ΕΥΓΕΝΙΑ ΚΟΛΕΖΑ

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Ιωάννινα 1996

ΕΥΓΕΝΙΑ ΚΟΛΕΖΑ

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

1. Θεωρητικό πλαίσιο

Στο δεύτερο μισό του 19ου αιώνα, παρατηρήθηκε μια σημαντική αλλαγή στο χώρο της Μαθηματικής επιστήμης. Αφ' ενός τα "καθαρά" Μαθηματικά αποτέλεσαν ένα υποσύστημα ανεξάρτητο, και κατά κάποιο τρόπο κυρίαρχο, έναντι εκείνου των εφαρμοσμένων Μαθηματικών, αφ' ετέρου επήλθε αλλαγή στη σχέση Μαθηματικών - Φυσικής. Η Φυσική βρέθηκε να ακολουθεί την αλματώδη ανάπτυξη των "καθαρών" Μαθηματικών στο μέτρο όπου παρατηρήθηκε μια συσσώρευση εξαιρετικά αφηρημένων και θεωρητικών μαθηματικών κατασκευών στη διάθεση των φυσικών επιστημόνων. Χαρακτηριστικά παραδείγματα, η γεωμετρία Riemann που αποτέλεσε τη βάση της θεωρίας της σχετικότητας και η θεωρία χώρων του Hilbert που βρήκε εφαρμογή στη κβαντική μηχανική.

Τα Μαθηματικά, αφηρημένες νοητικές κατασκευές, έχουν τη δυνατότητα να ερμηνεύουν φυσικά φαινόμενα, κι αυτή η "παράλογη αποτελεσματικότητά" τους[1] δίνει τροφή σε ατέρμονες φιλοσοφικές συζητήσεις. Πόσο

1. Πέρα από την απλή παρατήρηση της αποτελεσματικότητας των Μαθηματικών, η εισβολή τους σε όλες σχεδόν τις επιστημονικές περιοχές δημιούργησε μια βαθιά πεποίθηση ότι τα Μαθηματικά εκφράζουν τη φύση ακόμα και αν η ακριβής αντιστοιχία δεν έχει ακόμα βρεθεί. Είναι χαρακτηριστική η εισαγωγή του B. Pierce (1809-1880) —μαθηματικού στο Harvard University— στο άρθρο του Linear Associative Algebra (που δημοσιεύτηκε στο Am. Jour. of Math): «Τα Μαθηματικά είναι η επιστήμη που οδηγεί οπωσδήποτε σε συμπεράσματα». Στη σελίδα 5 αναφέρεται στο «μυστηριώδη» τύπο που συνδέει τα π, e και ι ($\iota^{\iota} = e^{\pi/2}$). Αφού τον αποδεικνύει μπροστά στους φοιτητές του, δηλώνει: «Κύριοι, είναι σίγουρα αληθές, είναι εντελώς παράδοξο, δεν μπορούμε να το συλλάβουμε, δεν έχουμε καμιά ιδέα για το τι μπορεί να σημαίνει αυτή η εξίσωση, αλλά είμαστε σίγουροι ότι πρόκειται για κάτι σημαντικό».

Στο ίδιο πνεύμα εκφράζεται και ο J. Dieudonne (Dieudonne, 1964) όταν γράφει «Δεν αρνούμαι το γεγονός ότι η σχέση των Μαθηματικών, με άλλα πεδία όπως η θεωρητική Φυσική είναι ευεργητική και για τις δύο πλευρές... Αλλά ακόμα και αν τα Μαθηματικά ήταν απομονωμένα από όλα τα άλλα κανάλια της ανθρώπινης έκφρασης, θα υπήρχε τροφή για αιώνιες σκέψεις...».\

"άμεση" και "φυσιολογική" είναι, όμως, η εφαρμογή των Μαθηματικών στη Φυσική;

Κατά τον E. Wigner (Wigner, 1960), δεν θα πρέπει να μιλάμε για εφαρμογή των Μαθηματικών αλλά για μια κατάλληλη προσαρμογή των Μαθηματικών ιδεών στα φαινόμενα της φύσης. Αποδίδοντας τις «παρεκκλίσεις» στη σχέση μεταξύ θεωρίας και παρατήρησης προσπαθούμε να τις καλύψουμε με ειδικές προσεγγίσεις και άλλες διαδικασίες.

Προς τα τέλη, λοιπόν, του 19ου αιώνα, παρατηρούμε μια βαθμιαία μεταβολή της ταυτότητας των Μαθηματικών. Περιοχές όπως, για παράδειγμα, η ουράνια μηχανική και η υδροδυναμική, που βρίσκονταν στο κέντρο της μαθηματικής έρευνας, στις αρχές του 20ου αιώνα είχαν ενταχθεί σ' ένα καινούργιο ερευνητικό χώρο, τα "εφαρμοσμένα" Μαθηματικά. Ο νέος αυτός χώρος -αρχικά τουλάχιστον- θεωρούνταν υποδεέστερος εκείνου των "καθαρών" Μαθηματικών με την έννοια ότι μαθήματα σχετικά με την ουράνια μηχανική και την ηλεκτρονική θεωρία εδιδάσκοντο μεν στα μαθηματικά τμήματα αλλά σαν δευτερεύουσες ενότητες απομακρυσμένα από τα καίρια ενδιαφέροντα της μαθηματικής έρευνας.

Επιπλέον, μέχρι τα τέλη του 18ου αιώνα μόνο η μηχανική και η υδροδυναμική έκαναν χρήση της μαθηματικής γνώσης και αρκούσαν στοιχεία γεωμετρίας, άλγεβρας και τριγωνομετρίας (Kuhn, 1979). Λίγα χρόνια αργότερα, οι εργασίες, για παράδειγμα, των Laplace (1749-1827), Fourier (1768-1830) και Carnot (1753-1823) είχαν κάνει τα "καθαρά" Μαθηματικά απαραίτητα για τη μελέτη της θερμότητας. Το ίδιο έγινε και στην περίπτωση του ηλεκτρισμού και μαγνητισμού από τους Poisson (1781-1840) και Ampere (1775-1836). Το επιστημονικό status της μοντέρνας Φυσικής βρέθηκε να εξαρτάται άμεσα από το βαθμό χρήσης μαθηματικών εννοιών ως μοντέλων στη διατύπωση των φυσικών θεωριών.

Η μαθηματικοποίηση της Φυσικής ξεκίνησε αρχικά στη Γαλλία γύρω στα 1800 για να παρουσιάσει μια κάμψη τριάντα χρόνια αργότερα και να δώσει τη σκυτάλη σε Βρετανούς και Γερμανούς ερευνητές.

Ιδιαίτερα στη Γερμανία, το υπάρχον εκπαιδευτικό σύστημα (Heinman, 1994) και προσωπικότητες όπως αυτές των Riemann, Neumann, Weber, Helmholtz και Kirchhoff συνετέλεσαν στο να δημιουργηθεί ένας νέος επιστημονικός χώρος όπου πειραματικοί και καθαροί μαθηματικοί συνεργάζοντο σε εφαρμογές της Φυσικής. Γύρω στα 1830 ο P. Dirichlet (1805-1859) παρουσιάζει τις τεχνικές του J. Fourier σε φοιτητές των μαθηματικών και φυσικών τμημάτων του πανεπιστημίου του Βερολίνου και βρίσκεται σε συνεχή συνεργασία με τον W. Weber (1804-1891). Συγχρόνως στο Konigsberg, ο C. Jacobi (1804-1851) συνεργάζεται στενά με τον μαθηματικό φυσικό F. Neumann (1798-1895) στην έρευνα και τη διδασκαλία. Μαθητής των Jacobi και Dirichlet στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου υπήρξε ο B. Riemann (1826-1866), ο οποίος παρακολούθησε μαθήματα Φυσικής από τον W. Weber στο Gottingen και λίγα χρόνια αργότερα (1854) γίνεται καθηγητής στο ίδιο πανεπιστήμιο.

Ο H. Helmholtz (1821-1894) μπαίνει στο χώρο της Μαθηματικής Φυσικής έχοντας ήδη κάνει σπουδές στη φυσιολογία και ασχολείται με μελέτες στην ακουστική στηριζόμενος στις έρευνες του Riemann. Τον κύκλο, για τη συγκεκριμένη περίοδο, συμπληρώνει ο G. Kirchhoff (1847-1887), που είναι γνωστός για τις μελέτες του στις διαφορικές εξισώσεις. Μαθητής του H. Weber (1842-1913) στο πανεπιστήμιο του Konigsberg υπήρξε ο D. Hilbert (1862-1943), που αρχίζει την ακαδημαϊκή του καριέρα το 1886 στο ίδιο πανεπιστήμιο.

Το 1895, μετά από ενέργειες του F. Klein (1849-1925), ο D. Hilbert διαδέχεται τον H. Weber στο πανεπιστήμιο του Gottingen και από τότε το όνομά του βρίσκεται στενά συνδεδεμένο με αυτό το επιστημονικό κέντρο, όπου παρέμεινε μισό περίπου αιώνα. Το 1902 φθάνει στο Gottingen και ο H. Minkowski (1864-1909) και αναπτύσσει ένα νέο χώρο-χρονικό σύστημα. Οι απόψεις του Minkowski ελήφθησαν πιθανόν υπόψη από τον A. Einstein (1879-1955) για τη διατύπωση της γενικευμένης θεωρίας της σχετικότητας.

Ο ίδιος ο A. Einstein αν και δεν ήταν μαθηματικός εκτιμούσε ιδιαίτερα την έρευνα που συντελείτο στο Gottingen όπου και δίδαξε για ένα διάστημα (1915).

Η μαθηματικοποίηση της Φυσικής, που συντελέστηκε σταδιακά για περισσότερα από εκατό χρόνια, ωφέλησε μεν τη θεωρητική Φυσική, αλλά συγχρόνως της επέβαλε την κυριαρχία των Μαθηματικών. "Καθαροί" μαθηματικοί, θεωρητικοί φυσικοί, μαθηματικοί φυσικοί βλέπουν συχνά τις σχέσεις τους να οξύνονται και αναζητούν ισορροπίες μεταξύ Μαθηματικών και Φυσικής[2]. Το 1966 η Γραμματεία του τμήματος Φυσικής της Ακα-

2. Η επιθετική ή έστω επιφυλακτική στάση απέναντι στην εμπειρία και τα δεδομένα των αισθήσεων είναι κάτι που χρονολογείται από τον 5ο π.Χ. αιώνα. Η διένεξη διεξήγετο μεταξύ δυο αντιμαχόμενων ομάδων που ο B. Mandelbrot (Mandelbrot, 1992) αποκαλεί πλουραλιστές (Pluralist) και ουτοπιστές (Utopian). Σημαντικότεροι από τους πλουραλιστές ήταν ο Εύδοξος (408-355 π.Χ.) και ο Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.), ο οποίος μάλιστα είχε εκφράσει την άποψη ότι: «Κάποια πράγματα γίνονται ξεκάθαρα με μια μηχανική μέθοδο αν και εκ των υστέρων πρέπει να αποδειχθούν με τη βοήθεια της Γεωμετρίας, διότι η εξερεύνησή τους με τη μηχανική μέθοδο δεν προσφέρει πραγματική απόδειξη. Αλλά είναι ευκολότερο να απο-

δημίας του Βερολίνου (Monatsberichte der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin) οργανώνει μια συνάντηση φυσικών και μαθηματικών με στόχο την ανταλλαγή απόψεων γύρω από τη σχέση Μαθηματικών - Φυσικής (Grundsatzliches zum Verhaltnis von Mathematik und Physik und zu seiner geschichtlichen Entwicklung).

Κάποιες από τις βασικές ιδέες που υποστηρίχθηκαν (Strauss, 1972) ήταν ότι:

- Δεν είναι απόλυτα σωστό να αποκαλούμε τη Φυσική μητέρα των Μαθηματικών, δεδομένου ότι υπάρχουν περιοχές των Μαθηματικών που δεν έχουν τις ρίζες τους στη Φυσική, όπως για παράδειγμα, η θεωρία πιθανοτήτων, η θεωρία παιγνίων, η θεωρία πληροφορίας και η μοντέρνα άλγεβρα. Αυτές οι εξαιρέσεις είναι αρκετές για να αποκλείσουμε οποιαδήποτε νατουραλιστική αντίληψη για τα Μαθηματικά.

- Το υψηλό επίπεδο αφαίρεσης μιας μαθηματικής θεωρίας προσφέρει ένα πεδίο εφαρμογών στη Φυσική σαφώς ευρύτερο από εκείνο που ενδεχομένως γέννησε αυτή τη μαθηματική θεωρία. Σ' αυτή τη περίπτωση, όταν δηλαδή έχουμε δημιουργία σε υψηλά αφηρημένο επίπεδο μιας νέας μαθηματικής θεωρίας με στόχο την εξήγηση φυσικών φαινομένων μιλάμε για

δείξουμε κάτι που το γνωρίσαμε μέσω μιας τέτοιας μεθόδου, παρά να το ανακαλύψουμε χωρίς καμιά πρότερη γνώση».

Ο Αρχιμήδης υποστήριζε μια ισορροπία μεταξύ του ρόλου της απόδειξης και του ρόλου της εμπειρίας και θεωρούσε το πείραμα και τις αισθήσεις σαν εργαλεία που βοηθούν στην αναζήτηση νέων μαθηματικών γνώσεων. Ο Πλάτωνας (429-348 π.Χ.) υπήρξε φανατικός ουτοπιστής. Είναι χαρακτηριστική η επίθεση που εξαπέλυσε ενάντια στους Εύδοξο και Αρχύτα (428-347 π.Χ.) σχετικά με τα πειράματά τους στη Μηχανική. Διαβάζουμε σε κείμενο του Πλούταρχου ότι «οι Εύδοξος και Αρχύτας ήταν οι πρώτοι οργανωτές αυτής της φημισμένης τέχνης της Μηχανικής που χαίρει ευρείας εκτίμησης και την οποία χρησιμοποιούν σαν μια κομψή αναπαράσταση των γεωμετρικών ιδεών και σαν μια πειραματική υποστήριξη συμπερασμάτων που δύσκολα θα μπορούσε κάποιος να αποδείξει με λέξεις και διαγράμματα. Αλλά ο Πλάτων εξέφρασε την αγανάκτησή του γι' αυτή τη μέθοδο και απηύθυνε ύβρεις εναντίον της γιατί τη θεώρησε σαν διαφθορά της ίδιας της ιδέας της Γεωμετρίας. Αυτή η μέθοδος (κατά τον Πλάτωνα) αναίσχυντα περιφρονεί τα άϋλα αντικείμενα της σκέψης, ξαναγυρίζει στις αισθήσεις, και ζητά βοήθεια από την ύλη».

Μήπως σύμφωνα με το απόσπασμα του Πλούταρχου, πρέπει να θεωρήσουμε τον Εύδοξο σαν τον πρώτο Μαθηματικό Φυσικό;

Τα Ελληνικά μαθηματικά, πάντως, κάτω από την επίδραση του Πλάτωνα πήραν μια μορφή αντι-εμπειρική προς όφελος μιας αυστηρής αποδεικτικής διαδικασίας που πολλοί επικρότησαν ενώ άλλοι κατηγόρησαν δριμύτατα. Πιθανώς, αυτός ο αντι-εμπειρισμός να ευθύνεται για την αποτυχία των Ελλήνων να αναπτύξουν τη Φυσική επιστήμη στον ίδιο βαθμό με τα Μαθηματικά.

"Φυσικά Μαθηματικά" ("Physikalische Mathematik")[3].

- Η ανεξαρτητοποίηση των Μαθηματικών από τη Φυσική που συντελέστηκε το πρώτο μισό του 19ου αιώνα ωφέλησε ουσιαστικά την ίδια τη Φυσική. Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση της θεωρίας χώρου Hilbert σαν βάση της Κβαντικής Μηχανικής.

- Ο ρόλος των Μαθηματικών στη Φυσική είναι διπλός: παραγωγικός (ή μετασχηματιστικός)[4] και προσδιοριστικός (ή διαμορφωτικός).

Ο **παραγωγικός ρόλος** συμπλέει με την φορμαλιστική αντίληψη των Μαθηματικών που θεμελιώθηκε από τον Hilbert και συνίσταται στη χρησιμοποίηση μαθηματικών εργαλείων για την εξαγωγή συμπερασμάτων από ήδη υπάρχοντα αξιώματα. Σ' αυτή τη περίπτωση τα Μαθηματικά λειτουργούν σαν το συντακτικό (syntax)[5] μιας γλώσσας (της Φυσικής) ήδη διατυπωμένης.

Ο **προσδιοριστικός ρόλος** των Μαθηματικών είναι πολύ πιο καθοριστικός για τη διαμόρφωση των φυσικών θεωριών δεδομένου ότι η επιλογή μιας συγκεκριμένης μαθηματικής θεωρίας προκαθορίζει τις βασικές εξισώσεις της εν εξελίξει φυσικής θεωρίας. Έτσι, οι θεμελιώδεις εξισώσεις της Σχετικιστικής Μηχανικής που διατυπώθηκαν από τον Einstein στην πραγματικότητα προκύπτουν μέσω ενός αξιώματος αντιστοιχίας εφ' όσον θεωρήσουμε αποδεκτή τη γεωμετρία Minkowski.

Με άλλα λόγια, η επικοινωνία μαθηματικών - φυσικών σύμφωνα με τον R. Feynman (Feynman, 1990) γίνεται με δυο διαφορετικούς τρόπους: "Κάθε φορά που τα προβλήματα στη Φυσική γίνονται δύσκολα, απευθυνόμα-

3. Η μαθηματικοποίηση της Φυσικής κατά τον 19ο αιώνα έγινε σε άμεση συνάρτηση με την δημιουργία των «Φυσικών Μαθηματικών». Μαθηματικοί ερευνητές του επιπέδου του D. Hilbert, του F. Klein η της E. Noether (1888-1935) συνέβαλαν στη μαθηματικοποίηση της Φυσικής δημιουργώντας «Φυσικά Μαθηματικά».

4. Deductive (or Transformative) and Constitutive (or Formative).

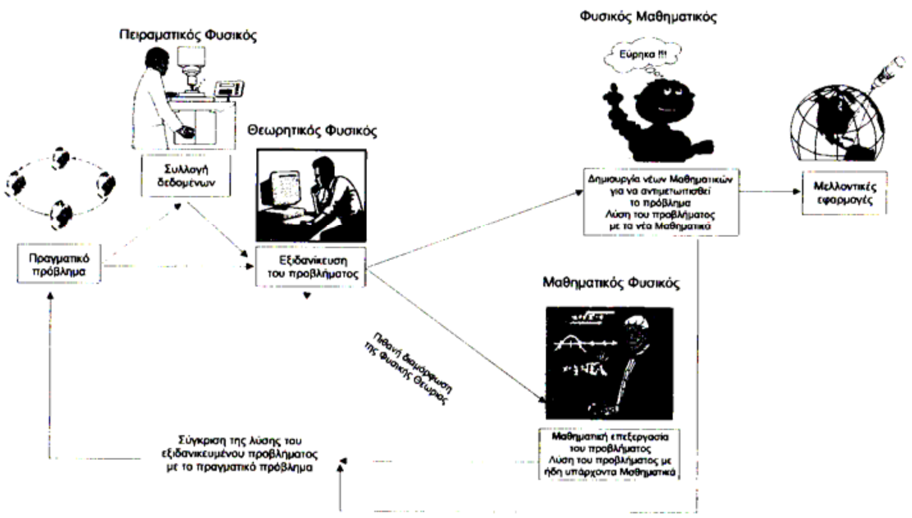
5. Η έκφραση: «Τα Μαθηματικά είναι η γλώσσα της Φυσικής» δεν είναι, επομένως, ακριβής. Η σχέση αποδίδεται πληρέστερα από την έκφραση: «Το συντακτικό της γλώσσας της Φυσικής καθορίζεται εντελώς από το μαθηματικό λογισμό και τις θεμελιώδεις εξισώσεις της Μαθηματικής Θεωρίας» (Strauss, 1972).

Εξ' άλλου, σύμφωνα με τον M. Flato (Flato, 1990) «Τα Μαθηματικά είναι, αναμφίβολα, υπό μια έννοια «γλώσσα», αλλά καταρχήν είναι σκέψη ... αποτελεί ακραία αναγωγιστική αντίληψη το να την μετατρέπουμε σε απλή «έκφραση» ή σε κάποιο ένδυμα μιας σκέψης. Και μάλιστα μιας σκέψης... που προϋπήρχε αυτής και παραμένει εξωτερική προς αυτήν ... Το δυναμικό εγχείρημα μαθηματικής έμπνευσης που πραγματοποίησε ο W. Heisenberg προκειμένου να δώσει την πρώτη επιτυχημένη εκδοχή της κβαντινής μηχανικής, συνοψίζεται (απλά και μόνο) σε μια εύστοχη διατύπωση; Όχι βέβαια. Η μαθηματική σκέψη του Heisenberg είναι συνδεδεμένη με τη φυσική σκέψη του, σε σημείο που γίνονται σάρκα μία».

στε στους μαθηματικούς, που ίσως έχουν μελετήσει τέτοια θέματα και έχουν ετοιμάσει το είδος των συλλογισμών που πρέπει να ακολουθήσουμε (προσδιοριστικός ρόλος). Από την άλλη πλευρά, αν δεν συμβαίνει κάτι τέτοιο, πρέπει μόνοι μας να επινοήσουμε το σύνολο των λογικών επιχειρημάτων, και με τη σειρά μας να τα δώσουμε στους μαθηματικούς (παραγωγικός ρόλος)"[6].

Καθαροί μαθηματικοί, θεωρητικοί φυσικοί ... Μπορούν να συνυπάρξουν αυτές οι δυο ομάδες επιστημόνων; Ερευνητές όπως ο Riemann, ο Klein, ο Poincare, ή ο Hilbert χαρακτηρίζονται, άρα, ως μαθηματικοί ή φυσικοί; Μπορούμε να μιλάμε για σύνορα ανάμεσα στη Φυσική και τα Μαθηματικά; Σύμφωνα με τον M. Flato (Flato, 1990) "αυτό το σύνορο συγκαλύπτεται από την εμφάνιση της "Φυσικής Μαθηματικής επιστήμης" (Physikalische Mathematik) που δημιουργεί Μαθηματικά για να προσφέρει το απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο στο θεωρητικό φυσικό".

Διαγραμματικά, θα μπορούσαμε να αποδώσουμε ως εξής τη διαλεκτική μεταξύ έρευνας στη Φυσική και τα Μαθηματικά.



6. Έχοντας στη διάθεσή τους οι μαθηματικοί αυτή την «πρώτη ύλη» των λογικών επιχειρημάτων και δουλεύοντας σε ένα αφηρημένο επίπεδο δημιουργούν νέα γνώση και ενδεχομένως νέους κλάδους στα Μαθηματικά. Τον «καθαρό» μαθηματικό που επεξεργάστηκε σε αφηρημένο επίπεδο το σύνολο των λογικών επιχειρημάτων του θεωρητικού φυσικού (και τα οποία μακροπρόθεσμα οικειοποιούνται τα Μαθηματικά), θα μπορούσαμε —κατά τον M. Strauss (Strauss, 1972)— να τον ονομάσουμε «φυσικό μαθηματικό» («Physical Mathematician»).

Ο **πειραματικός φυσικός** εκτελεί μετρήσεις με αφορμή ένα φυσικό φαινόμενο[7] ή ανακαλύπτει ένα φαινόμενο (μέσω πειράματος[8]) (π.χ. η ανακάλυψη διακριτών φασματικών γραμμών στο άτομο του υδρογόνου)

Ο **θεωρητικός φυσικός** επεξεργάζεται μια θεωρία για την εξήγηση του φαινομένου (π.χ. ο N. Bohr επεξεργάστηκε το κβαντισμένο πρότυπο για τη δομή του ατόμου).

Ο **μαθηματικός φυσικός** (που θα μπορούσε να είναι το ίδιο πρόσωπο με το θεωρητικό φυσικό) χρησιμοποιεί μια υπάρχουσα μαθηματική θεωρία για την λογική δόμηση της θεωρίας του θεωρητικού φυσικού και την εξαγωγή συμπερασμάτων. Ουσιαστικά "ο μαθηματικός φυσικός ασχολείται με τη Φυσική γιατί ενδιαφέρεται για τις εφαρμογές των Μαθηματικών στα φυσικά φαινόμενα" (Steiner, 1990).

Με άλλα λόγια, ο μαθηματικός φυσικός είναι ο φυσικός εκείνος που έχοντας μαθηματικές γνώσεις, προσαρμόζει τα δεδομένα του θεωρητικού φυσικού σε υπάρχοντα μαθηματικά μοντέλα. Ασχολείται με τη Φυσική γιατί ξέρει ότι η Φυσική χρειάζεται τα μαθηματικά. Και εκείνο που τον ενδιαφέρει είναι η μαθηματικοποίηση των φυσικών φαινομένων.

7. Η εμπειρία και η παρατήρηση «υπονοεί» νόμους, αλλά δεν χτίζει θεωρίες. Μια φυσική θεωρία δεν είναι ποτέ μια απλή δόμηση της εμπειρίας. Πάντα υπάρχει μια θεωρία που προηγείται ενός συνόλου πειραμάτων ή παρατηρήσεων και αναπτύσσεται σε ένα πεδίο μιας ήδη υπάρχουσας γνώσης χρησιμοποιώντας ήδη υπάρχοντα μαθηματικά σχήματα για να χτίσει ένα οργανικό «όλο» ένα «κλειστό σύστημα εννοιών».

Μ' αυτό τον τρόπο, όχι μόνο επιτρέπει προβλέψεις για τις καινούργιες εμπειρίες, αλλά συγχρόνως εμπλουτίζεται η θεωρητική δομή με νέες έννοιες και νέες σχέσεις. Βέβαια, μπορεί να υπάρχουν αντιφάσεις μεταξύ παρατηρήσεων και δεδομένης θεωρίας (π.χ. η ανεξήγητη σταθερότητα των ατόμων στην κλασσική ηλεκτροδυναμική). Τέτοιες αντιφάσεις μας κάνουν να υποψιαστούμε μια «πραγματικότητα» που ανθίσταται τόσο στο πείραμα όσο και στη θεωρία και ένα υπαρκτό εμπόδιο για τη διαμόρφωση μιας γενικής θεωρίας στα πλαίσια της κλασσικής Φυσικής. Παρ' όλα αυτά, το πείραμα διατηρεί τη σημασία του σαν «ταραχοποιό» στοιχείο που αφήνει να φανούν αυτές οι ασυμφωνίες και μ' αυτό τον τρόπο μας παρακινεί στην αναζήτηση μιας γενικής θεωρίας που θα εξηγεί αυτά τα πειραματικά αποτελέσματα.

8. Ο Πειραματικός φυσικός για να συγκεντρώσει αξιόπιστα δεδομένα πρέπει να πάρει κάποια προληπτικά μέτρα. Κατ' αρχήν πρέπει να απομονώσει τους ενδεχόμενους «θορύβους» και να τους δώσει μια μορφή εύκολα επεξεργάσιμη. Αν π.χ. θέλει να μετρήσει το γήινο μαγνητισμό πρέπει να αποφύγει την παρείσφυση του μαγνητικού πεδίου ενός σώματος που βρίσκεται στο εργαστήριο. Στη συνέχεια πρέπει να απορρίψει τις «ύποπτες» μετρήσεις και να επαναλάβει το πείραμα όσες φορές χρειάζεται μέχρι να πάρει αποτελέσματα που έχουν πραγματική αξία. Τότε αρχίζει το έργο του θεωρητικού φυσικού.

Ο φυσικός μαθηματικός, με αφορμή τα δεδομένα του θεωρητικού φυσικού και ελλείψει μιας κατάλληλης μαθηματικής θεωρίας φτιάχνει ένα μαθηματικό μοντέλο για να καλύψει τις ανάγκες του φυσικού (π.χ. με αφορμή το κβαντισμένο πρότυπο για τη δομή του ατόμου ο Heisenberg ανέπτυξε το λογισμό των πινάκων που αποτέλεσε τη βάση για την κβαντική μηχανική, αλλά σε καθαρά αφηρημένο μαθηματικό επίδεδο άνοιξε προοπτικές για μελλοντικές εφαρμογές).

Η κατασκευή νέων μαθηματικών θεωριών μπορεί όμως να γίνει με αφορμή άλλου είδους εμπειρία (δηλ. με αφορμή προβλήματα διαφορετικά από εκείνα που ενδέχεται να θέσει ένας θεωρητικός φυσικός). Σ' αυτή την περίπτωση μιλάμε για πειραματικό μαθηματικό (Experimental Mathematician).

Τα Πειραματικά Μαθηματικά είναι ένας κλάδος ευρύτερος των Φυσικών Μαθηματικών. Σύμφωνα με τον B. Mandelbrot (Mandelbrot, 1992), "τα Πειραματικά Μαθηματικά δεν υποδηλούν μια απόπειρα εισβολής των εφαρμοσμένων στα καθαρά Μαθηματικά. Τα εφαρμοσμένα Μαθηματικά είχαν πάντα άμεση επαφή με τη φύση, άρα και με το πείραμα. Αυτό το χαρακτηριστικό τους συνέβαλε στο να μην είναι πολύ δημοφιλή από εκείνους που πίστευαν ότι τα εφαρμοσμένα Μαθηματικά, είναι "κακά" Μαθηματικά. Αλλά πειραματικά Μαθηματικά σημαίνει κάτι διαφορετικό: σημαίνει την εσκεμμένη διείσδυση του πειράματος (injecting experiment) στο σκληρό πυρήνα των Μαθηματικών, σε μια φάση, μάλιστα, που φαίνεται ότι δεν έχουν καμιά επαφή με τη φύση".

Για να κατανοήσει κάποιος το περιεχόμενο των πειραματικών Μαθηματικών, γράφει ο Mandelbrot, πρέπει να αντιληφθεί ότι υπάρχει μια ουσιαστική διάκριση μεταξύ "μαθηματικού γεγονότος" (mathematical fact) και "μαθηματικής απόδειξης" (mathematical proof). Οι περισσότεροι μαθηματικοί έχουν την πεποίθηση ότι τα καινούργια "μαθηματικά γεγονότα" προκύπτουν από προγενέστερα μόνο μέσω μιας αποδεικτικής διαδικασίας. Αλλά ο ιστορικός των Μαθηματικών γνωρίζει καλά ότι η εξέλιξη των Μαθηματικών είχε κι άλλες αφετηρίες, όπως για παράδειγμα, η παρατήρηση και το πείραμα. Τα Πειραματικά Μαθηματικά δεν προτίθενται να ανταγωνιστούν την αποδεικτική διαδικασία, απλά προσφέρουν νέες δυνατότητες ανακάλυψης και εξερεύνησης επιστημονικής γνώσης.

Ακόμα και αν οι πιο εξελιγμένες μαθηματικές θεωρίες έχουν -φαινομενικά- ελάχιστη η καμιά σχέση με το πείραμα και τη παρατήρηση, είναι μάλλον αμφίβολο ότι κάποτε θα βρεθεί μια θεωρία για τα πάντα (Theory of Everything) και δεν θα ξαναχρειαστούμε εμπειρική πληροφορία. "Μια πιο ρεαλιστική προοπτική θα μπορούσε να είναι η συνεχής διαδικασία βαθμιαίας "μεταλλαγής" της εμπειρικής πληροφορίας σε θεωρητική δομή... Δηλαδή, μια διαδικασία στα πλαίσια της οποίας οι υπάρχουσες θεωρητικές δομές βοηθούν να κατασκευαστεί η εμπειρία με ένα τρόπο που οδηγεί σε όλο και περισσότερο δυναμικές θεωρητικές δομές. Μια τέτοια διαδικασία εντάσσεται στο πνεύμα της άποψης του Cassirer[9], ο οποίος μιλά για "συμβολική σημασία" των εμπειρικών γεγονότων και βλέπει μια συνεχή δραστηριότητα αντικειμενοποίησης -και όχι συσσώρευση αντικειμένων από την εμπειρία-" (Stamatescu, 1994).

Η προηγούμενη θεώρηση των πραγμάτων προϋποθέτει τη δυνατότητα επικοινωνίας φυσικών και μαθηματικών επιστημόνων όπως επίσης και το άνοιγμα των καθαρών Μαθηματικών σε εφαρμοσμένους χώρους. Εκτός από το να προάγουν την καθαρά μαθηματική έρευνα οι μαθηματικοί πρέπει να είναι ικανοί να συμβουλέψουν άλλες ερευνητικές ομάδες επεξεργαζόμενοι τα ιδιαίτερα προβλήματα εξω-μαθηματικών περιοχών. Ο H. Dinges[10] (Steiner, 1978) εκφράζει την άποψη ότι τα πανεπιστήμια έχουν ένα μεγάλο μερίδιο ευθύνης για την αρνητική εικόνα που εμφανίζουν τα Μαθηματικά σε όλα τα επίπεδα της εκπαίδευσης. Οι μαθητές διδάσκονται από δασκάλους και καθηγητές που έχουν ταυτίσει τα Μαθηματικά με το αποτέλεσμα μιας αποδεικτικής διαδικασίας και αδυνατούν να τα δουν σαν εργαλεία αντιμετώπισης πραγματικών καταστάσεων.

Ο τρόπος διάρθρωσης των αναλυτικών προγραμμάτων συχνά οξύνει το πρόβλημα. Ο B. Bernstein[11] (Steiner, 1978) διακρίνει δύο ακραίες θέσεις στην οργάνωση ενός αναλυτικού προγράμματος, τις οποίες ονομάζει τύπου "συλλογής" (collection type) και τύπου "ολοκλήρωσης" (integrated type).

Κάποια από τα χαρακτηριστικά ενός αναλυτικού προγράμματος τύπου "συλλογής" είναι:

- Τα περιεχόμενα είναι οριοθετημένα και ανεξάρτητα το ένα από το άλλο.

- Οι κρυπτογραφημένες γνώσεις που διδάσκονται οι μαθητές οδηγούν συχνά σε εξειδικεύσεις με ελάχιστες δυνατότητες εφαρμογών και ο υπερ-

9. Cassirer, E. 1937, Zur modernen Physik. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1987.

10. Dinges, H. Spekulation uber die Moglichkeilen angewandter Mathematik In: Otte 1974.

Dinges, H. Thesen zur Selbstdarstellung der Fachberiche fur Mathematik. Deutsche Mathematiker Vereinigung 1976.

11. Berstein, B. On the classification and framing of educational knowledge In: Young 1975.

τονισμός των ιδιαιτεροτήτων των διαφόρων περιεχομένων γίνεται σε βάρος της κατανόησης των κοινών τους χαρακτηριστικών.

- Η γνώση οργανώνεται ιεραρχικά μεταξύ δασκάλου και μαθητών και αποκτά το χαρακτήρα "ιδιωτικής περιουσίας" που προστατεύεται από συμβολικούς φράχτες.
- Η απόκτηση της γνώσης δε συλλαμβάνεται σαν δικαίωμα, σαν κάτι που πρέπει να παλέψει κάποιος για να το κερδίσει.
- Ενθαρρύνεται η ατομική σε βάρος της συλλογικής εργασίας.
- Υπάρχει μια αδράνεια για μια θεσμοθέτηση νέων μορφών γνώσης και μια αρνητική (ή στην καλύτερη περίπτωση παθητική) στάση ως προς τη δημιουργία σχέσεων μεταξύ επιστημονικής και πραγματικής γνώσης ή γνώσης από άλλες (εξω-μαθηματικές) επιστημονικές περιοχές.
- Η ιστορία και η διαδικασία δημιουργίας της γνώσης είναι ήσσονος σημασίας σε σχέση με το τελικό προϊόν που αποτελεί και το αντικείμενο διδασκαλίας.
- Αποφεύγεται (ή τουλάχιστον δεν ενθαρρύνεται) η συνεργασία μεταξύ διδασκόντων.

Τα χαρακτηριστικά ενός αναλυτικού προγράμματος τύπου "ολοκλήρωσης" βρίσκονται στον αντίποδα των προηγουμένων.

- Τα διάφορα περιεχόμενα καθορίζονται από τις ιδέες ή τις αρχές και τις έννοιες μέσω των οποίων λαμβάνονται αυτές οι αρχές. Παρουσιάζονται σαν μέρη ενός όλου χωρίς να αγνοούνται τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τους.
- Επιδέχονται αλλαγές κατά τη διάρκεια μιας διαδικασίας εξέλιξης.
- Μεγαλύτερη έμφαση δίνεται στους τρόπους και τη διαδικασία παραγωγής και απόκτησης γνώσης παρά στο τελικό προϊόν.
- Η υποκείμενη θεωρία μάθησης στηρίζεται στην εργασία της ομάδας και όχι στην άγονη απομόνωση της ατομικής προσπάθειας.
- Οι δάσκαλοι και καθηγητές ειδικοτήτων επικοινωνούν μεταξύ τους μέσω κοινών δραστηριοτήτων.

Δεδομένης της σχέσης μεταξύ Μαθηματικών και Φυσικής, για να καταστεί εφικτή η επεξεργασία πραγματικών προβλημάτων της εμπειρίας μας μέσω των Μαθηματικών, είναι απαραίτητος ο σχεδιασμός διδακτικών ενοτήτων στα Μαθηματικά στις οποίες να βρίσκονται ενσωματωμένες εφαρμογές από τη Φυσική και ενοτήτων στη Φυσική που να περιέχουν μια εισαγωγή στις απαραίτητες μαθηματικές έννοιες και τα βασικά μαθηματικά εργαλεία.

Σε ένα τέτοιο σχεδιασμό πρέπει να ληφθούν υπόψη τρία βασικά σημεία τα οποία κατά τον H. G. Steiner (Steiner, 1990) αποτελούν βασικούς άξονες του διαλόγου για τη σχέση Μαθηματικών - Φυσικής:

α) Προσδιορισμός κοινών πεδίων δράσης, χρονικής διαδοχής διδακτικών ενοτήτων και ρύθμιση χρόνου διδασκαλίας των ενοτήτων στο αναλυτικό πρόγραμμα έτσι ώστε η απαραίτητη εννοιολογική (conceptual) και διαδικαστική (procedural) βοήθεια εκ μέρους των Μαθηματικών να παρέχεται στο σωστό χρόνο και με το σωστό τρόπο.

β) Γεφύρωση ή αποφυγή εννοιολογικών χασμάτων σε έννοιες και θεωρίες κοινές και για τις δύο περιοχές. (Π.χ. Μεταβλητή, συνάρτηση, αναλογία, μέγεθος, μέτρηση κ.λπ.)

γ) Ανάλυση των πιθανών ασυμφωνιών ως προς αυτές τις έννοιες, κατά τη διάρκεια της εκπαίδευσης των δασκάλων και καθηγητών, οι οποίοι στα πλαίσια της πανεπιστημιακής τους εκπαίδευσης μαθαίνουν να αντιμετωπίζουν τα Μαθηματικά και τη Φυσική σαν δύο διαφορετικά μεταξύ τους διδακτικά και ερευνητικά πεδία.

Μια νέα Φιλοσοφία που να συνδέει τα καθαρά και εφηρμοσμένα Μαθηματικά πρέπει να αναπτυχθεί. Η Πλατωνική θεώρηση των Μαθηματικών και η αντιμετώπιση των εφαρμογών των Μαθηματικών σαν κάτι το εξωτερικό προς τη μαθηματική επιστήμη που ελάχιστα επηρεάζει τη δομή των μαθηματικών εννοιών, δρα μάλλον αρνητικά σ' αυτή τη προσπάθεια.

Αρκετές φιλοσοφικές θέσεις έχουν διατυπωθεί για την αντιμετώπιση του προβλήματος, από τις οποίες εκείνη του J. D. Sneed[12] (Steiner, 1978) συμπλέει με τις δικές μας αντιλήψεις. Ο Sneed θέτει το πρόβλημα των "θεωρητικών όρων", τους οποίους ορίζει ως έννοιες της θεωρίας οι οποίες δεν ορίζονται μέσω της παρατήρησης, αλλά παίζουν καθοριστικό, διαλευκαντικό ρόλο για τη θεωρία.

Τέτοιοι όροι, για την Νευτώνεια Φυσική, είναι η δύναμη (F) και η μάζα (m). Το "νόημα" των "θεωρητικών όρων" F και m του Νευτώνειου τύπου $F=m\cdot a$ καθορίζεται από το σύνολο όλων των πιθανών εφαρμογών του τύπου.

Αυτό το νόημα εμπλουτίζεται συνεχώς με τη χρήση του τύπου σε όλο και περισσότερες καταστάσεις και προβλήματα. (π.χ. κίνηση πλανητών, πρόβλημα εκκρεμούς, ελεύθερη πτώση κ.λπ.)

Έτσι, η θεμελίωση μιας θεωρίας δεν γίνεται με την απόδειξη της λογικής της συνέπειας, αλλά μέσω της δυναμικής της εξέλιξης. Αυτό συνεπά-

12. Sneed, J. D.: The Logical Structure of Mathematical Physics, Dodrecht, 1971.

γεται ότι η κλασική άποψη για μια θεωρία στη Μαθηματική Φυσική πρέπει να αντικατασταθεί από το ζεύγος (K, I) όπου K είναι ο θεωρητικός πυρήνας (Kernel) και I το σύνολο όλων των υπό σχεδίαση ή σχεδιασμένων εφαρμογών της θεωρίας (Intended applications). Με άλλα λόγια, μια θεωρία πρέπει να αναπαρίσταται όχι μόνο από το συντακτικό της (syntactic), αλλά επίσης και από τις σημασιολογικές της εκφάνσεις (semantic aspects).

Η εξέλιξη μιας θεωρίας συνδυάζεται με επεκτάσεις του πυρήνα της και αυτές οι επεκτάσεις πρέπει να υφίστανται διαρκή εμπειρικό έλεγχο. Αν καμία από τις επεκτάσεις του πυρήνα δεν οδηγεί σε επιτυχείς εφαρμογές, η θεωρία περνά μια φάση κρίσης με φυσιολογική συνέπεια τη δημιουργία εναλλακτικών θεωριών (: αλλαγή παραδείγματος κατά Kuhn). Είναι προφανές ότι οι νέες θεωρίες, με τη παλιά, εμφανίζουν ασυμβατότητα ως προς τον πυρήνα τους.

Ο N. Jahnke[13] έδειξε ότι η θεωρία του Sneed μπορεί να εφαρμοσθεί στα Μαθηματικά. Υιοθετώντας τις απόψεις του Jahnke, ο H. G. Steiner (Steiner, 1978) γράφει ότι: "Το βασικό σημείο στη σχέση μεταξύ καθαρών και εφηρμοσμένων Μαθηματικών είναι ότι η συγκρότηση και αιτιολόγηση των Μαθηματικών θεωριών δεν μπορεί να επιτευχθεί μέσω ενός ανταγωνιστικού προγράμματος, αλλά απαιτεί μια κατανόηση των μαθηματικών θεωριών και εννοιών όπως αναπτύχθηκαν και απόκτησαν σημασία μέσω των εφαρμογών τους εντός και εκτός των Μαθηματικών".

2. Ερευνητικές δραστηριότητες και διδακτικές προεκτάσεις

Στα πλαίσια του παραπάνω θεωρητικού σχήματος στο Π.Τ.Δ.Ε. Ιωαννίνων προχωρήσαμε στην οργάνωση ενός "Εργαστηρίου Διδασκαλίας των Μαθηματικών".

Το πείραμα του "μη γραμμικού ταλαντωτή τρίτης τάξης" που περιγράφεται στη συνέχεια, αποτελεί ένα από μια σειρά πειραμάτων που έχουν ειδικά σχεδιασθεί για να αναδειχθεί η σχέση μεταξύ Μαθηματικών και Φυσικής.

Η κατασκευή μη γραμμικών μηχανικών ταλαντωτών 3ης τάξης, καθώς και η συμβολή τους στη διδασκαλία των μη γραμμικών Μαθηματικών σε προπτυχιακό επίπεδο έχει ελάχιστα μελετηθεί.

Στο παρελθόν έχει δειχθεί η ισχυρή εξάρτηση της περιόδου T του μη γραμμικού ταλαντωτή 3ης τάξης με την απομάκρυνση από τη θέση ισορ-

13. Jahnke, N. H.: Zum Verstandnis von Wissensentwicklung und Begrundung in der Mathematik. IDM. Materialien und Studien Bd. 10. Bielefeld 1978.

ροπίας. Αντίθετα ο απλός αρμονικός ταλαντωτής (ένα απλό εκκρεμές για παράδειγμα) παρουσιάζει μη γραμμική συμπεριφορά για μεγάλες τιμές της απομάκρυνσης.

Δηλαδή, στο μη γραμμικό ταλαντωτή οι τιμές της T που προκύπτουν για τις διάφορες τιμές της απομάκρυνσης x διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους και ως εκ τούτου προσφέρονται καλύτερα για την προσέγγιση του θέματος των μη γραμμικών ταλαντώσεων. Σχετικές προσομοιώσεις έχουν γίνει με τη βοήθεια υπολογιστή χωρίς όμως να υπάρχουν αναφορές ως προς τα διδακτικά αποτελέσματα της προσομοίωσης.

Η διδακτική προσέγγιση όμως των μαθηματικών εννοιών που απορρέουν από το συγκεκριμένο φαινόμενο φαίνεται να μην έχει μελετηθεί ικανοποιητικά αν και φαίνεται ότι υπάρχουν μεγάλα περιθώρια στην διερεύνηση της διδακτικής ωφέλειας από τη διδασκαλία των μη γραμμικών Μαθηματικών μέσω του μη γραμμικού αυτού συστήματος.

Το πρόγραμμα βασίζεται στη σύνδεση των μαθηματικών εννοιών με τις αντίστοιχες φυσικές έννοιες και την επιλογή εκείνων των εννοιών που θα αποτελέσουν το αντικείμενο διαπραγμάτευσης μέσω του πειράματος σύμφωνα με την αντιστοιχία:

Γραμμικοί ταλαντωτές - Γραμμικά Μαθηματικά

Μη γραμμικοί ταλαντωτές - Μη γραμμικά Μαθηματικά

Μετρήσεις του φαινόμενου - Αριθμητικοποίηση (αριθμητική ανάλυση της μη γραμμικής εξίσωσης)

Ειδικότερα, επειδή η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης της κίνησης του μη γραμμικού ταλαντωτή οδηγεί σε τύπο της περιόδου T όχι υπολογίσιμης κλειστής μορφής, είναι απαραίτητη η αριθμητική ολοκλήρωση αντί της χρήσης ελλειπτικών συναρτήσεων. (Και αυτό γιατί οι φοιτητές του Π.Τ.Δ.Ε. δεν είναι εξοικειωμένοι με πολύπλοκες εξισώσεις και υπερβατικές συναρτήσεις)

Ταυτόχρονα, οι μετρήσεις της T με την πειραματική διάταξη, με μέθοδο που θα υπολογίζει την απόσβεση σαν συνάρτηση του χρόνου, θα λειτουργήσει ως επιβεβαιωτικό στοιχείο των υπολογισμών της αριθμητικής προσέγγισης ισχυροποιώντας με φυσικό τρόπο τα αποτελέσματα.

Τελικό στάδιο του προγράμματος είναι η παρουσίαση σε ομάδα φοιτητών μη γραμμικών μαθηματικών εννοιών αφού προηγηθεί καταγραφή της αρχικής τους γνώσης σχετικά με το θέμα. Κρίνεται απαραίτητος ο διαχωρισμός της αρχικής ομάδας σε δύο υποομάδες στις οποίες θα υιοθετηθεί διαφορετικό είδος προσέγγισης των μαθηματικών εννοιών: η μία ομάδα θα κάνει χρήση της πειραματικής μεθόδου ενώ η άλλη θα ακολουθεί την τυπική θεωρητική διδασκαλία των Μαθηματικών. Στόχος μας είναι ο εντοπισμός της ειδοποιού διαφοράς της νέας μεθοδολογίας σε σχέση με την παλιά.

Σκοπός του προγράμματος είναι να καταδειχθεί ότι η αλληλεπίδραση φυσικών και μαθηματικών εννοιών είναι σημαντικός παράγοντας της όλης διδακτικής διαδικασίας, όχι μόνο γιατί έτσι επιτυγχάνεται καλύτερη κατανόηση αυτών των εννοιών, αλλά και διότι μέσα από αυτή τη σχέση αναδύονται νέες περιοχές μελέτης.

Ειδικά η χρήση του μη γραμμικού ταλαντωτή μπορεί να αποτελέσει ένα χρήσιμο εργαλείο για την μύηση των φοιτητών στις έννοιες των μη γραμμικών Μαθηματικών. Η καθαρά θεωρητική προσέγγιση τέτοιων εννοιών, λόγω της ιδιαίτερης δυσκολίας του θέματος, θα προσέκρουε σε γνωστικά εμπόδια ιδιαίτερα σημαντικά.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

1. Boyer. C. B., Meczbach U.C., 1989: A History of Mathematics. John Wiley & Sons.
2. Dieudonne. J., 1964: Recent developments in Mathematics. Am. Math. Monthly. p. 239-248.
3. Feynman. R., 1990: Ο χαρακτήρας του Φυσικού Νόμου. Παν. Εκδόσεις Κρήτης.
4. Flato. M., 1990: Η ισχύς των Μαθηματικών. Εκδ. Κάτοπτρο.
5. Heinmann. P.M., 1994: Οι Επιστημονικές Επαναστάσεις, ΝΕΥΣΙΣ. τεύχος 1. σελ. 19-49.
6. Kuhn, T.S., 1979: Mathematical versus Experimental Traditions in the Development of Physical Science, in The Essential Tension: Selected Studies in Scientific Tradition and Change, The University of Chicago Press. p. 31-65.
7. Mandelbrot, B., 1992: Fractals and the Rebirth of Experimental Mathematics, in: Peitgen, H. O., Jurgens, H., Saupe, D.: Fractals for the Classroom, NCTM, Springer-Verlag, p. 1-16.
8. Stamatescu. I. O., Wismann. H., 1994: Questions concerning Theory and Experience and the Role of Mathematics in Physical Science, in: Rudolph, E., Stamatescu. I. O.: Philosophy, Mathematics and Modern Physics, Springer-Verlag, p. 18-13.
9. Steiner, H. G., 1978: Co-ordination of Mathematics and Science Curricula and Cooperation between Science Teachers and Mathematics Teachers, in: Proceedings of a Conference on the «Cooperation Between Science Teachers and Mathematics Teachers», Bielefeld, Spet. 17-23, Introduction.
10. Steiner. H.G., 1990: Relations between Research in Mathematics Education an dResearch and Science Education, ZDM 22, No 6.
11. Strauss. M., 1972: Modern Physics and its philosophy. D. Reidel Publishing Company, p. 63-70.
12. Sutton. O. G., 1957: Mathematics in Action. Dover Publications. Inc., New York.
13. Wigner, E., 1960: The unreasonable effectiveness of Mathematics in the natural Sciences. Communications in Pure and Applied Mathematics (13), p. 1-14.