ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ BERNSTEIN ΓΙΑ ΠΛΗΡΗ ΕΛΑΧΙΣΤΙΚΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

ΧΡΗΣΤΟΣ ΟΝΤΙ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 2012

Η παρούσα **Μεταπτυχιακή Διατριβή** εκπονήθηκε στα πλαίσια του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων υπό την επίβλεψη του **Καθηγητή Θωμά Χασάνη**.

Τριμελης Επιτροπη Κρισης

Θωμάς Χασάνης, Καθηγητής
του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
(Επιβλέπων Καθηγητής)

Χρήστος Μπαϊκούσης, Καθηγητής
του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Θεόδωρος Βλάχος, Αναπληρωτής Καθηγητής
του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Αφιερώνεται στην μητέρα μου Αθηνά, την αδερφή μου Νίκη, τον παππού μου Χρήστο και την γιαγιά μου Νίκη.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέπων μου, Καθηγητή Θωμά Χασάνη, για τις αρκετές συζητήσεις που είχαμε επί του θέματος και για την συνεχή υποστήριξη του απέναντι μου. Θα ήθελα να ευχαριστήσω επίσης τον Αναπληρωτή Καθηγητή Θεόδωρο Βλάχο και τον Καθηγητή Χρήστο Μπαϊκούση που δέχθηκαν να είναι στην τριμελή επιτροπή κρίσης καθώς και για τις υποδείξεις τους και παρατηρήσεις τους. Θα ήθελα τέλος να ευχαριστήσω τον πάρα πολύ καλό μου φίλο και συνάδελφο κ. Κλεάνθη Πολυμεράκη για τις συνεχείς συζητήσεις μας αλλά και για τη φιλία του.

Πρόλογος

Ο S. Bernstein το 1915 στην εργασία [2] απέδειξε ότι: Αν $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι λύση, ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}^2$, της ελαχιστικής εξίσωσης (minimal surface equation)

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0,$$

τότε $u(x,y) = \alpha x + \beta y + \gamma$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ είναι σταθερές.

Για το παραπάνω αποτέλεσμα, που είναι γνωστό ως το *κλασσικό θεώρημα του Bernstein* έχει δοθεί αριθμός αποδείξεων κυρίως με μεθόδους μιγαδικής ανάλυσης με πιο αξιοπρόσεκτες αυτές του L. Bers [3] και του J. Nitsche [15].

Ο E. Heinz το 1952 στην εργασία [11] εξέτασε επιφάνειες που είναι γραφήματα λύσεων της ελαχιστικής εξίσωσης στο δίσκο $D_R = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| < R\}$ και απέδειξε ότι οι κύριες καμπυλότητες k_1, k_2 της επιφάνειας πληρούν τη σχέση $(k_1^2 + k_2^2)(x_0) \leq \frac{c}{R^2}$, όπου c είναι μια σταθερά. Αυτή η εκτίμηση δίνει απόδειξη, χωρίς μιγαδική ανάλυση, του κλασσικού θεωρήματος Bernstein.

Παράλληλα άρχισαν να γίνονται προσπάθειες απόδειξης του θεωρήματος Bernstein σε μεγαλύτερες διαστάσεις. Πιο συγκεκριμένα διατυπώθηκε η εικασία, γνωστή ως εικασία Bernstein (Bernstein conjecture), ότι *οι μόνες λύσεις* $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *της ελαχιστικής εξίσωσης είναι οι ομοπαραλληλικές συναρτήσεις, δηλαδή* $u(x^1, x^2, ..., x^n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^i + \alpha_0$*, όπου* $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$ *σταθερές.*

Ο W.H. Fleming το 1962 στην πολύ ενδιαφέρουσα εργασία του [10] έλυσε το πρόβλημα του Plateau για προσανατολισμένες επιφάνειες, χρησιμοποιώντας Γεωμετρική Θεωρία Μέτρου, και παρατήρησε ότι η τεχνική που χρησιμοποιείται για να αποδειχθεί η κανονικότητα της λύσης, μπορεί να δώσει μια καινούργια απόδειξη του κλασσικού θεωρήματος του Bernstein και το σημαντικότερο ότι εφαρμόζεται και σε μεγαλύτερες διαστάσεις. Πιο συγκεκριμένα, αν Σ είναι η επιφάνεια γράφημα μιας λύσης της ελαχιστικής εξίσωσης και $p \in \Sigma$, τότε με κατάλληλες συστολές της Σ, κατασκευάζεται μια οικογένεια ευσταθών ελαχιστικών επιφανειών Σ_r με σύνορο στην μοναδιαία σφαίρα κέντρου p. Οδηγούμαστε, έτσι, στην μελέτη ευσταθών ελαχιστικών κώνων K με κορυφή το p και σύνορο στην μοναδιαία σφαίρα. Ο Fleming διατύπωσε το εξής ισοδύναμο, με την εικασία του Bernstein, πρόβλημα: *Αν* K *είναι ευσταθής ελαχιστικός κώνος διάστασης* n *στον* $\mathbb{R}^{n+1}$ *με κορυφή το κέντρο της μοναδιαίας σφαίρας* S^n *και σύνορο στην* S^n *τότε ο* K *είναι* n*-διάστατος δίσκος.* Σε μια τέτοια περίπτωση η Σ είναι επίπεδο.

Ο E. De Giorgi το 1965 στην εργασία του [7] βελτίωσε τη διαδικασία του Fleming δείχνοντας ότι: *Η απόδειξη του ισοδύναμου προβλήματος του Fleming για τους κώνους διάστασης* n *συνεπάγεται την ισχύ της εικασίας Bernstein για λύσεις της ελαχιστικής εξίσωσης στον* $\mathbb{R}^{n+1}$.

Ο ίδιος ο Fleming απέδειξε το ισοδύναμο πρόβλημα για $n = 2$ και ο F.J. Almgren το 1966 στην εργασία [1] για $n = 3$. Συνδυάζοντας με το αποτέλεσμα του E. De Giorgi αποδεικνύεται η εικασία Bernstein για $n = 3$ και 4.

Ο J. Simons το 1968 στην εργασία [19] μελέτησε ελαχιστικούς κώνους διάστασης n στον $\mathbb{R}^{n+1}$ με περισσότερη προσοχή. Ένα από τα κυριότερα αποτελέσματα του σε αυτή την εργασία είναι μια ταυτότητα, γνωστή στη βιβλιογραφία ως τύπος του Simons, η οποία δίνει την λαπλασιανή του τετραγώνου του μήκους της δεύτερης θεμελιώδους μορφής μιας ελαχιστικής υπερεπιφάνειας στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^{n+1}$. Συνδυάζοντας αυτήν την ταυτότητα με την πρώτη ιδιοτιμή ενός προβλήματος ιδιοτιμών απέδειξε το ισοδύναμο πρόβλημα του Fleming για $n \leq 6$. Η εργασία του J. Simons αποκαθιστά, πλέον, θετικά την εικασία του Bernstein για $n \leq 7$ ως θεώρημα του Bernstein: *Οι μόνες λύσεις* $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \leq 7$, *της ελαχιστικής εξίσωσης είναι οι ομοπαραλληλικές συναρτήσεις.*

Οι E. Bombieri, E. De Giorgi και E. Giusti το 1969 στην εργασία [4] απέδειξαν ότι η εικασία του Bernstein δεν είναι αληθής για $n \geq 8$.

Οι R. Schoen, L. Simon και S.T. Yau το 1975 στην εργασία [17] απέδειξαν το θεώρημα του Bernstein για $n \leq 5$, με μεθόδους γεωμετρικής ανάλυσης.

Σημειώνουμε ότι η εικασία Bernstein έχει αποδειχθεί ανεξαρτήτως διάστασης με περιορισμούς πάνω στην κλίση της λύσης από J. Moser [14], K. Ecker και G. Huisken [9].

Στην παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή θα ασχοληθούμε με το θεώρημα του Bernstein. Στο πρώτο κεφάλαιο δίνουμε έννοιες από τη Γεωμετρία

Riemann και τη θεωρία υποπολυπτυγμάτων (submanifolds). Στο δεύτερο κεφάλαιο θα αποδείξουμε την πολύ σημαντική ταυτότητα, γνωστή ως ¨τύπος του Simons¨. Επιπλέον θα δούμε την πρώτη και δεύτερη μεταβολή του εμβαδού υποπολυπτύγματος κυρίως σε χώρους σταθερής καμπυλότητας τομής. Στο πρώτο μέρος του τελευταίου κεφαλαίου θα ασχοληθούμε με το σπουδαίο αποτέλεσμα του J. Simons για τους ευσταθείς κώνους και θα δώσουμε ένα παράδειγμα ευσταθούς κώνου στον $\mathbb{R}^8$ που δεν είναι δίσκος. Στο δεύτερο μέρος αυτού του κεφαλαίου θα δώσουμε την απόδειξη, με μεθόδους γεωμετρικής ανάλυσης, του θεωρήματος του Bernstein που δόθηκε από τους R. Schoen, L. Simon και S.T. Yau [17] για $n \leq 5$. Τέλος, θα περιγράψουμε την απόδειξη του J. Simons για το θεώρημα Bernstein, με μεθόδους γεωμετρικής θεωρίας μέτρου, για $n \leq 7$.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Προκαταρκτικά

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δώσουμε βασικά στοιχεία της Γεωμετρίας Riemann. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στα βιβλία [5],[6] [8],[12],[13],[16].

1.1 Πολυπτύγματα Riemann

Έστω M ένα διαφορίσιμο πολύπτυγμα διάστασης n. Συμβολίζουμε με $\Delta(M)$ το σύνολο των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων και με $D(M)$ το σύνολο των διαφορίσιμων συναρτήσεων στο M αντίστοιχα. Ένα σύνολο το οποίο αποτελείται από n διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$, που είναι μοναδιαία και κάθετα ανά δύο σε κάθε σημείο ενός ανοιχτού υποσυνόλου U του M λέγεται *ορθομοναδιαίο πλαίσιο* του M στο U.

Μια *γραμμική συνοχή (linear connection)* στο M είναι μια απεικόνιση

$$\nabla : \Delta(M) \times \Delta(M) \longrightarrow \Delta(M), \quad (X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$$

με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $\nabla_{X_1+X_2}Y = \nabla_{X_1}Y + \nabla_{X_2}Y, \;\; \nabla_X(Y_1+Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$

2. $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y, \;\; \nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y,$

για κάθε $f \in D(M)$ και $X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in \Delta(M)$. Το διανυσματικό πεδίο $\nabla_X Y$ λέγεται *συναλλοίωτη παράγωγος (covariant derivative)* του Y στη διεύθυνση X ως προς τη συνοχή ∇.

Μια *μετρική Riemann*, $\langle , \rangle$, στο M είναι μια αντιστοιχία η οποία σε κάθε σημείο $p \in M$ αντιστοιχεί μια συμμετρική, θετικά οριστική, διγραμμική μορφή του T_pM, και η οποία είναι διαφορίσιμη με την εξής έννοια: για κάθε $X, Y \in \Delta(M)$ η συνάρτηση $p \mapsto \langle X, Y\rangle_p := \langle X_p, Y_p\rangle$ είναι διαφορίσιμη. Το M εφοδιασμένο με μια μετρική λέγεται *πολύπτυγμα Riemann*.

Αν θεωρήσουμε χάρτη (U, ϕ) στο M με συντεταγμένες $\{x^1, x^2, ..., x^n\}$ και $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ τα αντίστοιχα βασικά διανυσματικά πεδία, τότε οι συναρτήσεις

$$g_{ij} : U \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; p \mapsto g_{ij}(p)$$

που ορίζονται ως εξής

$$g_{ij}(p) := \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}|_p \right\rangle$$

λέγονται *συνιστώσες της μετρικής* $\langle , \rangle$ ως προς τον χάρτη (U, ϕ). Αν $\{dx^1, dx^2, ..., dx^n\}$ είναι η δυϊκή βάση των $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ τότε η

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i dx^j$$

λέγεται *πρώτη θεμελιώδης μορφή* του M. Αν το M είναι προσανατολισμένο, χρησιμοποιώντας τις συνιστώσες της μετρικής ορίζεται η διαφορική μορφή βαθμού n με τοπική έκφραση

$$dM = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge ... \wedge dx^n,$$

η οποία λέγεται *στοιχείο όγκου (volume element)* του M.

Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Γεωμετρίας Riemann μας εγγυάται ότι για δεδομένη μετρική στο M υπάρχει μοναδική γραμμική συνοχή, η οποία λέγεται *συνοχή Riemann* ή *συνοχή Levi-Civita*, και η οποία έχει επιπλέον τις παρακάτω δύο ιδιότητες:

1. $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$
2. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$,

για κάθε $X, Y, Z \in \Delta(M)$, όπου $[X, Y]$ είναι το γινόμενο Lie των X, Y.

Έστωσαν πολυπτύγματα Riemann M και $\overline{M}$ με διαστάσεις m και n, αντίστοιχα, και $f : M \longrightarrow \overline{M}$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση. Συμβολίζουμε με T_pM και $T_{f(p)}\overline{M}$ τους εφαπτόμενους χώρους στα σημεία p και $f(p)$, αντίστοιχα. Ένα διανυσματικό πεδίο *κατά μήκος της* f είναι μια απεικόνιση W η οποία σε κάθε σημείο $p \in M$ αντιστοιχεί ένα διάνυσμα $W(p) \in T_{f(p)}\overline{M}$. Αν $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ είναι τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο περί το $f(p)$, τότε για κάθε $q \in U$, U περιοχή του p, έχουμε την παρακάτω ανάλυση

$$W(q) = \sum_{i=1}^{n} w^i(q) E_i(f(q)),$$

όπου $w^i,\ i = 1, 2, ..., n,$ συναρτήσεις ορισμένες στο U. Το διανυσματικό πεδίο W κατά μήκος της f θα λέγεται *διαφορίσιμο* όταν οι συναρτήσεις $w^i,\ i = 1, 2, ..., n,$ είναι διαφορίσιμες. Αν $v \in T_qM$ τότε ορίζουμε την συναλλοίωτη παράγωγο $\tilde{\nabla}_v W$,*κατά μήκος της* f, του W στην διεύθυνση v ως εξής

$$\tilde{\nabla}_v W = \sum_{i=1}^{n} v(w^i)E_i(f(q)) + \sum_{i=1}^{n} \overline{\nabla}_{df(v)}E_i,$$

όπου $\overline{\nabla}$ η συνοχή Levi-Civita του $\overline{M}$. Είναι προφανές ότι αν $X \in \Delta(M)$ τότε το $df(X)$ είναι διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της $f : M \longrightarrow \overline{M}$. Η $\tilde{\nabla}$ ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \tilde{\nabla}_X Y, Z\rangle + \langle Y, \tilde{\nabla}_X Z\rangle, \tag{1.1}$$

$$df([V, W]) = \tilde{\nabla}_V df(W) - \tilde{\nabla}_W df(V), \tag{1.2}$$

για κάθε $X, V, W \in \Delta(M)$ και Y, Z διανυσματικά πεδία κατά μήκος της f.

Θεωρούμε, για τη συνέχεια, πολύπτυγμα Riemann $(M, \langle,\rangle)$ διάστασης n και έστω ∇ η συνοχή Levi-Civita αυτού. Ένας τανυστής τύπου (r, s), όπου $s = 0$ ή 1, στο M είναι μια απεικόνιση

$$T : \underbrace{\Delta(M) \times \Delta(M) \times ... \times \Delta(M)}_{r-\text{φορές}} \longrightarrow \begin{cases} D(M), \text{ αν } s = 0, \\ \Delta(M), \text{ αν } s = 1, \end{cases}$$

η οποία είναι $D(M)$-γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή. Αν $X \in \Delta(M)$ τότε η *συναλλοίωτη παράγωγος του* T *στη διεύθυνση* X είναι ο τανυστής

$\nabla_X T$ τύπου (r, s) που ορίζεται ως

$$\begin{aligned}(\nabla_X T)(X_1, X_2, ..., X_r) &= \nabla_X(T(X_1, X_2, ..., X_r)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{r} T(X_1, ..., X_{i-1}, \nabla_X X_i, X_{i+1}, ..., X_r),\end{aligned}$$

όπου θέτουμε $\nabla_X(T(X_1, X_2, ..., X_r)) = X(T(X_1, X_2, ..., X_r))$ αν $s = 0$. Επίσης ορίζουμε την *συναλλοίωτη παράγωγο του* T και συμβολίζουμε με ∇T, τον $(r+1, s)$ τανυστή

$$\nabla T(X_1, X_2, ..., X_{r+1}) := (\nabla_{X_1} T)(X_2, ..., X_{r+1}).$$

Η απεικόνιση

$$R : \Delta(M) \times \Delta(M) \times \Delta(M) \longrightarrow \Delta(M),\ (X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z,$$

που ορίζεται ως

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,\ \text{όπου } X, Y, Z \in \Delta(M),$$

είναι ένας $(3, 1)$ τανυστής και λέγεται *τανυστής καμπυλότητας* του M. Με τη βοήθεια του τανυστή R ορίζονται οι παρακάτω καμπυλότητες σε κάθε σημείο του πολυπτύγματος M.

Έστω $p \in M$ και $X, Y \in T_p M$ μοναδιαία και κάθετα. Η *καμπυλότητα τομής* του M στο σημείο p ως προς το επίπεδο σ που γεννάται από τα X, Y είναι ο αριθμός

$$K(p, \sigma) = K(X \wedge Y) := \langle R(X, Y)Y, X\rangle.$$

Αν X μοναδιαίο διάνυσμα του $T_p M$ και $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ είναι ορθομοναδιαία βάση με $e_n = X$, τότε η ποσότητα

$$Ric(X) := \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(e_i, X)X, e_i\rangle$$

λέγεται *καμπυλότητα Ricci* του M στη διεύθυνση X.

Για $X \in \Delta(M)$ η *απόκλισή* του, $\operatorname{div} X$, ορίζεται ως η διαφορίσιμη συνάρτηση στο M

$$\operatorname{trace}(Z \longrightarrow \nabla_Z X), \quad Z \in \Delta(M),$$

η οποία ως προς τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ έχει την έκφραση

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle.$$

Ως προς τοπικό σύστημα συντεταγμένων $\{x^1, x^2, ..., x^n\}$ με αντίστοιχα βασικά διανυσματικά πεδία $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ λαμβάνει την έκφραση

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} X^i \right),$$

όπου $X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ και $g = \det(g_{ij})$.

Έστω $f \in D(M)$. Η *κλίση* της f ορίζεται ως το μοναδικό διανυσματικό πεδίο $\nabla f \in \Delta(M)$ που πληροί την σχέση

$$\langle X, \nabla f \rangle := df(X) = X(f)$$

για κάθε $X \in \Delta(M)$. Ως προς τοπικό σύστημα συντεταγμένων $\{x^1, x^2, ..., x^n\}$ με αντίστοιχα βασικά διανυσματικά πεδία $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ έχει την έκφραση

$$\nabla f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i},$$

όπου g^{ij} τα στοιχεία του αντίστροφου πίνακα του (g_{ij}).

Η *λαπλασιανή* της f συμβολίζεται με Δf και ορίζεται ως

$$\Delta f := \operatorname{div}(\nabla f).$$

Εύκολα προκύπτει ότι η έκφραση της Δf ως προς τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ είναι

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \{E_i(E_i f) - (\nabla_{E_i} E_i)\, f\} \tag{1.3}$$

και σε τοπικό σύστημα συντεταγμένων $\{x^1, x^2, ..., x^n\}$ με αντίστοιχα βασικά διανυσματικά πεδία $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ είναι

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}\; g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}(f)), \tag{1.4}$$

όπου $g = \det(g_{ij})$ και g^{ij} τα στοιχεία του αντίστροφου πίνακα του (g_{ij}).

Ισχύουν οι παρακάτω ταυτότητες

$$\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle \tag{1.5}$$

$$\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + \langle \nabla f, X\rangle, \tag{1.6}$$

όπου $f, g \in D(M)$ και $X \in \Delta(M)$.

Θα υπενθυμίσουμε δύο κλασσικά Θεωρήματα της Ανάλυσης, τα Θεωρήματα Stokes και Gauss.

Θεώρημα 1.1. (Stokes) *Έστω M^n προσανατολισμένο πολύπτυγμα Riemann με σύνορο ∂M. Αν ω είναι μια $(n-1)$-διαφορική μορφή, με συμπαγές στήριγμα στο M, τότε ισχύει*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^*\omega,$$

όπου $i : \partial M \longrightarrow M$ είναι η συνάρτηση έγκλεισης. Στην περίπτωση όπου το πολύπτυγμα δεν έχει σύνορο, ισχύει

$$\int_M d\omega = 0,$$

για κάθε $(n-1)$-διαφορική μορφή ω με συμπαγές στήριγμα στο M.

Θεώρημα 1.2. (Gauss) *Έστωσαν M^n προσανατολισμένο πολύπτυγμα Riemann χωρίς σύνορο, και $X \in \Delta(M)$ με συμπαγές στήριγμα. Τότε*

$$\int_M (\operatorname{div} X) dM = 0,$$

όπου $\operatorname{div} X$ η απόκλιση του διανυσματικού πεδίου X στο M^n.

Παρατήρηση 1.1. *Χρησιμοποιώντας την (1.6) και το Θεώρημα του Stokes προκύπτει*

$$\int_M f \Delta g dM = \int_M g \Delta f dM \tag{1.7}$$

για $f, g \in D(M)$ με συμπαγή στηρίγματα.

Αναφέρουμε, τώρα, δύο γνωστές ανισότητες.

1. *ε-ανισότητα του Cauchy*: Για $a, b \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$ab \leq \frac{\varepsilon a^2}{2} + \frac{b^2}{2\varepsilon}. \tag{1.8}$$

2. *Ανισότητα Hölder*: Έστωσαν p, q με $1 < p, q \leq \infty$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Αν $f \in \mathcal{L}^p(M)$ και $g \in \mathcal{L}^q(M)$, όπου M πολύπτυγμα Riemann, τότε

$$\int_M |fg| dM \leq \left(\int_M |f|^p dM \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_M |g|^q dM \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.9}$$

Θεωρούμε, τώρα, πολυπτύγματα M και $\overline{M}$ με διαστάσεις $n, n+k$ αντίστοιχα που πληρούν, ως σύνολα, τη σχέση $M \subset \overline{M}$. Αν η απεικόνιση της έγκλεισης $i : M \longrightarrow \overline{M}$ είναι εμφύτευση, τότε το M λέγεται *υποπολύπτυγμα (submanifold)* του $\overline{M}$. Αν το $\overline{M}$ είναι πολύπτυγμα Riemann και το M φέρει την επαγόμενη μετρική, τότε για κάθε $p \in M$ ο εφαπτόμενος χώρος $T_p\overline{M}$ αναλύεται σε ορθογώνιο ευθύ άθροισμα

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

όπου $(T_pM)^\perp$ είναι το ορθοσυμπλήρωμα του $n-$διάστατου υποχώρου T_pM στον $(n+k)-$διάστατο Ευκλείδειο χώρο $T_p\overline{M}$. Ο χώρος $(T_pM)^\perp$ λέγεται *κάθετος χώρος (normal space)* του υποπολυπτύγματος M στο $\overline{M}$, στο σημείο p. Κάθε διάνυσμα $v \in T_p\overline{M}$ γράφεται μονοσήμαντα ως

$$v = v^\top + v^\perp, \text{ όπου } v^\top \in T_pM \text{ και } v^\perp \in (T_pM)^\perp.$$

Συμβολίζουμε με $N(M)$ το σύνολο των κάθετων διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων του M στο $\overline{M}$. Για κάθε διανυσματικό πεδίο X, κατά μήκος της $i : M \longrightarrow \overline{M}$, έχουμε την παρακάτω ανάλυση

$$X = X^\top + X^\perp, \text{ όπου } X^\top \in \Delta(M) \text{ και } X^\perp \in N(M).$$

Συμβολίζουμε με $\nabla,\ \overline{\nabla}$ τις συνοχές Levi-Civita των M και $\overline{M}$, αντίστοιχα. Τότε για κάθε $X, Y \in \Delta(M)$ έχουμε

$$\overline{\nabla}_X Y = \left(\overline{\nabla}_X Y\right)^\top + \left(\overline{\nabla}_X Y\right)^\perp.$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι $\left(\overline{\nabla}_X Y\right)^\top = \nabla_X Y$. Με αφορμή την παραπάνω σχέση θεωρούμε την $D(M)-$διγραμμική και συμμετρική απεικόνιση

$$B : \Delta(M) \times \Delta(M) \longrightarrow N(M),\ (X,Y) \mapsto B(X,Y),$$

που ορίζεται ως

$$B(X,Y) := \left(\overline{\nabla}_X Y\right)^\perp$$

και ονομάζεται *δεύτερη θεμελιώδης μορφή (second fundamental form)* του M στο $\overline{M}$. Η σχέση

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X,Y), \quad X, Y \in \Delta(M)$$

λέγεται *τύπος του Gauss*. Στην περίπτωση όπου $\overline{M} \subset N$, N πολύπτυγμα Riemann, θα πληρούται η σχέση

$$\tilde{B}(X,Y) = B_M(X,Y) + B_{\overline{M}}(X,Y), \tag{1.10}$$

για κάθε $X, Y \in \Delta(M)$, όπου $\tilde{B}$ η δεύτερη θεμελιώδης μορφή του M στο N, B_M η δεύτερη θεμελιώδης μορφή του M στο $\overline{M}$ και $B_{\overline{M}}$ η δεύτερη θεμελιώδης μορφή του $\overline{M}$ στο N.

Δοθέντος $\xi \in N(M)$ ο αυτοπροσαρτημένος (self-adjoint) γραμμικός τελεστής

$$A_\xi : \Delta(M) \longrightarrow \Delta(M)$$

που δίνεται από τη σχέση

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle B(X,Y), \xi\rangle, \quad X, Y \in \Delta(M)$$

λέγεται απεικόνιση *Weingarten* του M στη διεύθυνση ξ.

Έστωσαν χάρτης (U, ϕ) στο M με συντεταγμένες $\{x^1, x^2, ..., x^n\}$ και $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ τα αντίστοιχα βασικά διανυσματικά πεδία. Αν θεωρήσουμε $\{\xi_1, \xi_2, . .., \xi_k\}$ κάθετο και ορθομοναδιαίο πλαίσιο του U στο M τότε

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_{m=1}^{k} \left\langle B\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right), \xi_m\right\rangle \xi_m.$$

Οι συναρτήσεις

$$b_{ij}^m : U \longrightarrow \mathbb{R}, \ p \mapsto b_{ij}^m(p)$$

που ορίζονται ως εξής

$$b_{ij}^m = \left\langle B\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right), \xi_m\right\rangle = \left\langle A_{\xi_m}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle$$

λέγονται *συνιστώσες της δεύτερης θεμελιώδους μορφής*, στην διεύθυνση ξ_m, ως προς τον χάρτη (U, ϕ).

Θεωρούμε, στη συνέχεια, την απεικόνιση

$$\nabla^{\perp} : \Delta(M) \times N(M) \longrightarrow N(M), \ (X, \xi) \mapsto \nabla^{\perp}_X \xi,$$

που ορίζεται ως

$$\nabla^{\perp}_X \xi := \left(\overline{\nabla}_X \xi\right)^{\perp}$$

και ονομάζεται *κάθετη συνοχή* του M στο $\overline{M}$. Ισχύει ο παρακάτω τύπος

$$\overline{\nabla}_X \xi = \left(\overline{\nabla}_X \xi\right)^{\top} + \left(\overline{\nabla}_X \xi\right)^{\perp} = -A_{\xi} X + \nabla^{\perp}_X \xi, \tag{1.11}$$

ο οποίος λέγεται *τύπος του Weingarten.*

Αν $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ είναι τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο στο M, τότε το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} B(E_i, E_i)$$

λέγεται *διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας (mean curvature vector field).* Στην περίπτωση όπου $\vec{H} = 0$ το υποπολύπτυγμα M του $\overline{M}$ λέγεται *ελαχιστικό υποπολύπτυγμα (minimal submanifold).*

Για κάθε υποπολύπτυγμα M^n του $\mathbb{R}^{n+k}$ με παραμετρική παράσταση $\vec{x}(u^1, u^2, ..., u^n)$ ισχύει

$$\Delta \vec{x} = n\vec{H}. \tag{1.12}$$

Συμβολίζουμε με S το τετράγωνο του μήκους της δεύτερης θεμελιώδους μορφής του M στο $\overline{M}$ και έχουμε

$$S = |B|^2 := \sum_{i,j=1}^{n} |B(E_i, E_j)|^2 = \sum_{m=1}^{k} \operatorname{trace} A^2_{\xi_m}$$

όπου $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ είναι ορθομοναδιαίο πλαίσιο στο M και $\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k\}$ ορθομοναδιαίο πλαίσιο, κάθετο στο M.

Έστω M υπερεπιφάνεια του πολυπτύγματος Riemann $\overline{M}^{n+1}$, δηλαδή υποπολύπτυγμα του $\overline{M}^{n+1}$ συνδιάστασης 1. Θεωρούμε τοπικό κάθετο και μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο ξ της M στο $\overline{M}$. Θα συμβολίζουμε με A αντί A_ξ, την αντίστοιχη απεικόνιση Weingarten. Επειδή σε κάθε σημείο p της M ο A είναι αυτοπροσαρτημένος γραμμικός μετασχηματισμός του T_pM, υπάρχει ορθομοναδιαία βάση $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ του T_pM που τον διαγωνιοποιεί. Οι ιδιοτιμές του A στο τυχόν $p \in M$ συμβολίζονται με $k_i, \quad i = 1, 2, ..., n$, και λέγονται *κύριες καμπυλότητες (principal curvatures)* του M στο p. Προκύπτει ότι η μέση καμπυλότητα $H := \langle \vec{H}, \xi \rangle$ θα είναι

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} k_i. \tag{1.13}$$

Τέλος, αν το $\overline{M}^{n+1}$ έχει σταθερή καμπυλότητα τομής c τότε ισχύουν οι σχέσεις:

1. *Εξίσωση Gauss*

$$R(X,Y)Z = \langle AY, Z \rangle AX - \langle AX, Z \rangle AY + c\left(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y\right) \tag{1.14}$$

2. *Εξίσωση Codazzi*

$$(\nabla_X A)Y = (\nabla_Y A)X, \tag{1.15}$$

για κάθε $X, Y, Z \in \Delta(M)$, όπου R είναι ο τανυστής καμπυλότητας του M.

1.2 Η εξίσωση ελαχιστικότητας

Έστω $u : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση στο $\overline{\Omega}$ και $\mathcal{C}^2$ στο Ω, δηλαδή $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$, όπου Ω ένας τόπος στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε το γράφημά της

$$\mathrm{G}_u = \{(x^1, x^2, ..., x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x^1, x^2, ..., x^n) \in \overline{\Omega}$$
$$\text{και } x^{n+1} = u(x^1, x^2, ..., x^n)\}.$$

Ο όγκος (εμβαδόν) αυτού, ως γνωστόν, θα είναι

$$\mathrm{Vol}(\mathrm{G}_u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2} d\Omega.$$

Αν $h : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $h|_{\partial\Omega} = 0$, τότε για τα γραφήματα $\mathrm{G}_{u+th},\ t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, έχουμε

$$\mathrm{Vol}(\mathrm{G}_{u+th}) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u + t\nabla h|^2} d\Omega,$$

και συνεπώς,

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{Vol}(\mathrm{G}_{u+th})\right)|_{t=0} = \int_\Omega \frac{\langle \nabla u, \nabla h \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} d\Omega. \tag{1.16}$$

Λόγω της ταυτότητας (1.6) θα έχουμε

$$\mathrm{div}\left(h \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right) = h\,\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right) + \frac{\langle \nabla u, \nabla h \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}.$$

Ολοκληρώνοντας στο $\overline{\Omega}$ και χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Gauss προκύπτει

$$\int_\Omega \frac{\langle \nabla u, \nabla h \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} d\Omega = -\int_\Omega h\,\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right) d\Omega.$$

Άρα η (1.16) λαμβάνει την μορφή

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{Vol}(\mathrm{G}_{u+th})\right)|_{t=0} = -\int_{\Omega} h \,\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) d\Omega.$$

Συνεπώς το γράφημα της u θα είναι κρίσιμο σημείο του συναρτησοειδούς του εμβαδού αν και μόνο αν η u πληροί την εξίσωση

$$\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0 \tag{1.17}$$

ή, ισοδύναμα, την

$$(1+|\nabla u|^2)\sum_{i=1}^{n} u_{x^i x^i} - \sum_{i,j=1}^{n} u_{x^i x^j} u_{x^i} u_{x^j} = 0. \tag{1.18}$$

Η (1.17) ή η ισοδύναμη της (1.18) λέγεται *εξίσωση ελαχιστικότητας*.

Θα διαπιστώσουμε ότι κάθε λύση της (1.18) έχει ελάχιστο εμβαδό (area-minimizing) ανάμεσα σε όλες τις υπερεπιφάνειες του στερεού κυλίνδρου $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^{n+1}$ με σύνορο το $\partial\mathrm{G}_u$. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε την διαφορική n-μορφή ω στο $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^{n+1}$ η οποία ορίζεται ως εξής: $\omega(X_1, X_2, ..., X_n) := \det(X_1, X_2, ..., X_n, N), \quad X_1, X_2, ..., X_n \in \Delta(\overline{\Omega}\times\mathbb{R})$, όπου

$$N = \frac{(-u_{x^1}, -u_{x^2}, ..., -u_{x^n}, 1)}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}.$$

Αν $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, ..., \frac{\partial}{\partial x^{n+1}}\}$ είναι τα βασικά διανυσματικά πεδία του $\mathbb{R}^{n+1}$ ως προς τις καρτεσιανές συντεταγμένες και $dx^1, dx^2, ..., dx^{n+1}$ η δυϊκή βάση αυτών τότε η n-μορφή ω θα γράφεται

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_{i=1}^{n+1} \omega(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, ..., \widehat{\frac{\partial}{\partial x^i}}, ..., \frac{\partial}{\partial x^{n+1}}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge ... \wedge \widehat{dx^i} \wedge ... \wedge dx^{n+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} \frac{u_{x^i}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} dx^1 \wedge dx^2 \wedge ... \wedge \widehat{dx^i} \wedge ... \wedge dx^{n+1} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} dx^1 \wedge dx^2 \wedge ... \wedge dx^n,
\end{aligned}$$

όπου το σύμβολο $\widehat{\ }$ σημαίνει ότι παραλείπουμε αυτόν τον όρο. Συνεπώς

$$\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} (-1)^{i+1} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{u_{x^i}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) \\
&= (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{u_{x^i}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) \\
&= (-1)^{n+1} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Άρα, η n-μορφή ω είναι κλειστή. Αν, τώρα, διαλέξουμε $X_1, X_2, ..., X_n$ ορθομοναδιαία διανύσματα στο τυχόν σημείο $p = (x^1, x^2, ..., x^{n+1}) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ τότε

$$\omega(X_1, X_2, ..., X_n) \leq 1 \tag{1.19}$$

με την ισότητα να πληρούται μόνο όταν

$$X_1, X_2, ..., X_n \in T_p\mathrm{G}_u \text{ και } p \in \mathrm{G}_u. \tag{1.20}$$

Η μορφή ω λέγεται *μορφή βαθμονόμησης (calibration form)*. Ισχύει η παρακάτω

Πρόταση 1.1. *Έστω $u : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ λύση της εξίσωσης ελαχιστικότητας. Αν M υπερεπιφάνεια του $\mathbb{R}^{n+1}$ με $M \subset \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ και $\partial M = \partial \mathrm{G}_u$ τότε*

$$\mathrm{Vol}(\mathrm{G}_u) \leq \mathrm{Vol}(M). \tag{1.21}$$

Απόδειξη. Επειδή η ω είναι κλειστή από το θεώρημα του Stokes έχουμε

$$\int_{\mathrm{G}_u} \omega = \int_M \omega.$$

Λόγω των (1.19) και (1.20), προκύπτει ότι

$$\mathrm{Vol}(\mathrm{G}_u) = \int_{\mathrm{G}_u} \omega = \int_M \omega \leq \mathrm{Vol}(M).$$

□

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$. Με $B_r^{n+1}(x_0)$ συμβολίζουμε, στον $\mathbb{R}^{n+1}$, την μπάλλα κέντρου x_0 και ακτίνας r, δηλαδή

$$B_r^{n+1}(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \ |x - x_0| < r\},$$

και με $S_r^n(x_0)$ συμβολίζουμε την σφαίρα κέντρου x_0 και ακτίνας r, δηλαδή

$$S_r^n(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \ |x - x_0| = r\} = \partial B_r^{n+1}(x_0).$$

Δίνουμε το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 1.1. *Έστω $u : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ λύση της εξίσωσης ελαχιστικότητας και $x_0 \in \overline{\Omega}$. Αν $B_r^n(x_0) \subset \overline{\Omega}$ τότε*

$$\mathrm{Vol}(B_r^{n+1}(x_0) \cap \mathrm{G}_u) \leq \frac{\mathrm{Vol}(S_r^n(x_0))}{2} = \frac{\mathrm{Vol}(S_1^n(x_0))r^n}{2}. \tag{1.22}$$

Απόδειξη. Το $\partial B_r^{n+1}(x_0) \cap \mathrm{G}_u$ χωρίζει την $\partial B_r^{n+1}(x_0) = S_r^n(x_0)$ σε δύο συνιστώσες από τις οποίες μια έχει όγκο το πολύ ίσο με $\frac{\mathrm{Vol}(S_r^n(x_0))}{2}$. Χρησιμοποιώντας την (1.21) προκύπτει το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 1.2. *Είναι προφανής η ακόλουθη ανισότητα*

$$\frac{\mathrm{Vol}(B_r^{n+1}(x_0) \cap \mathrm{G}_u)}{\mathrm{Vol}(B_r^n(x_0))} \leq \frac{\mathrm{Vol}(S_1^n(x_0))}{2\,\mathrm{Vol}(B_1^n(x_0))}. \tag{1.23}$$

Ισχύει η παρακάτω πρόταση

Πρόταση 1.2. *Έστω $u : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ λύση της εξίσωσης ελαχιστικότητας, όπου Ω είναι κυρτός τόπος στον $\mathbb{R}^n$. Τότε ο όγκος του γραφήματος G_u, είναι απόλυτο ελάχιστο (absolutely area-minimizing), δηλαδή έχει τον ελάχιστο όγκο μεταξύ όλων των υπερεπιφανειών του $\mathbb{R}^{n+1}$ με σύνορο το $\partial\mathrm{G}_u$.*

Απόδειξη. Έστω M υπερεπιφάνεια του $\mathbb{R}^{n+1}$ με $\partial M = \partial \mathrm{G}_u$. Αν M κείται ολόκληρη στο εσωτερικό του κυλίνδρου $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ τότε το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 1.1. Στην περίπτωση, τώρα, που η M δεν κείται ολόκληρη στον κύλινδρο $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, θεωρούμε την προβολή $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ η οποία απεικονίζει κάθε σημείο του $\mathbb{R}^{n+1}$ στο πιο κοντινό του από το $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$. Η π είναι προφανώς η ταυτότητα στο $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ και μικραίνει αποστάσεις. Συνεπώς $\mathrm{Vol}(\pi(M)) \leq \mathrm{Vol}(M)$ και από την Πρόταση 1.1 προκύπτει ότι $\mathrm{Vol}(\mathrm{G}_u) \leq \mathrm{Vol}(M)$. □

Κεφάλαιο 2

Τύπος του Simons και Μεταβολές Εμβαδού

2.1 Τύπος του Simons

Έστω M^n προσανατολισμένη, ξ το μοναδιαίο και κάθετο διανυσματικό πεδίο αυτής, υπερεπιφάνεια του χώρου σταθερής καμπυλότητας $\overline{M}^{n+1}(c)$ με $c = 0$ ή 1. Ο χώρος $\overline{M}^{n+1}(c)$, θα συμβολίζει τον ευκλείδειο χώρο E^{n+1} με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο ή τη μοναδιαία σφαίρα S^{n+1} με την επαγόμενη από τον E^{n+2} μετρική, όταν $c = 0$ ή 1, αντίστοιχα. Συμβολίζουμε με $\nabla,\ \tilde{\nabla}$ τις συνοχές Levi-Civita των M^n και $\overline{M}^{n+1}(c)$ αντίστοιχα, με $R,\ \tilde{R}$ τους τανυστές καμπυλότητας των M^n, $\overline{M}^{n+1}(c)$ και με A την απεικόνιση Weingarten ως προς το μοναδιαίο κάθετο ξ. Έστω S το τετράγωνο του μήκους της δεύτερης θεμελιώδους μορφής της M στο $\overline{M}^{n+1}(c)$, δηλαδή $S = \operatorname{trace} A^2$. Ως γνωστόν ο A πληροί την εξίσωση Codazzi

$$(\nabla_X A)\, Y = (\nabla_Y A)\, X,$$

για κάθε $X, Y \in \Delta(M)$. Επιπλέον, οι $A, \nabla_X A$ είναι συμμετρικοί και ισχύει

$$\nabla(\operatorname{trace} A) = \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{E_i} A)\, E_i, \tag{2.1}$$

όπου $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ είναι τυχαίο τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο στην M.

Προκειμένου να αποδείξουμε την *ταυτότητα του Simons* χρειαζόμαστε το παρακάτω

Λήμμα 2.1. *Ισχύει*

$$\nabla_X \nabla_Y A - \nabla_Y \nabla_X A - \nabla_{[X,Y]} A = [R(X,Y), A], \tag{2.2}$$

για κάθε $X, Y \in \Delta(M)$, όπου $R(X,Y)$ ο τελεστής καμπυλότητος.

Απόδειξη. Έστω $Z \in \Delta(M)$, τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned}
[R(X,Y), A]Z &= R(X,Y)(AZ) - A(R(X,Y)Z) \\
&= \nabla_X \nabla_Y (AZ) - \nabla_Y \nabla_X (AZ) \\
&\quad - \nabla_{[X,Y]}(AZ) - A(R(X,Y)Z) \\
&= \nabla_X \{(\nabla_Y A)Z + A(\nabla_Y Z)\} \\
&\quad - \nabla_Y \{(\nabla_X A)Z + A(\nabla_X Z)\} \\
&\quad - \nabla_{[X,Y]}(AZ) - A(R(X,Y)Z) \\
&= (\nabla_X \nabla_Y A)Z - (\nabla_Y \nabla_X A)Z - \left(\nabla_{[X,Y]} A\right) Z \\
&= (\nabla_X \nabla_Y A - \nabla_Y \nabla_X A - \nabla_{[X,Y]} A)Z.
\end{aligned}$$

$\square$

Πρόταση 2.1. (Τύπος του J.Simons)

Αν M^n είναι ελαχιστική υπερεπιφάνεια του πολυπτύγματος $\overline{M}^{n+1}(c)$ τότε ισχύει

$$\frac{1}{2}\Delta S = S(nc - S) + |\nabla A|^2, \tag{2.3}$$

όπου Δ ο τελεστής Laplace της M και $|\nabla A|^2$ το τετράγωνο του μήκους της συναλλοιώτου παραγώγου του A.

Απόδειξη. Για τυχαίο $p \in M$ επιλέγουμε ένα γεωδαιτικό πλαίσιο $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$, περί το p και συνεπώς $\nabla_X E_i|_p = 0$, για κάθε $X \in \Delta(M)$. Άρα ισχύει

$$\Delta S|_p = \sum_{i=1}^{n} E_i E_i(\operatorname{trace} A^2)|_p.$$

Επειδή

$$\begin{aligned}
E_i(\operatorname{trace} A^2) &= E_i\left(\sum_{j=1}^{n}\langle AE_j, AE_j\rangle\right) \\
&= 2\sum_{j=1}^{n}\langle \nabla_{E_i}(AE_j), AE_j\rangle \\
&= 2\sum_{j=1}^{n}\langle (\nabla_{E_i}A)\,E_j, AE_j\rangle + 2\sum_{j=1}^{n}\langle A\left(\nabla_{E_i}E_j\right), AE_j\rangle,
\end{aligned}$$

έχουμε εκτιμώντας στο σημείο p,

$$\sum_{i=1}^{n} E_i E_i(\operatorname{trace} A^2) = 2\sum_{i,j=1}^{n}\langle \nabla_{E_i}((\nabla_{E_i}A)\,E_j), AE_j\rangle$$

$$+2\sum_{i,j=1}^{n}\langle (\nabla_{E_i}A)\,E_j, \nabla_{E_i}(AE_j)\rangle + 2\sum_{i,j=1}^{n}\langle \nabla_{E_i}\left(A\left(\nabla_{E_i}E_j\right)\right), AE_j\rangle$$

$$+2\sum_{i,j=1}^{n}\left\langle A\left(\nabla_{E_i}E_j\right),\nabla_{E_i}(AE_j)\right\rangle = 2\sum_{i,j=1}^{n}\left\langle\left(\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}A\right)E_j, AE_j\right\rangle$$

$$+2\sum_{i,j=1}^{n}\left\langle\left(\nabla_{E_i}A\right)E_j,\left(\nabla_{E_i}A\right)E_j\right\rangle = 2\,\mathrm{trace}\left[\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}A)A\right]+2|\nabla A|^2. \tag{2.4}$$

Θα υπολογίσουμε ξεχωριστά την ποσότητα $\sum_{i=1}^{n}\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}A$, εκτιμώντας στο σημείο p, και θα την αντικαταστήσουμε στην (2.4). Αν $Z\in\Delta(M)$, τέτοιο ώστε $\left(\nabla_{E_i}Z\right)(p)=0,\ \forall i=1,...,n$, τότε

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n}\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}A\right)Z &= \sum_{i=1}^{n}(\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}A)Z \\
&= \sum_{i=1}^{n}\{\nabla_{E_i}\left((\nabla_{E_i}A)Z\right)-(\nabla_{E_i}A)(\nabla_{E_i}Z)\} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\nabla_{E_i}\left((\nabla_{E_i}A)Z\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\nabla_{E_i}\left((\nabla_{Z}A)E_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\{(\nabla_{E_i}\nabla_{Z}A)E_i+(\nabla_{Z}A)(\nabla_{E_i}Z)\} \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\nabla_{E_i}\nabla_{Z}A)E_i.
\end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση της ταυτότητας του λήμματος 2.1, έχουμε

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n}\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}A\right)Z &= \sum_{i=1}^{n}\left\{(\nabla_{Z}\nabla_{E_i}A)E_i+[R(E_i,Z),A]E_i+\left(\nabla_{[E_i,Z]}A\right)E_i\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\{(\nabla_{Z}\nabla_{E_i}A)E_i+[R(E_i,Z),A]E_i\right\}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Θα υπολογίσουμε, τώρα, ξεχωριστά τους δύο όρους της (2.5). Για τον πρώτο όρο, λαμβάνοντας υπόψη την (2.1), θα έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(\nabla_Z\nabla_{E_i}A)E_i &= \sum_{i=1}^{n}\{\nabla_Z((\nabla_{E_i}A)E_i)-(\nabla_{E_i}A)(\nabla_Z E_i)\}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\nabla_Z((\nabla_{E_i}A)E_i)\\ &= \nabla_Z\left(\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{E_i}A)E_i\right)\\ &= \nabla_Z(\nabla(\operatorname{trace}A))\\ &= 0, \end{aligned}\tag{2.6}$$

αφού η M είναι ελαχιστική. Για τον δεύτερο όρο της (2.5) θα έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}[R(E_i,Z),A]E_i &= -\sum_{i=1}^{n}[R(Z,E_i),A]E_i\\ &= -\sum_{i=1}^{n}R(Z,E_i)(AE_i)\\ &\quad+\sum_{i=1}^{n}A(R(Z,E_i)E_i). \end{aligned}\tag{2.7}$$

Για τον πρώτο όρο της (2.7), χρησιμοποιώντας την εξίσωση του Gauss, βρίσκουμε,

$$\begin{aligned}-\sum_{i=1}^{n}R(Z,E_i)(AE_i) &= -\sum_{i=1}^{n}\langle AE_i,AE_i\rangle AZ+\sum_{i=1}^{n}\langle AZ,AE_i\rangle AE_i\\ &\quad -c\left(\sum_{i=1}^{n}\langle AE_i,E_i\rangle Z-\sum_{i=1}^{n}\langle AE_i,Z\rangle E_i\right)\\ &= -(\operatorname{trace}A^2)AZ+A\left(\sum_{i=1}^{n}\left\langle A^2Z,E_i\right\rangle E_i\right)\\ &\quad -c\left((\operatorname{trace}A)Z-\sum_{i=1}^{n}\langle AZ,E_i\rangle E_i\right)\\ &= -SAZ+A^3Z+cAZ. \end{aligned}\tag{2.8}$$

Επιπλέον ο δεύτερος όρος της (2.7), χρησιμοποιώντας πάλι την εξίσωση του Gauss, θα γίνει

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} A(R(Z,E_i)E_i) &= \sum_{i=1}^{n} A(\langle AE_i, E_i\rangle AZ \\ &\quad - \langle AZ, E_i\rangle AE_i + c(\langle E_i, E_i\rangle Z - \langle Z, E_i\rangle E_i)) \\ &= -A^3 Z + c(n-1)AZ. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Η (2.7), λόγω των (2.8), (2.9), θα γίνει

$$\sum_{i=1}^{n}[R(E_i, Z), A]E_i = -SAZ + cnAZ.$$

Άρα η σχέση (2.5) θα λάβει την μορφή

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} \nabla_{E_i}\nabla_{E_i} A\right) Z &= -SAZ + cnAZ \\ &= (nc - S)AZ,\end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$\sum_{i=1}^{n} \nabla_{E_i}\nabla_{E_i} A = (nc - S)A.$$

Αντικαθιστώντας στην (2.4) έχουμε τελικά

$$\frac{1}{2}\Delta S = (nc - S)S + |\nabla A|^2.$$

$\square$

Επειδή $\nabla|A|^2 = 2\,|A|\,\nabla|A|$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} 4\,|A|^2\,|\nabla|A||^2 &= \left|\nabla|A|^2\right|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n}\langle\nabla|A|^2, E_j\rangle^2 \\ &= 4\sum_{j=1}^{n}\langle\nabla_{E_j}A, A\rangle^2 \\ &= 4\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i,m=1}^{n}\langle\left(\nabla_{E_j}A\right)E_i, E_m\rangle\langle AE_i, E_m\rangle\right)^2 \\ &= 4\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i,m=1}^{n}h_{imj}h_{im}\right)^2, \end{aligned} \tag{2.10}$$

όπου θέσαμε $h_{ij} = \langle AE_i, E_j\rangle$ και $h_{ijk} = \langle(\nabla_{E_k}A)\,E_i, E_j\rangle$, για τυχαίο τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ στην M. Ο A είναι συμμετρικός και λόγω της εξίσωσης Codazzi συμπεραίνουμε ότι οι ποσότητες h_{ij}, h_{ijk} είναι συμμετρικές ως προς κάθε ζεύγος δεικτών.

Έστω $p \in M$ και $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ ορθομοναδιαίο πλαίσιο σε μια περιοχή του p, τέτοιο ώστε $A(E_i|_p) = \lambda_i E_i|_p$, δηλαδή $h_{ij}(p) = \lambda_i\delta_{ij}$. Εκτιμώντας στο σημείο p την (2.10) έχουμε

$$\begin{aligned} 4\,|A|^2\,|\nabla|A||^2 &= 4\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}h_{iij}\lambda_i\right)^2 \\ &\leq 4\,|A|^2\sum_{i,j=1}^{n}h_{iij}^2, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz για τα διανύσματα $(h_{11j}, h_{22j}, ..., h_{nnj})$, $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$. Οπότε προκύπτει ότι

$$|\nabla|A||^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n}h_{iij}^2. \tag{2.11}$$

Η ταυτότητα

$$\sum_{i,j=1}^{n} h_{iij}^2 = \sum_{i\neq j} h_{iij}^2 + \sum_{i=1}^{n} h_{iii}^2, \tag{2.12}$$

λαμβάνοντας υπόψη την ελαχιστικότητα, δηλαδή την

$$h_{iii}^2 = \left(\sum_{i\neq j} h_{iij}\right)^2,$$

λαμβάνει την μορφή

$$\sum_{i,j=1}^{n} h_{iij}^2 = \sum_{i\neq j} h_{iij}^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{i\neq j} h_{iij}\right)^2.$$

Χρησιμοποιώντας την γνωστή αλγεβρική ανισότητα

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

έχουμε

$$\sum_{i,j=1}^{n} h_{iij}^2 \leq \sum_{i\neq j} h_{iij}^2 + (n-1)\sum_{i\neq j} h_{iij}^2 = n\sum_{i\neq j} h_{iij}^2.$$

Συνεπώς λόγω της (2.11) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \frac{2}{n}\,|\nabla|A||^2 &\leq \sum_{i\neq j} h_{iij}^2 + \sum_{i\neq j} h_{iij}^2 \\ &= \sum_{i\neq j} h_{iji}^2 + \sum_{i\neq j} h_{jii}^2. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (2.11) και (2.13) προκύπτει η

$$\left(1+\frac{2}{n}\right)|\nabla|A||^2 \leq |\nabla A|^2. \tag{2.14}$$

Η ανισότητα (2.14) είναι γνωστή και ως *ανισότητα Kato*. Αντικαθιστώντας στον τύπο του Simons για $c = 0$ λαμβάνουμε

$$\frac{1}{2}\Delta S \geq -S^2 + \left(1+\frac{2}{n}\right)|\nabla|A||^2. \tag{2.15}$$

2.2 Τύποι Πρώτης και Δεύτερης Μεταβολής Εμβαδού

Έστω $\overline{M}^{n+k}$ πολύπτυγμα *Riemann*, M^n υποπολύπτυγμα αυτού με την επαγόμενη μετρική και $D \subset M$ ένας τόπος με $\overline{D}$ συμπαγές υποσύνολο του M. Μια διαφορίσιμη απεικόνιση $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \longrightarrow \overline{M}$ τέτοια ώστε:

1. Για κάθε $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, η απεικόνιση $\phi_t : M \longrightarrow \overline{M}$ με $\phi_t(p) := \phi(t,p)$ να είναι εμβάπτιση με $\phi_t|_{M \setminus D} \equiv id$.

2. $\phi_0 \equiv i : M \longrightarrow \overline{M}$, όπου i η έγκλειση,

θα λέγεται μεταβολή (variation) του $\overline{D} \subset M$ στο $\overline{M}$. Συμβολίζουμε με M_t την εικόνα του M μέσω της απεικόνισης ϕ_t. Προφανώς $M_0 \equiv M$. Παρακάτω θα θεωρούμε ότι $D = M$.

Έστωσαν $x = (x^1, x^2, ..., x^n)$ συντεταγμένες περί το τυχόν σημείο $p_0 \in M$ και $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ τα αντίστοιχα βασικά διανυσματικά πεδία. Μπορούμε να θεωρήσουμε συντεταγμένες $(t, x^1, x^2, ..., x^n)$ στο $(-\varepsilon, \varepsilon) \times M$ περί το σημείο $(0, p_0)$ με $\{\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ τα αντίστοιχα βασικά διανυσματικά πεδία, όπου t η συντεταγμένη του $(-\varepsilon, \varepsilon)$ και $\frac{\partial}{\partial t}$ το αντίστοιχο βασικό διανυσματικό πεδίο αυτού. Συμβολίζουμε με $E_i(t,x) = d\phi(\frac{\partial}{\partial x^i}) = d\phi_t(\frac{\partial}{\partial x^i})$ για $i = 1, ..., n$, $E(t,x) = d\phi(\frac{\partial}{\partial t})$ και με $g_{ij}(t,x) = \langle E_i, E_j \rangle$ την επαγόμενη μετρική στο M μέσω της ϕ_t. Έστω $A : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$, $A(t) := \int_M dM_t$ η συνάρτηση εμβαδού, όπου dM_t το στοιχείο όγκου της μετρικής $(g_{ij}(t,x))$. Αν $\{dx^1, dx^2, ..., dx^n\}$ η δυϊκή βάση των $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ τότε

$$dM_t = \sqrt{g(t,x)}dx^1 \wedge dx^2 \wedge ... \wedge dx^n,$$

όπου $g(t,x) = \det(g_{ij}(t,x))$ με $dM_0 = dM$.

Για λόγους ευκολίας θεωρούμε κανονικές συντεταγμένες (normal coordinates) $(x^1, x^2, ..., x^n)$ περί το p_0. Άρα θα έχουμε

$$g_{ij}(0,p_0) = \delta_{ij} \text{ και } \nabla_{E_i} E_j|_{(0,p_0)} = 0,$$

όπου ∇ η συνοχή Levi-Civita του M. Παρακάτω θα χρειαστούμε το εξής λήμμα (βλέπε για παράδειγμα στο [13]).

Λήμμα 2.2. *Έστω $(\alpha_{ij}(t))$ ένας $(n \times n)-$αντιστρέψιμος και συμμετρικός πίνακας, όπου $\alpha_{ij}(t)$ διαφορίσιμες συναρτήσεις. Θέτοντας $(\alpha^{ij}(t)) = (\alpha_{ij}(t))^{-1}$ και $\alpha(t) = \det(\alpha_{ij}(t))$, έχουμε την ταυτότητα*

$$\alpha'(t) = \alpha(t) \sum_{i,j=1}^{n} \alpha^{ij}(t)\alpha'_{ij}(t). \tag{2.16}$$

Θα αποδείξουμε το εξής

Θεώρημα 2.1. (Τύπος Πρώτης Μεταβολής του Εμβαδού)
Αν το διανυσματικό πεδίο μεταβολής E έχει συμπαγές στήριγμα στο M, τότε ισχύει

$$A'(0) = -n \int_M \langle E, \vec{H} \rangle dM, \tag{2.17}$$

όπου $\vec{H}$ είναι το διάνυσμα μέσης καμπυλότητας του M στο $\overline{M}$.

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι

$$\begin{aligned} dM_t &= \sqrt{g(t,x)}dx^1 \wedge dx^2 \wedge ... \wedge dx^n \\ &= \frac{\sqrt{g(t,x)}}{\sqrt{g(0,x)}}\sqrt{g(0,x)}dx^1 \wedge dx^2 \wedge ... \wedge dx^n \\ &= \frac{\sqrt{g(t,x)}}{\sqrt{g(0,x)}}dM. \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$J(t,x) = \frac{\sqrt{g(t,x)}}{\sqrt{g(0,x)}}$$

και έχουμε $dM_t = J(t,x)dM$. Συνεπώς ισχύει

$$A(t) = \int_M J(t,x)dM. \tag{2.18}$$

Θα υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης $A(t)$ στο $t=0$, δηλαδή την $A'(0)$. Προς τούτο, αρκεί να υπολογίσουμε την $J'(t,x) = \frac{\partial J}{\partial t}(t,x)$ και να εκτιμήσουμε στο σημείο $(0,p_0)$. Επειδή $g_{ij}(0,p_0) = \delta_{ij}$ έχουμε

$$J'(0,p_0) = \frac{g'(0,p_0)}{2}. \tag{2.19}$$

Αλλά, λόγω της ταυτότητας του λήμματος 2.2, λαμβάνουμε

$$g'(0,p_0) = g(0,p_0)\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(0,p_0)g'_{ij}(0,p_0) = \sum_{i=1}^{n} g'_{ii}(0,p_0). \tag{2.20}$$

Όμως

$$g'_{ii} = \frac{\partial}{\partial t}\langle E_i, E_i\rangle = 2\langle \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} E_i, E_i\rangle,$$

όπου $\tilde{\nabla}$ η συνοχή Levi-Civita κατά μήκος της ϕ. Επειδή $d\phi\left(\left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right]\right) = 0$, προκύπτει ότι

$$\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} E_i = \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} E. \tag{2.21}$$

Συνεπώς θα έχουμε

$$g'_{ii} = 2\langle \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} E, E_i\rangle = \langle \overline{\nabla}_{d\phi(\frac{\partial}{\partial x^i})} E, E_i\rangle = 2\langle \overline{\nabla}_{E_i} E, E_i\rangle, \tag{2.22}$$

όπου $\overline{\nabla}$ η συνοχή Levi-Civita του $\overline{M}$. Συμβολίζουμε με $E^{\top}$ και $E^{\perp}$, αντίστοιχα, τις προβολές του $E(0,x)$ στον εφαπτόμενο και κάθετο χώρο του M στο $\overline{M}$. Αντικαθιστώντας την (2.22) στην (2.20) θα έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{g'(0,p_0)}{2} &= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{E_i}E^{\top},E_i\rangle+\sum_{i=1}^{n}\langle\overline{\nabla}_{E_i}E^{\perp},E_i\rangle\\ &= \operatorname{div}E^{\top}+\sum_{i=1}^{n}\left(E_i\langle E^{\perp},E_i\rangle-\langle E^{\perp},\overline{\nabla}_{E_i}E_i\rangle\right)\\ &= \operatorname{div}E^{\top}-\sum_{i=1}^{n}\langle E^{\perp},\left(\overline{\nabla}_{E_i}E_i\right)^{\perp}\rangle\\ &= \operatorname{div}E^{\top}-\langle E^{\perp},\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{\nabla}_{E_i}E_i\right)^{\perp}\rangle\\ &= \operatorname{div}E^{\top}-\langle E^{\perp},\sum_{i=1}^{n}B(E_i,E_i)\rangle\\ &= \operatorname{div}E^{\top}-\langle E^{\perp},n\vec{H}\rangle, \end{aligned}\tag{2.23}$$

όπου έχουμε εκτιμήσει στο σημείο $(0,p_0)$ και $\operatorname{div}E^{\top}$ είναι η απόκλιση του διανυσματικού πεδίου $E^{\top}$ στο M. Συνεπώς από (2.19), λόγω της (2.23), λαμβάνουμε

$$J'(0,p_0)=\operatorname{div}(E^{\top})-\langle E^{\perp},n\vec{H}\rangle.\tag{2.24}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι το διανυσματικό πεδίο E έχει συμπαγές στήριγμα και ότι το διάνυσμα μέσης καμπυλότητας είναι κάθετο στο M, θα έχουμε

$$\langle E^{\top},n\vec{H}\rangle=\langle E,n\vec{H}\rangle \text{ και } \int_M\operatorname{div}E^{\top}dM=0,$$

λόγω του θεωρήματος του Gauss. Άρα, ολοκληρώνοντας την σχέση (2.24) στο M θα έχουμε

$$\begin{aligned} A'(0) &= \int_M J'(0,x)dM \\ &= \int_M \left(\operatorname{div} E^\top - \langle E^\perp, n\vec{H}\rangle\right) dM \\ &= \int_M \operatorname{div} E^\top dM - \int_M \langle E^\perp, n\vec{H}\rangle dM \\ &= -n\int_M \langle E, \vec{H}\rangle dM. \end{aligned}$$

□

Προκειμένου να αποφασίσουμε, στη περίπτωση που το M είναι ελαχιστικό υποπολύπτυγμα του $\overline{M}$, αν το εμβαδόν του M αυξάνει ή ελαττούται στις μεταβολές χρειαζόμαστε το παρακάτω.

Θεώρημα 2.2. (Τύπος Δεύτερης Μεταβολής του Εμβαδού)
Αν το πεδίο μεταβολής E είναι παντού κάθετο στο M με συμπαγές στήριγμα, τότε ισχύει

$$\begin{aligned} A''(0) = \int_M \{ &- \sum_{i,j=1}^n \langle E, B(E_i,E_j)\rangle^2 - \sum_{i=1}^n \overline{K}(E_i \wedge E) \\ &- \langle \left(\overline{\nabla}_E E\right)^\perp, n\vec{H}\rangle + \left|\nabla^\perp E\right|^2 + \langle E, n\vec{H}\rangle^2 \} dM, \end{aligned} \tag{2.25}$$

όπου B είναι η δεύτερη θεμελιώδης μορφή του $M \subset \overline{M}$, $\nabla^\perp$ η κάθετη συνοχή και $\overline{K}(E_i \wedge E)$ η καμπυλότητα τομής του $\overline{M}$ στο επίπεδο που ορίζεται από τα E_i, E. Έχουμε θέσει $|\nabla^\perp E|^2 = \sum_{i=1}^n |\nabla^\perp_{E_i} E|^2$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη αρκεί να υπολογίσουμε την παράγωγο J'' και να εκτιμήσουμε, όπως προηγουμένως, στο σημείο $(0, p_0)$.

Ισχύει

$$J'(t,x) = \frac{1}{2}\frac{g'(t,x)}{\sqrt{g(t,x)}\sqrt{g(0,x)}} = \frac{1}{2}\frac{g'(t,x)}{g(t,x)}J(t,x),$$

ή, λαμβάνοντας υπόψη τη ταυτότητα του Λήμματος 2.2,

$$J'(t,x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(t,x)g'_{ij}(t,x)J(t,x). \tag{2.26}$$

Όμως, παραλείποντας την εκτίμηση στο (t,x), θα έχουμε

$$g'_{ij} = \frac{\partial}{\partial t}\langle E_i, E_j\rangle = \langle \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} E_i, E_j\rangle + \langle E_i, \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} E_j\rangle. \tag{2.27}$$

Άρα, λαμβάνοντας υπόψη την (2.21), θα έχουμε

$$\begin{aligned} g'_{ij} &= \langle \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} E, E_j\rangle + \langle E_i, \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^j}} E\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_{E_i} E, E_j\rangle + \langle E_i, \overline{\nabla}_{E_j} E\rangle. \end{aligned}$$

Επειδή το E είναι παντού κάθετο στο M και $\langle \overline{\nabla}_{E_i} E_j, E\rangle = \langle B(E_i, E_j), E\rangle$, όπου B είναι η δεύτερη θεμελιώδης μορφή, από την παραπάνω σχέση, προκύπτει ότι

$$g'_{ij} = 2\langle \overline{\nabla}_{E_i} E, E_j\rangle. \tag{2.28}$$

Αντικαθιστώντας την (2.28) στην (2.26) έχουμε

$$J' = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\langle \overline{\nabla}_{E_i} E, E_j\rangle J. \tag{2.29}$$

Συνεπώς θα πάρουμε

$$\begin{aligned} J'' = \frac{\partial J'}{\partial t} &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g^{ij}}{\partial t}\langle \overline{\nabla}_{E_i} E, E_j\rangle J + \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\left(\frac{\partial}{\partial t}\langle \overline{\nabla}_{E_i} E, E_j\rangle\right) J \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\langle \overline{\nabla}_{E_i} E, E_j\rangle J'. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Θα υπολογίσουμε, τώρα, ξεχωριστά τους τρεις όρους της (2.30) και θα εκτιμήσουμε στο σημείο $(0, p_0)$. Για τον πρώτο όρο, παραγωγίζοντας τη σχέση $\sum_{k=1}^{n} g^{ik} g_{kj} = \delta_{ij}$, λαμβάνουμε

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{k=1}^{n} g^{ik} g_{kj}\right) = 0 \text{ ή } \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g^{ik}}{\partial t} g_{kj} = -\sum_{k=1}^{n} g^{ik} \frac{\partial g_{kj}}{\partial t}.$$

Εκτιμώντας στο σημείο $(0, p_0)$ θα έχουμε

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial t} = -\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2\langle \overline{\nabla}_{E_i} E, E_j \rangle.$$

Άρα, ο πρώτος όρος αν εκτιμηθεί στο $(0, p_0)$, δίνει

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g^{ij}}{\partial t} \langle \overline{\nabla}_{E_i} E, E_j \rangle J = -2 \sum_{i,j=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{E_i} E, E_j \rangle^2. \tag{2.31}$$

Για τον δεύτερο όρο της (2.30) έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \overline{\nabla}_{E_i} E, E_j \rangle = \langle \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\nabla}_{E_i} E, E_j \rangle + \langle \overline{\nabla}_{E_i} E, \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} E_j \rangle.$$

Η παραπάνω σχέση, λόγω της (2.21) και της $\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\nabla}_{E_i} E = \overline{\nabla}_E \overline{\nabla}_{E_i} E$, λαμβάνει την μορφή

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \overline{\nabla}_{E_i} E, E_j \rangle &= \langle \overline{\nabla}_E \overline{\nabla}_{E_i} E, E_j \rangle + \langle \overline{\nabla}_{E_i} E, \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^j}} E \rangle \\ &= \langle \overline{R}(E, E_i) E, E_j \rangle + \langle \overline{\nabla}_{E_i} \overline{\nabla}_E E, E_j \rangle \\ &\quad + \langle \overline{\nabla}_{E_i} E, \overline{\nabla}_{E_j} E \rangle, \end{aligned} \tag{2.32}$$

όπου $\overline{R}$ ο τανυστής καμπυλότητος του $\overline{M}$. Άρα, ο δεύτερος όρος της (2.30), υπολογισμένος στο σημείο $(0, p_0)$, δίνει

$$\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \left(\frac{\partial}{\partial t} \langle \overline{\nabla}_{E_i} E, E_j \rangle \right) J =$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}(E,E_i)E,E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{\nabla}_{E_i}\overline{\nabla}_E E, E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{\nabla}_{E_i}E,\overline{\nabla}_{E_i}E\rangle \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}(E_i,E)E,E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{E_i}\big(\overline{\nabla}_E E\big)^{\top}, E_i\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{\nabla}_{E_i}\big(\overline{\nabla}_E E\big)^{\perp}, E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{\nabla}_{E_i}E,\overline{\nabla}_{E_i}E\rangle \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\overline{K}(E_i\wedge E) + \operatorname{div}\Big(\big(\overline{\nabla}_E E\big)^{\top}\Big) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\Big\{E_i\langle\big(\overline{\nabla}_E E\big)^{\perp},E_i\rangle - \langle\big(\overline{\nabla}_E E\big)^{\perp},\overline{\nabla}_{E_i}E_i\rangle\Big\} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{\nabla}_{E_i}E,\overline{\nabla}_{E_i}E\rangle \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\overline{K}(E_i\wedge E) + \operatorname{div}\Big(\big(\overline{\nabla}_E E\big)^{\top}\Big) - \langle\big(\overline{\nabla}_E E\big)^{\perp},\sum_{i=1}^{n}\big(\overline{\nabla}_{E_i}E_i\big)^{\perp}\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{\nabla}_{E_i}E,\overline{\nabla}_{E_i}E\rangle \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\overline{K}(E_i\wedge E) + \operatorname{div}\Big(\big(\overline{\nabla}_E E\big)^{\top}\Big) - \langle\big(\overline{\nabla}_E E\big)^{\perp}, n\vec{H}\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{\nabla}_{E_i}E,\overline{\nabla}_{E_i}E\rangle. \qquad (2.33)
\end{aligned}
$$

Τέλος, λόγω της (2.29), ο τρίτος όρος της (2.30) εκτιμημένος στο $(0,p_0)$ δίνει

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\langle \overline{\nabla}_{E_i}E,E_j\rangle J' &= \Big(\sum_{i=1}^{n}\langle \overline{\nabla}_{E_i}E,E_i\rangle\Big)^2 \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{n}\big\{E_i\langle E,E_i\rangle - \langle E,\overline{\nabla}_{E_i}E_i\rangle\big\}\Big)^2 \\
&= \langle E, n\vec{H}\rangle^2. \qquad (2.34)
\end{aligned}
$$

Συμπερασματικά, η (2.30) εκτιμώντας στο $(0, p_0)$ δίνει

$$\begin{aligned}
J'' &= -2\sum_{i,j=1}^{n}\langle\overline{\nabla}_{E_i}E, E_j\rangle^2 - \sum_{i=1}^{n}\overline{K}(E_i \wedge E) + \operatorname{div}\left(\left(\overline{\nabla}_E E\right)^{\top}\right) \\
&\quad -\langle\left(\overline{\nabla}_E E\right)^{\perp}, n\vec{H}\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle\overline{\nabla}_{E_i}E, \overline{\nabla}_{E_i}E\rangle + \langle E, n\vec{H}\rangle^2 \\
&= -2\sum_{i,j=1}^{n}\langle\overline{\nabla}_{E_i}E, E_j\rangle^2 - \sum_{i=1}^{n}\overline{K}(E_i \wedge E) + \operatorname{div}\left(\left(\overline{\nabla}_E E\right)^{\top}\right) \\
&\quad -\langle\left(\overline{\nabla}_E E\right)^{\perp}, n\vec{H}\rangle + \sum_{i,j=1}^{n}\langle\overline{\nabla}_{E_i}E, E_j\rangle^2 + \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla^{\perp}_{E_i}E, \nabla^{\perp}_{E_i}E\rangle \\
&\quad +\langle E, n\vec{H}\rangle^2 \\
&= -\sum_{i,j=1}^{n}\langle\overline{\nabla}_{E_i}E, E_j\rangle^2 - \sum_{i=1}^{n}\overline{K}(E_i \wedge E) + \operatorname{div}\left(\left(\overline{\nabla}_E E\right)^{\top}\right) \\
&\quad -\langle\left(\overline{\nabla}_E E\right)^{\perp}, n\vec{H}\rangle + \left|\nabla^{\perp}E\right|^2 + \langle E, n\vec{H}\rangle^2 \\
&= -\sum_{i,j=1}^{n}\langle E, B(E_i, E_j)\rangle^2 - \sum_{i=1}^{n}\overline{K}(E_i \wedge E) + \operatorname{div}\left(\left(\overline{\nabla}_E E\right)^{\top}\right) \\
&\quad -\langle\left(\overline{\nabla}_E E\right)^{\perp}, n\vec{H}\rangle + \left|\nabla^{\perp}E\right|^2 + \langle E, n\vec{H}\rangle^2, \qquad (2.35)
\end{aligned}$$

όπου κάναμε χρήση της

$$\langle\overline{\nabla}_{E_i}E, \overline{\nabla}_{E_i}E\rangle = \left|\left(\overline{\nabla}_{E_i}E\right)^{\top}\right|^2 + \left|\left(\overline{\nabla}_{E_i}E\right)^{\perp}\right|^2$$

και του γεγονότος ότι στο $(0, p_0)$ το $\{E_1, ..., E_n\}$ είναι ορθομοναδιαίο πλαίσιο.

Ολοκληρώνοντας την (2.35), λαμβάνοντας υπόψη ότι το E έχει συμπαγές στήριγμα και εφαρμόζοντας το θεώρημα του Gauss λαμβάνουμε την (2.25). □

Θεωρούμε, για τη συνέχεια, ελαχιστικό υποπολύπτυγμα M του πολυπτύγματος Riemann $\overline{M}$. Σύμφωνα με τον τύπο της πρώτης μεταβολής το M αποτελεί κρίσιμο σημείο της συνάρτησης εμβαδού $A(t)$ και ο τύπος δεύτερης μεταβολής λαμβάνει τη μορφή

$$A''(0) = -\int_M \{\sum_{i,j=1}^{n} \langle E, B(E_i, E_j)\rangle^2 + \sum_{i=1}^{n} \overline{K}(E_i \wedge E) - \left|\nabla^{\perp} E\right|^2\} dM. \tag{2.36}$$

Ισχύει το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 2.3. *Με τους παραπάνω συμβολισμούς και λαμβάνοντας υπόψη ότι το $E \in N(M)$, έχουμε*

$$\frac{1}{2}\Delta |E|^2 = \langle \Delta^{\perp} E, E\rangle + \left|\nabla^{\perp} E\right|^2, \tag{2.37}$$

όπου $\Delta^{\perp} E := \sum_{i=1}^{n} \left(\nabla^{\perp}_{e_i}\nabla^{\perp}_{e_i} E - \nabla^{\perp}_{\nabla_{e_i} e_i} E\right)$ και $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ τυχαίο ορθομοναδιαίο πλαίσιο στο M.

Απόδειξη. Λόγω της (1.3) έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta |E|^2 &= \frac{1}{2}\Delta\langle E, E\rangle \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \{e_i(e_i\langle E, E\rangle) - (\nabla_{e_i} e_i)\langle E, E\rangle\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\{e_i\langle \nabla^{\perp}_{e_i} E, E\rangle - \langle \nabla^{\perp}_{\nabla_{e_i} e_i} E, E\rangle\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \{\langle \nabla^{\perp}_{e_i}\nabla^{\perp}_{e_i} E, E\rangle + \langle \nabla^{\perp}_{e_i} E, \nabla^{\perp}_{e_i} E\rangle - \langle \nabla^{\perp}_{\nabla_{e_i} e_i} E, E\rangle\} \\
&= \langle \sum_{i=1}^{n} \{\nabla^{\perp}_{e_i}\nabla^{\perp}_{e_i} E - \nabla^{\perp}_{\nabla_{e_i} e_i} E\}, E\rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla^{\perp}_{e_i} E, \nabla^{\perp}_{e_i} E\rangle \\
&= \langle \Delta^{\perp} E, E\rangle + \left|\nabla^{\perp} E\right|^2.
\end{aligned}$$

□

Ολοκληρώνοντας την ταυτότητα του λήμματος και λαμβάνοντας υπόψη ότι το E έχει συμπαγές στήριγμα, από το θεώρημα απόκλισης του Gauss έχουμε

$$\int_M \langle \Delta^\perp E, E\rangle dM = -\int_M \left|\nabla^\perp E\right|^2 dM.$$

Συνεπώς, η (2.36) λαμβάνει την μορφή

$$\begin{aligned} A''(0) &= \int_M \{-\sum_{i,j=1}^{n} \langle E, B(E_i,E_j)\rangle^2 - \sum_{i=1}^{n} \overline{K}(E_i \wedge E)\} dM \\ &\quad - \int_M \langle \Delta^\perp E, E\rangle dM. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Επειδή

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n} \langle E, B(E_i,E_j)\rangle^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle B(E_i,E_j),E\rangle \langle B(E_i,E_j),E\rangle \\ &= \langle \sum_{i,j=1}^{n} \langle B(E_i,E_j),E\rangle B(E_i,E_j), E\rangle \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \overline{K}(E_i \wedge E) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{R}(E_i,E)E, E_i\rangle \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \langle \overline{R}(E_i,E)E_i, E\rangle \\ &= \langle -\sum_{i=1}^{n} \left(\overline{R}(E_i,E)E_i\right)^\perp, E\rangle \end{aligned}$$

η (2.38) θα λάβει τη μορφή

$$\begin{aligned} A''(0) &= -\int_M \{\langle \Delta^\perp E + \sum_{i,j=1}^{n} \langle B(E_i,E_j),E\rangle B(E_i,E_j) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{R}(E_i,E)E_i\right)^\perp, E\rangle\} dM. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Για ελαχιστικές υπερεπιφάνειες παίρνουμε την παρακάτω

Πρόταση 2.2. *Έστω M^n προσανατολισμένη, ελαχιστική υπερεπιφάνεια του $\overline{M}^{n+1}(c)$. Αν E είναι κάθετο διανυσματικό πεδίο της M με συμπαγές στήριγμα και $\vec{N}$ το μοναδιαίο και κάθετο διανυσματικό πεδίο της M, τότε $E = f\vec{N}$, όπου $f \in D(M)$ έχει συμπαγές στήριγμα, και ισχύει*

$$A''(0) = -\int_M \big(\Delta f + (|A|^2 + nc)f\big)\, f dM. \tag{2.40}$$

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε την (2.40) αρκεί να υπολογίσουμε τους όρους της (2.39) για την περίπτωση υπερεπιφάνειας. Επειδή

$$B(E_i, E_j) = \langle B(E_i, E_j), \vec{N}\rangle \vec{N},$$

θα έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n} \langle B(E_i, E_j), E)\rangle B(E_i, E_j) &= f\sum_{i,j=1}^{n} \langle B(E_i, E_j), \vec{N}\rangle^2 \vec{N} \\ &= f|A|^2 \vec{N}. \end{aligned}$$

Λόγω της

$$\begin{aligned} \big(\overline{R}(E_i, E)E_i\big)^{\perp} &= \langle \big(\overline{R}(E_i, E)E_i\big)^{\perp}, \vec{N}\rangle \vec{N} \\ &= \langle \overline{R}(E_i, E)E_i, \vec{N}\rangle \vec{N} \\ &= f\langle \overline{R}(E_i, \vec{N})E_i, \vec{N}\rangle \vec{N}, \end{aligned}$$

θα έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{R}(E_i,E)E_i\right)^{\perp} &= f\sum_{i=1}^{n}\langle\overline{R}(E_i,\vec{N})E_i,\vec{N}\rangle\vec{N}\\ &= -f\sum_{i=1}^{n}\langle\overline{R}(\vec{N},E_i)E_i,\vec{N}\rangle\vec{N}\\ &= -f\sum_{i=1}^{n}\overline{K}(\vec{N}\wedge E_i)\vec{N}\\ &= -f\overline{Ric}(\vec{N},\vec{N})\vec{N}\\ &= -ncf\vec{N}, \end{aligned}\tag{2.41}$$

όπου $\overline{Ric}(\vec{N},\vec{N})$ είναι η καμπυλότητα Ricci του $\overline{M}$ στη μοναδιαία διεύθυνση $\vec{N}$. Τέλος, αν $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ είναι ορθομοναδιαίο πλαίσιο στη M θα έχουμε

$$\begin{aligned}\Delta^{\perp}E &= \sum_{i=1}^{n}\left(\nabla_{e_i}{}^{\perp}\nabla^{\perp}_{e_i}(f\vec{N})-\nabla^{\perp}_{\nabla_{e_i}e_i}(f\vec{N})\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\nabla^{\perp}_{e_i}\left((e_if)\vec{N}\right)-\left(\nabla_{e_i}e_i(f)\right)\vec{N}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(e_i(e_if)\vec{N}-\left(\nabla_{e_i}e_i\right)(f)\vec{N}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left\{e_i(e_i)f-\left(\nabla_{e_i}e_i\right)(f)\right\}\vec{N}\\ &= (\Delta f)\vec{N}.\end{aligned}$$

Συνεπώς, αντικαθιστώντας στην (2.39) τις παραπάνω εκφράσεις, προκύπτει η ζητούμενη σχέση. □

Με αφορμή την σχέση (2.39), ορίζουμε τους τελεστές.

$$\tilde{B}:N(M)\to N(M),\ V\mapsto\tilde{B}(V):=\sum_{i,j=1}^{n}\langle B(e_i,e_j),V\rangle B(e_i,e_j)$$

και

$$\tilde{R} : N(M) \to N(M),\ V \mapsto \tilde{R}(V) := \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{R}(e_i, V)e_i\right)^{\perp},$$

όπου $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ είναι ορθομοναδιαίο πλαίσιο στο M. Αποδεικνύεται ότι οι τελεστές $\tilde{B}$ και $\tilde{R}$ είναι ανεξάρτητοι από την επιλογή του ορθομοναδιαίου πλαισίου και ότι είναι συμμετρικοί, δηλαδή ισχύουν

$$\langle \tilde{B}(V), W\rangle = \langle V, \tilde{B}(W)\rangle \text{ και } \langle \tilde{R}(V), W\rangle = \langle V, \tilde{R}(W)\rangle$$

για κάθε $V, W \in N(M)$, όπου $\langle , \rangle$ το εσωτερικό γινόμενο στο $\overline{M}$.

Με τους νέους συμβολισμούς η (2.39) λαμβάνει την μορφή

$$\begin{aligned} A''(0) &= -\int_M \langle \Delta^{\perp}(E) - \tilde{R}(E) + \tilde{B}(E), E\rangle dM \\ &= \int_M \langle (-\Delta^{\perp} + \tilde{R} - \tilde{B})E, E\rangle dM. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση

$$I : N(M) \times N(M) \longrightarrow \mathbb{R},\ (V, W) \mapsto I(V, W),$$

με τύπο

$$I(V, W) = \int_M \langle (-\Delta^{\perp} + \tilde{R} - \tilde{B})V, W\rangle dM$$

λέγεται *μορφή δείκτη (index form)* του M στο $\overline{M}$. Συμβολίζουμε με $N_0(M)$ το σύνολο των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων του $N(M)$ με συμπαγές στήριγμα. Το M θα λέγεται *ευσταθές (stable)* αν $I(V, V) \geq 0$ για κάθε $V \in N_0(M)$ και *μη ευσταθές (unstable)* αν υπάρχει $V \in N_0(M)$ τέτοιο ώστε $I(V, V) < 0$.

Ο τελεστής $J : N(M) \longrightarrow N(M)$, ο οποίος ορίζεται ως εξής

$$J := -\Delta^{\perp} + \tilde{R} - \tilde{B},$$

λέγεται *τελεστής του Jacobi*. Ένα διανυσματικό πεδίο $V \in N(M)$ το οποίο πληροί τη σχέση $J(V) = 0$ θα λέγεται *πεδίο Jacobi*. Ο τελεστής J αποδεικνύεται ότι είναι ελλειπτικός τελεστής.

Για υπερεπιφάνειες $M^n \subset M^{n+1}(c)$, $V = f\vec{N}$, όπου $f \in D(M)$ με συμπαγές στήριγμα, σύμφωνα με την Πρόταση 2.2, θα έχουμε

$$I(V,V) = -\int_M \big(\Delta f + (|A|^2 + nc)f\big)\, f dM. \tag{2.42}$$

Πόρισμα 2.1. (Συνθήκη Ευστάθειας) *Έστω $M^n \subset \overline{M}^{n+1}(c)$ προσανατολισμένη και ελαχιστική υπερεπιφάνεια με προσανατολισμό $\vec{N}$. Η M^n είναι ευσταθής μόνο αν για κάθε Lipschitz συνάρτηση $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ με συμπαγές στήριγμα ισχύει*

$$\int_M |\nabla f|^2\, dM \geq \int_M (|A|^2 + nc) f^2 dM. \tag{2.43}$$

Απόδειξη. Η (2.43) προκύπτει άμεσα από την (2.42). □

Κεφάλαιο 3

Θεώρημα Bernstein

3.1 Ελαχιστικοί Κώνοι στον Ευκλείδειο Χώρο

Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τη μελέτη των ελαχιστικών κώνων του ευκλειδείου χώρου και τη σχέση τους με ελαχιστικά υποπολυπτύγματα της σφαίρας.

Έστω M^n υποπολύπτυγμα της μοναδιαίας σφαίρας S^{n+k} στον $\mathbb{R}^{n+k+1}$. Ο κώνος υπεράνω του M, συμβολίζεται με CM, είναι το σύνολο

$$CM := \left\{tx \in \mathbb{R}^{n+k+1} : \text{ με } x \in M \text{ και } t \geq 0\right\}.$$

Είναι προφανές ότι ο κώνος CM δεν είναι λείος το πολύ στην κορυφή. Ορίζουμε για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ το σύνολο

$$CM_\varepsilon := \left\{tx \in \mathbb{R}^{n+k+1} : \text{ με } x \in M \text{ και } t \geq \varepsilon\right\},$$

το οποίο λέγεται ε-κόλουρος κώνος και είναι λείος παντού ως πολύπτυγμα με σύνορο.

Παράδειγμα 3.1. *Συμβολίζουμε με $S^q(r)$ μια σφαίρα διάστασης q στον ευκλείδειο χώρο E^{q+1} με ακτίνα r. Έστωσαν p, n θετικοί ακέραιοι με $n > p$ και $M_{p,n-p} = S^p\left(\sqrt{\frac{p}{n}}\right) \times S^{n-p}\left(\sqrt{\frac{n-p}{n}}\right)$ το γινόμενο των σφαιρών $S^p\left(\sqrt{\frac{p}{n}}\right)$ και $S^{n-p}\left(\sqrt{\frac{n-p}{n}}\right)$.*

Το πολύπτυγμα $M_{p,n-p}$ εμφυτεύεται στην $S^{n+1}(1)$ ως εξής. Έστωσαν X_1, X_2 διανύσματα των E^{p+1} και E^{n-p+1}, αντίστοιχα, με $|X_1| = \sqrt{\frac{p}{n}}$ και $|X_2| = \sqrt{\frac{n-p}{n}}$. Το σημείο (X_1, X_2) του $E^{n+2} = E^{p+1} \times E^{n-p+1}$ είναι στην $S^{n+1}(1)$.

Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το $M_{p,n-p}$ είναι ελαχιστικό υποπολύπτυγμα της $S^{n+1}(1)$. Προς τούτο έστω $\theta(u^1, u^2, ..., u^p)$ και $\phi(w^1, w^2, ..., w^{n-p})$ τοπικές παραμετρικές παραστάσεις των $S^p(1)$ και $S^{n-p}(1)$. Τότε η διανυσματική συνάρτηση

$$\begin{aligned} z(u^1, u^2, ..., u^p, w^1, w^2, ..., w^{n-p}) &= \sqrt{\frac{p}{n}}\theta(u^1, u^2, ..., u^p) \\ &\quad + \sqrt{\frac{n-p}{n}}\phi(w^1, w^2, ..., w^{n-p}) \end{aligned}$$

είναι τοπική παραμετρική παράσταση της $M_{n,n-p}$. Θα έχουμε

$$z_{u^i} = \sqrt{\frac{p}{n}}\theta_{u^i}, \ \forall i = 1, ..., p \text{ και } z_{w^j} = \sqrt{\frac{n-p}{n}}\phi_{w^j}, \ \forall j = 1, ..., n-p.$$

Είναι προφανές ότι το διάνυσμα $\xi = \sqrt{\frac{n-p}{n}}\theta - \sqrt{\frac{p}{n}}\phi$ είναι μοναδιαίο, εφαπτόμενο της S^{n+1} και κάθετο στην $M_{p,n-p}$. Από τις εξισώσεις Weingarten *λαμβάνουμε*

$$\begin{aligned}
\xi_{u^i} &= \sqrt{\frac{n-p}{n}}\theta_{u^i} = \frac{\sqrt{\frac{n-p}{n}}}{\sqrt{\frac{p}{n}}} z_{u^i} = \sqrt{\frac{n-p}{p}} z_{u^i}, \ \forall i = 1, ..., p, \\
\xi_{w^j} &= -\sqrt{\frac{p}{n}}\phi_{w^j} = -\frac{\sqrt{\frac{p}{n}}}{\sqrt{\frac{n-p}{n}}} z_{w^j} = -\sqrt{\frac{p}{n-p}} z_{w^j}, \ \forall j = 1, ..., n-p.
\end{aligned}$$

Συνεπώς οι κύριες καμπυλότητες του $M_{p,n-p}$ είναι οι

$$\begin{aligned}
k_1 &= k_2 = ... = k_p = -\sqrt{\frac{n-p}{p}}, \\
k_{p+1} &= k_{p+2} = ... = k_n = \sqrt{\frac{p}{n-p}}.
\end{aligned}$$

Άρα η μέση καμπυλότητα H, του $M_{p,n-p}$, είναι

$$nH = \sum_{l=1}^{n} k_l = p\left(-\sqrt{\frac{n-p}{p}}\right) + (n-p)\left(\sqrt{\frac{p}{n-p}}\right) = 0.$$

Επιπλέον, το τετράγωνο της δεύτερης θεμελιώδους μορφής θα είναι

$$S = \sum_{l=1}^{n} k_l^2 = p\left(\sqrt{\frac{n-p}{p}}\right)^2 + (n-p)\left(\sqrt{\frac{p}{n-p}}\right)^2 = n.$$

Όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια ο κώνος $CM_{p,n-p}$ υπεράνω του $M_{p,n-p}$ είναι ελαχιστικός στον $\mathbb{R}^{n+2}$.

Μια ειδική περίπτωση, για $p = 3$ και $n = 6$, θα αποδειχθεί χρήσιμη. Η υπερεπιφάνεια $M_{3,3} = S^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times S^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ της $S^7(1)$ είναι ελαχιστική και ο αντίστοιχος κώνος $CM_{3,3}$, διάστασης 7, είναι επίσης ελαχιστικός στον $\mathbb{R}^8$.

Μας ενδιαφέρει να συγκρίνουμε στοιχεία του M με στοιχεία του CM_ε. Προς τούτο, έστω $\vec{\theta}(u^1, u^2, ..., u^n)$, μια τοπική παραμετρική παράσταση του M. Τότε η

$$\vec{x}(t, u^1, u^2, ..., u^n) := t\vec{\theta}(u^1, u^2, ..., u^n),\ t \geq \varepsilon$$

θα είναι μια τοπική παραμετρική παράσταση του ε-κόλουρου κώνου CM_ε. Θα υπολογίσουμε, στη συνέχεια, τις θεμελιώδεις μορφές των M, CM_ε και θα δούμε πως συνδέονται μεταξύ τους.

Θέτοντας $u^0 := t$ οι συνιστώσες $g_{ij}, \tilde{g}_{ij}$ των μετρικών των M και CM_ε θα είναι:

$$g_{ij} = \langle \vec{\theta}_{u^i}, \vec{\theta}_{u^j} \rangle,\ \forall i, j = 1, 2, ..., n, \tag{3.1}$$

$$\tilde{g}_{ij} = \langle \vec{x}_{u^i}, \vec{x}_{u^j} \rangle,\ \forall i, j = 0, 1, ..., n, \tag{3.2}$$

αντίστοιχα.

Επειδή,

$$\vec{x}_t = \vec{\theta},\ \vec{x}_{u^i} = t\vec{\theta}_{u^i},\ \vec{x}_{tt} = \vec{0},\ \vec{x}_{tu^i} = \vec{x}_{u^i t} = \vec{\theta}_{u^i},\ \vec{x}_{u^i u^j} = t\vec{\theta}_{u^i u^j} \tag{3.3}$$

έχουμε ότι,

$$\tilde{g}_{ij} = \langle \vec{x}_{u^i}, \vec{x}_{u^j} \rangle = t^2 \langle \vec{\theta}_{u^i}, \vec{\theta}_{u^j} \rangle = t^2 g_{ij},\ \forall i, j = 1, 2, ..., n \tag{3.4}$$

$$\tilde{g}_{tt} = \langle \vec{x}_t, \vec{x}_t \rangle = 1, \tag{3.5}$$

$$\tilde{g}_{it} = \langle \vec{x}_{u^i}, \vec{x}_t \rangle = 0. \tag{3.6}$$

Έστω $\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k\}$ τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο στον κάθετο χώρο του M στην S^{n+k}. Μεταφέροντας, παράλληλα, κατά μήκος των γενετειρών του ε-κόλουρου κώνου, οι συνιστώσες της δεύτερης θεμελιώδους μορφής, στην διεύθυνση ξ_m, των M και CM_ε θα είναι:

$$b_{ij}^m = \langle \vec{\theta}_{u^i u^j}, \xi_m \rangle,\ \forall i, j = 1, 2, ..., n \text{ και } m = 1, ..., k \tag{3.7}$$

$$\tilde{b}_{ij}^m = \langle \vec{x}_{u^i u^j}, \xi_m \rangle,\ \forall i, j = 0, 1, ..., n \text{ και } m = 1, ..., k, \tag{3.8}$$

αντίστοιχα.

Η (3.8) λόγω της (3.3) δίνει

$$\tilde{b}_{ij}^m = tb_{ij}^m, \; \tilde{b}_{it}^m = \tilde{b}_{tt}^m = 0, \; \forall i, j = 1, ..., n \text{ και } m = 1, ..., k. \tag{3.9}$$

Το τετράγωνο του μήκους της δεύτερης θεμελιώδους μορφής B ενός υποπολυπτύγματος M στο $\overline{M}$, δίνεται από τη σχέση

$$|B|^2 = \sum_{m,\overline{m},r,\overline{r}=1}^{n} g^{m\overline{m}} g^{r\overline{r}} \langle b_{mr}, b_{\overline{m}\,\overline{r}} \rangle, \tag{3.10}$$

όπου g_{ij} η επαγόμενη μετρική από το $\overline{M}$ στο M και

$$b_{ij} = B\left(\vec{x}_{u^i}, \vec{x}_{u^j}\right),$$

ως προς τοπικό σύστημα συντεταγμένων.

Συμβολίζουμε με S το τετράγωνο του μήκους της δεύτερης θεμελιώδους μορφής του M στην S^{n+k} και με $\tilde{S}$ το τετράγωνο του μήκους της δεύτερης θεμελιώδους μορφής του CM στον $\mathbb{R}^{n+k+1}$, αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας τον τύπο (3.10) και τις σχέσεις (3.7),(3.8) θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\tilde{S} &= \sum_{m,\overline{m},r,\overline{r}=0}^{n} \tilde{g}^{m\overline{m}} \tilde{g}^{r\overline{r}} \langle \tilde{b}_{mr}, \tilde{b}_{\overline{m}\,\overline{r}} \rangle \\
&= \sum_{m,\overline{m},r,\overline{r}=1}^{n} \tilde{g}^{m\overline{m}} \tilde{g}^{r\overline{r}} \langle \tilde{b}_{mr}, \tilde{b}_{\overline{m}\,\overline{r}} \rangle. \\
&= \frac{1}{t^2} \sum_{m,\overline{m},r,\overline{r}=1}^{n} g^{m\overline{m}} g^{r\overline{r}} \langle b_{mr}, b_{\overline{m}\,\overline{r}} \rangle \\
&= \frac{1}{t^2} S.
\end{aligned}$$

Συμπερασματικά, προκύπτει η σχέση

$$\tilde{S} = \frac{1}{t^2} S. \tag{3.11}$$

Θεωρούμε, τώρα, μια διαφορίσιμη συνάρτηση $f(t, u^1, u^2, ..., u^n)$ του CM ή του CM_ε. Συμβολίζουμε, για κάθε t σταθερό, με f_t τη διαφορίσιμη συνάρτηση στο M, που ορίζεται ως $f_t(u^1, u^2, ..., u^n) := f(t, u^1, u^2, ..., u^n)$. Ισχύει η παρακάτω

Πρόταση 3.1. *Θεωρούμε ένα ελαχιστικό υποπολύπτυγμα M^n της μοναδιαίας σφαίρας S^{n+k}. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

1. $\Delta f = \frac{1}{t^2}\Delta(f_t) + \frac{n}{t}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$,

όπου έχουμε συμβολίσει με το ίδιο γράμμα Δ τους τελεστές Laplace στο M και CM_ε.

2. *Το CM_ε είναι ελαχιστικό υποπολύπτυγμα του $\mathbb{R}^{n+k+1}$.*

Απόδειξη. **1.** Θέτουμε $\vec{x}_{u^i} \equiv \frac{\partial}{\partial u^i}$, οπότε $\vec{x}_{u^0} = \vec{x}_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}$. Απο την έκφραση της Δf σε τοπικές συντεταγμένες, σύμφωνα με την (1.4), θα έχουμε

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}}\sum_{i,j=0}^{n}\frac{\partial}{\partial u^i}(\sqrt{\tilde{g}}\,\tilde{g}^{ij}\frac{\partial}{\partial u^j}(f)), \tag{3.12}$$

όπου $\tilde{g} = \det(\tilde{g}_{ij})$. Αν $g = \det(g_{ij})$, τότε λόγω των σχέσεων (3.4), (3.5) και (3.6) θα έχουμε ότι

$$\tilde{g} = \det(\tilde{g}_{ij}) = \det(t^2 g_{ij}) = t^{2n}\det(g_{ij}) = t^{2n} g. \tag{3.13}$$

Αντικαθιστώντας στην (3.12) θα έχουμε

$$\Delta f = \frac{1}{t^n\sqrt{g}}\sum_{i,j=0}^{n}\frac{\partial}{\partial u^i}\left(t^n\sqrt{g}\,\tilde{g}^{ij}\frac{\partial}{\partial u^j}(f)\right)$$

$$= \frac{1}{t^n\sqrt{g}}\{\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u^i}\left(t^n\sqrt{g}\,\tilde{g}^{ij}\frac{\partial}{\partial u^j}(f)\right) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u^i}\left(t^n\sqrt{g}\,\tilde{g}^{it}\frac{\partial}{\partial t}(f)\right) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t}\left(t^n\sqrt{g}\,\tilde{g}^{tj}\frac{\partial}{\partial u^j}(f)\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(t^n\sqrt{g}\,\tilde{g}^{tt}\frac{\partial}{\partial t}(f)\right)\}. \tag{3.14}$$

Από τις σχέσεις (3.4), (3.5) και (3.6) θα έχουμε επίσης ότι

$$\tilde{g}^{ij}=\frac{1}{t^2}g^{ij},\ \tilde{g}^{it}=0,\ \forall i=1,...,n \text{ και } \tilde{g}^{tt}=1. \tag{3.15}$$

Άρα η (3.14), λόγω της (3.15), θα γίνει,

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \frac{1}{t^n\sqrt{g}}\left\{t^{n-2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\sqrt{g}\,g^{ij}\frac{\partial}{\partial u^j}(f)\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(t^n\sqrt{g}\,\frac{\partial}{\partial t}(f)\right)\right\}\\
&= \frac{1}{t^2\sqrt{g}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\sqrt{g}\,g^{ij}\frac{\partial}{\partial u^j}(f)\right)+\frac{1}{t^n}\frac{\partial}{\partial t}\left(t^n\,\frac{\partial}{\partial t}(f)\right)\\
&= \frac{1}{t^2\sqrt{g}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\sqrt{g}\,g^{ij}\frac{\partial}{\partial u^j}(f_t)\right)\\
&\quad +\frac{1}{t^n}\left\{nt^{n-1}\frac{\partial}{\partial t}(f)+t^n\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}(f)\right)\right\}\\
&= \frac{1}{t^2}\Delta(f_t)+\frac{n}{t}\frac{\partial}{\partial t}(f)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}(f)\right)\\
&= \frac{1}{t^2}\Delta(f_t)+\frac{n}{t}\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

2. Από την (3.16) λαμβάνοντας ως f την $\vec{x}=t\vec{\theta}$ θα έχουμε:

$$\Delta\vec{x}=\frac{1}{t^2}\Delta(\vec{x}_t)+\frac{n}{t}\frac{\partial\vec{x}}{\partial t}+\frac{\partial^2\vec{x}}{\partial t^2},$$

από όπου έπεται, με χρήση της (1.12), ότι

$$(n+1)\vec{H}_{CM} = \frac{1}{t^2}\Delta(t\vec{\theta})+\frac{n}{t}\vec{\theta}=\frac{n}{t}\tilde{\vec{H}}_M+\frac{n}{t}\vec{\theta}, \tag{3.17}$$

όπου $\vec{H}_{CM}$ το διάνυσμα μέσης καμπυλότητας του CM στον $\mathbb{R}^{n+k+1}$ και $\tilde{\vec{H}}_M$ το διάνυσμα μέσης καμπυλότητας του M στον $\mathbb{R}^{n+k+1}$. Συμβολίζουμε με $\vec{H}_M$ το διάνυσμα μέσης καμπυλότητας του M στην S^{n+k}. Εφαρμόζοντας τη σχέση (1.10), έχουμε

$$\tilde{B}_M(E_i, E_i) = B_M(E_i, E_i) + B_S(E_i, E_i), \ \forall i = 1, 2, ..., n,$$

όπου $\tilde{B}_M$ είναι η δεύτερη θεμελιώδης μορφή του M στον $\mathbb{R}^{n+k+1}$, B_M η δεύτερη θεμελιώδης μορφή του M στην S^{n+k}, B_S η δεύτερη θεμελιώδης μορφή της S^{n+k} στον $\mathbb{R}^{n+k+1}$ και $\{E_1, E_2..., E_n\}$ τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο του M. Αθροίζοντας, ως προς i, θα έχουμε,

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{B}_M(E_i, E_i) = \sum_{i=1}^{n} B_M(E_i, E_i) + \sum_{i=1}^{n} B_S(E_i, E_i),$$

δηλαδή,

$$n\tilde{\vec{H}}_M = n\vec{H}_M + \sum_{i=1}^{n} B_S(E_i, E_i). \tag{3.18}$$

Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά την (3.18) με το $\vec{\theta}$ παίρνουμε

$$\langle n\tilde{\vec{H}}_M, \vec{\theta}\rangle = \langle n\vec{H}_M, \vec{\theta}\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle B_S(E_i, E_i), \vec{\theta}\rangle.$$

Το $\vec{H}_M$ είναι κάθετο στο $\vec{\theta}$, άρα θα έχουμε

$$\langle n\tilde{\vec{H}}_M, \vec{\theta}\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle B_S(E_i, E_i), \vec{\theta}\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle A_{\vec{\theta}}(E_i), E_i\rangle, \tag{3.19}$$

όπου $A_{\vec{\theta}}$ η απεικόνιση Weingarten της S^{n+k} στον $\mathbb{R}^{n+k+1}$ στη διεύθυνση $\vec{\theta}$. Για $X \in \Delta(S^{n+k})$ από τον τύπο (1.11) προκύπτει

$$A_{\vec{\theta}}(X) = -X$$

και συνεπώς από την (3.19) έχουμε

$$\langle \tilde{\vec{H}}_M, \vec{\theta}\rangle = -1. \tag{3.20}$$

Η σχέση (3.17) δίνει

$$\begin{aligned}(n+1)\vec{H}_{CM} &= \frac{n}{t}\tilde{\vec{H}}_M + \frac{n}{t}\vec{\theta} \\ &= \frac{n}{t}\{\vec{H}_M + \langle \tilde{\vec{H}}_M, \vec{\theta}\rangle\vec{\theta}\} + \frac{n}{t}\vec{\theta},\end{aligned}$$

ή, λόγω της (3.20),

$$\vec{H}_{CM} = \frac{n}{t(n+1)}\vec{H}_M,$$

από όπου προκύπτει το ζητούμενο. □

Θεωρούμε, για τη συνέχεια, μια ελαχιστική και συμπαγή προσανατολισμένη υπερεπιφάνεια M^n της μοναδιαίας σφαίρας S^{n+1}. Συμβολίζουμε με $\vec{N}(t,\vec{\theta})$ το διαφορίσιμο μοναδιαίο και κάθετο διανυσματικό πεδίο στον ε-κόλουρο κώνο CM_ε και θέτουμε $V(t,\vec{\theta}) = f(t,\vec{\theta})\vec{N}(t,\vec{\theta})$, όπου $f(t,\vec{\theta})$ είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση που ορίζεται στον CM_ε με $f(\varepsilon,\vec{\theta}) = f(t,\vec{\theta}) = 0$, για $t \geq 1$.

Λήμμα 3.1. *Με τους παραπάνω συμβολισμούς ισχύει*

$$I(V,V) = \int_{[\varepsilon,1]\times M}\left(-\Delta(f_t) - Sf - nt\frac{\partial f}{\partial t} - t^2\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)t^{n-2} f dM_\varepsilon, \quad (3.21)$$

όπου dM_ε είναι το στοιχείο όγκου του γινομένου $[\varepsilon,1]\times M$.

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με $\overline{S}$ το τετράγωνο του μήκους της δεύτερης θεμελιώδους μορφής του CM_ε. Από την (2.42) και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο περιβάλλων χώρος είναι ευκλείδειος, θα έχουμε

$$I(V,V) = \int_{CM_\varepsilon}\left(-\Delta f - f\overline{S}\right) f dCM_\varepsilon,$$

όπου dCM_ε είναι το στοιχείο όγκου του CM_ε. Σε τοπικές συντεταγμένες έχουμε

$$\begin{aligned} dCM_\varepsilon &= \sqrt{\det \tilde{g}_{ij}}\, dt \wedge du^1 \wedge du^2 \wedge \dots \wedge du^n \\ &= \sqrt{t^{2n} \det g_{ij}}\, dt \wedge du^1 \wedge du^2 \wedge \dots \wedge du^n \\ &= t^n \sqrt{\det g_{ij}}\, dt \wedge du^1 \wedge du^2 \wedge \dots \wedge du^n \\ &= t^n dM_\varepsilon, \end{aligned} \tag{3.22}$$

όπου dM_ε είναι το στοιχείο όγκου του γινομένου $[\varepsilon, 1] \times M$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.11) και (3.16), η παραπάνω σχέση λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{aligned} I(V,V) &= \int_{CM_\varepsilon} \left(-\frac{1}{t^2}\Delta(f_t) - \frac{f}{t^2}S - \frac{n}{t}\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) f dCM_\varepsilon \\ &= \int_{CM_\varepsilon} \frac{1}{t^2} \left(-\Delta(f_t) - fS - nt\frac{\partial f}{\partial t} - t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) f dCM_\varepsilon \\ &= \int_{CM_\varepsilon} \left(-\Delta(f_t) - fS - nt\frac{\partial f}{\partial t} - t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) t^{-2} f dCM_\varepsilon \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει η (3.21). □

Με αφορμή τη σχέση (3.21), ορίζουμε τους δύο διαφορικούς τελεστές,

$$L_1 : D(M) \longrightarrow D(M),\ f \longmapsto L_1(f) := -\Delta f - Sf \tag{3.23}$$

$$L_2 : D([\varepsilon, 1]) \longrightarrow D([\varepsilon, 1]),\ g \longmapsto L_2(g) := -t^2 g'' - ntg'. \tag{3.24}$$

Για τον διαφορικό τελεστή L_1 ισχύει το παρακάτω.

Λήμμα 3.2. *Ο L_1 διαγωνιοποιείται από ένα πλήρες ορθομοναδιαίο σύστημα ιδιοσυναρτήσεων $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, από το $D(M)$, με αντίστοιχες ιδιοτιμές λ_i τέτοιες ώστε*

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_i \leq \dots \longrightarrow \infty.$$

Επιπλέον, για $\lambda_i \neq \lambda_j$*, έχουμε* $\int_M f_i f_j dM = 0$ *και αν* $f \in D(M)$*, τότε* $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$*, όπου* $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *οι συνιστώσες της* f *ως προς το σύστημα* $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Απόδειξη. Ο διαφορικός τελεστής L_1 είναι αυστηρά ελλειπτικός, άρα διαγωνιοποιείται στον $D(M)$ από ιδιοσυναρτήσεις $\{f_i\}$, με αντίστοιχες ιδιοτιμές λ_i τέτοιες ώστε

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_i \leq ... \longrightarrow \infty.$$

Λόγω της (1.7) έχουμε ότι ο L_1 είναι αυτοπροσαρτημένος ως προς το εσωτερικό γινόμενο

$$(f,g) := \int_M fg\; dM.$$

Πραγματικά, για $f, g \in D(M)$, έχουμε

$$\begin{aligned}
(L_1(f), g) &= \int_M (-\Delta f - Sf)\, g\; dM = -\int_M g\Delta f\; dM - \int_M (Sf)g\; dM \\
&= -\int_M f\Delta g dM - \int_M f(Sg)\; dM = \int_M f\,(-\Delta g - Sg)\; dM \\
&= (f, L_1(g)).
\end{aligned}$$

Συνεπώς, αν $\lambda_i \neq \lambda_j$, από την

$$(L_1(f_i), f_j) = (f_i, L_1(f_j))$$

προκύπτει

$$(\lambda_i - \lambda_j)(f_i, f_j) = 0,$$

από όπου έχουμε ότι $\int_M f_i f_j dM = 0$.

Παίρνοντας ορθογώνια προβολή της f στους ιδιοχώρους, θα έχουμε $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$, όπου $a_i = (f, f_i) = \int_M f f_i dM$. □

Για τον τελεστή L_2 ισχύει το εξής.

Λήμμα 3.3. *Συμβολίζουμε με $D_0([\varepsilon,1])$ το σύνολο των συναρτήσεων $f \in D([\varepsilon,1])$ με $f(\varepsilon)=f(1)=0$. Ο τελεστής L_2 διαγωνιοποιείται από ένα πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, από τον $D_0([\varepsilon,1])$, με αντίστοιχες ιδιοτιμές δ_k τέτοιες ώστε*

$$\delta_1 < \delta_2 < ... < \delta_k < ... \longrightarrow \infty.$$

Συγκεκριμένα έχουμε

$$g_k(t) = -t^{\frac{1-n}{2}} \sin\left(\frac{k\pi}{\log\varepsilon}\log t\right), \quad \delta_k = \left(\frac{k\pi}{\log\varepsilon}\right)^2 + \frac{(n-1)^2}{4}, \ k\in\mathbb{N}.$$

Επίσης, για $i \neq j$, έχουμε ότι $\int_\varepsilon^1 g_i g_j t^{n-2}dt = 0$ και αν $g \in D_0([\varepsilon,1])$ τότε υπάρχουν μοναδικές σταθερές $\{b_i\}$ τέτοιες ώστε $g=\sum_{i=1}^\infty b_i g_i$.

Απόδειξη. Αναζητούμε τις συναρτήσεις $g \in D_0([\varepsilon,1])$ που πληρούν την εξίσωση $L_2(g)=\delta g$ όπου $\delta\in\mathbb{R}$. Λόγω της (3.24) αυτές προκύπτουν ως λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$t^2 g'' + ntg' + \delta g = 0. \tag{3.25}$$

Παρατηρούμε ότι αυτή είναι τύπου Euler. Εκτελούμε την αλλαγή $t=e^x$ και αυτή ανάγεται σε μια ομογενή, γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Πραγματικά, έχουμε

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = g'(t)e^x, \qquad (3.26)\\ g''(x) &= \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(\frac{\partial t}{\partial x})^2 + \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = g''(t)e^{2x} + g'(t)e^x = g''(t)t^2 + g'(x). \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$g''(x) - g'(x) = g''(t)t^2$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην (3.25) έχουμε

$$g'' + (n-1)g' + \delta g = 0 \tag{3.27}$$

και με τις συνοριακές συνθήκες τώρα να είναι

$$g(0) = g(\log \varepsilon) = 0. \tag{3.28}$$

Για την επίλυση αυτής θεωρούμε τη χαρακτηριστική πολυωνυμική εξίσωση

$$y^2 + (n-1)y + \delta = 0.$$

Για τις ρίζες της

$$y_{1,2} = \frac{(1-n) \pm \sqrt{(n-1)^2 - 4\delta}}{2},$$

διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις

1. Αν $\Delta = 0$ τότε $y_{1,2} = \frac{1-n}{2}$. Άρα η λύση της (3.27) σε αυτήν την περίπτωση θα είναι

$$\begin{aligned} g(x) &= c_1 \exp(y_1 x) + c_2 x \exp(y_2 x) \\ &= c_1 \exp\left(\frac{1-n}{2}x\right) + c_2 x \exp\left(\frac{1-n}{2}x\right). \end{aligned} \tag{3.29}$$

   Από την (3.29), λόγω της (3.28) έχουμε $c_1 = c_2 = 0$ και συνεπώς έπεται $g(x) = 0$.

2. Αν $\Delta > 0$ τότε $y_{1,2} = \frac{(1-n)\pm\sqrt{(n-1)^2-4\delta}}{2}$. Άρα η λύση της (3.27) σε αυτήν την περίπτωση θα είναι

$$\begin{aligned} g(x) &= c_1 \exp\left(\frac{(1-n)+\sqrt{(n-1)^2-4\delta}}{2}x\right) \\ &\quad + c_2 \exp\left(\frac{(1-n)-\sqrt{(n-1)^2-4\delta}}{2}x\right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Από την (3.30), λόγω της (3.28), έχουμε $c_1 = c_2 = 0$ και συνεπώς έπεται, επίσης, $g(x) = 0$.

3. Αν $\Delta < 0$ τότε $y_{1,2} = \frac{(1-n)\pm i\sqrt{4\delta-(n-1)^2}}{2}$. Άρα η λύση της (3.27) σε αυτή την περίπτωση θα είναι

$$\begin{aligned} g(x) &= c_1 \exp\left(\frac{1-n}{2}x\right)\cos\left(\frac{\sqrt{4\delta-(n-1)^2}}{2}x\right) \\ &\quad + c_2 \exp\left(\frac{1-n}{2}x\right)\sin\left(\frac{\sqrt{4\delta-(n-1)^2}}{2}x\right). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Από την (3.31), λόγω της (3.28), θα έχουμε

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 \exp\left(\frac{1-n}{2}\log\varepsilon\right)\sin\left(\frac{\sqrt{4\delta-(n-1)^2}}{2}\log\varepsilon\right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Η (3.32) δίνει ή $c_2 = 0$ ή $\exp\left(\frac{1-n}{2}\log\varepsilon\right)\sin\left(\frac{\sqrt{4\delta-(n-1)^2}}{2}\log\varepsilon\right) = 0$.

1. Αν $c_2 = 0$ τότε λαμβάνουμε ξανά την μηδενική λύση $g(x) = 0$.

2. Αν $\exp\left(\frac{1-n}{2}\log\varepsilon\right)\sin\left(\frac{\sqrt{4\delta-(n-1)^2}}{2}\log\varepsilon\right) = 0$ τότε έχουμε,

$$\sin\left(\frac{\sqrt{4\delta-(n-1)^2}}{2}\log\varepsilon\right) = 0$$

ή

$$\frac{\sqrt{4\delta-(n-1)^2}}{2}\log\varepsilon = -k\pi,\ k\in\mathbb{N}$$

ή

$$\sqrt{4\delta-(n-1)^2} = -\frac{2k\pi}{\log\varepsilon},\ k\in\mathbb{N}$$

ή

$$4\delta-(n-1)^2 = 4\left(\frac{k\pi}{\log\varepsilon}\right)^2,\ k\in\mathbb{N}$$

ή

$$4\delta = 4\left(\frac{k\pi}{\log\varepsilon}\right)^2 + (n-1)^2,\ k\in\mathbb{N}$$

ή

$$\delta=\delta_k=\left(\frac{k\pi}{\log\varepsilon}\right)^2+\frac{(n-1)^2}{4},\ k\in\mathbb{N} \tag{3.33}$$

Συνεπώς, αντικαθιστώντας την (3.33) στην (3.31), οι ιδιοσυναρτήσεις του L_2, εκτός της μηδενικής, θα είναι οι

$$g_k(t) = -t^{\frac{1-n}{2}}\sin\left(\frac{k\pi}{\log\varepsilon}\log t\right),\ k\in\mathbb{N}.$$

Επίσης, αν $i\neq j$, θα έχουμε

$$\int_\varepsilon^1 g_i g_j t^{n-2}\,dt = \int_\varepsilon^1 t^{-1}\sin\left(\frac{i\pi}{\log\varepsilon}\log t\right)\sin\left(\frac{j\pi}{\log\varepsilon}\log t\right)\,dt.$$

Εκτελώντας την αλλαγή $x=\frac{\pi}{\log\varepsilon}\log t$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^1 g_i g_j t^{n-2}\,dt &= \int_\pi^0 \sin(ix)\sin(jx)\frac{\log\varepsilon}{\pi}\,dx\\
&= -\frac{\log\varepsilon}{\pi}\int_0^\pi \sin(ix)\sin(jx)\,dx\\
&= -\frac{\log\varepsilon}{\pi}\left\{-\frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos((i+j)x)-\cos((i-j)x)\,dx\right\}\\
&= \frac{\log\varepsilon}{2\pi}\left\{\left[\frac{\sin((i+j)x)}{i+j}\right]_0^\pi - \left[\frac{\sin((i-j)x)}{i-j}\right]_0^\pi\right\} = 0.
\end{aligned}$$

Κανονικοποιούμε τη βάση $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, ως προς το εσωτερικό γινόμενο $(,)$ που ορίζεται ως εξής

$$(f,h) := \int_{\varepsilon}^{1} fht^{n-2}\,dt,$$

για κάθε $f,h \in D_0([\varepsilon,1])$. Συνεπώς, για $g \in D_0([\varepsilon,1])$ έχουμε την ανάλυση $g = \sum_{i=1}^{\infty} b_i g_i$, όπου $b_i = \left(\int_{\varepsilon}^{1} g g_i t^{n-2}\,dt\right)\left(\int_{\varepsilon}^{1} g_i^2 t^{n-2}\,dt\right)^{-\frac{1}{2}}$.

□

Με τους συμβολισμούς που έχουν προηγηθεί και τις υποθέσεις του Λήμματος 3.1 ισχύει το εξής.

Λήμμα 3.4. *Υπάρχει διαφορίσιμη συνάρτηση $f(t,u^1,u^2,...,u^n)$ του CM_ε με $f(\varepsilon,u^1,...,u^n) = f(t,u^1,...,u^n) = 0$, για κάθε $t \geq 1$, τέτοια ώστε $I(V,V) < 0$, αν και μόνον αν, ισχύει $\lambda_1 + \delta_1 < 0$.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει διαφορίσιμη συνάρτηση $f(t,u^1,u^2,...,u^n)$ του CM_ε με $f(\varepsilon,u^1,...,u^n) = f(t,u^1,...,u^n) = 0$, για κάθε $t \geq 1$, τότε αυτή θα έχει την μοναδική ανάλυση

$$f(t,u^1,u^2,...,u^n) = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} f_i(u^1,u^2,...,u^n) g_j(t), \text{ όπου } a_{ij} \in \mathbb{R}. \quad (3.34)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (3.21) λαμβάνουμε

$$
\begin{aligned}
I(V,V) &= \int_{[\varepsilon,1]\times M} \left(L_1(f)+L_2(f)\right) t^{n-2} f dM_\varepsilon \\
&= \int_{[\varepsilon,1]\times M} \left(\sum_{i,j=1}^{\infty}\{a_{ij}g_jL_1(f_i)+a_{ij}f_iL_2(g_j)\}\right)\left(t^{n-2}\sum_{k,l=1}^{\infty}a_{kl}f_kg_l\right)dM_\varepsilon \\
&= \int_{[\varepsilon,1]\times M} \left(\sum_{i,j=1}^{\infty}a_{ij}(\lambda_i+\delta_j)f_ig_j\right)\left(t^{n-2}\sum_{k,l=1}^{\infty}a_{kl}f_kg_l\right)dM_\varepsilon \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{\infty} a_{ij}a_{kl}(\lambda_i+\delta_j)\int_{[\varepsilon,1]\times M} f_ig_jf_kg_lt^{n-2}dM_\varepsilon \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{\infty} a_{ij}a_{kl}(\lambda_i+\delta_j)\left(\int_M f_if_k\, dM\right)\left(\int_{[\varepsilon,1]} g_jg_lt^{n-2}\, dt\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{\infty}(a_{ij})^2(\lambda_i+\delta_j)\left(\int_M {f_i}^2\, dM\right)\left(\int_{[\varepsilon,1]} {g_j}^2t^{n-2}\, dt\right).
\end{aligned}
$$

Συνεπώς, αν $I(V,V)<0$, τότε υπάρχουν λ_i,δ_j τέτοια ώστε $\lambda_i+\delta_j<0$. Αλλά, αφού $\lambda_1\leq\lambda_i$ για κάθε i, και $\delta_1\leq\delta_j$ για κάθε j, έχουμε ότι $\lambda_1+\delta_1<0$. Επιπλέον, αν υποθέσουμε ότι $\lambda_1+\delta_1<0$ μπορούμε να διαλέξουμε $f(t,u^1,u^2,...,u^n):=f_1(u^1,u^2,...,u^n)g_1(t)$ και θα έχουμε

$$I(V,V)=(\lambda_1+\delta_1)\left(\int_{[\varepsilon,1]} g_1^2t^{n-2}dt\right)\left(\int_M f_1^2dM\right)<0,$$

αφού $\int_\varepsilon^1 g_1^2t^{n-2}dt=-\frac{\log\varepsilon}{2}>0$. □

Στην συνέχεια θα βρούμε μια εκτίμηση της ιδιοτιμής λ_1.

Λήμμα 3.5. *Έστω M^n συμπαγής και προσανατολισμένη ελαχιστική υπερεπιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας S^{n+1}. Ισχύει $\lambda_1\leq -n$ εκτός αν η M είναι ολικά γεωδαισιακή S^n οπότε $\lambda_1=0$.*

Απόδειξη. Αν η M^n είναι ολικά γεωδαισιακή, τότε επειδή $S = 0$ θα έχουμε $L_1 = -\Delta$ και συνεπώς $\lambda_1 = 0$ με τις υπόλοιπες ιδιοτιμές να είναι αυστηρά θετικές.

Για μια διαφορίσιμη συνάρτηση $f \in D(M)$, που δεν είναι η ταυτοτικά μηδενική συνάρτηση, θα ισχύει

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_M L_1(f)f\ dM}{\int_M f^2\ dM}. \tag{3.35}$$

Πραγματικά, γράφοντας $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ και λόγω της ορθογωνιότητας των f_i, f_j, για $i \neq j$, θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\int_M L_1(f)f\ dM}{\int_M f^2\ dM} &= \frac{(L_1(f), f)}{(f,f)} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i L_1(f_i), \sum_{m=1}^{\infty} a_m f_m\right)}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i, \sum_{j=1}^{\infty} a_j f_j\right)} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \lambda_i \left(f_i, f_i\right)}{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \left(f_i, f_i\right)} \geq \frac{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \lambda_1 \left(f_i, f_i\right)}{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \left(f_i, f_i\right)} \\
&= \lambda_1.
\end{aligned}$$

Θα αποδείξουμε το λήμμα εφαρμόζοντας την ανισότητα (3.35) για τις συναρτήσεις που ορίζονται στο M ως εξής

$$f_\varepsilon := (S+\varepsilon)^{\frac{1}{2}},\ \varepsilon > 0$$

και παίρνοντας το όριο καθώς $\varepsilon \to 0$. Θα υπολογίσουμε αρχικά την λαπλασιανή της f_ε. Αν $\{E_1, ..., E_n\}$ είναι τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο του M τότε,

$$\begin{aligned}
\Delta f_\varepsilon &= \sum_{i=1}^{n} \{E_i(E_i(f_\varepsilon)) - \left(\nabla_{E_i} E_i\right)(f_\varepsilon)\} \\
&= -\frac{1}{4}(S+\varepsilon)^{-\frac{3}{2}} \sum_{i=1}^{n} \left(E_i(S)\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}(S+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n} \{E_i(E_i(S)) - \left(\nabla_{E_i} E_i\right)(S)\}.
\end{aligned}$$

Επειδή $S = |A|^2$, έχουμε

$$E_i(S) = 2\langle \nabla_{E_i} A, A\rangle. \tag{3.36}$$

Αντικαθιστώντας παραπάνω την (3.36), λαμβάνουμε,

$$\Delta f_\varepsilon = -(S+\varepsilon)^{-\frac{3}{2}} \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} A, A\rangle^2 + \frac{1}{2}(S+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}\Delta S. \tag{3.37}$$

Λόγω της (2.3) και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο περιβάλλων χώρος είναι η S^{n+1}, έχουμε

$$\begin{aligned} \Delta f_\varepsilon &= -(S+\varepsilon)^{-\frac{3}{2}} \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} A, A\rangle^2 \\ &\quad +(S+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}\big(S(n-S) + |\nabla A|^2\big). \end{aligned} \tag{3.38}$$

Όμως, από την ανισότητα Cauchy-Schwartz, θα έχουμε

$$\langle \nabla_{E_i} A, A\rangle \leq |\nabla_{E_i} A|\,|A| \quad \text{ή} \quad \langle \nabla_{E_i} A, A\rangle^2 \leq |\nabla_{E_i} A|^2\,|A|^2$$

ή

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} A, A\rangle^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |\nabla_{E_i} A|^2\,|A|^2 .$$

Δηλαδή,

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} A, A\rangle^2 \leq |\nabla A|^2\,|A|^2 \tag{3.39}$$

και συνεπώς η (3.38) λόγω της (3.39) θα γίνει

$$\Delta f_\varepsilon \geq -(S+\varepsilon)^{-\frac{3}{2}} |\nabla A|^2\,|A|^2 + (S+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}\big(S(n-S) + |\nabla A|^2\big).$$

Άρα,

$$f_\varepsilon \Delta f_\varepsilon \geq -\frac{|\nabla A|^2\, S}{S+\varepsilon} + S(n-S) + |\nabla A|^2$$

$$= |\nabla A|^2 \left(1 - \frac{S}{S+\varepsilon}\right) + S(n-S) \geq S(n-S)$$

από όπου προκύπτει ότι

$$-f_\varepsilon \Delta f_\varepsilon \leq S(-n+S) \quad \text{ή} \quad -\left(f_\varepsilon \Delta f_\varepsilon + {f_\varepsilon}^2 S\right) \leq -(n+\varepsilon)S.$$

Ολοκληρώνοντας στη M την παραπάνω σχέση λαμβάνουμε

$$-\int_M (f_\varepsilon \Delta f_\varepsilon + {f_\varepsilon}^2 S) dM \leq -(n+\varepsilon) \int_M S dM$$

ή

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ -\int_M (f_\varepsilon \Delta f_\varepsilon + {f_\varepsilon}^2 S) dM \right\} \leq -n \int_M S dM. \tag{3.40}$$

Από την (3.35) έχουμε ότι για κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση $f \in D(M)$, που δεν είναι η ταυτοτικά μηδενική συνάρτηση, ισχύει

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_M L_1(f) f \, dM}{\int_M f^2 \, dM} = \frac{-\int_M (f\Delta f + f^2 S) dM}{\int_M f^2 dM}.$$

Άρα, για κάθε $\varepsilon > 0$ θα ισχύει

$$\lambda_1 \leq \frac{-\int_M (f_\varepsilon \Delta f_\varepsilon + {f_\varepsilon}^2 S) dM}{\int_M {f_\varepsilon}^2 dM}. \tag{3.41}$$

Επειδή η M δεν είναι η ολικά γεωδαισιακή S^n θα έχουμε

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_M {f_\varepsilon}^2 dM = \int_M S dM > 0,$$

οπότε από την (3.41) προκύπτει ότι,

$$\lambda_1 \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-\int_M (f_\varepsilon \Delta f_\varepsilon + {f_\varepsilon}^2 S) dM}{\int_M {f_\varepsilon}^2 dM} = \frac{\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ -\int_M (f_\varepsilon \Delta f_\varepsilon + {f_\varepsilon}^2 S) dM \right\}}{\int_M S dM}.$$

Χρησιμοποιώντας, τώρα, την (3.40) έχουμε άμεσα το ζητούμενο, δηλαδή $\lambda_1 \leq -n$. □

Το παρακάτω θεώρημα είναι ουσιώδες για την απόδειξη του θεωρήματος του Bernstein.

Θεώρημα 3.1. (J. Simons [19]) *Έστω M^n συμπαγής, ελαχιστική υπερεπιφάνεια της S^{n+1}. Ο κώνος CM είναι μη ευσταθής, για $n \leq 5$, εκτός αν η M είναι ολικά γεωδαισιακή σφαίρα S^n.*

Απόδειξη. Έστω ότι η M δεν είναι η ολικά γεωδαισιακή σφαίρα S^n. Αρκεί να βρούμε πεδίο μεταβολής V του CM τέτοιο ώστε $I(V,V) < 0$. Από τα Λήμματα 3.3, 3.5 θα έχουμε ότι

$$\lambda_1 + \delta_1 \leq -n + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{\log \varepsilon}\right)^2. \tag{3.42}$$

Επειδή $n \leq 5$, για πολύ μικρό ε, επιτυγχάνουμε $\lambda_1 + \delta_1 < 0$. Σύμφωνα λοιπόν με το Λήμμα 3.4 υπάρχει μεταβολή V του $\varepsilon-$κόλουρου κώνου, CM_ε τέτοια ώστε $I(V,V) < 0$. Επεκτείνοντας την παραπάνω μεταβολή V στο CM ως εξής:

$$V(t, u^1, u^2, ..., u^n) = 0, \ \forall t \in [0, \varepsilon].$$

θα έχουμε $I(V,V) < 0$ στο CM. □

Θα δώσουμε τώρα ένα παράδειγμα μιας συμπαγούς, ελαχιστικής υπερεπιφάνειας στην S^7, που δεν είναι ολικά γεωδαισιακή σφαίρα, με τον αντίστοιχο κώνο υπεράνω αυτής να είναι ευσταθής.

Παράδειγμα 3.2. *Θεωρούμε την υπερεπιφάνεια $M = S^3(\frac{\sqrt{2}}{2}) \times S^3(\frac{\sqrt{2}}{2})$ της S^7. Σύμφωνα με το Παράδειγμα 3.1 είναι ελαχιστική υπερεπιφάνεια της S^7 με τετράγωνο δεύτερης θεμελιώδους μορφής $S = 6$. Θα δείξουμε* *ότι ο κώνος CM υπεράνω της M, ο οποίος είναι ελαχιστικός λόγω της Πρότασης 3.1, είναι ευσταθής στον $\mathbb{R}^8$. Αρκεί να αποδειχθεί, σύμφωνα με το Πόρισμα 2.1, ότι για κάθε συνάρτηση Lipschitz f, με συμπαγές στήριγμα στο CM ισχύει*

$$\int_{CM} |\nabla f|^2 \, dCM \geq \int_{CM} f^2 \tilde{S} dCM,$$

όπου $\tilde{S}$ το τετράγωνο του μήκους της δεύτερης θεμελιώδους μορφής του CM.

Προς τούτο, θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο $W = \frac{f^2}{|\vec{x}|^2}\vec{x}$ στο CM, όπου $\vec{x}$ το διάνυσμα θέσης του τυχαίου σημείου του CM και f συνάρτηση Lipschitz στο CM, με συμπαγές στήριγμα στο CM_ε, για ε θετικό και αρκούντως μικρό.

Η απόκλιση αυτού του διανυσματικού πεδίου στον ευκλείδειο χώρο είναι,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} W = \operatorname{div}\left(\frac{f^2}{|\vec{x}|^2}\vec{x}\right) &= f^2 \operatorname{div}\left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^2}\right) + \left\langle \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^2}, \nabla f^2 \right\rangle \\ &= f^2 \operatorname{div}\left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^2}\right) + 2\left\langle \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^2}, f\nabla f \right\rangle \\ &= \frac{6f^2}{|\vec{x}|^2} + 2\left\langle \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^2}, f\nabla f \right\rangle, \end{aligned}$$

αφού

$$\operatorname{div}\left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^2}\right) = \frac{6}{|\vec{x}|^2}.$$

Ολοκληρώνοντας στο CM λαμβάνουμε

$$\int_{CM} \operatorname{div} W dCM = \int_{CM} \left(6\frac{f^2}{|\vec{x}|^2} + 2\left\langle \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^2}, f\nabla f \right\rangle\right) dCM$$

από όπου προκύπτει ότι,

$$\begin{aligned}\int_{CM} 6\frac{f^2}{|\vec{x}|^2}dCM &= -2\int_{CM}\frac{f}{|\vec{x}|^2}\langle\vec{x},\nabla f\rangle dCM\\ &\leq 2\left|\int_{CM}\frac{f}{|\vec{x}|^2}\langle\vec{x},\nabla f\rangle dCM\right|\\ &\leq 2\int_{CM}\frac{|f|}{|\vec{x}|^2}|\langle\vec{x},\nabla f\rangle|dCM\\ &\leq 2\int_{CM}\frac{|f|}{|\vec{x}|^2}|\vec{x}|\,|\nabla f|dCM\\ &= 2\int_{CM}\frac{|f|}{|\vec{x}|}|\nabla f|dCM. \qquad (3.43)\end{aligned}$$

Με την βοήθεια της ανισότητας Hölder προκύπτει

$$\int_{CM}\frac{|f|}{|\vec{x}|}|\nabla f|dCM \leq \left(\int_{CM}\frac{|f|^2}{|\vec{x}|^2}dCM\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{CM}|\nabla f|^2\,dCM\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Άρα από την (3.43) λαμβάνουμε ότι

$$\int_{CM} 6\frac{f^2}{|\vec{x}|^2}dCM \leq 2\left(\int_{CM}\frac{|f|^2}{|\vec{x}|^2}dCM\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{CM}|\nabla f|^2\,dCM\right)^{\frac{1}{2}}$$

ή, υψώνοντας στο τετράγωνο

$$36\left(\int_{CM}\frac{f^2}{|\vec{x}|^2}dCM\right)^2 \leq 4\left(\int_{CM}\frac{f^2}{|\vec{x}|^2}dCM\right)\left(\int_{CM}|\nabla f|^2\,dCM\right)$$

ή

$$9\int_{CM}\frac{f^2}{|\vec{x}|^2}dCM \leq \int_{CM}|\nabla f|^2\,dCM.$$

Επειδή $\tilde{S} = \frac{6}{|\vec{x}|^2}$, *θα έχουμε*

$$\frac{9}{6}\int_{CM} f^2\tilde{S}dCM \leq \int_{CM}|\nabla f|^2\,dCM$$

ή

$$\int_{CM} f^2 \tilde{S} dCM \leq \frac{2}{3} \int_{CM} |\nabla f|^2 \, dCM < \int_{CM} |\nabla f|^2 \, dCM$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\int_{CM} (|\nabla f|^2 - f^2 \tilde{S}) dCM > 0.$$

Άρα τελικά $I(V,V) > 0$ και συνεπώς ο CM είναι ευσταθής.

3.2 Θεώρημα Bernstein

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Με $B_r^n(x_0)$ έχουμε συμβολίσει την μπάλλα κέντρου x_0 και ακτίνας r στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή

$$B_r^n(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x - x_0| < r\}.$$

Για τα παρακάτω χρειαζόμαστε τον τύπο του συνεμβαδού (coarea formula).

Έστω M πολύπτυγμα Riemann και $f \in D(M)$ μια συνάρτηση Lipschitz τέτοια ώστε $f^{-1}((-\infty, t])$ συμπαγές για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Για κάθε τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g \in D(M)$ και $t \in \mathbb{R}$ ισχύει,

$$\int_{f \leq t} g \, |\nabla f| \, dM = \int_{-\infty}^{t} \left(\int_{f=r} g \; dM_r \right) dr, \tag{3.44}$$

όπου dM_r είναι το στοιχείο όγκου του υποπολυπτύγματος $f^{-1}(r)$. Θα διατυπώσουμε, τώρα, και θα αποδείξουμε την ταυτότητα μονοτονίας (monotonicity formula) για τον όγκο ελαχιστικών υποπολυπτυγμάτων M^n στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^{n+k}$.

Πρόταση 3.2. (Ταυτότητα Μονοτονίας) *Έστω M^n ελαχιστικό υποπολύπτυγμα του $\mathbb{R}^{n+k}$ και $x_0 \in \mathbb{R}^{n+k}$. Για $s, t \in \mathbb{R}$ με $0 < s < t$ ισχύει*

$$\frac{\mathrm{Vol}\,(B_t^{n+k}(x_0) \cap M)}{t^n} - \frac{\mathrm{Vol}\,(B_s^{n+k}(x_0) \cap M)}{s^n}$$

$$= \int_{((B_t^{n+k}(x_0) \setminus (B_s^{n+k}(x_0)) \cap M} \frac{\left|(x - x_0)^{\perp}\right|^2}{|x - x_0|^{n+2}}\, dM, \tag{3.45}$$

όπου $(x - x_0)^{\perp}$ η κάθετη συνιστώσα του $x - x_0$ στο M^n.

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση f στο M με τύπο $f(x) = |x - x_0|$. Επειδή το M είναι ελαχιστικό υποπολύπτυγμα, αν $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ είναι ορθομοναδιαίο πλαίσιο αυτού, θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\Delta f^2 &= \sum_{i=1}^{n} \left\{ E_i(E_i f^2) - (\nabla_{E_i} E_i)\, f^2) \right\} \\
&= 2 \sum_{i=1}^{n} \left\{ \langle \overline{\nabla}_{E_i} E_i - \nabla_{E_i} E_i, x - x_0 \rangle + \langle E_i, E_i \rangle \right\} \\
&= 2 \sum_{i=1}^{n} \{ \langle B(E_i, E_i), x - x_0 \rangle + \langle E_i, E_i \rangle \} \\
&= 2n,
\end{aligned}$$

όπου Δ ο τελεστής Laplace στο M, B η δεύτερη θεμελιώδης μορφή και ∇, $\overline{\nabla}$ οι συνοχές των M^n και $\mathbb{R}^{n+k}$ αντίστοιχα. Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση και χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Gauss έχουμε

$$\begin{aligned} 2n\,\mathrm{Vol}(\{f\le r\}) &= \int_{f\le r}\Delta f^2 dM \\ &= \int_{f\le r}\mathrm{div}\,\nabla f^2 dM \\ &= 2\int_{f\le r}\mathrm{div}\,(x-x_0)^\top dM \\ &= 2\int_{f=r}\langle (x-x_0)^\top, N\rangle dM_r \\ &= 2\int_{f=r}\left|(x-x_0)^\top\right| dM_r, \end{aligned} \tag{3.46}$$

όπου $(x-x_o)^\top$ η εφαπτομενική συνιστώσα του $x-x_0$ στο M^n, N το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο του υποπολυπτύγματος $f^{-1}(r)$ στο $f\le r$ και dM_r το στοιχείο όγκου του υποπολυπτύγματος $f^{-1}(r)$ του M όπου r κανονική τιμή της f. Από την σχέση (3.44) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(\{f\le r\}) &= \int_{f\le r}|\nabla f|^{-1}|\nabla f|\,dM \\ &= \int_0^r\left(\int_{f=t}|\nabla f|^{-1}\ dM_t\right)dt \\ &= \int_0^r\left(\int_{f=t}\frac{|x-x_0|}{|(x-x_0)^\top|}\ dM_t\right)dt. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.46), (3.47) λαμβάνουμε

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\mathrm{Vol}\,(\{f\le r\})}{r^n}\right) = \frac{1}{r^n}\int_{f=r}\frac{|x-x_0|}{|(x-x_0)^\top|}\ dM_r - \frac{n\,\mathrm{Vol}\,(\{f\le r\})}{r^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{r^n}\int_{f=r}\frac{|x-x_0|}{|(x-x_0)^\top|}\ dM_r - \frac{1}{r^{n+1}}\int_{f=r}\left|(x-x_0)^\top\right|\ dM_r$$

$$= \frac{1}{r^{n+1}}\int_{f=r}\left\{\frac{|x-x_0|^2}{|(x-x_0)^\top|} - \left|(x-x_0)^\top\right|\right\}\ dM_r$$

$$= \frac{1}{r^{n+1}} \int_{f=r} \frac{\left|(x-x_0)^\perp\right|^2}{|(x-x_0)^\top|} \, dM_r.$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση έχουμε

$$\int_s^t \frac{d}{dr}\left(\frac{\mathrm{Vol}\left(\{f \le r\}\right)}{r^n}\right) dr = \int_s^t \frac{1}{r^{n+1}} \left(\int_{f=r} \frac{\left|(x-x_0)^\perp\right|^2}{|(x-x_0)^\top|} \, dM_r\right) dr$$

ή

$$\frac{\mathrm{Vol}\left(\{f \le t\}\right)}{t^n} - \frac{\mathrm{Vol}\left(\{f \le s\}\right)}{s^n} =$$

$$= \int_s^t \left(\int_{f=r} \frac{\left|(x-x_0)^\perp\right|^2}{|(x-x_0)^\top| \, |x-x_0|^{n+1}} \, dM_r\right) dr$$

$$= \int_0^t \left(\int_{f=r} \frac{\left|(x-x_0)^\perp\right|^2}{|(x-x_0)^\top| \, |x-x_0|^{n+1}} \, dM_r\right) dr$$

$$- \int_0^s \left(\int_{f=r} \frac{\left|(x-x_0)^\perp\right|^2}{|(x-x_0)^\top| \, |x-x_0|^{n+1}} \, dM_r\right) dr$$

ή, λόγω της (3.44),

$$\frac{\mathrm{Vol}\left(B_t^{n+k}(x_0) \cap M\right)}{t^n} - \frac{\mathrm{Vol}\left(B_s^{n+k}(x_0) \cap M\right)}{s^n}$$

$$= \int_{f \le t} \frac{\left|(x-x_0)^\perp\right|^2}{|x-x_0|^{n+2}} \, dM - \int_{f \le s} \frac{\left|(x-x_0)^\perp\right|^2}{|x-x_0|^{n+2}} \, dM$$

$$= \int_{((B_t^{n+k}(x_0) \setminus (B_s^{n+k}(x_0)) \cap M} \frac{\left|(x-x_0)^\perp\right|^2}{|x-x_0|^{n+2}} \, dM.$$

□

Ένα άμεσο αποτέλεσμα είναι το παρακάτω

Πόρισμα 3.1. *Έστω M^k ελαχιστικό υποπολύπτυγμα του $\mathbb{R}^n$ και $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Η συνάρτηση $\Theta_{x_0} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με τύπο*

$$\Theta_{x_0}(s) = \frac{\mathrm{Vol}\left(B_s^n(x_0) \cap M\right)}{\mathrm{Vol}\left(B_s^k(x_0)\right)}, \tag{3.48}$$

είναι αύξουσα. Επιπλέον είναι σταθερή, αν και μόνον αν, το M είναι κώνος με κορυφή το x_0. Στην περίπτωση όπου $x_0 \in M$ ισχύει $\Theta_{x_0}(s) \geq 1$ και αν $\Theta_{x_0}(s) = 1$, για κάποιο $s > 0$, τότε $B_s^n(x_0) \cap M = B_s^k(x_0)$.

Απόδειξη. Η $\Theta_{x_0}(s)$ είναι προφανώς αύξουσα λόγω της (3.45). Αν, τώρα, υποθέσουμε ότι η $\Theta_{x_0}(s)$ είναι σταθερή, τότε πάλι λόγω της (3.45), για $0 < s_1 < s_2$, θα έχουμε

$$\int_{((B_{s_2}^n(x_0) \setminus (B_{s_1}^n(x_0)) \cap M} \frac{\left|(x - x_0)^{\perp}\right|^2}{|x - x_0|^{k+2}} \, dM = 0.$$

Άρα $(x - x_0)^{\perp} = 0$ ταυτοτικά, δηλαδή το M είναι κώνος με κορυφή το x_0. Αντίστροφα, πάλι λόγω της (3.45), προκύπτει ότι η συνάρτηση $\Theta_{x_0}(s)$ είναι σταθερή. Επιπλέον, αν $x_0 \in M$, αφού το M είναι λείο παντού, θα έχουμε

$$\lim_{s \to 0} \Theta_{x_0}(s) \geq 1$$

και επειδή $\Theta_{x_0}(s)$ αύξουσα προκύπτει ότι $\Theta_{x_0}(s) \geq 1$ για κάθε s θετικό. Τέλος, αν $\Theta_{x_0}(s) = 1$ για κάποιο $s > 0$ θα έχουμε, σύμφωνα με τα προηγούμενα, ότι το M είναι κώνος με κορυφή x_0. Επειδή όμως το M είναι λείο παντού προκύπτει ότι το M θα είναι ανοιχτό υποσύνολο ενός k-επίπεδου και συνεπώς $B_s^n(x_0) \cap M = B_s^k(x_0)$. □

Ορισμός 3.1. *Η παραπάνω συνάρτηση Θ_{x_0} λέγεται συνάρτηση πυκνότητας (density function) του M ως προς το x_0. Επίσης το όριο*

$$\lim_{s \to 0} \Theta_{x_0}(s),$$

το οποίο υπάρχει πάντα λόγω της μονοτονίας της Θ_{x_0}, λέγεται πυκνότητα της M στο σημείο x_0 (density at x_0).

Σύμφωνα με το κλασσικό θεώρημα Bernstein, κάθε λύση $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ της ελαχιστικής εξίσωσης, που ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}^2$ είναι της μορφής $u(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, δηλαδή μια ομοπαραλληλική συνάρτηση (affine function). Στην προσπάθεια γενίκευσης αυτού του αποτελέσματος σε μεγαλύτερες διαστάσεις αναπτύχθηκαν καινούργιες θεωρίες: Η θεωρία των *πτυγμάτων μεταβολών (varifolds)* και κυρίως η *γεωμετρική θεωρία μέτρου.* Συνέπεια αυτής της προσπάθειας, μεταξύ άλλων, ήταν να γενικευθεί σταδιακά το παραπάνω αποτέλεσμα μέχρι τη διάσταση 7, και να βεβαιωθεί ότι για διάσταση 8 και άνω υπάρχουν λύσεις που δεν είναι ομοπαραλληλικές. Πιο συγκεκριμένα ισχύει

Θεώρημα 3.2. (J. Simons [19]) *Αν* $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x^1, x^2, ..., x^n) \mapsto u(x^1, x^2, ..., x^n)$ *με* $n \leq 7$, *είναι λύση της εξίσωσης ελαχιστικότητας σε όλο το* $\mathbb{R}^n$, *τότε η* $u(x^1, x^2, ..., x^n)$ *είναι ομοπαραλληλική.*

Η πλήρης απόδειξη χρησιμοποιεί σε βάθος την θεωρία των πτυγμάτων μεταβολών καθώς επίσης και λεπτές τεχνικές της γεωμετρικής θεωρίας μέτρου, που εισήχθησαν κυρίως από τον W.H. Fleming στο [10], προκειμένου να εξετάσει ιδιάζουσες καταστάσεις στο πρόβλημα του Plateau.

Θα παρουσιάσουμε απόδειξη του Θεωρήματος 3.2 για $n \leq 5$ με τη βοήθεια της γεωμετρικής ανάλυσης, που δόθηκε από τους R. Schoen, L. Simon και S.T. Yau [17]. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε την απόδειξη που γίνεται με την βοήθεια των πτυγμάτων μεταβολών για $n \leq 7$. Πιο συγκεκριμένα πρώτα θα αποδείξουμε την

Πρόταση 3.3. (Schoen-Simon-Yau) *Αν* $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, *με* $n \leq 5$, *είναι* *λύση της εξίσωσης ελαχιστικότητας σε όλο το $\mathbb{R}^n$, τότε η u είναι ομοπαραλληλική.*

Για την απόδειξη αυτής χρειαζόμαστε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 3.6. *Έστω G_u το γράφημα μιας συνάρτησης $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ που πληροί την εξίσωση ελαχιστικότητας. Αν f είναι μη αρνητική συνάρτηση Lipschitz, με συμπαγές στήριγμα στο G_u, τότε ισχύει*

$$\int_{\mathrm{G}_u} |A|^{2p} f^{2p} dG_u \leq \mathcal{C}(n,p) \int_{\mathrm{G}_u} |\nabla f|^{2p} \, dG_u. \tag{3.49}$$

όπου $p \in [2, 2+\sqrt{2/n})$ και $\mathcal{C}(n,p)$ μια θετική σταθερά που εξαρτάται μόνο από τα p, n. Επιπλέον $|A|$ είναι το μήκος της δεύτερης θεμελιώδους μορφής του γραφήματος G_u της u στον $\mathbb{R}^{n+1}$ και dG_u το στοιχείο όγκου του G_u.

Απόδειξη. Για λόγους ευκολίας παραλείπουμε το στοιχείο όγκου στα ολοκληρώματα. Απο την συνθήκη ευστάθειας (2.43), για τυχαία f με τις παραπάνω ιδιότητες θα έχουμε ότι

$$\int_{\mathrm{G}_u} |A|^2 f^2 \leq \int_{\mathrm{G}_u} |\nabla f|^2.$$

Θέτοντας όπου f την $|A|^{1+q} f$, για $q \in [0, \sqrt{2/n})$, και αντικαθιστώντας παραπάνω, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{G}_u} |A|^{4+2q} f^2 &\leq \int_{\mathrm{G}_u} \left|\nabla(|A|^{1+q} f)\right|^2 \\
&= (1+q)^2 \int_{\mathrm{G}_u} f^2 |A|^{2q} |\nabla |A||^2 \\
&\quad + \int_{\mathrm{G}_u} |A|^{2+2q} |\nabla f|^2 \\
&\quad +2(1+q) \int_{\mathrm{G}_u} f |A|^{1+2q} \langle \nabla |A| , \nabla f \rangle.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Από την ταυτότητα

$$\frac{1}{2}\Delta|A|^2 = |A|\,\Delta|A| + |\nabla|A||^2$$

και την ανισότητα (2.15) λαμβάνουμε

$$|A|\,\Delta|A| + |A|^4 \geq \frac{2}{n}\,|\nabla|A||^2. \tag{3.51}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (3.51) με $|A|^{2q}\,f^2$ και ολοκληρώνοντας στο G_u θα έχουμε

$$\frac{2}{n}\int_{\mathrm{G}_u} |A|^{2q}\,f^2\,|\nabla|A||^2 \leq \int_{\mathrm{G}_u} |A|^{2q+1}\,f^2\Delta|A| + \int_{\mathrm{G}_u} |A|^{4+2q}\,f^2. \tag{3.52}$$

Όμως,

$$\operatorname{div}\left(|A|^{2q+1}\,f^2\nabla|A|\right) = |A|^{2q+1}\,f^2\Delta|A| + \langle\nabla\left(|A|^{2q+1}\,f^2\right), \nabla|A|\rangle.$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση στο G_u και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Gauss, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{G}_u} |A|^{2q+1}\,f^2\Delta|A| \;&=\; -2\int_{\mathrm{G}_u} f\,|A|^{2q+1}\,\langle\nabla f, \nabla|A|\rangle \\ &\quad -(2q+1)\int_{\mathrm{G}_u} |A|^{2q}\,f^2\,|\nabla|A||^2. \end{aligned}\tag{3.53}$$

Συνεπώς η (3.52) λόγω της (3.53) λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{aligned}\frac{2}{n}\int_{\mathrm{G}_u} |A|^{2q}\,f^2\,|\nabla|A||^2 \;&\leq\; \int_{\mathrm{G}_u} |A|^{4+2q}\,f^2 \\ &\quad -2\int_{\mathrm{G}_u} f\,|A|^{2q+1}\,\langle\nabla f, \nabla|A|\rangle \\ &\quad -(2q+1)\int_{\mathrm{G}_u} |A|^{2q}\,f^2\,|\nabla|A||^2. \end{aligned}\tag{3.54}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (3.50), (3.54) θα έχουμε

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{n}-q^2\right)\int_{\mathrm{G}_u}|A|^{2q}f^2\,|\nabla|A||^2 &\leq\\ \leq \int_{\mathrm{G}_u}|A|^{2+2q}\,|\nabla f|^2+2q\int_{\mathrm{G}_u}f\,|A|^{1+2q}\,\langle\nabla|A|\,,\nabla f\rangle&\\ \leq \int_{\mathrm{G}_u}|A|^{2+2q}\,|\nabla f|^2+2q\int_{\mathrm{G}_u}f\,|A|^{1+2q}\,|\nabla|A||\,|\nabla f|\,.&\end{aligned} \tag{3.55}$$

Με τη βοήθεια της ανισότητας (1.8) με $a=f\,|A|^q\,|\nabla|A||$ και $b=|A|^{1+q}\,|\nabla f|$ θα έχουμε ότι ο δεύτερος όρος στο δεύτερο μέλος της (3.55) θα είναι

$$2q\int_{\mathrm{G}_u}f\,|A|^{1+2q}\,|\nabla|A||\,|\nabla f|\leq$$

$$q\varepsilon\int_{\mathrm{G}_u}f^2\,|A|^{2q}\,|\nabla|A||^2+\frac{q}{\varepsilon}\int_{\mathrm{G}_u}|A|^{2+2q}\,|\nabla f|^2\,.$$

Άρα η (3.55) θα γίνει, λόγω του παραπάνω,

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{n}-q^2\right)\int_{\mathrm{G}_u}|A|^{2q}f^2\,|\nabla|A||^2 \leq \int_{\mathrm{G}_u}|A|^{2+2q}\,|\nabla f|^2\\ +q\varepsilon\int_{\mathrm{G}_u}f^2\,|A|^{2q}\,|\nabla|A||^2+\frac{q}{\varepsilon}\int_{\mathrm{G}_u}|A|^{2+2q}\,|\nabla f|^2\,,\end{aligned}$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\left(\frac{2}{n}-q^2-q\varepsilon\right)\int_{\mathrm{G}_u}|A|^{2q}f^2\,|\nabla|A||^2\leq\left(1+\frac{q}{\varepsilon}\right)\int_{\mathrm{G}_u}|A|^{2+2q}\,|\nabla f|^2\,. \tag{3.56}$$

Στη συνέχεια θα κάνουμε ξανά χρήση της (3.50), από την οποία, χρησιμοποιώντας την ανισότητα των Cauchy-Schwartz, θα έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{G}_u}|A|^{4+2q}f^2 &\leq (1+q)^2\int_{\mathrm{G}_u}f^2\,|A|^{2q}\,|\nabla|A||^2\\ &+\int_{\mathrm{G}_u}|A|^{2+2q}\,|\nabla f|^2\\ &+2(1+q)\int_{\mathrm{G}_u}f\,|A|^{1+2q}\,|\nabla|A||\,|\nabla f|\,.\end{aligned} \tag{3.57}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα (1.8) για $\varepsilon = 1,\ a = (1+q)f\,|A|^q\,|\nabla|A||$ και $b = |A|^{1+q}\,|\nabla f|$ στον τελευταίο όρο του δεύτερου μέλους της (3.57) θα έχουμε

$$2(1+q)\int_{\mathrm{G}_u} f\,|A|^{1+2q}\,|\nabla|A||\,|\nabla f| \leq$$
$$\int_{\mathrm{G}_u}(1+q)^2 f^2\,|A|^{2q}\,|\nabla|A||^2 + \int_{\mathrm{G}_u}|A|^{2+2q}\,|\nabla f|^2. \tag{3.58}$$

Η (3.57) λόγω της (3.58) θα λάβει την μορφή

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{G}_u}|A|^{4+2q} f^2 \ &\leq\ 2(1+q)^2\int_{\mathrm{G}_u} f^2\,|A|^{2q}\,|\nabla|A||^2 \\ &\quad +2\int_{\mathrm{G}_u}|A|^{2+2q}\,|\nabla f|^2,\end{aligned}$$

και συνεπώς λόγω της (3.56), για $\varepsilon < \frac{\frac{2}{n}-q^2}{q}$, θα έχουμε τελικά ότι

$$\int_{\mathrm{G}_u}|A|^{4+2q} f^2 \leq \left(\frac{2(1+q)^2\left(1+\frac{q}{\varepsilon}\right)}{\left(\frac{2}{n}-q^2-q\varepsilon\right)}+2\right)\int_{\mathrm{G}_u}|A|^{2+2q}\,|\nabla f|^2. \tag{3.59}$$

Θέτοντας $p = q+2$ έχουμε $p \in [2, 2+\sqrt{2/n})$ και βάζοντας όπου f την f^p η (3.59) θα γίνει

$$\int_{\mathrm{G}_u}|A|^{2p} f^{2p} \leq \overline{\mathcal{C}}(n,p)\int_{\mathrm{G}_u}\left(|A|^{2p-2} f^{2p-2}\right)\left(|\nabla f|^2\right),$$

όπου

$$\overline{\mathcal{C}}(n,p) = \left(\frac{2(1+q)^2\left(1+\frac{q}{\varepsilon}\right)}{\left(\frac{2}{n}-q^2-q\varepsilon\right)}+2\right)p^2.$$

Χρησιμοποιώντας, τώρα, την ανισότητα H$\ddot{o}$lder στο δεύτερο μέλος θα έχουμε

$$\int_{\mathrm{G}_u}|A|^{2p} f^{2p} \leq \overline{\mathcal{C}}(n,p)\left(\int_{\mathrm{G}_u}|A|^{2p} f^{2p}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_M |\nabla f|^{2p}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.60}$$

Από την (3.60) λαμβάνουμε τελικά

$$\int_{\mathrm{G}_u} |A|^{2p} f^{2p} \leq \mathcal{C}(n,p) \int_{\mathrm{G}_u} |\nabla f|^{2p},$$

όπου $\mathcal{C}(n,p) = \left(\overline{\mathcal{C}}(n,p)\right)^p$.

$\square$

Απόδειξη της Πρότασης 3.3. Θεωρούμε για κάθε $r \geq 1$ τη συνάρτηση $\eta : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 \text{ , για } x \leq r \\ \log x \text{ , για } r < x \leq 2r \\ 0 \text{ , για } x > 2r \end{cases}$$

για την οποία ισχύει $\eta'(x) \leq \frac{1}{x} < \frac{1}{r}$. Εφαρμόζουμε στη συνέχεια το Λήμμα 3.6 για $f : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) := \eta(|x|)$ και $2p = 4 + \sqrt{7/5} < 4 + \sqrt{8/n}$. Η f έχει προφανώς συμπαγές στήριγμα στο G_u και ισχύει $|\nabla f| < \frac{1}{r}$. Άρα

$$\begin{aligned} \int_{B_r^{n+1}\cap \mathrm{G}_u} |A|^{4+\sqrt{7/5}}\, dG_u &\leq \mathcal{C}(n,p) \int_{B_{2r}^{n+1}\cap \mathrm{G}_u} |\nabla f|^{4+\sqrt{7/5}}\, dG_u \\ &\leq \mathcal{C}(n,p) \frac{\mathrm{Vol}\left(B_{2r}^{n+1} \cap \mathrm{G}_u\right)}{r^{4+\sqrt{7/5}}}. \end{aligned}$$

Όμως, λόγω του Πορίσματος 1.1, θα έχουμε

$$\int_{B_r^{n+1}\cap \mathrm{G}_u} |A|^{4+\sqrt{7/5}}\, dG_u \leq \mathcal{C}(n,p) 2^{n-1} \frac{\mathrm{Vol}\left(S_1^n\right)}{r^{4+\sqrt{7/5}-n}}.$$

Επειδή το γράφημα ορίζεται σε ολόκληρο το $\mathbb{R}^n$ παίρνοντας το όριο για $r \to \infty$, λαμβάνουμε $|A| = 0$. Συνεπώς το γράφημα είναι υπερεπίπεδο και ως εκ τούτου η u είναι ομοπαραλληλική. $\square$

Περιγραφή της απόδειξης του Θεωρήματος 3.2. Έστω $u(x^1, x^2, ..., x^n)$ μια λύση της ελαχιστικής εξίσωσης (1.18). Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι ισχύει $u(0, 0, ..., 0) = 0$. Σύμφωνα με τη Πρόταση 1.2 το γράφημα $\Sigma = G_u$ της u έχει απόλυτο ελάχιστο εμβαδό, μεταξύ υπερεπιφανειών του $\mathbb{R}^{n+1}$ με κοινό σύνορο ∂D, όπου D συμπαγής τόπος του Σ. Συμβολίζουμε με $\vec{x}(x) = (x, u(x))$, όπου $x = (x^1, x^2, ..., x^n)$, το διάνυσμα θέσης του Σ ως προς την αρχή O. Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό r, οι συναρτήσεις u_r που ορίζονται ως

$$u_r(x) := \frac{1}{r}u(rx)$$

πληρούν την εξίσωση ελαχιστικότητας (1.18) και ορίζουν γραφήματα $\Sigma_r = G_{u_r}$ με την ιδιότητα ευστάθειας και διάνυσμα θέσης

$$\vec{y}_r(x) = (x, u_r(x)) = \frac{1}{r}(rx, u(rx)) = \frac{1}{r}\vec{x}(rx).$$

Συνεπώς $|\vec{y}_r(x)| = \frac{1}{r}|\vec{x}(rx)|$ και για $|\vec{x}| \leq r$ θα έχουμε $|\vec{y}_r| \leq 1$. Άρα, αν περιοριστούμε στο τμήμα της Σ που περιέχεται στη μπάλλα $B_r^{n+1}(O)$, τότε το αντίστοιχο τμήμα της Σ_r θα περιέχεται στην $B_1^{n+1}(O)$ και θα έχει σύνορο στην $\partial B_1^{n+1}(O) = S_1^n(O)$.

Ο W.H. Fleming στο [10] θεωρεί την οικογένεια των Σ_r και αποδεικνύει, με τη βοήθεια της γεωμετρικής θεωρίας μέτρου, ότι μια υπακολουθία συγκλίνει με την έννοια των πτυγμάτων μεταβολών στην Σ_∞, η οποία είναι κωνική υπερεπιφάνεια στον $\mathbb{R}^{n+1}$, ελαχιστική και ευσταθής ως προς το σύνορο της στην $S_1^n(O)$. Στη συνέχεια απέδειξε, με τη βοήθεια της ταυτότητας μονοτονίας (Πρόταση 3.2), ότι αν η $\Sigma_\infty \subset \mathbb{R}^n$ είναι δίσκος τότε η Σ είναι υπερεπίπεδο και συνεπώς η λύση $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ της ελαχιστικής εξίσωσης (1.18) είναι ομοπαραλληλική.

Ο E. De Giorgi στο [7], αμέσως μετά, απέδειξε ότι, αν κάθε ελαχιστικός και ευσταθής n-διάστατος κώνος στον $\mathbb{R}^{n+1}$ είναι δίσκος τότε κάθε λύση $u : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ της ελαχιστικής εξίσωσης είναι ομοπαραλληλική.

Η διαδικασία του W.H. Fleming, το αποτέλεσμα του E. De Giorgi σε συνδυασμό με το Θεώρημα 3.1 αποδεικνύουν το Θεώρημα 3.2.

$\square$

Παρατήρηση 3.1. *Το Θεώρημα 3.2 δεν ισχύει για $n \geq 8$, όπως απέδειξαν οι E. Bombieri, E. De Giorgi και E. Giusti στο [4] οι οποίοι ξεκινώντας από τον κώνο του Simons (Παράδειγμα 3.2) έδειξαν την ύπαρξη λείων, μη ομοπαραλληλικών λύσεων.*

Βιβλιογραφία

[1] F.J. Almgren, *Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's Theorem*, Ann. of Math., **84** (1966), 277-292.

[2] S. Bernstein, *Sur un theoreme de geometrie et ses applications aux equations aux derivees partielles du type elliptique*, Comm. de la Soc. Math. de Kharkov, **15** (1915-1917), 38-45.

[3] L. Bers, *Isolated singularities of minimal surfaces*, Ann. of Math., **53** (1951), 364-386.

[4] E. Bombieri, E. De Giorgi and E. Giusti, *Minimal Cones and the Bernstein problem*, Invent. Math.,**7** (1969), 243-268.

[5] J. Cheeger and D. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North-Holland Publishing Company, State University of New York, Stony Brook, 1975.

[6] T.H. Colding and W.P. Minicozzi II, *A Course in Minimal Surfaces*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 121, AMS, Providence, Rhode Island, 2011.

[7] E. De Giorgi, *Una estensione del teorema di Bernstein*, Ann. della Scuola Normale Superiore di Pisa, Scienze Fis. Mat., **19** (1965), 79-85.

[8] M. Do Carmo, *Riemannian Geometry*, Mathematics: Theory and Applications, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1992.

[9] K. Ecker and G. Huisken, *A Bernstein result for minimal graphs of controlled growth*, J. Differ. Geometry, **31** (1990), 397-400.

[10] W.H. Fleming, *On the oriented Plateau problem*, Rendiconti Circolo Mat. Palermo, **11** (1962), 69-90.

[11] E. Heinz, *Uber die Losungen der Minimalflachengleichung*, Nachr. Akad. Wiss. Gottingen, Math. Phys. Kl. II, (1952), 51-56.

[12] J. Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Fourth Edition, Universitext, Springer, 2005.

[13] Δ. Κουτρουφιώτης, *Διαφορική Γεωμετρία*, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, 1994.

[14] J. Moser, *On Harnack's theorem for elliptic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math.,**14** (1961), 577-591.

[15] J.C.C. Nitsche, *Elementary proof of Bernstein's theorem on minimal surfaces*, Ann. of Math., **66** (1957), 543-544.

[16] P. Petersen, *Riemannian Geometry*, Second Edition, Graduate texts in Mathematics, Vol. 171, Springer, 2006.

[17] R. Schoen, L. Simon and S.T.Yau, *Curvature estimates for minimal hypersurfaces*, Acta Math., **134** (1975), 275-288.

[18] L. Simon, *Remarks on curvature estimates for minimal hypersurfaces*, Duke Math. J., **43** (1976), 545-553.

[19] J. Simons, *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann. of Math., **88** (1968), 62-105.

Summary

In 1915, Bernstein [2] proved that if $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ is an entire C^2 solution of the minimal surface equation

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0,$$

then u must be linear (i.e. $u(x, y) = ax + by + c$, where $a, b, c \in \mathbb{R}$).

The result mentioned above is widely known as the *classical Bernstein's theorem*. Several proofs based on Complex Analysis have been obtained by L. Bers [3], J. Nitche [15]. In 1952, E. Heinz [11] gave a proof of Bernstein's theorem using methods from the theory of Partial Differential Equations and estimating the square norm of the second fundamental form of the graph of u.

In 1962, W.H. Fleming [10] using Geometric Measure Theory techniques reduced the problem of proving Bernstein's theorem for any dimension n to proving the following argument: *if K is a n-dimensional stable minimal cone in $\mathbb{R}^{n+1}$ with vertex at the origin and boundary on the unit sphere centered at the origin, then K is a Euclidean n-dimensional disk*. He then proved his argument for $n = 2$ and thus he obtained

another proof of the classical Bernstein's theorem without using Complex Analysis. Furthermore, the advantage of this method is that it provides for the first time, real hopes of proving the general Bernstein theorem.

The first step in that direction was made by E. De Giorgi [7] in 1965. He showed that the validity of the statement about stable minimal n-dimensional cones in $\mathbb{R}^{n+1}$ implies Bernstein's Theorem for minimal graphs over $\mathbb{R}^{n+1}$ in $\mathbb{R}^{n+2}$. This proved Bernstein's theorem for $n = 3$. In 1966, F.J. Almgren [1] using Geometric Measure Theory proved W.H. Fleming's argument for $n = 3$. Combining this with E. De Giorgi's result he gave a proof of the Bernstein's theorem for $n = 4$.

In 1968, J. Simons [19] extends the Bernstein theorem up to dimension 7 by proving W.H. Fleming's argument for minimal n-dimensional cones in $\mathbb{R}^{n+1}$ for $n \leq 6$, using the stability of minimal cones. In particular, he proved that every n-dimensional minimal cone K in $\mathbb{R}^{n+1}$ is unstable for $n \leq 6$, unless K is a n-dimensional plane. Using E. De Giorgi's modification of W.H. Fleming's argument, it follows that Bernstein's theorem holds for $n \leq 7$. In the same paper, J. Simons gave an example of a 7-dimensional minimal cone in $\mathbb{R}^8$ which is locally stable.

In 1969, E. Bombieri, E. De Giorgi and E. Giusti [4] proved that the cone of J. Simons, is not only locally stable but absolutely area - minimizing with respect to its boundary. They also proved that for $n \geq 8$ Bernstein's theorem is false by proving the existence of a complete minimal graph in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 9$, which is not hyperplane.

In 1975, R. Schoen, L. Simon and S.T. Yau [17] gave estimates on the length of the second fundamental form of stable minimal hypersurfaces, using Geometric Analysis. A new proof of Bernstein's theorem, for $n \leq 5$, arose from these estimates.

In 1976, L. Simon [18] proved the Bernstein theorem for $n \leq 7$ using Geometric Measure Theory and Geometric Analysis by estimating again, the length of the second fundamental form.

We should note that in 1961 J. Moser [14] had already proved that if $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ is a smooth entire solution of the minimal surface equation with bounded gradient, then u is affine. Moreover, K. Ecker and G. Huisken in [9] improved J. Moser's theorem under the assumption that the gradient of u satisfies

$$|\nabla u(x)| = o(\sqrt{|x|^2 + |u(x)|^2}).$$

The aim of the present master thesis is to prove the Bernstein theorem for $n \leq 7$. The thesis is organized as follows: In the first chapter, we recall the notions from Riemannian Geometry and the submanifolds theory that will be used in the sequel. In the second chapter, we prove J. Simons' formula for the square length of the second fundamental form of a minimal hypersurface in a space form. As a result a useful inequality is obtained. We, also, derive the first and second variation formulas of area. Then, the notion of stability of minimal submanifolds is discussed.

In the last chapter, we present the techniques developed by J.Simons in [19], in order to investigate the stability of minimal cones and we give an example of a minimal cone in $\mathbb{R}^8$ which is absolutely area-minimizing. We present the proof of Bernstein's theorem for $n \leq 5$ due to R. Schoen, L. Simon and S.T. Yau [17]. Finally, we describe J. Simons' proof of the Bernstein theorem, for $n \leq 7$.