



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΛΙΚΩΝ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΔΙΑΔΟΣΗΣ
ΥΠΕΡΗΧΩΝ ΣΕ ΑΘΙΚΤΑ ΚΑΙ ΚΑΤΕΛΓΟΤΑ ΟΣΤΑ ΚΑΙ
ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ *IN-VITRO* ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ

ΜΑΡΙΑΣ Γ. ΒΑΒΒΑ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2009

*Στην οικογένεια μου και στο
Βαγγέλη για τη διαρκή υποστήριξη και αγάπη τους*

Πρόλογος

Η παρούσα διδακτορική διατριβή πραγματοποιήθηκε στο Τμήμα Μηχανικών Επιστήμης Υλικών σε συνεργασία με τη Μονάδα Ιατρικής Τεχνολογίας και Ευφών Πληροφοριακών Συστημάτων του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Η εργασία στα πλαίσια της διδακτορικής διατριβής πραγματοποιήθηκε υπό την επίβλεψη του κ. Αντώνιου Χαραλαμπόπουλου Καθηγητή Τμήματος Μηχανικών Επιστήμης Υλικών, τον οποίο θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά για την ουσιαστική καθοδήγηση και την αμέριστη υποστήριξη που μου προσέφερε καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διατριβής. Οι επιστημονικές γνώσεις που αποκόμισα από τη συνεργασία με τον κ. Χαραλαμπόπουλο αποτέλεσαν πηγή έμπνευσης και έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην επιτυχή ολοκλήρωση της διατριβής. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω ειλικρινά τον κ. Δημήτριο Φωτιάδη, Καθηγητή Τμήματος Μηχανικών Επιστήμης Υλικών και υπεύθυνο της Μονάδας Ιατρικής Τεχνολογίας & Ευφών Πληροφοριακών Συστημάτων (MedLab) τόσο για τη βοήθεια και την καθοδήγησή του όσο και για την στήριξή του σε επιστημονικό επίπεδο. Επιπλέον, θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για την χρηματοδότηση που μου εξασφάλισε σε όλη την διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου, η οποία πέρα όλων των άλλων, μου επέτρεψε να έχω συνεχή ερευνητική παρουσία σε διεθνή συνέδρια που σχετίζονται με το αντικείμενο της διατριβής μου. Επίσης ευχαριστώ ιδιαίτερος τον κ. Δημοσθένη Πολύζο Καθηγητή του Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών και Αεροναυπηγών του Πανεπιστημίου Πατρών, του οποίου οι υποδείξεις και επιστημονικές γνώσεις συνέβαλαν καταλυτικά στην διεκπεραίωση της διατριβής. Θα ήθελα να ευχαριστήσω επίσης τον κ. Κωνσταντίνο Μαλίζο, Καθηγητή Ορθοπαιδικής της Ιατρικής Σχολής Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, για την οριοθέτηση των ιατρικών κατευθύνσεων της παρούσας διατριβής. Ευχαριστώ επίσης τον κ. Χρήστο Μασσαλά, για την συμπαράστασή του κατά τα στάδια εκπόνησης της διατριβής. Ιδιαίτερες ευχαριστίες θέλω να απευθύνω επίσης στον κ. Λεωνίδα Γεργίδη, λέκτορα του τμήματος Μηχανικών Επιστήμης υλικών για τη πολύτιμη βοήθειά του και την αμέριστη υποστήριξή του. Η συνεργασία μου μαζί του συνέβαλε καθοριστικά στην αντιμετώπιση προβλημάτων που προέκυψαν κατά την προρεία της έρευνας.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω θερμά τους γονείς μου, Γιώργο και Ντίνα, την αδερφή μου Έφη και το Βαγγέλη, για την συμπαράστασή τους και την αγάπη που μου δείχνουν και μου έδειξαν απλόχερα καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διατριβής.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες θέλω να απευθύνω στο διδάκτορα Βασίλειο Προτόπαππα για τη συνεργασία, τις ιδέες και τις πολύτιμες συμβουλές του σε ερευνητικά θέματα στα πλαίσια της διατριβής. Η συμβολή του ήταν καταλυτική για την ολοκλήρωση της διατριβής.

Τέλος, ιδιαίτερες ευχαριστίες θα ήθελα να απευθύνω σε όλους τους φίλους και συναδέλφους μου στη Μονάδα Ιατρικής Τεχνολογίας και Ευφών Πληροφοριακών Συστημάτων. Ιδιαίτερη αναφορά θα ήθελα να κάνω στην υποψήφια διδάκτορα Έλενα Γεώργα για τη φιλία της και τη συμπαράστασή που μου έδειξε.

Η παρούσα διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε στα πλαίσια του έργου ΠΕΝΕΔ 2003 03ΕΔ140 το οποίο συγχρηματοδοτείται:

- 80% της Δημόσιας Δαπάνης από την Ευρωπαϊκή Ένωση – Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
- 20% της Δημόσιας Δαπάνης από το Ελληνικό Δημόσιο – Υπουργείο Ανάπτυξης – Γενική Γραμματεία Έρευνας και Τεχνολογίας
- και από τον Ιδιωτικό Τομέα
- στο πλαίσιο του Μέτρου 8.3 του Ε.Π. Ανταγωνιστικότητα – Γ' Κοινοτικό Πλαίσιο Στήριξης.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

	Σελ.
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΔΟΜΗ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΑΚΡΩΝ ΟΣΤΩΝ – ΠΩΡΩΣΗ ΚΑΤΑΓΜΑΤΩΝ ΜΑΚΡΩΝ ΟΣΤΩΝ	7
1.1 Δομή και Σύσταση Μακρών Οστών	7
1.1.1 Μακροσκοπική Σύσταση Μακρού Οστού	7
1.1.2 Μικροσκοπική Σύσταση	11
1.2 Κατάγματα Μακρών Οστών	14
1.3 Φυσιολογία της Πώρωσης Καταγμάτων Μακρών Οστών	15
1.3.1 Πρωτογενής Πώρωση	16
1.3.2 Δευτερογενής Πώρωση	16
1.3.3 Θεραπεία Καταγμάτων	20
1.4 Αξιολόγηση της Πώρωσης Καταγμάτων Μακρών Οστών	21
1.5 Μηχανικές Ιδιότητες Μακρών Οστών στα Επίπεδα της Ιεραρχικής Δομής	23
1.5.1 Μηχανικές Ιδιότητες μακρών οστών σε μακροσκοπικό επίπεδο	23
1.5.2 Μηχανικές Ιδιότητες οστών σε επίπεδο μικροδομής	28
1.5.3 Μηχανικές Ιδιότητες οστών σε επίπεδο νανοδομής	33
1.6 Μηχανικές Ιδιότητες Κατεαγότος Οστού - Εμβιομηχανική αξιολόγηση της πώρωσης καταγμάτων	36
1.6.1 Χρήση Εμβιομηχανικών Μεθόδων Παρακολούθησης της Πώρωσης Μακρών Οστών	37
1.7 Βιβλιογραφία	41
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΔΙΑΔΟΣΗ ΥΠΕΡΗΧΩΝ ΣΕ ΜΑΚΡΑ ΟΣΤΑ	53
2.1 Εισαγωγή	53
2.1.1 Αρχή Λειτουργίας και Χαρακτηριστικά Μετατροπέων Υπερήχων	54
2.1.2 Τεχνικές Εφαρμογής Υπερήχων με Χρήση δύο τουλάχιστον Μετατροπέων	56
2.2 Διάδοση Υπερήχων σε Γραμμικά Ελαστικά Μέσα	57
2.2.1 Διάδοση σε Άπειρο Μέσο	57
2.2.2 Διάδοση σε Ημι-Άπειρο Μέσο	60
2.2.3 Διάδοση σε Ελεύθερη Πλάκα-Πρόβλημα του Lamb	62
2.3 Μετρήσεις Ταχύτητας Αξονικής Διάδοσης Υπερήχων για την Αξιολόγηση Άθικτων και Κατεαγότων Μακρών Οστών	76
2.3.1 Ορισμός του Πρώτου Αφικθέντος Σήματος (First Arriving Signal-FAS)	76
2.3.2 Αξιολόγηση Άθικτων Μακρών Οστών	81
2.3.3 Αξιολόγηση πώρωσης καταγμάτων από μετρήσεις ταχύτητας	90

2.4	Αξιολόγηση Άθικτων και Κατεαγόντων Μακρών Οστών μέσω της Διάδοσης Κυματοδηγούμενων Ρυθμών Υπερήχων	102
2.4.1	Χρήση κυματοδηγούμενων ρυθμών για την αξιολόγηση άθικτων μακρών οστών	102
2.4.2	Χρήση Κυματοδηγούμενων Ρυθμών για την Αξιολόγηση της Πώρωσης Καταγμάτων Μακρών Οστών	111
2.5	Βιβλιογραφία	120

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΥΝΕΧΟΥΣ

ΜΕΣΟΥ ΜΕ ΜΙΚΡΟΔΟΜΗ 128

3.1	Εισαγωγή	128
3.2	Γενικευμένες Θεωρίες Ελαστικότητας Συνεχούς Μέσου (Generalized Continuum Theories of Elasticity)	129
3.2.2	Μη-Τοπική Θεωρία Ελαστικότητας Συνεχούς Μέσου (Non-Local Theory)	132
3.2.3	Θεωρία Ελαστικότητας Ανώτερων Βαθμίδων (Higher Order Gradient Theory)	133
3.3	Γενικευμένη Θεωρία ελαστικότητας για μέσο με μικροδομή κατά Mindlin	136
3.3.1	Ορισμός μεγεθών κινηματικής	136
3.3.2	Εξισώσεις Ισορροπίας και Συνοριακές Συνθήκες	139
3.3.3	Ορισμός καταστατικών εξισώσεων	141
3.3.4	Απλοποιημένες Μορφές της Θεωρίας Ελαστικότητας κατά Mindlin	143
3.4	Απλοποιημένη Μορφή II της Θεωρίας Ελαστικότητας Βαθμίδας κατά Mindlin	145
3.5	Εφαρμογές Θεωριών Ελαστικότητας Ανώτερης Τάξης (Enhanced Theories) σε μακρά οστά	149
3.6	Βιβλιογραφία	152

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΣΤΗ

ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΥΜΕΝΩΝ ΡΥΘΜΩΝ ΣΕ

ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΘΙΚΤΩΝ ΚΑΙ

ΚΑΤΕΑΓΟΤΩΝ ΟΣΤΩΝ 159

4.1	Εισαγωγή	159
4.2	Υλικά και Μέθοδοι	161
4.2.1	Μοντέλο Οστού	161
4.2.2	Μοντέλο Πώρου	161
4.2.3	Προσομοίωση της τεχνικής αξονικής διάδοσης	162
4.2.4	Προσομοίωση τεχνικής αξονικής διάδοσης	163
4.2.5	Επίλυση με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών	163
4.3	Ανάλυση των Σημάτων Υπερήχων	166
4.3.1	Ανάλυση Σημάτων Υπερήχων στο Πεδίο του Χρόνου	166
4.3.2	Ανάλυση Σημάτων Υπερήχων στο Πεδίο Χρόνου-Συχνότητας	166
4.4	Αποτελέσματα	167

4.5	Συζήτηση	171
4.6	Βιβλιογραφία	177
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΥΠΕΡΗΧΩΝ ΣΕ ΑΘΙΚΤΑ ΚΑΙ ΚΑΤΕΑΓΟΤΑ ΟΣΤΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΤΙΣ ΒΕΛΟΝΕΣ ΤΗΣ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗΣ ΟΣΤΕΟΣΥΝΘΕΣΗΣ - 2Δ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ		180
5.1	Εισαγωγή	180
5.2	Υλικά και Μέθοδοι	182
5.2.1	Μοντέλο του Οστού και του Πώρου	182
5.2.2	Μοντέλο των βελονών της εξωτερικής οστεοσύνθεσης	183
5.2.3	Διάταξη Πομπου-Δέκτη	184
5.2.4	Συνοριακές Συνθήκες	186
5.2.5	Καθορισμός του μονοπατιού διάδοσης υπερήχων και της ταχύτητας	186
5.3	Αποτελέσματα	190
5.4	Συζήτηση	194
5.5	Βιβλιογραφία	199
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΥΜΕΝΩΝ ΡΥΘΜΩΝ ΣΕ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΠΛΑΚΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΟΜΕΝΗ ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΒΑΘΜΙΔΑΣ: ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΦΛΟΙΩΔΕΣ ΟΣΤΟ		201
6.1	Εισαγωγή	201
6.2	Διάδοση κυμάτων σε άπειρο συνεχές με μικροδομή με βάση τη μορφή II της θεωρίας ελαστικότητας βαθμίδας	203
6.3	Προσδιορισμός των παραμέτρων εσωτερικής κλίμακας μήκους	206
6.4	Κυματική διάδοση σε ελεύθερη πλάκα με μικροδομή με χρήση της θεωρίας βαθμίδας	211
6.5	Εφαρμογή σε πλάκα με ιδιότητες φλοιώδους οστού	214
6.6	Συζήτηση	223
6.7	Εφαρμογή των θεωρητικών κυματοδηγούμενων ρυθμών με βάση τη θεωρία ελαστικότητας τύπου βαθμίδας σε <i>ex-vivo</i> μετρήσεις σε άθικτο οστό	227
6.7.1	<i>Ex-vivo</i> Πειράματα	227
6.7.2	Αριθμητική επίλυση των κυματοδηγούμενων ρυθμών	228
6.7.3	Ανάλυση των σημάτων στο πεδίο χρόνου συχνότητας	230
6.7.4	Αποτελέσματα	230
6.8	Βιβλιογραφία	235
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ		241
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ I: ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΕ ΜΟΝΤΕΛΑ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΣΤΡΩΜΑΤΩΝ		245
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ II: ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ MINDLIN - ΜΟΡΦΕΣ I, II & III		250

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

f_j	συνιστώσες διανύσματος ανοιγμένων τάσεων στη μονάδα μάζας
ρ	πυκνότητα μάζας
E	μέτρο ελαστικότητας
σ_c	οριακή αντοχή
C_{ij}	συνιστώσες μητρώου στιβαρότητας
ε_{ij}	συνιστώσες διανύσματος τροπών (Κεφ.2)
u_i	συνιστώσες διανύσματος μετατοπίσεων \mathbf{u}
t_i	συνιστώσες διανύσματος τάσεων \mathbf{t}
σ_{ij}	συνιστώσες του τανυστή ολικών τάσεων $\tilde{\sigma}$
Φ	βαθμωτό δυναμικό
\mathbf{H}	διανυσματικό δυναμικό
n_i	συνιστώσες του κάθετου μοναδιαίου διανύσματος pointing \mathbf{n}
s_{ij}	συνιστώσες του τανυστή σχετικών τάσεων \tilde{s}
T_{jk}	συνιστώσες του τανυστή διπλών τάσεων ανά μονάδα επιφάνειας $\tilde{\mathbf{T}}$
u_i'	συνιστώσες διανύσματος μικρο-μετατοπίσεων \mathbf{u}'
W	η πυκνότητα δυναμικής ενέργειας
X_i	συνιστώσες του υλικού διανύσματος θέσης \mathbf{X} ενός υλικού σωματιδίου
x_i	συνιστώσες του χωρικού διανύσματος θέσης \mathbf{x} ενός υλικού σωματιδίου
X_i'	συνιστώσες του υλικού διανύσματος θέσης \mathbf{X}' ενός υλικού σωματιδίου ως προς το σύστημα ορθογώνιων συντεταγμένων που ορίζεται το σωματίδιο
x_i'	συνιστώσες του χωρικού διανύσματος θέσης \mathbf{x}' ενός υλικού σωματιδίου ως προς το σύστημα ορθογώνιων συντεταγμένων που ορίζεται το σωματίδιο
e_{ij}	συνιστώσες διανύσματος μακρο-μετατοπίσεων $\tilde{\mathbf{e}}$
γ_{ij}	συνιστώσες του τανυστή σχετικών παραμορφώσεων $\tilde{\gamma}$
κ_{ijk}	συνιστώσες της βαθμίδας μικρο-παραμορφώσεων $\tilde{\mathbf{k}}$
λ, μ	συντελεστές Lamè

μ_{ijk}	συνιστώσες του ταυιστή διπλών τάσεων $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$
ω_{ij}	συνιστώσες του ταυιστή μακρο-περιστροφής $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$
Φ_{jk}	συνιστώσες του ταυιστή διπλών τάσεων ανά μονάδα όγκου $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}$
ψ_{jk}	συνιστώσες των μικρο-παραμορφώσεων $\tilde{\boldsymbol{\psi}}$
τ_{ij}	συνιστώσες του ταυιστή τάσεων Cauchy $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι υπέρηχοι αποτελούν σήμερα σημαντικό εργαλείο για την αξιολόγηση των μηχανικών ιδιοτήτων μακρών οστών και έχουν χρησιμοποιηθεί ευρέως για τη διάγνωση της οστεοπόρωσης καθώς και πρόσφατα για την αξιολόγηση της διαδικασίας επούλωσης (πώρωσης) καταγμάτων μακρών οστών. Η αξιολόγηση καταγμάτων μακρών οστών περιλαμβάνει την παρακολούθηση της εξέλιξης της πώρωσης, τον έγκαιρο εντοπισμό πιθανών επιπλοκών καθώς και τον ακριβή προσδιορισμό ολοκλήρωσης της διαδικασίας. Κίνητρο των πρόσφατων μελετών αξιολόγησης καταγμάτων με υπέρηχους αποτέλεσε ο υποκειμενικός και ποιοτικός χαρακτήρας των παραδοσιακών κλινικών και ακτινολογικών μεθόδων αξιολόγησης της πώρωσης που καθιστούσε αναγκαία την ανάπτυξη νέων τεχνικών που να παρέχουν ποσοτικά και αντικειμενικά κριτήρια. Η πρόσφατη ανάπτυξη δισδιάστατων (2Δ) και τρισδιάστατων (3Δ) υπολογιστικών μοντέλων έχει παίξει πρωτεύοντα ρόλο στην κατανόηση και ερμηνεία πολύπλοκων φαινομένων κυματοδότησης που λαμβάνουν χώρα στην περιοχή του κατάγματος κατά τη διεργασία της πώρωσης. Ωστόσο η ανάπτυξη μοντέλων άθικτων και κατεαγότων οστών με ρεαλιστικές συνοριακές συνθήκες που να προσομοιώνουν την ύπαρξη των υπερκείμενων μαλακών ιστών και τη μυελική κοιλότητα του οστού αποτελεί ανοικτό ερευνητικό πεδίο. Επιπλέον, στις περισσότερες μελέτες αξιολόγησης των ιδιοτήτων μακρών οστών η ανάλυση βασίζεται στην κλασική θεωρία γραμμικής ελαστικότητας η οποία όμως δεν παρέχει επαρκή περιγραφή της μηχανικής συμπεριφοράς υλικών με μικροδομή όπως είναι το οστό. Η εισαγωγή της μικροδομής του οστού στις καταστατικές εξισώσεις του θεωρητικού προβλήματος κυματικής διάδοσης σε οστά, προϋποθέτει τη χρήση γενικευμένων θεωριών ελαστικότητας ανώτερης τάξης.

Αντικείμενο της παρούσας διατριβής είναι η υπολογιστική και θεωρητική μελέτη της διάδοσης κυματοδηγούμενων ρυθμών υπερήχων σε άθικτα και κατεαγότα οστά. Για το

σκοπό αυτό αρχικά αναπτύχθηκε μια υπολογιστική μελέτη διάδοσης υπερήχων σε δισδιάστατα (2Δ) μοντέλα άθικτων και κατεαγότων οστών με ρεαλιστικές συνοριακές συνθήκες που προσομοιώνουν την ύπαρξη των υπερκείμενων μαλακών ιστών και του μυελού των οστών. Στη συνέχεια αναπτύχθηκε μια δεύτερη 2Δ μελέτη στην οποία προτάθηκε και αξιολογήθηκε μια εναλλακτική μέθοδος διάδοσης υπερήχων σε κατεαγότα οστά εφαρμόζοντας τους μετατροπείς στις βελόνες της ήδη υπάρχουσας συσκευής εξωτερικής οστεοσύνθεσης. Ως επέκταση των υπολογιστικών αυτών μελετών στις οποίες το οστό θεωρήθηκε ομογενές υλικό, στα πλαίσια της παρούσας διδακτορικής διατριβής αναπτύχθηκε μια τρίτη εργασία στην οποία μελετήθηκε η επίδραση της μικροδομής του οστού στη διάδοση των κυματοδηγούμενων ρυθμών με χρήση μιας θεωρίας ελαστικότητας ανώτερης τάξης. Τα αποτελέσματα της θεωρητικής μελέτης χρησιμοποιήθηκαν για την ερμηνεία *ex-vivo* μετρήσεων σε πραγματικά άθικτα οστά.

Στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζεται αρχικά η δομή και σύσταση των μακρών οστών καθώς και η φυσιολογία της διαδικασίας επούλωσης (πώρωσης) καταγμάτων οστών. Στη συνέχεια περιγράφονται συνοπτικά τρόποι αντιμετώπισης καταγμάτων καθώς και οι παραδοσιακές μέθοδοι κλινικής και ακτινολογικής αξιολόγησης της πώρωσης. Παρουσιάζονται επίσης οι μηχανικές ιδιότητες άθικτων οστών στα διάφορα επίπεδα της ιεραρχικής δομής καθώς και η μηχανική συμπεριφορά των κατεαγότων οστών. Τέλος, αναφέρονται οι εμβιομηχανικές μέθοδοι παρακολούθησης της πώρωσης καταγμάτων και συγκρίνεται η διαγνωστική τους ικανότητα με αυτή των παραδοσιακών μεθόδων.

Στο Κεφάλαιο 2 περιγράφονται οι φυσικές αρχές των υπερήχων και πραγματοποιείται αναλυτική ανασκόπηση της υπάρχουσας βιβλιογραφίας στον τομέα της αξιολόγησης μακρών οστών με υπερήχους. Αρχικά παρουσιάζονται οι βασικές αρχές που διέπουν τη διάδοση ελαστικών κυμάτων σε μέσα με άπειρες και πεπερασμένες διαστάσεις. Συγκεκριμένα στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας γραμμικής ελαστικότητας επιλύεται αναλυτικά το πρόβλημα της ελεύθερης πλάκας (πρόβλημα Lamb), το πρόβλημα εμβαπτισμένης πλάκας σε ρευστό καθώς επίσης και προβλήματα μοντέλων δύο και τριών στρωμάτων. Στη συνέχεια περιγράφεται η τεχνική αξονικής διάδοσης υπερήχων η οποία θεωρείται ως η πιο κατάλληλη για την αξιολόγηση μακρών οστών. Η τεχνική αυτή έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως σε κλινικές και πειραματικές μελέτες για την

διάγνωση της οστεοπόρωσης καθώς και για την παρακολούθηση της πώρωσης καταγμάτων μακρών οστών, οι οποίες παρουσιάζονται αναλυτικά στο κεφάλαιο αυτό. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στο τέλος του κεφαλαίου στα αποτελέσματα πρόσφατων υπολογιστικών μελετών διάδοσης κυματοδηγούμενων ρυθμών υπερήχων σε κατεαγότα οστά. Σε αντίθεση με τις παραδοσιακές μετρήσεις της ταχύτητας υπερήχων οι κυματοδηγούμενοι ρυθμοί έχουν τη δυνατότητα να παρέχουν σημαντική πληροφορία όσον αφορά στις μηχανικές και γεωμετρικές μεταβολές που λαμβάνουν χώρα σε βαθύτερα ενδοστικά στρώματα στην περιοχή του κατάγματος κατά τη εξέλιξη της διαδικασίας πώρωσης.

Το Κεφάλαιο 3 επικεντρώνεται στην περιγραφή των βασικών αρχών των γενικευμένων θεωριών συνεχούς μέσου η χρήση των οποίων καθιστά εφικτή την επαρκή περιγραφή της μηχανικής συμπεριφοράς υλικών με μικροδομή όπως οι πολυκρυσταλλοί, τα πολυμερή, τα κοκκώδη και κυψελώδη υλικά, τα οστά κτλ. Ο προσδιορισμός των μηχανικών ιδιοτήτων υλικών με επιδράσεις μικροδομής, καθιστά αναγκαίο τον ορισμό του πεδίου τάσεων μη-τοπικά, γεγονός που δεν προβλέπεται από την κλασσική θεωρία γραμμικής ελαστικότητας. Αρχικά παρουσιάζονται συνοπτικά οι αρχές των θεωριών ελαστικότητας τύπου Cosserat, των μη-τοπικών θεωριών και των θεωριών ελαστικότητας τύπου βαθμίδας κατά Mindlin και αναφέρονται συνοπτικά οι εφαρμογές τους σε προβλήματα μηχανικής. Ιδιαίτερη έμφαση δίδεται στη γενικευμένη θεωρία ελαστικότητας ανώτερης βαθμίδας που προτάθηκε από το Mindlin ενώ παρουσιάζονται επίσης και οι τρεις απλοποιημένες μορφές της (Μορφές I, II, II- Forms I, II, III). Περιγράφονται επίσης αναλυτικά οι καταστατικές εξισώσεις και η εξίσωση κίνησης για ένα ισότροπο μέσο του οποίου η μηχανική συμπεριφορά ορίζεται από την Μορφή II της θεωρίας του Mindlin. Η παρουσίαση εκτείνεται και στη συγκριτική αξιολόγηση της συγκεκριμένης θεωρίας έναντι των άλλων γενικευμένων θεωριών ανώτερης τάξης. Στο τέλος του κεφαλαίου παρουσιάζονται υπάρχουσες πειραματικές και υπολογιστικές μελέτες αξιολόγησης οστών στις οποίες η ανάλυση της μηχανικής συμπεριφοράς του οστού βασίζεται σε γενικευμένες θεωρίες συνεχούς μέσου. Αν και η θεωρία τύπου βαθμίδας (Μορφή II) είναι απλή μιας και έχει εφαρμοστεί επιτυχώς σε πολλαπλά προβλήματα μηχανικής δεν έχει χρησιμοποιηθεί ποτέ για τη μελέτη της διάδοσης κυματοδηγούμενων ρυθμών σε οστά.

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται μια 2Δ υπολογιστική μελέτη διάδοσης υπερήχων σε κατεαγότα οστά με σκοπό την παρακολούθηση της διαδικασίας πάρωσης κατάγματατων μακρών οστών. Σκοπός είναι η διερεύνηση της επίδρασης διαφορετικών περιπτώσεων συνοριακών συνθηκών που προκύπτουν από τη φόρτιση του οστού με ρευστό, στα χαρακτηριστικά της διάδοσης κυματοδηγούμενων ρυθμών. Οι συνοριακές συνθήκες που εφαρμόζονται προσομοιώνουν την ύπαρξη των υπερκείμενων μαλακών ιστών και του μυελού των οστών. Αναπτύσσονται 2Δ μοντέλα κατεαγότος οστού στα οποία η διαδικασία πάρωσης μοντελοποιείται ως μια δυναμική διεργασία που ολοκληρώνεται σε τρία στάδια. Ο πάρος μοντελοποιείται ως ένα μη ομογενές υλικό αποτελούμενο από διαφορετικές περιοχές οστεοποίησης. Μελετώνται τρεις διαφορετικές περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών και η ανάλυση των ληφθέντων σημάτων πραγματοποιείται τόσο στο πεδίο του χρόνου και όσο και στο πεδίο χρόνου-συχνότητας. Στην πρώτη περίπτωση το οστό θεωρείται ότι είναι εμβαπτισμένο σε αίμα το οποίο καταλαμβάνει τον ημι-χώρο στην ανώτερη και κατώτερη επιφάνεια της πλάκας. Στη δεύτερη περίπτωση θεωρείται ότι η ανώτερη επιφάνεια της πλάκας φορτίζεται από ένα στρώμα αίματος, ενώ ο ημι-χώρος στην κατώτατη επιφάνεια της πλάκας αποτελείται από ένα διαφορετικό ρευστό το οποίο προσομοιώνει το μυελό των οστών. Στην τρίτη περίπτωση, το οστό μοντελοποιείται ως ένα μοντέλο τριών στρωμάτων, αποτελούμενο από ένα στρώμα αίματος στην ανώτατη επιφάνεια της πλάκας και από ένα στρώμα μυελού των οστών στην κατώτατη επιφάνεια. Τα αποτελέσματα της μελέτης έδειξαν ότι η εφαρμογή ρεαλιστικών συνοριακών συνθηκών έχει σημαντική επίδραση στη διάδοση των κυματοδηγούμενων ρυθμών, καταδεικνύοντας ότι οι μαλακοί ιστοί πρέπει να λαμβάνονται υπόψη για την ανάπτυξη ρεαλιστικών μοντέλων οστών.

Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζεται μια 2Δ μελέτη στην οποία προτείνεται μια εναλλακτική μέθοδος διάδοσης υπερήχων χρησιμοποιώντας ως μέσο εκπομπής και λήψης υπερήχων τις βελόνες μιας ήδη υπάρχουσας συσκευής εξωτερικής οστεοσύνθεσης. Η εφαρμοσιμότητα της μεθόδου για την παρακολούθηση της διαδικασίας πάρωσης διερευνάται πραγματοποιώντας μετρήσεις ταχύτητας σε 2Δ μοντέλα άθικτων και κατεαγόντων οστών παρόμοιων με αυτά που περιγράφηκαν στην προηγούμενη μελέτη. Επιπλέον πραγματοποιείται και σύγκριση της προτεινόμενης μεθόδου με την παραδοσιακή μέθοδο διαδερμικής εφαρμογής μετατροπέων (percutaneous application) και την διοστική εφαρμογή (transosseous application) που προτάθηκε πιο πρόσφατα.

Τέλος διερευνάται και η επίδραση της πιθανής μη-κατακόρυφης τοποθέτησης των βελονών στην ταχύτητα, υποθέτοντας διαφορετικούς συνδυασμούς γωνιών απόκλισης των βελονών της εξωτερικής οστεοσύνθεσης. Οι τιμές των ταχυτήτων που προέκυψαν με βάση την προτεινόμενη μέθοδο, βρέθηκαν υψηλότερες σε σύγκριση με άλλες τεχνικές. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι τα κύματα υπερήχων διαδίδονται και μέσω των μεταλλικών βελονών των οποίων η διαμήκης ταχύτητα είναι μεγαλύτερη από αυτή του οστού. Ωστόσο η ταχύτητα αυξανόταν κατά τη διαδικασία πώρωσης και η συμπεριφορά αυτή δεν επηρεάστηκε από τις γωνίες απόκλισης των βελονών. Από τα αποτελέσματα της μελέτης προκύπτει ότι η προτεινόμενη μέθοδος όταν εφαρμόζεται *in-vivo*, υπερτερεί των υπαρχουσών υπερηχητικών τεχνικών. Παρόλα αυτά, βασικό μειονέκτημα της μεθόδου αποτελεί το γεγονός ότι τα ληφθέντα σήματα είναι πολύ εξασθενημένα, εξαιτίας του μεγάλου μονοπατιού διάδοσης των υπερήχων. Συνεπώς η χρήση της μεθόδου σε κλινικό επίπεδο καθιστά αναγκαία την διεξαγωγή κλινικών πειραμάτων.

Στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζουμε θεωρητική μελέτη διάδοσης κυματοδηγούμενων ρυθμών σε οστά χρησιμοποιώντας την απλοποιημένη θεωρία ελαστικότητας τύπου βαθμίδας κατά Mindlin (Mindlin Form II). Σκοπός της μελέτης είναι η διερεύνηση της επίδρασης της μικροδομής του οστού στην κυματική διάδοση. Πιο συγκεκριμένα επιλύεται θεωρητικά το αντίστοιχο πρόβλημα του Lamb της κλασσικής ελαστικότητας για μια ελεύθερη δισδιάστατη πλάκα με μικροδομή και ιδιότητες όμοιες με αυτές του οστού. Η μικροδομή λαμβάνεται υπόψη, εισάγοντας στις καταστατικές εξισώσεις του προβλήματος δύο νέες παραμέτρους: (α) το συντελεστή βαθμίδας g και (β) τον όρο της μικρο-αδράνειας h . Οι καμπύλες διασποράς ταχυτήτων ομάδας υπολογίζονται για διαφορετικούς συνδυασμούς μεταξύ των τιμών του g και h . Σε όλες τις περιπτώσεις οι τιμές των παραμέτρων είναι της τάξης του μεγέθους των οστεώνων που αποτελούν τη μικροδομή του οστού. Βρέθηκε ότι η μικροδομή του οστού επηρεάζει σημαντικά την κυματική διάδοση, εισάγοντας γεωμετρική διασπορά και διασπορά υλικού. Στη συνέχεια τα αποτελέσματα της θεωρητικής μελέτης εφαρμόζονται σε *ex vivo* μετρήσεις που ελήφθησαν από άθικτο οστό προβάτου. Οι καμπύλες διασποράς ταχυτήτων ομάδας υπολογίζονται για 2Δ πλάκα με ιδιότητες όμοιες με αυτές του οστού προβάτου και υπερθέτονται στις αναπαραστάσεις χρόνου-συχνότητας των ληφθέντων σημάτων. Για πρώτη φορά κατέστη δυνατός ο χαρακτηρισμός πολύ γρήγορων κυμάτων τα οποία δεν

ήταν εφικτό να εντοπιστούν με βάση τη κλασική θεωρία ελαστικότητας. Από τα αποτελέσματα της μελέτης προκύπτει ότι η θεωρία ελαστικότητας τύπου βαθμίδας είναι κατάλληλη για την ερμηνεία *ex-vivo* μετρήσεων και στις περισσότερες περιπτώσεις παρέχει πιο ακριβή χαρακτηρισμό των διαδιδόμενων ρυθμών σε πραγματικά οστά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΔΟΜΗ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΑΚΡΩΝ ΟΣΤΩΝ – ΠΩΡΩΣΗ ΚΑΤΑΓΜΑΤΩΝ ΜΑΚΡΩΝ ΟΣΤΩΝ

1.1 Δομή και Σύσταση Μακρών Οστών

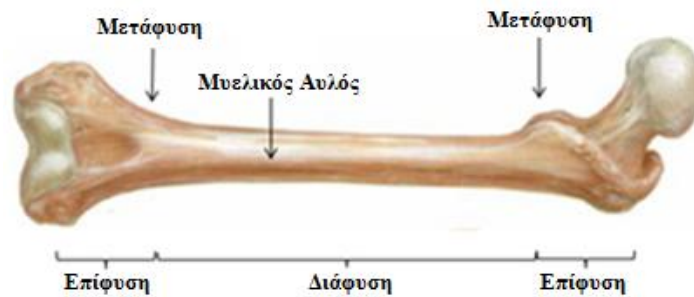
Τα οστά σχηματίζουν τον οστέινο σκελετό και έχουν ως βασική λειτουργία τη στήριξη του σώματος, την κινητικότητα και την προστασία των εσωτερικών οργάνων. Έχουν διαφορετικά σχήματα και μεγέθη ανάλογα με τη λειτουργία που παρέχουν και κατηγοριοποιούνται σε μακρά ή επιμήκη (long), βραχέα (short), πλατιά (flat) και σησαμοειδή (sesamoid ή irregular).

Μακρά χαρακτηρίζονται τα οστά των άκρων: το μηριαίο, η κνήμη, το βραχιόνιο, η κερκίδα, η ωλένη, τα μετακάρπια και οι φάλαγγες, τα οποία παρέχουν σταθερότητα του σκελετού έναντι φαινομένων κάμψης και κύρτωσης. Τα μακρά οστά εμφανίζουν ένα μεσαίο αυλοειδή άξονα που ονομάζεται διάφυση, το μυελικό αυλό, τα άνω και κάτω άκρα (επιφύσεις) και τις ενδιάμεσες περιοχές των μεταφύσεων που συνδέουν τη διάφυση με τις επιφύσεις (Σχήμα 1.1).

1.1.1 Μακροσκοπική Σύσταση Μακρού Οστού

Μακροσκοπικά το οστό αποτελείται από το περίοστεο, τον οστίτη ιστό, το μυελό των οστών, τα αγγεία και τα νεύρα. Στη σύσταση του οστού περιλαμβάνεται και το ενδόστεο αν και δε διαχωρίζεται μακροσκοπικά από το υπόλοιπο οστό.

Το περίοστεο είναι υμένας πάχους 1-2 mm από πυκνό συνδετικό ιστό που περιβάλλει

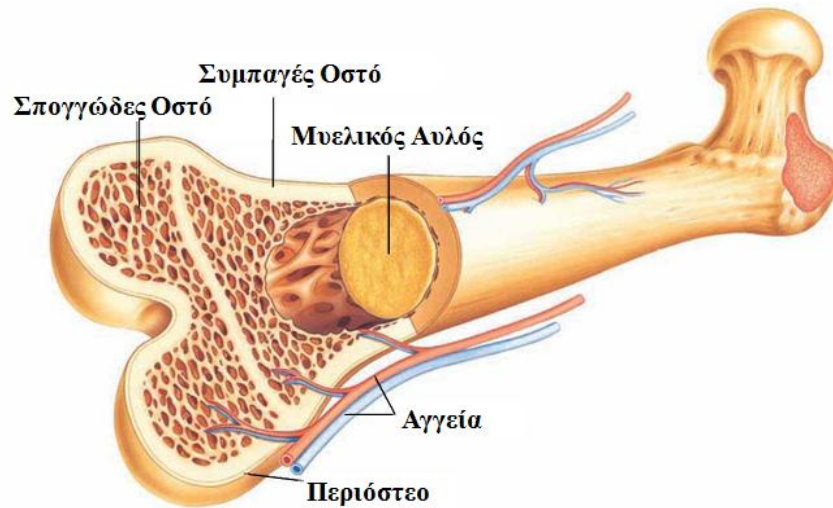


Σχήμα 1.1. Γεωμετρικά χαρακτηριστικά μακρού οστού.

ολόκληρο το οστό εκτός από τις αρθρικές επιφάνειες. Αποτελείται από δυο στοιβάδες, την έσω ή οστεογενετική η οποία περιέχει κύτταρα και ελαστικές ίνες και την έξω ή ινοελαστική που είναι φορέας αγγείων και νεύρων. Η έσω είναι η οστεογόνος στοιβάδα η οποία όταν δραστηριοποιείται σε περίοδο διάπλασης, ανάπτυξης ή κατάγματος παρουσιάζει έντονη μιτωτική δραστηριότητα και παραγωγή οστεοπαραγωγικών κυττάρων ενώ η έξω χρησιμεύει στην πρόσφυση των μυών και των τενόντων [1]. Το περίοστεο προσφύεται στο οστό μέσω των ινών του Sharpey οι οποίες αποτελούν κολλαγόνες ίνες εγκλεισθείσες στην αποτιτανωμένη μεσοκυττάρια ουσία του οστίτη ιστού.

Ο οστίτης ιστός είναι μη ομογενής, πορώδης και ανισότροπος. Διακρίνεται σε φλοιώδες (cortical) και συμπαγές (compact) οστό, και το σπογγώδες (cancellous) και δοκιδώδες (trabecular) οστό. Το 80% των μακρών οστών αποτελείται από φλοιώδες οστό [2], αν και το ποσοστό αυτό διαφέρει σημαντικά μεταξύ των μακρών οστών. Οι επιφύσεις αποτελούνται από σπογγώδες οστό που περικλείεται από ένα λεπτό στρώμα συμπαγούς οστού ενώ η διάφυση αποτελείται σχεδόν εξολοκλήρου από συμπαγές οστό με ένα λεπτό στρώμα σπογγώδους στην εσωτερική επιφάνεια γύρω από την κοιλότητα του μυελού των οστών (Σχήμα 1.2). Οι κοιλότητες του σπογγώδους και η μυελική κοιλότητα στις διαφύσεις περιέχει μυελό των οστών ο οποίος διαχωρίζεται σε ερυθρό (αποτελούμενο από κύτταρα αίματος) και σε ωχρό (κύτταρα λιπώδους ιστού).

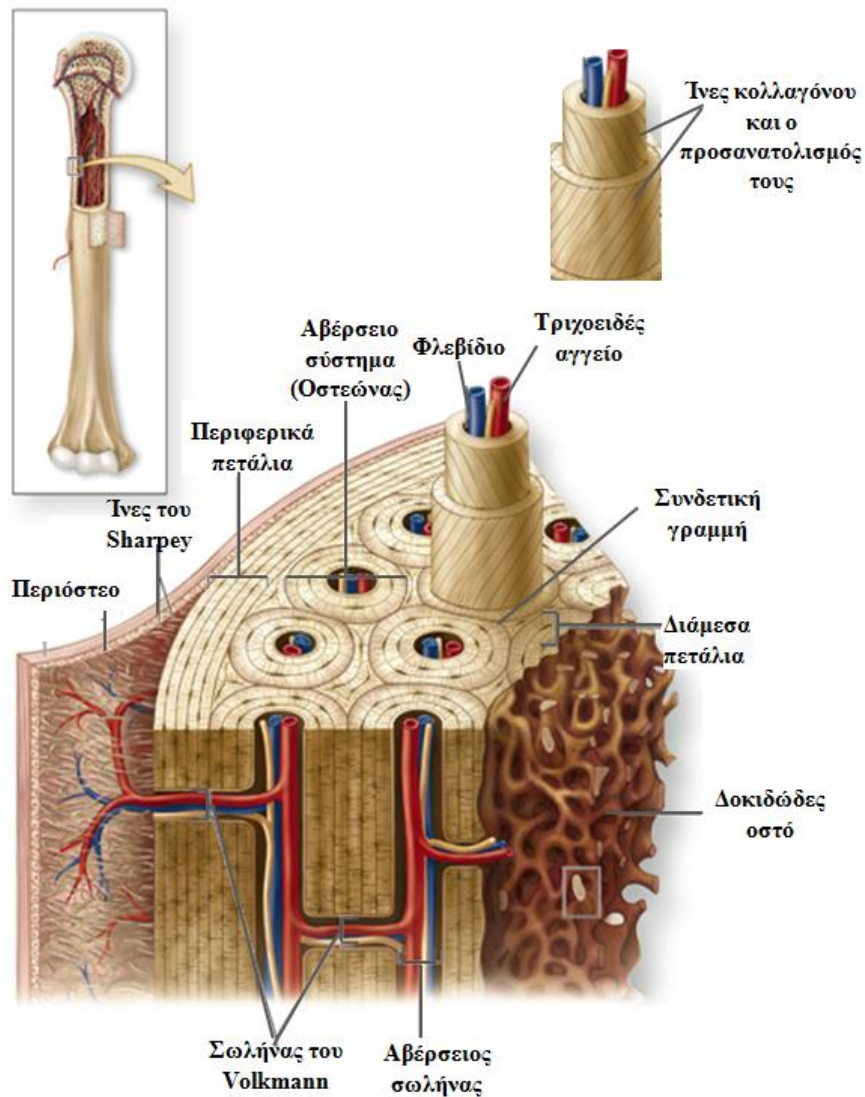
Η δομή του φλοιώδους οστού είναι πεταλιώδης και περιγράφεται από συστήματα ομόκεντρων πεταλίων (lamellae), που διακρίνονται στα έξω ή περιφερικά, στα έσω ή περιμυελικά πετάλια που καλύπτονται εσωτερικά από το ενδόστεο και στα ενδιάμεσα



Σχήμα 1.2. Μορφολογία και δομή μακρών οστών.

Αβέρσεια συστήματα (Harvesian systems) ή οστεώνες που αποτελούν τη βασική δομική μονάδα του φλοιώδους οστού (Σχήμα 1.3). Το σχήμα των οστεώνων είναι κυκλικό ή ελλειψοειδές με διάμετρο από 100 – 300 μm και μήκος περίπου 10 mm. Σε κάθε οστεώνα περιτυλίσσονται περίπου 3 – 8 πετάλια πάχους 3 – 7 μm το καθένα [2,3]. Οι οστεώνες αποτελούνται από έναν κεντρικό σωλήνα, τον Αβέρσειο σωλήνα (Harvesian canal), μήκους 50 – 100 μm ο οποίος περιβάλλεται από ομόκεντρα πετάλια και μικροσωληνισκούς. Οι Αβέρσειοι σωλήνες περιέχουν αγγεία, νεύρα και χαλαρό συνδετικό ιστό. Σε κάθε οστεώνα διέρχονται σωληνάκια (canaliculi) και περιέχονται μικρές κοιλότητες (lacunae) (Σχήμα 1.4). Οι σωλήνες Volkman (Volkman canals) είναι σωλήνες χωρίς ομόκεντρα τοιχώματα που αποτελούνται επίσης από νεύρα και αγγεία και βρίσκονται σε επίπεδο εγκάρσιο σε αυτό των Αβέρσειων σωλήνων. Οι σωλήνες Volkman βοηθούν στην επικοινωνία των Αβέρσειων σωλήνων της μυελικής κοιλότητας και του περιόστεου.

Το δοκιδώδες οστό αποτελείται από ένα πλέγμα οστέινων δοκίδων (trabeculae). Οι οστέινες δοκίδες έχουν τη μορφή μικρών ράβδων ή πλακιδίων. Ο τρόπος με τον οποίο συνδέονται μεταξύ τους για να δημιουργήσουν πλέγμα εξαρτάται τόσο από το μέγεθος όσο και από τη διεύθυνση του εφαρμοζόμενου φορτίου. Ένα δίκτυο μικρών ράβδων



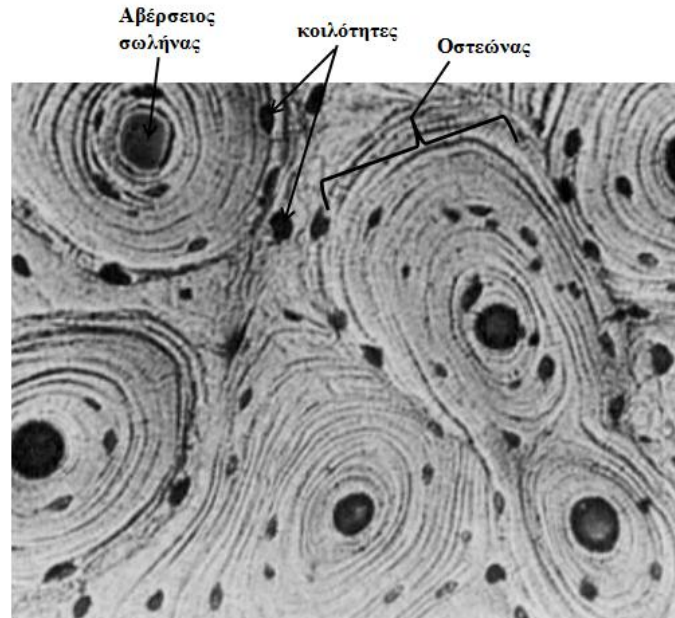
Σχήμα 1.3. Δομή φλοιώδους οστού.

(rods) δημιουργεί ανοικτές κυψελίδες (cells) ενώ ένα δίκτυο μικρών πλακιδίων (plates) δημιουργεί κλειστές κυψέλες. Οι δοκίδες μπορεί με τη σειρά τους να περιέχουν μικρά κανάλια (canaliculi) και κοιλότητες (lacunae), όπως ακριβώς και στο συμπαγές οστό (Σχήμα 1.5).

Ο οστίτης ιστός έχει πλούσια αγγείωση με αιμοφόρα αγγεία, που ξεκινούν από το περίοστεο και τροφοδοτούν κυρίως τις εξωτερικές στιβάδες και από την τροφοφόρο αρτηρία που εισέρχεται στη μάζα του οστού από το τροφοφόρο τρήμα και διακλαδίζεται σε ανερχόμενο και κατερχόμενο κλάδο. Τα νεύρα βρίσκονται στο περίοστεο και συνοδεύουν την τροφοφόρο αρτηρία στο εσωτερικό του οστού [1]. Το

ενδόστεο είναι ένας λεπτός υμένας που επενδύει την εσωτερική επιφάνεια του οστού. Αποτελείται από πρόδρομα οστεοκύτταρα και μικρή ποσότητα συνδετικού ιστού.

1.1.2 Μικροσκοπική Σύσταση



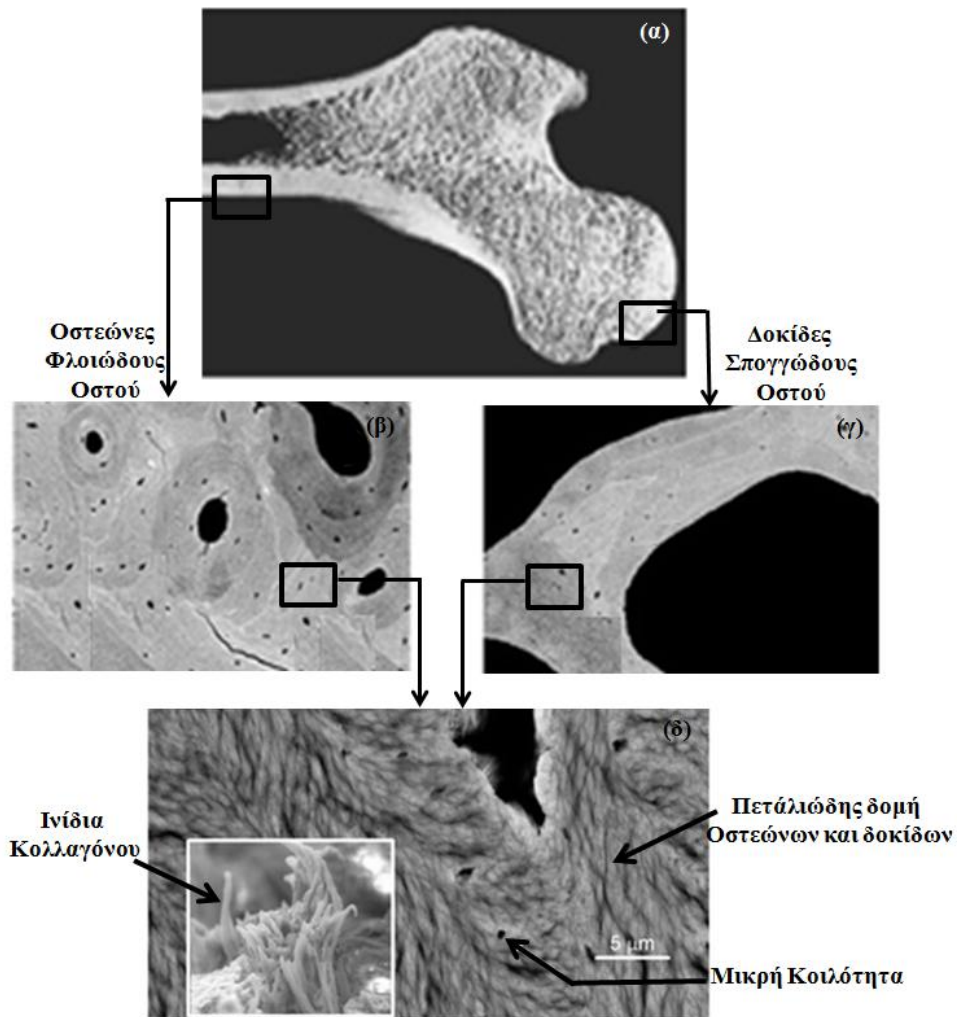
Σχήμα 1.4. Πεταλιώδης δομή οστεώνων σε φλοιώδες οστό

Ο οστίτης ιστός αποτελείται κατά 35% από οργανικό τμήμα και κατά 65% από ανόργανο τμήμα. Το οργανικό τμήμα περιλαμβάνει τη θεμέλια ουσία (98%) (organic matrix) και τα κύτταρα (2%).

Η θεμέλια ουσία αποτελείται κατά 95% από κολλαγόνο τύπου I και κατά 5% από, μη κολλαγονικές πρωτεΐνες και αρκετές πρωτεογλυκάνες. Τα μόρια κολλαγόνου αυτο-οργανώνονται σε ινίδια (fibrils) (Σχήμα 1.5), μήκους 300 nm και διαμέτρου 1.23 nm. Τα ινίδια έχουν συγκεκριμένη τριτοταγή δομή περιοδικότητας 67 nm αποτελούμενη από κενά μήκους 40 nm μεταξύ των άκρων τους και από επικαλυπτόμενες περιοχές μήκους 27 nm [2].

Τα κύτταρα του οστίτη ιστού είναι:

1. *Οστεοβλάστες*: Οι οστεοβλάστες είναι κυβοειδή κύτταρα με ένα συνήθως έκκεντρο πυρήνα, περιέχουν μεγάλο αριθμό συνθετικών οργάνων, εκτεταμένο ενδοπλασματικό δίκτυο και μεμβράνες του Golgi. Οι οστεοβλάστες δημιουργούνται στο περίοστεο και το στρώμα του μυελού των οστών [1] και όταν διεγερθούν αλλάζουν σχήμα (στρογγυλό, ελλειψοειδές ή πολυεδρικό), σχηματίζουν νέα οστική οργανική θεμέλιο ουσία και ρυθμίζουν την αποτιάνωση. Παρουσιάζουν κυτταροπλασματικές προεκβολές που επεκτείνονται μέσα στην αποτιτανωμένη θεμέλιο ουσία και φέρνουν σε επικοινωνία τους οστεοβλάστες με τα οστεοκύτταρα. Όταν απενεργοποιηθούν, λαμβάνουν επίπεδο σχήμα και σχηματίζουν κύτταρα των ελεύθερων οστικών επιφανειών ή αυτοπεριβάλλονται από αποτιτανωμένη θεμέλιο ουσία και μετατρέπονται σε οστεοκύτταρα.



Σχήμα 1.5. (α) Τομή οστού: μεγενθυμένη εικόνα με χρήση τεχνικής απεικόνισης οπίσθο-σκεδαζόμενου ηλεκτρονίου, (β) οστεώνες, (γ) δοκίδες και (δ) πετάλια και ινίδια κολλαγόνου

2. *Οστεοκλάστες*: Οι οστεοκλάστες είναι πολυπύρηννα κύτταρα που προέρχονται από πρόδρομα κύτταρα (precursors) του μυελού των οστών. Οι οστεοκλάστες έχουν ως βασική λειτουργία την αποδόμηση του οστού [1]. Η ενέργεια που χρειάζεται για αυτή τη διαδικασία εξασφαλίζεται από τον μεγάλο πληθυσμό μιτοχονδρίων στο κυτταρόπλασμά τους. Κατά τη διαδικασία της απορρόφησης, η κυτταροπλασματική μεμβράνη αναδιπλώνεται δημιουργώντας ένα σύνθετο όξινο περιβάλλον. Υπό αυτές τις δυσμενείς συνθήκες και παρουσία ενζύμων, η θεμέλιος ουσία χάνει τα μεταλλικά ιόντα της και εν συνεχεία αποσυντίθεται. Η συνεργασία των οστεοβλεστών με τους οστεοκλάστες είναι υπεύθυνη για το σχηματισμό, την αναδιαμόρφωση και την επούλωση του οστίτη ιστού.

3. *Οστεοκύτταρα*: Τα οστεοκύτταρα αντιπροσωπεύουν το 95% των κυττάρων του οστού. Ο ρόλος των οστεοκυττάρων είναι η συντήρηση της θεμέλιας ουσίας του οστού, με την παραγωγή μικρών ποσοτήτων θεμέλιας ουσίας και η απελευθέρωση ιόντων ασβεστίου από τη θεμέλια ουσία όταν αυτό απαιτείται. Βρίσκονται σε κοιλότητες μέσα στην θεμέλια ουσία, έχουν ωοειδές σχήμα και αναπτύσσουν προεκβολές που γεμίζουν τις κοιλότητες όπου γίνεται η επικοινωνία με τα άλλα οστεοκύτταρα και οστεοβλάστες της ίδιας οστικής μονάδας. Μικρό ποσοστό των οστεοκυττάρων, που κυμαίνεται από 1-3%, εκκρίνουν οστεολυτικά ένζυμα και απορροφούν αρκετή ποσότητα αποτιτανωμένης θεμέλιας ουσίας (περιοστεολυτική οστεόλυση). Η καταστροφή των οστεοκυττάρων ακολουθείται από απορρόφηση της θεμέλιας ουσίας. Αυτό αποδεικνύει ότι τα συγκεκριμένα κύτταρα παίζουν σημαντικό ρόλο στη διατήρηση της θεμέλιας ουσίας [4].

Οι κρύσταλλοι υδροξυαπατίτη, $\text{Ca}_{10}(\text{PO}_4)_6(\text{OH})_2$, συνιστούν το βασικό συστατικό του ανόργανου υποστρώματος (inorganic matrix) του οστού. Το ανόργανο τμήμα εναποτίθεται πάνω στο οργανικό υπόστρωμα του οστού με τη μορφή αλάτων φωσφορικού ασβεστίου, τα οποία εν συνεχεία μετατρέπονται σε κρυστάλλους υδροξυαπατίτη. Οι ώριμοι κρύσταλλοι έχουν δισκοειδές σχήμα και καταλαμβάνουν το χώρο μεταξύ των κενών των ινών κολλαγόνου, σε διάταξη περίπου παράλληλη με τις ίνες. Το μέσο πλάτος και μήκος των κρυστάλλων είναι 50×25 nm ενώ το πάχος κυμαίνεται από 2-3 nm [3]. Σε μικρότερη αναλογία το ανόργανο τμήμα περιέχει άλατα ανθρακικού ασβεστίου (8–10%), φωσφορικού μαγνησίου, φθοριούχου και χλωριούχου ασβεστίου [1]. Από δομική άποψη τα οργανικά συστατικά του οστίτη ιστού,

εμποτιζόμενα με κρυστάλλους υδροξυαπατίτη, μετατρέπουν αυτό το μαλακό οργανικό υπόστρωμα σε ένα σκληρό άκαμπτο υλικό, τα οστά, τα οποία παρέχουν τις μηχανικές ιδιότητες, την κινητικότητα και την αντοχή στις δυνάμεις που εφαρμόζονται στο σώμα από τις διάφορες δραστηριότητες του ανθρώπου. Όλες αυτές οι σημαντικές λειτουργίες που οφείλονται στα ανόργανα συστατικά, εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από την ακριβή χημική σύσταση, την κρυσταλλική δομή και τις φυσικοχημικές ιδιότητές τους, οι οποίες μεταβάλλονται με το χρόνο μετά την αρχική τους εναπόθεση. Ο σχηματισμός ποσότητας νέου οστού και η απορρόφηση του παλιού είναι συνεχείς λειτουργίες στα οστά. Αυτό έχει ως συνέπεια να αλλάζει το μέγεθος και η αναλογία του νέου οστού ως προς το παλιό. Η συνεχής αυτή αναδόμηση είναι απαραίτητη για την ανάπτυξη, για την επιδιόρθωση των μικροβλαβών που λαμβάνουν χώρα από τις καθημερινές πιέσεις και τάσεις που εφαρμόζονται στα οστά αλλά και τη διατήρηση της ομαλής λειτουργίας του οργανισμού.

Το οργανικό τμήμα του οστού δίνει το σχήμα του και συμβάλλει στην αντοχή (strength) και ακαμψία (stiffness) του σε συμπιεστικά φορτία, ενώ το ανόργανο τμήμα καθορίζει τη συμπεριφορά σε εφελκυσμό. Όταν αφαιρεθεί το οργανικό τμήμα, τα οστά γίνονται ιδιαίτερα εύθρυπτα (brittle), ενώ με την απομάκρυνση του ανόργανου τμήματος τα οστά γίνονται ιδιαίτερα εύκαμπτα και μπορεί να στρεβλωθούν ή να καμφθούν χωρίς να συμβεί κάταγμα.

1.2 Κατάγματα Μακρών Οστών

Οστικό κάταγμα ορίζεται ως η κάκωση του οστού κατά την οποία προκαλείται πλήρης ή μερική λύση της συνέχειάς του. Τα κατάγματα ταξινομούνται:

Ανάλογα με την ένταση της βία που τα προκάλεσε και την ποιότητα του οστού. Τα κατάγματα μπορεί να είναι βίαια πάνω σε φυσιολογικό οστό ως αποτέλεσμα έκθεσης σε υψηλά ή απότομα φορτία ή όταν ασκηθούν τάσεις από μη φυσιολογικές κατευθύνσεις, π.χ. στροφικές ή εγκάρσιες τάσεις [5]. Κατάγματα από καταπόνηση που προκαλούνται από φορτία χαμηλής έντασης που ασκούνται όμως επαναλαμβανόμενα. Παθολογικά που προκαλούνται από φορτία με ασήμαντη βία πάνω σε οστά με κάποια πάθηση, π.χ. οστεοπόρωση, όγκος, κ.α.

Ανάλογα με την κλινική εικόνα σε κλειστά και ανοιχτά. Στα κλειστά κατάγματα δεν εμπλέκεται ρήξη των μαλακών ιστών, ενώ τα ανοικτά κατάγματα συνοδεύονται από ρήξη των μαλακών ιστών με τραύμα μέσω του οποίου το κάταγμα επικοινωνεί με το εξωτερικό περιβάλλον.

Ανάλογα με το μηχανισμό του κατάγματος σε άμεσα και έμμεσα. Άμεσα είναι τα κατάγματα που προκαλούνται απευθείας στο σημείο όπου έδρασε η βία, ενώ έμμεσα καλούνται τα κατάγματα που προκαλούνται μακριά από τη θέση που εφαρμόζεται η βία.

Ανάλογα με τη γραμμή του κατάγματος σε εγκάρσια, λοξά και σπειροειδή. Στα εγκάρσια κατάγματα, η καταγματική γραμμή είναι κάθετη στο μακρύ άξονα του οστού. Τυπικά παραδείγματα αποτελούν τα κατάγματα της κνήμης και του βραχιόνιου μετά από εφελκυστικά ή καμπτικά τραυματικά φορτία. Στα λοξά κατάγματα η γραμμή σχηματίζει ενδιάμεσες γωνίες με το μακρύ άξονα. Τυπικά παραδείγματα αποτελούν κατάγματα μηριαίου ή βραχιόνιου από αξονικά συμπίεστικά φορτία. Στα σπειροειδή η καταγματική γραμμή εκτείνεται κατά την περιφέρεια του μακρού άξονα και προκαλείται από στρεπτικά φορτία. [6].

Στη βιβλιογραφία έχουν αναφερθεί και διάφορα άλλα συστήματα ταξινόμησης των καταγμάτων ανάλογα με την περιγραφή του κατάγματος, τη βαρύτητα της κόπωσης κ.α. Η πιο συστηματική ταξινόμηση που περιλαμβάνει όλους τους τύπους του ανθρώπινου σκελετού έχει αναπτυχθεί από τον οργανισμό AO – ASIF (AO Classification)[7].

1.3 Φυσιολογία της Πώρωσης Καταγμάτων Μακρών Οστών

Η επούλωση των καταγμάτων (πώρωση) (fracture healing) αποτελεί την πιο εξελιγμένη μορφή επουλωτικής διεργασίας στον οργανισμό καθώς αποκαθιστά τη λύση της συνέχειας του οστού με οστικό ιστό ο οποίος παρουσιάζει υψηλού βαθμού ομοιότητα ως προς το φυσιολογικό και όχι με το σχηματισμό ουλής όπως συμβαίνει σε τραύματα δέρματος ή άλλων οργάνων.

Υπάρχουν δυο τρόποι πώρωσης οστικών καταγμάτων που ιστολογικά χαρακτηρίζονται ως πρωτογενής (primary or direct healing) και δευτερογενής (secondary or indirect healing).

1.3.1 Πρωτογενής Πώρωση

Η πρωτογενής πώρωση λαμβάνει χώρα όταν η ανατομική ανάταξη των οστικών τμημάτων του κατάγματος είναι ακριβής (χωρίς κενά) και υπάρχει απόλυτη σταθερότητα στην εστία του κατάγματος με συμπιεστικές δυνάμεις. Αυτό επιτυγχάνεται χειρουργικά σε ορισμένες περιπτώσεις με χρήση εσωτερικής συμπιεστικής οστεοσύνθεσης (internal fixation) με διακαταγματικές βίδες ή πλάκες συμπίεσης [1]. Υπάρχουν δύο τύποι πρωτογενούς πώρωσης:

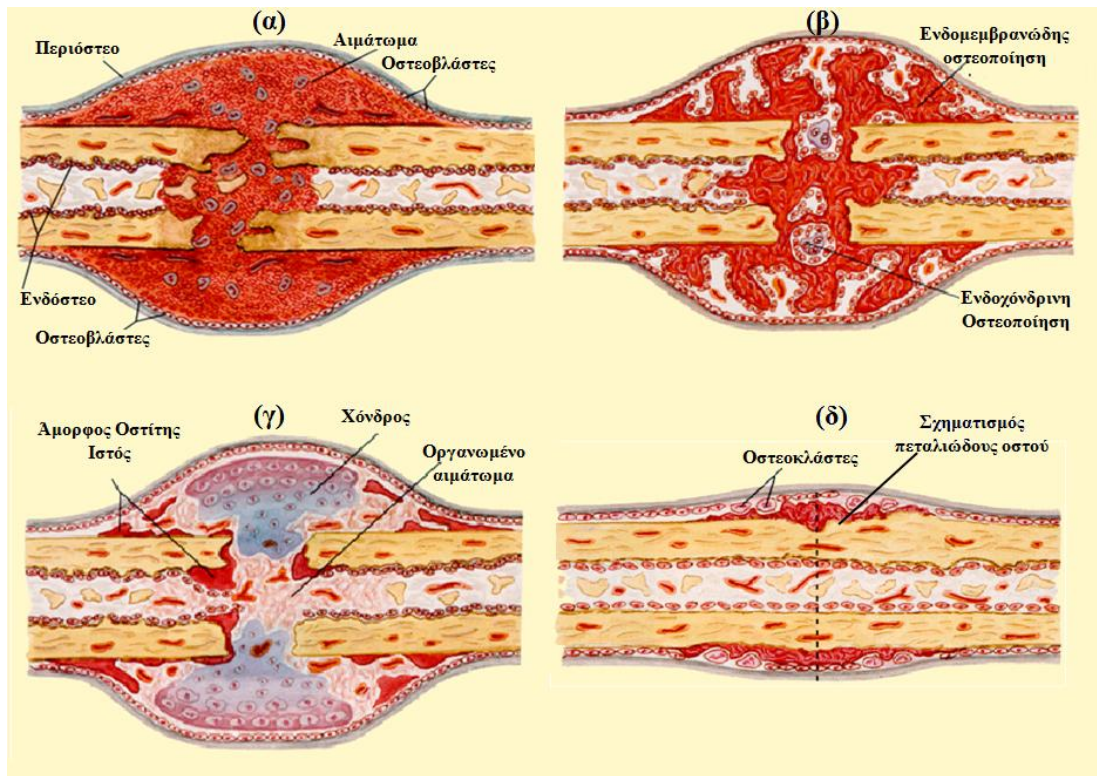
Πρωτογενής πώρωση εξ' επαφής: Κατά την πρωτογενή πώρωση τα οστικά άκρα του κατάγματος βρίσκονται σε πλήρη επαφή και συγκρατούνται σταθερά με χρήση συμπιεστικής οστεοσύνθεσης με την οποία επιτυγχάνεται συγχρόνως και διακαταγματική συμπίεση. Οι οστεοκλάστες απορροφούν οστό και διαπερνούν κάθετα την εστία του κατάγματος δημιουργώντας κωνικά ρήγματα κατά τον επιμήκη άξονα με ρυθμό 50 – 80 μm την ημέρα [2] τα οποία χρησιμεύουν ως δίοδοι για τη διείσδυση νεόπλαστων αγγείων που αργότερα μεταφέρουν ενδοθηλιακά και αρχέγονα μεσεγχυματικά κύτταρα. Τα τελευταία διαφοροποιούνται σε οστεοβλάστες και παράγουν οστεώνες που συνδέουν τελικά τα οστικά άκρα.

Πρωτογενής πώρωση με γεφύρωση του χάσματος (primary bone formation by gap healing): Η διαδικασία πρωτογενούς πώρωσης γεφύρωσης χάσματος ακολουθείται σε περιπτώσεις που τα κατεαγότα άκρα δεν βρίσκονται σε πλήρη επαφή, αλλά υπάρχουν μικρά κενά (150 - 200 μm) μεταξύ τους. Σε ένα αρχικό στάδιο τα κενά πληρούνται με οστίτη ιστό ο οποίος και γεφυρώνει τα καταγματικά άκρα. Η δομή όμως των σχηματισθέντων πεταλίων δεν αντιστοιχεί με εκείνη του φλοιώδους οστού, καθώς η διάταξη τους δεν είναι παράλληλη με τον επιμήκη άξονα του οστού. Σε ένα δεύτερο στάδιο γίνεται ο επαναπροσανατολισμός των πεταλίων κατά τον επιμήκη άξονα.

1.3.2 Δευτερογενής Πώρωση

Στις περισσότερες περιπτώσεις συντηρητικής ή χειρουργικής αντιμετώπισης καταγμάτων κατά τις οποίες τα κατεαγότα άκρα βρίσκονται σε παρεκτόπιση, ή

εξακολουθεί να υπάρχει κάποιος βαθμός κίνησης στην περιοχή του κατάγματος ακολουθείται η δευτερογενής πώρωση. Ο συγκεκριμένος τύπος συνοδεύεται από το



Σχήμα 1.6. Στάδια δευτερογενούς πώρωσης καταγμάτων: (α) στάδιο αιματώματος, (β) και (γ) στάδιο επιδιόρθωσης, και (δ) στάδιο οστικής ανακατασκευής.

σηματισμό εξωτερικού και αργότερα ενδομυελικού πόρου (fracture callus). Η δευτερογενής πώρωση μπορεί να διαιρεθεί σε μια σειρά τεσσάρων εξελικτικών σταδίων (Σχήμα 1.6) [1,2,8]:

Στάδιο αιματώματος: Το κάταγμα συνοδεύεται από ρήξη γειτονικών αγγείων, καταστροφή μαλακών μορίων και τοπική αιμορραγία με αποτέλεσμα το σχηματισμό αιματώματος. Με τη ρήξη των αγγείων προκαλείται νέκρωση των κυττάρων στα άκρα του κατάγματος σε έκταση 1 – 2 mm διευρύνοντας αντίστοιχα το καταγματικό κενό. Ακολουθεί άσηπτη φλεγμονή που υποχωρεί μετά από 2 - 4 ημέρες [2]. Εάν η βαρύτητα του κατάγματος προκαλέσει μεγάλη απαγγειώση η εξέλιξη της πώρωσης θα επηρεαστεί αρνητικά.

Στάδιο μαλακού πόρου (soft callus): Κύτταρα του περιοστέου τα οποία ήταν αρχικά ανενεργά αρχίζουν να πολλαπλασιάζονται και τα θυγατρικά τους κύτταρα μεταναστεύουν στην περιοχή του κατάγματος. Στο σημείο αυτό αρχίζει να δημιουργείται ο εξωτερικός ή υποπεριοστικός πόρος που αναπτύσσεται σε κάθε πλευρά του κατάγματος και επεκτείνεται ώστε να γεφυρώσει το καταγματικό κενό. Το ίδιο, αλλά με βραδύτερο ρυθμό, γίνεται με τα κύτταρα του ενδοστέου μαζί με αρχέγονα κύτταρα του μυελού των οστών, που σχηματίζουν τον εσωτερικό ή ενδοστικό πόρο που σχηματίζεται μέσα στο μυελικό αυλό. Τα σημεία του πόρου που βρίσκονται περιφερικά (distally) της καταγματικής εστίας και κοντά στο φλοιό βρίσκονται σε περιβάλλον που είναι μηχανικά σταθερό και η αιμάτωση είναι καλή με αποτέλεσμα τα βασικά κύτταρα του περιοστέου και ενδοστέου να διαφοροποιηθούν σε οστεοβλάστες [2]. Στο κέντρο του εξωτερικού πόρου και στην περιοχή μεταξύ των κατεαγόντων άκρων, όπου ο βαθμός κίνησης είναι υψηλότερος και η αιμάτωση είναι φτωχή, τα κύτταρα που εδρεύουν στο περίοστεο, το μυελό και τα μαλακά μόρια θα διαφοροποιηθούν σε χονδροβλάστες. Το στάδιο της ανάπτυξης μαλακού πόρου διαρκεί περίπου 3 - 4 εβδομάδες [2].

Στάδιο στερεού ή σκληρού πόρου (hard callus): Στις περιοχές περιφερικά της καταγματικής εστίας ο οστίτης ιστός σχηματίζεται άμεσα μέσω της ενδομεμβρανώδους οστεοποίησης (intramembraneous ossification) [2]. Αντίθετα, στις περιοχές που τα κύτταρα διαφοροποιήθηκαν σε χονδροβλάστες ο οστίτης ιστός θα δημιουργηθεί μέσω της ενδοχόνδρινης οστεοποίησης (endochondral ossification) [2]. Αρχικά σχηματίζεται χονδρικός ιστός ο οποίος ωριμάζει και γίνεται υπερτροφικός. Στη συνέχεια τα υπερτροφικά χονδροκύτταρα περικλείονται από αποτιτανωμένη (mineralized) μεσοκυττάρια ουσία, υφίστανται εκφύλιση και απόπτωση και αντικαθίστανται από οστεοβλάστες. Η προοδευτική σταθεροποίηση της περιοχής του κατάγματος λόγω του ικριώματος (scaffold) που παρέχει ο πόρος παίζει σημαντικό ρόλο στην ενδοχόνδρινη οστεοποίηση. Το στάδιο αυτό ολοκληρώνεται 3 - 4 μήνες μετά το κάταγμα [2] όπου και επιτυγχάνεται η λεγόμενη «κλινική πόρωση» (functional bony union), καθώς το οστό μπορεί να φέρει το βάρος του σώματος (load-bearing capacity) και ο ασθενής μπορεί να επιστρέψει στις καθημερινές του δραστηριότητες.

Στάδιο ανακατασκευής του οστού (remodeling): Στο στάδιο αυτό που στηρίζεται στο νόμο του Wolff [9,10] ο οργανισμός προσπαθεί να αντικαταστήσει τον άμορφο οστίτη ιστό (woven bone) με ώριμο πεταλιώδες οστό (Σχήμα 1.6). Οι οστεοκλάστες προκαλούν απορρόφηση του εξωτερικού και εσωτερικού πόρου και οι οστεοβλάστες παράγουν και εναποθέτουν νέο οστίτη ιστό προσαρμοσμένο στις δυναμικές γραμμές του οστού. Η διεργασία της ανακατασκευής του οστού είναι μακροχρόνια. Η επιτυχία της διεργασίας ανακατασκευής εξαρτάται κυρίως από την ηλικία του ατόμου και είναι πλήρης στα παιδιά και μερική στους ενήλικες. Με το πέρας της ανακατασκευής το σχήμα του οστού εμφανίζεται ακτινολογικά στο επίπεδο του πρώην κατάγματος ελαφρώς φαρδύτερο.

Η κύρια διαφορά της πρωτογενούς πώρωσης από τη δευτερογενή έγκειται στο ότι δεν μεσολαβεί το στάδιο σχηματισμού χονδρικού ιστού και επίσης δεν δημιουργείται το ικρίωμα του πόρου.

Ο χρόνος ολοκλήρωσης και η πορεία της πώρωσης ενός κατάγματος εξαρτάται επίσης και από τοπικούς παράγοντες όπως είναι η θέση, η μορφή και η σύσταση του κατάγματος και σε γενικούς παράγοντες όπως η ηλικία, η γενική εικόνα του ατόμου κ.α. Ακόμη και σε απλά κατάγματα για τα οποία έχει ακολουθηθεί κατάλληλη θεραπευτική αγωγή, εμφανίζονται επιπλοκές κατά τη διαδικασία πώρωσης σε ποσοστό 5-10% [11,12]. Τέτοιου είδους επιπλοκές είναι η καθυστερημένη πώρωση και η ψευδάρθρωση.

Καθυστερημένη πώρωση συμβαίνει σε περιπτώσεις κατά τις οποίες η πώρωση δεν ολοκληρώνεται στα αναμενόμενα φυσιολογικά χρονικά περιθώρια για το συγκεκριμένο κάταγμα [1,13]. Τα χρονικά όρια ολοκλήρωσης της πώρωσης ποικίλουν ανάλογα με το οστό, τη θέση του κατάγματος κ.α. Ενδεικτικά αναφέρεται ότι ο τυπικός χρόνος σε ενήλικες για την κνήμη είναι οι τρεις μήνες και για το βραχιόνιο δυο μήνες [1,14]. Η καθυστερημένη πώρωση μπορεί να εξελιχθεί σε πώρωση ή ψευδάρθρωση.

Η ψευδάρθρωση κλινικά χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη ανώδυνων κινήσεων στην εστία του κατάγματος. Διακρίνεται σε υπερτροφική και ατροφική. Στην πρώτη, που είναι και η πιο συχνή και οφείλεται σε πλημμελή ακινητοποίηση, τα ψευδαρθρωτικά

άκρα έχουν ικανοποιητική κυκλοφορία και παρουσιάζουν υπερτροφία και οστεοπόκνωση. Στην ατροφική είναι αποτέλεσμα πτωχής αιμάτωσης στα δύο οστικά άκρα τα οποία για το λόγο αυτό δεν παρουσιάζουν παραγωγική δραστηριότητα αλλά εμφανίζουν οστεοπόρωση και ατροφία.

1.3.3 Θεραπεία Καταγμάτων

Ο τρόπος αντιμετώπισης ενός οστικού κατάγματος εξαρτάται σημαντικά από την έκταση των κακώσεων που έχουν υποστεί τα μαλακά μέρη που το περιβάλλουν (μύες, σύνδεσμοι, αγγεία, νεύρα). Η θεραπεία των κλειστών καταγμάτων περιλαμβάνει την ανάταξη του κατάγματος, την ακινητοποίηση και τη λειτουργική αποκατάσταση. Η ανάταξη του κατάγματος πραγματοποιείται είτε με χειρισμούς υπό γενική ή μερική αναισθησία, είτε με συνεχή σκελετική ή δερματική έλξη ή με χειρουργική επέμβαση. Η ακινητοποίηση είναι απαραίτητη στους περισσότερους τύπους καταγμάτων και επιτυγχάνεται με μεταλλικούς, πλαστικούς ή συρμάτινους νάρθηκες, με γύψινους νάρθηκες, με λειτουργικούς γύψους ή νάρθηκες, με συνεχή έλξη, με εσωτερική και εξωτερική οστεοσύνθεση. Σε περιπτώσεις όπου απαιτείται μικρή προσπάθεια για την ακινητοποίηση του κατάγματος, εφαρμόζεται ο γύψινος νάρθηκας ή κυκλοτερή γύψινη επίδεση που αργότερα μπορούν να αντικατασταθούν από λειτουργικούς γύψους και νάρθηκες (functional braces). Αντιθέτως σε κατάγματα που απαιτείται τέλεια ανάταξη και ακινητοποίηση των κατεαγόντων άκρων, χρησιμοποιούνται συσκευές εσωτερικής ή εξωτερικής οστεοσύνθεσης [1].

Οι εσωτερικές οστεοσυνθέσεις εφαρμόζονται μετά από χειρουργική επέμβαση επιτυγχάνοντας καλύτερη ανάταξη, ασφαλέστερη ακινητοποίηση και ταχύτερη λειτουργική χρησιμοποίηση του μέλους. Βασικό μειονέκτημα είναι η δυνατότητα μόλυνσης και ανάπτυξης φλεγμονής, που αποτελούν βασικούς κινδύνους σε κάθε χειρουργική επέμβαση σε οστά. Ως υλικά οστεοσύνθεσης χρησιμοποιούνται βίδες, πλάκες (bone plates) ενδομυελικοί ήλοι (intramedullary nails) και σπανιότερα σύρμα, τα οποία είναι βιοσυμβατά με τον οργανισμό. Με την ολοκλήρωση της διαδικασίας πόρωσης του κατάγματος τα υλικά της οστεοσύνθεσης αφαιρούνται με χειρουργική επέμβαση.

Οι συσκευές εξωτερικής οστεοσύνθεσης (external fixation devices) στηρίζονται στην αρχή τοποθέτησης διοστικών βελονών (pins) κεντρικά και περιφερικά της εστίας του

κατάγματος που σταθεροποιούνται εξωτερικά με δακτυλίους (rings) ή ράβδους (bars). Οι εξωτερικές ράβδοι σχηματίζουν πλαίσιο, μονόπλευρο ή αμφοτερόπλευρο, ενός ή δύο επιπέδων. Η σταθερότητα που εξασφαλίζει μια συσκευή εξωτερικής οστεοσύνθεσης εξαρτάται τόσο από τη διάταξη του πλαισίου, όσο και από την αλληλεπίδραση μεταξύ πλαισίου και κατεαγόντων οστικών τεμαχίων.

Η εξωτερική οστεοσύνθεση εφαρμόζεται χωρίς να προκαλούνται μεγάλες καταστροφές των μαλακών μορίων (minimal invasiveness) και του οστού, ενώ ταυτόχρονα παρέχει ικανοποιητική συγκράτηση στο κάταγμα. Επιπλέον, η εξωτερική οστεοσύνθεση διευκολύνει τις αλλαγές και παρακολούθηση των τραυμάτων και ελαττώνει το χρόνο κατάκλισης του ασθενούς. Ωστόσο, υπάρχει κίνδυνος μόλυνσης του κατάγματος στα σημεία εισόδου των βελονών (pin-track infection) γεγονός που καθιστά απαραίτητο τον έλεγχο και την καθημερινή τοπική φροντίδα.

1.4 Αξιολόγηση της Πώρωσης Καταγμάτων Μακρών Οστών

Η συνολική φροντίδα ενός κατάγματος περιλαμβάνει, εκτός από την αρχική συντηρητική ή χειρουργική αντιμετώπισή του, και τη μετέπειτα αξιολόγηση της πορείας της πώρωσης έως ότου αυτή ολοκληρωθεί. Η λήψη των απαραίτητων πληροφοριών που σχετίζονται με την ομαλή εξέλιξη της πώρωσης, αποτελεί ζήτημα καίριας σημασίας για τον ορθοπαιδικό χειρουργό μιας και του επιτρέπει να παρεμβαίνει έγκαιρα σε περιπτώσεις καθυστερημένης πώρωσης ή ψευδάρθρωσης. Επιπλέον παρέχεται η δυνατότητα προσδιορισμού του χρονικού σημείου ολοκλήρωσης της πώρωσης, γεγονός που εξασφαλίζει ότι η θεραπεία του ασθενούς δε διακόπτεται ή δεν παρατείνεται αδικαιολόγητα.

Η κύρια μέθοδος που χρησιμοποιείται σήμερα για την παρακολούθηση της πώρωσης είναι ο συνδυασμός κλινικής εξέτασης του ασθενούς με ταυτόχρονη αξιολόγηση ακτινογραφιών σε τακτά χρονικά διαστήματα μετά από την αρχική αντιμετώπιση του κατάγματος. Η κλινική εξέταση συνίσταται στην αξιολόγηση της κλινικής εικόνας του ασθενούς, την ικανότητα φόρτισης του οστού με το βάρος του σώματος και στον χειρωνακτικό έλεγχο της σταθερότητας της περιοχής μέσω δοκιμασιών κάμψης και στρέψης. Ο κλινικός έλεγχος αν και επιτρέπει την άμεση αξιολόγηση του ασθενούς από τον ορθοπαιδικό, αποτελεί υποκειμενική μέθοδο χωρίς να προσφέρει ποσοτική

πληροφορία και εξαρτάται σημαντικά από την εμπειρία του ορθοπαιδικού χειρουργού [15].

Κατά τον ακτινολογικό έλεγχο αξιολογείται ο σχηματισμός και οι διαστάσεις του πόρου, η αποτιάνωση του πόρου που συνοδεύεται από αύξηση της φωτεινότητας, η εξαφάνιση της καταγματικής γραμμής, η γεφύρωση των καταγματικών άκρων του φλοιού, κ.α. Αν και η γεωμετρία της περιοχής μπορεί να αναπαρασταθεί με υψηλή διακριτική ικανότητα στις ακτινογραφίες, ο πόρος απεικονίζεται αρκετές εβδομάδες αργότερα από την πραγματική έναρξη του σχηματισμού μαλακού πόρου [16,17]. Για την αξιολόγηση ακτινογραφιών έχουν προταθεί διάφορα κριτήρια βάσει: (α) του ποσού και της ποιότητας του πόρου και της εμφάνισης ή μη της καταγματικής γραμμής [18], (β) του αριθμού των οστικών φλοιών που γεφυρώνουν το καταγματικό κενό και του αριθμού των καταγματικών γραμμών που είναι ευδιάκριτες [19], (γ) συνδυασμού των παραπάνω κριτηρίων [20], (δ) των γεωμετρικών χαρακτηριστικών του πόρου (διάμετρος, εμβαδόν) [16,21,22], (ε) της φωτεινότητάς του [23] κ.α. Έχει επίσης προταθεί από τον Heckman ως κριτήριο πόρωσης με βάση την ακτινολογική εικόνα η γεφύρωση τριών από τους τέσσερις οστικούς φλοιούς [19].

Παρά το γεγονός ότι ο ακτινογραφικός έλεγχος παρέχει πληροφορία για τις γεωμετρικές και μορφολογικές μεταβολές της περιοχής του κατάγματος κατά την εξέλιξη της πόρωσης, συνοδεύεται από διάφορους περιορισμούς, ο κυριότερος εκ των οποίων είναι ότι η ακτινογραφία απεικονίζει την προβολή του οστού (projectional technique) στις δυο διαστάσεις προσφέροντας μια διδιάστατη (2Δ) εικόνα. Επιπλέον η ακριβής αξιολόγηση των ακτινογραφιών εξαρτάται αποκλειστικά από την εμπειρία και κρίση του ιατρού.

Για την εξαγωγή ποσοτικών κριτηρίων παρακολούθησης της πόρωσης έχουν επίσης χρησιμοποιηθεί μέθοδοι για τη μέτρηση οστικής πυκνότητας του πόρου όπως η Μονοφωτονική Απορροφοσιομετρία (Single Photon Absorptiometry - SPA), η Απορροφοσιομετρία Ακτινών Χ Διπλής Ενέργειας (Dual-Energy X-ray Absorptiometry - DEXA), η Ποσοτική Υπολογιστική Τομογραφία (Quantitative Computed Tomography - QCT) και η μικρο-Υπολογιστική Τομογραφία (micro-CT). Οι τεχνικές αυτές βασίζονται στην απορρόφηση των φωτονίων κατά τη διάδοση τους στο οστό η οποία εξαρτάται από την πυκνότητα των κρυστάλλων υδροξυαπατίτη στο οστό (bone mineral

density – BMD). Οι τεχνικές πυκνομετρίας έχουν χρησιμοποιηθεί σε πειραματικές και κλινικές μελέτες για την μέτρηση της πυκνότητας του πόρου και τη συσχέτιση της με τις μηχανικές του ιδιότητες [25-29]. Η πυκνομετρία QCT βρέθηκε ότι υπερτερεί των μεθόδων SPA και DEXA αφού παρέχει 3Δ απεικόνιση του οστού από ανακατασκευή πολλών 2Δ τομογραφιών. Συνεπώς μπορεί να πραγματοποιηθεί πυκνομετρία και εξαγωγή μορφολογικών χαρακτηριστικών του πόρου από όλη την 3-Δ εικόνα (Σχήμα 1.7).

Ωστόσο η εφαρμογή των τεχνικών πυκνομετρίας συνοδεύεται από σημαντικούς περιορισμούς που σχετίζονται με: (α) την έκθεση του ασθενούς σε ιοντίζουσα ακτινοβολία, (β) το υψηλό κόστος της εξέτασης και (γ) τη δυνατότητα πραγματοποίησης μόνο σε κλινικό περιβάλλον, μειώνοντας έτσι την εφαρμοσιμότητα τους στην παρακολούθηση της εξέλιξης της πάρωσης καταγμάτων.

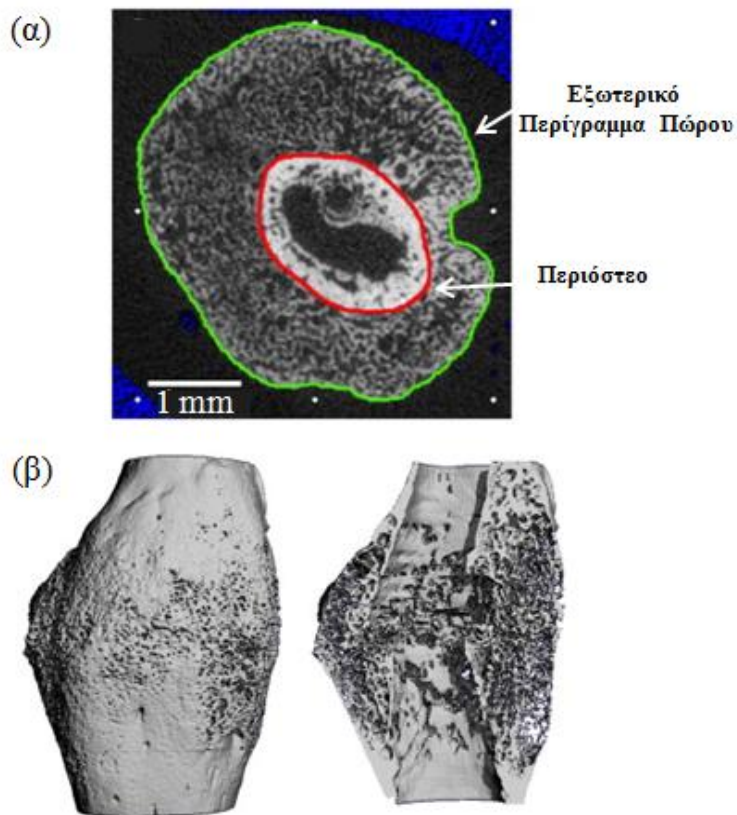
1.5 Μηχανικές Ιδιότητες Μακρών Οστών στα Επίπεδα της Ιεραρχικής Δομής

Τα δομικά συστατικά των οστών είναι οργανωμένα σε διάφορα επίπεδα κλίμακας μήκους καθιστώντας την ιεραρχική αυτή δομή του οστού ιδιαίτερα πολύπλοκη. Η κατανόηση και ερμηνεία των μηχανικών ιδιοτήτων του οστού απαιτεί τον προσδιορισμό των μηχανικών ιδιοτήτων των φερόντων δομικών συστατικών του καθώς και τον προσδιορισμό της ιεραρχικής οργάνωσής τους στα διάφορα επίπεδα της δομής. Τα επίπεδα αυτά είναι (α) η μακροδομή (σπογγώδες και συμπαγές οστό), (β) η μικροδομή (οστεώνες και πεταλιώδης δομή) (γ) η νανοδομή (ίνες κολλαγόνου και κρύσταλλοι υδροξυαπατίτη) και (δ) υπο-νανοδομή (μοριακό επίπεδο) (Σχήμα 1.8).

1.5.1 Μηχανικές Ιδιότητες μακρών οστών σε μακροσκοπικό επίπεδο

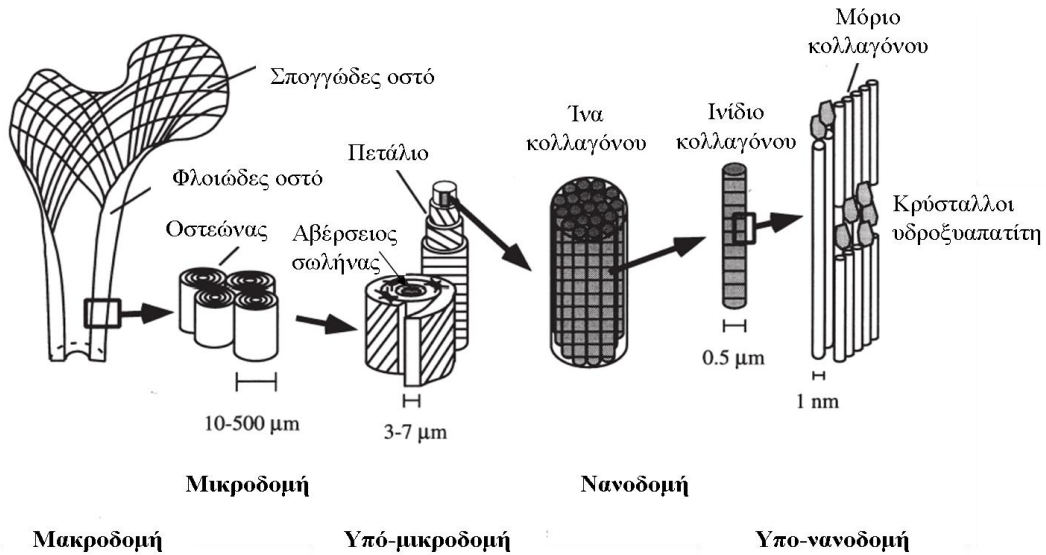
Η μηχανική συμπεριφορά του οστού σε μακροσκοπικό επίπεδο εξαρτάται σημαντικά από τη σύσταση και τη δομή του. Τόσο το φλοιώδες όσο και το δοκιδώδες οστό είναι ανισότροπα υλικά, δηλ. έχουν μηχανικές ιδιότητες που εξαρτώνται από τη θεωρούμενη διεύθυνση. Η ανισοτροπία του φλοιώδους οστού οφείλεται κυρίως στην ανομοιόμορφη κατευθυντικότητα των οστεώνων και των πεταλίων. Εξαιτίας της παράλληλης διάταξης των οστεώνων ως προς το διαμήκη άξονα του φλοιώδους οστού έχει βρεθεί πειραματικά ότι η διάφυση των μακρών οστών θα μπορούσε να περιγραφεί και ως ένα

ορθότροπο ή εγκάρσια ισότροπο υλικό [3,5,30-32]. Η υπόθεση της εγκάρσιας ισοτροπίας στηρίχθηκε στο γεγονός ότι οι ελαστικές ιδιότητες κατά την ακτινική και γωνιακή διεύθυνση του φλοιώδους οστού βρέθηκε πειραματικά ότι είχαν ελάχιστες διαφορές [3,5,7,30-32]. Ωστόσο ο προσδιορισμός των μηχανικών ιδιοτήτων του οστού επηρεάζεται από ποικίλους παράγοντες όπως η τεχνική μέτρησης, ο τύπος του πειράματος, ο τύπος δοκιμίου (οστό κνήμης, μηρού κτλ.), η ανατομική θέση μέτρησης κ.α. Το γεγονός αυτό δικαιολογεί και τις διαφορετικές τιμές που έχουν αναφερθεί στη βιβλιογραφία για τις ελαστικές σταθερές του οστού, όπως φαίνεται και στον Πίνακα 1.1.



Σχήμα 1.7. (α) Κατάτμηση πόρου από εγκάρσια τομή micro-CT για τον καθορισμό του εξωτερικού περιγράμματος του πόρου (πράσινη γραμμή) και της περιοχής που περικλείεται στην περιοχή του περιόστεου (περιοχή εντός της κόκκινης γραμμής) (β) 3-Δ ανακατασκευή του πόρου (περιοχή μεταξύ της κόκκινης και πράσινης γραμμής) και αντίστοιχη όψη από επιμήκη τομή σε αντιπροσωπευτικό οστικό δοκίμιο [24].

Σε μια εμβιομηχανική μελέτη βρέθηκε ότι για το φλοιώδες οστό ισχύει ότι $E_3 > E_2 > E_1, G_{23} > G_{13} > G_{12}$, και $\nu_{31}, \nu_{12}, \nu_{21} > \nu_{32} > \nu_{23}, \nu_{13}$ όπου $E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{13}, G_{23}$ και $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{21}, \nu_{23}, \nu_{31}, \nu_{32}$ είναι τα μέτρα ελαστικότητας, μέτρα διάτμησης και λόγοι Poisson αντίστοιχα στις διευθύνσεις των τριών επιπέδων [33]. Με βάση τα αποτελέσματα αυτά



Σχήμα 1.8. Ιεραρχική δομή του οστού [3].

η συνήθης υπόθεση εγκάρσιας ισοτροπίας για το οστό δεν είναι επαρκής για να αποτελεί γενικευμένη θεώρηση. Αντιθέτως η επιλογή της ελαστικής συμμετρίας που υποτίθεται για ένα ελαστικό μοντέλο οστού εξαρτάται σημαντικά από την εκάστοτε εφαρμογή του. Για παράδειγμα, σύμφωνα με τον Huiskes [34] η ανάλυση και ο υπολογισμός του πεδίου τάσεων που αναπτύσσονται σε ανθρώπινο οστό κνήμης μπορεί να αποδοθεί ικανοποιητικά από ένα εγκάρσια ισότροπο υπολογιστικό μοντέλο οστού.

Οι Knets and Malmeisters [35] υποθέτοντας συμμετρία ορθοτροπίας προσδιόρισαν τις ελαστικές σταθερές για ανθρώπινες κνήμες και παρατήρησαν στατιστικά σημαντικές διαφοροποιήσεις για το μέτρο ελαστικότητας για κάθε ανατομική θέση κατά μήκος της περιφέρειας του φλοιού. Έχουν όμως αναφερθεί και διαφορές κατά μήκος του άξονα του οστού [6]. Οι υψηλότερες τιμές έχουν μετρηθεί στη μεσότητα του δεύτερου τριτημορίου και στην έσω και έξω πλευρά του οστού. Μικρές διαφορές έχουν παρατηρηθεί και στις απόλυτες τιμές των ελαστικών σταθερών μεταξύ των οστών ανθρώπου και ζώων λόγω κάποιων διαφοροποιήσεων στη δομή σε μικροσκοπικό επίπεδο [5,31].

Η μηχανική αντοχή του οστού διαμορφώνεται κατάλληλα ώστε με ελάχιστο υλικό να εμφανίζει βέλτιστη συμπεριφορά κατά τις διευθύνσεις των μέγιστων φορτίων. Έχει αποδειχθεί ότι η αντοχή του οστού είναι μεγαλύτερη σε δοκιμασία θλίψης από ότι σε δοκιμασία εφελκυσμού και χαμηλότερη σε δοκιμασία στρέψης [5, 36]. Στη μελέτη των Reilly και Burstein [32] η τελική αντοχή που μετρήθηκε σε μηριαία ανθρώπινα οστά υπό δοκιμασία θλίψης ήταν ίση με 105 MPa για τη διαμήκη κατεύθυνση φόρτισης και ίση με 131 MPa για την εγκάρσια κατεύθυνση. Στην ίδια μελέτη η αντοχή του οστού σε δοκιμασία εφελκυσμού στη διαμήκη κατεύθυνση φόρτισης μετρήθηκε ίση με 53 MPa ενώ σε δοκιμασία στρέψης ίση με 68 MPa. Ωστόσο, έχει βρεθεί ότι σε δοκιμασία κάμψης ο ανθρώπινος μηρός παρουσιάζει υψηλότερη οριακή αντοχή που κυμαίνεται από 142 έως 170 MPa [36].

Η οριακή αντοχή του οστού και το μέτρο του Young συσχετίζονται και με τη φαινόμενη πυκνότητα (apparent ή bulk ή structural density) του οστού [37-41]. Οι Carter and Hayes [41] βρήκαν ότι το μέτρο ελαστικότητας και η οριακή αντοχή του φλοιώδους και δοκιδώδους οστού συσχετίζονται με τον κύβο και το τετράγωνο της φαινόμενης πυκνότητας του οστού. Η φαινόμενη πυκνότητα ορίζεται ως:

$$\rho = \frac{m_{bone}}{TV}, \quad (1.1)$$

όπου m_{bone} είναι η μάζα του οστού και TV (total volume) είναι ο συνολικός του όγκος συνυπολογίζοντας τα κενά των πόρων [5,30]. Σε μια άλλη πειραματική μελέτη [39] βρέθηκε ότι το μέτρο ελαστικότητας και η οριακή αντοχή σε θλίψη για φλοιώδες οστό κνήμης κατά τη διαμήκη διεύθυνση μπορούν να προσεγγιστούν αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$E(MPa) = 2065\rho^{3.09}, \quad \sigma_c(MPa) = 72.4\rho^{1.88}, \quad (1.2)$$

και κατά την εγκάρσια διεύθυνση από τις σχέσεις :

$$E(MPa) = 2314\rho^{1.57}, \quad \sigma_c(MPa) = 37\rho^{1.51}, \quad (1.3)$$

όπου ρ είναι η φαινόμενη πυκνότητα του οστού εκφραζόμενη σε g/cm^3 . Για το σπογγώδες οστό οι αντίστοιχες σχέσεις κατά την αξονική διεύθυνση ορίζονται ως:

$$E(MPa) = 1904\rho^{1.64}, \quad \sigma_c(MPa) = 340.8\rho^{1.89}, \quad (1.4)$$

και κατά την εγκάρσια διεύθυνση ως:

$$E(MPa) = 1157\rho^{1.78}, \quad \sigma_c(MPa) = 21.4\rho^{1.37}. \quad (1.5)$$

Ωστόσο σε αρκετές μελέτες έχει αποδειχθεί ότι οι μηχανικές ιδιότητες του οστού δεν εξαρτώνται μόνο από τη φαινόμενη πυκνότητά του αλλά και από το περιεχόμενο αποτιτανωμένου ιστού [42-45]. Η πιο αντιπροσωπευτική μεταβλητή της συσχέτισης αυτής είναι η φαινόμενη πυκνότητα τέφρας (apparent ash density) ρ_a [46], η οποία εισάγεται όταν η μάζα του αποτιτανωμένου ιστού μετράται με την τεχνική της αποτέφρωσης (ashing). Η πυκνότητα τέφρας ορίζεται ως ο λόγος της μάζας τέφρας του οστού προς το συνολικό όγκο του οστού. Το μέτρο του Young και η οριακή αντοχή του φλοιώδους και δοκιδώδους οστού συνδέονται με τη φαινόμενη πυκνότητα τέφρας ως ακολούθως:

$$E(MPa) = 10500\rho_a^{2.57 \pm 0.04}, \quad \sigma_c(MPa) = 117\rho_a^{1.93 \pm 0.04}. \quad (1.6)$$

Η σχέση αυτή εξηγεί περισσότερο από το 96% της στατιστικής διακύμανσης της μηχανικής συμπεριφοράς οστών κνήμης και σπονδύλων με τη φαινόμενη πυκνότητα τέφρας ($0.33-1.22\text{g/cm}^3$) [36].

Ένας άλλος παράγοντας που έχει αποδειχθεί ότι επηρεάζει τις μηχανικές ιδιότητες του οστού είναι το πορώδες (porosity). Το πορώδες του φλοιώδους οστού ορίζεται ως η πυκνότητα των πόρων (όγκος που καταλαμβάνουν οι πόροι προς το συνολικό όγκο του οστού) [47] που εισάγονται από τους Αβέρσειους σωλήνες, τους σωλήνες Volkman και τα σωληνάκια. Στο δοκιδώδες οστό το πορώδες καθορίζεται κυρίως από τα διάκενα μεταξύ των δοκίδων. Σε μία εμβιομηχανική μελέτη αναφέρεται ότι το μέτρο του Young συσχετίζεται με το πορώδες σύμφωνα με τη σχέση:

$$E(GPa) = 3.66p^{-0.55}, \quad (1.7)$$

όπου p είναι το πορώδες.

Το οστό μπορεί επίσης να χαρακτηριστεί και ιξωδοελαστικό υλικό του οποίου οι μηχανικές του ιδιότητες επηρεάζονται από το ρυθμό και το χρόνο εφαρμογής της φόρτισης. Έχει βρεθεί ότι το οστό εμφανίζει υψηλότερη αντοχή και στιβαρότητα (stiffness) σε μεγαλύτερους ρυθμούς παραμόρφωσης [48]. Παρά το γεγονός ότι προτάθηκαν ορισμένα γραμμικά μοντέλα ιξωδοελαστικότητας για να περιγράψουν τη σχέση τάσης - τροπής του οστού οι Carter και Hayes [49] βρήκαν ότι η αντοχή και το μέτρο ελαστικότητας είναι ανάλογα με το ρυθμό παραμόρφωσης υψωμένο στη 0.06 και ότι η σχέση αυτή ισχύει για όλα τα οστά του σκελετού. Επομένως τα μοντέλα αυτά δε

μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την πλήρη περιγραφή της μηχανικής συμπεριφοράς του οστού, αλλά απαιτείται η χρήση μη γραμμικών καταστατικών εξισώσεων [5,50-52].

1.5.2 Μηχανικές Ιδιότητες οστών σε επίπεδο μικροδομής

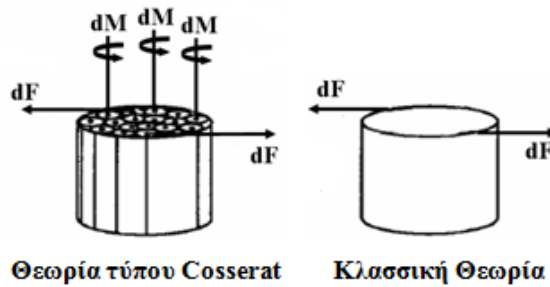
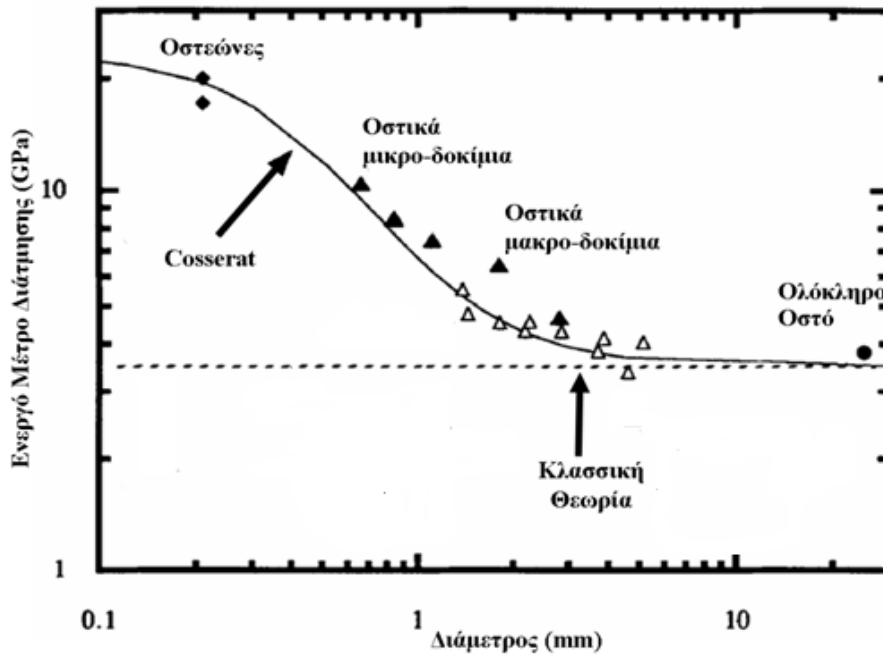
Οι γνώσεις μας για τις μηχανικές ιδιότητες του οστού στο επίπεδο των οστεώνων προέρχονται κυρίως από τις μελέτες των Ascenzi *et al.*, οι οποίοι έθεσαν μεμονωμένους οστεώνες υπό δοκιμασίες εφελκυσμού [53], θλίψης [54], κάμψης [55] και στρέψης [56]. Τα μακροσκοπικά δοκίμια των οστεώνων διαχωρίστηκαν σε δυο κατηγορίες ανάλογα με την κατευθυντικότητα των ινών κολλαγόνου η οποία επηρεάζει την μηχανική συμπεριφορά των οστεώνων [53-56]. Στην πρώτη κατηγορία ανήκαν οι “διαμήκεις” οστεώνες των οποίων τα πετάλια είχαν στην πλειοψηφία τους τις ίνες κολλαγόνου με κατευθυντικότητα παράλληλη προς τον άξονα τους ενώ στη δεύτερη ανήκαν οι “εγκάρσιοι” οστεώνες με πετάλια των οποίων οι ίνες κολλαγόνου ήταν κάθετες στον άξονα τους. Τα μέτρα ελαστικότητας οστεώνων σε δοκιμασία εφελκυσμού μετρήθηκαν από 12 GPa, για τους “διαμήκεις”, έως 5.5 GPa για τους “εγκάρσιους” οστεώνες, και οι οριακές αντοχές από 120 MPa έως 102 MPa αντίστοιχα. Παραδόξως, η ακαμψία μεμονωμένων οστεώνων σε δοκιμασία θλίψης [53] μετρήθηκε μικρότερη (6 και 7 GPa αντίστοιχα) από το μέτρο ελαστικότητας σε δοκιμασία εφελκυσμού ενώ η τιμή της οριακής αντοχής δεν βρέθηκε πολύ διαφορετική (110-130 MPa). Από τη δοκιμασία κάμψης [55] προέκυψαν ακόμη χαμηλότερες τιμές για το μέτρο ελαστικότητας (της τάξης των 2-3 GPa και πολύ υψηλότερες τιμές για την αντοχή (390-350 MPa). Η εξάρτηση των μηχανικών ιδιοτήτων των οστεώνων από το είδος της δοκιμασίας είναι πιθανό να οφείλεται στο γεγονός ότι ενεργοποιούνται διαφορετικοί μηχανισμοί παραμόρφωσης στον ανισότροπο οστίτη ιστό λόγω της διαφορετικής κατεύθυνσης παραμόρφωσης σε κάθε δοκιμασία.

Μελέτες προσδιορισμού των μηχανικών ιδιοτήτων της μικροδομής του οστού έδειξαν επίσης ότι το μέτρο ελαστικότητας μικρο-δοκιμίων φλοιώδους οστού με διαστάσεις $100\ \mu\text{m} \times 100\ \mu\text{m} \times 1500\ \mu\text{m}$ σε μικρο-κάμψη είναι ίσο με 5.4 GPa [57-60] δηλαδή πολύ μικρότερο από αυτό που μετρήθηκε σε μεγάλα οστικά δοκίμια (17.1 GPa) [61]. Σαφής εξήγηση δεν έχει δοθεί από τους ερευνητές αλλά πιστεύεται ότι i) οι μικροσκοπικές διαστάσεις καθώς και οι δομικές ατέλειες (σωληνάρια Volkman, γραμμές διασύνδεσης) των δοκιμίων έχουν επίδραση στις μετρούμενες τροπές, ii) η αβεβαιότητα στον προσδιορισμό της γεωμετρίας των δοκιμίων παίζει σημαντικό ρόλο και iii) η

κατάσταση των δοκιμίων επηρεάζει τη μηχανική τους συμπεριφορά (σε ξηρά δοκίμια το μέτρο ελαστικότητας μπορεί να αυξηθεί κατά 24%) [62].

Το μέτρο διάτμησης των οστεώνων που μετρήθηκε από μικρο-στρέψη [54] κυμαινόταν από 17 GPa για τους “διαμήκεις” οστεώνες έως 23 GPa για τους “εγκάρσιους”. Οι τιμές αυτές ήταν σχεδόν τετραπλάσιες από το μέτρο διάτμησης που έχει μετρηθεί για οστικά δοκίμια σε μακροσκοπικό επίπεδο. Παρά το γεγονός ότι οι Ascenzi *et al.*, δεν έδωσαν σαφή εξήγηση για αυτή την ασυμφωνία, οι Lakes και Yang [63] μέτρησαν παρόμοιες τιμές και απέδωσαν τις διαφορές μεταξύ των ελαστικών ιδιοτήτων των οστεώνων και ολόκληρου του οστού στις συνδετικές γραμμές (cement lines) μεταξύ γειτονικών οστεώνων. Έχει αποδειχθεί πειραματικά ότι όταν το οστό ή μεγάλα οστικά δοκίμια υπόκεινται σε στρέψη εμφανίζουν τοπικά περιστροφή στις συνδετικές γραμμές [64] η οποία μακροσκοπικά και σύμφωνα με τη κλασική θεωρία ελαστικότητας θεωρείται ως μετατόπιση (Σχήμα 1.9). Αντιθέτως, η θεωρία κατά Cosserat προβλέπει επιπρόσθετα των δυνάμεων ανά μονάδα επιφάνειας (τάσεις) της κλασικής θεωρίας και ροπές στρέψης ανά μονάδα εμβαδού (couple stresses). Οι βασικές αρχές της θεωρίας Cosserat παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 3.

Ο Marroti [67] πρότεινε μια διαφορετική κατηγοριοποίηση των οστεώνων ανάλογα με την πυκνότητα των ινιδίων. Στην πρώτη κατηγορία ανήκαν οι “λεπτοί” (thin) οστεώνες οι οποίοι ήταν πιο συμπαγείς και τα ινίδια από τα οποία αποτελούνταν είχαν μεγαλύτερη κατευθυντικότητα, ενώ στη δεύτερη κατηγορία ανήκαν οι “πυκνοί” (thick) οστεώνες τα ινίδια των οποίων είχαν διαφορετικές κατευθύνσεις και η κατανομή τους ήταν πιο αραιή. Μολονότι η κατηγοριοποίηση των Ascenzi *et al.*, θεωρείται πιο ρεαλιστική [68] έχει αποδειχθεί ότι η πυκνότητα αποτιτανωμένου ιστού (mineral density) είναι δυνατό να διαφέρει στο εσωτερικό ενός μεμονωμένου πεταλίου.



Σχήμα 1.9. Η μεταβολή του ενεργού μέτρου διάτμησης που προσδιορίζεται από το διάγραμμα τάσης – τροπής στρέψης συναρτήσει της διαμέτρου των οστικών δοκιμίων που χρησιμοποιήθηκαν στις μελέτες [56] (◆), [63] (▲), [65] (Δ), και [32] (●). Η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στην κλασσική θεωρία ελαστικότητας, ενώ η συμπαγής γραμμή έχει υπολογισθεί για ένα συνεχές μέσο Cosserat προσαρμόζοντας 5 ελαστικές σταθερές [66].

Για τον προσδιορισμό της δομής και σύστασης των πεταλίων του οστού έχουν χρησιμοποιηθεί τεχνικές οπτικής μικροσκοπίας (optical microscopy), περίθλασης αντίνων-Χ (X-ray diffraction) και μικροσκοπίας με σάρωση ηλεκτρονίου (Scanning electron microscopy). Οι Guirad-Guille [69] και Weiner *et al.*, [70] παρατήρησαν ότι στο εσωτερικό των πεταλίων υπάρχει μια ελικοειδής και συστρεφόμενη δομή αποτελούμενη από λεπτές πλάκες μικρότερων υπό-πεταλίων (sub-lammellae) των οποίων τα ινίδια κολλαγόνου είναι προσανατολισμένα προς διαφορετικές κατευθύνσεις. Οι Weiner και Traub [71] επέκτειναν το μοντέλο αυτό θεωρώντας ότι σε γειτονικά υπό-

πετάλια τα ανόργανα ινίδια επιπρόσθετα της κλίσης που σχηματίζουν με τον άξονα των οστεώνων, περιστρέφονται και γύρω από τον άξονά τους.

Οι Wagermaier *et al.*, [72] προσπάθησαν να προσδιορίσουν την κατευθυντικότητα των ινών συνδυάζοντας τεχνικές περίθλασης ακτίνων-X σε κρυσταλλογραφικά δοκίμια με τεχνικές ακτινοβολίας μικροδέσμης από κύκλοτρο (microbeam synchrotron radiation). Παρατήρησαν ότι η κατευθυντικότητα των ινιδίων μεταβαλλόταν περιοδικά με πλάτος 30°-60°. Επιπρόσθετα οι ίνες σε ένα μεμονωμένο πετάλιο ήταν ελικοειδώς και εναρμονισμένα προσανατολισμένες σχηματίζοντας ένα δεξιόστροφο σπειροειδές. Ο συγκεκριμένος τρόπος διάταξης και προσανατολισμού των ινιδίων εξασφαλίζει την ακεραιότητα του οστού καθιστώντας τη διάδοση μικρο-ρωγμών κατά μήκος του οστεώνα από τα διάμεσα πετάλια προς το κεντρικό Αβέρσειο κανάλι πιο δύσκολη απ' ό,τι θα ήταν στην περίπτωση που οι ίνες έχουν κατεύθυνση παράλληλη στον άξονα του οστεώνα.

Ο προσδιορισμός των μηχανικών ιδιοτήτων μεμονωμένων πεταλίων στις διαφορετικές κατευθύνσεις είναι αναγκαίος για την κατανόηση της ανισοτροπίας του οστού. Κάνοντας χρήση τεχνικών αποτίτάνωσης και ακουστικής μικροσκοπίας έχει βρεθεί ότι οι ίνες κολλαγόνου είναι περίπου ισότροπες ενώ με την παρουσία των κρυστάλλων ο λόγος ανισοτροπίας (anisotropy ratio) που ορίζεται ως $\frac{C_{33}}{C_{11}}$ γίνεται 1.7 - 2.1, όπου C_{11} και C_{33} είναι οι συνιστώσες του μητρώου στιβαρότητας. Οι τιμές αυτές του λόγου ανισοτροπίας είναι όμοιες με τις τιμές του λόγου ανισοτροπίας του οστού [3]. Ωστόσο, η διακριτική ικανότητα των μετρήσεων ακουστικής μικροσκοπίας είναι της τάξης των 60 μm η οποία δεν επαρκεί για να εντοπιστούν περιοχές μονοκατευθυντικών ινών. Επομένως η πιθανή ύπαρξη περιοχών με ίνες προσανατολισμένες προς διαφορετικές κατευθύνσεις θα μπορούσε να επηρεάσει σημαντικά τα αποτελέσματα των μετρήσεων. Οι Rho *et al.*, [73] χρησιμοποιώντας την τεχνική νανο-διείσδυσης μέτρησαν τη σκληρότητα και το μέτρο ελαστικότητας μεμονωμένων πεταλίων. Με τη μέθοδο της νανο-διείσδυσης είναι εφικτό να πραγματοποιηθούν μετρήσεις με διακριτική ικανότητα μικρότερη από 1μm. Το μέτρο ελαστικότητας υπολογίζεται από την κλίση του διαγράμματος φορτίου διείσδυσης-βάθους διείσδυσης κάνοντας χρήση προσεγγιστικών τύπων που λαμβάνουν υπόψη τις μηχανικές ιδιότητες της ακμής του διεισδυτή και του

εμβαδού της επιφάνειας επαφής [62]. Η μέθοδος αυτή δεν υπόκειται σε σφάλματα μέτρησης που αφορούν στο μέγεθος των δοκιμίων και την παρουσία δομικών ατελειών καθώς το μέγεθος του σημείου επαφής είναι της τάξεως των 5 μm .

Οι Gupta *et al.*, [68] συνδυάζοντας την τεχνική νανο-διείσδυσης και τη μέθοδο απεικόνισης οπισθο-σκέδαζόμενου ηλεκτρονίου (backscattered electron imaging) σε μεμονωμένους οστεώνες από μεσότητα κνήμης ανθρώπου, έδειξαν ότι το μέτρο ελαστικότητας σε ένα μεμονωμένο πετάλιο μεταβάλλεται περιοδικά από 24-27 GPa. Η μέση τιμή του μέτρου παρέμενε σχεδόν σταθερή κατά μήκος του οστεώνα, ενώ βρέθηκε σημαντικά αυξημένη (>30 GPa) στα διάμεσα πετάλια. Το μέτρο ελαστικότητας μετρήθηκε τόσο στα “πυκνά” (“thick”) υπό-πετάλια, των οποίων τα ινίδια κολλαγόνου ήταν προσανατολισμένα κυρίως παράλληλα προς τον άξονα του οστεώνα, όσο και στα “λεπτά” (“thin”) υπο-πετάλια των οποίων τα ινίδια σχημάτιζαν γωνία με τον άξονα του οστεώνα. Τα αποτελέσματα έδειξαν στατιστικώς μη σημαντική μείωση του μέτρου ελαστικότητας κατά μήκος του οστεώνα από το εσωτερικό Αβέρσειο κανάλι προς τα εξωτερικά πετάλια. Διαφορετικές τιμές για τα μέτρα ελαστικότητας των “πυκνών” και “λεπτών” υπο-πεταλίων μετρήθηκαν επίσης και από τους Xu *et al.*, [74] εφαρμόζοντας μεθόδους νανο-διείσδυσης και μικροσκοπίας ατομικής δύναμης σε πεταλιώδη οστικά δοκίμια.

Αντιθέτως οι Rho *et al.*, [75] μετρώντας το μέτρο ελαστικότητας μόνο των “πυκνών” υπο-πεταλίων σε ένα μεμονωμένο πετάλιο βρήκαν στατιστικώς σημαντικά διαφορές μεταξύ των μηχανικών ιδιοτήτων των πεταλίων από το κέντρο προς τα έξω κατά την ακτινική διεύθυνση του οστεώνα. Πιο συγκεκριμένα, το μέτρο ελαστικότητας στα πετάλια κοντά στο Αβέρσειο κανάλι μετρήθηκε ίσο με 20.8 ± 1.3 GPa και η οριακή αντοχή ίση με 0.65 ± 0.06 GPa, ενώ στα εξωτερικά οστεΐνα πετάλια οι τιμές ήταν 18.8 ± 1.0 GPa και 0.55 ± 0.05 GPa, αντίστοιχα. Επιπρόσθετα, οι μηχανικές ιδιότητες των ενδιάμεσων πεταλίων βρέθηκαν στατιστικώς σημαντικά υψηλότερες από αυτές των οστεώνων.

Μετρώντας το περιεχόμενο αποτιτανωμένου ιστού σε μία περιοχή οι Gupta *et al.*, [68] έδειξαν ότι περιοχές με μικρότερη ακαμψία είχαν παράλληλα και χαμηλά επίπεδα αποτιτανωμένου ιστού. Αυτή η περιοδικά διαμορφωμένη σύσταση και μηχανική

συμπεριφορά του οστού προτάθηκε από τους συγγραφείς ως ένας σημαντικός φυσικός μηχανισμός αποτροπής ή διακοπής της διάδοσης ρωγμών στο εσωτερικό του οστού.

Ο προσδιορισμός των μηχανικών ιδιοτήτων μεμονωμένων δοκίδων του σπογγώδους οστού έχει γίνει αντικείμενο μελέτης για πολλούς ερευνητές και για αρκετές δεκαετίες. Μελέτες που χρησιμοποίησαν μεθόδους νανο-διείσδυσης [57] και ακουστικής μικροσκοπίας [76] μέτρησαν σημαντικά υψηλότερες τιμές για το μέτρο ελαστικότητας των δοκίδων σε διαμήκη και εγκάρσια διεύθυνση από αυτές που μετρήθηκαν από δοκιμασίες μικρο-εφελκισμού [77,78] και κάμψης τριών [79] και τεσσάρων σημείων [80]. Η διαφοροποίηση των τιμών θα μπορούσε να αποδοθεί στα πειραματικά σφάλματα που ανακύπτουν σε τέτοιου είδους εμβιομηχανικές δοκιμασίες, εξαιτίας των μικρών διαστάσεων των οστικών δοκιμίων [81]. Παρά το γεγονός ότι έχει βρεθεί ότι οι τιμές για το μέτρο ελαστικότητας των δοκίδων κυμαίνονται από 1-20 GPa, έχει αποδειχθεί ότι η σχέση που προκύπτει από αυτά τα αποτελέσματα, μεταξύ των μέτρων ελαστικότητας και της πυκνότητας στο σπογγώδες οστό σε μικροσκοπικό επίπεδο, δε θα μπορούσε να εξαχθεί από τα αποτελέσματα αντίστοιχων πειραμάτων σε δοκίμια συμπαγούς οστού [81-83], υποδεικνύοντας ότι τα υλικά των δύο τύπων οστίτη ιστού διαφέρουν εγγενώς. Πρόσφατες μελέτες εφαρμόζοντας τη μέθοδο νανο-διείσδυσης [84] και πεπερασμένων στοιχείων [85] απέδειξαν ότι οι ελαστικές ιδιότητες μεμονωμένων δοκίδων είναι ελαφρώς διαφορετικές από αυτές του γειτονικού οστίτη ιστού.

1.5.3 Μηχανικές Ιδιότητες οστών σε επίπεδο νανοδομής

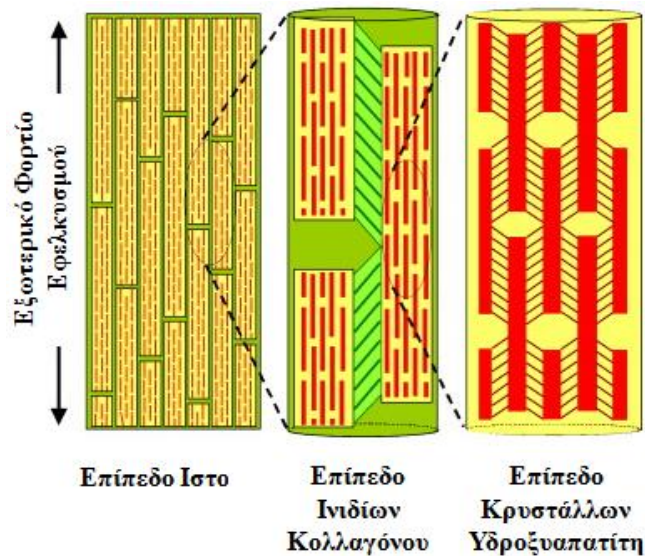
Οι μηχανικές ιδιότητες των στοιχείων στο επίπεδο της νανοδομής είναι δύσκολο να προσδιοριστούν με εμβιομηχανικές μεθόδους εξαιτίας των υπερβολικά μικρών διαστάσεων των ινών κολλαγόνου και των κρυστάλλων υδροξυαπατίτη. Η κατανόηση των μηχανισμών παραμόρφωσης του υποστρώματος κολλαγόνου απαιτεί τη χρήση προηγμένων πειραματικών μεθόδων σκέδασης και περίθλασης ακτινών X από κύκλοτρο [86-89], τεχνικών φασματοσκοπίας δύναμης μεμονωμένων μορίων [90-91] καθώς και της μεθόδου νανο-διείσδυσης με πολύ υψηλή διακριτική ικανότητα [92]. Η μέθοδος περίθλασης ακτινών X από κύκλοτρο επιτρέπει τον εντοπισμό παραμορφώσεων τόσο στο ινίδιο κολλαγόνου όσο και στα ενσωματωμένα μόρια κρυστάλλου εφαρμόζοντας δυνάμεις τάσεων και παραμορφώσεων σε μακροσκοπικό επίπεδο. Όπως έχει αναφερθεί τα ινίδια του κολλαγόνου αποτελούνται από επαναλαμβανόμενα τμήματα μήκους D ίσα με 65-67 nm. Μέσω της ακτινοβολίας X

υψηλής έντασης που παράγεται από το κύκλοτρο προκαλείται μηχανική παραμόρφωση στο υπό δοκιμασία νανο-δοκίμιο ενώ ταυτόχρονα παράγονται απεικονίσεις της νανοδομής υπό γωνία σε πραγματικό χρόνο. Η παραμόρφωση του ινιδίου προσδιορίζεται μέσω των αλλαγών που προκαλούνται στην αξονική περιοδικότητα D των ινιδίων κολλαγόνου. Το πλεονέκτημα της μεθόδου έγκειται στην υψηλή φωτεινότητα της παραγόμενης ακτινοβολίας από κύκλοτρο επιτρέποντας την παραγωγή φάσματος ακτινοβολίας X σε πολύ μικρότερο χρονικό διάστημα σε σύγκριση με αυτό που απαιτείται σε ένα εργαστήριο. Στη μέθοδο φασματοσκοπίας δύναμης μεμονωμένων μορίων χρησιμοποιείται ειδικός πρόβολος με αιχμηρή ακμή με σκοπό την έλξη μακρίων άμορφων οργανικών μορίων αποτιτανωμένου ιστού και την εκτίμηση των μηχανικών ιδιοτήτων τους.

Συνδυάζοντας την τεχνική περίθλασης από κύκλοτρο με τη δοκιμασία μικρο-εφελκυσμού σε οστικά δοκίμια ινοπεταλιώδους οστίτη ιστού η παραμόρφωση των ινιδίων κολλαγόνου βρέθηκε να έχει περίπου τη μισή τιμή από την παραμόρφωση του ιστού [86-87]. Επιπλέον βρέθηκε ότι μετά το σημείο διαρροής (yield point) του διαγράμματος τάσης-τροπής του ιστού, η παραμόρφωση του ινιδίου κολλαγόνου αποκτά μια σταθερή τιμή. Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις οι Gupta *et al.*, [86,88] απέδειξαν ότι στο επίπεδο της νανοδομής ο ιστός, το ινίδιο κολλαγόνου και τα ανόργανα μόρια υδροξυαπατίτη, σε δοκιμασία μικρο-εφελκυσμού, εμφανίζουν επίπεδα παραμόρφωσης σε αναλογία 12:5:2 αντίστοιχα. Επιπλέον, η τιμή της μέγιστης αντοχής των κρυστάλλων υδροξυαπατίτη μετρήθηκε μεγαλύτερη από το διπλάσιο της αντοχής του υλικού του απατίτη (<1 GPa) [86,88].

Τα παραπάνω αποτελέσματα συνάδουν με ένα κλιμακούμενο μοντέλο μετάδοσης φορτίου στο υπόστρωμα του οστίτη ιστού το οποίο είναι ενδεικτικό της ιεραρχικής φύσης του μηχανισμού παραμόρφωσης του οστού (Σχήμα 1.10). Σύμφωνα με το προτεινόμενο μοντέλο όταν ο ιστός υπόκειται σε εξωτερικό εφελκυστικό φορτίο τότε η προκαλούμενη παραμόρφωση αναλύεται σε διαμήκη, η οποία εμφανίζεται στα ινίδια κολλαγόνου, και σε διατμητική η οποία εμφανίζεται στο εξωινιδιακό (extrafibrillar) λεπτό υπόστρωμα που παραμβάλλεται ανάμεσα σε γειτονικά ινίδια κρυστάλλων [88]. Μολονότι δεν υπάρχει ακριβής πληροφορία για τη σύσταση και τη μηχανική συμπεριφορά του εξωινιδιακού υποστρώματος, θεωρείται ότι αποτελείται από μη

κολλαγονικές πρωτεΐνες. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο φασματοσκοπίας μεμονωμένων μορίων σε επιφάνειες κατεταγότες οστού έχει επίσης βρεθεί ότι το υλικό του εξωινιδιακού υποστρώματος παρά το γεγονός ότι είναι ιδιαίτερα εύπλαστο (ductile) και ευπαθές, εμφανίζει παραμόρφωση. Η μηχανική συμπεριφορά του εξωινιδιακού υποστρώματος είναι παρόμοια με αυτή ενός «κολλώδους» υλικού, το οποίο παρεμβάλλεται ανάμεσα σε γειτονικά ινίδια κρυστάλλων [86,89]. Το υλικό αυτό περιέχει ασθενείς δεσμούς ορισμένοι από τους οποίους διασπώνται υπό την επίδραση εξωτερικού φορτίου προκαλώντας επιμήκυνση του μορίου [90,91].



Σχήμα 1.10. Ιεραρχικός μηχανισμός μετάδοσης της παραμόρφωσης υπό εξωτερικό εφελκυστικό φορτίο από το επίπεδο οστίτη ιστού στο επίπεδο κρυστάλλων υδροξυαπατίτη [88].

Στο επίπεδο της νανοδομής του οστού, η μετάβαση από την περιοχή ελαστικής στην περιοχή πλαστικής ή παραμένουσας παραμόρφωσης εκδηλώνεται μέσω μηχανισμών ολίσθησης και αποσύνδεσης των επιφανειών μεταξύ δυο γειτονικών ινιδίων αποτιτανωμένου ιστού. Ανάλογα με τα επίπεδα αποτιτανώσεως του εσωτερικού και εξωτερικού τμήματος των ινιδίων, εμφανίζονται: (α) είτε τριβή ολίσθησης μεταξύ των κρυστάλλων του εξωινιδιακού υποστρώματος και ετερογενής επιμήκυνση των ινιδίων που περιέχουν χαμηλότερα επίπεδα κρυστάλλων ή (β) αποσύνδεση των ινιδίων και ολίσθηση του ενός σε σχέση με το άλλο. Στο επίπεδο της νανοδομής η παραμόρφωση πέρα από το σημείο διαρροής αντιστοιχεί στη διάσπαση των δεσμών του υποστρώματος

ανάμεσα στα ινίδια καθώς και στην ανακατασκευή του υλικού υπό την επίδραση εξωτερικού φορτίου [68].

1.6 Μηχανικές Ιδιότητες Κατεαγότος Οστού - Εμβιομηχανική αξιολόγηση της πόρωσης καταγμάτων

Οι μηχανικές ιδιότητες ενός κατάγματος, στο οποίο η πόρωση βρίσκεται υπό εξέλιξη, εξαρτώνται από την υφή, και τη γεωμετρία του πόρου. Η αποκατάσταση της αντοχής και της ακαμψίας καθορίζονται από την ποσότητα του νεοσχηματιζόμενου οστού, το οποίο γεφυρώνει το κενό μεταξύ των κατεαγότων άκρων, ενώ η σκληρότητα του πόρου σχετίζεται άμεσα με την περιεκτικότητά του σε ασβέστιο. Οι τοπικές μηχανικές ιδιότητες του πόρου έχουν μετρηθεί σε πειραματικά μοντέλα κατάγματος με χρήση της δοκιμασίας εφελκυσμού [93,94] και διείδυσης [95–98].

Οι μηχανικές ιδιότητες ολόκληρου του κατεαγότος οστού έχουν προσδιορισθεί σε πειραματικά μοντέλα εφαρμόζοντας δοκιμασία θλίψης [99], στρέψης [97,98], και κάμψης [95,96,100]. Σε μια εμβιομηχανική μελέτη [97] οι μηχανικές ιδιότητες του πόρου και του κατεαγότος οστού αξιολογήθηκαν σε μοντέλο οστεοτομίας κνήμης σκύλου. Για τον προσδιορισμό της οριακής ροπής στρέψης και της στρεπτικής στιβαρότητας ολόκληρου του κατεαγότος οστού εφαρμόστηκε δοκιμασία στρέψης. Επιπλέον, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της διείδυσης για τη μέτρηση της στιβαρότητας διείδυσης του πόρου σε περιοχές του περιοστικού και ενδοστικού πόρου, στην περιοχή του καταγματικού κενού και σε τμήματα των άθικτων φλοιών. Βρέθηκε ότι οι τιμές των μηχανικών ιδιοτήτων αυξάνονταν έως την 8^η μετεγχειρητική εβδομάδα αντικατοπτρίζοντας τον σταδιακό σχηματισμό και ωρίμανση του πόρου. Αντιθέτως, στη 12^η εβδομάδα οι μηχανικές ιδιότητες του πόρου και του οστού βρέθηκαν να μειώνονται, εκτός από τη στιβαρότητα του καταγματικού κενού και την οριακή ροπή. Η μείωση της στιβαρότητας του ενδοστικού και περιοστικού πόρου καθώς και η μείωση της στρεπτικής στιβαρότητας αποδόθηκαν από τους συγγραφείς στην έναρξη του σταδίου ανακατασκευής του οστού και στη σταδιακή απορρόφηση του πόρου αντίστοιχα.

Σε δύο άλλες μελέτες [93,95] εφαρμόστηκε μοντέλο οστεοτομίας κνήμης και οι μηχανικές ιδιότητες του πόρου και του οστού διερευνήθηκαν με χρήση της μεθόδου

διείσδυσης, και εμβιομηχανικών δοκιμασιών κάμψης και εφελκυσμού. Οι συγγραφείς συμπέραναν ότι οι τοπικές μηχανικές ιδιότητες του πόρου και η δομική ακεραιότητα ολόκληρου του κατεαγότος οστού επηρεάζονται άμεσα από το μηχανικό περιβάλλον της περιοχής. Επιπλέον, παρατηρήθηκε ότι οι μετρήσεις από τις εμβιομηχανικές δοκιμασίες εφελκυσμού και διείσδυσης μπορούν να αποδώσουν επαρκώς τις μηχανικές ιδιότητες του πόρου, οι οποίες ωστόσο πρέπει να προσδιορίζονται σε τοπικό επίπεδο εξαιτίας της υψηλής ανισοτροπίας του πόρου.

Ο προσδιορισμός των μηχανικών ιδιοτήτων των μαλακών ιστών που αναπτύσσονται στην περιοχή του πόρου κατά τη διαδικασία της πόρωσης έχει επίσης αποτελέσει αντικείμενο μελέτης για αρκετούς ερευνητές [101-104]. Οι Claes *et. al.* [101] συνδυάζοντας εμβιομηχανικά και ιστολογικά δεδομένα της εργασίας εντόπισαν 5 διαφορετικούς τύπους ιστών: τον αρχικό συνδετικό ιστό, το μαλακό πόρο, τον πόρο ενδιάμεσης στιβαρότητας, το στιβαρό πόρο, και τον αποτιτανωμένο οστίτη ιστό και στη συνέχεια για καθένα από τους ιστούς αυτούς υπολόγισαν το μέτρο ελαστικότητας του Young. Παρατηρήθηκε σημαντική χρονική και χωρική διακύμανση των τιμών του μέτρου Young των μαλακών ιστών που αναπτύσσονται στα διάφορα στάδια της επουλωτικής διεργασίας.

1.6.1 Χρήση Εμβιομηχανικών Μεθόδων Παρακολούθησης της Πόρωσης Μακρών Οστών

Για την αξιολόγηση της διαδικασίας πόρωσης εκτός από τις προαναφερθείσες μεθόδους που είναι εφαρμόσιμες αποκλειστικά σε πειραματικά μοντέλα κατάγματος σε ζώα καθώς απαιτείται η συλλογή και παρασκευή κατάλληλων οστικών δοκιμίων, έχουν αναπτυχθεί και εμβιομηχανικές μέθοδοι που μπορούν να εφαρμοστούν σε κλινικό επίπεδο. Οι μέθοδοι αυτές επικεντρώνονται κυρίως στον άμεσο ή έμμεσο προσδιορισμό της στιβαρότητας του κατεαγότος οστού είτε με την προσάρτηση μετρητών παραμόρφωσης στις βελόνες της εξωτερικής οστεοσύνθεσης (τεχνικές έμμεσου προσδιορισμού στιβαρότητας – indirect stiffness methods) είτε εφαρμόζοντας μικρά καμπτικά φορτία και μετρώντας τη γωνιακή απόκλιση μεταξύ των κατεαγότων οστικών τεμαχίων (τεχνικές άμεσου προσδιορισμού στιβαρότητας – direct stiffness methods). Έχουν επίσης αναπτυχθεί και μέθοδοι οι οποίες μελετούν τη δυναμική συμπεριφορά του οστού υπό την επίδραση κρουστικής ή ημιτονοειδούς διέγερσης χρησιμοποιώντας τεχνικές ανάλυσης δονήσεων.

Σε δύο κλινικές μελέτες όπου εφαρμόστηκε η μέθοδος έμμεσου προσδιορισμού στιβαρότητας κατεαγούσης κνήμης, διερευνήθηκε η μεταβολή της παραμόρφωσης της συσκευής οστεοσύνθεσης ως προς το μετεγχειρητικό χρόνο [104,105] και βρέθηκε ότι μετεγχειρητικά η παραμόρφωση σταδιακά μειώνεται. Συγκρίνοντας τη διαγνωστική ικανότητα της μεθόδου με την αντίστοιχη της ακτινολογικής εξέτασης, παρατηρήθηκε ότι ο μέσος χρόνος πάρωσης βάσει του κριτηρίου έμμεσης στιβαρότητας ήταν μικρότερος συγκρινόμενος με αυτόν του ακτινολογικού κριτηρίου. Με βάση τα αποτελέσματα των μελετών, η προτεινόμενη μέθοδος θεωρήθηκε ότι παρέχει αντικειμενικό και εύκολο τρόπο παρακολούθησης της εξέλιξης της πάρωσης υπερτερώντας της ακτινολογικής αξιολόγησης.

Σε αρκετές μελέτες έμμεσου προσδιορισμού στιβαρότητας έχουν χρησιμοποιηθεί συσκευές οστεοσύνθεσης εξοπλισμένες με μετρητές παραμόρφωσης που καταγράφουν την 3Δ παραμορφωσιακή κατάσταση εξαιτίας της σύνθετης φόρτισης του οστού σε ρεαλιστικές συνθήκες [105,106]. Παρόλα αυτά, στις μεθόδους έμμεσης στιβαρότητας η μετρούμενη παραμόρφωση επηρεάζεται από τον τύπο και την κατάσταση λειτουργίας της οστεοσύνθεσης [102] ενώ η χαλάρωση των βελονών οστεοσύνθεσης μειώνει σημαντικά την ακρίβεια των μετρήσεων [104,107,108].

Οι μέθοδοι άμεσου προσδιορισμού στιβαρότητας έχουν εφαρμοσθεί τόσο σε κατάγματα που αντιμετωπίζονται συντηρητικά όσο και σε περιπτώσεις με μονόπλευρη εξωτερική οστεοσύνθεση. Σε μια κλινική μελέτη καταγμάτων στη διάφυση κνήμης που αντιμετωπίστηκαν συντηρητικά [109], οι ερευνητές εφάρμοσαν δύναμη με διεύθυνση προς τα έσω, στο περιφερικό τμήμα της κνήμης και προσδιόρισαν τη γωνιακή απόκλιση από προσθοπίσθιες ακτινογραφίες πριν και μετά την εφαρμογή της ροπής. Παρατηρήθηκε ότι ο λόγος της γωνιακής απόκλισης προς την εφαρμοζόμενη ροπή, ο οποίος ορίζεται ως λόγος απόκλισης (deflection ratio) και εκφράζει το αντίστροφο της καμπτικής στιβαρότητας μειωνόταν κατά τη διαδικασία της πάρωσης. Επιπλέον βρέθηκε ότι οι ασθενείς στους οποίους ο λόγος απόκλισης μετρήθηκε μικρότερος από ένα εμπειρικό κατώφλι (0.08) η διαδικασία της πάρωσης δεν παρουσίαζε επιπλοκές και εξελισσόταν ομαλά.

Σε άλλες μελέτες σε κατάγματα με συντηρητική θεραπεία [110] ή θεραπεία με μονόπλευρη εξωτερική οστεοσύνθεση [111-113], εφαρμόζεται μια μικρή δύναμη χειρωνακτικά κοντά στην περιοχή του κατάγματος και η καμπτική στιβαρότητα προσδιορίζεται μέσω μετρήσεων της γωνιακής απόκλισης που προκαλείται. Σε περιπτώσεις που αφαιρείται το πλαίσιο της εξωτερικής οστεοσύνθεσης η γωνιακή απόκλιση μετράται με γωνιόμετρο που τοποθετείται κατά μήκος του οστού [110] ή στις βελόνες της οστεοσύνθεσης [108,111,113,114] και η καμπτική στιβαρότητα του κατεαγότες οστού υπολογίζεται από το λόγο ροπής προς τη γωνιακή απόκλιση. Η μέθοδος αυτή είναι ιδιαίτερα ακριβής και δεν επηρεάζεται από την πιθανή χαλάρωση των βελονών οστεοσύνθεσης. Αντιθέτως σε περιπτώσεις όπου δεν αφαιρείται το πλαίσιο της εξωτερικής οστεοσύνθεσης η καμπτική στιβαρότητα του οστού υπολογίζεται από τη γωνιακή παραμόρφωση του συστήματος οστού - οστεοσύνθεσης η οποία καταγράφεται από μετρητή παραμόρφωσης που προσαρτάται στο πλαίσιο της οστεοσύνθεσης. Παρόλα αυτά η μέθοδος αυτή είναι περιορισμένη εξαιτίας του ότι η ακρίβεια των μετρήσεων επηρεάζεται σημαντικά από την πιθανή χαλάρωση των βελονών οστεοσύνθεσης.

Σημαντικό περιορισμό των μεθόδων έμμεσου και άμεσου προσδιορισμού της στιβαρότητας, αποτελεί το γεγονός ότι μπορούν να εφαρμοστούν μόνο σε κλινικό περιβάλλον. Συνεπώς οι μέθοδοι αυτές δε μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως μέσο συνεχούς παρακολούθησης της διαδικασίας πώρωσης. Σημαντικό μειονέκτημα των μεθόδων άμεσου προσδιορισμού στιβαρότητας αποτελεί επίσης το ότι απαιτείται η προσωρινή αφαίρεση του πλαισίου οστεοσύνθεσης. Επιπλέον, ο προσδιορισμός της στιβαρότητας του κατεαγότες οστού δεν είναι εφικτός στα πρώιμα στάδια πώρωσης στα οποία ο πόρος δεν είναι σταθερός.

Οι μέθοδοι ανάλυσης δονήσεων αποσκοπούν στη μέτρηση των ιδιοσυχνοτήτων και τον προσδιορισμό των ρυθμών ταλάντωσης του κατεαγότες οστού ως έμμεσο δείκτη της αποκατάστασης της μηχανικής ακεραιότητας του οστού. Οι ιδιοσυχνότητες και οι ιδιομορφές ταλάντωσης άθικτων και κατεαγότες οστών έχουν μελετηθεί σε *ex-vivo* πειραματικές μελέτες [115] καθώς και σε υπολογιστικά μοντέλα με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων [116-118]. Οι Hobatho *et. al.* [116] δημιουργώντας ένα μοντέλο οστού κνήμης με ρεαλιστική γεωμετρία υλοποίησαν μια επαναληπτική

διαδικασία ανάθεσης διαφορετικών υλικών ιδιοτήτων μέχρι οι υπολογιζόμενες ιδιοσυχνότητες να προσεγγίσουν τις αντίστοιχες που είχαν μετρηθεί σε προηγούμενα πειράματα. Με τον τρόπο αυτό έγινε εκτίμηση για τις πραγματικές υλικές και μηχανικές ιδιότητες του οστού και επίσης βρέθηκε ότι οι ιδιομορφές που υπολογίστηκαν ήταν παρόμοιες με αυτές που προσδιορίστηκαν πειραματικά.

Η εφαρμογή των μεθόδων ανάλυσης δονήσεων σε κλινικές μελέτες είναι αρκετά περιορισμένη [119-123]. Παρόλα αυτά έχει βρεθεί ότι η συχνότητα συντονισμού του θεμελιώδους καμπτικού ρυθμού καθώς και καμπτικών ρυθμών ανώτερης τάξης αυξάνεται μετεγχειρητικά σε περιπτώσεις φυσιολογικής πάρωσης [119, 123]. Ωστόσο, οι κλινικές μελέτες εφαρμογής μεθόδων ανάλυσης που έχουν πραγματοποιηθεί περιλαμβάνουν μικρό αριθμό ασθενών. Επίσης, η διαγνωστική ικανότητα των μεθόδων δεν έχει αξιολογηθεί συστηματικά και η ανάλυση των αποτελεσμάτων παραμένει σε ποιοτικό επίπεδο χωρίς να έχουν προσδιορισθεί κατώφλια πάρωσης ή να έχει γίνει σύγκριση με την κλινική και ακτινογραφική εξέταση. Επιπλέον, η επαναληψιμότητα των μεθόδων είναι χαμηλή και η ακρίβεια περιορισμένη λόγω της παρουσίας των μαλακών ιστών στο σημείο εφαρμογής της διέγερσης και του θορύβου που εισάγεται από τη δια χειρός τοποθέτηση και συγκράτηση του επιταχυνσιόμετρου. Προβλήματα παρουσιάζονται επίσης και στον εντοπισμό των ιδιοσυχνοτήτων λόγω της παρουσίας πολλαπλών τοπικών μεγίστων στο φάσμα, ιδιαίτερα όταν το κάταγμα αντιμετωπίζεται με συσκευή οστεοσύνθεσης. Σημαντικό περιορισμό των μεθόδων ανάλυσης δονήσεων αποτελεί και το ότι δεν μπορούν να εφαρμοστούν σε οστά όπως το μηριαίο και το βραχιόνιο εξαιτίας του μεγάλου πάχους των υπερκείμενων μαλακών ιστών. Τέλος, η εφαρμογή τους απαιτεί έμπειρο προσωπικό και μπορεί να πραγματοποιηθεί μόνο σε κλινικό περιβάλλον, γεγονός που καθιστά ανέφικτη τη χρήση τους ως μέσο παρακολούθησης της διαδικασίας πάρωσης.

1.7 Βιβλιογραφία

1. Συμεωνίδης ΠΠ. Ορθοπαιδική: Κακώσεις και παθήσεις του μυοσκελετικού συστήματος. 2^η έκδοση, University Studio Press: Θεσσαλονίκη, 1996.
2. Williams PL. Gray's Anatomy: The anatomical basis of medicine and surgery. 38th edition, Churchill Livingstone Inc: New York, 1995.
3. Rho JY, Kuhn-Spearing L, Zioupos P. Mechanical properties and the hierarchical structure of bone. Med Eng Phys 1998;20:92-102.
4. Lanyon LE. Osteocytes, strain detection and bone modelling and remodeling. Calcified Tiss Int 1993;53:102–107.
5. Cowin SC. Bone poroelasticity. J Biomech 1999;32:217–238.
6. Cowin SC. Bone Mechanics. 2nd edition, CRC Press: Boca Raton, FL, 2001.
7. AO – ASIF Foundation, [online]: <http://www.aofoundation.org>.
8. Martini FH. Fundamentals of anatomy and physiology. 4th edition, Prentice Hall Inc: New Jersey, 1998.
9. Wolff J. The law of bone remodelling. Springer-Verlag: Berlin, 1986.
10. Carter DR, Beaupre GS. Skeletal Function and Form. Cambridge University Press: Cambridge, 2001.
11. Rubin C, Bolander M, Ryaby JP, Hadjiargyrou M. The use of low-intensity ultrasound to accelerate the healing of fractures. J Bone Joint Surg 2001;83A(2):259–70.
12. Einhorn AT. Current concepts review: Enhancement of fracture healing. J Bone Joint Surg 1995;77A:940-956.
13. Hayda RA, Brighton CT, Esterhai JL. Pathophysiology of delayed healing. Clin Orthop Relat Res 1998;355(Suppl):31-30.

14. Heckman J, Sarasohn-Kahn J. The economics of treating tibial fractures. The cost of delayed unions. *Bull Hosp Joint Dis* 1997;56(1):63-72.
15. Webb J, Herling G, Gardner T. Manual assessment of fracture stiffness. *Injury* 1996;27(5):319-320.
16. Blokhuis TJ, de Bruine JHD, Bramer JAM, den Boer FC, Bakker FC, Patka P, Haarman HJTM, Manoliu RA. The reliability of plain radiography in experimental fracture healing. *Skeletal Radiol* 2001;30:151-156.
17. Grigoryan M, Lynch JA, Fierlinger AL, Guermazi A, Fan B, MacLean DB, MacLean A, Genant HK. Quantitative and qualitative assessment of closed fracture healing using computed tomography and conventional radiography. *Acad Radiol* 2003;10:1267-1273.
18. Hammer RR, Hammerby S, Lindholm B. Accuracy of radiologic assessment of tibial shaft fracture union in humans. *Clin Orthop Relat Res* 1985;199:233-238.
19. Heckman JD, Ryaby JP, McCabe J, Frey JJ, Kilcoyne RF. Acceleration of tibial fracture-healing by non-invasive, low-intensity pulsed ultrasound. *J Bone Joint Surg* 1994;76A:26-34.
20. Whelan DB, Bhandari M, McKee MD, Guyatt GH, Kreder HJ, Stephen D, Schemitsch EH. Interobserver and intraobserver variation in the assessment of the healing of tibial fractures after intramedullary fixation. *J Bone Joint Surg* 2002;84B:15-18.
21. Oni OA, Dunning J, Mobbs J, Gregg. Clinical factors and the size of external callus in tibial shaft fractures. *Clin Orthop* 1991;273:278-283.
22. Augat P, Claes L, Suger G. In vivo effect of shock waves on the healing of fractured bone. *Clin Biomech* 1995;10(7):374:378.
23. Kolbeck S, Bail H., Weiler A., Windhagen H., Haas N, Raschke M. Digital Radiography. *Clin Orthop Relat Res* 1999;366:221-228.
24. Morgan EF, Mason ZD, Chien KB, Pfeiffer AJ, Barnes GL, Einhorn TA, Gerstenfeld LC. Micro-computed tomography assessment of fracture healing:

- Relationships among callus structure, composition, and mechanical function. *Bone* 2009;44:335–344.
25. Markel MD, Wikenheiser MA, Morin R, Lewallen DG, Chao EYS. The determination of bone fracture properties by dual-energy X-ray absorptiometry and single-photon absorptiometry: A comparative study. *Calf Tissue Int* 1991;48:392-399.
 26. Markel MD, Chao EYS. Noninvasive monitoring techniques for quantitative description of callus mineral content and mechanical properties. *Clin Orthop Relat Res* 1993;293:37-45.
 27. Markel MD, Morin R, Wikenheiser MA, Lewallen DG, Chao EYS. Quantitative CT for the evaluation of bone healing. *Calf Tissue Int* 1991;49:427-432.
 28. Augat P, Merk J, Genant HK, Claes L. Quantitative assessment of experimental fracture repair by peripheral computed tomography. *Calcif Tissue Int* 1997;60:194-199.
 29. den Boer FC, Bramer JA, Patka P, Bakker FC, Barentsen RH, Feilzer AJ, de Lange ES and Haarman HJ. Quantification of fracture healing with three-dimensional computed tomography. *Arch Orthop Trauma Surg* 1998;117:345-350.
 30. An YH, Raughn RA. Mechanical testing of bone and the bone-implant interface. Danvers, USA: CRC Press; 1999
 31. Bronzino JD. The biomedical engineering handbook. Boca Raton: CRC Press, IEEE Press; 1995.
 32. Reilly DT, Burstein AH. The elastic and ultimate properties of compact bone tissue. *J Biomech* 1975;8(6):393-405.
 33. Saulgozis J, Pontaga I, Lowet G, Van der PG. The effect of fracture and fracture fixation on ultrasonic velocity and attenuation. *Physiol Meas* 1996; 17(3): 201-211.

34. Huiskes R. On the modelling of long bones in structural analyses. *J Biomech* 1982;15(1):65-9.
35. Knets I, Malmeisters A. Deformability and strength of human compact bone tissue. *Mech Biological Solids: Proc Euromech Colloquium*. 1977 p. 113.
36. Doblare M, Garcia GM, Gomez MJ. Modelling bone tissue fracture and healing: a review. *Eng Fracture Mech* 2004;71:1809-40.
37. Currey JD, Foreman J, Laketic I, Mitchell J, Pegg DE, Reilly GC. Effects of ionizing radiation on the mechanical properties of human bone. *J Orthop Res* 1997 Jan;15(1):111-7.
38. Abendschein W, Hyatt GW. Ultrasonics and selected physical properties of bone. *Clin Orthop Relat Res* 1970 Mar;69:294-301.
39. Lotz JC, Gerhart TN, Hayes WC. Mechanical properties of metaphyseal bone in the proximal femur. *J Biomech* 1991;24(5):317-29.
40. Wirtz DC, Schiffers N, Pandorf T, Radermacher K, Weichert D, Forst R. Critical evaluation of known bone material properties to realize anisotropic FE-simulation of the proximal femur. *J Biomech* 2000 Oct;33(10):1325-30.
41. Carter DR, Hayes WC. The compressive behavior of bone as a two-phase porous structure. *J Bone Joint Surg Am* 1977 Oct;59(7):954-62.
42. Currey JD. *Bones. Structure and mechanics*. Princeton, NJ: Princeton University Press; 2002.
43. Currey JD. The effect of porosity and mineral content on the Young's modulus of elasticity of compact bone. *J Biomech* 1988;21(2):131-9.
44. Schaffler MB, Burr DB. Stiffness of compact bone: effects of porosity and density. *J Biomech* 1988;21(1):13-6.
45. Keller TS. Predicting the compressive mechanical behavior of bone. *J Biomech* 1994;27:1159-68.

46. Hernandez CJ, Beaupre GS, Keller TS, Carter DR. The influence of bone volume fraction and ash fraction on bone strength and modulus. *Bone* 2001 Jul;29(1):74-8.
47. Bousson V, Meunier A, Bergot C, Vicaut E, Rocha MA, Morais MH, Laval-Jeantet A-M, Laredo JD. Distribution of intracortical porosity in human midfemoral cortex by age and gender. *Ann Physiol Anthropol* 2001;16:1308–1317.
48. Rho JY, Hobatho MC, Ashman RB. Relations of mechanical properties to density and CT numbers in human bone. *Med Eng Phys* 1995 Jul;17(5):347-55.
49. Carter DR, Hayes WC. Bone compressive strength: the influence of density and strain rate. *Science* 1976 Dec 10;194(4270):1174-6.
50. McElhaney JH. Dynamic response of bone and muscle tissue. *J Appl Physiol* 1966 Jul;21(4):1231-6.
51. Fung YC. *Biomechanics, Mechanical properties of living tissues*. 2 ed. Springer-Verlag; 1993.
52. Lakes RS, Katz JL. Viscoelastic properties of wet cortical bone--III. A non-linear constitutive equation. *J Biomech* 1979;12(9):689-98.
53. Ascenzi A, Bonucci E. The tensile properties of single osteons. *Anat Rec* 1967 Aug;158(4):375-86.
54. Ascenzi A, Bonucci E. The compressive properties of single osteons. *Anat Rec* 1968 Jul;161(3):377-91.
55. Ascenzi A, Baschieri P, Benvenuti A. The bending properties of single osteons. *J Biomech* 1990;23(8):763-71.
56. Ascenzi A, Baschieri P, Benvenuti A. The torsional properties of single selected osteons. *J Biomech* 1994 Jul;27(7):875-84.

57. Roy M, Rho JY, Tsui TY, Pharr GM. Variation of Young's modulus and hardness in human lumbar vertebrae measured by nanoindentation. *Adv Bioeng* 1996;33:385-6.
58. Hasegawa K, Turner CH, Burr DB. Contribution of collagen and mineral to the elastic anisotropy of bone. *Calcif Tissue Int* 1994 Nov;55(5):381-6.
59. Lakes RS, Yang JFC. Micropolar elasticity in bone. In: *Proceedings 18th Midwest Mechanics Conference, Iowa City, Developments in Mechanics* 12:239–242
60. Duda GN, Kirchner H, Wilke HJ, Claes L. A method to determine the 3-D stiffness of fracture fixation devices and its application to predict inter-fragmentary movement. *J Biomech* 1998 Mar;31(3):247-52.
61. Reilly DT, Burstein AH. The mechanical properties of cortical bone. *J. Bone and J. Surgery* 1974;56 (5):1001-1022.
62. Rho JY, Tsui TY, Pharr GM. Elastic properties of human cortical and trabecular lamellar bone measured by nanoindentation. *Biomaterials* 1997 Oct;18(20):1325-30.
63. Lakes RS, Yang JFC. Micropolar elasticity in bone: rotation modulus. 1983 p. 239-42.
64. Lakes R, Saha S. Cement line motion in bone. *Science* 1979 May 4;204(4392):501-3.
65. Yang JF, Lakes RS. Transient study of couple stress effects in compact bone: torsion. *J Biomech Eng* 1981 Nov;103(4):275-9.
66. Lakes R. On the torsional properties of single osteons. *J Biomech* 1995 Nov;28(11):1409-10.
67. Marotti G. A new theory of bone lamellation. *Calcified Tissue International* 1993;53:S47-S56.

68. Gupta H.S., Zioupos P., Fracture of bone tissue: The “hows” and the “whys”. *Medical Eng. & Physics* 2008;30:1209-1226.
69. Giraud-Guille MM. Twisted plywood architecture of collagen fibrils in human compact-bone osteons. *Calcified Tissue International* 1988;42:167–80.
70. Weiner S, Arad T, Sabanay I, Traub W. Rotated plywood structure of primary lamellar bone in the rat: orientations of the collagen fibril arrays. *Bone* 1997;20:509–14.
71. Weiner S, Traub W. Bone-structure-from angstroms to microns. *Faseb Journal* 1992;6: 879–85.
72. Wagermaier W, Gupta HS, Gourrier A, Paris O, Roschger P., Burghammer M., Scanning texture analysis of lamellar bone using microbeam synchrotron X-ray radiation. *Journal of Applied Crystallography* 2007;40:115–20.
73. Rho JY, Zioupos P, Currey JD, Pharr GM. Variations in the individual lamellar properties within osteons by nanoindentation. *Bone* 1999; 25: 295–300.
74. Xu J, Rho JY, Mishra SR, Fan Z. Atomic force microscopy and nanoindentation characterization of human lamellar bone prepared by microtome sectioning and mechanical polishing technique. *Journal of Biomedical Materials Research Part A* 2003;67A:719–26.
75. Rho JY, Mishra SR, Chung K, Bai J, Pharr GM. Relationship between ultrastructure and the nanoindentation properties of intramuscular herring bones. *Annals of Biomedical Engineering* 2001;29: 1082–8.
76. Turner CH, Rho J, Takano Y, Tsui TY, Pharr GM. The elastic properties of trabecular and cortical bone tissues are similar: results from two microscopic measurement techniques. *Journal of Biomechanics* 1999;32:437–41.
77. Rho JY, Ashman RB, Turner CH. Youngs modulus of trabecular and cortical bone material-ultrasonic and microtensile measurements. *Journal of Biomechanics* 1993;26:111–9.

78. Bini F, Marinozzi A, Marinozzi F, Patane F. Microtensile measurements of single trabeculae stiffness in human femur. *Journal of Biomechanics* 2002;35:1515–9.
79. Kuhn JL, Goldstein SA, Choi KW, London M, Feldkamp LA, Matthews LS. Comparison of the trabecular and cortical tissue moduli from human iliac crests. *Journal of Orthopaedic Research* 1989;7:876–84.
80. Choi K, Kuhn JL, Ciarelli MJ, Goldstein SA. The elastic-moduli of human subchondral, trabecular, and cortical bone tissue and the size-dependency of cortical bone modulus. *Journal of Biomechanics* 1990;23:1103–13.
81. Rho JY, Roy M, Tsui TY, Pharr GM. Young's modulus and hardness of trabecular and cortical bone in various directions determined by nanoindentation. In *Trans. of the 43rd Annual Meetings of the Orthopaedic Research Society*.1997;891.
82. Choi KW, Goldstein SA. The fatigues properties of bone tissues on a microstructural level. *Transactions of the Orthopaedics Research Society* 1991; 16(2): 485.
83. Ashman RB, Rho JY. Elastic-modulus of trabecular bone material. *Journal of Biomechanics* 1988;21:177–81.
84. Goldstein S. The mechanical properties of trabecular bone. Dependence on anatomic location and function. *Journal of Biomechanics* 1987;20:1055–61.
85. Zioupos P, Currey JD. Pre-failure toughening mechanisms in the dentine of the narwhal tusk. Microscopic examination of stress/strain induced microcracking. *Journal of Materials Science Letters* 1996; 15: 991–4.
86. Gupta HS, Wagermaier W, Zickler GA, Hartmann J, Funari SS, Roschger P. Fibrillar level fracture in bone beyond the yield point. *International Journal of Fracture* 2006;139:425–36.
87. Gupta HS, Seto J, Wagermaier W, Zaslansky P, Boesecke P, Fratzl P. Cooperative deformation of mineral and collagen in bone at the nanoscale.

Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 2006;103:17741–6.

88. Gupta HS, Wagermaier W, Zickler G.A., Aroush D.R.B., Funari S.S., Roschger P. Nanoscale deformation mechanisms in bone. *Nano Letters* 2005;5:2108–11.
89. Almer JD, Stock SR. Internal strains and stresses measured in cortical bone via high-energy X-ray diffraction. *Journal of Structural Biology* 2005;152:14–27.
90. Thompson JB, Kindt JH, Drake B, Hansma HG, Morse DE, Hansma PK. Bone indentation recovery time correlates with bond reforming time. *Nature* 2001;414:773–6.
91. Fantner G, Hassenkam T, Kindt JH, Weaver JC, Birkedal H, Pechenik L, Sacrificial bonds and hidden length dissipate energy as mineralized fibrils separate during bone fracture. *Nature Materials* 2005;4:612–6.
92. Tai K, Ulm FJ, Ortiz C, Nanogranular origins of the strength of bone. *Nano Letters* 2006;6:2520–5.
93. Augat P, Margevicius K, Simon J, Wolf S, Suger G, Claes L, Local tissue properties in bone healing: influence of size and stability of the osteotomy gap. *J Orthop Res* 1998 Jul;16(4):475-81.
94. Augat P, Claes L, Suger G, In vivo effect of shock-waves on the healing of fractured bone. *Clin Biomech (Bristol, Avon)* 1995 Oct;10(7):374-8.
95. Augat P, Merk J, Ignatius A, Margevicius K, Bauer G, Rosenbaum D, Claes L, Early, full weightbearing with flexible fixation delays fracture healing. *Clin Orthop Relat Res* 1996 Jul;(328):194-202.
96. Augat P, Merk J, Genant HK, Claes L, Quantitative assessment of experimental fracture repair by peripheral computed tomography. *Calcif Tissue Int* 1997 Feb;60(2):194-9.

97. Markel MD, Wikenheiser MA, Chao EY, A study of fracture callus material properties: relationship to the torsional strength of bone. *J Orthop Res* 1990 Nov;8(6):843-50.
98. Markel MD, Morin RL, Wikenheiser MA, Lewallen DG, Chao EY, Quantitative CT for the evaluation of bone healing. *Calcif Tissue Int* 1991 Dec; 49(6):427-32.
99. Reichel H, Lebek S, Alter C, Hein W, Biomechanical and densitometric bone properties after callus distraction in sheep. *Clin Orthop Relat Res* 1998 Dec; (357):237-46.
100. Krischak GD, Janousek A, Wolf S, Augat P, Kinzl L, Claes LE. Effects of one-plane and two-plane external fixation on sheep osteotomy healing and complications. *Clin Biomech (Bristol , Avon)* 2002 Jul;17(6):470-6.
101. Claes LE, Heigele CA. Magnitudes of local stress and strain along bony surfaces predict the course and type of fracture healing. *J Biomech* 1999 Mar; 32(3):255-66.
102. Kenwright J, Gardner T, Mechanical influences on tibial fracture healing. *Clin Orthop Relat Res* 1998 Oct; (355 Suppl): S179-S190.
103. Gardner TN, Mishra S, The biomechanical environment of a bone fracture and its influence upon the morphology of healing. *Med Eng Phys* 2003 Jul;25(6): 455-64.
104. Claes L, Grass R, Schmickal T, Kisse B, Eggers C, Gerngross H, Mutschler W, Arand M, Wintermeyer T and Wentzensen A, Monitoring and healing analysis of 100 tibial shaft fractures. *Langenbecks Arch Surg* 2002 Jul;387(3-4):146-52.
105. Ohnishi I, Nakamura K, Okazaki H, Sato W, Kurokawa, Evaluation of the fracture site mechanical properties in vivo by monitoring the motion of a dynamic pin clamp during simulated walking. *Clin Biomech* 2002;17:687-97.

106. Gardner TN, Evans M, Simpson AH, Turner-Smith AR, Three-dimensional movement at externally fixated tibial fractures and osteotomies during normal patient function. *Clin Biomech* 1994;9:51-9.
107. Kay PR, Ross ER, Powell ES, Development and clinical application of an external fixator monitoring system. *J Biomed Eng* 1989 May;11(3):240-4.
108. Wade R, Richardson J, Outcome in fracture healing: a review. *Injury* 2001 Mar;32(2):109-14.
109. Hammer R, Edholm P, Lindholm B, Stability of union after tibial shaft fracture. Analysis by a non-invasive technique. *J Bone Joint Surg Br* 1984 Aug;66(4):529-34.
110. Shah KM, Nicol AC, Hamblen DL, Fracture stiffness measurement in tibial shaft fractures: a non-invasive method. *Clin Biomech (Bristol, Avon)* 1995 Dec;10(8):395-400.
111. Richardson JB, Cunningham JL, Goodship AE, O'Connor BT, Kenwright J, Measuring stiffness can define healing of tibial fractures. *J Bone Joint Surg Br* 1994 May;76(3):389-94.
112. Richardson JB, Kenwright J, Cunningham JL, Fracture stiffness measurement in the assessment and management of tibial fractures. *Clin Biomech* 1992;7:75-9.
113. Moorcroft CI, Ogrodnik PJ, Thomas PB, Wade RH, Mechanical properties of callus in human tibial fractures: a preliminary investigation. *Clin Biomech (Bristol, Avon)* 2001 Nov;16(9):776-82.
114. Dwyer JS, Owen PJ, Evans GA, Kuiper JH, Richardson JB, Stiffness measurements to assess healing during leg lengthening. A preliminary report. *J Bone Joint Surg Br* 1996 Mar;78(2):286-9.
115. Nakatsuchi Y, Tsuchikane A, Nomura A, The vibrational mode of the tibia and assessment of bone union in experimental fracture healing using the impulse response method. *Med Eng Phys* 1996 Oct;18(7):575-83.

116. Hobatho MC, Darmana R, Pastor P, Barrau JJ, Laroze S, Morucci JP, Development of a three-dimensional finite element model of a human tibia using experimental modal analysis. *J Biomech* 1991;24(6):371-83.
117. Couteau B, Hobatho MC, Darmana R, Brignola JC, Arlaud JY, Finite element modelling of the vibrational behaviour of the human femur using CT-based individualized geometrical and material properties. *J Biomech* 1998 Apr;31(4):383-6.
118. Lowet G, Dayuan X, Van der PG, Study of the vibrational behaviour of a healing tibia using finite element modelling. *J Biomech* 1996 Aug;29(8):1003-10.
119. Cunningham JL, Kenwright J, Kershaw CJ, Biomechanical measurement of fracture healing. *J Med Eng Technol* 1990 May;14(3):92-101.
120. Jurist JM, Kianian K, Three models of the vibrating ulna. *J Biomech* 1973 Jul;6(4):331-42.
121. Nikiforidis G, Bezerianos A, Dimarogonas A, Sutherland C, Monitoring of fracture healing by lateral and axial vibration analysis. *J Biomech* 1990;23(4):323-30.
122. Flint AJ, Nokes LD, Macheson M, Determination of fracture healing by transverse vibration measurement: a preliminary report. *J Med Eng Technol* 1994 Nov;18(6):205-7.
123. Nakatsuchi Y, Tsuchikane A, Nomura A, Assessment of fracture healing in the tibia using the impulse response method. *J Orthop Trauma* 1996;10(1):50-62.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΔΙΑΔΟΣΗ ΥΠΕΡΗΧΩΝ ΣΕ ΜΑΚΡΑ ΟΣΤΑ

2.1 Εισαγωγή

Ο υπέρηχος ορίζεται ως μια μορφή ενέργειας η οποία αποτελείται από μηχανικές ταλαντώσεις που διαδίδονται σε στερεά, υγρά και αέρια μέσα. Η φύση των κυμάτων υπερήχων είναι όμοια με αυτή των ηχητικών ωστόσο η μετάδοση των υπερήχων πραγματοποιείται σε συχνότητες που είναι πολύ υψηλότερες από αυτές που μπορεί να αντιληφθεί το ανθρώπινο αυτί (>20KHz). Οι μηχανικές ιδιότητες του μέσου διάδοσης των κυμάτων υπερήχων επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό τον τρόπο διάδοσής τους. Συνεπώς ο προσδιορισμός των χαρακτηριστικών διάδοσης των υπερήχων όπως είναι η ταχύτητα, η εξασθένιση, η ανάκλαση, η διασπορά κ.α. μπορεί να προσφέρει σημαντική πληροφορία για τη δομή και τις ιδιότητες του μέσου.

Η συσχέτιση των ιδιοτήτων του μέσου με τα χαρακτηριστικά του μέσου διάδοσης αποτέλεσε τη βάση για την χρήση των υπερήχων σε εφαρμογές μη καταστροφικού ελέγχου (ΜΚΕ) όπως η ανίχνευση και ο εντοπισμός ατελειών σε μηχανικά υλικά, ο χαρακτηρισμός υλικών, η μέτρηση του πάχους υλικών κ.α. [1-3]. Τα τελευταία χρόνια έχουν βρει εξίσου σημαντική απήχηση σε πολλούς τομείς της Ιατρικής για διαγνωστικούς, θεραπευτικούς και χειρουργικούς σκοπούς. Το εύρος των συχνοτήτων υπερήχων που χρησιμοποιούνται σε κλινικές εφαρμογές είναι 1 – 10 MHz.

Ο διαγνωστικός υπέρηχος χρησιμοποιείται ως μη-επεμβατικό μέσο απεικόνισης της δομής και λειτουργίας διαφόρων οργάνων του σώματος με πληθώρα εφαρμογών όπως η παρακολούθηση της ανάπτυξης του εμβρύου, η εκτίμηση της περιφερικής αιματικής κυκλοφορίας, η αξιολόγηση της κλινικής πορείας ορισμένων μεταβολικών αθηνειών, όπως η οστεοπόρωση κ.α.. Οι απεικονιστικές μέθοδοι υπερήχων παρέχουν απεικόνιση σε πραγματικό χρόνο χρησιμοποιώντας εξοπλισμό χαμηλού κόστους χωρίς να επιβαρύνουν τον ασθενή με ιονίζουσα ακτινοβολία.

Τις τελευταίες δεκαετίες έχει επίσης σημειωθεί σημαντική πρόοδος στις μεθόδους ποσοτικού υπερήχου που περιλαμβάνουν τεχνικές διάδοσης και διείσδυσης. Η εισαγωγή μεθόδων ποσοτικού υπερήχου στον τομέα της ορθοπαιδικής έχει παίξει καθοριστικό ρόλο στο χαρακτηρισμό των μηχανικών ιδιοτήτων των οστών συμβάλλοντας με τον τρόπο αυτό στην ανάπτυξη ποσοτικών μεθόδων αξιολόγησης της οστεοπόρωσης και παρακολούθησης της διαδικασίας πώρωσης οστικών καταγμάτων.

2.1.1 Αρχή Λειτουργίας και Χαρακτηριστικά Μετατροπέων Υπερήχων

Οι υπέρηχοι παράγονται από μετατροπείς (transducers), οι οποίοι αποτελούν βασική συνιστώσα συσκευών υπερήχων και εκτός από την παραγωγή, χρησιμεύουν και στην ανίχνευση των κυμάτων υπερήχων. Το κύριο συστατικό των μετατροπέων είναι ένα πιεζοηλεκτρικό στοιχείο το οποίο βάσει του πιεζοηλεκτρικού φαινομένου, λειτουργεί ως μετατροπέας ηλεκτρικής ενέργειας σε μηχανική και αντίστροφα. Τα πιεζοηλεκτρικά στοιχεία είναι κατασκευασμένα είτε από φυσικούς κρυστάλλους, όπως ο χαλαζίας (quartz), ή από τεχνητά πολωμένα κεραμικά υλικά και υπό την επίδραση ηλεκτρικού πεδίου παρουσιάζουν μεταβολή των φυσικών τους διαστάσεων. Η αλληλεπίδραση του υλικού με το ηλεκτρικό πεδίο προκαλεί μηχανικές τάσεις και παραμορφώσεις που με την σειρά τους δημιουργούν μεταβολή πίεσης στον περιβάλλοντα χώρο και την παραγωγή κυμάτων υπερήχων. Κατά την αντίστροφη διαδικασία, μηχανικά κύματα προκαλούν παραμόρφωση στα άκρα του στοιχείου που με τη σειρά της έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη διαφοράς δυναμικού. Τα πιεζοηλεκτρικά στοιχεία αποδίδουν μέγιστη μεταφορά ενέργειας όταν διεγείρονται στη συχνότητα συντονισμού, ενώ η ευαισθησία τους περιορίζεται σε ένα εύρος γύρω από αυτή [4].

Άλλα στοιχεία που απαρτίζουν τον μετατροπέα υπερήχων είναι: α) το υλικό απόσβεσης (backing) που είναι ένα υλικό υψηλής πυκνότητας και εξασθένησης και

χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της διάρκειας δόνησης (ringing) του πιεζοηλεκτρικού στοιχείου, (β) το υλικό ακουστικής προσαρμογής και προστασίας (wear plate) που βρίσκεται στην πρόσθια πλευρά του πιεζοηλεκτρικού στοιχείου και λειτουργεί επίσης ως μέσο ακουστικής προσαρμογής της ακουστικής εμπέδησης (impedance) του πιεζοηλεκτρικού στοιχείου με την αντίστοιχη του υπό εξέταση υλικού με σκοπό τη βέλτιστη μεταφορά ενέργειας μεταξύ των δύο υλικών, (γ) τα ηλεκτρόδια τα οποία επικολλούνται σε κάθε πλευρά του πιεζοηλεκτρικού στοιχείου, (δ) το περίβλημα που όταν είναι μεταλλικό και λειτουργεί και ως θωράκιση από ηλεκτρομαγνητικές παρεμβολές (ιδίως όταν ο μετατροπέας λειτουργεί ως δέκτης), και (ε) το στρώμα ακουστικής θωράκισης που αποτελείται συνήθως από φελλώδες υλικό και χρησιμοποιείται για να αποφεύγεται η μετάδοση κυμάτων από το στοιχείο στο μεταλλικό περίβλημα.

Οι μετατροπείς υπερήχων τοποθετούνται: (α) σε άμεση επαφή με το εξεταζόμενο υλικό (μετατροπείς άμεσης επαφής), (β) σε απόσταση από αυτό, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση που το υλικό είναι εμβαπτισμένο σε υγρό και ο μετατροπέας βρίσκεται στην επιφάνεια ή εντός του υγρού (μετατροπείς εμβάπτισης), (γ) σε γωνία με την επιφάνεια του υλικού (μετατροπείς υπό γωνία) με σκοπό τη διέγερση επιφανειακών και κυματοδηγούμενων κυμάτων. Με βάση την ηλεκτρική διέγερση που προκαλείται οι μετατροπείς μπορούν να διαχωριστούν σε παλμικής λειτουργίας, όταν η ηλεκτρική διέγερση είναι βραχεία (μονός τετραγωνικός παλμός πολύ υψηλής τάσης) και συνεχούς λειτουργίας όταν η ηλεκτρική διέγερση είναι συνεχής, συνήθως ημιτονοειδούς μορφής. Με βάση τη λειτουργία τους διαχωρίζονται σε:

Πομποδέκτη, όταν ο μετατροπέας χρησιμοποιείται αρχικά ως πομπός και στη συνέχεια ως δέκτης είτε χρησιμοποιώντας το ίδιο πιεζοηλεκτρικό στοιχείο ή ενσωματώνοντας στο ίδιο περίβλημα δύο πιεζοηλεκτρικά στοιχεία (dual element transducers), ένα για κάθε λειτουργία.

Συστοιχία μετατροπέων (array transducers), όταν ο μετατροπέας περιλαμβάνει μια σειρά (συστοιχία) από πιεζοηλεκτρικά στοιχεία τα οποία είναι συνδεδεμένα ξεχωριστά ώστε τα σήματα που εκπέμπουν ή λαμβάνουν να μπορούν να επεξεργασθούν ανεξάρτητα.

Μη εστιασμένοι (unfocused), όταν η ακουστική δέσμη (beam) που σχηματίζει το εκπεμπόμενο κύμα, στο μακρινό πεδίο (far field) ακτινοβολίας αποκλίνει.

Εστιασμένοι, (focused), όταν η ακουστική δέσμη εμφανίζει ζώνη εστίασης στο μακρινό πεδίο ακτινοβολίας.

2.1.2 Τεχνικές Εφαρμογής Υπερήχων με Χρήση δύο τουλάχιστον Μετατροπέων

Οι μέθοδοι υπερήχων στις οποίες χρησιμοποιούνται δύο τουλάχιστον μετατροπείς σε διάταξη πομπού-δέκτη για την καταγραφή των διαδιδόμενων κυμάτων σε ένα εξεταζόμενο υλικό περιλαμβάνουν δύο βασικές τεχνικές: την τεχνική διείσδυσης (through-transmission) και την τεχνική αξονικής διάδοσης (axial-transmission).

1.1.1.1 Τεχνική Διείσδυσης

Η τεχνική διείσδυσης έχει βρει απήχηση σε πολλαπλές εφαρμογές μηχανικής ενώ στον τομέα της ιατρικής χρησιμοποιείται κυρίως για την αξιολόγηση οστών όπως είναι οι φάλαγγες και η πτέρνα [5] και τη διάγνωση της οστεοπόρωσης. Ο πομπός και ο δέκτης τοποθετούνται αντικριστά και κάθετα σε κάθε μια από τις επιφάνειες του εξεταζόμενου αντικειμένου. Η ταχύτητα διάδοσης του λαμβανόμενου σήματος στην περίπτωση που οι μετατροπείς είναι σε άμεση επαφή με το υλικό υπολογίζεται διαιρώντας την απόσταση μεταξύ πομπού και δέκτη με το χρόνο μετάβασης (transition time ή time-of-flight) του πρώτου αφιχθέντος σήματος στο δέκτη (first-arriving signal-FAS). Σε περιπτώσεις τοποθέτησης των μετατροπέων σε απόσταση από το ίδιο το υλικό (π.χ. επί του ρευστού σε περίπτωση εμβάπτισης του υλικού ή επί των μαλακών ιστών σε περίπτωση εφαρμογής σε οστά) είναι απαραίτητη η γνώση της ταχύτητας διάδοσης του μέσου που βρίσκεται μεταξύ του εξεταζόμενου υλικού και των μετατροπέων.

2.1.2.1 Τεχνική Αξονικής Διάδοσης

Η τεχνική αξονικής διάδοσης είναι η πιο συνηθισμένη τεχνική διάδοσης υπερήχων που εφαρμόζεται για την αξιολόγηση πλακών, αυλοειδών γεωμετριών, μακρών οστών και άλλων αντικειμένων με επιμήκη γεωμετρία. Στη συγκεκριμένη τεχνική ο πομπός και ο δέκτης τοποθετούνται κατά μήκος του μακρού άξονα του εκάστοτε αντικειμένου, κάθετα στον μακρύ άξονα ή υπό γωνία (Σχήμα 2.1). Η κυριότερη παράμετρος που μετράται στην τεχνική αξονικής διάδοσης είναι η ταχύτητα του FAS στο δέκτη η οποία υπολογίζεται διαιρώντας την απόσταση πομπού-δέκτη με το χρόνο μετάβασης του FAS. Επιμέρους παράμετροι που μπορούν να αναλυθούν στο σήμα που λαμβάνεται από την τεχνική αξονικής διάδοσης είναι η διασπορά της ταχύτητας των κυματοδηγούμενων ρυθμών και πιο σπάνια η εξασθένηση.

Η τεχνική αξονικής διάδοσης χρησιμοποιείται ευρέως και στον τομέα αξιολόγησης μακρών οστών τόσο για την διάγνωση της οστεοπόρωσης του φλοιώδους οστού όσο



Σχήμα 2.1. Η γεωμετρία της τεχνικής αξονικής διάδοσης σε μακρά οστά στην οποία ο πομπός και ο δέκτης τοποθετούνται διαδερμικά.

και για την αξιολόγηση της πώρωσης σε κατάγματα διάφυσης. Σε μια τυπική διάταξη αξονικής διάδοσης ο πομπός και δέκτης τοποθετούνται εξωτερικά του οστού επί των υπερκείμενων μαλακών ιστών (διαδερμική εφαρμογή). Σε εφαρμογές για την αξιολόγηση της διαδικασίας πώρωσης καταγμάτων οι μετατροπείς τοποθετούνται διαδερμικά εκατέρωθεν της καταγματικής εστίας. Σε μια πρόσφατη πειραματική μελέτη [6] οι μετατροπείς εμφυτεύτηκαν απευθείας στην περιοχή του κατάγματος και τοποθετήθηκαν επί του οστού και εκατέρωθεν της καταγματικής εστίας. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνονται μετρήσεις ταχύτητας διάδοσης υπερήχων στην περιοχή του πώρου αντισταθμίζοντας την επίδραση των μαλακών ιστών. Η εφαρμογή της τεχνικής αξονικής διάδοσης στα μακρά οστά παρουσιάζεται αναλυτικότερα στις παρακάτω ενότητες.

2.2 Διάδοση Υπερήχων σε Γραμμικά Ελαστικά Μέσα

2.2.1 Διάδοση σε Άπειρο Μέσο

Θεωρούμε ισότροπο και ομογενές ελαστικό μέσο με άπειρες διαστάσεις. Οι εξισώσεις που περιγράφουν την ελαστική συμπεριφορά του μέσου στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x_1, x_2, x_3) είναι η εξίσωση τάσεων-τροπών και η καταστατική σχέση γραμμικής ελαστικότητας για την περίπτωση της ισοτροπίας, οι οποίες ορίζονται ως:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2.1)$$

$$\sigma_{ii} = \lambda \delta_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ii}, \quad (2.2)$$

όπου ε_{ij} είναι η τροπή, u_i οι συνιστώσες του διανύσματος μετατοπίσεων, σ_{ii} οι ορθές τάσεις, δ_{ij} η συνάρτηση του Kronecker, και λ και μ οι σταθερές Lamè. Η εξίσωση κίνησης Navier για τις μετατοπίσεις είναι:

$$(\lambda + \mu)u_{j,ij} + \mu u_{i,jj} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (2.3)$$

όπου σ_{ij} οι συνιστώσες τάσεων, f_i οι συνιστώσες του διανύσματος των ανοιγμένων δυνάμεων στη μονάδα μάζας, και ρ η πυκνότητα μάζας, ή σε διανυσματική μορφή ως:

$$(\lambda + \mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} + \mu\nabla^2\mathbf{u} + \rho\mathbf{f} = \rho\ddot{\mathbf{u}}. \quad (2.4)$$

Σε καρτεσιανή μορφή η Εξ. (2.4) ισοδυναμεί με τις ακόλουθες τρεις εξισώσεις:

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) + \mu\nabla^2 u_1 + \rho f_1 = \rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad (2.5\alpha)$$

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) + \mu\nabla^2 u_2 + \rho f_2 = \rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad (2.5\beta)$$

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) + \mu\nabla^2 u_3 + \rho f_3 = \rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}. \quad (2.5\gamma)$$

Χρησιμοποιώντας την αποσύνθεση Helmholtz (Helmholtz decomposition) [3] το διάνυσμα μετατόπισης γράφεται ως η βαθμίδα μιας συνάρτησης Φ και ο στροβιλισμός ενός διανύσματος \mathbf{H} :

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi + \nabla\times\mathbf{H}, \quad \nabla\cdot\mathbf{H} = 0, \quad (2.6)$$

όπου Φ είναι ένα βαθμωτό δυναμικό και \mathbf{H} ένα διανυσματικό δυναμικό. Αντικαθιστώντας την Εξ. (2.6) στην εξίσωση Navier (Εξ. (2.3)), υποθέτοντας μηδενικές δυνάμεις ($\mathbf{f} = 0$), και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$\nabla^2\mathbf{u} = \nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - \nabla\times\nabla\times\mathbf{u}, \quad (2.7)$$

προκύπτει η εξίσωση:

$$\nabla\left[(\lambda + 2\mu)\nabla^2\Phi - \rho\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right] + \nabla\times\left[\mu\nabla^2\mathbf{H} - \rho\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}\right] = 0. \quad (2.8)$$

Η Εξ. (2.8) ικανοποιείται όταν και οι δύο όροι του αθροίσματος μηδενίζονται. Αυτό οδηγεί στις δύο παρακάτω εξισώσεις:

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{c_L^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}, \quad \text{και} \quad (2.9)$$

$$\nabla^2\mathbf{H} = \frac{1}{c_T^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}, \quad (2.10)$$

όπου c_L η ταχύτητα διαμηκών κυμάτων (bulk longitudinal velocity) και c_T η ταχύτητα διατμητικών κυμάτων (bulk shear velocity), οι οποίες, αντίστοιχα, δίνονται από:

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad (2.11)$$

$$c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (2.12)$$

Υποθέτοντας ότι για την Εξ. (2.6) ισχύει $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ έχουμε:

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi, \quad \nabla \times \mathbf{u} \equiv 0, \quad (2.13)$$

και αντικαθιστώντας στην Εξ. (2.9), προκύπτει ότι:

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (2.14)$$

η οποία περιγράφει τη διάδοση διαμήκων (longitudinal ή compressional ή dilatational) κυμάτων.

Ομοίως, αν υποθέσουμε ότι στην Εξ. (2.6) ισχύει:

$$\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{H}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} \equiv 0, \quad (2.15)$$

η Εξ. (2.10) μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (2.16)$$

η οποία περιγράφει τη διάδοση εγκαρσίων ή αλλιώς διατμητικών κυμάτων (shear ή transverse waves).

Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει ότι σε ένα ισότροπο και ομογενές ελαστικό άπειρο μέσο διαδίδονται δύο ειδών κύματα: (i) τα διαμήκη κύματα των οποίων τα σωματίδια μετατοπίζονται σε επίπεδα παράλληλα στη διεύθυνση διάδοσης προκαλώντας μεταβολές όγκου και (ii) τα διατμητικά κύματα των οποίων τα σωματίδια μετατοπίζονται σε επίπεδα κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης χωρίς να προκαλούν μεταβολή του όγκου του μέσου (δηλ., δεν εμφανίζονται περιοχές πύκνωσης και αραίωσης). Η ταχύτητα διάδοσης των διατμητικών κυμάτων είναι μικρότερη (περίπου μισή) από αυτή των διαμήκων.

Πιθανές λύσεις της κυματικής εξίσωσης αποδεικνύεται ότι μπορεί να είναι συναρτήσεις της μορφής $\exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)\}$, όπου $\mathbf{r}=(x_1, x_2, x_3)$ είναι το διάνυσμα θέσης και $\mathbf{k}=(k_1, k_2, k_3)$ ονομάζεται κυματοδιάνυσμα (wave-vector) [1,3] το μέτρο του οποίου ορίζεται ως:

$$|\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (2.17)$$

και ονομάζεται κυματαριθμός (wavenumber) και λ είναι το μήκος κύματος. Η ταχύτητα φάσης (phase velocity), c_p , ορίζεται ως η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται το μέτωπο του κύματος, δηλ. σημεία σταθερής φάσης, και ισούται με:

$$c_p = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|}. \quad (2.18)$$

Η ταχύτητα ομάδας (group velocity), c_g , αναφέρεται στην ταχύτητα με την οποία διαδίδεται ένα κυματοπακέτο (wavepacket) και σε μέσα χωρίς απώλειες αντιστοιχεί επίσης στην ταχύτητα με την οποία διαδίδεται η ενέργεια του κυματοπακέτου. Ένα κυματοπακέτο είναι η υπέρθεση μιας ομάδας κυμάτων με παρόμοια συχνότητα [3]. Η ταχύτητα ομάδας είναι:

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = c_p + k \frac{dc_p}{dk}. \quad (2.19)$$

2.2.2 Διάδοση σε Ημι-Άπειρο Μέσο

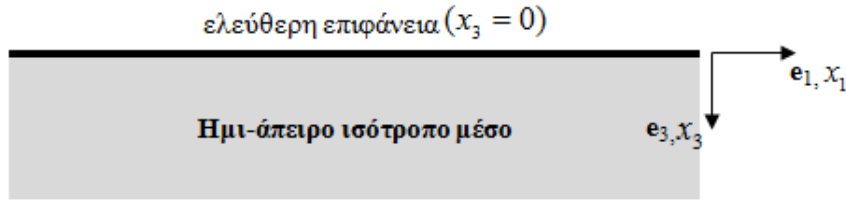
Έστω ένα ομογενές και ισότροπο στερεό ημι-άπειρο μέσο με γεωμετρία που παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.2. Θεωρούμε επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση (plane strain state). Ως εκ τούτου, οι μετατοπίσεις u_1 και u_3 είναι συναρτήσεις μόνο των x_1 και x_3 , και συνεπώς οι αντίστοιχες παραμορφώσεις και τάσεις των σημείων του μέσου εμφανίζονται σε επίπεδα κάθετα προς την \mathbf{e}_2 διεύθυνση. Συνεπώς, ισχύει ότι:

$$u_2 = 0, \quad (2.20)$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0 \quad (2.21)$$

Λόγω των μηδενικών παραμορφώσεων κατά την \mathbf{e}_2 διεύθυνση προκύπτει ότι:

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = 0. \quad (2.22)$$



Σχήμα 2.2. Γεωμετρία και σύστημα συντεταγμένων ημι-άπειρου μέσου.

Επιπλέον, εάν θεωρήσουμε ότι ο ημιχώρος που δεν καταλαμβάνεται από το στερεό μέσο βρίσκεται στο κενό τότε ισχύει ότι :

$$\mathbf{t}_3 = \sigma_{31}\mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3 = 0, \quad \text{στην επιφάνεια } x_3 = 0, \quad (2.23)$$

όπου \mathbf{t}_3 η κάθετη συνιστώσα του διανύσματος τάσεων.

Επιλύοντας το πρόβλημα μέσω της αποσύνθεσης Helmholtz και λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω συνοριακές συνθήκες (Εξ. (2.20), (2.21), (2.22)), προκύπτει η εξίσωση Rayleigh

$$\eta^6 - 8\eta^4 + 8(3 - 2k^2)\eta^2 - 16(1 - k^2) = 0. \quad (2.24)$$

Η Εξ. (2.24) έχει μόνο μία πραγματική ρίζα την η_R που αντιστοιχεί στην ύπαρξη ενός επιφανειακού κύματος Rayleigh το οποίο διαδίδεται με ταχύτητα c_R . Εφόσον η εξίσωση Rayleigh δεν περιέχει τη συχνότητα ω , η λύση c_R είναι ανεξάρτητη της συχνότητας και συνεπώς το κύμα Rayleigh δεν παρουσιάζει διασπορά. Το διάνυσμα μετατόπισης του κύματος Rayleigh μεταβάλλεται ελλειψοειδώς συναρτήσει του χρόνου και του βάθους. Αποδεικνύεται επίσης ότι σε βάθος ενός μήκους κύματος από την επιφάνεια το κύμα Rayleigh εξασθενεί σημαντικά αφού το μέτρο του είναι ίσο με το 10% της τιμής που έχει στην επιφάνεια [2,3]. Μια προσεγγιστική λύση της Εξ. (2.24) για την ταχύτητα c_R δίνεται από :

$$c_R \approx c_T \frac{0.87 + 1.12\nu}{1 + \nu}$$

όπου ν είναι ο λόγος Poisson.

Η πρόσπτωση των διαμηκών κυμάτων στην ελεύθερη επιφάνεια του μέσου υπό γωνία, έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία του υπο-επιφανειακού (subsurface) ή πλευρικού (lateral) ή κύματος μετώπου (head wave) ή κύματος ερπυσμού (creep wave). Το μέτωπο του υπο-επιφανειακού κύματος ξεκινάει από το σημείο τομής του διαμήκους κύματος

με την ελεύθερη επιφάνεια και παραμένει εφραπτόμενο με το μέτωπο του διατμητικού κύματος. Το υπο-επιφανειακό κύμα δεν εμφανίζει διασπορά, διαδίδεται με την ταχύτητα του διαμήκους κύματος και εξασθενεί ισχυρά τόσο κατά το μήκος όσο και στο βάθος του μέσου. Συγκεκριμένα το πλάτος του πλευρικού κύματος κατά τη διεύθυνση x_1 μειώνεται καθώς αυξάνεται η απόσταση σύμφωνα με τον τύπο $1/x_1^q$, όπου q από 1.5 – 2.0. Αντιθέτως το πλάτος των διαμήκων κυμάτων μειώνεται επίσης σύμφωνα με τον τύπο $1/x_1^q$ όπου το q κυμαίνεται από 0.5 – 1.0, γεγονός που αποδεικνύει ότι τα διαμήκη κύματα παρουσιάζουν μικρότερη εξασθένηση. Η εξασθένηση των διαμηκών κυμάτων είναι πολύ μικρότερη με q από 0,5 – 1,0 [3]. Τα επιφανειακά κύματα έχουν χρησιμοποιηθεί ευρέως σε εφαρμογές μη καταστροφικού ελέγχου για τον εντοπισμό ατελειών σε στρώματα της υπο-επιφάνειας ισότροπων υλικών [1–3].

2.2.3 Διάδοση σε Ελεύθερη Πλάκα-Πρόβλημα του Lamb

Έστω ομογενής και ισότροπη 2-Δ πλάκα με γεωμετρία που παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.3. Θεωρούμε ότι οι επιφάνειες της πλάκας βρίσκονται στο κενό (ελεύθερες επιφάνειες). Για την επίλυση του προβλήματος κυματοδήγησης σε ελεύθερη πλάκα (πρόβλημα του Lamb [1–3]) ακολουθείται η μέθοδος αποσύνθεσης Helmholtz όπως και στην περίπτωση της κυματικής διάδοσης σε άπειρο μέσο.

Υποθέτοντας επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση όπου $u_2 = 0$ προκύπτει ότι:

$$u_1 = u_1(x_1, x_3, t), \quad (2.25\alpha)$$

$$u_3 = u_3(x_1, x_3, t). \quad (2.25\beta)$$

Το βαθμωτό δυναμικό στην επίπεδη εντατική κατάσταση γράφεται ως:

$$\Phi = \Phi(x_1, x_3, t), \quad (2.26)$$

και το διανυσματικό δυναμικό $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)$:

$$H_1 = H_3 = 0, \quad (2.27\alpha)$$

$$H_2 = H_2(x_1, x_3, t). \quad (2.27\beta)$$

από όπου προκύπτει ότι η πόλωση των κυμάτων βρίσκεται μόνο στο επίπεδο (x_1, x_3) . Οι

Εξ. (2.14) και (2.16) στην επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση γράφονται ως:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad (2.28\alpha)$$

για τα διαμήκη κύματα και

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 H_2}{\partial x_3^2} = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 H_2}{\partial t^2}, \quad (2.28\beta)$$

για τα διατμητικά.

Οι μετατοπίσεις γράφονται μέσω της αποσύνθεσης Helmholtz ως:

$$u_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x_3}, \quad (2.29\alpha)$$

$$u_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1}, \quad (2.29\beta)$$

ενώ οι συνιστώσες τάσης σ_{31} και σ_{33} μέσω των Εξ. (2.28), (2.29) γράφονται ως:

$$\sigma_{31} = \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 H_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 H_2}{\partial x_3^2} \right), \quad (2.30\alpha)$$

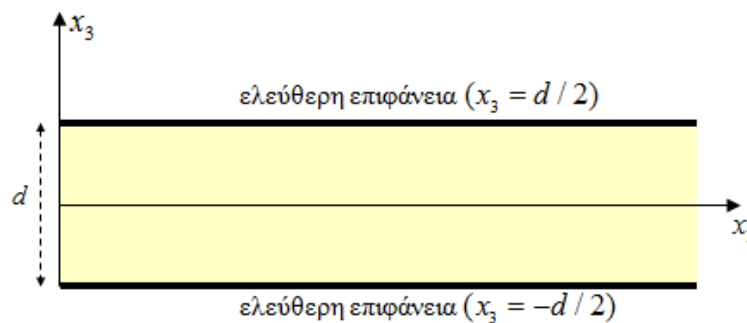
$$\sigma_{33} = \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 H_2}{\partial x_1 \partial x_3} \right). \quad (2.30\beta)$$

Υποθέτουμε λύσεις της κυματικής εξίσωσης (Εξ. (2.28)) της μορφής:

$$\Phi = \phi(x_3) \exp\{i(kx_1 - \omega t)\}, \quad (2.31)$$

$$H_2 = h(x_3) \exp\{i(kx_1 - \omega t)\}, \quad (2.32)$$

όπου οι άγνωστες συναρτήσεις ϕ και h είναι τα πλάτη των αρμονικών κυμάτων που οδεύουν στην x_1 διεύθυνση. Αντικαθιστώντας τις Εξ. (2.31) και (2.32) στην κυματική



Σχήμα 2.3. Γεωμετρία ελεύθερης πλάκας πάχους d και σύστημα συντεταγμένων.

εξίσωση προκύπτει ότι:

$$\phi(x_3) = A_1 \sin(\alpha x_3) + A_2 \cos(\alpha x_3), \quad (2.33\alpha)$$

$$h(x_3) = A_1 \sin(\beta x_3) + A_2 \cos(\beta x_3), \quad (2.33\beta)$$

όπου: A_1 , A_2 , B_1 και B_2 είναι άγνωστες σταθερές και

$$\alpha^2 = \left(\frac{\omega}{c_L}\right)^2 - k^2 \quad \text{και} \quad \beta^2 = \left(\frac{\omega}{c_T}\right)^2 - k^2. \quad (2.34)$$

Οι μετατοπίσεις και οι τάσεις μπορούν να γραφούν:

$$u_1 = ik\phi + \frac{dh}{dx_3}, \quad (2.35\alpha)$$

$$u_2 = \frac{d\phi}{dx_3} - ikh, \quad (2.35\beta)$$

$$\sigma_{31} = \mu \left(2ik \frac{d\phi}{dx_3} + k^2 h + \frac{d^2 h}{dx_3^2} \right), \quad (2.36)$$

$$\sigma_{33} = \lambda \left(-k^2 \phi + \frac{d^2 \phi}{dx_3^2} \right) + 2\mu \left(\frac{d^2 \phi}{dx_3^2} - ik \frac{dh}{dx_3} \right). \quad (2.37)$$

Επειδή οι μεταβλητές περιλαμβάνουν ημίτονα και συνημίτονα του x_3 που είναι περιττές και άρτιες συναρτήσεις αντίστοιχα, οι λύσεις διαχωρίζονται σε δύο κατηγορίες: τις συμμετρικές και αντισυμμετρικές. Πιο συγκεκριμένα, η παραμόρφωση της πλάκας είναι συμμετρική ως προς τη μεσότητα της πλάκας κατά τη διεύθυνση x_1 , όταν η μετατόπιση u_1 περιέχει συνημίτονα και αντισυμμετρική όταν περιέχει ημίτονα.

Για μετατοπίσεις κατά τη διεύθυνση x_3 ισχύει το αντίστροφο. Κατά συνέπεια στην ελεύθερη πλάκα διαδίδονται δύο ειδών ρυθμοί: οι συμμετρικοί και οι αντισυμμετρικοί για τους οποίους ισχύουν οι παρακάτω εξισώσεις:

Συμμετρικοί ρυθμοί:

$$\phi = A_2 \cos(\alpha x_3), \quad (2.38)$$

$$h = B_1 \sin(\beta x_3), \quad (2.39)$$

$$u_1 = ikA_2 \cos(\alpha x_3) + \beta B_1 \cos(\beta x_3), \quad (2.40)$$

$$u_3 = -\alpha A_2 \sin(\alpha x_3) - ikB_1 \sin(\beta x_3), \quad (2.41)$$

$$\sigma_{31} = \mu \left[-2ik\alpha A_2 \sin(\alpha x_3) + (k^2 - \beta^2) B_1 \sin(\beta x_3) \right], \quad (2.42)$$

$$\sigma_{33} = -\lambda(k^2 + \alpha^2) A_2 \cos(\alpha x_3) - 2\mu \left[\alpha^2 A_2 \cos(\alpha x_3) + ik\beta B_1 \cos(\beta x_3) \right], \quad (2.43)$$

Αντισυμμετρικοί ρυθμοί:

$$\phi = A_1 \sin(\alpha x_3), \quad (2.44)$$

$$h = B_2 \cos(\beta x_3), \quad (2.45)$$

$$u_1 = ikA_1 \sin(\alpha x_3) + \beta B_2 \sin(\beta x_3), \quad (2.46)$$

$$u_3 = \alpha A_1 \cos(\alpha x_3) - ikB_2 \cos(\beta x_3), \quad (2.47)$$

$$\sigma_{31} = \mu \left[2ik\alpha A_1 \cos(\alpha x_3) + (k^2 - \beta^2) B_2 \cos(\beta x_3) \right], \quad (2.48)$$

$$\sigma_{33} = -\lambda(k^2 + \alpha^2) A_1 \sin(\alpha x_3) - 2\mu \left[\alpha^2 A_1 \sin(\alpha x_3) - ik\beta B_2 \sin(\beta x_3) \right]. \quad (2.49)$$

Θεωρούμε ότι οι επιφάνειες τις πλάκας βρίσκονται στο κενό και συνεπώς οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι:

$$\sigma_{31} = \sigma_{33} \equiv 0, \quad \text{για } x_3 = \pm \frac{d}{2}, \quad (2.50)$$

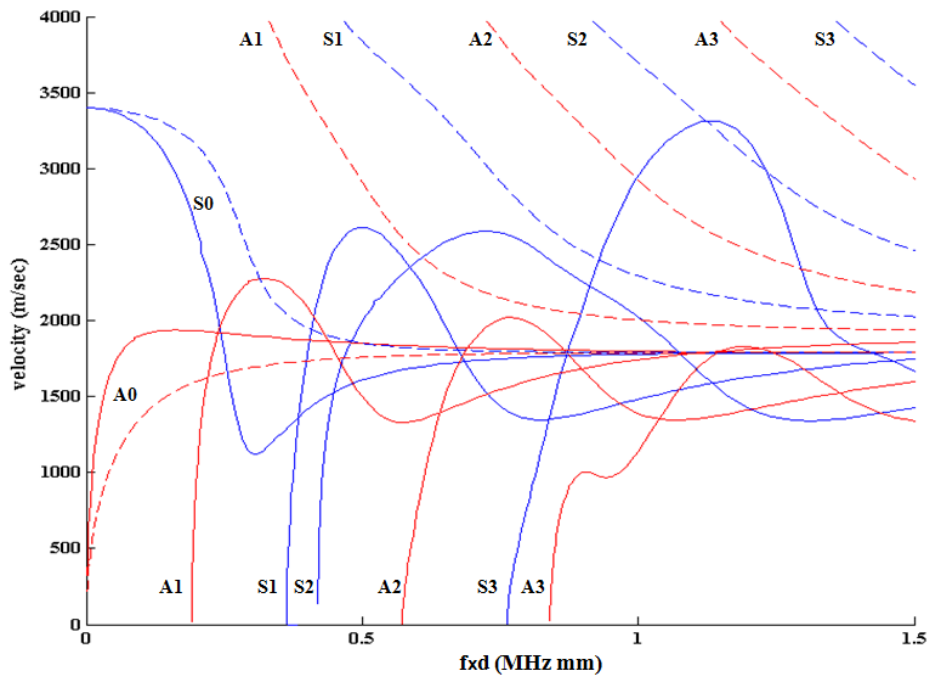
όπου d είναι το πάχος της πλάκας.

Εισάγοντας τις συνοριακές συνθήκες της Εξ. (2.50) στις Εξ.(2.42), (2.43) και (2.48), (2.49) προκύπτει ότι για τους συντελεστές του πλάτους πρέπει να ισχύει:

$$\frac{A_2}{B_1} = \frac{2k\beta \cos(\beta d / 2)}{(k^2 - \beta^2) \cos(\alpha d / 2)}, \quad (2.51)$$

$$\frac{A_2}{B_1} = \frac{2k\beta \cos(\beta d / 2)}{(k^2 - \beta^2) \cos(\alpha d / 2)}. \quad (2.52)$$

Προκύπτει ένα ομογενές σύστημα 2×2 για τις σταθερές A_2 , B_1 και ένα αντίστοιχο για τις A_1 και B_2 . Για ύπαρξη μη τετριμμένων λύσεων η ορίζουσα του συστήματος πρέπει να μηδενίζεται και προκύπτει η εξίσωση:



Σχήμα 2.4. Καμπύλες διασποράς ταχύτητας φάσης (διακεκομμένες γραμμές) και ομάδας (συμπαγείς γραμμές) συναρτήσεως του γινομένου συχνότητας × πάχος πλάκας ($f \times d$). Η πλάκα είναι ισότροπη και ομογενής με διαμήκη ταχύτητα του μέσου $c_L = 4200$ m/s και διατμητική ταχύτητα μέσου $c_T = 1907$ m/s.

$$\frac{\tan \beta d / 2}{\tan \alpha d / 2} = \frac{4\alpha\beta k^2 \mu}{(\lambda k^2 + \lambda \alpha^2 + 2\mu \alpha^2)(k^2 - \beta^2)}. \quad (2.53)$$

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των α και β από την Εξ. (2.34) στην Εξ. (2.53) καθώς και τις σχέσεις:

$$\lambda = c_L^2 \rho - 2\mu, \quad (2.54)$$

$$c_T^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad (2.55)$$

προκύπτει η εξίσωση συχνότητας Rayleigh-Lamb

$$\frac{\tan \beta d / 2}{\tan \alpha d / 2} = \left\{ -\frac{4\alpha\beta k^2}{(k^2 - \beta^2)^2} \right\}^{\pm 1}, \quad (2.56)$$

όπου ο εκθέτης +1 αντιστοιχεί στην εξίσωση για τους συμμετρικούς και ο -1 στην εξίσωση για τους αντισυμμετρικούς ρυθμούς αντίστοιχα. Η αριθμητική επίλυση της χαρακτηριστικής εξίσωσης [3] δίνει ρίζες που συνδέουν την ταχύτητα φάσης ενός κυματοδηγούμενου ρυθμού Lamb με το γινόμενο συχνότητας-πάχους πλάκας ($f \times d$). Από την γραφική αναπαράσταση της ταχύτητα φάσης ως προς $f \times d$ προσδιορίζονται

οι καμπύλες διασποράς της ταχύτητας φάσης (Σχήμα 2.4). Χρησιμοποιώντας τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα φάσης με την ταχύτητα ομάδας (Εξ. (2.19)) υπολογίζονται επίσης οι καμπύλες διασποράς της ταχύτητας ομάδας (Σχήμα 2.4). Όπως προαναφέρθηκε για τιμή εκθέτη +1, προκύπτουν οι συμμετρικοί ρυθμοί που συμβολίζονται στο Σχήμα 2.4 ως S0, S1, S2, κτλ. Αντίστοιχα, για τιμή εκθέτη -1, προκύπτουν οι αντισυμμετρικοί ρυθμοί οι οποίοι συμβολίζονται στο Σχήμα 2.4 με A0, A1, A2, κτλ..

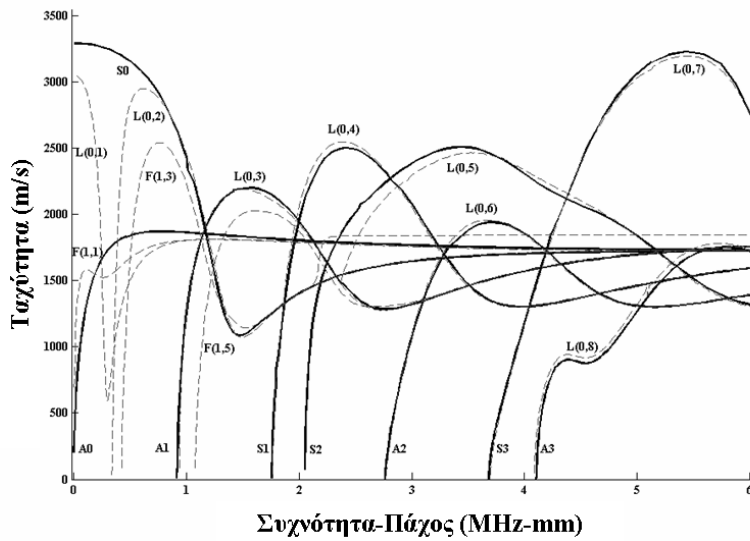
Από τις καμπύλες διασποράς (Σχήμα 2.4) παρατηρείται ότι για μεγάλες τιμές $f \times d$ οι βασικοί ρυθμοί S0 και A0 συγκλίνουν σε μια τιμή η οποία αποδεικνύεται ότι είναι η ταχύτητα του κύματος Rayleigh, c_R . Για λεπτές πλάκες ή χαμηλές συχνότητες, οι ρυθμοί υψηλότερης τάξης εμφανίζουν συχνότητες αποκοπής (cut-off frequencies), ενώ αντίθετα οι βασικοί ρυθμοί υφίστανται μέχρι και για μηδενική τιμή του $f \times d$. Ο ρυθμός S0 για θεωρητικά μηδενική τιμή του $f \times d$ διαδίδεται με ταχύτητα που καλείται ταχύτητα πλάκας (plate velocity), c_{plate} , και δίνεται από [3]:

$$c_{plate} = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}, \quad (2.57)$$

όπου E είναι το μέτρο του Young του υλικού της πλάκας.

Η θεωρία του Lamb μπορεί να χρησιμοποιηθεί προσεγγιστικά για την περιγραφή των κυματοδηγούμενων ρυθμών που διαδίδονται σε κυλίνδρους με κυκλική διατομή, υπό την προϋπόθεση ότι ο λόγος του πάχους του κυλίνδρου προς την εξωτερική του ακτίνα είναι μικρός. Στο Σχήμα 2.5 παρουσιάζουμε τις καμπύλες διασποράς ταχύτητας ομάδας για πλάκα και κοίλο κύλινδρο. Οι κυματοδηγούμενοι ρυθμοί που διαδίδονται σε κοίλο κύλινδρο ονομάζονται βάσει του τύπου τους, του περιφερειακού δείκτη n , και ενός δείκτη αρίθμησης m . Για $n=0$, η μετατόπιση σωματιδίου του κάθε ρυθμού είναι αξονοσυμμετρική (axis-symmetric) και για αυτήν την περίπτωση, υπάρχουν δύο τύποι κυμάτων, ο διαμήκης $L(0,m)$, που περιέχει αξονικές και ακτινικές συνιστώσες μετατόπισης, και ο στρεπτικός (torsional) $T(0,m)$, και περιέχει μόνο τη γωνιακή συνιστώσα μετατόπισης [3]. Για $n=1,2,3,\dots$, υπάρχει ο καμπτικός τύπος κυμάτων $F(n,m)$, που αντιστοιχεί σε κύματα με μη αξονοσυμμετρική (non-axisymmetric) μετατόπιση και περιέχει και τις τρεις συνιστώσες μετατόπισης [3]. Ο δείκτης αρίθμησης

$m = 1, 2, 3, \dots$, υποδεικνύει την τάξη (αρίθμηση) κάθε ρυθμού. Παρατηρείται ότι όταν ο λόγος του πάχους κυλίνδρου προς την εξωτερική του ακτίνα ισούται περίπου με 0.47,



Σχήμα 2.5. Καμπύλες διασποράς ταχύτητας ομάδας για τους τέσσερις πρώτους συμμετρικούς και αντι-συμμετρικούς ρυθμούς Lamb για ελεύθερη ισότροπη πλάκα (συμπαγείς γραμμές) συναρτήσει του γινομένου συχνότητας-πάχους. Παρουσιάζονται και οι αντίστοιχες καμπύλες διασποράς των διαμήκων και καμπτικών ρυθμών ισότροπου ελεύθερου κοίλου κυλίνδρου συναρτήσει του γινομένου συχνότητας-πάχους τοιχώματος (διακεκομμένες γραμμές). Ο λόγος του πάχους τοιχώματος του κυλίνδρου με την εξωτερική του ακτίνα είναι 4.0/8.5.

η διασπορά του S0 είναι διαφορετική από αυτή των αντίστοιχων βασικών διαμήκων και καμπτικών ρυθμών του κυλίνδρου μόνο για γινόμενο συχνότητας-πάχους μικρότερο από 0.5. Αντιθέτως ο βασικός ρυθμός A0 και όλοι οι ρυθμοί υψηλότερης τάξης έχουν διασπορά σχεδόν ταυτόσημη με αυτή των αντίστοιχων ρυθμών του κυλίνδρου για όλο το φάσμα.

2.2.3.1 Κυματοδηγούμενοι ρυθμοί σε πλάκα εμβαπτισμένη σε ρευστό

Θεωρούμε πλάκα η οποία εμβαπτίζεται πλήρως σε ρευστό το οποίο θεωρείται ότι καταλαμβάνει τον ημι-χώρο εκατέρωθεν κάθε επιφάνειας (Σχήμα 2.6). Το πρόβλημα της κυματικής διάδοσης σε πλάκα εμβαπτισμένη σε ρευστό επιλύεται χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο με αυτή που χρησιμοποιήθηκε στο πρόβλημα της ελεύθερης πλάκας λαμβάνοντας υπόψη δύο επιπρόσθετες υποθέσεις. Καταρχήν εισάγεται ένα βαθμωτό δυναμικό Φ_{fl} που περιγράφει τη διάδοση των διαμήκων ρυθμών στο ρευστό, καθώς



Σχήμα 2.6. Πλήρης εμβάπτιση σε ρευστό που καταλαμβάνει τον ημι-χώρο εκατέρωθεν κάθε επιφάνειας.

και η αντίστοιχη εξίσωση για το πεδίο των μετατοπίσεων. Επιπλέον λαμβάνεται υπόψη η εξασθένηση των κυμάτων λόγω της διαρροής ενέργειας συγκεκριμένων ρυθμών στο ρευστό, χρησιμοποιώντας ένα μιγαδικό κυματαριθμό k^* που ορίζεται ως:

$$k^* = k' + ik'', \quad (2.58)$$

όπου k' και k'' είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του κυματαριθμού, αντίστοιχα. Το πραγματικό μέρος (k') χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των ταχυτήτων φάσης και ομάδας ενώ το φανταστικό (k''), αναπαριστά την εξασθένηση του εκάστοτε κυματοδηγούμενου ρυθμού.

Το βαθμωτό δυναμικό Φ_{fl} ορίζεται ως:

$$\Phi_{fl} = A_3 e^{-ik_{fl}x_3} e^{i(kx_1 - \omega t)}, \quad (2.59)$$

όπου

$$k_{fl} = \sqrt{\left(\omega / c_{fl}\right)^2 - k^2} \quad (2.60)$$

και c_{fl} η διαμήκης ταχύτητα του ρευστού. Εφόσον στο ρευστό υποστηρίζεται μόνο η διάδοση των διαμήκων ρυθμών, το διάνυσμα μετατοπίσεων δίνεται από την εξίσωση:

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi_{fl}, \quad \nabla \times \mathbf{u} \equiv 0. \quad (2.61)$$

Εφαρμόζοντας την Εξ. (2.59) στην Εξ. (2.61) οι συνιστώσες του διανύσματος μετατοπίσεων στο ρευστό δίνονται από:

$$u_1(fluid) = \frac{\partial \Phi_{fl}}{\partial x_1} = \left[A_3 i k e^{-ik_{fl}x_3} \right] e^{i(kx_1 - \omega t)}. \quad (2.62)$$

Επιπλέον η κάθετη συνιστώσα της τάσης στο ρευστό δίνεται από:

$$\sigma_{33} = \lambda_{fl} \Delta_{fl} = \left[\lambda_w (-k_{fl}^2 - k^2) e^{-ik_{fl}x_3} A_3 \right] e^{i(kx_1 - \omega t)}. \quad (2.63)$$

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος ορίζονται ως:

$$u_3^{fluid} = u_3^{solid} \text{ για } x_3 = 0 \text{ και } x_3 = h, \quad (2.64)$$

$$\sigma_{33}^{fluid} = \sigma_{33}^{solid} \text{ για } x_3 = 0 \text{ και } x_3 = h,$$

$$\sigma_{31}^{solid} = 0 \text{ για } x_3 = 0 \text{ και } x_3 = h,$$

όπου u_3^{fluid} , u_1^{solid} , u_3^{solid} είναι οι συνιστώσες της μετατόπισης στο ρευστό και στην πλάκα, σ_{33}^{fluid} είναι η κάθετη συνιστώσα τάσης στο ρευστό, σ_{33}^{solid} , σ_{31}^{solid} είναι οι συνιστώσες τάσης στην πλάκα και h το πάχος της πλάκας. Η χαρακτηριστική εξίσωση που περιγράφει την διάδοση των κυματοδηγούμενων ρυθμών σε πλάκα εμβαπτισμένη σε ρευστό δίνεται από [7-9]:

$$(k^2 - \beta^2)^2 \cot(\alpha h / 2) + 4k^2 \alpha \beta^2 \cot(\beta h / 2) + i[(\rho_{fl} \alpha \beta^4) / (\rho k_{fl})] = 0, \quad (2.65\alpha)$$

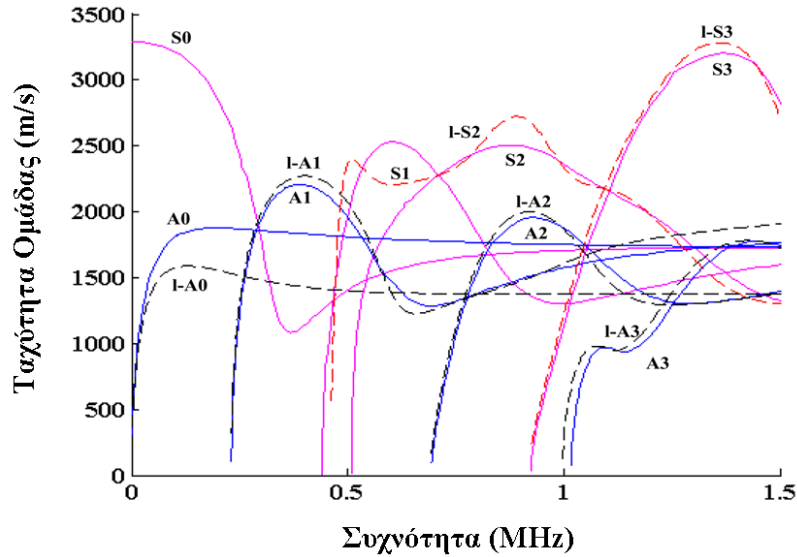
για τους συμμετρικούς ρυθμούς

$$(k^2 - \beta^2)^2 \tan(\alpha h / 2) + 4k^2 \alpha \beta^2 \tan(\beta h / 2) + i[(\rho_{fl} \alpha \beta^4) / (\rho k_{fl})] = 0, \quad (2.65\beta)$$

για τους αντισυμμετρικούς ρυθμούς, όπου ρ και ρ_{fl} είναι οι πυκνότητες της πλάκας και του ρευστού αντίστοιχα. Οι κυματοδηγούμενοι ρυθμοί που προκύπτουν διαρρέουν μέσα στο ρευστό και για το λόγο αυτό καλούνται διαρρέοντες ρυθμοί Lamb (leaky Lamb modes). Οι αντίστοιχες καμπύλες διασποράς ταχυτήτων ομάδας των διαρρέοντων ρυθμών παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.7. Οι συμμετρικοί ρυθμοί συμβολίζονται ως 1-S0, 1-S1, 1-S2 κτλ.. και οι αντισυμμετρικοί ρυθμοί ως 1-A0, 1-A1, 1-A2 κτλ.

Όταν η μετατόπιση ενός ρυθμού στο σύνορο της πλάκας είναι μικρή ή μηδέν τότε το ποσό της ενέργειας του ρυθμού που διαρρέει στο υγρό είναι αντίστοιχα μικρό [3]. Το αντίθετο συμβαίνει για μεγάλη μεγάλες μετατοπίσεις στο σύνορο. Συνεπώς ανάλογα με την εφαρμογή, η τιμή του $f \times d$ μπορεί να επιλεγθεί έτσι ώστε ο συγκεκριμένος ρυθμός να διαρρέει στο υγρό ώστε να μπορεί να καταγραφεί πειραματικά από δέκτη μέσα στο υγρό ή αντίθετα να διαδοθεί κατά μήκος της πλάκας με μικρή εξασθένηση και να καταγραφεί σε κάποιο σημείο της πλάκας που είναι άμεσα προσβάσιμο.

2.2.3.2 Κυματοδηγούμενοι ρυθμοί σε μοντέλα πολλαπλών στρωμάτων



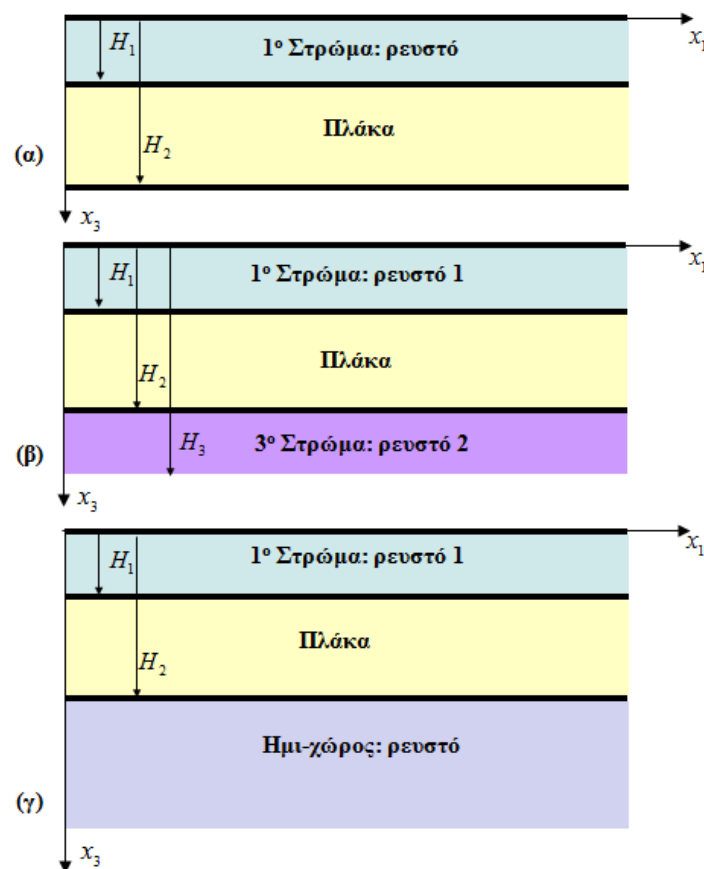
Σχήμα 2.7. Καμπύλες διασποράς ταχύτητας ομάδας των ρυθμών Lamb σε ελεύθερη πλάκα (συμπαγείς γραμμές) και των διαρρεόντων ρυθμών σε πλάκα πλήρως εμβαπτισμένης σε ρευστό (διακεκομμένες γραμμές). Η πλάκα είναι ισότροπη με διαμήκη και διατμητική ταχύτητα μέσου $c_L = 4107$ m/s και $c_T = 1842$ m/s, αντίστοιχα, ενώ το ρευστό είναι αίμα με ταχύτητα 1580 m/s.

Παρουσιάζονται τρεις περιπτώσεις εμβάπτισης της πλάκας σε ρευστό. Στην πρώτη περίπτωση η πλάκα θεωρούμε ότι ένα στρώμα ρευστού συνορεύει με την ανώτερη επιφάνεια της πλάκας, ενώ η άλλη βρίσκεται ελεύθερη όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.8(α). Συνεπώς το μοντέλο αυτό αποτελείται από δύο στρώματα, δηλ. του ρευστού και της πλάκας, και ονομάζεται μοντέλο δύο στρωμάτων. Στη διεπιφάνεια μεταξύ του ρευστού και της πλάκας, η ενέργεια των κυματοδηγούμενων ρυθμών διαρρέεται από το στερεό στο ρευστό με μορφή διαρρεόντων ρυθμών και στη συνέχεια οι διαρρέοντες ρυθμοί ανακλώνται στην ανώτερη επιφάνεια του στρώματος ρευστού και επιστρέφουν στην πλάκα. Κατά συνέπεια οι ρυθμοί διαδίδονται σε ολόκληρη τη δομή των δύο στρωμάτων και όχι ξεχωριστά σε κάθε στρώμα.

Όταν η μετατόπιση ενός ρυθμού στο σύνορο της πλάκας είναι μικρή ή μηδέν τότε το ποσό της ενέργειας του ρυθμού που διαρρέει στο υγρό είναι αντίστοιχα μικρό [3]. Το αντίθετο συμβαίνει για μεγάλες μετατοπίσεις στο σύνορο. Συνεπώς ανάλογα με την

εφαρμογή, η τιμή του $f \times d$ μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε ο συγκεκριμένος ρυθμός να διαρρέει στο υγρό ώστε να μπορεί να καταγραφεί πειραματικά από δέκτη μέσα στο υγρό ή αντίθετα να διαδοθεί κατά μήκος της πλάκας με μικρή εξασθένηση και να καταγραφεί σε κάποιο σημείο της πλάκας που είναι άμεσα προσβάσιμο.

Για την επίλυση του προβλήματος κυματοδηγούμενης διάδοσης στο μοντέλο δύο στρωμάτων θεωρούμε ότι σε κάθε στρώμα οι μετατοπίσεις πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση κίνησης (Εξ. (2.3)). Το πεδίο μετατοπίσεων αποσυντίθεται όπως παραπάνω με τη μέθοδο Helmholtz. Για το στρώμα της πλάκας υποθέτουμε λύσεις της κυματικής



Σχήμα 2.8. Τρεις περιπτώσεις εμβάπτισης πλάκας σε ρευστό. (α) μερική εμβάπτιση όπου το ρευστό συνορεύει με τη μια επιφάνεια, ενώ η άλλη βρίσκεται ελεύθερη (μοντέλο δύο στρωμάτων), (β) πλήρης εμβάπτιση όπου ένα στρώμα ρευστού συνορεύει με τη μία επιφάνεια της πλάκας, ενώ ένα δεύτερο στρώμα διαφορετικού ρευστού με την άλλη επιφάνεια (μοντέλο τριών στρωμάτων), (γ) πλήρης εμβάπτιση όπου ένα στρώμα ρευστού συνορεύει με τη μία επιφάνεια της πλάκας, ενώ ένα διαφορετικό ρευστό συνορεύει με την άλλη επιφάνεια καταλαμβάνοντας τον ημι-άπειρο στην κατώτερη επιφάνεια της πλάκας.

εξίσωσης της μορφής [3]:

$$\phi^p = C_1^p \exp\{ik_L^p[x_1 \sin(\theta_L^p) + x_3 \cos(\theta_L^p)]\} + C_2^p \exp\{ik_L^p[x_1 \sin(\theta_L^p) - x_3 \cos(\theta_L^p)]\}, \quad (2.66)$$

$$\psi^p = C_3^p \exp\{ik_T^p[x_1 \sin(\theta_T^p) + x_3 \cos(\theta_T^p)]\} + C_4^p \exp\{ik_T^p[x_1 \sin(\theta_T^p) - x_3 \cos(\theta_T^p)]\}, \quad (2.67)$$

όπου

$$k_L^p = \frac{\omega}{c_L^p}, \quad k_T^p = \frac{\omega}{c_T^p} \quad (2.68)$$

και C_1^p, C_2^p, C_3^p και C_4^p είναι άγνωστες σταθερές. Κάθε λύση αποτελείται από δύο όρους: ο πρώτος όρος αντιπροσωπεύει επίπεδα κύματα που κατευθύνονται προς τα κάτω ενώ ο δεύτερος επίπεδα κύματα που κατευθύνονται προς τα πάνω. Συνεπώς στην πλάκα υποθέτουμε ότι διαδίδονται τέσσερα επίπεδα κύματα, δύο διαμήκη και δύο διατμητικά. Κάθε ένα από το πρώτο ζεύγος διαμήκων και διατμητικών κυμάτων διαδίδεται προς τα κάτω υπό γωνίες θ_L^p και θ_T^p αντίστοιχα, και κάθε ένα από το δεύτερο ζεύγος προς τα πάνω υπο τις ίδιες γωνίες (θ_L^p για το διαμήκες και θ_T^p για το διατμητικό). Στο στρώμα του ρευστού δε διαδίδονται διατμητικά κύματα και συνεπώς για το στρώμα αυτό ισχύουν λύσεις της μορφής:

$$\phi^fl = C_5^fl \exp\{ik_L^fl[x_1 \sin(\theta_L^fl) + x_3 \cos(\theta_L^fl)]\} + C_6^fl \exp\{ik_L^fl[x_1 \sin(\theta_L^fl) - x_3 \cos(\theta_L^fl)]\} \quad (2.69)$$

όπου τα C_5^fl, C_6^fl, k_L^fl και θ_L^fl ορίζονται για το στρώμα του ρευστού κατ' αντιστοιχία με την πλάκα.

Για την επίλυση του προβλήματος εφαρμόζουμε συνθήκες συνέχειας τάσεων και μετατοπίσεων στη διεπιφάνεια μεταξύ της πλάκας και του ρευστού και συνοριακές συνθήκες στο ανώτερο και κατώτερο άκρο της πλάκας ως εξής:

$$\begin{aligned} u_3^fl &= u_3^p \quad \text{για } x_3 = 0, \\ \sigma_{33}^fl &= \sigma_{33}^p \quad \text{για } x_3 = 0, \\ \sigma_{31}^fl &= 0 \quad \text{για } x_3 = 0, \\ \sigma_{33}^fl &= 0 \quad \text{για } x_3 = H_1, \\ \sigma_{31}^p &= 0 \quad \text{για } x_3 = H_2, \\ \sigma_{33}^p &= 0 \quad \text{για } x_3 = H_2 \end{aligned} \quad (2.70)$$

όπου $H_M = \sum_{i=1}^M h_i$ και h_m είναι το πάχος του στρώματος m (Σχήμα 2.8), σ_{33}^f , σ_{31}^f , u_3^f

είναι οι συνιστώσες της μετατόπισης και τάσης στο στρώμα ρευστού και σ_{31}^p , σ_{33}^p οι συνιστώσες τάσης στην πλάκα. Η εφαρμογή των παραπάνω συνθηκών έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός δκδ ομογενούς συστήματος ως προς τις άγνωστες σταθερές των πλατών.

Για μη τετριμμένες λύσεις η ορίζουσα D του συστήματος πρέπει να μηδενίζεται:

$$|D_{ij}| = 0, \quad (i, j = 1 \dots 6) \quad (2.71)$$

Τα στοιχεία της ορίζουσας του πίνακα παρουσιάζονται στο Παράρτημα Ι.

Στην δεύτερη περίπτωση φόρτισης πλάκας από ρευστό θεωρούμε ότι η πλάκα συνορεύει και πάλι με ένα στρώμα ρευστού στην ανώτερη επιφάνεια, ενώ ένα δεύτερο στρώμα διαφορετικού ρευστού συνορεύει με την κατώτερη επιφάνεια της πλάκας (Σχήμα 2.8(β)). Συνεπώς στην περίπτωση αυτή εξετάζεται ένα μοντέλο τριών στρωμάτων. Η μέθοδος επίλυσης είναι αντίστοιχη με την προαναφερθείσα για την περίπτωση των δύο στρωμάτων, μόνο που πλέον υπάρχουν επιπρόσθετες συνοριακές συνθήκες. Για το κατώτερο στρώμα του ρευστού υποθέτουμε αντίστοιχες λύσεις με την Εξ. (41) της μορφής [3]:

$$\phi^{f2} = C_7^{f2} \exp\{ik_L^{f2}[x_1 \sin(\theta_L^{f2}) + x_3 \cos(\theta_L^{f2})]\} + C_8^{f2} \exp\{ik_L^{f2}[x_1 \sin(\theta_L^{f2}) - x_3 \cos(\theta_L^{f2})]\} \quad (2.72)$$

όπου τα C_7^{f2} , C_8^{f2} , k_L^{f2} και θ_L^{f2} ορίζονται για το κατώτερο στρώμα του ρευστού κατ' αντιστοιχία με το ανώτερο στρώμα. Οι συνθήκες συνέχειας και συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι:

$$\sigma_{33}^f = 0 \text{ για } x_3 = 0,$$

$$\sigma_{33}^f = \sigma_{33}^p \text{ για } x_3 = H_1,$$

$$u_3^f = u_3^p \text{ για } x_3 = H_1,$$

$$\sigma_{31}^f = \sigma_{31}^p \text{ για } x_3 = H_1 \quad (2.73)$$

$$u_3^{f2} = u_3^p \text{ για } x_3 = H_2$$

$$\sigma_{33}^{f2} = \sigma_{33}^p \text{ για } x_3 = H_2,$$

$$\sigma_{31}^{fl} = \sigma_{31}^p \text{ για } x_3 = H_2$$

$$\sigma_{33}^{fl2} = 0 \text{ για } x_3 = H_3$$

όπου σ_{33}^{fl2} , σ_{31}^{fl2} , u_3^{fl2} είναι οι συνιστώσες της μετατόπισης και τάσης στο κατώτερο στρώμα ρευστού. Κατ' αντιστοιχία με το μοντέλο δύο στρωμάτων, επιβάλλοντας τις συνοριακές συνθήκες για το μοντέλο τριών στρωμάτων προκύπτει ένα 8x8 ομογενές σύστημα του οποίου η ορίζουσα πρέπει να μηδενίζεται για ύπαρξη μη τετριμμένων λύσεων. Τα στοιχεία της ορίζουσας παρουσιάζονται στο Παράρτημα I.

Στην τελευταία εξεταζόμενη περίπτωση θεωρούμε ότι η ανώτερη επιφάνεια της πλάκας συνορεύει με ένα στρώμα ρευστού, ενώ ο ημι-χώρος που συνορεύει με την κατώτερη επιφάνεια καταλαμβάνεται από ένα διαφορετικό ρευστό (Σχήμα 2.8(γ)). Η περίπτωση αυτή διαφέρει με το μοντέλο τριών στρωμάτων σε δύο σημεία. Καταρχήν, στο ημι-άπειρο ρευστό υποθέτουμε ότι διαδίδονται επίπεδα κύματα μόνο προς τα κάτω, εφόσον δεν υπάρχει επιφάνεια στην οποία ανακλώνται και επιστρέφουν πίσω στην πλάκα. Συνεπώς εάν υποθέσουμε ότι το ημι-άπειρο ρευστό είναι το ίδιο με αυτό του κατώτερου στρώματος του μοντέλου τριών στρωμάτων οι λύσεις της κυματικής εξίσωσης θα είναι της μορφής:

$$\phi^{fl2} = C_7^{fl2} \exp\{ik_L^{fl2} [x_1 \sin(\theta_L^{fl2}) + x_3 \cos(\theta_L^{fl2})]\}, \quad (2.74)$$

όμοιες δηλαδή με την Εξ. (49) χωρίς το δεύτερο όρο που περιγράφει κύματα προς τα πάνω. Το δεύτερο σημείο διαφοροποίησης έγκειται στις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα, εξαιτίας του κατώτερου στρώματος στο μοντέλο τριών στρωμάτων εισάγεται η συνοριακή συνθήκη της Εξ. (56) η οποία όμως στην περίπτωση του ημι-άπειρου ρευστού δεν ισχύει. Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζουμε μελέτη της επίδρασης διαφορετικών συνοριακών συνθηκών στη διάδοση των κυματοδηγούμενων ρυθμών σε δισδιάστατη πλάκα που προσομοιώνει το οστό.

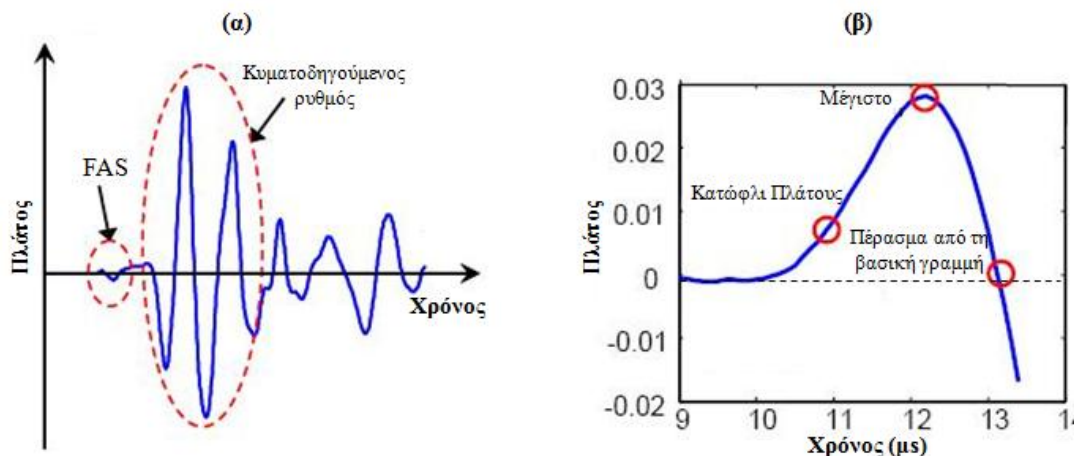
Τα μοντέλα δύο στρωμάτων αν και έχουν χρησιμοποιηθεί για την προσομοίωση των υπερκείμενων μαλακών ιστών στο οστό [7] δεν επιτρέπουν την προσομοίωση του μυελού των οστών στην περιοχή του ενδόστεου. Για το σκοπό αυτό, στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζουμε μια 2Δ υπολογιστική μελέτη σε άθικτα και κατεαγότα οστά, στην οποία εξετάζεται η επίδραση των υπερκείμενων μαλακών ιστών όσο και του μυελού των οστών στη κυματική διάδοση, χρησιμοποιώντας το μοντέλο τριών στρωμάτων καθώς

και την τελευταία εξεταζόμενη περίπτωση. Η τελευταία θεωρείται ως πιο ρεαλιστική περίπτωση προσομοίωσης των μαλακών ιστών στο οστό.

2.3 Μετρήσεις Ταχύτητας Αξονικής Διάδοσης Υπερήχων για την Αξιολόγηση Άθικτων και Κατεαγότεων Μακρών Οστών

2.3.1 Ορισμός του Πρώτου Αφιχθέντος Σήματος (First Arriving Signal-FAS)

Για τον εντοπισμό του χρόνου άφιξης του κύματος FAS στην κυματομορφή του λαμβανόμενου σήματος έχουν προταθεί στην βιβλιογραφία διάφορα κριτήρια [10] (Σχήμα 2.9). Τα κριτήρια αυτά περιλαμβάνουν: α) προκαθορισμένα κατώφλια πλάτους, β) την πρώτη κορυφή του σήματος (signal extremum), γ) το πρώτο πέρασμα από τη βασική γραμμή (zero-crossing), και δ) την έτερο-συσχέτιση (cross-correlation) μεταξύ δύο σημάτων που λαμβάνονται από διαδοχικούς δέκτες υπολογισμένη σε ένα παράθυρο διάρκειας 3 μs . Έχουν επίσης προταθεί και κριτήρια που περιλαμβάνουν τη δεύτερη ή τρίτη κορυφή (τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο) του σήματος καθώς και το δεύτερο πέρασμα από τη βασική γραμμή. Η ικανότητα του κάθε κριτηρίου εξαρτάται κυρίως από τον τύπο του κύματος FAS και έχει αναλυθεί λεπτομερώς στη μελέτη [11].



Σχήμα 2.9. (α) Παράδειγμα σήματος που ελήφθη από ανθρώπινο μακρύ οστό εφαρμόζοντας την τεχνική αξονικής διάδοσης. Παρουσιάζεται το πρώτο αφιχθέν σήμα (FAS) και ένας πιο αργός κυματοδηγούμενος ρυθμός. (β) Τα κριτήρια εντοπισμού του FAS στην κυματομορφή του ληφθέντος σήματος [10].

2.3.1.1 Ανάλυση Μονοπατιού Αξονικής Διάδοσης σε μακρά οστά - Τύπος του FAS

Όταν οι μετατροπείς τοποθετούνται επιδερμικά, τα εκπεμπόμενα κύματα εισέρχονται στο οστό με γωνία διάθλασης θ_L σύμφωνα με το νόμο του Snell:

$$\sin \theta_L = \frac{c_{BoL}}{c_{SoL}} \sin \theta_I, \quad (2.75)$$

όπου c_{BoL} και c_{SoL} είναι η διαμήκης ταχύτητα του οστού και των μαλακών ιστών, αντίστοιχα, και θ_I η γωνία πρόσπτωσης. Όταν οι ακουστική δέσμη είναι ευρεία, τα εκπεμπόμενα κύματα προσπίπτουν στη διεπιφάνεια οστού-μαλακών ιστών υπό διάφορες γωνίες, συμπεριλαμβανομένης πιθανόν και της πρώτης κρίσιμης γωνίας (first critical angle) θ_{cr} η οποία δίνεται από [3]:

$$\theta_{cr} = \sin^{-1} \frac{c_{BoL}}{c_{SoL}}, \quad (2.76)$$

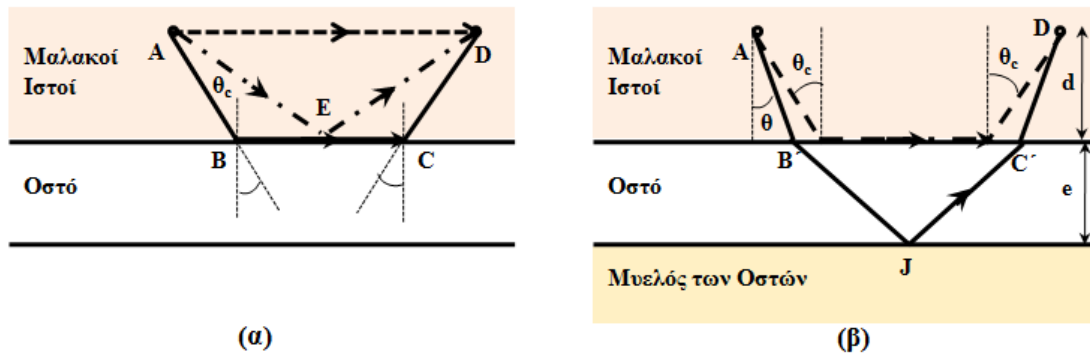
και υπάρχει εάν ισχύει $c_{BoL} < c_{SoL}$.

Έστω ότι ο πομπός και ο δέκτης τοποθετούνται σε κατακόρυφη απόσταση d από την διεπιφάνεια μεταξύ των μαλακών ιστών και του οστού, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.10(α). Σε αυτή την περίπτωση διαδίδονται πολλαπλά κύματα που ακολουθούν διαφορετικό μονοπάτι διάδοσης. Καταρχήν διαδίδονται κύματα στους μαλακούς ιστούς τα οποία καταφθάνουν απευθείας στο δέκτη (απευθείας κύματα-direct waves) ακολουθώντας το μονοπάτι διάδοσης AD καθώς και κύματα που ανακλώνται στη διεπιφάνεια οστού-μαλακών ιστών (ανακλώμενα κύματα-reflected waves) ακολουθώντας το μονοπάτι διάδοσης AED (Σχήμα 2.10(α)). Οι χρόνοι άφιξης των απευθείας και ανακλώμενων κυμάτων είναι αντίστοιχα:

$$t_{direct} = \frac{r}{c_{SoL}}, \quad (2.77)$$

$$t_{reflected} = \frac{\sqrt{r^2 + (2d)^2}}{c_{SoL}}. \quad (2.78)$$

Επιπλέον, εάν ικανοποιείται η σχέση $r > 2d \tan(\theta_c)$, τότε τα κύματα που προσπίπτουν υπό την κρίσιμη γωνία θ_{cr} διαδίδονται μέσω της διεπιφάνειας ως επιφανειακά ή/και πλευρικά κύματα και στη συνέχεια διαρρέουν στους ιστούς προτού καταφθάσουν στο δέκτη (μονοπάτι ABCD Σχήμα 2.10(α)). Ο χρόνος άφιξης του πλευρικού κύματος δίδεται από:



Σχήμα 2.10. Τα διάφορα μονοπάτια διάδοσης από τον πομπό (A) στον δέκτη (D) στην περίπτωση επιδερμικών μετρήσεων. (α) Κύματα που καταφθάνουν μέσω των υπερκείμενων μαλακών ιστών απευθείας στο δέκτη (διαδρομή AD) ή μετά από ανάκλαση στη διεπιφάνεια (μονοπάτι AED), κύματα που προσπίπτουν υπό την κρίσιμη γωνία και διαδίδονται μέσω της διεπιφάνειας ως επιφανειακά ή/και πλευρικά κύματα και στη συνέχεια διαρρέουν στους ιστούς προτού καταφθάσουν στο δέκτη (μονοπάτι ABCD), (β) περίπτωση που προσομοιώνει τις εφαρμογές σε πραγματικά οστά λαμβάνοντας υπόψη και το μυελό των οστών. Εμφανίζονται κύματα που διαθλώνται στο οστό, προσπίπτουν στην οπίσθια επιφάνεια και ανακλώνται ακολουθώντας μια αντίστροφη διαδρομή προς το δέκτη (μονοπάτι AB'JC'D) [11].

$$t_{lateral} = \frac{2d \cos(\theta_c)}{c_{SoL}} + \frac{r}{c_{BoL}}. \quad (2.79)$$

Όπως φαίνεται από τις Εξ. (2.77)-(2.79) για να αντιστοιχεί το πλευρικό κύμα στο πρώτο αφιχθέν κύμα FAS στο δέκτη πρέπει η απόσταση r να είναι αρκετά μεγάλη. Πιο συγκεκριμένα η συνθήκη $t_{direct} - t_{lateral} > 0$ συνεπάγεται ότι υπάρχει μια τιμή r_{min} τέτοια ώστε για $r > r_{min}$, ο χρόνος άφιξης του πλευρικού κύματος $t_{lateral}$ είναι μικρότερος από τον αντίστοιχο του απευθείας κύματος.

Σε περιπτώσεις εφαρμογών αξονικής διάδοσης σε πραγματικά οστά στα οποία δεν έχει αφαιρεθεί ο μυελός των οστών (Σχήμα 2.10(β)), εκτός από το πλευρικό κύμα το οποίο ακολουθεί το ίδιο μονοπάτι όπως και στην περίπτωση χωρίς τον μυελό, υπάρχουν και επιπρόσθετα κύματα τα οποία προσπίπτουν με γωνίες μικρότερες από τη γωνία θ_{cr} και ακολουθούν το μονοπάτι $AB'JC'D$ που παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.10(β), δηλ. διαθλώνται στο οστό, προσπίπτουν στην οπίσθια επιφάνεια και ανακλώνται

ακολουθώντας ένα αντίστροφο μονοπάτι προς το δέκτη. Το μονοπάτι $AB'JC'D$ είναι το γρηγορότερο που μπορεί να ακολουθηθεί από ένα εκπεμπόμενο κύμα στο εσωτερικό του οστού έως ότου φθάσει στο δέκτη. Για δεδομένη απόσταση r μεταξύ του πομπού και του δέκτη, ο χρόνος άφιξης ενός κύματος που ακολουθεί το μονοπάτι $AB'JC'D$ ικανοποιεί τις ακόλουθες σχέσεις:

$$t_{AB'JC'D} = \frac{2d}{c_{SoL}} \times \frac{1}{\cos(\theta_c)} + \frac{2e}{c_{SoL}} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta_c)}\right)^2}}, \quad (2.80)$$

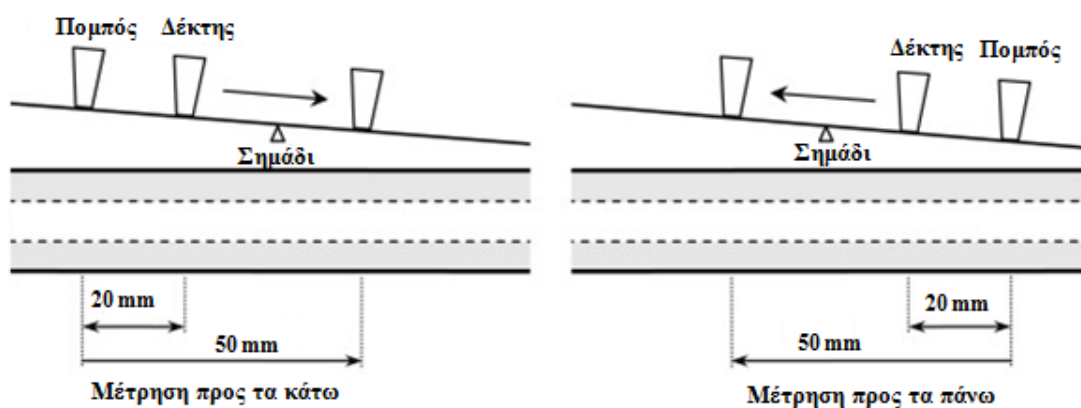
$$r = 2d \tan(\theta) + 2e \frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta_c)} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta_c)}\right)^2}}, \quad (2.81)$$

όπου e είναι το πάχος του οστού. Συγκρίνοντας την Εξ. (2.80) με την Εξ. (79) παρατηρείται ότι για μεγάλες τιμές πάχους οστού και μεγάλες αποστάσεις πομπού-δέκτη, ο χρόνος άφιξης του πλευρικού κύματος $t_{lateral}$ είναι μικρότερος από τον $t_{AB'JC'D}$. Ωστόσο, θεωρητικές [12] και υπολογιστικές μελέτες [11] έχουν αποδείξει ότι για μικρά πάχη οστού και μεγάλη απόσταση πομπού-δέκτη, η χρονική καθυστέρηση μεταξύ του πλευρικού κύματος και του ανακλώμενου κύματος στην κατώτερη διεπιφάνεια οστού-μυελού είναι πολύ μικρή με αποτέλεσμα το FAS να αντιστοιχεί σε μια υπέρθεση του πλευρικού και του ανακλώμενου κύματος στη οπίσθια επιφάνεια.

Παρόλα αυτά στις περισσότερες εφαρμογές αξονικής διάδοσης το πάχος των υπερκείμενων μαλακών ιστών είναι άγνωστο με αποτέλεσμα μην είναι εφικτός ο ακριβής προσδιορισμός του μονοπατιού διάδοσης του κύματος FAS από τον πομπό στο δέκτη. Για την ελαχιστοποίηση της επίδρασης των μαλακών ιστών πρόσφατα προτάθηκε από τους Bossy *et al.*, [13] η τεχνική της δικατευθυντικής αξονικής διάδοσης υπερήχων (bidirectional axial transmission technique). Σύμφωνα με την τεχνική αυτή, ένας παλμός υπερήχων διαδίδεται κατά μήκος της επιφάνειας του οστού προς δύο αντίθετες κατευθύνσεις μέσω ενός ακροδέκτη που ενσωματώνει δύο μετατροπείς-πομπούς και δύο μετατροπείς-δέκτες. Συνδυάζοντας τις χρονικές καθυστερήσεις των διαδιδόμενων κυμάτων που φθάνουν στους δέκτες επιτυγχάνεται αυτόματα σημαντική ακρίβεια μετρήσεων ανεξαρτήτως της μεταβολής του πάχους των μαλακών ιστών ή της γωνίας που σχηματίζει ο ακροδέκτης με την επιφάνεια του οστού. Συγκεκριμένα το σχετικό σφάλμα μέτρησης (relative precision error) παραμένει

μικρότερο από 0.2 - 0.3% [13]. Η κλινική αξιολόγηση της συσκευής δικατευθυντικής αξονικής διάδοσης πραγματοποιήθηκε πρόσφατα [14] με σκοπό τη διάγνωση της οστεοπόρωσης. Μετρήθηκε *in-vivo* η ταχύτητα διάδοσης του πρώτου αφιχθέντος σήματος στις κερκίδες 358 γυναικών και συσχετίστηκε με διαφορετικές παραμέτρους όπως είναι η ηλικία, το ιστορικό κατάγματος και μορφομετρικές παραμέτρους (ύψος, βάρος κ.α.). Βρέθηκε ότι η τεχνική της δικατευθυντικής αξονικής διάδοσης είναι μια ακριβής μέθοδος μέτρησης υπερήχων και έχει σημαντική ικανότητα διάγνωσης της οστεοπόρωσης.

Σε άλλη πρόσφατη πειραματική μελέτη [15], η επίδραση του μεταβαλλόμενου πάχους των ιστών στις *in-vivo* μετρήσεις υπερήχων χαμηλής συχνότητας αντισταθμίστηκε χρησιμοποιώντας τη διάταξη του Σχήματος 2.11. Αρχικά, οι μετατροπείς τοποθετήθηκαν σε μια βέργα η οποία επέτρεπε την μετακίνηση του δέκτη ώστε να επιτυγχάνονται μετρήσεις σε διαφορετικά σημεία της διάφυσης με παρόμοιο τρόπο με



Σχήμα 2.11. Σχηματική αναπαράσταση διάταξης μέτρησης υπερήχων: (α) από το περιφερικό άκρο (proximal end) προς το εγγύς άκρο (distal end) (προς τα πάνω) και (β) από το εγγύς προς το περιφερικό άκρο (προς τα κάτω). Η συγκεκριμένη διάταξη χρησιμοποιήθηκε για την αντισταθμίση της επίδρασης των υπερκείμενων μαλακών ιστών σε *in-vivo* μετρήσεις [15]. Το σημάδι είναι τοποθετημένο στο μέσο της απόστασης σάρωσης.

αυτόν που ακολουθείται στην τεχνική σάρωσης δέκτη. Ωστόσο στη συγκεκριμένη περίπτωση η ταχύτητα καταγραφόταν καθώς ο δέκτης μετακινούνταν σε δύο αντίθετες κατευθύνσεις σάρωσης, μία προς τα κάτω δηλ. από το περιφερικό άκρο (proximal end) προς το εγγύς άκρο (distal end) και μία προς τα πάνω, δηλ. προς το περιφερικό άκρο.

(Σχήμα 2.11). Η κεντρική μέτρηση (που παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.11 από το σημείο που είναι τοποθετημένο το σημάδι) και στις δύο περιπτώσεις ελήφθη στο μέσο της απόστασης σάρωσης. Η τελική διορθωμένη ταχύτητα προσδιορίστηκε ως η αρμονική μέση τιμή των ταχυτήτων που μετρήθηκαν στις δύο περιπτώσεις κατεύθυνσης σάρωσης.

2.3.2 Αξιολόγηση Αθικτων Μακρών Οστών

2.3.2.1 Πειραματικές Μελέτες

Οι Foldes *et al.*, [16] πραγματοποίησαν μετρήσεις ταχύτητας του FAS στην κνήμη 307 γυναικών, ώστε να συσχετίσουν την ταχύτητα με το BMD του οσφυϊκού σπονδύλου, της κεφαλής του μηριαίου και της διάφυσης της κερκίδας, τα οποία αποτελούν τμήματα του σκελετού που παρουσιάζουν συχνότερα οστεοπόρωση. Οι μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν σε συχνότητα 250 KHz με χρήση του εμπορικού συστήματος SoundScan 2000 και σε κάθε μέτρηση ταχύτητας μετρήθηκε ταυτόχρονα και το BMD των παραπάνω οστών με DEXA. Βρέθηκε ότι ο συντελεστής συσχέτισης της ταχύτητας με το BMD στο σπόνδυλο ήταν $R^2 = 0.50$, στο μηριαίο $R^2 = 0.47$ και στην κερκίδα $R^2 = 0.63$. Τα αποτελέσματα απέδειξαν ότι η ταχύτητα διάδοσης στο φλοιό της κνήμης, συσχετίζεται ικανοποιητικά με την πυκνότητα διαφόρων τμημάτων του σκελετού και συνεπώς θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για τη διάγνωση της οστεοπόρωσης. Παρόλα αυτά οι συγγραφείς επισήμαναν ότι απαιτούνται επιπλέον μελέτες για την αξιολόγηση της διαγνωστικής ικανότητας της ταχύτητας της κνήμης.

Σε μία άλλη πειραματική μελέτη [17] πραγματοποιήθηκαν μετρήσεις ταχύτητας στο πρόσθιο-έσω ανατομικό επίπεδο 26 πτωματικών ανθρώπινων κνημών. Οι μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν σε συχνότητα 250 KHz (SoundScan 2000). Από την περιοχή μέτρησης εξήχθησαν κυλινδρικά δοκίμια που υπέστησαν εμβιομηχανική δοκιμασία εφελκυσμού. Η πυκνότητα του κάθε δοκίμιου προσδιορίστηκε με QCT. Βρέθηκε ότι η ταχύτητα του FAS συσχετίζονταν στατιστικά σημαντικά με το BMD της περιοχής ($R^2 = 0.74$), με το μέτρο του Young κατά την διαμήκη διεύθυνση ($R^2 = 0.84$), με την οριακή αντοχή ($R^2 = 0.75$), με την τάση διαρροής ($R^2 = 0.69$), με την οριακή παραμόρφωση ($R^2 = 0.31$) και με το σημείο διαρροής ($R^2 = 0.28$). Ωστόσο, σε μια επόμενη κλινική μελέτη [18] όπου πραγματοποιούνται μετρήσεις ταχύτητας στη μεσότητα της κνήμης υγιών γυναικών και σε συχνότητα 1.25 MHz (Omnisense), ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ

ταχύτητας και BMD ήταν $R^2 = 0.29$, δηλ. χαμηλότερος συγκριτικά με τη μελέτη [17]. Το γεγονός αυτό πιθανόν να οφείλεται στις διαφορετικές συχνότητες που χρησιμοποιήθηκαν στις δύο μελέτες.

Οι Njeh *et. al.* [19] πραγματοποίησαν μία πειραματική μελέτη με σκοπό να διερευνήσουν τη συσχέτιση της ταχύτητας του FAS με το πάχος του φλοιώδους οστού. Η ταχύτητα μετρήθηκε σε συχνότητα 1.25 MHz (με το σύστημα Omnisense) τόσο σε οστικά φανταστικά από Perspex (acrylic plastic) όσο και σε οστικά δοκίμια από τη διάφυση και τον τροχαντήρα βοείου μηρού. Τα οστικά φανταστικά είχαν γεωμετρία πλακάς και κοίλου κυλίνδρου. Στα φανταστικά με γεωμετρία πλάκας πραγματοποιήθηκε σταδιακή μεταβολή του πάχους από 1 έως 20 mm ενώ σε αυτά με γεωμετρία κυλίνδρου πραγματοποιήθηκε σταδιακή μείωση της εσωτερικής ακτίνας του κυλίνδρου ή σταδιακή λέπτυνση του φλοιού του κυλίνδρου. Με παρόμοιο τρόπο μεταβάλλονταν και το πάχος του φλοιού της διάφυσης και του τροχαντήρα. Για τα οστικά φανταστικά βρέθηκε ότι για πάχος πλάκας ή τοιχώματος κυλίνδρου μεγαλύτερο από 3 mm η ταχύτητα του FAS ήταν ίση με τη διαμήκη ταχύτητα του υλικού Perspex (2750 m/s). Αντιθέτως, για πάχη μικρότερα από 3 mm η ταχύτητα μειωνόταν απότομα και το πρότυπο μείωσης ήταν διαφορετικό για κάθε γεωμετρία. Αντίστοιχα συμπεράσματα βρέθηκαν και για τα οστικά δοκίμια. Η ταχύτητα παρέμενε σταθερή για πάχη του φλοιού μεγαλύτερα από 4 mm, και μειωνόταν για μικρότερα πάχη. Σε όλες τις περιπτώσεις, η μείωση της ταχύτητας ξεκινούσε για τιμές χαμηλότερες από μία τιμή πάχους που ήταν περίπου ίση με το μήκος κύματος του εκάστοτε μέσου. Με βάση τα αποτελέσματα της μελέτης οι συγγραφείς συμπέραναν ότι για πάχη μικρότερα από το μήκος κύματος η ταχύτητα του FAS εξαρτάται από το πάχος και τη γεωμετρία του μέσου. Για πρώτη φορά ποσοτικοποιήθηκε η σχέση μεταξύ της ταχύτητας αξονικής διάδοσης του FAS και του πάχους του μέσου, χωρίς ωστόσο να εξαχθούν συμπεράσματα για τον τύπο του κύματος που αντιστοιχεί στο FAS.

Σε μια άλλη πειραματική μελέτη [20] πραγματοποιήθηκαν μετρήσεις υπερήχων σε οστικά φανταστικά και *in vitro* σε οστικά δοκίμια για να διερευνηθεί ο τύπος του FAS και η συσχέτιση του με το πάχος του οστού. Πραγματοποιήθηκαν μετρήσεις υπερήχων σε συχνότητα 100 kHz και 500 kHz. Χρησιμοποιήθηκαν διάφορα πολυμερή υλικά σε γεωμετρία κοίλου κυλίνδρου με μεταβαλλόμενη εσωτερική διάμετρο. Επίσης,

κατασκευάστηκαν πλάκες με στρωσιγενή δομή όπου τα βαθύτερα στρώματα περιείχαν μικρούς ελαστικούς κυλίνδρους (διαμήκης ταχύτητα 1500 m/s) διατεταγμένους με τυχαίο ή μη προσανατολισμό και με διάφορες συγκεντρώσεις από δοκίμιο σε δοκίμιο. Οι κύλινδροι προσομοίωναν το πορώδες του οστού. Τα οστικά δοκίμια προέρχονταν από τη διάφυση βοείας κνήμης με μεταβαλλόμενο πάχος του φλοιού. Παρατηρήθηκε ότι για συχνότητα 100 KHz, το κύμα FAS αντιστοιχούσε στο ρυθμό A0 και η ταχύτητα του μεταβάλλονταν από πολύ χαμηλές τιμές για πολύ λεπτά δοκίμια έως την τιμή της ταχύτητας του επιφανειακού κύματος Rayleigh για μεγάλα πάχη. Αντίθετα, για 500 KHz για μικρά πάχη το κύμα FAS αντιστοιχούσε στο ρυθμό S0 και για πάχη μεγαλύτερα από το μήκος κύματος στο κάθε υλικό το κύμα FAS αντιστοιχούσε στο πλευρικό κύμα. Τα αποτελέσματα επιβεβαίωναν τα ευρήματα προηγούμενων υπολογιστικών μελετών που αναλύονται στην ενότητα 2.3.2.2. Παρατηρήθηκε επίσης ότι το πορώδες είναι ένας επιπρόσθετος παράγοντας που επηρεάζει την ταχύτητα του FAS.

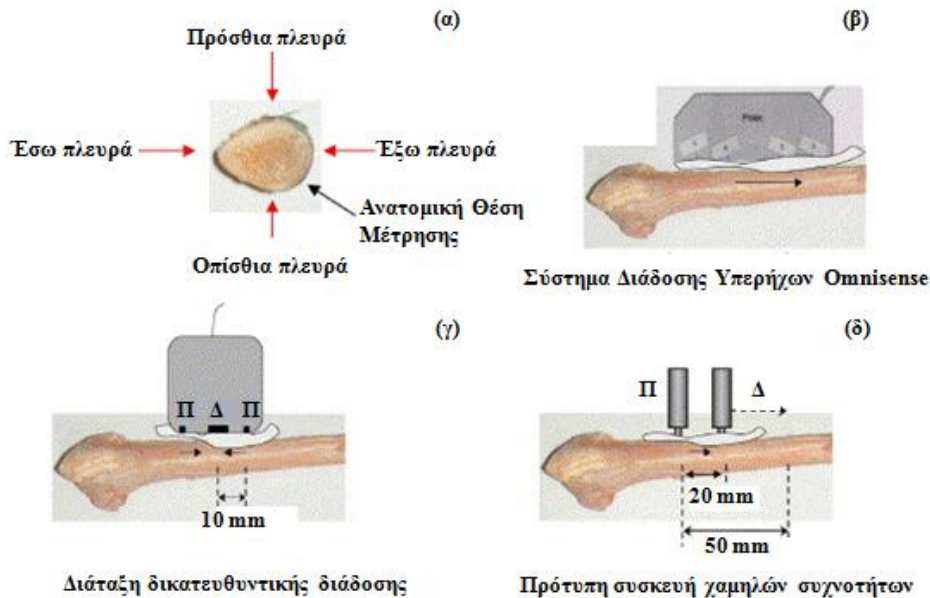
Σε μία μεταγενέστερη *in vitro* μελέτη [13] διερευνήθηκε η συσχέτιση της ταχύτητας του FAS με την πυκνότητα και το πορώδες του φλοιού για διάφορα βάθη. Οι μετρήσεις υπερήχων (συχνότητας 1 MHz) έγιναν χρησιμοποιώντας την τεχνική δικατευθυντικής αξονικής διάδοσης κατά την οποία οι μετατροπείς τοποθετήθηκαν απευθείας επί της επιφάνειας της κερκίδας. Μετρήθηκαν το πορώδες και το BMD με QCT σε βάθος 1 mm υπο-περιστικά και επίσης σε όλο το πάχος του φλοιού. Βρέθηκε ότι η ταχύτητα συσχετιζόταν ισχυρότερα με τις ιδιότητες του εξωτερικού στρώματος του φλοιού ($R^2 = 0.28$ για το πορώδες και $R^2 = 0.57$ για το BMD) από ότι για ολόκληρο το πάχος του φλοιού ($R^2 = 0.12$ για το πορώδες και $R^2 = 0.23$ για το BMD), γεγονός που υποδεικνύει ότι, για τη συγκεκριμένη συχνότητα, το κύμα FAS διαδίδεται κατά μήκος της υπο-επιφάνειας του φλοιού. Οι συγγραφείς πρότειναν επίσης ένα μοντέλο που περιγράφει με μεγάλη ακρίβεια τη διακύμανση της ταχύτητας συναρτήσει του πορώδους του εξωτερικού στρώματος του φλοιού και της αληθούς πυκνότητας του εξωτερικού στρώματος του φλοιού που ορίζεται ως:

$$\rho_t = \frac{m_{bone}}{BV} = \frac{1}{VF} \rho, \quad (2.82)$$

όπου ρ είναι η φαινόμενη πυκνότητα, VF είναι το κλάσμα όγκου (volume fraction) που ορίζεται ως:

$$VF = \frac{BV}{TV}. \quad (2.83)$$

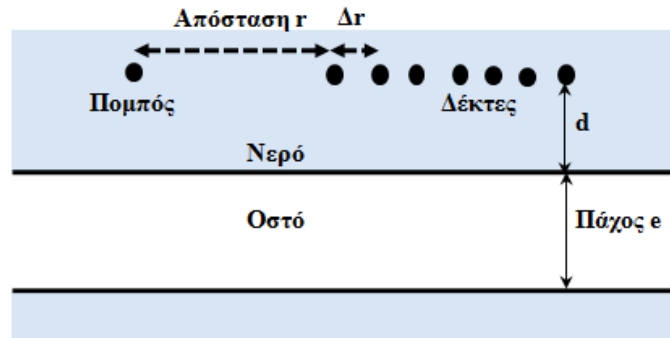
Όπου BV (bone volume) είναι ο όγκος του οστίτη ιστού που ισούται με το συνολικό όγκο του οστού μείον τον όγκο που καταλαμβάνουν οι πόροι, και TV είναι ο συνολικός όγκος (total volume). Σύμφωνα με το προτεινόμενο μοντέλο, μια μεταβολή του πορώδους κατά 10% συνεπάγεται μείωση της ταχύτητας κατά 240 m/s.



Σχήμα 2.12. (α) Απεικόνιση ανατομικής θέσης μέτρησης στο οστικό δοκίμιο. (β) Εφαρμογή συστήματος διάδοσης υπερήχων Omnisense, (γ) εφαρμογή διάταξης δικατευθυντικής διάδοσης και (δ) χρήση πρότυπης συσκευής χαμηλών συχνοτήτων.

Οι Muller *et al.*, [21] συνέκριναν τρεις ήδη υπάρχουσες προσεγγίσεις αξονικής διάδοσης υπερήχων πραγματοποιώντας *in-vitro* μετρήσεις ταχύτητας σε ανθρώπινες κνήμες. Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιήθηκε το εμπορικό σύστημα υπερήχων Omnisense το οποίο λειτουργεί σε συχνότητα 1.25 MHz, μια πρότυπη διάταξη δικατευθυντικής διάδοσης που λειτουργεί σε συχνότητα 1 MHz και μια πρότυπη συσκευή χαμηλής συχνότητας (200 kHz) (2.12 (α-δ)). Οι ταχύτητες που προέκυψαν από τις τρεις προσεγγίσεις συγκρίθηκαν μεταξύ τους και συσχετίστηκαν με τις υλικές και δομικές ιδιότητες των οστών, οι οποίες είχαν μετρηθεί με QCT. Από τις τρεις εξεταζόμενες συσκευές, οι μετρήσεις που προέκυψαν από την τεχνική δικατευθυντικής διάδοσης βρέθηκε ότι συσχετίζονταν πιο σημαντικά με τις μηχανικές ιδιότητες του

οστού. Από τα αποτελέσματα της μελέτης προέκυψε ότι οι διαφορετικές τεχνικές αξονικής διάδοσης προσδιορίζουν ικανοποιητικά διαφορετικές ιδιότητες του οστού. Οι συγγραφείς συμπέραναν ότι μια νέα τεχνική αξονικής διάδοσης υπερήχων σε διαφορετικές συχνότητες θα έπαιξε σημαντικό ρόλο στον προσδιορισμό των



Σχήμα 2.13. Γεωμετρική διάταξη πομπού - πολλαπλών δεκτών για την προσομοίωση της τεχνικής αξονικής διάδοσης.

διαφορετικών υλικών και δομικών ιδιοτήτων του οστού. Η ίδια ερευνητική ομάδα σε επόμενη παρόμοια μελέτη, συνέκρινε τις προαναφερθείσες τεχνικές αξονικής διάδοσης με την τεχνική περιφερικής ποσοτικής υπολογιστικής τομογραφίας (peripheral Quantitative Tomography-pQCT) ως προς την ικανότητα πρόβλεψης του μέτρου του Young και του φορτίου αστοχίας (failure load) των οστών. Βρέθηκε ότι το φορτίο αστοχίας ήταν δυνατόν να προβλεφθεί με μεγαλύτερη ακρίβεια από το πάχος του φλοιού που μετρήθηκε με pQCT ενώ το μέτρο του Young από την ταχύτητα υπερήχων που προέκυψε από την τεχνική δικατευθυντικής διάδοσης υπερήχων.

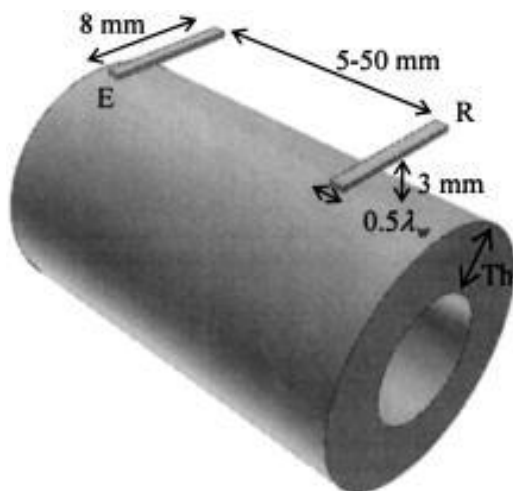
2.3.2.2 Υπολογιστικές Μελέτες

Οι Bossy *et al*, [11] πραγματοποίησαν μια 2-Δ υπολογιστική μελέτη αξονικής διάδοσης υπερήχων με σκοπό να διερευνήσουν τη ταχύτητα και τον τύπο του FAS για διάφορα πάχη του φλοιώδους οστού. Το οστό μοντελοποιήθηκε ως μια πλάκα με διαμήκη ταχύτητα 4000 m/s, διατμητική ταχύτητα 1800 m/s, πυκνότητα 1850 Kg/m³, δηλ. με ιδιότητες που αντιστοιχούν σε αυτές του φλοιώδους οστού. Το πάχος της πλάκας μεταβαλλόταν από 0.5-12 mm. Η πλάκα ήταν πλήρως εμβαπτισμένη σε νερό και ο πομπός και ο δέκτης (συχνότητα 1 MHz) βρίσκονταν μέσα στο νερό σε απόσταση 2 mm από την επιφάνεια της πλάκας όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.13. Η απόσταση πομπού και δέκτη μεταβαλλόταν σταδιακά από 4 έως 100 mm (Σχήμα 2.13). Το πρόβλημα κυματικής διάδοσης επιλύθηκε αριθμητικά με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών

(finite differences). Από τις κυματομορφές του σήματος στο δέκτη για διάφορα πάχη της πλάκας και αποστάσεις πομπού-δέκτη 20 mm και 30 mm, αντίστοιχα, βρέθηκε ότι για μεγάλο πάχος της πλάκας το FAS έφθανε στο δέκτη πολύ νωρίτερα από τα υπόλοιπα κύματα και είναι σαφώς χρονικά διαχωρισμένο από την υπόλοιπη κυματομορφή. Όταν το πάχος, d γινόταν μικρότερο από το μήκος κύματος, $\lambda = 4$ mm, το FAS υπερθέτονταν με επιπρόσθετα κύματα και δεν είναι δυνατόν να διαχωριστεί στο πεδίο του χρόνου.

Για $d \geq \lambda$ η ταχύτητα του FAS βρέθηκε ίση με τη διαμήκη ταχύτητα του μέσου, γεγονός που επιβεβαιώνει τα πειραματικά ευρήματα της [19]. Οι συγγραφείς της μελέτης υποστήριξαν ότι σε αυτήν την περίπτωση το FAS αντιστοιχεί σε ένα πλευρικό κύμα όμοιο με αυτό που εμφανίζεται στην υπο-επιφάνεια ενός ημι-άπειρου μέσου. Η θεωρία προβλέπει ότι το πλευρικό κύμα δεν εμφανίζει διασπορά και ότι το πλάτος του εξασθενεί γρήγορα με την απόσταση, γεγονός που επίσης επιβεβαιώθηκε στην συγκεκριμένη μελέτη. Για την περίπτωση κατά την οποία $d < \lambda$ εξετάστηκαν δύο υποπεριπτώσεις: (i) $d \leq \lambda/4$ και (ii) $\lambda/4 < d < \lambda$. Στην περίπτωση (i) ($d \leq \lambda/4$), η ταχύτητα του FAS βρέθηκε να τείνει προς την ταχύτητα πλάκας, δηλ. την ταχύτητα με την οποία διαδίδεται ο Lamb ρυθμός S0 για θεωρητικά μηδενικό πάχος (3215 m/s). Συνεπώς σε αυτήν την περίπτωση, το κύμα FAS αντιστοιχεί στον ρυθμό S0, ο οποίος για τόσο λεπτά πάχη δεν παρουσιάζει διασπορά. Στην περίπτωση (ii) ($\lambda/4 < d < \lambda$) η ταχύτητα του FAS βρέθηκε ότι εξαρτάται από το πάχος της πλάκας. Πιο συγκεκριμένα καθώς μειωνόταν το πάχος της πλάκας, η ταχύτητα έπαιρνε μικρότερες τιμές από τη διαμήκη ταχύτητα, οι οποίες όμως έτειναν προς αυτή της ταχύτητας πλάκας. Βρέθηκε επίσης ότι το FAS διαδίδονταν ως ο κυματοδηγούμενος ρυθμός S0 του οποίου η ταχύτητα περιγράφεται από τη καμπύλη διασποράς ταχύτητας. Σε μια προηγούμενη 2D υπολογιστική μελέτη [22] σε μοντέλο πλάκας από Perspex βρέθηκε ότι η επίδραση του πάχους στην ταχύτητα και τον τύπο του κύματος FAS ξεκινούσε όταν $d < 0.4\lambda$ και όχι όταν $d < \lambda$, πιθανώς λόγω της τοποθέτησης των μετατροπέων απευθείας πάνω στην επιφάνεια της πλάκας και όχι μέσα στο ρευστό. Με βάση τα ευρήματα της μελέτης [11], οι συγγραφείς υποστήριξαν ότι οι μετρήσεις ταχύτητας θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν ως μέσο διάγνωσης της οστεοπόρωσης εφόσον αντανακλούν τυχόν μείωση του φαινομένου (effective) πάχους του φλοιού, φαινόμενο που παρατηρείται στην οστεοπόρωση.

Σε μεταγενέστερη υπολογιστική μελέτη της ίδιας ερευνητικής ομάδας [23] διερευνήθηκε συστηματικά η επίδραση της ανισοτροπίας, του πορώδους και της 3Δ



Σχήμα 2.14. Σχηματική αναπαράσταση διάταξης πομπού και δέκτη για μετρήσεις υπερήχων αξονικής διάδοσης σε φλοιώδες οστό. λ_w είναι το μήκος κύματος του νερού ή των μαλακών ιστών, E είναι ο πομπός, R είναι ο/οι δέκτης/δέκτες και T_i είναι το πάχος του φλοιού [23].

γεωμετρία του φλοιού του οστού στην ταχύτητα του FAS. Για πρώτη φορά κατασκευάστηκε ένα 3Δ μοντέλο κυματικής διάδοσης σε οστό. Η γεωμετρία του μοντέλου ήταν απλή και περιελάμβανε ένα κοίλο κύλινδρο με κυκλική διατομή όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.14. Μελετήθηκαν δύο περιπτώσεις ελαστικής συμμετρίας: η ισοτροπία και η εγκάρσια ισοτροπία. Οι ιδιότητες του μοντέλου του οστού στις δύο περιπτώσεις παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.1. Για πυκνότητα $1,85 \text{ Kg/m}^3$ και σύμφωνα με τις ελαστικές σταθερές του Πίνακα 3.5, η διαμήκης και διατμητική ταχύτητα του μέσου κατά τον μακρύ άξονα ήταν 4000 m/s και 1880 m/s , αντίστοιχα, και παρέμειναν ίδιες και στις δύο περιπτώσεις ελαστικής συμμετρίας. Ο πομπός και δέκτης τοποθετήθηκαν μέσα σε νερό που περιέβαλε την εξωτερική και εσωτερική επιφάνεια του κυλίνδρου Σχήμα 2.14. Ο εκπεμπόμενος παλμός ήταν ένα κύμα με κεντρική συχνότητα 1 MHz . Επίλυση στο πρόβλημα δόθηκε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.

Αρχικά διερευνήθηκε η επίδραση της καμπυλότητας του μέσου και του πάχους του τοιχώματός του στην ταχύτητα και τον τύπο του κύματος FAS κάνοντας σύγκριση με πλάκες ισοδύναμου πάχους. Δεν παρατηρήθηκαν σημαντικές διαφοροποιήσεις στις

τιμές ταχυτήτων που μετρήθηκαν σε 3Δ και 2Δ μέσα όμοιας ελαστικής συμμετρίας, υποδεικνύοντας ότι η καμπυλότητα του μέσου διάδοσης δεν επηρεάζει την ταχύτητα και τον τύπο του FAS. Αντιθέτως, η ανισοτροπία του οστού βρέθηκε ότι έχει σημαντική επίδραση στην ταχύτητα του FAS. Από τα αποτελέσματα της μελέτης προέκυψε ότι για πολύ λεπτά τοιχώματα, το κύμα FAS και στις δύο περιπτώσεις αντιστοιχεί στο ρυθμό S0 ο οποίος δεν παρουσιάζει διασπορά και διαδίδεται με την ταχύτητα πλάκας. Η ταχύτητα πλάκας στην περίπτωση ανισοτροπίας ορίζεται ως:

$$c_{plate(anisotropic)} = \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho} \left(1 - \frac{C_{13}^2}{C_{11}C_{33}} \right)}, \quad (2.84)$$

από όπου προκύπτει ότι: $c_{plate(isotropic)} = 3215$ m/s και $c_{plate(anisotropic)} = 3560$ m/s.

Παρατηρείται επίσης ότι η επίδραση του πάχους του τοιχώματος στην ταχύτητα του FAS στο ανισότροπο μέσο γίνεται εμφανής όταν $d < 0,5\lambda$, ενώ στο ισότροπο όταν $d < \lambda$. Πραγματοποιώντας μετρήσεις σε συχνότητες από 500 KHz – 2 MHz, οι συγγραφείς απέδειξαν επίσης ότι το πλευρικό κύμα FAS διαδίδεται κατά μήκος ενός υπο-περιοστικού στρώματος σε βάθος διείσδυσης που κυμαίνεται από 1.6 mm για συχνότητα 500 kHz έως 1.1 mm για συχνότητα 2 MHz.

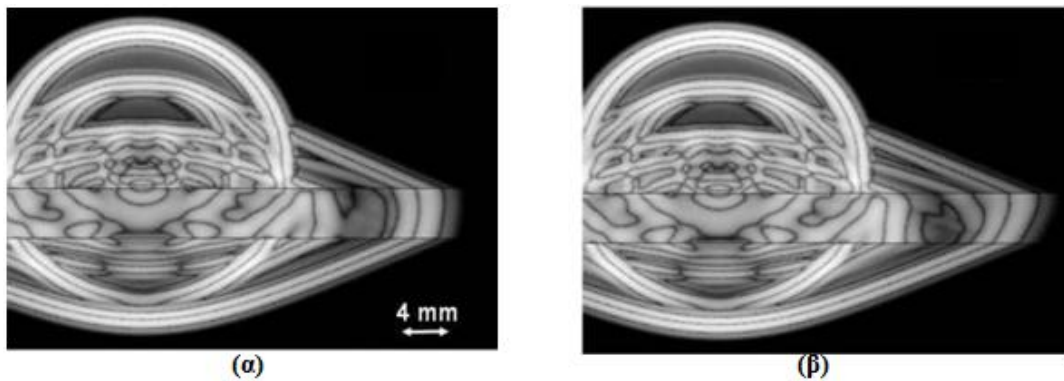
Πίνακας 2.1. Ελαστικές σταθερές (σε GPa) για ισότροπο και εγκάρσια ισότροπο μοντέλο οστού που χρησιμοποιήθηκε στη μελέτη [23].

Ελαστικές Σταθερές	Ισότροπο	Εγκάρσια Ισότροπο
$C_{11} = C_{22}$	29,6	21,5
C_{33}	29,6	29,6
$C_{12} = C_{23} = C_{31}$	17,6	11,5
$C_{44} = C_{55}$	6,0	6,0
C_{66}	6,0	5,0

Για τη διερεύνηση της επίδρασης του πορώδους στην ταχύτητα του FAS, το 3Δ μοντέλο το φλοιώδους οστού θεωρήθηκε ότι αποτελούνταν από πόρους που εισάγονται από τους Αβέρσειους σωλήνες. Οι πόροι που μοντελοποιήθηκαν ως διαμήκεις κύλινδροι αποτελούνταν από νερό και είχαν σταδιακά αυξανόμενη διάμετρο έτσι ώστε να προσομοιωθούν τιμές πορώδους από 0 - 20%. Η πυκνότητα των πόρων διατηρήθηκε σταθερή και ίση με 10 πόρους/mm². Αποδείχθηκε ότι 15% ποσοστό πορώδους έχει ως

αποτέλεσμα τη μείωση της ταχύτητας κατά 300 m/s ανά ποσοστό πορώδους γεγονός που ήταν σε συμφωνία με προηγούμενη πειραματική μελέτη [13]. Από τα αποτελέσματα της μελέτης οι συγγραφείς υποστήριξαν ότι ομογενή και ισότροπα μοντέλα οστού δεν παρέχουν ρεαλιστική προσομοίωση της κυματικής διάδοσης στα οστά.

Σε μια πρόσφατη υπολογιστική μελέτη [73] για την αξιολόγηση της οστεοπόρωσης διερευνήθηκε η επίδραση της βαθμίδας των υλικών ιδιοτήτων του οστού (πυκνότητα, συντελεστές μητρώου στιβαρότητας) στην ελαστοδυναμική απόκριση του οστού σε διέγερση υπερήχων. Σκοπός ήταν να διερευνηθεί η εξάρτηση του κύματος FAS από την ετερογενή φύση του οστού σε επίπεδο μικροδομής. Η πλάκα που προσομοίωσε το οστό ήταν εγκάρσια ισότροπη και η επιφάνειές της συνορεύει με δύο στρώματα ρευστού που προσομοίωναν την ύπαρξη των μαλακών ιστών. Στιγμιότυπα της διάδοσης κυμάτων υπερήχων στα 2Δ μοντέλα τριών στρωμάτων παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.15. Στο Σχήμα 2.15 (α) το οστό θεωρείται ότι είναι ομογενές ενώ στο Σχήμα 2.15 (β) ετερογενές με βαθμίδα της ελαστικής σταθερά C_{11} του οστού ίση με 30 GPa cm^{-1} . Στην περίπτωση που το οστό θεωρείται ομογενές παρατηρείται ότι ο προσανατολισμός του μετώπου του γρηγορότερου κύματος (FAS) είναι κάθετο στην επιφάνεια του οστού,



Σχήμα 2.15. Στιγμιότυπα κυματικής διάδοσης σε 2Δ μοντέλο τριών στρωμάτων αποτελούμενο από ένα εγκάρσια ισότροπο στερεό στρώμα που προσομοιώνει το οστό και δύο στρώματα ρευστού που συνορεύουν με τις επιφάνειες του οστού και προσομοιώνουν τους μαλακούς ιστούς. (α) Το στερεό στρώμα οστού θεωρείται ομογενές. (β) Το στερεό στρώμα οστού θεωρείται ετερογενές με βαθμίδα της ελαστικής σταθεράς C_{11} ίση με 30 GPa cm^{-1} .

ενώ αντίθετα στην περίπτωση ανομοιογενούς στρώματος το μέτωπο του FAS αποκλίνει από το κάθετο στην επιφάνεια του οστού επίπεδο.

2.3.3 Αξιολόγηση πώρωσης καταγμάτων από μετρήσεις ταχύτητας

2.3.3.1 *In-vivo* και *ex-vivo* μελέτες

Οι Anast *et. al.* [24] διεξήγαγαν τις πρώτες *in-vivo* μετρήσεις ταχύτητας αξονικής διάδοσης σε κατεαγότα οστά κνήμης ανθρώπων με σκοπό την αξιολόγηση της πώρωσης καταγμάτων μακρών οστών. Η ταχύτητα διάδοσης μετρήθηκε σε κατεαγότα οστά διαφορετικών ασθενών στα διάφορα στάδια πώρωσης όσο και σε άθικτα. Η βασικότερη παρατήρηση ήταν ότι όταν οι ασθενείς που είχαν την δυνατότητα να φορτίσουν το πάσχον μέλος τους (κλινική πώρωση), η ταχύτητα είχε αποκατασταθεί περίπου κατά 80% της τιμής της ταχύτητας στο άθικτο οστό. Το 1967, οι Floriani *et. al.* [25] πραγματοποίησαν μετρήσεις ταχύτητας αξονικής διάδοσης (συχνότητας 100 kHz) σε μοντέλο κατάγματος μηρού σε ινδικά χοιρίδια. Μετά την πάροδο 6 μετεγχειρητικών μηνών, τα οστά αξιολογήθηκαν κλινικά και ακτινολογικά και κατηγοριοποιήθηκαν διαφορετικές ομάδες ανάλογα με την επιτυχή εξέλιξη ή μη της πώρωσης και συγκρίθηκαν με τα άθικτα ερερόπλευρα οστά. Βρέθηκε ότι στα οστά με επιτυχή πώρωση η ταχύτητα είχε αποκατασταθεί κατά 94% της τιμής στο άθικτο οστό, ενώ σε αυτά με καθυστερημένη πώρωση και ψευδάρθρωση κατά 81% και 67%, αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα των παραπάνω μελετών [24,25] έδειξαν ότι η αξιολόγηση της πώρωσης μέσω υπερήχων είναι σε συμφωνία με την ακτινολογική και κλινική αξιολόγηση.

Σε μια επόμενη μελέτη σε ινδικά χοιρίδια οι Abendscein and Hyatt [25] διερεύνησαν την πιθανή συσχέτιση της ταχύτητας υπερήχων και του μέτρου ελαστικότητας του κατεαγότος οστού. Χρησιμοποιήθηκε αυτομόσχευμα στη διάφυση του μηρού και τα πειραματόζωα θυσιάστηκαν τον 6^ο μετεγχειρητικό μήνα. Το μέτρο ελαστικότητας προσδιορίστηκε αρχικά πολλαπλασιάζοντας το τετράγωνο της μετρούμενης ταχύτητας επί την πυκνότητα του δοκιμίου και συγκρίθηκε με την αντίστοιχη τιμή του μέτρου που προκύπτει απευθείας από την καμπύλη τάσης-παραμόρφωσης από την εμβιομηχανική δοκιμασία. Βρέθηκε ότι το μέτρο που προσδιορίστηκε εμβιομηχανικά παρουσίαζε γραμμική συσχέτιση με αυτό που υπολογίστηκε μέσω υπερήχων. Σε παρόμοια μεταγενέστερή μελέτη σε κάταγμα κνήμης 36 ποντικών [27] μελετήθηκε η συσχέτιση

της ταχύτητας υπερήχων με το μέτρο ελαστικότητας, το τελικό φορτίο (failure load) και την καμπτική στιβαρότητα τα οποία προσδιορίστηκαν από εμβιομηχανική δοκιμασία. Βρέθηκε ότι η συσχέτιση της ταχύτητας με τις εμβιομηχανικές ιδιότητες ήταν γενικά ισχυρότερη για τις μετρήσεις που πραγματοποιήθηκαν στην υψηλότερη εξεταζόμενη συχνότητα (1MHz). Αυτό πιθανώς να οφείλεται στο γεγονός ότι για συχνότητα 1 MHz η ταχύτητα του FAS αντιστοιχεί σε αυτή ενός πλευρικού κύματος η οποία δεν εξαρτάται από τις φυσικές διαστάσεις παρά μόνο από τις υλικές και μηχανικές ιδιότητες του οστού και του πόρου [3] .

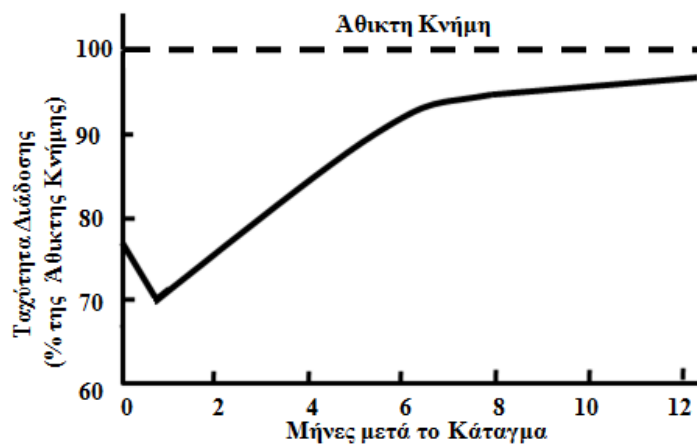
Σε μια άλλη μελέτη [28] προτάθηκε μια εναλλακτική διάταξη μετατροπέων για τη μέτρηση της ταχύτητας διάδοσης και εξασθένησης υπερήχων σε κατεαγότα οστά. Χρησιμοποιήθηκαν τέσσερις μετατροπείς συχνότητας 200 KHz T_2 , T_3 , R_1 και R_4 οι οποίοι τοποθετήθηκαν κατά μήκος του άξονα του οστού. Οι T_2 και T_3 τοποθετήθηκαν εκατέρωθεν της καταγματικής γραμμής. Για τη μέτρηση της ταχύτητας υπερήχων ο T_2 χρησιμοποιήθηκε ως πομπός και ο T_3 ως δέκτης, ενώ για τον προσδιορισμό της εξασθένησης οι T_2 και T_3 χρησιμοποιήθηκαν ως πομποί και οι R_1 και R_4 ως δέκτες. Οι δύο πομποί εξέπεμπαν διαδοχικά ακουστικούς παλμούς ώστε τα αντίστοιχα πλάτη των κυμάτων FAS που κατάφθαναν στον δέκτη R_1 να είναι ίσα μεταξύ τους. Αντίστοιχη διαδικασία ακολουθήθηκε και για τον R_4 . Γνωρίζοντας τα πλάτη των κυμάτων και τις αντίστοιχες αποστάσεις η εξασθένηση των υπερήχων υπολογιζόταν χωρίς να υπεισέρχεται η επίδραση των μαλακών ιστών. Η μέθοδος εφαρμόστηκε *in-vivo* σε υγιείς άνδρες, σε ασθενείς που είχαν υποστεί εγκάρσιο ή λοξό κάταγμα κνήμης μίας εβδομάδας και σε ασθενείς με κάταγμα τριών εβδομάδων. Παρατηρήθηκε ότι η ταχύτητα ήταν μικρότερη στα οστά με κάταγμα από ότι στα άθικτα και ότι ήταν στατιστικώς σημαντικά υψηλότερη στο κάταγμα τριών εβδομάδων σε σχέση με την τιμή της στο κάταγμα μίας εβδομάδας. Επιπλέον, πραγματοποιήθηκαν *in situ* (χωρίς τους μαλακούς ιστούς) μετρήσεις σε πτωματικές κνήμες ανθρώπων σε ορισμένες από τις οποίες προκλήθηκε τεχνητό εγκάρσιο κάταγμα (Πίνακας 2.2). Βρέθηκε ότι το κάταγμα επηρεάζει τις μετρήσεις ταχύτητας και εξασθένησης, γεγονός που παρατηρήθηκε και από τις *in-vivo* μετρήσεις. Αντιθέτως δεν παρατηρήθηκαν σημαντικές διαφοροποιήσεις στις μετρήσεις ταχύτητας και εξασθένησης με την αφαίρεση των μαλακών ιστών.

Το γενικό συμπέρασμα που προέκυψε από τις προαναφερθείσες μελέτες [24-28] ήταν ότι η ταχύτητα υπερήχων στα κατεαγότα οστά διαφοροποιείται από αυτή σε άθικτα. Ωστόσο, πραγματοποιήθηκαν μεμονωμένες και όχι σειριακές μετρήσεις κατά τη διάρκεια της πόρωσης και συνεπώς δεν κατέστη δυνατή η παρακολούθηση της

Πίνακας 2.2. Μετρήσεις ταχύτητας και εξασθένησης σε *in-vivo* και *in situ* πειράματα σε άθικτα και κατεαγότα οστά [28].

Πείραμα	Κατάσταση Οστού	Αριθμός δειγμάτων	Ταχύτητα (m/s)	Εξασθένηση (dB MHz ⁻¹ cm ⁻¹)
<i>In-vivo</i>				
	Άθικτη κνήμη	53	3614 ± 32	5,52 ± 0,43
	1 εβδομάδα μετά το κάταγμα	7	2375 ± 82	17,81 ± 3,91
	3 εβδομάδες μετά το κάταγμα	6	2882 ± 90	10,42 ± 3,56
<i>In situ</i>				
	Άθικτη κνήμη	37	3547 ± 22	5,78 ± 0,44
	Κάταγμα χωρίς κενό	8	3282 ± 41	13,12 ± 2,61
	Κάταγμα με κενό	7	3278 ± 45	16,59 ± 0,74
	Κάταγμα αναταγμένο με οστεοσύνθεση	10	3282 ± 58	17,81 ± 0,26
	Άθικτη κνήμη χωρίς μαλακούς ιστούς	12	3471 ± 31	6,30 ± 0,48
	Εφαρμογή οστεοσύνθεσης σε άθικτο οστό	7	3586 ± 68	7,12 ± 0,52
	Οστεοσύνθεση και 50% εγκάρσια εγκοπή	7	3508 ± 63	7,78 ± 2,57
	Οστεοσύνθεσης και 70% εγκάρσια εγκοπή	7	3433 ± 70	11,94 ± 2,98
	Οστεοσύνθεσης και 100% εγκάρσια εγκοπή	7	3209 ± 84	17,94 ± 3,44

εξέλιξης της διαδικασίας. Η πρώτη κλινική μελέτη που αναφέρεται στη βιβλιογραφία για το σκοπό αυτό πραγματοποιήθηκε το 1975 από τους Gerlanc *et al.*, [29] σε 21 ασθενείς με κλειστό κάταγμα διάφυσης στην ωλένη και την κνήμη. Αρχικά πραγματοποιήθηκαν σειριακές μετρήσεις ταχύτητας υπερήχων (100 KHz) στο πάσχον μέλος όσο και στο ετερόπλευρο, ανά μήνα και στη συνέχεια κάθε φορά που πραγματοποιούνταν ακτινολογική εξέταση. Βρέθηκε ότι η ταχύτητα μέχρι τον πρώτο μετεγχειρητικό μήνα μειωνόταν πιθανώς λόγω της νέκρωσης και απορρόφησης των

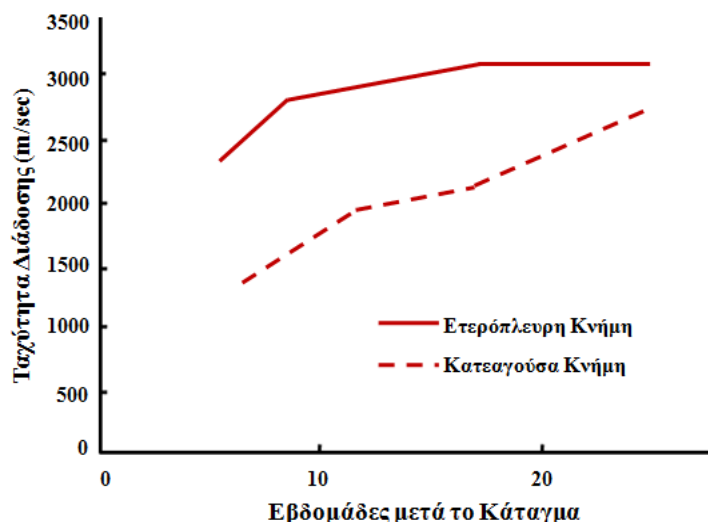


Σχήμα 2.16. Μεταβολή της ταχύτητας διάδοσης υπερήχων ως προς το χρόνο θεραπείας σε περίπτωση επιτυχούς εξέλιξης της πάρωσης που βρέθηκε στη μελέτη [28].

άκρων των οστικών τεμαχίων που προκαλείται από τη δράση των οστεοκλαστών στα αρχικά στάδια της δευτερογενούς πάρωσης. Κατά την εξέλιξη της πάρωσης παρατηρήθηκε σταδιακή αύξηση της ταχύτητας προς την αντίστοιχη τιμή στο άθικτο οστό (Σχήμα 2.16). Πιο συγκεκριμένα, τη στιγμή που οι ασθενείς ξεκίνησαν τη φόρτιση του άσχοντος μέλους με το βάρος του σώματος παρατηρήθηκε ότι η ταχύτητα είχε ξεπεράσει το 80 - 88% της τιμής του ετερόπλευρου οστού. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην σταδιακή ανάπτυξη και ωρίμανση του πόρου. Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων οι ερευνητές κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η μεταβολή της ταχύτητας αντικατοπτρίζει μια δυναμική διεργασία και συνεπώς οι μετρήσεις ταχύτητας θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για την ποσοτική αξιολόγηση της πάρωσης.

Παρόμοια μεταβολή της ταχύτητας κατά τη διαδικασία πάρωσης παρατηρήθηκε και σε μια μεταγενέστερη κλινική μελέτη [30] στην οποία πραγματοποιήθηκαν σειριακές μετρήσεις ταχύτητας αξονικής διάδοσης υπερήχων (1 MHz) σε ασθενείς με κλειστό κάταγμα διάφυσης κνήμης. Στον ασθενή του οποίου το κάταγμα πωρώθηκε επιτυχώς, η ταχύτητα παρουσίασε σταδιακή αύξηση όπως παρουσιάζεται στο (Σχήμα 2.17). Όταν διαγνώσθηκε κλινική πάρωση η ταχύτητα ήταν κατά 11.5% χαμηλότερη από την τιμή της άθικτης ετερόπλευρης κνήμης. Ωστόσο, σε αντίθεση με την μελέτη [29] στη συγκεκριμένη μελέτη η ταχύτητα στις ετερόπλευρες κνήμες δεν παρέμενε σταθερή αλλά μεταβάλλονταν κατά τη διάρκεια της πάρωσης, χωρίς να δοθεί ερμηνεία για το φαινόμενο. Οι συγγραφείς υποστήριξαν ότι η αποκατάσταση της ταχύτητας κατά 80%

αποτελεί ένα ασφαλές κατώφλι πόρωσης. Σχολίασαν επίσης ότι οι μετρήσεις υπερήχων επηρεάζονται σημαντικά από το οίδημα των μαλακών ιστών πάνω από το κάταγμα, το



Σχήμα 2.17. Μεταβολή της ταχύτητας διάδοσης υπερήχων ως προς το χρόνο θεραπείας σε περίπτωση επιτυχούς εξέλιξης της πόρωσης που βρέθηκε στη μελέτη [30].

οποίο πιθανώς δικαιολογεί και το πολύ ασθενές σήμα που λαμβάνονταν στα αρχικά στάδια. Παρόλα αυτά με την πρόοδο της πόρωσης το σήμα ήταν ισχυρότερο και κατά συνέπεια ο εντοπισμός του κύματος FAS ευκολότερος και με μεγαλύτερη ακρίβεια.

Σε επόμενη *in-vivo* μελέτη κατάγματος ωλένης κουνελιού [31] ο συγγραφέας πρότεινε το λόγο του πλάτους του FAS που αντιστοιχεί στην κατεαγούσα ωλένη προς αυτό της ετερόπλευρης υγιούς ως δείκτη πόρωσης. Ο προτεινόμενος δείκτης ονομάστηκε «δείκτης υπερηχητικής πόρωσης» (ultrasonic healing index) και εκφράζει την εξασθένηση των υπερήχων λόγω της διάδοσης μέσω του πόρου. Βρέθηκε ότι ο δείκτης αυξανόταν κατά τη διάρκεια της πόρωσης γεγονός που οδήγησε στο συμπέρασμα ότι θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως μέσο παρακολούθησης της πόρωσης.

Σε πρόσφατες πειραματικές μελέτες [6, 32] πραγματοποιήθηκαν μετρήσεις αξονικής διάδοσης υπερήχων για την παρακολούθηση της πόρωσης χρησιμοποιώντας ένα σύστημα υπερήχων το οποίο ενσωματώνει δυο μικροσκοπικούς μετατροπείς που εμφυτεύονται απευθείας στην περιοχή του κατάγματος (Σχήμα 2.18).

Το σύστημα αξιολογήθηκε υποβάλλοντας χειρουργικά 40 πρόβατα σε οστεοτομία στη μεσότητα της διάφυσης της κνήμης. Για τη σταθεροποίηση και ανάταξη του

κατάγματος χρησιμοποιήθηκε συσκευή εξωτερικής οστεοσύνθεσης. Οι μετατροπείς υπερήχων (1 MHz) που χρησιμοποιήθηκαν ήταν μη εστιασμένοι και ειδικά σχεδιασμένοι έτσι ώστε να τοποθετούνται επί της επιφάνειας του οστού. Οι μετατροπείς στερεώθηκαν επί του οστού εκατέρωθεν της καταγματικής γραμμής σε απόσταση 25 mm. Μετρήσεις υπερήχων ελήφθησαν πριν την οστεοτομία από τα άθικτα οστά και στη συνέχεια από τα κατεαγότα οστά ανά 4 μέρες έως την 100^η μετεγχειρητική ημέρα (ολοκλήρωση της μελέτης). Παρατηρήθηκαν τρία πρότυπα εξέλιξης της ταχύτητας. Το πρώτο ήταν παρόμοιο με αυτό που αναφέρθηκε στη μελέτη [28] και παρατηρήθηκε για 19 ζώα με επιτυχή δευτερογενή πώρωση, όπως αξιολογήθηκε από ακτινολογικό έλεγχο. Η ταχύτητα αρχικά μειώθηκε κατά μέσο όρο 17% αμέσως μετά την οστεοτομία, στη συνέχεια εξακολουθούσε να μειώνεται περαιτέρω κατά 13% έως την 38^η μετεγχειρητική ημέρα, ενώ μετά από αυτό το χρονικό σημείο άρχισε σταδιακά να αυξάνεται. Σύμφωνα με το δεύτερο πρότυπο μεταβολής της ταχύτητας, το οποίο παρατηρήθηκε σε 3 ζώα, η ταχύτητα αυξανόταν σταθερά μετά την οστεοτομία, καταδεικνύοντας ένα διαφορετικό τύπο πώρωσης. Από τον ακτινολογικό έλεγχο προέκυψε ότι είχε συμβεί πρωτογενής πώρωση κατά την οποία δε μεσολαβεί το ενδιάμεσο στάδιο σχηματισμού του χονδρικού ιστού και δε δημιουργείται πόρος. Το τρίτο πρότυπο μεταβολής της ταχύτητας αντιστοιχούσε σε 2 περιπτώσεις μη-πώρωσης και δεν εμφάνισε κάποια συστηματικά χαρακτηριστικά. Συνεπώς αποδείχθηκε ότι η μεταβολή της ταχύτητας δεν αντανακλά μόνο τη δυναμική βιολογική διαδικασία της πώρωσης αλλά και τον τύπο της πώρωσης. Διερευνήθηκε επίσης και η σχέση μεταξύ της εξέλιξης της ταχύτητας κατά τη διάρκεια της μετεγχειρητικής περιόδου και της κατάστασης της πώρωσης όπως αυτή αξιολογήθηκε ακτινολογικά από δύο παρατηρητές. Πιο συγκεκριμένα τα πειραματόζωα διαχωρίστηκαν σε δύο ομάδες: η πρώτη περιελάμβανε τα πειραματόζωα που έφτασαν σε ακτινολογική πώρωση και η δεύτερη αυτά που δεν έδειξαν σημάδια ακτινολογικής πώρωσης. Παρατηρήθηκε ότι κατά μέσο όρο, ακόμη και από την 50^η μετεγχειρητική ημέρα, η ταχύτητα που μετρήθηκε στα πωρωθέντα οστά ήταν υψηλότερη από την αντίστοιχη που μετρήθηκε στα μη-πωρωθέντα αλλά δεν παρατηρήθηκαν στατιστικώς σημαντικές διαφορές ανάμεσα στις δύο ομάδες ($P < 0.05$). Βρέθηκε επίσης ότι η ταχύτητα που μετρήθηκε την 70^η μετεγχειρητική ημέρα ξεπερνούσε το 80% της αντίστοιχης τιμής στο άθικτο οστό. Μετά την ευθανασία των ζώων πραγματοποιήθηκε οστική πυκνομετρία και εμβιομηχανική δοκιμασία κάμψης τριών σημείων σε όλα τα πωρωθέντα οστά. Βρέθηκε

ότι η ταχύτητα την 100^η μετεγχειρητική ημέρα συσχετιζόταν στατιστικώς σημαντικά με την τετραγωνική ρίζα του μέτρου του Young ($R = 0.81$), με την στιβαρότητα ($R = 0.75$)

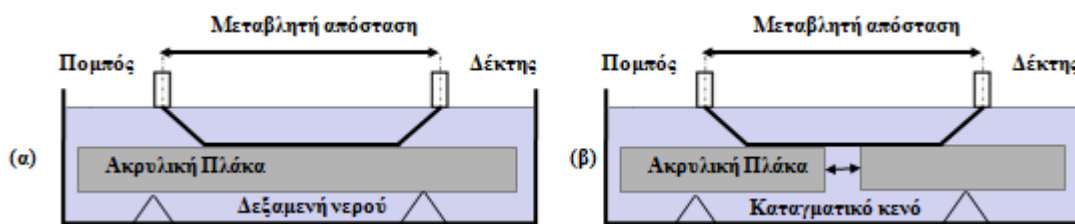


Σχήμα 2.18. (α) Υπερηχητικοί μετατροπείς από βιοσυμβατά υλικά και κατάλληλο σχεδιασμό για εμφύτευση και β) συσκευή καταγραφής των σημάτων και ασύρματης αποστολής τους αποτελούμενη από δυο λειτουργικές μονάδες [6, 32].

και με την οστική πυκνότητα του πόρου ($R = 0.82$).

2.3.3.2 Μελέτες σε οστικά φανταστικά

Οι Lowet και Van der Perre [33] χρησιμοποίησαν ακρυλικές (PMMA) πλάκες (με διαμήκη ταχύτητα 2730 m/s) για να μοντελοποιήσουν το φλοιό των μακρών οστών. Οι πλάκες εμβαπτίστηκαν πλήρως σε νερό και δύο μετατροπείς συχνότητας 200 kHz τοποθετήθηκαν κάθετα στην επιφάνεια του νερού και σε απόσταση 2 mm (Σχήμα 2.19(α)) από την επιφάνεια των πλακών. Το νερό χρησιμοποιήθηκε για την μοντελοποίηση των υπερκείμενων μαλακών ιστών. Αρχικά, πραγματοποιήθηκαν διαδοχικές μετρήσεις υπερήχων σε άθικτη πλάκα αυξάνοντας σταδιακά την απόσταση



Σχήμα 2.19. Πειραματική διάταξη μέτρηση ταχύτητας αξονικής διάδοσης σε ακρυλικές πλάκες όπου το κάταγμα προσομοιώνεται ως εγκάρσια διαμπερής τομή μεταβλητού πάχους [33].

πομπού-δέκτη (τεχνική σάρωσης δέκτη) και η ταχύτητα διάδοσης του FAS υπολογίστηκε από την κλίση της ευθείας που περιγράφει την απόσταση των μετατροπέων ως προς τον χρόνο άφιξης του FAS. Οι μετρήσεις ταχύτητας που λαμβάνονται κατ' αυτόν τον τρόπο είναι ακριβείς και δεν επηρεάζονται από το πάχος

του νερού με την προϋπόθεση ότι αυτό παραμένει σταθερό. Για τον προσδιορισμό του τύπου του κύματος FAS οι ερευνητές υπέθεσαν ότι ο ελάχιστος χρόνος διέλευσης του FAS επιτυγχάνεται όταν το κύμα αρχικά εισέρχεται στην πλάκα υπό την κρίσιμη γωνία, στη συνέχεια διαδίδεται κατά μήκος της επιφάνειας της πλάκας και τέλος εξέρχεται από την πλάκα και πάλι υπό την κρίσιμη γωνία έως ότου φτάσει στο δέκτη. Ο ελάχιστος χρόνος διέλευσης υπολογίστηκε θεωρητικά και βρέθηκε σε απόλυτη συμφωνία με τις πειραματικές μετρήσεις. Ο υπολογισμός του μονοπατιού στηρίζονταν στη θεωρία ακτίνων (ray theory). Ωστόσο, η θεωρία ακτίνων δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν το μήκος κύματος είναι τέτοιο ώστε να μπορούν να προκληθούν φαινόμενα κυματοδήγησης.

Στη συνέχεια προκλήθηκε εγκάρσια διαμπερής τομή στη μεσότητα της πλάκας (Σχήμα 2.19(β)) και τα τεμάχια της πλάκας ανατάχθηκαν έτσι ώστε το μεταξύ τους κενό να είναι 0, 10 και 20 mm. Το καταγματικό κενό αρχικά αποτελούνταν από νερό και στη συνέχεια από πλαστικό υλικό (με διαμήκη ταχύτητα 2995 m/s). Από τα διαγράμματα χρόνου άφιξης - απόστασης μεταξύ μετατροπέων για κάθε περίπτωση πλάτους καταγματικού κενού βρέθηκε ότι όταν τα δύο τεμάχια ήταν σε πλήρη ανάταξη η καμπύλη που προέκυψε από τις μετρήσεις ταυτιζόταν με αυτή στην περίπτωση άθικτης πλάκας. Τα ευρήματα αυτά καταδεικνύουν ότι κατάγματα στα οποία το καταγματικό κενό είναι θεωρητικά μηδενικό δεν επηρεάζουν το χρόνο διέλευσης του FAS. Αντιθέτως για τις περιπτώσεις που το πλάτος του καταγματικού ήταν 10 mm και 20 mm οι αντίστοιχες καμπύλες διέφεραν από αυτή στην περίπτωση άθικτης πλάκας. Όσο ο δέκτης ήταν τοποθετημένος στο δεύτερο τεμάχιο, οι χρόνοι διέλευσης παρουσίασαν μια σταθερή μετατόπιση (offset) ανάλογα προς το πλάτος του κενού. Παρόμοιες μετατοπίσεις παρατηρήθηκαν και σε αντίστοιχα διαγράμματα χρόνου άφιξης - απόστασης μεταξύ μετατροπέων για τις περιπτώσεις που το καταγματικό κενό αποτελούνταν από πλαστικό ή νερό, δηλ. ανάλογα με τη διαφορά της ταχύτητας της πλάκας και του υλικού που ήταν τοποθετημένο στο κενό. Η κλίση των καμπυλών σε όλες τις προαναφερθείσες περιπτώσεις ήταν σταθερή και ίση με την ταχύτητα στην πλάκα. Όταν όμως ο δέκτης τοποθετήθηκε επάνω από το καταγματικό κενό η κλίση της καμπύλης σε κάθε περίπτωση αντιστοιχούσε στην ταχύτητα του υλικού το οποίο περιείχονταν στο καταγματικό κενό. Οι συγγραφείς απέδειξαν ότι η ταχύτητα του

υλικού του καταγματικού κενού είναι εφικτό να προκύψει μόνο για αρκετά μεγάλα πλάτη κενού, πάνω από 20 mm.

Παρόμοια πειράματα διεξήχθησαν και από τους Njeh *et al.*, [34] χρησιμοποιώντας ένα φανταστικό από πλάκες Perspex και καουτσούκ. Το καουτσούκ είχε πάχος 15 mm και χρησιμοποιήθηκε για την προσομοίωση των μαλακών ιστών (διαμήκης ταχύτητα 1600 m/s), ενώ οι δύο πλάκες από Perspex για την προσομοίωση των κατεαγόντων τμημάτων του οστού. Το φανταστικό εμβαπτίστηκε σε νερό και η απόσταση μεταξύ των δύο πλακών αυξάνονταν σταδιακά από 0.1-2.0 mm σε βήματα των 0.1 mm. Πραγματοποιήθηκαν μετρήσεις ταχύτητας αξονικής διάδοσης σε συχνότητα 250 KHz. Για τον υπολογισμό της θεωρητικής ταχύτητας του κύματος FAS χρησιμοποιήθηκε το άθροισμα του χρόνου που απαιτείται για τη διάδοση στα άθικτα τμήματα της πλάκας και του χρόνου για τη διάδοση στο νερό που συμπλήρωνε το καταγματικό κενό. Βρέθηκε ότι συσχέτιση μεταξύ των πειρατικών και θεωρητικών ταχυτήτων ήταν υψηλή ($R = 0,997$). Ωστόσο όταν το FAS αντιστοιχεί σε κυματοδηγούμενο ρυθμό, η ταχύτητα δε μπορεί να υπολογιστεί με τον προτεινόμενο τρόπο.

2.3.3.3 Υπολογιστικές μελέτες

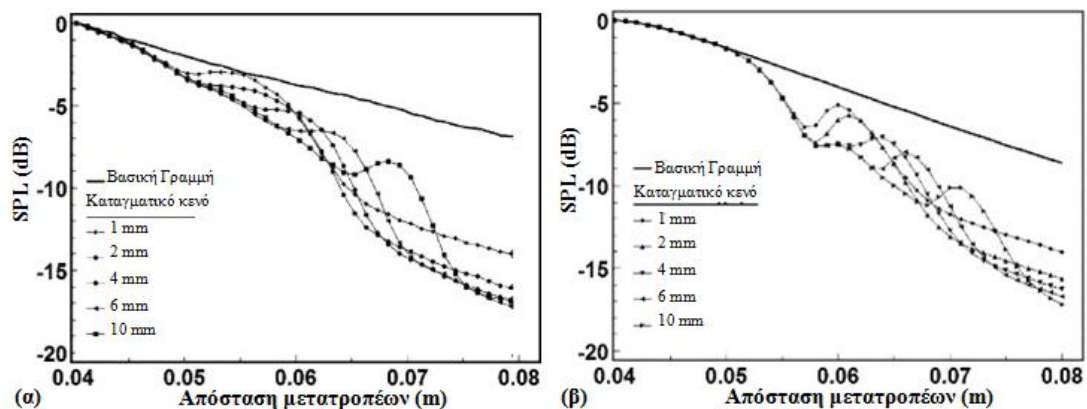
Πρόσφατα οι Dodd *et al.*, [35] διερεύνησαν το ενδεχόμενο χρήσης του πλάτους του FAS για την παρακολούθηση της πώρωσης κατασκευάζοντας 2Δ μοντέλα κατεαγόντος οστού. Το οστό μοντελοποιήθηκε ως πλάκα η οποία θεωρήθηκε ότι ήταν εμβαπτισμένη σε νερό. Το καταγματικό κενό αποτελούνταν επίσης από νερό και το πλάτος του θεωρήθηκε ότι μεταβαλλόταν από 2-10 mm. Ο πομπός τοποθετήθηκε στο πρώτο τεμάχιο της κατεαγούσης πλάκας ενώ ο δέκτης μετακινούνταν σταδιακά από το πρώτο προς το δεύτερο τεμάχιο. Το πρόβλημα της διάδοσης υπερήχων επιλύθηκε με τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών. Για τις διάφορες αποστάσεις μεταξύ πομπού και δέκτη μετρήθηκε η πρώτη κορυφή του κύματος FAS. Οι μετρήσεις πλάτους χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό της εξασθένησης του FAS, η οποία αναπαραστάθηκε ως επίπεδο πίεσης ήχου (Sound Pressure Level - SPL) σε decibels χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$SPL(x) = 20 \log(V(x)/V(x_0)), \quad (2.85)$$

όπου $V(x_0)$ είναι η τάση του ληφθέντος σήματος στο σημείο $x = x_0$ και $V(x)$ η τάση σε κάθε εξεταζόμενη θέση του δέκτη x . Το διάγραμμα SPL – απόστασης μεταξύ των

μετατροπέων για τα διάφορα πλάτη καταγματικού κενού παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.20. Παρατηρείται ότι οι τιμές του SPL είναι χαμηλότερες από τη μέτρηση βάσης (baseline) για το άθικτο οστό και παρουσιάζουν χαρακτηριστική διακύμανση ανάλογα με το καταγματικό κενό. Οι εσωτερικοί μηχανισμοί που προκαλούν τη διακύμανση του πλάτους του FAS εξηγήθηκαν από τους συγγραφείς μέσω των στιγμιότυπων της προσομοιωμένης κυματικής διάδοσης που παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.21.

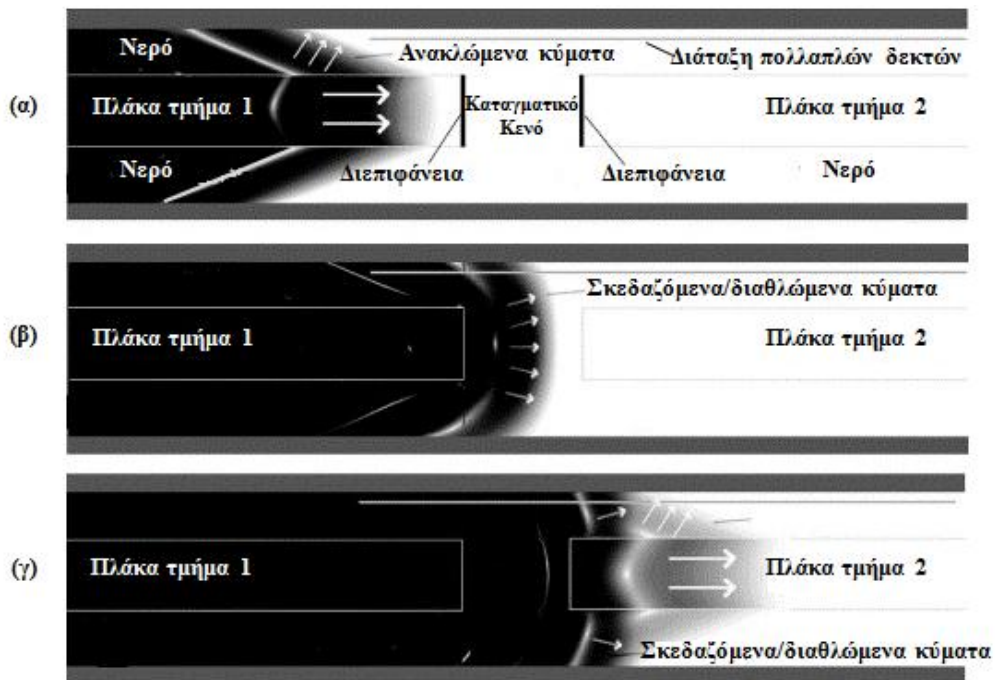
Πιο συγκεκριμένα, όσο ο δέκτης είναι τοποθετημένος επάνω από το καταγματικό κενό τα κύματα που διαδίδονται στο πρώτο τμήμα της πλάκας (Τμήμα 1) ανακλώνται στην ανώτερη επιφάνεια της πλάκας και επαναδιαδίδονται στο νερό (Σχήμα 2.21(α)). Τα κύματα αυτά φτάνουν στο δέκτη και συνεισφέρουν στο FAS. Όταν ο δέκτης τοποθετείται είτε επάνω από το καταγματικό κενό ή στο δεύτερο τμήμα της πλάκας (Τμήμα 2) κοντά στην περιοχή του κατάγματος, το FAS υπερτίθεται με τα ανακλώμενα κύματα και τα διαθλώμενα/σκεδαζόμενα κύματα στη διεπιφάνεια του κατάγματος Σχήμα 2.21 (β)). Ορισμένα από τα διαθλώμενα/σκεδαζόμενα κύματα διαδίδονται στο δεύτερο τμήμα χωρίς να παρεμβάλλονται άλλα διαθλώμενα κύματα, δημιουργώντας



Σχήμα 2.20. (α) Πειραματικά και (β) αριθμητικά αποτελέσματα (από 2Δ μοντέλα) της μεταβολής του πλάτους του FAS (ή του SPL) συναρτήσει της απόστασης των μετατροπέων για διαφορετικά πάχη καταγματικού κενού (γραμμές με σύμβολα). Με συμπαγή γραμμή παρουσιάζεται η περίπτωση του άθικτου οστού (μέτρηση βάσης).

ανακλώμενα κύματα τα οποία συνεισφέρουν εξίσου στο FAS (Σχήμα 2.21 (γ)). Όπως ήταν αναμενόμενο, η μείωση στο πλάτος του FAS ήταν μεγαλύτερη καθώς αυξανόταν το πλάτος του καταγματικού κενού. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τα μοντέλα συγκρίθηκαν με αντίστοιχα αποτελέσματα από μετρήσεις σε οστικά φανταστικά και σε

βόεια οστικά δοκίμια φλοιώδους οστού. Το διάγραμμα SPL – απόσταση μετατροπέων σε δοκίμια κατεαγοτος βόειου μηρού στα οποία έχει αφαιρεθεί ο μυελός των οστών από την περιοχή του κατάγματος, παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.21 (β). Παρατηρείται ότι τα πειραματικά αποτελέσματα είναι σε ποιοτική συμφωνία με αυτά που προκύπτουν από τα μοντέλα. Οι συγγραφείς υποστήριξαν ότι η ωρίμανση του πόρου θα μπορούσε να περιγραφεί από μετρήσεις πλάτους εξαιτίας της διαφοράς ακουστικής εμπέδησης

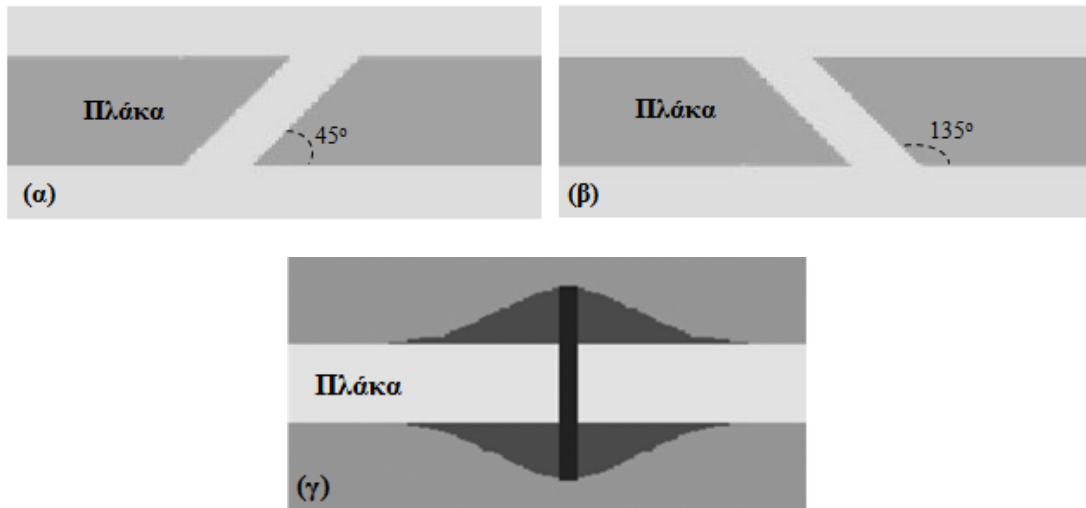


Σχήμα 2.21. Στιγμιότυπα κυματικής διάδοσης (συχνότητας 200 KHz) σε 2Δ μοντέλο οστού με κάταγμα πάχους 10 mm εμβαπτισμένο σε νερό [35]. Η λεπτή γκρι γραμμή που εμφανίζεται στην κορυφή κάθε εικόνας αναπαριστά τη διάταξη των επικαλυπτόμενων δεκτών. Εμφανίζονται διαφορετικές χρονικές στιγμές διάδοσης κυμάτων που αντιστοιχούν σε κύματα που: (α) προσεγγίζουν τη διεπιφάνεια του κατάγματος, (β) διαδίδονται στο καταγματικό κενό, και (γ) διαδίδονται στο δεύτερο τμήμα της πλάκας.

ανάμεσα στο οστό και στον πόρο. Παρόλα αυτά εξετάστηκε μόνο το αρχικό στάδιο του αιματώματος χωρίς να διερευνηθεί η επίδραση των διεργασιών που λαμβάνουν χώρα σε επόμενα στάδια της πόρωσης στο πλάτος του FAS.

Σε επόμενη εργασία της ίδιας ερευνητικής ομάδας, [36] επέκτειναν τη μελέτη τους λαμβάνοντας υπόψη τα διαφορετικά στάδια της πόρωσης εισάγοντας διαφορετικές γεωμετρίες κατάγματος και πόρου στο 2Δ μοντέλο κατεγότος οστού. Αρχικά

πραγματοποιήθηκαν μετρήσεις πλάτους του FAS σε μοντέλο με εγκάρσιο κάταγμα, ενώ στη συνέχεια εξετάστηκε η περίπτωση λοξού κατάγματος (45°) που παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.22(α), (β). Οι δύο αυτές περιπτώσεις κατάγματος αντιστοιχούσαν στο αρχικό στάδιο της πάρωσης. Σε μεταγενέστερο στάδιο της διεργασίας η γεωμετρία του πόρου μεταβλήθηκε, καταλαμβάνοντας μια ενδοστική και περιοστική περιοχή με όρια που περιγράφονται από καμπύλες Gauss (Σχήμα 2.22 (γ)), όπως είχε προταθεί σε



Σχήμα 2.22. Γεωμετρία λοξού κατάγματος (α) 45° και (β) 135° σε 2Δ μοντέλο οστού.

Η ακουστική διάδοση υπερήχων λαμβάνει χώρα με κατεύθυνση από τα αριστερά προς τα δεξιά [38]. (γ) Ρεαλιστική γεωμετρία πόρου. Τα όρια της ενδοστικής και περιοστικής περιοχής περιγράφονται από καμπύλες Gauss. Οι περιοχές του πόρου και το καταγματικό κενό θεωρήθηκε ότι αποτελούνται από χόνδρο [36].

προηγούμενη 2Δ υπολογιστική μελέτη των Protorparas *et al.*, [37] που περιγράφεται στην ενότητα 2.4.2.

Στην περιοχή του καταγματικού κενού τοποθετήθηκε χόνδρος. Βρέθηκε ότι όταν το κάταγμα ήταν λοξό η μεταβολή του πλάτους του FAS ήταν διαφορετική από αυτή που παρατηρήθηκε στην περίπτωση εγκάρσιου κατάγματος. Επομένως η γωνία της καταγματικής γραμμής επηρεάζει τις μετρήσεις πλάτους. Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώθηκε σε επόμενη μελέτη των ίδιων ερευνητών, όπου αναπτύχθηκαν 2Δ μοντέλα κατεαγότος οστού στα οποία το κάταγμα ήταν λοξό και με γωνία μεγαλύτερη από 45° [38]. Βρέθηκε ότι όσο μεγαλύτερη είναι η γωνία παρατηρείται αύξηση της μεταβολής του πλάτους του FAS. Επιπλέον στην [36] παρατηρήθηκε ότι η αύξηση της απόστασης πομπού-δέκτη (π.χ. 120 mm) είχε ως συνέπεια σημαντική μείωση του

πλάτους του FAS. Η ρεαλιστική γεωμετρία του πόρου επηρέασε σημαντικά τη διακύμανση του πλάτους του FAS ενώ για μεγάλες αποστάσεις πομπού και δέκτη παρατηρήθηκε μικρότερη μείωση του πλάτους του FAS σε σχέση με την περίπτωση απλοποιημένης γεωμετρίας του πόρου. Πραγματοποιήθηκαν επίσης μετρήσεις για διαφορετικές τιμές του μέτρου του Young του υλικού του πόρου (5 GPa, 10 GPa, 15 GPa) και βρέθηκε ότι όσο μεγαλύτερο ήταν το μέτρο του Young τόσο μικρότερη ήταν η μείωση του πλάτους του FAS. Οι συγγραφείς υποστήριξαν ότι η μεταβολή του πλάτους από το αρχικό στάδιο έως το στάδιο σχηματισμού πόρου θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την ποσοτικοποίηση της διαδικασίας της πόρωσης.

2.4 Αξιολόγηση Άθικτων και Κατεαγότων Μακρών Οστών μέσω της Διάδοσης Κυματοδηγούμενων Ρυθμών Υπερήχων

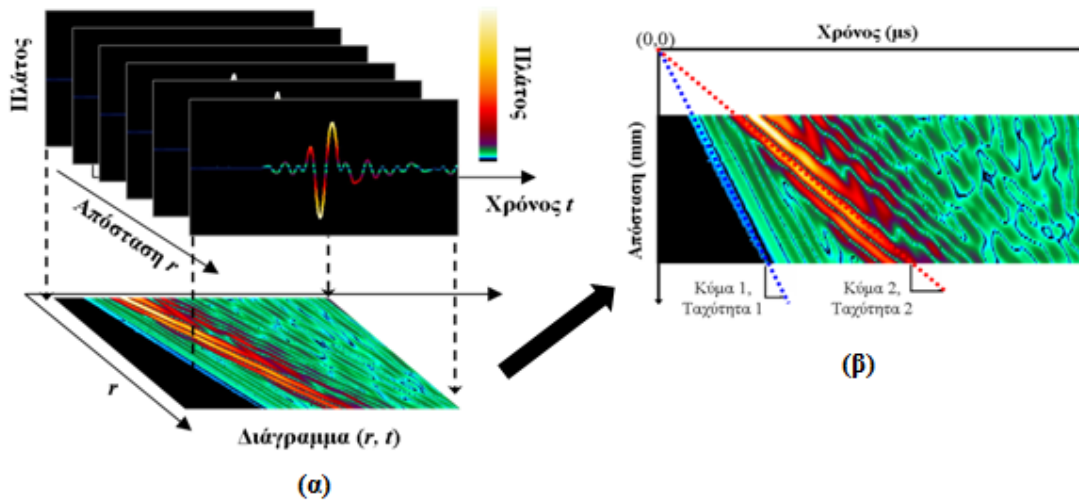
Αν και οι κυματοδηγούμενοι ρυθμοί έχουν χρησιμοποιηθεί κυρίως σε εφαρμογές του Μη Καταστροφικού Ελέγχου (ΜΚΕ) [39-54], τα τελευταία χρόνια φαίνεται ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην αξιολόγηση των μακρών οστών με υπερήχους. Η χρήση των ρυθμών στο χαρακτηρισμό μακρών οστών οφείλεται στην ικανότητα τους να αντανακλούν υλικές, γεωμετρικές και μηχανικές μεταβολές που λαμβάνουν χώρα σε βαθύτερα στρώματα του φλοιού. Αρχικά χρησιμοποιήθηκαν για την αξιολόγηση της οστεοπόρωσης ενώ μόλις το 2006 πραγματοποιήθηκε από την Μονάδα Ιατρικής Τεχνολογίας και Ευφών Πληροφοριακών Συστημάτων του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων η πρώτη συστηματική μελέτη της διάδοσης των κυματοδηγούμενων ρυθμών για την αξιολόγηση της πόρωσης καταγμάτων μακρών οστών [37, 55].

2.4.1 Χρήση κυματοδηγούμενων ρυθμών για την αξιολόγηση άθικτων μακρών οστών

2.4.1.1 Πειραματικές Μελέτες

Οι Moilanen *et al.*, το 2002 πραγματοποίησαν κλινική μελέτη [56] σε 106 έφηβες που βρίσκονταν σε διάφορα στάδια εφηβείας (Tanner stages), με σκοπό να διερευνήσουν το ενδεχόμενο αξιολόγησης των οστών από την διασπορά των κυματοδηγούμενων ρυθμών. Πραγματοποιήθηκαν μετρήσεις υπερήχων σε χαμηλές συχνότητες (200 kHz) και η ταχύτητα συσχετίστηκε με την οστική πυκνότητα στα διάφορα στάδια εφηβείας. Για τον εντοπισμό των κυματοδηγούμενων ρυθμών χρησιμοποιήθηκε η τεχνική ανάλυσης των ληφθέντων σημάτων στο πεδίο του χρόνου μέσω διαγραμμάτων

απόστασης - χρόνου (r,t) η οποία είχε προταθεί σε προηγούμενες υπολογιστικές μελέτες. Το διάγραμμα (r,t) αποτελεί τη 2-Δ προβολή (εικόνα) των σημάτων που καταγράφονται απομακρύνοντας σταδιακά δέκτη από τον πομπό (με σταθερό βήμα μετακίνησης). Κάθε γραμμή της 2-Δ εικόνας αναπαριστά το σήμα που ελήφθη σε απόσταση r από τον πομπό, κάθε στήλη τον χρόνο t , και το χρώμα κάθε σημείου το πλάτος του σήματος (Σχήμα 2.23(α)). Οι κορυφές ενός διαγράμματος (r,t) απεικονίζουν τα διαδιδόμενα κυματοπακέτα των οποίων η ταχύτητα μπορεί να προσδιορισθεί από την προσαρμογή των ευθειών γραμμών όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.23(β). Με αυτόν τον τρόπο υπολογίστηκε η ταχύτητα του κύματος FAS (Κύμα 1) και ενός πιο αργού κύματος (Κύμα 2) (Σχήμα 2.23(β)). Βρέθηκε ότι η ταχύτητα του κύματος 2 (για συχνότητα 250 KHz) μετρούμενη στην κνήμη ήταν στατιστικά σημαντικά διαφορετική για κάθε στάδιο Tanner και επίσης συσχετιζόνταν τόσο με την οστική πυκνότητα όσο και με το πάχος του φλοιού. Αντιθέτως δεν παρατηρήθηκαν σημαντικές διαφοροποιήσεις στην ταχύτητα του FAS (για συχνότητα 1,25 MHz) στα διαφορετικά στάδια της εφηβείας.



Σχήμα 2.23. (α) Διάγραμμα (r,t) το οποίο δημιουργείται από σάρωση του δέκτη, (β) απεικόνιση των διαδιδόμενων κυματοπακέτων και υπολογισμός της ταχύτητας τους.

Οι Lefebvre *et al.*, [57], πραγματοποιώντας *ex-vivo* μετρήσεις υπερήχων στη διάφυση βοείων μηρών και κνήμης, διερεύνησαν την δυνατότητα χρήσης των κυματοδηγούμενων ρυθμών για την εκτίμηση του μέτρου ελαστικότητας των οστών. Πραγματοποιήθηκε μέτρηση του πάχους, της πυκνότητας και του μέτρου ελαστικότητας του φλοιού στην περιοχή της διάφυσης. Η αναπαράσταση των

κυματοδηγούμενων ρυθμών πραγματοποιήθηκε αναλύοντας τα ληφθέντα σήματα στο πεδίο συχνοτήτων. Στη συγκεκριμένη τεχνική εφαρμόζεται στο διάγραμμα (r, t) 2-Δ μετασχηματισμός Fourier (2Δ-FFT) με αποτέλεσμα το διάγραμμα (r, t) να μετασχηματίζεται σε διάγραμμα συχνότητας-κυματαριθμού (k, f) . Υπερθέτοντας τις θεωρητικές καμπύλες διασποράς του κυματαριθμού- συχνότητας στο διάγραμμα (k, f) , είναι δυνατόν να εντοπισθούν και χαρακτηρισθούν οι οδεύοντες κυματοδηγούμενοι ρυθμοί. Στη συγκεκριμένη μελέτη οι συγγραφείς υπολόγιζαν τις θεωρητικές καμπύλες διασποράς Lamb για διαφορετικές τιμές μέτρου ελαστικότητας οι οποίες στη συνέχεια υπερθέτονταν στα διαγράμματα (k, f) των ληφθέντων σημάτων. Η τελική εκτίμηση για το μέτρο ελαστικότητας αντιστοιχούσε στην τιμή εκείνη για την οποία οι υπολογιζόμενες θεωρητικές καμπύλες προσαρμόζονταν καλύτερα στις κορυφές του διαγράμματος. Στη συγκεκριμένη ποιοτική μέθοδο εκτίμησης του μέτρου ελαστικότητας παρουσίασε σφάλματα 2,26 – 4,97%.

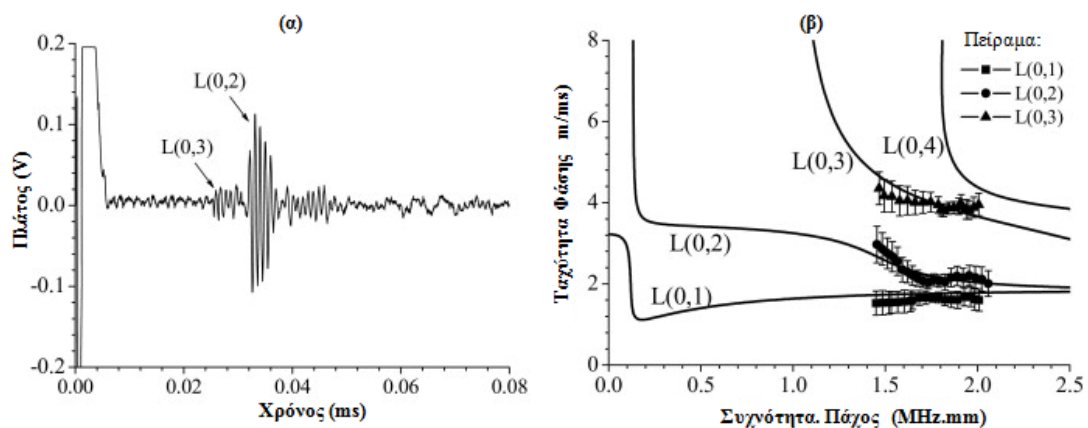
Σε μια πρόσφατη μελέτη με στόχο την αξιολόγηση της οστεοπόρωσης οι Ta *et al.*, [58] πραγματοποίησαν μετρήσεις υπερήχων σε 8 άθικτες βόειες κνήμες των οποίων το μήκος της διάφυσης κυμαινόταν 14 - 18 mm. Η μέση εσωτερική ακτίνα και το μέσο πάχος του φλοιού είχαν μεταβαλλόμενες διαστάσεις. Πραγματοποιήθηκαν μετρήσεις σε διαφορετικά σημεία της διάφυσης της κνήμης, και σε κάθε μέτρηση οι γεωμετρικές ιδιότητες του οστού (μέσο πάχος του φλοιού, εσωτερική ακτίνα) προσδιοριζόταν μέσω 3Δ ακτινογραφιών τομογραφίας. Χρησιμοποιήθηκαν μετατροπείς υπό γωνία (angled) έτσι ώστε να εκπέμπεται και να λαμβάνεται ένας συγκεκριμένος κυματοδηγούμενος ρυθμός. Η συγκεκριμένη τεχνική ανάλυσης των κυματοδηγούμενων ρυθμών είχε επίσης χρησιμοποιηθεί σε παλαιότερη πειραματική μελέτη της κυματικής διασποράς σε ακρυλικές πλάκες μεταβλητού πάχους [59]. Η γωνία του κάθε μετατροπέα προσδιορίστηκε με βάση την ταχύτητα φάσης του επιθυμητού ρυθμού από το νόμο του Snell:

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{c_w}{c_p} \right), \quad (2.86)$$

όπου c_w δηλώνει τη διαμήκη ταχύτητα του πλαστικού (2700 m/s) από το οποίο επικαλύπτονται οι άκρες του μετατροπέα και c_p είναι η ταχύτητα φάσης του επιθυμητού ρυθμού. Για την ανάλυση των πειραματικών αποτελεσμάτων στην [58] οι

συγγραφείς χρησιμοποίησαν τους θεωρητικούς κυματοδηγούμενους ρυθμούς που διαδίδονται σε κοίλο κύλινδρο του οποίου η εσωτερική επιφάνεια αποτελούνταν από ένα ιξώδες (viscous) υλικό το οποίο προσομοίωνε το μυελό των οστών.

Στο Σχήμα 2.24(α) παρουσιάζεται το ληφθέν σήμα στο πεδίο του χρόνου χρησιμοποιώντας μετατροπέα συχνότητας 0.5 MHz ο οποίος ήταν τοποθετημένος υπό γωνία 43.1° . Στην περίπτωση αυτή η απόσταση διάδοσης ήταν 80 mm, η εσωτερική ακτίνα της κνήμης 12.9 mm και το πάχος του φλοιού 3.5 mm. Στο Σχήμα 2.24(β) παρουσιάζονται τα πειραματικά αποτελέσματα που προέκυψαν από διαφορετικές γωνίες των μετατροπέων καθώς και οι θεωρητικές καμπύλες υπολογιζόμενες για τις ιδιότητες της συγκεκριμένης κνήμης. Παρατηρείται ότι τα ληφθέντα σήματα παρουσίασαν ικανοποιητική συμφωνία με τους θεωρητικούς ρυθμούς. Από τα αποτελέσματα της μελέτης προέκυψε ότι η ταχύτητα του L(0,2) ρυθμού μειώνεται καθώς αυξάνεται το πάχος του φλοιού. Επιπρόσθετα, βρέθηκε ότι ο L(0,2) ήταν ευαίσθητος σε μεταβολές του πάχους του φλοιού σε χαμηλές συχνότητες (0.5 MHz). Οι



Σχήμα 2.24. (α) Ληφθέν σήμα στο πεδίο του χρόνου χρησιμοποιώντας γωνιακό μετατροπέα υπό γωνία 43.1° (συχνότητας 0.5 MHz) από βόεια κνήμη με εσωτερική ακτίνα 12.9 mm και πάχος του φλοιού 3.5 mm. Η απόσταση διάδοσης υπερήχων ήταν 80 mm. (β) Πειραματικά αποτελέσματα ταχύτητας φάσης κυματοδηγούμενων ρυθμών προερχόμενα από ληφθέντα σήματα υπό διαφορετικές γωνίες μετατροπέων συγκρινόμενα με τις θεωρητικές καμπύλες υπολογιζόμενες για τις ιδιότητες της συγκεκριμένης κνήμης. Η εσωτερική ακτίνα της βόειας κνήμης ήταν 12.9 mm και το πάχος του φλοιού ήταν 3.5 mm. Οι γωνιακοί δέκτες ήταν τοποθετημένοι υπό γωνία 58.4° για τον L(0,1) ρυθμό, υπό 43.1° για τον L(0,2) και υπό 22° για τον L(0,3).

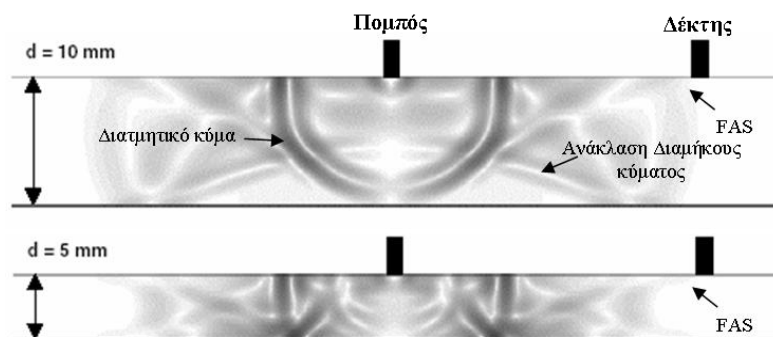
συγγραφείς συμπέραναν ότι ο $L(0,2)$ ρυθμός μπορεί να αποτελέσει σημαντικό εργαλείο προσδιορισμού του πάχους του φλοιού μακρών οστών και κατ' επέκταση σημαντικό βοήθημα για τη διάγνωση και αξιολόγηση της οστεοπόρωσης.

2.4.1.2 Υπολογιστικές Μελέτες

Οι Nicholson *et. al.* [22] πραγματοποίησαν 2Δ υπολογιστική μελέτη διάδοσης κυματοδηγούμενων ρυθμών σε υγιή και οστεοπορωτικά μακρά οστά. Αρχικά το 2-Δ μοντέλο προσομοίωνε ακρυλική πλάκα με μεταβαλλόμενο πάχος από 0,25 – 10 mm. Το εκπεμπόμενο κύμα ήταν ένας κύκλος ημιτόνου 250 KHz διαμορφωμένος από ένα Gaussian παλμό. Η ανάλυση των ληφθέντων σημάτων πραγματοποιήθηκε στο πεδίο χρόνου και διάγραμμα (r,t) δημιουργήθηκε για σάρωση του δέκτη από 20 – 50 mm. Στιγμιότυπα της κυματικής διάδοσης για δύο διαφορετικά πάχη πλάκας παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.25. Παρατηρείται ότι εκτός από το κύμα FAS διαδίδονται επίσης πολλαπλοί κυματοδηγούμενοι ρυθμοί που δημιουργούνται λόγω των διαδοχικών ανακλάσεων των κυμάτων στις επιφάνειες της πλάκας. Παρόμοια πειράματα πραγματοποιήθηκαν στη συνέχεια σε πραγματικές ακρυλικές πλάκες και κοίλους κυλίνδρους και δημιουργήθηκαν τα διαγράμματα (r,t) για διάφορα πάχη. Για τον χαρακτηρισμό του τύπου κύματος που αντιστοιχεί σε κάθε κύμα που εμφανίζεται στο (r,t) διάγραμμα χρησιμοποιήθηκαν οι θεωρητικές καμπύλες διασποράς που περιγράφουν την ταχύτητα φάσης των ρυθμών Lamb ως συνάρτηση του πάχους της πλάκας. Βρέθηκε ότι το κύμα 1 όταν το πάχος της πλάκας ή του τοιχώματος κυλίνδρου ήταν λεπτό, αντιστοιχούσε στον S_0 , ενώ για πάχη μεγαλύτερα από το μισό μήκος κύματος, αντιστοιχούσε στο πλευρικό κύμα. Τα αποτελέσματα αυτά ήταν σε συμφωνία με τα ευρήματα προηγούμενων μελετών που εξέταζαν τον τύπο του FAS. Η ταχύτητα του κύματος 2 βρέθηκε ότι περιγράφονταν ικανοποιητικά από τη διασπορά ταχύτητας του ρυθμού A_0 .

Οι Moilanen *et al.*, [60] ανέπτυξαν 2Δ μοντέλα οστών που προσομοίωναν πειράματα σε ακρυλικές πλάκες στο κενό ή εμβαπτισμένες σε νερό με σκοπό τον προσδιορισμό του πάχους. Για την αναπαράσταση των κυματοδηγούμενων ρυθμών σε κάθε περίπτωση χρησιμοποιήθηκαν διαγραμμάτα (k,f) των ληφθέντων σημάτων. Για τον εντοπισμό των κυματοδηγούμενων ρυθμών επιλύθηκε το πρόβλημα ελεύθερης πλάκας για διαφορετικά πάχη καθώς επίσης και το πρόβλημα κυματικής διάδοσης σε μοντέλο δύο

στρωμάτων (bilayer model) το οποίο προτάθηκε με σκοπό την ερμηνεία φαινομένων που προακλούνται εξαιτίας του στρώματος των υπερκείμενων μαλακών ιστών. Στο συγκεκριμένο μονέλο θεωρήθηκε ότι η ανώτερη επιφάνεια της πλάκας η οποία προσομοίωσε το οστό, συνορεύει με ένα στρώμα νερού, το οποίο προσομοίωσε το στρώμα των μαλακών ιστών. Το νερό επιλέχθηκε από τους συγγραφείς εξαιτίας του ότι έχει διαμήκη ταχύτητα παρόμοια με αυτή των ιστών. Έφαρμόζοντας κατάλληλα φίλτρα για τη βελτίωση της διακριτικής ικανότητας του 2Δ-FFT, οι συγγραφείς κατάφεραν να εντοπίσουν με μεγαλύτερη ακρίβεια στα διαγράμματα (k, f) τον A0 Lamb ρυθμό και το BL1 ρυθμό που διαδίδεται στο θεωρητικό μοντέλο δύο στρωμάτων. Είναι χαρακτηριστικό ότι ο A0 ρυθμός εντοπίστηκε καθαρά και στο (k, f) διάγραμμα του σήματος που ελήφθη από πλάκα αλουμινίου εμβαπτισμένη σε νερό σε βάθος 3 mm. Ακολουθώντας παραμετρική ανάλυση για την προσαρμογή των θεωρητικών καμπυλών στις κορυφές των αντίστοιχων διαγραμμάτων (k, f) , αποδείχθηκε ότι το σφάλμα εκτίμησης του πάχους τόσο των πειραματικών όσο και των υπολογιστικών πλακών ήταν μικρότερο από 7% για πάχη μικρότερα από 6 mm, ενώ για μεγαλύτερα πάχη αυξανόταν έως και 50 %. Οι συγγραφείς της μελέτης υποστήριξαν ότι τα θεωρητικά



Σχήμα 2.25. Στιγμιότυπο αξονικής διάδοσης υπερήχων σε δύο πλάκες διαφορετικού πάχους. Διακρίνονται το κύμα FAS που μόλις καταφθάνει στο δέκτη, το διατμητικό κύμα καθώς και πολλαπλές ανακλάσεις στις επιφάνειες της πλάκας [22].

μοντέλα δύο στρωμάτων θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν και για την ερμηνεία *in-vivo* μετρήσεων. Παρόλα αυτά, τα μοντέλα δύο στρωμάτων δεν επιτρέπουν την προσομοίωση των μαλακών ιστών που βρίσκονται στην ενδοστική περιοχή, δηλ. του μυελού των οστών.

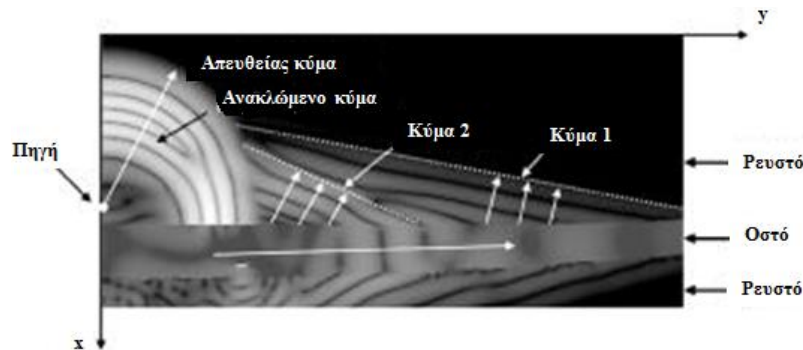
Σε άλλη μελέτη της ίδιας ερευνητικής ομάδας [61] διερευνήθηκε η επίδραση της ρεαλιστικής γεωμετρίας στην πρόβλεψη του πάχους του φλοιού με χρήση υπερήχων. Αρχικά πραγματοποιήσαν *in-vitro* μετρήσεις ταχύτητας υπερήχων σε 10 ανθρώπινες κνήμες και στη συνέχεια δημιούργησαν ένα 2Δ υπολογιστικό μοντέλο οστού με μεταβαλλόμενες υλικές και γεωμετρικές ιδιότητες που βασίζονταν σε QCT μετρήσεις που πραγματοποιήθηκαν στις ανθρώπινες κνήμες. Για την προσομοίωση της διάδοσης των υπερηχητικών κυμάτων χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών. Το πάχος του φλοιού των 2Δ μοντέλων προσδιοριζόταν από τις QCT μετρήσεις. Για τον υπολογισμό του πάχους του φλοιού μέσω υπερήχων χρησιμοποιήθηκε ο Lamb ρυθμός A0 [7]. Πιο συγκεκριμένα το πάχος προσδιοριζόταν ελαχιστοποιώντας τη συνάρτηση κόστους

$$J(e) = \sum_{i=1}^N |d_i(f_i, e)|, \quad (2.87)$$

όπου

$$d_i(f_i, e) = v_2(f_i) - c_{ph}^{A0}(f_i, e), \quad (2.88)$$

είναι η παραμένουσα διαφορά μεταξύ των ταχυτήτων φάσης του Κύματος 2 που



Σχήμα 2.26. Στιγμιότυπο κυματικής διάδοσης υπερηχητικών κυμάτων σε ρεαλιστική γεωμετρία οστού προερχόμενη από 3Δ υπολογιστική τομογραφία (γκρι χρώμα) εμβαπτισμένη σε ρευστό (μαύρο φόντο). Παρουσιάζεται το απευθείας κύμα που διαδίδεται στο ρευστό, το κύμα που ανακλάται στη διεπιφάνεια οστού-ρευστού (ανακλώμενο κύμα), το κύμα 1 που αντιστοιχεί στο κύμα FAS και το κύμα 2 που αντιστοιχεί σε ένα πιο αργό κύμα που διαδίδεται στο οστό και διαρρέει στο ρευστό

[61].

παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.26 και του A0 (c_{ph}^{A0}) για συχνότητα f_i και πάχος πλάκας e .

Τα πάχη του φλοιού που προέκυψαν από την παραπάνω διαδικασία συμφωνούσαν

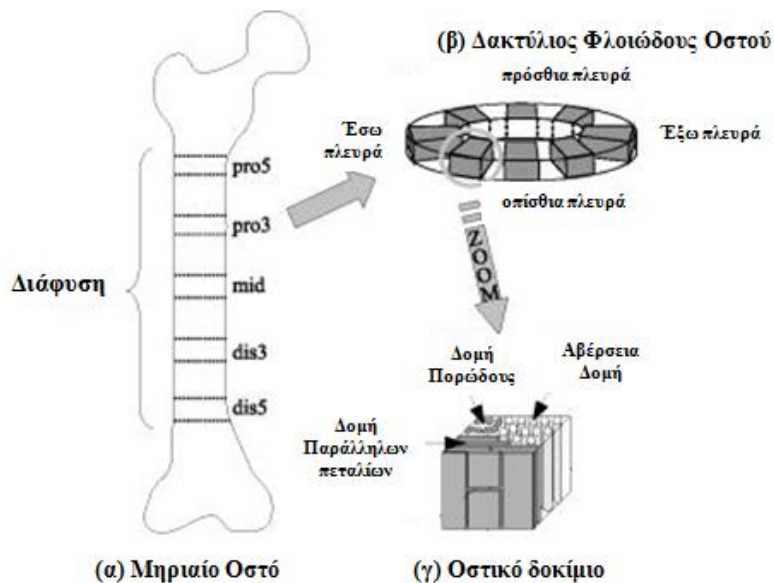
στατιστικώς σημαντικά ($R^2=0.94$) με τα αντίστοιχα πάχη που μετρήθηκαν με QCT. Τα αποτελέσματα της μελέτης έδειξαν ότι παρά το μεταβαλλόμενο πάχος του φλοιού κατά μήκος του μονοπατιού κυματικής διάδοσης, η μετρούμενη ταχύτητα φάσης μπορεί να προβλεφθεί ικανοποιητικά από απλοποιημένα θεωρητικά μοντέλα όπως για παράδειγμα ο A0 ρυθμός στη συγκεκριμένη περίπτωση.

Αν και η ανάλυση του διαγράμματος (r,t) προσφέρει τη δυνατότητα εντοπισμού των κυματοδηγούμενων ρυθμών στην κυματομορφή των ληφθέντων σημάτων, ο εντοπισμός των ρυθμών στηρίζεται στην εύρεση κορυφών από τον χρήστη ή από τεχνικές ανάλυσης εικόνας. Λόγω της υπέρθεσης ορισμένων ρυθμών ακόμη και στο διάγραμμα (r,t) , ο εντοπισμός τους είναι δύσκολος. Για το λόγο αυτό σε μία πρόσφατη μελέτη [62] προτάθηκε η εφαρμογή ενός παραθύρου Hanning στην περιοχή ενδιαφέροντος του διαγράμματος (r,t) . Επίσης, για το χαρακτηρισμό ενός ρυθμού δεν αρκεί η μέτρηση της ταχύτητας του καθώς, όπως φαίνεται από τις θεωρητικές καμπύλες διασποράς, υπάρχουν σημεία όπου οι ταχύτητες δύο τουλάχιστον ρυθμών συμπίπτουν για μία δεδομένη συχνότητα ή πάχος μέσου. Συνεπώς, για να χαρακτηριστεί ένας ρυθμός απαιτείται η μελέτη της διασποράς του χρησιμοποιώντας πολλαπλά δοκίμια με διάφορα πάχη ή διεγείροντας κύματα σε περισσότερες από μία συχνότητες. Επομένως, η ταχύτητα του κύματος 2 που μετρήθηκε *in-vivo* στις μελέτες [62, 63] συλλέγοντας μόνο ένα διάγραμμα (r,t) πιθανόν να μην αντιστοιχεί στο ρυθμό A0 καθώς ο ρυθμός αυτός προβλέπεται από τη θεωρία του Lamb μόνο στην περίπτωση ομογενών και ισότροπων ελαστικών 2-Δ μέσων.

2.4.1.3 Επίδραση μικροδομής στη διάδοση υπερήχων σε μακρά οστά

Οι Haiat *et al.*, [64] σε μια πρόσφατη μελέτη τους, πραγματοποίησαν *in-vitro* μετρήσεις ταχύτητας σε παραλληλεπίπεδα οστικά δοκίμια βόειας κνήμης με σκοπό τη διερεύνηση της επίδρασης της μικροδομής στη διασπορά της ταχύτητας φάσης του φλοιώδους οστού. Όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.27 πραγματοποιήθηκαν εγκάρσιες τομές σε 3 άθικτες βόειες κνήμες: (i) στο κατώτερο περιφερικό τμήμα της διάφυσης (παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.27 (α) ως dis3 dis8), (ii) στη μεσότητα της κνήμης (απεικονίζεται ως mid) και (iii) στο ανώτερο τμήμα της διάφυσης. Από τους δακτυλίους φλοιώδους οστού ελήφθησαν 8 μικρότερα παραλληλεπίπεδα δοκίμια από διαφορετικά τμήματα των οποίων η μικροδομή προσδιορίστηκε μέσω οπτικού μικροσκοπίου και

διαχωρίστηκε σε Αβέρσεια δομή (Haversian), δομή παραλλήλων πεταλίων (plexiform), δομή πορώδους (porotic) και μεικτή (mixed). Πριν από κάθε μέτρηση αξονικής διάδοσης υπερήχων κάθε οστικό δοκίμιο εμβαπτίστηκε σε αλατούχο διάλυμα. Η φαινόμενη ταχύτητα υπολογίστηκε με βάση τη διαφορά φάσης μεταξύ του σήματος αναφοράς που διαδίδεται στο αλατούχο διάλυμα και του σήματος που διαδίδεται στο οστικό δοκίμιο. Η φάση του κάθε σήματος προσδιορίστηκε χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό FFT με αποτέλεσμα η ταχύτητα να υπολογίζεται ως εξής:



Σχήμα 2.27. Σχηματική αναπαράσταση της χωρικής κατανομής των οστικών δοκιμίων [64]: (α) Ανατομικές θέσεις τομής του μηριαίου οστού ώστε να ληφθούν οι δακτύλιοι φλοιώδους οστού, (β) 8 παραλληλεπίπεδα δοκίμια που ελήφθησαν από τις τέσσερις πλευρές του κάθε δακτυλίου, (γ) απεικόνιση των τριών τύπων μικροδομής.

$$V_b(f) = \frac{1}{\frac{1}{V_r} - \frac{\varphi(f)}{2\pi fL}}, \quad (2.89)$$

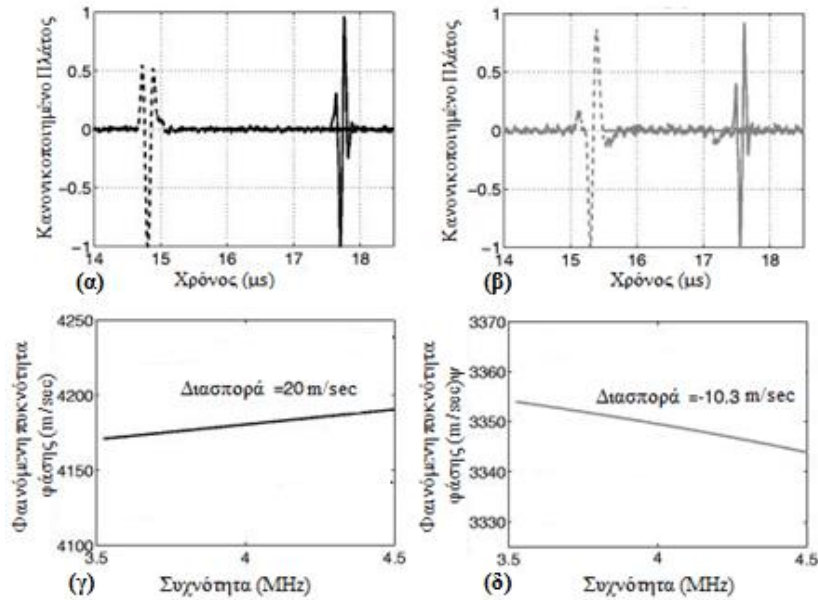
όπου L είναι το μέγεθος του δοκιμίου στην κατεύθυνση της διάδοσης, f είναι η συχνότητα και V_r η ταχύτητα στο διάλυμα η οποία ήταν ανεξάρτητη από τη συχνότητα αλλά εξαρτιόταν από το χρόνο άφιξης του διαδιδόμενου κύματος στο αποσταγμένο νερό και το αλατούχο διάλυμα. Παρόλα αυτά, εξαιτίας φαινομένων πόλωσης η τιμές ταχυτήτων που προκύπτουν δεν είναι ακριβείς. Χρησιμοποιώντας μια τεχνική διόρθωσης της φάσης του σήματος, παρόμοια με αυτή που χρησιμοποιήθηκε και σε προηγούμενες μελέτες [65, 66] οι συγγραφείς υπολόγισαν με ακρίβεια την ταχύτητα

φάσης εισάγοντας στην Εξ. (2.89) τη διορθωμένη φάση $\varphi^c(f)$ αντί της αρχικής $\varphi(f)$. Η διασπορά της ταχύτητας υπολογίστηκε ως η διαφορά μεταξύ των ταχυτήτων στα 4.5 MHz στα 3.5 MHz, δηλ., $V_b^c(4.5\text{ MHz}) - V_b^c(3.5\text{ MHz})$. Από τα αποτελέσματα της μελέτης παρατηρήθηκαν θετικές και αρνητικές τιμές διασποράς. Στα Σχήματα 2.28 (α), (β) παρουσιάζονται κυματομορφές που ελήφθησαν από οστικό δοκίμιο με θετική διασπορά και αρνητική διασπορά αντίστοιχα. Η εξάρτηση της ταχύτητας φάσης από τη συχνότητα που προκύπτει για κάθε μια από τις περιπτώσεις των Σχημάτων 2.28 (α), (β) φαίνεται στα Σχήματα 2.28 (γ), (δ). Αρνητική διασπορά, δηλ. μείωση της ταχύτητας καθώς αυξάνεται η συχνότητα, παρουσιάστηκε κυρίως στα δοκίμια με μεικτή μικροδομή. Η πιθανή εξήγηση για τις τιμές αρνητικής διασποράς που δόθηκε από τους συγγραφείς ήταν παρόμοια με αυτή που είχε δοθεί σε προηγούμενη μελέτη σε δοκιδώδη οστά [67]. Στην συγκεκριμένη εργασία οι συγγραφείς υποστήριζαν ότι οι αρνητικές τιμές οφείλονται στην παρεμβολή δύο ευρυζωνικών παλμών υπερήχων οι οποίοι δημιουργούνται εξαιτίας της διάδοσης ενός γρήγορου και ενός αργού κύματος στο δοκιδώδες οστό και φτάνουν στο δέκτη με δεδομένη χρονική καθυστέρηση. Παρόμοια ερμηνεία θα μπορούσε να δοθεί και στην περίπτωση του φλοιώδους οστού, το οποίο είναι ένα ετερογενές υλικό και είναι πιθανό να συμβεί διαχωρισμός κυμάτων όταν διαφορετικά τμήματα του μετώπου κύματος διαδίδονται με διαφορετικές ταχύτητες [68]. Το φαινόμενο αυτό πιθανόν να είναι πιο εμφανές σε περιπτώσεις μεικτής μικροδομής οι οποίες είναι εγγενώς πιο ετερογενείς δομές. Παρόμοιες πειραματικές μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν από τους Sasso *et al.* [69] με σκοπό να διερευνήσουν την επίδραση της μικροδομής στην εξασθένηση των κυμάτων υπερήχων στο φλοιώδες οστό.

2.4.2 Χρήση Κυματοδηγούμενων Ρυθμών για την Αξιολόγηση της Πώρωσης Καταγμάτων Μακρών Οστών

Η πρώτη μελέτη διάδοσης κυματοδηγούμενων ρυθμών σε κατεαγότα μακρά οστά πραγματοποιήθηκε από τους Protopappas *et al.*, [37], όπου διερευνήθηκε το ενδεχόμενο οι κυματοδηγούμενοι ρυθμοί να αποτελούν ένα εναλλακτικό μέσο παρακολούθησης της διαδικασίας πώρωσης. Αναπτύχθηκε ένα 2Δ μοντέλο ελαστικής ισότροπης πλάκας με ιδιότητες όμοιες με αυτές του οστού (πάχος 4 mm, διαμήκης ταχύτητα 4063 m/s και εγκάρσια ταχύτητα 1846 m/s) που ήταν σε συμφωνία με προηγούμενες μελέτες οστεοπώρωσης. Ο πώρος μοντελοποιήθηκε ως μια εγκάρσια ασυνέχεια πάχους 2 mm

στη μεσότητα της πλάκας. Η ανάπτυξη και σταδιακή ωρίμανση του πόρου θεωρήθηκε ότι ήταν διαδικασία που εξελισσόταν σε 7 στάδια. Ο πόρος θεωρήθηκε ότι ήταν ένα ομογενές και ισότροπο υλικό του οποίου οι ιδιότητες μεταβάλλονταν κατά τη διαδικασία της πάρωσης. Σε κάθε στάδιο οι ιδιότητες του πόρου μεταβάλλονταν ως γραμμικός συνδυασμός των ιδιοτήτων του αίματος και του φλοιώδους οστού. Στο



Σχήμα 2.28. Παραδείγματα κανονικοποιημένων σημάτων που ελήφθησαν από οστικά δοκίμια με μικροδομή [64]. Κυματομορφή σήματος που παρουσιάζει: (α) θετική διασπορά (διακεκομμένη γραμμή) και (β) αρνητική διασπορά (διακεκομμένη γραμμή). Η διακεκομμένη γραμμή στα (α) και (β) αναπαριστά την κυματομορφή του σήματος αναφοράς από αλατούχο διάλυμα (συμπαγής γραμμή). (γ) Η αντίστοιχη εξάρτηση της φαινόμενης ταχύτητας φάσης του σήματος που παρουσιάζεται στο (α) από τη συχνότητα, (δ) η εξάρτηση της φαινόμενης ταχύτητας φάσης του σήματος που παρουσιάζεται στο (β) από τη συχνότητα.

πρώτο στάδιο, ο πόρος είχε τις ιδιότητες του αίματος σε αντιστοιχία με την ανάπτυξη του αιματώματος και ινώδους συνδετικού ιστού στα πρώιμα στάδια της διεργασίας. Σε μεταγενέστερα στάδια ο πόρος μοντελοποιήθηκε ως ένα στερεό με σταδιακά αυξανόμενη πυκνότητα και μέτρο του Young, ενώ ο λόγος Poisson μειωνόταν σταδιακά προς την τιμή του φλοιώδους οστού. Πραγματοποιήθηκαν δύο σειρές πειραμάτων. Στην πρώτη αγνοήθηκε η πραγματική γεωμετρία του πόρου και το υλικό του πόρου συμπλήρωνε απλώς το καταγματικό κενό ενώ στη δεύτερη σειρά μεταβαλόταν η γεωμετρία του πόρου καταλαμβάνοντας μια περιφερική και ενδοστική περιοχή με όρια

που περιγράφονται από καμπύλες Gauss. Η αξονική διάδοση υπερήχων προσομοιώθηκε τοποθετώντας τους μετατροπείς σε άμεση επαφή με την άνω επιφάνεια της πλάκας. Η διέγερση ήταν ένα ευρυζωνικό κύμα αποτελούμενο από ένα κύκλο ημιτόνου διαμορφωμένο από παλμό Gauss. Μελετήθηκαν δύο κεντρικές συχνότητες: 500 kHz και 1 MHz από τις οποίες προέκυπταν μήκη κύματος 8 mm και 4 mm, αντίστοιχα. Θεωρήθηκε ότι το μοντέλο της πλάκας βρισκόταν στο κενό και συνεπώς αγνοήθηκε η ύπαρξη των μαλακών ιστών. Η επίλυση στο πρόβλημα της κυματικής διάδοσης έγινε με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Από την αρχική ανάλυση των ληφθέντων σημάτων, βρέθηκε ότι το κύμα FAS διαδίδεται ως ένα πλευρικό κύμα χωρίς να επηρεάζεται από την παρουσία του πόρου.

Για την αναπαράσταση των κυματοδηγούμενων ρυθμών χρησιμοποιήθηκε η τεχνική ανάλυσης στο πεδίο χρόνου - συχνότητας (time-frequency domain - $t-f$) η οποία έχει προταθεί στη βιβλιογραφία για τη μελέτη της διασποράς ταχύτητας σε μεταλλικές και συνθετικές πλάκες σε εφαρμογές ΜΚΕ [70]. Η ανάλυση του σήματος στο πεδίο χρόνου-συχνότητας περιγράφει τη μεταβολή του φασματικού περιεχομένου ως συνάρτηση του χρόνου. Κάθε pixel της εικόνας αναπαριστά την πυκνότητα της ενέργειας της κατανομής, το πλάτος της οποίας (εκφρασμένο σε dB) απεικονίζεται με ψευδο-χρώμα. Η ανάλυση των σημάτων στο πεδίο $t-f$ αποτελεί έναν εναλλακτικό τρόπο αναπαράστασης, εντοπισμού και χαρακτηρισμού των κυματοδηγούμενων ρυθμών στο οστό και παρέχει πολλαπλά πλεονεκτήματα συγκριτικά με την ανάλυση του διαγράμματος (r,t) [37]. Βασικότερο πλεονέκτημα της ανάλυσης στο πεδίο $t-f$ αποτελεί το ότι παρέχει τη δυνατότητα αναπαράστασης των διαδιδόμενων ρυθμών χρησιμοποιώντας μόνο ένα σήμα. Αντιθέτως για τη δημιουργία ενός διαγράμματος (r,t) απαιτείται η καταγραφή πολλαπλών σημάτων από σάρωση του δέκτη με σταθερό βήμα μετακίνησης, γεγονός που έχει ως συνέπεια τη μείωση της ακρίβειας και επαναληψιμότητας των μετρήσεων ενώ ταυτόχρονα δεν επιτρέπει την εφαρμογή του υπερηχητικού ελέγχου σε περιπτώσεις κατά τις οποίες η περιοχή μέτρησης είναι περιορισμένη (π.χ. τηλεμετρία, εμφύτευση των μετατροπέων).

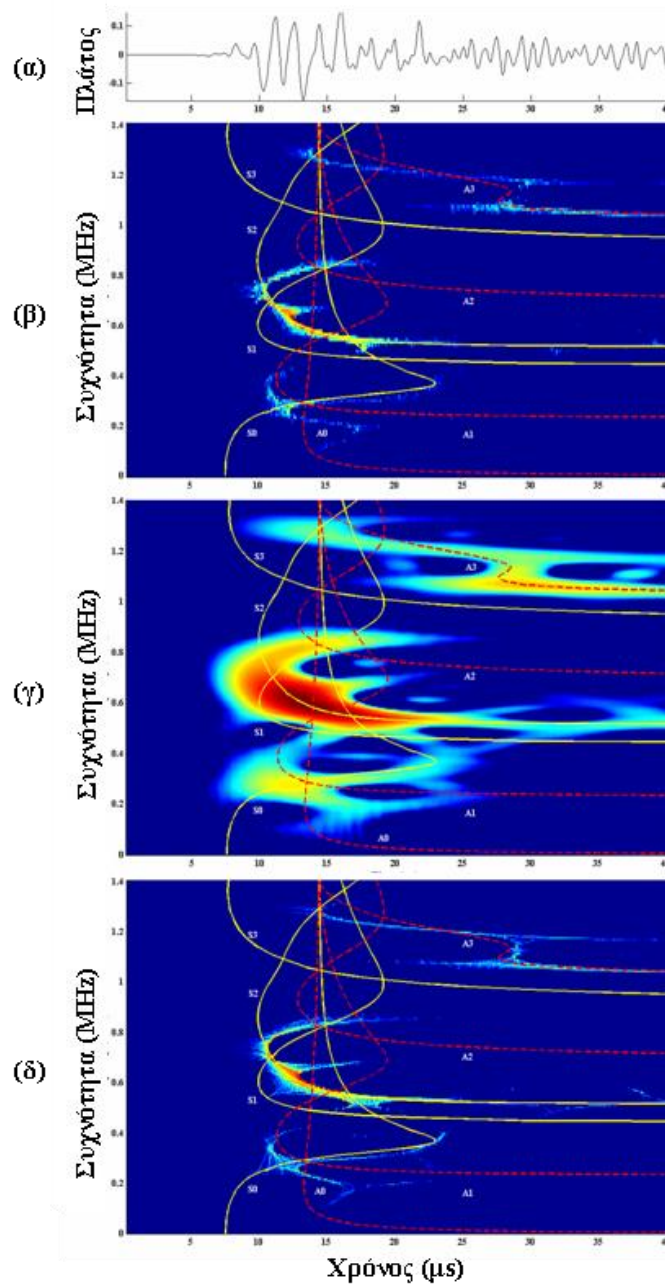
Ο εντοπισμός των ρυθμών πάνω στην εικόνα $t-f$ επετεύχθη χρησιμοποιώντας τις καμπύλες διασποράς της ταχύτητας ομάδος, c_g , των ρυθμών Lamb ως συνάρτηση της συχνότητας, καμπύλες (f, c_g) . Για την ανάλυση των σημάτων που προέκυψαν από το

μοντέλο, οι καμπύλες που υπολογίστηκαν αντιστοιχούσαν σε μια πλάκα με πάχος ίσο με αυτό της πλάκας του μοντέλου, και με τιμές για τη διαμήκη και διατμητική ταχύτητα ίσες με αυτές που υπολογίζονται θεωρητικά με χρήση των ιδιοτήτων του οστού.

Η αναπαράσταση t - f του ληφθέντος σήματος από την άθικτη πλάκα παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.29. Μελετήθηκαν τρεις συναρτήσεις: το επαναπροσδιορισμένο Φασματόγραμμα (reassigned Spectrogram - RS), η εξομαλυμένη ψεύδο Wigner-Ville κατανομή (smoothed pseudo Wigner-Ville - SPWV) και την επαναπροσδιορισμένη εκδοχή της (RSPWV). Όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.29 (γ) η RSPWV κατανομή παρέχει την πιο υψηλή διακριτική ικανότητα και συνεπώς είναι η πιο αποτελεσματική για την αναπαράσταση των κυματοδηγούμενων ρυθμών. Παρατηρείται ότι αρκετοί ρυθμοί εντοπίζονται καθαρά με πιο κυρίαρχους τον S2 και τον A3. Από τις αναπαραστάσεις t - f των σημάτων από τα στάδια πόρωσης βρέθηκε ότι η διασπορά των ρυθμών του Lamb επηρεάζεται σημαντικά από τις ιδιότητες του πόρου. Στα δύο πρώτα στάδια οι ρυθμοί Lamb δεν υποστηρίζονταν, ωστόσο άρχισαν σταδιακά να αποκαθίστανται στα επόμενα στάδια. Επίσης βρέθηκε ότι η διάδοση των ρυθμών ήταν ευαίσθητη και στις γεωμετρικές μεταβολές του πόρου, γεγονός που μπορεί να αποδοθεί στην τοπική αύξηση του πάχους του μέσου στην περιοχή του ενδοστικού και περιοστικού πόρου (το πάχος τοπικά περίπου διπλασιάζεται) με αποτέλεσμα να αυξάνεται το γινόμενο συχνότητας - πάχους.

Στην συγκεκριμένη μελέτη [37] πραγματοποιήθηκαν επίσης και *ex-vivo* μετρήσεις αξονικής διάδοσης υπερήχων σε άθικτες κνήμες προβάτων. Τα ληφθέντα σήματα αναλύθηκαν στο πεδίο χρόνου-συχνότητας και ο εντοπισμός των ρυθμών πραγματοποιήθηκε με βάση την παραπάνω διαδικασία. Ωστόσο, από την ανάλυση των πειραματικών μετρήσεων παρατηρήθηκε ότι οι ρυθμοί που διαδίδονται σε πραγματικά οστά δεν είναι εφικτό να περιγραφούν πλήρως από τη θεωρία του Lamb.

Σε άλλη υπολογιστική εργασία της ίδιας ερευνητικής ομάδας [71] αναπτύχθηκε ένα πιο ρεαλιστικό μοντέλο κατεαγότος οστού λαμβάνοντας υπόψη την 3D ρεαλιστική γεωμετρία και ανισοτροπία του οστού και του πόρου. Αρχικά εξετάστηκε μια εξιδανικευμένη γεωμετρία (κοίλου κυλίνδρου) για δύο περιπτώσεις ελαστικής συμμετρίας: ισοτροπία και εγκάρσια ισοτροπία. Οι ελαστικές σταθερές που



Σχήμα 2.29. (α) Η κυματομορφή του σήματος (άθικτη πλάκα για 20 mm απόσταση ανάμεσα στον πομπό και δέκτη και διέγερση 1 MHz) και οι αναπαραστάσεις t - f του σήματος με χρήση των (β) RS, (γ) SPWV, και (δ) RSPWV συναρτήσεων στις οποίες υπερθέτονται οι αναλυτικές καμπύλες διασποράς Lamb [37].

χρησιμοποιήθηκαν παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.3. Στη συνέχεια ελήφθη υπόψη η ρεαλιστική γεωμετρία της διάφυσης της άθικτης κνήμης του προβάτου.

Το μοντέλο του κατεαγότος οστού αναπτύχθηκε τοποθετώντας τον πόρο στο μέσο του

μήκους της διάφυσης (Σχήμα 2.30). Ο πόρος αποτελούνταν από έξι περιοχές οστεοποίησης σύμφωνα με προηγούμενη μελέτη [72] και η διαδικασία της πώρωσης μοντελοποιήθηκε χρησιμοποιώντας τρία στάδια. Πραγματοποιήθηκαν μετρήσεις αξονικής διάδοσης χρησιμοποιώντας ένα ευρυζωνικό σήμα διέγερσης με κεντρική συχνότητα 1 MHz. Η τρισδιάστατη διάταξη και τοποθέτηση του πομπού και του δέκτη ως προς τον πόρο και το οστό παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.30. Διερευνήθηκαν δύο ανατομικές περιοχές τοποθέτησης των μετατροπέων με σκοπό να διερευνηθεί η επίδραση των τοπικών χαρακτηριστικών του σχήματος του φλοιού στην διάδοση των κυμάτων. Η πρώτη περιοχή αντιστοιχούσε σε μια περιοχή όπου ο φλοιός έχει τοπικό πάχος 3.4 mm και εμφανίζει περίπλοκη καμπυλότητα, ενώ η δεύτερη σε περιοχή όπου ο φλοιός έχει τοπικό πάχος 3.97 mm και η καμπυλότητά του είναι σχεδόν κυκλική. Η εξωτερική και εσωτερική επιφάνεια του μοντέλου θεωρήθηκαν ότι βρίσκονται στο κενό (ελεύθερες επιφάνειες) αγνοώντας την παρουσία των περιβαλλόντων μαλακών ιστών. Το πρόβλημα της 3D διάδοσης ελαστικών κυμάτων επιλύθηκε αριθμητικά με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

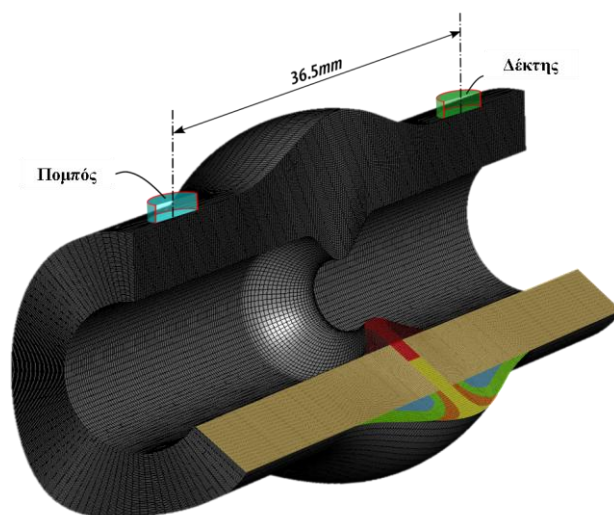
Πίνακας 2.3. Ιδιότητες του φλοιώδους οστού για κάθε περίπτωση ελαστικής συμμετρίας.

Ιδιότητες Υλικού	Ισοτροπία	Εγκάρσια Ισοτροπία
Ελαστικές Σταθερές (GPa)		
$C_{11} = C_{22}$	24.76	17.50
C_{33}	24.76	24.76
C_{12}	14.54	10.15
$C_{23} = C_{31}$	14.54	10.69
$C_{44} = C_{55}$	5.11	5.11
C_{66}	5.11	3.67
Πυκνότητα (Kg/m ³)	1500	1500
Διαμήκης Ταχύτητα (m/s)	4063	4063

Για τον χαρακτηρισμό των κυματοδηγούμενων ρυθμών χρησιμοποιήθηκαν οι καμπύλες διασποράς που προβλέπονται από τη θεωρία κυματοδήγησης σε κύλινδρο. Στο Σχήμα παρουσιάζονται οι κυματοδηγούμενοι ρυθμοί υπολογιζόμενοι για κοίλο κύλινδρο για ισότροπο υλικό (διακεκομμένες γραμμές) και για εγκάρσια ισότροπο υλικό (συμπαγείς

γραμμές). Παρατηρείται ότι η ελαστική συμμετρία έχει σημαντική επίδραση στην διασπορά της ταχύτητας των ρυθμών υψηλής τάξης, ενώ η επίδραση είναι αμελητέα για τους βασικούς ρυθμούς $L(0,1)$ και $F(1,1)$.

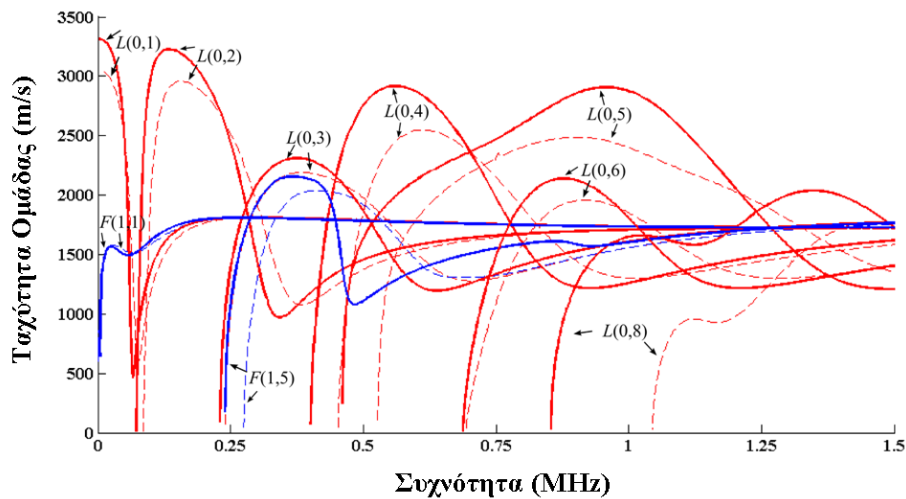
Όσον αφορά τα άθικτα μοντέλα, παρατηρήθηκε ότι το κύμα FAS αντιστοιχούσε σε ένα πλευρικό κύμα του οποίου η ταχύτητα δεν επηρεαζόταν από την καμπυλότητα του φλοιού και παρέμενε αμετάβλητο στις δύο υποθέσεις ελαστικής συμμετρίας. Αντιθέτως, η ανάλυση $t-f$ των σημάτων από το άθικτο μοντέλο του οστού κατέδειξε ότι η πολύπλοκη γεωμετρία του οστού καθώς και τα τοπικά χαρακτηριστικά του φλοιού έχουν σημαντική επίδραση στη διάδοση των υψηλότερης τάξης κυματοδηγούμενων ρυθμών. Η επίδραση ήταν λιγότερο εμφανής στη διάδοση των βασικών ρυθμών $L(0,1)$ και $F(1,1)$, γεγονός που προβλέπεται και από τη θεωρία. Συγκρίνοντας με την προηγούμενη 2D μελέτη όπου η ισότροπη πλάκα είχε όμοιες ιδιότητες με αυτές του ισότροπου 3D μοντέλου, βρέθηκε επίσης ότι η διασπορά των S2 και A3 ρυθμών Lamb ήταν παρόμοια με αυτή των $L(0,5)$ και $L(0,8)$ ρυθμών, μολονότι η διέγερση στο 2D μοντέλο ήταν πιο ευρυζωνική και οι μέθοδοι επίλυσης ήταν διαφορετικοί. Η συμφωνία μεταξύ των ρυθμών σε πλάκα και σε κύλινδρο προβλέπεται επίσης και από τη θεωρία για τις συγκεκριμένες τιμές πάχους φλοιού και εξωτερικής ακτίνας.



Σχήμα 2.30. Οβελιαία τομή του μοντέλου του κατεαγότος οστού και η διάταξη πομπού-δέκτη [71].

Στο μοντέλο του κατεαγότος οστού βρέθηκε ότι το FAS διαδιδόταν εξίσου ως πλευρικό κύμα χωρίς να έχει τη δυνατότητα αντανάκλασης των υλικών και μηχανικών

μεταβολών που λαμβάνουν χώρα στην περιοχή του ενδόστεου. Επίσης η διάδοση των κυματοδηγούμενων ρυθμών υψηλής τάξης επηρεάστηκε τόσο από τη γεωμετρία όσο και τις ιδιότητες του πόρου. Οι ρυθμοί ήταν διαφορετικοί μεταξύ των Σταδίων 1 και 2 ενώ στο Στάδιο 3, η διασπορά του ρυθμού $L(0,5)$ είχε κοινά χαρακτηριστικά με αυτά του Σταδίου 0. Ωστόσο οι βασικοί ρυθμοί βρέθηκε ότι ήταν λιγότερο ευαίσθητοι στις αλλαγές που συμβαίνουν στα στάδια της πώρωσης. Οι συγγραφείς υποστήριξαν ότι η προοδευτική αποκατάσταση της διασποράς των ρυθμών στα διάφορα στάδια της



Σχήμα 2.31. Καμπύλες διασποράς των ρυθμών $L(0, m)$ και $F(1, m)$ για κούλο κύλινδρο από ισότροπο υλικό (διακεκομμένες γραμμές) και εγκάρσια ισότροπο υλικό (συμπαγείς γραμμές). Το πάχος του τοιχώματος είναι $h = 4,08$ mm και η εξωτερική ακτίνα 8,61 mm.

πώρωσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μέσο παρακολούθησης της πώρωσης. Ωστόσο δεν κατέστη δυνατή η εξαγωγή χαρακτηριστικών που προσδιορίζουν ποσοτικά την εξέλιξη της πώρωσης και τα συμπεράσματα της μελέτης ήταν ποιοτικά.

Στις προαναφερθείσες υπολογιστικές μελέτες για την παρακολούθηση της διαδικασίας πώρωσης οστικών καταγμάτων, το οστό θεωρήθηκε ότι βρισκόταν στο κενό και συνεπώς η ύπαρξη των μαλακών ιστών αγνοήθηκε. Παρόλα αυτά, οι υπερκείμενοι μαλακοί ιστοί που περικλείουν το οστό παρέχουν ένα μονοπάτι διαρροής της ενέργειας υπερήχων δημιουργώντας επιπρόσθετους κυματοδηγούμενους ρυθμούς που διαδίδονται σε ολόκληρη τη δομή του οστού συμπεριλαμβανομένων των μαλακών ιστών και του μυελού των οστών. Αν και οι ρυθμοί αυτοί έχουν διερευνηθεί σε μελέτες διάδοσης υπερήχων σε άθικτα οστά για την αξιολόγηση της οστεοπώρωσης, η επίδραση των

μαλακών ιστών στην κυματική διάδοση κατά τη διαδικασία της πάρωσης καταγμάτων παραμένει ανοικτό ερευνητικό πεδίο. Το θέμα αυτό διερευνάται συστηματικά στο Κεφάλαιο 4 της παρούσας διατριβής χρησιμοποιώντας 2Δ υπολογιστικά μοντέλα κατεαγότεων οστών με ρεαλιστικές συνοριακές συνθήκες. Επιπρόσθετα, όπως προαναφέρθηκε, η κύρια τεχνική αξονικής διάδοσης υπερήχων που έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως στη βιβλιογραφία είναι η διαδερμική εφαρμογή η οποία όμως έχει σημαντικούς περιορισμούς όταν εφαρμόζεται *in-vivo*, κυρίως εξαιτίας της επίδρασης των μαλακών ιστών στην ακρίβεια των μετρήσεων. Αν και η πρόσφατα προτεινόμενη τεχνική διοστικής εφαρμογής των μετατροπέων αντιμετωπίζει επιτυχώς το συγκεκριμένο θέμα, είναι ημι-επεμβατική μέθοδος, αφού απαιτείται η εμφύτευση των μετατροπέων στην περιοχή του κατάγματος. Για την αντιμετώπιση των πρακτικών περιορισμών των διαδερμικών και διοστικών εφαρμογών στο Κεφάλαιο 5 προτείνεται μια εναλλακτική μέθοδος διάδοσης υπερήχων τοποθετώντας τους μετατροπείς στην επιφάνεια των βελονών μιας ήδη υπάρχουσας εξωτερικής οστεοσύνθεσης.

2.5 Βιβλιογραφία

1. Cheeke JDN. Fundamentals and Applications of Ultrasonic Waves. Boca Raton: CRC Press; 2002.
2. Graff KF. Wave Motion in Elastic Solids. New York: Dover Publications; 1991.
3. Rose JL. Ultrasonic Waves in Solid Media. Cambridge: Cambridge University Press; 1999.
4. Fish P. Physics and Instrumentation of Diagnostic Medical Ultrasound. New York: John Wiley & Sons Inc; 1990.
5. Njeh CF, Hans D, Fuerst T, Gluer C, Genant HK. Quantitative Ultrasound. Assessment of osteoporosis and bone status. London: Martin Dunitz; 1999.
6. Protopappas VC, Baga DA, Fotiadis DI, Likas AC, Papachristos AA, Malizos KN. An ultrasound wearable system for the monitoring and acceleration of fracture healing in long bones. IEEE Trans. Biomed Eng 2005 Sept.;52(9):1597-1608.
7. Moilanen P, Nicholson PH, Kilappa V, Cheng S, Timonen J. Measuring guided waves in long bones: modeling and experiments in free and immersed plates. Ultrasound Med Biol 2006 May;32(5):709-19.
8. Yapura CL, Kinra VK. Guided waves in a fluid-solid bilayer. Wave Motion 1995; 21:35-46.
9. Plona TJ, Pitts LE, Mayer WG. Ultrasonic bounded beam reflection and transmission effects at a liquid/solid-plate/liquid interface. 1976; 59(6): 1324-1328.
10. Moilanen P. Ultrasonic Guided Waves in Bone. IEEE Trans. on Ultrasonics, Ferroel. Freq. Cont. June 2008; 55(6):1277-1286.

11. Bossy E, Talmant M, Laugier P. Effect of bone cortical thickness on velocity measurements using ultrasonic axial transmission: a 2D simulation study. *J Acoust Soc Am* 2002; Jul;112(1):297-307.
12. Camus E, Talmant M, Berger G, Laugier P. Analysis of the axial transmission technique for the assessment of skeletal status. *J Acoust Soc Am* 2000; Dec;108(6):3058-65.
13. Bossy E, Talmant M, Peyrin F, Akrouf L, Cloetens P, Laugier P. An in vitro study of the ultrasonic axial transmission technique at the radius: 1-MHz velocity measurements are sensitive to both mineralization and intracortical porosity. *J Bone Miner Res* 2004; Sep;19(9):1548-56.
14. Talmant M, Kolta S, Roux Ch, Haguenaer D, Vedel I, Cassou B, Bossy E, Laugier P. In Vivo Performance Evaluation of Bi-Directional Ultrasonic Axial Transmission for Cortical Bone Assessment. *Ultrasound in Med. Biol.* 2009; (in press).
15. Määtä M, Moilanen P, Nicholson P, Cheng S, Timonen J Jämsä T. Correlation of Tibial Low-Frequency Ultrasound Velocity with Femoral Radiographic Measurements and BMD in Elderly Women. *Ultrasound Med Biol* 2009; June;35(6):903-911.
16. Foldes AJ, Rimon A, Keinan DD, Popovtzer MM. Quantitative ultrasound of the tibia: a novel approach for assessment of bone status. *Bone* 1995; Oct;17(4):363-7.
17. Lee SC, Coan BS, Bouxsein ML. Tibial ultrasound velocity measured in situ predicts the material properties of tibial cortical bone. *Bone* 1997; Jul;21(1):119-25.
18. Sievanen H, Cheng S, Ollikainen S, Uusi-Rasi K. Ultrasound velocity and cortical bone characteristics in vivo. *Osteoporos Int* 2001;12(5):399-405.
19. Njeh CF, Hans D, Wu C, Kantorovich E, Sister M, Fuerst T, Genant HK. An in vitro investigation of the dependence on sample thickness of the speed of sound along the specimen. *Med Eng Phys* 1999;21:651-9.

20. Lakes R, Yoon HS, Katz JL. Ultrasonic wave propagation and attenuation in wet bone. *J Biomed Eng* 1986; Apr;8(2):143-8.
21. Muller M, Moilanen P, Bossy E, Nicholson P, Kilappa V, Timonen J, Talmant M, Cheng S, Laugier P. Comparison of three ultrasonic axial transmission methods for bone assessment. *Ultrasound Med Biol* 2005; May;31(5):633-642.
22. Nicholson PH, Moilanen P, Karkkainen T, Timonen J, Cheng S. Guided ultrasonic waves in long bones: modelling, experiment and in vivo application. *Physiol Meas* 2002; Nov;23(4):755-68.
23. Bossy E, Talmant M, Laugier P. Three-dimensional simulations of ultrasonic axial transmission velocity measurement on cortical bone models. *J Acoust Soc Am* 2004; May;115(5 Pt 1):2314-24.
24. Anast GT, Fields T, Siegel IM. Ultrasonic technique for the evaluation of bone fractures. *Am J Phys Med* 1958;37:157-9.
25. Floriani LP, Debervoise NT, Hyatt GW. Mechanical properties of healing bone by use of ultrasound. *Surg Forum* 1967;18:468-70.
26. Abendschein WF, Hyatt GW. Ultrasonics and physical properties of healing bone. *J Trauma* 1972; Apr;12(4):297-301.
27. Gill PJ, Kernohan G, Mawhinney IN, Mollan RAB, McIlhagger. Investigation of the mechanical properties of bone using ultrasound. In *Proc. of Instn. Mech Engrs* 1989;203:61-3.
28. Saulgozis J, Pontaga I, Lowet G, Van der PG. The effect of fracture and fracture fixation on ultrasonic velocity and attenuation. *Physiol Meas* 1996; Aug;17(3):201-11.
29. Gerlanc M, Haddad D, Hyatt GW, Langloh JT, Hilaire PS. Ultrasonic study of normal and fractured bone. *Clin Orthop Relat Res* 1975;111:175-80.
30. Cunningham JL, Kenwright J, Kershaw CJ. Biomechanical measurement of fracture healing. *J Med Eng Technol* 1990; May;14(3):92-101.

31. Saha S. Ultrasonic and vibration methods to measure the in vivo bone properties. 1989.
32. Malizos KN, Papachristos AA, Protopappas VC, Fotiadis DI. Transosseous application of low-intensity ultrasound for the enhancement and monitoring of fracture healing process in a sheep osteotomy model, *Bone*, 2006;Apr.;38(4): 530-539.
33. Lowet G, Van der PG. Ultrasound velocity measurement in long bones: measurement method and simulation of ultrasound wave propagation. *J Biomech* 1996; Oct;29(10):1255-62.
34. Njeh CF, Kearton JR, Hans D, Boivin CM. The use of quantitative ultrasound to monitor fracture healing: a feasibility study using phantoms. *Med Eng Phys* 1998; Dec;20(10):781-6.
35. Dodd SP, Cunningham JL, Miles AW, Gheduzzi S, Humphrey VF. An in vitro study of ultrasound signal loss across simple fractures in cortical bone mimics and bovine cortical bone samples. *Bone* 2007;40 (3):656-661.
36. Dodd SP, Miles AW, Gheduzzi S, Humphrey VF, Cunningham JL. Modelling the effects of different fracture geometries and healing stages on ultrasound signal loss across a long bone fracture. *Comp. Meth. Biomech. Biomed. Engin.* 2007;10 (5):371-375.
37. Dodd SP, Cunningham JL, Miles AW, Gheduzzi S, Humphrey VF. Ultrasound Transmission Loss Across Transverse and Oblique Bone Fractures: An In Vitro Study. *Ultras. Medic. Biol.* 2008;34 (3):454-462.
38. Hill R, Forsyth SA, Macey P. Finite element modelling of ultrasound, with reference to transducers and AE waves. *Ultrasonics* 2004;42:253-8.
39. Alleyne DN, Cawley P. Optimization of Lamb wave inspection techniques . *NDT&E Int* 1992;25(1):11-22.
40. Aristegui C, Lowe MJS, Cawley P. Guided waves in fluid-filled pipes surrounded by different fluids. *Ultrasonics* 2001;39:367-75.

41. Ditri JJ, Rose JL. Excitation of guided elastic wave modes in hollow cylinders by applied surface tractions. *J Appl Phys* 1992;72(7):2589-97.
42. Ditri JJ. Utilization of guided elastic waves for the characterization of circumferential cracks in hollow cylinders. *J Acoust Soc Am* 1994;96(6):3769-75.
43. Kley M, Valle C, Jacobs LJ, Qu J, Jarzynski J. Development of dispersion curves for two-layered cylinders using laser. *J Acoust Soc Am* 1999;106(2):582-8.
44. Moser F, Jacobs LJ, Qu J. Modeling elastic wave propagation in waveguides with the finite element method. *NDT&E Int* 1999;32:225-34.
45. Pavlakovic BN. Leaky guided ultrasonic waves in NDT. PhD thesis, Imperial College of Science, Technology, and Medicine, University of London, UK; 1998.
46. Rose JL. A Baseline and Vision of Ultrasonic Guided Wave Inspection Potential. *J Pressure Vessel Tech* 2002;124:273-82.
47. Valle C, Qu J, Jacobs LJ. Guided circumferential waves in layered cylinders. *Int J Eng Sci* 1999;37:1369-87.
48. Valle C, Niethammer M, Qu J, Jacobs LJ. Crack characterization using guided circumferential waves. *J Acoust Soc Am* 2001;110(3):1282-90.
49. Vogt K. Leaky guided ultrasonic waves in NDT. PhD thesis, Imperial College of Science, Technology, and Medicine, University of London, UK; 2002.
50. Xu PC, Datta SK. Characterization of fiber-matrix interface by guided waves: Axisymmetric case. *J Acoust Soc Am* 1991;89(6):2573-83.
51. Zerwer A, Polak MA, Santamarina JC. Rayleigh wave propagation for the detection of near surface discontinuities: Finite element modeling. *J Nondestructive Evaluation* 2003;22(2):39-52.

52. Li J, Rose JL. Excitation and propagation of non-axisymmetric guided waves in a hollow cylinder. *J Acoust Soc Am* 2001;109(2):457-64.
53. Gsell D, Dual J. Non-destructive evaluation of elastic material properties in anisotropic circular cylindrical structures. *Ultrasonics* 2004;43:123-32.
54. Protopappas VC, Fotiadis DI, Malizos KN. Guided ultrasound wave propagation in intact and healing long bones. *Ultrasound Med Biol.* 2006;32(5):693-708.
55. Protopappas VC, Vavva MG, Fotiadis DI, Malizos KN. Ultrasonic monitoring of bone fracture healing. *IEEE Trans. Ultr. Ferroel. Freq. Cont.* 2008;55(6):1243-1255.
56. Moilanen P, Nicholson PH, Karkkainen T, Wang Q, Timonen J, Cheng S. Assessment of the tibia using ultrasonic guided waves in pubertal girls. *Osteoporos Int* 2003;14(12):1020-7.
57. Lefebvre F, Deblock Y, Campistron P, Ahite D, Fabre JJ. Development of a new ultrasonic technique for bone and biomaterials in vitro characterization. *J Biomed Mater Res* 2002;63(4):441-6.
58. Ta D, Wang W, Wang Y, Le LH, Zhou Y. Measurement of the Dispersion and Attenuation of Cylindrical Ultrasonic Guided Waves in Long Bone. *Ultrasound Med. Biol.* 2009;35(4):641-652.
59. Lee KI, Yoon SW. Feasibility of bone assessment with leaky Lamb waves in bone phantoms and a bovine tibia. *J Acoust Soc Am* 2004 Jun;115(6):3210-7.
60. Moilanen P, Talmant M, Bousson V, Nicholson PHF, Cheng S, Timonen J, Laugier P. Ultrasonically determined thickness of long cortical bones: Two-dimensional simulations of in vitro experiments. *J Acoust Soc Am* 2007;122(3):1818-1826.
61. Moilanen P, Talmant M, Nicholson PHF, Cheng S, Timonen J, Laugier P. Ultrasonically determined thickness of long cortical bones: Three-dimensional simulations of in vitro experiments. *J Acoust Soc Am* 2007;122(4);2439-2445.

62. Moilanen P, Kilappa V, Nicholson PH, Timonen J, Cheng S. Thickness sensitivity of ultrasound velocity in long bone phantoms. *Ultrasound Med Biol* 2004 Nov;30(11):1517-21.
63. Nicholson PH, Cheng S, Karkkainen T. Measurement of guided ultrasonic waves in the human tibia and radius. Proc. 142nd Meeting Acous Soc Am. Florida, USA 2001.
64. Haïat G, Sasso M, Naili S, Matsukawa M. Ultrasonic velocity dispersion in bovine cortical bone: An experimental study. *J Acoust Soc Am* 2008;124(3):1811-1821.
65. Xu W, Kaufman JJ. Diffraction correction methods for insertion ultrasound attenuation estimation. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 1993;40:563–570.
66. Droin P, Berger G, Laugier P. Velocity dispersion of acoustic waves in cancellous bone. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control* 1998;45:581–592.
67. Marutyan KR, Holland MR, Miller JG. Anomalous negative dispersion in bone can result from the interference of fast and slow waves. *J Acoust Soc Am* 2006;120:EL55–61.
68. Yamato Y, Matsukawa M, Otani T, Yamazaki K, Nagano A. Distribution of longitudinal wave properties in bovine cortical bone in vitro. *Ultrasonics* 2006;44:e233-e237.
69. Sasso M, Haïat G, Yamato Y, Naili S, Matsukawa M. Dependence of ultrasonic attenuation on bone mass and microstructure in bovine cortical bone. *J. Biomechanics* 2008;41(2):347-355.
70. Prosser WH, Seale MD, Smith BT. Time-frequency analysis of the dispersion of Lamb modes. *J Acoust Soc Am* 1999;105(5);2669-2676.
71. Protopappas VC, Kourtis IC, Kourtis LK, Malizos KN, Massalas CV, Fotiadis DI. Three-dimensional finite element modeling of guided ultrasound wave

propagation in intact and healing long bones. *J Acoust Soc Am* 2007;121(6):3907-3921.

72. Claes LE, Heigele CA. Magnitudes of local stress and strain along bony surfaces predict the course and type of fracture healing. *J Biomech* 1999;32(3):255-266.

73. Haiat G, Naili S, Grimal Q, Talmant M, Desceliers C, Soize C. Influence of a gradient of material properties on ultrasonic wave propagation in cortical bone: Application to axial transmission. *J Acoust Soc Am* 2009;125(6):4043–4052

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΜΕΣΟΥ ΜΕ ΜΙΚΡΟΔΟΜΗ

3.1 Εισαγωγή

Πειραματικές μελέτες έχουν αποδείξει ότι πολλά υλικά με μικροδομή όπως οι πολυκρυσταλλοί, τα πολυμερή, τα κοκκώδη και κυψελώδη υλικά, τα οστά κτλ, επηρεάζονται σε μεγάλο βαθμό από τη μικροδομή τους και παρουσιάζουν διαφορετική μηχανική συμπεριφορά σε μακροσκοπικό επίπεδο από αυτή που προβλέπεται από την κλασική θεωρία ελαστικότητας. Η επίδραση της μικροδομής είναι πιο έκδηλη όταν η διάσταση της δομής του υλικού είναι μικρή και συγκρίσιμη με τη μικροδομή των συστατικών του. Για τον προσδιορισμό των μηχανικών ιδιοτήτων υλικών με μικροδομή, είναι απαραίτητος ο προσδιορισμός του πεδίου τάσεων με μη τοπικό τρόπο (non-local) χρησιμοποιώντας εσωτερικές παραμέτρους που συσχετίζουν τη μικροδομή με τη μακροδομή. Η κλασική θεωρία δεν προβλέπει τη χρήση εσωτερικών παραμέτρων και αναφέρεται μόνο σε ομογενή υλικά των οποίων το πεδίο τάσεων μπορεί να προσδιοριστεί μόνο τοπικά. Κατά συνέπεια, η κλασική θεωρία δεν περιγράφει επαρκώς τη μηχανική συμπεριφορά υλικών με μικροδομή. Η θεωρητική μοντελοποίηση της επίδρασης της μικροδομής μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας γενικευμένες θεωρίες ελαστικότητας ανώτερης τάξης (enhanced theories) όπως αυτή που προτάθηκε από τους αδερφούς Cosserat [1] και γενικεύτηκε αργότερα από τον Eringen ως μικροπολική θεωρία (micropolar theory) [2], τις γενικευμένες θεωρίες ανώτερης βαθμίδας που προτάθηκαν από τον Mindlin [3] και τη μη τοπική θεωρία ελαστικότητας (non-local theory) του Eringen [4].

3.2 Γενικευμένες Θεωρίες Ελαστικότητας Συνεχούς Μέσου (Generalized Continuum Theories of Elasticity)

3.2.1.1 Θεωρία Ελαστικότητας Συνεχούς κατά Cosserat (Cosserat Theory)

Σε αντίθεση με την κλασσική θεωρία ελαστικότητας, στη θεωρία ελαστικότητας κατά Cosserat [1] η παραμόρφωση κάθε υλικού σημείου δεν περιγράφεται μόνο από το διάνυσμα των μετατοπίσεων αλλά και από ένα ανεξάρτητο διάνυσμα τοπικής περιστροφής (local rotation). Κατά συνέπεια στο συνεχές μέσο εμφανίζονται εκτός από τις τάσεις (δυνάμεις ανά μονάδα επιφάνειας) και ροπές ανά μονάδα επιφάνειας οι οποίες ονομάζονται τάσεις ζεύγους (couple stresses). Σε ένα αφρώδες Cosserat υλικό (foam material), ως τοπική περιστροφή μπορεί να νοηθεί η περιστροφή μεταξύ των κόμβων (nodes) και των ινών (ribs), ενώ οι τάσεις ζεύγους ως ο χωρικός μέσος όρος των ροπών κάμψης και στρέψης στις ίνες του υλικού.

Η θεωρία Cosserat προτάθηκε αρχικά από τους αδερφούς Cosserat και μέχρι το 1960 έγιναν πολλές βελτιώσεις [3,5,6]. Ο Eringen το 1968 [2,5,7] εισήγαγε και την έννοια της μικρο-αδράνειας μετονομάζοντας τη θεωρία σε Cosserat μικροπολική θεωρία (micropolar theory). Μια ειδική περίπτωση της θεωρίας Cosserat είναι η θεωρία τάσεων ζεύγους (couple stress theory) στην οποία η μικρο-περιστροφή σε ένα υλικό σημείο θεωρείται ίση με τη μακρο-περιστροφή. Η θεωρία τάσεων ζεύγους μελετήθηκε εκτενώς από τον Koiter [8].

Οι καταστατικές εξισώσεις για ένα γραμμικώς ελαστικό ισότροπο Cosserat υλικό ορίζονται ως:

$$\sigma_{kl} = \lambda e_{rr} \delta_{kl} + (2\mu + \widehat{\kappa}) e_{kl} + \widehat{\kappa} e_{klm} (r_m - \phi_m), \quad (3.1)$$

$$m_{kl} = \widehat{\alpha} \phi_{r,r} \delta_{kl} + \widehat{\beta} \phi_{k,l} + \widehat{\gamma} \phi_{l,k}, \quad (3.2)$$

όπου σ_{kl} είναι ο τανυστής τάσεων, m_{kl} είναι ο τανυστής τάσεων ζεύγους, ϕ_m είναι το διάνυσμα μικρο-περιστροφής, δ_{kl} είναι το δέλτα του Kronecker και λ, μ είναι οι συντελεστές Lamé. Οι τανυστές τροπών και μακρο-περιστροφής, e_{kl} και r_k αντίστοιχα ορίζονται ως:

$$e_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}), \quad (3.3)$$

$$r_k = \frac{1}{2} e_{klm} u_{m,l}, \quad (3.4)$$

όπου $u_{i,k}$ είναι η βαθμίδα της μετατόπισης και e_{klm} το σύμβολο αντιμετάθεσης (permutation symbol). Σε αντίθεση με την κλασσική θεωρία ελαστικότητας, ο τανυστής σ_{kl} είναι μη συμμετρικός. Παρατηρείται επίσης ότι για τον πλήρη χαρακτηρισμό ενός ισότροπου Cosserat υλικού, εκτός από τους συντελεστές Lamé απαιτείται η εισαγωγή τεσσάρων νέων άγνωστων συντελεστών $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\kappa}$, οι οποίοι μπορούν να προσδιοριστούν μέσω πειραματικών μετρήσεων μικρο-μηχανικής. Ωστόσο, ο προσδιορισμός των παραμέτρων αυτών δεν είναι πάντα εφικτός.

Η φυσική ερμηνεία των συντελεστών αυτών, έχει αποτελέσει αντικείμενο έρευνας για πολλούς ερευνητές, χωρίς ωστόσο να έχουν καταλήξει σε συμπέρασμα. Έχει βρεθεί ότι οι μηχανικές ιδιότητες μπορούν να συσχετιστούν με τους συντελεστές της μικροδομής σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις [5,9]:

$$E = \frac{(2\mu + \hat{\kappa})(3\lambda + 2\mu + \hat{\kappa})}{2\lambda + 2\mu + \hat{\kappa}}, \quad (3.5)$$

$$G = \frac{1}{2}(2\mu + \hat{\kappa}), \quad (3.6)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2\lambda + 2\mu + \hat{\kappa}}, \quad (3.7)$$

$$l_t = \left[\frac{\hat{\beta} + \hat{\gamma}}{2\mu + \hat{\kappa}} \right]^{1/2}, \quad (3.8)$$

$$l_b = \left[\frac{\hat{\gamma}}{2(2\mu + \hat{\kappa})} \right]^{1/2}, \quad (3.9)$$

$$N = \left[\frac{\hat{\kappa}}{2(\mu + \hat{\kappa})} \right]^{1/2}, \quad (3.10)$$

$$\Psi = \frac{\hat{\beta} + \hat{\gamma}}{\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma}}, \quad (3.11)$$

όπου E, G, ν, l_t, l_b, N και Ψ είναι το μέτρο του Young, το μέτρο διάτμησης, ο λόγος poisson, το χαρακτηριστικό μήκος στρέψης, το χαρακτηριστικό μήκος κάμψης, ο αριθμός σύζευξης και ο λόγος πολικότητας, αντίστοιχα. Από τις Εξ. (3.5)-(3.11) είναι προφανές ότι στην περίπτωση που οι συντελεστές $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\kappa}$ μηδενίζονται τότε

προκύπτουν οι σχέσεις που περιγράφουν το υλικό με βάση την κλασσική θεωρία ελαστικότητας. Επίσης, όταν $N = 1$ προκύπτει η θεωρία τάσεων ζεύγους [10,11].

3.2.1.2 Εφαρμογές των θεωριών τύπου Cosserat σε προβλήματα μηχανικής

Οι θεωρίες τύπου Cosserat έχουν χρησιμοποιηθεί ευρέως για την επίλυση προβλημάτων μηχανικής στα οποία η κλασσική ελαστικότητα δίνει αποτελέσματα που αποκλίνουν από τις πειραματικές μετρήσεις. Για παράδειγμα, σε προβλήματα ανάλυσης του πεδίου τάσεων γύρω από κυλινδρικά ή σφαιρικά εγκλείσματα και οπές οι θεωρίες Cosserat προσφέρουν πιο ρεαλιστικά αποτελέσματα σε σύγκριση με την κλασσική θεωρία ελαστικότητας. Πιο συγκεκριμένα, η θεωρία Cosserat προβλέπει χαμηλότερα επίπεδα συγκέντρωσης τάσεων όταν εμφανίζονται οπές [12], και υψηλότερα επίπεδα σε γειτονικές περιοχές που αποτελούνται από άκαμπτο στερεό υλικό, γεγονός που δε μπορεί να προβλεφθεί από την κλασσική θεωρία. Επιπλέον, σε περιπτώσεις κατά τις οποίες η κλασσική ελαστικότητα προβλέπει άπειρο πεδίο τάσεων, το οποίο είναι παράδοξο, η θεωρία Cosserat έχει τη δυνατότητα να προβλέπει πεπερασμένες τιμές τάσεων [11]. Η θεωρία αυτή έχει επίσης εφαρμοστεί επιτυχώς σε κοκκώδη υλικά, με σκοπό τον ακριβή εντοπισμό της παραμόρφωσης και αστοχίας των υλικών κατά μήκος λεπτών ζωνών ολίσθησης, πάχους ορισμένων κόκκων [13].

Πολλοί ερευνητές έχουν χρησιμοποιήσει τη θεωρία αυτή για τη μελέτη της διάδοσης ελαστικών κυμάτων σε ελεύθερο χώρο με μικροδομή [14,15], την επίλυση προβλημάτων ανάκλασης κυμάτων σε επίπεδες επιφάνειες [16] και τη μελέτη των φαινομένων διασποράς σε κυματοδηγούς [17,18]. Οι Suiker *et al.*, [15] αναλύοντας τα χαρακτηριστικά της διάδοσης επίπεδων κυμάτων σε ένα μοντέλο συνεχούς Cosserat και σε διαφορετικές γεωμετρικές πλέγματα διερεύνησαν σε ποιο επίπεδο παραμόρφωσης μπορεί το μοντέλο αυτό να περιγράψει επαρκώς τη μηχανική συμπεριφορά υλικών με διακριτή μικροδομή. Βρήκαν ότι για μήκη κύματος μεγαλύτερα από $6d$, όπου d η απόσταση των κυψελών του πλέγματος, το μοντέλο Cosserat μπορεί να περιγράψει επαρκώς τα πεδία παραμορφώσεων που αναπτύσσονται στα υλικά με διακριτή μικροδομή. Αντίθετα για μικρότερα μήκη κύματος εμφανίζονται σημαντικές αποκλίσεις εξαιτίας της ισχυρής επίδρασης της ανισοτροπίας και ανομοιογένειας που προκαλούνται από τη διακριτή μικροδομή.

Πειραματικές εφαρμογές διάδοσης κυμάτων έχουν δείξει [19] ότι τα επιφανειακά κύματα Rayleigh παρουσιάζουν φαινόμενα διασποράς, τα οποία δεν είναι δυνατόν να προβλεφθούν στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας. Σε αυτές τις περιπτώσεις είναι απαραίτητη η χρήση θεωριών ελαστικότητας ανώτερης τάξης. Για την επίλυση του προβλήματος διάδοσης κυμάτων σε ημι-άπειρο χώρο έχουν χρησιμοποιηθεί τόσο η μικροπολική θεωρία [20,21] όσο και η θεωρία Cosserat [21,22].

Τόσο οι θεωρίες Cosserat όσο και οι μικροπολικές θεωρίες έχουν χρησιμοποιηθεί επιτυχώς σε μελέτες οστών για την κατανόηση της επίδρασης του χαρακτηριστικού μήκους της μικροδομής του οστού στη μηχανική του συμπεριφορά [24-30]. Ενδεικτικές μελέτες εφαρμογής των θεωριών τύπου Cosserat σε οστά αναφέρονται σε επόμενο υποκεφάλαιο.

3.2.2 Μη-Τοπική Θεωρία Ελαστικότητας Συνεχούς Μέσου (Non-Local Theory)

Στη μη-τοπική θεωρία ελαστικότητας του Eringen [7] οι τάσεις σε κάθε σημείο του συνεχούς μέσου θεωρούνται ότι είναι συνάρτηση όχι μόνο των τροπών που εμφανίζονται στο συγκεκριμένο σημείο αλλά και του πεδίου τροπών που εμφανίζεται σε γειτονικά σημεία στο ελαστικό σώμα. Αυτή η θεώρηση οδηγεί σε μια ολοκληρω-διαφορική καταστατική εξίσωση μεταξύ τάσεων και παραμορφώσεων η οποία περιέχει ολοκληρώματα που ορίζονται σε ολόκληρη την περιοχή ενδιαφέροντος καθώς και πυρήνες που είναι οι σταθμισμένοι μέσοι όροι της συνεισφοράς των τροπών όλων των σημείων του ελαστικού μέσου.

Το μη-τοπικό πεδίο τάσεων ορίζεται ως:

$$t_{kl}(x) = \int_V \alpha(|x' - x|) \sigma_{kl}(x') dV(x'), \quad (3.12)$$

όπου x και x' είναι τα διανύσματα θέσεως. Η συνάρτηση α η οποία εξαρτάται από την απόσταση $|x' - x|$ είναι μια μη-τοπική χαρακτηριστική συνάρτηση στην οποία αντικατοπτρίζεται το χαρακτηριστικό μήκος της μικροδομής. Για ένα ισότροπο υλικό οι τάσεις δίνονται από:

$$\sigma_{kl}(x') = \lambda e_{rr}(x') \delta_{kl} + 2\mu e_{kl}(x'). \quad (3.13)$$

Από τις καταστατικές παραπάνω καταστατικές εξισώσεις (Εξ. (3.12), (3.13)) παρατηρείται ότι οι μη-τοπικές τάσεις σε ένα σημείο x είναι συνάρτηση της

παραμόρφωσης σε όλα τα σημεία x' του μέσου με όγκο V . Για τη μη-τοπική χαρακτηριστική συνάρτηση α έχει προταθεί από τον Eringen [31] η παρακάτω μορφή:

$$\alpha(|x' - x|) = \alpha_0 \exp\left[\frac{-k^2 |x' - x|^2}{l^2}\right], \quad (3.14)$$

όπου k και α_0 είναι σταθερές και l είναι το χαρακτηριστικό εσωτερικό μήκος, το οποίο συσχετίζεται με το μέγεθος της μικροδομής και μπορεί να προσδιοριστεί πειραματικά.

Ωστόσο η ολοκληρο-διαφορική μορφή των καταστατικών εξισώσεων καθιστά τη μη-τοπική θεωρία ελαστικότητας ιδιαίτερα πολύπλοκη για να χρησιμοποιηθεί σε πρακτικές εφαρμογές. Παρόλα αυτά έχουν αναφερθεί ορισμένες ειδικές περιπτώσεις της θεωρίας αυτής, στις οποίες οι καταστατικές εξισώσεις μπορούν να μετατραπούν σε διαφορικές εξισώσεις με μορφή παρόμοια με αυτή των θεωριών βαθμίδας και θεωριών κατά Cosserat [1].

3.2.3 Θεωρία Ελαστικότητας Ανώτερων Βαθμίδων (Higher Order Gradient Theory)

Οι θεωρίες ανώτερης βαθμίδας μπορούν να θεωρηθούν ως επεκτάσεις της κλασσικής θεωρίας, στις οποίες χρησιμοποιείται το διάνυσμα μετατοπίσεων για την περιγραφή της παραμόρφωσης του συνεχούς μέσου ενώ παράλληλα εισάγονται στην κινητική και δυναμική ενέργεια όροι ανώτερης τάξης που συνδέουν τη μικροδομή με την μηχανική συμπεριφορά του μέσου σε μακροσκοπικό επίπεδο. Το κύριο γνώρισμα αυτών των θεωριών είναι η παραδοχή ότι το κλασσικό παραμορφώσιμο μέσο αποτελείται από μικροδομή, η οποία με τη σειρά της μπορεί να παραμορφωθεί. Αυτή η δομή μπορεί να προκύψει εύκολα αν θεωρήσει κανείς ότι εντός του υλικού υπάρχουν μοναδιαίες, παραμορφώσιμες κυψελίδες. Η ανωτέρω θεώρηση οδηγεί, στην εμφάνιση δυνάμεων της μικροδομής, οι οποίες ονομάζονται διπολικές ή διπλές δυνάμεις (dipolar or double forces). Όπως εξηγείται στο άρθρο των Green and Rivlin [32] για την εμφάνιση αυτών των δυνάμεων, εντός του γενικευμένου συνεχούς μέσου, απαιτείται η ανάπτυξη ενός εξωτερικά επιβαλλόμενου μηχανικού πεδίου σε δυναμοσειρά, που περιέχει χωρικές βαθμίδες ανώτερης τάξης της ταχύτητας και οδηγεί στην εμφάνιση των λεγόμενων πολύ-πολικών δυνάμεων (multipolar forces). Η πιο γενική και ευκολονόητη γραμμική θεωρία ελαστικότητας βαθμίδας είναι αυτή κατά Mindlin. Οι αρχές της γενικής θεωρίας

του Mindlin καθώς και οι απλοποιημένες εκδόσεις της παρουσιάζονται στην ενότητα 3.3.

3.2.3.1 Εφαρμογές των θεωριών ανώτερων βαθμίδων σε προβλήματα μηχανικής

Οι βασικές αρχές των θεωριών βαθμίδας έχουν γίνει αντικείμενο μελέτης για πολλούς ερευνητές τις τελευταίες δεκαετίες αφού μπορούν να εφαρμοστούν σε πολλαπλούς τομείς της μηχανικής [33-36].

Στη μελέτη των Exadaktylos και Vardoulakis [32] που αφορά στην επίλυση προβλημάτων μηχανικής θραύσης, αποδείχθηκε ότι οι θεωρίες ανώτερων βαθμίδων είναι ιδανικές για τον υπολογισμό των πεδίων τάσεων και παραμορφώσεων κοντά στην αιχμή της ρωγμής σε μικροσκοπικό επίπεδο. Για το λόγο αυτό, έχουν αναφερθεί στη βιβλιογραφία πολυάριθμες μελέτες ανάλυσης πολύπλοκων προβλημάτων μηχανικής θραύσης σε υλικά με έντονη μικροδομή, χρησιμοποιώντας τις θεωρίες αυτές [37-46]. Το βασικό συμπέρασμα στο οποίο κατέληξαν οι ερευνητές, είναι ότι κοντά στην αιχμή της ρωγμής οι μετατοπίσεις και οι παραμορφώσεις μεταβάλλονται αντίστοιχα σύμφωνα με τους τύπους $r^{3/2}$ και $r^{1/2}$, όπου r είναι η απόσταση από την αιχμή της ρωγμής. Αντίθετα οι διπλές και καθολικές τάσεις παρουσιάζουν μη ρεαλιστική συμπεριφορά αφού μεταβάλλονται σύμφωνα με τους τύπους $r^{-1/2}$ και $r^{-3/2}$, αντίστοιχα. Ωστόσο, η σημασία των αποτελεσμάτων αυτών έγκειται στο γεγονός ότι η θεωρία βαθμίδας προβλέπει ραμφοειδείς όψεις ρωγμών όμοιες με αυτές που προβλέπονται από την θεωρία του Barenblatt (cohesive zone theory), χωρίς να απαιτούνται επιπλέον δυνάμεις αλληλεπίδρασης, παρά μόνο αυτές που επιβάλλονται από τις μη-κλασσικές συνοριακές συνθήκες. Ωστόσο, τα πεδία τάσεων πλησίον της αιχμής παραμένουν ιδιότυπα (singular).

Οι Ru και Aifantis [51], και οι Atlan *et al.*, [52] πρότειναν απλοποιημένες στατικές και δυναμικές μορφές της θεωρίας του Mindlin απαιτώντας την εισαγωγή μόνο μιας νέας σταθεράς εκτός από τους συντελεστές Lamé. Ωστόσο οι συνοριακές συνθήκες των θεωρητικών μοντέλων της συγκεκριμένης μελέτης δεν είναι συμβατές με τις αντίστοιχες σωστές που είχαν προταθεί από το Mindlin [3] και επιπλέον δεν λαμβάνεται υπόψη η συμβολή της αδράνειας στη δυναμική συμπεριφορά του υλικού που περιγράφεται από την ελαστική θεωρία βαθμίδας. Οι περιορισμοί αυτοί

αντιμετωπίστηκαν αργότερα από τους Georgiadis *et al.*, [53] και Vardoulakis και Georgiadis [54], οι οποίοι πρότειναν τη θεωρία βαθμίδας με επιφανειακή ενέργεια και την διπολική θεωρία ελαστικότητας βαθμίδας (dipolar gradient elastic theory) αντίστοιχα.

Χρησιμοποιώντας τη διπολική θεωρία ελαστικότητας βαθμίδας, οι Georgiadis *et al.*, [53] μελέτησαν τη διάδοση του επιφανειακού κύματος σε ένα ημι-άπειρο συνεχές μέσο με περιοδική μικροδομή. Η μικροδομή θεωρήθηκε ότι είχε μορφή κύβου με μέγεθος ακμής $2h$, το οποίο χρησιμοποιήθηκε ως το εσωτερικό χαρακτηριστικό μήκος του υλικού. Επιλύοντας αριθμητικά την εξίσωση διασποράς του κύματος Rayleigh που προέκυψε από την αναλυτική επίλυση των εξισώσεων οι συγγραφείς απέδειξαν ότι σε αντίθεση με την κλασσική ελαστικότητα η θεωρία βαθμίδας του Mindlin μπορεί να προβλέψει τα φαινόμενα διασποράς των επιφανειακών κυμάτων. Ωστόσο τα αποτελέσματα συμφωνούσαν με τις πειραματικές μετρήσεις μόνο για συγκεκριμένους συνδυασμούς μεταξύ του χαρακτηριστικού μήκους και του συντελεστή βαθμίδας g της θεωρίας βαθμίδας. Παρά το γεγονός ότι τα φαινόμενα διασποράς του Rayleigh κύματος μπορούν επίσης να προβλεφθούν από τις θεωρίες τύπου Cosserat, η απλοποιημένη θεωρία βαθμίδας που προτάθηκε στη συγκεκριμένη μελέτη απαιτεί την εισαγωγή μόνο δύο επιπρόσθετων συντελεστών μικροδομής εκτός από τους κλασσικούς συντελεστές Lamé, γεγονός που την καθιστά πιο εύχρηστη και απλή από μαθηματικής άποψη. Παρόμοια προβλήματα διάδοσης κυματοδηγούμενων ρυθμών σε άπειρο και ημι-άπειρο χώρο χρησιμοποιώντας τις θεωρίες βαθμίδας παρουσιάζονται στις μελέτες [55-62].

3.2.3.2 Επίλυση δυναμικών και στατικών ελαστικών προβλημάτων θεωρίας ελαστικότητας βαθμίδας με μεθόδους Πεπερασμένων και Συνοριακών Στοιχείων

Οι θεωρίες βαθμίδας έχουν επίσης εφαρμοστεί και σε υπολογιστικές μελέτες πεπερασμένων στοιχείων για την αριθμητική επίλυση προβλημάτων με μικροδομικές επιδράσεις [63-72]. Το πιο σημαντικό πρόβλημα που παρουσιάζεται στην επίλυση τέτοιων προβλημάτων με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων είναι το γεγονός ότι απαιτείται η χρήση στοιχείων συνέχειας C^1 , μιας και η εξίσωση ισορροπίας λόγω της εισαγωγής βαθμίδων ανώτερης τάξης, αναπαρίσταται από ένα μερικό διαφορικό τελεστή τέταρτης τάξης. Στη βιβλιογραφία έχουν αναφερθεί μόνο δύο μελέτες που κατάφεραν να υλοποιήσουν C^1 πεπερασμένα στοιχεία [69,73] ενώ οι υπόλοιπες παρόμοιες μελέτες αντιμετωπίζουν το πρόβλημα χρησιμοποιώντας μεικτές διατυπώσεις

(mixed formulations), πολλαπλασιαστές Lagrange (Lagrange multipliers) και μεθόδους ποινής (penalty methods).

Η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων (Boundary Element Method-BEM) αποτελεί σημαντικό εργαλείο επίλυσης μηχανικών προβλημάτων [75,76]. Το πιο σημαντικό πλεονέκτημα που προσφέρει η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων έναντι των μεθόδων πεπερασμένων διαφορών και πεπερασμένων στοιχείων, είναι η μείωση κατά μια της διάστασης του προβλήματος. Συνεπώς, προβλήματα τριών διαστάσεων μπορούν να επιλυθούν με ακρίβεια διακριτοποιώντας μόνο τις δισδιάστατες επιφάνειες που περικλείουν την περιοχή ενδιαφέροντος. Σε περιπτώσεις που το πρόβλημα χαρακτηρίζεται από γεωμετρικές αξονοσυμμετρικές (axis-symmetric), η μέθοδος των BEM μειώνει περαιτέρω τη διάσταση του προβλήματος μιας και απαιτείται η διακριτοποίηση μόνο της γραμμής στο επίπεδο της αξονικής συμμετρίας του μέσου. Επιπλέον, η μέθοδος BEM δεν απαιτεί τη χρήση πεπερασμένων στοιχείων C^1 , γεγονός που αν συνδυαστεί με τα προαναφερθέντα πλεονεκτήματα, την καθιστά ιδανική για την ανάλυση προβλημάτων που χαρακτηρίζονται από τις θεωρίες ελαστικότητας βαθμίδας.

Η μελέτη των Tseroura *et al.*, [35] ήταν η πρώτη που χρησιμοποίησε τη μέθοδο BEM για την επίλυση ελαστοστατικών προβλημάτων με βάση τις θεωρίες ανώτερων βαθμίδων του Mindlin. Η μέθοδος αυτή εφαρμόστηκε για πρώτη φορά σε άλλες μελέτες της ίδιας ερευνητικής ομάδας για την επίλυση 2D και 3D στατικών και δυναμικών προβλημάτων θεωρίας βαθμίδας και προβλημάτων μηχανικής θραύσης.

3.3 Γενικευμένη Θεωρία ελαστικότητας για μέσο με μικροδομή κατά Mindlin

3.3.1 Ορισμός μεγεθών κινηματικής

Το 1964 παρουσιάστηκε από τον Mindlin [3] ένα γενικό πλαίσιο θεώρησης συνεχών μέσων με μικροδομή. Θεώρησε ένα συνεχές μέσο με μακρο-όγκο V , περιοριζόμενο από μια επιφάνεια S , στο οποίο περιλαμβάνεται μοναδιαία κυψελίδα (unit cell) με μικρο-όγκο V' (Σχήμα 3.1). Ανάλογα με το σε ποιού τύπου υλικό αναφέρεται κανείς ως τέτοιες κυψελίδες θα μπορούσαν να νοηθούν για παράδειγμα τα μεγαλο-μόρια των πολυμερών, οι κρυσταλλίτες στους πολυκρυστάλλους, οι κόκκοι στα κοκκώδη υλικά ή οι οστεώνες στα οστά.

Υποθέτοντας ένα καθολικό καρτεσιανό σύστημα αναφοράς C , περιγράφηκε η μετατόπιση ενός μακρο-σημείου του συνεχούς μέσου από ένα διάνυσμα μακρο-μετατόπισης u_i . Στο εσωτερικό κάθε μακρο-σημείου ορίζεται ένα τοπικό καρτεσιανό σύστημα αναφοράς C' παράλληλο με το C , η αρχή του οποίου ακολουθεί τη μετατόπιση u_i . Το μακρο-σημείο θεωρήσε ότι αποτελείται από μικρο-σημεία, η μετατόπιση των οποίων ως προς C' είναι u_i' . Τα διανύσματα μακρο- και μικρο-μετατόπισης ορίζονται:

$$u_i = x_i - X_i, \quad (3.15)$$

$$u_i' = x_i' - X_i', \quad (3.16)$$

όπου $i=1,2,3$, X_i , x_i είναι οι συνιστώσες των υλικών και χωρικών διανυσμάτων θέσης ενός υλικού σωματιδίου ως προς το C και X_i' , x_i' είναι οι αντίστοιχες συνιστώσες των υλικών και χωρικών διανυσμάτων ως προς C' .

Στη συνέχεια απαιτήθηκαν μικρές βαθμίδες των μακρο- και μικρο-μετατοπίσεων απ' όπου προέκυψε ότι:

$$\frac{\partial u_j}{\partial X_i} \approx \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \partial_i u_j, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial u_j'}{\partial X_i'} \approx \frac{\partial u_j'}{\partial x_i'} = \partial_i' u_j'. \quad (3.18)$$

Επιπλέον, υποθέτοντας ότι οι μικρο-μετατοπίσεις μπορούν να περιγραφούν ως άθροισμα των γινομένων συναρτήσεων του x_i' και συναρτήσεων του x_i και του χρόνου t , ορίστηκε το διάνυσμα μικρο-μετατόπισης προσεγγιστικά, διατηρώντας μόνο ένα γραμμικό όρο της σειράς ως εξής:

$$u_j' = x_k \psi_{kj}, \quad (3.19)$$

όπου ψ_{kj} είναι η μικρο-παραμόρφωση. Παραγωγίζοντας την Εξ. (3.19) προέκυψε:

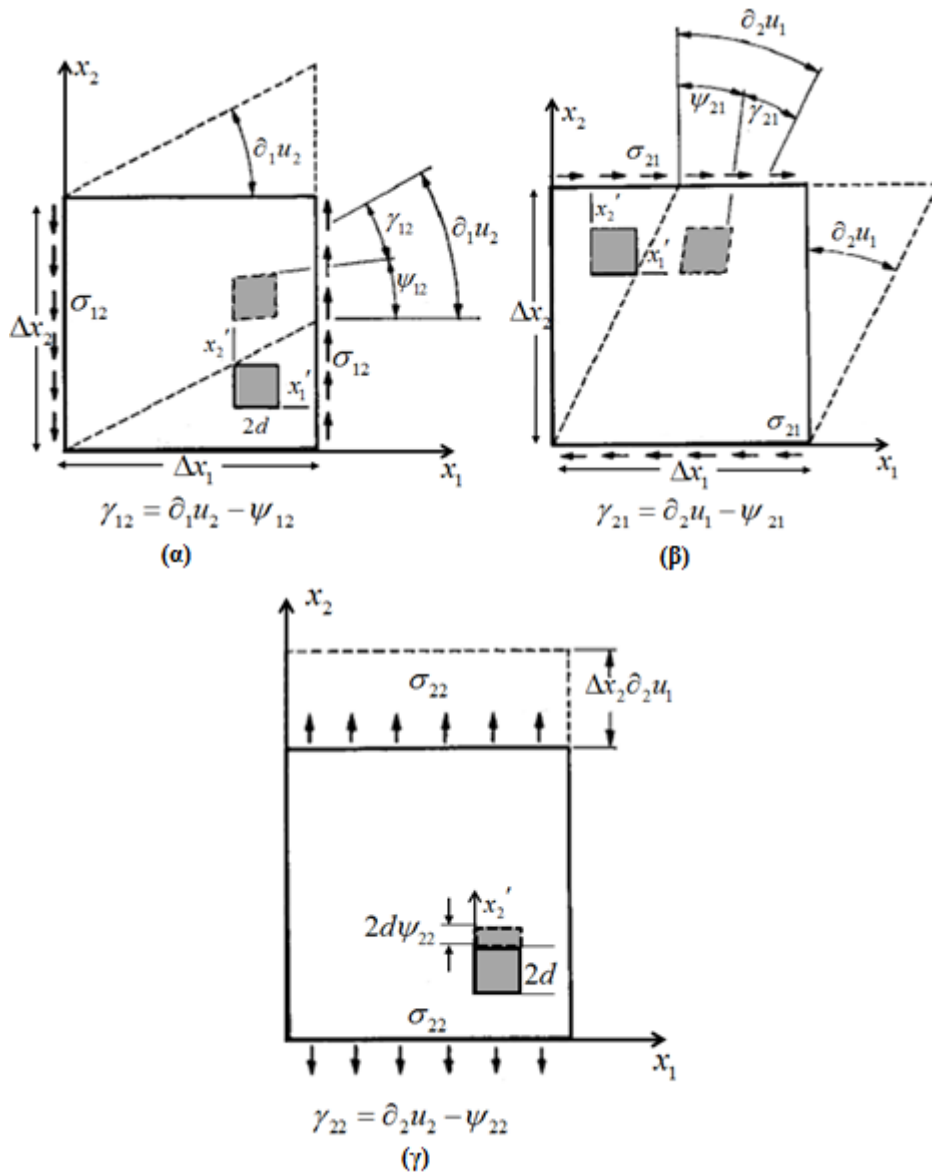
$$\partial_i' u_j' = \psi_{ij}. \quad (3.20)$$

Η βαθμίδα της μικρο-μετατόπισης, ψ_{ij} ορίζεται ως η μικρο-παραμόρφωση η οποία είναι ομογενής στο μικρο-όγκο V' και μη-ομογενής στον μακρο-όγκο V . Το συμμετρικό τμήμα του τανυστή ψ_{ij} ορίζεται ως η μικρο-τροπή (micro-strain) ενώ το

αντισυμμετρικό του τμήμα ως η μικρο-στροφή (micro-rotation). Οι ταυιστές μακρο-τροπής και μακρο-στρέψης ορίζονται όπως και στην κλασσική ελαστικότητα ως:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i), \quad (3.21)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j - \partial_j u_i), \quad (3.22)$$



Σχήμα 3.1. Παραμορφωσιακές παράμετροι της θεωρίας ελαστικότητας του Mindlin για ελαστικό μέσο με μικροδομή.

αντίστοιχα ενώ η σχετική παραμόρφωση (relative deformation) ορίζεται ως η διαφορά μεταξύ της βαθμίδας μακρο-μετατόπισης και της μικρο-παραμόρφωσης:

$$\gamma_{ij} = \partial_i u_j + \psi_{ij}. \quad (3.23)$$

Τέλος η βαθμίδα της μικρο-παραμόρφωσης ορίζεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$\kappa_{ijk} = \partial_i \psi_{jk}. \quad (3.24)$$

Οι τανυστές $\tilde{\epsilon}, \tilde{\gamma}, \tilde{\kappa}$ είναι ανεξάρτητοι των συντεταγμένων x_i . Οι τυπικές συνιστώσες των παραμορφωσιακών μεγεθών του συνεχούς μέσου κατά Mindlin παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.1.

3.3.2 Εξισώσεις Ισορροπίας και Συνοριακές Συνθήκες

Θεωρώντας ότι η πυκνότητα δυναμικής ενέργειας είναι μια τετραγωνική μορφή των e_{ij} ,

γ_{ij} και κ_{ijk} :

$$W = W(e_{ij}, \gamma_{ij}, \kappa_{ijk}), \quad (3.25)$$

οι τανυστές τάσεων Cauchy, σχετικών τάσεων, διπλών τάσεων και οι ολικών τάσεων ορίζονται αντίστοιχα ως:

$$\tau_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}} = \tau_{ji}, \quad (3.26)$$

$$s_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}}, \quad (3.27)$$

$$\mu_{ijk} = \frac{\partial W}{\partial \kappa_{ijk}}, \quad (3.28)$$

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} + s_{ij}. \quad (3.29)$$

Στο Σχήμα 3.2 παρουσιάζεται η φυσική ερμηνεία κατά Mindlin των τυπικών συνιστωσών του τανυστή διπλών τάσεων και των μικρο-παραμορφώσεων.

Η μεταβολή της συνάρτησης πυκνότητας δυναμικής ενέργειας γράφεται ως:

$$\begin{aligned} \delta W &= \tau_{ij} \delta e_{ij} + \mu_{ijk} \delta \kappa_{ijk} \\ &= \partial_j \left[(\tau_{jk} - \partial_i \mu_{ijk}) \delta u_k \right] - \partial_j (\tau_{jk} - \partial_i \mu_{ijk}) \delta u_k + \partial_i (\mu_{ijk} \partial_j \delta u_k). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Κάνοντας χρήση του θεωρήματος απόκλισης, η ολική δυναμική ενέργεια γράφεται ως:

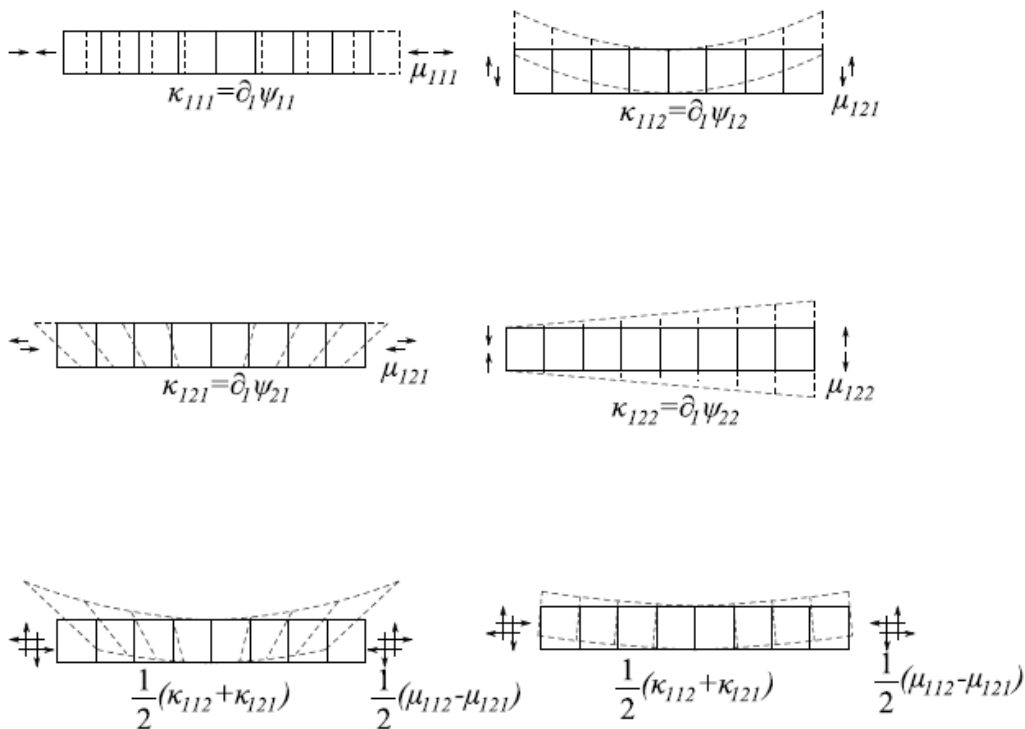
$$\begin{aligned} \int_V \delta W dV &= \int_S n_j (\tau_{jk} - \partial_i \mu_{ijk}) \delta u_k dS \\ &\quad - \int_S \partial_j (\tau_{jk} - \partial_i \mu_{ijk}) \delta u_k dV + \int_S n_i \mu_{ijk} \partial_j \delta u_k dS, \end{aligned} \quad (3.31)$$

όπου $n_{i,j}$ είναι οι συνιστώσες του εξωτερικού μοναδιαίου κάθετου διανύσματος pointing στην επιφάνεια S . Με βάση την Εξ. (3.31) η μεταβολή του έργου των εξωτερικών δυνάμεων δίνεται από την εξίσωση:

$$\delta W_1 = \int_V f_j \delta u_j dV + \int_S \Phi_{jk} \delta \psi_{jk} dV + \int_S t_j \delta u_j dS + \int_S T_{jk} \delta \psi_{jk} dS, \quad (3.32)$$

όπου f_j είναι οι καθολικές δυνάμεις ανά μονάδα όγκου, t_j οι ασκούμενες στο σύνορο δυνάμεις ανά μονάδα επιφάνειας, T_{jk} οι ασκούμενες στο σύνορο διπλές δυνάμεις ανά μονάδα επιφάνειας και

$$\Phi_{jk} = \partial_i \mu_{ijk} + \sigma_{jk}, \quad (3.33)$$



Σχήμα 3.2. Συνιστώσες του τανυστή διπλών τάσεων και των μικρο-παραμορφώσεων της θεωρίας ελαστικότητας του Mindlin.

οι καθολικές δυνάμεις ανά μονάδα όγκου.

Η εξίσωση ισορροπίας του συνεχούς μέσου δίνεται από τη σχέση:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} W = \int_{t_0}^{t_1} W_1. \quad (3.34)$$

Αντικαθιστώντας τις Εξ. (3.31) και (3.32) στην Εξ.(3.34) προκύπτει η εξίσωση κίνησης:

$$\int_V (\partial_i \tau_{ij} + \partial_i \sigma_{ij} + f_j) \delta u_j dV + \int_V (\partial_i \mu_{ijk} + \sigma_{jk} + \Phi_{jk}) \delta \psi_{jk} dV + \int_S [t_j - n_i (\tau_{ij} + \sigma_{ij})] \delta u_j dS + \int_S (T_{jk} - n_i \mu_{ijk}) \delta \psi_{jk} dS = 0. \quad (3.35)$$

Από την Εξ. (3.35) και θεωρώντας ότι τα δu_j και $\delta \psi_{jk}$ μεταβάλλονται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο, καταλήγουμε στις ακόλουθες δύο διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας:

$$\partial_i \sigma_{ij} + f_j = 0, \quad (3.36)$$

$$\partial_i \mu_{ijk} + s_{jk} + \Phi_{jk} = 0. \quad (3.37)$$

Οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες:

$$t_j = n_i (\tau_{ij} + s_{ij}) = n_i \sigma_{ij}, \quad (3.38)$$

$$T_{jk} = n_i \mu_{ijk}. \quad (3.39)$$

3.3.3 Ορισμός καταστατικών εξισώσεων

Για τον ορισμό των καταστατικών εξισώσεων, ο Mindlin υπέθεσε ότι η συνάρτηση πυκνότητας δυναμικής ενέργειας έχει την εξής μορφή:

$$W = \frac{1}{2} c_{ijkl} e_{ij} e_{kl} + \frac{1}{2} b_{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} + \frac{1}{2} a_{ijklmn} \kappa_{ijk} \kappa_{lmn} + d_{ijklm} \gamma_{ij} \kappa_{klm} + f_{ijklm} \kappa_{ijk} e_{lm} + g_{ijkl} \gamma_{ij} e_{kl}. \quad (3.40)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (3.40) στις Εξ. (3.26)-(3.29) προκύπτουν οι ακόλουθες εκφράσεις:

$$\tau_{pq} = c_{pqij} e_{ij} + g_{ijpq} \gamma_{ij} + f_{ijkpq} \kappa_{ijk}, \quad (3.41)$$

$$s_{pq} = g_{pqij} e_{ij} + b_{ijpq} \gamma_{ij} + d_{pqijk} \kappa_{ijk}, \quad (3.42)$$

$$\mu_{pqr} = f_{pqrij} e_{ij} + d_{ijpqr} \gamma_{ij} + f_{pqrijk} \kappa_{ijk}, \quad (3.43)$$

$$\sigma_{pq} = \tau_{pq} + s_{pq}. \quad (3.44)$$

Στην περίπτωση ισότροπου υλικού, οι συντελεστές d_{ijklm} και f_{ijklm} εξαφανίζονται. Οι ισότροποι ταυσιτές τέταρτης και έκτης τάξης στη γενική μορφή τους είναι ταυστικά γινόμενα των δέλτα του Kronecker που ορίζονται ως:

$$L_{ijkl} = a \delta_{ij} \delta_{kl} + b \delta_{ik} \delta_{jl} + c \delta_{il} \delta_{jk}, \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} F_{ijklmn} = & C_1 \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + C_2 \delta_{ij} \delta_{km} \delta_{ln} + C_3 \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} + C_4 \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} + C_5 \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{ln} \\ & + C_6 \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{lm} + C_7 \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{mn} + C_8 \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + C_9 \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{km} + C_{10} \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{ln} \\ & + C_{11} \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{km} + C_{12} \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + C_{13} \delta_{in} \delta_{jk} \delta_{lm} + C_{14} \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + C_{15} \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kl}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Κατά συνέπεια οι συντελεστές που παραμένουν γράφονται ως:

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_1 \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu_2 \delta_{il} \delta_{jk}, \quad (3.47)$$

$$b_{ijkl} = b_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + b_2 \delta_{ik} \delta_{jl} + b_3 \delta_{il} \delta_{jk}, \quad (3.48)$$

$$g_{ijkl} = g_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + g_2 \delta_{ik} \delta_{jl} + g_3 \delta_{il} \delta_{jk}, \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} a_{ijklmn} = & a_1 \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + a_2 \delta_{ij} \delta_{km} \delta_{nl} + a_3 \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} + a_4 \delta_{jk} \delta_{il} \delta_{mn} + a_5 \delta_{jk} \delta_{im} \delta_{nl} \\ & + a_6 \delta_{jk} \delta_{in} \delta_{lm} + a_7 \delta_{ki} \delta_{jl} \delta_{mn} + a_8 \delta_{ki} \delta_{jm} \delta_{nl} + a_9 \delta_{ki} \delta_{jn} \delta_{km} + a_{10} \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} \\ & + a_{11} \delta_{jl} \delta_{km} \delta_{in} + a_{12} \delta_{kl} \delta_{im} \delta_{jn} + a_{13} \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{km} + a_{14} \delta_{jl} \delta_{im} \delta_{kn} + a_{15} \delta_{kl} \delta_{in} \delta_{jm}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Για ισότροπο μέσο ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \mu_1 = \mu_2 = \mu, \\ g_2 = g_3, \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$a_1 = a_6, \quad a_2 = a_9, \quad a_5 = a_7 \quad \text{και} \quad a_{11} = a_{12}.$$

Λαμβάνοντας επίσης υπόψη τη συμμετρία της μακρο-τάσης, η συνάρτηση πυκνότητας ενέργειας γράφεται σε απλοποιημένη μορφή ως εξής:

$$\begin{aligned} W = & \frac{1}{2} \lambda e_{ii} e_{jj} + \mu e_{ij} e_{ij} + \frac{1}{2} b_1 \gamma_{ii} \gamma_{jj} + \frac{1}{2} b_2 \gamma_{ij} \gamma_{ij} + \frac{1}{2} b_3 \gamma_{ij} \gamma_{ji} + g_1 \gamma_{ii} e_{jj} + g_2 (\gamma_{ij} + \gamma_{ji}) e_{ij} \\ & + a_1 \kappa_{iik} \kappa_{kij} + a_2 \kappa_{iik} \kappa_{jkj} + \frac{1}{2} a_3 \kappa_{iik} \kappa_{jjk} + \frac{1}{2} a_4 \kappa_{ijj} \kappa_{ikk} + a_5 \kappa_{ijj} \kappa_{kik} + \frac{1}{2} a_8 \kappa_{iji} \kappa_{kjk} \\ & + \frac{1}{2} a_{10} \kappa_{ijk} \kappa_{ijk} + a_{11} \kappa_{ijk} \kappa_{jki} + \frac{1}{2} a_{13} \kappa_{ijk} \kappa_{ikj} + \frac{1}{2} a_{14} \kappa_{ijk} \kappa_{jik} + \frac{1}{2} a_{15} \kappa_{ijk} \kappa_{kji} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Συνεπώς οι καταστατικές εξισώσεις γράφονται ως:

$$\tau_{pq} = \lambda_{pq} e_{ii} + 2\mu e_{pq} + g_1 \delta_{pq} \gamma_{ii} + g_2 (\gamma_{pq} + \gamma_{qp}), \quad (3.53)$$

$$\sigma_{pq} = g_1 \delta_{pq} e_{ii} + 2g_2 e_{pq} + b_1 \delta_{pq} \gamma_{ii} + b_2 \gamma_{pq} + b_3 \gamma_{qp}, \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \mu_{pqr} = & a_1 (\kappa_{iip} \delta_{qr} + \kappa_{rii} \delta_{pq}) + a_2 (\kappa_{iip} \delta_{pr} + \kappa_{iri} \delta_{pq}) + a_3 \kappa_{iir} \delta_{pq} + a_4 \kappa_{pii} \delta_{qr} \\ & + a_5 (\kappa_{qii} \delta_{pr} + \kappa_{ipi} \delta_{qr}) + a_8 \kappa_{iqi} \delta_{pr} + a_{10} \kappa_{pqr} + a_{11} (\kappa_{rpq} + \kappa_{qrp}) + a_{13} \kappa_{prq} \\ & + a_{14} \kappa_{qpr} + a_{15} \kappa_{rpq}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Η θεωρία του Mindlin δεν περιορίζεται μόνο σε χωρικά ομογενείς ιδιότητες υλικού, αλλά μπορεί να περιγράψει και πιο πολύπλοκες δομές όπως οι κρυσταλλικές. Αυτό επιτυγχάνεται θεωρώντας ότι οι ελαστικοί συντελεστές και οι πυκνότητες είναι περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο $2d$, η οποία αντιστοιχεί στο μήκος της ακμής της μοναδιαίας κυψελίδας. Ωστόσο στις περιπτώσεις αυτές αυξάνεται σημαντικά η πολυπλοκότητα του μοντέλου και συνεπώς καθίσταται πιο δύσκολη η επίλυση των εξισώσεων που το περιγράφουν. Για την αποφυγή τέτοιου είδους δυσκολιών ο Mindlin

θεώρησε ότι το μακρο-υλικό είναι ομογενές. Η προσέγγιση αυτή είναι επαρκής για μήκη κύματος μεγαλύτερα από τις διαστάσεις των μοναδιαίων κυψελίδων. Υποθέτοντας ισότροπο μακρο-υλικό οι εξισώσεις ισορροπίας γράφονται ως συνάρτηση των μετατοπίσεων ως:

$$(\mu + 2g_2 + b_2)\partial_j\partial_j u_i + (\lambda + \mu + 2g_1 + 2g_2 + b_1 + b_3)\partial_i\partial_j u_j - (g_1 + b_1)\partial_i\psi_{jj} - (g_1 + b_1)\partial_j\psi_{ji} - (g_2 + b_3)\partial_j\psi_{ij} + f_i = 0, \quad (3.56)$$

$$(a_1 + a_5)(\partial_k\partial_l\psi_{kl}\delta_{ij} + \partial_i\partial_j\psi_{kk}) + (a_2 + a_{11})(\partial_j\partial_k\psi_{ki} + \partial_i\partial_k\psi_{jk}) + (a_{13} + a_{14})\partial_i\partial_k\psi_{kj} + a_4\partial_k\partial_k\psi_{ll}\delta_{ij} + (a_8 + a_{15})\partial_j\partial_k\psi_{ik} + a_{10}\partial_k\partial_k\psi_{ij} + a_{13}\partial_k\partial_k\psi_{ji} + g_1\partial_k u_k\delta_{ij} + g_2(\partial_i u_j + \partial_j u_i) + b_1(\partial_k u_k - \psi_{kk})\delta_{ij} + b_2(\partial_i u_j - \psi_{ij}) + b_3(\partial_j u_i - \psi_{ji}) + \Phi_{ij} = 0. \quad (3.57)$$

3.3.4 Απλοποιημένες Μορφές της Θεωρίας Ελαστικότητας κατά Mindlin

Αν και η γενικευμένη θεωρία κατά Mindlin θεωρείται η πιο ευκολονόητη γραμμική θεωρία ελαστικότητας βαθμίδας, η εισαγωγή ανώτερης τάξης βαθμίδων τάσεων στην έκφραση της δυναμικής ενέργειας καθώς και η συσχέτιση των μακρο-τροπών με τις μικρο-τροπές, κατέστησαν απαραίτητη τη χρήση 18 νέων σταθερών στις καταστατικές εξισώσεις (Εξ. (3.56), (3.57)). Το γεγονός αυτό καθιστά την αρχική θεωρία του Mindlin εξαιρετικά πολύπλοκη από φυσική και μαθηματική άποψη. Για το λόγο αυτό, ο Mindlin χρησιμοποιώντας την προσέγγιση χαμηλών συχνοτήτων (low frequency approximation) στη θεωρία ομογενών πλακών και θεωρώντας συνεχές μέσο του οποίου: (i) οι πυκνότητες κινητικής και δυναμικής ενέργειας εξαρτώνται από την ταχύτητα και τη βαθμίδα της ταχύτητας και (ii) η παραμόρφωση σε μικροσκοπικό επίπεδο είναι ίδια με αυτή σε μακροσκοπικό, πρότεινε τρεις νέες απλοποιημένες μορφές της αρχικής του θεωρίας, που είναι γνωστές ως Μορφές I, II και III (Form I, II and III).

Οι ρυθμοί που εμφανίζονται λόγω της μικρο-δόνησης, $\psi_{ij} = A_{ij}e^{i\omega t}$, στο ελαστικό υλικό που περιγράφεται από τη θεωρία βαθμίδας μπορούν να συσχετιστούν με τους ρυθμούς δόνησης που εμφανίζονται σε ομογενείς πλάκες. Πιο συγκεκριμένα, οι ρυθμοί σε μικροσκοπικό επίπεδο είναι ανάλογοι με τους ρυθμούς δόνησης (modes of vibration) και οι διατμητικοί και διαμήκεις ακουστικοί ρυθμοί ανάλογοι με τους καμπτικούς (flexural) και επεκτατικούς (extensional) ρυθμούς που διαδίδονται στην πλάκα. Επιπλέον, οι ταχύτητες σε μικροσκοπικό επίπεδο, $\dot{\psi}_{ij}$ αντιστοιχούν σε ταχύτητες πάχους της πλάκας και οι διαστάσεις της μοναδιαίας κυψελίδας $2d$ είναι παρόμοιες με

το πάχος της πλάκας. Τέλος, το αντισυμμετρικό τμήμα της σχετικής παραμόρφωσης $\gamma_{[ij]}$ είναι ανάλογο με την διατμητική παραμόρφωση, οι συντελεστές b_2 και b_3 της Εξ. (3.52) αντιστοιχούν στα μέτρα διάτμησης της πλάκας και το συμμετρικό τμήμα της σχετικής τάσης $s_{(ij)}$ συσχετίζεται με την τάση που προκαλείται τεντώνοντας την πλάκα. Με βάση τις παραπάνω αναλογίες διαμορφώνονται οι βασικές υποθέσεις της προσέγγισης χαμηλών συχνοτήτων στην θεωρία βαθμίδας ως εξής:

$$s_{(ij)} = 0, \quad (3.58)$$

$$\gamma_{[ij]} \rightarrow 0, \quad (3.59)$$

$$b_2 - b_3 \rightarrow 0. \quad (3.60)$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω προσεγγίσεις στις εκφράσεις των καταστατικών εξισώσεων, η συνάρτηση πυκνότητας δυναμικής ενέργειας μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση τετραγωνικής μορφής των τροπών στην κλασσική ελαστικότητα και της βαθμίδας δεύτερης τάξης του διανύσματος μετατοπίσεων ως ακολούθως:

$$W \rightarrow \tilde{W} = \frac{1}{2} \tilde{\lambda} e_{ii} e_{jj} + \tilde{\mu} e_{ij} e_{ij} + \tilde{\alpha}_1 \tilde{\kappa}_{iik} \tilde{\kappa}_{kij} + \tilde{\alpha}_2 \tilde{\kappa}_{ijj} \tilde{\kappa}_{ikk} + \tilde{\alpha}_3 \tilde{\kappa}_{iik} \tilde{\kappa}_{jjk} + \tilde{\alpha}_4 \tilde{\kappa}_{ijk} \tilde{\kappa}_{ijk} + \tilde{\alpha}_5 \tilde{\kappa}_{ijk} \tilde{\kappa}_{kji}, \quad (3.61)$$

όπου οι μικρο-παραμορφώσεις κ_{ijk} έχουν μετατραπεί στη μορφή:

$$\kappa_{ijk} \rightarrow \tilde{\alpha} \tilde{\kappa}_{ill} \delta_{jk} + \frac{1}{2} (1 + \beta) \tilde{\kappa}_{ijk} - \frac{1}{2} (1 - \beta) \tilde{\kappa}_{ikj}, \text{ με } \tilde{\kappa}_{ijk} = \partial_i \partial_j u_k = \tilde{\kappa}_{jik}, \quad (3.62)$$

και οι συντελεστές $\tilde{\alpha}_i, i = 1 \dots 5$, εξαρτώνται από τη συνάρτηση πυκνότητας δυναμικής ενέργειας και ορίζονται αναλυτικά στο Παράρτημα II. Η έκφραση της συνάρτησης \tilde{W} στην Εξ. (3.61) αντιστοιχεί στην πρώτη απλοποιημένη μορφή της θεωρίας κατά Mindlin, δηλ. στη Μορφή I (Form I).

Αντικαθιστώντας τη βαθμίδα δεύτερης τάξης της μετατόπισης με τη βαθμίδα των τροπών, προκύπτει η δεύτερη απλοποιημένη μορφή της θεωρίας Mindlin, η Μορφή II (Form II). Πιο συγκεκριμένα στη Μορφή II ισχύει:

$$\hat{\kappa}_{ijk} \equiv \partial_i e_{jk} = \frac{1}{2} (\partial_i \partial_j u_k + \partial_i \partial_k u_j) = \hat{\kappa}_{ikj}, \quad (3.63)$$

απ' όπου προκύπτει ότι η πυκνότητα δυναμικής ενέργειας γράφεται ως:

$$W \rightarrow \hat{W} = \frac{1}{2} \hat{\lambda} e_{ii} e_{jj} + \hat{\mu} e_{ij} e_{ij} + \hat{\alpha}_1 \hat{k}_{ik} \hat{K}_{kij} + \hat{\alpha}_2 \hat{k}_{ij} \hat{K}_{ikk} + \hat{\alpha}_3 \hat{k}_{ik} \hat{K}_{jjk} + \hat{\alpha}_4 \hat{k}_{ijk} \hat{K}_{ijk} + \hat{\alpha}_5 \hat{k}_{ijk} \hat{K}_{kji}, \quad (3.64)$$

όπου $\hat{\lambda} = \tilde{\lambda} = \lambda$, $\hat{\mu} = \tilde{\mu} = \mu$ οι συντελεστές Lamé και $\hat{\alpha}_i$, $i = 1 \dots 5$ είναι συντελεστές που σχετίζονται με τη μικροδομή (μονάδες m^2) και παρουσιάζονται αναλυτικά στο Παράρτημα II.

Στην τελευταία απλοποιημένη μορφή της θεωρίας του Mindlin, Μορφή III (Form II) η πυκνότητα δυναμικής ενέργειας γράφεται ως συνάρτηση των τροπών, της βαθμίδας της περιστροφής και του πλήρως συμμετρικού τμήματος της βαθμίδας της τροπής:

$$W \rightarrow \bar{W} = \frac{1}{2} \tilde{\lambda} e_{ii} e_{jj} + \tilde{\mu} e_{ij} e_{ij} + 2\bar{d}_1 \bar{k}_{ij} \bar{K}_{ij} + 2\bar{d}_2 \bar{k}_{ij} \bar{K}_{ji} + \frac{3}{2} \bar{\alpha}_1 \bar{k}_{ij} \bar{K}_{kkj} + \bar{\alpha}_2 \bar{k}_{ijk} \bar{K}_{ijk} + \bar{f} e_{ijk} \bar{K}_{ij} \bar{K}_{kij}, \quad (3.65)$$

όπου οι συντελεστές \bar{d}_1 , \bar{d}_2 , $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$ και \bar{f} είναι οι συντελεστές που παρουσιάζονται στο Παράρτημα II.

Η πιο σημαντική διαφορά των τριών απλοποιημένων μορφών της έγκειται στο γεγονός ότι η επίλυση των καταστατικών εξισώσεων της Μορφής II της θεωρίας του Mindlin έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός τανυστή τάσεων ο οποίος είναι συμμετρικός, κάτι που συμβαίνει και στην κλασική θεωρία ελαστικότητας. Κατά συνέπεια, αποφεύγονται σημαντικά προβλήματα που παρουσιάζονται στις θεωρίες κατά Cosserat καθώς και στις θεωρίες ροπών στρέψεως, εξαιτίας των μη-συμμετρικών τανυστών τάσεων. Στο Κεφάλαιο 6 της συγκεκριμένης διατριβής παρουσιάζεται μελέτη στην οποία χρησιμοποιήθηκε η απλοποιημένη Μορφή II για τη διερεύνηση της επίδρασης της μικροδομής του οστού στη διάδοση των κυματοδηγούμενων ρυθμών.

3.4 Απλοποιημένη Μορφή II της Θεωρίας Ελαστικότητας Βαθμίδας κατά Mindlin

Όπως προαναφέρθηκε, στη Μορφή II της γενικής θεωρίας του ο Mindlin θεώρησε ότι η πυκνότητα δυναμικής ενέργειας \hat{W} είναι μια τετραγωνική συνάρτηση των τροπών e_{ij} και των βαθμίδων των τροπών \hat{k}_{ijk} , που ορίζεται από την Εξ. (3.64).

Οι τάσεις Cauchy $\hat{\tau}_{ij}$ και οι διπλές τάσεις $\hat{\mu}_{ijk}$ ορίζονται πλέον ως εξής:

$$\hat{\tau}_{ij} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \hat{\tau}_{ji}, \quad (3.66)$$

$$\hat{\mu}_{ijk} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{\kappa}_{ijk}} = \hat{\mu}_{ikj}. \quad (3.67)$$

Από τις Εξ. (3.63) και (3.64) συνεπάγεται ότι:

$$\hat{\tau}_{pq} = 2\mu\varepsilon_{pq} + \lambda\varepsilon_{ii}\delta_{pq}, \quad (3.68)$$

και

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{pqr} = \frac{1}{2}\hat{\alpha}_1 [\hat{\kappa}_{ri}\delta_{pq} + 2\hat{\kappa}_{ipr}\delta_{qr} + \hat{\kappa}_{qii}\delta_{rp}] + 2\hat{\alpha}_2\hat{\kappa}_{pqi}\delta_{qr} + \hat{\alpha}_3(\hat{\kappa}_{iir}\delta_{pq} + \hat{\kappa}_{iir}\delta_{pr}) + \\ + 2\hat{\alpha}_4\hat{\kappa}_{pqr} + \hat{\alpha}_5(\hat{\kappa}_{rpq} + \hat{\kappa}_{qrp}). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Τότε ο συνολικός τανυστής $\hat{\sigma}_{pq}$ δίδεται από τη σχέση:

$$\hat{\sigma}_{pq} = \hat{\tau}_{pq} - \partial_r \hat{\mu}_{rpq}, \quad (3.70)$$

και είναι συμμετρικός εφόσον τόσο οι τάσεις Cauchy $\hat{\tau}_{pq}$ όσο και οι σχετικές τάσεις $\partial_r \hat{\mu}_{rpq}$ είναι συμμετρικές, όπως φαίνεται από τις Εξ. (3.66) και (3.67).

Η μεταβολή της συνάρτησης πυκνότητας δυναμικής ενέργειας γράφεται ως:

$$\begin{aligned} \delta \hat{W} &= \hat{\tau}_{ij} \delta e_{ij} + \hat{\mu}_{ijk} \delta \hat{\kappa}_{ijk} \\ &= \hat{\tau}_{ij} \partial_i \delta u_j + \hat{\mu}_{ijk} \partial_i \partial_j \delta u_k \\ &= \partial_j [(\hat{\tau}_{jk} - \partial_i \hat{\mu}_{ijk}) \delta u_k] - \partial_j (\hat{\tau}_{jk} - \partial_i \hat{\mu}_{ijk}) \delta u_k + \partial_i (\hat{\mu}_{ijk} \partial_j \delta u_k). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα απόκλισης, η καθολική δυναμική ενέργεια γράφεται ως:

$$\int_V \delta \hat{W} dV = \int_S n_j (\hat{\tau}_{jk} - \partial_i \hat{\mu}_{ijk}) \delta u_k dS - \int_V \partial_j (\hat{\tau}_{jk} - \partial_i \hat{\mu}_{ijk}) \delta u_k dV + \int_S n_i \hat{\mu}_{ijk} \partial_j \delta u_k dS. \quad (3.72)$$

Υποθέτοντας ότι η επιφάνεια του μέσου S διαχωρίζεται σε δύο τμήματα S_1, S_2 των οποίων η διατομή σχηματίζει ακμή C , και εφαρμόζοντας το θεώρημα του Stokes, μετά από τανυστικούς υπολογισμούς [3], προκύπτει ότι η καθολική δυναμική ενέργεια δίνεται από:

$$\begin{aligned} \int_V \hat{W} dV &= - \int_V \partial_j (\hat{\tau}_{jk} - \partial_i \hat{\mu}_{ijk}) \delta u_k dV \\ &+ \int_S [n_j \hat{\tau}_{jk} - n_i n_j D \hat{\mu}_{ijk} - 2n_i D_i \hat{\mu}_{ijk} + (n_i n_j D_l n_l - D_j n_i) \hat{\mu}_{ijk}] \delta u_k dS \\ &+ \int_S n_i n_j \hat{\mu}_{ijk} D \delta u_k dS + \oint_C [n_i m_j \hat{\mu}_{ijk}] \delta u_k dS. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Ο τελεστής D_i είναι ο επιφανειακός τελεστής βαθμίδας που ορίζεται ως:

$$D_j \equiv (\delta_{jl} - n_j n_l) \partial_l, \quad (3.74)$$

δ_{jl} είναι το δέλτα του Kronecker, $D = n_l \partial_l$ είναι ο κάθετος τελεστής βαθμίδας, n_l είναι το εξωτερικό μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια του συνόρου,

$$m_j = e_{mij} s_m n_l \quad (3.75)$$

και s_m είναι οι συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος εφαπτόμενου στην ακμή C . Το σύμβολο $[\cdot]$ δηλώνει τη διαφορά των τιμών που εσωκλείονται στα τμήματα S_1 και S_2 . Από την Εξ. (3.75) προκύπτει η ακόλουθη έκφραση για τη μεταβολή του έργου των εξωτερικών δυνάμεων:

$$\delta W_1 = \int_V F_k \delta u_k dV + \int_S \hat{P}_k \delta u_k dS + \int_S \hat{R}_k D \delta u_k dS, \quad (3.76)$$

όπου F_k , $\hat{P}_k dS$, και $\hat{R}_k dS$ είναι εξωτερικές δυνάμεις (external forces), επιφανειακές δυνάμεις (surface forces) και διπλές επιφανειακές δυνάμεις (double surface forces) αντίστοιχα.

Υποθέτοντας ότι η πυκνότητα μάζας του συνεχούς είναι ίση με την πυκνότητα μάζας της μικροδομής, ο Mindlin για την περίπτωση ισοτροπίας αντικατέστησε την ταχύτητα της μικροδομής $\dot{\psi}_{ij}$ από μία γραμμική συνάρτηση των βαθμίδων της μακρο-ταχύτητας ως ακολούθως:

$$\dot{\psi}_{ij} \rightarrow h_{ijkl} \partial_k \dot{u}_l, \quad (3.77)$$

όπου h_{ijkl} ορίζεται ως:

$$h_{ijkl} \equiv \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) + \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2} \beta (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (3.78)$$

Οι συντελεστές α , β ορίζονται ως:

$$\alpha = \frac{1}{b_2 + b_3} \left[g_1 - \frac{b_1(3g_1 + 2g_2)}{3b_1 + b_2 + b_3} \right], \quad (3.79)$$

$$\beta = 1 + \frac{2g_2}{b_2 + b_3}.$$

Τότε η πυκνότητα κινητικής ενέργειας \hat{T} , μπορεί να γραφεί ως:

$$\hat{T} = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i + \frac{1}{6} \rho \tilde{d}_{pkmm}^2 \partial_m \dot{u}_n \partial_p \dot{u}_k, \quad (3.80)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα μάζας, οι τελείες εκφράζουν παραγωγή ως προς το χρόνο t και \tilde{d}_{pkmn}^2 είναι ένας ταυστής τέταρτης τάξης που ορίζεται ως:

$$\begin{aligned}\tilde{d}_{pkmn}^2 &\equiv d_{jl}^2 h_{lqpk} h_{jqmn} = \tilde{d}_{mnpk}^2 \\ &= \frac{1}{2} d^2 [\delta_{pm} \delta_{kn} - \delta_{pn} \delta_{km} + 2\alpha(3\alpha + 2\beta) \delta_{pk} \delta_{mn} + \beta^2 (\delta_{pm} \delta_{kn} + \delta_{pn} \delta_{km})].\end{aligned}\quad (3.81)$$

Για ισότροπο συνεχές μέσο με μικροδομή, και σύμφωνα με την αρχή του Hamilton, προκύπτει η εξίσωση κίνησης [3]:

$$\partial_j (\hat{\tau}_{jk} - \partial_i \hat{\mu}_{ijk}) + F_k = \rho \ddot{u}_k - \frac{1}{3} \partial_p (\rho d_{pkmn}^2 \partial_m \ddot{u}_n). \quad (3.82)$$

Στη γενική περίπτωση οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος περιγράφονται από τις παρακάτω κλασσικές και μη-κλασσικές εξισώσεις:

$$\hat{p}_k = p_k^{prescribed}, \quad (3.83)$$

$$\hat{R}_k = R_k^{prescribed}, \quad (3.84)$$

όπου \hat{p}_k, \hat{R}_k είναι τα διανύσματα δυνάμεων ανά μονάδα επιφάνειας και διπλών δυνάμεων ανά μονάδα επιφάνειας αντίστοιχα που ορίζονται ως:

$$\begin{aligned}\hat{p}_k &= n_j \tau_{jk} - n_i n_j D \hat{\mu}_{ijk} - (n_j D_i + n_i D_j) \hat{\mu}_{ijk} + (n_i n_j D_i n_l - D_j n_l) \hat{\mu}_{ijk} \\ &\quad + \frac{1}{3} \rho n_p \tilde{d}_{pkmn}^2 (D_m \ddot{u}_n + n_m D \ddot{u}_n),\end{aligned}\quad (3.85)$$

$$\hat{R}_k = n_i n_j \hat{\mu}_{ijk}. \quad (3.86)$$

Εισάγοντας τις Εξ. (3.21), Εξ. (3.22) και (3.63) στις Εξ. (3.68), (3.69) και αντικαθιστώντας τις εκφράσεις που θα προκύψουν στην Εξ. (3.82), τότε η εξίσωση κίνησης (Εξ. (3.82)) μπορεί να γραφεί συναρτήσει των μετατοπίσεων ως εξής:

$$(\lambda + 2\mu)(1 - l_1^2 \nabla^2) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \mu(1 - l_2^2 \nabla^2) \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = \rho(\ddot{\mathbf{u}} - h_1^2 \nabla \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} + h_2^2 \nabla \times \nabla \times \ddot{\mathbf{u}}), \quad (3.87)$$

όπου \mathbf{u} είναι το διάνυσμα μετατοπίσεων και $l_1^2, l_2^2, h_1^2, h_2^2$ είναι εσωτερικά χαρακτηριστικά μήκη που ορίζονται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned}l_1^2 &= 2(\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_3 + \hat{\alpha}_4 + \hat{\alpha}_5) / (\lambda + 2\mu), \\ l_2^2 &= (\hat{\alpha}_3 + 2\hat{\alpha}_4 + \hat{\alpha}_5) / 2\mu, \\ h_1^2 &= d^2 [2\alpha^2 + (\alpha + \beta)^2] / 3, \\ h_2^2 &= d^2 (1 + \beta^2) / 6.\end{aligned}\quad (3.88)$$

Για λόγους μοναδικότητας και σταθερότητας πρέπει η \hat{W} να ορίζεται ως θετική ποσότητα, γεγονός που προϋποθέτει ότι [3] $\mu > 0$, $\lambda + 2\mu > 0$, $l_i^2 > 0$ και $h_i^2 > 0$.

3.5 Εφαρμογές Θεωριών Ελαστικότητας Ανώτερης Τάξης (Enhanced Theories) σε μακρά οστά

Όπως παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 1 το οστό είναι υλικό με μικροδομή η οποία μπορεί να επηρεάσει σημαντικά την κατανομή των πεδίων τάσεων και παραμορφώσεων. Η θεωρία Cosserat χρησιμοποιήθηκε για την ερμηνεία της περιστροφής που εμφανίζουν στις συνδετικές γραμμές τα οστά όταν υπόκεινται σε στρέψη. Η τοπική περιστροφή μακροσκοπικά και σύμφωνα με την κλασική θεωρία ελαστικότητας θεωρείται ως μετατόπιση. Δύο επόμενες πειραματικές μελέτες των Yang και Lakes επιβεβαίωσαν αργότερα την ύπαρξη τάσεων ζεύγους στο οστό θέτοντας οστικά δοκίμια σε οιονεί-στατικές δοκιμασίες στρέψης [28] και εφελκυσμού [29] και κατάφεραν να μετρήσουν τα χαρακτηριστικά μήκη l_t (στρέψης) και l_b (κάμψης) για το οστό. Οι Park και Lakes [76] πραγματοποίησαν πειραματική μελέτη προσπαθώντας να ερμηνεύσουν τους μηχανισμούς που προκαλούν την συμπεριφορά του οστού ως Cosserat υλικού. Στη συγκεκριμένη μελέτη οι συγγραφείς κατάφεραν να προσδιορίσουν την κατανομή της παραμόρφωσης στις πλευρικές επιφάνειες τετραγωνικών υγρών και στεγνών οστικών δοκιμίων. Βρέθηκε ότι στο υγρό οστό οι παραμορφώσεις ακολουθούν την κατανομή που προβλέπεται από τις αρχές της θεωρίας Cosserat, ενώ αντίθετα στο ξηρό οστό τείνουν προς την κλασική ελαστικότητα. Οι συγγραφείς απέδωσαν τη συμπεριφορά αυτή του οστού στους μηχανισμούς αλληλεπίδρασης μεταξύ των οστεώνων και των συνδετικών γραμμών.

Οι Fatemi *et al.*, [24] χρησιμοποίησαν την θεωρία Cosserat για την ερμηνεία των μηχανισμών χαλάρωσης των ενδοπροθέσεων που έχουν παρατηρηθεί σε εφαρμογές αρθροπλαστικής χειρουργικής. Κατασκευάστηκε μοντέλο του συστήματος σπογγώδους οστού-ενδοπρόθεσης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (finite elements) με σκοπό τον προσδιορισμό του πεδίου τάσεων που αναπτύσσονται στη διεπιφάνεια και το οστό. Τα αποτελέσματα έδειξαν σημαντική μείωση της συγκέντρωσης των τάσεων στην γειτονική περιοχή της διεπιφάνειας οστού-ενδοπρόθεσης σε μακροσκοπικό επίπεδο, γεγονός που αποδόθηκε στην τύπου Cosserat ελαστική συμπεριφορά του

οστού. Οι συγγραφείς υποστήριξαν ότι η θεωρία Cosserat θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την μοντελοποίηση του οστού, αναδεικνύοντας ωστόσο τους σημαντικούς περιορισμούς της συγκεκριμένης θεωρίας, που σχετίζονται με τον προσδιορισμό των άγνωστων επιπρόσθετων συντελεστών καθώς και των συνοριακών συνθηκών που επιβάλλονται εξαιτίας της μικροδομής.

Σε μια πιο πρόσφατη αναλυτική μελέτη, οι Kulesh *et al.*, [20] έλυσαν το πρόβλημα διάδοσης κυμάτων σε ημι-απειρο μέσο τύπου Cosserat, με μηχανικές ιδιότητες όμοιες με αυτές του οστού. Ωστόσο, για τη ροπή αδράνειας χρησιμοποιήθηκε μια αυθαίρετη τιμή. Βρέθηκε ότι η ταχύτητα του Rayleigh κύματος Cosserat εξαρτάται από την συχνότητα, γεγονός που αποδεικνύει ότι η συγκεκριμένη θεωρία μπορεί να προβλέψει φαινόμενα διασποράς. Οι συγγραφείς μελέτησαν επίσης και τον τρόπο εξάρτησης των συνιστωσών του διανύσματος μετατόπισης από το βάθος και παρατήρησαν ότι διαφέρει από την περίπτωση της κλασσικής ελαστικότητας. Συνεπώς το κύμα Rayleigh σύμφωνα με τη θεωρία Cosserat είναι ένα επιφανειακό κύμα αλλά παρουσιάζει διαφορετική εξασθένηση από την κλασσική περίπτωση.

Η συγκεκριμένη θεωρία χρησιμοποιήθηκε και σε άλλη εργασία της ίδιας ερευνητικής ομάδας [17] για την επίλυση του προβλήματος της διάδοσης των ρυθμών Lamb. Η πλάκα τύπου Cosserat είχε ιδιότητες όμοιες με αυτές του οστού. Συγκρίνοντας τις καμπύλες ταχύτητας φάσης - συχνότητας των κυματοδηγούμενων ρυθμών που προκύπτουν στη θεωρία Cosserat με τις αντίστοιχες καμπύλες των ρυθμών Lamb, οι συγγραφείς παρατήρησαν ότι στην πλάκα τύπου Cosserat διαδίδεται ένα νέο κύμα το οποίο δεν προβλέπεται από την κλασσική θεωρία. Η εγκάρσια συνιστώσα της μετατόπισης του νέου κύματος βρέθηκε ότι είναι παράλληλη στην επιφάνεια του συνόρου και κάθετη προς την κατεύθυνση της κυματικής διάδοσης. Οι συγγραφείς υποστήριξαν ότι τα αποτελέσματα της μελέτης θα μπορούσαν να φανούν ιδιαίτερω χρήσιμα για την προετοιμασία, διεξαγωγή και ερμηνεία δυναμικών πειραμάτων, καθώς και για τον προσδιορισμό των επιπρόσθετων συντελεστών μικροδομής στη θεωρία Cosserat.

Ο Chacraborty [78] σε μια πρόσφατη μελέτη κυματικής διάδοσης σε σπογγώδη οστά, χρησιμοποίησε τη μη-τοπική ποροελαστική θεωρία (non-local poroelastic theory) για

να εξηγήσει το φαινόμενο της μείωσης της ταχύτητας καθώς αυξάνεται η συχνότητα, δηλ. την αρνητική διασπορά (negative dispersion). Όπως έχει αποδειχθεί πειραματικά, το φαινόμενο της αρνητικής διασποράς εμφανίζεται σε διάφορους τύπους οστού.

Στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζουμε μια μελέτη της διάδοσης κυματοδηγούμενων ρυθμών στο οστό χρησιμοποιώντας την απλοποιημένη Μορφή II της θεωρίας ελαστικότητας κατά Mindlin. Αν και η θεωρία δεύτερης βαθμίδας έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως για την επίλυση πολύπλοκων προβλημάτων με επιδράσεις μικροδομής, δεν έχει εφαρμοστεί μέχρι σήμερα για τη μελέτη μακρών οστών.

3.6 Βιβλιογραφία

1. Cosserat E, Cosserat F. *Théorie des Corps Déformables (Theory of deformable structures)* Hermann et Fils, Paris, 1909.
2. Eringen AC. Linear theory of micropolar elasticity. *J Math Mech* 1966;15: 909–923.
3. Mindlin RD Micro-structure in linear elasticity. *Arch Rat Mech Anal* 1964;16: 51-78.
4. Eringen AC. *Nonlocal Continuum Field Theories*, Springer, New York, 2002.
5. Eringen AC. Theory of Micropolar Elasticity in: Liebowitz, H (ed.), *Fracture Vol II*, Academic Press, New York, 1968:621–729.
6. Mindlin RD. Micro-structure in linear elasticity. *Arch Rational Mech Anal* 1964;16:51–78.
7. Eringen AC. *Continuum Physics – Non-local Field Theories*. Academic Press, New York, 1976.
8. Koiter WT. Couple stress in the theory of elasticity. *Proceedings of the Koninklijke Nederland Akademie van Wetenschappen B-67* 1964;17–44.
9. Gauthier RD, Jahsman WE. A quest for micropolar elastic constants. *J Appl Mech* 1975;42:369–374.
10. Mindlin RD, Tiersten, HF. Effects of couple stresses in linear elasticity. *Arch. Rational Mech Anal* 1962;11:415–448.
11. Cowin SC. Singular stress concentrations in plane Cosserat elasticity. *Z Angew Math Phys* 1969;20:979–982.
12. Mindlin RD. Influence of couple-stresses on stress concentrations. *Exp Mech* 1963;3:1–7.

13. Muehlhaus H-B, Vardoulakis I. Thickness of shear bands in granular materials. *Geotechnique* 1987;37(3):271-283.
14. Chen Y, Lee JD, Eskandarian A. Examining the physical foundation of continuum theories from the viewpoint of phonon dispersion relation. *Int J Eng Science* 2003;41:61-83.
15. Suiker ASJ, Metrikine AV, de Borst R. Comparison of wave propagation characteristics of the Cosserat continuum model and corresponding discrete lattice models. *Int J Sol Str* 2001;38:1563-1583.
16. Tomar SK, Gogna ML. Reflection and refraction of longitudinal waves at an interface between two micropolar elastic media in welded contact. *J Acoust Soc Am* 1995;97:822-830.
17. Kulesh MA, Matveenko VP, Shardakov IN. Constructing an solution for Lamb waves using Cosserat continuum approach. *J App Mech and Techn Phys.* 2007; 48:1, 119-125.
18. Midya GK. On Love-type surface waves in homogeneous micropolar elastic media. *Int J Eng Science.* 2004;42: 1275-1288.
19. Lakes RS. Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized continua. in: H. Muhlhaus (ed.), *Continuum Models for Materials with Micro-Structure*, Chapter 1, J Wiley and Sons, New York, 1995:1–22.
20. Kulesh MA, Matveenko VP, Shardakov IN. Construction and analysis of an analytical solution for the surface Rayleigh wave within the framework of the Cosserat continuum. *J Appl Mech Tech Phys* 2005;46(4):556–563.
21. Kumar R, Partap G. Rayleigh Lamb waves in micropolar isotropic elastic plate *App Math and Mech* 2006;27(8):1049-1059.
22. Lyalin AE, Pirozhkov VA, and Stepanov RD. On the propagation of surface waves in a Cosserat continuum. *Akust Zh* 1982;28(6):838–840.
23. Ottosen NS, Ristinmaa M, Ljung C. Rayleigh waves obtained by the indeterminate couple-stress theory. *Eur J Mech A/Solids* 2000;19:929-947.

24. Fatemi J, Van Keulen F, Onck PR. Generalized Continuum Theories: Application to Stress Analysis in Bone. *Meccanica* 2002;37:385-396.
25. Hsia S, Chiu S, Cheng J. Wave propagation at the human muscle-compact bone interface. *Theoret Appl Mech* 2006;33(3):223-243.
26. Lakes RS. Dynamical study of couple stress effects in human compact bone. *J Biomech Eng* 1981;104(1):6-11.
27. Park HC, Lakes RS. Cosserat micromechanics of human bone: strain redistribution by a hydration sensitive constituent. *J Biomech* 1986;19(5):385-397.
28. Yang JFC, Lakes RS. Transient study of couple stress effects in compact bone: Torsion. *J Biomech Eng* 1981;103(4):275-279.
29. Yang JFC, Lakes RS. Experimental study of micropolar and couple stress elasticity in compact bone in bending, *J Biomech* 1982;15(2):91-98.
30. Yoon H, Lawrence J. Is bone a Cosserat solid? *J Mater Science* 1983;18(5):1297-1305
31. Eringen AC. Edge dislocation in nonlocal elasticity. *Int J Engng Sc.* 1977;15:177-183.
32. Green AE, Rivlin RS. Multipolar continuum mechanics. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1964;17:113-147.
33. Tiersten HF, Bleustein JL. Generalized elastic continua. In G. Hermann, ed., *R. D. Mindlin and Applied Mechanics*, 67-103, Pergamon Press, New York, 1974.
34. Exadaktylos GE Vardoulakis I. Microstructure in linear elasticity and scale effects: a reconsideration of basic rock mechanics and rock fracture mechanics. *Tectonoph* 2001;335:81-109.

35. Tsepoura KG, Papargyri-Beskou S, Polyzos D. A boundary element method for solving 3D static gradient elastic problems with surface energy. *Comp Mech* 2002;29:361-381.
36. Vardoulakis I, Sulem J. *Bifurcation Analysis in Geomechanics*. Blackie/Chapman and Hall, London, 1995.
37. Vardoulakis I, Exadaktylos G, Aifantis E. Gradient elasticity with surface energy: mode-iii crack problem. *Int J Solids Struct* 1996;33:4531–4559.
38. Exadaktylos G, Vardoulakis I, Aifantis E. Cracks in gradient elastic bodies with surface energy. *Int J Fract*, 1996;79:107–119.
39. Vardoulakis I, Exadaktylos G. The asymptotic solution of anisotropic gradient elasticity with surface energy for mode-ii crack. In D Durban ed, *Non-linear Singularities in Deformation and Flow*, 87–98, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1997.
40. Exadaktylos G. Gradient elasticity with surface energy: mode-i crack problem. *Int J Solids Struct* 1998;35:421–456.
41. Huang Y, Zhang L, Guo TF, Hwang KC. Mixed mode near-tip fields for cracks in materials with strain-gradient effects. *J Mech Phys Solids* 1997;45:439–465.
42. Shi MX, Huang Y, Hwang KC. Fracture in a higher-order elastic continuum. *J Mech Phys Solids* 2000;48:2513–2538.
43. Fannjiang AC, Chan YS, Paulino G. Strain gradient elasticity for antiplane shear cracks: a hypersingular integrodifferential equation approach. *SIAM J Appl Math* 2002;62:1066–1091.
44. Georgiadis HG. The mode iii crack problem in microstructured solids governed by dipolar gradient elasticity: static and dynamic analysis. *J Appl Mech ASME* 2003;70:517–530.
45. Georgiadis HG, Grentzelou CG. Energy theorems and the j-integral in dipolar gradient elasticity. *Int J Solids Struct* 2006;43:5690–5712.

46. Tang Z, Atluri SSSN. Analysis of materials with strain-gradient effects: A meshless local petrov-galerkin (mlpg) approach, with nodal displacements only. *CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences* 2003;4:177–196.
47. Chan YS, Paulino GH, Fannjiang AC. Gradient elasticity theory for mode iii fracture in functionally graded materials–part ii: Crack parallel to the material gradation. *ASME J Appl Mech* 2008;75(6):0610151-06101511.
48. Radi E. On the effects of characteristic lengths in bending and torsion on mode III crack in couple stress elasticity. *Int J Solids Struct* 2008;45:3033–3058.
49. Giannakopoulos AE, Amanatidou E, Aravas N. A reciprocity theorem in linear gradient elasticity and the corresponding saint-venant principle. *Int J Solids Struct*, 2006;43:3875–3894.
50. Gourgiotis PA, Georgiadis HG. Plane-strain crack problems in microstructured solids governed by dipolar gradient elasticity. submitted for publication, presented in 3rd Workshop on Enhanced Elastic Theories, Thessaloniki, Greece 2009.
51. Ru C, Aifantis EC. A simple approach to solve boundary value problems in gradient elasticity. *Acta Mechanica* 1993;101:59–68.
52. Altan BS, Evensen H, Aifantis EC. Longitudinal vibrations of a beam: a gradient elasticity approach. *Mech es Commun* 1996;23:35–40.
53. Georgiadis HG, Vardoulakis I, Velgaki EG. Dispersive Rayleigh-wave propagation in microstructured solids characterized by dipolar gradient elasticity. *J Elasticity* 2004;74:17-45.
54. Vardoulakis I, Georgiadis HG. SH surface waves in a homogeneous gradient elastic half-space with surface energy. *J Elasticity* 1997;47:147-165.
55. Aggelis DG, Philippidis TP, Tsinopoulos SV, Polyzos D. Wave dispersion in concrete due to microstructure. CD-ROM Proceedings of the 2004 Int. Conference on Computational & Experimental Engineering & Sciences, Madeira, Portugal, 26-29 July, 2004.

56. Bennet T, Gitman IM, Askes H. Elasticity theories with higher order gradients of inertia and stiffness for modelling of wave dispersion in laminates. *Int J Fract* 2007;148:185-193.
57. Chang CS, Gao J, Zhong X. High-gradient modeling for Love wave propagation in geological materials. *J Eng Mech* 1998;124(12):1354-1359.
58. Erofeyev VI. *Wave Processes in Solids with Micro-structure* (World Scientific, Singapore) 2003.
59. Georgiadis HG, Velgaki EG. High-frequency Rayleigh waves in materials with micro-structure and couple-stress effects. *Int J Solids Struct* 2003;40:2501-2520.
60. Papargyri-Beskou S, Beskos DE. Static, stability and dynamic analysis of gradient elastic flexural Kirchhoff plates. *Arch Appl Mech* 2008;78:625–635.
61. Sluys LJ, de Brost R, Mulhlaus HB. Wave propagation, localization and dispersion in gradient dependent medium. *Int J Solids Struct* 1993;30(9):1153-1171.
62. Yerofeyev VI, Sheshenina OA. Waves in a gradient-elastic medium with surface energy. *J Appl Math Mech* 2005;69:61-74.
63. Amanatidou E, Aravas N. Mixed finite element formulations of strain-gradient elasticity problems. *Comput Methods Appl Mech Engng* 2002;191:1723–1751.
64. Askes H, Gutierrez MA. Implicit gradient elasticity. *Int J Numer Meth Engng*, 2006;67:400–416.
65. Askes H, Bennett T, Aifantis EC. A new formulation and C0-implementation of dynamically consistent gradient elasticity. *Int J Numer Meth Engng* 2007;72:111–126.
66. Askes H, Morata I, Aifantis EC. Finite element analysis with staggered gradient elasticity. *Comput Struct* 2008;86:1266–1279.
67. Engel G, Garikipati K, Hughes TJR, Larson MG, Mazzei L, Taylor RL. Continuous/discontinuous finite element approximations of fourth-order elliptic

- problems in structural and continuum mechanics with applications to thin beams and plates, and strain gradient elasticity. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2002;191:3669–3750.
68. Papanicolopoulos SA. Analytical and Numerical Methods in Boundary Value Problems of Materials with Microstructure. PhD in Mechanics, National Technical University of Athens, School of Applied Mathematical and Physical Sciences, Department of Mechanics.
 69. Papanicolopoulos SA, Zervos A, Vardoulakis I. A three-dimensional c_1 finite element for gradient elasticity. *Int J Numer Meth Engrg*, 2009;77:1396–1415.
 70. Zervos A. Finite elements for elasticity with microstructure and gradient elasticity. *Int J Numer Meth Engrg* 2008;73:564–595.
 71. Zervos A, Papanastasiou P, Vardoulakis I. A finite element displacement formulation for gradient elastoplasticity. *Int J Numer Meth Engrg* 2001;50:1369–1388.
 72. Zervos A, Papanicolopoulos SA, Vardoulakis I. Two finite element discretizations for gradient elasticity. *J Engrg Mech (ASCE)*, 2009;135:203–213.
 73. Akarapu S, Zbib HM. Numerical analysis of plane cracks in strain-gradient elastic materials. *Int J Fracture* 2006;141:403–430.
 74. Beskos DE. Boundary element methods in dynamic analysis. *Appl Mech Rev ASME* 1987;40:1–23.
 75. Beskos DE. Boundary element methods in dynamic analysis. part ii (1986–1996). *Appl Mech Rev ASME* 1997;50:149–197.
 76. Park HC, Lakes RS. Cosserat micromechanics of human bone: strain redistribution by a hydration sensitive constituent. *J Biomech* 1986;19:385–397.
 77. Chakraborty A. Prediction of negative dispersion by a nonlocal poroelastic theory. *J Acoust Soc Am* 2008;123(1):56-67.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΣΤΗ ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΥΜΕΝΩΝ ΡΥΘΜΩΝ ΣΕ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΆΘΙΚΤΩΝ ΚΑΙ ΚΑΤΕΑΓΟΤΩΝ ΟΣΤΩΝ

4.1 Εισαγωγή

Ο υπέρηχος έχει παίξει πολύ σημαντικό ρόλο στην αξιολόγηση εκφυλιστικών ασθενειών, όπως είναι η οστεοπόρωση καθώς και στην παρακολούθηση της διαδικασίας πάρωσης καταγμάτων μακρών οστών. Η υπερηχητική αξιολόγηση της πάρωσης καταγμάτων στοχεύει στον πρόωρο εντοπισμό επιπλοκών (π.χ. ψευδαρθρώσεων) και στον ακριβή προσδιορισμό της ποιότητας του πάρου σε κάθε χρονική στιγμή. Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 3, η αξονική διάδοση είναι μια τεχνική διάδοσης υπερήχων που χρησιμοποιείται για την αξιολόγηση μακρών οστών όπως η κνήμη και η κερκίδα [1-3].

Μελέτες που έχουν αναπτυχθεί για την αξιολόγηση μακρών οστών με χρήση υπερήχων έχουν δείξει ότι το FAS θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για σκοπούς παρακολούθησης [3-9]. Ωστόσο, οι υπερκείμενοι μαλακοί ιστοί επηρεάζουν τις μετρήσεις ταχύτητας και πλάτους [10,11].

Όπως αναφέρθηκε και στο Κεφάλαιο 2 έχει αποδειχθεί ότι όταν το μήκος κύματος του διαδιδόμενου κύματος είναι μικρότερο από το πάχος του φλοιού, το FAS αντιστοιχεί σε ένα πλευρικό κύμα που διαδίδεται στην υπο-επιφάνεια του οστού έχοντας τη διαμήκη ταχύτητά του. Συνεπώς το FAS παρέχει πληροφορία μόνο για τις ιδιότητες της υπο-περιοστικής επιφάνειας του οστού. Ωστόσο, όταν το μήκος κύματος είναι συγκρίσιμο ή μεγαλύτερο από το πάχος του φλοιού, το κύμα FAS αποτελείται από πολλαπλούς κυματοδηγούμενους ρυθμούς. Η θεωρία του Lamb έχει χρησιμοποιηθεί σε 2Δ υπολογιστικές μελέτες για να προβλέψει τη συμπεριφορά των ρυθμών που διαδίδονται σε πλάκες που προσομοιώνουν το άθικτο οστό [12-14]. Έχει αποδειχθεί ότι η ταχύτητα ενός κύματος όμοιου με τον A0 ρυθμό επηρεάζεται σημαντικά από τις μεταβολές στο πάχος του φλοιού και συνεπώς θα μπορούσε να αποτελεί ένα δείκτη οστεοπόρωσης [15,16].

Σε δύο πρόσφατες μελέτες [17, 18] μελετήθηκε η διάδοση κυματοδηγούμενων ρυθμών σε 2Δ και 3Δ μοντέλα κατεαγότεων οστών, χρησιμοποιώντας την ανάλυση χρόνου-συχνότητας. Βρέθηκε ότι μέσω των κυματοδηγούμενων ρυθμών μπορούν να εξαχθούν πιο ακριβή συμπεράσματα για την εξέλιξη της πόρωσης, από αυτά μέσω παραδοσιακών αξονικών μετρήσεων ταχύτητας διάδοσης.

Σε αυτό το κεφάλαιο, θεωρούμε ένα 2Δ μοντέλο κατεαγότεος οστού με χρήση διαφορετικών συνοριακών συνθηκών που προσομοιώνουν την ύπαρξη των μαλακών ιστών. Πιο συγκεκριμένα μελετώνται τρεις διαφορετικές συνοριακές συνθήκες που αντιστοιχούν σε φόρτιση της πλάκας με ρευστό. Στην πρώτη περίπτωση, το μοντέλο του οστού θεωρείται ότι είναι πλήρως εμβαπτισμένο σε αίμα (Μοντέλο-1), το οποίο καταλαμβάνει τον ημι-χώρο εκατέρωθεν της κάθε επιφάνειας της πλάκας. Στη δεύτερη περίπτωση το μοντέλο εμπλουτίζεται λαμβάνοντας υπόψη το πεπερασμένο πάχος του στρώματος των μαλακών ιστών (Μοντέλο-2). Επομένως, στο Μοντέλο-2 θεωρούμε ότι η ανώτερη επιφάνεια της πλάκας φορτίζεται από ένα στρώμα αίματος, ενώ ο ημι-χώρος στην κατώτατη επιφάνεια της πλάκας αποτελείται από ένα διαφορετικό ρευστό το οποίο προσομοιώνει το μυελό των οστών. Στην τρίτη περίπτωση, το οστό μοντελοποιείται ως ένα μοντέλο τριών στρωμάτων (Μοντέλο-3), αποτελούμενο από ένα στρώμα αίματος στην ανώτατη επιφάνεια της πλάκας και από ένα στρώμα μυελού των οστών στην κατώτερη επιφάνεια. Εξετάζεται η επίδραση των διαφορετικών περιπτώσεων

συνοριακών συνθηκών στην ταχύτητα του κύματος FAS και στη διάδοση των κυματοδηγούμενων ρυθμών. Η ταχύτητα του FAS προσδιορίζεται στο πεδίο του χρόνου ενώ η διασπορά των ρυθμών μελετάται χρησιμοποιώντας τεχνικές ανάλυσης σήματος στο πεδίο χρόνου-συχνότητας ($t-f$).

Η παρούσα μελέτη αποτελεί την πρώτη συστηματική εργασία η οποία εξετάζει την επίδραση των υπερκείμενων μαλακών ιστών και του μυελού των οστών στην διάδοση κυμάτων σε κατεαγότα οστά.

4.2 Υλικά και Μέθοδοι

4.2.1 Μοντέλο Οστού

Το φλοιώδες οστό μοντελοποιείται ως γραμμικά ελαστική ισότροπη πλάκα με μέτρο του Young $E_{bone} = 14$ GPa και λόγο Poisson $\nu_{bone} = 0.37$. Η τιμή που επιλέγεται για το μέτρο του Young αντιστοιχεί στη μέση τιμή που μετρήθηκε εμβιομηχανικά στη διάφυση της κνήμης προβάτων σε προηγούμενη πειραματική μελέτη [2]. Ο λόγος Poisson καθορίζεται σύμφωνα με τις τιμές που είναι διαθέσιμες στη βιβλιογραφία για το φλοιώδες οστό. Επιπλέον, το οστό θεωρείται ομοιογενές στερεό με πυκνότητα $\rho = 1500$ Kg/m³, τιμή που αντιστοιχεί στη μέση οστική πυκνότητα που μετρήθηκε με χρήση QCT. Η διαμήκης και διατμητική ταχύτητα που προκύπτει από τις παραπάνω τιμές είναι 4063 m/s και 1846 m/s, αντίστοιχα. Οι παραπάνω τιμές ταχύτητας είναι σύμφωνες με τις αυτές που παρουσιάζονται στη βιβλιογραφία [13, 17]. Το πάχος της πλάκας είναι ίσο με 4 mm που αντιστοιχεί σε μια ρεαλιστική τιμή για το πάχος του φλοιού στην κνήμη και την κερκίδα του ανθρώπου [14].

4.2.2 Μοντέλο Πώρου

Η γεωμετρία του πώρου περιελάμβανε μια περιοχή που αντιστοιχεί στον περιοστικό πώρο και μία στον ενδοστικό πώρο. Ο πώρος μοντελοποιήθηκε ως ανομοιογενές υλικό που αποτελείται από έξι διαφορετικές περιοχές ανάπτυξης και οστεοποίησης. Στο Σχήμα 4.1 οι περιοχές διακρίνονται από τους λατινικούς αριθμούς (I,II,III...VI). Η διεργασία της πώρωσης προσομοιώθηκε σε τρία στάδια. Για κάθε στάδιο, σε κάθε περιοχή του πώρου αποδίδονται ιδιότητες που αντιστοιχούν στους διάφορους μαλακούς ιστούς που αναπτύσσονται κατά την πώρωση. Υποθέσαμε πέντε τύπους μαλακών ιστών: συνδετικό ιστό (initial connective tissue - ICT), μαλακό πώρο (soft callus -

SOC), πόρος ενδιάμεσης σκληρότητας (intermediate stiffness callus - MSC), σκληρό πόρος (stiff callus - SC) και οστεώδη ιστό (ossified tissue - OT). Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο στάδιο (Στάδιο 1), ο πόρος αποτελούνταν από MSC κατά μήκος της περιοστικής και ενδοστικής επιφάνειας του φλοιού περιφερικά της καταγματικής εστίας (περιοχές I και VI), από SOC στη γειτονιά των παραπάνω περιοχών (περιοχές II και V) ενώ οι υπόλοιπες περιοχές αποτελούνταν από ICT (περιοχές III και IV). Στο δεύτερο στάδιο (Στάδιο 2), η οστεοποίηση εξελίσσεται προς την κατεύθυνση του καταγματικού κενού και ο πόρος αποτελείται από τέσσερις τύπους μαλακών ιστών: ICT στην περιοχή IV, SOC στην περιοχή III, MSC στην περιοχή II, και SC στις περιοχές I, V και VI όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1. Στο τρίτο στάδιο (Στάδιο 3), ο σχηματισμός οστίτη ιστού έχει ολοκληρωθεί και μόνο μια μικρή περιοχή ανάμεσα στα καταγματικά άκρα καταλαμβάνεται από SOC (περιοχή IV). Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, τα Στάδια 1 και 2 αντιστοιχούν στην τέταρτη και όγδοη εβδομάδα της πάρωσης, ενώ το Στάδιο 3 αντιπροσωπεύει το στάδιο πριν την οστική ανακατασκευή. Η γεωμετρία του πόρου παρέμεινε αμετάβλητη σε όλα τα στάδια της πάρωσης. Οι ιδιότητες των μαλακών ιστών που εμπλέκονται στα στάδια της πάρωσης φαίνονται στον Πίνακα 4.1.

Πίνακας 4.1. Ιδιότητες των μαλακών ιστών που συνθέτουν τον πόρο.

Μοντέλο	Ποκνότητα (Kg/m ³)	Μέτρο Young (MPa)	Λόγος Poisson	Διαμήκης Ταχύτητα (m/s)
Συνδετικός ιστός – ICT	1050	3	0.4998	1543
Μαλακός πόρος – SOC	1100	1000	0.47	2337
Πόρος ενδιάμεσης σκληρότητας – MSC	1200	3000	0.45	3079
Σκληρός πόρος – SC	1250	6000	0.43	3697
Οστεώδης ιστός – OT	1400	10000	0.40	3912

4.2.3 Προσομοίωση της τεχνικής αξονικής διάδοσης

Χρησιμοποιείται διάταξη πομπού-δέκτη όπου οι μετατροπείς τοποθετούνται σε πλήρη επαφή με την άνω επιφάνεια της πλάκας. Η επιφάνεια επαφής των μετατροπέων με την πλάκα είναι 5 mm. Η απόσταση του κέντρου του δέκτη από το κέντρο του πομπού (center-to-center) ήταν 35 mm. Η απόσταση μεταξύ πομπού-δέκτη είναι τυπική για

διατάξεις που χρησιμοποιούνται για τη μελέτη οστών [13, 17, 18]. Η πηγή διέγερσης θεωρήθηκε ένα ευρυζωνικό κύμα αποτελούμενο από ένα κύκλο ημιτόνου διαμορφωμένο από Γκαουσιανό παλμό με κεντρική συχνότητα 1-MHz (διάρκεια διέγερσης 1 μ s). Οι μετατροπείς εξέπεμπαν και λάμβαναν μόνο διαμήκη κύματα.

4.2.4 Προσομοίωση τεχνικής αξονικής διάδοσης

Στο Μοντέλο-1 (Σχήμα 4.1(α)) το οστό θεωρείται ότι είναι πλήρως εμβαπτισμένο σε αίμα. Μολονότι το νερό είναι το ρευστό που χρησιμοποιείται συνήθως σε υπολογιστικές μελέτες για την προσομοίωση των μαλακών ιστών, οι μηχανικές ιδιότητες του αίματος προσεγγίζουν σημαντικά αυτές των μαλακών ιστών. Πιο συγκεκριμένα το αίμα έχει μέτρο του Young $E_{blood} = 3\text{MPa}$, λόγο Poisson $\nu = 0.49979$ και πυκνότητα $\rho = 1055 \text{ Kg/m}^3$. Οι παραπάνω τιμές αναφοράς για τις μηχανικές ιδιότητες του αίματος δίνονται από τη βιβλιοθήκη υλικών του εμπορικού λογισμικού Wave2000 Pro (CyberLogic, Inc., NY, USA). Στο Μοντέλο-2 (Σχήμα 4.1(β)), η ανώτερη επιφάνεια της πλάκας φορτίζεται από ένα στρώμα αίματος πάχους 2 mm ενώ ο ημι-άπειρος χώρος στην κατώτερη επιφάνεια αποτελείται από ένα ρευστό το οποίο έχει μέτρο του Young $E_{marrow} = 2\text{MPa}$, λόγο Poisson $\nu = 0.49978$ και πυκνότητα $\rho = 1020 \text{ Kg/m}^3$ [20]. Όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.1(γ), το μοντέλο τριών στρωμάτων, δηλ. το Μοντέλο-3, θεωρήσαμε ότι περιλαμβάνει ένα στρώμα αίματος στην ανώτερη επιφάνεια και να στρώμα μυελού των οστών στην κατώτερη επιφάνεια της πλάκας. Τα δύο στρώματα θεωρούνται ότι έχουν πάχος 2 mm.

Σε όλες τις περιπτώσεις, θεωρήσαμε ότι το μήκος των μοντέλων (δηλ. κατά τη διεύθυνση διάδοσης) εκτείνονται στο άπειρο. Για το λόγο αυτό στα άκρα του μοντέλου εφαρμόστηκαν συνοριακές συνθήκες κατά τις οποίες τα οδεύοντα κύματα που προσπίπτουν στα άκρα απορροφώνται πλήρως και δεν ανακλώνται. Παρόμοιες συνθήκες εφαρμόστηκαν επίσης στην ανώτερη και κατώτερη επιφάνεια του Μοντέλου-1 καθώς και στην κατώτερη επιφάνεια του Μοντέλου-2 έτσι ώστε να μοντελοποιηθούν οι ημι-άπειροι χώροι που καταλαμβάνονταν από αίμα και μυελό των οστών σε κάθε μοντέλο αντίστοιχα.

4.2.5 Επίλυση με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών

Το πρόβλημα της κυματικής διάδοσης επιλύθηκε αριθμητικά με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών (finite-differences method). Συνοπτικά, η λύση του

προβλήματος βασίζεται στη χωρική και χρονική διακριτοποίηση της 2-Δ κυματικής εξίσωσης. Η χωρική διακριτοποίηση επιτυγχάνεται με τη δημιουργία ενός ομογενούς πλέγματος (grid) από στοιχεία (grid elements). Στην τομή τεσσάρων γειτονικών στοιχείων υπολογίζεται προσεγγιστικά για κάθε χρονικό βήμα ολοκλήρωσης (integration time step) το διάνυσμα των μετατοπίσεων.

Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών παρέχει προσεγγιστική αριθμητική επίλυση του προβλήματος. Η ακρίβεια των αποτελεσμάτων εξαρτάται από την πυκνότητα του πλέγματος, δηλ. από το μέγεθος των (ορθογώνιων) στοιχείων που το απαρτίζουν. Πιο συγκεκριμένα, για να ανακτηθεί χωρικά ένα διαδιδόμενο κύμα θα πρέπει η μικρότερη διάσταση, l_e , του στοιχείου να είναι αρκετά μικρότερη από το μικρότερο υπό εξέταση μήκος κύματος, λ_{\min} , σύμφωνα με το κριτήριο:

$$l_e \leq \frac{\lambda_{\min}}{g}, \quad (4.1)$$

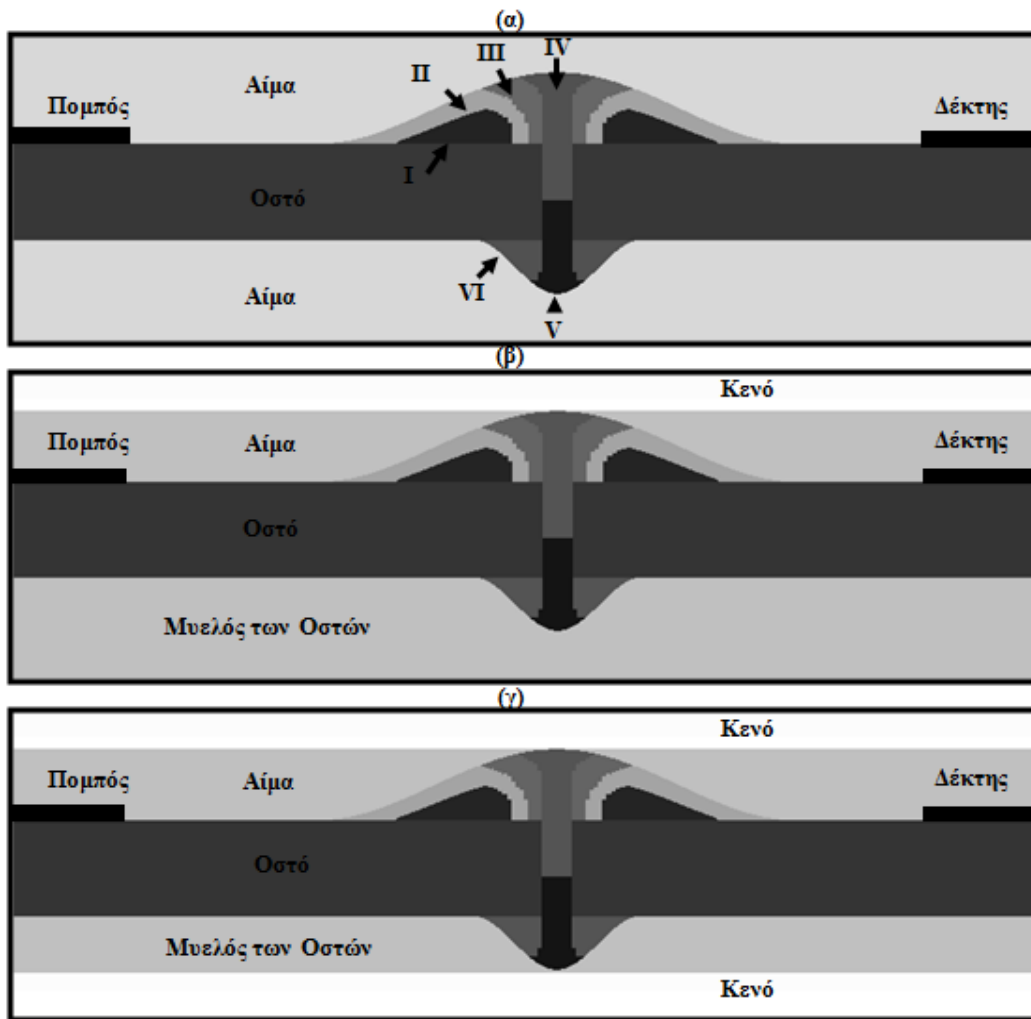
όπου το g δηλώνει τον ελάχιστο αριθμό στοιχείων που απαιτούνται ανά μήκος κύματος.

Ένα δεύτερο βασικό κριτήριο της αριθμητικής επίλυσης αφορά την ευστάθεια (stability) της προσομοίωσης. Σύμφωνα με αυτό, για το χρονικό βήμα ολοκλήρωσης θα πρέπει να ισχύει:

$$\Delta t \leq \min \left(\frac{l_e}{\sqrt{c_L^2 + c_T^2}} \right), \quad (4.2)$$

όπου c_L και c_T είναι η διαμήκης και διατμητική ταχύτητα στο μέσο διάδοσης.

Για την επίλυση του μοντέλου χρησιμοποιήθηκε το εμπορικό υπολογιστικό πακέτο Wave2000 Pro (version 2.2, Cyberlogic, Inc., NY, USA). Ο πυρήνας που χρησιμοποιεί το πρόγραμμα στηρίζεται στον αλγόριθμο που δημοσιεύτηκε από τους Schechter *et. al.* [21]. Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος πεπερασμένων διαφορών ικανοποιεί ρητά τη συνέχεια των τάσεων και των μετατοπίσεων στις τομές των γειτονικών στοιχείων του πλέγματος γεγονός που καθιστά τη λύση σύμμορφη (self-consistent) και αντιστοιχεί, σε μεγάλο βαθμό, με το πραγματικό φυσικό φαινόμενο.



Σχήμα 4.1. 2Δ μοντέλο κατεαγότος οστού και η διάταξη πομπού – δέκτη. Οι κεφαλαίοι λατινικοί αριθμοί αντιστοιχούν στις έξι περιοχές οστεοποίησης οι οποίες απαρτίζουν τον ιστό του πόρου: (α) Μοντέλο-1 στο οποίο το οστό θεωρείται εμβαπτισμένο σε αίμα που καταλαμβάνει τους ημι-άπειρους χώρους που συνορεύουν με την ανώτερη και κατώτερη επιφάνεια της πλάκας, (β) Μοντέλο-2 που αποτελείται από ένα στρώμα αίματος πάχους 2mm το οποίο συνορεύει με την ανώτερη επιφάνεια της πλάκας ενώ ο ημι-χωρος στην κατώτερη επιφάνεια της πλάκας αποτελείται από ρευστό με ιδιότητες όμοιες με αυτές του μυελού των οστών, (γ) Μοντέλο-3 που περιλαμβάνει τρία στρώματα.

Η διάσταση του κάθε στοιχείου τέθηκε ίση με 0.1 mm, η οποία αντιστοιχεί σε δέκα στοιχεία ανά μικρότερο μήκος κύματος έτσι ώστε να ικανοποιείται η Εξ. (4.2). Η συχνότητα δειγματοληψίας ήταν 46.97 MHz και η συνολική διάρκεια της προσομοίωσης ήταν 110 μ s.

4.3 Ανάλυση των Σημάτων Υπερήχων

4.3.1 Ανάλυση Σημάτων Υπερήχων στο Πεδίο του Χρόνου

Η ταχύτητα διάδοσης υπερήχων προσδιορίστηκε διαιρώντας την απόσταση μεταξύ των μετατροπέων με το χρόνο άφιξης του πρώτου αφιχθέντος σήματος στο δέκτη όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 2. Ο εντοπισμός του FAS τόσο στα σήματα από τις προσομοιώσεις όσο και στα πειραματικά προσδιορίστηκε με χρήση του κατωφλίου 10% που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 2.

4.3.2 Ανάλυση Σημάτων Υπερήχων στο Πεδίο Χρόνου-Συχνότητας

Η αναπαράσταση των κυματοδηγούμενων ρυθμών έγινε στο πεδίο $t-f$ του σήματος. Σε μία προηγούμενη υπολογιστική μελέτη τα σήματα που ελήφθησαν από 2Δ μοντέλα άθικτου και κατεαγότες οστού αναλύθηκαν στο πεδίο $t-f$ χρησιμοποιώντας τρεις διαφορετικές συναρτήσεις κατανομής ενέργειας: το επαναπροσδιορισμένο Φασματόγραμμα (reassigned Spectrogram - RS), η εξομαλυσμένη ψεύδο Wigner-Ville κατανομή ενέργειας (smoothed pseudo Wigner-Ville - SPWV) και η επαναπροσδιορισμένη εκδοχή της (RSPWV). Η RSPWV αποδείχθηκε ότι παρέχει την πιο ικανοποιητική διακριτική ικανότητα και κατά συνέπεια η ανάλυση $t-f$ στην παρούσα μελέτη πραγματοποιήθηκε με χρήση αυτής της συνάρτησης. Τα παράθυρα εξομάλυνσης χρόνου και συχνότητας που χρησιμοποιήσαμε ήταν συναρτήσεις Hamming με μήκος $N/10$ σημείων, όπου N είναι ο αριθμός των σημείων του σήματος.

4.3.2.1 Χαρακτηρισμός των Ρυθμών Lamb και των Διαρρεόντων Ρυθμών Lamb στο Πεδίο Χρόνου-Συχνότητας

Η κατανομή της ενέργειας του σήματος στο πεδίο $t-f$, για κάθε συνάρτηση, αναπαραστάθηκε στο 2-Δ χώρο ως εικόνα. Κάθε pixel της εικόνας αναπαριστά την πυκνότητα της ενέργειας της κατανομής, το πλάτος της οποίας (εκφρασμένο σε dB) απεικονίζεται με ψευδο-χρώμα.

Στη συγκεκριμένη μελέτη υπολογίστηκαν οι θεωρητικές καμπύλες διασποράς ταχυτήτων ομάδας των διαρρεόντων ρυθμών Lamb (Leaky Lamb modes) για τον χαρακτηρισμό των ρυθμών του Μοντέλου-1. Οι αναλυτική επίλυση του προβλήματος διάδοσης κυματοδηγούμενων ρυθμών σε 2Δ πλάκα για κάθε περίπτωση συνοριακών συνθηκών περιγράφεται αναλυτικά στο Κεφάλαιο 2. Ωστόσο στη συγκεκριμένη μελέτη

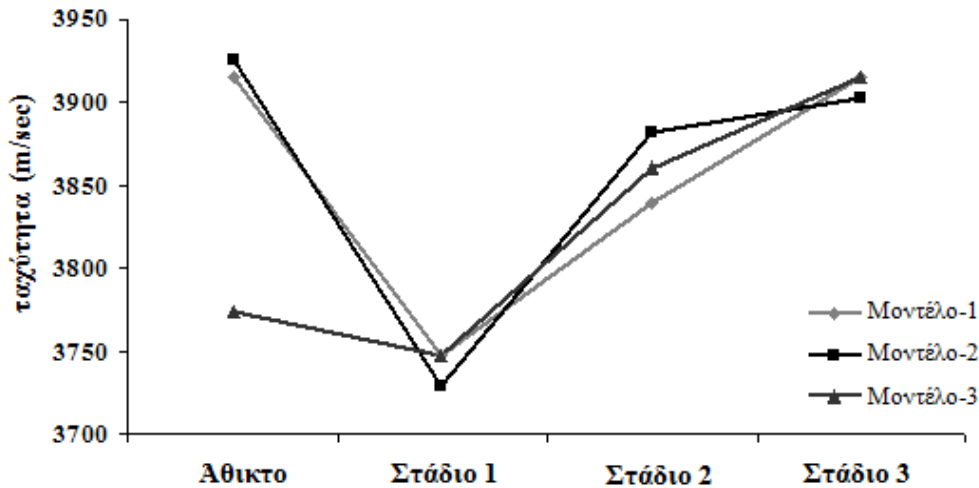
για τις περιπτώσεις του Μοντέλου-2 και Μοντέλου-3 αρκούμαστε σε μια ποιοτική περιγραφή των διαγραμμάτων t - f αναπαραστάσεων. Ο αριθμητικός υπολογισμός των καμπυλών διασποράς για τις περιπτώσεις αυτές αποτελεί αντικείμενο μελλοντικής εργασίας της έρευνας.

Για τον εντοπισμό και χαρακτηρισμό των ρυθμών στις εικόνες t - f του ληφθέντος σήματος από το Μοντέλο-1 χρησιμοποιήσαμε τις καμπύλες διασποράς της ταχύτητας ομάδος, c_g , των ρυθμών συναρτήσει της συχνότητας, (καμπύλες (f, c_g)). Για την ανάλυση των σημάτων που προέκυψαν από το μοντέλο, οι καμπύλες που υπολογίστηκαν αντιστοιχούσαν σε πλάκα εμβαπτισμένη σε αίμα με πάχος ίσο με αυτό της πλάκας του μοντέλου, και με τιμές για την διαμήκη και διατμητική ταχύτητα ίσες με αυτές που υπολογίζονται θεωρητικά βάσει των ιδιοτήτων του οστού και του αίματος. Για τη συγκεκριμένη απόσταση πομπού-δέκτη που χρησιμοποιήθηκε στο μοντέλο, οι καμπύλες (f, c_g) μετατράπηκαν σε καμπύλες (t, f) οι οποίες αναπαριστούν τον θεωρητικά αναμενόμενο χρόνο άφιξης κάθε φασματικής συνιστώσας του διαρρέοντος ρυθμού Lamb. Οι καμπύλες (t, f) στη συνέχεια υπερτέθηκαν στις αντίστοιχες εικόνες t - f των σημάτων. Για λόγους σύγκρισης, στις εικόνες t - f που αφορούν στο Μοντέλο-1 υπερτέθηκαν επίσης και οι αντίστοιχες καμπύλες διασποράς των ρυθμών Lamb υπολογιζόμενες για ελεύθερη πλάκα στο κενό. Το θεωρητικό υπόβαθρο και ο τρόπος υπολογισμού των καμπυλών αυτών τόσο για πλάκα σε κενό όσο και για πλάκα εμβαπτισμένη σε ρευστό περιγράφονται στο Κεφάλαιο 2.

4.4 Αποτελέσματα

Η ταχύτητα του κύματος FAS για τα μοντέλα άθικτου οστού: Μοντέλο-1, Μοντέλο-2 και Μοντέλο-3 υπολογίστηκε ίση με 3914 m/s, 3925 m/s και 3772 m/s αντίστοιχα. Σε προηγούμενες μελέτες η ταχύτητα του FAS για 2D μοντέλο άθικτου οστού στο κενό βρέθηκε ίση με 3914 m/s [22], δηλ. ταυτόσιμη με την τιμή για το μοντέλο πλάκας εμβαπτισμένης σε αίμα (Μοντέλο-1).

Όσον αφορά στα μοντέλα κατεαγότεων οστών, η εξέλιξη της ταχύτητας του FAS κατά τη διάρκεια των σταδίων της διαδικασίας πόρωσης παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.2. Στο πρώτο στάδιο η ταχύτητα του FAS μειώνεται σε σχέση με την αντίστοιχη τιμή στο

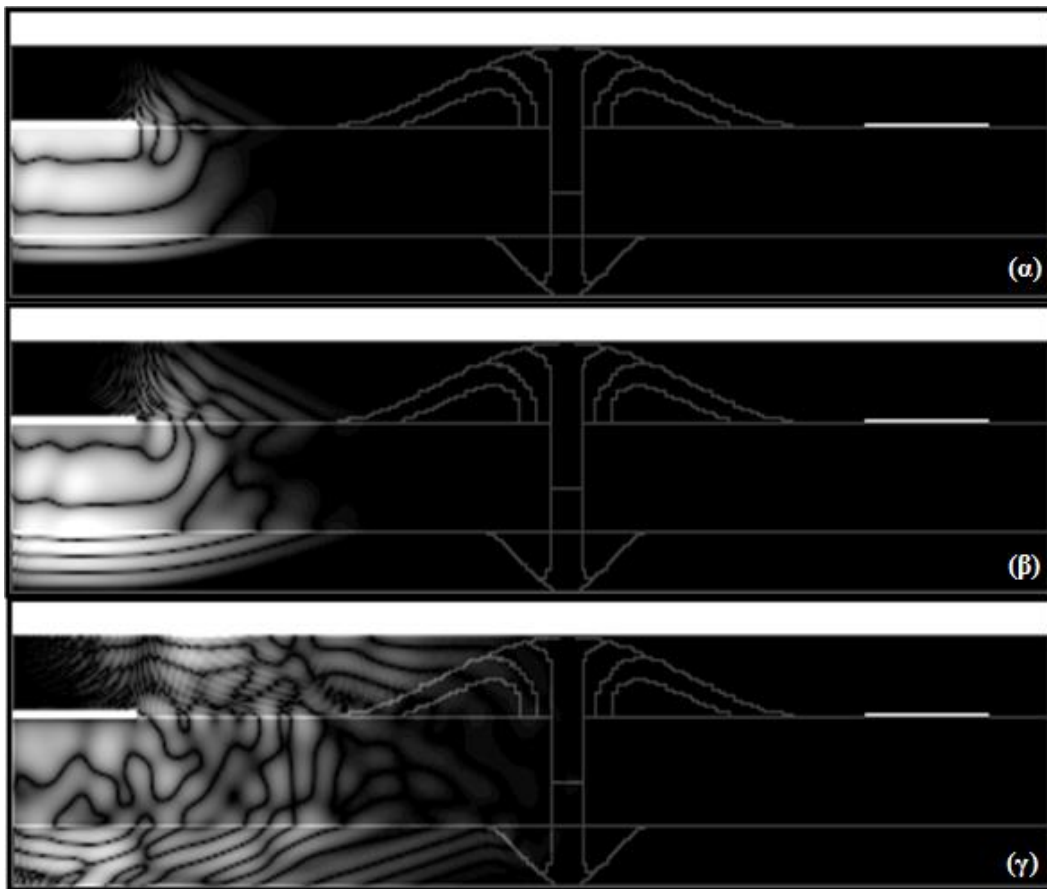


Σχήμα 4.2. Εξέλιξη της ταχύτητας του FAS στα τρία στάδια της διαδικασίας πόρωσης στο Μοντέλο-1, Μοντέλο-2 και Μοντέλο-3.

άθικτο οστό ενώ στο δεύτερο στάδιο αυξάνεται ελαφρώς. Στο τρίτο στάδιο, καθώς οι μηχανικές ιδιότητες του πόρου προσεγγίζουν αυτές του οστού, η ταχύτητα του FAS αυξάνεται τείνοντας στην τιμή με την οποία το κύμα αυτό έχει αποδειχθεί ότι διαδίδεται στο άθικτο οστό. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2 η διακύμανση της ταχύτητας του FAS κατά τη διαδικασία της πόρωσης διαφέρει ελάχιστα μεταξύ των τριών μοντέλων. Συνεπώς, η διάδοση του FAS δεν επηρεάζεται σημαντικά από την εφαρμογή διαφορετικών συνοριακών συνθηκών στη 2Δ πλάκα. Επιπρόσθετα, η διακύμανση της ταχύτητας για το Μοντέλο-1 ταυτίζεται με αυτή που έχει βρεθεί σε προηγούμενη μελέτη για ελεύθερο 2Δ μοντέλο κατεαγότεος οστού [17].

Στο Σχήμα 4.3 παρουσιάζονται στιγμιότυπα της διάδοσης κυμάτων στο μοντέλο κατεαγότεος οστού στη δεύτερη περίπτωση (Μοντέλο-2). Τα στιγμιότυπα έχουν ληφθεί κατά το Στάδιο 2 της διαδικασίας πόρωσης και έχουν καταγραφεί στα 3 μs , 10 μs και 17 μs της προσομοίωσης. Το Σχήμα 4.3(α) αντιστοιχεί στην αμέσως επόμενη χρονική στιγμή της μετά τη διέγερση. Παρατηρείται ότι ορισμένα κύματα διαρρέουν από το οστό προς στο στρώμα ρευστού που βρίσκεται στην ανώτερη επιφάνεια της πλάκας και στη συνέχεια φτάνοντας στο όριο του στρώματος ανακλώνται προς την αντίθετη κατεύθυνση και διαδίδονται και πάλι στο οστό. Υπερηχητική ενέργεια με τη μορφή

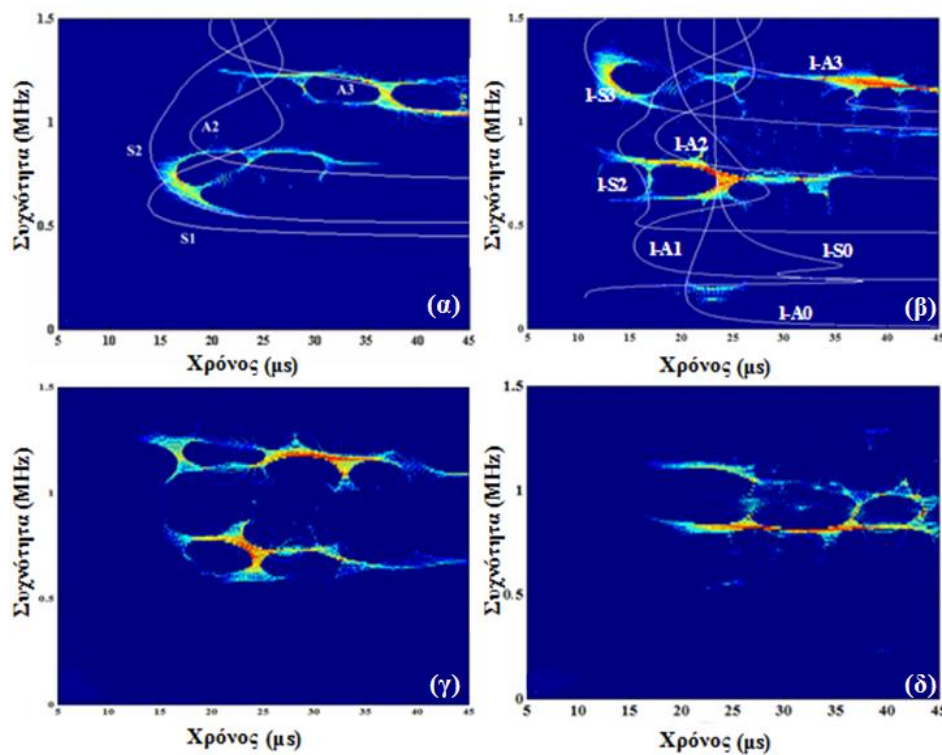
διαρρεόντων ρυθμών διαδίδεται επίσης και στη διεπιφάνεια μεταξύ της πλάκας και του ημι-άπειρου χώρου που καταλαμβάνεται από μυελό των οστών (Σχήμα 4.3 (β) και (γ)). Επιπρόσθετα, όταν τα κύματα φθάνουν στον πόρο τα μήκη κύματος είναι μικρότερα ανάλογα με τις μηχανικές ιδιότητες των ιστών που απαρτίζουν τον πόρο κατά τη διαδικασία της πάρωσης. Τέλος τα κύματα που φθάνουν στο δέκτη είναι πολύ εξασθενημένα λόγω της μετάδοσής τους στους μαλακούς ιστούς. Οι αναπαραστάσεις t - f των σημάτων που ελήφθησαν από τα τρία διαφορετικά μοντέλα άθικτου οστού, δηλ. Μοντέλο-1, Μοντέλο-2 και Μοντέλο-3, απεικονίζονται στα Σχήματα 4.4 (β), (γ) και (δ)



Σχήμα 4.3. Στιγμιότυπα κυματικής διάδοσης στο Μοντέλο-3 κατεαγότος οστού στο Στάδιο 2. Οι χρονικές στιγμές που αντιστοιχούν είναι: (α) 3 μ s, (β) 10 μ s και (γ) 17 μ s.

αντίστοιχα. Για λόγους σύγκρισης, στο Σχήμα 4.4(α) παρουσιάζεται επίσης και το μοντέλο άθικτου οστού στο κενό, το οποίο είχε αναπτυχθεί σε προηγούμενη εργασία μας. Οι θεωρητικές καμπύλες που έχουν υπερτεθεί στα Σχήματα 4.4 (α) και (β) υπολογίστηκαν για ελεύθερη 2Δ πλάκα και πλάκα εμβαπτισμένη σε αίμα αντίστοιχα. Το πάχος πλάκας ήταν 4 mm και η διαμήκης ταχύτητα ήταν ίση με 4200 m/s. Στο

Σχήμα 4.4(α) παρατηρείται ότι στο ελεύθερο μοντέλο άθικτου οστού, ο S2 ρυθμός εντοπίζεται από τη συχνότητα 0.55 έως 0,8 MHz, ενώ ο ρυθμός A2 εντοπίζεται από τη συχνότητα αποκοπής (1.05 MHz) έως 1.25 MHz. Ωστόσο, η κατάσταση διαφοροποιείται στην περίπτωση που το άθικτο οστό εμβαπτίζεται σε αίμα, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.4 (β). Σε αυτή την περίπτωση οι ρυθμοί I-S3 και I-A3 είναι οι επικρατέστεροι ενώ ρυθμοί όπως ο I-A0 δεν εντοπίζονται καθαρά. Οι I-S0 και I-S2 ρυθμοί χαρακτηρίζονται στο φάσμα συχνοτήτων από 0.19 έως 0.22 MHz και από 0.65 έως 0.81 MHz αντίστοιχα. Για τις επόμενες δυο περιπτώσεις, που απεικονίζονται στα Σχήματα 4.4 (γ), (δ) υποστηρίζεται η διάδοση μόνο ορισμένων υψηλής τάξης ρυθμών. Πιο συγκεκριμένα, στο Μοντέλο-2 εμφανίζονται στην $t-f$ αναπαράσταση δύο ρυθμοί με



Σχήμα 4.4. Η αναπαράσταση $t-f$ των σημάτων που ελήφθησαν από (α) το μοντέλο ελεύθερου άθικτου οστού και από το μοντέλο άθικτου οστού για το (β) Μοντέλο-1, (γ) Μοντέλο-2 και (δ) Μοντέλο-3. Οι αντίστοιχες θεωρητικές καμπύλες διασποράς ταχυτήτων ομάδας έχουν υπερτεθεί στις εικόνες (α) και (β).

διασπορά παρόμοια με αυτή των I - A2 και I - S3 ρυθμών (στην περίπτωση της εμβαπτισμένης πλάκας σε αίμα) οι οποίοι διαδίδονται από 25.04 - 31.42 μs (δηλ. στο φάσμα συχνοτήτων 0.7289 - 0.7389 MHz) και από 17.71 - 22.23 μs (δηλ. στο φάσμα συχνοτήτων 1.098 - 1.128 MHz) αντίστοιχα. Όσον αφορά στο Μοντέλο-3 στην

αναπαράσταση t - f εντοπίζεται ένας ρυθμός όμοιος με τον 1 - A2 στο φάσμα συχνοτήτων από 0.79 - 0.82 MHz, ο οποίος φαίνεται ότι εμπεριέχει το μεγαλύτερο ποσοστό της ενέργειας του σήματος. Επιπλέον παρατηρείται ότι στην περίπτωση αυτή περιγράφεται καθαρά και ένας ρυθμός όμοιος με τον 1 - S3 από τη χρονική στιγμή 36.28 - 43.93 μ s.

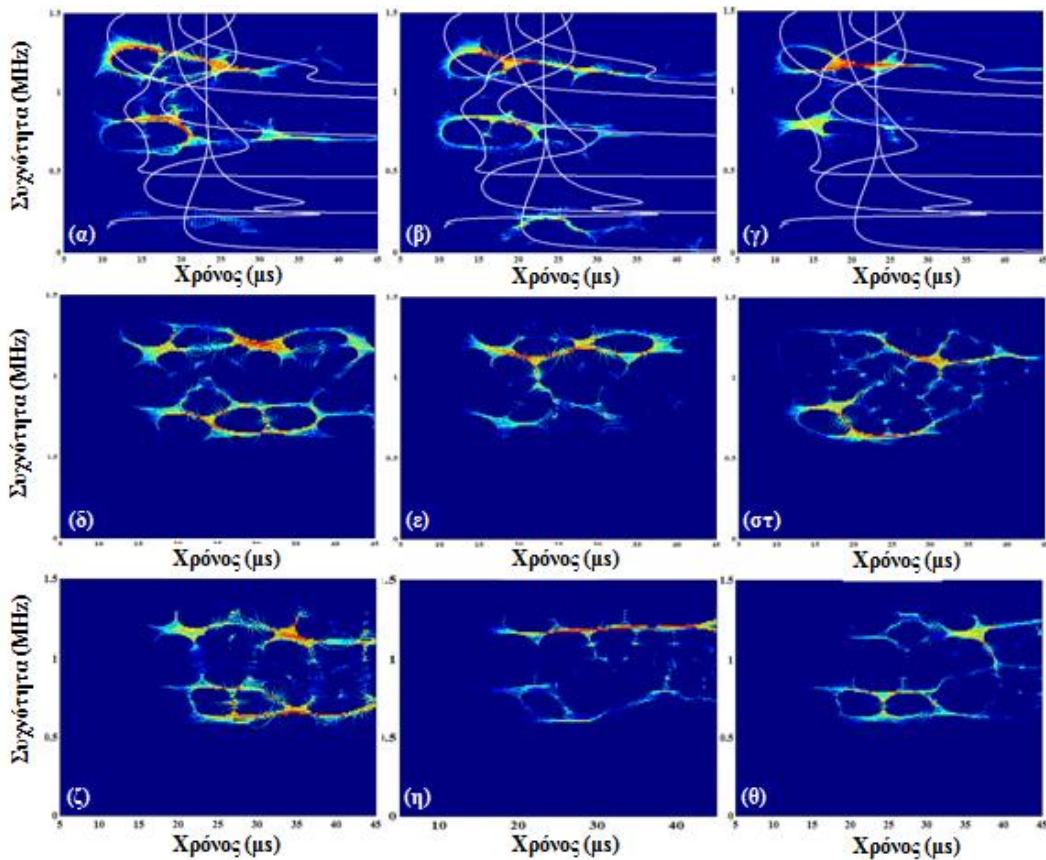
Στα Σχήματα 4.5 (α)-(γ), (δ)-(στ) και (ζ)-(θ) παρουσιάζονται οι t - f αναπαραστάσεις των σημάτων που ελήφθησαν από τα στάδια της διαδικασίας πώρωσης που μοντελοποιήθηκαν για το μοντέλο κατεαγότος οστού υποθέτοντας τις τρεις διαφορετικές περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών αντίστοιχα (Μοντέλο-1, Μοντέλο-2 και Μοντέλο-3). Παρατηρείται ότι εικόνες t - f που αντιστοιχούν στο Μοντέλο-1 είναι διαφορετικές από αυτές που αντιστοιχούν στα Μοντέλα-2 και 3, γεγονός που συνέβη και στην περίπτωση του άθικτου οστού. Ωστόσο, και στα τρία μοντέλα κατεαγότος οστού, η σταδιακή αποκατάσταση των ιδιοτήτων του πόρου από το Στάδιο 1 στο Στάδιο 3 της διαδικασίας πώρωσης, φαίνεται ότι επηρεάζει σημαντικά τη διασπορά των ρυθμών που διαδιδόταν στο εκάστοτε αντίστοιχο μοντέλο άθικτου οστού. Επιπρόσθετα, στις αναπαραστάσεις t - f εμφανίζονται επιπρόσθετοι ρυθμοί ως αποτέλεσμα φαινομένων ανακλάσεων και σκέδασης λόγω της ανομοιόμορφης γεωμετρίας του πόρου. Παρόλα αυτά παρατηρείται ότι στο Στάδιο 3 η διασπορά ορισμένων ρυθμών αρχίζει να αποκαθίσταται προσεγγίζοντας την αντίστοιχη διασπορά που παρατηρήθηκε στα άθικτα οστά.

4.5 Συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκε μία 2D υπολογιστική μελέτη της διάδοσης κυματοδηγούμενων κυμάτων υπερήχων σε άθικτα και κατεαγότα μακρά οστά. Η μελέτη μας επικεντρώθηκε στη διερεύνηση της επίδρασης των υπερκείμενων μαλακών ιστών στην ταχύτητα του κύματος FAS και στη διασπορά των κυματοδηγούμενων ρυθμών συγκρίνοντας τρεις διαφορετικές περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών ως αποτέλεσμα της φόρτισης της πλάκας με ρευστό.

Το οστό μοντελοποιήθηκε ως 2D ομογενής πλάκα σύμφωνα με προηγούμενες μελέτες [13, 17]. Ωστόσο στην παρούσα εργασία επεκτείναμε το μοντέλο του πόρου, υποθέτοντας ότι αποτελείται από ορισμένες περιοχές οστεοποίησης. Οι ιδιότητες της κάθε περιοχής μεταβαλλόταν σταδιακά κατά την περίοδο της επούλωσης σύμφωνα με

προηγούμενες μελέτες [17, 18]. Τα τρία στάδια του μοντέλου προσομοιώνουν την



Σχήμα 4.5. Αναπαράσταση t - f των σημάτων που ελήφθησαν από το κατεαγόν οστό στο Στάδιο 1, Στάδιο 2 και Στάδιο 3 της διαδικασίας πόρωσης για: (α)-(γ) το Μοντέλο-1, (δ)-(στ) Μοντέλο-2 και (ζ)-(θ) Μοντέλο-3, αντίστοιχα.

ανάπτυξη και αποτιτάνωση του πόρου και αποτελούν κρίσιμα χαρακτηριστικά της διεργασίας της δευτερογενούς πόρωσης. Θέματα που σχετίζονται με την ανισοτροπία και το πορώδες του οστού αγνοήθηκαν στη συγκεκριμένη μελέτη. Ωστόσο, σε δύο προηγούμενες υπολογιστικές μελέτες, [14, 18] έχει αποδειχθεί ότι η ανισοτροπία του οστού επηρεάζει σημαντικά τη διασπορά των κυματοδηγούμενων ρυθμών. Αντίθετα, η ανισοτροπία επηρεάζει ελάχιστα την ταχύτητα διάδοσης του πλευρικού κύματος, με την προϋπόθεση ότι η ελαστική σταθερά C_{33} κατά τον διαμήκη άξονα διατηρείται σταθερή μεταξύ ισότροπου και ανισότροπου μοντέλου [14, 18]. Επιπλέον, το πορώδες του φλοιώδους οστού που εντοπίζεται στην ενδοστική περιοχή και τους Αβέρσειους σωλήνες (βλ. Κεφάλαιο 1) εισάγει εξασθένηση κυρίως λόγω σκέδασης, η οποία αναμένεται να επηρεάζει τα χαρακτηριστικά της κυματικής διάδοσης. Μια επιπρόσθετη

απλοποιημένη υπόθεση στη μελέτη μας αποτελεί ότι ο φλοιός μοντελοποιήθηκε ως πλάκα αγνοώντας την 3Δ ανομοιόμορφη γεωμετρία του. Σύμφωνα με τη θεωρία, η διασπορά των ρυθμών υψηλότερης τάξης σε ένα υλικό με κυλινδρική γεωμετρία μπορούν πρακτικά να προσεγγιστούν από τους αντίστοιχους ρυθμούς σε πλάκα, δεδομένου του ότι ο λόγος του πάχους του κυλίνδρου προς την εξωτερική του ακτίνα είναι μικρός. Παρόλα αυτά, σε προηγούμενη 3Δ υπολογιστική μελέτη διάδοσης υπερήχων σε οστά αποδείχθηκε ότι η ρεαλιστική αυλοειδής γεωμετρία του οστού προκαλεί σημαντικές μεταβολές στη διασπορά των ρυθμών υψηλής τάξης.

Αρχικά, για την προσομοίωση των υπερκείμενων μαλακών ιστών, το μοντέλο του οστού θεωρήθηκε ότι είναι εμβαπτισμένο σε υγρό (Μοντέλο-1), όπως έχει αναφερθεί και σε προηγούμενες μελέτες [8, 13]. Ωστόσο στη συγκεκριμένη μελέτη το υγρό που επιλέχθηκε ήταν το αίμα επειδή έχει μηχανικές ιδιότητες που προσεγγίζουν ικανοποιητικά αυτές των μαλακών ιστών. Το μοντέλο αυτό χρησιμοποιήθηκε για τη διερεύνηση των κυμάτων που διαρρέονται στους μαλακούς ιστούς. Ωστόσο στο μοντέλο αυτό δεν είναι δυνατό να ληφθούν υπόψη οι ανακλάσεις εξαιτίας του πεπερασμένου πάχους των ιστών. Ο περιορισμός αυτός αντιμετωπίστηκε αρχικά στη μελέτη [23] εισάγοντας ένα μοντέλο δύο στρωμάτων όμοιο με αυτό που παρουσιάστηκε στην [24]. Στις εργασίες αυτές, το στρώμα ρευστού στην ανώτερη επιφάνεια του οστού προσομοίωσε τους υπερκείμενους μαλακούς ιστούς. Παρόλα αυτά, τα μοντέλα δύο στρωμάτων δεν επιτρέπουν την προσομοίωση των μαλακών ιστών στην ενδοστική περιοχή, δηλ. του μυελού των οστών. Ο περιορισμός αυτός αντιμετωπίζεται στην παρούσα εργασία με την κατασκευή δύο επιπλέον μοντέλων. Το πρώτο (Μοντέλο-2) περιλάμβανε ένα στρώμα αίματος πεπερασμένου πάχους το οποίο φόρτιζε την ανώτερη επιφάνεια της πλάκας και ένα στρώμα ρευστού με ιδιότητες όμοιες με αυτές του μυελού των οστών, το οποίο καταλάμβανε τον ημι-χώρο στο κατώτερο άκρο του οστού. Στο τρίτο μοντέλο (Μοντέλο-3), υποθέσαμε ότι οι επιφάνειες εκατέρωθεν της πλάκας φορτιζόνταν από δύο στρώματα ρευστού: το ανώτερο στρώμα αποτελούνταν και πάλι από αίμα ενώ το κατώτερο από μυελό των οστών. Η παρούσα εργασία είναι η πρώτη που λαμβάνει υπόψη την επίδραση των μαλακών ιστών που εντοπίζονται τόσο στην ενδοστική όσο και στην περιοστική περιοχή του φλοιώδους οστού.

Θα πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι οι μετατροπείς τοποθετήθηκαν απευθείας στην ανώτερη επιφάνεια της πλάκας έτσι ώστε να προσεγγισθεί η πειραματική εφαρμογή [2] στην οποία οι μετατροπείς εμφυτεύτηκαν απευθείας στην επιφάνεια του οστού. Παρόλα αυτά, η προσομοίωση της διαδερμικής εφαρμογής των μετατροπέων θα ήταν εφικτή εάν τοποθετούνταν επί του στρώματος του αίματος στο μοντέλο.

Βρέθηκε ότι η ταχύτητα του FAS πρακτικά δεν επηρεάζεται από τις διαφορετικές συνοριακές συνθήκες. Αυτό μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι το κύμα FAS αντιστοιχεί σε ένα πλευρικό κύμα το οποίο δεν παρουσιάζει διασπορά και διαδίδεται κατά μήκος ενός υπο-επιφανειακού στρώματος του φλοιού [7,9]. Όσον αφορά στα μοντέλα κατεργάτων οστών, η ταχύτητα του FAS βρέθηκε ότι αυξάνεται κατά τη διάρκεια της διαδικασίας πόρωσης, γεγονός που είναι σε συμφωνία με τα ευρήματα προηγούμενων εργασιών [17,18]. Ωστόσο το κύμα FAS δε μπορεί να δώσει πληροφορίες σχετικά με τις υλικές μεταβολές που λαμβάνουν χώρα κατά την επούλωση.

Εξαιτίας της ευρυζωνικής διέγερσης που χρησιμοποιήθηκε, οι κυματομορφές των ληφθέντων σημάτων περιλάμβαναν επιπρόσθετους κυματοδηγούμενους ρυθμούς οι οποίοι επηρεάζονταν από τη γεωμετρία και τις μηχανικές ιδιότητες του οστού. Για την αναπαράσταση των ρυθμών αυτών χρησιμοποιήθηκε η ανάλυση στο πεδίο χρόνου-συχνότητας. Όσον αφορά στο Μοντέλο-1, οι κυματοδηγούμενοι ρυθμοί εντοπίστηκαν ποιοτικά χρησιμοποιώντας τις θεωρητικές καμπύλες διασποράς υπολογιζόμενες για πλάκα εμβαπτισμένη σε αίμα που έχει ιδιότητες του οστού. Για τα Μοντέλα-2 και 3 παρουσιάστηκαν μόνο οι t - f αναπαραστάσεις των προσομοιωμένων σημάτων. Στο Μοντέλο-1 παρατηρήθηκε ότι οι θεωρητικές καμπύλες περιέγραφαν καθαρά τη διασπορά ορισμένων ρυθμών. Στα επόμενα δύο μοντέλα άθικτου οστού (Μοντέλο-2 και 3), η κυματική διασπορά παρουσίασε σημαντική διαφοροποίηση από αυτή της εμβαπτισμένης πλάκας. Οι διαφορές αυτές ήταν αναμενόμενες λόγω της ενσωμάτωσης των στρωμάτων στα δύο μοντέλα τα οποία προκαλούν πολύπλοκα φαινόμενα κυματοδότησης. Πιο συγκεκριμένα, στο Μοντέλο-2, οι ρυθμοί που διαδίδονται στο στρώμα αίματος ανακλώνται στο πάνω όριο του στρώματος αίματος εξαιτίας της συνοριακής συνθήκης κενού που έχει εφαρμοστεί στο άκρο αυτό. Τα φαινόμενα είναι πιο έντονα στο Μοντέλο-3, επειδή κανένα στρώμα δεν παρέχει μονοπάτια διαρροής και

συνεπώς τα κύματα διαδίδονται σε ολόκληρη τη δομή τριών στρωμάτων. Ωστόσο, οι διαδιδόμενοι ρυθμοί σε κάθε μοντέλο θα μπορούσαν να εντοπιστούν στις αντίστοιχες t - f αναπαραστάσεις, χρησιμοποιώντας τις θεωρητικές καμπύλες. Επομένως, για την εξαγωγή τελικών ορθών συμπερασμάτων είναι απαραίτητη η συνέχιση της εργασίας μας προσδιορίζοντας τις θεωρητικές καμπύλες διασποράς για τα Μοντέλα-2 και 3. Τα αποτελέσματα της μελέτης μας δε μπορούν να συγκριθούν άμεσα με άλλες μελέτες εξαιτίας του ότι χρησιμοποιούνται διαφορετικά μοντέλα. Σε προηγούμενη μελέτη για την αξιολόγηση της οστεοπόρωσης [23] αναφέρεται ο εντοπισμός του ρυθμού A0 στο 2Δ φάσμα των σημάτων που ελήφθησαν από ένα μοντέλο δύο στρωμάτων. Παρόλα αυτά στη συγκεκριμένη μελέτη η διάδοση των βασικών ρυθμών ήταν περιορισμένη. Το γεγονός αυτό μπορεί πιθανώς να οφείλεται στα χαρακτηριστικά της πηγής διέγερσης, δηλ. την κεντρική συχνότητα 1 MHz, το μέγεθος και την πολικότητα των μετατροπέων, τα οποία θα μπορούσαν να επιδρούν σε μεγάλο βαθμό στη διάδοση των βασικών ρυθμών σε όλα τα μοντέλα.

Όσον αφορά στο κατεαγόν οστό, βρέθηκε ότι η κυματική διασπορά επηρεάζεται σημαντικά από τις ιδιότητες της κάθε περιοχής του πόρου κατά τη διαδικασία της επούλωσης. Ωστόσο, όπως έχει αποδειχθεί σε προηγούμενη μελέτη [18] η γεωμετρική ανομοιομορφία εξαιτίας του σχηματισμού του πόρου (δηλ. η τοπική αύξηση του πάχους στην περιοχή του ενδοστικού και περιεστικού πόρου) αποτελεί εξίσου σημαντική παράμετρο που επηρεάζει την κυματική διάδοση. Στο μοντέλο κατεαγότος οστού που είναι εμβαπτισμένο σε αίμα, η μετάβαση από το Στάδιο 1 στο Στάδιο 3 προκάλεσε τη δημιουργία επιπρόσθετων ρυθμών οι οποίοι δε χαρακτηρίζονταν από τις θεωρητικές καμπύλες. Παρόμοια επιπρόσθετα κύματα παρατηρήθηκαν και στις αναπαραστάσεις t - f των Μοντέλων -2 και 3. Βρέθηκε επίσης ότι καθώς οι ιδιότητες του πόρου προσέγγιζαν αυτές του φλοιώδους οστού, η διασπορά των θεωρητικών ρυθμών άρχισε σταδιακά να αποκαθίσταται προς αυτή που παρατηρήθηκε στο άθικτο οστό. Παρόμοια συμπεράσματα εξήχθησαν και στην περίπτωση κατά την οποία η επιφάνεια του οστού θεωρήθηκε ότι βρίσκεται στο κενό [17, 18].

Προηγούμενες μελέτες όπως οι [9, 24] χρησιμοποίησαν συνοριακές συνθήκες (εμβαπτισμένες πλάκες) οι οποίες ήταν κατάλληλες κυρίως για τη μελέτη της διακύμανσης της ταχύτητας για διάφορες συχνότητες, πάχη πλάκας και αποστάσεις

μεταξύ των μετατροπών. Ωστόσο, στην παρούσα μελέτη αποδείχθηκε ξεκάθαρα ότι τέτοιου είδους συνοριακές συνθήκες δεν είναι γενικά κατάλληλες για τη μελέτη των κυματοδηγούμενων ρυθμών. Όσον αφορά στην καταλληλότητα των τριών μοντέλων που παρουσιάστηκαν, τα Μοντέλα-2 και 3 προφανώς περιγράφουν πιο ρεαλιστικά τις συνοριακές συνθήκες που εντοπίζονται σε *in-vivo* εφαρμογές, σε σχέση με το Μοντέλο-1. Το γεγονός ότι το Μοντέλο-3 είναι πιο πολύπλοκο, δε σημαίνει απαραίτητα ότι είναι και πιο ρεαλιστικό από το Μοντέλο-2. Είναι φανερό ότι και τα δύο μοντέλα έχουν αρκετούς περιορισμούς. Πιο συγκεκριμένα, στο Μοντέλο-2, η ενδοστική περιοχή μοντελοποιήθηκε ως ένας ημι-χώρος αποτελούμενος από μυελό των οστών και συνεπώς δε λαμβάνονται υπόψη τα κύματα που σε *in-vivo* εφαρμογές αναμένεται ότι ανακλώνται φθάνοντας στο αντίθετο άκρο του φλοιού. Από την άλλη μεριά, η προσομοίωση του μυελού των οστών ως ένα στρώμα πεπερασμένου πάχους (Μοντέλο-3) συνεπάγεται ότι οι διαδιδόμενοι ρυθμοί φθάνοντας στο ελεύθερο άκρο του στρώματος του μυελού ανακλώνται προς την αντίθετη κατεύθυνση, γεγονός που δεν είναι ρεαλιστικό. Επομένως, για την πλήρη αντιστοίχιση των αποτελεσμάτων από τα υπολογιστικά μοντέλα με αυτά που προκύπτουν από πειράματα σε πραγματικά οστά κρίνεται απαραίτητη η κατασκευή μοντέλων με ρεαλιστικές συνοριακές συνθήκες λαμβάνοντας ταυτόχρονα υπόψη την πολύπλοκη 3D γεωμετρία του οστού, την επίδραση της μικροδομής, την εξασθένηση υλικού κ.ο.κ. Κάτι τέτοιο θα αποτελούσε επίσης σημαντικό βοήθημα στην πληρέστερη ανάλυση και ερμηνεία των κυματικών φαινομένων.

4.6 Βιβλιογραφία

1. Bossy E, Talmant M, Defontaine M, Patat N, and Laugier P. Bidirectional axial transmission can improve accuracy and precision of ultrasonic velocity measurement in cortical bone: A validation on test materials. *IEEE Trans Ultrason Ferroelectr Freq Control* 2004a;51(1):71–79.
2. Protopappas VC, Baga D, Fotiadis DI, Likas A, Papachristos AA, Malizos KN. An ultrasound wearable system for the monitoring and acceleration of fracture healing in long bones. *IEEE Trans Biomed Eng* 2005;52(9):1597-1608.
3. Malizos KN, Papachristos AA, Protopappas VC, Fotiadis DI. Transosseous Application of Low-Intensity Ultrasound for the Enhancement and Monitoring of Fracture Healing Process in a Sheep Osteotomy Model. *Bone* 2006;38(4):530-539.
4. Abendschein W, Hayatt GW. Ultrasonics and physical properties of healing bone. *J Trauma* 1972;12:297-301.
5. Cunningham JL, Kenwright J, Kershaw CJ. Biomechanical measurement of fracture healing. *J Med Eng Techol* 1990;13(3):92-101.
6. Gerlanc MD, Haddad GW Hyatt JT, Langloh PS. Hillaire, Ultrasonic study of normal and fractured bone. *Clin Orth Rel Res* 1975;111:175-180.
7. Maylia E, Nokes LD. The use of ultrasonics in orthopaedics – a review, *Technol Health Care* 1999;7:1-28.
8. Dodd SP, Cummingham JL, Miles AW, Gheduzzi S, Humphrey VF. An in vitro study of ultrasound signal loss across simple fractures in cortical bone mimics and bovine cortical bone samples. *Bone* 2007;40(3):656-661.
9. Saulgozis J, Pontaga L, Van Der Perre G. The effect of fracture and fracture fixation on ultrasonic velocity and attenuation. *Physiol Meas* 1996;17(3):201-211.
10. Lowet G, Van Der Perre G, Ultrasound velocity measurements in long bones: measurement method and simulation of ultrasound wave propagation. *J Biomech* 1996;29(10):1255-62.

11. Njeh CF, Kearnton JR, Hans D, Boivin CM, The use of quantitative ultrasound to monitor fracture healing: a feasibility study using phantoms. *Med Eng Phys* 1999a;20(10):781-786.
12. Bossy E, Talmant M, Laugier P. Three-dimensional simulations of ultrasonic axial transmission velocity measurement on cortical bone models. *J Acoust Soc Am* 2004b;115(5):2314–2324.
13. Bossy E, Talmant M, Laugier P. Effect of cortical thickness on velocity measurements using ultrasonic axial transmission: a 2D simulation study, *J Acoust Soc Am* 2002;112(1):297-307.
14. Nicholson PHF, Moilanen P, Karkkainen T, Timonen J, Cheng S. Guided ultrasonic waves in long bones: modeling, experiment and in vivo application, *Physiol Meas* 2002; 23:755-768.
15. Tatarinov A, Sarvazyan N, Sarvazyan A. Use of multiple acoustic wave modes for assessment of long bones: Model study. *Ultrasonics* 2005;43:672-680.
16. Lee KI, Yoon SW. Feasibility of bone assessment with leaky Lamb waves in bone phantoms and a bovine tibia. *J Acoust Soc Am* 2004;115(6):3210-3217.
17. Protopappas VC, Fotiadis DI, Malizos KN. Guided ultrasound wave propagation in intact and healing long bones. *Ultras Med Biol* 2006;32(5):693-708.
18. Protopappas VC, Kourtis IC, Kourtis LC, Malizos KN, Massalas CV, Fotiadis DI. Three-dimensional finite element modeling of guided wave ultrasound wave propagation in intact and healing long bones. *J Acoust Soc Am* 2007;121(6):3907-3921.
19. Plona TJ, Pitts LE, Mayer WG, Ultrasonic bounded beam reflection and transmission effects at a liquid/solid-plate/liquid interface. *J Acoust Soc Am* 1976;59(6):1324-1328.
20. Lacroix D, Prendergast PJ, Li G, Marsh D, Biomechanical model to simulate tissue differentiation and bone regeneration: application to fracture healing. *Med Biol Eng Comp* 2002;40(1):14-21.

21. Schechter RS, Chaskelis HH, Mignogna RB, Delsanto PP. Real-time parallel computation and visualization of ultrasonic pulses in solids. *Science*. 1994;265:1188-1192.
22. Rose JL. *Ultrasonic waves in solid media* (Cambridge University Press, Cambridge), 1999.
23. Moilanen P, Nicholson PH, Kilappa V, Cheng S, Timonen J. Measuring guided waves in long bones: modeling and experiments in free and immersed plates. *Ultras Med Biol* 2006;32(5):709-719.
24. Yapura CL, Kinra VK. Guided waves in a fluid-solid bilayer. *Wave Motion* 1995;21:35-46.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΥΠΕΡΗΧΩΝ ΣΕ ΆΘΙΚΤΑ ΚΑΙ ΚΑΤΕΑΓΟΤΑ ΟΣΤΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΤΙΣ ΒΕΛΟΝΕΣ ΤΗΣ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗΣ ΟΣΤΕΟΣΥΝΘΕΣΗΣ - 2Δ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ

5.1 Εισαγωγή

Όπως αναφέρθηκε και στο Κεφάλαιο 1, το οστικό κάταγμα είναι ένα σκελετικό τραύμα που λαμβάνει χώρα όταν το οστό υπόκειται σε φορτίσεις που υπερβαίνουν τα όρια της αντοχής και ακαμψίας του. Η θεραπεία του κατάγματος στοχεύει στην αποκατάσταση της ακεραιότητας και σταθερότητας του οστού σε όσο το δυνατόν μικρότερο χρονικό διάστημα και περιλαμβάνει την ευθυγράμμιση και ακινητοποίηση των κατεαγόντων άκρων. Σε κλινικές εφαρμογές αυτό επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας εναλλακτικές συσκευές εξωτερικής ή εσωτερικής οστεοσύνθεσης, οι οποίες σταθεροποιούν το κάταγμα ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του κατάγματος και το επίπεδο τραυματισμού του οστίτη ιστού. Όπως περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 1, η πόρωση των καταγμάτων είναι μία σύνθετη αναγεννητική διαδικασία κατά την οποία οι ιδιότητες του πόρου μεταβάλλονται σταδιακά και κατά περιοχές έως ότου αποκατασταθεί η εμβιομηχανική λειτουργία, ακεραιότητα και γεωμετρία του οστού. Για τον πρόωρο εντοπισμό πιθανών επιπλοκών κατά την πόρωση καθώς επίσης και για τον ακριβή προσδιορισμό της

χρονικής στιγμής ολοκλήρωσης της διαδικασίας είναι αναγκαία η ανάπτυξη ποσοτικών τεχνικών παρακολούθησης της επούλωσης οστικών καταγμάτων.

Στις περισσότερες διαδερμικές εφαρμογές το πάχος των υπερκείμενων μαλακών ιστών είναι μια άγνωστη ποσότητα, γεγονός που οδηγεί στον ανακριβή προσδιορισμό του μονοπατιού διάδοσης (propagation path) του FAS από τον πομπό στο δέκτη. Η επίδραση των μαλακών ιστών αντιμετωπίστηκε με την εισαγωγή των τεχνικών σάρωσης στις οποίες ο δέκτης μετακινείται προοδευτικά από την αρχική του θέση αυξάνοντας έτσι την απόσταση μεταξύ των μετατροπέων καθώς επίσης και με τη χρήση διατάξεων πολλαπλών μετετροπέων [1-5]. Στις τεχνικές σάρωσης, η ταχύτητα του FAS προκύπτει από την κλίση της καμπύλης που περιγράφει την απόσταση μεταξύ των μετατροπέων ως συνάρτηση του χρόνου άφιξης του FAS. Κατά συνέπεια, οι τεχνικές σάρωσης εξαλείφουν την επίδραση των μαλακών ιστών παρέχοντας έτσι τον ακριβή προσδιορισμό της ταχύτητας διάδοσης υπερήχων στο οστό. Παρόλα αυτά η μέθοδος είναι ακριβής μόνο εφόσον το πάχος του στρώματος των μαλακών ιστών κατά μήκος της περιοχής σάρωσης παραμένει σταθερό. Εξίσου σημαντικό περιορισμό της μεθόδου αυτής αποτελεί επίσης το γεγονός ότι απαιτούνται πολλαπλές μετρήσεις οι οποίες επηρεάζουν σημαντικά την ακρίβεια και επαναληψιμότητα των υπολογισμών ταχύτητας. Σύμφωνα με την [6] είναι πολύ σημαντικό οι μετατροπείς να τοποθετούνται επί του δέρματος υπό συγκεκριμένη/σταθερή γωνία. Ακόμη και μικρές αποκλίσεις από τη σταθερή γωνία εισάγουν σφάλματα ακρίβειας περίπου στο 10%. Μολονότι στη διαδερμική εφαρμογή αντιμετωπίζονται προβλήματα που προκαλούνται από το στρώμα των μαλακών ιστών, η εφαρμοσιμότητα της μεθόδου περιορίζεται σε συγκεκριμένες περιπτώσεις καταγμάτων λόγω της ημι-επεμβατικής διαδικασίας εμφύτευσης των μετατροπέων [7].

Στο παρόν Κεφάλαιο προτείνουμε μια εναλλακτική μέθοδο μέτρησης της ταχύτητας υπερήχων υποθέτοντας ότι ο πομπός και ο δέκτης είναι τοποθετημένοι στο επάνω άκρο των βελονών (pins) μιας ήδη υπάρχουσας συσκευής εξωτερικής οστεοσύνθεσης (external fixation device) και διερευνούμε το ενδεχόμενο η προτεινόμενη μέθοδος να αποτελεί εξελιγμένη προσέγγιση για την παρακολούθηση της πώρωσης οστικών καταγμάτων. Οι στόχοι της συγκεκριμένης εργασίας είναι να εισαχθεί μια νέα μέθοδος η οποία έχει σημαντικά πλεονεκτήματα σε *in-vivo* εφαρμογές, έναντι των ήδη

υπαρχόντων μεθόδων και να αξιολογηθεί η αποτελεσματικότητά της μέσω 2Δ μοντελοποιήσεων διάδοσης υπερήχων. Η μέθοδος αρχικά αξιολογείται σε μοντέλα άθικτου οστού ενώ στη συνέχεια λαμβάνουμε υπόψη πιο ρεαλιστικές συνθήκες ενσωματώνοντας στα μοντέλα τον πόρο. Τέλος, διερευνούμε την επίδραση μιας πιθανής μη-κατακόρυφης εισαγωγής των βελονών της εξωτερικής οστεοσύνθεσης, εξετάζοντας πέντε επιπρόσθετες περιπτώσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικούς συνδυασμούς γωνιών απόκλισης από την κατακόρυφη τοποθέτηση. Οι περιπτώσεις διαδερμικής και διοστικής διάταξης των μετατροπέων μοντελοποιούνται εξίσου για λόγους σύγκρισης.

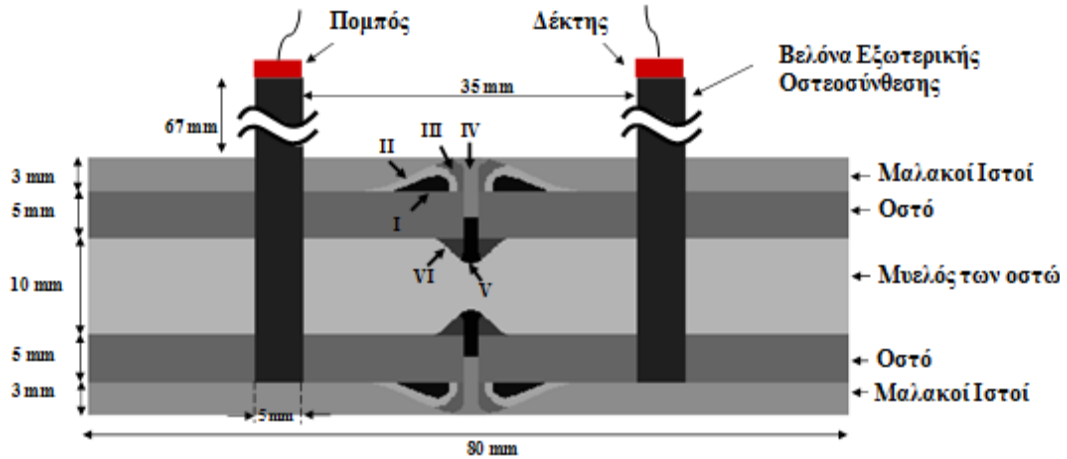
5.2 Υλικά και Μέθοδοι

5.2.1 Μοντέλο του Οστού και του Πόρου

Κατασκευάστηκε ένα απλοποιημένο 2Δ μοντέλο του τμήματος της διάφυσης μακρού οστού. Οι φλοιοί του οστού μοντελοποιήθηκαν ως δύο ισότροπες γραμμικά ελαστικές πλάκες με μηχανικές ιδιότητες όμοιες με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στο 2Δ μοντέλο που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 4. Το πάχος της πλάκας ήταν 5 mm που αντιστοιχεί σε ρεαλιστική τιμή για το πάχος του φλοιού ορισμένων ανθρώπινων οστών [3,8,9]. Οι διαμήκης και διατμητική ταχύτητα που προέκυψαν από τις τιμές των μηχανικών ιδιοτήτων του οστού ήταν 4063 m/s και 1846 m/s αντίστοιχα [3,9-11].

Η κοιλότητα του μυελού των οστών μοντελοποιήθηκε ως ένα στρώμα ρευστού με πάχος 10 mm το οποίο καταλάμβανε το εσωτερικό κενό μεταξύ των δύο φλοιών. Το ρευστό είχε μέτρο του Young, $E_{marrow} = 2 \text{ GPa}$, λόγο poisson, $\nu=0.49978$ και πυκνότητα $\rho = 1020 \text{ kg/m}^3$, οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν και στα μοντέλα οστών που περιγράφηκαν στο Κεφάλαιο 4. Οι μαλακοί ιστοί προσομοιώθηκαν ως δύο στρώματα αίματος με πάχος 3 mm και τοποθετήθηκαν στις ημι-άπειρες επιφάνειες εκατέρωθεν του μοντέλου του οστού.

Ο πώρος μοντελοποιήθηκε σύμφωνα με την διαδικασία που ακολουθήθηκε στην προηγούμενη μελέτη μας και περιγράφεται αναλυτικά στο Κεφάλαιο 4. Η γεωμετρία και οι διαστάσεις του μοντέλου του κατεαγότες οστού παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.1.



Σχήμα 5.1. Το 2Δ μοντέλο κατεαγότες οστού και η διάταξη των μετατροπέων οι οποίοι είναι τοποθετημένοι στο ανώτερο τμήμα των βελονών μιας ήδη υπάρχουσας εξωτερικής οστεοσύνθεσης. Οι κεφαλαίοι Λατινικοί αριθμοί αντιστοιχούν στις περιοχές οστεοποίησης που απαρτίζουν τον πώρο.

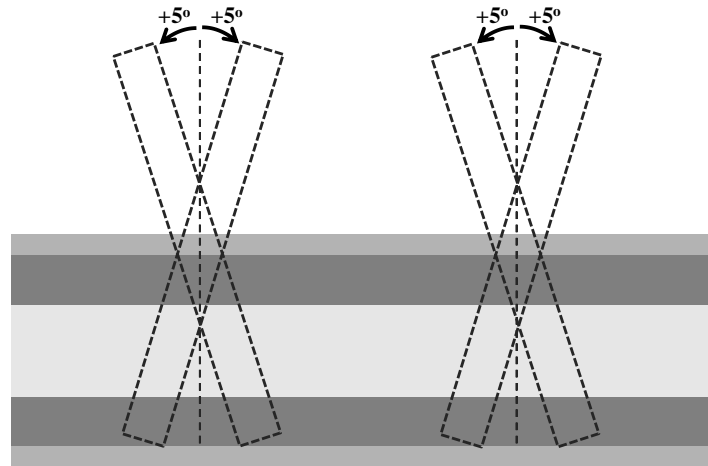
5.2.2 Μοντέλο των βελονών της εξωτερικής οστεοσύνθεσης

Στη συγκεκριμένη εργασία μοντελοποιήθηκαν επίσης και δύο βελόνες από ανοξείδωτο ατσάλι από τις οποίες αποτελείται μία συσκευή εξωτερικής οστεοσύνθεσης. Τα μοντέλα των βελονών είχαν πυκνότητα $\rho = 7910 \text{ kg/m}^3$ και διαμήκη ταχύτητα ίση με 5740 m/s . Το ύψος και το πλάτος της κάθε βελόνας ήταν 90 mm και 5 mm αντίστοιχα. Οι βελόνες ενσωματώθηκαν στα πρώτα τρία στρώματα του μοντέλου του οστού και το κέντρο της μίας απείχε από το κέντρο της άλλης κατά 90 mm. Στην περίπτωση των μοντέλων κατεαγότες οστού, οι βελόνες τοποθετήθηκαν σε ισαπέχουσες αποστάσεις από τον πώρο. Το εξωτερικό πλαίσιο της συσκευής οστεοσύνθεσης αγνοήθηκε σκοπίμως εφόσον στην παρούσα μελέτη υποθέτουμε ότι τα υπερηχητικά κύματα διαδίδονται μόνο μέσω των βελονών.

Για το μοντέλο του άθικτου οστού, κατασκευάστηκαν πέντε επιπρόσθετα μοντέλα που αντιστοιχούσαν σε διαφορετικούς συνδυασμούς μεταξύ των γωνιών υπό τις οποίες έχουν εισαχθεί οι βελόνες στο οστό. Οι περιπτώσεις που εξετάζονται παρουσιάζονται

στο Σχήμα 5.2 και περιγράφουν ρεαλιστικά σενάρια τοποθέτησης των βελονών από τον ορθοπαιδικό χειρουργό υπό μικρές γωνίες κλίσης αντί κατακόρυφα.

Όλες οι εξεταζόμενες περιπτώσεις γωνιών κλίσης των βελονών παρουσιάζονται στον



Σχήμα 5.2. Οι έξι συνδυασμοί γωνιών απόκλισης $\pm 5^\circ$ των βελονών εξωτερικής οστεοσύνθεσης.

Πίνακα 5.1. Στα δύο πρώτα μοντέλα (Μοντέλο-2α και 2β) η αριστερή βελόνα θεωρήθηκε ότι αποκλίνει κατά -5° και $+5^\circ$ αντίστοιχα, ενώ η δεξιά είχε τοποθετηθεί στο οστό κατακόρυφα. Στο επόμενο μοντέλο (Μοντέλο-3) τόσο η δεξιά όσο και η αριστερή βελόνα απέκλιναν κατά $+5^\circ$ από την κατακόρυφο. Στα τελευταία δύο μοντέλα οι δύο βελόνες απέκλιναν κατά αντίθετες γωνίες, δηλ στο Μοντέλο-4α η δεξιά βελόνα παρέκκλινε κατά $+5^\circ$ και η αριστερή κατά -5° και αντίθετα στο Μοντέλο-4β. Οι συμμετρικές περιπτώσεις δεν περιλαμβάνονται στη συγκεκριμένη εργασία.

Όσον αφορά στο μοντέλο κατεαγότος οστού, μελετήθηκαν μόνο δύο από τις προαναφερθείσες περιπτώσεις: το Μοντέλο-2α και το Μοντέλο-4α.

5.2.3 Διάταξη Πομπού-Δέκτη

Οι μετρήσεις ταχύτητας υπερήχων ελήφθησαν αρχικά από τα μοντέλα άθικτου και κατεαγότος οστού χωρίς τις βελόνες της εξωτερικής οστεοσύνθεσης. Μοντελοποιήσαμε δύο τύπους διάταξης πομπού-δέκτη: (α) τη διαδερμική στην οποία οι μετατροπείς ήταν τοποθετημένοι επάνω στην επιφάνεια του ανώτερου στρώματος αίματος του μοντέλου και (β) τη διοστική στην οποία οι μετατροπείς έχουν τοποθετηθεί απευθείας επί της πλάκας που προσομοιώνει το οστό. Η τελευταία περίπτωση προσομοιώνει την

εμφύτευση των μετατροπέων απευθείας επάνω στην επιφάνεια του οστού. Η επιφάνεια επαφής του κάθε μετατροπέα είναι 5 mm και η απόσταση από κέντρο σε κέντρο είναι 40 mm που είναι σύμφωνη με τις τιμές που χρησιμοποιούνται σε υπερηχητικές εφαρμογές στο οστό. Όσον αφορά στη διαδερμική εφαρμογή πομπού-δέκτη στο άθικτο οστό, πραγματοποιήθηκαν μετρήσεις απομακρύνοντας βαθμιαία το δέκτη από τον πομπό με βήμα 1 mm και αυξάνοντας τελικά τη μεταξύ τους απόσταση από 40 mm σε 50 mm.

Πίνακας 5.1. Τα μοντέλα που αντιστοιχούν σε όλους τους πιθανούς συνδυασμούς γωνιών απόκλισης των βελονών.

Μοντέλο	Γωνία απόκλισης βελόνας πομπού	Γωνία απόκλισης βελόνας δέκτη
Μοντέλο-1	0°	0°
Μοντέλο-2α	-5°	0°
Μοντέλο-2β	5°	0°
Μοντέλο-3	5°	5°
Μοντέλο-4α	5°	-5°
Μοντέλο-4β	-5°	5°

Όταν οι βελόνες της εξωτερικής οστεοσύνθεσης ενσωματώθηκαν στο μοντέλο του οστού, οι μετατροπείς προσκολλήθηκαν επί των άκρης των τμημάτων των βελονών που βρίσκονται εκτός του δέρματος. Πιο συγκεκριμένα ο πομπός τοποθετήθηκε στο άκρο της πρώτης βελόνας και ο δέκτης στο άκρο της δεύτερης.

Σε όλες τις εξεταζόμενες περιπτώσεις, η διέγερση ήταν ένα ευρυζωνικό κύμα αποτελούμενο από 3 κύκλους ημιτόνου διαμορφωμένο από παλμό Gauss. Η κεντρική συχνότητα που χρησιμοποιήθηκε, ήταν 1MHz (διάρκεια διέγερσης 3 μs). Οι μετατροπείς παρήγαγαν και λάμβαναν μόνο διαμήκη κύματα.

5.2.4 Συνοριακές Συνθήκες

Θεωρήσαμε ότι το μήκος του μοντέλου (δηλ. κατά τη διεύθυνση διάδοσης) εκτείνεται στο άπειρο. Για το λόγο αυτό στα άκρα του μοντέλου εφαρμόστηκαν συνοριακές συνθήκες κατά τις οποίες τα οδεύοντα κύματα που προσπίπτουν στα άκρα απορροφώνται πλήρως και δεν ανακλώνται.

Το πρόβλημα κυματικής διάδοσης επιλύθηκε αριθμητικά με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών χρησιμοποιώντας το εμπορικό προϊόν Wave2000Pro (CyberLogic, Inc., NY, USA). Το μέγεθος του κάθε στοιχείου ήταν 0.1 mm. Η συχνότητα δειγματοληψίας ήταν 34.3 MHz και η διάρκεια της προσομοίωσης ήταν 100 μ s.

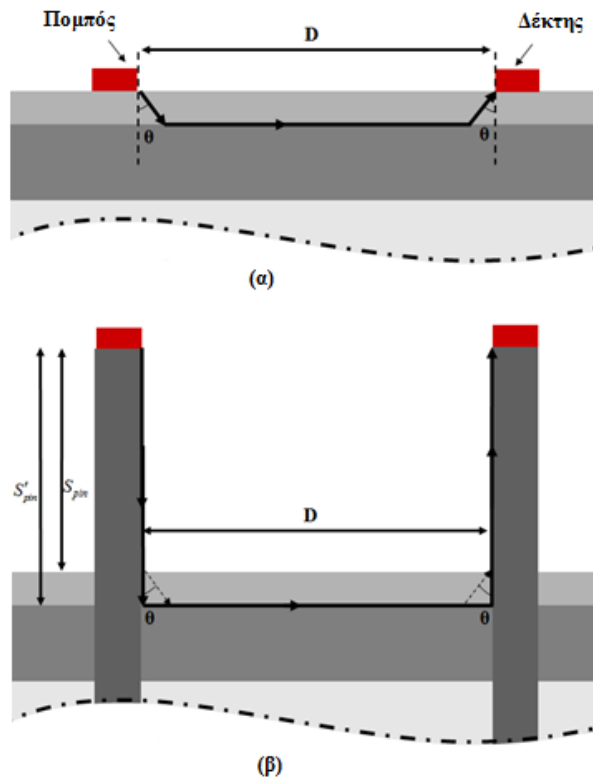
5.2.5 Καθορισμός του μονοπατιού διάδοσης υπερήχων και της ταχύτητας

Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 2 η ταχύτητα των υπερήχων στην αξονική διάδοση υπολογίζεται διαιρώντας το μονοπάτι διάδοσης προς το μετρούμενο χρόνο άφιξης του κύματος FAS στο δέκτη. Το μονοπάτι διάδοσης του κύματος FAS αντιστοιχεί στο μονοπάτι που οδηγεί στον ελάχιστο χρόνο διάδοσης και εξαρτάται από τη διάταξη των μετατροπέων. Στην περίπτωση που ο πομπός και ο δέκτης είναι τοποθετημένοι επί της επιφάνειας του οστού (δηλ. σε διοστική εφαρμογή) το μονοπάτι διάδοσης αντιστοιχεί στην αξονική απόσταση μεταξύ των μετατροπέων.

Το μονοπάτι διάδοσης στη διαδερμική εφαρμογή απεικονίζεται στο Σχήμα 5.3(α) [4]. Το κύμα FAS εισέρχεται στο στρώμα των μαλακών ιστών (δηλ. στο στρώμα αίματος) υπό συγκεκριμένη γωνία θ , διαδίδεται κατά μήκος της υποεπιφάνειας του φλοιού του οστού κατά την αξονική διεύθυνση και τέλος επαναδιαθλάται στο στρώμα των μαλακών ιστών για να καταλήξει στο δέκτη υπό γωνία θ . Ο χρόνος διάδοσης του FAS μπορεί να υπολογιστεί θεωρητικά μέσω της σχέσης:

$$t_{FAS} = 2 \cdot t_{soft} + t_{bone}, \quad (5.1)$$

όπου t_{soft} και t_{bone} είναι οι χρόνοι διάδοσης κατά μήκος των μαλακών ιστών και κατά μήκος του οστού αντίστοιχα. Εάν υποθέσουμε ότι οι ταχύτητες των επίπεδων διαμηκών κυμάτων των μαλακών ιστών και του οστού δηλώνονται ως c_{soft} και c_{bone} αντίστοιχα, τότε η Εξ. (5.1) γράφεται ως ακολούθως:



Σχήμα 5.3. Το μονοπάτι διάδοσης (α) στην διαδερμική εφαρμογή μετατροπέων και (β) στην περίπτωση κατακόρυφης τοποθέτησης των βελονών εξωτερικής οστεοσύνθεσης (συμπαγείς γραμμές). Οι διακεκομμένες γραμμές αναπαριστούν την αρχική υπόθεση μονοπατιού διάδοσης σύμφωνα με την οποία το FAS διαδίδεται από τον πομπό στο στρώμα μαλακών ιστών, στη συνέχεια εισέρχεται στο οστό και ακολουθεί αντίστροφη πορεία για να φτάσει στο δέκτη.

$$t_{FAS} = 2 \cdot \frac{S_{soft}}{\cos \theta} \cdot \frac{1}{c_{soft}} + \frac{D - 2 \cdot S_{soft} \cdot \tan \theta}{c_{bone}}, \quad (5.2)$$

όπου D είναι η απόσταση μεταξύ του δεξιού άκρου (δηλ. το τέλος) της επιφάνειας του πομπού και του αριστερού άκρου (δηλ. της αρχής) της επιφάνειας του δέκτη, η οποία ισούται με 35 mm. S_{soft} δηλώνει το πάχος του στρώματος των μαλακών ιστών το οποίο ισούται με 3 mm και θ είναι η άγνωστη γωνία μεταξύ της κατακόρυφης και του μονοπατιού του FAS. Παραγωγίζοντας την Εξ. (5.2) ως προς θ λαμβάνουμε τον ελάχιστο χρόνο άφιξης t_{FAS} όταν ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\sin \theta = \frac{c_{soft}}{c_{bone}}. \quad (5.3)$$

Για τις δεδομένες τιμές των c_{soft} και c_{bone} , η γωνία θ προκύπτει ίση με 22.9° . Αντικαθιστώντας την τιμή που προκύπτει για τη γωνία στην Εξ. (5.2), ο χρόνος t_{FAS} λαμβάνει τιμή ίση με $12.11 \mu s$.

Όσον αφορά στα μοντέλα όπου οι βελόνες της εξωτερικής οστεοσύνθεσης είναι τοποθετημένες κατακόρυφα, αρχικά υποθέτουμε ότι το μονοπάτι διάδοσης του FAS προσδιορίζεται σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση και διερευνούμε εάν όντως η υπόθεση αυτή οδηγεί στο μικρότερο μονοπάτι διάδοσης. Σύμφωνα με υπόθεση αυτή το FAS αρχικά διαδίδεται κατά μήκος του άξονα της βελόνας, στη συνέχεια εισέρχεται στο στρώμα των μαλακών ιστών υπο τη γωνία θ , όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.3(β) με τη διακεκομμένη γραμμή, εξέρχεται από το οστό και εισέρχεται στην δεύτερη βελόνα με την ίδια γωνία για να φτάσει στο δέκτη. Ο χρόνος άφιξης στο δέκτη, σύμφωνα με την παραπάνω υπόθεση υπολογίζεται μέσω της Εξ. (5.1) ως ακολούθως:

$$t_{FAS} = 2 \cdot t_{pins} + 2 \cdot t_{soft} + t_{bone}, \quad (5.4)$$

όπου t_{pins} δηλώνει το χρόνο διάδοσης κατά μήκος των βελονών. Η Εξ.(5.2) μετατρέπεται σε:

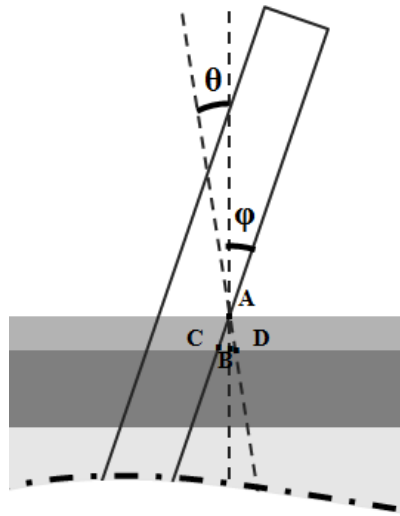
$$t_{FAS} = 2 \cdot \frac{S_{pin}}{c_{pin}} + 2 \cdot \frac{S_{soft}}{\cos \theta} \cdot \frac{1}{c_{soft}} + \frac{D - 2 \cdot S_{soft} \cdot \tan \theta}{c_{bone}}, \quad (5.5)$$

όπου c_{pins} είναι η διαμήκης ταχύτητα των βελονών και S_{pins} το ύψος του τμήματος των βελονών που βρίσκεται εκτός του δέρματος και ισούται με 67 mm . Για τις δεδομένες τιμές των θ και c_{pins} ο χρόνος t_{FAS} προκύπτει ίσος με $3.55 \mu s$.

Παρόλα αυτά βρέθηκε ότι το αποτέλεσμα αυτό δεν αντιστοιχεί στο μικρότερο μονοπάτι διάδοσης. Στην πραγματικότητα το FAS διαδίδεται κατά μήκος της βελόνας, στη συνέχεια διαδίδεται κατά μήκος της υπο-επιφάνειας του οστού έχοντας ήδη διαχυθεί στο στρώμα των μαλακών ιστών και τέλος εισέρχεται στη δεύτερη βελόνα για να φθάσει στο δέκτη. Το πραγματικό μονοπάτι διάδοσης απεικονίζεται στο Σχήμα 5.3(β) με την συμπαγή γραμμή. Σύμφωνα με την υπόθεση αυτή, ο χρόνος διέλευσης του κύματος FAS δίδεται πλέον από τη σχέση:

$$t_{FAS} = 2 \cdot t_{pins} + t_{bone}, \quad (5.6)$$

η οποία μπορεί να γραφεί και ως:



Σχήμα 5.4. Οι υποθέσεις για το μονοπάτι που ακολουθεί το κύμα FAS κατά τη διάδοση του από τις βελόνες στο οστό για την περίπτωσης γωνίας απόκλισης $+5^\circ$.

$$t_{FAS} = 2 \cdot \frac{S'_{pin}}{c_{pin}} + \frac{D}{c_{bone}}, \quad (5.7)$$

όπου $S'_{pin} = 70$ mm το οποίο προκύπτει αθροίζοντας το μήκος του εξω-δερμικού τμήματος της βελόνας (δηλ. 67 mm) και το μήκος του τμήματος της βελόνας που έχει εισαχθεί στο στρώμα των μαλακών ιστών (δηλ. 3 mm). Αντικαθιστώντας τις γνωστές τιμές των μεγεθών c_{pin} , c_{bone} , D και S'_{pin} στην Εξ. (5.7) προκύπτει ότι $t_{FAS} = 3.3$ μs. Είναι προφανές ότι η τιμή αυτή είναι μικρότερη από την αντίστοιχη τιμή που προέκυψε από την Εξ. (5.5).

Για να διερευνήσουμε το ενδεχόμενο η υπόθεση αυτή να ισχύει και στην περίπτωση κατά την οποία οι βελόνες είναι τοποθετημένες υπό γωνία 5° , απλώς υπολογίζουμε το χρόνο διέλευσης του FAS από τη διεπιφάνεια μεταξύ της βελόνας και των μαλακών ιστών έως τη διεπιφάνεια μεταξύ του οστού και των μαλακών ιστών για δύο πιθανές υποθέσεις για το μονοπάτι διάδοσης οι οποίες παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.4. Η πρώτη αντιστοιχεί στο μονοπάτι από το σημείο A (δηλ. το σημείο στην διεπιφάνεια μεταξύ της βελόνας και των μαλακών ιστών) έως το σημείο D το οποίο αντιστοιχεί στο σημείο που βρίσκεται στη διεπιφάνεια μεταξύ της βελόνας και των μαλακών ιστών. Το μονοπάτι αυτό προκύπτει εφόσον υποθέσουμε ότι το κύμα διαδίδεται κατά μήκος της βελόνας

και εισέρχεται στο στρώμα των μαλακών ιστών υπό την κριτική γωνία θ . Η δεύτερη υπόθεση αντιστοιχεί στο απευθείας μονοπάτι από το σημείο A στο σημείο C, το οποίο είναι το σημείο στη διεπιφάνεια μεταξύ της βελόνας και του φλοιού του οστού και στη συνέχεια στο σημείο D (βλ. Σχήμα 5.4). Το μονοπάτι αυτό ακολουθείται όταν το FAS εισέρχεται στο οστό χωρίς να έχει προηγουμένως διαχυθεί στους μαλακούς ιστούς.

Το μονοπάτι A-D αντιστοιχεί σε χρόνο άφιξης t^{AD} που δίνεται από:

$$t^{AD} = \frac{S_{soft}}{c_{soft} \cdot \cos \theta}, \quad (5.8)$$

ενώ το μονοπάτι διάδοσης A-C-B-D αντιστοιχεί σε χρόνο άφιξης t^{ACBD} που δίνεται από:

$$t^{ACBD} = \frac{S_{soft}}{c_{pin}} \cdot \frac{1}{\cos \phi} + \frac{S_{soft} \cdot \tan \phi}{c_{bone}} + S_{BD}, \quad (5.9)$$

όπου ϕ είναι η γωνία απόκλισης ίση με 5° και S_{BD} η απόσταση από το σημείο B στο D η οποία προκύπτει υποθέτοντας την κριτική γωνία θ . Για τις δεδομένες τιμές, από τις Εξ. (5.8) και (5.9) προκύπτει ότι $t^{AD} = 1.9 \mu s$ και $t^{ACBD} = 0.66 \mu s$, καταδεικνύοντας ότι το FAS διαδίδεται ακολουθώντας το μονοπάτι A-C-B-D. Είναι προφανές ότι στην περίπτωση που η βελόνα έχει κλίση $+5^\circ$ το κύμα FAS διαδίδεται από τις βελόνες στο οστό και αντίθετα, σύμφωνα με την προηγούμενη υπόθεση.

Τα αποτελέσματα της παραπάνω συγκριτικής ανάλυσης οδηγούν στο συμπέρασμα ότι για όλες τις εξεταζόμενες περιπτώσεις, το FAS διαδίδεται κατά μήκος των βελονών και της επιφάνειας του οστού χωρίς να διαχέεται στους μαλακούς ιστούς, ανεξαρτήτων τη γωνία κλίσης της βελόνας. Στον Πίνακα 5.2 παρουσιάζονται τα μικρότερα μονοπάτια που προέκυψαν βάσει της θεωρητικής ανάλυσης.

Ο εντοπισμός του χρόνου άφιξης του FAS στις κυματομορφές των ληφθέντων σημάτων πραγματοποιήθηκε με χρήση του κατωφλίου 10% που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 2.

5.3 Αποτελέσματα

Για την διαδερμική εφαρμογή προέκυψαν δύο διαφορετικές ταχύτητες διάδοσης. Αρχικά η ταχύτητα υπολογίστηκε ως ο λόγος του μονοπατιού διάδοσης προς το

Πίνακας 5.2. Θεωρητικό μονοπάτι διάδοσης του κύματος FAS στα εξεταζόμενα μοντέλα οστού.

Μοντέλο	Θεωρητικό μήκος Μονοπατιού Διάδοσης του FAS (mm)
Μοντέλο-1	175
Μοντέλο-2α	175.5
Μοντέλο-2β	176.6
Μοντέλο-3	177.2
Μοντέλο-4α	178.2
Μοντέλο-4β	176.1

μετρούμενο χρόνο άφιξης του FAS. Η ταχύτητα αυτή προέκυψε ίση με 3001 m/s ενώ η θεωρητικά υπολογιζόμενη ταχύτητα ίση με 3137 m/s. Παρόλα αυτά οι τιμές αυτές είναι σημαντικά χαμηλότερες από την αντίστοιχη τιμή του οστού και αποτελούν φαινόμενες τιμές αφού το κύμα FAS διαδίδεται τόσο στο οστό όσο και στους μαλακούς ιστούς. Για την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της μελέτης μας, πραγματοποιήσαμε μετρήσεις μεταβάλλοντας βαθμιαία την απόσταση πομπού και δέκτη. Η ταχύτητα που προσδιορίζεται εφαρμόζοντας την ανάλυση γραμμικής παλινδρόμησης (linear regression analysis) στις μετρήσεις και υπολογίζοντας την κλίση της γραμμής της γραμμικής παλινδρόμησης η οποία συσχετίζει την απόσταση των μετατροπέων με το χρόνο άφιξης του FAS, αντιστοιχεί στην ταχύτητα του οστού εφόσον κάθε τύπου καθυστέρηση στο εσωτερικό των μαλακών ιστών εξισορροπείται. Η ταχύτητα για το άθικτο οστό βρέθηκε ίση με 3915 m/s (με συντελεστή προσδιορισμού $R^2 = 0.98$) η οποία είναι κοντά στην ονομαστική διαμήκη ταχύτητα του οστού (4063 m/s).

Στην περίπτωση του άθικτου οστού δεν είναι εφικτή η τοποθέτηση του πομπού σε πολλαπλές περιοχές καταγραφής και συνεπώς για την διάταξη αυτή μπορεί να υπολογιστεί μονό η φαινόμενη ταχύτητα. Στον Πίνακα 5.3 παρουσιάζονται οι τιμές της ταχύτητας για όλους τους συνδυασμούς γωνιών κλίσης οι οποίες προέκυψαν

διαιρώντας το μονοπάτι προς το χρόνο άφιξης του FAS που εντοπίστηκε στα σήματα που ελήφθησαν από τα μοντέλα. Στον ίδιο πίνακα παρουσιάζονται για λόγους σύγκρισης και οι θεωρητικές τιμές των ταχυτήτων οι οποίες έχουν υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τους χρόνους άφιξης από τη θεωρητική ανάλυση. Για τον υπολογισμό των ταχυτήτων σε κάθε περίπτωση χρησιμοποιήθηκαν οι θεωρητικές τιμές για το μονοπάτι διάδοσης που παρουσιάστηκαν στον Πίνακα 5.2.

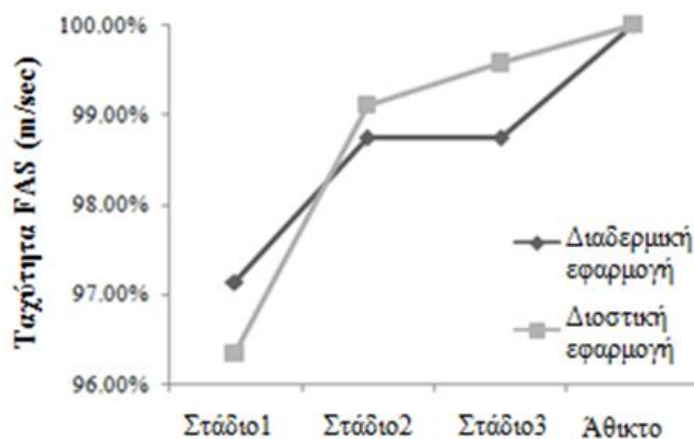
Πίνακας 5.3. Θεωρητικές και μετρούμενες τιμές ταχυτήτων του FAS στα εξεταζόμενα μοντέλα οστού.

Μοντέλο	Θεωρητικές τιμές ταχύτητας (m/sec)	Μετρούμενες τιμές ταχύτητας (m/sec)
Μοντέλο-1	5262	5302
Μοντέλο-2α	5205	5310
Μοντέλο-2β	5259	5300
Μοντέλο-3	5221	5307
Μοντέλο-4α	5172	5298
Μοντέλο-4β	5212	5317

Παρατηρείται ότι όταν τοποθετούνται οι βελόνες της εξωτερικής οστεοσύνθεσης στο μοντέλο του οστού προκύπτουν αυξημένες τιμές ταχύτητας σε σχέση με αυτές που λαμβάνονται από διαδερμικές και διοστικές εφαρμογές. Επιπλέον, όπως φαίνεται στον Πίνακα 5.3 οι τιμές ταχυτήτων που προέκυψαν από μετρήσεις σε όλα τα μοντέλα είναι χαμηλότερες από τις αντίστοιχες θεωρητικές τιμές. Ωστόσο, στην περίπτωση κατακόρυφης τοποθέτησης των βελονών (δηλ. στο Μοντέλο-1α), η διαφορά μεταξύ των δύο τιμών ταχύτητας είναι πολύ μικρή (περίπου 80%). Η πιο σημαντική διαφορά μεταξύ μετρούμενης και θεωρητικής τιμής είναι της τάξης του 2.5% (χαμηλότερη η μετρούμενη κατά 126 m/s) και παρατηρείται στο Μοντέλο-4α. Όσον αφορά στα Μοντέλα-2α και 4β, η ταχύτητα που μετρήθηκε είναι χαμηλότερη από τη θεωρητική κατά 105 m/s (διαφορά 2%), στο Μοντέλο-3 κατά 86% (διαφορά 1.7%) και στο Μοντέλο-2β κατά 41 m/s (διαφορά 0.8%)

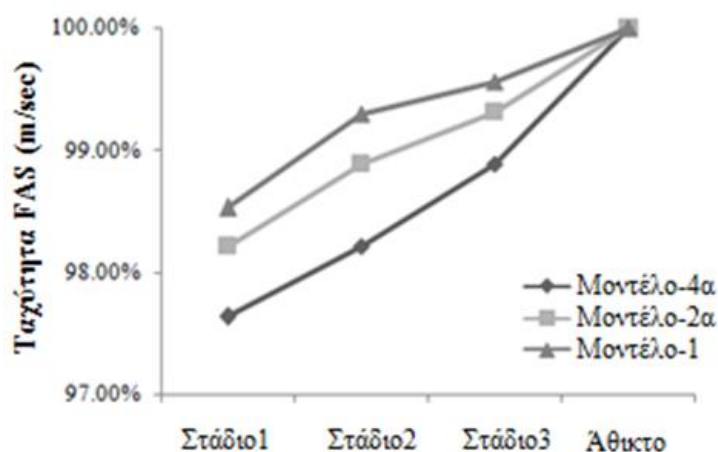
Παρατηρείται επίσης ότι η γωνία κλίσης δεν επηρεάζει σημαντικά τις θεωρητικές τιμές ταχυτήτων (μέγιστη διαφορά 0.28% στο Μοντέλο-4β). Παρόμοια συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν και για τις ταχύτητες που μετρήθηκαν στα Μοντέλα-2β, 3 και 4β. Παρόλα αυτά η επίδραση της γωνίας κλίσης στις μετρούμενες τιμές ταχυτήτων ήταν ελαφρώς πιο σημαντική στα Μοντέλα-2α, 4α. Για τις περιπτώσεις αυτές οι μετρούμενες ταχύτητες βρέθηκαν χαμηλότερες από τη μέτρηση βασικής γραμμής στο Μοντέλο-1 κατά 1.1% και 1.8% αντίστοιχα.

Όσον αφορά στα μοντέλα κατεγότος οστού, οι ταχύτητες του FAS που μετρήθηκαν σε



Σχήμα 5.5. Η εξέλιξη της ταχύτητας στα διάφορα στάδια της διαδικασίας πόρωσης για τις περιπτώσεις διαδερμικής και διοστικής εφαρμογής μετατροπέων.

κάθε στάδιο της διαδικασίας πόρωσης για όλες τις εξεταζόμενες περιπτώσεις παρουσιάζονται στα Σχήματα 5.5 και 5.6. Το μονοπάτι διάδοσης θεωρήθηκε το ίδιο με αυτό που είχε χρησιμοποιηθεί και στα αντίστοιχα άθικτα μοντέλα, παραμένοντας ανεπηρέαστο από τη γεωμετρία και τις μηχανικές ιδιότητες της περιοχής του πόρου. Αρχικά ελήφθησαν μετρήσεις στο κατεαγόν οστό χωρίς τις βελόνες τοποθετώντας τους μετατροπείς είτε διαδερμικά ή διοστικά. Και στις δύο εφαρμογές η ταχύτητα του FAS στο Στάδιο1 είναι χαμηλότερη από αυτή στο άθικτο οστό και σταδιακά αυξάνεται έως το Στάδιο3 (Σχήμα 5.5). Στο Στάδιο3 η ταχύτητα ήταν πολύ κοντά σε αυτή που μετρήθηκε στο άθικτο οστό. Παρόμοια συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν για την ταχύτητα και για τα μοντέλα στα οποία έχουν τοποθετηθεί οι βελόνες (δηλ., Μοντέλα-1, 2α και 4α) (Σχήμα 5.6). Ωστόσο, όταν οι βελόνες είναι τοποθετημένες υπό γωνία



Σχήμα 5.6. Η εξέλιξη της ταχύτητας στα διάφορα στάδια της διαδικασίας πώρωσης για τα μοντέλα που περιλαμβάνουν τις βελόνες εξωτερικής οστεοσύνθεσης.

(Μοντέλα-2α και 4α), οι τιμές ταχύτητας κατά τη διαδικασία πώρωσης βρέθηκαν ελαφρώς χαμηλότερες από τις αντίστοιχες τιμές στο Μοντέλο-1. Γενικά, παρατηρούνται μικρές διαφορές στις τιμές ταχύτητας του FAS ανάμεσα στα Μοντέλα-2α και 4α. Το γεγονός αυτό αποδεικνύει ότι μια πιθανή τοποθέτηση των βελονών υπό γωνία δεν παίζει ρόλο στις μετρήσεις ταχύτητας.

5.4 Συζήτηση

Στο παρόν Κεφάλαιο παρουσιάσαμε μια μελέτη σκοπιμότητας (feasibility study) στην οποία οι μετατροπείς τοποθετήθηκαν στα άκρα του εξωτερικού τμήματος μιας ήδη υπάρχουσας συσκευής εξωτερικής οστεοσύνθεσης. Οι κύριοι στόχοι της εργασίας ήταν να (1) προτείνουμε μια νέα τεχνική μέτρησης με την οποία αντιμετωπίζονται πρακτικά προβλήματα που παρουσιάζονται σε in-vivo εφαρμογές των δύο ήδη υπάρχουσων μεθόδων και (2) να διερευνήσουμε την αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης τεχνικής πραγματοποιώντας μετρήσεις ταχύτητας σε 2Δ υπολογιστικά μοντέλα άθικτων και κατεαγόντων οστών.

Το βασικότερο θέμα που παρουσιάζεται τοποθετώντας τους μετατροπείς στα άκρα των βελονών της συσκευής εξωτερικής οστεοσύνθεσης είναι το γεγονός ότι προκύπτει μια φαινόμενη τιμή ταχύτητας που αντιστοιχεί στη μέση ταχύτητα του FAS σε ολόκληρο το μονοπάτι διάδοσης και όχι στο οστό και τον πόρο. Ωστόσο φαινόμενες τιμές ταχυτήτων προκύπτουν εξίσου και στις διαδερμικές εφαρμογές πομπού και δέκτη. Παρόλα αυτά, η

διαφοροποίηση από τις πραγματικές τιμές είναι πιο εμφανής στην προτεινόμενη μέθοδο, επειδή το μήκος των βελονών είναι γενικά πολύ μεγαλύτερο από το μονοπάτι διάδοσης κατά μήκος του οστού. Το σημαντικότερο πλεονέκτημα της προτεινόμενης μεθόδου έναντι των διαδερμικών εφαρμογών αποτελεί το γεγονός ότι οι μετρήσεις δεν επηρεάζονται από τους υπερκείμενους μαλακούς ιστούς. Ακόμη και η τεχνική σάρωσης που χρησιμοποιείται στις διαδερμικές διατάξεις για την αντιμετώπιση της επίδρασης των μαλακών ιστών, δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε οστικά κατάγματα επειδή αντισταθμίζεται η χρονική καθυστέρηση στον πόρο. Επιπλέον, η επίδραση των μαλακών ιστών στις διαδερμικές μετρήσεις ταχύτητας αποτελεί πρόβλημα καίριας σημασίας σε περιπτώσεις οστών όπου το πάχος των ιστών είναι μεγάλο (για παράδειγμα στο μηρό). Στις περιπτώσεις αυτές, είναι αναγκαία η μέτρηση του πάχους του στρώματος μαλακών ιστών κάτω από κάθε μετατροπέα. Ωστόσο, η πίεση που εφαρμόζεται στο δέρμα λόγω των μετατροπέων, παραμορφώνει τους μαλακούς ιστούς, και το πάχος τους μεταβάλλεται ανάλογα με το επίπεδο πίεσης. Αντιθέτως, η προτεινόμενη μέθοδος δεν απαιτεί τη μέτρηση του πάχους των μαλακών ιστών αφού από τα αποτελέσματα της μελέτης προέκυψε ότι για μικρές γωνίες κλίσης, το κύμα FAS διαδίδεται στο οστό χωρίς να διαχέεται στους μαλακούς ιστούς. Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι το συγκεκριμένο μονοπάτι διάδοσης ακολουθείται όταν η γωνία κλίσης των βελονών είναι μικρότερη από 25° , δηλ. πολύ μεγαλύτερη από αντίστοιχες γωνίες που εμφανίζονται σε πρακτικές εφαρμογές. Συνεπώς, το μονοπάτι διάδοσης μπορεί να προσδιοριστεί με ακρίβεια εάν είναι γνωστό το μήκος της βελόνας και το βάθος με το οποίο έχουν τοποθετηθεί στο οστό. Το βάθος αυτό είναι εύκολο να μετρηθεί in-vivo μέσω μετεγχειρητικών ακτινογραφιών.

Παρόλα αυτά, η πραγματική διάδοση πιθανώς επηρεάζεται και από άλλες παραμέτρους όπως είναι η 3Δ γεωμετρία, ανισοτροπία και το πορώδες του οστού, οι οποίες αγνοήθηκαν στο 2Δ μοντέλο του οστού που παρουσιάστηκε στην παρούσα εργασία. Άλλωστε, ο κύριος στόχος της μελέτης μας ήταν να συγκρίνουμε την προτεινόμενη μέθοδο με τις ήδη υπάρχουσες παρά να κατασκευάσουμε ένα ακριβές μοντέλο μακρού οστού. Επιπρόσθετα, όπως αποδείχθηκε σε προηγούμενη 3Δ μελέτη στην οποία οι μετατροπείς τοποθετήθηκαν επί της επιφάνειας του οστού [11], το κύμα FAS δεν επηρεάζεται από την ανομοιόμορφη γεωμετρία του φλοιού και συνεπώς δεν αναμένονται σημαντικές διαφορές στις μετρήσεις ταχύτητας μεταξύ 2Δ και 3Δ

μοντέλων. Στην ίδια μελέτη βρέθηκε επίσης ότι και η ανισοτροπία δεν επηρεάζει την ταχύτητα του FAS, με την προϋπόθεση ότι η ελαστική σταθερά κατά την αξονική διεύθυνση είναι ίδια μεταξύ ισοτροπίας και ανισοτροπίας [8,11]. Η προσέγγιση για τον πόρο ήταν αρκετά ρεαλιστική αφού μοντελοποιήθηκε ως ένα ανομοιογενές υλικό αποτελούμενο περιοχές οστεοποίησης με βαθμιαία μεταβαλλόμενες ιδιότητες κατά τα τρία στάδια της πάρωσης [11]. Τα στάδια που μοντελοποιήθηκαν αντιστοιχούσαν σε κρίσιμες φάσεις της διεργασίας της πάρωσης.

Η προτεινόμενη μέθοδος αρχικά αξιολογήθηκε σε μοντέλα άθικτου οστού. Αν και η υπόθεση αυτή δεν είναι ρεαλιστική, επιτρέπει τη δυνατότητα μετρήσεων ταχύτητας στις βελόνες, χωρίς αυτές να επηρεάζονται από τις μηχανικές και γεωμετρικές ιδιότητες του πόρου. Τα αποτελέσματα της μελέτης μας έδειξαν ότι οι τιμές ταχύτητας στην προτεινόμενη μέθοδο ήταν σημαντικά αυξημένες σε σχέση με αυτές που προκύπτουν σε διαδερμικές και διοστικές εφαρμογές. Αυτό μπορεί να αποδοθεί στο γεγονός ότι το FAS διαδίδεται κατά μήκος των βελονών που είναι κατασκευασμένες από ανοξείδωτο ατσάλι με διαμήκη ταχύτητα ίση με 5740 m/s η οποία είναι μεγαλύτερη από αυτή του οστού (4063 m/s).

Η ταχύτητα στα μοντέλα κατεαγώτων οστών βρέθηκε ότι αυξανόταν κατά τα στάδια της πάρωσης, γεγονός που είναι σύμφωνο με τα ευρήματα προηγούμενων μελετών [12]. Όπως αναμενόταν, οι τιμές των ταχυτήτων που μετρήθηκαν στα κατεαγώτα οστά με χρήση της προτεινόμενης μεθόδου βρέθηκαν και πάλι αυξημένες σε σχέση με τις διαδερμικές και διοστικές μετρήσεις. Μικρές διαφοροποιήσεις παρατηρήθηκαν στις ταχύτητες από το Στάδιο1 στο Στάδιο3, γεγονός που μπορεί να οφείλεται στο ότι για τη δεδομένη συχνότητα διέγερσης (1MHz) το FAS αντιστοιχεί σε ένα πλευρικό κύμα το οποίο είναι ευαίσθητο μόνο στις μεταβολές που λαμβάνουν χώρα σε ένα επιφανειακό στρώμα του καταγματικού κενού [3,5,8,9,13]. Ωστόσο, λόγω της ύπαρξης των βελονών, το μονοπάτι διάδοσης αυξάνεται, και έτσι οποιαδήποτε χρονική καθυστέρηση των κυμάτων στον πόρο είναι μικρή σε σχέση με το συνολικό χρόνο διέλευσης. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα η ευαισθησία της προτεινόμενης μεθόδου να είναι μειωμένη σε σχέση με αυτή των διοστικών και διαδερμικών διατάξεων. Επιπρόσθετα, η τοποθέτηση των βελονών στα μοντέλα δημιουργεί πολύπλοκα φαινόμενα κυματικής διασποράς τα οποία δεν είναι δυνατό να αξιολογηθούν αποτελεσματικά.

Παρατηρήθηκε ότι οι γωνίες κλίσης των βελονών τόσο στα άθικτα όσο και τα κατεαγότα οστά δεν είχαν σημαντική επίδραση στην ταχύτητα του FAS. Η πιο έντονη επίδραση παρατηρήθηκε όταν οι βελόνες είχαν κλίση $+5^\circ$ και -5° (Μοντέλο-4α) χωρίς ωστόσο να είναι σημαντική. Το γεγονός αυτό ήταν αναμενόμενο εφόσον ο συγκεκριμένος συνδυασμός γωνιών κλίσεως αντιστοιχούσε στο μακρύτερο μονοπάτι διάδοσης. Παρόλα αυτά, το ενδεχόμενο η ταχύτητα επηρεαζόταν από τη γωνία κλίσης της βελόνας, δε θα έπαιξε ουσιαστικό ρόλο αφού ενδιαφερόμαστε για τις αλλαγές που παρατηρούνται στις ταχύτητες του FAS από το Στάδιο1 στο Στάδιο3 και όχι για τις απόλυτες τιμές τους. Ωστόσο, η προτεινόμενη μέθοδος δεν είναι τόσο ευαίσθητη σε μεταβολές που λαμβάνουν χώρα στον πόρο κατά τη διάρκεια της πάρωσης, λόγω της αυξημένης χρονικής καθυστέρησης του FAS στις βελόνες.

Ένας επιπρόσθετος περιορισμός της μεθόδου αποτελεί το γεγονός ότι τα ληφθέντα σήματα έχουν υποστεί σημαντική εξασθένηση που εισάγεται λόγω (α) των πολλαπλών ανακλάσεων στις διεπιφάνειες βελόνας-οστού, (β) πιθανών ατελειών στην ακουστική σύζευξη μεταξύ του οστού και της βελόνας, και (γ) του γεγονότος ότι η μέγιστη ενέργεια διαδίδεται κάθετα στον άξονα του οστού, καθιστώντας έτσι την αξονική διάδοση του FAS πολύ δυσκολότερη σε σύγκριση με διαδερμικές ή διοστικές εφαρμογές.

Συμπερασματικά, η προτεινόμενη μέθοδος συνδυάζει τα πλεονεκτικά χαρακτηριστικά των υπάρχουσών μεθόδων εφόσον (1) είναι μη-επεμβατική, σε αντίθεση με τις διοστικές διατάξεις και (2) οι μετρήσεις δεν επηρεάζονται από το στρώμα των υπερκείμενων μαλακών ιστών, γεγονός που αποτελεί σημαντικό περιορισμό των διαδερμικών μεθόδων κυρίως όταν εφαρμόζονται σε σημεία του σώματος, όπως ο μηρός όπου το πάχος των ιστών είναι μεγάλο. Επιπρόσθετα, λόγω της σταθερής προσκόλλησης των μετατροπέων στα άκρα των βελονών, δεν απαιτείται χειροκίνητη επανατοποθέτησή τους σε κάθε μέτρηση, όπως συμβαίνει στη διαδερμική εφαρμογή, γεγονός που αυξάνει την επαναληψιμότητα της μεθόδου. Παρόλα αυτά, για την ακριβή αξιολόγηση της μεθόδου είναι απαραίτητη η ερμηνεία των αποτελεσμάτων που εξήχθησαν στην παρούσα μελέτη σε συνδυασμό με κλινικές μετρήσεις.

5.5 Βιβλιογραφία

1. Bossy E, Talmant M, Laugier P. Effect of bone cortical thickness on velocity measurements using ultrasonic axial transmission: a 2D simulation study. *J Acoust Soc Am* 2002;112(1):297-307.
2. Camus E, Talmant M, Berger G, Laugier P. Analysis of the axial transmission technique for the assessment of skeletal status. *J Acoust Soc Am* 2000;108(6):3058–3065.
3. Nicholson PH, Moilanen P, Karkkainen T, Timonen J, Cheng S. Guided ultrasonic waves in long bones: modelling, experiment and in vivo application. *Physiol Meas* 2002;23(4):755-768.
4. Lowet G, Van Der Perre G. Ultrasound velocity measurements in long bones: measurement method and simulation of ultrasound wave propagation. *J Biomech* 1996;29(10):1255–1262.
5. Njeh C, Hans D, Wu C, Kantorovich E, Sister M, Fuerst T, Genant H. An in vitro investigation of the dependence on sample thickness of the speed of sound along the specimen. *Med Eng Phys* 1999;21:651–659.
6. Bossy E, Talmant M, Defontaine M, Patat N, Laugier P. Bidirectional axial transmission can improve accuracy and precision of ultrasonic velocity measurement in cortical bone: A validation on test materials. *IEEE Trans Ultrason Ferroelectr Freq Control* 2004a;51(1):71–79.
7. Malizos KN, Papachristos AA, Protopappas VC, Fotiadis DI. Transosseous Application of Low-Intensity Ultrasound for the Enhancement and Monitoring of Fracture Healing Process in a Sheep Osteotomy Model. *Bone* 2006;38(4):530-539.
8. Bossy E, Talmant M, Laugier P. Three-dimensional simulations of ultrasonic axial transmission velocity measurement on cortical bone models. *J Acoust Soc Am* 2004b;115(5):2314–2324.
9. Protopappas VC, Fotiadis DI, Malizos KN. Guided ultrasound wave propagation in intact and healing long bones. *Ultrasound Med Biol* 2006;32(5):693–708.

10. Njeh CF, Kearton JR, Hans D, Boivin CM. The use of quantitative ultrasound to monitor fracture healing: a feasibility study using phantoms. *Med Eng Phys* 1998;20(10):781–786.
11. Protopappas VC, Kourtis IC, Kourtis LC, Malizos KN, Massalas CV, Fotiadis DI, Three-dimensional finite element modeling of guided wave ultrasound wave propagation in intact and healing long bones. *J Acoust Soc Am* 2007;121(6):3907-3921.
12. Protopappas VC, Vavva MG, Fotiadis DI, Malizos KN. Ultrasonic monitoring of bone fracture healing. *IEEE Trans Ultr Ferroel Freq Cont* 2008;55(6):1243-1255.
13. Raum K, Leguerney I, Chandelier F, Bossy E, Talmant M, Saïed A, Peyrin F, Laugier P. Bone microstructure and elastic tissue properties are reflected in QUS axial transmission measurements. *Ultrasound Med Biol* 2005;31(9):1225–1235.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΥΜΕΝΩΝ ΡΥΘΜΩΝ ΣΕ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΠΛΑΚΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΟΜΕΝΗ ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΒΑΘΜΙΑΣ: ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΦΛΟΙΩΔΕΣ ΟΣΤΟ

6.1 Εισαγωγή

Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 2 οι περισσότερες μέθοδοι αξονικής διάδοσης που έχουν αναπτυχθεί τόσο για την αξιολόγηση της οστεοπόρωσης [1-5] όσο και για την παρακολούθηση της πάρωσης καταγμάτων οστών [6-10] επικεντρώνονται στον προσδιορισμό της ταχύτητας διάδοσης υπερήχων μετρώντας τον χρόνο άφιξης του πρώτου αφιχθέντος κύματος στο δέκτη δηλ. του FAS. Παρόλα αυτά έχει αποδειχθεί οι κυματοδηγούμενοι ρυθμοί (guided waves) διαδίδονται σε ολόκληρο το πάχος του φλοιού και η ταχύτητά τους επηρεάζεται από τη γεωμετρία και τις μηχανικές ιδιότητες του φλοιώδους οστού. Έχει επίσης αποδειχθεί ότι οι κυματοδηγούμενοι ρυθμοί υπερήχων μπορούν να παρέχουν εξαιρετικά χρήσιμες παραμέτρους μη καταστροφικού ελέγχου [11, 12]. Συνεπώς η κατανόηση του μηχανισμού διάδοσης των κυμάτων αυτών στο οστό είναι πολύ σημαντική για την ποιοτική και ποσοτική αξιολόγηση των μηχανικών ιδιοτήτων του οστού.

Η δημιουργία υπολογιστικών μοντέλων οστών είναι δύσκολη διαδικασία εξαιτίας της πολύπλοκης δομής τους σε μικροσκοπικό επίπεδο. Σε όλες τις μελέτες που έχουν αναφερθεί στη βιβλιογραφία και ερευνούν τους μηχανισμούς διάδοσης κυματοδηγούμενων ρυθμών, το οστό θεωρείται ως ένα γραμμικώς ελαστικό υλικό και ομογενές υλικό. Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 1, το οστό είναι ανομοιογενές φυσικό σύνθετο του οποίου τα φέροντα δομικά συστατικά είναι οργανωμένα σε διαφορετικά ιεραρχικά επίπεδα της δομής [13]. Έχει αποδειχθεί από προηγούμενες *in-vitro* μετρήσεις σε παραλληλεπίπεδα οστικά δοκίμια φλοιώδους οστού ταξινομημένα με βάση τα μικροδομικά χαρακτηριστικά τους, ότι η μικροδομή του οστού επηρεάζει σημαντικά τη διάδοση κυμάτων υπερήχων [14,15].

Έχει επίσης παρατηρηθεί πειραματικά ότι σε ετερογενή υλικά των οποίων οι διαστάσεις είναι συγκρίσιμες με το μήκος κλίμακας (length scale) της μικροδομής τους, η επίδραση της μικροδομής είναι σημαντική και πρέπει να λαμβάνεται υπόψη σε υπολογιστικές και θεωρητικές μελέτες. Σε αυτές τις περιπτώσεις είναι απαραίτητος ο προσδιορισμός του πεδίου τάσεων με μη τοπικό τρόπο (non-local). Η κλασική ελαστική θεωρία δε μπορεί να περιγράψει επαρκώς τη δυναμική συμπεριφορά του οστού. Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 3 η θεωρητική μοντελοποίηση της επίδρασης της μικροδομής του οστού μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας γενικευμένες θεωρίες συνεχούς. Οι βασικές αρχές των θεωριών αυτών έχουν γίνει αντικείμενο μελέτης για πολλούς ερευνητές τις τελευταίες δεκαετίες μιας και μπορούν να εφαρμοστούν σε πολλαπλούς τομείς της μηχανικής [16-19].

Σύμφωνα με τις θεωρίες τάσεων ζεύγους, η παραμόρφωση του μέσου δεν περιγράφεται μόνο από το διάνυσμα μετατοπίσεων αλλά και από ένα ανεξάρτητο διάνυσμα περιστροφής. Τα διανύσματα αυτά συνδέονται με το πεδίο τάσεων και ροπών στρέψης μέσω καταστατικών εξισώσεων οι οποίες, σε αντίθεση με την κλασική θεωρία, ορίζουν μη συμμετρικούς τανυστές τάσεων και ροπών στρέψης. Τόσο οι θεωρίες Cosserat όσο και οι μικροπολικές θεωρίες έχουν χρησιμοποιηθεί επιτυχώς για την κατανόηση της επίδρασης του χαρακτηριστικού μήκους της μικροδομής του οστού στη μηχανική του συμπεριφορά [20-27] και για την επίλυση προβλημάτων μηχανικής [28-33]. Εξαιτίας του διανύσματος περιστροφών, οι θεωρίες τάσεων ζεύγους έχουν τη

δυνατότητα να περιγράψουν φαινόμενα διασποράς τα οποία δεν μπορούν να προβλεφθούν από την κλασσική ελαστικότητα.

Η θεωρία ελαστικότητας τύπου βαθμίδας περιγράφηκε εκτενώς στο Κεφάλαιο 3. Πολλοί ερευνητές έχουν χρησιμοποιήσει τη θεωρία αυτή για τη μελέτη της διάδοσης κυματοδηγούμενων ρυθμών σε ελεύθερο χώρο [28,29] την επίλυση προβλημάτων ανάκλασης κυμάτων σε επίπεδες επιφάνειες [30], τη διάδοση κυμάτων Rayleigh σε ημι-άπειρο χώρο [31,32] και τη μελέτη των φαινομένων διασποράς σε κυματοδηγούς [33]. Παρόλα αυτά δεν έχει αναφερθεί μέχρι σήμερα εργασία στην οποία να μελετάται η διάδοση κυματοδηγούμενων ρυθμών σε οστά χρησιμοποιώντας θεωρίες ελαστικότητας ανώτερης βαθμίδας.

Στη συγκεκριμένη εργασία χρησιμοποιείται η απλοποιημένη Μορφή II της θεωρίας βαθμίδας του Mindlin [34] με σκοπό τον προσδιορισμό των συμμετρικών και μη-συμμετρικών κυματοδηγούμενων ρυθμών που διαδίδονται σε μια ελεύθερη διδιάστατη πλάκα. Οι υλικές ιδιότητες της πλάκας καθώς και τα χαρακτηριστικά μήκη που εισάγονται από την θεωρία βαθμίδας είναι συναφείς με τις φυσιολογικές τιμές των αντίστοιχων μεγεθών που εμφανίζουν τα οστά.

Η καινοτομία της παρούσας εργασίας έγκειται στο γεγονός ότι δεν έχει προταθεί στο παρελθόν παρόμοια θεωρία ελαστικότητας για την θεωρητική προσομοίωση της διάδοσης των κυματοδηγούμενων σε μακρά οστά. Τα βασικά πλεονεκτήματα της θεωρίας βαθμίδας εν συγκρίσει με τις υπόλοιπες γενικευμένες θεωρίες συνεχούς αφορούν στην απλότητα και στη συμμετρία όλων των κλασσικών και μη-κλασσικών τανυστών που εμπλέκονται.

6.2 Διάδοση κυμάτων σε άπειρο συνεχές με μικροδομή με βάση τη μορφή II της θεωρίας ελαστικότητας βαθμίδας

Στο Κεφάλαιο 3 περιγράφηκε λεπτομερώς η δεύτερη έκδοση της γενικής θεωρίας του Mindlin, δηλ. η Μορφή II (Form II), σύμφωνα με την οποία η πυκνότητα δυναμικής ενέργειας \hat{W} είναι μια τετραγωνική συνάρτηση των τροπών ε_{ij} και των βαθμίδων των τροπών $\hat{\kappa}_{ijk}$, και δίνεται από την Εξ.(κεφ3).

Στο συγκεκριμένο Κεφάλαιο χρησιμοποιούμε την απλούστερη δυνατή περίπτωση της θεωρίας βαθμίδας στην η πυκνότητα δυναμικής ενέργειας \hat{W} και κινητικής ενέργειας \hat{T} που ορίστηκαν στο Κεφάλαιο 3 μπορούν να γραφούν ως:

$$\hat{W} = \varepsilon_{ij} \tau_{ij} + g^2 \partial_i \varepsilon_{jk} \partial_i \tau_{jk}, \quad \hat{T} = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i + \frac{1}{6} \rho h^2 (\partial_i \dot{u}_i) (\partial_i \dot{u}_i), \quad (6.1)$$

όπου οι σταθερές $\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_5$, d, α και β ορίζονται ως:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_1 &= \hat{\alpha}_3 = \hat{\alpha}_5 = 0, \\ \hat{\alpha}_2 &= \lambda g^2 / 2, \\ \hat{\alpha}_4 &= \mu g^2, \\ d^2 / 6 &= h^2, \alpha = 1, \beta = 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Κατά συνέπεια, για τις παραμέτρους $l_1^2, l_2^2, h_1^2, h_2^2$ της Εξ. (3.85) ισχύουν οι ισότητες:

$$l_1^2 \equiv l_2^2 = g^2 \text{ και } h_1^2 \equiv h_2^2 = h^2.$$

Κάνοντας χρήση των παραπάνω απλοποιήσεων, οι τάσεις Cauchy, οι διπλές τάσεις και οι συνολικές τάσεις που περιγράφονται στις Εξ. (3.64), (3.65) και (3.68) μπορούν να γραφούν ως:

$$\tau_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{ii} \delta_{ij}, \quad (6.3)$$

$$\mu_{ijk} = g^2 \partial_i \tau_{jk}, \quad (6.4)$$

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} - g^2 \nabla^2 \tau_{ij}. \quad (6.5)$$

Επιπρόσθετα, η εξίσωση κίνησης Εξ. (3.85) μέσω της ταυτότητας $\nabla^2 = \nabla \nabla \cdot - \nabla \times \nabla \times$ γράφεται ως ακολούθως:

$$(1 - g^2 \nabla^2) [\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}] = \rho (\ddot{\mathbf{u}} - h^2 \nabla^2 \ddot{\mathbf{u}}), \quad (6.6)$$

όπου $g^2 \nabla^2 [\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}]$ και $\rho h^2 \nabla^2 \ddot{\mathbf{u}}$ είναι οι όροι της μικροδομής και μικροαδράνειας αντίστοιχα ενώ ο τελεστής ∇^2 είναι η Λαπλασιανή. Παίρνοντας την απόκλιση και το στροβιλισμό της Εξ. (6.6), προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$(\lambda + 2\mu)(1 - g^2 \nabla^2) \nabla^2 \nabla \cdot \mathbf{u} = \rho(1 - h^2 \nabla^2) \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}}, \quad (6.7)$$

$$\mu(1 - g^2 \nabla^2) \nabla^2 \nabla \times \mathbf{u} = \rho(1 - h^2 \nabla^2) \nabla \times \ddot{\mathbf{u}}. \quad (6.8)$$

Αν υποθέσουμε επίπεδα κύματα της μορφής

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = A e^{i(K\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (6.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{B} e^{i(K\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (6.10)$$

όπου A, \mathbf{B} είναι τα πλάτη, \mathbf{r} το διάνυσμα θέσης, $\hat{\mathbf{k}}$ η κατεύθυνση διάδοσης K, ω ο κυματαριθμός και η συχνότητα αντίστοιχα και $i = \sqrt{-1}$. Εισάγοντας την Εξ. (6.10) στις Εξ. (6.7) και (6.8) προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις διασποράς

$$\omega^2 = C_L^2 \frac{K_L^2 (1 + g^2 K_L^2)}{1 + h^2 K_L^2}, \quad (6.11)$$

$$\omega^2 = C_T^2 \frac{K_T^2 (1 + g^2 K_T^2)}{1 + h^2 K_T^2}, \quad (6.12)$$

όπου $C_L^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$ και $C_T^2 = \frac{\mu}{\rho}$ είναι η διαμήκης (bulk longitudinal velocity) και εγκάρσια ταχύτητα (bulk shear velocity) του μέσου στην κλασσική ελαστικότητα. Οι Εξ. (6.11) και (6.12) περιγράφουν τη διάδοση των διαμήκων (longitudinal, (L)) και εγκάρσιων (shear (T)) κυμάτων στο συνεχές με μικροδομή, ενώ οι αντίστοιχες ταχύτητες φάσης των κυμάτων αυτών προκύπτουν μέσω των Εξ. (6.11) και (6.12), ίσες με:

$$V_{L,T} = \frac{\omega}{K_{L,T}} = C_{L,T} \sqrt{\frac{1 + g^2 K_{L,T}^2}{1 + h^2 K_{L,T}^2}}. \quad (6.13)$$

Οι Εξ. (6.11) και (6.12) αποδεικνύουν ότι στην περίπτωση της ελαστικής θεωρίας βαθμίδας οι ταχύτητες των διαμήκων και εγκάρσιων κυμάτων που προκύπτουν, είναι συναρτήσεις του κυματαριθμού και συνεπώς παρουσιάζουν διασπορά, σε αντίθεση με την περίπτωση κλασσικής ελαστικότητας όπου οι αντίστοιχες ταχύτητες έχουν σταθερές τιμές χωρίς φαινόμενα διασποράς. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην ύπαρξη των σταθερών g^2 και h^2 που εισάγονται λόγω της μικροδομής του μέσου. Στην περίπτωση που οι σταθερές g και h στην Εξ. (6.13) τεθούν ίσοι με μηδέν τότε θα προκύψει $V_{L,T} = C_{L,T}$, δηλ. η περίπτωση της κλασσικής ελαστικότητας.

Η επίλυση των Εξ. (6.11) και (6.12) ως προς τους κυματαριθμούς K_L και K_T αντίστοιχα, οδηγεί στην ακόλουθη σχέση:

$$K_{L,T} = \sqrt{\frac{-(C_{L,T}^2 - \omega^2 h^2) + \sqrt{(C_{L,T}^2 - \omega^2 h^2)^2 + 4 \cdot C_{L,T}^2 g^2 \omega^2}}{2C_{L,T}^2 g^2}}. \quad (6.14)$$

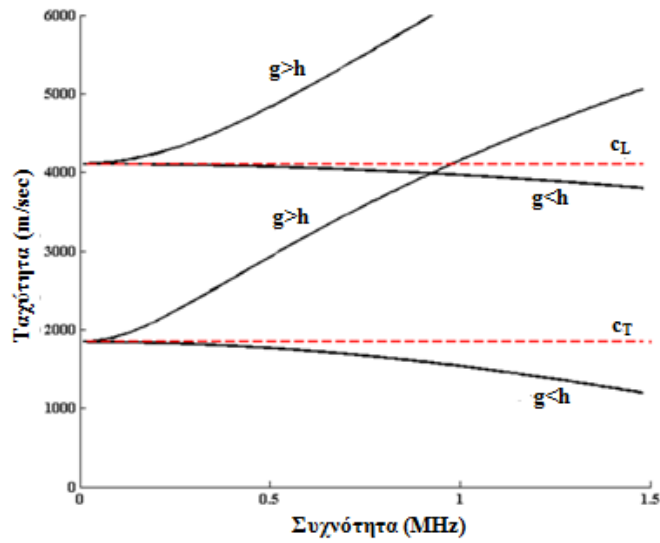
Η ταχύτητα ομάδας $V_{L,T}^g$ των διαμήκων και εγκάρσιων κυμάτων μέσω της οποίας διαδίδεται η ενέργεια σε ένα συνεχές μέσο μπορεί εύκολα να υπολογιστεί μέσω της Εξ. (6.14) ως ακολούθως:

$$V_{L,T}^g = \frac{d\omega}{dK_{L,T}} = \sqrt{\frac{K_{L,T}^2 h^2 + 1}{K_{L,T}^4 C_{L,T}^2 g^2 + K_{L,T}^2 C_{L,T}^2}} \cdot \frac{2K_{L,T} C_{L,T}^2 (K_{L,T}^4 g^2 h^2 + 2K_{L,T}^2 g^2 + 1)}{(K_{L,T}^2 h^2 + 1)^2}. \quad (6.15)$$

Στο Σχήμα 6.1 παρουσιάζονται οι καμπύλες διασποράς ταχυτήτων ομάδας των διαμήκων (L) και εγκάρσιων κυμάτων (T) που διαδίδονται σε ένα άπειρο ελαστικό μέσο που περιγράφεται από την ελαστική θεωρία βαθμίδας για διάφορους συνδυασμούς των σταθερών g και h συναρτήσει της συχνότητας σύμφωνα με την Εξ. (6.13).

6.3 Προσδιορισμός των παραμέτρων εσωτερικής κλίμακας μήκους

Ένα από τα πιο σημαντικά και δύσκολα θέματα που ανακύπτουν κατά την εφαρμογή των γενικευμένων θεωριών ελαστικότητας σε πρακτικά προβλήματα είναι ο προσδιορισμός των τιμών των παραμέτρων εσωτερικού μήκους που εμφανίζονται στις Εξ. (6.6). Οι συντελεστές βαθμίδας (gradient coefficients) l_1, l_2, g και οι συντελεστές αδράνειας h_1, h_2, h αποτελούν παραμέτρους εσωτερικής κλίμακας μήκους που μετρώνται σε μονάδες μήκους και δείχνουν τον τρόπο με τον οποίο οι ελαστικές ιδιότητες και η αδράνεια της μικροδομής επηρεάζει τη μακροσκοπική συμπεριφορά των υλικών. Όπως αποδεικνύεται από την Εξ. (6.6), οι συντελεστές που επηρεάζουν τη διάδοση των διαμήκων κυμάτων, δηλ. οι l_1, h_1 διαφέρουν από τους l_2, h_2 , οι οποίοι επηρεάζουν τα εγκάρσια κύματα. Συνεπώς, η φυσική σημασία της απλοποιημένης έκφρασης των Εξ. (6.1) και (6.6) ανάγεται στο ότι τα διαμήκη και εγκάρσια κύματα επηρεάζονται από τους ίδιους συντελεστές βαθμίδας και αδράνειας, g και h αντίστοιχα.



Σχήμα 6.1. Οι καμπύλες διασποράς ταχύτητας ομάδας συναρτήσει της συχνότητας για ένα ελαστικό μέσο με μικροδομή.

Η κατανόηση της φυσικής σημασίας καθώς και ο προσδιορισμός των παραμέτρων αυτών έχουν γίνει αντικείμενο μελέτης για πολλούς ερευνητές χωρίς ωστόσο να έχει διαμορφωθεί σαφές και γενικευμένο συμπέρασμα. Οι Ben-Amoz *et al.*, [35] θεωρώντας ένα σύνθετο υλικό αποτελούμενο από μικρότερα σωματίδια κατέληξαν στις παρακάτω σχέσεις:

$$l_1^2 = \frac{l^2}{4} \left[1 - \frac{\mu_f - \mu_m}{\mu_v} (\nu_f - 4I_f) \right] \quad (6.16)$$

$$l_2^2 = \frac{l^2}{4} \left[1 - \frac{(\lambda_f + 2\mu_f) - (\lambda_m + 2\mu_m)}{\lambda_v + 2\mu_v} (\nu_f - 4I_f) \right] \quad (6.17)$$

$$h_1^2 = \frac{l^2}{8} \left[1 + (\rho_R / \rho_m - \rho_R / \rho_f) (\nu_f - 4I_f) \right]^{-1} \quad (6.18)$$

$$h_2^2 = \frac{l^2}{4} \left[1 + (\rho_R / \rho_m - \rho_R / \rho_f) (\nu_f - 4I_f) \right]^{-1}, \quad (6.19)$$

όπου l είναι το μέγεθος του αντιπροσωπευτικού στοιχείου όγκου του σύνθετου το οποίο αποτελείται από ένα σωματίδιο προσκολλημένο σε ένα υπόστρωμα που χαρακτηρίζεται από τους συντελεστές Lamé λ_f, μ_f και λ_m, μ_m αντίστοιχα. Οι υπόλοιπες παράμετροι που εμφανίζονται στις Εξ. (6.16)-(6.19) παραθέτονται λεπτομερώς στη μελέτη των Ben-Amoz *et al.*, [35]. Η μελέτη αυτή είναι ενδεικτική της περίπτωσης κατά την οποία

οι παράμετροι εσωτερικής κλίμακας μήκους εξαρτώνται τόσο από το μέγεθος όσο και από τις ελαστικές ιδιότητες και την αδράνεια των σωματιδίων που απαρτίζουν το αντιπροσωπευτικό στοιχείο όγκου, του σύνθετου με μικροδομή. Η παραπάνω μελέτη ήταν η πρώτη που παρουσίασε κλειστού τύπου σχέσεις για τους συντελεστές l_1, l_2, h_1, h_2 .

Οι Tekoglu και Onck [36] πραγματοποίησαν μια μελέτη σε κυψελωτά υλικά με κανονική και ακανόνιστη εξαγωνική μικροδομή και συνέκριναν τα αποτελέσματα τους με θεωρητικά μοντέλα περιγραφόμενα από τη μικροπολική (micropolar) θεωρία ελαστικότητας. Οι συγγραφείς έδειξαν ότι το χαρακτηριστικό μήκος (micropolar characteristic length) στη συγκεκριμένη θεωρία l_m λαμβάνει τιμές που κυμαίνονται από $0.15d$ έως $0.28d$ για την κανονική και από $0.47d$ έως $0.51d$ για την ακανόνιστη εξαγωνική μικροδομή, όπου d είναι το μέγεθος της μονάδας κυψελίδας (unit cell). Σε επόμενη εργασία του, ο Tekoglu [37] συνέκρινε τα αποτελέσματα της προαναφερθείσας εφαρμογής και με την ελαστική θεωρία βαθμίδας και βρήκε ότι το χαρακτηριστικό μήκος κλίμακας της μικροπολικής θεωρίας l_m συσχετίζεται το αντίστοιχο μήκος της θεωρίας βαθμίδας g μέσω της σχέσης:

$$g = 0.707l_m. \quad (6.20)$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, ο συντελεστής βαθμίδας επηρεαζόταν τόσο από το μέγεθος της μονάδας κυψελίδας όσο και από τον τρόπο με τον οποίο οι κυψελίδες διαμόρφωναν ολόκληρο το κυψελωτό υλικό.

Οι Georgiadis *et al.* [38] μελέτησαν το δυναμικό πρόβλημα της διάδοσης του κύματος Rayleigh σε ένα υλικό αποτελούμενο από κυβικές μονάδες με ακμή $2h$, όπου h ο συντελεστής αδράνειας, χρησιμοποιώντας τη θεωρία ελαστικότητας κατά Tourin-Mindlin. Συγκρίνοντας τις καμπύλες διασποράς του κύματος Rayleigh που προέκυψαν από την προσέγγιση αυτή για διάφορες τιμές του h , με τις αντίστοιχες καμπύλες από την ανάλυση Gazis *et al.*, [39] με βάση την ατομική-κρυσταλλική θεωρία ελαστικότητας (atomic-lattice theory), βρήκαν ότι για υλικά με πολυ-κρυσταλλική δομή, κράματα μετάλλων και κοκκώδη υλικά, η τιμή του g^2 είναι της τάξης του $(0.1h)^2$.

Κατ' αντιστοιχία με την περίπτωση της υλικής (material) και γεωμετρικής (geometrical) κυματικής διασποράς, οι συντελεστές g και h σε ορισμένες εφαρμογές δεν επηρεάζονται μόνο από το μέγεθος και τις ιδιότητες της μικροδομής αλλά και από συγκεκριμένα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της δομής. Για παράδειγμα, οι Vardoulakis και Giannakopoulos [40] πραγματοποιώντας δοκιμασία κάμψης μιας κλασσικής μικροδομικής δοκού Bernoulli-Euler και λαμβάνοντας υπόψη τις διπλές διατμητικές δυνάμεις που εμφανίζονται στην εγκάρσια τομή (cross-section) μιας δοκού τύπου T (T-type beam), απέδειξαν ότι μια δοκός Timoshenko μπορεί να ταυτιστεί με την δοκό Bernoulli-Euler που περιγράφεται από την ελαστική θεωρία βαθμίδας εάν ισχύει η σχέση:

$$g = 4(1 + \nu)H, \quad (6.21)$$

όπου ν είναι ο λόγος Poisson και H η απόσταση από την οριζόντια πλάκα της δοκού τύπου T από το κέντρο της εγκάρσιας τομής. Συνεπώς, για τη συγκεκριμένη περίπτωση οι συγγραφείς κατέδειξαν ότι «το σημαντικό σημείο έγκειται στο ότι αυτή η επίδραση του χαρακτηριστικού μήκους κλίμακας προέρχεται από τα δομικά και όχι από υλικά χαρακτηριστικά της δομής». Ομοίως, εξετάζοντας τη διάδοση μονοδιάστατων αξονικών κυμάτων σε δοκό όπου λαμβάνεται υπόψη και η επίδραση της αδράνειας, γνωστό ως μοντέλο Rayleigh [41], μπορεί να αποδειχθεί ότι το ίδιο φαινόμενο μπορεί να περιγραφεί επαρκώς από τη μονοδιάστατη περίπτωση της Εξ. (6.6) θέτοντας $g^2 = 0$ και $h^2 = \nu\gamma$, όπου ν είναι ο λόγος Poisson και γ η πολική ακτίνα περιστροφής της εγκάρσιας τομής της δοκού.

Έχει επίσης αποδειχθεί πειραματικά ότι οι συντελεστές g και h επηρεάζονται επίσης και από τον τύπο φόρτισης. Για παράδειγμα, ο Lakes [42] και οι Yang και Lakes [46] θέτοντας σε δοκιμασίες στρέψης και κάμψης ανθρώπινα συμπαγή οστά προσπάθησαν να μετρήσουν τις παραμέτρους εσωτερικής κλίμακας μήκους που ορίζονται στη μικροπολική θεωρία. Οι τιμές που μετρήθηκαν ήταν $l_t = 2.2 \times 10^{-4} m$ σε δοκιμασία στρέψης και $l_b = 4.5 \times 10^{-4} m$ σε κάμψη, δηλ. διαφορετικές ανάλογα με τον τρόπο φόρτισης. Σύμφωνα με τον Tekoglu [36] το συμπέρασμα αυτό, θα μπορούσε να αντιστοιχεί και σε διαφορετικές τιμές για το συντελεστή g σε στρέψη και κάμψη.

Τέλος, ο συντελεστής αδράνειας h είναι εφικτό να προσδιοριστεί δεδομένου του συντελεστή βαθμίδας g συγκρίνοντας τις καμπύλες διασποράς που έχουν προκύψει για διαφορετικούς τύπους υλικών. Πιο συγκεκριμένα, θέτοντας $h = g$ στην Εξ. (6.17), είναι προφανές ότι δεν υπάρχει διασπορά και προκύπτει $V_{L,T}^g \equiv C_{L,T}$. Αυτό συμβαίνει διότι η συγκεκριμένη τιμή του h διαχωρίζει δυο μεγάλες κατηγορίες υλικών. Για $h > g$ παρατηρείται αρνητική διασπορά (negative dispersion) δηλ., η ταχύτητα $V_{L,T}^g$ μειώνεται καθώς αυξάνεται η συχνότητα και επιπλέον ισχύει $V_{L,T}^g < C_{L,T}$. Η περίπτωση αυτή είναι φυσικώς αποδεκτή και συνάδει με τα ευρήματα των ατομικών-κρυσταλλικών θεωριών για το δισδιάστατο χώρο [29, 43] και το δισδιάστατο ημι-χώρο [39]. Οι Georgiadis *et al.* [38] υποθέτοντας ότι $h > g$ για τη μελέτη της κυματικής διασποράς στο ημι-επίπεδο οδηγήθηκαν σε αποτελέσματα που ήταν σε συμφωνία με κρυσταλλικές θεωρίες. Η περίπτωση αυτή συνάδει επίσης και με πειραματικά αποτελέσματα από μελέτες σε μέταλλα και κράματα [44, 45]. Υποθέτοντας $h < g$ στην Εξ. (27), προκύπτει $V_{L,T}^g > C_{L,T}$ και παρατηρείται θετική κυματική διασπορά (positive dispersion), δηλ. η ταχύτητα $V_{L,T}^g$ αυξάνεται καθώς αυξάνεται η συχνότητα. Τα αποτελέσματα αυτά είναι σύμφωνα με πειραματικά ευρήματα μελετών σε κοκκώδη υλικά όπως το μάρμαρο, η άμμος, το σκυρόδεμα, οστά και κυψελώδη υλικά [44, 46-49].

Παρά το μεγάλο αριθμό των εργασιών που έχουν αναφερθεί στη βιβλιογραφία σχετικά με την χρήση των γενικευμένων θεωριών συνεχούς για την κατανόηση των μηχανικών ιδιοτήτων διαφόρων στερεών με φαινόμενα κλίμακας (scale effects), πολύ λίγες αναφέρονται στον προσδιορισμό των συντελεστών που εισάγονται λόγω της μικροδομής. Η πλειοψηφία των εργασιών αναφέρεται στον προσδιορισμό του εσωτερικού μήκους l_m που ορίζεται στη μικροπολική θεωρία, παρά στο συντελεστή βαθμίδας g που εισάγεται στη θεωρία βαθμίδας. Ωστόσο, ανεξαρτήτως της παραμέτρου που μετράται, το κύριο συμπέρασμα στο οποίο έχουν καταλήξει οι ερευνητές είναι ότι τα χαρακτηριστικά μήκη όπως g και h στα μέταλλα, κράματα, κοκκώδη και κυψελώδη υλικά, οστά, κεραμικά κ.ο.κ έχουν τιμή μικρότερη από $10^{-3} m$. Έχει επίσης βρεθεί πειραματικά [18, 50-53] ότι η τιμή του συντελεστή βαθμίδας g πρέπει να είναι της τάξης του μεγέθους της βασικής οργανωτικής μονάδας της μικροδομής του υλικού. Για

παράδειγμα στην περίπτωση του οστού η τιμή του g είναι της τάξης του μεγέθους των οστεώνων. Ωστόσο, οι ερευνητές δεν έχουν καταλήξει σε σαφή συμπεράσματα σχετικά με τις τιμές του g .

Στην παρούσα εργασία οι τιμές για τις παραμέτρους g και h , οι οποίες παρουσιάζονται στον Πίνακα 6.1 χρησιμοποιήθηκαν λαμβάνοντας υπόψη τα ευρήματα των πειραματικών μελετών των Lakes *et al.* [42] για τα συμπαγή οστά, το συμπέρασμα του Tekoglu ότι $g < l_m$, καθώς και τις δύο διαφορετικές σχέσεις κυματικής διασποράς ($h > g$ και $h < g$). Η σχέση φυσική ερμηνεία της σχέσης $h > g$ έγκειται στο ότι η αδράνεια της μικροδομής του οστού παίζει τον πιο σημαντικό ρόλο στα φαινόμενα διασποράς, σε αντίθεση με τη σχέση $h < g$ η οποία δείχνει πως τα φαινόμενα αυτά οφείλονται κυρίως στην ελαστική συμπεριφορά της μικροδομής.

Πίνακας 6.1 Τιμές των g και h για τις εξεταζόμενες περιπτώσεις

Περιπτώσεις	Συντελεστής g (m)	Χαρακτηριστικό μήκος h (m)
Περίπτωση-1α	5×10^{-4}	10^{-4}
Περίπτωση-1β	10^{-5}	10^{-4}
Περίπτωση-1γ	10^{-4}	10^{-4}
Περίπτωση-2α	10^{-4}	10^{-5}
Περίπτωση-2β	5×10^{-6}	10^{-5}
Περίπτωση-2γ	10^{-5}	10^{-5}

6.4 Κυματική διάδοση σε ελεύθερη πλάκα με μικροδομή με χρήση της θεωρίας βαθμίδας

Έστω μια 2Δ πλάκα που βρίσκεται στο κενό και ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Ox_1x_2 με τον άξονα Ox_1 να είναι ο άξονας συμμετρίας της πλάκας. Αν

υποθέσουμε επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση το διάνυσμα μετατόπισης μπορεί να γραφεί ως:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(x_1, x_2, t), \\ u_2 &= u_2(x_1, x_2, t), \\ u_3 &= 0. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Για την επίλυση της εξίσωσης κίνησης (Εξ. (6.6)) ακολουθούμε τη μέθοδο των δυναμικών (method of potentials). Το διάνυσμα μετατόπισης \mathbf{u} αναλύεται μέσω της αποσύνθεσης Helmholtz (Helmholtz decomposition) ως η βαθμίδα ενός βαθμωτού πεδίου ϕ και ο στροβιλισμός ενός διανυσματικού πεδίου \mathbf{A} ως εξής:

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A}, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (6.22)$$

Εισάγοντας την Εξ. (6.22) στην εξίσωση κίνησης που έχει προκύψει από τη θεωρία ελαστικότητας βαθμίδας (Εξ. (6.6)) λαμβάνουμε τις παρακάτω μερικές διαφορικές εξισώσεις:

$$(1 - g^2\nabla^2)\nabla^2\phi = \frac{(1 - h^2\nabla^2)}{C_L^2}\ddot{\phi}, \quad (6.23\alpha)$$

$$(1 - g^2\nabla^2)\nabla^2\mathbf{A} = \frac{(1 - h^2\nabla^2)}{C_T^2}\ddot{\mathbf{A}}. \quad (6.23\beta)$$

Είναι προφανές ότι για την περίπτωση $g = h$, οι όροι $g^2\nabla^2$ και $h^2\nabla^2$ στις Εξ. 6.23(α) και 6.23(β) γίνονται ίσοι και επομένως μπορούν να διαγραφούν, με αποτέλεσμα οι εκφράσεις που θα προκύψουν να ταυτίζονται με τις αντίστοιχες που λαμβάνονται στην κλασική θεωρία ελαστικότητας.

Στην επίπεδη εντατική κατάσταση το βαθμωτό δυναμικό είναι της μορφής:

$$\varphi = \phi(x_1, x_2, t), \quad (6.24)$$

και το διανυσματικό δυναμικό $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$:

$$A_1 = A_2 = 0 \text{ και} \quad (6.25\alpha)$$

$$A_3 = \psi(x_1, x_2, t). \quad (6.25\beta)$$

Το διάνυσμα μετατοπίσεων γράφεται μέσω της αποσύνθεσης Helmholtz ως:

$$\mathbf{u} = \hat{x}_1 \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \right) + \hat{x}_2 \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2} + \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \right), \quad (6.26)$$

όπου \hat{x}_1, \hat{x}_2 είναι τα μοναδιαία διανύσματα στις κατευθύνσεις x_1, x_2 , αντίστοιχα.

Η κυματική εξίσωση για τα διαμήκη και διατμητικά κύματα (Εξ. 6.23(α) και 6.23(β) αντίστοιχα) γράφεται ως:

$$(1 - g^2 \nabla^2) \nabla^2 \phi = \frac{1}{C_L^2} (1 - h^2 \nabla^2) \ddot{\phi}, \quad (6.27\alpha)$$

$$(1 - g^2 \nabla^2) \nabla^2 \psi = \frac{1}{C_T^2} (1 - h^2 \nabla^2) \ddot{\psi}. \quad (6.27\beta)$$

Υποθέτοντας κύματα που οδεύουν κατά τη x_1 διεύθυνση και στάσιμα κύματα κατά τη x_2 διεύθυνση οι λύσεις της κυματικής εξίσωσης (Εξ. (6.27)) έχουν τη μορφή:

$$\phi = \Phi(x_2) \exp\{i(Kx_1 - \omega t)\}, \quad (6.28\alpha)$$

$$\psi = \Psi(x_2) \exp\{i(Kx_1 - \omega t)\}, \quad (6.28\beta)$$

όπου Φ και Ψ είναι άγνωστες συναρτήσεις. Αντικαθιστώντας τις Εξ. (6.28α), (6.28β) στις Εξ. (6.27β) και (6.27β) αντίστοιχα, προκύπτουν οι παρακάτω μερικές διαφορικές εξισώσεις:

$$-g^2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} + \left(1 + 2K^2 g^2 - \frac{h^2 \omega^2}{C_L^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + (K_L^2 - K^2 - g^2 K^4 + h^2 K^2 K_L^2) \Phi = 0, \quad (6.29\alpha)$$

$$-g^2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x_2^4} + \left(1 + 2K^2 g^2 - \frac{h^2 \omega^2}{C_T^2}\right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} + (K_T^2 - K^2 - g^2 K^4 + h^2 K^2 K_T^2) \Psi = 0, \quad (6.29\beta)$$

όπου K είναι ο κυματαριθμός του εκάστοτε κυματοδηγούμενου ρυθμού και K_L^2 , K_T^2 οι κυματαριθμοί του διαμήκους και διατμητικού επίπεδου κύματος αντίστοιχα που ορίζονται όπως και στην κλασσική ελαστικότητα ως:

$$K_L^2 = \omega^2 / C_L^2 \quad (6.30)$$

$$K_T^2 = \omega^2 / C_T^2. \quad (6.31)$$

Είναι φανερό ότι όταν ο συντελεστής βαθμίδας g^2 και ο όρος της αδράνειας h^2 μηδενιστούν, τότε οι Εξ. (6.29α) και (6.29β) ταυτίζονται με αυτές που προκύπτουν στην κλασσική ελαστικότητα [54].

Οι λύσεις των Εξ. (6.29α) και (6.29β) μπορούν να γραφούν στη μορφή:

$$\Phi(x_2) = Q \sin px_2 + R \cos px_2 + S \exp\{r_p x_2\} + T \exp\{-r_p x_2\}, \quad (6.32\alpha)$$

$$\Psi(x_2) = U \sin qx_2 + V \cos qx_2 + W \exp\{r_s x_2\} + Z \exp\{-r_s x_2\}, \quad (6.32\beta)$$

όπου,

$$p, q = i \frac{\sqrt{1+2K^2g^2 - K_{L,T}^2h^2 - \sqrt{(1+2K^2g^2 - K_{L,T}^2h^2)^2 + 4g^2(K_{L,T}^2 - K^2 - g^2K^4 + h^2K_{L,T}^2K^2)}}}{g\sqrt{2}} \quad (6.33\alpha)$$

$$r_{p,s} = \frac{\sqrt{1+2K^2g^2 - K_{L,T}^2h^2} + \sqrt{(1+2K^2g^2 - K_{L,T}^2h^2)^2 + 4g^2(K_{L,T}^2 - K^2 - g^2K^4 + h^2K_{L,T}^2K^2)}}{g\sqrt{2}} \quad (6.33\beta)$$

και οι σταθερές (Q, R, S, T, U, V, W, Z) είναι άγνωστα πλάτη των κυματοδηγούμενων ρυθμών, τα οποία μπορούν να προσδιοριστούν ικανοποιώντας τις κλασσικές και μη-κλασσικές συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Εφόσον η πλάκα υποθέτουμε ότι βρίσκεται στο κενό, οι τάσεις και οι διπλές τάσεις στην ανώτερη ($x_2 = d/2$) και κατώτερη επιφάνεια ($x_2 = -d/2$) πρέπει να μηδενίζονται:

$$\mathbf{P}|_{x_2=d/2} = \mathbf{P}|_{x_2=-d/2} = 0, \quad (6.34\alpha)$$

$$\mathbf{R}|_{x_2=d/2} = \mathbf{R}|_{x_2=-d/2} = 0, \quad (6.34\beta)$$

όπου \mathbf{P} είναι το διάνυσμα τάσεων και \mathbf{R} το διάνυσμα διπλών τάσεων. Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες προκύπτουν δύο συστήματα 4x4: το πρώτο με αγνώστους R, U, S, Z και το δεύτερο με αγνώστους τους Q, T, V, W . Τα στοιχεία των ορίζουσών παραθέτονται στο Παράρτημα III. Από το μηδενισμό της κάθε ορίζουσας προκύπτουν οι χαρακτηριστικές εξισώσεις διασποράς για τους συμμετρικούς και αντισυμμετρικούς ρυθμούς που διαδίδονται στην πλάκα με μικροδομή.

6.5 Εφαρμογή σε πλάκα με ιδιότητες φλοιώδους οστού

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζεται το πρόβλημα της διάδοσης κυματοδηγούμενων ρυθμών σε ελεύθερη 2Δ πλάκα με μικροδομή η οποία έχει ιδιότητες όμοιες με αυτές του οστού, δηλ., μέτρο του Young $E_{bone} = 14 \text{ GPa}$, λόγο Poisson $\nu_{bone} = 0.37$ και πυκνότητα $\rho_{bone} = 1500 \text{ Kg/m}^3$. Το πάχος της πλάκας είναι 4 mm, που αντιστοιχεί σε μια ρεαλιστική τιμή για το πάχος του φλοιού ορισμένων τύπων ανθρώπινων μακρών οστών [8]. Με βάση τις τιμές αυτές, η διαμήκης και εγκάρσια ταχύτητα που προκύπτει είναι 4063 m/s και 1846 m/s αντίστοιχα. Όσον αφορά στο χαρακτηριστικό μήκος h , επιλέχθηκαν δύο τιμές Στην πρώτη περίπτωση η οποία υποδηλώνεται ως Περίπτωση-1, υποθέσαμε ότι $h = 10^{-4} \text{ m}$, ενώ στη δεύτερη (Περίπτωση-2), ισχύει $h = 10^{-5} \text{ m}$. Εφόσον για τα χαρακτηριστικά μήκη δεν έχουν αναφερθεί συγκεκριμένες τιμές στη

βιβλιογραφία, για κάθε μια από τις προαναφερθείσες τιμές του h υποθέσαμε τρεις υποπεριπτώσεις για το g , οι οποίες αντιστοιχούσαν σε έξι συνδυασμούς μεταξύ τους.

Πιο συγκεκριμένα, οι δύο πρώτες υποπεριπτώσεις της Περίπτωσης-1 (Περίπτωση-1α και Περίπτωση-1β), αντιστοιχούσαν σε τιμές για το g οι οποίες ήταν υψηλότερες και χαμηλότερες από το h αντίστοιχα. Στην τρίτη υποπερίπτωση οι τιμές των δύο παραμέτρων ήταν ίσες. Αντιστοίχως, κατασκευάστηκαν τρεις επιπλέον υποπεριπτώσεις για την Περίπτωση-2. Οι τιμές που επιλέχθηκαν για τις παραμέτρους για όλες τις περιπτώσεις, όπως παρουσιάζονται στον Πίνακα 6.1, ήταν της τάξης του μεγέθους της μικροδομής του οστού (Αβέρσεια συστήματα, οστεώνες) δηλ. 10-500 μm [13].

Παρακάτω παρουσιάζονται οι κυματοδηγούμενοι ρυθμοί που διαδίδονται σε δισδιάστατη πλάκα με μικροδομή υπολογιζόμενοι για τους διαφορετικούς συνδυασμούς των παραμέτρων g και h . Οι συμμετρικοί και αντισυμμετρικοί ρυθμοί αναπαρίστανται με τη μορφή καμπυλών συχνότητας-ταχύτητας ομάδας (f, c_g) και συμβολίζονται με g_S_n και g_A_n αντίστοιχα, όπου $n = 0, 1, 2, \dots$ ο αριθμός του κάθε ρυθμού.

Η αριθμητική επίλυση του προβλήματος επετεύχθη χρησιμοποιώντας ένα λογισμικό συμβολικής άλγεβρας (Mathematica, Wolfram Research Inc., IL, USA) [54]. Για τη διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο εξαρτώνται τα αποτελέσματα από το βήμα συχνοτήτων πραγματοποιήθηκαν διαφορετικές σειρές υπολογισμών στις οποίες το βήμα συχνοτήτων σταδιακά μειωνόταν. Οι καμπύλες διασποράς ταχυτήτων που παρουσιάζονται στην παρούσα εργασία υπολογίσθηκαν με βήμα 10 Krad/sec, εφόσον για μικρότερα βήματα δεν παρατηρήθηκαν διαφορές στις καμπύλες. Στα Σχήματα 6.2(α-γ) παρουσιάζονται οι καμπύλες διασποράς ταχυτήτων ομάδας των συμμετρικών ρυθμών για τις Περιπτώσεις-1α, 1β και 1γ αντίστοιχως. Για λόγους σύγκρισης, σε κάθε σχήμα παρουσιάζονται επίσης (με συμπαγείς γραμμές) και οι αντίστοιχες καμπύλες των ρυθμών Lamb της κλασικής θεωρίας ελαστικότητας υπολογιζόμενες για μια πλάκα με όμοια γεωμετρικά χαρακτηριστικά και μηχανικές ιδιότητες. Οι ρυθμοί Lamb συμβολίζονται με S_n και A_n , όπου $n = 0, 1, 2, \dots$. Όπως φαίνεται στα Σχήματα 2(α) και (β), το εγκάρσιο κύμα που προκύπτει στη θεωρία βαθμίδας (το οποίο συμβολίζεται ως g_c_T) παρουσιάζει διασπορά, αποτέλεσμα που συνάδει με τις καμπύλες του Σχήματος

1. Πιο συγκεκριμένα στο Σχήμα 2(α), που αναπαριστά την Περίπτωση-1α ($g > h$) φαίνεται ότι για μηδενική συχνότητα η ταχύτητα του εγκάρσιου κύματος στη θεωρία βαθμίδας είναι ίση με την εγκάρσια ταχύτητα του μέσου στην κλασσική θεωρία ελαστικότητας (η οποία αναπαρίσταται στο Σχήμα με την ευθεία συμπαγή γραμμή που εκτείνεται κατά μήκος ολόκληρου του φάσματος συχνοτήτων και συμβολίζεται ως c_T). Καθώς αυξάνεται η συχνότητα, η καμπύλη διασποράς του εγκάρσιου κύματος που προβλέπεται από την θεωρία βαθμίδας, αποκλίνει σημαντικά από την αντίστοιχη σταθερή τιμή της κλασσικής περίπτωσης, λαμβάνοντας υψηλότερες τιμές. Αντιθέτως, στην Περίπτωση-1β ($g < h$), η ταχύτητα g_{c_T} λαμβάνει χαμηλότερες τιμές από τη c_T και η διαφοροποίηση ξεκινά μετά από τη συχνότητα ίση με 0.37 MHz. Παρόλα αυτά, η απόκλιση από τη c_T στην περίπτωση αυτή είναι λιγότερο έντονη απ'ότι στην Περίπτωση-1α. Τέλος, στην Περίπτωση-1γ ($g = h$), η ταχύτητα του εγκάρσιου κύματος στη θεωρία βαθμίδας δεν παρουσιάζει διασπορά, δηλ. η τιμή της παραμένει σταθερή αυξανόμενης της συχνότητας, γεγονός που ήταν αναμενόμενο και από τη θεωρία.

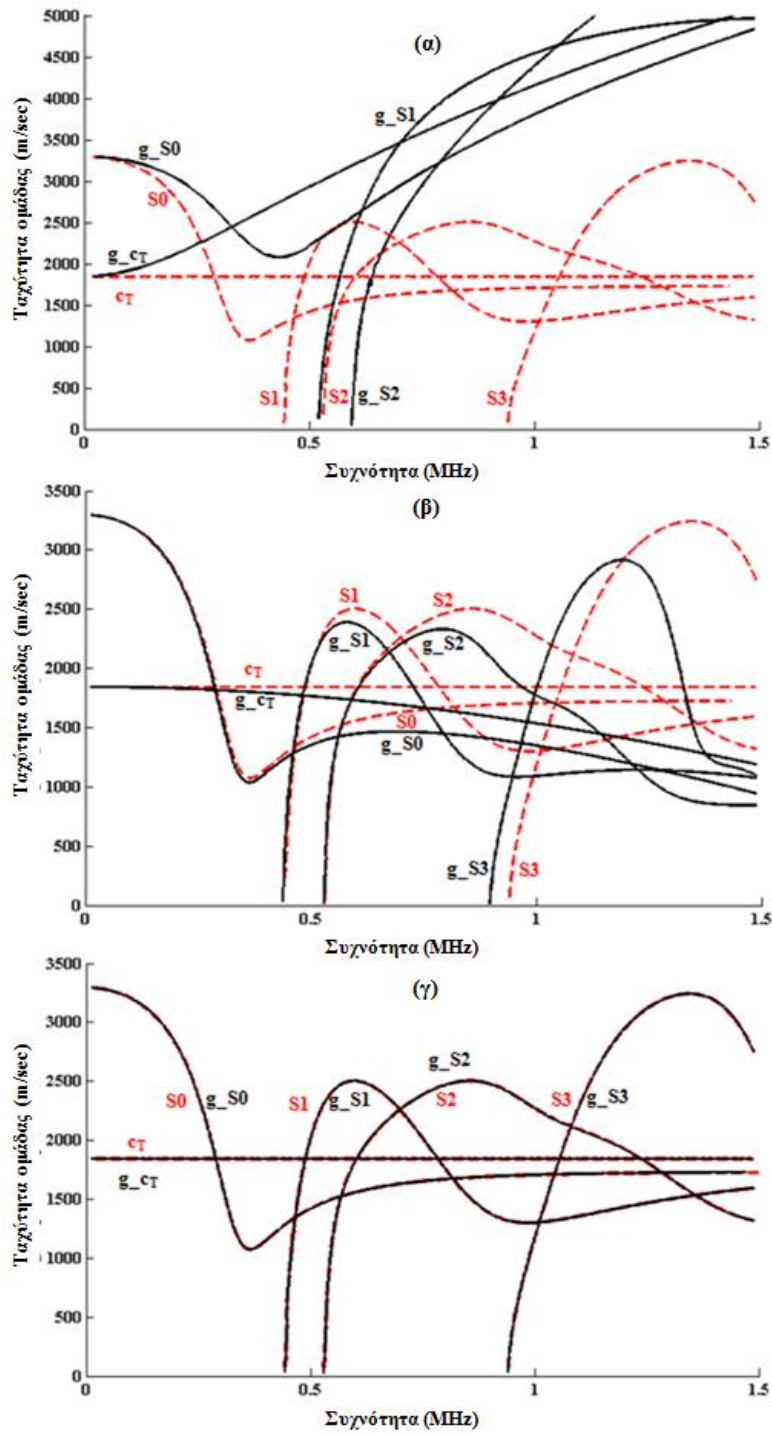
Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2(α), η διασπορά των κυματοδηγούμενων ρυθμών που προβλέπεται από τη θεωρία βαθμίδας διαφοροποιείται σημαντικά από αυτή της κλασσικής περίπτωσης. Η ταχύτητα του χαμηλότερης τάξης g_{S0} ρυθμού είναι παρόμοια με αυτή του Lamb S0 ρυθμού για πολύ χαμηλές συχνότητες (έως 0.06 MHz). Παρόλα αυτά, ο S0 ρυθμός για μεγαλύτερες συχνότητες αποκλίνει σημαντικά από τον g_{S0} . Είναι γνωστό ότι οι ταχύτητες των S0 και A0 Lamb ρυθμών καθώς αυξάνεται η συχνότητα τείνουν ασυμπτωτικά στην ταχύτητα του Rayleigh κύματος [1].

Η ταχύτητα του g_{S0} ρυθμού φαίνεται ότι τείνει στην ταχύτητα του εγκάρσιου κύματος το οποίο πλέον παρουσιάζει διασπορά. Δεδομένου του ότι στην κλασσική ελαστικότητα η ταχύτητα Rayleigh είναι πολύ κοντά στην εγκάρσια ταχύτητα του μέσου ($c_R = 0.92c_T$, όπου c_R είναι η ταχύτητα Rayleigh) [56], θα μπορούσε να πει κανείς ότι ο g_{S0} ρυθμός συγκλίνει ουσιαστικά στην ταχύτητα του Rayleigh κύματος, το οποίο σύμφωνα με τους [38] στη θεωρία ελαστικότητας βαθμίδας παρουσιάζει και αυτό διασπορά.

Η ταχύτητα διασποράς των ρυθμών υψηλότερης τάξης είναι εξίσου σημαντικά διαφοροποιημένη από αυτή των αντίστοιχων ρυθμών Lamb ακόμη και σε χαμηλές

συχνότητες. Πιο συγκεκριμένα, οι ρυθμοί g_{S1} και g_{S2} έχουν διαφορετικές συχνότητες αποκοπής (0.52 MHz και 0.59 MHz, αντιστοίχως) και οι ταχύτητες ομάδας τους αυξάνονται ταχύτατα καθώς αυξάνεται η συχνότητα. Επιπλέον, η ταχύτητα ομάδας του g_{S1} ρυθμού φαίνεται ότι συγκλίνει στην ταχύτητα του εγκάρσιου κύματος που προβλέπει η θεωρία ελαστικότητας βαθμίδας (αξίζει να σημειωθεί ότι στην κλασική θεωρία οι ταχύτητες των Lamb ρυθμών ανώτερης τάξης συγκλίνουν στην εγκάρσια ταχύτητα του οστού). Παρόλα αυτά, στην συγκεκριμένη περίπτωση η σύγκλιση αναμένεται σε υψηλότερες συχνότητες από αυτές που παρουσιάζονται στην παρούσα μελέτη. Αναμένεται επίσης και η διάδοση επιπρόσθετων ρυθμών όπως είναι ο g_{S3} . Η συχνότητα αποκοπής όμως των ρυθμών αυτών είναι μεγαλύτερη από 1.5 MHz. Παρομοίως, στην Περίπτωση-1β ($g < h$), οι καμπύλες διασποράς των κυματοδηγούμενων ρυθμών αποκλίνουν εξίσου από τους αντίστοιχους Lamb ρυθμούς (σε αυτή την περίπτωση ο ρυθμός g_{S3} είναι εμφανής). Επιπρόσθετα, οι ταχύτητες ομάδας των ρυθμών στην θεωρία βαθμίδας λαμβάνουν επίσης χαμηλότερες τιμές από αυτές των ρυθμών Lamb γεγονός που είναι σύμφωνο με τη συμπεριφορά του εγκάρσιου κύματος. Ωστόσο, οι αποκλίσεις είναι και πάλι λιγότερο έντονες από την Περίπτωση-1α. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η σύγκλιση των ταχυτήτων των ρυθμών στην εγκάρσια ταχύτητα είναι πιο ευδιάκριτη.

Όπως ήταν αναμενόμενο (Σχήμα 1), το διαμήκες κύμα, το οποίο συμβολίζεται στα Σήματα ως g_{cL} , παρουσιάζει διασπορά.

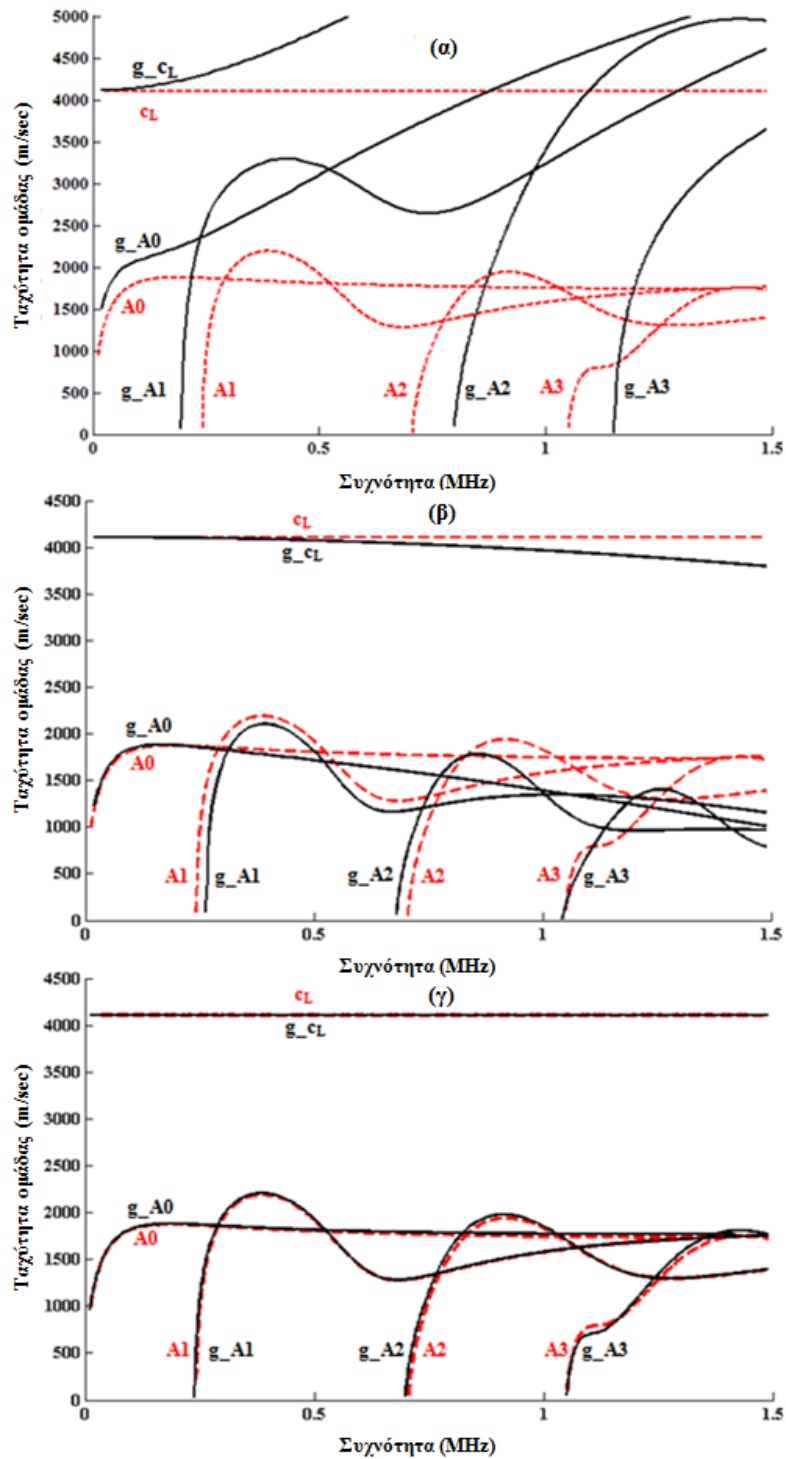


Σχήμα 6.2. Καμπύλες διασποράς ταχυτήτων ομάδας των συμμετρικών κυματοδηγούμενων ρυθμών για ελεύθερη πλάκα με ιδιότητες όμοιες με αυτές του οστού για την περίπτωση της κλασσικής ελαστικότητας (διακεκομμένες γραμμές) και για την περίπτωση θεωρίας ελαστικότητας τύπου βαθμίδας (συμπαγείς γραμμές). (α) Περίπτωση-1α: $g > h$, ($g = 5 \times 10^{-4}$, $h = 10^{-4}$ m), (β) Περίπτωση-1β: $g < h$, ($g = 10^{-5}$, $h = 10^{-4}$ m) και (γ) Περίπτωση-1γ: $g = h$, ($g = 10^{-4}$, $h = 10^{-4}$ m).

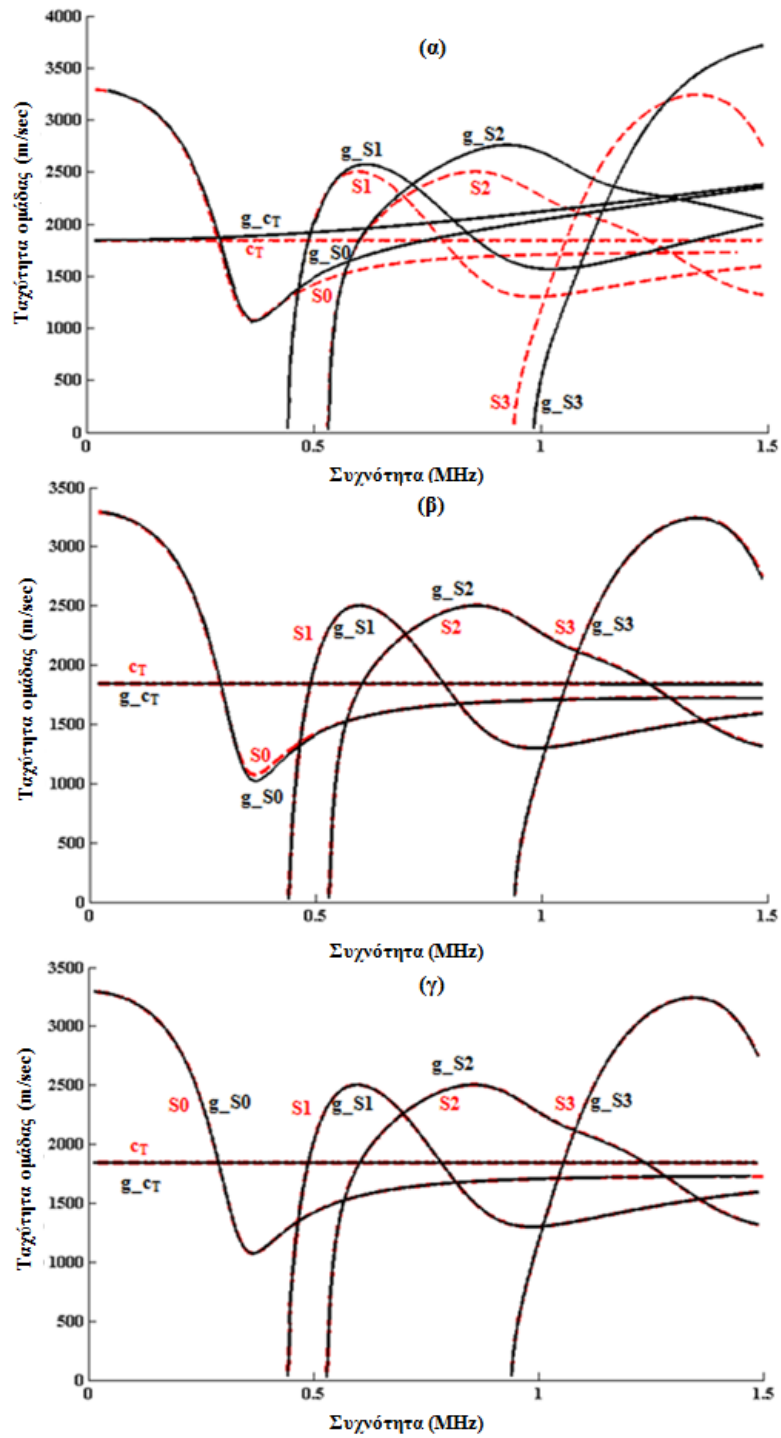
Η διαμήκης ταχύτητα g_{cL} , σε πολύ χαμηλές συχνότητες είναι ίση με την ταχύτητα του διαμήκους κύματος στην κλασική περίπτωση (η οποία απεικονίζεται με την ευθεία συμπαγή γραμμή και συμβολίζεται ως c_L). Ωστόσο, η ταχύτητα g_{cL} στην Περίπτωση-1α, αυξάνεται καθώς αυξάνεται η συχνότητα ενώ στην Περίπτωση-1β μειώνεται, εμφανίζοντας παρόμοια συμπεριφορά με αυτή του αντίστοιχου εγκάρσιου κύματος. Στην Περίπτωση-1γ, όπως ήταν αναμενόμενο, το διαμήκες κύμα στην περίπτωση της θεωρίας ελαστικότητας βαθμίδας δεν παρουσιάζει διασπορά.

Παρόμοια συμπεράσματα προκύπτουν και για τη διασπορά ταχυτήτων ομάδας των αντισυμμετρικών ρυθμών. Πιο συγκεκριμένα, στην Περίπτωση-1α (Σχήμα 6.3 (α)), οι ταχύτητες ομάδας των g_{A0} και g_{A1} ρυθμών σε πολύ χαμηλές συχνότητες είναι παρόμοιες με τις αντίστοιχες ταχύτητες των $A0$ και $A1$ Lamb ρυθμών, όμως καθώς αυξάνεται η συχνότητα αυξάνονται σημαντικά. Ανάλογη συμπεριφορά παρατηρείται επίσης και για τους g_{A2} και g_{A3} ρυθμούς. Στην Περίπτωση-1β (Σχήμα 6.3 (β)), οι ταχύτητες ομάδας είναι χαμηλότερες από τις αντίστοιχες των ρυθμών Lamb λόγω της μικροδομής. Η διαφοροποίηση από την κλασική περίπτωση είναι και πάλι λιγότερο έντονη απ' ό,τι στην Περίπτωση-1α. Τέλος, στην Περίπτωση-1γ (Σχήμα 6.3 (γ)), οι καμπύλες διασποράς ταυτίζονται και πάλι με τις αντίστοιχες καμπύλες των ρυθμών Lamb.

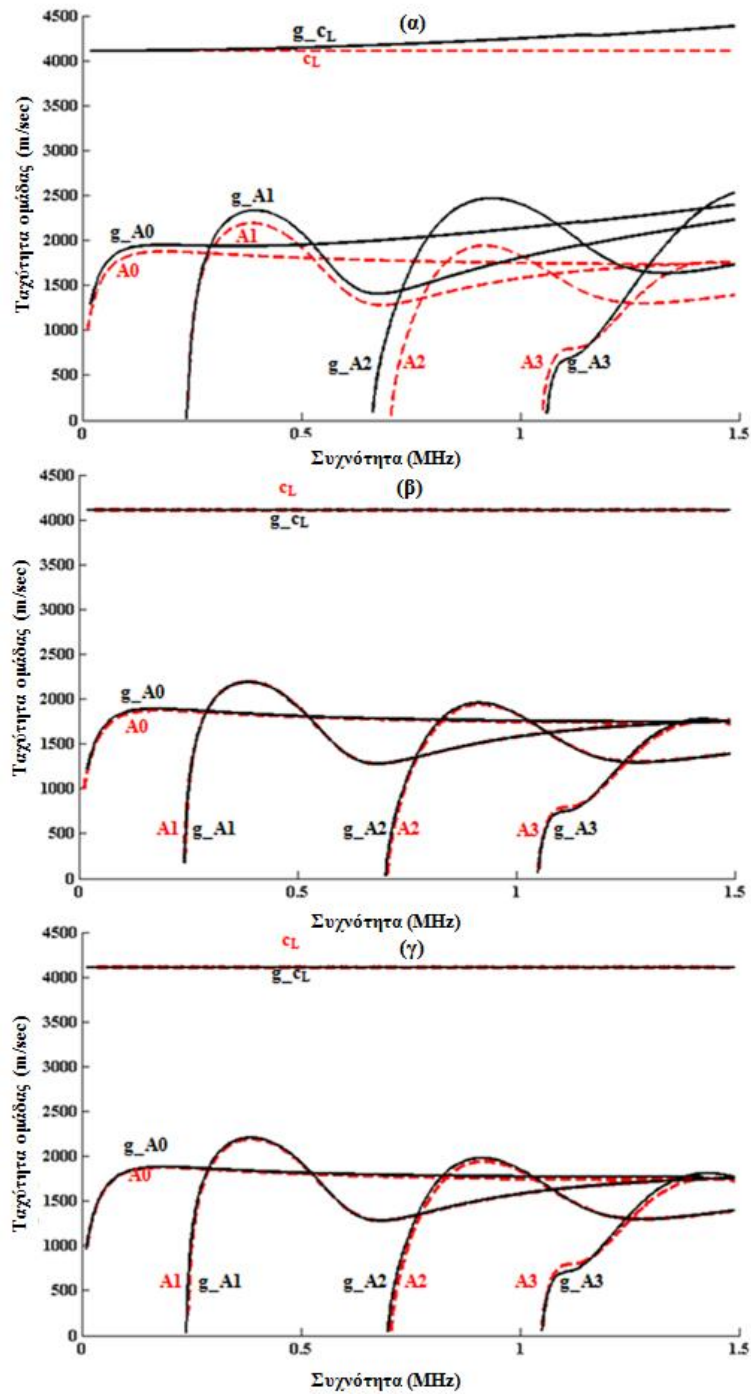
Στα Σχήματα 6.4 (α-γ) και 6.5 (α-γ) αναπαρίστανται οι καμπύλες διασποράς ταχυτήτων ομάδας που υπολογίστηκαν για την Περίπτωση-2, δηλ. για $h = 10^{-5}$ m. Παρόμοια συμπεράσματα με αυτά της Περίπτωσης-1, μπορούν να εξαχθούν και για τις Περιπτώσεις-2α και 2γ (Σχήματα 6.4 (α), (γ) και Σχήματα 6.5 (α), (γ)), όμως η επίδραση της μικροδομής είναι λιγότερο εμφανής σε σχέση με τις Περιπτώσεις-1α,1γ (Σχήματα 6.2 (α),(γ) και 6.3 (α),(γ)). Ωστόσο στην Περίπτωση-2β δηλ. για $g = 5 \times 10^{-6}$ m, οι καμπύλες που προκύπτουν για τους συμμετρικούς και αντισυμμετρικούς ρυθμούς είναι σχεδόν ταυτόσημες με αυτές της κλασικής θεωρίας ελαστικότητας.



Σχήμα 6.3. Καμπύλες διασποράς ταχυτήτων ομάδας των αντισυμμετρικών κυματοδηγούμενων ρυθμών για ελεύθερη πλάκα με ιδιότητες όμοιες με αυτές του οστού για την περίπτωση της κλασσικής ελαστικότητας (διακεκομμένες γραμμές) και για την περίπτωση θεωρίας ελαστικότητας τύπου βαθμίδας (συμπαγείς γραμμές). (α) Περίπτωση-1α: $g > h$, ($g = 5 \times 10^{-4}$, $h = 10^{-4}$ m), (β) Περίπτωση-1β: $g < h$, ($g = 10^{-5}$, $h = 10^{-4}$ m) και (γ) Περίπτωση-1γ: $g = h$, ($g = 10^{-4}$, $h = 10^{-4}$ m).



Σχήμα 6.4. Καμπύλες διασποράς ταχυτήτων ομάδας των συμμετρικών κυματοδηγούμενων ρυθμών για ελεύθερη πλάκα με ιδιότητες οστού για τις περιπτώσεις της κλασσικής ελαστικότητας (διακεκομμένες γραμμές) και της θεωρίας ελαστικότητας τύπου βαθμίδας (συμπαγείς γραμμές). (α) Περίπτωση-2α: $g > h$, ($g = 10^{-4}$, $h = 10^{-5}$ m), (β) Περίπτωση-2β: $g < h$, ($g = 5 \times 10^{-6}$, $h = 10^{-5}$ m) και (γ) Περίπτωση-2γ: $g = h$, ($g = 10^{-5}$, $h = 10^{-5}$ m).



Σχήμα 6.5. Καμπύλες διασποράς ταχυτήτων ομάδας των αντισυμμετρικών κυματοδηγούμενων ρυθμών για ελεύθερη πλάκα με ιδιότητες οστού για τις περιπτώσεις της κλασσικής ελαστικότητας (διακεκομμένες γραμμές) και της θεωρίας ελαστικότητας τύπου βαθμίδα (συμπαγείς γραμμές). (α) Περίπτωση-2α: $g > h$, ($g = 10^{-4}$, $h = 10^{-5}$ m), (β) Περίπτωση-2β: $g < h$, ($g = 5 \times 10^{-6}$, $h = 10^{-5}$ m) και (γ) Περίπτωση-2γ: $g = h$, ($g = 10^{-5}$, $h = 10^{-5}$ m).

6.6 Συζήτηση

Στην παρούσα εργασία, παρουσιάστηκε μια μελέτη διάδοσης υπερήχων σε ελεύθερη πλάκα με μικροδομή. Η δυναμική συμπεριφορά της 2D πλάκας μελετήθηκε με βάση τη διπολική θεωρία βαθμίδας (dipolar gradient theory) που αποτελεί την απλούστερη μορφή της θεωρία βαθμίδας ελαστικότητας κατά Mindlin. Επιπλέον πραγματοποιήθηκαν συγκρίσεις με τις λύσεις του αντίστοιχου προβλήματος Lamb της κλασσικής ελαστικότητας έτσι ώστε να διερευνηθεί η επίδραση της μικροδομής στη διάδοση των κυματοδηγούμενων ρυθμών σε 2D πλάκες. Οι καμπύλες ταχυτήτων ομάδας υπολογίστηκαν για την περίπτωση στην οποία το μέσο έχει ιδιότητες όμοιες με αυτές του συμπαγούς οστού.

Το οστό είναι ένα υλικό με μικροδομή του οποίου η μηχανική συμπεριφορά μπορεί να περιγραφεί επιτυχώς χρησιμοποιώντας θεωρίες ελαστικότητας ανώτερων βαθμίδων. Παρά το γεγονός ότι σε προηγούμενες εργασίες [21, 27] έχουν προταθεί διάφορες τέτοιες θεωρίες για τη μελέτη της μικρομηχανικής συμπεριφοράς του οστού, μόνο οι θεωρίες ζεύγους τάσεων (κυρίως η θεωρία Cosserat και η μικροπολική θεωρία (micropolar theory)) έχουν χρησιμοποιηθεί τελικώς για το σκοπό αυτό. Το γεγονός αυτό οφείλεται κυρίως στο ότι: (i) η χρήση των μικροπολικών θεωριών και θεωριών Cosserat σε προβλήματα κάμψης και στρέψης φαίνεται να είναι πιο λογική λόγω της εισαγωγής ζεύγους τάσεων σε τέτοιου είδους προβλήματα, (ii) οι θεωρίες ελαστικότητας ανώτερων βαθμίδων κατά Mindlin όπως είχαν αρχικά προταθεί ήταν πολύπλοκες σε σχέση με αυτές του ζεύγους τάσεων και (iii) όσον αφορά στην αριθμητική επίλυση προβλημάτων, οι παράγωγοι τέταρτης τάξης που εισάγονται στους διαφορικούς τελεστές των τέταρτης τάξης εξισώσεων ισορροπίας και εξισώσεων κίνησης των θεωριών ανώτερων βαθμίδων ελαστικότητας, καθιστούν δύσκολη τη δημιουργία αλγορίθμων πεπερασμένων στοιχείων εφόσον απαιτείται η χρήση $C^{(1)}$ -στοιχείων συνέχειας. Ωστόσο την τελευταία δεκαετία, οι απλοποιημένες μορφές της γενικής θεωρίας ελαστικότητας με μικροδομή κατά Mindlin χαίρουν ιδιαίτερης προσοχής αφού: (i) απαιτείται ο προσδιορισμός πολύ λιγότερων επιπρόσθετων παραμέτρων για την επίλυση ελαστικών προβλημάτων (μόνο μιας παραμέτρου για στατικά προβλήματα και δύο για δυναμικά) σε σχέση με αυτές που απαιτούνται στις θεωρίες ζεύγους τάσεων (τέσσερις παράμετροι), (ii) σε αντίθεση με τις θεωρίες Cosserat και τις μικροπολικές θεωρίες, οι τανυστές που εισάγονται στις

προαναφερθείσες θεωρίες βαθμίδας είναι συμμετρικοί και συνεπώς έχουν πιο απλή μαθηματική επίλυση και πιο κατανοητή από φυσικής απόψεως και (iii) όσον αφορά σε μηχανικά προβλήματα ρωγμών (τα οποία είναι πολύ σημαντικά για εφαρμογές σε οστά), τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη χρήση των θεωριών ελαστικότητας βαθμίδας είναι πιο ρεαλιστικά από αυτά των θεωριών ζεύγους τάσεων [55-59] εφόσον με τις πρώτες είναι εφικτή η πρόβλεψη φαινομένων που έχουν παρατηρηθεί πειραματικά και σχετίζονται με ραμφοειδείς όψεις ρωγμών και με την ανάπτυξη ζώνης στο μπροστινό άκρο της ρωγμής.

Το πρόβλημα της κυματικής διάδοσης σε πλάκες με μικροδομή έχει επιλυθεί αναλυτικά σε προηγούμενη μελέτη στα πλαίσια της θεωρίας Cosserat [32]. Το ίδιο πρόβλημα επιλύεται στην παρούσα εργασία χρησιμοποιώντας την διπολική θεωρία ελαστικότητας βαθμίδας. Εφόσον ο προσδιορισμός των παραμέτρων εσωτερικής κλίμακας μήκους παραμένει ανοιχτό θέμα στη βιβλιογραφία, μελετήθηκαν έξι διαφορετικοί συνδυασμοί μεταξύ του συντελεστή βαθμίδας g και του εσωτερικού μήκους αδράνειας h . Σε όλες τις υποπεριπτώσεις που μελετήθηκαν, οι επιλεγμένες τιμές των παραμέτρων αυτών (βλ. Πίνακα 6.1) ήταν σύμφωνες με αυτές που έχουν χρησιμοποιηθεί σε προηγούμενες πειραματικές μελέτες σε οστά [42] και ήταν κοντά στο μέγεθος των οστεώνων δηλ., το επίπεδο μικροδομής στην ιεραρχική οργάνωση της δομής του οστού [13]. Η τιμή $g = 10^{-3}$ m στην Περίπτωση-1 αγνοήθηκε σκοπίμως λόγω του ότι προκύπτουν πολύ μεγάλες ταχύτητες ομάδας οι οποίες δεν είναι δυνατό να φανούν στα γραφήματα. Επιπρόσθετα στην Περίπτωση-2β για $g = 5 \cdot 10^{-6}$ m παρατηρήσαμε ότι οι καμπύλες διασποράς είναι παρόμοιες με τις αντίστοιχες της κλασσικής ελαστικότητας (το ίδιο συνέβη και για $g = 5 \cdot 10^{-6}$ m, αν και δεν παρουσιάζεται στην παρούσα μελέτη). Από τα αποτελέσματα που προέκυψαν καθίσταται σαφές ότι οι τιμές των δυο παραμέτρων κλίμακας μήκους παίζουν καθοριστικό ρόλο στη συμπεριφορά της ταχύτητας των κυματοδηγούμενων ρυθμών, εφόσον οι διαφοροποιήσεις που παρατηρήθηκαν για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων κυμαίνονταν από πολύ μεγάλες μέχρι μηδενικές. Στην περίπτωση που τα χαρακτηριστικά μήκη g και h είχαν μηδενική τιμή ή ήταν ίσα μεταξύ τους, με βάση τη θεωρία ελαστικότητας βαθμίδας προκύπτουν ταυτόσημες καμπύλες διασποράς ταχυτήτων με αυτές που προβλέπει η κλασσική θεωρία. Το

γεγονός αυτό απεδείχθη και από τα αριθμητικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται στα Σχήματα 6.2 (γ), 6.3 (γ), 6.4 (γ) και 6.5 (γ).

Είναι προφανές ότι οι τιμές των συντελεστών μικροδομής καθώς και η μεταξύ τους συσχέτιση μπορούν να προσδιοριστούν με ρεαλιστικό τρόπο μόνο μέσω συγκρίσεων μεταξύ των πειραματικών μετρήσεων και των αποτελεσμάτων που προβλέπονται από τη θεωρία. Σε μία πρόσφατη αναλυτική εργασία [38] όπου μελετήθηκε η διάδοση του κύματος Rayleigh σε ημι-άπειρο χώρο με μικροδομή, οι συγγραφείς πρότειναν την τιμή $g = 4 \times 10^{-5}$ m ως την καταλληλότερη για την πλήρη περιγραφή της διασποράς του κύματος Rayleigh σε ένα γεωυλικό (geomaterial). Ωστόσο, είναι σαφές ότι οι τιμές των εσωτερικών χαρακτηριστικών μηκών ποικίλουν αναλόγως με τις μηχανικές ιδιότητες του εξεταζόμενου υλικού.

Όπως παρουσιάζεται στα Σχήματα 6.2, 6.3 και 6.4, τα διαμήκη και εγκάρσια επίπεδα κύματα που διαδίδονται σε πλάκα με μικροδομή, παρουσιάζουν διασπορά, γεγονός το οποίο προβλέπεται και από την θεωρητική Εξ. (27) και συνάδει με τις καμπύλες του Σχήματος 1. Για ορισμένους συνδυασμούς των g και h , οι ταχύτητες των εγκάρσιων και διαμηκών κυμάτων απέκλιναν σημαντικά από τις αντίστοιχες σταθερές τιμές που προβλέπει η κλασσική θεωρία ελαστικότητας. Για παράδειγμα στην Περίπτωση-1α για συχνότητα 1MHz, δηλ. για μήκος κύματος ≈ 4 mm, παρατηρήθηκε ότι η ταχύτητα του διαμήκους κύματος στη θεωρία βαθμίδας διέφερε κατά 52% από την αντίστοιχη τιμή στην κλασσική θεωρία. Το γεγονός αυτό πιθανώς παίζει σημαντικό ρόλο στην ερμηνεία μετρήσεων ταχύτητας αξονικής διάδοσης υπερήχων κατά μήκος του μακρού άξονα του οστού, όπως αναφέρεται σε προηγούμενες πειραματικές μελέτες [5,8]. Βρέθηκε επίσης ότι για διαφορετικούς συνδυασμούς των g και h οι κυματοδηγούμενοι ρυθμοί ήταν σημαντικά διαφοροποιημένοι από τους Lamb ρυθμούς στο φάσμα συχνοτήτων από 0.5 MHz (δηλ. για μήκος κύματος ≈ 8 mm) έως 1.5 MHz (δηλ. για μήκος κύματος ≈ 2.7 mm), το οποίο χρησιμοποιείται ευρέως σε μελέτες διάδοσης υπερήχων σε οστά. Σε μια προηγούμενη μελέτη [9], όπου πραγματοποιήθηκαν *ex-vivo* μετρήσεις στη μεσότητα άθικτης κνήμης προβάτου παρατηρήσαμε ότι οι διαδιδόμενοι ρυθμοί στο οστό δεν ήταν εφικτό να εντοπιστούν στην αναπαράσταση χρόνου-συχνότητας των ληφθέντων σημάτων από τους ρυθμούς Lamb για 2Δ πλάκα με ιδιότητες όμοιες με αυτές το οστού. Συνεπώς, η θεωρία Lamb έχει περιορισμένη ικανότητα πρόβλεψης

φαινομένων κυματοδότησης σε αληθινά οστά. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώθηκε και από τα ευρήματα δύο διαδοχικών τρισδιάστατων (3D) υπολογιστικών μελετών [1,10] καταδεικνύοντας ότι για την ίδια συχνότητα διέγερσης, η ακανόνιστη αυλοειδής γεωμετρία του φλοιού, καθώς και η ανισοτροπία και ανομοιογένεια του οστού, προκαλεί σημαντικές αλλαγές στη διάδοση των ρυθμών που προβλέπεται από την κλασική θεωρία. Με βάση τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας, είναι σαφές ότι η διασπορά υλικού, δηλ. η εξάρτηση των ιδιοτήτων του οστού (όπως η διαμήκης και εγκάρσια ταχύτητα) από τη συχνότητα, η οποία εισάγεται εξαιτίας της μικροδομής του οστού ακόμη και σε συχνότητες αρκετά χαμηλότερες από 1 MHz, αποτελεί έναν επιπλέον παράγοντα ο οποίος επηρεάζει σημαντικά τα χαρακτηριστικά της κυματικής διάδοσης στα οστά. Σε πολύ χαμηλές συχνότητες, δεν παρατηρήθηκαν σημαντικές διαφορές μεταξύ κλασικής θεωρίας και θεωρίας βαθμίδας. Η παρατήρηση αυτή πιθανώς να δικαιολογεί και το ότι προηγούμενες μελέτες παρείχαν ικανοποιητική αναπαράσταση των διαδιδόμενων ρυθμών στο οστό χρησιμοποιώντας απλά μοντέλα ομογενούς πλάκας ή κυλίνδρου.

Σε ρεαλιστικές εφαρμογές αξονικής διάδοσης, το οστό είναι σε επαφή με τους υπερκείμενους μαλακούς ιστούς οι οποίοι παρέχουν μονοπάτια διαρροής της υπερηχητικής ενέργειας με αποτέλεσμα να δημιουργούνται οι λεγόμενοι διαρρέοντες ρυθμοί (leaky Lamb modes). Ωστόσο, η διασπορά ταχύτητας των διαρρέοντων ρυθμών διαφέρει από αυτή των ρυθμών Lamb [54]. Η επίδραση των υπερκείμενων μαλακών ιστών στην κυματική διασπορά θα μπορούσε να ληφθεί υπ' όψιν στο εξεταζόμενο πρόβλημα της 2D πλάκας με μικροδομή εφαρμόζοντας συνθήκες συνέχειας στις διεπιφάνειες μεταξύ της πλάκας και των μαλακών ιστών, όπως θα συνέβαινε και στην κλασική περίπτωση. Ωστόσο, με βάση τη θεωρία ελαστικότητας βαθμίδας στο συγκεκριμένο πρόβλημα είναι απαραίτητη η επιβολή συνθηκών συνέχειας όχι μόνο τάσεων και μετατοπίσεων (όπως στην κλασική ελαστικότητα) αλλά και της βαθμίδας των μετατοπίσεων και διπλών τάσεων. Μια επιπρόσθετη απλοποιημένη υπόθεση στην παρούσα μελέτη αποτελεί το γεγονός ότι η ανισοτροπία του οστού δεν ελήφθη υπ' όψιν. Η εισαγωγή ενός ανισοτροπικού καταστατικού νόμου στο συγκεκριμένο θεωρητικό μοντέλο προϋποθέτει την ενσωμάτωση επιπρόσθετων ελαστικών παραμέτρων στην εξίσωση πυκνότητας δυναμικής ενέργειας \hat{W} , γεγονός που θα καθιστούσε το πρόβλημα σημαντικά πιο περίπλοκο. Επομένως, η ανισοτροπία του

οστού θα μπορούσε να συμπεριληφθεί στο παρόν θεωρητικό μοντέλο καθιστώντας ωστόσο αναγκαία τη θεωρητική και αριθμητική επίλυση πολύπλοκων εξισώσεων.

Αν και η συγκεκριμένη ανάλυση αποδείχθηκε ότι η μικροδομή επηρεάζει σημαντικά τη διάδοση των κυματοδηγούμενων ρυθμών, τα θεωρητικά αποτελέσματα θα πρέπει να ερμηνεύονται προσεκτικά και να συγκρίνονται με κλινικές μετρήσεις.

6.7 Εφαρμογή των θεωρητικών κυματοδηγούμενων ρυθμών με βάση τη θεωρία ελαστικότητας τύπου βαθμίδας σε *ex-vivo* μετρήσεις σε άθικτο οστό

Στην παρούσα υποενότητα παρουσιάζουμε μια μελέτη που αποτελεί επέκταση της προαναφερθείσας εργασίας που είχε σαν σκοπό τη διερεύνηση του ενδεχόμενου η θεωρία ελαστικότητας βαθμίδας να παρέχει πιο ακριβή ερμηνεία μετρήσεων σε πραγματικά οστά από την κλασσική θεωρία Lamb. Αρχικά προσδιορίζονται αναλυτικά οι καμπύλες διασποράς των ρυθμών που διαδίδονται σε 2D πλάκες με μικροδομή και ιδιότητες όμοιες με αυτές του φλοιού οστού προβάτου. Στη συνέχεια, τα ληφθέντα σήματα από μετρήσεις σε άθικτη κνήμη προβάτου που διεξήχθησαν σε προηγούμενη εργασία αναλύονται στο πεδίο t-f. Τέλος, οι καμπύλες των κυματοδηγούμενων ρυθμών που προέκυψαν τόσο από τη θεωρία βαθμίδας όσο και από την κλασσική υπερτέθηκαν στις t-f αναπαραστάσεις ώστε να εξετάσουμε εάν ο εντοπισμός των πρώτων στις εικόνες είναι πιο ακριβής.

6.7.1 *Ex-vivo* Πειράματα

Στη συγκεκριμένη μελέτη αναλύθηκαν τα σήματα που ελήφθησαν από *ex-vivo* πειράματα σε άθικτο οστό κνήμης προβάτου όπως παρουσιάστηκαν σε προηγούμενη εργασία [9]. Κατά τη διεξαγωγή των πειραμάτων τα μαλακά μόρια αφαιρέθηκαν από το οστό. Επίσης, χρησιμοποιήθηκαν μετατροπείς συχνότητας 1 MHz. Οι μετατροπείς τοποθετήθηκαν κάθετα στην επιφάνεια του οστού σε άμεση επαφή με την επιφάνεια του οστού. Ακουστική σύζευξη (coupling) επιτεύχθηκε με χρήση κατάλληλου gel υπερήχων.

Οι μετρήσεις διεξήχθησαν στη μεσότητα της διάφυσης σε δυο ανατομικές θέσεις. Η διάταξη πομπού-δέκτη τοποθετήθηκε πρώτα στην έξω πλευρά του οστού και

ακολούθως στην πρόσθια. Και στις δυο περιπτώσεις, πραγματοποιήθηκαν μετρήσεις για διάφορες αποστάσεις μεταξύ πομπού και δέκτη χρησιμοποιώντας τη συσκευή υπερήχων που παρουσιάστηκε στη μελέτη [7]. Τα καταγεγραμμένα σήματα είχαν διάρκεια 200 μ s και συχνότητα δειγματοληψίας 40 Μδείγματα/s.

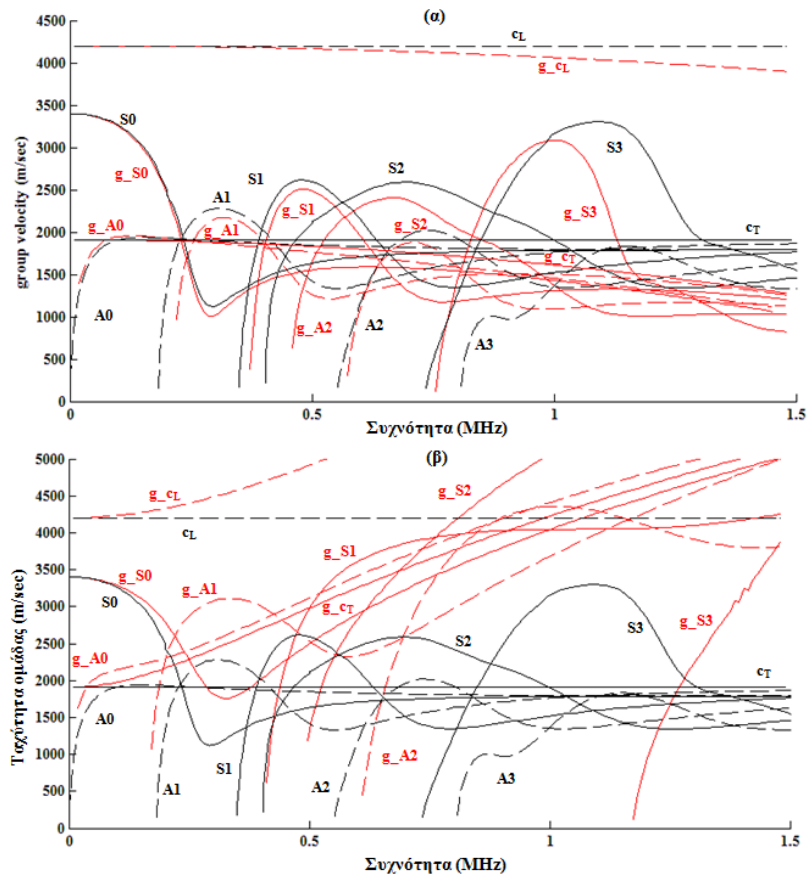
Οι τεχνικές προσδιορισμού των ιδιοτήτων του οστού όπως η οστική πυκνότητα, η μέση πυκνότητα και το μέτρο του Young αναφέρονται στην αρχική μελέτη [9]. Το πάχος του φλοιού και η εσωτερική διάμετρος του αυλού σε κάθε μία από τις περιοχές μετρήθηκαν με παχύμετρο. Το πάχος και η διάμετρος για κάθε περιοχή ήταν ο μέσος όρος τριών μετρήσεων: (α) στο επίπεδο του πομπού, και (β) 10 mm και (γ) 20 mm μακριά από τον πομπό προς της κατεύθυνση του δέκτη.

6.7.2 Αριθμητική επίλυση των κυματοδηγούμενων ρυθμών

Οι καμπύλες διασποράς ταχύτητας ομάδας-συχνότητας υπολογίστηκαν για δισδιάστατη πλάκα με μικροδομή με ιδιότητες όμοιες με αυτές που μετρήθηκαν στην άθικτη κνήμη προβάτου [9]. Πιο συγκεκριμένα η πυκνότητα της πλάκας ήταν 1483 Kg/m^3 και το μέτρο Young 14.52 GPa. Η ταχύτητα διάδοσης του διαμήκου κύματος που υπολογίζεται από τις παραπάνω τιμές και υποθέτοντας λόγο Poisson 0.37 είναι 4161 m/s. Υπολογίσαμε δυο σετ καμπυλών: το πρώτο αντιστοιχεί σε μια πλάκα με μικροδομή και πάχος ίσο με 5.21 mm και το δεύτερο για πάχος 4.19 mm. Οι τιμές αυτές αντιστοιχούν στις τιμές που μετρήθηκαν για το μέσο πάχος του φλοιού στην έξω και πρόσθια πλευρά του φλοιού αντίστοιχα.

Με βάση τα συμπεράσματα της ανάλυσης που πραγματοποιήθηκε στις προηγούμενες υποενότητες, μελετήθηκαν τέσσερις περιπτώσεις για τις τιμές των χαρακτηριστικών μεγεθών g , h , οι οποίες προκύπτουν από τις σχέσεις $g < h$ και $g > h$. Οι τιμές που επιλέχθηκαν ήταν παρόμοιες με αυτές της παραπάνω μελέτης και παρουσιάζονται στον Πίνακα 6.2.

Στα Σχήματα 6.6 (α),(β) παρουσιάζονται οι καμπύλες διασποράς ταχυτήτων ομάδας των συμμετρικών και αντισυμμετρικών ρυθμών που διαδίδονται σε πλάκα με μικροδομή και πάχος 4.19 mm για $g < h$ (Υποθέσεις-1α, 2α), και για $g > h$ (Υποθέσεις-1β, 2β). Στα σχήματα παρουσιάζονται επίσης και οι αντίστοιχοι ρυθμοί Lamb.



Σχήμα 6.6. Καμπύλες διασποράς ταχυτήτων ομάδας συμμετρικών και αντισυμμετρικών ρυθμών στη θεωρία τύπου βαθμίδας (κόκκινες γραμμές) υπολογιζόμενες για πλάκα με ιδιότητες όμοιες με αυτές οστού προβάτου για την (α) Υπόθεση-1α και (β) Υπόθεση-1β. Οι θεωρητικές καμπύλες των ρυθμών Lamb παρουσιάζονται με τις (μαύρες γραμμές).

Πίνακας 6.2 Τιμές των g και h για τις εξεταζόμενες Υποθέσεις

Υποθέσεις	Συντελεστής g (m)	Χαρακτηριστικό μήκος h (m)
Υπόθεση-1α	5×10^{-4}	10^{-4}
Υπόθεση -1β	10^{-5}	10^{-4}
Υπόθεση -2α	10^{-4}	10^{-5}
Υπόθεση -2β	7×10^{-6}	10^{-5}

6.7.3 Ανάλυση των σημάτων στο πεδίο χρόνου συχνότητας

Η ανάλυση των ληφθέντων σημάτων από τα πειράματα έγινε στο πεδίο χρόνου-συχνότητας. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκε η επαναπροσδιορισμένη εκδοχή της εξομαλυμένης ψευδο-Wigner-Ville κατανομής ενέργειας (RSPWV), η οποία έχει ικανοποιητική διακριτική ικανότητα [9]. Τα παράθυρα εξομάλυνσης χρόνου-συχνότητας που χρησιμοποιήθηκαν ήταν συναρτήσεις Hamming με μήκος $N/10$ σημείων, όπου N είναι ο αριθμός των σημείων του σήματος.

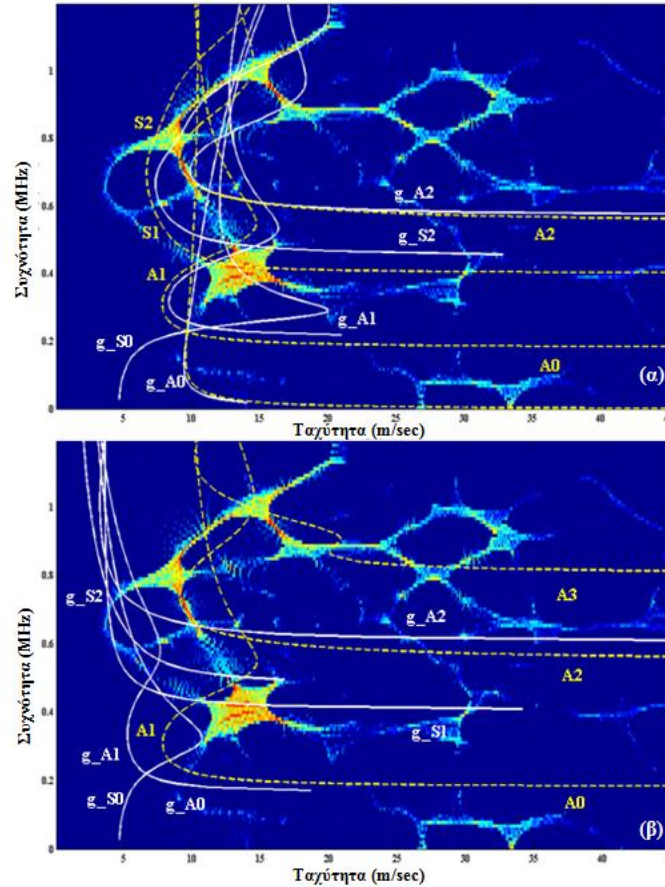
Για κάθε απόσταση πομπού-δέκτη, οι θεωρητικές καμπύλες της ταχύτητας ομάδος, c_g , συναρτήσει της συχνότητας, δηλ. καμπύλες (f, c_g) , που προέκυψαν από τη θεωρία βαθμίδας μετατράπηκαν σε καμπύλες (t, f) . Οι καμπύλες (t, f) στη συνέχεια υπερτέθηκαν στις αντίστοιχες εικόνες t-f των σημάτων. Με τον ίδιο τρόπο υπερτέθηκαν σε κάθε εικόνα t-f και οι αντίστοιχες καμπύλες των ρυθμών Lamb της κλασσικής ελαστικότητας.

6.7.4 Αποτελέσματα

Στα Σχήματα 6.7, 6.8 και 6.9 παρουσιάζονται οι t-f αναπαραστάσεις των σημάτων που ελήφθησαν από μετρήσεις στην έξω και πρόσθια πλευρά της άθικτης κνήμης προβάτου αντίστοιχα.

Στις εικόνες t-f που παρουσιάζονται στα Σχήματα 6.7 (α) και (β) έχουν υπερτεθεί οι καμπύλες διασποράς των ρυθμών που προέκυψαν από τη θεωρία βαθμίδας για την Υπόθεση-1α ($g < h$) ενώ στα Σχήματα 6.8 (α) και (β) έχουν υπερτεθεί οι αντίστοιχες καμπύλες για την Υπόθεση-1β ($g > h$). Όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.7 (α) ρυθμός g_{S2} που προκύπτει από τη θεωρία ελαστικότητας βαθμίδας εντοπίζεται ξεκάθαρα στο φάσμα συχνοτήτων από 0.8 έως 1.2 MHz, σε αντίθεση με τον $S2$ Lamb ρυθμό ο οποίος δεν περιγράφεται. Επιπρόσθετα, ο g_{A1} ρυθμός απεικονίζεται με μεγαλύτερη ακρίβεια

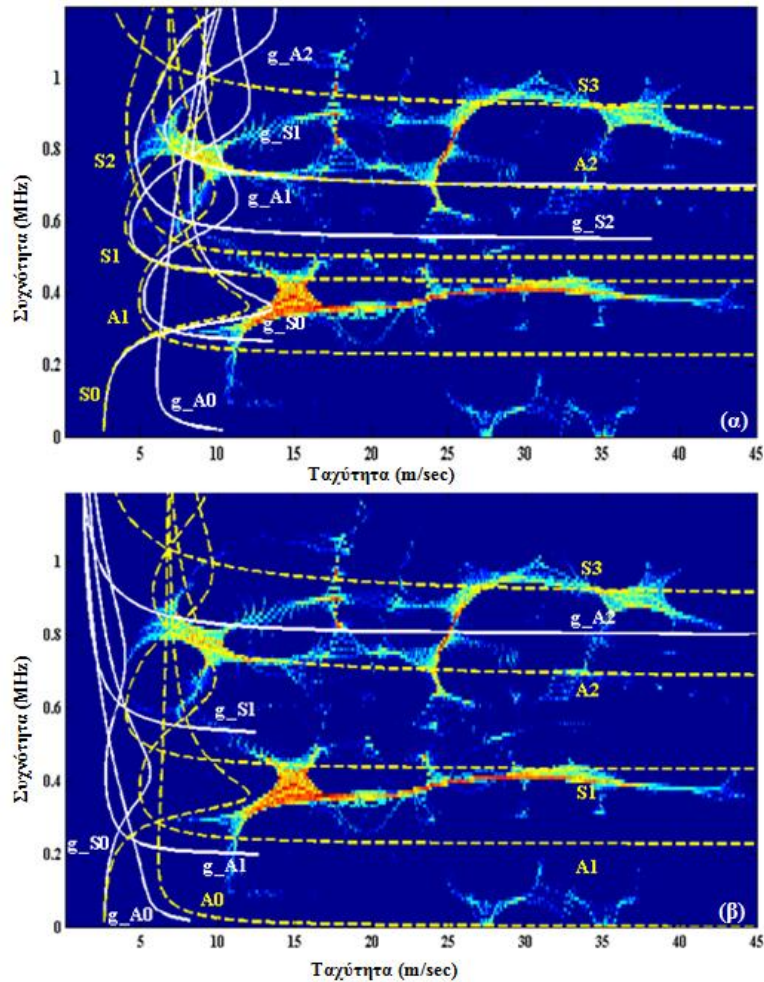
εν συγκρίσει με τον αντίστοιχο $A1$ της κλασσικής θεωρίας. Στο Σχήμα 6.7 (β) παρατηρείται ότι ο g_{S2} ρυθμός εντοπίζει πολύ γρήγορα κύματα τα οποία σε μηδενική συχνότητα διαδίδονται με υψηλότερη ταχύτητα από αυτή του $Lamb S0$. Τέτοιου είδους κύματα παρουσιάζονταν σε t-f εικόνες ακόμη και σε προηγούμενες υπολογιστικές εργασίες χωρίς ωστόσο να έχει καταστεί εφικτός ο εντοπισμός τους χρησιμοποιώντας



Σχήμα 6.7. Αναπαράσταση t-f του σήματος που ελήφθη από την έξω πλευρά άθικτης κνήμης προβάτου. Παρουσιάζονται οι καμπύλες διασποράς στη θεωρία ελαστικότητας τύπου βαθμίδας (α) για την Υπόθεση-1α (β) για την Υπόθεση-1α (συμπαγείς γραμμές) και οι αντίστοιχοι ρυθμοί Lamb (διακεκομμένες γραμμές).

την κυματική θεωρία του Lamb. Στο Σχήμα 6.8 (α) φαίνεται ότι ο g_S0 περιγράφεται με μεγαλύτερη ακρίβεια από τον S0, ενώ οι ρυθμοί g_S1 και S1 χαρακτηρίζονται στην t-f αναπαράσταση με την ίδια ακρίβεια. Κύματα που διαδίδονται με μεγάλη ταχύτητα είναι δυνατόν επίσης να εντοπιστούν και από τον g_S0 ρυθμό ο οποίος προκύπτει από την Υπόθεση-1β (Σχήμα 6.8 (β)). Παρόλα αυτά, για τη συγκεκριμένη περίπτωση, τόσο οι ρυθμοί που προέκυψαν από τη θεωρία ελαστικότητας βαθμίδας όσο και οι Lamb ρυθμοί δε χαρακτηρίζονταν.

Στις παραπάνω t-f αναπαραστάσεις υπερτέθηκαν επίσης και οι καμπύλες διασποράς ταχυτήτων των ρυθμών που υπολογίσθηκαν $h = 10^{-5}$ m, (Υπόθεση-2α και Υπόθεση-2β).



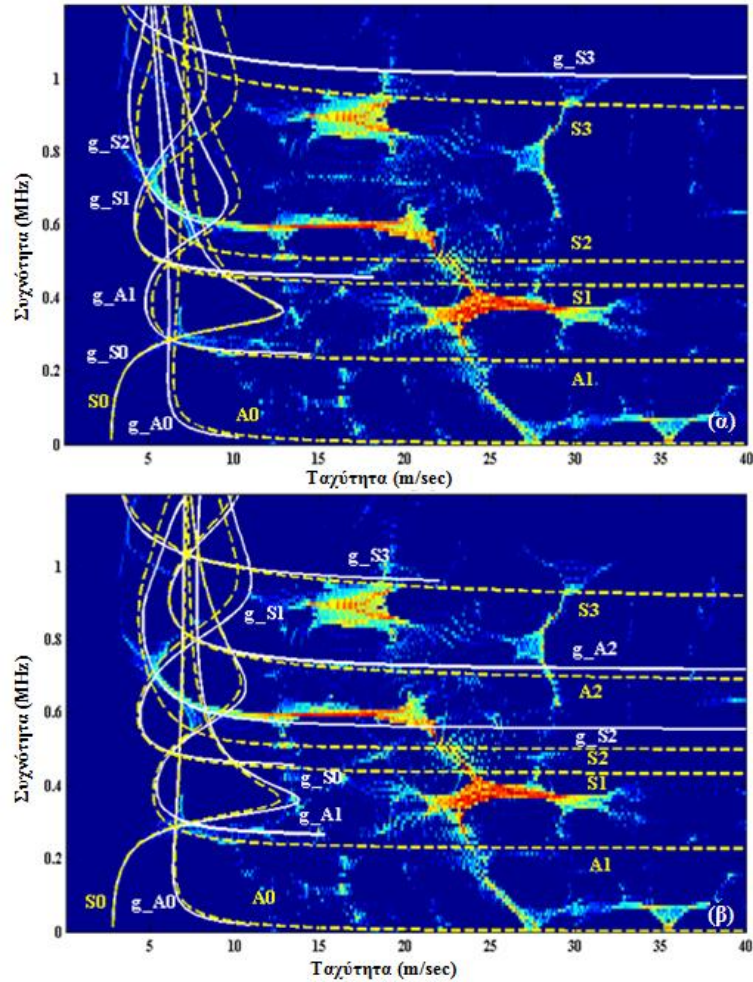
Σχήμα 6.8. Αναπαράσταση t-f του σήματος που ελήφθη από την πρόσθια πλευρά άθικτης κνήμης προβάτου. Παρουσιάζονται οι καμπύλες διασποράς στη θεωρία ελαστικότητας τύπου βαθμίδας (α) για την Υπόθεση-1α (β) για την Υπόθεση-1α (συμπαγείς γραμμές) και οι αντίστοιχοι ρυθμοί Lamb (διακεκομμένες γραμμές).

Σε γενικές γραμμές, ο χαρακτηρισμός των ρυθμών βελτιώθηκε ελάχιστα εισάγοντας τη θεωρία ελαστικότητας βαθμίδας, εκτός από λίγες περιπτώσεις όπως για παράδειγμα στην περίπτωση μέτρησης στην πρόσθια πλευρά της κνήμης. Όπως παρουσιάζεται στα Σχήματα 6.9 (α) και (β) η θεωρία ελαστικότητας βαθμίδας αποδεικνύεται αποδοτική στο χαρακτηρισμό του g_S2 ρυθμού στο φάσμα συχνοτήτων 0.57 - 0.76 MHz για την Υπόθεση-2α και στο φάσμα 0.5 – 0.76 MHz για την Υπόθεση 1β.

Στην παρούσα εργασία διερευνήσαμε την αποτελεσματικότητα της θεωρίας βαθμίδας στο χαρακτηρισμό των ρυθμών που διαδίδονται σε πραγματικά οστά. Η ανάλυση των *ex-vivo* μετρήσεων πραγματοποιήθηκε χρησιμοποιώντας τις καμπύλες διασποράς ταχυτήτων για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των χαρακτηριστικών μηκών g , h . Συμπερασματικά, για $h=10^{-4}$ m η θεωρία ελαστικότητας βαθμίδας ήταν πιο αποτελεσματική στο χαρακτηρισμό των ρυθμών που διαδίδονται στο οστό απ' ότι η κλασική θεωρία Lamb. Για $g < h$ ο g_{S2} ήταν ο ρυθμός που χαρακτηριζόταν με μεγαλύτερη ακρίβεια στις αναπαραστάσεις των σημάτων από μετρήσεις στην έξω πλευρά της κνήμης, σε αντίθεση με τον S2 της κλασικής θεωρίας ο οποίος δεν περιγραφόταν.

Το γεγονός ότι για $g > h$, η θεωρία ελαστικότητας βαθμίδας είχε τη δυνατότητα να εντοπίζει πολύ γρήγορα κύματα τα οποία εμφανίζονται στις εικόνες t-f, ακόμη και σε συχνότητες χαμηλότερες από τις κεντρικές συχνότητες διέγερσης, αποτελεί το πιο βασικό συμπέρασμα της μελέτης μας. Όπως έχει αποδειχθεί σε προηγούμενες μελέτες σε οστά, το πιο γρήγορο κύμα είναι το πλευρικό (lateral wave), το οποίο διαδίδεται με τη διαμήκη ταχύτητα του οστού, όταν το μήκος κύματος είναι μικρότερο από το πάχος του φλοιού. Ωστόσο, η κλασική θεωρία ελαστικότητας δεν προβλέπει διασπορά για τα διαμήκη και εγκάρσια κύματα. Συνεπώς ο εντοπισμός κυμάτων που παρουσιάζουν διασπορά και διαδίδονται με μεγαλύτερες ταχύτητες δεν ήταν ποτέ εφικτός χρησιμοποιώντας την κυματική θεωρία Lamb. Όταν $g > h$, οι ταχύτητες των ρυθμών που προβλέπονται από τη θεωρία βαθμίδας λαμβάνουν μεγαλύτερες τιμές από τις αντίστοιχες τιμές των ρυθμών Lamb.

Για την περίπτωση που η τιμή του χαρακτηριστικού μήκους h ήταν ίση με 10^{-5} m (Υπόθεση-2) παρατηρήθηκαν μικρές διαφορές στο χαρακτηρισμό των ρυθμών μεταξύ των δύο θεωριών. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι για τη συγκεκριμένη τιμή του h , οι θεωρητικές καμπύλες διασποράς που προκύπτουν από τη θεωρία βαθμίδας παρουσιάζουν ελάχιστες διαφορές με τις αντίστοιχες της κλασικής θεωρίας και συνεπώς η επίδραση της μικροδομής στην κυματική διασπορά δεν είναι σημαντική. Παρόλα αυτά, η θεωρία βαθμίδας αποδείχθηκε πιο αποτελεσματική από τη κλασική στην περιγραφή του συμμετρικού ρυθμού δεύτερης τάξης. Συμπερασματικά, η θεωρία βαθμίδας φαίνεται να είναι πιο κατάλληλη για την ερμηνεία *ex-vivo* μετρήσεων.



Σχήμα 6.9. Αναπαράσταση t-f του σήματος που ελήφθη από την έξω πλευρά άθικτης κνήμης προβάτου. Παρουσιάζονται οι καμπύλες διασποράς στη θεωρία ελαστικότητας τύπου βαθμίδας (α) για την Υπόθεση-2α (β) για την Υπόθεση-2β (συμπαγείς γραμμές) και οι αντίστοιχοι ρυθμοί Lamb (διακεκομμένες γραμμές).

Ωστόσο, εξαιτίας της ανισοτροπίας και της αυλοειδούς γεωμετρίας του οστού δημιουργούνται επιπρόσθετοι ρυθμοί οι οποίοι δεν ήταν δυνατό να περιγραφούν από τη θεωρία βαθμίδας.

6.8 Βιβλιογραφία

1. Bossy E, Talmant M, Laugier P. Three-dimensional simulations of ultrasonic axial transmission velocity measurement on cortical bone models. *J Acoust Soc Am* 2004;115(5):2314–2324.
2. Camus E, Talmant M, Berger G, Laugier P. Analysis of the axial transmission technique for the assessment of skeletal status. *J Acoust Soc Am* 2000;108(6):3058–3065.
3. Nicholson PHF, Moilanen P, Karkkainen T, Timonen J, Cheng S. Guided ultrasonic waves in long bones: modeling, experiment and in vivo application. *Physiol Meas* 2002;23:755–768.
4. Njeh CF, Hans D, Wu C, Kantorovich E, Sister M, Fuerst T, Genant HK. An in vitro investigation of the dependence on sample thickness of the speed of sound along the specimen. *Med Eng Phys* 1999;21:651–659.
5. Wear KA. Group velocity, phase velocity, and dispersion in human calcaneus in vivo. *J Acoust Soc Am* 2007;121(4):2431-2437.
6. Dodd SP, Cummingham JL, Miles AW, Gheduzzi S, Humphrey VF. An in vitro study of ultrasound signal loss across simple fractures in cortical bone mimics and bovine cortical bone samples. *Bone* 2007;40(3):656–661.
7. Protopappas VC, Baga D, Fotiadis DI, Likas A, Papachristos AA, Malizos KN. An ultrasound wearable system for the monitoring and acceleration of fracture healing in long bones. *IEEE Trans Biomed Eng* 2005;52(9):1597–1608.
8. Protopappas VC, Vavva MG, Fotiadis DI, Malizos KN. Ultrasonic monitoring of bone fracture healing. *IEEE Trans Ultr Ferroel Freq Cont* 2008;55(6):1243-1255.
9. Protopappas VC, Fotiadis DI, Malizos KN. Guided ultrasound wave propagation in intact and healing long bones. *Ultrasound Med Biol* 2006;32(5):693–708.

10. Protopappas VC, Kourtis IC, Kourtis LK, Malizos KN, Massalas CV, Fotiadis DI. Three-dimensional finite element modeling of guided ultrasound wave propagation in intact and healing long bones. *J Acoust Soc Am* 2007;121(6):3907-3921.
11. Moilanen P. Ultrasonic Guided Waves in Bone. *IEEE Trans Ultrason Ferroelect Freq Control* 2008;55(6):1277-1286.
12. Chimenti DE. Guided waves in plates and their use in material characterization. *Applied Mechanics Review* 1997;50,247–284.
13. Rho JY. Mechanical properties and the hierarchical structure of bone. *Med Eng Physics* 1998;20(2):92-102.
14. Sasso M, Haiat G, Yamato Y, Naili S, Matsukawa M. Dependence of ultrasonic attenuation on bone mass and microstructure in bovine cortical bone. *J of Biomech* 2008;41(2):347-355.
15. Yamato Y, Matsukawa M, Otani T, Yamazaki K, Nagano A. Distribution of longitudinal wave properties in bovine cortical bone in vitro. *Ultrasonics* 2006;44:233-237.
16. Tiersten HF, Bleustein JL. Generalized elastic continua. in: R.D. Mindlin and *Applied Mechanics*, edited by Herman G (Pergamon Press) 1974.
17. Exadaktylos GE, Vardoulakis I. Microstructure in linear elasticity and scale effects: a reconsideration of basic rock mechanics and rock fracture mechanics. *Tectonoph.* 2001;335:81-109.
18. Tsepoura KG, Papargyri-Beskou S, Polyzos D. A boundary element method for solving 3D static gradient elastic problems with surface energy. *Comp Mech* 2002;29:361-381.
19. Vardoulakis I, Sulem J. *Bifurcation Analysis in Geomechanics* (Blackie/Chapman and Hall, London) 1995.
20. Fatemi J, Van Keulen F, Onck PR. Generalized Continuum Theories: Application to Stress Analysis in Bone. *Meccanica* 2002;37:385-396.

21. Hsia S, Chiu S, Cheng J. Wave propagation at the human muscle-compact bone interface. *Theoret Appl Mech* 2006;33(3):223-243.
22. Lakes RS. Dynamical study of couple stress effects in human compact bone. *J Biom Eng* 1982;104:6-11.
23. Park HC, Lakes RS. Cosserat micromechanics of human bone: strain redistribution by a hydration sensitive constituent. *J Biomech* 1986;19(5):385–397.
24. Yang JFC, Lakes RS. Transient study of couple stress effects in compact bone: Torsion. *J Biomech Eng* 1981;103(4):275–279.
25. Yang JFC, Lakes RS. Experimental study of micropolar and couple stress elasticity in compact bone in bending. *J Biomech* 1982;15(2),91–98.
26. Yoon H, Lawrence J. Is bone a Cosserat solid? *J Mater Science* 1983;18(5):1297-1305.
27. Chen Y, Lee JD, Eskandarian A. Examining the physical foundation of continuum theories from the viewpoint of phonon dispersion relation. *Int J Eng Science* 2003; 41:61-83.
28. Suiker ASJ, Metrikine AV, de Borst R. Comparison of wave propagation characteristics of the Cosserat continuum model and corresponding discrete lattice models. *Int J Sol Str* 2001;38:1563-1583.
29. Tomar SK, Gogna ML. Reflection and refraction of longitudinal waves at an interface between two micropolar elastic media in welded contact. *J Acoust Soc Am* 1995;97:822-830.
30. Kumar R, Partap G. Rayleigh Lamb waves in micropolar isotropic elastic plate. *App Math and Mech* 2006;27(8):1049-1059.
31. Ottosen NS, Ristinmaa M, Ljung C. Rayleigh waves obtained by the indeterminate couple-stress theory. *Eur J Mech A/Solids* 2000;19:929-947.

32. Kulesh MA, Matveenko VP, Shardakov IN. Constructing an solution for Lamb waves using Cosserat continuum approach. *J App Mech and Techn Phys* 2007;48(1):119-125.
33. Midya GK. On Love-type surface waves in homogeneous micropolar elastic media. *Int J Eng Science* 2004;42:1275-1288.
34. Mindlin RD. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity, *Int. J. Sol Struct* 1965;1:417–438.
35. Ben-Amoz M. A dynamic theory for composite materials. *Journ Appl Math Phys* 1976;27:83-99.
36. Tekoglu C, Onck PR. Size effects in the mechanical behavior of cellular materials. *J Mater Science* 2005;40:5911-5917.
37. Tekoglu C. Size effects in cellular solids. Ph.D. dissertation, University of Groningen, Groningen. The Netherlands 2007.
38. Georgiadis HG, Vardoulakis I, Velgaki EG. Dispersive Rayleigh-wave propagation in microstructured solids characterized by dipolar gradient elasticity. *J Elasticity* 2004;74:17-45.
39. Gazis DC, Herman R, Wallis RF. Surface elastic waves in cubic crystals. *Phys Rev* 1960;119:533-544.
40. Vardoulakis I, Giannakopoulos AE. An example of double forces taken from structural analysis. *Intern Journ Sol Struct* 2006;43:4047-4062.
41. Graff FK. *Wave motion in elastic solids* (Oxford University Press, Oxford), 1975.
42. Lakes RS Dynamical study of couple stress effects in human compact bone. *J Biom Eng* 1982;104:6-11.
43. Erofejev VI. *Wave Processes in Solids with Micro-structure* (World Scientific, Singapore) 2003.

44. Kondratev AI. Precision measurements of the velocity and attenuation of ultrasound in solids. *Sov Phys Acoust* 1990;36:262-265.
45. Aggelis DG, Philippidis TP, Tsinopoulos SV, Polyzos D. Wave dispersion in concrete due to microstructure, CD-ROM Proceedings of the 2004 Int. Conference on Computational & Experimental Engineering & Sciences 2004;Madeira,Portugal, 26-29 July.
46. Yang JFC, Lakes RS. Experimental study of micropolar and couple stress elasticity in compact bone in bending. *J Biomech* 1982;15(2):91–98.
47. Chen CP, Lakes RS. Dynamic wave dispersion and loss properties of conventional and negative Poisson's ratio polymeric cellular materials. *Cell Polym* 1989;8:343-369.
48. Stavropoulou M, Exadaktylos G, Papamichos E, Larsen I, Ringstad C. Rayleigh wave propagation in intact and damaged geomaterials. *Int J Rock Mech Min Science* 2003;40:377-387.
49. Aifantis EC. Strain gradient interpretation of size effects. *Int J Fract* 1999;95:299–314.
50. Yim H, Sohn Y. Numerical simulation and visualization of elastic waves using mass-spring lattice model. *IEEE Trans Ultrason, Ferroel Freq Cont* 2000;47:550-558.
51. Georgiadis HG Velgaki EG. High-frequency Rayleigh waves in materials with micro-structure and couple-stress effect. *Int J Solids Struct* 2003;40:2501-2520.
52. Lakes RS. Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua. in: *Continuum Models for Materials with Microstructure*, edited by Muhlhaus HB. (Wiley, Chichester),1995.
53. Lam DCC, Yang F, Chong ACM, Wang J, Tong P. Experiments and theory in strain gradient elasticity. *J Mech Phys Solids* 2003;51:1477–1508.
54. Rose JL. *Ultrasonic waves in solid media* (Cambridge University Press, Cambridge), 1999.

55. Wolfram Research, I. Mathematica, (Wolfram Research, Inc. IL, USA), 2004.
56. Vardoulakis I, Georgiadis HG. SH surface waves in a homogeneous gradient elastic half-space with surface energy. *J Elasticity* 1997;47:147-165.
57. Amanatidou E, Aravas N. Mixed finite element formulations of strain-gradient elasticity problems. *Comp Meth Appl Mech Eng* 2002;191:1723-1751.
58. Karlis GF, Tsinopoulos SV, Polyzos D, Beskos DE. Boundary element analysis of mode I and mixed mode (I and II) crack problems of 2-D gradient elasticity. *Comp Meth Appl Mech Eng* 2007;196:5092–5103.
59. Karlis GF, Tsinopoulos SV, Polyzos D, Beskos DE. 2D and 3D Boundary Element Analysis of Mode-I Cracks in Gradient Elasticity. *Comp Model Eng Sciences* 2008;26(3):189-207.
60. Stamoulis, K., and Giannakopoulos, A.E. Size effects on strength, toughness and fatigue crack growth of gradient elastic solids. *Int. J. Solids Struct.* 2008;45(18):4921-4935.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στα πλαίσια της παρούσας διατριβής αρχικά αναπτύχθηκε μια υπολογιστική μελέτη διάδοσης υπερήχων σε 2Δ μοντέλα άθικτων και κατεαγότεων οστών με ρεαλιστικές συνοριακές συνθήκες που προσομοιώνουν την ύπαρξη των υπερκείμενων μαλακών ιστών και του μυελού των οστών. Στη συνέχεια αναπτύχθηκε μια δεύτερη 2Δ μελέτη στην οποία προτάθηκε και αξιολογήθηκε μια νέα μέθοδος διάδοσης υπερήχων χρησιμοποιώντας τις βελόνες μιας ήδη υπάρχουσας συσκευής εξωτερικής οστεοσύνθεσης ως μέσο εκπομπής και λήψης υπερήχων. Τέλος αναπτύχθηκε μια θεωρητική μελέτη στην οποία χρησιμοποιήθηκε η θεωρία ελαστικότητας τύπου βαθμίδας για τη διερεύνηση της επίδρασης της μικροδομής του οστού στη διάδοση των κυματοδηγούμενων ρυθμών. Οι θεωρητικές καμπύλες διασποράς ταχυτήτων με βάση τη θεωρία ελαστικότητας βαθμίδας υπολογίστηκαν επίσης για πλάκα με ιδιότητες όμοιες με αυτές οστού προβάτου και χρησιμοποιήθηκαν για την ερμηνεία *ex-vivo* μετρήσεων σε πραγματικά άθικτα οστά.

Η πρώτη 2Δ μελέτη που αναπτύχθηκε στα πλαίσια της διατριβής παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 4. Η καινοτομία της συγκεκριμένης μελέτης έγκειται στο ότι διερευνάται συστηματικά η επίδραση ρεαλιστικών συνοριακών συνθηκών στη διάδοση υπερήχων κατά τη διαδικασία της πάρωσης χρησιμοποιώντας διαφορετικά 2Δ μοντέλα κατεαγότεου οστού. Τα αποτελέσματα της μελέτης έδειξαν ότι το κύμα FAS είναι ένα πλευρικό κύμα το οποίο επηρεάζεται ελάχιστα από τις διαφορετικές συνοριακές. Αντιθέτως η ύπαρξη των υπερκείμενων μαλακών ιστών και του μυελού των οστών βρέθηκε ότι έχουν σημαντική επίδραση στη διάδοση των κυματοδηγούμενων ρυθμών

στα μοντέλα άθικτων και κατεαγόντων οστών. Εξαιτίας των ανακλάσεων στις ελαύθερες επιφάνειες των στρωμάτων των μαλακών ιστών και του μυελού των οστών εμφανίστηκαν επιπρόσθετοι κυματοδηγούμενοι ρυθμοί. Το μοντέλο στο οποίο ο μυελός των οστών θεωρείται ότι καταλαμβάνει τον ημι-άπειρο χώρο που συνορεύει με την κατώτατη επιφάνεια του οστού θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως το πιο ρεαλιστικό εφόσον στο κατώτερο άκρο του μοντέλου εφαρμόζονται συνοριακές συνθήκες κατά τις οποίες τα προσπίπτοντα οδεύοντα κύματα απορροφώνται πλήρως και δεν ανακλώνται.

Ωστόσο, η ανισοτροπία και η ανομοιόμορφη γεωμετρία του οστού δεν μοντελοποιήθηκαν στη συγκεκριμένη εργασία. Επιπλέον, δεν κατέστη δυνατός ο υπολογισμός των θεωρητικών καμπυλών διασποράς ταχυτήτων ομάδας που αντιστοιχούν στα Μοντέλα-2 και 3 της μελέτης, με αποτέλεσμα να μην είναι εφικτός ο ακριβής χαρακτηρισμός των διαδιδόμενων ρυθμών. Παρόλα αυτά, η ανάπτυξη υπολογιστικών μοντέλων κατεαγόντων οστών με ρεαλιστικές συνοριακές συνθήκες συμβάλλει σε μεγάλο βαθμό στην κατανόηση πολύπλοκων φαινομένων κυματοδήγησης σε πραγματικά οστά.

Η δεύτερη υπολογιστική μελέτη που αναπτύχθηκε παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 5. Σκοπός ήταν να προταθεί και να αξιολογηθεί μια εναλλακτική τεχνική μετρήσεων ταχύτητας υπερήχων για την παρακολούθηση της πώρωσης καταγμάτων μακρών οστών που αντιμετωπίζει σημαντικούς περιορισμούς των ήδη υπάρχουσών μεθόδων διάδοσης υπερήχων. Για πρώτη φορά χρησιμοποιήθηκαν οι βελόνες μιας ήδη υπάρχουσας εξωτερικής οστεοσύνθεσης, ως μέσο διάδοσης και λήψης υπερήχων κατά την πώρωση. Τα αποτελέσματα της μελέτης έδειξαν ότι η ταχύτητα του FAS που προκύπτει από την προτεινόμενη τεχνική αυξάνεται κατά τα στάδια της πώρωσης, κάτι που επίσης ισχύει στις διαδερμικές και διοστικές εφαρμογές. Παρόλα αυτά οι τιμές ταχυτήτων που προκύπτουν από την προτεινόμενη τεχνική αντιστοιχούν σε ολόκληρο το μονοπάτι διάδοσης (δηλ. βελόνες, οστό, κάταγμα) και όχι στην περιοχή του πώρου. Το γεγονός αυτό δικαιολογεί και τις αυξημένες τιμές ταχυτήτων που βρέθηκαν σε όλα τα εξεταζόμενα μοντέλα. Από τα αποτελέσματα προέκυψε επίσης ότι η τοποθέτηση των βελονών υπό μικρές γωνίες απόκλισης από την κατακόρυφη δεν παίζει σημαντικό ρόλο στα αποτελέσματα, υποδεικνύοντας ότι η προτεινόμενη μέθοδος παρέχει ακριβή αποτελέσματα όταν χρησιμοποιείται σε *in-vivo* εφαρμογές.

Παρά το γεγονός ότι η προτεινόμενη τεχνική έχει σημαντικά πλεονεκτήματα σε σύγκριση με την παραδοσιακή διαδερμική και τη διοστική τεχνική, έχει επίσης και ορισμένους περιορισμούς που αφορούν (α) στη μειωμένη ευαισθησία της, γεγονός που καθιστά την αξιολόγηση μικρών μεταβολών στην περιοχή του πόρου κατά την πόρωση πιο δύσκολη σε σχέση με τις υπάρχουσες μεθόδους, (β) στην υψηλή εξασθένηση των ληφθέντων σημάτων που εισάγεται από τις πολλαπλές ανακλάσεις στις διεπιφάνειες μεταξύ οστού-βελονών και (γ) στο ότι το μεγαλύτερο ποσοστό ενέργειας διαδίδεται κάθετα στο επίπεδο του οστού καθιστώντας την αξονική διάδοση του FAS δυσκολότερη συγκρινόμενη με τις διοστικές και διαδερμικές εφαρμογές.

Η θεωρητική μελέτη της επίδρασης της μικροδομής του οστού στη διάδοση κυματοδηγούμενων ρυθμών παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 6. Για πρώτη φορά χρησιμοποιήθηκε η θεωρία ελαστικότητας τύπου βαθμίδας για την ενσωμάτωση της μικροδομής του οστού στις καταστατικές εξισώσεις του προβλήματος διάδοσης κυματοδηγούμενων ρυθμών σε πλάκες με ιδιότητες όμοιες με αυτές του οστού. Δύο επιπρόσθετες ελαστικές παράμετροι (δηλ. g και h) εισήχθησαν στη θεωρητική ανάλυση, των οποίων οι τιμές ήταν της τάξης του μεγέθους των οστεώνων. Τα αποτελέσματα της μελέτης έδειξαν ότι όταν οι τιμές των συντελεστών μικροδομής είναι διαφορετικές, η μικροδομή παίζει σημαντικό ρόλο στη διάδοση των διαμηκών και εγκάρσιων κυμάτων εισάγοντας γεωμετρική διασπορά και διασπορά υλικού. Βρέθηκε επίσης ότι η εισαγωγή χαρακτηριστικών μικροδομής στις καταστατικές εξισώσεις, επηρεάζει σημαντικά τη διασπορά των κυματοδηγούμενων ρυθμών με αποτέλεσμα οι θεωρητικές καμπύλες διασποράς ταχυτήτων να διαφέρουν σε μεγάλο βαθμό από τις αντίστοιχες καμπύλες των ρυθμών Lamb που προβλέπει η κλασική θεωρία ελαστικότητας. Παρά το γεγονός ότι προηγούμενες μελέτες αναφέρουν ότι η μικροδομή έχει σημαντική επίδραση μόνο σε υψηλές συχνότητες, στη συγκεκριμένη μελέτη αποδείχθηκε ότι παίζει εξίσου πρωτεύοντα ρόλο και σε ενδιάμεσες συχνότητες, 0.7-1 MHz, οι οποίες αποτελούν την περιοχή ενδιαφέροντος σε μελέτες διάδοσης υπερήχων σε οστά. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η μικροδομή είναι πολύ σημαντικός παράγοντας και πρέπει να λαμβάνεται υπόψη σε υπολογιστικές και θεωρητικές μελέτες οστού.

Ωστόσο, το βασικότερο θέμα που ανακύπτει από τη χρήση θεωριών ανώτερης τάξης είναι ο προσδιορισμός των τιμών των συντελεστών μικροδομής. Παρά το γεγονός ότι είναι σαφής ο συσχετισμός της τιμής τους με τα χαρακτηριστικά της μικροδομής του εξεταζόμενου μέσου, δεν έχει εξαχθεί συμπέρασμα στη βιβλιογραφία για τις ακριβείς τιμές τους. Ο προσδιορισμός των τιμών των συντελεστών αυτών μπορεί να επιτευχθεί μόνο μέσω συγκρίσεων μεταξύ των θεωρητικών αποτελεσμάτων με αποτελέσματα από μετρήσεις σε πραγματικά οστά. Για το σκοπό αυτό, στα πλαίσια της διατριβής, οι κυματοδηγούμενοι ρυθμοί που προέκυψαν από τη θεωρητική μελέτη εφαρμόστηκαν σε *in-vivo* μετρήσεις από πραγματικά οστά. Από τα αποτελέσματα της μελέτης βρέθηκε ότι η θεωρία ελαστικότητας τύπου βαθμίδας παρέχει πιο ακριβή εντοπισμό των διαδιδόμενων ρυθμών στις αναπαραστάσεις χρόνου συχνοτήτων των ληφθέντων σημάτων. Επιπλέον, για πρώτη φορά εντοπίστηκαν πολύ γρήγορα διαδιδόμενα κύματα, κάτι δεν είναι εφικτό με βάση τη κλασική θεωρία. Συνεπώς, η θεωρία ελαστικότητας τύπου βαθμίδας φαίνεται ότι είναι πιο κατάλληλη για την ερμηνεία μετρήσεων σε πραγματικά όστα.

Παρόλα αυτά, ο βασικός περιορισμός της θεωρητικής μελέτης έγκειται στο ότι αγνοήθηκε η τρισδιάστατη γεωμετρία και ανισοτροπία του οστού, παράγοντες που έχει αποδειχθεί ότι επηρεάζουν τη διάδοση των κυματοδηγούμενων ρυθμών. Επιπλέον, η 2D πλάκα θεωρήθηκε ότι βρίσκεται στο κενό και συνεπώς δεν ελήφθη υπόψη η ύπαρξη των υπερκείμενων μαλακών ιστών και του μυελού των οστών. Όπως προαναφέρθηκε οι μαλακοί ιστοί παρέχουν μονοπάτια διαρροής της ενέργειας των υπερήχων σε μορφή διαρρεόντων ρυθμών.

Κατά συνέπεια, ουσιαστική εξέλιξη της παρούσας διδακτορικής διατριβής θα αποτελούσε ο υπολογισμός των θεωρητικών καμπυλών διασποράς ταχυτήτων ομάδας με βάση τη θεωρία ελαστικότητας τύπου βαθμίδας για θεωρητικά μοντέλα με ρεαλιστικές συνοριακές συνθήκες που επιπλέον λαμβάνουν υπόψη τη 3D γεωμετρία και ανισοτροπία του οστού αποτελεί. Επιπλέον η ανάπτυξη 2D και 3D υπολογιστικών μοντέλων άθικτων και κατεγύτων οστών με μικροδομή θα συντελέσει σε μεγάλο βαθμό στη μελέτη της διάδοσης υπερήχων σε μακρά οστά και στην ερμηνεία κλινικών μετρήσεων σε πραγματικά οστά.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΕ ΜΟΝΤΕΛΑ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΣΤΡΩΜΑΤΩΝ

Ι. Μοντέλο 2 Στρωμάτων (Ρευστό - Πλάκα)

Τα στοιχεία της οριζουσας D της χαρακτηριστικής εξίσωσης (Εξ. 2.71) που προκύπτει για το μοντέλο δύο στρωμάτων (Σχήμα 2.8(α)) ορίζονται ως:

$$\begin{aligned} D_{11} &= -\lambda_{\beta} k_{\beta}^2, \\ D_{12} &= -\lambda_{\beta} k_{\beta}^2, \\ D_{13} &= 0, \\ D_{14} &= 0, \\ D_{15} &= 0, \\ D_{16} &= 0, \\ D_{21} &= K_{\beta} e^{iK_{\beta} H_1}, \\ D_{22} &= -K_{\beta} e^{-iK_{\beta} H_1}, \\ D_{23} &= -K_L e^{iK_L H_1}, \\ D_{24} &= K_L e^{-iK_L H_1}, \\ D_{25} &= -k e^{iK_T H_1}, \\ D_{26} &= -k e^{-iK_T H_1}, \\ D_{31} &= \lambda_{\beta} k_{\beta}^2 e^{iK_{\beta} H_1}, \\ D_{32} &= \lambda_{\beta} k_{\beta}^2 e^{-iK_{\beta} H_1}, \\ D_{33} &= -(\lambda k_L^2 + 2\mu K_L^2) e^{iK_L H_1}, \end{aligned} \tag{Π1.1}$$

$$\begin{aligned}
D_{34} &= -(\lambda k_L^2 + 2\mu K_L^2)e^{-iK_L H_1}, \\
D_{35} &= -2\mu k K_T e^{iK_T H_1}, \\
D_{36} &= 2\mu k K_T e^{-iK_T H_1}, \\
D_{41} &= 0, \\
D_{42} &= 0, \\
D_{43} &= -2\mu k K_L e^{iK_L H_1}, \\
D_{44} &= 2\mu k K_L e^{-iK_L H_1}, \\
D_{45} &= \mu(K_T^2 - k^2)e^{iK_T H_1}, \\
D_{46} &= \mu(K_T^2 - k^2)e^{-iK_T H_1}, \\
D_{51} &= 0, \\
D_{52} &= 0, \\
D_{53} &= (\lambda k_L^2 + 2\mu K_L^2)e^{iK_L H_2}, \\
D_{54} &= (\lambda k_L^2 + 2\mu K_L^2)e^{-iK_L H_2}, \\
D_{55} &= 2\mu k K_T e^{iK_T H_2}, \\
D_{56} &= -2\mu k K_T e^{iK_T H_2}, \\
D_{61} &= 0, \\
D_{62} &= 0, \\
D_{63} &= 2\mu k K_L e^{iK_L H_2}, \\
D_{64} &= -2\mu k K_L e^{-iK_L H_2}, \\
D_{65} &= -\mu(K_T^2 - k^2)e^{iK_T H_1}, \\
D_{66} &= -\mu(K_T^2 - k^2)e^{-iK_T H_1},
\end{aligned}$$

όπου $\lambda = \rho c_L^2 - 2\mu$ και $\mu = \rho c_T^2$ είναι οι σταθερές Lamé για την πλάκα, $\lambda_{fl} = \rho_{fl} c_{fl}^2$ για το ρευστό, k_{fl} είναι ο κυματαριθμός των διαδιδόμενων κυμάτων στο ρευστό, $K_{fl}^2 = (k_{fl})^2 - k^2$, και c_{fl} η διαμήκης ταχύτητα στο ρευστό.

II. Μοντέλο 3 Στρωμάτων (Ρευστό – Πλάκα - Ρευστό)

Τα στοιχεία της ορίζουσας της χαρακτηριστικής εξίσωσης που προκύπτει για το μοντέλο τριών στρωμάτων (Σχήμα 2.8(β)) είναι:

$$\begin{aligned}
 G_{11} &= -\lambda_{\beta} k_{\beta}^2, \\
 G_{12} &= -\lambda_{\beta} k_{\beta}^2, \\
 G_{13} &= 0, \\
 G_{14} &= 0, \\
 G_{15} &= 0, \\
 G_{16} &= 0, \\
 G_{17} &= 0, \\
 G_{18} &= 0, \\
 G_{21} &= K_{\beta} e^{iK_{\beta} H_1}, \\
 G_{22} &= -K_{\beta} e^{-iK_{\beta} H_1}, \\
 G_{23} &= -K_L e^{iK_L H_1}, \\
 G_{24} &= K_L e^{-iK_L H_1}, \\
 G_{25} &= -k e^{iK_T H_1}, \\
 G_{26} &= -k e^{-iK_T H_1}, \\
 G_{27} &= 0, \\
 G_{28} &= 0, \\
 G_{31} &= \lambda_{\beta} k_{\beta}^2 e^{iK_{\beta} H_1}, \\
 G_{32} &= \lambda_{\beta} k_{\beta}^2 e^{-iK_{\beta} H_1}, \\
 G_{33} &= -(\lambda k_L^2 + 2\mu K_L^2) e^{iK_L H_1}, \\
 G_{34} &= -(\lambda k_L^2 + 2\mu K_L^2) e^{-iK_L H_1}, \\
 G_{35} &= -2\mu k K_T e^{iK_T H_1}, \\
 G_{36} &= 2\mu k K_T e^{-iK_T H_1}, \\
 G_{37} &= 0, \\
 G_{38} &= 0, \\
 G_{41} &= 0, \\
 G_{42} &= 0, \\
 G_{43} &= -2\mu k K_L e^{iK_L H_1}, \\
 G_{44} &= 2\mu k K_L e^{-iK_L H_1}, \\
 G_{45} &= \mu(K_T^2 - k^2) e^{iK_T H_1}, \\
 G_{46} &= \mu(K_T^2 - k^2) e^{-iK_T H_1},
 \end{aligned} \tag{Π1.2}$$

$$\begin{aligned}
G_{47} &= 0, \\
G_{48} &= 0, \\
G_{51} &= 0, \\
G_{52} &= 0, \\
G_{53} &= K_L^2 e^{iK_L H_2}, \\
G_{54} &= -K_L^2 e^{-iK_L H_2}, \\
G_{55} &= k e^{iK_T^2 H_2}, \\
G_{56} &= k e^{-iK_T^2 H_2}, \\
G_{57} &= -K_T^{\beta_2} e^{iK_L^{\beta_2} H_3}, \\
G_{58} &= K_T^{\beta_2} e^{-iK_L^{\beta_2} H_3}, \\
G_{61} &= 0, \\
G_{62} &= 0, \\
G_{63} &= (\lambda k_L^2 + 2\mu K_L^2) e^{iK_L H_2}, \\
G_{64} &= (\lambda k_L^2 + 2\mu K_L^2) e^{-iK_L H_2}, \\
G_{65} &= 2\mu k K_T e^{iK_T H_2}, \\
G_{66} &= -2\mu k K_T e^{-iK_T H_2}, \\
G_{67} &= -\lambda_{\beta_2} (k_L^{\beta_2})^2 e^{iK_L^{\beta_2} H_2}, \\
G_{68} &= -\lambda_{\beta_2} (k_L^{\beta_2})^2 e^{-iK_L^{\beta_2} H_2}, \\
G_{71} &= 0, \\
G_{72} &= 0, \\
G_{73} &= -2k\mu K_L e^{iK_L H_2}, \\
G_{74} &= 2k\mu K_L e^{-iK_L H_2}, \\
G_{75} &= \mu(K_T^2 - k^2) e^{iK_T H_2}, \\
G_{76} &= \mu(K_T^2 - k^2) e^{-iK_T H_2}, \\
G_{77} &= 2k\mu^{\beta_2} K_L^{\beta_2} e^{iK_L^{\beta_2} H_2}, \\
G_{78} &= -2k\mu^{\beta_2} K_L^{\beta_2} e^{-iK_L^{\beta_2} H_2}, \\
G_{81} &= 0, \\
G_{82} &= 0, \\
G_{83} &= 0, \\
G_{84} &= 0, \\
G_{85} &= 0, \\
G_{86} &= 0, \\
G_{87} &= \lambda_{\beta_2} (k_L^{\beta_2})^2 e^{iK_L^{\beta_2} H_2}, \\
G_{88} &= \lambda_{\beta_2} (k_L^{\beta_2})^2 e^{-iK_L^{\beta_2} H_2},
\end{aligned}$$

όπου $\lambda_{f_2} = \rho_{f_2} c_{f_2}^2$ για το ρευστό, k_{f_2} είναι ο κυματαριθμός των διαδιδόμενων κυμάτων στο ρευστό του τρίτου στρώματος, $K_{f_2}^2 = \left(\frac{\omega}{c_{f_2}}\right)^2 - k^2$, και c_{f_2} η διαμήκης ταχύτητα στο ρευστό.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ

ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ ΜΙΝΔΛΙΝ - ΜΟΡΦΕΣ Ι, ΙΙ & ΙΙΙ

Ι. Μορφή Ι

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2} \{ & (1+\beta)(3\alpha+\beta)\alpha_1 + (1+2\alpha\beta+\beta^2)\alpha_2 \\ & - \frac{1}{2}(1+\beta)(1-2\alpha-\beta)\alpha_3 - (1-\beta)(3\alpha+\beta)\alpha_5 \\ & - \frac{1}{2}(1-\beta)(1+2\alpha+\beta)\alpha_8 + 2\alpha\beta\alpha_{11} - \alpha(1-\beta)\alpha_{14} \\ & + \alpha(1+\beta)\alpha_{15} \},\end{aligned}\tag{Π2.1}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{2} \{ & -(1-2\alpha-\beta)(3\alpha+\beta)\alpha_1 - \frac{1}{2}[1-(2\alpha+\beta)^2]\alpha_2 \\ & + \frac{1}{4}(1-2\alpha-\beta)^2\alpha_3 - (3\alpha+\beta)^2\alpha_4 \\ & + (3\alpha+\beta)(1+2\alpha+\beta)\alpha_5 + \frac{1}{4}(1+2\alpha+\beta)^2\alpha_8 \\ & + \alpha(3\alpha+2\beta)\alpha_{10} + 2\alpha(\alpha+\beta)(1+\beta)\alpha_{11} + \alpha(3\alpha+2\beta)\alpha_{13} \\ & + \alpha(1+\alpha+\beta)\alpha_{14} - \alpha(1-\alpha-\beta)\alpha_{15} \},\end{aligned}\tag{Π2.2}$$

$$\tilde{\alpha}_3 = \frac{1}{4} \left\{ -(1-\beta^2)\alpha_2 + \frac{1}{2}(1+\beta)^2\alpha_3 + \frac{1}{2}(1-\beta)^2\alpha_8 \right\},\tag{Π2.3}$$

$$\tilde{\alpha}_4 = \frac{1}{4} \left\{ (1+\beta^2)\alpha_{10} + (1-\beta^2)(\alpha_{11} + \alpha_{13}) + \frac{1}{2}(1+\beta)^2 \alpha_{14} + \frac{1}{2}(1-\beta)^2 \alpha_{15} \right\}, \quad (\text{Π2.4})$$

$$\tilde{\alpha}_5 = \frac{1}{4} \left\{ -(1-\beta^2)\alpha_{10} + (1+3\beta^2)\alpha_{11} + \frac{1}{2}(1+\beta^2)\alpha_{13} - \frac{1}{2}(1+2\beta-3\beta^2)\alpha_{14} - \frac{1}{2}(1-2\beta-3\beta^2)\alpha_{15} \right\}. \quad (\text{Π2.5})$$

II. Μορφή II

$$\hat{\alpha}_1 = 2\tilde{\alpha}_1 - 4\tilde{\alpha}_3, \quad (\text{Π2.6})$$

$$\hat{\alpha}_2 = -\tilde{\alpha}_1 + 4\tilde{\alpha}_2 + \tilde{\alpha}_3, \quad (\text{Π2.7})$$

$$\hat{\alpha}_1 = 2\tilde{\alpha}_3, \quad (\text{Π2.8})$$

$$\hat{\alpha}_1 = 3\tilde{\alpha}_4 - \tilde{\alpha}_5, \quad (\text{Π2.9})$$

$$\hat{\alpha}_5 = 2\tilde{\alpha}_4 - 2\tilde{\alpha}_5. \quad (\text{Π2.10})$$

III. Μορφή III

$$18\bar{d}_1 = 2\hat{\alpha}_1 - 4\hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_3 + 6\hat{\alpha}_4 - 3\hat{\alpha}_5, \quad (\text{Π2.11})$$

$$18\bar{d}_2 = 2\hat{\alpha}_1 - 4\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_3, \quad (\text{Π2.12})$$

$$3\bar{\alpha}_1 = 2(\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_3), \quad (\text{Π2.13})$$

$$\bar{\alpha}_2 = \hat{\alpha}_4 + \hat{\alpha}_5, \quad (\text{Π2.14})$$

$$3\bar{f} = \hat{\alpha}_1 - 4\hat{\alpha}_2 - 2\hat{\alpha}_3. \quad (\text{Π2.15})$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙΙ

ΟΡΙΖΟΥΣΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΕ ΠΛΑΚΑ ΜΕ ΜΙΚΡΟΔΟΜΗ

Τα στοιχεία της ορίζουσας των συστημάτων που προκύπτουν από την επίλυση του προβλήματος διάδοσης κυμάτων σε 2Δ πλάκα με μικροδομή και αντιστοιχούν στους συμμετρικούς και αντισυμμετρικούς ρυθμούς αντίστοιχα είναι:

Συμμετρικοί Ρυθμοί:

$$A_{11} = (4\mu p^3 + 2\lambda k^2 p + 2\lambda p^3) \sin ph,$$

$$A_{12} = 4\mu ikq^2 \sin qh,$$

$$A_{13} = (4\mu r_p^3 - 2\lambda k^2 r_p + 2\lambda r_p^3) \sin r_p h,$$

$$A_{14} = -4\mu ikr_s^2 \sin hr_s h,$$

$$A_{21} = -4\mu ikp^2 \cos ph,$$

$$A_{22} = 2\mu(-q^3 + k^2 q) \cos qh,$$

$$A_{23} = 4\mu ikr_p^2 \cos r_p h,$$

$$A_{24} = 2\mu(r_s^3 + k^2 r_s) \cos r_s h,$$

$$A_{31} = \left(4\mu pik + 4\mu p^3 ik g^2 + 2\lambda p^3 ik g^2 + 2\lambda pik^3 g^2 + 8\mu pik^3 g^2 - \frac{2\rho h^2 \omega^2}{3} \right) ikp \sin ph,$$

$$A_{32} = \left(2\mu q^2 - 2\mu k^2 + 2\mu q^4 g^2 + 4\mu k^2 q^2 g^2 - 2\mu k^4 g^2 - \frac{2\rho h^2 \omega^2}{3} q^2 \right) \sin qh,$$

$$A_{33} = \left(-4\mu r_p ik + 4\mu r_p^3 ik g^2 + 2\lambda r_p^3 ik g^2 - 2\lambda r_p ik^3 g^2 - 8\mu ik^3 r_p g^2 + \frac{2\rho h^2 \omega^2}{3} ikp \right) \sin hr_p h,$$

$$A_{34} = \left(-2\mu r_s^2 + 2\mu r_s^4 g^2 - 2\mu k^4 g^2 - 2\mu k^2 - 4\mu k^2 r_s^2 g^2 + \frac{2\rho h^2 \omega^2}{3} r_s^2 \right) \sin hr_s h, \quad (\text{Π3.1})$$

$$\begin{aligned}
A_{41} &= (-4\mu p^2 - 2\lambda p^2 - 2\lambda k^2 - 2\lambda p^4 g^2 - 4\mu p^4 g^2 - 2\lambda k^4 g^2 - 4\lambda k^2 p^2 g^2 \\
&\quad - 8\mu k^2 p^2 g^2 + \frac{2\rho h^2 \omega^2}{3} p^2) \cos ph, \\
A_{42} &= \left(-4\mu qik - 2\mu q^3 ik g^2 - 6\mu ik^3 q g^2 + \frac{2\rho h^2 \omega^2}{3} ikq \right) \cos qh, \\
A_{43} &= (4\mu r_p^2 + 2\lambda r_p^2 - 2\lambda k^2 - 2\lambda r_p^4 g^2 - 4\mu r_p^4 g^2 - 2\lambda k^4 g^2 + 4\lambda k^2 r_p^2 g^2 \\
&\quad + 8\mu k^2 g^2 r_p^2 - \frac{2\rho h^2 \omega^2}{3} r_p^2) \cos hr_p h, \\
A_{44} &= \left(-4\mu r_s ik + 2\mu r_s^3 ik g^2 - 6\mu ik^3 r_s g^2 + \frac{2\rho h^2 \omega^2}{3} ikr_s \right) \cosh hr_s h.
\end{aligned}$$

Αντισυμμετρικοί ρυθμοί:

$$\begin{aligned}
B_{11} &= (-4\mu p^3 - 2\lambda k^2 p - 2\lambda p^3) \cos ph, \\
B_{12} &= 4\mu ikq^2 \cos qh, \\
B_{13} &= -4\mu ikr_s^2 \cosh r_s h, \\
B_{14} &= (4\mu r_s^3 - 2\lambda k^2 r_p + 2\lambda r_p^3) \cosh r_p h, \\
B_{21} &= 4\mu ikp^2 \sin ph, \\
B_{22} &= -2\mu (q^3 - k^2 q) \sin qh, \\
B_{23} &= -2\mu (r_s^3 + k^2 r_s) \sinh r_s h, \\
B_{24} &= -4\mu ikr_p^2 \sinh r_p h, \\
B_{31} &= (4\mu pik + 4\mu p^3 ik g^2 + 2\lambda p^3 ik g^2 + 2\lambda ik^3 p g^2 + 8\mu ik^3 p g^2) \cos ph, \\
B_{32} &= (-2\mu q^2 + 2\mu k^2 - 2\mu q^4 g^2 - 4\mu k^2 q^2 g^2 + 2\mu k^4 g^2 + \frac{2\rho h^2 \omega^2}{3} q^2) \cos qh, \\
B_{33} &= (2\mu r_s^2 - 2\mu r_s^4 g^2 + 2\mu k^4 g^2 + 2\mu k^2 + 4\mu k^2 r_s^2 g^2 - \frac{2\rho h^2 \omega^2}{3} r_s^2) \cosh r_s h, \\
B_{34} &= (4\mu r_p ik - 4\mu ik g^2 r_p^3 - 2\lambda r_p^3 ik g^2 + 2\lambda ik^3 r_p g^2 + 8\mu ik^3 r_p g^2 - \frac{2\rho h^2 \omega^2}{3} ikr_p) \cosh r_p h, \\
B_{41} &= (4\mu p^2 + 2\lambda p^2 + 2\lambda k^2 + 2\lambda p^4 g^2 + 4\mu p^4 g^2 + 2\lambda k^4 g^2 + \\
&\quad 4\lambda k^2 p^2 g^2 + 8\mu k^2 p^2 g^2 - \frac{2\rho h^2 \omega^2}{3} p^2) \sin ph, \\
B_{42} &= \left(-4\mu ikq - 2\mu ikq^3 g^2 - 6\mu ik^3 q g^2 + \frac{2\rho h^2 \omega^2}{3} ikq \right) \sin qh,
\end{aligned} \tag{Π3.2}$$

$$B_{43} = \left(4\mu r_s ik - 2\mu r_s^3 g^2 ik + 6\mu ik^3 r_s g^2 - \frac{2\rho h^2 \omega^2}{3} ik r_s \right) \sinh r_s h,$$

$$B_{44} = (-4\mu r_p^2 - 2\lambda r_p^2 + 2\lambda k^2 + 2r_p^4 g^2 + 4\mu r_p^4 g^2 + 2\lambda k^4 g^2 - 4\lambda k^2 r_p^2 g^2 - 8\mu k^2 r_p^2 g^2 + \frac{2\rho h^2 \omega^2}{3} r_p^2) \sinh r_p h.$$