διάκρισης των όρων μιας διαίρεσης

Επιφανειακά πρόκειται για ένα θέμα "γνώσης", στην ουσία όμως είναι ένα πρόβλημα επικοινωνίας. Φαντασθείτε ένα δάσκαλο να μιλά για σχέσεις διαιρέτη - πηλίκου ως προς ένα συγκεκριμένο διαιρετέο σε μαθητές που δεν ξέρουν ποιος είναι ο διαιρέτης και ποιος είναι ο διαιρετέος.

Αν μάλιστα σκεφθούμε ότι κάποιοι μαθητές έχουν μάθει απλά να "απαγγέλουν" τη διαίρεση χωρίς να έχουν κατανοήσει την τεχνική του αλγόριθμου της διαίρεσης, φαντασθείτε τι σύγχιση μπορεί να προκαλέσει κατά την απαγγελία η ελλειπής γνώση της ορολογίας.

Η ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών έδειξε ότι το πρόβλημα έχει και άλλες, πιο σοβαρές, προεκτάσεις. Όταν ο "διαιρετέος" αποκαλείται "πολλαπλασιαστέος" ή το "πηλίκο" "γινόμενο", αξίζει, ίσως, τον κόπο να ψάξουμε για κάποιες πιο σοβαρές παρανοήσεις ως προς την υπόσταση της ίδιας της έννοιας της διαίρεσης.

Η ερώτηση που απευθύναμε στους μαθητές ήταν:

"Στη διαίρεση:

$$\begin{array}{r|l} 47 & 12 \\ \hline 36 & 3 \\ 11 & \end{array}$$

να ονομασθούν οι όροι που είναι σε κύκλο".

Τα αποτελέσματα σε ποσοστά % αναγράφονται στον παρακάτω πίνακα:

Τάξη	4 όροι σωστοί	Σύγχιση διαιρέτη-διαιρέτου	Σύγχιση με ορολογία άλλων πράξεων	Δεν απάντησαν
Δ	70	16	14	0
Ε	49	15	26	10

Παρατήρηση

Η στενή σχέση διαίρεσης και αφαίρεσης προκαλεί συχνά σύγχιση στους μαθητές όχι μόνο σε γλωσσικό (1/4 των μαθητών της πέμπτης) αλλά και σε εννοιολογικό επίπεδο, όπως θα δούμε στην ανάλυση των απαντήσεων στα προβλήματα διαίρεσης που ακολουθούν.

5.2. Ικανότητα για εκτέλεση αλγορίθμου διαίρεσης

Για τη διερεύνηση της ικανότητας αυτής των μαθητών δόθηκαν δύο κατηγορίες ασκήσεων: Πέντε πράξεις διαίρεσης και πέντε ασκήσεις "αναζήτησης αγνώστου".

Αυτές οι τελευταίες αποσκοπούσαν στον έλεγχο της κατανόησης εκ μέρους των μαθητών της σχέσης μεταξύ των τριών παραγόντων (Δ, δ, π) μιας τέλειας διαίρεσης.

Πιο συγκεκριμένα:

Μεταξύ των 5 πράξεων διαίρεσης υπήρχαν:

- 1 τέλεια διαίρεση διψήφιου με μονοψήφιο,
- 1 ατελής διαίρεση διψήφιου με μονοψήφιο,
- 1 ατελής διαίρεση τριψήφιου με διψήφιο,
- 1 ατελής διαίρεση τριψήφιου με διψήφιο με ζητούμενη δοκιμή και
- 1 ατελής διαίρεση διψήφιου με διψήφιο όπου Δ<δ.

Στη δεύτερη κατηγορία ασκήσεων υπήρχαν:

- 2 ασκήσεις της μορφής δ x □ = Δ (ή π x □ = Δ) από τις οποίες στη μία Δ<δ (ή Δ<π) και στην άλλη Δ>δ (ή Δ>π),
- 1 άσκηση της μορφής □ : δ = π (ή □ : π = δ) και
- 2 ασκήσεις της μορφής Δ : □ = δ (ή Δ : □ = π).

Τάξη / Άσκηση	Δ %	Ε (%)	
15:3	99	96	Α ομάδα
17:4	92	81	
225:32	84	49	Β ομάδα
345:42	61	37	
12 X □ = 156	53	40	
38:59	0	6	Γ ομάδα
118 x □ = 59	0	0	
2,4: □ = 1,6	0	0	Δ ομάδα
□: 12 = 11,5	0	0	
□: 2,4 = 30	0	0	

Παρατηρήσεις

1) Τα ποσοστά επιτυχίας στον παραπάνω πίνακα, συνηγορούν υπέρ της ύπαρξης τεσσάρων διαφορετικών ομάδων ασκήσεων με κριτήριο το βαθμό δυσκολίας τους.

Η πρώτη ομάδα περιλαμβάνει διαιρέσεις με μονοψήφιο διαιρέτη. Πρόκειται για ασκήσεις προσιτές στο σύνολο σχεδόν των μαθητών, και η ύπαρξη ή όχι υπολοίπου δεν φαίνεται να επηρεάζει σημαντικά τη συμπεριφορά των παιδιών.

Η δεύτερη ομάδα περιλαμβάνει ασκήσεις με διψήφιο διαιρέτη. Αν και οι προτεινόμενες διαιρέσεις έχουν σαν όρους ακέραιους αριθμούς, όπως ακριβώς και οι προηγούμενες, παρατηρούμε μια θεαματική πτώση του ποσοστού επιτυχίας που φθάνει για την Ε' τάξη το 44%, γεγονός που μας εξέπληξε αρνητικά.

Υποθέτουμε ότι η δυσκολία διαιρέσεων αυτής της μορφής οφείλεται στο ότι ενδεχομένως ο διαιρέτης "δεν χωράει ακριβώς" στο πρώτο διψήφιο τμήμα του διαιρετέου (π.χ. το 32 στο 22 για τη διαίρεση 225:32).Μια τέτοια υπόθεση δεν εξηγεί όμως το χαμηλό ποσοστό επιτυχίας στην άσκηση 12 x □ = 156. Συγκεκριμένα η άσκηση 12 x □ = 156 ήταν διατυπωμένη ως εξής:

"Με ποιον αριθμό πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό 12 ώστε να έχουμε σαν αποτέλεσμα 156" και στόχος μας ήταν να ελέγξουμε κατά πόσο οι μαθητές έχουν κατανοήσει τη διαίρεση σαν πράξη αντίστροφη του πολλαπλασιασμού. Και στις δύο τάξεις μόνο οι μισοί μαθητές φάνηκαν ικανοί να αντιληφθούν μια τέτοια σχέση ενώ το 1/5 περίπου του πληθυσμού (17% για τη Δ' τάξη και 20% για την Ε' τάξη) προσπάθησε να βρει το ζητούμενο αριθμό με διαδοχικές δοκιμές. Πολλαπλασιάζοντας, δηλαδή, τον αριθμό 12 με κάποιον αριθμό ώστε να προσεγγισθεί ο αριθμός 156. Η συμπεριφορά των μαθητών απέναντι στην άσκηση 12 x □= 156 γίνεται περισσότερο ενδιαφέρουσα αν λάβει κανείς υπόψη τα αποτελέσματα μιας σχετικής με το θέμα έρευνας (ΜΑΝΙΟΥ - ΒΑΚΑΛΗ, 1992) σύμφωνα με τα οποία τα 87,7% των μαθητών της Γ' τάξης και τι 93,5% των μαθητών της Δ' τάξης βρίσκουν το πηλίκο μιας τέλειας διαίρεσης εφαρμόζοντας τον αντεστραμμένο πολλαπλασιασμό.

Δηλαδή, ενώ για τη διαίρεση 156 : □ = 12, δεν υπάρχει δυσκολία στην αναζήτηση του πηλίκου διότι, "εφαρμόζουν συνήθως τον αντεστραμμένο πολλαπλασιασμό, οπότε αναζητούν τον πολλαπλασιαστή, το πόσες φορές δηλαδή πρέπει να πολλαπλασιάσουν το διαιρέτη για να βρουν ένα γινόμενο που να ταυτίζεται με το διαιρετέο ...", η αντίστροφη πορεία δεν είναι προφανής: Οι μαθητές δεν αναγνωρίζουν στην έκφραση: "Με ποιον αριθμό πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό 12 ώστε να βρούμε αποτέλεσμα 156" έναν οικείο τους τρόπο αντιμετώπισης της διαίρεσης 156:12.

Η τρίτη ομάδα περιλαμβάνει ασκήσεις όπου Δ<δ. Σχετικά μ' αυτή θα είχαμε να παρατηρήσουμε δύο πράγματα: Κατ' αρχήν ότι όσο και αν με μια πρώτη ματιά φαίνεται παράλογο να δοθούν ασκήσεις τέτοιας μορφής σε μαθητές που δεν έχουν διδαχθεί τους δεκαδικούς αριθμούς (Δ' τάξη), κρίνουμε ότι η υιοθέτηση μιας προσεγγιστικής διαδικασίας βρίσκεται μέσα στις δυνατότητες παιδιών αυτής της ηλικίας. Αν κάποιος θελήσει να μοιράσει 38 σοκολάτες σε 59 παιδιά, το κάθε παιδί θα πάρει κάτι περισσότερο από τη μισή σοκολάτα.

Τέτοιου είδους ασκήσεις είναι απαραίτητο να περιλαμβάνονται στη διδασκαλία της διαίρεσης στη Δ' δημοτικού διότι αφενός μεν εμποδίζουν ή διασαφηνίζουν παρεξηγήσεις της μορφής "διαιρώ πάντα ένα μεγαλύτερο με ένα μικρότερο" ή "στη διαίρεση ο διαιρέτης πρέπει να "χωράει" στο διαιρετέο" (12% για την Ε'), αφετέρου δρουν σαν δικλείδα ασφαλείας για τον έλεγχο της ορθότητας ή μη του εκάστοτε αποτελέσματος. Αν ξέρουμε πόσο περίπου πρέπει να είναι το αποτέλεσμα, μπορούμε να ελέγξουμε μόνοι μας την ορθότητα της λύσης που βρήκαμε.

Ενα δεύτερο σημείο που θέλουμε να υπογραμμίσουμε είναι ότι το σύνολο σχεδόν των παιδιών που ασχολήθηκαν με την άσκηση 118 x ☐ = 59 απεφάνθησαν ότι η πράξη είναι αδύνατη. Απάντησαν ότι "δεν γίνεται" γιατί απλούστατα (η εξήγηση είναι δική μας) "ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει", δεν μικραίνει.

Πρόκειται για μια πεποίθηση ευρύτατα διαδεδομένη (υπερβαίνει συχνά το 60%) όχι μόνο ανάμεσα στο μαθητικό πληθυσμό, αλλά και στο περιβάλλον των δασκάλων τους.

Η ίδια αντίληψη αναδύεται και μέσα από τις απαντήσεις στο πρόβλημα 3, ομάδα IV (βλ. παράρτημα) όπου 69% του συνόλου των παιδιών της Ε' τάξης και 67% των παιδιών της Δ' πιστεύουν ότι εάν πολλαπλασιάσουν έναν τυχόντα αριθμό με κάποιον άλλο (τυχόντα) ο αρχικός αριθμός μεγαλώνει.

Οι δυσκολίες, λοιπόν, που αντιμετώπισαν οι μαθητές μπροστά στην άσκηση 118 x☐= 59 ήταν πολλαπλές.

Κατ' αρχήν έπρεπε να αντιληφθούν την αντίστροφη σχέση διαίρεσης και πολλαπλασιασμού, πράγμα το οποίο - όπως έδειξαν τα αποτελέσματα στην άσκηση 12 x ☐ = 156 - μόνο οι μισοί μαθητές είναι σε θέση να κατανοήσουν. Στη συνέχεια, ακόμα και εκείνοι που μπόρεσαν να σκεφθούν ότι ☐ = 59 : 118 είχαν να αντιμετωπίσουν τη δυσκολία εκτέλεσης ενός τέτοιου αλγορίθμου (επιτυχία 6% στη Ε' στην ανάλογη άσκηση 38:59). Αξίζει να σημειώσουμε ότι σε κανένα γραπτό δεν παρατηρήσαμε τον παραπάνω μετασχηματισμό δεδομένου ότι η αντίληψη ότι η ζητούμενη πράξη "δε γίνεται" ανέκοψε κάθε άλλη δραστηριότητα.

Εχοντας υπόψη τα ποσοστά επιτυχίας στις ασκήσεις των τριων πρώτων ομάδων η ολοκληρωτική αποτυχία στις **ασκήσεις της τέταρτης ομάδας** είναι εντελώς δικαιολογημένη.

Ο ζητούμενος αριθμός στις ασκήσεις αυτές είναι αποτέλεσμα μιας διαίρεσης (2,4 : ☐ = 1,6) ή ενός πολλαπλασιασμού (☐ : 12 = 11,5).

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα ανάλογων ερευνών οι οποίες περιελάμβαναν και ασκήσεις της ανωτέρω μορφής περιμέναμε ένα σχετικά υψηλό ποσοστό επιτυχίας στη δεύτερη περίπτωση, εκεί δηλαδή που το αποτέλεσμα προέκυπτε μέσω ενός πολλαπλασιασμού. Αλλωστε, στην ουσία, δεν πρόκειται παρά για τη δοκιμή της διαίρεσης (Δ = δ.π) την οποία γνωρίζουν και είναι σε θέση να εφαρμόσουν το 49% τουλάχιστον των μαθητών της Ε' δημοτικού και το 84% των μαθητών της Δ' δημοτικού (βλ. άσκηση 3, ομάδα ΙΙ).

Βλέπουμε, λοιπόν, να εμφανίζεται ένα πρόβλημα εφαρμογής των ήδη αποκτηθέντων γνώσεων σε καταστάσεις που παρεκκλίνουν ελαφρά από εκείνες που συνήθως παρουσιάζονται στην τάξη.

Δεν πρόκειται, όμως, απλά για έλλειψη ικανότητας για αναγνώριση και εφαρμογή, αλλά τίθεται επίσης θέμα **μη ευελιξίας των μαθητών**. Ενας από τους τρόπους αντιμετώπισης ενός δύσκολου προβλήματος, είναι κατά τον Polya, η αναζήτηση απλούστερων μορφών αυτού του προβλήματος (π.χ. διατύπωση του προβλήματος με απλούστερους αριθμούς). Ο ζητούμενος, δηλαδή, αριθμός στην άσκηση 2,4 : ☐ = 1,6 βρίσκεται με την ίδια διαδικασία, όπως και ο αριθμός που λείπει στην άσκηση 10 : ☐ = 5. Η αναζήτηση επομένως της λύσης της απλούστερης μορφής υποδεικνύει έμμεσα και τον αλγόριθμο που θα εφαρμοσθεί και στη συνθετότερη περίπτωση. Το ίδιο, βεβαίως, ισχύει και για τις άλλες δύο ασκήσεις (ανάλογη περίπτωση $\square : 2 = 5$).

5.3. Ικανότητα για επίλυση προβλημάτων διαίρεσης

Από τα δέκα προβλήματα που δόθηκαν συνολικά, τα πέντε ήταν προβλήματα που επιλύονταν με διαίρεση μερισμού, τρία αφορούσαν διαιρέσεις μέτρησης, υπήρχε ένα πρόβλημα εμβαδού και τέλος, ένα όπου η σχέση των μεγεθών που εμφανίζονταν στην εκφώνηση, αφορούσε λόγο.

Τα ποσοστά επιτυχίας σ' αυτά τα προβλήματα εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα.

	Πρόβλημα Τάξη	Δ (%)	Ε (%)
1	Μερισμού (42:9)	81	70
2	Λόγος (25:5)	70	64
3	Μέτρησης (76:8)	67	71
4	Μέτρησης (40:3)	66	65
5	Μερισμού (16:5)		
	- λύση με διάγραμμα	47	39
	- λύση χωρίς διάγραμμα	25	31
6	Εμβαδόν	38	48
7	Μερισμού (3 000:60)	33	30
8	Μερισμού (62 000:15)	23	6
9	Μέτρησης 650:1 700)	6 (εμπειρικά)	0
10	Μερισμού (480:2,5)	0	0

Παρατηρήσεις

1) Σύμφωνα με τα στοιχεία του προηγούμενου πίνακα ο διαχωρισμός των προβλημάτων διαίρεσης σε μερισμού, μέτρησης κ.λπ. δεν αποτελεί ενδεικτικό στοιχείο για το βαθμό δυσκολίας τους. Τα ποσοστά επιτυχίας, για παράδειγμα, σε ένα πρόβλημα μερισμού, μπορεί να κυμαίνονται από 0-80%.

Θα πρέπει, λοιπόν, να υποθέσουμε την ύπαρξη κάποιων άλλων παραμέτρων που επηρεάζουν τη δυσκολία ενός προβλήματος διαίρεσης.

Σε προηγούμενη παράγραφο (4.1.) περιγράψαμε δύο βασικά στάδια κατά τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος. Το στάδιο της κατανόησης (σε γλωσσικό επίπεδο και σε επίπεδο εννοιολογικών δομών) και το διαδικαστικό στάδιο (εκτέλεση αλγορίθμων).

Οι μαθητές, λοιπόν, ενδέχεται να αντιμετωπίσουν δυσκολίες στη μια ή στην άλλη φάση της επίλυσης.

Στην παρούσα εργασία, όσον αφορά τη λύση προβλημάτων, μάς ενδιαφέρει να αναζητήσουμε κυρίως τις παραμέτρους που επηρεάζουν την κατανόηση του προβλήματος, δεδομένου ότι οι σημαντικότερες αλγοριθμικές δυσκολίες έχουν ήδη εντοπισθεί με κατάλληλες ασκήσεις και σχολιασθεί στην προηγούμενη παράγραφο.

2) Δυσκολίες κατανόησης ενός προβλήματος σε γλωσσικό επίπεδο.

Δύο από τα προβλήματα που δόθηκαν ήταν διατυπωμένα με τέτοιο τρόπο ώστε να ελεγχθεί η **ικανότητα** των μαθητών **για μετάφραση από τη φυσική γλώσσα σε αριθμητικά σύμβολα.**

Στη μια περίπτωση (πρόβλημα 8) η λανθασμένη μετάφραση οδηγούσε σε μη λογικό ή δύσκολα μεταφράσιμο αποτέλεσμα, ενώ η δεύτερη (πρόβλημα 7) καθιστούσε το πρόβλημα "αδύνατο" τουλάχιστον για τα παιδιά της Δ' δημοτικού που δεν είχαν διδαχθεί δεκαδικούς αριθμούς.

Από τις 45 λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών της Δ' δημοτικού στο πρόβλημα 8 της αναζήτησης του ημερομισθίου ενός εργάτη δεδομένου ότι "για ένα δεκαπενθήμερο δουλειάς πληρώθηκε 62 χιλιάδες δραχμές" οι 35 (ποσοστό 55% επί του συνόλου), οφείλονται σε **λανθασμένη μετάφραση** των δεδομένων του προβλήματος. Στο ίδιο πρόβλημα, από τους 58 μαθητές της Ε' δημοτικού που έδωσαν λανθασμένη απάντηση, οι 40 (ποσοστό 60% επί του συνόλου) παρουσίασαν επίσης σημαντικές δυσκολίες στη μετάφραση των δεδομένων του προβλήματος.

Οι κυριότερες μορφές των λανθασμένων αυτών μεταφράσεων που συναντήσαμε ήταν:

α) $\begin{array}{r|l} 62 & 15 \\ \hline 2 & 4 \end{array}$ ή 62000 x 15 = 930000
ημερομίσθιο (!!!)

"Το ημερομίσθιο είναι 4 χιλιάδες δραχμές
(καμμιά αναφορά στο υπόλοιπο "2")

"Το ημερομίσθιο είναι 4" (χωρίς μονάδες)

ή

"Το ημερομίσθιο είναι 4 δραχμές" (μη λογική απάντηση)

β) 62 000 | 10

6 200 δραχμές ημερομίσθιο **ή**

62 x 10 = 620 δραχμές ημερομίσθιο

(δεκαπενθήμερο=10 ημέρες).

γ) 62 000 | 5

12 | 12 400 δραχμές ημερομίσθιο (!!!)

20

0

(δεκαπενθήμερο=5 ημέρες).

Στο πρόβλημα 7 που ζητούσε "την απόσταση που διήνυσε ένας πεζός σε ένα λεπτό δεδομένου ότι περπατά 3 χιλιόμετρα σε μία ώρα", περίπου τα 2/3 των μαθητών της Δ' δημοτικού εμφάνισαν δυσκολίες στη μετάφραση των δεδομένων του προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα το 17% των μαθητών δεν έδωσε καμιά απάντηση και το 50% δίνει σαν απάντηση το αποτέλεσμα της διαίρεσης 60:3=20 (χωρίς μονάδες).

Η ίδια συμπεριφορά παρατηρήθηκε και στην Ε' δημοτικού όπου το 27% των παιδιών δεν δίνει καμιά απάντηση και ένα επίσης 27% οδηγήθηκε σε λανθασμένο αποτέλεσμα μέσω του αλγορίθμου 60:3.

3) Η ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών στο πρόβλημα της "απόστασης" που σχολιάσαμε προηγουμένως μας οδηγεί στη διατύπωση μιας πολύ σημαντικής παρατήρησης σχετικά με **τις δυσκολίες κατανόησης που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε εννοιολογικό επίπεδο.**

Δε θα ήταν υπερβολικό να λέγαμε ότι το σύνολο των μαθητών και των δύο τάξεων - εκτός ελάχιστων εξαιρέσεων - δίνει σαν αποτέλεσμα στο εκάστοτε πρόβλημα έναν καθαρό αριθμό.

Απουσιάζει, δηλαδή, εντελώς ο χαρακτηρισμός του αριθμητικού αποτελέσματος. Το γεγονός αυτό οφείλεται, κατά τη γνώμη μας, στην **ελλειπή κατανόηση των εσωτερικών σχέσεων μεταξύ των στοιχείων του προβήματος. Στην αδυναμία, δηλαδή, των μαθητών για παραγωγική σκέψη.**

Κι ενώ βλέπουμε ότι οι μαθητές, στην πλειοψηφία τους, αναγνωρίζουν το σχήμα του προβλήματος (π.χ. πρόβλημα διαίρεσης) εμφανίζουν σημαντικότατες δυσκολίες στην εφαρμογή αυτού του σχήματος.

Αν στην έλλειψη κατανόησης της εννοιολογικής δομής του προβλήματος προσθέσουμε και την επίδραση αλγοριθμικών παραγόντων, όπως για παράδειγμα το ότι για το σύνολο των μαθητών "η διαίρεση 3:60 είναι αδύνατη" το παρατηρούμενο μεγάλο ποσοστό αποτυχίας γίνεται κατανοητό.

4) Η έλλειψη κριτικής ικανότητας μπροστά σε ένα παράλογο αποτέλεσμα που αποτελεί συχνά αντικείμενο διαμαρτυρίας για τους δασκάλους και αντικείμενο έρευνας από τους ειδικούς δεν είναι παρά μια φυσική συνέπεια της μη κατανόησης της δομής του προβλήματος.

Πως μπορώ να ελέγξω την ορθότητα ή μη ενός αριθμητικού αποτελέσματος αν δεν ξέρω τι αντιπροσωπεύει αυτό το αποτέλεσμα.Είναι χαρακτηριστικά τα παραδείγματα που περιέχονται στις παρατηρήσεις που ακολουθούν.

5) Τα αποτελέσματα της μη κατανόησης του ρόλου των δεδομένων του προβλήματος και της **αλγοριθμικής "πόλωσης" της σκέψης** των μαθητών γίνονται φανερά από τον τρόπο αντιμετώπισης του προβλήματος 9, όπου ζητείται η ποσότητα ενός αλλαντικού που αγοράστηκε, δεδομένου ότι η τιμή του κιλού είναι 1700 δραχμές και πληρώσαμε 650 δραχμές (σωστή απάντηση: 650 δρχ.:1700 δρχ./κιλό=περίπου 400 gr).

Μόνο 4 μαθητές της τετάρτης (ποσοστό 6%) απάντησαν προσεγγιστικά, λέγοντας ότι "αγοράσαμε λιγότερο από μισό κιλό". Ας σημειωθεί ότι δεν περιμέναμε ακριβή αριθμητική απάντηση από τους μαθητές αυτής της τάξης, δεδομένου ότι δεν είχαν διδαχθεί ακόμα τους δεκαδικούς αριθμούς. Το ενδιαφέρον μας εστιαζόταν στον έλεγχο της ικανότητας των παιδιών για κατανόηση των σχέσεων μεταξύ των δεδομένων του προβλήματος και προσεγγιστικό υπολογισμό του ζητουμένου.

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει εκτός από το συνολικό ποσοστό αποτυχίας, τα είδη λαθών που εντοπίσαμε και τη συχνότητά τους.

Τάξη	Αποτυχία	Δεν απάντησαν	Απάντηση % 1700:650=... κιλά	Αλλες πράξεις %
Δ'	94	34	49	11
Ε'	100	37	56	17

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μισοί περίπου από τους μαθητές που ρωτήθηκαν (και ίσως περισσότεροι αν προσθέσουμε και εκείνους που δεν απάντησαν) ξέρουν πότε πρέπει να κάνουν διαίρεση αλλά **δεν ξέρουν με ποιο τρόπο να συνδιάσουν τα δεδομένα του προβλήματος για να φθάσουν στο επιθυμητό αποτέλεσμα.**

Υπάρχει μια έντονη έλξη από την παράμετρο: "μέγεθος αριθμών" με την έννοια ότι αν Δ>δ: η πράξη είναι εύκολη ενώ αν Δ<δ: η πράξη είναι δύσκολη ή αδύνατη.

Επι πλέον δεν εμφανίζουν καμιά κριτική ικανότητα μπροστά στο γεγονός ότι με 650 δραχμές αγοράζουν 2 κιλά ζαμπόν του οποίου το κιλό κοστίζει 1700 δραχμές!!

6) Στην πρώτη παρατήρηση που διατυπώσαμε, ειπώθηκε ότι δεν θα μας απασχολήσουν οι αλγοριθμικές δυσκολίες των προβλημάτων που αναλύουμε.

Παρ' όλα αυτά αξίζει να σταθούμε στην περίπτωση του προβλήματος 10, όπου ζητείται η τιμή του κιλού, αν για 2,5 κιλά αλεύρι πληρώσαμε 480 δρχ.

Το γεγονός ότι κανένας μαθητής της πέμπτης δεν απάντησε σωστά πρέπει να μας προβληματίσει σοβαρά. Και μάλιστα, δεν θα 'πρεπε να σταθούμε μόνο στην αλγοριθμική πλευρά του θέματος - αν και η εκτέλεση της διαίρεσης 480:2,5 δεν θα 'πρεπε να αποτελεί αντικείμενο δυσκολίας για παιδιά της Ε' δημοτικού στο τέλος της σχολικής χρονιάς - αλλά να αναρωτηθούμε **σε ποιο βαθμό η διδασκαλία των μαθηματικών, όπως γίνεται στα περισσότερα σχολεία μας, προσφέρει ασφαλιστικές δικλείδες στους μαθητές** σε περίπτωση μπλοκαρίσματος για οποιαδήποτε αιτία (εδώ: αλγοριθμική δυσκολία).

Τα 2,5 κιλά αλεύρι είναι 5 "μισόκιλα" και είναι εύκολο να βρεθεί η τιμή του "μισόκιλου" (480:5=96), απ' όπου καθίσταται προφανής η τιμή του κιλού (96x2=192 δραχμές).

Η εξάσκηση των μαθητών σε τέτοιου είδους λύσεις εκτός του ότι τους **αποδεσμεύει από τη "μία και μοναδική λύση"**, τους παρέχει και τη δυνατότητα ελέγχου ενός αποτελέσματος που βρέθηκε με κάποιον άλλο τρόπο.

7) Αξίζει να σχολιάσουμε ιδιαιτέρως αυτή την υποσυνείδητη πεποίθηση των μαθητών ότι δηλαδή ένα πρόβλημα έχει πάντα λύση και μάλιστα ο δρόμος που οδηγεί σ' αυτή είναι μοναδικός.

Μια τέτοια αντίληψη διαμορφώνεται στα πλαίσια του "διδακτικού συμβόλαιου[1]" και η ευρύτερη διατύπωσή της έχει ως εξής:

-Κάθε πρόβλημα έχει μία λύση.

-Για να λυθεί ενα πρόβλημα πρέπει να κάνουμε μια πράξη και συνήθως η τελευταία πράξη δίνει το αποτέλεσμα.

Τέτοιου είδους "κανόνες" λειτουργούν ανασταλτικά στη σκέψη των μαθητών και συχνά τους οδηγούν σε επικίνδυνα μονοπάτια.

Ενδεικτικά αναφέρουμε την περίπτωση του γνωστού προβλήματος της "ηλικίας του καπετάνιου[2]" που προτείναμε σε 80 μαθητές της τρίτης τάξης διαφόρων δημοτικών σχολείων των Ιωαννίνων το Μάιο του '92.

Από τους 58 μαθητές που έδωσαν λανθασμένη απάντηση, οι 40, δε δίστασαν να γράψουν ότι ο καπετάνιος είναι 25 χρονών (ποσοστό 50%) και άλλοι 16 ότι η ηλικία του είναι ... 25 κιλά!!

Ανάλογο πρόβλημα ("Ενας καπετάνιος μεταφέρει με το καράβι του 10 άντρες και 23 γυναίκες. Ποια είναι η ηλικία του;") προτάθηκε στα πλαίσια ενός άλλου ερωτηματολογίου σε 48 μαθητές της τρίτης τάξης και 58 μαθητές της τετάρτης, επίσης σε σχολεία των Ιωαννίνων την ίδια χρονική περίοδο.

Η εικόνα των αποτελεσμάτων δεν άλλαξε δεδομένου ότι 42 μαθητές της τρίτης (88%) και 35 μαθητές της τετάρτης (60%) απάντησαν ότι ο καπετάνιος είναι 33 χρόνων.

Σχετικά με το συγκεκριμένο πρόβλημα, ο αναγνώστης θα μπορούσε να σκεφθεί ότι το υψηλό ποσοστό αποτυχίας οφείλεται σε κάποιες ιδιαιτερότητες της πράξης της πρόσθεσης ή ακόμη και στην ηλικία των μαθητών.

---

1 Διδακτικό συμβόλαιο είναι το σύνολο των κανόνων που προσδιορίζουν τη λειτουργία της διδακτικής κατάστασης, τους ρόλους εκείνων που συμμετέχουν και την κατανομή των δραστηριοτήτων.

2 "Ενας καπετάνιος μετέφερε στην απέναντι όχθη ενός ποταμού 10 κιλά σιτάρι και 15 κιλά κριθάρι. Ποια είναι η ηλικία του καπετάνιου;"

Για να ελέγξουμε ένα τέτοιο ενδεχόμενο, δώσαμε το ακόλουθο πρόβλημα σε μαθητές της έκτης δημοτικού τεσσάρων δημοτικών σχολείων των Ιωαννίνων:

"Ο Πέτρος είναι 8 χρονών και ζυγίζει 25 κιλά. Πόσο θα ζυγίζει όταν γίνει 16 χρόνων;"

Από τους 100 μαθητές που απάντησαν, οι 67 έγραψαν χωρίς κανένα σχόλιο ότι ο Πέτρος όταν γίνει 16 χρόνων θα ζυγίζει 50 κιλά.

Δεν είναι καθόλο παράλογο, βέβαια, ο Πέτρος στα 16 χρόνια του να ζυγίζει 50 κιλά. Σίγουρα όμως, και ευτυχώς, τα κιλά του δεν θα είναι το αποτέλεσμα μιας πολλαπλασιαστικής διαδικασίας, γιατί στα 40 χρόνια του θα κινδύνευε σοβαρά η υγεία του!!

Συνοψίζοντας θα θέλαμε να πούμε ότι οι μαθητές του δημοτικού σχολείου σε πολύ μεγάλο ποσοστό - που συχνά ξεπερνάει κατά πολύ το ήμισυ του πληθυσμού - **αδυνατούν να αντιμετωπίσουν κριτικά τα προβλήματα που τους δίνονται.** Όλη η προσπάθειά τους επικεντρώνεται στο να προσδιορίσουν το σχήμα του προβλήματος ("τι πράξη κάνουμε;") και στο να εκτελέσουν κάποιους αλγόριθμους. Η σχέση της κάθε έννοιας ως προς το σύνολο των εννοιών που εμφανίζονται στην εκφώνηση του προβλήματος, δηλαδή η εννοιολογική δομή του προβλήματος είναι κάτι που αγνοείται εντελώς.

8) Η προηγούμενη άποψη τεκμηριώνεται μέσα από το σύνολο των προβλημάτων που έχουμε ήδη αναλύσει. Για να τονίσουμε, όμως, περισσότερο την παντελή έλλειψη ισορροπίας, κατά τη διδακτική πράξη, μεταξύ εκτέλεσης αλγορίθμων και κριτικής αντιμετώπισης των δεδομένων ενός προβλήματος, θέσαμε στους υπό εξέταση μαθητές της τετάρτης και της πέμπτης τάξης την εξής ερώτηση:

"Θέλουμε να μετρήσουμε τους κόκκους του ρυζιού σε ένα κιλό ρύζι. Τι μπορούμε να κάνουμε; Να μετρήσουμε τους κόκκους ένα προς ένα; Αν όχι, τι προτείνεις;"

(Μια πιθανή διαδικασία είναι να μετρήσουμε τους κόκκους π.χ. σε 10 γραμμάρια ρύζι - έστω x κόκκοι - και να συμπεράνουμε ότι, κατά προσέγγιση, στο κιλό περιέχονται 100x κόκκοι).

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τι είδους απαντήσεις έδωσαν οι μαθητές και των δύο τάξεων.

Τάξη Αποτέλεσμα (%)	Δεν απάντησαν	Θα κάνω πολ/μό	Θα κάνω διαίρεση	Ενα-ένα ή πέντε-πέντε...	Σωστό
Δ΄ (64)	35	8	7	14	0
Ε΄ (67)	22	7	15	1	6

Οι 6 μαθητές της πέμπτης που απάντησαν σωστά, πρότειναν την εξής διαδικασία:"Προτείνω να βρούμε το βάρος ενός κόκκου και να διαιρέσουμε τα 1000 γραμμάρια που είναι το κιλό με αυτό το βάρος. Το πηλίκο της διαίρεσης είναι οι κόκκοι του ρυζιού".

Σε ανάλογο πρόβλημα[1] που δόθηκε σε 100 μαθητές της έκτης την ίδια πάντα χρονική περίοδο, 56 από αυτούς απάντησαν ότι θα μετρήσουν 1-1 τα φύλλα, 10 μαθητές απάντησαν ό τι για συντομία θα μετρούσαν 2-2 ή 5-5 τα φύλλα (!!) και μόνο 10 μαθητές έδειξαν να έχουν πραγματικά κατανοήσει το πρόβλημα.

Ενας από αυτούς γράφει (με κάπως ασαφή τρόπο) ότι: "Θα μετρήσω (το πάχος των) 10 και μετά τα υπόλοιπα θα τα υπολογίσω".

Οι 9 άλλοι βρίσκουν σαν συντομότερο τρόπο το "να μετρήσουμε ως τη μέση και να πολλαπλασιάσουμε επί δύο".

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι **το πολύ ένα 10% των μαθητών των δύο τελευταίων τάξεων του δημοτικού μπορεί να αντιμετωπίσει μια προβληματική - κατάσταση που δεν περιέχει αριθμητικά δεδομένα.**

9) Στην παρατήρηση (6) τέθηκε ο προβληματισμός αν η διδασκαλία των μαθηματικών, όπως γίνεται σήμερα στα δημοτικά σχολεία, παρέχει ή όχι στους μαθητές ασφαλιστικές δικλείδες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν είτε σαν εργαλεία ελέγχου της σκέψης τους και των αποτελεσμάτων που βρίσκουν μέσω μιας αλγοριθμικής διαδικασίας, είτε σαν εναλλακτικές λύσεις σε περίπτωση μπλοκαρίσματός τους. Η περίπτωση του προβλήματος 10 μας ωθεί να απαντήσουμε αρνητικά, παρά το γεγονός ότι αναφορικά με κάποιες έννοιες (π.χ. κλάσματα) τα εγχειρίδια προσφέρουν την ευκαιρία για τέτοιου είδους δραστηριότητες.

Ας δούμε όμως το θέμα από πιο κοντά.

---

1 Αν σου δώσω ένα χοντρό πακέτο με φύλλα και σου ζητήσω να βρεις πόσα φύλλα είναι, τι θα κάνεις; Θα τα μετρήσεις ένα-ένα; Υπάρχει πιο σύντομος τρόπος;

Στην καθημερινή ζωή, αλλά και σε επιστημονικό επίπεδο χρησιμοποιούμε πολύ συχνά τον όρο "κατανόηση ". Είναι μια πολύ γνωστή μας άγνωστη λέξη.

Στις σελίδες που προηγήθηκαν διατυπώθηκε η άποψη ότι **η επίλυση ενός προβλήματος προϋποθέτει την κατανόηση της σχέσης των μεταβλητών που υπεισέρχονται στην εκφώνηση.** Το ερώτημα όμως που προκύπτει άμεσα είναι: **Με ποιο τρόπο μπορούμε να ελέγξουμε** αν οι μαθητές μας κατανόησαν ή όχι αυτή τη σχέση;

Πρόκειται για ένα σημαντικό ερώτημα που η προσέγγισή του ξεφεύγει από τα όρια της παρούσας εργασίας. Εδώ, θα προσπαθήσουμε να σκιαγραφήσουμε απλά μια από τις πλευρές του γιατί αποτέλεσε αντικείμενο του προβληματισμού μας κατά τη σύνθεση του ερωτηματολογίου.

Ενας τρόπος, λοιπόν, να ελέγξουμε την κατανόηση ενός αντικειμένου (περιεχόμενο εκφώνησης, προταθείσα λύση ενός προβλήματος κ.λπ.) από τους μαθητές είναι να τους ζητήσουμε ν**α διατυπώσουν το ίδιο πράγμα με διαφορετικό τρόπο. Ο έλεγχος της ικανότητας για μετάφραση** είναι ένας από τους τρόπους προσέγγισης του σχετικά αφηρημένου θέματος της κατανόησης.

Με τον όρο **διαδικασία μετάφρασης** εννοούμε την ψυχολογική διαδικασία που επιτελείται με το πέρασμα από μια μορφή παράστασης[1] ή αναπαράστασης[2] σε μια άλλη αλλά και την εξωτερικευμένη πράξη που πηγάζει από αυτή την εσωτερική διεργασία.Και για να επανέλθουμε στην περίπτωση του προβλήματος 10 (υπολογισμός της τιμής του κιλού στο αλεύρι) οι μαθητές βρέθηκαν "όμηροι" της "μιας και μοναδικής λύσης" (480:2,5) την οποία είτε δεν μπόρεσαν να συλλάβουν είτε δεν μπόρεσαν να εκτελέσουν.

Η μετάφραση π.χ. της εκφώνησης του προβλήματος 10 από γραπτό κείμενο σε διάγραμμα

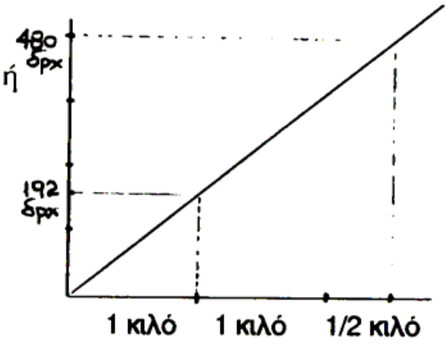
---

1 1. Σε σχετική εργασία τους οι Lesh, Post, και Behr, (1987) εντόπισαν πέντε διαφορετικούς τύπους συστημάτων παράστασης αφηρημένων εννοιών που υπεισέρχονται στη διαδικασία μάθησης των μαθηματικών και στη λύση προβλημάτων: Γραπτά Κείμενα, Χειριζόμενα μοντέλα (π.χ. ραβδιά Cuisenaire, αριθμογραμμές κ.λπ.), Εικόνες ή Διαγράμματα (π.χ. Venn), Γλώσσες (π.χ. γλώσσα λογική), Γραπτά σύμβολα (π.χ. $x+3=7$).

2 Εδώ αναφερόμαστε στους τέσσερις βασικούς τρόπους αναπαράστασης των μεταβλητών: Περιγραφή, Πίνακας, Γράφημα, Αλγεβρικός τύπος (JANVIER, 1987).

480 δραχμές

1 κιλό 1 κιλό 1/2 κιλό



1 κιλό 1 κιλό 1/2 κιλό

θα διευκόλυνε τη διαδικασία επίλυσης προσφέροντας συγχρόνως αυτοπεποίθηση και αίσθημα ασφάλειας στους μαθητές.

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας θελήσαμε να ελέγξουμε την ικανότητα μαθητών της τετάρτης και πέμπτης δημοτικού για μετάφραση από μια μορφή παράστασης σε μια άλλη στο πλαίσιο μιας διαδικασίας μοιράσματος.

Συγκεκριμένα το πρόβλημα 5 ζητούσε να μεταφρασθεί σε διάγραμμα η ιστορία που περιγράφετο στην εκφώνηση του προβλήματος ("μοιράζω μια τούρτα 16 κομματιών σε 5 φίλους μου. Πόσα κομμάτια πήρε ο καθένας και πόσα περίσεψαν;")

Η συμπεριφορά των μαθητών καταγράφεται στον παρακάτω πίνακα:

Αποτέλεσμα (%) Τάξη	Σωστό	Σωστή διαδικασία ημιτελής	Αποκοπή 5 κομματιών	"περίσσεψε 1 κομμάτι"	Απλός χωρισμός σε 16 κομμάτια	Δεν απάντησαν
Δ	1	3	5	29 (45%)	19	7
Ε	6	1	12	29 (43%)	19	3

Τα μηδαμινά ποσοστά επιτυχίας συνηγορούν υπέρ του προβληματισμού που διατυπώσαμε στην αρχή της παρατήρησης.

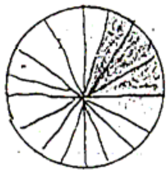
Δεν θα επεκταθούμε εδώ στην ανάλυση και σε βάθος ερμηνεία των απαντήσεων που πήραμε, θα θέλαμε μόνο να υπογραμμίσουμε ότι οι μισοί περίπου από τους μαθητές που ρωτήθηκαν βλέπουν τη διαδικασία της διαίρεσης σαν πράξη αφαίρεσης κάποιου τμήματος από το όλο, πράγμα που εξηγεί το γεγονός ότι η προσοχή τους στρέφεται "στο κομμάτι που μένει".

Ενδεικτικά μεταφέρουμε εδώ κάποιες χαρακτηριστικές απαντήσεις των μαθητών.

Σωστή διαδικασία ημιτελής

Αν η τούρτα είναι αυτή

16	5
15	3
=	

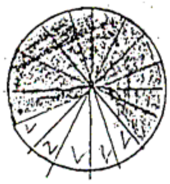


ζωγράφισε τι ακριβώς έγινε

Αποκοπή πέντε κομματιών

Αν η τούρτα είναι αυτή:

16	5
-15	3
=1	

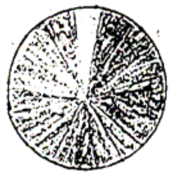


ζωγράφισε τι ακριβώς έγινε.

Περίσσεψε ένα κομμάτι

Αν η τούρτα είναι αυτή:

16	5
- 15	3
= 1	

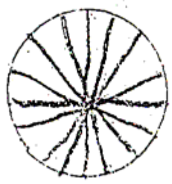


ζωγράφισε τι ακριβώς έγινε.

Απλός χωρισμός σε 16 κομμάτια

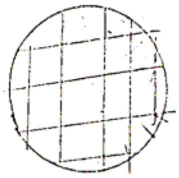
Αν η τούρτα είναι αυτή:

16	5
- 15	3
01	



ζωγράφισε τι ακριβώς έγινε.

Αν η τούρτα είναι αυτή:



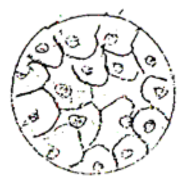
16 | 5
1 | 3

3
x 5
15

16
-15
1

ζωγράφισε τι ακριβώς έγινε

Αν η τούρτα είναι αυτή:



16 | 5 3
15
=1

ζωγράφισε τι ακριβώς έγινε

5.4. Κριτική αντιμετώπιση των προβλημάτων διαίρεσης

Η παράγραφος αυτή θα μπορούσε να ενσωματωθεί στην προηγούμενη υπό τη μορφή παρατήρησης, αν το πρόβλημα που στάθηκε αφορμή για τη δημιουργία της δεν είχε κάτι το ξεχωριστό.

Οταν μοιράζεις εξίσου 42 στρατιωτάκια σε 9 φίλους σου, η τύχη των 6 παιχνιδιών που μένουν δε δημιουργεί πρόβλημα αφού μπορείς να τα διαθέσεις κατά βούληση. Δε συμβαίνει όμως το ίδιο όταν επικοινωνείς με ένα ταξιδιωτικό γραφείο για να "κλείσεις" λεωφορεία για την εκδρομή του σχολείου. Πόσα λεωφορεία των 52 θέσεων θα χρειασθούν 500 μαθητές που θα ταξιδεύσουν;

Από τους 64 μαθητές της τετάρτης, που ρωτήθηκαν, οι 37, ένα ποσοστό δηλαδή 58% του συνόλου, δε δίστασαν να αφήσουν 32 παιδιά στο δρόμο (!) απαντώντας ότι θα χρειαστούμε 9 λεωφορεία.

Μόνο 3 μαθητές (επί συνόλου 64 μαθητών) κατανόησαν την ουσία του προβλήματος δίνοντας σημασία και στο "υπόλοιπο", αν και ένας από αυτούς αντί για το σωστό "δέκα λεωφορεία", απαντά ότι θα χρειασθούν "εννέα και ένα ακόμη για να μπουν οι μαθητές που περισεύουν(!)".

Στην πέμπτη δημοτικού το ποσοστό των μαθητών που συνηγορεί υπέρ των 9 λεωφορείων ανέρχεται στο 79% ενώ ελήφθησαν 4 μόνο σωστές απαντήσεις (επί συνόλου 67 μαθητών).

Τελικά, **πόσο κοντά ή μάλλον πόσο μακρυά από την καθημερινή ζωή βλέπουν τα παιδιά τα μαθηματικά;** Μια ενδιαφέρουσα ερώτηση που συνοδεύεται από ένα τεράστιο αριθμό ερευνών, που στα πλαίσια αυτής της εργασίας είναι αδύνατο να αναφερθούμε ακόμη και στα σημαντικότερα συμπεράσματά τους.

Αποτελέσματα, όμως, σαν αυτά που αναφέραμε προηγουμένως φέρνουν στο νου την αντίδραση εκείνου του μαθητή που όταν ρωτήθηκε αν είναι λογική η απάντηση "12,5 άνθρωποι" που βρήκε, απάντησε: "Αυτά είναι μαθηματικά" ... άρα δεν έχουν, απαραίτητα, σχέση με την πραγματικότητα.

5.5. Ικανότητα σύνθεσης προβλημάτων διαίρεσης

Με αφετηρία μια τέλεια και μια ατελή διαίρεση

70	14	και	450	4
0	5		2	112

Ζητήσαμε από τους μαθητές να φτιάξουν ένα πρόβλημα που η λύση του να δίνεται από την κάθε μια από αυτές τις διαιρέσεις.

Ο στόχος μιας τέτοιας ερώτησης ήταν διπλός. Αφενός μεν θέλαμε να ελέγξουμε την ικανότητα των παιδιών να κατασκευάζουν και όχι απλά να επιλύουν ήδη έτοιμα προβλήματα και αφετέρου να εξετάσουμε τη μορφή της γνωστικής αναπαράστασης που κρύβεται πίσω από τον τίτλο "πρόβλημα διαίρεσης".

Από τους 64 μαθητές της τετάρτης δημοτικού, 38 μόνο μαθητές (ποσοστό 59%) έδωσαν σωστή απάντηση και στα δύο σκέλη του προβλήματος και 8 ακόμη απάντησαν σωστά μόνο στο ένα σκέλος.

Από τα 84 συνολικά σωστά προβλήματα που πήραμε τα 79 ήταν προβλήματα μερισμού, 4 ήταν προβλήματα μέτρησης (αναλογία 1:20) και ένα μόνο ήταν πρόβλημα εμβαδού.Η ίδια τάση παρατηρήθηκε και στους μαθητές της πέμπτης δημοτικού. Από τους 67 μαθητές, πήραμε 27 μόνο σωστές απαντήσεις και στα δύο σκέλη της ερώτησης (ποσοστό 40%) και 10 ακόμη μαθητές απάντησαν σωστά στο ένα μόνο σκέλος. **Από τα 64 προβλήματα που παρουσιάσθηκαν τα 56 ήταν προβλήματα μερισμού** ενώ μόνο 8 ήταν προβλήματα μέτρησης (αναλογία 1:7).

Παρατηρούμε, λοιπόν, μια διαφορά του ύψους των 20% περίπου (π.χ. για τη τετάρτη δημοτικού) μεταξύ της ικανότητας για επίλυση ενός δεδομένου προβλήματος (π.χ. πρόβλημα 1, ομάδα III) και της ικανότητας ανασύστασης του προβλήματος με βάση τον αλγόριθμο λύσης του.

Επιπλέον, για το σύνολο των μαθητών, ένα πρόβλημα διαίρεσης είναι πρόβλημα μερισμού ή μέτρησης. Τα άλλα είδη προβλημάτων διαίρεσης αγνοούνται εντελώς.

Ας δούμε, όμως, πιο αναλυτικά τα διάφορα είδη προβλημάτων που κατασκεύασαν οι μαθητές. Και για να μην επεκταθούμε πολύ στα πλαίσια αυτής της εργασίας θα περιορισθούμε σε εκείνα των μαθητών της τετάρτης δημοτικού.

Και στα 79 προβλήματα μερισμού, η ιστορία που περιγράφεται είναι ότι κάποιο παιδί ή κάποιο πρόσωπο του στενού οικογενειακού περιβάλλοντος μοιράζει σε παιδιά καραμέλες, βόλους, γλυκά ή χρήματα. Να ένα παράδειγμα:

"Η Ελένη είχε 70 καραμέλες και ήθελε να τις μοιράσει σε 14 φίλες της. Πόσες καραμέλες θα πάρει η κάθε μια;"

"Ο παππούς έχει 450 δραχμές και θέλει να τις μοιράσει στα 4 εγγόνια του. Πόσες δραχμές θα πάρει το καθένα;"

Δεν υπάρχει καμιά διαφοροποίηση μεταξύ των προβλημάτων που φτιάχτηκαν με βάση την τέλεια διαίρεση (70:14) και εκείνα που φτιάχτηκαν με βάση της ατελή διαίρεση (450:4). Υπάρχουν, εντούτοις, κάποιες **λανθασμένες απόπειρες αναφοράς στο υπόλοιπο.**

Να ένα παράδειγμα:

"Ο παππούς μου έχει 450 ζώα με 4 είδη ζώων. Ο γείτονας του χάρισε 2 ακόμη. Πόσα ζώα έχει;"(2 μαθητές).

Ενας μαθητής ερμηνεύει λάθος το πηλίκο της διαίρεσης, αποδίδοντάς του χαρακτηριστικά υπολοίπου.

"Ενα παιδί είχε 70 δραχμές και τις μοίρασε σε 14 παιδιά και του έμειναν 5. Πόσες δραχμές πήρε το κάθε παιδί;"

Σε 8 προβλήματα παρατηρούμε **σύγχιση μεταξύ** των εννοιών της **διαίρεσης και αφαίρεσης,** όπως φαίνεται στα παραδείγματα:

"Η μητέρα μου έδωσε 70 δραχμές να αγοράσω κρουασάν. Χάλασα τις 14. Πόσες δραχμές μου περίσεψαν;"

"Ενα περιβόλι είχε 450 δέντρα. Από αυτά 4 δέντρα είναι πορτοκαλιές. Πόσες είναι οι μανταρινιές;"

Σε 2 προβλήματα παρατηρούμε **σύγχιση μεταξύ διαίρεσης και πολλαπλασιασμού.**

"Ενα μηχανάκι τρέχει 70 χιλιόμετρα την ώρα. Πόσα χιλιόμετρα θα τρέξει σε 14 λεπτά;""

Το μεσημέρι ένας μανάβης εισέπραξε 450 δραχμές. Πόσο εισέπραξε τα 4 μεσημέρια;"

Παρατηρήθηκαν, επίσης, περιπτώσεις παράθεσης μη ρεαλιστικών δεδομένων:

"Ενας εργάτης πληρώθηκε για ένα δεκαπενθήμερο (;) 70 (;). Πόσο είναι το ημερομίσθιό του;"

Εκτός των 4 σωστών προβλημάτων μέτρησης παρατηρήθηκαν και δύο λανθασμένες απόπειρες κατασκευής τέτοιων προβλημάτων. Δίνουμε ένα παράδειγμα:

"Ενας μανάβης αγόρασε μερικά σακιά με 70 δραχμές όλα (!!) και τα πούλησε 14 δραχμές το ένα. Πόσα σακιά αγόρασε;"

Από τα 84 σωστά προβλήματα διαίρεσης ένα μόνο αναφερόταν στην έννοια της διαίρεσης σαν πράξη αντίστροφη του πολλαπλασιασμού:

"Ενα ορθογώνιο δωμάτιο έχει εμβαδόν 70 τ.μ. Ξέρουμε ότι το μήκος του είναι 14 μ. Πόσο είναι το πλάτος του;"

Σε 4 άλλα προβλήματα γίνεται **σύγχιση μεταξύ εμβαδού και περιμέτρου:**

"Ενα κουτί (;) έχει μήκος 14 μ. Όλο το κουτί (;) είναι 70 μ. Πόσο είναι το πλάτος;"

ή **παρερμηνεύεται ο ρόλος των διαφόρων όρων της διαίρεσης:**

"Ενας ορθογώνιο έχει ύψος 112 μ. και πλάτος 450 μ. Πόσα μέτρα είναι το μήκος;"

Η απορία που μας δημιουργήθηκε μετά την ανάλυση των προβλημάτων που κατασκεύασαν οι μαθητές ήταν: **Ποιο είναι το μερίδιο ευθύνης των δασκάλων για τη συγκεκριμένη συμπεριφορά των μαθητών;**

Με άλλα λόγια: Πόσο ενημερωμένοι είναι οι δάσκαλοι για τα διάφορα είδη διαίρεσης; Υπάρχει και σ' αυτούς μια τάση να ταυτίζουν το πρόβλημα διαίρεσης με " το πρόβλημα διαίρεσης μερισμού"; Κατά πόσο είναι ικανοί να φτιάχνουν απλά προβλήματα διαίρεσης;

Για να μπορέσουμε να έχουμε μια πρώτη απάντηση στα προηγούμενα ερωτήματά μας, ζητήσαμε από 100 επί πτυχίω φοιτητές, μέλλοντες δασκάλους, να διατυπώσουν ένα απλό πρόβλημα διαίρεσης.

92 προβλήματα από αυτά που προτάθηκαν ήταν σωστά, εκ των οποίων **66 ήταν προβλήματα μερισμού και 18 ήταν προβλήματα μέτρησης** (αναλογία 1:4 περίπου) και η ιστορία που περιγράφεται σ' αυτά αφορά μοίρασμα "αγαθών" σε φίλους. Στην πλειοψηφία τους σ' αυτά τα προβλήματα ο διαιρετέος ήταν μεγαλύτερος του διαιρέτη. Μόνο 12 από τα 84 προβλήματα μερισμού ή μέτρησης είχαν $Δ<δ$ (αναλογία 1:7).

Προτάθηκαν επίσης:

-1 πρόβλημα εμβαδού ("Η βάση ενός ορθογωνίου είναι 5 m και το εμβαδόν του $20m^2$. Πόσο είναι το ύψος του;")

-1 πρόβλημα ταχύτητας ("Σε πόση ώρα θα καλύψω 500 χιλιόμετρα, αν η ταχύτητά μου είναι 100 χιλιόμετρα την ώρα;")

-6 προβλήματα όπου η διαίρεση εμφανίζεται σαν λόγος."Σε ένα σχολείο ο αριθμός των μαθητών είναι εξαπλάσιος από τον αριθμό των καθηγητών. Αν το σύνολο μαθητών και καθηγητών είναι 126 άτομα, πόσοι είναι οι καθηγητές;"

"Ενα αυτοκίνητο τρέχει με 100 Km/h. Ενα μηχανάκι τρέχει με 25 m/h. Πόσες φορές είναι πιο γρήγορο το αυτοκίνητο;"

"Η απόσταση Αθήνα - Θεσσαλονίκη είναι 450 Km. Η απόσταση Λάρισα - Θεσσαλονίκη είναι 150 Km. Τι μέρος της απόστασης Αθήνας - Θεσσαλονίκη αποτελεί η απόσταση Λάρισα - Θεσσαλονίκη;"

"Ενα πακέτο καφέ ζυγίζει 125 gr. Τι μέρος του κιλού αντιπροσωπεύει;"

"Σε ένα ζαχαροπλαστείο για κάθε 5 άτομα που αγοράζουν τυρόπιτα, 10 αγοράζουν γλυκό. Ποια είναι η αναλογία μεταξύ των ατόμων που αγοράζουν τυρόπιτα και εκείνων που αγοράζουν γλυκό;"

Οι κυριότερες παρανοήσεις αφορούσαν:

-Χρήση λεξιλογίου που δηλοί "αφαίρεση"

π.χ. " Έχουμε διαίρεση δεκαδικού από ακέραιο (για τη διαίρεση 19,2:4).

-Εσφαλμένη πεποίθηση ότι η **παρουσία της λέξης "μοιράζω"** κατοχυρώνει τη διαίρεση:

"Εχω 30 καραμέλες και θέλω να τις μοιράσω στο 1/3 των παιδιών μιας τάξης. Πόσες καραμέλες θα πάρει το κάθε παιδί;".

-Κατάχρηση του όρου "μοιράζω" για την κατοχύρωση της πράξης της διαίρεσης.

"Εχω ένα κομμάτι σωλήνα 2 μ. και θέλω **να το μοιράσω** σε 5 κομμάτια"

(αντί να το κόψω ή να το χωρίσω).

Εξωπραγματικά δεδομένα.

"Η τιμή της βενζίνης σ' ένα βενζινάδικο έχει 12 δραχμές ανά λίτρο ...".

Σύγχιση με την πράξη του πολλαπλασιασμού.

"Το αυτοκίνητό μου καίει σε 2h, 43 λίτρα. Η τιμή της βενζίνης ... Πόσο θα μου κοστίσει η ίδια διαδρομή σε 4h;" (καμιά κατοχύ

ρωση σταθερής ταχύτητας).
-Προβλήματα όπου **όλα ... εννοούνται.**
"Σε μια μοδίστρα 6 φίλες πήγαν 3 μ. ύφασμα. Πόσα μέτρα ύφασμα πρέπει να πάρει η καθεμια;" (Αλήθεια, πόσα;).
"Ο Δημήτρης έχει 24 σοκολάτες. Πόσες θα δώσει στους 12 φίλους του;" (Ισως και καμμία).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Πριν περάσουμε στη σύνοψη των αποτελεσμάτων και στα συμπεράσματα που προέκυψαν από την ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών στα ερωτήματα που τους θέσαμε, θα θέλαμε να υπογραμμίσουμε ακόμα μια φορά την περιορισμένη ισχύ αυτών των συμπερασμάτων για τρεις κυρίως λόγους:

Κατ' αρχήν το μέγεθος του πληθυσμού, του οποίου παρατηρήσαμε τη συμπεριφορά, ήταν σχετικά μικρό.

Επειτα, ο αριθμός των προβλημάτων που χρησιμοποιήθηκαν για κάθε ερευνητική περιοχή (ικανότητα για εκτέλεση αλγορίθμου, διερεύνηση εσφαλμένων πεποιθήσεων των μαθητών, έλεγχος κριτικής ικανότητας και ικανότητας κατασκευής προβλημάτων κ.λπ.) ήταν πολύ μικρός σε σχέση με την ευρύτητα των θεμάτων.

Τέλος, ο συνολικός αριθμός των ασκήσεων και προβλημάτων, ήταν σχετικά μεγάλος για τις δυνατότητες (στα πλαίσια 2 διδακτικών ορών) μαθητών αυτής της ηλικίας.

Η ιδανική λύση θα ήταν να μπορούσαμε να ελέγξουμε τη γνωστική συμπεριφορά των μαθητών με ένα συνδυασμό προσωπικών συνεντεύξεων και ερωτηματολογίων που θα περιείχαν λιγότερες ερωτήσεις και που για τη συμπλήρωσή τους θα διετίθεντο περισσότερες διδακτικές ώρες.

Για τις συνθήκες, όμως, κάτω από τις οποίες έγινε η περιγραφείσα εργασία κάτι τέτοιο ήταν εντελώς αδύνατο (μη δυνατότητα διάθεσης περισσότερων ωρών από τους δασκάλους λόγω πληθώρας της διδακτέας ύλης).

Προσπαθήσαμε, όμως, έστω και κάτω από από αυτές τις συνθήκες, **να φέρουμε στην επιφάνεια κάποιες βασικές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές των τελευταίων τάξεων του δημοτικού σχολείου** ως προς την εφαρμογή του αλγορίθμου και την επίλυση και κατασκευή προβλημάτων διαίρεσης.

Τα συμπεράσματα που προέκυψαν θα αποτελέσουν τις βασικές υποθέσεις για μια πληρέστερη έρευνα σχετική με τα γνωστικά εμπόδια που συναντούν οι μαθητές του δημοτικού σχολείου στην πορεία τους για την κατάκτηση βασικών μαθηματικών εννοιών.

Ας δούμε όμως συνοπτικά αυτά τα συμπεράσματα:

1) Τα εγχειρίδια δίνουν ελάχιστη προσοχή στην έννοια που κρύβεται πίσω από μια πράξη και ενδιαφέρονται περισσότερο για την πρακτική σκοπιά του θέματος (π.χ. εκτέλεση ενός αλγορίθμου με περισσότερο από έναν τρόπους).

Δυστυχώς όμως η πρόωρη ενασχόληση με τον αλγόριθμο δημιουργεί στους μαθητές, αλλά και στους δασκάλους, εσφαλμένες εντυπώσεις: ότι δηλαδή εκείνο που έχει μεγαλύτερη σημασία είναι να πάρουμε μια απάντηση και όχι να κατανοήσουμε με ποιο τρόπο η συγκεκριμένη πράξη σχετίζεται με καταστάσεις της καθημερινής ζωής. Η πιο πιθανή συνέπεια μιας τέτοιας προσέγγισης του θέματος είναι να αποκτήσουν οι μαθητές ημιτελείς ή και εσφαλμένες εντυπώσεις σχετικά με τη φύση της έννοιας και τις εφαρμογές της (π.χ. ο πολλαπλασιασμός σαν επαναλαμβανόμενη πρόσθεση).

Τα αποτελέσματα που παρουσιάσαμε στις προηγούμενες σελίδες συνηγορούν υπερ μιας τέτοιας πιθανότητας.

2) Οι αριθμομηχανές δεν αποτελούν πανάκεια. Το αποτέλεσμα του αλγόριθμου έχει ελάχιστη σημασία αν δεν μπορεί να εκτιμηθεί από λογικής άποψης.

Αν "ένα φλυτζάνι γάλα προστεθεί σ' ένα φλυτζάνι ποπ κορν", δεν θα προκύψουν δύο φλυτζάνια μίγματος.

Και αν "ένα δισεκατομμύριο βαρέλια πετρέλαιο στοιχίζουν x δολλάρια" η τιμή του ενός τρισεκατομμυρίου βαρελιών πετρέλαιο στην πραγματικότητα δεν βρίσκεται μέσα από μια αναλογική σχέση, διότι "τι τιμή να χρεώσουμε για έναν πόρο που εξαντλείται; Σίγουρα απαιτείται μια κύρωση ..." (DAVIS - HERSH, 1981).

Επιπλέον, οι αριθμομηχανές είναι ουσιαστικά άχρηστες σε περιπτώσεις όπου ζητείται η μετάφραση από μια μορφή αναπαράστασης σε μια άλλη (π.χ. από τη φυσική γλώσσα σε διάγραμμα).

Τέλος, η γνώση του αλγόριθμου είναι απαραίτητη, διαφορετικά ο κίνδυνος της τυφλής εξάρτησης από τη μηχανή, είναι πολύ πιθανός.

3) Στα πλαίσια της επίλυσης προβλημάτων είναι εξίσου (ή και περισσότερο) σημαντικό να κατανοήσουν οι μαθητές τη διαδικασία που οδηγεί στην απαιτούμενη πράξη από το να μάθουν να εκτελούν σωστά αυτή την πράξη.

Αν το περιεχόμενο της διδακτικής ενότητας, στην οποία ανήκει ένα πρόβλημα, είναι π.χ. η διαίρεση, ο δρόμος που θα οδηγήσει τους μαθητές στη λύση είναι μονόδρομος. Αν ένας μαθητής απαντά "θα κάνω διαίρεση" σε ένα πρόβλημα που βρίσκεται στο κεφάλαιο που αναφέρεται στη διαίρεση, δεν διαφέρει και πολύ από έναν καλογυμνασμένο παπαγάλο. Και για μεν τον παπαγάλο μια τέτοια απάντηση είναι σημαντική, για ένα μαθητή όμως δεν αποδεικνύει τίποτα.

Το ίδιο συμβαίνει και σε άλλες περιπτώσεις, όπως για παράδειγμα σχετικά με την αποστήθιση του πίνακα του πολλαπλασιασμού. Πρόκειται για μια χρήσιμη γνώση, δεν είναι, όμως, μαθηματική γνώση.

Η μαθηματική γνώση δεν περιορίζεται σε ένα σύνολο τεχνικών, αλλά αφορά κυρίως την ικανότητα για παραγωγή νέων αποτελεσμάτων (VON GLASERSFELD, 1978).

Είναι περισσότερο "λειτουργική" γνώση και σαν τέτοια είναι "κατασκευαστική", άρα αναδεικνύεται περισσότερο σε καταστάσεις όπου κάτι νέο ζητιέται, κάτι που δεν ήταν γνωστό εκ των προτέρων.

Γι' αυτό το λόγο θεωρούμε ότι **η παρουσία προβλημάτων, στην εκφώνηση των οποίων δεν εμπεριέχονται αριθμητικά δεδομένα,** αλλά για την επίλυσή τους απαιτείται πρώτιστα η υιοθέτηση μιας κατάλληλης στρατηγικής και στη συνέχεια - ενδεχομένως - κάποιες αριθμητικές πράξεις, είναι επιτακτική ανάγκη.

Τέτοιου είδους προβλήματα (π.χ. πρόβλημα "ρυζιού"), που θά 'πρεπε, κατά τη γνώμη μας, να προηγούνται της διδασκαλίας του αλγορίθμου, βοηθούν τα παιδιά να "δουν" τη διδασκόμενη έννοια σαν ένα γενικότερο μαθηματικό μοντέλο, απαλλαγμένο από τις δυσκολίες εφαρμογής του αλγορίθμου και τις πιθανές δυσκολίες των αριθμητικών δεδομένων.

4) Ο τρόπος με τον οποίο αντιμετώπισαν οι μαθητές κάποια προβλήματα (προβλ. 7, 8, ομάδα ΙΙΙ), οδηγεί στη σκέψη ότι οι λέξεις που χρησιμοποιούμε καθημερινά, δεν αντανακλούν τα ίδια πράγματα για όλους.

Αν εξαιρέσουμε περιπτώσεις άγνοιας του περιεχομένου μιας λέξης λόγω μη συνεχούς χρήσης της, η παραπάνω σκέψη είναι βάσιμη, δεδομένου ότι δεν μοιράζονται όλοι οι άνθρωποι τις ίδιες εμπειρίες.

Υπάρχουν κοινωνικά, επαγγελματικά, οικονομικά και πολιτιστικά σύνορα που εμποδίζουν την επικοινωνία.Η ανοιχτή εννοιολογική δομή των καθημερινών εκφράσεων κάνει πολλές φορές τη χρήση τους σε επιστημονικό πλαίσιο προβληματική.

Για παράδειγμα μια "ημέρα" μπορεί να είναι μια χρονική μονάδα 8, 12 ή 24 ωρών ανάλογα αν μιλάμε για εργάσιμη ημέρα, ημερολογιακή ημέρα ή για ... ενοικίαση αυτοκινήτου.

Με την ίδια λογική μια "εβδομάδα" μπορεί να έχει 5, 6 ή 7 ημέρες ανάλογα αν μιλάμε για εβδομάδες εργασίας ή για ... διακοπές (SALJZ and WYNDHAMN, 1988).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

AUSUBEL, D. P. (1968): Educational Psychology: A cognitive view, New York: Holt, Rinehart and Winston.

BARTLETT, F. C. (1985): Thinking, London: Allen and Unwin.

BELL, A.(1987): Diagnostic teaching experiments with multiplicative problems. - In IV ème école d' èté de didactique des mathématiques.

BOERO, P., FERRARI, P. L. , FERRERO, E. (1989): Division Problems: Meanings and Procedures in the Transition to a written Algorithm, For the learning of Mathematics, 9: 17-25.

BROWN, M. (1982): Rules without reasons? Some evidence relating to the teaching of routine skills to low attainers in Mathematics, International Journal of Mathematics Education in Science and Technology: 13: 449-461.

BROWN, S. and WALTER, M. (1983): The art of Problem Posing, The Franklin Institute Press.

BUXTON, L. (1981): Do you panic about Math? Heineman, London.

CHARNAY, R. (1985): Un exemple d' apport des recherches en didactique des mathematiques: La division au cycle moyen. - Dans L' enseignement des mathematiques, Actes du Colloque ALP, Lyon.

DAVIS, P. J. and HERSH, R. (1981): Η Μαθηματική εμπειρία, Εκδόσεις Τροχαλία.

DUNCKER, K. (1945): On Problem Solving, Psychological Monographs, 58: 5, Whole No 270.

FIELKER, D. (1986): Which operation? Certainly not division!, For the learning of Mathematics, 6: 34-38.

FISCHBEIN, E. (1989): Tacit Models and Mathematical Reasoning, For the learning of Mathemat ics, 9: 9-19.

FOXMAN, D. D.(1980): Mathematical development, H.M.S.O., London.

FREUDENTHAL, H. (1983): Didactical Phenomenology of Mathematical Structures, D. Reidel Publishing Company.

HADASS, R. and BRANSKY, J. (1991): Meanings of division and their implication for science teaching - A survey amongst elementary schoo lteachers. - In J. Math. Educ. Sci. Technol, Vol 22, No 2: 309-315.

HART, K. (1981): Children' s Understanding of Mathematics: 11-16, Murray, London.

HINSLEY, D., HAYES, J. R. and SIMON, H. A. (1977): From words to Equations. - In P. Carpenter and M. Just (Eds), Cognitive Processes in comprehension. Hillsdale, N. J.: Erlbaum.

JANVIER, C. (1987): Translation Processes in Mathematics Education. - In Problems of Representaion in the teaching and learning of Mathematics, ed. C. Janvier.

KOHLER, W. (1925): The mentality of apes. New York: Harcourt Brace Jovanovich.

ΚΟΛΕΖΑ, Ε. και ΣΟΥΡΛΑΣ, Κ. (1990): ΑΣΚΗΣΕΙΣ και ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ - Μια Λειτουργική Ταξινόμηση, Ευκλείδης Γ, τεύχος 27.

LAING, R. A. and MEYER, R. A. (1982): Transitional division algorithms, Arithmetic Teacher, 29: 10-13.

LESH, R., ROST, T., BEHR, M. (1987): Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. - In Problems of Representaion in the teaching and learning of Mathematics, ed. C. Janvier.

ΜΑΝΙΟΥ - ΒΑΚΑΛΗ, Μ.(1992): Λύση αριθμητικών πράξεων πλήρους και ατελούς διαίρεσης από τα παιδιά ηλικίας εννέα και δέκα χρόνων. Ψυχολογικές Ερευνες στην Ελλάδα, Τόμος Ι: 131-147.

MASON, J. (1987): What do Symbol Represent? - In Problems of Representation in the teaching and learning of Mathematics, ed C. Janvier

MAYER, R. E. (1983): Thinking, Problem Solving, Cognition. W. H. Freeman and Company, New York.

MINSKY, M. A. (1975): A framework for representing knowledge. - In The psychology of computer vision. P. H. Winston (Ed), New York: Mc Graw - Hill.

NESHER, P. (1982): Levels of description in the analysis of addition and substraction word problems. - In Addition and Substraction: A cognitive perspective. T. P. Carpenter, J. M. Moser and T A. Romberg (Eds). Hillsdale N. J.: Erlbaum.

NEYRET, R. (1986): Situations didactiques d' apprentissage de la division, - Dans En Mathematiques peut mieux faire, INRP.

PIAGET, J., GRIZE, J. B. et al (1968): Epristemologie et psychologie de la fonction, P.U.F., Paris.

ΠΟΡΠΟΔΑΣ, Κ. (1991): Γνωστική Ψυχολογία, Τόμος 1 και 2.

RATHMELL, E. C. and HUINKER, D. M. (1989): Using "Part - Whole" Language to help Children Represent and Solve Word Problems. - In Yearbook 1989, N.C.T.M.

RESNICK, L.B. and FORD W. W. (1984): The psychology of mathematics instruction, Hillsdale, N. J.: Erlbaum.

SALJZ, R. and WYNDHAMN, J.(1988): A week has seven days. Or does it? On bridging linguistic Openness and Mathematical Precision, For the learning of Mathematics 8: 16-19.

SHADMI, Y. (1983): Basic Concepts in Science and how to teach them, Jerusalem: The Israeli Science Teaching Center, Hebrew University of Jerusalem.

SKEMP, R. R. (1971): The psyhology of the learning mathematics, Harmondsworth, England: Penguin Books.

SLESNICK, T. (1986): Algorithmic Skill vs. conceptual understanding: 143-154.

TEULE - SENSACQ, P. et UINRICH, G. (1982): Resolution de problemes de division au cycle elementaire dans deux types de situations didactiques.

TOYLMIN, S. (1977): Human Understanding. Princeton: Princeton University Press.

TREFFERS, A. (1987): Integrated column arithmetic according to progressive schematisation, Educational Studies in Mathematics 18: 125-145.

TREFFERS, A. and GOFFREE, F. (1987): Educational Studies in Mathematics 18: 125-145.

VON GLASERSFELD, E. (1987): Learning as a constructive activity. - In Problems of Representaion in the teaching and learning of Mathema tics, ed C. Janvier.

WERTHEIMER, M. (1959): Productive Thinking, New York, Harper and Row.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ και ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ που τέθηκαν στους μαθητές της Δ' και Ε' τάξης δημοτικού

Ομάδα Ι Διάκριση των όρων μιας διαίρεσης

1. Στην παρακάτω διαίρεση να ονομασθούν οι όροι που βρίσκονται σε κύκλο

47	12
- 36	3
11	

Ομάδα ΙΙ Εκτέλεση αλγορίθμου και προσδιορισμός σχέσης παραγόντων μιας διαίρεσης:

1. Να γίνει η διαίρεση 15:3
2. Να γίνει η διαίρεση 17:4
3. Ν α εκτελεσθεί η παρακάτω διαίρεση και να γίνει η δοκιμή (225:32)
4. Να γίνει η διαίρεση 345:42
5. Με ποιον αριθμό πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό 12 ώστε να βρούμε αποτέλεσμα 156;
6. Να γίνει η διαίρεση 38:59
7. Βάλτε στο κουτάκι τον αριθμό που λείπει

118 x □ = 59 □: 12 =11,5
2,4 : □ = 1,6 □ : 2,4 = 30

Ομάδα ΙΙΙ Επίλυση προβλημάτων διαίρεσης

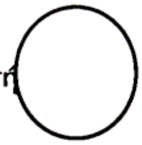
1. Ο Γιώργος έχει 42 μολυβένια στρατιωτάκια και θέλει να τα μοιράσει σε 3 φίλους του. Πόσα στρατιωτάκια θα πάρει ο κάθε ένας από τους φίλους του;

2. Για τη βαφή ενός σπιτιού χρειαζόμαστε 5 φορές περισσότερο χρώμα από ότι για τη βαφή ενός δωματίου. Αν για ολόκληρο το σπίτι χρειαζόμαστε 25 κιλά χρώμα, πόσο χρώμα θα χρειασθούμε για τη βαφή του δωματίου;

3. Σε μερικούς φίλους μου μοίρασα 76 καραμέλες. Ο κάθε ένας πήρε από 8 καραμέλες. Πόσοι ήταν οι φίλοι μου;

4. Στα γενέθλια της Ελένης η μητέρα της έφτιαξε 40 μπισκότα για όλα τα παιδιά. Η Ελένη μοίρασε από 3 στο κάθε παιδί. Πόσα ήταν τα παιδιά;

5. Η Ελένη στα γενέθλιά της μοίρασε εξίσου σε 5 φίλους της μια τούρτα που αποτελούνταν από 16 κομμάτια. Πόσα κομμάτια πήρε ο καθένας και πόσα κομμάτια περίσεψαν;

Αν η τούρτα είναι αυτή  ζωγράφισε τι ακριβώς έγινε.

6. Μια πλατεία σχήματος ορθογωνίου έχει εμβαδό 384 τ.μ. Ξέρουμε ότι το πλάτος της είναι 16 μ. Πόσο είναι το μήκος της πλατείας;

7. Ενας πεζός περπάτησε 3 χιλιόμετρα σε μια ώρα. Τι απόσταση περπάτησε στο ένα λεπτό;

8. Ενας εργάτης πληρώθηκε για ένα δεκαπενθήμερο δουλειάς 62 χιλιάδες δραχμές. Ποιο είναι το ημερομίσθιο του εργάτη;

9. Αγοράσαμε ζαμπόν με 1700 δραχμές το κιλό και πληρώσαμε 650 δραχμές.Πόσο ζαμπόν αγοράσαμε;

10.Η μητέρα του Γιάννη αγόρασε 2,5 κιλά αλεύρι για να ζυμώσει ψωμί και πλήρωσε 480 δραχμές. Πόσο κοστίζει το κιλό το αλεύρι;

Ομάδα IV Κριτική αντιμετώπιση προβλημάτων διαίρεσης

1. Οι 500 μαθητές ενός δημοτικού σχολείου στα Γιάννενα αποφάσισαν να πάνε εκδρομή στο Μέτσοβο. Πόσα λεωφορεία των 52 θέσεων χρειάζονται;

2. Θέλουμε να μετρήσουμε τους κόκκους του ρυζιού σε 1 κιλό ρύζι. Τι μπορούμε να κάνουμε; Να μετρήσουμε τους κόκκους ένα προς ένα; Αν όχι, τι προτείνεις;

3. Σκέφθηκα έναν αριθμό. Μετά τον πολλαπλασίασα με έναν άλλο. Τι έπαθε ο αριθμός που σκέφθηκα;

Μεγάλωσε ☐ Μίκρυνε ☐ Άλλη πιθανότητα ☐
Ποια;...............................

Ομάδα V Ικανότητα σύνθεσης προβλημάτων διαίρεσης

1.α) Δίνεται η διαίρεση

$$\begin{array}{r|l} 70 & 14 \\ \cline{2-2} 0 & 5 \end{array}$$

Να φτιάξεις ένα πρόβλημα που η λύση του να δίνεται απ' αυτή τη συγκεκριμένη διαίρεση.

β) Το ίδιο και για τη διαίρεση

$$\begin{array}{r|l} 450 & 4 \\ \cline{2-2} 05 & 112 \\ 10 & \\ 2 & \end{array}$$