ΕΥΓΕΝΙΑ ΚΟΛΕΖΑ

"NIHIL EST INTELLECTU QUOD NON FUIT PRIUS IN SENSO"

Ιωάννινα 1998

ΕΥΓΕΝΙΑ ΚΟΛΕΖΑ

"NIHIL EST INTELLECTU QUOD NON FUIT PRIUS IN SENSO"

Aristotle

"I should lay particular stress on the heuristic value of the applied sciences as an aid on discovering new truths in mathematics"

Felix Klein

Περίληψη

Η "ευρετική αξία" των εφαρμοσμένων επιστημών για τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών είναι ένα ερώτημα που θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε σ' αυτή την παρουσίαση.

Οι κεντρικοί άξονες γύρω από τους οποίους θα κινηθούμε είναι:

- Η σχέση Μαθηματικών και εφαρμοσμένων επιστημών (physical sciences) όπως αυτή εξελίχθηκε από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα.
- Ο τρόπος με τον οποίο αυτή η σχέση μπορεί να αντικατοπτρισθεί στη διδασκαλία.

1. Η εξέλιξη της σχέσης Μαθηματικών - Φυσικής από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα

Κατά την Αριστοτέλεια φυσική φιλοσοφία υπάρχει σαφής διαχωρισμός μεταξύ φύσης και τέχνης (natural and artificial). Η φύση διακατέχεται από την αρχή της κίνησης και της αλλαγής και η αλλαγή είναι τελεολογικά καθορισμένη. Μια επιστημονική ερμηνεία συνίσταται στην περιγραφή της φύσης ενός αντικειμένου ή φαινομένου, δηλ. στην εξήγηση του τρόπου ανάπτυξης και εξέλιξής του.

Τα Μαθηματικά, επομένως, ως "μη φυσικά" δεν μπορούν να ερμηνεύσουν τη φύση.

Ο Αριστοτέλης υποστηρίζει ότι "σε ένα κενό χώρο, όπως είναι ο χώρος της Γεωμετρίας δεν υπάρχουν "φυσικοί τόποι". Η ιδέα του κενού δεν είναι συμβατή με την κατανόηση της κίνησης. Το κενό αποτελεί ένα μη-αισθητό (non-sens). Το να τοποθετηθούν σώματα σε αυτό το μη-αισθητό είναι παράλογο. Ως εκ τούτου, τίποτε δεν θα ήταν πιο επικίνδυνο από το να αναμείξουμε Γεωμετρία και Φυσική, και να εφαρμόσουμε μια μέθοδο συλλογισμού καθαρά γεωμετρική για τη μελέτη της φυσικής πραγματικότητας" [7].

Αντίθετα με τον Αριστοτέλη, ο Πλάτωνας πίστευε ότι τα Μαθηματικά είναι κατ' εξοχήν κατάλληλα για τις θεωρίες της Φυσικής.

Στα τέλη του 16ου αιώνα στα τάγματα των Ιησουϊτών ο διαχωρισμός φύσης - τέχνης βρίσκεται εν πλήρη ισχύ γιατί εξυπηρετεί απόλυτα την επιθυμία τους να διαφυλάξουν τα Μαθηματικά από την εισβολή της Φυσικής.

Παραδέχονται ότι ως "μη φυσικά" τα Μαθηματικά, δεν αναφέρονται στην ποιοτική ανάλυση της φύσης, αλλά εμπλέκονται στις φυσικές διαδικασίες μόνον ως προς την ποσοτική τους συνιστώσα. Οι μαθηματικές επιστήμες βρίσκουν μεν εφαρμογή στο φυσικό κόσμο, δεν έρχονται όμως σε αντιπαράθεση με τις ποιοτικές ερμηνείες της φυσικής φιλοσοφίας. Είναι ένα διαφορετικό πεδίο της ανθρώπινης δραστηριότητας.

Αυτή η αντίληψη, τοποθετεί τα Μαθηματικά σε μια θέση υπεροχής, αντιδιαστέλλοντας την "αμφίβολη" ποιοτική ερμηνεία με την καθαρότητα της μαθηματικής απόδειξης.

Ο ίδιος ο Αριστοτέλης στα "Φυσικά" του, διδάσκει ότι η "ποσότητα" είναι ένα θέμα που απασχολεί και τους φυσικούς και τους μαθηματικούς, αλλά με έναν εντελώς διαφορετικό τρόπο.

Στην "Αλμαγέστη", ο Πτολεμαίος υποστηρίζει ότι ο αστρονόμος ασχολείται μόνο με τα ποσοτικά χαρακτηριστικά των ουράνιων σωμάτων. Άλλωστε ο διαχωρισμός μεταξύ Αστρονομίας και Αστρολογίας είναι σαφής, η δεύτερη θεωρείται ως το "μίασμα" (pollution) της πρώτης. Η Αστρονομία θεωρείται "η πλέον ευγενής" από όλες τις μαθηματικές επιστήμες διότι χρησιμοποιεί τις πιο βέβαιες αποδείξεις (γεωμετρικές) και έχει ως αντικείμενο, το ευγενέστερο των αντικειμένων, τον ουρανό.

Έτσι, **στο εκπαιδευτικό σύστημα των Ιησουϊτών** τα Μαθηματικά έχουν μια εξέχουσα θέση και θεωρούνται ως ίσης αξίας εταίρος της φυσικής φιλοσοφίας. Οι μαθηματικοί, ως προς την ιεραρχία, δεν είναι υποδεέστεροι των φυσικών φιλοσόφων. Αντίθετα οι φυσικοί φιλόσοφοι διδάσκονται από τους μαθηματικούς. Τα Μαθηματικά κρίνονται απαραίτητα για την μελέτη της Φυσικής. Η ακρίβεια των μαθηματικών εκφράσεων και αποδείξεων αφενός επιτρέπει την αποφυγή σύγχυσης, αφ' ετέρου τα αποτελέσματα των μαθηματικών διερευνήσεων ανοίγουν νέους ορίζοντες έρευνας για τους φυσικούς.

Στα τέλη του 16ου αιώνα, η σχέση Μαθηματικών - Φυσικής είναι σαφής. Η μεν Φυσική ασχολείται με την αναζήτηση φυσικών αιτίων στα πλαίσια της οποίας εξαιρείται οποιαδήποτε ανθρώπινη τακτική, τα δε Μαθηματικά αναζητούν αποδείξεις που στηρίζονται μόνον στα ποσοτικά χαρακτηριστικά των μεγεθών. Οι δύο επιστήμες προσπαθούν να ερμηνεύσουν τον κόσμο από δύο διαφορετικές οπτικές γωνίες, με τα Μαθηματικά να λειτουργούν ως εργαλεία για την δημιουργία μιας έγκυρης γνώσης της φύσης.

Τα Μαθηματικά σ' αυτόν τον ερμηνευτικό και προβλεπτικό τους ρόλο διατηρούν μεν την αυτοτέλεια και την υπεροχή τους ως προς τη Φυσική, βρίσκονται όμως υποκείμενα κάποιου από τους κλάδους των καθαρών Μαθηματικών.

Ως καθαρές επιστήμες ο Αριστοτέλης θεωρεί εκείνες που θεμελιώνονται σε δικές τους μοναδικές αρχές, οι οποίες επιτρέπουν τη διατύπωση επαγωγικών συλλογισμών και αποδείξεων. Χαρακτηρίζονται από ομοιογένεια ως προς το είδος των αντικειμένων που συνθέτουν τις αρχές τους έτσι ώστε να διασφαλίζεται η συνοχή του επαγωγικού συλλογισμού.

Σύμφωνα με αυτό το κριτήριο, καθαρά Μαθηματικά είναι μόνο η Γεωμετρία και η Αριθμητική. Η Αστρονομία και η Μουσική υπόκεινται στην Γεωμετρία και την Αριθμητική αντίστοιχα διότι εφαρμόζουν τις αρχές τους για τη μελέτη άλλων πραγμάτων: των ουρανίων κινήσεων και των ήχων αντίστοιχα.

Η Αστρονομία και η Μουσική θεωρούνται "υποκείμενες" ή μικτές επιστήμες (mixed mathematics).

Το ίδιο και η Οπτική και η Στατική που υπόκεινται στη Γεωμετρία.

Ο διαχωρισμός μεταξύ καθαρών και μικτών μαθηματικών επιστημών, ήταν εν ισχύ ήδη από την Ελληνιστική περίοδο. "Αυτά τα τρία αντικείμενα, Αστρονομία, Στατική (περιλαμβανομένης και της Υδροστατικής) και Οπτική, ήταν οι μόνες συνιστώσες των κλασσικών φυσικών επιστημών κατά την αρχαιότητα και έγιναν αντικείμενα έρευνας που χαρακτηρίζετο από λεξιλόγιο και τεχνικές απρόσιτα στους μη ειδικούς … Ακόμη και σήμερα, το έργο του Αρχιμήδη και η Αλμαγέστη του Πτολεμαίου μπορούν να διαβαστούν μόνο από εκείνους που έχουν ειδικές γνώσεις σ' αυτά τα θέματα" [8].

Από τα μέσα του 16ου αιώνα ένα τέταρτο αντικείμενο μελέτης είχε προστεθεί: η μελέτη της κίνησης.

Η συμβολή του Galileo σ' αυτό το νέο ερευνητικό πεδίο ήταν τεράστια. Κι αυτό γιατί έπρεπε να αντιμετωπίσει την ευρέως διαδεδομένη Αριστοτελική άποψη ότι "δεν είναι δυνατόν να διατυπωθεί μια μαθηματική θεωρία της ποιότητας, ούτε καν της κίνησης. Στους αριθμούς δεν υπάρχει κίνηση. Αλλά αγνοουμένης της κινήσεως αγνοείται η φύση. Ο αριστοτελικός της εποχής του Galileo μπορούσε να προσθέτει ότι οι σημαντικότεροι πλατωνικοί, ο ίδιος ο θείος Αρχιμήδης δεν μπόρεσε να αναπτύξει κάτι άλλο πλην μιας στατικής. Όχι μια δυναμική. Μια θεωρία ακινησίας. Όχι μια θεωρία κινήσεως" [7]

Για να αντικρούσει την Αριστοτελική λογική ο Galileo αναγκάστηκε να αποκλείσει την έννοια της ποιότητας και ως εκ τούτου να αποκλείσει ως πηγή γνώσης την αντίληψη των πραγμάτων μέσω των αισθήσεων. Υποστήριξε, ότι ο μόνος τρόπος να συλλάβουμε την πραγματικότητα είναι η πνευματική γνώση, πράγμα το οποίο συνηγορεί υπέρ της άποψης ότι τα πειράματα που περιγράφει στο έργο του είναι πιθανότατα "νοητικά πειράματα" και όχι πηγή άντλησης γνώσης.

Τον 17ο αιώνα η συνεισφορά των Ιησουϊτών έγκειται στο ότι επεκτείνουν το σχήμα της εξάρτησης των μικτών μαθηματικών επιστημών έτσι ώστε αυτές να μην απορρέουν μόνο από ένα κλάδο των καθαρών Μαθηματικών αλλά και από την ίδια την Φυσική, αμβλύνοντας έτσι τις διαφορές μεταξύ (ποσοτικής) μαθηματικής επεξεργασίας και (ποιοτικής μελέτης) της φύσης.

Έτσι, για παράδειγμα, "η Οπτική περιγράφεται σε στενή σχέση με τη συμπεριφορά του φωτός και την ανατομία του ματιού σε συνδυασμό με γεωμετρικά συμπεράσματα... Όμως η ιδιαίτερη σχέση της με τα γεωμετρικά αντικείμενα (γραμμές, γωνίες , κώνοι) φανερώνει ότι υπάγεται όχι τόσο στη Φυσική όσο στη Γεωμετρία" [2].

Διότι, "πως μπορεί ένας φυσικός, χωρίς Γεωμετρία, να συζητήσει με αξιοπιστία για σημεία, γραμμές, επιφάνειες. Για αραιώσεις ή συμπυκνώσεις, για κατάληψη μεγαλύτερου ή μικρότερου χώρου, χωρίς πρόσθεση ή αφαίρεση μερών ... Ένας φυσικός χωρίς Γεωμετρία έχει δεμένα τα μάτια του". [2]

Γύρω στα 1619, μια νέα ορολογία αρχίζει να υιοθετείται για τα "μικτά Μαθηματικά". **Ο όρος "Φυσικο-Μαθηματικά"** (ή mathematico - physica) που εμφανίζεται για πρώτη φορά στην αλληλογραφία μεταξύ του Ολλανδού φιλοσόφου, μηχανικού και δασκάλου Isaac Beeckman και του νεαρού τότε Rene Descartes.

Ο Beeckman αναφερόμενος σε μια παρατήρηση του Descartes γύρω από τη σχέση των φυσικών ιδιοτήτων μιας χορδής και της μουσικής νότας που εκπέμπει, δεν κρύβει την ικανοποίησή του που ο Descartes "συμφωνεί με τις δικές του υποθέσεις περί σωματιδιακής φύσης του ήχου". Ιδιαίτερα τον ευχαριστεί το γεγονός ότι μόνο με αυτόν ο Descartes συμμερίζεται τις απόψεις του κι αυτό γιατί αυτός μόνον "χρησιμοποιεί με ακρίβεια αυτό το τρόπο μελέτης που συνδέει τα μαθηματικά με τη Φυσική". Και συμπληρώνει: "Υπάρχουν σήμερα ελάχιστοι Φυσικο-μαθηματικοί" [2].

Τα επόμενα χρόνια όχι μόνον ο αριθμός των Φυσικο-μαθηματικών αυξήθηκε αισθητά, αλλά επήλθε σταδιακή αλλαγή και στο περιεχόμενο αυτής της επιστήμης.

Όμως ο 17ος αιώνας σημαδεύτηκε κυρίως από μια επιστημονική επανάσταση που αφορούσε άμεσα τη σχέση Μαθηματικών - Φυσικής και που κύριο χαρακτηριστικό της ήταν η χρήση του πειράματος (experiment) στην αναζήτηση της γνώσης.

Η κατανόηση της φύσης μέσω της άμεσης εμπειρίας με τη βοήθεια των αισθήσεων, ήταν κάτι θεμιτό και προφανές για τους Αριστοτελικούς (nihil est in intellectu quod non fuit prius in sensu) αλλά η απλή παρατήρηση δεν αρκούσε για τη διατύπωση, μιας επιστημονικής θεωρίας. Τα αξιώματα του επαγωγικού συστήματος του Ευκλείδη δεν είναι παρατηρήσεις φυσικών φαινομένων, αλλά προτάσεις που **πρέπει** να δεχθούμε ως αληθείς για να κατασκευάσουμε ακλόνητες αποδείξεις.

Ο 17ος αιώνας χαρακτηρίζεται από τη χρήση της οργανωμένης εμπειρίας -του πειράματος- για την κατάκτηση της γνώσης.

Βέβαια, αυτός ο ορισμός του πειράματος ως επερώτηση μιας θεωρίας (test of a theory) μέσω μιας κατάλληλης γλώσσας δεν καλύπτει όλο το φάσμα των ερμηνειών του όρου, όπως αυτός χρησιμοποιήθηκε από τους πιο σημαντικούς φυσικο-μαθηματικούς.

Για τους R. Hooke (:instantia crucis) και I. Newton (experimentum crucis) το πείραμα έχει την έννοια ενός ελέγχου εναλλακτικών προτάσεων (test of alternative propositions). Για τον Boyle έχει το νόημα μιας συλλογής γεγονότων για την ενίσχυση μιας υποψίας, ενώ ο Galileo προσανατολίζεται σε μια συλλογή αρχών που θα χρησίμευαν σε τυπικές επιστημονικές αποδείξεις.

Το ότι το πείραμα χαρακτηρίζει τον 17ο αιώνα δεν σημαίνει ότι είναι και η πρώτη φορά που η οργανωμένη παρατήρηση χρησιμοποιείται για την εξαγωγή συμπερασμάτων. Από τον 13ο ήδη αιώνα, μια εμπειρική φιλοσοφική θεώρηση της επιστήμης ήταν ενσωματωμένη στις κλασσικές φυσικές επιστήμες. Μεταξύ, όμως, της πριν τον 17ο αιώνα εμπειρικής αντιμετώπισης της επιστήμης και εκείνης του 17ου αιώνα, υπήρχαν σημαντικές ποιοτικές διαφορές τις οποίες επισημαίνει ο Th. Kuhn στο [8].

Επιγραμματικά, τα χαρακτηριστικά των εμπειρικών φυσικών επιστημών από την αρχαιότητα μέχρι τα τέλη του 16ου αιώνα ήταν:

- Τα πειράματα στα οποία γίνεται αναφορά ήταν κυρίως νοητικά πειράματα (thought experiments), δεδομένου ότι τα αποτελέσματα αυτών των πειραμάτων ήταν ήδη γνωστά από συνεχείς παρατηρήσεις στα πλαίσια της καθημερινής εμπειρίας. Βέβαια, κάποια από τα πειράματα είχαν πράγματι εκτελεσθεί, αλλά κανείς δεν μπορεί να το πει με σιγουριά. Σε κάποιες περιπτώσεις υπάρχουν μόνο ενδείξεις ότι το πείραμα ήταν καθαρά νοητικό, όπως π.χ. στην περίπτωση όπου το κείμενο συνοδεύεται από μια εντελώς ουτοπιστική εικονογράφηση.
- Τα αποτελέσματα των πειραμάτων που αναφέρονται απέχουν κατά πολύ από εκείνα μεταγενέστερων πειραμάτων.
- Η υλική και τεχνική υποδομή των πειραμάτων σε πολλές περιπτώσεις θεωρείται αμφίβολο αν ήταν διαθέσιμη την συγκεκριμένη χρονική περίοδο.

- Φαίνεται καθαρά η ύπαρξη μιας θεωρίας που κυριαρχεί του πειράματος. Οπότε τα πειράματα είτε στοχεύουν στην εμπειρική παρουσίαση ενός ήδη γνωστού συμπεράσματος είτε αναζητούν απαντήσεις σε ερωτήματα που θέτει η υπάρχουσα θεωρία.

Αντίθετα όταν ο Bacon, ο Boyle ή ο Hooke σχεδίαζαν πειράματα από τις αρχές ήδη του 17ου αιώνα προκαλούσαν τη φύση να αντιδράσει κάτω από συνθήκες που για πρώτη φορά εμφανίζονταν και που στις περισσότερες περιπτώσεις ήταν ακραίες ή και εντελώς τεχνητές.

Με την εισαγωγή του πειράματος στην επιστημονική έρευνα, νέα ερευνητικά πεδία δημιουργήθηκαν (όπως η συστηματική και με όργανα ακριβείας έρευνα γύρω από το μαγνητισμό και τον ηλεκτρισμό) αλλά ήταν εμφανής η έλλειψη μιας συνεπούς και συγκροτημένης θεωρίας που θα μπορούσε να προβλέψει έστω και κατά προσέγγιση την έκβαση του πειράματος.

Είναι πράγματι περίεργη η προκατάληψη του Bacon έναντι μιας "δεσμευτικής θεωρίας", έναντι οποιασδήποτε σκέψης με φιλοσοφικές προεκτάσεις. Σε μερικές περιπτώσεις, μάλιστα, ξεπερνούσε τα όρια "αρνούμενος την αξία των συλλογιστικών μεθόδων σκέψης ... Εκείνο που ζητούσε ήταν να πολιορκήσουν οι άνθρωποι στενά τη φύση και να συμπλακούν μαζί της" [1].

Κατέκρινε και τα κακοφτιαγμένα πειράματα των προγενεστέρων του (μιλούσε για "τυφλή και ανόητη πειραματική μέθοδο"), αλλά κυρίως κατέκρινε την εξάρτηση αυτών των πειραμάτων από τη θεωρία, εξάρτηση που πολλές φορές έβαζε το πείραμα σε δεύτερη μοίρα: "Οι άνθρωποι έριχναν μια πολύ επιπόλαιη ματιά στο αποτέλεσμα του πειράματος και φαντάζονταν ότι η υπόλοιπη δουλειά μπορεί να γίνει με ονειροπολήματα ... προσπαθούσαν να παντρέψουν το αποτέλεσμα του πειράματος με τις χοντροκομμένες ιδέες που είχαν πριν στο μυαλό τους"[1].

Μέσα από μια τέτοια αντιμετώπιση των πραγμάτων, **είναι προφανές το ότι η στάση του Bacon απέναντι στα Μαθηματικά ήταν μάλλον αρνητική**.

Πράγματι, όπως αναφέρει ο H. Butterfield στο [1] ο Bacon "παραγνώρισε το είδος της επιστήμης που πήγασε τελικά από τον Galileo, ... τη σπουδαιότητα των Μαθηματικών, και για την ακρίβεια της Γεωμετρίας". Πίστευε, βέβαια, ότι "η διερεύνηση της φύσης διεξάγεται με τον καλύτερο τρόπο όταν τα Μαθηματικά εφαρμόζονται στη Φυσική", αλλά τα Μαθηματικά δεν μπορούν να είναι τίποτα περισσότερο από υπηρέτης της Φυσικής για τις ταπεινότερες δουλειές.

Εκείνο που κατέκρινε κυρίως ήταν "η μέθοδος του Galileo να μεταφράζει το πρόβλημα της κίνησης, σε πρόβλημα γεωμετρικών σωμάτων που κινούνται μέσα στο γεωμετρικό χώρο ... αγνοώντας την αντίσταση του αέρα ... Ακόμα και στην περίπτωση των ουράνιων σωμάτων ... ο ερευνητής δεν πρέπει να παραβλέπει από τι είδους υλικό είναι κατασκευασμένοι οι πλανήτες ...".

Οι ιδέες του Bacon βρήκαν γόνιμο έδαφος για να αναπτυχθούν κυρίως στην Αγγλία σε αντίθεση με τη Γαλλία όπου υιοθετήθηκε η παραγωγική μέθοδος του Descartes.

Η γαλλική "σχολή" και ιδιαίτερα οι Ιησουίτες μαθηματικοί ακόμα και μετά την εμφάνιση του κινήματος του Bacon ακολουθώντας την παράδοση του Galileo, όχι μόνο δεν απομόνωσαν τη Φυσική από τα Μαθηματικά αλλά ασχολήθηκαν με ιδιαίτερο ενδιαφέρον με καταστάσεις "physico-mathematica de natura" [Kircher, Ars Magnesia, 1631] όπου ένα πρόβλημα αντιμετωπίζεται με αποδεικτική - μαθηματική επεξεργασία αλλά και μέσω της καθημερινής εμπειρίας.

Το 1644, ο M. Mersenne, σύνδεσμος του Descartes με τον επιστημονικό κόσμο του Παρισιού αφ' ότου ο τελευταίος έφυγε για την Ολλανδία, τυπώνει το "Cogita physico-mathematica" όπου όπως και στο "Reflectiones physico-mathematicae", χρησιμοποιεί τις μικτές μαθηματικές επιστήμες ως μοντέλα για να κατανοήσει τη φύση και εκείνο που τον ελκύει σ' αυτές είναι ότι **δεν είναι Φυσική** (με την έννοια της φυσικής φιλοσοφίας του Αριστοτέλη): "... αν είναι κάτι για το οποίο συμφωνούν πάντα μαθηματικοί και φυσικοί είναι η βεβαιότητα των μαθηματικών αποδείξεων ... κι αυτό είναι ένα χαρακτηριστικό που σηματοδοτεί την υπεροχή των Μαθηματικών ως προς τη Φυσική". [2]

Στα τέλη του 17ου αιώνα τη θέση των "κλασσικών φυσικών επιστημών" παίρνουν τρία διακριτά ρεύματα: των κλασσικών επιστημών κάτω από το όνομα "Μαθηματικά", εκείνο των μικτών μαθηματικών κάτω από την ονομασία Φυσικο-Μαθηματικά (Physico-Mathematics) και εκείνο της Baconian Φιλοσοφίας κάτω από την ονομασία πειραματική Φυσική ("Physique Experimental").

Στο "Mathematical Lectures" (1683) του I. Barrow γίνεται σαφής η διάκριση μεταξύ "καθαρών" και "μικτών" Μαθηματικών. **Τα πρώτα έχουν να κάνουν με την έννοια της ποσότητας ενώ τα δεύτερα που τα ονομάζει "Physico-Mathematics"** ασχολούνται με τα φυσικά φαινόμενα.

Στο χώρο της εκπαίδευσης, όμως, μέχρι τα τέλη του 19ου αιώνα -με εξαίρεση την Αγγλία- οι κλασσικές επιστήμες είχαν αναμφισβήτητα τη μερίδα του λέοντος τόσο από πλευράς διδασκομένων μαθημάτων, όσο και από άποψη διδακτικού προσωπικού. Είναι ενδεικτικό ότι στη Γαλλική Ακαδημία των Επιστημών, το τμήμα της "πειραματικής Φυσικής" δημιουργήθηκε το 1785 με θέματα τη Γεωμετρία, την Αστρονομία και τη Μηχανική. Ακόμα και μετά το 1815 όταν το όνομα του τμήματος άλλαξε σε "Γενική Φυσική", μεταξύ των μελών του τμήματος, οι πειραματικοί ήταν ελάχιστοι.

Δεν θα ήταν υπερβολικό να πούμε ότι **το σχίσμα μεταξύ Μαθηματικών** (κλασσικών επιστημών) **και** (πειραματικής) **Φυσικής ξεκίνησε από τις ιδέες του Bacon, και συνεχίσθηκε μέχρι τα μέσα του 19ου αιώνα** αν και μορφές όπως του Galileo, Newton, Huyghens, Mariotte, Poincare, Klein έδειξαν μέσα από το έργο τους ότι η ενότητα μεταξύ των δύο επιστημών είναι αναπόφευκτη.

Για τον Galileo η δύναμη της σκέψης του υποκαθιστούσε το πείραμα που τις περισσότερες φορές ερχόταν να επιβεβαιώσει μια σειρά θεωρητικών συλλογισμών.

Ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα, όμως, ήταν η περίπτωση του Newton. Στα δύο πιο σημαντικά έργα του, Principia και Opticks, αντικατοπτρίζεται στο μεν πρώτο η παράδοση των κλασσικών επιστημών, στο δε δεύτερο, η επίδραση της Baconian φιλοσοφίας. Ακόμα και κάτω από την επίδραση των ιδεών του Bacon, "ο Newton επιλέγει από τα αυξανόμενα πειραματικά δεδομένα, εκείνα που μπορούσαν να ρίξουν φως σε θεωρητικά ζητήματα … Αυτό που βρίσκουμε στα Opticks είναι μια μη Baconian χρήση του Baconian πειράματος, ένα προϊόν της βαθειάς απορρόφησης του Newton από την κλασσική επιστημονική παράδοση"[8].

Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο P. Heimann στο [3] "στα Principia ο Newton δημιούργησε το παράδειγμα μιας μαθηματικής επιστήμης της Μηχανικής. Μολαταύτα, αν και ο ίδιος εξέφρασε την ελπίδα ότι όλα τα φυσικά φαινόμενα θα μπορούσαν να υπαχθούν σε αντίστοιχα μαθηματικά μοντέλα, στην Οπτική του η αντιμετώπιση των προβλημάτων της Οπτικής στηρίχθηκε, αφ' ενός μεν, σε μια πειραματική μεθοδολογία και αφ' ετέρου, σε μια καθαρά θεωρησιακή δομή"

Στο πρώτο μισό του 19ου αιώνα η κατάσταση μεταξύ Μαθηματικών και Φυσικής είχε διαμορφωθεί ως εξής:

Καταρχήν, ενώ από την αρχαιότητα μέχρι και τα τέλη του 18ου αιώνα μόνο η Μηχανική, η Οπτική, η Υδροστατική και Υδροδυναμική χρησιμοποιούσαν μαθηματικές θεωρίες (κυρίως Άλγεβρα, Γεωμετρία και Τριγωνομετρία), από τις αρχές του 19ου αιώνα όλο και περισσότερα πεδία έρευνας (Μαγνητισμός, Ηλεκτρισμός, Θερμότητα) απαιτούσαν μαθηματική επεξεργασία σε σημείο μάλιστα **που να αναγνωρίζεται ως επιστήμη ένα πειραματικό πεδίο έρευνας ανάλογα με το αν χρησιμοποιούσε ή όχι ως μοντέλα μαθηματικές θεωρίες**.

Τα σύνορα μεταξύ "καθαρών" Μαθηματικών και Φυσικής γίνονται δυσδιάκριτα με τη Φυσική να ακολουθεί την αλματώδη ανάπτυξη των "καθαρών" Μαθηματικών, στο μέτρο όπου παρατηρήθηκε μια συσσώρευση εξαιρετικά αφηρημένων και θεωρητικών μαθηματικών κατασκευών στη διάθεση των φυσικών επιστημόνων. Χαρακτηριστικά παραδείγματα, η γεωμετρία Riemann που αποτελεί τη βάση της θεωρίας της σχετικότητας και η θεωρία χώρων του Hilbert που βρήκε εφαρμογή στη κβαντική μηχανική. Η μαθηματικοποίηση της Φυσικής ξεκίνησε αρχικά από την Γαλλία γύρω στα 1810 για να παρατηρηθεί στη συνέχεια μια ύφεση και να πάρουν τη σκυτάλη γύρω στο 1840, άλλες χώρες, κυρίως η Γερμανία. Προσωπικότητες όπως αυτές των Riemann, Neumann, Helmholtz και Kirchoff συντέλεσαν στο να δημιουργηθεί ένας νέος επιστημονικός χώρος όπου πειραματικοί και καθαροί μαθηματικοί συνεργάζοντο σε εφαρμογές της Φυσικής.

2. Η αντανάκλαση της σχέσης Μαθηματικών - Φυσικής στη διδασκαλία

Η μαθηματικοποίηση της Φυσικής, που συντελέστηκε σταδιακά αλλά σταθερά, ωφέλησε μεν τη θεωρητική Φυσική , αλλά συγχρόνως της επέβαλε την κυριαρχία των Μαθηματικών.

Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να οξυνθούν οι σχέσεις και να αρχίσει η αναζήτηση ισορροπιών.

Το 1966 η Γραμματεία του τμήματος Φυσικής της Ακαδημίας του Βερολίνου οργανώνει μια συνάντηση φυσικών και μαθηματικών με στόχο την ανταλλαγή απόψεων γύρω από τη σχέση Μαθηματικών - Φυσικής.

Κάποιες από τις βασικές ιδέες που υποστηρίχθηκαν ήταν ότι:

- Δεν είναι απόλυτα σωστό να αποκαλούμε τη Φυσική μητέρα των Μαθηματικών, δεδομένου ότι υπάρχουν περιοχές των Μαθηματικών που δεν έχουν τις ρίζες τους στη Φυσική, όπως για παράδειγμα, η θεωρία πιθανοτήτων, η θεωρία παιγνίων, η θεωρία πληροφορίας και η μοντέρνα άλγεβρα. Αυτές οι εξαιρέσεις είναι αρκετές για να αποκλείσουμε οποιαδήποτε νατουραλιστική αντίληψη για τα Μαθηματικά.
- Το υψηλό επίπεδο αφαίρεσης μιας μαθηματικής θεωρίας προσφέρει ένα πεδίο εφαρμογών στη Φυσική σαφώς ευρύτερο από εκείνο που ενδεχομένως γέννησε αυτή τη μαθηματική θεωρία. Σ' αυτή τη περίπτωση, όταν δηλαδή έχουμε δημιουργία σε υψηλά αφηρημένο επίπεδο μιας νέας μαθηματικής θεωρίας με στόχο την εξήγηση φυσικών φαινομένων μιλάμε για "Φυσικά Μαθηματικά" ("Physikalische Mathematik").
- Η ανεξαρτητοποίηση των Μαθηματικών από τη Φυσική που συντελέστηκε το πρώτο μισό του 19ου αιώνα ωφέλησε ουσιαστικά την ίδια τη Φυσική. Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση της θεωρίας χώρου Hilbert σαν βάση της Κβαντικής Μηχανικής.
- Ο ρόλος των Μαθηματικών στη Φυσική είναι διπλός: παραγωγικός (ή μετασχηματιστικός) και προσδιοριστικός (ή διαμορφωτικός).

Ο **παραγωγικός ρόλος** συμπλέει με την φορμαλιστική αντίληψη των Μαθηματικών που θεμελιώθηκε από τον Hilbert και συνίσταται στη χρησιμοποίηση μαθηματικών εργαλείων για την εξαγωγή συμπερασμάτων από ήδη υπάρχοντα αξιώματα. Σ' αυτή τη περίπτωση τα Μαθηματικά λειτουργούν σαν το συντακτικό (syntax) μιας γλώσσας (της Φυσικής) ήδη διατυπωμένης.

Ο **προσδιοριστικός ρόλος** των Μαθηματικών είναι πολύ πιο καθοριστικός για τη διαμόρφωση των φυσικών θεωριών δεδομένου ότι η επιλογή μιας συγκεκριμένης μαθηματικής θεωρίας προκαθορίζει τις βασικές εξισώσεις της εν εξελίξει φυσικής θεωρίας. Έτσι, οι θεμελιώδεις εξισώσεις της Σχετικιστικής Μηχανικής που διατυπώθηκαν από τον Einstein στην πραγματικότητα προκύπτουν μέσω ενός αξιώματος αντιστοιχίας εφ' όσον θεωρήσουμε αποδεκτή τη γεωμετρία Minkowski.

Μέσα από τις προηγούμενες ιδέες αλλά και από την ίδια την ιστορική εξέλιξη των επιστημών, φαίνεται καθαρά η συμβολή των Μαθηματικών στη Φυσική τόσο σε επίπεδο έρευνας, όσο και σε επίπεδο διδασκαλίας.

Κάτι το οποίο έχει σχετικά λιγότερο συζητηθεί είναι η συμβολή της Φυσικής, ιδιαίτερα της πειραματικής Φυσικής για την μαθηματική έρευνα και εκπαίδευση.

Την πατρότητα αυτής της ιδέας την έχει αναμφίβολα ο Αρχιμήδης, αλλά σε νεότερες εποχές **θα τολμούσαμε να αποδώσουμε την ιδέα της χρησιμοποίησης φυσικών μοντέλων για την μελέτη των Μαθηματικών στον Newton**, κάτι που αναμφισβήτητα αποτέλεσε καινοτομία σε μια εποχή που δέσποζαν οι αντιλήψεις του Descartes, ότι δηλαδή ο μαθηματικός συλλογισμός είναι κάτι το εντελώς ξεχωριστό από τα πράγματα στα οποία αυτός ο συλλογισμός αναφέρεται.

Αντίθετα, για τον Newton, η μαθηματική γνώση (για την οποία η Γεωμετρία αποτελεί κλασσικό παράδειγμα) αναφέρεται σε ιδιαίτερα είδη αντικειμένων που δημιουργούνται μέσω κατασκευαστικής διαδικασίας (active construction). **Το όνομα αυτής της κατασκευής από την οποία προκύπτουν τα μαθηματικά**, είναι Μηχανική. Η άποψη ότι μια άψογη κατασκευή ανήκει στη Γεωμετρία ενώ μια ατελής στη Μηχανική δεν ευσταθεί. Τα λάθη, κατά τον Newton, δεν ανήκουν στην τέχνη, αλλά στους τεχνίτες.

"Η Γεωμετρία δεν είναι τίποτε άλλο παρά το τέλεια μηχανικό ... Διότι η χάραξη ευθειών και κύκλων που σ' αυτά θεμελιώνεται η Γεωμετρία, ανήκει στη Μηχανική ... Η Γεωμετρία δεν μας διδάσκει να χαράσσουμε αυτές τις γραμμές, το θεωρεί κάτι δεδομένο. Η λύση προβλημάτων χάραξης είναι θέμα Μηχανικής, η Γεωμετρία μας δείχνει πως να χρησιμοποιούμε τέτοιες χαράξεις ... Ως εκ τούτου η Γεωμετρία, θεμελιώνεται στη Μηχανική πρακτική" [2].

Αλλά και ο Poincare στο Valeur de la Science υπογραμμίζει τη σπουδαιότητα της Φυσικής για την αντιμετώπιση μαθηματικών προβλημάτων:

"Η επιστήμη της Φυσικής δεν μας δίνει μόνο την ευκαιρία να λύσουμε προβλήματα, αλλά μας βοηθάει επίσης να ανακαλύψουμε το δρόμο που οδηγεί στη λύση τους και μάλιστα αυτό το κάνει με δυο τρόπους: μας οδηγεί στο να υποψιαστούμε (anticipate) τη λύση και μας υποβάλλει τους κατάλληλους συλλογισμούς (που θα μας οδηγήσουν σε ένα ολοκληρωμένο σχέδιο)" [2].

Περίπου 200 χρόνια μετά, ο F. Klein στην εισήγησή του με θέμα "On the mathematical character of space - intuition and the relation of pure mathematics to the applied sciences" [6] διατυπώνει την ίδια άποψη: "Δίνω ιδιαίτερη έμφαση στην ευρετική αξία των εφαρμοσμένων Μαθηματικών σαν βοήθεια για την ανακάλυψη νέων αληθειών στα Μαθηματικά ... οι Αβελιανοί ακέραιοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως παράδειγμα ηλεκτρικών ρευμάτων σε κλειστές επιφάνειες. Με ανάλογο τρόπο, θεωρήματα που αφορούν διαφορικές εξισώσεις μπορούν να προκύψουν από τη θεώρηση των ηχητικών παλμών".

Και συνεχίζει, αφού έχει αναπτύξει λεπτομερώς την προηγούμενη σκέψη του: "Όλα αυτά μας υποβάλλουν την ερώτηση **μήπως θα έπρεπε να δημιουργήσουμε για τις ανάγκες της εκπαίδευσης ένα συντετμημένο σύστημα** (abridged system) **Μαθηματικών προσαρμοσμένο στις ανάγκες των εφαρμοσμένων επιστημών, χωρίς να περνάμε από όλο το βασίλειο των αφηρημένων Μαθηματικών;"**.

Συμπληρώνει, βέβαια, ότι μια τέτοια πρόταση δεν έχει καμιά πρόθεση να αναστείλει την έρευνα στα καθαρά Μαθηματικά, διότι εκτός από το γεγονός ότι τα καθαρά Μαθηματικά είναι αναντικατάστατα για την καλλιέργεια της λογικής σκέψης, είναι απαραίτητο να υπάρχουν πάντα έστω και οι λίγοι που θα ανεβάζουν σταδιακά τα standard αυτής της επιστήμης. Όμως **"για τη διδασκαλία, δεν είναι μόνο παραδεκτό, αλλά εντελώς απαραίτητο, να είμαστε λιγότερο αφηρημένοι στην αρχή, να έχουμε συνεχή επαφή με τις εφαρμογές και να προχωράμε σε εκλεπτύνσεις (refinements) σταδιακά και όσο μπορούν να καταλάβουν οι μαθητές μας ..."**.

Μισό αιώνα μετά, ο Polya στο [9] κάτω από τον τίτλο Physical Mathematics επεξεργάζεται λεπτομερώς τις απόψεις των Newton, Poincare και Klein με αφορμή συγκεκριμένα μαθηματικά προβλήματα που επιλύει ανατρέχοντας σε φυσικά μοντέλα.

Στις μέρες μας οι ιδέες που διατύπωσαν οι προηγούμενοι ερευνητές, αλλά και πολλοί άλλοι όπως οι H. G. Steiner, A. Revuz, J. de Lange κ.α. [4] για το πως θα μπορούσε να υπάρξει μια συνεργασία μεταξύ φυσικών και μαθηματικών στα πλαίσια της εκπαίδευσης έχουν αρχίσει να υλοποιούνται. Σε προηγούμενη εργασία μας [6], έχουμε ασχοληθεί διεξοδικά με τις διδακτικές προεκτάσεις μιας τέτοιας συνεργασίας.

Βέβαια ως τώρα, μεγαλύτερη έμφαση έχει δοθεί στο ρόλο που παίζουν τα Μαθηματικά στη διδασκαλία των επιστημών.

Θεωρούμε, όμως, ότι στα πλαίσια μιας ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης [10] η αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή, ο ρόλος της Φυσικής για την κατανόηση και επεξεργασία μαθηματικών εννοιών θα πρέπει να προσεχθεί ιδιαίτερα.

Σε πανεπιστημιακό επίπεδο, τα παιδαγωγικά τμήματα λόγω της ιδιαιτερότητας της μελλοντικής εργασιακής απασχόλησης των φοιτητών τους (τουλάχιστον όσο δεν ισχύει ο θεσμός του δασκάλου ειδικότητας) είναι το πλέον κατάλληλο περιβάλλον για να εφαρμοσθεί η προηγούμενη ιδέα.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

[1] BUTTERFIELD, H.: 1988, Η καταγωγή της σύγχρονης επιστήμης (1300-1800), Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τράπεζας

[2] DEAR, P.: 1995, Discipline and Experience, The University of Chicago Press

[3] HEIMANN, P. M.: 1994, Οι επιστημονικές Επαναστάσεις, Νεύση, τεύχος 1

[4] Institute fur Didactic der Mathematik der Universitat Bielefeld: 1979, Cooperation between Science teachers and Mathematics teachers, Materialien und Studien Band 16

[5] KLEIN, F.: 1894, Lectures on Mathematics, Macmillan and Co.

[6] ΚΟΛΕΖΑ, Ε., ΣΚΟΡΔΟΥΛΗΣ, Κ.: 1996, Διδακτικές προεκτάσεις της μαθηματικοφυσικής ιδιοποίησης του προβλημάτων των τριών σωμάτων από τον H. Poincare, Πρακτικά 1ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Αθήνα

[7] KOYRE, A.: 1994, Γαλιλαίος και Πλάτων, Νεύση, τεύχος 1

[8] KUHN, TH.: 1977, Mathematical versus Experimental Traditions in the Development of Physical Science, in The Essential Tension: Selected Studies in Scientific Tradition and Change, The University of Chicago Press

[9] POLYA, G.: 1954, Mathematics and Plausible Reasoning. Vol I, Princeton University Press

[10] STREEFLAND, L.: 1991, Realistic Mathematics Education in Primary School, Freudenthal Institute