ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΔΑΝΑΗ - ΕΙΡΗΝΗ ΒΡΑΓΚΑΛΗ

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΓΚΡΙΣΕΩΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 2012

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**, που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 29/02/2013 από την εξεταστική επιτροπή

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ	**ΒΑΘΜΙΔΑ**	**ΥΠΟΓΡΑΦΗ**
Θωμάς Χασάνης (επιβλέπων)	καθηγητής	
Θεόδωρος Βλάχος	αναπληρωτής καθηγητής	
Θεόδωρος Βιδάλης	επίκουρος καθηγητής	

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

"Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή."

Υπογραφή υποψηφίου

Στους γονείς μου Γιάννη και Κατερίνα
και στον αδελφό μου Δημήτρη

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω μέσα από την καρδιά μου, τον επιβλέποντα μου καθηγητή Θωμά Χασάνη, για την εμπιστοσύνη του και την ευκαιρία που μου έδωσε να μαθητεύσω στο πλευρό του. Χωρίς την καθοδήγηση του και τις πολύτιμες συμβουλές του, η ολοκλήρωση αυτής της διατριβής δεν θα ήταν δυνατή. Θέλω να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου τόσο σε αυτόν, όσο και στη σύζυγο του Φρόσω, γιατί μου στάθηκαν ως δεύτεροι γονείς όλο αυτό το διάστημα.

Ευχαριστώ τον αναπληρωτή καθηγητή Θεόδωρο Βλάχο και τον επίκουρο καθηγητή Θεόδωρο Βιδάλη, για τη συμμετοχή τους στη τριμελή επιτροπή κρίσης καθώς και για τη προσεκτική ανάγνωση του κειμένου, τις υποδείξεις και τις παρατηρήσεις τους.

Ένα θερμό ευχαριστώ στον κ. Γεώργιο Ακρίβη, καθηγητή του Τμήματος Πληροφορικής, για τη συμβολή του στη μορφοποίηση αυτού του κειμένου.

Τέλος, νοιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω τις φίλες μου Μελίνα και Φανή, για την αμέριστη συμπαράσταση των.

Πρόλογος

Η αρχή μεγίστου για μη γραμμικούς δεύτερης τάξης ελλειπτικούς τελεστές εφαρμόζεται στη Διαφορική Γεωμετρία, σε προβλήματα μοναδικότητας και για πληροφορίες, που αφορούν το μέγεθος συμπαγών υπερεπιφανειών. Σκοπός της παρούσης Μεταπτυχιακής Διατριβής είναι, να παρουσιάσουμε αρχές επαφής (tangency principle) για υπερεπιφάνειες M^n στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^{n+1}$. Δηλαδή, να βρούμε ικανές γεωμετρικές συνθήκες ώστε δύο υπερεπιφάνειες, που εφάπτονται σε ένα σημείο p_0, να ταυτίζονται ως σύνολα σε μια περιοχή του σημείου p_0. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι κάποια από τις μέσες καμπυλότητες m-τάξης μιας συμπαγούς υπερεπιφάνειας είναι, κατάλληλα, άνω και κάτω φραγμένη. Θα δόσουμε εκτιμήσεις για την ακτίνα της μεγαλύτερης σφαίρας που περιέχεται στο εσωτερικό της υπερεπιφάνειας, καθώς και για την ακτίνα της μικρότερης σφαίρας που περιβάλλει την υπερεπιφάνεια.

Θεωρούμε μια λεία υπερεπιφάνεια M^n στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^{n+1}$ και έστω $p_0 \in M^n$ ένα σημείο της. Μια περιοχή του σημείου p_0 στην υπερεπιφάνεια μπορεί να παρασταθεί ως γράφημα, πάνω από το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο στο p_0, μιας τάξης C^2 συνάρτησης $f : B_r(O) \to \mathbb{R}$, με

$f(O) = \nabla f(O) = 0$. Η απεικόνιση Weingarten της υπερεπιφάνειας, ως προς το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο $\xi = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}(-\nabla f, 1)$ συμβολίζεται με A. Σε κάθε σημείο $x \in B_r(O)$ έστωσαν $\varkappa_i(x)$, $1 \leq i \leq n$, οι κύριες καμπυλότητες της υπερεπιφάνειας (οι ιδιοτιμές του A στο σημείο $(x, f(x))$ έτσι ώστε $\varkappa_1(x) \leq \cdots \leq \varkappa_n(x)$. Συμβολίζουμε με $\varkappa(x) := (\varkappa_1(x), \ldots, \varkappa_n(x))$ το διάνυσμα καμπυλοτήτων της υπερεπιφάνειας στο x.

Έστωσαν $\sigma_m(x_1, \ldots, x_n)$, $1 \leq m \leq n$, τα στοιχειώδη συμμετρικά πολυώνυμα n μεταβλητών, που ορίζονται ως

$$\sigma_m(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_m}.$$

Ορίζουμε τις μέσες καμπυλότητες m-τάξης $H_m(x)$, $1 \leq m \leq n$ της υπερεπιφάνειας, στο σημείο x, από τη σχέση $\binom{n}{m} H_m(x) = \sigma_m(\varkappa(x))$. Η $H_1 = H$ είναι η μέση καμπυλότητα της υπερεπιφάνειας και η $H_n = K$ είναι η καμπυλότητα Gauss-Kronecker. Η συνεκτική συνιστώσα του συνόλου $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sigma_m(x_1, \ldots, x_n) > 0\}$, που περιέχει το σημείο $a = (1, \ldots, 1)$, συμβολίζεται με Γ_m και λέγεται υπερβολικός κώνος του σ_m. Ο υπερβολικός κώνος Γ_m είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και ισχύει $\Gamma_n \subset \Gamma_{n-1} \subset \cdots \subset \Gamma_1$, όπως προκύπτει απο την εργασία [13] του L. Garding, για α-υπερβολικά πολυώνυμα.

Θεωρούμε, τώρα, δυο υπερεπιφάνειες M_1, M_2 στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^{n+1}$, που είναι γραφήματα των συναρτήσεων $f : B_r(O) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : B_r(O) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι ισχύουν $f(O) = \nabla f(O) = 0$ και $g(O) = \nabla g(O) = 0$. Οι υπερεπιφάνειες εφάπτονται στο σημείο $O \in \mathbb{R}^n$ και έχουν κοινό κάθετο στο O το διάνυσμα $(0, \ldots, 0, 1)$.

Αν $f(x) \geq g(x)$, για κάθε $x \in B_r(O)$ θα λέμε ότι η M_1 είναι υπεράνω της M_2. Αποδεικνύονται τα ακόλουθα Θεωρήματα Επαφής.

Πρώτο Θεώρημα Επαφής: Έστωσαν $H_1^f(x)$, $H_1^g(x)$ οι μέσες καμπυλότητες των M_1, M_2, αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι ισχύει $H_1^f(x) \leq H_1^g(x)$, για κάθε $x \in B_r(O)$, τότε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in B_r(O)$.

Δεύτερο Θεώρημα Επαφής: Έστωσαν $H_m^f(x)$, $H_m^g(x)$, για $m \geq 2$, οι μέσες καμπυλότητες m-τάξης των M_1, M_2, αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι ισχύει $H_m^f(x) \leq H_m^g(x)$, για κάθε $x \in B_r(O)$ και επιπλέον ότι το διάνυσμα καμπυλοτήτων της M_2 ανήκει στον υπερβολικό κώνο $\varGamma_m$, δηλαδή $\varkappa^g(O) \in \varGamma_m$. Τότε ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in B_r(O)$.

Η απόδειξη των παραπάνω δυο Θεωρημάτων προκύπτει εφαρμόζοντας το ακόλουθο Θεώρημα Συγκρίσεως.

Θεώρημα Συγκρίσεως: Έστωσαν f, g συναρτήσεις ορισμένες και τάξης C^2 σε ένα χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\varGamma$ ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, $d = \frac{n(n+1)}{2} + 2n + 1$ και $\varPhi : \varGamma \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση τάξης C^1, η οποία είναι ελλειπτική ως προς τις συναρτήσεις $u^t(x) = tf(x) + (1-t)g(x)$, για κάθε $t \in [0,1]$. Υποθέτουμε ότι ισχύει $f(x) \geq g(x)$ και

$$\varPhi(g_{ij}(x), g_i(x), g(x), x) \geq \varPhi(f_{ij}(x), f_i(x), f(x), x),$$

για κάθε $x \in \varOmega$. Αν υπάρχει σημείο $x_0 \in \Omega$ όπου $f(x_0) = g(x_0)$, τότε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Omega$.

Τα Θεωρήματα Επαφής έχουν, ως συνέπεια, ενδιαφέροντα αποτελέσματα στη Διαφορική Γεωμετρία όπως τα εξής:

Έστω M^n συμπαγής υπερεπιφάνεια, χωρίς αυτοτομές στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^{n+1}$. Αν $|H_m| \geq c^m$ ($|H_m| \leq c^m$), για κάποιο m με $1 \leq m \leq n$

και $c > 0$, *τότε η μεγαλύτερη σφαίρα που κάθεται μέσα στην* M^n *έχει ακτίνα μικρότερη του* $\frac{1}{c}$ *(η μικρότερη σφαίρα που περιβάλλει την* M^n *έχει ακτίνα μεγαλύτερη του* $\frac{1}{c}$*), εκτός αν η* M^n *είναι σφαίρα ακτίνος* $\frac{1}{c}$.

Το παραπάνω αποτέλεσμα αποτελεί γενίκευση αποτελεσμάτων των W. Blaschke [1], Δ. Κουτρουφιώτη [21] και άλλων.

Έστω M^n *μια υπερεπιφάνεια στον Ευκλείδειο χώρο, η οποία είναι γράφημα μιας συνάρτησης* f *ορισμένης στην κλειστή μπάλλα* $\bar{B}_r(O) \subset \mathbb{R}^n$, *ακτίνος* r. *Αν* H *είναι η μέση καμπυλότητα,* τ *η αριθμητική καμπυλότητα και* A *η απεικόνιση Weingarten της υπερεπιφάνειας, τότε ισχύουν:*

(i) $\inf_M |H| < \frac{1}{r}$,

(ii) $\inf_M |\tau| < \frac{n(n-1)}{r^2}$, *αν η* A *είναι ημιοριστική σε κάποιο σημείο,*

(iii) $\inf_M |A| < \frac{n}{r}$, *αν η μέση καμπυλότητα δεν αλλάζει πρόσημο.*

Από το παραπάνω αποτέλεσμα, για ολικά γραφήματα ($r = \infty$), προκύπτουν βελτιώσεις προηγούμενων αποτελεσμάτων της M. F. Elbert [8] και των Θ. Χασάνη-Θ. Βλάχου [16].

Η Μεταπτυχιακή Διατριβή έχει οργανωθεί ως εξής: Στο πρώτο κεφάλαιο δίνονται στοιχεία απο τη Γεωμετρία Riemann, τη Θεωρία υπερεπιφανειών και τα υπερβολικά πολυώνυμα. Στο δεύτερο κεφάλαιο δίνονται οι αποδείξεις του Θεωρήματος Συγκρίσεως και των Θεωρημάτων Επαφής. Το τρίτο κεφάλαιο ασχολείται με εφαρμογές των Θεωρημάτων Επαφής στη Γεωμετρία και κλείνει με μερικά ανοιχτά προβλήματα στη Θεωρία υπερεπιφανειών.

Περιεχόμενα

1 Προκαταρκτικά **1**

1.1 Έννοιες από τη Γεωμετρία Riemann 1

1.2 Υπερεπιφάνειες Γραφήματα 14

1.3 Υπερβολικά πολυώνυμα 20

2 Ελλειπτικοί τελεστές καμπυλοτήτων **31**

2.1 Θεώρημα Συγκρίσεως 31

2.2 Θεωρήματα Επαφής 37

3 Εφαρμογές στη Γεωμετρία **51**

3.1 Συμπαγείς υπερεπιφάνειες στον $\mathbb{R}^{n+1}$ 53

3.2 Υπερεπιφάνειες Γραφήματα 59

3.3 Ανοικτά προβλήματα 78

Κεφάλαιο 1

Προκαταρκτικά

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δώσουμε βασικές έννοιες, και τους αντίστοιχους συμβολισμούς, από τη Γεωμετρία Riemann. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στα βιβλία [5], [18] και [22]. Θα επικεντρωθούμε, ειδικότερα, στις υπερεπιφάνειες γραφήματα καθώς και στις βασικές ιδιότητες των υπερβολικών πολυωνύμων.

1.1 Έννοιες από τη Γεωμετρία Riemann

Έστω ένα διαφορίσιμο πολύπτυγμα M^n και p ένα σημείο του. Το σύνολο των εφαπτόμενων διανυσμάτων στο σημείο p με τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, είναι ένας γραμμικός χώρος που ονομάζεται *εφαπτόμενος χώρος* (tangent space) του M^n στο p και συμβολίζεται με T_pM^n. Αν (U,φ) είναι χάρτης περί το p με συντεταγμένες $x_1,\ldots,x_n$, τα διανύσματα $\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p$, $i=1,\ldots,n$ αποτελούν βάση του T_pM^n.

Αν $f : M^n \to \bar{M}^k$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ των διαφορίσιμων πολυπτυγμάτων M^n, $\bar{M}^k$ και p ένα σημείο του M^n, τότε η γραμμική απεικόνιση $df_p : T_pM^n \to T_{f(p)}\bar{M}^k$, που ορίζεται από τη σχέση

$$df_p(v)g := v(gof),$$

για κάθε $v \in T_pM^n$ και $g \in D(f(p))$, καλείται *διαφορικό* (differential) της f στο σημείο p. Με $D(f(p))$ συμβολίζουμε το σύνολο των διαφορίσιμων συναρτήσεων σε περιοχή του $f(p)$.

Για τη συνέχεια θα συμβολίσουμε με $D(M^n)$ το σύνολο των διαφορίσιμων συναρτήσεων $f : M^n \to \mathbb{R}$ και με $\Delta(M^n)$ το σύνολο των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων $X : M^n \to TM^n$, όπου $TM^n = \cup_{p\in M^n} T_pM^n$ είναι η *εφαπτόμενη δέσμη* (tangent bundle) του M^n.

Η διαφορίσιμη απεικόνιση $f : M^n \to \bar{M}^k$ λέγεται *εμβάπτιση* (immersion) αν το διαφορικό της, σε κάθε σημείο του πολυπτύγματος M^n, είναι ένα προς ένα. Αν η εμβάπτιση f είναι επιπλέον ομοιομορφισμός επί του συνόλου $f(M^n) \subset \bar{M}^k$, με τη σχετική τοπολογία του $\bar{M}^k$, τότε ονομάζεται *εμφύτευση* (imbedding). Αν το πολύπτυγμα M^n είναι υποσύνολο του πολυπτύγματος $\bar{M}^k$ και η απεικόνιση εγκλείσεως $i : M^n \to \bar{M}^k$, $i(p) = p$ είναι εμφύτευση, σε κάθε σημείο $p \in M^n$, το πολύπτυγμα M^n λέγεται *υποπολύπτυγμα* (submanifold) του $\bar{M}^k$.

Πολύπτυγμα Riemann $(M^n, \langle , \rangle)$ είναι ένα διαφορίσιμο πολύπτυγμα M^n εφοδιασμένο με μια αντιστοίχηση, η οποία σε κάθε σημείο $p \in M^n$ αντιστοιχεί ένα εσωτερικό γινόμενο στο T_pM, που είναι διαφορίσιμη με την εξής έννοια: για κάθε ζεύγος διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων

$X, Y \in \varDelta(M^n)$ η συνάρτηση $\langle X, Y\rangle$, που ορίζεται ως $\langle X, Y\rangle(p) := \langle X_p, Y_p\rangle$, είναι διαφορίσιμη. Η αντιστοίχηση αυτή καλείται *μετρική Riemann.*

Θα εισάγουμε την έννοια της διαφόρισης ενός διανυσματικού πεδίου σε ένα πολύπτυγμα M^n. Η απεικόνιση $\nabla : \varDelta(M^n) \times \varDelta(M^n) \to \varDelta(M^n)$, που αντιστοιχεί τα διανυσματικά πεδία X, Y στο $\nabla_X Y$ και ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y, \quad \nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2,$

(ii) $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y, \quad \nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y,$

για κάθε $f \in D(M^n)$ και $X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in \varDelta(M^n)$, ονομάζεται *γραμμική συνοχή* (linear connection) στο πολύπτυγμα M και το διανυσματικό πεδίο $\nabla_X Y$ ονομάζεται *συναλλοίωτη παράγωγος* (covariant derivative) του Y στη διεύθυνση X, ως προς τη γραμμική συνοχή ∇. Αν η γραμμική συνοχή ∇ ικανοποιεί, επιπλέον, τις

(iii) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$

(iv) $X\langle Y, Z\rangle = \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$, για κάθε $X, Y, Z \in \varDelta(M)$, θα καλείται *συνοχή Riemann* ή συνοχή Levi-Civita.

Αποδεικνύεται το ακόλουθο

Θεώρημα 1.1 (Θεμελιώδες Θεώρημα της Γεωμετρίας Riemann)**.** *Σε κάθε πολύπτυγμα Riemann* $(M^n, \langle,\rangle)$ *υπάρχει και μάλιστα μοναδική συνοχή Riemann.*

Στα επόμενα το M^n θα συμβολίζει ένα n-διάστατο πολύπτυγμα Riemann με αντίστοιχη συνοχή Riemann ∇.

Ο *τανυστής καμπυλότητας* R δίνεται από τη σχέση

$$R(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \tag{1.1}$$

όπου $X, Y, Z \in \Delta(M)$.

Με τη βοήθεια του τανυστή καμπυλότητας R θα ορίσουμε καμπυλότητες στο πολύπτυγμα M^n: καμπυλότητα τομής, καμπυλότητα Ricci και αριθμητική καμπυλότητα.

Ορισμός 1.1. *Καμπυλότητα τομής (sectional curvature) του M στο σημείο p, ως προς τον διδιάστατο υπόχωρο σ του T_pM^n, είναι ο αριθμός*

$$K(\sigma) = K(X \wedge Y) := \frac{\langle R(X,Y)Y, X\rangle}{|X \wedge Y|^2}, \tag{1.2}$$

όπου $\{X, Y\}$ είναι τυχούσα βάση του υποχώρου σ και $|X \wedge Y|^2 = |X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2$.

Θεωρούμε το σημείο $p \in M^n$ και την ορθομοναδιαία βάση $\{E_1, \ldots, E_n\}$ του T_pM^n. Το συμμετρικό τανυστικό πεδίο Q, που ορίζεται ως

$$Q(X,Y) := \sum_{i=1}^{n} \langle R(E_i, X)Y, E_i\rangle,$$

$X, Y \in T_pM^n$ ονομάζεται *τανυστής Ricci* και η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή $Q(X,X)$, για $|X| = 1$, λέγεται *καμπυλότητα Ricci* (Ricci curvature) στο σημείο p και στη διεύθυνση X. Συμβολίζεται με $\mathrm{Ric}(X)$. Η συνάρτηση $\tau : M^n \to \mathbb{R}$, η οποία ορίζεται ως εξής

$$\tau(p) := \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ric}(E_i) \tag{1.3}$$

είναι καλά ορισμένη και λέγεται *αριθμητική καμπυλότητα* (scalar curvature).

Θα δούμε τώρα κάποιες βασικές έννοιες, ήδη γνωστές από την ανάλυση, πώς επεκτείνονται σε πολυπτύγματα Riemann.

Έστω $f \in D(M^n)$. Σε κάθε σημείο p του M^n αντιστοιχίζουμε ένα εφαπτόμενο διάνυσμα, που συμβολίζεται με $\operatorname{grad} f|_p$ ή $\nabla f|_p$ και καλείται *κλίση* (gradient) της f στο σημείο p. Για τυχαίο $X \in T_pM^n$ ορίζουμε το $\operatorname{grad} f|_p$ από τη σχέση

$$\langle \operatorname{grad} f|_p, X\rangle := df_p(X) = Xf. \tag{1.4}$$

Για κάθε $p \in M^n$ και $Z \in \Delta(M^n)$ θεωρούμε την $\mathbb{R}$-γραμμική απεικόνιση του T_pM^n

$$L_p : v \to \nabla_v Z, \quad v \in T_pM.$$

Απόκλιση (divergence) του διανυσματικού πεδίου Z, στο σημείο p καλείται το ίχνος της L_p, δηλαδή

$$\operatorname{div} Z_p := \operatorname{trace} L_p. \tag{1.5}$$

Η συνάρτηση $\operatorname{div} Z : M^n \to \mathbb{R}$ που αποκτούμε αφήνοντας το p να μεταβάλλεται λέγεται απόκλιση του Z.
Όταν $Z = \operatorname{grad} f$ τότε η συνάρτηση

$$\Delta f := \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \tag{1.6}$$

ονομάζεται *Λαπλασιανή* της f και ο τελεστής $\Delta : D(M^n) \to D(M^n)$ λέγεται *τελεστής Laplace* στο πολύπτυγμα Riemann M^n.

Η διγραμμική απεικόνιση $\nabla^2 f : \Delta(M^n) \times \Delta(M^n) \to D(M^n)$, όπου

$$\nabla^2 f(X,Y) := X(Yf) - (\nabla_X Y)(f) = \langle \nabla_X \operatorname{grad} f, Y\rangle, \tag{1.7}$$

είναι συμμετρική και καλείται *μορφή Hesse* (Hessian form).

Παράδειγμα 1.1. *Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένο με καρτεσιανές συντεταγμένες $x_1, \ldots, x_n$ και έστω $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, τα αντίστοιχα διανυσματικά πεδία. Ο $\mathbb{R}^n$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο γίνεται πολύπτυγμα Riemann.*
Αν $Y = (b^1, \ldots, b^n)$, όπου $b^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμες συναρτήσεις, ορίζουμε τη συνήθη συνοχή στον $\mathbb{R}^n$ ως $\bar{\nabla}_X Y := (Xb^1, \ldots, Xb^n)$. Αποδεικνύεται ότι η $\bar{\nabla}$ πληροί τις ιδιότητες της συνοχής Levi-Civita.

Οι τύποι της κλίσης, απόκλισης και Λαπλασιανής μιας διαφορίσιμης συνάρτησης είναι ήδη γνωστοί από τους κλασσικούς τύπους της ανάλυσης, δηλαδή

$$\operatorname{grad} f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}),$$

$$\operatorname{div} Z = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial x_i}, \quad \textit{για } Z = (z_1, \ldots, z_n)$$

και

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2}.$$

Θεώρημα 1.2 (Stokes-Green)**.** *Έστω $\bar{B}_r$ η κλειστή μπάλλα ακτίνος r. Με $\partial \bar{B}_r$ συμβολίζουμε το σύνορο της $\bar{B}_r$. Αν X είναι ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο τότε ισχύει*

$$\int_{\bar{B}_r} \operatorname{div} X \mathrm{d}V = \int_{\partial \bar{B}_r} \langle X, \nu\rangle \mathrm{d}\sigma,$$

όπου ν *είναι το προς τα έξω μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο του* $\partial\bar{B}_r$, dV *το στοιχείο όγκου στον* $\mathbb{R}^n$ *και* $d\sigma$ *το στοιχείο όγκου της σφαίρας* $S_r := \partial\bar{B}_r$.

Στη συνέχεια θα ενδιαφερθούμε για μια ειδική κατηγορία εμβαπτίσεων $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, όπου ο $\mathbb{R}^{n+1}$ είναι εφοδιασμένος με τη συνήθη μετρική $\langle , \rangle$ και τη συνήθη συνοχή Levi-Civita $\bar{\nabla}$. Τέτοιες εμβαπτίσεις λέγονται υπερεπιφάνειες. Η εικόνα $f(M^n)$ της υπερεπιφάνειας μπορεί να έχει αυτοτομές. Η f είναι τοπικά εμφύτευση, λόγω του Θεωρήματος Αντίστροφης Απεικόνισης, και η $f(M^n)$ μπορεί να θεωρηθεί, κατά φυσικό τρόπο, τοπικά υποπολύπτυγμα.

Σε κάθε σημείο x του $\mathbb{R}^{n+1}$ θεωρούμε την κανονική ταύτιση $T_x\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$. Έστω $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ μια υπερεπιφάνεια $p \in M^n$ ένα σημείο και U μια περιοχή του, έτσι ώστε η $f|_U$ είναι εμφύτευση. Επειδή οι συλλογισμοί μας είναι, συχνά, τοπικοί θα αναφερόμαστε στο $f(U)$, το οποίο είναι υποπολύπτυγμα του $\mathbb{R}^{n+1}$, αγνοώντας την εμβάπτιση f δηλαδή ταυτίζουμε το U με το $f(U)$. Στο ίδιο πνεύμα το διαφορικό df_p απεικονίζει τον T_pM ισομορφικά στον υπόχωρο $df_p(T_pM)$ του $\mathbb{R}^{n+1}$ και μέσω αυτού του ισομορφισμού ταυτίζουμε τον T_pM με τον $df_p(T_pM)$.
Υποθέτουμε, όπως είναι θεμιτό, ότι το M^n είναι τοπικά τουλάχιστον υποπολύπτυγμα του $\mathbb{R}^{n+1}$. Το M^n γίνεται και αυτό πολύπτυγμα Riemann με την επαγόμενη μετρική, δηλαδή για $v, w \in T_pM$, το εσωτερικό γινόμενο στο M^n ορίζεται ως

$$\langle v, w \rangle_M := \langle di(v), di(w) \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}},$$

όπου i είναι η συνάρτηση εγκλείσεως. Στο εξής, θα ταυτίζουμε ένα εφαπτόμενο διάνυσμα v του M με το $di(v)$ του $\mathbb{R}^{n+1}$ και το $\langle , \rangle$ θα συμβολίζει το εσωτερικό γινόμενο του M αλλά και το σύνηθες του $\mathbb{R}^{n+1}$.

Έστω $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ η συνήθης βάση στον $\mathbb{R}^{n+1}$. Ένα μοναδιαίο κάθετο και διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο ξ κατά μήκος της υπερεπιφάνειας $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ είναι μια απεικόνιση

$$p \in M^n \mapsto \xi_p \in T_p\mathbb{R}^{n+1}$$

με $\langle \xi_p, \xi_p \rangle = 1$ και $\langle \xi_p, v \rangle = 0$ για κάθε $v \in df_p(T_pM)$. Έχουμε την παράσταση $\xi_p = \sum_{i=1}^{n+1} a^i(p)e_i$. Διαφορισιμότης του ξ σημαίνει ότι οι συναρτήσεις $a^i : M^n \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες. Σημειώνουμε ότι, όταν κοιτάζουμε την υπερεπιφάνεια ως υποπολύπτυγμα στον $\mathbb{R}^{n+1}$, τότε το ρόλο της f παίζει η έγκλειση i.

Ορισμός 1.2. *Μια υπερεπιφάνεια $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ θα λέγεται προσανατολίσιμη (orientable) αν υπάρχει μοναδιαίο, κάθετο και διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο ξ κατά μήκος της f.*

Σημειώνουμε ότι κάθε υπερεπιφάνεια $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ είναι τοπικά προσανατολίσιμη, δηλαδή, υπάρχει περιοχή U κάθε σημείου $p \in M^n$, όπου ορίζεται μοναδιαίο κάθετο και διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της $f|_U$.

Θεωρούμε, τώρα, μια υπερεπιφάνεια M^n ως υποπολύπτυγμα του $\mathbb{R}^{n+1}$ η οποία είναι, τουλάχιστον τοπικά, προσανατολισμένη με το μοναδιαίο και κάθετο διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο ξ. Για κάθε $p \in M^n$ έχουμε την ανάλυση

$$T_p\mathbb{R}^{n+1} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

όπου $(T_pM)^\perp$ είναι το ορθοσυμπλήρωμα του T_pM.

Συνεπώς για κάθε $v \in T_p\mathbb{R}^{n+1}$ θα ισχύει

$$v = v^\top + v^\perp, \quad v^\top \in T_pM \text{ και } v^\perp \in (T_pM)^\perp.$$

Είναι προφανές ότι το διάνυσμα $v^\perp$ είναι παράλληλο με το ξ, δηλαδή $v^\perp = \langle v, \xi\rangle \xi$.

Για $X, Y \in \Delta(M^n)$ θέτουμε

$$\nabla_X Y := (\bar{\nabla}_X Y)^\top \text{ και } B(X,Y) := (\bar{\nabla}_X Y)^\perp.$$

Αποδεικνύεται ότι η ∇ είναι η συνοχή Levi-Civita της υπερεπιφάνειας, ως προς την επαγόμενη μετρική, και η

$$b(X,Y) := \langle B(X,Y), \xi\rangle$$

είναι συμμετρική διγραμμική μορφή σε κάθε σημείο της υπερεπιφάνειας. Η $b(X,Y)$ λέγεται *δεύτερη θεμελιώδης μορφή* (second fundamental form) της υπερεπιφάνειας. Επειδή η διγραμμική μορφή είναι συμμετρική υπάρχει μοναδικός αυτοπροσηρτημένος (self-adjoint) γραμμικός μετασχηματισμός $A : T_pM \to T_pM$, σε κάθε σημείο $p \in M$, τέτοιος ώστε να ισχύει

$$b(X,Y) = \langle AX, Y\rangle. \tag{1.8}$$

Ο A ονομάζεται *απεικόνιση Weingarten* ή *τελεστής σχήματος* (shape operator) της υπερεπιφάνειας. Είναι σχεδόν προφανές ότι ισχύει η ταυτότητα

$$AX = -\bar{\nabla}_X \xi, \tag{1.9}$$

σε κάθε εφαπτόμενο χώρο T_pM.

Για τον τανυστή καμπυλότητας $R(X,Y)Z$ της υπερεπιφάνειας, επειδή ο τανυστής καμπυλότητας του $\mathbb{R}^{n+1}$ είναι ταυτοτικά μηδέν, ισχύει η εξίσωση

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle B(X,W),B(Y,Z)\rangle - \langle B(X,Z),B(Y,W)\rangle$$

για $X,Y,Z,W \in T_pM$, ή ισοδύναμα ισχύει η εξίσωση

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle AX,W\rangle\langle AY,Z\rangle - \langle AX,Z\rangle\langle AY,W\rangle \tag{1.10}$$

η οποία είναι γνωστή ως *εξίσωση του Gauss*. Επιπλέον, για τον τελεστή σχήματος A ισχύει η εξίσωση

$$(\nabla_X A)Y = (\nabla_Y A)X, \tag{1.11}$$

για $X,Y \in \Delta(M^n)$, γνωστή ως *εξίσωση του Godazzi*, όπου

$$(\nabla_X A)Y := \nabla_X(AY) - A\nabla_X Y. \tag{1.12}$$

Σημειώνουμε ότι ένας αυτοπροσηρτημένος γραμμικός μετασχηματισμός του εφαπτόμενου χώρου, σε κάθε σημείο της υπερεπιφάνειας, που πληροί την εξίσωση Godazzi λέγεται *τανυστής Godazzi*.

Όπως προκύπτει από τη Γραμμική Άλγεβρα, όλες οι ιδιοτιμές του τελεστή σχήματος σε κάθε σημείο της υπερεπιφάνειας, είναι πραγματικές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι κάθετα μεταξύ τους. Υπάρχει ορθομοναδιαία βάση $\{e_1,\ldots,e_n\}$, σε κάθε T_pM, από ιδιοδιανύσματα του τελεστή σχήματος A με

$$Ae_i = \varkappa_i(p)e_i, \quad i=1,\ldots,n$$

και $\varkappa_1(p) \leq \varkappa_2(p) \leq \cdots \leq \varkappa_n(p)$. Οι ιδιοτιμές $\varkappa_i(p)$ $(i = 1, \ldots, n)$ λέγονται *κύριες καμπυλότητες* (principal curvatures), είναι συνεχείς συναρτήσεις του p και σχεδόν παντού διαφορίσιμες στην M^n. Οι διευθύνσεις των e_i στον T_pM λέγονται *κύριες διευθύνσεις* (principal directions) στο $p \in M^n$.

Για X, Y μοναδιαία και κάθετα μεταξύ τους διανύσματα του T_pM, από την εξίσωση του Gauss (1.10) λαμβάνουμε

$$K(X \wedge Y) = \langle AX, X\rangle\langle AY, Y\rangle - \langle AX, Y\rangle^2. \tag{1.13}$$

Ειδικότερα, αν $X = e_i$ και $Y = e_j$ είναι ιδιοδιανύσματα θα έχουμε

$$K(e_i \wedge e_j) = \varkappa_i\varkappa_j. \tag{1.14}$$

Η ποσότητα $H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varkappa_i$ λέγεται *μέση καμπυλότητα* της υπερεπιφάνειας στο αντίστοιχο σημείο. Επίσης η ποσότητα $K = \varkappa_1 \cdots \varkappa_n$ λέγεται *καμπυλότητα Gauss-Kronecker* στο αντίστοιχο σημείο της υπερεπιφάνειας. Από την (1.14) αθροίζοντας ως προς $j \neq i$ λαμβάνουμε την καμπυλότητα Ricci στη διεύθυνση e_i

$$\operatorname{Ric} e_i = \varkappa_i(nH - \varkappa_i) = -\varkappa_i^2 + nH\varkappa_i. \tag{1.15}$$

Επιπλέον, αθροίζοντας ως προς i, λαμβάνουμε την αριθμητική καμπυλότητα

$$\tau = \sum_{i=1}^n \operatorname{Ric} e_i = n^2H^2 - \|A\|^2, \tag{1.16}$$

όπου $\|A\|^2 = \sum_{i=1}^n \varkappa_i^2$ είναι το τετράγωνο του μέτρου της απεικόνισης Weingarten.

Αν σε ένα σημείο $p \in M^n$ ισχύει $\varkappa_1(p) = \cdots = \varkappa_n(p) = c$, τότε το p θα λέγεται *ομφαλικό σημείο* (umbilic point) αν $c \neq 0$ και *ισόπεδο σημείο* (flat point) αν $c = 0$.

Συμβολίζουμε με $\sigma_m(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ το *στοιχειώδες συμμετρικό πολυώνυμο m-βαθμού*, $m = 1, \ldots, n$, που ορίζεται ως

$$\sigma_m(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_m}. \tag{1.17}$$

Θέτουμε, για λόγους ενιαίας διατύπωσης, όπου είναι απαραίτητο

$$\sigma_0(x) := 1 \text{ και } \sigma_m(x) := 0, \text{ για } m > n.$$

Είναι φανερό ότι το $\sigma_m(x)$ είναι ο συντελεστής του t^{n-m} στο πολυώνυμο $\prod_{i=1}^n (t + x_i)$.
Ορίζουμε την *μέση τιμή* $d_k(x)$ του $\sigma_k(x)$ από τη σχέση

$$\binom{n}{k} d_k(x) := \sigma_k(x).$$

Για $m = 0, 1, \ldots, n$ η *m-μέση καμπυλότητα* H_m (m-th mean curvature) της υπερεπιφάνειας M^n είναι η συνάρτηση $H_m : M^n \to \mathbb{R}$, που ορίζεται ως

$$\begin{cases} H_0 := 1, \\ H_m(p) := \dfrac{1}{\binom{n}{m}} \sigma_m(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n), \end{cases} \tag{1.18}$$

όπου $\varkappa_i$ είναι οι κύριες καμπυλότητες στο σημείο p. Η συνάρτηση $H_1 = H$ είναι η μέση καμπυλότητα της υπερεπιφάνειας και η $H_n = K$ είναι η καμπυλότητα Gauss-Kronecker.

Κλείνοντας αυτή την παράγραφο, θεωρούμε μια υπερεπιφάνεια M^n ως υποπολύπτυγμα του $\mathbb{R}^{n+1}$ και προσανατολισμένη, τουλάχιστον τοπικά, με το ξ.

Έστω $(u_1, \ldots, u_n)$ παραμετρικό σύστημα συντεταγμένων στο ανοικτό U της M και

$$\overrightarrow{x}(u_1, \ldots, u_n) = (x^1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x^{n+1}(u_1, \ldots, u_n))$$

το διάνυσμα θέσης της M με τον κλασσικό συμβολισμό.

Τα διανύσματα

$$\frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial u_i} = (\frac{\partial x^1}{\partial u_i}, \cdots, \frac{\partial x^{n+1}}{\partial u_i}), \quad i = 1, ..., n,$$

είναι εφαπτόμενα της υπερεπιφάνειας. Οι συναρτήσεις $g_{ij} : U \subset M^n \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, \ldots, n$, που ορίζονται ως

$$g_{ij} := \langle \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial u_i}, \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial u_j} \rangle, \tag{1.19}$$

είναι διαφορίσιμες και ο πίνακας $E = [g_{ij}]$ είναι ο πίνακας, ως προς το σύστημα συντεταγμένων $u_1, \ldots, u_n$ της επαγόμενης μετρικής (*πρώτης θεμελιώδους μορφής*) της υπερεπιφάνειας.

Επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{\partial^2 \overrightarrow{x}}{\partial u_i \partial u_j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial u_k} + b_{ij}\xi \tag{1.20}$$

και οι

$$\frac{\partial \xi}{\partial u_i} = -\sum_{k=1}^{n} b_i^k \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial u_k}, \tag{1.21}$$

όπου οι συναρτήσεις $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(u_1, \ldots, u_n)$, $i, j, k = 1, \ldots, n$, ονομάζονται σύμβολα Christoffel, $b_{ij} = b(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u_i}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_j})$ είναι τα στοιχεία του πίνακα $B = [b_{ij}]$ της δεύτερης θεμελιώδους μορφής της υπερεπιφάνειας, ως προς το σύστημα συντεταγμένων $u_1, \ldots, u_n$, και

$$b_i^k = \sum_{m=1}^{n} b_{im} g^{mk}.$$

Τα g^{mk} είναι τα στοιχεία του αντίστροφου πίνακα του $E = [g_{ij}]$. Οι σχέσεις (1.20), (1.21) ονομάζονται *τύποι του Gauss* και *Weingarten*, αντίστοιχα, της υπερεπιφάνειας.

1.2 Υπερεπιφάνειες Γραφήματα

Μια σημαντική κατηγορία υπερεπιφανειών του $\mathbb{R}^{n+1}$ είναι τα γραφήματα. Η μελέτη τους μας δίνει τοπικές πληροφορίες για τις υπερεπιφάνειες καθώς, όπως θα αναφέρουμε στο τέλος της παραγράφου, κάθε υπερεπιφάνεια του $\mathbb{R}^{n+1}$, τοπικά, μπορεί να γραφεί ως γράφημα.

Έστωσαν ένα ανοικτό υποσύνολο D του $\mathbb{R}^n$ και μια διαφορίσιμη συνάρτηση $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Θεωρούμε την απεικόνιση $F : D \to \mathbb{R}^{n+1}$, που ορίζεται ως $F(x_1, \ldots, x_n) := (x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$. Το σύνολο $F(D)$ ονομάζεται *γράφημα της συνάρτησης* f και συμβολίζεται με Γ_f.

Έστω $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ η συνήθης ορθομοναδιαία βάση στον $\mathbb{R}^n$. Επεκτείνουμε τη βάση αυτή στον $\mathbb{R}^{n+1}$ ως εξής: $E_i = (e_i, 0)$ για $i = 1, \ldots, n$ και $E_{n+1} = (0, \ldots, 0, 1)$. Δηλαδή, μπορούμε να θεωρήσουμε τον $\mathbb{R}^n$ ως υπόχωρο του $\mathbb{R}^{n+1}$ κάθετο στον άξονα x_{n+1}. Με ∇ και $\bar{\nabla}$ θέτουμε τις συνήθεις συνοχές των $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^{n+1}$, αντίστοιχα.

Ως προς την ορθομοναδιαία βάση $\{E_i\}$, $i = 1, \ldots, n+1$ τα σημεία του γραφήματος Γ_f γράφονται, για $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$, ως

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, E_i \rangle E_i + f E_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} x_i E_i + f E_{n+1}.$$

Ισχύει

$$dF(X) = X + (Xf)E_{n+1}, \tag{1.22}$$

για κάθε $X \in TD$. Το διαφορικό dF είναι προφανώς ένα προς ένα.

Με f_i συμβολίζουμε τη μερική παράγωγο της f ως προς τη μεταβλητή x_i $(i = 1, \ldots, n)$. Μια βάση του εφαπτόμενου χώρου T_pM^n είναι η

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}\Big|_p = (1, 0, \ldots, 0, f_1), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\Big|_p = (0, \ldots, 0, 1, f_n).$$

Ο πίνακας της πρώτης θεμελιώδους μορφής, ως προς αυτό το σύστημα συντεταγμένων, είναι ο

$$E = [g_{ij}] = \Big[\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j} \rangle\Big] = [\delta_{ij} + f_i f_j].$$

Θέτουμε $W := \sqrt{1 + |\nabla f|^2}$. Το μοναδιαίο διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο $\xi = \frac{1}{W}(-\nabla f, 1)$ είναι κάθετο στο Γ_f αφού πληροί τις σχέσεις

$$\langle \xi, \frac{\partial F}{\partial x_i} \rangle = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ορισμός 1.3. *Το ξ θα το ονομάζουμε το προς τα άνω μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο του Γ_f, ενώ το $-\xi$ το προς τα κάτω μοναδιαίο κάθετο.*

Ο πίνακας της δεύτερης θεμελιώδους μορφής, ως προς τις παραμέτρους $x_1, \ldots, x_n$ και το προς τα άνω μοναδιαίο κάθετο, είναι ο

$$B = [b_{ij}] = \left[\frac{f_{ij}}{W}\right].$$

Οι κύριες καμπυλότητες $\varkappa_i \, (i = 1, \ldots, n)$ του γραφήματος δίνονται ως λύσεις της εξίσωσης $\det(B - \varkappa E) = 0$.

Με A συμβολίζουμε την απεικόνιση Weingarten του γραφήματος ως προς το κάθετο ξ. Από τον τύπο του Weingarten προκύπτει ότι

$$A_\xi X = -\bar{\nabla}_X \xi, \tag{1.23}$$

όπου $X \in \Delta(\Gamma_f)$.

Θεωρούμε το γραμμικό μετασχηματισμό $\tilde{A} : T_x D \to T_x D$, που δίνεται από τη σχέση

$$\tilde{A} = (dF)^{-1} \circ A \circ dF. \tag{1.24}$$

Η (1.24), λόγω της (1.23), γίνεται

$$\tilde{A}X = -(dF)^{-1}(\bar{\nabla}_{dF(X)}\xi), \tag{1.25}$$

για όλα τα $X \in TD$.

Παρατήρηση 1.1. Έστω $\{v_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, βάση του TD τέτοια ώστε τα διανύσματα $\{dF(v_i)\}$, $i = 1, \ldots, n$, να είναι η βάση των κυρίων διευθύνσεων του A. Τότε από την (1.24) προκύπτει ότι

$$\tilde{A}v_i = (dF)^{-1}\varkappa_i \, dF(v_i) = \varkappa_i v_i.$$

Άρα ο γραμμικός μετασχηματισμός $\tilde{A}$ έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με τον A.

Θα αποδείξουμε τον εξής ισχυρισμό: Για κάθε $X \in TD$ ισχύει

$$X\Big(\frac{1}{W}\Big) = -df\Big(\nabla_X(\frac{\nabla f}{W})\Big). \tag{1.26}$$

Πραγματικά, έχουμε

$$X\Big(\frac{1}{W}\Big) = -\frac{1}{W^3}\langle\nabla_X(\nabla f), \nabla f\rangle = -\frac{1}{W^3}df(\nabla_X(\nabla f)). \tag{1.27}$$

Επειδή,

$$df\Big(\nabla_X(\frac{\nabla f}{W})\Big) = \frac{1}{W}df(\nabla_X \nabla f) + X\Big(\frac{1}{W}\Big)|\nabla f|^2,$$

η (1.27) δίνει

$$\begin{aligned} X\Big(\frac{1}{W}\Big) &= -\frac{1}{W^2}\Big(df(\nabla_X(\frac{\nabla f}{W})) - X\Big(\frac{1}{W}\Big)(|\nabla f|^2)\Big) \\ &= -\frac{1}{W^2}df\Big(\nabla_X(\frac{\nabla f}{W})\Big) + \frac{1}{W^2}X\Big(\frac{1}{W}\Big)|\nabla f|^2. \end{aligned}$$

Άρα, ισχύει

$$X\Big(\frac{1}{W}\Big)\Big[1 - \frac{|\nabla f|^2}{W^2}\Big] = -\frac{1}{W^2}df\Big(\nabla_X(\frac{\nabla f}{W})\Big).$$

Δηλαδή έχουμε

$$X\Big(\frac{1}{W}\Big) = -df\Big(\nabla_X(\frac{\nabla f}{W})\Big).$$

Χρησιμοποιώντας τις (1.22) και (1.25) προκύπτει ότι

$$\tilde{A}X = \nabla_X\Big(\frac{\nabla f}{W}\Big), \tag{1.28}$$

για κάθε $X \in TD$.

Παρατήρηση 1.2. (i) Από τη $(\nabla_X \tilde{A})Y = \nabla_X(\tilde{A}Y) - \tilde{A}\nabla_X Y$, λόγω της (1.28), λαμβάνουμε

$$(\nabla_X \tilde{A})Y = \nabla_X\Big(\nabla_Y(\frac{\nabla f}{W})\Big) - \nabla_{\nabla_X Y}\Big(\frac{\nabla f}{W}\Big),$$

όπου ∇ είναι η συνήθης συνοχή στον $\mathbb{R}^n$. Επειδή $R(X,Y)\big(\frac{\nabla f}{W}\big) = 0$ η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\begin{aligned}(\nabla_X \tilde{A})Y &= \nabla_X \nabla_Y \big(\frac{\nabla f}{W}\big) - \nabla_{\nabla_X Y}\big(\frac{\nabla f}{W}\big) - R(X,Y)\big(\frac{\nabla f}{W}\big)\\ &= \nabla_Y \nabla_X \big(\frac{\nabla f}{W}\big) - \nabla_{\nabla_Y X}\big(\frac{\nabla f}{W}\big) = (\nabla_Y \tilde{A})X,\end{aligned}$$

όπου R είναι ο τανυστής καμπυλότητας του $\mathbb{R}^n$ με τη συνήθη μετρική. Συνεπώς ο $\tilde{A}$ πληροί την εξίσωση Godazzi.
(ii) Ο $\tilde{A}$, γενικώς, δεν είναι συμμετρικός. Έστω ότι ισχύει η σχέση $\langle \tilde{A}X, Y\rangle = \langle X, \tilde{A}Y\rangle$, για τυχαία $X, Y \in TD$. Τότε θα έχουμε, για όλα τα $X, Y \in TD$,

$$\begin{aligned}0 =& \langle \tilde{A}X, Y\rangle - \langle X, \tilde{A}Y\rangle = X\Big(\frac{1}{W}\Big)Yf - Y\Big(\frac{1}{W}\Big)Xf\\ =& -\frac{1}{W^2}\big\{(XW)(Yf) - (YW)(Xf)\big\}.\end{aligned}$$

Δηλαδή, θα ισχύει

$$(XW)(Yf) - (YW)(Xf) = 0,$$

για όλα τα $X, Y \in TD$. Η τελευταία σχέση δεν μπορεί να ισχύει για όλα τα X, Y εκτός αν η f είναι ειδικής μορφής. Για παράδειγμα, αν $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ και $X = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y}$ η τελευταία σχέση δεν ισχύει παντού στον $\mathbb{R}^2$.

Οι *μετασχηματισμοί Newton* $P_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $m = 0, \ldots, n$ που προκύπτουν από το μετασχηματισμό $\tilde{A}$ ορίζονται επαγωγικά ως εξής:

$$\begin{aligned}&P_0 = I, \text{ η ταυτότητα}\\ &P_m = \sigma_m I - \tilde{A}P_{m-1}, \text{ για } m \geq 1,\end{aligned}$$

όπου σ_m είναι η στοιχειώδης συμμετρική συνάρτηση των ιδιοτιμών του $\tilde{A}$, δηλαδή των κυρίων καμπυλοτήτων του γραφήματος Γ_f. Θυμίζουμε ότι η μέση καμπυλότητα m-τάξης H_m του γραφήματος Γ_f ορίζεται από τη σχέση $\binom{n}{m}H_m = \sigma_m$.

Για τους μετασχηματισμούς Newton η παρακάτω Πρόταση περιγράφει τρείς βασικές ιδιότητες.

Πρόταση 1.1. *Έστω $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση και Γ_f το γράφημα της. Με τους παραπάνω συμβολισμούς ισχύουν οι ισχυρισμοί:*

$$\tilde{A}P_m = P_m\tilde{A}, \text{ για } m = 0, \ldots, n. \tag{1.29}$$

$$\text{Οι ιδιοτιμές του } P_m\,(0 \le m \le n) \text{ είναι οι } \frac{\partial \sigma_{m+1}}{\partial \varkappa_i}, \text{ όπου } \varkappa_i \text{ οι} \tag{1.30}$$

κύριες καμπυλότητες του γραφήματος.

$$m\sigma_m = \mathrm{trace}(\tilde{A}P_{m-1}), \text{ για } 1 \le m \le n. \tag{1.31}$$

Απόδειξη. Οι ισχυρισμοί (1.29) και (1.30) είναι σχεδόν προφανείς, αφού οι μετασχηματισμοί $\tilde{A}$ και P_m διαγωνοποιούνται ως προς κοινή βάση. Για το μετασχηματισμό Newton P_m ισχύει $P_m = \sigma_m I - \tilde{A}P_{m-1}$, επομένως

$$\mathrm{trace}\,\tilde{A}P_{m-1} = \mathrm{trace}(\sigma_m I - P_m).$$

Ισχύει, λόγω της γραμμικότητας του ίχνους, ότι

$$\mathrm{trace}\,\tilde{A}P_{m-1} = n\sigma_m - \mathrm{trace}\,P_m.$$

Συνεπώς αρκεί να υπολογίσουμε το trace P_m. Έχουμε, λόγω του (1.30), ότι

$$\operatorname{trace} P_m = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{m+1}}{\partial \varkappa_i}.$$

Το $\frac{\partial \sigma_{m+1}}{\partial \varkappa_i}$ είναι το σ_m χωρίς τους όρους που περιέχουν τα $\varkappa_i$. Το $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{m+1}}{\partial \varkappa_i}$ είναι το σ_m πολλαπλασιασμένο με μια σταθερά. Ο όρος $\varkappa_1 \cdots \varkappa_m$ εμφανίζεται στους $\frac{\partial \sigma_{m+1}}{\partial \varkappa_{m+1}}, \cdots, \frac{\partial \sigma_{m+1}}{\partial \varkappa_n}$, δηλαδή $(n-m)$-φορές. Ανάλογα συμβαίνουν και με τους υπόλοιπους όρους. Άρα

$$\operatorname{trace} P_m = (n-m)\, \sigma_m,$$

από όπου προκύπτει, λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, ότι

$$\operatorname{trace} (\tilde{A} P_{m-1}) = m\, \sigma_m. \qquad \square$$

Θα κλείσουμε την παράγραφο αυτή με μια Πρόταση, που βεβαιώνει ότι κάθε υπερεπιφάνεια του $\mathbb{R}^{n+1}$ είναι τοπικά γράφημα (κοίταξε για παράδειγμα [22]).

Πρόταση 1.2. *Έστω M^n μια υπερεπιφάνεια του $\mathbb{R}^{n+1}$. Τότε η M^n είναι τοπικά γράφημα, δηλαδή μια αρκετά μικρή περιοχή κάθε σημείου της παριστάνεται ως γράφημα συνάρτησης.*

1.3 Υπερβολικά πολυώνυμα

Θα χρειαστούμε κάποιες ιδιότητες των υπερβολικών πολυωνύμων. Τα υπερβολικά πολυώνυμα μελετήθηκαν στα πλαίσια της θεωρίας των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Έχουν ιδιότητες που έχουν στενή σχέση με τον κυρτό προγραμματισμό.

Ορισμός 1.4. *Ένα ομογενές πολυώνυμο n μεταβλητών $P(x)$ βαθμού m λέγεται α-υπερβολικό, για $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ και $\alpha \neq 0$, αν η εξίσωση $P(x + t\alpha) = 0$ έχει m πραγματικές λύσεις για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.*

Παρατήρηση 1.3. (i) Το πολυώνυμο $P(x)$ είναι α-υπερβολικό σημαίνει, γεωμετρικά, ότι κάθε ευθεία από τυχαίο σημείο $x \in \mathbb{R}^n$ και παράλληλη στο α τέμνει την υπερεπιφάνεια $P(x) = 0$ σε m πραγματικά σημεία.
(ii) Είναι προφανές ότι αν το $P(x)$ είναι α-υπερβολικό πολυώνυμο τότε $P(\alpha) \neq 0$. Με παραγοντοποίηση θα έχουμε

$$P(x + t\alpha) = P(\alpha) \prod_{i=1}^{m} (t + \lambda_i(\alpha, x)), \tag{1.32}$$

όπου $\lambda_1(\alpha, x) \leq \lambda_2(\alpha, x) \leq \cdots \leq \lambda_m(\alpha, x)$ είναι τα αντίθετα των πραγματικών λύσεων της εξίσωσης $P(x + t\alpha) = 0$. Οι συναρτήσεις $\lambda_i(\alpha, x)$, $i = 1, \ldots, m$, είναι συνεχείς. Επιπλέον, επειδή ισχύει

$$P(sx + t\alpha) = P(\alpha) \prod_{i=1}^{m} (t + \lambda_i(\alpha, sx))$$

και

$$P(sx + t\alpha) = P(\alpha) \prod_{i=1}^{m} (t + s\lambda_i(\alpha, x))$$

συμπεραίνουμε ότι $\lambda_i(\alpha, sx) = s\lambda_i(\alpha, x)$, δηλαδή οι συναρτήσεις $\lambda_i(\alpha, x)$ είναι και ομογενείς πρώτου βαθμού.
(iii) Είναι προφανές ότι $\lambda_i(\alpha, \alpha) = 1$. Επιπλέον, επειδή

$$P(sx + \mu\alpha + t\alpha) = P(sx + (\mu + t)\alpha) = P(\alpha) \prod_{i=1}^{m} (\mu + t + s\lambda_i(\alpha, x))$$

και

$$P(sx+\mu\alpha+t\alpha)=P(\alpha)\prod_{i=1}^{m}(t+\lambda_i(\alpha,sx+\mu\alpha)),$$

ισχύει $\lambda_i(\alpha,sx+\mu\alpha)=s\lambda_i(\alpha,x)+\mu$, για $s\geq 0$. Για $s<0$ ισχύει αντίστοιχη σχέση με κατάλληλη αρίθμηση.

Παράδειγμα 1.2. *Το στοιχειώδες συμμετρικό πολυώνυμο n-μεταβλητών $\sigma_n(x_1,\dots,x_n)=x_1\cdots x_n$ είναι α-υπερβολικό με $\alpha=(1,\dots,1)$.*

Πρόταση 1.3. *Έστω $P(x)$ ένα α-υπερβολικό πολυώνυμο m-βαθμού $(m>1)$ και*

$$Q(x):=\frac{d}{dt}P(x+t\alpha)\Big|_{t=0}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{\partial P}{\partial x_i}(x).$$

Τότε το $Q(x)$ είναι α-υπερβολικό πολυώνυμο. Επιπλέον ισχύει η σχέση $\lambda_1(\alpha,x)\leq\mu_1(\alpha,x)$, όπου $-\mu_1(\alpha,x)$ είναι η μεγαλύτερη λύση της εξίσωσης $Q(x+t\alpha)=0$.

Απόδειξη. Από την $P(tx)=t^mP(x)$, παραγωγίζοντας ως προς x_i, λαμβάνουμε

$$\frac{\partial P(tx)}{\partial x_i}t=t^m\frac{\partial P}{\partial x_i}(x),$$

ή

$$\frac{\partial P}{\partial x_i}(tx)=t^{m-1}\frac{\partial P}{\partial x_i}(x).$$

Συνεπώς το πολυώνυμο $\frac{\partial P}{\partial x_i}(x)$ είναι ομογενές $(m-1)$-βαθμού. Άρα θα έχουμε

$$\begin{aligned}Q(tx)&=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{\partial P}{\partial x_i}(tx)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i t^{m-1}\frac{\partial P}{\partial x_i}(x)\\&=t^{m-1}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{\partial P}{\partial x_i}(x)=t^{m-1}Q(x).\end{aligned}$$

Το $Q(x)$ είναι, συνεπώς, ομογενές $(m-1)$-βαθμού. Από τη $P(tx) = t^m P(x)$, παραγωγίζοντας ως προς t, λαμβάνουμε

$$\sum_i \frac{\partial P}{\partial x_i}(tx)x_i = mt^{m-1}P(x),$$

ή για $t = 1$,

$$\sum_i \frac{\partial P}{\partial x_i}(x)x_i = mP(x),$$

η γνωστή ταυτότητα του Euler.

Τώρα, για $x \in \mathbb{R}^n$, θα έχουμε

$$Q(x+t\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial P}{\partial x_i}(x+t\alpha) = \frac{dP(x+t\alpha)}{dt}.$$

Επειδή $P(x+t\alpha) = 0$ για $t = t_i = -\lambda_i(x,\alpha)$, $i = 1,\dots,m$, σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής, η εξίσωση $Q(x+t\alpha) = 0$ θα έχει $(m-1)$ πραγματικές λύσεις. Συνεπώς, το $Q(x)$ είναι α-υπερβολικό πολυώνυμο.

$\square$

Παρατήρηση 1.4. Ξεκινώντας από το στοιχειώδες συμμετρικό πολυώνυμο $P(x) = \sigma_n(x)$, n μεταβλητών, το οποίο είναι α-υπερβολικό με $\alpha = (1,\dots,1) \in \mathbb{R}^n$ και εφαρμόζοντας, διαδοχικά, την Πρόταση 1.3 διαπιστώνουμε ότι όλα τα στοιχειώδη συμμετρικά πολυώνυμα

$$\sigma_m(x_1,\dots,x_n) = \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_n\le n} x_{i_1}\cdots x_{i_n}$$

είναι α-υπερβολικά με $\alpha = (1,\dots,1)$.

Ορισμός 1.5. *Έστω $P(x)$ ένα α-υπερβολικό πολυώνυμο n-μεταβλητών. Το σύνολο*

$$C := \{x \in \mathbb{R}^n : \lambda_1(\alpha,x) > 0\}$$

είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ *και ονομάζεται υπερβολικός κώνος του* $P(x)$ *ως προς* α.

Παρατήρηση 1.5. (i) Το σύνολο C είναι κώνος με κορυφή το O. Πραγματικά, επειδή $\lambda_1(\alpha, x) > 0$ θα έχουμε $\lambda_1(\alpha, sx) = s\lambda_1(\alpha, x) > 0$ για $s > 0$. Άρα αν $x \in C$ τότε και το $sx \in C$ για $s > 0$.
(ii) Λαμβάνοντας υπόψη την παραγοντοποίηση (1.32) από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι, αν $x \in C$ τότε η ευθεία από το x που είναι παράλληλη στο α δεν τέμνει την υπερεπιφάνεια $P(x) = 0$ για $t > 0$.
(iii) Αποδεικνύεται [13] ότι ο C συμπίπτει με τα παρακάτω σύνολα

$$\varLambda = \{x \in \mathbb{R}^n : P(x + t\alpha) = 0, \text{ τότε } t < 0\},$$

$$C(P, \alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : P(x + t\alpha) \neq 0, \text{ για κάθε } t \geq 0\},$$

$\varGamma(P, \alpha) =$ η συνεκτική συνιστώσα του $\{x \in \mathbb{R}^n : P(x) \neq 0\}$, η οποία περιέχει το α.

Ισχύει η εξής σημαντική Πρόταση

Πρόταση 1.4. *Έστω* $P(x)$ *ένα* α*-υπερβολικό πολυώνυμο με* $P(\alpha) > 0$. *Τότε ισχύουν*
(i) *Για κάθε* $b \in C(P, \alpha)$ *το* $P(x)$ *είναι* b*-υπερβολικό και* $C(P, \alpha) \equiv C(P, b)$.
(ii) *Το* $C(P, \alpha)$ *είναι κυρτό σύνολο.*

Απόδειξη. (i) Έστω $b \in C(P, \alpha)$ και $t > 0$. Θεωρούμε, ως προς s, το πολυώνυμο $P(it\alpha + sb + rx)$, όπου i η φανταστική μονάδα και x οποιοδήποτε στοιχείο του $\mathbb{R}^n$. Θα εξετάσουμε για $r \geq 0$ τις ρίζες του πολυωνύμου.

Θα δείξουμε ότι για $r \geq 0$ η εξίσωση $P(it\alpha + sb + rx) = 0$, ως προς s, έχει λύσεις στο ανοικτό κάτω ημιεπίπεδο.

Για $r = 0$ η εξίσωση $P(it\alpha + sb) = 0$ δεν μπορεί να έχει το $s = 0$ ως λύση, αφού $P(it\alpha) = (it)^m P(\alpha) \neq 0$. Για $s \neq 0$ θα έχουμε ότι η $P(it\alpha + sb) = s^m P(its^{-1}\alpha + b) = 0$, θα ισχύει για $its^{-1} < 0$, δηλαδή για s που ανήκουν στον αρνητικό φανταστικό άξονα.

Αφήνουμε το r να αυξηθεί θετικά και υποθέτουμε ότι για κάποιο $r > 0$ η εξίσωση $P(it\alpha + sb + rx) = 0$, ως προς s, έχει λύση στο ανοικτό άνω ημιεπίπεδο. Τότε, λόγω συνέχειας, θα υπάρχει $r_1 > 0$ τέτοιο ώστε η εξίσωση $P(it\alpha + sb + r_1x) = 0$ θα έχει πραγματική λύση s_1, δηλαδή $P(it\alpha + s_1b + r_1x) = 0$. Αυτό είναι άτοπο αφού το $P(x)$ είναι α-υπερβολικό. Θα εξετάσουμε τις ρίζες της εξίσωσης $P(sb + rx) = 0$, δηλαδή της $P(it\alpha + sb + rx) = 0$ για $t = 0$. Λόγω συνέχειας των ριζών, το πολυώνυμο $P(sb + rx)$ θα δέχεται ρίζες στο κλειστό κάτω ημιεπίπεδο. Το $P(x)$ έχει πραγματικούς συντελεστές άρα έχει m ακριβώς ρίζες πραγματικές ή μιγαδικές. Επιπλέον, αν έχει μια μιγαδική λύση τότε έχει και τη συζυγή της. Συνεπώς οι ρίζες είναι αναγκαστικά όλες πραγματικές, για οποιοδήποτε $x \in \mathbb{R}^n$, άρα το $P(x)$ είναι b-υπερβολικό.

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει $C(P, \alpha) \equiv C(P, b)$. Έστω $x \in C(P, \alpha)$. Το $P(x)$ είναι α-υπερβολικό πολυώνυμο, άρα ισχύει

$$P(tb + x) = P(\alpha) \prod_{i=1}^{m} \lambda_i(\alpha, tb + x). \tag{1.33}$$

Λόγω της Παρατήρησης 1.3 (ii) και (iii) έχουμε

$$\lambda_1(\alpha, tb + x) \leq \lambda_2(\alpha, tb + x) \leq \cdots \leq \lambda_m(\alpha, tb + x)$$

και $\lambda_1(\alpha, tb+x) = t\lambda_1(\alpha, b) + \lambda_1(\alpha, x) > 0$ για $t \geq 0$, αφού $b \in C(P, \alpha)$ και $x \in C(P, \alpha)$. Συνεπώς, λόγω της (1.33), το $x \in C(P, b)$, δηλαδή $C(P, \alpha) \subset C(P, b)$. Ισχύει και $C(P, b) \subset C(P, \alpha)$, λόγω συμμετρικότητας. Άρα $C(P, \alpha) \equiv C(P, b)$.

(ii) Έστωσαν b, $c \in C(P, \alpha)$ και $\mu, \nu > 0$. Το c μπορούμε να το αντικαταστήσουμε με το α λόγω του πρώτου μέρους της Πρότασης. Το $b \in C(P, \alpha)$, άρα $\lambda_1(\alpha, b) > 0$. Όμως λόγω της Παρατήρησης 1.3 *(iii)* θα έχουμε

$$\lambda_1(\alpha, \nu b + \mu\alpha) = \nu\lambda_1(\alpha, b) + \mu > 0,$$

και συνεπώς το $\nu b + \mu\alpha \in C(P, \alpha)$. □

Συμβολίζουμε με

$$\Gamma_m := C(\sigma_m, \alpha),$$

τον υπερβολικό κώνο του σ_m ως προς α, όπου $\alpha = (1, \ldots, 1)$ και σ_m το στοιχειώδες συμμετρικό πολυώνυμο m-βαθμού και n-μεταβλητών. Λαμβάνοντας υπόψη την Πρόταση 1.3 και την Πρόταση 1.4, συμπεραίνουμε ότι οι κώνοι Γ_m είναι κώνοι με κορυφή το Ο και ισχύει

$$\Gamma_n \subset \Gamma_{n-1} \subset \cdots \subset \Gamma_1,$$

όπου $\Gamma_n = \mathcal{O}_n$ είναι το πρώτο *ογδοημόριο* (orthant).

Η ακόλουθη Πρόταση οφείλεται στους L. Caffarelli, L. Nirenberg και J. Spruck [2] και θα την αναφέρουμε χωρίς απόδειξη.

Πρόταση 1.5. *Έστω $\sigma_m(x_1, \ldots, x_n)$ το στοιχειώδες συμμετρικό πολυώνυμο βαθμού m. Ισχύει*

$$D_i\sigma_m := \frac{\partial \sigma_m}{\partial x_i} > 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

στον Γ_m, όπου Γ_m είναι ο αντίστοιχος υπερβολικός κώνος του σ_m.

Θα δώσουμε μια σύντομη απόδειξη στην ακόλουθη Πρόταση (κοίταξε για παράδειγμα στο [11]).

Πρόταση 1.6. *Έστωσαν $p = (x_1, \dots, x_n) \in \Gamma_m$ και $v = (v_1, \dots, v_n) \in \bar{\Gamma}_n$, τότε $(p + tv) \in \Gamma_m$, για κάθε $t \geq 0$.*

Απόδειξη. Έστω ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει. Τότε υπάρχει $t_0 > 0$ τέτοιο ώστε $\sigma_m(p+tv) > 0$ στο $[0, t_0)$ και $\sigma_m(p+t_0v) = 0$. Η διαφορίσιμη συνάρτηση $\sigma_m(p + tv)$ είναι φθίνουσα σε κάποιο διάστημα $[t_1, t_0]$ άρα υπάρχει $t_2 \in (0, t_0)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\frac{d}{dt}\sigma_m(p + tv)\bigg|_{t=t_2} < 0.$$

Όμως, λόγω της Πρότασης 1.5, θα έχουμε

$$\frac{d}{dt}\sigma_m(p + tv)\bigg|_{t=t_2} = \sum_{i=1}^{n} D_i\sigma_m(p + t_2v)v_i \geq 0.$$

στον Γ_m, το οποίο είναι άτοπο. □

Θα κλείσουμε την παράγραφο αυτή με την εξής

Πρόταση 1.7. *Έστωσαν $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ υπερεπιφάνεια και $p_0 \in M^n$. Αν $H_1, H_2, \dots, H_m > 0$ στο p_0, για κάποιο m με $1 < m \leq n$, τότε ισχύει*

$$H_1 \geq H_2^{\frac{1}{2}} \geq \cdots \geq H_m^{\frac{1}{m}} \tag{1.34}$$

και η ισότητα σε κάποιο βήμα συνεπάγεται ότι το σημείο p_0 είναι ομφαλικό.

Η απόδειξη της Πρότασης προκύπτει, άμεσα, ως συνέπεια του ακόλουθου Λήμματος

Λήμμα 1.1. *(i) Για τις μέσες τιμές $d_m(x)$ των στοιχειωδών συμμετρικών πολυωνύμων n μεταβλητών $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ισχύει η ανισότητα Newton*

$$d_m^2(x) \geq d_{m-1}(x)\, d_{m+1}(x). \tag{1.35}$$

(ii) Αν $d_1(x^0), \ldots, d_m(x^0) > 0$, για κάποιο $1 < m \leq n$, σε κάποιο σημείο $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$, τότε ισχύει η ανισότητα Mac-Laurin

$$d_1(x^0) \geq d_2(x^0)^{\frac{1}{2}} \geq \cdots \geq d_m(x^0)^{\frac{1}{m}} \tag{1.36}$$

και η ισότητα σε κάποιο βήμα συνεπάγεται ότι $x_1^0 = \cdots = x_n^0 \neq 0$.

Απόδειξη. (i) Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

βαθμού $n \geq 2$, με πραγματικούς συντελεστές και πραγματικές ρίζες. Τότε, κατά τα γνωστά, κάθε παράγωγος $\frac{d^k f}{dt^k}(t)$ καθώς και το αντίστροφο πολυώνυμο $Af(t) = \alpha_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_{n-1} t + a_n$ του $f(t)$ έχουν επίσης πραγματικές ρίζες.

Σχηματίζουμε, για $1 \leq k \leq n-1$, το πολυώνυμο

$$\begin{aligned}\frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}\big(A\big(\frac{d^{k-1} f}{dt^{k-1}}(t)\big)\big) = {} & \frac{(k-1)!\,(n-k+1)!}{2} a_{k-1}\, t^2 \\ & + k!(n-k)! a_k\, t + \frac{(k+1)!\,(n-k-1)!}{2} a_{k+1},\end{aligned}$$

το οποίο έχει πραγματικές λύσεις και ως εκ τούτου η διακρίνουσα του θα είναι μη αρνητική. Δηλαδή θα έχουμε

$$a_k^2 \geq \frac{k+1}{k}\,\frac{n-k+1}{n-k}\,a_{k-1}\,a_{k+1}, \tag{1.37}$$

για $1 \leq k \leq n-1$. Για $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ θεωρούμε το πολυώνυμο $f(t) = \prod_{i=1}^n (t + x_i)$. Εφαρμόζοντας την (1.37) για $a_k = \binom{n}{k} d_k$ λαμβάνουμε την (1.35).

(ii) Θέτοντας $d_k(x^0) \equiv d_k$ και εφαρμόζοντας την (1.35) για $k = 1, \ldots, m$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} d_1^2 &\geq d_0\,d_2 \\ d_2^2 &\geq d_1\,d_3 \\ &\vdots \\ d_{m-1}^2 &\geq d_{m-2}\,d_m. \end{aligned}$$

Συνεπώς, πολλαπλασιάζοντας, λαμβάνουμε

$$(d_0\,d_2)(d_1\,d_3)^2 \cdots (d_{m-2}\,d_m)^{m-1} \leq d_1^2\,d_2^4 \cdots d_{m-1}^{2(m-1)}.$$

Άρα απλοποιώντας, αφού $d_1, \ldots, d_m > 0$, θα πάρουμε

$$d_m^{m-1} \leq d_{m-1}^m. \qquad \square$$

Κεφάλαιο 2

Ελλειπτικοί τελεστές καμπυλοτήτων

2.1 Θεώρημα Συγκρίσεως

Η αρχή μεγίστου για μη γραμμικούς τελεστές δεύτερης τάξης έχει χρησιμοποιηθεί στη Διαφορική Γεωμετρία για την απόδειξη, κυρίως, αποτελεσμάτων μοναδικότητας. Επιπλέον μας δίνει πληροφορίες, που αφορούν το μέγεθος συμπαγών υπερεπιφανειών στον Ευκλείδειο χώρο, καθώς και συνθήκες ταύτισης αυτών στην περιοχή ενός σημείου επαφής των.

Χρειαζόμαστε μερικές έννοιες. Για αυτές και άλλες σχετικές παραπέμπουμε στα βιβλία ([19], [24]).

Ορισμός 2.1. *Θεωρούμε το συμμετρικό πίνακα* $A = [a_{ij}(x)]$, *όπου* $a_{ij}(x)$ *συναρτήσεις ορισμένες σε ένα χωρίο* Ω *του* $\mathbb{R}^n$. *Αν για κάθε* *χωρίο $\Omega' \subset\subset \Omega$, με συμπαγή θήκη στο Ω, η τετραγωνική μορφή*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$$

είναι θετικά οριστική και φραγμένη ομοιόμορφα, μακριά από το μηδέν, για κάθε $x \in \Omega'$ και κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$ με $|\xi| = 1$, τότε ο πίνακας A λέγεται τοπικά ομοιόμορφα θετικά οριστικός στο Ω (locally uniformly positive definite).

Θεωρούμε το γραμμικό τελεστή δεύτερης τάξης

$$L := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

όπου ο συμμετρικός πίνακας $[a_{ij}(x)]$ είναι τοπικά ομοιόμορφα θετικά οριστικός στο χωρίο Ω και οι συντελεστές $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$ είναι τοπικά φραγμένες συναρτήσεις στο Ω.

Αρχή Μεγίστου του Hopf (Hopf's maximum principle). *Έστω $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ μια συνάρτηση ορισμένη και τάξης C^2 στο χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, που πληροί τη διαφορική ανισότητα*

$$Lu \geq 0, \quad \text{στο } \Omega.$$

Αν η u δέχεται μέγιστο σε ένα εσωτερικό σημείο $x_0 \in \Omega$, τότε η u είναι σταθερή, δηλαδή $u(x) = u(x_0)$ για κάθε $x \in \Omega$.

Από την Αρχή Μεγίστου προκύπτει το ακόλουθο Πόρισμα, το οποίο θα χρειασθούμε και θα το αποδείξουμε για λόγους πληρότητας.

Πόρισμα 2.1. *Έστω $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ μια συνάρτηση ορισμένη και τάξης C^2 σε ένα χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, που πληροί τη διαφορική ανισότητα*

$$Lu + c(x)u \geq 0 \; (\leq 0) \quad \textit{στο } \Omega, \tag{2.1}$$

όπου η συνάρτηση $c(x)$ είναι τοπικά κάτωθεν φραγμένη στο Ω. Αν η u δέχεται στο Ω το μηδέν ως μέγιστη (ελάχιστη) τιμή, τότε ισχύει $u(x) = 0$ για κάθε $x \in \Omega$.

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in \Omega$, τέτοιο ώστε $u(x_0) = 0$ η μέγιστη τιμή, ανάλογα προχωρούμε για την ελάχιστη τιμή. Τότε για κάθε $x \in \Omega$ θα έχουμε $u(x) \leq u(x_0) = 0$. Αν x_1 είναι η πρώτη συντεταγμένη του $x \in \Omega$ και a μια θετική σταθερά, θέτουμε $h(x) := u(x)e^{-ax_1}$. Η συνάρτηση $h(x)$ είναι τάξης C^2 και μη θετική στο Ω. Αντικαθιστώντας $u(x) = h(x)e^{ax_1}$ στην (2.1) και εκτελώντας τις πράξεις λαμβάνουμε:

$$Lh(x) + \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}_i(x) \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) \geq -\tilde{c}(x)e^{-ax_1}u(x),$$

όπου θέσαμε

$$\tilde{b}_i(x) = 2aa_{i1}(x) \text{ και } \tilde{c}(x) = a^2 a_{11}(x) + ab_1(x) + c(x).$$

Επειδή οι συναρτήσεις $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$ είναι τοπικά φραγμένες και η $c(x)$ τοπικά κάτωθεν φραγμένη συμπεραίνουμε ότι, για κάθε χωρίο $\Omega' \subset\subset \Omega$, υπάρχει $a > 0$ αρκετά μεγάλο ώστε $\tilde{c}(x) > 0$ για κάθε $x \in \Omega'$. Για τον ίδιο λόγο οι $\tilde{b}_i(x)$ είναι φραγμένες στο Ω'. Από την Αρχή Μεγίστου, θεωρώντας Ω' με $x_0 \in \Omega'$, συμπεραίνουμε ότι $h(x) = e^{-ax_1}u(x) = 0$, και συνεπώς $u(x) = 0$, για κάθε $x \in \Omega'$.

Θεωρούμε το σύνολο $M = \{x \in \Omega : u(x) = 0\}$. Είναι φανερό ότι το M είναι μη κενό και κλειστό στο Ω. Από την παραπάνω διαδικασία προκύπτει ότι είναι και ανοικτό στο Ω, και συνεπώς $M \equiv \Omega$. □

Θα δούμε, στη συνέχεια, ένα Θεώρημα Συγκρίσεως, το οποίο θα μας οδηγήσει στην επόμενη παράγραφο σε αναγκαίες γεωμετρικές συνθήκες ώστε δύο υπερεπιφάνειες του Ευκλείδιου χώρου να συμπίπτουν ως σύνολα σε μια περιοχή ενός σημείου επαφής.

Θεωρούμε το συμβολισμό

$$(r, p, z, x) := (r_{ij}, r_i, z, x),$$

όπου $r = (r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{1n}, r_{22}, \ldots, r_{2n}, \ldots, r_{n-1n}, r_{nn}) \in \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, $p = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}$ και $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Είναι προφανές ότι το (r, p, z, x) είναι σημείο του $\mathbb{R}^d$ με $d = \binom{n}{2} + 3n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 2n + 1$.
Έστω $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, μια συνάρτηση τάξης C^2 στο χωρίο Ω. Συμβολίζουμε με f_i τη μερική παράγωγο της f ως προς τη μεταβλητή x_i και με f_{ij} τη δεύτερη μερική παράγωγο της f ως προς τις μεταβλητές x_i, x_j. Ορίζουμε

$$\Lambda(f)(x) := (f_{ij}(x), f_i(x), f(x), x),$$

όπου $i, j = 1, \ldots, n$ με $i \leq j$ για $x \in \Omega$ και έχουμε $\Lambda(f)(x) \in \mathbb{R}^d$. Έστω Γ ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.2. *Μια συνάρτηση $\Phi : \Gamma \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, τάξης C^1, λέγεται ελλειπτική σε ένα σημείο (r, p, z, x) αν πληροί τη σχέση*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial r_{ij}}(r, p, z, x)\xi_i\xi_j > 0,$$

για κάθε μη μηδενικό $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. *Η* Φ *θα λέγεται ελλειπτική στο* Γ, *αν είναι ελλειπτική σε κάθε σημείο του* Γ. *Επιπλέον, η* Φ *θα λέγεται ελλειπτική ως προς την τάξης* C^2 *συνάρτηση* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *αν* $\Lambda(f)(x) \in \Gamma$ *για κάθε* $x \in \Omega$ *και η* Φ *είναι ελλειπτική σε κάθε σημείο* $\Lambda(f)(x)$, $x \in \Omega$.

Παρατήρηση 2.1. Είναι προφανές ότι αν η Φ είναι ελλειπτική σε ένα σημείο του Γ θα είναι ελλειπτική και σε μια περιοχή του σημείου.

Θεώρημα Συγκρίσεως (Comparison Theorem). *Έστωσαν* f, g *συναρτήσεις ορισμένες και τάξης* C^2 *σε ένα χωρίο* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Γ *ανοικτό υποσύνολο του* $\mathbb{R}^d$, $d = \frac{n(n+1)}{2} + 2n + 1$ *και* $\Phi : \Gamma \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *μια συνάρτηση τάξης* C^1, *η οποία είναι ελλειπτική ως προς τις συναρτήσεις* $u^t(x) = tf(x) + (1-t)g(x)$, $t \in [0,1]$. *Αν* $\Phi(\Lambda(g)(x)) \geq \Phi(\Lambda(f)(x))$ *και* $g(x) \leq f(x)$, *για κάθε* $x \in \Omega$, *τότε ισχύει*

(i) $g(x) < f(x)$, *για όλα τα* $x \in \Omega$

ή

(ii) $f(x) = g(x)$ *για όλα τα* $x \in \Omega$, *αν υπάρχει* $x_0 \in \Omega$ *τέτοιο ώστε* $f(x_0) = g(x_0)$.

Απόδειξη. Θέτουμε $u(x) := f(x) - g(x)$. Η $u(x)$ είναι τάξης C^2 και μη αρνητική στο Ω. Για κάθε $x \in \Omega$, η συνάρτηση $F(t) := \Phi(\Lambda(u^t)(x))$ είναι τάξης C^1, ως προς t, και έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt}(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial r_{ij}}(\Lambda(u^t)(x)) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \\ + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial r_i}(\Lambda(u^t)(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial \Phi}{\partial z}(\Lambda(u^t)(x)) u(x).\end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας, ως προς t, την παραπάνω σχέση λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\Phi(\Lambda(f)(x)) - \Phi(\Lambda(g)(x)) &= \sum_{i,j=1}^{n}\Big(\int_0^1 \frac{\partial\Phi}{\partial r_{ij}}(\Lambda(u^t)(x))\,\mathrm{d}t\Big)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\\ &+ \sum_{i=1}^{n}\Big(\int_0^1 \frac{\partial\Phi}{\partial r_i}(\Lambda(u^t)(x))\,\mathrm{d}t\Big)\frac{\partial u}{\partial x_i}\\ &+ \Big(\int_0^1 \frac{\partial\Phi}{\partial z}(\Lambda(u^t)(x))\,\mathrm{d}t\Big)u.\end{aligned}$$

Επειδή $\Phi(\Lambda(f)(x)) - \Phi(\Lambda(g)(x)) \le 0$ θα έχουμε

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u \le 0 \tag{2.2}$$

στο Ω, όπου θέσαμε

$$a_{ij}(x) := \int_0^1 \frac{\partial\Phi}{\partial r_{ij}}(\Lambda(u^t)(x))\,\mathrm{d}t,$$

$$b_i(x) := \int_0^1 \frac{\partial\Phi}{\partial r_i}(\Lambda(u^t)(x))\,\mathrm{d}t,$$

και

$$c(x) := \int_0^1 \frac{\partial\Phi}{\partial z}(\Lambda(u^t)(x))\,\mathrm{d}t.$$

Η διαφορική ανίσωση (2.2) πληροί όλες τις προϋποθέσεις του Πορίσματος 2.1. Πραγματικά, επειδή η Φ είναι ελλειπτική ως προς κάθε συνάρτηση $u^t = tf + (1-t)g$, $t \in [0,1]$, ο πίνακας $[a_{ij}(x)]$ είναι τοπικά ομοιόμορφα θετικά οριστικός. Οι συναρτήσεις $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$ και $c(x)$, λόγω συνέχειας, είναι φραγμένες σε κάθε $\Omega' \subset\subset \Omega$. Η u είναι μη αρνητική. Αν $u(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = 0$ στο $x_0 \in \Omega$, τότε σύμφωνα με το Πόρισμα 2.1 θα έχουμε παντού $u(x) = 0$, δηλαδή $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Omega$. $\square$

2.2 Θεωρήματα Επαφής

Έστω $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνάρτηση ορισμένη και τάξης C^2 στο χωρίο Ω. Για το γράφημα Γ_f της f στο Ω ορίζεται η μέση καμπυλότητα $m-$τάξης H_m, $m = 1, \ldots, n$, όπου $H_1 = H$ είναι η μέση καμπυλότητα και $H_n = K$ η καμπυλότητα Gauss-Kronecker του γραφήματος Γ_f.

Σε αυτή την παράγραφο θα βρούμε, για $m = 1, \ldots, n$, μια συνάρτηση $\Phi_m : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $d = \frac{n(n+1)}{2} + 2n + 1$, η οποία είναι ελλειπτική ως προς την f και πληροί τη σχέση

$$\Phi_m\big(\Lambda(f)(x)\big) = H_m(x), \tag{2.3}$$

στο $x \in \Omega$.

Για το σκοπό αυτό το παρακάτω Λήμμα, που οφείλεται στους L. Cafarelli, L. Nirenberg και J. Spruck [3], είναι αρκετά χρήσιμο.

Λήμμα 2.1. *Έστω $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση τάξης C^2. Οι κύριες καμπυλότητες του γραφήματος Γ_f, στο σημείο $x \in \Omega$, είναι οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα $C(x) = [c_{ij}(x)]$ με*

$$c_{ij} = \frac{1}{W}\Big(f_{ij} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(f_i f_k f_{kj} + f_j f_k f_{ki})}{W(1+W)} + \sum_{k,m=1}^{n} \frac{f_i f_j f_k f_m f_{km}}{W^2(1+W)^2}\Big), \tag{2.4}$$

όπου το δεύτερο μέλος υπολογίζεται στο $x \in \Omega$ και $W = (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Απόδειξη. Κατά τα γνωστά οι πίνακες $[g_{ij}]$, $[b_{ij}]$ της πρώτης και δεύτερης θεμελιώδους μορφής του γραφήματος δίνονται ως:

$$g_{ij} = \delta_{ij} + f_i f_j,$$

$$b_{ij} = \frac{f_{ij}}{W}.$$

Οι κύριες καμπυλότητες $\varkappa_1 \leq \varkappa_2 \leq \cdots \leq \varkappa_n$ του γραφήματος είναι οι ιδιοτιμές του $[b_{ij}]$ ως προς τον $[g_{ij}]$. Δηλαδή, οι κύριες καμπυλότητες πληρούν την εξίσωση

$$det[b_{ij} - \varkappa g_{ij}] = 0.$$

Ισοδύναμα, πληρούν την

$$det[c_{ij} - \varkappa \delta_{ij}] = 0,$$

όπου $[c_{ij}] = [g^{ij}]^{\frac{1}{2}}[b_{ij}][g^{ij}]^{\frac{1}{2}}$. Ο πίνακας $[g^{ij}]^{\frac{1}{2}}$ είναι η θετική ρίζα του αντιστρόφου $[g^{ij}]$ του πίνακα $[g_{ij}]$.
Διαπιστώνεται εύκολα ότι:

$$[g^{ij}] = \left[\delta_{ij} - \frac{f_i f_j}{W^2}\right]$$

και

$$[g^{ij}]^{\frac{1}{2}} = \left[\delta_{ij} - \frac{f_i f_j}{W(1+W)}\right].$$

Με πράξεις αποδεικνύεται η (2.4). $\square$

Παρατήρηση 2.2. Παρακάτω όταν αναφερόμαστε στον πίνακα C, θα αναφερόμαστε ως *ο πίνακας καμπυλοτήτων* C του γραφήματος της $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Έστω $S(n, \mathbb{R})$ ο χώρος των συμμετρικών πραγματικών $(n \times n)$-πινάκων. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\varkappa : S(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n, \quad \varkappa(A) := (\varkappa_1(A), \ldots, \varkappa_n(A)),$$

όπου $\varkappa_1(A) \leq \varkappa_2(A) \leq \cdots \leq \varkappa_n(A)$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A. Αν σ_m, $m = 1, \ldots, n$, είναι οι στοιχειώδεις συμμετρικές συναρτήσεις n μεταβλητών, τότε οι:

$$\sigma_m \circ \varkappa : S(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

είναι ομογενή πολυώνυμα βαθμού m, ως προς τα στοιχεία του πίνακα, όπως προκύπτει από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A. Ειδικότερα οι συναρτήσεις

$$\sigma_m \circ \varkappa : \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \to \mathbb{R}, \quad \sigma_m \circ \varkappa(r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{nn}) = \sigma_m(\varkappa([r_{ij}]))$$

είναι διαφορίσιμες, ως ομογενή πολυώνυμα $m-$βαθμού.

Με οδηγό τον πίνακα καμπυλοτήτων C ενός γραφήματος και θέτοντας $r = (r_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$ με $i \leq j$, $p = (r_1, \ldots, r_n)$, $z \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ και $W = (1 + |p|^2)^{\frac{1}{2}}$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\tilde{A} : \mathbb{R}^d \to S(n, \mathbb{R}), \tag{2.5}$$

$$\tilde{A}(r, p, z, x) = \Big[\frac{1}{W}\Big(r_{ij} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(r_i r_k r_{kj} + r_j r_k r_{ki})}{W(1+W)} + \sum_{k,m=1}^{n} \frac{r_i r_j r_k r_m r_{km}}{W^2(1+W)^2}\Big)\Big],$$

όπου $d = \frac{n(n+1)}{2} + 2n + 1$.

Οι συναρτήσεις $\sigma_m \circ \varkappa \circ \tilde{A} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες ως προς όλες τις μεταβλητές και ειδικότερα ως προς τις μεταβλητές $r = (r_{ij})$.

Ισχύει η παρακάτω

Πρόταση 2.1. *Έστω $f : \varOmega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνάρτηση ορισμένη και τάξης C^2 στο χωρίο $\varOmega$. Τότε υπάρχει διαφορίσιμη συνάρτηση $\varPhi_m : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, όπου $d = \frac{n(n+1)}{2} + 2n + 1$, τέτοια ώστε να ισχύει*

$$\varPhi_m(\varLambda(f)(x)) = H_m(x), \quad m = 1, \ldots, n,$$

στο $x \in \Omega$.

Απόδειξη. Η συνάρτηση

$$\Phi_m = \frac{1}{\binom{n}{m}} \sigma_m \circ \varkappa \circ \tilde{A},$$

πληροί το ζητούμενο, λόγω του Λήμματος 2.1 και της κατασκευής της συνάρτησης $\tilde{A}$. $\square$

Η παρακάτω Πρόταση μας εξασφαλίζει την ελλειπτικότητα των συναρτήσεων Φ_m της Πρότασης 2.1.

Πρόταση 2.2. *Έστω* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *συνάρτηση ορισμένη και τάξης* C^2 *στο χωρίο* Ω. *Τότε*
(i) Η συνάρτηση Φ_1 *είναι ελλειπτική σε κάθε σημείο του* $\mathbb{R}^d$.
(ii) Για $2 \leq m \leq n$ *η συνάρτηση* Φ_m *είναι ελλειπτική στα σημεία* $Q_0 := (r^0, p^0, z^0, x^0) \in \Omega_m = (\varkappa \circ \tilde{A})^{-1}(\Gamma_m)$, *για τα οποία ισχύει ότι* $p^0 = (r_1^0, \dots, r_n^0) = (0, \dots, 0)$, *όπου* Γ_m *είναι ο κώνος που αντιστοιχεί στη συμμετρική συνάστηση* σ_m.

Απόδειξη του (i). Οι τιμές της $\tilde{A}$ είναι συμμετρικοί πίνακες. Επειδή $\Phi_1 = \frac{1}{n}\sigma_1 \circ \varkappa \circ \tilde{A} = \frac{1}{n} \operatorname{trace} \tilde{A}$, λόγω της (2.5), θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\Phi_1(r,p,z,x) &= \frac{1}{n} \operatorname{trace} \tilde{A}(r,p,z,x) \\
&= \frac{1}{nW}\Big[\sum_i r_{ii} - 2\frac{\sum_{ij} r_i r_j r_{ij}}{W(1+W)} + \frac{\sum_i (r_i)^2 \sum_{j,k} r_j r_k r_{jk}}{W^2(1+W)^2}\Big] \\
&= \frac{1}{nW}\Big[\sum_i r_{ii} - \frac{1}{W^2}\sum_{i,j} r_i r_j r_{ij}\Big].
\end{aligned}$$

Συνεπώς λαμβάνουμε

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial r_{k\ell}}(r,p,z,x) = \frac{1}{nW}(\delta_{k\ell} - \frac{1}{W^2}r_k r_\ell) = \frac{1}{nW^3}(W^2\delta_{k\ell} - r_k r_\ell).$$

Για τυχαίο μη μηδενικό διάνυσμα $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k,\ell} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r_{k\ell}}\xi_k\xi_\ell &= \frac{1}{nW^3}\sum_{k,\ell}(W^2\delta_{k\ell} - r_k r_\ell)\xi_k\xi_\ell \\ &= \frac{1}{nW^3}(W^2|\xi|^2 - \sum_k r_k\xi_k \sum_\ell r_\ell\xi_\ell) \\ &= \frac{1}{nW^3}(W^2|\xi|^2 - \langle p,\xi\rangle^2).\end{aligned}$$

Λόγω της ανισότητας Cauchy-Schwartz προκύπτει ότι

$$\sum_{k,\ell} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r_{k\ell}}\xi_k\xi_\ell \geq \frac{1}{nW^3}(W^2|\xi|^2 - |p|^2|\xi|^2) = \frac{|\xi|^2}{nW^3} > 0. \qquad \square$$

Για την απόδειξη του (ii) χρειαζόμαστε το εξής

Λήμμα 2.2. *Έστω $A_0 \in S(n,\mathbb{R})$ με $\varkappa(A_0) \in \Gamma_m$. Τότε για όλα τα μη μηδενικά διανύσματα $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ ισχύει*

$$\sum_{i,j} \frac{\partial(\sigma_m \circ \varkappa)}{\partial r_{ij}}(A_0)\xi_i\xi_j > 0, \tag{2.6}$$

όπου $\sigma_m \circ \varkappa : \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \to \mathbb{R}$, $\sigma_m \circ \varkappa(r_{11}, r_{12}, \dots, r_{nn}) = \sigma_m(\varkappa([r_{ij}]))$.

Απόδειξη. Θα δώσουμε την απόδειξη του Λήμματος σε τρία βήματα.

Βήμα 1. Ο A_0 είναι διαγώνιος πίνακας με διακεκριμένες ιδιοτιμές. Σε αυτή την περίπτωση οι συναρτήσεις $\varkappa_i$, $1 \leq i \leq n$, είναι διαφορίσιμες σε μια περιοχή του A_0, στο $S(n,\mathbb{R})$. Άρα έχουμε

$$\frac{\partial(\sigma_m \circ \varkappa)}{\partial r_{k\ell}}(A_0) = \sum_i \frac{\partial \sigma_m}{\partial z_i}\big(\varkappa(A_0)\big)\frac{\partial \varkappa_i}{\partial r_{k\ell}}(A_0), \tag{2.7}$$

όπου $\sigma_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\sigma_m(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq n} z_{i_1} \cdots z_{i_n}.$$

Έστω $E^{k\ell}$ ο πίνακας του οποίου το (k, ℓ)-στοιχείο είναι η μονάδα, ενώ τα υπόλοιπα είναι μηδενικά. Για οποιοδήποτε $t \in \mathbb{R}$ και $k \neq \ell$ ο πίνακας $A_0 + tE^{k\ell}$ είναι τριγωνικός και συνεπώς θα έχει το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο με τον A_0. Άρα ισχύει

$$\frac{\partial \varkappa_i}{\partial r_{k\ell}}(A_0) = 0 \quad \text{για } k \neq \ell \text{ και } 1 \leq i \leq n.$$

Θα δούμε, τώρα, τι συμβαίνει για $k = \ell$. Επειδή ο πίνακας A_0 είναι διαγώνιος, οι ιδιοτιμές του είναι τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου. Θεωρούμε τη μοναδική μετάθεση ϑ των $\{1, \ldots, n\}$ τέτοια ώστε $\varkappa_{\vartheta(j)} = (A_0)_{jj}$, όπου με $(A_0)_{jj}$ συμβολίζουμε το στοιχείο του πίνακα A_0 στη θέση (j, j). Αφού, σε μια περιοχή του A_0, οι συναρτήσεις $\varkappa_i$ $(1 \leq i \leq n)$, είναι διαφορίσιμες τότε και οι $\varkappa_i(A_0 + tE^{kk})$, είναι διαφορίσιμες, ως προς t, σε μια περιοχή του $t = 0$. Επιπλέον, για πολύ μικρά t, οι $\varkappa_i(A_0 + tE^{kk})$ είναι διακεκριμένες αφού οι $\varkappa_i(A_0)$ είναι διακεκριμένες.

Συνεπώς, για μικρά t, έχουμε

$$\varkappa_{\vartheta(j)}(A_0 + tE^{kk}) = (A_0 + tE^{kk})_{jj}.$$

Επομένως,

$$\frac{d}{dt}\varkappa_i(A_0 + tE^{kk}) = \begin{cases} 0, & k \neq \vartheta^{-1}(i) \\ 1, & k = \vartheta^{-1}(i) \end{cases}$$

και συνεπώς

$$\frac{\partial(\sigma_m \circ \varkappa)}{\partial r_{k\ell}}(A_0) = \begin{cases} 0, & k \neq \ell \\ D_{\vartheta(k)}\sigma_m\big(\varkappa(A_0)\big), & k = \ell. \end{cases}$$

Η (2.6) προκύπτει από την τελευταία σχέση λαμβάνοντας υπόψη την Πρόταση 1.5.

Βήμα 2. Υποθέτουμε ότι ο A_0 είναι διαγώνιος αλλά τα στοιχεία του δεν είναι, απαραιτήτως, διακεκριμένα μεταξύ τους.

Θεωρούμε τον πίνακα $A(t)$ του οποίου τα στοιχεία δίνονται από

$$\big(A(t)\big)_{k\ell} = \begin{cases} 0, & k \neq \ell \\ (A_0)_{kk} + \dfrac{t}{k}, & k = \ell. \end{cases}$$

Για μικρό και μη μηδενικό t, ο πίνακας $A(t)$ είναι διαγώνιος με διακεκριμένες ιδιοτιμές. Επιπλέον το $\varkappa\big(A(t)\big) \in \mathit{\Gamma}_m$, αφού $\varkappa(A_0) \in \mathit{\Gamma}_m$, και υπάρχει μοναδική μετάθεση ϑ των $\{1, \dots, n\}$, τέτοια ώστε $\varkappa_{\vartheta(j)}\big(A(t)\big) = \big(A(t)\big)_{jj}$ για $1 \leq j \leq n$.

Από το προηγούμενο βήμα έχουμε

$$\frac{\partial(\sigma_m \circ \varkappa)}{\partial r_{k\ell}}\big(A(t)\big) = \begin{cases} 0, & k \neq \ell \\ D_{\vartheta(k)}\sigma_m\big(\varkappa(A(t))\big), & k = \ell. \end{cases}$$

Επειδή η σ_m είναι συνεχής και $\lim_{t \to 0} \varkappa\big(A(t)\big) = \varkappa(A_0)$ έχουμε ότι

$$\frac{\partial(\sigma_m \circ \varkappa)}{\partial r_{k\ell}}(A_0) = \begin{cases} 0, & k \neq \ell \\ D_{\vartheta(k)}\sigma_m\big(\varkappa(A_0)\big), & k = \ell. \end{cases}$$

Η (2.6) προκύπτει άμεσα.

Βήμα 3. Υποθέτουμε ότι ο A_0 είναι συμμετρικός. Υπάρχει ένας ορθογώνιος πίνακας P, τέτοιος ώστε ο πίνακας $P^T A_0 P$ να είναι διαγώνιος, όπου P^T ο ανάστροφος του P. Επειδή $\varkappa(P^T A_0 P) = \varkappa(A_0) \in \mathit{\Gamma}_m$, θα έχουμε $(\sigma_m \circ \varkappa)(P^T A_0 P) = (\sigma_m \circ \varkappa)(A_0)$. Συμβολίζοντας με q_{ij} τα στοιχεία του πίνακα $Q = P^T A_0 P$, θα έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\sigma_m \circ \varkappa)}{\partial r_{k\ell}}(A_0) &= \sum_{i,j} \frac{\partial(\sigma_m \circ \varkappa)}{\partial q_{ij}}(P^T A_0 P)\frac{\partial q_{ij}}{\partial r_{k\ell}}(A_0)\\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial(\sigma_m \circ \varkappa)}{\partial q_{ij}}(P^T A_0 P)P^T_{ik}P^T_{j\ell}.\end{aligned}$$

Για $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ θέτουμε $\omega = P^T\xi$. Είναι προφανές ότι, για $\xi \neq 0$, θα ισχύει $\omega = P^T\xi \neq 0$. Άρα λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k,\ell} \frac{\partial(\sigma_m \circ \varkappa)}{\partial r_{k\ell}}(A_0)\xi_k\xi_\ell &= \sum_{i,j,k,\ell} \frac{\partial(\sigma_m \circ \varkappa)}{\partial q_{ij}}(P^T A_0 P)P^T_{ik}P^T_{j\ell}\xi_k\xi_\ell\\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial(\sigma_m \circ \varkappa)}{\partial q_{ij}}(P^T A_0 P)\omega_i\omega_j.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Η δεξιά πλευρά της (2.8) είναι θετική λόγω των προηγούμενων βημάτων και η απόδειξη του Λήμματος 2.2 ολοκληρώθηκε. □

Απόδειξη του (ii). Η συνάρτηση $\Phi_m = \frac{1}{\binom{n}{m}} \sigma_m \circ \varkappa \circ \tilde{A}$, για $2 \leq m \leq n$, είναι διαφορίσιμη ως προς $r = (r_{ij})$. Άρα θα έχουμε

$$\begin{aligned}\binom{n}{m}\frac{\partial \Phi_m}{\partial r_{ij}}(Q_0) &= \frac{\partial(\sigma_m \circ \kappa \circ \tilde{A})}{\partial r_{ij}}(Q_0)\\ &= \sum_{k,\ell} \frac{\partial(\sigma_m \circ \kappa)}{\partial \tilde{A}_{k\ell}}(\tilde{A}(Q_0))\,\frac{\partial \tilde{A}_{k\ell}}{\partial r_{ij}}(Q_0).\end{aligned} \tag{2.9}$$

Όμως ισχύει

$$\frac{\partial \tilde{A}_{k\ell}}{\partial r_{ij}}(r,p,z,x) = \frac{1}{W}\Big(\delta_{ki}\delta_{\ell j} - \frac{r_k r_i \delta_{\ell j} + r_\ell r_i \delta_{kj}}{W(1+W)} + \frac{r_\ell r_k r_i r_j}{W^2(1+W)^2}\Big).$$

Συνεπώς στο σημείο $(r^0, p^0, z^0, x^0) \in \Omega_m = (\varkappa \circ \tilde{A})^{-1}(\Gamma_m)$, επειδή $p^0 = (r^0_1, \dots, r^0_n) = (0, \dots, 0)$, θα έχουμε $\frac{\partial \tilde{A}_{k\ell}}{\partial r_{ij}}(r^0, p^0, z^0, x^0) = \delta_{ki}\delta_{\ell j}$

και συνεπώς η (2.9) δίνει

$$\frac{\partial \Phi_m}{\partial r_{ij}}(r^0, p^0, z^0, x^0) = \frac{1}{\binom{n}{m}} \frac{\partial(\sigma_m \circ \kappa)}{\partial \tilde{A}_{ij}}(\tilde{A}(r^0, p^0, z^0, x^0)).$$

Άρα, για οποιοδήποτε μη μηδενικό $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, θα έχουμε

$$\sum_{i,j} \frac{\partial \Phi_m}{\partial r_{ij}}(r^0, p^0, z^0, x^0)\xi_i\xi_j = \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{i,j} \frac{\partial(\sigma_m \circ \kappa)}{\partial \tilde{A}_{ij}}(\tilde{A}(r^0, p^0, z^0, x^0))\xi_i\xi_j,$$

το οποίο θα είναι θετικό λόγω του Λήμματος 2.2. □

Με τη βοήθεια της Πρότασης 2.2 και του Θεωρήματος Συγκρίσεως αποδεικνύουμε τα παρακάτω Θεωρήματα Επαφής.

Πρώτο Θεώρημα Επαφής (The first tangency principle). *Έστωσαν $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις C^2 τάξης, ορισμένες στο χωρίο Ω με $O \in \Omega$, $f(O) = g(O) = 0$ και $\nabla f(O) = \nabla g(O) = 0$. Συμβολίζουμε με $H_1^f(x)$, $H_1^g(x)$ τις μέσες καμπυλότητες των γραφημάτων Γ_f, Γ_g αντίστοιχα, ως προς το άνω κάθετο. Υποθέτουμε ότι, για κάθε $x \in \Omega$, ισχύει $f(x) \geq g(x)$. Αν $H_1^f(x) \leq H_1^g(x)$ για κάθε $x \in \Omega$, τότε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Omega$.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.1 υπάρχει $\Phi_1 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $d = \frac{n(n+1)}{2} + 2n + 1$, διαφορίσιμη συνάρτηση, η οποία είναι ελλειπτική σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^d$, τέτοια ώστε, για κάθε $x \in \Omega$, να δίνει

$$\Phi_1(\Lambda(f)(x)) = H_1^f(x)$$

και

$$\Phi_1(\Lambda(g)(x)) = H_1^g(x).$$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις, για $t \in [0,1]$,

$$u^t : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ u^t(x) := tf(x) + (1-t)g(x).$$

Η Φ_1 είναι ελλειπτική, ως προς τις συναρτήσεις u^t, για κάθε $t \in [0,1]$ και $x \in \Omega$. Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα Συγκρίσεως, συμπεραίνουμε ότι $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in \Omega$. □

Δεύτερο Θεώρημα Επαφής (The second tangency principle). *Έστωσαν $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις τάξης C^2, ορισμένες στο χωρίο Ω με $O \in \Omega$, $f(O) = g(O) = 0$ και $\nabla f(O) = \nabla g(O) = 0$. Συμβολίζουμε, για $m \geq 2$, με $H_m^f(x)$, $H_m^g(x)$ τις μέσες καμπυλότητες m-τάξης των γραφημάτων Γ_f και Γ_g, αντίστοιχα, ως προς το άνω κάθετο. Υποθέτουμε ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in \Omega$. Αν ισχύει, για κάθε $x \in \Omega$, $H_m^f(x) \leq H_m^g(x)$ και επιπλέον $(\varkappa_1^g(O), \ldots, \varkappa_n^g(O)) \in \Gamma_m$, όπου $\varkappa_i^g(O)$, για $i = 1, \ldots, n$, είναι οι κύριες καμπυλότητες του γραφήματος Γ_g στο O, τότε $f(x) = g(x)$ σε μια περιοχή του O. Δηλαδή τα γραφήματα συμπίπτουν σε μια περιοχή του O.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.1 υπάρχει $\Phi_m : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $d = \frac{n(n+1)}{2} + 2n + 1$ διαφορίσιμη συνάρτηση η οποία, για κάθε $x \in \Omega$, δίνει

$$\Phi_m(\Lambda(f)(x)) = H_m^f(x)$$

και

$$\Phi_m(\Lambda(g)(x)) = H_m^g(x).$$

Επιπλέον, η Φ_m είναι ελλειπτική στα σημεία $(r^0, p^0, z^0, x^0) \in \Omega_m = (\varkappa \circ \tilde{A})^{-1}(\Gamma_m)$ για τα οποία ισχύει $p^0 = (r_1^0, r_2^0, \ldots, r_n^0) = (0, 0, \ldots, 0)$, όπου Γ_m είναι ο κώνος που αντιστοιχεί στη στοιχειώδη συμμετρική συνάρτηση $\sigma_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Σύμφωνα με το Θεώρημα Συγκρίσεως, αρκεί να αποδείξουμε ότι η Φ_m είναι ελλειπτική ως προς τις συναρτήσεις $u^t(x) = tf(x)+(1-t)g(x)$, για $t \in [0,1]$, σε μια περιοχή του O. Επειδή, $\nabla f(O) = \nabla g(O) = 0$, θα έχουμε $\nabla u^t(O) = 0$ και συνεπώς, για κάθε μη μηδενικό $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, θα έχουμε

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{m} \sum_{i,j} \frac{\partial \Phi_m}{\partial r_{ij}} \Big(\Lambda(u^t)(O) \Big) \xi_i \xi_j \\
&= \sum_{i,j} \Big(\sum_{k,\ell} \frac{\partial(\sigma_m \circ \varkappa)}{\partial \tilde{A}_{k\ell}} (\tilde{A}(\Lambda(u^t)(O))) \frac{\partial \tilde{A}_{k\ell}}{\partial r_{ij}} (\Lambda(u^t)(O)) \Big) \xi_i \xi_j \\
&= \sum_{i,j} \Big(\frac{\partial(\sigma_m \circ \varkappa)}{\partial \tilde{A}_{ij}} (\tilde{A}(\Lambda(u^t)(O))) \Big) \xi_i \xi_j,
\end{aligned}$$

το οποίο είναι θετικό, σύμφωνα με το Λήμμα 2.2. Αρκεί να διαπιστώσουμε ότι $\varkappa(\tilde{A}(\Lambda(u^t)(O))) \in \Gamma_m$. Πραγματικά, από τη σχέση (2.5) έχουμε

$$\begin{aligned}
(\tilde{A}(\Lambda(u^t)(O)))_{ij} &= (u^t)_{ij}(O) \\
&= g_{ij}(O) + t(f_{ij}(O) - g_{ij}(O)) \\
&= (\tilde{A}(\Lambda(g)(O)))_{ij} + t(f_{ij}(O) - g_{ij}(O)).
\end{aligned}$$

Συνεπώς ισχύει

$$\tilde{A}(\Lambda(u^t)(O)) - \tilde{A}(\Lambda(g)(O)) = t(\operatorname{Hess} f(O) - \operatorname{Hess} g(O)),$$

όπου Hess συμβολίζει τον Εσσιανό πίνακα της αντίστοιχης συνάρτησης. Λόγω των υποθέσεων, η συνάρτηση $f - g$ έχει στο O ελάχιστο και συνεπώς, ο πίνακας $\operatorname{Hess} f(O) - \operatorname{Hess} g(O)$ είναι θετικά ημιοριστικός. Άρα θα έχουμε

$$\tilde{A}((1-t)\Lambda(g)(O) + t\Lambda(f)(O)) - \tilde{A}(\Lambda(g(O)) \geq 0,$$

για $t \in [0,1]$.
Από την τελευταία ανισότητα λαμβάνουμε την ακόλουθη σχέση (κοίταξε για παράδειγμα [14], σελίδα 130) για τις ιδιοτιμές των παραπάνω πινάκων

$$\varkappa_i(\tilde{A}((1-t)\Lambda(g)(O) + t\Lambda(f)(O))) \geq \varkappa_i(\tilde{A}(\Lambda(g)(O))),$$

για κάθε $t \in [0,1]$. Άρα το σημείο

$$\varkappa(\tilde{A}((1-t)\Lambda(g)(O) + t\Lambda(f)(O))) - \varkappa(\tilde{A}(\Lambda(g)(O)))$$

ανήκει στον $\bar{\Gamma}_n$, όπου $\bar{\Gamma}_n$ είναι η θήκη του κώνου Γ_n. Όμως, σύμφωνα με υπόθεση του Θεωρήματος, ισχύει $\varkappa(\tilde{A}(\Lambda(g)(O))) \in \Gamma_m$ και συνεπώς με την Πρόταση 1.6 συμπεραίνουμε ότι

$$\varkappa(\tilde{A}((1-t)\Lambda(g)(O) + t\Lambda(f)(O))) \in \Gamma_m,$$

για κάθε $t \in [0,1]$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.2 η Φ_m είναι ελλειπτική στο σημείο $(1-t)\Lambda(g)(O) + t\Lambda(f)(O)$, για κάθε $t \in [0,1]$. Υπάρχει περιοχή Ω_m του $O \in \mathbb{R}^n$, λόγω συμπαγότητας του $[0,1]$, τέτοια ώστε η Φ_m είναι ελλειπτική στο σημείο $(1-t)\Lambda(g)(x) + t\Lambda(f)(x)$, για κάθε $x \in \Omega_m$ και κάθε $t \in [0,1]$. Σύμφωνα με το Θεώρημα Συγκρίσεως, συμπεραίνουμε ότι $f(x) = g(x)$ σε μια περιοχή του O. □

Παρατήρηση 2.3. Η επιπλέον υπόθεση στο Δεύτερο Θεώρημα Επαφής, που αφορά τις κύριες καμπυλότητες του ενός γραφήματος στο σημείο επαφής είναι αναγκαία όπως δείχνει το ακόλουθο παράδειγμα: Θεωρούμε τις συναρτήσεις, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2$ και $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $g(x_1, \ldots, x_n) = -\sum_{i=1}^n x_i^2$. Είναι φανερό ότι τα γραφήματά των εφάπτονται στην αρχή O. Επιπλέον ισχύουν $f(x) \geq g(x)$ και

$H_2^f(x) = H_2^g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Παρά ταύτα δεν ισχύει $f(x) = g(x)$ σε περιοχή του O. Αξίζει να σημειώσουμε ότι $\varkappa^f(O) = (2, \ldots, 2)$, $\varkappa^g(O) = (-2, \ldots, -2)$ και ότι $\varkappa^g(0) \notin \Gamma_2$.

Κεφάλαιο 3

Εφαρμογές στη Γεωμετρία

Ένα κλασσικό Θεώρημα του Hilbert αποδεικνύει ότι, το υπερβολικό επίπεδο δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί ισομετρικά στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$. Πιο συγκεκριμένα δεν υπάρχει πλήρης επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ με σταθερή καμπυλότητα Gauss -1 χωρίς ιδιάζοντα σημεία.

Έστω Γ_f το γράφημα μιας συνάρτησης $f(x,y)$ ορισμένης και τάξης C^2 στον ανοικτό δίσκο $B_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2\}$ με μέση καμπυλότητα $H(x,y)$ και καμπυλότητα Gauss $K(x,y)$. Ο H. Heinz [17], απέδειξε ότι αν $|H(x,y)| \geq c > 0$, τότε $r \leq \frac{1}{c}$ και ότι αν $K(x,y) \geq c > 0$, τότε $r \leq c^{-\frac{1}{2}}$. Έχουν γίνει γενικεύσεις αυτών των αποτελεσμάτων για υπερεπιφάνειες. Τέτοιου είδους αποτελέσματα βοηθούν στην εκτίμηση του μεγέθους της υπερεπιφάνειας M^n στον $\mathbb{R}^{n+1}$, ιδιαίτερα όταν αυτή είναι συμπαγής. Πραγματικά, με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να εκτιμήσουμε την ακτίνα της μικρότερης σφαίρας που περιβάλλει την M^n, καθώς και την ακτίνα της μεγαλύτερης σφαίρας που κάθεται μέσα στην υπερεπιφάνεια M^n.

Από την άλλη πλευρά ο N. V. Efimov [7], γενικεύοντας το Θεώρημα του Hilbert, απέδειξε ότι δεν υπάρχει πλήρης επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ με αρνητική καμπυλότητα Gauss K, φραγμένη μακριά από το μηδέν.
Ο J. Milnor [20] πρότεινε την παρακάτω γενίκευση του αποτελέσματος του Efimov: *Έστω M πλήρης επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ με καμπυλότητα Gauss K όχι ταυτοτικά μηδέν και χωρίς ομφαλικά σημεία. Αν η K διατηρεί πρόσημο, τότε $\inf \|A\| = 0$, όπου $\|A\|$ είναι το μήκος της απεικόνισης Weingarten.* Είναι προφανές ότι, η απόδειξη αυτής της πρότασης συνεπάγεται το αποτέλεσμα του Efimov.

Η γενίκευση των παραπάνω αποτελεσμάτων σε μεγαλύτερες διαστάσεις καθώς επίσης και η εξέταση άλλων γεωμετρικών ποσοτήτων, όπως της καμπυλότητας Ricci, της αριθμητικής καμπυλότητας και των μέσων καμπυλοτήτων m-τάξης H_m, που μπορούν να αντικαταστήσουν τις H, K απασχόλησε και απασχολεί αρκετούς μαθηματικούς. Ο R. Reilly [25] πρότεινε την εξής γενίκευση του αποτελέσματος του Efimov: *Δεν υπάρχει πλήρης υπερεπιφάνεια στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^{n+1}$ με καμπυλότητα Ricci ≤ -1.*

Το 1987 οι B. Smyth και F. Xavier [26] σε ένα εξαιρετικό άρθρο απέδειξαν το ακόλουθο: *Αν M^n είναι πλήρης υπερεπιφάνεια στο $\mathbb{R}^{n+1}$ με αρνητική καμπυλότητα Ricci, τότε για $n = 3$, ισχύει $\inf \|A\| = 0$, όπου $\|A\|$ είναι το μήκος της απεικόνισης Weingarten A και, για $n > 3$, αν η καμπυλότητα τομής της M^n δεν λαμβάνει κάθε πραγματική τιμή, τότε η καμπυλότητα Ricci δεν μπορεί να είναι φραγμένη μακριά από το μηδέν.*

Επίσης πρότειναν το εξής ανάλογο, σε μεγαλύτερες διαστάσεις, του αποτελέσματος του Efimov: *Σε μια πλήρη υπερεπιφάνεια M^n στον $\mathbb{R}^{n+1}$ με αρνητική καμπυλότητα Ricci ισχύει* $\inf \|A\| = 0$.

Πρώτο βήμα ελέγχου προτάσεων, όπως οι παραπάνω, είναι οι υπερεπιφάνειες γραφήματα. Έτσι έχουμε αποτελέσματα που ισχύουν μόνο για γραφήματα και αποτελέσματα που ισχύουν, γενικώς, για υπερεπιφάνειες.

Στην πρώτη παράγραφο αυτού του Κεφαλαίου θα ασχοληθούμε, κυρίως, με αποτελέσματα σε συμπαγείς υπερεπιφάνειες στον $\mathbb{R}^{n+1}$ και στη δεύτερη παράγραφο θα ασχοληθούμε με αποτελέσματα σε υπερεπιφάνειες γραφήματα. Θα κλείσουμε αυτό το Κεφάλαιο με μια μικρή συλλογή ανοιχτών προβλημάτων σε αυτά τα θέματα.

3.1 Συμπαγείς υπερεπιφάνειες στον $\mathbb{R}^{n+1}$

Το πρώτο αποτέλεσμα αφορά υπερεπιφάνειες που έχουν την ιδιότητα Jordan-Brouwer και δεν είναι, απαραίτητα, συμπαγείς.

Ορισμός 3.1. *Μια υπερεπιφάνεια M^n στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^{n+1}$ θα λέμε ότι έχει την ιδιότητα Jordan-Brouwer, αν το σύνολο $\mathbb{R}^{n+1} - M^n$ είναι ένωση δύο μη κενών, ξένων μεταξύ τους και συνεκτικών ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^{n+1}$, με κοινό σύνορο την M^n.*

Σημειώνουμε ότι μια υπερεπιφάνεια M^n στον $\mathbb{R}^{n+1}$ με την ιδιότητα Jordan-Brouwer είναι συνεκτική, προσανατολίσιμη, κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$ και συνεπώς πλήρης. Επιπλέον, μια συμπαγής υπερεπιφάνεια του $\mathbb{R}^{n+1}$, χωρίς αυτοτομές, έχει την ιδιότητα Jordan-Brouwer.

Θεώρημα 3.1. *Έστω M^n υπερεπιφάνεια στον $\mathbb{R}^{n+1}$ με την ιδιότητα Jordan-Brouwer. Υποθέτουμε ότι, για κάποια θετική σταθερά $c > 0$ και φυσικό αριθμό m, $1 \leq m \leq n$, ισχύει $|H_m| \geq c^m$. Αν $m \geq 2$ υποθέτουμε, επιπλέον, ότι υπάρχει ενα σημείο στην M^n, όπου όλες οι κύριες καμπυλότητες έχουν ίδιο πρόσημο. Τότε υπάρχει μια συνιστώσα U του $\mathbb{R}^{n+1} - M^n$ με την εξής ιδιότητα: Κάθε μπάλλα που περιέχεται στο $\bar{U}$ έχει ακτίνα μικρότερη από το c^{-1} εκτός αν η M^n είναι σφαίρα ακτίνος c^{-1}.*

Απόδειξη. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1. Αν $m = 1$, δηλαδή $|H_1| \geq c$, προσανατολίζουμε την M^n ώστε $H_1 > 0$. Επιλέγουμε την U να είναι η συνιστώσα του $\mathbb{R}^{n+1} - M^n$, που περιέχει όλα τα κάθετα της M^n. Υποθέτουμε ότι υπάρχει σφαίρα που περιέχεται στην U και έχει ακτίνα $r \geq c^{-1}$. Έστω S_r μια τέτοια σφαίρα που περιέχεται στην U. Μεγαλώνουμε την S_r ώστε να εφάπτεται σε ένα σημείο p με την M^n. Γύρω από αυτό, ως προς το κοινό μοναδιαίο κάθετο, η σφαίρα θα βρίσκεται πάνω από την M^n με την εξής έννοια: Μετατοπίζουμε τις M^n και S_r ώστε το p να συμπέσει με το O, οι εφαπτόμενοι χώροι T_pM^n, T_pS_r με το υπερεπίπεδο $x_{n+1} = 0$ και τέλος το κοινό μοναδιαίο κάθετο με το $(0, \ldots, 0, 1)$. Για $x = (x_1, \ldots, x_n)$ που ανήκει στο υπερεπίπεδο $x_{n+1} = 0$ με $|x| < \varepsilon$, για $\varepsilon > 0$, οι S_r και M^n έχουν παράσταση $x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)$ και $x_{n+1} = g(x_1, \ldots, x_n)$, αντίστοιχα. Επιπλέον πληρούν τις $f(O) = g(O) = 0$, $\nabla f(O) = \nabla g(O) = 0$ και $f(x) \geq g(x)$ για κάθε x με $|x| < \varepsilon$.

Επειδή $H_1 \geq c \geq r^{-1} = H_1^{S_r}$, όπου $H_1^{S_r}$ είναι η μέση καμπυλότητα της σφαίρας, σύμφωνα με το Πρώτο Θεώρημα Επαφής η σφαίρα και η M^n θα ταυτίζονται σε μια περιοχή του σημείου p και συνεπώς $r = c^{-1}$. Θεωρούμε το σύνολο Σ, το οποίο περιέχει τα σημεία της M^n στα οποία ταυτίζεται με τη σφαίρα. Είναι φανερό ότι το Σ είναι μη κενό και κλειστό στην M^n. Σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία το Σ είναι και ανοικτό της M^n, συνεπώς $\Sigma \equiv M^n$. Άρα η M^n είναι σφαίρα ακτίνος $r = c^{-1}$ όταν $r \geq c^{-1}$. Δηλαδή κάθε μπάλλα που περιέχεται στην $\bar{U}$ έχει ακτίνα μικρότερη από c^{-1} , εκτός αν η M^n είναι σφαίρα ακτίνος c^{-1}.

Περίπτωση 2. Αν $m \geq 2$ και $|H_m| \geq c^m$, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα σημείο q στην M^n, όπου όλες οι κύριες καμπυλότητες έχουν το ίδιο πρόσημο. Προσανατολίζουμε την M^n ώστε $\varkappa_i(q) \geq 0$ για $i = 1, \ldots, n$. Άρα το $\varkappa(q) \in \bar{\Gamma}_n$, όπου $\bar{\Gamma}_n$ είναι η θήκη του κώνου Γ_n. Λόγω του επιλεγέντος προσανατολισμού θα έχουμε $H_m(p) \geq c^m > 0$ για κάθε $p \in M^n$. Η απεικόνιση $\varkappa(p) = (\varkappa_1(p), \ldots, \varkappa_n(p))$ είναι συνεχής και τα σύνολα M^n, Γ_m είναι συνεκτικά. Συνεπώς ισχύει $\varkappa(p) \in \Gamma_m$ για όλα τα $p \in M^n$. Άρα $H_1, H_2, \ldots, H_m > 0$ παντού στην M^n. Χρησιμοποιώντας την (1.34) λαμβάνουμε

$$H_1 \geq H_m^{\frac{1}{m}} \geq (c^m)^{\frac{1}{m}} = c.$$

Το αποτέλεσμα ανάγεται, τώρα, στην Περίπτωση 1. □

Το παραπάνω Θεώρημα μας δίνει το εξής Πόρισμα για συμπαγείς επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$, που οφείλεται στον Δ. Κουτρουφιώτη [21].

Πόρισμα 3.1. *Έστω M συμπαγής, χωρίς αυτοτομές, επιφάνεια στον* $\mathbb{R}^3$.

(i) Αν $|H| \geq c > 0$, τότε η μεγαλύτερη σφαίρα που κάθεται μέσα στην επιφάνεια M έχει ακτίνα μικρότερη από c^{-1}, εκτός αν η M είναι σφαίρα ακτίνος c^{-1}.
(ii) Αν $K \geq c > 0$, τότε η μεγαλύτερη σφαίρα που κάθεται μέσα στην επιφάνεια M έχει ακτίνα μικρότερη από $c^{-\frac{1}{2}}$,εκτός αν M είναι σφαίρα ακτίνος $c^{-\frac{1}{2}}$.

Το επόμενο Θεώρημα αφορά εκτίμηση της ακτίνος της μικρότερης σφαίρας που περιέχει μια συμπαγή υπερεπιφάνεια του $\mathbb{R}^{n+1}$.

Θεώρημα 3.2. *Έστω M^n συμπαγής υπερεπιφάνεια στον $\mathbb{R}^{n+1}$. Υποθέτουμε ότι, για κάποια θετική σταθερά $c > 0$ και φυσικό αριθμό m, $1 \leq m \leq n$, ισχύει $|H_m| \leq c^m$. Τότε, η μικρότερη σφαίρα που περιβάλλει την M^n έχει ακτίνα μεγαλύτερη του c^{-1}, εκτός αν η M^n είναι σφαίρα ακτίνος c^{-1}.*

Θα προηγηθεί ένα χρήσιμο, για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2, Λήμμα.

Λήμμα 3.1. *Αν M^n είναι συμπαγής υπερεπιφάνεια στον $\mathbb{R}^{n+1}$, τότε υπάρχει σημείο της M^n, όπου οι κύριες καμπυλότητες της M^n είναι όλες θετικές, ως προς κατάλληλο κάθετο.*

Απόδειξη. Έστω $\overrightarrow{x}(p)$ το διάνυσμα θέσης του τυχαίου σημείου p της M^n και $G : M^n \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με $G(p) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{x}(p)|^2$. Αφού η M^n είναι συμπαγής, ως σύνολο σημείων, του $\mathbb{R}^{n+1}$ και G συνεχής συνάρτηση, υπάρχει κάποιο σημείο $p_0 \in M^n$ στο οποίο η G θα δέχεται απόλυτο μέγιστο. Δηλαδή το p_0 απέχει από την αρχή των συντεταγμένων μέγιστη απόσταση.

Το p_0 είναι κρίσιμο σημείο της G, επομένως $\nabla G|_{p_0} = 0$, ή, ισοδύναμα, για κάθε $v \in T_{p_0}M^n$ ισχύει

$$vG = \langle \bar{\nabla}_v \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x} \rangle\big|_{p_0} = \langle v, \overrightarrow{x}(p_0) \rangle = 0.$$

Άρα το $\overrightarrow{x}(p_0) \neq 0$ είναι κάθετο στον εφαπτόμενο χώρο $T_{p_0}M^n$ της M^n στον $\mathbb{R}^{n+1}$. Επιλέγουμε το κάθετο $\xi = \frac{-\overrightarrow{x}(p_0)}{|\overrightarrow{x}(p_0)|}$.

Η G έχει μέγιστο στο p_0, άρα η Εσσιανή μορφή $\nabla^2 G$ στο p_0 είναι αρνητικώς ημιοριστική. Δηλαδή, για κάθε διανυσματικό πεδίο $X \in \varDelta(M^n)$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \geq \nabla^2 G\big|_{p_0}(X, X) &= X_{p_0}(XG) = X_{p_0}\langle X, \overrightarrow{x} \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{X_{p_0}} X, \overrightarrow{x} \rangle\big|_{p_0} + \langle X, X \rangle\big|_{p_0} \\ &= \langle B(X_{p_0}, X_{p_0}), \overrightarrow{x}(p_0) \rangle + |X_{p_0}|^2 \\ &= -|\overrightarrow{x}(p_0)| \langle A_\xi X_{p_0}, X_{p_0} \rangle + |X_{p_0}|^2. \end{aligned}$$

Θεωρούμε ορθομοναδιαία βάση $\{e_i\}$ του $T_{p_0}M^n$, αποτελούμενη από ιδιοανύσματα του A. Τότε η παραπάνω σχέση γίνεται

$$-\varkappa_i |\overrightarrow{x}(p_0)| + 1 \leq 0, \qquad \text{για } i = 1, \ldots, n.$$

Η τελευταία σχέση συνεπάγεται ότι όλες οι κύριες καμπυλότητες στο p_0 είναι θετικές με την κατάλληλη επιλογή του καθέτου ξ. □

Απόδειξη Θεωρήματος 3.2. Υποθέτουμε ότι η υπερεπιφάνεια M^n περιέχεται σε κάποια σφαίρα S_r ακτίνος $r \leq c^{-1}$. Μικραίνουμε την ακτίνα της S_r ώστε να ακουμπήσει την M^n στο σημείο p_0.

Σε μια περιοχή του p_0, λόγω του Λήμματος 3.1 οι κύριες καμπυλότητες είναι θετικές, επομένως και $H_m > 0$, για $1 \leq m \leq n$. Γύρω από το p_0 θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων, μετατοπίζοντας τις δύο υπερεπιφάνειες έτσι ώστε το p_0 να συμπέσει με την αρχή O, οι εφαπτόμενοι χώροι $T_{p_0}M^n$, $T_{p_0}S_r$ με τον $\mathbb{R}^n$ και το κοινό μοναδιαίο κάθετο τους στο σημείο p_0 με το $(0, \ldots, 0, 1)$. Για κατάλληλο $\varepsilon > 0$ και $|x| < \varepsilon$, όπου $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, οι M^n και S_r γύρω από το $p_0 \equiv O$ έχουν παραστάσεις

$$x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n) \text{ και } x_{n+1} = g(x_1, \ldots, x_n)$$

αντίστοιχα, με $g(x) \leq f(x)$, για κάθε $|x| < \varepsilon$. Επιπλέον ισχύουν

$$f(O) = g(O) = 0, \ \nabla f(O) = \nabla g(O) = 0.$$

Άρα σε μια περιοχή του O θα έχουμε $H_m \leq c^m \leq r^{-m} = H_m^{S_r}$, για $m = 1, \ldots, n$, όπου $H_m^{S_r}$ είναι η μέση καμπυλότητα m-τάξης της S_r. Η σφαίρα S_r και η M^n, λόγω του Δεύτερου Θεωρήματος Επαφής, ταυτίζονται σε μια περιοχή του $O \equiv P_0$ και θα ισχύει $r = c^{-1}$.

Θεωρούμε το σύνολο που περιέχει όλα τα σημεία της M^n στα οποία ταυτίζεται με την $S_{c^{-1}}$. Το σύνολο αυτό είναι μη κενό και κλειστό. Από την παραπάνω διαδικασία προκύπτει ότι είναι και ανοικτό, άρα $M^n \equiv S_{c^{-1}}$. Δηλαδή, η μικρότερη σφαίρα που περιέχει την M^n έχει ακτίνα μεγαλύτερη του c^{-1}, εκτός αν η M^n είναι σφαίρα ακτίνος c^{-1}. $\square$

Το παραπάνω Θεώρημα, για συμπαγείς επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$, μας δίνει ως Πόρισμα ένα αποτέλεσμα του Δ. Κουτρουφιώτη [21].

Πόρισμα 3.2. *Έστω M συμπαγής επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$.*
(i) Αν $|H| \leq c$, $c > 0$, τότε η μικρότερη σφαίρα που περιβάλλει την M έχει ακτίνα μεγαλύτερη του c^{-1}, εκτός αν η M είναι σφαίρα ακτίνος c^{-1}.
(ii) Αν $K \leq c$, $c > 0$, τότε η μικρότερη σφαίρα που περιβάλλει την M έχει ακτίνα μεγαλύτερη του $c^{-\frac{1}{2}}$, εκτός αν η M είναι σφαίρα ακτίνος $c^{-\frac{1}{2}}$.

3.2 Υπερεπιφάνειες Γραφήματα

Έστωσαν $B_r \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτή μπάλλα ακτίνος r και $f : B_r \to \mathbb{R}$ συνάρτηση τάξης C^2. Ο E. Heinz [17] έδωσε τις ακόλουθες εκτιμήσεις για τη μέση καμπυλότητα $H(x, y)$ και την καμπυλότητα Gauss $K(x, y)$ του γραφήματος $\Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in B_r,\ z = f(x, y)\}$,

$$\inf_{B_r} |H| \leq \frac{1}{r} \tag{3.1}$$

και

$$\inf_{B_r} |K| \leq \frac{3e^2}{r^2}, \tag{3.2}$$

όπου e η βάση του φυσικού λογαρίθμου. Η μέθοδος απόδειξης βασίζεται σε μια αξιοθαύμαστη χρήση του Θεωρήματος Απόκλισης, που εφαρμόσθηκε στις κλασσικές εκφράσεις της μέσης καμπυλότητας και της καμπυλότητας Gauss για γραφήματα διάστασης 2. Αυτές οι εκφράσεις των $H(x, y)$ και $K(x, y)$ είναι σε μορφή απόκλισης.

Από την εκτίμηση (3.1) προκύπτει ότι, κάθε ολικό γράφημα Γ_f, δηλαδή γράφημα της $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, με $H =$ σταθερό θα έχει $H = 0$. Επίσης από την εκτίμηση (3.2) προκύπτει ότι ολικά γραφήματα Γ_f με

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, δεν μπορεί να έχουν καμπυλότητα Gauss φραγμένη μακριά από το μηδέν, μια ειδική περίπτωση του Θεωρήματος του N. Efimov [7].

Γενικεύσεις αυτών των αποτελεσμάτων σε υψηλότερες διαστάσεις, καθώς εξέταση και άλλων καμπυλοτήτων (καμπυλότητα Ricci, αριθμητική καμπυλότητα, μέσες καμπυλότητες m-τάξης), οδήγησαν σε διατύπωση προβλημάτων και προσπάθειες επίλυσης των.

Στις υψηλότερες διαστάσεις αρκετά συμπεράσματα για υπερεπιφάνειες βασίζονται στην έκφραση της μέσης καμπυλότητας σε μορφή απόκλισης. Πιο συγκεκριμένα, έστωσαν $D \subset \mathbb{R}^n$ ένα χωρίο στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ και $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια λεία συνάρτηση (τάξης C^2 αρκεί). Η μέση καμπυλότητα $H = H_1$ του γραφήματος Γ_f δίνεται από μια ενδιαφέρουσα σχέση

$$nH = \operatorname{div}\Big(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\Big), \tag{3.3}$$

όπου ∇f είναι η κλίση της $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Το επόμενο σπουδαίο Λήμμα [8] (κοίταξε επίσης [16], [25]) μας δίνει έκφραση, σε μορφή απόκλισης, κάθε μέσης καμπυλότητας m-τάξης H_m.

Λήμμα 3.2. *Με τους συμβολισμούς της Παραγράφου 1.2 ισχύει*

$$(m+1)\binom{n}{m+1}H_{m+1} = (m+1)\sigma_{m+1} = \operatorname{div}\Big(P_m\big(\frac{\nabla f}{W}\big)\Big) \tag{3.4}$$

για $m = 0, \ldots, n-1$.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 1.1 προκύπτει ότι,

$$(m+1)\sigma_{m+1} = \operatorname{trace} P_m \tilde{A}.$$

Θεωρούμε τη συνήθη βάση $\{e_i\}$, $i = 1, \ldots, n$ στον $\mathbb{R}^n$. Η παραπάνω σχέση, λόγω της (1.28), γίνεται

$$(3.5) \qquad (m+1)\sigma_{m+1} = \sum_{i=1}^{n} \Big\langle P_m\Big(\nabla_{e_i}\big(\frac{\nabla f}{W}\big)\Big), e_i\Big\rangle$$
$$= \Big(\operatorname{div} P_m\big(\frac{\nabla f}{W}\big)\Big) - \sum_{i=1}^{n} \Big\langle(\nabla_{e_i} P_m)\big(\frac{\nabla f}{W}\big), e_i\Big\rangle.$$

Θα αποδείξουμε ότι

$$(3.6) \qquad \sum_{i=1}^{n} \Big\langle(\nabla_{e_i} P_m)X, e_i\Big\rangle = 0,$$

για τυχαίο X. Τότε από την (3.5) για $X = \frac{\nabla f}{W}$ θα πάρουμε την (3.4). Η απόδειξη της (3.6) θα γίνει με επαγωγή στο P_m.

Για $P_0 = I$, αφού $(\nabla_{e_i} I)X = \nabla_{e_i}(IX) - I\nabla_{e_i} X = 0$, η (3.6) είναι προφανής. Έστω ότι η (3.6) ισχύει για τον P_{m-1}, θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για τον P_m.

Από το μετασχηματισμό Newton $P_m = \sigma_m I - \tilde{A}P_{m-1}$ λαμβάνουμε

$$(\nabla_{e_i} P_m)X = \nabla_{e_i}((\sigma_m I - \tilde{A}P_{m-1})X) - (\sigma_m I - \tilde{A}P_{m-1})(\nabla_{e_i} X)$$
$$= e_i(\sigma_m)X - \nabla_{e_i}(\tilde{A}P_{m-1}X) + \tilde{A}P_{m-1}\nabla_{e_i} X$$
$$= e_i(\sigma_m)X - \big(P_{m-1}(\nabla_{e_i}\tilde{A})\big)X - \big(\nabla_{e_i} P_{m-1}\big)\tilde{A}X.$$

Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά με e_i και αθροίζοντας, ως προς i, έχουμε

$$(3.7) \qquad \sum_{i=1}^{n}\langle(\nabla_{e_i} P_m)X, e_i\rangle = \langle \operatorname{grad} \sigma_m, X\rangle$$
$$- \sum_{i=1}^{n}\langle(\nabla_{e_i} P_{m-1})\tilde{A}X, e_i\rangle$$
$$- \sum_{i=1}^{n}\langle P_{m-1}(\nabla_{e_i}\tilde{A})X, e_i\rangle.$$

Όμως $\sum_{i=1}^{n}\langle(\nabla_{e_i}P_{m-1})\tilde{A}X, e_i\rangle = 0$, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, και

$$\sum_{i=1}^{n}\langle P_{m-1}(\nabla_{e_i}\tilde{A})X, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle P_{m-1}(\nabla_X\tilde{A})e_i, e_i\rangle,$$

αφού ο $\tilde{A}$ πληροί την εξίσωση Godazzi, όπως προκύπτει από την Παρατήρηση 1.2. Συνεπώς η (3.7) γίνεται

$$\sum_{i=1}^{n}\langle(\nabla_{e_i}P_m)X, e_i\rangle = \langle \operatorname{grad}\sigma_m, X\rangle - \operatorname{trace}(P_{m-1}\nabla_X\tilde{A}). \tag{3.8}$$

Θεωρούμε μια βάση $\{v_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, του TD που διαγωνιοποιεί τον πίνακα $\tilde{A}$ με αντίστοιχες ιδιοτιμές τις $\varkappa_i$, $i = 1, \ldots, n$. Όπως προκύπτει από την Παρατήρηση 1.1 τέτοια βάση υπάρχει πάντα. Η βάση $\{v_i\}$, $i = 1, \ldots, n$ διαγωνιοποιεί και το μετασχηματισμό Newton P_{m-1} με αντίστοιχες ιδιοτιμές $\frac{\partial\sigma_m}{\partial\varkappa_i}$, για $m \leq n$, όπως προκύπτει από την Πρόταση 1.1. Συνεπώς έχουμε

$$\begin{aligned}
(P_{m-1}\nabla_X\tilde{A})v_i &= P_{m-1}\big(\nabla_X(\tilde{A}v_i) - \tilde{A}\nabla_X v_i\big)\\
&= P_{m-1}\big(\nabla_X(\varkappa_i v_i) - \tilde{A}\nabla_X v_i\big)\\
&= X(\varkappa_i)P_{m-1}v_i + \varkappa_i P_{m-1}\nabla_X v_i - P_{m-1}\tilde{A}\nabla_X v_i\\
&= X(\varkappa_i)\frac{\partial\sigma_m}{\partial\varkappa_i}v_i + \varkappa_i P_{m-1}\nabla_X v_i - P_{m-1}\tilde{A}\nabla_X v_i.
\end{aligned}$$

Η συνιστώσα του $\varkappa_i P_{m-1}\nabla_X v_i - P_{m-1}\tilde{A}\nabla_X v_i$ στη διεύθυνση v_i, ως προς τη βάση $\{v_1, \ldots, v_n\}$, είναι μηδέν. Άρα

$$\begin{aligned}
\operatorname{trace} P_{m-1}\nabla_X\tilde{A} &= \sum_i X(\varkappa_i)\frac{\partial\sigma_m}{\partial\varkappa_i}\\
&= \sum_i \frac{\partial\sigma_m}{\partial\varkappa_i}\langle X, \operatorname{grad}\varkappa_i\rangle = \langle X, \operatorname{grad}\sigma_m\rangle.
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στην (3.8) προκύπτει ότι, η (3.6) είναι αληθής. □

Με τη βοήθεια του Λήμματος 3.2 αποδεικνύεται το ακόλουθο Θεώρημα ([16]).

Θεώρημα 3.3. *Θεωρούμε το γράφημα Γ_f της συνάρτησης $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, του οποίου το μήκος $\|A\|$ της απεικόνισης Weingarten είναι φραγμένο. Υποθέτουμε ότι το πεδίο ορισμού D περιέχει μπάλλα οποιασδήποτε ακτίνος. Τότε για κάθε μέση καμπυλότητα m-τάξης H_m ισχύει*

$$\inf H_m \leq 0 \leq \sup H_m. \tag{3.9}$$

Απόδειξη. Έστω ότι, το συμπέρασμα δεν ισχύει. Τότε $\inf H_m > 0$ ή $\sup H_m < 0$. Θα εξετάσουμε την κάθε περίπτωση ξεχωριστά.

Έστω $\inf H_m > 0$ τότε, λόγω του Λήμματος 3.2, έχουμε

$$m\binom{n}{m} \inf H_m \leq \operatorname{div}\Big(P_{m-1}(\frac{\nabla f}{W})\Big).$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση σε μια μπάλλα $\bar{B}_r \subset D$ ακτίνος r προκύπτει ότι

$$m\binom{n}{m} \inf H_m \operatorname{Vol}(\bar{B}_r) \leq \int_{\bar{B}_r} \operatorname{div}\Big(P_{m-1}(\frac{\nabla f}{W})\Big) dV,$$

όπου dV είναι το στοιχείο όγκου στον $\mathbb{R}^n$.

Από το Θεώρημα Stokes-Green λαμβάνουμε

$$m\binom{n}{m} \inf H_m \operatorname{Vol}(\bar{B}_r) \leq \int_{\partial \bar{B}_r} \Big\langle P_{m-1}\Big(\frac{\nabla f}{W}\Big), \nu\Big\rangle d\sigma,$$

όπου ν είναι το μαναδιαίο προς τα έξω κάθετο διανυσματικό πεδίο της σφαίρας $S_r = \partial \bar{B}_r$ και $d\sigma$ το στοιχείο όγκου της S_r. Ισχύει ότι

$$\int_{\partial \bar{B}_r} \langle P_{m-1}\Big(\frac{\nabla f}{W}\Big), \nu\rangle d\sigma \leq \int_{\partial \bar{B}_r} \Big\| P_{m-1}(\frac{\nabla f}{W}) \Big\| d\sigma.$$

Το μήκος $\|A\|$ του τελεστή σχήματος A είναι φραγμένο. Άρα και το μήκος $\|P_{m-1}\|$ του P_{m-1} είναι φραγμένο. Συνεπώς θα έχουμε

$$m\binom{n}{m} \inf H_m \operatorname{Vol}(\bar{B}_r) \leq \sup \|P_{m-1}\| \, Vol(\partial \bar{B}_r).$$

Λαμβάνοντας υπόψη το λόγο του εμβαδού του συνόρου προς τον όγκο, μπάλλας ακτίνος r έχουμε

$$m\binom{n}{m} \inf H_m \leq \sup \|P_{m-1}\| \frac{n}{r}. \tag{3.10}$$

Επειδή το D περιέχει μπάλλα οποιασδήποτε ακτίνος, άπο την (3.10) λαμβάνουμε $\inf H_m \leq 0$, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση μας.

Έστω $\sup H_m < 0$ τότε, λόγω του Λήμματος 3.2, έχουμε

$$\operatorname{div}\Big(P_{m-1}(\frac{\nabla f}{W})\Big) \leq m\binom{n}{m} \sup H_m.$$

Ολοκληρώνοντας και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Stokes-Green σε μια μπάλλα $\bar{B}_r$ του D έχουμε

$$\int_{\partial \bar{B}_r} \langle P_{m-1}(\frac{\nabla f}{W}), \nu\rangle d\sigma \leq m\binom{n}{m} \sup H_m \operatorname{Vol}(\partial \bar{B}_r),$$

όπου ν είναι το μοναδιαίο προς τα έξω κάθετο του $\partial \bar{B}_r$. Ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία όπως προηγουμένως έχουμε

$$-\inf \|P_{m-1}\| \frac{n}{r} \leq m\binom{n}{m} \sup H_m,$$

και συνεπώς $\sup H_m \geq 0$, που αντιφάσκει στην υπόθεση ότι $\sup H_m < 0$. $\square$

Παρατήρηση 3.1. (i) Για $m = 1$, όπως προκύπτει από την απόδειξη, δεν απαιτείται η υπόθεση ότι το $\|A\|$ είναι φραγμένο.

(ii) Αν η μέση καμπυλότητα m-τάξης H_m ένος γραφήματος Γ_f, όπου $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, είναι σταθερή και το μήκος $\|A\|$ της απεικόνισης Weingarten A είναι φραγμένο, στην περίπτωση όπου $m \geq 2$, τότε $H_m = 0$. Αυτό το αποτέλεσμα δίνει απόδειξη, για $m = 1$ και γενικεύει για $m \geq 2$, του αποτελέσματος που απέδειξαν ανεξάρτητα οι S. S. Chern [4] και H. Flanders [9]: *Το γράφημα μιας τάξης C^2 συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, δεν δύναται να έχει μέση καμπυλότητα H φραγμένη μακριά από το μηδέν.* Επιπλέον, για $m = 2$, δίνει απόδειξη σε ένα αποτέλεσμα της H. Elbert ([8], Θεώρημα 1.1).

Ο F. Fontenele στην εργασία [10], αφού γενίκευσε τις εκτιμήσεις (3.1) και (3.2) του H. Heinz, έδωσε ενδιαφέροντα αποτελέσματα για γραφήματα με τη βοήθεια των Θεωρημάτων Επαφής, τα οποία ανέπτυξε με το συνεργάτη του S. Silva στις εργασίες ([11], [12]).

Έστω $\bar{B}_r$ κλειστή μπάλλα ακτίνος $r > 0$ στον $\mathbb{R}^n$ και $f : \bar{B}_r \to \mathbb{R}$ μια συνεχώς διαφορίσιμη στη $\bar{B}_r$ συνάρτηση, η οποία είναι τάξης C^2 στη B_r, δηλαδή $f \in C^2(B_r) \cap C^1(\bar{B}_r)$. Το κλειδί για τα επόμενα αποτελέσματα είναι το ακόλουθο ενδιαφέρον Λήμμα, το οποίο αφορά τα γραφήματα

$$\Gamma_f = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \ldots, x_n) \in \bar{B}_r \text{ και } x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Στη συνέχεια τέτοιου είδους γραφήματα θα αποκαλούνται «γραφήματα υπεράνω του $\bar{B}_r$».

Λήμμα 3.3 ([10]). *Υπάρχει σημείο p του γραφήματος Γ_f, όπου οι κύριες καμπυλότητες $\varkappa_i$ πληρούν τις*

$$\varkappa_i(p) \leq \frac{1}{r}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.11}$$

Απόδειξη. Επιλέγουμε προσανατολισμό στο γράφημα Γ_f και θεωρούμε μια σφαίρα S_r ακτίνος r, η οποία δεν έχει κοινό σημείο με το Γ_f και βρίσκεται στη συνιστώσα του συνόλου $(\bar{B}_r \times \mathbb{R}) - \Gamma_f$ στην πλευρά που δείχνουν τα κάθετα. Αφήνουμε την S_r να πέσει προς το γράφημα μέχρι να ακουμπήσει για πρώτη φορά το Γ_f σε κάποιο σημείο p με διάνυσμα θέσης p.

Έστωσαν p_0 το διάνυσμα θέσης του κέντρου p_0 της σφαίρας S_r, x το διάνυσμα θέσης του τυχαίου σημείου του γραφήματος Γ_f και $g : \Gamma_f \to \mathbb{R}$ η διαφορίσιμη συνάρτηση $g(x) := \frac{1}{2}\|x - p_0\|^2$. Η συνάρτηση g θα δέχεται ελάχιστο στο σημείο p. Το p είναι κρίσιμο σημείο της g, επομένως $\nabla g = 0$, ή, ισοδύναμα, για κάθε $X \in T_p\Gamma_f$ ισχύει $Xg = \langle \bar{\nabla}_X(x - p_0), x - p_0\rangle\big|_p = \langle X, p - p_0\rangle = 0$. Δηλαδή το διάνυσμα $p - p_0$ είναι κάθετο στον εφαπτόμενο χώρο $T_p\Gamma_f$ του γραφήματος Γ_f στον $\mathbb{R}^{n+1}$. Άρα, το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα του γραφήματος στο σημείο p, σύμφωνα με τον προσανατολισμό που έχουμε επιλέξει, είναι το

$$\xi = \frac{p_0 - p}{\|p_0 - p\|} = \frac{p_0 - p}{r}.$$

Επίσης η Εσσιανή μορφή $\nabla^2 g$ της g στο σημείο p είναι θετικά ημιοριστική. Άρα, για κάθε διανυσματικό πεδίο $X \in \Delta(\Gamma_f)$, θα έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \leq \nabla^2 g\big|_p(X,X) &= X_p(Xg) = X_p\langle X, x - p_0\rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{X_p} X, x - p_0\rangle\big|_p + \langle X, X\rangle\big|_p \\ &= \langle B(X_p, X_p), p - p_0\rangle + |X_p|^2 \\ &= -r\langle AX_p, X_p\rangle + |X_p|^2, \end{aligned}$$

όπου A είναι η απεικόνιση Weingarten ως προς το κάθετο ξ.

Θεωρούμε την ορθομοναδιαία βάση $\{e_i\}$, $i = 1, \ldots, n$ του $T_p\Gamma_f$ που αποτελείται από ιδιοανύσματα του A. Τότε, η παραπάνω σχέση γίνεται

$$-\varkappa_i(p)r + 1 \geq 0, \quad \text{για } i = 1, \ldots, n,$$

και συνεπώς $\varkappa_i(p) \leq \frac{1}{r}$, $i = 1, \ldots, n$. □

Συνέπεια αυτού του Λήμματος είναι το επόμενο Θεώρημα, το οποίο βελτιώνει την εκτίμηση του H. Heinz στην περίπτωση γραφημάτων, που ορίζονται σε κλειστή μπάλλα $\bar{B}_r \subset \mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 3.4 ([10]). *Αν η υπερεπιφάνεια $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ είναι γράφημα υπεράνω της κλειστής μπάλλας $\bar{B}_r \subset \mathbb{R}^n$, τότε ισχύει*

$$\inf_M |H| < \frac{1}{r}. \tag{3.12}$$

Απόδειξη. Αν $\inf_M |H| = 0$, τότε προφανώς $\inf_M |H| < \frac{1}{r}$. Θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου $\inf_M |H| = c > 0$. Επιλέγουμε προσανατιλισμό στην M^n ώστε $H \geq c > 0$. Τότε, λόγω του Λήμματος 3.3, υπάρχει σημείο p της M^n τέτοιο ώστε οι κύριες καμπυλότητες $\varkappa_i(p)$ στο

p να πληρούν την ανισότητα $\varkappa_i(p) \leq \frac{1}{r}$, $i = 1, \ldots, n$. Συνεπώς έχουμε

$$c \leq H(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varkappa_i(p) \leq \frac{1}{r},$$

δηλαδή

$$\inf_M |H| \leq \frac{1}{r}.$$

Αν $\inf_M |H| = \frac{1}{r}$, τότε $H \geq \frac{1}{r}$ σε κάθε σημείο του γραφήματος. Από το Πρώτο Θεώρημα Επαφής η υπερεπιφάνεια M^n και η σφαίρα S_r ακτίνος r θα ταυτίζονται σε μια περιοχή του σημείου p. Λόγω συνεκτικότητας, η M^n θα είναι κλειστό ημισφαίριο της S_r. Τότε το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο του γραφήματος στο σύνορο θα είναι κατακόρυφο. Συνεπώς η υπερεπιφάνεια M^n δεν μπορεί να είναι γράφημα υπεράνω της $\bar{B}_r$. Άτοπο, άρα ισχύει

$$\inf_M |H| < \frac{1}{r}. \qquad \square$$

Το επόμενο Θεώρημα δίνει μια παραλλαγή για υψηλότερες διαστάσεις της εκτίμησης (3.2), η οποία αφορά την καμπυλότητα Gauss επιφανειών που είναι γραφήματα.

Θεώρημα 3.5 ([10]). *Έστω M^n γράφημα υπεράνω της κλειστής μπάλλας $\bar{B}_r \subset \mathbb{R}^n$ της συνάρτησης $f : \bar{B}_r \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $f \in C^2(B_r) \cap C^1(\bar{B}_r)$. Αν τ είναι η αριθμητική καμπυλότητα της M^n, τότε ισχύει*

$$\inf_M |\tau| \leq \frac{2n(n-1)}{r}\Big(\sup_M |H| + \frac{1}{r}\Big). \tag{3.13}$$

Επιπλέον, αν η M^n έχει σημείο όπου η δεύτερη θεμελιώδης μορφή της *είναι ημιοριστική τότε ισχύει*

$$\inf_M |\tau| < \frac{n(n-1)}{r^2}. \tag{3.14}$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε πρώτα τη σχέση (3.13). Αν η αριθμητική καμπυλότητα τ αλλάζει πρόσημο ή λαμβάνει σε κάποιο σημείο της υπερεπιφάνειας την τιμή μηδέν, τότε $\inf_M |\tau| = 0$ και η σχέση (3.13) είναι προφανής. Επομένως, θα εξετάσουμε αν η σχέση (3.13) ισχύει όταν η αριθμητική καμπυλότητα είναι παντού είτε θετική είτε αρνητική. Θα εξετάσουμε την κάθε περίπτωση ξεχωριστά.

Περίπτωση τ>0. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει, λόγω της σχέσης (1.16), ότι

$$|\tau| = \tau = n^2H^2 - \|A\|^2 \leq n^2H^2, \text{ή}, \quad |\tau| \leq n^2|H| \sup |H|.$$

Αφού το γράφημα ορίζεται υπεράνω της κλειστής μπάλλας $\bar{B}_r$, λόγω του Θεωρήματος 3.4, προκύπτει ότι

$$\inf_M |\tau| \leq n^2 \sup_M |H| \inf_M |H| \leq \frac{n^2}{r} \sup_M |H|.$$

Η (3.13) είναι άμεση συνέπεια της τελευταίας σχέσης.

Περίπτωση τ<0. Σε αυτή την περίπτωση, επειδή

$$\tau = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \varkappa_i \varkappa_j,$$

σε κάθε σημείο της υπερεπιφάνειας υπάρχουν θετικές και αρνητικές κύριες καμπυλότητες. Επιλέγουμε ως προσανατολισμό το προς τα άνω κάθετο του γραφήματος και υποθέτουμε ότι στο σημείο p του Λήμματος

3.3 υπάρχουν ℓ το πλήθος αρνητικές κύριες καμπυλότητες. Δηλαδή, στο σημείο p θα έχουμε

$$\varkappa_1(p) \leq \cdots \leq \varkappa_\ell(p) < 0 \leq \varkappa_{\ell+1}(p) \leq \cdots \leq \varkappa_n(p).$$

Άρα παραλείποντας το p,

$$\begin{aligned} 0 > \frac{\tau}{2} &= \sum_{1\leq i<j\leq n} \varkappa_i\varkappa_j \\ &= \sum_{1\leq i<j\leq \ell} \varkappa_i\varkappa_j + \sum_{\ell+1\leq i<j\leq n} \varkappa_i\varkappa_j + \sum_{\substack{i=1,\ldots,\ell \\ j=\ell+1,\ldots,n}} \varkappa_i\varkappa_j \\ &\geq \sum_{\substack{i=1,\ldots,\ell \\ j=\ell+1,\ldots,n}} \varkappa_i\varkappa_j \end{aligned}$$

ή, ισοδύναμα,

$$0 > \frac{\tau}{2} \geq \Big(\sum_{i=1}^{\ell} \varkappa_i\Big)\Big(\sum_{j=\ell+1}^{n} \varkappa_j\Big) = \Big(nH - \sum_{j=\ell+1}^{n} \varkappa_j\Big) \sum_{j=\ell+1}^{n} \varkappa_j.$$

Στο σημείο p, λόγω του Λήμματος 3.3, ισχύει $\varkappa_i(p) \leq \frac{1}{r}$, για $i = 1, \ldots, n$. Επομένως λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\inf|\tau| \leq \frac{|\tau(p)|}{2} &\leq \Big(n\sup_M |H| + \sum_{j=\ell+1}^{n} \varkappa_j(p)\Big) \sum_{j=\ell+1}^{n} \varkappa_j(p) \\ &\leq \Big(n\sup_M |H| + \frac{n-\ell}{r}\Big)\frac{n-\ell}{r} \\ &\leq \Big(n\sup_M |H| + \frac{n-1}{r}\Big)\frac{n-1}{r}, \end{aligned}$$

από όπου η (3.13) προκύπτει άμεσα.

Θα αποδείξουμε, τώρα, την (3.14). Έστω q το σημείο όπου η δεύτερη θεμελιώδης μορφή είναι ημιοριστική. Επιλέγουμε προσανατολισμό στο γράφημα, ώστε οι κύριες καμπυλότητες στο q να είναι μη αρνητικές. Υποθέτουμε ότι $\inf_M |\tau| > 0$ για όλα τα σημεία της M, διότι διαφορετικά η σχέση (3.14) είναι προφανής. Επειδή $\varkappa_i(q) \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, θα ισχύει, ότι $\tau > 0$, παντού στο γράφημα. Στην Παράγραφο 1.3 αποδείξαμε ότι, για τους υπερβολικούς κώνους των στοιχειωδών συμμετρικών πολυωνύμων n μεταβλητών, ισχύει $\Gamma_n \subset \Gamma_2$. Άρα το διάνυσμα $\varkappa(q) = (\varkappa_1(q), \ldots, \varkappa_n(q))$ ανήκει στο $\bar{\Gamma}_2$. Όμως $\tau(q) > 0$ και συνεπώς θα έχουμε $\varkappa(q) \in \Gamma_2$. Επομένως $\varkappa(x) \in \Gamma_2$, λόγω συνεκτικότητας των M και Γ_2, για όλα τα σημεία x της υπερεπιφάνειας M^n. Ειδικότερα για το σημείο p, που εξασφαλίζεται από το Λήμμα 3.3, θα έχουμε

$$\tau(p) = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \varkappa_i(p)\varkappa_j(p) > 0.$$

Αν $\inf_M |\tau| \geq \frac{n(n-1)}{r^2}$, τότε παντού στην υπερεπιφάνεια θα είχαμε $\tau \geq \frac{n(n-1)}{r^2}$ και, επιπλέον, $\varkappa(p) \in \Gamma_2$. Σύμφωνα με το Δεύτερο Θεώρημα Επαφής η M^n θα ταυτίζεται με τη σφαίρα S_r σε μια περιοχή του σημείου p. Λόγω συνεκτικότητας, η M^n θα είναι κλειστό ημισφαίριο της S_r. Το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο της M^n στο σύνορο της είναι κατακόρυφο. Επομένως η υπερεπιφάνεια M^n δεν μπορεί να είναι γράφημα υπεράνω της $\bar{B}_r$, άτοπο. Άρα $\inf |\tau| < \frac{n(n-1)}{r^2}$. □

Παρατήρηση 3.2. Οι εκτιμήσεις (3.12) και (3.14) είναι βέλτιστες, όπως διαπιστώνεται στο εξής παράδειγμα: Για $a > r$, έστω M_a το γράφημα της $f : \bar{B}_r \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, με $f(x_1, \ldots, x_n) := (a^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$. Είναι προφανές ότι η μέση καμπυλότητα της M_a είναι $H = \frac{1}{a}$ και η αριθμητική της καμπυλότητα είναι $\tau = \frac{n(n-1)}{a^2}$. Το συμπέρασμα προκύπτει από το γεγονός ότι το a μπορεί να πλησιάσει το r όσο θέλουμε.

Το ακόλουθο Πόρισμα βελτιώνει σχετικό αποτέλεσμα των Θ. Χασάνη, Θ. Βλάχου [16] και της M. F. Elbert [8].

Πόρισμα 3.3 ([10]). *Αν η υπερεπιφάνεια* $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, *είναι ολικό γράφημα της* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *και έχει φραγμένη μέση καμπυλότητα, τότε ισχύει*

$$\inf_M |\tau| = 0. \tag{3.15}$$

Ειδικότερα, αν η M^n *έχει σταθερή αριθμητική καμπυλότητα, τότε ισχύει* $\tau = 0$.

Ο N. Efimov επεκτείνοντας το Θέωρημα του Hilbert: *Δεν υπάρχει πλήρης επιφάνεια στον* $\mathbb{R}^3$ *με σταθερή καμπυλότητα Gauss -1,* απέδειξε ότι: *Δεν υπάρχει πλήρης επιφάνεια στον* $\mathbb{R}^3$ *με καμπυλότητα Gauss μικρότερη από μια αρνητική σταθερά.*

Σε υψηλότερες διαστάσεις διατυπώθηκε από τον R. Reilly [25] (κοίταξε και S. T. Yau [27]) η Πρόταση: *Δεν υπάρχουν πλήρεις υπερεπιφάνειες του* $\mathbb{R}^{n+1}$ *με αρνητική καμπυλότητα Ricci φραγμένη μακριά από το μηδέν.* Σε μια ενδιαφέρουσα εργασία οι B. Smyth και F. Xavier [26] απέδειξαν την Πρόταση για $n = 3$ και έδωσαν μερική απάντηση για $n > 3$.

Για γραφήματα Γ_f που ορίζονται σε ολόκληρο το $\mathbb{R}^n$, δηλαδή με $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, η Πρόταση έχει θετική απάντηση όπως προκύπτει από το Πόρισμα του ακόλουθου Θεωρήματος.

Θεώρημα 3.6 ([10]). *Έστω* $f : \bar{B}_r \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 3$, *με* $f \in C^2(B_r) \cap C^1(\bar{B}_r)$. *Θεωρούμε το γράφημα* $M^n = \Gamma_f$ *της* f *υπεράνω της* *μπάλλας* $\bar{B}_r$. *Αν η καμπυλότητα Ricci της* M^n, *σε κάθε σημείο και σε κάθε διεύθυνση, είναι αρνητική τότε ισχύει*

$$\inf_M \|A\| < \frac{3(n-2)}{r}, \tag{3.16}$$

όπου $\|A\|$ *είναι το μήκος της απεικόνισης Weingarten* A.

Απόδειξη. Έστω $\{e_i\}$, $i = 1, \dots, n$ ορθομοναδιαία βάση ιδιοανυσμάτων της απεικόνισης Weingarten A σε τυχαίο σημείο της M^n. Από την εξίσωση Gauss, για υπερεπιφάνειες στον $\mathbb{R}^{n+1}$, προκύπτει ότι η καμπυλότητα Ricci της M, ως προς τη διεύθυνση e_i, δίνεται από τη

$$\begin{aligned} \operatorname{Ric}(e_i) &= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} \varkappa_i \varkappa_j \\ &= \varkappa_i(\varkappa_1 + \cdots + \varkappa_i + \cdots + \varkappa_n - \varkappa_i) \\ &= \varkappa_i(nH - \varkappa_i). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Η καμπυλότητα Ricci της M^n είναι σε κάθε σημείο και ως προς κάθε διεύθυνση αρνητική συνεπώς, λόγω της (3.17), οι κύριες καμπυλότητες δεν μηδενίζονται πουθενά στην M^n και είναι θετικές και αρνητικές. Έστω ℓ το πλήθος των αρνητικών κυρίων καμπυλοτήτων στο τυχαίο σημείο της M^n, δηλαδή

$$\varkappa_1 \leq \cdots \leq \varkappa_\ell < 0 < \varkappa_{\ell+1} \leq \cdots \leq \varkappa_n.$$

Αφού $n \geq 3$ μπορούμε να επιλέξουμε προσανατολισμό ώστε $2 \leq \ell \leq n-1$.

Από την (3.17) προκύπτει ότι, επειδή η καμπυλότητα Ricci είναι αρνητική, για $i = 1, \dots, \ell$, έχουμε

$$(nH - \varkappa_i) > 0$$

ή, ισοδύναμα,

$$\varkappa_{\ell+1} + \cdots + \varkappa_n > -\varkappa_1 - \cdots - \hat{\varkappa}_i - \cdots - \varkappa_\ell = |\varkappa_1| + \cdots + |\hat{\varkappa}_i| + \cdots + |\varkappa_\ell|,$$

$i = 1, \dots, \ell$, όπου ο συμβολισμός $\hat{\varkappa}_i$ σημαίνει ότι ο όρος $\hat{\varkappa}_i$ παραλείπεται από το άθροισμα.

Θέτουμε στην παραπάνω σχέση $i = 1, \dots, \ell$ και αθροίζοντας λαμβάνουμε

$$\ell(\varkappa_{\ell+1} + \cdots + \varkappa_n) > (\ell - 1) \sum_{m=1}^{\ell} |\varkappa_m|. \tag{3.18}$$

Η M^n, λόγω του Λήμματος 3.3, έχει ένα σημείο $p \in M$, όπου $\varkappa_i(p) \leq \frac{1}{r}, i = 1, \dots, n$. Η (3.18), στο σημείο p, γίνεται

$$\sum_{m=1}^{\ell} |\varkappa_m| < \frac{\ell(n-\ell)}{r(\ell-1)}.$$

Όμως έχουμε,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n} |\varkappa_m| &= \sum_{m=1}^{\ell} |\varkappa_m| + \sum_{m=\ell+1}^{n} |\varkappa_m| \\ &< \frac{\ell(n-\ell)}{r(\ell-1)} + \frac{(n-\ell)}{r} = \frac{(n-\ell)(2\ell-1)}{r(\ell-1)}. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση

$$g(\ell) := \frac{(n-\ell)(2\ell-1)}{r(\ell-1)}$$

είναι φθίνουσα. Συνεπώς λαμβάνουμε

$$g(\ell) \leq g(2) = \frac{3(n-2)}{r}, \quad \text{αφού } 2 \leq \ell \leq n-1.$$

Καταλήξαμε στη σχέση

$$\sum_{m=1}^{n} |\varkappa_m| < \frac{3(n-2)}{r}.$$

Τελικώς, επειδή

$$\|A\|^2 = \sum_{m=1}^{n} |\varkappa_m|^2 < (\sum_{m=1}^{n} |\varkappa_m|)^2 < \Big(\frac{3(n-2)}{r}\Big)^2,$$

θα έχουμε

$$\inf \|A\| \leq \|A\| < \frac{3(n-2)}{r}. \qquad \square$$

Πόρισμα 3.4 ([10]). *Αν η καμπυλότητα Ricci του γραφήματος $M^n = \Gamma_f$, $n \geq 3$, της $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι αρνητική, τότε $\inf_M \|A\| = 0$ και συνεπώς $\inf_M |\tau| = 0$.*

Παρατήρηση 3.3. Υπάρχουν παραδείγματα (κοίταξε T. Okayasu [23]) πλήρων υπερεπιφανειών στον $\mathbb{R}^{n+1}$, με σταθερή αρνητική αριθμητική καμπυλότητα. Σε αυτά τα παραδείγματα το μήκος $\|A\|$ της απεικόνισης Weingarten είναι μη φραγμένο. Έχει έννοια το ακόλουθο ερώτημα: *Υπάρχουν πλήρεις υπερεπιφάνειες στον $\mathbb{R}^{n+1}$ με φραγμένη μέση καμπυλότητα και αρνητική αριθμητική καμπυλότητα φραγμένη μακριά από το μηδέν;* Όπως προκύπτει από το Πόρισμα 3.3, αν υπάρχει τέτοια υπερεπιφάνεια, δεν μπορεί να είναι γράφημα μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Σχετικό είναι το ακόλουθο

Θεώρημα 3.7 ([10]). *Έστω $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ υπερεπιφάνεια, που είναι γράφημα υπεράνω της κλειστής μπάλλας $\bar{B}_r \subset \mathbb{R}^n$. Αν η μέση καμπυλότητά της δεν αλλάζει πρόσημο, τότε ισχύει*

$$\inf_M \|A\| < \frac{n}{r}. \tag{3.19}$$

Απόδειξη. Αφού η μέση καμπυλότητα H της M δεν αλλάζει πρόσημο, μπορούμε να επιλέξουμε προσανατολισμό έτσι ώστε $H \geq 0$. Υπάρχει σημείο $p \in M$, λόγω του Λήμματος 3.3, όπου $\varkappa_i(p) \leq \frac{1}{r}$, $i = 1, \ldots, n$. Για τις κύριες καμπυλότητες της M στο σημείο p, αφού η $H \geq 0$, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: είτε είναι όλες μη αρνητικές, είτε είναι θετικές και αρνητικές ή μηδέν. Θα εξετάσουμε την κάθε περίπτωση χωριστά.

Περίπτωση 1. Οι κύριες καμπυλότητες στο σημείο p είναι μη αρνητικές. Σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε

$$\|A\|^2(p) = \sum_{i=1}^{n} \varkappa_i^2(p) \leq \frac{n}{r^2},$$

από όπου λαμβάνουμε

$$\inf_M \|A\| \leq \|A\|(p) \leq \frac{\sqrt{n}}{r} < \frac{n}{r}.$$

Περίπτωση 2. Οι κύριες καμπυλότητες στο σημείο p είναι θετικές και αρνητικές ή μηδέν. Έστω ℓ το πλήθος των αρνητικών κύριων καμπυλοτήτων, δηλαδή

$$\varkappa_1(p) \leq \cdots \leq \varkappa_\ell(p) < 0 \leq \varkappa_{\ell+1}(p) \leq \cdots \leq \varkappa_n(p),$$

με $1 \leq \ell \leq n-1$.

Επειδή $H \geq 0$, λόγω του Λήμματος 3.3 θα έχουμε στο σημείο p

$$\frac{n-\ell}{r} \geq \varkappa_{\ell+1}(p)+\cdots+\varkappa_n(p) \geq -\varkappa_1(p)-\cdots-\varkappa_\ell(p) = |\varkappa_1|(p)+\cdots+|\varkappa_\ell|(p).$$

Επειδή

$$\sum_{i=1}^{\ell} |\varkappa_i|^2(p) \leq \big(\sum_{i=1}^{\ell} |\varkappa_i|(p)\big)^2,$$

λαμβάνουμε

$$\sum_{i=1}^{\ell} |\varkappa_i|^2(p) \leq \Big(\frac{n-\ell}{r}\Big)^2.$$

Όμως

$$\begin{aligned}
\|A\|^2(p) &= \sum_{i=1}^{\ell} \varkappa_i^2(p) + \sum_{i=\ell+1}^{n} \varkappa_i^2(p) \\
&= \sum_{i=1}^{\ell} |\varkappa_i|^2(p) + \sum_{i=\ell+1}^{n} \varkappa_i^2(p) \leq \frac{(n-\ell)^2}{r^2} + \frac{(n-\ell)}{r^2} \\
&= \frac{(n-\ell)(n-\ell+1)}{r^2}.
\end{aligned}$$

Η δεξιά πλευρά της παραπάνω ανισότητας είναι φθίνουσα συνάρτηση, ως προς ℓ, και αφού $1 \leq \ell \leq n-1$ θα έχουμε ότι

$$\|A\|^2(p) \leq \frac{n(n-1)}{r^2} < \frac{n^2}{r^2}.$$

Η (3.19) προκύπτει, τώρα, άμεσα. □

Άμεσο είναι το ακόλουθο Πόρισμα το οποίο αποτελεί βελτίωση αποτελέσματος των Θ. Χασάνη και Θ. Βλάχου [16].

Πόρισμα 3.5 ([10]). *Αν $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ είναι γράφημα της $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και η μέση καμπυλότητα δεν αλλάζει πρόσημο, τότε* $\inf \|A\| = 0$.

Το παραπάνω Πόρισμα δεν ισχύει, γενικώς, για πλήρεις υπερεπιφάνειες στον $\mathbb{R}^{n+1}$, όπως προκύπτει για τον κύλινδρο $S^{n-1} \times \mathbb{R}$.

3.3 Ανοικτά προβλήματα

Σε αυτή την παράγραφο θα παραθέσουμε μερικά από την πληθώρα άλυτων προβλημάτων στη θεωρία υπερεπιφανειών, που συνδέονται άμεσα με όσα αναπτύξαμε στην προηγούμενη παράγραφο αυτού του κεφαλαίου.

Πρόβλημα 3.1 (Εικασία J. Milnor, κοίταξε [20] ή S. T. Yau [27]). *Έστω M^2 είναι πλήρης επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ με καμπυλότητα Gauss K όχι ταυτοτικά μηδενική και χωρίς ομφαλικά σημεία. Αν η K διατηρεί πρόσημο τότε το μέτρο $\|A\|$ της απεικόνισης Weingarten A πληροί την*

$$\inf_M \|A\| = 0.$$

Έχουν δοθεί μερικές θετικές απαντήσεις στο παραπάνω πρόβλημα χωρίς να έχει δοθεί, γενικά, θετική ή αρνητική απάντηση.

Ως γενίκευση του παραπάνω προβλήματος αναφέρεται το ακόλουθο

Πρόβλημα 3.2 (B. Smyth και F. Xavier [26]). *Αν $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ είναι πλήρης υπερεπιφάνεια με αρνητική καμπυλότητα Ricci, ισχύει ότι $\inf_M \|A\| = 0$; όπου $\|A\|$ είναι το μέτρο της απεικόνισης Weingarten.*

Οι B. Smyth και F. Xavier έδωσαν θετική απάντηση για $n = 3$. Για $n > 3$ απέδειξαν ότι: Αν η καμπυλότητα τομής δεν λαμβάνει όλες τις πραγματικές τιμές, τότε η καμπυλότητα Ricci δεν μπορεί να είναι φραγμένη μακριά απο το μηδέν (κοίταξε και [6], Μεταπτυχιακή Διατριβή). Για υπερεπιφάνειες, που είναι γραφήματα συναρτήσεων $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, όπως προκύπτει από το Πόρισμα 3.4, η απάντηση είναι θετική.

Πρόβλημα 3.3 (F. Fontenele [10]). *Υπάρχει πλήρης υπερεπιφάνεια $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ με φραγμένη μέση καμπυλότητα και αρνητική αριθμητική καμπυλότητα φραγμένη μακριά από το μηδέν;*

Αν στο παραπάνω πρόβλημα υπάρχει θετική απάντηση, τότε η υπερεπιφάνεια δεν μπορεί να είναι γράφημα μιας $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, σύμφωνα με το Πόρισμα 3.4.

Πρόβλημα 3.4 (F. Fontenele [10]). *Αν η υπερεπιφάνεια $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ είναι ολικό γράφημα της $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ισχύει ότι*

$$\inf_M |\tau| = 0;$$

Δηλαδή, ισχύει το Πόρισμα 3.3 χωρίς την υπόθεση ότι η μέση καμπυλότητα είναι φραγμένη;

Πρόβλημα 3.5 (R. Reilly [25] και S. T. Yau [27]). *Υπάρχει πλήρης υπερεπιφάνεια στον $\mathbb{R}^{n+1}$ με αρνητική καμπυλότητα Ricci φραγμένη μακριά από το μηδέν;*

Το παραπάνω Πρόβλημα έχει σχέση με το Πρόβλημα 3.2. Το σχόλιο που ακολουθεί το Πρόβλημα 3.2 αφορά και αυτό το Πρόβλημα.

Βιβλιογραφία

[1] W. Blaschke, *Kreis and Kugel*, 2. Aufl., Walter de Gruyter, Berlin, 1956.

[2] L. Caffarelli, L. Niremberg and J. Spruck, *The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations III: Functions of the eigenvalues of the Hessian*, Acta Math. **155**(1985), 261-301.

[3] L. Caffarelli, L. Niremberg and J. Spruck, *Nonlinear second order elliptic equations IV. Starshaped compact Weingarten hypersurfaces*, Current topics in partial differential equations, 1-26, Kinokuniya, Tokyo, 1986.

[4] S. S. Chern, *On the curvature of a piece of a hypersurface in Euclidean space*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **29**(1956), 77-91.

[5] M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhauser, 1992.

[6] Δ. Δρόσου, *Το θεώρημα Efimov για υπερεπιφάνειες*, Μεταπτυχιακή Διατριβή, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, 2003.

[7] N. V. Efimov, *Hyperbolic problems in the theory of surfaces*, Proc. Int. Congress Math. Moscow (1966), Amer. Math. Soc. Transl. **70**(1968), 26-38.

[8] M. F. Elbert, *On complete graphs with negative r-mean curvature*, Proc. Amer. Math. Soc. **128**(2000), 1443-1450.

[9] H. Flanders, *Remark on mean curvature*, J. London Math. Soc. **41**(1966), 364-366.

[10] F. Fontenele, *Heinz type estimates for graphs in Euclidean space*, Proc. Amer. Math. Soc. **138**(2010), 4469-4478.

[11] F. Fontenele and S. L. Silva, *A tangency principle and applications*, Illinois J. Math. **45**(2001), 213-228.

[12] F. Fontenele and S. L. Silva, *Sharp estimates for the size of balls in the complement of a hypersurface*, Geom. Dedicata **115**(2005), 163-179.

[13] L. Garding, *An inequality for hyperbolic polynomials*, J. Math. Mech. **82**(1959), 957-965.

[14] I. Gelfand, *Lectures on linear algrebra*, Interscience Publishers, New York-London, 1961.

[15] G. H. Hardy, J. E. Littewood and G. Polya, *Inequalities*, Cambridge Math. Libr., Cambridge, 1934.

[16] T. Hasanis and T. Vlachos, *Curvature properties of hypersurfaces*, Arch. Math. (Basel) **82**(2004), 570-576.

[17] E. Heinz, *Über Frächen mit eineindeutiger Projektion auf eine Ebene, deren Krümmunden durch Ungleichungen eingeschränkt sind.*, Math. Ann. **129**(1955), 451-454.

[18] N. Hicks, *Notes on Differential Geometry*, Van Nostrand Reinhold, 1965.

[19] J. Jost, *Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 2002.

[20] T. Klotz and R. Osserman, *Complete Surfaces in E^3 with constant mean curvature*, Comment. Math. Helv. **41**(1966-67), 313-318.

[21] D. Koutroufiotis, *Elementary Geometric Applications of a maximum Principle for Nonlinear Elliptic Operators*, Arc. Math. **XXIV**(1973), 97-99.

[22] Δ. Κουτρουφιώτης, *Διαφορική Γεωμετρία*, Πανεμιστήμιον Ιωαννίνων, 1994.

[23] T. Okayasu, $O(2) \times O(2)$- *invariant hypersurfaces with constant negative scalar curvature in E^4*, Proc. Amer. Math. Soc. **107**(1989), 1045-1050.

[24] P. Pucci and J. Serrin, *The Maximum Principle*, Birkhauser, 2007.

[25] R. Reilly, *On the Hessian of a function and the curvatures of its graph*, Michigan Math. J. **20**(1973), 373-383.

[26] B. Smyth and F. Xavier, *Efimov' s theorem in dimension greater than two*, Invent. Math. **90**(1987), 443-450.

[27] S. T. Yau, *Seminar on differential geometry*, Annals of Mathematics Studies vol.102. Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1982.

Περίληψη

Η αρχή μεγίστου για μη γραμμικούς δεύτερης τάξης ελλειπτικούς τελεστές εφαρμόζεται στη Διαφορική Γεωμετρία σε προβλήματα μοναδικότητας και για πληροφορίες, που αφορούν το μέγεθος συμπαγών υπερεπιφανειών. Μια κατάλληλη μορφή της αρχής μεγίστου είναι η ακόλουθη:

Έστωσαν $f(x)$, $g(x)$ πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες και τάξης C^2 στο φραγμένο χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, που πληρούν την

$$\Phi(g_{ij}(x), g_i(x), g(x), x) \geq \Phi(f_{ij}(x), f_i(x), f(x), x),$$

όπου Φ είναι μια πραγματική συνάρτηση τάξης C^1, ως προς όλες τις μεταβλητές της. Υποθέτουμε ότι η Φ είναι ελλειπτική ως προς τις συναρτήσεις $tf + (1-t)g$, σε κάθε σημείο του Ω και για κάθε $t \in [0,1]$. Αν $g(x) \leq f(x)$, για κάθε $x \in \Omega$ και $g(x_0) = f(x_0)$ για κάποιο $x_0 \in \Omega$, τότε ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Omega$.

Οι F. Fontenele και S. L. Silva αποδεικνύουν, κάνοντας χρήση της παραπάνω μορφής της αρχής μεγίστου, ένα Θεώρημα Επαφής. Δηλαδή, δίνουν ικανές γεωμετρικές συνθήκες ώστε δυο υπερεπι-

φάνειες, που εφάπτονται σε ένα σημείο p_0, ταυτίζονται ως σύνολα σε μια περιοχή αυτού του σημείου. Ως εφαρμογές αυτού του θεωρήματος επαφής δίνονται φράγματα για την ακτίνα της μεγαλύτερης σφαίρας που κάθεται μέσα σε μια συμπαγή υπερεπιφάνεια και για την ακτίνα της μικρότερης σφαίρας που περιβάλλει μια συμπαγή υπερεπιφάνεια, όταν η μέση καμπυλότητα m-τάξης H_m είναι, κατάλληλα, άνω και κάτω φραγμένη. Αυτά τα αποτελέσματα γενικεύουν αποτελέσματα των W. Blaschke, Δ. Κουτρουφιώτη και άλλων. Επιπλέον, ο F. Fontenele με τη χρήση του Θεωρήματος Επαφής, δίνει εκτιμήσεις για τις διάφορες καμπυλότητες ολικών γραφημάτων. Αυτές οι εκτιμήσεις βελτιώνουν εκτιμήσεις, που έχουν δοθεί από τους E. Heinz, S. S. Chern, M. Elbert και άλλους.

Abstract

The maximum principle for nonlinear, second-order, elliptic operators has been used in Differential Geometry to obtain uniqueness theorems and to yield information on the size of compact hypersurfaces.

A weak form of this maximum principle will be sufficient, which we will now formulate.

Let $f(x)$, $g(x)$ be real-valued functions of class C^2 in some bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, satisfying in Ω the inequality

$$\Phi(g_{ij}(x), g_i(x), g(x), x) \geq \Phi(f_{ij}(x), f_i(x), f(x), x),$$

where Φ is a real-valued function of class C^1 for all values of its arguments. Assume that Φ is elliptic with respect to the functions $tf + (1-t)g$ at every point of Ω and all $t \in [0,1]$. If $g(x) \leq f(x)$ in Ω and $f(x_0) = g(x_0)$ at some point $x_0 \in \Omega$, then $f(x) = g(x)$ for all $x \in \Omega$.

To prove this, one linearizes in a well-known fashion,

$$\Phi(f_{ij}(x), f_i(x), f(x), x) - \Phi(g_{ij}(x), g_i(x), g(x), x) = L(f(x) - g(x)) \leq 0,$$

and then applies E. Hopf's maximum principle for linear operators.

F. Fontenele and S. L. Silva established a tangency principle for hypersurfaces of a Euclidean space. That is, they obtained sufficient geometric conditions for two hypersurfaces to coincide, as sets, in a neighborhood of a tangency point. As applications of this tangency principle, under certain conditions on the m-mean curvature H_m, have obtained sharp estimates on size of the greatest ball that fits inside a connected compact hypersurface embedded in a Euclidean space and on the size of the smallest ball that encloses a compact hypersurface. These generalize results of W. Blaschke, D. Koutroufiotis and others. In addition, F. Fontenele obtained new sharp curvature estimates for the entire graphs in a Euclidean space which improve results of E. Heinz, S. S. Chern, M. Elbert, and of T. Hasanis and T. Vlachos.