ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Η Εικασια του Serre

Κωνσταντινα Παπαζογλου

Μεταπτυχιακη Διατριβη

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2012

Η παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή εκπονήθηκε στα πλαίσια του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών, για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης (ΜΔΕ) στην κατεύθυνση

«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» (Ανάλυση-Άλγεβρα-Γεωμετρία)

που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, υπό την επίβλεψη του **Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Απόστολου Μπεληγιάννη**.

Τριμελης Επιτροπη Κρισης

Μπεληγιάννης Απόστολος, Αναπληρωτής Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
(Επιβλέπων Καθηγητής)

Μαρμαρίδης Νικόλαος, Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Θωμά Απόστολος, Αναπληρωτής Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Αφιερώνεται στην αγαπημένη μου γιαγιά Μαρία και στον αδερφό μου Στέφανο

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Έστω k ένα σώμα και $R = k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ ο δακτύλιος πολυωνύμων στις $n \geq 2$ μεταβλητές.

Ο Jean Pierre Serre το 1955 στο διάσημο άρθρο του "Faisceaux algebriques coherents", έχοντας σαν βάση κάποια γεωμετρικά αποτελέσματα, παρατήρησε ότι: *"On ignore s'il existe des A-modules projectifs de type fini qui ne soient pas libres"* [31, page 243], δηλαδή: *«Δεν είναι γνωστό αν υπάρχουν πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R-πρότυπα τα οποία δεν είναι ελεύθερα».* Έκτοτε, και προς απογοήτευσή του, η θετική απάντηση στο πρόβλημα που εμπεριέχει η παρατήρηση αυτή έγινε γνωστή ως:

Εικασία του Serre (1955): *Αν k είναι ένα σώμα, τότε κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό πρότυπο υπεράνω του δακτυλίου πολυωνύμων $k[t_1, \ldots, t_n]$ είναι ελεύθερο.*

Κατά την εικοσαετία 1955-1975 διάφοροι ερευνητές, αναπτύσσοντας νέες μεθόδους και θεωρίες προσπάθησαν να επιλύσουν και να δώσουν μία θετική απάντηση στην Εικασία του Serre. Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση μιας μεταβλητής είναι εύκολο να δεί κανείς ότι η εικασία του Serre έχει θετική απάντηση, ως συνέπεια του ότι ο δακτύλιος $k[x]$ είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών. Επίσης στην κατηγορία των βαθμωτών προτύπων είναι σχετικά εύκολο, με χρήση ομολογικής άλγεβρας, να δει κανείς ότι κάθε βαθμωτό (πεπερασμένα παραγόμενο) προβολικό $k[t_1, \ldots, t_n]$ είναι βαθμωτό ελεύθερο. Για την περίπτωση $n \geq 2$, αποδείχθηκαν κατά τη χρονική περίοδο 1955-1975 αρκετά αποτελέσματα τα οποία έδωσαν θετική απάντηση στην εικασία του Serre σε μερικές περιπτώσεις ή υπό διάφορες επιπρόσθετες συνθήκες. Τα πιο αξιοσημείωτα ήταν τα εξής:

(α) Το 1958 ο Seshadri, βλέπε [30], απέδειξε την εικασία του Serre στην περίπτωση των δύο μεταβλητών.

(β) Το 1972 οι Murthy και Towber, βλέπε [20], απέδειξαν την εικασία στην περίπτωση των τριών μεταβλητών υποθέτοντας ότι το σώμα k είναι αλγεβρικά κλειστό.

Σημειώνουμε ότι η εικασία του Serre έχει αρνητική απάντηση όταν ο δακτύλιος k είναι δακτύλιος διαίρεσης και όχι σώμα όπως έδειξαν οι Ojanguren και Sridharan, βλέπε [23]. Αναλυτικότερα οι Ojanguren και Sridharan κατασκεύασαν ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό D-πρότυπο υπεράνω του δακτυλίου πολυωνύμων $D[x_1, x_2]$, όπου D είναι ένας μη-μεταθετικός δακτύλιος διαίρεσης, το οποίο δεν είναι ελεύθερο.

Τον Ιανουάριο του 1976, οι μαθηματικοί Daniel Quillen και Andrei Suslin απέδειξαν ανεξάρτητα και με διαφορετικές μεθόδους την εικασία του Serre. Αναλυτικότερα οι Quillen και Suslin απέδειξαν το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα των Quillen και Suslin (1976): *Αν k είναι ένα σώμα, τότε κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό πρότυπο υπεράνω του δακτυλίου πολυωνύμων $k[t_1, \ldots, t_n]$ είναι ελεύθερο.*

Η έρευνα στο χρονικό διάστημα 1955-1975 γύρω από την εικασία του Serre οδήγησε, μεταξύ άλλων, στην ανάπτυξη και θεμελίωση της ανωτέρας Αλγεβρικής Κ-Θεωρίας, ως το αλγεβρικό ανάλογο της Τοπολογικής Κ-Θεωρίας. Σημειώνουμε ότι η Αλγεβρική Κ-Θεωρία έχει σημαντικές συνέπειες στην Θεωρία Δακτυλίων, τη Θεωρία Αριθμών, την Αλγεβρική Γεωμετρία, την Αλγεβρική Τοπολογία και Γεωμετρική Τοπολογία, μεταξύ άλλων πεδίων της σύγχρονης έρευνας.

Η παρούσα εργασία επικεντρώνεται στην παρουσίαση τριών αποδείξεων της εικασίας του Serre. Οι δύο εκ των αποδείξεων αυτών είναι οι αποδείξεις των Quillen και Suslin, και η τρίτη είναι μια απλούστερη εκδοχή της απόδειξης του Suslin η οποία οφείλεται στον Vaserstein.

• • •

Η εικασία του Serre αποτελεί ειδική περίπτωση του ακόλουθου γενικότερου προβλήματος:

(†) **Πρόβλημα:** *Πότε ένα (πεπερασμένα παραγόμενο) προβολικό R-πρότυπο είναι ελεύθερο, για διάφορες κλάσεις δακτυλίων R;*

Το παραπάνω πρόβλημα προέκυψε φυσιολογικά από δύο διαφορετικές πηγές, μια καθαρά Αλγεβρική **(Α)** και μια Γεωμετρική **(Γ)**. Υπενθυμίζουμε ότι αν R είναι ένας τυχόν δακτύλιος, τότε προφανώς κάθε ελεύθερο πρότυπο είναι προβολικό, και τα προβολικά R-πρότυπα είναι ακριβώς οι ευθείς αθροιστέοι των ελεύθερων προτύπων.

(Α) Από την Αλγεβρική πλευρά: Ιστορικά το πρόβλημα (†) πρώτα εμφανίστηκε με το κλασσικό αποτέλεσμα του Kaplansky: *κάθε προβολικό (πεπερασμένα ή απείρως παραγόμενο) πρότυπο υπεράνω ενός τοπικού (local) (όχι απαραίτητα μεταθετικού) δακτυλίου είναι ελεύθερο.* Στη συνέχεια ο Kaplansky απέδειξε ένα σημαντικό θεώρημα που αφορά τη γενική δομή των προβολικών προτύπων: *υπεράνω τυχόντος δακτυλίου, κάθε προβολικό πρότυπο είναι ευθύ άθροισμα προβολικών προτύπων τα οποία παράγονται από αριθμήσιμο πλήθος γεννητόρων.* Αυτό το θεώρημα ανάγει την μελέτη των προβολικών προτύπων στην μελέτη των αριθμήσιμα παραγόμενων προβολικών προτύπων.

Καθώς υπάρχουν παραδείγματα δακτυλίων στα οποία υπάρχουν προβολικά πρότυπα τα οποία δεν είναι ελεύθερα (π.χ. ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_6$ ή ο δακτύλιος $\mathsf{M}_n(k)$ των $n \times n$ πινάκων υπεράνω ενός σώματος k), προκύπτει φυσιολογικά το ερώτημα: για ποιούς δακτυλίους R είναι κάθε (πεπερασμένα παραγόμενο) προβολικό R-πρότυπο, ελεύθερο; Είναι εύκολο να δει κανείς, χρησιμοποιώντας το κλασσικό Θεώρημα Δομής των πεπερασμένα παραγόμενων προτύπων υπεράνω περιοχών κυρίων ιδεωδών, ότι το ερώτημα αυτό έχει καταφατική απάντηση για περιοχές κυρίων ιδεωδών, π.χ. $\mathbb{Z}$ ή $k[x]$, όπου k είναι ένα σώμα. Έτσι τίθεται φυσιολογικά το πρόβλημα αν το παραπάνω πρόβλημα (†) έχει καταφατική απάντηση για τον δακτύλιο πολυωνύμων $k[t_1, \ldots, t_n]$ στις n-μεταβλητές, $n \geq 2$, για τον επιπρόσθετο λόγο ότι οι δακτύλιοι πολυωνύμων έχουν σημαντική γεωμετρική σημασία.

(Γ) Από τη Γεωμετρική πλευρά: Ιστορικά το πρόβλημα εμφανίστηκε σε σχέση με την Θεωρία αλγεβρικών διανυσματικών δεσμών υπεράνω αφφινικών χώρων και σε σχέση με την θεωρία των πλήρων διατομών.

1. (Αλγεβρικές Διανυσματικές Δέσμες επί Αφφινικών Χώρων) Ο Serre παρατήρησε ότι τα πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά πρότυπα αντιστοιχούν σε (τοπολογικές) διανυσματικές δέσμες (topological vector bundles) υπεράνω του αφφινικού (ή ομοπαραλληλικού) χώρου $\mathbb{A}^n(k)$ του k, και τα πεπερασμένα παραγόμενα ελεύθερα πρότυπα αντιστοιχούν σε τετριμμένες διανυσματικές δέσμες (trivial (topological) vector bundles). Σημειώνουμε ότι μια διανυσματική δέσμη επί ενός τοπολογικού χώρου X καλείται *τετριμμένη* (βαθμίδας r) αν είναι ισόμορφη, ως διανυσματική δέσμη, με την τετριμμένη δέσμη $X \times k^r$. Καθώς ο αφφινικός χώρος $\mathbb{A}^n(k)$, είναι τοπολογικά συσταλτός (contractible), έπεται ότι ο χώρος $\mathbb{A}^n(k)$ δεν έχει μη-τετριμμένες τοπολογικές διανυσματικές δέσμες.

Έχοντας υπ' όψιν τα παραπάνω τοπολογικά/γεωμετρικά αποτελέσματα, ο Serre παρατήρησε ότι η απάντηση στην ανάλογη ερώτηση για *αλγεβρικές* διανυσματικές δέσμες (algebraic vector bundles) υπεράνω του αφφινικού χώρου $\mathbb{A}^n(k)$, θεωρούμενου ως το αφφινικό σχήμα (affine scheme) $\mathsf{Spec}(k[x_1, x_2, \cdots, x_n])$ το οποίο ορίζεται από τον δακτύλιο $k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$, δεν ήταν γνωστή. Καθώς αλγεβρικές διανυσματικές δέσμες υπεράνω του αφφινικου σχήματος $\mathbb{A}^n(k)$ αντιστοιχούν σε πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά πρότυπα υπεράνω του δακτυλίου $k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$, ο Serre οδηγήθηκε άμεσα στην διατύπωση του ανοιχτού προβλήματος το οποίο έγινε γνωστό ως εικασία του Serre, και εν τέλει στην επίλυσή της εικασίας από τους Quillen και Suslin το 1976. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις παραπάνω παρατηρήσεις, έχουμε την γεωμετρική εκδοχή του Θεωρήματος των Quillen και Suslin το οποίο μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα και ως εξής:

Θεώρημα των Quillen και Suslin: *Αν k είναι ένα σώμα, τότε κάθε αλγεβρική διανυσματική δέσμη υπεράνω του αφφινικού χώρου $\mathbb{A}^n(k)$ επί του k είναι τετριμμένη.*

Για περισσότερες πληροφορίες για την γεωμετρική εκδοχή του Θεωρήματος των Quillen-Suslin παραπέμπουμε στο Παράρτημα B'.

2. (Πλήρεις Διατομές) Ένα διαφορετικό κίνητρο για την εικασία του Serre προκύπτει από την μελέτη των *πλήρων διατομών* (complete intersections) στην Αλγεβρική Γεωμετρία. Έστω V ένα ανάγωγο υποπολύπτυγμα (irreducible subvariety) συνδιάστασης 2 στον $\mathbb{A}^n(k)$. Για παράδειγμα μπορεί κανείς να θεωρήσει μια μη-ιδιάζουσα ανάγωγη αλγεβρική καμπύλη V στον $\mathbb{A}^3(k)$ η οποία είναι είτε ρητή ή ελλειπτική. Τότε στο V αντιστοιχεί ένα πρώτο ιδεώδες I ύψους (height) 2 στον πολυωνυμικό δακτύλιο $k[t_1, \ldots, t_n]$. Το ερώτημα το οποίο προκύπτει είναι αν το I είναι δυνατόν να παράγεται από 2 πολυώνυμα. Σε αυτή την περίπτωση το πολύπτυγμα είναι μια πλήρης διατομή.

Ο Serre, με κάποιες φυσιολογικές υποθέσεις στο πολύπτυγμα V, έδειξε ότι το I έχει μια προβολική ανάλυση $0 \longrightarrow k[t_1, \ldots, t_n] \longrightarrow P \longrightarrow I \longrightarrow 0$, όπου το P είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό $k[t_1, \ldots, t_n]$-πρότυπο βαθμίδας 2. Αν το P είναι ελεύθερο, τότε το P είναι ισόμορφο με το ελεύθερο $k[t_1, \ldots, t_n]$-πρότυπο $k[t_1, \ldots, t_n]^2$, και ο παραπάνω επιμορφισμός δείχνει ότι πράγματι το I μπορεί να παραχθεί από δύο πολυώνυμα, δηλαδή το πολύπτυγμα V είναι πλήρης διατομή.

• • •

Οι Serre, Quillen και Suslin θεωρούνται από τους επιφανέστερους Μαθηματικούς οι οποίοι εργάσθηκαν κατά το δεύτερο μισό του 20ου αιώνα:

- Ο Jean Pierre Serre (1926-) είναι ίσως ο κορυφαίος εν ζωή Μαθηματικός. Του απονεμήθηκε το 1954 το βραβείο Fields για τη σημαντική συμβολή του στην Αλγεβρική Τοπολογία, και το βραβείο Abel το 2003 για το συνολικό του έργο το οποίο αποτελεί θεμελιώδη συμβολή σε πολλές περιοχές των Μαθηματικών, ενδεικτικά αναφέρουμε στην Αλγεβρική Γεωμετρία, στην Θεωρία Αριθμών, στην Αλγεβρική Τοπολογία, στην Θεωρία Αναπαραστάσεων, στην Θεωρία Ομάδων, στην Ομολογική Άλγεβρα, ...

- Ο Daniel Quillen (1940-2011) θεωρείται από τους επιφανέστερους μαθηματικούς της τελευταίας πεντηκονταετίας. Του απονεμήθηκε, μεταξύ άλλων, το 1978 το βραβείο Fields για την συμβολή του στην ανάπτυξη της ανωτέρας Αλγεβρικής K-Θεωρίας, στην Θεωρία Ομοτοπίας, στην Ομοτοπική Άλγεβρα και στην Θεωρία Συνομολογίας μεταθετικών δακτυλίων και ομάδων, και για τις αποδείξεις του για την εικασία του Adams και την εικασία του Serre.

- Ο Andrei Suslin (1950-) έχει σημαντικότατη συμβολή στην ανάπτυξη της Αλγεβρικής K-Θεωρίας, στην Άλγεβρα, στην Θεωρία Αριθμών, στην Αλγεβρική Γεωμετρία, στην λεγόμενη motivicic cohomology, και στην απόδειξή του για την εικασία του Serre. Για την εν γένει συμβολή του στα Μαθηματικά, του έχουν απονεμηθεί διάφορα βραβεία.

• • •

Βασικό εργαλείο για την συγγραφή της παρούσας διατριβής, η οποία έχει συνθετικό χαρακτήρα, αποτελούν τα βιβλία του Lam, βλέπε [13] και [14].

Η διατριβή έχει οργανωθεί σε τέσσερα Κεφάλαια και τέσσερα σύντομα παραρτήματα.

Στο πρώτο κεφάλαιο, το οποίο έχει εισαγωγικό χαρακτήρα, δίνουμε τους ορισμούς των ελεύθερων και προβολικών προτύπων και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι κάθε ελεύθερο πρότυπο είναι προβολικό. Αποδεικνύουμε το λήμμα του Nakayama το οποίο θα μας οδηγήσει σε ένα ιδιαίτερα σημαντικό αποτέλεσμα ότι η εικασία του Serre έχει θετική απάντηση για τοπικούς δακτυλίους. Αναπτύσσουμε τη βασική θεωρία δακτυλίων της Noether, ορίζουμε την έννοια των πεπερασμένα παραστάσιμων προτύπων και αποδεικνύουμε το θεώρημα βάσης του Hilbert. Έτσι οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι το βασικό αντικείμενο μελέτης της διατριβής: ο πολυωνυμικός δακτύλιος n μεταβλητών $k[x_1, \ldots, x_n]$, όπου το k είναι σώμα, είναι δακτύλιος της Noether.

Συνεχίζουμε με την ανάπτυξη της θεωρίας τοπικοποίησης μεταθετικών δακτυλίων η οποία θα παίξει σημαντικό ρόλο στην απόδειξη του Quillen της εικασίας του Serre. Αποδεικνύουμε ιδιαίτερα ότι αν R είναι δακτύλιος της Noether τότε και ο δακτύλιος τοπικοποίησης $S^{-1}R$ είναι δακτύλιος της Noether. Συνεχίζουμε με τους ορισμούς και τη βασική θεωρία των επίπεδων προτύπων τα οποία διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην θεωρία τοπικοποίησης και αποδεικνύουμε ότι ο δακτύλιος τοπικοποίησης $S^{-1}R$ είναι ένα επίπεδο R-πρότυπο. Τέλος, ορίζουμε την σημαντική έννοια της βαθμίδας των πεπερασμένα παραγόμενων προβολικών προτύπων η οποία θα χρησιμοποιηθεί στα επόμενα Κεφάλαια της διατριβής.

Στο δεύτερο κεφάλαιο ορίζουμε τα ευσταθώς ελεύθερα πρότυπα και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι κάθε ευσταθώς ελεύθερο R-πρότυπο είναι προβολικό. Στη συνέχεια, δίνοντας έναν διαφορετικό ορισμό των ευσταθώς ελεύθερων προτύπων, ανάγουμε την μελέτη τους στη μελέτη των αντιστρέψιμων τετραγωνικών πινάκων πάνω από τον δακτύλιο R. Δίνουμε την έννοια των unimodular γραμμών και ορίζουμε τους δακτυλίους του Hermite, έννοιες που θα φανούν ιδιαίτερα χρήσιμες στις αποδείξεις της εικασίας στο τέταρτο κεφάλαιο. Συνδυάζοντας τις έννοιες των ευσταθώς ελεύθερων προτύπων και των δακτυλίων του Hermite, η εικασία του Serre μπορεί να μεταφραστεί ως εξής: Έστω ο δακτύλιος πολυωνύμων d μεταβλητών $R = k[t_1, \ldots, t_d]$, όπου το k είναι ένα σώμα. Θα αποδειχτεί ότι κάθε προβολικό R-πρότυπο P είναι ευσταθώς ελεύθερο. Λαμβάνοντας υπόψιν αυτό το αποτέλεσμα, η εικασία του Serre μπορεί να μεταφραστεί στο ακόλουθο ερώτημα: Είναι ο δακτύλιος πολυωνύμων d μεταβλητών $R = k[t_1, \ldots, t_d]$, όπου το k είναι ένα σώμα, δακτύλιος Hermite; Ισοδύναμα, είναι δυνατόν κάθε $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathsf{UM}_n(k[t_1, \ldots, t_d])$ να μπορεί να συμπληρωθεί σε έναν $n \times n$ πίνακα με ορίζουσα που ανήκει στο $k - \{0\}$;

Συνεχίζουμε με κάποιους ορισμούς από την θεωρία πινάκων, οι οποίοι θα μας φανούν ιδιαίτερα χρήσιμοι στις αποδείξεις που σχετίζονται με unimodular γραμμές. Τέλος, θα αναφερθούμε στην θεωρία της ομάδας του Grothendieck K_0 για τυχαίους δακτυλίους R η οποία θα μας φανεί χρήσιμη στη συνέχεια σε ένα σημαντικό θεώρημα του Serre.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε κάποια κλασικά αποτελέσματα γύρω από την εικασία του Serre από την διατύπωσή της το 1955 μέχρι το τέλος του 1975. Έστω $A = k[t_1, \ldots, t_n]$ ο πολυωνυμικός δακτύλιος n μεταβλητών και P ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό A-πρότυπο. Αρχικά, αποδεικνύουμε ότι αν το P έχει βαθμίδα 1, τότε είναι ελεύθερο. Αυτό το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από ένα θεώρημα του Gauss που λέει ότι ο A είναι μία περιοχή μονοσήμαντης παραγοντοποίησης. Συνεχίζουμε με την περίπτωση μίας μεταβλητής, $A = k[t_1]$. Τότε ο δακτύλιος A είναι μία περιοχή κύριων ιδεωδών και γνωρίζουμε ότι πάνω από μία περιοχή κύριων ιδεωδών τα πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά πρότυπα είναι ελεύθερα. Ακόμη και αν το k είναι ένας δακτύλιος διαίρεσης, οπότε το $k[t_1]$ θα είναι μία μη μεταθετική περιοχή κύριων ιδεωδών, η εικασία συνεχίζει να έχει θετική απάντηση.

Όπως αναφέραμε πριν, οι Ojanguren και Sridharan το 1971 απέδειξαν ότι αν το k αντί για σώμα είναι ένας δακτύλιος διαίρεσης και αν $n \geq 2$, τότε η εικασία του Serre δεν ισχύει. Επομένως η άμεση γενίκευση της εικασίας του Serre σε μη-μεταθετικούς δακτυλίους έχει αρνητική απάντηση. Στην περίπτωση των βαθμωτών προτύπων, οι Cartan και Eilenberg, το 1956, αποδεικνύουν ότι η εικασία έχει θετική απάντηση.

Ένα βασικό αποτέλεσμα στην ανάπτυξη της θεωρίας το οποίο βοήθησε στην επίλυση της εικασίας, είναι ένα θεώρημα του Serre, το οποίο μας εξασφαλίζει ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό A-πρότυπο είναι ευσταθώς ελεύθερο. Επομένως η εικασία ανάγεται στην απόδειξη ότι κάθε ευσταθώς ελεύθερο A-πρότυπο είναι ελεύθερο. Το 1958, ο Seshadri αποδεικνύει ότι η εικασία αληθεύει στην περίπτωση του πολυωνυμικού δακτυλίου $A = k[t_1, t_2]$ με δύο μεταβλητές. Το 1964, ο Bass αποδεικνύει ότι η εικασία έχει θετική απάντηση στην περίπτωση όπου $\mathsf{rank}P > n$. Τέλος, αποδεικνύουμε το κλασσικό θεώρημα συζυγιών του Hilbert το οποίο δίνει ενδείξεις ότι η εικασία του Serre έχει θετική απάντηση.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε τρεις αποδείξεις της εικασίας του Serre, τις αποδείξεις των Suslin, Vaserstein και Quillen.

- Ο Suslin χρησιμοποιεί τον ορισμό του δακτυλίου Hermite σε συνδυασμό με το γεγονός ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό $R[t_1, \ldots, t_n]$-πρότυπο είναι ευσταθώς ελεύθερο. Έτσι για να αποδείξει την εικασία του Serre, αποδεικνύει ότι για κάθε σώμα k, ο πολυωνυμικός δακτύλιος n μεταβλητών είναι ένας δακτύλιος του Hermite. Για να καταλήξει σε αυτό το συμπέρασμα ο Suslin, αναλύει την δράση των αντιστρέψιμων πινάκων στις unimodular πολυωνυμικές γραμμές που περιέχουν ένα μονικό στοιχείο.

- Ο Vaserstein, απλοποιώντας την απόδειξη του Suslin, αποδεικνύει την εικασία του Serre μέσω ενός ιδιαίτερα σημαντικού λήμματος που λέει ότι αν R είναι ένας μεταθετικός τοπικός δακτύλιος, $f = (f_1, \ldots, f_n) \in \mathsf{UM}_n(R[t])$ μία unimodular γραμμή πάνω από τον δακτύλιο πολυωνύμων μίας μεταβλητής $R[t]$, όπου $n \geq 3$ και αν ο ηγετικός συντελεστής του πολυωνύμου f_1 είναι ένα αντιστρέψιμο στοιχείο του δακτυλίου R, τότε ισχύει ότι:
$$f(t) \sim_{\mathsf{E}_n(R[t])} f(0) \sim_{\mathsf{E}_n(R)} (1, 0, \ldots, 0).$$

- Τέλος ο Quillen αποδεικνύει την εικασία του Serre χρησιμοποιώντας την έννοια του επεκτάσιμου προτύπου. Συνδυάζοντας ένα παλαιότερο θεώρημα του Horrocks, με ένα σημαντικό νέο αποτέλεσμα, γνωστό ως Quillen's Patching Theorem, καταλήγει στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Στην εργασία υπάρχουν 4 Παραρτήματα.

Στο Παράρτημα Α' παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα, γεωμετρικής φύσης, ενός δακτυλίου R (του δακτυλίου πολυωνυμικών συναρτήσεων επί της μοναδιαίας σφαίρας του $\mathbb{R}^3$) και ενός πεπερασμένα παραγόμενου ευσταθώς ελεύθερου R-προτύπου το οποίο δεν είναι ελεύθερο.

Στο Παράρτημα Β' παρουσιάζουμε εν συντομία το βασικό Θεώρημα του Swan το οποίο δίνει μια ακριβή σχέση μεταξύ της κατηγορίας των διανυσματικών δεσμών (vector bundles) επί ενός συμπαγούς τοπολογικού χώρου Hausdorff X και των πεπερασμένα παραγόμενων προβολικών προτύπων υπεράνω του δακτυλίου των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων επί του X.

Στο Παράρτημα Γ' παραθέτουμε κάποια σύγχρονα αποτελέσματα αναφορικά με δακτυλίους, όχι απαραίτητα μεταθετικούς ή πολυωνυμικούς, για τους οποίους κάθε προβολικό (πεπερασμένα ή απείρως παραγόμενο) πρότυπο είναι ελεύθερο.

Στο τελευταίο Παράρτημα Δ' παρουσιάζουμε μια γενικευμένη μορφή της εικασίας του Serre η οποία είναι γνωστή ως εικασία των Bass-Quillen, και η οποία είναι ανοιχτή μέχρι σήμερα. Παραθέτουμε κάποια αποτελέσματα τα οποία δίνουν μερική απάντηση στην εικασία των Bass-Quillen και τα οποία υποστηρίζουν μια καταφατική απάντηση στην εικασία στην γενική περίπτωση.

Ευχαριστίες

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε όλους εκείνους που με βοήθησαν στην εκπόνηση της παρούσας μεταπτυχιακής διατριβής.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως τον επιβλέπων καθηγητή μου, Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Απόστολο Μπεληγιάννη, για την καθοδήγησή του κατά την διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών. Η βοήθεια και η στήριξή του ήταν συνεχείς και συνέβαλαν καθοριστικά στην περάτωση της παρούσας διατριβής.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω και τα άλλα μέλη της τριμελούς επιτροπής κρίσης της μεταπτυχιακής διατριβής μου, τον Καθηγητή κ. Νικόλαο Μαρμαρίδη και τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Απόστολο Θωμά, για τις παρατηρήσεις τους οι οποίες συνέβαλαν στη βελτιστοποίηση της διατριβής μου.

Ευχαριστώ τον υποψήφιο Διδάκτορα του τμήματός μας Χρυσόστομο Ψαρουδάκη για τις χρήσιμες υποδείξεις του. Ευχαριστώ ακόμη τη μεταπτυχιακή απόφοιτη Ελένη Αμπαζή για τη φιλία της και την συμπαράσταση κατά τη διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στην οικογένειά μου και ιδιαίτερα στην αδερφή μου Χριστίνα και στον αδερφό μου Στέφανο. Ένα τεράστιο ευχαριστώ στην αγαπημένη μου γιαγιά Μαρία για την αγάπη της, την στήριξή της σε κάθε μου επιλογή, την συμπαράσταση και την πολύτιμη βοήθειά της.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον Αλέξη, για την κατανόηση και την υπομονή του όλα τα χρόνια των σπουδών μου.

Τέλος, επιθυμώ να ευχαριστήσω τους φίλους μου: Μιχαέλα, Σάκη, Ρούλα, Σωτήρη, Σπύρο, Πετρούλα, Σέβη και Χάιδω για την κατανόηση και την ξεχωριστή ηθική στήριξή τους.

Κωνσταντίνα Παπάζογλου
Ιωάννινα, Ιούνιος 2012

Κεφάλαιο 1

Προβολικά Πρότυπα

Στο κεφάλαιο αυτό θα δώσουμε τους ορισμούς των ελεύθερων και προβολικών προτύπων, θα αποδείξουμε το λήμμα του Nakayama το οποίο θα μας οδηγήσει σε ένα ιδιαίτερα σημαντικό αποτέλεσμα ότι η εικασία του Serre έχει θετική απάντηση για τοπικούς δακτυλίους.

Αναπτύσσουμε τη βασική θεωρία δακτυλίων της Noether και αποδεικνύουμε το θεώρημα βάσης του Hilbert. Έτσι οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι το βασικό αντικείμενο μελέτης της διατριβής: ο πολυωνυμικός δακτύλιος n μεταβλητών $k[x_1, \ldots, x_n]$, όπου το k είναι σώμα, είναι δακτύλιος της Noether.

Συνεχίζουμε με την ανάπτυξη της θεωρίας τοπικοποίησης μεταθετικών δακτυλίων η οποία θα παίξει σημαντικό ρόλο στην απόδειξη του Quillen της εικασίας του Serre. Αποδεικνύουμε ιδιαίτερα ότι αν R είναι δακτύλιος της Noether τότε και ο δακτύλιος τοπικοποίησης $S^{-1}R$ είναι δακτύλιος της Noether. Συνεχίζουμε με τους ορισμούς και τη βασική θεωρία των επίπεδων προτύπων τα οποία διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην θεωρία τοπικοποίησης. Τέλος, ορίζουμε την σημαντική έννοια της βαθμίδας των πεπερασμένα παραγόμενων προβολικών προτύπων η οποία θα χρησιμοποιηθεί στα επόμενα Κεφάλαια της διατριβής.

1.1 Ελεύθερα και Προβολικά Πρότυπα

Στην πρώτη παράγραφο αυτού του κεφαλαίου θα μελετήσουμε τα πεπερασμένα παραγόμενα, τα ελεύθερα, τα προβολικά, τα επίπεδα και τα πεπερασμένα παραστάσιμα πρότυπα.

Στο εξής με R θα συμβολίζουμε έναν δακτύλιο όχι απαραίτητα μεταθετικό. Όταν θα λέμε R-πρότυπο θα εννοούμε συνήθως αριστερό R-πρότυπο.

1.1.1 Ελεύθερα πρότυπα

Ορισμός 1.1.1. *Έστω X ένα υποσύνολο ενός R-προτύπου M. Το σύνολο όλων των R-γραμμικών συνδυασμών των στοιχείων του X*

$$\langle X\rangle = \{\sum_{i=1}^{n} r_i \cdot x_i : \;\; r_i \in R, \;\; x_i \in X\},$$

καλείται το υποπρότυπο που παράγεται από το X.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι το $\langle X\rangle$ είναι ένα αριστερό R-υποπρότυπο του M.

Ας ξεκινήσουμε με τον ορισμό ενός πεπερασμένα παραγόμενου προτύπου:

Ορισμός 1.1.2. *Ένα αριστερό R-πρότυπο M είναι* **πεπερασμένα παραγόμενο** *αν το M παράγεται από ένα πεπερασμένο σύνολο, δηλαδή αν υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο του R-προτύπου M, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ τέτοιο ώστε*

$$M = \langle X\rangle.$$

Τότε το σύνολο X καλείται σύνολο γεννητόρων του R-προτύπου M.

Παράδειγμα 1.1.3. Ένας διανυσματικός χώρος V πάνω από ένα σώμα K είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο K-πρότυπο αν και μόνο αν ο διανυσματικός χώρος V είναι πεπερασμένης διάστασης.

Ας ξεκινήσουμε με την πιο απλή κατηγορία προτύπων, τα ελεύθερα πρότυπα. Θα δώσουμε αρχικά τον ορισμό της βάσης ενός αριστερού R-προτύπου.

Ορισμός 1.1.4. *Έστω M ένα αριστερό R-πρότυπο και έστω $S = \{x_i\}_{i\in I}$ ένα υποσύνολο του M. Το σύνολο S λέμε ότι* **παράγει** *το πρότυπο M αν κάθε στοιχείο $m \in M$ μπορεί να γραφτεί σαν γραμμικός συνδυασμός*

$$m = \sum_{i\in I} r_i x_i,\ r_i = 0,\ \text{για } \forall i \in I,\ \text{εκτός από πεπερασμένο πλήθος δεικτών}$$

για κάποια $x_1, \ldots, x_n \in S$ και $r_1, \ldots, r_n \in R$.

Ορισμός 1.1.5. *Έστω M ένα αριστερό R-πρότυπο και έστω $S = \{x_i\}_{i\in I}$ ένα υποσύνολο του M. Το σύνολο S ονομάζεται R-***γραμμικά ανεξάρτητο** *αν οποτεδήποτε υπάρχει μία σχέση της μορφής*

$$\sum_{i\in I} r_i x_i = 0,$$

όπου $x_i \in S$ και $r_1, \ldots, r_n \in R$, τότε

$$r_i = 0, \forall i \in I.$$

Ορισμός 1.1.6. *Έστω M ένα αριστερό R-πρότυπο. Ένα σύνολο $S = \{x_i\}_{i\in I} \subseteq M$ είναι* **βάση** *του M αν το S παράγει το πρότυπο M και αν το S είναι R-γραμμικά ανεξάρτητο.*

Είμαστε τώρα έτοιμοι να δώσουμε τον ορισμό του ελεύθερου R-προτύπου.

Ορισμός 1.1.7. *Ένα αριστερό R-πρότυπο M ονομάζεται* **ελεύθερο** *R-πρότυπο αν το M έχει βάση.*

Συνεχίζουμε τώρα με κάποια βασικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.1.8.
1. Το μηδενικό R-πρότυπο θεωρείται ελεύθερο με βάση το κενό σύνολο.
2. Το R-πρότυπο $R^n = R \times \ldots \times R = \{(r_1, \ldots, r_n) \mid r_i \in R,\ 1 \leq i \leq n\}$ είναι ελεύθερο R-πρότυπο με βάση το σύνολο $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$, όπου
$$e_i = (0, \ldots, 0, 1_R, 0, \ldots, 0)$$
και το 1_R βρίσκεται στην i-θέση.
3. Ο δακτύλιος πολυωνύμων $R[x]$ κατά προφανή τρόπο είναι ένα αριστερό R-πρότυπο. Τότε ο $R[x]$ είναι ελεύθερο R-πρότυπο με βάση το σύνολο
$$\{1, x^2, x^3, \ldots\}.$$

Παρατήρηση 1.1.9. Κάθε δακτύλιος R είναι ελεύθερος αν τον θεωρήσουμε ως αριστερό R-πρότυπο (αντίστοιχα και δεξιό) διότι το σύνολο $\{1_R\}$ αποτελεί μια βάση του R. Γενικά, ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια οικογένεια αριστερών R-προτύπων $(R_i)_{i\in I}$, που αποτελείται από αντίγραφα του ${}_RR$-προτύπου R, δηλαδή $\forall i \in I, R_i = R$. Το αριστερό R-πρότυπο $\oplus_{i\in I} R_i$ είναι ελεύθερο διότι το σύνολο

$$A = \{(a_{k_i})_{i\in I} | k \in I\} \subseteq \oplus_{i\in I} R_i,$$

όπου

$$a_{k_i} = \begin{cases} 0_R & \text{αν } i \neq k \\ 1_R & \text{αν } i = k \end{cases}$$

αποτελεί μία βάση του $\oplus_{i\in I} R_i$. Όπως και στην περίπτωση των διανυσματικών χώρων, την παραπάνω βάση την ονομάζουμε κανονική βάση του $\oplus_{i\in I} R_i$.

Ας περάσουμε σε μία βασική πρόταση:

Πρόταση 1.1.10. *Έστω R ένας δακτύλιος. Για κάθε σύνολο S, υπάρχει ένα ελεύθερο αριστερό R-πρότυπο F με βάση το σύνολο S.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [28, Proposition 2.33]. □

Συνεχίζουμε τώρα με το παρακάτω θεώρημα που εκφράζει μια πολύ σπουδαία ιδιότητα που έχουν όλα τα ελεύθερα R-πρότυπα.

Θεώρημα 1.1.11. *Έστω N ένα ελεύθερο αριστερό R-πρότυπο με βάση $B \subseteq N$ και έστω M ένα τυχαίο R-πρότυπο. Αν $\{m_b | b \in B\}$ είναι στοιχεία του M, τότε υπάρχει μοναδικός R-ομομορφισμός $\phi : N \to M$ με $\phi(b) = m_b$, για κάθε $b \in B$.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει ένας ομομορφισμός $\phi : N \to M$ με $\phi(b) = m_b$, για κάθε $b \in B$. Τότε επειδή γνωρίζουμε ότι κάθε $x \in N$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως

$$x = \sum_{b \in B} r_b b,$$

έχουμε ότι:

$$\phi(\sum_{b \in B} r_b b) = \sum_{b \in B} r_b \phi(b) = \sum_{b \in B} r_b m_b.$$

Επομένως, αν υπάρχει ένας ομομορφισμός $\phi : N \to M$ που να ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος, τότε είναι μοναδικός. Τώρα συνεχίζουμε την απόδειξη προσπαθώντας να κατασκευάσουμε έναν τέτοιον ομομορφισμό. Θεωρούμε την εξής απεικόνιση:

$$\begin{array}{rcl} \phi : N & \to & M \\ \sum_{b \in B} r_b b & \mapsto & \sum_{b \in B} r_b m_b. \end{array}$$

Επειδή, κάθε στοιχείο $x \in N$ εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως R-γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της βάσης B, έπεται ότι η απεικόνιση ϕ είναι καλά ορισμένη, και επιπλέον

$$\forall b \in B, \phi(b) = \phi(1_R b) = 1_R m_b = m_b.$$

Μένει τώρα να δείξουμε ότι η απεικόνιση ϕ είναι ένας R-ομομορφισμός προτύπων. Έστω $x = \sum_{b \in B} r_b b$, $y = \sum_{b \in B} r'_b b \in N$ και $r \in R$. Τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi(x+y) &= \phi(\sum_{b \in B} r_b b + \sum_{b \in B} r'_b b) \\ &= \phi(\sum_{b \in B} (r_b + r'_b) b) \\ &= \sum_{b \in B} (r_b + r'_b) m_b \\ &= \sum_{b \in B} r_b m_b + \sum_{b \in B} r'_b m_b \\ &= \phi(\sum_{b \in B} r_b b) + \phi(\sum_{b \in B} r'_b b) \\ &= \phi(x) + \phi(y). \end{aligned}$$

Ακόμα,

$$\begin{aligned}\phi(r\cdot x) &= \phi(r\cdot\sum_{b\in B} r_b b)\\ &= r\cdot(\sum_{b\in B} r_b m_b)\\ &= r\cdot\phi(\sum_{b\in B} r_b b)\\ &= r\cdot\phi(x).\end{aligned}$$

Άρα, η απεικόνιση ϕ αποτελεί έναν ομομορφισμό R-προτύπων. □

Πόρισμα 1.1.12. *Για κάθε αριστερό R-πρότυπο M, υπάρχει ένας επιμορφισμός R-προτύπων από το $N \to M$, όπου το N είναι ένα ελεύθερο αριστερό R-πρότυπο.*

Απόδειξη. Έστω $X \neq \emptyset$ ένα σύνολο γεννητόρων του ${}_RM$. Χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση (1.1.9), μπορούμε να σχηματίσουμε το ελεύθερο αριστερό R-πρότυπο $N = \oplus_{x\in X}\ {}_xR$, όπου για κάθε $x \in X$ το πρότυπο ${}_xR$ ισούται με το ${}_RR$ πρότυπο. Θεωρούμε την απεικόνιση ϕ από την κανονική βάση A του M στο σύνολο γεννητόρων Q του M, $\phi : A \to X$, $a_x \mapsto x$, η οποία επεκτείνεται σε έναν R-ομομορφισμό

$$\begin{aligned}\phi : A &\to X\\ \sum_{x\in X} a_x r_x &\mapsto \sum_{x\in X} x r_x,\end{aligned}$$

και επειδή το σύνολο γεννητόρων X παράγει το ${}_RM$, η απεικόνιση ϕ είναι επιμορφισμός. □

Παρατήρηση 1.1.13. Σύμφωνα με το παραπάνω πόρισμα και χρησιμοποιώντας το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών συμπεραίνουμε ότι κάθε R-πρότυπο είναι ένα πρότυπο πηλίκο ενός ελεύθερου R-προτύπου.

Από τον ορισμό του ελεύθερου R-προτύπου γνωρίζουμε ότι το πρότυπο αυτό έχει μία βάση. Αυτή η χαρακτηριστική ιδιότητα μας προμηθεύει με πολλές πληροφορίες και θα δείξουμε στην επόμενη πρόταση ότι καθορίζει την δομή του προτύπου μας, και μάλιστα η δομή ενός ελεύθερου προτύπου λόγω αυτού του γεγονότος είναι πολύ απλή.

Πρόταση 1.1.14. *Έστω M ένα αριστερό R-πρότυπο. Αν ${}_RM$ είναι ελεύθερο R-πρότυπο και B είναι μία βάση του, τότε*

$${}_RM \cong \oplus_{b\in B} R_b,$$

όπου για κάθε $b \in B$, το R-πρότυπο R_b είναι ισόμορφο με το αριστερό R-πρότυπο ${}_RR$.

Απόδειξη. Έστω η απεικόνιση ϕ από την βάση B του ${}_RM$ στην κανονική βάση A του $\oplus_{b\in B} R_b$,

$$\begin{aligned}\phi : B &\to A\\ b &\mapsto a_b.\end{aligned}$$

Από το Θεώρημα (1.1.11) γνωρίζουμε ότι η απεικόνιση ϕ επεκτείνεται σε έναν R-ομομορφισμό

$$\begin{aligned}\phi : M &\to \oplus_{b\in B} R_b\\ \sum_{b\in B} b r_b &\mapsto \sum_{b\in B} a_b r_b.\end{aligned}$$

Επειδή κάθε στοιχείο $\oplus_{b\in B} R_b$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της βάσης A, έπεται ότι η απεικόνιση ϕ είναι επιμορφισμός. Αν το $m = \sum_{b\in B} b r_b$ ανήκει στον πυρήνα του ϕ, τότε $\sum_{b\in B} a_b r_b = 0$. Ακόμα, επειδή το A είναι βάση, έχουμε ότι για κάθε $b \in B$, $r_b = 0$, συνεπώς, έχουμε ότι $m = 0$. Επομένως, η απεικόνιση ϕ είναι ισομορφισμός. □

Ορισμός 1.1.15. *Μία πεπερασμένη ή μη πεπερασμένη ακολουθία από R-ομομορφισμούς και R-πρότυπα*

$$\cdots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+2} \longrightarrow \cdots$$

ονομάζεται **ακριβής** *αν* $\mathsf{Im}\, f_{n-1} = \mathsf{Ker}\, f_n$ *για όλα τα* n.

Μια ακριβής ακολουθία της μορφής

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{p} M \xrightarrow{q} N \longrightarrow 0$$

καλείται **σύντομη ακριβής ακολουθία**.

Ας μελετήσουμε τώρα τι συμβαίνει αν σε μία ακριβή ακολουθία έχουμε κάποιο ελεύθερο πρότυπο. Ξεκινάμε με τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.1.16. *Έστω M ένα αριστερό R-πρότυπο και F ένα ελεύθερο R-πρότυπο. Τότε η σύντομη ακριβής ακολουθία*

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

ονομάζεται **ελεύθερη παράσταση** *του* M.

Πόρισμα 1.1.17. *Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό και την Παρατήρηση* (1.1.13) *συνεπάγεται ότι κάθε πρότυπο έχει μία ελεύθερη παράσταση.*

Ορισμός 1.1.18. *Μία σύντομη ακριβής ακολουθία*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{p} M \xrightarrow{q} N \longrightarrow 0$$

καλείται **διασπάσιμη** *αν και μόνο αν υπάρχει ισομορφισμός*

$$\varphi : M \xrightarrow{\sim} L \oplus N$$

τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "p"] \arrow[d, "Id_L"'] & M \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\varphi"] & N \arrow[r] \arrow[d, "Id_N"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i_L"'] & L \oplus N \arrow[r, "\varpi_N"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Πρόταση 1.1.19. *Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

1. *Η σύντομη ακριβής ακολουθία*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{p} M \xrightarrow{q} N \longrightarrow 0$$

   είναι διασπάσιμη.

2. *Υπάρχει ομομορφισμός $i : N \to M$ τέτοιος ώστε: $q \circ i = Id_N$*

3. *Υπάρχει ομομορφισμός $\varpi : M \to L$ τέτοιος ώστε: $\varpi \circ p = Id_L$*

Απόδειξη. $(1 \Rightarrow 2)$ Θεωρούμε τον ομομορφισμό

$$\begin{aligned} i_N : N &\to L \oplus N \\ y &\mapsto i_N(y) = (0, y) \end{aligned}$$

και θέτουμε $i = \varphi^{-1} \circ i_N : N \to M$. Τότε πρέπει να αποδείξουμε ότι: $q \circ i = Id_N$. Από το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "p"] \arrow[d, "Id_L"'] & M \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\varphi"] & N \arrow[r] \arrow[d, "Id_N"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i_L"'] & L \bigoplus N \arrow[r, "\varpi_N"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

θα ισχύει το εξής: $\varpi_N \circ \varphi = q \Rightarrow \varpi_N \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = q \circ \varphi^{-1} \Rightarrow \varpi_N \circ Id = q \circ \varphi^{-1} \Rightarrow \varpi_N = q \circ \varphi^{-1} \Rightarrow \varpi_N \circ i_N = q \circ \varphi^{-1} \circ i_N \Rightarrow Id_N = q \circ \varphi^{-1} \circ i_N \Rightarrow q \circ i = Id_N$.

$(2 \Rightarrow 3)$ Γνωρίζουμε ότι υπάρχει ομομορφισμός $i : N \to M$ τέτοιος ώστε $q \circ i = Id_N$. Θα κατασκευάσουμε έναν ισομορφισμό

$$\begin{aligned} \psi : L \oplus N &\to M \\ (x, y) &\mapsto \psi(x, y) = p(x) + i(y) \end{aligned}$$

Για κάθε $(x, y) \in L \bigoplus N$ θα ισχύει ότι:

$$(q \circ \psi)(x, y) = q(\psi(x, y)) = q(p(x) + i(y)) = q(p(x)) + q(i(y)) = 0 + y = y = \varpi_N(x, y).$$

Άρα $q \circ \psi = \varpi_N$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η ψ είναι ισομορφισμός. Τότε θα ισχύει:

$$q \circ \psi = \varpi_N \Rightarrow (q \circ \psi) \circ \psi^{-1} = \varpi_N \circ \psi^{-1} \Rightarrow q = \varpi_N \circ \psi^{-1}$$

Θέτουμε $\varphi := \psi^{-1} : M \to L \bigoplus N$ και $q = \varpi_N \circ \varphi$. Μένει να δείξουμε ότι: $\varphi \circ p = i_L \Leftrightarrow \psi^{-1} \circ p = i_L \Leftrightarrow p = \psi \circ i_L$. Ισχύει ότι: $(\psi \circ i_L)(x) = \psi(i_L(x)) = \psi(x, 0) = p(x)$. Οπότε $\psi \circ i_L = p$. Θέτουμε $\varpi : M \to L$ να είναι ο ομομορφισμός $\varpi = \varpi_L \circ \varphi$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι ο ϖ είναι ομομορφισμός και ότι $\varpi \circ p = Id_L$.

$(3 \Rightarrow 1)$ Γνωρίζουμε ότι υπάρχει ομομορφισμός $\varpi : M \to L$, τέτοιος ώστε $\varpi \circ p = Id_L$. Ορίζουμε

$$\begin{aligned} \varphi : M &\to L \oplus N \\ m &\mapsto \varphi(m) = (\varpi(m), q(m)) \end{aligned}$$

ένας ομομορφισμός. Αν αποδείξουμε ότι $\varpi_N \circ \varphi = q$ και $\varphi \circ p = i_L$, τότε η φ θα είναι ισομορφισμός. Ισχύει ότι:

$$(\varpi_N \circ \varphi)(m) = \varpi_N(\varpi(m), q(m)) = q(m), \forall m \in M \Rightarrow \varpi_N \circ \varphi = q$$

και

$$(\varphi \circ p)(x) = \varphi(p(x)) = (\varpi(p(x)), q(p(x))) = ((\varpi \circ p)(x), 0) = (x, 0) = i_L(x),$$
$$\forall x \in L \Rightarrow \varphi \circ p = i_L.$$

Άρα η φ είναι ισομορφισμός. □

Πρόταση 1.1.20. *Αν F είναι ένα ελεύθερο R-πρότυπο, τότε κάθε σύντομη ακριβής ακολουθία από αριστερά R-πρότυπα*

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \xrightarrow{f} F \longrightarrow 0$$

είναι διασπάσιμη.

Απόδειξη. Έστω $S = \{x_j\}_{j \in J}$ μία βάση του ελεύθερου R-προτύπου F. Αφού, η f είναι επιμορφισμός, τότε για κάθε $j \in J$ υπάρχει στοιχείο $y_i \in M$ έτσι ώστε $f(y_i) = x_j$. Ορίζουμε απεικόνιση

$$\begin{aligned} g : S &\to M \\ x_j &\mapsto g(x_j) = y_j. \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\beta \in \mathsf{Hom}_R(F, M)$ έτσι ώστε $\beta/S = g$. Αφού,

$$f \circ \beta(x_j) = x_j = Id_F(x_j), \forall j \in J,$$

και άρα $f \circ \beta = Id_F$. Συνεπώς από την Πρόταση (1.1.19) έπεται το συμπέρασμα. □

Κλείνουμε τώρα την παράγραφο αυτή, με δύο προτάσεις, που αφορούν την συμπεριφορά των ελεύθερων προτύπων ως προς τις ακριβείς ακολουθίες.

Πρόταση 1.1.21. 1. *Έστω M ένα αριστερό R-πρότυπο και $N \subseteq M$ ένα υποπρότυπο έτσι ώστε M/N να είναι ελεύθερο R-πρότυπο. Τότε*

$$M \cong N \oplus (M/N).$$

2. *Αν M είναι ένα αριστερό R-πρότυπο και F ένα ελεύθερο R-πρότυπο, τότε*

$$M \cong \ker(f) \oplus F$$

για κάθε επιμορφισμό $f : M \to F$.

Απόδειξη. 1. Αφού το R-πρότυπο M/N είναι ελεύθερο, τότε από την Πρόταση (1.1.20) η ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

διασπάται. Επομένως,

$$M \cong N \oplus (M/N).$$

2. Αρκεί να θέσουμε ως $N = \ker(f)$. Η απόδειξη τότε είναι όμοια με το 1. □

Πρόταση 1.1.22. *Έστω N ένα R-πρότυπο και F ένα ελεύθερο R-πρότυπο. Αν*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} F \longrightarrow 0$$

είναι μία σύντομη ακριβής ακολουθία από R-πρότυπα, τότε η

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(N, M_1) \xrightarrow{\phi_*} \mathsf{Hom}_R(N, M) \xrightarrow{\psi_*} \mathsf{Hom}_R(N, F) \longrightarrow 0$$

είναι διασπάσιμη σύντομη ακριβής ακολουθία αβελιανών ομάδων (ή R-προτύπων αν R αντιμεταθετικός).

1.1.2 Προβολικά Πρότυπα

Είμαστε τώρα σε θέση να εισάγουμε μια πιο γενική κλάση προτύπων από τα ελεύθερα πρότυπα, τα προβολικά πρότυπα. Ξεκινάμε με μία πρόταση η οποία θα μας οδηγήσει πιο ομαλά στον ορισμό των προβολικών προτύπων.

Πρόταση 1.1.23. *Έστω R ένας δακτύλιος και F ένα ελεύθερο αριστερό R-πρότυπο με βάση B. Αν M είναι ένα οποιοδήποτε αριστερό R-πρότυπο και αν $\overline{g} : B \to M$ είναι οποιαδήποτε απεικόνιση, τότε υπάρχει μοναδική R-απεικόνιση $g : F \to M$ με $gi = \overline{g}$, όπου $i : B \to F$ είναι η απεικόνιση εγκλεισμού, δηλαδή $g(b) = \overline{g}(b)$ για κάθε $b \in B$, έτσι η g επεκτείνει την $\overline{g}$.*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[dr, dashed, "g"] & \\ B \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\overline{g}"'] & M \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Κάθε στοιχείο $u \in F$ έχει μία μοναδική έκφραση της μορφής:

$$u = \sum_{b \in B} r_b b, \text{ όπου } r_b \in R \text{ και σχεδόν όλα τα } r_b \text{ είναι } 0.$$

Άρα, υπάρχει μία καλά ορισμένη συνάρτηση

$$\begin{aligned} g : F &\to M \\ u &\mapsto g(u) = \sum_{b \in B} r_b \overline{g}(b). \end{aligned}$$

Προφανώς η g επεκτείνεται στην $\overline{g}$. Αν $s \in R$, τότε $su = \sum sr_b b$. Αν $u' = \sum r'_b b$, τότε $u + u' = \sum (r_b + r'_b) b$. Από τον τύπο της η g δείχνει ότι είναι μία R-απεικόνιση. Μάλιστα, εφόσον $F = \langle B \rangle$, είναι η μοναδική R-απεικόνιση που επεκτείνει την $\overline{g}$. Γνωρίζουμε ότι δύο R-απεικονίσεις που συμφωνούν σε ένα σύνολο γεννητόρων είναι ίσες. □

Θεώρημα 1.1.24. *Έστω F ένα ελεύθερο αριστερό R-πρότυπο. Αν $p : M \to N$ είναι ένας επιμορφισμός, τότε για κάθε $h : F \to N$, υπάρχει ένας R-ομομορφισμός $g : F \to M$ που κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "h"] & \\ M \arrow[r, two heads, "p"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Δηλαδή, αν μας δώσουν έναν επιμορφισμό $p : M \to N$, τότε κάθε απεικόνιση $h : F \to N$ γράφεται ως $h = pg$ για κάποιον ομομορφισμό $g : F \to M$.

Απόδειξη. Έστω B μία βάση του ελεύθερου προτύπου F. Για κάθε $b \in B$, το στοιχείο $h(b) \in N$. Επειδή η απεικόνιση p είναι επιμορφισμός, υπάρχει κάποιο $m \in M$ τέτοιο ώστε $h(b) = p(m)$. Από το αξίωμα επιλογής, υπάρχει μία απεικόνιση $\overline{g} : B \to M$ με $\overline{g}(b) = m$ για κάθε $b \in B$. Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση υπάρχει ένας R-ομομορφισμός $g : F \to M$ με $g(b) = m$ για κάθε $b \in B$. Τώρα $pg(b) = p(m) = h(b)$, έτσι η pg συμφωνεί με την h στην βάση B. Εφόσον $\langle B \rangle = F$, έχουμε $pg = h$. Άρα το διάγραμμα είναι μεταθετικό. □

Ορισμός 1.1.25. *Ένα αριστερό R-πρότυπο P ονομάζεται **προβολικό (projective)** αν για κάθε επιμορφισμό $p : M \to N$ και κάθε ομομορφισμό προτύπων $h : P \to N$, υπάρχει ομομορφισμός $g : P \to M$, ώστε να ισχύει $h = pg$. Δηλαδή το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "h"] & \\ M \arrow[r, two heads, "p"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Παρατήρηση 1.1.26. Σύμφωνα με το Θεώρημα (1.1.24) και τον ορισμό του προβολικού προτύπου συνεπάγεται ότι κάθε ελεύθερο πρότυπο είναι προβολικό. Θα δούμε αργότερα ότι υπάρχουν προβολικά πρότυπα τα οποία δεν είναι ελεύθερα, βλέπε Παράδειγμα (1.1.35).

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό του αριστερά ακριβή, του δεξιά ακριβή και του ακριβή συναρτητή. Συμβολίζουμε με $\mathsf{R} - \mathsf{Mod}$ την κατηγορία των αριστερών R-προτύπων και με Ab ή $\mathbb{Z} - \mathsf{Mod}$ την κατηγορία των αβελιανών ομάδων.

Ορισμός 1.1.27. *Ένας συναλλοίωτος συναρτητής $T : \mathsf{R} - \mathsf{Mod} \to \mathsf{Ab}$ ονομάζεται **αριστερά ακριβής** αν η ακρίβεια της ακολουθίας αριστερών R-προτύπων*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$$

συνεπάγεται την ακρίβεια της ακολουθίας αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow T(A) \xrightarrow{T(i)} T(B) \xrightarrow{T(p)} T(C)\ .$$

Παράδειγμα 1.1.28. Ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(M, \square)$ είναι πάντα αριστερά ακριβής.

Ορισμός 1.1.29. *Ένας συναλλοίωτος συναρτητής T : $\mathsf{R-Mod} \to \mathsf{Ab}$ ονομάζεται* **δεξιά ακριβής** *αν η ακρίβεια της ακολουθίας αριστερών R-προτύπων*

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0$$

συνεπάγεται την ακρίβεια της ακολουθίας αβελιανών ομάδων

$$T(A) \xrightarrow{T(i)} T(B) \xrightarrow{T(p)} T(C) \longrightarrow 0\ .$$

Παράδειγμα 1.1.30. Ο συναρτητής $M \bigotimes_R \square$ είναι πάντα δεξιά ακριβής.

Ορισμός 1.1.31. *Ένας συναλλοίωτος συναρτητής T : $\mathsf{R-Mod} \to \mathsf{Ab}$ ονομάζεται* **ακριβής** *αν η ακρίβεια της ακολουθίας αριστερών R-προτύπων*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0$$

συνεπάγεται την ακρίβεια της ακολουθίας αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow T(A) \xrightarrow{T(i)} T(B) \xrightarrow{T(p)} T(C) \longrightarrow 0\ .$$

Ας περάσουμε τώρα στον κατηγορικό ορισμό του προβολικού προτύπου ο οποίος είναι ισοδύναμος με τον Ορισμό (1.1.25):

Πρόταση 1.1.32. *Ένα αριστερό R-πρότυπο P είναι προβολικό αν και μόνο αν ο* $\mathsf{Hom}_R(P, \square)$: $\mathsf{R-Mod} \to \mathbb{Z} - \mathsf{Mod}$ *είναι ένας ακριβής συναρτητής.*

Απόδειξη. Έστω ότι το αριστερό R-πρότυπο P είναι προβολικό. Γνωρίζουμε ότι ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(P, \square)$ είναι πάντα αριστερά ακριβής. Δηλαδή, για κάθε πρότυπο P, εφαρμόζοντας τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_R(P, \square)$ σε μία ακριβή ακολουθία αριστερών R-προτύπων

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{p} M_2 \xrightarrow{q} M_3 \longrightarrow 0$$

δίνει μια ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(P, M_1) \xrightarrow{p_*^P} \mathsf{Hom}_R(P, M_2) \xrightarrow{q_*^P} \mathsf{Hom}_R(P, M_3)\ .$$

Για να είναι ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(P, \square)$ και δεξιά ακριβής, πρέπει να εξασφαλίσουμε την ακρίβεια στο τέλος της ακολουθίας

$$\mathsf{Hom}_R(P, M_3) \longrightarrow 0\ .$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο q_*^P : $\mathsf{Hom}_R(P, M_2) \to \mathsf{Hom}_R(P, M_3)$ είναι επιμορφισμός. Εφόσον το αριστερό R-πρότυπο P είναι προβολικό το παρακάτω διάγραμμα θα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "h"] & \\
M_2 \arrow[r, two heads, "q"'] & M_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Δηλαδή για κάθε ομομορφισμό προτύπων $h : P \to M_3$ και για κάθε επιμορφισμό $q : M_2 \to M_3$ υπάρχει ομομορφισμός $g : P \to M_2$ με $qg = h$. Επομένως, για κάθε $h \in \mathsf{Hom}_R(P, M_3)$, υπάρχει $g \in \mathsf{Hom}_R(P, M_2)$ τέτοιος ώστε $qg = h$. Όμως,

$$\begin{aligned} q_*^P : \mathsf{Hom}_R(P, M_2) &\to \mathsf{Hom}_R(P, M_3) \\ g &\mapsto q_*^P(g) = qg. \end{aligned}$$

Άρα $qg = h \Rightarrow q_*^P(g) = h$. Άρα για κάθε $h \in \mathsf{Hom}_R(P, M_3)$, υπάρχει $g \in \mathsf{Hom}_R(P, M_2)$ τέτοιος ώστε $q_*^P(g) = h$. Επομένως αποδείξαμε ότι ο ομομορφισμός $q_*^P : \mathsf{Hom}_R(P, M_2) \to \mathsf{Hom}_R(P, M_3)$ είναι επιμορφισμός. Συνεπώς ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(P, \square)$ είναι ακριβής.

Αντίστροφα, έστω ότι ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(P, \square)$ είναι ακριβής. Έστω ένας επιμορφισμός προτύπων $q : M_2 \to M_3$ και έστω ένας τυχαίος ομομορφισμός προτύπων $h : P \to M_3$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "h"] & \\ M_2 \arrow[r, "q"] & M_3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Τότε θα έχουμε την εξής ακριβή ακολουθία προτύπων:

$$0 \longrightarrow \ker q \xrightarrow{i} M_2 \xrightarrow{q} M_3 \longrightarrow 0$$

Η ακολουθία αυτή είναι από κατασκευή ακριβής γιατί γνωρίζουμε ότι ο πυρήνας κάποιου επιμορφισμού είναι πάντα 1-1. Αν εφαρμόσουμε τώρα τον ακριβή συναρτητή $\mathsf{Hom}_R(P, \square)$ στην παραπάνω ακριβή ακολουθία θα έχουμε:

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(P, \ker q) \xrightarrow{i_*^P} \mathsf{Hom}_R(P, M_2) \xrightarrow{q_*^P} \mathsf{Hom}_R(P, M_3) \longrightarrow 0$$

η οποία είναι ακριβής ακολουθία. Άρα ο q_*^P είναι επιμορφισμός $\Rightarrow$ για κάθε ομομορφισμό $h \in \mathsf{Hom}_R(P, M_3)$, υπάρχει $g \in \mathsf{Hom}_R(P, M_2)$ έτσι ώστε $q_*^P(g) = h \Rightarrow qg = h$.

Άρα για κάθε ομομορφισμό προτύπων $h : P \to M_3$ και για κάθε επιμορφισμό $q : M_2 \to M_3$ υπάρχει ομομορφισμός $g : P \to M_2$ με $qg = h$. Δηλαδή το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "h"] & \\ M_2 \arrow[r, two heads, "q"'] & M_3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

και άρα το αριστερό πρότυπο P είναι προβολικό. $\square$

Πρόταση 1.1.33. *Ένα αριστερό R-πρότυπο P είναι προβολικό αν και μόνο αν κάθε σύντομη ακριβής ακολουθία*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{p} N \xrightarrow{q} P \longrightarrow 0$$

διασπάται.

Απόδειξη. Έστω ότι το αριστερό R-πρότυπο P είναι προβολικό. Έστω μια σύντομη ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{p} N \xrightarrow{q} P \longrightarrow 0$$

και έστω το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "1_P"] \\ N \arrow[r, two heads, "q"'] & P \end{tikzcd}$$

Επειδή το P είναι προβολικό, από τον Ορισμό (1.1.25) υπάρχει μία $h : P \to N$, τέτοια ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "1_P"] \\ N \arrow[r, two heads, "q"'] & P \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό. Τότε έχουμε ότι $qh = 1_P$ και άρα από την Πρόταση (1.1.19) η σύντομη ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{p} N \xrightarrow{q} P \longrightarrow 0$$

είναι διασπάσιμη.

Αντίστροφα, έστω ότι κάθε σύντομη ακριβής ακολουθία που τελειώνει με P διασπάται. Θεωρούμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "h"] & \\ M \arrow[r, two heads, "p"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

όπου ο p είναι επιμορφισμός. Έστω F ένα ελεύθερο αριστερό R-πρότυπο για το οποίο υπάρχει ένας επιμορφισμός $f : F \twoheadrightarrow P$, και έστω το ακόλουθο επεκτεταμένο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "\exists g"'] & P \arrow[dl, dashed, "gj"] \arrow[d, "h"] & \\ M \arrow[r, "p"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Από την υπόθεση, κάθε σύντομη ακριβής ακολουθία που τελειώνει σε P διασπάται, άρα από Πρόταση (1.1.19), υπάρχει μια απεικόνιση $j : P \to F$ με $f \circ j = Id_P$. Εφόσον το F είναι ελεύθερο, συνεπάγεται ότι είναι προβολικό. Άρα υπάρχει μια απεικόνιση $g : F \to M$ με $p \circ g = h \circ f$.

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, dashed, "\exists g"'] \arrow[d, "h\circ f"] & \\ M \arrow[r, two heads, "p"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Άρα ισχύει: $p \circ g = h \circ f \Rightarrow (p \circ g) \circ j = (h \circ f) \circ j \Rightarrow p \circ (g \circ j) = h \circ (f \circ j) \Rightarrow p \circ (g \circ j) = h \circ Id_P \Rightarrow p \circ (g \circ j) = h$.

Άρα για κάθε επιμορφισμό p και για κάθε ομομορφισμό προτύπων $h : P \to N$, υπάρχει ομομορφισμός $g \circ j : P \to M$ τέτοιος ώστε $p \circ (g \circ j) = h$. Άρα το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists g\circ j"'] \arrow[d, "h"] & \\ M \arrow[r, two heads, "p"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

και άρα το πρότυπο P είναι προβολικό. □

Θεώρημα 1.1.34. *Ένα αριστερό R-πρότυπο P είναι προβολικό αν και μόνο αν το P είναι ευθύς αθροιστέος ενός ελεύθερου αριστερού R-προτύπου.*

Απόδειξη. Έστω ότι το αριστερό R-πρότυπο P είναι προβολικό. Ξέρουμε ότι κάθε πρότυπο είναι πηλίκο ενός ελεύθερου προτύπου. Άρα υπάρχουν ένα ελεύθερο πρότυπο F και ένας επιμορφισμός $f : F \twoheadrightarrow P$ που κάνουν την παρακάτω ακολουθία ακριβή:

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow F \xrightarrow{f} P \longrightarrow 0$$

Η ακολουθία αυτή είναι από κατασκευή ακριβής γιατί γνωρίζουμε ότι ο πυρήνας κάποιου επιμορφισμού είναι πάντα 1-1. Εφόσον το πρότυπο P είναι προβολικό, από την Πρόταση (1.1.33), κάθε σύντομη ακριβής ακολουθία διασπάται και άρα το P είναι ευθύς αθροιστέος του F (από τον Ορισμό (1.1.18)). Δηλαδή, $F \cong P \oplus \ker f$.

Αντίστροφα, έστω ότι το P είναι ευθύς αθροιστέος ενός ελεύθερου αριστερού R-προτύπου F. Άρα υπάρχουν απεικονίσεις $f : F \to P$ και $j : P \to F$ με $f \circ j = Id_P$. Θεωρούμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "\exists g"'] & P \arrow[dl, dashed, "gj"] \arrow[d, "h"] & \\ M \arrow[r, "p"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

όπου p ένας επιμορφισμός. Η σύνθεση $h \circ f$ είναι μία απεικόνιση $F \to N$. Εφόσον το F είναι ελεύθερο, είναι και προβολικό, και άρα υπάρχει μία απεικόνιση $g : F \to M$ με $p \circ g = h \circ f$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $p \circ (g \circ j) = h$. Ισχύει: $p \circ g = h \circ f \Rightarrow (p \circ g) \circ j = (h \circ f) \circ j \Rightarrow p \circ (g \circ j) = h \circ (f \circ j) \Rightarrow p \circ (g \circ j) = h \circ Id_P \Rightarrow p \circ (g \circ j) = h$.

Άρα για κάθε επιμορφισμό p και για κάθε ομομορφισμό προτύπων $h : P \to N$, υπάρχει ομομορφισμός $g \circ j : P \to M$ τέτοιος ώστε $p \circ (g \circ j) = h$. Άρα το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists g \circ j"'] \arrow[d, "h"] & \\ M \arrow[r, two heads, "p"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

και άρα το πρότυπο P είναι προβολικό. □

Παράδειγμα 1.1.35. Θεωρούμε το $F = \mathbb{Z}_6$ ως πρότυπο πάνω από τον δακτύλιο $R = \mathbb{Z}_6$, το οποίο είναι ελεύθερο. Επειδή

$$F \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3,$$

από το Θεώρημα (1.1.34) έπεται ότι τα $\mathbb{Z}_2$ και $\mathbb{Z}_3$ είναι προβολικά, αλλά όμως δεν είναι ελεύθερα ως $\mathbb{Z}_6$-πρότυπα, διότι αν ήταν ελεύθερα θα είχαν τουλάχιστον 6 στοιχεία.

Πρόταση 1.1.36. 1. *Κάθε ευθύς αθροιστέος ενός προβολικού προτύπου είναι προβολικό πρότυπο.*

2. *Κάθε ευθύ άθροισμα προβολικών προτύπων είναι προβολικό.*

Απόδειξη. 1. Έστω ${}_RK$ ένας ευθύς αθροιστέος ενός προβολικού προτύπου P. Τότε $P = K \oplus L$. Το P όμως είναι προβολικό, οπότε υπάρχει ένα ελεύθερο R-πρότυπο F, τέτοιο ώστε $F = P \oplus Q$. Άρα θα ισχύει ότι $F = P \oplus Q = (K \oplus L) \oplus Q = K \oplus (L \oplus Q) \Rightarrow F = K \oplus (L \oplus Q)$. Επομένως, το K είναι ευθύς αθροιστέος του ελεύθερου προτύπου F, άρα το K είναι προβολικό.

2. Έστω $(P_i)_{i \in I}$ μία οικογένεια προβολικών προτύπων. Για κάθε i, υπάρχει ένα ελεύθερο πρότυπο F_i τέτοιο ώστε $F_i = P_i \oplus Q_i$, για κάποιο $Q_i \subseteq F_i$. Όμως $\oplus_i F_i$ είναι ελεύθερο (με βάση την ένωση των βάσεων των F_i). Οπότε θα ισχύει:

$$\oplus_i F_i = \oplus_i (P_i \oplus Q_i) = (\oplus_i P_i) \oplus (\oplus_i Q_i).$$

Άρα το $\oplus_i P_i$ είναι προβολικό. □

Θα υπενθυμίσουμε στη συνέχεια τον ορισμό του ριζικού του Jacobson και κάποιες σχετικές προτάσεις με σκοπό να αναφερθούμε στο Λήμμα του Nakayama το οποίο θα μας φανεί χρήσιμο αργότερα.

Ορισμός 1.1.37. *Αν R είναι ένας δακτύλιος, τότε το* **ριζικό του Jacobson** ($J = \operatorname{rad} R$) *ορίζεται να είναι η τομή όλων των μεγιστοτικών αριστερών ιδεωδών του R.*

Αποδεικνύεται ότι το ριζικό του Jacobson είναι η τομή όλων των μεγιστοτικών δεξιών ιδεωδών. Τότε το $J = \operatorname{rad} R$ είναι ένα αμφίπλευρο ιδεώδες οπότε R/J είναι ένας δακτύλιος.

Ας περάσουμε στην επόμενη πρόταση η οποία χαρακτηρίζει τα στοιχεία του J.

Πρόταση 1.1.38. *Αν x είναι ένα στοιχείο ενός δακτυλίου R, τότε $x \in \operatorname{rad} R$ αν και μόνο αν, για κάθε $a \in R$, το στοιχείο $1 - ax$ έχει ένα αριστερό αντίστροφο, δηλαδή υπάρχει $u \in R$ τέτοιο ώστε $u(1 - ax) = 1$.*

Απόδειξη. Έστω $R(1 - ax)$ ένα γνήσιο αριστερό ιδεώδες, τότε από το Λήμμα του Zorn συμπεραίνουμε ότι υπάρχει κάποιο μεγιστοτικό αριστερό ιδεώδες M που το περιέχει. Δηλαδή, $R(1 - ax) \subseteq M$. Έστω $x \in J \Rightarrow ax \in J$, αφού J ιδεώδες και $a \in R$. Άρα $1 = (1 - ax) + ax \in J$. Όμως $J \subseteq M$ γιατί το ιδεώδες J είναι η τομή όλων των μεγιστοτικών ιδεωδών και M μεγιστοτικό. Άρα $1 \in M \Rightarrow M = R$. Άτοπο γιατί M μεγιστοτικό. Άρα το ιδεώδες $R(1 - ax)$ δεν είναι γνήσιο, οπότε $R(1 - ax) = R$. Οπότε υπάρχει $u \in R$ τέτοιο ώστε $u(1 - ax) = 1$.

Αντίστροφα, αν $x \notin J$, τότε υπάρχει κάποιο μεγιστοτικό ιδεώδες M, έτσι ώστε $x \notin M$. Άρα $M \subsetneq M + Rx$. Όμως το M είναι μεγιστοτικό, άρα $M + Rx = R$. Συνεπώς, υπάρχουν $m \in M$ και $a \in R$ τέτοια ώστε $m + ax = 1$. Αν $m = 1 - ax$ έχει ένα αριστερό αντίστροφο u, τότε $1 = um \in M$. Άτοπο, γιατί M μεγιστοτικό ιδεώδες. Άρα $x \in J$. □

Ακολουθεί το Λήμμα του Nakayama:

Λήμμα 1.1.39. *(**Λήμμα του Nakayama**) Έστω M ένα πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R-πρότυπο και $J = \operatorname{rad} R$ το ριζικό του Jacobson. Αν $M = JM$ τότε $M = \{0\}$.*

Απόδειξη. Έστω M ένα πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R-πρότυπο. Έστω $\{m_1, \dots m_n\}$ ένα ελαχιστοτικό σύνολο γεννητόρων του M, με την έννοια ότι δεν υπάρχει άλλο γνήσιο υποσύνολο του $\{m_1, \dots m_n\}$ που να γεννά το M. Ισχύει ότι $M = JM \Rightarrow m_1 = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot m_i$, όπου $r_i \in J$. Άρα,

$$(1 - r_1) \cdot m_1 = \sum_{i=2}^{n} r_i \cdot m_i.$$

Εφόσον $r_1 \in J$, από την Πρόταση (1.1.38), το $1 - r_1$ θα έχει αριστερό αντίστροφο, έστω $u \in R$. Τότε θα ισχύει ότι $u(1 - r_1) = 1$. Άρα $(1 - r_1) \cdot m_1 = \sum_{i=2}^{n} r_i \cdot m_i \Rightarrow u(1 - r_1) \cdot m_1 = \sum_{i=2}^{n} ur_i \cdot m_i \Rightarrow m_1 = \sum_{i=2}^{n} ur_i \cdot m_i \Rightarrow m_1 \in \{m_2, \dots, m_n\}$. Άρα το M παράγεται από το σύνολο $\{m_2, \dots, m_n\} \subsetneq \{m_1, \dots m_n\}$. Άτοπο, άρα $M = \{0\}$. □

Παρατήρηση 1.1.40. Στο Λήμμα του Nakayama είναι απαραίτητη η προϋπόθεση ότι το πρότυπο M είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Για παράδειγμα, έστω ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_{(2)} = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : b \text{ είναι περιττός}\}$. Ο δακτύλιος αυτός έχει ένα μοναδικό μεγιστοτικό ιδεώδες $P = \mathbb{Z}_{(2)}2$. Άρα το ριζικό του Jacobson θα είναι $\operatorname{rad}(\mathbb{Z}_{(2)}) = P$. Αλλά το $\mathbb{Q}$ είναι ένα $\mathbb{Z}_{(2)}$-πρότυπο με $P\mathbb{Q} = 2\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$. Όμως το $\mathbb{Q}$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο ως $\mathbb{Z}_{(2)}$-πρότυπο.

Μία εναλλακτική μορφή του Λήμματος του Nakayama είναι η εξής:

Λήμμα 1.1.41. *Έστω N_0, N δύο R-πρότυπα με $N_0 \subseteq N$. Έστω N/N_0 ένα πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R-πρότυπο. Αν $N = N_0 + JN$ τότε $N = N_0$.*

Απόδειξη. Έστω N/N_0 ένα πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R-πρότυπο. Ισχύει ότι $N/N_0 = N_0 + JN/N_0 = J(N/N_0)$. Αν εφαρμόσουμε το Λήμμα του Nakayama στο N/N_0, ισχύει ότι $N/N_0 = J(N/N_0) \Rightarrow N/N_0 = \{0\} \Rightarrow N = N_0$. □

Λήμμα 1.1.42. *Έστω R ένας δακτύλιος, J ένα ιδεώδες του R και M ένα R-πρότυπο. Τότε $R/J \otimes_R M \cong M/JM$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την εξής ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow J \xrightarrow{i} R \longrightarrow R/J \longrightarrow 0$$

Αν εφαρμόσουμε τον δεξιά ακριβή συναρτητή $\Box \otimes_R M$ στην παραπάνω ακριβή ακολουθία, θα πάρουμε την εξής ακριβή ακολουθία:

$$J \otimes M \xrightarrow{i \otimes M} R \otimes M \longrightarrow R/J \otimes M \longrightarrow 0\ .$$

Τώρα, ισχύει ότι $\mathsf{Im}(i \otimes M) = JM$ και $R \otimes M \cong M$. Οπότε προκύπτει η εξής ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow JM \longrightarrow M \longrightarrow R/J \otimes M \longrightarrow 0$$

Άρα, ισχύει ότι $R/J \otimes_R M \cong M/JM$. $\Box$

Αν εφαρμόσουμε τώρα το Λήμμα του Nakayama σε πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά αριστερά R-πρότυπα, θα καταλήξουμε στο ακόλουθο πόρισμα:

Πόρισμα 1.1.43. *Έστω $J = \mathsf{rad}\, R$ το ριζικό του Jacobson.*

1. *Έστω Q ένα πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο, P ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό R-πρότυπο και $\gamma \in \mathsf{Hom}_R(Q, P)$. Αν $\overline{\gamma} : Q/JQ \to P/JP$ είναι ένας ισομορφισμός, τότε και ο γ θα είναι ισομορφισμός.*

2. *Αν Q, P είναι πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά αριστερά R-πρότυπα, και $Q/JQ \cong P/JP$ ως R/J-πρότυπα, τότε $Q \cong P$ ως R-πρότυπα.*

Απόδειξη. 1. Έστω η ακριβής ακολουθία

$$Q \xrightarrow{\gamma} P \longrightarrow \mathsf{Coker}(\gamma) \longrightarrow 0$$

Αν εφαρμόσουμε τον δεξιά ακριβή συναρτητή $R/J \otimes_R \Box$ στην παραπάνω ακριβή ακολουθία, θα πάρουμε την εξής ακριβή ακολουθία:

$$R/J \otimes_R Q \longrightarrow R/J \otimes_R P \longrightarrow R/J \otimes_R \mathsf{Coker}(\gamma) \longrightarrow 0$$

Σύμφωνα με το Λήμμα (1.1.42) ισχύει η σχέση

$$R/J \otimes_R M \cong M/JM \tag{1.1}$$

οπότε έχουμε την εξής ακριβή ακολουθία:

$$Q/JQ \xrightarrow{\overline{\gamma}} P/JP \longrightarrow \mathsf{Coker}(\gamma)/JCoker(\gamma) \longrightarrow 0$$

Άρα $\mathsf{Coker}(\gamma)/J\,\mathsf{Coker}(\gamma) \cong P/JP\big/\mathsf{Im}(\overline{\gamma})$ Όμως $\overline{\gamma} : Q/JQ \to P/JP$ είναι ένας ισομορφισμός, οπότε $\mathsf{Im}(\overline{\gamma}) = P/JP$. Άρα $\mathsf{Coker}(\gamma)/J\,\mathsf{Coker}(\gamma) \cong P/JP\big/P/JP = 0 \Rightarrow \mathsf{Coker}(\gamma) = J\,\mathsf{Coker}(\gamma)$. Όμως το $\mathsf{Coker}(\gamma)$ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο ως πηλίκο του πεπερασμένα παραγόμενου προβολικού προτύπου P. Άρα από το Λήμμα του Nakayama θα ισχύει ότι $\mathsf{Coker}(\gamma) = 0$. Οπότε $\mathsf{Coker}(\gamma) = 0 \Rightarrow P/\,\mathsf{Im}(\gamma) = 0 \Rightarrow P = \mathsf{Im}(\gamma) \Rightarrow \gamma$ είναι ένας επιμορφισμός.

Εφόσον, $\gamma : Q \to P$ είναι ένας επιμορφισμός και το P είναι προβολικό, θα ισχύει ότι $Q \cong \mathsf{Ker}(\gamma) \oplus P$. Τότε υπάρχει μονομορφισμός $\gamma' : P \rightarrowtail Q$, τέτοιος ώστε $\mathsf{Im}(\gamma') = P' \subseteq Q$, συνεπάγεται $P \cong P'$. Άρα, $Q = \mathsf{Ker}(\gamma) \oplus P'$. Εφαρμόζοντας τώρα τον δεξιά ακριβή συναρτητή $R/J \otimes_R \Box$ και λαμβάνοντας υπόψιν την σχέση (1.1), θα έχουμε

$$Q/JQ = (\mathsf{Ker}(\gamma)/J\,\mathsf{Ker}(\gamma)) \oplus (P'/JP').$$

Επειδή $\overline{\gamma}$: ισομορφισμός συνεπάγεται ότι $\mathsf{Ker}(\gamma)/J\,\mathsf{Ker}(\gamma) = 0 \Rightarrow \mathsf{Ker}(\gamma) = J\,\mathsf{Ker}(\gamma)$. Το $\mathsf{Ker}(\gamma)$ ως ευθύς αθροιστέος του Q, είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα Nakayama στο $\mathsf{Ker}(\gamma)$, άρα $\mathsf{Ker}(\gamma) = 0$, οπότε η γ θα είναι $1-1$. Άρα $\gamma : Q \to P$ είναι ισομορφισμός.

2. Υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποιος R/J-ισομορφισμός $g : Q/JQ \to P/JP$, όπου Q, P πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά αριστερά R-πρότυπα. Αφού το Q είναι R-προβολικό, θα υπάρχει $\gamma \in \mathsf{Hom}_R(Q, P)$ που κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, two heads] \arrow[d, dashed, "\exists\gamma"'] & Q/JQ \arrow[d, "g"] \\ P \arrow[r, two heads] & P/JP \end{tikzcd}$$

Άρα $\overline{\gamma} = g$. Οπότε σύμφωνα με το πρώτο μέρος της απόδειξης ο γ θα είναι ισομορφισμός. □

Πόρισμα 1.1.44. *Έστω P ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό R-πρότυπο και $z_1, \dots, z_r \in P$. Τότε τα $\{z_i\}$ αποτελούν μια R-βάση για το P αν και μόνο αν οι εικόνες τους $\{\overline{z_i} = z_i + JP\}$ αποτελούν μία R/J-βάση για το P/JP.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [13, Corollary 1.7]. □

Ορισμός 1.1.45. *Ένας δακτύλιος R ονομάζεται* **τοπικός** *δακτύλιος, αν R/J είναι ένας δακτύλιος διαίρεσης όπου $J = \mathsf{rad}\, R$ το ριζικό του Jacobson, δηλαδή αν ο R έχει ένα μοναδικό μεγιστοτικό αριστερό (ή δεξιό) ιδεώδες.*

Σε αυτή την περίπτωση, κάθε R/J-πρότυπο είναι ελεύθερο ως διανυσματικός χώρος πάνω από τον δακτύλιο διαίρεσης R/J, οπότε:

Πόρισμα 1.1.46. *Έστω R ένας τοπικός δακτύλιος και $J = \mathsf{rad}\, R$ το ριζικό του Jacobson. Τότε κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό R-πρότυπο P είναι ελεύθερο. Ένα σύνολο στοιχείων $z_1, \dots, z_r \in P$ αποτελούν μια ελεύθερη R-βάση για το P αν και μόνο αν οι εικόνες τους $\overline{z_1} = z_1 + JP, \dots, \overline{z_r} = z_r + JP$ αποτελούν μία βάση διανυσματικού χώρου για το $\overline{P} = P/JP$ πάνω από τον $\overline{R} = R/J$.*

Αξίζει να αναφέρουμε, αν και δεν θα μας φανεί χρήσιμο στην συνέχεια, ότι το 1958 ο Kaplansky απέδειξε ότι κάθε προβολικό πρότυπο πάνω από ένα τοπικό δακτύλιο είναι ελεύθερο.

1.2 Δακτύλιοι της Noether και το Θεώρημα βάσης του Hilbert

Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε τους δακτυλίους της Noether, θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε το Θεώρημα Βάσης του Hilbert και θα δούμε ότι ο δακτύλιος $K[x_1, \dots, x_n]$, όπου K σώμα, είναι δακτύλιος της Noether.

1.2.1 Δακτύλιοι της Noether

Τα πεπερασμένα παραγόμενα πρότυπα είναι τα πιο σημαντικά πρότυπα, και είναι στενά συνδεδεμένα με μία συνθήκη αλυσίδας.

Ορισμός 1.2.1. 1. *Ένα αριστερό R-πρότυπο M πάνω από κάποιον δακτύλιο R ικανοποιεί την αύξουσα συνθήκη αλυσίδας* **(ascending chain condition) (ACC)** *αν κάθε αύξουσα αλυσίδα υποπροτύπων του M*

$$S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3 \subseteq \cdots$$

είναι τελικά σταθερή. Δηλαδή, αν υπάρχει ένας ακέραιος n τέτοιος ώστε $S_n = S_{n+1} = S_{n+2} = \cdots$.

2. *Ένα αριστερό R-πρότυπο M πάνω από κάποιον δακτύλιο R ικανοποιεί την συνθήκη μεγίστου* **(maximum condition)** *αν κάθε μη κενή οικογένεια F υποπροτύπων του M έχει ένα μέγιστο στοιχείο, δηλαδή, υπάρχει κάποιο $S_0 \in F$ για το οποίο δεν υπάρχει κάποιο $S \in F$ με $S_0 \subsetneq S$.*

Πρόταση 1.2.2. *Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες για κάθε αριστερό R-πρότυπο M.*

1. *Το M ικανοποιεί την ACC στα υποπρότυπα.*

2. *Το M ικανοποιεί την συνθήκη μεγίστου (maximum condition).*

3. *Κάθε υποπρότυπο του M είναι πεπερασμένα παραγόμενο.*

Απόδειξη. $(1) \Rightarrow (2)$ Έστω ότι το αριστερό R-πρότυπο M ικανοποιεί την ACC στα υποπρότυπα, δηλαδή κάθε αύξουσα αλυσίδα υποπροτύπων του M είναι τελικά σταθερή. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι το M ικανοποιεί την συνθήκη μεγίστου. Έστω F μία μη κενή οικογένεια υποπροτύπων του M. Υποθέτουμε ότι η οικογένεια F δεν έχει κανένα μεγιστοτικό στοιχείο. Επιλέγουμε κάποιο υποπρότυπο S_1 που ανήκει στην οικογένεια F, $S_1 \in F$. Εφόσον η F δεν έχει κανένα μεγιστοτικό στοιχείο, το S_1 δεν θα είναι μεγιστοτικό. Άρα, θα υπάρχει κάποιο $S_2 \in F$ τέτοιο ώστε $S_1 \subsetneq S_2$. Τώρα το S_2 δεν είναι μεγιστοτικό στοιχείο της οικογένειας F, οπότε υπάρχει κάποιο στοιχείο $S_3 \in F$, τέτοιο ώστε $S_2 \subsetneq S_3$. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε μία αύξουσα αλυσίδα υποπροτύπων του M η οποία δεν είναι τελικά σταθερή. Άτοπο, γιατί το αριστερό R-πρότυπο M ικανοποιεί την ACC στα υποπρότυπα. Άρα, η οικογένεια F έχει τουλάχιστον ένα μεγιστοτικό στοιχείο, οπότε το M ικανοποιεί την συνθήκη μεγίστου.

$(2) \Rightarrow (3)$ Έστω ότι το αριστερό R-πρότυπο M ικανοποιεί την συνθήκη μεγίστου. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι κάθε υποπρότυπο του M είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Έστω S ένα τυχαίο υποπρότυπο του M και F η οικογένεια όλων των πεπερασμένα παραγόμενων υποπροτύπων του M που περιέχονται στο S. Η οικογένεια F είναι μη κενή, γιατί το $\{0\} \in F$. Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι κάθε μη κενή οικογένεια F υποπροτύπων του M έχει ένα μεγιστοτικό στοιχείο. Άρα, υπάρχει ένα μεγιστοτικό στοιχείο $S^* \in F$. Τώρα, επειδή $S^* \in F$ θα ισχύει ότι $S^* \subseteq S$. Αν το S^* είναι γνήσιο υποπρότυπο του S, τότε θα υπάρχει κάποιο $s \in S$, τέτοιο ώστε $s \notin S^*$. Θεωρούμε το υποπρότυπο $S^{**} = \langle S^*, s\rangle \subseteq S$. Το υποπρότυπο S^{**} είναι πεπερασμένα παραγόμενο, άρα $S^{**} \in F$. Αλλά, $S^* \subsetneq S^{**}$, άτοπο γιατί το S^* είναι μεγιστοτικό στοιχείο της οικογένειας F. Άρα, $S^* = S$, οπότε το S είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Επιλέξαμε το S να είναι ένα τυχαίο υποπρότυπο του M, οπότε κάθε υποπρότυπο του M είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

$(3) \Rightarrow (1)$ Έστω ότι κάθε υποπρότυπο του M είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι το M ικανοποιεί την ACC στα υποπρότυπα. Θεωρούμε μία αύξουσα αλυσίδα υποπροτύπων του M:

$$S_1 \subseteq S_2 \subseteq \ldots.$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η ένωση $S^* = \bigcup_{n\geq 1} S_n$ είναι ένα υποπρότυπο του M. Αφού κάθε υποπρότυπο του M είναι πεπερασμένα παραγόμενο, έτσι και το S^* θα είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο υποπρότυπο του M. Έστω $S^* = \langle s_1, \ldots, s_q\rangle$. Για κάθε $s_i \in S^*$, θα υπάρχει κάποιο n_i έτσι ώστε το $s_i \in S_{n_i}$. Αν το N είναι το μεγαλύτερο από όλα τα $n_i, i = 1, \ldots, q$, τότε για κάθε $i, i = 1, \ldots, q$ θα ισχύει ότι $S_{n_i} \subseteq S_N$. Οπότε, για κάθε $i, i = 1, \ldots, q$ θα ισχύει ότι $s_i \in S_N$ και $S^* = \langle s_1, \ldots, s_q\rangle \subseteq S_N$. Αν $n \geq N$, τότε $S^* \subseteq S_N \subseteq S_n \subseteq S^*$. Οπότε, $S_n = S^*$, άρα η αύξουσα αλυσίδα υποπροτύπων του M:

$$S_1 \subseteq S_2 \subseteq \ldots$$

είναι τελικά σταθερή και έτσι το M ικανοποιεί την ACC στα υποπρότυπα. □

Ένα αριστερό R-πρότυπο M καλείται **πρότυπο της Noether** αν ικανοποιεί μία από τις παραπάνω ισοδύναμες προτάσεις .

Ας δούμε τώρα πότε ένας δακτύλιος καλείται δακτύλιος της Noether.

Ορισμός 1.2.3. *Ένας δακτύλιος R καλείται* **αριστερός δακτύλιος της Noether** *αν το ${}_RR$ είναι ένα πρότυπο της Noether ως αριστερό R-πρότυπο.*

Ένας δακτύλιος R καλείται δεξιός δακτύλιος της Noether αν κάθε δεξιό ιδεώδες είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Προφανώς, κάθε μεταθετικός αριστερός δακτύλιος της Noether είναι και δεξιός δακτύλιος της Noether και τον ονομάζουμε απλά δακτύλιο της Noether.

Παράδειγμα 1.2.4.

1. Κάθε περιοχή κύριων ιδεωδών είναι δακτύλιος της Noether.

2. Θα αποδείξουμε αργότερα το Θεώρημα Βάσης του Hilbert, το οποίο μας λέει ότι αν R είναι ένας αριστερός δακτύλιος της Noether, τότε θα είναι και ο $R[x]$ (όπου θεωρούμε ότι η μεταβλητή x μετατίθεται με τους συντελεστές στον R).

3. Αν το K είναι ένα σώμα, τότε κάθε K-άλγεβρα R πεπερασμένης διάστασης είναι και αριστερός και δεξιός δακτύλιος της Noether, για κάθε αριστερό ή δεξιό ιδεώδες είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το K, και έτσι κάθε αυστηρά αύξουσα ακολουθία αριστερών ή δεξιών ιδεωδών έχει μήκος $\leq \dim_K(R)$.

Πρόταση 1.2.5. *Έστω μία ακριβής ακολουθία από R-πρότυπα*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0 ,$$

τότε το M είναι πρότυπο της Noether αν και μόνο αν τα N, K είναι πρότυπα της Noether.

Απόδειξη. Έστω ότι το M είναι πρότυπο της Noether. Θεωρούμε μία αύξουσα ακολουθία υποπροτύπων του N:

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \dots$$

Τότε θα έχουμε μία αύξουσα ακολουθία υποπροτύπων του M:

$$f(N_1) \subseteq f(N_2) \subseteq f(N_3) \subseteq \dots$$

Όμως το M είναι πρότυπο της Noether, οπότε κάθε αύξουσα ακολουθία υποπροτύπων του M είναι τελικά σταθερή. Δηλαδή, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$f(N_n) = f(N_{n+1}) = f(N_{n+2}) = \dots$$

Έστω $x \in N_{n+1}$ τότε $f(x) \in f(N_{n+1}) = f(N_n)$, άρα $f(x) \in f(N_n)$, επομένως υπάρχει $y \in f(N_n)$, τέτοιο ώστε $f(y) = f(x)$. Όμως η ακολουθία μας είναι ακριβής οπότε η f είναι "$1-1$" και άρα $x = y$, οπότε $x \in N_n$. Άρα $x \in N_{n+1} \Rightarrow x \in N_n$. Οπότε $N_{n+1} \subseteq N_n$. Όμως $N_n \subseteq N_{n+1}$, άρα τελικά $N_n = N_{n+1}$. Άρα η αύξουσα ακολουθία υποπροτύπων του N:

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \dots$$

είναι τελικά σταθερή, οπότε το N είναι πρότυπο της Noether.

Έστω τώρα μία αύξουσα ακολουθία υποπροτύπων του K:

$$K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq \dots$$

Τότε θα έχουμε μία αύξουσα ακολουθία υποπροτύπων του M:

$$g^{-1}(K_1) \subseteq g^{-1}(K_2) \subseteq g^{-1}(K_3) \subseteq \dots$$

Όμως το M είναι πρότυπο της Noether, οπότε κάθε αύξουσα ακολουθία υποπροτύπων του M είναι τελικά σταθερή. Δηλαδή, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$g^{-1}(K_n) = g^{-1}(K_{n+1}) = g^{-1}(K_{n+2}) = \dots .$$

Έστω $x \in K_{n+1}$ τότε επειδή η g είναι επί $\exists y \in M$ τέτοιο ώστε $g(y) = x \in K_{n+1}$. Άρα $y \in g^{-1}(K_{n+1}) = g^{-1}(K_n)$. Επομένως, $g(y) \in K_n \Rightarrow x \in K_n$. Άρα $K_{n+1} = K_n$, οπότε η αύξουσα ακολουθία υποπροτύπων του K:

$$K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq \dots$$

είναι τελικά σταθερή, οπότε το K είναι πρότυπο της Noether.

Αντίστροφα, έστω

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0 ,$$

μία ακριβής ακολουθία από R-πρότυπα. Έστω ότι τα N, K είναι πρότυπα της Noether. Θα αποδείξουμε ότι και το M είναι πρότυπο της Noether. Έχουμε την εξής αύξουσα ακολουθία υποπροτύπων του M

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$$

Τότε

$$g(M_1) \subseteq g(M_2) \subseteq \dots$$

είναι μία αύξουσα ακολουθία υποπροτύπων του K. Όμως το K είναι πρότυπο της Noether, οπότε κάθε αύξουσα ακολουθία υποπροτύπων του K είναι τελικά σταθερή. Άρα, υπάρχει $n'' \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $g(M_{n''}) = g(M_{n''+1})$.

Επίσης θα έχουμε την εξής αύξουσα ακολουθία υποπροτύπων του N

$$f^{-1}(M_1) \subseteq f^{-1}(M_2) \subseteq \dots$$

Όμως το N είναι πρότυπο της Noether, οπότε κάθε αύξουσα ακολουθία υποπροτύπων του N είναι τελικά σταθερή. Άρα, υπάρχει $n' \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $f^{-1}(M_{n'}) = f^{-1}(M_{n'+1})$. Επιλέγω $n = max(n', n'')$. Τότε για το n γνωρίζω ότι $f^{-1}(M_n) = f^{-1}(M_{n+1})$ και $g(M_n) = g(M_{n+1})$. Θα αποδείξουμε ότι $M_n = M_{n+1}$. Ήδη γνωρίζουμε ότι $M_n \subseteq M_{n+1}$, άρα αρκεί να δείξουμε ότι $M_{n+1} \subseteq M_n$. Έστω $m \in M_{n+1}$. Τότε $g(m) \in g(M_{n+1}) = g(M_n)$. Άρα υπάρχει $x \in M_n \subseteq M_{n+1}$, τέτοιο ώστε $g(x) = g(m) \Rightarrow g(m - x) = 0 \Rightarrow m - x \in Ker(g) = Im(f)$. Άρα, υπάρχει $y \in N$ τέτοιο ώστε $f(y) = m - x \in M_{n+1}$. Άρα, $y \in f^{-1}(M_{n+1}) = f^{-1}(M_n) \Rightarrow f(y) \in M_n \Rightarrow m - x \in M_n \Rightarrow m \in M_n$. Οπότε, $M_{n+1} \subseteq M_n$, συνεπώς $M_n = M_{n+1}$. Άρα η ακολουθία

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$$

είναι τελικά σταθερή, οπότε το M είναι πρότυπο της Noether. □

Πόρισμα 1.2.6. *Κάθε δακτύλιος πηλίκο ενός αριστερού δακτυλίου της Noether R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether.*

Απόδειξη. Έστω I ένα αμφίπλευρο ιδεώδες του R, οπότε R/I είναι ένας δακτύλιος. Αν J είναι ένα αριστερό ιδεώδες του R/I, τότε $J' = \nu^{-1}(J)$ είναι ένα αριστερό ιδεώδες του R, όπου $\nu : R \to R/I$ είναι φυσική απεικόνιση. Αφού ο R είναι ένας αριστερός δακτύλιος της Noether, το J' θα είναι πεπερασμένα παραγόμενο, δηλαδή $J' = (r_1, \dots, r_n)$. Άρα το $J = \nu(J')$ παράγεται από τα $\nu(r_1), \dots, \nu(r_n)$. Άρα, κάθε αριστερό ιδεώδες του R/I είναι πεπερασμένα παραγόμενο, και άρα R/I δακτύλιος της Noether. □

Πρόταση 1.2.7.

1. *Αν R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, τότε κάθε υποπρότυπο ενός πεπερασμένα παραγόμενου αριστερού R-προτύπου M είναι πεπερασμένα παραγόμενο.*

2. *Αν R είναι περιοχή κύριων ιδεωδών και ένα R-πρότυπο M παράγεται από n στοιχεία, τότε κάθε υποπρότυπο του M μπορεί να παραχθεί από n ή λιγότερα στοιχεία.*

Απόδειξη. Βλέπε [28, Proposition 3.18]. □

Παρατήρηση 1.2.8. Το δεύτερο μέρος της παραπάνω πρότασης δεν αληθεύει πιο γενικά. Για παράδειγμα, ο δακτύλιος $R = \mathbb{Q}[x, y]$ δεν είναι περιοχή κύριων ιδεωδών, οπότε υπάρχει κάποιο ιδεώδες I το οποίο δεν είναι κύριο, για παράδειγμα το ιδεώδες $I = \langle x, y\rangle$. Έτσι, ο R έχει ένα γεννήτορα ενώ το υποπρότυπό του I δεν μπορεί να παραχθεί από ένα στοιχείο.

Συνεχίζουμε με τον ορισμό των πεπερασμένα παραστάσιμων προτύπων.

Ορισμός 1.2.9. *Ένα αριστερό R-πρότυπο M καλείται* **πεπερασμένα παραστάσιμο** *αν υπάρχει μία ακριβής ακολουθία*

$$R^m \longrightarrow R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0\ ,$$

για κατάλληλους φυσικούς αριθμούς m, n.

Πόρισμα 1.2.10. *Αν R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, τότε κάθε πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R-πρότυπο είναι πεπερασμένα παραστάσιμο.*

Απόδειξη. Έστω M ένα πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο. Τότε, θα υπάρχουν ένα πεπερασμένα παραγόμενο ελεύθερο αριστερό R-πρότυπο F και ένας επιμορφισμός $\varphi : F \to M$. Εφόσον ο δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, σύμφωνα με την Πρόταση (1.2.7) κάθε υποπρότυπο του F θα είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Οπότε το υποπρότυπο $\mathsf{Ker}\,\varphi$ του F είναι πεπερασμένα παραγόμενο, άρα το M είναι πεπερασμένα παραστάσιμο. □

1.2.2 Το Θεώρημα Βάσης του Hilbert

Το 1890, ο Hilbert απέδειξε το περίφημο Θεώρημα Βάσης του Hilbert, δείχνοντας ότι κάθε ιδεώδες στον δακτύλιο $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Όπως θα δούμε, η απόδειξη δεν είναι κατασκευαστική με την έννοια ότι δεν δίνει ένα σαφές σύνολο γεννητόρων ενός ιδεώδους (στις μέρες μας αυτό μπορεί να επιτευχθεί με τη χρήση των βάσεων Gröbner). Αναφέρεται ότι όταν ο P.Gordan, ένας σημαντικός αλγεβριστής της εποχής, είδε την απόδειξη του Hilbert, είπε: *Αυτά δεν είναι Μαθηματικά, είναι Θεολογία!*. Από την άλλη, όταν ο P.Gordan το 1899, δημοσίευσε μία απλοποιημένη απόδειξη του Θεωρήματος Hilbert, είπε ότι: *Έχω πειστεί ότι και η Θεολογία έχει τα προτερήματά της.*

Λήμμα 1.2.11. *Ένας δακτύλιος R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether αν και μόνο αν, για κάθε ακολουθία στοιχείων $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ του R, υπάρχει $m \geq 1$ και $r_1, \ldots, r_m \in R$ με $a_{m+1} = r_1 a_1 + \ldots + r_m a_m$.*

Απόδειξη. Έστω R ένας αριστερός δακτύλιος της Noether και $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ μία ακολουθία στοιχείων του R. Έστω I_n το αριστερό ιδεώδες που παράγεται από τα στοιχεία $a_1, \ldots, a_n$, τότε θα υπάρχει μία αύξουσα αλυσίδα αριστερών ιδεωδών $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$ η οποία θα είναι τελικά σταθερή, εφόσον R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether. Άρα θα υπάρχει κάποιο $m \geq 2$ τέτοιο ώστε $I_m = I_{m+1}$. Επιπλέον, έστω $a_{m+1} \in I_{m+1} = I_m$, οπότε θα υπάρχουν $r_1, \ldots, r_m \in R$ με $a_{m+1} = r_1 a_1 + \ldots + r_m a_m$.

Αντίστροφα, έστω ότι για κάθε ακολουθία στοιχείων $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ του R, υπάρχει $m \geq 1$ και $r_1, \ldots, r_m \in R$ με $a_{m+1} = r_1 a_1 + \ldots + r_m a_m$. Αν ο R δεν είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, τότε θα υπάρχει μία αύξουσα αλυσίδα αριστερών ιδεωδών $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$ η οποία δεν είναι τελικά σταθερή. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $I_n \subsetneq I_{n+1}$, για κάθε n. Τώρα για κάθε n, επιλέγουμε $a_{n+1} \in I_{n+1}$ και $a_{n+1} \notin I_n$. Από την υπόθεση, υπάρχουν m και $r_i \in R$ για $i \leq m$ με $a_{m+1} = \sum_{i \leq m} r_i a_i \in I_m$. Άτοπο, άρα ο R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether. □

Παρατήρηση 1.2.12. Αν ο R είναι ένας δακτύλιος, όχι απαραίτητα μεταθετικός, τότε $R[x]$ συμβολίζει τον πολυωνυμικό δακτύλιο στον οποίο η μεταβλητή x μετατίθεται με κάθε στοιχείο του R.

Είμαστε έτοιμοι να διατυπώσουμε το Θεώρημα Βάσης του Hilbert. Η απόδειξη που ακολουθεί οφείλεται στον Sarges, βλέπε [29, Σελίδες 436-437].

Θεώρημα 1.2.13. *(Hilbert Basis Theorem) Αν ο R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, τότε και ο $R[x]$ θα είναι αριστερός δακτύλιος της Noether.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο πολυωνυμικός δακτύλιος $R[x]$ δεν είναι δακτύλιος της Noether. Έστω I ένα αριστερό ιδεώδες του $R[x]$, το οποίο δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Φυσικά, $I \neq \langle 0 \rangle$, εφόσον το μηδενικό ιδεώδες είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Ορίζουμε $f_0(x)$ να είναι ένα πολυώνυμο που ανήκει στο ιδεώδες I ελαχίστου βαθμού. Επαγωγικά, ορίζουμε ένα πολυώνυμο ελαχίστου βαθμού $f_{n+1}(x) \in I \backslash \langle f_0(x), \ldots, f_n(x) \rangle$. Ας σημειώσουμε ότι το πολυώνυμο $f_n(x)$ υπάρχει για κάθε $n \geq 0$, γιατί αν $I \backslash \langle f_0(x), \ldots, f_n(x) \rangle = \emptyset$, τότε το ιδεώδες I θα ήταν πεπερασμένα παραγόμενο. Έστω $d_n = \deg(f_n(x))$ για $\forall n$. Τότε θα ισχύει $d_n \leq d_{n+1}$ για $\forall n$ (γιατί αν ίσχυε $d_n > d_{n+1}$ αυτό θα ερχόταν σε αντίθεση με την επιλογή του $f_n(x)$).

Για κάθε n ας συμβολίσουμε με a_n τον ηγετικό συντελεστή του πολυωνύμου $f_n(x)$. Εφόσον ο R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, τότε η αύξουσα ακολουθία ιδεωδών του R:

$$\langle a_0 \rangle \subsetneqq \langle a_0, a_1 \rangle \subsetneqq \ldots \subsetneqq \langle a_0, \ldots, a_n \rangle \subsetneqq \ldots$$

σταματάει, οπότε για κάποιο m θα ισχύει ότι $\langle a_0, \ldots, a_m \rangle = \langle a_0, \ldots, a_{m+1} \rangle$. Οπότε, υπάρχουν $r_i \in R$, τέτοια ώστε $a_{m+1} = \sum_{i=0}^{m} r_i \cdot a_i$. Ορίζουμε το πολυώνυμο:

$$g(x) = f_{m+1}(x) - \sum_{i=0}^{m} r_i f_i(x) x^{d_{m+1} - d_i}$$

όπου $d_i = \deg(f_i)$. Τότε θα ισχύει $g(x) \in I \backslash \langle f_0(x), \ldots, f_m(x) \rangle$, διότι $f_{m+1}(x) \in I \backslash \langle f_0(x), \ldots, f_m(x) \rangle$. Αρκεί τώρα να αποδείξουμε ότι $\deg(g(x)) < \deg(f_{m+1})$. Θα συμβολίσουμε με **ομβ** τους όρους μικρότερου βαθμού. Έστω $f_i(x) = a_i x^{d_i} + \text{ ομβ }$, τότε:

$$\begin{aligned}
g(x) &= f_{m+1}(x) - \sum_{i=0}^{m} r_i f_i(x) x^{d_{m+1} - d_i} \\
&= (a_{m+1} x^{d_{m+1}} + \text{ ομβ }) - \sum_{i=0}^{m} r_i (a_i x^{d_i} + \text{ ομβ }) x^{d_{m+1} - d_i} \\
&= a_{m+1} x^{d_{m+1}} + \text{ ομβ } - \sum_{i=0}^{m} (r_i a_i x^{d_i} x^{d_{m+1} - d_i} + r_i(\text{ ομβ }) x^{d_{m+1} - d_i}) \\
&= a_{m+1} x^{d_{m+1}} + \text{ ομβ } - \sum_{i=0}^{m} (r_i a_i x^{d_{m+1}} + r_i(\text{ ομβ }) x^{d_{m+1} - d_i}) \\
&= a_{m+1} x^{d_{m+1}} + \text{ ομβ } - \sum_{i=0}^{m} r_i a_i x^{d_{m+1}} - \sum_{i=0}^{m} r_i(\text{ ομβ }) x^{d_{m+1} - d_i}
\end{aligned}$$

$$\text{Όμως ισχύει ότι: } a_{m+1} = \sum_{i=0}^{m} r_i \cdot a_i. \text{ Άρα } \sum_{i=0}^{m} r_i a_i x^{d_{m+1}} = a_{m+1} x^{d_{m+1}}.$$

$$\text{Οπότε } g(x) = \text{ ομβ } - \sum_{i=0}^{m} r_i(\text{ ομβ }) x^{d_{m+1} - d_i}.$$

Άρα $\deg(g(x)) < \deg(f_{m+1})$, το οποίο είναι άτοπο γιατί το πολυώνυμο $f_{m+1}(x)$ έχει τον ελάχιστο βαθμό ανάμεσα στα πολυώνυμα που ανήκουν στο $I \backslash \langle f_0(x), \ldots, f_m(x) \rangle$. Άρα τελικά κάθε αριστερό ιδεώδες I του δακτύλιου πολυωνύμων $R[x]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο, οπότε ο $R[x]$ θα είναι αριστερός δακτύλιος της Noether. □

Πόρισμα 1.2.14. *1. Αν K είναι ένα σώμα, τότε ο $K[x_1, \ldots, x_n]$ είναι δακτύλιος της Noether.*

2. *Ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ είναι δακτύλιος της Noether.*

Απόδειξη. Επειδή οι δακτύλιοι $K, \mathbb{Z}$ είναι δακτύλιοι της Noether η απόδειξη προκύπτει άμεσα με επαγωγή στο $n \geq 1$. □

Ας περάσουμε σε έναν ορισμό.

Ορισμός 1.2.15. *Ένας δακτύλιος R έχει αναλλοίωτο αριθμό βάσης* **(invariant basis number) (IBN)** *αν $R^m \cong R^n$ ως αριστερά R-πρότυπα συνεπάγεται ότι $m = n$. Αν ο R έχει* **IBN**, *τότε το πλήθος των στοιχείων μιας βάσης ενός ελεύθερου αριστερού R-προτύπου F καλείται βαθμίδα του F και συμβολίζεται με* $\mathrm{rank}(F)$.

Αν ένας δακτύλιος R έχει **IBN**, τότε αν $R^m \cong R^n$ ως δεξιά R-πρότυπα συνεπάγεται ότι $m = n$. Αν ο R έχει **IBN** και F είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο ελεύθερο αριστερό R-πρότυπο, τότε κάθε ζευγάρι βάσεων του F έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων, αν $x_1, \dots, x_n$ είναι μία βάση του F, τότε $F \cong R^n$. Άρα, η $\mathrm{rank}(F)$ είναι καλά ορισμένη για δακτυλίους με **IBN**.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι κάθε αριστερός δακτύλιος της Noether έχει **IBN**. Θα μας χρειαστεί το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 1.2.16. *Έστω R ένας δακτύλιος και έστω M ένα αριστερό R-πρότυπο της Noether. Αν $\varphi : M \to M$ είναι ένας επιμορφισμός, τότε φ είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση $\varphi : M \to M$ είναι 1-1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$. Θεωρούμε τους ομομορφισμούς

$$\varphi : M \to M$$

$$\varphi^2 = \varphi \circ \varphi : M \to M$$

$$\varphi^3 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi : M \to M$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Τα υποσύνολα του M : $\mathrm{Ker}\,\varphi$, $\mathrm{Ker}\,\varphi^2$, $\mathrm{Ker}\,\varphi^3, \dots$ είναι υποπρότυπα του M. Έστω $x \in \mathrm{Ker}\,\varphi^n$, τότε $\varphi^n(x) = 0 \Rightarrow \varphi(\varphi^n(x)) = \varphi(0) \Rightarrow \varphi^{n+1} = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}\,\varphi^{n+1}$. Άρα $\mathrm{Ker}\,\varphi^n \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi^{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οπότε προκύπτει η ακόλουθη αύξουσα ακολουθία υποπροτύπων του M:

$$\mathrm{Ker}\,\varphi \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi^2 \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi^3 \subseteq \dots \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi^n \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi^{n+1} \subseteq \dots$$

η οποία είναι τελικά σταθερή εφόσον το M είναι ένα αριστερό R-πρότυπο της Noether. Άρα υπάρχει κάποιο $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:

$$\mathrm{Ker}\,\varphi \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi^2 \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi^3 \subseteq \dots \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi^m = \mathrm{Ker}\,\varphi^{m+1} = \dots$$

Από την υπόθεση γνωρίζω ότι η απεικόνιση $\varphi : M \to M$ είναι επιμορφισμός, άρα οι απεικονίσεις $\varphi^n : M \to M$ θα είναι επιμορφισμοί για κάθε $n \in \mathbb{N}$, διότι: Έστω

$$\varphi : \text{ επιμορφισμός } \Rightarrow \varphi(M) = M \Rightarrow \varphi^2(M) = \varphi(\varphi(M)) = \varphi(M) = M \Rightarrow$$

$$\varphi^2 : \text{ επιμορφισμός } \dots\dots \varphi^n(M) = \varphi(\varphi^{n-1}(M)) = \varphi(M) = M \Rightarrow$$

$$\varphi^n : \text{ επιμορφισμός } \dots\dots$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathrm{Ker}\,\varphi^m = \{0\}$, γιατί τότε θα ισχύει ότι $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$, αφού $\mathrm{Ker}\,\varphi \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi^m$. Έστω $x \in \mathrm{Ker}\,\varphi \Rightarrow \varphi(x) = 0$. Τώρα, η $\varphi^m : M \to M$ είναι επιμορφισμός, άρα για $\forall x \in M, \exists y \in M,$ τέτοιο ώστε $\varphi^m(y) = x$. Οπότε $\varphi(\varphi^m(y)) = \varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi^{m+1}(y) = 0 \Rightarrow y \in \mathrm{Ker}\,\varphi^{m+1} = \mathrm{Ker}\,\varphi^m \Rightarrow \varphi^m(y) = 0 \Rightarrow x = 0$. Δηλαδή αν $x \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ τότε $x = 0$, άρα $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$, οπότε η φ είναι ισομορφισμός. □

Θεώρημα 1.2.17. *Αν ο R είναι αριστερός δακτύλιος της Noether, τότε ο R έχει* **IBN**.

Απόδειξη. Έστω A ένα ελεύθερο αριστερό R-πρότυπο. Υποθέτουμε ότι $A \cong R^m \cong R^n$, όπου $m \geq n$. Αν $m > n$, τότε υπάρχει ένας επιμορφισμός $\varphi : A \to A$, όπου $\ker(\varphi) \neq 0$ (απλά προβάλλουμε μια m-άδα επί των πρώτων n συντεταγμένων). Το A είναι προφανώς πεπερασμένα παραγόμενο, άρα έχει την ACC, άρα από το προηγούμενο λήμμα ο φ θα είναι ισομορφισμός, άτοπο αφού $\ker(\varphi) \neq 0$. Άρα $m = n$, συνεπώς ο R έχει **IBN**. □

Παράδειγμα 1.2.18. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος άπειρης διάστασης πάνω από ένα σώμα $\mathbb{K}$ ($\dim V_{\mathbb{K}} = \infty$). Τότε ο δακτύλιος $R = \mathsf{End}_{\mathbb{K}}(V)$ δεν έχει **IBN**.

Εφόσον V είναι ένας διανυσματικός χώρος άπειρης διάστασης πάνω από ένα σώμα $\mathbb{K}$, θα υπάρχει ένας $\mathbb{K}$-ισομορφισμός $\theta : V \to V \oplus V$. Ορίζουμε τις προβολές $p, q : V \oplus V \to V$ έτσι ώστε

$$p : (v, w) \mapsto v$$

$$q : (v, w) \mapsto w$$

Έστω $R = End_{\mathbb{K}}(V)$ ο δακτύλιος όλων των $\mathbb{K}$-γραμμικών απεικονίσεων $f : V \to V$.

Τώρα εφαρμόζουμε τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \square)$ στον $\mathbb{K}$-ισομορφισμό $\theta : V \to V \oplus V$ για να πάρουμε ένα $\mathbb{K}$-ισομορφισμό

$$\begin{array}{rcl} \theta_* : \mathsf{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V) & \to & \mathsf{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V \oplus V), \\ \theta_* : g & \mapsto & \theta_*(g) = \theta g, \end{array}$$

όπου $g \in \mathsf{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V)$. Έστω

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathsf{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V \oplus V) & \to & \mathsf{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V) \oplus \mathsf{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V) \\ f & \mapsto & (pf, qf) \end{array}$$

Ο ψ είναι ένας ισομορφισμός (βλέπε [28, Corollary 2.22 ii]). Θεωρούμε τώρα τον $\mathbb{K}$-ισομορφισμό $\psi\theta_* : R \to R \oplus R$. Ο R είναι ένα δεξιό R-πρότυπο και $R \oplus R$ επίσης είναι ένα δεξιό R-πρότυπο με την εξής δράση:

$$(f, g)h = (fh, gh) \text{ όπου } f, g, h \in R.$$

Θα αποδείξουμε ότι $\psi\theta_*$ είναι ένας R-ισομορφισμός. Αν $f, h \in R$, τότε:

$$(\psi\theta_*)(fh) = \psi(\theta_*[fh]) = \psi(\theta fh) = (p\theta fh, q\theta fh) = (p\theta f, q\theta f)h = (\psi\theta_*)(f)h.$$

Άρα, $\psi\theta_*$ είναι ένας R-ισομορφισμός, οπότε $R \cong R \oplus R$ ως δεξιά R-πρότυπα. Έτσι καταλήγουμε ότι ο δακτύλιος $R = \mathsf{End}_{\mathbb{K}}(V)$ δεν έχει **IBN**.

1.3 Τοπικοποίηση και Επίπεδα Πρότυπα

Ορισμός 1.3.1. *Ένα μη κενό σύνολο G καλείται* **μονοειδές** *αν είναι εφοδιασμένο με μία προσεταιριστική διμελή πράξη $G \times G \to G$, και με ένα ταυτοτικό στοιχείο e: δηλαδή $ge = g = eg$ για κάθε $g \in G$.*

Παράδειγμα 1.3.2.

1. Κάθε ομάδα είναι ένα μονοειδές.
2. Κάθε δακτύλιος R είναι ένα μονοειδές ως προς την πράξη του πολλαπλασιασμού.

Ορισμός 1.3.3. *Ένα υποσύνολο $S \subseteq R$ ενός μεταθετικού δακτυλίου R καλείται* **πολλαπλασιαστικά κλειστό** *αν το S είναι ένα μονοειδές το οποίο δεν περιέχει το 0. Δηλαδή, $0 \notin S, 1 \in S$, και το S είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό: αν $s, s' \in S$, τότε $ss' \in S$.*

Πόρισμα 1.3.4. *Το συμπλήρωμα ενός πρώτου ιδεώδους είναι πάντα πολλαπλασιαστικά κλειστό.*

Απόδειξη. Έστω R ένας τυχαίος μεταθετικός δακτύλιος και $\wp$ ένα πρώτο ιδεώδες του δακτυλίου R. Ορίζουμε $S = R - \wp \subseteq R$ το συμπλήρωμα του πρώτου ιδεώδους $\wp$. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι το S είναι πολλαπλασιαστικά κλειστό. Γνωρίζουμε ότι κάθε ιδεώδες περιέχει το 0, οπότε ισχύει ότι $0 \notin R - \wp$. Επίσης, γνωρίζουμε ότι το μοναδιαίο στοιχείο 1 ανήκει στο δακτύλιο R και δεν ανήκει στο ιδεώδες $\wp$, άρα $1 \in S = R - \wp$. Έστω $s, s' \in S$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $ss' \in S$. Υποθέτουμε ότι $ss' \notin S$, τότε $ss' \notin R - \wp \Rightarrow ss' \in \wp$. Όμως το $\wp$ είναι πρώτο ιδεώδες οπότε θα ισχύει ότι $s \in \wp$ ή $s' \in \wp$. Άτοπο, γιατί υποθέσαμε ότι $s, s' \in S \Rightarrow s \notin \wp$ και $s' \notin \wp$. Άρα, $ss' \in S$, οπότε το $S = R - \wp$ είναι πολλαπλασιαστικά κλειστό υποσύνολο του δακτυλίου R. □

Παράδειγμα 1.3.5.

1. Αν R είναι μία ακέραια περιοχή, τότε το σύνολο $S = R - \{0\}$ είναι πολλαπλασιαστικά κλειστό. Πρόκειται για μία ειδική περίπτωση του Πορίσματος (1.3.4), αφού σε μία ακέραια περιοχή το $\{0\}$ είναι ένα πρώτο ιδεώδες.

2. Αν ένα στοιχείο a ενός μεταθετικού δακτυλίου R δεν είναι μηδενοδύναμο, τότε το σύνολο όλων των δυνάμεων του $a : S = \{a^n : n \geq 0\}$ είναι πολλαπλασιαστικά κλειστό. Γενικά, κάθε υπομονοειδές ενός μεταθετικού δακτυλίου R που δεν περιέχει το 0 είναι πολλαπλασιαστικά κλειστό.

Συνεχίζουμε με την κατασκευή του δακτυλίου κλασμάτων ενός μεταθετικού δακτυλίου R ως προς ένα πολλαπλασιαστικά κλειστό σύνολο $S \subseteq R$.

Θεωρούμε το σύνολο $R \times S = \{(r, s) | r \in R, s \in S\}$ και ορίζουμε την παρακάτω σχέση:

(1.2) $$(r, s) \equiv (r', s') \text{ αν και μόνο αν υπάρχει } s'' \in S : s''(rs' - r's) = 0.$$

Αποδεικνύουμε ότι η σχέση αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας:

1. Ισχύει η <u>ανακλαστική</u> ιδιότητα, δηλαδή $(r, s) \equiv (r, s)$, διότι υπάρχει το $1 \in S$ τέτοιο ώστε $1(rs - rs) = 0$.

2. Ισχύει η <u>συμμετρική</u> ιδιότητα, δηλαδή $(r, s) \equiv (r', s') \Leftrightarrow (r', s') \equiv (r, s)$, διότι: $(r, s) \equiv (r', s') \Leftrightarrow$ υπάρχει $s'' \in S$ τέτοιο ώστε $s''(rs' - r's) = 0 \Leftrightarrow s''(r's - rs') \Leftrightarrow (r', s') \equiv (r, s)$.

3. Ισχύει η <u>μεταβατική</u> ιδιότητα, δηλαδή αν $(r, s) \equiv (r', s')$ και $(r', s') \equiv (r'', s'')$, τότε $(r, s) \equiv (r'', s'')$, διότι:

$$(r, s) \equiv (r', s') \Leftrightarrow \text{ υπάρχει } u_1 \in S \text{ τέτοιο ώστε } u_1(rs' - r's) = 0 \quad (1)$$

$$(r', s') \equiv (r'', s'') \Leftrightarrow \text{ υπάρχει } u_2 \in S \text{ τέτοιο ώστε } u_2(r's'' - r''s') = 0 \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζουμε την σχέση (1) με u_2s'' και την σχέση (2) με u_1s οπότε προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$u_2s''u_1(rs' - r's) = 0 \quad (3)$$

και

$$u_1su_2(r's'' - r''s') = 0 \quad (4)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (3) και (4), οπότε θα ισχύει:

$$u_2s''u_1rs' - u_2s''u_1r's + u_1su_2r's'' - u_1su_2r''s' = 0 \Rightarrow$$

$$u_2s''u_1rs' - u_1su_2r''s' = 0 \Rightarrow u_1u_2s'(rs'' - sr'') = 0$$

Όμως $u_1, u_2, s' \in S$ και το σύνολο S είναι πολλαπλασιαστικά κλειστό, άρα θα ισχύει ότι $u_1u_2s' \in S$. Οπότε, ισχύει ότι $(r, s) \equiv (r'', s'')$.

Άρα τελικά η σχέση (1.2) είναι σχέση ισοδυναμίας. Συμβολίζουμε με $\frac{r}{s}$ την κλάση ισοδυναμίας του ζεύγους (r, s), δηλαδή $\frac{r}{s} = \{(r', s') \in R \times S | (r', s') \equiv (r, s)\}$ και με $S^{-1}R$ το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας.

Πόρισμα 1.3.6. *Αν το $0 \in S$ τότε το σύνολο $S^{-1}R$ έχει ακριβώς ένα στοιχείο το $\frac{0}{1}$.*

Απόδειξη. Έστω ότι το $0 \in S$ και έστω $\frac{r}{s}$ ένα τυχαίο στοιχείο του συνόλου $S^{-1}R$. Ισχύει ότι $0(r1 - s0) = 0$, οπότε $\frac{r}{s} \equiv \frac{0}{1}$, συνεπώς $S^{-1}R = \{\frac{0}{1}\}$. □

Συνεχίζουμε ορίζοντας δύο πράξεις στο σύνολο $S^{-1}R$.

1. Ορίζουμε αρχικά έναν πολλαπλασιασμό στο σύνολο $S^{-1}R$ με τον εξής κανόνα:
$$\frac{r}{s} \cdot \frac{r'}{s'} = \frac{rr'}{ss'}.$$
Αποδεικνύουμε στην συνέχεια ότι η πράξη του πολλαπλασιασμού είναι καλά ορισμένη: Έστω $\frac{r_1}{s_1} \equiv \frac{r}{s}$ και $\frac{r_1'}{s_1'} \equiv \frac{r'}{s'}$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι
$$\frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_1'}{s_1'} = \frac{r}{s} \cdot \frac{r'}{s'}.$$
Υπάρχουν $s_2, s_3 \in S$, τέτοια ώστε
$$s_2(r_1 s - s_1 r) = 0,$$
$$s_3(r_1' s' - s_1' r') = 0.$$
Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη σχέση με $s_3 r_1' s'$ και την δεύτερη με $s_2 r s_1$. Στη συνέχεια προσθέτουμε τις δύο σχέσεις που προκύπτουν και καταλήγουμε στο εξής:
$$s_2 s_3(r_1 r_1' s s' - r r' s_1 s_1') = 0.$$
Τότε, εφόσον $s_2 s_3 \in S$ θα ισχύει ότι $\frac{r_1 r_1'}{s_1 s_1'} = \frac{rr'}{ss'}$. Οπότε,
$$\frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_1'}{s_1'} = \frac{r}{s} \cdot \frac{r'}{s'},$$
άρα η πράξη του πολλαπλασιασμού είναι καλά ορισμένη. Η πράξη του πολλαπλασιασμού έχει μοναδιαίο στοιχείο το $\frac{1}{1}$ και είναι προσεταιριστική.

2. Ορίζουμε στη συνέχεια μία πρόσθεση στο σύνολο $S^{-1}R$ με τον εξής κανόνα:
$$\frac{r}{s} + \frac{r'}{s'} = \frac{rs' + r's}{ss'}.$$
Αποδεικνύουμε ότι η πράξη της πρόσθεσης είναι καλά ορισμένη: Έστω $\frac{r_1}{s_1} \equiv \frac{r}{s}$ και $\frac{r_1'}{s_1'} \equiv \frac{r'}{s'}$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι
$$\frac{r_1}{s_1} + \frac{r_1'}{s_1'} = \frac{r}{s} + \frac{r'}{s'}.$$
Υπάρχουν $s_2, s_3 \in S$, τέτοια ώστε
$$s_2(r_1 s - s_1 r) = 0,$$
$$s_3(r_1' s' - s_1' r') = 0.$$
Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη σχέση με $s_3 s' s_1'$ και την δεύτερη με $s_2 s s_1$. Στη συνέχεια προσθέτουμε τις δύο σχέσεις που προκύπτουν και καταλήγουμε στο εξής:
$$s_2 s_3[ss'(r_1 s_1' + r_1' s_1) - s_1 s_1'(rs' + r's)] = 0.$$
Τότε, εφόσον $s_2 s_3 \in S$ θα ισχύει ότι $\frac{r_1 s_1' + r_1' s_1}{s_1 s_1'} = \frac{rs' + r's}{ss'}$. Οπότε,
$$\frac{r_1}{s_1} + \frac{r_1'}{s_1'} = \frac{r}{s} + \frac{r'}{s'},$$
άρα η πράξη της πρόσθεσης είναι καλά ορισμένη.

Το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας $S^{-1}R$ μαζί με τις δύο πράξεις που ορίσαμε παραπάνω ορίζουν τον δακτύλιο κλασμάτων του R ως προς S.

Θεώρημα 1.3.7. *Έστω $S^{-1}R$ ο δακτύλιος κλασμάτων ενός μεταθετικού δακτυλίου R ως προς ένα πολλαπλασιαστικά κλειστό σύνολο $S \subseteq R$, και έστω $m \neq \frac{1}{1}$ ένα ιδεώδες του $S^{-1}R$, τέτοιο ώστε κάθε $\frac{r}{s} \in S^{-1}R - m$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του $S^{-1}R$. Τότε, ο $S^{-1}R$ είναι τοπικός δακτύλιος και το m είναι το μοναδικό μεγιστοτικό του ιδεώδες.*

Παράδειγμα 1.3.8. Σύμφωνα με το Πόρισμα (1.3.4) το συμπλήρωμα ενός πρώτου ιδεώδους είναι πολλαπλασιαστικά κλειστό. Έστω $\wp$ ένα πρώτο ιδεώδες ενός μεταθετικού δακτυλίου R, και έστω S ένα πολλαπλασιαστικά κλειστό σύνολο. Συμβολίζουμε με $R_\wp$ τον δακτύλιο κλασμάτων του R ως προς $S = R - \wp$, δηλαδή $R_\wp = (R - \wp)^{-1}R$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι το σύνολο $\mathfrak{m} = \{\frac{a}{s} | a \in \wp, s \in S = R - \wp\} \subseteq R_\wp$ είναι ένα ιδεώδες του $R_\wp$. Έστω ένα στοιχείο $\frac{r}{s} \notin m$, τότε $r \notin \wp \Rightarrow r \in R - \wp = S$. Άρα, $\frac{r}{s} \cdot \frac{s}{r} = \frac{1}{1}$, οπότε κάθε στοιχείο $\frac{r}{s} \in S^{-1}R - m$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του $R_\wp$. Σύμφωνα με το Θεώρημα (1.3.7) ο $R_\wp$ είναι τοπικός δακτύλιος και το m είναι το μοναδικό μεγιστοτικό του ιδεώδες.

Πρόταση 1.3.9. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος, S ένα πολλαπλασιαστικά κλειστό σύνολο και $S^{-1}R$ ο δακτύλιος κλασμάτων του R ως προς S. Τότε η απεικόνιση*

$$\begin{aligned} f : R &\to S^{-1}R \\ r &\mapsto \frac{r}{1} \end{aligned}$$

είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων.

Απόδειξη. Ισχύει ότι:

1. $f(r_1 + r_2) = \frac{r_1+r_2}{1} = \frac{r_1}{1} + \frac{r_2}{1} = f(r_1) + f(r_2)$.
2. $f(r_1 r_2) = \frac{r_1 r_2}{1} = \frac{r_1}{1}\frac{r_2}{1} = f(r_1)f(r_2)$.
3. $f(1_R) = \frac{1_R}{1} = \frac{1}{1}$.

Άρα η f είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων. □

Πρόταση 1.3.10. *Έστω $g : R \to R'$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων τέτοιος ώστε για κάθε $s \in S$, το στοιχείο $g(s)$ είναι αντιστρέψιμο στο R', τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός δακτυλίων $h : S^{-1}R \to R'$ που κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό, δηλαδή τέτοιος ώστε $g = h \circ f$.*

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "g"] \\ S^{-1}R \arrow[r, dashed, "h"'] & R' \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\begin{aligned} h : S^{-1}R &\to R' \\ \frac{r}{s} &\mapsto h(\frac{r}{s}) = g(r)(g(s))^{-1}, \end{aligned}$$

για κάθε $\frac{r}{s} \in S^{-1}R$. Αποδεικνύουμε αρχικά ότι η h είναι καλά ορισμένη. Έστω ότι $\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$, τότε υπάρχει κάποιο $s_1 \in S$, τέτοιο ώστε $s_1(rs' - r's) = 0$. Έστω $g : R \to R'$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων τέτοιος ώστε για κάθε $s \in S$, το στοιχείο $g(s)$ είναι αντιστρέψιμο στο R'. Τα στοιχεία s_1, r, s', r', s είναι όλα στοιχεία του δακτυλίου R. Τότε θα ισχύει ότι $g(s_1)[g(r)g(s') - g(r')g(s)] = 0$. Πολλαπλασιάζουμε την προηγούμενη σχέση με $(g(s_1))^{-1}$ και στη συνέχεια με $(g(s'))^{-1}$ και με $(g(s))^{-1}$, οπότε καταλήγουμε στην εξής σχέση:

$$g(r)(g(s))^{-1} = g(r')(g(s'))^{-1}.$$

Άρα $h(\frac{r}{s}) = h(\frac{r'}{s'})$, συνεπώς η h είναι καλά ορισμένη.

Αποδεικνύουμε στη συνέχεια ότι η h είναι ένας <u>ομομορφισμός δακτυλίων</u>:

$$h(\frac{1}{1}) = g(1)(g(1))^{-1} = 1$$

$$\begin{aligned}
h(\frac{r}{s} + \frac{r'}{s'}) &= h(\frac{rs' + r's}{ss'}) \\
&= g(rs' + r's)(g(ss'))^{-1} \\
&= (g(r)g(s') + g(r')g(s))((g(s))^{-1}(g(s'))^{-1} \\
&= g(r)g(s')(g(s))^{-1}(g(s'))^{-1} + g(r')g(s)(g(s))^{-1}(g(s'))^{-1} \\
&= g(r)(g(s))^{-1} + g(r')(g(s'))^{-1} = h(\frac{r}{s}) + h(\frac{r'}{s'}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(\frac{r}{s} \cdot \frac{r'}{s'}) &= h(\frac{rr'}{ss'}) \\
&= g(rr')(g(ss'))^{-1} \\
&= g(r)g(r')(g(s))^{-1}(g(s'))^{-1} \\
&= h(\frac{r}{s})h(\frac{r'}{s'}).
\end{aligned}$$

Άρα η h είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων.

Ισχύει ότι <u>$g = h \circ f$</u>, διότι:

$$(h \circ f)(r) = h(f(r)) = h(\frac{r}{1}) = g(r)(g(1))^{-1} = g(r),$$

για κάθε $r \in R$.

Τέλος, αποδεικνύουμε ότι η h είναι <u>μοναδική</u>:

$$h(\frac{r}{1}) = h(f(r)) = g(r)$$

$$h(\frac{1}{s}) = h((\frac{s}{1})^{-1}) = (h(\frac{s}{1}))^{-1} = (g(s))^{-1}$$

$$h(\frac{r}{s}) = h(\frac{r}{1}\frac{1}{s}) = h(\frac{r}{1})h(\frac{1}{s}) = g(r)(g(s))^{-1}$$ □

Πρόταση 1.3.11. *Αν S είναι ένα πολλαπλασιαστικά κλειστό υποσύνολο ενός δακτυλίου R και $g : R \to R'$ είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων τέτοιος ώστε:*

1. *Αν $s \in S$ τότε το $g(s)$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του R'.*

2. *Αν $g(a) = 0$ τότε $as = 0$ για κάποιο $s \in S$.*

3. *Αν κάθε στοιχείο του R' είναι της μορφής $g(a)(g(s))^{-1}$ για κάποια $a \in R, s \in S$.*

Τότε υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός δακτυλίων $h : S^{-1}R \to R'$ τέτοιος ώστε $g = h \circ f$.

Απόδειξη.

$$\begin{tikzcd}
 & R \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "g"] \\
S^{-1}R \arrow[r, dashed, "h"'] & R'
\end{tikzcd}$$

Στην Πρόταση (1.3.10) αποδείξαμε την ύπαρξη και την μοναδικότητα του ομομορφισμού h. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η h είναι ισομορφισμός.

Έστω $\frac{a}{s} \in \mathsf{Ker}(h)$. Τότε $h(\frac{a}{s}) = 0 \Rightarrow g(a)(g(s))^{-1} = 0$. Όμως το $g(s)$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του R', επομένως $g(s) \neq 0$. Άρα, $g(a) = 0$. Σύμφωνα με το (2) της υπόθεσης θα υπάρχει κάποιο $t \in S$ τέτοιο ώστε $ta = 0$. Άρα, $t(a1 - 0s) = 0 \Rightarrow \frac{a}{s} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \mathsf{Ker}(h) = \{0\}$. Οπότε η h είναι μονομορφισμός.

Έστω $r' \in R'$. Σύμφωνα με το (3) της υπόθεσης θα ισχύει ότι $r' = g(a)(g(s))^{-1} = h(\frac{a}{s})$. Οπότε η h είναι επιμορφισμός. Άρα, τελικά η h είναι ένας ισομορφισμός δακτυλίων. □

Έστω M ένα R-πρότυπο και S ένα πολλαπλασιαστικά κλειστό υποσύνολο του δακτυλίου R. Τότε το $S^{-1}M = M \times S \;/ \sim$ είναι ένα $S^{-1}R$-πρότυπο.

Πρόταση 1.3.12. *Αν $u : M \to N$ είναι ένας ομομορφισμός R-προτύπων, τότε ο $s^{-1}u : S^{-1}M \to S^{-1}N$, όπου $\frac{m}{s} \mapsto (s^{-1}u)(\frac{m}{s}) = \frac{u(m)}{s}$ είναι ένας ομομορφισμός $S^{-1}R$-προτύπων.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με την υπόθεση ο $u : M \to N$ είναι ένας ομομορφισμός R-προτύπων, άρα θα ισχύει:

$$\begin{aligned} u(m_1 + m_2) &= u(m_1) + u(m_2) \\ u(rm) &= ru(m) \end{aligned}$$

Θα αποδείξουμε ότι ο $s^{-1}u : S^{-1}M \to S^{-1}N$ είναι ένας ομομορφισμός $S^{-1}R$-προτύπων:

$$\begin{aligned} s^{-1}u(\frac{m_1}{s_1} + \frac{m_2}{s_2}) &= s^{-1}u(\frac{m_1s_2 + m_2s_1}{s_1s_2}) \\ &= \frac{u(m_1s_2 + m_2s_1)}{s_1s_2} \\ &= \frac{u(m_1s_2) + u(m_2s_1)}{s_1s_2} \\ &= \frac{u(m_1s_2)}{s_1s_2} + \frac{u(m_2s_1)}{s_1s_2} \\ &= \frac{s_2u(m_1)}{s_1s_2} + \frac{s_1u(m_2)}{s_1s_2} \\ &= \frac{u(m_1)}{s_1} + \frac{u(m_2)}{s_2} \\ &= s^{-1}u(\frac{m_1}{s_1}) + s^{-1}u(\frac{m_2}{s_2}). \qquad (\mathbf{1}) \\ s^{-1}u(\frac{r}{t} \cdot \frac{m}{s}) &= s^{-1}u(\frac{rm}{ts}) \\ &= \frac{u(rm)}{ts} \\ &= \frac{ru(m)}{ts} \\ &= \frac{r}{t}\frac{u(m)}{s} \\ &= \frac{r}{t}s^{-1}u(\frac{m}{s}). \qquad (\mathbf{2}) \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις $(\mathbf{1}), (\mathbf{2})$ συμπεραίνουμε ότι ο $s^{-1}u : S^{-1}M \to S^{-1}N$ είναι ένας ομομορφισμός $S^{-1}R$-προτύπων. □

Πρόταση 1.3.13. *Αν η ακολουθία R-προτύπων*

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

είναι ακριβής στο M, τότε η ακολουθία $S^{-1}R$-προτύπων

$$S^{-1}M' \xrightarrow{s^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{s^{-1}g} S^{-1}M''$$

είναι ακριβής στο $S^{-1}M$.

Απόδειξη. Η ακολουθία R-προτύπων

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

είναι ακριβής στο M, άρα $\mathsf{Ker}(g) = \mathsf{Im}(f)$.

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η ακολουθία $S^{-1}R$-προτύπων

$$S^{-1}M' \xrightarrow{s^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{s^{-1}g} S^{-1}M''$$

είναι ακριβής στο $S^{-1}M$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathsf{Ker}(s^{-1}g) = \mathsf{Im}(s^{-1}f)$.

Ισχύει ότι $f(x) \in \mathsf{Im}(f) \Rightarrow f(x) \in \mathsf{Ker}(g) \Rightarrow g(f(x)) = 0 \Rightarrow (g \circ f)(x) = 0$.
$(s^{-1}g) \circ (s^{-1}f) = s^{-1}(g \circ f) = s^{-1}(0) = 0 \Rightarrow \mathsf{Im}(s^{-1}f) \subseteq \mathsf{Ker}(s^{-1}g)$.

Αντίστροφα, έστω $\frac{m}{s} \in Ker(s^{-1}g) \Rightarrow s^{-1}g(\frac{m}{s}) = 0 \Rightarrow \frac{g(m)}{s} = \frac{0}{1} \Rightarrow \exists t \in S$ τέτοιο ώστε $t(g(m)1 - 0s) = 0 \Rightarrow tg(m) = 0 \Rightarrow g(tm) = 0 \Rightarrow tm \in \mathsf{Ker}(g) \Rightarrow tm \in \mathsf{Im}(f)$. Άρα, υπάρχει κάποιο $n \in M'$ τέτοιο ώστε $f(n) = tm$. Όμως, $\frac{m}{s} = \frac{tm}{ts} = \frac{f(n)}{ts} = s^{-1}f(\frac{n}{ts}) \Rightarrow \frac{m}{s} \in \mathsf{Im}(s^{-1}f)$. Οπότε, $\mathsf{Ker}(s^{-1}g) \subseteq \mathsf{Im}(s^{-1}f)$.

Άρα, τελικά ισχύει ότι $\mathsf{Ker}(s^{-1}g) = \mathsf{Im}(s^{-1}f)$. Συνεπώς, η ακολουθία $S^{-1}R$-προτύπων

$$S^{-1}M' \xrightarrow{s^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{s^{-1}g} S^{-1}M''$$

είναι ακριβής στο $S^{-1}M$. □

Πρόταση 1.3.14. *Έστω M ένα R-πρότυπο και $S^{-1}M$ ένα $S^{-1}R$-πρότυπο. Τότε $S^{-1}M = S^{-1}R \bigotimes_R M$.*

Απόδειξη. Έστω το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& S^{-1}R \times M \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "f"] \\
S^{-1}R \otimes M \arrow[r, dashed, "f'"'] & S^{-1}M
\end{tikzcd}$$

όπου

$$\begin{array}{rcl}
g : S^{-1}R \times M & \to & S^{-1}R \otimes M \\
(\dfrac{r}{s}, m) & \mapsto & \dfrac{r}{s} \otimes m \\
f : S^{-1}R \times M & \to & S^{-1}M \\
(\dfrac{r}{s}, m) & \mapsto & \dfrac{rm}{s}
\end{array}$$

και

$$\begin{array}{rcl}
f' : S^{-1}R \otimes M & \to & S^{-1}M \\
\dfrac{r}{s} \otimes m & \mapsto & \dfrac{rm}{s}.
\end{array}$$

Η g είναι επί και η f είναι διγραμμική, κατά προφανή τρόπο, οπότε σύμφωνα με την κατασκευή του τανυστικού γινομένου υπάρχει ομομορφισμός $f' : S^{-1}R \bigotimes M \to S^{-1}M$, τέτοιος ώστε $f = f' \circ g$. Μένει να αποδείξουμε ότι η f' είναι ισομορφισμός.

Η f' είναι επιμορφισμός διότι, για κάθε $\frac{m}{s} \in S^{-1}M$, $\exists\ \frac{1}{s} \otimes m \in S^{-1}R \bigotimes M$, τέτοιο ώστε $f'(\frac{1}{s} \otimes m) = \frac{m}{s}$.

Έστω ένα τυχαίο στοιχείο $x \in S^{-1}R \bigotimes M$. Τότε το x μπορεί να γραφτεί με την εξής μορφή:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{s_i} \otimes m_i = \frac{r_1}{s_1} \otimes m_1 + \ldots + \frac{r_n}{s_n} \otimes m_n.$$

Έστω $s = s_1 s_2 \cdots s_i \cdots s_n$ και $t_i = s_1 \cdots s_{i-1} s_{i+1} \cdots s_n$, τότε $s = t_i s_i$. Ισχύει ότι:

$$x = \frac{r_1 t_1}{t_1 s_1} \otimes m_1 + \ldots + \frac{r_n t_n}{s_n t_n} \otimes m_n = \frac{r_1 t_1}{s} \otimes m_1 + \ldots + \frac{r_n t_n}{s} \otimes m_n =$$

$$= \frac{1}{s} \otimes r_1 t_1 m_1 + \ldots + \frac{1}{s} \otimes r_n t_n m_n = \frac{1}{s} \otimes (\sum_{i=1}^{n} r_i t_i m_i) = \frac{1}{s} \otimes m.$$

Άρα, $x = \frac{1}{s} \otimes m$. Έστω, $x \in \mathsf{Ker}(f') \Rightarrow f'(\frac{1}{s} \otimes m) = 0 \Rightarrow \frac{m}{s} = 0 = \frac{0}{1}$. Άρα, υπάρχει κάποιο $t \in S$ τέτοιο ώστε $tm = 0$. Οπότε, $x = \frac{1}{s} \otimes m = \frac{t}{st} \otimes m = \frac{1}{st} \otimes tm = 0$. Άρα, τελικά $\mathsf{Ker}(f') = 0$, συνεπώς Η f' είναι μονομορφισμός.

Αποδείξαμε ότι η f' είναι ισομορφισμός, άρα $S^{-1}M = S^{-1}R \bigotimes_R M$. □

Πρόταση 1.3.15. *Αν η ακολουθία R-προτύπων*

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

είναι ακριβής στο M, τότε η ακολουθία $S^{-1}R$-προτύπων

$$S^{-1}R \bigotimes M' \xrightarrow{I_d \otimes f} S^{-1}R \bigotimes M \xrightarrow{I_d \otimes g} S^{-1}R \bigotimes M''$$

είναι ακριβής στο $S^{-1}R \bigotimes M$, όπου

$$(I_d \otimes f)(x \otimes y) = x \otimes f(y)$$

και

$$(I_d \otimes g)(a \otimes b) = a \otimes g(b).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει συνδυάζοντας τις Προτάσεις (1.3.13), (1.3.14). □

Στην συνέχεια θα δώσουμε τους ορισμούς των επίπεδων και των πιστά επίπεδων προτύπων. Η αναφορά μας στα ειδικά αυτά πρότυπα θα είναι σύντομη, καθώς θα εστιάσουμε μόνο σε κάποια αποτελέσματα τα οποία θα μας χρησιμεύσουν αργότερα.

Τα επίπεδα πρότυπα και τα πιστά επίπεδα πρότυπα εισήχθησαν και μελετήθηκαν από τον Serre σε ένα παράρτημα του φημισμένου άρθρου GAGA, 1955/1956 .

Τα επίπεδα πρότυπα κάνουν τον τανυστικό συναρτητή ακριβή, όπως τα προβολικά πρότυπα κάνουν ακριβή τον συναλλοίωτο συναρτητή Hom . Ας περάσουμε τώρα στον ορισμό τους.

Ορισμός 1.3.16. *Έστω R ένας δακτύλιος. Ένα δεξιό R-πρότυπο N καλείται* **επίπεδο (flat)** *αν $N \bigotimes_R \square$ είναι ένας ακριβής συναρτητής από αριστερά R-πρότυπα σε αβελιανές ομάδες. Δηλαδή αν,*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{p} M_2 \xrightarrow{q} M_3 \longrightarrow 0$$

είναι μία σύντομη ακριβής ακολουθία από αριστερά R-πρότυπα, τότε

$$0 \longrightarrow N \bigotimes_R M_1 \xrightarrow{Id_N \otimes p} N \bigotimes_R M_2 \xrightarrow{Id_N \otimes q} N \bigotimes_R M_3 \longrightarrow 0$$

είναι μία ακριβής ακολουθία από αβελιανές ομάδες.

Παρατήρηση 1.3.17. Επειδή οι συναρτητές $N \bigotimes_R \square : R\text{-Mod} \to Ab$ είναι δεξιά ακριβείς, διαπιστώνουμε ότι ένα δεξιό R-πρότυπο N είναι επίπεδο αν και μόνο αν, όποτε $p : M_1 \to M_2$ είναι 1-1 τότε $Id_N \otimes p : N \bigotimes_R M_1 \to N \bigotimes_R M_2$ είναι επίσης 1-1.

Ας περάσουμε τώρα σε έναν πιο ισχυρό ορισμό από τον ορισμό του επίπεδου προτύπου:

Ορισμός 1.3.18. *Έστω R ένας δακτύλιος. Ένα δεξί R-πρότυπο N καλείται* **πιστά επίπεδο (faithfully flat)** *αν ισχύει:*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{p} M_2 \xrightarrow{q} M_3 \longrightarrow 0$$

είναι μία σύντομη ακριβής ακολουθία από αριστερά R-πρότυπα, αν και μόνο αν

$$0 \longrightarrow N \bigotimes_R M_1 \xrightarrow{Id_N \otimes p} N \bigotimes_R M_2 \xrightarrow{Id_N \otimes q} N \bigotimes_R M_3 \longrightarrow 0$$

είναι μία ακριβής ακολουθία από αβελιανές ομάδες.

Πόρισμα 1.3.19. *Το $S^{-1}R$ είναι ένα επίπεδο R-πρότυπο.*

Παρατήρηση 1.3.20. Αν το I είναι ένα ιδεώδες ενός δακτυλίου R, τότε το $S^{-1}I = \{\frac{i}{s} \mid i \in I, s \in S\}$ είναι ένα ιδεώδες του δακτυλίου $S^{-1}R$.

Πρόταση 1.3.21. *Αν ο R είναι δακτύλιος της Noether, τότε και ο $S^{-1}R$ είναι δακτύλιος της Noether.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο R είναι δακτύλιος της Noether. Τότε, κάθε ιδεώδες του R θα είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Έστω $I = \langle f_1, \dots f_r \rangle$ ένα πεπερασμένα παραγόμενο ιδεώδες του R, όπου $f_1, \dots, f_r \in I$ γεννήτορες του ιδεώδους I.

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι ο $S^{-1}R$ είναι δακτύλιος της Noether. Αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε ιδεώδες του $S^{-1}R$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Αν I είναι ένα ιδεώδες του R, τότε το $S^{-1}I = \{\frac{i}{s} \mid i \in I, s \in S\}$ είναι ένα ιδεώδες του δακτυλίου $S^{-1}R$. Επίσης, αν J είναι ένα ιδεώδες του $S^{-1}R$, τότε υπάρχει ένα ιδεώδες I του R τέτοιο ώστε $J = S^{-1}I$. Οπότε σε κάθε περίπτωση ένα ιδεώδες του $S^{-1}R$ είναι της μορφής $S^{-1}I = \{\frac{i}{s} \mid i \in I, s \in S\}$. Μένει να αποδείξουμε ότι κάθε ιδεώδες $S^{-1}I$ του $S^{-1}R$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

$$I = \langle f_1, \dots f_r \rangle = \{r_1 f_1 + \dots + r_r f_r \mid r_1, \dots, r_r \in R \text{ και } f_1, \dots, f_r \in I\}.$$

$$\begin{aligned} S^{-1}I &= \{\frac{i}{s} \mid i \in I, s \in S\} \\ &= \{\frac{r_1 f_1 + \dots + r_r f_r}{s} \mid r_1, \dots, r_r \in R, f_1, \dots, f_r \in I, s \in S\} \\ &= \{\frac{r_1 f_1}{s} + \dots + \frac{r_r f_r}{s} \mid r_1, \dots, r_r \in R, f_1, \dots, f_r \in I, s \in S\} \\ &= \{\frac{r_1}{s}\frac{f_1}{1} + \dots + \frac{r_r}{s}\frac{f_r}{1} \mid 1 \in S, \frac{r_i}{s} \in S^{-1}R, \frac{f_i}{1} \in S^{-1}I, i = 1, \dots, r\} \\ &= \langle \frac{f_1}{1}, \dots, \frac{f_r}{1} \rangle. \end{aligned}$$

Άρα,

$$S^{-1}I = \langle \frac{f_1}{1}, \dots, \frac{f_r}{1} \rangle,$$

όπου $\frac{f_i}{1} \in S^{-1}I, i = 1, \dots, r$. Οπότε, το $S^{-1}I$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο, συνεπώς κάθε ιδεώδες $S^{-1}I$ του $S^{-1}R$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο, άρα ο $S^{-1}R$ είναι δακτύλιος της Noether. $\square$

Παρατήρηση 1.3.22. Το αντίστροφο της Πρότασης (1.3.21) δεν ισχύει, δηλαδή αν ο $S^{-1}R$ είναι δακτύλιος της Noether για κάποιο πολλαπλασιαστικά κλειστό σύνολο S, τότε ο R δεν είναι απαραίτητα δακτύλιος της Noether. Δίνουμε ένα αντιπαράδειγμα:

Έστω $R = K[x_1, \ldots, x_n, \ldots]$ ο πολυωνυμικός δακτύλιος με άπειρες μεταβλητές ο οποίος δεν είναι δακτύλιος της Noether και έστω $S = R - \{0\} = R^*$ ένα πολλαπλασιαστικά κλειστό σύνολο. Τότε ορίζεται ο δακτύλιος $S^{-1}R = (R^*)^{-1}R$ ο οποίος είναι δακτύλιος της Noether.

Αποδεικνύουμε αρχικά ότι ο πολυωνυμικός δακτύλιος με άπειρες μεταβλητές $R = K[x_1, \ldots, x_n, \ldots]$ δεν είναι δακτύλιος της Noether. Για να είναι ένας δακτύλιος R δακτύλιος της Noether πρέπει κάθε αύξουσα ακολουθία ιδεωδών του R να είναι τελικά σταθερή. Θεωρούμε την εξής αύξουσα ακολουθία ιδεωδών του $R = K[x_1, \ldots, x_n, \ldots]$:

$$(x_1) \subsetneqq (x_1, x_2) \subsetneqq (x_1, x_2, x_3) \subsetneqq \ldots,$$

η οποία δεν είναι τελικά σταθερή, άρα ο πολυωνυμικός δακτύλιος με άπειρες μεταβλητές $R = K[x_1, \ldots, x_n, \ldots]$ δεν είναι δακτύλιος της Noether.

Ο πολυωνυμικός δακτύλιος με άπειρες μεταβλητές $R = K[x_1, \ldots, x_n, \ldots]$ δεν έχει διαιρέτες του μηδενός, άρα ο R είναι ακέραια περιοχή, συνεπώς το $S = R - \{0\} = R^*$ είναι ένα πολλαπλασιαστικά κλειστό σύνολο.

Εφόσον, το $S = R - \{0\} = R^*$ είναι ένα πολλαπλασιαστικά κλειστό σύνολο μπορώ να ορίσω το σώμα κλασμάτων της ακέραιας περιοχής R: $S^{-1}R = (R^*)^{-1}R$. Το $S^{-1}R$ είναι σώμα γιατί έχει μόνο δύο ιδεώδη, τα $\langle 0\rangle$ και $\langle 1\rangle$. Άρα κάθε ιδεώδες του $S^{-1}R$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο, οπότε ο $S^{-1}R$ είναι δακτύλιος της Noether.

1.4 Βαθμίδα Πεπερασμένα Παραγόμενων Προβολικών Προτύπων

Σε αυτή την παράγραφο, με R θα συμβολίζουμε έναν μεταθετικό δακτύλιο και με $\mathsf{Spec}\, R$ το σύνολο των πρώτων ιδεωδών ενός μεταθετικού δακτυλίου R. Για κάθε $\wp \in \mathsf{Spec}\, R$ και για κάθε R-πρότυπο M, θα συμβολίζουμε με $M_\wp$ την τοπικοποίηση του M στο πολλαπλασιαστικό σύνολο $R - \wp$. Στο σημείο αυτό, να σημειώσουμε ότι η τοπικοποίηση $R_\wp$ είναι ένας μεταθετικός τοπικός δακτύλιος με μοναδικό μεγιστοτικό ιδεώδες το $\wp R_\wp$.

Πόρισμα 1.4.1. *Για κάθε πεπερασμένα παραστάσιμο πρότυπο P ενός δακτυλίου R οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

1. *Το P είναι R-προβολικό.*
2. *Το $P_\mathfrak{m}$ είναι $R_\mathfrak{m}$-προβολικό για κάθε $\mathfrak{m} \in \mathsf{max}R$.*
3. *Το $P_\mathfrak{p}$ είναι $R_\mathfrak{p}$-ελεύθερο για κάθε $\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}R$.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [13, Corollary 3.4]. □

Ορισμός 1.4.2. *Έστω P ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό R-πρότυπο ενός μεταθετικού δακτυλίου R και έστω $\wp \in \mathsf{Spec}\, R$ ένα πρώτο ιδεώδες του R. Τότε, ορίζουμε την βαθμίδα του προτύπου P ως προς ένα πρώτο ιδεώδες $\wp$ ως εξής $\mathsf{rank}_\wp P := \mathsf{rank}_{R_\wp} P_\wp$.*

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, έχουμε μία συνάρτηση

$$\begin{aligned} \mathsf{rank}\, P : \mathsf{Spec}\, R &\to \mathbb{Z} \\ \wp &\mapsto \mathsf{rank}\, P(\wp) = \mathsf{rank}_{R_\wp} P_\wp. \end{aligned}$$

Όταν γράφουμε $\mathsf{rank}\, P \geq r$ θα εννοούμε ότι $\mathsf{rank}_\wp P \geq r$ για κάθε $\wp \in \mathsf{Spec}\, R$. Αν $\mathsf{rank}\, P = r$, θα λέμε ότι το P έχει σταθερή βαθμίδα r.

Το σύνολο $\mathsf{Spec}\, R$ εφοδιάζεται με την τοπολογία του Zariski, στην οποία τοπολογία τα κλειστά σύνολα είναι της μορφής

$$V(\alpha) = \{\wp \in \mathsf{Spec}\, R | \wp \supseteq \alpha\},$$

όπου το α είναι ένα ιδεώδες του R. Το συμπλήρωμα ενός τέτοιου κλειστού συνόλου είναι της μορφής

$$\bigcup_{f \in \alpha} \{\wp \in \mathsf{Spec}\, R | \wp \not\ni f\}.$$

Οπότε, μία βάση ανοιχτών συνόλων δίνεται από τα σύνολα

$$D(f) = \{\wp \in \mathsf{Spec}\, R | \wp \not\ni f\}.$$

Να σημειωθεί ότι η τοπολογία του Zariski στο σύνολο $\mathsf{Spec}\, R$ είναι ημι-συμπαγής, δηλαδή είναι συμπαγής χωρίς απαραίτητα να είναι χώρος Hausdorff.

Πρόταση 1.4.3. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος και P ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό R-πρότυπο. Τότε η συνάρτηση $\mathsf{rank}\, P : \mathsf{Spec}\, R \to \mathbb{Z}$ είναι συνεχής, όπου το σύνολο $\mathsf{Spec}\, R$ είναι εφοδιασμένο με την τοπολογία του Zariski και το $\mathbb{Z}$ με την διακριτή τοπολογία. Η συνάρτηση $\mathsf{rank}\, P$ είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω $\mathsf{rank}_\wp P = n$, δηλαδή, $P_\wp \cong R^n{}_\wp$. Τότε σύμφωνα με την πρόταση [14, Corollary 2.17], υπάρχει κάποιο $f \notin \wp$ τέτοιο ώστε $P_f \cong R^n_f$. Τότε η συνάρτηση $\mathsf{rank}\, P$: $\mathsf{Spec}\, R \to \mathbb{Z}$ έχει σταθερή τιμή n στην περιοχή των συνόλων $D(f) = \{\wp \in \mathsf{Spec}\, R | \wp \not\ni f\}$ του $\wp$. Συνεπώς η συνάρτηση $\mathsf{rank}\, P$ είναι συνεχής. Εφόσον η τοπολογία του Zariski στο σύνολο $\mathsf{Spec}\, R$ είναι ημι-συμπαγής, συνεπάγεται ότι η συνάρτηση $\mathsf{rank}\, P$ είναι φραγμένη. $\square$

Πόρισμα 1.4.4. *Αν ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό R-πρότυπο P δεν έχει μη-τετριμμένα ταυτοδύναμα στοιχεία, τότε το P έχει σταθερή βαθμίδα.*

Το παραπάνω πόρισμα ισχύει για κάθε ακέραια περιοχή R. Στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να υπολογίσουμε την βαθμίδα του P χρησιμοποιώντας το πρώτο ιδεώδες $\wp = (0)$:

$$\mathsf{rank}\, P = \mathsf{rank}_{(0)} P_{(0)} = \dim_K K \otimes_R P,$$

όπου K το σώμα κλασμάτων του R. Έτσι ορίζουμε την βαθμίδα των πεπερασμένα παραγόμενων προτύπων πάνω από μία περιοχή R.

Κεφάλαιο 2

Ευσταθώς Ελεύθερα Πρότυπα, Δακτύλιοι Hermite και η Ομάδα Grothendieck

Στο κεφάλαιο αυτό ορίζουμε τα ευσταθώς ελεύθερα πρότυπα και τους δακτυλίους του Hermite, έννοιες που θα φανούν ιδιαίτερα χρήσιμες στις αποδείξεις της εικασίας στο τέταρτο κεφάλαιο. Έστω ο δακτύλιος πολυωνύμων d μεταβλητών $R = k[t_1, \ldots, t_d]$, όπου το k είναι ένα σώμα. Θα αποδείξουμε ότι κάθε προβολικό R-πρότυπο P είναι ευσταθώς ελεύθερο. Λαμβάνοντας υπόψιν αυτό το αποτέλεσμα, η εικασία του Serre μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα ως εξής:

Είναι ο δακτύλιος πολυωνύμων d μεταβλητών $R = k[t_1, \ldots, t_d]$, όπου το k είναι ένα σώμα, δακτύλιος Hermite;

Ισοδύναμα, είναι δυνατόν κάθε $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathsf{UM}_n(k[t_1, \ldots, t_d])$ να μπορεί να συμπληρωθεί σε έναν $n \times n$ πίνακα με ορίζουσα που ανήκει στο $k - \{0\}$;

Τέλος, θα αναπτύξουμε σύντομα την θεωρία της ομάδας του Grothendieck K_0 για τυχαίους δακτυλίους R η οποία θα μας φανεί χρήσιμη στη συνέχεια σε ένα σημαντικό θεώρημα του Serre.

2.1 Ευσταθώς ελεύθερα πρότυπα και δακτύλιοι του Hermite

Στην παράγραφο αυτή το R θα συμβολίζει ένα τυχαίο δακτύλιο. Θεωρούμε δεξιά πρότυπα αντί για αριστερά ενώ οι ομομορφισμοί προτύπων θα συνεχίσουν να γράφονται στα αριστερά.

Ορισμός 2.1.1. *Ένα δεξιό R-πρότυπο P καλείται* **ευσταθώς ελεύθερο (stably free) τύπου** m $(0 \leq m < \infty)$ *αν το $P \oplus R^m$ είναι ελεύθερο. Ένα πρότυπο καλείται* **ευσταθώς ελεύθερο** *αν είναι ευσταθώς ελεύθερο τύπου m για κάποιο m.*

Κάθε ευσταθώς ελεύθερο πρότυπο τύπου 0 είναι ελεύθερο.

Πόρισμα 2.1.2. *Κάθε ευσταθώς ελεύθερο R-πρότυπο είναι προβολικό.*

Απόδειξη. Έστω P ένα ευσταθώς ελεύθερο R-πρότυπο. Τότε το $P \oplus R^m$ είναι ελεύθερο για κάποιο m $(0 \leq m < \infty)$. Άρα το P είναι ευθύς αθροιστέος ενός ελεύθερου προτύπου, οπότε είναι προβολικό (σύμφωνα με το Θεώρημα $(1.1.34)$). □

Στον ορισμό του ευσταθώς ελεύθερου προτύπου απαιτήσαμε ο ευθύς αθροιστέος να είναι πεπερασμένα παραγόμενος (το m να είναι ένας πεπερασμένος πληθικός αριθμός). Η προϋπόθεση αυτή είναι απαραίτητη και αυτό είναι εμφανές από την ακόλουθη πρόταση που οφείλεται στον Eilenberg (βλέπε [2, Σελίδα 24]).

Πρόταση 2.1.3. *Για κάθε προβολικό πρότυπο P υπάρχει κάποιο (όχι απαραίτητα πεπερασμένα παραγόμενο) ελεύθερο πρότυπο F τέτοιο ώστε το πρότυπο $P \oplus F$ να είναι ελεύθερο.*

Απόδειξη. Έστω P, Q δύο προβολικά R-πρότυπα, έστω ότι το $P \oplus Q = E$ είναι ελεύθερο και έστω το πρότυπο

$$F = E \oplus E \oplus E \oplus \dots$$

το οποίο είναι επίσης ελεύθερο. Τότε,

$$\begin{aligned} P \oplus F &\cong P \oplus E \oplus E \oplus \dots \\ &\cong P \oplus (Q \oplus P) \oplus (Q \oplus P) \oplus \dots \\ &\cong (P \oplus Q) \oplus (P \oplus Q) \oplus \dots \\ &\cong E \oplus E \oplus \dots \\ &\cong F \end{aligned}$$

□

Συνεχίζουμε με μία πρόταση η οποία οφείλεται στον Gabel, βλέπε [9].

Πρόταση 2.1.4. *Αν ένα πρότυπο P είναι ευσταθώς ελεύθερο και δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο, τότε το P είναι ελεύθερο.*

Απόδειξη. Έστω ότι το P είναι ευσταθώς ελεύθερο, τότε το $P \oplus R^m \cong F$ θα είναι ελεύθερο. Θέλουμε να δείξουμε ότι το πρότυπο P είναι ελεύθερο.

Η προβολή από το F στο P είναι μία επί και γραμμική απεικόνιση, οπότε εφόσον το P δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο συνεπάγεται ότι το F δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Το F είναι ελεύθερο, οπότε έχει μια βάση. Έστω $\{e_i\}_{i \in I}$ μία βάση του F. Εφόσον το F δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο, το σύνολο δεικτών I θα είναι άπειρο. Η προβολή από το F στο R^m είναι μία επί και γραμμική απεικόνιση $f : F \twoheadrightarrow R^m$ με πυρήνα $\operatorname{Ker} f = P$. Έστω $\{x_1, \dots, x_m\}$ μία βάση του R^m. Τότε υπάρχουν $y_i \in F$ τέτοια ώστε $f(y_i) = x_i$. Όμως κάθε y_i είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των $\{e_i\}_{i \in I_i}$ όπου I_i είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του I. Έστω $I_o = \bigcup_{i=1}^m I_i$. Τότε το I_0 είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του I. Ορίζουμε $F_o = \sum_{i \in I_o} (e_i \cdot R)$ τότε ο περιορισμός της f, $f|_{F_o} : F_o \twoheadrightarrow R^m$ είναι επί απεικόνιση. Για κάθε $v \in F$, $f(v) = f(v')$ για κάποιο $v' \in F_o$. Τότε θα ισχύει ότι $f(v) - f(v') = 0 \Rightarrow f(v - v') = 0 \Rightarrow v - v' \in \operatorname{Ker} f = P$, οπότε $F = F_o + P$. Έστω $Q = P \cap F_o$, τότε έχουμε τις ακόλουθες σύντομα ακριβείς ακολουθίες:

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\varphi} P/Q \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{g} F_o \xrightarrow{h} R^m \longrightarrow 0$$

Η πρώτη ακολουθία είναι ακριβής στο Q γιατί η ταυτοτική απεικόνιση $i : Q \to P$, όπου $q \mapsto i(q) = q$ είναι 1-1, είναι ακριβής στο P/Q γιατί η απεικόνιση $\varphi : P \to P/Q$, όπου $p \mapsto \varphi(p) = p + Q$ είναι επί και τελικά είναι ακριβής στο P γιατί $\operatorname{Ker} \varphi = \{p \in P \mid \varphi(p) = 0 + Q\} = \{p \in P \mid p + Q = 0 + Q\} = \{p \in P \mid p \in Q\} = Q = \operatorname{Im} i$. Η δεύτερη ακολουθία είναι ακριβής γιατί $\operatorname{Ker} h = \{x \in F_o : h(x) = 0\} = \{x \in F_o : x \in P\} = P \cap F_o = Q = \operatorname{Im} g$.

Σύμφωνα με το δεύτερο θεώρημα ισομορφισμών ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} F_o/P \cap F_o &\cong P + F_o/P \Rightarrow \\ F_o/Q &\cong F/P \Rightarrow \\ F/F_o &\cong P/Q \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι $F/F_o = \sum_{i \in I - I_o} (e_i R)$. Εφόσον το σύνολο δεικτών $I - I_o$ είναι άπειρο, μπορούμε να γράψουμε $P/Q \cong R^m \oplus F_1$ για κάποιο ελεύθερο πρότυπο F_1.

Η πρώτη ακολουθία διασπάται γιατί το πρότυπο P/Q είναι ελεύθερο και η δεύτερη διασπάται γιατί το R^m είναι ελεύθερο (οπότε και προβολικό). Άρα θα ισχύει ότι $P \cong Q \oplus P/Q$ και $F_o \cong Q \oplus R^m$. Τελικά θα ισχύει το εξής:

$$P \cong Q \oplus P/Q \cong Q \oplus (R^m + F_1) \cong (Q \oplus R^m) \oplus F_1 \cong F_o + F_1$$

όπου το $F_o + F_1$ είναι ελεύθερο άρα και το P είναι ελεύθερο. □

Εξαιτίας της Πρότασης (2.1.4), θα εστιάσουμε την προσοχή μας στα πεπερασμένα παραγόμενα R-πρότυπα. Ένα πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο P είναι ευσταθώς ελεύθερο τύπου m αν και μόνο αν $P \cong \mathsf{Ker}(R^n \overset{f}{\twoheadrightarrow} R^m)$ για έναν κατάλληλο διασπάσιμο επιμορφισμό f. Έστω M ο $m \times n$ πίνακας που αντιστοιχεί στον επιμορφισμό f, τότε ο M είναι δεξιά αντιστρέψιμος, δηλαδή υπάρχει ένας $n \times m$ πίνακας N τέτοιος ώστε $MN = I_m$. Συνεπώς, κάθε δεξιά αντιστρέψιμος $m \times n$ πίνακας M ορίζει ένα πεπερασμένα παραγόμενο ευσταθώς ελεύθερο δεξιό R-πρότυπο P τύπου m, δηλαδή,

$$P = \left\{ \alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : M \cdot \alpha = 0 \right\}$$

(ο "χώρος των λύσεων" του M). Με αυτόν τον τρόπο, η μελέτη των πεπερασμένα παραγόμενων ευσταθώς ελεύθερων δεξιών R-προτύπων γίνεται ισοδύναμη με την μελέτη των δεξιά αντιστρέψιμων τετραγωνικών πινάκων πάνω από τον δακτύλιο R.

Η ακόλουθη πρόταση δίνει ένα κριτήριο για το πότε το πρότυπο $P \cong \mathsf{Ker}(R^n \overset{f}{\twoheadrightarrow} R^m)$ είναι ελεύθερο:

Πρόταση 2.1.5. *Ο πυρήνας P ενός επιμορφισμού $f : R^n \twoheadrightarrow R^m$ είναι ένα ελεύθερο R-πρότυπο αν και μόνο αν επάγει έναν ισομορφισμό $\hat{f} : R^n \to R^m \oplus R^r$ (για κάποιο r) τέτοιον ώστε $\pi \hat{f} = f$, όπου $\pi : R^m \oplus R^r \to R^m$ είναι η προβολή επί του R^m.*

Απόδειξη.

$$\begin{tikzcd} & R^m \oplus R^r \arrow[d, "\pi"] \\ R^n \arrow[ur, "\hat{f}"] \arrow[r, two heads, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\cong"'] & R^m \end{tikzcd}$$

Έστω ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός $\hat{f} : R^n \to R^m \oplus R^r$ (για κάποιο r) τέτοιος ώστε $\pi \hat{f} = f$, όπου $\pi : R^m \oplus R^r \to R^m$ είναι η προβολή επί του R^m. Τότε $P = \mathsf{Ker}\, f \cong \mathsf{Ker}\, \pi = R^r \Rightarrow P = R^r$. Οπότε το πρότυπο P είναι ελεύθερο.

Αντίστροφα, έστω ότι το πρότυπο $P \cong \mathsf{Ker}(R^n \overset{f}{\twoheadrightarrow} R^m)$ είναι ελεύθερο. Τότε θα υπάρχει κάποιο r έτσι ώστε ο $g : P \xrightarrow{\cong} R^r$ να είναι ισομορφισμός. Μπορούμε να γράψουμε $R^n = Q \oplus P$, με τέτοιον τρόπο ώστε ο περιορισμός του f στο Q να μας δώσει έναν ισομορφισμό $f/_Q = f_o : Q \to R^m$. Τότε $f_o \oplus g : R^n \to R^m \oplus R^r$ δίνει τον επιθυμητό ισομορφισμό $\hat{f}$. □

Παρατήρηση 2.1.6. Στην παραπάνω πρόταση να σημειώσουμε ότι $R^n \cong R^m \oplus R^r$ δεν συνεπάγεται γενικά ότι $n = m + r$.

Ορισμός 2.1.7. *Ένας δακτύλιος R ικανοποιεί την* **ιδιότητα της αναλλοίωτης βάσης (invariant basis property) (IBP)** *αν, για κάθε $s, t \geq 0$,*

$$R^s \cong R^t \text{ (ως δεξιά πρότυπα) } \Rightarrow s = t.$$

Παράδειγμα 2.1.8. 1. Οι δακτύλιοι διαίρεσης ικανοποιούν την **IBP**.

2. Αν R, S είναι δύο μη μηδενικοί δακτύλιοι για τους οποίους υπάρχει ένας ομομορφισμός δακτυλίων $R \to S$, τότε αν ο S ικανοποιεί την **IBP** το ίδιο συμβαίνει και με τον R.

3. Οι τοπικοί δακτύλιοι ικανοποιούν την **IBP**.

4. Οι μεταθετικοί δακτύλιοι ικανοποιούν την **IBP**.

5. Οι δεξιοί δακτύλιοι της Noether ικανοποιούν την **IBP**.

Συνεχίζουμε με την πινακοθεωρητική ερμηνεία της Πρότασης (2.1.5). Συμβολίζουμε με M τον $m \times n$ πίνακα που αντιστοιχεί στον επιμορφισμό f, και με N τον $(m+r) \times n$ πίνακα που αντιστοιχεί στον ισομορφισμό $\hat{f}$, αν ο $\hat{f}$ υπάρχει. Η συνθήκη "$\pi \circ \hat{f} = f$" ερμηνεύεται ως εξής: ο M είναι ένας υποπίνακας του N, αποτελούμενος από τις πρώτες m γραμμές του πίνακα N. Η συνθήκη ότι ο $\hat{f}$ είναι ένας ισομορφισμός ερμηνεύεται ως εξής: ο N είναι ένας όχι απαραίτητα τετραγωνικός αντιστρέψιμος πίνακας, δηλαδή, υπάρχει κάποιος πίνακας N', μεγέθους $n \times (m+r)$, τέτοιος ώστε $NN' = I_{m+r}$, και $N'N = I_n$. Έτσι καταλήγουμε στην ακόλουθη πινακοθεωρητική μορφή της Πρότασης (2.1.5):

Πρόταση 2.1.9. *Για κάθε δεξιά αντιστρέψιμο $m \times n$ πίνακα M, $m < n$, ο (ευσταθώς ελεύθερος) χώρος των λύσεων του M είναι ελεύθερος αν και μόνο αν ο M μπορεί να συμπληρωθεί σε έναν αντιστρέψιμο πίνακα προσθέτοντας έναν κατάλληλο αριθμό νέων γραμμών.*

Ορισμός 2.1.10. *Ένας πίνακας γραμμή $(b_1, \ldots, b_n)$ καλείται* **unimodular** *αν ο πίνακας γραμμή $(b_1, \ldots, b_n)$ είναι δεξιά αντιστρέψιμος, δηλαδή αν ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{n} b_i R = R$.*

Το σύνολο όλων των unimodular γραμμών μήκους n με στοιχεία από τον δακτύλιο R θα συμβολίζεται με $\mathsf{UM}_n(R)$.

Παρατήρηση 2.1.11.

1. Μία γραμμή $b = (b_1, \ldots, b_n)$ είναι unimodular, αν και μόνο αν υπάρχουν $a_i \in R$ τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^{n} b_i a_i = 1$. Επιπλέον, αν $a = (a_1, \ldots, a_n)$, τότε $ba^t = 1$. Έτσι, $b \in \mathsf{UM}_n(R)$ αν και μόνο αν υπάρχει μία γραμμή μήκους n τέτοια ώστε $< b, a >= ba^t = 1$. Για παράδειγμα το διάνυσμα $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ είναι ένα unimodular διάνυσμα.

2. Μία γραμμή, θεωρώντας την ως έναν $1 \times n$-πίνακα, περιγράφει μία γραμμική απεικόνιση δεξιών προτύπων $R^n \to R$, η οποία είναι επί αν και μόνο αν η γραμμή είναι unimodular. Οπότε υπάρχει μία επί απεικόνιση από το σύνολο όλων των unimodular γραμμών μήκους n στο σύνολο των κλάσεων ισομορφίας των ευσταθώς ελεύθερων προτύπων τάξης $n-1$ και τύπου 1.

Πόρισμα 2.1.12. *Για κάθε δακτύλιο R, οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

1. *Κάθε πεπερασμένα παραγόμενο ευσταθώς ελεύθερο δεξιό R-πρότυπο είναι ελεύθερο.*

2. *Κάθε πεπερασμένα παραγόμενο ευσταθώς ελεύθερο δεξιό R-πρότυπο τύπου 1 είναι ελεύθερο.*

3. *Κάθε δεξιά unimodular γραμμή πάνω από τον δακτύλιο R μπορεί να συμπληρωθεί σε έναν αντιστρέψιμο πίνακα (προσθέτοντας έναν κατάλληλο αριθμό νέων γραμμών).*

Απόδειξη. $(1) \Rightarrow (2)$ Είναι προφανές.

$(2) \Rightarrow (1)$ Έστω ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενο ευσταθώς ελεύθερο δεξιό R-πρότυπο τύπου 1 είναι ελεύθερο. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενο ευσταθώς ελεύθερο δεξιό R-πρότυπο είναι ελεύθερο. Δηλαδή αν P είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο ευσταθώς ελεύθερο δεξιό R-πρότυπο, τότε το P θα είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο ευσταθώς ελεύθερο δεξιό R-πρότυπο τύπου m για κάποιο m, οπότε $P \oplus R^m$ είναι ελεύθερο και θέλουμε να αποδείξουμε ότι το P είναι ελεύθερο. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο m. Για $m = 1$, σύμφωνα με το (2) η πρόταση ισχύει. Έστω ότι η πρόταση ισχύει για $m-1$, δηλαδή κάθε πεπερασμένα παραγόμενο ευσταθώς ελεύθερο δεξιό R-πρότυπο τύπου $m-1$ είναι ελεύθερο, οπότε αν $P \oplus R^{m-1}$ είναι ελεύθερο τότε το P είναι ελεύθερο. Έστω ένα πεπερασμένα παραγόμενο ευσταθώς ελεύθερο δεξιό R-πρότυπο τύπου m, τότε το $P \oplus R^m$ θα είναι ελεύθερο, οπότε $P \oplus R^m \cong R^n \Rightarrow (P \oplus R^{m-1}) \oplus R \cong R^n$.

Συνεπώς το $P \oplus R^{m-1}$ θα είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο ευσταθώς ελεύθερο δεξιό R-πρότυπο τύπου 1, άρα το $P \oplus R^{m-1}$ θα είναι ελεύθερο. Οπότε θα ισχύει ότι $P \oplus R^{m-1} \cong R^k$ για κάποιο k, άρα το P είναι ελεύθερο.

$(2) \Leftrightarrow (3)$ Προκύπτει από την Πρόταση $(2.1.9)$. □

Ορισμός 2.1.13. *Οι δακτύλιοι που ικανοποιούν τις παραπάνω ισοδύναμες προτάσεις του Πορίσματος* $(2.1.12)$ *καλούνται* **(δεξιοί) δακτύλιοι του Hermite**.

Έστω $\mathsf{GL}_n(R)$ η γενική γραμμική ομάδα των αντιστρέψιμων $n \times n$ τετραγωνικών πινάκων με στοιχεία από έναν δακτύλιο R και έστω $\mathsf{UM}_n(R)$ το σύνολο όλων των δεξιών unimodular γραμμών μήκους n με στοιχεία από τον δακτύλιο R. Η ομάδα $\mathsf{GL}_n(R)$ δρα στο σύνολο $\mathsf{UM}_n(R)$ με δράση τον πολλαπλασιασμό πινάκων από δεξιά με τον ακόλουθο τρόπο:
Αν $u \in \mathsf{UM}_n(R)$, $\sigma \in \mathsf{GL}_n(R)$, τότε

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{UM}_n(R) \times \mathsf{GL}_n(R) & \to & \mathsf{UM}_n(R) \\ (u, \sigma) & \mapsto & u \cdot \sigma \end{array}$$

Αν δύο γραμμές $f, g \in \mathsf{UM}_n(R)$ είναι συζυγείς υπό αυτή την δράση, δηλαδή αν υπάρχει $\sigma \in \mathsf{GL}_n(R)$ τέτοιο ώστε $g \cdot \sigma = f$, τότε θα γράφουμε $f \sim g$. Έτσι, ορίζεται μία σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathsf{UM}_n(R)$. Οι κλάσεις ισοδυναμίας του συνόλου $\mathsf{UM}_n(R)$ υπό την σχέση ισοδυναμίας $\sim$ είναι οι τροχιές της $\mathsf{GL}_n(R)$-δράσης.

Πρόταση 2.1.14. *Οι τροχιές του συνόλου* $\mathsf{UM}_n(R)$ *υπό την* $\mathsf{GL}_n(R)$*-δράση βρίσκονται σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τις κλάσεις ισομορφίας των δεξιών* R*-προτύπων* P *για τα οποία ισχύει* $P \oplus R \cong R^n$*. Υπό αυτή την αντιστοιχία η τροχιά του* $(1, 0, \dots, 0)$ *αντιστοιχεί στο ελεύθερο πρότυπο* R^{n-1}.

Απόδειξη. Σε κάθε $(b_1, \dots, b_n) \in \mathsf{UM}_n(R)$, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το $P = P(b_1, \dots, b_n)$, τον "χώρο των λύσεων" (δηλαδή τον πυρήνα) του επιμορφισμού $(b_1, \dots, b_n) : R^n \twoheadrightarrow R^1$. Ένα τέτοιο πρότυπο P είναι ένα πρότυπο για το οποίο ισχύει $P \oplus R \cong R^n$. Υποθέτουμε ότι $P(b_1, \dots, b_n) \overset{\beta}{\cong} P(c_1, \dots, c_n)$, για κάποιο $(c_1, \dots, c_n) \in \mathsf{UM}_n(R)$. Τότε μπορούμε να συμπληρώσουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P(b_1, \dots, b_n) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & R^n \arrow[r, "(b_1, \dots, b_n)"] \arrow[d, dotted, "\exists \alpha"] & R^1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & P(c_1, \dots, c_n) \arrow[r] & R^n \arrow[r, "(c_1, \dots, c_n)"] & R^1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

με έναν κατάλληλο ισομορφισμό $R^n \overset{\alpha}{\dashrightarrow} R^n$. Να σημειώσουμε ότι οι γραμμές του διαγράμματος είναι ακριβείς και διασπάσιμες. Αν ο $M \in \mathsf{GL}_n(R)$ συμβολίζει τον πίνακα αυτού του ισομορφισμού α, θα ισχύει ότι $(b_1, \dots, b_n) = (c_1, \dots, c_n) \cdot M$.

Αντίστροφα, έστω ότι $(b_1, \dots, b_n) = (c_1, \dots, c_n) \cdot M$ για κάποιον πίνακα $M \in \mathsf{GL}_n(R)$. Τότε ο αυτομορφισμός $R^n \to R^n$ που ορίζεται από τον πίνακα M εισάγει έναν ισομορφισμό των δύο πυρήνων: $P(b_1, \dots, b_n) \cong P(c_1, \dots, c_n)$. □

Ορισμός 2.1.15. *Μία δεξιά unimodular γραμμή πάνω από έναν δακτύλιο* R *καλείται* **συμπληρώσιμη (completable)** *αν είναι δυνατόν να συμπληρωθεί σε έναν τετραγωνικό αντιστρέψιμο πίνακα προσθέτοντας έναν κατάλληλο αριθμό νέων γραμμών.*

Πόρισμα 2.1.16. *Έστω μία γραμμή* $(b_1, \dots, b_n) \in \mathsf{UM}_n(R)$*. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

1. *Η γραμμή* $(b_1, \dots, b_n)$ *είναι συμπληρώσιμη.*

2. $P(b_1, \dots, b_n) \cong R^{n-1}$.

3. $(b_1, \dots, b_n) \sim (1, 0, \dots, 0)$.

Απόδειξη. $(2) \Leftrightarrow (3)$ Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση $(2.1.14)$.

$(1) \Rightarrow (3)$ Έστω ότι η γραμμή $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathsf{UM}_n(R)$ είναι συμπληρώσιμη σε έναν αντιστρέψιμο τετραγωνικό πίνακα $M' \in \mathsf{GL}_n(R)$. Αν $M'M = I_n$, τότε $(1, 0, \ldots, 0) \cdot M' \cdot M = (b_1, \ldots, b_n) \cdot M = (1, 0, \ldots, 0) \cdot I_n = (1, 0, \ldots, 0)$, δηλαδή $(b_1, \ldots, b_n) \sim (1, 0, \ldots, 0)$.

$(3) \Rightarrow (1)$ Έστω $(b_1, \ldots, b_n) = (1, 0, \ldots, 0) \cdot M$. Τότε η γραμμή $(b_1, \ldots, b_n)$ είναι δυνατόν να συμπληρωθεί στον τετραγωνικό αντιστρέψιμο πίνακα M. □

Να σημειώσουμε ότι αν ένας δακτύλιος δεν ικανοποιεί την **IBP** τότε είναι δυνατόν μία γραμμή $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathsf{UM}_n(R)$ να μπορεί να συμπληρωθεί σε έναν ορθογώνιο αντιστρέψιμο πίνακα (ώστε το $P(b_1, \ldots, b_n)$ να είναι ελεύθερο), αλλά δεν μπορεί να συμπληρωθεί σε έναν τετραγωνικό αντιστρέψιμο πίνακα. Στη συνέχεια, για να αποφύγουμε κάτι τέτοιο θα αναφερόμαστε σε μεταθετικούς δακτυλίους. Έτσι έχουμε δύο πλεονεκτήματα. Πρώτον, ο δακτύλιος εφόσον θα είναι μεταθετικός θα ικανοποιεί την **IBP**, οπότε αντιστρέψιμοι πίνακες σημαίνει τετραγωνικά αντιστρέψιμοι πίνακες και δεύτερον, μπορούμε να αναφερόμαστε στην βαθμίδα (rank) των πεπερασμένα παραγόμενων προβολικών R-προτύπων. Αν ισχύει ότι $P \oplus R^m \cong R^n$, τότε $\mathsf{rank}\, P = n - m$.

Εκμεταλλευόμενοι την ύπαρξη της βαθμίδας, μπορούμε να αναδιατυπώσουμε κάποια από τα προηγούμενα αποτελέσματα σε πιο κατάλληλες μορφές. Για παράδειγμα, στην Πρόταση $(2.1.14)$, οι τροχιές του συνόλου $\mathsf{UM}_n(R)$ υπό την $\mathsf{GL}_n(R)$-δράση θα βρίσκονται σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τις κλάσεις ισομορφισμών των πεπερασμένα παραγόμενων ευσταθώς ελεύθερων R-προτύπων τύπου 1 και βαθμίδας $n-1$. Στο Πόρισμα $(2.1.12)$, μπορούμε να επαναλάβουμε τις ισοδύναμες προτάσεις αλλά με έναν κατάλληλο περιορισμό όσο αναφορά την βαθμίδα, οπότε:

Πρόταση 2.1.17. *Για κάθε ακέραιο $d \geq 0$, οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

1. *Κάθε πεπερασμένα παραγόμενο ευσταθώς ελεύθερο R-πρότυπο με* rank $> d$ *είναι ελεύθερο.*

2. *Κάθε unimodular γραμμή πάνω από τον δακτύλιο R μήκους $\geq d+2$ μπορεί να συμπληρωθεί σε έναν (τετραγωνικό) αντιστρέψιμο πίνακα πάνω από τον δακτύλιο R.*

3. *Για $n \geq d+2$, η ομάδα $\mathsf{GL}_n(R)$ δρά μεταβατικά στο σύνολο $\mathsf{UM}_n(R)$.*

Ορισμός 2.1.18. *Ένας μεταθετικός δακτύλιος R καλείται* **d-Hermite** *αν ικανοποιεί μία από τις παραπάνω ισοδύναμες προτάσεις.*

Παρατήρηση 2.1.19. Οι 0-Hermite δακτύλιοι είναι απλά Hermite. Επίσης, εφόσον μία unimodular γραμμή μήκους 2 είναι πάντα συμπληρώσιμη σε έναν πίνακα με ορίζουσα 1, οι 1-Hermite δακτύλιοι είναι απλά Hermite.

Παράδειγμα 2.1.20. Στο επόμενο κεφάλαιο, θα αποδείξουμε ότι, αν ο R είναι δακτύλιος της Noether και έχει διάσταση του Krull d, τότε ο R είναι d-Hermite.

Σχόλιο 2.1.21. Η σχέση μεταξύ των δακτυλίων Hermite και της εικασίας του Serre είναι η εξής: Έστω ο δακτύλιος πολυωνύμων d μεταβλητών $R = k[t_1, \ldots, t_d]$, όπου το k είναι ένα σώμα. Θα αποδειχτεί ότι κάθε προβολικό R-πρότυπο P είναι ευσταθώς ελεύθερο. Λαμβάνοντας υπόψιν αυτό το αποτέλεσμα, η εικασία του Serre μπορεί να μεταφραστεί στο ακόλουθο ερώτημα:

Είναι ο δακτύλιος πολυωνύμων $\mathbf{d}$ μεταβλητών $\mathbf{R} = \mathbf{k}[\mathbf{t_1}, \ldots, \mathbf{t_d}]$, όπου το $\mathbf{k}$ είναι ένα σώμα, δακτύλιος Hermite;

Ισοδύναμα, είναι δυνατόν κάθε $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathsf{UM}_n(k[t_1, \ldots, t_d])$ να μπορεί να συμπληρωθεί σε έναν $n \times n$ πίνακα με ορίζουσα που ανήκει στο $k - \{0\}$;

Σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα, ο $k[t_1, \ldots, t_d]$ είναι d-Hermite, εφόσον η Krull-διάστασή του είναι d.

Συνεχίζουμε με δύο ακόμη αποτελέσματα για τα ευσταθώς ελεύθερα πρότυπα πάνω από μεταθετικούς δακτυλίους.

Θεώρημα 2.1.22. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος. Υποθέτουμε ότι $P \oplus R^{n-1} \cong R^n$, δηλαδή το P είναι ευσταθώς ελεύθερο πρότυπο βαθμίδας 1. Τότε $P \cong R$.*

Απόδειξη. Έστω ότι το P παριστάνει τον χώρο λύσεων ενός δεξιά αντιστρέψιμου $(n-1) \times n$ πίνακα M. Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι μέγιστες ελάσσονες $b_1, \ldots, b_n$ του πίνακα M παράγουν το μοναδιαίο ιδεώδες. Έστω ότι οι μέγιστες ελάσσονες $b_1, \ldots, b_n$ του πίνακα M δεν παράγουν το μοναδιαίο ιδεώδες. Τότε θα υπάρχει ένα μέγιστο ιδεώδες $\mathfrak{m}$ που θα περιέχει τις $b_1, \ldots, b_n$. Έστω ο δακτύλιος τοπικοποίησης $\overline{R} = R/\mathfrak{m}$. Εφόσον ο $\overline{M} \in M_{n-1,n}(R/\mathfrak{m})$ είναι δεξιά αντιστρέψιμος, έχει βαθμίδα $n-1$. Οπότε μπορεί να συμπληρωθεί σε έναν αντιστρέψιμο πίνακα $M^* \in \mathsf{GL}_n(R/\mathfrak{m})$. Αλλά από το ανάπτυγμα Laplace της $\det(M^*)$ κατά μήκος της τελευταίας γραμμής, ισχύει ότι $\det(M^*) = 0$ εφόσον όλες οι μέγιστες ελάσσονες ανήκουν στο μεγιστοτικό ιδεώδες $\mathfrak{m}$. Άτοπο.

Άρα, οι μέγιστες ελάσσονες $b_1, \ldots, b_n$ του πίνακα M παράγουν το μοναδιαίο ιδεώδες. Άρα υπάρχουν $a_1, \ldots, a_n \in R$ τέτοια ώστε $a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n = 1$. Οπότε, μπορούμε να συμπληρώσουμε τον πίνακα M σε έναν πίνακα με ορίζουσα 1 προσθέτοντας μία τελευταία γραμμή $a_1, \ldots, a_n$, με κατάλληλα πρόσημα. Σύμφωνα με την Πρόταση (2.1.9), αυτό συνεπάγεται ότι το P είναι ελεύθερο. Άρα, $P \cong R$. $\square$

Θεώρημα 2.1.23. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος. Αν ισχύει ότι $P \oplus R \cong R^{2n}$ για κάποιο $n \geq 1$, τότε $P \cong R \oplus Q$ για κάποιο R-πρότυπο Q. (Ένα ευσταθώς ελεύθερο μη αναλύσιμο πρότυπο τύπου 1 που δεν είναι ισόμορφο με τον δακτύλιο R πρέπει να έχει άρτια βαθμίδα.)*

Απόδειξη. Συνθέτοντας έναν ισομορφισμό $R^{2n} \cong P \oplus R$ με την προβολή στον δεύτερο αθροιστέο προκύπτει μία επί απεικόνιση $\varphi : R^{2n} \to R$ με πυρήνα ισόμορφο με το P, δηλαδή $\mathsf{Ker}\,\varphi \cong P$. Εφόσον κάθε γραμμική απεικόνιση $R^{2n} \to R$ είναι πολλαπλασιασμός με ένα σταθερό διάνυσμα, υπάρχει κάποιο $w \in R^{2n}$ τέτοιο ώστε $\varphi(v) = v \cdot w$ για κάθε $v \in R^{2n}$. Έστω $w = (c_1, \ldots, c_{2n})$. Τότε

$$\varphi(c_2, -c_1, \ldots, c_{2n}, -c_{2n-1}) = (c_2, -c_1, \ldots, c_{2n}, -c_{2n-1}) \cdot (c_1, \ldots, c_{2n}) = 0$$

Τότε $u = (c_2, -c_1, \ldots, c_{2n}, -c_{2n-1}) \in \mathsf{Ker}\,\varphi \cong P$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα υποπρότυπο Q του P τέτοιο ώστε $P \cong R \oplus Q$.

Επιλέγουμε το $(r_1, \ldots, r_{2n}) \in R^{2n}$ τέτοιο ώστε $\varphi(r_1, \ldots, r_{2n}) = 1$, οπότε $c_1 r_1 + \ldots + c_{2n} r_{2n} = 1$. Τότε $u \cdot (r_2, -r_1, \ldots, r_{2n}, -r_{2n-1}) = 1$, οπότε για την γραμμική απεικόνιση $f : R^{2n} \to R$ που δίνεται από $f(v) = v \cdot (r_2, -r_1, \ldots, r_{2n}, -r_{2n-1})$ ισχύει ότι $f(u) = 1$. Εφόσον $u \in \mathsf{Ker}\,\varphi$, ο περιορισμός της f στην γραμμική απεικόνιση $\mathsf{Ker}\,\varphi \to R$ είναι επί και προκύπτει ο ισομορφισμός $uR \xrightarrow{\cong} R$. Άρα $P \cong \mathsf{Ker}\,\varphi = uR \oplus \mathsf{Ker}\,f \cong R \oplus \mathsf{Ker}\,f$. $\square$

Πόρισμα 2.1.24. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος. Ο R είναι δακτύλιος του Hermite αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένα παραγόμενο ευσταθώς ελεύθερο R-πρότυπο άρτιας βαθμίδας είναι ελεύθερο.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο μεταθετικός δακτύλιος R είναι δακτύλιος του Hermite. Τότε τα πεπερασμένα παραγόμενα ευσταθώς ελεύθερα R-πρότυπα είναι ελεύθερα, συνεπώς και τα πεπερασμένα παραγόμενα ευσταθώς ελεύθερα R-πρότυπα άρτιας βαθμίδας είναι ελεύθερα.

Αντίστροφα, έστω ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενο ευσταθώς ελεύθερο R-πρότυπο άρτιας βαθμίδας είναι ελεύθερο,όπου R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι ο R είναι δακτύλιος του Hermite. Αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενο ευσταθώς ελεύθερο R-πρότυπο είναι ελεύθερο. Τα πεπερασμένα παραγόμενα ευσταθώς ελεύθερα R-πρότυπα άρτιας βαθμίδας είναι ελεύθερα, οπότε μένει να αποδείξουμε ότι τα πεπερασμένα παραγόμενα ευσταθώς ελεύθερα R-πρότυπα περιττής βαθμίδας είναι ελεύθερα.

Έστω P ένα πεπερασμένα παραγόμενο ευσταθώς ελεύθερο R-πρότυπο περιττής βαθμίδας $P \oplus R^k \cong R^l$, (όπου $k \leq l$) με $\mathsf{rank}\,P = l - k$ περιττός αριθμός. Θέλουμε να δείξουμε ότι το P είναι ελεύθερο.

Θα το αποδείξουμε επαγωγικά. Για $k = 0$, θα ισχύει ότι $P \cong R^l$, άρα το P είναι ελεύθερο. Για $k > 0$, θα ισχύει $P \oplus R^k \cong R^l \Rightarrow (P \oplus R) \oplus R^{k-1} \cong R^l$, οπότε το $P \oplus R$ είναι ευσταθώς ελεύθερο άρτιας βαθμίδας $l-(k-1)$. Άρα, το $P \oplus R$ είναι ελεύθερο. Οπότε, $P \oplus R \cong R^{l-k+1}$. Τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα (2.1.22) ύπάρχει κάποιο Q, τέτοιο ώστε $P \cong R \oplus Q$. Άρα, $P \oplus R \cong R^{l-k+1} \Rightarrow (Q \oplus R) \oplus R \cong R^{l-k+1}$. Οπότε $Q \oplus R^2 \cong R^{l-k+1}$, άρα το $Q \oplus R^2$ είναι ελεύθερο άρτιας βαθμίδας $l-k+1$. Συνεπώς, το Q είναι ευσταθώς ελεύθερο περιττής βαθμίδας $(l-k+1)-2 = l-k-1$. Επαγωγικά, $Q \cong R^{l-k-1}$, οπότε $P \cong R \oplus Q \cong R^{l-k}$. Άρα το P είναι ελεύθερο. □

Παρατήρηση 2.1.25. Στο Πόρισμα (2.1.24), αν ο δακτύλιος R έχει πεπερασμένη διάσταση του Krull d, τότε, για να ελέγξουμε αν ο R είναι δακτύλιος του Hermite, αρκεί να ελέγξουμε αν τα πεπερασμένα παραγόμενα ευσταθώς ελεύθερα πρότυπα P βαθμίδας $2r$ στο πεπερασμένο διάστημα $2 \leq 2r \leq d$ είναι ελεύθερα (σύμφωνα με το Παράδειγμα (2.1.20)). Για παράδειγμα, για να αποδείξουμε ότι ο δακτύλιος $R = k[t_1, t_2, t_3]$ είναι δακτύλιος του Hermite (όπου το k είναι σώμα), αρκεί να αποδείξουμε ότι τα ευσταθώς ελεύθερα R-πρότυπα βαθμίδας 2 είναι ελεύθερα.

2.2 Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί

Έστω R ένας οποιοσδήποτε δακτύλιος. Αν οι $a = (a_1, \ldots, a_n)$ και $b = (b_1, \ldots, b_n)$ ανήκουν στο σύνολο $\mathsf{UM}_n(R)$ των δεξιών unimodular γραμμών, έχουμε συμφωνήσει να γράφουμε $a \sim b$ για να δηλώσουμε το γεγονός ότι οι a και b είναι συζυγείς υπό την δεξιά δράση του πολλαπλασιασμού της ομάδας $\mathsf{GL}_n(R)$. Γενικότερα, αν G είναι μία υποομάδα της $\mathsf{GL}_n(R)$, θα γράφουμε $\sim_G$ για να συμβολίσουμε την συζυγία των δεξιών unimodular γραμμών υπό την δράση της G. Με έναν απλό πολλαπλασιασμό πινάκων, παρατηρούμε ότι, για μία δεξιά unimodular γραμμή $a \in \mathsf{UM}_n(R)$, ισχύει ότι $a \sim_G (1, 0, \ldots, 0)$ αν και μόνο αν η a είναι συμπληρώσιμη σε έναν πίνακα της G. Αυτό, εν μέρει, γενικεύει το Πόρισμα (2.1.16).

Θα συνεχίσουμε με κάποιους ορισμούς από την θεωρία πινάκων, οι οποίοι θα μας βοηθήσουν στις αποδείξεις που σχετίζονται με τις unimodular γραμμές.

Ορισμός 2.2.1. *Έστω R ένας δακτύλιος και n ένας θετικός ακέραιος. Για $i, j \leq n$, συμβολίζουμε με e_{ij} τον $n \times n$-πίνακα του οποίου το μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο είναι το 1 το οποίο βρίσκεται στην (i, j)-θέση. Αυτού του είδους τους πίνακες, τους ονομάζουμε* **πίνακες μονάδες**.

Ορισμός 2.2.2. *Έστω R ένας δακτύλιος, $x \in R$ και n ένας θετικός ακέραιος. Συμβολίζουμε με $\mathsf{E}_{ij}(x)$ όλους τους πίνακες της μορφής $I_n + xe_{ij}$, όπου I_n ο μοναδιαίος πίνακας, $x \in R$, $i \neq j$ και e_{ij} οι πίνακες μονάδες. Οι πίνακες αυτής της μορφής ονομάζονται* **στοιχειώδεις πίνακες**.

Οι στοιχειώδεις πίνακες $\mathsf{E}_{ij}(x) := I_n + xe_{ij}$ είναι αντιστρέψιμοι, με αντίστροφους τους πίνακες της μορφής $\mathsf{E}_{ij}(x)^{-1} = \mathsf{E}_{ij}(-x) := I_n - xe_{ij}$, με $i \neq j$. Ισχύει δηλαδή ότι $\mathsf{E}_{ij}(x)\mathsf{E}_{ij}(-x) = \mathsf{E}_{ij}(0) = I_n$.

Ορισμός 2.2.3. *Συμβολίζουμε με $\mathsf{E}_n(R)$ την υποομάδα της ομάδας $\mathsf{GL}_n(R)$, που παράγεται από όλους τους στοιχειώδεις πίνακες $\mathsf{E}_{ij}(x)$. Η ομάδα $\mathsf{E}_n(R)$ καλείται* **ομάδα των στοιχειωδών πινάκων**.

Ορισμός 2.2.4. *Ένας* **διαγώνιος πίνακας** *είναι ένας πίνακας του οποίου τα στοιχεία εκτός της κύριας διαγωνίου είναι όλα μηδέν. Δηλαδή, ο πίνακας $D = (d_{i,j})$ με n γραμμές και n στήλες είναι διαγώνιος αν:*

$$d_{i,j} = 0 \text{ για όλα τα } i \neq j, \ \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$$

Με $diag(x_1, \ldots, x_n)$ συμβολίζουμε τον διαγώνιο πίνακα με στοιχεία $x_1, \ldots, x_n$ κατά μήκος της διαγωνίου.

Παρατήρηση 2.2.5. 1. Κάθε επιμορφισμός δακτυλίων $R \to S$ επάγει έναν επιμορφισμό ομάδων $\mathsf{E}_n(R) \to \mathsf{E}_n(S)$. Αυτό δεν ισχύει γενικά για τις ομάδες $\mathsf{GL}_n, \mathsf{SL}_n$.

2. Αν ο δακτύλιος R είναι μεταθετικός, έτσι ώστε να ορίζεται η γραμμική ομάδα $\mathsf{SL}_n(R)$, τότε $\mathsf{E}_n(R) \subset \mathsf{SL}_n(R)$. Οι δύο αυτές ομάδες ταυτίζονται όταν μιλάμε για ημιαπλές ή Ευκλείδειες περιοχές.

3. Πολλαπλασιάζοντας έναν $n \times n$ πίνακα M από τα αριστερά με έναν πίνακα $\mathsf{E}_{ij}(x) = I_n + xe_{ij}$ είναι σαν να προσθέτουμε ένα αριστερό πολλαπλάσιο του x της j-γραμμής του πίνακα M στην i-γραμμή του M.

   Πολλαπλασιάζοντας έναν $n \times n$ πίνακα M από τα δεξιά με έναν πίνακα $\mathsf{E}_{ij}(x) = I_n + xe_{ij}$ είναι σαν να προσθέτουμε ένα δεξιό πολλαπλάσιο του x της i-στήλης του πίνακα M στην j-στήλη του M.

   Αυτές οι πράξεις καλούνται, αντίστοιχα, οι **στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμής και στήλης**.

4. Με τρεις στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στήλης μπορούμε να εναλλάξουμε δύο στήλες έχοντας και μια αλλαγή προσήμου. Δηλαδή, αν συμβολίσουμε με v, w δύο στήλες, ξεχνάμε τις υπόλοιπες στήλες και εκτελούμε τους ακόλουθους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς:
$$(v, w) \mapsto (v, w + v) \mapsto (-w, w + v) \mapsto (-w, v)$$
   Το ίδιο ισχύει και για γραμμές.
   Για παράδειγμα, ο πίνακας $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{E}_2(R)$, διότι:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Δηλαδή, ισχύει ότι: $(\ldots, a, \ldots, b, \ldots) \sim_{\mathsf{E}_n(R)} (\ldots, b, \ldots, -a, \ldots)$.

5. Οι σύνθετοι πίνακες της μορφής
$$\begin{pmatrix} I_n & A \\ 0 & I_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B & I_m \end{pmatrix}$$
   ανήκουν και οι δύο στην ομάδα $\mathsf{E}_{n+m}(R)$. Επομένως, μετασχηματίζοντας ένα σύνθετο πίνακα με τις παραπάνω στοιχειώδεις πράξεις γραμμής και στήλης, θα είναι θεμιτό να εφαρμόσουμε στοιχειώδεις σύνθετες πράξεις γραμμής και στήλης στον δοσμένο πίνακα. Η παρατήρηση αυτή θα μας φανεί αρκετά χρήσιμη στη συνέχεια.

Συνεχίζουμε με κάποιες βασικές προτάσεις για τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς και παραθέτουμε κάποια παραδείγματα.

Πρόταση 2.2.6. *1. Η ομάδα των διαγώνιων πινάκων που ανήκουν στην $\mathsf{GL}_n(R)$ κανονικοποιεί την ομάδα $\mathsf{E}_n(R)$.*

2.
$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{E}_{2n}(R).$$
Δηλαδή, ισχύει το εξής:
$$(\ldots, a, \ldots, b, \ldots) \sim_{\mathsf{E}_n(R)} (\ldots, -b, \ldots, a, \ldots) \sim_{\mathsf{E}_n(R)} (\ldots, b, \ldots, -a, \ldots).$$

Απόδειξη. 1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε διαγώνιος πίνακας
$$D = diag(1, \ldots, d, \ldots, 1)$$

όπου το d είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του R, κανονικοποιεί την ομάδα $\mathsf{E}_n(R)$. Έστω ότι το d βρίσκεται στην k-γραμμή. Τότε, για $i \neq j$ ισχύει:

$$D \cdot (I_n + xe_{ij}) \cdot D^{-1} = \begin{cases} I_n + xe_{ij} & \text{αν } i \neq k \neq j, \\ I_n + dxe_{ij} & \text{αν } k = i, \\ I_n + xd^{-1}e_{ij} & \text{αν } k = j. \end{cases}$$

2. Αρκεί να αποδείξουμε ότι
$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{E}_{2n}(R).$$
Αυτό προκύπτει από μια σειρά σύνθετων στοιχειωδών μετασχηματισμών στήλης:
$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

□

Λήμμα 2.2.7. *(του Whitehead) Έστω $A, B \in \mathsf{GL}_n(R)$. Τότε, θα ισχύει ότι:*

$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \cdot \mathsf{E}_{2n}(R).$$

Απόδειξη. Προκύπτει από τους ακόλουθους σύνθετους μετασχηματισμούς στήλης:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ I_n & B \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & -AB \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} AB & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

Ο τρίτος μετασχηματισμός προκύπτει από την Πρόταση (2.2.6)(2). □

Πρόταση 2.2.8. *Αν ο δακτύλιος R είναι μεταθετικός, τότε κάθε διαγώνιος πίνακας της ομάδας $\mathsf{SL}_n(R)$ ανήκει στην ομάδα των στοιχειωδών πινάκων $\mathsf{E}_n(R)$.*

Απόδειξη. Έστω $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$ όπου τα $d_i,\ i = 1, \ldots, n$ είναι αντιστρέψιμα στοιχεία του δακτυλίου R. Μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε τον πίνακα D ως εξής:

$$D = diag(d_1, {d_1}^{-1}, 1, \ldots, 1) \cdot diag(1, d_1 d_2, d_3, \ldots, d_n).$$

Με επαγωγή στο n, αρκεί να αποδείξουμε ότι ο διαγώνιος πίνακας $diag(d, d^{-1}) \in \mathsf{E}_2(R)$. Αυτό αποδεικνύεται μετασχηματίζοντας τον πίνακα $diag(d, d^{-1})$ στον ταυτοτικό πίνακα I_2 με στοιχειώδεις πράξεις γραμμής και στήλης.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix} &\overset{\text{στήλη}}{\mapsto} \begin{pmatrix} d & 1 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{γραμμή}}{\mapsto} \begin{pmatrix} d & 1 \\ -(d^{-1}-1)d & d^{-1} - (d^{-1}-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 1 \\ d-1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{γραμμή}}{\mapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d-1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{γραμμή}}{\mapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \end{aligned}$$

□

Πρόταση 2.2.9. *Αν $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathsf{UM}_n(R)$ περιέχει μία δεξιά unimodular υπογραμμή μικρότερου μήκους (ειδικά αν ένα από τα b_i είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του R ή 0), τότε*

$$(b_1, \ldots, b_n) \sim_{\mathsf{E}_n(R)} (1, 0, \ldots, 0).$$

Απόδειξη. Έστω $(b_{i_1}, \ldots, b_{i_m}) \in \mathsf{UM}_m(R)$ περιέχεται στην γραμμή $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathsf{UM}_n(R)$ και έστω $i \notin \{i_1, \ldots, i_m\}$. Γράφουμε

$$b_{i_1}a_{i_1} + \ldots + b_{i_m}a_{i_m} = 1 \text{ για κάποια } a_{i_j} \in R,\ 1 \leq j \leq m.$$

Μετά από μία σειρά στοιχειωδών μετασχηματισμών, μπορούμε να αλλάξουμε τα b_i σε $b_i - (b_{i_1}a_{i_1} + \ldots + b_{i_m}a_{i_m}) \cdot (b_i - 1) = 1$. Συνεχίζοντας με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς, μπορούμε να αλλάξουμε τα άλλα b_j σε 0. Τότε θα ισχύει ότι $(b_1, \ldots, b_n) \sim_{\mathsf{E}_n(R)} e_i$. Γνωρίζουμε ότι ο πίνακας $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{E}_2(R)$, οπότε μπορούμε να δείξουμε ότι $e_i \sim_{\mathsf{E}_n(R)} e_1$. Συνεπώς, $(b_1, \ldots, b_n) \sim_{\mathsf{E}_n(R)} (1, 0, \ldots, 0)$. □

Πρόταση 2.2.10. *Έστω R μία Ευκλείδεια περιοχή.*

1. *Για $n \geq 2$, κάθε γραμμή $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathsf{UM}_n(R)$ είναι στοιχειωδώς ισοδύναμη με την $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, δηλαδή:*

$$(a_1, \ldots, a_n) \sim_{\mathsf{E}_n(R)} e_1 = (1, 0, \ldots, 0).$$

2. *Επιπλέον,* $\mathsf{SL}_n(R) = \mathsf{E}_n(R)$.

Απόδειξη.

1. Έστω R μία Ευκλείδεια περιοχή. Τότε, υπάρχει μία απεικόνιση $\delta : R \to \mathbb{N}$ η οποία καλείται ευκλείδεια νόρμα και ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

   - Αν a/b τότε $\delta(a) \leq \delta(b)$.
   - Για κάθε $a, b \in R$, υπάρχει $q, r \in R$ όπου $b = q \cdot a + r$ και είτε $r = 0$ είτε $\delta(r) < \delta(a)$.

   Από το σύνολο όλων των γραμμών $(a'_1, \ldots, a'_n)$ οι οποίες είναι στοιχειωδώς ισοδύναμες με την γραμμή $(a_1, \ldots, a_n)$, επιλέγουμε εκείνη που έχει το ελάχιστο $\delta(a'_1)$. Αν το $a'_1 = 0$, τότε η γραμμή $(a'_1, \ldots, a'_n)$ περιέχει μία δεξιά unimodular υπογραμμή μικρότερου μήκους, άρα από την Πρόταση (2.2.9) θα ισχύει ότι:

$$(a_1, \ldots, a_n) \sim_{\mathsf{E}_n(R)} (a'_1, \ldots, a'_n) \sim_{\mathsf{E}_n(R)} (1, 0, \ldots, 0).$$

   Αν $a'_1 \neq 0$, τότε θα αποδείξουμε με την εις άτοπον επαγωγή ότι $a'_1 \mid a'_j$ για κάθε $j \geq 2$. Έστω ότι $a'_1 \nmid a'_2$, τότε $a'_2 = a'_1 \cdot q + r$ με $\delta(r) < \delta(a'_1)$. Άρα, θα ισχύει ότι:

$$(a'_1, \ldots, a'_n) \sim_{\mathsf{E}_n(R)} (a'_1, r, a'_3, \ldots, a'_n) \sim_{\mathsf{E}_n(R)} (r, -a_1, a'_3, \ldots, a'_n)$$

   το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεσή μας ότι το $\delta(a'_1)$ είναι ελάχιστο. Άρα, $a'_1 \mid a'_j$ για κάθε $j \geq 2$, οπότε

$$(a'_1, \ldots, a'_n) \sim_{\mathsf{E}_n(R)} (a_1, 0, \ldots, 0).$$

   Οπότε η γραμμή $(a'_1, \ldots, a'_n)$ περιέχει μία δεξιά unimodular υπογραμμή μικρότερου μήκους, άρα από την Πρόταση (2.2.9) θα ισχύει ότι:

$$(a_1, \ldots, a_n) \sim_{\mathsf{E}_n(R)} (a'_1, \ldots, a'_n) \sim_{\mathsf{E}_n(R)} (1, 0, \ldots, 0).$$

2. Εφόσον ο R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος ισχύει ότι $\mathsf{E}_n(R) \subset \mathsf{SL}_n(R)$. Οπότε μένει να αποδείξουμε ότι $\mathsf{SL}_n(R) \subset \mathsf{E}_n(R)$. Έστω $M \in \mathsf{SL}_n(R)$. Σύμφωνα με το πρώτο μέρος αυτής της πρότασης μπορούμε να εκτελέσουμε κατάλληλους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς και να μετατρέψουμε τον πίνακα M σε έναν πίνακα M_1, με πρώτη γραμμή την $(1, 0, \ldots, 0)$. Έπειτα, μετά από μία ακολουθία μετασχηματισμών γραμμής μπορούμε να μετασχηματίσουμε τον πίνακα M_1 στον πίνακα

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M' \end{pmatrix}$$

   όπου $M' \in \mathsf{SL}_{n-1}(R)$. Η απόδειξη ολοκληρώνεται με επαγωγή στο n. □

Πόρισμα 2.2.11. *Έστω $R = \prod_{i=1}^r k_i$ ένα πεπερασμένο ευθύ γινόμενο σωμάτων k_i ή γενικότερα Ευκλείδειων περιοχών.*

1. *Για $n \geq 2$, κάθε γραμμή $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathsf{UM}_n(R)$ είναι στοιχειωδώς ισοδύναμη με την $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, δηλαδή:*

$$(a_1, \ldots, a_n) \sim_{\mathsf{E}_n(R)} e_1 = (1, 0, \ldots, 0).$$

2. *Επιπλέον, $\mathsf{SL}_n(R) = \mathsf{E}_n(R)$.*

Απόδειξη. Έστω $\mathsf{GL}_n(R) = \prod_{i=1}^r \mathsf{GL}_n(k_i)$, δηλαδή μπορούμε να θεωρήσουμε μία γραμμή $a \in \mathsf{GL}_n(R)$ ως μία r-άδα $(a_1, \ldots, a_r)$ με $a_i \in \mathsf{GL}_n(k_i)$. Τότε έστω $a = (a_1, \ldots, a_r) \in \mathsf{GL}_n(R) = \prod_{i=1}^r \mathsf{GL}_n(k_i)$.

Ισχυριζόμαστε ότι ισχύει το εξής $a \in \mathsf{E}_n(R) \Leftrightarrow a_i \in \mathsf{E}_n(k_i)$ για $i = 1, \ldots, r$. Το ευθύ προκύπτει με προφανή τρόπο. Αποδεικνύουμε το αντίστροφο.

Ας υποθέσουμε ότι κάθε a_i είναι ένα γινόμενο στοιχειωδών πινάκων,

$$a_i = \varepsilon_{i1} \cdots \varepsilon_{im_i}.$$

Κάθε r-άδα $\varepsilon'_{ij} := (I_n, \ldots, I_n, \varepsilon_{ij}, I_n, \ldots, I_n)$, όπου το ε_{ij} βρίσκεται στην i-θέση, αποτελεί έναν στοιχειώδη πίνακα πάνω από το $\prod_{i=1}^r k_i$. Τότε

$$a = \varepsilon'_{11} \cdots \varepsilon'_{1m_1} \cdots \varepsilon'_{r1} \cdots \varepsilon'_{rm_r} \in \mathsf{E}_n(R).$$

Έστω $(b_1, \ldots, b_n)$ μία unimodular γραμμή πάνω από τον δακτύλιο R. Θεωρούμε την γραμμή αυτή ως μία r-άδα

$$((b_1, \ldots, b_n)_1, \ldots, (b_1, \ldots, b_n)_r),$$

όπου $(b_1, \ldots, b_n)_i$ είναι unimodular γραμμή πάνω από το σώμα k_i. Σύμφωνα με την Πρόταση (2.2.10), υπάρχουν $a_i \in \mathsf{E}_n(k_i)$ τέτοια ώστε $(b_1, \ldots, b_n)_i a_i = (1, 0, \ldots, 0)_i$. Σύμφωνα με τον ισχυρισμό για $a := (a_1, \cdots, a_r)$ προκύπτει ότι $(b_1, \ldots, b_n)a = (1, 0, \ldots, 0)$ και $a \in \mathsf{E}_n(R)$. □

Πόρισμα 2.2.12. *Έστω R ένας μεταθετικός ημιτοπικός δακτύλιος και $u \in \mathsf{UM}_n(R)$ μία unimodular γραμμή. Τότε $u \sim_{\mathsf{E}_n(R)} e_1$.*

Απόδειξη. Έστω $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ τα μεγιστοτικά ιδεώδη του ημιτοπικού δακτυλίου R και $J = \bigcap_{i=1}^r \mathfrak{m}_i$ το ριζικό του Jacobson του δακτυλίου R.

Ισχύει ότι $R/J \simeq \prod_{i=1}^r R/\mathfrak{m}_i$. Δηλαδή, το R/J είναι ένα πεπερασμένο ευθύ γινόμενο σωμάτων. Από το προηγούμενο πόρισμα, υπάρχει $\overline{\varepsilon} \in E_n(\overline{R})$ τέτοιο ώστε $\overline{u\varepsilon} = \overline{e_1}$. Μπορούμε να μετατρέψουμε το $\overline{\varepsilon}$ σε κάποιο $\varepsilon \in \mathsf{E}_n(R)$, οπότε ισχύει ότι $u\varepsilon = (a_1, \ldots, a_n)$ με $a_1 \equiv 1 (\mathsf{mod}\, J)$. Άρα, $a_1 \in R^\times$ και επιπλέον $(a_1, \ldots, a_n) \sim_{\mathsf{E}_n(R)} e_1$. □

Το ίδιο ισχύει αν το $R/J(R)$ είναι ένα πεπερασμένο γινόμενο Ευκλείδειων περιοχών.

Παρατήρηση 2.2.13. Οι Ευκλείδειες περιοχές και οι μεταθετικοί ημιτοπικοί δακτύλιοι είναι δακτύλιοι του Hermite.

Στην Παρατήρηση (2.2.5)(1) αναφέραμε ότι κάθε επιμορφισμός δακτυλίων $R \to S$ επάγει έναν επιμορφισμό ομάδων $\mathsf{E}_n(R) \to \mathsf{E}_n(S)$. Αυτό δεν ισχύει γενικά για τις ομάδες $\mathsf{GL}_n, \mathsf{SL}_n$. Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.2.14. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος, με*

$$(a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s) \in \mathsf{UM}_{r+s}(R),\ s \geq 1.$$

Έστω $I = \sum R \cdot a_i$ και $\overline{R} = R/I$. Αν $(\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_s}) \sim_{E_s(\overline{R})} (\overline{1}, \overline{0}, \ldots, \overline{0})$, τότε

$$(a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s) \sim_{\mathsf{E}_{r+s}(R)} (1, 0, \ldots, 0).$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας τις στοιχειώδεις πράξεις οι οποίες μετασχηματίζουν την γραμμή $(\overline{b_1},\ldots,\overline{b_s})$ στην $(\overline{1},\overline{0},\ldots,\overline{0})$, ισχύει ότι

$$(a_1,\ldots,a_r,b_1,\ldots,b_s)\sim_{\mathsf{E}_{r+s}(R)}(a_1,\ldots,a_r,b_1',\ldots,b_s')$$

όπου $(b_1',\ldots,b_s')\equiv(1,0,\ldots,0)(\mathsf{mod}\, I)$. Εφαρμόζοντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς, μετατρέπουμε την γραμμή $(a_1,\ldots,a_r,b_1',\ldots,b_s')$ στην γραμμή $(a_1,\ldots,\,a_r,1,0,\ldots,0)$. Οπότε η γραμμή $(a_1,\ldots,a_r,b_1,\ldots,b_s)$ περιέχει μία δεξιά unimodular υπογραμμή μικρότερου μήκους. Σύμφωνα με την Πρόταση (2.2.9) συμπεραίνουμε ότι

$$(a_1,\ldots,a_r,b_1,\ldots,b_s)\sim_{\mathsf{E}_{r+s}(R)}(1,0,\ldots,0)$$ □

Πόρισμα 2.2.15. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος, με*

$$(a_1,\ldots,a_r,b_1,\ldots,b_s)\in\mathsf{UM}_{r+s}(R),\ \ s\geq 2.$$

Αν $R/\sum R\cdot a_i$ είναι μία ευκλείδεια περιοχή ή $\sum R\cdot a_i$ περιέχεται μόνο σε μεγιστοτικά ιδεώδη του R το πολύ πεπερασμένα, τότε

$$(a_1,\ldots,a_r,b_1,\ldots,b_s)\sim_{\mathsf{E}_{r+s}(R)}(1,0,\ldots,0).$$

2.3 Η ομάδα του Grothendieck K_0

Αναπτύσσουμε εν συντομία την θεωρία της ομάδας του Grothendieck K_0 για τυχαίους δακτυλίους R, διότι θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη στην συνέχεια σε ένα σημαντικό θεώρημα του Serre.

Παρουσιάζουμε, αρχικά την κατασκευή της ομάδας του Grothendieck K_0. Έστω R ένας τυχαίος δακτύλιος. Συμβολίζουμε με $\mathfrak{P}(R)$ το σύνολο όλων των πεπερασμένα παραγόμενων προβολικών R-προτύπων. Έστω $P\in\mathfrak{P}(R)$. Συμβολίζουμε με (P) την κλάση ισομορφισμών του προτύπου P. Έστω G μία ελεύθερη αβελιανή ομάδα που παράγεται από τα σύμβολα $\{(P)\,:\,P\in\mathfrak{P}(R)\}$ και έστω H μία υποομάδα της G που παράγεται από τις εκφράσεις $(P\oplus Q)-(P)-(Q)$. Τότε, η ομάδα του Grothendieck K_0R είναι μία προσθετική αβελιανή ομάδα που παράγεται από τα σύμβολα (P) και ορίζεται ως εξής:

$$K_0R=G/H.$$

Αν συμβολίσουμε με $[P]$ την εικόνα της κλάσης (P) στην ομάδα K_0R, τότε θα ισχύει ότι $[P\oplus Q]=[P]+[Q]\in K_0R$, όπου $P,Q\in\mathfrak{P}(R)$. Γενικότερα, αν υπάρχει μία ακριβής ακολουθία από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R-πρότυπα $P_i\in\mathfrak{P}(R)$

$$0\longrightarrow P_n\longrightarrow P_{n-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow P_0\longrightarrow 0,$$

τότε $\sum(-1)^i[P_i]=0\in K_oR$. Αυτό προκύπτει αν διασπάσουμε την παραπάνω ακολουθία σε σύντομα ακριβείς ακολουθίες και χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n. Να σημειώσουμε ότι όλα τα πρότυπα είναι πεπερασμένα παραγόμενα και προβολικά οπότε κάθε σύντομα ακριβής ακολουθία είναι διασπάσιμη.

Ένα τυχαίο στοιχείο της ομάδας K_0R θα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$z=[P_1]+\cdots+[P_m]-[Q_1]-\cdots-[Q_n]=[P]-[Q],$$

όπου $P=P_1\oplus\cdots\oplus P_m,\ Q=Q_1\oplus\cdots\oplus Q_n$. Αν επιλέξουμε κάποιο $Q'\in\mathfrak{P}(R)$ τέτοιο ώστε $Q\oplus Q'\cong R^t$, τότε το τυχαίο στοιχείο της ομάδας K_0R παίρνει την μορφή:

$$z=[P\oplus Q']-[Q\oplus Q']=[P_1]-[R^t]$$

όπου $P_1=P\oplus Q'\in\mathfrak{P}(R)$.

Παρατήρηση 2.3.1. Αν $f : R \to S$ είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων, τότε ο f επάγει έναν καλά ορισμένο ομομορφισμό ομάδων $f_* : K_0R \to K_0S$ τέτοιον ώστε $f_*[P] = [S \otimes_R P]$, για κάθε $P \in \mathfrak{P}(R)$. Λαμβάνοντας υπόψιν αυτή την παρατήρηση προκύπτει ότι η K_0 είναι ένας συναλλοίωτος συναρτητής από την κατηγορία των δακτυλίων στην κατηγορία των προσθετικών αβελιανών ομάδων.

Πρόταση 2.3.2. *Έστω $P, Q \in \mathfrak{P}(R)$, τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

1. $[P] = [Q] \in K_0R$.
2. *Υπάρχει κάποιο $T \in \mathfrak{P}(R)$ τέτοιο ώστε $P \oplus T \cong Q \oplus T$ (σε αυτή την περίπτωση τα P, Q ονομάζονται ευσταθώς ισόμορφα).*
3. *Υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός t τέτοιος ώστε $P \oplus R^t \cong Q \oplus R^t$.*

Απόδειξη. (2) $\Rightarrow$ (3) Έστω ότι υπάρχει κάποιο $T \in \mathfrak{P}(R)$ τέτοιο ώστε $P \oplus T \cong Q \oplus T$. Εφόσον το T είναι προβολικό, επιλέγουμε ένα R-πρότυπο S τέτοιο ώστε το πρότυπο $T \oplus S$ να είναι ελεύθερο. Τότε, υπάρχει κάποιο $t \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $T \oplus S \cong R^t$. Οπότε ισχύει το εξής:

$$P \oplus T \cong Q \oplus T \Rightarrow P \oplus T \oplus S \cong Q \oplus T \oplus S \Rightarrow P \oplus R^t \cong Q \oplus R^t.$$

Άρα, υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός t τέτοιος ώστε $P \oplus R^t \cong Q \oplus R^t$.

(3) $\Rightarrow$ (2) Έστω ότι υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός t τέτοιος ώστε $P \oplus R^t \cong Q \oplus R^t$. Το R^t είναι ένα ελεύθερο R-πρότυπο άρα και προβολικό. Θέτοντας $R^t = T$ καταλήγουμε στο ότι υπάρχει κάποιο $T \in \mathfrak{P}(R)$ τέτοιο ώστε $P \oplus T \cong Q \oplus T$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Έστω ότι $[P] = [Q] \in K_0R = G/H$. Τότε $(P) - (Q) \in H$, οπότε θα ισχύει:

$$(P) - (Q) = \sum_i \{(P_i \oplus Q_i) - (P_i) - (Q_i)\} - \sum_j \{(P'_j \oplus Q'_j) - (P'_j) - (Q'_j)\},$$

όπου όλα τα πρότυπα είναι πεπερασμένα παραγόμενα και προβολικά. Άρα, θα ισχύει το εξής:

$$(P) + \sum_i \{(P_i) + (Q_i)\} + \sum_j (P'_j \oplus Q'_j) = (Q) + \sum_i (P_i \oplus Q_i) + \sum_j \{(P'_j) + (Q'_j)\}.$$

Εφόσον η ομάδα G είναι ελεύθερη, τότε $\sum (M_\alpha) = \sum (N_\beta) \Rightarrow \bigoplus M_\alpha \cong \bigoplus N_\beta$. Θέτοντας $T = \bigoplus_i \{P_i \oplus Q_i\} \oplus \bigoplus_j \{P'_i \oplus Q'_j\}$, καταλήγουμε στο ότι τα P, Q είναι ευσταθώς ισόμορφα, δηλαδή $P \oplus T \cong Q \oplus T$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Έστω ότι υπάρχει κάποιο $T \in \mathfrak{P}(R)$ τέτοιο ώστε $P \oplus T \cong Q \oplus T$. Τότε σύμφωνα με το (3), υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός t τέτοιος ώστε $P \oplus R^t \cong Q \oplus R^t$. Οπότε, $[P \oplus R^t] = [Q \oplus R^t]$, εφόσον το R^t είναι προφανώς προβολικό. Άρα, θα ισχύει το εξής:

$$[P \oplus R^t] = [Q \oplus R^t] \Rightarrow [P] + [R^t] = [Q] + [R^t] \Rightarrow [P] = [Q].$$ □

Πόρισμα 2.3.3. *Έστω $P \in \mathfrak{P}(R)$. Τότε το P είναι ευσταθώς ελεύθερο αν και μόνο αν $[P] \in \mathbb{Z} \cdot [R]$. Οπότε, $K_0R = \mathbb{Z} \cdot [R]$ αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό R-πρότυπο είναι ευσταθώς ελεύθερο.*

Απόδειξη. Έστω $P \in \mathfrak{P}(R)$ και έστω ότι το P είναι ευσταθώς ελεύθερο. Τότε θα ισχύει ότι $P \oplus R^m \cong R^n$. Οπότε $[P] = [R^n] - [R^m] = (n - m) \cdot [R] \Rightarrow [P] \in \mathbb{Z} \cdot [R]$.

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει $[P] \in \mathbb{Z} \cdot [R]$, άρα $[P] = r \cdot [R]$, $r \in \mathbb{Z}$. Επιλέγουμε έναν ακέραιο s τέτοιον ώστε $r + s \geq 0$. Τότε $[P \oplus R^s] = (r + s) \cdot [R] = [R^{r+s}] \in K_0R$. Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση θα υπάρχει ένας φυσικός αριθμός t τέτοιος ώστε να ισχύει $P \oplus R^s \oplus R^t \cong R^{r+s+t}$. Οπότε το πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό R-πρότυπο P είναι ευσταθώς ελεύθερο. □

Πόρισμα 2.3.4. *Αν κάποιο $P \in \mathfrak{P}(R)$ επιδέχεται μία πεπερασμένα ελεύθερη επίλυση, δηλαδή αν υπάρχει ακολουθία*

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow P \longrightarrow 0,$$

όπου τα F_i είναι ελεύθερα R-πρότυπα πεπερασμένης βαθμίδας, τότε το P είναι ευσταθώς ελεύθερο. Αν, επιπλέον, ο R είναι μεταθετικός δακτύλιος και το πρότυπο P έχει βαθμίδα 1 ($\operatorname{rank} P = 1$), τότε $P \cong R$.

Απόδειξη. Έστω ότι κάποιο $P \in \mathfrak{P}(R)$ επιδέχεται μία πεπερασμένα ελεύθερη επίλυση, δηλαδή αν υπάρχει ακολουθία

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow P \longrightarrow 0,$$

όπου τα F_i είναι ελεύθερα R-πρότυπα πεπερασμένης βαθμίδας. Τότε $[P] = \sum(-1)^i[F_i] \in \mathbb{Z}\cdot[R]$, οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα το P είναι ευσταθώς ελεύθερο. Αν, επιπλέον, ο R είναι μεταθετικός δακτύλιος και το ευσταθώς ελεύθερο πρότυπο P έχει βαθμίδα 1 ($\operatorname{rank} P = 1$), τότε σύμφωνα με την Πρόταση (2.1.21) ισχύει ότι $P \cong R$. □

Πόρισμα 2.3.5. *Ένας δακτύλιος R ικανοποιεί την ιδιότητα της αναλλοίωτης βάσης (IBP) αν και μόνο αν η $[R]$ έχει άπειρη τάξη στην ομάδα K_0R, δηλαδή αν και μόνο αν $\mathbb{Z}\cdot[R] \cong \mathbb{Z}$.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο δακτύλιος R έχει άπειρη τάξη. Τότε $R^r \cong R^s \Rightarrow (r-s)\cdot[R] = 0$ στην ομάδα K_0R, οπότε $r = s$. Συνεπώς ο δακτύλιος R ικανοποιεί την ιδιότητα της αναλλοίωτης βάσης (IBP).

Αντίστροφα, έστω ότι ο δακτύλιος R ικανοποιεί την ιδιότητα της αναλλοίωτης βάσης (IBP) και έστω ότι ο R έχει πεπερασμένη τάξη. Τότε θα ισχύει ότι $m\cdot[R] = 0$, για κάποιο $m > 0$, οπότε $[R^m] = [0] \in K_0R$. Σύμφωνα με την Πρόταση (2.3.2), υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός t τέτοιος ώστε να ισχύει $R^m \oplus R^t \cong R^t$, τότε εφόσον ο δακτύλιος R ικανοποιεί την ιδιότητα της αναλλοίωτης βάσης (IBP) θα ισχύει ότι $m+t = t \Rightarrow m = 0$. Άτοπο, αφού $m > 0$. Συνεπώς, ο δακτύλιος R έχει άπειρη τάξη. □

Συνδυάζοντας τα Πορίσματα (2.3.3) και (2.3.5) καταλήγουμε στην ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 2.3.6. *Αν ένας δακτύλιος R ικανοποιεί την ιδιότητα της αναλλοίωτης βάσης (IBP) και όλα τα πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R-πρότυπα είναι ευσταθώς ελεύθερα, τότε $K_0R \cong \mathbb{Z}$ με γεννήτορα το $[R]$.*

Ολοκληρώνουμε αυτή την παράγραφο με την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 2.3.7. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος και $P, Q \in \mathfrak{P}(R)$. Αν $\operatorname{rank} P = 1$, τότε $[P] = [Q] \in K_0R \Rightarrow P \cong Q$.*

Ολοκληρώνουμε αυτή την παράγραφο με το ακόλουθο Θεώρημα το οποίο παρουσιάζει μια ισοδύναμη εκδοχή της εικασίας του Serre με χρήση της ομάδας Grothendieck.

Θεώρημα 2.3.8. *Έστω k ένα σώμα. Τότε όλα τα πεπερασμένα παραγόμενα $k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$-πρότυπα είναι ελεύθερα, δηλαδή η εικασία του Serre έχει θετική απάντηση αν και μόνον αν*

$$K_0(k[x_1, x_2, \cdots, x_n]) \;\cong\; \mathbb{Z}.$$

Παραπέμπουμε στο Θεώρημα Δ'.1 του Παραρτήματος Δ' για μια γενίκευση του παραπάνω αποτελέσματος σε άλγεβρες μονοειδή.

Κεφάλαιο 3

Τα «Κλασικά» Αποτελέσματα της Εικασίας του Serre

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε κάποια κλασικά αποτελέσματα γύρω από την εικασία του Serre από την διατύπωσή της το 1955 μέχρι το τέλος του 1975.

Έστω $A = k[t_1, \ldots, t_n]$ ο πολυωνυμικός δακτύλιος n μεταβλητών υπεράνω ενός σώματος k και P ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό A-πρότυπο. Αρχικά, αποδεικνύουμε ότι αν το P έχει βαθμίδα 1, τότε είναι ελεύθερο. Αυτό το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από ένα θεώρημα του Gauss που λέει ότι ο A είναι μία περιοχή μονοσήμαντης παραγοντοποίησης. Συνεχίζουμε με την περίπτωση μίας μεταβλητής, $A = k[t_1]$. Τότε ο δακτύλιος A είναι μία περιοχή κύριων ιδεωδών και γνωρίζουμε ότι πάνω από μία περιοχή κύριων ιδεωδών τα πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά πρότυπα είναι ελεύθερα. Ακόμη και αν το k είναι ένας δακτύλιος διαίρεσης, οπότε το $k[t_1]$ θα είναι μία μη μεταθετική περιοχή κύριων ιδεωδών, η εικασία συνεχίζει να έχει θετική απάντηση.

Σημειώνουμε ότι το 1971, οι Ojanguren και Sridharan αποδεικνύουν ότι αν το k αντί για σώμα είναι ένας δακτύλιος διαίρεσης και αν $n \geq 2$, τότε η εικασία δεν ισχύει. Επομένως η άμεση γενίκευση της εικασίας του Serre σε μη-μεταθετικούς δακτυλίους έχει αρνητική απάντηση.

Στην περίπτωση των βαθμωτών προτύπων, οι Cartan και Eilenberg, το 1956, αποδεικνύουν ότι η εικασία έχει θετική απάντηση. Ένα βασικό αποτέλεσμα στην ανάπτυξη της θεωρίας το οποίο βοήθησε στην επίλυση της εικασίας, είναι ένα θεώρημα του Serre, το οποίο μας εξασφαλίζει ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό A-πρότυπο είναι ευσταθώς ελεύθερο. Επομένως η εικασία ανάγεται στην απόδειξη ότι κάθε ευσταθώς ελεύθερο A-πρότυπο είναι ελεύθερο.

Το 1958, ο Seshadri αποδεικνύει ότι η εικασία αληθεύει στην περίπτωση του πολυωνυμικού δακτυλίου $A = k[t_1, t_2]$ δύο μεταβλητών. Το 1964, ο Bass αποδεικνύει ότι η εικασία έχει θετική απάντηση στην περίπτωση όπου $\text{rank} P > n$. Τέλος, αποδεικνύουμε το κλασσικό θεώρημα συζυγιών του Hilbert το οποίο δίνει ενδείξεις ότι η εικασία του Serre έχει θετική απάντηση.

3.1 Προβολικά πρότυπα βαθμίδας 1

Στην παράγραφο αυτή στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό πρότυπο βαθμίδας 1 πάνω από τον δακτύλιο πολυωνύμων $k[t_1, \ldots, t_n]$, όπου το k είναι σώμα, είναι ελεύθερο.

Για να καταλήξουμε σε αυτό το συμπέρασμα, μας είναι απαραίτητος ο ακόλουθος χαρακτηρισμός των πεπερασμένα παραγόμενων προβολικών προτύπων βαθμίδας 1 πάνω από οποιαδήποτε ακέραια περιοχή.

Λήμμα 3.1.1. *Έστω R μία ακέραια περιοχή με σώμα πηλίκο K. Έστω $P \neq 0$ ένα R-*

υποπρότυπο του K. Τότε το P είναι προβολικό αν και μόνο αν υπάρχει κάποιο R-υποπρότυπο του K, $Q \subseteq K$, τέτοιο ώστε $P \cdot Q = R$. Στην περίπτωση αυτή, το P είναι πεπερασμένα παραγόμενο πάνω από την ακέραια περιοχή R.

Απόδειξη. Έστω R μία ακέραια περιοχή με σώμα πηλίκο K. Έστω $P \neq 0$ ένα προβολικό R-υποπρότυπο του K. Εφόσον το P είναι προβολικό, είναι ευθύς αθροιστέος ενός ελεύθερου προτύπου F. Επιλέγουμε ένα κατάλληλο ελεύθερο R-πρότυπο $F = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} R \cdot e_\alpha$, όπου $B = \{e_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ μία βάση του F. Εφόσον το F είναι ελεύθερο, υπάρχει ένας μοναδικός R-ομομορφισμός

$$\begin{aligned} f : F &\to P \\ e_\alpha &\mapsto f(e_\alpha) = a_\alpha, \end{aligned}$$

όπου $\alpha \in \Lambda,\ a_\alpha \in P$. Εφόσον το P είναι προβολικό υπάρχει ένας R-ομομορφισμός

$$g : P \to F$$

τέτοιος ώστε $f \circ g = Id_P$. Για κάθε $p \in P$, υπάρχει μία μοναδική έκφραση $g(p) = \sum_\alpha r_\alpha \cdot e_\alpha$, όπου $r_\alpha \in R$ και σχεδόν όλα τα r_α είναι 0. Ορίζουμε ομομορφισμούς $g_\alpha \in \mathsf{Hom}_R(P, R)$, με $g_\alpha(p) = r_\alpha$, όπου $g_\alpha(p) = 0$ για σχεδόν όλα τα α. Τότε ισχύει ότι $g(p) = \sum_\alpha g_\alpha(p) \cdot e_\alpha$, για κάθε $p \in P$. Κάθε R-ομομορφισμός $g_\alpha : P \to R$ επάγει έναν ομομορφισμό $Id \otimes g_\alpha : K \otimes_R P \to K \otimes_R R$. Η R είναι μία ακέραια περιοχή και το K είναι το σώμα πηλίκο της ακέραιας περιοχής R, οπότε η ακολουθία

$$R \hookrightarrow K \twoheadrightarrow K/R$$

είναι ακριβής. Όμως το K ως σώμα πηλίκο μίας ακέραιας περιοχής R είναι ένα R-επίπεδο πρότυπο (βλέπε [27, Corollary 3.48]), οπότε πολλαπλασιάζοντας τανυστικά από αριστερά με το K προκύπτει η ακόλουθη ακριβής ακολουθία:

$$K \otimes_R R \hookrightarrow K \otimes_R K \twoheadrightarrow K \otimes_R K/R.$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τους ισομορφισμούς $K \otimes_R R \cong K$ και $K \otimes_R K/R \cong 0$ προκύπτει η ακριβής ακολουθία:

$$K \hookrightarrow K \otimes_R K \longrightarrow 0.$$

Οπότε, $K \cong K \otimes_R K$. Το P είναι ένα R-υποπρότυπο του K, οπότε προκύπτει η ακόλουθη ακριβής ακολουθία:

$$P \hookrightarrow K \twoheadrightarrow K/P.$$

Όμως το K είναι ένα R-επίπεδο πρότυπο, οπότε πολλαπλασιάζοντας τανυστικά από αριστερά με το K προκύπτει η ακόλουθη ακριβής ακολουθία:

$$0 \longrightarrow K \otimes_R P \hookrightarrow K \otimes_R K \twoheadrightarrow K \otimes_R K/P \longrightarrow 0.$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τους ισομορφισμούς $K \otimes_R K \cong K$ και $K \otimes_R K/P \cong 0$ προκύπτει η ακριβής ακολουθία:

$$0 \longrightarrow K \otimes_R P \hookrightarrow K \longrightarrow 0.$$

Οπότε, $K \otimes_R P \cong K$. Άρα προκύπτει ο ομομορφισμός $Id \otimes g_\alpha : K \to K$. Άρα, ο ομομορφισμός g_α είναι πολλαπλασιασμός με κάποια $b_\alpha \in K$. Οπότε $g_\alpha(p) = b_\alpha \cdot p$, για κάθε $p \in P$. Εφόσον ο ομομορφισμός g_α απεικονίζει το P στο R, θα ισχύει ότι $b_\alpha \cdot P \subseteq R$. Για κάθε $p \in P$, πεπερασμένο πλήθος των $g_\alpha(p) = b_\alpha \cdot p$ είναι μη μηδενικά. Εφόσον $P \neq 0$ και R ακέραια περιοχή, παρατηρούμε ότι πεπερασμένο πλήθος των b_α είναι μη μηδενικά. Αν δεν λάβουμε υπόψιν τους δείκτες α για τους οποίους ισχύει $b_\alpha = 0$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σύνολο δεικτών Λ είναι πεπερασμένο, $|\Lambda| < \infty$. Για κάθε $p \in P$, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} p &= (f \circ g)(p) \\ &= f(g(p)) \\ &= f(\sum g_\alpha(p) \cdot e_\alpha) \\ &= f(\sum b_\alpha \cdot p \cdot e_\alpha) \\ &= p \cdot f(\sum b_\alpha \cdot e_\alpha) \\ &= p \cdot \sum b_\alpha \cdot f(e_\alpha) \\ &= p \cdot \sum b_\alpha \cdot a_\alpha \end{aligned}$$

Οπότε ισχύει ότι $\sum b_\alpha \cdot a_\alpha = 1$. Συνεπώς υπάρχει ένα R-υποπρότυπο του K, $Q = \sum R \cdot b_\alpha \subseteq K$, τέτοιο ώστε $P \cdot Q = R$.

Αντίστροφα, έστω R μία ακέραια περιοχή με σώμα πηλίκο K και $P \neq 0$ ένα R-υποπρότυπο του K. Έστω ότι υπάρχει κάποιο R-υποπρότυπο του K, $Q \subseteq K$, τέτοιο ώστε $P \cdot Q = R$. Τότε το $1 \in P \cdot Q$, οπότε υπάρχουν $a_\alpha \in P,\ b_\alpha \in Q$ τέτοια ώστε $\sum b_\alpha \cdot a_\alpha = 1$. Επιπλέον, για κάθε $\alpha \in \Lambda$, $b_\alpha \cdot P \subseteq P \cdot Q = R$. Εφόσον $\sum b_\alpha \cdot a_\alpha = 1$, για κάθε $r \in R$ θα ισχύει ότι $r = \sum (b_\alpha \cdot r) \cdot a_\alpha = 1$ και αν $r \in P$, τότε κάθε $b_\alpha \cdot r \in P \cdot Q \in R$. Οπότε τα στοιχεία a_α παράγουν το πρότυπο P, $P = (a_1, \ldots, a_n)$. Ορίζουμε τους R-ομομορφισμούς

$$\begin{aligned} g_\alpha : P &\to R \\ p &\mapsto g_\alpha(p) = b_\alpha \cdot p. \end{aligned}$$

Τότε ισχύει ότι $p = \sum g_\alpha(p) \cdot a_\alpha$, για κάθε $p \in P, \alpha \in \Lambda$. Στη συνέχεια ορίζουμε την απεικόνιση

$$\begin{aligned} f : R^n &\to P \\ (r_1, \ldots, r_n) &\mapsto \sum r_\alpha \cdot a_\alpha. \end{aligned}$$

Η f είναι επιμορφισμός επειδή τα στοιχεία a_α παράγουν το πρότυπο P. Ορίζουμε τον ομομορφισμό

$$\begin{aligned} g : P &\to R^n \\ p &\mapsto g(p) = (g_1(p), \ldots, g_n(p)) = (b_1 \cdot p, \ldots, b_n \cdot p). \end{aligned}$$

Τότε θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} (f \circ g)(p) &= f(g(p)) \\ &= f(b_1 \cdot p, \ldots, b_n \cdot p) \\ &= \sum b_\alpha \cdot p \cdot a_\alpha) \\ &= \sum g_\alpha(p) \cdot a_\alpha) \\ &= p \end{aligned}$$

Οπότε $f \circ g = Id_P$, συνεπώς ο f είναι ένας διασπάσιμος επιμορφισμός και άρα το πρότυπο P είναι ευθύς αθροιστέος του R^n. Επομένως το πρότυπο P είναι προβολικό και πεπερασμένα παραγόμενο υπεράνω του R. $\square$

Θεώρημα 3.1.2. *Έστω R μία περιοχή μονοσήμαντης παραγοντοποίησης (unique factorization domain) (UFD) και έστω P ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό R-πρότυπο. Αν* $\operatorname{rank} P = 1$*, τότε ισχύει ότι $P \cong R$.*

Απόδειξη. Έστω R μία περιοχή μονοσήμαντης παραγοντοποίησης (unique factorization domain) (UFD), P ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό R-πρότυπο και K το σώμα πηλίκο της περιοχής R. Το R-πρότυπο P είναι προβολικό, οπότε είναι ένα torsion free πρότυπο, συνεπώς ισχύει ότι $P \subset K \bigotimes_R P \cong K$. Επίσης το πρότυπο P είναι πεπερασμένα παραγόμενο, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι το P είναι ένα ιδεώδες της περιοχής R. Σύμφωνα με την απόδειξη του προηγούμενου λήμματος, εφόσον το R-πρότυπο P είναι προβολικό, θα υπάρχουν $a_\alpha \in P, b_\alpha \in K, b_\alpha P \subset R$, τέτοια ώστε να ισχύει ότι $\sum b_\alpha \cdot a_\alpha = 1$. Έστω $b_\alpha = \frac{c_\alpha}{d_\alpha}$, όπου τα $c_\alpha, d_\alpha \in R$ δεν έχουν κανένα κοινό παράγοντα εκτός της μονάδας. Εφόσον $\frac{c_\beta}{d_\beta} \cdot a_\alpha \in R$, σύμφωνα με την μονοσήμαντη παραγοντοποίηση, συνεπάγεται ότι d_β διαιρεί το $c_\beta \cdot a_\alpha$, οπότε το d_β διαιρεί το a_α, για κάθε ζευγάρι α, β. Έστω $d = lcm\{d_\beta\}$, τότε το d διαιρεί το d_β για κάθε β, επίσης το d_β διαιρεί το a_α, για κάθε ζευγάρι α, β, συνεπώς το d διαιρεί το a_α για κάθε α. Άρα, $a_\alpha \in R \cdot d$, οπότε ισχύει ότι $P \subseteq R \cdot d$. Απαλείφοντας τους παρονομαστές του $1 = \sum \frac{c_\alpha}{d_\alpha} \cdot a_\alpha$ πολλαπλασιάζοντας με το d, παρατηρούμε ότι $d = \sum c_\alpha \cdot \frac{d}{d_\alpha} \cdot a_\alpha \in \sum R \cdot a_\alpha = P$, οπότε $R \cdot d \subseteq P$. Άρα $P = R \cdot d \cong R$. □

Πόρισμα 3.1.3. *Έστω ο δακτύλιος πολυωνύμων $R = A[t_1, \ldots, t_n]$, όπου A μία περιοχή μονοσήμαντης παραγοντοποίησης και έστω P ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό R-πρότυπο. Αν* rank $P = 1$, *τότε ισχύει ότι $P \cong R$.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το θεώρημα του Gauss (βλέπε [15, Theorem 2.3, page 182]), ο δακτύλιος πολυωνύμων $R = A[t_1, \ldots, t_n]$ είναι μία περιοχή μονοσήμαντης παραγοντοποίησης, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το προηγούμενο θεώρημα. □

3.2 Δακτύλιος πολυωνύμων μίας μεταβλητής

Γνωρίζουμε ότι ο δακτύλιος πολυωνύμων μίας μεταβλητής $k[t]$ πάνω από ένα σώμα k είναι μία περιοχή κύριων ιδεωδών. Θα αποδείξουμε ότι πάνω από μία περιοχή κύριων ιδεωδών, τα πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά πρότυπα είναι ελεύθερα. Αυτό το αποτέλεσμα θα προκύψει από το γεγονός ότι, πάνω από μία περιοχή κύριων ιδεωδών τα υποπρότυπα των ελεύθερων προτύπων είναι πάντα ελεύθερα.

Αν το k είναι ένας δακτύλιος διαίρεσης ο δακτύλιος πολυωνύμων μίας μεταβλητής $k[t]$ θα είναι μία μη-μεταθετική περιοχή κύριων ιδεωδών. Θα δούμε ότι και πάνω από μία μη-μεταθετική περιοχή κύριων ιδεωδών, τα πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά πρότυπα είναι ελεύθερα. Αρχίζουμε με τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 3.2.1. *Ένας δακτύλιος R καλείται* **left hereditary** *αν κάθε αριστερό ιδεώδες του R είναι προβολικό.*

Παρατήρηση 3.2.2. Αν R είναι μία hereditary περιοχή, τότε ο R είναι ένας δακτύλιος του Dedekind. Οι περιοχές κύριων ιδεωδών R είναι hereditary περιοχές, εφόσον όλα τα μηδενικά κύρια ιδεώδη σε μία περιοχή είναι ισόμορφα με το R. Οπότε οι περιοχές κύριων ιδεωδών είναι δακτύλιοι του Dedekind (βλέπε [28, page 105]).

Θεώρημα 3.2.3. *(**Θεώρημα του Kaplansky**) Έστω R ένας left hereditary δακτύλιος, τότε κάθε υποπρότυπο A ενός ελεύθερου R-προτύπου F είναι ισόμορφο με ένα ευθύ άθροισμα αριστερών R-ιδεωδών.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο δακτύλιος R είναι left hereditary, F ένα ελεύθερο αριστερό R-πρότυπο και A ένα υποπρότυπο του F. Έστω $\{e_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ μία βάση του F, $F = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} R \cdot e_\alpha$. Σύμφωνα με το αξίωμα της επιλογής, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το σύνολο δεικτών Λ είναι καλώς διατεταγμένο. Ορίζουμε $F_0 = \{0\}$, όπου 0 είναι το μικρότερο στοιχείο του Λ ως προς την καλή διάταξη του Λ. Έστω F_α το υποπρότυπο του F με βάση e_β για κάθε $\beta < \alpha$, $F_\alpha = \bigoplus_{\beta < \alpha} R \cdot e_\beta$ και έστω $\overline{F_\alpha} = \bigoplus_{\beta \leq \alpha} R \cdot e_\beta = F_\alpha \bigoplus R \cdot e_\alpha$ το υποπρότυπο του F με βάση e_β για κάθε $\beta \leq \alpha$. Παρατηρούμε ότι $\overline{F_0} = F_0 \bigoplus R \cdot e_0 = \{0\} \bigoplus R \cdot e_0 = R \cdot e_0$.

Έστω $A_\alpha = A \cap F_\alpha$ και $\overline{A_\alpha} = A \cap \overline{F_\alpha}$. Κάθε στοιχείο $x \in \overline{A_\alpha} = A \cap \overline{F_\alpha}$ έχει μία μοναδική έκφραση της μορφής $x = b + r \cdot e_\alpha$, όπου $b \in F_\alpha$ και $r \in R$, έτσι ώστε η απεικόνιση

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha : A \cap \overline{F_\alpha} &\to R \\ x &\mapsto \varphi_\alpha(x) = r, \end{aligned}$$

να είναι καλά ορισμένη. Τότε υπάρχει μία ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow A \cap F_\alpha \longrightarrow A \cap \overline{F_\alpha} \longrightarrow \operatorname{Im}\varphi_\alpha \longrightarrow 0\ .$$

Εφόσον η $\operatorname{Im}\varphi_\alpha$ είναι ένα αριστερό ιδεώδες, είναι και προβολικό πρότυπο, οπότε η παραπάνω ακολουθία διασπάται:

$$A \cap \overline{F_\alpha} = (A \cap F_\alpha) \bigoplus I_\alpha,$$

όπου $I_\alpha \cong \operatorname{Im}\varphi_\alpha$. Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη μένει να δείξουμε ότι $A = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$.

Αρχικά αποδεικνύουμε ότι $A = \langle \cup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha \rangle$: Εφόσον $F = \cup_{\alpha\in\Lambda}\overline{F_\alpha}$, τότε κάθε στοιχείο $x \in A$ (όπως και κάθε στοιχείο του F), βρίσκεται σε κάποιο $\overline{F_\alpha}$. Έστω $\mu(x)$ ο μικρότερος δείκτης α τέτοιος ώστε $x \in \overline{F_\alpha}$. Ορίζουμε $I = \langle \cup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha \rangle \subseteq A$. Αν $I \subsetneq A$, τότε $J = \{\mu(x) : x \in A - I\} \neq \emptyset$. Έστω j το μικρότερο στοιχείο του J, και έστω $y \in A - I$ έτσι ώστε $\mu(y) = j$. Τώρα $y \in A \cap \overline{F_j} = (A \cap F_j) \bigoplus I_j$, έτσι ώστε $y = b + i$, όπου $b \in A \cap F_j$ και $i \in I_j$. Τότε, $b = y - i \in A$, $b \notin I$, (έτσι ώστε το y να μην ανήκει στο I) και $\mu(b) < j$, άτοπο. Οπότε, $A = I = \langle \cup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha \rangle$.

Τέλος αποδεικνύουμε ότι το άθροισμα $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$ είναι ευθύ: Υποθέτουμε ότι $x_1 + \ldots + x_n = 0$, όπου $x_i \in I_{\alpha_i} \subset \overline{F_{\alpha_i}}$. Υποθέτουμε ότι οι δείκτες είναι έτσι διατεταγμένοι ώστε $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$. Τότε $x_1, \ldots, x_n \in F_{\alpha_n}$ και $F_{\alpha_n} \cap I_{\alpha_n} = \emptyset$, οπότε $x_1 + \ldots + x_{n-1} = -x_n \in (A \cap F_{\alpha_n}) \cap I_{\alpha_n} = \{0\}$. Συνεπώς, ισχύει ότι $x_n = 0$ και επαγωγικά όλα τα $x_i,\ i = 1, \ldots, n-1$ είναι 0.

Αποδείξαμε ότι $A = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$, άρα κάθε υποπρότυπο A ενός ελεύθερου R-προτύπου F είναι ισόμορφο με ένα ευθύ άθροισμα αριστερών R-ιδεωδών. □

Το θεώρημα του Kaplansky μας οδηγεί άμεσα στον ακόλουθο εναλλακτικό χαρακτηρισμό των left hereditary δακτυλίων:

Πόρισμα 3.2.4. *Ένας δακτύλιος R είναι* **left hereditary** *αν κάθε υποπρότυπο ενός προβολικού R-προτύπου είναι προβολικό.*

Απόδειξη. Έστω R ένας left hereditary δακτύλιος, P ένα προβολικό R-πρότυπο και S ένα υποπρότυπο του P. Εφόσον το P είναι προβολικό, είναι ευθύς αθροιστέος ενός ελεύθερου προτύπου, δηλαδή το P είναι ένα υποπρότυπο ενός ελεύθερου προτύπου. Οπότε το S είναι ένα υποπρότυπο ενός ελεύθερου προτύπου. Εφόσον ο R είναι ένας left hereditary δακτύλιος και το S είναι ένα υποπρότυπο ενός ελεύθερου προτύπου, τότε σύμφωνα με το θεώρημα του Kaplansky το S θα είναι ισόμορφο με ένα ευθύ άθροισμα αριστερών ιδεωδών, όπου κάθε αριστερό ιδεώδες είναι ένα προβολικό R-πρότυπο, οπότε το S θα είναι ισόμορφο με ένα ευθύ άθροισμα προβολικών προτύπων. Όμως κάθε ευθύ άθροισμα προβολικών προτύπων είναι προβολικό, οπότε το S είναι προβολικό. □

Το πόρισμα που ακολουθεί αποτελεί άμεση συνέπεια του θεωρήματος του Kaplansky:

Πόρισμα 3.2.5. *Αν R είναι ένας δακτύλιος του οποίου όλα τα αριστερά ιδεώδη είναι ελεύθερα τότε τα υποπρότυπα των R-ελεύθερων προτύπων είναι ελεύθερα. Ιδίως, όλα τα R-προβολικά πρότυπα είναι ελεύθερα.*

Απόδειξη. Έστω R ένας δακτύλιος του οποίου όλα τα αριστερά ιδεώδη είναι ελεύθερα, F ένα ελεύθερο R-πρότυπο και A ένα υποπρότυπο του F. Αρκεί να αποδείξουμε ότι το A είναι ελεύθερο. Σύμφωνα με το θεώρημα του Kaplansky, αν F έχει μία βάση $\{e_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, τότε $A = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$, όπου I_α είναι ισόμορφο με ένα ιδεώδες του R. Εφόσον ο R είναι ένας δακτύλιος του οποίου όλα τα αριστερά ιδεώδη είναι ελεύθερα, θα ισχύει ότι κάθε μη-μηδενικό ιδεώδες είναι ισόμορφο με τον δακτύλιο R, οπότε είτε $I_\alpha = \{0\}$, είτε $I_\alpha \cong R$. Συνεπώς θα ισχύει ότι είτε $A = \{0\}$, είτε $A \cong \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} R$. Σε κάθε περίπτωση το A είναι ελεύθερο. □

Το αρχικό πρόβλημα του Serre τέθηκε για πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά πρότυπα πάνω από τον δακτύλιο πολυωνύμων n μεταβλητών $k[t_1, \dots, t_n]$, όπου το k είναι ένα σώμα. Ολοκληρώνουμε αυτή την παράγραφο δίνοντας απάντηση στο πρόβλημα του Serre, στην περίπτωση του δακτυλίου πολυωνύμων μίας μεταβλητής $k[t]$, όπου k είναι ένας δακτύλιος διαίρεσης:

Θεώρημα 3.2.6. *Έστω k ένας δακτύλιος διαίρεσης, τότε κάθε προβολικό αριστερό πρότυπο πάνω από τον δακτύλιο πολυωνύμων μίας μεταβλητής $R = k[t]$ είναι ελεύθερο.*

Απόδειξη. Αν I είναι ένα μη-μηδενικό αριστερό ιδεώδες του R, τότε από τον συνήθη αλγόριθμο διαίρεσης, παρατηρούμε ότι $I = R \cdot f$, όπου το f είναι ένα πολυώνυμο του I ελαχίστου βαθμού. Εφόσον ο R δεν έχει διαιρέτες του μηδενός, συμπεραίνουμε ότι $I \cong R$ ως αριστερά R-πρότυπα. Εφαρμόζοντας το Πόρισμα (3.2.5), συμπεραίνουμε ότι κάθε προβολικό αριστερό πρότυπο πάνω από τον δακτύλιο πολυωνύμων μίας μεταβλητής $R = k[t]$ είναι ελεύθερο. □

3.3 Μη-μεταθετικοί δακτύλιοι

Στην προηγούμενη παράγραφο αποδείξαμε ότι κάθε προβολικό πρότυπο πάνω από τον πολυωνυμικό δακτύλιο $k[t]$ μίας μεταβλητής, όπου k είναι ένας δακτύλιος διαίρεσης, είναι ελεύθερο. Το 1971 οι Ojanguren και Sridharan (βλέπε [23]) απέδειξαν ότι, αν k είναι ένας δακτύλιος διαίρεσης ο οποίος δεν είναι σώμα, τότε υπάρχει κάποιο πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό πρότυπο P πάνω από τον πολυωνυμικό δακτύλιο δύο μεταβλητών $k[t_1, t_2]$, το οποίο δεν είναι ελεύθερο. Πολλαπλασιάζοντας τανυστικά το P με τον πολυωνυμικό δακτύλιο n μεταβλητών $R_n = k[t_1, \dots, t_n]$, παρατηρούμε ότι ο R_n επιδέχεται πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά πρότυπα τα οποία δεν είναι ελεύθερα για κάθε $n \geq 2$.

Θεώρημα 3.3.1. ***(Θεώρημα των Ojanguren-Sridharan)*** *Έστω k ένας δακτύλιος διαίρεσης ο οποίος δεν είναι σώμα και έστω $R = k[x, y]$ ο πολυωνυμικός δακτύλιος δύο μεταβλητών. Τότε υπάρχει κάποιο δεξιό R-ιδεώδες P τέτοιο ώστε $P \bigoplus R \cong R^2$ (οπότε το P είναι ευσταθώς ελεύθερο τύπου 1 και παράγεται από δύο στοιχεία), αλλά το P δεν είναι ελεύθερο.*

Απόδειξη. Η κατασκευή του προτύπου P που θα δοθεί παρακάτω δεν χρησιμοποιεί την πλήρη υπόθεση ότι το k είναι ένας μη-μεταθετικός δακτύλιος διαίρεσης. Ο δακτύλιος k θα πρέπει να ικανοποιεί τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες:

1. Ο δακτύλιος k ικανοποιεί την εξής ειδική περίπτωση της ιδιότητας της αναλλοίωτης βάσης: Αν $k^m \cong k^2$ ως δεξιά k-πρότυπα τότε $m = 2$.

2. Ο δακτύλιος k δεν έχει ούτε δεξιούς ούτε αριστερούς διαιρέτες του μηδενός, δηλαδή αν $\alpha \cdot \beta = 0$, όπου $\alpha, \beta \in k$, τότε είτε $\alpha = 0$ είτε $\beta = 0$.

3. Υπάρχουν δύο αντιστρέψιμα μη-μεταθετικά στοιχεία $a, b \in k$, τέτοια ώστε το στοιχείο $u = a \cdot b - b \cdot a$ να είναι επίσης αντιστρέψιμο.

Οι παραπάνω ιδιότητες ικανοποιούνται από κάθε μη-μεταθετικό δακτύλιο διαίρεσης k.

Έστω δύο αντιστρέψιμα μη-μεταθετικά στοιχεία $a, b \in k$, τέτοια ώστε το στοιχείο $u = a \cdot b - b \cdot a$ να είναι επίσης αντιστρέψιμο. Για κάθε ζευγάρι στοιχείων $x, y \in R$ τα οποία μετατίθενται ορίζουμε έναν ομομορφισμό δεξιών R-προτύπων $\varphi : R^2 \to R$ ως εξής:

$$\varphi(e_1) = \varphi(1, 0) = x + a, \quad \varphi(e_2) = \varphi(0, 1) = -(y + b).$$

Τον ομομορφισμό φ μπορούμε να τον ορίσουμε από την unimodular γραμμή $(x+a, -(y+b))$. Η απεικόνιση φ είναι επί, διότι:

$$\varphi\begin{pmatrix} y+b \\ x+a \end{pmatrix} = (x+a, -(y+b)) \cdot \begin{pmatrix} y+b \\ x+a \end{pmatrix} = ab - ba = u,$$

όπου το στοιχείο u είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του k άρα και του R. Εφόσον ο ομομορφισμός φ είναι επί και το πρότυπο R_R είναι προβολικό, ο φ είναι διασπάσιμος, άρα ισχύει ότι $R^2 \cong \mathsf{Ker}(\varphi) \oplus \mathsf{Im}(\varphi) = P \oplus R$, όπου $P = P(x+a, -(y+b)) := \mathsf{Ker}(\varphi)$. Άρα το P είναι ένα ευσταθώς ελεύθερο πρότυπο τύπου 1: $P \oplus R \cong R^2$.

Το P είναι ισόμορφο με ένα δεξιό ιδεώδες J του R. Έστω ότι $x+a, -(y+b)$ δεν είναι διαιρέτες του μηδενός στον R. Τότε η προβολή της δεύτερης συντεταγμένης $\pi_2 : R^2 \to R$ απεικονίζει το P ισομορφικά στο δεξιό ιδεώδες

$$J := \{\beta \in R : -(y+b) \cdot \beta \in (x+a) \cdot R\}$$

και αν πολλαπλασιάσουμε από αριστερά με το $-(y+b)$ ορίζεται ένας ισομορφισμός από το J στο δεξιό ιδεώδες $(x+a) \cdot R \cap -(y+b) \cdot R$.

Θα αποδείξουμε ότι το πρότυπο P δεν είναι R-ελεύθερο. Υποθέτουμε ότι ισχύει $P \cong R^n$, τότε $R^{1+n} \cong R^2$. Ανάγοντας τον ισομορφισμό αυτό modulo (x, y) θα ισχύει ότι $k^{1+n} \cong k^2$, οπότε σύμφωνα με την ιδιότητα (1) συνεπάγεται ότι $n = 1$. Επομένως, μένει να αποδείξουμε ότι $P \ncong R$, που ισοδυναμεί με το να αποδείξουμε ότι η unimodular γραμμή $(x+a, -(y+b))$ δεν μπορεί να συμπληρωθεί σε έναν 2×2 αντιστρέψιμο πίνακα πάνω από τον πολυωνυμικό δακτύλιο δύο μεταβλητών $k[x, y]$ (σύμφωνα με την Πρόταση (2.1.16)).

Έστω $f \in R$. Συμβολίζουμε με $\deg f$ το συνολικό βαθμό του πολυωνύμου f. Σύμφωνα με την ιδιότητα (2), ο R δεν έχει ούτε αριστερούς ούτε δεξιούς διαιρέτες του μηδενός, οπότε για κάθε $f, g \in R$ θα ισχύει ότι $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$. Στο σημείο αυτό είναι απαραίτητο να αποδείξουμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 3.3.2. *Έστω $f \in R = k[x, y]$. Συμβολίζουμε με $f(0,0)$ τον σταθερό όρο του πολυωνύμου f. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Το P δεν περιέχει στοιχεία* $\begin{pmatrix} f_0 \\ g_0 \end{pmatrix} \neq 0$ *με* $\deg f_0 \leq 1, \deg g_0 \leq 1$.
2. *Το P περιέχει ένα στοιχείο* $\begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix}$ *τέτοιο ώστε* $\deg f_1 = \deg g_1 = 2,\ \ f_1(0,0) = 0$.
3. *Το P περιέχει ένα στοιχείο* $\begin{pmatrix} f_2 \\ g_2 \end{pmatrix}$ *τέτοιο ώστε* $f_2(0,0) \neq 0$.

Απόδειξη. (1) Έστω $\begin{pmatrix} f_0 \\ g_0 \end{pmatrix} \in P$, με $f_0 = c + dx + ey,\ g_0 = c' + d'x + e'y$. Τότε $(x+a) \cdot (c + dx + ey) = (y+b) \cdot (c' + d'x + e'y)$. Συγκρίνοντας τους συντελεστές, παρατηρούμε ότι $d = e' = 0,\ c = bd',\ c' = ae,\ e = d',$ και $ac = bc'$, οπότε $abe = bae$. Άρα, ισχύει ότι $(ab - ba)e = 0$. Εφόσον $u = ab - ba \neq 0$, συμπεραίνουμε ότι $e = 0 = d'$ και συνεπώς $c = 0 = c'$.

(2) Έστω $f_1 = a_1x + a_2y + a_3xy + a_4y^2$ και $g_1 = b_1x + b_2y + b_3xy + b_4x^2$. Η συνθήκη $(x+a)f_1 = (y+b)g_1$ μας οδηγεί στην ακόλουθη σχέση:

$$aa_1x + aa_2y + a_1x^2 + (a_2 + aa_3)xy + aa_4y^2 + a_3x^2y + a_4xy^2$$

$$= bb_1x + bb_2y + bb_4x^2 + (b_1 + bb_3)xy + b_2y^2 + b_4x^2y + b_3xy^2.$$

Τα b_i ορίζονται μοναδικά από τα a_i, διά μέσου των εξισώσεων $b_3 = a_4,\ b_4 = a_3,\ b_2 = b^{-1}aa_2,\ b_1 = b^{-1}aa_1$. Έτσι προκύπτουν οι ακόλουθες ισοδυναμίες:

$$bb_4 = a_1 \Leftrightarrow ba_3 = a_1$$

$$b_2 = aa_4 \Leftrightarrow b^{-1}aa_2 = aa_4$$

$$b_1 + bb_3 = a_2 + aa_3 \Leftrightarrow b^{-1}aa_1 + ba_4 = a_2 + aa_3.$$

Από τις δύο πρώτες ισοδυναμίες παρατηρούμε ότι τα $a_1,\ a_2$ ορίζονται μοναδικά από τα $a_3,\ a_4$, ως εξής $a_1 = ba_3,\ a_2 = a^{-1}baa_4$. Οπότε απομένει η ακόλουθη εξίσωση:

$$b^{-1}aba_3 + ba_4 = a^{-1}baa_4 + aa_3,$$

ή

$$b^{-1}(ab - ba)a_3 = a^{-1}(ba - ab)a_4.$$

Εφόσον το στοιχείο $u = ab - ba$ είναι αντιστρέψιμο, μπορούμε να λύσουμε την παραπάνω εξίσωση θέτοντας $a_3 = -u^{-1}ba^{-1}ua_4$ και αφήνοντας το a_4 να είναι οποιοδήποτε στοιχείο του k διαφορετικό του μηδενός. Έτσι θα ισχύει ότι $\deg f_1 = \deg f_2 = 2$.

(3) Έστω $f_2 = a_1 + a_2y + a_3y^2$ και $g_2 = b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy$. Η συνθήκη $(x + a)f_2 = (y + b)g_2$ μας οδηγεί στην ακόλουθη σχέση:

$$aa_1 + a_1x + aa_2y + a_2xy + aa_3y^2 + a_3xy^2$$

$$= bb_1 + bb_2x + (b_1 + bb_3)y + (b_2 + bb_4)xy + b_3y^2 + b_4xy^2.$$

Τα a_i ορίζονται μοναδικά από τα b_i, διά μέσου των εξισώσεων $a_1 = bb_2,\ a_2 = b_2 + bb_4,\ a_3 = b_4$. Έτσι προκύπτουν οι ακόλουθες ισοδυναμίες:

$$aa_1 = bb_1 \Leftrightarrow abb_2 = bb_1$$

$$aa_3 = b_3 \Leftrightarrow ab_4 = b_3$$

$$aa_2 = b_1 + bb_3 \Leftrightarrow a(b_2 + bb_4) = b_1 + bb_3.$$

Από τις δύο πρώτες ισοδυναμίες παρατηρούμε ότι τα $b_1,\ b_3$ ορίζονται μοναδικά από τα $b_2,\ b_4$, ως εξής $b_1 = b^{-1}abb_2,\ b_3 = ab_4$. Οπότε απομένει η ακόλουθη εξίσωση:

$$a(b_2 + bb_4) = b^{-1}abb_2 + bab_4,$$

ή

$$b^{-1}(ab - ba)b_2 = (ab - ba)b_4.$$

Εφόσον το στοιχείο $u = ab - ba$ είναι αντιστρέψιμο, μπορούμε να λύσουμε την παραπάνω εξίσωση θέτοντας $b_2 = u^{-1}bub_4$ και αφήνοντας το b_4 να είναι οποιοδήποτε στοιχείο του k διαφορετικό του μηδενός. Έτσι θα ισχύει ότι $f_2(0, 0) = a_1 = bb_2 = bu^{-1}bub_4 \neq 0$. □

Σύμφωνα με το παραπάνω λήμμα, είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι $P \ncong R$. Πράγματι, αν $P \cong R$, τότε θα υπήρχε κάποιο $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in P$ τέτοιο ώστε $\begin{pmatrix} f_i \\ g_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \cdot h_i$ για κάποιο $h_i,\ i = 1, 2$.
Για $i = 1$, από το (3.3.2)(2) συμπεραίνουμε τα εξής:

$$2 = \deg f_1 = \deg f + \deg h_1,$$

$$2 = \deg g_1 = \deg g + \deg h_1.$$

Σύμφωνα με το (3.3.2)(1) πρέπει $h_1 \in k$ και $h_1 \neq 0$. Από την ισότητα $0 = f_1(0, 0) = f(0, 0)h_1$ συμπεραίνουμε ότι $f(0, 0) = 0$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την ισότητα $0 \neq f_2(0, 0) = f(0, 0)h_2(0, 0)$. □

Ολοκληρώνουμε αυτή την παράγραφο με δύο σημαντικές παρατηρήσεις:

Παρατήρηση 3.3.3. 1. Το θεώρημα των Ojanguren-Sridharan μας εφοδιάζει με δύο αντιπαραδείγματα των Θεωρημάτων (2.1.22) και (2.1.23) για μη-μεταθετικούς δακτυλίους. Χρησιμοποιούμε δεξιά πρότυπα έτσι ώστε να συμβαδίσουμε με τα αποτελέσματα της Παραγράφου (2.1).

2. Θεώρημα του Swan (βλέπε [36]): Έστω D μία περιοχή τέτοια ώστε $D^2 \cong D^m$ (ως δεξιά R-πρότυπα) συνεπάγεται ότι $m = 2$ και έστω ότι υπάρχουν $a, b \in D$ τέτοια ώστε το $c := ab - ba \in U(D)$, όπου $U(D)$ η ομάδα των αντιστρέψιμων στοιχείων του D. Έστω $R = D[x, z_1, \ldots, z_n]$ ένας πολυωνυμικός δακτύλιος πάνω από την περιοχή D. Έστω $y := f(x, z_1, \ldots, z_n)$ ένα πολυώνυμο πάνω από το κέντρο του D τέτοιο ώστε το $f(-a, z_1, \ldots, z_n)$ να είναι ένα μη σταθερό πολυώνυμο του $D[z_1, \ldots, z_n]$. Τότε το ευσταθώς ελεύθερο R-πρότυπο $P = P(x + a, y + b)$ δεν είναι ελεύθερο.

3.4 Βαθμωτοί δακτύλιοι

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό βαθμωτό πρότυπο P πάνω από τον πολυωνυμικό δακτύλιο n μεταβλητών $k[t_1, \ldots, t_n]$, όπου το k είναι σώμα, είναι ελεύθερο. Αρχίζουμε με κάποιους απαραίτητους ορισμούς:

Ορισμός 3.4.1. *Ένας δακτύλιος R καλείται* **βαθμωτός** *αν υπάρχει μία οικογένεια προσθετικών υποομάδων $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ του R τέτοια ώστε ο R να αναλύεται ως ευθύ άθροισμα αυτών των αβελιανών ομάδων $R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots$ και αν ισχύει ότι $R_n \cdot R_m \subseteq R_{n+m}$ για κάθε $n, m \geq 0$. Κάθε υποομάδα R_i του R καλείται ομογενής συνιστώσα του R βαθμού i.*

Λήμμα 3.4.2. *Η ομογενής συνιστώσα R_0 μηδενικού βαθμού του βαθμωτού δακτυλίου R είναι ένας υποδακτύλιος του R.*

Απόδειξη. Η συνιστώσα μηδενικού βαθμού R_0 είναι μία προσθετική υποομάδα του βαθμωτού δακτυλίου R κλειστή ως προς τον πολλαπλασιασμό, διότι ισχύει ότι $R_0 \cdot R_0 \subseteq R_0$. Για να αποδείξουμε ότι η συνιστώσα μηδενικού βαθμού R_0 είναι ένας υποδακτύλιος του βαθμωτού δακτυλίου R, μένει να δείξουμε ότι το μοναδιαίο στοιχείο 1 του δακτυλίου R ανήκει στην R_0. Έστω ότι ο βαθμωτός δακτύλιος R είναι διαφορετικός από τον μηδενικό δακτύλιο, $R \neq 0$. Γράφουμε το μοναδιαίο στοιχείο 1 του R ως εξής: $1 = a_i + a_{i+1} + \ldots$, όπου $a_j \in R_j$ και $a_i \neq 0$. Εφόσον ισχύει $1 = 1^2 = a_i^2 + \ldots$ και $a_i^2 = a_i \cdot a_i \in R_i R_i \subseteq R_{i+i} = R_{2i}$, συμπεραίνουμε ότι $i = 0$, οπότε $1 = a_0 + a_1 + \ldots$. Έστω $x \in R_j$, τότε $x = 1 \cdot x = x \cdot 1 = x \cdot (a_0 + a_1 + \ldots)$ και συγκρίνοντας τα ομογενή στοιχεία βαθμού j, συμπεραίνουμε ότι $a_0 \cdot x = x \cdot a_0 = x$. Άρα, $a_0 = a_0 \cdot 1 = a_0 \cdot (a_0 + a_1 + \ldots) = a_0 + a_1 + \ldots = 1$. Οπότε το $a_0 \in R_0$ είναι ένα πολλαπλασιαστικό ταυτοτικό στοιχείο για τον R, συνεπώς $a_0 = 1$. □

Παράδειγμα 3.4.3. Έστω R ένας δακτύλιος και έστω $t_1, \ldots, t_d$ μεταβλητές πάνω από τον R. Για $m = (m_1, \ldots, m_d) \in \mathbb{N}^d$, έστω $t^m = {t_1}^{m_1} \cdots {t_d}^{m_d}$. Τότε ο πολυωνυμικός δακτύλιος $S = R[t_1, \ldots, t_d]$ είναι ένας βαθμωτός δακτύλιος, όπου

$$S_i = \{ \sum_{m \in \mathbb{N}^d} r_m t^m | \ r_m \in R, \ m_1 + \ldots + m_d = i\}$$

η υποομάδα όλων των ομογενών πολυωνύμων των μεταβλητών $t_1, \ldots, t_d$ βαθμού i. Να σημειώσουμε ότι $S_0 = R$ είναι η ομογενής συνιστώσα του S βαθμού 0 (σταθερά πολυώνυμα) και ότι όλες οι μεταβλητές $\{t_j\}$ έχουν βαθμό 1 για $j = 1, \ldots, d$.

Συνεχίζουμε με τον ορισμό του βαθμωτού προτύπου:

Ορισμός 3.4.4. *Έστω R ένας βαθμωτός δακτύλιος και M ένα R-πρότυπο. Το M καλείται* **βαθμωτό** *R-πρότυπο αν υπάρχει μία οικογένεια προσθετικών υποομάδων $\{M_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ του M τέτοια ώστε το M να αναλύεται ως ευθύ άθροισμα αυτών των ομάδων, $M = \oplus_{j \in \mathbb{Z}} M_j$ και αν ισχύει ότι $R_i M_j \subseteq M_{i+j}$, για κάθε $i \geq 0$ και $j \in \mathbb{Z}$.*

Παρατηρούμε ότι στον παραπάνω ορισμό επιτρέπουμε στο M να έχει συνιστώσες αρνητικού βαθμού έτσι οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 3.4.5. *Έστω R ένας βαθμωτός δακτύλιος και M ένα βαθμωτό R-πρότυπο, $M = \oplus_{j \in \mathbb{Z}} M_j$. Το M καλείται* **κάτω φραγμένο** *αν υπάρχει κάποιο $r \in \mathbb{Z}$, τέτοιο ώστε να ισχύει $M_j = 0$ για κάθε $j < r$.*

Τα βαθμωτά κάτω φραγμένα πρότυπα είναι ένα χρήσιμο είδος προτύπων και αυτό φαίνεται από την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 3.4.6. *Κάθε πεπερασμένα παραγόμενο βαθμωτό R-πρότυπο M είναι κάτω φραγμένο.*

Απόδειξη. Έστω $m_1, \ldots, m_k$ οι R-γεννήτορες του πεπερασμένα παραγόμενου R-προτύπου M. Επιλέγουμε κάποιο r τόσο μικρό ώστε οι ομογενείς συνιστώσες των $m_1, \ldots, m_k$ να έχουν βαθμό $\geq r$. Τότε, ισχύει ότι $M = \sum R \cdot m_i \subseteq \sum_{j \geq r} M_j$. □

Πρόταση 3.4.7. *Έστω $R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots$ ένας βαθμωτός δακτύλιος. Τότε*

1. *$R^+ = R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots = \oplus_{n \geq 1} R_n$ είναι ένα ιδεώδες του R και*
2. *Οι δακτύλιοι R/R^+ και R_0 είναι ισόμορφοι.*

Απόδειξη.

1. Το R^+ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση, οπότε έστω $\sum_{n \geq 1} a_n \in R^+$ και υποθέτουμε ότι $\sum_{n \geq 0} b_n \in R$. Τότε θα ισχύει ότι $(\sum_{n \geq 1} a_n) \cdot b_k = \sum_{n \geq 1} a_n \cdot b_k$ και $a_n \cdot b_k \in R_{n+k}$, για $n \geq 1$ και $k \geq 0$. Οπότε, $(\sum_{n \geq 1} a_n) \cdot b_k \in \oplus_{n \geq 1} R_{n+k} \subseteq R^+$ για κάθε $k \geq 0$, συνεπώς ισχύει ότι $(\sum_{n \geq 1} a_n) \cdot (\sum_{n \geq 0} b_n) \in R^+$. Ομοίως, ισχύει ότι $(\sum_{n \geq 0} b_n) \cdot (\sum_{n \geq 1} a_n) \in R^+$. Άρα, το R^+ είναι ένα ιδεώδες του R.
2. Σύμφωνα με το Λήμμα (3.4.2) η ομογενής συνιστώσα R_0 μηδενικού βαθμού του βαθμωτού δακτυλίου R είναι ένας υποδακτύλιος του R. Οπότε, υπάρχει ένας επιμορφισμός δακτυλίων $f : R \to R_0$ του οποίου ο πυρήνας είναι το R^+, $\ker f = R^+$. Επομένως, ισχύει ότι $R/R^+ \cong R_0$.

□

Για κάθε βαθμωτό R-πρότυπο M, θα γράφουμε

$$\overline{M} = \frac{M}{R^+ M} \cong \frac{R}{R^+} \otimes_R M \cong R_0 \otimes_R M,$$

όπου το $\overline{M}$ είναι ένα βαθμωτό πρότυπο πάνω από τον δακτύλιο $R_0 = R_0 \oplus 0 \oplus \cdots$.

Πρόταση 3.4.8. *Αν για κάθε βαθμωτό R-πρότυπο M το οποίο είναι κάτω φραγμένο ισχύει ότι $\overline{M} = 0$, τότε συνεπάγεται ότι $M = 0$.*

Απόδειξη. Έστω $M = M_r \oplus M_{r+1} \oplus \ldots$ ένα βαθμωτό R-πρότυπο, τότε θα ισχύει ότι $R^+ M = (R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots)(M_r \oplus M_{r+1} \oplus \ldots) \subseteq M_{r+1} \oplus M_{r+2} \oplus \ldots$. Αν $\overline{M} = 0$, τότε $M = R^+ M$, συνεπώς $M_r = 0$. Επαγωγικά, για όλα τα M_i ισχύει ότι $M_i = 0$, άρα $M = 0$. □

Σύμφωνα με την Πρόταση (3.4.6), η Πρόταση (3.4.8) ισχύει για όλα τα πεπερασμένα παραγόμενα βαθμωτά R-πρότυπα. Έτσι, η παραπάνω πρόταση μπορεί να θεωρηθεί ως κάτι ανάλογο του λήμματος του Nakayama (Λήμμα (1.1.39)). Η αναλογία αυτή αποφέρει κάποια χρήσιμα αποτελέσματα για πεπερασμένα παραγόμενα βαθμωτά R-πρότυπα, ένα από τα οποία είναι η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 3.4.9. *Έστω P, Q δύο πεπερασμένα παραγόμενα βαθμωτά R-πρότυπα πάνω από έναν βαθμωτό δακτύλιο R, όπου το P είναι ένα προβολικό R-πρότυπο. Έστω $\gamma : Q \to P$ ένας R-ομομορφισμός ο οποίος διατηρεί τον βαθμό (δηλαδή, ισχύει ότι $\gamma(Q_k) \subset P_k$ για κάθε k). Τότε ο γ είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν ο $\overline{\gamma} : \overline{Q} \to \overline{P}$ είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Έστω P, Q δύο πεπερασμένα παραγόμενα βαθμωτά R-πρότυπα πάνω από έναν βαθμωτό δακτύλιο R, όπου το P είναι ένα προβολικό R-πρότυπο. Έστω $\gamma : Q \to P$ ένας R-ομομορφισμός ο οποίος διατηρεί τον βαθμό (δηλαδή, ισχύει ότι $\gamma(Q_k) \subset P_k$ για κάθε k). Αν ο $\overline{\gamma} : \overline{Q} \to \overline{P}$ είναι ισομορφισμός θα αποδείξουμε ότι ο γ είναι ισομορφισμός.

Έστω $K = \mathsf{Ker}(\gamma)$, $C = \mathsf{Coker}(\gamma)$, τα οποία είναι βαθμωτά R-πρότυπα και έστω η ακριβής ακολουθία

$$Q \xrightarrow{\gamma} P \longrightarrow \mathsf{Coker}(\gamma) = C \longrightarrow 0$$

Αν εφαρμόσουμε τον δεξιά ακριβή συναρτητή $R/R^+ \otimes_R \square$ στην παραπάνω ακριβή ακολουθία, θα πάρουμε την εξής ακριβή ακολουθία:

$$R/R^+ \otimes_R Q \longrightarrow R/R^+ \otimes_R P \longrightarrow R/R^+ \otimes_R C \longrightarrow 0$$

Οπότε έχουμε την εξής ακριβή ακολουθία:

$$\overline{Q} \xrightarrow{\overline{\gamma}} \overline{P} \longrightarrow \overline{C} \longrightarrow 0$$

Άρα $\overline{C} \cong \overline{P} \diagup \mathsf{Im}(\overline{\gamma})$. Όμως $\overline{\gamma} : \overline{Q} \to \overline{P}$ είναι ένας ισομορφισμός, οπότε $\mathsf{Im}(\overline{\gamma}) = \overline{P}$. Άρα $\overline{C} \cong \overline{P} \diagup \overline{P} = 0$. Όμως το $\mathsf{Coker}(\gamma) = C$ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο ως πηλίκο του πεπερασμένα παραγόμενου προβολικού προτύπου P και επίσης είναι και βαθμωτό. Άρα, σύμφωνα με τις Προτάσεις (3.4.6), (3.4.8) θα ισχύει ότι $C = 0$. Οπότε $\mathsf{Coker}(\gamma) = 0 \Rightarrow P/\mathsf{Im}(\gamma) = 0 \Rightarrow P = \mathsf{Im}(\gamma) \Rightarrow \gamma$ είναι ένας επιμορφισμός.

Εφόσον, ο $\gamma : Q \to P$ είναι ένας επιμορφισμός και το P είναι ένα προβολικό R-πρότυπο, η ακολουθία

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow Q \xrightarrow{\gamma} P \longrightarrow 0$$

είναι διασπάσιμη, άρα θα ισχύει ότι $Q \cong \mathsf{Ker}(\gamma) \oplus P$. Τότε υπάρχει ένας μονομορφισμός $\gamma' : P \rightarrowtail Q$, τέτοιος ώστε $\mathsf{Im}(\gamma') = P' \subseteq Q$, συνεπάγεται $P \cong P'$. Άρα, $Q = K \oplus P'$. Εφαρμόζοντας τώρα τον δεξιά ακριβή συναρτητή $R/R^+ \otimes_R \square$, θα έχουμε την ακόλουθη ακριβή διασπάσιμη ακολουθία:

$$0 \longrightarrow R/R^+ \otimes_R K \longrightarrow R/R^+ \otimes_R Q \longrightarrow R/R^+ \otimes_R P' \longrightarrow 0$$

Οπότε έχουμε την εξής ακριβή διασπάσιμη ακολουθία:

$$0 \longrightarrow \overline{K} \longrightarrow \overline{Q} \xrightarrow{\overline{\gamma}} \overline{P'} \longrightarrow 0$$

συνεπώς ισχύει ότι:

$$\overline{Q} = \overline{K} \oplus \overline{P'}.$$

Επειδή ο $\overline{\gamma}$ είναι ισομορφισμός συνεπάγεται ότι $\overline{K} = 0$. Το $\mathsf{Ker}(\gamma) = K$ ως ευθύς αθροιστέος του πεπερασμένα παραγόμενου R-προτύπου Q, είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο και επίσης είναι και βαθμωτό. Άρα, σύμφωνα με τις Προτάσεις (3.4.6), (3.4.8) θα ισχύει ότι $\mathsf{Ker}(\gamma) = K = 0$, οπότε η γ θα είναι $1-1$.

Άρα, ο $\gamma : Q \to P$ είναι ένας ισομορφισμός. □

Θεώρημα 3.4.10. *Έστω P ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό βαθμωτό R-πρότυπο πάνω από τον βαθμωτό δακτύλιο $R = R_0 \oplus R_1 \oplus \ldots$. Τότε, υπάρχει ένας βαθμωτός ισομορφισμός R-προτύπων $R \otimes_{R_0} \overline{P} \cong P$ (Το P επεκτείνεται από τον R_0).*

Απόδειξη. Το $\overline{P}$ είναι ένα βαθμωτό R_0-πρότυπο, οπότε το τανυστικό γινόμενο $R \otimes_{R_0} \overline{P}$ είναι βαθμωτό, δηλαδή ισχύει ότι $(R \otimes_{R_0} \overline{P})_k = \sum_{i+j=k} R_i \otimes_{R_0} \overline{P_j}$, με άθροιση πάνω από όλα τα i, j, έτσι ώστε $i \geq 0$ και $i + j = k$. Έστω η κανονική προβολή $f : P \to \overline{P}$. Εφόσον το P είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό R-πρότυπο, συνεπάγεται ότι το $\overline{P}$ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό R_0-πρότυπο. Τότε προκύπτει η ακόλουθη διασπάσιμη ακριβής ακολουθία βαθμωτών R-προτύπων:

$$0 \longrightarrow \mathsf{Ker}\, f \longrightarrow P \xrightarrow{f} \overline{P} \longrightarrow 0\,.$$

Οπότε η κανονική προβολή f είναι ένας διασπάσιμος R_0-επιμορφισμός. Επιλέγουμε έναν R_0-ομομορφισμό $g : \overline{P} \to P$, τέτοιον ώστε να ισχύει $f \circ g = Id_{\overline{P}}$. Εφόσον η απεικόνιση f

διατηρεί τον βαθμό, το ίδιο θα συμβαίνει και με την g, οπότε και η g είναι ένας διασπάσιμος R_0-επιμορφισμός. Η g επάγει έναν R-ομομορφισμό

$$\begin{aligned} \gamma : Q = R \otimes_{R_0} \overline{P} &\to P \\ r \otimes x &\mapsto r \cdot g(x) \end{aligned}$$

ο οποίος διατηρεί επίσης τον βαθμό. Ο $\overline{\gamma} : \overline{Q} \to \overline{P}$ είναι ένας ισομορφισμός, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση $(3.4.9)$, ο γ είναι ισομορφισμός. Άρα ισχύει ότι $R \otimes_{R_0} \overline{P} \cong P$. □

Έτσι καταλήγουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα:

Πόρισμα 3.4.11. *Έστω $R = R_0[t_1, \dots, t_n]$ ο βαθμωτός δακτύλιος πολυωνύμων n μεταβλητών, όπου ο R_0 έχει βαθμό 0 και κάθε μεταβλητή t_i έχει βαθμό 1. Έστω P ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό βαθμωτό R-πρότυπο. Τότε υπάρχει ένας βαθμωτός ισομορφισμός R-προτύπων $R \otimes_{R_0} \overline{P} \cong P$.*

Πόρισμα 3.4.12. *Έστω $R = R_0[t_1, \dots, t_n]$ ο βαθμωτός δακτύλιος πολυωνύμων n μεταβλητών, όπου ο R_0 έχει βαθμό 0 και κάθε μεταβλητή t_i έχει βαθμό 1. Αν κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό R_0-πρότυπο είναι ελεύθερο, τότε κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό R-πρότυπο είναι ελεύθερο.*

3.5 Ευσταθώς ελεύθερα πρότυπα

Στην παράγραφο αυτή, στόχος μας είναι να αποδείξουμε ένα θεώρημα του Serre, το οποίο λέει ότι αν k είναι σώμα, τότε κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό $k[x_1, \dots, x_n]$-πρότυπο είναι ευσταθώς ελεύθερο.

Ορισμός 3.5.1. *Ένα πρότυπο M λέμε ότι επιδέχεται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση μήκους $\leq n$ αν υπάρχει μία ακριβής ακολουθία*

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

όπου κάθε F_i είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο ελεύθερο πρότυπο.

Προφανώς κάθε ευσταθώς ελεύθερο πρότυπο είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

Πρόταση 3.5.2. *Ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό αριστερό R-πρότυπο P επιδέχεται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση αν και μόνο αν το P είναι ευσταθώς ελεύθερο.*

Απόδειξη. Έστω ότι το πρότυπο P είναι ευσταθώς ελεύθερο, τότε το P είναι πεπερασμένα παραγόμενο και υπάρχει ένα πεπερασμένα παραγόμενο ελεύθερο πρότυπο F τέτοιο ώστε το $P \oplus F$ να είναι ελεύθερο. Οπότε προκύπτει η ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow P \oplus F \longrightarrow P \longrightarrow 0,$$

συνεπώς το P επιδέχεται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση μήκους ≤ 1.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το P επιδέχεται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση, δηλαδή υπάρχει μία ελεύθερη επίλυση

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow P \longrightarrow 0,$$

όπου κάθε F_i είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο ελεύθερο πρότυπο. Θα αποδείξουμε ότι το P είναι ευσταθώς ελεύθερο με επαγωγή στο μήκος της επίλυσης $n \geq 0$. Αν $n = 0$, τότε υπάρχει μία ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow F_0 \longrightarrow P \longrightarrow 0,$$

όπου το F_0 είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο ελεύθερο πρότυπο. Η ακολουθία είναι ακριβής, οπότε $F_0 \cong P$, άρα το P είναι ελεύθερο, συνεπώς και ευσταθώς ελεύθερο. Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε ότι υπάρχει μία ελεύθερη επίλυση

$$0 \longrightarrow F_{n+1} \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\varepsilon} P \longrightarrow 0,$$

όπου κάθε F_i είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο ελεύθερο πρότυπο. Έστω $K = \mathsf{Ker}\,\varepsilon$, τότε μπορούμε να σπάσουμε την παραπάνω επίλυση σε δύο ακριβείς ακολουθίες:

$$0 \longrightarrow F_{n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow K \longrightarrow 0 \text{ και}$$

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F_0 \longrightarrow P \longrightarrow 0\ .$$

Από την πρώτη ακριβή ακολουθία συμπεραίνουμε ότι το K επιδέχεται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση μήκους $\leq n$. Εφόσον το P είναι προβολικό, η δεύτερη σύντομη ακριβής ακολουθία διασπάται, $F_0 \cong P \oplus K$, οπότε το K είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό πρότυπο. Επαγωγικά, το K είναι ευσταθώς ελεύθερο, δηλαδή, υπάρχει ένα πεπερασμένα παραγόμενο ελεύθερο πρότυπο Q, τέτοιο ώστε το $K \oplus Q$ να είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο ελεύθερο πρότυπο. Οπότε, το P είναι ευσταθώς ελεύθερο, εφόσον ισχύει

$$P \oplus (K \oplus Q) \cong (P \oplus K) \oplus Q \cong F_0 \oplus Q \quad \square$$

Ορισμός 3.5.3. *Ένα πρότυπο M λέμε ότι επιδέχεται μία πεπερασμένη προβολική επίλυση μήκους $\leq n$ αν υπάρχει μία ακριβής ακολουθία*

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

όπου κάθε P_i είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό πρότυπο.

Λήμμα 3.5.4. *Αν ένα πρότυπο M επιδέχεται μία πεπερασμένη προβολική επίλυση μήκους $\leq n$*

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

στην οποία κάθε P_i είναι ευσταθώς ελεύθερο, τότε το M επιδέχεται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση μήκους $\leq n+1$.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο $n \geq 0$. Αν $n = 0$, τότε το πρότυπο M επιδέχεται μία πεπερασμένη προβολική επίλυση μήκους 0,

$$0 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

όπου το P_0 είναι ευσταθώς ελεύθερο. Η ακολουθία $0 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$ είναι ακριβής, οπότε ο $\varepsilon : P_0 \to M$ είναι ένας ισομορφισμός. Συνεπώς, $M \cong P_0$ και το P_0 είναι ευσταθώς ελεύθερο, άρα και το M. Εφόσον το M είναι ευσταθώς ελεύθερο, θα υπάρχουν πεπερασμένα παραγόμενα ελεύθερα πρότυπα F_0 και F_1 τέτοια ώστε $F_0 \cong M \oplus F_1$, οπότε προκύπτει η ακριβής ακολουθία $0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$. Άρα το M επιδέχεται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση μήκους 1. Έστω $n > 0$. Έστω ότι το πρότυπο M επιδέχεται μία πεπερασμένη προβολική επίλυση μήκους $\leq n$

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

στην οποία κάθε P_i είναι ευσταθώς ελεύθερο. Εφόσον το P_0 είναι ευσταθώς ελεύθερο, θα υπάρχει ένα πεπερασμένα παραγόμενο ελεύθερο πρότυπο F τέτοιο ώστε το $P_0 \oplus F$ να είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο ελεύθερο πρότυπο. Υπάρχει μία ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2'} P_1 \oplus F \xrightarrow{d_1 \oplus 1_F} P_0 \oplus F \xrightarrow{\varepsilon'} M \longrightarrow 0$$

όπου $d_2' : p_2 \mapsto d_2(p_2, 0)$ και $\varepsilon' : (p_0, f) \mapsto \varepsilon(p_0)$. Ο πυρήνας $\ker \varepsilon'$ επιδέχεται μία ευσταθώς ελεύθερη επίλυση με $n-1$ όρους, συνεπώς, σύμφωνα με το επαγωγικό βήμα, ο πυρήνας $\ker \varepsilon'$ επιδέχεται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση μήκους n. Συνδυάζοντας αυτή την πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση μήκους n για τον πυρήνα $\ker \varepsilon'$ με την σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \ker \varepsilon' \longrightarrow P_0 \oplus F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

διαπιστώνουμε ότι το πρότυπο M επιδέχεται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση μήκους $\leq n+1$. □

Λήμμα 3.5.5. *Αν R είναι ένας αριστερός δακτύλιος της Noether και A είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R-πρότυπο, τότε το A επιδέχεται μία προβολική επίλυση όπου κάθε όρος της είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο.*

Απόδειξη. Εφόσον το A είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R-πρότυπο, θα υπάρχει ένα πεπερασμένα παραγόμενο ελεύθερο αριστερό R-πρότυπο P_0 και μία επί R-απεικόνιση $\varepsilon : P_0 \to A$. Εφόσον ο R είναι ένας αριστερός δακτύλιος της Noether, ο πυρήνας $\ker \varepsilon$ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R-πρότυπο, οπότε θα υπάρχει ένα πεπερασμένα παραγόμενο ελεύθερο αριστερό R-πρότυπο P_1 και μία επί R-απεικόνιση $d_1 : P_1 \to \ker \varepsilon$. Ορίζουμε την απεικόνιση $D_1 : P_1 \to P_0$ να είναι η σύνθεση $i \circ d_1$, όπου $i : \ker \varepsilon \to P_0$, ο εγκλεισμός. Τότε, υπάρχει μία ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow \ker D_1 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{D_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0.$$

Η κατασκευή αυτή μπορεί να επαναληφθεί, διότι ο πυρήνας $\ker D_1$ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R-πρότυπο. Συνεπώς, με αυτόν τον τρόπο η απόδειξη ολοκληρώνεται επαγωγικά. Στην ουσία, κατασκευάζουμε μία ελεύθερη επίλυση του A, όπου κάθε όρος της είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο. □

Πρόταση 3.5.6. *Έστω $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ μία ακριβής ακολουθία αριστερών R-προτύπων, όπου R είναι ένας αριστερός δακτύλιος της Noether. Αν δύο από αυτά τα πρότυπα επιδέχονται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση, το ίδιο συμβαίνει και με το τρίτο πρότυπο.*

Απόδειξη. Αν δύο από τα πρότυπα M, M', M'' επιδέχονται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση, τα πρότυπα αυτά θα είναι πεπερασμένα παραγόμενα. Εφόσον ο δακτύλιος R είναι ένας αριστερός δακτύλιος της Noether, τότε και το τρίτο πρότυπο θα είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Τότε, εφόσον ο δακτύλιος R είναι ένας αριστερός δακτύλιος της Noether, σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα, θα υπάρχουν ελεύθερες επιλύσεις των M' και M'' των οποίων οι όροι θα είναι πεπερασμένα παραγόμενα πρότυπα.

$$\begin{tikzcd}
& {} \arrow[d] & & {} \arrow[d] & \\
& F_1' \arrow[d] & & F_1'' \arrow[d] & \\
& F_0' \arrow[d] & & F_0'' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Σύμφωνα με το Horseshoe λήμμα, (βλέπε [28, Proposition 6.24]), μπορούμε μεταξύ των ελεύθερων επιλύσεων των M' και M'' να εισάγουμε μία ελεύθερη επίλυση του M. Να σημειώσουμε ότι όλα τα $F_i \cong F_i' \oplus F_i''$ είναι πεπερασμένα παραγόμενα ελεύθερα πρότυπα. Για κάθε $n \geq 0$, υπάρχει μία ακριβής ακολουθία συζυγιών: $0 \longrightarrow K_n' \longrightarrow K_n \longrightarrow K_n'' \longrightarrow 0$. Αν οποιαδήποτε από αυτές τις συζυγίες, έστω η K_n, είναι ένα ευσταθώς ελεύθερο πρότυπο, τότε η επίλυση

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

είναι μία πεπερασμένη επίλυση, όπου κάθε όρος της είναι ένα ευσταθώς ελεύθερο πρότυπο, εφόσον τα πεπερασμένα παραγόμενα ελεύθερα πρότυπα F_i είναι ευσταθώς ελεύθερα. Αν εφαρμόσουμε το προηγούμενο λήμμα συμπεραίνουμε ότι το M επιδέχεται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση.

Σύμφωνα με την υπόθεση, δύο από τα πρότυπα $\{M', M, M''\}$ επιδέχονται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση μήκους $\leq n$. Υποθέτουμε αρχικά ότι ένα από αυτά τα δύο πρότυπα, είναι το M''. Εφόσον ο δακτύλιος R είναι ένας αριστερός δακτύλιος της Noether και το M'' είναι ένα αριστερό R-πρότυπο το οποίο επιδέχεται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση μήκους $\leq n$, τότε η νιοστή συζυγία οποιασδήποτε ελεύθερης επίλυσης του M'', όπου η όροι της είναι πεπερασμένα παραγόμενα πρότυπα, είναι ευσταθώς ελεύθερη. Συνεπώς, η συζυγία K'' είναι ευσταθώς ελεύθερη. Η ακριβής ακολουθία των συζυγιών διασπάται, εφόσον τα ευσταθώς ελεύθερα πρότυπα είναι προβολικά. Άρα, η τρίτη συζυγία θα είναι ευσταθώς ελεύθερη, εφόσον το συμπλήρωμά της είναι ευσταθώς ελεύθερο πρότυπο. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο λήμμα συμπεραίνουμε ότι τα M' και M επιδέχονται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση.

Υποθέτουμε τώρα ότι τα πρότυπα M' και M επιδέχονται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση μήκους $\leq n$, οπότε οι συζυγίες K_n' και K_n είναι ευσταθώς ελεύθερα πρότυπα. Συνδυάζοντας την σύντομη ακριβή ακολουθία των συζυγιών $0 \longrightarrow K_n' \longrightarrow K_n \longrightarrow K_n'' \longrightarrow 0$ με την επίλυση

$$0 \longrightarrow K_n'' \longrightarrow F_n'' \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0'' \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

προκύπτει μία επίλυση ευσταθώς ελεύθερων προτύπων του M'':

$$0 \longrightarrow K_n' \longrightarrow K_n \longrightarrow F_n'' \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0'' \longrightarrow M'' \longrightarrow 0 .$$

Αν εφαρμόσουμε ξανά το προηγούμενο λήμμα συμπεραίνουμε ότι το M'' επιδέχεται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση. □

Ορισμός 3.5.7. Οικογένεια $\mathfrak{F}$ *ονομάζεται κάθε μη κενή υποκλάση του συνόλου των αριστερών R-προτύπων* obj($_R$Mod) *τέτοια ώστε αν δύο όροι μίας ακριβής ακολουθίας*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

ανήκουν στην $\mathfrak{F}$, τότε και ο τρίτος όρος της ακολουθίας θα ανήκει στην $\mathfrak{F}$.

Σχόλιο 3.5.8. Η Πρόταση (3.5.6) μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής: Αν R είναι ένας αριστερός δακτύλιος της Noether, τότε η κλάση όλων των αριστερών R-προτύπων τα οποία επιδέχονται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση είναι μία οικογένεια.

Λήμμα 3.5.9. *Κάθε τομή οικογενειών αριστερών R-προτύπων είναι μία οικογένεια.*

Απόδειξη. Έστω $\mathfrak{F}^* = \cap_a \mathfrak{F}_a$, όπου κάθε $\mathfrak{F}_a$ είναι μία οικογένεια. Αν

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

είναι μία ακριβής ακολουθία όπου δύο όροι της ανήκουν στην $\mathfrak{F}^*$, τότε αυτοί οι δύο όροι θα ανήκουν σε κάθε $\mathfrak{F}_a$. Εφόσον κάθε $\mathfrak{F}_a$ είναι μία οικογένεια, ο τρίτος όρος θα ανήκει σε κάθε $\mathfrak{F}_a$, συνεπώς ο τρίτος όρος θα ανήκει και στην $\mathfrak{F}^*$. □

Σχόλιο 3.5.10. Εφόσον η τομή όλων των οικογενειών αριστερών R-προτύπων είναι μία οικογένεια, τότε κάθε υποκλάση $X \subseteq \mathsf{obj}({}_{\mathsf{R}}\mathsf{Mod})$ παράγει μία οικογένεια.

Ορισμός 3.5.11. *Η τομή όλων των οικογενειών που περιέχουν μία υποκλάση $X \subseteq \mathsf{obj}({}_{\mathsf{R}}\mathsf{Mod})$ ονομάζεται η* **οικογένεια που παράγεται από** *αυτή την υποκλάση και συμβολίζεται με $\mathfrak{F}(X)$.*

Ορισμός 3.5.12. *Έστω μία υποκλάση $X \subseteq \mathsf{obj}({}_{\mathsf{R}}\mathsf{Mod})$. Ένα αριστερό R-πρότυπο καλείται* **X-child** *αν εμφανίζεται σε μία σύντομη ακριβή ακολουθία της οποίας οι άλλοι δύο όροι ανήκουν στην υποκλάση X.*

Συμβολίζουμε με $\mathfrak{C}(X)$ την κλάση όλων των X-children.

Λήμμα 3.5.13. *Η κλάση $\mathfrak{C}(X)$ όλων των X-children περιέχει την υποκλάση $X \subseteq \mathsf{obj}({}_{\mathsf{R}}\mathsf{Mod})$.*

Απόδειξη. Αν $X = \emptyset$ τότε $X = \emptyset \subseteq \mathfrak{C}(X)$. Αν $X \neq \emptyset$, έστω $M \in X$. Έστω η σύντομη ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{1_M} M \longrightarrow 0 \longrightarrow 0\ .$$

Το μηδενικό πρότυπο $\{0\}$ είναι ένα X-child διότι εμφανίζεται στην παραπάνω σύντομη ακριβή ακολουθία της οποίας οι άλλοι δύο όροι ανήκουν στην υποκλάση X. Συνεπώς, $\{0\} \in \mathfrak{C}(X)$. Έστω ότι η υποκλάση X περιέχει το μηδενικό ιδεώδες, άρα και το M είναι ένα X-child διότι εμφανίζεται στην παραπάνω σύντομη ακριβή ακολουθία της οποίας οι άλλοι δύο όροι ανήκουν στην υποκλάση X. Συνεπώς, $M \in \mathfrak{C}(X)$. Άρα, $X \subseteq \mathfrak{C}(X)$. □

Ορίζουμε μία αύξουσα αλυσίδα υποκλάσεων:

$$\mathfrak{C}^0(X) = X\ \ , \mathfrak{C}^{n+1}(X) = \mathfrak{C}(\mathfrak{C}^n(X)).$$

Τότε η ένωση $\cup_{n=0}^{\infty}\mathfrak{C}^n(X)$ αποτελείται από όλους τους απογόνους του X.

Λήμμα 3.5.14. *Αν X είναι μία υποκλάση των $obj({}_RMod)$ που περιέχει το μηδενικό ιδεώδες, τότε η $\cup_{n=0}^{\infty}\mathfrak{C}^n(X) = \mathfrak{F}(X)$ είναι η οικογένεια που παράγεται από την υποκλάση X.*

Απόδειξη. Κάθε οικογένεια $\mathfrak{F}$ που περιέχει την υποκλάση X θα πρέπει να περιέχει την $\mathfrak{C}(X)$ και όλες τις $\mathfrak{C}^n(X)$ για κάθε n, άρα και την ένωσή τους. Οπότε, $\cup_{n=0}^{\infty}\mathfrak{C}^n(X) \subseteq \mathfrak{F}$ για κάθε οικογένεια $\mathfrak{F}$. Συνεπώς, $\cup_{n=0}^{\infty}\mathfrak{C}^n(X) \subseteq \cap_{\mathfrak{F}}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(X)$.

Για να αποδείξουμε τον αντίστροφο εγκλεισμό, αρκεί να δείξουμε ότι η ένωση $\cup_{n=0}^{\infty}\mathfrak{C}^n(X)$ είναι μία οικογένεια που περιέχει το X. Έστω

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

μία ακριβής ακολουθία όπου δύο όροι της ανήκουν στην ένωση $\cup_{n=0}^{\infty}\mathfrak{C}^n(X)$. Τότε υπάρχει κάποιο $n \geq 0$ τέτοιο ώστε η κλάση $\mathfrak{C}^n(X)$ να περιέχει αυτούς τους δύο όρους, συνεπώς ο τρίτος όρος θα ανήκει στην κλάση $\mathfrak{C}(\mathfrak{C}^n(X)) = \mathfrak{C}^{n+1}(X)$. Άρα, η ένωση $\cup_{n=0}^{\infty}\mathfrak{C}^n(X)$ είναι μία οικογένεια. □

Πόρισμα 3.5.15. *Αν R είναι ένας αριστερός δακτύλιος της Noether και X είναι μία κλάση αριστερών R-προτύπων όπου κάθε στοιχείο της επιδέχεται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση, τότε κάθε στοιχείο της οικογένειας $\mathfrak{F}(X)$ η οποία παράγεται από την X επιδέχεται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση.*

Απόδειξη. Έστω M ένα τυχαίο στοιχείο της οικογένειας $\mathfrak{F}(X)$ η οποία παράγεται από την X, $M \in \mathfrak{F}(X)$, θα αποδείξουμε ότι το M επιδέχεται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση. Εφόσον $M \in \mathfrak{F}(X) = \cup_{n=0}^{\infty}\mathfrak{C}^n(X)$, υπάρχει ένας ελάχιστος αριθμός $n \geq 0$ τέτοιος ώστε $M \in \mathfrak{C}^n(X)$. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο n. Αν $n = 0$, τότε $M \in \mathfrak{C}^0(X) = X$. Σύμφωνα με την υπόθεση κάθε στοιχείο της X επιδέχεται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση, οπότε το M επιδέχεται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση. Αν $n > 0$, τότε το M είναι όρος μίας σύντομη ακριβής ακολουθίας, της οποίας οι άλλοι δύο όροι ανήκουν στην $\mathfrak{C}^{n-1}(X)$. Σύμφωνα με το επαγωγικό βήμα, αυτοί οι δύο όροι επιδέχονται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση. Εφαρμόζοντας την Πρόταση (3.5.6), συμπεραίνουμε ότι και ο τρίτος όρος της ακολουθίας, δηλαδή το M επιδέχεται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση. □

Ορισμός 3.5.16. *Έστω M ένα R-πρότυπο ενός μεταθετικού δακτυλίου R. Ένα υποσύνολο $X \subseteq M$ καλείται* **βαθμωτά κλειστό** *αν $x \in X$ συνεπάγεται ότι $rx \in X$ για κάθε $r \in R$.*

Κάθε υποπρότυπο ενός προτύπου M είναι βαθμωτά κλειστό. Ένα παράδειγμα ενός βαθμωτά κλειστού υποσυνόλου του R, το οποίο δεν είναι υποπρότυπο του R είναι το ακόλουθο:

$$\mathsf{Zer}(R) = \{r \in R : r = 0 \text{ ή } r \text{ είναι ένας μηδενοδιαιρέτης}\}.$$

Ορισμός 3.5.17. *Έστω $X \subseteq M$ ένα βαθμωτά κλειστό υποσύνολο. Ο* **μηδενιστής** *του $x \in X$ είναι το σύνολο:*

$$\mathsf{ann}(x) = \{r \in R : rx = 0\},$$

Ο **μηδενιστής** *του X είναι το σύνολο:*

$$\mathsf{ann}(X) = \{r \in R : rx = 0 \textit{ για κάθε } x \in X\},$$

και

$$\mathsf{A}(X) = \{\mathsf{ann}(x) : x \in X \textit{ και } x \neq 0\}.$$

Να σημειώσουμε ότι τα σύνολα $\mathsf{ann}(x)$ και $\mathsf{ann}(X)$ είναι ιδεώδη του R.

Λήμμα 3.5.18. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος της Noether, M ένα μη-μηδενικό πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο και έστω $X \subseteq M$ ένα μη κενό βαθμωτά κλειστό υποσύνολο του M.*

1. *Ένα μεγιστοτικό ιδεώδες I μεταξύ των ιδεωδών $\mathsf{A}(X) = \{\mathsf{ann}(x) : x \in X$ και $x \neq 0\}$ είναι ένα πρώτο ιδεώδες.*

2. *Υπάρχει μία φθίνουσα αλυσίδα*

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_n = \{0\}$$

για την οποία ισχύει ότι $M_i/M_{i+1} \cong R/\wp_i$ για κάποια πρώτα ιδεώδη $\wp_i$.

Απόδειξη. 1. Εφόσον ο R είναι ένας δακτύλιος της Noether κάθε μη κενό σύνολο ιδεωδών του R έχει ένα μεγιστοτικό στοιχείο. Οπότε το σύνολο ιδεωδών $\mathsf{A}(X) = \{\mathsf{ann}(x) : x \in X$ και $x \neq 0\}$ θα περιέχει ένα μεγιστοτικό στοιχείο. Έστω $I = \mathsf{ann}(x)$ το μεγιστοτικό στοιχείο του συνόλου $\mathsf{A}(X)$. Υποθέτουμε ότι τα a, b είναι δύο στοιχεία του δακτυλίου R τέτοια ώστε $ab \in I$ και $b \notin I$. Τότε, $ab \in I = \mathsf{ann}(x) \Rightarrow abx = 0$ και $b \notin I \Rightarrow bx \neq 0$. Όμως, $\mathsf{ann}(bx) = \{r \in R : rbx = 0\}$, οπότε $a \in \mathsf{ann}(bx)$, συνεπώς θα ισχύει ότι $\mathsf{ann}(bx) \supseteq I + Ra \supseteq I$. Αν $a \notin I$, τότε $\mathsf{ann}(bx) \supseteq I + Ra \supsetneq I$. Το σύνολο $X \subseteq M$ είναι ένα μη κενό βαθμωτά κλειστό υποσύνολο του M, οπότε $bx \in X$, άρα $\mathsf{ann}(bx) \in \mathsf{A}(X)$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το ότι το $I = \mathsf{ann}(x)$ είναι ένα μεγιστοτικό στοιχείο του $\mathsf{A}(X)$. Άρα, το στοιχείο a ανήκει στο I, $a \in I$, συνεπώς το I είναι ένα πρώτο ιδεώδες.

2. Εφόσον ο R είναι ένας αριστερός δακτύλιος της Noether κάθε μη κενό σύνολο αριστερών ιδεωδών του R έχει ένα μεγιστοτικό στοιχείο. Οπότε το μη κενό σύνολο ιδεωδών $\mathsf{A}(M) = \{\mathsf{ann}(x) : x \in M$ και $x \neq 0\}$ θα περιέχει ένα μεγιστοτικό στοιχείο. Έστω ότι αυτό το μεγιστοτικό στοιχείο είναι το $\wp_1 = \mathsf{ann}(x_1)$, το οποίο σύμφωνα με το πρώτο μέλος του λήμματος είναι πρώτο. Ορίζουμε $M_1 = \langle x_1 \rangle$ και σημειώνουμε ότι $M_1 \cong R/\mathsf{ann}(x_1) = R/\wp_1$. Επαναλαμβάνουμε αυτή την διαδικασία. Έστω $\wp_2 = \mathsf{ann}(x_2 + M_1)$ ένα μεγιστοτικό στοιχείο του συνόλου $\mathsf{A}(M/M_1)$, οπότε το $\wp_2$ είναι πρώτο. Ορίζουμε $M_2 = \langle x_2, x_1 \rangle$. Να σημειώσουμε ότι $\{0\} \subseteq M_1 \subseteq M_2$ και ότι $M_2/M_1 \cong R/\mathsf{ann}(x_2 + M_1) = R/\wp_2$. Εφόσον ο R είναι ένας αριστερός δακτύλιος της Noether και M ένα μη-μηδενικό πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο, τότε το M ικανοποιεί την συνθήκη της αύξουσας αλυσίδας, οπότε αυτή η διαδικασία σταματάει σε κάποιο $M^* \subseteq M$. Τότε αναγκαστικά θα πρέπει να ισχύει $M^* = M$, διότι διαφορετικά η παραπάνω διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί παράγοντας ένα πρότυπο N με $M^* \subseteq N \subseteq M$ και $N \neq M^*$, κάτι το οποίο αντίκειται στο γεγονός ότι το M^* είναι μεγιστοτικό. Αναδιατάσσοντας τους δείκτες καταλήγουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα. □

Συνεχίζουμε με ένα θεώρημα το οποίο είναι απαραίτητο για την ολοκλήρωση της απόδειξης του θεωρήματος του Serre.

Θεώρημα 3.5.19. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος της Noether. Αν κάθε πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο επιδέχεται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση, τότε κάθε πεπερασμένα παραγόμενο $R[x]$-πρότυπο επιδέχεται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση.*

Απόδειξη. Έστω X η κλάση όλων των πεπερασμένα παραγόμενων επεκτάσιμων από τον R $R[x]$-προτύπων M, δηλαδή, $M \cong R[x] \otimes_R B$ για κάποιο πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο B. Σύμφωνα με την υπόθεση, το B επιδέχεται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση: υπάρχει μία R-ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow F_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

στην οποία όλα τα F_i είναι πεπερασμένα παραγόμενα ελεύθερα R-πρότυπα. Εφόσον $R[x]$ είναι ένα επίπεδο R-πρότυπο, αν πολλαπλασιάσουμε τανυστικά την παραπάνω ακολουθία με $R[x]$ θα πάρουμε μία $R[x]$-ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow R[x] \otimes_R F_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow R[x] \otimes_R F_0 \longrightarrow R[x] \otimes_R B \longrightarrow 0\ .$$

Όμως κάθε $R[x] \otimes_R F_i$ είναι ένα ελεύθερο $R[x]$-πρότυπο, οπότε το M επιδέχεται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση. Σύμφωνα με το Πόρισμα (3.5.15) κάθε πρότυπο που ανήκει στην οικογένεια $\mathfrak{F}(X)$ επιδέχεται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση. Οπότε, στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενο $R[x]$-πρότυπο M ανήκει στην $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(X)$.

Αρχίζουμε κανονικοποιώντας το M. Υποθέτουμε ότι $\mathsf{ann}(M) \cap R \neq \{0\}$. Έστω $m \in M$ ένα μη μηδενικό στοιχείο του M και έστω $\mathsf{ann}(m)$ ο μηδενιστής του m. Να σημειώσουμε ότι $\mathsf{ann}(m) \cap R \supseteq \mathsf{ann}(M) \cap R \neq \{0\}$. Έστω $I = \mathsf{ann}(m) \cap R$, τότε $R/I \cong \langle m \rangle_R$, το R-υποπρότυπο του M που παράγεται από το στοιχείο m. Εφόσον το $R[x]$ είναι ένα επίπεδο R-πρότυπο, υπάρχει μία ακριβής ακολουθία:

$$0 \longrightarrow R[x] \otimes_R I \longrightarrow R[x] \longrightarrow R[x] \otimes_R \langle m \rangle_R \longrightarrow 0\ .$$

Ισχύει ότι $R[x] \otimes_R I \cong R[x]I$, οπότε $R[x]I \neq \{0\}$. Έστω $R[x]/R[x]I \cong R[x] \otimes_R \langle m \rangle_R \cong \langle m_1 \rangle$ ένα κυκλικό υποπρότυπο του M. Άρα, το $\langle m_1 \rangle$ είναι επεκτάσιμο, διότι $\langle m_1 \rangle \cong R[x] \otimes_R \langle m \rangle_R$, άρα το $\langle m_1 \rangle$ ανήκει στην κλάση X, $\langle m_1 \rangle \in X \subseteq \mathfrak{F}$. Από την ακρίβεια της παραπάνω σύντομη ακριβής ακολουθίας, συνεπάγεται ότι $\mathsf{ann}(m_1) \cong R[x] \otimes_R I \cong R[x]I$, οπότε $\mathsf{ann}(m_1) \cap R \neq \{0\}$. Αυτό το επιχείρημα μπορεί να εφαρμοστεί και στο πρότυπο $M/\langle m_1 \rangle$: υπάρχει $m_2 + \langle m_1 \rangle \in M/\langle m_1$ τέτοιο ώστε $\mathsf{ann}(m_2 + \langle m_1 \rangle) \cap R \neq \{0\}$ και $\langle m_1, m_2 \rangle / \langle m_1 \rangle \in X$. Συνεπάγεται ότι $\langle m_1, m_2 \rangle \in \mathfrak{F}$ και $\mathsf{ann}(\langle m_1, m_2 \rangle) \cap R \neq \{0\}$. Η διαδικασία αυτή σταματάει εφόσον το M ικανοποιεί την συνθήκη της αύξουσας αλυσίδας. Συμπεραίνουμε ότι αν $\mathsf{ann}(M) \cap R \neq \{0\}$, τότε το M ανήκει στην $\mathfrak{F}$.

Σύμφωνα με το Λήμμα (3.5.18)(2), υπάρχει μία φθίνουσα αλυσίδα

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_n = \{0\}$$

για την οποία ισχύει ότι $M_i/M_{i+1} \cong R/\wp_i$ για κάποια πρώτα ιδεώδη $\wp_i$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $M = R[x]/\wp \in \mathfrak{F}$. Η απόδειξη αυτή θα ολοκληρωθεί με επαγωγή στο n. Η κανονικοποίηση του M μας επιτρέπει να υποθέσουμε ότι $\mathsf{ann}(R[x]/\wp) \cap R = \wp \cap R = \{0\}$. Όμως το $\wp \cap R$ είναι ένα πρώτο ιδεώδες του R, συνεπώς οι δακτύλιοι R και $R[x]$ είναι ακέραιες περιοχές. Επιλέγουμε ένα μη μηδενικό $f(x) \in \wp \subseteq R[x]$ και θεωρούμε την ακόλουθη ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow (f) \longrightarrow \wp \longrightarrow \wp/(f) \longrightarrow 0\ .$$

Ο δακτύλιος $R[x]$ είναι μία ακέραια περιοχή, οπότε $(f) \cong R[x]$. Εφόσον $f(x) \in \mathsf{ann}(\wp/(f))$, συμπεραίνουμε ότι $\mathsf{ann}(\wp/(f)) \neq \{0\}$. Οπότε, τα $(f), \wp/(f)$ ανήκουν στην οικογένεια $\mathfrak{F}$, άρα και το $\wp$ θα ανήκει στην $\mathfrak{F}$. Τελικά, εφόσον $R[x], \wp \in \mathfrak{F}$, το $R[x]/\wp$ θα ανήκει στην οικογένεια $\mathfrak{F}$. □

Πρόταση 3.5.20. *Αν R είναι μία περιοχή κύριων ιδεωδών, τότε κάθε πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο επιδέχεται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση μήκους ≤ 1.*

Απόδειξη. Αν M είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο, τότε σύμφωνα με το Πόρισμα $(1.1.12)$, θα υπάρχει μία επί απεικόνιση $a : F \to M$, όπου το F είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο ελεύθερο R-πρότυπο. Αν $K = \ker a$, τότε θα υπάρχει μία σύντομη ακριβής ακολουθία R-προτύπων:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0\ .$$

Στην παραπάνω ακολουθία τα πρότυπα F και K είναι πεπερασμένα παραγόμενα ελεύθερα R-πρότυπα. Το πρότυπο K είναι ελεύθερο ως υποπρότυπο του ελεύθερου προτύπου F πάνω από μία περιοχή κύριων ιδεωδών. Συνεπώς, το πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο M επιδέχεται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση μήκους ≤ 1. □

Έτσι, καταλήγουμε στο θεώρημα του Serre:

Θεώρημα 3.5.21. *(**Θεώρημα του Serre**) Αν k είναι ένα σώμα, τότε κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό $k[x_1, \ldots, x_n]$-πρότυπο είναι ευσταθώς ελεύθερο.*

Απόδειξη. Αρχικά αποδεικνύουμε, με επαγωγή στο $n \geq 1$, ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενο $k[x_1, \ldots, x_n]$-πρότυπο επιδέχεται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση. Αν $n = 1$, τότε ο δακτύλιος πολυωνύμων μίας μεταβλητής $k[x]$ είναι μία περιοχή κύριων ιδεωδών, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση $(3.5.20)$ κάθε πεπερασμένα παραγόμενο $k[x]$-πρότυπο επιδέχεται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση μήκους ≤ 1. Αν $n > 1$, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα Βάσης του Hilbert, ο $R = k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ είναι δακτύλιος της Noether. Σύμφωνα με το επαγωγικό βήμα, κάθε πεπερασμένα παραγόμενο $R = k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$-πρότυπο επιδέχεται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα $(3.5.19)$, κάθε πεπερασμένα παραγόμενο $R[x_n] = k[x_1, \ldots, x_n]$-πρότυπο επιδέχεται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση. Συνεπώς, τα πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά $k[x_1, \ldots, x_n]$-πρότυπα επιδέχονται μία πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση $(3.5.2)$, είναι ευσταθώς ελεύθερα. □

Σχόλιο 3.5.22. Για μία διαφορετική προσέγγιση του θέματος, στα πλαίσια της Αλγεβρικής K-θεωρίας, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο εδάφιο II.5 του Lam (βλέπε [13, Chapter 2, Section 5]).

3.6 Ο πολυωνυμικός δακτύλιος δύο μεταβλητών

Στην παράγραφο αυτή, θα αποδείξουμε ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό πρότυπο πάνω από τον πολυωνυμικό δακτύλιο δύο μεταβλητών $k[t_1, t_2]$, όπου k είναι ένα σώμα, είναι ελεύθερο. Το αποτέλεσμα αυτό διατυπώθηκε και αποδείχθηκε από τον Seshadri, το 1958 (βλέπε [30]). Η απόδειξη του θεωρήματος που θα παραθέσουμε οφείλεται στον Roitman (βλέπε [26]).

Θεώρημα 3.6.1. *(**Θεώρημα του Seshadri**) Κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό πρότυπο πάνω από τον πολυωνυμικό δακτύλιο δύο μεταβλητών $k[t_1, t_2]$, όπου k είναι ένα σώμα, είναι ελεύθερο.*

Για να αποδείξουμε το θεώρημα του Seshadri αρκεί να αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 3.6.2. *Έστω R μία περιοχή κύριων ιδεωδών. Τότε ο δακτύλιος πολυωνύμων μίας μεταβλητής $R[t]$ είναι δακτύλιος του Hermite.*

Απόδειξη. Έστω R μία περιοχή κύριων ιδεωδών. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι ο δακτύλιος πολυωνύμων μίας μεταβλητής $R[t]$ είναι δακτύλιος του Hermite. Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε unimodular γραμμή μπορεί να συμπληρωθεί σε έναν αντιστρέψιμο πίνακα πάνω από τον R. Έστω K το σώμα κλασμάτων της περιοχής κύριων ιδεωδών R. Επειδή η R είναι περιοχή κύριων ιδεωδών, τότε κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό $R[t]$-πρότυπο P είναι ευσταθώς ελεύθερο (βλέπε [13, Corollary 5.9, page 64]). Οπότε θα ολοκληρωθεί η απόδειξη αν αποδειχθεί ότι ο $A = R[t]$ είναι δακτύλιος του Hermite.

Έστω $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathsf{UM}_n(A)$. Εφόσον ο δακτύλιος $K[t]$ είναι δακτύλιος του Hermite, η γραμμή α μπορεί να συμπληρωθεί σε έναν πίνακα $M \in \mathsf{GL}_n(K[t])$. Απαλείφοντας όλους τους παρονομαστές από τον M, μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλα τα στοιχεία του πίνακα M ανήκουν στον δακτύλιο A και ότι $\det M = d \in R\backslash\{0\}$. Αν η ορίζουσα d είναι ένα αντιστρέψιμο στοιχείο του R, τότε καταλήγουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα, οπότε υποθέτουμε ότι δεν είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του R. Έστω $b \in R$ ένας πρώτος παράγοντας της d. Εφόσον το R/b είναι σώμα, τότε $\overline{A} = A/b \cong (R/b)[t]$ είναι μία ευκλείδεια περιοχή, οπότε σύμφωνα με το Πόρισμα (2.2.11) θα ισχύει ότι:

$$\overline{\alpha} \sim_{E_n(\overline{A})} (\overline{1}, \overline{0}, \ldots, \overline{0}).$$

Περνόντας από τον δακτύλιο $\overline{A}$ στον δακτύλιο A, παρατηρούμε ότι υπάρχει κάποιος πίνακας $E_1 \in E_n(A)$ τέτοιος ώστε

$$\alpha \cdot E_1 \equiv (1, 0, \ldots, 0) (\mathsf{mod}\, b).$$

Έστω

$$M_1 = ME_1 = (\alpha_{ij}), \text{ και } N = (\alpha_{ij})_{2 \le i,j \le n}.$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα $\det M_1 = d$ κατά μήκος της πρώτης γραμμής, παρατηρούμε ότι $\det N \equiv 0 (\mathsf{mod}\, b)$. Σύμφωνα με το θεώρημα στοιχειωδών διαιρετών πάνω από μία περιοχή κύριων ιδεωδών, μπορούμε να γράψουμε το εξής:

(3.1) $$\overline{X} \cdot \overline{N} \cdot \overline{Y} = diag(\overline{d_2}, \ldots, \overline{d_{n-1}}, \overline{0}),$$

όπου $\overline{X}, \overline{Y} \in SL_{n-1}(\overline{A}) = E_{n-1}(\overline{A})$ (βλέπε Πόρισμα (2.2.11)(2)). Περνόντας από τους πίνακες $\overline{X}, \overline{Y}$ στους πίνακες $X, Y \in E_{n-1}(A)$, έστω οι πίνακες $E_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Y \end{smallmatrix}\right)$, $E_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X \end{smallmatrix}\right)$. Τότε,

(3.2) $$M_2 = E_3 M E_1 E_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & (\alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}) \cdot Y \\ * & XNY \end{pmatrix},$$

όπου, σύμφωνα με την (3.1), η τελευταία γραμμή του πίνακα XNY αποτελείται από πολλαπλάσια του b. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $(n, 1)$-στοιχείο του πίνακα M_2, έστω c, είναι επίσης ένα πολλαπλάσιο του b. (Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί αφαιρώντας c φορές την πρώτη γραμμή του M_2 από την τελευταία του γραμμή. Αυτό θα μετατρέψει το c σε $c \cdot (1 - \alpha_{11}) \in bA$ και δεν θα αλλάξει τα άλλα χαρακτηριστικά του M_2 εφόσον η γραμμή $(\alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}) \cdot Y$ αποτελείται επίσης από πολλαπλάσια του b). Αφαιρώντας ένα κοινό παράγοντα b από αυτή τη γραμμή, έπεται από την (3.2) ότι η γραμμή:

$$\beta = (\alpha_{11}, (\alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}) \cdot Y)$$

μπορεί να συμπληρωθεί σε έναν πίνακα πάνω από τον A με ορίζουσα d/b (με έναν επιπλέον πρώτο παράγοντα). Στο σημείο αυτό, επικαλούμενοι μία επαγωγική υπόθεση, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι η γραμμή β μπορεί να συμπληρωθεί σε έναν πίνακα που ανήκει στην ομάδα $\mathsf{GL}_n(A)$. Όμως ισχύει ότι:

$$\alpha \sim (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}) \sim (\alpha_{11}, (\alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}) \cdot Y) = \beta,$$

οπότε η γραμμή α μπορεί να συμπληρωθεί σε έναν πίνακα της $\mathsf{GL}_n(A)$. □

Σχόλιο 3.6.3. Για μία διαφορετική απόδειξη του θεωρήματος του Seshadri, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο εδάφιο II.6 του Lam (βλέπε [13, Chapter 2, Section 6]).

3.7 Προβολικά πρότυπα μεγάλης βαθμίδας

Στην παράγραφο αυτή στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό R-πρότυπο με rank $P > d$ πάνω από τον πολυωνυμικό δακτύλιο d μεταβλητών, $R = k[t_1, \ldots, t_d]$, όπου k είναι ένα σώμα, είναι ελεύθερο. Αυτό το αποτέλεσμα οφείλεται στον Bass (βλέπε [4]). Για να καταλήξουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα θα μας φανούν χρήσιμα κάποια αποτελέσματα από την μεταθετική άλγεβρα.

Ορισμός 3.7.1. *Μία αλυσίδα γνήσιων εγκλεισμών πρώτων ιδεωδών της μορφής:* $\wp_0 \subsetneq \wp_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \wp_n$ *ενός μεταθετικού δακτυλίου R λέμε ότι έχει* **μήκος** n.

Ορισμός 3.7.2. Διάσταση του Krull *ενός μεταθετικού δακτυλίου R ονομάζεται το ελάχιστο άνω φράγμα (supremum) του πλήθους των γνήσιων εγκλεισμών μιάς αλυσίδας πρώτων ιδεωδών.*

Λήμμα 3.7.3. *Έστω $\wp_1, \ldots, \wp_r$ πρώτα ιδεώδη ενός μεταθετικού δακτυλίου R. Έστω $x \in R$ και έστω $\mathfrak{U}$ ένα ιδεώδες του R. Αν ισχύει ότι $x + \mathfrak{U} \subseteq \bigcup_i \wp_i$, τότε $(x, \mathfrak{U}) \subseteq \wp_i$ για κάποιο i. (Το $(x, \mathfrak{U})$ συμβολίζει το ιδεώδες που παράγεται από τα x και $\mathfrak{U}$).*

Απόδειξη. Επιλέγουμε ένα αντιπαράδειγμα με το r να είναι ελάχιστο. Τότε πρέπει να ισχύει ότι $r > 1$ και $\wp_i \nsubseteq \wp_j$, για $i \neq j$. Ισχυριζόμαστε ότι $x \in \bigcap \wp_i$. Υποθέτουμε ότι $x \notin \wp_i$ για κάποιο i. Τότε τα $x + \wp_i \cdot \mathfrak{U}$ και $\wp_i$ είναι ξένα, συνεπώς $x + \wp_i \cdot \mathfrak{U} \subseteq_{j \neq i} \wp_j$. Από την επιλογή του r, συμπεραίνουμε ότι $(x, \wp_i \cdot \mathfrak{U}) \subseteq \wp_j$ για κάποιο $j \neq i$. Εφόσον $\wp_i \nsubseteq \wp_j$ και το $\wp_j$ είναι ένα πρώτο ιδεώδες, συνεπάγεται ότι $(x, \mathfrak{U}) \subseteq \wp_j$, άτοπο. Οπότε $x \in \bigcap_i \wp_i$. Επίσης $\mathfrak{U} \subseteq \bigcup_i \wp_i$. Πάλι σύμφωνα με την επιλογή του r, παρατηρούμε ότι, για κάθε i, ισχύει $\mathfrak{U} \nsubseteq \bigcup_{j \neq i} \wp_j$. Έστω $y_i \in \mathfrak{U} \backslash \bigcup_{j \neq i} \wp_j$. Τότε πρέπει να ισχύει ότι $y_i \in \wp_j$. Αν θέσουμε $y = \sum y_1 \cdots \widehat{y_i} \cdots y_r$, τότε $y \in \mathfrak{U}$ αλλά το y δεν μπορεί να ανήκει σε κανένα $\wp_i$, άτοπο. □

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα (3.7.3) για να δώσουμε μία δεύτερη απόδειξη του Πορίσματος (2.2.12).

Πόρισμα 3.7.4. *Έστω R ένας μεταθετικός ημιτοπικός δακτύλιος και $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathsf{UM}_n(R)$ μία unimodular γραμμή, $n \geq 2$. Τότε $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \sim_{E_n(R)} e_1$.*

Απόδειξη. Έστω $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ τα μεγιστοτικά ιδεώδη του ημιτοπικού δακτυλίου R. Έστω $x = \alpha_1$ και $\mathfrak{U} = \sum_{i \geq 2} R \cdot \alpha_i$. Εφόσον $(x, \mathfrak{U}) = R \nsubseteq \mathfrak{m}_i$, για κάθε i, υπάρχει ένα στοιχείο

$$u = \alpha_1 + c_2 \cdot \alpha_2 + \ldots + c_n \cdot \alpha_n \notin \bigcup_i \mathfrak{m}_i.$$

Το u είναι ένα αντιστρέψιμο στοιχείο του R, οπότε $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \sim_{E_n(R)} e_1$. □

Λήμμα 3.7.5. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος. Τότε*

1. *κάθε πρώτο ιδεώδες του R περιέχει ένα ελαχιστοτικό πρώτο ιδεώδες και*
2. *αν ο R είναι δακτύλιος της Noether τότε το πλήθος των ελαχιστοτικών πρώτων ιδεωδών του R είναι πεπερασμένο.*

Απόδειξη. (1) Σύμφωνα με το λήμμα του Zorn, αρκεί να αποδείξουμε ότι, αν $\{\wp_\alpha\}$ είναι μία οικογένεια πρώτων ιδεωδών διατεταγμένη με τη διάταξη του υποσυνόλου, τότε το ιδεώδες $I = \bigcap \wp_\alpha$ είναι ένα πρώτο ιδεώδες. Έστω $a, b \notin I$. Τότε $a \notin \wp_\alpha$ και $b \notin \wp_\beta$ για κάποια α, β. Αν, $\wp_\alpha \subseteq \wp_\beta$, τότε $ab \notin \wp_\alpha$ οπότε $ab \notin I$.

(2) Έστω R δακτύλιος της Noether. Τότε κάθε ριζικό ιδεώδες $\mathfrak{U}$ του R ($x^n \in \mathfrak{U} \Rightarrow x \in \mathfrak{U}$) είναι μία πεπερασμένη τομή πρώτων ιδεωδών. Έστω ότι δεν είναι, επιλέγουμε τότε ένα μεγιστοτικό ριζικό ιδεώδες $\mathfrak{U}$ του R. Το $\mathfrak{U}$ δεν είναι πρώτο ($\mathfrak{U} \neq R$), οπότε υπάρχουν $b, c \notin \mathfrak{U}$ τέτοια ώστε $bc \in \mathfrak{U}$. Έστω

$$\mathfrak{B} = (b, \mathfrak{U}) \supsetneq \mathfrak{U} \text{ και } \mathfrak{C} = (c, \mathfrak{U}) \supsetneq \mathfrak{U}$$

και έστω $\mathfrak{B}', \mathfrak{C}'$ τα ριζικά τους. Θα καταλήξουμε σε άτοπο αν αποδείξουμε ότι $\mathfrak{B}' \bigcap \mathfrak{C}' = \mathfrak{U}$. Ισχύει ότι $\mathfrak{B}' \bigcap \mathfrak{C}' \supseteq \mathfrak{U}$. Αντίστροφα, αν $x \in \mathfrak{B}' \bigcap \mathfrak{C}'$, τότε

$$x^m = by + \alpha_1, \quad x^n = cz + \alpha_2$$

για κατάλληλους ακεραίους m, n και $\alpha_i \in \mathfrak{U}$. Τότε $x^{m+n} \in \mathfrak{U}$ και εφόσον το $\mathfrak{U}$ είναι ριζικό ιδεώδες συμπεραίνουμε ότι $x \in \mathfrak{U}$. Οπότε $\mathfrak{B}' \bigcap \mathfrak{C}' = \mathfrak{U}$.

Έστω $NilR$ το ριζικό του μηδενός του R. Τότε $NilR = \wp_1 \cap \ldots \cap \wp_r$. Έστω $\wp$ ένα ελαχιστοτικό πρώτο ιδεώδες του R, τότε θα ισχύει

$$\begin{aligned} \wp \supseteq NilR &\Rightarrow \wp \supseteq \wp_1 \cap \ldots \cap \wp_r \supseteq \wp_1\wp_2 \ldots \wp_r \\ &\Rightarrow \wp \supseteq \wp_i \text{ για κάποιο } i \\ &\Rightarrow \wp = \wp_i \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 3.7.6. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος της Noether με διάσταση του Krull $d < \infty$ και έστω $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathsf{UM}_n(R)$. Αν $n \geq d + 2$, τότε*

$$(a_1, \ldots, a_n) \sim_{E_n(R)} (1, 0, \ldots, 0).$$

Απόδειξη. Έστω $\wp_1, \ldots, \wp_r$ τα ελαχιστοτικά πρώτα ιδεώδη του R. Όπως και στην απόδειξη του Πορίσματος (3.7.4), θα υπάρχει ένα στοιχείο

$$a_1' = a_1 + b_2a_2 + \ldots + b_na_n \notin \bigcup_i \wp_i \tag{3.3}$$

συνεπώς θα ισχύει ότι $(a_1, \ldots, a_n) \sim_{E_n(R)} (a_1', a_2, \ldots, a_n)$. Έστω $\overline{R} = R/(a_1')$. Αν $d = 0$, τότε το a_1' θα είναι ένα αντιστρέψιμο στοιχείο του R και $n \geq 2$, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση (2.2.9), έχουμε τελειώσει. Αν $d \geq 1$, τότε σύμφωνα με την σχέση (3.3) και την Πρόταση (3.7.5(1)), η διάσταση Krull του $\overline{R}$ ισούται το πολύ με $d - 1$. Επικαλούμενοι μία επαγωγική υπόθεση σε αυτό το σημείο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$(\overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n) \sim_{E_{n-1}(\overline{R})} (\overline{1}, \overline{0}, \ldots, \overline{0}),$$

όπου η άνω παύλα συμβολίζει ότι εργαζόμαστε modulo a_1', δηλαδή στον δακτύλιο $\overline{R} = R/(a_1')$. Οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση (2.2.14), ισχύει ότι:

$$(a_1, \ldots, a_n) \sim_{E_n(R)} (1, 0, \ldots, 0).$$ □

Θεώρημα 3.7.7. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος της Noether με διάσταση του Krull $d < \infty$, τότε ο R είναι d-$Hermite$. Κάθε μεταθετικός δακτύλιος της Noether με διάσταση του Krull ≤ 1 είναι $Hermite$.*

Ορισμός 3.7.8. **Ύψος** *ενός πρώτου ιδεώδους ενός μεταθετικού δακτυλίου R, $\wp \subset R$, ονομάζεται το ελάχιστο άνω φράγμα (supremum) των ακεραίων $n \in \mathbb{Z}$ για τους οποίους υπάρχει μια αλυσίδα γνήσιων εγκλεισμών πρώτων ιδεωδών μήκους n:*

$$\wp_0 \subsetneq \wp_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \wp_n = \wp.$$

Το ύψος ενός πρώτου ιδεώδους θα συμβολίζεται στο εξής με $\mathsf{ht}(\wp)$.

Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ισχύει ότι $\mathsf{ht}(\wp) = \mathsf{Krulldim}(R_\wp)$. Αν ο R είναι δακτύλιος της Noether, τότε το ύψος ενός πρώτου ιδεώδους είναι πάντα πεπερασμένο. Σύμφωνα με το Θεώρημα του Krull (βλέπε [22, page 26]), το ύψος ενός πρώτου ιδεώδους κάποιου δακτυλίου της Noether, χαρακτηρίζεται ως ο μικρότερος ακέραιος m, τέτοιος ώστε το $\wp$ να είναι ένα ελαχιστοτικό πρώτο ιδεώδες πάνω από ένα R-ιδεώδες που παράγεται από m στοιχεία. Το συμπέρασμα αυτό θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη του ακόλουθης πρότασης.

Πρόταση 3.7.9. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος της Noether, $\wp'$ ένα πρώτο ιδεώδες του δακτυλίου πολυωνύμων μίας μεταβλητής $R[t]$ και έστω $\wp = \wp' \cap R$. Τότε*

$$\mathsf{ht}(\wp') = \begin{cases} \mathsf{ht}(\wp) & \text{αν } \wp' = \wp[t], \\ 1 + \mathsf{ht}(\wp) & \text{αν } \wp' \supsetneq \wp[t]. \end{cases}$$

Απόδειξη. Έστω $\mathsf{ht}_R(\wp) = n$. Υπάρχει μία αλυσίδα

$$\wp_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \wp_n = \wp$$

πρώτων ιδεωδών του R, από την οποία παίρνουμε την ακόλουθη αλυσίδα πρώτων ιδεωδών του $R[t]$

$$\wp_0[t] \subsetneq \ldots \subsetneq \wp_n[t] = \wp[t] \subseteq \wp'.$$

Επομένως, ισχύει ότι

$$\mathsf{ht}_{R[t]}(\wp') \geq \begin{cases} \mathsf{ht}_R(\wp) & \text{αν } \wp' = \wp[t], \\ 1 + \mathsf{ht}_R(\wp) & \text{αν } \wp' \supsetneq \wp[t]. \end{cases}$$

Εφόσον $\mathsf{ht}_R(\wp) = n$, υπάρχουν n στοιχεία $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R$, τέτοια ώστε το $\wp$ να είναι ένα ελαχιστοτικό πρώτο ιδεώδες πάνω από το R-ιδεώδες $\mathfrak{U} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = R\alpha_1 + \ldots + R\alpha_n$. Οπότε, το $\wp[t]$ είναι ένα ελαχιστοτικό πρώτο ιδεώδες πάνω από το $R[t]$-ιδεώδες $\mathfrak{U}[t] = \alpha_1 R[t] + \ldots + \alpha_n R[t]$. Συνεπώς, $\mathsf{ht}_{R[t]}\wp[t] \leq n$ και αν $\wp[t] = \wp'$, τότε $\mathsf{ht}_{R[t]}\wp' \leq n$. Οπότε, αν $\wp[t] = \wp'$, ισχύει ότι $\mathsf{ht}_{R[t]}\wp' = \mathsf{ht}_R\wp$.

Υποθέτουμε ότι $\wp' \supsetneq p[t]$ και έστω $f \in \wp' \backslash \wp[t]$. Η απόδειξη θα ολοκληρωθεί αν αποδείξουμε ότι το $\wp'$ είναι ένα ελαχιστοτικό πρώτο ιδεώδες πάνω από το ιδεώδες $\mathfrak{U}[t] + fR[t]$. Έστω $\wp''$ ένα πρώτο ιδεώδες ανάμεσά τους. Τότε

$$\mathfrak{U} \subseteq \wp'' \cap R \subseteq \wp' \cap R = \wp,$$

οπότε $\wp'' \cap R = \wp$. Άρα,

$$\wp[t] \subsetneq \wp'' \subseteq \wp'.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\wp = (0)$, εφόσον έχουμε την ίδια κατάσταση για τον $R/\wp \subset (R/\wp)[t] = R[t]/\wp[t]$. Τότε ο R είναι μία ακέραια περιοχή. Έστω το πολλαπλασιαστικό σύνολο $S = R\backslash(0)$. Εφόσον $\wp'' \cap R = \wp' \cap R = \wp = (0)$, θα ισχύει ότι $\wp'' \cap S = \wp' \cap S = \emptyset$. Οπότε μπορούμε να τοπικοποιήσουμε την αλυσίδα πρώτων ιδεωδών

$$(0) \neq \wp'' \subseteq \wp'$$

και να πάρουμε μία γνησίως αύξουσα αλυσίδα πρώτων ιδεωδών του δακτυλίου $S^{-1}R[t]$,

$$(0) \subsetneq S^{-1}\wp'' \subsetneq S^{-1}\wp'.$$

Άρα, $\mathsf{Krulldim}(S^{-1}R[t]) \geq 2$. Εφόσον ο $S^{-1}R$ είναι σώμα, ο τοπικοποιημένος δακτύλιος $S^{-1}R[t]$ είναι μία περιοχή κύριων ιδεωδών, οπότε $\mathsf{Krulldim}(S^{-1}R[t]) = 1$. Έτσι καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $S^{-1}\wp'' = S^{-1}\wp'$. Όμως ισχύει ότι $\wp'' \cap S = \wp' \cap S = \emptyset$, οπότε $\wp'' = \wp'$. □

Πόρισμα 3.7.10. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος της Noether. Τότε*

$$\mathsf{Krulldim}(R[t]) = 1 + \mathsf{Krulldim}\, R.$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση (3.7.4), ισχύει ότι

$$\mathsf{Krulldim}(R[t]) \leq 1 + \mathsf{Krulldim}\, R.$$

Για να αποδείξουμε την αντίστροφη ανισότητα υποθέτουμε ότι $\mathsf{Krulldim}\, R = n < \infty$. Τότε για κάθε πρώτο ιδεώδες $\wp \subseteq R$, έχουμε την ακόλουθη αλυσίδα πρώτων ιδεωδών μήκους n του R:

$$\wp_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \wp_n = \wp,$$

από την οποία παίρνουμε μία αλυσίδα πρώτων ιδεωδών μήκους $n+1$ στο $R[t]$:

$$\wp_0[t] \subsetneq \ldots \subsetneq \wp_n[t] = \wp[t] \subsetneq \wp[t] + tR[t],$$

όπου το $\wp[t] + tR[t]$ είναι ένα πρώτο ιδεώδες του $R[t]$. Άρα, $\mathsf{Krulldim}(R[t]) = 1 + \mathsf{Krulldim}\, R$. □

Θεώρημα 3.7.11. *Ο πολυωνυμικός δακτύλιος d μεταβλητών, $k[t_1, \ldots, t_d]$, όπου k είναι σώμα, έχει διάσταση του Krull d.*

Συνδυάζοντας τα Θεωρήματα (3.7.7), (3.7.11) και γνωρίζοντας ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό R-πρότυπο P με $\mathsf{rank}\, P > d$ πάνω από τον πολυωνυμικό δακτύλιο d μεταβλητών, $R = k[t_1, \ldots, t_d]$, όπου k είναι ένα σώμα, είναι ευσταθώς ελεύθερο, καταλήγουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα:

Θεώρημα 3.7.12. *Έστω $R = k[t_1, \ldots, t_d]$, όπου το k είναι ένα σώμα. Τότε κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό R-πρότυπο P με $\mathsf{rank}\, P > d$ είναι ελεύθερο.*

3.8 Ομολογική διάσταση και το θεώρημα συζυγιών του Hilbert

Σε αυτή την παράγραφο δίνουμε τον ορισμό της ομολογικής διάστασης ενός δακτυλίου και αναφέροντας κάποια αποτελέσματα από την ομολογική άλγεβρα, διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το θεώρημα συζυγιών του Hilbert.

3.8.1 Στοιχειώδη αποτελέσματα από την ομολογική άλγεβρα

Παρουσιάζουμε κάποια αποτελέσματα από την ομολογική άλγεβρα, χωρίς απόδειξη, τα οποία θα μας φανούν χρήσιμα στην συνέχεια.

Το ακόλουθο λήμμα μας δείχνει έναν τρόπο κατασκευής προβολικών επιλύσεων:

Λήμμα 3.8.1 (Horseshoe Lemma). *Έστω το ακόλουθο διάγραμμα R-προτύπων όπου η στήλη είναι ακριβής και οι γραμμές είναι προβολικές επιλύσεις:*

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & P_1' \arrow[r] & P_0' \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \\
 & & & M \arrow[d, "\pi"] & \\
\cdots \arrow[r] & P_1'' \arrow[r] & P_0'' \arrow[r] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Μπορούμε να συμπληρώσουμε αυτό το διάγραμμα και να προκύψει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & P_1' \arrow[r] \arrow[d, "i_1"'] & P_0' \arrow[r] \arrow[d, "i_0"'] & M' \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_1"'] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P_1'' \arrow[r] \arrow[d] & P_0'' \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

όπου τα $P_i = P_i' \oplus P_i''$ δίνουν μία προβολική επίλυση του M και οι στήλες είναι ακριβείς με τους κανονικούς εγκλεισμούς και τις απεικονίσεις-προβολές.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [37, Lemma 2.2.8 Horseshoe]. □

Πρόταση 3.8.2. *Έστω M ένα R-πρότυπο, τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

1. *Το M είναι προβολικό.*
2. $\mathsf{Ext}^{\mathsf{i}}_{\mathsf{R}}(M, N) = 0$ *για κάθε $i > 0$ και για κάθε R-πρότυπο N.*
3. $\mathsf{Ext}^{1}_{\mathsf{R}}(M, N) = 0$ *για κάθε R-πρότυπο N.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [28, Corollary 7.25(i)]. □

Ορισμός 3.8.3. *Έστω M ένα R-πρότυπο. Η* **προβολική διάσταση** *του M, που συμβολίζεται με $\mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(M)$, είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε να υπάρχει μία προβολική επίλυση R-προτύπων:*

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Αν το M δεν επιδέχεται μία προβολική επίλυση πεπερασμένου μήκους, τότε $\mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(M) = \infty$.

Λήμμα 3.8.4. *Έστω M ένα R-πρότυπο, τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

1. $\mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(M) \leq n$.
2. $\mathsf{Ext}^{\mathsf{i}}_{\mathsf{R}}(M, N) = 0$ *για κάθε $i > n$ και για κάθε R-πρότυπο N.*
3. $\mathsf{Ext}^{\mathsf{n+1}}_{\mathsf{R}}(M, N) = 0$ *για κάθε R-πρότυπο N.*
4. *Αν η ακολουθία*

   $$0 \longrightarrow K \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

   είναι ακριβής, όπου κάθε P_i είναι προβολικό, τότε το K είναι προβολικό.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [28, Proposition 8.6(i)]. □

Από την δεύτερη πρόταση του Λήμματος (3.8.4), προκύπτει ότι αν $\mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(M) < \infty$ τότε

$$\mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(M) = \min\{i : \mathsf{Ext}^{\mathsf{i+1}}_{\mathsf{R}}(M, N) = 0 \text{ για κάθε } R\text{-πρότυπο } N\ \}.$$

Οπότε σύμφωνα με το Λήμμα (3.8.4), οι ακόλουθοι αριθμοί είναι ίδιοι για έναν δακτύλιο R:

1. $\mathsf{sup}\{i : \mathsf{Ext}^{\mathsf{i}}_{\mathsf{R}}(M, N) \neq 0$ για κάποια R-πρότυπα M, N $\}$

2. $\mathsf{sup}\{\mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(M) : M \in R - \mathsf{mod}\}$

Ορισμός 3.8.5. *Ο κοινός αυτός αριθμός ονομάζεται* **ομολογική διάσταση** *του δακτυλίου R και συμβολίζεται με* $\mathsf{gldim}(R)$.

Λήμμα 3.8.6. *Έστω $\{M_i\}_{i \in I}$ μία συλλογή R-προτύπων, τότε*

$$\mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(\bigoplus_{i \in I} M_i) = \mathsf{sup}_{i \in I}\{\mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(M_i)\}.$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [28, page 467]. □

Έστω $R \to S$ ένας μορφισμός δακτυλίων. Το ακόλουθο θεώρημα συνδυάζει την προβολική διάσταση ενός S-προτύπου M πάνω από τον δακτύλιο S με την προβολική του διάσταση πάνω από τον δακτύλιο R.

Θεώρημα 3.8.7. *Αν $R \to S$ είναι ένας μορφισμός δακτυλίων και M ένα S-πρότυπο, τότε*

$$\mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(M) \leq \mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(S) + \mathsf{pd}_{\mathsf{S}}(M).$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [27, Theorem 9.32]. □

Λήμμα 3.8.8. *Αν η ακολουθία R-προτύπων*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής, τότε

$$\mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(B) \leq \mathsf{max}\{\mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(A), \mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(C)\}.$$

Επιπλέον, αν έχουμε γνήσια ανισότητα, τότε $\mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(C) = \mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(A) + 1$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [27, Lemma 9.26]. □

3.8.2 Το θεώρημα συζυγιών του Hilbert

Έστω ένας μεταθετικός δακτύλιος R και ένα στοιχείο $r \in R$ το οποίο δεν είναι μηδενοδιαιρέτης. Θεωρούμε ένα R/rR-πρότυπο M. Ένα τέτοιο πρότυπο είναι ένα R-πρότυπο το οποίο μηδενίζεται από το στοιχείο r. Το ακόλουθο θεώρημα δίνει την προβολική διάσταση του προτύπου M πάνω από τον δακτύλιο R/rR σε σχέση με την προβολική διάσταση του προτύπου M πάνω από τον δακτύλιο R. Το αποτέλεσμα αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό διότι αν θέσουμε $R = S[x]$ για κάποιο δακτύλιο S και $r = x$, μπορούμε να συνδυάσουμε την ομολογική διάσταση του δακτυλίου $S[x]$ με την ομολογική διάσταση του δακτυλίου S.

Θεώρημα 3.8.9. *Έστω ένα στοιχείο $r \in R$ το οποίο δεν είναι μηδενοδιαιρέτης του δακτυλίου R, M ένα μη-μηδενικό R/rR-πρότυπο και έστω ότι $\mathsf{pd}_{\mathsf{R/rR}}(M) < \infty$. Τότε*

$$\mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(M) = 1 + \mathsf{pd}_{\mathsf{R/rR}}(M).$$

Απόδειξη. Αρχικά, να σημειώσουμε ότι $\mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(M) \neq 0$, διότι αν $\mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(M) = 0$ αυτό θα σήμαινε ότι το R-πρότυπο M είναι προβολικό, οπότε το M θα είναι ευθύς αθροιστέος κάποιου ελεύθερου R-προτύπου, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι το M μηδενίζεται από το στοιχείο r. Οπότε, $\mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(M) \geq 1$.

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι το M είναι ένα προβολικό R/rR-πρότυπο, τότε εφόσον η ακολουθία

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\cdot r} R \longrightarrow R/rR \longrightarrow 0 \tag{3.4}$$

δίνει μία προβολική επίλυση ελάχιστου μήκους του R/rR, εφαρμόζοντας το Θεώρημα (3.8.7) προκύπτει ότι

$$\mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(M) \leq \mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(R/rR) + \mathsf{pd}_{\mathsf{R/rR}}(M) = 1 + 0 = 1.$$

Οπότε, $\mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(M) = 1$, συνεπώς το θεώρημα ισχύει.

Συνεχίζουμε με την περίπτωση όπου ισχύει $\mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(M)$, $\mathsf{pd}_{\mathsf{R/rR}}(M) \geq 1$. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο $n = \mathsf{pd}_{\mathsf{R/rR}}(M) < \infty$. Θεωρούμε μία προβολική επίλυση R/rR-προτύπων

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{f_n} \dots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} A \longrightarrow 0$$

ελάχιστου μήκους. Έστω $K = \ker f_0$, τότε η ακολουθία

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής και $\mathsf{pd}_{\mathsf{R/rR}}(M) = 1 + \mathsf{pd}_{\mathsf{R/rR}}(K)$. Τότε, σύμφωνα με το Λήμμα (3.8.8), είτε

$$1 = \mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(P_0) = \max\{\mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(K), \mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(M)\} \tag{3.5}$$

ή

$$\mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(M) = 1 + \mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(K). \tag{3.6}$$

Εφόσον από την επαγωγική υπόθεση προκύπτει ότι

$$\mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(K) = 1 + \mathsf{pd}_{\mathsf{R/rR}}(K)$$

δεδομένου ότι $\mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(K) \geq 1$, θα έχουμε τελειώσει αν ισχύει η σχέση 3.5 ή η σχέση 3.6 και $\mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(K) = 0$, εφόσον $\mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(M) \geq 1$.

Μένει να εξετάσουμε την περίπτωση όπου $\mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(M) = 1 = \mathsf{pd}_{\mathsf{R/rR}}(M)$. Θα αποδείξουμε ότι κάτι τέτοιο δεν μπορεί να συμβεί. Έστω

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

μία προβολική επίλυση R-προτύπων του M. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή $- \otimes_R R/rR$ προκύπτει η ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathsf{Tor}_1^{\mathsf{R}}(M, R/rR) \longrightarrow P_1 \otimes_R R/rR \longrightarrow P_0 \otimes_R R/rR \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

R/rR-προτύπων. Εφόσον τα R/rR-πρότυπα $P_1 \otimes_R R/rR$ και $P_0 \otimes_R R/rR$ είναι προβολικά, τότε σύμφωνα με το Λήμμα (3.8.4) προκύπτει ότι το πρότυπο $\mathsf{Tor}_1^{\mathsf{R}}(M, R/rR)$ είναι προβολικό.

Εφαρμόζοντας τον συναρτητή $M \otimes_R -$ στην προβολική επίλυση R-προτύπων 3.4, προκύπτει ότι

$$\mathsf{Tor}_1^{\mathsf{R}}(M, R/rR) \cong M.$$

Συνεπώς, το R/rR-πρότυπο M είναι προβολικό, άρα $\mathsf{pd}_{\mathsf{R/rR}}(M) = 0$, άτοπο. □

Το ακόλουθο θεώρημα εξετάζει την περίπτωση όπου το r δεν είναι ούτε μηδενοδιαιρέτης του R ούτε του M.

Θεώρημα 3.8.10. *Έστω M ένα R-πρότυπο και $r \in R$ το οποίο δεν είναι ούτε μηδενοδιαιρέτης του R ούτε του M, τότε*

$$\mathsf{pd}_{\mathsf{R/rR}}(M/rM) \leq \mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(M).$$

Απόδειξη. Αν $\mathsf{pd}_\mathsf{R}(M) = \infty$ το αποτέλεσμα είναι προφανές. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στην $\mathsf{pd}_\mathsf{R}(M) < \infty$. Αν $\mathsf{pd}_\mathsf{R}(M) = 0$, τότε το M είναι ένα προβολικό R-πρότυπο, οπότε το $M/rM \cong R/rR \otimes_R M$ είναι ένα προβολικό R/rR-πρότυπο, άρα $\mathsf{pd}_{\mathsf{R/rR}}(M/rM) = 0$. Οπότε το αποτέλεσμα ισχύει.

Υποθέτουμε ότι $n = \mathsf{pd}_\mathsf{R}(M) \geq 1$ και έστω

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0 \tag{3.7}$$

μία ακριβής ακολουθία R-προτύπων, όπου το πρότυπο F είναι ελεύθερο. Σύμφωνα με το Λήμμα (3.8.4) προκύπτει ότι $\mathsf{pd}_\mathsf{R}(K) = n-1$ και από την επαγωγική υπόθεση προκύπτει ότι

$$\mathsf{pd}_{\mathsf{R/rR}}(K/rK) \leq n-1.$$

Εφαρμόζοντας τον συναρτητή $-\otimes_R R/rR$ στην ακριβή ακολουθία 3.7 προκύπτει η ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathsf{Tor}_1^\mathsf{R}(M, R/rR) \longrightarrow K/rK \longrightarrow F/rF \longrightarrow M/rM \longrightarrow 0$$

και με έναν πρόχειρο υπολογισμό προκύπτει ότι $\mathsf{Tor}_1^\mathsf{R}(M, R/rR) = 0$, οπότε η ακολουθία

$$0 \longrightarrow K/rK \longrightarrow F/rF \longrightarrow M/rM \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής. Σύμφωνα με το Λήμμα (3.8.8) ισχύει είτε

$$0 = \mathsf{pd}_{\mathsf{R/rR}}(F/rF) = \max\{\mathsf{pd}_{\mathsf{R/rR}}(K/rK), \mathsf{pd}_{\mathsf{R/rR}}(M/rM)\}$$

οπότε $\mathsf{pd}_{\mathsf{R/rR}}(M/rM) = 0$, ή ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \mathsf{pd}_{\mathsf{R/rR}}(M/rM) &= \mathsf{pd}_{\mathsf{R/rR}}(K/rK) + 1 \\ &\leq (n-1) + 1 = n \end{aligned}$$

οπότε προκύπτει το επιθυμητό αποτέλεσμα. □

Πόρισμα 3.8.11. *Έστω M ένα R-πρότυπο, τότε*

$$\mathsf{pd}_\mathsf{R}(M) = \mathsf{pd}_{\mathsf{R[x]}}(R[x] \otimes_R M).$$

Απόδειξη. Εφόσον το x δεν είναι μηδενοδιαιρέτης ούτε του $R[x]$ ούτε του $R[x] \otimes_R M$, εφαρμόζοντας το Θεώρημα (3.8.10) προκύπτει ότι

$$\mathsf{pd}_\mathsf{R}(M) \leq \mathsf{pd}_{\mathsf{R[x]}}(R[x] \otimes_R M).$$

Έστω $P_* \twoheadrightarrow M$ μία προβολική επίλυση R-προτύπων. Εφόσον το $R[x]$ είναι ένα ελεύθερο R-πρότυπο, οπότε ένα επίπεδο R-πρότυπο, εφαρμόζοντας τον συναρτητή $R[x] \otimes_R -$ στην προβολική επίλυση R-προτύπων $P_* \twoheadrightarrow M$, προκύπτει μία ακριβής ακολουθία $R[x]$-προτύπων $R[x] \otimes_R P_* \twoheadrightarrow R[x] \otimes_R M$, όπου τα πρότυπα $R[x] \otimes_R P_i$ είναι $R[x]$-προβολικά για κάθε i. Συνεπώς, προκύπτει μία προβολική επίλυση $R[x]$-προτύπων $R[x] \otimes_R P_* \twoheadrightarrow R[x] \otimes_R M$. Οπότε,

$$\mathsf{pd}_\mathsf{R}(M) \geq \mathsf{pd}_{\mathsf{R[x]}}(R[x] \otimes_R M).$$ □

Έτσι καταλήγουμε στο βασικό θεώρημα αυτής της παραγράφου.

Θεώρημα 3.8.12. *Έστω R ένας δακτύλιος, τότε*

$$\mathsf{gldim}(R[x]) = \mathsf{gldim}(R) + 1$$

Απόδειξη. Αν $\mathsf{gldim}(R) = \infty$ τότε σύμφωνα με το Πόρισμα (3.8.11) προκύπτει ότι $\mathsf{gldim}(R[x]) = \infty$, οπότε το αποτέλεσμα ισχύει.

Υποθέτουμε ότι $\mathsf{gldim}(R) = n < \infty$. Αν το N είναι ένα R-πρότυπο, τότε το N είναι ένα $R[x]$-πρότυπο και από το Θεώρημα (3.8.9) προκύπτει ότι

$$\mathsf{pd}_{\mathsf{R[x]}}(N) = 1 + \mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(N)$$

οπότε $\mathsf{gldim}(R[x]) \geq n + 1$.

Έστω ότι το M είναι ένα $R[x]$-πρότυπο. Τότε η ακολουθία $R[x]$-προτύπων

$$0 \longrightarrow R[x] \otimes_R M \xrightarrow{\varphi} R[x] \otimes_R M \xrightarrow{\psi} M \longrightarrow 0$$

όπου

$$\varphi(f \otimes m) = xf \otimes m - f \otimes xm$$
$$\psi(f \otimes m) = fm$$

είναι ακριβής. Οπότε σύμφωνα με το Λήμμα (3.8.8) προκύπτει ότι είτε

$$\mathsf{pd}_{\mathsf{R[x]}}(M) = 1 + \mathsf{pd}_{\mathsf{R[x]}}(R[x] \otimes_R M)$$

ή

$$\mathsf{pd}_{\mathsf{R[x]}}(M) \leq \mathsf{pd}_{\mathsf{R[x]}}(R[x] \otimes_R M).$$

Κάνοντας χρήση του Πορίσματος (3.8.11) προκύπτει το εξής:

$$\begin{aligned} \mathsf{pd}_{\mathsf{R[x]}}(M) &\leq 1 + \mathsf{pd}_{\mathsf{R[x]}}(R[x] \otimes_R M) \\ &= 1 + \mathsf{pd}_{\mathsf{R}}(M) \\ &\leq 1 + n \end{aligned}$$

Οπότε $\mathsf{gldim}(R[x]) \leq n + 1$. □

Από το Θεώρημα (3.8.12) προκύπτει άμεσα το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 3.8.13. *Έστω R ένας δακτύλιος, τότε*

$$\mathsf{gldim}(R[x_1, \ldots, x_n]) = \mathsf{gldim}(R) + n$$

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα με επαγωγή στο $n \geq 1$ και κάνοντας χρήση του Θεωρήματος (3.8.12). □

Έτσι καταλήγουμε στο Θεώρημα Συζυγιών του Hilbert.

Θεώρημα 3.8.14. *(**Θεώρημα Συζυγιών του Hilbert**) Αν k είναι ένα σώμα, τότε*

$$\mathsf{gldim}(k[x_1, \ldots, x_n]) = n$$

Απόδειξη. Εφόσον το k είναι ένα σώμα, τότε όλα τα k-πρότυπα είναι ελεύθερα, οπότε όλα τα k-πρότυπα είναι προβολικά, συνεπώς $\mathsf{gldim}(k) = 0$. Άρα, σύμφωνα με το Πόρισμα (3.8.13) θέτοντας $\mathsf{gldim}(k) = 0$, προκύπτει ότι $\mathsf{gldim}(k[x_1, \ldots, x_n]) = n$. □

Από το Θεώρημα συζυγιών του Hilbert έπεται ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενο πρότυπο M υπεράνω του δακτυλίου πολυωνύμων $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ έχει μια προβολική επίλυση

$$0 \longrightarrow P^n \longrightarrow P^{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^1 \longrightarrow P^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Επομένως αν το M είναι προβολικό R-πρότυπο, τότε η παραπάνω επίλυση είναι διασπάσιμη. Από το Θεώρημα του Serre (Θεώρημα (3.5.21)), έπεται τότε ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό R-πρότυπο είναι ευσταθώς ελεύθερο. Η εικασία του Serre υποστηρίζει ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό R-πρότυπο είναι στην πραγματικότητα ελεύθερο.

Στο επόμενο Κεφάλαιο θα αποδείξουμε ότι η εικασία του Serre έχει καταφατική απάντηση.

Κεφάλαιο 4

Τα Θεωρήματα των Suslin και Quillen, και η Απόδειξη του Vaserstein

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε τρεις αποδείξεις της εικασίας του Serre, τις αποδείξεις των Suslin, Vaserstein και Quillen.

Ο Suslin χρησιμοποιεί τον ορισμό του δακτυλίου του Hermite σε συνδυασμό με το γεγονός ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό $R[t_1, \ldots, t_n]$-πρότυπο είναι ευσταθώς ελεύθερο. Έτσι για να αποδείξει την εικασία του Serre, αποδεικνύει ότι για κάθε σώμα k, ο πολυωνυμικός δακτύλιος n μεταβλητών είναι ένας δακτύλιος του Hermite. Για να καταλήξει σε αυτό το συμπέρασμα ο Suslin, αναλύει την δράση των αντιστρέψιμων πινάκων στις unimodular πολυωνυμικές γραμμές που περιέχουν ένα μονικό στοιχείο.

Ο Vaserstein, απλοποιώντας την απόδειξη του Suslin, αποδεικνύει την εικασία του Serre μέσω ενός ιδιαίτερα σημαντικού λήμματος που λέει ότι αν R είναι ένας μεταθετικός τοπικός δακτύλιος, $f = (f_1, \ldots, f_n) \in \mathsf{UM}_n(R[t])$ μία unimodular γραμμή πάνω από τον δακτύλιο πολυωνύμων μίας μεταβλητής $R[t]$, όπου $n \geq 3$ και αν ο ηγετικός συντελεστής του πολυωνύμου f_1 είναι ένα αντιστρέψιμο στοιχείο του δακτυλίου R, τότε ισχύει ότι:

$$f(t) \sim_{E_n(R[t])} f(0) \sim_{E_n(R)} (1, 0, \ldots, 0).$$

Τέλος ο Quillen αποδεικνύει την εικασία του Serre χρησιμοποιώντας την έννοια του επεκτάσιμου προτύπου. Συνδυάζοντας ένα παλαιότερο θεώρημα του Horrocks, με ένα σημαντικό νέο αποτέλεσμα, γνωστό ως Quillen's Patching Theorem, καταλήγει στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

4.1 Η απόδειξη του Suslin

Σύμφωνα με την Πόρισμα (2.1.12) δακτύλιος του Hermite καλείται κάθε δακτύλιος για τον οποίο κάθε πεπερασμένα παραγόμενο ευσταθώς ελεύθερο R-πρότυπο είναι ελεύθερο, όπου R μεταθετικός δακτύλιος. Επίσης, σύμφωνα με το Θεώρημα του Serre (3.5.21), κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό $R[t_1, \ldots, t_n]$-πρότυπο είναι ευσταθώς ελεύθερο. Σύμφωνα με αυτά τα δύο συμπεράσματα, για να αποδείξουμε την εικασία του Serre, αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε σώμα k, ο δακτύλιος πολυωνύμων n μεταβλητών, $k[t_1, \ldots, t_n]$, είναι ένας δακτύλιος του Hermite. Η απόδειξη αυτού του συμπεράσματος στάλθηκε με ένα γράμμα από τον Suslin στον Bass τον Μάιο του 1976. Η μέθοδος που χρησιμοποίησε ο Suslin περιέχει την ανάλυση της δράσης των αντιστρέψιμων πινάκων στις unimodular πολυωνυμικές γραμμές, οι οποίες περιέχουν ένα μονικό στοιχείο. Αρχίζουμε με κάποια στοιχειώδη λήμματα:

Λήμμα 4.1.1. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος και I ένα ιδεώδες του δακτύλιου πολυωνύμων μίας μεταβλητής $R[t]$ το οποίο περιέχει ένα μονικό πολυώνυμο. Έστω J ένα ιδεώδες του R τέτοιο ώστε $I + J[t] = R[t]$. Τότε ισχύει ότι $(R \cap I) + J = R$.*

Απόδειξη. Έστω $S = R[t]/I \supseteq \overline{R} = R/(R \cap I)$ και έστω $\overline{J} = J/(J \cap I)$ η εικόνα του J στο $\overline{R} = R/(R \cap I)$. Σύμφωνα με την υπόθεση ισχύει ότι $I + J[t] = R[t]$, συνεπώς $\overline{J} \cdot S = (J/(J \cap I)) \cdot (R[t]/I) = R[t]/I = S$. Η επέκταση δακτυλίων

$$\overline{R} = R/(R \cap I) \hookrightarrow R[t]/I$$

είναι ακέραια, εφόσον το I περιέχει ένα μονικό πολυώνυμο. Επειδή ο S είναι ακέραιος πάνω από τον $R/(R \cap I)$, σύμφωνα με το Going Up θεώρημα για ακέραιες επεκτάσεις (βλέπε [18, Theorem Going Up]) προκύπτει ότι $\overline{J} = R/(R \cap I)$, δηλαδή $(R \cap I) + J = R$. □

Λήμμα 4.1.2. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος και $f = (f_1, f_2) \in R[t]^2$. Έστω $c \in R \cap (f_1 R[t] + f_2 R[t])$. Τότε για κάθε μεταθετική R-άλγεβρα A, όπου το c δεν είναι διαιρέτης του μηδενός, και για κάθε $b, b' \in A$, ισχύει ότι:*

$$b \equiv b' (\mathrm{mod} cA) \Rightarrow f(b) \sim_{\mathsf{SL}_2(A)} f(b').$$

Απόδειξη. Ισχύει ότι $c \in R \cap (f_1 R[t] + f_2 R[t])$, οπότε μπορούμε να γράψουμε το c ως εξής: $c = f_1 g_1 + f_2 g_2$, όπου $g_1, g_2 \in R[t]$. Εφόσον το c δεν είναι διαιρέτης του μηδενός στην μεταθετική R-άλγεβρα A, μπορούμε να εργαστούμε στην τοπικοποίηση $A_c \supseteq A$. Στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι $f(b) \sim_{SL_2(A)} f(b')$, δηλαδή ότι υπάρχει ένας πίνακας $M \in SL_2(A)$ τέτοιος ώστε $f(b) \cdot M = f(b')$. Έστω ότι ο απαιτούμενος $SL_2(A)$-πίνακας είναι ο ακόλουθος:

$$M = \frac{1}{c} \cdot \begin{pmatrix} g_1(b) & -f_2(b) \\ g_2(b) & f_1(b) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1(b') & f_2(b') \\ -g_2(b') & g_1(b') \end{pmatrix}$$

Θα αποδείξουμε ότι ο πίνακας M ανήκει στην ομάδα $SL_2(A)$. Πρώτον, παρατηρούμε ότι $\det M = \frac{1}{c^2} \cdot c \cdot c = 1$. Δεύτερον, αν δουλεύουμε στο A/cA και εφόσον ισχύει ότι $b \equiv b' (\mathrm{mod} cA)$, τότε το γινόμενο των δύο παραπάνω πινάκων θα ισοδυναμεί με $0 \mathrm{mod} cA$:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} g_1(b) & -f_2(b) \\ g_2(b) & f_1(b) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1(b') & f_2(b') \\ -g_2(b') & g_1(b') \end{pmatrix} \\ \equiv & \begin{pmatrix} g_1(b)f_1(b') + f_2(b)g_2(b') & g_1(b)f_2(b') - f_2(b)g_1(b') \\ g_2(b)f_1(b') - f_1(b)g_2(b') & g_2(b)f_2(b') + f_1(b)g_1(b') \end{pmatrix} \\ \equiv & \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \\ \equiv & \ 0. \end{aligned}$$

Άρα, ο M έχει όλα τα στοιχεία του στην άλγεβρα A, συνεπώς $M \in SL_2(A)$. Τελικά, ισχύει:

$$\begin{aligned} f(b) \cdot M &= \frac{1}{c} \cdot (f_1(b), f_2(b)) \cdot \begin{pmatrix} g_1(b) & -f_2(b) \\ g_2(b) & f_1(b) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1(b') & f_2(b') \\ -g_2(b') & g_1(b') \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{c} \cdot (f_1(b)g_1(b) + f_2(b)g_2(b), -f_1(b)f_2(b) + f_2(b)f_1(b)) \cdot \begin{pmatrix} f_1(b') & f_2(b') \\ -g_2(b') & g_1(b') \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{c} \cdot (c, 0) \cdot \begin{pmatrix} f_1(b') & f_2(b') \\ -g_2(b') & g_1(b') \end{pmatrix} \\ &= (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} f_1(b') & f_2(b') \\ -g_2(b') & g_1(b') \end{pmatrix} \\ &= (f_1(b'), f_2(b')) \\ &= f(b') \end{aligned}$$

Συνεπώς, ισχύει ότι $f(b) \sim_{\mathsf{SL}_2(A)} f(b')$. □

Λήμμα 4.1.3. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος και έστω $f \in R[t]^n$. Τότε, για κάθε μεταθετική R-άλγεβρα A και για κάθε υποομάδα G της ομάδας $GL_n(A)$, το σύνολο*

$$I = I_{f,A,G} = \{c \in R | b \equiv b'(modcA) \Rightarrow f(b) \sim_G f(b')\}$$

είναι πάντα ένα ιδεώδες του μεταθετικού δακτυλίου R.

Απόδειξη. Έστω $c, c' \in I$ και $r, r' \in R$. Εφόσον $c \in I \Rightarrow c \in R$ και $d \equiv d'(\mathsf{mod} cA) \Rightarrow f(d) \sim_G f(d')$, επίσης $c' \in I \Rightarrow c' \in R$ και $e \equiv e'(\mathsf{mod} c'A) \Rightarrow f(e) \sim_G f(e')$, όπου $d, d', e, e' \in A$. Στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι το σύνολο I είναι ένα ιδεώδες του R, αρκεί να δείξουμε ότι $rc + r'c' \in I$. Ισχύει ότι $r, r' \in R$ και $c, c' \in I \subseteq R$, συνεπώς $rc + r'c' \in R$. Έστω $b, b' \in A$ και έστω $b \equiv b'(\mathsf{mod}(rc + r'c')A)$. Τότε, υπάρχει κάποιο $a \in A$, τέτοιο ώστε $b - b' = (rc + r'c')a \Rightarrow b - rac = b' + r'ac'$. Όμως, $b \equiv b - rac(\mathsf{mod} cA) \Rightarrow f(b) \sim_G f(b - rac)$. Επίσης, $b' \equiv b' + r'ac'(\mathsf{mod} c'A) \Rightarrow f(b') \sim_G f(b' + r'ac')$. Συνεπώς,

$$f(b) \sim_G f(b - rac) = f(b' + r'ac') \sim_G f(b').$$

Άρα, το σύνολο I είναι ένα ιδεώδες του μεταθετικού δακτυλίου R. □

Θεώρημα 4.1.4. ***(Θεώρημα του Suslin)*** *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος και $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathsf{UM}_n(R[t])$, $n \geq 2$ μία unimodular γραμμή πάνω από τον δακτύλιο πολυωνύμων μίας μεταβλητής $R[t]$, όπου το f_1 είναι ένα μονικό πολυώνυμο. Τότε, για κάθε μεταθετική R-άλγεβρα A και για κάθε $b, b' \in A$, ισχύει ότι $f(b) \sim_G f(b')$, όπου G είναι η υποομάδα της $GL_n(A)$ που παράγεται από τις ομάδες $E_n(A)$ και $SL_2(A)$.*

Απόδειξη. Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος και $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathsf{UM}_n(R[t])$, $n \geq 2$ μία unimodular γραμμή πάνω από τον δακτύλιο πολυωνύμων μίας μεταβλητής $R[t]$, όπου το f_1 είναι ένα μονικό πολυώνυμο. Έστω μία μεταθετική R-άλγεβρα A, $b, b' \in A$ και έστω G είναι η υποομάδα της $\mathsf{GL}_n(A)$ που παράγεται από τις ομάδες $\mathsf{E}_n(A)$ και $\mathsf{SL}_2(A)$. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι για κάθε $b, b' \in A$, ισχύει ότι $f(b) \sim_G f(b')$, αρκεί να δείξουμε ότι το ιδεώδες $I = I_{f,A,G} = \{c \in R | b \equiv b'(\mathsf{mod} cA) \Rightarrow f(b) \sim_G f(b')\}$ είναι το μοναδιαίο ιδεώδες του δακτυλίου R, δηλαδή $I = R = \langle 1 \rangle$. Έστω $\mathfrak{m} \subset R$ ένα μεγιστοτικό ιδεώδες του δακτυλίου R, αρκεί να βρούμε ένα στοιχείο $c \in R$ το οποίο ανήκει στο ιδεώδες I και δεν ανήκει στο $\mathfrak{m}$, $c \in I - \mathfrak{m}$. Αν κοιτάξουμε στο $f \mathsf{mod}((f_1) + \mathfrak{m}[t])$, προκύπτει η unimodular γραμμή $(\overline{f}_2, \dots, \overline{f}_n)$ πάνω από τον δακτύλιο

$$\overline{R[t]} = \frac{R[t]}{(f_1) + \mathfrak{m}[t]} \cong (\frac{R}{\mathfrak{m}}[t])/(\overline{f}_1),$$

$(\overline{f}_2, \dots, \overline{f}_n) \in \mathsf{UM}_{n-1}(\overline{R[t]})$. Ο δακτύλιος $(\frac{R}{\mathfrak{m}}[t])/(\overline{f}_1)$ είναι μία μεταθετική R-άλγεβρα, πεπερασμένα παραγόμενη ως $\frac{R}{\mathfrak{m}}$-πρότυπο, όπου το $\frac{R}{\mathfrak{m}}$ είναι σώμα, άρα είναι ένας μεταθετικός ημιτοπικός δακτύλιος. Τότε σύμφωνα με το πόρισμα [13, Corollary I.3.9], ο δακτύλιος $(\frac{R}{\mathfrak{m}}[t])/(\overline{f}_1)$ είναι ένας ημιτοπικός δακτύλιος. Υποθέτουμε ότι $n \geq 3$, διαφορετικά θα ισχύει ότι $f(b) \sim_{\mathsf{SL}_2(A)} (1, 0) \sim_{\mathsf{SL}_2(A)} f(b')$. Οπότε ο δακτύλιος $(\frac{R}{\mathfrak{m}}[t])/(\overline{f}_1)$ είναι ένας μεταθετικός ημιτοπικός δακτύλιος και η γραμμή $(\overline{f}_2, \dots, \overline{f}_n)$ είναι μία unimodular γραμμή πάνω από αυτόν τον δακτύλιο, $(\overline{f}_2, \dots, \overline{f}_n) \in \mathsf{UM}_{n-1}(\overline{R[t]})$, τότε σύμφωνα με το Πόρισμα (2.2.12) ισχύει ότι:

$$(\overline{f}_2, \dots, \overline{f}_n) \sim_{\mathsf{E}_{n-1}(R[t]/(f_1) + \mathfrak{m}[t])} (\overline{1}, \overline{0}, \dots, \overline{0}).$$

Άρα, υπάρχει κάποιος πίνακας $\overline{M} \in \mathsf{E}_{n-1}(R[t]/(f_1) + \mathfrak{m}[t])$ τέτοιος ώστε:

$$(\overline{f}_2, \dots, \overline{f}_n) \cdot \overline{M} = (\overline{1}, \overline{0}, \dots, \overline{0}).$$

Μεταφέρουμε τον πίνακα $\overline{M}$ στον πίνακα $M \in \mathsf{E}_{n-1}(R[t])$ και έστω

$$(f_2, \dots, f_n) \cdot M = (g_2, \dots, g_n) \in R[t]^{n-1}.$$

Τότε $g_2 \equiv 1\mathsf{mod}(f_1) + \mathfrak{m}[t]$, το οποίο συνεπάγεται ότι $(f_1, g_2) + \mathfrak{m}[t] = R[t]$. Ο R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος, το (f_1, g_2) είναι ένα ιδεώδες του $R[t]$ το οποίο περιέχει το μονικό πολυώνυμο f_1, το $\mathfrak{m}$ είναι ένα ιδεώδες του R τέτοιο ώστε $(f_1, g_2) + \mathfrak{m}[t] = R[t]$, επομένως σύμφωνα με το Λήμμα (4.1.1) θα ισχύει ότι

$$(R \cap (f_1, g_2)) + \mathfrak{m} = R.$$

Άρα, υπάρχει κάποιο στοιχείο $c \in (R \cap (f_1, g_2))$, το οποίο δεν ανήκει στο $\mathfrak{m}$, $c \notin \mathfrak{m}$. Θα καταλήξουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα, αν αποδείξουμε ότι το στοιχείο c ανήκει στο ιδεώδες I, $c \in I = I_{f,A,G}$. Έστω $b \equiv b'(\mathsf{mod} cA)$. Τότε, για $i \geq 2$, θα έχουμε:

$$g_i(b) - g_i(b') \in (b - b') \cdot A \subseteq c \cdot A \subseteq f_1(b)A + g_2(b)A.$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} f(b) &= (f_1(b), \ldots, f_n(b)) \\ &\sim_{\mathsf{E}_n} (f_1(b), g_2(b), g_3(b), \ldots, g_n(b)) \\ &\sim_{\mathsf{E}_n} (f_1(b), g_2(b), g_3(b'), \ldots, g_n(b')) \\ &\sim_{\mathsf{SL}_2} (f_1(b'), g_2(b'), g_3(b'), \ldots, g_n(b')) \\ &\sim_{\mathsf{E}_n} (f_1(b'), f_2(b'), f_3(b'), \ldots, f_n(b')) \\ &= f(b'). \end{aligned}$$

□

Το ακόλουθο πόρισμα αποτελεί μία γενικότερη εκδοχή του Θεωρήματος (4.1.4):

Πόρισμα 4.1.5. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος και $f = (f_1(t), \ldots, f_n(t)) \in \mathsf{UM}_n(R[t])$, ($n \geq 2$) μία unimodular γραμμή πάνω από τον δακτύλιο πολυωνύμων μίας μεταβλητής $R[t]$, όπου το $f_1(t)$ είναι ένα μονικό πολυώνυμο. Τότε, ισχύει ότι $f(t) \sim_G f(0)$, όπου G είναι η υποομάδα της $\mathsf{GL}_n(R[t])$ που παράγεται από τις ομάδες $\mathsf{E}_n(R[t])$ και $\mathsf{SL}_2(R[t])$.*

Απόδειξη. Αν στο Θεώρημα (4.1.4) θέσουμε $A = R[t]$, $b = t$ και $b' = 0$, τότε προκύπτει το ζητούμενο. □

Λήμμα 4.1.6. **(Μετασχηματισμός του Nagata)** *Έστω k ένα σώμα και f ένα πολυώνυμο του δακτύλιου πολυωνύμων d μεταβλητών $k[x_1, \ldots, x_d]$. Υπάρχει μία αλλαγή μεταβλητών*

$$t_1 \mapsto t_1,\ t_i \mapsto t_i + {t_1}^{r_i} \qquad (2 \leq i \leq d),$$

τέτοια ώστε

$$f(t_1, t_2 + {t_1}^{r_2}, \ldots) = c \cdot h(t_1, \ldots, t_d)$$

όπου $c \in k - \{0\}$ και h είναι ένα μονικό πολυώνυμο του t_1 πάνω από τον δακτύλιο πολυωνύμων $d-1$ μεταβλητών $k[t_2, \ldots, t_d]$.

Απόδειξη. Έστω το πολυώνυμο $f_1(t_1, \ldots, t_d) = \sum_{i \in \mathbb{N}^d} a_i {t_1}^{i_1} \cdots {t_d}^{i_d}$, τότε αλλάζοντας τις μεταβλητές θα έχουμε:

$$\begin{aligned} f_1(t_1, t_2 + {t_1}^{r_2}, \ldots) &= \sum_{i \in \mathbb{N}^d} a_i {t_1}^{i_1} (t_2 + {t_1}^{r_2})^{i_2} \cdots (t_d + {t_1}^{r_d})^{i_d} \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}^d} (a_i {t_1}^{i_1 + r_2 i_2 + \cdots + r_d i_d} \\ &+ \text{ όροι με } t_1- \text{ βαθμό } < i_1 + r_2 i_2 + \cdots + r_d i_d). \end{aligned}$$

Μπορούμε να επιλέξουμε τα $r_2, \ldots, r_d$ με τέτοιο τρόπο ώστε οι ακέραιοι $i_1 + r_2 i_2 + \cdots + r_d i_d$ να είναι διαφορετικοί για κάθε d-άδα $i = (i_1, \ldots, i_d)$. Αν m είναι ένας ακέραιος ο οποίος είναι μεγαλύτερος από κάθε i_j, $j = 1, \ldots, d$, μπορούμε να επιλέξουμε $r_j = m^{j-1}$, διότι τότε οι ακέραιοι $i_1 + r_2 i_2 + \cdots + r_d i_d$ θα έχουν διαφορετικά m-αδικά αναπτύγματα. Έχοντας επιλέξει τα $r_2, \ldots, r_d$ με αυτόν τον τρόπο, τα μονώνυμα $a_i {t_1}^{i_1 + r_2 i_2 + \cdots + r_d i_d}$ του πολυωνύμου $f_1(t_1, t_2 + {t_1}^{r_2}, \ldots)$ δεν θα απλοποιούνται μεταξύ τους και επίσης το μονώνυμο με τον μεγαλύτερο βαθμό για το οποίο ισχύει ότι $a_i \neq 0$ θα αποτελεί τον ηγετικό όρο του πολυωνύμου $f_1(t_1, t_2 + {t_1}^{r_2}, \ldots)$ ως ένα πολυώνυμο του t_1. □

Θεώρημα 4.1.7. ***(Θεώρημα των Quillen-Suslin)*** *Αν k είναι ένα σώμα τότε κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό πρότυπο P πάνω από τον πολυωνυμικό δακτύλιο $A = k[t_1, \ldots, t_d]$ είναι ελεύθερο.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα του Serre (3.5.21) κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό $k[t_1, \ldots, t_d]$-πρότυπο είναι ευσταθώς ελεύθερο και σύμφωνα με την Πόρισμα (2.1.12), ένας μεταθετικός δακτύλιος R είναι δακτύλιος του Hermite αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένα παραγόμενο ευσταθώς ελεύθερο R-πρότυπο είναι ελεύθερο. Οπότε, για να αποδείξουμε ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό πρότυπο P πάνω από τον πολυωνυμικό δακτύλιο $A = k[t_1, \ldots, t_d]$ είναι ελεύθερο, αρκεί να δείξουμε ότι ο πολυωνυμικός δακτύλιος $A = k[t_1, \ldots, t_d]$ είναι δακτύλιος του Hermite. Σύμφωνα με τις Προτάσεις (2.1.16) και (2.1.17) αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε unimodular γραμμή $f = (f_1, \ldots, f_d)$ πάνω από τον δακτύλιο $A = k[t_1, \ldots, t_d]$ είναι συμπληρώσιμη, συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι:

$$f = (f_1, \ldots, f_d) \sim_{\mathsf{GL}_d} (1, 0, \ldots, 0).$$

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο πλήθος των μεταβλητών d. Έστω $d = 1$, γνωρίζουμε ότι ο δακτύλιος πολυωνύμων μίας μεταβλητής $k[t_1]$ πάνω από ένα σώμα k είναι μία περιοχή κύριων ιδεωδών και σύμφωνα με το Θεώρημα (3.2.6), πάνω από μία περιοχή κύριων ιδεωδών, τα πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά πρότυπα είναι ελεύθερα. Άρα, το θεώρημα ισχύει για $d = 1$. Έστω ότι το θεώρημα ισχύει για $d - 1$ μεταβλητές, θα αποδείξουμε ότι ισχύει για d μεταβλητές. Έστω $f = (f_1, \ldots, f_d)$ μία unimodular γραμμή πάνω από τον δακτύλιο $A = k[t_1, \ldots, t_d]$. Αν $f_1 = 0$, τότε η unimodular γραμμή $f = (f_1, \ldots, f_d)$ θα περιέχει μία unimodular υπογραμμή μικρότερου μήκους, συνεπώς σύμφωνα με την Πρόταση (2.2.9) θα ισχύει ότι

$$f = (f_1, \ldots, f_d) \sim_{\mathsf{GL}_d} (1, 0, \ldots, 0).$$

Άρα, υποθέτουμε ότι $f_1 \neq 0$. Σύμφωνα με το μετασχηματισμό του Nagata του Λήμματος (4.1.6) θα υπάρχει μία αλλαγή μεταβλητών

$$t_1 \mapsto t_1,\ t_i \mapsto t_i + {t_1}^{r_i} \quad (2 \leq i \leq d),$$

τέτοια ώστε

$$f_1(t_1, t_2 + {t_1}^{r_2}, \ldots) = c \cdot h(t_1, \ldots, t_d)$$

όπου $c \in k - \{0\}$ και h είναι ένα μονικό πολυώνυμο του t_1 πάνω από τον δακτύλιο πολυωνύμων $d - 1$ μεταβλητών $k[t_2, \ldots, t_d]$. Αυτή η αλλαγή μεταβλητών δίνει έναν αυτομορφισμό του $A = k[t_1, \ldots, t_d]$, άρα θα ισχύει ότι:

$$f_1(t_1, \ldots, t_d) = f_1(t_1, t_2 + {t_1}^{r_2}, \ldots, t_d + {t_1}^{r_d}).$$

Στο γινόμενο $f_1(t_1, t_2 + {t_1}^{r_2}, \ldots) = c \cdot h(t_1, \ldots, t_d)$, εφόσον το k είναι σώμα και $c \in k - \{0\}$, ο παράγοντας c είναι ένα αντιστρέψιμο στοιχείο. Άρα, εφόσον το h είναι ένα μονικό πολυώνυμο του δακτυλίου πολυωνύμων $k[t_2, \ldots, t_d][t_1]$, τότε και το $f_1(t_1, t_2 + {t_1}^{r_2}, \ldots, t_d + {t_1}^{r_d})$ είναι ένα μονικό πολυώνυμο του δακτυλίου πολυωνύμων $k[t_2, \ldots, t_d][t_1]$. Συνεπώς, το πολυώνυμο $f_1(t_1, \ldots, t_d)$ είναι ένα μονικό πολυώνυμο του δακτυλίου πολυωνύμων $k[t_2, \ldots, t_d][t_1]$. Επομένως, σύμφωνα με το Πόρισμα (4.1.5) θα ισχύει ότι:

$$f = (f_1, \ldots, f_d) \sim_{\mathsf{GL}_d} (f_1(0, t_2, \ldots, t_d), \ldots, f_d(0, t_2, \ldots, t_d)) = f(0, t_2, \ldots, t_d).$$

Σύμφωνα με το επαγωγικό βήμα το θεώρημα ισχύει για $d - 1$ μεταβλητές, άρα $f(0, t_2, \ldots, t_d) \sim_{\mathsf{GL}_d} (1, 0, \ldots, 0)$. Τελικά,

$$f = (f_1, \ldots, f_d) \sim_{\mathsf{GL}_d} (1, 0, \ldots, 0).$$

Άρα, ο πολυωνυμικός δακτύλιος $A = k[t_1, \ldots, t_d]$ είναι δακτύλιος Hermite. □

Από την απόδειξη του Θεωρήματος (4.1.7), συμπεραίνουμε ότι για να πάρουμε μία unimodular γραμμή $(f_1, \ldots, f_d)$ ισοδύναμη με την $(1, 0, \ldots, 0)$ πάνω από τον δακτύλιο $A = k[t_1, \ldots, t_d]$, το μόνο που χρειαζόμαστε είναι πίνακες από τις ομάδες $\mathsf{SL}_2(A)$ και $\mathsf{E}_n(A)$.

4.2 Η απόδειξη του Vaserstein

Σε αυτή την παράγραφο στόχος μας είναι να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 4.2.1. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος. Έστω $f = (f_1, \ldots, f_n) \in \mathsf{UM}_n(R[t])$ είναι μία unimodular γραμμή πάνω από τον δακτύλιο $R[t]$, τέτοια ώστε οι ηγετικοί συντελεστές των πολυωνύμων f_i να παράγουν το μοναδιαίο ιδεώδες R. Τότε ισχύει ότι $f(t) \sim_{\mathsf{GL}_n} f(0)$ πάνω από τον δακτύλιο $R[t]$.*

Στο σημείο αυτό, θα μπορούσαμε να συγκρίνουμε το Θεώρημα (4.2.1) με το Πόρισμα (4.1.5) της προηγούμενης παραγράφου. Αφενός η υπόθεση του Θεωρήματος (4.2.1) είναι λιγότερο ισχυρή, εφόσον απλά υποθέτουμε ότι οι ηγετικοί συντελεστές των πολυωνύμων f_i παράγουν το μοναδιαίο ιδεώδες R, ενώ στο Πόρισμα (4.1.5), υποθέτουμε ότι ένας από τους ηγετικούς συντελεστές είναι ένα αντιστρέψιμο στοιχείο του δακτυλίου R. Αφετέρου, το συμπέρασμα του Πορίσματος (4.1.5) είναι πιο ισχυρό, διότι αναφέρεται στο είδος των πινάκων που είναι απαραίτητοι για την μετατροπή του $f(t)$ σε $f(0)$. Παρ' όλα αυτά, αυτή η επιπλέον πληροφορία δεν είναι απαραίτητη στην απόδειξη της εικασίας του Serre στο Θεώρημα (4.1.7). Έτσι, αποδεικνύοντας το Θεώρημα (4.2.1) με διαφορετικό τρόπο από αυτόν του Πορίσματος (4.1.5), θα καταλήξουμε σε μία δεύτερη απόδειξη της εικασίας του Serre.

Σε αντίθεση με την προηγούμενη παράγραφο, τα συμπεράσματα που ακολουθούν βασίζονται σε μεθόδους τοπικοποίησης:

Λήμμα 4.2.2. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος και S ένα πολλαπλασιαστικά κλειστό υποσύνολο του R. Έστω $\tau(x) \in \mathsf{GL}_n(R_s[x])$, τέτοιος ώστε $\tau(0) = I_n$. Τότε υπάρχει ένας πίνακας $\widehat{\tau}(x) \in \mathsf{GL}_n(R[x])$, τέτοιος ώστε ο $\widehat{\tau}(x)$ να τοπικοποιείται στο $\widehat{\tau}(sx)$ για κάποιο $s \in S$, (δηλαδή $\widehat{\tau}(x)_s = \widehat{\tau}(sx)$) και $\widehat{\tau}(0) = I_n$.*

Απόδειξη. Εφόσον $\tau(x) \in \mathsf{GL}_n(R_s[x])$, υπάρχει κάποιος πίνακας $\mu(x) \in \mathsf{GL}_n(R_s[x])$ τέτοιος ώστε $\tau(x) \cdot \mu(x) = I_n$. Επίσης, εφόσον $\tau(0) = I_n$, θα ισχύει ότι $\mu(0) = I_n$. Άρα, $\tau(0) = \mu(0) = I_n$, συνεπώς τα στοιχεία των διαγωνίων των πινάκων $\tau(x), \mu(x)$ θα ανήκουν στο $1 + x \cdot R_s[x]$ και τα υπόλοιπα στοιχεία θα ανήκουν στο $x \cdot R_s[x]$, δηλαδή

$$\tau(x) = (\delta_{ij} + x \cdot f_{ij}(x)),$$

$$\mu(x) = (\delta_{ij} + x \cdot g_{ij}(x))$$

όπου $f_{ij}(x),\ g_{ij}(x) \in R_s[x]$. Εφόσον υπάρχει μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος παρονομαστών, μπορούμε να βρούμε κάποιο $s_1 \in S$, τέτοιο ώστε οι πίνακες $\tau(s_1 \cdot x)$ και $\mu(s_1 \cdot x)$ να ορίζονται πάνω από τον $R[x]$. Έστω $\tau_1(x), \mu_1(x)$ δύο πίνακες πάνω από τον $R[x]$, με $\tau_1(0) = \mu_1(0) = I_n$, οι οποίοι τοπικοποιούνται στους πίνακες $\tau(s_1 \cdot x)$ και $\mu(s_1 \cdot x)$ αντίστοιχα. Τότε ο πίνακας $\beta(x) = \tau_1(x) \cdot \mu_1(x) = (\delta_{ij} + x \cdot h_{ij}(x))$ τοπικοποιείται στον I_n, δηλαδή $\left(\tau_1(x) \cdot \mu_1(x)\right)_s = I_n$. Εφόσον $\beta(0) = \tau_1(0) \cdot \mu_1(0) = I_n$, υπάρχει κάποιο $s_2 \in S$, τέτοιο ώστε $s_2 h_{ij} = 0$ για κάθε i, j, δηλαδή $\beta(s_2 \cdot x) = I_n = \tau_1(s_2 \cdot x) \cdot \mu_1(s_2 \cdot x)$. Συνεπώς, ο πίνακας $\widehat{\tau}(x) := \tau_1(s_2 \cdot x) \in \mathsf{GL}_n(R[x])$, είναι αντιστρέψιμος πάνω από τον $R[x]$ και τοπικοποιείται στον πίνακα $\tau(s_1 \cdot s_2 \cdot x)$. Επιπλέον, $\widehat{\tau}(0) := \tau_1(0) = I_n$. □

Πρόταση 4.2.3. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος και S ένα πολλαπλασιαστικά κλειστό υποσύνολο του R. Αν $f = (f_1, \ldots, f_n) \in \mathsf{UM}_n(R[t])$ είναι μία unimodular γραμμή πάνω από τον δακτύλιο $R[t]$, τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

1. *$f(t) \sim f(0)$ πάνω από τον δακτύλιο τοπικοποίησης $R_s[t]$,*

2. *Υπάρχει κάποιο $b \in S$ τέτοιο ώστε $f(t+bx) \sim f(t)$ πάνω από τον δακτύλιο $R[t,x]$.*

Απόδειξη. $(2) \Rightarrow (1)$ Έστω ότι υπάρχει κάποιο $b \in S$ τέτοιο ώστε $f(t+bx) \sim f(t)$ πάνω από τον δακτύλιο $R[t,x]$. Έστω ο δακτύλιος τοπικοποίησης $R_s[t,x]$. Στην δοσμένη σχέση ισοδυναμίας $\sim$ θέτουμε $t \mapsto 0$ και $x \mapsto b^{-1}t$. Τότε ισχύει ότι $f(0+bb^{-1}t) = f(t) \sim f(0)$ πάνω από τον δακτύλιο τοπικοποίησης $R_s[t]$.
$(1) \Rightarrow (2)$ Έστω $f(t) \sim f(0)$ πάνω από τον δακτύλιο τοπικοποίησης $R_s[t]$, τότε υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας $\sigma(t) \in \mathsf{GL}_n(R_s[t])$ τέτοιος ώστε $f(t)\cdot\sigma(t) = f(0)$. Έστω $\tau(t,x) = \sigma(t+x)\cdot\sigma(t)^{-1} \in \mathsf{GL}_n(R_s[t,x])$. Τότε

$$\begin{aligned} f(t+x)\cdot\tau(t,x) &= f(t+x)\cdot\sigma(t+x)\cdot\sigma(t)^{-1} \\ &= f(0)\cdot\sigma(t)^{-1} \\ &= f(t)\cdot\sigma(t)\cdot\sigma(t)^{-1} \\ &= f(t)\ (\in R_s[t,x]^n). \end{aligned}$$

Θα μεταφέρουμε την ισότητα αυτή στον δακτύλιο $R[t,x]^n$. Εφόσον ισχύει ότι $\tau(t,0) = \sigma(t)\cdot\sigma(t)^{-1} = I_n$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα (4.2.2) πάνω από τον δακτύλιο $R[t]$. Σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα, μπορούμε να βρούμε έναν πίνακα $\widehat{\tau}(t,x) \in \mathsf{GL}_n(R[t,x])$ ο οποίος τοπικοποιείται στον πίνακα $\tau(t,sx)$, για κάποιο $s \in S$ και για τον οποίο ισχύει $\widehat{\tau}(t,0) = I_n$. Τότε στον δακτύλιο $R[t,x]^n$, θα ισχύει ότι:

$$f(t+sx)\cdot\widehat{\tau}(t,x) - f(t) = x\cdot g(t,x),$$

για κάποια γραμμή $g(t,x)$ η οποία τοπικοποιείται στο 0. Οπότε, υπάρχει κάποιο $s' \in S$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$f(t+ss'x)\cdot\widehat{\tau}(t,s'x) - f(t) = x\cdot s'\cdot g(t,s'x) = 0.$$

Συνεπώς, $f(t+ss'x)\cdot\widehat{\tau}(t,s'x) = f(t)$. Άρα, υπάρχει κάποιο $b = ss' \in S$, τέτοιο ώστε $f(t+bx) \sim f(t)$ πάνω από τον δακτύλιο $R[t,x]$. □

Θεώρημα 4.2.4. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος, $f = (f_1,\ldots,f_n) \in \mathsf{UM}_n(R[t])$ μία unimodular γραμμή πάνω από τον δακτύλιο πολυωνύμων μίας μεταβλητής $R[t]$ και έστω τα σύνολα:*

$$\mathfrak{A} = \{a \in R | f(t) \sim f(0) \text{ πάνω από τον δακτύλιο } R_a[t]\},$$

$$\mathfrak{B} = \{b \in R | f(t+bx) \sim f(t) \text{ πάνω από τον δακτύλιο } R[t,x]\}.$$

Τότε τα σύνολα $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ αποτελούν ιδεώδη του δακτυλίου R και ισχύει ότι $\mathfrak{A} = \mathrm{rad}\,\mathfrak{B}$.

Απόδειξη. Έστω $b \in \mathfrak{B}$, συνεπώς $b \in R$ και $f(t+bx) \sim f(t)$ πάνω από τον δακτύλιο $R[t,x]$. Έστω $c \in R$, αν αντικαταστήσουμε το x με cx, τότε θα ισχύει $f(t+bcx) \sim f(t)$, άρα $bc \in \mathfrak{B}$. Έστω $b, b' \in \mathfrak{B}$, τότε $b, b' \in R$ και $f(t+bx) \sim f(t)$ πάνω από τον δακτύλιο $R[t,x]$, $f(t+b'x) \sim f(t)$ πάνω από τον δακτύλιο $R[t,x]$. Αν αντικαταστήσουμε το t με $t+b'x$, τότε θα ισχύει

$$f(t+b'x+bx) = f(t+(b'+b)x) \sim f(t+b'x) \sim f(t).$$

Άρα, $b'+b \in \mathfrak{B}$. Συνεπώς, το σύνολο $\mathfrak{B}$ αποτελεί ένα ιδεώδες του δακτυλίου R. Εφαρμόζοντας την Πρόταση (4.2.3), συμπεραίνουμε ότι $\mathfrak{A} = \mathrm{rad}\,\mathfrak{B}$. □

Θεώρημα 4.2.5. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος και $f = (f_1,\ldots,f_n) \in \mathsf{UM}_n(R[t])$ μία unimodular γραμμή πάνω από τον δακτύλιο πολυωνύμων μίας μεταβλητής $R[t]$. Αν για όλα τα μεγιστοτικά ιδεώδη του R, $\mathfrak{m} \subset R$, ισχύει ότι $f(t) \sim f(0)$ πάνω από τον δακτύλιο $R_{\mathfrak{m}}[t]$, τότε $f(t) \sim f(0)$ πάνω από τον δακτύλιο $R[t]$.*

Απόδειξη. Έστω τα ιδεώδη του Θεωρήματος (4.2.4):

$$\mathfrak{A} = \{a \in R | f(t) \sim f(0) \text{ πάνω από τον δακτύλιο } R_a[t]\},$$

$$\mathfrak{B} = \{b \in R | f(t+bx) \sim f(t) \text{ πάνω από τον δακτύλιο } R[t,x]\}.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση (4.2.3), για κάθε μεγιστοτικό ιδεώδες $\mathfrak{m} \subset R$, θα υπάρχει κάποιο στοιχείο $b \in R - \mathfrak{m}$ και $b \in \mathfrak{B}$. Συνεπώς, θα ισχύει ότι $\mathfrak{B} = R$. Σύμφωνα με την Πρόταση (4.2.4), θα ισχύει ότι $\mathfrak{A} = R$, άρα $f(t) \sim f(0)$ πάνω από τον δακτύλιο $R[t]$. □

Λαμβάνοντας υπόψιν το Θεώρημα (4.2.5), η απόδειξη του Θεωρήματος (4.2.1) ανάγεται στην "τοπική" περίπτωση, δηλαδή στην περίπτωση κατά την οποία ο δακτύλιος R είναι τοπικός. Έτσι το ακόλουθο Λήμμα, το οποίο αφορά τοπικούς δακτυλίους και στο οποίο το συμπέρασμα είναι ισχυρότερο, ολοκληρώνει την απόδειξη του Vaserstein (Θεώρημα (4.2.1)).

Λήμμα 4.2.6. *Έστω R ένας μεταθετικός τοπικός δακτύλιος, $f = (f_1, \ldots, f_n) \in \mathsf{UM}_n(R[t])$ μία unimodular γραμμή πάνω από τον δακτύλιο πολυωνύμων μίας μεταβλητής $R[t]$, όπου $n \geq 3$ και έστω ότι ο ηγετικός συντελεστής του πολυωνύμου f_1 είναι ένα αντιστρέψιμο στοιχείο του δακτυλίου R. Τότε ισχύει ότι:*

$$f(t) \sim_{\mathsf{E}_n(R[t])} f(0) \sim_{\mathsf{E}_n(R)} (1, 0, \ldots, 0).$$

Απόδειξη. Ο δακτύλιος R είναι ένας μεταθετικός τοπικός δακτύλιος και $f = (f_1, \ldots, f_n) \in \mathsf{UM}_n(R[t])$ μία unimodular γραμμή πάνω από τον δακτύλιο πολυωνύμων μίας μεταβλητής $R[t]$, όπου $n \geq 3$. Έστω $A = R[t]/(f_1)$, τότε σύμφωνα με την Πρόταση (2.2.14), για να αποδείξουμε ότι $f = (f_1, \ldots, f_n) \sim_{\mathsf{E}_n(R)} (1, 0, \ldots, 0)$, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$(\overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n) \sim_{\mathsf{E}_{n-1}(A)} (\overline{1}, \overline{0}, \ldots, \overline{0}).$$

Εφόσον το πολυώνυμο f_1 έχει ηγετικό συντελεστή ένα αντιστρέψιμο στοιχείο του R, τότε το $A = R[t]/(f_1)$ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο. Ο δακτύλιος R είναι ένας μεταθετικός τοπικός δακτύλιος, το $A = R[t]/(f_1)$ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο και μία μεταθετική R-άλγεβρα, άρα ο $A = R[t]/(f_1)$ είναι ένας μεταθετικός ημιτοπικός δακτύλιος (βλέπε [13, Corollary I.3.9]). Τότε, σύμφωνα με το Πόρισμα (2.2.12), ισχύει ότι:

$$(\overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n) \sim_{\mathsf{E}_{n-1}(A)} (\overline{1}, \overline{0}, \ldots, \overline{0}).$$

Συνεπώς, $f(t) \sim_{\mathsf{E}_n(R[t])} f(0) \sim_{\mathsf{E}_n(R)} (1, 0, \ldots, 0)$. □

4.3 Η απόδειξη του Quillen

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε την απόδειξη του Quillen για την εικασία του Serre. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στην Παράγραφο 3.6, το 1958 ο Seshadri απέδειξε ότι αν R είναι μία περιοχή κύριων ιδεωδών, τότε τα πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά $R[x]$-πρότυπα είναι ελεύθερα. Λαμβάνοντας υπόψιν αυτό το γεγονός, προκύπτει ότι αν k είναι ένα σώμα, τότε τα πεπερασμένα παραγόμενα $k[x, y]$-πρότυπα είναι ελεύθερα. Για να το αποδείξει αυτό ο Seshadri χρησιμοποίησε την έννοια του επεκτάσιμου extended προτύπου, την οποία έννοια χρησιμοποίησε και ο Quillen για την απόδειξη της εικασίας του Serre.

Ορισμός 4.3.1. *Αν R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος και A είναι μία R-άλγεβρα, τότε ένα A-πρότυπο P καλείται* **επεκτάσιμο (extended)** *από τον R αν υπάρχει ένα R-πρότυπο P_0 τέτοιο ώστε $P \cong P_0 \otimes_R A$.*

Παράδειγμα 4.3.2. Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος και A μία R-άλγεβρα.

1. Κάθε ελεύθερο A-πρότυπο F είναι επεκτάσιμο (extended) από τον R, διότι, αν $B = \{e_i : i \in I\}$ είναι μία βάση του ελεύθερου A-προτύπου F και F_0 είναι το ελεύθερο R-πρότυπο με βάση B, τότε $F \cong F_0 \otimes_R A$.

2. Αν ένα A-πρότυπο P είναι επεκτάσιμο (extended) από τον R και S είναι ένα υποσύνολο του A, τότε το $S^{-1}P$ είναι επεκτάσιμο (extended) από τον R. Εφόσον το A-πρότυπο P είναι επεκτάσιμο (extended) από τον R, από τον ορισμό του επεκτάσιμου προτύπου, προκύπτει ότι $P \cong P_0 \otimes_R A$, επίσης ισχύει ότι $S^{-1}P = P \otimes_A S^{-1}A$ (βλέπε Πρόταση (1.3.14)) και από την προσεταιριστικότητα του τανυστικού γινομένου, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} S^{-1}P &= P \otimes_A S^{-1}A \\ &\cong (P_0 \otimes_R A) \otimes_A S^{-1}A \\ &\cong P_0 \otimes_R (A \otimes_A S^{-1}A) \\ &\cong P_0 \otimes_R S^{-1}A. \end{aligned}$$

3. Αν V είναι ένα ελεύθερο R-πρότυπο, τότε $V \otimes_R A$ είναι ένα ελεύθερο A-πρότυπο, διότι το τανυστικό γινόμενο μετατίθεται με τα ευθέα αθροίσματα. Το V είναι ένα ελεύθερο R-πρότυπο, συνεπώς $V \cong \oplus_{i\in I} R_i$, όπου I είναι μία βάση του V, οπότε:

$$\begin{aligned} V \otimes_R A &\cong (\oplus_{i\in I} R_i) \otimes_R A \\ &\cong \oplus_{i\in I}(R_i \otimes_R A) \\ &\cong \oplus_{i\in I} A_i. \end{aligned}$$

   Όμοια, εφόσον ένα προβολικό R-πρότυπο είναι ευθύς αθροιστέος ενός ελεύθερου προτύπου, τότε κάθε A-πρότυπο που είναι επεκτάσιμο (extended) από ένα προβολικό R-πρότυπο είναι προβολικό.

4. Δεν είναι όλα τα πρότυπα επεκτάσιμα. Για παράδειγμα, αν $A = k[x]$, όπου k είναι ένα σώμα, τότε κάθε k-πρότυπο V είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το k, συνεπώς κάθε επεκτάσιμο πρότυπο είναι ελεύθερο. Οπότε, κάθε $k[x]$-πρότυπο το οποίο δεν είναι ελεύθερο, δεν είναι επεκτάσιμο.

Ορισμός 4.3.3. *Μία R-άλγεβρα A (όχι απαραίτητα μεταθετική) καλείται* **επαυξημένη (augmented)** *αν υπάρχει μία απεικόνιση R-αλγεβρών $\varepsilon : A \to R$.*

Εφόσον $\varepsilon(1) = 1$, η επέκταση ε είναι μία επί απεικόνιση. Ο πυρήνας της ε καλείται ιδεώδες επέκτασης (augmentation ideal).

Παράδειγμα 4.3.4. Ο δακτύλιος πολυωνύμων n μεταβλητών $A = R[t_1, \dots, t_n]$ είναι μία επαυξημένη R-άλγεβρα με απεικόνιση επέκτασης:

$$\begin{aligned} \varepsilon : A = R[t_1, \dots, t_n] &\to R \\ f &\mapsto \text{σταθερός όρος του } f. \end{aligned}$$

Πρόταση 4.3.5. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος και A μία R-άλγεβρα. Έστω P ένα προβολικό A-πρότυπο και I ένα ιδεώδες της A. Τότε το πρότυπο P/IP είναι ένα προβολικό A/I-πρότυπο.*

Απόδειξη. Έστω F ένα ελεύθερο A-πρότυπο, τότε $F = \oplus_{j\in J} A_j$, όπου J μία βάση του F και $IF = \oplus_{j\in J} I_j$. Άρα, $F/IF = \oplus_{j\in J}(A_j/I_j)$, οπότε το F/IF είναι ένα ελεύθερο A/I-πρότυπο.

Αν το P είναι ένα προβολικό A-πρότυπο, τότε το P είναι ευθύς αθροιστέος ενός ελεύθερου A-προτύπου F. Συνεπώς, $P \oplus Q = F$, άρα $F/IF = (P/IP) \oplus (Q/IQ)$. Όμως, το F/IF είναι ένα ελεύθερο A/I-πρότυπο και το P/IP είναι ευθύς αθροιστέος του ελεύθερου A/I-προτύπου F/IF, άρα το το πρότυπο P/IP είναι ένα προβολικό A/I-πρότυπο. □

Λήμμα 4.3.6. *Έστω A μία μεταθετική επαυξημένη (augmented) R-άλγεβρα, I το ιδεώδες επέκτασης (augmentation ideal) και έστω P ένα A-πρότυπο.*

1. *Αν $P \cong P_0 \otimes_R A$, τότε $P_0 \cong P/IP$.*

2. *Αν το P είναι προβολικό ή πεπερασμένα παραγόμενο, το ίδιο ισχύει και για το P_0.*

Απόδειξη. 1. Πολλαπλασιάζοντας τανυστικά από αριστερά την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

με P_0, προκύπτει η ακόλουθη δεξιά ακριβής ακολουθία:

$$P_0 \otimes_R I \longrightarrow P_0 \otimes_R A \longrightarrow P_0 \otimes_R R \longrightarrow 0 .$$

Σύμφωνα με την υπόθεση, ισχύει ότι $P \cong P_0 \otimes_R A$. Επίσης, ισχύουν ότι $P_0 \otimes_R R \cong P_0$ και $\mathsf{Image}(P_0 \otimes_R I) = IP$, άρα προκύπτει η ακόλουθη ακριβής ακολουθία:

$$0 \longrightarrow IP \longrightarrow P \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0 .$$

Συνεπώς, προκύπτει ότι $P_0 \cong P/IP$.

2. Αν το P είναι πεπερασμένα παραγόμενο, τότε ο ισομορφισμός $P/IP \cong P_0$ δείχνει ότι το P_0 είναι επίσης πεπερασμένα παραγόμενο. Αν το P είναι A-προβολικό, τότε το P/IP είναι ένα προβολικό A/I-πρότυπο (Πρόταση (4.3.5)) και ο ισομορφισμός $P/IP \cong P_0$ δείχνει ότι το P_0 είναι επίσης προβολικό. □

Σχόλιο 4.3.7. Έστω ένας δακτύλιος R και ένα επεκτάσιμο πάνω από τον R, $R[t_1, \ldots, t_n]$-πρότυπο M, δηλαδή, υπάρχει ένα R-πρότυπο M_0 τέτοιο ώστε $M \cong R[t_1, \ldots, t_n] \otimes_R M_0$. Αν υπάρχει ένα τέτοιο R-πρότυπο M_0, τότε είναι μοναδικό, διότι:

$$\frac{M}{(t_1, \ldots, t_n) \cdot M} \cong \frac{R[t_1, \ldots, t_n]}{(t_1, \ldots, t_n)} \otimes_R M_0 \cong R \otimes_R M_0 \cong M_0.$$

Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος και έστω $R[t]$ ο πολυωνυμικός δακτύλιος μίας μεταβλητής, θα ορίσουμε έναν ιδιαίτερα χρήσιμο δακτύλιο πηλίκο του $R[t]$, τον οποίο θα συμβολίσουμε με $R(t)$. Θα μελετήσουμε την συμπεριφορά των πεπερασμένα παραγόμενων προβολικών $R[t]$-προτύπων πάνω από μία επέκταση από τον $R[t]$ στον $R(t)$.

Ορισμός 4.3.8. *Ο $R(t)$ είναι η τοπικοποίηση του δακτυλίου $R[t]$ στο πολλαπλασιαστικό σύνολο S, το οποίο αποτελείται από όλα τα μονικά πολυώνυμα του $R[t]$, $R(t) = S^{-1}R[t]$. Τα στοιχεία του $R(t)$ μπορούν να θεωρηθούν ως ρητές συναρτήσεις $(a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \ldots + a_0)/(t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \ldots + b_0)$.*

Μπορούμε να πάρουμε τον ίδιο δακτύλιο $R(t)$, αν γίνει η τοπικοποίηση στο πολλαπλασιαστικά κλειστό υπερσύνολο του S, S', το οποίο αποτελείται από όλα τα πολυώνυμα του $R[t]$ με ηγετικό συντελεστή ένα αντιστρέψιμο στοιχείο του R. Εφόσον, τα σύνολα S, S' αποτελούνται από στοιχεία τα οποία δεν είναι μηδενοδιαιρέτες του $R[t]$, μπορούμε να θεωρήσουμε τον δακτύλιο $R[t]$ ως έναν υποδακτύλιο του $R(t)$. Στην ειδική περίπτωση όπου ο R είναι ένα σώμα k, η τοπικοποίηση $k(t)$ είναι το σώμα πηλίκο του $k[t]$, δηλαδή το σώμα των ρητών συναρτήσεων μίας μεταβλητής t πάνω από το σώμα k.

Ορισμός 4.3.9. *Αν P είναι ένα $R[t]$-πρότυπο, ορίζουμε*

$$P(t) = S^{-1}P = P \otimes_{R[t]} R(t).$$

Το ακόλουθο Θεώρημα από την Μεταθετική Άλγεβρα, το οποίο οφείλεται στον Roberts, θα μας χρειασθεί στην απόδειξη του Θεωρήματος του Horrocks (Θεώρημα (4.3.12)).

Συμβολίζουμε με άνω παύλα την αναγωγή modulo $\mathfrak{m}$, για R-πρότυπα και για R-άλγεβρες, $\overline{M} = M/\mathfrak{m} \cdot M$.

Θεώρημα 4.3.10. ***(Θεώρημα του Roberts)*** *Έστω $(R, \mathfrak{m})$ ένας μεταθετικός τοπικός δακτύλιος, και A μία R-άλγεβρα (όχι απαραίτητα μεταθετική). Έστω S ένα πολλαπλασιαστικά κλειστό σύνολο αποτελούμενο από κεντρικά στοιχεία τα οποία δεν είναι μηδενοδιαιρέτες της άλγεβρας A, και έστω $n \geq 0$ ένας σταθερός ακέραιος. Έστω ότι ισχύουν οι ακόλουθες υποθέσεις:*

1. *Για κάθε* $f \in S$, $A/f \cdot A \in \mathfrak{M}(R)$.

2. *Η απεικόνιση* $\mathsf{GL_n}(S^{-1}A) \to \mathsf{GL_n}\overline{(S^{-1}A)}$ *είναι επί.*

3. *Το* $S^{-1}A$ *περιέχει μία* R*-υποάλγεβρα* B *(όχι απαραίτητα μεταθετική) τέτοια ώστε* $S^{-1}A = A + B$ *και* $\mathfrak{m}B \subseteq \operatorname{rad} B$.

Έστω $P \in \mathfrak{M}(A)$ *είναι τέτοιο ώστε όλα τα στοιχεία* $f \in S$ *δρουν στο* P *ως στοιχεία που δεν είναι μηδενοδιαιρέτες. Αν* $\overline{P} \cong \overline{A}^n$ *και* $S^{-1}P \cong (S^{-1}A)^n$, *τότε* $P \cong A^n$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [13, Theorem 4.1]. □

Πρόταση 4.3.11. *Έστω* $A = R[t]$, *και* B *ο υποδακτύλιος του* $R(t)$ *που αποτελείται από στοιχεία της μορφής* $g(t)/f(t)$ *όπου το* f *είναι ένα μονικό πολυώνυμο, και ισχύει ότι* $\deg g \leq \deg f$. *Επίσης, έστω* $s = 1/t \in B$. *Τότε:*

1. $R(t) = A + B = B[\frac{1}{s}]$.

2. $B = (1 + sR[s])^{-1}R[s]$.

3. *Αν ο* R *είναι ένας τοπικός δακτύλιος, με μεγιστοτικό ιδεώδες* $\mathfrak{m}$, *τότε* $B = R[s]_{(\mathfrak{m},s)}$, *και ο υποδακτύλιος* B *του* $R(t)$ *είναι επίσης τοπικός δακτύλιος.*

Απόδειξη. 1. Ένα τυχαίο στοιχείο του δακτυλίου $R(t)$ είναι της μορφής $h(t)/f(t)$, όπου το f είναι ένα μονικό πολυώνυμο. Μπορούμε να διαιρέσουμε το πολυώνυμο h με το f και σύμφωνα με την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης για πολυώνυμα, θα έχουμε $h = q \cdot f + g$, όπου ή $g = 0$ ή $\deg g < \deg f$. Άρα, $h/f = (q \cdot f + g)/f = q + g/f \in A + B = R[t] + B$. Εφόσον $B \supset R$, συμπεραίνουμε ότι $R(t) = B[t] = B[\frac{1}{s}]$.

2. Ισχύει ότι $R[s] \subseteq B$. Ένα τυχαίο στοιχείο του $1 + sR[s]$ είναι της μορφής:

$$\begin{aligned} a &= 1 + s \cdot (b_1 + b_2 s + \ldots + b_n s^{n-1}) \\ &= 1 + b_1 s + \ldots + b_n s^n \\ &= \frac{t^n + b_1 t^{n-1} + \ldots + b_n}{t^n}, \end{aligned}$$

οπότε

$$a^{-1} = \frac{t^n}{t^n + b_1 t^{n-1} + \ldots + b_n} \in B.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $(1 + sR[s])^{-1}R[s] \subseteq B$.

Αντίστροφα, ένα τυπικό στοιχείο του δακτυλίου B είναι της μορφής:

$$\beta = \frac{a_0 t^m + \ldots + a^m}{t^n + \ldots + b_{n-1}t + b_n}, \text{ όπου } a_i,\, b_j \in R,\, m \leq n.$$

Πολλαπλασιάζοντας και αριθμητή και παρονομαστή με s^n, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{s^n(a_0 t^m + \ldots + a^m)}{s^n(t^n + \ldots + b_{n-1}t + b_n)} \\ &= \frac{a_0 s^n t^m + \ldots + a_m s^n}{s^n t^n + \ldots + b_{n-1}s^n t + b_n s^n} \\ &= \frac{a_0 s^{n-m} + \ldots + a_m s^n}{1 + \ldots + b_{n-1}s^{n-1} + b_n s^n} \\ &= \frac{s^{n-m}(a_0 + \ldots + a_m s^m)}{1 + b_1 s + \ldots + b_n s^n} \in (1 + sR[s])^{-1}R[s]. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $B \subseteq (1 + sR[s])^{-1}R[s]$, άρα τελικά $B = (1 + sR[s])^{-1}R[s]$.

3. Έστω $(R, \mathfrak{m})$ ένας τοπικός δακτύλιος. Το πολλαπλασιαστικά κλειστό σύνολο $R[s] - (\mathfrak{m}, s)$ αποτελείται από στοιχεία της μορφής $b_0 + b_1 s + \ldots + b_n s^n$, όπου $b_0 \in R - \mathfrak{m}$ είναι ένα αντιστρέψιμο στοιχείο του δακτυλίου R. Οπότε, ο δακτύλιος $R[s]_{(\mathfrak{m},s)}$ είναι ίσος με τον δακτύλιο τοπικοποίησης $(1 + sR[s])^{-1} R[s] = B$. Εφόσον, $R[s]/(\mathfrak{m}, s) \cong R/\mathfrak{m}$, παρατηρούμε ότι το $(\mathfrak{m}, s)$ είναι ένα μεγιστοτικό ιδεώδες, συνεπώς ο δακτύλιος $R[s]_{(\mathfrak{m},s)} = B$ είναι τοπικός. □

Θεώρημα 4.3.12. ***(Θεώρημα του Horrocks)*** *Έστω R ένας μεταθετικός τοπικός δακτύλιος, και P ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό $R[t]$-πρότυπο. Αν $P(t) = R(t) \otimes_{R[t]} P$ είναι $R(t)$-ελεύθερο, τότε το P είναι $R[t]$-ελεύθερο.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Roberts (4.3.10), όπου $A = R[t]$ και S το σύνολο όλων των μονικών πολυωνύμων. Προφανώς, η άλγεβρα $R[t]$ και το σύνολο S δεν είναι μηδενοδιαιρέτες, και σύμφωνα με τον ορισμό θα ισχύει ότι $S^{-1}A = R(t)$. Για την υπόθεση (1), να σημειώσουμε ότι, για ένα μονικό πολυώνυμο $f \in S$ βαθμού d, ισχύει ότι $A/f \cdot A = \sum R \cdot t^i$, όπου $0 \leq i < d$. Για την υπόθεση (2), να σημειώσουμε ότι, $\overline{S^{-1}A} = \overline{R}(t)$. Εφόσον το $\overline{S^{-1}A}$ είναι ένα σώμα, θα ισχύει ότι:

$$\mathsf{GL_n}(\overline{S^{-1}A}) = \mathsf{E_n}(\overline{S^{-1}A}) \cdot \{ \text{ αντιστρέψιμοι διαγώνιοι πίνακες } \}.$$

Προφανώς, η απεικόνιση $\mathsf{E_n}(S^{-1}A) \to \mathsf{E_n}(\overline{S^{-1}A})$ είναι επί, οπότε αν κάθε μη-μηδενικό στοιχείο $a \in \overline{R}(t)$ μπορεί να προκύψει από ένα αντιστρέψιμο στοιχείο του δακτυλίου $S^{-1}A = R(t)$, μέσω του παραπάνω επιμορφισμού τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η απεικόνιση $\mathsf{GL_n}(S^{-1}A) \to \mathsf{GL_n}(\overline{S^{-1}A})$ είναι επί. Μπορούμε να γράψουμε το στοιχείο a ως $\overline{r} \cdot \overline{g}/\overline{f}$, όπου $r \in R - \mathfrak{m}$, και f, g είναι μονικά πολυώνυμα. Η προφανής αντίστροφη εικόνα $r \cdot g/f$ του $\overline{r} \cdot \overline{g}/\overline{f}$ είναι ένα αντιστρέψιμο στοιχείο του $R(t)$. Για την υπόθεση (3), έστω $B \subsetneq R(t)$ ο δακτύλιος που κατασκευάστηκε στην Πρόταση (4.3.11). Σύμφωνα με τα (4.3.11)(3) και (4.3.11)(1), ο δακτύλιος B είναι τοπικός με μεγιστοτικό ιδεώδες $\supseteq \mathfrak{m}B$, και $R(t) = A + B$. Οπότε, ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος (4.3.10).

Έστω P ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό $R[t]$-πρότυπο με $P(t) \cong R(t)^n$. Το $\overline{P}$ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό $\overline{R}[t]$-πρότυπο, οπότε ισχύει ότι $\overline{P} \cong \overline{R}[t]^n$, εφόσον το $\overline{R}[t]$ είναι μία περιοχή κύριων ιδεωδών. Τελικά, η προβολικότητα του P συνεπάγεται ότι όλα τα στοιχεία $f \in S$ δρουν στο P ως στοιχεία που δεν είναι μηδενοδιαιρέτες. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα (4.3.10), προκύπτει ότι $P \cong R[t]^n$. □

Συμβολίζουμε με $\mathfrak{M}$ το σύνολο των πεπερασμένα παραγόμενων προτύπων και με $\mathfrak{P}$ το σύνολο των πεπερασμένα παραγόμενων προβολικών προτύπων. Για κάθε δακτύλιο A, ο συμβολισμός $M \in \mathfrak{M}^A(A[t_1, \ldots, t_n])$ σημαίνει ότι το πεπερασμένα παραγόμενο $A[t_1, \ldots, t_n]$-πρότυπο M είναι επεκτάσιμο (extended) από τον δακτύλιο A, δηλαδή, υπάρχει ένα A-πρότυπο N τέτοιο ώστε $M \cong A[t_1, \ldots, t_n] \otimes_A N$. Τότε, προκύπτει ότι $N \cong M/(t_1, \ldots, t_n)M \in \mathfrak{M}(A)$. Εφοδιασμένοι με αυτούς τους συμβολισμούς είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα του Quillen το οποίο αποτελεί ένα κριτήριο για το πότε ένα πρότυπο είναι επεκτάσιμο (extended) πάνω από έναν πολυωνυμικό δακτύλιο.

Θεώρημα 4.3.13. ***(Quillen's Patching Theorem)*** *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος. Έστω A μία, όχι απαραίτητα μεταθετική, R-άλγεβρα και έστω M ένα πεπερασμένα παραστάσιμο $A[t_1, \ldots, t_n]$-πρότυπο. Τότε:*

1. $(\mathbf{A_n})$ *$Q(M) := \{g \in R : M_g \in \mathfrak{M}^{A_g}(A_g[t_1, \ldots, t_n])\}$ είναι ένα ιδεώδες του R.*

2. $(\mathbf{B_n})$ *Αν $M_\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}^{A_\mathfrak{m}}(A_\mathfrak{m}[t_1, \ldots, t_n])$ για κάθε μεγιστοτικό ιδεώδες $\mathfrak{m} \in \mathsf{Max}R$, τότε $M \in \mathfrak{M}^A(A[t_1, \ldots, t_n])$.*

Απόδειξη. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι $(\mathbf{A_n}) \Rightarrow (\mathbf{B_n})$. Αρκεί να δείξουμε ότι το ιδεώδες $Q(M)$ είναι το μοναδιαίο ιδεώδες R. Έστω

$$M' = A[t_1, \ldots, t_n] \otimes_A (M/(t_1, \ldots, t_n)M),$$

το οποίο είναι ένα πεπερασμένα παραστάσιμο $A[t_1, \ldots, t_n]$-πρότυπο που είναι επεκτάσιμο (extended) από την R-άλγεβρα A. Για κάθε $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}R$, υπάρχει ένας ισομορφισμός $\phi : M_{\mathfrak{m}} \to M'_{\mathfrak{m}}$. Ο ισομορφισμός ϕ είναι η τοπικοποίηση ενός $A_g[t_1, \ldots, t_n]$-ισομορφισμού $M_g \to M'_g$, για κάποιο $g \in R - \mathfrak{m}$. Τότε θα ισχύει ότι $g \in Q(M) - \mathfrak{m}$, οπότε $Q(M) \nsubseteq \mathfrak{m}$. Αυτό αποδεικνύει ότι $Q(M) = R$.

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε ότι αν ισχύει η $(\mathbf{A_1})$, τότε θα ισχύει η $(\mathbf{A_n})$ για κάθε n. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο πλήθος των μεταβλητών n. Σύμφωνα με το επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε ότι ισχύει η $(\mathbf{A_{n-1}})$, συνεπώς θα ισχύει και η $(\mathbf{B_{n-1}})$. Έστω το σύνολο $Q(M) = \{g \in R : M_g \in \mathfrak{M}^{A_g}(A_g[t_1, \ldots, t_n])\}$. Ισχύει ότι $R \cdot Q(M) \subseteq Q(M)$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι

$$f_0, f_1 \in Q(M) \Rightarrow f = f_0 + f_1 \in Q(M).$$

Έστω $N = M/t_nM$, το οποίο είναι ένα πεπερασμένα παραστάσιμο πρότυπο πάνω από τον δακτύλιο $A[t_1, \ldots, t_{n-1}]$, και έστω

$$L = M/(t_1, \ldots, t_n)M,$$

το οποίο είναι πεπερασμένα παραστάσιμο πάνω από την R-άλγεβρα A. Εφαρμόζοντας την $(\mathbf{A_1})$ στο

$$A[t_1, \ldots, t_{n-1}] \to A[t_1, \ldots, t_{n-1}][t_n],$$

παρατηρούμε ότι το M_f είναι επεκτάσιμο (extended) από το N_f, το οποίο είναι πεπερασμένα παραστάσιμο πάνω από τον $A_f[t_1, \ldots, t_{n-1}]$. Ισχυριζόμαστε ότι $N_f \in \mathfrak{M}^{A_f}(A_f[t_1, \ldots, t_{n-1}])$. Αν ισχύει ο ισχυρισμός μας, τότε θα έχουμε

$$M_f \in \mathfrak{M}^{A_f}(A_f[t_1, \ldots, t_n])\},$$

δηλαδή, $f \in Q(M)$. Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό, αρκεί να δείξουμε ότι το $(N_f)_{\mathfrak{m}}$ είναι επεκτάσιμο (extended) από το $(A_f)_{\mathfrak{m}}$, για κάθε $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R_f)$. Έστω $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_f$, όπου $\mathfrak{p}$ είναι η συστολή (contraction) του $\mathfrak{m}$ στο R, (για τον ορισμό της συστολής βλέπε [8]). Εφόσον $f \notin \mathfrak{p}$, θα ισχύει ότι $f_i \notin \mathfrak{p}$ για κάποιο i, έστω $i = 0$. Αλλά το M_{f_0} είναι επεκτάσιμο (extended) από το L_{f_0}, οπότε $(N_f)_{\mathfrak{m}} = N_{\mathfrak{p}}$ είναι επεκτάσιμο (extended) από το $L_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{M}(A_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{M}((A_f)_{\mathfrak{m}})$, και έτσι καταλήγουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Τελικά, θα αποδείξουμε την $(\mathbf{A_1})$, οπότε στο εξής υποθέτουμε ότι $n = 1$ και αντικαθιστούμε το t_1 με t. Πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$f_0, f_1 \in Q(M) \Rightarrow f = f_0 + f_1 \in Q(M).$$

Αντικαθιστώντας το R με R_f, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα f_0, f_1 είναι συνμεγιστοτικά (comaximal) στοιχεία του R, και να προσπαθήσουμε να αποδείξουμε ότι $M \cong N[t]$, όπου $N = M/tM$. Έστω οι $A_{f_i}[t]$-ισομορφισμοί

$$u_i : M_{f_i} \to N_{f_i}[t], i = 0, 1.$$

Συνθέτοντας αυτούς τους ισομορφισμούς με έναν κατάλληλο αυτομορφισμό του $N_{f_i}[t]$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι ισομορφισμοί u_i ανάγονται modulo t στην ταυτοτική απεικόνιση του N_{f_i}. Έτσι προκύπτει το πάνω μισό του ακόλουθου διαγράμματος:

$$\begin{tikzcd}
M_{f_0} \arrow[rr, "loc."] \arrow[d, "u_0"'] & & M_{f_0 f_1} \arrow[dl, "(u_0)_{f_1}"'] \arrow[dr, "(u_1)_{f_0}"] & & M_{f_1} \arrow[ll, "loc."'] \arrow[d, "u_1"] \\
N_{f_0}[t] \arrow[r, "loc."] \arrow[d, "v_0"'] & N_{f_0 f_1}[t] \arrow[rr, dashed, "\theta"] \arrow[dr, "(v_0)_{f_1}"'] & & N_{f_0 f_1}[t] \arrow[dl, "(v_1)_{f_0}"] & N_{f_1}[t] \arrow[l, "loc."'] \arrow[d, "v_1"] \\
N_{f_0}[t] \arrow[rr, "loc."] & & N_{f_0 f_1}[t] & & N_{f_1}[t] \arrow[ll, "loc."']
\end{tikzcd}$$

στο οποίο υπάρχουν δύο ισομορφισμοί από το $M_{f_0f_1}$ στο $N_{f_0f_1}[t]$. Αν αυτοί οι δύο ισομορφισμοί, τυχαίνει να είναι ο ίδιος ισομορφισμός, τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι υπάρχει ένας $A[t]$-ισομορφισμός $M \to N[t]$. Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη, αρκεί να επιλέξουμε τα u_0, u_1, έτσι ώστε το $(u_0)_{f_1}$ να γίνει ίδιο με το $(u_1)_{f_0}$. Έστω $\theta = (u_1)_{f_0} \circ (u_0)_{f_1}{}^{-1}$. Το θ ανήκει στο $\mathsf{End}_{A_{f_0f_1}[t]}(N_{f_0f_1}[t])$, το οποίο μπορεί να αντικατασταθεί από το $(\mathsf{End}_A N)_{f_0f_1}[t]$. Έστω $E = \mathsf{End}_A N$, το οποίο είναι μία R-άλγεβρα και έστω $\theta \in E_{f_0f_1}[t]^*$. Τότε, μπορούμε να γράψουμε $\theta = (v_1)_{f_0}{}^{-1} \circ (v_0)_{f_1}$ (βλέπε [14, Corollary 1.3]), για κατάλληλους

$$v_i \in E_{f_i}[t]^* \subseteq \mathsf{Aut}_{A_{f_i}[t]}(N_{f_i[t]}).$$

Άρα, προκύπτει ότι $(v_0u_0)_{f_1} = (v_1u_1)_{f_0}$, συνεπώς η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί, εφόσον αντικαταστήσαμε τους u_i με v_iu_i για $i = 0, 1$. □

Υπενθυμίζουμε ότι τα πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά πρότυπα πάνω από οποιονδήποτε δακτύλιο είναι πάντα πεπερασμένα παραστάσιμα. Αν στο προηγούμενο θεώρημα αντικαταστήσουμε τα πεπερασμένα παραστάσιμα πρότυπα με πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά $A[t_1, \ldots, t_n]$-πρότυπα P, και την άλγεβρα A με R, καταλήγουμε στο ακόλουθο πόρισμα, το οποίο αποτελεί ένα κριτήριο για το πότε το P είναι επεκτάσιμο (extended).

Πόρισμα 4.3.14. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος, και $P \in \mathfrak{P}(R[t_1, \ldots, t_n])$. Τότε $P \in \mathfrak{P}^R(R[t_1, \ldots, t_n])$ αν και μόνο αν το $P_\mathfrak{m}$ είναι $R_\mathfrak{m}[t_1, \ldots, t_n]$-ελεύθερο για κάθε $\mathfrak{m} \in \mathsf{Max}R$.*

Απόδειξη. $(\Rightarrow)$ Τα ελεύθερα $R_\mathfrak{m}[t_1, \ldots, t_n]$-πρότυπα είναι επεκτάσιμα (extended) από τον δακτύλιο $R_\mathfrak{m}$.
$(\Leftarrow)$ Το $P_\mathfrak{m}$ είναι επεκτάσιμο (extended) από τον δακτύλιο $R_\mathfrak{m}$, συνεπώς πρέπει να είναι επεκτάσιμο (extended) από τον δακτύλιο

$$P_\mathfrak{m}/(t_1, \ldots, t_n)P_\mathfrak{m} \cong (P/(t_1, \ldots, t_n)P)_\mathfrak{m}.$$

Το πρότυπο $(P/(t_1, \ldots, t_n)P)_\mathfrak{m}$ είναι $R_\mathfrak{m}$-προβολικό, συνεπώς θα είναι και $R_\mathfrak{m}$-ελεύθερο. Άρα, η επέκτασή του $P_\mathfrak{m}$ πρέπει να είναι ένα $R_\mathfrak{m}[t_1, \ldots, t_n]$-ελεύθερο πρότυπο. □

Ο Quillen, χρησιμοποιώντας το Patching Theorem, Θεώρημα $(4.3.13)$ και το θεώρημα του Horrocks, Θεώρημα $(4.3.12)$ κατέληξε στο ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 4.3.15. *Έστω $\mathfrak{U}$ μία κλάση δακτυλίων τέτοια ώστε*

1. *Αν $R \in \mathfrak{U}$, τότε $R(t) \in \mathfrak{U}$, όπου με $R(t)$ συμβολίζουμε τον δακτύλιο όλων των ρητών συναρτήσεων της μορφής $f(t)/g(t)$, όπου $f(t), g(t) \in R[t]$.*

2. *Αν $R \in \mathfrak{U}$ και $\mathfrak{m}$ ένα μεγιστοτικό ιδεώδες του R, τότε τα $R_\mathfrak{m}[t]$-προβολικά πρότυπα είναι ελεύθερα.*

Τότε, για κάθε $k \geq 1$ και για κάθε δακτύλιο $R \in \mathfrak{U}$, τα πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά $R[t_1, \ldots, t_k]$-πρότυπα είναι επεκτάσιμα (extended) από τον δακτύλιο R.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο πλήθος k των μεταβλητών $t_1, \ldots, t_k$.

Υποθέτουμε ότι $k = 1$ και ότι P είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό $R[t]$-πρότυπο. Σύμφωνα με την συνθήκη (2), τα προβολικά $R_\mathfrak{m}[t]$-πρότυπα είναι ελεύθερα για κάθε μεγιστοτικό ιδεώδες $\mathfrak{m}$ του R. Οπότε το προβολικό $R_\mathfrak{m}[t]$-πρότυπο $P_\mathfrak{m} = P \otimes R_\mathfrak{m}[t]$ είναι ελεύθερο. Σύμφωνα με το Παράδειγμα $(4.3.2)(1)$, κάθε ελεύθερο $R_\mathfrak{m}[t]$-πρότυπο είναι επεκτάσιμο (extended) από τον δακτύλιο $R_\mathfrak{m}$, οπότε το $P_\mathfrak{m}$ είναι επεκτάσιμο (extended) από τον δακτύλιο $R_\mathfrak{m}$. Εφαρμόζοντας το Quillen's Patching Theorem, συμπεραίνουμε ότι το P είναι επεκτάσιμο (extended) από τον δακτύλιο R.

Υποθέτουμε τώρα ότι $k > 1$ και ότι P είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό $R[t_1, \ldots, t_k]$-πρότυπο. Θέτουμε:

$$P_0 = P/(t_1, \ldots, t_k)P$$

$$P_1 = P/(t_2, \ldots, t_k)P$$
$$S_1 = \{ \text{ το σύνολο των μονικών πολυωνύμων του δακτυλίου } R[t_1]\},$$

όπου το S_1 μπορούμε να το θεωρήσουμε ως ένα πολλαπλασιαστικά κλειστό υποσύνολο του $R[t_1, \ldots, t_k]$. Ορίζουμε:

$$\begin{aligned} P' &= {S_1}^{-1}P \\ &= P \otimes_{R[t_1,\ldots,t_k]} {S_1}^{-1}R[t_1, \ldots, t_k] \\ &= P \otimes_{R[t_1,\ldots,t_k]} R(t)[t_2, \ldots, t_k], \end{aligned}$$

όπου στην θέση του t_1 έχουμε τοποθετήσει το t. Σύμφωνα με την συνθήκη (1), ισχύει ότι $R(t) \in \mathfrak{U}$, και σύμφωνα με το επαγωγικό βήμα, το προβολικό $R(t)[t_2, \ldots, t_k]$-πρότυπο P' είναι επεκτάσιμο (extended) από τον δακτύλιο $R(t)$. Εφόσον οι πολυωνυμικοί δακτύλιοι είναι επαυξημένοι (augmented), θα ισχύει ότι:

$$P' \cong P'/(t_2, \ldots, t_k)P' \otimes_{R(t)} R(t)[t_2, \ldots, t_k].$$

Αν R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος, I ένα ιδεώδες του R και M, N είναι R-πρότυπα, τότε ισχύει ότι:

$$M \otimes N/I(M \otimes N) \cong (M/IM) \otimes_{R/I} (N/IN).$$

Αν θέσουμε όπου $I = (t_2, \ldots, t_k)$ και λαμβάνοντας υπόψιν τον ορισμό $P' = P \otimes R(t)[t_2, \ldots, t_k]$, έχουμε ότι:

$$P'/(t_2, \ldots, t_k)P' \cong P_1 \otimes_{R[t]} R(t).$$

Σύμφωνα με το αρχικό βήμα $k = 1$, ισχύει ότι:

$$P_1 \cong P_0 \otimes_R R[t].$$

Συνδυάζοντας αυτούς τους ισομορφισμούς καταλήγουμε στον ακόλουθο ισομορφισμό:

$$P' \cong P_0 \otimes_R R(t)[t_2, \ldots, t_k]. \tag{4.1}$$

Ορίζουμε $B = R[t_2, \ldots, t_k]$ και $S = \{$ το σύνολο όλων των μονικών πολυωνύμων του δακτυλίου $B[t]\}$. Να σημειώσουμε ότι $S^{-1}B[t] = B(t)$. Αν ισχύει ότι $S_1 \subset S \subset R$, τότε $S^{-1}({S_1}^{-1}A) = S^{-1}A = {S_1}^{-1}(S^{-1}A)$ για κάθε R-πρότυπο A. Συνεπώς, εφόσον $S_1 \subset S$, συμπεραίνουμε ότι:

$$P(t) = S^{-1}P = S^{-1}({S_1}^{-1}P) = S^{-1}P'.$$

Σύμφωνα με τον ορισμό του S^{-1}, προκύπτει:

$$\begin{aligned} P(t) = S^{-1}P' &= P' \otimes_{R(t)[t_2,\ldots,t_k]} S^{-1}R(t)[t_2, \ldots, t_k] \\ &= P' \otimes_{R(t)[t_2,\ldots,t_k]} B(t) \\ &= P_0 \otimes_R B(t), \quad \text{σχέση } (4.1), \\ &= (P_0 \otimes_R B) \otimes_B B(t). \end{aligned}$$

Για δύο R-πρότυπα A, B, υπάρχει πάντα ένας ισομορφισμός

$$S^{-1}(B \otimes_R A) \cong S^{-1}B \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}A \tag{4.2}$$

(βλέπε [27, Lemma 3.77]). Έστω $\mathfrak{m}$ ένα μεγιστοτικό ιδεώδες του δακτυλίου B. Ορίζουμε $P_\mathfrak{m}(t) = P(t) \otimes_B B_\mathfrak{m}$, και εφαρμόζοντας την σχέση (4.2) προκύπτει ότι

$$P_\mathfrak{m}(t) = (P_0 \otimes_R B)_\mathfrak{m} \otimes_{B_\mathfrak{m}} B_\mathfrak{m}(t).$$

Το πρότυπο $(P_0 \otimes_R B)_\mathfrak{m}$ είναι $B_\mathfrak{m}$-προβολικό, διότι το P_0 είναι R-προβολικό. Επίσης, το πρότυπο $(P_0 \otimes_R B)_\mathfrak{m}$ είναι $B_\mathfrak{m}$-ελεύθερο, γιατί ο δακτύλιος $B_\mathfrak{m}$ είναι τοπικός. Επιπλέον, το πρότυπο $P_\mathfrak{m}(t)$ είναι ελεύθερο. Σύμφωνα με το θεώρημα του Horrocks, το πρότυπο $P_\mathfrak{m}$ είναι ελεύθερο και σύμφωνα με το Παράδειγμα $(4.3.2)(1)$ το $P_\mathfrak{m}$ είναι επεκτάσιμο (extended) από τον δακτύλιο $B_\mathfrak{m}$ για κάθε $\mathfrak{m}$. Εφαρμόζοντας το Quillen's Patching Theorem, συμπεραίνουμε ότι το πρότυπο P είναι επεκτάσιμο (extended) από τον δακτύλιο $B = R[t_2, \ldots, t_k]$. Σύμφωνα με το επαγωγικό βήμα, καταλήγουμε στο ότι το P είναι επεκτάσιμο (extended) από τον δακτύλιο R. $\square$

Θεώρημα 4.3.16. *(**Θεώρημα των Quillen-Suslin**) Αν R είναι ένα σώμα, τότε κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό $R[t_1, \dots, t_k]$-πρότυπο είναι ελεύθερο.*

Απόδειξη. Έστω $\mathfrak{U}$ η κλάση όλων των σωμάτων. Η κλάση $\mathfrak{U}$ όλων των σωμάτων ικανοποιεί τις συνθήκες του προηγούμενου θεωρήματος. Αν $R \in \mathfrak{U}$ είναι ένα σώμα, τότε το $R(t)$ είναι το σώμα κλασμάτων του $R[t]$, το οποίο αποτελείται από όλες τις ρητές συναρτήσεις της μορφής $f(t)/g(t)$, όπου $f(t), g(t) \in R[t]$. Άρα, $R(t) = \mathsf{Frac}(R[t]) \in \mathfrak{U}$. Για να ελέγξουμε αν η κλάση $\mathfrak{U}$ όλων των σωμάτων ικανοποιεί την συνθήκη (2) του προηγούμενου θεωρήματος, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το μοναδικό μεγιστοτικό ιδεώδες $\mathfrak{m}$ ενός σώματος R είναι το μηδενικό ιδεώδες $\mathfrak{m} = \{0\}$. Τότε, θα ισχύει ότι $R_{\mathfrak{m}} = R$ και $R_{\mathfrak{m}}[t] = R[t]$ είναι μία περιοχή κύριων ιδεωδών, συνεπώς τα πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά $R[t]$-πρότυπα είναι ελεύθερα. Άρα, ικανοποιούνται και οι δύο συνθήκες του προηγούμενου θεωρήματος, οπότε για κάθε $k \geq 1$ και για κάθε δακτύλιο $R \in \mathfrak{U}$, τα πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά $R[t_1, \dots, t_k]$-πρότυπα είναι επεκτάσιμα (extended) από τον δακτύλιο R. Εφόσον το R είναι ένα σώμα, κάθε R-πρότυπο είναι ένας διανυσματικός χώρος, οπότε κάθε R-πρότυπο είναι ελεύθερο, συνεπώς κάθε πρότυπο το οποίο είναι επεκτάσιμο (extended) από τον δακτύλιο R είναι ελεύθερο. □

Πόρισμα 4.3.17. *Αν k είναι ένα σώμα και $R = k[t_1, \dots, t_n]$ ο πολυωνυμικός δακτύλιος n μεταβλητών, τότε κάθε R-πρότυπο A επιδέχεται μία ελεύθερη επίλυση*

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0 .$$

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα κάνοντας χρήση του θεωρήματος συζυγιών του Hilbert και του θεωρήματος των Quillen-Suslin. □

Μια μικρή επέκταση των μεθόδων που ανέπτυξε ο Quillen στην απόδειξη της εικασίας του Serre δείχνει το εξής γενικότερο αποτέλεσμα το οποίο δίνει καταφατική απάντηση στην εικασία του Serre για δακτυλίους πολυωνύμων υπεράνω περιοχών κυρίων ιδεωδών:

Θεώρημα 4.3.18. *(**Θεώρημα των Quillen-Suslin**) [24] Αν R είναι μια μεταθετική περιοχή κυρίων ιδεωδών, τότε κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό $R[t_1, \dots, t_k]$-πρότυπο είναι ελεύθερο.*

Για αποτελέσματα σχετικά με γενικεύσεις της εικασίας του Serre σε γενικότερους, μη-πολυωνυμικούς, δακτυλίους ή δακτυλίους της μορφής $R[t_1, \dots, t_k]$, όπου ο R δεν είναι σώμα ή περιοχή κυρίων ιδεωδών, παραπέμπουμε στο Παράρτημα Γ.

Παρατήρηση 4.3.19. Σημειώνουμε ότι τα τελευταία χρόνια έχουν δοθεί και *κατασκευαστικές* αποδείξεις του Θεωρήματος των Quillen-Suslin. Δηλαδή έχουν αναπτυχθεί αλγόριθμοι οι οποίοι αποφασίζουν αποτελεσματικά πότε ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό πρότυπο υπεράνω του πολυωνυμικού δακτυλίου $R = k[t_1, \dots, t_n]$ είναι ελεύθερο. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο βιβλίο του Lam, στην εργασία [17] και στις παραπομπές της.

Παράρτημα Α΄

Ευσταθώς Ελεύθερα μη Ελεύθερα Πρότυπα

Στο παρόν Παράρτημα παρουσιάζουμε ένα γεωμετρικό παράδειγμα ενός ευσταθώς ελεύθερου προτύπου το οποίο δεν είναι ελεύθερο. Η απόδειξη χρησιμοποιεί ένα γνωστό αποτέλεσμα της Αλγεβρικής Τοπολογίας περί μη-ύπαρξης συνεχούς μη-μηδενιζόμενου εφαπτόμενου διανυσματικού πεδίου ορισμένου επί της μοναδιαίας σφαίρας S^2 στον $\mathbb{R}^3$.

Παράδειγμα Α΄.1. Έστω R ο δακτύλιος συντεταγμένων της μοναδιαίας σφαίρας S^2 του $\mathbb{R}^3$:

$$R = \mathbb{R}[x,y,z]/(x^2+y^2+z^2-1)$$

Έστω T το πρότυπο $T = \{(f,g,h) \in R^3 : xf + yg + zh = 0 \text{ στον } R\}$. Τότε ισχύει ότι $R \oplus T \cong R^3$, δηλαδή το T είναι ένα ευσταθώς ελεύθερο πρότυπο, αλλά το T δεν είναι ελεύθερο: $T \ncong R^2$.

Απόδειξη. Εφόσον ο R είναι ένας δακτύλιος, μπορούμε να θεωρήσουμε στον R^3 ένα εσωτερικό γινόμενο $R^3 \times R^3 \to R$. Για παράδειγμα, $(x,y,z)\cdot(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = 1$. Για κάθε $\mathbf{v} \in R^3$, έστω $r = \mathbf{v}\cdot(x,y,z) \in R$. Τότε

$$(\mathbf{v} - r(x,y,z))\cdot(x,y,z) = \mathbf{v}\cdot(x,y,z) - r(x,y,z)\cdot(x,y,z) = r - r = 0,$$

οπότε $\mathbf{v} - r(x,y,z) \in T$. Άρα, $R^3 = R(x,y,z) + T$. Το άθροισμα αυτό είναι ευθύ, διότι $R(x,y,z) \cap T = (0,0,0)$: αν $r(x,y,z) \in T$ τότε πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά το $r(x,y,z)$ με το (x,y,z) προκύπτει ότι $r = 0$. Οπότε, έχουμε αποδείξει ότι

$$R^3 = R(x,y,z) \oplus T. \tag{Α΄.1}$$

Ο δακτύλιος R είναι ισόμορφος με τον δακτύλιο $R(x,y,z)$:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : R & \xrightarrow{\cong} & R(x,y,z) \\ r & \mapsto & r(x,y,z) \end{array}$$

Οπότε, $R \cong R(x,y,z)$, άρα από την σχέση (Α΄.1) καταλήγουμε στο εξής: $R^3 \cong R \oplus T$. Συνεπώς, το T είναι ένα ευσταθώς ελεύθερο πρότυπο.

Μένει να αποδείξουμε ότι $T \ncong R^2$. Για να το αποδείξουμε θα χρειαστούμε ένα θεώρημα της τοπολογίας για διανυσματικά πεδία της σφαίρας, το θεώρημα hairy ball (βλέπε [19, Theorem 10.4]. Θα αποδείξουμε το ζητούμενο με την εις άτοπον απαγωγή. Υποθέτουμε ότι $T \cong R^2$, οπότε το T είναι ένα ελεύθερο R-πρότυπο με μία R-βάση που αποτελείται από 2 στοιχεία, έστω τα (f,g,h) και (F,G,H). Σύμφωνα με την σχέση (Α΄.1), τα διανύσματα

$(x, y, z), (f, g, h), (F, G, H)$ του R^3 αποτελούν μία R-βάση, οπότε ο πίνακας αλλαγής βάσης από την κλασική βάση του R^3 στην βάση $(x, y, z), (f, g, h), (F, G, H)$ είναι αντιστρέψιμος:

$$\begin{pmatrix} x & f & F \\ y & g & G \\ z & h & H \end{pmatrix} \in M_3(R).$$

Επιπλέον η ορίζουσα αυτού του πίνακα είναι ένα αντιστρέψιμο στοιχείο του δακτυλίου R:

$$\det \begin{pmatrix} x & f & F \\ y & g & G \\ z & h & H \end{pmatrix} \in R^{\times}. \tag{Α'.2}$$

Μπορούμε να αντιστοιχίσουμε στοιχεία του δακτυλίου R σε στοιχεία (x_0, y_0, z_0) της μοναδιαίας σφαίρας S^2, διότι τα πολυώνυμα του $\mathbf{R}[x, y, z]$ τα οποία είναι ισοϋπόλοιπα modulo $x^2+y^2+z^2-1$ παίρνουν την ίδια τιμή σε κάθε σημείο $(x_0, y_0, z_0) \in S^2$, εφόσον $x_0^2+y_0^2+z_0^2-1 = 0$. Ένα αντιστρέψιμο στοιχείο του δακτυλίου R παίρνει μη μηδενικές τιμές παντού στην σφαίρα, διότι αν ισχύει $a(x, y, z)b(x, y, z) = 1$ στον R, τότε $a(x_0, y_0, z_0)b(x_0, y_0, z_0) = 1$ στον $\mathbf{R}$, όπου $(x_0, y_0, z_0) \in S^2$. Οπότε, σε κάθε σημείο $v \in S^2$ η ορίζουσα (Α'.2) παίρνει μία μη μηδενική τιμή, συνεπώς $(f(v), g(v), h(v)) \in R^3 - \{0\}$. Άρα, το $v \mapsto (f(v), g(v), h(v))$ είναι ένα εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο της σφαίρας S^2 το οποίο δεν μηδενίζεται πουθενά με συνεχείς συνιστώσες (οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι συνεχείς). Λαμβάνοντας υπόψιν το θεώρημα hairy ball της τοπολογίας το οποίο λέει ότι κάθε συνεχές διανυσματικό πεδίο της σφαίρας μηδενίζεται τουλάχιστον μία φορά, καταλήγουμε σε άτοπο. Καταλήξαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι $T \cong R^2$, άρα $T \ncong R^2$. □

Γενικότερα ισχύει το ακόλουθο Θεώρημα το οποίο οφείλεται στον Swan, βλέπε [36, Theorem 3], και του οποίου η απόδειξη βασίζεται σε βαθιά τοπολογικά αποτελέσματα: η μοναδιαία σφαίρα S^n του $\mathbb{R}^{n+1}$ είναι παραλληλίσιμη αν και μόνον αν $n = 0, 1, 3, 7$, σε συνδυασμό με το Θεώρημα των Serre-Swan το οποίο δίνει μια 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ διανυσματικών δεσμών επί ενός συμπαγούς τοπολογικού χώρου X και πεπερασμένα παραγόμενων προβολικών προτύπων υπεράνω το δακτυλίου των συνεχών απεικονίσεων $X \longrightarrow \mathbb{R}$, βλέπε Παράρτημα Β'.

Θεώρημα Α'.2. *(Swan) [36, Theorem 3] Εστω Λ ο δακτύλιος συντεταγμένων της μοναδιαίας σφαίρας του $\mathbb{R}^{n+1}$:*

$$\Lambda = \mathbb{R}[x_0, x_1, \cdots, x_n]/(x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1), \quad n \geq 1$$

Έστω P το Λ-πρότυπο με γεννήτορες $s_0, s_1, \cdots, s_n$ και σχέσεις $\Sigma_{i=0}^n x_i s_i = 0$. Τότε το Λ-πρότυπο $\Lambda \oplus P$, είναι ευσταθώς ελεύθερο αλλά όχι ελεύθερο για $n \neq 1, 3, 7$.

Παράρτημα Β′

Διανυσματικές Δέσμες και Προβολικά Πρότυπα

Στο παρόν Παράρτημα παρουσιάζουμε συνοπτικά τις σχέσεις μεταξύ διανυσματικών δεσμών υπεράνω ενός τοπολογικού χώρου ή ενός αλγεβρικού πολυπτύγματος X, και προβολικών προτύπων υπεράνω κατάλληλων δακτυλίων οι οποίοι προκύπτουν με φυσιολογικό τρόπο από τον χώρο X. Ιστορικά η εν λόγω σχέση αποτέλεσε το έναυσμα για την διατύπωση της εικασίας του Serre και την ανάπτυξη της Αλγεβρικής K-θεωρίας, και η επίλυση της εικασίας του Serre από τους Quillen-Suslin είχε ενδιαφέρουσες γεωμετρικές συνέπειες.

Β′.1 (Τοπολογικές) Διανυσματικές Δέσμες

Έστω ότι k είναι είτε το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ή το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος.

Μια *k-διανυσματική δέσμη* (vector bundle) υπεράνω του τοπολογικού χώρου X είναι ένας τοπολογικός χώρος E μαζί με μια συνεχή απεικόνιση $\pi\colon E \longrightarrow X$ η οποία είναι επί, έτσι ώστε: (α) κάθε *νήμα* (fiber) $E_x = \pi^{-1}(x)$ να είναι ένας k-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, και (β) για κάθε $x \in X$, υπάρχει μια ανοιχτή περιοχή U του x και ένας ομοιομορφισμός $f\colon \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times k^n$, έτσι ώστε για κάθε $y \in U$, ο f να επάγει έναν ισομορφισμό διανυσματικών χώρων από το νήμα E_y επί του y στο $\{y\} \times k^n$.

Μια k-διανυσματική δέσμη (E, π) υπεράνω του X καλείται *διανυσματική δέσμη βαθμίδας* n αν η απεικόνιση $r\colon X \longrightarrow \mathbb{N},\ r(x) = \dim_k E_x$ είναι σταθερή και ίση με n.

Σημειώνουμε ότι από την συνθήκη (β) του ορισμού προκύπτει ότι η παραπάνω απεικόνιση είναι τοπικά σταθερή ή ισοδύναμα είναι συνεχής όταν το $\mathbb{N}$ είναι εφοδιασμένο με την διακριτή τοπολογία. Επομένως αν ο τοπολογικός X είναι συνεκτικός, τότε η απεικόνιση είναι σταθερή.

Παράδειγμα Β′.1. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε την *τετριμμένη k-διανυσματική δέσμη βαθμίδας* n $X \times k^n$ υπεράνω του X, όπου $\pi\colon X \times k^n \longrightarrow X$ είναι η προβολή.

Αν $\pi\colon E \longrightarrow X$ και $\pi'\colon E' \longrightarrow X$ είναι δύο k-διανυσματικές δέσμες υπεράνω του X, τότε ένας *μορφισμός* μεταξύ αυτών είναι μια συνεχής απεικόνιση $f\colon E \longrightarrow E'$ έτσι ώστε: $\pi = \pi' \circ f$ (ισοδύναμα η f στέλνει το νήμα E_x στο νήμα E'_x, $\forall x \in X$, και επάγει μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των νημάτων).

Οι k-διανυσματικές δέσμες υπεράνω του X μαζί με τους μορφισμούς τους σχηματίζουν την προσθετική κατηγορία $\mathsf{Vec}(X)$ των k-διανυσματικών δεσμών υπεράνω του X. Μια k-διανυσματική δέσμη υπεράνω του X καλείται *τετριμμένη* αν είναι ισόμορφη, στην κατηγορία $\mathsf{Vec}(X)$, με την τετριμμένη k-διανυσματική δέσμη του παραδείγματος $B'1$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

Έστω $\pi\colon E \longrightarrow X$ μια k-διανυσματική δέσμη υπεράνω του X. Μια *(ολική) τομή* (global section) της (E,π) είναι συνεχής απεικόνιση $s\colon X \longrightarrow X$ έτσι ώστε: $\pi \circ s = \mathsf{Id}_X$. Το σύνολο των τομών της (E,π) συμβολίζεται με $\Gamma(E)$. Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι το σύνολο $\Gamma(E)$ είναι ένας k-διανυσματικός χώρος. Ισχύει κάτι περισσότερο:

Έστω $C(X)$ ο δακτύλιος των συνεχών απεικονίσεων $f\colon X \longrightarrow k$. Αν $\pi\colon E \longrightarrow X$ είναι μια k-διανυσματική δέσμη υπεράνω του X, τότε ορίζουμε μια δράση

$$\star\colon\ C(X)\times\Gamma(E)\ \longrightarrow\ \Gamma(E),\ \ f\star s\colon X\longrightarrow E,\ \ (f\star s)(x) := f(x)s(x)$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι με την παραπάνω δράση, το σύνολο $\Gamma(E)$ των τομών της (E,π) αποκτά δομή ενός $C(X)$-προτύπου. Επιπρόσθετα η παραπάνω διαδικασία $E \longrightarrow \Gamma(X)$ είναι φυσική και στέλνει μορφισμούς μεταξύ k-διανυσματικών δεσμών σε ομομορφισμούς $C(X)$-προτύπων, με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να έχουμε έναν (προσθετικό) συναρτητή:

$$\Gamma\ :\ \mathsf{Vec}(X)\ \longrightarrow\ \mathsf{Mod}\text{-}C(X),\ \ (E,\pi)\ \longmapsto\ \Gamma(E)$$

Το ακόλουθο σημαντικό θεώρημα του Swan, το οποίο μας δίνει ενδιαφέρουσες διασυνδέσεις μεταξύ Τοπολογίας και Άλγεβρας, πιστοποιεί ότι ο συναρτητής Γ των ολικών τομών επάγει μια ισοδυναμία μεταξύ των κατηγοριών των k-διανυσματικών δεσμών υπεράνω του X και των πεπερασμένα παραγόμενων προτύπων επί του δακτυλίου των συνεχών συναρτήσεων επί του X, όταν ο X είναι συμαπαγής χώρος του Hausdorff.

Θεώρημα Β΄.2. *(Swan) [36] Έστω k-διανυσματικών δεσμών X ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος του Hausdorff. Τότε ο συναρτητής Γ των ολικών τομών επάγει μια ισοδυναμία*

$$\Gamma\ :\ \mathsf{Vec}(X)\ \xrightarrow{\ \approx\ }\ \mathsf{proj}\, C(X),$$

μεταξύ της κατηγορίας των k-διανυσματικών δεσμών $\mathsf{Vec}(X)$ *υπεράνω του X και της κατηγορίας* $\mathsf{proj}\, C(X)$ *των πεπερασμένα παραγόμενων προβολικών προτύπων επί του δακτυλίου $C(X)$ των συνεχών συναρτήσεων επί του X.*

Η παραπάνω ισοδυναμία επάγει μια ισοδυναμία μεταξύ των τετριμμένων k-διανυσματικών δεσμών υπεράνω του X και της κατηγορίας $\mathsf{free}\, C(X)$ *των πεπερασμένα παραγόμενων ελεύθερων προτύπων επί του δακτυλίου $C(X)$.*

Από το Θεώρημα του Swan, έπεται ότι τα πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά $C(X)$-πρότυπα, όπου X είναι ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος Hausdorff, είναι ελεύθερα αν και μόνον αν ο X δεν έχει μη-τετριμμένες k-διανυσματικές δέσμες. Για παράδειγμα αν ο X είναι συσταλτός (contractible) (δηλαδή είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με ένα σημείο), τότε είναι γνωστό και εύκολο να δειχθεί ότι δεν υπάρχουν μη-τετριμμένες διανυσματικές δέσμες υπεράνω του X.

Ένα τυπικό στοιχειώδες παράδειγμα της χρήσης του Θεωρήματος του Swan είναι το ακόλουθο παράδειγμα μεταθετικού δακτυλίου R ο οποίος δεν είναι δακτύλιος της Noether και στον οποίο κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό R-πρότυπο είναι ελεύθερο, αλλά ο R περιέχει απείρως παραγόμενα προβολικά πρότυπα τα οποία δεν είναι ελεύθερα.

Παράδειγμα Β΄.3. (Kaplansky) Έστω $X = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$. Τότε ο X είναι ένας συμπαγής χώρος του Hausdorff ο οποίος είναι συσταλτός. Άρα κάθε διανυσματική δέσμη υπεράνω του $X = [0,1]$ είναι τετριμμένη. Από το Θεώρημα του Swan, έπεται ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό $C([0,1])$-πρότυπο είναι ελεύθερο.

Θεωρούμε το σύνολο

$$I = \{f \in C([0,1]) \mid \exists\, \epsilon(f) > 0 :\ f|_{[0,\epsilon(f)]} = 0\}$$

Τότε είναι εύκολο να δειχθεί ότι το I είναι ένα ιδεώδες του $C([0,1])$ το οποίο είναι προβολικό ως $C([0,1])$-πρότυπο. Όμως το I δεν είναι ελεύθερο, διότι κάθε συνάρτηση $f \in I$ μηδενίζεται από κάθε συνάρτηση της οποίας το στήριγμα support περιέχεται στο διάστημα $[0, \epsilon(f)]$. Συμπεραίνουμε ότι το I δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Ιδιαίτερα αυτό δείχνει ότι ο δακτύλιος δεν είναι δακτύλιος της Noether, καθώς περιέχει απείρως παραγόμενα ιδεώδη.

Περαιτέρω ανάλυση δείχνει ότι το I, αν και προβολικό πρότυπο δεν είναι ευθύ άθροισμα πεπερασμένα παραγόμενων υποπροτύπων. Σημειώνουμε ότι ο Kaplansky έχει δείξει ότι υπεράνω τυχόντος δακτύλιου, κάθε προβολικό πρότυπο είναι ευθύ άθροισμα απείρως παραγόμενων υποπροτύπων.

Παράδειγμα B′.4. Είναι γνωστό ότι η εφαπτόμενη δέσμη $T(S^{2k})$ κάθε μοναδιαίας σφαίρας άρτιας διάστασης είναι μη-τετριμμένη. Επομένως από το Θεώρημα του Swan, έπεται ότι το $C(T(S^{2k}))$-πρότυπο $\Gamma(T(S^{2k}))$ των ολικών τομών της είναι πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό πρότυπο το οποίο δεν είναι ελεύθερο.

B′.2 (Αλγεβρικές) Διανυσματικές Δέσμες

Έστω X ένα αφφινικό πολύπτυγμα (affine variety) υπεράνω ενός σώματος k. Τότε το X είναι τοπολογικός χώρος εφοδιασμένος με την τοπολογία Zariski. Η βασική ιδέα μια (αλγεβρικής) k-διανυσματικής δέσμης υπεράνω του X είναι ότι στον ορισμό της τοπολογικής διανυσματικής δέσμης οι εμπλεκόμενες συναρτήσεις απαιτείται να είναι πολυωνυμικές. Γενικότερα αν $(X, \mathcal{O}_X)$ είναι ένας *δακτυλιοειδής χώρος* (ringed space), τότε μια διανυσματική δέσμη επί του X είναι ένα τοπικά ελεύθερο $\mathcal{O}_X$-πρότυπο το οποίο σε κάθε σημείο έχει πεπερασμένη βαθμίδα. Οι έννοιες που ορίστηκαν για τοπολογικές διανυσματικές δέσμες έχουν ανάλογες εκδοχές για αλγεβρικές τοπολογικές δέσμες, παραπέμπουμε στο βιβλίο του Weibel [38, Chapter I] για περισσότερες λεπτομέρειες.

Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος της Noether και θεωρούμε το αφφινικό πολύπτυγμα $\mathsf{Spec}(R)$, εφοδιασμένο με την τοπολογία Zariski. Τότε το X είναι ένας ημι-συμπαγής (quasi-compact) τοπολογικός χώρος, δηλαδή συμπαγής αλλά όχι απαραίτητα χώρος Hausdorff. Συμβολίζουμε με $\mathsf{Vec}_{\mathsf{Alg}}(X)$ την κατηγορία των αλγεβρικών διανυσματικών δεσμών υπεράνω του X. Το ανάλογο του Θεωρήματος του Swan, στην απλούστερη εκδοχή του, σε αλγεβρικο-γεωμετρικό πλαίσιο είναι το ακόλουθο.

Θεώρημα B′.5. *[37] Έστω $X = \mathsf{Spec}(R)$ ένα αφφινικό πολύπτυγμα, όπου R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος της Noether. Τότε υπάρχει μια ισοδυναμία κατηγοριών*

$$\mathsf{Vec}_{\mathsf{Alg}}(X) \xrightarrow{\approx} \mathsf{proj}\, R$$

μεταξύ των αλγεβρικών διανυσματικών δεσμών υπεράνω του X και των πεπερασμένα παραγόμενων προβολικών προτύπων υπεράνω του R.

Η παραπάνω ισοδυναμία επάγει μια ισοδυναμία μεταξύ των τετριμμένων αλγεβρικών διανυσματικών δεσμών υπεράνω του X και πεπερασμένα παραγόμενων ελεύθερων προτύπων υπεράνω του R.

Από το παραπάνω Θεώρημα έπεται ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό R-πρότυπο είναι ελεύθερο αν και μόνον αν κάθε αλγεβρική διανυσματική δέσμη υπεράνω του αφφινικού πολυπτύγματος $\mathsf{Spec}(R)$ είναι τετριμμένη.

Η εικασία του Serre αφορά το αφφινικό πολύπτυγμα $\mathsf{Spec}(R)$, όπου $R = k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$, και k είναι ένα σώμα. Υποθέτουμε ότι το k είναι αλγεβρικά κλειστό, π.χ. $k = \mathbb{C}$. Τότε $\mathsf{Spec}(R) = \mathbb{A}^n(k)$ ο αφφινικός χώρος. Επομένως με βάση το Θεώρημα $B'.5$, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα το οποίο είναι η αλγεβρικο-γεωμετρική εκδοχή του Θεωρήματος των Quillen-Suslin και έπεται από το Θεώρημα $(4.3.15)$.

Θεώρημα B′.6. *(Quillen-Suslin) Αν k είναι ένα σώμα, τότε κάθε αλγεβρική διανυσματική δέσμη υπεράνω του αφφινικού χώρου $\mathbb{A}^n(k)$ επί του k είναι τετριμμένη.*

Το πρόβλημα του πότε κάθε αλγεβρική διανυσματική δέσμη υπεράνω του αφφινικού χώρου $\mathbb{A}^n(k)$ είναι τετριμμένη, αποτέλεσε το έναυσμα για την διατύπωση της εικασίας του Serre και την επίλυσή της από τους Quillen-Suslin.

Παράρτημα Γ′

Η Εικασία του Serre σε μη-Πολυωνυμικούς Δακτυλίους

Στο παρόν Παράρτημα παρουσιάζουμε συνοπτικά κάποια αποτελέσματα που αφορούν τη δομή των προβολικών προτύπων υπεράνω μη-πολυωνυμικών, και κατά κύριο λόγο μη-μεταθετικών, δακτυλίων.

Το σημείο εκκίνησης για αποτελέσματα του τύπου

$$(\dagger) \qquad P \quad \text{προβολικό πρότυπο} \quad \Longrightarrow \quad P \quad \text{ελεύθερο}$$

αποτελεί το κλασσικό Θεώρημα του Kaplansky: *αν R είναι ένας τοπικός δακτύλιος, τότε κάθε προβολικό πρότυπο, πεπερασμένα ή απείρως παραγόμενο, είναι ελεύθερο.*

Ο Bass στις αρχές της δεκαετίας του 60 απέδειξε ένα από τα πρώτα μη-τετριμμένα αποτελέσματα αυτού του είδους το οποίο έδινε θετική απάντηση στην περίπτωση ομάδων-δακτυλίων ελεύθερων ομάδων υπεράνω περιοχών κυρίων ιδεωδών.

Θεώρημα Γ′.1. *(Bass) [5] Έστω R μια περιοχή κυρίων ιδεωδών και G μια ελεύθερη ομάδα (ή ένα ελεύθερο μονοειδές). Αν RG είναι η ομάδα-δακτύλιος, τότε κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό (αριστερό ή δεξιό) RG-πρότυπο είναι ελεύθερο.*

Από την άλλη πλευρά η μη-μεταθετική εκδοχή ενός δακτυλίου πολυωνύμων $k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ υπεράνω ενός σώματος k είναι η ελεύθερη άλγεβρα στις n (μη-μεταθετικές) μεταβλητές $k\langle x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle$. Στην περίπτωση αυτή η ελεύθερη άλγεβρα είναι αριστερά και δεξιά κληρονομική (hereditary) και ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα το οποίο δείχνει ότι η συνεπαγωγή $(\dagger)$ αληθεύει στην περίπτωση των μη-μεταθετικών πολυωνυμικών δακτυλίων.

Πόρισμα Γ′.1. *Κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό (αριστερό ή δεξιό) πρότυπο υπεράνω της ελεύθερης k-άλγεβρας $k\langle x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle$, όπου k είναι ένα σώμα, είναι ελεύθερο.*

Στην περίπτωση κατά την οποία ο δακτύλιος R είναι μεταθετικός δακτύλιος της Noether ο Bass απέδειξε την ακόλουθη ενδιαφέρουσα διχοτομία:

Θεώρημα Γ′.2. *(Hinohara, Bass) Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος. Υποθέτουμε ότι το φάσμα $\mathsf{Spec}(R)$ των πρώτων ιδεωδών του R είναι συνεκτικό, δηλαδή ο R δεν έχει μη-τετριμένα ταυτοδύναμα στοιχεία.*

1. *(Hinohara) [11] Αν ο R είναι ημιτοπικός (semilocal), δηλαδή ο R έχει πεπερασμένο πλήθος μεγιστοτικών ιδεωδών, τότε κάθε προβολικό R-πρότυπο είναι ελεύθερο.*

2. *(Bass) [2] Αν R είναι δακτύλιος της Noether, τότε ένα προβολικό R-πρότυπο είναι είτε ελεύθερο ή πεπερασμένα παραγόμενο.*

Στο παραπάνω πλαίσιο ένα σημαντικό αποτέλεσμα είναι το ακόλουθο Θεώρημα το οποίο οφείλεται στον Beck και το οποίο γενικεύει παλαιότερα αποτελέσματα του Bass και του Kaplansky:

Θεώρημα Γ'.3. *(Beck) [6] 'Εστω R ένας δακτύλιος με ριζικό του Jacobson $N = \mathsf{Jac}(R)$, και έστω P ένα προβολικό R-πρότυπο. Αν το R/N-πρότυπο P/NP είναι ελεύθερο, τότε το P είναι ελεύθερο.*

Γενικά, όπως προκύπτει από τα ακόλουθα αποτελέσματα του Swan, βλέπε [36], η συμπεριφορά των πεπερασμένα παραγόμενων προβολικών προτύπων είναι αρκετά πολύπλοκη, ακόμα και υπεράνω μεταθετικών δακτυλίων πεπερασμένης διάστασης Krull:

Θεώρημα Γ'.4. *(Swan) [35] 'Εστω $m \geq 2$ ένας ακέραιος. Τότε υπάρχει ένας μεταθετικός δακτύλιος R με διάσταση Krull: $\mathsf{Dim}(R) \leq 6m$ και ο οποίος είναι μια $\mathbb{C}$-άλγεβρα, έτσι ώστε:*

1. *'Ολα τα πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R-πρότυπα βαθμίδας $< m$ είναι ελεύθερα.*
2. *Υπάρχει ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό πρότυπο βαθμίδας m το οποίο δεν είναι ελεύθερο.*
3. *'Ολα τα πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά πρότυπα είναι ευσταθώς ελεύθερα.*

Αν $m = 2\mathsf{mod}4$, τότε υπάρχει ένας μεταθετικός δακτύλιος R με διάσταση Krull: $\mathsf{Dim}(R) = m$ στον οποίο:

1. *'Ολα τα πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R-πρότυπα βαθμίδας $\neq m$ είναι ελεύθερα.*
2. *Υπάρχει ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό πρότυπο βαθμίδας $= m$ το οποίο δεν είναι ελεύθερο.*

Παράρτημα Δ΄

Νεότερες Εξελίξεις και Ανοιχτά Προβλήματα

Στο παρόν Παράρτημα παρουσιάζουμε συνοπτικά νεότερες εξελίξεις, μετά το 1977 και το Θεώρημα των Quillen-Suslin, που αφορούν τη δομή των προβολικών προτύπων υπεράνω πολυωνυμικών δακτυλίων $R[x_1, x_2, \cdots, x_n]$, όπου R δεν είναι απαραίτητα ένα σώμα, καθώς και άλλων μη-πολυωνυμικών δακτυλίων.

Για μια ενδελεχή παρουσίαση των εξελίξεων, μετά το 1977, σχετικά με τα ακόλουθα συσχετιζόμενα προβλήματα τα οποία σχετίζονται με την εικασία του Serre και τα οποία προέκυψαν από τις αποδεικτικές μεθόδους των Quillen και Suslin στις αποδείξεις τους της εικασίας του Serre, παραπέμπουμε στο βιβλίο του Lam, [13]:

1. Για ποιούς, όχι απαραίτητα μεταθετικούς, δακτυλίους R ισχύει ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό R-πρότυπο είναι ελεύθερο;

2. Για ποιούς, όχι απαραίτητα μεταθετικούς, δακτυλίους R ισχύει ότι κάθε ευσταθώς ελεύθερο R-πρότυπο είναι ελεύθερο;

3. Για ποιούς, όχι απαραίτητα μεταθετικούς, δακτυλίους R ισχύει ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό $R[x_1, x_2, \cdots, x_n]$-πρότυπο, $n \geq 1$ είναι επεκτάσιμο από τον δακτύλιο R;

Σημειώνουμε ότι ο πολυωνυμικός δακτύλιος $R[x_1, x_2, \cdots, x_n]$, όπου R είναι ένα σώμα ή γενικότερα μία περιοχή κυρίων ιδεωδών, είναι ειδική περίπτωση μιας μονοειδούς άλγεβρας (monoid algebra). Ο Anderson, βλέπε [1], έχοντας ως βάση το Θεώρημα των Quillen-Suslin έκανε την ακόλουθη εικασία, ως γενίκευση της εικασίας του Serre: "*Έστω S ένας αφφινικός κανονικός υποδακτύλιος του δακτυλίου πολυωνύμων $k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ ο οποίος παράγεται από ένα σύνολο μονωνύμων. Τότε κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό S-πρότυπο είναι ελεύθερο*".

Το 1989 ο Gubeladze έδωσε θετική απάντηση στην εικασία του Anderson αποδεικνύοντας το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος των Quillen-Suslin.

Θεώρημα Δ΄.1. *(Gubeladze) [10] Έστω R μια περιοχή κυρίων ιδεωδών και M ένα μονοειδές. Τότε κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό πρότυπο υπεράνω της άλγεβρας-μονοειδούς $R[M]$ είναι ελεύθερο αν και μόνον αν η ομάδα Grothendieck της άλγεβρας-μονοειδούς $R[M]$ είναι ισόμορφη με το $\mathbb{Z}$ αν και μόνον αν το μονοειδές είναι ημι-κανονικό (seminormal).*

Ένα μονοειδές M καλείται *ημι-κανονικό* αν είναι μεταθετικό, ικανοποιεί την ιδιότητα της διαγραφής, είναι ελεύθερης στρέψης και τέλος αν $2x \in M$ και $3x \in M$ έπεται ότι $x \in M$.

Ίσως το πιο σημαντικό πρόβλημα το οποίο είναι ανοιχτό μέχρι σήμερα είναι η ακόλουθη εικασία των Bass-Quillen. Πρώτα χρειαζόμαστε έναν ορισμό. Ένας μεταθετικός δακτύλιος

R καλείται *regular*, αν ο R είναι δακτύλιος της Noether και έχει πεπερασμένη ομολογική διάσταση.

Εικασία των Bass-Quillen: Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος ο οποίος είναι regular και έχει πεπερασμένη διάσταση Krull: $\mathsf{Dim}(R) < \infty$. Τότε για κάθε $n \geq 1$, κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό $R[x_1, x_2, \cdots, x_n]$-πρότυπο είναι επεκτάσιμο από τον R.

Η παραπάνω εικασία μπορεί να διατυπωθεί και για συγκεκριμένη τιμή d της διάστασης Krull (τοπική εκδοχή). Παραπέμπουμε στο Κεφάλαιο V του βιβλίου [13] του Lam για την παρουσίαση μιας σειράς εικασιών οι οποίες είναι ισοδύναμες με την εικασία των Bass-Quillen.

Ήδη το 1976 οι Quillen-Suslin απέδειξαν ότι η παραπάνω εικασία είναι αληθής όταν $\mathsf{Dim}(R) \leq 2$.

Στην περίοδο 1977-1981 οι Lindel, Lindel-Lütkebihmer, Mohan-Kumar έδωσαν μερικές απαντήσεις στην εικασία των Bass-Quillen, βλέπε τις σχετικές παραπομπές στο βιβλίο του Lam [13]. Ειδικότερα οι παραπάνω απέδειξαν ότι η εικασία είναι αληθής στην περίπτωση του δακτυλίου των τυπικών δυναμοσειρών υπεράνω ενός σώματος, και στην περίπτωση των αλγεβρών "ουσιαστικά πεπερασμένου τύπου" υπεράνω ενός σώματος (δακτύλιοι "γεωμετρικού τύπου"). Ως (μη-τετριμμένη) συνέπεια αυτών των αποτελεσμάτων έπεται ότι η εικασία των Bass-Quillen αληθεύει στην περίπτωση των τοπικών regular μεταθετικών δακτυλίων της Noether οι οποίοι είναι πλήρεις και περιέχουν ένα σώμα (ισο-χαρακτηριστική περίπτωση).

Σ' αυτή τη κατεύθυνση οι Rao, Murthy απέδειξαν την εικασία των Bass-Quillen στην περίπτωση των τοπικών δακτυλίων διάστασης Krull $\mathsf{Dim}(R) \leq 3$ των οποίων το σώμα πηλίκο ως προς το μοναδικό μεγιστοτικό ιδεώδες έχει χαρακτηριστική διάφορη του 2 του 3, βλέπε [21], [25].

Η εικασία των Bass-Quillen σχετίζεται με το ακόλουθο ανοιχτό πρόβλημα:

Πρόβλημα: Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος ο οποίος είναι Hermite, είναι τότε ο πολυωνυμικός δακτύλιος $R[t]$ Hermite;

Είναι γνωστό ότι αν η απάντηση στο παραπάνω πρόβλημα είναι θετική, τότε η εικασία των Bass-Quillen έχει θετική απάντηση.

Για περισσότερες λεπτομέρειες αναφορικά με ανοιχτά προβλήματα και γενικεύσεις της Εικασίας του Serre, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο βιβλίο του Lam, βλέπε [13, Chapter VIII].

Βιβλιογραφία

[1] D. Anderson. *Projective modules over subrings of* $k[X, Y]$ *generated by monomials*. Pacific J. Math. **79**, 5–17, (1978).

[2] H. Bass. *Big projective modules are free*. Illinois J. Math. **7**, 24–31, (1963).

[3] H. Bass. *Projective modules over free groups are free*. J. Algebra **1**, 367–373, (1964).

[4] H. Bass. *K-theory and stable algebra*. Publ. Math. I.H.E.S **22**, pages 5-60, (1964).

[5] H. Bass. *Algebraic K-theory*. Benjamin, Reading, Mass., (1968).

[6] I. Beck. *Projective and free modules*. Math. Z. **129**, 231–234, (1972).

[7] H. Cartan and S. Eilenberg. *Homological Algebra*. Princeton University Press, New Jersey, (1956).

[8] David Eisenbud. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*. Springer, (2004).

[9] M. R. Gabel. *Stably Free Projectives over Commutative Rings*. Thesis, Brandeis Univ., Waltham, MA, (1972).

[10] I. D. Gubeladze. *The Anderson conjecture and projective modules over monoid algebras*. Soobshch. Akad. Nauk Gruzin.SSR **125**, 289–291, (1987).

[11] Y. Hinohara. *Projective modules over semilocal rings*. Tohoku Math. J. **14** 205–211, (1972).

[12] F. Ischebeck and R. Rao. *Ideals and Reality*. Springer, (2005).

[13] T. Y. Lam. *Serre's Conjecture*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1978).

[14] T. Y. Lam. *Serre's Problem on Projectives Modules*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (2006).

[15] S. Lang. *Algebra, Revised Third Edition*. Springer, USA, (2002).

[16] H. Lindel. *On the Bass-Quillen conjecture concerning projective modules over polynomial rings*. Invent. Math. **65** 319–323, (1981).

[17] O. Lezama, V. Cifuentes, W. Fajardo, J. Montano M. Pinto, A. Pulido, and M. Reyes. *Quillen-Suslin Rings*. Extracta Mathematicae Vol. **24**, No.1, 55–97., (2009).

[18] H. Matsumura. *Commutative Algebra*. Benjamin, Reading, Mass., (1970).

[19] James R. Munkres. *Topology*. Prentice-Hall, (1987).

[20] M.P. Murthy and J. Towber. *Algebraic vector bundles over* A^3 *are trivial*. Invent. Math. **24** 173–189, (1974).

[21] M.P. Murthy. *Zero cycles and projective modules. Ann. of Math. (2)* **140** *no. 2, 405-434*, (1994).

[22] M. Nagata. *Local rings*. Interscience Publishers, New York, (1962).

[23] M. Ojanguren, R. Sridharan. *Cancellation of Azumaya Algebras*. J. Algebra, **18**, 501–505, (1971).

[24] D. Quillen. *Projective modules over polynomial rings*. Inventiones Math. **36**, 167–171, (1976).

[25] R.A. Rao. *The Bass-Quillen conjecture in dimension three but characteristic* $\neq 2, 3$ *via a question of A. Suslin*. Inventiones Math. **93**, 609–618, (1988).

[26] M. Roitman. *On Serre's problem on projective modules*. Proceedings of the American Mathematical Society, **50**, (1975), 45–52.

[27] J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra, First Edition*. Department of Mathematics, University of Illinois, Urbana, Illinois, (1979).

[28] J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra, Second Edition*. Springer, USA, (2009).

[29] H. Sarges. *Ein Beweis des Hilbertschen Basissatzes*. J. reine angew. Math. **283/284**, (1976), 436–437.

[30] C.S. Seshadri. *Triviality of vector bundles over the affine space* K^2. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **44**, 456–458, (1958).

[31] J.P. Serre. *Faisceaux algébriques cohérents*. Annals of Mathematics, **61** (2), 197–278, (1955).

[32] A.A. Suslin. *Projective modules over polynomial rings are free*. Dokl. Akad. Nauk SSSR **229**, 106–1066. English translation: Soviet Math. Dokl. **17**, 1160–1164., (1976).

[33] R. G. Swan. *Vector bundles and projective modules*. Trans. Amer. Math. Soc. **105**, 264–277, (1962).

[34] R. G. Swan. *Algebraic K-theory*. Springer Lecture Notes in Math. **76**, (1968).

[35] R. G. Swan. *Topological examples of projective modules*. Trans. Amer. Math. Soc. **230**, 201–234, (1977).

[36] R. G. Swan. *Quaternionic bundles of algebraic spheres*. Rocky Mountain J. Math **26**, 773-791, (1996).

[37] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*. Cambridge studies in advanced mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, UK, (1994).

[38] Charles A. Weibel. *An introduction to Algebraic K-Theory*. Book in Preparation: http://www.math.rutgers.edu/ weibel/Kbook.html, (2012).