ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΣΤΑΥΡΟΥΛΑ ΠΑΤΣΙΟΜΙΤΟΥ

Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΤΙΚΩΝ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ ΣΕ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ: ΣΥΝΔΕΟΜΕΝΕΣ ΟΠΤΙΚΕΣ ΕΝΕΡΓΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2012

ΣΤΑΥΡΟΥΛΑ ΠΑΤΣΙΟΜΙΤΟΥ

Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΤΙΚΩΝ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ ΣΕ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ: ΣΥΝΔΕΟΜΕΝΕΣ ΟΠΤΙΚΕΣ ΕΝΕΡΓΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

που υποβλήθηκε στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης
της Σχολής Επιστημών της Αγωγής
του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Συμβουλευτική Επιτροπή

Αναστάσιος Εμβαλωτής,	Αναπληρωτής Καθηγητής (Επιβλέπων)
Αναστάσιος Μικρόπουλος,	Καθηγητής
Κωνσταντίνος Χρίστου,	Καθηγητής

Εξεταστική Επιτροπή

Αναστάσιος Εμβαλωτής,	Αναπληρωτής Καθηγητής
Αναστάσιος Μικρόπουλος,	Καθηγητής
Κωνσταντίνος Χρίστου,	Καθηγητής
Κωνσταντίνος Κώτσης,	Καθηγητής
Δήμητρα Πίττα – Πανταζή,	Αναπληρώτρια Καθηγήτρια
Κωνσταντίνος Τάτσης,	Λέκτορας
Δημήτρης Μαυρίδης,	Λέκτορας

Η δημόσια υποστήριξη της διδακτορικής διατριβής πραγματοποιήθηκε στις 4-12-2012 στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Η διδακτορική μου διατριβή αφιερώνεται

Στους γονείς μου, Σωτήρη και Μαγδαληνούλα, που μου έδειξαν πώς να σκέφτομαι “δυναμικά”…………….

Στο Δημήτρη, που μου έμαθε πως η ζωή απαιτεί δύναμη, ταχύτητες και ευστροφία…………. ……………...

Στα παιδιά μου, Αλέξανδρο, Λουκία και Θεανώ που με οδήγησαν να μάθω να κινούμαι σε πολλά επίπεδα…...

Σε εκείνους τους δασκάλους που μου δίδαξαν, τι είναι να εμπνέεις και να δημιουργείς κίνητρα………………

Ευχαριστίες

*Κατ΄ αρχάς θέλω να ευχαριστήσω θερμά τα μέλη της τριμελούς επιτροπής, κυρίους **Αναστάσιο Εμβαλωτή, Αναστάσιο Μικρόπουλο και Κωνσταντίνο Χρίστου**, για το χρόνο που διέθεσαν επισκοπώντας την εργασία μου. Όσον αφορά την ερευνητική μεθοδολογία, θερμές ευχαριστίες οφείλω στον επιβλέποντα καθηγητή κύριο **Αναστάσιο Εμβαλωτή** για τις υποδείξεις και τις εποικοδομητικές συζητήσεις, όπως επίσης και για την εμπιστοσύνη που έδειξε στο πρόσωπό μου όλα αυτά τα χρόνια που πάλευα και αγωνιούσα να διαχειριστώ όλο αυτό το υλικό της μελέτης, χωρίς πολλές φορές να γνωρίζω πού οδηγεί το κάθε βήμα. Το ίδιο ευχαριστώ και την καθηγήτρια κυρία **Ευγενία Κολέζα** στο διάστημα της συνεργασίας μας, αλλά κυρίως που με βοήθησε να συνεχίσω τη διδακτορική διατριβή μου μετά τη μετακίνησή της. Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κο **Αναστάσιο Μικρόπουλο** για τις εποικοδομητικές συζητήσεις μας σε θέματα τεχνολογίας και τις εύστοχες επισημάνσεις του που αποτέλεσαν σημαντικά βοηθήματα στη δυνατόν αρτιότερη παρουσίαση της μελέτης μου. Ο κος **Κωνσταντίνος Χρίστου** ήταν ο δάσκαλός μου στο Μεταπτυχιακό της Διδακτικής των Μαθηματικών που μου ενέπνευσε την ιδέα να συνδέσω τη θεωρία των van Hiele με τη δυναμική γεωμετρία. Τον ευχαριστώ από καρδιάς. Όλη η εργασία και ειδικότερα η επινόηση και επεξεργασία του μαθησιακού μονοπατιού καθώς και η ανάλυση των δεδομένων της ερευνητικής διαδικασίας είναι αποτέλεσμα μιας προσπάθειας τεσσεράμισι χρόνων κατά τα οποία δεν σταμάτησα να αναζητώ και να επεξεργάζομαι υλικό σχετικά με το αντικείμενό μου, να συζητώ τις σκέψεις μου με Έλληνες και ξένους ερευνητές καθώς και να συγγράφω και να δημοσιεύω εργασίες μόνη ή σε συνεργασία.*

*Η ανάλυση των δεδομένων της έρευνας θεμελιώνεται σε ένα θεωρητικό πλαίσιο το οποίο είναι αποτέλεσμα της προβληματικής και των γνώσεων που αποκόμισα κατά τη φοίτησή μου στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα της Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών των Πανεπιστημίων Αθηνών και Κύπρου. Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως τους καθηγητές του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Διονύσιο Αναπολιτάνο, Ευστάθιο Βασιλείου, Στέλλα Βοσνιάδου, Αθανάσιο Γαγάτση, Ευστάθιο Γιαννακούλια, Θεοδόση Ζαχαριάδη, Νικόλαο Κλαουδάτο, Χρόνη Κυνηγό, Αναστάσιο Μπαρκάτσα, Μιχάλη Μυτιληναίο, Στυλιανό Νεγρεπόντη, Πάρη Πάμφιλο, Δέσποινα Πόταρη, Παναγιώτη Σπύρου, Βασιλική Φαρμάκη, Γεώργιο Φιλίππου και Κωνσταντίνο Χρίστου εκτός των άλλων και για την επιστημονική υποστήριξή τους καθ΄ όλη τη διάρκεια της φοίτησής μου στο πρόγραμμα η οποία και συνετέλεσε στη συγκρότηση της επιστημονικής προσέγγισης και προσανατολισμού της διδακτορικής διατριβής μου. Ευχαριστώ επίσης την **Prof. Elena Nardi** για τις γόνιμες μέσω ηλεκτρονικής αλληλογραφίας συζητήσεις μας, καθώς και το* *περιοδικό Research in Mathematics Education οι κρίσεις του οποίου με βοήθησαν να αναδιαμορφώσω την εργασία «The development of students geometrical thinking through Linking Visual Active Representations» (δημοσιευμένη στα Proceedings of the 5th International Colloquium on the Didactics of Mathematics), αλλά και να αναπτύξω τον προβληματισμό μου για τον τρόπο συγγραφής εργασιών με διεθνή απεύθυνση. Σημαντική κρίνεται επίσης η συμβολή των **Prof. Luc Trouche, Prof. Raymond Duval, Prof. Rudolf Straesser και Nicholas Jackiw** στην κατανόησή μου ζητημάτων όπως η εργαλειακή γένεση, η γνωστική ανάλυση των σχημάτων, το λογισμικό και τα αρχεία εντολών αντίστοιχα, τους οποίους και ευχαριστώ. Ευχαριστώ ακόμα τους **Prof. Michael Shaugneshy και Prof. Usiskin** για τις απαντήσεις στην ηλεκτρονική αλληλογραφία σε ουσιώδη ζητήματα της μελέτης μου.*

*Θα ήταν παράλειψη να μην ευχαριστήσω την Επίκουρο καθηγήτρια κυρία **Μαρία Κορδάκη** για την αποφασιστική συμβολή της στο να συνεχίσω την προσπάθειά μου κάποια στιγμή που δείλιασα, καθώς και για τις χρήσιμες συζητήσεις.*

Η πραγματοποίηση της έρευνας οφείλεται στην εθελοντική συμμετοχή των μαθητών και των καθηγητών του σχολείου που συμμετείχαν στη διαδικασία. Τους ευχαριστώ θερμά. Χωρίς τη συμμετοχή τους, η συγγραφή της παρούσας μελέτης θα ήταν αδύνατη.

Θα πρέπει τέλος να ευχαριστήσω όλους εκείνους τους φίλους και συναδέλφους που βοήθησαν ο καθένας με τον τρόπο του στην ολοκλήρωση της εργασίας μου και μου συμπαραστάθηκαν στις δύσκολες στιγμές της μελέτης. Μεταξύ άλλων ευχαριστώ θερμά τόσο τον κο Μιχάλη Ελευθερίου για τη σημαντική συμβολή του στη επιμέλεια των εργασιών με διεθνή προσανατολισμό όσο και την κα Δήμητρα Τουλάτου για την επιμέλεια του κειμένου της διδακτορικής διατριβής.

Ιδιαίτερα όμως ευχαριστώ τα παιδιά μου για τη συμπαράσταση και την κατανόηση που έδειξαν στην επιθυμία μου να προσφέρω σε όλα τα παιδιά του κόσμου ένα κομμάτι καλά φυλαγμένο στο μυαλό μου. Ελπίζω να με συγχωρήσουν που αν και κοντά τους, το μυαλό μου πολλές φορές ταξίδευε στη μελέτη μου.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Περίληψη

Στην παρούσα μελέτη παρουσιάζεται το πρόβλημα της κατανόησης της γεωμετρίας που αντιμετωπίζουν οι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και εξετάζεται πώς η θεωρία των van Hiele μπορεί να αποτελέσει τη βάση για τη σχεδίαση υποστηρικτικών υλικών του Προγράμματος Σπουδών. Σε μια σύντομη ανάλυση συμπεραίνεται ότι η εκπαίδευση των μαθηματικών πρέπει να είναι μια διαδικασία δυναμικής επανεφεύρεσης και εξετάζεται πώς το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας και η εφαρμογή της έννοιας των Συνδεόμενων Οπτικών Ενεργών Αναπαραστάσεων (ενδεικτικά Patsiomitou, 2008a,b 2010) συντείνουν στην επανεφεύρεση της γνώσης. Η σύνθεση του δυναμικού Υποθετικού Μαθησιακού Μονοπατιού (δ-ΥΜΜ) ως διαδικασίας σχεδιασμού και ανασχεδιασμού (ενδεικτικά Patsiomitou, 2010, 2012) στο λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας που προτείνεται στη παρούσα μελέτη, αποτελεί μια πρωτότυπη προσέγγιση η οποία δεν έχει ελεγχθεί ερευνητικά σε στατικό ή δυναμικό περιβάλλον. Εξετάζονται ποιες αλληλεπιδραστικές τεχνικές από την κατηγοριοποίηση των Sedig & Sumner (2006) έχουν επηρεάσει το σχεδιασμό των δραστηριοτήτων του μαθησιακού μονοπατιού της έρευνας καθώς και η έννοια του δυναμικού σημείου, τμήματος (ενδεικτικά Patsiomitou, 2011) και των ημιπροκατασκευασμένων διαγραμμάτων. Η έρευνα αποτελεί μια ποιοτική μελέτη (Merriam, 1998) με ημιπειραματικό σχεδιασμό (quasi-experimental) (Campbell & Stanley, 1963). Για την ανάλυση των δεδομένων της μελέτης επιλέχθηκε η μέθοδος της σταθερής συγκριτικής προσέγγισης (constant comparative method) με σκοπό να παραχθεί μια θεμελιωμένη θεωρία (grounded theory) (Strauss & Corbin, 1990, 1998). Σημαντικό ρόλο στην ανάλυση των δεδομένων της μελέτης έπαιξαν οι δυο κύριες διακρίσεις του συρσίματος (θεωρητικό και πειραματικό) λόγω των ενεργειών των μαθητών. Επίσης η έννοια της εργαλειακής αποκωδικοποίησης (ενδεικτικά Patsiomitou, 2011, 2012). Στα αποτελέσματα της μελέτης περιγράφεται συνοπτικά η εξέλιξη κάθε μαθητή της πειραματικής ομάδας απαντώντας στα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν στην αρχή της μελέτης και εξετάζεται αν έχει μεταβεί σε ένα υψηλότερο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης van Hiele, ως αποτέλεσμα της συμμετοχής του στην προτεινόμενη διδακτική ακολουθία μέσω του μαθησιακού μονοπατιού. Στη συνέχεια ακολουθεί η σύγκριση της εξέλιξης κάθε μαθητή των δυο ομάδων όπως αυτή καταγράφηκε λόγω της συμμετοχής του στην ομάδα και λόγω της συμμετοχής του στα στατικά τεστ. Με αυτό τον τρόπο συγκρίθηκαν τα αποτελέσματα για κάθε μαθητή της πειραματικής ομάδας και ελέγχθηκε η εγκυρότητα των αποτελεσμάτων της πειραματικής διαδικασίας μέσω του λογισμικού, καθώς και η αξιοπιστία του τεστ Usiskin. Ομοίως, της εξέλιξης κάθε μαθητή της ομάδας ελέγχου ως προς το van Hiele τεστ.

Ως κατακλείδα συμπεραίνεται ότι η παρούσα μελέτη προστίθεται πρωτότυπα στις μελέτες που βασίζονται στη θεωρία των van Hiele και επισημαίνεται ότι η υποθετική μαθησιακή τροχιά που δημιουργήθηκε με Συνδεόμενες Οπτικές Ενεργές Αναπαραστάσεις έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην κατασκευή της απόδειξης και στη γνωστική ανάπτυξη των μαθητών.

Abstract

In the current study, the problem that secondary school geometry students face is presented, and it also investigated how the van Hiele theory can contribute as a base for the design of supportive materials in a classroom curriculum. In a short review it is concluded that a mathematics education must be a process of dynamic reinvention, and it also investigated how dynamic geometry software and the meaning of Linking Visual Active Representations (e.g., Patsiomitou, 2008a,b 2010) lead to students' reinvention of knowledge. The synthesis of the Dynamic Hypothetical Learning Path as a process of design and redesign in the dynamic geometry software (Patsiomitou, 2010, 2012) is a prototype approach that has not been investigated in a static or dynamic environment. The study investigated the interaction techniques that influenced the design of the activities in the Dynamic Hypothetical Learning Path. Moreover, the meanings of the dynamic point, segment, (Patsiomitou, 2011, 2012) and the semi-structured diagrams are presented. The study is qualitative (Merriam, 1998), with a quasi-experimental (Campbell & Stanley, 1963) design. The constant comparative method was chosen for data analysis in order to produce a grounded theory (Strauss & Corbin, 1990, 1998). The meanings of theoretical and experimental dragging (Patsiomitou, 2011, 2012) and instrumental decoding (Patsiomitou, 2011, 2012) have played a major role in the analysis of the study's data. The study's results describe the development of every student on the experimental team, taking into account the research questions. The comparative study followed every student on the control and experimental teams.

Finally, it points out that (a) the Dynamic Hypothetical Learning Path played an important role in the construction of proofs and in the students' cognitive development, and (b) that the introduction of the meaning of Linking Visual Active Representations in the international literature undoubtedly contributes in a prototypical way to the studies based on van Hiele's theory.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1. Αναφορά στο πρόβλημα

Κατά τη διάρκεια των περασμένων δεκαετιών οι ερευνητές διαπίστωσαν ότι οι μαθητές δεν αποδίδουν στο αντικείμενο της Γεωμετρίας (βλ. ενδεικτικά Hoffer, 1981; Usiskin, 1982; Van Hiele, 1986; Burger & Shaughnessy, 1986; Crowley, 1987; Fuys, Geddes & Tischler, 1988; Gutierrez, Jaime & Fortuny, 1991; Mason, 1997). Σε αυτό συντελούν η δυσκολία των μαθητών «να ανακαλέσουν γλωσσικά σύμβολα και συμβολικές αναπαραστάσεις που έχουν κατανοήσει» (Patsiomitou, 2012), «να απελευθερώσουν τη σκέψη τους από το εξειδικευμένο πλαίσιο» (White & Mitchelmore, 2010, p. 206), να αναπτύξουν τον «παραγωγικό συλλογισμό» (Peirce, 1998/1903) και την «αφαιρετική ικανότητα» (βλ. ενδεικτικά Skemp, 1986; White & Mitchelmore, 2010) που απαιτείται στη δομή ανάπτυξης του περιεχομένου του Προγράμματος Σπουδών της Γεωμετρίας, όπως αυτή παρουσιάζεται μέσω της διδασκαλίας στην τάξη (ενδεικτικά van Hiele, 1986; Hoffer, 1981; Usiskin, 1982; Burger & Shaughnessy, 1986; Crowley, 1987; Fuys, Geddes & Tischler, 1988; Gutierrez, Jaime & Fortuny, 1991; Mason, 1997). Ο de Villiers (1999) ομοίως αναφέρει ότι «ένα από τα μεγαλύτερα προβλήματα που εντοπίζει το σύνολο της εκπαιδευτικής έρευνας είναι η διδασκαλία της απόδειξης» (p. 1), η οποία αποτελεί αναγκαίο συστατικό της γνωστικής ανάπτυξης των μαθητών.

Σύμφωνα με τον Piaget (1937/1971) η γνωστική ανάπτυξη ενός μαθητή εξαρτάται από τη βιολογική του ωρίμανση. Η διαπίστωση ότι η γνωστική ανάπτυξη ενός μαθητή εξαρτάται περισσότερο από τη διδασκαλία έγινε για πρώτη φορά κατά τη διατύπωση της θεωρίας των 5 επιπέδων γεωμετρικής ανάπτυξης των van Hiele, στις αντίστοιχες διδακτορικές διατριβές της Dina van Hiele-Geldof και του συζύγου της Pierre van Hiele, το 1957 (Fuys, Geddes & Tischler, 1988). Σύμφωνα με τη θεωρία των van Hiele όσον αφορά τη διδασκαλία των γεωμετρικών εννοιών,

- ο κύριος λόγος για την αποτυχία των μαθητών στη Γεωμετρία στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο είναι ότι διδάσκεται σε υψηλότερο επίπεδο από εκείνο που οι μαθητές είναι ικανοί να κατανοήσουν (βλ. ενδεικτικά Hoffer, 1981; Usiskin, 1982; Burger & Shaughnessy, 1986; Crowley, 1987; Fuys, Geddes & Tischler, 1988; Mason, 1997)˙
- η οργάνωση και το περιεχόμενο της διδασκαλίας καθώς επίσης και τα υποστηρικτικά υλικά (π.χ, διαχειρίσιμα υλικά (manipulatives) που χρησιμοποιούνται φυσικά όπως οι κύβοι Dienes (1960), ή ψηφιακά όπως οι δομικές μονάδες (building blocks) (Clements & Sarama, 2002)), έχουν θετικές επιπτώσεις στη γνωστική ανάπτυξη των μαθητών (βλ. ενδεικτικά van Hiele, 1986; Fuys, Geddes & Tischler, 1984; Crowley, 1987; Gutierrez, Jaime & Fortuny, 1991; Clements & Battista, 1992; Clements & Sarama, 2007).

Κατά τη διάρκεια των περασμένων δεκαετιών διεξήχθησαν πολλές έρευνες σε μαθητές πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης διαφόρων χωρών [για παράδειγμα στη Σοβιετική Ένωση (Wirszup, 1976), στις Ηνωμένες Πολιτείες (π.χ, Usiskin, 1982; Fuys, Geddes, & Tischler, 1984; Burger & Shaughnessy, 1986)]. Οι έρευνες που βασίστηκαν στο μοντέλο των van Hiele εστίασαν στα εξής:

- να δοκιμάσουν στην πράξη και να ελέγξουν την εγκυρότητα της ίδιας της θεωρίας των van Hiele και ορισμένων από τις υποθέσεις της, καθώς και της διαπίστωσης ότι το επίπεδο 5 δεν εμφανίζεται σε μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (ενδεικτικά Wirszup, 1976; Hoffer, 1981; Mayberry, 1983; Usiskin, 1982; Burger & Shaughnessy, 1986)˙
- να προσδιορίσουν τις διακριτές ιδιότητες κάθε επιπέδου στις διαδικασίες αναγνώρισης, ορισμού, βασικών ιδιοτήτων των σχημάτων και απόδειξης (ενδεικτικά Hoffer, 1981; Burger & Shaughnessy, 1986; Gutierrez, Jaime, & Fortuny, 1991)˙
- να σχεδιάσουν τη διδασκαλία με βάση το μοντέλο των van Hiele, ώστε να βελτιωθεί η αποτελεσματικότητα του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές αιτιολογούν (ενδεικτικά Fuys, Geddes, & Tischler, 1988)˙
- να εξετάσουν αν το μοντέλο μπορεί να χρησιμεύσει για να περιγράψει τις διαδικασίες σκέψης των μαθητών κατά τη διάρκεια επίλυσης προβλημάτων και κατανόησης των γεωμετρικών εννοιών (ενδεικτικά Burger & Shaughnessy, 1986; Clements & Battista, 1992; Fuys, Geddes & Tischler, 1988)˙

- να εξετάσουν αν το μοντέλο των van Hiele μπορεί να προβλέψει την επιτυχία στη Γεωμετρία και την ικανότητα για απόδειξη (ενδεικτικά Usiskin, 1982; Senk, 1989; Usiskin & Senk, 1990).

Σε γενικές γραμμές οι ερευνητές (π.χ, Fletcher, 1970; Freudenthal, 1973; Kilpatrick & Wirszup, 1969-1977; NCTM, 1930, 1970 a, b; Usiskin, 1982; van Hiele, 1984; McDonald, 1989) επισημαίνουν τις δυσκολίες των μαθητών λόγω του παραγωγικού συλλογισμού που απαιτείται στις αποδεικτικές διαδικασίες στη Γεωμετρία και «συστήνουν αλλαγές στο Πρόγραμμα Σπουδών και στον τρόπο διδασκαλίας των γεωμετρικών εννοιών» (McDonald, 1989, p.425), συμπεριλαμβανομένης της διδασκαλίας της απόδειξης. Η απόδειξη στο Πρόγραμμα Σπουδών [της Γεωμετρίας] θεωρείται «θεμελιώδης συντελεστής για την επικοινωνία των μαθηματικών ιδεών» (Shoenfeld, 1994, p. 22) και την ανάπτυξη της αφαιρετικής ικανότητας των μαθητών (White & Mitchelmore, 2010, p. 206). Ο Harell (2008) ισχυρίζεται ότι «ένα Πρόγραμμα Σπουδών Γεωμετρίας δεν είναι Γεωμετρία αν δεν έχει τελικό στόχο την ανάπτυξη του παραγωγικού συλλογισμού» (p. 488), ισχυριζόμενος ότι η διδασκαλία οφείλει να συντελέσει «στην ανάπτυξη των τρόπων με τους οποίους ο μαθητής κατανοεί και σκέπτεται» *(ways of understanding and ways of thinking)* (Harell, 2008, p. 487). Ομοίως οι Healy & Hoyles (1999), στην έκθεσή τους με θέμα την αιτιολόγηση και την παρουσίαση μαθηματικών αποδείξεων στο σχολικό πλαίσιο, βεβαιώνουν ότι: «η απόδειξη βρίσκεται στην καρδιά της μαθηματικής σκέψης και ο παραγωγικός συλλογισμός, που υποστηρίζει τη διαδικασία της παρουσίασης αποδείξεων, διακρίνει τα Μαθηματικά από τις εμπειρικές επιστήμες» (p. 1). Επομένως, ένα μέτρο σύγκρισης της προόδου του μαθητή στα επίπεδα van Hiele μπορεί να αποτελέσει η εξέλιξη του τρόπου αιτιολόγησης, καθώς ο μαθητής μεταβαίνει από το ένα επίπεδο στο άλλο, και η ανάπτυξη της ικανότητας παραγωγικού συλλογισμού.

Το ζήτημα της αιτιολόγησης και αυστηρής απόδειξης είναι ένα θέμα το οποίο έχει απασχολήσει πολύ τη μαθηματική κοινότητα και την έρευνα στη διδασκαλία των Μαθηματικών τις τελευταίες δεκαετίες (βλ. ενδεικτικά Barbin, 1988; Duval, 1991, 1996; Chazan, 1993; Hanna, 1995; Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Ferri & Garuti, 1997; Bartolini Bussi & Mariotti, 1998; Arzarello, Micheletti, Olivero, Paola & Robutti, 1998b; Laborde, 1998; Balacheff, 1999; Rav, 1999; Hanna, 1989, 1995, 1996, 1998, 2000, 2001; Harel & Sowder, 1998, 2007, 2009). Αυτό οφείλεται στη δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές όχι μόνο στην κατασκευή μιας απόδειξης αλλά και στην κατανόηση των αποδείξεων που παρουσιάζονται στο σχολικό εγχειρίδιο ή μέσα στην τάξη από τον δάσκαλο των Μαθηματικών (π.χ, Senk, 1985, 1989).

Πολλοί ερευνητές (π.χ Fuys, Geddes, & Tischler, 1988; Clements, Battista & Sarama, 2001; Clements & Sarama, 2007) ισχυρίζονται ότι οι μαθηματικοί μικρόκοσμοι (π.χ., Logo) «έχουν τη δυνατότητα να ενθαρρύνουν την κατασκευή των γεωμετρικών εννοιών, […] κάτι που τα σχολικά εγχειρίδια δεν κάνουν» (Clements, Battista & Sarama, 2001, p.6). Οι Clements & Battista (1992) ισχυρίζονται ότι η κονστρουκτιβιστική προσέγγιση είναι η βάση για τη θεωρητική θεμελίωση της χρήσης ενός τέτοιου περιβάλλοντος στην εκμάθηση της Γεωμετρίας. Επιπροσθέτως, η θεωρία των van Hiele «θεωρείται ένα από τα καλύτερα πλαίσια για τη μελέτη, τη διδασκαλία και τις μαθησιακές διαδικασίες στη Γεωμετρία» (Atebe, 2008, p.3) και ένα «έγκυρο πλαίσιο για το σχεδιασμό διδακτικών ακολουθιών στη σχολική Γεωμετρία, όπως αναγνωρίζεται στο Πρόγραμμα Σπουδών του NCTM (NCTM's Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics (1989)» (Jaime & Gutierrez, 1995, p. 592).

Αυτό είναι σύμφωνο με την προτεινόμενη *εκπαιδευτική ανάπτυξη* (educational development) των Μαθηματικών του Freudenthal (1973), η οποία αξιοποιεί την ανάπτυξη των υποστηρικτικών υλικών του Προγράμματος Σπουδών και επιδιώκει να ενθαρρύνει την πραγματική αλλαγή στη διδασκαλία στην τάξη (Gravemeijer & Terwel, 2000, p.779).

Πολλοί εκπαιδευτικοί και ερευνητές έχουν αναπτύξει και εφαρμόσει στην τάξη δραστηριότητες σε δυναμικά περιβάλλοντα, όπως για παράδειγμα στο Cabri (Laborde, J, M., Baulac, Y., & Bellemain, F., 1988) ή στο The Geometer’s Sketchpad (Jackiw, 1991) στην προσπάθεια τους να εντάξουν στη διδασκαλία της γεωμετρίας τις νέες τεχνολογίες (ενδεικτικά Hölzl, 1996; Laborde, 1998; Hoyles & Healy, 1999; Clement & Battista, 1992; De Villiers 1998; Yerushalmy & Chasan 1993; Oldknow, 1995; Sanchez & Sacristan, 2003; Hollebrands, 2003, 2004, 2006, 2007; Christou, Mousoulides, Pittalis and Pitta, 2004a,b, 2005). Ένα σκέλος της έρευνας έχει μελετήσει τον αντίκτυπο του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας στην ανάπτυξη επιχειρημάτων και την κατασκευή εννοιών και αποδεικτικών διαδικασιών στη Γεωμετρία (ενδεικτικά Arzarello, Micheletti, Olivero & Robutti, 1998; Laborde, 1998; Christou, Mousoulides, Pittalis and Pitta, 2004a,b, 2005; Patsiomitou, 2008, 2009, 2010, 2012).

Σύμφωνα με τους Usiskin (1982), Burger & Shaughnessy (1986), Messick & Reynolds (1992), Geddes & Fortunato (1993), η ποιότητα της διδασκαλίας σε συνάρτηση με τα υποστηρικτικά υλικά του Προγράμματος Σπουδών έχουν σημαντική επίδραση στη γνωστική ανάπτυξη των μαθητών. Ο Remillard (1999) υποστηρίζει ότι τα υποστηρικτικά υλικά αποτελούν βασικό όχημα για την προώθηση της αλλαγής στα Προγράμματα Σπουδών και στο χαρακτήρα των ευκαιριών που προσφέρονται στους μαθητές για την εκμάθηση των Μαθηματικών. Ειδικότερα, έχει αποδειχθεί ότι «τα υποστηρικτικά υλικά του Προγράμματος Σπουδών τα βασισμένα στη θεωρία των van Hiele και η χρήση του Geometers' Sketchpad έχουν παίξει σημαντικό ρόλο στη γνωστική ανάπτυξη των μαθητών» (Idris, 2009, p.104), ζήτημα που ισχυρίζονται πολλοί ερευνητές (ενδεικτικά Elchuck, 1992; Choi-Koh, 1999; Olive, 2000; Almeqdadi, 2000; Olkun, Sinoplu & Deryakulu, 2005).

1.2. Το Πρόγραμμα Σπουδών ως καθοδηγούμενη «επανεφεύρεση» των εννοιών

Ένα Πρόγραμμα Σπουδών γεωμετρίας μπορεί να θεωρηθεί «ένα σχέδιο για μάθηση» (van den Akker, 1998 οπ. αναφ. στο Zulkardi, 2002) των εννοιών της γεωμετρίας. Ο Zulkardi (2002) διαχωρίζει τρία επίπεδα 'σχεδίων' για μάθηση: «στο μικρο-επίπεδο (micro-level) το Πρόγραμμα Σπουδών αναφέρεται σε ένα σχέδιο με συγκεκριμένες εκπαιδευτικές δραστηριότητες που αφορούν την τάξη, στο μέσο-επίπεδο (meso level) αναφέρεται στο Πρόγραμμα Σπουδών ενός σχολείου ή ινστιτούτου και στο μακρο-επίπεδο (macro-level) χρησιμοποιείται ως σχέδιο για μάθηση σε ένα γενικότερο πλαίσιο» (p.24). Ένας από τους σημαντικούς στόχους στην εκπαίδευση των μαθηματικών είναι: «να προσδιοριστούν οι *τύποι κατανόησης* και *τρόποι σκέψης* των μαθητών […] και, αναλόγως, να αναπτυχθούν και εφαρμοστούν τα προγράμματα σπουδών των μαθηματικών» (Harel, 2008, p. 488). Η ανάπτυξη του Προγράμματος Σπουδών στην τάξη μέσω μιας κονστρουκτιβιστικής προσέγγισης εστιάζει στην ενεργητική μάθηση (Piaget, 1937), στην αλληλεπίδραση μεταξύ της εμπειρίας και της νοητικής επεξεργασίας της γνώσης (Vygotsky, 1978), και στην ακολουθιακή κατασκευή της γνώσης των μαθητών (Terwel, 1999).

Αυτή η κατασκευή της γνώσης σύμφωνα με τις Fuson et al. (2000) διευκολύνεται από τους δασκάλους, οι οποίοι υποστηρίζουν τη μαθηματική σκέψη των παιδιών, διευκολύνουν τις μαθηματικές συζητήσεις, χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις των μαθηματικών εννοιών και ενθαρρύνουν εναλλακτικές μεθόδους λύσης (π.χ., Carpenter & Fennema, 1991; Hiebert & Carpenter, 1992 στο Fuson, Carrol & Drueck, 2000, p.277). Ο ουσιαστικός ρόλος που διαδραματίζουν οι δάσκαλοι στη διαμόρφωση του Προγράμματος Σπουδών που δοκιμάζεται ή αξιολογείται στην πράξη από τους μαθητές υπογραμμίζεται επίσης από τον Remillard (1999). Καθώς οι δάσκαλοι (ή οι ερευνητές-δάσκαλοι) σχεδιάζουν τη διδασκαλία των εννοιών και αλληλεπιδρούν με τους μαθητές, αισθάνονται όλο και περισσότερο την ανάγκη να κατανοήσουν τη σκέψη των μαθητών τους και αναζητούν μεθόδους για να οδηγήσουν τους μαθητές τους στην κατανόηση.

Οι Corcoran et al. (2009) ισχυρίζονται ότι ένα μαθησιακό μονοπάτι «διαφέρει από το Πρόγραμμα Σπουδών διότι είναι βασισμένο στην ανάλυση και στα ερευνητικά συμπεράσματα για το πώς οι μαθητές μαθαίνουν μια ιδιαίτερη ιδέα, και επικυρώνεται από τα στοιχεία της έρευνας» (p. 23). Οι ίδιοι ερευνητές ισχυρίζονται ακόμα ότι τα μαθησιακά μονοπάτια μπορούν να βοηθήσουν τους δασκάλους με το να τους

> «παρέχουν μια εννοιολογική δομή που μπορεί να τους πληροφορήσει, να υποστηρίξει την ικανότητα να ανταποκριθούν κατάλληλα […] και να προσαρμόσουν την διδασκαλία τους στο τι κάθε μαθητής χρειάζεται […]»(p. 23).

Πολλοί ερευνητές (π.χ., Cobb & Bauersfeld, 1995; Hiebert et al., 1996; Lampert, 1991 οπ. αναφ. στο Fuson, Carrol & Drueck, 2000, p.277) συμφωνούν ότι, «σε αντίθεση με το παραδοσιακό εγχειρίδιο και τη διδασκαλία που καταφεύγει στην αποστήθιση ως μέσο εκμάθησης,[…] η επίλυση προβλημάτων διευκολύνει την κατασκευή των μαθηματικών εννοιών» (Fuson, Carrol και Drueck, 2000, p.277).

Όπως αναφέρουν οι Gravemeijer & Terwel (2000) «ο Freudenthal υπογράμμισε ότι η θεωρία του Προγράμματος Σπουδών δεν είναι ένα σταθερό, προκατασκευασμένο σύνολο θεωριών, στόχων και μέσων, περιεχομένου, και μεθόδων» (p.779). Καθοδηγούμενη επανεφεύρεση για τον Freudenthal (1973) σημαίνει ότι ο μαθητής αναπαράγει πιστά μια επιστημονική δραστηριότητα που περιλαμβάνει την κατασκευή, διατύπωση και απόδειξη εννοιών και θεωρημάτων· η αναπαραγωγή αυτή προκύπτει μέσα από τις άτυπες στρατηγικές του μαθητή κατά τη διάρκεια επίλυσης ενός προβλήματος. Σύμφωνα με τον Freudenthal (1973), η εκπαίδευση των Μαθηματικών πρέπει να είναι μια διαδικασία *καθοδηγούμενης επανεφεύρεσης*. Η μέθοδος της *καθοδηγούμενης επανεφεύρεσης* στηρίζεται στην ιδέα ότι το διδασκόμενο θέμα επανεφευρίσκεται εκ νέου από τους μαθητές σε αλληλεπίδραση μεταξύ τους και με τον δάσκαλο (Gravemeijer & Terwel, 2000, p.786).

Η μέθοδος της καθοδηγούμενης επανεφεύρεσης επιστημολογικά συνδέεται με τη σωκρατική μέθοδο της *μαιευτικής* (Gravemeijer & Terwel, 2000), όμως έχει διαφορετικό χαρακτήρα και στόχο, αφού οι μαθητές αναλαμβάνουν ουσιαστικό ρόλο, αυτενεργώντας για την κατασκευή των εννοιών. Επομένως, «η κατανόηση και η βαθιά γνώση των εννοιών [και επομένως η επανεφεύρεσή τους] προκύπτουν κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, […] με τον δάσκαλο να παίζει το ρόλο της μαίας» (Freudenthal, 1991, p.100-101 οπ. αναφ. στο Gravemeijer & Terwel, 2000, p. 786-787). Ο σημαντικός ρόλος του εκπαιδευτικού και η αναγκαιότης της παρέμβασής του, η οποία οφείλει να αποτελεί μέρος της μαθησιακής διαδικασίας, έχουν συζητηθεί από τους

Yackel & Cobb (1994), οι οποίοι θεωρούν πολύ σημαντική τη συμβολή του εκπαιδευτικού, καθόσον η εδραίωση μιας μαθηματικής αλήθειας στην τάξη είναι μια αλληλεπιδραστική διαδικασία (Yackel & Cobb, 1994, p. 3, οπ. αναφ. Hanna, 1995).

Ο σχεδιασμός ή η επιλογή διδακτικών δραστηριοτήτων και προβλημάτων που ενθαρρύνουν και κεντρίζουν τη *μαθηματική επανεφεύρεση* (Freudenthal, 1973) από πλευράς των μαθητών αποτελεί «πρόκληση για τον ερευνητή (-εκπαιδευτικό), [ο οποίος πρέπει] να προσπαθήσει να δει τον "κόσμο μέσα από τα μάτια του μαθητή"» (Gravemeijer, 2004). Για να το πετύχει αυτό πρέπει να μετατοπιστεί νοητικά από *τη θέση του παρατηρητή εκπαιδευτικού* στη *θέση του δρώντα/ενεργούντα μαθητή* (Cobb, Yackel & Wood, 1992 οπ. αναφ. στο Gravemeijer, 2004), και να εξετάσει πλέον το σχεδιασμό της δραστηριότητας από τη σκοπιά αυτή. Σύμφωνα με τον Gravemeijer (2004), «είναι αναγκαίος ένας εκπαιδευτικός σχεδιασμός που θα υποστηρίξει τη διδασκαλία ώστε να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν τον τρόπο με τον οποίο αιτιολογούν» (p. 106).

Η γνώση των υποστηρικτικών μέσων που έχουμε στη διάθεσή μας για το σχεδιασμό των δραστηριοτήτων μάς επιτρέπει να επιλέξουμε ανάμεσα σε τεχνολογικά εργαλεία. Στην παρούσα διατριβή εξετάζεται πώς το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας συμβάλλει στη *'δυναμική' επανεφεύρεση* της γνώσης από τους μαθητές (π.χ., Furringhetti & Paola, 2003; Patsiomitou, Barkatsas & Emvalotis, 2010), ώστε να αποκτήσουν «τη δυνατότητα να οικοδομήσουν τη δική τους μαθηματική γνώση στη βάση μιας τέτοιας μαθησιακής διαδικασίας» (Freudenthal, 1991).

1.3. Σπουδαιότητα της μελέτης

Στην παρούσα μελέτη διερευνάται η επίδραση ενός υποθετικού μαθησιακού μονοπατιού στο λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας. Το μονοπάτι που σχεδιάστηκε από την ερευνήτρια αποτελείται από «φάσεις μάθησης και ανάπτυξης κατάλληλων υλικών βασισμένων στη θεωρία των van Hiele» (Crowley, 1987), στο βαθμό που έχουν παίξει καταλυτικό ρόλο στην ανάπτυξη της σκέψης των μαθητών. Θα εξεταστεί κατά πόσο η μαθηματική γλώσσα των μαθητών και οι μαθηματικές έννοιες προκύπτουν ως «*δυναμική επανεφεύρεση*» σε δυναμικό περιβάλλον. Η προσέγγιση του στόχου μέσω των μετασχηματισμών των γεωμετρικών αντικειμένων στηρίζεται σε προηγούμενες μελέτες (Coxford & Usiskin, 1975; Freudenthal, 1973; Edwards, 1991; Clements, 2003; Hollebrands, 2003, 2004, 2006, 2007).

Το υποθετικό μαθησιακό μονοπάτι, ένα γνωστικό εργαλείο που βασίζεται στον κονστρουκτιβισμό, προσπαθεί να προβλέψει τον τρόπο σκέψης στον οποίο ανταποκρίνονται οι μαθητές και αποτυπώνει την υποτιθέμενη μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών με τη δυνατόν μεγαλύτερη προσέγγιση. Σύμφωνα με τον Simon (1995) ένα υποθετικό μαθησιακό μονοπάτι περιλαμβάνει «το μαθησιακό στόχο, τις μαθησιακές δραστηριότητες και τη σκέψη και μάθηση στην οποία πρέπει να εμπλακούν οι μαθητές» (p. 133). Ομοίως, οι Clements & Sarama (2002), δηλώνουν ότι τρεις είναι οι βασικές συνιστώσες ενός μαθησιακού μονοπατιού. Μια βασική συνιστώσα του μαθησιακού μονοπατιού περιλαμβάνει το μαθηματικό στόχο. Δηλαδή, τον πυρήνα των 'κεντρικών ιδεών' (big ideas) (Schifter & Fosnot, 1993) που εμπλέκονται και διαμορφώνουν το μονοπάτι. Η δεύτερη συνιστώσα είναι τα επίπεδα σκέψης από τα οποία διέρχεται ο μαθητής προκειμένου να αναπτύξει την κατανόηση και τις δεξιότητες στο θέμα, και η τρίτη συνιστώσα αφορά τις εκπαιδευτικές δραστηριότητες [π.χ, τα μαθηματικά προβλήματα, τα αρχεία ενός λογισμικού που διαμεσολαβούν στην εμπειρική κατανόηση των εννοιών] που προσαρμόζονται σε κάθε επίπεδο σκέψης (Clements & Sarama, 2002, p.2).

Η κατασκευή υποθετικών μαθησιακών μονοπατιών στα Μαθηματικά έχει απασχολήσει πολλούς ερευνητές (Simon, 1995; Clements, Battista & Sarama, 2001; Clements & Sarama, 2004; Clements, Wilson, & Sarama, 2004; Smith, Wiser, Anderson, & Krajcik, 2006; Corcoran, Mosher & Rogat, 2009; Gravemeijer, Bowers & Stephan, 2003). Οι Corcoran, Mosher & Rogat (2009) επισημαίνουν μάλιστα ότι «Οι μελέτες που αφορούν τα βασισμένα στην έρευνα Προγράμματα Σπουδών αναδεικνύουν ότι αυτά παρουσιάζουν κοινά χαρακτηριστικά: τη δημιουργία και τη διατήρηση συνδέσεων μεταξύ της έρευνας και της ανάπτυξης του Προγράμματος Σπουδών ως αλληλεπιδραστικών διαδικασιών, τη χρήση ενός ευρέος φάσματος επιστημονικών μεθοδολογιών, τη διατήρηση στενών συνδέσεων μεταξύ των προβλημάτων (tasks) και του μαθηματικού συλλογισμού (σκέψης) των παιδιών με τη χρήση κάποιου τύπου μαθησιακού μονοπατιού».

Η επιλογή των *τετραπλεύρων* ως πεδίου της μελέτης προέκυψε μετά την παρατήρηση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην εκμάθηση της έννοιας λόγω της ιεραρχικής δομής τους. Στο συμπέρασμα αυτό η ερευνήτρια οδηγήθηκε αφενός μέσω της προσωπικής διδακτικής της εμπειρίας στην παραδοσιακή διδασκαλία, η οποία την οδήγησε να συμπεράνει ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν την εννοιολογική δομή των τετραπλεύρων, και αφετέρου μέσω της έρευνας που διεξήγαγε για τη συγγραφή της διπλωματικής της εργασίας στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα του ΕΚΠΑ (Πατσιομίτου, 2005) με μαθητές Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Η έρευνα ήταν η αφετηρία προκειμένου να εξεταστούν διεξοδικότερα τα αποτελέσματα που μπορεί να έχουν τα ημιπροκατασκευασμένα συνδεόμενα διαγράμματα σε διαδοχικές εκπαιδευτικές δραστηριότητες (Πατσιομίτου, 2005; Patsiomitou, 2007), ως προς την κατασκευή εννοιών, την ανάπτυξη της κατανόησης, της επιχειρηματολογίας και της αφαιρετικής ικανότητας. Επομένως, ο σχεδιασμός των ημιπροκατασκευασμένων δυναμικών αναπαραστάσεων στο δυναμικό περιβάλλον του λογισμικού είχε επίδραση στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές οικοδόμησαν τις εσωτερικές αναπαραστάσεις για τις μαθηματικές έννοιες κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων όπως επιβεβαιώθηκε και σε άλλες μελέτες (ενδεικτικά Patsiomitou, 2007, 2008 a, b, c, d, 2009, 2010, 2011), είτε αυτές απευθύνονταν στο μεμονωμένο μαθητή είτε στο μαθητή σε περιβάλλον συνεργασίας με άλλους (π.χ ομάδα συνεργασίας, περιβάλλον τάξης).

Η ανάπτυξη μιας έννοιας επιδέχεται επιστημολογική, ιστορική και γνωστική ανάλυση, ώστε να διερευνηθεί πώς αυτή εξελίχθηκε στη διάρκεια των χρόνων, θέματα τα οποία δεν αποτελούν στόχο μελέτης της παρούσας διατριβής. Κατά την επισκόπηση της βιβλιογραφίας εντοπίστηκαν έρευνες που αφορούν:

- τη μελέτη της επίδρασης που έχουν οι κατασκευαστικές διαδικασίες τετραπλεύρων σε λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας στον τρόπο συλλογισμού των μαθητών (βλ. ενδεικτικά Mariotti, 1997, 2001; Vincent, 1998; Vincent & McCrae, 2001; Leung & Or, 2007)
- την ανάπτυξη διαφορετικών ειδών συλλογισμού κατά τη χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας σε προβλήματα με τετράπλευρα (βλ. ενδεικτικά Hoyles, 1998; Arzarello et al., 1998; Hoyles & Healy, 1999; Mariotti, 2000; Hadas, Hershkowitz, & Schwarz, 2000; Marrades & Gutiérrez, 2000; Healy, 2000; Hölzl, 2001; Talmon & Yerushalmy, 2006)
- την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων [με τετράπλευρα] μοντελοποιημένων σε λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας (βλ. ενδεικτικά Arzarello, Micheletti, Olivero & Robutti, 1998; Weaver & Quinn, 1999; Healy, 2000; Hadas, Hershkowitz, and Schwarz, 2001; Hanna, 2001; Mariotti, 2001; Jones, 2001; de Villiers, 2004; Wares, 2004)
- τη διερεύνηση του τρόπου συλλογισμού των μαθητών όταν εξετάζουν τη συμμετρία των τετραπλεύρων (βλ. ενδεικτικά Arzarello, Micheletti, Olivero, & Robutti, 1998; Healy, 2000; Hadas, Hershkowitz & Schwarz, 2001; Mariotti, 2001; Jones, 2001; de Villiers, 2004; Wares, 2004; Leikin, 2004; Jiang, 2002; Christou, Mousoulides, Pittalis, & Pitta-Pantazi, 2004a, b; Belfort & Guimarães, 2004; Graumman, 2005)
- την επίδραση των μετασχηματισμών της περιστροφής και ανάκλασης μέσω του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας (βλ. ενδεικτικά Edwards, 1991; Natsoulas, 2000; Hollebrands, 2003, 2004, 2006).

Κατά την έρευνα στο Διαδίκτυο σε εξειδικευμένες βάσεις δεν εντοπίστηκαν εργασίες που είχαν ως στόχο την ανάπτυξη του επιπέδου της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών μέσω Συνδεόμενων Οπτικών Ενεργών Αναπαραστάσεων δομημένων, ημι-δομημένων και αδόμητων σε λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, όπως προτείνεται στην παρούσα μελέτη.

Η σύνθεση του υποθετικού μαθησιακού μονοπατιού βασίζεται σε 4 διερευνητικές φάσεις και αποτελεί μια πρωτότυπη προσέγγιση η οποία δεν έχει ελεγχθεί ερευνητικά σε στατικό ή δυναμικό περιβάλλον. Οι φάσεις περιληπτικά έχουν αναφερθεί (βλ. ενδεικτικά Patsiomitou & Emvalotis, 2009, 2010 a, b): (1) διερεύνηση και κατασκευές τετραπλεύρων με έμφαση στο μενού Κατασκευή (2) διερεύνηση και κατασκευές τετραπλεύρων με έμφαση στο μενού Μετασχηματισμός (3) διερεύνηση ανοικτών προβλημάτων και (4) κατασκευή και μετασχηματισμός ημιπροκατασκευασμένων τύπων Συνδεόμενων Οπτικών Ενεργών Αναπαραστάσεων (LVAR).

Οι φάσεις συνδέονται μεταξύ τους ως προς το εννοιολογικό περιεχόμενο, τη σειρά εισαγωγής των τεχνολογικών εργαλείων μέσω του λογισμικού, και την αυξανόμενη πολυπλοκότητα τόσο σε σε διαδικαστικό όσο και σε εννοιολογικό επίπεδο. Καθώς η έρευνα επικεντρώνεται στην αλληλεπίδραση των μαθητών με τα εργαλεία του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας Geometer's Sketchpad και την επίδρασή τους στις διατυπώσεις και τα επίπεδα σκέψης των μαθητών, η εμπειρική διερεύνηση θα παράσχει τη γνωστική ανάλυση του προβλήματος. Ειδικότερα θα αφορά την ανάλυση: (α) του τρόπου με τον οποίο αλληλεπιδρούν οι μαθητές αφενός με τα εργαλεία που χρησιμοποιούν (μέσω του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας) και αφετέρου μεταξύ τους, με τη διαμεσολάβηση των εργαλείων, και (β) των μετασχηματισμών που υφίστανται οι λεκτικές διατυπώσεις σε διάφορα επίπεδα και σε διαφορετικές φάσεις της έρευνας για τον κάθε μαθητή.

1.3.1. Πρωτοτυπία της μελέτης - Συνδεόμενες Οπτικές Ενεργές Αναπαραστάσεις (ΣΟΕΑ)

Η έννοια της αναπαράστασης και της οπτικοποίησης των μαθηματικών αντικειμένων έχει υποκινήσει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών (ενδεικτικά αναφέρονται Presmeg, 1986, 1998; Janvier, 1987; Vergnaud, 1987; Vinner, 1989; Eisenberg & Dreyfus, 1990; Dreyfus, 1991; Glasensferd, 1991, 1995; Zimmermann & Cunningham, 1991; Dubinsky, 1994; Kaput, 1987, 1989, 1991, 1999, 2001; diSessa, 1994; Duval, 1995, 2006; Aspinwall, 1995; Ainsworth, 1999, 2006). Οι αναπαραστάσεις διαχωρίζονται σε δυο κατηγορίες τις στατικές και τις δυναμικές. «Οι δυναμικές αναπαραστάσεις […] έχουν διαφορετική λειτουργία από τις στατικές και συνεπώς οι μαθητές σχηματίζουν διαφορετικά συμπεράσματα σε αλληλεπίδραση» (Jones, 1998; Lowe, 2003 οπ. αναφ. στο Ainsworth, 2006, p. 191). Στη διεθνή βιβλιογραφία αναφέρονται μελέτες σχεδιασμού μικροκόσμων έτσι ώστε πολλαπλές δυναμικές διασυνδεδεμένες αναπαραστάσεις να χρησιμοποιηθούν για τη μάθηση μαθηματικών εννοιών (βλ. ενδεικτικά Kaput, 1987, 1989, 1991, 1999, 2001; Hiebert & Carpenter, 1992; Kordaki & Potari, 1998; Kordaki, 2003). Με την έννοια των συνδεόμενων αναπαραστάσεων στην Άλγεβρα έχουν ασχοληθεί ερευνητές (βλ. ενδεικτικά Janvier, 1987; Kaput, 1989) οι οποίοι αποδίδουν την εννοιολογική κατανόηση στις συνδέσεις μεταξύ των αναπαραστάσεων. Οι Hegedus & Kaput (2004) έχουν χρησιμοποιήσει τις συνδεόμενες οπτικές αναπαραστάσεις στο περιβάλλον του λογισμικού SimCalc για να περιγράψουν πως οι μαθητές αναπτύσσουν την κατανόηση αλγεβρικών εννοιών. Η Even (1998) επίσης θεωρεί ότι η γνωστική σύνδεση μεταξύ των πολλαπλών αναπαραστάσεων αναπτύσσει τη διορατικότητα και τη βαθύτερη κατανόηση των εννοιών.

Για να υπερνικήσουν τις δυσκολίες μετάφρασης μεταξύ των αναπαραστάσεων, αυτά τα μαθησιακά υπολογιστικά περιβάλλοντα έχουν σχεδιαστεί να αξιοποιούν την αυτόματη μετάφραση ή τη «δυναμική σύνδεση» (automatic translation or “dyna-linking”) (Ainsworth, 1999, p. 133). Σ' αυτήν την περίπτωση, καθώς ένας μαθητής ενεργεί σε μια αναπαράσταση, τα αποτελέσματα των ενεργειών του παρουσιάζονται σε άλλη. Οι δυναμικές συνδεόμενες (ή συνδεδεμένες) αναπαραστάσεις

> μειώνουν το γνωστικό φορτίο του μαθητή, και καθώς ο υπολογιστής παρουσιάζει μεταφραστικές δραστηριότητες, οι μαθητές συγκεντρώνονται στις ενέργειες τους και στις συνέπειες των ενεργειών τους στις αναπαραστάσεις. Ο Kaput (1992) θεωρεί ότι αυτή η ιδιότητα είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική μόνο όταν οι αναπαραστάσεις που εμπλέκονται εκφράζουν ακολουθίες ενεργειών παρά τελικά αποτελέσματα, καθώς η έρευνα έχει δείξει ότι είναι ιδιαίτερα δύσκολο για τους μαθητές (Ainsworth, 2006, p. 195).

Στην κατηγορία των μικρόκοσμων που έχουν την δυνατότητα κατασκευής και χρήσης πολλαπλών δυναμικών διασυνδεδεμένων αναπαραστάσεων λόγω των αλληλεπιδραστικών τεχνικών τους, ανήκουν και τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας. Η Kordaki (2003) χρησιμοποίησε τις συνδεόμενες αναπαραστάσεις που προκύπτουν στο λογισμικό Cabri Geometry II για να εκμεταλλευτεί την δυνατότητα που παρέχουν οι συνεχείς μετασχηματισμοί του δυναμικού περιβάλλοντος.

Ο σχεδιασμός των ΣΟΕΑ (LVAR) είναι μια σύνθεση μετασχηματισμών στις δυναμικές Οπτικές Μαθηματικές Αναπαραστάσεις (ΟΜΑ) μέσω των αλληλεπιδραστικών τεχνικών στο λογισμικό, δηλαδή μέσω «αναπαραστάσεων που κωδικοποιούν τις ιδιότητες και σχέσεις για έναν αναπαριστώμενο κόσμο που αποτελείται από μαθηματικές δομές ή έννοιες» (Cuoco & Curcio, 2001; Hitt, 2002). Η σύνδεση αυτή βασίζεται στο μαθηματικό εικονικό αναπαραστασιακό πλαίσιο στο οποίο ο μαθητής καλείται να αναλύσει και συνθέσει τη λύση του προβλήματος η οποία αποτελεί μια ιδιαίτερη μορφή *οριζόντιας μαθηματικοποίησης,* με τη συσχέτιση των αναπαραστασιακών δομών οι οποίες μπορούν να συνδεθούν και πληρούν τις προϋποθέσεις των οπτικών αναπαραστάσεων (Sedig & Sumner, 2006). Πρόκειται δηλαδή για την *οριζόντια μαθηματικοποίηση* ενός πραγματικού προβλήματος (Ramsussen et al., 2000), καθώς η σύνδεση των αφηρημένων γεωμετρικών συμβολικών αναπαραστάσεων που προκύπτουν από τους μαθητές αναφέρεται στην *κατακόρυφη μαθηματικοποίηση*.

Η διαδικασία σχεδιασμού στο λογισμικό και τα αποτελέσματα της έρευνας με τους μαθητές οδήγησαν στην ανάγκη να εισαχθεί η έννοια των Συνδεόμενων Οπτικών Ενεργών Αναπαραστάσεων (ΣΟΕΑ) (ενδεικτικά Patsiomitou, 2008 a,b, 2010; Patsiomitou & Koleza, 2008, 2009; Πατσιομίτου, 2008).

> **Συνδεόμενες Οπτικές Ενεργές Αναπαραστάσεις** (ΣΟΕΑ): είναι οι διαδοχικές φάσεις των δυναμικών αναπαραστάσεων του προβλήματος που συνδέουν τα κατασκευαστικά αναπαραστατικά βήματα του προβλήματος προς λύση, προκειμένου να αποκαλυφθεί μια συνεχώς αυξανόμενη εποικοδομητική πολυπλοκότητα. Δεδομένου ότι οι αναπαραστάσεις στηρίζονται σε προηγούμενες κατασκευαστικές ενέργειες και επομένως είναι πιο σύνθετες, περίπλοκες και ολοκληρωμένες από τις προηγούμενες σταδιακές μορφές λόγω των ενεργειών του μαθητή (ή του δασκάλου σε μια ημι-προσχεδιασμένη δραστηριότητα) με επιλογή των κατάλληλων τεχνικών αλληλεπίδρασης στοχεύουν να εξωτερικεύσουν τα μετασχηματιστικά βήματα που έχουν (οι μαθητές ή ο δάσκαλος προβλέποντας τις ενέργειες των μαθητών) σχηματίσει νοητικά.

Οι ΣΟΕΑ ερμηνεύονται ως «η κωδικοποίηση ιδιοτήτων και σχέσεων του αναπαριστώμενου κόσμου που αποτελείται από μαθηματικές δομές ή έννοιες» (Sedig & Sumner, 2006) στο λογισμικό, όπου το πρόβλημα μοντελοποιείται, δηλαδή σύμφωνα με τους Goldin & Janvier (1998, p.1): α) «μια φυσική κατάσταση ή κατάσταση στο φυσικό περιβάλλον» διαμορφωμένη από μαθηματική άποψη που ενσωματώνει τις μαθηματικές ιδέες και β) με κατάλληλο συνδυασμό «συντακτικών και δομικών χαρακτηριστικών» που ενισχύονται με επιλεγμένες *βασικές* ή *στόχο-βασισμένες* (Sedig & Sumner, 2006) διαφορετικές τεχνικές αλληλεπίδρασης.

1.3.1.1. Συνδεόμενες Οπτικές Ενεργές Αναπαραστάσεις και θεωρία των van Hiele

Ορισμένα από τα συμπεράσματα της μελέτης αναφορικά με τις ημιπροκατασκευασμένες ΣΟΕΑ, τη λήψη αποφάσεων για τις χρησιμοποιούμενες τεχνικές αλληλεπίδρασης, και τη λήψη ανατροφοδότησης στις διαδικασίες για την παρουσίαση αποδείξεων των μαθητών έχουν παρουσιαστεί σε διεθνή συνέδρια (ή περιοδικά) και συσχετίζονται με την ανάπτυξη του επιπέδου van Hiele των μαθητών (ενδεικτικά Patsiomitou, 2008a, b, 2010, 2012; Patsiomitou & Koleza, 2008, 2009; Patsiomitou & Emvalotis, 2009a, b, 2010a, b).

Αναφερόμενοι λοιπόν στις ΣΟΕΑ (LVAR) εισάγεται ο ορισμός μιας *νέας ιδέας* στη διεθνή βιβλιογραφία, συνεισφέροντας και εμπλουτίζοντας τη γνώση (Blaxter, Hughes & Tischer, 2001). Η διάκριση των ΣΟΕΑ σε 5 διαφορετικούς τύπους (LVAR modes) (π.χ. Patsiomitou, 2008b; Patsiomitou, 2010; Patsiomitou & Emvalotis, 2009) στη βάση της θεωρίας των van Hiele αποτελεί καινοτόμο επέκταση του θεωρητικού πλαισίου των συνδεόμενων αναπαραστάσεων. Η θεωρία των φάσεων κατά van Hiele χρησιμοποιείται για την ερμηνεία της κατηγοριοποίησης των τύπων των ΣΟΕΑ ως προς τη δόμησή τους – τη σχεδίαση των μοντελοποιημένων προβλημάτων με διασύνδεση καταλλήλων αλληλεπιδραστικών τεχνικών στο περιβάλλον του Sketchpad και μπορούν να υποστηρίξουν και να ενισχύσουν τη διατύπωση εικασιών και την ανάπτυξη της αποδεικτικής διαδικασίας.

Οι τύποι κατασκευής των ΣΟΕΑ συσχετισμένες με τις μαθησιακές φάσεις κατά van Hiele που αναφέρθηκαν ανωτέρω περιγράφονται ως εξής (π.χ. Patsiomitou, 2008b, 2010; Patsiomitou & Emvalotis, 2009, Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2009):

Α Τύπος-διερευνητικός/πληροφοριακός: Σε αυτή τη φάση του προβλήματος, οι μαθητές εξοικειώνονται με το υπό διερεύνηση πεδίο (πρόβλημα ή θεωρία) χρησιμοποιώντας τα στιγμιότυπα των διαγραμμάτων που τους οδηγούν να ανακαλύψουν μια ορισμένη δομή.

Β Τύπος-καθοδηγούμενης ανακάλυψης: Τα διαδοχικά συνδεδεμένα κατασκευαστικά βήματα της λύσης προκύπτουν σταδιακά.

Γ Τύπος-επεξηγηματικός: Οι μετασχηματισμοί στις όλο και πιο σύνθετες συνδεόμενες δυναμικές αναπαραστάσεις της ίδιας φάσης του προβλήματος τροποποιούν ταυτόχρονα τις εμφανιζόμενες σχηματικές μορφοποιήσεις.

Δ Τύπος-ελεύθερης ανακάλυψης: Κάθε φάση στη λύση τοποθετείται ώστε να παρουσιαζουν τα διαδοχικά κατασκευαστικά βήματα της λύσης στην ίδια σελίδα του λογισμικού σε μια επισκόπηση.

Ε **Τύπος-ολοκλήρωσης**: Οι διαδοχικές μορφοποιήσεις στις διαφορετικές σελίδες, που συνδέονται γνωστικά και όχι πάντα κατασκευαστικά, συνθέτουν σφαιρικά τη λύση στο πρόβλημα ως σειρά βημάτων.

Η κατηγοριοποίηση των τύπων κατασκευής των ΣΟΕΑ μέσω του πειράματος περιγράφει και τον τρόπο με τον οποίο διαμορφώνονται οι υποθέσεις όταν οι μαθητές αντιμετωπίζουν ένα πρόβλημα στο δυναμικό περιβάλλον· πώς διαχειρίζονται τη μετάβαση από τον τύπο Α (διερευνητικό) και τον τύπο Β (κατευθυνόμενου προσανατολισμού) στον τύπο Ε (ολοκλήρωση), δηλαδή τη μετάβαση από τη δημιουργία εικασιών και την ανάπτυξη απαγωγικού συλλογισμού στη φάση κατασκευής αποδείξεων και ανάπτυξης παραγωγικού συλλογισμού (π.χ. ενδεικτικά Arzarello et al., 1998).

Ευρύτερος στόχος «είναι να επεκταθεί το πλαίσιο των συνδεδεμένων αναπαραστάσεων [μέσω των λογισμικών] ώστε να χρησιμοποιηθούν για το σχεδιασμό της διδασκαλίας και, ειδικότερα, για τα σχολικά προγράμματα σπουδών» (Kaput, 1991, p. 279).

1.4. Η δομή της μελέτης

Κεφάλαιο 1: Παρουσιάζεται το πρόβλημα της κατανόησης της γεωμετρίας που αντιμετωπίζουν οι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και εξετάζεται πώς η *θεωρία των van Hiele* μπορεί να αποτελέσει τη βάση για τη σχεδίαση υποστηρικτικών υλικών του Προγράμματος Σπουδών. Σε συνοπτική επισκόπηση, εξετάζεται η αξιοπιστία της θεωρίας και των τεστ van Hiele και επισημαίνεται αφενός ο ρόλος της γλώσσας στη μελέτη της ανόδου των επιπέδων των μαθητών καθώς και ο τρόπος με τον οποίο αξιολογείται αυτή η άνοδος και αφετέρου ο ρόλος των υποστηρικτικών υλικών στη γνωστική ανάπτυξη. Μέτρο σύγκρισης της προόδου των μαθητών στα επίπεδα van Hiele κρίνεται ότι είναι ο μετασχηματισμός του τρόπου με τον οποίο ο μαθητής ορίζει τα γεωμετρικά αντικείμενα της μελέτης, αλλά και η αιτιολόγηση των φαινομένων σε περιβάλλον χαρτί-μολύβι ή σε δυναμικό περιβάλλον καθώς αυτός μετακινείται μεταξύ των επιπέδων. Οι περισσότερες έρευνες προτείνουν αλλαγές στο Πρόγραμμα Σπουδών και στον τρόπο διδασκαλίας των γεωμετρικών εννοιών καθώς και τον εμπλουτισμό με υποστηρικτικά υλικά (φυσικά ή ψηφιακά) προκειμένου να αλλάξει η φύση της εκμάθησης της γεωμετρίας. Σε μια σύντομη ανάλυση συμπεραίνεται ότι η εκπαίδευση των μαθηματικών πρέπει να είναι μια διαδικασία *δυναμικής επανεφεύρεσης* και εξετάζεται πώς το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας συντείνει στην *επανεφεύρεση της γνώσης* και οι μαθητές έχουν έτσι τη «δυνατότητα να οικοδομήσουν τη δική τους μαθηματική γνώση. Εξετάζεται επίσης η διαφορά του Προγράμματος Σπουδών από μια *μαθησιακή τροχιά* που οικοδομείται σύμφωνα με τις ανάγκες των μαθητών καθώς και πώς η υποθετική μαθησιακή τροχιά στο λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, η οποία στην παρούσα εργασία αποτελείται από «φάσεις μάθησης και κατάλληλα [ψηφιακά] υλικά βασισμένα στη θεωρία των van Hiele» (Crowley, 1987), θα παίξει καταλυτικό ρόλο στην κατασκευή της απόδειξης και στη γνωστική ανάπτυξη των μαθητών. Ακόμα ο ρόλος των Συνδεόμενων Οπτικών Ενεργών Αναπαραστάσεων στη διεθνή βιβλιογραφία τη σχετική με τη θεωρία των van Hiele. Η σύνθεση του δυναμικού Υποθετικού Μαθησιακού Μονοπατιού (δ-ΥΜΜ) αποτελεί μια πρωτότυπη προσέγγιση η οποία όμως δεν έχει ελεγχθεί ερευνητικά σε στατικό ή δυναμικό περιβάλλον. Γενικότερος στόχος «είναι να επεκταθεί το πλαίσιο για τις συνδεδεμένες αναπαραστάσεις [μέσω των λογισμικών] ώστε αυτές να χρησιμοποιηθούν για το σχεδιασμό της διδασκαλίας και ειδικότερα για τα σχολικά προγράμματα σπουδών» (Kaput, 1991, p. 279).

Κεφάλαιο 2: Σε μια σύντομη επισκόπηση εξετάζεται τόσο η έννοια του *κοινωνικού κονστρουκτιβισμού* (social constructivism), ως διαδικασίας ταυτόχρονα κονστρουκτιβιστικής και αλληλεπιδραστικής, όσο και ο ρόλος των γνωστικών συγκρούσεων στην κατασκευή της γνώσης. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά κάθε επιπέδου στη θεωρία των van Hiele και συγκρίνονται οι περιγραφές των Battista (2007), Mason (1998), Burger & Shaugnessy (1986) – των τριών κυριότερων συντελεστών στη διαμόρφωση των χαρακτηριστικών των επιπέδων van Hiele. Αναλύεται ο ρόλος των φάσεων στη μαθησιακή διαδικασία και εξετάζονται οι γεωμετρικές ικανότητες και ο μετασχηματισμός τους ως κριτήριο γνωστικής ανάπτυξης του μαθητή. Σύμφωνα με τους περισσότερους ερευνητές (π.χ. Hoffer, 1981; Burger & Shaughnessy, 1986; Gutierrez, Jaime, & Fortuny, 1991, Jaime & Guitierrez, 1994, 1998), το επίπεδο ενός μαθητή επιτρέπει να εξετάσουμε τον τρόπο που ορίζει ένα γεωμετρικό αντικείμενο, αιτιολογεί τα συμπεράσματά του και αποδεικνύει τους ισχυρισμούς του, δηλαδή πώς χρησιμοποιεί διαδικασίες ορισμού, απόδειξης και ταξινόμησης των σχημάτων, ζητήματα που αναλύονται διεξοδικά. Διακρίνεται η έννοια της *επιχειρηματολογίας* από την έννοια της απόδειξης και περιγράφεται το μοντέλο του Toulmin για την ανάλυση της δομής των επιχειρημάτων του εμπειρικού τμήματος της έρευνας. Επίσης διακρίνονται τα είδη του συλλογισμού που οι μαθητές αναπτύσσουν κατά την επίλυση προβλημάτων. Επισημαίνεται η διαφορά αιτιολόγησης και επιχειρηματολογίας και περιγράφονται τα είδη αποδεικτικών σχημάτων που αναπτύσσονται από τους μαθητές στις κύριες κατηγοριοποιήσεις που έχουν αναπτυχθεί από τους Bell (1976a, b), Balachef (1988) και Harel & Sowder (1998, 2007, 2009), Sowder & Harel (1998), Harel (2008). Εξετάζεται ο ρόλος των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας στην ανάπτυξη των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης όπως και γιατί το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Geometer’s Sketchpad έδειξε ότι ήταν κατάλληλο για πρόκληση γνωστικών συγκρούσεων, ανάπτυξη ικανότητας παραγωγικών επιχειρημάτων και άνοδο του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης των μαθητών, σύμφωνα με τη θεωρία των van Hiele. Τίθενται τα θεμέλια για την εξέταση του ρόλου των δυναμικών αναπαραστάσεων, ως «καναλιού επικοινωνίας», και πώς μεσολαβούν στην ανάπτυξη του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης. Ακολουθεί η ανάλυση της έννοιας του δυναμικού διαγράμματος ως τύπου *δυναμικής οπτικής μαθηματικής αναπαράστασης* (ΟΜΑ), δηλαδή ως «μιας [δυναμικής] αναπαράστασης που κωδικοποιεί οπτικά λειτουργικές, δομικές, και σημασιολογικές ιδιότητες και σχέσεις ενός αναπαριστάμενου κόσμου – είτε αφηρημένου είτε συγκεκριμένου που αποτελείται από μαθηματικές δομές ή έννοιες» (Sedig & Sumner, 2006, p. 2). Εξετάζονται ποιες *αλληλεπιδραστικές τεχνικές* από την κατηγοριοποίηση των Sedig & Sumner (ό.π.) έχουν επηρεάσει το σχεδιασμό των δραστηριοτήτων του μαθησιακού μονοπατιού της έρευνας καθώς και η έννοια του δυναμικού σημείου και των ημιπροκατασκευασμένων διαγραμμάτων. Αναλύονται οι δυο κύριες διακρίσεις *του συρσίματος (θεωρητικό και πειραματικό*) λόγω των ενεργειών των μαθητών αλλά και οι έννοιες των μετασχηματισμών της περιστροφής και της ανάκλασης. Επίσης η έννοια της *εργαλειακής αποκωδικοποίησης* και της *Ανακλαστικής Οπτικής Αντίδρασης*. Το τελευταίο μέρος του θεωρητικού πλαισίου αναφέρεται στη *θεωρία της εργαλειακής γένεσης* του Rabardel (1995) αλλά και στο ρόλο του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας και του δυναμικού προβλήματος, ως *εργαλείου διαμεσολάβησης*.

Κεφάλαιο 3: Παρουσιάζεται η ερευνητική μεθοδολογία που εφαρμόστηκε στην παρούσα εργασία. Η έρευνα αποτελεί μια *ποιοτική μελέτη* (Merriam, 1998) με *ημιπειραματικό σχεδιασμό* (quasi-experimental) (Campbell & Stanley, 1963). Η μελέτη της πειραματικής ομάδας εξελίχθηκε μέσα από ένα διδακτικό πείραμα *έρευνας δράσης* (action research). Διατυπώνονται τα ερευνητικά ερωτήματα και αναλύεται η έννοια της έρευνας δράσης, «ως αναστοχαστικής σπείρας σχεδιασμού (προγραμματισμού), των ενεργειών και της παρατήρησης» (Steketee, 2004, p. 876). Παρουσιάζονται το μαθηματικό πλαίσιο της έρευνας και η μέθοδος με την οποία αξιολογήθηκαν οι δύο ομάδες, καθώς και τα ερευνητικά εργαλεία (προβλήματα της έρευνας στο στατικό και δυναμικό περιβάλλον). Η επιλογή υποκειμένων έγινε με πρόθεση μεταξύ των εθελοντών μαθητών που καλείται «σκόπιμη» (Chein, 1981). Επισημαίνονται τα χαρακτηριστικά κάθε μαθητή καθώς και οι προϋποθέσεις που τηρήθηκαν. Παρατίθεται η διαδικασία που ακολουθήθηκε για τη συλλογή και επεξεργασία των δεδομένων. Η ανάγκη για κατανόηση και επεξήγηση των φαινομένων που παρατηρήθηκαν οδήγησε στην ποιοτική μεθοδολογία για την ανάλυση των δεδομένων. Για αυτή τη μελέτη επιλέχθηκε η μέθοδος της *σταθερής συγκριτικής προσέγγισης* (constant comparative method) με σκοπό να παραχθεί μια *θεμελιωμένη θεωρία* (grounded theory) (Strauss & Corbin, 1990, 1998). Τέλος, περιγράφονται οι κατηγορίες της ανάλυσης και οι τρεις φάσεις κωδικοποίησης με βάση τη σταθερή συγκριτική μέθοδο, οι οποίες είναι: *ανοικτή κωδικοποίηση, αξονική κωδικοποίηση και επιλεκτική κωδικοποίηση* (Open Coding, Axial Coding, and Selective Coding).

Στη συνέχεια αναλύεται λεπτομερώς η έννοια του μαθησιακού μονοπατιού και ο ρόλος του στην ανάπτυξη του Προγράμματος Σπουδών. Παρουσιάζονται οι τρεις κύριες συνιστώσες του *μαθηματικού διδακτικού κύκλου* όπως προσαρμόστηκαν για την παρούσα εργασία και οι βασικές αρχές του σχεδιασμού του καθώς και ο μείζων ρόλος που παίζουν η δομή του σχεδιασμού των δραστηριοτήτων και η αλληλουχία τους στη διαδικασία. Αναλύονται οι τέσσερις φάσεις οι οποίες θεμελιώνονται στη θεωρία των van Hiele, ως *διαδικασία σχεδιασμού και ανασχεδιασμού* της αρχικής πορείας προκειμένου να υπερβούν οι μαθητές *γνωστικά και εργαλειακά εμπόδια*. Περιγράφεται η πρώτη φάση της μελέτης –μέσω του δ-ΥΜΜ από την οπτική γωνία της διδασκαλίας και εκμάθησης της γεωμετρίας– όπου εξετάζεται το γεωμετρικό αντικείμενο της μελέτης και η θεωρητική του μελέτη, η *υποθετική ανάλυση σχεδιασμού* και η ανάλυση των τεχνικών αλληλεπίδρασης των τεσσάρων παραλληλογράμμων. Η δεύτερη φάση διακρίνεται στις εξής υποφάσεις. Στάδιο Α: *Το τμήμα αναγνώρισης-οπτικοποίησης* της δεύτερης φάσης. Στάδιο Β: Το τμήμα *αντιληπτικής δομικής ανάλυσης* της δεύτερης φάσης. Στάδιο Γ: Το τμήμα *αυστηρής δομικής ανάλυσης* της δεύτερης φάσης. Στάδιο Δ: Το τμήμα *ιεραρχικής δομικής ανάλυσης* της δεύτερης φάσης. Ακολουθεί η τρίτη φάση με τη διερεύνηση και την απόδειξη ανοικτού προβλήματος (το πρόβλημα του Varignon). Εξετάζεται πώς ο Graumann (2005) ιεραρχεί τα τετράπλευρα βάσει των διαγωνίων τους και αναπροσαρμόζεται το «σπίτι των τετραπλεύρων» του Graumann ώστε να περιλαμβάνει και τα τετράπλευρα στο εσωτερικό του σχήματος. Με αυτό τον τρόπο συσχετίζεται η μορφή του τετραπλεύρου (εσωτερικού-εξωτερικού) που είναι αναγκαίο για την έρευνα. Στην τέταρτη φάση περιγράφονται οι *τύποι των Συνδεόμενων Οπτικών Ενεργών Αναπαραστάσεων* και ο ρόλος των *ημιπροκατασκευασμένων διαγραμμάτων* στην παρούσα εργασία.

Κεφάλαιο 4: Αναλύονται τα δεδομένα της ερευνητικής διαδικασίας στο δυναμικό μέσο με τους μαθητές της πειραματικής ομάδας. Κάθε μαθητής ελέγχεται για την ικανότητα μετατροπής αναπαραστάσεων, δομικής ανάλυσης των σχημάτων, κατασκευής εννοιών-εν-δράσει και ανάπτυξης εννοιών (ορισμών, αποδείξεων). Επίσης εξετάζεται ο τύπος του αποδεικτικού σχήματος που οι μαθητές αναπτύσσουν κατά την αποδεικτική διαδικασία και ενώ αλληλεπιδρούν με το δυναμικό περιβάλλον και τις δραστηριότητες του δ-ΥΜΜ, από την αρχή μέχρι το τέλος της έρευνας. Διερευνάται το είδος συλλογισμού που αναπτύσσουν και συγκρίνεται η αρχική και τελική εξέλιξη του μαθητή, ως προς τους ορισμούς, την ικανότητα απόδειξης και την ανάπτυξη παραγωγικού συλλογισμού.

Στη συνέχεια εξετάζεται η μελέτη στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι τόσο για τους μαθητές της πειραματικής ομάδας όσο και της ομάδας ελέγχου. Επισημαίνονται τα χαρακτηριστικά που εμφανίστηκαν στα διαφορετικά στάδια σε έναν ή περισσότερους μαθητές και των δύο ομάδων επιπέδου 1 ή 2 van Hiele στο προ-τεστ. Παρουσιάζονται αποσπάσματα των γραπτών τεστ, περιληπτική ανάλυση του τρόπου σκέψης κάθε μαθητή μέσα από την επίλυση του προβλήματος αλλά και τη σύγκριση με την επίλυση προβλημάτων σε προηγούμενα στάδια της έρευνας, καθώς και ποια χαρακτηριστικά κάθε σταδίου εμφανίζονται στον καθένα.

Κεφάλαιο 5: Εκτίθενται τα αποτελέσματα της έρευνας. Συγκεκριμένα περιγράφεται συνοπτικά η εξέλιξη κάθε μαθητή της πειραματικής ομάδας και εξετάζεται αν έχει μεταβεί σε ένα υψηλότερο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης van Hiele, ως αποτέλεσμα της συμμετοχής του στην προτεινόμενη διδακτική ακολουθία μέσω του μαθησιακού μονοπατιού, συμπεριλαμβανομένων των ΣΟΕΑ (LVAR). Εκτίθενται ακόμα τα ποσοτικά αποτελέσματα της συγκριτικής μελέτης, τόσο για τους μαθητές επιπέδου 1 όσο και για τους μαθητές επιπέδου 2.

Ακολουθεί η συζήτηση της έρευνας. Γίνεται ανασκόπηση των μελετών που διεξήχθησαν τα προηγούμενα χρόνια και επισημαίνεται με ποιες από αυτές συμφωνεί η παρούσα εργασία. Ακόμα, εξετάζεται πώς η παρούσα εργασία συμβάλλει στη βιβλιογραφία τη σχετική με τη θεωρία των van Hiele, ποια ήταν τα συμπεράσματα από την απόδοση των μαθητών στο αντικείμενο της γεωμετρίας όταν αλληλεπίδρασαν με το υποστηρικτικό υλικό που σχεδίασε και εφάρμοσε στην ερευνητική διαδικασία η ερευνήτρια. Ειδικότερα, πώς το μαθησιακό μονοπάτι το οποίο οικοδομήθηκε με Συνδεόμενες Οπτικές Ενεργές Αναπαραστάσεις με τις οποίες αλληλεπίδρασαν οι μαθητές κατά τη διάρκεια της μελέτης συμβάλλει στη βιβλιογραφία τη σχετική με τη θεωρία των van Hiele, παρέχοντας μια πρωτότυπη ιδέα. Τέλος, ποιες προτάσεις υπάρχουν για βελτίωση της ερευνητικής διαδικασίας στο μέλλον.

Βιβλιογραφικές αναφορές: Ακολουθεί η παράθεση των βιβλιογραφικών αναφορών που χρησιμοποιήθηκαν στη μελέτη.

Παράρτημα: Περιλαμβάνει το μεταφρασμένο test van Hiele.

1.5. Λειτουργικοί ορισμοί της μελέτης

Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν οι λειτουργικοί ορισμοί που υιοθετήθηκαν από την ερευνήτρια για τις ανάγκες της μελέτης.

Ανεπαρκής (λανθασμένος) ορισμός (Govender & de Villiers, 2004, p.46): όταν περιέχει λανθασμένες, ανακριβείς ή ανεπαρκείς ιδιότητες.

Οικονομικός ορισμός (Govender & de Villiers, 2004, p.46): όταν περιέχει τα επαρκή και αναγκαία στοιχεία για να θεωρείται ο ορισμός πλήρης.

Μη οικονομικός ορισμός (Govender & de Villiers, 2004, p.46)**:** όταν περιέχει περισσότερα στοιχεία από τα αναγκαία.

Για τις ανάγκες της μελέτης η ερευνήτρια εισήγαγε τον τύπο του δυναμικού (αντιληπτικού) ή εμπειρικού ορισμού και του αυθαιρέτου οικονομικού ορισμού.

Δυναμικός (Αντιληπτικός) ή εμπειρικός ορισμός είναι ο τύπος του ορισμού που οι μαθητές αναπτύσσουν όταν αλληλεπιδρούν με το δυναμικό διάγραμμα και περιέχει συνδυασμό άτυπων και τυπικών εκφράσεων.

Αυθαίρετος οικονομικός ορισμός είναι ο διαφορετικός, εναλλακτικός αλλά σωστός ορισμός για την ίδια έννοια που περιέχει τα επαρκή και αναγκαία στοιχεία για να θεωρείται ο ορισμός πλήρης.

Μετασχηματιστικός συλλογισμός (Simon, 1996, p.201): «η νοητική ή φυσική εκτέλεση (enactment) μιας διαδικασίας ή μιας σειράς διαδικασιών σε ένα αντικείμενο ή σύνολο αντικειμένων που επιτρέπει σε κάποιον να προβλέψει τους μετασχηματισμούς στους οποίους αυτά τα αντικείμενα υποβάλλονται καθώς και το σύνολο των αποτελεσμάτων αυτών των διαδικασιών».

Παραγωγικός συλλογισμός (Ennis, 1969, p.7 στο Simon, 1996, p.197)**:** αρχίζει από έναν γενικό κανόνα και προχωρά σε ένα ιδιαίτερο συμπέρασμα ή με άλλα λόγια αναφέρεται στα συμπεράσματα που προέρχονται από μια λογική αλυσίδα συλλογισμών στην οποία κάθε επόμενο βήμα προκύπτει από κάποιο προηγούμενο.

Επαγωγικός συλλογισμός (Peirce, 1960 p. 372)**:** αρχίζει από μια ειδική περίπτωση και ολοκληρώνει με έναν γενικό κανόνα.

Απαγωγικός συλλογισμός (Peirce, 1960)**:** προκύπτει όταν κάποιος συμπεραίνει από τα αποτελέσματα την αιτία. Δηλαδή «παρατηρεί τα γεγονότα και αναζητά μια θεωρία για να τα εξηγήσει …ο γενικός τύπος της απαγωγής είναι: το γεγονός A παρατηρείται, αν το C ήταν αληθές τότε το A θα μπορούσε να ήταν αληθές, έτσι είναι λογικό να υποθέσουμε ότι το C είναι αληθές» (Peirce, 1960,)

Σχήματα απόδειξης (Proof schemes): «ταξινομούν τις αποδείξεις σύμφωνα με τις ιδιότητές τους ή το επίπεδο τυπικότητας προκειμένου να παράσχουν θεωρητική υποστήριξη για τις εμπειρικές μελέτες στοχεύοντας στην ερμηνεία της συμπεριφοράς των μαθητών όταν κατασκευάζουν μια απόδειξη» (Harel, 2008, p. 489)

Εμπειρική αιτιολόγηση (Bell, 1976a, b): Χαρακτηρίζεται από τη χρήση παραδειγμάτων ως στοιχείο πειθούς.

Παραγωγική αιτιολόγηση (Bell, 1976a, b): Χαρακτηρίζεται από τη χρήση παραγωγικού συλλογισμού για τη σύνδεση των δεδομένων με τα συμπεράσματα.

Κρίσιμο πείραμα (crucial experiment) (Balacheff, 1988, p.217): Μορφή εμπειρικής αιτιολόγησης στην οποία η δήλωση ελέγχεται με ένα προσεκτικά επιλεγμένο παράδειγμα όχι τυχαίο.

Γενικό παράδειγμα (generic example) (Balacheff, 1988, p.217): Μορφή εμπειρικής αιτιολόγησης που βασίζεται σε λειτουργίες ή μετασχηματισμούς σε ένα παράδειγμα που επιλέγεται σαν αντιπροσωπευτικό μιας κλάσης αντικειμένων.

Πείραμα σκέψης(thought experiment) (Balacheff, 1988, p.217): Μορφή εννοιολογικής /παραγωγικής αιτιολόγησης που βασίζεται σε ενέργειες ή δράσεις εσωτερικεύονται και αποσπώνται από τα ειδικά παραδείγματα που είναι ενδεικτικά με κάποιον άλλον τρόπο παρά από τα αποτελέσματα της χρήσης τους.

Θεώρημα-εν-δράσει (theorem-in-action), (Vergnaud, 1996): είναι ένας τύπος εμπειρικής απόδειξης η οποία εκφράζεται «με προτάσεις που το υποκείμενο θεωρεί αληθινές για μια κατηγορία μεταβλητών καταστάσεων ή σε συσχέτιση με τον πραγματικό κόσμο» (p. 225)

Έννοια-εν-δράσει (Vergnaud, 1996): είναι ουσιώδης συνιστώσα του θεωρήματος - εν- δράσει.

Μαθηματικό επιχείρημα (Krummheuer, 1995, p. 247): είναι μια ακολουθία τυπικών και άτυπων δηλώσεων τις οποίες μια ομάδα ατόμων που συμμετέχει στη συζήτηση αποδέχεται και μπορεί να ανακατασκευάσει.

Διαμεσολάβηση (Noss & Hoyles, 1996, p. 6)**:** η δυνατότητα δημιουργίας ενός καναλιού επικοινωνίας μεταξύ του δασκάλου και του μαθητή βασισμένη σε μια κοινή γλώσσα.

Σχήματα χρήσης (usage schemes) (Rabardel, 1995, p.84): είναι νοητικά σχήματα (Vergnaud, 1996) προσανατολισμένα στη διαχείριση του εργαλείου.

Σχήματα εργαλειοποιημένης δράσης (instrumented action schemes) (Rabardel, 1995, p.84): είναι σχήματα προσανατολισμένα στην εκτέλεση ενός συγκεκριμένου στόχου.

Υποθετικό μαθησιακό μονοπάτι (ΥΜΜ) (Simon, 1995, p. 133)**:** ο μαθησιακός στόχος, οι μαθησιακές δραστηριότητες, και η λειτουργία σκέψης και μάθησης στα οποία πρέπει να εμπλακούν οι μαθητές.

Για τις ανάγκες της μελέτης η ερευνήτρια εισήγαγε τους παρακάτω ορισμούς:

Συνδεόμενες Οπτικές Ενεργές Αναπαραστάσεις (ΣΟΕΑ) (ενδεικτικά Patsiomitou, 2008a, b, 2010): είναι οι διαδοχικές φάσεις των δυναμικών αναπαραστάσεων του προβλήματος που συνδέουν τα κατασκευαστικά αναπαραστατικά βήματα του προβλήματος προς λύση, προκειμένου να αποκαλυφθεί μια συνεχώς αυξανόμενη εποικοδομητική πολυπλοκότητα. Δεδομένου ότι οι αναπαραστάσεις στηρίζονται σε προηγούμενες κατασκευαστικές ενέργειες και επομένως είναι πιο σύνθετες, περίπλοκες και ολοκληρωμένες από τις προηγούμενες σταδιακές μορφές, λόγω των ενεργειών του μαθητή (ή του δασκάλου σε μια ημι-προσχεδιασμένη δραστηριότητα) με επιλογή των κατάλληλων τεχνικών αλληλεπίδρασης, στοχεύουν να εξωτερικεύσουν τα μετασχηματιστικά βήματα που έχουν (οι μαθητές ή ο δάσκαλος προβλέποντας τις ενέργειες των μαθητών) σχηματίσει νοητικά.

Ανακλαστική Οπτική Αντίδραση (ΑΟΑ) (Reflective Visual Reaction) (RVR) (ενδεικτικά Patsiomitou, 2008a, b, 2010). Δηλαδή, είναι εκείνη η αντίδραση του μαθητή που είναι βασισμένη στον αναστοχαστικό τρόπο σκέψης και προέρχεται από την αλληλεπίδραση με τις ΣΟΕΑ στο λογισμικό, διευκολύνοντας έτσι την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και την επίλυση των προβλημάτων.

Εργαλειακή αποκωδικοποίηση (Patsiomitou, 2011; Πατσιομίτου, 2011), η ικανότητα να αποκωδικοποιεί ο μαθητής/ χρήστης τις νοητικές του εικόνες με τη χρήση των εργαλείων, η οποία βασίζεται στη γνωστική ανάλυση του γεωμετρικού σχήματος (Duval, 1995).

Θεωρητικό σύρσιμο (Patsiomitou, 2011; Πατσιομίτου, 2011): όταν ο μαθητής στοχεύει να καταστήσει το *σχέδιο* που είναι στην οθόνη *σχήμα* ή όταν μετασχηματίζει με πρόθεση ένα σχέδιο ώστε να αποκτήσει κάποιες πρόσθετες ιδιότητες.

Πειραματικό σύρσιμο (Patsiomitou, 2011; Πατσιομίτου, 2011): όταν ο μαθητής διερευνά αν το σχήμα πληροί ορισμένες ιδιότητες ή αν η τροποποίηση (ανατοποθέτηση ή αλλαγή προσανατολισμού ή οπτική μετατροπή) του σχήματος οδηγεί στην κατασκευή ενός άλλου σχήματος.

Λεκτική κατανόηση της επιλογής των αντικειμένων(Patsiomitou, 2011, 2012; Πατσιομίτου, 2011, 2012): ο μαθητής διατυπώνει σε άτυπη ή τυπική δήλωση ποια αντικείμενα (εργαλεία, πρωτότυπα του λογισμικού) θα επιλέξει.

Σειριακή κατανόηση της επιλογής των αντικειμένων(Patsiomitou, 2011, 2012; Πατσιομίτου, 2011, 2012): ο μαθητής έχει κατανοήσει την σειρά επιλογής των αντικειμένων (για παράδειγμα όταν ένας μαθητής επιθυμεί να περιστρέψει ένα ευθύγραμμο τμήμα ως προς σημείο Ο, πρέπει να επιλέξει αρχικά το σημείο Ο με διπλό κλικ και στη συνέχεια το ευθύγραμμο τμήμα).

Θεσιακή κατανόηση(Patsiomitou, 2011, 2012; Πατσιομίτου, 2011, 2012): όταν εφαρμόζει την επιλογή των αντικειμένων με κατάλληλη ακολουθία ακόμα και αν υπάρχει διαφορετικός προσανατολισμός των επιλεγόμενων αντικειμένων.

Τυπική μαθηματική γλώσσα: ο μαθητής έχει ικανότητα να διατυπώνει την έκφραση του χρησιμοποιώντας μαθηματικούς όρους.

Δυναμική γλώσσα: η γλώσσα του μαθητή διαμορφώνεται για να συμπεριλάβει την γλώσσα που χρησιμοποιούμε στο λογισμικό.

Άτυπη γλώσσα: είναι οι μη μαθηματικές εκφράσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Θεωρητικό πλαίσιο

2.1. Η γνωστική ανάπτυξη των μαθητών -Κοινωνικός κονστρουκτιβισμός και θεωρία των van Hiele

Κεντρικό ζήτημα στη Διδακτική και τη Ψυχολογία των Μαθηματικών είναι ο τρόπος που οι μαθητές μαθαίνουν, δηλαδή ο τρόπος με τον οποίο κατασκευάζουν και μετασχηματίζουν τις μαθηματικές έννοιες (Cobb, Yackel & Wood, 1992, p.2). Στόχος είναι η γνωστική ανάπτυξη του μαθητή, η οποία μπορεί να προκύψει

- σταδιακά [π.χ, ο Piaget (1937/1971) υποστηρίζει ότι το παιδί διέρχεται διάφορα στάδια ωρίμανσης από το *αισθησιοκινητικό στο τυ*πικό]˙
- μέσω μεταφορών (metaphors) [π.χ., ο Lakoff (1993) ισχυρίζεται ότι η γνωστική ανάπτυξη βασίζεται στην ανθρώπινη αντίληψη και τις ενέργειες]˙
- ως ανάπτυξη των αποδεικτικών σχημάτων [π.χ., οι Balacheff (1988), Harel & Sowder (1998) υποστηρίζουν ότι η γνωστική ανάπτυξη είναι η μετάβαση από την *εμπειρική μορφή* αποδείξεων στη *νοητική/εννοιολογική*]˙
- ως σταδιακή μετάβαση από έναν τύπο αναπαράστασης σε έναν άλλο [π.χ., ο Bruner (1966) ανέπτυξε ένα μοντέλο τριών σταδίων των αναπαραστάσεων που βασίζεται στη μετάβαση από τις *ενεργητικές (enactive) ή πραξιακές*, στις *εικονικές (iconic)* και ολοκληρώνεται με τις *συμβολικές (symbolic)* αναπαραστάσεις]˙
- ως ικανότητα σταδιακής εξέλιξης των *εσωτερικών αναπαραστάσεων* που ο μαθητής κατασκευάζει [π.χ, ο Cifarelli (1998, 2000) επιχειρεί μια δυναμική προσέγγιση στην εξέλιξη των νοητικών αναπαραστάσεων του μαθητή].

Ο Tall (1995) θεωρεί ότι «η γνωστική ανάπτυξη […] μπορεί να προκύψει μέσω της αντίληψης και ως αποτέλεσμα της δράσης επί των αντικειμένων του εξωτερικού κόσμου, αναπτύσσοντας δυο βασικούς συντελεστές τον οπτικο-χωρικό και λεκτικο-παραγωγικό, […]» (p. 163). Ομοίως, ο Duval (1999) υποστήριξε ότι η γνωστική ανάπτυξη συνδέεται με την εξέλιξη «των διαφορετικών σημειωτικών συστημάτων με βάση τον πρωταρχικό δυισμό (primitive duality) των αισθητηρίων συστημάτων: της γλώσσας και της εικόνας» (p.5). Σύμφωνα με τους Tall et al. (2011)

> «η γλώσσα διευκολύνει τη λεκτική κατηγοριοποίηση της αντίληψης των σχημάτων στη Γεωμετρία […], την ενθυλάκωση των διαδικασιών ως εννοιών […], τον ορισμό των εννοιών, σε επίπεδο παρατηρούμενων ιδιοτήτων [των γεωμετρικών αντικειμένων] μέσω της αντίληψης και λόγω των δράσεων [που αναπτύσσουν οι μαθητές]». (p.6)

Σε γενικές γραμμές μπορούμε να κατατάξουμε τις θεωρίες γνωστικής ανάπτυξης σε δύο κατηγορίες (Pegg & Tall, 2005): “(1) τις σφαιρικές θεωρίες μακροπρόθεσμης ανάπτυξης (global theories of long-term growth) του υποκειμένου, όπως είναι η θεωρία σταδίων του Piaget (Piaget & Garsia, 1983), η θεωρία των van Hiele (van Hiele, 1986; Hoffer, 1981), η θεωρία του Bruner (1966), και (2) τις τοπικές θεωρίες εννοιολογικής ανάπτυξης (local theories of conceptual growth), όπως είναι η θεωρία APOS του Dubinsky (Action-Process-Object-Schema) (Dubinsky & McDonald, 2001), η θεωρία SOLO Model (Structure of Observed Learning Outcomes) (Biggs & Collis, 1982, 1991; Pegg, 2003)” (pp. 187-188). Οι Pegg & Tall (ό.π.) ισχυρίζονται ότι, αν και οι θεωρίες μοιάζουν να έχουν διαφορές μεταξύ τους, η σύνθεσή τους προσφέρει μια ενδιαφέρουσα οπτική της ανάπτυξης του τρόπου κατανόησης των μαθητών.

Η θεωρία των van Hiele έχει τις ρίζες της στις κονστρουκτιβιστικές θεωρίες. Σύμφωνα με την έννοια του *κοινωνικού κονστρουκτιβισμού* (social constructivism) στην οποία και βασίζεται η παρούσα μελέτη, θεωρεί ότι η μάθηση -και ειδικότερα η μάθηση της γεωμετρίας- είναι μια σύνθετη διαδικασία, όντας ταυτόχρονα κονστρουκτιβιστική και αλληλεπιδραστική/ κοινωνικοπολιτισμική (ενδεικτικά αναφέρονται Cobb, Yackel & Wood 1989; Yackel, Cobb, Wood, Wheatley & Merkel 1990; Cobb & Bauersfeld 1995; Yackel, Rasmussen & King 2001; Yackel & Rasmussen 2002; Jaworski, 2003): (1) *κονστρουκτιβιστική*, καθώς εξαρτάται από την ενεργό κατασκευή της γνώσης του υποκειμένου διαμέσου της προσωπικής του εργασίας και της ατομικής διαπραγμάτευσης των μαθηματικών εννοιών (βλ. ενδεικτικά Jaworski, 2003; Andresen, 2004) και (2) *κοινωνικοπολιτισμική/ αλληλεπιδραστική*, καθώς αποτελεί μέρος του πολιτισμού (Steffe & Gale, 1995) στο πλαίσιο του οποίου οι μαθητές κατασκευάζουν την γνώση με «τη συμμετοχή τους στις κοινωνικές πρακτικές» (Cobb & Bauersfeld, 1995, p.4), --κοινωνικό περιβάλλον της τάξης-- μέσω της «*συζήτησης, της διαπραγμάτευσης, της επιχειρηματολογίας*» *(*Jaworski, 2003, p. 3).

Ως προς την κονστρουκτιβιστική θεώρηση: Η μάθηση προκύπτει ως αναδιοργάνωση των ήδη κατακτημένων εννοιολογικών δομών από πλευράς του μαθητή, ο οποίος προκειμένου να ενσωματώσει μια νέα πληροφορία οικοδομεί επί της προϋπάρχουσας εννοιολογικής του γνώσης (Von Glaserfeld, 1987). Από την προοπτική της θεωρίας κονστρουκτιβισμού (Piaget, 1937/1971) η διαδικασία κατασκευής της μαθηματικής γνώσης και κατανόησης προκύπτει, καθώς οι μαθητές προσπαθούν να λύσουν μαθηματικά προβλήματα κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας στην τάξη (Cobb, Yackel, & Wood, 1991; Simon & Shifter, 1991) και υποκινείται όταν αντιμετωπίζουν προβληματικές καταστάσεις. Η γνώση επομένως δεν λαμβάνεται παθητικά από τους μαθητές αλλά με ενεργητικό τρόπο.

Ως προς την κοινωνικοπολιτισμική θεώρηση: Αυτή, η θεώρηση κατασκευής της γνώσης που έχει τις ρίζες της στον Vygotsky (1987) εστιάζει στην απόκτηση της μαθηματικής κατανόησης ως προϊόν κοινωνικών αλληλεπιδράσεων. Η μάθηση έτσι προκύπτει ως εσωτερίκευση των κοινωνικών σχέσεων και η *κατανόηση* ως αποτέλεσμα των κοινά διαπραγματευόμενων εννοιών που δημιουργούνται από τους μαθητές (Voigt, 1994), σε αλληλεπίδραση με άλλους μαθητές στην τάξη (ή σε μια ομάδα) κατά τη διάρκεια των μαθηματικών συζητήσεων που αναπτύσσονται (Bartolini Bussi, 1996).

Ο Vygotsky (1987) θεωρεί ότι «το παιδί αρχίζει να αντιλαμβάνεται τον κόσμο όχι μόνο οπτικά αλλά και μέσω του λόγου του» (p. 32). Η σκέψη και η γλώσσα, κατά τον Vygotsky (1987), έχουν μια σύνθετη αλληλεπίδραση ώστε το ένα προκαλεί και παρακινεί την ανάπτυξη του άλλου. Σύμφωνα με τον Vygotsky (ό.π) η μάθηση είναι μια σύνθετη αλληλεπίδραση μεταξύ *της επιστημονικής* και της *αυθόρμητης χρήσης της γλώσσας.*

> Η ανάπτυξη μιας επιστημονικής έννοιας είναι ένα φαινόμενο που συμβαίνει κατά τη διάρκεια της εκπαιδευτικής διαδικασίας και της συστηματικής συνεργασίας μεταξύ δασκάλου και μαθητή. Η ωρίμανση των ανώτερων νοητικών λειτουργιών του παιδιού προκύπτει μέσω της συνεργασίας [με άλλους μαθητές] και με τη βοήθεια και συμμετοχή του δάσκαλου (Vygotsky, 1987, pp. 168-169).

Η σκέψη υποστηρίζει η Sfard (2001) είναι μέσο επικοινωνιακό αρχής γενομένης της ενδοπροσωπικής μορφής επικοινωνίας, του εσωτερικού διαλόγου (ενδοδιαλόγου) που ένα υποκείμενο αναπτύσσει ως άτομο με τον ίδιο του τον εαυτό (Χαβιάρης, Καφούση & Καλαβάσης, 2003). Η θεώρηση αυτή παρακολουθεί και ενισχύει την άποψη του Vygotsky (1987) ο οποίος αναφέρεται στην εσωτερίκευση των νοητικών λειτουργιών που αναπτύσσονται σε κάθε μέλος μιας κοινωνικής ομάδας που συμμετέχει σε έναν διάλογο.

Μέσα στην ομάδα οι μαθητές εμπλέκονται σε μια διαδικασία αλληλεπίδρασης (Bauersfeld, 1995). Στην αλληλεπιδραστική προσέγγιση (interactionism), υποστηρίζει ο Voigt (1995), κάθε υποκείμενο ερμηνεύει με υποκειμενικό τρόπο και διαπραγματεύεται τα μαθηματικά αντικείμενα της συζήτησης σύμφωνα με την προϋπάρχουσα γνώση του. Οι έννοιες λοιπόν που κατασκευάζονται μέσω αυτής της πραγμάτευσης είναι ένα αποτέλεσμα μιας κοινής διαδικασίας όπου ένα υποκείμενο αλληλεπιδρά με το άλλο. Αυτός ο τύπος της αλληλεπιδραστικής προσέγγισης για την κατασκευή των μαθηματικών αντικειμένων που προκύπτουν σε μια μαθηματική συζήτηση ενισχύει την άποψη ότι οι έννοιες και η κατανόηση του κάθε υποκειμένου που συμμετέχει στη συζήτηση προκύπτουν ως αποτέλεσμα της αλληλεπιδραστικής διαδικασίας.

Σύμφωνα με την Sfard (2001) «η σκέψη είναι η ειδική δραστηριότητα της επικοινωνίας, όταν αναφερόμαστε σε επικοινωνία μέσω λέξεων, εικόνων ή σε άλλη μορφή συμβόλων, καθώς η σκέψη μας είναι μια διαλογική προσπάθεια μέσω της οποίας επιχειρηματολογούμε» (p.3). Με τη συμμετοχή του ο μαθητής σε μια μαθηματική συζήτηση «μαθαίνει να σκέφτεται με μαθηματικό τρόπο» (Sfard , ibid., p. 4).

Μπορούμε συνεπώς «να ορίσουμε τη μάθηση ως τη διαδικασία αλλαγής του διαλεκτικού τρόπου σκέψης του μαθητή» (Sfard, 2001, p.3), και ειδικότερα στα μαθηματικά, του γλωσσικού συμβολισμού των εννοιών. Συνεπώς, η μάθηση ορίζεται ως η ανάπτυξη ικανότητας διαλεκτικών δεξιοτήτων και επίλυσης προβλημάτων που δεν ήταν δυνατόν να λυθούν στο παρελθόν. Επομένως, η μάθηση είναι πρώτα απ' όλα η αλλαγή των τρόπων που *σκεφτόμαστε* και το πώς ανταλλάσουμε αυτή τη σκέψη.

Με βάση αυτή τη θεώρηση, η ανάπτυξη της σκέψης επέρχεται μέσα από τον διάλογο που αναπτύσσει τόσο το υποκείμενο με τον εαυτό του εσωτερικά (ενδοπροσωπικού) όσο και τα άτομα μεταξύ τους στα πλαίσια μιας ομάδας (διαπροσωπικού).

Οι Stein, Engle, Smith & Hughes (2008) καθώς και άλλοι ερευνητές (όπως, π.χ., Freudenthal 1991; Gravemeijer 1994) συμφωνούν ότι «ο ρόλος του δασκάλου χρειάζεται να αλλάξει και από ‘διανομέας γνώσης’ (dispenser of knowledge) και ‘κριτής’ (arbiter) της ορθότητας να μεταβληθεί σε ‘μηχανικό’ του μαθησιακού περιβάλλοντος με τους μαθητές να κατασκευάζουν ενεργά τη γνώση -μέσα από την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων- αναπτύσσοντας την κατανόηση των προς επεξεργασία εννοιών» (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008, p. 317).

Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα συζητηθεί ο ρόλος των θεωριών του κοινωνικού κονστρουκτιβισμού στη μάθηση και πώς μπορεί αυτή να αναπτυχθεί μέσω των μαθηματικών συζητήσεων και των γνωστικών συγκρούσεων. Στο πλαίσιο αυτό ανακύπτουν τα εξής ερωτήματα: Ποιοι παράγοντες διευκολύνουν την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης και κατανόησης των μαθητών μέσα από μια κοινωνικοκονστρουκτιβιστική προσέγγιση; Ποιος ο ρόλος των γνωστικών συγκρούσεων στην ανάπτυξη δομών και εννοιών;

2.1.1. Η γνωστική ανάπτυξη ως αποτέλεσμα γνωστικών συγκρούσεων

Σύμφωνα με τον von Glasersfeld (1995) «η κατανόηση είναι η ενσωμάτωση της εμπειρίας κάποιου σε μια ήδη υπάρχουσα εννοιολογική δομή» (p.62).

Η κατασκευή των εννοιολογικών δομών είναι μια διαδικασία μέσω της οποίας το άτομο οργανώνει τις εμπειρίες του, ένας συνδυασμός εννοιών που του επιτρέπει να αντιμετωπίζει προβληματικές καταστάσεις (Carpenter, 1986; Hiebert, 1986). Σύμφωνα με τις κονστρουκτιβιστικές θεωρίες, οι μαθητές ακόμα και στο τέλος ενός μαθήματος αλλά και μιας σειράς μαθημάτων εξακολουθούν να έχουν διαφορετικά επίπεδα κατανόησης, ενώ πολλές έρευνες έχουν αναδείξει το ενδεχόμενο παρερμηνείας των εννοιών (misconceptions) (βλ. ενδεικτικά Goos, 1998; Swedosh & Clark, 1998; Moritz, 1998). Αναλυτικότερα, μια νέα πληροφορία ή *προσαρμόζεται* είτε *αφομοιώνεται* στις ήδη υπάρχουσες γνώσεις του μαθητή. Σύμφωνα με τον Piaget (1937/1971), όταν οι μαθητές έρχονται σε επαφή με νέες πληροφορίες λαμβάνουν χώρα δυο διαδικασίες:

- Η διαδικασία της *αφομοίωσης*: περιλαμβάνει την ερμηνεία ή την ενσωμάτωση της νέας πληροφορίας στα ήδη υπάρχοντα *γνωστικά σχήματα* του ατόμου.
- Η διαδικασία της *προσαρμογής*: αν μια εμπειρία δεν ταιριάζει σε μια εννοιολογική δομή και δεν λειτουργεί σύμφωνα με τις προσδοκίες του ατόμου τότε προκαλείται *ανισσοροπία ή γνωστική σύγκρουση.* Προκειμένου οι εννοιολογικές δομές του να επανέλθουν σε ισορροπία, το άτομο πρέπει να αναδομήσει τα υπάρχοντα σχήματα ώστε να οργανωθούν οι νέες εμπειρίες και να έχει νόημα η νέα πληροφορία. Αυτή η οργάνωση αποκαλείται *προσαρμογή*. Ο von Glasersfeld (1995) υποστηρίζει ότι «όταν το γνωστικό σχήμα ενός ατόμου αντί να παράγει ένα αναμενόμενο αποτέλεσμα οδηγεί σε διαταραχή (perturbation), η *διαταραχή* οδηγεί σε προσαρμογή η οποία διατηρεί ή επαναφέρει την ισορροπία στις γνωστικές δομές του ατόμου» (σ. 68).

Η αφομοίωση και η προσαρμογή είναι αποτέλεσμα *γνωστικών συγκρούσεων* κατά την αλληλεπίδραση με το εξωτερικό περιβάλλον. Οι γνωστικές συγκρούσεις οδηγούν τους μαθητές να τροποποιήσουν την έννοια που ήδη γνωρίζουν.

Σύμφωνα με τον Vygotsky[1] (1978/1984) οι γνωστικές συγκρούσεις είναι αναγκαίες για να κατασκευάσουν οι μαθητές τις έννοιες:

> «…η κατασκευή μιας έννοιας είναι μια δημιουργική κι όχι μηχανική, παθητική διαδικασία […] μια έννοια προκύπτει και παίρνει μορφή κατά τη διάρκεια μιας σύνθετης λειτουργίας που στοχεύει στη λύση κάποιου προβλήματος: η απομνημόνευση των λέξεων και η σύνδεσή τους με τα αντικείμενα δεν οδηγεί αναγκαία στο σχηματισμό των εννοιών. Για να ξεκινήσει η διαδικασία, πρέπει να προκύψει ένα πρόβλημα που δεν μπορεί να λυθεί με άλλο τρόπο παρά μέσω του σχηματισμού νέων εννοιών…» (p. 99-100).

Ο Vygotsky έδωσε έμφαση στις κοινωνικές πτυχές της μαθησιακής διαδικασίας και περιέγραψε τη *ζώνη επικειμένης ανάπτυξης* (Zone of Proximal Development) σύμφωνα με την οποία οι μαθητές αναπτύσσουν τον τρόπο σκέψης τους μέσω της αλληλεπίδρασης με τον δάσκαλο και τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας (Goos et al., 2002). Στην ουσία δηλαδή *τα κοινωνικά φαινόμενα μετασχηματίζονται σε ψυχολογικά*. Η εργασία σε ομάδες επομένως ενδείκνυται ως το κατάλληλο πλαίσιο για μάθηση αφού οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τις ιδέες άλλων μαθητών που είναι σε σύγκρουση με τις δικές τους και υπάρχει η δυνατότητα να γίνουν κατανοητές ακόμα και χωρίς την παρέμβαση του δασκάλου (Sfard, Neshler, Streefland, Cobb &Mason 1998).

Η ανάδειξη των *γνωστικών συγκρούσεων* είναι ένα σημαντικό μέσο για την ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης των μαθητών, την αναγνώριση και διόρθωση των πιθανών πηγών των *παρερμηνειών* (misunderstandings) (Monaghan 2000, p. 180), ένα μέσο δηλαδή για τη γνωστική ανάπτυξη του υποκειμένου. Ειδικότερα, στη γεωμετρία, βοηθά την ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης των γεωμετρικών εννοιών και, επομένως, τη γεωμετρική σκέψη των μαθητών.

Στις επόμενες ενότητες παρουσιάζεται διεξοδικά η θεωρία των van Hiele, η οποία αποτελεί και το θεωρητικό πλαίσιο στο οποίο θεμελιώθηκαν η κατασκευή του υποθετικού μαθησιακού μονοπατιού και η ανάλυση των δεδομένων της παρούσας μελέτης.

2.2.Η θεωρία των van Hiele

Η θεωρία των van Hiele ήταν το αποτέλεσμα της διδακτορικής διατριβής της Dina van Hiele-Geldof όπως και εκείνης του συζύγου της Pierre van Hiele στο Πανεπιστήμιο της Ουτρέχτης το

[1] Η βασική διαφορά των Piaget και Vygotsky, σύμφωνα με τους Cole και Wertsch (1996), δεν ήταν η κοινωνική ή όχι ανάπτυξη του ατόμου αλλά ο ρόλος των πολιτισμικών τεχνουργημάτων και η κατανόησή τους για τη *φύση και την προέλευση της ανθρώπινης γνώσης*.

1957. Τις προηγούμενες δεκαετίες διεξήχθησαν πολλές έρευνες σε μαθητές πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης διαφόρων χωρών (για παράδειγμα, στη Σοβιετική Ένωση –Wirszup 1976–, στις Ηνωμένες Πολιτείες – ενδεικτικά αναφέρονται οι Usiskin, 1982; Fuys, Geddes, & Tischler, 1984; Burger & Shaughnessy, 1986) προκειμένου να διαπιστωθεί η εγκυρότητα της θεωρίας αυτής. Σύμφωνα με τους van Hiele, ο βασικός λόγος αποτυχίας στο πρόγραμμα σπουδών της γεωμετρίας στο γυμνάσιο και στο λύκειο είναι το ότι προϋποθέτει υψηλότερο επίπεδο από εκείνο που είναι ικανοί να κατανοήσουν οι μαθητές (ενδεικτικά αναφέρονται οι Hoffer, 1981; Usiskin, 1982; Burger & Shaughnessy, 1986). Το εννοιολογικό πλαίσιο της θεωρίας των van Hiele θεμελιώνεται σε ένα μοντέλο «αποτελούμενο από δυο συνιστώσες» (Idris, 2009 p. 96): (1) τα πέντε επίπεδα σκέψης και (2) τις πέντε μαθησιακές φάσεις, μέσω των οποίων οι μαθητές αποκτούν τα χαρακτηριστικά σκέψης του επόμενου επιπέδου.

Πολλοί ερευνητές (π.χ Hoffer, 1981; De Villier, 1987) έχουν εξετάσει τον τρόπο σκέψης των μαθητών σε κάθε επίπεδο. Ένα θέμα μείζονος ενδιαφέροντος είναι η διαπίστωση των χαρακτηριστικών που υποδεικνύουν κάθε επίπεδο καθώς το επίπεδο σκέψης αναπτύσσεται με διαδικασίες που διαφέρουν από μαθητή σε μαθητή.

Πρώτοι οι van Hiele αρίθμησαν τα επίπεδα από το μηδέν έως το τέσσερα και στη συνέχεια οι Pegg & Davey (1998) από το ένα έως το πέντε, αρίθμηση που υιοθετείται και στην παρούσα μελέτη. Η Teppo (1991) ισχυρίζεται ότι ο van Hiele (1986) οδηγήθηκε «να περιγράψει το μοντέλο του στη βάση τριών επιπέδων» (Fuys, Geddes, & Tischler, 1988; van Hiele, 1986). Οι Pegg & Davey (1998) έχουν περιγράψει τα τρία αυτά επίπεδα: (1) οπτικό επίπεδο (visual level), όπου οι αποφάσεις καθοδηγούνται στο επίπεδο αναγνώρισης· (2) περιγραφικό επίπεδο (descriptive level), όπου τα στοιχεία και οι σχέσεις περιγράφονται· (3) θεωρητικό επίπεδο (theoretical level), όπου αναπτύσσεται παραγωγικός συλλογισμός και η γεωμετρία εξετάζεται σύμφωνα με τα ευκλείδεια αξιώματα και τις προτάσεις.

Στην επόμενη ενότητα θα παρουσιαστούν οι περιγραφές των επιπέδων των Battista (2007), Mason (1998) [την οποία υιοθετούν αρκετοί ερευνητές π.χ ο Gawlick (2005)], και Burger & Shaughnessy (1986), ώστε να αντιπαραβληθούν ως προς τις ομοιότητες και τις διαφορές τους.

2.2.1. Η ταξινόμηση των επιπέδων στη θεωρία των van Hiele

Οι περισσότεροι ερευνητές που έχουν διερευνήσει τα χαρακτηριστικά κάθε επιπέδου επικεντρώνονται κυρίως στο γλωσσικό χαρακτήρα που εκφράζεται μέσα από τις διατυπώσεις των μαθητών όταν πρόκειται να περιγράψουν μια διαδικασία κατασκευής, τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές χρησιμοποιούν ή κατασκευάζουν τους ορισμούς των γεωμετρικών αντικειμένων, τον τρόπο αιτιολόγησης και τις σχέσεις εγκλεισμού των σχημάτων (ενδεικτικά Burger & Shaughnessy, 1986; Jaime & Guitierrez, 1994; Mason, 1998; Battista, 2007).

Οι Clements & Battista (1992) έχουν περιγράψει και προσδιορίσει το προαναγνωριστικό στάδιο (prerecognition) επιπέδου 0, δεδομένου ότι «τα παιδιά αντιλαμβάνονται αρχικά τις γεωμετρικές μορφές αλλά ανταποκρίνονται μόνο σε ένα υποσύνολο του οπτικού χαρακτηριστικού μιας μορφής. Είναι ανίκανα να προσδιορίσουν πολλές κοινές μορφές. Δεν έχουν την ικανότητα να κατασκευάσουν νοητικές αναπαραστάσεις ή νοητικές εικόνες των σχημάτων» (p.354).

Ο van Hiele δεν είχε συμπεριλάβει στο μοντέλο του ένα επίπεδο «κάτω από το 0» και υποστήριξε ότι όλοι οι μαθητές είναι τουλάχιστον σε επίπεδο 0 (Senk, 1989) αφού τα υποκείμενα της μελέτης του ήταν μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Από την άλλη, πολλοί ερευνητές δεν περιλαμβάνουν στη μελέτη τους το επίπεδο 5, αφού «τα χαρακτηριστικά του επιπέδου 5 δεν συναντώνται σε μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης» (De Villiers, 1996, p. 9).

Αν και οι μελέτες διαφέρουν ως προς τον τρόπο αρίθμησης, οι δείκτες/ χαρακτηριστικά που οι περισσότεροι ερευνητές έχουν διαπιστώσει για τους μαθητές των διαφορετικών επιπέδων είναι περίπου ίδιοι. Τα γενικά χαρακτηριστικά των επιπέδων 1-4 που περιγράφονται στις μελέτες των Battista (2007), Mason (1998) και Burger & Shaughnessy (1986) εμφανίζονται παρακάτω:

Επίπεδο 1: **Οπτικοποίηση ή Αναγνώριση** (recognition-visualisation). Ο μαθητής/η μαθήτρια του επιπέδου αυτού αντιλαμβάνεται τα γεωμετρικά σχήματα ως μια ολότητα με βάση τη μορφή τους και όχι τις ιδιότητές τους. Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζεται μια συγκεντρωτική και συγκριτική περιγραφή των Battista (2007), Mason (1998) και Burger & Shaughnessy (1986) σε σχέση με τα χαρακτηριστικά του επιπέδου 1.

Πίνακας 2.1.Συγκριτική μελέτη των χαρακτηριστικών του επιπέδου 1

Battista (2007, p.851) Οπτικός-Ολιστικός Συλλογισμός (Visual-Holistic Reasoning)	Mason (1998, p.4)	Burger & Shaughnessy (1986, pp.43-44)
1.Προσδιορίζει, περιγράφει, και αιτιολογεί τα σχήματα σύμφωνα με την εμφάνισή τους ως οπτικές ολότητες.	1. Αναγνωρίζει τα σχήματα από την εμφάνιση τους, συγκρίνοντας τα με κάποιο γνωστό τους αρχέτυπο σχήμα.	1. Χρησιμοποιεί ανακριβείς ιδιότητες για να συγκρίνει, να προσδιορίσει, να χαρακτηρίσει και να

2.Αιτιολογεί τις απαντήσεις τους χρησιμοποιώντας οπτικούς μετασχηματισμούς. 3.Αναφέρεται στα αρχέτυπα σχήματα και ο προσανατολισμός των σχημάτων μπορεί να έχει επιπτώσεις στον προσδιορισμό της μορφής του σχήματος.	2.Οι ιδιότητες των σχημάτων δε γίνονται αντιληπτές. Παίρνει αποφάσεις βασιζόμενος στην αντίληψη και όχι στη λογική.	ταξινομήσει τα σχήματα. 2. Συνυπολογίζει άσχετες ιδιότητες στον προσδιορισμό και την περιγραφή των σχημάτων, όπως τον προσανατολισμό του σχήματος. 3. Παρουσιάζει ανικανότητα να χρησιμοποιήσει τις ιδιότητες σαν αναγκαίες προϋποθέσεις για να ορίσει ένα σχήμα.

Επίπεδο 2: **Ανάλυση** (analysis). Ο μαθητής αναγνωρίζει τα σχήματα από τις ιδιότητές τους με εμπειρικό τρόπο, έχει δηλαδή την ικανότητα της ανακάλυψης και περιγραφής των ιδιοτήτων ενός σχήματος αλλά δεν μπορεί να τις ορίσει τυπικά. Δεν κατανοεί ότι ένα σχήμα μπορεί να ανήκει σε διαφορετικές κλάσεις σχημάτων, ούτε τους ορισμούς τους οποίους χρησιμοποιεί. Ο Battista (2007) ονομάζει αυτό επίπεδο του Αναλυτικού-Συνιστωσιακού συλλογισμού (Analytic-Componential Reasoning) και υποστηρίζει ότι «δύο σημαντικοί αλληλένδετοι παράγοντες» συμβάλλουν στην ανάπτυξη του επιπέδου 2. «Ο πρώτος αφορά μια *αυξανόμενη δυνατότητα και μια τάση να εξεταστεί η δομή* των σχημάτων αναλύοντας τα μέρη τους και τον τρόπο που αυτά σχετίζονται· ο δεύτερος μια αυξανόμενη δυνατότητα να γίνουν κατανοητές και να εφαρμοστούν οι τυπικές γεωμετρικές έννοιες *στην ανάλυση των σχέσεων μεταξύ των μερών (και στοιχείων)* των σχημάτων» (p.851). Στη συνέχεια επισημαίνονται τα κύρια σημεία των υποεπιπέδων 2.1 έως 2.3 των περιγραφών του Battista (2007):

2.1 **Υποεπίπεδο Οπτικού-Άτυπου Συνιστωσιακού συλλογισμού** (Visual-informal componential reasoning). «Ο μαθητής περιγράφει τα στοιχεία και τις ιδιότητες των σχημάτων με άτυπο και ανακριβή τρόπο, χρησιμοποιώντας κατεξοχήν άτυπη, αυτοσχέδια γλώσσα. Οι περιγραφές του βασίζονται στην οπτική αντίληψη για να προσδιορίσει τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων των σχημάτων» (p.851).

2.2 **Υποεπίπεδο Άτυπου και Ανεπαρκώς Τυπικού συλλογισμού** (Informal and insufficient-formal componential reasoning). «Ο μαθητής αρχίζει να αποκτά την τυπική αντίληψη για να διακρίνει, και να περιγράψει τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων και μερών των σχημάτων, χρησιμοποιώντας ένα συνδυασμό άτυπων και τυπικών περιγραφών. Όταν επιχειρεί να περιγράψει τυπικά ένα γεωμετρικό αντικείμενο, χρησιμοποιεί γεωμετρικές έννοιες και όρους του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών, οι οποίοι όμως αποδεικνύονται ανεπαρκείς» (p.852).

2.3 **Υποεπίπεδο Ικανοποιητικού Τυπικού βασισμένου στις ιδιότητες συλλογισμού** (Suffic*i*ent formal property-based reasoning). «Ο μαθητής χρησιμοποιεί τυπικές γεωμετρικές έννοιες και τυπική γλώσσα για να κατανοήσει και να περιγράψει τα σχήματα ούτως ώστε η περιγραφή του να ανταποκρίνεται σε έναν ικανοποιητικό αριθμό ιδιοτήτων. Δεν περιορίζεται στον οπτικό συλλογισμό επειδή το βασικό κριτήριο για τον προσδιορισμό ενός σχήματος είναι αν ικανοποιεί έναν ακριβή αριθμό τυπικών ιδιοτήτων. Μπορεί να χρησιμοποιήσει και να διατυπώσει αυστηρούς ορισμούς για τα σχήματα. Οι ορισμοί όμως δεν είναι οικονομικοί, είτε επειδή τέτοιοι ορισμοί απαιτούν τη συσχέτιση μιας ιδιότητας με άλλες είτε επειδή κάποιο υποσύνολο δεν υπονοεί άλλες ιδιότητες» (p.852).

Πίνακας 2.2.Συγκριτική μελέτη των χαρακτηριστικών του επιπέδου 2

Mason (1998, p.4)	Burger & Shaughnessy (1986, pp.43-44)
1.Μπορεί να αναγνωρίσει και να ονομάσει τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων, αλλά δεν βλέπει τις σχέσεις μεταξύ αυτών των ιδιοτήτων. 2. Κατά την περιγραφή ενός αντικειμένου, ο μαθητής ενεργοποιεί τον κατάλογο των ιδιοτήτων που γνωρίζει, αλλά δεν μπορεί να διακρίνει ποιες ιδιότητες είναι αναγκαίες και επαρκείς για να περιγράψει το αντικείμενο.	1. Συγκρίνει τα σχήματα βάσει των ιδιοτήτων τους. 2.Απορρίπτει τους ορισμούς των εγχειριδίων και ορίζει με προσωπικό τρόπο τα σχήματα. 3.Ταξινομεί τα σχήματα με χρήση κάποιων μεμονωμένων ιδιοτήτων (χωρίς να ληφθεί υπόψη για παράδειγμα η συμμετρία των σχημάτων).

Επίπεδο 3: **Θεωρητικό επίπεδο-Άτυπος παραγωγικός συλλογισμός**

Ο Battista (2007, p.852) υποστηρίζει ότι ο μαθητής του επιπέδου αυτού συνδυάζει και προβαίνει σε συμπεράσματα για τις γεωμετρικές ιδιότητες των σχημάτων και έχει την ικανότητα αλληλεξάρτησης[2] των ιδιοτήτων. Εντούτοις, αυτή η ικανότητα επισήμανσης των αλληλεξαρτήσεων δεν είναι ίδια μεταξύ μαθητών ίδιου επιπέδου. Ο μαθητής έχει την ικανότητα να εξάγει λογικά μια ιδιότητα από μια άλλη, όπως επίσης και την ικανότητα του ιεραρχικού συστήματος ταξινόμησης των σχημάτων. Επειδή μια ιδιότητα πιθανόν να σηματοδοτήσει («signal») άλλες ιδιότητες, μπορεί να οργανώσει λογικά έναν αριθμό ιδιοτήτων του σχήματος, να διατυπώσει *οικονομικούς ορισμούς*, και να διακρίνει τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες για να πληροί το σχήμα μια συνθήκη. Η διαφορά από το προηγούμενο επίπεδο έγκειται στο ότι ενώ στο επίπεδο 2 μπορεί μόνο να χρησιμοποιήσει τις τυπικές ιδιότητες, ενώ το επίπεδο 3 μπορεί να λειτουργεί με αυτές.

[2] Για παράδειγμα, ένας μαθητής θα μπορούσε να πει, «αν ένα σχήμα έχει την ιδιότητα X, έχει επίσης και την ιδιότητα Y».

Ο Battista (2007) ονομάζει αυτό επίπεδο του Σχεσιακού –Συμπερασματικού βασισμένου στις ιδιότητες συλλογισμού (*Relational –Inferential Property-Based Reasoning*). Στο επίπεδο 3, οι τυπικές δηλώσεις των ιδιοτήτων που περιγράφουν τις σχέσεις των γεωμετρικών αντικειμένων «εσωτερικεύονται (interiorization) έτσι ώστε ο μαθητής να έχει την ικανότητα να κατανοεί την αποδόμηση των ιδιοτήτων, δηλαδή να τις αναλύει και να τις εφαρμόζει σε διάφορα σχήματα» (Battista, 2007, p.852).

Στη συνέχεια επισημαίνονται τα κύρια σημεία των υποεπιπέδων 3.1 έως 3.4 των περιγραφών του Battista (2007):

3.1**Υποεπίπεδο Εμπειρικών σχέσεων** (Empirical relations). Ο μαθητής χρησιμοποιεί εμπειρικά στοιχεία για να καταλήξει στο συμπέρασμα ότι αν ένα σχήμα έχει μια ιδιότητα έχει και μια άλλη.

3.2**Υποεπίπεδο Επιμέρους ανάλυσης** (Componential analysis). Ο μαθητής συμπεραίνει και κατανοεί τη συνεπαγωγική εμφάνιση των ιδιοτήτων ενός σχήματος μέσα από την ανάλυση της κατηγοριοποίησης των σχημάτων την οποία πραγματοποιεί σε πραγματικό ή νοητό επίπεδο (με εμπειρικό ή νοητικό τρόπο).

3.3**Υποεπίπεδο Λογικών συμπερασμάτων** (Logical inference). Ο μαθητής καταλήγει σε λογικά συμπεράσματα, λειτουργεί δηλαδή νοητικά και όχι με εικόνες. Αυτού του είδους ο συλλογισμός του επιτρέπει να οδηγηθεί σε συμπεράσματα που απαιτούνται για την ιεραρχική ταξινόμηση. Δεν έχει αναπτύξει την ικανότητα να αναδιοργανώσει λογικά τα εννοιολογικά του δίκτυα για τα σχήματα, επομένως δεν υιοθετεί ένα λογικό ιεραρχικό σύστημα ταξινόμησης. Η αφαιρετική του ικανότητα είναι βασισμένη στην εμπειρία και τη διαίσθηση. Κατά συνέπεια, χρησιμοποιεί τη λογική, αλλά δεν εξετάζει την αφετηρία για αυτού του τύπου τη λογική ανάλυση.

3.4**Υποεπίπεδο Ιεραρχικής ταξινόμησης βασισμένης σε λογικά συμπεράσματα** (Hierarchical shape, classification based on logical inference). Ο μαθητής χρησιμοποιεί λογικά συμπεράσματα *για να αναδιοργανώσει την* ταξινόμηση των σχημάτων σε μια λογική ιεραρχία· αναδομεί πλήρως τα δίκτυα ταξινόμησης των σχημάτων· επιχειρηματολογεί με λογική για να δικαιολογήσει την ιεραρχική ταξινόμηση των σχημάτων. Τέλος, η χρήση της λογικής για την εξαγωγή συμπερασμάτων παρέχει στον μαθητή έναν νέο τρόπο να κατασκευάσει τη γνώση. Η νέα γνώση, δηλαδή, μπορεί τώρα να παραχθεί όχι μόνο μέσω εμπειρικών ή διαισθητικών τρόπων, αλλά και μέσω της λογικής αφαίρεσης (p. 852).

Πίνακας 2.3.Συγκριτική μελέτη των χαρακτηριστικών του επιπέδου 3

Mason (1998, p.4)	Burger & Shaughnessy (1986, pp.43-44)
1. Αντιλαμβάνεται τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων και μεταξύ των σχημάτων. 2. Μπορεί να δημιουργήσει ορισμούς. 3. Κατασκευάζει άτυπα επιχειρήματα για να αιτιολογήσει το συλλογισμό του και οι	1.Διατυπώνει πλήρεις ορισμούς των σχημάτων 2.Εχει την ικανότητα να τροποποιήσει τους ορισμούς και να χρησιμοποιήσει τους ορισμούς των νέων εννοιών 3.Εχει την ικανότητα να αποδεχθεί ισοδύναμους

σχέσεις εγκλεισμού γίνονται κατανοητές. 4. Ο ρόλος και η σπουδαιότητα του τυπικού συλλογισμού δεν είναι κατανοητός.	τύπους ορισμών 4.Αποδέχεται τη λογική μερική διάταξη μεταξύ τύπων σχημάτων 5.Χρησιμοποιεί τις "άν…τότε" δηλώσεις, καθώς και υπονοούμενους κανόνες, όπως *modus ponens* 6.Χρησιμοποιεί άτυπα παραγωγικά επιχειρήματα με αλυσίδα δηλώσεων.

Επίπεδο 4: Τυπικός - Παραγωγικός συλλογισμός (deduction-formal logic ή abstraction). Ο μαθητής /η μαθήτρια του επιπέδου αυτού κατανοεί τη σημασία του παραγωγικού συλλογισμού και τους ρόλους των αξιωμάτων, των θεωρημάτων και της απόδειξης (οι αποδείξεις μπορούν να γραφούν με κατανόηση). Λειτουργεί με αφαιρετικό τρόπο (Mason 1998, p.4) και αναδιαμορφώνει τους στόχους των προβλημάτων σε ακριβή γλώσσα. Κατανοεί το ρόλο των μαθηματικών συνιστωσών σε μια μαθηματική συζήτηση όπως τα αξιώματα, οι ορισμοί, τα θεωρήματα, η απόδειξη (Burger & Shaughnessy, 1986). Ο Battista (2007) ονομάζει αυτό επίπεδο της Τυπικής παραγωγικής απόδειξης (Formal Deductive Proof). Στα Προγράμματα Σπουδών η ουσιαστική μελέτη της Ευκλείδειας γεωμετρίας αρχίζει από αυτό το επίπεδο (van Hiele, 1986).

Από τις συγκρίσεις των περιγραφών προκύπτει ότι τα χαρακτηριστικά των επιπέδων που οι ερευνητές περιγράφουν δε διαφέρουν ουσιαστικά. Ο Battista (2007) μέσα από μια ενδελεχή ανάλυση των χαρακτηριστικών κάθε επιπέδου, διακρίνει υποεπιπέδα, στα οποία προσδίδει χαρακτηριστικά τα οποία όμως σε γενικές γραμμές δεν διαφέρουν από τα χαρακτηριστικά των επιπέδων που και οι άλλοι ερευνητές διατυπώνουν. Για παράδειγμα το υποεπίπεδο 1 του Battista (2007) έχει κοινά χαρακτηριστικά με το επίπεδο 1 της Mason (1998) και κάποια χαρακτηριστικά συμπίπτουν με την περιγραφή των Burger & Shaugnessy (1986). Αφ’ ετέρου τα χαρακτηριστικά του υποεπιπέδου 2.1 του Battista (2007) είναι κοινά με τα χαρακτηριστικά του επιπέδου 2 του Pierre van Hiele. Ομοίως, το υποεπιπέδο 2.3 έχει κοινά χαρακτηριστικά με το επίπεδο 3 του Mason (1998).

2.2.1.1. Ιδιότητες των επιπέδων

Οι van Hiele υπέδειξαν κάποιες ιδιότητες μεταξύ των επιπέδων τις οποίες κατονόμασε ο Usiskin (1982), προσθέτοντας επιπλέον την ιδιότητα *της σταθερής αλληλουχίας*. Οι van Hiele πίστευαν ότι οι μαθητές πρέπει να περνούν διαδοχικά από το ένα επίπεδο στο άλλο (Usiskin ,1982):

> **Ιδιότητα 1** (σταθερή αλληλουχία) (fixed sequence): ένας μαθητής δε μπορεί να βρίσκεται σε κάποιο επίπεδο (η) van Hiele, χωρίς να έχει διέλθει από το επίπεδο (n-1).
> **Ιδιότητα 2** (διαδοχικότητα) (adjacency): σε κάθε επίπεδο συλλογισμού εκείνο που ήταν σε λανθάνουσα κατάσταση στο προηγούμενο επίπεδο γίνεται εμφανές στο επόμενο επίπεδο.
> **Ιδιότητα 3** (διάκριση) (distinction): κάθε επίπεδο έχει τα δικά του γλωσσικά σύμβολα και το δικό του δίκτυο σχέσεων που συνδέουν τα σύμβολα αυτά.
> **Ιδιότητα 4** (διαχωρισμός) (separation): δύο υποκείμενα που εκτελούν συλλογισμούς σε διαφορετικά επίπεδα δεν μπορούν να κατανοήσουν το ένα το άλλο (p.5).

2.2.2. Σύμβολο (symbol) και σήμα (signal) στη θεωρία των van Hiele

Οι van Hiele περιγράφουν περιόδους που «γεφυρώνουν το χάσμα μεταξύ των επιπέδων» (Pusey, 2003, p.13). Στόχος της πρώτης περιόδου είναι να μετασχηματίσει τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται τα αντικείμενα. Δηλαδή, να **μετασχηματίσει τον ολιστικό τρόπο αντίληψης των αντικειμένων** σε **αντίληψη των αντικειμένων με συγκεκριμένες ιδιότητες**.

Οι έννοιες του ‘συμβόλου’ και του ‘σήματος’ συνδέονται στη θεωρία των van Hiele με την ανάπτυξη του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης του μαθητή. Ένας μαθητής επεξεργάζεται αρχικά ένα σχήμα[3] και μέσω της διδασκαλίας και των κατάλληλων δραστηριοτήτων κατανοεί τις ιδιότητές του, αποκτώντας έτσι αυτό το *χαρακτήρα συμβόλου (symbol character)*. Το *σύμβολο* είναι «το νοητικό υποκατάστατο μιας σειράς αδιαφοροποίητων σχέσεων που διαμορφώνεται στο μυαλό του μαθητή» (Dina van Hiele, 1984, p.207).

Όταν ο μαθητής έχει κατανοήσει ποιες ιδιότητες είναι επαρκείς για να χαρακτηρίσει ένα σχέδιο, τότε το σχήμα έχει αποκτήσει το *χαρακτήρα σήματος (signal character).*

Ο van Hiele (1986), αναφερόμενος στις έννοιες σύμβολο-σήμα, διευκρινίζει:

> «…ονομάζουμε *χαρακτήρα συμβόλου* […] την κατανόηση του σχήματος, δηλαδή τη γνώση όλων των ιδιοτήτων του συνολικά […]. Όταν ο χαρακτήρας συμβόλου πολλών γεωμετρικών σχημάτων γίνει αρκετά σαφής στους μαθητές, εμφανίζεται η δυνατότητα του *χαρακτήρα σήματος*. […] Όταν αυτός ο προσανατολισμός έχει αναπτυχθεί αρκετά, όταν δηλαδή το σχήμα ενεργεί ως *σήμα*, τότε η γεωμετρία μπορεί να αντιμετωπισθεί με θεωρητικό τρόπο σκέψης» (p. 168).

Αλλά και οι Cannizzaro & Menghini (2003), ανέλυσαν επίσης τις έννοιες του συμβόλου και του σήματος:

[3] Η έννοια του σχήματος στο σημείο αυτό θεωρείται υπό τη γενικότερη έννοια μιας κατασκευής. Ο ορισμός της έννοιας περιέχεται στη συνέχεια.

> «Το *σύμβολο* στη θεωρία των van Hiele αντιπροσωπεύει το επίπεδο *αντίληψης* (επίπεδο 1) στο οποίο οι μαθητές συμπυκνώνουν όλες τις ιδιότητες ενός γεωμετρικού σχήματος […] Τα σχήματα [τότε] έχουν το χαρακτήρα των εικόνων, δηλαδή είναι αυτό που ονομάζουμε *χαρακτήρα συμβόλου*. Οι van Hiele θεωρούν ότι το *σήμα* αντιπροσωπεύει το επίπεδο *περιγραφής* ή *ανάλυσης* (επίπεδο 2), όταν μεταφράζεται η αντίληψη του σχήματος με περιγραφή αλλά χωρίς συγκεκριμένες γλωσσικές ιδιότητες. Μια ιδιότητα [τότε] προκύπτει που είναι **σημαντική** στην περιγραφή του σχήματος (*ιδιότητα σήμα*). Το τρίτο επίπεδο είναι αυτό του *ορισμού,* (όταν) κάποιος μαθητής αρχίζει να παρατηρεί διάφορες (γεωμετρικές) σχέσεις (από) λογική άποψη […] Σύμφωνα με τη θεωρία των van Hiele, αυτή είναι η *ουσία της γεωμετρίας* (essence of geometry)» (p.2).

Σύμφωνα με τον Choi-Koh (1999)

> «Πολλά σύμβολα αρχίζουν με μια εικόνα επάνω στην οποία οι παρατηρούμενες ιδιότητες και σχέσεις προβάλλονται προσωρινά. Αφότου αυτές οι ιδιότητες και σχέσεις εξηγούνται με ανάλυση ή συζήτηση, το σύμβολο χάνει το χαρακτήρα της εικόνας και αποκτά λεκτικό περιεχόμενο, γίνεται έτσι πιο χρήσιμο για τις διαδικασίες της σκέψης. Τα σύμβολα έχουν τις ιδιότητες ενός γεωμετρικού σχήματος ενώ συγκρίνονται και αναγνωρίζονται από αυτές τις ιδιότητες» (p.302).

Ο Choi-Koh (1996) υποστηρίζει επίσης ότι «*όταν τα σύμβολα επηρεάζουν τον προσανατολισμό της σκέψης ενεργούν ως σήματα*» (p.302). Στόχος είναι οι μαθητές να γίνουν γνώστες των ιδιοτήτων των συμβόλων και συνεπώς να εστιάζουν λιγότερο στο ίδιο το σχήμα. Να μετασχηματίσουν δηλαδή το χαρακτήρα συμβόλου σε χαρακτήρα σήματος μέσα από μια διαδικασία μάθησης. Και επομένως να μετασχηματίσουν τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβάνονται τα γεωμετρικά αντικείμενα: από αντικείμενα τα οποία αντιλαμβάνονται σφαιρικά σε αντικείμενα με συγκεκριμένες ιδιότητες, έτσι ώστε αν τους παράσχουμε ένα κατάλογο ιδιοτήτων αντί του σχήματος να έχουν την δυνατότητα να προσδιορίσουν το σχήμα.

2.2.3. Φάσεις της μαθησιακής διαδικασίας

Οι van Hiele υποστηρίζουν ότι ένας μαθητής πρέπει να διέλθει πέντε φάσεις της μαθησιακής διαδικασίας ώστε να περάσει σε υψηλότερο επίπεδο. Συγκεκριμένα επισημαίνουν:

> «Οι ασυνέχειες είναι […] άλματα στην καμπύλη εκμάθησης, αυτά τα άλματα αποκαλύπτουν την παρουσία επιπέδων. […] Στο μεταξύ, ο μαθητής φαίνεται “να ωριμάζει”. Ο δάσκαλος δεν καταφέρνει να εξηγήσει το θέμα. Και οι άλλοι μαθητές που έχουν φτάσει στο νέο επίπεδο φαίνεται να μιλούν μια γλώσσα που δεν μπορεί να γίνει κατανοητή από τους μαθητές που δεν έχουν φτάσει ακόμα στο νέο επίπεδο. Πρέπει να δεχθούν την εξήγηση του δασκάλου, αλλά το θέμα που διδάσκει δεν θα το κατανοήσουν. Ο μαθητής ο ίδιος αισθάνεται αδύναμος, ίσως μπορεί να μιμηθεί ορισμένες ενέργειες, αλλά δεν έχει καμία ιδέα για τη δραστηριότητα μέχρι να φτάσει στο νέο επίπεδο» (1958, pp. 75-76).

Διακρίνονται οι εξής φάσεις (Fuys, et al., 1988):

- **Διερεύνηση (inquiry) (έρευνα/εισαγωγή στην έννοια μέσω υλικών)**: οι μαθητές και ο δάσκαλος συμμετέχουν σε μια συζήτηση για τη δραστηριότητα και τα αντικείμενα της μελέτης. Γίνονται παρατηρήσεις, τίθενται ερωτήσεις και εισάγεται το λεξιλόγιο. Στη φάση πληροφόρησης ο μαθητής εξοικειώνεται με το θέμα με την εισαγωγή των παραδειγμάτων και των αντιπαραδειγμάτων. Ο van Hiele (1986) θεωρεί ότι στη φάση αυτή ότι ο μαθητής εξοικειώνεται με το πλαίσιο της μελέτης.

Παράδειγμα: Παρουσιάζεται ένα ορθογώνιο σχήμα. Στη συνέχεια οι μαθητές εξετάζουν άλλα σχήματα αν είναι και αυτά ορθογώνια (Van Hiele, 1986, pp. 53-54).

- **Καθοδηγούμενος προσανατολισμός (directed orientation) (καθοδηγούμενη ανακάλυψη):** το θέμα της μελέτης εξερευνάται μέσω των προσεκτικά τοποθετημένων διαδοχικών υλικών και δραστηριοτήτων· δομές αποκαλύπτονται βαθμιαία. Ο Van Hiele (1986) θεωρεί ότι ο μαθητής εξοικειώνεται με τις βασικές συνδέσεις του δικτύου των σχέσεων που διαμορφώνονται, δηλαδή εξοικειώνεται με τις δομές του θέματος, όπως τα σχήματα, το λεξιλόγιο, τα σύμβολα, οι ορισμοί, οι ιδιότητες και οι σχέσεις. Κατά τη διδασκαλία ο δάσκαλος οργανώνει τις δραστηριότητες για τις ειδικές περιπτώσεις ή ενέργειες που αναμένεται να γίνουν από τους μαθητές.

Παράδειγμα: Οι μαθητές διπλώνουν το ορθογώνιο ως προς τις διαγώνιες και εξετάζουν τι συμβαίνει στις γωνίες. Στη συνέχεια το διπλώνουν ως προς τους άξονες συμμετρίας του (Van Hiele, 1986, pp. 53-54).

- **Επεξήγηση (explicitation)**: οι μαθητές χρησιμοποιούν ακριβές λεξιλόγιο για τα αποτελέσματα της εργασίας τους, καθώς διαθέτουν πλέον τη δέουσα αντίληψη (διορατικότητα) για τις δομές του αντικειμένου και προσπαθούν να επικοινωνήσουν μέσω αυτών. Αφού εκφραστούν στη γλώσσα τους, ο εκπαιδευτικός τους εξηγεί το τυποποιημένο λεξιλόγιο και τη μαθηματική γλώσσα που πρέπει να χρησιμοποιείται. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού έγκειται «στην εισαγωγή των απαραίτητων τεχνικών όρων» (Van Hiele-Geldof, 1984, p.219). Σε αυτή τη φάση, ενθαρρύνεται η ακριβής και κατάλληλη γλώσσα.

Παράδειγμα: Η ομάδα μαθητών ανταλλάσει ιδέες για τις ιδιότητες του ρόμβου (Van Hiele, 1986, pp. 53-54).

- **Ελεύθερος προσανατολισμός (free orientation):** περιλαμβάνονται τα πιο σύνθετα, ανοιχτά προβλήματα με πολλά βήματα και εναλλακτικές στρατηγικές επίλυσης. Οι μαθητές χρησιμοποιούν τις δημιουργικές ικανότητές τους και εξελίσσουν αυτό που έχουν δοκιμάσει. Θα έλεγε κανείς ότι είναι η δεύτερη φάση του κατευθυνόμενου προσανατολισμού, όπου οι μαθητές μαθαίνουν να βρίσκουν τον τρόπο τους στο δίκτυο των σχέσεων με τη βοήθεια των σχέσεων που έχουν διδαχθεί (van Hiele, 1986, p.177).

Παράδειγμα: Οι μαθητές κατασκευάζουν το σχήμα του ορθογωνίου όταν δίνονται κάποιες κορυφές και πλευρές (Van Hiele, 1986, pp. 53-54).

- **Ολοκλήρωση (integration):** γίνεται αναθεώρηση και περιληπτική παρουσίαση της πληροφορίας που έγινε γνωστή στο νέο δίκτυο των αντικειμένων και των σχέσεων. Ο van Hiele (1986) επισημαίνει ότι η διδασκαλία έχει φτάσει στο τέλος της έχοντας αναπτύξει τη σκέψη των μαθητών.

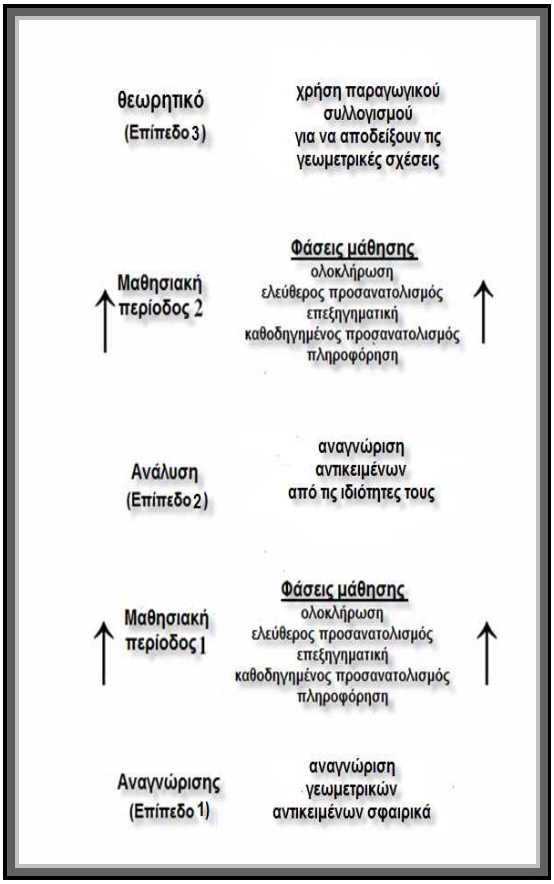
Παράδειγμα: Όλες οι ιδιότητες του ορθογωνίου ανακεφαλαιώνονται (Van Hiele, 1986, pp. 53-54).

Η Teppo (1991) κατασκεύασε ένα διάγραμμα των μαθησιακών περιόδων και φάσεων με βάση το τελευταίο μοντέλο των van Hiele, στο οποίο κάθε επίπεδο κατανόησης διασυνδέεται με μια μαθησιακή περίοδο. Σύμφωνα με την Teppo, η διδασκαλία υποδιαιρείται σε 4 φάσεις μάθησης οι οποίες επιτρέπουν στους μαθητές να αναπτύξουν το επόμενο επίπεδο κατανόησης. Στο σχήμα2.1α παρουσιάζεται το διάγραμμα της Teppo (1991) και στο σχήμα 2.1β η προσαρμογή του διαγράμματος από την ερευνήτρια. Σύμφωνα με την Dina van Hiele (Fuys et al., 1984) «η εργασία πάνω στα γεωμετρικά μοντέλα και ειδικότερα, η κατασκευή σχεδίων (drawings) και σχημάτων (constructions), οδηγεί στην απόκτηση ενός συστήματος σημάτων για αυτά τα σύμβολα» (p. 207). Η *πρώτη περίοδος* «γεφυρώνει το χάσμα» (Pusey, 2003, p.13) μεταξύ των δύο πρώτων επιπέδων και η *δεύτερη* το χάσμα μεταξύ του δεύτερου και τρίτου επιπέδου (van Hiele, 1986; Teppo, 1991; Pusey, 2003; Genz, 2006). Κατά τη διάρκεια της πρώτης περιόδου οι μαθητές κατασκευάζουν τις ιδιότητες των σχημάτων. Τότε οι μαθητές κατασκευάζουν το *χαρακτήρα συμβόλου*.

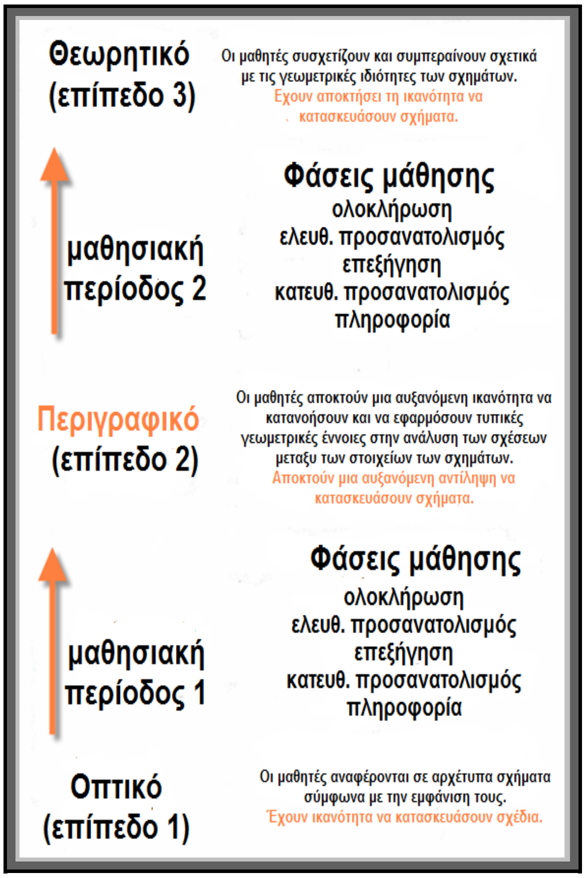
Συνοψίζοντας, κατά τη διάρκεια της δεύτερης περιόδου οι μαθητές εστιάζουν λιγότερο στο σύμβολο, και το σχήμα αντικαθίσταται από έναν κατάλογο ιδιοτήτων που προσδιορίζουν το σύμβολο. Ο χαρακτήρας συμβόλου έχει γίνει τώρα *χαρακτήρας σήματος*. Η επόμενη περίοδος συνδέει το δεύτερο και τρίτο επίπεδο. Εδώ οι μαθητές εντοπίζουν τις κοινές ιδιότητες μιας κατηγορίας σχημάτων και ταξινομούν τα σχήματα με βάση τις σχέσεις εγκλεισμού σύμφωνα με τις πρόσθετες ιδιότητές τους.

Ο Pierre van Hiele γράφει (1986)

> «Όταν μετά από κάποιο χρόνο οι έννοιες είναι αρκετά σαφείς, οι μαθητές μπορούν να αρχίσουν να τις περιγράφουν. Τότε οι ιδιότητες που έχουν τα γεωμετρικά σχήματα που έχουν εξεταστεί αναφέρονται διαδοχικά και γίνονται έτσι προφορικές. Το σχήμα γίνεται ο αντιπρόσωπος όλων αυτών των ιδιοτήτων, αποκτά δηλαδή το '*χαρακτήρα συμβόλου*'. Σε αυτό το στάδιο η κατανόηση του σχήματος σημαίνει τη γνώση όλων αυτών των ιδιοτήτων ως ενότητα. […]. Όταν ο χαρακτήρας συμβόλου πολλών γεωμετρικών σχημάτων γίνει αρκετά σαφής στους μαθητές, γεννιέται η δυνατότητα να αποκτήσουν το *χαρακτήρα σήματος*. Αυτό σημαίνει ότι τα σύμβολα μπορούν να προβλεφθούν. […]. Όταν αυτός ο προσανατολισμός αναπτυχθεί αρκετά, όταν ενεργούν αρκετά τα σχήματα ως σήματα, τότε η γεωμετρία μπορεί να λειτουργήσει κάτω από λογική» (p. 168).



Σχήμα 2.1.α. Διάγραμμα των μαθησιακών περιόδων και φάσεων (Teppo, 1991, p. 210)



Σχήμα 2.1.β. Προσαρμογή του διαγράμματος της Teppo για την παρούσα μελέτη, λαμβάνοντας υπόψη τη κατηγοριοποίηση του Battista (2007) και τις έννοιες του Parsysz (1988) περί σχεδίου και σχήματος.

2.2.4. Ανάπτυξη ικανοτήτων των μαθητών

Η ανάπτυξη του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης των μαθητών είναι αποτέλεσμα της ανάπτυξης ικανοτήτων. Ο Hoffer (1981) στο βιβλίο του “Geometry is more than Proof” υποστηρίζει ότι πρέπει να αναπτυχθούν πέντε βασικές ικανότητες στην γεωμετρία: οπτικές, λεκτικές, σχεδίασης, λογικές, και εφαρμογής (Morris, 1984, p.162-163).

- **Οπτικές**: Η ανάπτυξη οπτικών ικανοτήτων είναι αναγκαία σε όλα τα επίπεδα. Οι οπτικές ικανότητες των μαθητών μπορεί να αναπτυχθούν και να βελτιωθούν με δραστηριότητες που συνδυάζουν αναγνώριση σχημάτων στο επίπεδο και στο χώρο με διαφορετικές μορφές αναπαράστασης, παρατήρηση στοιχείων και μερών ενός δεδομένου σχήματος και των σχέσεων τους, προσδιορισμό των αξόνων συμμετρίας ενός σχήματος, παραγωγή πληροφοριών από οπτικές παρατηρήσεις, επεξεργασία οπτικών πληροφοριών του σχήματος για ανάπτυξη σχέσεων και εικασιών ή συμπερασμάτων, οπτικοποίηση γεωμετρικών αναπαραστάσεων κ.ο.κ.

- **Λεκτικές**: Οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολία στη λεκτική διατύπωση στη γεωμετρία, ή διατυπώνουν με άτυπο και ανακριβή τρόπο, όταν βρίσκονται σε αρχικό στάδιο ανάπτυξης. Επομένως, οι μαθητές πρέπει να περιγράψουν τα σχήματα και τις ιδιότητες τους, να διατυπώσουν ορισμούς με λέξεις από σχήματα που έχουν κατασκευάσει, να αναγνωρίσουν τη λογική δομή λεκτικών προβλημάτων, να περιγράψουν τις γεωμετρικές έννοιες με δικές τους εκφράσεις, να διατυπώσουν γενικεύσεις κ.ο.κ.
- **Σχεδίασης**: Οι μαθητές πρέπει να αποκτήσουν την ικανότητα να μεταφράσουν την προφορική πληροφορία σε σχέδιο ή σχήμα χρησιμοποιώντας τα γεωμετρικά όργανα ή εργαλεία προκειμένου να αντιληφθούν τις ιδιότητες των σχημάτων, να σχεδιάσουν ή να κατασκευάσουν σχήματα με δεδομένες ιδιότητες, να σχεδιάσουν τα βοηθητικά στοιχεία των σχημάτων.
- **Λογικές**: Οι μαθητές αναπτύσσουν την ικανότητα λογικής συμπερασματολογίας και την κριτική ικανότητα μέσω της κατασκευής αποδείξεων. Συγκεκριμένα οι μαθητές πρέπει να χρησιμοποιήσουν τα κατάλληλα θεωρήματα για να αποδείξουν μια πρόταση ή ένα γεωμετρικό πρόβλημα, αλλά και τους καταλλήλους ορισμούς ή θεωρήματα για να σχεδιάσουν σωστά ένα σχήμα, να ταξινομήσουν ή ομαδοποιήσουν σχήματα σε μια ειδική κατηγορία, να προσδιορίσουν τις λογικές συνέπειες των δεδομένων στοιχείων, να αναγνωρίσουν το ρόλο και τον περιορισμό των παραγωγικών μεθόδων, να αντιληφθούν τις σχέσεις εγκλεισμού των σχημάτων. Η ανάπτυξη των λογικών ικανοτήτων έπεται της ανάπτυξης των οπτικών, λεκτικών και σχεδιαστικών ικανοτήτων των μαθητών.
- **Εφαρμογής**: Η ανάπτυξη προσομοιώσεων με τη διαδικασία της μοντελοποίησης πραγματικών καταστάσεων μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αντιληφθούν τις γεωμετρικές ιδιότητες φυσικών αντικειμένων, να αναπτύξουν την ικανότητα να χρησιμοποιούν μαθηματικά μοντέλα για να αναπαραστήσουν αφηρημένες καταστάσεις.

Ανάλογες ικανότητες με αυτές του Hoffer (1981) που εξετάστηκαν στην παρούσα μελέτη είναι οι μαθηματικές ικανότητες (mathematical competences) (OECD, 2006) του μαθητή, οι οποίες αναλύονται στο έργο του Niss (1999) και των συνεργατών του. Αυτές εξετάζουν «την ικανότητα [του μαθητή] να απευθύνει ερωτήσεις και να αποκρίνεται σε αυτές μέσα στα μαθηματικά και με τα μαθηματικά» (p. 7). Οι γεωμετρικές ικανότητες είναι μια υποκατηγορία των μαθηματικών ικανοτήτων.Μια υποκατηγορία τεσσάρων ικανοτήτων κατά Niss (1999) αφορά τα δεδομένα της παρούσας μελέτης:

(1) **Ικανότητα χρήσης εργαλείων** (Making use of aids and tools, IT included): Η ικανότητα της ύπαρξης των ιδιοτήτων διαφόρων εργαλείων, των περιορισμών αλλά και της χρήσης τους.

(2) **Ικανότητα δομική** (Modelling mathematically*)*: Η ικανότητα μοντελοποίησης του προβλήματος. Δηλαδή, η ικανότητα μετάφρασης της πραγματικότητας σε μαθηματική δομή, και αντίστροφα. Η ικανότητα αυτή είναι σχετική με την ικανότητα εφαρμογής του Hoffer (1981) που αναφέρθηκε παραπάνω.

(3) **Ικανότητα απόδειξης** (Reasoning mathematically): Περιλαμβάνει την ικανότητα ανάπτυξης αλυσίδων παραγωγικών δηλώσεων, αποδεικτικής διαδικασίας με περιορισμό των εμπειρικών επιχειρημάτων ως μεθόδων, την ικανότητα συμμετοχής των μαθητών στη συζήτηση αναπτύσσοντας παραγωγικό συλλογισμό. Η ικανότητα αυτή είναι σχετική με την ικανότητα λογικής του Hoffer (1981) που αναφέρθηκε παραπάνω.

(4) **Ικανότητα αναπαραστατική** (Representing mathematical entities): Περιλαμβάνει την ικανότητα μετάφρασης μεταξύ διαφορετικών μορφών αναπαραστάσεων των μαθηματικών αντικειμένων, φαινομένων και καταστάσεων, καθώς και τις σχέσεις μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων της ίδιας οντότητας αλλά και την αμφίδρομη σύνδεση διαφορετικών μορφών αναπαραστάσεων. Η ικανότητα αυτή είναι σχετική με την ικανότητα σχεδίασης του Hoffer (1981) που αναφέρθηκε παραπάνω.

Η *ικανότητα μαθηματικών συμβόλων* (Handling mathematical symbols and formalisms) –δηλαδή η ικανότητα μετάφρασης από τη φυσική γλώσσα στη συμβολική γλώσσα αλλά και η ικανότητα χειρισμού δηλώσεων και εκφράσεων που περιέχουν σύμβολα και τύπους– καθώς και η *ικανότητα επικοινωνίας εντός*, περί και για τα μαθηματικά (Communicating in, with, and about mathematics) –δηλαδή, η ικανότητα κατανόησης των γραπτών και προφορικών μαθηματικών «κειμένων», αλλά και η ικανότητα αναστοχασμού και συμμετοχής σε μια σύνθετη επικοινωνία– είναι μαθηματικές ικανότητες που εμφανίζονται στους μαθητές σε μικρότερο βαθμό σχετικά με την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων και είναι συναφείς με άλλα πεδία των μαθηματικών (π.χ. την άλγεβρα ή την τριγωνομετρία). Η *ικανότητα μαθηματικής σκέψης* (Thinking mathematically) – δηλαδή η ικανότητα ανάπτυξης και γενίκευσης μιας έννοιας, διάκρισης διαφορετικών τύπων μαθηματικών δηλώσεων, όπως π.χ. «αν…τότε», ορισμών, θεωρημάτων– εμφανίζεται και αναπτύσσεται στους μαθητές μετά το επίπεδο 3 van Hiele. Στο κεφάλαιο για την ερευνητική μεθοδολογία και ανάλυση δεδομένων θα συζητηθούν οι ικανότητες των μαθητών που εξετάζονται στην παρούσα μελέτη.

2.2.5.Αξιολόγηση των επιπέδων van Hiele των μαθητών

Οι περισσότεροι ερευνητές προσδιορίζουν το επίπεδο van Hiele ενός μαθητή μέσα από την αξιολόγηση, κρίνοντας δηλαδή από τον αριθμό των σωστών απαντήσεων του μαθητή σε ένα γραπτό τεστ (Usiskin, 1982; Mayberry, 1983; Gutierrez & Jaime, 1987) ή σε μια συνέντευξη (Burger & Shaugnessy, 1986; Fuys et al., 1988). Πολλοί ερευνητές (π.χ, Usiskin, 1982; Burger & Shaugnessy, 1986; Fuys et al. 1988) ισχυρίζονται ότι οι περισσότεροι μαθητές εμφανίζουν δυο συμπληρωματικά επίπεδα σκέψης ταυτόχρονα, όταν είναι σε *μετάβαση* μεταξύ δυο επιπέδων. Για παράδειγμα, οι Fuys et al. (1988) διέκριναν μαθητές που ακόμα και στην ίδια δραστηριότητα εμφάνισαν τα χαρακτηριστικά των επιπέδων 1 και 2 ταυτόχρονα. Από την άλλη οι Gutiérrez, et al. (1991) μέσα από την έρευνά τους κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι τα επίπεδα van Hiele δεν είναι διακριτά και πρότειναν έναν τρόπο προσδιορισμού των μαθητών που ήταν σε μετάβαση[4] μεταξύ των επιπέδων Hiele. Βάσισαν το συμπέρασμά τους στο γεγονός ότι:

> Αν και οι περισσότεροι μαθητές παρουσιάζουν ένα κυρίαρχο επίπεδο σκέψης, όταν απαντούν σε ανοιχτές ερωτήσεις μεγάλος αριθμός μαθητών εμφανίζει στις απαντήσεις τους την παρουσία άλλων επιπέδων, καθώς υπάρχουν και μαθητές των οποίων οι απαντήσεις παρουσιάζουν δύο διαδοχικά επίπεδα συλλογισμού ταυτόχρονα (Gutiérrez, et al., 1991, p. 237).

Στο ίδιο συμπέρασμα κατέληξαν και οι Fuys et al. (1988). Όπως υποστηρίζουν οι Gutierrez & Jaime (1998) το επίπεδο ενός μαθητή μάς επιτρέπει να εξετάσουμε τον τρόπο με τον οποίο ορίζει ένα γεωμετρικό αντικείμενο, αιτιολογεί τα συμπεράσματά του και αποδεικνύει τους ισχυρισμούς του. Στον πίνακα 1 συνοψίζονται τα κύρια χαρακτηριστικά των επιπέδων van Hiele.

[4] Σύμφωνα με την κλίμακα προσδιορισμού των επιπέδων που κατασκεύασαν οι Guitierrez, Jaime & Fortuny (1991, pp. 238-239), «αρχικά οι μαθητές δεν έχουν συνείδηση των ειδικών τρόπων σκέψης σε ένα νέο επίπεδο, επομένως δεν έχουν αποκτήσει αυτό το επίπεδο σκέψης. Όταν αποκτούν συνείδηση των διαδικασιών σκέψης σε ένα δεδομένο επίπεδο και της σημασίας του αρχίζουν να το χρησιμοποιούν. Καθώς όμως λείπει η εμπειρία, αρχικά κάνουν κάποιες προσπάθειες να εργαστούν στο νέο επίπεδο αλλά επιστρέφουν και πάλι στο χαμηλότερο. Έχουν δηλαδή *χαμηλό βαθμό απόκτησης* αυτού του επιπέδου. Όσο όμως η εμπειρία τους αυξάνεται, κατακτούν σταδιακά το νέο επίπεδο, καθώς χρησιμοποιούν συχνότερα τις μεθόδους του νέου επιπέδου, χωρίς βέβαια αυτό να σημαίνει πως όταν συναντούν δυσκολίες δεν επιστρέφουν στο προηγούμενο επίπεδο. Οι εμπειρίες σε επίλυση προβλημάτων οδηγούν προοδευτικά τους μαθητές να ενδυναμώσουν την απόκτηση του νέου επιπέδου».

Πίνακας 2.4.Δείκτες των επιπέδων van Hiele (Gutierrez & Jaime, 1998, p.32)

	Επίπεδο 1	Επίπεδο 2	Επίπεδο 3	Επίπεδο 4
Αναγνώριση	Φυσικές Ιδιότητες	Μαθηματικές ιδιότητες		
Χρήση των ορισμών		Μόνο ορισμοί με απλή δομή	Κάθε ορισμός	Αποδοχή διαφόρων ισοδύναμων ορισμών
Διατυπώσεις των ορισμών	Λίστα φυσικών ιδιοτήτων	Λίστα μαθηματικών ιδιοτήτων	Σύνολο αναγκαίων και ικανών ιδιοτήτων	Μπορούν να αποδείξουν την ισοδυναμία των ορισμών
Ταξινόμηση του γεωμετρικού αντικειμένου (σχήματος ή έννοιας)	Βασισμένη στις φυσικές ιδιότητες	Βασισμένη στις μαθηματικές ιδιότητες	Έχουν ικανότητα σχέσεων εγκλεισμού των γεωμ. αντικειμένων	
Απόδειξη		Επιβεβαίωση με παραδείγματα	Άτυπες λογικές αποδείξεις	Τυπικές λογικές αποδείξεις

Στην παρούσα διατριβή έχει υιοθετηθεί στην πειραματική διαδικασία η θεώρηση των Jaime & Guitierrez (1994) ως μέσο παρακολούθησης της μετακίνησης των μαθητών από το ένα επίπεδο van Hiele στο επόμενο αναφορικά με:

- την εξέλιξη τους ως προς τον τρόπο που χρησιμοποιούν έτοιμους ορισμούς ή διατυπώνουν δικούς τους,
- την ανάπτυξη ικανότητας ταξινόμησης των τετραπλεύρων και
- την ανάπτυξη ικανότητας στην αιτιολογική–αποδεικτική διαδικασία, με περιορισμό των εμπειρικών αιτιολογήσεων και ανάπτυξη παραγωγικού συλλογισμού.

Στις επόμενες παραγράφους αναλύεται πως οι μαθητές χρησιμοποιούν ή διατυπώνουν ορισμούς, τα είδη των ορισμών που αναπτύσσουν και πως ταξινομούν τα σχήματα ως αποτέλεσμα του επιπέδου που ανήκουν.

2.2.5.1. Κατηγορίες ορισμών των σχημάτων

Ένα ζήτημα που τοποθετείται στο γενικότερο πλαίσιο του γεωμετρικού συλλογισμού των μαθητών είναι το πως οι μαθητές ορίζουν ένα γεωμετρικό αντικείμενο ή πως χρησιμοποιούν τους ορισμούς που αναφέρονται στο σχολικό εγχειρίδιο. Σύμφωνα με τους Mariotti & Fischbein (1997) στο άρθρο τους «Defining in classroom activities», ο ορισμός είναι «μια βασική συνιστώσα της γεωμετρικής γνώσης και η εκμάθηση του ‘ορίζειν’ [ένα γεωμετρικό αντικείμενο] είναι ένα βασικό πρόβλημα της μαθηματικής εκπαίδευσης» (p.219). Οι όροι *εικόνα έννοιας* και *ορισμός έννοιας* εισήχθησαν από τους Vinner & Hershkowitz (1980) στα πλαίσια της μάθησης απλών γεωμετρικών εννοιών. Οι Tall & Vinner (1981) όρισαν τον *'ορισμό έννοιας'* ως «μια μορφή από λέξεις που χρησιμοποιούνται για να διευκρινίσουν μια έννοια» και την *'εικόνα έννοιας'* ως «τη συνολική γνωστική δομή που συνδέεται με την έννοια, και η οποία περιλαμβάνει όλες τις νοητικές εικόνες και σχετικές ιδιότητες και διαδικασίες» (p. 152). Οι μαθητές σχηματίζουν τους δικούς τους προσωπικούς ορισμούς και εικόνες εννοιών των βασικών σχημάτων μέσω της εμπειρίας τους. Ορίζουν ένα γεωμετρικό αντικείμενο ως ολότητα (στο πρώτο επίπεδο van Hiele), ή το ορίζουν αναλύοντας τα χαρακτηριστικά του (στο δεύτερο επίπεδο van Hiele), ή το ορίζουν επισημαίνοντας τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά που το διαχωρίζουν από ένα άλλο σχήμα της ίδιας κατηγορίας (στο τρίτο επίπεδο van Hiele) (Erez & Yerushalmy, 2006).

Μέσω των ορισμών εισάγονται τα αντικείμενα της θεωρίας και οι θεωρητικές συνδέσεις μεταξύ των γεωμετρικών αντικειμένων. Σύμφωνα με τον Freudenthal (1973) οι ορισμοί των εννοιών δημιουργούν «συνδέσεις με την παραγωγική σκέψη» (p.416), αφού ένας ορισμός εκφράζει τις ιδιότητες που χαρακτηρίζουν το σχήμα και οι οποίες συσχετίζονται μέσα από ένα δίκτυο σχέσεων. Ως εκ τούτου η ανάπτυξη ικανότητας διατύπωσης (και μάθησης) των χαρακτηριστικών ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων είναι σημαντική, γιατί μπορούν να σχηματίσουν την βάση για υψηλότερου επιπέδου σκέψη. Όπως ισχυρίζεται ο Vinner (1991) αν ο προσωπικός ορισμός του μαθητή δεν έχει αναπτυχθεί πλήρως, η κρίση του μπορεί να επηρεαστεί από την εικόνα (στο επίπεδο 1) και αυτό μπορεί να έχει σαν αποτέλεσμα λανθασμένα συμπεράσματα από μαθηματικής απόψεως.

Οι Govender & de Villiers (2004) υποστηρίζουν ότι

> σε μια παραδοσιακή δομημένη προσέγγιση τα μαθηματικά αντικείμενα, ως αντικείμενα της μελέτης, ορίζονται στην αρχή και στη συνέχεια αναπτύσσεται η θεωρία μέσω της αξιωματικής προσέγγισης. Αυτή η προσέγγιση μπορεί να δημιουργήσει στους μαθητές τη λανθασμένη εντύπωση ότι οι ορισμοί των μαθηματικών αντικειμένων δίνονται *a priori και* υπάρχουν ανεξάρτητα από την ανθρώπινη εμπειρία σε κάποιο «*ιδανικό*» πλατωνικό κόσμο. Οι ορισμοί είναι αποτέλεσμα της ανθρώπινης εμπειρίας και επομένως το μόνο που μπορούν να κάνουν οι μαθητές είναι «*να τους ανακαλύψουν*», να τους εφεύρουν δηλαδή για τον κύριο σκοπό της ακριβούς μαθηματικής επικοινωνίας (p. 42).

Οι Mariotti & Fischbein (1997) θεωρούν ότι «δεν αρκεί ένας ορισμός να είναι σωστός από θεωρητικής απόψεως, αλλά πρέπει να είναι παραγωγικός υπό την έννοια ότι ανοίγει νέες προοπτικές στην σκέψη. [Υπό αυτή την έννοια] ένας ορισμός μπορεί να θεωρηθεί 'καλός' ορισμός (a 'good' definition) όταν το αντικείμενο που ορίζεται μπορεί να υπάρξει μόνο του και μπορεί να γίνει το αντικείμενο μιας νέας θεωρίας» (p.223). Οι Linchevsky, Vinner & Karsenty (1992) θεωρούν ότι ένας 'καλός' ορισμός είναι οικονομικός: «Αν οι ορισμοί δεν είναι οικονομικοί πρέπει να αποδείξουμε τη συνέπεια τους» (p. 54, οπ. αναφ. στο Govender & de Villiers, 2004, p. 47). Για παράδειγμα αν ορίσουμε ένα τετράγωνο ως «ένα παραλληλόγραμμο που έχει ίσες πλευρές, ίσες γωνίες και οι διαγώνιες του τέμνονται κάθετα» πρέπει να αποδείξουμε γιατί ισχύουν όλες αυτές οι ιδιότητες μαζί.

Το επίπεδο van Hiele ενός μαθητή αναγνωρίζεται από τον τρόπο με τον οποίο ορίζει μια μαθηματική έννοια ή ένα μαθηματικό αντικείμενο. Ο πίνακας των Gutierrez & Jaime (1998) στη συνέχεια συνοψίζει και διακρίνει τις συνιστώσες-κλειδιά των επιπέδων van Hiele αναφορικά με το ζήτημα του ορισμού των σχημάτων.

Πίνακας 2.5.Συγκριτική μελέτη των ορισμών ανά επίπεδο (Gutierrez & Jaime, 1998, p.30) (προσαρμοσμένο)

Επίπεδο 1	Επίπεδο 2
Οι μαθητές δεν είναι ικανοί να χρησιμοποιήσουν μαθηματικούς ορισμούς. Έχουν ικανότητα να διατυπώσουν μόνο τις περιγραφές των φυσικών χαρακτηριστικών του σχήματος.	Οι μαθητές δεν καταλαβαίνουν τη λογική δομή των ορισμών ως συνόλων αναγκαίων και ικανών ιδιοτήτων της έννοιας, έτσι όταν απαντούν για έναν ορισμό που δεν έχουν αποστηθίσει παρέχουν ένα σύνολο ιδιοτήτων της έννοιας. Όταν παρουσιάζεται στους μαθητές ένας ορισμός διαφορετικός από αυτόν που έχουν μάθει, συνήθως δε μπορούν να κατανοήσουν τη σχέση του ενός με τον άλλο και συνεχίζουν με το «δικό τους» ορισμό.
Επίπεδο 3	Επίπεδο 4
Οι μαθητές μπορούν να εφαρμόσουν λογικές σχέσεις μεταξύ των μαθηματικών ιδιοτήτων, επομένως είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν και να διατυπώσουν μαθηματικούς ορισμούς.	Οι μαθητές έχουν αναπτύξει μια καλύτερη κατανόηση της λογικής δομής των μαθηματικών, έτσι αναγνωρίζουν την ύπαρξη διαφόρων ορισμών της ίδιας έννοιας και μπορούν να αποδείξουν την ισοδυναμία τους.

Οι Govender & de Villiers (2004) διαπίστωσαν ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν εναλλακτικούς, σωστούς ή λανθασμένους, επαρκείς ή μη επαρκείς ορισμούς για την ίδια έννοια. Σύμφωνα με τη μελέτη τους, οι μαθητές διατυπώνουν:

- **αυθαίρετους ορισμούς**: διαφορετικούς, εναλλακτικούς αλλά σωστούς ορισμούς για την ίδια έννοια
- **αναγκαίους και επαρκείς** (ικανοποιητικούς) ορισμούς: περιέχουν αρκετές πληροφορίες (ιδιότητες), δηλαδή τα στοιχεία του συνόλου και μόνο αυτά τα στοιχεία·
- **σωστούς ορισμούς**: όταν όλοι οι όροι είναι αναγκαίοι και σωστοί αλλά μπορεί να περιέχουν και περιττά στοιχεία·
- **ανεπαρκείς (λανθασμένους) ορισμούς**: όταν περιέχουν λανθασμένες, ανακριβείς ή ανεπαρκείς ιδιότητες·

- **οικονομικούς ορισμούς**: όταν περιέχουν τα επαρκή και αναγκαία στοιχεία για να θεωρείται ο ορισμός πλήρης·
- **μη οικονομικούς ορισμούς:** όταν περιέχουν περισσότερα στοιχεία από τα αναγκαία (p.46)

Από την ταξινόμηση των Govender & de Villiers (2004), συνάγεται ότι μια κατηγορία ορισμών μπορεί να καλύπτεται εν μέρει ή συνολικά από μια άλλη κατηγορία. Για παράδειγμα, ένας *αυθαίρετος ορισμός* μπορεί να είναι *οικονομικός* (ή μη οικονομικός), καθώς και ένας *οικονομικός να* είναι *ικανοποιητικός ορισμός*. Ένας *σωστός ορισμός* επίσης είναι *οικονομικός ή μη οικονομικός*. Στην παρούσα μελέτη, βασικό κριτήριο για την αξιολόγηση ενός μαθητή ως προς την κατάκτηση του επίπεδου 3 van Hiele είναι η ικανότητά του να ορίσει ένα αντικείμενο με οικονομικό τρόπο και, επομένως, να κατανοήσει, μέσα από αφαιρετικές διαδικασίες σκέψης, τη συνέπεια των επαρκών και αναγκαίων στοιχείων που δεν επιδέχονται κάποια απόδειξη για τη συνέπειά τους, όπως μεταξύ άλλων υποστηρίζουν και οι Mason (1998), και Battista (2007).

Για την ανάλυση των δεδομένων της παρούσας μελέτης έχει υιοθετηθεί εν μέρει η ταξινόμηση των Govender & de Villiers (2004) και έχει καθοριστεί ακόμα ο τύπος του δυναμικού (ή αντιληπτικού /εμπειρικού) ορισμού καιτου αυθαίρετου οικονομικού ορισμού:

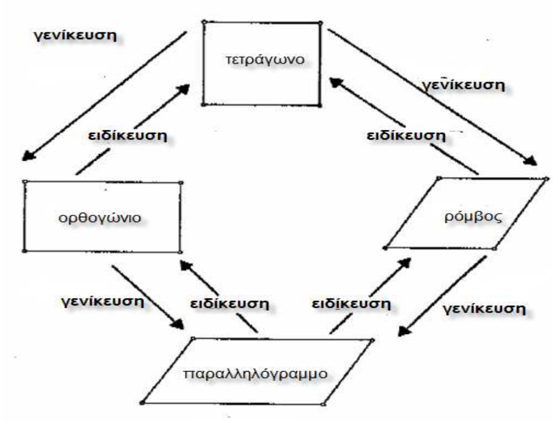
Δυναμικός/ ή αντιληπτικός εμπειρικός *ορισμός* είναι ο τύπος του ορισμού που αναπτύσσουν οι μαθητές όταν αλληλεπιδρούν με το δυναμικό διάγραμμα, και περιέχει συνδυασμό άτυπων και τυπικών εκφράσεων, οι οποίες προκαλούνται από την εμπειρία του υποκειμένου. Το γεωμετρικό αντικείμενο προσεγγίζεται επομένως μέσα από εμπειρικές εκφράσεις.

Ο δυναμικός ορισμός είναι μια ανεξάρτητη κατηγορία ορισμού που περιλαμβάνει δυναμικούς όρους, δηλαδή όρους δυναμικής γεωμετρίας, μέσα από τους οποίους οι μαθητές διατυπώνουν κάποια ιδιότητα του σχήματος καθώς δεν μπορούν να διατυπώσουν αυστηρούς τυπικούς όρους των γεωμετρικών εννοιών. Ένας δυναμικός ορισμός μπορεί να είναι αυθαίρετος, σωστός και οικονομικός ή το αντίστροφο.

2.2.5.2. Η ταξινόμηση των σχημάτων –σχέσεις εγκλεισμού

Πολλοί σύγχρονοι ερευνητές έχουν ασχοληθεί με την ιεραρχική ταξινόμηση των τετράπλευρων και με τα σχετικά ζητήματα ορισμού των σχημάτων λόγω της θέσης τους στην ιεραρχία (ενδεικτικά αναφέρονται De Villiers, 1994; Monaghan, 2000; Whiteley & Moshé, 2005; Neff, 2006; Athanasopoulou, 2008). Σύμφωνα με τον De Villiers (1994) «*ιεραρχική ταξινόμηση εννοιών* είναι η ταξινόμηση ενός συνόλου εννοιών με τέτοιο τρόπο ώστε οι πιο ειδικές έννοιες να διαμορφώνουν (/είναι) υποσύνολα των γενικότερων εννοιών» (p.11). Επομένως, η ιεραρχική ταξινόμηση των εννοιών των τετράπλευρων είναι η διάταξή τους με τέτοιο τρόπο, ώστε μια γενικότερη έννοια (π.χ. παραλληλόγραμμο) να είναι υπερσύνολο μιας ειδικότερης έννοιας (π.χ. τετράγωνο). Κατά συνέπεια η ταξινόμησή τους βασίζεται στην κατανόηση και τη συσχέτιση των ιδιοτήτων τους.

Οι μαθητές αντιμετωπίζουν εμπόδια στην ιεράρχηση των σχημάτων, καθώς προς τούτο απαιτείται αφαιρετική ικανότητα σκέψης. Σύμφωνα με τους Gutierrez & Jaime (1998), οι μαθητές επιπέδου 1 δεν αναγνωρίζουν καμιά λογική σχέση μεταξύ των σχημάτων, επομένως δεν μπορούν και να τα ιεραρχήσουν. Στο επίπεδο 2 έχουν αρχίσει να αποκτούν κάποια ικανότητα ιεράρχησης, αλλά αντιμετωπίζουν δυσκολία στην κατασκευή λογικών συνδέσεων μεταξύ των ιδιοτήτων. Στο επίπεδο 3 έχουν την ικανότητα να κατασκευάσουν σχέσεις εγκλεισμού και έχουν επιτύχει τον μέγιστο βαθμό ικανότητας ταξινόμησης, όπως και στο επίπεδο 4 van Hiele.



Σχήμα 2.2. Ειδίκευση και γενίκευση στην ιεράρχηση των εννοιών των τετραπλεύρων (De Villiers, 1994, p.13)

Σύμφωνα με τον De Villiers (1994), η ταξινόμηση ενός συνόλου εννοιών δε λαμβάνει χώρα ανεξάρτητα από τη διαδικασία του τρόπου ορισμού τους. Ο De Villiers (ό.π.) τοποθετεί την ταξινόμηση των τετράπλευρων σε μια γενικότερη ταξινόμηση των εννοιών. Διακρίνει δε δύο τύπους: «*την ιεραρχική* (hierarchical) και τη *διαχωριστική* (partitional) ταξινόμηση» (pp.11-12). Η ιεραρχική ταξινόμηση έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον γιατί τα σχήματα τοποθετούνται σε υποσύνολα με βάση τις ιδιότητές τους. Έτσι το τετράγωνο ανήκει στην τομή του συνόλου που περιλαμβάνει τα ορθογώνια και του συνόλου που περιλαμβάνει τους ρόμβους.

Μια νέα έννοια μπορεί να προκύψει ως *γενίκευση* από δύο άλλες έννοιες με την επιλογή δύο ή περισσότερων κατάλληλων κοινών ιδιοτήτων (περιορισμών) από αυτές τις έννοιες, καθώς και μια έννοια μπορεί να εξειδικευθεί με το συνδυασμό όλων των ιδιοτήτων των εννοιών. Στο σχήμα

2.2 το τετράγωνο αναπαριστάνεται ως ειδίκευση του ρόμβου και του ορθογωνίου, ενώ το ορθογώνιο ως ειδίκευση του παραλληλόγραμμου.

Οι Whiteley & Moshe (2005) και Neff (2006) θεωρούν λανθασμένη την άποψη κάποιων συγγραφέων σχολικών εγχειριδίων σύμφωνα με τους οποίους το τραπέζιο αναφέρεται ως τετράπλευρο με ένα ζευγάρι παράλληλων πλευρών, αντίθετα θεωρούν ότι ένα τραπέζιο είναι ένα τετράπλευρο με *τουλάχιστον* ένα ζευγάρι παράλληλων πλευρών. Ως εκ τούτου τα παραλληλόγραμμα θεωρούνται ειδικότερη κατηγορία των τραπεζίων.

Σύμφωνα με τους Whiteley & Moshe (ο.π.) οι ορισμοί που βασίζονται στην ιεραρχία των τετραπλεύρων είναι καταλληλότεροι αφού στηρίζονται σε μια γενίκευση του σχήματος.

Ερευνητές έχουν αναζητήσει τα αίτια των δυσκολιών ιεραρχικής ταξινόμησης σε σχέση με τη φύση των γεωμετρικών σχημάτων (π.χ, Fujita & Jones, 2007). Σύμφωνα με τον De Villiers (1994) στα επίπεδα 1, 2 η χρήση των λογισμικών (Logo, Sketchpad) προσφέρει δυνατότητες να κατανοήσουν τον ιεραρχικό τρόπο ταξινόμησης, αφού οι μαθητές έχουν την δυνατότητα να μετασχηματίσουν ένα σχήμα μέσω του συρσίματος μιας κορυφής του, προσθέτοντας στο σχήμα κάποιες ιδιότητες.

2.2.6.Απόδειξη και θεωρία των van Hiele

Μελέτες έχουν εξετάσει τη σύνδεση μεταξύ της ικανότητας κατασκευής απόδειξης και των επιπέδων γεωμετρικού συλλογισμού των μαθητών (Usiskin, 1982; Senk, 1985, 1989). Σύμφωνα με τη θεωρία των van Hiele οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολία στην ανάπτυξη αιτιολογήσεων, στην κατανόηση και κατασκευή της απόδειξης μιας μαθηματικής πρότασης, η οποία εξαρτάται από το επίπεδο van Hiele τους. Ο Van Dormolen (1977, p.32) πρότεινε ένα μοντέλο αξιολόγησης της ικανότητας των μαθητών στην αποδεικτική διαδικασία βασισμένο σε τρία επίπεδα, τα οποία έχουν επηρεαστεί από την τελική διάκριση των επιπέδων του van Hiele.

Πίνακας 2.6. Μοντέλο αξιολόγησης της ικανότητας των μαθητών στην αποδεικτική διαδικασία (Van Dormolen, 1977, p.32)

Πρώτο επίπεδο	Δεύτερο επίπεδο	Τρίτο επίπεδο
Η σκέψη του μαθητή/τριας χαρακτηρίζεται «συγκεκριμένη». Σε αυτό το επίπεδο δεν έχει αποκτήσει την ικανότητα να κατασκευάσει οποιουδήποτε τύπου επιχείρημα που προσεγγίζει μια απόδειξη και «η	Ο μαθητής/τρια κατασκευάζει συνδέσεις μεταξύ των αντικειμένων, καθώς συνειδητοποιεί ότι «έχουν κάτι κοινό». Κατασκευάζονται,	Ο μαθητής/τρια «αρχίζει να συνειδητοποιεί ότι επιχειρήματα σε εντελώς ανόμοιες περιοχές έχουν κοινά στοιχεία. Αυτή η κατανόηση μπορεί μπορεί να τον/την οδηγήσει να οργανώσει λογικά το

εννοιολογική οργάνωση του μαθητή μπορεί να περιγραφεί ως τοπική (local)». Αυτό το επίπεδο απόδειξης είναι σχετικό με το επίπεδο 1 van Hiele.	επιχειρήματα και άτυπες αποδείξεις.	περιεχόμενο της επιχειρηματολογίας του. Σε αυτό το επίπεδο ο μαθητής μπορεί να κατασκευάσει αποδείξεις και ορισμούς.

Σύμφωνα με τον van Dormolen (1977) «[όταν ο μαθητής βρίσκεται] σε ένα υψηλότερο επίπεδο σκέψης είναι σε θέση να επηρεάσει την εσωτερική οργάνωση του χαμηλότερου επιπέδου»(p.32). Ανάλογη είναι και η άποψη των Jaime & Guitierez (1994, p.44), οι οποίοι υποστηρίζουν ότι οι μαθητές στα διάφορα επίπεδα ανταποκρίνονται διαφορετικά όσον αφορά τις αποδείξεις. Αναλυτικότερα, στο πρώτο επίπεδο δεν κατανοούν την έννοια της απόδειξης, κάτι το οποίο μεταβάλλεται σταδιακά στα επόμενα επίπεδα, όπου οι μαθητές δε δυσκολεύονται να κατανοήσουν μια απόδειξη που περιέχει κάποια πειραματική επαλήθευση της πρότασης χρησιμοποιώντας τις περισσότερες φορές κάποιο ειδικό παράδειγμα.

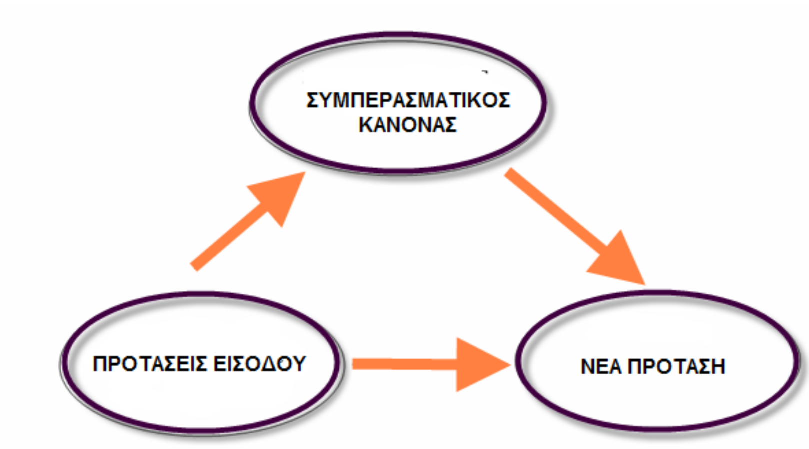
Σε υψηλότερο επίπεδο είναι σε θέση να σκεφτούν αφαιρετικά και να κάνουν λογικές αποδείξεις, ακόμα και να αποκτήσουν την ικανότητα να κατανοήσουν τις τυπικές αποδείξεις.

2.2.6.1. Επιχειρηματολογία και απόδειξη

Κατά τη διάρκεια μαθηματικών συζητήσεων οι μαθητές αναπτύσσουν επιχειρήματα (ενδεικτικά αναφέρονται Kuhn, 1992; Krummheuer, 1995; Duval, 1995; Yackel, 2001; Voss & van Dyke, 2001; Hoyles & Kuchemann, 2002; Knipping, 2003; Pedemonte, 2005, 2007; Inglis, Ramos & Simpson, 2007; Smith, 2010).

Ο Krummheuer (1995) θεωρεί ότι ένα *μαθηματικό επιχείρημα* είναι μια ακολουθία τυπικών και άτυπων δηλώσεων «τις οποίες μια ομάδα ατόμων που συμμετέχει στη συζήτηση αποδέχεται και μπορεί να ανακατασκευάσει» (p.247) προκειμένου να αιτιολογήσει την αλήθεια ενός φαινομένου που αντιμετωπίζει. Επιχειρηματολογία είναι η διαδικασία με την οποία ο μαθητής συνδέει λογικά τη μαθηματική συζήτηση που αναπτύσσεται. Αν και υπάρχουν ομοιότητες μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης το 'δομικό κενό' (structural gap) (Duval, 1995) μεταξύ των δυο διαδικασιών οφείλεται τόσο στην δομή όσο και στο περιεχόμενο τους. Κατά τη διάρκεια της λύσης ενός προβλήματος «μια απλή ερώτηση μπορεί να έχει την αξία ή τη δύναμη ενός επιχειρήματος», καθώς επιχείρημα μπορεί να είναι ακόμα και «ένα παράδειγμα, ένας ορισμός, ή ένας κανόνας» (Duval, 1999).

Ο Duval (1995) κάνει μια σαφή διάκριση μεταξύ της *επιχειρηματολογίας* και της απόδειξης. «Η δομή της απόδειξης για τον Duval περιέχει βήματα τα οποία συνδέονται με μια 'διαδικασία ανακύκλωσης’ (recycling process) (Duval, 1992-1993): το συμπέρασμα ενός βήματος χρησιμεύει ως όρος εισαγωγής στο επόμενο βήμα» (Pedemonte, 2007, p.24). Αντίθετα, στην επιχειρηματολογία, τα συμπεράσματα είναι βασισμένα στο περιεχόμενο μιας δήλωσης που περιέχει το είδος συλλογισμού που εμφανίζεται αυθόρμητα σε κάθε κατάσταση στο οποίο είναι αναγκαία μια αιτιολόγηση με στοιχεία άτυπης γλώσσας. Θεωρεί ότι η επιχειρηματολογία είναι βασισμένη στη δομή της γλώσσας και στις αναπαραστάσεις του μαθητή.



Σχήμα 2.3. Η μετάβαση από τις προτάσεις εισόδου στη νέα πρόταση (Duval, 1996)

Η δομή της απόδειξης στηρίζεται στο θεωρητικό πεδίο. Σε μια παραγωγική απόδειξη οι προτάσεις δε συσχετίζονται η μία με την άλλη για τη σημασιολογική αξία τους αλλά μόνο δυνάμει της «λειτουργικής θέσης» (*status opératoire)*, δηλαδή (Duval, 1991, 1996):

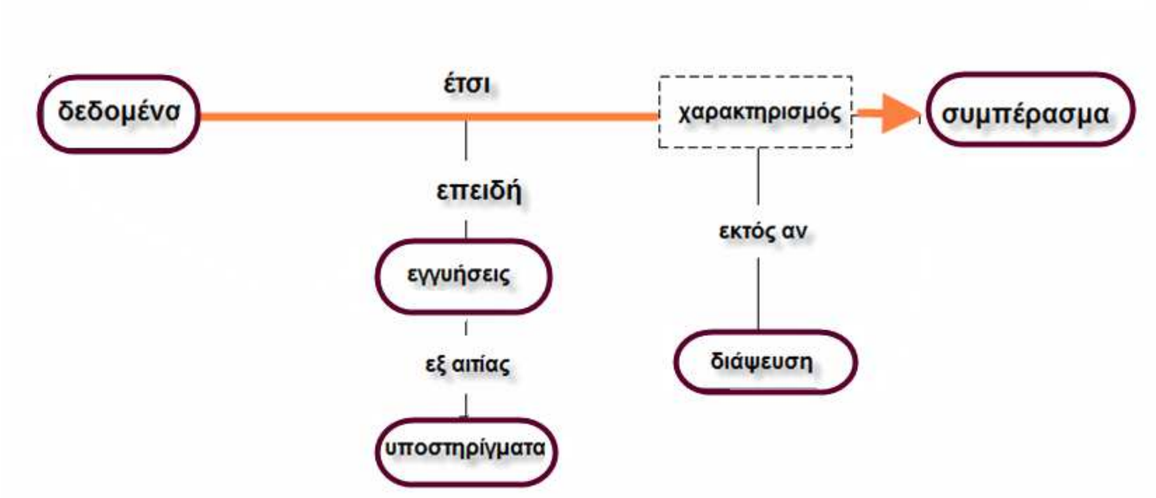
- **προτάσεις εισόδου** (entry propositions): υποθέσεις ή συμπεράσματα ενός προηγούμενου βήματος·
- **συμπερασματικοί κανόνες** (rules of inference): αξιώματα, θεωρήματα και ορισμοί·
- **νέες προτάσεις** (new propositions): το αποτέλεσμα του συμπεράσματος.

Οι συμπερασματικοί κανόνες μπορεί να είναι αξιώματα, ορισμοί και ήδη αποδεδειγμένα θεωρήματα. Το «συμπερασματικό» βήμα είναι το πέρασμα από κάποιες υποθέσεις σε κάποια συμπεράσματα λόγω ενός δοθέντος κανόνα, όπως αναπαριστάνεται από τον Duval (1996) στο παρακάτω σχήμα.Οι προτάσεις που χρησιμοποιούνται παίζουν μόνο λειτουργικό ρόλο, δηλαδή μπορεί αρχικά να είναι υποθέσεις και στη συνέχεια να χρησιμοποιούνται και ως συμπερασματικός κανόνας, κάτι που δε συμβαίνει όταν χρησιμοποιούμε επιχειρηματολογία η οποία αφορά την ερμηνεία μέσω της φυσικής γλώσσας μιας κατάστασης ως δικαιολόγηση, επεξήγηση κλπ.

2.2.6.2. Το μοντέλο του Toulmin

Το μοντέλο του Toulmin (1958) χρησιμοποιείται για να παρέχει ένα θεωρητικό πλαίσιο για την ανάλυση των επιχειρημάτων και της απόδειξης των μαθητών. Η φύση της επιχειρηματολογίας έχει παραμείνει σταθερή (Corbett, 1986, οπ. αναφ. στο Voss & van Dyke, 2001): το πρόσωπο Α ισχυρίζεται μια δήλωση, η οποία αν δεν είναι αυταπόδεικτη μπορεί να χρησιμοποιήσει μια πρόταση για να την υποστηρίξει. Αν το πρόσωπο Β διερωτηθεί για την βεβαιότητα ή την αποδοχή της υποστηρικτικής πρότασης τότε θα υπάρξει πιθανότατα μια αντι-πρόταση, την οποία το πρόσωπο Α θα προσπαθήσει να απορρίψει, οπότε θα επαναλάβουν την λύση. Αυτός ο τύπος του διαλόγου με επιχειρηματολογία προκύπτει σε διαφορετικές καταστάσεις, αφού θεωρείται ως εργαλείο μάθησης (π.χ., Krummheuer, 1995; Kuhn, 1992).

Ο Balacheff (1991) υποστηρίζει ότι η κοινωνική αλληλεπίδραση κατά την επίλυση ενός προβλήματος μπορεί να ευνοήσει την εμφάνιση επιχειρημάτων στην αποδεικτική διαδικασία. Ο Toulmin (1958) πρότεινε ένα μοντέλο για τη δομή επιχειρηματολογίας.



Σχήμα2.4. Το μοντέλο του Toulmin (1958, p. 104) για την ανάλυση τη δομής ενός επιχειρήματος

Η αποδόμηση του επιχειρήματος με το μοντέλο του Toulmin (1958) περιλαμβάνει έξι στοιχεία, καθένα από τα οποία έχει διαφορετικό ρόλο στην επιχειρηματολογία: τα δεδομένα, το συμπέρασμα ή ισχυρισμό, την εγγύηση, τα υποστηρίγματα, το χαρακτηρισμό και τη διάψευση.

- Τα **δεδομένα (data)** είναι η βάση –το θεμέλιο– του επιχειρήματος· ένας τύπος στοιχείων, γεγονότων ή γενικών πληροφοριών.
- Το **συμπέρασμα (claim)** είναι η δήλωση με την οποία κάποιος επιχειρεί να πείσει το ακροατήριό του.

- Η **εγγύηση (warrant)** αιτιολογεί τη σύνδεση μεταξύ δεδομένων και συμπεράσματος, αποτελώντας το «λογικό γεφύρωμα» (Toulmin 1958, p.90) μεταξύ τους. Στην περίπτωση της αποδεικτικής διαδικασίας –ως επιμέρους περίπτωσης μιας επιχειρηματολογίας– η εγγύηση είναι ένα αξίωμα, ένας ορισμός ή ένα θεώρημα σε μια ειδική θεωρία. Ο ρόλος της εγγύησης είναι ουσιαστικός για την ισχύ του επιχειρήματος.
- Η εγγύηση στηρίζεται στα **υποστηρίγματα (backing)** που παρουσιάζουν τα περαιτέρω στοιχεία, δηλαδή τις επιπρόσθετες πληροφορίες που παρέχονται προκειμένου να υποστηριχθεί η εγγύηση. Η εγγύηση είναι το στοιχείο που εξηγεί γιατί τα δεδομένα εύλογα στηρίζουν τον ισχυρισμό και δημιουργεί τη σύνδεση ανάμεσα στα δεδομένα και τα συμπεράσματα.
- Ο **χαρακτηρισμός (qualifier)** αφορά το συμπέρασμα, εκφράζοντας το βαθμό εμπιστοσύνης της εγγύησης (Toulmin 1958, p. 94).
- Η **διάψευση (rebuttal)** ενδεχομένως αντικρούει το συμπέρασμα, δηλώνοντας τις συνθήκες υπό τις οποίες δεν έχει ισχύ.

Στο πεδίο των μαθηματικών ο Krummheuer (1995) εφάρμοσε μια περιορισμένη μορφή του αρχικού μοντέλου παραλείποντας τη *διάψευση* και το *χαρακτηρισμό*, καθώς θεώρησε ότι δεν έχουν σχέση με τα μαθηματικά επιχειρήματα. Ορισμένοι ερευνητές (π.χ, Inglis, Ramos & Simpson, 2007) υποστηρίζουν ότι η *διάψευση* και ο *χαρακτηρισμός* είναι σημαντικά στοιχεία, ειδικά στην επιχειρηματολογία που αναπτύσσεται σε μαθηματικά ανώτερου επιπέδου. Οι περισσότεροι ερευνητές στο χώρο της διδακτικής των μαθηματικών έχουν όμως υιοθετήσει το «μειωμένο σχήμα» στη μελέτη της επιχειρηματολογίας των μαθητών αναφορικά με την ανάλυση δομής επιχειρημάτων λογικού παραγωγικού συλλογισμού (Hoyles & Kuchemann, 2002; Weber and Alcock, 2005), επιχειρημάτων στη γεωμετρία (Knipping, 2003; Pedemonte, 2005) και στην απόδειξη (Yackel, 2001), σχήμα το οποίο υιοθετείται και στην παρούσα μελέτη. Η Pedemonte (2007) εξέτασε τη δομή των επιχειρημάτων που αναπτύσσουν οι μαθητές και διαπίστωσε ότι διατυπώνουν διαφορετικούς τύπους επιχειρημάτων (π.χ. παραγωγικά, απαγωγικά και επαγωγικά επιχειρήματα). Τα επιχειρήματα αυτά έχουν άμεση σχέση με το είδος συλλογισμού που αναπτύσσουν.

2.2.6.3.Είδη συλλογισμού των μαθητών

Κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος, οι μαθητές αναπτύσσουν διάφορα είδη συλλογισμού, μεταξύ των οποίων τον επαγωγικό (inductive), παραγωγικό (deductive), απαγωγικό (abductive), και μετασχηματιστικό (transformational) συλλογισμό (Harel & Sowder, 1998; Peirce, 1992; Simon, 1996).

Ο Simon (1996) ορίζει το **μετασχηματιστικό συλλογισμό** «ως τη νοητική ή φυσική εκτέλεση (enactment) μιας διαδικασίας ή μιας σειράς διαδικασιών σε ένα αντικείμενο ή σύνολο αντικειμένων που επιτρέπει σε κάποιον να προβλέψει τους μετασχηματισμούς στους οποίους αυτά τα αντικείμενα υποβάλλονται καθώς και το σύνολο των αποτελεσμάτων αυτών των διαδικασιών» (p.201). Ένας μαθητής αναπτύσσει μετασχηματιστικό συλλογισμό όταν προβλέπει ενέργειες και διαδικασίες που απαιτούνται για την επίλυση ενός προβλήματος, όταν δηλαδή μπορεί να χειρίζεται μια εικόνα νοητικά. Η έννοια του μετασχηματιστικού συλλογισμού έχει πολλά κοινά σημεία με την έννοια των «προβλέψιμων εικόνων» (anticipatory images) των Piaget & Inhelder (1956). Επομένως, σχετίζεται με την ανάπτυξη της *διορατικότητας* εκ μέρους του μαθητή (van Hiele, 1986; Hoffer, 1983).

Από την άλλη ο **απαγωγικός συλλογισμός** αναπτύσσεται «όταν υποθέτουμε κάτι που είναι διαφορετικό από αυτό που έχουμε παρατηρήσει άμεσα, και συχνά κάτι το οποίο θα ήταν αδύνατο να παρατηρήσουμε άμεσα» (Peirce, 1960 οπ. αναφ. στο Ferrando, 2005, p.7). Ο απαγωγικός συλλογισμός κατά τον Peirce (1960), προκύπτει όταν κάποιος εξάγει από τα αποτελέσματα την αιτία. Δηλαδή «παρατηρεί τα γεγονότα και αναζητά μια θεωρία για να τα εξηγήσει […] ο γενικός τύπος της απαγωγής είναι: το γεγονός Α παρατηρείται, αν το Γ ήταν αληθές τότε το Α θα μπορούσε να ήταν αληθές, έτσι είναι λογικό να υποθέσουμε ότι το Γ είναι αληθές» (Peirce, 1960, p. 372). Ενώ **επαγωγικό συλλογισμό** αναπτύσσει ένας μαθητής**,** όταν από μια ειδική περίπτωση εξάγει έναν γενικό κανόνα, και **παραγωγικό συλλογισμό** όταν από έναν κανόνα κάθε ειδική περίπτωση. Σύμφωνα με τον Simon (1996), «η αποτελεσματική μαθηματική επίλυση του προβλήματος περιλαμβάνει συντονισμένη χρήση του μετασχηματιστικού, του επαγωγικού και του παραγωγικού συλλογισμού. Επιπλέον, ο μετασχηματιστικός συλλογισμός επικαλύπτεται σε πολλές περιπτώσεις και από τον επαγωγικό και παραγωγικό συλλογισμό» (p.204).

2.2.6.4. Συγκριτική μελέτη των εννοιών της αφαίρεσης, επαγωγής, υπόθεσης

Στο έργο του «Αφαίρεση, Επαγωγή, Υπόθεση» («Deduction, Induction, Hypothesis») ο Peirce (1906) επισημαίνει ότι οι μορφές της επαγωγής και της υπόθεσης οργανώνονται ως εξής.

Η **αφαίρεση** είναι το *αποτέλεσμα* (συμπέρασμα) που προκύπτει από έναν *κανόνα* και την ειδική *περίπτωση.* Η **επαγωγή** είναι το συμπέρασμα, δηλαδή ο *κανόνας* που προκύπτει από την ειδική *περίπτωση* και το *αποτέλεσμα.* Η επαγωγή είναι γενικά εμπειρικής φύσης.

Για τον Peirce (ο.π.) «επαγωγικό συμπέρασμα» σημαίνει ότι με την παρατήρηση μόνο κάποιου αριθμού αντικειμένων μιας ορισμένης κλάσης μπορούμε να συμπεράνουμε τι ισχύει για κάθε μέλος του συνόλου της κλάσης των αντικειμένων. Η **υπόθεση (απαγωγή)** είναι το συμπέρασμα μιας *περίπτωσης* από έναν *κανόνα* και ένα *αποτέλεσμα*. Η απαγωγή είναι η υπόθεση «μιας γενικής αρχής στην οποία καταλήγουμε από την παρατήρηση κάποιων γεγονότων για να συμπεριλάβουμε αυτά τα γεγονότα» (Ferrando, 2005, p.7)

Ο Peirce (1992) παρουσιάζει ορισμένα παραδείγματα για να εξηγήσει τις διαφορές μεταξύ των τριών μορφών συμπερασματολογίας, καθώς και τον διαφορετικό ρόλο και τις σχέσεις μεταξύ του κανόνα, του αποτελέσματος και της περίπτωσης σε κάθε μορφή συλλογισμού:

Πίνακας 2.7. Παραδείγματα αφαίρεσης, επαγωγής και απαγωγής (1992, p.188)

Αφαίρεση	Κανόνας (Rule) – όλα τα φασόλια από αυτή την τσάντα είναι άσπρα Περίπτωση (Case) – αυτά τα φασόλια είναι από αυτή την τσάντα Αποτέλεσμα (Result) – αυτά τα φασόλια είναι άσπρα
Επαγωγή	Περίπτωση – αυτά τα φασόλια είναι από αυτή την τσάντα Αποτέλεσμα – αυτά τα φασόλια είναι άσπρα Κανόνας – όλα τα φασόλια από αυτή την τσάντα είναι άσπρα
Απαγωγή	Κανόνας – όλα τα φασόλια από αυτή την τσάντα είναι άσπρα Αποτέλεσμα – αυτά τα φασόλια είναι άσπρα Περίπτωση – αυτά τα φασόλια είναι από αυτή την τσάντα.

Ο Peirce (1992) υποστηρίζει ότι η επαγωγή και η απαγωγή είναι δύο ξεχωριστοί τύποι συλλογισμού. Και η απαγωγή και η επαγωγή είναι «συνθετικές» μέθοδοι υπό την έννοια ότι κάτι που δεν υπονοείται στην υπόθεση περιλαμβάνεται στο συμπέρασμα. Η διαφορά μεταξύ των δύο βρίσκεται στα αποτελέσματα των συμπερασμάτων.

Ειδικότερα ο Peirce (1998/1901) θεωρεί ότι η μέθοδος απαγωγής και επαγωγής είναι «αντίστροφες» η μία προς την άλλη:

> «Η απαγωγή έχει αφετηρία τα *γεγονότα* [π.χ. παρατηρήσεις], και […] εκκινεί από την αντίληψη ότι απαιτείται μια θεωρία για να εξηγήσει τα γεγονότα. Η απαγωγή [επομένως] αναζητά μια θεωρία [και] η εκτίμηση των γεγονότων προτείνει την υπόθεση. Η επαγωγή ξεκινά από μια *υπόθεση* [υποτιθέμενη θεωρία] [π.χ. την παρατήρηση], χωρίς να έχει αφετηρία οποιαδήποτε *ιδιαίτερα* γεγονότα ενώ αντιλαμβάνεται την ανάγκη των γεγονότων για να υποστηριχθεί η θεωρία. Η επαγωγή [επομένως] αναζητά τα γεγονότα [και] η μελέτη της υπόθεσης προτείνει πειράματα που φέρνουν στο φως τα ίδια τα γεγονότα στα οποία η υπόθεση είχε αποδειχθεί» (p. 106).

Όταν ένας μαθητής αναπτύσσει ένα επιχείρημα, αυτό δεν περιλαμβάνει πάντα παραγωγικό συλλογισμό, αφού μπορεί να περιέχει, για παράδειγμα, εμπειρικά ή οπτικά στοιχεία είτε εξηγήσεις.

Η Pedemonte (2007) εξετάζοντας τη δομή των επιχειρημάτων των μαθητών διαπίστωσε ότι αναπτύσσουν παραγωγικά, απαγωγικά και επαγωγικά επιχειρήματα.

Η **επαγωγική επιχειρηματολογία** έχει δομή που απέχει από τη δομή μιας παραγωγικής απόδειξης σε αυτή την περίπτωση, μια σύνδεση μεταξύ της επιχειρηματολογίας και της απόδειξης μπορεί να βρεθεί μόνο όταν η επιχειρηματολογία περιέχει τη «γενική περίπτωση».

Οι Harel & Tall (1991) παρέχουν τον εξής ορισμό για την **γενίκευση**:

> «Ο όρος "**γενίκευση**" χρησιμοποιείται τόσο μέσα όσο και έξω από τα μαθηματικά· σημαίνει τη διαδικασία εφαρμογής ενός δεδομένου επιχειρήματος σε ένα ευρύτερο πλαίσιο» (p.38).

Επομένως η γενίκευση μπορεί να θεωρηθεί μέρος της απόδειξης, μια τεχνική σχετική με το επιχείρημα. Κατά συνέπεια, αν η απόδειξη θεωρείται «πειστικό επιχείρημα», η γενίκευση μπορεί να θεωρηθεί αποδεικτική μέθοδος. Ο Mason (1980) θεωρεί τη γενίκευση μια από τις «βασικές διαδικασίες στην καρδιά της μαθηματικής σκέψης» (p.8). Την τοποθετεί στο πλαίσιο της ειδίκευσης και του συλλογισμού με τον ακόλουθο τρόπο:

> **ειδίκευση** – με συγκεκριμένα παραδείγματα ώστε να προσπαθήσουμε να ανακαλύψουμε τι σημαίνει και να κατανοήσουμε πώς συνεχίζεται.
> **γενίκευση** – προσπάθεια να αρθρώσουμε τον υπονοούμενο γενικό κανόνα.
> **συλλογισμός** – παραγωγή ενός επιχειρήματος για να ελεγχθεί ότι η άρθρωση του γενικού κανόνα ισχύει (p.8)

Από αυτή την άποψη, η γενίκευση πραγματοποιείται πριν από την κατασκευή μιας απόδειξης, και η απόδειξη εδώ ταξινομείται κάτω από το συλλογισμό και περιλαμβάνει την παραγωγή ενός επιχειρήματος που επικυρώνει τη γενίκευση.

Προκειμένου μια **απαγωγική επιχειρηματολογία** να μετασχηματιστεί σε απόδειξη, η δομή πρέπει να αντιστραφεί. Μόνο η **παραγωγική επιχειρηματολογία** μπορεί να μετασχηματιστεί σε παραγωγική απόδειξη. Η σύγκριση μεταξύ μιας επιχειρηματολογίας και της επακόλουθης απόδειξης μπορεί να πραγματοποιηθεί εξετάζοντας το περιεχόμενό τους (λέξεις, εκφράσεις, θεωρητικό πλαίσιο αν υπάρχει) και/ή τη δομή τους.

Ο Peirce (1998/1903) θεωρεί ότι «η αφαίρεση είναι ο μόνος αναγκαίος συλλογισμός» (p. 205). Η αφαίρεση έχει αφετηρία τα γεγονότα (υποθετικές διατυπώσεις, ή γενικούς κανόνες) και οδηγείται στα ιδιαίτερα συμπεράσματα μέσα από ορισμένους καθορισμένους κανόνες λογικής.

Οι Hiebert & Lefevre (1986) χρησιμοποίησαν τον όρο *αφαιρετικότητα* (abstractness) για να προσδιορίσουν το βαθμό στον οποίο η γνώση του υποκειμένου απελευθερώνεται από το ειδικό πλαίσιο, η εφαρμοσιμότητά της αυξάνεται σε διαφορετικές καταστάσεις και γίνεται πιο γενική (στο White & Mitchelmore, 2010, p. 206). Ανάλογη είναι και η άποψη του Skemp (1986), ο οποίος υποστηρίζει ότι

> η αφαιρετικότητα (abstractness) είναι η δραστηριότητα μέσω της οποίας πληροφορούμαστε για τις ομοιότητες […] των εμπειριών μας. Η ταξινόμηση (classifying) είναι η συλλογή αυτών των εμπειριών που έχουν συγκεντρώσει αυτές τις ομοιότητες. Η αφαίρεση είναι ένα είδος ικανότητας της αφαιρετικότητας [του ατόμου] να αναγνωρίζει εμπειρίες που έχουν ομοιότητες με κάποια προηγούμενη κατηγορία. Η διαφορά μεταξύ **αφαιρετικότητας και αφαίρεσης** έγκειται στο ότι η πρώτη είναι μια δραστηριότητα ενώ η δεύτερη είναι το προϊόν της δραστηριότητας, το οποίο ***καλούμε έννοια*** (p. 21).

Επομένως «μια έννοια (π.χ. ορισμοί, απόδειξη) είναι το τελικό προϊόν […] μιας δραστηριότητας μέσω της οποίας πληροφορούμαστε για τις ομοιότητες […] των εμπειριών μας» White & Mitchelmore, 2010, p. 206).

Με την άποψη του Skemp (ο.π.) συμφωνεί ο Freudenthal (1991), ο οποίος υποστηρίζει ότι η εκμάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών πρέπει να είναι μια δραστηριότητα μαθηματικοποίησης της καθημερινής εμπειρίας των μαθητών, δηλαδή ανάπτυξης της αφαιρετικής ικανότητάς τους μέσω των μορφών: (1) της οριζόντιας μαθηματικοποίησης (horizontal mathematization), δηλαδή του μετασχηματισμού του προβλήματος από τον πραγματικό κόσμο στον κόσμο των συμβόλων, και (2) της κάθετης μαθηματικοποίησης (vertical mathematization), δηλαδή της ανάπτυξης των μαθηματικών ιδεών (στο White & Mitchelmore, 2010, p. 206).

Η έννοια της γεωμετρικής απόδειξης συνδέεται με τη θεωρία της γεωμετρίας, η οποία με τη σειρά της συνδέεται με την έννοια του παραγωγικού συλλογισμού ή, αλλιώς, «συστηματικής δομής» (Hanna & Janke, 2002), συνδυάζοντας ευρετικές και λογικές διαδικασίες.

2.2.6.5.Αιτιολόγηση και επιχειρηματολογία

Όροι όπως επεξήγηση, δικαιολόγηση, αιτιολόγηση, απόδειξη χρησιμοποιούνται στη βιβλιογραφία προκειμένου να υποδειχθεί ο τρόπος με τον οποίο κάποιος προσπαθεί να πείσει άλλους για την αλήθεια μιας μαθηματικής δήλωσης (π.χ, Bell, 1976a, b; Balacheff, 1988; Marrades & Gutiérrez, 2000; Harel & Sowder, 1998, 2007; Harel, 2008). Σύμφωνα με την Rodd (2000) μια *αιτιολόγηση* (justification) είναι ένα επιχείρημα που επιδρά στη διαισθητική αντίληψη κάποιου, δηλαδή προσφέρει ένα λόγο, μια αιτία γιατί ένας ισχυρισμός (claim) θα μπορούσε να είναι αληθής. Η διαφορά της *αιτιολόγησης* από την *εγγύηση* είναι ότι η δεύτερη «είναι ένα επιχείρημα που πείθει κάποιον ότι ο ισχυρισμός είναι αναμφίβολα αληθής» (Viholainen, 2008, p.18).

2.2.6.6.Κατηγορίες αιτιολογήσεων

Ο Bell (1976a, b) επισήμανε δύο τύπους αιτιολογήσεων των μαθητών σε προβλήματα που είχαν στόχο την απόδειξη της δήλωσης: την *εμπειρική αιτιολόγηση* (empirical justification) και την *παραγωγική αιτιολόγηση* (deductive justification).

Πίνακας 2.8. Κατηγορίες αιτιολογήσεων (Bell, 1976a, b)

Εμπειρική αιτιολόγηση	Παραγωγική αιτιολόγηση
Χαρακτηρίζεται από τη χρήση παραδειγμάτων ως στοιχείο πειθούς	Χαρακτηρίζεται από τη χρήση παραγωγικού συλλογισμού για τη σύνδεση των δεδομένων με τα συμπεράσματα.

Σε κάθε κατηγορία ο Bell επισήμανε ένα πλήθος τύπων αιτιολογήσεων. Συγκεκριμένα ανέλυσε το σύνολο των παραδειγμάτων που χρησιμοποιήθηκαν από τους μαθητές κατά την εμπειρική αιτιολόγηση και εξέτασε σε ποιο βαθμό επιβεβαιώνουν τη δήλωση. Οι τύποι των παραγωγικών επιχειρημάτων βασίζονται στο βαθμό πληρότητας του παραγωγικού επιχειρήματος.

Ο Balachef (1988) ομοίως, έχει προτείνει μια διάκριση ανάμεσα στην **πραγματολογική ή εμπειρική** (pragmatic) απόδειξη και τη **νοητική ή εννοιολογική** (conceptual) απόδειξη. Σύμφωνα με τον Balacheff (1988, p.217), οι εμπειρικές αιτιολογήσεις βασίζονται στη χρήση παραδειγμάτων ή δράσεων /ενεργειών.

Διακρίνουμε τρεις τύπους εμπειρικών αποδείξεων και δυο εννοιολογικών, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 2.9. Εμπειρικές και νοητικές αποδείξεις (Balacheff, 1988, p.217).

Εμπειρικές αποδείξεις (pragmatic proofs – preuve[5] pragmatique)	**Εννοιολογικές** αποδείξεις (intellectual proofs)
Είναι εκείνες που βασίζονται στις αποτελεσματικές ενέργειες που πραγματοποιούνται στις αναπαραστάσεις των μαθηματικών αντικειμένων.	Βασίζονται σε αφηρημένες διατυπώσεις των ιδιοτήτων και των σχέσεων μεταξύ των ιδιοτήτων.

[5] Η γαλλική γλώσσα επιτρέπει μια διάκριση μεταξύ του *prevue* –μια εξήγηση αποδεκτή από μια δεδομένη κοινότητα σε μία δεδομένη στιγμή– και του *démonstration* – μια μαθηματική απόδειξη βασισμένη στον παραγωγικό συλλογισμό.

Αφελής εμπειριο-κρατία (naïve empiricism)	**Κρίσιμο πείραμα** (crucial experiment)	**Γενικό παράδειγμα** (generic example)	**Πειράματα σκέψης** (thought experiment)	**Συμβολικοί υπολογισμοί**
Η δήλωση που πρόκειται να αποδειχτεί ελέγχεται μέσα σε λίγα, μάλλον τυχαία, παραδείγ-ματα.	Η δήλωση ελέγχεται με ένα προσεκτικά επιλεγμένο παράδειγμα όχι τυχαίο.	Η αιτιολόγηση βασίζεται σε λειτουργίες ή μετασχηματισμούς σε ένα παράδειγμα που επιλέγεται σαν αντιπροσωπευτικό μιας κλάσης αντικειμένων.	Οι ενέργειες ή δράσεις εσωτερικεύονται και αποσπώνται από τα ειδικά παραδείγματα που είναι ενδεικτικά με κάποιον άλλον τρόπο παρά από τα αποτελέσματα της χρήσης τους	Η αιτιολόγηση είναι βασισμένη στη χρήση των μετασχηματισμ ών ή των τυποποιημένων συμβολικών εκφράσεων.

Οι **πραγματολογικές/εμπειρικές αποδείξεις** είναι ουσιαστικά αποδείξεις σε ένα επίπεδο πραξιακό/εικονικό (enactive/iconic), που στηρίζονται δηλαδή σε «ενέργειες» (enactive) ή σε εικόνες («εικονικές»), και θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν *αποδείξεις δράσης* (Semadeni, 1984).

Ένα **θεώρημα-εν-δράσει** (theorem-in-action), (Vergnaud, 1996), είναι ένας τύπος εμπειρικής απόδειξης η οποία εκφράζεται «με προτάσεις που το υποκείμενο θεωρεί αληθινές για μια κατηγορία μεταβλητών καταστάσεων ή σε συσχέτιση με τον πραγματικό κόσμο» (p. 225). Οι **έννοιες-εν-δράσει** είναι ουσιώδεις συνιστώσες των θεωρημάτων- εν- δράσει. Όπως ισχυρίζεται ο Vergnaud (1996) «*δεν υπάρχει κανένα θεώρημα- εν- δράσει χωρίς μια έννοια- εν- δράσει και αντίστροφα, δεδομένου ότι δεν υπάρχει κανένα θεώρημα χωρίς μια έννοια»* (p. 225).

Το γενικό παράδειγμα παίζει σημαντικό ρόλο στη μετάβαση από τις πραγματολογικές αποδείξεις στις εννοιολογικές αποδείξεις.

Οι ***εννοιολογικές αποδείξεις*** είναι συμβολικής φύσης και στηρίζονται «στις διατυπώσεις των ιδιοτήτων» (Sacristan & Sanchez, 2002, p. 170). Δε βασίζονται σε ενέργειες αλλά «απαιτούν αυτή την γνώση που ανακλάται σ' αυτές και η παραγωγή τους προϋποθέτει αναγκαστικά τη χρήση της γλώσσας που εκφράζει (αποσυνδεδεμένη από τις ενέργειες) τα αντικείμενα, τις ιδιότητές τους και τις σχέσεις τους» (Sacristan & Sanchez, 2002, p.170). Η κατηγορία των εννοιολογικών αιτιολογήσεων περιέχει τα *πειράματα* σκέψης (thought experiment) στα οποία οι ενέργειες ή δράσεις εσωτερικεύονται και αποσπώνται από τα ειδικά παραδείγματα και τους *συμβολικούς υπολογισμούς*. Επομένως η αιτιολόγηση είναι βασισμένη στη χρήση των μετασχηματισμών ή των τυποποιημένων συμβολικών εκφράσεων.

Η πορεία από την εμπειρική στην εννοιολογική απόδειξη περιλαμβάνει μετασχηματισμούς στην γλώσσα του μαθητή.

Με άλλα λόγια, οι εμπειρικές αποδείξεις είναι βασισμένες στις ενέργειες, ενώ η χρήση της λειτουργικής γλώσσας (που περιλαμβάνει ένα συγκεκριμένο λεξιλόγιο και συμβολισμό) και μια νοητική εμπειρία (όπου οι πράξεις εσωτερικεύονται) χαρακτηρίζουν τη μετάβαση προς τις εννοιολογικές. «Η μετάβαση από την *εμπειρική απόδειξη* στην *εννοιολογική απόδειξη* με κατάληξη στη *μαθηματική απόδειξη* περιέχει τρεις συνιστώσες (/στοιχεία): τη γνώση σε επίπεδο πρακτικής (knowledge in terms of practices or levels-of-action component), τη γλώσσα ή τη διατύπωση (language or formulation component) και την επικύρωση (validation component), περιλαμβανομένων όλων των τύπων της λογικής που υπονοούνται από τις παραγόμενες αποδείξεις» (Sacristan & Sanchez, 2002, p. 171).

Τα σχήματα απόδειξης (Proof schemes) «ταξινομούν τις αποδείξεις σύμφωνα με τις ιδιότητές τους ή το επίπεδο τυπικότητας προκειμένου να παράσχουν θεωρητική υποστήριξη για τις εμπειρικές μελέτες στοχεύοντας στην ερμηνεία της συμπεριφοράς των μαθητών όταν κατασκευάζουν μια απόδειξη» (Harel, 2008, p. 489).

Ως εκ τούτου διαφέρουν από την έννοια της **απόδειξης** (proof) η οποία ορίζεται από τον Harel (2008) ως «ένα ειδικό επιχείρημα που κάποιος παράγει για να διαβεβαιώσει κάποιον ή να πείσει άλλους ότι ένα ισχυρισμός είναι αληθής» (p. 489) καθώς και από την **αποδεικτική δράση** (proving act) η οποία ορίζεται «ως η νοητική ενέργεια (mental act) που υιοθετεί ένα πρόσωπο ή κοινότητα για να άρει τις αμφιβολίες σχετικά με την αλήθεια ενός ισχυρισμού» (Harel, 2008, p. 489).

Είναι σαφές ότι το αποτέλεσμα των νοητικών ενεργειών ενός ατόμου σηματοδοτεί τον *τρόπο κατανόησής* του. Έτσι σύμφωνα με τον Harel (2008), «η απόδειξη είναι ο *τρόπος κατανόησης* του ατόμου, ενώ το αποδεικτικό σχήμα είναι ο *τρόπος σκέψης* του». Το παρακάτω σχήμα αναπαριστά τη διασύνδεση / σχέση μεταξύ της αποδεικτικής δράσης, του προϊόντος της απόδειξης και των γνωστικών χαρακτηριστικών της απόδειξης που παράγει κάποιος.

Σχήμα 2.5. Αποδεικτική δράση-απόδειξη-αποδεικτικό σχήμα (Harel, 2008, p.490)

Οι Harel & Sowder (1998, 2007), Sowder & Harel (1998), Harel (2008) κατέταξαν τα «**σχήματα απόδειξης**» (proof schemes) των μαθητών σε τρεις μεγάλες κατηγορίες, καθεμιά από τις οποίες αντιπροσωπεύει ένα γνωστικό επίπεδο. Συγκεκριμένα διακρίνουμε:

Σχήματα εξωτερικής πειθούς (schemes of external conviction): είναι σχήματα που οι μαθητές σχηματίζουν όταν δεν είναι σίγουροι για τις ικανότητές τους και για το ότι μπορούν να δημιουργήσουν μόνοι τους μαθηματικά. Η αιτιολόγηση είναι βασισμένη στην αυθεντία μιας πηγής εξωτερικής από τους μαθητές, όπως ο δάσκαλος ή το σχολικό εγχειρίδιο. Η αμφιβολία για τη φαινομενική εγκυρότητα μιας παρατήρησης αίρεται μέσω

- του *τυπικού σχήματος* (ritual scheme): τυπική μορφή επιχειρήματος, π.χ. οι αποδείξεις στη γεωμετρία πρέπει να έχουν τη μορφή δύο στηλών·
- του *σχήματος της αυθεντίας* (authoritarian scheme): εκφράσεις που προέρχονται από μια αυθεντία·
- του *δομικού σχήματος* (structural scheme): συμβολική μορφή επιχειρημάτων.

Εμπειρικά σχήματα (empirical schemes): αφορούν εμπειρικές αποδείξεις που προέρχονται από εμπειρικούς τρόπους (π.χ. μετρήσεις) που οι μαθητές εφαρμόζουν προκειμένου να καταλήξουν σε εικασίες (δηλαδή βασισμένες σε παραδείγματα ή σε ενέργειες) ή όταν συνάγονται αποτελέσματα αντιληπτικού τύπου. Διακρίνονται δύο τύποι:

- *επαγωγικά σχήματα* (inductive schemes): οι μαθητές πείθονται και πείθουν με χρήση εμπειρικών μετρήσεων·
- *αντιληπτικά σχήματα* (perceptual schemes): αντιληπτικές δραστηριότητες που όμως αποτυγχάνουν να μετασχηματίσουν αντικείμενα και να προβλέψουν τα αποτελέσματα των μετασχηματισμών.

Παραγωγικού τύπου αποδεικτικά σχήματα (Harel, 2008, p.491) ***ή αναλυτικά σχήματα*** (analytical schemes) είναι η τρίτη κατηγορία σχημάτων με τα οποία οι μαθητές επιτυγχάνουν, πλέον να προσδώσουν εγκυρότητα σε ισχυρισμούς, να μετασχηματίσουν αντικείμενα αλλά και να πετύχουν/ προβλέψουν τα αποτελέσματα αυτών των λειτουργιών. Η αιτιολόγηση βασίζεται σε γενικά παραδείγματα ή νοητικές λειτουργίες που καταλήγουν (result in) ή μπορούν να καταλήξουν σε τυπικές μαθηματικές αποδείξεις. Διακρίνουμε

- **Μετασχηματιστικά σχήματα** (transformational schemes): όταν οι παρατηρήσεις περιλαμβάνουν λειτουργίες με αντικείμενα και πρόβλεψη των αποτελεσμάτων αυτών των λειτουργιών αυτών των αντικειμένων. Τα βασικά χαρακτηριστικά είναι η *γενίκευση,* η *λειτουργική σκέψη* και τα *λογικά συμπεράσματα*. Η *γενίκευση* έχει να κάνει με την κατανόηση ότι ο στόχος είναι να δικαιολογηθεί «ένα γενικό» επιχείρημα και όχι οι μεμονωμένες περιπτώσεις, ενώ καμία εξαίρεση δεν γίνεται αποδεκτή. Η *λειτουργική σκέψη* εμφανίζεται όταν ένα υποκείμενο διαμορφώνει στόχους και υποστόχους και προσπαθεί να προβλέψει τα αποτελέσματά τους κατά την αποδεικτική διαδικασία. Τέλος, όταν ένα υποκείμενο έχει αναπτύξει την κατανόηση, η μαθηματική αιτιολόγηση γίνεται με βάση τους λογικούς κανόνες συμπεράσματος.
- **Νέα αξιωματικά σχήματα** (modern axiomatic schemes): όταν το υποκείμενο αντιλαμβάνεται ότι η μαθηματική αιτιολόγηση προκύπτει υπό όρους αξιωμάτων και προτάσεων. Το σχήμα αυτό περιλαμβάνει όλα τα προηγούμενα χαρακτηριστικά.

Οι Harel & Sowder (2009) υποστηρίζουν ότι η κατηγοριοποίηση των σχημάτων απόδειξης δεν είναι ιεραρχική, αλλά θα μπορούσε να θεωρηθεί ως «ένα πιθανό μοντέλο ανάπτυξης του υποκειμένου» (p. 488), πώς δηλαδή τα υποκείμενα αποδεικνύουν ή δικαιολογούν, πιο συγκεκριμένα, πώς αιτιολογούν στους εαυτούς τους ή πείθουν τους άλλους για την αλήθεια μιας μαθηματικής παρατήρησης.

Τα προβλήματα στα οποία οι μαθητές εμπλέκονται αποτελούν ένα σημαντικό μέσο για τη μετάβαση από την πρώτη στην τρίτη μορφή αποδεικτικών σχημάτων (Olivero, 2002). Οι μαθητές τώρα έχουν αποκτήσει την ικανότητα να γενικεύσουν τις εικασίες τους και να εκτελέσουν νοητικές διαδικασίες μέσω του παραγωγικού συλλογισμού. Τα σχήματα που προτείνουν οι ερευνητές αποτελούν μια σύνδεση μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης.

Επομένως ένα σημαντικό ζήτημα είναι πώς οι μαθητές θα μετακινηθούν από το πρώτο στο τρίτο επίπεδο, δηλαδή από τα σχήματα εξωτερικής πειθούς, στα οποία είναι φορείς ιδεών άλλων, στα αναλυτικά σχήματα, που αφορούν τις δικές τους μετασχηματιστικές διαδικασίες σκέψης.

2.2.7.Μάθηση βασισμένη στη θεωρία των van Hiele

Εξετάζοντας τη θεωρία των van Hiele (1986) και τη θεωρία του Piaget (1934) υπό το πρίσμα της κριτικής, παρατηρείται ότι «μεγάλο μέρος της εργασίας [των van Hiele] έχει τις ρίζες της στη θεωρία του Piaget» (van Hiele, 1986, p. 5) και στον κεντρικό ρόλο της ενεργού κατασκευής της γνώσης. Ο van Hiele επικεντρώνοντας στις διαφορές της θεωρίας του από εκείνη του Piaget, επισημαίνει μεταξύ άλλων: «(α) την ανάγκη να δώσουμε ερεθίσματα στα παιδιά ώστε να μεταβούν από το ένα επίπεδο στο επόμενο· (β) τον πολύ σημαντικό ρόλο της γλώσσας στην ανάπτυξη της σκέψης· (γ) ότι η μαθησιακή διαδικασία επηρεάζεται από το κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο μέσα στο οποίο εμφανίζεται, επομένως ο ρόλος του δασκάλου στην κατασκευή της γνώσης είναι σημαντικός· (δ) ότι οι δομές του ανώτερου επιπέδου είναι αποτέλεσμα της μάθησης του χαμηλότερου επιπέδου, σε αντίθεση με τον Piaget που πίστευε ότι τα παιδιά γεννιούνται έχοντας την υψηλότερη δομή» (pp. 5-6).

Η Dina van Hiele (Fuys et al., 1984, pp.217-223) εστίασε στην ανάλυση της σχέσης μεταξύ μαθητή και αντικειμένου της γεωμετρίας και ως αποτέλεσμα της έρευνας της διατύπωσε τις πέντε μαθησιακές φάσεις. Προσδιόρισε δυο περιόδους διδασκαλίας: (1) την εμπειρική περίοδο όπου οι μαθητές ενισχύονται με πρακτικές εφαρμογές (άτυπη Γεωμετρία) και (2) την τυπική περίοδο κατά τη διάρκεια της οποίας οι μαθητές αναπτύσσουν λογικές δομές (τυπική Γεωμετρία). Ένα σημαντικό τμήμα της εμπειρικής φάσης του διδακτικού πειράματος της Dina van Hiele περιλάμβανε τη χρήση μετασχηματισμών.

Σύμφωνα με την Dina van Hiele –Geldolf (1984)

> Όταν κάποιος πρόκειται να κάνει ένα διδακτικό πείραμα βασισμένος στις μαθησιακές διαδικασίες [...] πρέπει να φροντίσει οι δραστηριότητες [...] να είναι παιδαγωγικά δικαιολογημένες. Η διαφορά του διδακτικού πειράματος από ένα πείραμα στις φυσικές επιστήμες είναι ότι, ενώ στη δεύτερη περίπτωση οι παράγοντες που επηρεάζουν το φαινόμενο μπορεί να απομονωθούν, στο διδακτικό μαθηματικό πείραμα αυτό είναι αδύνατο. Ένας επιπλέον παράγοντας είναι η υποκειμενικότητα του παρατηρητή. Στις φυσικές επιστήμες αυτή η υποκειμενικότητα εκφράζεται με τις επιλογές των εργαλείων. Σε ένα διδακτικό πείραμα που περιλαμβάνει την παρατήρηση ψυχολογικών φαινόμενων η υποκειμενική στάση (subjective attitude) του παρατηρητή πρέπει επίσης να εξαλειφθεί (p. 5).

Σύμφωνα με τη θεωρία των van Hiele, ο παραγωγικός συλλογισμός εμφανίζεται στο επίπεδο 3 ενώ η τυπική αποδεικτική διαδικασία είναι ικανότητα του επόμενου επιπέδου. Οι μαθητές χαμηλότερου επιπέδου δεν κατανοούν τη διδασκαλία που απευθύνεται σε υψηλότερα επίπεδα.
Ο van Hiele (1986) άσκησε κριτική για κάθε τύπο διδασκαλίας γεωμετρίας όπου ο παραγωγικός συλλογισμός και η απόδειξη παίζουν σημαντικό ρόλο, αν οι μαθητές δεν έχουν αποκτήσει την ικανότητα της *λογικής συστηματοποίησης* (p. 97).

Σύμφωνα με τον Usiskin (1982) η θεωρία των van Hiele μπορεί να βοηθήσει τους δασκάλους των μαθηματικών να προβλέψουν την απόδοση των μαθητών τους στην γεωμετρία. Επομένως, αν *η απόδοση των μαθητών μπορεί να προβλεφθεί, τότε και ένας διαφορετικός τρόπος προσέγγισης των εννοιών μπορεί να προβλεφθεί εξαρτώμενος από το επίπεδο σκέψης των μαθητών*. Η Crowley (1987) ισχυρίζεται ότι «είναι σημαντικό για τους δασκάλους και τους ερευνητές να αποσαφηνίσουν τις φάσεις της μάθησης, να αναπτύξουν υποστηρικτικά υλικά του Προγράμματος Σπουδών που βασίζονται στη θεωρία των van Hiele ώστε να τα εφαρμόσουν στη φιλοσοφία της τάξης». Κατά συνέπεια τα υποστηρικτικά υλικά που διαμεσολαβούν προκειμένου οι μαθητές να κατανοήσουν τις έννοιες παίζουν μείζονα ρόλο στη γνωστική ανάπτυξη των μαθητών. Τα υλικά μπορεί να είναι διαχειρίσιμα υλικά (όπως οι διάφορες μορφές των αναπαραστατικών υλικών) ή ψηφιακά (αναπαραστατικά ψηφιακά υλικά), όπως τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας.

2.2.7.1. Επίπεδα van Hiele και λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας

Τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας χρησιμοποιήθηκαν σε ένα ευρύ πεδίο μελετών για τη διδασκαλία και μάθηση της γεωμετρίας κατά τις δύο περασμένες δεκαετίες. Ενδεικτικά αναφέρονται τα θεματικά τεύχη των περιοδικών *Educational Studies in Mathematics* (44:1-161, 2000) και *International Journal of Computers for Mathematical Learning* (6:229-333, 2001) (ό.π. αναφ. στο Leung & Or, 2007, p. 177). Πολλοί ερευνητές (ενδεικτικά αναφέρονται Mariotti, 2001; Jones, 2001; Hadas, Hershkowitz & Schwarz, 2001) σχεδίασαν ποιοτικές μελέτες με μαθητές πρωτοβάθμιας ή δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και παρατήρησαν τα αποτελέσματα της διαμεσολάβησης του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας (Cabri ή Sketchpad) στη διαδικασία διδασκαλίας και μάθησης της γεωμετρίας. Μεγάλο μέρος της έρευνας αφορά την ανάπτυξη της κατανόησης μέσω της οπτικοποίησης και την ανάπτυξη εικασιών μέσω του συρσίματος των μαθηματικών αντικειμένων (π.χ Holzl, 1996; Arzarello et al., 2002 οπ. αναφ. στο Leung & Or, 2007 p. 177).

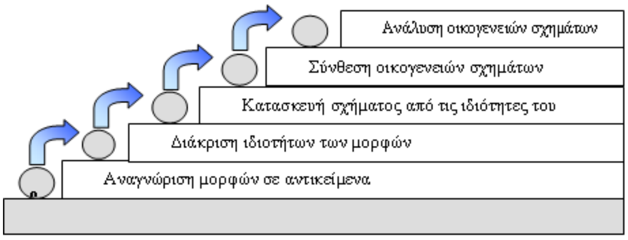
Γενικότερα, οι ερευνητές είναι διστακτικοί στην επίδραση του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας, ως προς τη μετακίνηση των μαθητών από τη διαδικασία παραγωγής εικασιών και τις εμπειρικές μεθόδους αιτιολόγησης στην αποδεικτική διαδικασία. Η Mariotti (2000) ισχυρίζεται ότι το σύρσιμο αυξάνει την ικανότητα ανάπτυξης επαγωγικού συλλογισμού των μαθητών. Οι Arzarello, Micheletti, Olivero, & Robutti (1998) σχεδίασαν μια ποιοτική έρευνα και μέσω της διερεύνησης τετράπλευρων οι ερευνητές επεξήγησαν ένα μοντέλο μετάβασης των μαθητών από τη διαδικασία διερεύνησης μιας εικασίας στην αποδεικτική διαδικασία, συνδέοντας προτάσεις λογικά σε μια διαδικασία ανόδου-καθόδου (ascending-descending process). Οι μαθητές οι οποίοι συμμετείχαν έπρεπε να πληρούν «την προϋπόθεση το επίπεδο τους να είναι άνω του μέσου όρου» (Olivero, 2002, p. 83). Οι μαθητές στην έρευνα του Jones (2001) έπρεπε να εξηγήσουν γιατί οι ιδιότητες των κατασκευών τους παραμένουν αμετάβλητες με το σύρσιμο μιας κορυφής του σχήματος και να κατασκευάσουν τη δική τους ταξινόμηση για τα τετράπλευρα σύμφωνα με τις σχέσεις τους. Όπως υποστηρίζει ο Jones (ό.π.), οι μαθητές ανέπτυξαν μαθηματικό συλλογισμό λόγω της διαμεσολάβησης του δυναμικού περιβάλλοντος. Ο Jones (ό.π.) επισημαίνει ότι η ανάπτυξη του συλλογισμού μπορεί να αποτελέσει ένα θεμέλιο ώστε οι μαθητές να αναπτύξουν παραγωγικό συλλογισμό. Σύμφωνα με τη Mariotti (2001) η διαδικασία της εσωτερίκευσης μετασχηματίζει τις εντολές του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας (Cabri) από *εξωτερικά σημεία σε εσωτερικά ψυχολογικά εργαλεία* που κατευθύνουν τη γεωμετρική σκέψη των μαθητών ώστε να παράγουν εικασίες και γεωμετρικές αποδείξεις.

Οι Hadas, Hershkowitz and Schwarz (2000) στην έρευνά τους μέσω του λογισμικού Sketchpad διαπίστωσαν την ανάπτυξη επαγωγικού και παραγωγικού συλλογισμού στις εξηγήσεις των μαθητών.

Η αλληλεπίδραση λοιπόν μαθητών και λογισμικού επηρεάζει τη γλώσσα και τα επιχειρήματα των μαθητών και, επομένως, την επικοινωνία που αναπτύσσεται μέσω της γλώσσας τους (Patsiomitou, 2011, 2012). Αυτή η άποψη είναι σύμφωνη με των Leung & Or (2007) οι οποίοι υποστηρίζουν:

> Η μελέτη των γραπτών και προφορικών διαλόγων που αναπτύσσεται στο πλαίσιο μιας διερεύνησης προβλήματος σε λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας είναι το κλειδί για το εμπειρικό και θεωρητικό κενό, καθώς η γλώσσα είναι ένα όχημα που μεταφέρει εσωτερικές σκέψεις και, αντιστρόφως, φορέας των αντιλήψεων των εννοιών (p. 177).

Αυτοί οι διάλογοι βασίζονται στην οπτικοποίηση. Οι Gonzalez & Herbst (2009) στο άρθρο τους «Students' conceptions of congruency through the use of Dynamic geometry software» ισχυρίζονται ότι τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας όπως το GeoGebra (Hohenwarter, 2001), το Cabri (Laborde et al., 1988), ή το The Geometer's Sketchpad (Jackiw, 1991), περιλαμβάνουν χαρακτηριστικά που διευκολύνουν μέσω της οπτικοποίησης των φαινομένων στη οθόνη, την αντίληψη των γεωμετρικών εννοιών. Ο Gawlick (2005) ομοίως, επισημαίνει ότι η εισαγωγή κατάλληλων δραστηριοτήτων στη μαθησιακή διαδικασία (για παράδειγμα, αναγνώρισης μορφών σε αντικείμενα στο επίπεδο 1, διάκρισης ιδιοτήτων των μορφών στο επίπεδο 2 κλπ.) βοηθά τους μαθητές να αναπτύξουν το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης τους, σύμφωνα με τη θεωρία των van Hiele (σχήμα 2.6). Τέτοιες δραστηριότητες που βοηθούν την οπτικοποίηση των εννοιών (π.χ το σύρσιμο των κορυφών ενός σχήματος ώστε να παρατηρηθεί η αμεταβλητότητα κάποιας ιδιότητας του σχήματος) στο λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας «μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως δραστηριότητες επιπέδου 1, οι μακροεντολές (ή προσαρμοσμένα εργαλεία) ως δραστηριότητες επιπέδου 2 και οι γεωμετρικοί τόποι ως δραστηριότητες επίπεδου 3» (p. 365). Καθορίζεται με αυτόν τον τρόπο μια «αυξανομένη διαδικασία» στην οικοδόμηση των γεωμετρικών εννοιών, όπως προβλέπεται από τον Freudenthal (1973) αφού «οι περισσότεροι ορισμοί […] αποτελούν την τελευταία πινελιά της οργάνωσης της δραστηριότητας» (p.417).



Σχήμα 2.6. Ερμηνεία των χαρακτηριστικών των επίπεδων van Hiele (Gawlick, 2005, p.370)

Σύμφωνα με τον Gawlick είναι αναγκαίο στο υλικό που θα χρησιμοποιήσουμε στις τάξεις:

- να σκιαγραφήσουμε διάφορες ακολουθίες προβλημάτων που έχουν αφετηρία τυποποιημένα εργαλεία και θέματα
- να καθορίσουμε μια «αυξανομένη διαδικασία» όλο και περισσότερο περίπλοκων διερευνήσεων
- να επισημάνουμε πώς τα DGS εργαλεία μπορούν να χρησιμοποιηθούν εύκολα στην πρόοδο των διαδικασιών επίλυσης προβλήματος.

Ο Gawlick (2005) θεωρεί ότι η αξία της δυναμικής προσέγγισης είναι διπλή : « (1) μπορεί να συνεχιστεί σε υψηλότερα επίπεδα και να προετοιμάσει τα χαμηλότερα επίπεδα έτσι ώστε οι μαθητές να εξοικειώνονται με τα εργαλεία και (2) σε όλα τα επίπεδα, μπορεί να παρέχει μια υλική βάση για τις διαδοχικές *φάσεις εκμάθησης* στην περιγραφή της προόδου κατά van Hiele από το ένα επίπεδο στο άλλο, δηλαδή μπορούν οι μαθητές να ερευνήσουν το θέμα σε μια φάση κατευθυνόμενου προσανατολισμού μέσω των δυναμικών περιβαλλόντων και να οικοδομήσουν στη συνέχεια τις νέες έννοιες βασιζόμενοι στην προϋπάρχουσα τους γνώση» (p. 370).

2.2.7.2.Έρευνες στο δυναμικό περιβάλλον του Geometer's Sketchpad βασισμένες στη θεωρία των van Hiele

Πολλοί ερευνητές έχουν πραγματοποιήσει μελέτες με το λογισμικό Geometer's Sketchpad αναφορικά με τη διδασκαλία και μάθηση των γεωμετρικών εννοιών (π.χ, Battista & Borrow, 1997; Yousef, 1997; Almeqdadi, 2000; Chazan, 1993; Scher, 2000; Sanchez & Sacristan, 2003; Yu & Barrett, 2005; Christou, Mousoulides, Pittalis, & Pitta-Pantazi, 2004a, b; Sinclair & Crespo, 2006; Hollebrands, 2007; Furner & Marinas, 2007). Η έρευνα έχει εστιάσει κυρίως σε δυο πεδία: (α) την επίδραση της κατανόησης των γεωμετρικών σχημάτων και ιδιοτήτων και (β) την επίδρασή τους στον παραγωγικό συλλογισμό των μαθητών (Hollebrands & Smith, 2009). Εξίσου όμως έχει απασχολήσει και η χρήση του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας για την πρόκληση γνωστικών συγκρούσεων στους μαθητές (π.χ Hadas, Hershkowitz, & Schwarz, 2000; Giraldo, Belfort & Carvalho, 2004).

Ο Scher (2000, p.44) υποστηρίζει ότι το συγκεκριμένο λογισμικό εισήχθη αρχικά στη διδασκαλία της γεωμετρίας προκειμένου οι μαθητές να έχουν τη δυνατότητα να σχεδιάσουν ακριβή σχήματα της ευκλείδειας γεωμετρίας. Πολλοί ερευνητές υιοθετούν την άποψη των Olkun, Sinoplu & Deryakulu (2005) ότι το «Geometer's Sketchpad είναι ένα κατάλληλο δυναμικό περιβάλλον στο οποίο οι μαθητές μπορούν να εξερευνήσουν τη γεωμετρία σύμφωνα με τα επίπεδα van Hiele τους» (p.3). Έχουν πραγματοποιηθεί πάρα πολλές έρευνες με το λογισμικό, στη βάση της θεωρίας των van Hiele για την αξιολόγηση των δεδομένων της έρευνας, οι οποίες κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές που χρησιμοποίησαν το Sketchpad παρουσίασαν σημαντικά υψηλότερα αποτελέσματα:

- στην κατασκευή και δοκιμή των εικασιών από μαθητές της δευτεροβάθμιας, [Growman (1996)]
- στα μετά-τεστ [ενδεικτικά Yousef (1997), Almeqdadi (2000)], σε σύγκριση με τους μαθητές που χρησιμοποίησαν τα εργαλεία των στατικών μέσων της γεωμετρίας και, επομένως, στην ανάπτυξη του επιπέδου van Hiele των μαθητών (Battista & Borrow, 1997)
- σε τεστ που περιείχαν έννοιες μετασχηματισμού [ενδεικτικά αναφέρεται η έρευνα της Dixon (1996), η οποία κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές που διδάχτηκαν τις έννοιες της ανάκλασης και της περιστροφής στο περιβάλλον του GSP ξεπέρασαν σημαντικά τους συνομήλικους τους που είχαν διδαχθεί παραδοσιακά τις έννοιες].

Η Sinclair (2001) παρατήρησε μαθητές σε αλληλεπίδραση με προκατασκευασμένα διαγράμματα που σχεδίασε στο Java Sketchpad (1998) και κατέληξε στο συμπέρασμα «ότι οι μαθητές παρακινήθηκαν από το λογισμικό, το οποίο τους βοήθησε να αναπτύξουν το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης τους ειδικά στο επίπεδο οπτικοποίησης και ανάλυσης, υποστηρίζοντας την εξερεύνηση, τον οπτικό συλλογισμό και την επικοινωνία» (p. 136). Η Hollebrands (2003, 2007) διερεύνησε τους τρόπους με τους οποίους το λογισμικό διαμεσολάβησε στην κατανόηση των μαθητών μέσω της χρήσης των μετασχηματισμών σε τάξη μαθητών με αυξημένες ικανότητες στη γεωμετρία (Honors Geometry Students). Στην έρευνα της εστίασε στο πως η χρήση των τεχνολογικών δυνατοτήτων βοήθησε τους μαθητές να κατανοήσουν τη διαφορά μεταξύ της κατασκευής ενός σχήματος και της κατασκευής ενός σχεδίου. Ο Abdelfatah (2011) διεξήγαγε μια έρευνα με το Geometer's Sketchpad χρησιμοποιώντας πραγματικά προβλήματα. Τα αποτελέσματα έδειξαν, μεταξύ άλλων, ότι το λογισμικό διευκόλυνε τους μαθητές να διατυπώσουν και να κατανοήσουν τις γεωμετρικές δηλώσεις, διευκόλυνε την κατασκευή καθώς και την ικανότητα μάθησης και κατανόησης της γεωμετρικής απόδειξης.

Από τη σύγκριση των προαναφερόμενων αποτελεσμάτων των ερευνών με τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας Geometer's Sketchpad και Cabri II διαπιστώνεται ότι το δεύτερο έχει χρησιμοποιηθεί περισσότερο για την ανάπτυξη επαγωγικού συλλογισμού και εικασιών, και λιγότερο για την ανάπτυξη ικανότητας παραγωγικών επιχειρημάτων. Αντιπροσωπευτικό παράδειγμα έρευνας ανάπτυξης ικανότητας παραγωγικών επιχειρημάτων είναι η έρευνα της Olivero (2002). Όμως, οι μαθητές οι οποίοι συμμετείχαν στην έρευνα της Olivero (2002) έπρεπε να πληρούν «την προϋπόθεση το επίπεδο τους να είναι άνω του μέσου όρου» (Olivero, 2002, p. 83), γεγονός που μειώνει την σημασία του λογισμικού ως προς την ανάπτυξη παραγωγικών επιχειρημάτων εκ μέρους των μαθητών.

Οι έρευνες με το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Geometer's Sketchpad έδειξαν ότι το λογισμικό ήταν κατάλληλο για την πρόκληση γνωστικών συγκρούσεων, για την ανάπτυξη ικανότητας παραγωγικών επιχειρημάτων και την άνοδο του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης των μαθητών σύμφωνα με τη θεωρία των van Hiele. Τα αποτελέσματα αυτά οδήγησαν την ερευνήτρια στην επιλογή του Geometer's Sketchpad ως του καταλληλότερου λογισμικού για την ανάπτυξη του επιπέδου των μαθητών και στην παρούσα μελέτη. Η έρευνα έδειξε ότι οι μαθητές, μέσω της συμμετοχής τους στο μαθησιακό μονοπάτι με Συνδεόμενες Οπτικές Ενεργές Αναπαραστάσεις, αποκτούν την ικανότητα ανάπτυξης παραγωγικού συλλογισμού καθώς και την ικανότητα απόδειξης, συνεπώς επιτυγχάνουν την ανάπτυξη του επιπέδου τους (π.χ. Patsiomitou, 2008, Patsiomitou, 2010). Κρίνεται, επομένως, αναγκαία η θεωρητική θεμελίωση του πλαισίου της έρευνας με τη βιβλιογραφία γύρω από τα ζητήματα της αναπαράστασης και της οπτικοποίησης των μαθηματικών εννοιών.

2.3. Αναπαραστάσεις - Αναπαραστατικά εργαλεία

Τα ζητήματα της αναπαράστασης και της οπτικοποίησης των μαθηματικών εννοιών αναφέρονται στην βιβλιογραφία ως θεμελιώδη, (ενδεικτικά αναφέρονται Presmeg, 1986; Janvier, 1987;Vergnaud, 1987; Vinner, 1989; Eisenberg & Dreyfus, 1990; Dreyfus, 1991; Glasensferd, 1991; Zimmermann & Cunningham, 1991; Dubinsky, 1994; Kaput, 1987, 1991, 1999, 2001; diSessa, 1994;

Duval, 1995; Aspinwall, 1995; Ainsworth, 1999, 2006) με τους ερευνητές να συμφωνούν για την θετική επίδραση/επίπτωση

- στην ανάπτυξη μαθηματικού διαλόγου σε ομάδες μαθητών ή στην τάξη ως μέσο της επικοινωνίας των ιδεών·
- στην ανάπτυξη της κατανόησης, της αναδιοργάνωσης και μετάφρασης των ιδεών σε σύμβολα·
- στην ανάπτυξη της μαθηματικής αιτιολόγησης και της επίλυσης προβλήματος.

Σύμφωνα με τους Goldin & Kaput (1996), οι αναπαραστάσεις ανήκουν σε δομικά συστήματα, προσωπικά ή πολιτισμικά, τα οποία ονομάζονται συστήματα αναπαράστασης. Διάφορες ερμηνείες των όρων «αναπαράσταση» και «σύστημα αναπαράστασης» σχετικά με τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών έχουν αποδοθεί από τους ερευνητές (Palmer, 1978; Lesh et al., 1987; Duval, 1995, 2006; Goldin & Kaput, 1996; Presmeg, 1998; Even, 1998; Vergnaud, 1998; Mesquita, 1998; Goldin & Janvier, 1998; Pape & Tchoshanov, 2001). O Duval (1999, p.6) χρησιμοποίησε τον όρο «*μητρώο αναπαράστασης*» (“register of representation”) για να προσδιορίσει ένα κατασκεύασμα στατικό ή δυναμικό.

Γενικότερα (Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2011):

> Αναπαράσταση είναι μια αντιστοίχιση, ένας μετασχηματισμός στοιχείων ή διαδικασιών του αντικειμένου (ή της οντότητας) που αναπαρίσταται με την οντότητα που προκύπτει ως αναπαράσταση, ως αποτέλεσμα της επεξεργασίας των πληροφοριών, του χειρισμού των εννοιών και των γνωστικών σχημάτων που αναπτύσσονται από το υποκείμενο.

Οι περισσότεροι ερευνητές στο χώρο της Διδακτικής και Ψυχολογίας των μαθηματικών συμφωνούν ότι οι αναπαραστάσεις των μαθηματικών αντικειμένων που κατασκευάζονται από τους μαθητές είναι αποτέλεσμα των νοητικών κατασκευών των μαθητών, καθώς εξετάζουν:

- τα *εξωτερικά αναπαραστατικά συστήματα, δηλαδή* κατασκευάσματα για την κατανόηση των μαθηματικών (Jonassen et al., 1992; Kaput, 2001), φυσικές ενσωματώσεις ιδεών, εννοιών και διαδικασιών (Lesh et al., 1987)
- τα *εσωτερικά αναπαραστατικά συστήματα, δηλαδή* κατασκευάσματα της μαθηματικής συμπεριφοράς των μαθητών, των νοητικών αναπαραστάσεων ή νοητικών κατασκευών της έννοιας (Goldin & Shteingold, 2001), μια διασύνδεση μεταξύ της οπτικοποίησης των εννοιών και της εξωτερικής αναπαράστασης (Pape & Tchoshanov, 2001).

Οι μαθητές κατά την διάρκεια επίλυσης ενός προβλήματος και μέσω της επικοινωνίας που αναπτύσσεται σε ένα διαμεσολαβούμενο από εργαλεία περιβάλλον, οδηγούνται να δημιουργήσουν τις δικές τους αναπαραστάσεις για μια οντότητα και να μετασχηματίσουν αναπαραστάσεις της ίδιας οντότητας. Προκειμένου να επιτευχθεί η κατανόηση μιας έννοιας, οι μαθητές θα πρέπει να δημιουργήσουν τη μεταβατική γέφυρα μεταξύ της εσωτερικής και της εξωτερικής αναπαράστασης της έννοιας. Σύμφωνα με τον Duval (2006), μπορούμε να διακρίνουμε δύο είδη μετασχηματισμών των σημειωτικών αναπαραστάσεων: «την επεξεργασία, δηλαδή τη διαδικασία μετασχηματισμού της αναπαράστασης σε μια άλλη στο ίδιο μητρώο (register)» (pp.111-112) (π.χ. ένα «ορθογώνιο παραλληλόγραμμο» μπορεί να μετασχηματιστεί λεκτικά σε «παραλληλόγραμμο του οποίου η μία γωνία είναι ορθή»), και τη «μετατροπή (conversion), δηλαδή τη διαδικασία μετακίνησης *από το ένα μητρώο προς ένα άλλο μητρώο,* αλλάζοντας δηλαδή το σημειωτικό σύστημα χωρίς να αλλάξουμε τα αντικείμενα που αναφερόμαστε» (pp. 111-112) (π.χ τη μετατροπή της λεκτικής διατύπωσης ενός προβλήματος σε εικονική).

Η δυσκολία που συναντούν οι μαθητές όταν μετατρέπουν τη μια αναπαράσταση σε άλλη στη γεωμετρία (για παράδειγμα, κατά τη μετατροπή της διατύπωσης ενός γεωμετρικού προβλήματος σε σχήμα) συνδέεται με «τη *σχηματική* (figural) και την *εννοιολογική* (conceptual) των γεωμετρικών εννοιών» (Fischbein, 1993). Σύμφωνα με τη θεωρία των *σχηματικών εννοιών* (figural concepts), ο γεωμετρικός συλλογισμός θεωρείται ο «συνδυασμός δύο ανεξάρτητων, ορισμένων οντοτήτων οι οποίες είναι αφηρημένες ιδέες (έννοιες), αφενός, και αναπαραστάσεις που προέρχονται από τις αισθήσεις και απεικονίζουν μερικές συγκεκριμένες διαδικασίες, αφετέρου» (Χ). Επομένως τα εννοιολογικά και σχηματικά χαρακτηριστικά που χρησιμοποιούνται στη διαδικασία κατασκευής αποδείξεων στη γεωμετρία «εξαρτώνται τόσο από *το εννοιολογικό σύστημα* που περιλαμβάνει αφηρημένες ιδέες και έννοιες όσο και από *το σχηματικό σύστημα* που περιλαμβάνει τις νοητικές αναπαραστάσεις και εικόνες» (Dvora & Dreyfus, 2004, p.311).

Σε κάθε διαδικασία όπως αυτή, υπάρχει μια δυσκολία αλληλεπίδρασης μεταξύ του εννοιολογικού και του σχηματικού συστήματος, με αποτέλεσμα πολλές από τις δυσκολίες στη γεωμετρία να ερμηνεύονται με βάση αυτή τη δυσκολία.

Η δραστηριότητα της επίλυσης των προβλημάτων είναι βασισμένη στην αλληλεπίδραση μεταξύ των διαφόρων αναπαραστατικών συστημάτων (ή μητρώων), των διεργασιών στο εσωτερικό του κάθε αναπαραστατικού συστήματος και (τέλος) στο μετασχηματισμό τους. Η ικανότητα «*μετάφρασης της έννοιας*» μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστατικών συστημάτων (Janvier, 1987) είναι αναγκαία για την *εννοιολογική κατανόηση* στα μαθηματικά.

Πολλοί ερευνητές εξετάζουν πώς τα περιβάλλοντα των αλληλεπιδραστικών γνωστικών εργαλείων, όπως είναι οι μαθηματικοί μικρόκοσμοι (Hoyles & Noss, 1993; Edwards, 1998), μπορούν να αξιοποιηθούν ώστε να ενσωματώσουν τις μαθηματικές ιδέες και διαδικασίες. Σύμφωνα με τον Goldin (2003), τα «συγκεκριμένα διαχειρίσιμα υλικά, οι μικρόκοσμοι σε υπολογιστές» (p. 277) και ειδικότερα τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας είναι εξωτερικά αναπαραστατικά συστήματα, που έχουν δυνατότητα κατασκευής και χρήσης πολλαπλών δυναμικών διασυνδεδεμένων αναπαραστάσεων [π.χ το Geometer's Sketchpad (Jackiw, 1991), Cabri II (Laborde et al., 1988), κ.α.]. Προκειμένου να υπερνικηθούν οι δυσκολίες μετάφρασης μεταξύ των αναπαραστάσεων, αυτά τα μαθησιακά υπολογιστικά περιβάλλοντα έχουν σχεδιαστεί να αξιοποιούν την αυτόματη μετάφραση ή τη «δυναμική σύνδεση» (automatic translation or «dyna-linking») (Ainsworth, 1999, p. 133).

Πολλοί ερευνητές (για παράδειγμα Laborde, 1995, 2005; Jackiw, 2006; Gonzalez & Herbst, 2009) αναφέρονται στο νέο τύπο διαγραμμάτων που προσφέρει το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, στα δυναμικά διαγράμματα. Η επεξεργασία των πληροφοριών ενός δυναμικού υπολογιστικού περιβάλλοντος και στη συνέχεια η αναπαραγωγή τους συνδέονται με τον τρόπο που αυτές οι πληροφορίες αναπαρίστανται στο γνωστικό σύστημα του μαθητή ως νοητικές εικόνες. Η εσωτερίκευση (internalisation), δηλαδή η διαδικασία που μετασχηματίζει τις εξωτερικές αναπαραστάσεις σε εσωτερικές ως κοινωνική διαδικασία, είναι μια διαδικασία ελέγχου των εξωτερικών «σημάτων» (Vygotsky, 1978). Το δυναμικό περιβάλλον διαμεσολαβεί στην αλληλεπίδραση και το μετασχηματισμό μεταξύ των εξωτερικών και εσωτερικών αναπαραστάσεων του μαθητή, δηλαδή στη διαδικασία εξωτερίκευσης και εσωτερίκευσης των αναπαραστάσεών του.

Το επίπεδο κατανόησης των μαθητών ελέγχεται από τις εξωτερικές αναπαραστάσεις που αυτοί κατασκευάζουν. Με αλλά λόγια, τα εξωτερικά κατασκευάσματα των μαθητών είναι δείκτης των εσωτερικών τους κατασκευασμάτων (Kaput, 1999; Goldin, 2003), δείκτης δηλαδή του τρόπου με τον οποίο ερμηνεύουν νοητικά τις έννοιες. Όπως θα εξεταστεί στη συνέχεια, ο σχεδιασμός των δυναμικών αναπαραστάσεων ή δυναμικών διαγραμμάτων έχει αντίκτυπο στις νοητικές αναπαραστάσεις, δηλαδή στους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές αναπτύσσουν την ικανότητα μετατροπής και επεξεργασίας μεταξύ των διαφορετικών μητρώων, καθώς οικοδομούν τις προσωπικές τους αναπαραστάσεις για τις μαθηματικές έννοιες.

Επομένως, είναι μείζονος σημασίας η διερεύνηση του 'καναλιού επικοινωνίας' που δημιουργείται λόγω των αναπαραστάσεων του λογισμικού όταν διαμεσολαβούν στην ανάπτυξη του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης των μαθητών.

2.3.1.Δυναμικό διάγραμμα

Ο όρος **διάγραμμα** σύμφωνα με την Mesquita (1998), χρησιμοποιείται μερικές φορές «υπό την ίδια έννοια του **σχήματος** στην αγγλική ορολογία**,** που είναι συνώνυμος με την έννοια των *εξωτερικών* και *εικονικών* αναπαραστάσεων» (p.183). Η διαφορά μεταξύ *σχήματος-σχεδίου* επισημάνθηκε από πολλούς ερευνητές. Η Dina van Hiele αναφέρεται σε 'σχέδια και κατασκευές' που οι μαθητές δημιουργούν. Για τον Parzysz (1988), ένα **σχέδιο** είναι «η αναπαράσταση ενός γεωμετρικού αντικειμένου» ενώ το **σχήμα** είναι «η έννοια που καθορίζει αυτό το θεωρητικό αντικείμενο». Η Laborde (1993) επίσης καθιστά σαφή τη διάκριση μεταξύ σχεδίου-σχήματος επισημαίνοντας ότι: «το σχέδιο αναφέρεται στην υλική οντότητα. Το σχήμα περιλαμβάνει το σύνολο των αναπαραστάσεων και των διαγραμμάτων που αναφέρονται στο θεωρητικό αντικείμενο. Το σχήμα τότε συνδέει το σχέδιο με το αφηρημένο γεωμετρικό αντικείμενο» (Hollebrands, 2007, p.167).

Οι Gonzalez & Herbst (2009) ορίζουν «το **δυναμικό διάγραμμα** [ως] ένα διάγραμμα κατασκευασμένο σε λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας που έχει τη δυνατότητα να μεταβληθεί με το σύρσιμο ενός στοιχείου του» (p. 154). Δηλαδή, ένα σχέδιο ή σχήμα που εγγενώς έχει δυναμικές ιδιότητες ή και ένα μοντελοποιημένο πρόβλημα το οποίο περιλαμβάνει πολλά επιμέρους γεωμετρικά αντικείμενα και συνδυασμούς αλληλεπιδραστικών τεχνικών (Sedig & Sumner, 2006) που εφαρμόζονται σ' αυτά.

Επομένως, ένα δυναμικό διάγραμμα είναι ένας τύπος *δυναμικής οπτικής μαθηματικής αναπαράστασης* (ΟΜΑ), δηλαδή «μια [δυναμική] αναπαράσταση που κωδικοποιεί οπτικά λειτουργικές, δομικές και σημασιολογικές ιδιότητες και σχέσεις ενός αναπαριστάμενου κόσμου – είτε αφηρημένου είτε συγκεκριμένου που αποτελείται από μαθηματικές δομές ή έννοιες (Glasgow, Narayanan & Chandrasekran, 1995; Peterson, 1996; Card, MacKinlay & Shneiderman, 1999; Cheng, 2002)» (Sedig & Sumner, 2006, p. 2).

Η αλληλεπίδραση με ένα δυναμικό διάγραμμα έχει δύο συνιστώσες: τον χρήστη ο οποίος δρα πάνω στο διάγραμμα και το διάγραμμα που «αντιδρά» ως απάντηση στη δράση του μαθητή-χρήστη (Sedig & Sumner, 2006, p.5).

Οι Sedig & Sumner (2006) έχουν ταξινομήσει και χαρακτηρίσει τις αλληλεπιδράσεις διακρίνοντας σε αλληλεπιδράσεις *μεγάλης κλίμακας* και *μικρής κλίμακας* (macro-level and micro-level) (p.4). Οι αλληλεπιδράσεις μεγάλης κλίμακας με τις Οπτικές Μαθηματικές Αναπαραστάσεις (ΟΜΑ) είναι η δυνατότητα (affordance), η ροή (flow) και η εστίαση (focus) (p.6). Οι αλληλεπιδράσεις μικρής κλίμακας με τις ΟΜΑ διακρίνονται σε δύο κύριες κατηγορίες: στις *βασικές αλληλεπιδράσεις* (basic Interactions) και τις *στοχο-βασισμένες αλληλεπιδράσεις* (task-based interactions) (p.9). Οι βασικές αλληλεπιδράσεις είναι οι βασισμένες στη *διαλεκτική* (conversing), το *χειρισμό* (manipulating) και την *πλοήγηση* (navigating)**,** δηλαδή αλληλεπιδράσεις που χρησιμοποιούμε για να « […] κατανοήσουμε τις ΟΜΑ και να αιτιολογήσουμε σχετικά με αυτές στα μαθηματικά γνωστικά εργαλεία» (p.9). Οι *στόχο-βασισμένες* αλληλεπιδράσεις θα εξεταστούν στην επόμενη ενότητα αναφορικά με το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Geometer's Sketchpad.

2.3.1.1.Κατηγοριοποίηση και χαρακτηρισμός των στοχο-βασισμένων αλληλεπιδραστικών τεχνικών του λογισμικού Geometer's Sketchpad

Κάθε εργαλείο ή συνδυασμός εργαλείων στο λογισμικό παράγει δυναμικά διαγράμματα, τα οποία μπορεί να συνδυάζουν απόκρυψη/εμφάνιση των αντικειμένων, γενικότερους συνδυασμούς κουμπιών ενέργειας, όπως προσθήκη κίνησης, παρουσίασης και σύνδεσης κ.λπ. Οι στοχο-βασισμένες αλληλεπιδράσεις που προκαλούνται από τα μαθηματικά γνωστικά εργαλεία, όταν συνδυαστούν έχουν ως αποτέλεσμα την υποστήριξη διαφορετικών γνωστικών δραστηριοτήτων στους μαθητές (Sedig et al., 2003 ο.π. Sedig & Sumner, 2006). Οι λειτουργίες αυτές μπορεί να προκύψουν μεμονωμένα αλλά και σε συνδυασμό, με αποτέλεσμα να προκαλούνται μεμονωμένες ή πολλαπλές σε συνδυασμό αλληλεπιδράσεις των μαθητών.

Οι στοχο-βασισμένες αλληλεπιδράσεις είναι δώδεκα και είναι βασισμένες στους γνωστικούς στόχους που οι μαθητές εκτελούν για να διερευνήσουν τις ΟΜΑ. Οι επτά από τις δώδεκα χρησιμοποιούνται όταν οι μαθητές αλληλεπιδρούν με τα δυναμικά διαγράμματα στο λογισμικό Geometer's Sketchpad: (α) Προσθήκη κίνησης· (β) σχολιασμός· (γ) σβολοποίηση· (δ) σύνθεση· (ε) Probing· (στ) αναδιοργάνωση· (ζ) ανασχεδιασμός.

Προσθήκη κίνησης (Animating): «Αυτή η εντολή θέτει κάθε επιλεγμένο γεωμετρικό αντικείμενο σε κίνηση» (εξελληνισμένη έκδοση εγχειριδίου χρήσης Geometer's Sketchpad) ώστε παράγεται μετασχηματισμός στο δυναμικό διάγραμμα. Ο μαθητής μέσω της διαδικασίας προσθήκης κίνησης οπτικοποιεί τις δυναμικές μεταβατικές ακολουθιακές διαδικασίες στο δυναμικό διάγραμμα, «γεφυρώνοντας έτσι το οπτικό χάσμα που υπάρχει ανάμεσα σε διαφορετικές δυναμικές αναπαραστάσεις και ενισχύοντας την κατανόηση με τη σύνδεση […] των περιστασιακών μετασχηματισμών» (Sedig & Sumner, 2006, p. 14)

Σχολιασμός (annotating): είναι η τοποθέτηση σημειώσεων ή σημαδιών (notes or marks) πάνω στο δυναμικό διάγραμμα. Οι σχολιασμοί/σημειώσεις που προστίθενται στο δυναμικό διάγραμμα του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας Geometer's Sketchpad μπορούν να διακριθούν σε *μόνιμους ή προσωρινούς* (Sedig & Sumner, 2006, p. 18). Για παράδειγμα το ίχνος (trace) είναι προσωρινός σχολιασμός αφού αφαιρείται όταν εκτελείται μια άλλη ενέργεια. Αυτός ο τύπος του σχολιασμού επιτρέπει στους μαθητές να δουν τις πιθανές θέσεις ενός σημείου όταν το μετακινήσουμε με χρήση του ποντικιού ή το θέσουμε σε κίνηση με χρήση της εντολής προσθήκης κίνησης. Η διαγραφή (crossing off), η ετικετοποίηση (labeling), ο χρωματισμός (coloring) είναι μόνιμοι σχολιασμοί.

Σβολοποίηση (Chunking): ομαδοποίηση, συνένωση ή σύσταση ενός αριθμού όμοιων ή συσχετισμένων αλλά διαχωρισμένων οπτικών στοιχείων σε μια νέα οπτική δομή, ώστε να δημιουργηθεί «ένα σύνθετο σχέδιο με οποιονδήποτε βαθμό πολυπλοκότητας,[…] επεκτείνοντας τα ενσωματωμένα εργαλεία που παρέχει το Sketchpad» (εξελληνισμένη έκδοση εγχειριδίου χρήσης Geometer's Sketchpad). Σύμφωνα με τον Nicholas Jackiw (προσωπική επικοινωνία, 29 Σεπτεμβρίου 2005), «από μια γνωστική προοπτική τα αρχεία εντολών (ή προσαρμοσμένα εργαλεία) αναπαριστούν μια αφαιρετική διαδικασία της εργασίας μας στο λογισμικό και, επομένως, ως αφαιρετικά εργαλεία απαιτούν ένα επίπεδο *εννοιολογικής κατανόησης* που απευθύνεται σε πιο προχωρημένους από ό,τι όταν χρησιμοποιούμε κοινά εργαλεία, όπως ο διαβήτης για παράδειγμα, ή άλλα εργαλεία».

Οι μακροεντολές ή [προσαρμοσμένα εργαλεία στο Sketchpad] είναι μια μορφή σβολοποίησης στο λογισμικό η οποία «βοηθά να κατασκευαστεί μια γεωμετρική κατασκευή με τη συμπύκνωση μιας πολύπλοκης ακολουθίας κατασκευαστικών βημάτων μέσα από μια απλή, ενιαία εντολή»(Kadunz, 2002, p.76). Επιτρέπουν επομένως «να ενθυλακώσεις κατασκευές (encapsulate constructions) μέσα σε νέες εντολές καθώς και να δημιουργήσεις ολόκληρο μικρόκοσμο με δικά σου εργαλεία» (Jackiw & Sinclair, 2004). Μπορούμε στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη νέα κατασκευή ως εισαγωγή (input) για να αναπτύξουμε μια δεύτερου τύπου (second-order) κατασκευή. Έτσι το αρχείο εντολών, ως *εννοιολογικό αντικείμενο* (conceptual object), (Sfard, 1991) μπορεί να λειτουργήσει σα σημείο αναφοράς για την οργάνωση πληροφοριών και ως δομική μονάδα γνώσης μπορεί εύκολα να χρησιμοποιηθεί σε διαφορετικές κατασκευές (Πατσιομίτου, 2010; Patsiomitou, 2008c).

Σύνθεση (composing): αναφέρεται σε μια μέθοδο αλληλεπίδρασης η οποία, στο περιβάλλον του Geometer’s Sketchpad, είναι βασισμένη στο μενού επιλογών εντολών που οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν για να κατασκευάσουν δυναμικά διαγράμματα. Η σύνθεση έχει χρησιμοποιηθεί ως αλληλεπίδραση που βοηθά τους μαθητές να αναπτύξουν διάφορα είδη συλλογισμού, όπως απαγωγικό (ενδεικτικά αναφέρονται Patsiomitou 2010, 2011; Patsiomitou & Emvalotis, 2009a; Baccaglini-Frank & Mariotti, 2009) ή παραγωγικό συλλογισμό (Patsiomitou 2010, 2011, 2012; Patsiomitou & Emvalotis, 2009a, 2010 a, b), και τους παρέχει τα μέσα ώστε να οδηγηθούν σε απόδειξη στο γεωμετρικό περιβάλλον του λογισμικού (Hanna, 2000; Scher and Goldenberg, 2001; Leung and Lopez-Real, 2002 οπ. αναφ. Sedig & Sumner, 2006, p. 22).

Αναδιοργάνωση (Rearranging): Η αναδιοργάνωση «είναι η αλλαγή της χωρικής θέσης και κατεύθυνσης των στοιχείων ενός δυναμικού διαγράμματος […] μια κατάσταση ροής (Preece et al., 2002) […] ιδιαίτερα χρήσιμη στην εύρεση της λύσης και στην επίλυση των προβλημάτων από τους μαθητές (Greeno, 1978)[…] αφού τους οδηγεί να παρατηρήσουν νέες πληροφορίες ή ή εστιάζει σ’ εκείνες τις πληροφορίες που διαφορετικά θα ήταν δύσκολο να παρατηρήσουν (Spence, 2001)» (Sedig & Sumner, 2006, p.33).

Ανασχεδιασμός (**Repicturing**): αναφέρεται στην αλληλεπίδραση με στοιχεία του δυναμικού διαγράμματος, με στόχο να τα εξετάσει ο μαθητής από διαφορετικές προοπτικές με εναλλακτικό τρόπο.

«Η ανασχεδίαση της οπτικής αναπαράστασης σχετίζεται με *τη χωρική, σημασιολογική και αισθητική κατανόηση* της ΟΜΑ (VMR).[…] Η χωρική σχετίζεται με τη γεωμετρία της VMR, η σημασιολογική με τη σημασία της και την εννοιολογική ισοδυναμία της, και η αισθητική με τη εμφάνιση της ΟΜΑ (VMR)» (Sedig & Sumner, 2006, p.35). Για παράδειγμα, στο μετασχηματισμό που αφορά την περιστροφή ενός αντικειμένου, οι μαθητές χρησιμοποιούν μια εναλλακτική αναπαραστατική μορφή, και επομένως η δυνατότητα να δουν μια διαφορετική διαμόρφωση της VMR παρέχει τις αιτιολογημένα ίσες οπτικές μορφές, οδηγώντας έτσι στη διαμόρφωση μιας πιο εύκαμπτης, διαφορετικής μαθηματικής σκέψης (Ainsworth et al., 1997; Bridger & Bridger, 2001; Gadanidis et al., 2004; Labeke, 2001; Scher & Goldenberg, 2001; Sedig et al., 2005 οπ. αναφ. στο Sedig & Sumner, 2006, p.36). Στην περιστροφή ενός αντικειμένου οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να εστιάσουν στην έννοια της περιστροφής παρά στη μορφή που περιστρέφεται, και επομένως μπορούν άμεσα να αλληλεπιδράσουν με την οπτική αναπαράσταση από περιστροφή (Sedig et al., 2001; de Souza & Sedig, 2001).

2.3.1.2. Δυναμικό σημείο

Δυναμικό σημείο είναι ένα σημείο κατασκευασμένο σε ένα δυναμικό περιβάλλον. Η έννοια του σημείου ως αντικειμένου στη δυναμική γεωμετρία αποτελεί μια διαφορετική οντότητα από την έννοια του σημείου της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Σύμφωνα με το εγχειρίδιο οδηγιών (reference manual) του Geometer's Sketchpad (2001) «σημεία είναι οι βασικές δομικές μονάδες της κλασσικής γεωμετρίας, και τα γεωμετρικά σχήματα όπως γραμμές και κύκλοι ορίζονται υπό όρους σημείων» (p.11). Οι Hollebrands, Laborde & Straeser (2008) έχουν διακρίνει τρία είδη σημείων σε δυναμικό περιβάλλον

- ένα ελεύθερο σημείο που μπορεί να συρθεί άμεσα οπουδήποτε στο επίπεδο (βαθμός ελευθερίας 2)
- ένα σημείο σε ένα αντικείμενο που μπορεί να συρθεί μόνο σε αυτό το αντικείμενο (π.χ, κύκλος, γραμμή, τμήμα) (βαθμός ελευθερίας 1)
- το σημείο που προκύπτει ως τομή και το οποίο δεν μπορεί να συρθεί ανεξάρτητα αλλά μόνο ακολουθώντας τις κινήσεις των αντικειμένων από τα οποία εξαρτάται (βαθμός ελευθερίας 0) (p.165).

Ο Hegedus (2005) επίσης αναφέρεται στα δυναμικά σημεία ως «φωτεινές κηλίδες» ("hot-spots") ως «κάτι που δεν είναι ένα τεχνούργημα του περιβάλλοντος αλλά ένα αξιωματικό μέρος του συστήματος που επιτρέπει τα 'αληθή' μαθηματικά σχήματα να οικοδομηθούν» (p. 2).

2. 3.1.3. Ημιπροκατασκευασμένα δυναμικά διαγράμματα

Με τον όρο *ημιπροκατασκευασμένα διαγράμματα* εννοούνται τα διαγράμματα που έχουν προκατασκευαστεί σε λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, έχοντας τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα των προκατασκευασμένων διαγραμμάτων συμπεριλαμβανομένης της δυνατότητας αναδιαμόρφωσης τους, ώστε οι έννοιες να προκύψουν μέσω της δυναμικής επανεφεύρεσης. Όπως ισχυρίζεται η Sinclair (2001),

> «οι μαθητές είναι σημαντικό να μάθουν να εξηγούν γιατί είναι αληθές κάποιο ειδικό εμπειρικό αποτέλεσμα στην οθόνη. Αφότου οι ερευνητές έχουν τεκμηριώσει ότι η αποδεικτική διαδικασία είναι δύσκολη για τους περισσοτέρους μαθητές (Hoffer, 1983; Clements & Battista, 1992) είναι πρόκληση να σχεδιάσουμε καταστάσεις που κινητοποιούν και ενισχύουν τον συλλογισμό και τις δεξιότητες επιχειρηματολογίας των μαθητών» (p. 2)

Η διαδικασία σχεδιασμού των ημιπροκατασκευασμένων διαγραμμάτων στην παρούσα μελέτη προέκυψε ως αλυσιδωτή ακολουθία απαντήσεων σε ερωτήσεις που οδηγούν στην κατασκευή μιας μαθησιακής ακολουθίας επίλυσης πραγματικού προβλήματος. Στόχος ήταν να συντελέσει στη διαδικασία διερεύνησης, διδασκαλίας και μάθησης, προβλέποντας ενέργειες του μαθητή και προσφέροντας του μια *σκαλωσιά* ώστε να εξοικονομήσει σημαντικό χρόνο από τα κατασκευαστικά βήματα για να διερευνήσει το πρόβλημα, να οπτικοποιήσει και να εξηγήσει νέες σχέσεις των αντικειμένων λόγω της επίδρασης κάποιας τεχνικής στο διάγραμμα, να αναγνωρίσει την απουσία πιθανών σχέσεων, να ενισχύσει τον τύπο του συλλογισμού που αναπτύσσεται κι ο οποίος εξαρτάται από το επίπεδο van Hiele του μαθητή. Σύμφωνα με τους Jackiw & Finzer (ibid.)

> «αν και η πράξη της κατασκευής ενός σχεδίου είναι μια διαδικασία λογικών εξαρτήσεων, εκμεταλλευόμαστε τα χαρακτηριστικά της γεωμετρίας για να αντικαταστήσουμε κατά ένα μεγάλο μέρος **την έννοια της *εξάρτησης* με αυτήν της *σχέσης*»**

Επομένως, το ημιπροκατασκευασμένο διάγραμμα υποστηρίζει τις γνωστικές δραστηριότητες του μαθητή ώστε όταν αλληλεπιδρά με τις ΟΜΑ «να αναδιοργανώσει, να προσθέσει σ' αυτές, να τις εξετάσει από διαφορετικές προοπτικές, να εστιάσει και να διερευνήσει για συγκεκριμένα στοιχεία μέσα σε αυτές, να τροποποιήσει, ενισχύοντας ή κρύβοντας –εμφανίζοντας τμήματα της, να ανασυνθέσει και να δημιουργήσει τις συνδέσεις μέσα σε αυτές»(Sedig & Sumner, 2006,p.3).

Τα ημιπροκατασκευασμένα διαγράμματα θα συντελέσουν ώστε ο μαθητής να καλύψει το κενό που παρουσιάζεται στις σκέψεις του από την αδυναμία των συνδέσεων και σχέσεων μεταξύ των γεωμετρικών αντικειμένων και να τους βοηθήσει στην ανάπτυξη δεξιοτήτων συλλογισμού.

2.3.2. Οι μετασχηματισμοί σε δυναμικό διάγραμμα

Ο μετασχηματισμός είναι μια λειτουργία (operation) κατά την οποία: α) κάθε σημείο στο αρχικό αντικείμενο έχει ένα μοναδικό σημείο είδωλο και β) κάθε σημείο στο είδωλο-αντικείμενο είναι το είδωλο μόνο ενός σημείου (Coxford & Usiskin, 1975, p. 1). Σύμφωνα με τον Klein (1896) «η γεωμετρία πρέπει να εξεταστεί ως μελέτη των ιδιοτήτων του χώρου που είναι αμετάβλητες κάτω από ένα σύνολο μετασχηματισμών». Η γεωμετρία μετασχηματισμών των μικρόκοσμων έχει βασιστεί στον ορισμό της γεωμετρίας του Klein, σύμφωνα με τον οποίο οι ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων παραμένουν αμετάβλητες.

2.3.2.1. Μετασχηματισμός λόγω συρσίματος

Το σύρσιμο (dragging) στο Sketchpad είναι «ένας συνεχής πραγματικού χρόνου (continuous real-time) μετασχηματισμός, χαρακτηριστικό το οποίο επιτρέπει στους μαθητές (/χρήστες) να κινήσουν διάφορα στοιχεία του σχεδίου ελεύθερα και να παρατηρήσουν άλλα στοιχεία να ανταποκρίνονται δυναμικά σύμφωνα με την εγγενή λογική της κατασκευής» (Chi Ming, 2005).

Οι Arzarello, Olivero, Paola, & Robutti (2002), Olivero (2002) διέκριναν επτά είδη συρσίματος, στο πλαίσιο της επίλυσης ενός ανοιχτού προβλήματος (τους τρόπους συρσίματος ενός αντικειμένου πάνω στην οθόνη) με δυναμικό λογισμικό γεωμετρίας: *Δοκιμή συρσίματος* (Dragging test), *Σύρσιμο περιπλάνησης* (Wandering dragging), *Καθοδηγούμενο σύρσιμο* (Guided dragging), *Πλαστός γεωμετρικός τόπος* (Dummy locus), *Συνδεδεμένο σύρσιμο* (Bound dragging), *Σύρσιμο γραμμών* (Line dragging), *Συνδεμένο σύρσιμο* (Linked dragging).

Για τις ανάγκες της παρούσας μελέτης, η ερευνήτρια ομαδοποίησε το σύρσιμο, εξετάζοντας τον τρόπο με τον οποίο ενεργεί κάποιος χρήστης με στόχο το μετασχηματισμό του δυναμικού διαγράμματος (Patsiomitou, 2011):

- **Θεωρητικό σύρσιμο**: όταν ο μαθητής στοχεύει να καταστήσει το *σχέδιο* που είναι στην οθόνη *σχήμα* ή όταν μετασχηματίζει με πρόθεση ένα σχέδιο ώστε να αποκτήσει κάποιες πρόσθετες ιδιότητες.
- **Πειραματικό σύρσιμο**: όταν ο μαθητής διερευνά αν το σχήμα πληροί ορισμένες ιδιότητες ή αν η τροποποίηση (ανατοποθέτηση ή αλλαγή προσανατολισμού ή οπτική μετατροπή) του σχήματος οδηγεί στην κατασκευή ενός άλλου σχήματος.

2.3.2.2. Μετασχηματισμοί της περιστροφής και της ανάκλασης σε δυναμικό περιβάλλον

Οι μετασχηματισμοί που χρησιμοποιούνται στα δυναμικά διαγράμματα της παρούσας μελέτης είναι:

- η αξονική συμμετρία (ανάκλαση) (reflection)·
- η (περι)στροφή (rotation), με εικόνα ένα αντικείμενο που στρέφεται κατά συγκεκριμένη γωνία, γύρω από ένα σημείο, το κέντρο·
- η παράλληλη μεταφορά (translation) με εικόνα ένα αντικείμενο που μετατοπίζεται, κατά ένα συγκεκριμένο διάνυσμα για τη σχεδίαση της φάσης καθοδηγουμένου προσανατολισμού των δυναμικών ενοτήτων ΣΟΕΑ (LVAR) (Patsiomitou, 2008b, 2010).

Οι παραπάνω μετασχηματισμοί είναι *ισομετρίες* (isometry), δηλαδή γραμμικοί μετασχηματισμοί του επιπέδου όπου διατηρούνται οι αποστάσεις των σημείων (Johnston & Richman, 1997).

> Μια ισομετρία είναι ένα μετασχηματισμός (δηλαδή μια συνάρτηση) που διατηρεί τις μετρήσεις και ειδικά τις αποστάσεις μεταξύ των σημείων P, Q. Αν f είναι ένας τέτοιος μετασχηματισμός τότε ισχύει ότι dist (f(P), f(Q)) = dist(P, Q). Αν θεωρήσουμε τα σχήματα στο επίπεδο ως σύνολο σημείων, τότε κάθε σύνολο σημείων S έχει μια εικόνα f(S) κάτω από την ισομετρία f. Ο ορισμός της ισομετρίας βεβαιώνει ότι οι σχετικές θέσεις των σημείων στο S συντηρούνται στο f(S), έτσι ώστε τα δύο σύνολα σημείων - S και f(S) -να είναι ίσα. Αυτό συμβαίνει συνήθως όταν μια ισομετρία θεωρείται ως *άκαμπτη κίνηση του* επιπέδου. (Ο όρος «άκαμπτη κίνηση» με τη διαισθητική ερμηνεία του, μπορεί να δημιουργεί σύγχυση.

Η ορολογία σκοπεύει να υπονοήσει ότι, ως αποτέλεσμα μιας τέτοιας κίνησης του επιπέδου συνολικά, η «νέα θέση» του S είναι η ίδια με τη «παλαιά θέση» του f(S)). Για παράδειγμα:

Ο μετασχηματισμός της **περιστροφής** είναι ο γεωμετρικός μετασχηματισμός $R_{O,\alpha}$ που ορίζεται από ένα σημείο O καλούμενο κέντρο περιστροφής και μια γωνία α, γνωστή ως γωνία περιστροφής. Η περίπτωση α = 0 (mod 2π) οδηγεί στην περίπτωση που δεν μετακινεί το σημείο. Για κάθε σημείο P, η εικόνα του $P' = R_{O,\alpha}(P)$ κείται στην ίδια απόσταση από το O, όση έχει και το P από το O και επιπροσθέτως η γωνία POP' είναι ίση με α.

Η **ανάκλαση** ως προς ευθεία L ενός σημείου P είναι ένα σημείο P' τέτοιο ώστε η PP' είναι κάθετη στην ευθεία L και PM = MP', όπου M είναι το σημείο τομής της PP' και της ευθείας L, έτσι ώστε να τοποθετείται στο άλλο ημιεπίπεδο αλλά σε ίση απόσταση από την ευθεία L. Τότε η ευθεία L καλείται άξονας συμμετρίας ή άξονας ανάκλασης. Αυτό μπορούμε να το αναπαραστήσουμε ως εξής $S_L(P) = P'$ αλλά και $P = S_L(P')$ καθώς και $S_L(P) = P$, αν το P κείται επί της ευθείας L. (http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Transforms/index.shtml)

2.3.3.Αλληλεπίδραση των χρηστών σε δυναμικά διαγράμματα

Η Laborde (2005) διακρίνει μεταξύ *θεωρητικών σχέσεων* των γεωμετρικών αντικειμένων (T) του διαγράμματος και *χωρογραφικών οντοτήτων* (SG), επισημαίνοντας κατ' αυτό τον τρόπο τις αναφορές (θεωρητικές ή μη) στις διαδικασίες σκέψης του ατόμου.

Τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας είναι περιβάλλοντα στα οποία οι *χωρογραφικές και θεωρητικές πτυχές* των διαγραμμάτων είναι αλληλένδετα συνδεδεμένες, επειδή η συμπεριφορά τους ελέγχεται από τη θεωρία. Αυτή η διάκριση συσχετίζεται με «τη *σχηματική* (figural) και την *εννοιολογική* (conceptual) φύση των γεωμετρικών εννοιών» (Fischbein, 1993). Σύμφωνα με την Laborde (2005):

- Το θεωρητικό πεδίο (T) καταδεικνύει τις θεωρητικές αναφορές σε μια γεωμετρική θεωρία, στα θεωρητικά αντικείμενα, τις σχέσεις και διαδικασίες σε αυτά τα αντικείμενα.
- Το χωρογραφικό πεδίο (SG) καταδεικνύει τις γραφικές οντότητες στις οποίες είναι δυνατό να εκτελέσουμε τις φυσικές ενέργειες (p. 161)

Στα δυναμικά περιβάλλοντα, όπως το Cabri II ή το Geometer's Sketchpad, τα διαγράμματα προκύπτουν από ακολουθίες πρωτοτύπων (sequences of primitives) που εκφράζονται με γεωμετρικούς όρους επιλεγμένους από τον χρήστη.

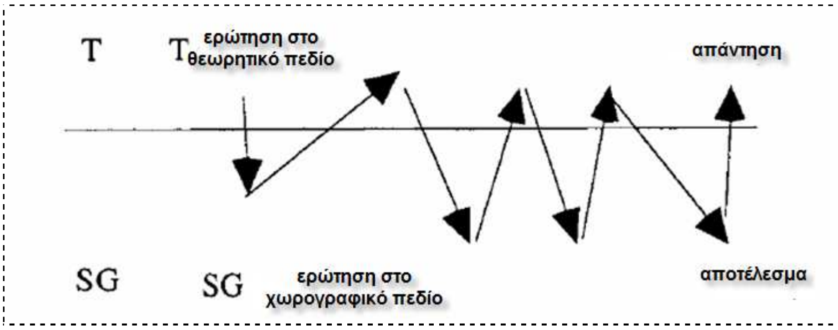
Σύμφωνα με τους Jackiw & Finzer (1993), «ένα αποτελεσματικό βήμα στην επίλυση ενός προβλήματος είναι η γνώση των σχέσεων που υπάρχουν στα δεδομένα του προβλήματος».

Συνεπώς, πώς «μεταβιβάζουμε στο περιβάλλον τη γνώση των σχέσεων» ή, διαφορετικά, πώς αποκωδικοποιούμε ένα πρόβλημα, χρησιμοποιώντας αλληλεπιδραστικές τεχνικές. Στη συνέχεια πώς το λογισμικό μάς βοηθά να εκμεταλλευτούμε αυτή τη σύνθεση. Η ιδιαιτερότητα που υπάρχει σε σχέση με μια κατασκευή στατική αφορά την εξάρτηση των αντικειμένων: δηλαδή, αν ένα βασικό στοιχείο διαγράφεται, η εξαρτώμενη κατασκευή παύει να υφίσταται (Jackiw & Finzer, 1993; Pratt & Ainley, 1997). Για παράδειγμα: αν κατασκευάσουμε το μέσο ενός ευθυγράμμου τμήματος και στη συνέχεια διαγράψουμε το ένα άκρο του τότε διαγράφεται και το τμήμα και το μέσο του τμήματος. Τα διαγράμματα σε ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας αφότου έχουν δημιουργηθεί

- **αποκτούν μια ημιανεξαρτησία** (quasi-independence) από τον χρήστη, μπορούν δηλαδή να τροποποιηθούν σύμφωνα με τη γεωμετρία των κατασκευών τους παρά σύμφωνα με τις επιθυμίες του χρήστη, δημιουργώντας έτσι ένα νέο είδος διαγραμμάτων (Laborde, 2005, p.165)
- είναι εντελώς αντίθετα από τις συμβατικές στατικές εικόνες που ενεργούν ως απλές απεικονίσεις ή αναπαραστατικά διαγράμματα. Είναι νέα μαθηματικά αντικείμενα που […] η μορφή γίνεται ***απείρως πλαστική*** μέσα στο λογισμικό (Jackiw, 2007, p.146)

Σύμφωνα με τους Jackiw & Finzer (1993) «όλα τα αντικείμενα στο GSP βρίσκονται σε ένα διάγραμμα εξάρτησης, μια κατευθυνόμενη μη κυκλική γραφική παράσταση. Τα «δεδομένα» αντικείμενα σε μια κατασκευή είναι ‘ελεύθεροι κόμβοι’ (free nodes). Τα αντικείμενα, όπως τα μέσα σημεία των πλευρών τριγώνου, είναι ‘εξαρτώμενοι κόμβοι’ (dependent nodes). Ένα σχέδιο αποτελείται από ένα ή περισσότερα σύνολα αντικειμένων που διατηρούν τη συνοχή λόγω ενός συστήματος περιορισμών».

Η κατασκευή ενός δυναμικού διαγράμματος «απαιτεί την […] αλληλεπίδραση μεταξύ του θεωρητικού και χωρογραφικού πεδίου» (Laborde, 2005, p.162). Στο διάγραμμα (σχήμα 2.7) επεξηγείται η δραστηριότητα ενός μαθητή (ή δασκάλου) κατά την επίλυση προβλήματος. Σύμφωνα με τους ερευνητές (π.χ Mariotti, 1995; Bartolini Bussi, 1991; Laborde, 2005) εκείνο που είναι σημαντικό είναι ότι οι μαθητές έχουν ως αφετηρία μια θεωρητική ερώτηση η οποία αποκτά νόημα στο χωρογραφικό επίπεδο.



Σχήμα 2.7: Δραστηριότητα του λύτη προβλήματος (Laborde, 2005, p.162)

Η συνεχής αλληλεπίδραση αυτών των δύο πεδίων, δηλαδή του χωρογραφικού και του θεωρητικού, αναμένεται να έχει:

- ένα αποτέλεσμα που ανήκει στο χωρογραφικό πεδίο SG·
- μια απάντηση που ανήκει στο θεωρητικό πεδίο T.

Πολύ συχνά στο περιβάλλον των στατικών μέσων, οι μαθητές παράγουν ένα διάγραμμα εργαζόμενοι στο χωρογραφικό επίπεδο. Στο περιβάλλον της δυναμικής γεωμετρίας, αν και ο μαθητής στην αρχική φάση (ή φάση δοκιμής) επιλέγει μια λύση στο πρόβλημα που ενδέχεται να μην ανταποκρίνεται στη γεωμετρική θεωρία, κάποια διαδικασία του λογισμικού μπορεί να τον βοηθήσει να παρατηρήσει κάποια ιδιότητα που πληροί μια συνθήκη, με αποτέλεσμα να θέσει νέους θεωρητικούς στόχους και να διερευνήσει το ζήτημα στο θεωρητικό επίπεδο.

Επομένως τα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας ευνοούν μια ισχυρότερη σύνδεση μεταξύ των χωρο-γραφικών και γεωμετρικών θεωρητικών περιοχών του διαγράμματος.

Οι διαδοχικές κινήσεις των μαθητών στο διάγραμμα μεταξύ του χωρογραφικού και του θεωρητικού (T και του SG) επιπέδου εξηγούν πώς η λύση δε διαμορφώνεται αμέσως στο θεωρητικό επίπεδο και πώς κάθε βήμα κατασκευάζεται με βάση τα προηγούμενα. Κατά τη διαδικασία, επομένως, διερεύνησης ενός προβλήματος σε δυναμικό περιβάλλον, η Laborde (2005) θεωρεί «ότι οι μαθητές αποκτούν συνείδηση της θεωρητικής φύσης και ωθούνται να την εξωτερικεύσουν» (p.171).

Η ανάλυση του τρόπου επίλυσης προβλημάτων δείχνει ότι οι μαθητές, στο στατικό περιβάλλον και εξαιτίας πιθανής πίεσης από τις υποχρεώσεις λόγω του πλαισίου της τάξης τους στα μαθηματικά, ωθούνται να προσεγγίσουν το θέμα τις περισσότερες φορές στο θεωρητικό επίπεδο αποτυχημένα.

Σύμφωνα με την Laborde (2005) αυτός ο λόγος είναι κοινωνικής φύσης και πηγάζει από αυτό που ο Brousseau (1992) καλεί *διδακτικό συμβόλαιο*: είναι μέρος των υποχρεώσεων των μαθητών σε μια τάξη γεωμετρίας να χρησιμοποιήσουν τη γεωμετρική ορολογία (p.169). Αν όμως θέλουμε να δούμε τους μαθητές να εξελίσσονται στη χρήση των γεωμετρικών μέσων για άλλους λόγους εκτός από την υποχρέωση που αισθάνονται λόγω του διδακτικού συμβολαίου, η γεωμετρία πρέπει να συνδέεται με διαδικασίες και διερεύνηση στο χωρογραφικό επίπεδο SG. Στόχος της διδασκαλίας της γεωμετρίας σύμφωνα με τη Laborde (2005) «είναι να αναπτυχθεί αυτή η δυνατότητα της άμεσης γεωμετρικής ερμηνείας από τους μαθητές μέσω των χωρογραφικών φαινομένων» (p.171).

2.3.3.1. Εργαλειακή αποκωδικοποίηση

Για να ολοκληρωθεί μια κατασκευή στο λογισμικό, ο μαθητής πρέπει να αποκτήσει την ικανότητα *εργαλειακής αποκωδικοποίησης* (Patsiomitou, 2011), δηλαδή την ικανότητα να αποκωδικοποιεί τις νοητικές του εικόνες με τη χρήση των εργαλείων, η οποία βασίζεται στη γνωστική ανάλυση του γεωμετρικού σχήματος (Duval, 1995). Η κατασκευή ενός σχήματος στην οθόνη ενός λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας εκ μέρους των μαθητών είναι αποτέλεσμα μιας σύνθετης διαδικασίας. Ειδικότερα, μια δυναμική αναπαράσταση προβλήματος «είναι μια γνωστική δομή που κατασκευάζεται από τον/τη μαθητή/τρια όταν ερμηνεύει το πρόβλημα» (Yackel, 1984, p. 7). Οι ερμηνείες των προβλημάτων μέσω δυναμικών διαγραμμάτων παίζουν σημαντικό ρόλο στην περιγραφή της γνώσης που οι μαθητές μεταφέρουν σε καταστάσεις προβλημάτων.

Ο μαθητής αρχικά μετατρέπει τη λεκτική διατύπωση ή γραπτή διατύπωση (για παράδειγμα, «κατασκεύασε ένα παραλληλόγραμμο») σε νοητική εικόνα, δηλαδή σε μια εσωτερική αναπαράσταση, ανακαλώντας ένα *αρχέτυπο σχήμα* (π.χ, Hershkovitz, 1990) αποτέλεσμα της εικόνας που έχει σχηματίσει για το παραλληλόγραμμο από ένα σχολικό εγχειρίδιο (ή από μια αυθεντία γενικότερα), και στη συνέχεια μετατρέπει την εσωτερική σε εξωτερική αναπαράσταση, που είναι το σχέδιο στην οθόνη.

Κατά τη διάρκεια μιας κατασκευής ο μαθητής είναι αναγκαίο να αναπτύξει τρία είδη κατανόησης αναφορικά με την επιλογή των εργαλείων και αντικειμένων στο λογισμικό, την αντιληπτική, τη σειριακή, τη λεκτική και τη λειτουργική κατανόηση. Πιο συγκεκριμένα, η ικανότητα της εργαλειακής αποκωδικοποίησης στο λογισμικό εξαρτάται από (Patsiomitou, 2011): α) τη ***σειριακή κατανόηση*** της επιλογής των εργαλείων (δηλαδή ο μαθητής πρέπει να επιλέξει το σημείο Γ και το τμήμα ΑΒ και στη συνέχεια την εντολή, δηλαδή να ακολουθήσει μια προκαθορισμένη σειρά)· β) τη ***λεκτική κατανόηση*** της επιλογής των εργαλείων, δηλαδή ο μαθητής να έχει την ικανότητα να εκφράσει τη διαδικασία («θα επιλέξω το σημείο Γ και το τμήμα

ΑΒ»)· γ) τη ***θεσιακή λειτουργία των στοιχείων*** της κατασκευής που στηρίζεται στην ***αντιληπτική κατανόησή*** του. Τότε ο μαθητής έχει κατασκευάσει τη ***λειτουργική κατανόηση*** των στοιχείων του σχήματος για την κατασκευή, που σημαίνει την ικανότητα να λειτουργήσει την κατασκευή του.

Η αναπαράσταση επομένως από την πλευρά του μαθητή ενός γεωμετρικού διαγράμματος σχετίζεται άμεσα με την κατανόηση του θεωρητικού στόχου της κατασκευής αλλά και με τη δόμηση του συνόλου των σχέσεων που το δημιουργούν. Αυτό συνεπάγεται την κατανόηση της ακολουθιακής σειράς με την οποία ο μαθητής θα κατασκευάσει το διάγραμμα και την αντιμετώπιση *γνωστικών συγκρούσεων* που θα προκύψουν. Συγκρίνοντας τη διαδικασία κατασκευής ενός διαγράμματος στο στατικό μέσο και στο δυναμικό μέσο, διαπιστώνεται ότι το στατικό διάγραμμα δεν έχει καμιά ανεξαρτησία από τη στιγμή που κατασκευάζεται, αφού σύμφωνα με τη Laborde (2005, p.165) «στην περίπτωση που κατασκευάζουμε διαγράμματα σε στατικά μέσα, (αυτά) ακολουθούν τις επιθυμίες των μαθητών ώστε να ικανοποιηθούν οι προσδοκίες τους». Αυτό σημαίνει ότι το διάγραμμα δε λειτουργεί βοηθητικά ώστε ο μαθητής να έρθει σε γνωστικές συγκρούσεις μέσα από τη λανθασμένη κατασκευή του.

2.3.3.2. Ανακλαστική Οπτική Αντίδραση (Reflective Visual Reaction)

Όταν οι μαθητές ενεργήσουν πάνω στα δυναμικά διαγράμματα λαμβάνουν ως αποτέλεσμα κάποια μορφή αναδραστικής ανατροφοδότησης, η οποία έχει άμεση σχέση με το συνδυασμό των εργαλείων που θα χρησιμοποιηθούν από τους μαθητές ή έχουν χρησιμοποιηθεί από τον δάσκαλο των μαθηματικών σε μια ημιπροκατασκευασμένη δραστηριότητα.

Μέσω των προβλημάτων «οι μαθητές ωθούνται σε γνωστικές συγκρούσεις οι οποίες παρέχουν το σπινθήρα για την αναστοχαστική σκέψη»[6] (reflective thinking) (Savery & Duffy, 1995). Η αναστοχαστική σκέψη: (1) είναι σκόπιμη (2) υποκινείται από μια προβληματική κατάσταση (3) περιλαμβάνει την εσωτερική εξέταση της προσωπικής γνώσης σε σχέση με την κατάσταση προβλήματος και (4) οδηγεί σε μια νέα διορατικότητα (Rogers, 2001). Ο Mezirow (1997) ονομάζει αυτού του τύπου τη μάθηση «μετασχηματιστική μάθηση**»,** όπου ο μαθητής ανακαλεί την προγενέστερη γνώση, μεταβάλλοντας έτσι το αρχικό πλαίσιο αναφοράς. Σύμφωνα με την Yuen Lie Lim (2009) η αναστοχαστική σκέψη θεωρείται ως «μεταγνώση, ενδοσκόπηση, και κρίσιμη σκέψη». Ειδικότερα, η χρήση των διαφορετικών τεχνικών στην κατασκευή του γεωμετρικού

[6] Το ζήτημα της αναστοχαστικής σκέψης (reflective thinking) δεν είναι καινούργιο, και η προέλευσή του αποδίδεται στον John Dewey (π.χ., Hatton & Smith, 1995) ο οποίος υποστήριξε ότι η αληθινή μάθηση επέρχεται μόνο αφού ο μαθητής έχει μια μαθησιακή εμπειρία και έχει δοκιμάσει να «υφάνει την έννοια μέσω της εμπειρίας» (Rodgers 2002).

διαγράμματος προκαλεί διαφορετικού τύπου αλληλεπιδράσεις, λόγω των ποικίλων μορφών αναπαραστάσεων στην οθόνη καθώς η μεταβολή του διαγράμματος με χρήση δυναμικών τεχνικών οδηγεί σε μια ακολουθία δυναμικά μεταβαλλόμενων διαγραμμάτων. Οι δυναμικές αναπαραστάσεις μπορεί να επιφέρουν αντιστοίχους νοητικούς μετασχηματισμούς οι οποίοι εξωτερικεύονται μέσω των πειραματικών μετασχηματισμών στο διάγραμμα. Αυτές οδηγούν στην κατασκευή νοητικών αναπαραστάσεων και μεταφράζονται λεκτικά ανάλογα με τον τρόπο κατανόησης του μαθητή, ακόμα και αν δεν εκτελούνται με υλικά μέσα αλλά μέσω της φαντασίας του μαθητή. Δημιουργείται επομένως «μια βαθμιαία οικοδόμηση και επεξεργασία της εννοιολογικής γνώσης των μαθητών» (Cifarelli, 1998) η οποία διευκολύνεται από τις προκύπτουσες «ομοιότητες» με προβλήματα που έχουν προηγηθεί.

Οι ερμηνείες λοιπόν των μαθητών περιλαμβάνουν προβλέψεις και αναστοχασμούς για την αποτελεσματικότητα της προγενέστερης δραστηριότητας λύσης, καθώς και την καταλληλότητα της πιθανής δραστηριότητας λύσης. Επομένως, μπορούν να αναστοχαστούν σε μια πιθανή δραστηριότητα και να «διαβλέψουν» τα αποτελέσματα ή να κινήσουν δυναμικά αναπαραστάσεις και να προβλέψουν τα αποτελέσματα. Πολλές φορές οι μαθητές έχουν την ικανότητα να προβλέψουν αυτόν το μετασχηματισμό στο διάγραμμα επειδή τον έχουν συνδέσει με κάποια προϋπάρχουσα γνώση την οποία προσαρμόζουν στη συγκεκριμένη περίπτωση.

> Όταν ο μαθητής διαβάζει μια μαθηματική πρόταση και την απόδειξη της, η αποκωδικοποίηση συμβόλων ή μαθηματικής γλώσσας και η σύνδεση τους με την προϋπάρχουσα γνώση είναι αναγκαία. (Yang & Lin, 2008, p.69)

Πολλοί μαθητές δεν έχουν την ικανότητα να οπτικοποιούν δυναμικά και να χειρίζονται γεωμετρικά σχήματα νοητικά, πράγμα σημαντικό για την επίλυση προβλημάτων στη γεωμετρία. Σε αυτή την περίπτωση πρέπει να εκτελέσουν όλες τις δραστηριότητες της λύσης, αφού δεν διαθέτουν την ικανότητα αναστοχασμού μιας πιθανής δραστηριότητας της λύσης ώστε να προβλέψουν τη λύση. Επομένως, οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί στο λογισμικό βοηθούν τον μαθητή να σχηματίσει ένα ενδιάμεσο στάδιο μεταξύ του συγκεκριμένου και του αφηρημένου. Τον βοηθούν να αποκωδικοποιήσει τα μαθηματικά σύμβολα και να τα συνδέσει με την προϋπάρχουσα γνώση. Τότε η αντίδραση του στο λογισμικό που περιλαμβάνει τις ενέργειες νοητικές και πραγματικές διευκολύνει στην κατανόηση και τη λύση.

Η αντίδραση αυτή έχει οριστεί ως **Ανακλαστική Οπτική Αντίδραση** (ΑΟΑ) (Reflective Visual Reaction) (RVR) (ενδεικτικά Patsiomitou, 2008a, b, 2010). Δηλαδή,

> είναι εκείνη η αντίδραση του μαθητή που είναι βασισμένη στον αναστοχαστικό τρόπο σκέψης και προέρχεται από την αλληλεπίδραση με τις ΣΟΕΑ στο λογισμικό,

διευκολύνοντας έτσι την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και την επίλυση των προβλημάτων.

2.4. Διαμεσολάβηση των εργαλείων

Ο όρος *διαμεσολάβηση* είναι ένας πολύ κοινός όρος στη βιβλιογραφία σχετικά με τον υπολογιστή και την εκπαίδευση, και σύμφωνα με την Mariotti (2002) χρησιμοποιείται «ως δυνατότητα ενδυνάμωσης της σχέσης μεταξύ των μαθητών και της μαθηματικής γνώσης» (p.705 οπ. αναφ. στο Cerulli, 2004, p. 30). Με τον όρο διαμεσολάβηση οι Noss & Hoyles (1996) εννοούν «τη δυνατότητα δημιουργίας ενός καναλιού επικοινωνίας μεταξύ του δασκάλου και του μαθητή βασισμένη σε μια κοινή γλώσσα» (p. 6).

Οι κοινωνικοπολιτισμικές προσεγγίσεις εξετάζουν τη διδασκαλία και μάθηση των εννοιών στο κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο (Vygotsky 1978; Wertsch 1998) στο οποίο αναφέρονται ή υφίστανται.

> «Αν η μάθηση θεωρείται ως κοινωνική πρακτική, τότε (α) η διδασκαλία μπορεί να θεωρηθεί ως η πρακτική ενορχήστρωσης μαθηματικών συζητήσεων και (β) η μάθηση μπορεί να θεωρηθεί ως οι διαδικασίες με τις οποίες οι μαθητές εμπλέκονται στις συζητήσεις. Σε αυτή την περίπτωση ο ρόλος του δασκάλου είναι εκείνος του διαμεσολαβητή των εννοιολογικών συζητήσεων που περιλαμβάνουν τη χρήση των καταλλήλων εργαλείων […] και ο ρόλος του μαθητή συσχετίζεται με τη συμμετοχή του στη συζήτηση, εστιάζοντας στους τρόπους με τους οποίους τα [πολιτισμικά] εργαλεία διαμεσολαβούν στις συζητήσεις»(Bowers & Stephens, 2011, p.3).

Ένας μεγάλος αριθμός ερευνών στο χώρο της ψυχολογίας της μάθησης (ενδεικτικά αναφέρονται Leont'ev, 1978; Vygotsky, 1978; Luria, 1979; Salomon, 1993 οπ. αναφ. στο Nardi, 1996), ανθρωπολογίας (Lave, 1988; Suchman, 1987; Flor & Hutchins, 1991; Hutchins 1991; Nardi & Miller 1990, 1991; Gantt & Nardi, 1992; Chaiklin & Lave, 1993 οπ. αναφ. στο Nardi, 1996), και της επιστήμης των υπολογιστών (Clement, 1990; Mackay, 1990; MacLean et al., 1990 οπ. αναφ. στο Nardi, 1996) «έχουν δείξει ότι δεν είναι δυνατόν να αντιληφθούμε πλήρως το πως οι άνθρωποι μαθαίνουν ή εργάζονται αν η γνώση είναι ατομική χωρίς αλληλεπίδραση με άλλους ανθρώπους ή με υλικά ή ψηφιακά τεχνουργήματα (artifacts) για την ολοκλήρωση ενός συγκεκριμένου στόχου» (Nardi, 1996 p.35). Σύμφωνα με τους Sedig & Liang (2008) «τα αλληλεπιδραστικά γνωστικά εργαλεία επηρεάζουν τη σκέψη και τις μαθησιακές διαδικασίες […] καθώς μπορούν να μετασχηματίσουν τις νοητικές διαδικασίες και δραστηριότητες» (p. 148).

Αυτά τα γνωστικά εργαλεία ή όπως αποκαλούνται διαφορετικά (Sedig & Liang, 2008 «‘εργαλεία μυαλού’, ‘εργαλεία σκέψης’, ή ‘γνωστικές τεχνολογίες’ («mind tools, thinking tools, or cognitive technologies» αντίστοιχα):

- αναπαριστούν τις πληροφορίες (Norman, 1993 όπ. αναφ. στους Sedig & Liang, 2008, p.148) και
- είναι αλληλεπιδραστικά και δυναμικά - εξυπηρετώντας τη διαμεσολάβηση μεταξύ μαθητή και πληροφορίας, διευκολύνοντας την απόδοση των επιμέρους δράσεων για τις αναπαραστάσεις των πληροφοριών (Sedig & Liang, 2006 όπ. αναφ. στους Sedig & Liang, 2008, p.148) ».

Το δίκτυο των σχέσεων διδασκαλίας-μάθησης σε ένα διαμεσολαβούμενο περιβάλλον από κατάλληλα εργαλεία για τη μάθηση, αναλύεται σε σχέση με την ψυχολογική θεωρία του Vygotsky (1978), η οποία δίνει έμφαση στον κοινωνικοπολιτισμικό χαρακτήρα της ανθρώπινης γνώσης. Η θεωρία του Vygotsky διακρίνει ανάμεσα σε δύο τύπους ψυχολογικών λειτουργιών: τις *ανώτερες* και τις *κατώτερες*. Στις ανώτερες ψυχολογικές λειτουργίες περιλαμβάνεται η *γλωσσική λειτουργία* ενώ στις κατώτερες, η *αντίληψη* (Kozulin, 1998).

Η θεωρία των van Hiele έχει πολλά κοινά σημεία με την θεωρία του Vygostky. Οι μαθητές στο πρώτο επίπεδο έχουν την ικανότητα να αντιλαμβάνονται τα αντικείμενα ολιστικά. Η ανάπτυξη της σκέψης συσχετίζεται με τον τρόπο που εξελίσσεται η γλωσσική έκφραση του μαθητή, αφού κάθε επίπεδο έχει τα δικά του γλωσσικά σύμβολα (van Hiele, 1986). Με άλλα λόγια, ως απόρροια της κατάλληλης διδασκαλίας, ο μαθητής αποκτά μια αυξανομένη ικανότητα στο χειρισμό των γλωσσικών συμβόλων. Πώς όμως τα εργαλεία διαμεσολαβούν στην ανάπτυξη αυτής της ικανότητας;

2.4.1.Υλικά και ψυχολογικά εργαλεία

Η διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών στην τάξη είναι μια κοινωνικοπολιτισμική δραστηριότητα (Vygotsky, 1978; Wertsch, 1998) στην οποία τα υλικά και ψυχολογικά 'εργαλεία' παίζουν σημαντικό ρόλο ως διαμεσολαβητές της διαδικασίας κατασκευής των μαθηματικών εννοιών και ειδικότερα των γεωμετρικών εννοιών. Με την άποψη αυτή συμφωνεί η Kozulin (1990) η οποία ισχυρίζεται ότι οι υψηλότερου επιπέδου νοητικές λειτουργίες είναι απόρροια μιας κοινωνικοπολιτισμικής δραστηριότητας.

Αν και από ψυχολογική προοπτική υπάγονται στην ίδια κατηγορία της *έμμεσης* (διαμεσολαβημένης) δραστηριότητας, η βασική διαφορά μεταξύ των σημείων και των εργαλείων στηρίζεται στη διαμεσολαβητική λειτουργία που χαρακτηρίζει κάθε ένα από αυτά (Mariotti, 2000):

- Τα *υλικά εργαλεία* κατευθύνονται προς τα υλικά αντικείμενα στα οποία απευθύνονται αλλά επηρεάζουν και τη γνωστική δραστηριότητα του υποκειμένου που τα χρησιμοποιεί. Η λειτουργία των υλικών εργαλείων είναι επομένως *προσανατολισμένη εξωτερικά*, ώστε να χρησιμεύσει ως ο αγωγός της ανθρώπινης δραστηριότητας που στοχεύει στην οργάνωση/κυριαρχία της φύσης.
- Τα *ψυχολογικά εργαλεία* (π.χ. σημεία, σύμβολα, τύποι) είναι συμβολικά τεχνουργήματα και κατευθύνουν το νου και τη συμπεριφορά του υποκειμένου. Η λειτουργία των σημείων (*ψυχολογικών εργαλείων)* είναι *προσανατολισμένη εσωτερικά,* είναι ένας τρόπος της εσωτερικής δραστηριότητας που στοχεύει στην οργάνωση ενός υποκειμένου (p.14)

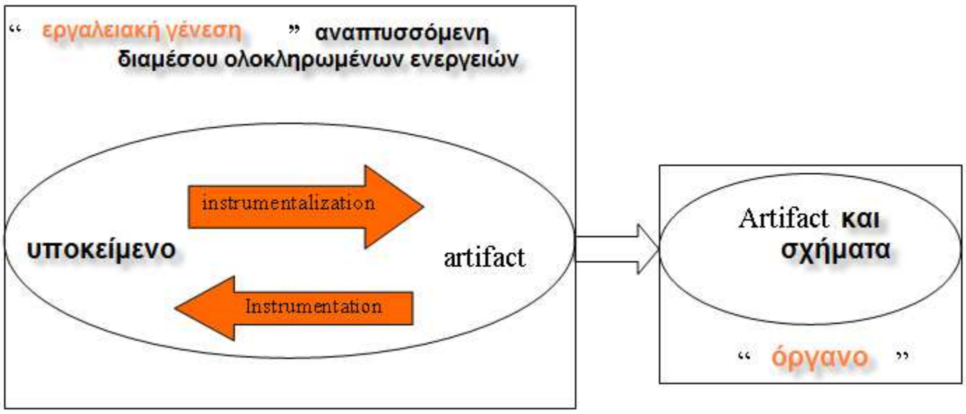
Για την ερμηνεία των φαινομένων που λαμβάνουν χώρα σε μια δραστηριότητα με τη διαμεσολάβηση των εργαλείων χρησιμοποιούνται οι όροι *εργαλείο, τεχνούργημα και όργανο*. Οι όροι είναι αναγκαίο να οριστούν και στην παρούσα μελέτη, υιοθετώντας ένα συνδυασμό των ορισμών της Cerulli (2004) και του Wartofsky (1979):

- **Εργαλείο (tool)** είναι το μέσο με το οποίο κάτι επιτυγχάνεται, εκτελείται, ή υλοποιείται.
- **Τεχνούργημα** (artifact) είναι το αντικείμενο υλικό ή αποτέλεσμα νοητικής γνώσης, ή γεγονός/ιδέα που προέρχεται από ανθρώπινη εργασία, ενώ η διαδικασία που το παράγει με κάποιο σκοπό περιλαμβάνει ανθρώπινη γνώση. Ανάλογος είναι και ο ορισμός των τεχνουργημάτων (aftefacts ή artifacts) που δίνει ο Wartofsky (1979): δημιουργήματα του ανθρώπου, αντικείμενα κατασκευασμένα από ανθρώπινα χέρια, συμπεριλαμβανομένων των πολιτισμικών δημιουργημάτων όπως η γλώσσα. Το τεχνούργημα μπορεί να είναι ένα φυσικό αντικείμενο όπως το σφυρί ή ένας ζωγραφικός πίνακας, αλλά και οποιοδήποτε άλλο προϊόν ανθρώπινης εργασίας. Ειδικότερα, ως τεχνουργήματα θα θεωρήσουμε και τα προγράμματα των υπολογιστών, τα θεωρήματα, τις επιστημονικές θεωρίες, κ.λπ.
- **Όργανο (instrument)** είναι το εργαλείο (ή τεχνούργημα) και ο τρόπος με τον οποίο αυτό χρησιμοποιείται από το διαμεσολαβητή προκειμένου να επιτευχθεί κάποιος σκοπός: με το όργανο επιτυγχάνεται, εκτελείται ή υλοποιείται κάτι. Όλα τα όργανα δεν είναι τεχνουργήματα (ή εργαλεία). Για παράδειγμα, ένα σφυρί ή μια πέτρα μπορεί να χρησιμοποιηθούν ως όργανα (το εργαλείο και ο τρόπος χρήσης του) που χτυπούν ένα καρφί. Το σφυρί είναι τεχνούργημα, ενώ η πέτρα είναι απλώς ένα αντικείμενο.

2.4.2.Η θεωρία εργαλειοποίησης του Rabardel

Η θεωρία του Rabardel (1995), έχει τα ρίζες της στη θεωρία του Vygotsky (1978) για τη χρήση των εργαλείων καθώς επίσης και στη θεωρία του Engestrom (1987). Ο Rabardel μέσω της θεωρίας **εργαλειακής γένεσης** παρέχει ένα πλαίσιο για την κατανόηση της σχέσης μεταξύ του εργαλείου και του χρήστη.

Ο Trouche (προσωπική επικοινωνία 2-4 Απριλίου 2008) χαρακτηρίζει τη ***διαδικασία εργαλειακής γένεσης*** (Verillon & Rabardel,1995) «ως μια αμφίδρομη διαδικασία μεταξύ των υποκειμένων και των τεχνουργημάτων (συμπεριλαμβανομένων των νοητικών κατασκευασμάτων) με κοινωνικές πτυχές, αναπτυσσόμενη μέσω ολοκληρωμένων/ οριστικοποιημένων δράσεων εντός ή εκτός των τάξεων». Σύμφωνα με τον Trouche «κατά τη διάρκεια της διαδικασίας της εργαλειακής γένεσης ένα *τεχνούργημα* (artefact) μετασχηματίζεται σε *όργανο* (instrument) προσανατολισμένο από ολοκληρωμένες δράσεις και βοηθούμενο από *εργαλειακές ενορχηστρώσεις* σε σχέση με το υποκείμενο και το στόχο που το υποκείμενο θέλει να υλοποιήσει μέσω του εργαλείου» (προσωπική επικοινωνία, ό.π.).



Σχήμα 2.8.: Εργαλειακή γένεση (σε συνεργασία με τον Prof. Trouche, 2 Απριλίου 2008 στο Patsiomitou, 2008)

Επομένως, όχι μόνο το εργαλείο έχει επιπτώσεις στη σκέψη του χρήστη ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης του χρήστη με το εργαλείο (ενδεικτικά Artigue, 2002; Guin & Trouche, 1999; Drijvers, 1999; Trouche, 2004; Drijvers & Trouche, 2008) αλλά και οι διαδικασίες που αποτυπώνονται στο παραπάνω σχήμα και χαρακτηρίζουν την διαδικασία εργαλειακής γένεσης. Η Artigue (2000) θεωρεί την εργαλειακή γένεση ως δίπολο που κατευθύνεται προς

- το εργαλείο, το οποίο διαμορφώνεται από το χρήστη, ενισχύοντάς το σταδιακά με δυνατότητες και μετασχηματίζοντάς το τελικά για συγκεκριμένες χρήσεις μέσω της διαδικασίας **εργαλειοποίησης (instrumentalization)**.
- το υποκείμενο, και έχει επιπτώσεις στη σκέψη του χρήστη και στον τρόπο που αυτή διαμορφώνεται λόγω της χρήσης του εργαλείου μέσω της διαδικασίας **οργανοποίησης (instrumentation)**.

Οι Verillon & Rabardel (1995) τονίζουν την διαφορά μεταξύ ενός εργαλείου ως υλικού αντικειμένου και ενός οργάνου ως ψυχολογικού κατασκευάσματος: «το *όργανο* δεν υπάρχει από μόνο του, *γίνεται* όταν το υποκείμενο είναι σε κατάλληλη θέση να το ενσωματώσει μέσα στη δραστηριότητά του». Οι Rabardel (1995), Guin & Trouche (1999) θεωρούν ότι το *όργανο* είναι μια μικτή οντότητα που περιέχει

- **μια υλική συνιστώσα:** αφορά το εργαλείο ή ένα μέρος ενός εργαλείου που κινητοποιείται για να πραγματοποιήσει έναν τύπο στόχου·
- **μια ψυχολογική συνιστώσα:** αφορά τα **χρηστικά *σχήματα*** (utilization schemes) του εργαλείου, δηλαδή νοητικά σχήματα (Vergnaud, 1996) που οργανώνουν τη δραστηριότητα μέσω του εργαλείου, προκειμένου να υλοποιηθεί ένας δεδομένος στόχος.

Η έννοια του σχήματος είναι κεντρική και στη θεωρία των εννοιολογικών πεδίων του Vergnaud (1990,1996, 1997).

> Ένα σχήμα (A scheme) είναι η αμετάβλητη οργάνωση της συμπεριφοράς για μια ορισμένη κατηγορία καταστάσεων. Η γνώση (-εις) που περιλαμβάνεται (-ονται) σε αυτό το σχήμα καθοδηγεί τη χειρονομία/συμπεριφορά/δράση και συγχρόνως η επανάληψη τέτοιων χειρονομιών/συμπεριφορών/δράσεων εγκαθιστά στο μυαλό αυτό το είδος γνώσης (Vergnaud, 1997, p. 222; 1997, p. 12).

Σύμφωνα με τον Trouche (προσωπική επικοινωνία, 22 Οκτωβρίου 2007), «όλα τα σχήματα που σχετίζονται με τη χρήση ενός εργαλείου/τεχνουργήματος είναι χρηστικά σχήματα (utilization schemes)». Υπάρχουν δύο είδη χρηστικών σχημάτων: τα **σχήματα εργαλειοποιημένης δράσης και τα σχήματα χρήσης** [όπως περιγράφονται στο έργο του Rabardel (1995) "People and Technology"]. Ακόμα πρέπει να συμπεριλάβουμε τις *κοινωνικές πτυχές* των σχημάτων. Και, τελικά, αυτό που είναι σημαντικό είναι να αναλύσουμε τις λειτουργικές σταθερές πίσω από τα σχήματα». Τα δυο είδη σχημάτων[7] είναι (Rabardel, 1995):

- **Τα σχήματα χρήσης** (usage schemes) είναι νοητικά σχήματα (Vergnaud, 1996) προσανατολισμένα στη διαχείριση του εργαλείου·
- **τα σχήματα εργαλειοποιημένης δράσης** (instrumented action schemes) είναι σχήματα προσανατολισμένα στην εκτέλεση ενός συγκεκριμένου στόχου (p.84)

Αυτό που ο Trouche υπονοεί είναι ότι τα χρηστικά σχήματα (utilization schemes) έχουν και ατομικές και κοινωνικές διαστάσεις. Η ατομική είναι ειδική για κάθε άτομο, ενώ η κοινωνική προέρχεται από το γεγονός ότι τα σχήματα αναπτύσσονται στη διάρκεια μιας διαδικασίας στην οποία το υποκείμενο δεν είναι μεμονωμένο. Έτσι οι σχεδιαστές των artefacts, σε οποιαδήποτε μορφή κι αν αναφερόμαστε (π.χ. σχεδιαστές λογισμικού ή σχεδιαστές δραστηριοτήτων λογισμικού) συνεισφέρουν στην εμφάνιση τέτοιων σχημάτων. Ενώ είναι προφανές ότι τα υποκείμενα εισαγόμενα σε αυτήν τη συλλογική δραστηριότητα εφαρμόζουν τα σχήματα χρησιμοποίησης που αντιστοιχούν στους διάφορους τύπους που αναφέρονται ανωτέρω, δεν είναι λιγότερο προφανές ότι η συλλογική φύση της δραστηριότητας, εκτός εξαιρέσεων , οδηγεί στη σύσταση και εφαρμογή ειδικών σχημάτων.

Επιπλέον ο Trouche υποστηρίζει (προσωπική επικοινωνία, 22 Οκτωβρίου 2007), ότι όταν προκύπτουν **σχήματα εργαλειοποιημένης δράσης**, πρέπει κάποιος να αναζητήσει τις λειτουργικές σταθερές (operational invariants) που καθοδηγούν αυτήν την τεχνική, δηλαδή τα αναδυόμενα θεωρήματα-εν-δράσει και τις έννοιες-εν-δράσει, σε συσχέτιση με την κατασκευή αποδεικτικών σχημάτων εκ μέρους των μαθητών.

Σύμφωνα με τους Zazkis & Liljedahl (2002), «η ανάπτυξη της θεωρίας των εννοιολογικών πεδίων παρακινήθηκε από την ανάγκη να καθιερωθούν συνδέσεις μεταξύ των μαθηματικών εννοιών, σχέσεων και θεωρημάτων και μεταξύ των δυναμικών αντιλήψεων και ικανοτήτων των μαθητών των σχετικών με αυτές τις μαθηματικές έννοιες, σχέσεις, και θεωρήματα» (p.95).

Ο Rabardel (1995) προσδιορίζει επιπλέον για ένα νέο εργαλείο δύο αρχές που συνδέονται με την παραγωγή από το υποκείμενο των χρηστικών σχημάτων:

- Την «*αρχή της οικονομίας*», δηλαδή μια οικονομική αρχή αναζητούμενη από τον χρήστη. Ως εκ τούτου, όταν δυο διαφορετικοί στόχοι προτείνονται στον χρήστη ειδικά προσαρμοσμένοι ο ένας στον άλλον και όταν το υποκείμενο διακόπτεται ενώ εκτελεί τον

[7]**Σχήματα εργαλειοποιημένα συλλογικής δράσης** (instrument-mediated collective activity schemes) είναι τα σχήματα τα οποία αφορούν το συντονισμό μεμονωμένων δράσεων και την ολοκλήρωση των αποτελεσμάτων τους ως συμβολή στην επιτυχία κοινών στόχων.

πρώτο στόχο για να ολοκληρώσει τον άλλον, τότε τείνει να χρησιμοποιήσει το εργαλείο που είχε χρησιμοποιήσει για να εκτελέσει τον αρχικό στόχο ώστε να πραγματοποιήσει τον νέο στόχο.

- Την «*αναζήτηση της αποδοτικότητας*» όπου, αν το υποκείμενο θεωρεί ότι το προτεινόμενο εργαλείο δεν θα είναι το αποδοτικότερο σχετικά με τους στόχους που θέλει να επιτύχει, τείνει είτε να επιλέξει ένα άλλο εργαλείο είτε να χρησιμοποιήσει το προτεινόμενο εργαλείο αλλά με έναν τρόπο που οι σχεδιαστές του εργαλείου δεν είχαν προβλέψει (άτυπη χρήση, «*informal use*», ή κατάχρηση, «*catachrèse*», σύμφωνα με τον Rabardel) (p.96)

Οι έννοιες αυτές μπορούν να γίνουν κατανοητές αν χρησιμοποιήσουμε ένα κοινό εργαλείο, για παράδειγμα ένα μαχαίρι. Αν πάρουμε ένα μαχαίρι για να κόψουμε ένα κατασκεύασμα και στη συνεχεία και στη συνεχεία για να χτυπήσουμε ένα καρφί, τότε χρησιμοποιούμε το εργαλείο *με οικονομία*. Αν χρησιμοποιούμε εξ αρχής το μαχαίρι για τον δεύτερο στόχο τότε το χρησιμοποιούμε με *κατάχρηση*.

2.4.3.Το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας ως εργαλείο διαμεσολάβησης

Υπάρχουν διάφοροι τύποι λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας όπως το The Geometer's Sketchpad (1991), Cabri (Baulac, Bellemain, & Laborde, 1992, 1994), Geometric Supposer (Schwartz & Yerushalmy, 1985) κ.α που παρέχουν στους μαθητές τα εργαλεία για τη διερεύνηση και την κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών και διαμεσολαβούν επομένως με εναλλακτικούς τρόπους στην κατασκευή της γνώσης, στην αιτιολόγηση και την κατασκευή αποδείξεων (Arzarello, Micheletti, Olivero, Robutti, Paola & Gallino, 1998; Gutiérrez, 1995; Hollebrands, 2002; Laborde, 1993; Marrades & Gutiérrez, 2000). Σύμφωνα με τους Clements & Battista (1992), «η κονστρουκτιβιστική προσέγγιση και το μοντέλο των van Hiele της γεωμετρικής σκέψης είναι το κλειδί για τη θεωρητική θεμελίωση της χρήσης ενός τέτοιου περιβάλλοντος στην διδασκαλία και μάθηση της γεωμετρίας». Το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας ως εργαλείο /τεχνούργημα διαμεσολαβεί

- μεταξύ του γεωμετρικού προβλήματος και της κατασκευής του σχεδίου ή σχήματος στην οθόνη διευκολύνοντας την κατανόηση ή και την αναθεώρηση των υπονοούμενων γεωμετρικών σχέσεων μέσα στο *πεδίο εμπειρίας* (Boero et al., 1985) των γεωμετρικών κατασκευών του λογισμικού.
- στην αλληλεπίδραση μεταξύ δασκάλου-μαθητή και της γεωμετρικής δραστηριότητας. Κατά την ανάπτυξη της δραστηριότητας, οι ενέργειες του μαθητή, οι ενέργειες του δασκάλου ή άλλα γεγονότα μπορούν να προκαλέσουν μια αλλαγή στις σχέσεις που χαρακτηρίζουν την ίδια τη δραστηριότητα.

Το εργαλείο του λογισμικού τότε δρα ως ψυχολογικό εργαλείο, κατευθύνει τον τρόπο σκέψης του μαθητή (Sáenz-Ludlow & Athanasopoulou, 2008) και βοηθά την ανάπτυξη ανώτερων ψυχολογικών λειτουργιών με την έννοια του Vygotsky που έχουν άμεση σχέση με την κατανόηση της έννοιας. Ο μαθητής αλληλεπιδρά με το εργαλείο για την κατασκευή ενός σχεδίου, παράγεται επομένως μια *ανώτερη ψυχολογική λειτουργία* και το εργαλείο μετασχηματίζεται σε *ψυχολογικό εργαλείο* υπό την έννοια του Vygotsky.

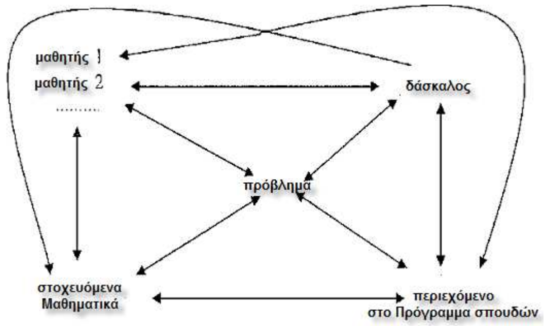
2.4.4. Ο ρόλος του «δυναμικού» προβλήματος στη διαμεσολάβηση κατανόησης εννοιών

Δυναμικό πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα που τίθεται σε περιβάλλον λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας απαιτώντας την κατασκευή ή τη χρήση ενός διαγράμματος για την επίλυσή του (Πατσιομίτου, Εμβαλωτής & Μπαρκάτσας, 2010). Πολλοί ερευνητές (Christiansen & Walther, 1986; Laborde, Kynigos, Hollebrands & Strässer, 2006) έχουν επισημάνει τη σημασία των κατάλληλων προβλημάτων που διαμεσολαβούν στη διδασκαλία και την εκμάθηση και γνώση της γεωμετρίας. Το εργαλείο του λογισμικού και το γεωμετρικό πρόβλημα που έχει τεθεί παίζουν κεντρικό ρόλο στη δραστηριότητα και εξετάζονται ως εργαλεία διαμεσολάβησης στην κατασκευή των εννοιών σε δύο διαφορετικά επίπεδα.

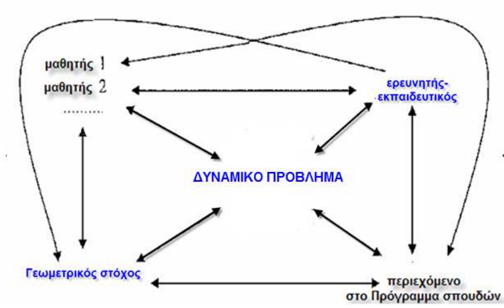
- Ο δάσκαλος χρησιμοποιεί το εργαλείο του λογισμικού και το πρόβλημα για να κατευθύνει την ανάπτυξη των εννοιών που είναι (από μαθηματική άποψη) συνεπείς.
- Ο μαθητής χρησιμοποιεί τα εργαλεία που υπάρχουν στο λογισμικό ή άλλα που επινοεί μόνος του για να επιλύσει το πρόβλημα και να επιτευχθεί ο μαθησιακός στόχος.

Μέσω της ενεργού συμμετοχής του ο μαθητής χτίζει την γνώση του πάνω στην «προσωπική του δραστηριότητα» (Christiansen & Walther, 1986, p.246) και τη συνεργασία του με άλλους μαθητές που αναπτύσσεται σε ένα πρόβλημα «κατασκευαστικού, διερευνητικού τύπου». Με τον όρο «προσωπική δραστηριότητα» οι ερευνητές εννοούν οι μαθητές να μοιραστούν τις ιδέες τους για τη λύση στο πλαίσιο των μαθηματικών τα οποία έχουν τεθεί ως στόχος για την τάξη από το πρόγραμμα σπουδών.

Στο σχήμα 2.9 των Christiansen & Walther (1986, p.247), το πρόβλημα παίζει κεντρικό ρόλο στη δραστηριότητα που αναπτύσσεται μεταξύ των [δάσκαλου-μαθητή], [μαθητή –μαθηματικών] και [δάσκαλου– Προγράμματος σπουδών]. Στο σχήμα 2.10, έχει αναπροσαρμοστεί το διάγραμμα των Christiansen & Walther (ό.π), ώστε να συμπεριληφθεί η κατασκευή/ χρήση του δυναμικού διαγράμματος ως μετάφραση του προβλήματος στο λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, εξειδικεύοντας κάποια από τα στοιχεία του σχήματος 1 στο πλαίσιο της παρούσας έρευνας. Επομένως, το ‘δυναμικό’ πρόβλημα αποτελεί ένα ισχυρό εκπαιδευτικό εργαλείο, καθώς διασυνδέει τη δραστηριότητα του υποκειμένου με το κοινωνικό περιβάλλον της τάξης ή της ομάδας.



Σχήμα 2.9: Πρόβλημα και δραστηριότητα (Christiansen & Walther, 1986, p.247)



Σχήμα 2.10:Προσαρμογή του διαγράμματος ώστε να συμπεριληφθεί το δυναμικό πρόβλημα

Υπάρχει μια διαφορά μεταξύ προβλήματος και δραστηριότητας ως εκπαιδευτικών εργαλείων. Στο σχήμα των Christiansen & Walther (1986, p.247), το πρόβλημα το οποίο διαμεσολαβεί στη δραστηριότητα μεταξύ δασκάλου-μαθητή, μαθητή-μαθηματικών (που έχει σαν στόχο να κατακτήσει ο μαθητής) και δασκάλου-προγράμματος σπουδών (που έχει σαν στόχο να διδάξει ο δάσκαλος) είναι κεντροθετημένο ως σημαντικό εκπαιδευτικό εργαλείο. Επομένως μέσω του προβλήματος που εμπεριέχεται στο πλαίσιο μιας δραστηριότητας, αναπτύσσεται η σχέση μεταξύ του μεμονωμένου μαθητή και του περιβάλλοντος της τάξης ως κοινωνικού κατασκευάσματος.

2.5. Συνοπτική επισκόπηση των σημαντικοτέρων εννοιών

Σε μια σύντομη επισκόπηση αναφορικά με το δεύτερο κεφάλαιο εξετάζεται τόσο η έννοια του *κοινωνικού κονστρουκτιβισμού* (social constructivism), ως διαδικασίας ταυτόχρονα κονστρουκτιβιστικής και αλληλεπιδραστικής, όσο και ο ρόλος των *γνωστικών συγκρούσεων στην* κατασκευή της γνώσης. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά κάθε επιπέδου στη θεωρία των van Hiele και συγκρίνονται οι περιγραφές των Battista (2007), Mason (1998), Burger & Shaugnessy (1986) – των τριών κυριότερων συντελεστών στη διαμόρφωση των χαρακτηριστικών των *επιπέδων van Hiele.* Αναλύεται ο ρόλος των φάσεων στη μαθησιακή διαδικασία και εξετάζονται οι γεωμετρικές ικανότητες και ο μετασχηματισμός τους ως κριτήριο γνωστικής ανάπτυξης του μαθητή. Σύμφωνα με τους περισσότερους ερευνητές (π.χ. Gutierrez & Jaime (1998), το επίπεδο ενός μαθητή επιτρέπει να εξετάσουμε τον τρόπο που ορίζει ένα γεωμετρικό αντικείμενο, αιτιολογεί τα συμπεράσματά του και αποδεικνύει τους ισχυρισμούς του, δηλαδή πώς χρησιμοποιεί διαδικασίες ορισμού, απόδειξης και ταξινόμησης των σχημάτων, ζητήματα που αναλύονται διεξοδικά. Διακρίνεται η έννοια της *επιχειρηματολογίας* από την *έννοια της απόδειξης* και περιγράφεται το μοντέλο του Toulmin για την ανάλυση της δομής των επιχειρημάτων του εμπειρικού τμήματος της έρευνας. Επίσης διακρίνονται τα είδη του συλλογισμού που οι μαθητές αναπτύσσουν κατά την επίλυση προβλημάτων. Επισημαίνεται η διαφορά αιτιολόγησης και επιχειρηματολογίας και περιγράφονται τα είδη αποδεικτικών σχημάτων που αναπτύσσονται από τους μαθητές στις κύριες κατηγοριοποιήσεις που έχουν αναπτυχθεί από τους Bell (1976a, b), Balachef (1988) και Harel & Sowder (1998, 2007, 2009), Sowder & Harel (1998), Harel (2008). Εξετάζεται ο ρόλος των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας στην ανάπτυξη των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης όπως και γιατί το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Geometer's Sketchpad έδειξε ότι ήταν κατάλληλο για πρόκληση γνωστικών συγκρούσεων, ανάπτυξη ικανότητας *παραγωγικών επιχειρημάτων* και άνοδο του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης των μαθητών, σύμφωνα με τη θεωρία των van Hiele. Τίθενται τα θεμέλια για την εξέταση του ρόλου των δυναμικών αναπαραστάσεων, ως «καναλιού επικοινωνίας», και πώς μεσολαβούν στην ανάπτυξη του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης. Ακολουθεί η ανάλυση της έννοιας του δυναμικού διαγράμματος ως τύπου *δυναμικής οπτικής μαθηματικής αναπαράστασης* (ΟΜΑ), δηλαδή ως «μιας *[δυναμικής] αναπαράστασης* που κωδικοποιεί οπτικά λειτουργικές, δομικές, και σημασιολογικές ιδιότητες και σχέσεις ενός αναπαριστάμενου κόσμου – είτε αφηρημένου είτε συγκεκριμένου που αποτελείται από μαθηματικές δομές ή έννοιες» (Sedig & Sumner, 2006, p. 2). Εξετάζονται ποιες *αλληλεπιδραστικές τεχνικές* από την κατηγοριοποίηση των Sedig & Sumner (ό.π.) έχουν επηρεάσει το σχεδιασμό των δραστηριοτήτων του μαθησιακού μονοπατιού της έρευνας καθώς και η έννοια του *δυναμικού σημείου* και των *ημιπροκατασκευασμένων διαγραμμάτων*. Αναλύονται οι δυο κύριες διακρίσεις του συρσίματος (*θεωρητικό και πειραματικό*) λόγω των ενεργειών των μαθητών αλλά και οι έννοιες των μετασχηματισμών της περιστροφής και της ανάκλασης. Επίσης η έννοια της *εργαλειακής αποκωδικοποίησης* και της *Ανακλαστικής Οπτικής Αντίδρασης*. Το τελευταίο μέρος του θεωρητικού πλαισίου αναφέρεται στη θεωρία της εργαλειακής γένεσης του Rabardel (1995) αλλά και στο ρόλο του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας και του *δυναμικού προβλήματος*, ως *εργαλείου διαμεσολάβησης*.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3:

Μεθοδολογικές επιλογές και τεκμηρίωση αυτών

3.1. Εισαγωγή μεθοδολογικών ζητημάτων

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται η ερευνητική μεθοδολογία που ακολουθήθηκε στην παρούσα διατριβή. Η έρευνα αποτελεί μια ποιοτική μελέτη (Merriam, 1998) με ημιπειραματικό σχεδιασμό (quasi-experimental) (Campbell & Stanley, 1963). Ο ημιπειραματικός σχεδιασμός «έχει ως στόχο να υποδεικνύει πότε η εκπαιδευτική παρέμβαση Α είναι καλύτερη από την εκπαιδευτική παρέμβαση Β, όπου Β είναι ο συνήθης τρόπος να ενεργούμε» (Goodyear & Steeples, 1999, p. 36)· διερευνά επίσης τα αποτελέσματα των αλλαγών που προκύπτουν σε επιλεγμένα υποκείμενα, συγκρίνοντάς τα πριν και μετά την ειδική μεταχείριση.

Σύμφωνα με τον Creswell (1994), στη μέθοδο του ημιπειραματικού σχεδιασμού «ο ερευνητής έχει τόσο ομάδα ελέγχου όσο και πειραματική ομάδα για τη σύγκριση, […][οι οποίες αξιολογούνται με] ένα προ-τεστ και ένα μετά-τεστ, αλλά μόνο η πειραματική ομάδα λαμβάνει την ειδική μεταχείριση» (Creswell, 1994, p. 132). Η μέθοδος επιλέχθηκε γιατί «παρέχει την καλύτερη προσέγγιση στη διερεύνηση σχέσης αιτίου-αποτελέσματος» (McMillan, 2000, p.207).

Στόχος της μελέτης ήταν η διερεύνηση της μετακίνησης των μαθητών της πειραματικής ομάδας σε υψηλότερο επίπεδο van Hiele λόγω της ενίσχυσης τους με υποστηρικτικό υλικό Προγράμματος Σπουδών στο Geometer’s Sketchpad v4 κατά τη διάρκεια της ερευνητικής διαδικασίας, καθώς και η σύγκριση τους με την εξέλιξη των μαθητών της ομάδας ελέγχου που ακολουθούσε το Πρόγραμμα Σπουδών της τάξης. Επιμέρους στόχος της μελέτης ήταν αφενός η εμβάθυνση στα αποτελέσματα της επίδρασης των μετασχηματισμών του δυναμικού διαγράμματος μέσω των εργαλείων στον τρόπο σκέψης των μαθητών σε συνάρτηση με την ανάπτυξη του μαθησιακού μονοπατιού, συμπεριλαμβανομένων των ΣΟΕΑ, και αφετέρου η σύνδεση του Υποθετικού Μαθησιακού Μονοπατιού (ΥΜΜ)με την ανάπτυξη της αποδεικτικής διαδικασίας εκ μέρους των μαθητών, στοιχείο που θα επιβεβαίωνε την ανάπτυξη του επιπέδου van Hiele των μαθητών που συμμετείχαν.

Ο ευρύτερος στόχος αφορά τη «βελτίωση της πρακτικής στη διδασκαλία και την εφαρμογή των ιδεών μέσα στην τάξη» (Cohen & Manion, 2000, σ. 262) με την αναπροσαρμογή του Προγράμματος Σπουδών της δευτεροβάθμιας στο αντικείμενο της Γεωμετρίας Α΄ Λυκείου, ώστε να συμπεριλάβει το μαθησιακό μονοπάτι που προτείνεται από την παρούσα διατριβή.

3.1.1 Σχεδιασμός της μελέτης

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζεται: (α) ο σχεδιασμός της μελέτης της ερευνητικής διαδικασίας που αφορά την πειραματική ομάδα και (β) ο σχεδιασμός της μελέτης σύγκρισης μεταξύ της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου.

Ως προς το πρώτο σκέλος, η μελέτη της πειραματικής ομάδας συντελέστηκε μέσα από ένα διδακτικό πείραμα *έρευνας δράσης* (action research) (Kemmis & McTaggart, 1982; Schön, 1983) με υποστηρικτικό υλικό βασισμένο στη θεωρία των van Hiele (1984). Το υποστηρικτικό υλικό –οι δραστηριότητες, τα προσαρμοσμένα εργαλεία (custom tools) και αρχεία Sketchpad των ημιπροκατασκευασμένων Συνδεόμενων Οπτικών Ενεργών Αναπαραστάσεων (ΣΟΕΑ) που συνέθεσαν το Υποθετικό Μαθησιακό Μονοπάτι (ΥΜΜ)– σχεδιάστηκε ή ανασχεδιάστηκε από την ερευνήτρια για τις ανάγκες της μελέτης, καθώς «η έρευνα δράσης προϋποθέτει μια συνεχή διαδικασία ανάδρασης από την πλευρά του ερευνητή» (Ιωσηφίδης, 2008, σ. 146). Το μαθησιακό μονοπάτι θεμελιώνεται στη «θεωρία των van Hiele [η οποία] αναγνωρίζεται ως ένα από τα καλύτερα πλαίσια για τη μελέτη διδακτικών και μαθησιακών διαδικασιών στη γεωμετρία» (Atebe, 2008, p. 3). Αναλυτικότερα, οι μαθητές εισέρχονται στην ερευνητική διαδικασία με ένα αρχικό επίπεδο (προεπίπεδο) van Hiele και ένα επίπεδο προϋπάρχουσας γνώσης για το γνωστικό αντικείμενο της γεωμετρίας. Μέσω, αφενός, των υποστηρικτικών υλικών του Προγράμματος Σπουδών που εφαρμόστηκαν λόγω της συμμετοχής τους στο ΥΜΜ και, αφετέρου, των αλληλεπιδραστικών διαδικασιών μεταξύ μαθητή-μαθητή, μαθητή-υπολογιστή και ερευνητή-μαθητή, οι μαθητές οδηγούνται σε ένα μετα-επίπεδο van Hiele και μια μεταγνώση. Τα προϊόντα της ερευνητικής διαδικασίας αφορούν την κατασκευή μαθηματικών αντικειμένων συμπεριλαμβανομένων των μαθηματικών εννοιών και της απόδειξης.

Ως προς το δεύτερο σκέλος, ο σχεδιασμός στόχευε όπως προαναφέρθηκε να συγκριθούν τα αποτελέσματα των αλλαγών της πειραματικής ομάδας που ακολούθησε το ΥΜΜ με εκείνα της ομάδας ελέγχου που ακολούθησε το Πρόγραμμα Σπουδών της τάξης. Στην ομάδα ελέγχου η εισαγωγή των εννοιών γινόταν μέσω της συζήτησης που αναπτυσσόταν κατά την παραδοσιακή διδασκαλία στην τάξη. Μέσω της σύγκρισης αξιολογήθηκε ο τρόπος συλλογισμού των μαθητών κατά την επίλυση προβλήματος με χρήση αποδεικτικής διαδικασίας στο αρχικό, μεσαίο και τελικό στάδιο της μελέτης. Η αξιολόγηση των διατυπώσεων των μαθητών, καθώς και της ανάπτυξης των απαγωγικών, παραγωγικών ή επαγωγικών επιχειρημάτων ήταν μέρος της δραστηριότητας.

Για την εγκυρότητα της ισοδυναμίας ως προς το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης και την ικανότητα στη γεωμετρία τόσο της πειραματικής ομάδας όσο και της ομάδας ελέγχου, οι μαθητές αξιολογήθηκαν στα ίδια τεστ. Στην αρχή αλλά και στο τέλος της διαδικασίας οι μαθητές αξιολογήθηκαν ως προς το επίπεδο van Hiele, χρησιμοποιώντας μέρος του ερωτηματολογίου του Usiskin (1982), ενός έγκυρου εργαλείου αξιολόγησης. Εξετάστηκε επίσης η ικανότητα των μαθητών στην αποδεικτική διαδικασία σε ένα προτέστ, ένα μεσοτέστ και ένα μετατέστ. Η σύγκριση επομένως στο προ-, μεσο- και μετατέστ δείχνει την εξέλιξη ως προς (α) την ικανότητα αποδεικτικής διαδικασίας, (β) την ικανότητα επίλυσης πραγματικού προβλήματος, τόσο από τους μαθητές της ομάδας ελέγχου που παρακολουθούσαν το παραδοσιακό πρόγραμμα σπουδών όσο και αυτούς της πειραματικής ομάδας που συμμετείχαν στο ενισχυμένο με υποστηρικτικό υλικό μέσω του Geometer's Sketchpad πρόγραμμα.

3.1.2 Ερευνητικά Ερωτήματα

Ερώτημα Α: *Ποιος ο ρόλος των αλληλεπιδραστικών τεχνικών στην ανάπτυξη ικανότητας μετατροπής μεταξύ αναπαραστάσεων της ίδιας οντότητας, δομικής ανάλυσης των δυναμικών αναπαραστάσεων καθώς και ανάπτυξης συνδεόμενων οπτικών και νοητικών αναπαραστάσεων κατά μήκος της ερευνητικής διαδικασίας;*

Ερώτημα Β: *Πως επιδρούν οι αλληλεπιδραστικές τεχνικές δυναμικού διαγράμματος του λογισμικού* στην κατασκευή *χρηστικών σχημάτων, στη διατύπωση εννοιών και στο μετασχηματισμό των εννοιών;*

Ερώτημα Γ: *Πως συμβάλλουν οι αλληλεπιδραστικές τεχνικές και οι μετασχηματισμοί δυναμικού διαγράμματος λόγω αλληλεπιδραστικών τεχνικών στην ανάπτυξη επαγωγικού, απαγωγικού, μετασχηματιστικού και παραγωγικού συλλογισμού και την ανάπτυξη του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης κατά μήκος της ερευνητικής διαδικασίας;*

Ερώτημα Δ: *Έχει μεταβεί ο μαθητής σε ένα υψηλότερο επίπεδο van Hiele γεωμετρικής σκέψης, λόγω της συμμετοχής του στην προτεινόμενη διδακτική ακολουθία μέσω του μαθησιακού μονοπατιού συμπεριλαμβανομένων των ΣΟΕΑ (LVAR);*

Ερώτημα Ε: *Διαφοροποιείται, με βάση τις απαντήσεις των μαθητών, το επίπεδο van Hiele στην πειραματική ομάδα από την ομάδα ελέγχου;*

3.2. Ανάλυση της επιλογής της ποιοτικής έρευνας

Η ιδιαιτερότητα του φαινόμενου που διερευνάται οδήγησε στην υιοθέτηση της ποιοτικής έρευνας μιας ομάδας μαθητών της Α΄ Λυκείου. Η επέκταση της έρευνας σε ευρύτερες ομάδες (π.χ. μαθητές και άλλων σχολείων) θα οδηγούσε σε μεγάλο όγκο δεδομένων και θα καθιστούσε αδύνατη μια ανάλυση σε βάθος. Ένας από τους λόγους αυτής της επιλογής συνδέεται με την πεποίθηση ότι οι ποσοτικές μέθοδοι παρουσιάζουν μειωμένες δυνατότητες επαρκούς περιγραφής των βαθύτερων δομών των αλληλεπιδράσεων που σχετίζονται με τη συγκρότηση γνωστικών διαδικασιών. Οι Gutierrez & Jaime (1998) συμφωνούν ότι μια « […] συνέντευξη είναι ο ακριβέστερος τρόπος αξιολόγησης του επιπέδου καθώς παρέχει περισσότερες πληροφορίες για τον τρόπο συλλογισμού του μαθητή […] ενώ τα πολλαπλής επιλογής τεστ είναι μεν αποδοτικά καθώς μπορούν να διευθετηθούν σε μικρό χρόνο και τα αποτελέσματα να γίνουν αντικείμενο επεξεργασίας σε έναν υπολογιστή, αλλά δεν είναι καθόλου έγκυρα και αξιόπιστα» (p. 27).

Η ποιοτική έρευνα, η οποία ορίζεται γενικότερα ως το «είδος της έρευνας που παράγει ευρήματα στα οποία δεν οδηγείται με στατιστικά μέσα ή άλλες ποσοτικές μεθόδους» (Strauss & Corbin, 1990, p. 17) αλλά αναζητά να κατανοήσει και να ερμηνεύσει φαινόμενα σε «πραγματικά/φυσικά περιβάλλοντα όπου ο ερευνητής δεν επιχειρεί να χειραγωγήσει το φαινόμενο του ενδιαφέροντος» (Patton, 2001, p. 39), είναι επομένως μια έρευνα νατουραλιστική, ερμηνευτική. Οι Strauss & Corbin (1990) υποστηρίζουν ότι οι ποιοτικές μέθοδοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να καταλάβουμε καλύτερα οποιοδήποτε φαινόμενο για το οποίο γνωρίζουμε ελάχιστα. Όπου οι ποσοτικοί ερευνητές επιδιώκουν την πρόβλεψη και τη γενίκευση των συμπερασμάτων, οι ποιοτικοί ερευνητές, αντίθετα, επιδιώκουν την κατανόηση Σύμφωνα με τους Merriam & Simpson (1995), η ποιοτική έρευνα έχει στόχο την κατανόηση του πώς «τα άτομα που είναι σε αλληλεπίδραση με το κοινωνικό περιβάλλον» ερμηνεύουν την εμπειρία τους. Οι Merriam & Simpson (1995) θεωρούν ότι στην ποιοτική έρευνα «ο ερευνητής ερμηνεύει, περιγράφει ή εξηγεί το φαινόμενο» (p.99) υπό τη δική του προοπτική.

3.2.1. Έρευνα δράσης (action research)

Η έρευνα δράσης είναι η μελέτη μιας κοινωνικής κατάστασης με σκοπό την αλλαγή ή τη βελτίωση της ποιότητας της δράσης μέσα σε αυτή (Elliot, 1982, ό.π. αναφ. στο Winter, 1989). O Elliot (1991, p. 50) επισημαίνει ότι σε κάθε τύπο έρευνας δράσης σημαντική είναι η έννοια του αναστοχασμού (reflection) και της έρευνας στην πράξη. Η ερευνητική διαδικασία και της παρούσας εργασίας μπορεί να «περιγραφεί ως συστηματική, αναστοχαστική σπείρα σχεδιασμού (προγραμματισμού), των ενεργειών και της παρατήρησης» (Steketee, 2004, p. 876).

Ο συνδυασμός αναστοχασμού και πρακτικής έρευνας είναι η καλύτερη μέθοδος για τη βελτιστοποίηση των πρακτικών των εκπαιδευτικών και έχει τις ρίζες του στον Dewey (1933) ο οποίος και εισήγαγε την αναστοχαστική σκέψη (reflective thought) στο εκπαιδευτικό πλαίσιο.

Τόσο το προϊόν όσο και η διαδικασία είναι αναγκαίο να εξετάζονται μαζί όταν προσπαθούμε να βελτιώσουμε την πρακτική, ώστε να προκαλέσουμε αλλαγές «που είναι επωφελείς για τους συμμετέχοντες σε αυτή» (Ιωσηφίδης, 2008, σ. 146). Αυτός ο τύπος του αναστοχασμού, «που συνδυάζει μαζί την έρευνα και τη δράση προβλέπει μια συνεχή διαδικασία ανάδρασης από την πλευρά του ερευνητή» (Ιωσηφίδης, 2008, σ. 146), κεντρικό χαρακτηριστικό αυτού που ο Schön's (1983) έχει ονομάσει *αναστοχαστική πρακτική* (reflective practice) και άλλοι ονομάζουν *έρευνα δράσης* (action research). Σύμφωνα με τους Carr & Kemmis (1986)

> «στην *έρευνα δράσης* οι συμμετέχοντες διερευνούν τις ίδιες τις εκπαιδευτικές πρακτικές τους με άμεσο στόχο να αναπτύξουν την πρακτική κρίση ως άτομα. Έτσι ο ρόλος του διευκολυντή είναι *σωκρατικός*: να προσφέρει μια επιφάνεια αντήχησης όπου οι εκπαιδευτικοί μπορούν να δοκιμάζουν τις ιδέες τους και να μαθαίνουν περισσότερα για την αιτία των πράξεων τους καθώς και την διαδικασία απολογισμού …οι συμμετέχοντες αναλαμβάνουν την ευθύνη για τον σωκρατικό ρόλο της υποβοήθησης της ομάδας στον συνεργατικό αναλογισμό» (ό.π. αναφ. στο Cohen & Manion, 2000, p.263)

Στις συναντήσεις με τους μαθητές της πειραματικής ομάδας, οι οποίες πραγματοποιούνταν μετά τη λήξη των μαθημάτων τους, η συγγραφέας της παρούσας διατριβής λειτουργούσε ως ερευνήτρια, δηλαδή ως άτομο με ακαδημαϊκό υπόβαθρο και γνώση του αντικειμένου και της βιβλιογραφίας του, καθώς και σχέση με όλα τα μεθοδολογικά εργαλεία και τα δεδομένα της ανάλυσης (Tabach, 2006, p. 234). Η ερευνήτρια είχε *ενεργά συμμετοχική* θέση στην έρευνα, υποβάλλοντας στους μαθητές ερωτήσεις σκαλωσιάς (scaffolding questions)[8] (π.χ, Wood, Bruner & Ross, 1976; Noss & Hoyles, 1996) ή και καθοδηγώντας τους στη χρήση του λογισμικού, όπως προβλέπεται από την έρευνα δράσης, όπου ο ερευνητής επιτρέπεται να είναι «ενεργά εμπλεκόμενος στην ίδια την ουσία της έρευνας» (Bogdan & Biklen, 1998, p. 223).

Για παράδειγμα, πολλές φορές, ειδικά την πρώτη εβδομάδα, οι μαθητές δεν χρησιμοποιούσαν τα εργαλεία ή τις εντολές με τον προβλεπόμενο από το εγχειρίδιο του λογισμικού τρόπο με αποτέλεσμα να παρουσιάζεται τεχνολογικό εμπόδιο στην ολοκλήρωση της κατασκευαστικής διαδικασίας. Αν λοιπόν εδώ η ερευνήτρια δεν επιτρεπόταν να παρέμβει (αν ο ρόλος της ερευνήτριας δεν επέτρεπε τη συμμετοχή), η παρούσα έρευνα θα συναντούσε δυσκολία να ολοκληρωθεί. Όπως άλλωστε υποστηρίζουν οι Steffe et al. (1983), «η συμμετοχή σε μια αλληλεπιδραστική διαδικασία με ένα παιδί είναι απαραίτητη» (p. 177).

Η ερευνήτρια «παρακολουθούσε προσεκτικά τα γεγονότα και κατέγραφε τις παρατηρήσεις της για να εντοπίσει τις διαφορετικές προοπτικές και να προτείνει ερμηνείες και συμπεράσματα» (Tabach, 2006, p.235). Με τον τρόπο αυτό αναστοχαζόταν επί των ενεργειών των μαθητών, εξετάζοντας τα αποτελέσματα των αντιδράσεών τους και την επίδραση των μεθοδολογικών εργαλείων στην επίτευξη του στόχου, τροποποιώντας ή αναδιαμορφώνοντας τα γνωστικά ενδιαφέροντα των μαθητών ανάλογα με την κατάσταση. Η παρατήρηση, για παράδειγμα, ότι οι μαθητές κατασκεύαζαν τα τετράπλευρα χωρίς να χρησιμοποιούν τη συμμετρία των τετραπλεύρων οδήγησε την ερευνήτρια στο σχεδιασμό της δεύτερης φάσης του ΥΜΜ και την εισαγωγή των μαθητών της πειραματικής ομάδας στο μενού «Μετασχηματισμός». Στη διάρκεια της σχολικής χρονιάς η ερευνήτρια ενεργούσε και ως παρατηρήτρια στην τάξη των μαθητών, σημειώνοντας την πρόοδο των μαθητών στα ενδιαφέροντα φαινόμενα που παρουσιάζονταν. Η διδασκαλία στην τάξη τόσο για τους μαθητές της πειραματικής όσο και της ομάδας ελέγχου διεξαγόταν από τον ίδιο καθηγητή, ο οποίος επέλεξε την ανωνυμία του στη μελέτη.

Ο αναστοχασμός θεωρείται σημαντικό στοιχείο καθώς βοηθά τους εκπαιδευτικούς να εξετάσουν κριτικά τις πρακτικές τους και ει δυνατόν να τις αναδομήσουν (Korthagen, 2001). Μέσω της αναστοχαστικής διαδικασίας επιχειρείται «να βελτιωθεί η λογική και η αιτιολόγηση των πρακτικών της αποτελεσματικής διδασκαλίας, η κατανόηση αυτών των πρακτικών και οι καταστάσεις όπου αυτές υλοποιούνται» (Carr & Kemmis, 1986, σελ. 162). Χάρη στην ανάπτυξη

Οι Noss & Hoyles (1996, p.107) έχουν ορίσει την έννοια της σκαλωσιάς «ως σταδιακή βοήθεια που παρέχεται από έναν ενήλικα που προσφέρει ακριβώς το σωστό επίπεδο υποστήριξης έτσι ώστε ο μαθητής να κινηθεί επιτυχώς μέσα στην ζώνη επικείμενης ανάπτυξης του» και την εφαρμογή αυτών των μοντέλων η βιβλιογραφία διαθέτει πλέον αρκετά στοιχεία για τη διαδικασία της έρευνας δράσης, υποστηρίζοντας συγκεκριμένα ότι η μορφή της ερευνητικής διαδικασίας είναι μια πολύτιμη προσέγγιση στην εκπαιδευτική έρευνα.

Ο Richardson (1996) υποστηρίζει ότι η εκπαιδευτική θεωρία και πράξη αναπτύσσονται όταν διατυπώνονται ερωτήσεις σε πλαίσιο με πραγματικούς μαθητές και εκπαιδευτική πρακτική. Κατ' αυτό τον τρόπο, «οι θεωρίες δεν επικυρώνονται αυθαίρετα και εφαρμόζονται έπειτα στην πράξη. Επικυρώνονται μέσω της πράξης» (Elliott, 1982, ό.π., στο Winter, 1989, p. 13).

Ωστόσο, σύμφωνα με τον McTaggart (1994), τα συμπεράσματα που προκύπτουν από αυτή τη βελτίωση της πρακτικής είναι σημαντικά και ισχύουν και για άλλους τομείς με παρόμοιες ανάγκες και ανησυχίες: «… η έρευνα δράσης δεν αφορά μόνο τη μάθηση, [αλλά]… την παραγωγή γνώσης και τη βελτίωση των πρακτικών [μεταξύ όμοιων ομάδων]» (p. 317).

3.2.2. Μαθηματικό πλαίσιο της ερευνητικής διαδικασίας

Η πολύχρονη διδακτική εμπειρία της ερευνήτριας της επέτρεψε να σχηματίσει άποψη η οποία θα παρουσιαστεί εν περιλήψει στη συνέχεια:

Οι μαθητές μαθαίνουν στο γυμνάσιο για τα είδη των τετράπλευρων, εστιάζοντας όμως στις βασικές ιδιότητές τους, τις οποίες συνήθως αποστηθίζουν. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα όταν πια βρεθούν σε μεγαλύτερη τάξη να μπορούν να ανακαλέσουν μόνο τις πολύ βασικές έννοιες, τις *πρωτεύουσες ιδιότητες* των τετράπλευρων δηλαδή, που σχετίζονται με τις πλευρές και τις γωνίες του σχήματος και την αναγνώριση των σχημάτων από την αρχέτυπη μορφή τους.

Οι έννοιες των τετράπλευρων στο Πρόγραμμα Σπουδών της Α΄ Λυκείου εισάγονται μέσω της διδασκαλίας στην τάξη, στην οποία επισημαίνονται οι σχέσεις εγκλεισμού και η κατηγοριοποίηση τους, το οποίο δεν γίνεται κατανοητό από τους περισσότερους μαθητές. Αυτό διαπιστώνεται μέσω των δοκιμασιών αξιολόγησης των μαθητών (π.χ όταν ζητείται από τους μαθητές να καταγράψουν τις κοινές και μη κοινές ιδιότητες του ορθογωνίου και του τετραγώνου).

Στη συνέχεια δίνεται μια σύντομη περιγραφή του μαθηματικού πλαισίου των προβλημάτων των τεσσάρων φάσεων της ερευνητικής διαδικασίας της πειραματικής ομάδας:

<u>Α φάση: κατασκευές τετραπλεύρων με έμφαση στο μενού Κατασκευή</u>

Οι κατασκευές διαγραμμάτων τετραπλεύρων με χρήση χάρακα και διαβήτη αναφέρονται στο εγχειρίδιο της Α τάξης του Γυμνασίου όμως οι μαθητές συνήθως αρκούνται σε πρόχειρες κατασκευές στα στατικά μέσα οι οποίες πληρούν μόνο οπτικά κριτήρια. Οι μαθητές χρησιμοποιούν σε πολύ ειδικές περιπτώσεις τα γεωμετρικά τους όργανα και όταν τα χρησιμοποιούν το διάγραμμα που κατασκευάζουν σε στατικά μέσα είναι *ένα σχέδιο και όχι σχήμα* (π.χ, Dina van Hiele οπ. αναφ. στο Fuys et al., 1984). Στόχος της παρούσας μελέτης δεν ήταν η εκμάθηση του λογισμικού αρχικά και στη συνέχεια η χρήση των εργαλείων για την κατασκευή ή και διερεύνηση των στόχων, αλλά η ταυτόχρονη εκμάθηση των εντολών με την θεωρία που απαιτούνταν για την κατασκευαστική διαδικασία, ώστε οι μαθητές να συνδέσουν την κατασκευαστική διαδικασία με την χρήση των εργαλείων που γνώριζαν ή όποιων άλλων εργαλείων ακόμα προέβλεπαν και εκτιμούσαν ότι ήταν αναγκαία.

Οι μαθητές της Α Λυκείου της παρούσας έρευνας δεν είχαν ασχοληθεί μέσω του προγράμματος σπουδών της τάξης τους με τις κατασκευές τετράπλευρων. Η ενότητα που αφορά τις γεωμετρικές κατασκευές στο σχολικό εγχειρίδιο περιέχεται στο κεφαλαίο 6 παράγραφο 6.7 (Αργυρόπουλος, Βλάμος, Κατσούλης, Μαρκάτης & Σιδέρης, 2003) και συνήθως αφαιρείται από την εξεταστέα ύλη του μαθήματος στις εξετάσεις του Ιουνίου. Στην παρούσα μελέτη οι μαθητές έπρεπε να αιτιολογούν τη στρατηγική που ακολουθούν προκειμένου να ολοκληρώσουν την κατασκευαστική διαδικασία βασισμένοι στη θεωρία της γεωμετρίας. Όποιος μαθητής είχε μια ιδέα χρησιμοποιούσε το ποντίκι για να την μοιραστεί με τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας. Ακόμα οι μαθητές ήταν ελεύθεροι να συζητούν μεταξύ τους και με την ερευνήτρια και να εκφράζουν την άποψη τους χωρίς να ακολουθούν κάποια σειρά.

Αρχικά η ομάδα κατασκεύασε ένα παραλληλόγραμμο στη συνέχεια και μέσω του συρσίματος μιας κορυφής του σχήματος οι μαθητές αναγνώριζαν άλλα είδη τετραπλεύρων τα οποία έθεταν ως επόμενο κατασκευαστικό στόχο. Γνωστικός στόχος της διαδικασίας ήταν η ενεργός κατασκευή των ιδιοτήτων του σχήματος και η σύνδεση των μεταξύ τους σχέσεων, η σύνδεση επομένως της *διαδικαστικής γνώσης* που απαιτείται για την κατασκευή του σχήματος με την *εννοιολογική κατανόηση* που αφορά τη θεωρία της κατασκευής του σχήματος.

Στον πίνακα κάτω παρουσιάζεται ένα παράδειγμα της *διαδικαστικής και εννοιολογικής* γνώσης που απαιτείται για την κατασκευή ενός παραλληλογράμμου.

Διαδικαστική γνώση	**Εννοιολογική γνώση**
1.Κατασκευή ευθυγράμμου τμήματος AB 2.Κατασκευή σημείου εκτός του τμήματος C 3.Κατασκευή παράλληλης από το σημείο C προς την AB. 4.Κατασκευή παράλληλης από το σημείο B προς την AC	• Έννοια της παραλληλίας από σημείο εκτός ευθύγραμμου τμήματος. • Ευκλείδειο αίτημα. • Ορισμός του παραλληλογράμμου ως σχήματος που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες (Ο1)

Κανένας μαθητής δεν χρησιμοποίησε τις δευτερεύουσες ιδιότητες, ιδιότητες δηλαδή που σχετίζονται με την συμμετρία του σχήματος, προκειμένου να ολοκληρώσει μια κατασκευή. Η συμμετρία όμως των σχημάτων αποτελεί βασικό στόχο στη μελέτη των γεωμετρικών αντικειμένων από τη θεωρία των van Hiele (δείτε κεφ. 2). Αυτό οδήγησε την ερευνήτρια να αναπροσαρμώσει την μελέτη ώστε να ακολουθήσει η δεύτερη φάση.

Β φάση: διερεύνηση και κατασκευές τετραπλεύρων με έμφαση στο μενού Μετασχηματισμός

Η έννοια της συμμετρίας ως προς άξονα και ως προς κέντρο, ήταν επίσης γνωστές στους μαθητές από την από την Α΄ τάξη του Γυμνασίου μέσω του σχολικού εγχειριδίου της Α΄ Γυμνασίου (Βανδουλάκης, Καλλιγάς, Μαρκάκης & Φερεντίνος, 2007). Σε πιο αυστηρή μορφή τόσο οι κατασκευές όσο και η έννοια της συμμετρίας, αναφέρονται στο σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Λυκείου (Αργυρόπουλος, Βλάμος, Κατσούλης, Μαρκάτης & Σιδέρης, 2003), αλλά δεν αφιερώνεται αρκετός χρόνος για την κατανόηση τους, αφού θεωρούνται από τους μαθητές δυσνόητες. Οι μαθητές και των δύο ομάδων (πειραματικής-ελέγχου) ανέφεραν στην ερευνήτρια ότι η έννοια της συμμετρίας είχε εξεταστεί πολύ βιαστικά στην τάξη και δεν την είχαν κατανοήσει. Επίσης οι μαθητές δεν είχαν κατανοήσει τις εφαρμογές στη συμμετρία των σχημάτων, ούτε την έννοια της συμμετρίας σε σχέση με τα τετράπλευρα.

Επομένως, ο επόμενος στόχος που τέθηκε αφορούσε τη διερεύνηση της αξονικής συμμετρίας των τετράπλευρων και την κατασκευή των σχημάτων με χρήση της συμμετρίας του σχήματος. Η γνώση της συμμετρίας των σχημάτων έχει άμεση σχέση με τον καθορισμό των ιδιοτήτων των σχημάτων. Οι μαθητές αρχικά, σύμφωνα με τους van Hiele, κατασκευάζουν τον *χαρακτήρα συμβόλου του σχήματος*. Μέσω της διερεύνησης και των *γνωστικών συγκρούσεων* που προκύπτουν ανακαλύπτουν τις *δευτερεύουσες ιδιότητες του σχήματος* αλλά και τις συσχετίσεις τους με τις *πρωτεύουσες ιδιότητες*. Επομένως, η κατασκευή των αξόνων συμμετρίας του σχήματος (π.χ του ορθογωνίου) θεωρήθηκε ένα αναγκαίο βήμα στο σχεδιασμό της δεύτερης φάσης όπως και η κατασκευή του σχήματος, χρησιμοποιώντας τους άξονες συμμετρίας ή το κέντρο συμμετρίας. Αυτό το δεύτερο βήμα είχε στόχο οι μαθητές να *αφομοιώσουν* τις σχέσεις που συνδέουν τις ιδιότητες των σχημάτων και να αρχίσουν να τις διατάσσουν λογικά. Μια σύγχρονη κατηγοριοποίηση των τετραπλεύρων περιέχεται στο σχολικό εγχειρίδιο των Αργυρόπουλος κ.α. (2003, σ. 118). Οι μαθητές αποκτούν την ικανότητα να ιεραρχήσουν ένα τετράπλευρο, όταν έχουν μετατρέψει τον *χαρακτήρα συμβόλου σε χαρακτήρα σήματος*, που αντιστοιχεί στην κατάκτηση του τρίτου επιπέδου ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης. Στον πίνακα παρακάτω παρουσιάζεται ένα παράδειγμα της σύνδεσης μεταξύ της διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης που προκύπτει από την διερεύνηση δραστηριότητας ανάκλασης σημείου ως προ κάθετο άξονα.

Διαδικαστική γνώση	**Εννοιολογική γνώση**
1.Εφαρμογή του κουμπιού ανάκλασης σημείου ως προ κάθετο άξονα. 2.Εφαρμογή του κουμπιού απόκρυψης/ εμφάνισης. 3.Εφαρμογή του δυναμικού ίχνους στο σημείο και το συμμετρικό του. 4.Κατασκευή συμμετρικού ευθυγράμμου τμήματος ως προς άξονα με το εργαλείο της ανάκλασης.	• Έννοια του συμμετρικού σημείου ως προς άξονα. • έννοια του συμμετρικού ευθυγράμμου τμήματος ως προς άξονα. • Σύνδεση της έννοιας της μεσοκαθέτου με την έννοια του άξονα συμμετρίας δυο σημείων.

Η ερευνητική διαδικασία οδήγησε την εξέλιξη του μαθησιακού μονοπατιού. Για παράδειγμα: η περιστροφή ενός αντικειμένου (π.χ σημείου) ολοκληρώνεται όταν ο μαθητής επιλέξει το κέντρο περιστροφής και στην συνέχεια το σημείο το οποίο πρόκειται να περιστρέψει. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα οι μαθητές λόγω γνωστικών εμποδίων να αντιμετωπίσουν γνωστικές συγκρούσεις αναφορικά με την επιλογή της γωνίας στο αναδυόμενο μενού. Επομένως επινοήθηκε από την ερευνήτρια και κατασκευάστηκε ένα *προσαρμοσμένο εργαλείο* (Patsiomitou & Emvalotis, 2009b, 2010a) το οποίο λειτουργούσε αφαιρετικά για την κατασκευή του συμμετρικού σημείου ως προς κέντρο.

<u>Γ φάση: διερεύνηση και απόδειξη του θεωρήματος Varignon</u>

Η γ φάση ακολουθεί μετά την πρώτη και τη δεύτερη φάση και βρίσκεται σε παράλληλη τροχιά εξέλιξης με την τέταρτη φάση που αφορά την διερεύνηση προβλημάτων με τύπους *Συνδεόμενων Οπτικών Ενεργών Αναπαραστάσεων*. Η φάση αυτή περιλαμβάνει τη διερεύνηση προβλημάτων με χρήση του συρσίματος και σχολιασμού των δυναμικών αναπαραστάσεων. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται η διερεύνηση του θεωρήματος του Varignon. Στόχος είναι οι μαθητές να εξετάσουν διαφορετικές περιπτώσεις υποσχημάτων που προκύπτουν από τη διαμόρφωση του σχήματος με χρήση του συρσίματος και να διερευνήσουν τις συνθήκες που απαιτούνται για να διαμορφωθεί μέσω του συρσίματος ένα σχήμα. Η διερεύνηση του προβλήματος του Varignon ολοκληρώθηκε αφού οι μαθητές διερεύνησαν τις ειδικές περιπτώσεις του προβλήματος και στη συνέχεια τις γενικευμένες περιπτώσεις. Γνωστικός στόχος η ανάπτυξη επιχειρημάτων και αυστηρού συλλογισμού.

<u>Δ φάση: Διερεύνηση και απόδειξη του προβλήματος του Gamow.</u>

Η φάση αυτή περιλαμβάνει την επίλυση του προβλήματος του Gamow (1948, 1988) μέσω των τύπων των Συνδεόμενων Οπτικών Ενεργών Αναπαραστάσεων (ΣΟΕΑ). Αναλυτική περιγραφή της τέταρτης φάσης της ερευνητικής διαδικασίας γίνεται στο κεφαλαίο 4 .

Η μεθοδολογία του διδακτικού πειράματος της τέταρτης φάσης περιλαμβάνει τα εξής μέρη. Στο πρώτο μέρος εξετάζονται τα διαγράμματα που κατασκευάστηκαν από τους μαθητές σε στατικό περιβάλλον, στο δεύτερο περιγράφεται η «εξερεύνηση» του προβλήματος με τη βοήθεια του Geometer's Sketchpad και, τέλος, στο τρίτο μέρος αποτυπώνεται μέσα από τις περιγραφές των μαθητών ο τρόπος κατασκευής και η σχετική αιτιολόγηση του διαγράμματος και της λύσης του αναδιατυπωμένου προβλήματος.

3.3. Τα υποκείμενα της έρευνας

Η επιλογή των μαθητών που συμμετείχαν στις περιπτώσεις μελέτης βασίστηκε σε θεωρητικά και πρακτικά κριτήρια τα οποία περιγράφονται στη συνέχεια (Eisenhardt, 2002). Η διαδικασία επιλογής υποκειμένων έγινε με πρόθεση μεταξύ των εθελοντών μαθητών που καλείται «σκόπιμη» (Chein, 1981). Το «σκόπιμο» δείγμα είναι βασισμένο στην υπόθεση ότι ο ερευνητής θέλοντας να αποκτήσει την διορατικότητα επί ενός θέματος «πρέπει να επιλέξει ένα δείγμα από το οποίο μπορεί να μάθει τα περισσότερα» (Merriam, 1998, p. 61). Μετά την αρχική κατάταξη σε επίπεδο van Hiele, διαχωρίστηκαν σε δύο ομάδες (πειραματική και ελέγχου) με κριτήριο το επίπεδο τους κατά van Hiele και την εθελοντική συμμετοχή τους στην έρευνα με υπολογιστές. Τα δύο δείγματα μαθητών περιλάμβαναν μαθητές με σχολική επίδοση από μέτρια έως πολύ καλή. Στην αρχή της χρονιάς οι μαθητές αξιολογήθηκαν στο τεστ που ανέπτυξε ο Usiskin (1982) αλλά και ως προς το γενικότερο προφίλ τους και την εικόνα τους στα γραπτά. Έτσι σχηματίστηκε ένας πίνακας που περιλάμβανε τους μαθητές, το προφίλ τους στην τάξη και το επίπεδο τους κατά van Hiele.

Και η πειραματική ομάδα και η ομάδα ελέγχου αποτελούνταν από 14 παιδιά της Α΄ Λυκείου του σχολείου. Όλοι οι μαθητές συμμετείχαν εθελοντικά στα γραπτά τεστ και επιπλέον οι μαθητές της πειραματικής ομάδας συμμετείχαν εθελοντικά στην έρευνα με υπολογιστή.

Τα κριτήρια επιλογής των μαθητών της συνολικής ομάδας ήταν τα ακόλουθα:

- να έχουν το ίδιο μαθηματικό υπόβαθρο και εμπειρίες σχετικά με τη γεωμετρία και ειδικότερα τη γεωμετρία των μετασχηματισμών·
- να έχουν διαφορετική επίδοση στην τάξη, δηλαδή η βαθμολογία των μαθητών να μην επηρεάζει τη δυνατότητα συμμετοχής όπως φαίνεται και στον πίνακα·
- να μην έχουν γνώση του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας ή άλλου σχετικού λογισμικού καθώς συχνά κάνουν μηχανική χρήση του χωρίς να κατανοούν τη σχέση των εντολών με τη θεωρία. Μερικοί μαθητές χρησιμοποιούσαν τη ζωγραφική για να κάνουν δικά τους σχέδια ενώ οι περισσότεροι το word για να γράφουν κείμενα·
- να ανήκουν στα επίπεδα 1 και 2 van Hiele ώστε να εξεταστεί το δυνατό επίπεδο στο οποίο θα έφταναν μετά τη συμμετοχή στο διδακτικό πείραμα·
- να έχουν οι δύο ομάδες ίσο (ή περίπου ίσο) αριθμό αγοριών και κοριτσιών.

Κάθε μαθητής πήρε ένα χαρακτηριστικό κωδικό (ψευδώνυμο) ο οποίος χρησιμοποιούνταν και στα διάφορα τεστ στη διάρκεια της χρονιάς αλλά και στο μετατέστ. Με τον τρόπο αυτό διασφαλιζόταν και η ανωνυμία του μαθητή αλλά και η αξιοπιστία ελέγχου του ίδιου υποκειμένου.

Πίνακας 3.1. Πειραματική ομάδα

ΑΑ	**Κωδικός**	**Επίπεδο van Hiele – pretest**	**Χαρακτηριστικά του μαθητή /τριας**
1	Μ1	1	μαθητής, μέτρια επίδοση στην τάξη, εξωστρεφής
2	Μ2	2	μαθήτρια, μέτρια επίδοση στην τάξη, εσωστρεφής
3	Μ3	2	μαθητής, πολύ καλή επίδοση στην τάξη, εξωστρεφής
4	Μ4	2	μαθήτρια, μέτρια επίδοση στην τάξη, εσωστρεφής
5	Μ5	2	μαθητής, καλή επίδοση στην τάξη, αποστήθιση, εξωστρεφής
6	Μ6	2	μαθήτρια, μέτρια επίδοση στην τάξη, εξωστρεφής
7	Μ7	2	μαθήτρια, πολύ καλή επίδοση στην τάξη, εξωστρεφής
8	Μ8	2	μαθητής, μέτρια επίδοση στην τάξη, εξωστρεφής
9	Μ9	1	μαθήτρια, πολύ καλή επίδοση στην τάξη, εξωστρεφής
10	Μ10	1	μαθήτρια, μέτρια επίδοση στην τάξη, εξωστρεφής
11	Μ11	2	μαθήτρια, καλή επίδοση στην τάξη, εξωστρεφής

12	M12	1	μαθήτρια, καλή επίδοση στην τάξη, εξωστρεφής
13	M13	1	μαθητής, μέτρια επίδοση στην τάξη, εξωστρεφής
14	M14	1	μαθητής, μέτρια επίδοση στην τάξη, εσωστρεφής

Οι υπο-ομάδες στη πειραματική ομάδα διαμορφώθηκαν ως εξής:

Οι μαθητές της πειραματικής ομάδας χωρίστηκαν σε 5 υποομάδες όπως περιγράφονται στον πίνακα κατωτέρω.

Πίνακας 3.2. Υπο-ομάδες στην πειραματική ομάδα

Υποομάδα 1	**Υποομάδα 2**	**Υποομάδα 3**	**Υποομάδα 4**	**Υποομάδα 5**
M9, M10, M14	M7, M8, M13	M1, M2, M11, M12	M5, M6	M3, M4

Για τη δημιουργία των υποομάδων απαιτήθηκαν ορισμένες προϋποθέσεις όπως:

- «εξωστρεφείς και εσωστρεφείς μαθητές μαζί ώστε να ενθαρρυνθεί η συζήτηση·
- συμμετοχή στην ίδια ομάδα ατόμων φιλικών μεταξύ τους·
- ίδια επίδοση στην τάξη ώστε να αποφευχθεί κάποιος να δίνει τις λύσεις πιο γρήγορα, εξασφαλίζοντας έτσι τη δυνατότητα συμμετοχής όλων» (Furinghetti, Olivero & Paola, 2001, p. 325)·
- ίδιο επίπεδο ως προς το τεστ van Hiele·
- μαθητές μετρίου ή καλού μαθησιακού επιπέδου και επίδοσης στο σχολείο ώστε να αποτραπούν προσπάθειες αντιγραφής της λύσης·
- μαθητές όχι πάνω από τα επίπεδα 1-2, ίσα μοιρασμένοι·
- δυνατότητα συμμετοχής μετά τη λήξη των μαθημάτων τους.

Η εξωστρέφεια ή εσωστρέφεια των μαθητών δεν κρίθηκε με βάση κάποιο τεστ αλλά αξιολογήθηκε από την ερευνήτρια με βάση τη διάθεση αλληλεπίδρασης του μαθητή με τα άλλα μέλη της ομάδας. Ένας μαθητής χαρακτηρίστηκε εξωστρεφής αν ήταν ομιλητικός και κοινωνικός με διάθεση εξωτερίκευσης των σκέψεών του, αν διεκδικούσε το λόγο από τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας προκειμένου να υπερασπιστεί την άποψή του· εσωστρεφής, αντίθετα, χαρακτηρίστηκε ο μαθητής που εξωτερίκευε τις σκέψεις του με δυσκολία, ενώ πολλές φορές κατά τη διάρκεια της μελέτης χρειαζόταν να τον/την παρακινήσει η ερευνήτρια προκειμένου να συμμετάσχει ενεργά.

Οι υποομάδες περιείχαν διαφορετικό αριθμό μαθητών. Αυτό οφειλόταν στο ότι οι μαθητές ήταν φίλοι μεταξύ τους και δεν ήθελαν να χωριστούν. Οι υποομάδες λειτούργησαν χωρίς προβλήματα αφού κανένας μαθητής δεν αισθανόταν μειονεκτικά λόγω της βαθμολογίας του και όλοι έπαιρναν το λόγο κατά τη διάρκεια της διαδικασίας. Πολλές φορές διακριτικά η ερευνήτρια απηύθυνε το λόγο σε όποιον δεν είχε δυνατότητα να συμμετάσχει λόγω ελλιπούς μαθηματικού υπόβαθρου, γνωστικών εμποδίων που παρουσιαζόταν ή ακόμα και φόβου ως προς τη χρήση του λογισμικού. Ακόμα τους ενθάρρυνε να διατυπώνουν ό,τι σκέφτονται και να ενεργούν αυθόρμητα αποτυπώνοντας τις σκέψεις τους στο χαρτί ή την οθόνη του υπολογιστή.

Ομάδα ελέγχου

Η ομάδα ελέγχου ακολουθούσε το πρόγραμμα σπουδών της τάξης χωρίς να προστεθεί κάποιο επιπλέον υλικό, επιλύοντας τα προβλήματα που προαναφέρθηκαν και στην πειραματική ομάδα μόνο στα στατικά μέσα (χαρτί, μολύβι, πίνακας). Οι μαθητές μπορούσαν να ρωτήσουν την ερευνήτρια για οτιδήποτε είχε σχέση με την κατασκευαστική ή ερευνητική διαδικασία, με τη χρήση των οργάνων που χρησιμοποιούσαν για την κατασκευή, δηλαδή του χάρακα και του διαβήτη. Ακόμα οι μαθητές μπορούσαν να ρωτήσουν και τον δάσκαλο. Υποομάδες στην ομάδα ελέγχου δεν υπήρχαν, αφού οι μαθητές εργαζόντουσαν μόνο σε στατικά τεστ και σε συνθήκες που είχαν στην τάξη ώστε να μη διαφοροποιηθεί η κατάσταση από την υπάρχουσα σε πραγματικές συνθήκες. Μετά τη διερεύνηση του προβλήματος στα στατικά μέσα, το πρόβλημα λυνόταν στον πίνακα από την ερευνήτρια και οι μαθητές φαίνονταν ότι μπορούσαν να την παρακολουθήσουν. Στη συνέχεια οι μαθητές συμμετείχαν στην αξιολόγηση μέσω του αναδιατυπωμένου προβλήματος.

Πίνακας 3.3. Ομάδα ελέγχου

	Κωδικός	**Επίπεδο van Hiele –pretest**	**Χαρακτηριστικά του μαθητή /τριας**
1	ΜΕ1	2	μαθητής, πολύ καλή επίδοση στην τάξη, εξωστρεφής
2	ΜΕ2	1	μαθητής, μέτρια επίδοση στην τάξη, εξωστρεφής
3	ΜΕ3	1	μαθήτρια, καλή επίδοση στην τάξη, αποστήθιση, εξωστρεφής

4	ΜΕ4	2	μαθήτρια, καλή επίδοση στην τάξη, αποστήθιση, εξωστρεφής
5	ΜΕ5	2	μαθητής, καλή επίδοση στην τάξη, αποστήθιση, εξωστρεφής
6	ΜΕ6	1	μαθήτρια, καλή επίδοση στην τάξη, αποστήθιση, εσωστρεφής
7	ΜΕ7	1	μαθητής, καλή επίδοση στην τάξη, αποστήθιση, εξωστρεφής
8	ΜΕ8	1	μαθητής, μέτρια επίδοση στην τάξη, εσωστρεφής
9	ΜΕ9	2	μαθήτρια, μέτρια επίδοση στην τάξη, εσωστρεφής
10	ΜΕ10	2	μαθήτρια, καλή επίδοση στην τάξη, αποστήθιση, εξωστρεφής
11	ΜΕ11	2	μαθητής, μέτρια επίδοση στην τάξη, αποστήθιση, εσωστρεφής
12	ΜΕ12	2	μαθήτρια, μέτρια επίδοση στην τάξη, εσωστρεφής
13	ΜΕ13	1	μαθητής, μέτρια επίδοση στην τάξη, εσωστρεφής
14	ΜΕ14	2	μαθήτρια, μέτρια επίδοση στην τάξη, εσωστρεφής

3.3.1. Συναντήσεις υπο-ομάδων

Οι συναντήσεις των υποομάδων της πειραματικής ομάδας διεξάγονταν κάθε μέρα μετά το πρόγραμμα του σχολείου. Κάθε ομάδα επαναλάμβανε τη συνάντηση την ίδια μέρα της εβδομάδας και οι μαθητές όλων των υποομάδων της πειραματικής ομάδας ακολουθούσαν το ίδιο πρόγραμμα σε κάθε συνάντηση της εβδομάδας μέχρι και την τρίτη φάση της ερευνητικής διαδικασίας. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται μια ενδεικτική εικόνα της διαδικασίας για την υποομάδα 2. Στην αρχική γραμμή σημειώνονται οι ημερομηνίες διεξαγωγής της διαδικασίας.

Πίνακας 3.4. Συναντήσεις υπο-ομάδας 2

Υποομάδα 2	6/2	13/2	20/2	27/2	5/3	27/3	26/4
Ερευνητική διαδικασία	**Α φάση**	**Β φάση**	**Γ φάση**	**Γ φάση/ Διερευνητική φάση ΣΟΕΑ**	**Πρόβλημα**	**Α και Β φάση**	**Αναδιατυπωμένο πρόβλημα**

Παρά το γεγονός ότι η ερευνήτρια σκόπευε να ολοκληρώσει μια προγραμματισμένη διαδικασία ακολουθώντας την ίδια σειρά δραστηριοτήτων, οι μαθητές της κάθε ομάδας πολλές φορές οδηγούνταν μέσω της διερεύνησης σε διαφορετικές εκδοχές του μαθησιακού μονοπατιού.

Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με το επίπεδο των μαθητών που συμμετείχαν οδήγησε σε διαφοροποίηση των αποτελεσμάτων από ομάδα σε ομάδα όσον αφορά το επίπεδο κατανόησης, το χρόνο κατασκευής των αντικειμένων και των μετασχηματισμών επί των αντικειμένων, νοητικών ή φυσικών.

3.4. Αξιολόγηση των ομάδων (πειραματικής ομάδας-ομάδας ελέγχου)

Οι μαθητές και των δυο ομάδων αξιολογήθηκαν ως ακολούθως:

Α. Ως προς το επίπεδο van Hiele, με τις 20/25 ερωτήσεις του τεστ του Usiskin. Λήφθηκε υπόψη το αυστηρό κριτήριο (stricter criterion) (Usiskin, 1982, p. 23), δηλαδή οι μαθητές έπρεπε να απαντήσουν σωστά τουλάχιστον στις 4 από τις 5 ερωτήσεις (αυστηρό κριτήριο) κάθε ομάδας, δεδομένου ότι οι σωστές απαντήσεις σε κάθε πεντάδα ερωτήσεων αποτελούν ένδειξη του επιπέδου (δηλαδή, οι σωστές απαντήσεις στις πέντε πρώτες ερωτήσεις είναι ένδειξη επιπέδου 1, στις δέκα πρώτες ερωτήσεις ένδειξη επιπέδου 2 κ.ο.κ.). Σημειώθηκε ακόμα ποιοι μαθητές απάντησαν σωστά στις 3 από τις 5 ερωτήσεις.

Β:

- ως προς την ικανότητα αποδεικτικής διαδικασίας, με τεστ απόδειξης στην αρχή, στο μέσο και στο τέλος της διαδικασίας·
- ως προς την ικανότητα επίλυσης πραγματικού προβλήματος· στην τέταρτη φάση οι μαθητές της πειραματικής ομάδας ρωτήθηκαν σχετικά με το πρόβλημα που τους ενδιέφερε να επιλύσουν.

Οι περισσότεροι μαθητές επέλεξαν το πρόβλημα του «χαμένου θησαυρού των πειρατών» του George Gamow (1948, 1988), σε προσαρμοσμένη «ελληνική» έκδοση από την ερευνήτρια, ώστε οι μαθητές να συσχετίσουν διαφορετικά επιστημονικά πεδία και να αποκτήσει ιδιαίτερο ενδιαφέρον η διαδικασία.

> *Στην Οδύσσεια (γ 74-77) αναφέρεται ότι πειρατές εμφανίστηκαν και στα ελληνικά νησιά. Ο πειρατής της ιστορίας μας έθαψε το θησαυρό του στο νησί της Θάσου και αποτύπωσε το σχέδιο του σε ένα χάρτη. Αφού τοποθέτησε σημαία σε ένα σημείο F προχώρησε ως το φοίνικα P, έστριψε δεξιά κατά γωνία 90^o και προχώρησε ίση απόσταση. Εκεί τοποθέτησε ένα πάσσαλο K. Όμοια έκανε και ως το άλλο δέντρο O. Στη συνέχεια συνέδεσε τους δύο πασσάλους και στο μέσο της απόστασης KL έθαψε το θησαυρό. Με την πάροδο του χρόνου η σημαία καταστράφηκε (πατήστε το κουμπί Απόκρυψη αντικειμένων). Μπορείτε να τον βοηθήσετε να βρει το θησαυρό;*

Αρκετοί ερευνητές έχουν υιοθετήσει το συγκεκριμένο πρόβλημα (π.χ Scher, 2003) εφαρμόζοντας το σε περιβάλλον λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας όπως του Geometer's Sketchpad. Το πρόβλημα θεωρήθηκε ως ιδιαίτερα ενδιαφέρον επειδή επιτρέπει τρεις αρκετά διαφορετικές προσεγγίσεις Patsiomitou (2008a): (i) την αποκαλούμενη «στατική» προσέγγιση (ii) την υποστηριγμένη από το λογισμικό «δυναμική» προσέγγιση και (iii) μια «δυναμική» προσέγγιση μέσω των στατικών μέσων στη γεωμετρία, η οποία (προσέγγιση) αποτελείται από «τη σκέψη με κίνηση» σε ένα στατικό περιβάλλον.

Το πρόβλημα εξετάστηκε αρχικά σε πειραματική ομάδα και σε ομάδα ελέγχου (ενδεικτικά Patsiomitou, 2008a, b, 2010) σε στατικά μέσα. Το πρόβλημα είχε στόχο τη διερεύνηση της ανάπτυξης των ικανοτήτων εφαρμογής στα τετράπλευρα. Οι μαθητές είχαν στη διάθεση τους οποιοδήποτε στατικό μέσο θα τους διευκόλυνε στην επίλυση του προβλήματος (π.χ τα γεωμετρικά τους όργανα). Ακόμα τους παρασχέθηκαν διευκρινιστικές οδηγίες. Ο μαθητές και των δυο ομάδων δεν είχαν καμιά προηγούμενη εμπειρία σε πραγματικά προβλήματα και ειδικότερα σε προβλήματα τα οποία εξελίσσονται σε πλαίσιο πραγματικού κόσμου στη γεωμετρία. Καμιά ομάδα δεν κατάφερε τίποτα ή σχεδόν τίποτα. Στη συνέχεια οι μαθητές της πειραματικής ομάδας διερεύνησαν το πρόβλημα στο δυναμικό περιβάλλον. Μετά την παρέλευση ενός μηνός περίπου από την επεξεργασία του προβλήματος, το πρόβλημα αναδιατυπώθηκε από την ερευνήτρια παίρνοντας την ανάδραση από την πειραματική ομάδα. Κανένας από τους μαθητές δεν είχε ασχοληθεί με το συγκεκριμένο πρόβλημα στο παρελθόν.

> «*Ένας αρχαιολόγος γνωρίζει ότι η θέση του αγγείου είναι στο εξής σημείο του χάρτη: από το σημείο P που στέκεται πρέπει να προχωρήσει μέχρι το σημείο Φ, να στρίψει κάθετα σε ίση απόσταση (τοποθετώντας το σημείο M). Ομοίως αν επανέλθει στο σημείο P να προχωρήσει μέχρι το σημείο K και να στρίψει κάθετα πάλι σε ίση απόσταση (τοποθετώντας το σημείο Λ). Το αγγείο είναι στο μέσο της απόστασης ΜΛ. Αντί όμως να ακολουθήσει την προτεινόμενη από το χάρτη μέθοδο εφάρμοσε την εξής διαδικασία: ξεκίνησε από το μέσο της απόστασης ΦΚ, επανέλαβε τη διαδικασία που του έλεγε ο χάρτης και βρήκε το αγγείο. α) Μπορείτε να σχεδιάσετε το σχήμα σύμφωνα με τα βήματα που ο αρχαιολόγος ακολούθησε; β) Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί ο συλλογισμός του ήταν σωστός;*»

Επομένως, η μεθοδολογία του διδακτικού πειράματος της Δ φάσης περιλαμβάνει τα εξής μέρη: στο πρώτο μέρος εξετάζονται τα διαγράμματα που κατασκευάστηκαν από τους μαθητές σε στατικό περιβάλλον (προ-τεστ), στο δεύτερο περιγράφεται η «εξερεύνηση» του προβλήματος με τη βοήθεια του Geometer's Sketchpad (μετα-τεστ), στο τρίτο αποτυπώνεται μέσα από τις περιγραφές των μαθητών ο τρόπος κατασκευής και η σχετική αιτιολόγηση του διαγράμματος και της λύσης του αναδιατυπωμένου προβλήματος.

3.4.1. Τα ερευνητικά εργαλεία στο στατικό περιβάλλον

Α στάδιο: προ-τεστ

Το προ-τεστ διεξήχθη στην αρχή της ερευνητικής διαδικασίας και περιλάμβανε τη διερεύνηση της προϋπάρχουσας γνώσης των μαθητών ως προς την ικανότητα

Απόδειξης πρότασης: οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να επιλέξουν και να αποδείξουν ένα από τα προβλήματα που αναφέρονται στη συνέχεια. Στόχος ήταν να διερευνηθεί αν οι μαθητές έχουν την ικανότητα: (1) να κατασκευάσουν ένα ακριβές διάγραμμα μεταφράζοντας τη λεκτική διατύπωση του προβλήματος, (2) να διαχωρίσουν την υπόθεση από το συμπέρασμα, (3) να οδηγηθούν στο συμπέρασμα με σύγκριση τριγώνων στα οποία διατυπώνουν και εφαρμόζουν το απαιτούμενο κριτήριο και (4) να αναπτύξουν επιχειρήματα κ.ο.κ

Πρόβλημα 1ο

Σε τρίγωνο ισοσκελές να αποδείξετε ότι τα ύψη προς τις ίσες πλευρές είναι μεταξύ τους ίσα.

Ή εναλλακτικά

Σε τρίγωνο ισοσκελές να αποδείξετε ότι οι διάμεσοι προς τις ίσες πλευρές είναι μεταξύ τους ίσες.

Ή εναλλακτικά

Σε τρίγωνο ισοσκελές να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των προσκείμενων προς τη βάση γωνιών είναι μεταξύ τους ίσες.

Ή εναλλακτικά

Σε τρίγωνο ισοσκελές να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις του μέσου Μ της βάσης από τις ίσες πλευρές είναι μεταξύ τους ίσες.

Ή εναλλακτικά

Σε τρίγωνο ισοσκελές να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν το μέσο Μ της βάσης με τα μέσα των ίσων πλευρών είναι μεταξύ τους ίσα.

Β στάδιο: μέσο-τεστ

Στο μέσο διάστημα και μετά την εισαγωγή της έννοιας του ορθογωνίου παραλληλογράμμου μέσω της παραδοσιακής διδασκαλίας οι μαθητές και των δύο ομάδων εξετάστηκαν εκ νέου σε ένα από τα προβλήματα που αναφέρονται στη συνέχεια. Στόχος ήταν να διερευνηθεί αν οι μαθητές έχουν την ικανότητα: (1) να μεταφράσουν μία «αν … τότε» δήλωση και να την αποδείξουν, (2) να κατασκευάσουν ένα ακριβές διάγραμμα, μεταφράζοντας τη λεκτική διατύπωση του προβλήματος, (3) να διαχωρίσουν την υπόθεση από το συμπέρασμα, (4) να κατασκευάσουν το χαρακτήρα συμβόλου του παραλληλογράμμου και του ορθογωνίου και (5) να αναπτύξουν παραγωγικό συλλογισμό.

Πρόβλημα 2ο

Να δείξετε ότι αν σε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες είναι ίσες τότε είναι ορθογώνιο.

Ή εναλλακτικά

Να δείξετε ότι αν σε παραλληλόγραμμο μία γωνία του είναι ορθή τότε είναι ορθογώνιο.

<u>Γ στάδιο: μετά-τεστ</u>

Απόδειξη πρότασης: οι μαθητές αξιολογήθηκαν στο πρόβλημα του Varignon. Η γενική περίπτωση του θεωρήματος είχε εξεταστεί στην τάξη. Στόχος ήταν να διερευνηθεί αν οι μαθητές έχουν την ικανότητα: (1) σχεδίασης, (2) εφαρμογής των θεωρημάτων (π.χ. του θεωρήματος ΘΜΠ), (3) ανάπτυξης επιχειρημάτων, παραγωγικού συλλογισμού, αποδεικτικής διαδικασίας και (4) ιεράρχησης σχημάτων.

Πρόβλημα 4ο

Α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που σχηματίζεται από τα μέσα των πλευρών τυχαίου τετράπλευρου είναι παραλληλόγραμμο.Β) Αν οι διαγώνιες του εξωτερικού τετράπλευρου είναι κάθετες τότε το τετράπλευρο στο εσωτερικό είναι ορθογώνιο.

3.5. Αξιοπιστία και εγκυρότητα της έρευνας

Ενώ η αξιοπιστία (reliability) και η εγκυρότητα (validity) είναι ουσιαστικά κριτήρια για την ποιότητα μιας ποσοτικής μελέτης, η ουδετερότητα, η εμπιστευσιμότητα, η συνέπεια, η μεταβιβασιμότητα είναι τα κριτήρια μιας ποιοτικής μελέτης (Lincoln & Guba, 1985, ό.π., στο Golafshani, 2003, p. 601).

Ο όρος αξιοπιστία «χρησιμοποιείται για την αξιολόγηση ποσοτικών ερευνών» (Golafshani, 2003, p. 601). Η Stenbacka (2001) υποστηρίζει ωστόσο ότι «η έννοια της αξιοπιστίας είναι ακόμα και παραπλανητική στην ποιοτική έρευνα. Αν μια ποιοτική μελέτη συζητείται με κριτήριο την αξιοπιστία, η μελέτη δεν είναι καλή» (p. 552, ό.π., στο Golafshani, 2003, p. 601).

Ο Seale (1999) επίσης υποστηρίζει ότι η «εμπιστευσιμότητα μιας ερευνητικής έκθεσης αποτελεί τον πυρήνα των ζητημάτων που συζητούνται συμβατικά υπό όρους εγκυρότητας και αξιοπιστίας» (p. 266 οπ. αναφ. στο Golafshani, 2003, p. 601). Ορισμένοι ερευνητές υποστηρίζουν επίσης ότι οι όροι αυτοί δεν έχουν κανένα νόημα αν η ποιοτική μελέτη δεν εξετάζεται στο πλαίσιο μιας πραγματικής προσέγγισης (για παράδειγμα, στην περίπτωση της παρούσας μελέτης, της διδασκαλίας στην τάξη των μαθητών).

Η ποιότητα της έρευνας είναι ένα σημαντικό ζήτημα καθώς συνδέεται με τη δυνατότητα γενίκευσης (generalizability) των αποτελεσμάτων της έρευνας και «συνεπώς με τη δοκιμή και την αύξηση της εγκυρότητας ή της εμπιστοσύνης της έρευνας» (Golafshani, 2003, p. 602).

Σε μια ποιοτική έρευνα που έχει στόχο τη διερεύνηση των φαινόμενων, τα φαινόμενα που προκύπτουν εξαρτώνται από τους μετέχοντες και τις αλληλεπιδράσεις που αναπτύσσονται μεταξύ τους. Στην περίπτωση της έρευνας δράσης της παρούσας μελέτης, στην οποία όπως αναφέρθηκε (βλ. ενότητα 7.2.1) η συμμετοχή της ερευνήτριας κρίθηκε αναγκαία, τα φαινόμενα διαφοροποιούνται λόγω της ιδιοσυγκρασίας των υποκειμένων που συμμετέχουν. Ένα ουσιαστικό ζήτημα επομένως είναι η ανάπτυξη ή όχι σχέσεων της ερευνήτριας με τα υποκείμενα της μελέτης. Η ερευνήτρια δυσκολεύτηκε να κρατήσει αποστάσεις από τους μαθητές (/τα υποκείμενα της μελέτης), να είναι εντελώς ουδέτερη και να μην εκδηλώνει τον ενθουσιασμό της όταν (τα υποκείμενα της μελέτης) ανακάλυπταν τη γνώση ή παρουσίαζαν ικανότητες που δεν είχαν στην αρχή της διαδικασίας. Η αντίδραση αυτή επηρεάζει τη μελέτη. Έτσι, με αυστηρά κριτήρια, η χρήση του ίδιου υποστηρικτικού υλικού μπορεί να οδηγήσει σε διαφορετικά αποτελέσματα σε μια ποιοτική μελέτη άλλου ερευνητή. Ο στόχος της άλλωστε δεν ήταν να παραγάγει στατιστικά ελεγχόμενα και γενικεύσιμα αποτελέσματα, αλλά να διερευνηθεί και να ερμηνευθεί η σημασία του ΥΜΜ για τα υποκείμενα της μελέτης.

Από άλλη προοπτική, μια ποσοτική μελέτη με το ίδιο υποστηρικτικό υλικό δεν θα εξετάσει τα φαινόμενα σε βάθος όπως συνέβη στην παρούσα μελέτη, η οποία μπορεί και γι' αυτό να θεωρηθεί και έγκυρη και αξιόπιστη.

Ένα άλλο ζήτημα είναι η αντικειμενικότητα της ερευνήτριας στην ανάλυση των δεδομένων της έρευνας, όπως επίσης και η αξιοπιστία και η εγκυρότητα των αποτελεσμάτων. Ο Patton (1987) αναφερόμενος στο θέμα της ουδετερότητας στην επανεξέταση της έρευνας επισημαίνει πως «ένας ουδέτερος ερευνητής εισέρχεται στο πεδίο χωρίς να έχει στόχο να επιβεβαιώσει κάποια θεωρία». Η άποψη αυτή αμφισβητείται όμως από τον Finlow-Bates (1996) ο οποίος υποστηρίζει πως: «(α) η έρευνα στηρίζεται σε υπαρκτά ή λανθάνοντα θεωρητικά θεμέλια, κι έτσι ο ερευνητής δεν μπορεί να αποφύγει την προκατάληψη για τα αποτελέσματα, και (β) ό,τι θεωρείται ουδέτερο από μια προοπτική μπορεί να θεωρηθεί προκατειλημμένο από μια άλλη» (pp. 133-134), άποψη με την οποία συμφωνεί και ο Patton (1987).

Επιπροσθέτως, αποτελέσματα τμημάτων της ερευνητικής διαδικασίας έχουν παρουσιαστεί σε συνέδρια και περιοδικά, τόσο διεθνώς όσο και στην Ελλάδα, έχοντας δεχθεί τις κρίσεις αξιόλογων ερευνητών στον τομέα της διδακτικής και της μεθοδολογίας των μαθηματικών με χρήση υπολογιστών, της ερευνητικής διαδικασίας με χρήση υπολογιστών, της ψυχολογίας στην εκπαίδευση των μαθηματικών σε περιβάλλον υπολογιστικό (βλ. Patsiomitou, 2008a, b; Patsiomitou & Koleza, 2008; Patsiomitou & Emvalotis, 2009 a, b; Patsiomitou, 2009; Patsiomitou & Koleza, 2009; Patsiomitou, 2010; Patsiomitou & Emvalotis, 2010 a, b; Patsiomitou, Barkatsa & Emvalotis, 2010; Πατσιομίτου, 2008; Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2009 α, β; Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2010 α, β; Πατσιομίτου, Εμβαλωτής & Μπαρκάτσας, 2010; Patsiomitou, 2011, 2012; Πατσιομίτου, 2011, 2012). Οι δημοσιεύσεις αυτές καθώς και η εμπλοκή των επιβλεπόντων καθηγητών στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων καθιστούν την έρευνα αξιόπιστη και έγκυρη. Αλλά και οι ετεροαναφορές σε αυτές τις εργασίες συνηγορούν σε αυτή την αξιοπιστία και εγκυρότητα.

3.5.1. Ζητήματα ηθικής δεοντολογίας

Οι μαθητές-υποκείμενα της έρευνας φοιτούσαν σε Λύκειο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Θέλησαν να παραμείνουν ανώνυμοι μετά το πέρας της διαδικασίας, να μην γνωστοποιηθεί κάποια πληροφορία για αυτούς, ούτε ευρύτερα ούτε στον κλειστό κύκλο συνεργατών της ερευνήτριας, να μην κυκλοφορήσει έστω και αποσπασματικά το υλικό της βιντεοσκόπησης της πειραματικής ομάδας στο διαδίκτυο – ζητήματα ηθικής δεοντολογίας για τα οποία δεσμεύτηκε προσωπικά η ερευνήτρια. Θέλησαν επίσης να διατηρηθεί η ανωνυμία και στα γραπτά τεστ, όπως και να μην κυκλοφορήσει οποιαδήποτε πληροφορία θα αποκάλυπτε κάποιο χαρακτηριστικό του μαθητή (π.χ. όνομα ή άλλα στοιχεία του μαθητή). Η ερευνήτρια είχε από την αρχή εξηγήσει στους μαθητές ότι το υλικό προοριζόταν αυστηρά για τη συγγραφή της διδακτορικής διατριβής της. Το περιβάλλον του σχολείου ήταν ιδιαίτερα φιλικό, ενώ η πειραματική διαδικασία λάμβανε χώρα μετά τη λήξη των μαθημάτων. Οι γονείς των μαθητών από την άλλη δέχθηκαν ευχαρίστως τη συμμετοχή των παιδιών τους στη διαδικασία.

3.6. Η συλλογή και επεξεργασία των δεδομένων: προς μια εμπειρικά θεμελιωμένη θεωρία (grounded theory)

Σύμφωνα με τους Glaser & Strauss (1967), «η θεωρητική δειγματοληψία είναι μια διαδικασία συλλογής δεδομένων για την παραγωγή της θεωρίας όπου ο αναλυτής συλλέγει από κοινού, κωδικοποιεί και αναλύει τα δεδομένα και αποφασίζει τον τύπο δεδομένων που στη συνέχεια συλλέγονται με σκοπό να αναπτυχθεί η θεωρία. […]. Η θεωρητική δειγματοληψία γίνεται προκειμένου να ανακαλύψει [ο ερευνητής] τις κατηγορίες και τις ιδιότητές τους και να διατυπώσει τις αλληλεξαρτήσεις/αλληλοσυσχετίσεις στη θεωρία» (p. 45). Οι Miles & Huberman (1994, p. 10, στο Olivero, 2002, p. 91) αναφέρονται στη διαδικασία συλλογής, επεξεργασίας, απλοποίησης, αφαίρεσης και μετασχηματισμού στοιχείων τα οποία εμφανίζονται ως μείωση στοιχείων (data reduction).

Η πρώτη φάση μετά την απομαγνητοφώνηση των βίντεο ήταν η επεξεργασία των διαλόγων και των σημειώσεων ώστε να σχηματιστεί μια γενική εικόνα. Λόγω του μεγάλου όγκου των δεδομένων, η διαδικασία αυτή ήταν δύσκολο να επαναληφθεί πολλές φορές προκειμένου να εξεταστούν τα δεδομένα αυτά από διαφορετικές σκοπιές ή να γίνουν παρατηρήσεις που τις προηγούμενες φορές είχαν παραλειφθεί.

Οι παρατηρήσεις της ερευνήτριας αφορούσαν την παραγωγή εννοιών και διαδικασιών εκ μέρους των μαθητών, δηλαδή το λεκτικό περιεχόμενο των συμμετεχόντων, τις ενέργειές τους στο λογισμικό, το ρόλο των αλληλεπιδραστικών τεχνικών στην κατανόηση ή την κατασκευή εννοιών, το αν η χρήση των τεχνικών και οι λεκτικές διατυπώσεις των μαθητών ήταν σύγχρονες –αν ακολουθούσαν δηλαδή ή όχι τις ενέργειες στο λογισμικό–, τις έντονες στιγμές στη συζήτηση, τις στιγμές όταν στη φωνή του υποκειμένου σημειωνόταν αλλαγή λόγω κατανόησης, έκπληξης ή απορίας, όταν δηλαδή ο μαθητής βρισκόταν σε διαδικασία γνωστικής σύγκρουσης, οικοδόμησης ή επανεφεύρεσης, είτε τις στιγμές που ο διάλογος έπαυε να κυλάει ομαλά εξαιτίας κάποιου εμπόδιου γνωστικής φύσης που αφορούσε το θεωρητικό ή το τεχνολογικό κομμάτι της κατασκευαστικής διαδικασίας. Η αρχική διαπίστωση ήταν ότι οι μαθητές ανέπτυσσαν επιχειρήματα διαφορετικού τύπου στην αρχή από ό,τι στο τέλος της διαδικασίας. Η επόμενη φάση αφορούσε την παραγωγή εικόνων από τα αρχεία του Sketchpad που κατασκεύαζαν οι μαθητές καθώς και εικόνες που προέρχονταν από capturing των βίντεο.

3.6.1. Ανάλυση λόγου (discourse analysis)

Ο κοινωνικός κονστρουκτιβισμός υποστηρίζει ότι η μάθηση είναι η διαδικασία που προκύπτει μέσω της συμμετοχής «στις κοινότητες πρακτικής […] όπου η γνώση υποστηρίζεται από το διάλογο, τις πηγές μάθησης και τα πολιτισμικά δημιουργήματα που συνδέονται με τη μάθηση» (Crook, 1994, p. 38).

Οι γλωσσολόγοι έχουν επικεντρώσει στη γλώσσα ως μέσο για τη μετάδοση πληροφοριών. Ο Wittgenstein (1953) θεωρεί ότι το πλαίσιο είναι εξίσου σημαντικό στην παραγωγή νοήματος καθώς μια λέξη μπορεί να αποκτήσει νόημα μόνο στο πλαίσιο όπου έχουν τεθεί οι κανόνες από τους συμμετέχοντες σε μια συνεχή ροή αλληλεπίδρασης. Ο Fairclough (1992) από τη μεριά του εξετάζει το διάλογο ως μέσο αναπαράστασης και τρόπο δράσης διά του οποίου οι άνθρωποι ενεργούν στον κόσμο και μεταξύ τους. Επισημαίνει τη διαλεκτική σχέση μεταξύ της ανάπτυξης διαλόγου και της κοινωνικής δομής, με το διάλογο αφενός να περιορίζεται από την κοινωνική δομή και αφετέρου να έχει κοινωνικές συνιστώσες. Σκιαγραφεί ένα τρισδιάστατο πλαίσιο όπου εξετάζει «κάθε διάλογο ταυτόχρονα ως μέρος κειμένου, ως περίπτωση διαλεκτικής πρακτικής και ως περίπτωση κοινωνικής πρακτικής» (Thornton & Reynolds, 2006, p. 4).

Οι βασικοί στόχοι και παραδοχές της ανάλυσης λόγου που ακολουθήθηκαν και στην παρούσα μελέτη, συνοψίζονται από τον Ιωσηφίδη (2008, σελ. 153) και αναφέρονται περιληπτικά στη συνέχεια:

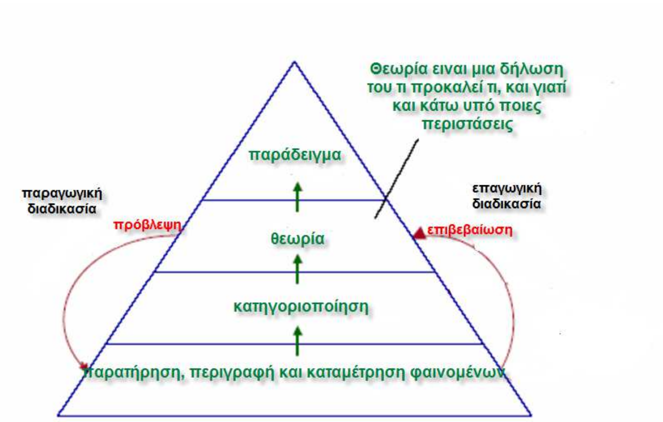
- η ανάλυση λόγου προϋποθέτει ότι ο λόγος είναι μέσο ανθρώπινης δράσης η οποία είναι οργανωμένη και δομημένη μέσω μιας σειράς κανόνων και σχετικών σταθερά διαδικασιών
- στοχεύει στην διερεύνηση του σχηματισμού του νοήματος μέσα από καθημερινές πρακτικές συνομιλίας
- έχει βασικό στόχο την ανάλυση της αλληλουχίας λόγου (turn taking)
- ενδιαφέρεται για τους τρόπους έναρξης και λύσης μιας συνομιλίας, έμφασης, δόμησης και εξασφάλισης της συνέχειας
- στοχεύει στην διερεύνηση των τρόπων που οι συνομιλητές εξασφαλίζουν κοινό νόημα μέσω των μηχανισμών επιδιόρθωσης (repair) που χρησιμοποιούν (Bergamann, 2004, pp.296-307; Silverman, 2006, pp.210-211 οπ. αναφ. στο Ιωσηφίδης, 2008, σελ. 153).

3.7. Υποθετικό-παραγωγική διαδικασία και θεμελιωμένη θεωρητική προσέγγιση

Το Υποθετικό Μαθησιακό Μονοπάτι αποτελεί μια προσέγγιση η οποία δεν έχει ελεγχθεί ερευνητικά σε στατικό ή δυναμικό περιβάλλον. Ως εκ τούτου, η υποθετικο-παραγωγική μέθοδος δεν θα μπορούσε να αντιπροσωπεύει τον τρόπο με τον οποίο θα προέκυπτε η ανάλυση των δεδομένων της μελέτης. Για το λόγο αυτό επιλέχθηκε η θεμελιωμένη θεωρία (grounded theory). Στην παρούσα μελέτη δεν διατυπώθηκαν a priori ερευνητικές υποθέσεις, εφόσον οι κατηγορίες δεν θεωρήθηκε αναγκαίο να εξαρτηθούν από τις κατηγορίες μιας άλλης θεωρίας και τα αποτελέσματα της ερευνητικής διαδικασίας δεν ανατροφοδότησαν μια αρχική θεωρία. Οι Altrichter & Posch (1989) υποστηρίζουν ότι:

> «στην παραδοσιακή εμπειρική προσέγγιση η έρευνα πρέπει να προσαρμοστεί στο παρακάτω σχήμα: πριν από την ερευνητική εργασία ο ερευνητής πρέπει να διατυπώσει μία ή περισσότερες υποθέσεις, οι οποίες συνάγονται από μία γενικότερη θεωρία και εκφράζουν τις προσδοκίες του ερευνητή για το αντικείμενό του/της. Κατά την ερευνητική εργασία οι υποθέσεις δεν πρόκειται να αλλάξουν λόγω των εμπειρικών ευρημάτων που προκύπτουν από τη μελέτη. Στο τέλος της ερευνητικής διαδικασίας συγκρίνονται με τις εμπειρικές πληροφορίες και απορρίπτονται ή γίνονται προσωρινά αποδεκτές. Κατόπιν τα αποτελέσματα των δοκιμών ανατροφοδοτούν την αρχική θεωρία από όπου συνήχθησαν οι υποθέσεις και ερμηνεύονται ως επιβεβαίωση ή αμφισβήτηση /παρερμηνεία της θεωρίας. Λόγω του κεντρικού ρόλου των «υποθέσεων» αυτή η διαδικασία καλείται ‘*υποθετικο-παραγωγική’*» (p. 21).

Στο παρακάτω διάγραμμα οι Christensen & Sundahl (2001) αναπαριστούν τη σταδιακή διαδικασία μέσω της οποίας οικοδομείται η θεωρία και η οποία περιλαμβάνει την παρατήρηση, την περιγραφή, την καταμέτρηση των φαινόμενων, στη συνέχεια την κατηγοριοποίηση και, τελικά, την ανάπτυξη της θεωρίας, έννοιες που αναλύονται διεξοδικά στην επόμενη ενότητα.



Σχήμα 3.1: Η διαδικασία μέσω της οποίας οικοδομείται η θεωρία (Christensen & Sundahl, 2001, p. 3)

Οι Corbin & Strauss (1990) υποστηρίζουν ότι «οι θεωρίες δεν μπορούν να οικοδομηθούν από τα πραγματικά γεγονότα ή τις δραστηριότητες όπως παρατηρούνται ή αναφέρονται, δηλαδή από τα ‘ακατέργαστα στοιχεία’» (p. 7). Μόνο με τη σύγκριση των γεγονότων και την απόδοση ίδιων φαινόμενων με τους ίδιους όρους μπορούμε να συγκεντρώσουμε τα βασικά στοιχεία για την ανάπτυξη της θεωρίας. Δεν έχουμε ακόμα τη δυνατότητα να προβούμε σε a priori γενικεύσεις αλλά «επαγωγικά συμπεράσματα προκύπτουν από τη μελέτη του φαινόμενου» (Strauss and Corbin, 1990, p. 23). «Η θεωρία αναδύεται σταδιακά μέσα από τα ποιοτικά δεδομένα και υπάρχει μια συνεχής αλληλεπίδραση και διαντίδραση μεταξύ θεωρητικών θέσεων και εμπειρικών ευρημάτων» (Κυριαζή, 1999 ό.π., στο Ιωσηφίδης, 2008, σ. 154)

3.8. Η σταθερή συγκριτική μέθοδος (constant comparative method) για την ανάλυση των δεδομένων της έρευνας

Η ανάγκη για κατανόηση και επεξήγηση των φαινομένων που παρατηρήθηκαν στην παρούσα μελέτη οδήγησε στην ποιοτική μεθοδολογία για την ανάλυση των δεδομένων. Καθώς η μελέτη εστιάζει στον προσδιορισμό και το χαρακτηρισμό των διατυπώσεων εκ μέρους των μαθητών, κρίθηκε αναγκαία η ποιοτική και σε βάθος ανάλυση των δεδομένων. Η μεθοδολογία συνίσταται από παρατηρήσεις των ομάδων των μαθητών της πειραματικής ομάδας και από την *οικοδόμηση θεωρίας* (theory buliding) (Eisenhardt, 2002).

Η έννοια της θεμελιωμένης θεωρίας εισήχθη αρχικά από τους Glaser & Strauss (1967) στο έργο τους ‘*The Discovery of Grounded Theory’* δηλώνοντας ότι μια αξιόπιστη ολοκληρωμένη θεωρία μπορούσε να προκύψει από το υπό μελέτη φαινόμενο. Οι Strauss & Corbin (1990) αναφέρουν ότι:

> Η θεμελιωμένη θεωρία δεν παράγεται a priori και δοκιμάζεται στη συνέχεια. Παράγεται επαγωγικά από το φαινόμενο που αντιπροσωπεύει. Ανακαλύπτεται, αναπτύσσεται και επιβεβαιώνεται μέσω της συστηματικής συλλογής δεδομένων και της ανάλυσης των δεδομένων του φαινομένου αυτού. Για το λόγο αυτό η συλλογή δεδομένων, η ανάλυση και η θεωρία πρέπει να είναι σε συσχέτιση μεταξύ τους (p. 23).

Η θεμελιωμένη θεωρία απαντά στο τι προκαλεί τι, γιατί και κάτω από ποιες περιστάσεις. Ειδικότερα και σύμφωνα με τους Glaser & Strauss (1967) η θεμελιωμένη θεωρία συνίσταται από μια σειρά βημάτων που εγγυώνται μια καλή θεωρία, ενώ κατά τους Pandit (1996), Bryman & Bell (2003, p. 432) έννοιες, κατηγορίες και προτάσεις είναι τα σημαντικά στοιχεία της θεμελιωμένης θεωρίας. «Οι κατηγορίες είναι υψηλοτέρου επιπέδου και πιο αφηρημένες από τις έννοιες που αναπαριστούν» (Corbin & Strauss, 1990, p. 7). Οι προτάσεις εκφράζουν γενικευμένες σχέσεις μεταξύ κατηγοριών και των εννοιών της και μεταξύ διακριτών κατηγοριών. Εμπλέκουν δηλαδή εννοιολογικές σχέσεις μεταξύ των κατηγοριών (Whetten, 1989, p. 492).

Σύμφωνα με τον Pandit (1995)

> «**οι έννοιες** είναι οι βασικές συνιστώσες της ανάλυσης αφού προέρχονται από την εννοιολόγηση (conceptualization) των δεδομένων, όχι από τα πραγματικά στοιχεία αυτά καθαυτά με τα οποία αναπτύσσεται η θεωρία. Καθώς ο ερευνητής βρίσκεται αντιμέτωπος με άλλα γεγονότα και όταν τα συγκρίνει φαίνονται να μοιάζουν, μπορεί τότε να τους αποδώσει το ίδιο νόημα (Corbin & Strauss, 1990, p. 7). Το δεύτερο στοιχείο της θεμελιωμένης θεωρίας είναι **οι κατηγορίες** οι οποίες σύμφωνα με τους Corbin &

Strauss (1990, p. 7) είναι σε υψηλότερο επίπεδο και περισσότερο αφηρημένες από τις έννοιες που αντιπροσωπεύουν. Παράγονται μέσα από την ίδια αναλυτική διαδικασία, τις συγκρίσεις, για να επισημάνουν τις ομοιότητες και τις διαφορές που χρησιμοποιούνται για να παράγουν χαμηλότερου επιπέδου έννοιες. Οι κατηγορίες είναι οι 'ακρογωνιαίοι λίθοι' της ανάπτυξης της θεωρίας. Παρέχουν τα μέσα με τα οποία η θεωρία μπορεί να ολοκληρωθεί. Το τρίτο στοιχείο της θεμελιωμένης θεωρίας είναι **οι προτάσεις** (propositions), οι οποίες δείχνουν γενικευμένες σχέσεις μεταξύ μιας κατηγορίας και των εννοιών της και μεταξύ διαφορετικών κατηγοριών. Αυτό το τρίτο στοιχείο ονομάστηκε αρχικά 'υποθέσεις' από τους Glaser & Strauss (1967), αλλά ο όρος 'προτάσεις' είναι καταλληλότερος όπως διατυπώθηκε από τον Whetten (1989, p. 492)» (p. 1).

Η στρατηγική αυτής τη μεθόδου συνίσταται στην παραγωγή κατηγοριών, προτάσεων, είναι επομένως μια επαναληπτική διαδικασία (Pandit, 1996). Η μέθοδος περιλαμβάνει την εξέταση του φαινόμενου σε ποικίλα επίπεδα και σε διαφορετικά πλαίσια. Υπό αυτή την προοπτική η θεμελιωμένη θεωρία ταιριάζει και στην περίπτωση της παρούσας μελέτης.

3.8.1. Ανάλυση των δεδομένων

Ο Creswell (1998) περιγράφει την ανάλυση δεδομένων ως «διαδικασία διαχωρισμού και επανένωσης των δεδομένων σε πιο σημαντικούς τρόπους» (p. 154). Η παρούσα έρευνα επικεντρώνει στην ανάλυση των αποτελεσμάτων της επίδρασης των μετασχηματισμών σε αντικείμενα στατικά, δυναμικά ή νοητικά, συμπεριλαμβανομένων των μετασχηματισμών στις λεκτικές διατυπώσεις των μαθητών. Ειδικότερα, επικεντρώνει στη μελέτη των επιδράσεων των μετασχηματισμών των δυναμικών διαγραμμάτων που προέκυψαν από τις αλληλεπιδραστικές τεχνικές, συμπεριλαμβανομένων των εντολών του μενού «Μετασχηματισμός», καθώς και των μετασχηματισμών που επήλθαν από τους συνδυασμούς αλληλεπιδραστικών τεχνικών μέσω των Συνδεόμενων Οπτικών Ενεργών Αναπαραστάσεων (ΣΟΕΑ) αναφορικά με την ανάπτυξη των αποδείξεων. Συγκεκριμένα αφορά την ανάλυση:

- των αποτελεσμάτων των αλληλεπιδράσεων που συντελούνται μεταξύ των μαθητών και των εργαλείων που χρησιμοποιούνται (μέσω του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας) και μεταξύ των ίδιων των μαθητών από τη χρήση των εργαλείων του λογισμικού. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων των αλληλεπιδράσεων περιλαμβάνει τη διερεύνηση της κατασκευής *σχημάτων χρήσης*, *σχημάτων εργαλειοποιημένης δράσης* που προκύπτουν κατά την *εργαλειακή γένεση* των μαθητών με τη χρήση των εργαλείων του λογισμικού·
- των αποτελεσμάτων της χρήσης των εργαλείων της ερευνητικής διαδικασίας στο είδος συλλογισμού που αναπτύσσουν οι μαθητές σε κάθε διαφορετική φάση (σε ημιπροσχεδιασμένα με ή χωρίς τη χρήση των Συνδεόμενων Οπτικών Ενεργών

Αναπαραστάσεων) με στόχο τη μεγιστοποίηση του αποτελέσματος τόσο για την κατασκευή των μαθηματικών αντικειμένων που επιδιώκουμε, συμπεριλαμβανομένων των μαθηματικών εννοιών, ορισμών και αιτιολόγησης (ανάπτυξη *παραγωγικού συλλογισμού* και *αποδεικτικών σχημάτων*)·

- των μετασχηματισμών που υφίστανται οι λεκτικές διατυπώσεις σε διάφορα επίπεδα και σε διαφορετικές φάσεις της έρευνας για τον κάθε μαθητή. Η γλωσσική δομή είναι ένας από τους βασικούς παράγοντες μετακίνησης σε ανώτερο επίπεδο (Fuys et al., 1988). Θα εξεταστεί συνεπώς αν επηρεάζεται ο γλωσσικός χαρακτήρας και οι διατυπώσεις των μαθητών που συμμετέχουν στην πειραματική ομάδα από την αλληλεπίδραση με το περιβάλλον του λογισμικού, και ειδικότερα πώς οι μετασχηματισμοί σε αντικείμενα προκαλούν μετασχηματισμούς σε λεκτικές διατυπώσεις.

Για τη μελέτη αυτή επιλέχθηκε η μέθοδος της σταθερής συγκριτικής προσέγγισης (constant comparative method) προκειμένου να παραχθεί μια θεμελιωμένη θεωρία (Strauss & Corbin, 1990, 1998). Οι Strauss & Corbin πρότειναν τη δομημένη προσέγγιση στην ανάλυση μέσω της σταθερής συγκριτικής τεχνικής, και αυτή η προσέγγιση είναι κατανοητή από τη σκοπιά της δυνατότητας εφαρμογής της σε αυτή τη μελέτη.

Ειδικότερα οι Strauss & Corbin (1990, 1998) πρότειναν τρεις φάσεις κωδικοποίησης για τη σταθερή συγκριτική μέθοδο: Ανοικτή κωδικοποίηση, αξονική κωδικοποίηση και επιλεκτική κωδικοποίηση (Open Coding, Axial Coding, and Selective Coding).

Στην **ανοικτή φάση κωδικοποίησης** η ερευνήτρια εξέτασε το κείμενο (π.χ., τα απομαγνητοσκοπημένα αντίγραφα των βιντεοσκοπήσεων) για εμφανείς κατηγορίες πληροφοριών και κατηγοριοποίησε τις πληροφορίες που υποστηρίζονταν από το κείμενο (π.χ. λεκτική και εργαλειακή κατηγοριοποίηση).

Κατά το δεύτερο στάδιο της ανάλυσης στοιχείων, στην **αξονική κωδικοποίηση**, «τα κομμάτια» των δεδομένων που προσδιορίστηκαν στην ανοικτή κωδικοποίηση τοποθετήθηκαν μαζί με νέους τρόπους, παράγοντας συνδέσεις μεταξύ των κατηγοριών (Strauss & Corbin, 1990, 1998). Κάθε κατηγορία επανακαθορίστηκε με βάση τα χαρακτηριστικά που την προκάλεσαν (Creswell, 2007):

- το πλαίσιο (το συγκεκριμένο σύνολο ιδιοτήτων της) που την περιείχε·
- τις στρατηγικές δράσης ή αλληλεπίδρασης μέσω των οποίων έγινε η διαχείρισή της και
- τις επιπτώσεις αυτών των στρατηγικών (p. 161)

Στην **αξονική φάση κωδικοποίησης** συσχετίστηκαν οι κατηγορίες με τις υποκατηγορίες τους με αποτέλεσμα να κατασκευαστούν οι αξονικοί κώδικες. «Τα χαρακτηριστικά αυτά παρείχαν σε κάθε κατηγορία μια σαφήνεια γι' αυτό και αναφερόμαστε σε αυτά ως *υποκατηγορίες*. Ουσιαστικά είναι και αυτά κατηγορίες, αλλά επειδή συνδέονται με μια κατηγορία μέσω μιας σχέσης προσθέτουμε το πρόθεμα 'υπο'» (Strauss & Corbin, 1990, p. 97).

Στην **επιλεκτική φάση κωδικοποίησης** οι πληροφορίες από την αξονική φάση κωδικοποίησης αναδιοργανώθηκαν σε μια νέα συσχέτιση της υπό μελέτη διαδικασίας. Με αυτό τον τρόπο παράχθηκε μια θεωρία. Τέλος, από αυτή τη θεωρία η ερευνήτρια παρήγαγε **τις προτάσεις** (ή τις υποθέσεις) που συσχέτιζαν τις κατηγορίες.

Τα βήματα που αναφέρθηκαν για τις τρεις φάσεις κωδικοποίησης «δεν ήταν μια γραμμική, διακριτή ακολουθία στην πραγματικότητα» (Strauss & Corbin, 1990, p. 118).

Συνοπτικά, η ερευνήτρια επινόησε την παρακάτω επεξεργασία των δεδομένων:

Α. Αναφορικά με τη μελέτη στο δυναμικό περιβάλλον

- Αναλύθηκαν τα δεδομένα των τεσσάρων φάσεων κάθε ομάδας, βάσει των κατηγοριών, με αποτέλεσμα να παραχθεί ένα κωδικοποιημένο κείμενο.
- Συγκρίθηκαν τα δεδομένα κάθε ομάδας που προέκυψαν σε κάθε φάση στο κωδικοποιημένο κείμενο και κατέγραψε τις παρατηρήσεις.
- Διαχωρίστηκαν τα δεδομένα για μαθητές του ίδιου επιπέδου και σύγκρινε τα δεδομένα της ανάλυσης για κοινές παρατηρήσεις.
- Διαχωρίστηκε η ιστορία κάθε μαθητή από το συνολικό κείμενο.
- Καταγράφηκε η εξέλιξη της ιστορίας κάθε μαθητή σε τρία βασικά σκέλη: (α) ως προς την επίδραση των αλληλεπιδραστικών τεχνικών του λογισμικού στην ανάπτυξη ικανότητας μετατροπής μεταξύ αναπαραστάσεων της ίδιας οντότητας καθώς και την ανάπτυξη ικανότητας δομικής ανάλυσης των δυναμικών διαγραμματικών αναπαραστάσεων· (β) την επίδραση των αλληλεπιδραστικών τεχνικών του λογισμικού στη διατύπωση εννοιών και το μετασχηματισμό των εννοιών και (γ) την επίδραση των αλληλεπιδραστικών τεχνικών και της σύνθεσής τους στην ανάπτυξη επαγωγικού, απαγωγικού, μετασχηματιστικού και παραγωγικού συλλογισμού και συνεπώς στην ανάπτυξη του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης κατά μήκος της ερευνητικής διαδικασίας.
- Τοποθετήθηκαν τα χαρακτηριστικά κάθε μαθητή σε πίνακα --όπως εμφανίστηκαν στη μελέτη-- και συγκρίθηκαν οι παρατηρήσεις για μαθητές του ίδιου επιπέδου.

Β. Αναφορικά με τη μελέτη στο περιβάλλον χαρτί –μολύβι

- Αναλύθηκαν τα δεδομένα των τεσσάρων σταδίων μελέτης στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι και κωδικοποίησε τις παρατηρήσεις για κάθε μαθητή και στις δυο ομάδες (πειραματική-ελέγχου) με βάση την κατηγοριοποίηση της μελέτης Α.

- Διαχωρίστηκαν οι μαθητές με βάση τα επίπεδά τους van Hiele στο προτέστ.
- Καταγράφηκαν τα κοινά χαρακτηριστικά που εμφανίστηκαν σε κάθε διαφορετικό στάδιο της μελέτης.
- Καταγράφηκαν τα κοινά χαρακτηριστικά για κάθε διαφορετικό στάδιο της μελέτης ώστε στην πρώτη αριστερή στήλη να εμφανίζονται τα κοινά χαρακτηριστικά και στην οριζόντια σειρά οι μαθητές (Patsiomitou, 2008, p. 383).
- Επισημάνθηκαν τα χαρακτηριστικά που είχε εμφανίσει κάθε μαθητής στα γραπτά τεστ και σύγκρινε τις παρατηρήσεις για μαθητές τους ίδιου επιπέδου.
- Συγκρίθηκε ποσοτικά η εμφάνιση ενός χαρακτηριστικού των μαθητών της πειραματικής ομάδας και ομάδας ελέγχου του ίδιου επιπέδου.
- Συγκρίθηκε η εξέλιξη του κάθε μαθητή της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου στο αρχικό και τελικό τεστ.

3.9. Οι κατηγορίες της ανάλυσης και η ανάπτυξη της θεμελιωμένης θεωρίας

Η ανάλυση των δεδομένων της παρούσας μελέτης, στηρίχτηκε στο θεωρητικό πλαίσιο το οποίο έχει καταγραφεί στο κεφάλαιο 2. Η ανάπτυξη κατηγοριών προέκυψε από τη συσχέτιση των δεδομένων με τις αρχικές μεταβλητές που προήλθαν από την θεωρητική θεμελίωση της ερευνητικής διαδικασίας**.** Η πρώτη κατηγοριοποίηση ολοκληρώθηκε όταν τα δεδομένα δεν παρείχαν νέες πληροφορίες και προέκυψε κορεσμός των κατηγοριών. Αναλυτικότερα, κατά τη διάρκεια της διαδικασίας της ανάλυσης στοιχείων της φάσης «ανοικτής κωδικοποίησης», οι απαντήσεις των μαθητών αναγνώστηκαν, και επισημάνθηκαν οι αντιπροσωπευτικές εκφράσεις, (για παράδειγμα οι ορισμοί και αιτιολογήσεις) που οι μαθητές παρήγαγαν, προκειμένου να αναπτυχθεί μια σε βάθος κατανόηση των διαλόγων που έγιναν από τους μαθητές-μετέχοντες (Corbin & Strauss, 1990; Strauss & Corbin, 1990). Αυτή η φάση καθόρισε τις «δομικές μονάδες» της ανάλυσης των δεδομένων της ερευνητικής διαδικασίας (Pandit, 1996).

Η αρχική εικόνα που σχηματίστηκε από την παρατήρηση των βίντεο ήταν ότι ο γλωσσικός συμβολισμός των εννοιών των μαθητών διέφερε στην αρχή από το τέλος της διαδικασίας, καθώς στο τέλος οι μαθητές χρησιμοποιούσαν μαθηματικούς ορισμούς και προτάσεις για να αιτιολογήσουν τον συλλογισμό τους. Αυτές οι προτάσεις προέκυπταν λόγω της προϋπάρχουσας γνώσης των μαθητών ή όταν εξελισσόταν η διαδικασία ή μετά την διαδικασία, σε αλληλεπίδραση με κάποιο εργαλείο του λογισμικού, με την ερευνήτρια, ή με τα άλλα μέλη της ομάδας, αποτέλεσμα προερχόμενο από την εμπειρία των μαθητών με την χρήση του λογισμικού ή λόγω των νοητικών μετασχηματισμών που οι μαθητές ανέπτυσσαν.

Σύμφωνα με τους Jaime & Guitierrez (1994) το επίπεδο ενός μαθητή μάς επιτρέπει να εξετάσουμε τον τρόπο που χρησιμοποιεί διαδικασίες ορισμού, απόδειξης και ταξινόμησης των σχημάτων. Αυτές είναι:

1. **Προσδιορισμός** των ιδιοτήτων των σχημάτων, της οικογένειας που το γεωμετρικό αντικείμενο ανήκει και αναγνώριση των οικογενειών των γεωμετρικών σχημάτων·
2. **Ορισμός μιας έννοιας** με θεώρηση από δυο διαφορετικές οπτικές γωνίες αναφορικά με:
    - τον τρόπο που χρησιμοποιούν έτοιμους γνωστούς ορισμούς·
    - τον τρόπο που διατυπώνουν έναν ορισμό για μια κλάση γεωμετρικών αντικειμένων·
3. **ταξινόμηση ενός γεωμετρικού αντικειμένου** (των σχημάτων ή των εννοιών) σε διαφορετικές οικογένειες·
4. **αποδεικτική διαδικασία–απόδειξη**: ο τρόπος με τον οποίο μπορούν να επιχειρηματολογήσουν για την αλήθεια μιας δήλωσης ή να εξηγήσουν με κάποιο πειστικό τρόπο γιατί η ιδιότητα ή δήλωση είναι αληθινή.

Στην παρούσα διατριβή υιοθετήθηκε η θεώρηση των Jaime & Guitierrez (1994) ώστε να εξεταστεί η ικανότητα ανάπτυξης ορισμών και αιτιολόγησης σε διαφορετικά επίπεδα.

<u>Ως προς τις διατυπώσεις που οι μαθητές χρησιμοποιούν</u>

Α : ο τύπος της γλώσσας που διατυπώνουν

Η κατηγοριοποίηση του πλαισίου αξιολόγησης των απαντήσεων των μαθητών είχε σαν πρόθεση να προσδιορίσει την πρόοδο των μαθητών στα επίπεδα και την ανάπτυξη των δεξιοτήτων των μαθητών, ώστε να πληροφορήσει για την κατανόηση των διαφορετικών τύπων αναπαραστάσεων που προκύπτουν σε αλληλεπίδραση με τις τεχνικές του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας.

Οι μαθητές χρησιμοποίησαν γλώσσα

Τυπική μαθηματική: ο μαθητής έχει ικανότητα να διατυπώνει την έκφραση του χρησιμοποιώντας μαθηματικούς όρους·
Δυναμική: η γλώσσα του μαθητή διαμορφώνεται για να συμπεριλάβει την γλώσσα που χρησιμοποιούμε στο λογισμικό·
Άτυπη: είναι οι μη μαθηματικές εκφράσεις·
Συνδυασμός άτυπης και τυπικής: συνδυασμός μαθηματικών όρων και φυσικής γλώσσας·
Συνδυασμός άτυπης και δυναμικής: συνδυασμός άτυπων εκφράσεων

Στις διατυπώσεις των μαθητών περιλαμβάνονται οι ορισμοί και αιτιολογήσεις.

<u>Κατηγοριοποίηση των ορισμών</u>

Σύμφωνα με τους Govender & de Villiers (2004) υπάρχουν διαφορετικοί, εναλλακτικοί επαρκείς ή μη, οικονομικοί ή μη ορισμοί για την ίδια έννοια. Η κατηγοριοποίηση των Govender & de Villiers (ό. π) υιοθετήθηκε εν μέρει και στην παρούσα μελέτη. Έτσι προέκυψαν οι υποκατηγορίες ορισμών. Για τις ανάγκες της μελέτης η ερευνήτρια εισήγαγε τον τύπο του **δυναμικού (αντιληπτικού) ή εμπειρικού ορισμού και του αυθαιρέτου οικονομικού**

ορισμού(αναλυτικά αναφέρονται οι όροι στους λειτουργικούς ορισμούς που περιέχονται στο Κεφάλαιο 1 της παρούσας μελέτης, σελίδα 41).

Κατηγοριοποίηση των αιτιολογήσεων

Οι μαθητές κατά την διάρκεια της διαδικασίας διερεύνησης της δραστηριότητας κατασκεύασαν σε συνεργασία επιχειρήματα και αιτιολογήσεις, προκειμένου να υποστηρίξουν την άποψη τους. Ο Balacheff (1988) έχει διαχωρίσει μεταξύ **εμπειρικών και εννοιολογικών αποδεικτικών σχημάτων**. Η κατηγοριοποίηση των αποδεικτικών σχημάτων του Balacheff (ό. π) υιοθετήθηκε από την ερευνήτρια για την ανάλυση των δεδομένων της παρούσας μελέτης, **αναλύοντας** παράλληλα το είδος συλλογισμού και το είδος επιχειρημάτων. Έτσι προέκυψαν οι υποκατηγορίες αιτιολογήσεων:

- **κρίσιμο πείραμα** (crucial experiment): η αιτιολόγηση προκύπτει από ένα προσεκτικά επιλεγμένο παράδειγμα όχι τυχαίο·
- **γενικό παράδειγμα** (generic example): η αιτιολόγηση βασίζεται σε λειτουργίες ή μετασχηματισμούς σε ένα παράδειγμα που επιλέγεται σαν χαρακτηριστικά αντιπροσωπευτικό μιας κλάσης αντικειμένων·
- **πειράματα σκέψης** (thought experiment): η αιτιολόγηση βασίζεται σε ειδικά παραδείγματα που είναι ενδεικτικά με κάποιον άλλον τρόπο παρά από τα αποτελέσματα της χρήσης τους·
- **συμβολικούς υπολογισμούς:** η αιτιολόγηση βασίζεται στη χρήση των μετασχηματισμών η των τυποποιημένων συμβολικών εκφράσεων.

Η κατηγοριοποίηση των αιτιολογήσεων των Harel & Sowder (1996, 2007), Sowder and Harel (1998) ενίσχυσε ή επιβεβαίωσε την εγκυρότητα της ανάλυσης των αποδεικτικών σχημάτων. Ιδιαίτερα επανεξετάστηκαν τα παραδείγματα αιτιολογήσεων για την ικανότητα *γενίκευσης, λειτουργικής σκέψης και λογικών συμπερασμάτων, την ανάπτυξη ικανότητας του μαθητή να* διαμορφώνει στόχους και υποστόχους και να προσπαθεί να προβλέψει τα αποτελέσματα τους κατά τη διάρκεια της αποδεικτικής διαδικασίας (μετασχηματιστικό σχήμα).

Οι Hollebrands, Conner & Smith (2010), Lavy (2006) χρησιμοποίησαν το μοντέλο Toulmin για να αναλύσουν την δομή των επιχειρημάτων μαθητών που αλληλεπίδρασαν με τεχνολογικό περιβάλλον. Σύμφωνα με τον Smith (2010) «*το περιεχόμενο και η δομή των επιχειρημάτων μπορεί να επηρεαστεί από την χρήση των εργαλείων, και ειδικότερα των τεχνολογικών εργαλείων*» (p. 37). Αυτές οι παρατηρήσεις οδήγησαν την ερευνήτρια να αναλύσει την δομή των επιχειρημάτων που οι μαθητές ανέπτυξαν, χρησιμοποιώντας το μοντέλο Toulmin (1958), εξετάζοντας ποια εργαλεία επηρέαζαν τη δομή του επιχειρήματος.

Ένας ακόμα στόχος ήταν η διερεύνηση των διαδικασιών σκέψης των μαθητών όταν λεκτικά εξηγούν τον συλλογισμό τους και όταν εκτίθενται στις ιδέες των άλλων μελών της ομάδας. Με τον τρόπο αυτό διερευνήθηκε αν η αλληλεπίδραση με τα εργαλεία του λογισμικού έπαιξε ρόλο (ή είχε επίδραση) στον τρόπο συλλογισμού των μαθητών και στον τρόπο που οι μαθητές χρησιμοποιούν τις αναπαραστάσεις. Η ανάπτυξη διαφορετικού τύπου συλλογισμού εκ μέρους των μαθητών κατά την επίλυση ενός προβλήματος έχει συζητηθεί στο κεφάλαιο 5 (π.χ Επαγωγικός, Απαγωγικός, Παραγωγικός και Μετασχηματιστικός συλλογισμός). Ταυτόχρονα εξετάστηκε η δομή του επιχειρήματος των μαθητών, ώστε να διερευνηθεί αν είναι αποτέλεσμα παραγωγικού, απαγωγικού, επαγωγικού συλλογισμού ή μετασχηματιστικού συλλογισμού (Harel & Sowder, 1998; Peirce, 1992; Simon, 1996) (αναλυτικά αναφέρονται οι όροι στους λειτουργικούς ορισμούς που περιέχονται στο Κεφάλαιο 1 της παρούσας μελέτης, σελίδα 41).

Η παρατήρηση του τρόπου που οι μαθητές χρησιμοποιούσαν τα εργαλεία ήταν ένα ακόμα σκέλος της μελέτης. Οι μαθητές χρησιμοποίησαν τα εργαλεία (σημείου, καθέτου, περιστροφής, ανάκλασης, απόκρυψης/ εμφάνισης κλπ) με κανονικό τρόπο, κατασκευάζοντας *σχήματα χρήσης των εργαλείων* ή *σχήματα εργαλειοποιημένης δράσης* , ή με οικονομία / με κατάχρηση. Αυτές οι παρατηρήσεις οδήγησαν την ερευνήτρια στην κατηγοριοποίηση στο εργαλειακό επίπεδο.

Πίνακας 3.5. Συσχέτιση μεταξύ των διατυπώσεων των μαθητών και των εργαλείων

ΕΠΙΠΕΔΟ VH	Μ	ΔΙΑΛΟΓΟΙ	ΕΝΝΟΙΑ	ΕΡΓΑΛΕΙΟ	ΧΡΗΣΤΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ	ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ
1	M13	Θα κάνουμε **μια παράλληλη** (από το C)	Έννοια παραλληλίας	εργαλείο κατασκευής παράλληλης	ΣΧ παραλληλίας	Μετασχηματισμός σύνθεσης
1	M13	Πρώτα να επιλέξεις τις ευθείες και μετά να τις κρύψεις		απόκρυψης/ εμφάνισης	Ακολουθιακή κατανόηση του εργαλείου	
1	M13	Αν μετακινήσουμε τις γωνίες (με σύρσιμο)	Ορισμός τετραγώνου προέκυψε από την κατασκευή του ορθογωνίου	σύρσιμο	ΣΧ συρσίματος	Μετασχηματισμός λόγω συρσίματος
2	M8	Είναι ίσα	Έννοια του ισοσκελούς τριγώνου	εργαλείο περιστροφής	ΣΕΔ	Μετασχηματισμός περιστροφής
2	M7	AB είναι κάθετη στην AB΄	Έννοια του ορθογωνίου τριγώνου	εργαλείο περιστροφής	ΣΕΔ	
2	M7	Να κατασκευάσουμε το μέσο με το midpoint	Έννοια του μέσου ευθυγράμμου τμήματος	εργαλείο μέσου σημείου	ΣΧ	Μετασχηματισμός διαίρεσης τμήματος
1	M7	Αντί να φέρουμε δυο κάθετες ίσες....	Το ανακλώμενο σημείο είναι σε ίση κάθετη απόσταση	εργαλείο ανάκλασης	ΣΕΔ-ορισμός εργαλείου ανάκλασης	Μετασχηματισμός ανάκλασης σημείου

Στον πίνακα πάνω παρουσιάζεται ένα παράδειγμα συσχέτισης μεταξύ των διατυπώσεων του μαθητή, του επίπεδου van Hiele του, του εργαλείου με το οποίο ολοκληρωνόταν μια διαδικασία, του μετασχηματισμού που προκλήθηκε στο διάγραμμα και της έννοιας η οποία προέκυψε.

Διαπιστώθηκε από την ερευνήτρια η επανάληψη των παρατηρήσεων της χρήσης του εργαλείου και της κατασκευής μιας έννοιας, επομένως η συσχέτιση εργαλείου και έννοιας εκ μέρους των μαθητών η οποία διατυπωνόταν με άτυπο ή τυπικό τρόπο. Βασική προϋπόθεση ήταν η κατανόηση εκ μέρους των μαθητών της χρήσης του εργαλείου η οποία οδήγησε στην κατηγοριοποίηση (α) αναφορικά με την κατανόηση εκ μέρους των μαθητών της επιλογής των αντικειμένων και εργαλείων για την ολοκλήρωση της κατασκευαστικής διαδικασίας και την συσχέτιση με την ικανότητα αποκωδικοποίησης της λεκτικής διατύπωσης του προβλήματος σε εικονική (ή της νοητικής του εικόνας σε εικονική και λεκτική). Ο μαθητής ανέπτυσσε τη **λεκτική κατανόηση της επιλογής των αντικειμένων, τη σειριακή κατανόηση της επιλογής των αντικειμένων και τη θεσιακή κατανόηση** (αναλυτικά αναφέρονται οι όροι στους λειτουργικούς ορισμούς, στη σελίδα 45).

(β) αναφορικά με το εργαλείο και το μετασχηματισμό που προκαλείται στο διάγραμμα λόγω του θεωρητικού ή πειραματικού συρσίματος: Μετασχηματισμός μέσω του εργαλείου και του θεωρητικού συρσίματος, μετασχηματισμός μέσω του εργαλείου και του πειραματικού συρσίματος και σύνθετοι μετασχηματισμοί λόγω της εφαρμογής πολλών εργαλείων

Οι όροι του **θεωρητικού και πειραματικού συρσίματος** ομοίως έπαιξαν σημαντικό ρόλο κατά τη διάρκεια της ανάλυσης των δεδομένων (αναλυτικά αναφέρονται οι όροι στους λειτουργικούς ορισμούς που περιέχονται στο Κεφάλαιο 1 της παρούσας μελέτης, σελίδα 41).

Πίνακας 3.6. Παραδείγματα μετασχηματισμών των διαγραμμάτων μέσω του συρσίματος

Π[3]	Ο μαθητής Μ8 σύρει το κέντρο να συμπέσει με το μέσο της βάσης	Επίπεδο 2 ομάδα 2	**Θεωρητικό σύρσιμο** με αποτέλεσμα την οπτική κατασκευή παραλληλογράμμου ως αποτέλεσμα σύνθεσης του τριγώνου και του συμμετρικού του
Π[4]	Ο μαθητής σύρει το σχέδιο του παραλληλο-γράμμου με αποτέ-λεσμα να καταστραφεί	Όλες οι ομάδες	**Πειραματικό σύρσιμο:** ο μαθητής διερευνά αν το σχήμα πληροί κάποιες ιδιότητες.

Η ανάπτυξη του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης του μαθητή είναι αποτέλεσμα της ανάπτυξης ικανοτήτων. Οι γεωμετρικές ικανότητες είναι ένα υποσύνολο των μαθηματικών ικανοτήτων (OECD, 2006) του μαθητή, δηλαδή των μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων ώστε να χειριστούν τις μαθηματικές έννοιες. Στην παρούσα μελέτη είναι αναγκαίο να εξετάσουμε την

- **Αναπαραστατική ικανότητα**: την ικανότητα μετατροπής μεταξύ αναπαραστάσεων, αλλά και τη σύνδεση διαφορετικών μορφών αναπαραστάσεων
- **Δομική ικανότητα:** την ικανότητα διαμόρφωσης του προβλήματος μέσω της μοντελοποίησης του, μεταφράζοντας από και προς μεταξύ των μοντέλων και της πραγματικότητας, την ικανότητα δομικής ανάλυσης μιας αναπαράστασης (επαρκώς ή ανεπαρκώς).
- **Ικανότητα διατύπωσης εννοιών:** την ικανότητα κατασκευής εννοιών-εν-δράσει, επέκτασης των εννοιών, σύνδεσης εννοιών και ιεράρχησης των εννοιών.

- **Ικανότητα παραγωγικού συλλογισμού:** Περιλαμβάνει την ικανότητα για ανάπτυξη αλυσίδων παραγωγικών δηλώσεων, ανάπτυξης αποδεικτικής διαδικασίας, η ικανότητα των μαθητών να συμμετέχουν στην συζήτηση αναπτύσσοντας παραγωγικό συλλογισμό.

Η κατηγοριοποίηση των ικανοτήτων που αναφέρθηκαν είναι αυτές που ενδιαφέρουν την παρούσα μελέτη.

Πίνακας 3.7.

Συσχετισμός ανάπτυξης αναπαραστατικής ικανότητας και αλληλεπιδραστικής τεχνικής				
ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ	Υποκατηγορία Α	Υποκατηγορία Β		Υποκατηγορία Γ
Μεταφράζουν μεταξύ αναπαραστάσεων	Αλλ. τεχνική και θεωρητικό σύρσιμο	Νοητική Λεκτική Εικονική	Λεκτική /Εικονική	Επίπεδο van Hiele 1/ 2
Δεν μεταφράζουν	Αλλ. τεχνική και πειρ. σύρσιμο	Νοητική	Λεκτική /Εικονική	Επίπεδο van Hiele 1/ 2
Αντιμετωπίζουν γνωστική σύγκρουση	Αλλ. τεχνική/ ΣΟΕΑ	Νοητική	Λεκτική /Εικονική	Επίπεδο van Hiele 1/ 2

Πίνακας 3.8.

Συσχετισμός ανάπτυξης ικανότητας δομικής ανάλυσης και αλληλεπιδραστικής τεχνικής			
ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ	Υποκατηγορία Α	Υποκατηγορία Β	Υποκατηγορία Γ
Αναλύουν δομικά ένα σχήμα	Αλλ. τεχνική και θεωρητικό σύρσιμο	Τυπική αντίληψη	Επίπεδο van Hiele 1 /2
		Άτυπη αντίληψη	
		Τυπική και Άτυπη αντίληψη	
Δεν αναλύουν δομικά ένα σχήμα	Αλλ. τεχνική και πειρ. σύρσιμο	Τυπική αντίληψη	Επίπεδο van Hiele 1/2
		Άτυπη αντίληψη	
		Τυπική και Άτυπη αντίληψη	
Αντιμετωπίζουν γνωστική σύγκρουση	Αλλ. τεχνική/ ΣΟΕΑ	Τυπική αντίληψη	Επίπεδο van Hiele 1 / 2
		Άτυπη αντίληψη	
		Τυπική και Άτυπη αντίληψη	

Πίνακας 3.9.

Συσχετισμός ανάπτυξης ικανότητας διατύπωσης/ κατασκευής εννοιών και αλληλεπιδραστικής τεχνικής			
ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ	Υποκατηγορία Α	Υποκατηγορία Β	Υποκατηγορία Γ

Αναπτύσσουν την ικανότητα διατύπωσης εννοιών	Υποκατηγορία Α Αλλ. τεχνική και θεωρητικό σύρσιμο	Ορισμός δυναμικός ή ανεπαρκής	Επίπεδο van Hiele 1 /2
		Οικονομικός ή μη	
		Αυθαίρετος οικονομικός	
Δεν αναπτύσσουν	Αλλ. τεχνική και πειρ. σύρσιμο	Ορισμός δυναμικός ή ανεπαρκής	Επίπεδο van Hiele 1/2
		Οικονομικός ή μη	
		Αυθαίρετος οικονομικός	
Αντιμετωπίζουν γνωστικά εμπόδια	Αλλ. τεχνική/ ΣΟΕΑ	Ορισμός δυναμικός ή ανεπαρκής	Επίπεδο van Hiele 1 / 2
		Οικονομικός ή μη	
		Αυθαίρετος οικονομικός	

Πίνακας 3.10.

Συσχετισμός ανάπτυξης ικανότητας διατύπωσης/ κατασκευής εννοιών και αλληλεπιδραστικής τεχνικής

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ	Υποκατηγορία Α	Υποκατηγορία Β	Υποκατηγορία Γ
Αναπτύσσουν την ικανότητα διατύπωσης και μετασχηματισμού εννοιών	Αλλ. τεχνική και θεωρητικό σύρσιμο	Αιτιολόγηση εμπειρική	Επίπεδο van Hiele 1 /2
		Αιτιολόγηση Νοητική	
Δεν αναπτύσσουν	Αλλ. τεχνική και πειρ. σύρσιμο	Αιτιολόγηση εμπειρική	Επίπεδο van Hiele 1 /2
		Αιτιολόγηση Νοητική	
Αντιμετωπίζουν γνωστικά εμπόδια	Αλλ. τεχνική/ ΣΟΕΑ	Αιτιολόγηση εμπειρική	Επίπεδο van Hiele 1 /2
		Αιτιολόγηση Νοητική	

Πίνακας 3.11.

Συσχετισμός ανάπτυξης ικανότητας παραγωγικού συλλογισμού και αλληλεπιδραστικής τεχνικής

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ	Υποκατηγορία Α	Υποκατηγορία Β	Υποκατηγορία Γ
Αναπτύσσουν	Αλλ. τεχνική και	Παραγωγικός	Επίπεδο van Hiele 1 /2

παραγωγικό συλλογισμό	θεωρητικό σύρσιμο	Απαγωγικός	
		Επαγωγικός μετασχηματιστικός	
Δεν αναπτύσσουν παραγωγικό συλλογισμό	Αλλ. τεχνική και πειρ. σύρσιμο	Παραγωγικός	Επίπεδο van Hiele 1 /2
		Απαγωγικός	
		Επαγωγικός	
		μετασχηματιστικό ς	
Αντιμετωπίζουν γνωστικά εμπόδια	Αλλ. τεχνική/ ΣΟΕΑ	Παραγωγικός	Επίπεδο van Hiele 1 /2
		Απαγωγικός	
		Επαγωγικός	
		μετασχηματιστικό ς	

Δεύτερο επίπεδο ανάλυσης των γλωσσικών συμβολισμών των μαθητών

Διερευνήθηκε η συσχέτιση χαρακτηριστικών των επιπέδων /εργαλείων του λογισμικού. Σύμφωνα με τους Cobb, Yackel, & Wood (1992) «οι μαθητές κατασκευάζουν νοητικές αναπαραστάσεις που ανακλούν τις μαθηματικές σχέσεις που έχουν αναπτυχθεί από τις εκπαιδευτικές αναπαραστάσεις».

Πίνακας 3.12. Ανάπτυξη επιπέδου van Hiele

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ	Υποκατηγορία Α	Υποκατηγορία Γ
Αναπτύσσουν το χαρακτηριστικό επιπέδου van Hiele	Αλλ. τεχνική και θεωρητικό σύρσιμο	Επίπεδο van Hiele 1 /2
Δεν αναπτύσσουν	Αλλ. τεχνική και πειρ. σύρσιμο	Επίπεδο van Hiele 1 /2
	Αλλ. τεχνική/ ΣΟΕΑ	Επίπεδο van Hiele 1 /2

3.9.1 Οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων της μελέτης

Η οπτικοποίηση της εξέλιξης των μαθητών τόσο κατά τη διάρκεια των φάσεων όσο και στο τέλος της ερευνητικής διαδικασίας πραγματοποιήθηκε με την τοποθέτηση των σημαντικών στιγμιότυπων της εξέλιξης κάθε μαθητή σε πίνακα στο Excel.

Συγκεκριμένα η ερευνήτρια επινόησε την ακόλουθη οπτικοποίηση στον πίνακα αναφορικά με τη μελέτη της πειραματικής ομάδας:

Στην πρώτη κάθετη στήλη τοποθετήθηκαν τα εργαλεία ή οι εντολές ή οι συνθέσεις εργαλείων/εντολών που προκάλεσαν μια διατύπωση του μαθητή (ορισμό ή αιτιολόγηση) ή ένα χαρακτηριστικό που αποτελούσε ένδειξη κάποιου επιπέδου σύμφωνα με την κατηγοριοποίηση του Battista (2007). Συγκεκριμένα τα εργαλεία κωδικοποιήθηκαν και κάθε εργαλείο πήρε έναν συγκεκριμένο κωδικό:

T1=ΣΗΜΕΙΟ+ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΣΥΡΣΙΜΟ, T2=ΣΗΜΕΙΟ+ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΣΥΡΣΙΜΟ, T3=ΚΑΘΕΤΟΥ, T5=ΑΝΑΚΛΑΣΗΣ, T8=ΚΥΚΛΟΥ, T9=ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ, T11=ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟ ΕΡΓΑΛΕΙΟ, T12=ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΜΕΝΟ ΕΡΓΑΛΕΙΟ, T15=ΠΡΟΣΑΡΜ. ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΜΕ ΟΙΚ. Η ΚΑΤΑΧΡΗΣΗ, T16=ΑΠΟΚΡΥΨΗΣ/ΕΜΦΑΝΙΣΗΣ, T17=ΙΧΝΟΥΣ , T18=ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΥ

Στην πρώτη οριζόντια στήλη τοποθετήθηκαν τα χαρακτηριστικά των επιπέδων van Hiele από I0-I17, σύμφωνα με την κατηγοριοποίηση που έχει επεξεργαστεί ο Battista (2007). Αναλυτικότερα:

- Τα χαρακτηριστικά της γνωστικής σύγκρουσης/γνωστικών εμποδίων (με κωδικό I0) και της άτυπης και δυναμικής διατύπωσης (I1) τοποθετήθηκαν ως ενδείξεις επιπέδου 1.
- Τα χαρακτηριστικά του δυναμικού αντιληπτικού ορισμού (I2) και των άτυπων και τυπικών περιγραφών (I3) ως ενδείξεις επιπέδου 2.1.
- Τα χαρακτηριστικά του ανεπαρκή ορισμού /ανεπαρκούς αιτιολόγησης (I4) και επαγωγικών επιχειρημάτων /έννοιας-εν-δράσει ή θεωρήματος-εν-δράσει (I5) ως ενδείξεις επιπέδου 2.2.
- Τα χαρακτηριστικά της τυπικής περιγραφής /μη οικονομικού ορισμού (I6) καθώς και των συνδέσεων μεταξύ εννοιών (I7) ως ενδείξεις επιπέδου 2.3.
- Τα χαρακτηριστικά του οικονομικού ορισμού (I8) και των λογικών συσχετίσεων (κανόνας modus ponens) (I9) ως ενδείξεις επιπέδου 3.1.
- Τα χαρακτηριστικά της ικανότητας δομικής ανάλυσης /χαρακτήρα σήματος (I10) καθώς και των απαγω-παραγωγικών επιχειρημάτων (I11) ως ενδείξεις επιπέδου 3.2.
- Τα χαρακτηριστικά των παραγωγικών επιχειρημάτων (I12) και του γενικού παραδείγματος (I13) ως ενδείξεις επιπέδου 3.3.
- Τα χαρακτηριστικά του πειράματος σκέψης (I14) και λογικής ιεράρχησης (I15) ως ενδείξεις επιπέδου 3.4.

Τέλος, τα χαρακτηριστικά του μετασχηματιστικού συλλογισμού και δυναμικής επανεφεύρεσης τοποθετήθηκαν στις τελευταίες δυο στήλες ως χαρακτηριστικά που δεν αποτελούν ενδείξεις κάποιου επιπέδου με τις έως τώρα τοποθετήσεις των ερευνητών. Ομοίως και τα χαρακτηριστικά I10-I13 αποτελούν αυθαίρετες τοποθετήσεις της ερευνήτριας αφού ομοίως δεν αναφέρονται επισήμως ως ενδείξεις των επιπέδων αυτών από άλλους ερευνητές.

Το σημείο του διαλόγου της αντίστοιχης ομάδας που συμμετείχε ο μαθητής επίσης τοποθετήθηκε στην τομή μιας νοητής ευθείας παράλληλης από το εργαλείο προς τον οριζόντιο άξονα και μιας νοητής ευθείας κάθετης από το χαρακτηριστικό. Μετά την ολοκλήρωση της τοποθέτησης των σημείων τομής η διαδικασία ολοκληρώθηκε με την χάραξη μιας τεθλασμένης γραμμής μέσω της οποίας υπήρχε δυνατότητα να οπτικοποιηθεί η μαθησιακή πορεία του κάθε μαθητή, δηλαδή του μαθησιακού μονοπατιού που ακολούθησε κάθε μαθητής και ποια εργαλεία ή ποιες φάσεις της διαδικασίας επέδρασαν αποφασιστικά στην άνοδο του επιπέδου van Hiele του.

Το υποθετικό μαθησιακό μονοπάτι

3.10. Εισαγωγή – Η έννοια του Υποθετικού Μαθησιακού Μονοπατιού

Στο τμήμα του κεφαλαίου που ακολουθεί θα εξεταστούν οι διδακτικοί και μαθησιακοί στόχοι του Υποθετικού Μαθησιακού Μονοπατιού (ΥΜΜ) που προέκυψε ως διαδικασία *σχεδιασμού και ανασχεδιασμού* του πειραματικού τμήματος της μελέτης (Patsiomitou, 2012). Πολλοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με την ανάπτυξη καινοτόμων μαθηματικών προγραμμάτων σπουδών (Smith, Wiser, Anderson, & Krajcik, 2006; Corcoran, Mosher, & Rogat, 2009; Wilson, 2009) «ως αποτέλεσμα της χρήσης ενός ευρέος πεδίου επιστημονικών μεθοδολογιών, της διατήρησης στενών συνδέσεων μεταξύ προβλημάτων (tasks) και μαθηματικής σκέψης των παιδιών και της ανάπτυξης κάποιου μαθησιακού μονοπατιού, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υποστηρίξει και να οργανώσει τη μάθηση μέσω αυτής της διαδρομής» (Clements & Sarama, 2004, p.82). Όπως υποστηρίζουν οι Corcoran et al. (2009) η διαδικασία αυτή «βασίζεται στην έρευνα για τον τρόπο ανάπτυξης και βελτίωσης της εκμάθησης των μαθητών» (p.8).

Ο Clements (2002) υποστηρίζει ότι είναι αναγκαία η δημιουργία και η διατήρηση συνδέσεων μεταξύ της έρευνας και της ανάπτυξης του προγράμματος σπουδών ως αλληλεπιδραστικών διαδικασιών**.** Μια μαθησιακή τροχιά «διαφέρει από το πρόγραμμα σπουδών καθώς βασίζεται στην ανάλυση και στα ερευνητικά συμπεράσματα για τον τρόπο που οι μαθητές μαθαίνουν μια ιδιαίτερη ιδέα, […] και επικυρώνεται από τα στοιχεία (δεδομένα και αποτελέσματα) της έρευνας» (Corcoran et al., 2009, p. 23). Οι Corcoran et al. (ο.π) υποστηρίζουν επίσης ότι τα μαθησιακά μονοπάτια, εκτός από τους μαθητές, βοηθούν και τους εκπαιδευτικούς, καθώς τους «παρέχουν μια εννοιολογική δομή η οποία μπορεί να τους δώσει στοιχεία, να ενισχύσει την ικανότητα τους να ανταποκριθούν κατάλληλα […] και να προσαρμόσουν τη διδασκαλία τους στις ανάγκες του κάθε μαθητή…» (Corcoran et al., 2009, οπ. αναφ. στο Wilson, 2009, p.10).

3.10.1.Η έννοια του «υποθετικού μαθησιακού μονοπατιού»

Ένα υποθετικό μαθησιακό μονοπάτι (ΥΜΜ) ορίζεται ως «ο μαθησιακός στόχος, οι μαθησιακές δραστηριότητες, και η λειτουργία σκέψης και μάθησης στα οποία πρέπει να εμπλακούν οι μαθητές» (Simon, 1995, p. 133). Σύμφωνα με τους Simon & Tzur (2004, p.93) η δημιουργία ενός ΥΜΜ εξαρτάται από την προϋπάρχουσα γνώση των εμπλεκόμενων μαθητών και το στόχο του δασκάλου [στην παρούσα μελέτη της ερευνήτριας] για την μάθηση των μαθητών. Συνεπώς, ο διάλογος που προκύπτει από την εμπλοκή σε μια μαθηματική δραστηριότητα μπορεί να θεωρηθεί προϊόν της σκέψης που αναπτύσσουν οι μαθητές.

Οι όροι «υποθετικό μαθησιακό μονοπάτι» (hypothetical learning path) ή τροχιά μάθησης (learning trajectory) ή πρόοδος εκμάθησης (Learning Progressions) *(*Corcoran, Mosher, & Rogat, 2009) προσδιορίζουν μια διδασκαλία που χαρακτηρίζεται από συγκεκριμένους διδακτικούς στόχους (Simon, 1995), από προβλήματα σχετικά με τον τρόπο που σκέπτονται και μαθαίνουν οι μαθητές και κινούνται προοδευτικά από τον άτυπο στον τυπικό τρόπο σκέψης. Για τον Simon (1995), ένα υποθετικό μαθησιακό μονοπάτι (hypothetical learning trajectory) αναφέρεται

> στην πρόβλεψη του δασκάλου για το σχεδιασμό της πορείας ανάπτυξης της εκμάθησης. Είναι υποθετικό καθώς η πραγματική τροχιά μάθησης δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων… Αυτό προϋποθέτει ότι η μάθηση ενός ατόμου ακολουθεί κάποια τακτικότητα στη διαδικασία, […] και πολλοί από τους μαθητές στην ίδια τάξη [ή στην ίδια ομάδα στο πλαίσιο της παρούσας μελέτης] μπορούν να ωφεληθούν από τον ίδιο μαθηματικό στόχο (p. 135).

Οι Clements & Sarama (2004) αναφέρονται στη **μαθησιακή τροχιά** ως

> περιγραφή της σκέψης και εκμάθησης των παιδιών σε μια συγκεκριμένη μαθηματική περιοχή και μια σχετική, υποθετική διαδρομή μέσα από ένα σύνολο διδακτικών/εκπαιδευτικών στόχων που σχεδιάζονται για να προκαλέσουν εκείνες τις νοητικές διαδικασίες ή ενέργειες που υποθέτουμε ότι θα «μετακινήσουν» τα παιδιά προοδευτικά στα επίπεδα σκέψης, και προκειμένου να επέλθουν συγκεκριμένα αποτελέσματα σε εκείνη τη μαθηματική περιοχή (p. 83).

Από την άλλη, ο Battista (2004) «χρησιμοποιεί τον όρο *γνωστικά υψίπεδα* (cognitive plateaus) για να δηλώσει τα επίπεδα μέσω των οποίων οι μαθητές οδηγούνται προοδευτικά από τις άτυπες στις αυστηρές μαθηματικές έννοιες, και για να περιγράψει τους συλλογισμούς και τις νοητικές διαδικασίες, δηλαδή τις *γνωστικές διαδρομές* (cognitive itineraries) που απαιτούνται σε κάθε επίπεδο προκειμένου να μεταβούμε στο επόμενο». (Wilson, 2009, p.7)

Οι Smith, Wiser, Anderson, & Krajcik (2006), από τη μεριά τους, ως μαθησιακή τροχιά ορίζουν την «ακολουθία των διαδοχικών όλο και πιο σύνθετων τρόπων σκέψης για μια έννοια». Ανάλογος είναι και ο ορισμός των Corcoran et al. (2009), για τους οποίους μια *μαθησιακή πρόοδος* είναι «μια υποθετική περιγραφή των διαδοχικών όλο και πιο σύνθετων τρόπων σκέψης σε μια σημαντική περιοχή της γνώσης και της πρακτικής που οι μαθητές αναπτύσσουν [προκειμένου να διεκπεραιώσουν τους στόχους] μέσα σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα». (p.37)

Έτσι οι μεν μαθητές έχουν την ευκαιρία να λύσουν τα προβλήματα και να αναστοχαστούν πάνω στις ίδιες τις λύσεις τους, ο δε εκπαιδευτικός (ή ο ερευνητής) να εμβαθύνει στη διαδικασία και να χρησιμοποιήσει την κατανόηση αυτή για να βελτιώσει το μαθησιακό μονοπάτι. Επιπλέον η συμπεριφορά του εκπαιδευτικού (ή του ερευνητή) μπορεί να επηρεάσει τη μάθηση των μαθητών, αλλά και στο πλαίσιο της αλληλεπίδρασης οι μαθητές να επηρεάσουν τη γνώση του ερευνητή/εκπαιδευτικού. «Καθώς η γνώση του δασκάλου εξελίσσεται, το ΥΜΜ μπορεί να αναθεωρηθεί για να ενσωματώσει κάποια προσδοκία των μαθητών» (Mcgraw, 2002, p.129). O Simon (1995) περιέγραψε τα χαρακτηριστικά μιας αποτελεσματικής διδασκαλίας μέσω του *Διδακτικού Κύκλου των Μαθηματικών*.

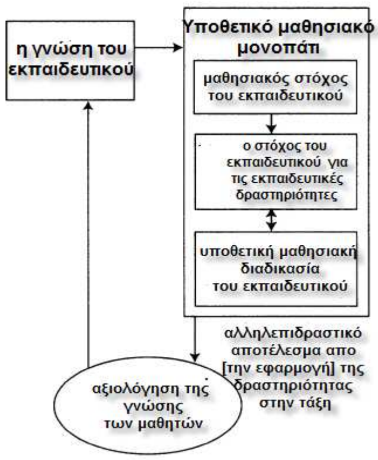
3.11. Ο Διδακτικός κύκλος των μαθηματικών

Ο «Διδακτικός κύκλος των Μαθηματικών» (The Mathematics Teaching Cycle) (Simon, 1995) είναι ένας εννοιολογικός όρος/ (ή εννοιολογικό πλαίσιο που αναπτύχθηκε) που περιγράφει τη σχέση της γνώσης και του σχεδιασμού του δασκάλου με την αλληλεπίδραση του δασκάλου με τους μαθητές.

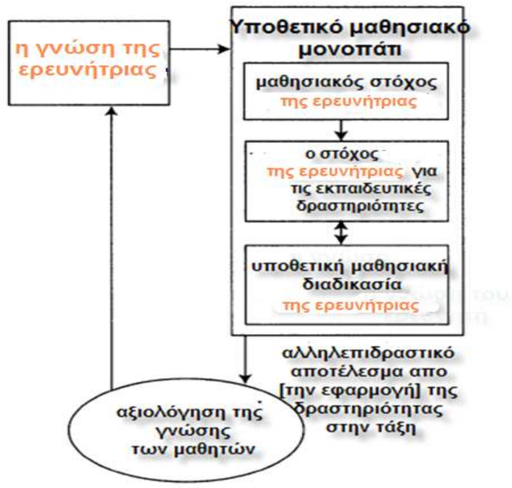
Οι τρεις κύριες συνιστώσες του μαθηματικού διδακτικού κύκλου σύμφωνα με τον Simon (1995) είναι:

- η αξιολόγηση του τι γνωρίζουν οι μαθητές (δηλαδή η επιλογή των μεθόδων για την επίλυση των προβλημάτων και τον τρόπο που οι μαθητές μοιράζονται τις ιδέες τους μέσα στο περιβάλλον της τάξης, πώς αναστοχάζονται στα μαθηματικά καθώς και πώς η μάθηση πληροφορεί ακόμα και για τη γνώση του ίδιου του εκπαιδευτικού) (Edgington, 2009, p.372)˙
- ο προσδιορισμός του μαθησιακού και διδακτικού στόχου και των μαθηματικών εννοιών καθώς και η υπόθεση ενός μονοπατιού μέσω του οποίου οι μαθητές πρόκειται να κατανοήσουν την έννοια (πρόβλεψη πώς η σκέψη και η κατανόηση των μαθητών θα προκύψουν μέσα από το πλαίσιο των μαθησιακών δραστηριοτήτων)˙
- η σχεδίαση, που βασίζεται τόσο στις ίδιες τις γνώσεις του δασκάλου για το αντικείμενο όσο και στη γνώση του για την προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών, για τη δημιουργία

ενός υποθετικού μαθησιακού μονοπατιού και την εφαρμογή των δραστηριοτήτων στην τάξη. Στο τέλος αυτού του βήματος ο κύκλος συνεχίζει ξανά με το πρώτο βήμα (p.136).



Σχήμα 3.2. Ο Διδακτικός κύκλος των Μαθηματικών (Simon, 1995, p.136)



Σχήμα 3.3. Προσαρμογή του Διδακτικού Κύκλου των Μαθηματικών για την παρούσα μελέτη.

Ο διδακτικός κύκλος των μαθηματικών του Simon μπορεί να θεωρηθεί το πρίσμα υπό το οποίο αντιμετωπίζεται το φαινόμενο (Edgington, 2009, p.371) και στην παρούσα μελέτη, το μέσο για τη σχεδίαση δραστηριοτήτων στο γεωμετρικό περιβάλλον του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας που θα οδηγήσει στην ανάπτυξη της σκέψης των μαθητών.

3.11.1.Το ΥΜΜ της παρούσας μελέτης

Η ερευνητική διαδικασία που ακολουθήθηκε στην παρούσα μελέτη με τοποθέτηση προβλημάτων και ανάπτυξη συζητήσεων, είναι ανάλογη με εκείνη των Cobb, Wood, Yackel & McNeal (1992, οπ. αναφ. στο McGraw, 2002, p.8), σύμφωνα με την οποία οι μαθητές εξερευνούν προβλήματα, διατυπώνουν εικασίες, εξηγούν και αιτιολογούν τις σκέψεις τους και αξιολογούν τις ιδέες των υπολοίπων μελών της ομάδας, σε αντίθεση με τον τύπο της δασκαλοκεντρικής διδασκαλίας, στην οποία ο δάσκαλος προσπαθεί να μεταδώσει/ μεταβιβάσει τη γνώση του στον μαθητή. Στο πλαίσιο αυτό τέθηκαν τα θεμέλια για την ανάπτυξη ενός νέου υποθετικού μαθησιακού μονοπατιού στα τετράπλευρα, ως περιγραφή της σκέψης και εκμάθησης των παιδιών στη συγκεκριμένη μαθηματική περιοχή και ως μια σχετική, υποθετική διαδρομή μέσω ενός συνόλου διδακτικών/εκπαιδευτικών στόχων η οποία προβλέπει την κατασκευή των εννοιών και δομών των τετραπλεύρων με εισαγωγή αλληλεπιδραστικών τεχνικών του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας «παράλληλα με τις ανάγκες της θεωρίας» (Mariotti, 2000).

Ένα μαθησιακό μονοπάτι που βασίζεται σε ερευνητική διαδικασία, όπως στην παρούσα μελέτη, και θεμελιώνεται στη θεωρία του κοινωνικού κονστρουκτιβισμού «μπορεί να αλλάξει την πορεία ανάπτυξης των μαθητών» (Clements & Sarama, 2004, p. 84). Η Steffe (2004, p.130) αναφέρεται στην κατασκευή μαθησιακών μονοπατιών από τα ίδια τα παιδιά όπου αυτά λειτουργούν ως δάσκαλοι.

Αυτή την ιδέα υιοθετεί και ο Freudenthal ο οποίος υποστηρίζει ότι «το να κάνουν τα ίδια τα παιδιά μαθηματικά είναι σημαντικότερο από την εκμάθηση των μαθηματικών ως έτοιμου αντικειμένου [προς μάθηση]» (Gravemeijer & Terwel, 2000, p.780). Κατά συνέπεια, η ανάπτυξη ενός ΥΜΜ μπορεί να βελτιωθεί αν προβλεφθούν δραστηριότητες και προβλήματα που διευκολύνουν τη συζήτηση στην ομάδα μαθητών. Ο von Glasersfeld (1995) θεωρεί ότι είναι σημαντικό να διατυπώσουν οι μαθητές πως καταλήγουν σε μια λύση. Το ΥΜΜ λοιπόν δημιουργείται από τους μαθητές, αφού «οι μαθηματικές ιδέες πρέπει να κατασκευάζονται από τους ίδιους τους μαθητές καθώς προσπαθούν να τις κατανοήσουν» (Battista, 1999, in Farkota, 2003, p. 71). Έτσι «αποκτούν μια ευθύνη της ίδιας της γνώσης τους» (Carpenter et al., 1999). Οι Airasian & Walsh (1997) υποστηρίζουν ότι ο αναπροσανατολισμός της διδασκαλίας είναι αναγκαίος προκειμένου οι μαθητές να πετύχουν την επίλυση ενός προβλήματος με γενικεύσεις, αναλύσεις, προκειμένου να αναπτύξουν κριτική σκέψη.

Πολλοί ερευνητές επισημαίνουν ότι η συμμετοχή των μαθητών σε μικρά γκρουπ (π.χ, Goos, Galbraith & Renshaw, 2002; Dekker & Elshout-Mohr, 2004), που διευκολύνονται από γνωστικά εργαλεία όπως το Geometer's Sketchpad, ρυθμίζει την κοινωνική αλληλεπίδραση μεταξύ τους και τους ενθαρρύνει να μοιράζονται τις μαθηματικές ιδέες (Patsiomitou, 2012, p.56).

Σύμφωνα με τη Sfard (2001)

> η μάθηση δεν είναι τίποτε περισσότερο από ένα συγκεκριμένο είδος κοινωνικής αλληλεπίδρασης που έχει στόχο την τροποποίηση άλλων κοινωνικών αλληλεπιδράσεων. […] μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε τη μάθηση ως τη διαδικασία αλλαγής των διαλεκτικών τρόπων κάποιου [μαθητή] (p.3).

Σε μια κοινωνικοκονστρουκτιβιστική προσέγγιση της διδασκαλίας και εκμάθησης των εννοιών οι μαθητές παίζουν το ρόλο του 'δρώντος', και ο δάσκαλος (στην παρούσα μελέτη η ερευνήτρια) του 'συμμετοχικού παρατηρητή' παρεμβαίνοντας στις συζητήσεις των μαθητών με ερωτήσεις ή κεντρίζοντας τις συζητήσεις. «Η γνώση που αναπτύσσεται τότε είναι ένα κοινωνικό δημιούργημα, […] ενεργά κατασκευασμένο από τους μαθητές» (Mcgraw, 2002, p. 16). Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές συνεισφέρουν με τις ιδέες τους, κτίζοντας πάνω στις ιδέες των υπόλοιπων μελών της ομάδας.

Σύμφωνα με τους Clements & Sarama (2009) «μια βασική συνιστώσα του μαθησιακού μονοπατιού είναι ο μαθηματικός στόχος. Δηλαδή, ο πυρήνας των 'κεντρικών ιδεών' (big ideas) που εμπλέκονται στο μονοπάτι. Μια δεύτερη συνιστώσα είναι τα επίπεδα σκέψης από τα οποία διέρχεται ο μαθητής προκειμένου να αναπτύξει την κατανόηση και τις δεξιότητες στο θέμα, και μια τρίτη οι εκπαιδευτικές δραστηριότητες [π.χ. τα μαθηματικά προβλήματα, τα αρχεία ενός λογισμικού που μεσολαβούν στην εμπειρική κατανόηση των εννοιών] που προσαρμόζονται σε κάθε επίπεδο σκέψης» (Clements & Sarama, 2009, p.2). H Schifter & Fosnot (1993) εισήγαγαν τον όρο των 'κεντρικών ιδεών' για να επισημάνουν τις «κεντρικές οργανωτικές ιδέες των μαθηματικών […] και είναι συνδεδεμένες με τις δομές των μαθηματικών» (p.35). H Graeber (1999) θεωρεί ότι οι κεντρικές ιδέες της μαθηματικής εκπαίδευσης, είναι οι «έννοιες που οι μαθητές θα ΄πρεπε να γνωρίζουν εκ των προτέρων, καθώς και οι παρερμηνείες εννοιών […] ή οι στρατηγικές μέσω των οποίων οι μαθητές αναπτύσσουν την κατανόηση στις μαθηματικές συζητήσεις και στην ανταλλαγή των ιδεών τους» (Pusey, 2003, pp. 57-58).

Οι βασικές αρχές σχεδιασμού του μονοπατιού της παρούσας μελέτης ήταν:

- η ακολουθία δραστηριοτήτων να επιτρέπει και ενισχύει την ενεργό συμμετοχή και τον αναστοχασμό των μαθητών μέσω των συμβολικών αναπαραστάσεων των εννοιών που εμπλέκονται·
- η συνεργατική μάθηση των εννοιών να ενισχύεται μέσω μιας κοινωνικοκονστρουκτιβιστικής προσέγγισης από τις ερωτήσεις της ερευνήτριας και τα υλικά σκαλωσιάς (π.χ οι δραστηριότητες στο περιβάλλον του λογισμικού) σε μια Ζώνη Επικειμένης Ανάπτυξης (ZPD) των μαθητών·
- η επίλυση δυναμικών προβλημάτων να συντελείται σε μη δομημένο, δομημένο και ημιδομημένο σχεδιασμό στο περιβάλλον του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας.

Ο πυρήνας των κεντρικών ιδεών που εμπλέκονται στο μονοπάτι της παρούσας μελέτης αφορά την κατασκευή εννοιών (π.χ. παραλληλίας, καθετότητας, συμμετρίας), την ανάπτυξη της ικανότητας ιεράρχησης των εννοιών των εμπλεκομένων σχημάτων, το μετασχηματισμό του χαρακτήρα συμβόλου των σχημάτων σε χαρακτήρα σήματος, την ανάπτυξη της ικανότητας παραγωγικού συλλογισμού, το μετασχηματισμό των εμπειρικών αποδεικτικών σχημάτων σε εννοιολογικά, την ανάπτυξη της ικανότητας δυμαμικής επανεφεύρεσης των εννοιών και, τέλος, το ρόλο των Συνδεόμενων Οπτικών Ενεργών Αναπαραστάσεων στην κατανόηση και μετασχηματισμό των εμπλεκόμενων εννοιών.

Το ΥΜΜ της παρούσας μελέτης έχει τους εξής σημαντικούς στόχους: (α) την εκμάθηση των γεωμετρικών εννοιών και δεξιοτήτων (Clement, Battista & Sarama, 2001, p.14) με βάση την κατανόηση, σε συνδυασμό με την ανάπτυξη της ικανότητας χρήσης των τεχνικών του λογισμικού μέσα από κατασκευαστικές, προκατασκευασμένες ή ημιπροκατασκευασμένες δραστηριότητες˙ (β) την ανάπτυξη παραγωγικού συλλογισμού και την ικανότητα στην αποδεικτική διαδικασία˙ (γ) την άνοδο των επιπέδων των μαθητών χάρη στην αλληλεπίδραση με το υποστηρικτικό υλικό στο Sketchpad. Οι δραστηριότητες στο GSP περιλαμβάνουν:

- δραστηριότητες σύστασης/ οικοδόμησης της δομής των τετραπλεύρων˙
- δραστηριότητες σε προκατασκευασμένες δραστηριότητες, δηλαδή διερεύνησης της δομής των τετραπλεύρων˙
- δραστηριότητες σε ημιπροκατασκευασμένες δραστηριότητες – μια σύνθεση των δύο προηγούμενων διαδικασιών.

Ως εκμάθηση των μαθηματικών με βάση την κατανόηση μπορεί να θεωρηθεί η ικανότητα κατασκευής νοήματος της νέας γνώσης σε συνδυασμό με την ήδη υπάρχουσα γνώση των μαθητών. Όπως είναι γνωστό, η άνοδος των επιπέδων van Hiele των μαθητών εξαρτάται από τη δομή του περιεχομένου της διδασκαλίας. Υπ' αυτή την οπτική, μείζονα ρόλο παίζει **η δομή του σχεδιασμού των δραστηριοτήτων και της αλληλουχίας τους** στην εφαρμογή της διαδικασίας (Patsiomitou, 2012, p. 54). Η εκμάθηση με βάση Συνδεόμενες Οπτικές Ενεργές Αναπαραστάσεις μέσω της συμμετοχής σε ένα ΥΜΜ μπορεί να αλλάξει την πορεία ανάπτυξης των μαθητών λόγω της αναθεώρησης (reconceptualization) των προς διδασκαλία εννοιών.

Στη συνέχεια θα εξεταστεί διεξοδικά η δομή του μαθησιακού μονοπατιού. Το ΥΜΜ της παρούσας μελέτης αποτελείται από τέσσερις φάσεις. Κάθε φάση θεμελιώνεται στη θεωρία των van Hiele και είναι συνδυασμός (Patsiomitou, 2012, p.58)

- μιας *διαδικασίας σχεδιασμού* στην οποία η ερευνήτρια υποθέτει την κατανόηση προοδευτικά της έννοιας των τετραπλεύρων, τον τρόπο σκέψης των μαθητών στην επίλυση των προβλημάτων σε συνδυασμό με τις ενέργειές τους στο λογισμικό με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια˙

- μιας *διαδικασίας ανασχεδιασμού και προσαρμογής* της αρχικής πορείας προκειμένου να καλυφθεί κάποιο μαθησιακό κενό ή να βοηθηθούν οι μαθητές να υπερβούν γνωστικά και εργαλειακά εμπόδια που παρουσιάζονται κατά τη διαδικασία.

Η εγκυρότητα ενός ΥΜΜ θεμελιώνεται εμπειρικά μέσω της περιγραφής της μαθησιακής τροχιάς που ακολούθησαν οι περισσότεροι μαθητές και της ανάλυσης των δεδομένων προκειμένου να διερευνηθούν η ανταπόκριση των μαθητών και τα αποτελέσματα της εκμάθησης από τη συμμετοχή τους στο συγκεκριμένο ΥΜΜ.

Περιγράφονται τόσο οι στόχοι, τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν καθώς και τα σημεία εισαγωγής νέων εργαλείων. Επομένως, η περιγραφή που ακολουθεί διακρίνεται /διαχωρίζεται σε σημεία (Patsiomitou, 2012, p.58) που: (1) περιγράφονται οι στόχοι του ΥΜΜ ως μέρος των γενικότερων στόχων της μαθηματικής εκπαίδευσης και αποτελούν μέρος του γενικότερου πλαισίου του Προγράμματος σπουδών για την διδασκαλία και μάθηση της γεωμετρίας (generally speaking)· (2) είναι μέρος πρόβλεψης των υποθετικών αλληλεπιδράσεων των μαθητών με τα εργαλεία (ή υποθετικών αποτελεσμάτων που θα επέφερε η αλληλεπίδραση των μαθητών με τα εργαλεία), στα οποία οδηγήθηκε η ερευνήτρια μέσω πειράματος σκέψης επομένως μια μορφή επαγωγικής σκέψης οποία στηρίχθηκε σε προηγούμενες παρατηρήσεις της ερευνήτριας (hypothetically speaking).

Οι φάσεις λοιπόν που ακολουθούν διακρίνονται στα τμήματα

- όπου περιγράφονται οι στόχοι του ΥΜΜ ως μέρος των γενικότερων στόχων της μαθηματικής εκπαίδευσης και η προϋπάρχουσα εμπειρία της ερευνήτριας παίζει σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη της διαδικασίας·
- που είναι μέρος υποθετικών αποτελεσμάτων λόγω των υποθετικών αλληλεπιδράσεων με τα εργαλεία.

3.12. ΦΑΣΗ Α. Κατασκευαστικές διαδικασίες

Οι κατασκευές στο περιβάλλον της ευκλείδειας γεωμετρίας παρέχουν την ανατροφοδότηση ώστε ο μαθητής να αποκτήσει εκείνο το θεωρητικό υπόβαθρο που είναι απαραίτητο για την εννοιολογική ανάπτυξη στη γεωμετρία και τη συσχέτιση με την αξιωματική ευκλείδεια γεωμετρία. Η επίλυση ενός γεωμετρικού κατασκευαστικού προβλήματος εξαρτάται αφενός από τη γνώση των ιδιοτήτων τού προς κατασκευή σχήματος και αφετέρου από τις δυνατότητες και τους περιορισμούς των εργαλείων που θα χρησιμοποιηθούν. Σύμφωνα με τον Σταμάτη (1975) *ως γεωμετρικά σχήματα χρησιμοποιούνται υπό του Ευκλείδου εις τα Στοιχεία η ευθεία γραμμή, ο κύκλος και τα εκ του συνδυασμού τούτων προκύπτοντα. Σχήματα, δηλ. δυνάμενα να σχεδιαστούν διά του κανόνος και του διαβήτου […]. Η χρησιμοποίησις εις τα Στοιχεία των απλουστάτων γεωμετρικών σχημάτων […] ακολουθεί την γενικήν τάσιν του Ελληνικού πνεύματος να αναγάγη τα πάντα εις ολίγας απλάς γενικάς αρχάς νοήσεως…* (σ. 22)

Η χρήση των εργαλείων στο στατικό και δυναμικό περιβάλλον διαφέρει. Συγκρίνοντας τη διαδικασία κατασκευής ενός διαγράμματος στο στατικό μέσο και στο δυναμικό μέσο διαπιστώνουμε ότι το στατικό διάγραμμα δεν έχει καμιά ανεξαρτησία από τη στιγμή που κατασκευάζεται, αφού, όπως υποστηρίζει η Laborde (2005) «στην περίπτωση που κατασκευάζουμε διαγράμματα σε στατικά μέσα, [αυτά] ακολουθούν τις επιθυμίες των μαθητών ώστε να ικανοποιηθούν οι προσδοκίες τους» (p.165).

Αυτό συνεπάγεται ότι το διάγραμμα δε λειτουργεί βοηθητικά ώστε ο μαθητής να έρθει σε γνωστικές συγκρούσεις μέσα από τη λανθασμένη κατασκευή του. Κατά τη Laborde (2003), οι μαθητές αντιμετωπίζουν με δυσκολία μια κατασκευή στο λογισμικό λόγω άγνοιας του τρόπου κατασκευής αλλά και του διαφορετικού τρόπου σκέψης που ακολουθεί μια διαδικασία κατασκευής στο στατικό μέσο.

Κατά συνέπεια, μέσω της επίλυσης κατασκευαστικών προβλημάτων μέσα στο περιβάλλον του λογισμικού ο μαθητής «αποδέχεται όχι μόνο τον τρόπο χρήσης των εντολών και των εργαλείων του λογισμικού, αλλά και του συστήματος λογικής στο οποίο τα παρατηρήσιμα φαινόμενα αποκτούν μαθηματικό νόημα» (Mariotti, 2000, p.28), [αφού] τα στοιχεία του σχήματος [που έχει κατασκευαστεί] είναι συνδεδεμένα σε μια ιεραρχία ιδιοτήτων και αυτή η ιεραρχία προϋποθέτει την τήρηση ορισμένων κανόνων λογικής» (Mariotti, 2000, p.40).

Στόχος των κατασκευαστικών προβλημάτων της πρώτης φάσης της ερευνητικής διαδικασίας είναι οι μαθητές να αποκτήσουν την ικανότητα *να οικοδομήσουν και να μετασχηματίσουν συνδεόμενες –αμετάβλητες δομικά– αναπαραστάσεις* (Patsiomitou, 2012,p.59).

Κατά την ερευνητική διαδικασία οι μαθητές παρέχουν την περιγραφή της διαδικασίας που χρησιμοποιείται για να ληφθεί το ζητούμενο σχήμα ως σταθερή κατασκευή. Η διαδικασία αυτή μπορεί να διακριθεί σε (υπο)φάσεις:

- μια πρώτη φάση περιλαμβάνει την κατασκευή μιας μεταβλητής κατασκευής και τη διερεύνησή της με πειραματικό σύρσιμο για την αντιμετώπιση γνωστικών συγκρούσεων που προκύπτουν λόγω της μεταβλητότητας του αντικειμένου που οι μαθητές κατασκευάζουν στην οθόνη˙

- σε μια δεύτερη φάση οι μαθητές επανεφευρίσκουν τις ιδιότητες του σχήματος μέσω του θεωρητικού συρσίματος·
- μια τρίτη φάση περιλαμβάνει την ανάπτυξη της ικανότητας εργαλειακής αποκωδικοποίησης των νοητικών εικόνων που έχουν οι μαθητές για τα σχήματα και τη διαδικαστική γνώση των εργαλείων, δηλαδή την κατασκευή σχημάτων χρήσης των εργαλείων·
- σε τέταρτη φάση έχουμε τη σύνδεση με την εννοιολογική γνώση, δηλαδή την εφαρμογή και ανάπτυξη εννοιών (π.χ. ορισμοί ή θεωρήματα που θα χρησιμοποιηθούν στη διαδικασία, απόδειξη) μέσα από τη συζήτηση, και την ικανότητα ιεράρχησης των σχημάτων μέσα από τις Συνδεόμενες Οπτικές Ενεργές Αναπαραστάσεις.

Όπως υποστηρίζει η Mesquita (1998) «στη θεωρία Gestalt ως σχήμα θεωρείται η εξωτερική αναπαράσταση ενός γεωμετρικού προβλήματος, η οποία μπορεί μεν να μην επιτρέπει σε κάποιον να λύσει το πρόβλημα, συμβάλλει όμως στον καθορισμό της δομής του προβλήματος ώστε να διευκολύνονται οι επεξεργασίες» (p. 184). Όταν ένα πρόβλημα κατασκευής παρουσιάζεται στο περιβάλλον του λογισμικού είναι αναγκαία η αιτιολόγηση της ορθότητας και αμεταβλητότητας του σχήματος που αποτελεί τη λύση του προβλήματος. Ένα σχήμα στο λογισμικό «δεν είναι το προϊόν μιας διαδικασίας που πρέπει να επικυρωθεί, αλλά η ίδια η διαδικασία» (Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Ferri, & Garuti, 1997). Αυτό σημαίνει ότι ο μαθητής πρέπει να εστιάσει την προσοχή του **στη διαδικασία που παρήγαγε το σχήμα στην οθόνη**.

Η σύνδεση με την εννοιολογική κατανόηση μπορεί να προκύψει ως αποτέλεσμα της αιτιολόγησης της ορθότητας της διαδικασίας (1) *στο χωρογραφικό πεδίο του λογισμικού, «με* αιτιολόγηση για την διαδικασία που κάνει τη λύση αποδεκτή στο περιβάλλον του λογισμικού» (Mariotti, 2000, p. 34) και (2) *στο θεωρητικό πεδίο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, «με* αιτιολόγηση για την διαδικασία μέσα στο σύστημα των κανόνων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας» (Mariotti, 2000, p. 28). Επομένως, οι συνδεόμενες διαδικαστικά και εννοιολογικά αναπαραστάσεις συμβάλλουν στην αμφισβήτηση «θεμελιωμένων αντιλήψεων» και στην υπέρβαση των «εννοιολογικών εμποδίων» που παρουσιάστηκαν λόγω της χρήσης των σχολικών εγχειριδίων στα στατικά μέσα (Geddes et al., 1982, Monaghan, 2000, p. 192).

3.12.1 Κατασκευή παραλληλογράμμου

Πρόβλημα: *Κατασκευή ενός παραλληλογράμμου όταν γνωρίζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα και ένα σημείο εκτός αυτού στην οθόνη.*

<u>Από την οπτική γωνία της διδασκαλίας και μάθησης της γεωμετρίας</u>

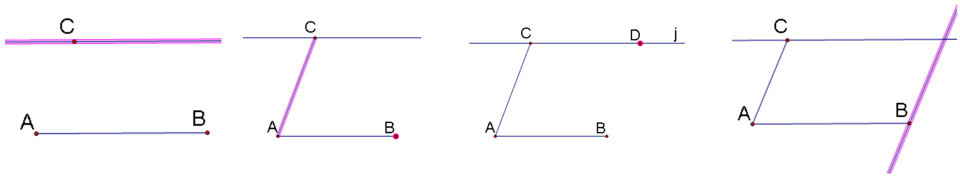
Οι περισσότερες επεξεργασίες απαιτούν μια συγκεκριμένη αντίληψη. Πώς δηλαδή ο μαθητής αντιλαμβάνεται μια γραμμή ή ένα σημείο – σχηματικές μονάδες οι οποίες διαφοροποιούνται αντιληπτικά όταν είναι μεμονωμένες ή ανήκουν σε ένα σχήμα. «Μια μεμονωμένη γραμμή και η ίδια γραμμή να ανήκει σε κάποιο σχήμα δεν είναι το ίδιο για την αντίληψη. Η επισήμανση αυτών των δυο λειτουργιών με την ίδια γραμμή προϋποθέτει μια αναλυτική αντίληψη που δεν είναι αυτονόητη σε όλους τους μαθητές» (Merleau-Ponty, 1945, οπ. αναφ. στο Mesquita, 1998, p. 184).

Σύμφωνα με την Laborde (2003), «[ενώ] σε ένα περιβάλλον χαρτιού–μολυβιού οι μαθητές χρησιμοποιούν τη στρατηγική που βασίζεται στην ισότητα των απέναντι πλευρών […] στο δυναμικό περιβάλλον χρησιμοποιούν στρατηγικές κατασκευής παραλλήλων ευθειών για να κατασκευάσουν την τέταρτη κορυφή» (p.2).

<u>Υποθετική ανάλυση σχεδιασμού</u>

Οι μαθητές θα κατασκευάσουν αρχικά ένα *σχέδιο παραλληλόγραμμου* το οποίο μέσω του *πειραματικού συρσίματος* που θα εφαρμόσουν σε μια κορυφή του καταστρέφεται. Το πειραματικό σύρσιμο συνεπώς θα τροποποιήσει τη μορφή του σχήματος (π.χ. ένα σχέδιο παραλληλόγραμμου θα μετασχηματιστεί σε τυχαίο τετράπλευρο), οπότε καταστρέφεται η *αρχέτυπη* μορφή του παραλληλόγραμμου που ο μαθητής έχει κατασκευάσει σε αλληλεπίδραση με μια αυθεντία (δάσκαλο ή σχολικό εγχειρίδιο). Μέσω της διαδικασίας και ως απάντηση στην *εργαλειακή γένεση* που θα δημιουργηθεί από το πειραματικό σύρσιμο ο μαθητής θα έρθει σε *γνωστική σύγκρουση* ανάμεσα σε αυτό που γνωρίζει και αυτό που εμφανίζεται στην οθόνη.

Οι μαθητές διερευνώντας μια διαδικασία *αμετάβλητης* κατασκευής παραλληλόγραμμου θα χρησιμοποιήσουν τα πρωτότυπα του λογισμικού στοιχεία (π.χ. σημεία και γραμμές), θα αναζητήσουν τρόπους ώστε να κατασκευάσουν παράλληλες ευθείες. Αυτή η διαδικασία περιλαμβάνει τη φάση *εργαλειακής αποκωδικοποίησης* και την κατασκευή *σχημάτων χρήσης* των εργαλείων κατασκευής παραλλήλου, καθέτου, εντολές επομένως του μενού «Κατασκευή». Ακόμα, στους μαθητές επιτρεπόταν να επιμηκύνουν την ευθεία, αλλά δεν μπορούσαν να κατασκευάσουν ένα παραλληλόγραμμο χωρίς να χρησιμοποιήσουν την συγκεκριμένη ευθεία και το σημείο.



Σχήμα 3.4. Συνδεόμενες οπτικές ενεργές αναπαραστάσεις κατασκευής ενός παραλληλογράμμου.

Ανάλυση των τεχνικών αλληλεπίδρασης

Η *σύνθεση* της δυναμικής αναπαράστασης προκύπτει με την κατασκευή ενός ευθυγράμμου τμήματος AB και ενός σημείου C με δυο βαθμούς ελευθερίας. Η κατασκευή της παράλληλης από το σημείο C προς το ευθύγραμμο τμήμα AB προκύπτει ως αποτέλεσμα της *θεσιακής και σειριακής κατανόησης* της επιλογής των σχηματικών μονάδων και εντολών. Η τοποθέτηση σημείου D στην παράλληλη από το σημείο C και το *πειραματικό σύρσιμο* θα οδηγήσουν τους μαθητές σε *γνωστική σύγκρουση* ως απάντηση στην *εργαλειακή γένεση*. Η *δυναμική επανεφεύρεση* (Patsiomitou & Emvalotis, 2010a, b; Patsiomitou, Barkatsas & Emvalotis, 2010; Patsiomitou, 2012) θα είναι αποτέλεσμα του *θεωρητικού συρσίματος* του C ώστε το τμήμα CD να αποκτήσει την ισότητα με το τμήμα.

3.12.2 Κατασκευή ορθογωνίου

Πρόβλημα: *Σύρετε μια κορυφή του παραλληλογράμμου ώστε να γίνει ορθογώνιο. Κατασκευάστε ένα σταθερό ορθογώνιο με χρήση των τεχνικών του λογισμικού.*

Από την οπτική γωνία της διδασκαλίας και εκμάθησης της γεωμετρίας

Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι μια κομβική έννοια μεταξύ των τετραπλεύρων. Οι μαθητές αναγνωρίζουν την *αρχέτυπη μορφή* του σχήματος από τις πρώτες τάξεις της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (Patsiomitou, 2012, p.60). Τα εμπόδια σχετικά με την αρχέτυπη μορφή του ορθογωνίου έχουν ευρέως συζητηθεί (Hasegawa, 1997; De Villiers, 1994; Laborde, 1994; Fischbein, 1993; Parzysz, 1991; Sfard, 1991; Hershkovitz, 1990 οπ. αναφ. στο Monaghan, 2000, p. 187). Οι περισσότεροι μαθητές, υποστηρίζει ο Monaghan (2000) «αναγνωρίζουν το σχήμα του ορθογωνίου από τη μορφή του οριζοντίου μήκους, δηλαδή ως σχήματα μακρύτερα από τα τετράγωνα ή ως συνώνυμο του ομπλόνγκ (του ορθογωνίου δηλαδή που έχει μια πλευρά μεγαλύτερη της άλλης). Αυτή η αντίληψη είναι συνήθης αλλά από μαθηματικής απόψεως είναι ανακριβής, καθώς οι μαθητές αγνοούν το τετράγωνο ως *ειδική μορφή* του ορθογωνίου» (pp. 186-187).

Υποθετική ανάλυση σχεδιασμού

Μέσω της κατασκευής ορθογωνίου παραλληλογράμμου επιδιώκεται η εστίαση στην ανάλυση της δομής του, ως *ειδικότερης μορφής* παραλληλόγραμμου και ως *γενικότερης μορφής* του τετραγώνου, έννοιες που σχετίζονται με την ικανότητα ιεράρχησης των παραλληλογράμμων (βλ. κεφ. 2), μια διαδικασία που οδηγεί στην ανάπτυξη της σκέψης. Οι μαθητές επομένως «θα επικεντρώσουν σε μια δομή παραλληλόγραμμου ως συνιστώσα της ιεραρχικά υψηλότερης δομής, αναγνωρίζοντας τα αντίστοιχα στοιχεία και εξειδικεύοντας τη γλώσσα» (Dina van Hiele, 1984, p. 177).

Ως εκ τούτου οι μαθητές θα κατασκευάσουν την έννοια του ορθογωνίου ως επέκταση της έννοιας του παραλληλόγραμμου, «ενσωματώνοντας τις πρόσθετες ιδιότητες» (De Villiers, 1994, p. 14), τις οποίες θα *επανεφεύρουν* μέσω της διαδικασίας, καθώς και τις συσχετίσεις ιδιοτήτων (π.χ. συσχέτιση της έννοιας της ορθής γωνίας με την έννοια της καθετότητας, συσχέτιση της έννοιας της καθετότητας με την έννοια της παραλληλίας).

Ανάλυση των τεχνικών αλληλεπίδρασης

Η *σύνθεση* της δυναμικής αναπαράστασης του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου θα προκύψει με το *θεωρητικό σύρσιμο* μιας κορυφής του παραλληλόγραμμου ώστε να αποκτήσει τη μορφή του ορθογωνίου. Η δυναμική ανακάλυψη σχετίζεται με την κατανόηση της καθετότητας των πλευρών του σχήματος. Η σταθερή κατασκευή θα προκύψει ως αποτέλεσμα της σειριακής και θεσιακής κατανόησης των σημείων και εντολών για την κατασκευή καθέτων (ή καθέτου και παραλλήλων).

3.12.3. Κατασκευή ρόμβου

Πρόβλημα: *Ενώστε δύο απέναντι κορυφές στο σχήμα του παραλληλόγραμμου που κατασκευάσατε. Σύρετε μια κορυφή ώστε να σχηματιστεί ένας ρόμβος. Τι παρατηρείτε; Κατασκευάστε ένα σταθερό σχήμα ρόμβου.*

Από την οπτική της διδασκαλίας και εκμάθησης της γεωμετρίας

Γνωστικός στόχος είναι η σύνδεση της δομής του ρόμβου με την έννοια της *συμμετρίας ως προς άξονα* και επομένως ως ανασχηματισμό ισοσκελούς τριγώνου. Αυτή η διαδικασία έχει ευρύτερο στόχο την κατανόηση της δομής του ρόμβου και άρα των ιδιοτήτων του, ως συνέπεια της κατανόησης της δομής και των ιδιοτήτων του ισοσκελούς τριγώνου. Σύμφωνα με την Dina van Hiele (1984), *«η δραστηριότητα της σκέψης πρέπει να οδηγηθεί στην ανάλυση της δομής, […] έτσι δίνεται η δυνατότητα στον μαθητή να αναπτύξει μια σκέψη εστιασμένη στη διαδικασία δόμησης»* (Fuys et al. 1984, p.177). Η κατασκευή του ρόμβου μέσω της *ανάλυσης και σύνθεσης της διαδικασίας* εκ του ισοσκελούς τριγώνου *και του ανακλώμενου του* ισοσκελούς τριγώνου, *και του ανακλώμενου του* ισοσκελούς τριγώνου συνεισφέρει, υποστηρίζει ο Duval (2006), «στη γενικότερη ανάπτυξη των ικανοτήτων [των μαθητών] όσον αφορά την αιτιολόγηση, την ανάλυση και την οπτικοποίηση» (p.105).

<u>Υποθετική ανάλυση σχεδιασμού</u>

Οι μαθητές θα κατασκευάσουν ένα σχέδιο ρόμβου στην οθόνη με *θεωρητικό* σύρσιμο του σχήματος του παραλληλόγραμμου ώστε το σχήμα να αποκτήσει την ιδιότητα της ισότητας των πλευρών και να ανταποκρίνεται στη νοητική αρχέτυπη εικόνα του μαθητή για το ρόμβο. Αυτό προϋποθέτει την ικανότητα αντίληψης του μαθητή της ισότητας των πλευρών του σχήματος (ή και τη γνώση της βασικής ιδιότητας). Το σύρσιμο των κορυφών του παραλληλόγραμμου διαμορφώνει *συνδεόμενες αναπαραστάσεις*, οι οποίες βοηθούν τους μαθητές να αντιληφθούν το ρόμβο ως *ειδικότερο* παραλληλόγραμμο και ταυτόχρονα να οπτικοποιήσουν τη μορφή του ρόμβου ως σύνθεση δυο ισοσκελών ή δυο ισόπλευρων τριγώνων. Οι μαθητές για να αποκωδικοποιήσουν την εικόνα του ρόμβου σε σχέδιο στην οθόνη θα αναπτύξουν στρατηγικές κατασκευής των ίσων πλευρών στο λογισμικό, με διαδικασία που καθιστά την κατασκευή αμετάβλητη.

Στο στάδιο αυτό οι μαθητές θα μελετήσουν τις ιδιότητες που προκύπτουν λόγω της ανάκλασης του ισοσκελούς τριγώνου. Οι δομές που θα προκύψουν μέσω αυτής της ανάλυσης θα βοηθήσουν τους μαθητές να κατασκευάσουν το *χαρακτήρα συμβόλου* (Patsiomitou, 2012,p.62) του ρόμβου ώστε το σχήμα να μπορεί στη συνέχεια να αντικατασταθεί από ένα σύμβολο με τα εξής χαρακτηριστικά: «τέσσερις ίσες πλευρές, ίσες απέναντι γωνίες, διαγώνιες που διχοτομούν τις γωνίες και είναι μεσοκάθετες η μια στην άλλη» (Dina van Hiele οπ. αναφ. στο Fuys et al., 1984, p.207).

<u>Ανάλυση των τεχνικών αλληλεπίδρασης</u>

Η *σύνθεση* της δυναμικής αναπαράστασης του ρόμβου θα προκύψει με το θεωρητικό σύρσιμο μιας κορυφής του παραλληλόγραμμου ώστε να αποκτήσει τη μορφή του ρόμβου. Ο μετασχηματισμός του παραλληλογράμμου (π.χ. αλλαγή προσανατολισμού και η οπτικοποίηση των πρόσθετων ιδιοτήτων), θα επιφέρει τον σχηματισμό του ρόμβου ως σύνθεση δυο ισοσκελών τριγώνων. Με τη διαδικασία διερεύνησης μιας μεθόδου *αμετάβλητης* κατασκευής του ρόμβου οι μαθητές θα επινοήσουν μια μέθοδο κατασκευής για το ισοσκελές χρησιμοποιώντας τα βασικά στοιχεία (π.χ. *ευθύγραμμο τμήμα* και ευθεία *κάθετη*). Θα αναζητήσουν επομένως τρόπους ώστε να κατασκευάσουν το σχήμα του ισοσκελούς με τη μεσοκάθετο ή με το εργαλείο κύκλου ή το εργαλείο ανάκλασης. Η χρήση του *μέσου σημείου* για την κατασκευή της μεσοκαθέτου *και του εργαλείου συρσίματος* αυθαίρετου σημείου στη μεσοκάθετο οδηγεί τους μαθητές στην οπτικοποίηση άπειρων κατασκευών ισοσκελών τριγώνων.

3.12.4. Κατασκευή τετραγώνου

Πρόβλημα: *Κατασκευή ενός τετραγώνου με διαδικασία ελεύθερη.*

Από την οπτική της διδασκαλίας και εκμάθησης της γεωμετρίας

Η κατασκευή του τετραγώνου έχει ως στόχο την διερεύνηση της κατανόησης των μαθητών του τετραγώνου: (α) ως *ειδικού ορθογωνίου* με πρόσθετες ιδιότητες (π.χ την ισότητα των πλευρών) και (β) ως *ειδικού ρόμβου* με πρόσθετες ιδιότητες (π.χ την καθετότητα των πλευρών). Επομένως οι μαθητές «θα κατασκευάσουν το σχήμα του τετραγώνου μετά το ρόμβο ή μετά το ορθογώνιο» (Clements, Battista & Sarama, 2001,p.6). Η ικανότητα ιεράρχησης του τετραγώνου είναι δυνατή μόνο στο επίπεδο 3 σύμφωνα με τους Clements, Battista & Sarama (2001, p.4). Η διαδικασία επομένως έχει ως αποτέλεσμα μια επιπλέον διερεύνηση: αν η κατασκευαστική διαδικασία του τετραγώνου βοηθά την κατανόηση της *αντιληπτικής ιεράρχησης* μεταξύ του ρόμβου (ή του ορθογωνίου) και του τετραγώνου.

Υποθετική ανάλυση σχεδιασμού

Η *σύνθεση* του διαγράμματος με αναδιοργάνωση της αναπαράστασης (π.χ. του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος μέσω της περιστροφής του) προκύπτει μέσω της ενδιάμεσης αναπαράστασης του εργαλείου περιστροφής του αναδυόμενου μενού, ο μαθητής δηλαδή *αλληλεπιδρά έμμεσα* με το εργαλείο. Έτσι οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να εστιάσουν στην έννοια της περιστροφής και όχι στη μορφή που περιστρέφεται και επομένως μπορούν άμεσα να αλληλεπιδράσουν με την οπτική αναπαράσταση από περιστροφή (Sedig et al., 2001; de Souza & Sedig, 2001). Η κατασκευή της περιστροφής τμήματος και το σύρσιμο της περιστροφής θα ενισχύσει την κατανόηση του μαθητή και την κατασκευή *εννοιών- εν-δράσει* λόγω του *σχήματος εργαλειοποιημένης δράσης* που θα προκύψει.

<u>Ανάλυση των τεχνικών αλληλεπίδρασης</u>

Με άμεσο *χειρισμό* (*θεωρητικό σύρσιμο*) της κατασκευής του ορθογωνίου ή του ρόμβου οι μαθητές κατασκευάζουν ένα τετράγωνο με οπτικό τρόπο. Με χρήση του *σχολιασμού* του διαγράμματος του ρόμβου/ ορθογωνίου σε σχέση με τη μέτρηση των πλευρών και γωνιών οδηγούνται σε επαγωγικού τύπου συμπεράσματα για τις βασικές ιδιότητες του σχήματος του τετραγώνου.

Η *σύνθεση* του διαγράμματος μπορεί να προκύψει

- ως επινόηση μιας μεθόδου κατασκευής ίσων τμημάτων και καθέτων μεταξύ τους, συνεπώς οι μαθητές θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν τις τεχνικές του λογισμικού (π.χ. *ευθύγραμμο τμήμα* και ευθεία *κάθετη* καθώς και το *εργαλείο κύκλου*) ώστε να κατασκευάσουν ίσο τμήμα στην κάθετη στο άκρο του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος.
- ως αναδιοργάνωση της αναπαράστασης του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος μέσω της περιστροφής του, συνεπώς ως σταδιακή οπτικοποίηση «με *έμμεση* αλληλεπίδραση μέσω της ενδιάμεσης αναπαράστασης του εργαλείου του αναδυόμενου μενού και εστίαση στην έννοια της περιστροφής και όχι στη μορφή που περιστρέφεται» (Sedig et al., 2001; de Souza & Sedig, 2001 οπ. αναφ. Sedig & Sumner, 2006, p. 35).

Η χρήση του *εργαλείου περιστροφής* οδηγεί στην κατασκευή *σχημάτων εργαλειοποιημένης δράσης* του εργαλείου που περιλαμβάνει την έννοια του ίσου και καθέτου τμήματος, ισοσκελών και ορθογωνίων τριγώνων μέσω του διερευνητικού συρσίματος του άκρου του ευθυγράμμου τμήματος ή της εικόνας του.

Το σύρσιμο της κορυφής του **τετραγώνου** οδηγεί στην αλλαγή προσανατολισμού του σχήματος. Η περιστροφή σε πλάγια θέση μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές σε γνωστικές συγκρούσεις ως προς τη σχέση του εγκλεισμού του τετραγώνου με το ρόμβο.

3.13. ΦΑΣΗ Β. Διερεύνηση και κατασκευές μέσω του μενού Μετασχηματισμός

Όπως αναφέρθηκε στη προηγούμενη ενότητα η φάση αυτή είναι αναγκαία για την εισαγωγή στην έννοια της συμμετρίας των αντικειμένων με χρήση των μετασχηματισμών της περιστροφής και ανάκλασης του λογισμικού. Η συμμετρία των σχημάτων αποτελεί βασικό στόχο στη μελέτη των γεωμετρικών αντικειμένων από τη θεωρία των van Hiele. Σύμφωνα με την Dina van Hiele (1984) «ένας μαθητής αποδεικνύει ότι κατέχει τη δομή της ανάλυσης όταν μπορεί να χειριστεί τις *οργανωτικές αρχές*. Μια από τις *οργανωτικές αρχές* είναι η συμμετρία του σχήματος» (p.184).

Όπως υποστηρίζει το NCTM (2000), οι μαθητές πρέπει να αποκτήσουν την ικανότητα πρόβλεψης και περιγραφής των αποτελεσμάτων της ανάκλασης και της περιστροφής δισδιάστατων σχημάτων. Πρέπει δηλαδή να «εφαρμόσουν μετασχηματισμούς και να χρησιμοποιήσουν τη συμμετρία για να αναλύσουν τις μαθηματικές καταστάσεις» (NCTM, 2000, p. 41). Ο γνωστικός στόχος αυτής της φάσης είναι «να αναπτύξουν οι μαθητές *έννοιες εν κινήσει* και να κατασκευάσουν *γνωστικές δομικές μονάδες* σημαντικές για τη διαχείριση χωρικών προβλημάτων» (Clement, Battista & Sarama, 2001, p. 19).

Ο μετασχηματισμός της περιστροφής στο λογισμικό περιλαμβάνει την περιστροφή αντικειμένων ως προς οποιαδήποτε γωνία περιστροφής επιλέγει ο μαθητής, αλληλεπιδρώντας με μια ενδιάμεση αναπαράσταση του μενού «Μετασχηματισμός». Επομένως, η συμμετρία ως προς κέντρο είναι η περιστροφή του γεωμετρικού αντικειμένου ως προς την ειδική περίπτωση της γωνίας των 180^{o}. Ο μετασχηματισμός της ανάκλασης στο λογισμικό επιφέρει την κατασκευή του συμμετρικού ως προς άξονα αντικειμένου. Οι έννοιες συνεπώς ανάκλαση αντικειμένου και συμμετρία ως προς άξονα του αντικειμένου μπορούν να θεωρηθούν ότι αντιληπτικά δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα, όταν το αντικείμενο στο δυναμικό περιβάλλον είναι σε στατική μορφή.

3.13.1.Στάδιο Α. Το τμήμα αναγνώρισης –οπτικοποίησης της δεύτερης φάσης

3.13.1.1 Ανάκλαση σημείου

Στο στάδιο αυτό η ερευνήτρια αναπροσάρμοσε τις δραστηριότητες *πληροφοριακής φάσης* και *καθοδηγούμενης διερεύνησης*[9] φάσης της Teppo (1991, p. 212), ώστε να διερευνηθούν στο περιβάλλον του λογισμικού. Στη συνέχεια συνέδεσε το σημείο και το ανακλώμενο σημείο με την ιδιότητα *κατασκευής ίχνους* ώστε οι μαθητές να αλληλεπιδράσουν με τα αντικείμενα που προκαλούσαν το μετασχηματισμό του διαγράμματος (π.χ. σημείο) λόγω της χρήσης των αλληλεπιδραστικών τεχνικών της ανάκλασης, ίχνους και πειραματικού συρσίματος του σημείου στην οθόνη.

Ανάλυση των τεχνικών αλληλεπίδρασης

[9]Συγκεκριμένα (α) στην π**ληροφοριακή φάση ο**ι μαθητές οπτικοποιούν την ανάκλαση ενός σημείου ως προς άξονα συμμετρίας μέσω ενός καθρέπτη και στη συνέχεια το ζωγραφίζουν χρησιμοποιώντας ένα χαρτί και (β) στη **φάση καθοδηγούμενης διερεύνησης ο**ι μαθητές οπτικοποιούν αρχικά τα αποτελέσματα της ανάκλασης μια γραμμής και στη συνέχεια τα ζωγραφίζουν σε ένα χαρτί.

Με άμεσο *χειρισμό* (πάτημα κουμπιού απόκρυψης/εμφάνισης) έχουμε την εμφάνιση της κατασκευής του σημείου και του ανακλώμενου ως προς άξονα σημείου σε ίση απόσταση, η οποία οδηγεί τους μαθητές στην οπτικοποίηση/αντιληπτική κατανόηση της ιδιότητας των συμμετρικών σημείων ως προς άξονα. Με χρήση του *σχολιασμού* του διαγράμματος (*ετικετοποίηση* των σημείων) έχουμε εμφάνιση συμβόλων που επισημαίνουν την ιδιότητα της ανάκλασης. Η χρήση του εργαλείου σημείου σε σχέση με το *σχολιασμό* (μέτρηση) των τμημάτων οδηγεί σε εικασίες για τις βασικές ιδιότητες του σχήματος των ανακλώμενων σημείων (όπως ισότητα αποστάσεων και καθετότητα ευθειών). Ο *προσωρινός σχολιασμός* του διαγράμματος με χρήση *ίχνους σημείου* οδηγεί σε επαγωγικού τύπου συμπεράσματα σε συνδυασμό με το *διερευνητικό σύρσιμο* του σημείου ή του ανακλώμενου σημείου.

3.13.1.2 Ανάκλαση ευθύγραμμου τμήματος

Εμφάνιση (/απόκρυψη) ενός ευθυγράμμου τμήματος και του ανακλώμενου του ευθυγράμμου τμήματος. Οι μαθητές μπορούν να σύρουν το άκρο του ευθυγράμμου τμήματος ή της εικόνας του και να διαπιστώσουν πώς μεταβάλλεται ο προσανατολισμός του ανακλώμενου ευθύγραμμου τμήματος, η απόστασή του από τον άξονα συμμετρίας. Οι συνδέσεις των αντίστοιχων σημείων καθώς και το σύρσιμο των αντικειμένων στην οθόνη οδηγούν στο σχηματισμό διαφορετικών σχημάτων, π.χ. του ισοσκελούς τραπεζίου ή του ισοσκελούς τριγώνου, και στη σύνδεση της έννοιας της αξονικής συμμετρίας με την έννοια της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος.

Στόχος είναι να διαπιστωθεί, πρώτον, αν οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίσουν τα σχήματα και να διαπιστώσουν οπτικά ιδιότητες των σχημάτων οι οποίες συσχετίζονται με την έννοια της συμμετρίας ως προς άξονα, δεύτερον, αν η αλλαγή προσανατολισμού των σχημάτων αποτελεί γνωστικό εμπόδιο για τους μαθητές διαφορετικών επιπέδων, τρίτον, πώς το σύρσιμο της απόστασης από τον άξονα επηρεάζει τη μορφή του σχήματος (πρωτότυπο ή όχι) και, τέταρτον, αν ο άξονας συμμετρίας είναι και μεσοκάθετος των σχημάτων που παράγονται (Teppo, 1991, p. 212)

Από την οπτική της διδασκαλίας και εκμάθησης της γεωμετρίας

Στόχος είναι οι μαθητές να οπτικοποιήσουν την ανάκλαση σημείου και ευθυγράμμου τμήματος ως *δυναμικού αντικειμένου.* Η ανάκλαση σημείου είναι ένα σημείο, «θυγατρικό αντικείμενο επομένως του αρχικού που βρίσκεται σε εξάρτηση με το αρχικό» (Jackiw & Finzer, 1993). Οποιαδήποτε ενέργεια συνεπώς επί του αρχικού αντικειμένου (ή και αντίστροφα του ειδώλου-σημείου, π.χ. κίνηση ή διαγραφή) οδηγεί στην αντίστοιχη ενέργεια του ειδώλουεξαρτώμενου σημείου. Έτσι ο μαθητής οδηγείται «σε μια *οπτική διασάφηση* των κωδικοποιημένων πληροφοριών που διευκολύνουν την αντίληψή του» (Sedig & Sumner, 2006, p. 14).

Το ίχνος (trace) όπως υποστηρίζει η Jahn (2002)

> «δεν είναι ένα αντικείμενο του λογισμικού, αλλά ένα σύνολο pixels που φωτίζονται στην οθόνη το οποίο επιτρέπει στον χρήστη να κατασκευάσει αντικείμενα αφήνοντας ίχνη πίσω τους όταν σύρονται. […]. Το ίχνος δηλαδή δίνει έμφαση σε μια δυναμική ερμηνεία της αναπαράστασης ενός μονοπατιού σημείου» (p. 79).

Μέσω της διαδικασίας λοιπόν οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα οπτικοποίησης της ισότητας των αποστάσεων από τον άξονα καθώς και της καθετότητας η οποία επιβεβαιώνεται οπτικά για κάθε σημείο που ανήκει στο επίπεδο της οθόνης, *θεωρητικά για άπειρο πλήθος σημείων* (ουσιαστικά πεπερασμένων). Η χρήση του ίχνους ενισχύει τη γενίκευση των ιδιοτήτων των αντικειμένων σε γενικότερη μορφή, οδηγεί επομένως στην ανάπτυξη της ικανότητας επαγωγικών επιχειρημάτων.

Γνωστική ανάλυση

Η αναγνώριση περιλαμβάνει τόσο τις σχηματικές μονάδες που έχουν ήδη συναντήσει οι μαθητές, δηλαδή μια αντιληπτικού τύπου κατανόηση, όσο και τις νέες σχηματικές μονάδες που κατασκευάζονται με το σύρσιμο και λόγω του μετασχηματισμού του αρχικού σχήματος. Αυτές οι σχηματικές μονάδες προέρχονται από την τροποποίηση του σχήματος με μεγέθυνση (σμίκρυνση), λόγω αλλαγής προσανατολισμού ή λόγω της αναδιοργάνωσής του. Και οι τρεις αυτές μορφές αφορούν τη λειτουργική κατανόηση του σχήματος. Η λεκτική κατανόηση του σχήματος σχετίζεται με την εννοιολογική κατανόησή του και επομένως τον τρόπο που ο μαθητής θα **ερμηνεύσει** το σχέδιο. Για παράδειγμα, στο τελευταίο σχήμα κάποιος μαθητής μπορεί να *ερμηνεύσει* το τμήμα ΑΒ ως πλευρά του τραπεζίου και κάποιος άλλος όχι. Στη δεύτερη περίπτωση ο μαθητής αδυνατεί να αντιληφθεί και να αναγνωρίσει το σχήμα ως τραπέζιο, λόγω αλλαγής προσανατολισμού του σχήματος ή γιατί δεν έχει συνειδητοποιήσει ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, Α΄Β΄ είναι πλευρές του τραπεζίου. Με τον ίδιο τρόπο ο μαθητής μπορεί να θεωρήσει την ευθεία ε άξονα συμμετρίας του σχήματος ή μεσοκάθετο των δυο βάσεων του τραπεζίου. Στο σημείο αυτό δηλαδή ο μαθητής έχει κατανοήσει το σχήμα εννοιολογικά και έχει συνδέσει τις δυο έννοιες, δηλαδή την έννοια του άξονα συμμετρίας με την έννοια της μεσοκαθέτου.

3.13.2. Στάδιο Β-Το τμήμα της αντιληπτικής δομικής ανάλυσης της δεύτερης φάσης

3.13.2.1 Κατασκευή αξόνων συμμετρίας των παραλληλογράμμων

<u>Από την οπτική γωνία της διδασκαλίας και εκμάθησης της γεωμετρίας</u>

Οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολία στην κατανόηση της έννοιας της αξονικής συμμετρίας και της συμμετρίας ως προς κέντρο, η οποία εκφράζεται με την παρερμηνεία του ρόλου των δευτερευόντων στοιχείων (π.χ. ύψος, διάμεσος) στη συμμετρία του σχήματος. Σύμφωνα με τον Son (2006)

> «ακόμα και οι υποψήφιοι δάσκαλοι των μαθηματικών είχαν την τάση να βασίζονται στις διαδικαστικές πτυχές της ανακλαστικής συμμετρίας αν και υπήρξαν περιπτώσεις παρερμηνειών από εννοιολογική άποψη. Όπως για παράδειγμα ότι ένα παραλληλόγραμμο έχει άξονες συμμετρίας τις διαγώνιές του» (p. 46).

Η κατασκευή των διαγωνίων είναι μια συνήθης παρανόηση της έννοιας της αξονικής συμμετρίας στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (Panaoura et al., 2009, p. 46).

<u>Υποθετική ανάλυση σχεδιασμού</u>

Μέσω της διαδικασίας οι μαθητές αναμένεται να επιτύχουν τους παρακάτω γνωστικούς στόχους:

- να υπερβούν τα *εννοιολογικά εμπόδια* που αφορούν την έννοια της αξονικής συμμετρίας (ποιο ρόλο παίζουν οι διαγώνιες των παραλληλογράμμων)˙
- να οδηγηθούν σε γνωστικές συγκρούσεις και να διερευνήσουν και να αιτιολογήσουν ιδιότητες του άξονα (π.χ. αν ο άξονας είναι κάθετος στις πλευρές ή γιατί διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων ή από το μέσο της απέναντι πλευράς)˙
- να οδηγηθούν σε αντιληπτική κατανόηση της αξονικής συμμετρίας του ορθογωνίου ως αποτέλεσμα σύνδεσης των μέσων των απέναντι πλευρών του σχήματος. Να συνδέσουν δηλαδή την έννοια της μεσοπαραλλήλου με την έννοια της αξονικής συμμετρίας στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο˙
- να εξετάσουν αν γενικεύεται ο κανόνας της μεσοπαραλλήλου στα υπόλοιπα παραλληλόγραμμα˙
- να κατασκευάσουν ορισμούς των παραλληλογράμμων βασιζόμενοι στην αξονική συμμετρία τους˙
- να ιεραρχήσουν αντιληπτικά τα τετράπλευρα από την αξονική συμμετρία τους.

3.13.3. Στάδιο Γ-Το τμήμα της αυστηρής δομικής ανάλυσης της δεύτερης φάσης.

3.13.3.1. Κεντρική συμμετρία με χρήση εργαλείων

Υποθετική ανάλυση σχεδιασμού

Η σύγχυση (παρερμηνεία) της έννοιας της κεντρικής συμμετρίας με την έννοια της αξονικής συμμετρίας και η δυσκολία κατανόησης οδήγησαν την ερευνήτρια να ανακατευθύνει την παρούσα μελέτη ώστε να συμπεριλάβει την έννοια της κεντρικής συμμετρίας. Η εφαρμογή της λειτουργίας περιστροφής του λογισμικού με στόχο την περιστροφή ενός αντικειμένου (σημείου, τμήματος, τριγώνου κ.ά.) οδηγεί στο μετασχηματισμό του αντικειμένου. Το αντικείμενο που προκύπτει έχει τις εξής ιδιότητες: είναι ίσο με το αρχικό αντικείμενο και περιστρέφεται κατά την προεπιλεγμένη γωνία, ως προς κέντρο περιστροφής το σημείο το οποίο εμείς ορίζουμε. Για παράδειγμα, η περιστροφή τμήματος ως προς τη γωνία των 90^o έχει αποτέλεσμα την κατασκευή *σχήματος εργαλειοποιημένης δράσης* για την περιστροφή και την *έννοια-εν-δράσει* της καθετότητας και ισότητας των τμημάτων από περιστροφή (Patsiomitou, 2008, p.16).

Η περιστροφή ενός σημείου ως προς τη γωνία των 180^o παράγει ένα σημείο τέτοιο ώστε το αρχικό αντικείμενο, το είδωλο και το κέντρο να είναι *συνευθειακά σημεία*. Η περιστροφή ενός τμήματος παράγει ένα τμήμα ίσο με το αρχικό και σε γωνία 90^o από το αρχικό σημείο. Επομένως, η κατασκευή της κεντρικής συμμετρίας με χρήση εργαλείου περιστροφής του λογισμικού οδηγεί τους μαθητές σε κατασκευή σχήματος εργαλειοποιημένης δράσης και τις έννοιες-εν-δράσει που σχετίζονται με τις ιδιότητες των τμημάτων από περιστροφή.

Υποθετική ανάλυση ανασχεδιασμού

Η δυσκολία αποκωδικοποίησης του εργαλείου περιστροφής οδήγησε την ερευνήτρια στην επινόηση ενός *προσαρμοσμένου εργαλείου* που εκτελεί τη διαδικασία περιστροφής σημείου ως προς γωνία 180^o χωρίς την εμφάνιση των ενδιάμεσων αναπαραστάσεων. Το εργαλείο εφαρμόζεται στο σημείο προς περιστροφή και στο κέντρο περιστροφής (δηλαδή έχει δυο σημεία εφαρμογής). Το αποτέλεσμα που προκύπτει τόσο με την περιστροφή του σημείου με χρήση του προσαρμοσμένου εργαλείου όσο και με την περιστροφή του εργαλείου περιστροφής οπτικά είναι το ίδιο. Διαφέρει όμως στη διαδικασία. Ενώ ο μαθητής όταν χρησιμοποιεί το εργαλείο περιστροφής του λογισμικού αλληλεπιδρά με την ενδιάμεση αναπαράσταση μέσω της οποίας καθορίζει τη γωνία περιστροφής και επομένως αλληλεπιδρά άμεσα με το αποτέλεσμα στην οθόνη μέσω των συνδεόμενων αναπαραστάσεων που προκύπτουν, το προσαρμοσμένο εργαλείο λειτουργεί αφαιρετικά εμφανίζοντας μόνο το τελικό αποτέλεσμα. Έτσι οι μαθητές έχουν μόνο το αρχικό και το τελικό αποτέλεσμα και καμιά *ενδιάμεση αναπαράσταση*. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να αποκτήσουν την αφαιρετική ικανότητα να συμπυκνώσουν νοητικά τη διαδικασία. Επομένως, μέσω της εφαρμογής του υπάρχει η δυνατότητα διερεύνησης της ικανότητας κατανόησης της έννοιας της περιστροφής με αφαιρετικές διαδικασίες σκέψης. Υπό αυτή την προοπτική το εργαλείο αποτελεί ένα ***δείκτη ανάπτυξης*** της κατανόησης των μαθητών της αφαιρετικής διαδικασίας που απαιτείται για την κατασκευή της περιστροφής.

Θα διερευνηθεί ο τρόπος χρήσης του εργαλείου από τους μαθητές κανονικά ή με *κατάχρηση και οικονομία* (Rabardel, 1995), στην κατασκευή και κατανόηση αξονικής συμμετρίας.

3.13.4. Στάδιο Δ. Το τμήμα ιεραρχικής δομικής ανάλυσης της δεύτερης φάσης

3.13.4.1 Κατασκευές με χρήση του μενού Μετασχηματισμός

Από την οπτική της διδασκαλίας και εκμάθησης της γεωμετρίας

Στόχος της παρούσας φάσης είναι οι μαθητές να κατασκευάσουν ένα σχήμα με βάση τη γνώση της συμμετρίας του, με βάση δηλαδή ιδιότητες που σχετίζονται με τους άξονες συμμετρίας ή κέντρα συμμετρίας του σχήματος, έννοιες που έχουν πραγματευτεί στις προηγούμενες δραστηριότητες της δεύτερης φάσης. Θα κατασκευάσουν τα σχήματα με βάση ένα σημαντικό κριτήριο: «μια λύση είναι έγκυρη αν και μόνον αν δεν μπορεί να καταστραφεί με το σύρσιμο» (Jones, 2000, p. 58 οπ. αναφ. στο Battista , 2008, p. 353).

Όπως υποστηρίζουν οι Whiteley & Moshé (2005)

> Η σκέψη ότι τα τετράπλευρα μπορεί να οριστούν από την άποψη της συμμετρίας τους μπορεί να μας οδηγήσει να ανακαλύψουμε νέους τρόπους κατασκευής τους μέσω του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας Geometer's Sketchpad. Έτσι αντί να χρησιμοποιήσουμε το μενού «**Κατασκευή»** μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το μενού «**Μετασχηματισμός»** και να παράγουμε σχήματα με χρήση της συμμετρίας τους. Η έμφαση στις κατασκευές με χρήση του μενού «**Μετασχηματισμός»** στο GSP μπορεί να χρησιμεύσει για να αναπτυχθούν και να ενισχυθούν οι δεξιότητες μετασχηματισμού των μαθητών. Η χρησιμοποίηση του μενού «**Μετασχηματισμός»** στο GSP μπορεί να διευκολύνει την κατανόηση των συμμετριών και της μεγάλης σημασίας τους στη γεωμετρία.

Οι μαθητές μέσω του σταδίου αυτού θα κατασκευάσουν το σχήμα λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητες των διαγωνίων τους, που έχουν κατασκευαστεί στο προηγούμενο στάδιο. Ένας επιπλέον στόχος αυτής της φάσης είναι η κατανόηση της προσθήκης ιδιοτήτων στις διαγώνιες του παραλληλόγραμμου, προκειμένου να κατασκευαστεί μια ειδικότερη μορφή σχήματος. Για παράδειγμα, οι διαγώνιες στο παραλληλόγραμμο διχοτομούνται, στο ορθογώνιο διχοτομούνται και είναι ίσες, στο ρόμβο διχοτομούνται, τέμνονται κάθετα και διχοτομούν τις γωνίες των κορυφών κ.ο.κ. Επομένως, τα σχήματα ιεραρχούνται βάσει των ιδιοτήτων των δευτερευόντων στοιχείων τους.

Η ιεραρχική ταξινόμηση των τετραπλεύρων είναι μια περιοχή μελέτης που προωθεί την ανάπτυξη του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης των μαθητών (Fujita & Jones, 2007).

Υποθετική ανάλυση

Θα διερευνηθούν οι τεχνικές που θα χρησιμοποιήσουν οι μαθητές για να οδηγηθούν σε κατασκευή του σχήματος ή σε διαδικασία που θα τους δώσει λάθος αποτέλεσμα. Η διαδικασία αυτή δοκιμής και λάθους θα οδηγήσει σε *γνωστικές συγκρούσεις*. Όπως υποστηρίζει ο van Dormolen (1977, p.27) στο άρθρο του “Learning to understand what giving a proof really means”:

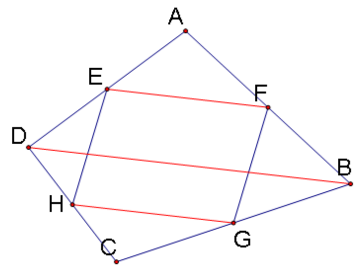
> «Όταν κάποιος επιχειρεί να λύσει ένα μαθηματικό πρόβλημα, συνήθως δεν είναι σε θέση να ακολουθήσει αυστηρό παραγωγικό συλλογισμό από την αρχή [να αιτιολογήσει δηλαδή την κατασκευαστική διαδικασία με αυστηρό τρόπο χρησιμοποιώντας θεωρήματα και ορισμούς].
> Κατ’ αρχάς ξεκινά με μια διαδικασία δοκιμής και λάθους και μέσω αυτής προσπαθεί να βρει ένα σημείο από το οποίο θα πιάσει το πρόβλημα, στη συνέχεια αφού αυτή η προσέγγιση αποδειχθεί επιτυχής δοκιμάζει να την αποσαφηνίσει και να της δώσει μια μορφή αιτιολογημένου επιχειρήματος. Η μαθηματική εκπαίδευση οφείλει να συμπεριλάβει τη διδασκαλία της διαδικασίας [μέσω της οποίας] ο μαθητής θα οδηγηθεί σε μια παραγωγική μορφή επιχειρήματος. Η διδασκαλία αυτή έχει δύο σκέλη: τη διδασκαλία των μεθόδων που σχεδιάζονται να κάνουν την περίοδο διερεύνησης λιγότερο χαοτική, πιο αποτελεσματική· και το ψυχολογικό-συναισθηματικό σκέλος. Η γνώση και η ικανότητα δεν είναι οι κύριοι παράγοντες, εδώ είναι περισσότερο ζήτημα αναγνώρισης της ανάγκης για ένα παραγωγικό επιχείρημα, ακόμη και σε περιπτώσεις όπου η αλήθεια της δήλωσης είναι τόσο προφανής που δεν το σκέφτεται κάποιος ότι αξίζει τον κόπο». (p.27)

Στόχος είναι να οδηγηθούν οι μαθητές σε αιτιολόγηση των ιδιοτήτων που χρησιμοποιούν για τη σύνθεση του σχήματος. Ειδικότερα, για να αιτιολογήσουν επιτυχώς γιατί ένας ρόμβος είναι μια ειδική περίπτωση ενός παραλληλόγραμμου και το τετράγωνο μια ειδική περίπτωση ενός ρόμβου ή ενός ορθογωνίου δεν αρκεί να είναι ικανοί να ελέγχουν την εικόνα του [μόνο], πρέπει επίσης να μπορούν να εξετάσουν τις ιδιότητές του (έννοιες/θεωρήματα), «μια αλληλεπίδραση δηλαδή μεταξύ εικόνων και εννοιών» (Fujita & Jones, 2007, p. 12). Πρέπει επομένως να μπορούν να αντικαταστήσουν ένα σχήμα με ένα σύνολο ιδιοτήτων και με βάση αυτές τις ιδιότητες να συνθέσουν το σχήμα, το σχήμα δηλαδή να αποκτήσει το *χαρακτήρα σήματος*. Αυτή η διαδικασία είναι ιδιαίτερα σύνθετη αφού οι μαθητές πρέπει όχι μόνο να έχουν υπόψη τις ιδιότητες-σήμα που θα οδηγήσουν στην κατασκευή του σχήματος, αλλά και την ικανότητα *αποκωδικοποίησης της ιδιότητας*. Μ’ άλλα λόγια, πώς θα αποκωδικοποιηθεί η ισότητα των διαγωνίων ενός ορθογωνίου και ταυτόχρονα η διχοτόμησή τους, ποια εργαλεία από την πρώτη φάση και τα στάδια της δεύτερης φάσης θα τους βοηθήσουν να συνθέσουν το σχήμα με βάση τις ιδιότητες κλπ. Δηλαδή, η κατασκευή της δομή του σχήματος του παραλληλόγραμμου και της εξειδίκευσης της δομής του για τα υπόλοιπα σχήματα με αποκωδικοποίηση λεκτικών και νοητικών αναπαραστάσεων, μέσω της σύνθεσης τεχνικών και μετασχηματισμών στο λογισμικό.

3.14. ΦΑΣΗ Γ. Διερεύνηση και απόδειξη ανοικτού προβλήματος (πρόβλημα του Varignon)

Από την οπτική της διδασκαλίας και εκμάθησης της γεωμετρίας

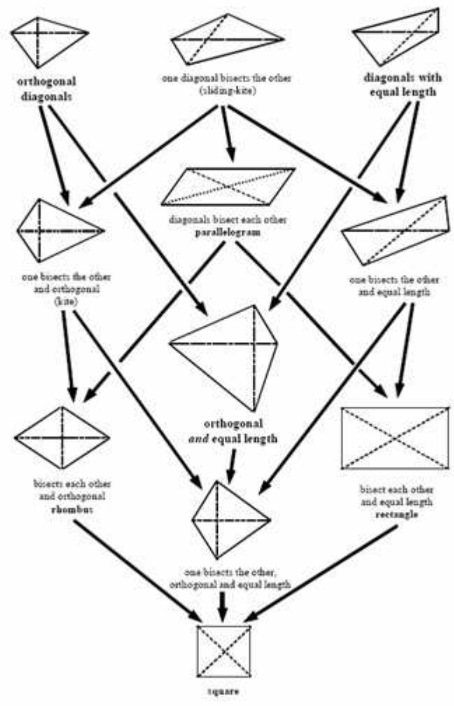
Στην ενότητα αυτή θα περιγραφούν οι στόχοι της τρίτης φάσης η οποία βρίσκεται σε παράλληλη τροχιά εξέλιξης με τη φάση που αφορά τη διερεύνηση προβλημάτων με τους τύπους των Συνδεόμενων Οπτικών Ενεργών Αναπαραστάσεων. Ένα πρόβλημα κατάλληλο για την ανακάλυψη του δικτύου των σχέσεων μεταξύ των ιδιοτήτων των τετραπλεύρων, την ανάπτυξη της κατανόησης του *ρόλου* που παίζουν οι διαγώνιες του τετραπλεύρου (που σχηματίζεται από τα μέσα των πλευρών) στο διάγραμμα του τετραπλεύρου και της ιεράρχησης των τετραπλεύρων λόγω των ιδιοτήτων των διαγωνίων τους, καθώς και για την ανακάλυψη υποδομών στην αρχική δομή του είναι το θεώρημα (ή πρόβλημα) του Varignon (1654-1722 μ.Χ.).

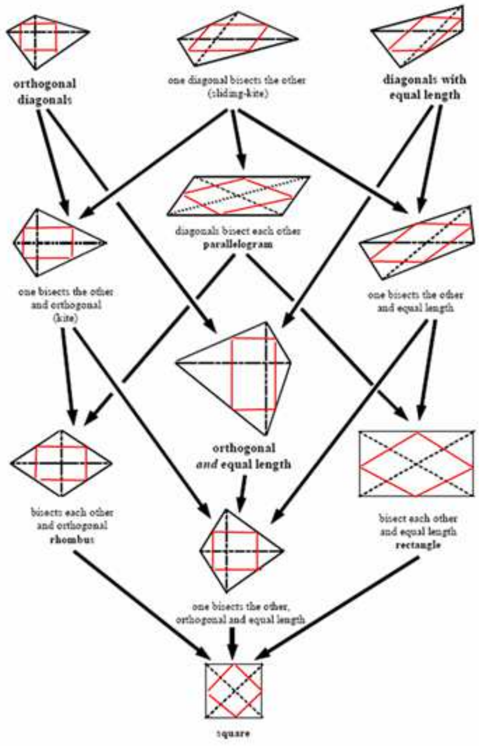


Σχήμα 3.5. Σχηματική αναπαράσταση του θεωρήματος του Varignon

θεώρημα (πρόβλημα) του Varignon: *Δοθέντος ενός τυχαίου τετραπλεύρου, το τετράπλευρο που σχηματίζεται από τα μέσα των πλευρών του, είναι παραλληλόγραμμο. Σύρετε μια κορυφή του εξωτερικού τετραπλεύρου ώστε να σχηματιστεί ορθογώνιο ή ρόμβος ή τετράγωνο. Τι παρατηρείτε; Τι τετράπλευρο σχηματίζεται από τα μέσα των πλευρών του; Γιατί;*

Η απόδειξη του θεωρήματος προκύπτει σε δυο σκέλη: (1) στην αναγνώριση των υποδομών των τριγώνων στα οποία μπορεί να εφαρμοστεί το *θεώρημα σύνδεσης των μέσων τριγώνου* και (2) στην εφαρμογή του θεωρήματος. Η απόδειξη ότι το εσωτερικό τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο προκύπτει από την εφαρμογή του θεωρήματος-κριτηρίου του παραλληλόγραμμου (δηλαδή, «ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο τότε και μόνον τότε όταν οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες και ίσες»).





Σχήμα 3.6. Το ‘σπίτι των τετραπλεύρων’ (Graumann, 2005, p.194)

Σχήμα 3.7. Προσαρμογή της ταξινόμησης του Graumann (ibid.) (Patsiomitou, 2012)

Υποθετική ανάλυση

Η απόδειξη του θεωρήματος, απαιτεί την ανάπτυξη ικανότητας διαδικαστικής εφαρμογής των θεωρημάτων που προαναφέρθηκαν. Οι έννοιες (ορισμοί και απόδειξη) καθώς και οι συνδέσεις μεταξύ των εννοιών θα προκύψουν ως αποτέλεσμα της νοητικής επεξεργασίας των ιδιοτήτων που φέρουν τα σχήματα. Η απόδειξη μιας πρότασης «είναι ένα σημαντικό εργαλείο για την [αξιολόγηση] της κατανόησης [των μαθητών]» (Ball, Hoyles, Jahnke, & Movshovitz-Hadar, 2002, p. 907). Η απόδειξη της πρότασης στο δυναμικό περιβάλλον «είναι μια αποτελεσματική διδακτική στρατηγική […] που μπορεί να ενδυναμώσει την ικανότητα για απόδειξη» (Ball, Hoyles, Jahnke, & Movshovitz-Hadar, 2002, p. 908) λόγω της οπτικής ενίσχυσης των αποτελεσμάτων μέσω της αντίληψης. Υπό αυτή την προοπτική «η ανάπτυξη της ικανότητας παραγωγικού συλλογισμού θα προκύψει ως επανεφεύρεση, όπως έκανε ο Σωκράτης» (Freudenthal, 1973, p.402)

Ο Graumann (2005, p.194) ιεραρχεί τα τετράπλευρα ως προς τις διαγώνιες τους. Έτσι διακρίνει τετράπλευρα που έχουν ίσες διαγώνιες, διαγώνιες που τέμνονται κάθετα και διαγώνιες που τέμνουν η μια την άλλη σε αυθαίρετο σημείο. Η ιεράρχηση των διαγωνίων συνεχίζεται με την προσθήκη ιδιοτήτων στην καθεμιά από τις αρχικές κατηγορίες μέχρι να οδηγηθούμε στην εξειδικευμένη μορφή του τετραγώνου, του οποίου οι διαγώνιες του είναι ίσες, κάθετες και διχοτομούνται. Το σχήμα που προκύπτει στο εσωτερικό είναι ένα παραλληλόγραμμο σε γενικευμένη μορφή που λόγω της διαμόρφωσης του εξωτερικού σχήματος εξειδικεύεται στην μορφή του τετραγώνου. Έτσι προκύπτει μια νέα κατηγοριοποίηση τετράπλευρων λόγω των διαφορετικών ιδιοτήτων των τετράπλευρων που σχηματίζονται στο εσωτερικό του σχήματος. Για παράδειγμα το τετράπλευρο που προκύπτει από τη σύνδεση των μέσων του τετραπλεύρου που οι διαγώνιές του τέμνονται κάθετα είναι ένα ορθογώνιο. Το τετράπλευρο το οποίο σχηματίζεται από τα μέσα των πλευρών ενός τετραπλεύρου με κάθετες διαγώνιες που διχοτομούνται μεταξύ τους, είναι και πάλι ένα ορθογώνιο του οποίου όμως οι πλευρές είναι συμμετρικές ως προς τις διαγώνιες του αρχικού τετραπλεύρου. Στον πίνακα 4.1 παρουσιάζονται οι ιδιότητες των εσωτερικών και εξωτερικών τετραπλεύρων.

Πίνακας 3.13. Συσχέτιση εσωτερικού-εξωτερικού τετραπλεύρου στο θεώρημα του Varignon

Εξωτερικό τετράπλευρο	**Εσωτερικό τετράπλευρο**
Ικτίνος με διαγώνιες κάθετες	Ορθογώνιο
Ικτίνος με την ιδιότητα μόνο η μια διαγώνιος να είναι μεσοκάθετος στην άλλη	Ορθογώνιο του οποίου οι δυο πλευρές είναι συμμετρικές ως προς τη διαγώνιο- μεσοκάθετο (άξονας συμμετρίας)
Ικτίνος με την ιδιότητα οι διαγώνιες να είναι κάθετες και να διχοτομούνται	Ορθογώνιο του οποίου οι δυο πλευρές είναι συμμετρικές ως προς τις διαγωνίους
Τετράπλευρο που οι διαγώνιες διχοτομούνται	Παραλληλόγραμμο
Παραλληλόγραμμο	Παραλληλόγραμμο
Διαγώνιες με ίσα μήκη	Ρόμβος
Διαγώνιες με ίσα μήκη που διχοτομούνται	Ρόμβος που έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο τομής των διαγωνίων
Ορθογώνιο	Ρόμβος που έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο τομής των διαγωνίων και οι διαγώνιές του είναι άξονες συμμετρίας του ορθογωνίου
Ικτίνος με την ιδιότητα οι διαγώνιες να είναι ίσες	Τετράγωνο
Ικτίνος με την ιδιότητα οι διαγώνιες να είναι ίσες και να διχοτομούν η μια την άλλη	Τετράγωνο του οποίου οι δυο πλευρές είναι συμμετρικές ως προς τη διαγώνιο- μεσοκάθετο (άξονας συμμετρίας)
Τετράγωνο	Τετράγωνο που έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο τομής των διαγωνίων και οι διαγώνιες του είναι άξονες συμμετρίας του ορθογωνίου

Στο δυναμικό περιβάλλον οι μαθητές μπορούν να οδηγηθούν στις διάφορες μορφές τετραπλεύρων με το σύρσιμο μιας κορυφής του σχήματος. Το σύρσιμο και η διαμόρφωση του εξωτερικού τετράπλευρου επηρεάζουν και τη διαμόρφωση του σχήματος του εσωτερικού τετραπλεύρου που σχηματίζεται από τα μέσα των πλευρών. Όπως υποστηρίζουν οι Laborde, Kynigos, Hollebrands & Strasser (2006), «τα προβλήματα αλλάζουν από τη διαμεσολάβηση του δυναμικού περιβάλλοντος, είτε γιατί η στρατηγική επίλυσης διαφέρει είτε γιατί δεν είναι δυνατά να επιλυθούν εκτός αυτού» (Laborde et al., 2006, p. 293).

Οι μαθητές επομένως θα υποχρεωθούν λόγω του δυναμικού περιβάλλοντος να αντιμετωπίσουν τις συνδέσεις των σχέσεων των διαγωνίων που σχηματίζονται από το εξωτερικό και το εσωτερικό τετράπλευρο. Στη φάση αυτή τους δίνεται η δυνατότητα να «αντιληφθούν *τον διαφορετικό-διπλό ρόλο*» (Duval, προσωπική επικοινωνία 3-5 Αυγούστου 2010) που παίζουν οι διαγώνιες στα δυο τετράπλευρα (εσωτερικό-εξωτερικό) καθώς και να αιτιολογήσουν τις σχέσεις που συνδέουν τα αντικείμενα του διαγράμματος. Οι Marrades & Gutierrez (2000, p. 93) θεωρούν ότι «οι μετασχηματισμοί μπορούν να βασιστούν στις νοητικές εικόνες, τους συμβολικούς χειρισμούς και τις κατασκευές αντικειμένων. Οι δομικές αιτιολογήσεις είναι ακολουθίες από λογικά συμπεράσματα που παράγονται από τα δεδομένα του προβλήματος, τους ορισμούς και τα θεωρήματα. Ο ρόλος των παραδειγμάτων είναι να οργανώσουν τα βήματα της παραγωγικής διαδικασίας».

Το στάδιο αυτό μπορεί να χαρακτηριστεί *μεταγνωστικό στάδιο*, κι είναι αποτέλεσμα της σύνθεσης τόσο της αναπτυξιακής θεωρίας του Piaget όσο και της θεωρίας των van Hiele με την οποία οι μαθητές αναπτύσσουν τη σκέψη τους μέσω των κατάλληλων προβλημάτων που επιλύουν (Pandiscio & Orton, 1998). Ο Brown (2002) ορίζει τη *μεταγνώση του μαθητή* ως γνώση και έλεγχο πάνω στη μάθησή του (knowledge about and control on one' s own learning). Κατά συνέπεια θα διερευνηθεί η *μεταγνωστική ικανότητα των μαθητών* πάνω στα τετράπλευρα με την ανακάλυψη νέων μορφών τετραπλεύρων που δεν έχουν αντιμετωπίσει στο σχολικό εγχειρίδιο ή δεν έχουν ακούσει από μια αυθεντία ώστε να ελεγχθεί η ικανότητά τους στην ανάπτυξη υποθέσεων και στην αιτιολόγηση σε νέες καταστάσεις.

Σύμφωνα με τον Shoenfeld (2000) «Η μεταγνωστική ικανότητα είναι ένας παραγωγικός παράγοντας στην επίλυση προβλήματος». «Η αποτελεσματική απόφαση που λαμβάνεται κατά την επίλυση προβλήματος όπως δείχνουν πολλές έρευνες, δεν ‵‵έρχεται φυσικά”. Όταν οι μαθητές μαθαίνουν τέτοιες δεξιότητες η επίλυση προβλήματος βελτιώνεται» (p.646).

3.15. ΦΑΣΗ Δ. Τύποι των Συνδεόμενων Οπτικών Ενεργών Αναπαραστάσεων

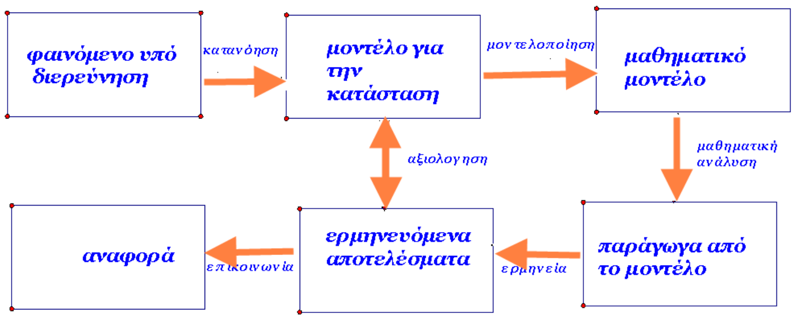
Οι τύποι των ΣΟΕΑ στο περιβάλλον του λογισμικού ερμηνεύονται ως η μοντελοποίηση ενός πραγματικού προβλήματος μέσω της οποίας «κωδικοποιούμε ιδιότητες και σχέσεις για τον αναπαριστώμενο κόσμο που αποτελείται από μαθηματικές δομές ή έννοιες» (Sedig & Sumner 2006), δηλαδή, σύμφωνα με τους Goldin & Janvier (1998, p.1), συνιστά:

- «μια φυσική κατάσταση ή κατάσταση στο φυσικό περιβάλλον» διαμορφωμένη από μαθηματική άποψη που ενσωματώνει μαθηματικές ιδέες˙
- «μια γλωσσική ενσάρκωση (embodiment) ή ένα γλωσσικό σύστημα με έμφαση στον κατάλληλο συνδυασμό συντακτικών και σημασιολογικών δομικών χαρακτηριστικών» που ενισχύονται με επιλεγμένες *βασικές* ή *στοχοβασισμένες* (Sedig & Sumner 2006) διαφορετικές τεχνικές αλληλεπίδρασης στο περιβάλλον του λογισμικού, όπου η γεωμετρική θεωρία συζητείται˙
- «ένα αυστηρό/τυπικό μαθηματικό κατασκεύασμα (π.χ. μαθηματική απόδειξη) το οποίο μπορεί να αναπαραστήσει καταστάσεις μέσω των συμβόλων ή μέσω ενός συστήματος συμβόλων, […] συμπεριλαμβανομένων των μαθηματικών κατασκευασμάτων που μπορούν να αναπαραστήσουν πτυχές άλλων μαθηματικών κατασκευασμάτων».
- «μια εσωτερική, γνωστική διαμόρφωση, ή ένα σύνθετο σύστημα τέτοιων διαμορφώσεων, που συμπεραίνεται από τη συμπεριφορά ή την ενδοσκόπηση, που περιγράφει πτυχές των διαδικασιών της μαθηματικής σκέψης των μαθητών κατά την διάρκεια της επίλυσης προβλήματος».

3.15.1. Οι στόχοι για την ανάπτυξη των ΣΟΕΑ

Ο Schumann (2004, p.3) υποστηρίζει ότι οι «μη μαθηματικές εφαρμογές, περιλαμβανομένης της μαθηματικής μοντελοποίησης στην μαθηματική τάξη αποτελούν ένα σοβαρό επιχείρημα για την υπεράσπιση της διδασκαλίας των μαθηματικών». Ο Schumann αναφέρεται στο σύγγραμμα του NCTM Year-book (1979) “*Applications in school mathematics*” στο οποίο οι Corbitt & Edwards (1979) περιέγραψαν την μαθηματική μοντελοποίηση ως εξής: «η μαθηματική μοντελοποίηση περιλαμβάνει (1) τη διατύπωση ενός προβλήματος για την κατασκευή ενός μαθηματικού μοντέλου, (2) την ανάλυση της λύσης του μαθηματικού προβλήματος που προκύπτει και (3) την ερμηνεία των μαθηματικών αποτελεσμάτων στο πλαίσιο του πραγματικού κόσμου» (οπ. αναφ. στο Schumann, 2004, p.3).

Η εξερεύνηση ενός προβλήματος μέσω των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας, επιτρέπει στους μαθητές να αναδημιουργήσουν από την άποψη των σχέσεων και ιδιοτήτων όλα τα στοιχεία που απαιτούνται για την απόδειξη. Κατ' αυτό τον τρόπο η διαδικασία της λύσης γίνεται τόσο σημαντική όσο η ίδια η λύση.



Σχήμα 3.8. Μετάφραση του διαγράμματος των Corte, Verschaffel & Greer (2000, p. 71)

Όπως υποστηρίζει ο Schumann (2004, p.6), όταν χρησιμοποιούμε λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας για να μοντελοποιήσουμε ένα πρόβλημα θέτουμε, μεταξύ άλλων, στόχους ως προς την καλλιέργεια της ικανότητας της γεωμετρικής αντίληψης, την εφαρμογή και ανάπτυξη της γνώσης στη γεωμετρία (εννοιών και μεθόδων που αποτελούν τον *γνωστικό στόχο*), την πειραματική διερεύνηση και ανάλυση των φαινόμενων που μπορούν γεωμετρικά να μοντελοποιηθούν (*μεταγνωστικός στόχος*), ακόμα και την εκμάθηση των τεχνικών του λογισμικού (*εργαλειακός στόχος*).

Οι τεχνικές που θα χρησιμοποιηθούν και θα μετασχηματιστούν σε όργανα κατά την *εργαλειακή γένεση* βοηθούν τους μαθητές στην επίλυση του προβλήματος και στη συνέχεια στην ερμηνεία του πραγματικού προβλήματος ή, διαφορετικά, στην επιλογή στρατηγικών για τη χρήση των εργαλείων και διαγραμμάτων εργαζόμενοι στο γεωμετρικό μοντέλο μέσω των ΣΟΕΑ. Συνοπτικά οι στόχοι για την ανάπτυξη των ΣΟΕΑ είναι (Patsiomitou 2008b, 2010):

- να παρέχουν μοντελοποιημένα προβλήματα που είναι προσαρμογές και επεκτάσεις δραστηριοτήτων στα στατικά μέσα·
- να βοηθούν τους μαθητές να λύσουν είτε μεμονωμένα είτε σε μια ενορχηστρωμένη διαδικασία προβλήματα που αναπτύσσουν τη μαθηματική κατανόηση και την αυστηρή μαθηματική απόδειξη ως εφαρμογή και γενίκευση των εννοιών που έχουν εισαχθεί στις προηγούμενες φάσεις·

- να παρέχουν την εμπειρία που παρουσιάζεται αποτελεσματικότερα από τις επιλεγμένες τεχνικές αλληλεπίδρασης που διευκολύνονται από το περιβάλλον του λογισμικού ως εφαρμογή και γενίκευση των τεχνικών που έχουν εισαχθεί στις προηγούμενες φάσεις και
- να παρέχουν την εμπειρία στο πλαίσιο της σχεδίασης, ώστε οι μαθητές να αναπτύξουν τις συνδέσεις μεταξύ της αισθητικής που προσφέρει μια μοντελοποιημένη εικόνα στο περιβάλλον του λογισμικού και της θεωρητικής γνώσης στη γεωμετρία που αποκομίζεται από το γεωμετρικό διάγραμμα.

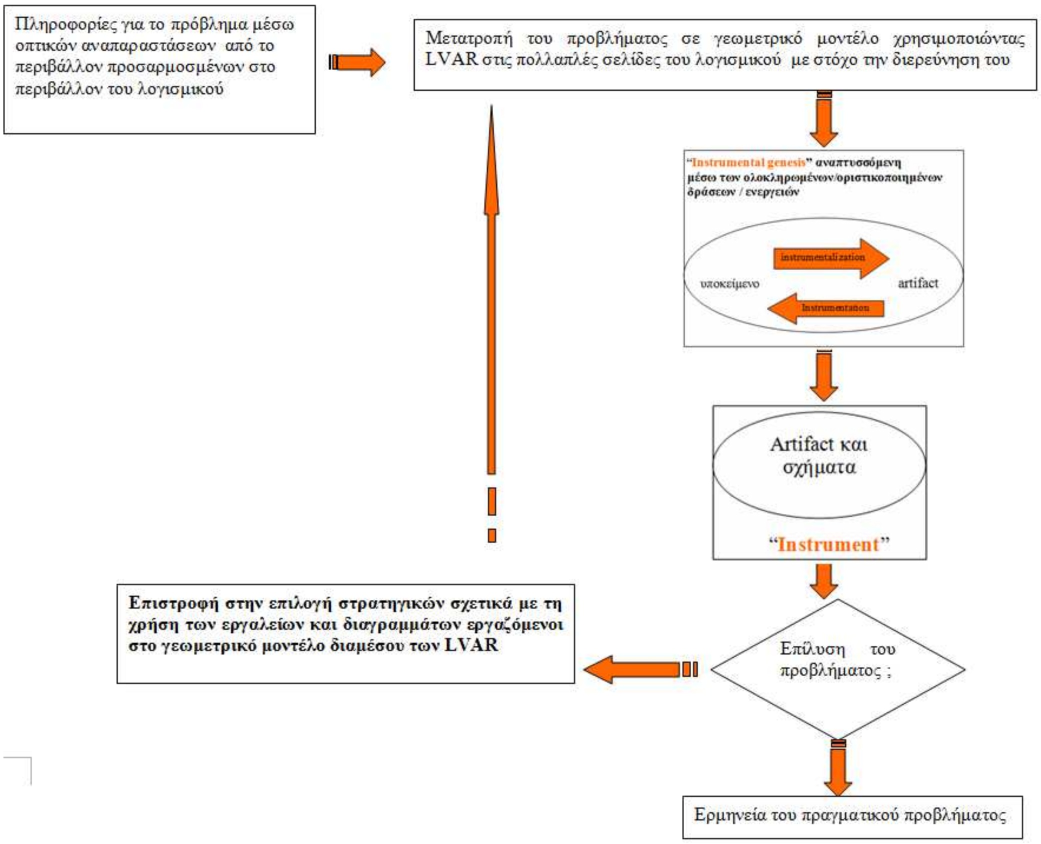
Η εφαρμογή των μαθηματικών στην επίλυση προβλημάτων στο πλαίσιο του πραγματικού κόσμου αναφέρεται από τους Corte, Verschaffel & Greer (2000) ως: «κατανόηση της κατάστασης που περιγράφεται, κατασκευή μαθηματικού μοντέλου και των σχέσεων των ενσωματωμένων στην κατάσταση, εργασία μέσω του μαθηματικού μοντέλου, ερμηνεία των εξερχόμενων από την υπολογιστική εργασία για να φτάσουμε σε μια πρακτική λύση, αξιολόγηση του ερμηνευόμενου αποτελέσματος σε σχέση με την φυσική κατάσταση» (p. 71). Το μοντέλο αυτό επηρέασε την κατασκευή του διαγράμματος στη συνέχεια, ενός σχεδίου μέσω του οποίου η ερευνήτρια προέβλεψε την αλληλεπίδραση των μαθητών με χρήση των ΣΟΕΑ. Στο διάγραμμα αναλύεται η διαδικασία επίλυσης προβλήματος με χρήση των ΣΟΕΑ. Αρχικά το πρόβλημα μοντελοποιείται μέσω οπτικών αναπαραστάσεων και ακολουθεί η μετατροπή του προβλήματος σε γεωμετρικό μοντέλο στις πολλαπλές σελίδες του λογισμικού.

Επομένως, οι ΣΟΕΑ στο λογισμικό έχουν έναν διπλής κατευθύνσεως –αμφίδρομο– και συμπληρωματικό ρόλο, ακριβώς όπως τα διαγράμματα στην επίπεδη γεωμετρία που αναφέρει η Laborde: αφενός αναφέρονται στις θεωρητικές γεωμετρικές ιδιότητες και αφετέρου προσφέρουν χωρογραφικές, οπτικές ιδιότητες που μπορούν να επηρεάσουν την αντιληπτική δραστηριότητα ενός μαθητή. Με τον ίδιο τρόπο, οι ΣΟΕΑ (LVAR) συνδέουν τις υλικές ψηφιακές οντότητες στην οθόνη με το θεωρητικό νοητικό αναφορικό με το οποίο μπορεί να εργαστεί ο μαθητής.

Στηρίζονται δηλαδή ταυτόχρονα στη δυαδικότητα των διαγραμμάτων, που είναι αναπαραστάσεις των εννοιών --ή γενικότερα των νοητικών κατασκευασμάτων-- και αναπαραστάσεις ενός συνδυασμού ενεργών γεωμετρικών αντικειμένων. Κατά συνέπεια, όταν ενεργεί κάποιος στις ΣΟΕΑ το θεωρητικό μέρος διαμορφώνεται ως νοητική οντότητα που περιλαμβάνει ταυτόχρονα την αναγνώριση *του χωρογραφικού πεδίου* και τις ιδιότητες του *θεωρητικού πεδίου του λογισμικού*.

Οι μαθητές κατά την επίλυση προβλήματος με χρήση των ΣΟΕΑ δρουν στα δυναμικά διαγράμματα για να διερευνήσουν την επίλυση του προβλήματος και κατά συνέπεια να κατασκευάσουν την γνώση τους και αλληλεπιδρούν για να εκφράσουν τις σκέψεις τους.

Χρησιμοποιούν δηλαδή τα δυναμικά διαγράμματα ως *εργαλεία* για να σχηματίσουν και να μετασχηματίσουν τις σκέψεις τους.



Σχήμα 3.9. Επίλυση προβλήματος σε δυναμικό περιβάλλον με χρήση των ΣΟΕΑ (LVAR) (Πατσιομίτου, 2008; Patsiomitou, 2008).

Στην ουσία επιδρούν στις ΣΟΕΑ και διαμορφώνουν τις σκέψεις τους ενώ ταυτόχρονα διαμορφώνουν τις ΣΟΕΑ για να εκφράσουν τις σκέψεις τους. Αλληλεπιδρούν με το ψηφιακό υλικό μέρος των ΣΟΕΑ, τα χωρικά χαρακτηριστικά του σημαίνοντος (signifier) δηλαδή τα διαφορετικά συμβολικά συστήματα και αναμένεται να αιτιολογήσουν στο σημαινόμενο (signified) που αφορά την εσωτερική αναπαράσταση του υποκειμένου για τον κόσμο όπου «οι σταθερές αναγνωρίζονται, συμπεράσματα προκύπτουν, παράγονται ενέργειες και προβλέψεις» (Vergnaud, 1987 όπ. αναφ. στο Erbilgin, 2003, p.9).

Για να αιτιολογήσουν πιο αυστηρά τις γεωμετρικές ιδιότητες παρά τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των διαγραμμάτων οι μαθητές πρέπει να έχουν βαθιά γνώση αυτών των ιδιοτήτων. Η βαθιά γνώση μπορεί να είναι ένδειξη της *αναστοχαστικής αφαιρετικής ικανότητας* του μαθητή (Hollebrands (2003, p. 59).

3.15.2. Γιατί Συνδεόμενες Οπτικές Ενεργές Αναπαραστάσεις;

Ο όρος των ΣΟΕΑ προέκυψε ως σύνθεση επιμέρους όρων που αναλύονται στη συνέχεια (Patsiomitou, 2010) και αφορούν τους μετασχηματισμούς στοιχείων ή διαδικασιών δυναμικών αντικειμένων (ή οντοτήτων) που αναπαρίστανται με τις οντότητες που τα αναπαριστούν, ως αποτέλεσμα της επεξεργασίας των πληροφοριών και του απευθείας χειρισμού των εννοιών στην οθόνη (Patsiomitou, 2010, p.2):

- **Συνδεόμενες**: γιατί μπορούν να συνδεθούν αλλά δεν είναι κατ' ανάγκη συνδεδεμένες.
- **Οπτικές**: όπως όλα τα αντικείμενα ενός περιβάλλοντος λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας είναι αναπαραστάσεις της οντότητας που αναπαριστούν.
- **Ενεργές**: μια αναπαράσταση μπορεί να χαρακτηριστεί ενεργή όταν προκαλεί δράση, κίνηση ή αλλαγή γιατί είναι σε λειτουργία, σε επίδραση ή σε εξέλιξη. Οι δυναμικές αναπαραστάσεις μπορούν πάντοτε να είναι ενεργές αν προκαλέσουμε μια δράση επί αυτών, αλλά δεν είναι πάντοτε προκατασκευασμένες.

Τέλος οι ΣΟΕΑ συνιστούν ημι-προκατασκευασμένα δυναμικά διαγράμματα που μπορεί να συνδεθούν και γίνονται ενεργά σύμφωνα με τις επιθυμίες του χρήστη, δηλαδή δεν είναι περιορισμένα σε ενέργειες που «είναι προ-σχεδιασμένες από τον κατασκευαστή του σχεδίου κα περιορίζουν τις επιλογές του χρήστη» (Sinclair, 2001, p. 3).

3.15.2.1. Ημι-προκατασκευασμένα διαγράμματα ΣΟΕΑ

Με τον όρο *ημιπροκατασκευασμένα δυναμικά διαγράμματα* εννοούνται τα διαγράμματα που έχουν κοινά χαρακτηριστικά γνωρίσματα με τα προκατασκευασμένα διαγράμματα, αλλά και δυνατότητα αναμόρφωσης των μερών τους ώστε οι μαθητές να οδηγηθούν μέσω της *δυναμικής επανεφεύρεσης* στη λύση του προβλήματος που έχει προβλεφθεί από το δάσκαλο [ή τον ερευνητή] των μαθηματικών.

Σύμφωνα με την θεωρία των van Hiele η ικανότητα για μαθηματική απόδειξη εμφανίζεται στο επίπεδο 4, ενώ το επίπεδο 3 χαρακτηρίζεται ως το επίπεδο στο οποίο οι μαθητές κατανοούν και διατυπώνουν δηλώσεις του τύπου «αν …τότε». Είναι ανάγκη επομένως να «σχεδιάσουμε προβλήματα (δραστηριότητες) τα οποία ενισχύουν την αιτιολόγηση και την επιχειρηματολογία» (Sinclair, 2001, p.2). Όπως υποστηρίζει ο Boero (1999) απαιτούνται «επιστημολογικές και γνωστικές αναλύσεις προκειμένου να επιλεχθούν τα ιδιαίτερα, απαραίτητα στοιχεία (peculiar, essential elements) στην παραγωγή και την απόδειξη των εικασιών και τη διαχείριση των θεωριών που οι μαθητές θα συναντήσουν στην πορεία τους».

Ομοίως, ο Gawlick (2005) ισχυρίζεται ότι «η πρόοδος στα υψηλότερα επίπεδα των van Hiele δε μπορεί να προκύψει από μόνη της αλλά χρειάζεται να προκληθεί από τους μαθητές με τη συμμετοχή τους σε δραστηριότητες που προωθούν την οικοδόμηση νέων εννοιών» (p.362). Για να υποστηρίξουμε τη διδασκαλία της απόδειξης, είναι ανάγκη να κατανοήσουμε πώς οι μαθητές μαθαίνουν να αιτιολογούν, […] και πώς μπορούν να υποστηριχθούν οι διαδικασίες [της αιτιολόγησης]» (Edwards, 1997).

Η έρευνα έχει δείξει ότι η αλληλεπίδραση των μελών μιας ομάδας ακόμα αν η ομάδα εργάζεται σε στατικά μέσα, μπορεί να υποστηρίξει την ανάπτυξη εικασιών. Τόσο τα εργαλεία όσο και η συμμετοχή του δασκάλου μπορεί να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν παραγωγικό συλλογισμό, «καλλιεργώντας ειδικές ικανότητες για τη διατύπωση εικασιών και την απόδειξη των εικασιών λαμβάνοντας υπόψη στοιχεία της θεωρητικής γνώσης» (Boero, 1999).

Η δυναμική εξερεύνηση των προβλημάτων (Boero et al, 1996; Simon, 1996 οπ. αναφ. στο Boero, 1999) είναι ένας ακόμα παράγοντας που πρέπει να ληφθεί υπόψη, στον τρόπο που επιδρά στην παραγωγή των εικασιών. Έτσι θα «βοηθήσει στην επιλογή των τομέων της εμπειρίας (fields of experience) και των στόχων όπου τέτοια δυναμική εξερεύνηση είναι ‶φυσική" για τους μαθητές […] καθώς επίσης και των κατάλληλων προβλημάτων όπου το φαινόμενο [της πιθανής] συνοχής μεταξύ της παραγωγής μιας υπόθεσης και της κατασκευής της απόδειξής της λειτουργεί ομαλά στο πλαίσιο της ‶γνωστικής ενότητας θεωρημάτων" (Cognitive Unity of Theorems: Garuti et al., 1996)».

Η κατασκευή επομένως της μορφής των δηλώσεων, της δομής των μαθηματικών αποδείξεων, αν και δεν μπορεί να διαχωριστεί και να τεθεί σε γραμμική ακολουθία περιλαμβάνει (Boero, 1999; Heinze, 2004) : (1) την παραγωγή εικασιών, η οποία προκύπτει από την εξερεύνηση του προβλήματος, τον προσδιορισμό «των κανονικοτήτων» (regularities), τον προσδιορισμό των συνθηκών κάτω από τις οποίες αυτές οι κανονικότητες πραγματοποιούνται, τον προσδιορισμό των επιχειρημάτων για την αληθοφάνεια των εικασιών που έχουν προκύψει κ.λπ. · (2) τη διατύπωση δηλώσεων και τον προσδιορισμό των κατάλληλων επιχειρημάτων που επικυρώνονται από τη σχετική θεωρία, προβλέποντας τις πιθανές συνδέσεις μεταξύ τους· (3) τη συγκέντρωση των θεωρητικών επιχειρημάτων σε μια παραγωγική αλυσίδα· (4) την οργάνωση των επιχειρημάτων σε μια απόδειξη που είναι αποδεκτή και σύμφωνη με τα τρέχοντα μαθηματικά δεδομένα και (5) την προσέγγιση της τυπικής απόδειξης ή μερών της απόδειξης .

Η διαδικασία σχεδιασμού των ημιπροκατασκευασμένων διαγραμμάτων μέσω Συνδεόμενων Οπτικών Ενεργών Αναπαραστάσεων (ΣΟΕΑ) (Linking Visual Active Representation (LVAR), π.χ, Patsiomitou, 2008) στην παρούσα μελέτη δημιουργήθηκε από την ερευνήτρια, ως αλυσιδωτή ακολουθία απαντήσεων σε ερωτήσεις που οδηγούν στην κατασκευή μιας ακολουθίας διαδικασιών οι οποίες με τη σειρά τους οδηγούν σε οπτική και θεωρητική απόδειξη του πραγματικού προβλήματος (ή του θεωρήματος). Για να οδηγηθεί στο αποτέλεσμα αυτό η ερευνήτρια 'μετατοπίστηκε' νοητικά από *τη θέση του παρατηρητή εκπαιδευτικού* στη *θέση του δρώντα μαθητή* (Cobb, Yackel & Wood, 1992 οπ. αναφ. στο Gravemeijer, 2004), και εξέτασε πλέον το σχεδιασμό της δραστηριότητας από τη σκοπιά αυτή.

Η σχεδίαση των ημι-προκατασκευασμένων ΣΟΕΑ στο Sketchpad προέκυψε ως σύνδεση της διαδικασίας κατασκευής της απόδειξης από τους μαθητές προβλέποντας «την διατύπωση επιχειρημάτων για την επικύρωση της σχετικής θεωρίας» και το συνδυασμό «αυτών των επιχειρημάτων σε μια παραγωγική αλυσίδα που αποτελεί ένα σχέδιο της τελικής απόδειξης» (Boero, 1999; Heinze, 2004).

3.15.2.2. Ανάλυση των τεχνικών μοντελοποίησης στο λογισμικό.

Η μοντελοποίηση του προβλήματος προκύπτει με την παραγωγή ενός ημι-προκατασκευασμένου διαγράμματος στο χωρογραφικό επίπεδο. Η σύνθεση του διαγράμματος αποτελείται από τις παρακάτω αλληλεπιδραστικές τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν για τη συγκρότηση των περισσότερων φάσεων:

- **χρήση της περιστροφής** περί το σημείο P και O των τμημάτων PF, FO για την κατασκευή των σημείων Κ, Λ της διαγραμματικής αναπαράστασης στο λογισμικό. Αυτή η διαδικασία διατηρεί σταθερά στην οθόνη τα τμήματα PF, FO και προσθέτει τα νέα τμήματα PK, OL. Δημιουργείται έτσι μια αναδιοργάνωση της οπτικής αναπαράστασης, «μια εκ νέου ρύθμιση δηλαδή των στοιχείων της που δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να καταλάβουν τις εσωτερικές σχέσεις μεταξύ τους» (Spence, 2001). Αυτή η τεχνική χρησιμοποιήθηκε σε όλους τους τύπους.
- **χρήση του κουμπιού ενέργειας απόκρυψης /εμφάνισης** για τα σημεία Κ, Λ και το σημείο Τ το οποίο δίνει την δυνατότητα του πειραματισμού (direct manipulation) και της ανασύνθεσης του διαγράμματος. Αυτή η τεχνική χρησιμοποιήθηκε στον πρώτο, δεύτερο και πέμπτο τύπο των ΣΟΕΑ.
- **χρήση του προσωρινού σχολιασμού του διαγράμματος από το ίχνος του ευθύγραμμου τμήματος** ΚΛ μέσω του συρσίματος ώστε να εξετάσουν οι μαθητές τις πιθανές θέσεις του σημείου Τ όταν μετακινήσουν με χρήση του συρσίματος το σημείο

F (annotating). Η σχεδίαση ίχνους έχει ως αποτέλεσμα ένα δεύτερο μετασχηματισμό που οδηγεί τους μαθητές να προσέξουν το αναλλοίωτο της θέσης του σημείου Τ. Το σημείο αυτό διερευνήθηκε για τη διατύπωση εικασιών και επιχειρημάτων με μορφή γενίκευσης εκ μέρους των μαθητών. Αυτή η τεχνική χρησιμοποιήθηκε στο διερευνητικό στάδιο και στον πρώτο τύπο των ΣΟΕΑ.

- **χρήση του μόνιμου σχολιασμού του διαγράμματος μέσω του χρωματισμού** ώστε να εξετάσουν οι μαθητές οπτικά την ισότητα των στοιχείων του διαγράμματος

Για παράδειγμα στο δεύτερο τύπο των ΣΟΕΑ, έχουν χρησιμοποιηθεί οι τεχνικές περιστροφής, παρουσίασης κουμπιών ενέργειας, μόνιμου σχολιασμού (χρωματισμού των αντικειμένων) με αποτέλεσμα οι ακολουθιακές φάσεις του υπό διερεύνηση προβλήματος να εμφανίζονται σταδιακά σε ένα συνολικό σχήμα.

3.15.3. Τύποι Συνδεόμενων Οπτικών Ενεργών Αναπαραστάσεων

Στον πρώτο τύπο ΣΟΕΑ έχουν χρησιμοποιηθεί οι τεχνικές περιστροφής, ίχνους ευθύγραμμου τμήματος και προσθήκης κίνησης. Η προσθήκη κίνησης του σημείου F στο ευθύγραμμο τμήμα PO επιφέρει τον μετασχηματισμό των τμημάτων από περιστροφή και των ειδώλων τους. Το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού του σημείου F είναι ο μετασχηματισμός των σημείων K, L επομένως και του τμήματος KL το οποίο αφήνει ίχνη στην οθόνη. Οι συνεχείς μετασχηματισμοί διατηρούν την αμεταβλητότητα της θέσης και ιδιότητας του σημείου T στην οθόνη, αφού οι αποστάσεις KT, TL παραμένουν ίσες καθώς αλλάζει η θέση του σημείου F στο τμήμα PO.

Το σύρσιμο του σημείου F ώστε να τοποθετηθεί στο μέσο της απόστασης ή σε μια από τις θέσεις των σταθερών σημείων P, O διερευνήθηκε για τις ειδικές περιπτώσεις και για τη διατύπωση συλλογισμών επαγωγικού τύπου. Αυτή η διαδικασία «επιτρέπει στους μαθητές να αντιληφθούν την εγγενή δομή του υλικού που παρουσιάζεται σε αυτόν» (Dina van Hiele, οπ. αναφ. στο Fuys et al., 1984, p.218) και να αναστοχαστούν παρατηρώντας τις σχέσεις των αντικειμένων, τις κανονικότητες που προκύπτουν αφού οδηγηθούν σε «σκόπιμες ενέργειες» για την παρατήρηση της «ισότητας των μερών των σχημάτων». Στόχος είναι να διερευνηθεί αν οι μαθητές αναγνωρίσουν το σχήμα, χρησιμοποιήσουν λογικο-παραγωγικά επιχειρήματα βασιζόμενοι στις γνώσεις τους που προέκυψαν από τις προηγούμενες φάσεις του μαθησιακού μονοπατιού προκειμένου να αιτιολογήσουν τον συλλογισμό τους για την επίλυση του προβλήματος και την εφαρμογή της διαδικασίας στην εύρεση της θέσης του σημείου T.

Στο δεύτερο τύπο ΣΟΕΑ, προστίθενται σταδιακά με το πάτημα των κουμπιών ενέργειας απόκρυψης/εμφάνισης τα ζεύγη ίσων τριγώνων και τα ευθύγραμμα τμήματα DS, KL τα οποία τέμνονται στο σημείο Τ.

Η δυναμική αναπαράσταση μετασχηματίζεται μέσω του εργαλείου απόκρυψης/ εμφάνισης, το οποίο οδηγεί τους «μαθητές [να] εστιάσουν σε ότι μένει ορατό στην οθόνη [...]. Οι αλλαγές στην οθόνη επηρεάζουν τον τρόπο που κατασκευάζουν οι μαθητές τις εικασίες και την αποδεικτική διαδικασία» (Olivero, 2006, p.279). Και ενώ οι εξηγήσεις στο τύπο του καθοδηγούμενου προσανατολισμού των ΣΟΕΑ, εξαρτώνται από τις συνδεδεμένες αναπαραστάσεις για το ειδικό διάγραμμα, στην επεξηγηματική φάση ή τρίτο τύπο είναι ανάγκη να επεξηγηθούν θεωρητικά τα αποτελέσματα στην οθόνη εν κινήσει και για όλη την κλάση των αντικειμένων που προκύπτουν, ενώ στον τέταρτο τύπο ή τύπο ελεύθερου προσανατολισμού να επεξηγηθούν θεωρητικά τα αποτελέσματα για την κλάση των αναπαραστάσεων κάθε μεμονωμένης φάσης που οικοδομεί το σχήμα της λύσης.

Συγκεκριμένα στον τρίτο τύπο εμφανίζονται ταυτόχρονα δυναμικές συνδεδεμένες αναπαραστάσεις λόγω του μετασχηματισμού της μεταφοράς ενώ στον τέταρτο τύπο οι αναπαραστάσεις εμφανίζουν σταδιακά μια αυξανόμενη σύνδεση ως εξελικτική διαδικασία η καθεμιά της προηγούμενης αναφορικά με τον τρόπο που επισημαίνονται τα ίσα στοιχεία τους. Για παράδειγμα, στον τρίτο τύπο οι πλευρές, τα τρίγωνα και οι ισότητες των στοιχείων των ίσων ζευγών τριγώνων εμφανίζονται σε πιο γενικευμένη μορφή από τις προηγούμενες φάσεις. Ο σύνθετος μετασχηματισμός μεταφοράς-σύνθεσης με εργαλεία σχολιασμού της αναπαράστασης έχει ως αποτέλεσμα την ταυτόχρονη μεταβολή των αντικειμένων μέσω συρσίματος σε όλες τις συνδεόμενες αναπαραστάσεις. Δηλαδή το σύρσιμο του σημείου P στην πρώτη εικόνα του τρίτου τύπου επιφέρει ταυτόχρονη μεταβολή στις άλλες δυο, με συνέπεια την παρατήρηση των αμετάβλητων στοιχείων και στα τρία σχήματα ταυτόχρονα, λόγω της επίδειξης των μεταβολών σε πραγματικού χρόνου μεταβολή μέσω συρσίματος. «Το σχήμα επιδέχεται μια *μεταμόρφωση* ως αποτέλεσμα των χειρισμών που επιφέρουν μια φαινομενολογική ανάλυση και μια επεξήγηση των ιδιοτήτων, γίνεται δηλαδή γεωμετρικό σύμβολο» (Dina van Hiele οπ. αναφ. στο Fuys et al., 1984). Από την άλλη στόχος του τέταρτου τύπου είναι να οδηγηθούν οι μαθητές στις ιδιότητες των σχημάτων, δηλαδή να πάψουν να επηρεάζονται από την εικόνα και «το σχήμα να αποκτήσει τη θέση ενός συνόλου ιδιοτήτων», να αποκτήσει δηλαδή το χαρακτήρα σήματος. Οι μαθητές μπορούν να παρατηρήσουν τις διαδικασίες που προέκυψαν και να καταλήξουν σε συμπεράσματα για τις ιδιότητες και τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων των σχημάτων από τα ενδεικτικά σημεία που έχουν τοποθετηθεί στα σχήματα (π.χ σημάδια γωνιών). Έτσι κατασκευάζουν μια άπειρη κλάση μετασχηματιστικών διαδικασιών του ίδιου γεωμετρικού αντικειμένου στην οθόνη και ως γενίκευση των συμπερασμάτων που έχουν οδηγηθεί στους προηγούμενους τύπους ΣΟΕΑ.

Οι προκύπτουσες επιπρόσθετες αναπαραστάσεις μπορούν να συρθούν ανεξάρτητα. Για παράδειγμα το σύρσιμο των κορυφών του τριγώνου στην 3η διαμόρφωση αφήνει τις άλλες ατροποποίητες. Η εμφάνιση των κατασκευαστικών γραμμών μαζί με το σύρσιμο του σχήματος βοηθά τους μαθητές να θέσουν ανοικτούς στόχους με πολλαπλά βήματα και εναλλακτικές λύσεις, ως εκ τούτου επεκτείνοντας τις γνώσεις τους σε αυτό που έχουν δει προηγουμένως. Οι μαθητές μαθαίνουν να βρίσκουν τον δρόμο τους μέσα από ένα δίκτυο σχέσεων και συνεχείς μετασχηματισμούς μεταξύ του θεωρητικού και χωρογραφικού πεδίου. Στο στάδιο αυτό πρέπει να έχουν αποκτήσει την ικανότητα να «διαβάζουν» το διάγραμμα, να συνδέουν τις αναπαραστάσεις με τις προηγούμενες φάσεις του προβλήματος μέσω των ΣΟΕΑ που έχουν διερευνήσει, ώστε να οδηγηθούν σε αποδεικτική διαδικασία υποβοηθούμενοι από τον καθοδηγητικό σχολιασμό.

Στον πέμπτο τύπο ΣΟΕΑ οι μαθητές μπορούν να «συγκρίνουν σύμβολα μεταξύ τους, να διερευνούν ομοιότητες και διαφορές και να προσανατολίζονται στη σημασία των συμβόλων» (Dina van Hiele οπ. αναφ. στο Fuys et al., 1984, p.221). Να κατανοούν δηλαδή μια ειδικότερη δομή ως γενικότερη με κάποιες επιπλέον ιδιότητες. Ο τύπος αυτός χαρακτηρίζεται από την αναγνώριση των κοινών χαρακτηριστικών των διαγραμμάτων από κάποιες από τις ιδιότητές του ή κάποια χαρακτηριστικά του και η έννοια της απόδειξης διαμορφώνεται διαμέσου της ανάλυσης.

Η διαδικασία αυτή μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να προχωρήσουν μέσω των διαδοχικών βημάτων στην επίλυση και την ολοκλήρωση της λύσης. Κατά τη διάρκεια αυτής της διαδικασίας οι μαθητές «επισκοπούν τις μεθόδους που είναι στη διάθεσή τους και [...] συμπυκνώνουν σε ένα σύνολο την περιοχή που η σκέψη τους έχει ερευνήσει» (Dina van Hiele οπ. αναφ. στο Fuys et al., 1984). Δηλαδή τις πληροφορίες με τις όποιες εξοικειώθηκαν, το νέο δίκτυο των γεωμετρικών αντικειμένων που προέκυψαν και τις σχέσεις μεταξύ τους. Οι μαθητές που έχουν καλλιεργήσει τις διαδικασίες σκέψης και τις δεξιότητες εφαρμογής μπορούν να αναπτύξουν ένα μαθηματικό μοντέλο και να ερμηνεύσουν το ρεαλιστικό πρόβλημα.

Από την οπτική της εργαλειακής γένεσης: Η σύνθεση των εργαλείων έχει ως αποτέλεσμα την κατασκευή ενός *οργάνου* και του *σχήματος εργαλειοποιημένης δράσης που* περιλαμβάνει την έννοια της συμμετρίας, την έννοια της ισότητας και καθετότητας των περιστρεφόμενων τμημάτων εν κινήσει κ.ο.κ. Ταυτόχρονα η διαδικασία έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να συνδέσουν σχέσεις με έννοιες οπτικά: για παράδειγμα, την έννοια του τετραγώνου του σχηματιζόμενου από το ίχνος του ευθύγραμμου τμήματος με την ισότητα των πλευρών και την ισότητα των διαγωνίων, έννοιες που οι μαθητές έχουν διερευνήσει στις προηγούμενες φάσεις της διαδικασίας. Ο χειρισμός των κουμπιών ενέργειας (κουμπιών απόκρυψης-εμφάνισης και κουμπιών παρουσίασης) επιτρέπει στους μαθητές να αναπτύξουν έναν απευθείας χειρισμό του διαγράμματος στην οθόνη, ανατροφοδοτώντας τον άμεσα με σειριακές αναπαραστάσεις, ενώ «μειώνει το γνωστικό φορτίο των χρηστών επιτρέποντας στον μαθητή να συμμετέχει στις επί της οθόνης αναπαραστάσεις» (Hutchins et Al,, 1986 οπ. αναφ. στους Sedig & Sumner, 2006)».

Η κατασκευή των *εννοιών-εν-δράσει*, όπως της ισότητας των τριγώνων με ίδιο σχολιασμό, της ισότητας και καθετότητας των τμημάτων από περιστροφή, είναι αποτελέσματα των *σχημάτων εργαλειοποιημένης δράσης* των αντικειμένων από περιστροφή που κατασκευάζουν οι μαθητές, επεκτείνοντας τα χρηστικά σχήματα που έχουν κατασκευάσει σε προηγούμενη φάση της ερευνητικής διαδικασίας, κατασκευάζοντας επομένως *δεύτερου τύπου χρηστικά σχήματα* στα οποία τα αρχικά λειτουργούν ως δομικές μονάδες (Drijvers & Trouche, 2008, p. 372)

<u>Από την οπτική της δομικής ανάλυσης των αναπαραστάσεων</u>: Η επίλυση του προβλήματος αποτελείται από διαδοχικές σχηματοποιήσεις σε διαδοχικές σελίδες, οι οποίες είναι συνδεδεμένες γνωστικά και όχι κατ' ανάγκη κατασκευαστικά. Η διαδικασία είναι συνδεδεμένη με τις στρατηγικές για την επίλυση του προβλήματος ή την πρόβλεψη των διαφορετικών δρόμων στην επίλυση σχετικών με διαδικασίες σκέψης των ατόμων ή διαφορετικούς στόχους.

Το σχήμα μπορεί να μετασχηματιστεί λόγω του συρσίματος σταδιακά σε ορθογώνιο, ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο, τετράγωνο και ορθογώνιο τραπέζιο. Οι μαθητές μέσω της διαδικασίας προσθήκης κίνησης «έχουν τη δυνατότητα να παρατηρήσουν την πορεία μετάβασης, γεφυρώνοντας έτσι το οπτικό χάσμα που υπάρχει ανάμεσα σε διαφορετικές δυναμικές αναπαραστάσεις που προέρχονται από το σύρσιμο του ποντικιού» (Sedig & Sumner, 2006). Επομένως, οι δυναμικές αναπαραστάσεις ενισχύουν την οπτικοποίηση των σχέσεων των αντικειμένων καθώς και την εμφάνιση τύπων τετραπλεύρων με ειδικές ιδιότητες, για παράδειγμα, τη δομή των τεμνόμενων διαγωνίων ενός παραλληλόγραμμου και για την ειδική θέση που το σημείο F συμπίπτει με ένα από τα σημεία P, O ενός τετραγώνου. Οι μαθητές θα αντιδράσουν στο οπτικό ερέθισμα και ο διάλογος που προκύπτει είναι αποτέλεσμα της αντίδρασης από το συνεχώς μεταβαλλόμενο οπτικό ερέθισμα. Τα αντικείμενα που μετασχηματίζονται αποκτούν πολλαπλούς ρόλους, ώστε η ανάπτυξη αιτιολόγησης στηρίζεται σε «ενέργειες (enactive) ή σε εικόνες ») (Semadeni, 1984). Επομένως, οι αιτιολογήσεις που μπορούν να αναπτυχθούν στους τρεις πρώτους τύπους ΣΟΕΑ είναι πραγματικές/εμπειρικές, (ή και θεωρήματα-εν-δράσει).

Στο δεύτερο και τρίτο τύπο τα αντικείμενα που μετασχηματίζονται καθώς και τα δομικά στοιχεία από τα οποία αποτελούνται μπορούν να γίνουν αντιληπτά μέσω (1) της σταδιακής εμφάνισής τους και των ομοιόμορφα σχολιασμένων ίσων σχηματικών μονάδων με στόχο την ανάπτυξη παραγωγικού συλλογισμού και γενικεύσεων για το μεμονωμένο ‘παράδειγμα’ στην οθόνη (στο δεύτερο τύπο) (2) του ταυτόχρονου μετασχηματισμού από μεταφορά και περιστροφή, και της ολικής εμφάνισής τους (στο τρίτο τύπο) με στόχο την ανάπτυξη συνδυασμού απαγωγικού και παραγωγικού συλλογισμού (3) του ανεξάρτητου μετασχηματισμού κάθε αναπαράστασης, της σταδιακής οικοδόμησης μιας πιο σύνθετης αναπαράστασης (στον τέταρτο τύπο) με στόχο την ανάπτυξη ικανότητας μετάφρασης της εικονικής αναπαράστασης σε λεκτική, καθώς και τη διερεύνηση της ικανότητας σύνδεσης των εικόνων με έννοιες και (4) της απεικόνισης της λύσης του προβλήματος (στο πέμπτο τύπο) σε μια αναπαραστατική σύνθεση του πρώτου-τέταρτου τύπου με στόχο την ανάπτυξη ικανότητας παραγωγικού συλλογισμού, την απομοντελοποίηση της λύσης του προβλήματος και επομένως την ικανότητα εφαρμογής της λύσης.

Μέσω της διαδικασίας οι μαθητές συνδυάζουν ενέργειες στο λογισμικό και αποδεικτική διαδικασία ή αυστηρή αιτιολόγηση. Συνεπώς η διαδικασία στο λογισμικό έχει μετασχηματιστεί σε ένα θεωρητικό μοντέλο συνδυασμού και συμπύκνωσης βημάτων και χρήσης αρχείων του λογισμικού προκειμένου να αποδείξουν το πρόβλημα. Η ανάλυση των διαφορετικών τεχνικών που επηρέασαν τη σχεδίαση των πέντε τύπων των ΣΟΕΑ θα επισημανθεί στη διαδικασία της ανάλυσης των δεδομένων της πειραματικής ομάδας η οποία παρουσιάζεται στο επόμενο κεφάλαιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{ο}

Ανάλυση των δεδομένων της μελέτης

4.1. Εισαγωγή

Στο τέταρτο κεφάλαιο θα παρουσιαστεί η ανάλυση δεδομένων της μελέτης της πειραματικής ομάδας στο δυναμικό περιβάλλον και η συγκριτική μελέτη η οποία αφορά τη μελέτη των μαθητών της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι.

Ως προς την ανάλυση των δεδομένων στο δυναμικό περιβάλλον :

Περιλαμβάνει την εξέλιξη της ιστορίας κάθε μαθητή σε τρία βασικά σκέλη:

(α) αναφορικά με την επίδραση των αλληλεπιδραστικών τεχνικών του λογισμικού στην ανάπτυξη ικανότητας μετατροπής μεταξύ αναπαραστάσεων της ίδιας οντότητας καθώς και την ανάπτυξη ικανότητας δομικής ανάλυσης των δυναμικών διαγραμματικών αναπαραστάσεων·

(β) αναφορικά με την επίδραση των αλληλεπιδραστικών τεχνικών του λογισμικού στη διατύπωση εννοιών και το μετασχηματισμό των εννοιών και

(γ) αναφορικά με την επίδραση των αλληλεπιδραστικών τεχνικών και της σύνθεσής τους στην ανάπτυξη επαγωγικού, απαγωγικού, μετασχηματιστικού και παραγωγικού συλλογισμού και συνεπώς στην ανάπτυξη του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης κατά μήκος της ερευνητικής διαδικασίας.

Ως προς την ανάλυση των δεδομένων στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι:

Για τη μελέτη καταγράφηκαν τα κοινά χαρακτηριστικά που εμφανίστηκαν (π.χ, τα χαρακτηριστικά Α1-Α7 εμφανίστηκαν στο Α στάδιο της διερευνητικής διαδικασίας, τα χαρακτηριστικά Β1-Β7 εμφανίστηκαν στο Β στάδιο κ.ο.κ.). Τα χαρακτηριστικά αυτά εμφανίστηκαν στα διαφορετικά στάδια σε έναν ή περισσότερους εκ των μαθητών και των δυο ομάδων επιπέδου 1 ή 2 van Hiele στο προ-τεστ. Παρουσιάζονται αποσπάσματα εκ των γραπτών τεστ των μαθητών, περιληπτική ανάλυση του τρόπου σκέψης κάθε μαθητή η οποία προκύπτει από την επίλυση του προβλήματος αλλά και τη σύγκριση με την επίλυση προβλημάτων σε προηγούμενα στάδια της μελέτης, καθώς και ποια χαρακτηριστικά κάθε σταδίου εμφανίζονται στον καθένα. Στα αποτελέσματα ακολουθεί συγκριτικός πίνακας και διατυπώνονται τα συμπεράσματα για κάθε στάδιο της μελέτης.

4.2. Ανάλυση των δεδομένων της μελέτης στο δυναμικό περιβάλλον

4.2.1. Μ1-ΟΜΑΔΑ Γ

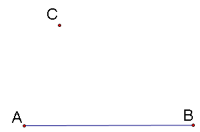
Ανάπτυξη ικανότητας μετασχηματισμού μεταξύ αναπαραστάσεων μέσω γνωστικών συγκρούσεων.

Ο μαθητής αναπτύσσει σταδιακά την ικανότητα μοντελοποίησης μιας λεκτικής (ή και νοητικής) αναπαράστασης σε εικονική. Επομένως, της μετατροπής των αναπαραστάσεων της έννοιας στο ίδιο αναπαραστατικό σύστημα (π.χ., εικονικό) ή μεταξύ διαφορετικών αναπαραστατικών συστημάτων (π.χ., λεκτικό, εικονικό). Η ικανότητα αυτή προκύπτει ως αποτέλεσμα της ανάπτυξης ικανότητας αποκωδικοποίησης της διαδικασίας, μέσω των εντολών και εργαλείων του λογισμικού, και αυτή μέσω γνωστικών συγκρούσεων στις δυο πρώτες φάσεις της ερευνητικής διαδικασίας. Ως αποτέλεσμα ο μαθητής ακολουθεί μια αυξανόμενη πορεία κατανόησης και ανάπτυξης του συλλογισμού, η οποία εκδηλώνεται μέσα από την ανάπτυξη των χαρακτηριστικών των διαφορετικών επιπέδων, όπως αυτά έχουν περιγραφεί από τον Battista (2007).

<u>Μέσω του εργαλείου σημείου + πειραματικού συρσίματος</u>

………

1. Ο Μ1 κατασκευάζει ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και ένα αυθαίρετο σημείο C ακριβώς πάνω από το ΑΒ. Ενώνει το C με το Α .
2. Μ1: *Θα πάρω και εδώ ένα σημείο.*
3. Το σημείο σύρεται ελεύθερα στην οθόνη και ο Μ1 σταματάει την κατασκευή.



Σχήμα 4.1.Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [1-3].

………

6. Μ2: *Και θα είναι παράλληλη στην ΑΒ.*
7. Μ1: *Και πως θα προκύψει παραλληλόγραμμο;*

………

Ο Μ1 κατασκευάζει ένα σημείο αυθαίρετο στην οθόνη το οποίο δε συσχετίζεται εννοιολογικά με τα υπόλοιπα σημεία Α, Β, C, ώστε να προκύψει ένα παραλληλόγραμμο. Επομένως, αρχικά κατασκευάζει ένα *σχέδιο παραλληλογράμμου*. Μέσω της κατασκευής του, προσπαθεί να ικανοποιήσει μόνο τους **οπτικούς περιορισμούς** του σχήματος. Η διαμεσολάβηση του **πειραματικού** συρσίματος του *δυναμικού σημείου* κορυφής του σχεδίου του, οδηγεί τον Μ1 σε **γνωστική σύγκρουση,** μεταξύ αυτού που γνωρίζει (αρχέτυπη εικόνα παραλληλογράμμου) και αυτού που αντιμετωπίζει στην οθόνη. Κατανοεί τότε, ότι το σχήμα είναι μεταβλητό. Στο [7] δεν κατανοεί την **θεσιακή επιλογή** των αντικειμένων για την κατασκευή, **επομένως δεν έχει ικανότητα μετατροπής της λεκτικής διατύπωσης (σε νοητική εικόνα) και σε εικόνα στην οθόνη**.

Μέσω του εργαλείου καθέτου + πειραματικού συρσίματος

………

15. Μ1: *Και από το construct >> perpendicular line.*
16. Μ2: *Αυτή είναι παράλληλη προς την ΑΒ.*

………

Στο [15] έχει κατασκευάσει τη **σειριακή κατανόηση** επιλογής των εργαλείων για την κατασκευή της καθετότητας και συμπληρώνει **λεκτικά** τη σειρά της τεχνολογικής διαδικασίας. Επομένως, το εργαλείο καθέτου διαμεσολαβεί, ώστε ο μαθητής να αποκωδικοποιήσει μια ιδιότητα του σχήματος, να αποκτήσει τη λεκτική κατανόηση της χρήσης του και την ικανότητα μοντελοποίησης **της λεκτικής διατύπωσης σε εικονική.**

Μέσω του εργαλείου κύκλου + πειραματικού συρσίματος

………

45. Ερ: *Πως θα κάνουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά ίση με το τμήμα αυτό;*
46. Μ1: *Με κύκλους!*
47. Ερ: *Επιλέγουμε επομένως το εργαλείο κύκλου.*
48. Μ1: *Πως θα το κάνουμε με μισή ή ίση;*

……**…..**

Ο μαθητής στο [48] προσδιορίζει το σχήμα του ρόμβου ως **οπτική ολότητα,** αφού δεν αναγνωρίζει τις ιδιότητες του σχήματος. Στο σημείο αυτό έρχεται σε **γνωστική σύγκρουση.**
Επομένως, δεν έχει ικανότητα μετατροπής της λεκτικής αναπαράστασης σε νοητική και στη συνέχεια σε εικονική.

Μέσω του εργαλείου ανάκλασης

………

166.Ερ: *Πως θα βρούμε το συμμετρικό του;*
*167.*Μ11: *Να πάρουμε μια ευθεία …*
168.Μ12: *Να το προεκτείνουμε…* **.**
*169.*Μ11: *Αυτό που λέγαμε την προηγούμενη φορά με την στροφή με 90^o*
170.Μ1: *Και με το reflect δε μπορούμε;*

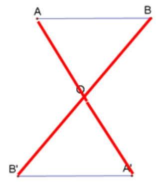
………

Προτείνει το εργαλείο ανάκλασης στο [170] για την περιστροφική συμμετρία σημείου. Ο μαθητής προσπαθεί να εφαρμόσει το **εργαλείο με οικονομία** ή να προσαρμόσει την διαδικασία της περιστροφής στη διαδικασία ανάκλασης που έχει κατανοήσει. Η κατασκευή του συμμετρικού σημείου ως προς κέντρο με το εργαλείο ανάκλασης του λογισμικού οδηγεί σε **εργαλειακό εμπόδιο,** αφού δεν ενεργοποιείται η εντολή. Επομένως, οδηγεί το μαθητή σε **γνωστική σύγκρουση** σχετικά με τις έννοιες της συμμετρίας ως προς κέντρο και ως προς άξονα και τη διαδικασία αποκωδικοποίησης τους. Κατανοεί την έννοια της περιστροφικής συμμετρίας, μέσω του προσαρμ. εργαλείου, όπως διαπιστώνεται στη συνέχεια.

<u>Μέσω του προσαρμ. εργαλείου και του πειραμ. συρσίματος</u>

……

183.Ερ: *Τι σχήμα είναι αυτό;*
184.Μ1: *Παραλληλόγραμμο… γιατί είναι οι απέναντι πλευρές του παράλληλες.*



Σχήμα 4.2. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [183-184]

……

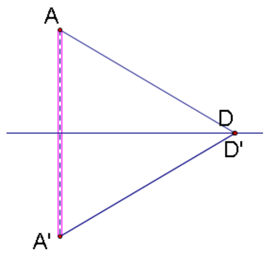
Στο [184] αναγνωρίζει το ημιτελές σχήμα του παραλληλογράμμου από τη βασική **πρωτεύουσα ιδιότητα** (παραλληλία των απέναντι ίσων συμμετρικών τμημάτων) την οποία διατυπώνει με **μαθηματική τυπική γλώσσα**. Αυτό είναι χαρακτηριστικό επιπέδου 2, αφού ο μαθητής, αναγνωρίζει το σχήμα, συμπληρώνοντας νοητικά τις γραμμές του σχήματος. Ταυτόχρονα μετασχηματίζει την **εικονική αναπαράσταση σε λεκτική**, αναδιατυπώνοντας την έκφραση στο [25]. Στο [184] το παραλληλόγραμμο έχει αποκτήσει το **χαρακτήρα σήματος,** ένδειξη που εμφανίζεται και στην εξέλιξη της διαδικασίας στο σημείο [87] των ΣΟΕΑ.

Ανάπτυξη ικανότητας δομικής ανάλυσης των σχημάτων– διπλή (/πολλαπλή) ερμηνεία γεωμετρικών αντικειμένων

<u>Μέσω του εργαλείου ανάκλασης και του θεωρητικού συρσίματος</u>

……

159.Σύρω το ένα άκρο σημείο του τμήματος μέχρι να ακουμπήσει
στον άξονα συμμετρίας
*160.*Ερ: *Τι σχήμα είναι αυτό;*
161.Μ1: *Αυτό είναι ένα ορθογώνιο (τρίγωνο) και αυτό είναι ένα ισοσκελές.*
162.Μ12 : *Γιατί οι δυο πλευρές του είναι ίσες.*
163.Ερ: *Και γιατί τέμνονται πάνω στην (ε);*
164.Μ12: *Γιατί είναι συμμετρικά ως προς την (ε).*
165.Μ1: *Μήπως γιατί στο λογισμικό θέλει να παραμείνει ισοσκελές αυτό εδώ;*



Σχήμα 4.3. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [159-165]

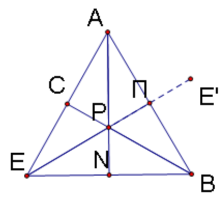
....

Αναγνωρίζει στο [161] τα υποσχήματα στα οποία διαχωρίζεται από τον άξονα συμμετρίας ένα ισοσκελές ως σύνθεση ορθογωνίων τριγώνων, **παρά την αλλαγή της θέσης προσανατολισμού του σχήματος**. Επομένως, έχει αναπτύξει την ικανότητα να **αναγνωρίζει τα δομικά μέρη στα οποία διαχωρίζεται** ένα σχήμα. «Η περιγραφή του στηρίζεται στην οπτική αντίληψη προκειμένου να προσδιορίσει τις σχέσεις των σχημάτων [σε αυστηρά άτυπη γλώσσα]» (Battista, 2007, p. 851) (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.1).

<u>Μέσω του προσαρμ. εργαλείου και πειραμ. συρσίματος</u>

....

199.Ερ : *Είναι **αυτό** το σημείο κέντρο συμμετρίας του σχήματος;*
*200.*Μ1: *Για να είναι αυτό κέντρο συμμετρίας, δεν θα έπρεπε αυτό εδώ να είναι ίσο με αυτό εδώ;*
201.Ερ: *Ποια είναι δηλαδή τα τμήματα;*
*202.*Μ1: *ΕΡ=ΡΠ*



Σχήμα 4.4.Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [199-202]

....

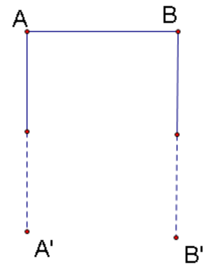
Ο μαθητής στο [200] αποκωδικοποιεί **λεκτικά την εικονική πληροφορία** με συνδυασμό άτυπης και τυπικής γλώσσας, εξετάζοντας αν το σχήμα στην οθόνη ικανοποιεί ένα σύνολο ιδιοτήτων (χαρακτηριστικό επιπέδου 2). Βασίζεται γι' αυτό στην οπτική αντίληψη και σε νοητικούς μετασχηματισμούς σύγκρισης δεδομένων.

<u>Μέσω του προσαρμ. εργαλείου με οικονομία ή κατάχρηση</u>

Στο [261] μεταφράζει τη νοητική του αναπαράσταση σε εικονική. Συνεπώς, αναπτύσσει την ικανότητα μετασχηματισμού της νοητικής εικόνας που έχει κατασκευάσει σε προηγούμενη φάση της ερευνητικής διαδικασίας --και την οποία δεν είχε στην αρχή-- αμφιταλαντευόμενος μεταξύ **θεωρητικού και οπτικού πεδίου**.

....

261.Ο Μ1 κατασκευάζει ένα ευθύγραμμο τμήμα. Στη συνέχεια επιλέγει το εργαλείο και το εφαρμόζει στο ένα άκρο του τετραγώνου, ώστε να μοιάζει η γωνία ίση με μια ορθή.
262.Ερ: *Τι πρέπει να έχει ;*
263.Μ1: *Τέσσερις γωνίες πρέπει να έχει, ορθές και …*
264.Μ12: *… Θέλουμε οι διαγώνιες να είναι ίσες.*
265.Η Μ11 επιλέγει το εργαλείο και το εφαρμόζει πάνω στην κάθετη, με αρχή το άκρο του ευθυγράμμου τμήματος.
266.Μ1: *Μήπως να κάνουμε αυτό με το rotate* ;



Σχήμα 4.5.Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [261-266]

……

Κατασκευάζει το τετράγωνο στο χωρογραφικό πεδίο του λογισμικού, χρησιμοποιώντας ιδιότητες του θεωρητικού πεδίου της γεωμετρίας (π.χ, ισότητα πλευρών, ορθές γωνίες και ιδιότητα μεσοπαραλλήλου). Για την κατασκευή του τετραγώνου κάνει χρήση του προσαρμ. εργαλείου **με οικονομία,** προκειμένου να κατασκευάσει δυο τμήματα που είναι κάθετα στο αρχικό και μεταξύ τους ίσα. Οι ενέργειες του είναι **αντίστροφες των ενεργειών** της Μ12 στο [261] η οποία είχε κατασκευάσει τους άξονες συμμετρίας του τετραγώνου, επιλέγοντας τα μέσα των απέναντι πλευρών. Επομένως, ο μαθητής χρησιμοποιεί διαδικασίες συνδεδεμένες με έννοιες, που έχει κατασκευάσει λόγω της αλληλεπίδρασης με τα άλλα μέλη της ομάδας (π.χ αλληλεπιδρά με την Μ12 για τη διατύπωση ιδιοτήτων του τετραγώνου στο [264]). Έχει συνδέσει την διαδικασία περιστροφής με την έννοια της ορθής γωνίας στο [266].

Η κατασκευή του επομένως είναι αντίκτυπος **των συνδεόμενων αναπαραστάσεων** που ο μαθητής έχει κατασκευάσει στη διάρκεια της διαδικασίας. Ο μαθητής τείνει να αντικαταστήσει το σχήμα με ένα σύνολο ιδιοτήτων του σχήματος. Επομένως, το τετράγωνο αποκτά --μέσω της συμμετοχής του μαθητή στο ΥΜΜ-- το *χαρακτήρα σήματος*.

<u>Μέσω των ΣΟΕΑ</u>

……

48. Ερ: *Ποια θέση έχει το Τ;*
49. Μ1:*Όταν είναι και αυτό μέσο!*

……

95. Μ1:*Αν αποδείξουμε ότι είναι παράλληλες τότε θα είναι παραλληλόγραμμο, αφού είναι και ίσες, άρα θα είναι διαγώνιες και θα τέμνονται πάντα στο ίδιο σημείο και επομένως θα διχοτομούνται.*

……

Ο Μ1 **αποκωδικοποιεί τη λεκτική διατύπωση της ερευνήτριας στο [49] σε εικονική και λεκτική.** Ο μαθητής μέσα από νοητικούς μετασχηματισμούς οδηγείται να συμπεράνει τη θέση του σημείου της σημαίας. Ομοίως, η οπτικοποίηση της δομής των τεμνόμενων διαγωνίων του παραλληλογράμμου στην οθόνη, οδηγεί στη λεκτική διατύπωση στο [95]. Επομένως, έχει αποκτήσει **την ικανότητα να αποκωδικοποιεί τη λεκτική διατύπωση σε εικονική με εργαλεία του λογισμικού και αντίστροφα,** αφού «κύριο κριτήριο για τον προσδιορισμό του σχήματος είναι να ικανοποιεί ένα ακριβές σύνολο τυπικών ιδιοτήτων» (επίπεδο 2.3) (Battista, 2007, p. 851).

Κατασκευή εννοιών-εν-δράσει- λογική συσχέτιση ιδιοτήτων

Μέσω του εργαλείου σημείου +θεωρητικού συρσίματος

....

25. Μ1: *Μήπως μπορούμε να κάνουμε copy-paste το AC και να το βάλλουμε;*

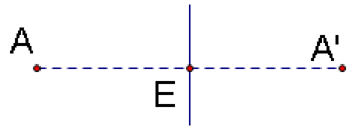
....

Ο Μ1 διατυπώνει με **δυναμικό** τρόπο ιδιότητες του παραλληλογράμμου στο [25], προκειμένου να εκφράσει την ισότητα και παραλληλία των απέναντι πλευρών του. Προσδιορίζει δηλαδή ιδιότητες του σχήματος, βασιζόμενος στην αντίληψη. Μέσω της έκφρασης του κατασκευάζει **ένα δυναμικό ορισμό** για το παραλληλόγραμμο. Οι διατυπώσεις του είναι συνδυασμός *άτυπης και δυναμικής γλώσσας.*

Μέσω του εργαλείου ανάκλασης + πειραματικού συρσίματος

....

125.Ερ: *Ποιες είναι οι ίσες αποστάσεις* ;
126.Μ1: *AE, A΄E* .



Σχήμα 4.6.Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [125-126]

....

Το **πειραματικό σύρσιμο** του σημείου ή του ανακλώμενου του σημείου οδηγεί στο μετασχηματισμό της *οπτικής δυναμικής αναπαράστασης*, η οποία μεταφράζεται με τη μεταβολή της απόστασης των σημείων από τον άξονα. Ο Μ1 ερμηνεύει **με συμβολικό τρόπο** την ισότητα των τμημάτων στο [126] και **αναγνωρίζει τα ίσα τμήματα,** παρά την αλλαγή προσανατολισμού του άξονα συμμετρίας.

Μέσω του προσαρμ. εργαλείου + θεωρητικού συρσίματος

....

183.Ερ: *Τι σχήμα είναι αυτό;*
184.Μ1: *Παραλληλόγραμμο… γιατί είναι οι απέναντι πλευρές του παράλληλες.*

....

Στο [184] αναγνωρίζει το ημιτελές σχήμα του παραλληλογράμμου από τη βασική **πρωτεύουσα ιδιότητα**. Η διατύπωση του μπορεί να χαρακτηριστεί **οικονομικός ορισμός του παραλληλογράμμου**.

Μέσω του προσαρμ. εργαλείου + θεωρητικού συρσίματος

………

196. Ο Μ1 επιλέγει ένα σημείο πάνω στον κύκλο
197.Ερ: *Το συμμετρικό αυτού του σημείου D, είναι;*
198.Μ1: *Αυτό εδώ πέρα* (δείχνει το τμήμα OD΄).
………………………………………………………
199.Ερ : *Είναι* ***αυτό*** *το σημείο κέντρο συμμετρίας του σχήματος;*
*200.*Μ1: *Για να είναι αυτό κέντρο συμμετρίας, δεν θα έπρεπε αυτό εδώ να είναι ίσο με αυτό εδώ;*
201.Ερ: *Ποια είναι δηλαδή τα τμήματα;*
*202.*Μ1: *ΕΡ=ΡΠ*

………

Στο [200] κατασκευάζει **ΣΕΔ** του προσαρμ. εργαλείου και κατασκευάζει την **έννοια-εν-δράσει** των συμμετρικών τμημάτων ως προς κέντρο. Στην έκφραση του περιέχεται μια υπονοούμενη «αν …τότε» δήλωση, αποτέλεσμα της επίδρασης του προσαρμ. εργαλείου. Προκύπτει μετά την γνωστική σύγκρουση, που ο μαθητής αντιμετωπίζει στο [198]. Επομένως, είναι αποτέλεσμα της κατανόησης της κεντρικής συμμετρίας, λόγω της χρήσης του προσαρμ. εργαλείου. Η διατύπωση αυτή μας βοηθά να συμπεράνουμε ότι (α) ο μαθητής **υπερέβη το γνωστικό εμπόδιο,** που παρουσιάστηκε (ως προς τις έννοιες της αξονικής συμμετρίας, συμμετρίας ως προς κέντρο) και (β) ότι κατανόησε την έννοια του συμμετρικού σημείου ως 1-1 συνάρτηση (μεταξύ του σημείου και του συμμετρικού του).

Μέσω του εργ. περιστροφής + θεωρητικού συρσίματος

Ο μαθητής κατασκευάζει έναν ορισμό για το τετράγωνο σε αλληλεπίδραση με το προσαρμ. εργαλείο του λογισμικού και την κατασκευή του σχήματος του ορθογωνίου που έγινε στην προηγούμενη φάση. Οι δηλώσεις του στο [263] μπορούν να αναδιατυπωθούν: «[τετράγωνο είναι το σχήμα που] έχει τέσσερις γωνίες ορθές [και ίσες διαγώνιες]». Είναι επομένως ένας **μη οικονομικός ορισμός του τετραγώνου** που προέκυψε λόγω της συνεργασίας του με την Μ12. Επομένως, μέσω της διαδικασίας οικοδομείται μια **αντιληπτική ιεράρχηση των ορθογωνίου – τετραγώνου.**

………

261.Ο Μ1 κατασκευάζει ένα ευθύγραμμο τμήμα. Στη συνέχεια επιλέγει το εργαλείο και το εφαρμόζει στο ένα άκρο του τετραγώνου, ώστε να μοιάζει η γωνία που σχηματίζεται ίση με μια ορθή.
262.Ερ: *Τι πρέπει να έχει ;*
263.Μ1: *Τέσσερις γωνίες πρέπει να έχει, ορθές και …*
264.Μ12: *… Θέλουμε οι διαγώνιες να είναι ίσες.*
265.Η Μ11 επιλέγει το εργαλείο και το εφαρμόζει πάνω στην κάθετη, με αρχή το άκρο του ευθυγράμμου τμήματος.
266.Μ1: *Μήπως να κάνουμε αυτό με το rotate* ;

……

Ανάπτυξη εικασιών και θεωρημάτων-εν-δράσει

<u>Μέσω του εργαλείου ανάκλασης + πειραματικού συρσίματος</u>

……

159.Σύρω το ένα άκρο σημείο του τμήματος μέχρι να ακουμπήσει στον άξονα συμμετρίας
*160.*Ερ: *Τι σχήμα είναι αυτό;*
161.Μ1: *Αυτό είναι ένα ορθογώνιο (τρίγωνο) και αυτό είναι ένα ισοσκελές.*
162.Μ12 : *Γιατί οι δυο πλευρές του είναι ίσες.*
163.Ερ: *Και γιατί τέμνονται πάνω στην (ε);*
164.Μ12: *Γιατί είναι συμμετρικά ως προς την (ε).*
165.Μ1: *Μήπως γιατί στο λογισμικό θέλει να παραμείνει ισοσκελές αυτό εδώ*;

……

Ο Μ1 στο [165] αναπτύσσει **επαγωγικό συλλογισμό**. Ο μαθητής οδηγείται σε γενίκευση για το σχήμα του ισοσκελούς μέσα από τις εκφράσεις «παραμένει», «πάντα». Η έκφραση του θα μπορούσε να αναδιατυπωθεί ως εξής: «[τα αντικείμενα **του λογισμικού** διατηρούν τις ιδιότητες για τις οποίες κατασκευάζονται με αποτέλεσμα να διατηρείται η ισότητα των τμημάτων], επομένως το τρίγωνο παραμένει [πάντα] ισοσκελές». Αιτιολογεί με την έννοια της αμετάβλητης ιδιότητας /χαρακτηριστικών **των σημείων αρχικού και ανακλώμενου,** χρησιμοποιώντας **άτυπη δήλωση.**

<u>Μέσω των ΣΟΕΑ</u>

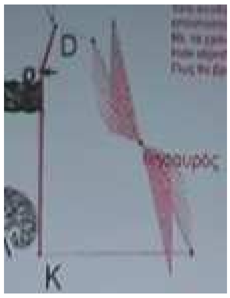
Ο Μ1 στο [12] των ΣΟΕΑ διατυπώνει με **συνδυασμό τυπικής και άτυπης γλώσσας** το συλλογισμό του. Ο μαθητής διατυπώνει μια ανεπαρκή «αν …τότε» δήλωση, στην οποία αναγνωρίζει την ιδιότητα των άκρων σημείων (δηλαδή, το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία των δέντρων είναι αμετάβλητο, αφού και τα άκρα είναι αμετάβλητα).

Στο [23] διατυπώνει μια **εικασία** σε συνδυασμό τυπικής και δυναμικής γλώσσας («αν κάνουμε δυο rotation, δηλαδή να στρέψουμε το ΟΔ και το ΟΚ, τότε θα έχουμε κάνει την ίδια κατασκευή»). Η έκφραση του μπορεί να αναδιατυπωθεί: «αν περιστρέψουμε τα τμήματα OD, OK τότε θα προκύψει **η ίδια** κατασκευή [**για κάθε** σημείο O του τμήματος DK]». Πρόκειται επομένως για μια λογική δήλωση, όπου ο M1 εφαρμόζει τον κανόνα modus ponens («αν…τότε»).

Η έκφραση «για κάθε σημείο O του DK» είναι μια αναδιατύπωση της έκφρασης του στο [21] (πάρε ένα σημείο όπου θες). Επομένως, οδηγείται σε μια **γενίκευση,** αποτέλεσμα του συνδυασμού **επαγωγικού –μετασχηματιστικού συλλογισμού** που ο μαθητής αναπτύσσει.

………

8. Ερ: *Πως θα βρούμε που είναι ο θησαυρός;*
9. M2: *Ξέρουμε που είναι τα δέντρα και δεν ξέρουμε που είναι ο θησαυρός*!
10. M1: *Τα δέντρα είναι εκεί πάντα έτσι;*
11. M1: *Και ο θησαυρός είναι ακούνητος* !
12. M1:…*Αν ψάχναμε να βρούμε μια σχέση για τον τρόπο τον οποίο δουλεύει γιατί ξέρουμε ότι είναι αμετακίνητη η ευθεία.*
13. M1: *Το rotate θα μας βοηθήσει*!
14. M2: *Πρώτα- πρώτα θα ενώσουμε το D και το K*
15. M1: *Να τα ενώσουμε*!
16. M1: *Βάλε ένα σημείο πάνω στο DK. Όπου και να το βάλεις ο θησαυρός εκεί θα μείνει.*
17. Ερ.: *Πως το ξέρεις* ;
18. M1: *Πριν δεν το κουνούσαμε και έμενε εκεί το σημείο*;
19. Ο μαθητής είχε παρατηρήσει ότι δεν άλλαζε θέση το σημείο του θησαυρού.
20. M2: *Τι να κάνω τώρα;*
21. M1: *Πάρε ένα σημείο όπου θες!*



Σχήμα 4.7. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [8-21, 23, 34-36].

………

23. M1*: Αν κάνουμε δυο rotation, δηλαδή να στρέψουμε το OD και το OK, τότε θα έχουμε κάνει την ίδια κατασκευή.*

………

34. M1: *Ταυτόχρονα άμα το κουνάμε, αυτό εδώ είναι σταθερό.*
35. M2: *Ποιο να κουνάς;*
36. M1: Το O.

………

<u>Μέσω του εργαλείου συρσίματος και ίχνους</u>

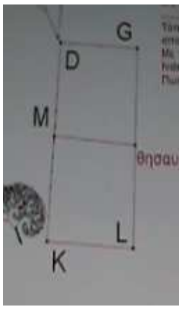
Η έκφραση του M1 στο [16] («βάλλε ένα σημείο πάνω στο DK, όπου και να το βάλεις ο θησαυρός εκεί θα μείνει») μας οδηγεί να συμπεράνουμε ότι ο μαθητής νοητικά έχει μετασχηματίσει στοιχεία του διαγράμματος (για παράδειγμα, τα τμήματα που θα προκύψουν από τους μετασχηματισμούς ενός σημείου O, αυθαίρετου σημείου που μπορεί να τοποθετηθεί στο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα δυο σταθερά σημεία των δέντρων). Στο σημείο αυτό προβλέπει την αμεταβλητότητα του σημείου T, επομένως ο μαθητής αναπτύσσει **μετασχηματιστικό συλλογισμό**. Η έκφραση του μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής: «αν τοποθετήσουμε ένα σημείο πάνω στο αμετάβλητο τμήμα DK τότε [παρά τους συνδεόμενους μετασχηματισμούς των τμημάτων], το σημείο T του θησαυρού θα παραμείνει αμετάβλητο». Αυτό είναι ένα **θεώρημα-εν-δράσει** που προκύπτει ως αποτέλεσμα της κατασκευής του **ΣΕΔ** του εργαλείου **ίχνους**. Η διατύπωση του στο [16] είναι σύνθετο αποτέλεσμα της οπτικοποίησης του μετασχηματισμού του διαγράμματος, αλλά και των νοητικών μετασχηματισμών που ο μαθητής κατασκευάζει. Επομένως, **της δυναμικής οπτικοποίησης που ο μαθητής αναπτύσσει, λόγω της επίδρασης των ΣΟΕΑ,** το οποίο εμφανίζεται και στη συνέχεια της συζήτησης στο [18] και [21].

Στο [34] ο M1 διατυπώνει μια εικασία σε άτυπη γλώσσα που προκύπτει ως αντιληπτικό αποτέλεσμα, λόγω της επίδρασης του εργαλείου **συρσίματος και ίχνους**. Η διατύπωση του μπορεί να αναδιατυπωθεί σε αυστηρή γλώσσα «αν σύρουμε το σημείο Ο τότε το σημείο Τ είναι σταθερό για κάθε θέση του σημείου Ο». Ο μαθητής έχει **συνδέσει τις δυναμικές αναπαραστάσεις** (π.χ, «ταυτόχρονα άμα κουνάμε αυτό εδώ είναι σταθερό»), το οποίο επαναλαμβάνει με την διατύπωση της «αν …τότε» δήλωσης. Στην πρόταση του οδηγείται σε **γενίκευση** (π.χ [21, 34]).

Ανάπτυξη ικανότητας παραγωγικού συλλογισμού

……

62. Ερ: *Πόση απόσταση θα προχωρήσει κάποιος για να φτάσει;*
63. M1: *Τότε, θα κινηθεί πάνω στην μεσοκάθετη καθώς είναι το M το μέσο της DK, στη μισή (απόσταση) της DK.*



Σχήμα 4.8. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [62-63]

……

Στο [63], η φράση του «στη μισή απόσταση της DK» δηλώνει ότι ο μαθητής έχει συμπεράνει ότι η λύση του προβλήματος είναι το ευθύγραμμο τμήμα που είναι «παράλληλο και ίσο με το τμήμα DG, που είναι ίσο με το μισό της DK». Επομένως, έχει αποκτήσει την ικανότητα να συσχετίσει τις ιδιότητες των τμημάτων. Η διατύπωση του περιλαμβάνει **μια αλυσίδα λογικών δηλώσεων, αποτέλεσμα παραγωγικού συλλογισμού,** μέσω της οποίας εφαρμόζει τη λύση στο πραγματικό πρόβλημα: δηλαδή **που** θα κινηθεί κάποιος, **γιατί** θα κινηθεί εκεί και **πόσο** θα κινηθεί.

Αναγνωρίζει τη δομή των διαγωνίων και αναπτύσσει **απαγωγικά επιχειρήματα**, αιτιολογώντας το είδος των τριγώνων που σχηματίζονται από την περιστροφή περί 90^o στο [95]. Η έκφραση του στο [93] είναι μια σύνθετη έκφραση, **αλυσίδα παραγωγικών δηλώσεων**, χαρακτηριστικό επιπέδου 3.

....

94. M1: *Είναι ορθογώνια για τι το πήραμε με rotation.*
95. M1: *Αν αποδείξουμε ότι είναι παράλληλες τότε θα είναι παραλληλόγραμμο, αφού είναι και ίσες, άρα θα είναι διαγώνιες και θα τέμνονται πάντα στο ίδιο σημείο και επομένως θα διχοτομούνται.*

....

Η διατύπωση του Μ1 περιέχει στοιχεία **παραγωγικού συλλογισμού.** Ο μαθητής έχει κατασκευάσει μια **λογική πρόταση** που προέκυψε από μια προϋπάρχουσα πρόταση και τους συμπερασματικούς κανόνες που έχει κατανοήσει. Επομένως, κατασκευάζει μια λογική πρόταση ως αποτέλεσμα της προϋπάρχουσας γνώσης, που έχει αποκτηθεί στη διάρκεια της δεύτερης φάσης της ερευνητικής διαδικασίας (δηλαδή, των συμπερασματικών κανόνων «οι διαγώνιες του παραλληλογράμμου πάντοτε διχοτομούνται» και «ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο όταν οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες και ίσες»). Στην έκφραση του οδηγείται σε **γενίκευση** («θα τέμνονται πάντα στο ίδιο σημείο»), η οποία είναι συνδυασμός οπτικοποίησης αλλά και αφαιρετικών διαδικασιών σκέψης, αφού «χρησιμοποιεί εμπειρικά στοιχεία για να καταλήξει στο συμπέρασμα ότι αν ένα σχήμα έχει μια ιδιότητα, έχει και μια άλλη» (Battista, 2007, p. 852) χαρακτηριστικό επιπέδου 3.1.

4.2.2. M2-ΟΜΑΔΑ Γ

Ανάπτυξη ικανότητας μετασχηματισμού μεταξύ αναπαραστάσεων μέσω γνωστικών συγκρούσεων.

Μέσω του εργαλείου σημείου +πειραματικού συρσίματος

Στα σημεία [9, 13] η μαθήτρια αντιμετωπίζει **εμπόδια** που προκύπτουν από τη δυσκολία κατανόησης **της σειριακής και θεσιακής επιλογής** των σχηματικών μονάδων και εργαλείων κατασκευής καθέτων του λογισμικού.

....

6. M2: *Και θα είναι παράλληλη στην ΑΒ.*
7. M1: *Και πως θα προκύψει παραλληλόγραμμο;*
8. M2: *Θα κάνουμε το ίδιο που κάναμε, θα πάρουμε σημείο στην από πάνω που θα είναι παράλληλη με την ΑΒ.*

....

Μέσω του εργαλείου καθέτων

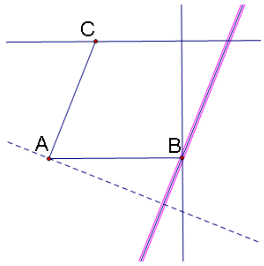
....

12. Μ2: *Τώρα θέλω να φέρω την κάθετη πάνω σ' αυτή* (δείχνοντας την κάθετη που έφερε) ...*Θα επιλέξω όμως ένα σημείο πάνω σ' αυτή, έτσι δεν είναι ;*
13. Ερ: *Γιατί δεν επιλέγεις όμως ένα σημείο το οποίο το ξέρεις ήδη;*
14. Μ2: *Το C;* ... *άρα πατάω το* C (σχήμα 2)
15. Μ1: *Και από το construct >> perpendicular line.*
16. Μ2: *Αυτή είναι παράλληλη προς την ΑΒ.*

....

22. Μ2: *Λέω να κάνουμε το ίδιο όπως με τις άλλες παράλληλες*
23. Η Μ2 επιλέγει το Α και την AC και φέρνει την κάθετη.
24. Μ2: *Και μετά κάνουμε κάθετη σ' αυτή που φέραμε.*

25. Μ1: *Μήπως μπορούμε να κάνουμε copy-paste το AC και να το βάλλουμε;*
26. Μ2: *Να φέρουμε κάθετη από το B στην κάθετη αυτή, που κατασκευάσαμε.*



Σχήμα 4.9. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [12-26]

....

Αναπτύσσει **μετασχηματιστικό συλλογισμό** στα [6, 8, 22], προβλέποντας τη διαδικασία κατασκευής και στη συνέχεια αποτυπώνοντας τη νοητική της εικόνα σε σχέδιο στην οθόνη. Κατά τη διάρκεια της κατασκευαστικής διαδικασίας αντιμετωπίζει **γνωστικές συγκρούσεις** που προκύπτουν, λόγω των γνωστικών **εμποδίων** (που αφορούν είτε τη φύση του λογισμικού δηλαδή **εργαλειακών εμποδίων**,είτε του ίδιου αντικειμένου της γεωμετρίας) που παρουσιάζονται. Για παράδειγμα, η μη ενεργοποίηση της εντολής, οδηγεί τη μαθήτρια να αναπτύξει διαδικασίες σκέψης προκειμένου να επιλέξει με την κατάλληλη σειρά τις σχηματικές μονάδες και να ολοκληρώσει την κατασκευή του **σχήματος του παραλληλογράμμου,** αλλάζοντας τον **προσανατολισμό της επιλογής των αντικειμένων.** Επομένως, αναπτύσσει την ικανότητα **θεσιακής και σειριακής** επιλογής των σχηματικών μονάδων και εργαλείων του λογισμικού, κατά συνέπεια την ικανότητα μετατροπής μιας **λεκτικής αναπαράστασης σε εικονική**.

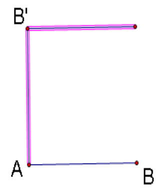
Αναλυτικότερα: Στο [12-16] η επιλογή του κατάλληλου σημείου αποτελεί **εμπόδιο** για την κατασκευή της κάθετης. Η μαθήτρια έρχεται σε **γνωστική σύγκρουση** αναφορικά με την επιλογή της θέσης του σημείου, δηλαδή η **θεσιακή κατανόηση** της επιλογής της σχηματικής μονάδας αποτελεί εμπόδιο για τη μετατροπή της νοητικής εικόνας σε εικονική. Στο [14] κατανοεί τη θέση του σημείου και κατασκευάζει την ευθεία, με αποτέλεσμα να μετατρέψει την **εικονική αναπαράσταση σε λεκτική.** Η μαθήτρια δε διατυπώνει αρχικά την ιδιότητα της κατασκευής που προκαλεί αυτή τη διαδικαστική δράση. Στο [26] διατυπώνει λεκτικά τη διαδικασία πριν ολοκληρώσει την κατασκευή. Επομένως, λόγω της γνωστικής σύγκρουσης που έχει προηγηθεί η μαθήτρια έχει αναπτύξει την κατανόηση **της θεσιακής επιλογής** των σχηματικών μονάδων την οποία και διατυπώνει με μαθηματική γλώσσα. Η λεκτική κατανόηση εμφανίζεται σχεδόν ταυτόχρονα με τη **θεσιακή κατανόηση** επιλογής των σχηματικών μονάδων. Επομένως, αναπτύσσει την ικανότητα μετατροπής μιας **νοητικής αναπαράστασης σε εικονική και λεκτική αναπαράσταση**.

Μέσω του εργαλείου σημείου

………………………………………………………………………………………………………

82. Μ11: *Άμα κάνουμε όπως το ορθογώνιο … ορίσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα και πάρουμε όπως (εκεί) τις κάθετες;*
83. Μ2: *Παίρνουμε πρώτα ένα ευθύγραμμο τμήμα.*
84. Μ2: *Θα πάρουμε ένα άλλο τμήμα ίσο με αυτό.*

96. Η Μ2 τοποθετεί ένα σημείο και στη συνέχεια προσπαθεί να φέρει μια ευθεία να μοιάζει παράλληλη
97. Μ12: *Ναι, αλλά θέλουμε να ξέρουμε ότι είναι ίσες .*
98. Μ11: *Που ξέρουμε ότι είναι τετράγωνο;*



Σχήμα 4.10. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [82- 98]

………………………………………………………………………………………………………

Μέσω του εργαλείου περιστροφής

………………………………………………………………………………………………………

105.Μ2: *Άμα κάνουμε κλικ πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα αυτό και μετά…* (το περιστρέψουμε)

………………………………………………………………………………………………………

108.Μ2: *Τώρα να το πάρουμε και από την άλλη .. επιλέγουμε το σημείο και … .το τμήμα … και τώρα παίρνουμε το σημείο.*

………………………………………………………………………………………………………

Στο διάστημα [82-84, 96-98] **αντιμετωπίζει εμπόδιο αποκωδικοποίησης** της νοητικής αναπαράστασης σε εικονική, με αποτέλεσμα να επιλέξει τη θέση του σημείου και του αντικειμένου με αντιληπτικό τρόπο. Έρχεται σε **γνωστική σύγκρουση** και στο [105] επινοεί την διαδικασία περιστροφής, διατυπώνοντας **τη θεσιακή και λεκτική κατανόηση** της εφαρμογής του εργαλείου περιστροφής για την κατασκευή του τετραγώνου στο [108]. Επομένως, μέσω της διαδικασίας οδηγείται να αποκωδικοποιήσει ιδιότητες του σχήματος, μετατρέποντας τη νοητική της αναπαράσταση σε εικονική και λεκτική με χρήση εργαλείων. Η Μ2 συνθέτει το σχήμα του τετραγώνου, διατυπώνοντας τις ιδιότητες της καθετότητας και ισότητας των πλευρών του σχήματος, άρα τις **πρωτεύουσες ιδιότητες** του που αφορούν τις πλευρές και τις γωνίες.

Ανάπτυξη ικανότητας δομικής ανάλυσης – διπλής (/πολλαπλής) ερμηνείας γεωμετρικών αντικειμένων

<u>Μέσω του εργαλείου σημείου+πειραματικού συρσίματος</u>

……

69. Μ12: *Να φέρουμε μεσοκάθετο στη βάση.*
70. Μ11: *Να βρούμε το μέσο.*
71. Μ2: *Τώρα διαλέγουμε ένα σημείο όποιο θέλουμε.*

……

Στο [71] αναπτύσσει **επαγωγικό συλλογισμό,** ως αποτέλεσμα του πειραματικού συρσίματος επί του σημείου. Επομένως, κατανοεί ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου πληροί την ιδιότητα να απέχει εξίσου από τα άκρα του τμήματος, και οδηγείται σε **γενίκευση**. Έχει αποκτήσει την ικανότητα να μετατρέψει μια **νοητική αναπαράσταση σε λεκτική και στη συνέχεια σε εικονική**.

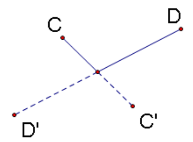
<u>Μέσω του προσαρμ. εργαλείου</u>

………

186.Μ12: *Οι διαγώνιες διχοτομούνται* (ταυτόχρονα με την Μ2).

311.Ερ: *Κάνε ένα τυχαίο τετράπλευρο και σύνδεσε τα μέσα των πλευρών.*
312.Μ11: *Όχι!... αυτό μ' αυτό και αυτό μ' αυτό.*
313.Η Μ2 είχε αποφασίσει να συνδέσει τα απέναντι σημεία και η Μ11 της υποδεικνύει να συνδέσει τις διαδοχικές κορυφές του σχήματος.

………



Σχήμα 4.11. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [186, 311-313]

Η Μ2 στο [186] μετατρέπει **μια εικονική αναπαράσταση σε λεκτική** ως αποτέλεσμα της οπτικοποίησης των τεμνόμενων διαγωνίων. Η μαθήτρια αποδίδει στα τμήματα που σχηματίζονται **διπλό ρόλο,** αφού τα αναγνωρίζει ως διαγώνιες ενός σχήματος, σχήμα που ολοκληρώνει νοητικά. Στο [313] αναγνωρίζει το σχήμα του παραλληλογράμμου από τα τέσσερα σημεία των κορυφών εσωτερικού τετράπλευρου. Επομένως, μεταφράζει τη **λεκτική διατύπωση** της ερευνήτριας **σε νοητική και στη συνέχεια εικονική**. Η μαθήτρια έχει αποκτήσει την ικανότητα να συμπληρώνει νοητικά τις γραμμές του σχήματος και αναγνωρίζει το σχήμα του παραλληλογράμμου, ενώ δεν έχει εμφανιστεί ολόκληρο στην οθόνη ή έχουν εμφανιστεί κάποια στοιχεία του, χαρακτηριστικό επιπέδου μεγαλύτερου από 2, που η μαθήτρια ανήκει αρχικά.

<u>ΣΟΕΑ Δ φάσης</u>

Η Μ2 αντιλαμβάνεται ότι το τετράπλευρο που σχηματίζεται είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και αιτιολογεί την απάντηση της. Η μαθήτρια οπτικοποιεί την καθετότητα των τμημάτων DG, DM, καθώς και των ΜΚ, KL την οποία διατυπώνει στο [54]. Η μαθήτρια έχει κατασκευάσει το ΣΕΔ του εργαλείου περιστροφής και την έννοια της ισότητας και καθετότητας των τμημάτων από περιστροφή. Επομένως, έχει αναπτύξει την ικανότητα μετατροπής μεταξύ αναπαραστάσεων και από **μια εικονική αναπαράσταση,** μέσω νοητικών μετασχηματισμών **οδηγείται σε μια λεκτική.**

<u>Μέσω των ΣΟΕΑ Δ φάσης</u>

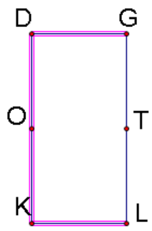
………

52. M2: *Τώρα είναι ορθογώνιο.*
53. Ερ: *Γιατί είναι ορθογώνιο;*
54. M2: *Γιατί έχει 90° εκεί, 90° εκεί …*
55. M2: …*Επειδή είναι κάθετες γιατί οι γωνίες είναι από 90 μοίρες άρα είναι παράλληλες*
56. Ερ: *Και που είναι τώρα ο θησαυρός;*
57. M2: *Είναι απέναντι.*
58. M1: *Ο θησαυρός τώρα … μήπως είναι στη διχοτόμο.*
59. M2: *Αν ενώσουμε το Ο με το Τ τότε θα είναι άξονας συμμετρίας.*

……

61. M2: *Ότι το GT=TL … είναι το M το μέσο DK … και είναι και άξονας συμμετρίας, άρα είναι κάθετη και το DM=MK …δηλαδή είναι πάνω στην μεσοκάθετη επομένως GT=TL … .αλλά σε πόση απόσταση ;*

……



Σχήμα 4.12. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [52-59, 61]

Αναγνωρίζει τις ιδιότητες του σχήματος και από αυτές συμπεραίνει ότι το σχήμα είναι ορθογώνιο. Οι θέσεις των σημείων Ο, Τ την οδηγεί να συμπεράνει ότι το τμήμα ΟΤ είναι άξονας συμμετρίας και να οδηγηθεί στη λύση του προβλήματος. Η μαθήτρια έχει αναπτύξει την ικανότητα να **συνδέει νοητικά αναπαραστάσεις**, που έχει αλληλεπιδράσει στις προηγούμενες φάσεις της ερευνητικής διαδικασίας. Επομένως, έχει αναπτύξει την ικανότητα **δομικής ανάλυσης** του σχήματος και την ικανότητα να αποδίδει στα ίδια αντικείμενα **διπλούς ρόλους** (π.χ το τμήμα MT είναι μεσοκάθετος του τμήματος DK, αλλά και άξονας συμμετρίας του ορθογωνίου παραλληλογράμμου).

<u>Μέσω των ΣΟΕΑ Δ φάσης</u>

Η Μ2 έχει αναπτύξει την ικανότητα να **μετατρέπει μια εικονική αναπαράσταση σε λεκτική, προσδιορίζοντας τις ιδιότητες του σχήματος**. Για παράδειγμα στο [80] κατανοεί από την ιδιότητα των διαγωνίων ότι το σχήμα είναι παραλληλόγραμμο.

78. M2: *Θα αποδείξουμε ότι το X είναι μέσο σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα που παράγεται. Θα ενώσουμε το H με το Q;*
79. Φέρνει την ευθεία LS.
80. M2: *Βασικά, επειδή είναι διαγώνιες αυτές, θα πάρω ένα σχήμα …*
81. Ερ: *Ποιες είναι διαγώνιες;*
82. M2: *Οι PQ, HL.*
83. Ερ: *Σε ποιο είναι διαγώνιες;*
84. M2: *Να βρω ένα σχήμα που να είναι διαγώνιες … ποια θα ενώσω όμως;*
85. M2: *α! το P με το L!* (Με έκπληξη)!
86. Ερ :*Τι σχήμα είναι αυτό;*
87. M1: *Παραλληλόγραμμο … γιατί οι διαγώνιες διχοτομούνται …*
88. M2: *Θέλουμε να δείξουμε ότι είναι παραλληλόγραμμο … πρέπει να αποδείξουμε έχει δυο πλευρές παράλληλες και ίσες … PH με την QL*
89. M2: *Επειδή ZY είναι κοινή (δείχνει το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα δυο σημεία Z, Y)…ισχύει ότι θα είναι ίσες άρα θα έχουμε ότι δυο απέναντι πλευρές είναι ίσες ZY=HP=QL.*
90. M2: *Πρέπει να δείξουμε ότι είναι παράλληλες.*
91. M2: *Θα πρέπει να δείξουμε ότι είναι και ορθογώνια.*
92. M1: *Είναι ορθογώνια για τι το πήραμε με rotation.*
93. M1:*Αν αποδείξουμε ότι είναι παράλληλες τότε θα είναι παραλληλόγραμμο, αφού είναι και ίσες, άρα θα είναι διαγώνιες και θα τέμνονται πάντα στο ίδιο σημείο και επομένως θα διχοτομούνται.*
94. M2: *Θα αποδείξουμε ότι δυο ευθείες είναι παράλληλες… θα αποδείξουμε ότι είναι προς τρίτη ευθεία παράλληλες, αλλά εδώ δεν έχουμε ή ότι είναι κάθετες προς Τρίτη ευθεία; οπότε είναι μεταξύ τους παράλληλες.*
95. Ερ: *Τι σχέση έχει η PH με την IP ;*
96. M2: *Είναι κάθετες όμοια και οι GQ, QL.*
97. Ερ: Τι σχέση πρέπει να έχει τότε η GQ με την IP;
98. M2: *Να είναι παράλληλες … Αα! αλλά και αυτές είναι κάθετες, άρα οι QL με την PH είναι παράλληλες*
99. M1: *Η GQ με την IP είναι παράλληλες γιατί είναι τραπέζιο, αφού το αποδείξαμε στην αρχή αλλά και το X είναι μέσο αφού διχοτομούνται.*

Σχήμα 4.13. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα [78-99]

Επομένως, οδηγείται μέσω νοητικών μετασχηματισμών να συμπεράνει ιδιότητες των στοιχείων του διαγράμματος και να αναγνωρίσει υπο-σχήματα σε ένα συνολικό σχήμα. Έχει αποκτήσει την **ικανότητα να αποδίδει διπλούς ρόλους** στα στοιχεία του διαγράμματος.

Για παράδειγμα αναγνωρίζει ότι το τμήμα PH είναι πλευρά του τριγώνου IPH αλλά και πλευρά του παραλληλογράμμου PHQL. Οι αναπαραστάσεις της τελευταίας φάσης είναι **συνδεδεμένες εννοιολογικά** και διαδικαστικά με την α και β φάση της ερευνητικής διαδικασίας. Συνεπώς, **αναπτύσσει την ικανότητα** να λειτουργεί (αναγνωρίζει υποδομές, μετακινείται από ένα αναπαραστατικό σύστημα σε άλλο κλπ.) σε ένα πολυπλοκότερο σχήμα, λόγω της επίδρασης των ΣΟΕΑ του μαθησιακού μονοπατιού.

Κατασκευή εννοιών-εν-δράσει-- λογική συσχέτιση ιδιοτήτων

Μέσω του εργαλείου κατασκευής καθέτων

……

12. Μ2: *Τώρα θέλω να φέρω την κάθετη πάνω σ' αυτή* (δείχνοντας την κάθετη που έφερε) …*Θα επιλέξω όμως ένα σημείο πάνω σ' αυτή, έτσι δεν είναι ;*

13. Ερ: *Γιατί δεν επιλέγεις όμως ένα σημείο το οποίο το ξέρεις ήδη*;

14. Μ2: *Το C;* … *άρα πατάω το C* (σχήμα 2)

15. Μ1: *Και από το construct >> perpendicular line.*

16. Μ2: *Αυτή είναι παράλληλη προς την ΑΒ.*

……

Διατυπώνει μια **έννοια-εν-δράσει** στο [16] μετά την κατασκευή των καθέτων. Η γλώσσα που χρησιμοποιεί είναι συνδυασμός **τυπικής μαθηματικής και άτυπης**.

Μέσω του εργαλείου κύκλου + πειραματικού συρσίματος

……

56. Ερ: *Τι σχήμα είναι αυτό*;

57. Όλοι: *Ρόμβος.*

58. Ερ: *Γιατί;*

59. Μ2: Γιατί έχει όλες τις πλευρές ίσες.

60. Μ11: *Γιατί είναι χορδές* … *που τέμνονται.*

……

186.Μ12: *Οι διαγώνιες διχοτομούνται* (ταυτόχρονα με την Μ2).

……

Στο [59] διατυπώνει έναν **οικονομικό ορισμό** του ρόμβου**, πρωτεύουσα ιδιότητα** του ρόμβου, ως αποτέλεσμα του πως αντιλαμβάνεται τον ρόμβο μέσω της κατασκευής του διαγράμματος του ισοπλεύρου. Η Μ2 στο [186] αιτιολογεί με την ιδιότητα-κριτήριο του παραλληλογράμμου σε αλληλεπίδραση με την ομάδα και το προσαρμ. εργαλείο, επομένως το παραλληλόγραμμο έχει αποκτήσει τον **χαρακτήρα σήματος**.

Μέσω των ΣΟΕΑ Γ φάσης

……

333.Μ11: *Οι διαγώνιες* … *να είναι κάθετες μεταξύ τους !*

334. Ερ: *Αρκεί αυτή η συνθήκη;*

*335.*Μ12: *Όχι !*

*336.*Μ2: *Άμα είναι παραλληλόγραμμο !*

……

Στο [336] διατυπώνει σε συνεργασία με την Μ11 μια **έννοια-εν-δράσει,** η οποία μπορεί να χαρακτηριστεί **αυθαίρετος οικονομικός ορισμός** για το σχήμα του ορθογωνίου. Ο ορισμός που οι μαθήτριες κατασκευάζουν μπορεί να αναδιατυπωθεί: «το τετράπλευρο στο εσωτερικό είναι ορθογώνιο αν είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιες του εξωτερικού τετραπλεύρου τέμνονται κάθετα». Επομένως, η Μ2 αναπτύσσει αφαιρετική ικανότητα και ικανότητα σύνθεσης ιδιοτήτων.

<u>Μέσω των ΣΟΕΑ Δ φάσης</u>

……….

1. Ερ: *Ποιο σημείο πρέπει να μετακινήσουμε για να παρατηρήσουμε τις θέσεις του σημείου Τ;*
2. Μ1: *Το Ο.*
3. Σύρουν το σημείο Ο.
4. Μ2: *Το OD=OE.*

……….

Για παράδειγμα, στο [4] αντιλαμβάνεται την ισότητα των τμημάτων, λόγω του **ΣΕΔ** που έχει κατασκευάσει κατά τη διάρκεια της **εργαλειακής γένεσης** για το εργαλείο περιστροφής και επεκτείνει την κατανόηση για την ισότητα των αντικειμένων από περιστροφή. Στο [67] οπτικοποιεί την ισότητα των τριγώνων, η οποία προκύπτει μέσω των ταυτόχρονων μετασχηματισμών τους και είναι αποτέλεσμα της επίδρασης περιστροφής, σχολιασμού και πειραματικού συρσίματος των τριγώνων.

Η μαθήτρια μέσω της ΑΟΑ που αναπτύσσεται επεκτείνει το ΣΕΔ για την περιστροφή των τριγώνων και κατανοεί την ισότητα των τριγώνων από περιστροφή. Κατασκευάζει δηλαδή **ένα ΣΕΔ δεύτερου επιπέδου**, το οποίο οικοδομείται με δομική μονάδα το αρχικό ΣΕΔ περιστροφής τμήματος.

Επομένως, η Μ2 έχει κατασκευάσει το ΣΕΔ για την περιστροφή του τμήματος και επεκτείνει αυτό το σχήμα για την περιστροφή των τριγώνων, επισημαίνοντας την ισότητα των τριγώνων παρά την αλλαγή προσανατολισμού των σχημάτων. Οδηγείται δηλαδή στην κατασκευή εννοιών (π.χ ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο, ίσα ορθογώνια τρίγωνα).

……

66. Σύρω το σημείο της σημαίας ώστε να αλλάζει το σχήμα των ορθογωνίων τριγώνων που παρά την μεταβολή του σημείου παραμένουν ίδια στην οθόνη
67. Μ2: *Θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα* (ενώ εξακολουθούν να σύρουν τα τρίγωνα)
68. Ερ: *Τι σχήμα είναι το IPQG ;*
69. Μ2: *Τραπέζιο.*
70. Μ1: *Βάσει αυτού που είπαμε*
71. Μ2: *Είναι 90° αυτή, 90° αυτή, αυτές οι δυο είναι κάθετες.*

Σχήμα 4.14. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [66-71]

…………………………………………………………………………………………………

<u>Μέσω των ΣΟΕΑ Γ φάσης</u>

Ο διαφορετικός προσανατολισμός του σχήματος του τετραγώνου στο [114] έχει επίπτωση στο συλλογισμό της Μ2, κάτι το οποίο αιτιολογεί την απάντησή της στο [114]. Επομένως, δεν έχει ικανότητα ιεράρχησης των σχημάτων ρόμβου-τετραγώνου.

……

111.Ερ: *Το σχήμα που κατασκευάζετε τι είναι;*
112.Μ2: *Ρόμβος.*
113.Μ11: *Τετράγωνο.*
114.Μ2: *Και τα δυο μαζί.*

……

333.Μ11: *Οι διαγώνιες … να είναι κάθετες μεταξύ τους !*
334. Ερ: *Αρκεί αυτή η συνθήκη;*
335.Μ12: *Όχι !*
336.Μ2: *Άμα είναι παραλληλόγραμμο !*

……

Η ικανότητα ιεράρχησης των σχημάτων αναπτύσσεται στην τρίτη φάση της ερευνητικής διαδικασίας. Για παράδειγμα στο σημείο [336] η μαθήτρια έχει κατασκευάσει ορισμό, σημείο στο οποίο γίνεται κατανοητό ότι το ορθογώνιο έχει αποκτήσει *το χαρακτήρα σήματος*. Ταυτόχρονα έχει ιεραρχήσει το σχήμα ως ειδικότερη μορφή του παραλληλογράμμου, λόγω της ιδιότητας των διαγώνιων του.

Ανάπτυξη απαγωγικών και παραγωγικών επιχειρημάτων

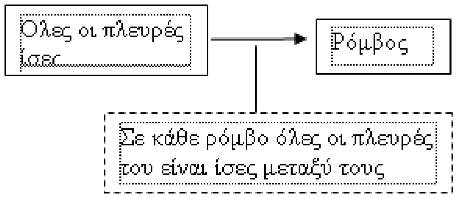
<u>Μέσω του εργαλείου κύκλου + πειραματικού συρσίματος</u>

……

57. Όλοι: *Ρόμβος*.
58. Ερ: *Γιατί;*
59. Μ2: Γιατί έχει όλες τις πλευρές ίσες.

……

Στο [59] αιτιολογεί, χρησιμοποιώντας την **πρωτεύουσα ιδιότητα** του ρόμβου Επομένως, η αιτιολόγηση της είναι αποτέλεσμα του πως αντιλαμβάνεται τη σύνθεση του ρόμβου. Αναπτύσσει ένα **απαγωγικό επιχείρημα** το οποίο συμπεραίνει από το διάγραμμα. Δε διατυπώνει το θεώρημα (εγγύηση), και η δομή του επιχειρήματος μπορεί να αναπαρασταθεί στο παρακάτω διάγραμμα.



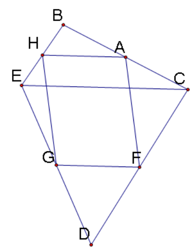
Σχήμα 4.14. Ανάλυση με μοντέλο Toulmin του επιχειρήματος της Μ2

Στο [186] διατυπώνει ένα **απαγωγικό επιχείρημα** λόγω του **απαγωγικού συλλογισμού** που η μαθήτρια αναπτύσσει σε αλληλεπίδραση με το προσαρμ. εργαλείο. Στο σημείο αυτό δεν αιτιολογεί γιατί οι διαγώνιες διχοτομούνται, αλλά δέχεται το αποτέλεσμα το οποίο προκύπτει, επομένως συμπεραίνει από τα αποτελέσματα την αιτία.

<u>Μέσω του σχολιασμού του διαγράμματος +θεωρητικού συρσίματος</u>

……

316. Ερ: *Μπορούμε το αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο με δυο διαδοχικά τμήματα;*
317. Μ2: Όχι! *Είναι GF//=EC/2*



Σχήμα 4.15. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [316-317]

……

Η Μ2 αναπτύσσει ένα επιχείρημα, εφαρμόζοντας το θεώρημα ΘΜΠ στο [317] για την απόδειξη του σχήματος του παραλληλογράμμου σε συνεργασία με τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας. Η μαθήτρια παρατηρεί το διάγραμμα για να καταλήξει σε συμπεράσματα, προκειμένου να αποδείξει ότι το σχήμα είναι παραλληλόγραμμο και αναπτύσσει κανόνες λογικής για να κατασκευάσει την απόδειξη. Επομένως, πρόκειται για **εμπειρικό αποδεικτικό σχήμα, γενικό παράδειγμα,** αφού η αιτιολόγηση της βασίζεται σε ένα παράδειγμα στην οθόνη, χαρακτηριστικά αντιπροσωπευτικό μιας κλάσης.

Μέσω των ΣΟΕΑ

…….

27. M2: *Να ενώσουμε τα σημεία και θα βρούμε το μέσο του.*
28. M1: *Να βρούμε το μέσο.*
29. Η M2 επιλέγει το εργαλείο του τμήματος και ενώνει τα σημεία.
30. M2: *Περνάει από το μέσο* !

…….

Στο σημείο [27, 30] των ΣΟΕΑ αναπτύσσει **απαγωγικό συλλογισμό**. Η Μ2 δεν αρκείται στην οπτική επιβεβαίωση από την οθόνη, μέσω της οποίας επαληθεύεται ότι το σημείο είναι μέσο του τμήματος, αλλά κατανοεί την ανάγκη αποδεικτικής διαδικασίας.

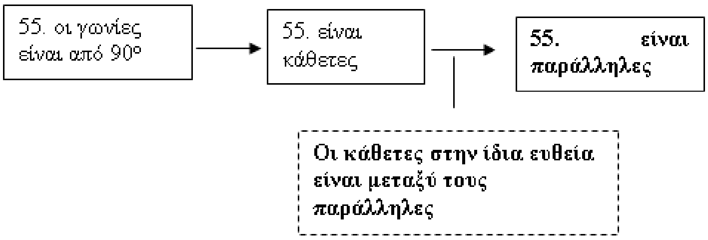
…….

51. M1: Να γίνει και αυτό (το Ο) το μέσο
52. M2: *Τώρα είναι ορθογώνιο.*
53. Ερ: *Γιατί είναι ορθογώνιο;*
54. M2: *Γιατί έχει 90º εκεί, 90º εκεί …*
55. M2: …*Επειδή είναι κάθετες γιατί οι γωνίες είναι από 90 μοίρες άρα είναι παράλληλες*
56. Ερ: *Και που είναι τώρα ο θησαυρός;*
57. M2: *Είναι απέναντι.*
58. M1: *Ο θησαυρός τώρα … μήπως είναι στη διχοτόμο.*
59. M2: *Αν ενώσουμε το Ο με το Τ τότε θα είναι άξονας συμμετρίας.*

…….

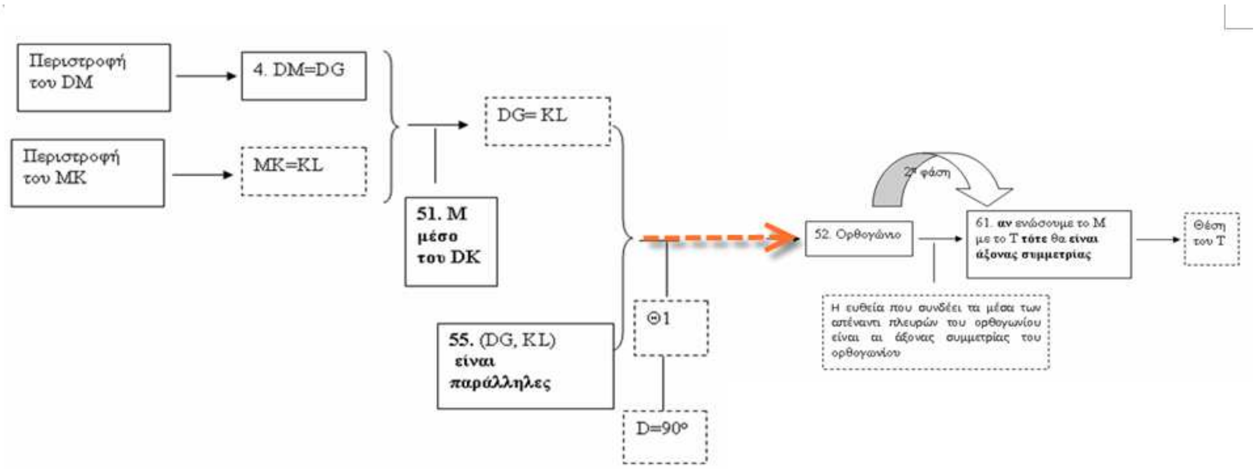
Το σύρσιμο σημείων προκαλεί αλληλουχία μετασχηματισμών στο σχήμα. Η τοποθέτηση του σημείου Ο στο μέσο του τμήματος DK προκαλεί το μετασχηματισμό του διαγράμματος σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Η Μ2 αναγνωρίζει το σχήμα του ορθογωνίου στο [52], και αιτιολογεί στο [53, 54], αναπτύσσοντας ένα **απαγωγικό επιχείρημα**. Η Μ2 έχει κατασκευάσει ένα **ΣΕΔ** του εργαλείου περιστροφής, που τη βοηθά να διατυπώσει μια λογική πρόταση. Στην πρότασή της συσχετίζει έννοιες, **χαρακτηριστικό επιπέδου 3.** Δηλαδή, αναπτύσσει **συμπερασματική σχέση** μεταξύ της έννοιας της καθετότητας και των γωνιών που σχηματίζονται αλλά και τη σχέση μεταξύ της παραλληλίας και καθετότητας.

Η μαθήτρια χρησιμοποιεί ως δεδομένο ότι οι γωνίες είναι 90^o (λόγω περιστροφής) και υπονοεί το θεώρημα για να συμπεράνει «ότι είναι παράλληλες». Το θεώρημα αποτελεί την εγγύηση στη δομή του επιχειρήματος, όπως αναπαριστάνεται μέσω του μοντέλου Toulmin στη συνέχεια.



Σχήμα 4.16. Ανάλυση με μοντέλο Toulmin του επιχειρήματος της Μ2

Έχει στόχο να αιτιολογήσει ότι το σχήμα είναι ορθογώνιο. Η απόδειξη ότι οι απέναντι πλευρές του σχήματος είναι παράλληλες δεν αρκεί. Στο [4] η μαθήτρια είχε συμπεράνει από το διάγραμμα ότι τα τμήματα είναι και ίσα. Επομένως, στο σημείο αυτό θεωρεί δεδομένη (α) την ισότητα των απέναντι πλευρών του σχήματος ως στροφών ίσων τμημάτων και (β) ότι το Ο είναι το μέσο του DK, αναγκαία συνθήκη για να σχηματιστεί ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Στο [59] διατυπώνει μια «αν …τότε» δήλωση χαρακτηριστικό επιπέδου 3, στην οποία περιλαμβάνεται **η έννοια του άξονα συμμετρίας,** που η μαθήτρια έχει κατασκευάσει στις προηγούμενες φάσεις της ερευνητικής διαδικασίας.



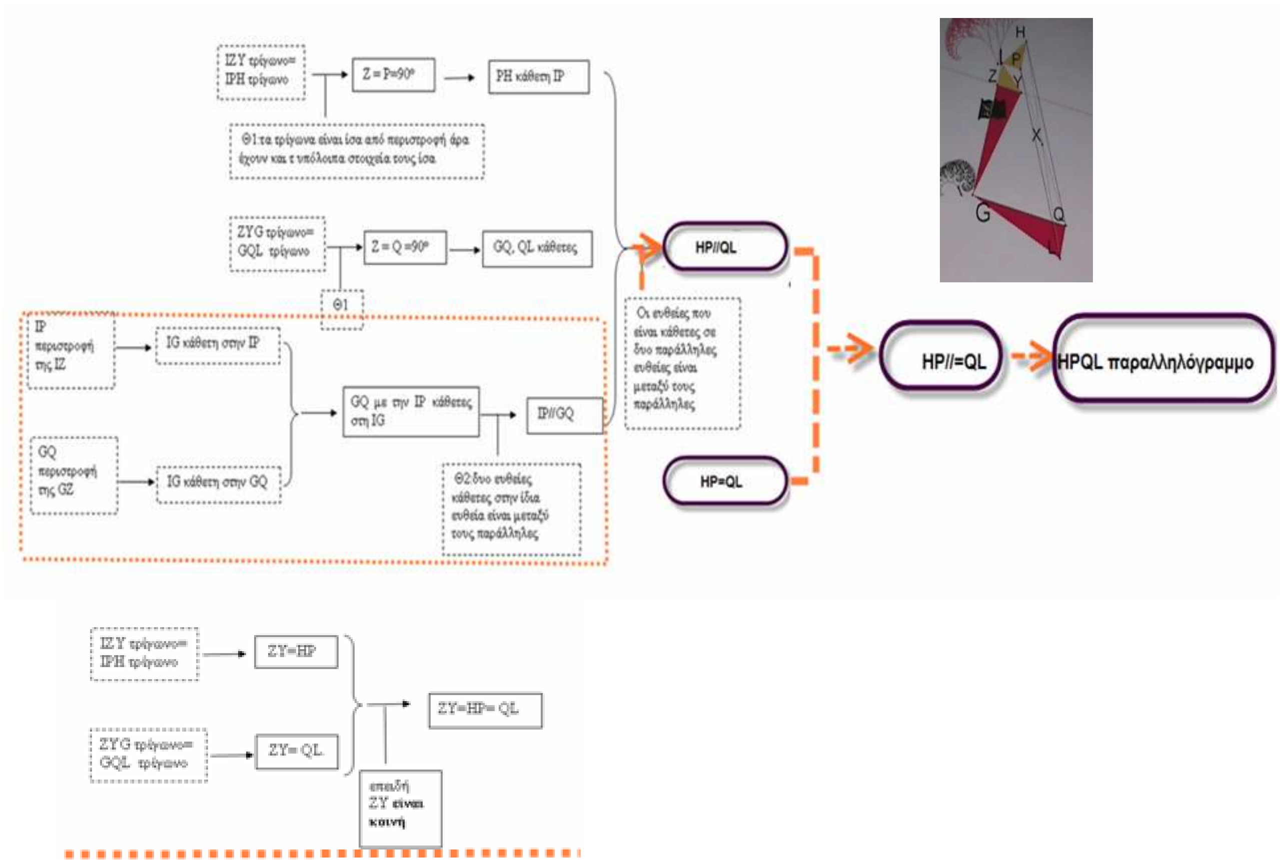
Σχήμα 4.17. Ανάλυση με μοντέλο Toulmin του επιχειρήματος των Μ1, Μ2

Το διάγραμμα στην οθόνη δε δίνει τη δυνατότητα στην Μ2 να οπτικοποιήσει τον άξονα συμμετρίας και την ιδιότητα της παραλληλίας. Επομένως, η μαθήτρια κατέληξε στο συμπέρασμα αυτό από τις ιδιότητες του σχήματος. Αναπτύσσει επιχειρήματα που στηρίζονται στον **απαγωγικό συλλογισμό,** ως αποτέλεσμα του τι παρατηρεί στην οθόνη και τι της είναι αναγκαίο για να καταλήξει στο συμπέρασμα, τα οποία στη συνέχεια την βοηθούν να **κατασκευάσει την απόδειξη του προβλήματος**.

Η έκφραση της Μ2 στο [61] δηλώνει *την ικανότητα εφαρμογής* της μαθήτριας στην επίλυση του μοντελοποιημένου προβλήματος. Η μαθήτρια χρησιμοποιεί ότι το σημείο του θησαυρού είναι μέσο, με στόχο να επαληθεύσει τον ισχυρισμό της. Επομένως, η μαθήτρια συμπεραίνει από το αποτέλεσμα την αιτία. Συγκεκριμένα ο συλλογισμός της Μ2 αρχίζει από την πρόταση: Μ το μέσο DK, υπόθεση: ΜΤ άξονας συμμετρίας, υπονοεί ότι σε ορθογώνιο ο άξονας συμμετρίας είναι παράλληλος στις βάσεις με τις φράσεις «άρα είναι κάθετος στη DK» και καταλήγει στο **συμπέρασμα** (GT=TL). Επομένως, η μαθήτρια στο σημείο αυτό αναπτύσσει **απαγωγικό συλλογισμό**. Έχει αναπτύξει **ικανότητες οπτικές, λογικές, εφαρμογής**.

Ανάπτυξη ικανότητας παραγωγικού συλλογισμού

Στο [90-91] η Μ2 επιχειρηματολογεί αναπτύσσοντας υποστόχους:



Σχήμα 4.18. Ανάλυση με μοντέλο Toulmin του επιχειρήματος της Μ2

Η μαθήτρια διατυπώνει **αποδεικτικούς υποστόχους**. Αρχικά υπονοεί ότι τα τρίγωνα από περιστροφή είναι ίσα και συμπεραίνει ότι και τα τμήματα ZY=HP=QL. Στο [96] διατυπώνει το

δεύτερο υποστόχο που αφορά την απόδειξη της παραλληλίας των τμημάτων PH, QL αναπτύσσοντας παραγωγικό συλλογισμό σε **αλυσίδα παραγωγικών επιχειρημάτων**. Συγκεκριμένα διατυπώνει τις *προτάσεις 1, 2* που αναφέρονται στη συνέχεια και χρησιμοποιεί τον *κανόνα* για να καταλήξει *στο συμπέρασμα*.

Πρόταση 1: Οι PH= QL ίσες με την κοινή ZY άρα οι δυο απέναντι πλευρές είναι ίσες.

Πρόταση 2: Η GQ είναι παράλληλη με την IP, άρα η PH είναι παράλληλη με την QL γιατί είναι προς τρίτη ευθεία κάθετες.

Κανόνας: Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες και ίσες.

Συμπέρασμα: Το σχήμα είναι παραλληλόγραμμο, επομένως οι διαγώνιες διχοτομούνται.

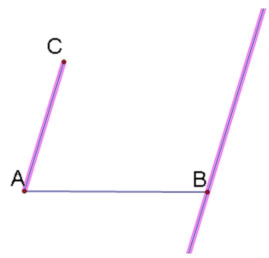
4.2.3. Μ3-ΟΜΑΔΑ Δ

Ανάπτυξη ικανότητας μετατροπής μεταξύ αναπαραστάσεων μέσω γνωστικών συγκρούσεων

<u>Μέσω του εργαλείου σημείου + πειραματικού συρσίματος</u>

....

1. *Μ3: Θα συνδέσω τα σημεία.*
2. *Ο Μ3 επιλέγει το πλάγιο τμήμα και το μενού.*
3. *Ερ: Από πού θέλεις να φέρεις παράλληλη;*
4. *Μ3: Άρα, πρέπει να βρούμε δυο σημεία … και άλλο σημείο;*
5. *Ερ: Και το σημείο από το οποίο θα φέρεις την παράλληλη.*
6. *Μ3: Άρα, με την ίδια λογική θα κάνω και την άλλη παράλληλη.*



Σχήμα 4.19. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [1-6]

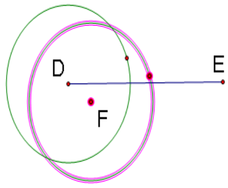
....

Στο [1-6] ο Μ3 αντιμετωπίζει **εργαλειακά εμπόδια,** όπως τη **μη σειριακή κατανόηση της επιλογής** των αντικειμένων για να ολοκληρωθεί η διαδικασία, με αποτέλεσμα η εντολή κατασκευής της παράλληλης να μην είναι ενεργοποιημένη. Αυτό οδηγεί το μαθητή σε **γνωστική σύγκρουση** και στη **σειριακή και θεσιακή κατανόηση**. Στο [6] ολοκληρώνει την κατασκευή παραλλήλων με αλλαγή **προσανατολισμού** των αντικειμένων. Επομένως, αναπτύσσει την ικανότητα μετατροπής μιας λεκτικής αναπαράστασης σε εικονική.

<u>Μέσω του εργαλείου του κύκλου</u>

....

12. *Μ3: Παίρνω ευθύγραμμο τμήμα μετά παίρνω δυο κύκλους … τον κάνω μεγαλύτερο από το μέσο, … .μετά κάνω copy σ΄ αυτόν … που υπάρχει;*
13. *Ερ: Στο Edit.*
14. *Μ3: Μετά paste, μετά παίρνω το κέντρο του δεύτερου κύκλου και το βάζω εδώ*
15. *Μ4: Δεν εφαρμόζει όμως.*
16. *Μ3: Δεν εφαρμόζει;*
17. *Ο Μ3 τοποθετεί το κέντρο του δεύτερου κύκλου στο άκρο του τμήματος και κατασκευάζει το σημείο τομής των δυο κύκλων.*
18. *Μ3: Και τώρα ενώνω τα δυο αυτά σημεία.*
19. *Σύρουμε το σημείο και η κατασκευή του ισοσκελούς καταστρέφεται.*
20. *Με undo ο Μ3 επαναφέρει τον κύκλο στο σημείο που είχε αρχικά τοποθετήσει.*
21. *Επιλέγουμε και κρύβουμε τους κύκλους.*
22. *Κάνουν τις μετρήσεις των πλευρών του ισοσκελούς.*
23. *Σύρουμε το σημείο και το ισοσκελές καταστρέφεται.*



Σχήμα 4.20. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [12-23]

………

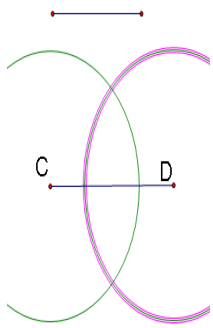
Ο Μ3 στο [12-14] περιγράφει τη διαδικασία κατασκευής του ισοσκελούς, η οποία εφαρμόζεται στα στατικά μέσα, με συνδυασμό τυπικής, άτυπης και δυναμικής γλώσσας. Προσπαθεί να αποκωδικοποιήσει τη νοητική του εικόνα, χρησιμοποιώντας εργαλεία και εντολές του λογισμικού. Ο Μ3 χρησιμοποιεί το εργαλείο του κύκλου **με κατάχρηση**, αφού χρησιμοποιεί το εργαλείο με διαφορετικό τρόπο από αυτόν που έχει προβλεφθεί από το σχεδιαστή του λογισμικού. Με τον τρόπο αυτό κατασκευάζει ένα ψευδο-ισοσκελές τρίγωνο, το οποίο με το σύρσιμο ενός σημείου-κορυφής καταστρέφεται.

Επομένως, αντιμετωπίζει **γνωστικές συγκρούσεις** οι οποίες προκύπτουν από το σύρσιμο των κορυφών του σχήματος και ωθείται από το περιβάλλον να αναπτύξει διαδικασίες σκέψης, ώστε η κατασκευή του να είναι σταθερή.

<u>Μέσω του παραμετρικού εργαλείου</u>

………

29. *Κατασκευάζω στην οθόνη ένα παραμετρικό τμήμα μεγαλύτερο του μισού.*
30. *Μ3: Θα κάνουμε δυο κύκλους;*
31. *Μ3: Με το σημείο C… να σκεφτώ … έχουμε δυο ευθύγραμμα τμήματα… ωραία, και θέλουμε να κάνουμε δυο κύκλους ;*
32. *Μ3: Να είναι ίσοι μεταξύ τους.*
33. *Μ3: Δεν είναι ίσα τα τμήματα μεταξύ τους.*
34. *Ερ: Όχι*
35. *Ερ: Αυτό το τμήμα το παίρνω μεγαλύτερο του μισού του ευθυγράμμου τμήματος*
36. *Μ3: Άρα, έχει σχέση με την ακτίνα του … .Θα πάρω το C κέντρο και ακτίνα το τμήμα.*
37. *Ερ: Τι έχουμε εξασφαλίσει έτσι ;*
38. *Μ3: Έχουμε δυο ίσους κύκλους.*



Σχήμα 4.21. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα [29-38]

……

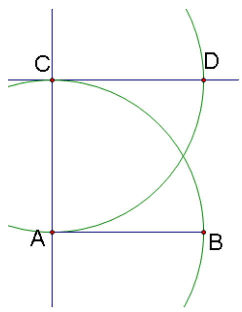
Ο Μ3 επινοεί τη στρατηγική κατασκευής μεσοκαθέτου. Το σύρσιμο του παραμετρικού τμήματος ώστε να καταστεί μεγαλύτερο από το μισό του αρχικού τμήματος, βοηθά αντιληπτικά το μαθητή να υπερβεί το **εργαλειακό εμπόδιο.** Το αποτέλεσμα της κατανόησης είναι να διατυπώσει την **συμπερασματική έκφραση** στο [36]. Επομένως, αντιμετωπίζει **γνωστική σύγκρουση** και αναπτύσσει την ικανότητα **αποκωδικοποίησης της νοητικής αναπαράστασης σε εικονική.** Το εργαλείο του συρσίματος επομένως, και το τεχνούργημα του παραμετρικού τμήματος διαμεσολαβούν ώστε ο μαθητής να αναπτύξει την ικανότητα μετατροπής μεταξύ αναπαραστάσεων, εφαρμόζοντας θεωρία της γεωμετρίας.

<u>Μέσω του εργαλείου του κύκλου και εργαλείου καθέτου</u>

Εκφράζει με συνδυασμό τυπικού και άτυπου τρόπου την ιδιότητα της ισότητας και καθετότητας των πλευρών του τετραγώνου. Κατασκευάζει τη **σειριακή και θεσιακή κατανόηση** της χρήσης του εργαλείου καθέτου και παραλλήλου. Αποκωδικοποιεί την ιδιότητα της ισότητας με το εργαλείο του κύκλου και της καθετότητας με τα εργαλείο καθέτου, αναπτύσσοντας την ικανότητα να μεταφράζει μια ιδιότητα του σχήματος με χρήση εργαλείων.

……

56. *Οι μαθητές έχουν κατασκευάσει ένα ευθύγραμμο τμήμα.*
57. *Ερ: Μήπως θα ήθελες να περιγράψεις τι θα κάνεις;*
58. *Μ3: Κατ' αρχάς θα φέρω μια κάθετη σ' αυτό το σημείο.*
59. *Μ4: Επίλεξε και την ευθεία πρώτα και μετά το construct.*
60. *Μ3: Α! για αυτό δε μου έβγαινε.*
61. *Μ3: Τώρα θέλω να πάρω τμήμα ίσο με αυτό εδώ πάνω στην ευθεία*
62. *Ερ: Εδώ δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε χάρακα ή κανόνα. Κάποιο εργαλείο που να κάνει ίσα τμήματα εδώ;*
63. *Μ3: Πως μπορούμε να κάνουμε ίσα τμήματα; Με τον κύκλο;*
64. *Επιλέγει τον κύκλο και προσπαθεί να κατασκευάσει έναν κύκλο .*
65. *Μ3: Θα πάρουμε κέντρο αυτό εδώ.*
66. *Μ3: Τώρα θέλω να φέρω παράλληλη … σ' αυτή εδώ την ευθεία από το σημείο αυτό.*
67. *Μ3: Τώρα κάνω την ίδια διαδικασία.*

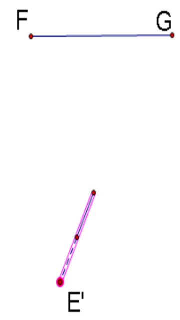


…… **Σχήμα 4.22.** Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [56-67]

Ο μαθητής επομένως **συνδέει μέσω της διαδικασίας** κατασκευής κύκλου την έννοια της ισότητας των πλευρών του τετραγώνου με την έννοια της ισότητας των ακτινών του κύκλου, αναπτύσσει επομένως συνδέσεις εννοιών. Επομένως, αναπτύσσει την ικανότητα **να μεταφράζει μια νοητική του αναπαράσταση, εικονικά και λεκτικά**.

Μέσω του προσαρμ. εργαλείου

………



107. Ο Μ3 δεν διατυπώνει τις σκέψεις του και τον παρακινώ να εφαρμόσει το εργαλείο. Ο μαθητής εφαρμόζει το εργαλείο στο κέντρο περιστροφής.
108. *Μ3: Από δω τώρα (δείχνει το κέντρο)*
109. *Μ3: Όχι ,όχι*
110. *Μ3: Θα κάνω undo*
111. Επιλέγει ένα τυχαίο σημείο και κατασκευάζει πάλι το εργαλείο.
112. *Ερ: Άρα, τι έχεις κάνει τώρα;*
113. *Μ3: Ένα παραλληλόγραμμο.*

Σχήμα 4.23. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [107-113]

………

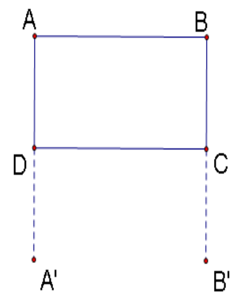
Ο Μ3 στο [107] αντιμετωπίζει εργαλειακό εμπόδιο, εφαρμόζοντας το προσαρμ. εργαλείο στο κέντρο περιστροφής. Αντιμετωπίζει επομένως εμπόδια ως προς την **θεσιακή** κατανόηση του εργαλείου. Κατασκευάζει **την θεσιακή κατανόηση** μέσα από τη γνωστική σύγκρουση που προκύπτει, λόγω του αποτελέσματος στην οθόνη. Στη συνέχεια ακολουθεί ενέργειες που εφαρμόζονται για την κατασκευή συμμετρικού αντικειμένου ως προς κέντρο στα στατικά μέσα. Επομένως, **μεταφράζει μια νοητική του αναπαράσταση, εικονικά.**

Ανάπτυξη ικανότητας δομικής ανάλυσης – διπλή (/πολλαπλή) ερμηνεία γεωμετρικών αντικειμένων

Μέσω του προσαρμ. εργαλείου+ θεωρητικού συρσίματος

………

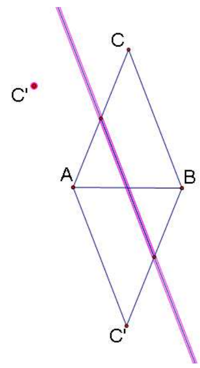
154. Στη φάση αυτή οι μαθητές πρέπει να κατασκευάσουν του άξονες συμμετρίας ενός προκατασκευασμένου ορθογώνιου παραλληλόγραμμου.
155. *Ερ: Ποιος μπορεί να κατασκευάσει τους άξονες συμμετρίας του σχήματος;*
156. *Μ3: Άξονες συμμετρίας ως προς που;*
157. *Εφαρμόζει το προσαρμ. εργαλείο στις κορυφές Α, Β και βρίσκει τα συμμετρικά τους σημεία Α΄, Β΄ ως προς τα σημεία D, C αντίστοιχα.*
158. *Μ4: Εγώ θα κατασκευάσω μια παράλληλη προς την AD (δείχνει τα μέσα των πλευρών).*
159. *Μ3: Με τα midpoints*



Σχήμα 4.24. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [154-159]

………

165. Σύρω το σχήμα του ρόμβου από μια κορυφή ώστε να μοιάζει τετράγωνο.
166. *Τώρα ποιοι είναι οι άξονες συμμετρίας;*
167. *Μ4: Οι διαγώνιες ;*
168. *Ο Μ3 επιλέγει τις 4 πλευρές και κατασκευάζει τα μέσα των πλευρών.*
169. *Ερ: Και αν συνδέσουμε τα μέσα;*
170. *Ο Μ3 ενώνει τα διαδοχικά μέσα.*
171. *Μ4: όχι έτσι, απέναντι !*
172. *Μ3: Άμα ενώσω τα μέσα θα σχηματιστεί πάλι τετράγωνο;*
173. *Σύρω ξανά τις κορυφές του σχήματος και σχηματίζεται ένας ρόμβος.*
174. *Ερ: Τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα μέσα εξακολουθούν να είναι άξονες συμμετρίας;*
175. *Μ3: Ναι*
176. *Μ4: Όχι*
177. *Μ3: Όχι –όχι!*
178. *Μ4: Όχι δεν είναι !*
179. *Μ3: Ναι, γιατί δεν είναι;*



Σχήμα 4.25. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [165-179]

………

Η εφαρμογή του προσαρμ. εργαλείου από τον Μ3 στο [157] γίνεται **με οικονομία**. Ο Μ3 αντιμετωπίζει **γνωστικό εμπόδιο** και παρερμηνεύει την έννοια «άξονες συμμετρίας του σχήματος» με την έννοια «συμμετρικό του σχήματος ως προς την πλευρά του». Η κατασκευή αξόνων συμμετρίας τετραγώνου και το σύρσιμο μιας κορυφής του, ώστε να σχηματιστεί ρόμβος οδηγεί τον μαθητή σε **γνωστική σύγκρουση,** αφού θεωρεί ότι οι μεσοπαράλληλοι του ρόμβου είναι και **άξονες συμμετρίας του** στο [179]. Ο Μ3 βρίσκεται σε κατάσταση **ανισορροπίας** σχετικά με την έννοια της αξονικής συμμετρίας των τετραπλεύρων, γεγονός που διαπιστώνεται από την αποκωδικοποίηση του λανθασμένου νοητικού σχήματος σε λεκτικό κώδικα (π.χ. στο [175, 179]).

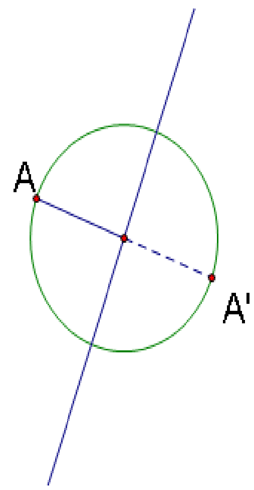
Συνοπτικά: σε συνεργασία με την Μ4 κατανοεί ότι οι άξονες συμμετρίας διέρχονται από τα μέσα των πλευρών του ορθογωνίου και είναι παράλληλοι προς τις πλευρές του ορθογωνίου Επομένως, μέσω της διαδικασίας οδηγείται να συνδέσει την έννοια της αξονικής συμμετρίας με την έννοια των μεσοπαραλλήλων στο [159]. Αντιλαμβάνεται ότι αυτή η ιδιότητα των αξόνων συμμετρίας που ισχύει στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο δεν ισχύει και στο ρόμβο, με συνέπεια να οδηγηθεί σε μια αντιληπτική ιεράρχηση των εννοιών. Η αντιληπτική ιεράρχηση προκύπτει μέσω τους διαγράμματος και των αξόνων συμμετρίας των σχημάτων. Αναλύει επομένως δομικά το σχήμα λόγω των ιδιοτήτων του με αποτέλεσμα να οργανώσει **μια συνεπαγωγική ιεράρχηση των σχημάτων**. **Επομένως, αναπτύσσει την** ικανότητα **δομικής ανάλυσης** του σχήματος που διαπιστώνεται στη συνέχεια στο [192-207] στην κατασκευή τετραγώνου. Το σύρσιμο των κορυφών του τετραγώνου, ώστε να δημιουργηθεί ρόμβος --αφού προηγουμένως έχουν κατασκευαστεί οι άξονες συμμετρίας του-- δημιουργεί συνδεόμενες αναπαραστάσεις. Επομένως, οι **συνδεόμενες αναπαραστάσεις της β φάσης** βοηθούν τον μαθητή να έρθει σε **γνωστική**

σύγκρουση, και να ενσωματώσει **στο γνωστικό σχήμα** που έχει κατασκευάσει για την έννοια της αξονικής συμμετρίας, την περίπτωση του ρόμβου. Επομένως, συμβάλλουν στην επέκταση του γνωστικού σχήματος της έννοιας.

Μέσω του προσαρμ. εργαλείου, εργαλείου κύκλου

....

192. *Μ3: Θα το ξανακάνουμε.*
193. Ο Μ3 κατασκευάζει ένα ευθύγραμμο τμήμα και εφαρμόζει το εργαλείο ώστε να γίνει το διπλάσιο του αρχικού τμήματος.
194. *Μ3: Τώρα πως θα κάνω κύκλο; Πρέπει να επιλέξω ξανά όλο το τμήμα.*
195. *Μ3: Τώρα σε όλη αυτή την ευθεία θα φέρω την κάθετη.*
196. *Ερ: Σε ποιο σημείο;*
197. *Μ3: Σ' αυτό (εννοεί το κέντρο).*
198. Ο Μ3 επιλέγει το ένα σημείο του κύκλου και στρέφει το σχήμα αλλάζοντας προσανατολισμό στις διαμέτρους.
199. *Ερ: Τι σχήμα είναι αυτό τώρα;*
200. *Μ4: Τετράγωνο.*
201. *Ερ: Γιατί;*
202. *Μ4: Όλες οι πλευρές είναι ίσες.*
203. Τους παροτρύνω να δικαιολογήσουν την απάντηση τους με ότι γνωρίζουν από την κατασκευή τους.
204. *Μ3: Οι διαγώνιες διχοτομούνται κάθετα… και είναι ίσες, αφού έτσι τις κατασκευάσαμε.*
205. *Ερ: Ποιων βασικών σχημάτων πληρούν τις ιδιότητες;*
206. *Μ3: Του ρόμβου.*
207. *Μ4: Του ορθογωνίου.*



....

Σχήμα 4.26. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [192-207]

Η κατασκευή του τετραγώνου προκύπτει αμέσως μετά την κατασκευή ορθογωνίου και μέσω της κατασκευής των αξόνων συμμετρίας του σχήματος.

Ο Μ3 εφαρμόζει το προσαρμ. εργαλείο με οικονομία, καθώς και τα εργαλεία καθέτου και κύκλου για την κατασκευή του. Δηλαδή, εφαρμόζει μια σύνθεση εργαλείων για να **αποκωδικοποιήσει τη νοητική του εικόνα σε εικονική και στη συνέχεια σε λεκτική**, διατυπώνοντας τυπικά τις ιδιότητες του σχήματος. Ο μαθητής **αναπτύσσει μια αυξανομένη ικανότητα** να περιγράψει τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων των σχημάτων, «χρησιμοποιώντας έναν συνδυασμό άτυπων και τυπικών περιγραφών, οι οποίες όμως εξακολουθούν να παραμένουν ανεπαρκείς για να διευκρινίσουν επαρκώς τα σχήματα» (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.2) (Battista, 2007, p.851).

Ταυτόχρονα, ερμηνεύει τη διάμετρο του κύκλου ως διαγώνιο του τετραγώνου, **αποδίδοντας** της **διπλό ρόλο.** Αναπτύσσει δηλαδή, αφαιρετικές διαδικασίες σκέψης εναλλάσσοντας τους ρόλους που έχουν τα στοιχεία του σχήματος.

Κατασκευή εννοιών-εν-δράσει - λογική συσχέτιση εννοιών

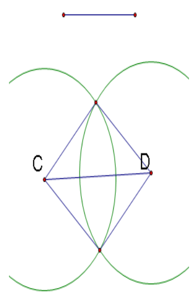
Μέσω του εργαλείου κατασκευής παραλλήλου

Ο μαθητής κατασκευάζει **ΣΕΔ** στο [6] του εργαλείου κατασκευής παραλλήλου με αποτέλεσμα να οδηγηθεί στη διατύπωση λογικού **επιχειρήματος** για την αιτιολόγηση της δράσης του, αφού αντιλαμβάνεται τη σχέση μεταξύ της επιλογής αντικειμένων του τεχνολογικού εργαλείου και της θεωρίας της γεωμετρίας («άρα με την ίδια λογική θα κάνουμε και την άλλη παράλληλη»), συνδέει δηλαδή τη διαδικασία με την έννοια. Η πρόταση μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής: [αν επιλέξουμε το σημείο και την απέναντι ευθεία τότε μπορούμε] να φέρουμε μια παράλληλη με την ίδια λογική. Επομένως, πρόκειται για μια εικασία διατυπωμένη με **άτυπο τρόπο**.

Μέσω του εργαλείου του κύκλου + παραμετρικού εργαλείου

....

44. Μ3: Έχει όλες τις πλευρές του ίσες και ....μεταξύ τους είναι παράλληλες
45. Μ3:Όλες οι γωνίες του είναι μεταξύ τους ίσες ...εφόσον τα δυο τρίγωνα είναι ίσα



Σχήμα 4.27. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [44-45]

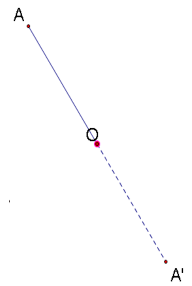
....

Στο [44] ο Μ3 διατυπώνει έναν **ανεπαρκή ορισμό για το τετράγωνο,** προσπαθώντας να αιτιολογήσει το συλλογισμό του. Σε συνδυασμό με τη διατύπωση στο [45] κατασκευάζει ένα μη οικονομικό ορισμό του τετραγώνου που μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής: «τετράγωνο είναι το τετράπλευρο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες και [μεταξύ τους είναι παράλληλες] και όλες οι γωνίες του είναι μεταξύ τους ίσες»**.** Ο ορισμός είναι αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης με το εργαλείο του λογισμικού. Ο **σύνθετος μετασχηματισμός** του συρσίματος στο αντικείμενο του ρόμβου, (ο οποίος έχει προκύψει ως σύνθεση των δυο ισοσκελών τριγώνων) οδηγεί στην ανάπτυξη ικανότητας αντιληπτικής ιεράρχησης του τετραγώνου ως ρόμβου. Μέσω του διαγράμματος οπτικοποιεί την ισότητα των τριγώνων και επομένως και την ισότητα των γωνιών του σχήματος. Επομένως, μέσω της διαδικασίας **κατασκευάζει την έννοια** του τετραγώνου και του ρόμβου ως παραλληλογράμμου με τις «απέναντι πλευρές παράλληλες».

Μέσω του εργαλείου περιστροφής + πειραματικού συρσίματος

....

77. *Ερ: Πόσο θα περιστραφεί το τμήμα;*
78. *Μ3: Κατά 180°.*
79. *Ερ: Αυτό γίνεται με το εργαλείο περιστροφής. Επιλέγεις το κέντρο περιστροφής με διπλό κλικ και στη συνέχεια το τμήμα και το περιστρέφεις.*
80. *Η Μ4 εφαρμόζει τη διαδικασία περιστροφής για το τμήμα αλλά όχι για το άκρο.*
81. *Ερ: Πρέπει να περιστρέψουμε και το άκρο.*
82. *Η Μ4 με το εργαλείο του συρσίματος αυξομειώνει το μέγεθος του τμήματος-ειδώλου.*
83. *Ερ: Τι διαπιστώνουμε;*
84. *Μ4: Ότι είναι ίσα.*
85. *Μ3: Το ΟΑ είναι ίσο πάντα με το ΟΑ΄.*



Σχήμα 4.28. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [77-85]

....

Η διαδικασία κατασκευής του συμμετρικού σημείου ως προς κέντρο συνδέεται με τη διαδικασία κατασκευής της περιστροφής του σημείου ως προς γωνία 180^o από τον Μ3 στο [78]. Οι μαθητές κατασκευάζουν **ΣΕΔ** του εργαλείου περιστροφής. Η **έννοια-εν-δράσει** («το ΟΑ είναι πάντα ίσο με το ΟΑ΄») που ο μαθητής διατυπώνει είναι αποτέλεσμα του **σύνθετου μετασχηματισμού του συρσίματος** στο είδωλο από περιστροφή. Ο Μ3 συσχετίζει την έννοια του κέντρου περιστροφής με την έννοια του κέντρου συμμετρίας. Ο Μ3 αναπτύσσει **επαγωγικό συλλογισμό,** αφού συμπεραίνει ότι τα τμήματα ΟΑ, ΟΑ΄ είναι ίσα και **γενικεύει** («ίσο πάντα») για όλη την κλάση των τμημάτων ειδώλων από περιστροφή.

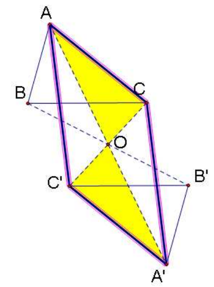
Περίπτωση - αυτά τα τμήματα είναι από περιστροφή
Αποτέλεσμα - αυτά τα τμήματα είναι ίσα
Κανόνας - όλα τα τμήματα ΟΑ, ΟΑ΄ που προκύπτουν από περιστροφή είναι πάντα ίσα.

Μέσω του εργαλείου περιστροφής + θεωρητικού συρσίματος

Το σύρσιμο του κέντρου περιστροφής, ώστε να συμπέσει με το μέσο της βάσης του τριγώνου οδηγεί τον Μ3 στο σχηματισμό ενός παραλληλογράμμου και την ερμηνεία της διαμέσου του τριγώνου ως διαγωνίου του παραλληλογράμμου. Επομένως, μέσω του συρσίματος οι μαθητές αλληλεπιδρούν με το διάγραμμα στην οθόνη. Μέσω της **εργαλειακής γένεσης** κατασκευάζουν ένα **όργανο,** που περιλαμβάνει την **έννοια-εν-δράσει** του παραλληλογράμμου ως σύνθεση τριγώνων από περιστροφή.

………

135. *Ερ: Κατά πόσο στρέψαμε το τρίγωνο ABC;*
136. *Μ3: Κατά 180°.*
137. *Ερ: Άρα τα συμμετρικά σχήματα ως προς κέντρο συμμετρίας …*
138. *Μ3:… ..είναι ίσα σχήματα γυρισμένα κατά 180°.*



Σχήμα 4.29. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [135-138]

………

Ο μαθητής αναπτύσσει **επαγωγικό συλλογισμό** στο [138] και διατυπώνει έναν **οικονομικό ορισμό** για τα σχήματα από περιστροφή, σε συνδυασμό **τυπικής και άτυπης** γλώσσας. Ταυτόχρονα επεκτείνει το **ΣΕΔ** του εργαλείου περιστροφής για τα τρίγωνα από περιστροφή.

<u>Μέσω του προσαρμ. εργαλείου, κύκλου κατασκευή ορθογωνίου + πειραμ. συρσίματος</u>

………

185. *Ερ: Σε τυχαία θέση; … τι σχήμα είναι αυτό;*
186. *Μ4: Τετράγωνο*
187. *Μ3: Δεν είναι τετράγωνο … παραλληλόγραμμο.*
188. *Μ3: Ορθογώνιο*
189. *Ερ: Γιατί;*
190. *Μ3:Οι διαγώνιες διχοτομούνται.*
191. *Μ4: Είναι ίσες.*

………

199. *Ερ: Τι σχήμα είναι αυτό τώρα;*
200. *Μ4: Τετράγωνο.*
201. *Ερ: Γιατί;*
202. *Μ4: Όλες οι πλευρές είναι ίσες.*
203. Τους παροτρύνω να δικαιολογήσουν την απάντηση τους με ότι γνωρίζουν από την κατασκευή τους.
204. *Μ3: Οι διαγώνιες διχοτομούνται κάθετα… και είναι ίσες, αφού έτσι τις κατασκευάσαμε.*
205. *Ερ: Ποιων βασικών σχημάτων πληρούν τις ιδιότητες;*
206. *Μ3: Του ρόμβου.*
207. *Μ4: Του ορθογωνίου.*

………

Οι μαθητές σε συνεργασία κατασκευάζουν το σχήμα του ορθογωνίου και ανακαλύπτουν με το πειραματικό σύρσιμο ότι οι διαγώνιες του είναι ίσες. Αρχικά ο Μ3 κατασκευάζει ένα τμήμα, χρησιμοποιώντας το **εργαλείο με οικονομία**. Η χρήση του εργαλείου του κύκλου και στη συνέχεια του προσαρμ. εργαλείου σε τυχαίο σημείο του κύκλου βοηθά τον Μ3 να αντιληφθεί ιδιότητες του σχήματος. Στο [190-191] διατυπώνουν **έναν οικονομικό ορισμό** του ορθογωνίου σε συνεργασία τον οποίο **επανεφευρίσκουν** μέσα από τη διαδικασία.

Μέσω της **εργαλειακής γένεσης** ο μαθητής στο [204] κατασκευάζει ένα όργανο που περιλαμβάνει τα **ΣΕΔ** των εργαλείων που χρησιμοποιούνται από το μαθητή για την κατασκευή. Επομένως, η έκφραση του είναι μια **έννοια-εν-δράσει,** ένας **αυθαίρετος οικονομικός ορισμός** για το τετράγωνο, που περιγράφει την κατασκευαστική διαδικασία. Η φράση του μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής: «ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο, όταν οι διαγώνιες διχοτομούνται, [τέμνονται] κάθετα και είναι ίσες». Συνεπώς, κατασκευάζει μέσω της διαδικασίας το **χαρακτήρα σήματος** του τετραγώνου. Σε σύγκριση με το σημείο [44] διαπιστώνεται ότι ο μαθητής αρχικά είχε διατυπώσει έναν ανεπαρκή ορισμό του τετραγώνου. Επομένως, ανέπτυξε την ικανότητα γλωσσικού συμβολισμού των εννοιών, καθώς και την ικανότητα ιεράρχησης του σχήματος με τον ρόμβο και το ορθογώνιο. Στο σημείο αυτό έχει αντικαταστήσει το σχήμα με ένα σύνολο δευτερευουσών ιδιοτήτων με αποτέλεσμα να διατυπώσει έναν **οικονομικό ορισμό** για το τετράγωνο και το σχήμα να αποκτήσει **το χαρακτήρα σήματος**.

Ανάπτυξη απαγωγικών και παραγωγικών επιχειρημάτων

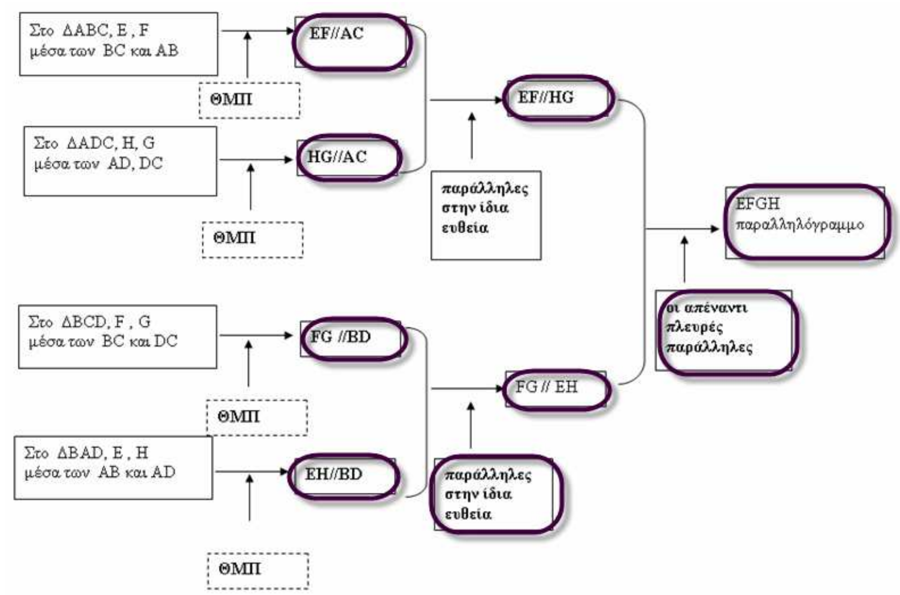
Μέσω του σχολιασμού του διαγράμματος + πειραματικού συρσίματος

………

241. *Μ3: Αυτή εδώ (EF) είναι παράλληλη στην AC και αυτή εδώ (HG) είναι παράλληλη με την AC, άρα είναι παράλληλες μεταξύ τους.*
242. *Μ3: Θα φέρουμε την άλλη ευθεία και οι άλλες δυο είναι παράλληλες, FG//BD, και EH//BD, άρα είναι παραλληλόγραμμο*

………

Ο Μ3 μέσω της οπτικοποίησης επισημαίνει την παραλληλία των τμημάτων. Στο [241-42] εφαρμόζει το ΘΜΠ για να αποδείξει ότι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα των δυο πλευρών είναι παράλληλο και ίσο με το μισό της τρίτης πλευράς. Επομένως, συμπεραίνει από το διάγραμμα την παραλληλία των πλευρών του εσωτερικού τετράπλευρου με τις διαγώνιους του εξωτερικού και οδηγείται στο συμπέρασμα, υπονοώντας τον ορισμό του παραλληλογράμμου (αν οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες ανά δυο το σχήμα είναι παραλληλόγραμμο). Η απόδειξη που αναλύεται στη συνέχεια με το μοντέλο Toulmin περιέχει στοιχεία **παραγωγικού συλλογισμού**. Η αιτιολόγηση του είναι **εμπειρικό αποδεικτικό σχήμα/ γενικό παράδειγμα,** γιατί ο μαθητής οδηγείται στο συμπέρασμα του, αφού πειστεί μέσω του συρσίματος ότι οι πλευρές είναι παράλληλες. Δηλαδή ο Μ3 οδηγείται στην κατανόηση, ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης του χωρογραφικού πεδίου του λογισμικού με το θεωρητικό πεδίο της γεωμετρίας.



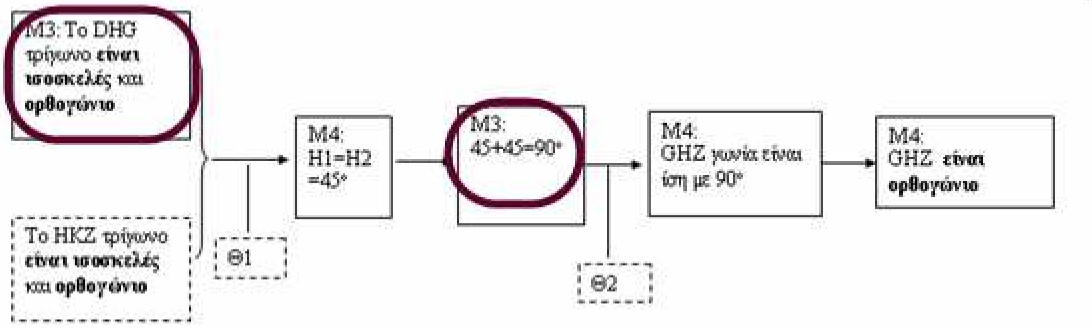
Σχήμα 4.30. Ανάλυση του επιχειρήματος του Μ3 με το μοντέλο Toulmin

Μέσω των ΣΟΕΑ δ φάσης

....

19. Ερ: Πως θα αποδείξουμε ότι είναι το μέσο;
20. Ερ: Πως θα αποδείξουμε ότι είναι το Θ το μέσο του GZ;
21. Μ3: Να ενώσουμε το G με το H και το K με το Θ.
22. Μ3: Το DHG τρίγωνο είναι ισοσκελές και ορθογώνιο, καθώς και το ΚΘΖ είναι ισοσκελές.
23. Μ4: Δεν το ξέρουμε το ΚΘΖ ότι είναι ισοσκελές.
24. Μ4: Το GHZ είναι ορθογώνιο
25. Ερ: Γιατί είναι ορθογώνιο;
26. Μ3: Μισό λεπτό!
27. Μ4: Γιατί Η1 =Η2 =45°
28. Μ3: 45° +45° =90° και η άλλη
29. Μ4: Άρα, η GHZ γωνία είναι ίση με 90°

....



Σχήμα 4.31. Ανάλυση του επιχειρήματος των Μ3, Μ4 με το μοντέλο Toulmin

Θ1: σε ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο οι παρά τη βάση γωνίες είναι ίσες με 90^o

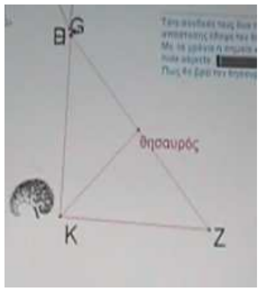
Θ2: το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με 180^o

Στο [22] ο Μ3 τοποθετεί το σημείο H σε τυχαία θέση στο ευθύγραμμο τμήμα DK και αναγνωρίζει ότι το τρίγωνο DHG **είναι ισοσκελές** και **ορθογώνιο,** ως αποτέλεσμα του ΣΕΔ εργαλείου περιστροφής (καθώς το σύρσιμο του σημείου H αφήνει αμετάβλητη την ισότητα και καθετότητα των τμημάτων).

Μέσω των ΣΟΕΑ δ φάσης

---

37. Ο Μ3 μετακινεί το H ώστε να ταυτιστεί με το D αρχικά μετά το πλησιάζει προς το μέσο.
38. *Μ3: Αν το H ταυτίζεται πάνω στο D τότε βγαίνει ένα ορθογώνιο και ισο ..σκελές τρίγωνο και φυσικά έχουμε και την διάμεσο.*
39. *Μ3: Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές ...και η διάμεσος είναι το μισό της υποτείνουσας ... άρα ΚΘ =GZ/2*
40. *Μ4: Ναι, είναι 2 ΚΘ.*
41. *Μ3: Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο η GZ είναι το τετράγωνο αυτών των δυο και η ΚΘ ισούται με το μισό.*



Σχήμα 4.32. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [37-41, 45-57]

---

45. *Ερ: Τι τρίγωνο είναι το GKZ;*
46. *Μ3: Είναι ορθογώνιο.*
47. *Μ3, Μ4: ... και ισοσκελές*
48. *Μ4: Άρα, οι γωνίες είναι 45ο (συμπληρώνει και ο Μ3 ετεροχρονισμένα).*
49. *Ερ: Άρα, πόσο είναι η γωνία GKT ;*
50. *Μ4, Μ3: 45ο*
51. *Ερ: Γιατί είναι;*
52. *Μ4: Γιατί η Θ και η πάνω και η κάτω είναι 90ο.*
53. *Μ3: Έστω ότι είναι εδώ (δείχνει το σημείο G συμπίπτει με το D) .. έστω ότι συμπίπτει στο D τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και ορθογώνιο, άρα οι παρά τη βάση .. άρα αυτή η ευθεία είναι διάμεσος είναι και διχοτόμος και ύψος και μεσοκάθετος είναι.*
54. *Ερ: Πως θα βρούμε επομένως το T; Δηλαδή, αν ξέρεις ότι η απόσταση αυτή είναι χ.*
55. *Μ3: Αν GK=x τότε KZ = x και GZ =2 x*
56. *Μ4: Όχι!* $x\sqrt{2}$
57. *Μ4: Άρα,* $KT=\frac{x\sqrt{2}}{2}$

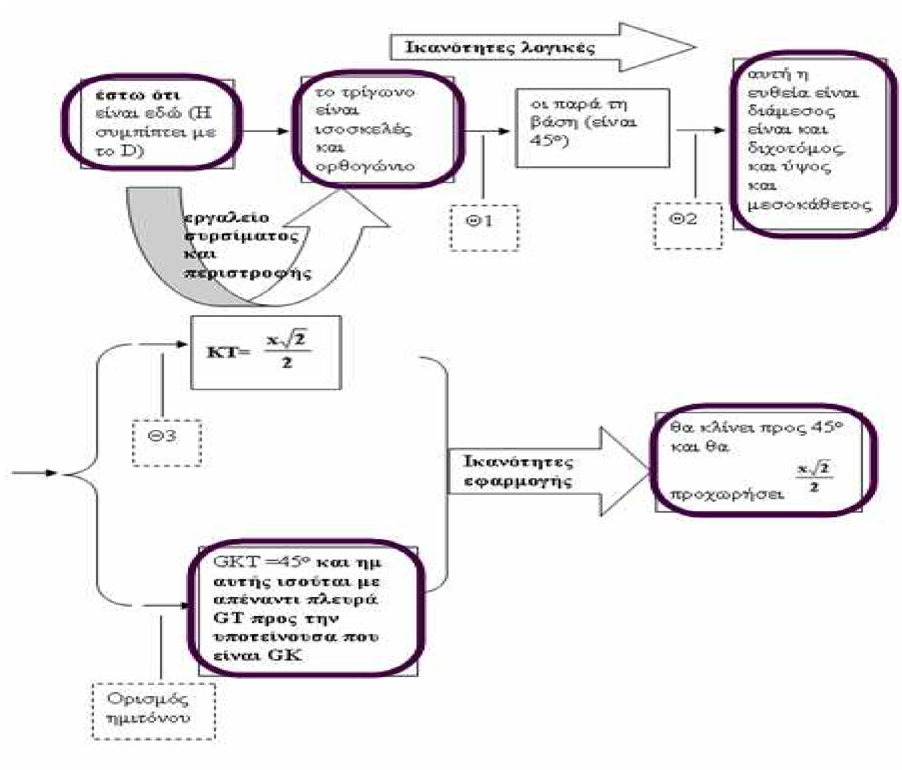
Ο μαθητής μέσω νοητικού πειράματος αρχικά τοποθετεί το σημείο Η στη θέση του δέντρου και αναγνωρίζει τη δομή του ορθογωνίου ισοσκελούς τριγώνου ΗΚΖ. Επομένως, στο σημείο αυτό ο μαθητής αναπτύσσει **μετασχηματιστικό συλλογισμό,** αφού προβλέπει μια ενέργεια και τα αποτελέσματα της ενέργειας αυτής που διατυπώνει στο [38]. Αυτή έχει τα ακόλουθα αποτελέσματα:

Ο μετασχηματισμός του διαγράμματος μέσω του συρσίματος οδηγεί το μαθητή στο [38] να διατυπώσει μια εικασία «αν …τότε» σε μαθηματική–τυπική γλώσσα: «**αν** το Η ταυτίζεται πάνω στο D **τότε** βγαίνει ένα **ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο** και φυσικά έχουμε και τη διάμεσο» και η «διάμεσος είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας …άρα ΚΘ=GZ/2».

Η οπτικοποίηση του διαγραμματικού μετασχηματισμού οδηγεί τον μαθητή σε αλυσιδωτούς συνδεόμενους νοητικούς μετασχηματισμούς, οι οποίες οδηγούν στη διατύπωση του **παραγωγικού επιχειρήματος** (μπορεί να θεωρηθεί **πείραμα σκέψης**).

Στο [56-58] οι μαθητές αναφέρονται στο τμήμα GT (α) ως πλευρά του τριγώνου GKT και (β) ως τμήμα της υποτείνουσας του τριγώνου GKZ. Ο Μ3 αρχικά δεν αποδίδει στο τμήμα διπλό ρόλο (μετάφρασης του διαγράμματος με 2 τρόπους) αλλά αυτή διαμορφώνεται στη συνέχεια μέσω της συνεργασίας. Το αποτέλεσμα είναι να οδηγηθεί σε αποδεικτική διαδικασία σε συνεργασία με την Μ4 η οποία αναλύεται με το μοντέλο Toulmin στη συνέχεια. Επομένως, έχει αποκτήσει **ικανότητες λογικές** (αφού εφαρμόζει θεωρήματα και ορισμούς) καθώς και **ικανότητες εφαρμογής**:

Οι μαθητές σε συνεργασία αναπτύσσουν **παραγωγικό συλλογισμό**. Στο διάγραμμα ο σύνθετος μετασχηματισμός συρσίματος και περιστροφής οδηγεί στις διατυπώσεις των μαθητών οι οποίες προκύπτουν από τη μεταξύ τους συνεργασία, όπως αναπαριστάνεται μέσω του μοντέλου Toulmin. Οι μαθητές υπονοούν τα θεωρήματα τα οποία αποτελούν τις εγγυήσεις για την απόδειξη των επιχειρημάτων τους. Οι ερωτήσεις σκαλωσιάς της ερευνήτριας (τι είναι η ΗΘ, σε τι απόσταση από το Η , πόσο θα είναι η απόσταση) λειτουργούν ως υποστηρίγματα στην εξέλιξη του επιχειρήματος των μαθητών.



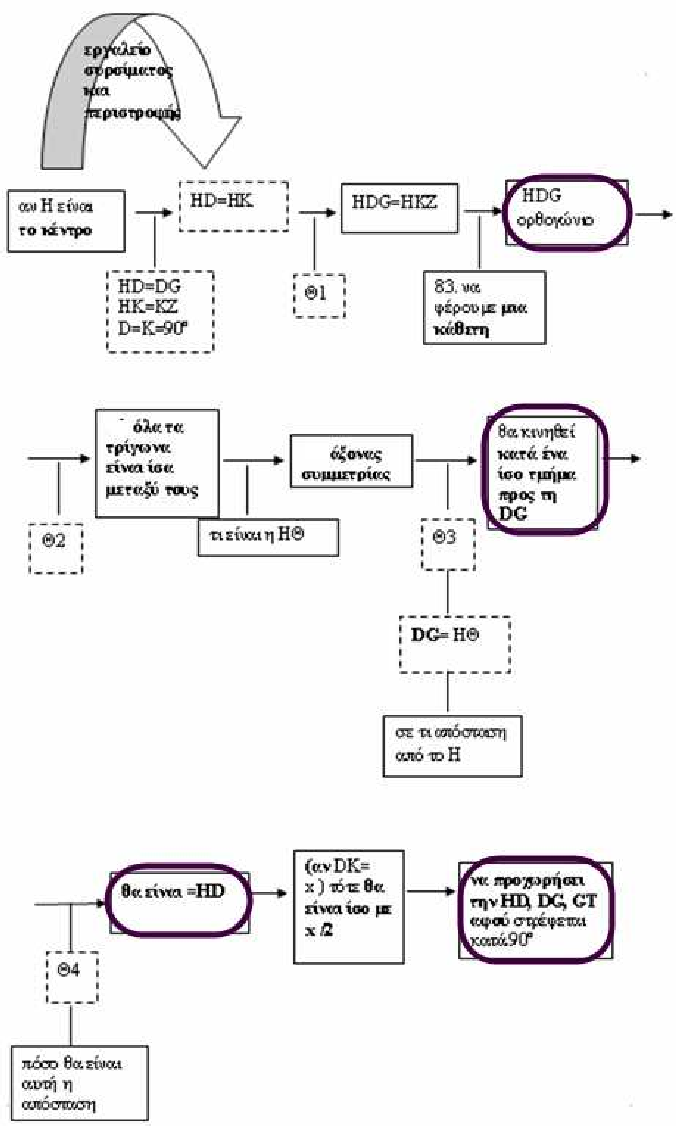
Σχήμα 4.33. Ανάλυση του επιχειρήματος των Μ3, Μ4 με το μοντέλο Toulmin

....

88. Μ4: Που είναι ίσες .Επομένως, μπορεί να πάει ακολουθώντας αυτή την διαδρομή.
89. Μ3: Δηλαδή, να προχωρήσει την HD, DG, GT αφού στρέφεται κατά 90ο συνεχώς.

....

Ο Μ3 αναπτύσσει **δυναμική οπτικοποίηση,** αφού στις εκφράσεις του υπάρχουν οι έννοιες της κίνησης (θα κινηθεί) της περιστροφής (αφού στρέφεται) της μετακίνησης (να προχωρήσει) και **εφαρμόζει την λύση στο πραγματικό πρόβλημα.**



Σχήμα 4.34. Ανάλυση του επιχειρήματος των Μ3, Μ4 με το μοντέλο Toulmin.

4.2.4. Μ4-ΟΜΑΔΑ Δ

Ανάπτυξη ικανότητας μετατροπής μεταξύ αναπαραστάσεων μέσω γνωστικών συγκρούσεων.

Μέσω του εργαλείου ανάκλασης

....

98. *Ερ: Υπάρχει άξονας συμμετρίας στο παραλληλόγραμμο;*
99. *Μ4: Υπάρχουν δυο.*
100. *Ερ: Ποιοι είναι ;*
101. *Μ4: Οι διαγώνιες ;*
102. *Ερ: Μπορείς να εξετάσεις αν ισχύει με μια κορυφή;*
103. Επιλέγουν τη μια διαγώνιο και την κάνουν άξονα συμμετρίας και στη συνέχεια το σημείο Α και εφαρμόζουν την διαδικασία ανάκλασης.
104. *Μ4: Δηλαδή, στο τετράγωνο οι άξονες συμμετρίας θα είναι οι διαγώνιες.*

....

Στο [101] η Μ4 αντιμετωπίζει **γνωστικό εμπόδιο,** αναφορικά με την αξονική συμμετρία του παραλληλογράμμου. Η μαθήτρια έρχεται σε **γνωστική σύγκρουση,** αφού θεωρεί ότι οι διαγώνιες του παραλληλογράμμου είναι και άξονες συμμετρίας του σχήματος. Το εργαλείο της ανάκλασης διαμεσολαβεί, ώστε η μαθήτρια να κατανοήσει ότι οι κορυφές δεν είναι συμμετρικές ως προς τις διαγώνιες. Στο [104] συμπεραίνει ότι «στο τετράγωνο οι άξονες συμμετρίας θα είναι οι διαγώνιες». Επομένως, από μια **εικονική αναπαράσταση** οδηγείται μέσω **νοητικών μετασχηματισμών σε μια λεκτική αναπαράσταση**. Στο σημείο [104] η Μ4 **επανεφευρίσκει** μια ιδιότητα του σχήματος λόγω της αλληλεπίδρασης με το εργαλείο ανάκλασης, την οποία δεν γνώριζε. Η μαθήτρια έχει κατανοήσει την έννοια των αξόνων συμμετρίας στα παραλληλόγραμμα και έχει υπερβεί το γνωστικό εμπόδιο, όπως διαπιστώνεται στη συνέχεια στο διάστημα [178].

<u>Μέσω του εργαλείου κατασκευής μέσων και παράλληλης</u>

……

158. *Μ4: Εγώ θα κατασκευάσω μια παράλληλη προς την AD (δείχνει τα μέσα των πλευρών).*
159. *Μ3: Με τα midpoints*
160. *Η Μ4 κατασκευάζει τα μέσα των πλευρών και τα ενώνει.*
161. *Μ3: Το ίδιο.*
162. *Ερ: Υπάρχει άλλος άξονας;*
163. *Η Μ4 επιλέγει και τις δυο άλλες πλευρές και κατασκευάζει τα δυο μέσα*
164. *Μ4: Η ευθεία που ενώνει και τα άλλα δυο μέσα .*

……

Στο διάστημα [158-164] η Μ4 συνδέει την κατασκευή των αξόνων συμμετρίας με την κατασκευή παράλληλης προς την πλευρά του σχήματος. Κατασκευάζει και ενώνει τα μέσα των απέναντι πλευρών του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, ώστε να κατασκευάσει τον άξονα συμμετρίας του και διατυπώνει έναν **ορισμό** στο [164] σε **τυπική μαθηματική γλώσσα**. Επομένως, μέσω της διαδικασίας συνδέει την έννοια της αξονικής συμμετρίας του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με την έννοια της παραλλήλου που διέρχεται από τα μέσα των απέναντι πλευρών. Στο διάστημα του διαλόγου [165-178] (παρακάτω) η Μ4 κατανοεί ότι οι διαγώνιες του τετραγώνου και του ρόμβου είναι άξονες συμμετρίας. Η επαναφορά του σχήματος του τετραγώνου σε σχήμα ρόμβου με **θεωρητικό σύρσιμο** μιας κορυφής οδηγεί τους μαθητές σε κατάσταση **γνωστικής σύγκρουσης** (δείτε σχετική ανάλυση του Μ3). Η Μ4 αντιλαμβάνεται ότι οι μεσοπαράλληλοι δεν είναι άξονες συμμετρίας του ρόμβου και το διατυπώνει στο [178] χωρίς να αιτιολογήσει. Το εργαλείο ανάκλασης του λογισμικού βοηθά τους μαθητές να προσαρμόσουν την έννοια του άξονα συμμετρίας στο ήδη υπάρχον γνωστικό σχήμα.

Μέσω του εργαλείου κατασκευής μέσων, εργαλείου ανάκλασης και θεωρητικό σύρσιμο

....

165. Σύρω το σχήμα του ρόμβου από μια κορυφή ώστε να μοιάζει τετράγωνο.
166. *Τώρα ποιοι είναι οι άξονες συμμετρίας;*
167. *Μ4: Οι διαγώνιες ;*
168. *Ο Μ3 επιλέγει τις 4 πλευρές και κατασκευάζει τα μέσα των πλευρών.*
169. *Ερ: Και αν συνδέσουμε τα μέσα;*
170. *Ο Μ3 ενώνει τα διαδοχικά μέσα.*
171. *Μ4: όχι έτσι, απέναντι !*
172. *Μ3: Άμα ενώσω τα μέσα θα σχηματιστεί πάλι τετράγωνο;*
173. *Σύρω ξανά τις κορυφές του σχήματος και σχηματίζεται ένας ρόμβος.*
174. *Ερ: Τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα μέσα εξακολουθούν να είναι άξονες συμμετρίας;*
175. *Μ3: Ναι*
176. *Μ4: Όχι*
177. *Μ3: Όχι –όχι!*
178. *Μ4: Όχι δεν είναι !*

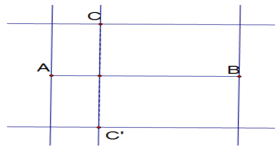
....

Οι μαθητές χρησιμοποιούν το εργαλείο συρσίματος και της ανάκλασης για να προσδιορίσουν αν είναι οι διαγώνιες (ή οι μεσοπαράλληλοι του σχήματος) άξονες συμμετρίας. Μέσω της διαδικασίας **εργαλειακής γένεσης** οι μαθητές κατασκευάζουν **ένα όργανο** που περιλαμβάνει το αντικείμενο και τις ιδιότητες του (π.χ το είδωλο του σημείου εκτός του σχήματος) οι οποίες δεν προσαρμόζονται στο γνωστικό σχήμα που ήδη υπάρχει. Επομένως, έρχονται σε γνωστική σύγκρουση και οδηγούνται να κατασκευάσουν ένα **νέο γνωστικό σχήμα** που περιλαμβάνει την έννοια του συμμετρικού σημείου ως προς άξονα συμμετρίας την διαγώνιο, καθώς και την **αντιληπτική ιεράρχηση** των παραλληλογράμμων.

Επομένως, οι **συνδεόμενες αναπαραστάσεις** οδηγούν τη μαθήτρια (α) να συνδέσει τις **πρωτεύουσες ιδιότητες** του ορθογωνίου και του τετραγώνου, ιδιότητες δηλαδή που έχουν σχέση με την παραλληλία των πλευρών με τις **δευτερεύουσες ιδιότητες** του σχήματος, δηλαδή ιδιότητες που έχουν σχέση με τη συμμετρία του σχήματος και (β) να οδηγηθεί σε γνωστικές συγκρούσεις με το σχήμα του ρόμβου, **διαμεσολαβώντας στην αποκωδικοποίηση της νοητικής εικόνας του σε εικονική και στη συνέχεια της εικονικής σε λεκτική.**

Μέσω του προσαρμ. εργαλείου, εργαλ. σημείου και παραλλήλου

208. Στη συνέχεια κατασκευάζω ένα ευθύγραμμο τμήμα.
209. *Ερ:Πως θα κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο που να έχει αυτό το τμήμα σαν άξονα συμμετρίας ;*
210. *Ο Μ3 επιλέγει το προσαρμ. εργαλείο και το εφαρμόζει, ώστε να σχηματιστεί το διπλάσιο τμήμα.*
211. *Μ4: Να φέρουμε μια παράλληλη!*
212. *Ερ: Από πού;*
213. *Μ4: Προς αυτό το ευθύγραμμο τμήμα.*
214. *Μ4:.Σε μια τυχαία απόσταση και μετά θα φέρω το συμμετρικό της*
215. Η Μ4 κατασκευάζει μια παράλληλη.
216. Η παράλληλη συμπίπτει με το ευθύγραμμο τμήμα και η Μ4 κάνει αναίρεση της τελευταίας κίνησης.
217. Η Μ4 κατασκευάζει ένα σημείο εκτός του τμήματος και επιλέγει το σημείο.
218. *Μ3: Πάρε και το τμήμα.*
219. *Η Μ4 επιλέγει το εργαλείο από την εργαλειοθήκη και το εφαρμόζει σε τυχαίο σημείο της παράλληλης μάλλον προσπαθώντας να φαίνεται κάθετο.*
220. *Ο Μ3 επιχειρεί να διαγράψει όλη την προσπάθεια της Μ4. Επέμεινα να συνεχίσει η Μ4 γιατί την είδα να κοιτάζει την οθόνη επίμονα.*
221. *Μ4: Μετά βρίσκουμε το συμμετρικό του σημείου… τώρα μπορώ να εφαρμόσω το εργαλείο!*
222. *Μ4: Και τώρα να φέρουμε άλλη μια παράλληλη από το C΄.*
223. *Μ4: Τώρα να φέρουμε και δυο κάθετες.*



Σχήμα 4.35. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [208-223]

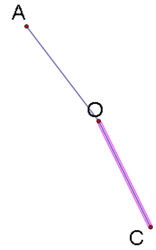
Η κατασκευή του ορθογωνίου στο [208-223] ολοκληρώνεται από την Μ4 με αντιστροφή των ενεργειών του προηγούμενου σταδίου της ίδιας φάσης (δηλαδή της κατασκευής αξόνων συμμετρίας του ορθογωνίου που έχει προηγηθεί). Η Μ4 κατασκευάζει **τη μεσοπαράλληλη του ορθογωνίου ως άξονα συμμετρίας του σχήματος.** Η μαθήτρια αντιμετωπίζει **εργαλειακό εμπόδιο** στην αποκωδικοποίηση της νοητικής της εικόνας σε εικονική στην οθόνη στο [219]. Διατυπώνει την έννοια *της τυχαίας απόστασης* στο [214] η οποία μεταφράζεται σε ενέργεια με την κατασκευή ενός τυχαίου σημείου με 2 βαθμούς ελευθερίας στο επίπεδο της οθόνης. Ακόμα, την έννοια της απόστασης-καθέτου από το σημείο προς το ευθύγραμμο τμήμα -άξονα. Επομένως, η χρήση του εργαλείου του σημείου οδηγεί την μαθήτρια σε κατάσταση **γνωστικής σύγκρουσης** με αποτέλεσμα να κατανοήσει την έννοια «κάθε σημείο του άξονα απέχει εξίσου από τις δυο παράλληλες πλευρές του ορθογωνίου» το οποίο όμως δεν διατυπώνει. Ο ρόλος του προσαρμ. εργαλείου είναι **διαμεσολαβητικός** στην κατασκευή της έννοιας (του συμμετρικού σημείου ως προς τον άξονα συμμετρίας του ορθογωνίου). Μέσω της διαδικασίας το ορθογώνιο αποκτά το **χαρακτήρα σήματος** και συνδέει τις **πρωτεύουσες ιδιότητες με τις δευτερεύουσες** ιδιότητες του σχήματος.

Ανάπτυξη ικανότητας δομικής ανάλυσης – διπλή (/πολλαπλή) ερμηνεία γεωμετρικών αντικειμένων

<u>Μέσω του εργαλείου σημείου και πειραματικού συρσίματος</u>

………

72. *Ερ:Πως θα κατασκευάσουμε το συμμετρικό του σημείου Α ως προς κέντρο συμμετρίας το σημείο Ο;*
73. *Μ4: Θα προεκτείνουμε την ΟΑ σε ΟΑ΄ η οποία θα είναι ίση με την ΟΑ.*
74. *Ερ: Πως θα το προεκτείνουμε;*
75. *Μ4: Με ευθύγραμμο τμήμα.*
76. Η Μ4 επιλέγει ένα εργαλείο ευθυγράμμου τμήματος από την εργαλειοθήκη και προσπαθεί να κατασκευάσει την προέκταση.



Σχήμα 4.36. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [72-76]

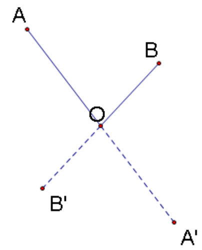
………

Η Μ4 αντιμετωπίζει **εργαλειακό εμπόδιο,** αφού η προέκταση του τμήματος δε μπορεί να ολοκληρωθεί όπως στα στατικά μέσα. Η μαθήτρια αντιμετωπίζει **γνωστική σύγκρουση** και ωθείται να αναζητήσει μιας διαδικασία για να ολοκληρωθεί η κατασκευή του συμμετρικού Ωθείται δηλαδή, **να αναπτύξει την ικανότητα αποκωδικοποίησης** μιας νοητικής και λεκτικής αναπαράστασης σε εικονική στην οθόνη.

<u>Μέσω του προσαρμ. εργαλείου</u>

………

89. *Ερ: Πάρε τώρα ένα σημείο Β ένωσε το με το Ο και κατασκευάστε το συμμετρικό του*
90. *Μ3: Με το Ο ;*
91. Ο Μ3 συνδέει το σημείο Ο με το σημείο Β, καθιστά το Ο κέντρο και κατασκευάζει το συμμετρικό του σημείου Β, ακολουθώντας τη σειρά ενεργειών.
92. Ο Μ3 σύρει από το σημείο Ο, το σχήμα που προκύπτει.
93. *Ερ: Αν τα ενώσουμε αυτά τα σημεία τι σχήμα θα προκύψει;*
94. *Μ4: Ένα τετράπλευρο… παραλληλόγραμμο.*
95. *Ερ: Γιατί είναι παραλληλόγραμμο;*
96. *Μ3: Γιατί οι διχ … διχ..*
97. *Μ4: Γιατί οι διαγώνιες διχοτομούνται!*



Σχήμα 4.37. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [89-97]

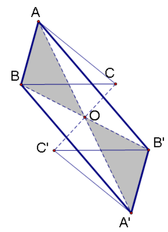
………

Στο [97] η Μ4 έχει κατασκευάσει την **σειριακή, θεσιακή και λεκτική κατανόηση** του προσαρμ. εργαλείου και αναγνωρίζει στην οθόνη το σχήμα του τετράπλευρου από τη **δομή των τεμνόμενων διαγωνίων**. (Δηλαδή, η κατασκευή του συμμετρικού του σημείου Β ως προς το σημείο Ο έχει ως αποτέλεσμα την κατασκευή των τεμνόμενων τμημάτων με κοινό μέσο το σημείο Ο, επομένως τη δομή των τεμνόμενων διαγωνίων του παραλληλογράμμου). Σύροντας την κατασκευή από το σημείο Ο, οι ιδιότητες του σχήματος παραμένουν αμετάβλητες, δηλαδή το σημείο Ο παραμένει το μέσο των δυο τμημάτων και τα σημεία Α, Α΄ και Β, Β΄ διατηρούν τις ιδιότητες των συμμετρικών αντικειμένων. Αυτό προκύπτει αφού έχουν κατασκευαστεί ως 1-1 αντιστοιχήσεις, λόγω της χρήσης του προσαρμ. εργαλείου. Η Μ4 αναγνωρίζει το σχήμα του παραλληλογράμμου στην οθόνη και αιτιολογεί με **τυπική γλώσσα,** χρησιμοποιώντας το κριτήριο του παραλληλογράμμου. Η αιτιολόγηση της είναι συνδυασμός **εμπειρικής και νοητικής μορφής**, αφού η μαθήτρια βασίζεται σε ένα παράδειγμα τυχαίο το οποίο προκύπτει από μια κλάση αντικειμένων, ενδεικτικό της ιδιότητας του σχήματος. Επομένως, η μαθήτρια οδηγείται μέσω του προσαρμοσμένου εργαλείου να μετατρέψει **μια εικονική αναπαράσταση σε λεκτική** μέσα από νοητικούς μετασχηματισμούς.

<u>Μέσω του προσαρμ. εργαλείου</u>

……

127. *Ερ: Τι σχέση έχουν τα δυο τρίγωνα;*
128. *Μ3: Ίσα*
129. *Ερ: Πως προκύπτουν;*
130. *Μ4: Φέρνοντας παράλληλες στις πλευρές*
131. *Ερ: Γιατί, που βλέπεις παράλληλες;*
132. *Μ4: Οι πλευρές είναι παράλληλες, γιατί είναι παραλληλόγραμμα.*
133. *Ερ: Ποια παραλληλόγραμμα βλέπεις;*
134. *Μ4: CAC΄A΄κ.λ.π.* (Ονομάζει όλα τα παραλληλόγραμμα, δείχνοντάς τα).



Σχήμα 4.38. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [127-134]

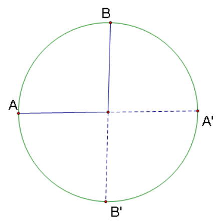
……

Η Μ4 αναπτύσσει **δυναμική οπτικοποίηση** στο [130]. Η Μ4 αναγνωρίζει την παραλληλία των πλευρών **των υποσχημάτων** των παραλληλογράμμων που σχηματίζονται από την κατασκευή του συμμετρικού τριγώνου, κατασκευάζοντας νοητικά τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τις πλευρές. Επομένως, η μαθήτρια αναγνωρίζει τα παραλληλόγραμμα από **τη δομή των τεμνόμενων διαγωνίων που σχηματίζονται** στο [134]. Το παραλληλόγραμμο έχει αποκτήσει τον *χαρακτήρα σήματος*. Η μαθήτρια ‘βλέπει’ τα παραλληλόγραμμα, δηλαδή έχει αποκτήσει τη *διορατικότητα* για να κατασκευάσει τη λύση του προβλήματος, σημείο επομένως **δυναμικής επανεφεύρεσης της λύσης**. Η Μ4 έχει συνδέσει νοητικά αναπαραστάσεις (Η αναπαράσταση που προκύπτει είναι συνδεόμενη με την αναπαράσταση στο [97]). Επομένως, μέσω της επίδρασης των συνδεόμενων αναπαραστάσεων και των νοητικών μετασχηματισμών που έχει αναπτύξει, **μετατρέπει μια εικονική αναπαράσταση σε λεκτική.** Ταυτόχρονα, έχει αποκτήσει τη ικανότητα **να αναλύσει δομικά το σχήμα**, καθώς τα τμήματα πλευρές των τριγώνων **αποκτούν διπλό ρόλο**, αφού η μαθήτρια τα ερμηνεύει και ως πλευρές των παραλληλογράμμων.

Μέσω του εργ. σημείου, προσαρμ. εργαλείου, εργαλείου κύκλου και πειραματικού συρσίματος

……

182. Ο Μ3 κατασκευάζει ένα ευθύγραμμο τμήμα, επιλέγει το προσαρμ. εργαλείο από την εργαλειοθήκη και το εφαρμόζει στα άκρα του τμήματος.
183. Μ4: Μπορούμε να φτιάξουμε κύκλο;
184. Η Μ4 επιλέγει ένα σημείο πάνω στον κύκλο σε θέση που αν χρησιμοποιήσει το εργαλείο να είναι περίπου κάθετη στην ΑΑ΄.
185. Ερ: Σε τυχαία θέση; … τι σχήμα είναι αυτό;
186. Μ4: Τετράγωνο.
187. Μ3: Δεν είναι τετράγωνο … παραλληλόγραμμο.
188. Μ3: Ορθογώνιο.
189. Ερ: Γιατί;
190. Μ3: Οι διαγώνιες διχοτομούνται.
191. Μ4: Είναι ίσες.



Σχήμα 4.39. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [182-191]

……

Η κατασκευή του ορθογωνίου στο [182-191] ολοκληρώνεται από την Μ4 ως αντίστροφη διαδικασία της κατασκευής αξόνων συμμετρίας του ορθογωνίου. Από την απάντηση της στο [186] συμπεραίνεται ότι το ορθογώνιο δεν έχει αποκτήσει τον *χαρακτήρα σήματος*. Η μαθήτρια εφαρμόζει το προσαρμ. εργαλείο σε τυχαίο σημείο του κύκλου, επομένως σημείου με έναν βαθμό ελευθερίας, **οπτικά καθέτου** από το σημείο προς το ευθύγραμμο τμήμα – άξονα. Το **πειραματικό σύρσιμο** του τυχαίου σημείου Β, οδηγεί την μαθήτρια σε **γνωστική σύγκρουση** και επαναπροσδιορισμό των ιδιοτήτων που φέρουν οι διαγώνιες του σχήματος. Το προσαρμ. εργαλείο και το εργαλείο κύκλου διαμεσολαβούν, ώστε η μαθήτρια να ανακαλύψει **/επανεφεύρει** τις ιδιότητες του ορθογωνίου. Επομένως, διαμεσολαβούν (α) στην **αποκωδικοποίηση μιας νοητικής εικόνας σε εικονική και στη συνέχεια σε λεκτική,** (β) στην κατασκευή του **χαρακτήρα σήματος** του σχήματος και (γ) στην ανάπτυξη ικανότητας ερμηνείας ενός στοιχείου το σχήματος με διαφορετικό τρόπο (π.χ του τμήματος ΟΒ ως ακτίνα και ως διαγώνιο του σχήματος). Δηλαδή, στην ανάπτυξη ικανότητας απόδοσης **διπλού ρόλου** στο τμήμα.

Συνοπτικά: όπως συμπεραίνεται από τις προαναφερόμενες περιπτώσεις χρήσης του προσαρμ. εργαλείου από την Μ4, η μαθήτρια αναπτύσσει μια αυξανομένη ικανότητα αναγνώρισης των ιδιοτήτων στοιχείων του διαγράμματος. Στο διάστημα [182-191] *εκλεπτύνει τη δομή του* παραλληλογράμμου, προσθέτοντας στο σχήμα του παραλληλογράμμου περισσότερες ιδιότητες. Επομένως, το σχήμα του ορθογωνίου αποκτά μια θέση στην *ιεραρχικά υψηλότερη δομή,* ως ειδικότερη μορφή από την μορφή του παραλληλογράμμου. Αναπτύσσει δηλαδή την **ικανότητα ιεράρχησης των τετραπλεύρων.**

Κατασκευή εννοιών-εν-δράσει, συσχέτιση εννοιών

Μέσω του εργαλείου περιστροφής

………

82. *Η Μ4 με το εργαλείο του συρσίματος αυξομειώνει το μέγεθος του τμήματος-ειδώλου.*
83. *Ερ: Τι διαπιστώνουμε;*
84. *Μ4: Ότι είναι ίσα.*

………

Η Μ4 στο [84] διατυπώνει έναν **ανακριβή ορισμό** για τα συμμετρικά τμήματα. Ο ορισμός είναι μια **έννοια-εν-δράσει** που προκύπτει, ως αποτέλεσμα του *σχήματος εργαλειοποιημένης δράσης* του εργαλείου περιστροφής που η μαθήτρια έχει κατασκευάσει.

………

187. Μ3: δεν είναι τετράγωνο … παραλληλόγραμμο
188. Μ3: ορθογώνιο
189. Ερ: Γιατί;
190. Μ3:Οι διαγώνιες διχοτομούνται
191. Μ4: είναι ίσες

………

199. *Ερ: Τι σχήμα είναι αυτό τώρα;*
200. *Μ4: Τετράγωνο.*
201. *Ερ: Γιατί;*
202. *Μ4: Όλες οι πλευρές είναι ίσες.*
203. Τους παροτρύνω να δικαιολογήσουν την απάντηση τους με ότι γνωρίζουν από την κατασκευή τους.
204. *Μ3: Οι διαγώνιες διχοτομούνται κάθετα... και είναι ίσες, αφού έτσι τις κατασκευάσαμε.*
205. *Ερ: Ποιων βασικών σχημάτων πληρούν τις ιδιότητες;*
206. *Μ3: Του ρόμβου.*
207. *Μ4: Του ορθογωνίου.*

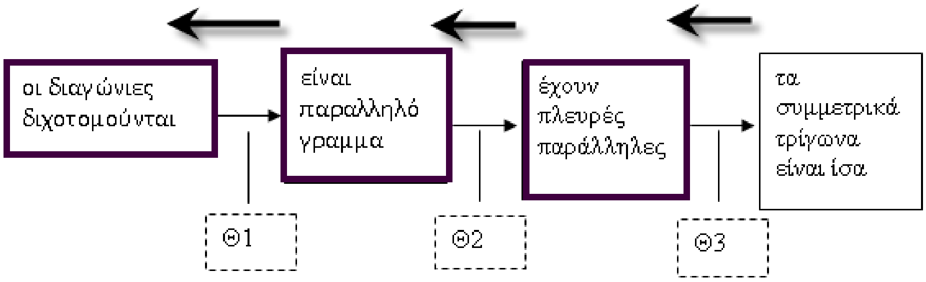
………

Στο [191] διατυπώνει έναν **αυθαίρετο οικονομικό ορισμό** του ορθογωνίου σε αλληλεπίδραση με τον Μ3 και το προσαρμ. εργαλείο. Ο συνδυασμός των απαντήσεων της Μ4 στα [202-207] διαμορφώνει έναν **αυθαίρετο οικονομικό ορισμό** του τετραγώνου: «είναι όλες οι πλευρές ίσες και είναι ορθογώνιο».

Ανάπτυξη απαγωγικών και παραγωγικών επιχειρημάτων

Μέσω του προσαρμ. εργαλείου

Στο [132] αναπτύσσει ένα **απαγωγικό επιχείρημα**: «οι πλευρές είναι παράλληλες γιατί είναι παραλληλόγραμμα». Η Μ4 δε γνωρίζει ότι είναι παραλληλόγραμμα, αλλά το συμπεραίνει από το διάγραμμα στην οθόνη, ως αποτέλεσμα της *λειτουργικής κατανόησης* του προσαρμοσμένου εργαλείου. Η διατύπωση της Μ4 είναι αποτέλεσμα ενός δικτυού λογικών επιχειρημάτων που η μαθήτρια αναπτύσσει νοητικά-- σε συνεργασία με τον Μ3-- και μπορούν να διατυπωθούν ως εξής: τα [συμμετρικά] τρίγωνα τα είναι ίσα, [και είναι ίσα] γιατί [έχουν] πλευρές παράλληλες και [έχουν πλευρές παράλληλες] γιατί κατασκευάζονται παραλληλόγραμμα, [και είναι παραλληλόγραμμα γιατί οι διαγώνιες τους διχοτομούνται, [αφού έχουν κατασκευαστεί με εφαρμογή του εργαλείου].

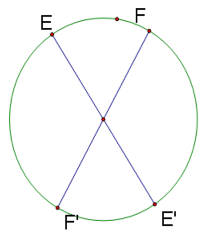


Σχήμα 4.40. Απαγωγικό επιχείρημα της Μ4

Μέσω του προσαρμ. εργαλείου και εργαλείου κύκλου και του πειραματικού συρσίματος

……

149. *Ερ: Ποιο είναι το συμμετρικό του κύκλου ως προς το κέντρο του;*
150. *Η Μ4 επιλέγει το εργαλείο από την εργαλειοθήκη και αρχίζει να το εφαρμόζει σε τυχαία σημεία του κύκλου.*
151. *Μ4: Όσα σημεία και να πάρουμε πάνω στον κύκλο πάλι παραμένουν πάνω στον κύκλο.*



Σχήμα 4.41. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [149-151]

……

Στο [151] η Μ4 αναπτύσσει **επαγωγικό συλλογισμό** και διατυπώνει μια **γενίκευση** «[για κάθε σημείο] όσα σημεία και να πάρουμε πάνω στον κύκλο [έχουν τον συμμετρικό τους] πάνω στον κύκλο», ένα **θεώρημα-εν-δράσει** που προκύπτει λόγω της αλληλεπίδρασης με το προσαρμ. εργαλείο και το εργαλείο του κύκλου.

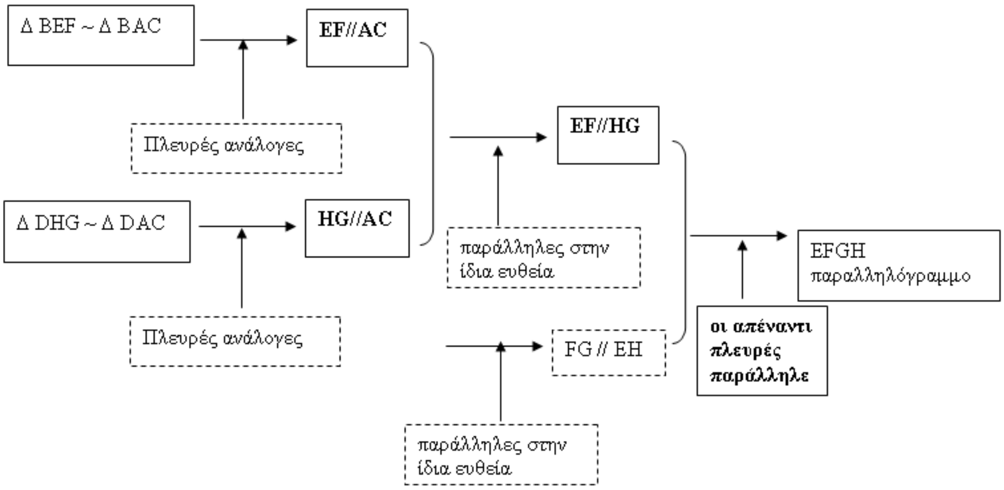
……

243. *Μ4: Και αλλιώς δεν μπορούμε; Το BEF τρίγωνο είναι όμοιο με το BAC άρα η EF // AC, όμοια το DHG είναι όμοιο με το DAC, άρα η HG//AC και τα άλλα με τον ίδιο τρόπο, άρα αφού είναι οι απέναντι πλευρές παράλληλες είναι παραλληλόγραμμο.*

…….

Στο [243] η Μ4 οδηγείται να διατυπώσει μια **συμπερασματική δήλωση**: «άρα αυτές οι δυο είναι παράλληλες και ίσες άρα είναι παραλληλόγραμμο». Χρησιμοποιεί επομένως μια **αλυσίδα παραγωγικών επιχειρημάτων,** προκειμένου να αποδείξει τον ισχυρισμό της. Έχει αναπτύξει επομένως **κανόνες λογικής** για να κατασκευάσει την απόδειξη.

……… …………………….



Σχήμα 4.42. Ανάλυση του επιχειρήματος της Μ4 με το μοντέλο Toulmin

Μέσω των ΣΟΕΑ δ φάσης

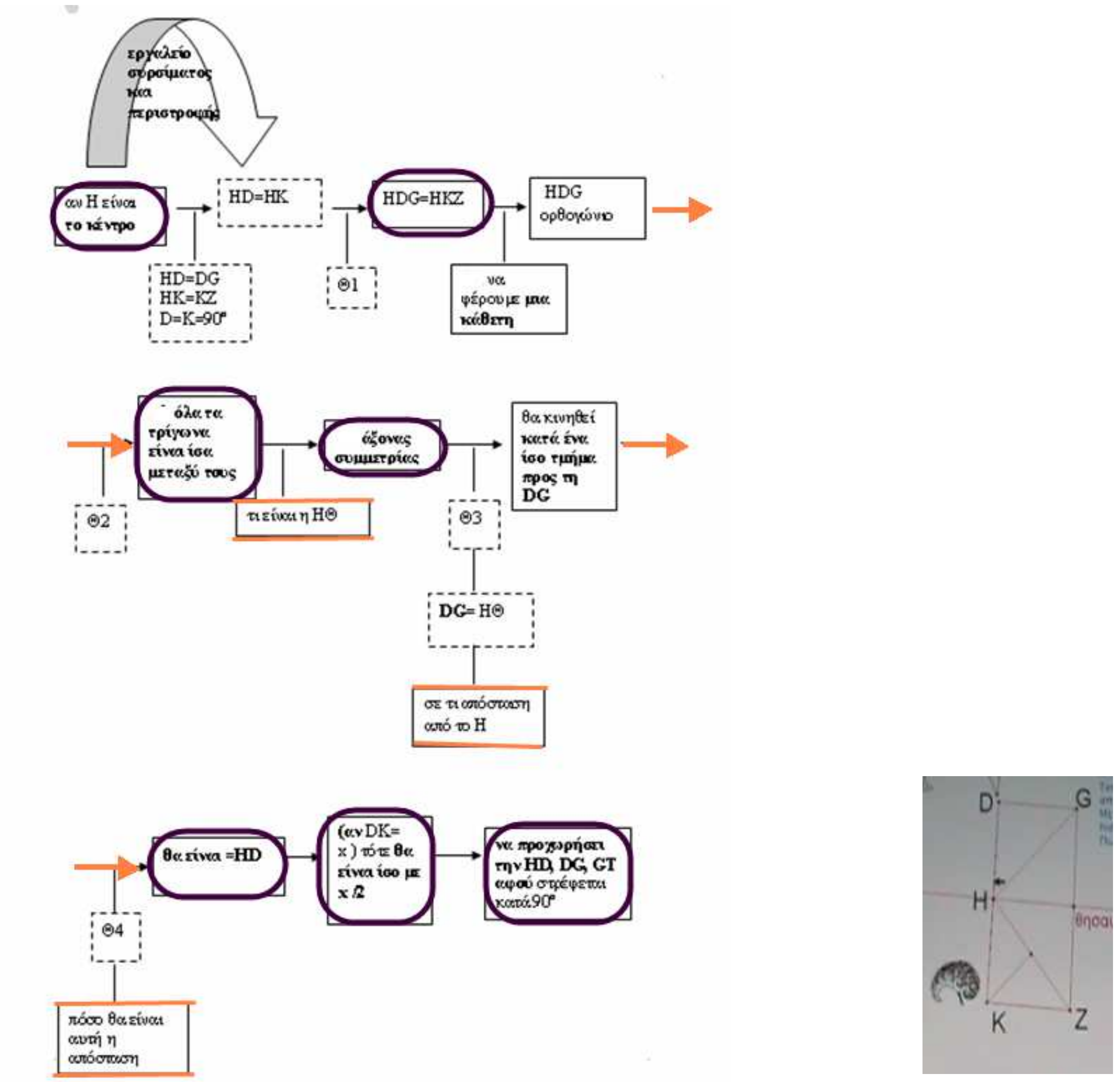
…….

67. M4: Αν H είναι το κέντρο;
68. M4: HDG=HKZ και να φέρουμε μια κάθετη από δω (δείχνει στο H και το σημείο T
69. M3: Δεν έγινε ακριβώς το μέσο.
70. M3: Το HDG είναι ορθογώνιο.
71. M4: Εν τω μεταξύ όλα είναι ίσα μεταξύ τους
72. Ερ: Ποια δηλαδή είναι;
73. M4: Όλα τα τρίγωνα είναι ίσα μεταξύ τους GHΘ = HDG = HΘZ= ΘKH (ίσως να ήθελε να πει ΘKZ)
74. Ερ: Τι είναι η HΘ;
75. M4: Άξονας συμμετρίας.
76. Ερ: Σε τι απόσταση από το H ;
77. M3: Θα κινηθεί κατά ένα ίσο τμήμα προς τη DG
78. Ερ: Πόσο θα είναι αυτή η απόσταση; (δείχνω την HT)
79. M4: (ταυτόχρονα) Θα είναι =HD.
80. Ερ: Δηλαδή αν DK= x τότε πόσο θα είναι το HD;
81. M4: Θα είναι ίσο με x /2.
82. M3: Το HDGT είναι τετράγωνο.
83. Ερ: Γιατί είναι ;
84. M4: Γιατί είναι 90° όλες.
85. M3: Γιατί όλες οι γωνίες του είναι ορθές.
86. M4: Και οι πλευρές του είναι ίσες.
87. M3: Και ισοσκελές , άρα ξέρουμε και την HD , DG, GΘ.
88. M4: Που είναι ίσες. Επομένως, μπορεί να πάει, ακολουθώντας αυτή τη διαδρομή.
89. M3: Δηλαδή, να προχωρήσει την HD, DG, GT, αφού στρέφεται κατά 90° συνεχώς.

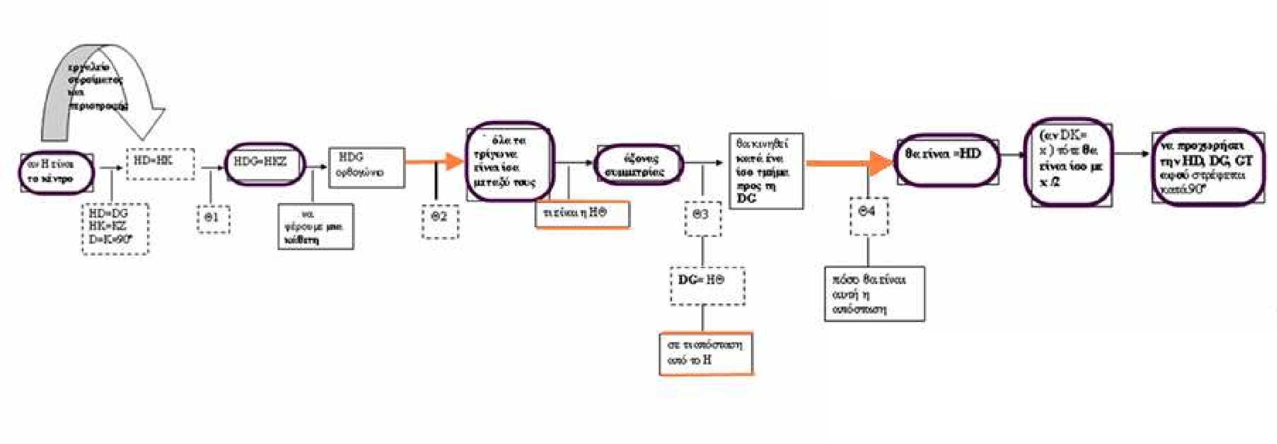
…….

Η Μ4 συμπεραίνει ότι το τρίγωνο GHZ είναι **ορθογώνιο** και αιτιολογεί το συμπέρασμα της. Η αιτιολόγηση της είναι αποτέλεσμα των νοητικών της μετασχηματισμών σε αλληλεπίδραση με το διάγραμμα και τον Μ3. Η μαθήτρια αναγνωρίζει ότι το τρίγωνο DHG είναι **ισοσκελές** και **ορθογώνιο**, επομένως συμπεραίνει για τις παρά τη βάση γωνίες του τριγώνου. Δηλαδή μια ιδιότητα του σχήματος σηματοδοτεί μια άλλη ιδιότητα. Επομένως, έχει αποκτήσει την ικανότητα να συσχετίζει ιδιότητες μεταξύ τους. Η απόδειξη των μαθητών σε συνεργασία διαμορφώνεται με το μοντέλο Toulmin, μέσω του παρακάτω διαγράμματος.

Οι μαθητές αναφέρονται στο τμήμα GT ως πλευρά του τριγώνου GKT [M4] και ως τμήμα της υποτείνουσας του τριγώνου GKZ [M3]. Οι ερωτήσεις της ερευνήτριας λειτουργούν ως υποστηρικτές με αποτέλεσμα --και σε αλληλεπίδραση -- να διατυπώσουν μια **αλυσίδα παραγωγικών δηλώσεων** για να ερμηνεύσουν το ρόλο του KT στο τρίγωνο.

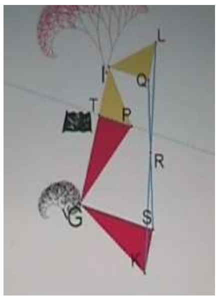


Σχήμα 4.43. Ανάλυση του παραγωγικού επιχειρήματος των Μ3-Μ4

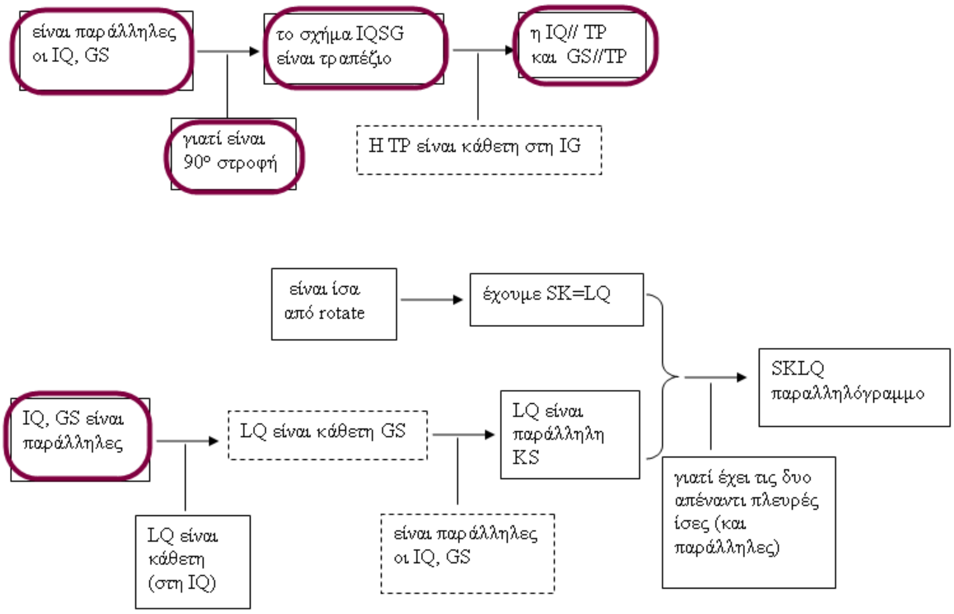


Σχήμα 4.44. Ανάλυση του παραγωγικού επιχειρήματος των M3-M4

90. M3: Το σχήμα IQSG είναι τραπέζιο.
91. Ερ: Γιατί;
92. M3: Είναι παράλληλες οι IQ, GS.
93. M4: Είναι και παράλληλες στην ευθεία αυτή TP.
94. Ερ: Γιατί είναι παράλληλη όμως η IQ, GS;
95. M3: Η IQ δεν είναι παράλληλη στο TP;
96. Ερ: Γιατί είναι;
97. M4: Γιατί είναι 90° στροφή.
98. M3: Άρα η IQ //TP με τον ίδιο τρόπο και η κάτω GS //TP
99. Ερ: Γνωρίζετε ότι το R είναι το μέσο του LK πως θα αποδείξετε ότι το R είναι το μέσο του QS;
100. M3: Αν το κάναμε λίγο πιο ευδιάκριτα να φαίνονται οι γραμμές
101. Αλλάζουμε το πάχος και το χρώμα των γραμμών.
102. M3: Έχουμε ότι SK=LQ.
103. M4: Αρκεί να συγκρίνουμε τα τρίγωνα RSK, RQL.
104. M4: Έχουν LQ=KS γιατί είναι ίσα από rotate (σχήμα ισότητα τμημάτων, τριγώνων κλπ)
105. M3: Έχουμε ως δεδομένο κατακορυφήν αλλά δεν θα μας χρειαστούνε, έχουμε ως δεδομένο ότι LR=KR ....αλλά δεν βγαίνει το τρίγωνο συνεχίζει ... το R αν είναι μέσο της μιας αρκεί να είναι μέσο της άλλης.
106. *M3: Ξέρουμε ότι LR=KR, επομένως να προεκτείνουμε κατά ίσα τμήματα;* (Παίρνει το ποντίκι και σύρει το QL).
107. Ο M3 παίρνει το Q και το σύρει να ταυτιστεί με το L.
108. M3: Θέλω να ταυτίζεται.
109. Ερ: Τι είναι το QLSK;
110. M3: Παραλληλόγραμμο, γιατί έχει δυο απέναντι πλευρές ίσες.
111. M3: Αρκεί να δείξουμε ότι είναι και παράλληλες.
M4: Η SG,QI είναι παράλληλες και η LQ είναι κάθετη, όμοια και η SK ,GS.Άρα είναι παράλληλες



Σχήμα 4.45. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [90-111]



Σχήμα 4.46. Ανάλυση του παραγωγικού επιχειρήματος των Μ3-Μ4

Οι μαθητές σε συνεργασία αναπτύσσουν **παραγωγικό συλλογισμό**. Στο διάγραμμα επάνω ο σύνθετος μετασχηματισμός *συρσίματος και περιστροφής* οδηγεί στις διατυπώσεις των μαθητών σε συνεργασία, όπως αναπαριστάνεται μέσω του μοντέλου Toulmin. Οι μαθητές υπονοούν τα θεωρήματα τα οποία αποτελούν τις *εγγυήσεις* για την απόδειξη των επιχειρημάτων τους. Η οπτικοποίηση του διαγραμματικού μετασχηματισμού οδηγεί τη μαθήτρια σε **αλυσιδωτούς συνδεόμενους νοητικούς μετασχηματισμούς**, οι οποίες οδηγούν στη διατύπωση του **παραγωγικού επιχειρήματος** (το οποίο μπορεί να θεωρηθεί **πείραμα σκέψης**).

4.2.5.Μ5-ομάδα Ε

Ανάπτυξη ικανότητας μετατροπής μεταξύ αναπαραστάσεων μέσω γνωστικών συγκρούσεων.

Μέσω του εργαλείου σημείου + πειραματικού συρσίματος

……

2. *Μ5: Φέρουμε παράλληλη στο ΑΒ και από το Β.*
3. *Ερ. Επιλέγεις και το τμήμα*
4. *Μ5: Αν πάρουμε αυτό το σημείο και να φέρουμε κάθετη;*

……

Ο Μ5, μεταφράζει τη λεκτική διατύπωση «κατασκεύασε ένα παραλληλόγραμμο» σε εικονική, με την κατασκευή ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Επομένως, εξειδικεύει την κατασκευή του, προσδίδοντας στο διάγραμμα περισσότερες ιδιότητες από αυτές που είναι αναγκαίες. Από αυτό συμπεραίνεται ότι ο μαθητής δε γνωρίζει ποιες είναι οι ιδιότητες του παραλληλογράμμου ή ότι δε διαχωρίζει την έννοια του ορθογωνίου παραλληλογράμμου από την έννοια του παραλληλογράμμου, επομένως δεν έχει αναπτύξει την ικανότητα ιεράρχησης των σχημάτων. Αντιμετωπίζει δυσκολία στη **σειριακή και λεκτική κατανόηση** των σχηματικών μονάδων για την κατασκευή της καθέτου και στην κατανόηση **της θεσιακής επιλογής** σημείου για την κατασκευή της πλευράς του παραλληλογράμμου. Το εργαλείο σημείου και η μεταβλητότητα του οδηγεί το μαθητή σε **γνωστική σύγκρουση** στο [4] όπως και στην αλλαγή προσανατολισμού επιλογής των σχηματικών μονάδων.

Μέσω του εργαλείου κύκλου

……….

15. *Ερ: Γιατί είναι ισόπλευρο;*
16. *Μ5: Είναι όλες οι πλευρές ίσες.*

……….

Η κατασκευή του ρόμβου αποκωδικοποιείται από τον Μ5 ως σύνθεση ισοπλεύρων τριγώνων. Δεν έχει δηλαδή ικανότητα μετατροπής της λεκτικής διατύπωσης («κατασκευάστε ένα ισοσκελές») σε εικονική (σχήμα ισοσκελούς). Στο σημείο αυτό επιβεβαιώνεται ότι ο μαθητής δεν έχει αναπτύξει την ικανότητα ιεράρχησης των εννοιών, με αποτέλεσμα να εξειδικεύει την κατασκευή του (όπως και στην κατασκευή παραλληλογράμμου). Έχει κατανοήσει τη **θεσιακή και σειριακή επιλογή του εργαλείου κύκλου** του λογισμικού για την κατασκευή ίσων κύκλων με πλευρά τη βάση του σχήματος. Ο μαθητής δεν έχει κατασκευάσει *το γνωστικό σχήμα* του ρόμβου, ως αποτέλεσμα σύνθεσης ισοσκελών.

Μέσω του εργαλείου ανάκλασης

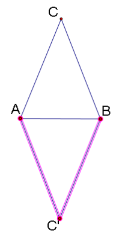
Ο Μ5 στο διάστημα [25-38] έρχεται **σε γνωστική σύγκρουση** όταν η ανάκλαση του ισοσκελούς διαμορφώνει την κατασκευή ενός ρόμβου. Αυτό διαπιστώνεται από την απάντηση του στο [25] («ρόμβος είναι αυτό;»). Στο σημείο αυτό συσχετίζει την εικονική αναπαράσταση στην οθόνη με την νοητική του εικόνα για τον ρόμβο, με αποτέλεσμα να οδηγηθεί στη λεκτική διατύπωση. Επομένως, μέσω της διαδικασίας προσαρμόζει το γνωστικό σχήμα που έχει κατασκευάσει μέσω της διδασκαλίας για τον ρόμβο, αναπτύσσοντας την **αντιληπτική ιεράρχηση** των εννοιών (α) ρόμβος ως αποτέλεσμα ανάκλασης ισοσκελούς και (β) ρόμβος ως σύνθεση ισοπλεύρων.

Ανάπτυξη ικανότητας δομικής ανάλυσης – διπλή (/πολλαπλή) ερμηνεία γεωμετρικών αντικειμένων

Μέσω του επίδρασης των εργαλείων κάθετου, απόκρυψης, ανάκλασης+πειραματικού συρσίματος

....

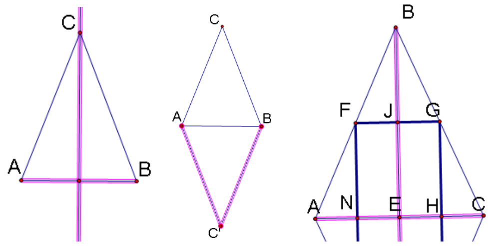
24. Ο Μ5 επιλέγει τη βάση και την καθιστά άξονα συμμετρίας.
25. *Μ5: Ρόμβος είναι αυτός;*
26. *Μ6: Είναι το συμμετρικό.*
27. *Μ6: Είναι ρόμβος, γιατί άμα τραβήξουμε από την κορυφή ...*
28. *Μ5: Οι διαγώνιοι του διχοτομούνται κάθετα.*
29. *Ερ: Πως το ξέρουμε αυτό;*
30. *Μ6: Είναι ισοσκελές -ισοσκελές η διαγώνιος θα περνά από τα μέσο και το τμήμα που περνά προς τα κάτω είναι τμήμα της μεσοκαθέτου.*
31. *Μ5: Και τέμνονται κάθετα.*
32. *Μ6: Είναι παράλληλες.*
33. *Μ5: Οι διαδοχικές γωνίες είναι ίσες.*
34. *Μ6: Οι διαγώνιες διχοτομούνται άρα ...*
35. *Ερ: Πως το ξέρουμε ότι οι διαγώνιες διχοτομούνται ;*
36. *Μ6: Επειδή οι διαγώνιοι διχοτομούνται, και επειδή η άλλη διαγώνιος που περνά από την κορυφή προς τα κάτω θα είναι μέρος της μεσοκαθέτου, θα είναι κάθετη στην άλλη.*
37. *Ερ: Τι άλλο μπορούμε να πούμε ;*
38. *Μ5: Είναι οι πλευρές ίσες ... δυο διαδοχικές ίσες.*



Σχήμα 4.47. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [24-38]

....

Ο Μ5 οπτικοποιεί ότι η ισότητα των τμημάτων της μεσοκαθέτου που διαχωρίζονται από την οριζόντια διαγώνιο του σχήματος του ρόμβου, διατηρείται καθώς το σημείο σύρεται επί της μεσοκαθέτου, όπως και η καθετότητα της μεσοκάθετου με την οριζόντια διαγώνιο. Η **απόκρυψη** της μεσοκαθέτου και η διατύπωση του Μ5 στο [28] μας οδηγεί να συμπεράνουμε ότι ο Μ5 έχει σχηματίσει **νοητικά** την κατακόρυφη διαγώνιο του σχήματος, η οποία συμπίπτει με την μεσοκάθετο του ισοσκελούς τριγώνου, ώστε να διατυπώσει την ιδιότητα της διχοτόμησης και καθετότητας. Δηλαδή, **μεταφράζει μια εικονική αναπαράσταση σε λεκτική αναπαράσταση,** λόγω της επίδρασης των εργαλείων κάθετου (για την κατασκευή της μεσοκαθέτου του τμήματος) ,απόκρυψης της μεσοκαθέτου, ανάκλασης και πειραματικού συρσίματος. Η κατανόηση των ιδιοτήτων του ρόμβου επήλθε σε αλληλεπίδραση με τα εργαλεία, τις οποίες ο μαθητής δεν γνώριζε εξ αρχής. Για παράδειγμα, στο [33] διατυπώνει τη λανθασμένη ιδιότητα «οι διαδοχικές γωνίες είναι ίσες», μεταφράζοντας λανθασμένα κάποιο στιγμιότυπο του διαγράμματος, λόγω του συρσίματος της κορυφής του. Στο [38] διατυπώνει την ιδιότητα της ισότητας των διαδοχικών πλευρών του ρόμβου, χωρίς να συμπεράνει για όλες τις πλευρές του ρόμβου. Συμπεραίνεται ότι μέσω της διαδικασίας ο μαθητής ωθείται να αντιληφθεί και ερμηνεύσει τις διαγώνιες του ρόμβου, με διπλό τρόπο: (α) την οριζόντια διαγώνιο του ρόμβου και ως βάση του ισοσκελούς, και (β) την μεσοκάθετο του ισοσκελούς και ως κάθετη διαγώνιο του ρόμβου.



Σχήμα 4.48. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [24-38]. Συνδεόμενες Οπτικές Ενεργές Αναπαραστάσεις (Patsiomitou, 2012)

<u>Μέσω του σχολιασμού διαγράμματος - ΣΟΕΑ γ φάσης</u>

....

68. *Ερ: Ωραία, τι σχήμα προκύπτει;*
69. *Μ5: Μέσα είναι ορθογώνιο*
70. *Ερ: Γιατί είναι ορθογώνιο;*
71. Δεν απαντούν.
72. *Ερ: Είναι παραλληλόγραμμο ;*
73. *Μ5: Έχει όλες τις γωνίες του ορθές*
74. *Ερ: Και γιατί έχει όλες τις γωνίες του ορθές;*

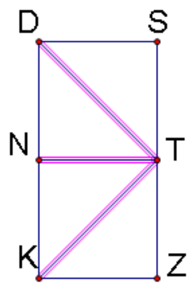
....

Αναγνωρίζει το υπο-σχήμα του ορθογωνίου FJEN στο [69] από τις ιδιότητες του σχήματος (ορθές γωνίες) και συνδέει την αναγνώριση του με ένα λογικό επιχείρημα στο [73] (οικονομικό ορισμό του ορθογωνίου), ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης με το διάγραμμα. Επομένως, --λειτουργώντας νοητικά-- **μεταφράζει μια εικονική αναπαράσταση σε λεκτική,** αναγνωρίζοντας υποδομές του σχήματος. Οι **συνδεόμενες αναπαραστάσεις** που εικονίζονται επάνω και διερευνήθηκαν σταδιακά από το μαθητή σε προηγούμενο σημείο, διαμεσολάβησαν ώστε να **συνδέσει έννοιες**, όπως την έννοια της μεσοκαθέτου με την έννοια του ρόμβου και στη συνέχεια με την έννοια του ορθογωνίου στο εσωτερικό του σχήματος. Συνεπώς, **αναπτύσσει την ικανότητα** να λειτουργεί (π.χ αναγνωρίζει υποδομές, μετακινείται από το ένα αναπαραστατικό σύστημα στο άλλο κλπ.) σε ένα πολυπλοκότερο σχήμα λόγω της επίδρασης των ΣΟΕΑ. Αυτή η ικανότητα εμφανίζεται σε πιο ανεπτυγμένη μορφή στη δ φάση, όπως διαπιστώνεται στο διάστημα [165-183].

<u>Μέσω των ΣΟΕΑ δ φάσης</u>

....

165. *Μ5:* *Γιατί δεν ξεκινάμε από δω (αντίστροφα) … .αν βρούμε το μέσο της DK … και αν βρούμε το σημείο από το μέσο της DK*
166. *Ερ:* *Α! εσύ το πας αντίστροφα!*
167. *Μ5:* *Αν κάνουμε το αντίστοιχο και από κάτω… .*
168. *Μ5:* *Αν ενώσουμε τα σημεία αυτά τότε θα περνά από τον θησαυρό .*
169. *Ερ:* *Τι τρίγωνα είναι αυτά που σχηματίστηκαν;*
170. *Μ5, Μ6:* *Ορθογώνια και ισοσκελή.*
171. *Ερ:* *Επομένως πόσο είναι οι γωνίες;*
172. *Μ5, Μ6 :* *45ᵒ*
173. *Ερ:* *Τι σχήματα είναι αυτά και τα δυο; (έχουμε φέρει και την GT)*
174. *Μ5, Μ6 :* *Συμμετρικά.*
175. *Ερ:* *Τι σχήμα είναι το DSΘG;*
176. *Μ5, Μ6:* *Τετράγωνο.*
177. *Ερ:* *Σε ποιο σημείο επομένως είναι ο θησαυρός;*
178. *Μ5:* *Φέρνουμε μια κάθετη στην DK.*
179. *Μ5:* *Σε ίση με DN δηλαδή στη μισή της DK .*
180. *Ερ:* *Δηλαδή, αν είναι x αυτή η απόσταση, πόσο θα είναι η DN;*
181. *Μ5, Μ6:* *x /2*
182. *Ερ:* *Τι σχέση έχει η NT με την DK;*
183. *Μ5, Μ6 :* *Είναι το μισό της … ...*



Σχήμα 4.49. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [165-183]

…….

Ο Μ5 από τη διερεύνηση του ημι-προκατασκευασμένου διαγράμματος, κατανοεί τη διαδικασία με την οποία έχει δυνατότητα να ανακατασκευάσει το διάγραμμα στην οθόνη. Αναλυτικότερα, η απόκρυψη-εμφάνιση των ευθυγράμμων τμημάτων που συνδέουν τα σημεία της σημαίας, των δέντρων και του θησαυρού με το πειραματικό σύρσιμο διαμορφώνουν συνδεόμενες αναπαραστάσεις. Η διατύπωση του Μ5 στο [165] μας οδηγεί να συμπεράνουμε ότι ο μαθητής έχει σχηματίσει **νοητικά τις** περιστροφές, ώστε να διατυπώσει την ιδιότητα του μέσου. Επομένως, μέσω του συρσίματος κατανοεί ιδιότητες του σχήματος αντιληπτικά τις οποίες προσπαθεί να αναπαράγει για να προκύψει το αποτέλεσμα και να ανακαλύψει τη λύση του προβλήματος. Δηλαδή, **έχει αποκτήσει την ικανότητα να μεταφράζει μια νοητική αναπαράσταση σε εικονική σε λεκτική,** προσδιορίζοντας τις ιδιότητες των σχημάτων μέσω νοητικών μετασχηματισμών. Αναγνωρίζει τα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα από τις ιδιότητες τους (οι οποίες προέκυψαν από την περιστροφή των τμημάτων DN, NK), καθώς και τα συμμετρικά τετράγωνα. Στο [178-183] αναγνωρίζει τα τμήματα DN, NK ως πλευρές των τετραγώνων και ως μέρη του τμήματος DK. Η ανάλυση του σχήματος βάσει των ιδιοτήτων του βοηθά τον Μ5 να διαμορφώσει μια απάντηση, η οποία συνιστά και τη λύση του προβλήματος.

Επομένως, ο μαθητής έχει αναπτύξει την ικανότητα να κάνει την ανάλυση του σχήματος σε πραγματικό ή νοητό επίπεδο, έχοντας αναπτύξει *αφαιρετική* και λογική *ικανότητα*.

Κατασκευή εννοιών-εν-δράσει, λογική συσχέτιση εννοιών

Μέσω του εργαλείου κύκλου

Στο [16] **συσχετίζει** την έννοια των ίσων ακτίνων του κύκλου με την έννοια της ισότητας των πλευρών του ισοπλεύρου τριγώνου. Ομοίως, στο [29] ο μαθητής στην αιτιολόγηση που αναπτύσσει **συσχετίζει έννοιες** (την έννοια του ισοσκελούς τριγώνου με την έννοια της μεσοκαθέτου).

Μέσω του εργαλείου καθέτου, ανάκλασης

Στο [24-38] ο Μ5 **συσχετίζει** την έννοια του ισοσκελούς με την έννοια του ρόμβου και σε αλληλεπίδραση με τον Μ6, με την **έννοια της συμμετρίας**. Ο μαθητής αναπτύσσει **απαγωγικό συλλογισμό,** αφού συμπεραίνει από τα αποτελέσματα (δηλαδή, την καθετότητα των διαγωνίων) την αιτία (το σχήμα είναι ρόμβος). Έχει κατασκευάσει νοητικά τις διαγώνιες του σχήματος, συνδέοντας τις απέναντι κορυφές. Αναπτύσσει **δυναμική οπτικοποίηση** και **επανεφευρίσκει** ιδιότητες του ρόμβου, δηλαδή τη διχοτόμηση και καθετότητα τους. Η σύνθεση των απαντήσεων του είναι ένα **θεώρημα-εν-δράσει** που ο μαθητής κατασκευάζει, λόγω της επίδρασης του σύνθετου μετασχηματισμού που προκύπτει από το εργαλείο συρσίματος και ανάκλασης. Αν αναδιατυπώσουμε την έκφραση του σε συνδυασμό με την απάντηση του Μ6, τότε κατασκευάζουμε έναν **αυθαίρετο δυναμικό ορισμό** του ρόμβου: «ρόμβος [είναι το τετράπλευρο] του οποίου οι διαγώνιοι διχοτομούνται κάθετα και οι πλευρές είναι παράλληλες». Αποτέλεσμα αυτής της εμπειρίας είναι η διατύπωση ενός **οικονομικού ορισμού** του ορθογωνίου στο [69].

Μέσω του εργαλείου περιστροφής

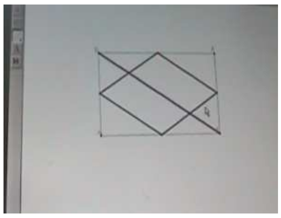
Στο σημείο [165] διατυπώνει μια «αν…τότε» δήλωση, η οποία είναι αποτέλεσμα νοητικού μετασχηματισμού που ο μαθητής αναπτύσσει. Οι περιστροφές των τμημάτων οδηγούν στην διατύπωση των **εννοιών-εν-δράσει** «ορθογώνια και ισοσκελή, τετράγωνο» ταυτόχρονα με τον Μ6, λόγω της κατασκευής **ΣΕΔ** για το εργαλείο περιστροφής.

Ανάπτυξη θεωρημάτων-εν-δράσει

Μέσω των ΣΟΕΑ γ φάσης

………

97. *Ερ: Τι σχήμα είναι;*
98. *Μ6: Παραλληλόγραμμο.*
99. Σύρουν μια κορυφή.
100. *Ερ: Τώρα;*
101. *Μ5: Τώρα είναι ορθογώνιο.*
102. *Ερ: Γιατί προέκυψε ορθογώνιο;*
103. *Μ5: Γιατί το εξωτερικό είναι ρόμβος;*
104. Επιστρέφουν στην πρώτη σελίδα που έχουν κατασκευάσει ένα ορθογώνιο.
105. *Μ5: Είναι ρόμβος.*
106. *Ερ: Γιατί;*
107. *Μ5: Γιατί το εξωτερικό είναι ορθογώνιο.*



Σχήμα 4.50. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [97- 107]

………

Το σύρσιμο των κορυφών των εξωτερικών τετράπλευρων και ο σχολιασμός του διαγράμματος έχει ως αποτέλεσμα την **αναγνώριση των εσωτερικών σχημάτων** από τον Μ5 ο οποίος κατασκευάζει ένα **θεώρημα-εν-δράσει,** ως σύνθεση των απαντήσεων του στα [101-103] και [105-107]. Δηλαδή: [Το σχήμα στο εσωτερικό] είναι ορθογώνιο γιατί το εξωτερικό είναι ρόμβος και [το σχήμα στο εσωτερικό] είναι ρόμβος γιατί το εξωτερικό είναι ορθογώνιο.

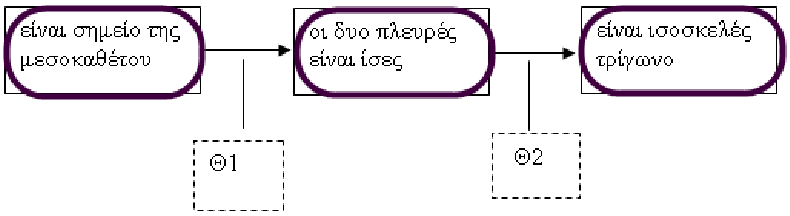
Ανάπτυξη ικανότητας διατύπωσης απαγωγικών και παραγωγικών επιχειρημάτων

<u>Μέσω του εργαλείου ανάκλασης + πειραματικού συρσίματος</u>

………

20. *Ερ: Γιατί είναι ισοσκελές τρίγωνο;*
21. *Μ5: Γιατί οι δυο πλευρές είναι ίσες.*
22. *Ερ: Και γιατί είναι ίσες;*
23. *Μ5: Γιατί είναι σημείο της μεσοκαθέτου.*

………



Σχήμα 4.51. Ανάλυση του επιχειρήματος με το μοντέλο Toulmin

Θ1: κάθε σημείο της μεσοκαθέτου απέχει εξίσου από τα άκρα του τμήματος

Θ2: ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές όταν έχει τις δυο πλευρές του ίσες

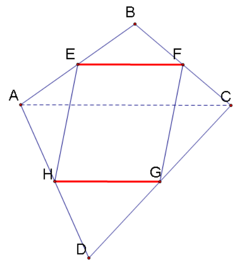
Διατυπώνει μια αιτιολόγηση στο [20] υποβοηθούμενος από τις ερωτήσεις σκαλωσιάς της ερευνήτριας και το διάγραμμα. Η δομή του επιχειρήματος του μπορεί να αναλυθεί μέσω του μοντέλου Toulmin στο 5.51.

Μέσω των ΣΟΕΑ γ φάσης

Ο μαθητής δεν έχει ικανότητα εφαρμογής του θεωρήματος ΘΜΠ. Η διαδικαστική κατανόηση του θεωρήματος προκύπτει σε αλληλεπίδραση με την ομάδα και το διάγραμμα στην οθόνη.

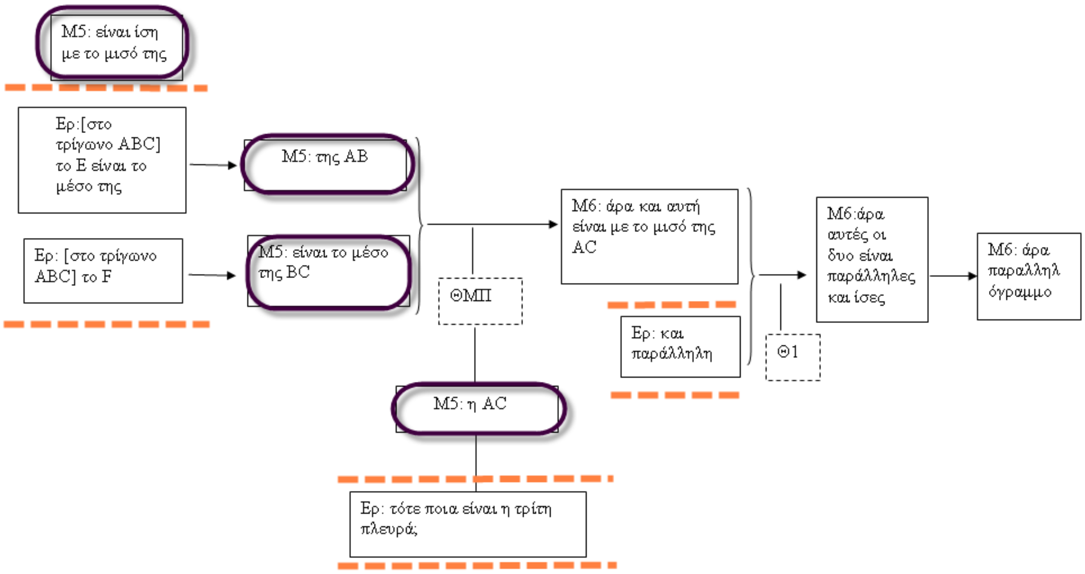
....

51. *Ερ: Τι λέει το θεώρημα;*
52. *Μ5: Είναι ίση με το μισό της …*
53. *Ερ: Της τρίτης πλευράς. Ποια είναι η τρίτη πλευρά;*
54. *Μ6: (δείχνει την BC) Μπορεί να είναι και αυτή (δείχνει την AB)*
55. *Ερ: Το E είναι το μέσο της…*
56. *Μ5: Της AB.*
57. *Ερ: Το F …*
58. *Μ5: Είναι το μέσο της BC.*
59. *Ερ: Τότε ποια είναι η τρίτη πλευρά;*
60. *Μ5: Η AC.*
61. *Ερ: Άρα, η EF είναι … .*
62. *Μ6: Άρα, και αυτή είναι με το μισό της AC*
63. *Ερ: Και παράλληλη.*
64. *Μ6: Άρα, αυτές οι δυο είναι παράλληλες και ίσες. Άρα, είναι παραλληλόγραμμο.*



Σχήμα 4.52. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [51-64]

....



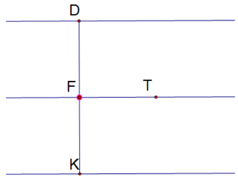
Σχήμα 4.53.Ανάλυση του επιχειρήματος του Μ5 με το μοντέλο Toulmin

Στο διάγραμμα επάνω έχει γίνει η ανάλυση του επιχειρήματος των μαθητών, μέσω του μοντέλου Toulmin στο οποίο οι ερωτήσεις σκαλωσιάς της ερευνήτριας έχουν επισημανθεί με διακεκομμένες γραμμές. Οι μαθητές κατανόησαν τη διαδικασία εφαρμογής του θεωρήματος σε συνεργασία με την ομάδα. Ο Μ5 αναγνωρίζει τα στοιχεία του διαγράμματος τα οποία συνθέτουν την κατασκευή του επιχειρήματος και οδηγούν στο συμπέρασμα.

Στο [73] προσπαθεί να αποδείξει ότι το σχήμα είναι ορθογώνιο στο εσωτερικό και συμπεραίνει από τα αποτελέσματα την αιτία που το προκαλεί, επομένως διατυπώνει ένα **απαγωγικό επιχείρημα**..

....

160. *Μ5: Άρα, λογικά το σημείο του θησαυρού μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε.*
161. *Μ5: Μήπως αυτά τμήματα είναι ίσα;*
162. *Μ5: Είναι DT=KT.*
163. *Μ6: Μήπως, αυτά τα δυο τρίγωνα είναι ίσα;*
164. *Μ5: Μήπως, είναι το μέσο της ευθείας DK ;*



Σχήμα 4.54. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [160-164]

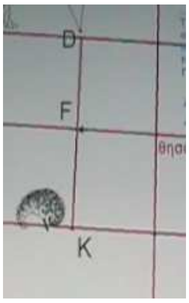
....

Ο Μ5 στο [160] αναπτύσσει **απαγωγικό συλλογισμό,** αφού προβλέπει τη διαδικασία περιστροφής για τα τμήματα DF, FK και οδηγείται στη λύση του προβλήματος. Συνεπώς **αναπτύσσει την διορατικότητα** που τον βοηθά να διατυπώσει τη λύση του προβλήματος, ως αποτέλεσμα της επίδρασης του **χωρογραφικού και θεωρητικού** πεδίου του λογισμικού.

Ανάπτυξη ικανότητας αντιστροφής ενεργειών

....

120. *Ερ: Ενώ μετακινούμε το σημείο F τι μετακινείται ακόμα;*
121. *Μ5: Είναι ανάλογο, μετακινούνται και τα δυο σημεία απέναντι. (τα σημεία που προκύπτουν από περιστροφή).*
122. *Ερ: Τι μένει αμετακίνητο;*
123. *Μ5: Το σημείο T του θησαυρού.*
124. *Ερ: Αν εξαφανιστεί η σημαία;*
125. *Μ5: Αν ενώσουμε το D, K και να φέρουμε μια ευθεία κάθετη στο D.*
126. *Μ5: Και μετά μια κάθετη στο σημείο K.*
127. *Μ5: Αυτές είναι 90°.*



Σχήμα 4.55. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [120-127]

....

Ο Μ5 αλληλεπιδρά με το δυναμικό διάγραμμα και διατυπώνει εικασίες, οι οποίες είναι αποτέλεσμα του σύνθετου μετασχηματισμού του διαγράμματος λόγω συνδυασμού των τεχνικών περιστροφής, ίχνους και συρσίματος. Επομένως, στο σημείο αυτό αναπτύσσει **επαγωγικό συλλογισμό**. Στο [123] αντιλαμβάνεται ότι το σημείο Τ είναι αμετακίνητο, και ότι οι μετασχηματισμοί των τμημάτων είναι «ανάλογοι». Στο [125-127] διατυπώνει μια στρατηγική για την εύρεση της λύσης. Ο μαθητής σύροντας τυχαία το διάγραμμα αντιλήφθηκε ότι το σχήμα που προκύπτει είναι ορθογώνιο (όταν το σημείο της σημαίας ταυτίζεται με το μέσο της αποστάσεως των δέντρων). Επομένως, **έχει αναπτύξει την ικανότητα να αντιστρέψει νοητικά την διαδικασία**.

……

132. Μετράμε τι αποστάσεις DF, FK.

133. *M5: Και πάλι η απόσταση από τον θησαυρό ως το F θα είναι ίδια.*

……

Η οπτικοποίηση της καθετότητας που σχηματίζεται στα σημεία D, K βοηθά το μαθητή να κατανοήσει ότι είναι αναγκαίες δυο ευθείες κάθετες και στο [133] να αντιληφθεί ότι η απόσταση του σημείου Τ από το σημείο F είναι ίση με την απόσταση του σημείου F από τα σημεία D, K. Την εικασία του επιβεβαιώνει μέσω μετρήσεων και οδηγείται σε **εμπειρική αιτιολόγηση**. Επομένως, οδηγείται να ανακαλύψει μια λύση του προβλήματος, αναπτύσσοντας **μετασχηματιστικό συλλογισμό** σε συνεργασία με τον Μ6, χωρίς να επαναλάβει τη διαδικασία της περιστροφής.

……

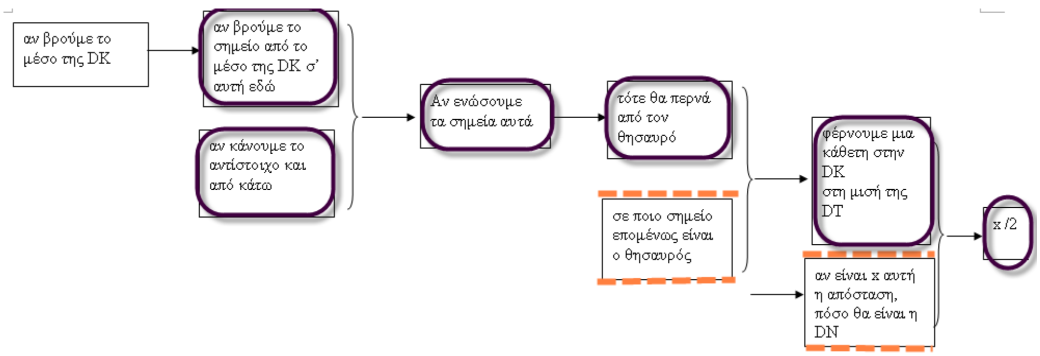
150. *M5: Άρα, θα μετακινούνταν αντίστοιχα και ο θησαυρός.*

……

Στο [150] η ερώτηση της ερευνήτριας βοηθά το μαθητή να διατυπώσει μια **συμπερασματική δήλωση**, ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης με το σύνθετο μετασχηματισμό της περιστροφής και του συρσίματος.

Δυναμική επανεφεύρεση

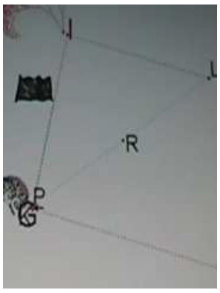
Στη συνέχεια επιχειρούν να οδηγηθούν σε δεύτερη λύση μέσα από διαφορετική στρατηγική. Στο διάστημα [165-178] (δείτε παραπάνω το σχήμα 5.49) αναπτύσσει ένα **θεώρημα-εν-δράσει και** ο μαθητής **ανακαλύπτει ιδιότητες** του διαγράμματος, όπως την ισότητα των αποστάσεων του σημείων D, K από το σημείο Τ και τη σχέση του σημείου της σημαίας στη λύση του προβλήματος.



Σχήμα 4.56. Ανάλυση του επιχειρήματος του M5 με το μοντέλο Toulmin

....

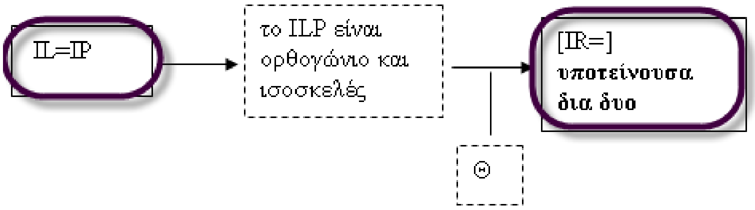
192. M5: η IL=IP
193. Ερ: δηλαδή πόσο είναι
194. M5: είναι Ι δεντράκι /2
195. Ερ: όχι …
196. M5: είναι αυτή



Σχήμα 4.57. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [192-196]

....

Επομένως, μέσω της διαδικασίας και της δοκιμής και λάθους, έχει αναπτύξει την **ικανότητα να αντιστρέψει τις ενέργειες του**. Ο σύνθετος μετασχηματισμός της περιστροφής και συρσίματος του σημείου βοηθά τον M5 να αντιληφθεί ότι τα τμήματα–πλευρές των τριγώνων από περιστροφή είναι ίσα μεταξύ τους. Στη συνέχεια ο μαθητής υπολογίζει την απόσταση μέσα από νοητικούς μετασχηματισμούς και εφαρμογή θεωρήματος. Επομένως, στο διάστημα [192-196] ο M5 αναπτύσσει μια αιτιολόγηση η οποία είναι αποτέλεσμα αλληλεπίδρασης του **χωρογραφικού και θεωρητικού** πεδίου του λογισμικού. Ο μαθητής για την απάντηση του βασίζεται σε μετασχηματισμούς σε ένα παράδειγμα αντιπροσωπευτικό μιας κλάσης αντικειμένων, επομένως πρόκειται για **εμπειρικό αποδεικτικό σχήμα /γενικό παράδειγμα**.



Σχήμα 4.58. Ανάλυση του επιχειρήματος του Μ5 με το μοντέλο Toulmin

Θ: η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας

Στη συνέχεια διατυπώνουν την λύση του προβλήματος κάνοντας αλγεβρικούς υπολογισμούς με εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος. Επομένως, έχει αναπτύξει **την ικανότητα εφαρμογής** της λύσης του προβλήματος.

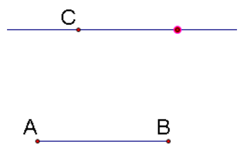
4.2.6. Μ6-ΟΜΑΔΑ Ε

Ανάπτυξη ικανότητας μετατροπής μεταξύ αναπαραστάσεων μέσω γνωστικών συγκρούσεων

<u>Μέσω του εργαλείου σημείου + πειραματικού συρσίματος</u>

……

7. *Ερ: Πως θα κάνουμε ένα παραλληλόγραμμο ... Η τέταρτη κορυφή ποια θα είναι;*
8. *Μ6: Θέλω ένα σημείο που να είναι ίσο με αυτό ..Θέλω ένα ευθύγραμμο τμήμα πάνω σ' αυτή (την πάνω παράλληλη), που να είναι ίσο με αυτό.*



Σχήμα 4.59. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα [7-8]

…………………………………………………………………………………

Ο Μ6 δεν έχει ικανότητα αποκωδικοποίησης της νοητικής εικόνας σε εικονική, λόγω του **εργαλειακού εμποδίου** που παρουσιάζεται από το εργαλείο σημείου. Η διαδικασία του πειραματικού συρσίματος οδηγεί το μαθητή σε **γνωστική σύγκρουση.** Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να κατανοήσει ότι η θέση του σημείου καθορίζει την ιδιότητα της ισότητας των απέναντι πλευρών του παραλληλογράμμου και να διατυπώσει την ιδιότητα που πρέπει να πληροί το σχήμα, ώστε να είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως**, μεταφράζει μια εικονική αναπαράσταση σε λεκτική,** λόγω της επίδρασης του θεωρητικού συρσίματος του εργαλείου σημείου.

<u>Μέσω του εργαλείου ανάκλασης +πειραματικού συρσίματος</u>

Η απόκρυψη της μεσοκαθέτου και η ανάκλαση του ισοσκελούς (δείτε το σχήμα 5.47) έχει ως αποτέλεσμα (α) την οπτικοποίηση του ρόμβου ως σύνθεση ισοσκελών το οποίο διατυπώνει άτυπα με την έκφραση «ισοσκελές-ισοσκελές», (β) την ταύτιση της μεσοκαθέτου με τη κατακόρυφη διαγώνιο του ρόμβου. Ο Μ6 έρχεται σε **γνωστική σύγκρουση**, λόγω της επίδρασης του πειραματικού συρσίματος επί του δυναμικού σημείου-κορυφής του ισοσκελούς. Αντιλαμβάνεται ότι η μορφή του ρόμβου παραμένει αμετάβλητη, το οποίο στη συνέχεια προσπαθεί να αιτιολογήσει άτυπα στο [36]. Δηλαδή, αλληλεπιδρά με τη δυναμική αναπαράσταση και το εργαλείο ανάκλασης **διαμεσολαβεί** στη διαμόρφωση της δομής του ρόμβου ως σύνθεσης ισοσκελών. Από τη διατύπωση του Μ6 στο [30] συμπεραίνεται ότι ο Μ6 σε αλληλεπίδραση με τον Μ5, έχει σχηματίσει **νοητικά** την κατακόρυφη διαγώνιο του σχήματος, η οποία συμπίπτει με τη μεσοκάθετο του ισοσκελούς τριγώνου, ώστε να διατυπώσει την ιδιότητα της διχοτόμησης και καθετότητας. Σημείο **δυναμικής επανεφεύρεσης** των ιδιοτήτων του ρόμβου.

Δηλαδή, **μεταφράζει μια εικονική αναπαράσταση σε λεκτική,** λόγω της επίδρασης των εργαλείων κάθετου (για την κατασκευή της μεσοκαθέτου του τμήματος), απόκρυψης της μεσοκαθέτου, ανάκλασης και πειραματικού συρσίματος.

………

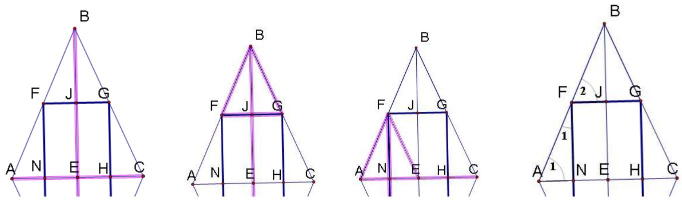
24. Ο Μ5 επιλέγει τη βάση και την καθιστά άξονα συμμετρίας.
25. *Μ5: Ρόμβος είναι αυτός;*
26. *Μ6: Είναι το συμμετρικό.*
27. *Μ6: Είναι ρόμβος, γιατί άμα τραβήξουμε από την κορυφή …*
28. *Μ5: Οι διαγώνιοι του διχοτομούνται κάθετα.*
29. *Ερ: Πως το ξέρουμε αυτό;*
30. *Μ6: Είναι ισοσκελές -ισοσκελές η διαγώνιος θα περνά από τα μέσο και το τμήμα που περνά προς τα κάτω είναι τμήμα της μεσοκαθέτου.*
31. *Μ5: Και τέμνονται κάθετα.*
32. *Μ6: Είναι παράλληλες.*
33. *Μ5: Οι διαδοχικές γωνίες είναι ίσες.*
34. *Μ6: Οι διαγώνιες διχοτομούνται άρα …*
35. *Ερ: Πως το ξέρουμε ότι οι διαγώνιες διχοτομούνται ;*
36. *Μ6: Επειδή οι διαγώνιοι διχοτομούνται, και επειδή η άλλη διαγώνιος που περνά από την κορυφή προς τα κάτω θα είναι μέρος της μεσοκαθέτου, θα είναι κάθετη στην άλλη.*
37. *Ερ: Τι άλλο μπορούμε να πούμε ;*
38. *Μ5: Είναι οι πλευρές ίσες … δυο διαδοχικές ίσες.*

………

Επομένως, τα εργαλεία βοηθούν το μαθητή να κατανοήσει την έννοια «ρόμβος ως αποτέλεσμα ανάκλασης ισοσκελούς» και να αναπτύξει την ικανότητα δομικής ανάλυσης του σχήματος. Μέσω της διαδικασίας ο μαθητής αντιλαμβάνεται τις διαγώνιες του ρόμβου αποδίδοντας τους **διπλό ρόλο** αφού τις ερμηνεύει στο [30-36]: (α) την οριζόντια διαγώνιο του ρόμβου και ως βάση του ισοσκελούς, και (β) τη μεσοκάθετο του ισοσκελούς και ως κάθετη διαγώνιο του ρόμβου. Αυτή η ικανότητα εμφανίζεται σε πιο ανεπτυγμένη μορφή στην γ φάση, όπως διαπιστώνεται στο διάστημα [77-93].

Ανάπτυξη ικανότητας δομικής ανάλυσης – διπλή (/πολλαπλή) ερμηνεία γεωμετρικών αντικειμένων

Μέσω των ΣΟΕΑ γ φάσης



Σχήμα 4.60. Συνδεόμενες οπτικές ενεργές αναπαραστάσεις (Patsiomitou, 2012)

....

77. *Μ5: Μήπως, να πάρουμε ότι αυτή η γωνία είναι 180° και αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι 90°, να αποδείξουμε ότι οι άλλες δυο είναι ίσες με 90° ;*
78. *Μ6: Μπορούμε να το πάρουμε στο από κάτω τρίγωνο: να πούμε ότι η F στην από πάνω πλευρά είναι ίση με την A από κάτω και να πούμε ότι οι τρεις γωνίες είναι 180°.*
79. *Ερ: Δηλαδή, εσύ λες ότι η γωνία F_2=A_1 και επειδή είναι 180°, στο τρίγωνο AFN έχουν άθροισμα 90° οι δυο γωνίες, άρα ισχύει. Α!Και πως γνωρίζεις ότι η ευθεία FN και AN τέμνονται κάθετα;*
80. *Ερ: Θα σκεφτείτε ότι υπάρχει μια βασική ιδιότητα του σχήματος.*
81. *Μ6: Α! Οι διαγώνιες διχοτομούνται.*
82. *Μ5: Και τέμνονται κάθετα.*
83. *Ερ: Αν γνωρίζετε ότι η γωνία αυτή είναι 90° . Γιατί αυτή να είναι 90° ;*
84. *Μ6: Το EJFN είναι παραλληλόγραμμο.*
85. *Ερ: Γιατί είναι παραλληλόγραμμο ;*
86. *Μ6: Το J είναι μέσο της FG*
87. *Ερ: Γιατί είναι μέσο της ... .*
88. *Μ6: Είναι μεσοκάθετος.*
89. *Μ6: Το E είναι μέσο της NH ...*
90. *Μ6: ..Όχι, το N είναι μέσο της AE.*
91. *Μ6: Άρα, το F J =NE ... Άρα, αυτό είναι παράλληλο.*
92. *Ερ: Αυτή η γωνία είναι (γωνία των διαγώνιων) είναι ορθή;*
93. *Μ5: Άρα, οι διαγώνιες του διχοτομούντα κάθετα, γι΄αυτό.*
94. *Ερ: Τι σχήμα επομένως είναι το εσωτερικό;*
95. *Μ6: Έτσι και αυτή είναι ίση με την E και η E είναι ίση με την από κάτω...*
96. *Μ5: Γιατί είναι παράλληλες.*

....

Ο Μ6 **αναγνωρίζει τα υποσχήματα** των ρόμβων που σχηματίζονται στο σχήμα του ρόμβου ABCD. Αναγνωρίζει δηλαδή τους (υπο) ρόμβους από μια βασική ιδιότητα των διαγωνίων τους (τη διχοτόμηση και καθετότητα). Την ιδιότητα αυτή διατυπώνει, δηλαδή έχει κατασκευάσει τη **μερολογική κατανόηση** του σχήματος και ο ρόμβος έχει αποκτήσει το **χαρακτήρα σήματος**.

Επομένως συνδέει νοητικά αναπαραστάσεις ή το εργαλείο απόκρυψης προκαλεί την ΑΟΑ του μαθητή, που βασίζεται *στον αναστοχαστικό τρόπο* σκέψης.

Επομένως, συμπεραίνεται ότι ο μαθητής έχει κατασκευάσει **συνδεόμενες αναπαραστάσεις** νοητικά οι οποίες τον βοηθούν να αιτιολογήσει, **μεταφράζοντας τις ιδιότητες της εικονικής αναπαράστασης σε λεκτικές αιτιολογήσεις μέσω νοητικών μετασχηματισμών**.

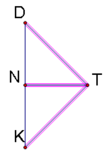
Συσχετίζοντας το διάστημα [30-36] με το [77-96], συνάγεται ότι ο μαθητής αναπτύσσει σταδιακά την ικανότητα (α) να χρησιμοποιεί οπτικά και θεωρητικά στοιχεία για να αναπτύξει το συλλογισμό του (β) να αποδίδει διπλούς ρόλους σε τμήματα και σημεία (γ) να αναγνωρίζει υποδομές μέσα σε βασικές δομές που έχει κατανοήσει και (δ) να καταλήγει σε συμπεράσματα για μια ιδιότητα του σχήματος, όπως αυτή προκύπτει συνεπαγωγικά από άλλες ιδιότητες.

<u>Μέσω του εργαλείου απόκρυψης /εμφάνισης</u>

Ο Μ6 αναπτύσσει **μετασχηματιστικό συλλογισμό** στο [129, 144] και **ανακαλύπτει μια ειδική λύση** του προβλήματος, μέσω της οπτικοποίησης που αναπτύσσει από το σύρσιμο του σημείου F του διαγράμματος και ενώ έχουν παραμείνει στην οθόνη τα αναγκαία σημεία D, K, T. Προτείνει **την κατασκευή της μεσοκαθέτου**, προς το τμήμα DK, αν και δεν έχουν σχηματιστεί οι γραμμές που συνδέουν το σημείο T με τα σημεία D, K. Στη συνέχεια, σε συνεργασία με τον Μ5 διατυπώνει μια δεύτερη λύση του προβλήματος, η οποία προκύπτει με την κατασκευή ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Η κατασκευή του ορθογωνίου παραλληλογράμμου από τους μαθητές προκύπτει με την ίδια διαδικασία που οι μαθητές έχουν κατασκευάσει στην α φάση. Επομένως, συμπεραίνεται ότι ο μαθητής έχει κατασκευάσει **συνδεόμενες αναπαραστάσεις** νοητικά οι οποίες τον βοηθούν στην **δυναμική επανεφεύρεση** της λύσης, μεταφράζοντας μια νοητική αναπαράσταση σε λεκτική και στη συνέχεια σε εικονική.

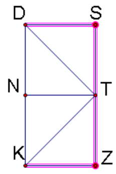
……

128. *Ερ: Θα υποθέσετε ότι υπάρχει το σημείο Τ του θησαυρού.*
129. *Μ6: Να φέρουμε κάθετη από το σημείο του θησαυρού στην DK, δηλαδή τη μεσοκάθετη.*



……

144. *Μ6: Επειδή τον θησαυρό τον είχαμε βάλλει στο μέσο της απόστασης … ..φέρνουμε από τον θησαυρό παράλληλη προς τη DK.*
145. *Ερ: Τι σχήμα είναι αυτό;*
146. *Μ5, Μ6: Ένα παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.*



……

Σχήμα 4.61. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [128-146]

Κατασκευή εννοιών-εν-δράσει, ανάπτυξη θεωρημάτων-εν-δράσει

Μέσω του εργαλείου σημείου + πειραματικού συρσίματος

Στο [8] διατυπώνει με συνδυασμό **τυπικού και άτυπου τρόπου** την ιδιότητα της ισότητας των απέναντι πλευρών του παραλληλογράμμου ως αποτέλεσμα του πειραματικού συρσίματος του δυναμικού σημείου. Επομένως, διατυπώνει μια **έννοια-εν-δράσει/ανεπαρκή δυναμικό ορισμό** ως αποτέλεσμα του **ΣΕΔ** του δυναμικού σημείου.

Μέσω του εργαλείου ανάκλασης + πειραματικού συρσίματος

Στο [18] κατασκευάζει ένα τρίγωνο ισοσκελές. Για την κατασκευή του σχήματος κατασκευάζει σχήμα χρήσης του εργαλείου μέσου σημείου και του εργαλείου της καθέτου σε συνεργασία με την ομάδα. Ολοκληρώνει το σχήμα του ισοσκελούς με την επιλογή αυθαίρετου σημείου επί της μεσοκαθέτου. Η αλληλεπίδραση με το σύνθετο μετασχηματισμό που προκαλείται από το πειραματικό σύρσιμο του δυναμικού σημείου-κορυφής του ισοσκελούς/ειδώλου του ισοσκελούς από ανάκλαση, βοηθά τον Μ6 να διατυπώσει **έννοιες-εν-δράσει** ως αποτέλεσμα του **ΣΕΔ ανάκλασης,** όπως την έννοια της συμμετρίας, της διχοτόμησης και καθετότητας των διαγωνίων του ρόμβου, δηλαδή να κατασκευάσει δευτερεύουσες ιδιότητες του ρόμβου, καθώς και να συσχετίσει έννοιες. Συγκεκριμένα, στο [26] διατυπώνει τον **ανεπαρκή ορισμό** «[ρόμβος] είναι το συμμετρικό [ισοσκελούς τριγώνου]» και στο [32-34] έναν ακόμα **ανεπαρκή ορισμό** «[είναι παράλληλες [οι απέναντι πλευρές του] και οι διαγώνιες διχοτομούνται».

Μέσω του σχολιασμού –γ φάση ΣΟΕΑ

....

64. *Μ6: Άρα, αυτές οι δυο είναι παράλληλες και ίσες. Άρα, είναι παραλληλόγραμμο.*

....

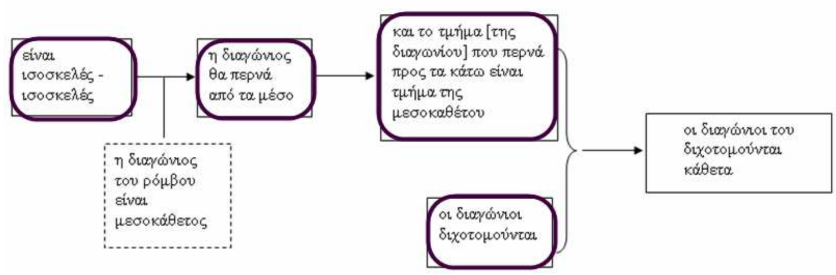
Στο [64] αναδιατυπώνει έναν **οικονομικό ορισμό** του παραλληλογράμμου, έννοια που είχε διατυπώσει ανεπαρκώς στην αρχή της διαδικασίας.

Μέσω του εργαλείου περιστροφής

Ο Μ6 έχει κατασκευάσει ένα ΣΕΔ του εργαλείου περιστροφής που τον βοηθά να κατασκευάσει την **έννοια-εν-δράσει** στο [170, 198] της ισότητας και καθετότητας των δυο τμημάτων, καθώς και του ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου.

Μέσω του εργαλείου ανάκλασης + πειραματικού συρσίματος

Ο Μ6 κατασκευάζει ΣΕΔ του εργαλείου ανάκλασης μέσω της διαδικασίας **εργαλειακής γένεσης** και διατυπώνει τα **θεωρήματα-εν-δράσει** στο [30], [36], επομένως **εμπειρικά αποδεικτικά σχήματα**, ως αποτέλεσμα ενεργειών επί του διαγράμματος. Έρχεται σε **γνωστική σύγκρουση** λόγω των ερωτήσεων της ερευνήτριας και οδηγείται να διατυπώσει ένα **απαγωγικό επιχείρημα.** Ο μαθητής εκφράζει ιδιότητες των διαγωνίων του ρόμβου τις οποίες συμπεραίνει από το διάγραμμα στην οθόνη, καθώς και σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων, χωρίς να έχει την ικανότητα να το μετασχηματίσει σε παραγωγικό επιχείρημα. Δηλαδή δεν έχει αναπτύξει την ικανότητα παραγωγικού συλλογισμού.



Σχήμα 4.62. Ανάλυση του επιχειρήματος του Μ6 με μοντέλο Toulmin

Μέσω του σχολιασμού + συρσίματος

Στο διάστημα [78-79] ο Μ6 δεν έχει σχεδιάσει τις διαγώνιες του ρόμβου, αλλά διατυπώνει ένα **θεώρημα-εν-δράσει,** αναγκαία συνθήκη για να είναι το τετράπλευρο εσωτερικά ορθογώνιο παραλληλόγραμμο («οι διαγώνιες του διχοτομούνται και τέμνονται κάθετα»). Αυτό προκύπτει ως αποτέλεσμα της κατανόησης της έννοιας των αξόνων συμμετρίας του ρόμβου στην πρώτη φάση της ερευνητικής διαδικασίας. Οι **συνδεόμενες αναπαραστάσεις** που διερευνήθηκαν σταδιακά από το μαθητή σε προηγούμενα σημεία, διαμεσολάβησαν ώστε να **συνδέσει έννοιες**, όπως την έννοια της μεσοκαθέτου με την έννοια του ρόμβου και στη συνέχεια με την έννοια του ορθογωνίου παραλληλογράμμου στο εσωτερικό του σχήματος.

Η πρόταση του μπορεί να αναδιατυπωθεί ως «αν…τότε» δήλωση: «αν οι διαγώνιες του σχήματος που συνδέει τα μέσα των πλευρών διχοτομούνται και τέμνονται κάθετα, τότε είναι ρόμβος» και είναι αποτέλεσμα αφαιρετικών διαδικασιών που έχει κάνει ο μαθητής νοητικά.

Ανάπτυξη ικανότητας διατύπωσης απαγωγικών και παραγωγικών επιχειρημάτων.

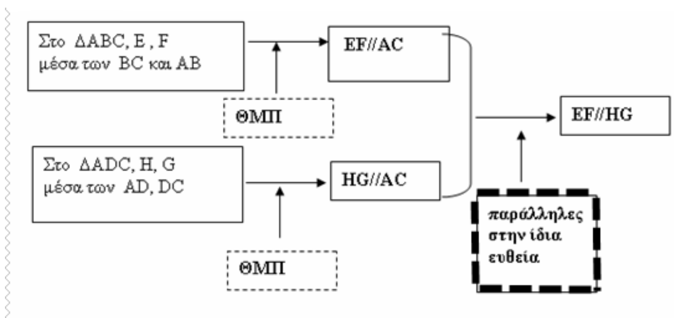
Μέσω του σχολιασμού του διαγράμματος και του θεωρητικού συρσίματος

………

40. *Μ6: Είναι παραλληλόγραμμο.*
41. *Ερ: Γιατί είναι παραλληλόγραμμο;*
42. *Μ6: Λοιπόν, αυτό εδώ --το BEF-- είναι ισοσκελές.*
43. *Ερ: Σύρε μια κορυφή του σχήματος.*
44. *Μ6: Αυτά είναι τα δυο μέσα.*
45. *Ερ: Ναι, αλλά δεν έχουμε τρίγωνο … φέρνουμε την AC.*
46. *Μ6: Αυτή είναι παράλληλη σ' αυτή εδώ.*
47. *Ερ: Αυτή είναι βοηθητική ευθεία. Να την κάνουμε με διακεκομμένη.*
48. *Μ6: Αυτή εδώ είναι παράλληλη στην AC και αυτή εδώ είναι παράλληλη με την AC. Άρα, είναι παράλληλες μεταξύ τους.*
49. *Ερ: Είναι και ίσες;*
50. *Μ6: Θα φέρουμε την άλλη ευθεία.*

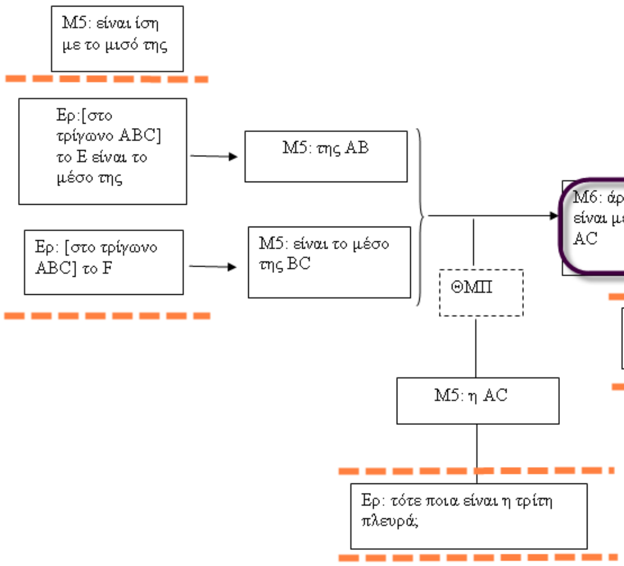
………

Αντιλαμβάνεται από το διάγραμμα στην οθόνη ότι το σχήμα είναι παραλληλόγραμμο, το οποίο αιτιολογεί, υπονοώντας τα θεωρήματα που χρησιμοποιεί. Η δομή του επιχειρήματος του στο [48-50].



Σχήμα 4.63. Ανάλυση του επιχειρήματος του Μ6 με μοντέλο Toulmin

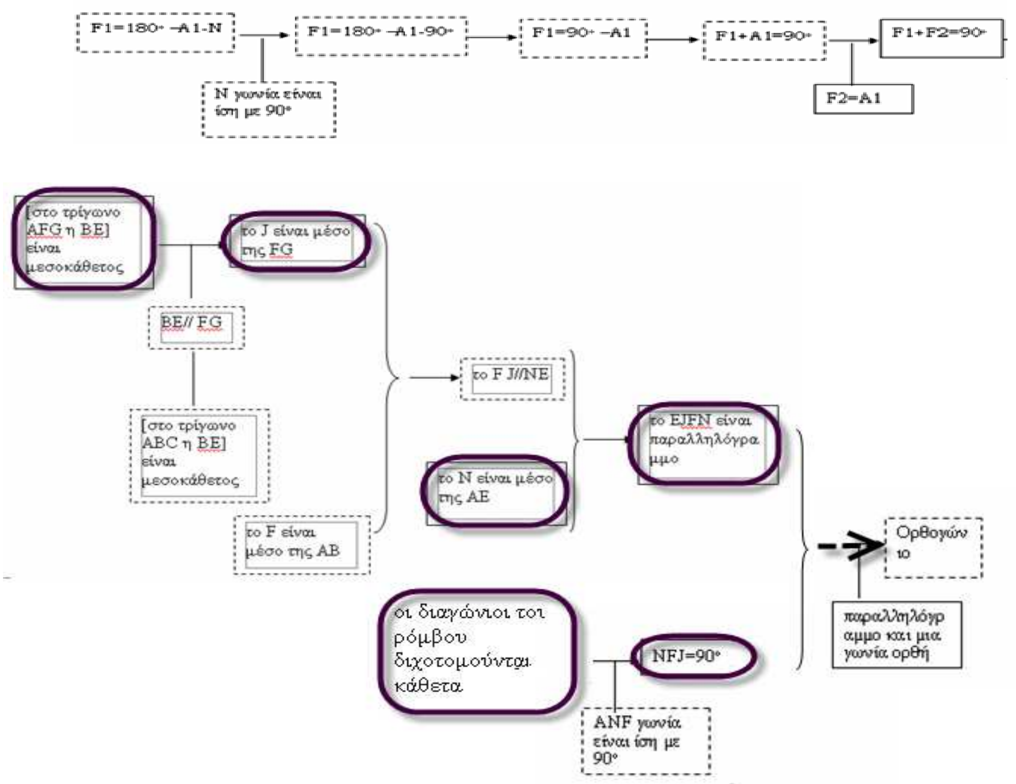
Στη συνέχεια διατυπώνει **συμπερασματικές λογικές προτάσεις,** ως αποτέλεσμα της κατανόησης του θεωρήματος ΘΜΠ σε συνεργασία με τον Μ5.



Σχήμα 4.64. Ανάλυση του επιχειρήματος των M5-M6 με μοντέλο Toulmin

Μέσω του σχολιασμού του διαγράμματος και του θεωρητικού συρσίματος

Οι μαθητές, στο διάστημα [77-93] (σχήμα 5.60), αναπτύσσουν ένα σύνθετο επιχείρημα, συνδυασμό **απαγωγικού και παραγωγικού συλλογισμού**. Στο διάγραμμα αναπαριστάνεται μέσω του μοντέλου Toulmin η δομή του επιχειρήματος του M6.



Σχήμα 4.65. Ανάλυση του επιχειρήματος των M5-M6 με μοντέλο Toulmin

Με διακεκομμένες γραμμές έχουν αναπαρασταθεί οι υπονοούμενες προτάσεις, οι οποίες αποτελούν την εγγύηση στο επιχείρημα του Μ6. Ο Μ6 συνδυάζει στοιχεία αντιληπτικά, με στοιχεία από τη θεωρία της γεωμετρίας, προκειμένου να αποδείξει μια ιδιότητα του σχήματος (ότι το τετράπλευρο που σχηματίζεται από τα μέσα των πλευρών του εξωτερικού τετραπλεύρου (ρόμβου) είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο). Επομένως, αναπτύσσει ένα επιχείρημα στο **χωρογραφικό και θεωρητικό πεδίο** του λογισμικού. Η έκφραση του Μ5 («μήπως να πάρουμε ότι αυτή η γωνία είναι 180^{o} και αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι 90^{o} να αποδείξουμε ότι οι άλλες δυο είναι ίσες με 90^{o} ») είναι συνέπεια της αλληλουχίας των νοητικών ενεργειών τις οποίες ο μαθητής εκτελεί. Ο μαθητής υπονοεί πολλές ενδιάμεσες ενέργειες τις οποίες δε διατυπώνει, επομένως εκτελεί νοητικούς μετασχηματισμούς και οδηγείται σε **αφαιρετικές διαδικασίες σκέψης,** γενικεύοντας. Έχει αποκτήσει την ικανότητα να διαχωρίζει τους υποστόχους, οι οποίοι θα τον οδηγήσουν στη λύση του προβλήματος.

Ανάπτυξη αποδεικτικών σχημάτων μέσω των ΣΟΕΑ

Μέσω του εργαλείου απόκρυψης /εμφάνισης

Στο [151-154] διατυπώνει μια ακόμα ειδική λύση του προβλήματος, η οποία προκύπτει με την κατασκευή του ορθογωνίου τριγώνου που συνδέει τα σημεία D, K, T και την κατασκευή της καθέτου. Στο [151] διατυπώνει ένα **απαγωγικό επιχείρημα** το οποίο δεν αποδεικνύει. Επομένως συνδέει νοητικά αναπαραστάσεις. Το εργαλείο απόκρυψης προκαλεί την ΑΟΑ του μαθητή, που βασίζεται στον αναστοχαστικό τρόπο σκέψης. Ο μαθητής αιτιολογεί την απάντηση του με χρήση εμπειρικών μετρήσεων, επομένως πρόκειται για ένα **εμπειρικό αποδεικτικό σχήμα /κρίσιμο πείραμα,** αφού προκύπτει από ένα προσεκτικά επιλεγμένο παράδειγμα.

……

151. *Μ6: Αν ενώσουμε το D με το T και το K με το T … να φέρουμε την κάθετη από το σημείο T στην DK.*
152. *Οι μαθητές αποφάσισαν να πειραματιστούν με μετρήσεις.*
153. *Μ6: Άρα, φαίνεται το F να είναι το μέσο .*
154. *Ερ: Πως μπορούμε να το αποδείξουμε;*

……

Μέσω του εργαλείου περιστροφής+ πειραματικού συρσίματος

Ο σχολιασμός των ορθογωνίων τριγώνων από περιστροφή οδηγεί τον μαθητή, μέσω του συρσίματος να αντιληφθεί μια ιδιότητα τους (ισότητα) στο [186], και να διατυπώσει μια **γενίκευση** για τη θέση του σημείου.

……

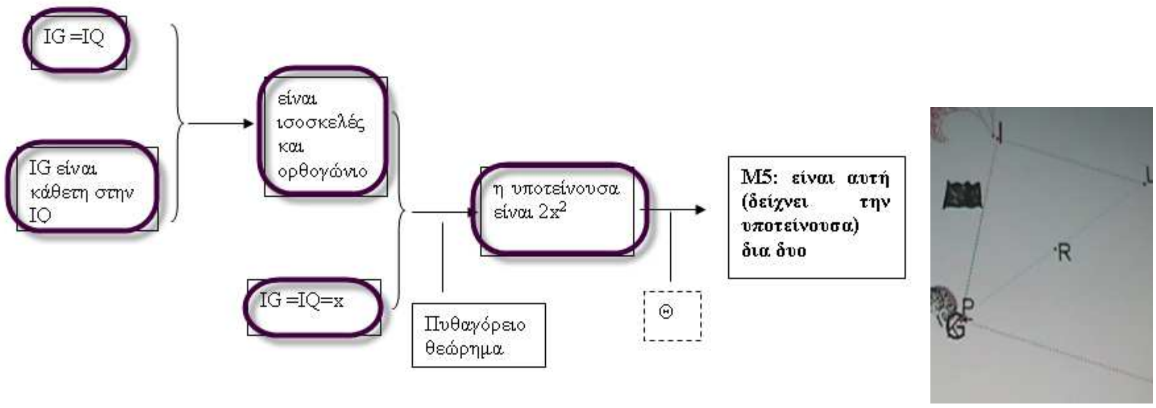
184. *Ο Μ6 πειραματίζεται με τις διάφορες θέσεις του σημείου της σημαίας.*
185. *Μ6: Αυτό, μπορεί να είναι όπου θέλουμε!*
186. *Μ6: Τα LQR , RSK… είναι ίσα αυτά τα τρίγωνα.*

………

190. *Ερ: Τι έκανες τώρα;*
191. *Μ6: Έβαλα το σημείο στο δέντρο.*
192. *Μ5: Η IL=IP.*
193. *Ερ: Δηλαδή, πόσο είναι*
194. *Μ5: Είναι IΔ /2 (Δ=δένδρο)*
195. *Ερ: όχι …*
196. *Μ5: Είναι αυτή.*
197. *Ερ: Πως θα τη βρούμε αυτή την απόσταση, τι τρίγωνο είναι δηλαδή αυτό;*
198. *Μ6: Είναι ισοσκελές και ορθογώνιο!*
199. *Ερ: Δηλαδή, πόσο είναι κάθε μια από τις γωνίες αυτές;*
200. *Ερ: Αυτή η IR, πόσο είναι σε σχέση με την IG;*
201. *Μ5: Λοιπόν η IG =IQ.*
202. *Ερ: Καλά, εσύ την IG ξέρεις.*
203. *Ερ: Αν είναι αυτή χ τότε αυτή πόσο είναι (IQ);*
204. *Μ5, Μ6: x*
205. *Ερ: Πόσο είναι η υποτείνουσα;*
206. *Μ6: … $2x^2$*

………

Η τοποθέτηση μέσω συρσίματος του σημείου της σημαίας σε σταθερό σημείο (σημείο του δέντρου) στο [203] βοηθά τον Μ6 να οδηγηθεί σε μια ακόμα ειδική λύση του προβλήματος, την οποία αποδεικνύει, χρησιμοποιώντας **παραγωγικό συλλογισμό** στο διάστημα [198-206]. Στο διάγραμμα κάτω αναπαριστάνεται η δομή του επιχειρήματος του Μ6, μέσω του μοντέλου Toulmin.



Σχήμα 4.66. Ανάλυση του επιχειρήματος των Μ5-Μ6 με μοντέλο Toulmin

Ο μαθητής αναγνωρίζει και στη συνέχεια υπολογίζει την υποτείνουσα του σχήματος, σε συνεργασία με τον Μ5. Η εφαρμογή των θεωρημάτων οδηγεί στην επίλυση του πραγματικού προβλήματος. Έχει αναπτύξει μέσω των ΣΟΕΑ ικανότητες λογικές και εφαρμογής της λύσης του πραγματικού προβλήματος.

4.2.7.Μ7-ΟΜΑΔΑ Β

Ανάπτυξη ικανότητας μετατροπής μεταξύ αναπαραστάσεων μέσω γνωστικών συγκρούσεων

<u>Μέσω του εργαλείου σημείου +πειραματικού συρσίματος</u>

………

4. Ερ: Είναι παραλληλόγραμμο;
5. Μ13: Ναι.
6. Μ7: Όχι, γιατί οι απέναντι πλευρές δεν είναι ανά δυο παράλληλες και ίσες.
7. Με το σύρσιμο μιας κορυφής το σχέδιο αλλάζει μορφή.
8. Ερ: Αφού ξέρεις τον ορισμό, δεν κάνεις ένα παραλληλόγραμμο;
9. Η Μ7 κατασκευάζει ένα ευθύγραμμο τμήμα και ένα σημείο ακριβώς κάτω από το πρώτο σημείο.
10. Μ13: Θα κάνεις ορθογώνιο;
11. Η Μ7 κατασκευάζει ένα τμήμα σε πλάγια θέση.
12. Ερ: Πως ξέρεις ότι αυτό είναι παράλληλο;
13. Μ7: Δε ξέρω!
14. Μ13: Θα το επεκτείνουμε μετά!

……… …………………

Η μαθήτρια αντιλαμβάνεται ότι το σύρσιμο σημείου-κορυφής του σχεδίου του παραλληλογράμμου, δε διατηρεί τις ιδιότητες της παραλληλίας και ισότητας. Επομένως, οδηγείται σε λεκτική διατύπωση στο [6], αφού η εικονική αναπαράσταση στην οθόνη δε διατηρεί τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου που γνωρίζει. Στη συνέχεια, προσπαθεί να αποκωδικοποιήσει τη **νοητική εικόνα** που έχει σχηματίσει για το παραλληλόγραμμο, μετατρέποντας την **σε εικονική** χωρίς να καταφέρει να ολοκληρώσει την διαδικασία, αφού το εργαλείο του σημείου οδηγεί τη μαθήτρια **σε γνωστική σύγκρουση,** λόγω των **εμποδίων** που παρουσιάζονται.

<u>Μέσω του εργαλείου σημείου + περιστροφής</u>

………

145. Ερ: *Θέλουμε να κατασκευάσουμε το συμμετρικό του σημείου Α ως προς το κέντρο Ο.*
146. Μ7: *Δηλαδή, να κάνουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΑ΄ ή το ΟΑ΄;*
147. Ερ: *Το συμμετρικό του Α ως προς το Ο.*

………

Η Μ7 στο [146] δεν κατανοεί την έννοια 'συμμετρικό του σημείου Α ως προς κέντρο Ο' ως 1-1 αντιστοίχηση, δηλαδή δεν αντιστοιχεί τη σχηματική μονάδα του σημείου Α στη σχηματική μονάδα του σημείου Α΄.

……

153. Ερ : *Ποιο θα είναι το κέντρο σου;*
154. Μ7: *Αυτό θα είναι το κέντρο.* (Επιλέγει το Ο).
155. Μ8: *Μην το επιλέγεις αυτό πήγαινε στο transform –mark center. Πρώτα επιλέγεις κέντρο και μετά …*
156. Μ7: *Ναι, ναι!!*
157. Η Μ7 επιλέγει το κέντρο και μετά το τμήμα .
158. Μ8: *Και το σημείο*!

……

Στο [155] αντιμετωπίζει **εργαλειακό εμπόδιο,** αφού δεν έχει κατανοήσει τη **σειριακή** χρήση του εργαλείου περιστροφής. Η διαδικασία αυτή επιβεβαιώνει ότι η Μ7 δεν έχει κατασκευάσει νοητικά την αντιστοίχηση 1-1 του αντικειμένου και του συμμετρικού του, που εκφράζει και λεκτικά. Επομένως, δεν έχει αναπτύξει την ικανότητα μετάφρασης της λεκτικής διατύπωσης του προβλήματος σε εικονική. Η συνεργασία με την ομάδα την οδηγεί σε **γνωστική σύγκρουση** που τη βοηθά να αναδιοργανώσει την χρήση του εργαλείου, όπως διαπιστώνεται στο [186] στη συνέχεια.

<u>Μέσω του εργαλείου περιστροφής + πειραματικού συρσίματος</u>

……

183. Διαγράφω το τμήμα Α΄Β΄.
184. Ερ: *Ποιο είναι το συμμετρικό του ΑΒ ως προς το Ο;*
185. Μ7: *Δε μπορούμε κάνουμε rotation ;*
186. Η Μ7 επιλέγει το ΑΒ και το περιστρέφει ως προς κέντρο Ο αλλάζοντας την γωνία 180° στο αναδυόμενο μενού χωρίς να κάνει λάθη.
187. Μ7: *Άρα, για να βρούμε το συμμετρικό ως προς κέντρο αρκεί να το στρέψουμε κατά 180°.*

……

Στο [186] η Μ7 κατασκευάζει την περιστροφή ευθυγράμμου τμήματος. Επομένως, η μαθήτρια στο σημείο αυτό έχει κατανοήσει την έννοια της περιστροφής σε σχέση με τη χρήση του εργαλείου. Η Μ7 έχει κατασκευάσει **ΣΕΔ** του εργαλείου περιστροφής και διατυπώνει την **έννοια-εν-δράσει,** η οποία αποτελεί και **οικονομικό ορισμό** της έννοιας της συμμετρίας ως προς κέντρο (« Άρα για να βρούμε το συμμετρικό ως προς κέντρο [τμήματος] αρκεί να το στρέψουμε κατά 180^o»)**.** Επομένως, έχει κατασκευάσει **μια νοητική αναπαράσταση** για τα συμμετρικά αντικείμενα από περιστροφή **με αποτέλεσμα στη συνέχεια να την αποκωδικοποιήσει εικονικά και λεκτικά** μέσω της χρήσης του εργαλείου(π.χ [186-187]).

Αν επανεξεταστεί το διάστημα [153-187] συμπεραίνεται ότι μέσω του εργαλείου περιστροφής η μαθήτρια αποκτά μια **αυξανόμενη ικανότητα** αποκωδικοποίησης **και σύνδεσης** μεταξύ αναπαραστάσεων της ίδιας οντότητας (π.χ λεκτικής σε εικονική).

Μέσω των ΣΟΕΑ

……

4. Ερ: *Πως μπορούμε να κάνουμε αυτό το σημείο. Πως κατασκεύασε αυτό το σημείο (Η) ;*

5. Μ13: *Φτιάξαμε μια ευθεία.*

6. Μ7: (Ταυτόχρονα). *Με περιστροφή, κέντρο το σημείο Ο ακτίνα την DO.*

……

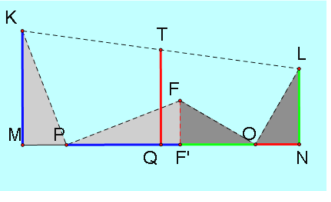
Η Μ7 ερμηνεύει τη διατύπωση του προβλήματος σε δυναμική διαδικασία στο λογισμικό. Οι μαθητές έχουν κατανοήσει στα σημεία [2-4] ότι η κατασκευή του σημείου Η προκύπτει με το εργαλείο περιστροφής. Επομένως, στο [6] η Μ7 έχει αναπτύξει τη **λεκτική, σειριακή και θεσιακή** κατανόηση της εφαρμογής του εργαλείου περιστροφής. Η μαθήτρια δεν οπτικοποιεί την διαδικασία κατασκευής της περιστροφής του τμήματος DO ώστε να προκύψει το σημείο Η στην οθόνη, αλλά η διατύπωση της προκύπτει ως αποτέλεσμα νοητικής επεξεργασίας. Επομένως, **η λεκτική διατύπωση** (της ερευνήτριας) οδηγεί στην ανάκληση μιας **νοητικής αναπαράστασης και** στη συνέχεια **την λεκτική διατύπωση στο σημείο** [6].

88. Μ13: *Ενώνουμε το P, O και μετά στη δεύτερη φέρνουμε κάθετη στην PO.*

89. Η Μ4 ανοίγει την επόμενη σελίδα. Η ομάδα αναγνωρίζει το πρόβλημα αν και υπάρχει αλλαγή προσανατολισμού του σχήματος

90. Μ7: *Τα τμήματα MK και PF΄ είναι ίσα, γιατί τα τρίγωνα MKP και FF΄P είναι ίσα αφού είναι ορθογώνια τρίγωνα έχουν την KP = PF (δείχνει στο δεύτερο σχήμα), και την γωνία < MKP να είναι ίση με την γωνία <FPF΄ γιατί η γωνία <KPF΄ είναι εξωτερική στο τρίγωνα MKP έτσι αποτελείται από την γωνία των 90° και την γωνία <FPF΄ έτσι είναι ίση με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών γωνιών < (MKP+ 90°)*

91. Μ6: *Και αλλιώς μπορούμε, η K είναι ίση με την P γιατί είναι οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες.*



Σχήμα 4.67. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [88-91]

Η Μ7 επεκτείνει το **ΣΕΔ το εργαλείου περιστροφής για τα τρίγωνα από περιστροφή,** διατυπώνοντας την ιδιότητα της ισότητας καθώς και την ιδιότητα της ισότητας των επιμέρους στοιχείων τους με αυστηρή αιτιολόγηση. Έχει αποκτήσει την ικανότητα να **αναλύει δομικά ένα**

σχήμα και να προσδιορίζει τις ιδιότητες των στοιχείων του σχήματος, καθώς και την αφαιρετική ικανότητα να παράγει την απόδειξη μετασχηματίζοντας νοητικά τα στοιχεία του διαγράμματος.

Ανάπτυξη ικανότητας δομικής ανάλυσης – διπλή (/πολλαπλή) ερμηνεία γεωμετρικών αντικειμένων

<u>Μέσω του εργαλείου καθέτου</u>

....

70. Ο Μ8 ψάχνει στα εργαλεία για να κατασκευάσει απευθείας την μεσοκάθετο.
71. Μ7:*Μήπως να κατασκευάσουμε το μέσο με το midpoint και μετά να φέρουμε την κάθετη;*

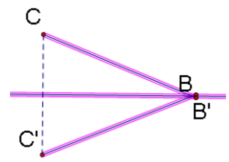
....

Η κατασκευή της μεσοκαθέτου στο [71] αποκωδικοποιείται από την Μ7 με **σειριακή χρήση** των εργαλείων του λογισμικού, όπως του εργαλείου μέσου σημείου, εργαλείου καθέτου. Η Μ7 μέσω της διατύπωσης της **συνδέει νοητικά την έννοια της κατασκευής μεσοκαθέτου** με την έννοια του ισοσκελούς. Επομένως, η μαθήτρια έχει αρχίσει να αναλύει δομικά την κατασκευή**, να αναπτύσσει την ικανότητα μετατροπής της νοητικής της αναπαράστασης σε λεκτική** αποκωδικοποιώντας τη με εργαλεία του λογισμικού, την οποία δεν είχε στην αρχή της διαδικασίας.

<u>Μέσω του εργαλείου ανάκλασης + θεωρητικού συρσίματος</u>

....

128. Ερ: *Τι παρατηρείτε ότι συμβαίνει όταν σύρουμε την κορυφή;*
129. Μ13: *Ισοσκελές.*
130. Ερ: *Τι ευθεία είναι αυτή;*
131. Μ7: *Άξονας.*
132. Μ13: *Ύψος και διάμεσος.*

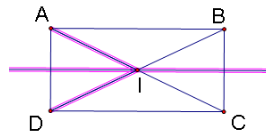


Σχήμα 4.68. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [128-132]

....

Μέσω του εργαλείου καθέτου

197. M7: *Θα βρούμε τους άξονες συμμετρίας του ορθογωνίου. Το ξέρω .. δηλαδή, γίνεται να ενώσουμε τις … … διαγώνιες;*
198. Η Μ7 σχηματίζει τις δυο διαγώνιες του ορθογωνίου και συνεχίζει φέρνοντας κάθετες
199. M7: *Θα περνάει από δω (δείχνει το σημείο τομής των διαγώνιων) να είναι παράλληλη εδώ (δείχνει την JI) και να περνάει από δω … να είναι κάθετη εδώ (διορθώνει το περνάει και δείχνει την HI).*



Σχήμα 4.69 Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [197-199]

……… …………………

220. Ερ : *Ποιο είναι το κέντρο συμμετρίας του ορθογωνίου;*
221. M7: Το βαρ…ύκεντρο; Αυτό δεν είναι; (δείχνει το κέντρο).
222. Ερ : *Και τι είναι άλλο* ;
223. M8 : *Σημείο τομής των διχοτόμων;*
224. Ερ : *Δεν είναι διχοτόμοι εδώ, είναι οι διαγώνιοι του σχήματος.*
225. M7: *Ναι, αλλά δεν είναι και διάμεσοι;*
226. M7: *Αφού είναι μέσο, μέσο, μέσο, μέσο.*
227. *Ερ : Αυτές θα μπορούσες να τις πεις μέσο*-παράλληλες;
228. M7: *Οι διάμεσοι είναι μόνο στα τρίγωνα*!

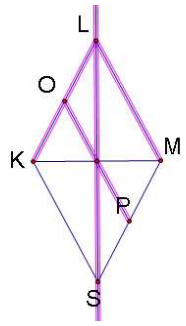
……… …………………

Η Μ7 σε συνεργασία με τα άλλα μέλη της ομάδας αναγνωρίζει στο [131] την ιδιότητα του άξονα συμμετρίας και την ταυτίζει με την έννοια του ύψους και διαμέσου του ισοσκελούς τριγώνου που έχει σχηματιστεί. Επομένως, συσχετίζει την ανάκλαση αντικειμένων με τη συμμετρία ως προς άξονα, δηλαδή **συσχετίζει διαδικασίες με γνωστές της έννοιες**. Στο [197] αναγνωρίζει οπτικά *το* σημείο τομής των διαγωνίων, ως σημείο από το οποίο διέρχεται ο άξονας, αφού δεν αναφέρει μια ιδιότητα του σημείου ή δεν αιτιολογεί γιατί ο άξονας διέρχεται από το σημείο αυτό. Η έκφραση της στο [199] δηλώνει ότι η μαθήτρια έχει **συνδέσει την έννοια** του άξονα με την έννοια της καθετότητας (καθώς και τη διασύνδεση παραλληλίας και καθετότητας), δηλαδή **συνδέσεις μεταξύ εννοιών**. Η σύνδεση της έννοιας του άξονα με την έννοια της διαμέσου εμφανίζεται στη συνέχεια στο [226] σημείο. Η οπτικοποίηση των σημείων τομής των καθέτων ως μέσων των πλευρών έχει ως αποτέλεσμα η Μ7 να **επανεφεύρει** μια διαδικασία κατασκευής με σύνδεση των μέσων των απέναντι πλευρών. Επομένως, οι **συνδεόμενες αναπαραστάσεις** που η μαθήτρια δημιούργησε κατά τη διάρκεια της διαδικασίας, τη βοήθησαν να συνδέσει τις **πρωτεύουσες ιδιότητες** του σχήματος, ιδιότητες δηλαδή που έχουν σχέση με την παραλληλία των πλευρών με τις **δευτερεύουσες ιδιότητες** του σχήματος, δηλαδή ιδιότητες που έχουν σχέση με την συμμετρία του σχήματος. Συνεπώς, η κατασκευή της έννοιας «άξονες συμμετρίας είναι οι ευθείες που συνδέουν τα μέσα των πλευρών του σχήματος» προέκυψε ως αποτέλεσμα της διαδικασίας.

Μέσω του εργαλείου καθέτου+ θεωρητικού συρσίματος

………

229. Στη συνέχεια κατασκευάζουν τους άξονες συμμετρίας του ρόμβου
230. Η Μ7 ενώνει το Κ με το Μ και στην συνέχεια φέρνει από το L κάθετη στην ΚΜ .
231. Μ7: *Το έκανα για να δείξω και καλά ότι τέμνονται κάθετα.*
232. Ερ : *Από την άλλη κορυφή μπορούσες να το κάνεις έτσι;*
233. Μ7: *Ναι, ναι!*
234. Ερ : *Δηλαδή, ποιοι είναι οι άξονες συμμετρίας;*
235. Ο Μ8 ονομάζει τα τμήματα –διαγώνιους του ρόμβου.
236. Ερ: *Η ευθεία που συνδέει τα μέσα των δυο πλευρών είναι άξονας συμμετρίας;*
237. Μ8 : Ναι
238. Ερ: *Το τμήμα ΟΡ είναι άξονας* ;(τμήμα που συνδέει τα μέσα των πλευρών)
239. Μ13 : Ναι
240. Μ8 : Ναι
241. Μ7 : Ναι , αφού LO=OK και το ΜΡ=ΡΣ
242. Μ7: Δεν είναι! Γιατί δεν είναι ορθή γωνία, δεν είναι τελικά!



Σχήμα 4.70

………

Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [229-242]

Στο [231] η Μ7 επινοεί μια διαδικασία κατασκευής των αξόνων συμμετρίας του ρόμβου, συνδυασμό του **χωρογραφικού και θεωρητικού** πεδίου του λογισμικού. Η μαθήτρια με την κατασκευή της καθέτου στον πρώτο άξονα επιδιώκει οι διαγώνιες του σχήματος να είναι κάθετες από κατασκευής, ιδιότητα των διαγωνίων του ρόμβου. Δε λαμβάνει υπόψη της την παράμετρο της συνευθειακότητας των σημείων των κορυφών (δηλαδή, δεν εξετάζει αν η κάθετη διαγώνιος διέρχεται από την απέναντι κορυφή του ρόμβου). Επομένως, η συνευθειακότητα των σημείων προκύπτει με οπτική επιβεβαίωση. Από αυτό συμπεραίνεται ότι τα οπτικά στοιχεία επηρεάζουν τον συλλογισμό της μαθήτριας.

Στο [242] αντιμετωπίζει **γνωστική σύγκρουση,** αφού οπτικά δεν επιβεβαιώνεται η ιδιότητα της καθετότητας στην μεσοπαράλληλο του ρόμβου την οποία έχει συσχετίσει με την έννοια του άξονα συμμετρίας. Στην εικασία αυτή οδηγούμαστε γιατί θεωρεί ότι η ευθεία που συνδέει τα μέσα των απέναντι πλευρών του σχήματος είναι και άξονας συμμετρίας (στο σχήμα του ρόμβου). Αντιμετωπίζει **γνωστική σύγκρουση,** αφού δεν αντιλαμβάνεται στο διάγραμμα την ιδιότητα που έχουν οι άξονες συμμετρίας να τέμνουν κάθετα τις πλευρές του σχήματος. Επομένως, οδηγείται σε συνδυασμό τυπικής και άτυπης αιτιολόγησης (**αντιληπτικό σχήμα**) στο [242] («δεν είναι! γιατί δεν είναι ορθή γωνία»), ενσωματώνοντας **στο γνωστικό σχήμα** που έχει κατασκευάσει για την έννοια της αξονικής συμμετρίας, την περίπτωση του ρόμβου.

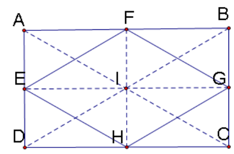
Αν επανεξεταστεί το διάστημα [128-242] από την οπτική γωνία της δομικής ανάλυσης των σχημάτων διαπιστώνεται μια *αυξανομένη ικανότητα* της M7 «να αναγνωρίζει και να περιγράφει τα στοιχεία των σχημάτων, χρησιμοποιώντας γεωμετρικές έννοιες και όρους που παραμένουν ανεπαρκείς για να διευκρινίσουν τα σχήματα» (Battista, 2007, p. 851) (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.2). Αυτό προκύπτει ως αποτέλεσμα της **νοητικής σύνδεσης των αναπαραστάσεων** στα διαφορετικά σημεία της ερευνητικής διαδικασίας.

Κατά συνέπεια, οι **συνδεόμενες αναπαραστάσεις** οδήγησαν την μαθήτρια σε **γνωστικές συγκρούσεις** και την ώθησαν να αναπτύξει διαδικασίες σκέψης, διαμεσολαβώντας στην αποκωδικοποίηση της **νοητικής της εικόνας σε εικονική και στη συνέχεια της εικονικής σε λεκτική.**

<u>Μέσω των ΣΟΕΑ γ φάσης</u>

....

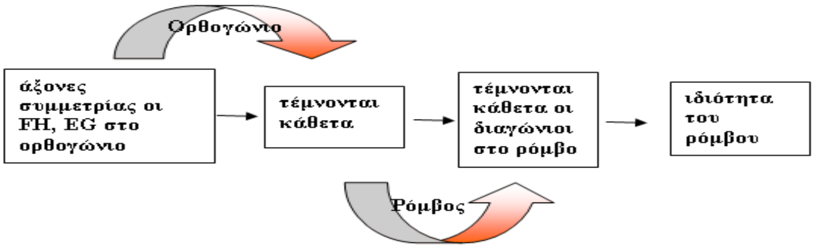
310. M7: *Αφού είναι άξονες συμμετρίας οι FH, EG, άρα τέμνονται κάθετα οι διαγώνιοι, άρα είναι μια ιδιότητα του ρόμβου.*
311. M7 : *Και επίσης EI=IH (μάλλον ήθελε να πει IG)*
312. M7: Το ADB EF//=DB/2, BCD GH//=...
313. M13: Μήπως το EFG είναι ισοσκελές;
314. M8: Μα, δεν είναι ισοσκελές.
315. M13: *Είναι!*
316. M7: *Πάλι ο ίδιο δεν μπορούμε πούμε; Το αρχικό σχήμα είναι ορθογώνιο, οι διαγώνιοι είναι ίσοι άρα BD=AC άρα οι FG, GH, HF είναι παράλληλες και ίσες με τα μισά των διαγωνίων.*



Σχήμα 4.71. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [310-316]

....

Η M7 έχει αποκτήσει την **ικανότητα να ερμηνεύει με διαφορετικό τρόπο** στοιχεία του διαγράμματος, το οποίο την βοηθά να αιτιολογήσει στο [310] (π.χ τα τμήματα EH, FG αντιμετωπίζονται ως άξονες συμμετρίας του ορθογωνίου και ως διαγώνιες του ρόμβου). Χρησιμοποιεί μια **αλυσίδα παραγωγικών δηλώσεων** στις οποίες υπονοεί τα θεωρήματα που εφαρμόζει, προκειμένου να οδηγηθεί στο λογικό επιχείρημα: «αφού είναι άξονες συμμετρίας οι FH, EG άρα τέμνονται κάθετα οι διαγώνιοι άρα είναι μια ιδιότητα του ρόμβου». Στο διάγραμμα κάτω αναπαριστάνεται το νοητικό γεφύρωμα των εννοιών του ορθογωνίου και του ρόμβου, μέσω της [νοητικής] ταύτισης των δομών δευτερευόντων στοιχείων τους.



Σχήμα 4.72. Ανάλυση της αιτιολόγησης της Μ7

Δηλαδή, η μαθήτρια αναγνωρίζει την δομή των καθέτων αξόνων συμμετρίας του ορθογωνίου στο σχήμα και τη ταυτίζει με τη δομή των καθέτων διαγωνίων στον ρόμβο. Συνεπώς, μια δευτερεύουσα ιδιότητα του ορθογωνίου, **αλλάζει ρόλο** ως δευτερεύουσα ιδιότητα του ρόμβου. Η μαθήτρια στο στάδιο αυτό έχει αποκτήσει **την ικανότητα να αναγνωρίζει τα δομικά στοιχεία** που παίζουν σημαντικό ρόλο στην επίλυση του προβλήματος. Έχει μετακινηθεί από τον οπτικό συλλογισμό, επειδή το σημαντικότερο κριτήριο για τον προσδιορισμό του σχήματος είναι αν ικανοποιεί, ένα ακριβές σύνολο τυπικών ιδιοτήτων (Battista, 2007, p. 851) (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.3).

Μέσω των ΣΟΕΑ δ φάσης

………………………………………………………………………………………………

49. Μ7: *Άμα κάνουμε ένα ορθογώνιο και βάλλουμε ως άξονα συμμετρίας την κάθετη, δηλαδή το θησαυρό και το μέσο του DK.*

………………………………………………………………………………………………

Η Μ7 ανακαλύπτει μια ειδική λύση του προβλήματος, λόγω της οπτικοποίησης που αναπτύσσει και ενώ έχουν παραμείνει στην οθόνη τα αναγκαία σημεία D, K, T. Προτείνει **την κατασκευή της μεσοκαθέτου**, προς το τμήμα DK, αν και δεν έχουν σχηματιστεί οι γραμμές που συνδέουν το σημείο T με τα σημεία D, K. Επομένως, συμπεραίνεται ότι οι **συνδεόμενες νοητικές αναπαραστάσεις** που έχει κατασκευάσει κατά τη διάρκεια της διαδικασίας, τη βοηθούν στη **δυναμική επανεφεύρεση** της λύσης, μεταφράζοντας μια νοητική αναπαράσταση σε λεκτική και στη συνέχεια σε εικονική.

Ανάπτυξη ικανότητας διατυπώσεων εννοιών-εν-δράσει, συσχέτιση εννοιών

Μέσω του εργαλείου περιστροφής

……

41. Απομακρύνουν τα τμήματα τοποθετώντας με προσοχή το ένα κάτω από το άλλο
42. Μ8: *Υπάρχει τρόπος να κάνουμε περιστροφή;*
43. Επιλέγουν το ένα άκρο του τμήματος και το κάνουν κέντρο περιστροφής.
44. Ερ: *Αν βάλλουμε 180 μοίρες;*
45. Μ8: *Θα πάει από κάτω. 270°*
46. Μ7: *Θα είναι συνευθειακά.*
47. Ερ : *Τι έχετε κατασκευάσει;*
48. Μ8: *Είναι ίσα!*
49. Μ7: *Μια ορθή γωνία.*

……

Στο διάστημα [41-49] οι μαθητές δοκιμάζουν την κατασκευή του τετραγώνου με το εργαλείο περιστροφής. Μέσω της διαδικασίας κατασκευάζουν **ΣΕΔ** του εργαλείου περιστροφής, και οδηγούνται να συσχετίσουν έννοιες της θεωρίας της γεωμετρίας με τα φαινόμενα που οπτικοποιούν στην οθόνη. Η Μ7 στο [46] **συσχετίζει την έννοια-εν-δράσει** των συνευθειακών σημείων με την περιστροφή τμήματος κατά 180^{o}.

Μέσω του εργαλείου ανάκλασης+ πειραματικού συρσίματος

……

75. Τους καθοδηγώ να κάνουν ανάκλαση, ώστε να κατασκευάσουν το συμμετρικό του τριγώνου.
76. Μ7: *Δηλαδή, αντί να φέρουμε δυο κάθετες ίσες…*

……

Η διαδικασία κατασκευής με ανάκλαση στο [76] βοηθά την Μ7 να κατασκευάσει **ΣΕΔ** του εργαλείου ανάκλασης και στη συνέχεια την **έννοια-εν-δράσει** «[ανάκλαση] είναι δυο κάθετες ίσες». Η έκφραση της μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής: «μέσω της ανάκλασης του ύψους προκύπτει ένα τμήμα ίσο στο προηγούμενο και ομοίως κάθετο». Συνεπώς, η χρήση του εργαλείου ανάκλασης οδηγεί την Μ7 σε διατύπωση **δυναμικού ορισμού** και ερμηνεία της εργαλειακής διαδικασίας με ισοδύναμες ιδιότητες. Επομένως, αναπτύσσει την ικανότητα να συνδέσει ιδιότητες αλλά και σχέσεις μεταξύ ιδιοτήτων. Η μαθήτρια βασίζεται τόσο στην οπτική αντίληψη για να προσδιορίσει σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων (επίπεδο 2.1), αλλά και την τυπική αντίληψη για να περιγράψει μέρη του σχήματος, με γεωμετρικές έννοιες που αναφέρονται στη θεωρία της γεωμετρίας.

Μέσω του σχολιασμού και θεωρητικού συρσίματος

....

318. Ερ : *Τι πρέπει να συμβαίνει για να είναι το εξωτερικό σχήμα ρόμβος;*
319. M13: *Ποιο;*
320. M7: *Οι δυο διαγώνιες να τέμνονται κάθετα!*

....

337. Ερ: *Τι πρέπει να αποδείξετε για να είναι ορθογώνιο ;*
338. M13: *Ότι οι τρεις γωνίες είναι ορθές.*
339. M7: *Ότι οι διαγώνιοι διχοτομούνται, ότι οι διαγώνιοι είναι ίσες.*

....

Στο [320] ο ρόμβος έχει αποκτήσει για την Μ7 το **χαρακτήρα σήματος**. Η διατύπωση της μπορεί να θεωρηθεί **οικονομικός ορισμός** του ρόμβου, χαρακτηριστικό επιπέδου 3. Δηλαδή: «οι δυο διαγώνιες [παραλληλογράμμου πρέπει] να τέμνονται κάθετα ώστε το σχήμα να είναι ρόμβος». Επομένως, η διατύπωση της περιλαμβάνει μια υπονοούμενη «αν…τότε» δήλωση η οποία είναι χαρακτηριστικό επιπέδου 2.3. Στο [339] η έκφραση της Μ7 είναι μια «αν τότε» δήλωση. Δηλαδή: «Αν οι διαγώνιες διχοτομούνται και είναι ίσες [τότε το σχήμα είναι ορθογώνιο]» αποτελεί έναν **οικονομικό ορισμό του ορθογωνίου.** Επομένως, το ορθογώνιο έχει αποκτήσει το **χαρακτήρα σήματος**.

....

405. Ερ: *Γιατί είναι ρόμβος ;*
406. M7: *Να φέρουμε τις διαγώνιες του σχήματος.*
407. M8: Γιατί, όλες οι πλευρές του είναι ίσες.
408. M8: Αφού, EH//=AD/2, FG//=AD/2
409. M13 : H EF πάλι δεν είναι το μισό της BC.
410. M8: Αφού είπαμε! οι δυο διαγώνιες είναι ίσες
411. M13: E, τότε όλες οι πλευρές είναι ίσες.
412. M7: Οι διαγώνιες δηλαδή είναι ίσες και τέμνονται και κάθετα τότε το σχήμα είναι τετράγωνο.

....

Στο [412] διατυπώνει την «αν… τότε» δήλωση «αν οι διαγώνιες είναι ίσες και τέμνονται και κάθετα τότε το σχήμα είναι τετράγωνο». Η έκφραση της Μ7 μπορεί να αναδιατυπωθεί: «Το τετράπλευρο [στο εσωτερικό] είναι τετράγωνο αν και μόνο αν οι διαγώνιες [το εξωτερικού] είναι ίσες και τέμνονται κάθετα». Επομένως, η Μ7 διατυπώνει με τον τρόπο αυτό έναν **αυθαίρετο οικονομικό ορισμό** για το τετράγωνο που αφορά τις διαγώνιες του και την εκλεπτυσμένη ιδιότητά τους. Η πρόταση της Μ7 στο [412], ακολουθεί των διατυπώσεων της στο [320], [339] ([οι δυο διαγώνιες να τέμνονται κάθετα], και [ότι οι διαγώνιοι διχοτομούνται, ότι οι διαγώνιοι είναι ίσες]). Επομένως, συμπεραίνεται ότι η μαθήτρια έχει κατασκευάσει μια **ιεραρχική ταξινόμηση των τετραπλεύρων**.

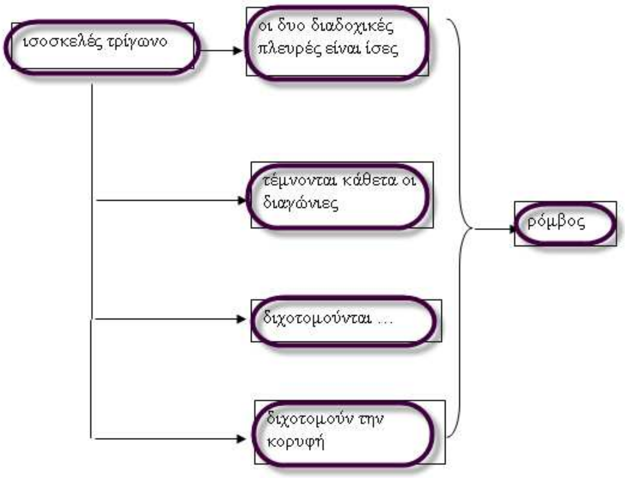
Ανάπτυξη ικανότητας διατύπωσης απαγωγικών και παραγωγικών επιχειρημάτων

Μέσω του εργαλείου ανάκλασης

....

83. Ερ: *Τι σχήμα είναι αυτό;*
84. Όλοι: *Ρόμβος*
85. Μ7: *Γιατί οι δυο διαδοχικές πλευρές είναι ίσες, τέμνονται κάθετα οι διαγώνιες και ε... διχοτομούνται ... και ε, διχοτομούν την κορυφή.*

....



Σχήμα 4.73. Ανάλυση του επιχειρήματος της Μ7

Στο [85] η Μ7 αιτιολογεί γιατί το σχήμα είναι ρόμβος, διατυπώνοντας ένα **απαγωγικό επιχείρημα** το οποίο συνδυάζει στοιχεία που η μαθήτρια οπτικοποιεί μέσω του διαγράμματος ή γνωρίζει από τη θεωρία της γεωμετρίας του ισοσκελούς τριγώνου και δεν παρατηρεί στο διάγραμμα. Μέσω της διαδικασίας ο ρόμβος αποκτά το **χαρακτήρα συμβόλου**. Η μαθήτρια χρησιμοποιεί δηλαδή μια λίστα ιδιοτήτων με **δευτερεύουσες ιδιότητες του ρόμβου** η οποία σχηματίζει ένα **μη οικονομικό** ορισμό (ή και θεώρημα-εν-δράσει) τον οποίο διαμορφώνει από τα στοιχεία του διαγράμματος.

Όπως διαπιστώνεται, η Μ7 χρησιμοποιεί στοιχεία τα οποία προκύπτουν από τον τρόπο κατασκευής του διαγράμματος με χρήση δυναμικών μέσων (π.χ εργαλείου ανάκλασης) αλλά και ημι-άτυπων δηλώσεων όπως «οι διαγώνιες διχοτομούν την κορυφή».

....

89. Μ7: BD=DE, AD κοινή πλευρά και ...διχοτομούν τις γωνίες των κορυφών

....

Η M7 **αιτιολογεί ανεπαρκώς** στο [89] με χρήση κριτηρίου ισότητας τριγώνων το οποίο δεν ολοκληρώνει. Η αιτιολόγηση της περιέχει συνδυασμό στοιχείων τα οποία είναι αποτέλεσμα οπτικοποίησης της ανάκλασης. Η ανάλυση της αιτιολόγησης είναι ανάλογη του σημείου [85]. Επομένως, στο σημείο αυτό συμπεραίνεται ότι δεν έχει ικανότητα να κατασκευάσει την απόδειξη.

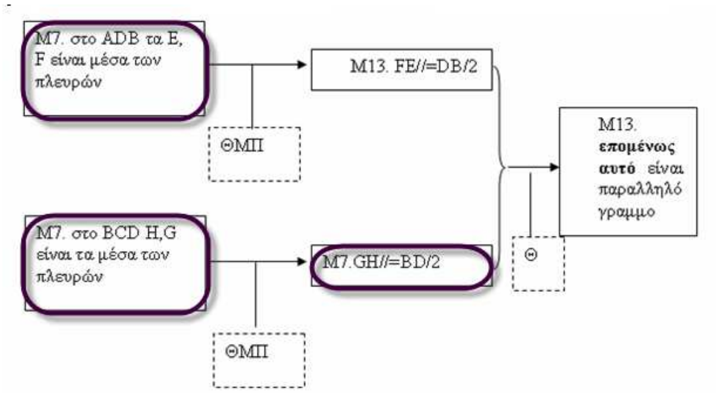
Μέσω του σχολιασμού του διαγράμματος των ΣΟΕΑ γ φάσης

………

273. *M7: Στο ADB τα E, F είναι μέσα των πλευρών άρα FE//=DB.*
274. *M13: DB/2*
275. *M7: Τώρα στο άλλο.*
276. *M7: Στο BCD τα H,G είναι τα μέσα των πλευρών άρα GH//=BD/2.*
277. *M13: Και για άλλο τρίγωνο δεν μπορούμε να κάνουμε;*
278. *M13: Να ενώσουμε το A,C και να πάμε στο ABC και να πούμε ότι F,G είναι //=AC/2*
279. *M13:….Και στο ADC ότι HE//= AC/2*
280. *M13: Επομένως, αυτό είναι παραλληλόγραμμο!*

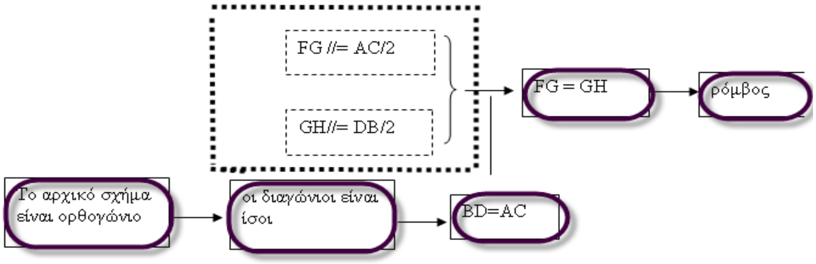
………

Στο [273-280] η M7 επιχειρηματολογεί ότι τα τμήματα είναι παράλληλα χωρίς να αναφέρει το θεώρημα ΘΜΠ, το οποίο υπονοεί. Το διάγραμμα κάτω είναι η δομική ανάλυση του **παραγωγικού επιχειρήματος** το οποίο προκύπτει από τη συνεργασία των M7, M13:



Σχήμα 4.74. Ανάλυση του επιχειρήματος των M7, M13 με το μοντέλο Toulmin

Ο διάλογος των μαθητών στο [316] υποκινεί την ανάπτυξη ενός ακόμα επιχειρήματος της M7 η οποία αιτιολογεί, αναπτύσσοντας **παραγωγικό συλλογισμό.** Συγκεκριμένα, διατυπώνει «Το αρχικό σχήμα είναι ορθογώνιο, οι διαγώνιοι είναι ίσοι, άρα BD=AC, άρα οι FG,GH είναι παράλληλες και ίσες με τα μισά των διαγωνίων».



Σχήμα 4.75. Ανάλυση του επιχειρήματος της Μ7

Η μαθήτρια σύμφωνα με τον Peirce (1960) αναπτύσσει **παραγωγικό συλλογισμό:**
Περίπτωση Α: Το αρχικό σχήμα είναι ορθογώνιο.
Κανόνας Β: Οι διαγώνιες ενός ορθογωνίου είναι ίσες μεταξύ τους.
Υπονοεί το ΘΜΠ και οδηγείται στο συμπέρασμα.
Συμπέρασμα Γ: Οι πλευρές FG,GH είναι παράλληλες και ίσες με τα μισά των διαγωνίων.

Ταυτόχρονα, από τις ιδιότητες του σχήματος του ρόμβου συμπεραίνει ότι το σχήμα είναι ρόμβος, επομένως ο ρόμβος έχει αποκτήσει για την Μ7 το **χαρακτήρα σήματος**.

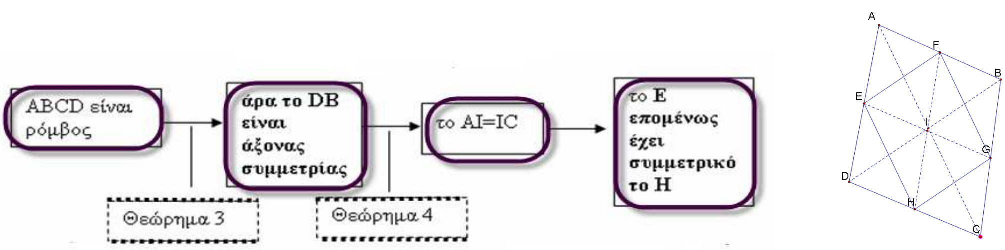
Συνδέει ιδιότητες του ορθογωνίου (άξονες συμμετρίας του, ίσες διαγώνιες), έννοιες που διαπραγματεύτηκαν οι μαθητές στην προηγούμενη φάση της έρευνας.

....

346. Ερ: *Άλλο τρόπο να δείξετε ότι είναι ορθογώνιο;*
347. Μ7: *Αφού το ABCD είναι ρόμβος, άρα το DB είναι άξονας συμμετρίας, το AI=IC το E επομένως έχει συμμετρικό το H (συμπληρώνει και ο M13).*

....

Η Μ7 στο [347] διατυπώνει **αλυσίδα παραγωγικών επιχειρημάτων**. Θεωρεί δεδομένο ότι το ABCD είναι ρόμβος και συμπεραίνει για τον άξονα συμμετρίας του, υπονοώντας το σχετικό θεώρημα. Η μαθήτρια έχει αποκτήσει την ικανότητα να εξειδικεύει τα συμπεράσματα της για το συγκεκριμένο διάγραμμα τα οποία στη συνεχεία γενικεύει, ώστε να καταλήξει σε κάποιο συμπέρασμα. Από ένα γενικό κανόνα που ισχύει για τις ιδιότητες των διαγωνίων του ρόμβου συμπεραίνει για τα τμήματα AI, IC.



Σχήμα 4.76. Ανάλυση του επιχειρήματος της Μ7

Θεώρημα 3: Οι διαγώνιες του ρόμβου είναι άξονες συμμετρίας του.
Θεώρημα 4: Τα συμμετρικά τμήματα ως προς άξονα συμμετρίας είναι ίσα μεταξύ τους

Επομένως, στο σημείο αυτό **αναπτύσσει παραγωγικό συλλογισμό**. Στη συνέχεια συμπεραίνει και για τα σημεία Ε, Η. Η αιτιολόγηση της είναι **ανεπαρκής,** αφού η μαθήτρια υποθέτει ότι: τα τμήματα ΕΗ, DB είναι κάθετα, η EF είναι παράλληλη στην DB επομένως οι ΕΗ, EF είναι κάθετες άρα το σχήμα είναι ορθογώνιο.

Δηλαδή, συμπεραίνει από τα αποτελέσματα την αιτία επομένως αναπτύσσει **απαγωγικό συλλογισμό**.

....

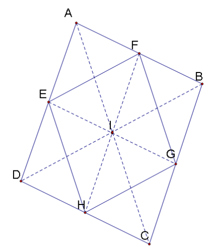
380. Μ7: Και αν είναι ρόμβος τότε το εσωτερικό είναι ορθογώνιο και το εσωτερικό του είναι πάλι ρόμβος

....

Στο [380] διατυπώνει μια πρόταση η οποία είναι αποτέλεσμα της οπτικοποίησης του αποτελέσματος στην οθόνη, λόγω του θεωρητικού συρσίματος των κορυφών καθώς και των συμπερασματικών κανόνων που έχει κατανοήσει από τη θεωρία της γεωμετρίας. Διαμορφώνει επομένως ένα **θεώρημα-εν-δράσει.**

....

382. Ερ: Πότε γίνεται το εσωτερικό σχήμα ορθογώνιο;
383. Μ7: Όταν το εξωτερικό σχήμα γίνει παραλληλόγραμμο… όταν το εξωτερικό είναι ρόμβος.
384. Μ13: Δεν έχει όλες τις πλευρές ίσες… μήπως οι διαγώνιες μοιάζουν να είναι κάθετες.
385. Ερ : Αν οι διαγώνιες είναι κάθετες τότε τι σχήμα προκύπτει;
386. Μ13: Αυτή δεν είναι ορθή γωνία; (δείχνοντας την ΑΙΒ)



Σχήμα 4.77. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [382-386]

....

Η διατύπωση της Μ7 στο [383] είναι μια «αν… τότε» δήλωση: «όταν το εξωτερικό σχήμα γίνει ρόμβος [τότε το εσωτερικό είναι ορθογώνιο]. Η αιτιολόγηση της Μ7 είναι συνδεδεμένη με ενέργειες, επομένως πρόκειται για ένα **θεώρημα-εν-δράσει**. Στο συμπέρασμα αυτό έχει καταλήξει, αφού έχει εξετάσει μόνο τις ειδικές περιπτώσεις σχήματος που προκύπτουν όταν τα κέντρα των δυο τετράπλευρων συμπίπτουν. Επομένως, έχει κατασκευάσει ένα γνωστικό σχήμα το οποίο δεν είναι επαρκές για την περίπτωση που το εξωτερικό σχήμα δεν είναι ρόμβος αλλά ρομβοειδές. Συνεπώς, στο [385] έρχεται σε **γνωστική σύγκρουση** όταν το εξωτερικό σχήμα παίρνει διαφορετική μορφή από το σχήμα του ρόμβου σύμφωνα με τα προηγούμενα δεδομένα.

....

412. M7: Οι διαγώνιες δηλαδή είναι ίσες και τέμνονται και κάθετα τότε το σχήμα είναι τετράγωνο.

………

Στο [412] διατυπώνει ένα **γενικευμένο συμπέρασμα** για το τετράγωνο. Η μαθήτρια έχει καταλήξει στο συμπέρασμα αυτό μέσω νοητικών μετασχηματισμών και λογικών συνδέσεων των προτάσεων 1, 2, 3 που έχει κατασκευάσει μέσω της διαδικασίας.

πρόταση 1: Τα μέσα κάθε τετράπλευρου με ίσες διαγώνιες σχηματίζουν εσωτερικά τετράπλευρα ρόμβους.

Πρόταση 2: Τα μέσα κάθε τετράπλευρου με κάθετες διαγώνιες σχηματίζουν εσωτερικά τετράπλευρα ορθογώνια.

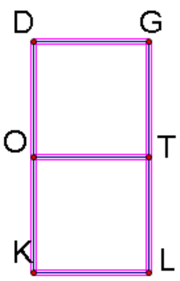
Πρόταση 3: Ένα τετράγωνο έχει τις ιδιότητες του ρόμβου και του ορθογωνίου.

Επομένως, η μαθήτρια μέσα από νοητικούς μετασχηματισμούς καταλήγει σε τυπική απόδειξη η οποία βασίζεται σε προτάσεις που έχει κατασκευάσει σε προηγούμενα σημεία της ερευνητικής διαδικασίας. Αιτιολογεί με αποδεικτικό νοητικό σχήμα που σύμφωνα με τον Balachef (1982, 1988b) έχει τα χαρακτηριστικά του **πειράματος σκέψης**, αφού προέκυψε από μετασχηματισμούς σε ειδικά παραδείγματα.

<u>Μέσω των ΣΟΕΑ</u>

………

26. *M7 Άμα κάνουμε ένα τυχαίο παραλληλόγραμμο και να έχει DK μια πλευρά.*
27. *Ενώνουν τα δυο σημεία .*
28. *M13 : Να φέρεις μια παράλληλη*
29. *Η ευθεία που φέρνει μαθήτρια είναι τυχαία, οι M13, M8 μοιάζουν να καταλαβαίνουν.*
30. *M8 : Από τις διαγώνιες δεν περνά να' σαι σίγουρη.*
31. *M7 : Γιατί μπορεί να περνά από το σημείο;*
32. *M7 : Δε μπορώ να φέρω και τα μέσα*



Σχήμα 4.78. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [26-32]

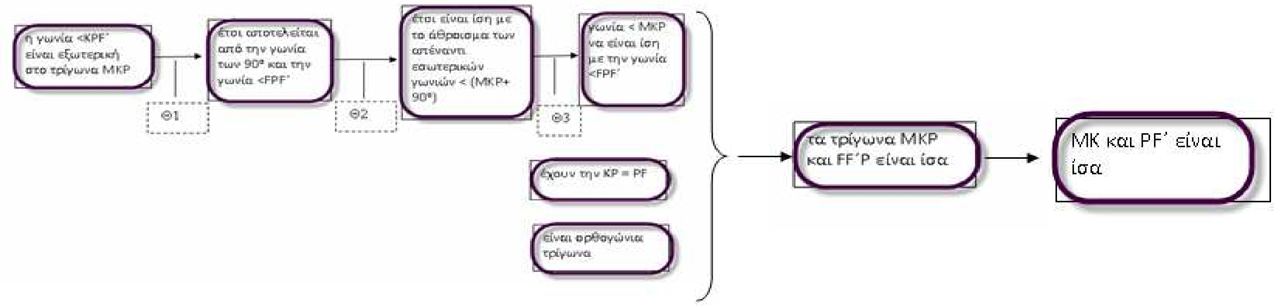
………

49. *M7: Άμα κάνουμε ένα ορθογώνιο και βάλλουμε ως άξονα συμμετρίας την κάθετη, δηλαδή το θησαυρό και το μέσο του DK.*

………

Στο [26], [49, 51] η M7 διατυπώνει **εικασίες** λόγω της ΑΟΑ που αναπτύσσει από το μετασχηματισμό του διαγράμματος. Η έκφραση της περιλαμβάνει την έννοια του ορθογωνίου παραλληλογράμμου και την έννοια του άξονα συμμετρίας, που είχαν διαπραγματευτεί οι μαθητές στη δεύτερη φάση της ερευνητικής διαδικασίας. Η μαθήτρια έχει συνδέσει νοητικά αναπαραστάσεις με αποτέλεσμα να αναπτύξει **μετασχηματιστικό συλλογισμό** και να **επανεφεύρει** μια λύση του προβλήματος. Προσαρμόζει την προϋπάρχουσα γνώση της στη δεδομένη μαθηματική κατάσταση και την εφαρμόζει για να διατυπώσει μια λύση στο πραγματικό πρόβλημα, σε αλληλεπίδραση με την ομάδα.

Η Μ7 στο [90] οδηγείται σε μια **αλυσιδωτή παραγωγική δήλωση** η οποία προκύπτει ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης με το διάγραμμα και τη θεωρία της γεωμετρίας, συνδυασμός οπτικού και παραγωγικού συλλογισμού, η οποία παρουσιάζεται με τη διαγραμματική αναπαράσταση παρακάτω χρησιμοποιώντας το μοντέλο Toulmin.



Σχήμα 4.79. Ανάλυση του επιχειρήματος της Μ7

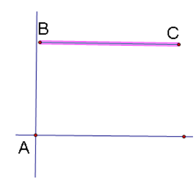
4.2.8. Μ8-ΟΜΑΔΑ 2

Ανάπτυξη ικανότητας μετατροπής μεταξύ αναπαραστάσεων μέσω γνωστικών συγκρούσεων

Μέσω του εργαλείου σημείου + πειραματικού συρσίματος

....

26. Ο Μ8 κατασκευάζει ένα ευθύγραμμο τμήμα και στην συνέχεια ένα σημείο κάτω από το αρχικό τμήμα. Φέρνει μια κάθετη από το σημείο στην ευθεία και σύρει την κάθετη, ώστε να περνά από το ένα άκρο του ευθυγράμμου τμήματος.
27. Μ8: *Πέρασε ακριβώς από το σημείο που θέλουμε*!
28. Σύρουμε το σημείο και καταστρέφεται η κατασκευή του ορθογωνίου.



....

Σχήμα 4.80. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [26-28]

Ο Μ8 στο [27] αναπτύσσει τη **σειριακή κατανόηση** της επιλογής σχηματικών μονάδων για την κατασκευή κάθετης, ως επέκταση του σχήματος χρήσης κατασκευής παράλληλης. Η δυσκολία κατανόησης της επιλογής της **θεσιακής** εφαρμογής του εργαλείου της καθέτου ή παραλλήλου, έχει ως συνέπεια την κατασκευή ενός μεταβλητού ορθογωνίου. Ο Μ8 με **θεωρητικό σύρσιμο** κατασκευάζει ένα μεταβλητό ορθογώνιο, σύροντας την κάθετη ευθεία ώστε να περνά από το ένα άκρο του ευθυγράμμου τμήματος, οπτικά επιβεβαιώνοντας την ιδιότητα της καθετότητας. Επομένως, το θεωρητικό σύρσιμο διαμεσολαβεί στην κατασκευή μιας ιδιότητας του σχήματος. Αντιμετωπίζει **γνωστική σύγκρουση** και η διαδικασία κατασκευής ολοκληρώνεται ως αλληλεπίδραση μεταξύ του χωρογραφικού πεδίου και του θεωρητικού πεδίου του λογισμικού. Επομένως, στο στάδιο αυτό δεν έχει αναπτύξει την ικανότητα αποκωδικοποίησης **της νοητικής αναπαράστασης σε εικονική**.

Μέσω του εργαλείου καθέτου

………

70. Ο Μ8 ψάχνει στα εργαλεία για να κατασκευάσει απευθείας την μεσοκάθετο.
71. Μ7:*Μήπως να κατασκευάσουμε το μέσο με το midpoint και μετά να φέρουμε την κάθετη;*
72. Ο Μ8 κατασκευάζει το μέσο και φέρει μια ευθεία να μοιάζει κάθετη.
73. Αναιρεί και κατασκευάζει την κάθετη στο μέσο.
74. Μ8: *Το έκανα!*

………

Ο Μ8 σε συνεργασία με την ομάδα μετατρέπει την λεκτική αναπαράσταση σε εικονική για την κατασκευή της μεσοκαθέτου. Επομένως, αναπτύσσει την ικανότητα **αποκωδικοποίησης της νοητικής αναπαράστασης σε εικονική.**

Μέσω του εργαλείου ανάκλασης, περιστροφής +πειραματικού συρσίματος

………

79. Μ8: *Να το κάνουμε με το rotate!*
80. Ο Μ8 παίρνει το ποντίκι επιλέγει το σημείο που είναι η τομή της κάθετου στην βάση του ισοσκελούς και το καθιστά κέντρο, ενώ στη συνέχεια επιλέγει όλη την ευθεία προσπαθώντας να τη στρέψει προς τα κάτω.
81. Ο Μ8 κατασκευάζει το ευθύγραμμο τμήμα του ύψους και στη συνέχεια εφαρμόζει την διαδικασία της στροφής του τμήματος.

………

Στο [79] κατασκευάζει μια ισοδύναμη σύνθεση του ρόμβου με χρήση του εργαλείου περιστροφής επί του ύψους του ισοσκελούς. Ο μαθητής προσπαθεί να ερμηνεύσει την διατύπωση «copy του ύψους ισοσκελούς» του Μ13, με την ισοδύναμη της περιστροφής του ύψους του ισοσκελούς περί γωνία 180^{o}, ως προς κέντρο το μέσο της βάσης του ισοσκελούς.

Δηλαδή, έχει **μετασχηματίσει μια εικονική αναπαράσταση** σε νοητική εικόνα και στη συνέχεια σε **εικονική αναπαράσταση** με διαφορετική αποκωδικοποίηση της αρχικής εικονικής.

Το σύρσιμο της κορυφής του σχήματος, βοηθά το μαθητή **να κατανοήσει** ότι ο μετασχηματισμός των σημείων του ισοσκελούς, οδηγεί στο μετασχηματισμό των σημείων του ειδώλου. Αυτό διαπιστώνεται στη συνέχεια στο [158].

Μέσω του εργαλείου περιστροφής

………

153. Ερ : *Ποιο θα είναι το κέντρο σου;*
154. Μ7: *Αυτό θα είναι το κέντρο.* (Επιλέγει το Ο).
155. Μ8: *Μην το επιλέγεις αυτό πήγαινε στο transform –mark center. Πρώτα επιλέγεις κέντρο και μετά …*
156. Μ7: *Ναι, ναι!!*
157. Η Μ7 επιλέγει το κέντρο και μετά το τμήμα .
158. Μ8: *Και το σημείο*!

………

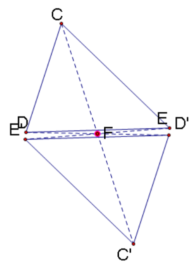
Στο διάστημα [153-158] ο Μ8 διατυπώνει τη διαδικασία κατασκευής του συμμετρικού σημείου ως προς κέντρο. Ο Μ8 έχει κατασκευάσει **σειριακή, θεσιακή και λεκτική κατανόηση** του εργαλείου περιστροφής στο [155] αφού διατυπώνει τη διαδικασία περιστροφής **ως 1-1 μετασχηματισμό** μεταξύ κάθε σημείου και του ειδώλου του. Έχει αναπτύξει την **ικανότητα αποκωδικοποίησης της περιστροφής** ως 1-1 διαδικασίας και κατά συνέπεια την ικανότητα μετατροπής μιας νοητικής αναπαράστασης σε εικονική και λεκτική.

Ανάπτυξη ικανότητας δομικής ανάλυσης – διπλή (/πολλαπλή) ερμηνεία γεωμετρικών αντικειμένων

Μέσω του εργαλείου περιστροφής + θεωρητικού συρσίματος

………

167. Ερ: Είναι άξονας συμμετρίας η DE;
168. Μ7: Άμα ήταν λίγο πιο κει όμως;
169. Ερ: Τι είναι αυτό το σχήμα;
170. Μ13: Ρόμβος.
171. Μ8: Παραλληλόγραμμο.



Σχήμα 4.81. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [167-171]

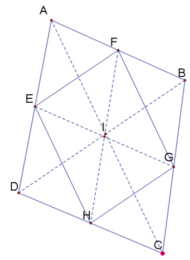
………

Στο σημείο [169] ο Μ8 εφαρμόζει **θεωρητικό σύρσιμο** του κέντρου περιστροφής, έτσι ώστε τα μέσα των πλευρών DE και D΄E΄ και το σημείο F να συμπέσουν. Μέσω της διαδικασίας **εργαλειακής γένεσης** που αναπτύσσεται, ο Μ8 **αναγνωρίζει το σχήμα του παραλληλογράμμου** ως αποτελούμενου **από τα υποσχήματα** των συμμετρικών τριγώνων. Αναγνωρίζει δηλαδή, το σχήμα του παραλληλογράμμου ως δομική σύνθεση δυο συμμετρικών τριγώνων ως προς κέντρο το μέσο της βάσης του αρχικού τριγώνου. Αυτή η ενέργεια μας οδηγεί να συμπεράνουμε ότι ο μαθητής μέσω της διαδικασίας **αναπτύσσει σταδιακά** την κατανόηση των μερών του παραλληλογράμμου, δηλαδή την **μερολογική κατανόηση** του σχήματος.

Μέσω των ΣΟΕΑ γ φάσης

……

352. Ερ: *Εμείς θέλουμε να αποδείξουμε ότι το EG=FH, έτσι δεν είναι;*
353. Μ8 : *Το EG=AB, FH=AD, αλλά αυτά είναι ίσα AB=AD.*



Σχήμα 4.82. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [352-353]

……

Ο Μ8 χρησιμοποιεί μια δευτερεύουσα ιδιότητα του ρόμβου, την ισότητα των μεσοπαραλλήλων των πλευρών του ρόμβου (έννοια που συνδέεται με την προηγούμενη φάση του μαθησιακού μονοπατιού), προκειμένου να αποδείξει ότι το σχήμα είναι ορθογώνιο. Επομένως, οι EG, FH **ερμηνεύονται από το μαθητή** ως μεσοπαράλληλες του ρόμβου και ως διαγώνιες του ορθογωνίου. Συνεπώς, ο μαθητής έχει **αναπτύξει την ικανότητα να ερμηνεύει** το ίδιο στοιχείο με διαφορετικούς τρόπους.

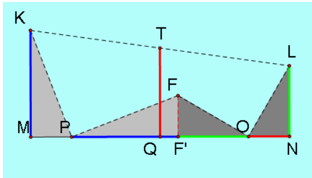
Μέσω των ΣΟΕΑ δ φάσης

Στο τμήμα του διαλόγου [92-101] ο Μ8 έχει αποκτήσει την ικανότητα να ερμηνεύει τα στοιχεία του διαγράμματος με διαφορετικούς τρόπους, αποδίδοντας τους διαφορετικούς ρόλους (π.χ το τμήμα ΜΚ ως πλευρά του τριγώνου ΜΚΡ και ως πλευρά του τραπεζίου MKNL).

Ο Μ8 έχει **αναπτύξει την ικανότητα να αποκωδικοποιεί μια εικονική αναπαράσταση** μέσω νοητικών μετασχηματισμών και να συμπεραίνει για τα στοιχεία του διαγράμματος, **διατυπώνοντας λεκτικά** τον συλλογισμό του. «Καταλήγει [επομένως] σε συμπεράσματα για την συνεπαγωγική εμφάνιση των ιδιοτήτων του σχήματος» (Battista, 2007, p.851) μέσα από **αφαιρετικές διαδικασίες** σκέψης. Έχει **αποκτήσει την ικανότητα να αναλύει δομικά το σχήμα** και να επιχειρηματολογεί με λογική, εφαρμόζοντας θεωρήματα.

....

92. M8: *PO= MK + NL*
93. M2: *Γιατί MK= PF΄ και NL=OF΄*
94. Ερ: Τι σχήμα είναι το MKNL
95. M8: *Είναι τραπέζιο και μάλιστα η TQ είναι ίση με το ημιάθροισμα των δυο βάσεων.*
Δηλαδή TQ= (MK + NL) / 2 = PF΄ + OF΄ =PO/2
96. Ερ: *Επομένως η θέση του T είναι γνωστή.*
97. M12: *Είναι γνωστή γιατί τα P, O είναι γνωστά και είναι ίση με PO/2.*
98. Ερ: *Και πως θα το βρούμε;*
99. M11: *Φέρνουμε μεσοκάθετη στο PO.*
100. Ερ: Το Q είναι το μέσο της MN,είναι μέσο και της PO;
101. M8: Γιατί MP= *FF΄=ON*



Σχήμα 4.83. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [92-101]

....

Ανάπτυξη ικανότητας διατυπώσεων εννοιών-εν-δράσει

Μέσω του εργαλείου σημείου + πειραματικού συρσίματος

....

15. Ερ: *Πως κάνετε παράλληλη ευθεία στο χαρτί* ;
16. M7: *Με το χάρακα.*
17. M13: *Παίρνουμε τον χάρακα και…*
18. Ερ: *Και «το τραβάμε»*;
19. M8: *Μήπως να αντιγράψουμε την πάνω πλευρά στο κάτω μέρος.*

....

Ο M8 χρησιμοποιεί στο [19] **δυναμικό ορισμό** για να εκφράσει την ισότητα των απέναντι πλευρών του παραλληλογράμμου, αφού μεταβάλλεται η σχέση της ισότητας των πλευρών λόγω του συρσίματος των άκρων του. Χρησιμοποιεί δηλαδή, αυτοσχέδιο **αντιληπτικό** τρόπο για να περιγράψει την ιδιότητα της ισότητας του σχήματος.

Μέσω του εργαλείου περιστροφής + πειραματικού συρσίματος

....

47. Ερ : *Τι έχετε κατασκευάσει;*
48. M8: *Είναι ίσα!*
49. M7: *Μια ορθή γωνία.*

………

Μέσω της διαδικασίας **εργαλειακής γένεσης** και σε αλληλεπίδραση με το εργαλείο περιστροφής ο Μ8, αντιλαμβάνεται ότι τα τμήματα είναι ίσα στο [48].

……… ……………………

79. Μ8: *Να το κάνουμε με το rotate!*
80. Ο Μ8 παίρνει το ποντίκι επιλέγει το σημείο που είναι η τομή της κάθετου στην βάση του ισοσκελούς και το καθιστά κέντρο, ενώ στη συνέχεια επιλέγει όλη την ευθεία προσπαθώντας να τη στρέψει προς τα κάτω.
81. Ο Μ8 κατασκευάζει το ευθύγραμμο τμήμα του ύψους και στη συνέχεια εφαρμόζει την διαδικασία της στροφής του τμήματος.

……… ……………………

Στο [79-81] ο Μ8 προτείνει τη διαδικασία περιστροφής, ώστε να αποτυπώσει στην οθόνη με διαφορετικές ενέργειες την ίδια εικόνα. Επομένως, συνδέει διαδικαστικά και εννοιολογικά την **έννοια της περιστροφής** τμήματος καθέτου σε ευθεία-άξονα συμμετρίας, με την **έννοια της απόστασης** του τμήματος από τον άξονα, δηλαδή κατασκευάζει συνδέσεις μεταξύ εννοιών.

……… ……………………

90. Ερ: ισόπλευρο πως μπορούμε να κάνουμε;
91. Μ8: με rotate και 60° περιστροφή!

……… ……………………

Στο σημείο [91] ο Μ8 ορίζει το ισόπλευρο τρίγωνο με **δυναμικό ορισμό** («με rotate και 60^o περιστροφή») ως αποτέλεσμα του **ΣΕΔ** εργαλείου περιστροφής. Στην έκφραση του διατυπώνει με εργαλειακό τρόπο τις αναγκαίες ιδιότητες του σχήματος του ισοπλεύρου με χρήση της δυναμικής διαδικασίας: η ισότητα των πλευρών και η ισότητα των γωνιών.

Οι περιγραφές του στηρίζονται στην οπτική αντίληψη, χρησιμοποιώντας **άτυπες και τυπικές περιγραφές,** χαρακτηριστικό επιπέδου 2.2.

Μέσω του εργαλείου ανάκλασης, ίχνους και συρσίματος

Στο [115] ο Μ8 κατασκευάζει **ΣΕΔ** του εργαλείου των ΣΟΕΑ ανάκλασης, ίχνους και συρσίματος και κατασκευάζει την έννοια του «ίσου και αντιστρόφου» σχήματος λόγω του αντίστροφου προσανατολισμού του σχήματος. Στη συνέχεια κατασκευάζει την **έννοια-εν-δράσει** «[οι αποστάσεις των σημείων B, C ως προς το O] είναι ίσες». Στο [127] ερμηνεύει τον **άξονα συμμετρίας ως μεσοκάθετο** της απόστασης του σημείου –ανακλώμενου σημείου του ευθυγράμμου τμήματος σε αλληλεπίδραση με τον Μ13. Ο μαθητής αναγνωρίζει το σχήμα του τραπεζίου παρά την αλλαγή προσανατολισμού του σχήματος και συσχετίζει ιδιότητες του σχήματος («οι γωνίες παρά την βάση είναι ίσες, το ύψος είναι και μεσοκάθετος»).

…… ………………….

114. Ερ: *Σύρε το σημείο Α ώστε να κάνεις ένα γράμμα για παράδειγμα το γράμμα Μ.*
115. Μ8: *Έχουμε κάνει το ίδιο από κάτω αντίστροφα.*
116. Ερ: Τι σχέση έχουν οι δυο αποστάσεις των σημείων Β, C ως προς το Ο.
117. Μ8 : Ίσες .
118. Ερ Τι σχήμα είναι;
119. Μ8: Τραπέζιο.
120. Μ13 : Η γωνία Α με την Α΄ είναι ίσες.
121. Μ8: Η γωνία Ε=Ε΄.
122. Μ13: ΑΚ=Α΄Κ.
123. Μ13 : Η ευθεία ε είναι ύψος.
124. Μ8: Μεσοκάθετος.
125. Ερ: Μπορείτε να βγάλετε ένα συμπέρασμα για το τραπέζιο;
126. Μ8: Οι γωνίες παρά την βάση είναι ίσες.
127. *Μ8: Το ύψος είναι και μεσοκάθετος.*

…… …………………..

<u>Μέσω του εργαλείου ανάκλασης + θεωρητικού συρσίματος</u>

Στο [144] ο Μ8 κατασκευάζει την **έννοια-εν-δράσει** του τετραγώνου ως ορθογωνίου με ίσες πλευρές λόγω του θεωρητικού συρσίματος και της αλληλεπίδρασης με τον Μ13.

Επομένως, διατυπώνει στο [144] τον επαγωγικού τύπου **αυθαίρετο, οικονομικό ορισμό** («[κάθε] ορθογώνιο με ίσες πλευρές [είναι τετράγωνο]»), του τετραγώνου που είναι αποτέλεσμα της επίδρασης του **θεωρητικού συρσίματος** μιας κορυφής του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Στο σημείο αυτό ενισχύεται η **αντιληπτική ιεράρχηση** του τετραγώνου ως ορθογωνίου.

…… ………………….

136. Ερ: Για να είναι τετράγωνο τι πρέπει να ισχύει;
137. Μ13: Όλες οι πλευρές να είναι ίσες
138. Ερ : Είναι όλες οι πλευρές ίσες ;
139. Μ13 : Όχι
140. Ο Μ13 παίρνει το ποντίκι και σύρει πάνω κάτω το τμήμα ΑΒ .
141. Μ13: Ναι, αλλά αν μετακινήσουμε αυτήν εδώ έτσι;
142. Μ13: Τώρα αυτό δεν είναι τετράγωνο;
143. Ερ : Τι είναι το τετράγωνο;
144. Μ8 : ένα ορθογώνιο με ίσες πλευρές.

…… ………………….

<u>Μέσω του εργαλείου καθέτου + θεωρητικού συρσίματος</u>

…… ………………….

Σύρουμε μια κορυφή του ρόμβου, ενώ έχουμε σχηματίσει τους άξονες ώστε να μετασχηματιστεί σε τετράγωνο.
243. Μ8: Και είναι άξονας συμμετρίας!
244. Ερ: Στο τετράγωνο πόσους άξονες συμμετρίας έχουμε;
245. Μ13: Δυο δεν έχουμε ;
246. Μ13: Η ΟΡ και άμα ενώσουμε και άμα φέρουμε κα αυτή εδώ;
247. Μ8: Τέσσερις άξονες έχουμε! είναι και οι διαγώνιες !

…… …………………

Το εργαλείο της καθετότητας και **το θεωρητικό σύρσιμο** της κορυφής του ρόμβου επιδρά στο [247] μέσω της διαδικασίας εργαλειακής γένεσης στην **κατασκευή ενός οργάνου** που εκφράζεται με την **έννοια-εν-δράσει** «στο τετράγωνο έχουμε τέσσερις άξονες συμμετρίας, είναι και οι διαγώνιες». Η έκφραση του μπορεί να θεωρηθεί και **αυθαίρετος ορισμός** του τετραγώνου.

Ανάπτυξη ικανότητας ιεράρχησης

Μέσω του εργαλείου περιστροφής+ θεωρητικού συρσίματος

………

178. Ερ: Αν θέλαμε να το εκφράσουμε σαν πρόβλημα, τι θα λέγαμε; Βρείτε το συμμετρικό ενός τριγώνου ως προς …..
179. Μ8: Τη βάση!
180. Μ8: Ως προς άξονα συμμετρίας το DE!
181. Μ13 : Ως προς κέντρο F, το μέσο της DE! (ταυτόχρονα).
182. Μ8: Όταν κάνουμε ως προς άξονα συμμετρίας γίνεται κάθετα!

……..

Ο Μ8 έρχεται σε **γνωστική σύγκρουση** μέσω του σύνθετου μετασχηματισμού του συρσίματος και της περιστροφής στο [179-180] και κατανοεί ότι το παραλληλόγραμμο δεν έχει άξονες συμμετρίας στο [182], συνδέοντας την έννοια της αξονικής συμμετρίας με την έννοια της καθετότητας. Η έκφραση του θα μπορούσε να αναδιατυπωθεί: «αν τέμνονται κάθετα τα τμήματα τότε το σχήμα είναι συμμετρικό ως προς άξονα συμμετρίας». Επομένως, πρόκειται για την διατύπωση μιας εικασίας («αν …τότε»).

………

206. Μ7: Και ακόμα μια (έναν άξονα)
207. Μ8 : Δε χρειάζεται !

………

215. Η Μ7 ενώνει τα δυο άλλα μέσα και δείχνει το δεύτερο άξονα.
216. Μ8: Δε κατάλαβα γιατί χρειάζεται δυο!
217. Μ7: Ναι, έχει δυο άξονες συμμετρίας.
218. Η Μ7 κατασκευάζει τον άξονα συμμετρίας, ενώνοντας πάλι τα μέσα των απέναντι πλευρών του ορθογωνίου.
219. Μ8: Ναι … αλλά δεν πέφτει ο ένας πάνω στον άλλον!

....

246. M13: Η ΟΡ και άμα ενώσουμε και άμα φέρουμε κα αυτή εδώ;
247. M8: Τέσσερις άξονες έχουμε! είναι και οι διαγώνιες !

....

Στο [207, 216] αντιμετωπίζει **γνωστικό εμπόδιο** αφού θεωρεί ότι στο ορθογώνιο έχουμε μόνο έναν άξονα συμμετρίας, σημείο στο οποίο έρχεται σε **γνωστική σύγκρουση** με το διάγραμμα στην οθόνη. Μέσω της διαδικασίας κατανοεί ότι κάθε μεσοπαράλληλος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι και άξονας συμμετρίας του. Αυτό επιβεβαιώνεται στη συνέχεια στο σημείο [247].

<u>Μέσω του εργαλείου καθέτου + θεωρητικού συρσίματος</u>

Στο [247] ενσωματώνει στο γνωστικό σχήμα που έχει κατασκευάσει για την έννοια του άξονα συμμετρίας των τετραπλεύρων και στην περίπτωση του τετραγώνου, ως ειδικότερου σχήματος παραλληλογράμμου. Μέσω του εργαλείου καθετότητας και **του θεωρητικού συρσίματος** της κορυφής του ρόμβου κατά τη διάρκεια της διαδικασίας εργαλειακής γένεσης κατασκευάζει **ένα όργανο** που εκφράζεται με το **θεώρημα-εν-δράσει** «στο τετράγωνο έχουμε τέσσερις άξονες συμμετρίας». Επομένως, παρουσιάζει **εννοιολογική αλλαγή** αφού κατανοεί ότι «[η μεσο-παράλληλος] είναι και άξονας συμμετρίας» στο τετράγωνο, όπως και στο ορθογώνιο, καθώς και οι διαγώνιες είναι άξονες συμμετρίας στο τετράγωνο, όπως και στο ρόμβο. Το αποτέλεσμα αυτής της κατανόησης οδηγεί στη διατύπωση: «4 άξονες έχουμε! είναι και οι διαγώνιες». Συνεπώς, έχει κατασκευάσει μέσω της διαδικασίας την έννοια (α) «οι μεσοπαράλληλοι του ορθογωνίου είναι οι άξονες συμμετρίας του ορθογωνίου» και (β) «οι διαγώνιες του ρόμβου είναι άξονες συμμετρίας του». Επομένως, «έχει καταλήξει σε συμπεράσματα για τη συνεπαγωγική εμφάνιση των ιδιοτήτων του σχήματος μέσα από την ανάλυση που προκύπτει από την ιεράρχηση των σχημάτων» (Battista, 2007,p.852) (χαρακτηριστικό επιπέδου 3.2). Κατά συνέπεια, έχει κατανοήσει ότι το τετράγωνο έχει πρόσθετες ιδιότητες που δεν αφορούν μόνο τις πλευρές και γωνίες του σχήματος αλλά και τους άξονες συμμετρίας του, κατασκευάζοντας **τη σχέση εγκλεισμού** των σχημάτων.

Ανάπτυξη ικανότητας διατύπωσης επαγωγικών και απαγωγικών επιχειρημάτων

<u>Μέσω του εργαλείου περιστροφής</u>

Στο [80, 91] ο Μ8 αναπτύσσει **μετασχηματιστικό συλλογισμό,** αφού η διαδικασία που προτείνει προκύπτει ως αποτέλεσμα της διαδικασίας κατασκευής περιστροφής των πλευρών του τετραγώνου.

Μέσω του εργαλείου εργαλείου περιστροφής + θεωρητικού συρσίματος

Ο Μ8 στο [182] αναπτύσσει **επαγωγικό συλλογισμό** και διατυπώνει **μια εικασία** «αν τότε»: «αν κάνουμε ως προς άξονα συμμετρίας γίνεται κάθετα». Επομένως, ο Μ8 έχει κατασκευάσει ένα ΣΕΔ **του μετασχηματισμού** της ανάκλασης και το εκφράζει με μια **έννοια-εν-δράσει**. Η έκφραση του θα μπορούσε να αναδιατυπωθεί: «Αν τέμνονται κάθετα τα τμήματα τότε το σχήμα είναι συμμετρικό ως προς άξονα συμμετρίας».

Μέσω του προσαρμ. εργαλείου

………

188. Ερ : *Είναι αυτό το κέντρο συμμετρίας του ισοπλεύρου ;*
189. Μ13 : Όχι
190. Μ7: Ναι, ναι.
191. Μ8 : Όχι (με δισταγμό).
192. Ερ: Γιατί ;
193. Μ8: Αν ήταν κέντρο συμμετρίας δεν θα έπρεπε η KQ=QN;
194. Ερ : Ποιο είναι το συμμετρικό του τριγώνου ως προς το σημείο Q;
195. Μ13, Μ7 : Δεν απαντούν
196. Μ8: Το K΄L΄M΄

………

Στο [193] διατυπώνει μια **εικασία** «αν ήταν κέντρο συμμετρίας δεν θα έπρεπε η KQ=QN». Η εικασία αυτή προέκυψε μετά την εφαρμογή του προσαρμ. εργαλείου στη διαδικασία κατασκευής του συμμετρικού ισοπλεύρου τριγώνου. Επομένως, ο Μ8 διατυπώνει την **έννοια-εν-δράσει,** λόγω της κατασκευής του **ΣΕΔ** προσαρμ. εργαλείου. Ο μαθητής συνήθιζε να διατυπώνει τις σκέψεις του με συνδυασμό τεχνολογικής και τυπικής γλώσσας. Στο σημείο αυτό παρατηρείται μια αλλαγή στον τρόπο διατύπωσης του μαθητή, με **τυπική μαθηματική γλώσσα**.

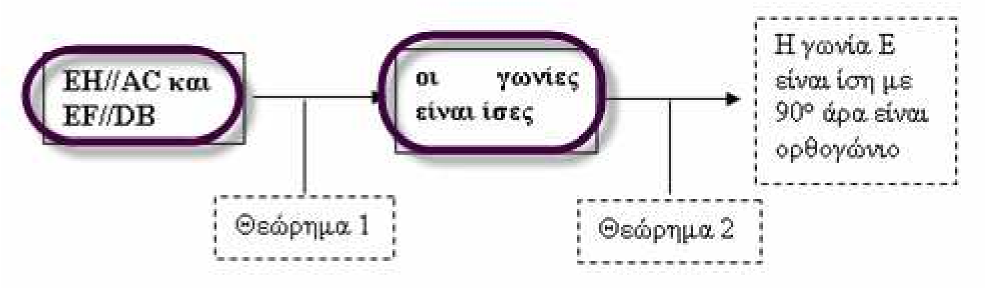
Ανάπτυξη διαδικαστικής κατανόησης του θεωρήματος ΘΜΠ-αναγνώριση υποσχημάτων

Ο Μ8 στο [344] επιχειρηματολογεί για να αποδείξει ότι οι πλευρές του εσωτερικού σχήματος τέμνονται κάθετα.

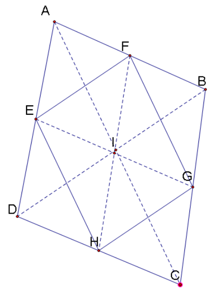
………

343. M7 : Κέντρο συμμετρίας ενός ορθογωνίου δεν είναι;
344. M8 : Που το είδες το ορθογώνιο;
345. M8: Επειδή το EH//AC και EF//DB, τότε οι γωνίες είναι ίσες

....



Σχήμα 4.84. Ανάλυση του επιχειρήματος του M8



Σχήμα 4.85. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [343-345]

Θεώρημα 1 : Οξείες γωνίες με πλευρές παράλληλες είναι μεταξύ τους ίσες .
Θεώρημα 2: Παραλληλόγραμμο του οποίου η μια γωνία είναι ορθή είναι ορθογώνιο.

Η απόδειξη του έχει τη μορφή του **εμπειρικού αποδεικτικού σχήματος**, αφού ο μαθητής αντιλαμβάνεται την παραλληλία των τμημάτων και την ισότητα των γωνιών από το διάγραμμα στην οθόνη.

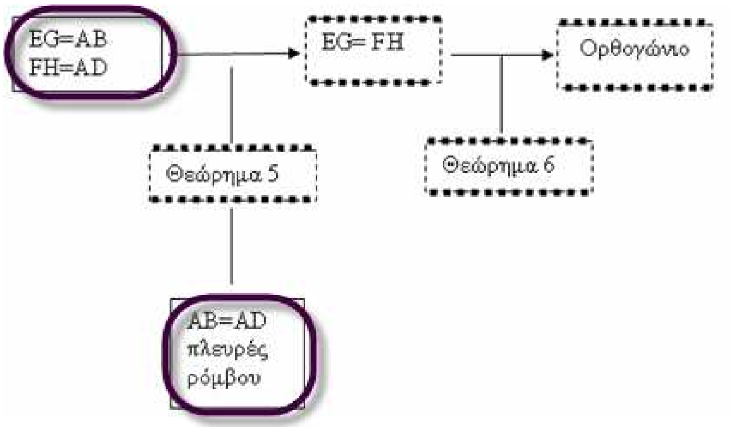
Ανάπτυξη ικανότητας απαγωγικού- παραγωγικού συλλογισμού

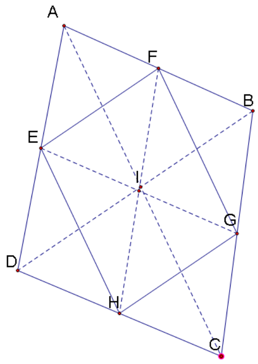
Το σύρσιμο των κορυφών του σχήματος ώστε οι διαγώνιες του εξωτερικού τετραπλεύρου να γίνουν κάθετες, βοηθά τον μαθητή στην οπτικοποίηση των ιδιοτήτων των διαγωνίων του εσωτερικού τετράπλευρου. Η αιτιολόγηση του M8 δε βασίζεται στο διάγραμμα αλλά σε επιχειρήματα που προκύπτουν από νοητικά του κατασκευάσματα σε προηγούμενα σημεία της έρευνας. Επομένως, πρόκειται για ένα μετασχηματιστικό σχήμα (Harel, 2009), αφού η αιτιολόγηση του βασίζεται σε νοητικές λειτουργίες ή **νοητική αιτιολόγηση** στην κατηγορία του **πειράματος σκέψης**.

....

352. Ερ: *Εμείς θέλουμε να αποδείξουμε ότι το EG=FH, έτσι δεν είναι;*
353. M8 : *Το EG=AB, FH=AD, αλλά αυτά είναι ίσα AB=AD.*
354. M13: *Το EG=AB/2 μήπως ;*
355. *M8: Εγώ το βρήκα και με άλλον τρόπο.*
356. *M8: Εφόσον αυτές οι δυο είναι ίσες και, είναι ισοσκελές … δηλαδή το IH και IG (είναι ίσα) … ..*

……





Σχήμα 4.86 Σχήμα σχετικό με το απόσπασμα [92-101]

Σχήμα 4.87. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [352-356]

Θεώρημα 5: Οι μεσοπαράλληλοι ρόμβου είναι παράλληλες και ίσες με τις πλευρές του ρόμβου.

Θεώρημα 6: Αν οι διαγώνιες παραλληλογράμμου είναι ίσες το σχήμα είναι ορθογώνιο.

Στο [356] ο M8 υποθέτει ότι του είναι αναγκαίο (ότι το IH και IG είναι ίσα), προκειμένου να αποδείξει την ισότητα των διαγωνίων του εσωτερικού σχήματος. Επομένως, ο μαθητής στο σημείο αυτό οδηγείται σε **απαγωγικό συλλογισμό**.

……

399. Ερ:*Τι είναι αυτό που παίζει ρόλο, ώστε να έχουμε εσωτερικό σχήμα ορθογώνιο;*
400. *M8: Οι διαγώνιες να είναι κάθετες!*

……

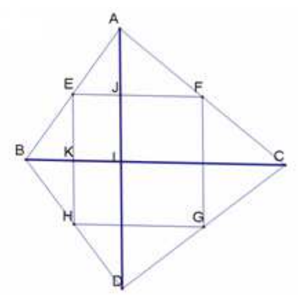
Ο μετασχηματισμοί των διαγραμμάτων στην οθόνη οδηγούν τον M8 στο [400] μέσα από τη διαδικασία **εργαλειακής γένεσης** να κατασκευάσει ένα **όργανο**. Διατυπώνει έναν **οικονομικό** γενικευμένο **ορισμό** για την κατασκευή του ορθογωνίου από τα μέσα του εξωτερικού τετράπλευρου. Η δήλωση του μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: «[τα μέσα των πλευρών τετράπλευρου σχηματίζουν ορθογώνιο τότε και μόνον τότε] όταν οι διαγώνιες είναι κάθετες». Πρόκειται για μια αιτιολόγηση αναλυτικού σχήματος σύμφωνα με τους Harel & Sowder (1996), αφού βασίζεται σε νοητικές λειτουργίες που μπορεί να καταλήξουν σε μαθηματικές αποδείξεις και προκύπτει αξιωματικά μέσα από προηγούμενες προτάσεις. Μπορεί να θεωρηθεί ακόμα ως **νοητική αιτιολόγηση** (συμβολικός υπολογισμός), σύμφωνα με τον Balachef (1982) αφού είναι βασισμένη σε νοητικούς μετασχηματισμούς. Ο μαθητής νοητικά έχει κάνει τους εξής λογικούς μετασχηματισμούς:

Περίπτωση: Το τετράπλευρο έχει κάθετες διαγώνιες.
Αποτέλεσμα: Το εσωτερικό τετράπλευρο είναι ορθογώνιο.
Κανόνας: Τα τετράπλευρα με κάθετες διαγώνιες έχουν εσωτερικά τετράπλευρα ορθογώνια.

Επομένως, οδηγείται **σε γενίκευση** ως προς το ρόλο που παίζουν οι διαγώνιες στο σχήμα, ως αποτέλεσμα του συνδυασμού **επαγωγικού και παραγωγικού συλλογισμού** που αναπτύσσει.

....

405. Ερ: *Γιατί είναι ρόμβος ;*
406. M7: *Να φέρουμε τις διαγώνιες του σχήματος.*
407. *M8: Γιατί, όλες οι πλευρές του είναι ίσες.*
408. *M8: Αφού, EH//=AD/2, FG//=AD/2*
409. *M13 : H EF πάλι δεν είναι το μισό της BC.*
410. *M8: Αφού είπαμε! οι δυο διαγώνιες είναι ίσες*
411. *M13: E, τότε όλες οι πλευρές είναι ίσες.*
412. *M7: Οι διαγώνιες δηλαδή είναι ίσες και τέμνονται και κάθετα τότε το σχήμα είναι τετράγωνο.*
413. *M8:* Πάλι βγαίνουν ίσες οι πλευρές του και είναι ίσες και είναι ορθές οι γωνίες του.

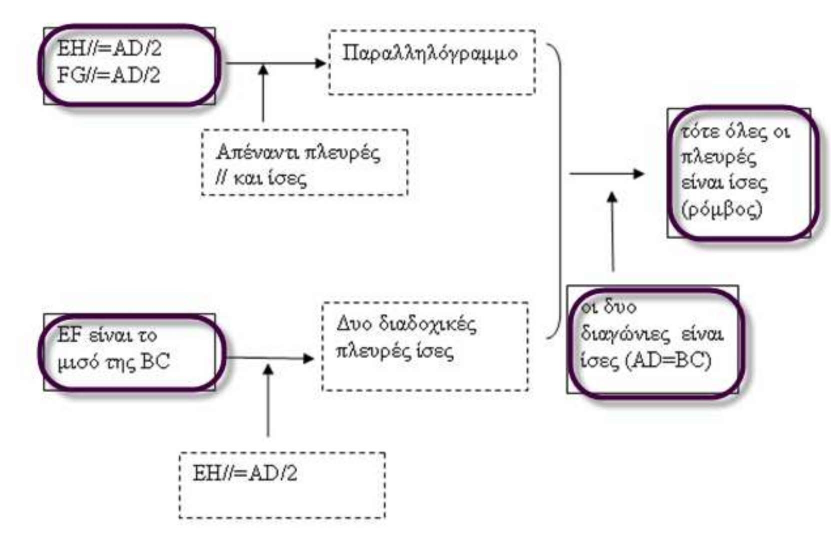


Σχήμα 4.88. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [405-413]

....

Σε συνεργασία με τον M13 αποδεικνύουν με χρήση **παραγωγικού συλλογισμού** τον συλλογισμό τους στο [408-410]. Οι M8, M13 κάνουν χρήση **λογικών επιχειρημάτων** για να αποδείξουν ότι το σχήμα στο εσωτερικό είναι τετράγωνο, όταν οι διαγώνιες είναι ίσες. Οι μαθητές αποδεικνύουν την πρόταση στον διάλογο που αναπτύσσεται, αλληλεπιδρώντας μεταξύ τους.

Στο [413] διατυπώνει έναν **μη οικονομικό ορισμό** του τετραγώνου (πάλι βγαίνουν ίσες οι πλευρές του και είναι ίσες και ορθές οι γωνίες του) που θεμελιώνει θεωρητικά ότι ένα σχήμα στο εσωτερικό είναι τετράγωνο, όταν του εξωτερικού οι διαγώνιες είναι ίσες και κάθετες. Επομένως, οι μαθητές χρησιμοποιούν μετασχηματισμούς σε εσωτερικεύσεις ειδικών παραδειγμάτων, δηλαδή λειτουργούν με **πειράματα σκέψης**.



Σχήμα 4.89. Ανάλυση του επιχειρήματος του Μ8

Μέσω των ΣΟΕΑ

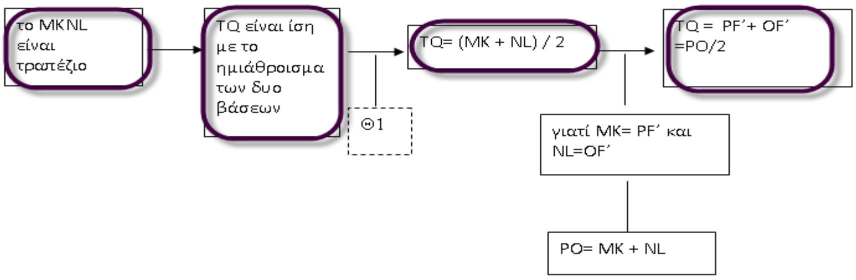
……

38. Μ8: *Μήπως επειδή η ευθεία η κάθετη περνά από το θησαυρό; Μήπως η ευθεία που ήταν ο θησαυρός είναι ίση με το DK;*

39. Μ8: *Μήπως αφού η ευθεία η κάθετη περνά από το σημείο του θησαυρού είναι και κάθετη στην ευθεία την άλλη που περνούσε από το Θ (αρχικό σχήμα).*

……

Στο [38-9] ο Μ8 διατυπώνει μια ακόμα εικασία σε αλληλεπίδραση με το διάγραμμα: «η ευθεία η κάθετη που περνά από το σημείο του θησαυρού είναι και κάθετη στην ευθεία την άλλη που περνούσε από το Θ». Δηλαδή, ο μαθητής επισημαίνει ότι η μεσοπαράλληλος είναι και κάθετη στην ευθεία που περνά από το σημείο του θησαυρού είναι και παράλληλη στην πλευρά του παραλληλογράμμου DK. Στο σημείο αυτό συσχετίζει μέσω του διαγράμματος ιδιότητες που συγκεντρώνει το σχήμα και τις οποίες ο μαθητής έχει κατανοήσει στην προηγούμενη φάση. Στο [85-99] αναπτύσσει **παραγωγικό συλλογισμό**. Η ανάλυση του συλλογισμού του με το μοντέλο Toulmin παριστάνεται μέσω της διαγραμματικής αναπαράστασης στη συνέχεια. Χρησιμοποιεί ιδιότητες του σχήματος, προσδιορίζοντας στα ίδια στοιχεία του διαγράμματος διαφορετικούς ρόλους και καταλήγει στην απόδειξη του προβλήματος μέσω της εφαρμογής θεωρημάτων. Έχει αναπτύξει **την ικανότητα εφαρμογής** της λύσης του προβλήματος.



Σχήμα 4.90. Ανάλυση του επιχειρήματος του M8

4.2.9. M9-ΟΜΑΔΑ Α

Ανάπτυξη ικανότητας μετατροπής μεταξύ αναπαραστάσεων μέσω γνωστικών συγκρούσεων.

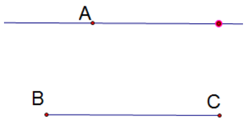
Μέσω του εργαλείου σημείου +πειραματικού συρσίματος

....

1. M10: Κάνε ένα σημείο
2. M9: Και με το construct.
3. M10: Και ένα ευθύγραμμο τμήμα
4. M9: Πάω στο construct ... Πάλι δεν είναι φωτεινό!

....

33. M10:Πως θα το κλείσει τώρα για να γίνει παραλληλόγραμμο;
34. M14: Μήπως θα πάμε στο Κατασκευή;
35. M9: Πάλι το ίδιο δεν θα κάνουμε, πάλι το ίδιο με την γραμμή.
36. M14: Κατ' αρχάς θα ονομάσουμε εκείνο το σημείο.
37. M10: Ναι, αλλά δεν ξέρουμε ότι είναι παραλληλόγραμμο, έτσι όπως το κάνει!
38. M14: Φαίνεται ότι είναι παραλληλόγραμμο.
39. M9: Ίσως πρέπει η τελίτσα να είναι λίγο πιο κει.
40. M10: Ούτε τώρα είναι!
41. Σύρουν μια κορυφή.
42. M9: Δεν είναι ίσες οι παράλληλες που πήραμε!



Σχήμα 4.91. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [33-42]

....

Η M9 στο [2-4] αντιμετωπίζει εμπόδιο λόγω της **μη σειριακής κατανόησης** αναφορικά με την επιλογή των αντικειμένων για την κατασκευή των καθέτων. Στο σημείο αυτό έρχεται **σε γνωστική**

σύγκρουση, αφού εκφράζει με άτυπο τρόπο την μη ενεργοποίηση της εντολής («*πάλι δεν είναι φωτεινό»*). Επομένως, ωθείται να κατανοήσει τη λογική ακολουθία ενεργειών.

Η μαθήτρια **μέσω του θεωρητικού συρσίματος του εργαλείου σημείου** προσδίδει στο [42] στο διάγραμμα μια ιδιότητα**,** την ισότητα των απέναντι πλευρών. Επομένως, το θεωρητικό σύρσιμο διαμεσολαβεί στην επανεφεύρεση μιας ιδιότητας του διαγράμματος. Διαμεσολαβεί δηλαδή στη **διαμόρφωση μιας εικονικής αναπαράστασης και στη μετάφραση της εικονικής σε λεκτική.**

<u>Μέσω του εργαλείου καθέτου και πειραματικού συρσίματος</u>

Η ομάδα αντιμετωπίζει **γνωστικά και εργαλειακά εμπόδια** στην κατασκευή του ορθογωνίου. Η Μ9 αντιλαμβάνεται την ισότητα των απέναντι πλευρών του σχήματος και το διατυπώνει στο [120-121].

………

119.*Μ10 : Ορθογώνιο είναι το τετράπλευρο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές.*
120.*Μ9: Δυο πλευρές του ίσες.*
121.*Μ9: Ανά δυο ίσες*
122.*Ερ: Ναι, αυτό είναι και ένα παραλληλόγραμμο.*
123.*Μ14: Και έχει και δυο ορθές.*
124.*Ερ: Πως το κατασκευάσαμε;*
125.*Μ9- Μ10: Πήραμε ευθύγραμμο τμήμα, φέραμε κάθετες και στα δυο άκρα, πήραμε άλλο σημείο εκτός και φέραμε κάθετη … ..*

………

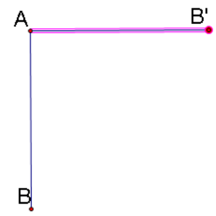
Μέσω της διαδικασίας το ορθογώνιο αποκτά σταδιακά το **χαρακτήρα συμβόλου**, αφού η **εικονική αναπαράσταση** μεταφράζεται με αυστηρές **λεκτικές διατυπώσεις**.

<u>Μέσω του εργαλείου περιστροφής + πειραματικού συρσίματος</u>

Στο διάστημα [157-170] η Μ9 έχει αναπτύξει την διαδικαστική ικανότητα χρήσης του εργαλείου περιστροφής, δηλαδή έχει αναπτύξει τη **σειριακή, λεκτική και θεσιακή κατανόηση** του εργαλείου περιστροφής. Επομένως, έχει αναπτύξει την ικανότητα να αποκωδικοποιεί **εικονικά και λεκτικά** μέσω της χρήσης του εργαλείου περιστροφής τα συμμετρικά αντικείμενα από περιστροφή.

………

157.*M9*:*Το Α και το Β΄ δεν επιλέγουμε;*
158.*M10* : *το Β δεν επιλέγουμε …*
159.*M9* : *Επιλέγουμε το ΑΒ.*
160.*M10* : *Μα και σ' αυτή θέλουμε να φέρουμε κάθετη.*
161.*M9*: *Να φέρουμε μια κάθετη εδώ (δείχνει το σημείο Β΄)*
162.*Ερ* :*Πως θα την κάνουμε την κάθετη;*
163.*M9*: *Με τον τρόπο που είπαμε ..*
164.*Ερ* :*Με την στροφή ;*
165.*Ερ*: *Άρα, ποιο θα είναι το κέντρο για σας;*
166.*M9* :*το Β΄ !*
167.*M9* : *Να επιλέξεις το Β και το transform.*
168.*Ερ*: *Ποιο τμήμα θα στρέψεις ;*
169.*M10*: *Το ΑΒ' …*
170.*M9* : *Και να φέρουμε μια παράλληλη προς αυτή εδώ.*



Σχήμα 4.92. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [157-170]

……

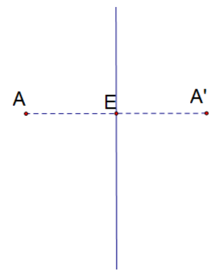
Χρησιμοποιεί συνδυασμό ενεργειών και εργαλείων (π.χ περιστροφή και καθετότητα) προκειμένου να αποτυπώσει στην οθόνη τη νοητική της εικόνα για το τετράγωνο. Συμπεραίνεται ότι μέσω της χρήσης των εργαλείων η μαθήτρια αποκτά μια αυξανόμενη ικανότητα αποκωδικοποίησης μεταξύ αναπαραστάσεων της ίδιας οντότητας (π.χ λεκτικής σε εικονική).

Ανάπτυξη ικανότητας δομικής ανάλυσης – διπλή (/πολλαπλή) ερμηνεία γεωμετρικών αντικειμένων

Μέσω του εργαλείου ανάκλασης + θεωρητικού συρσίματος

……

294.*M14*:*Αν αυτό είναι άξονας συμμετρίας τότε αυτό το σημείο έχει μια απόσταση από τον άξονα συμμετρίας.*
295.*M9*: *Αυτά τα σημεία είναι ίσα μεταξύ τους κα όταν μεγαλώσει το ένα…*
296.*Ερ*: *Από πού είναι ίσα;*
297.*M14*: *Από… (δείχνει την κάθετη γραμμή).*
298.*M9*: *Από τον άξονα συμμετρίας!*
299.*Ερ*: *Πόσο είναι η γωνία Ε ;*
300.*M14*: *90°*
301.*Ερ*: *Το Α μετακινείται προς τον άξονα το Α΄ προς τα που θα μετακινηθεί;*
302.*M9*: *Το ΑΕ=Α'Ε*
303.*Ερ*: *Γιατί ; Αν το ΑΕ πλησιάζει προς τον άξονα. …*
304.*M14*: *Τότε και το Α΄Ε πλησιάζει προς τον άξονα, γιατί είναι συμμετρικά .*
305.*M9*: *Όσο μικραίνει η απόσταση του Α΄ προς το ε τόσο μικραίνει και η απόσταση του Α*



Σχήμα 4.93. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [294-305]

……….

Η μαθήτρια αποκτά μια αυξανόμενη ικανότητα να αναγνωρίζει τα στοιχεία του διαγράμματος, και τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων, καθώς και να διατυπώνει σε τυπική μαθηματική γλώσσα. Σε αλληλεπίδραση με το εργαλείο ανάκλασης και το θεωρητικό σύρσιμο μεταφράζει αρχικά με συμβολικό τρόπο την ισότητα των αποστάσεων των σημείων Α, Α΄ του διαγράμματος. Στο [305] περιγράφει τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του σχήματος. Επομένως, **μετατρέπει μια εικονική αναπαράσταση σε λεκτική,** διατυπώνοντας ένα **θεώρημα-εν-δράσει.** Διαπιστώνεται μια *αυξανομένη ικανότητα* της Μ9 «να αναγνωρίζει και να περιγράφει τα στοιχεία των σχημάτων, χρησιμοποιώντας γεωμετρικές έννοιες και όρους που παραμένουν ανεπαρκείς για να διευκρινίσουν τα σχήματα» (Battista, 2007, p. 851) (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.2).

<u>Μέσω του εργαλείου καθέτου+ θεωρητικού συρσίματος</u>

……….

437. Μ9:(δείχνοντας τα τμήματα της διαγωνίου) Είναι ίσα… Έστω ότι αυτό το σημείο είναι Ν, γιατί ΑΝ=ΝΓ.
438. Ερ: Γιατί είναι ίσα;
439. Μ14, Μ10: Διχοτομούνται.
440. Ερ: Το συμμετρικό της κορυφής Β ως προς το Ν ποιο είναι ;
441. Μ14: το Δ.
442. Ερ: Το συμμετρικό της Β ως προς τον άξονα;
443. Μ10: Το Α … γιατί ΟΒ=ΟΑ.
444. Ερ: Του Γ ως προς άξονα συμμετρίας ;
445. Μ9: Το Δ, γιατί το ΡΓ=ΡΔ.

……….

Η Μ9 αντιλαμβάνεται τις σχέσεις των στοιχείων του σχήματος, αναπτύσσοντας αιτιολόγηση. Επομένως, «αναγνωρίζει και περιγράφει τα στοιχεία των σχημάτων, χρησιμοποιώντας γεωμετρικές έννοιες και όρους» (Battista, 2007, p. 851) (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.2). Η μαθήτρια συμπεραίνει την ισότητα από το διάγραμμα, αλλά δεν εφαρμόζει κάποιο θεώρημα για να την αποδείξει.

Ανάπτυξη ικανότητας διατυπώσεων εννοιών-εν-δράσει, συσχέτισης εννοιών

<u>Μέσω του εργαλείου παραλλήλου+ θεωρητικού συρσίματος</u>

……….

20. Μ10: Δεν μπορούμε να φέρουμε μια κάθετη;
21. Ερ: Τι σχήμα είναι αυτό;
22. Μ10: Παραλληλόγραμμο
23. Ερ: Το παραλληλόγραμμο πρέπει να έχει ορθή γωνία;
24. Μ9: Όχι … το παραλληλόγραμμο έχει τι δύο απέναντι πλευρές παράλληλες.

……

Διατυπώνει **έναν ανεπαρκή ορισμό** στο [24]. Η μαθήτρια αντιλαμβάνεται από το διάγραμμα και διατυπώνει ανεπαρκώς κριτήριο–ιδιότητα για να είναι το σχήμα παραλληλόγραμμο (την παραλληλία). Ομοίως, στην έκφραση της στο [42] («δεν είναι ίσες οι παράλληλες που πήραμε») η μαθήτρια αντιλαμβάνεται από το διάγραμμα και διατυπώνει **μια πρωτεύουσα ιδιότητα του παραλληλογράμμου**. Η Μ9 χρησιμοποιεί **άτυπη γλώσσα** για να επικοινωνήσει με τα άλλα μέλη της ομάδας, προκειμένου να κατασκευάσουν το σχήμα. Για παράδειγμα, χρησιμοποιεί τον αυτοσχέδιο όρο «τελίτσα» αντί του όρου σημείου, λόγω της ιδιότητας του δυναμικού σημείου που είναι ενεργοποιημένο στην οθόνη. Το «φωτισμένο» --ενεργοποιημένο—αντικείμενο ή *φωτεινή κηλίδα,* σύμφωνα με τον Hegedus (2005) έχει την ιδιότητα να μετακινείται μέσω συρσίματος και επομένως να μεταβάλλει τις ιδιότητες του σχήματος. Η Μ9 κατανοεί ότι η θέση του σημείου συσχετίζεται με την ισότητα των πλευρών του σχήματος, διατυπώνοντας την **έννοια-εν- δράσει**. Έχει κατασκευάσει ένα ΣΕΔ **του δυναμικού σημείου** που την βοηθά να αναπτύξει ένα **αντιληπτικό σχήμα** για το παραλληλόγραμμο σε αλληλεπίδραση με το διάγραμμα. Η μαθήτρια δε διατυπώνει την ιδιότητα, προκειμένου να κατασκευάσει το σημείο αλλά αυτή προκύπτει ως αποτέλεσμα του θεωρητικού συρσίματος. Συνεπώς, μέσω του συρσίματος **προσδίδει στο** διάγραμμα μια ιδιότητα (την ισότητα των απέναντι πλευρών) την οποία και εκφράζει αφού σύρει το σημείο με στόχο να αποκτήσει αυτή τη συγκεκριμένη ιδιότητα. Επομένως, είναι μια ιδιότητα που η μαθήτρια **επανεφευρίσκει** κατά τη διάρκεια της διαδικασίας. Ομοίως στο [120-121] κατασκευάζει έναν **ανεπαρκή ορισμό του ορθογωνίου**, ο οποίος σε συνεργασία με την ομάδα μετατρέπεται σε **οικονομικό ορισμό**. Επομένως, αποκτά σταδιακά την ικανότητα να **αναδιατυπώνει ορισμούς**.

<u>Μέσω του εργαλείου περιστροφής + πειραματικού συρσίματος</u>

Στο διάστημα [157] (σχήμα 5.92 παραπάνω) της ερευνητικής διαδικασίας υπάρχουν ενδείξεις **εννοιολογικής αλλαγής** της Μ9. Έχει κατασκευάσει ΣΕΔ του εργαλείου περιστροφής το οποίο εκφράζει με την έννοια-εν-δράσει στο [161]. Επομένως, η Μ9 **συνδέει την έννοια** την καθετότητας («να φέρουμε μια κάθετη εδώ») με την έννοια της περιστροφής κατά 90^o, καθώς και την έννοια της καθετότητας και παραλληλίας.

<u>Μέσω του εργαλείου παραλλήλου+ θεωρητικού συρσίματος</u>

………

184.*M9 : Εγώ κατάλαβα με ποιον τρόπο άλλο μπορούμε!*
185.*M10: Θα πάρουμε τα σημεία D, C.*
186.*M10: Και την πλευρά και θα πάμε…*
187.*Ερ: Εδώ δεν έχει την κάθετη; (Δείχνω το σημείο D.)*
188.*M9: Θα φέρουμε μια κάθετη έτσι --κανεί το χέρι της κάθετα-- και μια παράλληλη έτσι -- κανεί το χέρι της οριζόντια-- … .(ή) και μια άλλη κάθετη έτσι.*

………

Η έκφραση της Μ9 στο [188] ενισχύει την άποψη ότι η μαθήτρια έχει αποκτήσει την **ικανότητα συσχέτισης της ιδιότητας της παραλληλίας με την ιδιότητα της καθετότητας**. Επομένως, η μαθήτρια θεωρεί τις δυο διαδικασίες κατασκευής ισοδύναμες.

<u>Μέσω του εργαλείου ανάκλασης</u>

………

295.*M9: Αυτά τα σημεία είναι ίσα μεταξύ τους κα όταν μεγαλώσει το ένα…*
296.*Ερ: Από πού είναι ίσα;*
297.*M14: Από… (δείχνει την κάθετη γραμμή).*
298.*M9: Από τον άξονα συμμετρίας!*
299.*Ερ: Πόσο είναι η γωνία Ε ;*
300.*M14: 90°*
301.*Ερ: Το Α μετακινείται προς τον άξονα το Α΄ προς τα που θα μετακινηθεί;*
302.*M9: Το ΑΕ=Α'Ε*
303.*Ερ: Γιατί ; Αν το ΑΕ πλησιάζει προς τον άξονα. …*
304.*M14: Τότε και το Α΄Ε πλησιάζει προς τον άξονα, γιατί είναι συμμετρικά .*
305.*M9: Όσο μικραίνει η απόσταση του Α΄ προς το ε τόσο μικραίνει και η απόσταση του Α προς το (ε).*

………

Οι Μ9, Μ14 απομακρύνουν ή πλησιάζουν με **πειραματικό σύρσιμο** το σημείο από τον άξονα συμμετρίας και παρατηρούν τα αποτελέσματα της διαμόρφωσης των αποστάσεων των ανακλώμενων σημείων από τον άξονα με οπτικό τρόπο, χωρίς να κάνουν υπολογισμό των μετρήσεων των αποστάσεων.

Μέσω της διαδικασίας **εργαλειακής γένεσης** που προέρχεται από την αλληλεπίδραση με το εργαλείο ανάκλασης η Μ9 **κατασκευάζει ένα όργανο**. Η μαθήτρια κατασκευάζει μια **έννοια-εν-δράσει** για το σημείο και το είδωλο του, προσδιορίζοντας τη σχέση μέσω της έννοιας της απόστασης (ίσα –μεγαλώσει) από τον άξονα. Στο [298, 305] αναγνωρίζει τον άξονα συμμετρίας του σχήματος, συσχετίζοντας τη διαδικασία ανάκλασης με τη διαδικασία κατασκευής συμμετρικών αντικειμένων.

Μέσω του εργαλείου ανάκλασης, ίχνους και πειραματικού συρσίματος

....

347. *Ερ: Μπορείτε να δώσετε έναν ορισμό για τον άξονα συμμετρίας;*
348. *Μ9: Άξονας συμμετρίας είναι η ευθεία που περνά από τις κάθετες πλευρές των ορθογωνίων*
349. *Μ14, Μ10: Από τα μέσα.*

....

Στο [348] η Μ9 διατυπώνει έναν **ανεπαρκή ορισμό** για την έννοια του άξονα συμμετρίας ή **οικονομικό ορισμό** σε συνεργασία με την ομάδα. Η έκφραση μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής: «άξονας συμμετρίας είναι η ευθεία που περνά από [τα μέσα] των καθέτων πλευρών του ορθογωνίου».

Μέσω του προσαρμ. εργαλείου+ πειραματικού συρσίματος

....

413. *Μ9: Ισαπέχουν από το Ο.*
414. *Μ14: Εννοείς, είναι στην ίδια κάθετη;*
415. *Ερ: Είναι στην ίδια κάθετη;*
416. *Μ9: Ισαπέχουν από το Ο αυτά τα δυο σημεία.*

....

Η Μ9 κατασκευάζει ένα τρίγωνο και στη συνέχεια το συμμετρικό του με χρήση του προσαρμ. εργαλείου. Η μαθήτρια έχει κατανοήσει τη **σειριακή και θεσιακή κατανόηση** της χρήσης του εργαλείου και διατυπώνει την **έννοια-εν-δράσει** στο [416] **συνδέοντας** την έννοια των συμμετρικών ως προς κέντρο σημείων σε κύκλο με την έννοια της απόστασης σημείων σε αλληλεπίδραση με την Μ9. Οι συνδέσεις εννοιών που το εργαλείο βοηθά την μαθήτρια να κάνει είναι χαρακτηριστικό επιπέδου van Hiele 3 (Mason, 1998; Gawlick, 2005). Η έκφρασή της μπορεί να θεωρηθεί και εμπειρικός ορισμός που μπορεί να αναδιατυπωθεί: [Τα συμμετρικά σημεία] ισαπέχουν από το [κέντρο περιστροφής που είναι] το σημείο Ο.

Ανάπτυξη ικανότητας αντιληπτικής ιεράρχησης

Μέσω του εργαλείου περιστροφής + πειραματικού συρσίματος

....

179. *Μ9: Είναι ρόμβος και τετράγωνο. Αφού ο ρόμβος, άμα τον γυρίσεις δε μοιάζει σαν τετράγωνο;*
180. *Ερ: Ένας ρόμβος μπορεί να είναι πάντα τετράγωνο;*
181. *Μ9: Όχι, δεν ξέρω.*

....

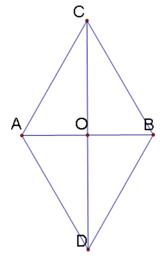
217.*Ερ: Πως θα αποδείξετε ότι είναι ρόμβος;*
218.*M14: Ο ρόμβος έχει τις πλευρές του… κάθετες.*
219.*M9 : Τα AC, BC;*

……

229.*Ερ: Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες;*
230.*M14 : Τι πειράζει να το αποδείξουμε λίγο-λίγο;*
231.*M9: Είναι, είναι!*

……

245.*Ερ: Είναι ρόμβος αυτό το σχήμα ;*
246.*M14: Να το αποδείξουμε ;*
247.*Ερ: Είναι ισόπλευρα;*
248.*M14: Όχι, αφού το πήραμε ισοσκελές.*
249.*Σύρουν την κορυφή του σχήματος και κάποια στιγμή*
250.*M9: Δεν είναι ρόμβος … .Αφού πριν τα AC, AB είναι ίσα εδώ δεν είναι.*
251.*M14: Είναι ρόμβος επειδή είναι το … από κάτω.*
252.*Ερ: Οι πλευρές είναι ίσες;*
253.*M14 : CA=CB, γιατί το τρίγωνο είναι ισοσκελές.*
254.*M9: Α, ναι! Και οι CA, AD είναι ίσες.*



Σχήμα 4.94. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [245-254]

……

Η M9 συμπεραίνει ιδιότητες του ρόμβου από το διάγραμμα, (π.χ στο [231] ότι οι απέναντι γωνίες του σχήματος είναι ίσες). Δεν έχει ικανότητα ιεράρχησης του ρόμβου που προκύπτει ως σύνθεση ισοσκελών ή ως σύνθεση ισοπλεύρων, αντιμετωπίζει επομένως γνωστική σύγκρουση στο [181, 250]. Οδηγείται δηλαδή σε **γνωστικό εμπόδιο** από την έννοια ρόμβος ως σύνθεση ίσων ισοπλεύρων. Η έκφραση της «Δεν είναι ρόμβος …. Αφού, πριν τα AC, AB είναι ίσα, εδώ δεν είναι» δηλώνει ότι η μαθήτρια βρίσκεται σε **κατάσταση ανισσοροπίας** και αντιμετωπίζει *γνωστικά εμπόδια*. Το σύρσιμο της κορυφής του τετραγώνου στο [249] ώστε να αλλάξει προσανατολισμό το σχήμα οδηγεί την M9 σε **γνωστική σύγκρουση**. Επομένως, η μαθήτρια αντιμετωπίζει **γνωστικό εμπόδιο** και έρχεται σε γνωστική σύγκρουση για **την ιεράρχηση των σχημάτων,** αφού η απάντηση της είναι βασισμένη στο διάγραμμα αλλά και σε νοητικό μετασχηματισμό.

……

200.*Ερ: Τι είναι επομένως ένα τετράγωνο;*
201.*M14: Έχει όλες τις πλευρές του κάθετες, τις γωνίες ορθές και παράλληλες.*
202.*M9: Και ίσες!*

……

Στο [200] οι Μ9, Μ14 διατυπώνουν σε συνεργασία ένα **μη οικονομικό** ορισμό του τετραγώνου «έχει όλες τις πλευρές του κάθετες, τις γωνίες ορθές και παράλληλες και ίσες». Οι μαθήτριες επομένως οικοδομούν το χαρακτήρα συμβόλου των σχημάτων και ιεραρχούν τα σχήματα ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης με το δυναμικό διάγραμμα.

....

454.Ερ: Ποιοι είναι οι άξονες συμμετρίας και ποια τα κέντρα συμμετρίας;
455.Το τετράγωνο έχει τοποθετηθεί με αλλαγή προσανατολισμού στην οθόνη
456.Μ9: Θα βρούμε το μέσο αυτού… και το μέσο αυτού.
457.Μ14: Και θα φέρουμε κάθετη σ' αυτά.

....

Στο [456] η Μ9 **συνδέει την κατασκευή** του άξονα συμμετρίας με την κατασκευή των μέσων των απέναντι πλευρών του τετραγώνου. Επομένως, η μαθήτρια [αν και δεν το διατυπώνει], εξειδικεύει τις ιδιότητες του ορθογωνίου για την κατασκευή αξόνων συμμετρίας στο τετράγωνο. Η μαθήτρια ταυτίζει την κατασκευή του άξονα με την παράλληλη από το μέσο της πλευράς του ορθογωνίου, που δεν αιτιολογεί. Ιεραρχεί επομένως το τετράγωνο ως ειδική μορφή ορθογωνίου.

Ανάπτυξη ικανότητας επαγωγικού, απαγωγικού συλλογισμού

....

132.*Μ9: Τώρα πρέπει να είναι ίσες.*
133.*Μ14: Δεν πρέπει να είναι κάθετες;*
134.*Μ9: Ναι, κάθετες και ίσες.*
135.*Μ10: Πρέπει να έχει σχέση με την ΑΒ .. όσο το ΑΒ.*

....

145.*Μ14: Και η άλλη ευθεία πρέπει να είναι ίση με την ΑΒ.*
146.*Μ9: Και οι τέσσερις πρέπει να είναι.*

....

Στο [132] η Μ9, διατυπώνει ιδιότητες του τετραγώνου, την ισότητα και καθετότητα των πλευρών. Επομένως, διατυπώνει σε συνεργασία με τα άλλα μέλη της ομάδας **έναν ορισμό του** τετραγώνου, δηλαδή συνδέει τις ενεργειές της με την προυπάρχουσα γνώση, επομένως ένα νοητικό κατασκεύασμα λόγω της εμπειρίας που απέκτησε από προηγούμενες κατασκευές. Ο ορισμός είναι **μη οικονομικός** και θα μπορούσε να αναδιατυπωθεί ως εξής: «τετράγωνο [είναι το τετράπλευρο που] έχει τις πλευρές του κάθετες [μεταξύ τους] και οι τέσσερις ίσες με το τμήμα ΑΒ». Οι μαθήτριες αναπτύσσουν τον ορισμό σε συνεργασία και αλληλοσυμπληρώνονται. Ο διάλογος αναπτύσσεται, καθώς οι μαθήτριες δεν έχουν κάποιο τμήμα στην οθόνη. Επομένως, στο σημείο αυτό αναπτύσσουν **μετασχηματιστικό συλλογισμό**.

Μέσω του εργαλείου περιστροφής + πειραματικού συρσίματος

....

179.*Μ9: Είναι ρόμβος και τετράγωνο. Αφού ο ρόμβος άμα τον γυρίσεις δεν μοιάζει σαν τετράγωνο;*

....

Η Μ9 αιτιολογεί με άτυπο τρόπο στο [179]: «Αφού, ο ρόμβος άμα τον γυρίσεις δεν μοιάζει σαν τετράγωνο». Ταυτόχρονα, η μαθήτρια γενικεύει την απάντηση της για κάθε ρόμβο και όχι ειδικά για το σχήμα του ρόμβου που εμφανίζεται στην οθόνη. Η δήλωση της επομένως είναι **επαγωγικού τύπου,** σύνθεση των απαντήσεων που η μαθήτρια διατυπώνει: Δηλαδή, «το σχήμα είναι ρόμβος και τετράγωνο [και ο ρόμβος δεν είναι πάντα τετράγωνο]. Ο ρόμβος, άμα τον γυρίσεις, μπορεί να γίνει τετράγωνο».

Μέσω του εργαλείου ανάκλασης

....

295.*Μ9: Αυτά τα σημεία είναι ίσα μεταξύ τους κα όταν μεγαλώσει το ένα…*
296.*Ερ: Από πού είναι ίσα;*
297.*Μ14: Από… (δείχνει την κάθετη γραμμή).*
298.*Μ9: Από τον άξονα συμμετρίας!*

....

Στο [295] η Μ9 χρησιμοποιεί **άτυπη γλώσσα** για να μεταφράσει την εικόνα σε λεκτική διατύπωση. Η μαθήτρια οπτικοποιεί τον μετασχηματισμό της απόστασης από τον άξονα και αιτιολογεί ανεπαρκώς («όταν μεγαλώσει το ένα») αφού δεν ολοκληρώνει την έκφρασή της. Η έκφραση της μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής: «αυτά τα σημεία είναι [σε] ίσες [αποστάσεις] μεταξύ τους» και «όταν μεγαλώσει η μια [απόσταση από τον άξονα τότε μεγαλώνει και η άλλη]». Επομένως, η μαθήτρια ότι αντιλαμβάνεται στην οθόνη το μεταφράζει διατυπώνοντας μια έκφραση **επαγωγικού τύπου**, (αφού μέσα από το ειδικό περιστατικό συμπεραίνει για όλα τα τυχαία περιστατικά στην οθόνη) την οποία περιγράφει με άτυπο και ανακριβή τρόπο.

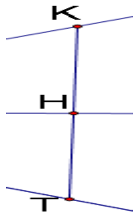
Στο [305] (δείτε παράγραφο 5.9.3) διατυπώνει ένα **θεώρημα-εν-δράσει**. Η έννοια-εν-δράσει στην έκφραση της Μ9 είναι αποτέλεσμα του πειραματικού συρσίματος στο αντικείμενο. Με την διατύπωσή της δηλώνει **μια γενίκευση,** αφού μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής: «αν υποθέσουμε ότι ονομάζουμε $Α_1$, $Α_2$, ..όλα τα σημεία στην μετατόπιση του Α προς την ε και $Α'_1$, $Α'_2$…τα είδωλα τους και Ο το σημείο τομής της ΑΑ΄ με την ε τότε ισχύει ότι : αν $Α_1Ο>Α_2Ο$ τότε και $Α'_1Ο>Α'_2Ο$ κ.λπ. για κάθε σημείο Α επί της ευθείας ΑΑ΄». Η μαθήτρια έχει κατασκευάσει ΣΕΔ του εργαλείου συρσίματος–ανάκλασης και διατυπώνει σε μαθηματική γλώσσα. Επομένως, η **ικανότητα διάταξης των αποστάσεων**, είναι αποτέλεσμα της οπτικοποίησης, της οπτικής αντίληψης που η μαθήτρια αναπτύσσει σε αλληλεπίδραση με τα εργαλεία (σύνθετος μετασχηματισμός ανάκλασης και συρσίματος) αλλά και τους νοητικούς μετασχηματισμούς της Μ9.

Μέσω του εργαλείου ανάκλασης, ίχνους και πειραματικού συρσίματος

....

315. Μ14, Μ10: Όχι, πάρε το ποντίκι και γράψε ένα γράμμα Μ.
316. Μ14: Κι άλλο, συνέχισε!
317. Μ9: Α! Κατάλαβα, είναι ανάποδα!

....



324. Μ14 : Η κάθετη από κει (ΗΚ) είναι ίση με την κάθετη (ΚΤ).
325. Μ9: Αυτό το σημείο εδώ μέχρι εκεί είναι ίση με την απόσταση από το σημείο αυτό.
326. Μ14: ΗΤ=ΗΚ+ΚΤ δηλαδή, είναι η διπλάσια.

Σχήμα 4.95. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [324-326]

....

327. Ερ: Τι σχέση έχουν τα FG, F΄G΄;
328. Μ14: Είναι παράλληλες.
329. Μ9: Είναι συμμετρικά !

....

Στο [317] εκφράζει μια άτυπη διατύπωση λόγω της επίδρασης του εργαλείου ίχνους και συρσίματος. Στη συνέχεια, στο [325] διατυπώνει μια **εμπειρική αιτιολόγηση, στην οποία γενικεύει** τη σχέση μεταξύ των σημείων του διαγράμματος. Η μαθήτρια δεν προσδιορίζει κάποιο σημείο, αφού η διατύπωση προκύπτει ενώ το σημείο σύρεται στην επιφάνεια. Ταυτόχρονα συσχετίζει αυτή την ιδιότητα με την έννοια της συμμετρίας.

....

419. Ερ: Υπάρχει κέντρο συμμετρίας;
420. Μ9: Ναι, θα πάρουμε τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ… . όχι μπερδεύτηκα των ΑΔ και ΒΓ …
θα φέρουμε παράλληλη.

....

437. Μ9:(δείχνοντας τα τμήματα της διαγωνίου) Είναι ίσα… Έστω ότι αυτό το σημείο είναι Ν, γιατί ΑΝ=ΝΓ.
438. Ερ: Γιατί είναι ίσα;
439. Μ14, Μ10: Διχοτομούνται.
440. Ερ: Το συμμετρικό της κορυφής Β ως προς το Ν ποιο είναι ;
441. Μ14: το Δ.
442. Ερ: Το συμμετρικό της Β ως προς τον άξονα;
443. Μ10: Το Α … γιατί ΟΒ=ΟΑ.
444. Ερ: Του Γ ως προς άξονα συμμετρίας ;
445. Μ9: Το Δ, γιατί το ΡΓ=ΡΔ.

……

Στο [437] η Μ9 οδηγείται σε μια **επαγωγικού τύπου δήλωση** για κάθε ορθογώνιο σχήμα. Η μαθήτρια δείχνει το σχήμα στην οθόνη (τις κατακόρυφες πλευρές του σχήματος). Η διατύπωση της είναι συνδυασμός άτυπης και τυπικής δήλωσης. Αιτιολογεί με χρήση στοιχείων του διαγράμματος σε ένα παράδειγμα -ειδική περίπτωση σχήματος ορθογωνίου. Ως αιτιολόγηση μπορεί να χαρακτηριστεί **εμπειρική αιτιολόγηση** (στην περίπτωση του **κρίσιμου πειράματος)**.

4.2.10. Μ10-ΟΜΑΔΑ Α

Ανάπτυξη ικανότητας μετατροπής μεταξύ αναπαραστάσεων μέσω γνωστικών συγκρούσεων

Μέσω του εργαλείου σημείου + πειραματικού συρσίματος

……

1. Μ10: Κάνε ένα σημείο
2. Μ9: Και με το construct.
3. Μ10: Και ένα ευθύγραμμο τμήμα
4. Μ9: Πάω στο construct … Πάλι δεν είναι φωτεινό!
5. Η Μ10 παίρνει το ποντίκι
6. Μ10: Να φέρω παράλληλη.
7. Ερ: Σε ποια ευθεία;
8. Μ10: Σ' αυτήν εδώ.
9. Ερ: Άρα, δεν πρέπει να την επιλέξεις;

……

46. Μ10: … Προς την Α!
47. Μ14: Όχι, δεν είναι Α αυτή.
48. Μ10: Προς την παράλληλη που είναι η Α τέλος πάντων.

……

Η Μ10, Μ9 αντιμετωπίζουν εμπόδια λόγω της **μη σειριακής** και **θεσιακής κατανόησης** επιλογής των αντικειμένων για την κατασκευή των καθέτων. Ένα επιπλέον εμπόδιο είναι ο διαφορετικός τρόπος μετάφρασης της πληροφορίας του εικονικού σχήματος σε λεκτική διατύπωση. Δηλαδή, η μαθήτρια **λόγω του επιπέδου van Hiele της** (π.χ στο 46-48) δεν κατανοεί τον τρόπο που θα ενεργήσει --δηλαδή, ποια αντικείμενα θα επιλέξει-- και επομένως τον τρόπο με τον οποίο θα κατασκευάσει το διάγραμμα. Αυτό είναι ένα σημείο στο οποίο επιβεβαιώνεται η θεωρία των van Hiele **για το ρόλο που παίζουν τα γλωσσικά σύμβολα** στην κατανόηση που αναπτύσσεται μεταξύ υποκειμένων που επεξεργάζονται την ίδια δραστηριότητα.

<u>Μέσω του εργαλείου καθέτου</u>

………

76. Ερ: Που θέλεις να κάνεις την κάθετη;
77. M10 : Θέλουμε πάνω στην A να είναι η κάθετη.

………

195.*M10: Δηλαδή, τώρα θα πάρω τη πλευρά (εννοεί DC) και το C΄.*
196.*M10 : Θα πάρω το C΄ και την πλευρά.*

………

Στο [77] διατυπώνει σε μαθηματική γλώσσα την επιλογή των αντικειμένων με στόχο την κατασκευή καθέτου («*θέλουμε πάνω στην A να είναι η κάθετη»).*

Στο [195-196] έχει κατασκευάσει σχήμα χρήσης του εργαλείου καθέτου ως επέκταση του σχήματος χρήσης του εργαλείου παράλληλης ευθείας, και εκφράζει τη **σειριακή και θεσιακή κατανόηση** της επιλογής των εργαλείων. Επομένως, έχει αποκτήσει την ικανότητα να αποκωδικοποιήσει τη νοητική της εικόνα με χρήση των εργαλείων σε εικονική και λεκτική.

Αυτό που διαπιστώνεται είναι ότι μέσω της διαδικασίας **αποκτά μια αυξανομένη ικανότητα μετατροπής της εικονικής αναπαράστασης σε λεκτική και αντίστροφα.**

<u>Μέσω του παραμετρικού εργαλείου+ πειραματικού συρσίματος</u>

………

273.*H M14 σύρει το τμήμα.*
274.*M10 : Μην το κουνάς αυτό, άστο εκεί (το παραμετρικό τμήμα έχει θέση παράλληλη προς το αρχικό τμήμα)*

………

283.*M14: Να κάνουμε με αυτό το τμήμα κύκλο!*
284.*M10: Άρα, με κέντρο το B και με την τόση ακτίνα κατασκευάζουμε το δεύτερο κύκλο.*
285.*H M10 επιλέγει το σημείο και το τμήμα και στη συνέχεια την εντολή.*

………

289.*Ερ : Γιατί τώρα εξαφανίζεται το τρίγωνο;*
290.*Μ10: Επειδή η ακτίνα είναι μικρότερη από το μισό.*

……

Η κατασκευή του παραμετρικού τμήματος δεν προκαλεί την **ΑΟΑ** της Μ10**,** αφού δε συνδέει τη διαδικασία κατασκευής κύκλου με σχετική πρόταση της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Αυτό μετασχηματίζεται στη συνέχεια, όπως συμπεραίνεται από την τυπική μαθηματική δήλωση της Μ10 στο [284, 290]. Η αλληλεπίδραση με το εργαλείο είχε ως αποτέλεσμα την κατανόηση της χρήσης του και τη σύνδεση με την έννοια του ισοσκελούς. Επομένως, η μαθήτρια αναπτύσσει την **λειτουργική, λεκτική και σειριακή κατανόηση** της επιλογής του παραμετρικού εργαλείου και του εργαλείου κύκλου και συνεπώς **την ικανότητα να αποκωδικοποιήσει τη χρήση του εργαλείου** με γλωσσικό συμβολισμό, σε τυπική μαθηματική γλώσσα.

Οι μαθήτριες λόγω του συρσίματος του άκρου του παραμετρικού τμήματος οδηγούνται σε **επαγωγικού τύπου επιχειρήματα** (π.χ, η Μ10 **«**άρα με κέντρο το Β και με την τόση ακτίνα κατασκευάζουμε τον δεύτερο κύκλο»). Η εικασία της Μ10 στο [290] αναπτύσσεται, ενώ οι μαθήτριες σύρουν το παραμετρικό τμήμα. Αν συνθέσουμε τις απαντήσεις της διαμορφώνεται ένα **θεώρημα-εν-δράσει**: «[αν η κατασκευή του ενός κύκλου γίνεται με κέντρο το Α και ακτίνα το τμήμα] η κατασκευή του δεύτερου κύκλου γίνεται με κέντρο το Β και την ίδια ακτίνα [τόση, όση είναι αυτό το τμήμα] και εξαφανίζεται επειδή η ακτίνα είναι μικρότερη από το μισό».

Ανάπτυξη ικανότητας δομικής ανάλυσης

<u>Μέσω του εργαλείου ανάκλασης + θεωρητικού συρσίματος</u>

……

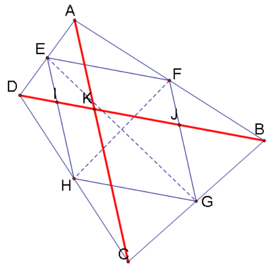
213.*Ερ: Άμα κάνουμε και τα δύο σημεία τι σχήμα θα προκύψει;*
214.*Μ9, Μ14: Ρόμβος*
215.*Μ10 : Δηλαδή, ο ρόμβος είναι δυο ισόπλευρα τρίγωνα.*

……

Στο [215] διατυπώνει έναν **ανακριβή ορισμό** του ρόμβου σε αλληλεπίδραση με το διάγραμμα. Η έκφραση της μπορεί να αναδιατυπωθεί: «ένα σχήμα είναι ρόμβος όταν αποτελείται από δυο ισόπλευρα τρίγωνα». Η Μ10 έχει κατασκευάσει τη **λειτουργική κατανόηση** του σχήματος του ρόμβου για την ειδική περίπτωση του ισοπλεύρου. Επομένως, η μαθήτρια αρχίζει να αποκτά την ικανότητα να περιγράφει μέρη των σχημάτων, καθώς και τις σχέσεις τους. Αντιμετωπίζει **γνωστικό εμπόδιο** και έρχεται σε **γνωστική σύγκρουση**, όταν η κατασκευή του ρόμβου προκύπτει ως ανάκλαση του ισοσκελούς τριγώνου. Επομένως, **δεν έχει ιεραρχήσει τα δυο είδη** τριγώνων και ως αποτέλεσμα αυτής της ιεράρχησης δεν έχει ικανότητα να κατανοήσει τη σχέση εγκλεισμού μεταξύ «ρόμβου ως σύνθεση ισοσκελών» και «ρόμβου ως σύνθεση ισοπλεύρων».

....

609. Ερ: Για να είναι και ρόμβος τι πρέπει να συμβαίνει;
610. Μ14, Μ10: Οι διαγώνιες του να τέμνονται κάθετα.
611. Μ14 : Και οι δυο διαδοχικές πλευρές είναι ίσες.
612. Ερ: Γιατί;
613. Μ10 : Δηλαδή, να δείξουμε ότι ΕΗ=ΕF;
614. Μ10 : Είναι, γιατί είναι μέσα.
615. Μ14 : Το ΕΗ είναι παράλληλο και ίσο με AC/2 (συμπληρώνει και η Μ10).
616. Ερ: Και το ΕF με ποιο είναι ίσο;
617. Μ10 : Με το ΕΗ επειδή είναι και αυτό // στην AC
618. Μ14 : Το EF = DB/2
619. Μ10: Τα μισά άρα είναι μεταξύ τους ίσα.
620. Ερ: Άρα, ποια είναι η συνθήκη για να είναι το σχήμα ρόμβος ;
621. Μ10 : Οι διαγώνιες να είναι ίσες.



Σχήμα 4.96. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [609-621]

....

Στο διάστημα [609-21] της τρίτης φάσης η μαθήτρια έχει αποκτήσει την ικανότητα να αναλύει δομικά ένα σχήμα και να περιγράφει τις ιδιότητες των στοιχείων του σχήματος με τυπικό τρόπο. Επομένως, «έχει μετακινηθεί από τον οπτικό συλλογισμό, επειδή το σημαντικότερο κριτήριο για τον προσδιορισμό του σχήματος είναι να ικανοποιεί, ένα ακριβές σύνολο τυπικών ιδιοτήτων», χαρακτηριστικό επιπέδου 2.3 σύμφωνα με τον Battista (2007, p. 851).

Ανάπτυξη ικανότητας διατυπώσεων εννοιών-εν-δράσει

Μέσω του εργαλείου σημείου + πειραματικού συρσίματος

....

25. Μ10: Το σημείο αυτό που πήρε η Μ9 … .αυτό εδώ (δείχνοντας) … θα μπορούσε να είναι οπουδήποτε.
26. Μ10: Άμα φέρουμε τις δυο παράλληλες;
27. Μ10: Δηλαδή, στις δυο παράλληλες να υπάρχουν και δυο παράλληλες.

....

Η έκφραση της Μ10 στο [25] περιλαμβάνει μια **γενίκευση** που προκύπτει από την αλληλεπίδραση με το εργαλείο του συρσίματος του σημείου («θα μπορούσε να είναι οπουδήποτε»). Η μαθήτρια λόγω του συρσίματος του σημείου στην οθόνη και σε απάντηση στην **εργαλειακή γένεση** έχει κατασκευάσει ένα ΣΕΔ του εργαλείου σημείου με αποτέλεσμα να αναπτύξει **επαγωγικό συλλογισμό** και να διατυπώσει την **έννοια-εν-δράσει**.

Μέσω του εργαλείου κατασκ. παραλλήλων

Στο [27] διατυπώνει έναν **αντιληπτικό ανακριβή ορισμό** του παραλληλογράμμου («στις δυο παράλληλες να υπάρχουν και δυο παράλληλες»), όπου εκφράζει με άτυπο τρόπο τις ιδιότητες της παραλληλίας των πλευρών του σχήματος. Στο [65] αναδιατυπώνει τον αντιληπτικό ορισμό του παραλληλογράμμου που είχε διατυπώσει στο [27] με έναν **εμπειρικό ορισμό** για το παραλληλόγραμμο, ο οποίος εξαρτάται από τα ειδικά στοιχεία του διαγράμματος. Επομένως, αναδιαμορφώνει τον ορισμό που είχε διατυπώσει στο [27] ως αποτέλεσμα της κατανόησης της κατασκευαστικής διαδικασίας.

………

63. Ερ: Τώρα θα μπορούσαμε να πούμε έναν ορισμό για το παραλληλόγραμμο;
64. Μ10: Τι είναι παραλληλόγραμμο δηλαδή;
65. Μ10: Παραλληλόγραμμο είναι το τετράπλευρο, το οποίο πρέπει να έχει τις AB, CD παράλληλες μεταξύ τους και AD//BC.

………

118.*Ερ: Μήπως μπορούμε δώσουμε τώρα έναν ορισμό για το ορθογώνιο;*
119.*Μ10 : Ορθογώνιο είναι το τετράπλευρο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές.*
120.*Μ9: Δυο πλευρές του ίσες.*

………

Ορίζει το ορθογώνιο στο [119] (ορθογώνιο είναι το τετράπλευρο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές) με έναν **εμπειρικό, μη οικονομικό ορισμό** που προκύπτει από τον τρόπο κατασκευής του σχήματος, διατυπωμένο σε **μαθηματική γλώσσα**. Ο ορισμός αποτελεί **μια επαγωγικού τύπου** δήλωση του σχήματος που οι μαθήτριες έχουν κατασκευάσει στην οθόνη. Επομένως, μέσω της διαδικασίας οδηγείται **να γενικεύσει** από το τυχαίο διάγραμμα στην οθόνη για όλα τα σχήματα των ορθογωνίων.

Μέσω του εργαλείου ανάκλασης και συρσίματος

………

320.Ερ: Γιατί γίνεται έτσι ;
321.Μ9: Επειδή είναι το συμμετρικό του.
322.Μ10: Απέχει ίσο από το … (δείχνει τον άξονα)

………

Στο [322] αναγνωρίζει την ισότητα των σημείων αρχικού-ανακλώμενου από τον άξονα, σε αλληλεπίδραση με το εργαλείο ανάκλασης-συρσίματος και ίχνους σημείου.

Η έκφραση της «απέχουν ίσο από τον [άξονα συμμετρίας]» είναι ένδειξη ότι η μαθήτρια **γενικεύει** ως προς το χαρακτηριστικό της ισότητας για κάθε σημείο που σύρεται στην οθόνη. Επομένως, αναπτύσσει **επαγωγικό συλλογισμό**.

Μέσω του προσαρμ. εργαλείου

………

417.M14: Αυτό εδώ είναι το άλλο μισό αυτού, άρα έχουμε ημικύκλιο.
418.M10: Και αυτό εδώ δεν είναι το μισό του άλλου.

………

Στο [418] κατασκευάζει το συμμετρικό τριγώνου με το προσαρμ. εργαλείο. Η χρήση του προσαρμ. εργαλείου βοηθά τη μαθήτρια μέσω της **εργαλειακής γένεσης** που αναπτύσσεται να κατασκευάσει ένα ΣΕΔ του εργαλείου, αφού διατυπώνει την **έννοια-εν-δράσει** με άτυπη γλώσσα «και αυτό εδώ είναι το μισό του άλλου».

Μέσω των ΣΟΕΑ γ φάσης (σχολιασμού + θεωρητικού συρσίματος)

………

577.Ερ: Γιατί το εσωτερικό σχήμα είναι ρόμβος;
578.M14 : Γιατί οι διαδοχικές πλευρές είναι ίσες.
579.M10: Γιατί διχοτομούνται, έγινε χ τώρα!
580.Ερ: Γιατί;
581.M10: Γιατί οι διαγώνιες είναι κάθετες (χωρίς να έχουν φέρει τις διαγώνιες).

………

Στο [579-581] διατυπώνει σε συνδυασμό τυπικής και άτυπης γλώσσας έναν **αυθαίρετο οικονομικό ορισμό** του ρόμβου «[το τετράπλευρο είναι ρόμβος] γιατί οι διαγώνιες του διχοτομούνται και είναι κάθετες».

Ανάπτυξη ικανότητας συσχέτισης εννοιών

………

240.*Ερ : Γιατί οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα;*
241.*M10: Γιατί είναι μεσοκάθετος;*

………

252.*Ερ: Οι πλευρές είναι ίσες;*
253.*M14 : CA=CB, γιατί το τρίγωνο είναι ισοσκελές.*
254.*M9: A, ναι! Και οι CA, AD είναι ίσες.*
255.*M14, M10: Ναι, γιατί είναι συμμετρικά.*

………

Συσχετίζει την ιδιότητα των διαγωνίων του ρόμβου με την έννοια της μεσοκαθέτου. Στο [255] συνδέει την κατασκευή του σχήματος του ρόμβου με την έννοια της συμμετρίας και την έννοια της ισότητας των δυο υποσχημάτων που συνθέτουν το σχήμα του ρόμβου. Τα χαρακτηριστικά αυτά είναι επιπέδου 2.1 σύμφωνα με τον Battista (2007).

Οι μαθήτριες κατανοούν την κατασκευή των αξόνων συμμετρίας του προκατασκευασμένου ορθογωνίου παραλληλογράμμου στην οθόνη, ως αποτέλεσμα της σύνδεσης των μέσων των απέναντι πλευρών. Κατασκευάζουν συνδέσεις μεταξύ των εννοιών: (α) η μεσοπαράλληλη είναι και άξονας συμμετρίας και (β) το σημείο τομής των αξόνων είναι και σημείο τομής των διαγωνίων του ορθογωνίου, αλλά είναι και κέντρο συμμετρίας (π.χ στο [422-424].

……

422. Μ14, Μ10: Άξονας συμμετρίας.
423. Ερ: Άλλος άξονας συμμετρίας υπάρχει ;
424. Μ14, Μ10: (ταυτόχρονα) Των ΑΒ και ΔΓ.

……

430. Ερ: Μήπως είναι και το σημείο τομής κάποιων άλλων ευθειών ;
431. Μ10: Των ΑΓ, ΒΔ (δείχνει τα τμήματα που ονομάζει, ενώ δεν είναι κατασκευασμένα)

……

Η Μ10 αναγνωρίζει ότι το σημείο τομής των αξόνων είναι και σημείο τομής των διαγωνίων. Επομένως η Μ10 έχει συνδέσει την ιδιότητα της καθετότητας των διαγωνίων του ρόμβου -- έννοια που έχει κατασκευάσει σ**την α φάση--** με την έννοια των αξόνων συμμετρίας.

Μέσω του εργαλείου κατασκευής καθέτων

Η διαδικασία κατασκευής του τετραγώνου συνδέεται από την Μ10 μέσα από λεκτικές ή διαδικαστικές της ενέργειες, με τη διαδικασία κατασκευής του ορθογωνίου. Η μαθήτρια αναπτύσσει την **αντιληπτική ιεράρχηση του σχήματος** του τετραγώνου ως ορθογωνίου. Επαναλαμβάνει κατασκευαστικές ενέργειες με οπτικό τρόπο. Για παράδειγμα έχει ως αφετηρία της κατασκευής του σχήματος του τετραγώνου την κατασκευή ενός ευθυγράμμου τμήματος σε κατακόρυφη θέση όπως ενήργησε στο ορθογώνιο. Στο [135] έχει κατανοήσει την έννοια της ισότητας των πλευρών του τετραγώνου την οποία δεν διατυπώνει αρχικά («να έχει σχέση με την ΑΒ»).

……

132.Μ9: *Τώρα πρέπει να είναι ίσες.*
133.Μ14: *Δεν πρέπει να είναι κάθετες;*
134.Μ9: *Ναι, κάθετες και ίσες.*
135.Μ10: *Πρέπει να έχει σχέση με την ΑΒ .. όσο το ΑΒ.*

……

153.Μ10: *Δεν θα φέρουμε τις κάθετες στα Β, Β΄;*

Μέσω του εργαλείου περιστροφής και θεωρητικού συρσίματος

……

176.M14, M9 : *Και τα δυο είναι και ρόμβος και τετράγωνο.*
177.*M10: Το τετράγωνο δεν είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο;*

……

Στο [177] η περιστροφή του τετραγώνου και το σύρσιμο μιας κορυφής προκαλεί **γνωστική σύγκρουση** στην Μ10 με αποτέλεσμα να διατυπώσει την **αντιληπτική ιεράρχηση** των δυο σχημάτων.

Μέσω των ΣΟΕΑ γ φάσης

……

*609.*Ερ: *Για να είναι και ρόμβος τι πρέπει να συμβαίνει;*
610.M14, M10: Οι διαγώνιες του να τέμνονται κάθετα.
611.M14 : Και οι δυο διαδοχικές πλευρές είναι ίσες.

……

620.Ερ: Άρα ποια είναι η συνθήκη για να είναι το σχήμα ρόμβος ;
621.M10 : Οι διαγώνιες να είναι ίσες.

……

Οι Μ14, Μ10 αναγνωρίζουν το σχήμα του ρόμβου στο [610-611] από κάποιες ιδιότητες του σχήματος. Επομένως, καθοδηγούμενες από το θεωρητικό σύρσιμο των κορυφών του σχήματος διατυπώνουν **επαγωγικού τύπου δηλώσεις** σχετικά με τις ιδιότητες του σχήματος του ρόμβου. Η σύνθεση των εκφράσεων στα [610, 611] είναι ένας **οικονομικός ορισμός του ρόμβου** διατυπωμένος σε συνεργασία. Η έκφραση της στο [621] είναι ένα αυθαίρετος οικονομικός ορισμός σε σχέση με το εξωτερικό τετράπλευρο, χαρακτηριστικό επιπέδου 2.2 σύμφωνα με τον Battista (2007).

Οι καθοδηγητικές ερωτήσεις της ερευνήτριας και το διάγραμμα προκαλούν δηλώσεις των μαθητριών οι οποίες οδηγούν στην **επανεφεύρεση ιδιοτήτων του σχήματος**.

Ανάπτυξη επαγωγικού και απαγωγικού συλλογισμού

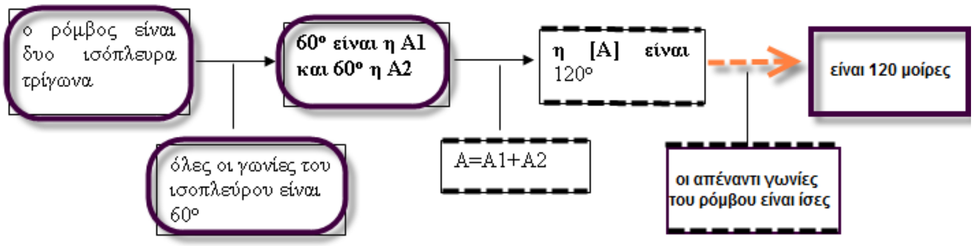
Μέσω του εργαλείου ανάκλασης και συρσίματος

……

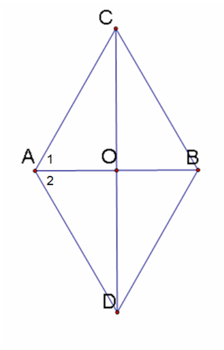
236.M10: *Όλες οι γωνίες του ισοπλεύρου είναι 60°, άρα είναι !*
237.*Ερ: Άρα οι Α, Β πόσο είναι;*
238.*M14: 60°*
239.*M10: Όχι, 60° είναι η A_1 και 60° η A_2, δείχνοντας με το δάκτυλο άρα είναι 120°*
240.*Ερ : Γιατί οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα;*

……

Η Μ10 στο [236-241], αιτιολογεί γιατί οι απέναντι γωνίες του ρόμβου είναι ίσες, από το ειδικό αντιπροσωπευτικό διάγραμμα.



Σχήμα 4.97. Ανάλυση της δομής του επιχειρήματος της Μ10



Σχήμα 4.98. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [236-241]

Στο μοντέλο Toulmin επάνω, μέσω του οποίου αναλύεται η δομή του επιχειρήματος της Μ10, η μαθήτρια αρχικά υπονοεί την ισότητα των απέναντι γωνιών του ρόμβου για να οδηγηθεί σε ένα εμπειρικό αποτέλεσμα για τις γωνίες του σχήματος. Συνεπώς, η μαθήτρια αναπτύσσει ένα **απαγωγικό επιχείρημα,** αφού υποθέτει ένα στοιχείο (την ισότητα των γωνιών από το διάγραμμα) προκειμένου να οδηγηθεί στο αποτέλεσμα. Το διάγραμμα λειτουργεί ως *εγγύηση* στην ανάπτυξη του επιχειρήματος της μαθήτριας. Οδηγείται να διατυπώσει συμπεράσματα **επαγωγικού τύπου** για κάθε ρόμβο από την μεμονωμένη περίπτωση του ρόμβου στην οθόνη και η έκφραση της περιέχει στοιχεία **παραγωγικού συλλογισμού.** Η αιτιολόγηση της Μ10 **είναι εμπειρική** και η δήλωση ελέγχεται με ένα προσεκτικά επιλεγμένο παράδειγμα όχι τυχαίο. Επομένως, ανήκει στην περίπτωση του **κρίσιμου πειράματος.**

Μέσω του εργαλείου σημείου + πειραματικού συρσίματος

....

261.Η Μ9 κατασκευάζει ένα σημείο τυχαίο πάνω από το ευθύγραμμο τμήμα.
262.Μ10 – Μ14: *Ναι, αλλά... όχι τυχαίο σημείο!*
263.*Μ10 : Δεν είναι ισοσκελές.*

....

Έχει κατανοήσει την έννοια του δυναμικού σημείου με έναν βαθμό ελευθερίας. Αυτό έχει ως συνέπεια ενώ δεν σύρουν το σημείο να οδηγηθούν σε **απαγωγικά επιχειρήματα** για το σχήμα που προκύπτει στην συνέχεια στο [263] («δεν είναι ισοσκελές»). Η μαθήτρια συμπεραίνει για το σχήμα στην οθόνη, χωρίς να σύρει κάποιο σημείο, επομένως οδηγείται μέσω νοητικού μετασχηματισμού να κατανοήσει ότι το σχήμα δεν είναι ισοσκελές.

Μέσω του εργαλείου παραλλήλων

....

472. Ερ: *Γιατί είναι παραλληλόγραμμο;*
473. *M10: Τα μέσα των πλευρών είναι παράλληλα.*

....

Η Μ10 εκφράζει με άτυπο τρόπο («τα μέσα των πλευρών είναι παράλληλα τοποθετημένα») την ιδιότητα που έχει το τμήμα που συνδέει τα μέσα, που επιβεβαιώνεται για κάθε σύρσιμο κορυφής του σχήματος. Επομένως, στο σημείο αυτό η έκφραση είναι **μια ανεπαρκής αιτιολόγηση** που μπορεί να αναδιατυπωθεί [το τμήμα που συνδέει] τα μέσα των πλευρών είναι παράλληλο [με την βάση] ή «τα μέσα των πλευρών είναι παράλληλα [τοποθετημένα]». Η μαθήτρια έχει κατασκευάσει την έννοια «παράλληλες ευθείες» μέσω της διαδικασίας κατασκευής παραλλήλων η οποία έχει προηγηθεί. Επομένως, έχει κατασκευάσει ένα ΣΕΔ του εργαλείου κατασκευής παραλλήλων, που την βοηθά στο σημείο αυτό να διατυπώσει την **έννοια-εν-δράσει**, συμπληρώνοντας το σχήμα νοητικά.

....

497. Ερ: *Το εξωτερικό με τι μοιάζει;*
498. *M10: Το εξωτερικό μοιάζει με ρόμβος και το εσωτερικό με τετράγωνο.*

....

Στο [498] διατυπώνει ένα **απαγωγικό επιχείρημα**. Η μαθήτρια μέσω του συρσίματος αναγνωρίζει τα δυο σχήματα που προκύπτουν. Η μαθήτρια αναγνωρίζει τα σχήματα από το διάγραμμα, επομένως δε συνδέει την εικόνα με τις ιδιότητες των αντικειμένων του διαγράμματος. Συνεχίζει με τη διατύπωση **απαγωγικών επιχειρημάτων** τα οποία προκύπτουν από την οπτικοποίηση του διαγράμματος.

Ανάπτυξη διαδικαστικής κατανόησης του θεωρήματος ΘΜΠ-αναγνώριση υποσχημάτων

....

565. Ερ: *Το εσωτερικό σχήμα είναι παραλληλόγραμμο;*
566. *M149: Υποθέτουμε ...*
567. *M10: Το ξέρουμε το είπαμε πριν.*

....

572. Ερ: *Αυτές οι EF, EH τι σχέση έχουν ;*
573. *M14, M10: Είναι παράλληλες προς την AC, ίσο με την DB/2.*

....

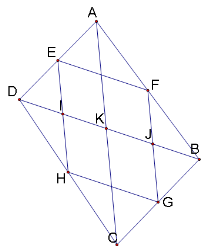
Στο [567] αιτιολογεί γιατί το τετράπλευρο που σχηματίζεται από τα μέσα είναι παραλληλόγραμμο και ανακαλεί το ΘΜΠ για την απόδειξη του («το ξέρουμε το είπαμε πριν»).

Επομένως, η μαθήτρια έχει κατανοήσει ότι για κάθε σύρσιμο κορυφής το εσωτερικό σχήμα **παραμένει** παραλληλόγραμμο. Αναπτύσσει **επαγωγικό συλλογισμό,** αφού θεωρεί ότι για κάθε μετασχηματισμό του εξωτερικού τετραπλεύρου, το εσωτερικό τετράπλευρο παραμένει παραλληλόγραμμο. Η έκφραση «όπως πριν» είναι ένδειξη ότι η μαθήτρια δεν επηρεάζεται από το συγκεκριμένο διάγραμμα στην αιτιολόγηση τους, αλλά αυτή προκύπτει μέσα από **νοητικούς μετασχηματισμούς** και συνδέει γνωστικά την απόδειξη με την προηγούμενη φάση στην οποία ήδη οι μαθήτριες έχουν αποδείξει ότι κάθε σχήμα που σχηματίζεται από τα μέσα τετράπλευρου είναι παραλληλόγραμμο. Δηλαδή, έχει αποκτήσει **ικανότητα γενίκευσης** των συμπερασμάτων.

Ανάπτυξη ικανότητας παραγωγικού συλλογισμού

....

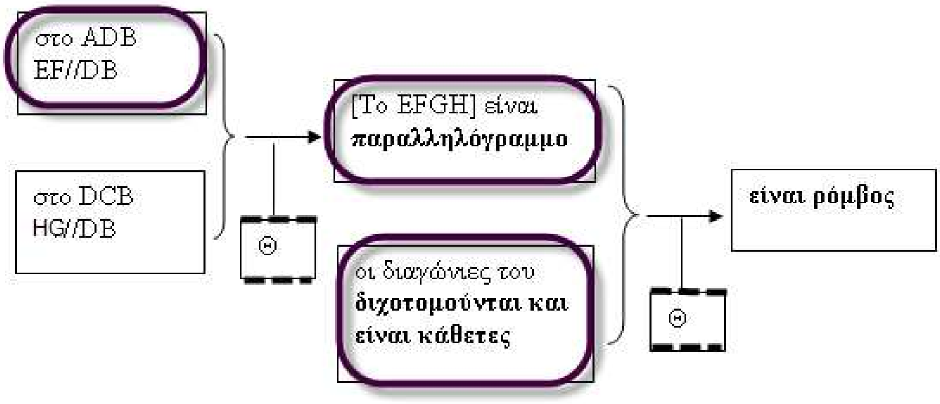
577. Ερ: *Γιατί το εσωτερικό σχήμα είναι ρόμβος;*
578.M14 : Γιατί οι διαδοχικές πλευρές είναι ίσες.
579.M10: Γιατί διχοτομούνται, έγινε χ τώρα!
580.Ερ: Γιατί;
581.M10: Γιατί οι διαγώνιες είναι κάθετες (χωρίς να έχουν φέρει τις διαγώνιες).
582.M14: Αφού έχουμε πάρει τα μέσα των πλευρών M10 ταυτόχρονα.
583.Ερ: Κατ' αρχήν είναι παραλληλόγραμμο ;
584.M10: Ναι ... Για τι είναι παραλληλόγραμμο!
585.Ερ: Δηλαδή;.
586.M10: EF//DB (και ολοκληρώνει την απόδειξη).



Σχήμα 4.99. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [577-586]

....

Έχει αναπτύξει την ικανότητα εφαρμογής του θεωρήματος ΘΜΠ σε συνεργασία με την ομάδα, αφού διατυπώνει το επιχείρημα στο [645] το οποίο περιέχει στοιχεία **παραγωγικού συλλογισμού**. Στο διάστημα [649-651] η M10 αιτιολογεί γιατί το σχήμα είναι ρόμβος χρησιμοποιώντας δυο δευτερεύουσες ιδιότητες του ρόμβου. Η μαθήτρια κατασκευάζει αρχικά ένα **απαγωγικό επιχείρημα,** αφού δέχεται ότι οι διαγώνιες είναι κάθετες. Φέρνει νοητά τις γραμμές στις οποίες 'βλέπει' με τη φαντασία της την διχοτόμηση και καθετότητα των διαγωνίων.



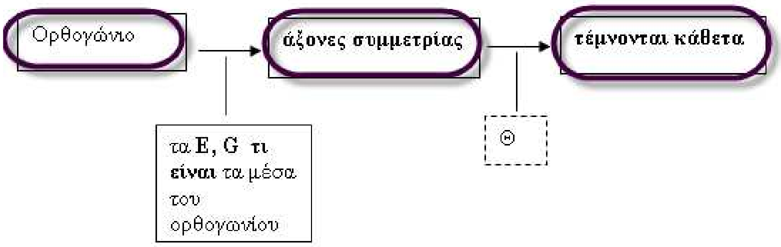
Σχήμα 4.100. Ανάλυση του επιχειρήματος των Μ14-Μ10

Στη συνέχεια στο [664-673] μετασχηματίζεται σε **παραγωγικό επιχείρημα**.

....

593.Ερ: Για να δείξεις ότι είναι ρόμβος τι πρέπει να δείξεις;
594.Μ14: Ότι είναι κάθετες
595.Ερ: Το αρχικό μας σχήμα τι είναι;
596.Μ10, Μ9: Ορθογώνιο.
597.Ερ: Τα Ε, G τι είναι;
598.Μ14: Τα μέσα του ορθογωνίου.
599.Ερ: Τι είναι τότε οι EG, HF ;
600.Μ10, Μ14: άξονες συμμετρίας
601.Ερ: Επομένως
602.Μ10, Μ14: Τέμνονται κάθετα .

....



Σχήμα 4.101. Ανάλυση του επιχειρήματος των Μ14-Μ10

Η Μ10 αναγνωρίζει τους άξονες συμμετρίας του ορθογωνίου και την ιδιότητα των αξόνων συμμετρίας (καθετότητα) έννοια που είχε κατασκευάσει στη δεύτερη φάση της ερευνητικής διαδικασίας. Το επιχείρημα της περιέχει στοιχεία **παραγωγικού συλλογισμού**.

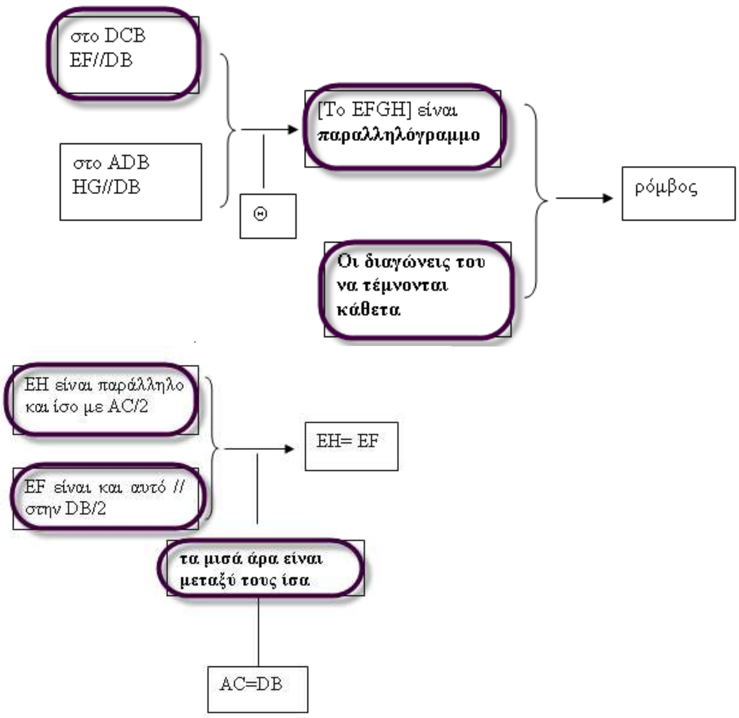
Η μαθήτρια στο σημείο αυτό αναγνωρίζει το σχήμα του ρόμβου από τις ιδιότητές του. Επομένως, ο ρόμβος έχει αποκτήσει τον **χαρακτήρα σήματος**.

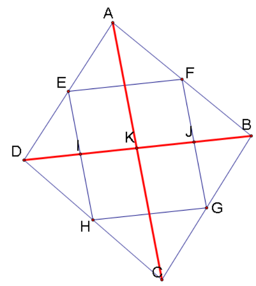
....

609.Ερ: Για να είναι και ρόμβος τι πρέπει να συμβαίνει;
610.M14, M10: Οι διαγώνιες του να τέμνονται κάθετα.
611.M14 : Και οι δυο διαδοχικές πλευρές είναι ίσες
612.Ερ: Γιατί;
613.M10 : Δηλαδή, να δείξουμε ότι EH=EF;
614.M10 : Είναι, γιατί είναι μέσα.
615.M14 : Το EH είναι παράλληλο και ίσο με AC/2 (συμπληρώνει και η M10).
616.Ερ: Και το EF με ποιο είναι ίσο;
617.M10 : Με το EH επειδή είναι και αυτό // στην AC
618.M14 : Το EF = DB/2
619.M10: Τα μισά άρα είναι μεταξύ τους ίσα
620.Ερ: Άρα ποια είναι η συνθήκη για να είναι το σχήμα ρόμβος ;
621.M10 : Οι διαγώνιες να είναι ίσες.

....

Η Μ10 αποδεικνύει ότι το ΕΗ είναι παράλληλο και ίσο με AC/2 [693] και το EF παράλληλο και ίσο με DB/2 σε συνεργασία με την ερευνήτρια και την Μ14, επομένως αναπτύσσει στοιχεία **παραγωγικού συλλογισμού.** Η διαγραμματική αναπαράσταση του επιχειρήματος της παρουσιάζεται στη συνέχεια:





Σχήμα 4.102. Ανάλυση του επιχειρήματος των Μ14-Μ10

Σχήμα 4.103. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [609-621]

4.2.11.M11-ΟΜΑΔΑ Γ

Ανάπτυξη ικανότητας μετατροπής μεταξύ αναπαραστάσεων μέσω γνωστικών συγκρούσεων

Μέσω του εργαλείου σημείου +πειραματικού συρσίματος

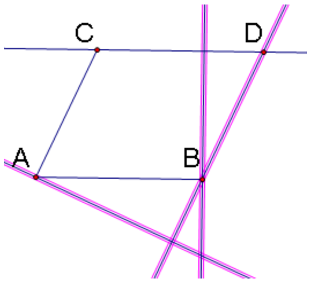
………

29. Ο Μ1 σύρει τις κορυφές του παραλληλογράμμου.
30. Μ11: *Τώρα μοιάζει με ορθογώνιο!*

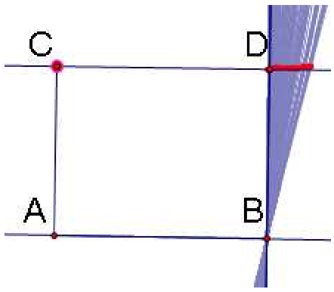
…………………………………………………………………………………………………

40. Μ11: *Δε μπορώ να βρω ακριβώς το σημείο.*

…………………………………………………………………………………………………



Σχήμα 4.104. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [29-40]



Σχήμα 4.105. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [29-40]

Το πειραματικό σύρσιμο των κορυφών του παραλληλογράμμου βοηθά την Μ11 στο [30] να κατασκευάσει μέσω της διαδικασίας εργαλειακής γένεσης, ένα νοητικό κατασκεύασμα του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Η τεχνική του θεωρητικού συρσίματος και ο μετασχηματισμός της θέσης **του σημείου** επιδρά στον τρόπο συλλογισμού της Μ11, ώστε μέσω της διαδικασίας οδηγείται να **επανεφεύρει δυναμικά** την ιδιότητα της ισότητας των τμημάτων. Το εργαλείο σημείου και το θεωρητικό σύρσιμο διαμεσολαβεί στην **μετατροπή της νοητικής εικόνας σε εικονική**. Επομένως, η μαθήτρια ωθείται σε διαδικασίες σκέψης ώστε να **ανακαλύψει** μια διαδικασία για να κατασκευάσει την ιδιότητα του σχήματος στο [40], σημείο στο οποίο έρχεται σε **γνωστική σύγκρουση** λόγω του εργαλείου σημείου.

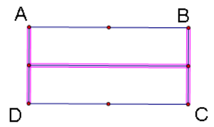
Μέσω του εργαλείου ανάκλασης

Η μαθήτρια αντιμετωπίζει γνωστικό εμπόδιο αφού θεωρεί ότι οι διαγώνιες του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι και άξονες συμμετρίας του στο [215]. Δηλαδή, οδηγείται σε παρανόηση που οφείλεται στην προσπάθεια αφομοίωσης της έννοιας της αξονικής συμμετρίας με την έννοια της συμμετρίας ως προς κέντρο του ορθογωνίου. Η κατασκευή του συμμετρικού μιας κορυφής του σχήματος ως προς άξονα συμμετρίας τη διαγώνιο τους --με τη λειτουργία ανάκλασης του λογισμικού-- έχει ως αποτέλεσμα τη **γνωστική σύγκρουση** μεταξύ αυτού που οπτικοποιούν στην οθόνη και αυτού που γνωρίζουν.

………

212.Ερ: *Οι διαγώνιες, είναι άξονες συμμετρίας του ορθογωνίου;*
213.Μ1: Ναι.
214.Μ12, Μ2: Ναι.
215.Μ11: Ναι.

………

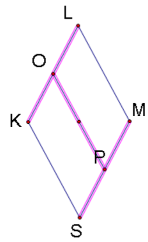


Σχήμα 4.106. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [212-215]

219.Ερ. : *Ποιοι είναι οιάξονες συμμετρίας στο ρόμβο;*
220.Μ11: *Όπως κάναμε και εδώ έτσι δεν είναι; … … δυο λεπτά!*
221.Μ11: *Δεν είναι ! … . Ααα! Κυρία* ! (γελώντας)

225.Μ11: *Είναι κάθετες μεταξύ τους !*
*226.*Μ11: *Αυτές τώρα στο τετράγωνο είναι τέσσερις …*
αυτοί οι δυο και οι άλλοι όπως στο ορθογώνιο.

………



Σχήμα 4.107. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [219-226]

Η κατασκευή του άξονα συμμετρίας του ορθογωνίου με σύνδεση των μέσων των απέναντι πλευρών ολοκληρώνεται από την Μ12, χρησιμοποιώντας το προσαρμ. εργαλείο *με οικονομία*. Επομένως, οι μαθητές συνδέουν την έννοια της αξονικής συμμετρίας με την έννοια των μεσοπαραλλήλων. Αυτό έχει αντίκτυπο στην κατασκευή των αξόνων συμμετρίας του ρόμβου. Για παράδειγμα, η κατασκευή των μεσοπαραλλήλων του ρόμβου ως αξόνων συμμετρίας του, οδηγεί τη μαθήτρια σε **γνωστική σύγκρουση** λόγω της συσχέτισης της αξονικής συμμετρίας με την έννοια της καθετότητας. Η γνωστική σύγκρουση έχει ως αποτέλεσμα την κατανόηση του πλήθους των αξόνων συμμετρίας στο τετράγωνο, αποτέλεσμα της κατανόησης του τετραγώνου ως ειδικότερου σχήματος τετράπλευρου. Επομένως, η μαθήτρια έχει κατασκευάσει συνειδητά την έννοια της αξονικής συμμετρίας λόγω της επίδρασης του εργαλείου ανάκλασης, σε δραστηριότητα που έχει προηγηθεί. Η μαθήτρια έχει αποκτήσει την ικανότητα **να αποκωδικοποιεί την νοητική πληροφορία σε εικονική και λεκτική πληροφορία.** Η δραστηριότητα της δεύτερης φάσης διαμεσολαβεί ώστε η μαθήτρια να κατασκευάσει την **ικανότητα ιεράρχησης** μεταξύ των τετράπλευρων, ως ειδικότερων ή γενικότερων κατασκευών του παραλληλογράμμου.

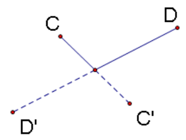
Ανάπτυξη ικανότητας δομικής ανάλυσης – διπλή (/πολλαπλή) ερμηνεία γεωμετρικών αντικειμένων

Μέσω του προσαρμ. εργαλείου

………

185.Μ11: *Γιατί οι διχοτόμοι είναι ίσες … γιατί οι διαγώνιες του … ..διχοτ …*

………



Σχήμα 4.108. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [185]

Στο [185] η Μ11 **αιτιολογεί** με την ιδιότητα-κριτήριο του παραλληλογράμμου λόγω *της οπτικοποίησης των τεμνόμενων διαγωνίων.* Η ιδιότητα αυτή αποτελεί στοιχείο και του αντικειμένου που οικοδομείται με το εργαλείο. Η έννοια αυτή (*οι διαγώνιες διχοτομούνται*) επομένως κατασκευάζεται από τους μαθητές μέσω της χρήσης του εργαλείου. Επομένως, μετατρέπει **μια εικονική αναπαράσταση σε λεκτική** ως αποτέλεσμα της οπτικοποίησης των τεμνόμενων διαγωνίων.

Μέσω του προσαρμ. εργαλείου

………

235.Η Μ11 κατασκευάζει ένα ευθύγραμμο τμήμα. Έπειτα, επιλέγει το εργαλείο και το εφαρμόζει στα δυο άκρα του ευθυγράμμου τμήματος, έτσι ώστε τα δυο τμήματα που σχηματίζονται να διχοτομούνται στο ίδιο αυθαίρετο σημείο.

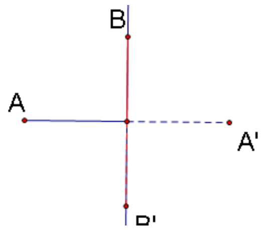
236.Μ11: *Είναι και ρόμβος.*

………

Η χρήση του εργαλείου δυο φορές με δεύτερο σημείο εφαρμογής το σημείο Ο οδηγεί στην κατασκευή δυο τμημάτων που έχουν το ίδιο μέσο. Η Μ11 **αναπτύσσει την ικανότητα αντιστροφής ενεργειών** μέσω της αποκωδικοποίησης των εργαλείων. Η κατασκευή του παραλληλογράμμου ολοκληρώνεται από την Μ11 στο [235], χρησιμοποιώντας το προσαρμ. εργαλείο. Επομένως, το προσαρμ. εργαλείο διαμεσολαβεί στην αποκωδικοποίηση ιδιοτήτων του παραλληλογράμμου και την **μετατροπή της νοητικής εικόνας της μαθήτριας σε εικονική** στην οθόνη. Στο [236] αντιλαμβάνεται το σχήμα του ρόμβου ως ειδικότερη μορφή παραλληλογράμμου. Επομένως, ως σχήμα παραλληλογράμμου με κάποιες πρόσθετες ιδιότητες, (απαγωγικό επιχείρημα).

………

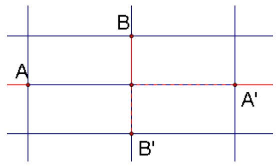
244.Εφαρμόζει το εργαλείο να μοιάζει κάθετη στο τμήμα.
245.Ερ: *Πως ξέρεις ότι τώρα είναι κάθετο;*
246.Κάνει αναίρεση και επιστρέφει στο πρώτο βήμα.
247.Μ12: *Τότε να φέρω κάθετη εδώ.*
248.Μ12: *Θα φέρω κάθετη σ' αυτό…. και σ' αυτό* (σταματάει)
249.Ερ: *Κάνε ρόμβο.*
250.Μ12: *Και το ρόμβο, έτσι θα τον έκανα με τις διαγωνίους.*
251.Μ11: *Θα συνεχίσω εγώ.*
252.Η Μ11 εφαρμόζει το εργαλείο πάνω στην κάθετη
253.Μ12: *Το έχω, το έχω!*
*254.*Μ11: *Είναι ρόμβος!*



Σχήμα 4.109. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [244-254]

……

303.Μ11: *Θα το κάνουμε αλλιώς ! Κατασκευάζω έναν άξονα …*
304.Μ11: *Μετά παίρνω το μέσο …*
305.Μετά κατασκευάζει τις κάθετες στα άκρα
306.Ερ: *Ποια ιδιότητα της συμμετρίας χρησιμοποίησες ;*
*307.*Μ11: *Οι μεσοπαράλληλες είναι και κάθετες και είναι και άξονες συμμετρίας του ορθογωνίου.*



Σχήμα 4.110. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [303-307]

……

Η Μ11 ολοκληρώνει την κατασκευή του ρόμβου στο [251-254], αφού επινοήσει τη χρήση του προσαρμ. εργαλείου και την εφαρμογή του σε τυχαίο σημείο της καθέτου και στο μέσο τμήματος. Η επιλογή του τυχαίου σημείου και η εφαρμογή του προσαρμ. εργαλείου αποκωδικοποιεί τις ιδιότητες διχοτόμησης και καθετότητας διαγωνίων, έννοιες που έχει κατασκευάσει στη δεύτερη φάση. Επομένως, μέσω της διαδικασίας προσδίδει στο ρόμβο το **χαρακτήρα σήματος.**

Η Μ11 στο [303] αναπτύσσει στρατηγική δοκιμής και λάθους -κατασκευάζει ένα ευθύγραμμο τμήμα και στην κάθετη στο άκρο του εφαρμόζει το εργαλείο- το διαγράφει και κατασκευάζει ένα ευθύγραμμο τμήμα που ονομάζει «άξονα». Οι ενέργειες της **είναι αντίστροφες των ενεργειών** κατασκευής των αξόνων συμμετρίας του ορθογωνίου της δεύτερης φάσης της ερευνητικής διαδικασίας. Μέσα από την διαδικασία κατασκευάζει το **χαρακτήρα σήματος** του ορθογωνίου.

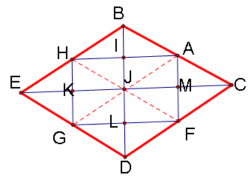
Επομένως, η μαθήτρια έχει αναπτύξει την **ικανότητα αντιστροφής ενεργειών,** μέσω της ανάπτυξης ικανότητας αποκωδικοποίησης ιδιοτήτων με συνθέτη χρήση εργαλείων. Έχει αναπτύξει επομένως την ικανότητα να μετατρέψει **μια νοητική αναπαράσταση σε εικονική** και τα εργαλεία καθέτου και προσαρμ. εργαλείου είναι τα διαμεσολαβητικά μέσα. Επομένως, αναπτύσσει αφαιρετικές διαδικασίες σκέψης και οδηγείται να κατασκευάσει τη συσχέτιση της **έννοιας της μεσοπαραλλήλου με την έννοια της αξονικής συμμετρίας**, καθώς και να τις διατυπώσει με μαθηματική γλώσσα (χαρακτηριστικό επιπέδου 3.1). Η κατανόηση των ιδιοτήτων είναι συνειδητή και εμφανίζεται στην τρίτη φάση των ΣΟΕΑ (π.χ στο [381]).

Μέσω των ΣΟΕΑ γ φάσης

………

351.Μ11: *Άρα, οι διαγώνιες διχοτομούνται και είναι κάθετες άρα το μεσαίο είναι ορθογώνιο.*
352.Μ12: …*Παραλληλόγραμμο*
353.Μ2: *Ορθογώνιο!*

……………………………………………………………………………………………



Σχήμα 4.111. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [351-353, 377-380]

377.Μ2: *Αυτό δεν είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο;*
378.Μ11: *Πρέπει να έχει μια γωνία ορθή ή με τις διαγώνιες.*
379.Ερ: *Είναι αυτή η διαγώνιος ίση με αυτή;*
380.Μ11: *Μήπως είναι μεσοπαράλληλος του εξωτερικού;* …. είναι παράλληλες και ίσες *με τις πλευρές του ρόμβου… το εσωτερικό είναι τετράγωνο*

………

Η Μ11 στο [351] και στο [380], έχει αναπτύξει την ικανότητα να **μετατρέπει μια εικονική αναπαράσταση σε λεκτική**, αναπτύσσοντας νοητικούς μετασχηματισμούς. Οι συνδεόμενες αναπαραστάσεις που η μαθήτρια δημιούργησε κατά τη διάρκεια της ερευν. διαδικασίας, την βοήθησαν να αναγνωρίσει: (α) την ιδιότητα των διαγωνίων του ρόμβου ως αξόνων συμμετρίας του ορθογωνίου (β) την ιδιότητα των διαγωνίων του ορθογωνίου ως μεσοπαραλλήλων του ρόμβου. Αναγνωρίζει επομένως τις υπο-δομές των παραλληλογράμμων που σχηματίζονται από τις μεσοπαραλλήλους του ρόμβου και τις ιδιότητες τους (π.χ την ιδιότητα της ισότητας των μεσοπαραλλήλων με τις πλευρές του ρόμβου). Επομένως, έχει αναπτύξει την ικανότητα να αναλύει δομικά σε πραγματικό ή νοητό επίπεδο ένα σχήμα, να αναγνωρίζει τις ιδιότητες των στοιχείων του σχήματος και να τους αποδίδει **διπλό ρόλο**.

Ανάπτυξη ικανότητας διατυπώσεων εννοιών-εν-δράσει

Μέσω του εργαλείου καθέτων +πειραματικό σύρσιμο

………

29. Ο Μ1 σύρει τις κορυφές του παραλληλογράμμου.
30. Μ11: *Τώρα μοιάζει με ορθογώνιο!*

………

Στο [30] η Μ11 αναγνωρίζει το σχήμα του ορθογωνίου μέσω του **συρσίματος των κορυφών** του παραλληλογράμμου που έχει κατασκευάσει η Μ2. Επομένως, μέσω της **εργαλειακής γένεσης** που αναπτύχθηκε λόγω του εργαλείου του συρσίματος η μαθήτρια έχει κατασκευάσει ένα **όργανο** που περιλαμβάνει το **ΣΕΔ δυναμικού σημείου** λόγω του πειραματικού συρσίματος και την **έννοια-εν-δράσει του ορθογωνίου** παραλληλογράμμου ως «παραλληλογράμμου που προέκυψε από κάθετες ευθείες».

<u>Μέσω του εργαλείου ανάκλασης</u>

………

121.Ερ: *Γιατί συμβαίνει αυτό;*
122.Μ11, Μ2: *Γιατί είναι συμμετρικό.*
123.Ερ : *Τι σημαίνει συμμετρικό ως προς άξονα;*
124.Μ11: *Και τα δυο σημεία ισαπέχουν από τον άξονα.*

………

Το πειραματικό σύρσιμο του σημείου ή του ανακλώμενου του σημείου οδηγεί στο **μετασχηματισμό της οπτικής δυναμικής αναπαράστασης** η οποία μεταφράζεται με την μεταβολή της απόστασης των σημείων από τον άξονα. Η διαδικασία οδηγεί την Μ11 στο [124] να **οπτικοποιήσει την ιδιότητα της ίσης απόστασης** του σημείου από τον άξονα, καθώς και του ανακλώμενου του σημείου–ειδώλου. Επομένως, η μαθήτρια έχει κατασκευάσει ένα **ΣΕΔ** του εργαλείου ανάκλασης και ως εκ τούτου κατασκευάζει την **έννοια-εν-δράσει.** Η έκφραση της θα μπορούσε να αναδιατυπωθεί: «[ανακλώμενα] είναι και τα δυο σημεία [τα οποία] ισαπέχουν από τον άξονα». Αυτή η διατύπωση είναι ένας **ελλιπής ορισμός** σε μαθηματική γλώσσα ένδειξη μαθητή/τριας που ανήκει στο επίπεδο 2.2. Δηλαδή, η μαθήτρια «αρχίζει να αποκτά τυπική αντίληψη για να περιγράψει τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων των σχημάτων» (Battista, 2007). Επομένως, ο ορισμός της προέρχεται από μια λειτουργία μετασχηματισμού σε ένα μάλλον τυχαίο παράδειγμα. Ως αιτιολόγηση μπορεί να κατηγοριοποιηθεί στην περίπτωση του **αφελή εμπειρικισμού** σύμφωνα με τον Balachef (1982, 1988b).

………

*307.*Μ11:*Οι μεσοπαράλληλες είναι και κάθετες και είναι και άξονες συμμετρίας του ορθογωνίου.*

………

Στο [307] η Μ11 διατυπώνει «Οι μεσοπαράλληλες είναι και κάθετες είναι και άξονες συμμετρίας του ορθογωνίου», που μπορεί να θεωρηθεί **αυθαίρετος οικονομικός ορισμός** του ορθογωνίου. Η έκφραση της μπορεί να αναδιατυπωθεί ως: «[ένα σχήμα είναι ορθογώνιο όταν] οι μεσοπαράλληλες είναι και κάθετες είναι και άξονες συμμετρίας του».

Ανάπτυξη ικανότητας συσχέτισης εννοιών

Μέσω του εργαλείου κύκλου

……

*100.*Ερ: *Για να είναι τετράγωνο δεν αρκούν 4 ορθές γωνίες, τι επιπλέον χρειάζεται;*
101.Μ11: Να είναι και ρόμβος.

……

Στο [101] έχει κατασκευάσει την **λεκτική, θεσιακή κατανόηση** της κατασκευής του κύκλου με την αλλαγή προσανατολισμού των αντικειμένων. Έχει κατασκευάσει ένα **ΣΕΔ** του κύκλου και επινοεί την χρήση του εργαλείου του κύκλου για **την κατασκευή της ισότητας των πλευρών** του τετράγωνο. Διατυπώνει ένα **μη οικονομικό ορισμό** σε συνεργασία με την ερευνήτρια («ένα τετράγωνο δεν αρκεί να έχει [4 ορθές γωνίες] πρέπει να είναι και ρόμβος»). Επομένως, μέσω της διαδικασίας η Μ11 συνδέει την έννοια του τετραγώνου με την έννοια του ρόμβου και την έννοια της ισότητας των πλευρών με την κατασκευή ίσων ακτινών με το εργαλείο κύκλου. Επομένως, αναπτύσσεται σταδιακά **η συσχέτιση των εννοιών**.

Μέσω του εργαλείου ανάκλασης, ίχνους και συρσίματος

……

131.Ερ: *Αν ενώσουμε τα δυο αυτά σημεία Β, C τότε αυτή η ευθεία τι σχέση έχει;*
132.Μ11: *Μεσοκάθετος;*

……

Η χρήση του **εργαλείου ίχνους** οδηγεί την Μ11 στο [132] να ερμηνεύσει τον άξονα συμμετρίας **ως μεσοκαθέτο** της απόστασης σημείου–ανακλώμενου σημείου. Επομένως, διατυπώνει μια σχέση μεταξύ της έννοιας της συμμετρίας ως προς άξονα και της έννοιας της μεσοκαθέτου. Σε σχέση με τον ορισμό που είχε διατυπώσει λόγω συρσίματος του σημείου («δυο σημεία ισαπέχουν από τον άξονα»), η Μ11 οδηγείται να συμπεράνει ότι εάν ένα σχήμα έχει μια ιδιότητα (προκύπτει από ανάκλαση), έχει και μια άλλη (ο άξονας συμμετρίας είναι μεσοκάθετος) **δηλαδή οδηγείται να συσχετίσει ιδιότητες του σχήματος.** Αυτό είναι χαρακτηριστικό επιπέδου 3.1 σύμφωνα με την κατηγοριοποίηση του Battista (2007), χρησιμοποιώντας *μόνο τα εμπειρικά στοιχεία του διαγράμματος*.

Μέσω του εργαλείου ανάκλασης και θεωρητικού συρσίματος

……

150.Μ11: *Και η μεσοκάθετος της βάσης είναι μεσοκάθετος στην άλλη.*
151.Η Μ11 σύρει το σημείο Ε μέχρι η ΑΕ να γίνει παράλληλη στην ΑΕ΄
152.Ερ: *Τι σχήμα είναι αυτό που προκύπτει ;*
153.Μ1: *Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο*
154.Η Μ12 σύρει το σημείο Ε αλλάζοντας θέση σε όλη την πλευρά
155.Ερ: *Είναι ορθογώνιο και τώρα;*
156.Μ11: *Όχι ... . σκέτο παραλληλόγραμμο!*
157.Μ12: *Τετράγωνο.*
*158.*Μ11: *Μοιάζει τετράγωνο.*

....

Στο [150] η Μ11 διατυπώνει μια ιδιότητα του τραπεζίου, συσχετίζοντας με την ιδιότητα της μεσοκαθέτου του σχήματος (μετασχηματισμός σε ισοσκελές τρίγωνο) που είχε διατυπώσει προηγουμένως στο [132]. Η μαθήτρια στο σημείο αυτό **συνδέει νοητικά αναπαραστάσεις** και αναπτύσσει **επαγωγικό συλλογισμό,** αφού από το διάγραμμα στην οθόνη συμπεραίνει για κάθε σχήμα ισοσκελούς τραπεζίου. Η έκφραση της θα μπορούσε να αναδιατυπωθεί «η **μεσοκάθετος της βάσης** [κάθε τραπεζίου ισοσκελούς] είναι μεσοκάθετος στην άλλη [βάση]», επομένως πρόκειται για ένα **θεώρημα-εν-δράσει**.

Ανάπτυξη απαγωγικών και παραγωγικών επιχειρημάτων

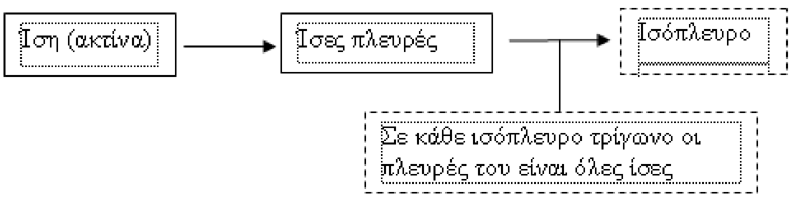
<u>Μέσω του εργαλείου κύκλου</u>

....

49. Μ11: *Με ίση, για να είναι ίσες οι πλευρές!*
50. Μ12: *Όχι με μισό, γιατί θα έπεφτε πάνω στη βάση.*

....

Στο [49] αιτιολογεί χρησιμοποιώντας **λογικό επιχείρημα,** χωρίς να αναφέρει την μαθηματική πρόταση που τεκμηριώνει τον ισχυρισμό της.



Σχήμα 4.112. Ανάλυση με μοντέλο Toulmin της διατύπωσης της Μ12

Η μαθήτρια υπονοεί το θεώρημα το οποίο είναι η εγγύηση (warrant) στο επιχείρημα. Επομένως, το εργαλείο του κύκλου διαμεσολαβεί στη διαμόρφωση του λογικού επιχειρήματος.

<u>Μέσω του προσαρμ. εργαλείου</u>

....

*173.*M11: *Α! άμα πάρουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα εδώ. Ωραία περνάει από το Ο. Πρέπει να βρούμε αν είναι ίσα!*

……

Η χρήση του εργαλείου στο [173] από την Μ11 για την κατασκευή των περιστροφών (συμμετρικών σημείων) των άκρων τμήματος οδηγεί στην κατασκευή των συμμετρικών σημείων των άκρων, την κατασκευή κατά συνέπεια ενός παραλληλογράμμου, μέσω των τεμνόμενων διαγωνίων του. Η σύνδεση των συμμετρικών σημείων προκαλεί την Μ11 να περιγράψει την συνευθειακότητα των σημείων και να εξετάσει μόνο την ιδιότητα της ισότητας. Η Μ11 διατυπώνει «Πρέπει να βρούμε αν είναι ίσα!» που είναι ισοδύναμο με το «ίσως να είναι ίσα». Επομένως, υποθέτει ότι της είναι αναγκαίο οπτικά, προκειμένου να καταλήξει σε ένα συμπέρασμα (την συμμετρία των τμημάτων). Ο συλλογισμός της είναι **απαγωγικός:**

Κανόνα: Τα συμμετρικά τμήματα είναι ίσα
Αποτέλεσμα: Αυτά τα τμήματα είναι ίσα (οπτικά)
Περίπτωση: Αυτά τα τμήματα είναι συμμετρικά.

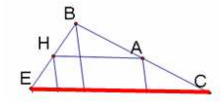
<u>Μέσω του προσαρμ. εργαλείου</u>

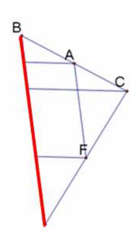
Η Μ11 στο [185] **αιτιολογεί με την ιδιότητα-κριτήριο του παραλληλογράμμου** λόγω *της οπτικοποίησης των τεμνόμενων διαγωνίων.* Ο συλλογισμός της είναι **απαγωγικός.**

……

*314.*M11: *Είναι παραλληλόγραμμο.*
315.M11: *Το BEC είναι τρίγωνο, τα H, A είναι τα μέσα των πλευρών BE, BC άρα HA//=EC/2 . … Έτσι γίνεται και στα άλλα… δηλαδή και αυτό είναι ίσο με το μισό αυτής AF//=BD/2.*

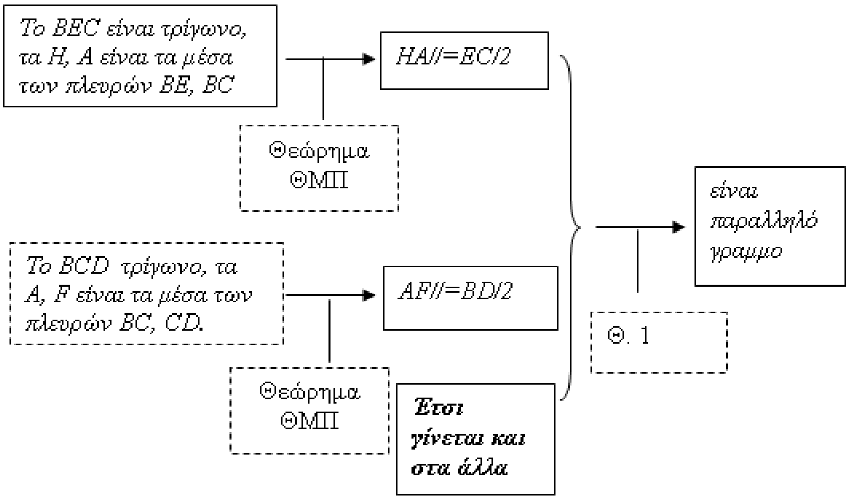
……



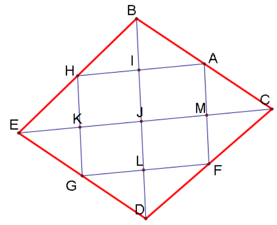


Σχήμα 4.113. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [314-315]

Η Μ11 αναγνωρίζει στο σχήμα την υποδομή των δυο τριγώνων που πληρούν τις προϋποθέσεις για την εφαρμογή του ΘΜΠ, και των δυο άλλων υποσχημάτων για εφαρμογή με αλλαγή προσανατολισμού. Στο [315] χρησιμοποιεί μη-οικονομικό ορισμό για να **αιτιολογήσει** ότι το σχήμα είναι παραλληλόγραμμο. Η έκφραση της στο [315] αποτελεί ένα **παραγωγικό επιχείρημα**. Το διάγραμμα κάτω αναπαριστά τη δομή του επιχειρήματος της με ανάλυση κατά Toulmin.



Σχήμα 4.114. Ανάλυση του επιχειρήματος της Μ11



Σχήμα 4.115. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [314-315]

Η Μ11 («*Έτσι γίνεται και στα άλλα*») δηλώνει ότι θέλει να αποδείξει την ισότητα και παραλληλία σε όλα τα τμήματα που συνδέουν τα μέσα των πλευρών. Με τον τρόπο αυτό αποδεικνύει ότι το σχήμα είναι παραλληλόγραμμο, κατασκευάζοντας έναν **αυθαίρετο μη-οικονομικό** ορισμό για την απόδειξη του.

....

330.Μ12: *Οι πλευρές του να είναι παράλληλες στις διαγώνιες*
331.Μ11: *Αυτές δεν έρχονται κάθετα;*
332.Ερ. : *Ποιες ;*
333.Μ11: *Οι διαγώνιες ... να είναι κάθετες μεταξύ τους !*
334. Ερ: *Αρκεί αυτή η συνθήκη;*
335.Μ12: *Όχι !*
336.Μ2: *Άμα είναι παραλληλόγραμμο!*

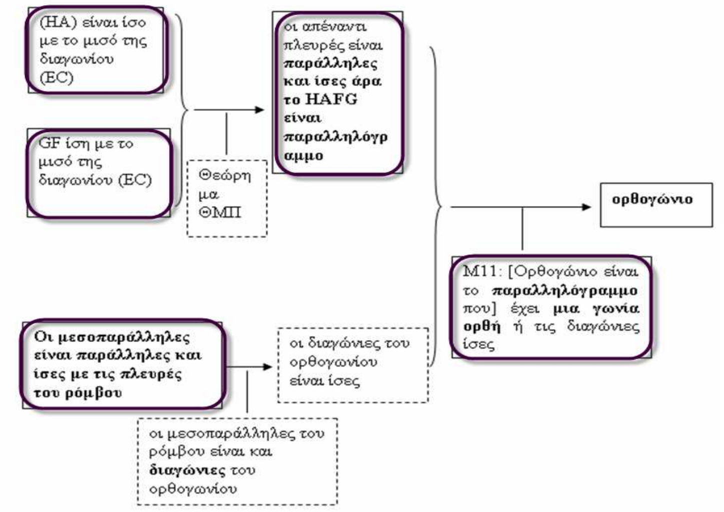
....

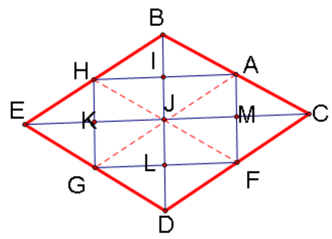
Στο [333] οι μαθητές σύρουν τις κορυφές ώστε να σχηματιστεί εξωτερικά ρόμβος. Ο μετασχηματισμός προκαλεί τη διατύπωση των ιδιοτήτων των διαγωνίων του από την Μ11, η οποία αναπτύσσει **παραγωγικό συλλογισμό** και οδηγείται σε μια «αν ...τότε» **συμπερασματική λογική δήλωση** για το σχήμα στο εσωτερικό.

....

377.Μ2: *Αυτό δεν είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο;*
378.Μ11: *Πρέπει να έχει μια γωνία ορθή ή με τις διαγώνιες.*
*379.*Ερ: *Είναι αυτή η διαγώνιος ίση με αυτή;*
380.Μ11: *Μήπως είναι μεσοπαράλληλος του εξωτερικού; ….* είναι παράλληλες και ίσες *με τις πλευρές του ρόμβου… το εσωτερικό είναι τετράγωνο*
381.Ερ. : *Γιατί;*
382.Μ2: *Και τετράγωνο και ρόμβος.*
383.Ερ. : *Γιατί είναι τετράγωνο;*
*384.*Μ11: *Έχει και τις πλευρές ίσες και … οι διαγώνιες (μέσα) είναι ίσες και τέμνονται κάθετα.*

………





Σχήμα 4.116. Ανάλυση του επιχειρήματος της Μ11

Σχήμα 4.117. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [377-384]

Η έκφραση της μπορεί να αναδιατυπωθεί ως: «[το σχήμα είναι ρόμβος] άρα οι διαγώνιες του διχοτομούνται και είναι κάθετες και επομένως [το εσωτερικό τετράπλευρο] είναι ορθογώνιο». Αυτή η διατύπωση σε τυπική μαθηματική γλώσσα περιέχει μια **αλυσίδα λογικών συνδέσεων.** Το σχήμα του ρόμβου έχει αποκτήσει **το χαρακτήρα σήματος**.

Στο [378] η Μ11 διατυπώνει έναν **οικονομικό ορισμό** για το ορθογώνιο «[ορθογώνιο είναι το τετράπλευρο που είναι παραλληλόγραμμο] και έχει μια γωνία ορθή ή έχει διαγώνιες ίσες». Η Μ11 στη συνέχεια αποδεικνύει γιατί οι διαγώνιες είναι ίσες (οι διαγώνιες του ορθογωνίου είναι μεσοπαράλληλες του ρόμβου και επομένως παράλληλες και ίσες με τις πλευρές του ρόμβου). Η αιτιολόγηση της περιλαμβάνει **αλυσίδα παραγωγικών δηλώσεων.** Οι διαγώνιες του ορθογωνίου **παίζουν τον ρόλο/ ταυτίζονται με τις** μεσοπαράλληλες του ρόμβου, επομένως η μαθήτρια βλέπει **διαφορετικές δομές** μέσα στο ίδιο σχήμα. Σύμφωνα με τον Balachef (1982, 1988b) η αιτιολόγηση της θεωρείται **πείραμα σκέψης,** αφού «ενέργειες εσωτερικεύονται και αποσπώνται από το ειδικό παράδειγμα». Η διατύπωση της βασίζεται σε αφηρημένες διατυπώσεις των ιδιοτήτων και των σχέσεων μεταξύ των ιδιοτήτων. Η δομή του επιχειρήματος με το μοντέλο Toulmin αναπαριστάνεται επάνω. Η Μ11 αναπτύσσει **παραγωγικό συλλογισμό,** αφού διατυπώνει έναν: **Κανόνα (Rule)-** Οι μεσοπαράλληλες είναι παράλληλες και ίσες με τις πλευρές του ρόμβου, για την **Περίπτωση (Case)-**οι μεσοπαράλληλες του ρόμβου είναι και διαγώνιες του ορθογωνίου και συνάγει το **Αποτέλεσμα (Result)-** οι διαγώνιες του ορθογωνίου είναι ίσες

4.2.12.Μ12-ΟΜΑΔΑ Γ

Ανάπτυξη ικανότητας μετατροπής μεταξύ αναπαραστάσεων μέσω γνωστικών συγκρούσεων

Μέσω του εργαλείου σημείου + θεωρητικού συρσίματος

………

97. Μ12: *Ναι, αλλά θέλουμε να ξέρουμε ότι είναι ίσες* .
98. Μ11: *Που ξέρουμε ότι είναι τετράγωνο;*

………

117.Ερ: Τι είναι συγκεκριμένα;
118.Μ12: Τετράγωνο είναι ..ότι είναι ρόμβος είναι και τετράγωνο.

………

Η μαθήτρια αντιμετωπίζει **γνωστική σύγκρουση** στο [97] λόγω του συρσίματος του εργαλείου σημείου. Κατανοεί ότι το σύρσιμο του σημείου δε διατηρεί την ιδιότητα της ισότητας των πλευρών του τετραγώνου. Επομένως, ωθείται σε διαδικασίες σκέψης για την επιλογή του καταλλήλου εργαλείου με συνέπεια την ανάπτυξη της ικανότητας αποκωδικοποίησης της **νοητικής σε εικονική**. Στο [118] έρχεται σε **γνωστική σύγκρουση** ως αποτέλεσμα του θεωρητικού συρσίματος του τετραγώνου ώστε να αλλάξει προσανατολισμό. Η διατύπωση της είναι ένδειξη της μη ικανότητας ιεράρχησης των σχημάτων. Επομένως, μεταφράζει μια **εικονική αναπαράσταση λανθασμένα.**

Μέσω του προσαρμ. εργαλείου + θεωρητικού συρσίματος

………

180.Η Μ12 επιλέγει το εργαλείο και το εφαρμόζει στο κέντρο περιστροφής.
181.Μ12: *Όχι, ψέματα !!*
182.Εφαρμόζει το εργαλείο στη μια άκρη του τμήματος και στο κέντρο.

………

193.M12: *Όχι, ψέματα ... Θα το πάρω από δω.*
194.M12: *Ε! τώρα θα κάνουμε και τον άλλον κύκλο.*
*195.*M11: *Τι κάνεις !;*

………

Η Μ12 χρησιμοποιεί το εργαλείο για να κατασκευάσει το συμμετρικό του τμήματος ΑΒ και αντιμετωπίζει **γνωστική σύγκρουση,** όταν αντιλαμβάνεται ότι η εφαρμογή του εργαλείου στο κέντρο περιστροφής δεν οδηγεί στην αποκωδικοποίηση της νοητικής της αναπαράστασης. Μέσω της διαδικασίας αναπτύσσει την **σειριακή κατανόηση της** χρήσης του προσαρμ. εργαλείου και αντιμετωπίζει δυσκολία ως προς την **θεσιακή κατανόηση,** όπως διαπιστώνεται στα σημεία [182, 193].

Μέσω του προσαρμ. εργαλείου με κατάχρηση

………

210.M12: *Αυτό είναι το μέσο.*
211.M12: *Αυτός είναι ο άξονας συμμετρίας.*

………

Χρησιμοποιεί το προσαρμ. εργαλείο για την κατασκευή του άξονα συμμετρίας του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Στο [211] επιλέγει το εργαλείο και το εφαρμόζει στην μια πλευρά του ορθογωνίου, παρά το γεγονός ότι το εργαλείο δε σταθεροποιείται, αφού δεν υπάρχει ένα δεύτερο σημείο εφαρμογής του. Μέσω της διαδικασίας κατασκευάζει τα μέσα των απέναντι πλευρών με οπτικό τρόπο, τα οποία και συνδέει με ένα ευθύγραμμο τμήμα ώστε να κατασκευάσει τον άξονα συμμετρίας του ορθογωνίου. Επομένως, κάνει χρήση του εργαλείου **με κατάχρηση,** αφού χρησιμοποιείται για διαφορετικό λόγο από αυτόν που είχε κατασκευαστεί από την ερευνήτρια. Η μαθήτρια έχει συνδέσει την χρήση του εργαλείου με κάποιες ιδιότητες οι οποίες όμως δε συμπίπτουν με τις ιδιότητες που έχει το εργαλείο από το σχεδιασμό του. Επομένως, το εργαλείο δε λειτουργεί ως δομική μονάδα αντικαθιστώντας ένα σύνολο διαδικασιών για τις οποίες έχει σχεδιαστεί. Συνεπώς, αντιμετωπίζει δυσκολία στην αποκωδικοποίηση της λειτουργίας του εργαλείου, αφού δεν έχει αναπτύξει την ικανότητα αφαιρετικών διαδικασιών που είναι αναγκαίες για την εφαρμογή του εργαλείου.

Μέσω της διαδικασίας **συνδέει την έννοια του άξονα συμμετρίας με την κατασκευή των μέσων** των απέναντι πλευρών του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Ταυτόχρονα, αντιλαμβάνεται ότι οι κορυφές είναι συμμετρικές ως προς το μέσο της πλευράς. Κατά συνέπεια η μαθήτρια μέσω της εφαρμογής του προσαρμ. εργαλείου **συσχετίζει** τις πρωτεύουσες και δευτερεύουσες ιδιότητες του σχήματος.

Μέσω του εργαλείου ανάκλασης

……

222.Ερ: *Ποιοι είναι άξονες συμμετρίας* (του ρόμβου);
223.Μ12: *Οι δυο διαγώνιοι του σχήματος* !
*224.*Μ12: *Γιατί ξέρουμε ότι στον ρόμβο οι διαγώνιες διχοτομούνται, άρα αφού διχοτομούνται είναι συμμετρικά τα δυο αυτά* …

……

Το επιχείρημα της Μ12 στο [224] επιβεβαιώνει ότι η μαθήτρια συνδέει την έννοια της αξονικής συμμετρίας του ρόμβου με την έννοια της διχοτόμησης των διαγωνίων του και επομένως με την έννοια της συμμετρίας ως προς κέντρο. Η μαθήτρια δε διατυπώνει την ιδιότητα της καθετότητας των διαγωνίων αλλά της διχοτόμησης τους, όπως είχε κάνει και σε προηγούμενο σημείο της ερευνητικής διαδικασίας.

……

237.Μ12: *Και εγώ το ίδιο θα έκανα δηλαδή έτσι θα έκανα χ και θα τα ένωνα*
238.Ερ: *Και για το ορθογώνιο θα έκανες το ίδιο;*
*239.*Μ12: *Όχι, θα μου πετύχαινε ρόμβος !*

……

Στο σημείο [237-39] διατυπώνει άτυπα την ιδιότητα της διχοτόμησης των διαγωνίων του ρόμβου, επομένως δεν έχει κατασκευάσει το χαρακτήρα σήματος του ρόμβου.

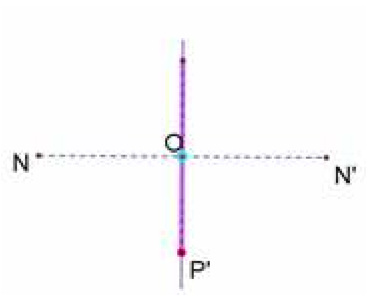
Ανάπτυξη ικανότητας δομικής ανάλυσης – διπλή (/πολλαπλή) ερμηνεία γεωμετρικών αντικειμένων

Μέσω του προσαρμ. εργαλείου

Η μαθήτρια **αναπτύσσει την ικανότητα κατανόησης των ιδιοτήτων** του ρόμβου στο [299-310] προκειμένου να κατασκευάσει ένα ρόμβο από τις ιδιότητες του.

……

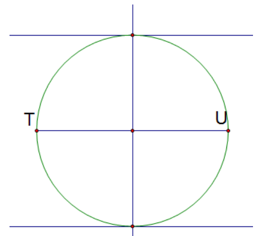
243.Κατασκευάζει ένα ευθύγραμμο τμήμα με χρήση του προσαρμ. εργαλείου.
244.Εφαρμόζει το εργαλείο να μοιάζει κάθετο στο τμήμα.
245.Ερ: *Πως ξέρεις ότι τώρα είναι κάθετο;*
246.Κάνει αναίρεση και επιστρέφει στο πρώτο βήμα.
247.Μ12: *Τότε να φέρω κάθετη εδώ.*
248.Μ12: *Θα φέρω κάθετη σ΄ αυτό… . και σ΄ αυτό* (σταματάει)
249.Ερ: *Κάνε ρόμβο.*
250.Μ12: *Και το ρόμβο, έτσι θα τον έκανα με τις διαγωνίους.*
251.Μ11: *Θα συνεχίσω εγώ.*
252.Η Μ11 εφαρμόζει το εργαλείο πάνω στην κάθετη
253.Μ12: *Το έχω, το έχω!*
*254.*Μ11: *Είναι ρόμβος!*



Σχήμα 4.118. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [243-254]

……

279.Ερ: *Τι θέλεις να κάνεις;*
280.Μ12: *Ένα ευθύγραμμο τμήμα ίσο με το TU.*
281.Μ11: *Με τον κύκλο!*
282.Η Μ12 κατασκευάζει τον κύκλο, τοποθετεί σημεία στις τομές με τον κύκλο και ονομάζει τα σημεία.
*283.*Μ12: *Ε, μετά θα πάρουμε πάλι …*
284.Μ11: *Ευθύγραμμα τμήματα*
285.Η Μ12 κατασκευάζει δυο κάθετες και παράλληλες προς την TU.
286.Μ11: *Τι κάνεις;* !
287.Μ12: *Όχι!! Ναι –ναι ! αυτά εδώ να τα ενώσουμε έτσι και τελειώσαμε*!
288.Ερ: *Γιατί θα είναι τετράγωνο πάλι αυτό το σχήμα* ;
289.Μ11: *Με τι εφαπτόμενες…..*



Σχήμα 4.119. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [279-289]

……

Στο [247-248] η Μ12 επιχειρεί να αντιστρέψει τις ενέργειες κατασκευής αξόνων συμμετρίας, διατυπώνοντας **την ιδιότητα της καθετότητας των διαγωνίων**, σημείο εννοιολογικής βελτίωσης της μαθήτριας. Η Μ12 δε διατυπώνει λεκτικά την ιδιότητα της καθετότητας των διαγωνίων του ρόμβου σε προηγούμενα σημεία της έρευνας. Από τις ενέργειες της να κατασκευάσει κάθετη στο μέσο του τμήματος, συμπεραίνεται ότι ανακαλεί τη νοητική εικόνα των διαγωνίων του ρόμβου που έχει κατασκευάσει στην **πρώτη φάση** της έρευνας. Επομένως, μέσω των συνδεόμενων αναπαραστάσεων που κατασκευάζει κατά την διάρκεια της διαδικασίας **αναπτύσσει την ικανότητα να μεταφράσει μια ιδιότητα του σχήματος σε εικονική αναπαράσταση**. Για παράδειγμα στο [376] (δείτε Μ12.4) αναπτύσσει ένα επιχείρημα, διατυπώνοντας την ιδιότητα της καθετότητας του ρόμβου για να επιχειρηματολογήσει.

Στο [282] συνδέει την κατασκευή του τετραγώνου με τη διαδικασία κατασκευής των αξόνων συμμετρίας στο τετράγωνο διαδικασία που είχε ολοκληρωθεί στην προηγούμενη φάση.

Ολοκληρώνει μια κατασκευή τετραγώνου, χρησιμοποιώντας μια σύνθεση εργαλείων (καθέτου, κύκλου και του προσαρμ. εργαλείου). Η μαθήτρια κατασκευάζει την καθετότητα των διαγωνίων και δυσκολεύεται να αποκωδικοποιήσει την ισότητα των διαγωνίων με χρήση εργαλείου την οποία κατανοεί σε συνεργασία με την Μ11. Μέσω της διαδικασίας έχει κατασκευάσει το σχήμα του τετραγώνου από τις ιδιότητες του, επομένως έχει αποκτήσει την ικανότητα να αντικαταστήσει το σχήμα με ένα σύνολο ιδιοτήτων. Επομένως, έχει κατασκευάσει **το χαρακτήρα σήματος του τετραγώνου**.

Μέσω του εργαλείου σχολιασμού + συρσίματος

………

356.M12: *Αυτή (IJ) είναι ίση με αυτή (JL) κάτω και αυτή (BI) είναι ίση με … όχι;*

357.Την παρότρυνα να συνεχίσει .

358. Ερ: *Πως το ξέρουμε;.*

359.M12: *Αυτή (BD) είναι διαγώνιος του μεγάλου και αυτή (EC) την διχοτομεί… και αφού αυτό είναι το μισό της HA, τότε IJ=JL και το BI=LD.*

*360.*Ερ: *Δηλαδή, σχυρίζεσαι ότι το I είναι το μέσο της BJ;*

361.M12: *Όχι! ότι οι παράλληλες ορίζουν ίσα τμήματα και ξεκινάει πάλι αυτό το τμήμα ίσο με αυτό δείχνοντας βιαστικά στην οθόνη, δηλαδή το IJ=JL και το KJ=JM.*

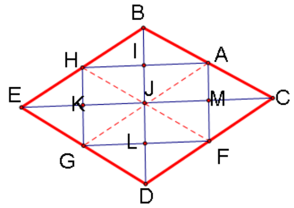
362.Ερ: *Για να το αλλάξουμε λίγο* **..***πάλι ρόμβος είναι έτσι;*

363.M11: *Δηλαδή, ότι είναι μεσοπαράλληλη του μεσαίου.*

364.M12: *Ναι, του ορθογωνίου.*

*365.*Ερ: *Δηλαδή, τι είναι;*

366.M12: *Κέντρο … άξονας συμμετρίας δείχνοντας τη BD.*



Σχήμα 4.120. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [356-366]

…… …………………..

Η αιτιολόγηση της M12 στο [360] είναι βασισμένη στο διάγραμμα αλλά και σε νοητικούς μετασχηματισμούς που η μαθήτρια έχει αποκτήσει την ικανότητα να κάνει. Υπονοεί την παραλληλία της πλευράς του ορθογωνίου με την διαγώνιο του ρόμβου (η HA είναι παράλληλη και ίση με το μισό της διαγωνίου EC) και ισχυρίζεται ότι η διαγώνιος (BD) διχοτομεί την πλευρά του ορθογωνίου (HA) το οποίο είναι αποτέλεσμα της οπτικοποίησης από το διάγραμμα. Η αιτιολόγηση της περιλαμβάνει μετασχηματισμούς αντικειμένων (για παράδειγμα ο άξονας BD **αρχικά ερμηνεύεται ως στοιχείο του ρόμβου**, στη συνέχεια ότι διχοτομεί το HA και στη συνέχεια ως άξονας του ορθογωνίου. <u>Επομένως, **έχει αποκτήσει την ικανότητα να αναλύει δομικά ένα σχήμα και να αλλάζει ρόλους** (Duval, προσωπική επικοινωνία 3-8-2010) στα αντικείμενα</u>. Η μαθήτρια «βλέπει» διαφορετικές δομές μέσα στο διάγραμμα, αν και πρόκειται για ένα ειδικό παράδειγμα η αιτιολόγηση της είναι βασισμένη σε χρήση μετασχηματισμών και λογικών συμπερασμάτων της προηγούμενης φάσης.

Συγκεκριμένα, έχει συνδέσει το τυχαίο περιστατικό με την κατασκευή των αξόνων συμμετρίας στο ορθογώνιο. Επομένως, η απάντηση της (ισότητα τμημάτων) προκύπτει σε σχέση με την έννοια του συμμετρικού ως προς άξονα σχήματος του ορθογωνίου **που έχει κατασκευάσει στη δεύτερη φάση** της ερευνητικής διαδικασίας.

Ανάπτυξη δυναμικής οπτικοποίησης

<u>Μέσω του εργαλείου κατασκευής παραλλήλων/καθέτων</u>

……

27. Ερ: *Γιατί είναι παραλληλόγραμμο ;*
28. Μ12: *γιατί είναι παράλληλες !*

……

Στο [28] αιτιολογεί με την ιδιότητα της παραλληλίας του σχήματος, μέσω ενός **ελλιπούς ορισμού** του παραλληλογράμμου, σε αλληλεπίδραση με την Μ2 και του μετασχηματισμού του δυναμικού διαγράμματος που προέρχεται λόγω της χρήσης του εργαλείου της καθέτου.

<u>Μέσω του εργαλείου ανάκλασης, εμφ. απόκρυψης και συρσίματος</u>

……

121.Ερ: *Γιατί συμβαίνει αυτό;*
122.Μ11, Μ2: *Γιατί είναι συμμετρικό.*

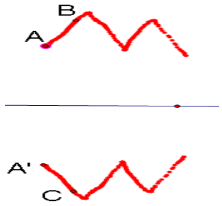
……

Η εμφάνιση /απόκρυψη του ημι-προκατασκευασμένου ανακλώμενου σημείου γνωστικά συνδέεται με την έννοια του συμμετρικού σημείου ως προς άξονα, από την Μ12 στο [122]. Αναπτύσσει **δυναμική οπτικοποίηση** αμέσως **μετά την εμφάνιση** του ανακλώμενου σημείου, αφού, η μαθήτρια **νοητικά σχηματίζει** τις αποστάσεις των σημείων από τον άξονα συμμετρίας. Αποτέλεσμα της δυναμικής οπτικοποίησης είναι η ικανότητα να αντιστρέψει το σχήμα νοητικά (π.χ [128]). Η επίδραση του εργαλείου ανάκλασης στην ανάπτυξη δυναμικής οπτικοποίησης επιβεβαιώνεται και στο [182-184] στο οποίο η μαθήτρια αναγνωρίζει τις ιδιότητες του τραπεζίου, αν και το σχήμα έχει διαφορετικό προσανατολισμό.

<u>Μέσω του εργαλείου ίχνους +συρσίματος</u>

……

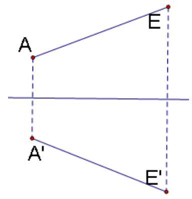
*127.*Ερ: *Αν μετακινήσετε το Α, ώστε να γράψετε ένα γράμμα π.χ το γράμμα Μ τότε το Α΄ τι γράμμα θα σχηματίσει;*
*128.*Μ12: *το W*
*129.*Ερ: *Αν πάρω αυτά τα δυο σημεία Β, C;*
130.Μ12: *Ισαπέχουν από την αρχή.*



……

Σχήμα 4.121. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [127-130]

134.Ερ: *Το τμήμα ΑΕ τι σχέση έχει με το τμήμα Α'Ε';*
135.Μ12: *Είναι συμμετρικό.*
*136.*Μ12: ……*Δηλαδή, το σημείο πάνω στο ευθύγραμμα τμήματα απέχει ίση απόσταση από την (ε).*



………

Σχήμα 4.122. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [134-136]

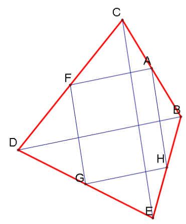
Στο [130] μετά την επίδραση του ίχνους και του συρσίματος κατανοεί την ίση απόσταση των σημείων από τον άξονα. Επομένως, σε αλληλεπίδραση με την Μ11 διατυπώνει μια **έννοια-εν-δράσει**, αποτέλεσμα **επαγωγικού συλλογισμού** («Ισαπέχουν από την αρχή») η οποία είναι συνδυασμός τυπικής και άτυπης γλώσσας. Η περιγραφή της ισότητας των χαρακτηριστικών του σχήματος της Μ12 έχει αντιληπτικό χαρακτήρα με χρήση τυπικών και άτυπων εκφράσεων (π.χ ισαπέχουν από την αρχή) χαρακτηριστικό επιπέδου 2.1 (Battista, 2007). Χρησιμοποιεί έννοιες και όρους που έχει διδαχθεί στην τάξη. Η έκφραση της Μ12 στο [136] θα μπορούσε να χαρακτηριστεί **ανεπαρκής ορισμός** που μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής: «ένα τμήμα είναι συμμετρικό [όταν κάθε] σημείο [και το αντίστοιχο του] πάνω στα τμήματα αρχικού –ειδώλου **απέχει ίση απόσταση από την ε».**

Η μαθήτρια στο [135-136] μέσω της διαδικασίας συσχετίζει τις έννοιες της συμμετρίας, απόστασης και ισότητας των συμμετρικών αντικειμένων.

<u>Μέσω των ΣΟΕΑ Γ φάσης</u>

………

329. Ερ: *Για να είναι ένα ορθογώνιο τι πρέπει να ισχύει στο αρχικό σχήμα;*
330.Μ12: *Οι πλευρές του να είναι παράλληλες στις διαγώνιες*
331.Μ11: *Αυτές δεν έρχονται κάθετα;*
*332.*Ερ. : *Ποιες ;*
333.Μ11: *Οι διαγώνιες … να είναι κάθετες μεταξύ τους !*
334. Ερ: *Αρκεί αυτή η συνθήκη;*
*335.*Μ12: *Όχι !*
*336.*Μ2: *Άμα είναι παραλληλόγραμμο !*



………

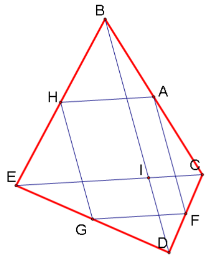
Σχήμα 4.123. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [329-336]

Στο [329] διατυπώνει σε συνεργασία με την Μ11 και την Μ2, έναν **αυθαίρετο οικονομικό ορισμό** σύνθεση των απαντήσεων «οι πλευρές του [εσωτερικού τετραπλεύρου] να είναι παράλληλες στις διαγώνιες [του εξωτερικού τετραπλεύρου] [οι οποίες πρέπει] να είναι κάθετες μεταξύ τους», για το ορθογώνιο στο εσωτερικό. Ο ορισμός συσχετίζει τις ιδιότητες των διαγωνίων, επομένως οι μαθήτριες έχουν αποκτήσει **μεταγνωστική ικανότητα** λόγω των δραστηριοτήτων της προηγούμενης φάσης της ερευνητικής διαδικασίας.

………

347.Ερ: *Τι πρέπει να είναι οι HA, AF για να είναι το σχήμα ρόμβος;*
348.Μ12: Α!! πρέπει οι διαγώνιες να είναι ίσες.
349. Σύρουν τις κορυφές για να σχηματίσουν στο εσωτερικό τετράγωνο.
350.Μ12: *αα!! Ναι οι διαγώνιες να είναι ίσες και κάθετες.*

………



Σχήμα 4.124. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [347-350]

Στο [348] διατυπώνει **έναν αυθαίρετο οικονομικό ορισμό** του ρόμβου, σε σχέση με τις διαγώνιες του: «για να είναι ένα σχήμα [που σχηματίζεται από τα μέσα πλευρών τετράπλευρου] ρόμβος πρέπει οι διαγώνιες [του τετράπλευρου] να είναι ίσες». Αυτό αποτελεί ένδειξη ότι ο ρόμβος έχει αποκτήσει **το χαρακτήρα σήματος.** Η Μ12 στο [350] διατυπώνει έναν **αυθαίρετο οικονομικό ορισμό** που αφορά το εσωτερικό σχήμα του τετραγώνου. Συγκεκριμένα, η μαθήτρια διατυπώνει ότι «[για να είναι το σχήμα στο εσωτερικό τετράγωνο] πρέπει οι διαγώνιες του εξωτερικού σχήματος να είναι ίσες και κάθετες».

Ο ορισμός της Μ12 είναι συνδυασμός των απαντήσεων που η μαθήτρια έχει κατασκευάσει στα σημεία [333] λόγω της συζήτησης με την Μ11 (να είναι κάθετες μεταξύ τους), της απάντησης της στο [348] (πρέπει οι διαγώνιες να είναι ίσες) και της **ιεράρχησης του σχήματος του τετραγώνου ως ειδική κατηγορία ρόμβου και ορθογωνίου**. Επομένως σταδιακά απέκτησε την ικανότητα σύνδεσης αναπαραστάσεων νοητικά και στη συνέχεια την διαδικαστική και εννοιολογική ικανότητα να τις διαχειρίζεται.

Ανάπτυξη ικανότητας διατύπωσης επαγωγικών και απαγωγικών επιχειρημάτων

<u>Μέσω του εργαλείου ανάκλασης</u>

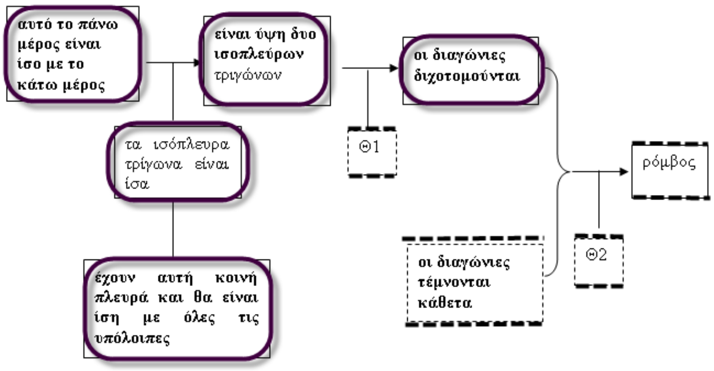
………

61. M12: *Γιατί οι διαγώνιες διχοτομούνται.*
62. M12: *Γιατί αυτό το πάνω μέρος είναι ίσο με το κάτω μέρος*
63. Ερ: Γιατί είναι;
64. M12: *Γιατί είναι ύψη δυο ισοπλεύρων τριγώνων και τα ισόπλευρα τρίγωνα είναι ίσα*
65. Ερ: *Και γιατί τα ισόπλευρα είναι ίσα;*
66. M12: *Γιατί έχουν αυτή κοινή πλευρά και θα είναι ίση με όλες τις υπόλοιπες.*

....

Στο [61-66] αιτιολογεί με διαδοχικά **θεωρήματα-εν-δράσει.** Στην αιτιολόγηση της χρησιμοποιεί στοιχεία του διαγράμματος, διατυπώνοντας ιδιότητες για να αποδείξει ότι το σχήμα είναι παραλληλόγραμμο. Για να ολοκληρώσει τον ισχυρισμό της χρησιμοποιεί συνδυασμό **άτυπων και τυπικών δηλώσεων** σε μια **αλυσίδα απαγωγικών επιχειρημάτων.** Αναλυτικότερα:

Η φράση «το πάνω μέρος είναι ίσο με το κάτω μέρος» προέρχεται από την οπτικοποίηση του διαγράμματος λόγω της ανάκλασης του ισοπλεύρου, το οποίο στη συνέχεια επιχειρεί να αιτιολογήσει με τυπικό τρόπο. Στο [64] η έκφραση «είναι ύψη δυο ισοπλεύρων τριγώνων» δεν επιβεβαιώνεται με κάποια κατασκευαστική διαδικασία. Επομένως, η μαθήτρια υποθέτει την ιδιότητα του ύψους και το επιχείρημα της είναι **απαγωγικού χαρακτήρα**. Δε χρησιμοποιεί την καθετότητα των διαγωνίων ως κριτήριο για να αποδείξει ότι είναι ρόμβος.



Σχήμα 4.125. Ανάλυση του επιχειρήματος της M12

Θ1: Τα ύψη ισοπλεύρου τριγώνου είναι και διάμεσοι του τριγώνου (και διχοτόμοι των πλευρών του)

Επιχειρηματολογεί με αλληλουχία εκφράσεων και το επιχείρημα της **υποστηρίζεται** από το διάγραμμα. Επομένως, η μαθήτρια οπτικοποιεί την ισότητα των τμημάτων. Συμπεραίνεται ότι μέσω του επιχειρήματος της κατασκευάζει μια ιδιότητα του ρόμβου ως παραλληλογράμμου. Η αιτιολόγηση της στηρίζεται στο κριτήριο του παραλληλογράμμου, επομένως η μαθήτρια μέσω της διαδικασίας **ιεραρχεί το ρόμβο ως ειδικότερο παραλληλόγραμμο**.

Μέσω του εργαλείου ανάκλασης+συρσίματος

....

*136.*Μ12: ……*Δηλαδή, το σημείο πάνω στο ευθύγραμμα τμήματα απέχει ίση απόσταση από την (ε).*

....

Στο [136] (δείτε Μ12.3) κατασκευάζει ένα **ΣΕΔ** του εργαλείου ανάκλασης που εξωτερικεύεται με το **θεώρημα-εν-δράσει** (το σημείο πάνω στο ευθύγραμμα τμήματα απέχει ίση απόσταση από την ε), καθώς οδηγείται σε μια **γενίκευση** της ιδιότητας του σημείου. Αναπτύσσει επομένως **επαγωγικό συλλογισμό.** Η διατύπωση στο [136] ως αιτιολόγηση βασίζεται σε μετασχηματισμούς οι οποίοι λόγω της οπτικοποίησης που προκύπτει από το σύνθετο μετασχηματισμό του συρσίματος και του ίχνους ελέγχεται αρκετές φορές. Επομένως, μπορεί να χαρακτηριστεί ως **εμπειρικό αποδεικτικό σχήμα** σύμφωνα με τον Balachef (1982, 1988b).

Μέσω του προσαρμ.εργαλείου+συρσίματος

....

183.Ερ: *Τι σχήμα είναι αυτό;*
184.Μ1: *Παραλληλόγραμμο… γιατί είναι οι απέναντι πλευρές του παράλληλες.*
185.Μ11: *Γιατί οι διχοτόμοι είναι ίσες … γιατί οι διαγώνιες του … ..διχοτ …*
186.Μ12: *Οι διαγώνιες διχοτομούνται* (ταυτόχρονα με την Μ2).

....

Η Μ12 στο [186] αιτιολογεί με την ιδιότητα-κριτήριο του παραλληλογράμμου λόγω της οπτικοποίησης των τεμνόμενων διαγωνίων. Το εργαλείο στην περίπτωση αυτή λειτουργεί ως δομική μονάδα (building block), αφού είναι σχεδιασμένο να φέρει εγγενώς ως αναπαραστατικό μέσο κάποιες ιδιότητες.

Στο [223-24] (δείτε Μ12. 1) διατυπώνει ένα ανεπαρκές επιχείρημα σε συνεργασία με την Μ11. Από τη σύγκριση των επιχειρημάτων της Μ12 στο [62-64] και στο [223] διαπιστώνεται ότι η μαθήτρια έχει **αναπτύξει την ικανότητα γλωσσικού συμβολισμού και σύνδεσης των εννοιών** (π.χ και έχει συνδέσει την έννοια της διχοτόμησης των διαγωνίων με την έννοια της αξονικής συμμετρίας).

Μέσω του εργαλείου σχολιασμού +συρσίματος

....

329. Ερ: *Για να είναι ένα ορθογώνιο τι πρέπει να ισχύει στο αρχικό σχήμα;*
330.Μ12: *Οι πλευρές του να είναι παράλληλες στις διαγώνιες.*

....

Στο [329-330] αναπτύσσεται συζήτηση με θέμα τη συνθήκη που πρέπει να ισχύει για να είναι το εσωτερικό τετράπλευρο ορθογώνιο. Η Μ12 σε τυπική γλώσσα διατυπώνει ένα **απαγωγικό**

επιχείρημα, αποτέλεσμα (α) της προηγούμενης συζήτησης και (β) της οπτικοποίησης της καθετότητας, λόγω του σχολιασμού του διαγράμματος με χρωματισμό.

<u>Μέσω του εργαλείου σχολιασμού +συρσίματος</u>

....

337.Ερ: *Τι πρέπει να ισχύει ώστε να σχηματίζεται ρόμβος;*
338.Η Μ11 αλλάζει και πάλι το σχήμα σύροντας την κορυφή
339.Μ2: *Μοιάζει να μην έχει όλες τι πλευρές του ίσες.*
340.Μ11: *οι διαγώνιες ούτε κάθετες είναι, ούτε διχοτομούνται ... να μην είναι ίσες;*
341.Ερ: *Το ΗΑ με πόσο ισούται;*
*342.*Μ11: *Με το μισό της διαγωνίου EC*
343. Ερ: *Το AF;*
344. Μ2: *Με το μισό της BD.*

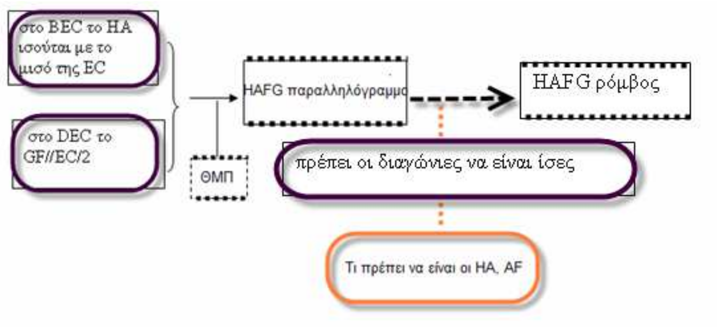
……………………………………..

347.Ερ: *Τι πρέπει να είναι οι HA, AF για να είναι το σχήμα ρόμβος;*
348.Μ12: Α!! πρέπει οι διαγώνιες να είναι ίσες.
349. Σύρουν τις κορυφές για να σχηματίσουν στο εσωτερικό τετράγωνο.
350.Μ12: *αα!! Ναι οι διαγώνιες να είναι ίσες και κάθετες.*

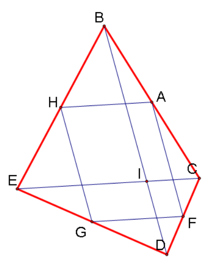
....

Στο [337] αναπτύσσεται συζήτηση με θέμα την συνθήκη που πρέπει να ισχύει για να είναι το εσωτερικό σχήμα ρόμβος. Η απάντηση της Μ12 στο [350] είναι συνδυασμός της προϋπάρχουσας γνώσης του ρόμβου (π.χ της ισότητα των πλευρών του η οποία προέκυψε στην πρώτη φάση της διαδικασίας), του θεωρήματος των μέσων πλευρών (ΘΜΠ) και νοητικών μετασχηματισμών.

Το διάγραμμα στη συνέχεια είναι μια ανάλυση του επιχειρήματος της, μέσω του μοντέλου Toulmin. Το ερώτημα είναι το **υποστήριγμα** και το θεώρημα που υπονοείται είναι **η εγγύηση** στον **ισχυρισμό** της Μ12 ως αποτέλεσμα της συνεργασίας της ομάδας.

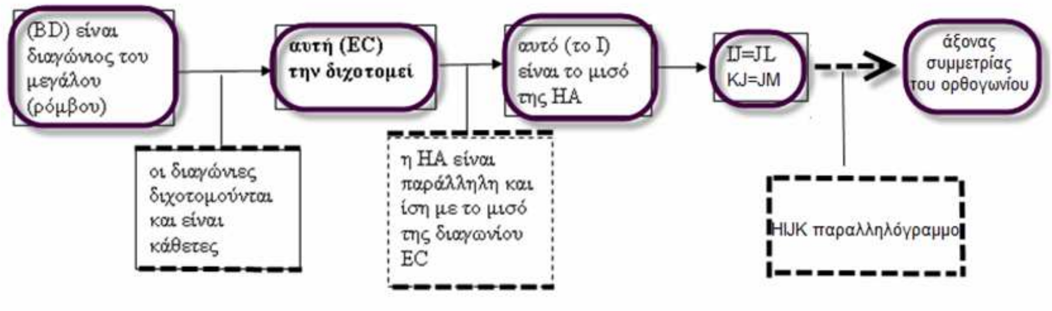


Σχήμα 4.126. Ανάλυση του επιχειρήματος της Μ12



Σχήμα 4.127. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [337-350]

Η διατύπωση της Μ12 στο [350] δείχνει την **ικανότητα ιεράρχησης** των σχημάτων μέσω των ιδιοτήτων των διαγωνίων του εξωτερικού σχήματος. Επομένως, η μαθήτρια αναπτύσσει **παραγωγικό συλλογισμό**. Η απόδειξη της στο [359] μπορεί να θεωρηθεί **εμπειρική απόδειξη** στην περίπτωση του **γενικού παραδείγματος**. Μπορούμε να αναλύσουμε την δομή του επιχειρήματος της Μ12 με την διαγραμματική αναπαράσταση στη συνέχεια μέσω του μοντέλου Toulmin:



Σχήμα 4.128. Ανάλυση του επιχειρήματος της Μ12

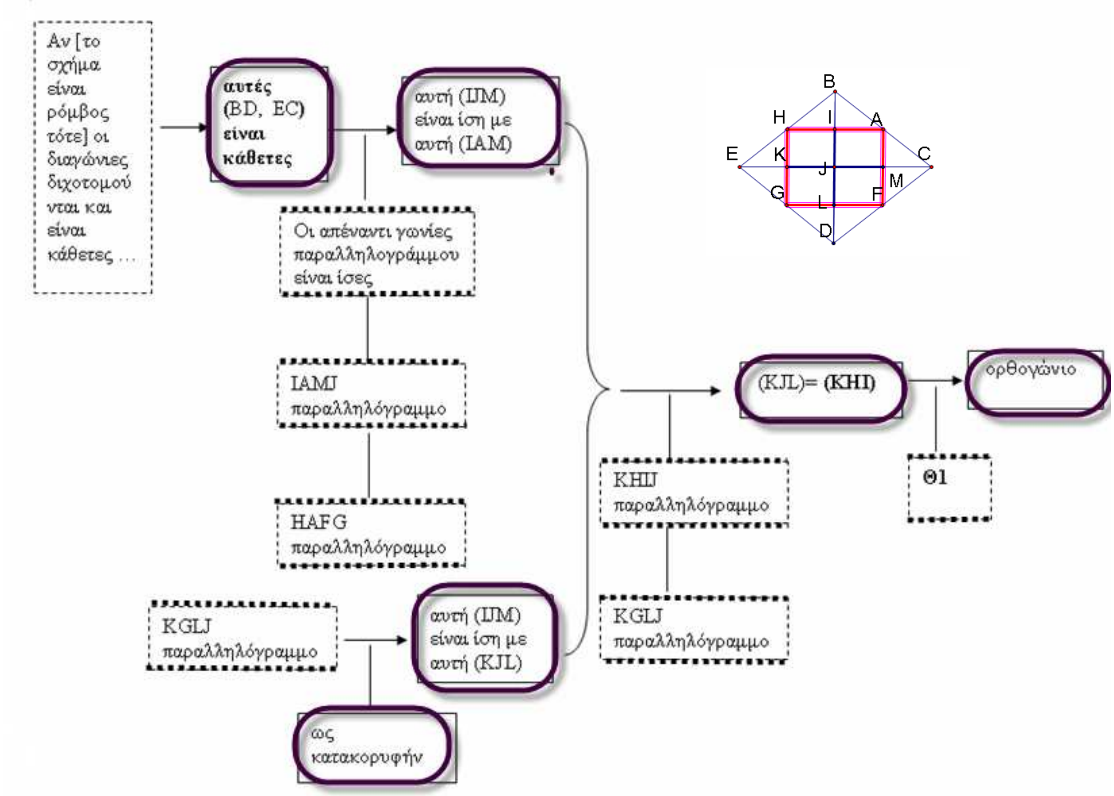
Οι έννοιες «**οι παράλληλες ορίζουν ίσα τμήματα**» που διατυπώνει η Μ12 στο [435] και «[ο EC] είναι μεσοπαράλληλη του εσωτερικού σχήματος» που διατυπώνει η Μ11 στο [437] είναι προτάσεις που προκύπτουν στη συνέχεια. Συνεπώς, μέσω των συμπερασματικών κανόνων, περνούν από μια πρόταση σε μια νέα πρόταση.

Στο [374-385] η Μ12 αναπτύσσει ένα ακόμα **επιχείρημα**. Στην αιτιολόγηση της αναπτύσσει **παραγωγικό συλλογισμό**.

....

*375.*Ερ: *Γιατί είναι ορθές;*
*376.*Μ12: *Γιατί, αφού αυτές είναι κάθετες αυτή (IJM) είναι ίση με αυτή (IAM), ως γωνίες παραλληλογράμμου και αυτή (IJM) ίση με KJL ως κατακορυφήν και αυτή πάλι ίση με τη απέναντι της (KHI)…* .
377.Ερ: *Άλλον τρόπο έχετε ;*
*378.*Μ12: *Ναι, αυτό (HA) είναι ίσο με το μισό της διαγωνίου (EC) και GF ίση με το μισό της διαγωνίου και είναι αυτή (HG) και η (AF) η πλευρά ίση με το μισό της διαγωνίου (BD) και αυτή ίση με ..Άρα οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες και ίσες.*
379.Μ2: *Αυτό δεν είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο;*
380.Μ11: *Πρέπει να έχει μια γωνία ορθή ή με τις διαγώνιες.*
*381.*Ερ: *Είναι αυτή η διαγώνιος ίση με αυτή;*
382.Μ11: *Μήπως είναι μεσοπαράλληλος του εξωτερικού; ….* είναι παράλληλες και ίσες *με τις πλευρές του ρόμβου… το εσωτερικό είναι τετράγωνο*
383.Ερ. : *Γιατί;*
384.Μ2: *Και τετράγωνο και ρόμβος.*
385.Ερ. : *Γιατί είναι τετράγωνο;*
*386.*Μ11: *Έχει και τις πλευρές ίσες και … οι διαγώνιες (μέσα) είναι ίσες και τέμνονται κάθετα.*

………



Σχήμα 4.129. Ανάλυση του επιχειρήματος της Μ12

Η αιτιολόγηση της στηρίζεται σε αφηρημένες διατυπώσεις ιδιοτήτων και σχέσεων μεταξύ των ιδιοτήτων, στο οποίο αν και βασίζεται σε νοητικούς μετασχηματισμούς, πρόκειται για παράδειγμα που είναι αντιπροσωπευτικό μιας κλάσης. Η μαθήτρια υπονοεί πολλές προτάσεις, επομένως η αιτιολόγηση της είναι μεταξύ **γενικού παραδείγματος και πειράματος σκέψης** (Balachef, 1982, 1988b).

4.2.13.Μ13-ΟΜΑΔΑ Β

Ανάπτυξη ικανότητας μετατροπής μεταξύ αναπαραστάσεων μέσω γνωστικών συγκρούσεων

<u>Μέσω του εργαλείου σημείου +πειραματικού συρσίματος</u>

Ο Μ13 κατασκευάζει ένα σχέδιο παραλληλογράμμου, επομένως μέσω της κατασκευής προσπαθεί να ικανοποιήσει μόνο τους **οπτικούς περιορισμούς** του σχήματος. Το σύρσιμο μιας κορυφής προκαλεί τη **γνωστική σύγκρουση** μεταξύ αυτού που γνωρίζει και αυτού που αντιμετωπίζει στην οθόνη και κατανοεί ότι το σχέδιο του είναι μεταβλητό.

………

20. Ερ: *Από πιο σημείο σε ποια ευθεία θα φέρουμε παράλληλη;*
21. M7: *Τη BC.*
22. Ερ: *Από ποιο σημείο;*
23. M7: *Το A.*
24. M13: Το *ίδιο θα κάνουμε και με την άλλη.*
25. Ο M13 επιλέγει το σημείο και το ευθ. τμήμα και κατασκευάζει την άλλη παράλληλη.

……

32. Ερ: *Με ποιον άλλον τρόπο θα μπορούσε να γίνει;*
33. *M7 - M13: Με παράλληλη από την A στην BC.*

……

Στο [24] κατανοεί τη **σειριακή και θεσιακή χρήση των εργαλείων** του λογισμικού για την κατασκευή της παράλληλης και οδηγείται σε άτυπη λεκτική διατύπωση. Αλλάζει την επιλογή **του προσανατολισμού του σημείου** από το οποίο φέρνει την παράλληλη ευθεία, μοντελοποιώντας **τη λεκτική αναπαράσταση σε εικονική**.

Μέσω του παραμετρικού εργαλείου+ πειραματικού συρσίματος

Ο Μ13 βρίσκεται σε **κατάσταση ανισσοροπίας.** Ο μαθητής προσπαθεί να συνδέσει τη διαδικαστική γνώση της χρήσης των εργαλείων του λογισμικού, με τη χρήση των εργαλείων στα στατικά μέσα, προκειμένου να κατασκευάσει ένα ισοσκελές τρίγωνο στο [161]. Η ακολουθία διατυπώσεων στο [153-155] είναι συνέπεια της γνωστικής σύγκρουσης που ο μαθητής αντιμετωπίζει αναφορικά με τις ενέργειες κατασκευής ίσης ακτίνας κύκλου.

……

90. Ερ: Ισόπλευρο πως μπορούμε να κάνουμε;
91. Μ8: Με rotate και 60° περιστροφή!
92. Μ13: Η ακτίνα να είναι ίση με το μέσο της ... .
93. Μ7: Μεγαλύτερη από το μέσο.
94. Ερ: Τότε θα κάνετε ισόπλευρο;
95. Μ13: Ισοσκελές.
96. Ερ: Δηλαδή πως θα το κάνεις;
97. Μ7: Με κέντρο το Α και ακτίνα μεγαλύτερη του μισού, και με το κέντρο το Β και ακτίνα μεγαλύτερη του μισού.
98. Ερ: Δηλαδή, θα είναι άνισοι αυτοί οι δυο κύκλοι;
99. Μ13: Με τον διαβήτη έχουμε το ίδιο άνοιγμα και μπορούμε να το μετρήσουμε, εδώ πως θα το κάνουμε;
100. Μ13: Ίσως αν μπορούσαμε να μετρήσουμε τα μήκη τότε το αποτέλεσμα θα ήταν εύκολο.
101. Μ13: Να βρούμε το μέσο και στη συνέχεια να μετρήσουμε πόσο απέχει από το μέσο ο πρώτος κύκλος και να κατασκευάσουμε τον άλλον.
102. Ερ: Πως κατασκευάζουμε έναν κύκλο με κέντρο το Β και ακτίνα ίση με το AC;
103. Μ13: Να τα επιλέξουμε και από το μενού.
104. Κατασκευάζω ένα τμήμα αυθαιρέτου μήκους πάνω στην οθόνη.
105. Ερ: Πόσο πρέπει να είναι αυτό τμήμα ...
106. Μ7: Μεγαλύτερο από το μέσο!
107. Ο Μ13 επιλέγει το παραμετρικό τμήμα και κατασκευάζει τον δεύτερο κύκλο. Στην συνέχεια αυξομειώνει το τμήμα AC.
108. Μ13: Τώρα αυτό τι είναι ισοσκελές ή ισόπλευρο;
109. Ερ: Τι παρατηρείτε;
110. Μ13: Για να γίνει ισόπλευρο τι ακτίνα θα έχει;
111. Ερ: Εσύ να μου πεις, πόσο θα είναι η ακτίνα;
112. Μ13: Εγώ είπα ίση με το μέσο
113. Μ7: 'Ιση με την πλευρά! γιατί όταν είναι ισόπλευρο είναι ίσες οι πλευρές .

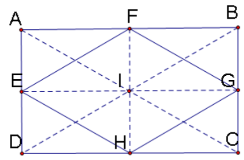
....

Μέσω των ΣΟΕΑ γ φάσης +θεωρητικού συρσίματος

Αναλυτικότερα: στο [99] ο Μ13 έχει κατανοήσει μέσα από νοητική επεξεργασία τη μη δυνατότητα ολοκλήρωσης της διαδικασίας κατασκευής ίσου κύκλου με χρήση του δυναμικού εργαλείου μέτρησης. Επομένως, **δεν έχει ικανότητα μετατροπής της νοητικής αναπαράστασης σε εικονική** λόγω των εργαλειακών και γνωστικών εμποδίων που παρουσιάζονται. Αυτό στη συνέχεια της διαδικασίας μεταβάλλεται, μέσω της συνεργασίας με την ομάδα (π.χ την Μ7 στο [113]). Κατασκευάζει τη σύνδεση της έννοιας του ρόμβου με την έννοια του ισοσκελούς μέσω του εργαλείου ανάκλασης, όπως εμφανίζεται αργότερα στο [315]. Η τεχνική του σχολιασμού του διαγράμματος και το σύρσιμο των κορυφών του σχήματος βοηθούν τον Μ13 στο [313] να αναγνωρίσει το σχήμα του ισοσκελούς, στοιχείο αναγκαίο για να αποδειχθεί ότι το εσωτερικό σχήμα είναι ρόμβος.

……

307. Ερ: Γιατί τέμνονται κάθετα;
308. Μ13 : οι FH,EG μήπως είναι άξονες συμμετρίας;
309. Ερ: Δηλαδή;
310. Μ7: Αφού είναι άξονες συμμετρίας οι FH, EG, άρα τέμνονται κάθετα οι διαγώνιοι, άρα είναι μια ιδιότητα του ρόμβου.
311. Μ7 : Και επίσης EI=IH (μάλλον ήθελε να πει IG)
312. Μ7: Το ADB EF//=DB/2, BCD GH//=…
313. Μ13: Μήπως το EFG είναι ισοσκελές;
314. Μ8: Μα, δεν είναι ισοσκελές.
315. Μ13: Είναι!
316. Μ7: Πάλι ο ίδιο δεν μπορούμε πούμε; Το αρχικό σχήμα είναι ορθογώνιο, οι διαγώνιοι είναι ίσοι άρα BD=AC άρα οι FG, GH, HF είναι παράλληλες και ίσες με τα μισά των διαγωνίων.



Σχήμα 4.130. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [307-316]

……

Οι συνδεόμενες οπτικές αναπαραστάσεις της β φάσης της διαδικασίας διαμεσολαβούν στη μερολογική κατανόηση του ρόμβου ως σύνθεση ισοσκελών. Επομένως, μέσω της διαδικασίας δημιουργεί **συνδεόμενες αναπαραστάσεις** και ακολουθώντας νοητικούς μετασχηματισμούς μετατρέπει μια **εικονική αναπαράσταση σε λεκτική**. Κατά συνέπεια, οι **συνδεόμενες αναπαραστάσεις των δυναμικών εργαλείων** οδηγούν το μαθητή σε γνωστικές συγκρούσεις και τον ωθούν να αναπτύξει διαδικασίες σκέψης, **διαμεσολαβώντας στην αποκωδικοποίηση της νοητικής εικόνας του σε εικονική και της εικονικής σε λεκτική**.

Ανάπτυξη ικανότητας δομικής ανάλυσης των σχημάτων– διπλή (/πολλαπλή) ερμηνεία γεωμετρικών αντικειμένων

<u>Μέσω του εργαλείου ανάκλασης και πειραματικού συρσίματος</u>

……

118. Ερ Τι σχήμα είναι;
119. Μ8: Τραπέζιο.
120. Μ13 : Η γωνία Α με την Α΄ είναι ίσες.
121. Μ8: Η γωνία Ε=Ε΄.
122. Μ13: ΑΚ=Α΄Κ.
123. Μ13 : Η ευθεία ε είναι ύψος.
124. Μ8: Μεσοκάθετος.

……

128. Ερ: Τι παρατηρείτε ότι συμβαίνει όταν σύρουμε την κορυφή;
129. Μ13: Ισοσκελές.
130. Ερ: Τι ευθεία είναι αυτή;
131. Μ7: Άξονας.
132. Μ13: Ύψος και διάμεσος.

………

Στο [122] διατυπώνει με συμβολικό τρόπο την κατανόηση της ίσης απόστασης του σημείου – ανακλώμενου σημείου του ευθυγράμμου τμήματος σε αλληλεπίδραση με τον Μ8 και το εργαλείο του συρσίματος. Αναγνωρίζει στο [123-132] τον άξονα συμμετρίας ως ύψος και διάμεσο της απόστασης αντικειμένου–ειδώλου (π.χ, του ισοσκελούς τριγώνου, τραπεζίου). Επομένως, το εργαλείο ανάκλασης επιδρά στο μετασχηματισμό της **εικονικής αναπαράστασης σε λεκτική**, καθώς και στην ανάπτυξη επαγωγικού συλλογισμού (ο μαθητής αντιλαμβάνεται μέσω του συρσίματος ότι η ιδιότητα της καθετότητας και ίσης απόστασης των ανακλώμενων σημείων διατηρείται για την αλλαγή σχήματος).

<u>Μέσω του εργαλείου περιστροφής + συρσίματος</u>

………

178. Ερ: Αν θέλαμε να το εκφράσουμε σαν πρόβλημα, τι θα λέγαμε; Βρείτε το συμμετρικό ενός τριγώνου ως προς … ..
179. Μ8: Τη βάση!
180. Μ8: Ως προς άξονα συμμετρίας το DE!
181. Μ13 : Ως προς κέντρο F, το μέσο της DE! (ταυτόχρονα).
182. Μ8: Όταν κάνουμε ως προς άξονα συμμετρίας γίνεται κάθετα!

………

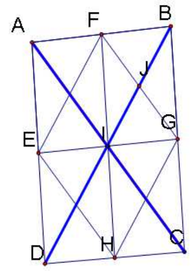
Στο [181] ο Μ13 και η υπόλοιπη ομάδα έρχονται σε **γνωστική σύγκρουση,** αφού προσπαθούν να προσαρμόσουν το γνωστικό σχήμα της συμμετρίας ως προς άξονα στη συμμετρία ως προς κέντρο. Οδηγούνται λόγω της παρερμηνείας που δημιουργείται να θεωρούν τη βάση του τριγώνου και του συμμετρικού του ως προς κέντρο, ως άξονα συμμετρίας. Το σύρσιμο του σημείου της βάσης του τριγώνου ώστε να συμπέσει με τη βάση του συμμετρικού του, διαμορφώνει ένα παραλληλόγραμμο στην οθόνη. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη **μερολογική κατανόηση** του παραλληλογράμμου από τον Μ13. Επομένως, **αναπτύσσει την ικανότητα μετατροπής μεταξύ αναπαραστάσεων εικονικά και λεκτικά**, αναπτύσσοντας την ικανότητα να **αναγνωρίζει τα δομικά μέρη** στα οποία διαχωρίζεται ένα σχήμα. «Η περιγραφή του στηρίζεται στην οπτική αντίληψη προκειμένου να προσδιορίσει τις σχέσεις των σχημάτων [σε άτυπη γλώσσα]» (Battista, 2007, p. 851) (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.1).

<u>Μέσω των ΣΟΕΑ γ φάσης</u>

Σταδιακά αναπτύσσει την ικανότητα να αναγνωρίζει τα στοιχεία του σχήματος, αποδίδοντας τους διαφορετικούς ρόλους.

……

301. Ο Μ13 προσπαθεί να συμπίπτουν τα δυο κέντρα.
302. Μ8: Οι διάμεσοι … … (εννοεί οι μεσοπαράλληλοι)
303. Μ7: Οι διαγώνιοι
304. Μ8: … τέμνονται κάθετα
305. Ερ: Ποιες ;
306. Μ8: Οι FH,EG
307. Ερ: Γιατί τέμνονται κάθετα;
308. Μ13 : Οι FH,EG μήπως είναι άξονες συμμετρίας;

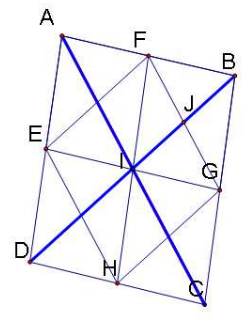


Σχήμα 4.131. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [301-308]

Ο Μ13 **αναγνωρίζει** τους άξονες συμμετρίας του ορθογωνίου στο [308], μια δευτερεύουσα ιδιότητα του ορθογωνίου και τη συσχετίζει με την ιδιότητα –κριτήριο του ρόμβου. Επομένως, ο μαθητής αναγνωρίζει το **διαφορετικό ρόλο** που τα ευθύγραμμα τμήματα παίζουν: αφενός, ως άξονες συμμετρίας του ορθογωνίου και αφ' ετέρου, ως διαγώνιοι του ρόμβου.

……

370. Ερ : Για να είναι το εσωτερικό τετράγωνο;
371. Μ13: Πρέπει να έχει 4 άξονες συμμετρίας
372. Ερ: Γιατί το J είναι το μέσο του FG;
373. Μ7: Γιατί είναι άξονας συμμετρίας!
374. Μ13: Το FG =EF η FG//= AC/2 … αφού το I είναι μέσο άρα και το J είναι μέσο.
375. Ερ: Γιατί FJ//=AI/2;
376. Ερ: Τι σχήμα είναι το FIGB;
377. Μαθητές: Τετράγωνο
378. Μ13: Τώρα κατάλαβα γιατί είναι 4 τετράγωνα!!



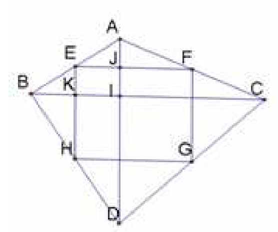
Σχήμα 4.132. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [370-378]

……

Ο Μ13 στο [374] αναγνωρίζει το τμήμα FG ως πλευρά του εσωτερικού τετραγώνου και ως τμήμα που συνδέει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ABC.

……

385. *Ερ : Αν οι διαγώνιες είναι κάθετες τότε τι σχήμα προκύπτει;*
386. *Μ13: Αυτή δεν είναι ορθή γωνία; (δείχνοντας την ΑΙΒ)*
387. *Ερ: Ναι γιατί έχουμε κάθετες*
388. *Μ13: Δε μπορούμε να αποδείξουμε ότι το μικρό αυτό σχήμα είναι ορθογώνιο; ..Αφού έχει μια ορθή γωνία (δείχνει την γωνία των διαγώνιων) και οι πλευρές είναι παράλληλες και ίσες. … Ή αυτή με αυτή (εννοεί EJ //KI) και η EK//AI , άρα η Ε είναι ορθή γωνία.*



Σχήμα 4.133. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [385-388]

……

Στο [388] αναγνωρίζει το υποσχήμα του ορθογωνίου από τις ιδιότητες του, τις οποίες και αποδεικνύει (δείτε την ανάλυση στο Μ13.6). Δηλαδή το σχήμα στο εσωτερικό έχει αποκτήσει το **χαρακτήρα σήματος**. Ο μαθητής έχει αποκτήσει την ικανότητα **να αναλύει δομικά ένα σχήμα** και να επισημάνει εκείνες τις ιδιότητες του σχήματος που οδηγούν στην αποδεικτική διαδικασία. Έχει μετακινηθεί από το επίπεδο οπτικού συλλογισμού, αφού έχει αποκτήσει την ικανότητα να αναλύσει δομικά ένα σχήμα, και το κυριότερο κριτήριο είναι να ικανοποιεί το σχήμα ένα ακριβές σύνολο ιδιοτήτων. «Χρησιμοποιεί εμπειρικά στοιχεία για να καταλήξει στο συμπέρασμα ότι αν ένα σχήμα έχει μια ιδιότητα, έχει και μια άλλη» (Battista, 2007, p. 852) χαρακτηριστικό επιπέδου 3.1.

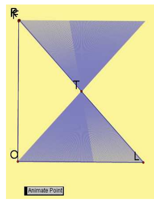
Μέσω των ΣΟΕΑ δ φάσης- Δυναμική επανεφεύρεση

……

10. *Μ13: Αν ορίσουμε ένα σημείο κάπου εδώ και ενώσουμε αυτό το σημείο με το θησαυρό και από δω βρούμε το συμμετρικό;*

……

14. *Μ13 : Άμα ενώναμε αυτά τα 3 σημεία και μετά φέρναμε τη μεσοκάθετο.*
15. *Μ7 : Ξέρεις τα D, K μόνο.*



……

Σχήμα 4.134. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [10-15]

Ο σύνθετος μετασχηματισμός του διαγράμματος μέσω συρσίματος και ίχνους διαμορφώνει τη δομή των τεμνόμενων διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου, έννοια που ο μαθητής έχει κατανοήσει στη διάρκεια της διαδικασίας. Το αποτέλεσμα είναι η διατύπωση μιας «αν…τότε» δήλωσης στο [10] μέσω της οποίας συνδέει τη διαδικασία με την έννοια της συμμετρίας ως προς κέντρο. Επομένως, ο μαθητής **συνδέει νοητικά αναπαραστάσεις**. Δηλαδή, συνδέει νοητικά την κατασκευή του μέσου τμήματος με την έννοια του συμμετρικού σημείου ως προς κέντρο, που οι μαθητές **έχουν κατασκευάσει στη δεύτερη φάση**.

44. *M13: Αν μετρούσαμε 45° από τη D και φέρναμε μια ... μια διαγώνιο και 45° από το K, τότε το σημείο αυτό δεν θα ήταν το σημείο που ξεκίνησαν δηλαδή ο χάρτης;*

……

Σχήμα 4.135. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [44]

Η απόκρυψη της εικόνας εμφανίζει τρία σημεία στην οθόνη τα οποία σχηματίζουν ένα ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο. Ο M13 έχει αναπτύξει την ικανότητα δομικής ανάλυσης του σχήματος στη δεύτερη και τρίτη φάση της ερευν. διαδικασίας και διατυπώνει το συλλογισμό του στο [14], δηλαδή την κατασκευή της μεσοκαθέτου. Επομένως, συνδέει νοητικά αναπαραστάσεις ή το εργαλείο απόκρυψης προκαλεί την ΑΟΑ του μαθητή, που βασίζεται στον αναστοχαστικό τρόπο σκέψης. Συνεπώς, αναπτύσσει **μετασχηματιστικό συλλογισμό,** αφού προβλέπει ότι το σημείο T ανήκει στη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος DK που είναι η βάση του ισοσκελούς τριγώνου και οδηγείται να **επανεφεύρει δυναμικά** τη λύση του προβλήματος. Στο [44] αντιστρέφει τη διαδικασία ενεργειών κατασκευής των διαγωνίων τετραγώνου νοητικά με αποτέλεσμα να διατυπώσει ιδιότητες των προσκείμενων προς τη βάση γωνιών του ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου. Επομένως, αναλύει νοητικά το σχήμα και μετασχηματίζει μια **νοητική του αναπαράσταση σε λεκτική και στη συνέχεια σε εικονική**.

Ανάπτυξη ικανότητας διατυπώσεων εννοιών-εν-δράσει

Μέσω του εργαλείου καθέτων + θεωρητικού συρσίματος

……

40. M13: Αν το φτιάξουμε όπως κάναμε το ορθογώνιο, αλλά μετά να μετακινήσουμε τις γωνίες ώστε να είναι ίσες όλες οι πλευρές ;

……

Στο [40] διατυπώνει την **έννοια-εν-δράσει** του τετραγώνου ως ορθογωνίου. Μέσω της έκφρασης του κατασκευάζει ένα **δυναμικό ορισμό** για το τετράγωνο ως «ορθογώνιο με ίσες πλευρές». Επομένως, **συνδέει διαδικαστικά τις ενέργειες** κατασκευής των αντικειμένων ορθογωνίου–τετραγώνου, με αποτέλεσμα μέσω της διαδικασίας να οικοδομηθεί μια **αντιληπτική σχέση ιεράρχησης** των σχημάτων του ορθογωνίου–τετραγώνου**,** με το τετράγωνο να αποτελεί ειδική περίπτωση σχήματος ορθογωνίου.

Μέσω του εργαλείου ανάκλασης + πειραματικού συρσίματος

……

77. Έχουμε μόνο το ισοσκελές τρίγωνο στην οθόνη. Η Μ7 επιλέγει τη βάση και την κορυφή του τριγώνου και κατασκευάζει μια κάθετη.
78. *Μ13: Αν μπορούσαμε να κάνουμε copy στο ύψος του ισοσκελούς τότε θα μπορούσαμε να το κατασκευάσουμε με τον ίδιο τρόπο προς τα κάτω.*

……

Στο σημείο [78] ο Μ13 έχει κατασκευάσει ένα **ΣΕΔ** του εργαλείου ανάκλασης σε αλληλεπίδραση με την ομάδα και διατυπώνει έναν ισοδύναμο **δυναμικό ορισμό,** σύνθεση τεχνολογικών όρων και ιδιοτήτων του σχήματος, χρησιμοποιώντας συνδυασμό τεχνολογικής (copy), άτυπης (προς τα κάτω) και τυπικής γλώσσας (το ύψος). Ο μαθητής επομένως διατυπώνει την **έννοια-εν-δράσει** της ανάκλασης του ύψους στο ισοσκελές ως «αντίγραφο του ύψους με αντίθετο προσανατολισμό».

Μέσω του εργαλείου περιστροφής+ θεωρητικού συρσίματος

Ο Μ13 στο σημείο [181] έχει κατασκευάσει ένα **ΣΕΔ** του εργαλείου περιστροφής που εκφράζεται με την **έννοια-εν-δράσει** του παραλληλογράμμου ως σύνθεση τριγώνων. Διατυπώνει δηλαδή σε τυπική μαθηματική γλώσσα ένα **δυναμικό ορισμό** για το παραλληλόγραμμο, ο οποίος μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής: «[παραλληλόγραμμο είναι το σχήμα που προκύπτει αν περιστρέψουμε το τρίγωνο] ως προς κέντρο περιστροφής το μέσο της βάσης του τριγώνου».

……

337. *Ερ: Τι πρέπει να αποδείξετε για να είναι ορθογώνιο ;*
338. *Μ13: Ότι οι τρεις γωνίες είναι ορθές.*
339. *Μ7: Ότι οι διαγώνιοι διχοτομούνται, ότι οι διαγώνιοι είναι ίσες.*

……

Στο [338] ο Μ13 διατυπώνει έναν **οικονομικό ορισμό** - κριτήριο για να είναι το σχήμα ορθογώνιο. Στο [371] διατυπώνει έναν **αυθαίρετο οικονομικό ορισμό** του τετραγώνου σε σχέση με τους άξονες συμμετρίας του σχήματος, έννοια που ο μαθητής έχει κατασκευάσει μέσω της διαδικασίας κατασκευής αξόνων συμμετρίας στο τετράγωνο («πρέπει να έχει 4 άξονες συμμετρίας»).

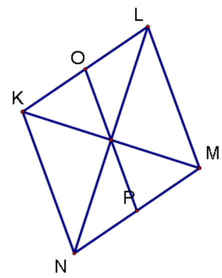
Ανάπτυξη ικανότητας ιεράρχησης των διαγραμματικών αναπαραστάσεων παραλληλογράμμων

Μέσω του εργαλείου καθέτου + θεωρητικού συρσίματος

Σύρουμε μια κορυφή του ρόμβου, ενώ έχουμε σχηματίσει τους άξονες ώστε να μετασχηματιστεί σε τετράγωνο.

243. *Μ8: Και είναι άξονας συμμετρίας!*
244. *Ερ: Στο τετράγωνο πόσους άξονες συμμετρίας έχουμε;*
245. *Μ13: Δυο δεν έχουμε ;*
246. *Μ13: Η ΟΡ και άμα ενώσουμε ... και άμα φέρουμε κα αυτή εδώ;*
247. *Μ8: Τέσσερις άξονες έχουμε! Είναι και οι διαγώνιες !*

....



Σχήμα 4.136. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [243-247]

Η έκφραση του στο [61] δηλώνει ότι ο μαθητής δεν έχει ικανότητα ιεράρχησης των σχημάτων ρόμβου–τετραγώνου («*το τετράγωνο είναι ρόμβος αλλά ο ρόμβος δεν είναι τετράγωνο;»)* .

Η διαδικασία κατασκευής των αξόνων του ορθογωνίου ολοκληρώνεται με την κατασκευή των καθέτων και στη συνέχεια με τη σύνδεση των μέσων των απέναντι πλευρών. Ο Μ13 καθοδηγεί την Μ7 για την κατασκευή της κάθετης με στόχο την κατασκευή του άξονα συμμετρίας του ορθογωνίου. Επομένως, σταδιακά υπερβαίνει το **γνωστικό εμπόδιο** που παρουσιάστηκε αναφορικά με την συσχέτιση της έννοιας της αξονικής συμμετρίας με την έννοια της καθετότητας (δείτε ανάλυση της Μ7). Ο Μ13 έρχεται **σε γνωστική σύγκρουση** με την κατασκευή των αξόνων στο τετράγωνο την οποία διατυπώνει στο [245] (δυο δεν έχουμε) (δείτε και ανάλυση του Μ8). Ο μαθητής **αναγνωρίζει το σχήμα του τετραγώνου ως ειδικό ορθογώνιο** με πρόσθετη ιδιότητα την ισότητα των πλευρών και μέχρι του σημείου αυτού δεν έχει ιεραρχήσει το σχήμα μέσω των αξόνων συμμετρίας του. Στο [246] ο Μ13 προσαρμόζει το γνωστικό σχήμα που έχει κατασκευάσει για την έννοια της αξονικής συμμετρίας του ορθογωνίου, στο τετράγωνο. Στην τρίτη φάση της ερευνητικής διαδικασίας ο μαθητής μέσω της κατάλληλης δραστηριότητας του σχολιασμού των διαγωνίων και του συρσίματος υπερβαίνει το γνωστικό εμπόδιο, κατανοεί την αξονική συμμετρία στο τετράγωνο και την διατυπώνει. Αυτό είναι εμφανές σε δυο σημεία του διαλόγου στο σημείο [371-378].

Μετασχηματισμός χαρακτήρα συμβόλου σε χαρακτήρα σήματος

Μέσω των ΣΟΕΑ γ φάσης

Στη τρίτη φάση της ερευνητικής διαδικασίας στο [335] αναγνωρίζει το σχήμα του παραλληλογράμμου από τις ιδιότητες του (π.χ την παραλληλία και ισότητα των απέναντι πλευρών).

………

278. M13: *Να ενώσουμε το A,C και να πάμε στο ABC και να πούμε ότι F,G είναι //=AC/2*
279. M13:… *.Και στο ADC ότι HE//= AC/2*
280. M13: *Επομένως, αυτό είναι παραλληλόγραμμο!*

………

Στο αρχικό διάστημα της πρώτης φάσης ο μαθητής κατασκευάζει τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου μέσω της διαδικασίας. Σταδιακά, αναπτύσσει τη *μερολογική κατανόηση* του σχήματος και στο [280] από τις ιδιότητες του σχήματος αναγνωρίζει το σχήμα. Επομένως, το παραλληλόγραμμο έχει αποκτήσει το χαρακτήρα σήματος, αφού «κύριο κριτήριο για τον προσδιορισμό του σχήματος είναι να ικανοποιεί ένα ακριβές σύνολο τυπικών ιδιοτήτων» (επίπεδο 2.3) (Battista, 2007, p. 851).

<u>Μέσω του προσαρμ. εργαλείου με κατάχρηση</u>

Η κατασκευή του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ολοκληρώνεται από τους μαθητές στο διάστημα [248-261]. Η έννοια του ορθογωνίου τριγώνου υποκινεί τους νοητικούς μηχανισμούς του M13 σε αλληλεπίδραση με τον M8. Μέσω της δυναμικής οπτικοποίησης που αναπτύσσει ολοκληρώνει ένα νοητικό μετασχηματισμό (περιστροφή περί κέντρο ενός ορθογωνίου τριγώνου). Ο μαθητής υλοποιεί με χρήση του προσαρμ. εργαλείου την ιδιότητα της ισότητας και διχοτόμησης των διαγωνίων. Επομένως, αποτυπώνει αρχικά με αντιληπτικό τρόπο στην οθόνη ένα σχέδιο και η παρέμβαση της M7 τον βοηθά να συνδέσει το χωρογραφικό με το θεωρητικό πεδίο του λογισμικού.

………

248. *M8 : Θα κάνω τρίγωνο ορθογώνιο.*
249. *M13: Αφού το ορθογώνιο δεν έχει από δυο ορθές γωνίες;*
250. *M7 : Με τον άξονα συμμετρίας μήπως;*
251. *M7 : Το ορθογώνιο από δυο ορθογώνια τρίγωνα ;*
252. *M8: Ναι, ναι!*
253. *M7: Κάτσε το ορθογώνιο είναι αυτό.*
254. *M13 : Ναι , κι άμα βάλλεις κι άλλο ένα τέτοιο;*

………

Αρχικά, χρησιμοποιεί το εργαλείο **με κατάχρηση** και μετά την παρέμβαση της M7 κατασκευάζει το ορθογώνιο μέσω των ιδιοτήτων των διαγωνίων του. Η εφαρμογή του εργαλείου στην κορυφή του ορθογωνίου τριγώνου και στο μέσο της υποτείνουσας, παράγει ένα τμήμα ίσο με την υποτείνουσα. Επομένως, μέσω της διαδικασίας οι μαθητές οικοδομούν τις δευτερεύουσες ιδιότητες του σχήματος αφού με το εργαλείο εισάγεται η έννοια της διχοτόμησης των διαγωνίων και στη συνεχεία η ισότητα των διαγωνίων και το ορθογώνιο αποκτά τον **χαρακτήρα σήματος**..

Διαδικαστική κατανόηση του θεωρήματος ΘΜΠ-αναγνώριση υποσχημάτων

Μέσω του εργαλείου σχολιασμού + πειραματικού συρσίματος

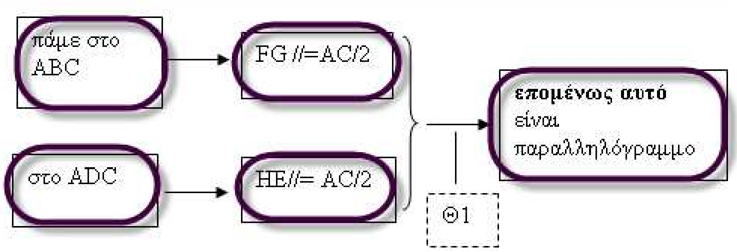
Στο [278-9] εφαρμόζει το θεώρημα ΘΜΠ στις πλευρές του παραλληλογράμμου. Αποδεικνύει ότι τα τμήματα που συνδέουν τα μέσα όλων των πλευρών του εξωτερικού τετράπλευρου είναι παράλληλα και ίσα, εφαρμόζοντας **ένα μη οικονομικό ορισμό** του παραλληλογράμμου. Αποκτά την διαδικαστική ικανότητα εφαρμογής του θεωρήματος ΘΜΠ, καθώς και την ικανότητα να αναγνωρίζει τα υποσχήματα από τα οποία διαχωρίζεται το σχήμα του εξωτερικού τετράπλευρου από τις διαγώνιες του.

....

379. *Μ13: Άρα, αν το εξωτερικό είναι ορθογώνιο, το εσωτερικό είναι ρόμβος και το εσωτερικό είναι πάλι ορθογώνιο.*

....

Στο [379] διατυπώνει ένα **θεώρημα-εν-δράσει** ως αποτέλεσμα της οπτικοποίησης του διαγράμματος και των εννοιών που έχει κατασκευάσει μέσω της διαδικασίας.



Σχήμα 4.137. Ανάλυση του επιχειρήματος του Μ13

Ανάπτυξη απαγωγικών και παραγωγικών επιχειρημάτων

Μέσω του εργαλείου ανάκλασης +θεωρητικού συρσίματος

....

86. *Μ13: Το BA=AE, BC=CE.*
87. *Ερ: Γιατί είναι ίσα αυτά τα τμήματα;*
88. *Μ13: Επειδή είναι ισοσκελές το τρίγωνο που φτιάξαμε!*

....

Ο Μ13 στο [88] αναπτύσσει ένα **απαγωγικό επιχείρημα** το οποίο δεν αποδεικνύει.

β) <u>μέσω του σχολιασμού + θεωρητικού συρσίματος</u>

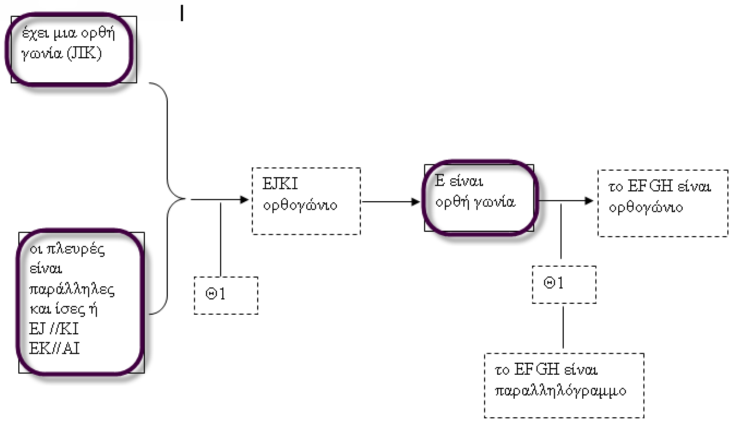
Ο Μ13 στο [388] διατυπώνει ένα επιχείρημα στο οποίο αναπτύσσει **μια αλυσίδα παραγωγικών δηλώσεων**. Ο Μ13 αποδεικνύει γιατί η γωνία Ε είναι ορθή και επομένως το σχήμα είναι ορθογώνιο, υπονοώντας (α) το θεώρημα 1: την έννοια της παραλληλίας των τμημάτων λόγω σύνδεσης των μέσων με χρήση του καταλλήλου θεωρήματος και (β) τον ορισμό 1: τον ορισμό του ορθογωνίου ως παραλληλογράμμου με μια ορθή γωνία .

Ο μαθητής σύμφωνα με τον Peirce (1992) χρησιμοποιεί την

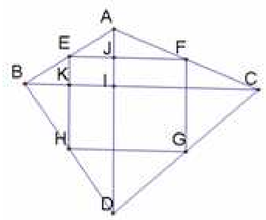
Πρόταση Α: Οι απέναντι πλευρές παράλληλες και η γωνία I είναι ορθή από κατασκευής

Κανόνα Β: Αν ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο και η μια γωνία του είναι ορθή τότε είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και καταλήγει στο

Συμπέρασμα Γ: Το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο



Σχήμα 4.138. Ανάλυση του επιχειρήματος του Μ13



Σχήμα 4.139. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [86-88]

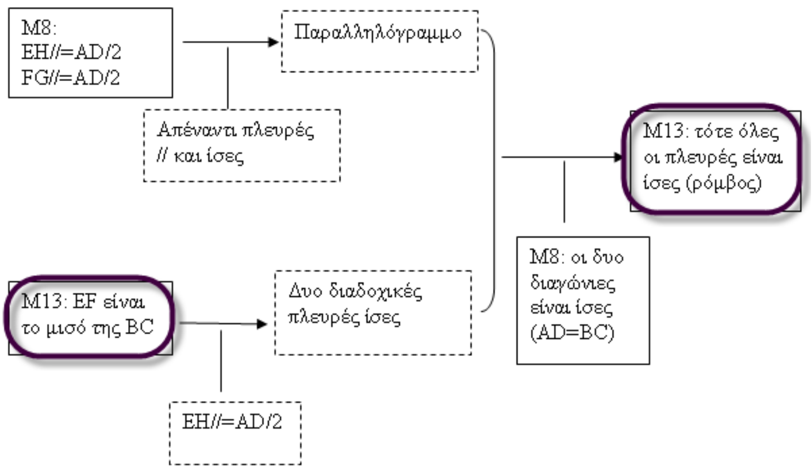
<u>Μέσω του εργαλείου σχολιασμού + θεωρητικού συρσίματος</u>

....

408. *Μ8: Αφού, EH//=AD/2, FG//=AD/2*
409. *Μ13 : Η EF πάλι δεν είναι το μισό της BC.*
410. *Μ8: Αφού είπαμε! οι δυο διαγώνιες είναι ίσες*
411. *Μ13: Ε, τότε όλες οι πλευρές είναι ίσες.*

....

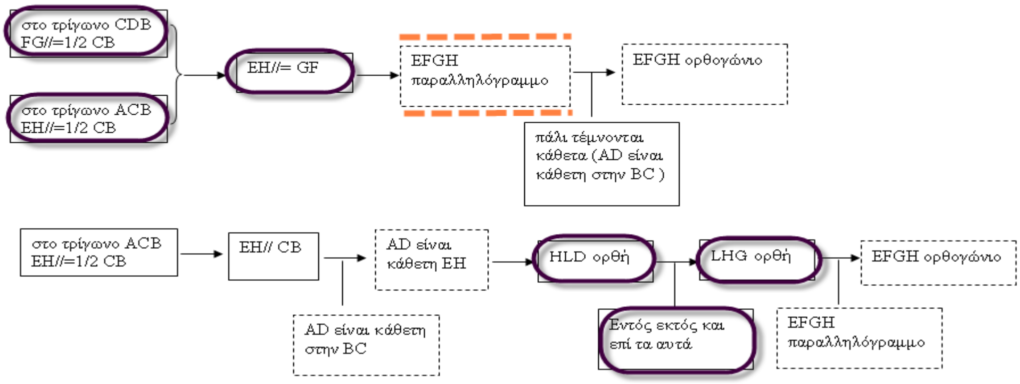
Αποδεικνύουν ένα επιχείρημα σε συνεργασία με τον Μ8, αναπτύσσοντας **παραγωγικό συλλογισμό** στο [408].



Σχήμα 4.140. Ανάλυση του επιχειρήματος του M13

<u>Μέσω του εργαλείου σχολιασμού + θεωρητικού συρσίματος</u>

Οι M8, M13 στα [427-434] κάνουν χρήση **λογικών επιχειρημάτων** για να αποδείξουν ότι το σχήμα στο εσωτερικό είναι ρόμβος, όταν οι διαγώνιες είναι ίσες. Αποδεικνύει σε συνεργασία με τον M8 ότι ένα σχήμα είναι τετράγωνο στο εσωτερικό, όταν του εξωτερικού οι διαγώνιες είναι ίσες και κάθετες. Επομένως, οι μαθητές κατασκευάζουν ένα **εμπειρικό αποδεικτικό σχήμα / πείραμα σκέψης**. Το επιχείρημα του περιέχει **αλυσίδα παραγωγικών δηλώσεων** που μπορούν να ερμηνευθούν με την παρακάτω διαγραμματική αναπαράσταση:



Σχήμα 4.141. Ανάλυση του επιχειρήματος του M1

4.2.14. M14-ΟΜΑΔΑ Α

Ανάπτυξη ικανότητας μετασχηματισμού μεταξύ αναπαραστάσεων μέσω γνωστικών συγκρούσεων

<u>Μέσω του εργαλείου σημείου + πειραματικού συρσίματος</u>

……

13. Μ14: *Τώρα πρέπει να βάλλουμε ένα σημείο, έτσι ώστε να είναι παράλληλη στην BC.*
14. Τοποθετεί σημείο σε τυχαία θέση.
15. Μ14: *Δεν πρέπει να το … βγάλουμε;*

………
Η Μ14 αντιμετωπίζει **γνωστική σύγκρουση,** λόγω της μεταβλητότητας της θέσης του σημείου μέσω του συρσίματος. Στο [13] οδηγείται σε άτυπη λεκτική διατύπωση, αντιμετωπίζοντας δυσκολία ως προς την κατανόηση της **θεσιακής επιλογής των εργαλείων.** Επομένως, το σύρσιμο του σημείου οδηγεί σε εμπόδιο που ωθεί τη μαθήτρια σε άτυπες διατυπώσεις. Συνεπώς, δεν έχει ικανότητα μετατροπής της λεκτικής αναπαράστασης σε εικονική, λόγω των γνωστικών (του αντικειμένου της γεωμετρίας αλλά και εργαλειακών) εμποδίων που παρουσιάζονται. Στη συνέχεια της διαδικασίας αυτό μεταβάλλεται στο [57] .

<u>Μέσω του παραμετρικού εργαλείου+ πειραματικού συρσίματος</u>

………
257.*Ερ:* *Πως κατασκευάζουμε με τον διαβήτη ισοσκελές;*
258.*Μ9:* *Με ακτίνα μεγαλύτερη από το μισό.*
259.*Μ14:* *Όχι μεγαλύτερη, με ακτίνα μικρότερη από το μισό!*

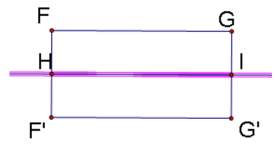
………
277.*Ερ* *: Με κέντρο είπες το Α και με ακτίνα …*
278.*Μ14* *: Με ακτίνα μεγαλύτερη από το μισό (δείχνοντας το τμήμα)!*
279.*Μ14:* *Πρέπει να κάνουμε κύκλο!*

………
Η Μ14 αντιμετωπίζει **γνωστικό εμπόδιο** στο [259]. Η μαθήτρια δεν έχει κατανοήσει τη διαδικασία κατασκευής ισοσκελούς στα στατικά μέσα και έρχεται σε **γνωστική σύγκρουση με το διάγραμμα στην οθόνη**. Το σύρσιμο του παραμετρικού τμήματος ώστε να καταστεί μεγαλύτερο από το μισό του αρχικού τμήματος, βοηθά αντιληπτικά την Μ14 να συσχετίσει την διαδικασία με την έννοια, να υπερβεί το γνωστικό εμπόδιο με αποτέλεσμα να αναδιατυπώσει την κατασκευαστική διαδικασία του ισοσκελούς. Επομένως, αναπτύσσει σταδιακά **την ικανότητα να μεταφράζει μια εικονική αναπαράσταση σε λεκτική**.

Συνεπώς, υπερβαίνει το **γνωστικό εμπόδιο** με τη χρήση του παραμετρικού εργαλείου και του εργαλείου κύκλου, **μετασχηματίζοντας** την κατανόηση κατασκευής του ισοσκελούς.

<u>Μέσω του εργαλείου καθέτου, παραλλήλου</u>
………

333. Ερ: Γιατί δεν είναι μόνο παραλληλόγραμμο;
334. Μ14: Η FG είναι κάθετη στην FF' και στο σημείο F και η F'G' είναι κάθετη στην FF'.



Σχήμα 4.142. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [333-334]

………

Η Μ14 στην πρώτη φάση δεν είχε κατασκευάσει τη **σειριακή ή θεσιακή κατανόηση** της επιλογής των εργαλείων του λογισμικού. Στο [334] έχει **αποκτήσει την ικανότητα να αποκωδικοποιήσει λεκτικά** τις ενέργειες της στο λογισμικό, την οποία διατυπώνει με μαθηματικό τρόπο. Συνεπώς, μέσω της διαδικασίας η μαθήτρια αναπτύσσει **την ικανότητα μετατροπής μιας εικονικής πληροφορίας σε λεκτική,** δηλαδή μετασχηματισμού μεταξύ αναπαραστάσεων.

Ανάπτυξη ικανότητας δομικής ανάλυσης – διπλή (/πολλαπλή) ερμηνεία γεωμετρικών αντικειμένων

<u>Μέσω του εργαλείου ανάκλασης και συρσίματος</u>

………

451. Ερ: Ποιο είναι το κέντρο συμμετρίας;
452. Μ14: Αυτό (δείχνει το σημείο τομής των διαγωνίων).
453. Μ14: Κέντρο συμμετρίας και στα δυο (ορθογώνιο, ρόμβος) είναι το σημείο τομής .. των διαγώνιων

………

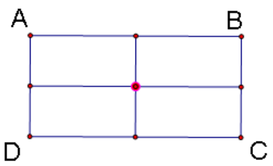
Η κατασκευή των αξόνων συμμετρίας του ορθογωνίου και του ρόμβου βοηθά την Μ14 να κατασκευάσει συνδέσεις μεταξύ των εννοιών: (α) η ευθεία που είναι παράλληλη από το μέσο της πλευράς είναι και άξονας συμμετρίας, και (β) το σημείο τομής των αξόνων είναι σημείο τομής των διαγωνίων και κέντρο συμμετρίας (στο [453]). Στο [339] η Μ14 αντιλαμβάνεται στο αρχικό ορθογώνιο τα δυο υποσχήματα ορθογωνίων που σχηματίζονται, λόγω του άξονα συμμετρίας και διατυπώνει μια «αν …τότε δήλωση» σε **τυπική μαθηματική** γλώσσα. Έχει κατασκευάσει συνεπώς τη μερολογική κατανόηση του σχήματος, αποτελούμενου από δυο συμμετρικά υποσχήματα-ορθογώνια.

Στο [429] αναγνωρίζει τις υποδομές των τεσσάρων ίσων ορθογωνίων που σχηματίζονται, λόγω των αξόνων συμμετρίας του ορθογωνίου παραλληλογράμμου και το διατυπώνει. Επομένως, έχει αναπτύξει την ικανότητα να **αναγνωρίζει τα δομικά μέρη στα οποία διαχωρίζεται** ένα σχήμα. «Η περιγραφή της στηρίζεται στην οπτική αντίληψη, προκειμένου να προσδιορίσει τις σχέσεις των σχημάτων [σε αυστηρά άτυπη γλώσσα» (Battista, 2007, p. 851) (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.1). Η ικανότητα αυτή διαφαίνεται στο [453], αφού αναγνωρίζει το σημείο τομής των αξόνων και ως σημείο τομής των διαγωνίων του σχήματος, αποδίδοντας **διπλό ρόλο** στο σημείο.

……

338. Ερ: *Ποιος είναι ο άξονας συμμετρίας του σχήματος ;*
339. *M14:* *Α! αυτός ... αν αυτό το FGIH είναι ένα ορθογώνιο τότε αυτό είναι το συμμετρικό του ορθογώνιο IHG΄F΄.*

426. M9: *Κατασκευάζουμε τώρα αυτά τα μέσα.*
427. *M14:* *Κέντρο συμμετρίας είναι το σημείο τομής αυτών των δυο αξόνων.*
428. *Ερ:* *Είναι ταυτόχρονα και κάτι άλλο;*
429. *M14:* *Είναι και 4 ίσα ορθογώνια.*



Σχήμα 4.143. Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [338-429]

……

451. *Ερ:* *Ποιο είναι το κέντρο συμμετρίας ;*
452. *M14:* *Αυτό (δείχνει το σημείο τομής των διαγωνίων).*
453. *M14:* *Κέντρο συμμετρίας και στα δυο (ορθογώνιο, ρόμβος) είναι το σημείο τομής .. των διαγώνιων*

……

Μέσω των ΣΟΕΑ γ φάσης

……

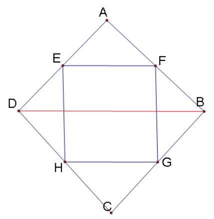
502. Ερ: *Για να είναι ορθογώνιο τι πρέπει να ισχύει;*
503. M14 : *Διαδοχικές πλευρές ίσες.*

……

509. M14*: Αν πάρουμε ως άξονα συμμετρίας το DB ... .αν δηλαδή αυτός είναι άξονας συμμετρίας τότε είναι ορθογώνιο.*
510. Ερ*: Είναι όμως άξονας συμμετρίας ;*
511. *M14:* *Ναι, γιατί οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι άξονες συμμετρίας.*

……

516. Ερ: *Για να είναι ορθογώνιο;*
517. M14: Οι απέναντι πλευρές πρέπει να είναι ίσες.
518. M9: Να έχει μια ορθή;
519. M9: … Να είναι ίσες;
520. Φέρνουμε και την άλλη διαγώνιο.
521. M14: Δηλαδή, έτσι όπως είπα…
522. M14: Επειδή όμως το ορθογώνιο έχει μόνο 2 άξονες συμμετρίας και οι διαγώνιοι του ορθογωνίου δεν είναι άξονες όπως είπαμε, επομένως … .



Σχήμα 4.144 Σχήμα αναφερόμενο στο απόσπασμα διαλόγου [509-522]

……

Η M14 αναγνωρίζει το σχήμα του ορθογωνίου στο εσωτερικό και διατυπώνει ένα **θεώρημα-εν-δράσει**: («διαδοχικές πλευρές ίσες»). Η αναδιατύπωση της πρότασης σε συνδυασμό με την ερώτηση της ερευνήτριας μπορεί να διαμορφωθεί ως εξής: «[σχηματίζεται ένα ορθογώνιο εσωτερικά όταν το εξωτερικό σχήμα έχει] διαδοχικές πλευρές ίσες». Επομένως, η απάντηση της δεν αφορά το σχήμα του ορθογωνίου αλλά τη συνθήκη για την οποία το σχήμα είναι ορθογώνιο.

Στο [509] η M14 διατυπώνει μια «αν …τότε» δήλωση. Η δήλωση της μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής: «αν ο DB είναι άξονας συμμετρίας [του ορθογωνίου] τότε [το σχήμα EFGH] είναι ορθογώνιο». Αυτό το σημείο συνδέεται νοηματικά με το σημείο [503] στο οποίο η μαθήτρια συσχετίζει την κατασκευή του εσωτερικού σχήματος ως αποτέλεσμα του εξωτερικού. Επομένως, αν συνδέσουμε τις απαντήσεις της θα έχουμε τη δυνατότητα να κατανοήσουμε τον τρόπο σκέψης της: «[το σχήμα στο εσωτερικό είναι ορθογώνιο όταν] οι διαδοχικές πλευρές [του εξωτερικού] είναι ίσες [δηλαδή είναι ρόμβος] και είναι ο DB άξονας συμμετρίας».

Η μαθήτρια στο [509-511] αντιστρέφει τη διαδικασία ενεργειών κατασκευής των διαγωνίων νοητικά **από μια εικονική πληροφορία**, με αποτέλεσμα να **μετασχηματίσει μια εικονική αναπαράσταση σε νοητική και στη συνέχεια σε λεκτική.** Από το συνδυασμό των διατυπώσεων της συμπεραίνεται ότι η μαθήτρια έχει κατανοήσει ότι η καθετότητα των αξόνων συμμετρίας του ορθογωνίου προκύπτει από τη σύνδεση των μέσων των απέναντι πλευρών του ορθογωνίου, έννοια που η μαθήτρια έχει κατασκευάσει στη δεύτερη φάση του ΥΜΜ. Επομένως, συνδέει την καθετότητα με την έννοια των αξόνων συμμετρίας, **αποδίδοντάς τους ίδιους ρόλους**. Η M14 επιχειρηματολογεί γιατί οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι άξονες συμμετρίας, υπονοώντας το θεώρημα. Επομένως, η ευθεία DB για τη μαθήτρια μεταφράζεται με διπλό τρόπο ως άξονας συμμετρίας /διαγώνιος του ρόμβου και ως άξονας συμμετρίας [/μεσοπαράλληλος] του ορθογωνίου. Η μαθήτρια **έχει αναπτύξει την ικανότητα αντιστροφής συλλογισμού** (π.χ της κατασκευής των αξόνων συμμετρίας της δεύτερης φάσης του ΥΜΜ). Επομένως, «έχει μετακινηθεί από τον οπτικό συλλογισμό επειδή το σημαντικότερο κριτήριο για τον προσδιορισμό ενός σχήματος είναι να ικανοποιεί, ένα ακριβές σύνολο τυπικών ιδιοτήτων» (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.3) Battista (2007, p. 851).

Ανάπτυξη ικανότητας διατυπώσεων εννοιών-εν-δράσει

<u>Μέσω του εργαλείου σημείου + πειραματικού συρσίματος</u>

………

19. Μ14: *Πρέπει να πάρουμε την ευθεία BC και να την σχηματίσουμε εδώ*.
(Δείχνει την παράλληλη από το σημείο εκτός της BC).

………

Η έκφραση στο [19] περιλαμβάνει την **έννοια της μεταφοράς του τμήματος,** επομένως μέσω **νοητικού μετασχηματισμού** η μαθήτρια εκφράζει **με άτυπο τρόπο** ιδιότητα (των ίσων και παραλλήλων απέναντι πλευρών) του παραλληλογράμμου, όπως το αντιλαμβάνεται οπτικά έχοντας κατά νου την *αρχέτυπη* μορφή του σχήματος. Στο [19] αναπτύσσει ένα **δυναμικό ορισμό** για να εκφράσει την ισότητα και παραλληλία των απέναντι πλευρών του παραλληλογράμμου. Η έκφραση της είναι 'δυναμική', αφού η μαθήτρια οδηγείται στη συγκεκριμένη διατύπωση μετά την επίδραση του συρσίματος. Αυτό είναι αποτέλεσμα της κατανόησης ότι η σχέση της ισότητας των πλευρών του διατηρείται με την εκάστοτε μεταβολή του τμήματος, λόγω του συρσίματος των άκρων του. Η αδυναμία της να διατυπώσει μέσα από τυπικούς όρους το αποτέλεσμα των μετασχηματισμών στην οθόνη την οδηγεί σε μετασχηματισμούς των λεκτικών εκφράσεων: από «σημείο που θα κάνει την ευθεία παράλληλη», σε «ευθύγραμμο τμήμα που σχηματίζεται εδώ [μεταφέρεται παράλληλα]» στο [19]. Επομένως, η Μ14 χωρίς να γνωρίζει χαρακτηριστικά του λογισμικού επινοεί **μια μεταφορά του τμήματος** λεκτικά, αναπτύσσοντας **δυναμική οπτικοποίηση,** λόγω της αλληλεπίδρασης με το **πειραματικό σύρσιμο** του σημείου.

<u>Μέσω του παραμετρικού εργαλείου+ πειραματικού συρσίματος</u>

Η Μ14 παρουσιάζει **εννοιολογική αλλαγή,** λόγω του σύνθετου μετασχηματισμού του παραμετρικού τμήματος και του εργαλείου του συρσίματος και **αναδιατυπώνει** την **έννοια-εν-δράσει** της ακτίνας του κύκλου.

<u>Μέσω του εργαλείου περιστροφής + συρσίματος</u>

………

151.Μ14: *Α! Ναι ..όλες οι γωνίες είναι ορθές και όλες οι πλευρές πρέπει να είναι ίσες .*

……

Στο [151] αναπτύσσει **δυναμική οπτικοποίηση** (αν το μετακινήσουμε), επινοώντας την έννοια της περιστροφής τμήματος. Επομένως συνδέει κάποιες ιδιότητες του σχήματος τις οποίες αντιλαμβάνεται στην οθόνη με τη θεωρία της γεωμετρίας. Αναπτύσσει **μετασχηματιστικό συλλογισμό,** αφού οπτικοποιεί δυναμικά, δηλαδή μέσω νοητικού μετασχηματισμού, την περιστροφή του τμήματος («αν το πάρουμε αυτό και το μετακινήσουμε»). Η περιστροφή του τμήματος με χρήση του εργαλείου περιστροφής οδηγεί την Μ14 να σχηματίσει δυναμικά μέσω της φαντασίας της και το υπόλοιπο σχήμα και επομένως να διατυπώσει την έκφραση «όλες οι γωνίες είναι ορθές και όλες οι πλευρές είναι ίσες». Αυτός είναι ένας **μη οικονομικός ορισμός** του τετραγώνου ο οποίος προέκυψε αμέσως μετά την κατασκευή του τμήματος ΑΒ από περιστροφή. Η μαθήτρια μέσω της **εργαλειακής γένεσης** κατασκεύασε ένα ΣΕΔ του εργαλείου περιστροφής με αποτέλεσμα να διατυπώσει την **έννοια-εν-δράσει**, δηλαδή τον ορισμό του τετραγώνου.

<u>Μέσω του εργαλείου καθέτου</u>

Η Μ14 επιχειρεί να ολοκληρώσει την κατασκευή με οπτικές ενέργειες. Η διαδικασία εξελίσσεται ως αλληλεπίδραση μεταξύ του **χωρογραφικού πεδίου και του θεωρητικού,** ώστε η κατασκευή της να είναι αμετάβλητη.

……

122.Ερ: *Ναι, αυτό είναι και ένα παραλληλόγραμμο.*
123.*Μ14: Και έχει και δυο ορθές.*

……

132.Μ9: *Τώρα πρέπει να είναι ίσες.*
133.Μ14: *Δεν πρέπει να είναι κάθετες;*

……

Στη συνέχεια στο [123] ορίζει την έννοια του ορθογωνίου ως παραλληλογράμμου το οποίο αποτελείται από δυο ορθές, που είναι ένας **μη οικονομικός ορισμός** του ορθογωνίου σε αλληλεπίδραση με την ομάδα και το εργαλείο καθέτου. Επομένως, μέσω του δυναμικού διαγράμματος και της αλληλεπίδρασης με την ομάδα οδηγείται να διατυπώσει ορισμούς, χαρακτηριστικό επιπέδου 2.2.

Στο [132-33] οι Μ14, Μ9 διατυπώνουν έναν ορισμό του τετραγώνου, αποτέλεσμα του σύνθετου νοητικού κατασκευάσματος λόγω της αλληλεπίδρασης με μια αυθεντία αλλά και της εμπειρίας που έχουν αποκτήσει από τις προηγούμενες κατασκευές. Ο ορισμός είναι **μη οικονομικός** και θα μπορούσε να αναδιατυπωθεί ως εξής: «τετράγωνο [είναι το τετράπλευρο που] έχει τις πλευρές του κάθετες [μεταξύ τους] και ίσες με το τμήμα ΑΒ». Επομένως, το παραμετρικό τμήμα έχει μετασχηματιστεί από ψηφιακό τεχνούργημα σε όργανο, με αποτέλεσμα η αλληλεπίδραση με αυτό να προκαλέσει την κατασκευή της **έννοιας- εν- δράσει**. Οι μαθήτριες αναπτύσσουν τον ορισμό σε συνεργασία και αλληλοσυμπληρώνονται. Ο διάλογος αναπτύσσεται καθώς οι μαθήτριες συνδέουν νοητικά την κατασκευή με την κατασκευή του ορθογωνίου και δε βλέπουν το σχήμα στην οθόνη.

Ανάπτυξη ικανότητας συσχέτισης εννοιών

Μέσω του εργαλείου ανάκλασης και συρσίματος

……

294.Μ14:*Αν αυτό είναι άξονας συμμετρίας τότε αυτό το σημείο έχει μια απόσταση από τον άξονα συμμετρίας.*

……

Στο [294] η Μ14 αλληλεπιδρά με την αναπαράσταση στην οθόνη που προέρχεται από τον μετασχηματισμό ανάκλασης-συρσίματος σημείου. Διατυπώνει μια «αν …τότε» δήλωση σε **τυπική μαθηματική γλώσσα** στην οποία συνδέεται **η έννοια του άξονα συμμετρίας με την έννοια της απόστασης του σημείου** προς ανάκλαση (**Αν** *αυτό είναι άξονας συμμετρίας* ***τότε*** *αυτό το σημείο έχει μια απόσταση από τον άξονα συμμετρίας).* Η Μ14 αντιλαμβάνεται μέσω της **δυναμικής οπτικοποίησης** που αναπτύσσει τη σχέση μεταξύ των ιδιοτήτων, κατασκευάζοντας άτυπα επιχειρήματα (χαρακτηριστικό επιπέδου 2 σύμφωνα με τους Mason, 1998; Gawlick, 2005). Επομένως, πρόκειται για περιγραφή που βασίζεται στην **οπτική αντίληψη** μέσω της οποίας προσδιορίζει μια σχέση στο σχήμα (επίπεδο 2.1 σύμφωνα με τον Battista, 2007).

……

303.Ερ: *Γιατί ; Αν το ΑΕ πλησιάζει προς τον άξονα.* …
304.*Μ14: Τότε και το Α΄Ε πλησιάζει προς τον άξονα, γιατί είναι συμμετρικά* .

……

Στο [304] ομοίως η Μ14 διατυπώνει μια «αν… τότε» δήλωση, σε συσχέτιση με την ερώτηση της ερευνήτριας. Η μαθήτρια **συσχετίζει την έννοια της απόστασης των σημείων** σε κίνηση προς τον άξονα με την **έννοια της συμμετρίας**. Στην έκφραση της δεν προσδιορίζει την ιδιότητα τους (ίσες αποστάσεις), επομένως αντιλαμβάνεται μόνο τη σχέση μεταξύ των σημείων και όχι την ιδιότητα τους και αιτιολογεί υπονοώντας το σχετικό θεώρημα.

Μέσω του εργαλείου ανάκλασης και συρσίματος

………

343. Ερ: *Από πού περνά ο άξονας συμμετρίας;*
344. Μ14: Είναι κά… θετος.
345. Μ14: *Και από τα μέσα ..των FF΄… δείχνει τις απέναντι κατακόρυφες κάθετες πλευρές.*

………

Στο [344-45] αναγνωρίζει την ιδιότητα του άξονα συμμετρίας, ως «μέσο-κάθετος» των κατακόρυφων πλευρών του ορθογωνίου. Επομένως, διατυπώνει μια **ιδιότητα του άξονα συμμετρίας** την οποία συμπεραίνει από το διάγραμμα**, συνδέοντας μεταξύ των πρωτευουσών και δευτερευουσών ιδιοτήτων του σχήματος**. Η μαθήτρια διατυπώνει την έννοια της καθετότητας του άξονα στην ευθεία FF΄. Επομένως, ο προσανατολισμός του άξονα δεν επηρεάζει την κατανόηση της, αφού συνήθως οι μαθητές επιπέδου 1 ταυτίζουν την έννοια της καθέτου με τη έννοια της κατακόρυφης ευθείας.

………

350. Ερ.: *Υπάρχει άλλος άξονας ;*
351. Μ14: Ναι, έτσι.
352. Μ14: Δηλαδή, είναι η ευθεία που περνά από τα μέσα των καθέτων πλευρών και οι γωνίες που σχηματίζουν είναι ορθές.

………

Στο [351-52] αναδιατυπώνει ένα **μη οικονομικό (και ανακριβή) ορισμό** που συμπεριλαμβάνει τις ιδιότητες του άξονα συμμετρίας του ορθογωνίου. Η Μ14 χρησιμοποιεί τη φράση «καθέτων ευθειών για να δηλώσει τη σχέση μεταξύ των πλευρών του σχήματος, επομένως εκφράζει τις ιδιότητες του σχήματος αλλά και την ιδιότητα των αξόνων στις πλευρές (σχηματίζουν ορθές γωνίες με τις πλευρές). Επομένως, συσχετίζει τις **πρωτεύουσες με δευτερεύουσες ιδιότητες** του σχήματος και τη σχέση μεταξύ των αξόνων και των πλευρών.

<u>Μέσω του εργαλείου κύκλου</u>

………

360. Μ14: *΄Η θα κάνουμε κύκλο με κέντρο το Ο αυτή θα είναι η ακτίνα και η άλλη η ακτίνα θα είναι το συμμετρικό.*

………

Η Μ14 στο [360] επινοεί μια στρατηγική, και κατασκευάζει **ένα θεώρημα-εν-δράσει** χρησιμοποιώντας το εργαλείο του κύκλου, **συνδέοντας την έννοια** της συμμετρίας ως προς κέντρο με την έννοια της ισότητας των ακτινών του κύκλου.

Ανάπτυξη ικανότητας αντιληπτικής ιεράρχησης σχημάτων

<u>Μέσω του εργαλείου ανάκλασης + θεωρητικού συρσίματος</u>

……

114.Μ14: *Μετακινείται η πλευρά τώρα*
115.*Μ14: Αν το ελαττώσουμε κα άλλο δε γίνεται τετράγωνο;*
116.*Ερ: Γίνεται τετράγωνο πάντα;*
117.*Μ14: Αν οι πλευρές του είναι ίσες.*

……

Η Μ14 στο [117] έχει κατασκευάσει ΣΕΔ του εργαλείου **θεωρητικού συρσίματος** με αποτέλεσμα να διατυπώσει εικασίες «*Αν το **ελαττώσουμε** κι άλλο δεν γίνεται τετράγωνο*» με **άτυπη γλώσσα**. Κατασκευάζει επομένως μια **έννοια-εν-δράσει,** ως αποτέλεσμα της **δυναμικής οπτικοποίησης** που προκαλείται από τη διαδικασία του **θεωρητικού συρσίματος** στις κορυφές του ορθογωνίου.

Στη συνέχεια χρησιμοποιεί τη μαθηματική έκφραση «όταν οι πλευρές του είναι ίσες» η οποία είναι μια μορφή «αν …τότε» δήλωσης, συμπληρώνοντας την ερώτηση της ερευνήτριας «γίνεται πάντα τετράγωνο». Επομένως, το σύρσιμο του σημείου της κορυφής του σχήματος του ορθογωνίου την οδηγεί να κατασκευάσει την έννοια του τετραγώνου ως ορθογωνίου του οποίου οι πλευρές πληρούν κάποιες ιδιότητες, τις οποίες η μαθήτρια διατυπώνει λεκτικά με άτυπο τρόπο (π.χ την ιδιότητα της ισότητας των πλευρών). Η έκφραση της είναι **ένας αυτοσχέδιος, δυναμικός ορισμός** του τετραγώνου, ο οποίος μετασχηματίζεται μέσω της συζήτησης σε **οικονομικό ορισμό** του τετραγώνου**.** Αν συνθέσουμε τις απαντήσεις της τότε προκύπτει ένα **θεώρημα-εν-δράσει**: «το ορθογώνιο γίνεται [είναι] τετράγωνο αν το ελαττώσουμε και οι πλευρές του όπως μετακινείται [το σημείο] στη πλευρά και οι πλευρές γίνουν [είναι] ίσες». Αυτό είναι ένα σημείο **εννοιολογικής βελτίωσης** της μαθήτριας. Κατασκευάζει μια **δυναμική συσχέτιση μεταξύ της έννοιας του τετραγώνου με την έννοια του ορθογωνίου**, επομένως αναπτύσσει την αντιληπτική ιεράρχηση των σχημάτων ως αποτέλεσμα του **θεωρητικού συρσίματος**.

<u>Μέσω του εργαλείου ανάκλασης + θεωρητικού συρσίματος</u>

……

250.Μ9: *Δεν είναι ρόμβος … .Αφού πριν τα AC, AB είναι ίσα εδώ δεν είναι.*
251.*Μ14: Είναι ρόμβος επειδή είναι το … από κάτω.*
252.*Ερ: Οι πλευρές είναι ίσες;*
253.*Μ14 : CA=CB, γιατί το τρίγωνο είναι ισοσκελές.*
254.*Μ9: Α, ναι! Και οι CA, AD είναι ίσες.*
255.*Μ14, Μ10: Ναι, γιατί είναι συμμετρικά.*

……

Στο [237] εκφράζει το ρόμβο ως αποτέλεσμα της ανάκλασης του ισοσκελούς με άτυπο τρόπο επομένως προσαρμόζει το γνωστικό σχήμα που έχει κατασκευάσει για το σχήμα του ρόμβου μέσω της διαδικασίας. Η έκφραση της «επειδή είναι το από κάτω» περικλείει την **έννοια της ισότητας** των δυο τριγώνων που εμφανίζονται στην οθόνη, μια ιδιότητα επομένως του σχήματος που η μαθήτρια αντιλαμβάνεται σε αλληλεπίδραση με το εργαλείο ανάκλασης, διατυπωμένη όμως με άτυπο τρόπο.

Επομένως, διευρύνει την έννοια «ρόμβος ως δυο ισόπλευρα τρίγωνα» την οποία είχε κατά νου αρχικά ώστε **αντιληπτικά να ιεραρχήσει** την έννοια του ρόμβου ως αποτέλεσμα της ανάκλασης ισοσκελούς.

Στο [492] διατυπώνει **την έννοια- εν- δράσει** «κέντρο συμμετρίας και στα δυο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων». Το σημείο τομής των διαγωνίων των αξόνων αποκτά διπλό ρόλο και ως σημείο τομής των διαγωνίων του σχήματος. Συμπληρώνει την κατασκευή των αξόνων με την κατασκευή των διαγωνίων, επομένως έχει επεκτείνει την έννοια των αξόνων συμμετρίας στο σχήμα του τετραγώνου και ως σχήμα ρόμβου. Αναπτύσσει **επομένως μέσω της διαδικασίας μια ιεράρχηση του τετράπλευρων** ως αποτέλεσμα της κατασκευής των αξόνων συμμετρίας τους.

Η κατανόηση της συσχέτισης των αξόνων συμμετρίας στα δυο σχήματα εμφανίζεται στη συνέχεια όπου η μαθήτρια έχει αποκτήσει την ικανότητα να 'βλέπει' τα σχήματα, δηλαδή την διορατικότητα που είναι αναγκαία στη γεωμετρία.

<u>Μέσω των ΣΟΕΑ γ φάσης</u>

………

*554.*Ερ: *Τι είναι;*
555.Μ10: Χαρταετός!
556.Ερ: Γιατί είπατε σα ρόμβος;
557.Μ14 : Επειδή οι διαγώνιες τους διχοτομούνται.
558.Μ10: Είναι κάθ…
559.Μ14: Είναι κάθετες, ναι είναι κάθετες!
560.Ερ: Τι σχήμα είναι το EFGH;
561.Μ14: Ορθογώνιο! (με έκπληξη)

………

Η Μ14 στο [631] έρχεται σε **γνωστική σύγκρουση** μεταξύ αυτού που έχει κατανοήσει και αυτού που αντιμετωπίζει στην οθόνη. Εξετάζοντας το ιστορικό της μαθήτριας διαπιστώνεται ότι η Μ14 έχει κατασκευάσει την έννοια των αξόνων συμμετρίας κατά την διάρκεια της διαδικασίας, για την οποία είχε έρθει σε γνωστική σύγκρουση. Στη συνέχεια έχει κατανοήσει μέσω του διαγράμματος ότι όταν το εξωτερικό σχήμα είναι ρόμβος τότε το εσωτερικό σχήμα είναι ορθογώνιο. Μέσω του συρσίματος του διαγράμματος ώστε οι διαγώνιες του εξωτερικού τετράπλευρου να γίνουν κάθετες, διαπιστώνει ότι ένα σχήμα είναι στο εσωτερικό ορθογώνιο και όταν δεν είναι ρόμβος. Στο [628] χρησιμοποιεί μια ιδιότητα-κριτήριο του παραλληλογράμμου, προσπαθώντας να απαντήσει τηρώντας τους κανόνες του *διδακτικού συμβολαίου*. Επομένως, αντιμετωπίζει **γνωστική σύγκρουση** ως προς την ισχύ της πρότασης «όταν το εσωτερικό σχήμα είναι ορθογώνιο τότε το εξωτερικό είναι ρόμβος». Οδηγείται επομένως μέσω της διαδικασίας να **συσχετίσει την μορφή στο εσωτερικό με την ιδιότητα** που αποκτούν οι διαγώνιες στο εξωτερικό τετράπλευρο.

Ανάπτυξη ικανότητας διατύπωσης επαγωγικών και απαγωγικών επιχειρημάτων

<u>Μέσω του παραμετρικού εργαλείου +συρσίματος</u>

Οι μαθήτριες λόγω του **πειραματικού συρσίματος** του άκρου του παραμετρικού τμήματος οδηγούνται σε **απαγωγικού τύπου επιχειρήματα**. Η αιτιολόγηση των μαθητριών προέρχεται από ακολουθία ενεργειών επί του σχήματος, επομένως η αιτιολόγηση τους είναι **εμπειρικό σχήμα** λόγω της αντιληπτικής δραστηριότητας επί του σχήματος Harel & Sowder (1996, 2007).

………

282.Ερ: *Έχετε διαβήτη! Το εργαλείο του κύκλου!*
283.Μ14: *Να κάνουμε με αυτό το τμήμα κύκλο!*

289.Ερ : *Γιατί τώρα εξαφανίζεται το τρίγωνο;*
290.*Μ10: Επειδή η ακτίνα είναι μικρότερη από το μισό.*
291.*Μ14 : Γιατί είναι μικρότερο από το μισό της ΑΒ.*
292.*Ερ : Εδώ γιατί αρχίζει και εμφανίζεται;*
293.*Όλες: Γιατί είναι μεγαλύτερη η ίση με το μισό.*

………

Το λανθασμένο **σχήμα [αυθεντίας]** που η μαθήτρια είχε κατασκευάσει μέσω της διδασκαλίας στα στατικά μέσα, αντικαθίσταται με ένα **σχήμα εμπειρικό–αντιληπτικό** που προέρχεται από την αλληλεπίδραση με το δυναμικό διάγραμμα. Αυτό επιβεβαιώνεται από την απάντηση της, όπου συσχετίζει το μετασχηματισμό του διαγράμματος με τους μετασχηματισμούς του παραμετρικού τμήματος στο [291].

<u>Μέσω του εργαλείου καθέτου, απόκρυψης + ανάκλασης</u>

Η Μ9 στο [220] αιτιολογεί γιατί το σχήμα είναι ρόμβος, διατυπώνοντας **αρχικά λανθασμένα** ιδιότητες του ρόμβου και στη συνέχεια όπως τις αντιλαμβάνεται από το διάγραμμα.

………

217.Ερ: *Πως θα αποδείξετε ότι είναι ρόμβος;*
218.*Μ14: Ο ρόμβος έχει τις πλευρές του… κάθετες.*
219.*Μ9 : Τα AC, BC;*
220.*Μ14:Όχι, τις διαγώνιες κάθετες .. και είναι ορθές!*

……

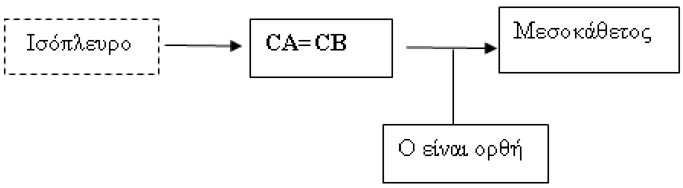
Η μαθήτρια δε γνωρίζει της ιδιότητες του ρόμβου και το διάγραμμα τη βοηθά να διατυπώσει την ιδιότητα της καθετότητας των διαγωνίων, επομένως να κατασκευάσει κάποιες από τις **δευτερεύουσες ιδιότητες του σχήματος** και να αποσαφηνίσει **την πρωτεύουσα ιδιότητα** του, η οποία αφορά την καθετότητα των πλευρών του.

……

241.Μ10: *Γιατί είναι μεσοκάθετος;*
242.*Μ14: Επειδή η Ο είναι ορθή … Όχι! επειδή η CA=CB.*

……

Στο [241] αιτιολογεί γιατί η διαγώνιος του ρόμβου είναι μεσοκάθετος. Η **αιτιολόγηση** της προκύπτει από το ειδικό διάγραμμα στην οθόνη.



Σχήμα 4.145 Ανάλυση του επιχειρήματος της Μ14

Υποθέτει ότι η Ο γωνία των διαγωνίων είναι 90^o που προέρχεται από την οπτικοποίηση του διαγράμματος για να αποδείξει ότι οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα (και επομένως το σχήμα είναι ρόμβος). Η Μ14 προσπαθεί να αιτιολογήσει γιατί είναι μεσοκάθετος κάνοντας μια υπόθεση, δηλαδή ισχυρίζεται ότι «η Ο είναι ορθή», στοιχείο το οποίο δε γνωρίζει αφού η κατασκευή του ισοπλεύρου έγινε με βάση την πλευρά που χρησιμοποιήθηκε ως ακτίνα. Πρόκειται επομένως για ένα **απαγωγικό επιχείρημα** που η μαθήτρια αναπτύσσει σε αλληλεπίδραση με το διάγραμμα.

<u>Μέσω του εργαλείου ίχνους, ανάκλασης +συρσίματος</u>

Στο [324-26] πειραματίζονται με τη **διαδικασία ίχνους** και κατασκευάζουν σχήμα χρήσης της σύνθετης αλληλεπιδραστικής τεχνικής του συρσίματος με ίχνος και ανάκλαση. Όταν ένα αντικείμενο προκύπτει από ανάκλαση διατηρεί της ιδιότητες του μεγέθους των γεωμετρικών αντικειμένων που αφορούν το σχήμα (για παράδειγμα πλευρών, γωνιών, εμβαδού). Το σύρσιμο διατηρεί την αμεταβλητότητα των σταθερών αντικειμένων του σχήματος. Το ίχνος σημείου και ανακλώμενου σημείου περιγράφει εικονικά την ιδιότητα της ισότητας της απόστασης των δυο σημείων από τον άξονα. Επομένως, μέσω του συρσίματος του σημείου –ανακλώμενου σημείου στο οποίο έχουμε προσδώσει την ιδιότητα του ίχνους **έχουμε τον μετασχηματισμό αντικειμένου που διατηρεί την ιδιότητα του σε σχέση με τον άξονα συμμετρίας του**. Προκύπτουν δηλαδή **συνδεόμενες αναπαραστάσεις** οι οποίες έχουν μια συγκεκριμένη ιδιότητα.

………

324. M14 : *Η κάθετη από κει (HK) είναι ίση με την κάθετη (KT).*
325. M9: Αυτό το σημείο εδώ μέχρι εκεί είναι ίση με την απόσταση από το σημείο αυτό.
326. M14: HT=HK+KT δηλαδή, είναι η διπλάσια.

………

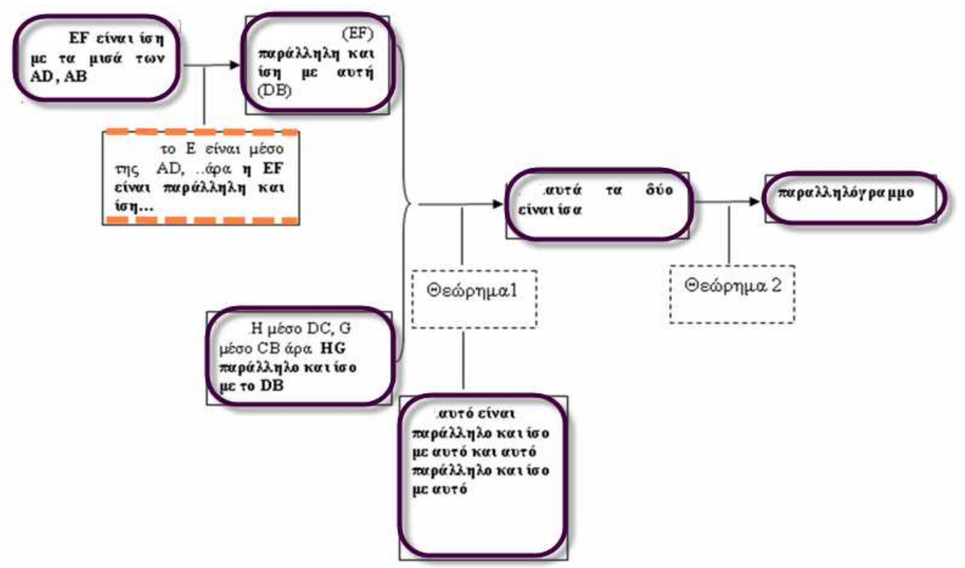
Η M14 αναπτύσσει **επαγωγικό συλλογισμό** και αντιλαμβάνεται την ιδιότητα της ισότητας που έχουν τα σημεία από ανάκλαση στο [354] και τη σχέση της απόστασης αρχικού σημείου και ανακλώμενου σημείου ειδώλου στο [356] την οποία εκφράζει με συμβολικό τρόπο. Η M14 αιτιολογεί επομένως με τα στοιχεία του διαγράμματος για την ειδική περίπτωση και χωρίς να γενικεύσει για κάθε σημείο. Η τελευταία σχέση προκύπτει ως αποτέλεσμα της **εμφάνισης των μετρήσεων**, επομένως πρόκειται για ένα **εμπειρικό αποδεικτικό σχήμα** σύμφωνα με τον Balachef. Η έννοια αυτή προκύπτει με το **πειραματικό σύρσιμο** του σημείου και διατυπώνεται από τη μαθήτρια **ως έννοια-εν-δράσει**.

Ανάπτυξη διαδικαστικής κατανόησης του θεωρήματος ΘΜΠ-αναγνώριση υποσχημάτων

………

484. M14: *Άρα η EF είναι ίση με τα μισά των AD, AB.*
485. Ερ: Όχι! Το E είναι μέσο της AD, … ..Άρα η EF είναι παράλληλη και ίση…
486. M14: Α! είναι παράλληλη και ίση με αυτή (και δείχνει την DB).
487. M14 : H μέσο DC, G μέσο CB άρα, HG παράλληλο και ίσο με το DB.
488. M14: Η DB σαν άξονας συμμετρίας είναι!
489. Σύρουν την κορυφή A και αλλάζουν το σχήμα.
490. M14: Αφού αυτό είναι παράλληλο και ίσο με αυτό και αυτό παράλληλο και ίσο με αυτό, άρα αυτά τα δύο είναι ίσα, επομένως είναι παραλληλόγραμμο.

………



Σχήμα 4.146 Ανάλυση του επιχειρήματος της M14 με το μοντέλο Toulmin

Θ1: όταν δυο τμήματα είναι παράλληλα κα ίσα με το ίδιο τμήμα τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλα και ίσα.

Θ2: όταν οι δυο απέναντι πλευρές τετράπλευρου είναι παράλληλες το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

Η Μ14 δεν έχει αρχικά δυνατότητα εφαρμογής του θεωρήματος. Στο [490] η αιτιολόγηση της περιέχει στοιχεία **παραγωγικού συλλογισμού** με αλυσίδα δηλώσεων. Αυτό είναι χαρακτηριστικό επιπέδου 3 σύμφωνα με τον Battista (2007).

Μ14.8. Ανάπτυξη ικανότητας παραγωγικού συλλογισμού

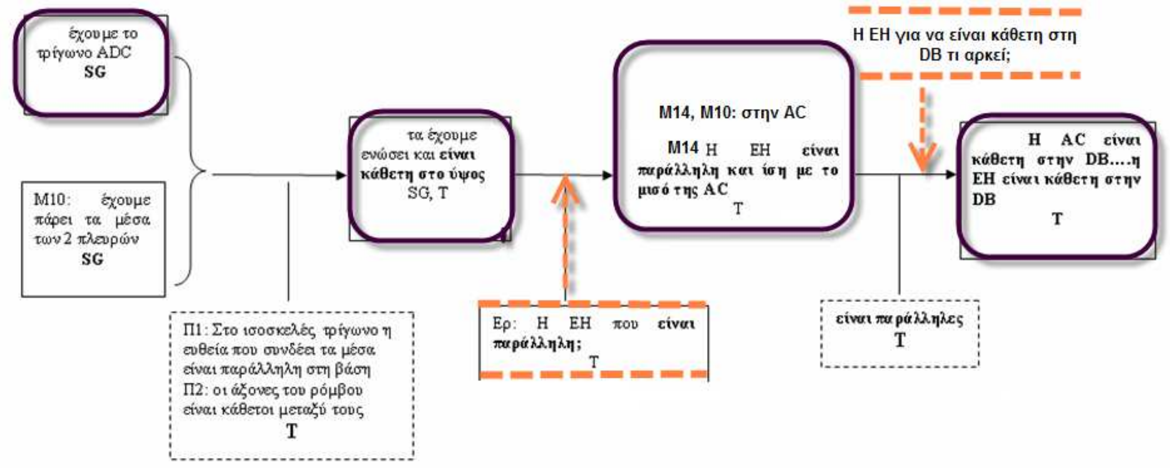
Μέσω των ΣΟΕΑ γ φάσης (σχολιασμού + θεωρητικού συρσίματος)

……

529.Ερ: Η ΕΗ που είναι παράλληλη;
530.Όλες : Στην AC.
531.M14: Α! Εφόσον είναι παράλληλη και ίση με το μισό της AC.
532.M14: Η AC είναι κάθετη στην DB … .η ΕΗ είναι κάθετη στην DB,
αφού είναι παράλληλες.

……

Αναπτύσσουν την αποδεικτική διαδικασία στο [529-532] ως αλληλεπίδραση του *χωρογραφικού και θεωρητικού* πεδίου του λογισμικού. Η αλληλουχία των διατυπώσεων της Μ14 σε συνεργασία με την ομάδα ολοκληρώνει μια αποδεικτική διαδικασία στην οποία η Μ14 συνδέει στοιχεία **παραγωγικού και οπτικού** συλλογισμού. Οι μαθήτριες αρχίζουν να διατυπώνουν στο χωρογραφικό πεδίο, αλληλεπιδρούν με την ερευνήτρια η οποία διατυπώνει τις ερωτήσεις στο θεωρητικό πεδίο και οδηγείται (π.χ η Μ14) να διατυπώσει τα επιχειρήματα της στο θεωρητικό πεδίο, υπονοώντας τα αντίστοιχα θεωρήματα. Η μαθήτρια θεωρεί ως δεδομένο ένα στοιχείο του διαγράμματος («αφού είναι παράλληλες») το οποίο πρέπει να αποδείξει προκειμένου να ισχύει ο συλλογισμός της και διατυπώνει σε τυπική γλώσσα. Επομένως, αναπτύσσει **απαγωγικό συλλογισμό** για να αποδείξει ότι το σχήμα στο εσωτερικό είναι ρόμβος.



Σχήμα 4.147 Ανάλυση του επιχειρήματος της Μ14 με το μοντέλο Toulmin

Ανάπτυξη ικανότητας διαμόρφωσης υποστόχων

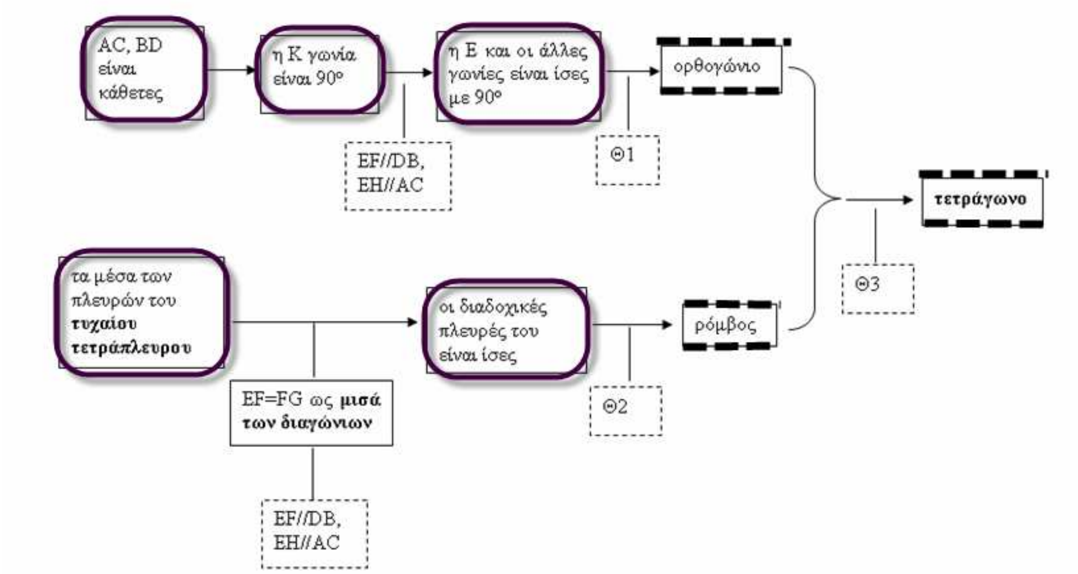
Μέσω των ΣΟΕΑ γ φάσης

....

644. Ερ: *Τι σχήμα είναι το εσωτερικό;*
645. *Μ10: Τετράγωνο.*
646. *Μ14 : Παραλληλόγραμμο.*
647. *Μ14: Επειδή όπως είπαμε οι AC, BD είναι κάθετες επομένως είναι η Κ γωνία είναι 90° και εφόσον τέμνονται κάθετα και η Ε και οι άλλες γωνίες είναι ίσες με 90° και είναι και παράλληλες.*
648. *Ερ: Άρα, αφού έχει ορθές γωνίες και είναι παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο.*
649. *Ερ: Γιατί να είναι ρόμβος ;*
650. *Μ14: Επειδή είναι τα μέσα των πλευρών του σχήματος του τυχαίου τετράπλευρου επομένως οι διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.*

....

Στην συνεργασία που αναπτύσσεται οι μαθήτριες συνθέτουν την απόδειξη μέσω των υποστόχων: απόδειξη αρχικά της ισότητας των πλευρών και επομένως ότι το σχήμα είναι στο εσωτερικό ρόμβος και στη συνέχεια ότι είναι ορθογώνιο.



Σχήμα 4.148.Ανάλυση του επιχειρήματος της Μ14 με το μοντέλο Toulmin

Θ1: Ένα τετράπλευρο του οποίου όλες οι γωνίες είναι ορθές είναι ορθογώνιο
Θ2: Ένα τετράπλευρο του οποίου όλες οι πλευρές είναι ίσες είναι ρόμβος
Θ3: Ένα τετράπλευρο που είναι ρόμβος και ορθογώνιο είναι τετράγωνο

Οι μαθήτριες Μ10, Μ14 σε συνεργασία αποδεικνύουν ότι το σχήμα στο εσωτερικό είναι τετράγωνο. Στο [644-650] χωρίζουν την απόδειξη **σε δυο υποστόχους**: (α) αποδεικνύουν αρχικά ότι το σχήμα είναι ορθογώνιο και στην (β) ότι είναι ρόμβος. Η δομή της επιχειρηματολογίας τους μέσω του μοντέλου Toulmin εμφανίζεται στο διάγραμμα επάνω. Στην απόδειξη τους το παράδειγμα είναι διάγραμμα αντιπροσωπευτικό των περιπτώσεων σχήματος στο οποίο οι μαθήτριες εφαρμόζουν θεωρήματα και ιδιότητες του σχήματος αλλά και σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων. Επομένως, αναπτύσσουν παραγωγικό συλλογισμό και η απόδειξη τους σύμφωνα με τον Balachef μπορεί να χαρακτηριστεί ως συνδυασμός **γενικού παραδείγματος και πειράματος σκέψης**.

4.3. Ανάλυση των δεδομένων της μελέτης στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

<u>Κοινά χαρακτηριστικά των μαθητών επιπέδου 1</u>

Α στάδιο (προ- τεστ)

Α1. Δεν έχει ικανότητα μετάφρασης της λεκτικής πληροφορίας σε σχέδιο.
Α2. Εξειδικεύει το διάγραμμα, ως αποτέλεσμα του οπτικού συλλογισμού που αναπτύσσει (π.χ. σχεδιάζει ισόπλευρο και όχι ισοσκελές) ή συνυπολογίζει στο διάγραμμα άσχετες ιδιότητες (χαρακτηριστικό επιπέδου 1) (Burger & Shaughnessy, 1986).
Α3. Δεν έχει ικανότητα διαχωρισμού της υπόθεσης από το συμπέρασμα ή χρησιμοποιεί στοιχεία του συμπεράσματος ως υπόθεση ή δε διατυπώνει καθόλου υποθέσεις.
Α4. Χρησιμοποιεί ανακριβείς ιδιότητες (χαρακτηριστικό επιπέδου 1) (Burger & Shaughnessy, 1986).
Α5. Δεν έχει ικανότητα να αντιληφθεί τις ιδιότητες του σχήματος (χαρακτηριστικό επιπέδου 1) (Mason, 1998; Gawlick, 2005).
Α6. Δεν κατασκευάζει την απόδειξη ή κατασκευάζει μια λανθασμένη απόδειξη.
Α7. Αντιμετωπίζει γνωστικά εμπόδια.

Β στάδιο (μεσο- τεστ)

Β1. Έχει ικανότητα μετάφρασης της λεκτικής πληροφορίας σε σχέδιο.
Β2. Έχει ικανότητα μετάφρασης της ‘αν …τότε’ δήλωσης.
Β3. Συγκρίνει τα σχήματα βάσει των ιδιοτήτων τους (Burger & Shaughnessy, 1986).
Β4: Βλέπει τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων (Mason, 1998 ; Gawlick, 2005).
Β5: Ενεργοποιεί τον κατάλογο των ιδιοτήτων που ξέρει, αλλά δεν μπορεί να διακρίνει ποιες ιδιότητες είναι αναγκαίες και επαρκείς για να περιγράψουν το αντικείμενο (Mason, 1998 ; Gawlick, 2005).
Β6: Έχει αναπτύξει την ικανότητα δομικής ανάλυσης του σχήματος (περιγραφή ιδιοτήτων του σχήματος και αναγνώριση υποσχημάτων).
Β7: Ολοκληρώνει την απόδειξη.

Αναδιατυπωμένο πραγματικό πρόβλημα

Π1: Κατανοεί την έννοια της περιστροφής κατά 90^o.
Π2: Έχει ικανότητα να μετατρέψει την λεκτική πληροφορία σε σχέδιο.
Π3: Έχει ικανότητα μοντελοποίησης και επίλυσης του προβλήματος.
Π4:Έχει αναπτύξει την ικανότητα να προσδιορίζει τις σχέσεις μεταξύ στοιχείων του διαγράμματος με άτυπο τρόπο και οι περιγραφές βασίζονται στην οπτική αντίληψη (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.1) (Battista, 2007).
Π5:Έχει αναπτύξει την ικανότητα να προσδιορίζει τις σχέσεις μεταξύ στοιχείων του διαγράμματος με συνδυασμό τυπικών και άτυπων περιγραφών που παραμένουν ανεπαρκείς (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.2) (Battista, 2007).
Π6:Έχει αναπτύξει την ικανότητα να προσδιορίζει τις σχέσεις μεταξύ στοιχείων του διαγράμματος τυπικά και το σημαντικότερο κριτήριο για τον προσδιορισμό ενός σχήματος είναι να ικανοποιεί ένα ακριβές σύνολο ιδιοτήτων (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.3) (Battista, 2007).
Π7: Αναπτύσσει μετασχηματιστικό συλλογισμό.
Π8: Έχει αναπτύξει την ικανότητα παραγωγικού συλλογισμού.

Γ στάδιο (μετα-τεστ)

Γ1: Κατασκευάζει ακριβές διάγραμμα.
Γ2: Συγκρίνει τα σχήματα βάσει των ιδιοτήτων τους (χαρακτηριστικό επιπέδου 2) (Burger & Shaughnessy, 1986)
Γ3: Προσδιορίζει τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων (χαρακτηριστικό επιπέδου 2) (Mason, 1998 ;Gawlick, 2005).
Γ4: Έχει αναπτύξει την ικανότητα να προσδιορίσει τις σχέσεις μεταξύ στοιχείων του διαγράμματος με συνδυασμό τυπικών και άτυπων περιγραφών που παραμένουν ανεπαρκείς (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.2) (Battista, 2007).
Γ5: Έχει αναπτύξει την ικανότητα να προσδιορίσει τις σχέσεις μεταξύ στοιχείων του διαγράμματος τυπικά και το σημαντικότερο κριτήριο για τον προσδιορισμό ενός σχήματος είναι αν ικανοποιεί ένα ακριβές σύνολο ιδιοτήτων, διατυπώνει οικονομικό ορισμό (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.3) (Battista, 2007).
Γ6:Καταλήγει στο συμπέρασμα ότι αν ένα σχήμα έχει μια ιδιότητα έχει και μια άλλη (χαρακτηριστικό επιπέδου 3.1) (Battista, 2007).
Γ7:Συνεπαγωγική εμφάνιση ιδιοτήτων και ανάλυση σε πραγματικό ή νοητό επίπεδο (χαρακτηριστικό επιπέδου 3.2) (Battista, 2007).

<u>Κοινά χαρακτηριστικά των μαθητών επιπέδου 2</u>

Α στάδιο (προ- τεστ)

Α1. Εξειδικεύει το διάγραμμα, ως αποτέλεσμα του οπτικού συλλογισμού που αναπτύσσει (πχ σχεδιάζει ισόπλευρο και όχι ισοσκελές) ή συνυπολογίζει στο διάγραμμα άσχετες ιδιότητες (χαρακτηριστικό επιπέδου 1) (Burger & Shaughnessy, 1986).
Α2.Συγκρίνει τα σχήματα βάσει των ιδιοτήτων τους (χαρακτ. επιπέδου 2) (Burger & Shaughnessy, 1986).
Α3: Έχει αναπτύξει την ικανότητα να προσδιορίζει τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων (χαρακτ. επιπέδου 2) (Mason, 1998 ; Gawlick, 2005).
Α4: Έχει αναπτύξει την ικανότητα αναγνώρισης των υποσχημάτων, αλλά είναι αυτή είναι ανεπαρκής (Mason, 1998 ; Gawlick, 2005).
Α5: Αναπτύσσει οπτικό και παραγωγικό συλλογισμό.
Α6: Εφαρμόζει προσωπική μέθοδο για την απόδειξη του προβλήματος.
Α7: Ολοκληρώνει την απόδειξη.

Β στάδιο (μεσο- τεστ)

Β1. Έχει ικανότητα μετάφρασης της ‘αν …τότε’ δήλωσης με συμβολικό τρόπο.
Β2. Έχει ικανότητα διατύπωσης ‘αν …τότε’ δηλώσεων (χαρακτηριστικό επιπέδου 3) (Burger & Shaughnessy, 1986).
Β3. Αντιλαμβάνεται τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων (χαρακτηριστικό επιπέδου 3) (Mason, 1998 ; Gawlick, 2005).
Β4. Έχει αναπτύξει την ικανότητα να προσδιορίσει τις σχέσεις μεταξύ στοιχείων του διαγράμματος με συνδυασμό τυπικών και άτυπων περιγραφών που παραμένουν ανεπαρκείς ή διατυπώνει μη οικονομικό ορισμό (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.2) (Battista, 2007). Ακόμα, ενεργοποιεί τον κατάλογο των ιδιοτήτων που ξέρει, αλλά δεν μπορεί να διακρίνει ποιες

ιδιότητες είναι αναγκαίες και επαρκείς για να περιγράψουν το αντικείμενο (χαρακτηριστικό επιπέδου 2) (Mason, 1998 ; Gawlick, 2005).

Β5. Έχει αναπτύξει την ικανότητα να προσδιορίσει τις σχέσεις μεταξύ στοιχείων του διαγράμματος τυπικά και το σημαντικότερο κριτήριο για τον προσδιορισμό ενός σχήματος είναι αν ικανοποιεί ένα ακριβές σύνολο ιδιοτήτων, διατυπώνει οικονομικό ορισμό (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.3) (Battista, 2007).

Β6. Έχει αναπτύξει την ικανότητα παραγωγικού συλλογισμού (χαρακτηριστικό επιπέδου 4) (Burger & Shaughnessy, 1986; Mason, 1998 ; Gawlick, 2005;Battista, 2007).

Β7: Ολοκληρώνει την απόδειξη.

Β8: Χρησιμοποιεί για την απόδειξη του προβλήματος συνδυασμό οπτικών και θεωρητικών στοιχείων (το διάγραμμα επηρεάζει τον τρόπο σκέψης του μαθητή).

Αναδιατυπωμένο πραγματικό πρόβλημα

Π1: Κατανοεί την έννοια της περιστροφής κατά 90^o.

Π2: Έχει ικανότητα να μετατρέψει τη λεκτική πληροφορία σε σχέδιο.

Π3: Έχει ικανότητα μοντελοποίησης και επίλυσης του προβλήματος.

Π4:Έχει αναπτύξει την ικανότητα να προσδιορίζει τις σχέσεις μεταξύ στοιχείων του διαγράμματος με άτυπο τρόπο και οι περιγραφές βασίζονται στην οπτική αντίληψη (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.1) (Battista, 2007).

Π5: Έχει αναπτύξει την ικανότητα να προσδιορίζει τις σχέσεις μεταξύ στοιχείων του διαγράμματος με συνδυασμό τυπικών και άτυπων περιγραφών που παραμένουν ανεπαρκείς (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.2) (Battista, 2007).

Π6: Έχει αναπτύξει την ικανότητα να προσδιορίζει τις σχέσεις μεταξύ στοιχείων του διαγράμματος τυπικά και το σημαντικότερο κριτήριο για τον προσδιορισμό ενός σχήματος είναι αν ικανοποιεί ένα ακριβές σύνολο ιδιοτήτων (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.3) (Battista, 2007).

Π7: Αναπτύσσει μετασχηματιστικό συλλογισμό.

Π8: Αναπτύσσει παραγωγικό συλλογισμό.

<u>Γ στάδιο (μετα-τεστ)</u>

Γ1: Κατασκευάζει ακριβές διάγραμμα.

Γ2: Συγκρίνει τα σχήματα βάσει των ιδιοτήτων τους (χαρακτηριστικό επιπέδου 2) (Burger & Shaughnessy, 1986).

Γ3: Έχει αναπτύξει την ικανότητα να προσδιορίζει τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων (χαρακτηριστικό επιπέδου 2) (Mason, 1998 ; Gawlick, 2005).

Γ4. Έχει αναπτύξει την ικανότητα να προσδιορίζει τις σχέσεις μεταξύ στοιχείων του διαγράμματος με συνδυασμό τυπικών και άτυπων περιγραφών που παραμένουν ανεπαρκείς ή διατυπώνει μη οικονομικό ορισμό (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.2) (Battista, 2007). Ακόμα, ενεργοποιεί τον κατάλογο των ιδιοτήτων που ξέρει, αλλά δεν μπορεί να διακρίνει ποιες ιδιότητες είναι αναγκαίες και επαρκείς για να περιγράψουν το αντικείμενο (χαρακτηριστικό επιπέδου 2) (Mason, 1998 ; Gawlick, 2005).

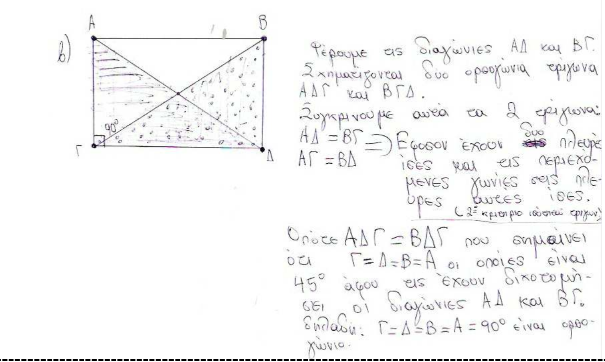
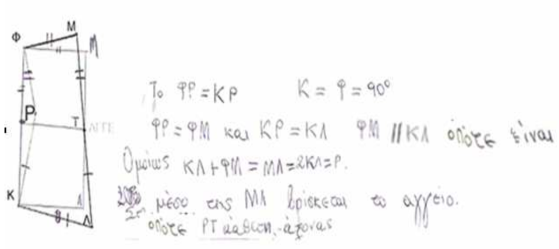
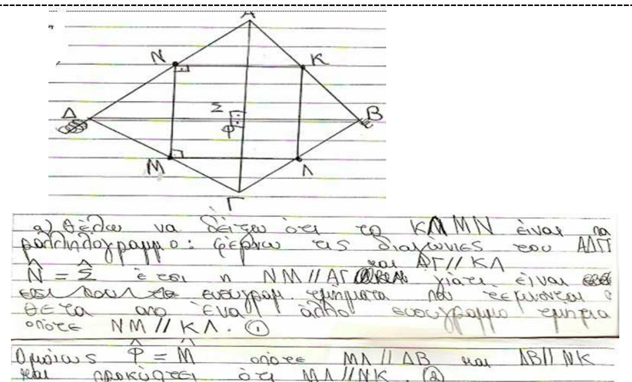
Γ5. Έχει αναπτύξει την ικανότητα να προσδιορίζει τις σχέσεις μεταξύ στοιχείων του διαγράμματος τυπικά και το σημαντικότερο κριτήριο για τον προσδιορισμό ενός σχήματος είναι να ικανοποιεί ένα ακριβές σύνολο ιδιοτήτων, ακόμα διατυπώνει οικονομικό ορισμό (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.3) (Battista, 2007).

Γ6. Έχει αναπτύξει την ικανότητα παραγωγικού συλλογισμού (χαρακτηριστικό επιπέδου 4) (Burger & Shaughnessy, 1986; Mason, 1998 ; Gawlick, 2005;Battista, 2007).

Γ7: Ολοκληρώνει την απόδειξη.
Γ8: Καταλήγει στο συμπέρασμα ότι αν ένα σχήμα έχει μια ιδιότητα έχει και μια άλλη (χαρακτηριστικό επιπέδου 3.1) (Battista, 2007).
Γ9: Κατανοεί την συνεπαγωγική εμφάνιση ιδιοτήτων και πραγματοποιεί την ανάλυση της λύσης του προβλήματος σε πραγματικό ή νοητό επίπεδο (χαρακτηριστικό επιπέδου 3.2) (Battista, 2007).

4.3.1. Μέρος Α. Μελέτη των μαθητών της πειραματικής ομάδας

4.3.1.1. Ως προς τη συμμετοχή του Μ1 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

Α στάδιο (προ- τεστ)	Β στάδιο (μέσο- τεστ)
	
Να αποδείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διχοτόμος προς τη βάση είναι διάμεσος και ύψος.	*Να δείξετε ότι αν σε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες είναι ίσες είναι ορθογώνιο.*
	
Αναδιατυπωμένο πραγματικό πρόβλημα	Γ στάδιο (μετά- τεστ)

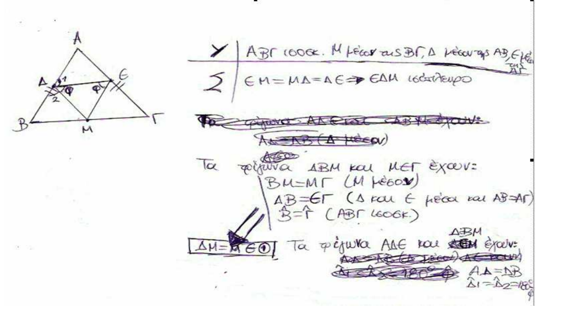
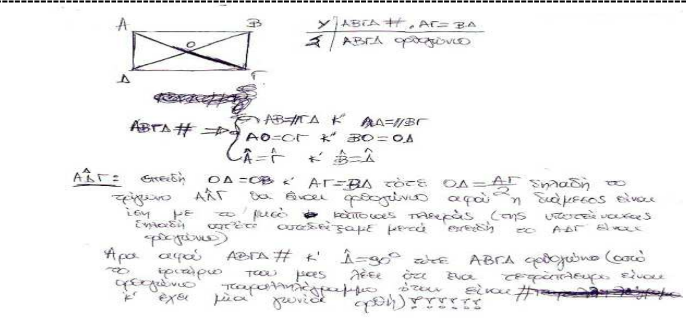
<u>Στο προ-τεστ</u>: ο Μ1 αντιμετώπιζε **γνωστικά εμπόδια**. Ο μαθητής δεν κατασκευάζει τη διχοτόμο του τριγώνου ή είναι αβέβαιος για τα στοιχεία τη υπόθεσης, όπως φαίνεται στο γραπτό του. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Α1, Α3, Α4, Α5, Α6, Α7.

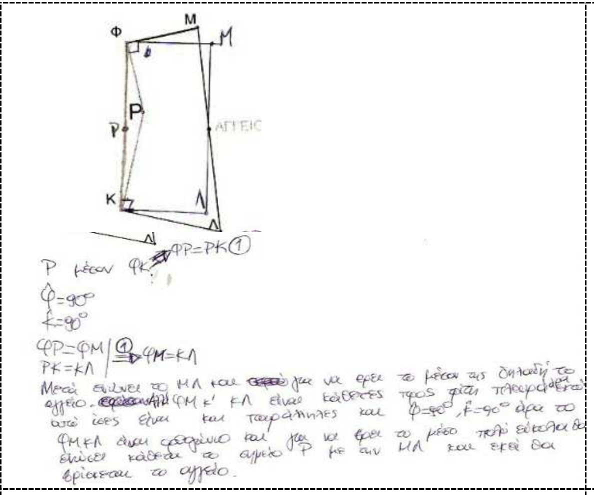
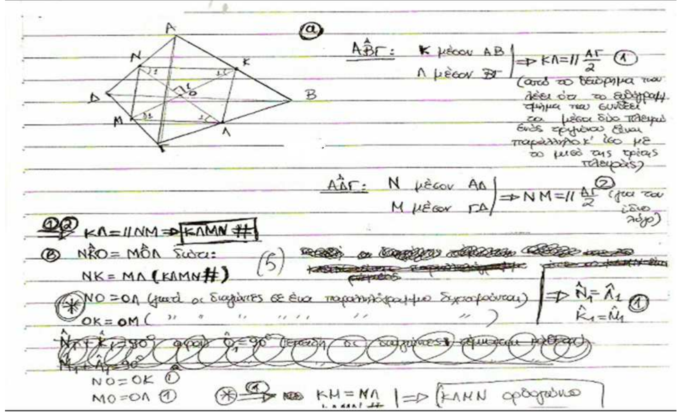
Στο μέσο τεστ: απέκτησε την ικανότητα μετάφρασης της **«αν…τότε»** δήλωσης του προβλήματος με αποτέλεσμα να κατασκευάσει ακριβές διάγραμμα και να αναπτύξει λογικά επιχειρήματα. Στην αιτιολόγηση του χρησιμοποίησε τόσο οπτικά όσο και θεωρητικά στοιχεία, αναπτύσσοντας συνδυασμό **απαγωγικού** και **παραγωγικού** συλλογισμού. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Β1, Β2, Β3, Β4, Β5, Β6, Β7.

Στο πραγματικό πρόβλημα: κατασκεύασε ένα ακριβές διάγραμμα, μεταφράζοντας σωστά την λεκτική πληροφορία σε σχέδιο. Ο μαθητής νοητικά συνέδεσε τη λύση του προβλήματος με τη διερευνητική φάση του προβλήματος στο λογισμικό, αφού έχει κατασκευάσει **σχήμα εργαλειοποιημένης δράσης** του εργαλείου περιστροφής και έχει αποκτήσει την ικανότητα να αναπτύσσει «σκέψη με κίνηση στα στατικά μέσα», καθώς και **ικανότητα εφαρμογής** της λύσης του προβλήματος. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Π1, Π2, Π3, Π5.

Στο μετα-τεστ: ο Μ1 κατασκεύασε ένα ακριβές διάγραμμα. Ανέπτυξε **λογική** επιχειρηματολογία για να αποδείξει ότι οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες και εφάρμοσε έναν οικονομικό ορισμό του παραλληλογράμμου (δηλ. τον ορισμό: «αν οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες το σχήμα είναι παραλληλόγραμμο») για να οδηγηθεί στο συμπέρασμα. Δε χρησιμοποίησε το θεώρημα ΘΜΠ, αφού ο μαθητής δε συμμετείχε ενεργά στην τρίτη φάση της ερευνητικής διαδικασίας. Αυτό όμως δεν τον εμπόδισε να αναπτύξει **λογικά επιχειρήματα** για να αποδείξει ότι το σχήμα είναι παραλληλόγραμμο. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Γ1, Γ3, Γ5, Γ6, Γ7.

4.3.1.2. Ως προς τη συμμετοχή της Μ2 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

Α στάδιο (προ- τεστ)	Β στάδιο (μέσο- τεστ)
	
Σε τρίγωνο ισοσκελές να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν το μέσο Μ της βάσης με τα μέσα των ίσων πλευρών είναι μεταξύ τους ίσα.	*Να δείξετε ότι αν σε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες είναι ίσες είναι ορθογώνιο.*

	
Αναδιατυπωμένο πραγματικό πρόβλημα	Γ στάδιο (μετά- τεστ)

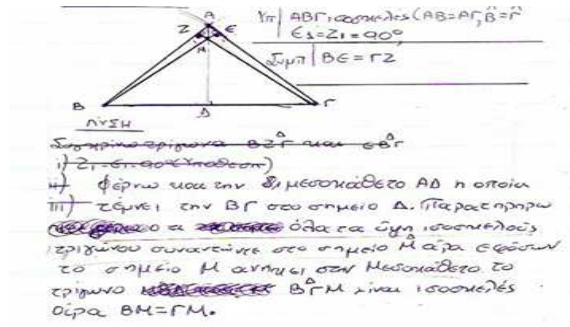
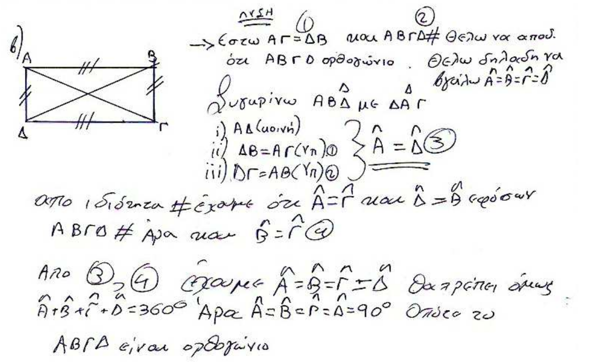
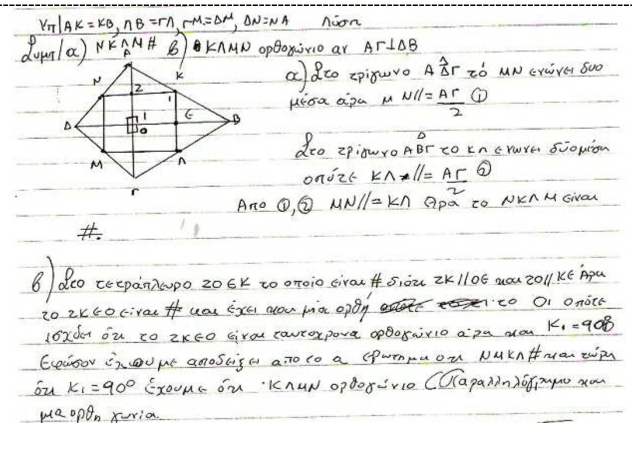
<u>Στο προ-τεστ</u>: η Μ2 κατασκεύασε ένα ειδικό διάγραμμα ισοπλεύρου τριγώνου, στο οποίο συνέδεσε τα μέσα όλων των πλευρών, ένδειξη ότι δεν κατανόησε επαρκώς την υπόθεση του προβλήματος. Επομένως, η μη κατανόηση της λεκτικής διατύπωσης αποτέλεσε εμπόδιο στην μετάφραση του προβλήματος σε ακριβές διάγραμμα. Ανέπτυξε **απαγωγικά επιχειρήματα** χωρίς να ολοκληρώσει την απόδειξη. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Α1, Α2, Α4, Α5, Α6.

<u>Στο μέσο–τεστ</u>: ανέπτυξε την απόδειξη του προβλήματος, διατυπώνοντας και εφαρμόζοντας θεωρήματα τα οποία ήταν αναγκαία. Διατύπωσε την ιδιότητα διχοτόμησης των διαγωνίων του παραλληλογράμμου και χρησιμοποίησε τα στοιχεία της υπόθεσης, το σχετικό θεώρημα για να αποδείξει ότι μια γωνία του σχήματος είναι ορθή και τις λογικές σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του σχήματος. Στη συνέχεια χρησιμοποίησε το συμπέρασμα που έχει προκύψει και έναν **οικονομικό ορισμό** του ορθογωνίου και ολοκλήρωσε την απόδειξη, αναπτύσσοντας **παραγωγικό συλλογισμό.** Από την απόδειξη που ακολούθησε είναι εμφανές ότι το παραλληλόγραμμο και το ορθογώνιο έχουν αποκτήσει τον **χαρακτήρα σήματος**. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Β1, Β2, Β3, Β5, Β6, Β7.

<u>Στο τεστ πραγματικού προβλήματος:</u> η μαθήτρια έχει αποκτήσει **ικανότητα μετάφρασης** της περιστροφής στο χαρτί με αποτέλεσμα να κατασκευάσει ένα ακριβές διάγραμμα. Απέδειξε με χρήση **παραγωγικού συλλογισμού** ότι το σχήμα είναι ορθογώνιο, διατυπώνοντας ένα μη **οικονομικό ορισμό** για το ορθογώνιο, αφού προηγουμένως έχει αποδείξει ότι το σχήμα είναι παραλληλόγραμμο. Μέσω του γραπτού τεστ επιβεβαιώνεται ότι έχει αποκτήσει την ικανότητα εφαρμογής της λύσης του προβλήματος. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Π1, Π2, Π3, Π6, Π7, Π8.

Στο μετά-τεστ: έχει αναπτύξει την **διαδικαστική και εννοιολογική γνώση** του θεωρήματος ΘΜΠ και ολοκλήρωσε την απόδειξη, αναπτύσσοντας **παραγωγικό συλλογισμό**. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Γ1, Γ3, Γ4, Γ5, Γ6, Γ9.

4.3.1.3. Ως προς τη συμμετοχή του Μ3 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

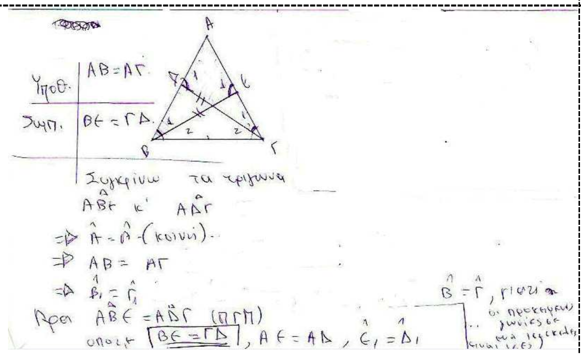
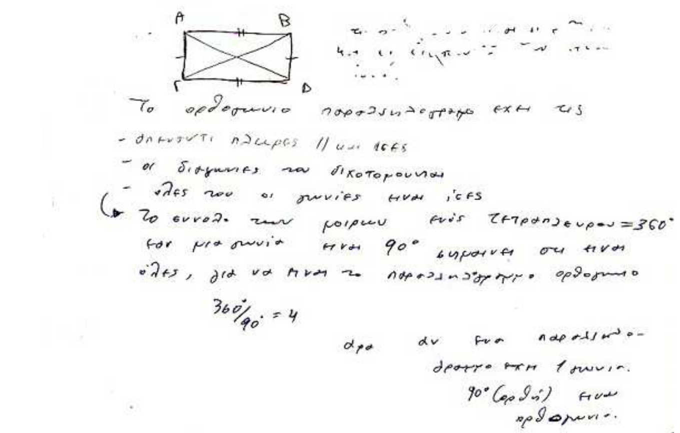
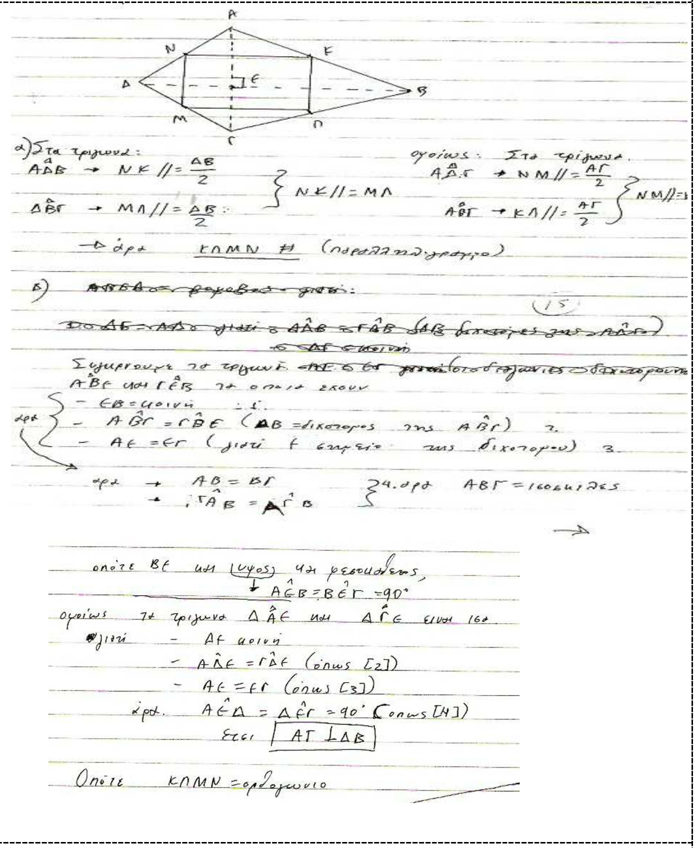
Α στάδιο (προ- τεστ)	Β στάδιο (μέσο- τεστ)
	
Σε τρίγωνο ισοσκελές να αποδείξετε ότι τα ύψη προς τις ίσες πλευρές είναι μεταξύ τους ίσα.	*Να δείξετε ότι αν σε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες είναι ίσες είναι ορθογώνιο.*
	
Αναδιατυπωμένο πραγματικό πρόβλημα	Γ στάδιο (μετά- τεστ)

Στο προ-τεστ: ο Μ3 κατασκεύασε ένα ακριβές διάγραμμα, το οποίο τον βοήθησε να αναπτύξει **απαγωγικά επιχειρήματα**, χωρίς να ολοκληρώσει την απόδειξη. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Α2, Α5, Α6.

Στο μέσο–τεστ: ανέπτυξε την απόδειξη του προβλήματος, διατυπώνοντας και εφαρμόζοντας θεωρήματα τα οποία ήταν αναγκαία. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Β1, Β2, Β3, Β5, Β6, Β7.

<u>Στο μετά-τεστ:</u> έχει αναπτύξει την διαδικαστική και εννοιολογική γνώση του θεωρήματος ΘΜΠ και ολοκλήρωσε την απόδειξη, αναπτύσσοντας **παραγωγικό συλλογισμό**. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Γ3, Γ5, Γ6, Γ7.

4.3.1.4. Ως προς τη συμμετοχή της Μ4 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

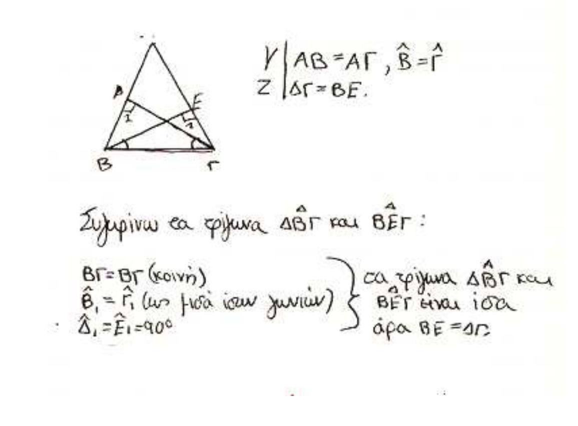
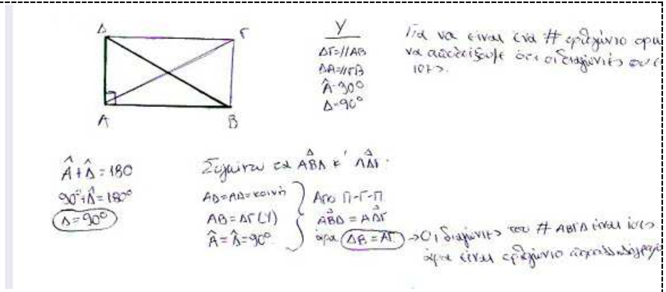
Α στάδιο (προ- τεστ)	Β στάδιο (μέσο- τεστ)
	
Σε τρίγωνο ισοσκελές να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των προσκείμενων προς την βάση γωνιών είναι μεταξύ τους ίσες.	*Να δείξετε ότι αν σε παραλληλόγραμμο γωνία του είναι ορθή τότε είναι ορθογώνιο.*
	
Αναδιατυπωμένο πραγματικό πρόβλημα	Γ στάδιο (μετά- τεστ)

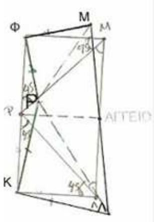
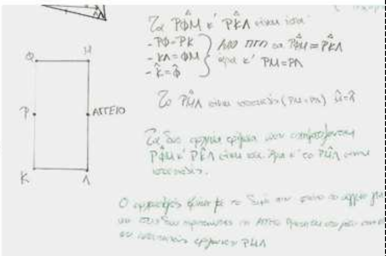
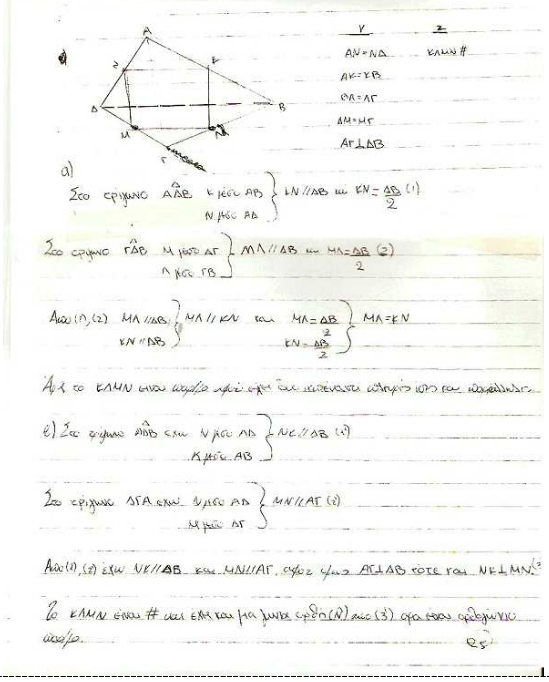
Στο προ-τεστ: η Μ4 κατασκεύασε ένα ακριβές διάγραμμα, σύγκρινε τα σχήματα βάσει των ιδιοτήτων τους, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Α2, Α3, Α6, Α7.

Στο μέσο–τεστ: ανέπτυξε την απόδειξη του προβλήματος, διατυπώνοντας ένα σύνολο ιδιοτήτων και εφαρμόζοντας θεωρήματα τα οποία ήταν αναγκαία. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Β1, Β2, Β4.

Στο μετά-τεστ: έχει αναπτύξει τη **διαδικαστική και εννοιολογική γνώση** του θεωρήματος ΘΜΠ και ολοκλήρωσε την απόδειξη, αναπτύσσοντας **παραγωγικό συλλογισμό**. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Γ1, Γ3, Γ4, Γ5, Γ6, Γ7, Γ8, Γ9.

4.3.1.5. Ως προς τη συμμετοχή του Μ5 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

Α στάδιο (προ- τεστ)	Β στάδιο (μέσο- τεστ)
	
Σε τρίγωνο ισοσκελές να αποδείξετε ότι τα ύψη προς τις ίσες πλευρές είναι μεταξύ τους ίσα.	*Να δείξετε ότι αν σε παραλληλόγραμμο μια γωνία του είναι ορθή τότε είναι ορθογώνιο.*

 	
Αναδιατυπωμένο πραγματικό πρόβλημα	Γ στάδιο (μετά- τεστ)

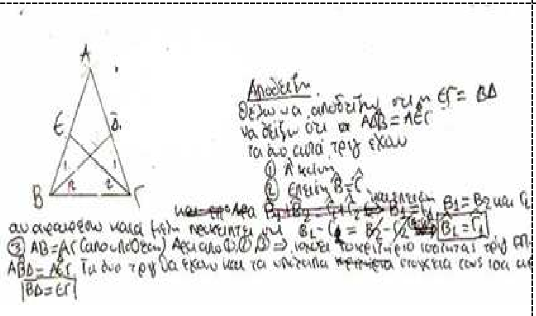
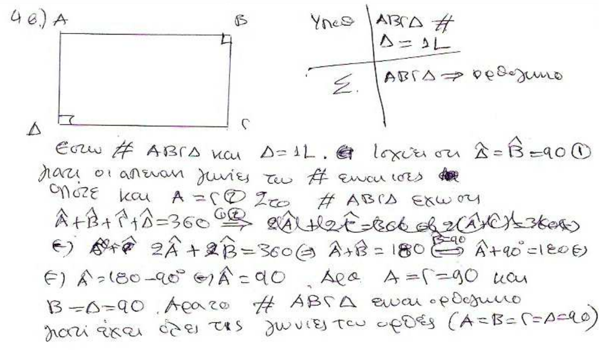
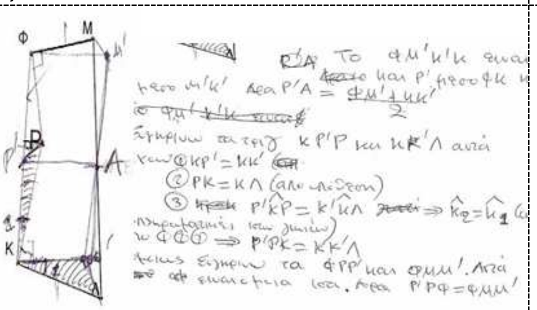
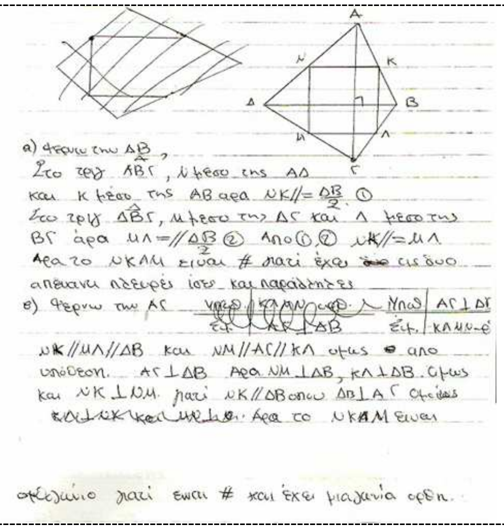
<u>Στο προ-τεστ:</u> ο Μ5 κατασκεύασε ένα ανακριβές διάγραμμα και υπέθεσε οπτικά στοιχεία τα οποία δε γνώριζε από την υπόθεση του προβλήματος (π.χ Β1=Γ1 ως μισά ίσων γωνιών). Επομένως, οδηγήθηκε να εξειδικεύσει το διάγραμμα όπως διαπιστώθηκε και από τη μελέτη στο δυναμικό περιβάλλον. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Α2, Α3, Α7.

<u>Στο μέσο –τεστ:</u> ανέπτυξε **παραγωγικό συλλογισμό**, διατύπωσε και εφάρμοσε θεωρήματα για την απόδειξη του προβλήματος, κατασκευάζοντας ένα ακριβές διάγραμμα. Αιτιολόγησε ανεπαρκώς το συμπέρασμα μέσω μιας λογικής πρότασης (οικονομικό ορισμό) του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Β1, Β2, Β4, Β5, Β6, Β7.

<u>Στην επίλυση του πραγματικού προβλήματος</u>: κατασκεύασε ένα ακριβές διάγραμμα αποτυπώνοντας τη διαδικασία που είχε εφαρμόσει στο δυναμικό μέσο. Η διαδικασία περιστροφής στο λογισμικό τον βοήθησε να κατανοήσει την περιστροφή κατά 90^o σε ίση απόσταση. Η αναλυτική μέθοδος που ο μαθητής είχε εφαρμόσει στο λογισμικό είχε ως αποτέλεσμα να οδηγηθεί σε μια σύνθετη κατασκευή στο χαρτί. Για να ολοκληρώσει την απόδειξη χρησιμοποίησε συνδυασμό **απαγωγικού** και **παραγωγικού** συλλογισμού. Έχει αναπτύξει την ικανότητα μετατροπής μιας λεκτικής διατύπωσης σε εικονική. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Π1, Π2, Π3, Π6, Π8.

Στο μετά-τεστ: ανέπτυξε **παραγωγικό συλλογισμό**, ανέπτυξε τη ικανότητα διατύπωσης **οικονομικών ορισμών** (π.χ ορθογωνίου) και κατασκεύασε την απόδειξη εφαρμόζοντας το ΘΜΠ. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Γ1, Γ3, Γ4, Γ5, Γ6, Γ7, Γ8, Γ9.

4.3.1.6. Ως προς τη συμμετοχή του Μ6 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι:

Α στάδιο (προ- τεστ)	Β στάδιο (μέσο- τεστ)
	
Σε τρίγωνο ισοσκελές να αποδείξετε ότι τα ύψη προς τις ίσες πλευρές είναι μεταξύ τους ίσα.	*Να δείξετε ότι αν σε παραλληλόγραμμο μια γωνία του είναι ορθή τότε είναι ορθογώνιο.*
	
Αναδιατυπωμένο πραγματικό πρόβλημα	Γ στάδιο (μετά- τεστ)

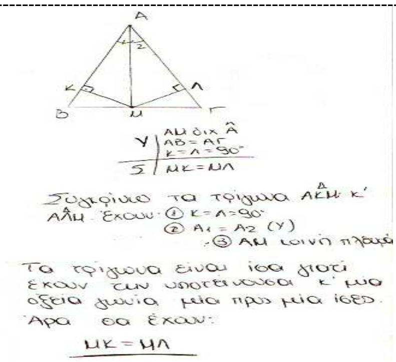
Στο προ-τεστ: ο μαθητής αιτιολογεί ανεπαρκώς, χρησιμοποιώντας οπτικά στοιχεία του διαγράμματος (π.χ, δεν είναι κατανοητό πως συμπεραίνει την ισότητα των γωνιών Β1, Γ1) και δεν διατυπώνει κριτήριο ισότητας. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Α2, Α3, Α4, Α5, Α6.

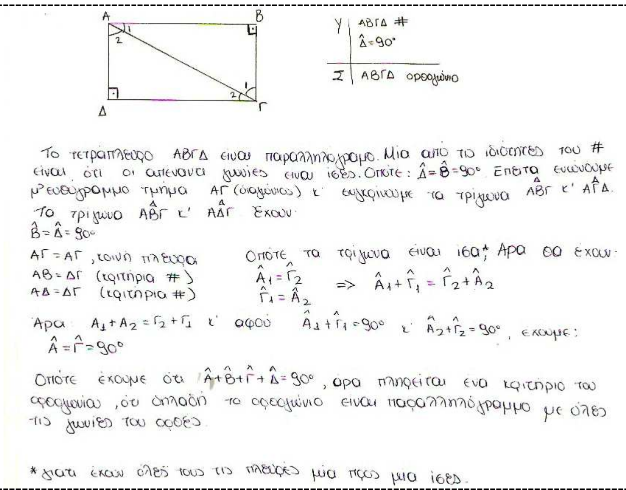
Στο μεσο-τεστ: τα σχήματα των παραλληλογράμμου και ορθογωνίου έχουν αποκτήσει τον **χαρακτήρα συμβόλου**. Ο μαθητής διατύπωσε **μη οικονομικό ορισμό** για να ολοκληρώσει την απόδειξη του προβλήματος. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Β1, Β3, Β4, Β5, Β7.

<u>Στο πραγματικό πρόβλημα:</u> έχει κατασκευάσει ένα νοητικό σχήμα για τον τρόπο περιστροφής του τμήματος, ένα νοητικό μοντέλο της περιστροφής τμήματος μέσω του «δυναμικού προβλήματος», αφού το χρησιμοποιεί για την απόδειξη της ισότητας και τον βοηθά στη λύση του προβλήματος. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Π1, Π2, Π3, Π6, Π8.

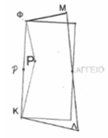
<u>Στο μετά-τεστ</u>: κατασκεύασε ένα ακριβές διάγραμμα, διατύπωσε έναν **οικονομικό ορισμό** του ορθογωνίου, και ανέπτυξε **παραγωγικό συλλογισμό**. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Γ1, Γ3, Γ4, Γ5, Γ6, Γ7, Γ8, Γ9.

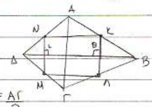
4.3.1.7. Ως προς τη συμμετοχή της Μ7 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

<table>
<tr><td>Α στάδιο (προ- τεστ)</td><td>Β στάδιο (μέσο- τεστ)</td></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
<tr><td>Σε τρίγωνο ισοσκελές να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις του μέσου Μ της βάσης από τις ίσες πλευρές είναι μεταξύ τους ίσες.</td><td>Να δείξετε ότι αν σε παραλληλόγραμμο γωνία του είναι ορθή τότε είναι ορθογώνιο.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>

Τα σημεία Φ, Κ καθώς κ' η θέση του αγγείου είναι σταθερα. Επίσης ξέρουμε ότι η θέση του αγγείου είναι πάντα το μέσο του ευθυγρ. τμήματος ΜΛ. Οπότε αν εφαρμόσουμε το Φ κ' το Κ σταθερα κ' θεωρήσουμε ότι πάντα το Αγγείο θα 'ναι στο μέσο του ευθυγρ. τμήματος, τότε όποια διαδρομή κ' αν ακολουθήσουμε ασχέτως με τη θέση του Ρ πάντα θα καταλήγουμε στο ίδιο σημείο (αρκεί ν' ακολουθούμε την ίδια διαδικασία.</td>
<td>α) Θέλω ν' αποδείξω ότι ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο. Παίρνω τα τρίγωνα ΑΔ̂Γ κ' ΑΒ̂Γ, αφού φέρω τις διαγωνίους του.
Στο ΑΔ̂Γ έχουμε:
Ν μέσο ΑΔ κ' Μ μέσο ΔΓ. Οπότε το τμήμα ΝΜ διέρχεται από τα μέσα των πλευρών, επομένως ισχύει ότι:
$MN // = \frac{ΑΓ}{2}$
Την ίδια διαδικασία ακολουθώ κ' στο δεύτερο τρίγωνο ΑΒ̂Γ ισχύει το ίδιο:
Κ μέσο ΑΒ κ' Λ μέσο ΒΓ
Οπότε $ΚΛ // = \frac{ΑΓ}{2}$


Άρα έχουμε $ΜΝ // = \frac{ΑΓ}{2}$ κ' $ΚΛ // = \frac{ΑΓ}{2}$
$\Rightarrow ΜΝ // = ΚΛ$
Το ίδιο θα πράξουμε κ' στα τρίγωνα ΑΒ̂Δ κ' ΔΒ̂Γ, τα οποία έχουν αν ακολουθήσουμε το παραπάνω συλλογισμό:
$ΚΝ // = ΒΔ$ κ' $ΜΛ // = ΒΔ$
$\Rightarrow ΚΝ // = ΜΛ$
Επομένως το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες κ' ίσες.
β) Έστω ότι οι διαγώνιοι ΑΓ κ' ΒΔ τέμνονται κάθετα τότε το ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο, γιατί:
$ΑΓ // ΜΝ$ κ' $ΑΓ // ΚΛ$, αφού $ΑΓ \perp ΒΔ$ $ΚΛ \perp ΒΔ$ κ' $ΜΝ \perp ΒΔ$, οπότε
σχηματίζονται οι γωνίες $\hat{Θ} = \hat{ι} = 90°$. Όμως
$\hat{ι} = \hat{Μ}$ ως εντός εκτός κ' επί ταυτά των παραλλήλων ΒΔ // ΜΛ που τέμνονται από τη ΜΝ. Επομένως $\hat{Ν} = 90°$
Άρα ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο με μία ορθή γωνία, οπότε πληρεί μία από τις ιδιότητες ορθογωνίου. Άρα το ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο.</td>
</tr>
<tr>
<td>Αναδιατυπωμένο πραγματικό πρόβλημα</td>
<td>Γ στάδιο (μετά- τεστ)</td>
</tr>
</table>

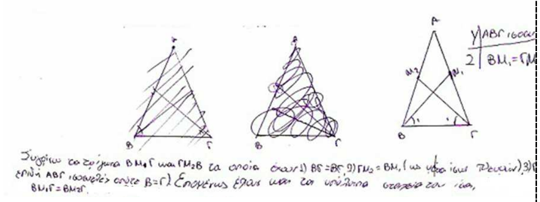
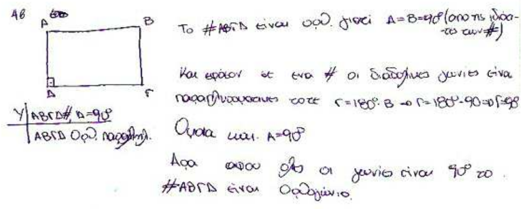
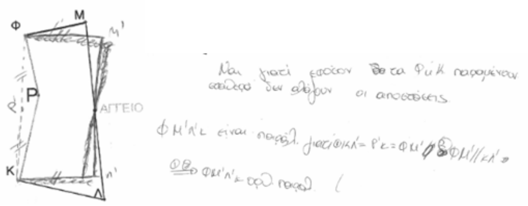
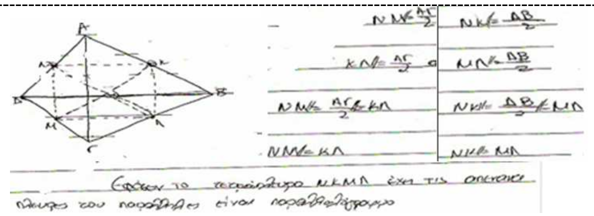
<u>Στο προ-τεστ:</u> κατασκεύασε ένα ακριβές διάγραμμα. Στην απόδειξη της χρησιμοποίησε συνδυασμό οπτικών στοιχείων (π.χ, ότι Α1=Α2) το οποίο δεν γνώριζε από την υπόθεση του προβλήματος και δεν είχε προηγουμένως αποδείξει) καθώς και θεωρητικών στοιχείων. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Α2, Α3, Α7.

<u>Στο μέσο-τεστ:</u> ακολούθησε αυθαίρετο τρόπο απόδειξης της πρότασης και διατύπωσε **μη οικονομικό ορισμό** του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Β1, Β3, Β5, Β6, Β7.

<u>Στο πραγματικό πρόβλημα</u>: κατασκεύασε ένα ακριβές διάγραμμα, ανέπτυξε **απαγωγικό συλλογισμό** (π.χ, δέχθηκε ως δεδομένο ότι το σημείο του θησαυρού θα είναι πάντα στο μέσο της απόστασης). Δε διατύπωσε απόδειξη με λογικό συνδυασμό σχέσεων, αλλά χρησιμοποίησε γενικεύσεις. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Π1, Π2, Π7, Π8.

<u>Στο μετά-τεστ:</u> κατασκεύασε ένα ακριβές διάγραμμα και ανέπτυξε **παραγωγικό συλλογισμό**. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Γ1, Γ3, Γ4, Γ5, Γ6, Γ7, Γ8, Γ9.

4.3.1.8. Ως προς τη συμμετοχή του Μ8 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

Α στάδιο (προ- τεστ)	Β στάδιο (μέσο- τεστ)
	
Σε τρίγωνο ισοσκελές να αποδείξετε ότι οι διάμεσοι προς τις ίσες πλευρές είναι μεταξύ τους ίσες.	*Να δείξετε ότι αν σε παραλληλόγραμμο μια γωνία του είναι ορθή τότε είναι ορθογώνιο.*
	
Αναδιατυπωμένο πραγματικό πρόβλημα	Γ στάδιο (μετά- τεστ)

Στο προ-τεστ: ανέπτυξε επιχειρηματολογία με **απαγωγικά επιχειρήματα** υπονοώντας το κριτήριο ισότητας. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Α1, Α2, Α5.

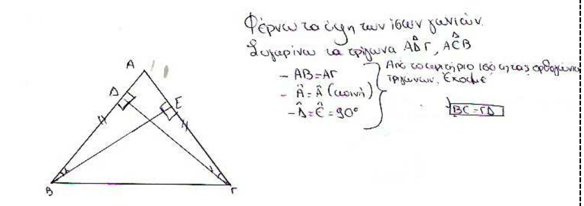
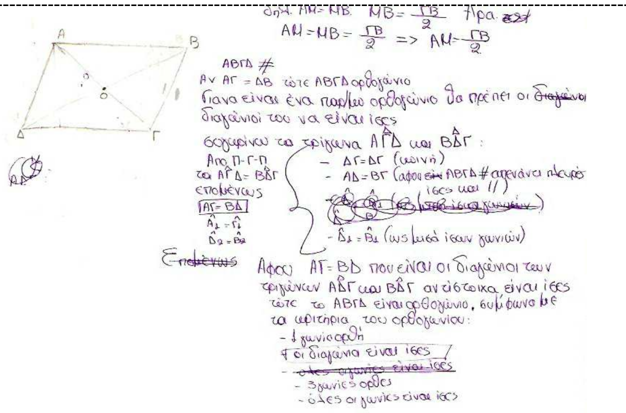
Στο μέσο-τεστ κατασκεύασε την απόδειξη αναπτύσσοντας συνδυασμό **απαγωγικού** και **παραγωγικού** συλλογισμού. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Β1, Β2, Β3, Β4, Β6, Β7.

Στο πραγματικό πρόβλημα: ο μαθητής ανέπτυξε **μετασχηματιστικό συλλογισμό** και συμπέρανε ότι το σχήμα είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μέσα από λογικές σχέσεις. Το διάγραμμα δεν ήταν το μέσο για να οδηγηθεί στα συμπεράσματα του. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Π1, Π2, Π3, Π8.

Στο μετά-τεστ: ανέπτυξε **παραγωγικό συλλογισμό** και διατύπωσε **οικονομικό ορισμό** του παραλληλογράμμου. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Γ1, Γ3, Γ4, Γ5, Γ6, Γ8, Γ9.

4.3.1.9. Ως προς τη συμμετοχή του Μ9 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

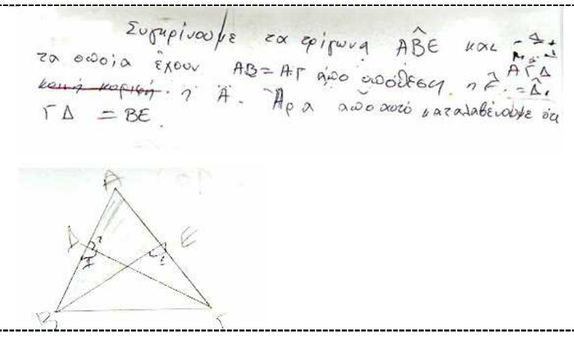
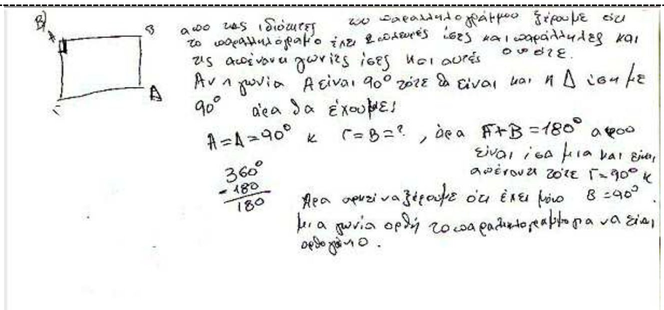
Α στάδιο (προ- τεστ)	Β στάδιο (μέσο- τεστ)

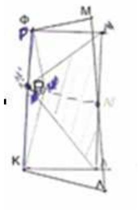
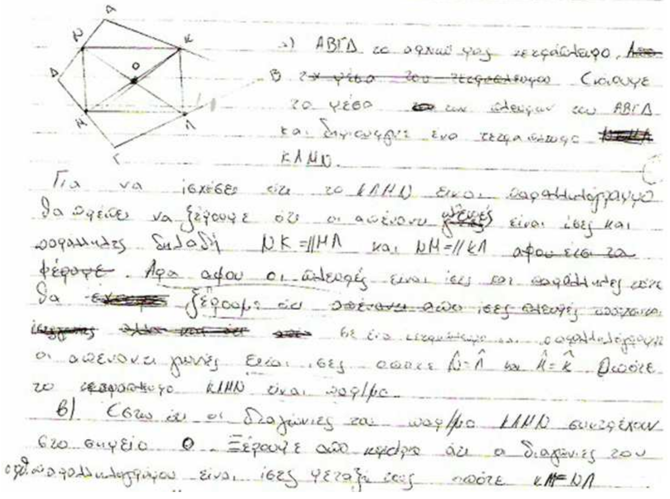
	
Σε τρίγωνο ισοσκελές να αποδείξετε ότι τα ύψη προς τις ίσες πλευρές είναι μεταξύ τους ίσα.	*Να δείξετε ότι αν σε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες είναι ίσες είναι ορθογώνιο.*
Αναδιατυπωμένο πραγματικό πρόβλημα	Γ στάδιο (μετά- τεστ)

<u>Στο προ-τεστ</u>: Κατασκεύασε ανακριβές διάγραμμα και δεν διατύπωσε υποθέσεις. Κατασκεύασε την απόδειξη της πρότασης, χωρίς να διατυπώσει το κριτήριο ισότητας. Συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Α3, Α7.

<u>Στο μέσο-τεστ</u>: Κατασκεύασε ανακριβές διάγραμμα, αναγνώρισε τα υποσχήματα των τριγώνων που έπρεπε να συγκρίνει για να ολοκληρώσει την απόδειξη. Ανέπτυξε επιχειρήματα που έχουν στοιχεία **παραγωγικού συλλογισμού**. Το παραλληλόγραμμο και το ορθογώνιο έχουν αποκτήσει τον **χαρακτήρα συμβόλου**. Συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Α2, Β3, Β5.

4.3.1.10. Ως προς τη συμμετοχή της Μ10 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι:

Α στάδιο (προ- τεστ)	Β στάδιο (μέσο- τεστ)
	
Σε τρίγωνο ισοσκελές να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν το	*Να δείξετε ότι αν σε παραλληλόγραμμο μια γωνία του είναι ορθή τότε είναι ορθογώνιο.*

μέσο Μ της βάσης με τα μέσα των ίσων πλευρών είναι μεταξύ τους ίσα.	
	
Αναδιατυπωμένο πραγματικό πρόβλημα	Γ στάδιο (μετά- τεστ)

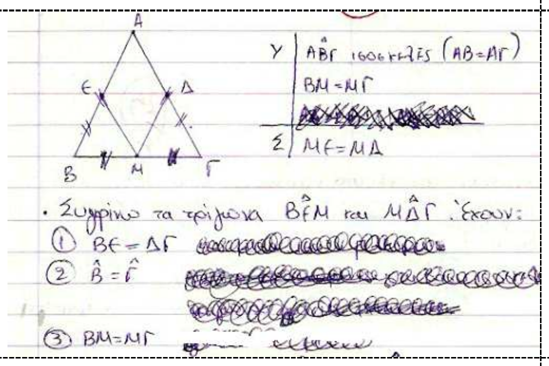
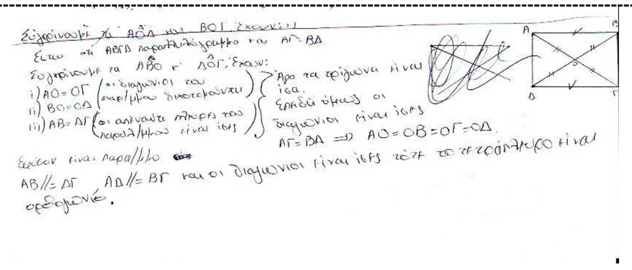
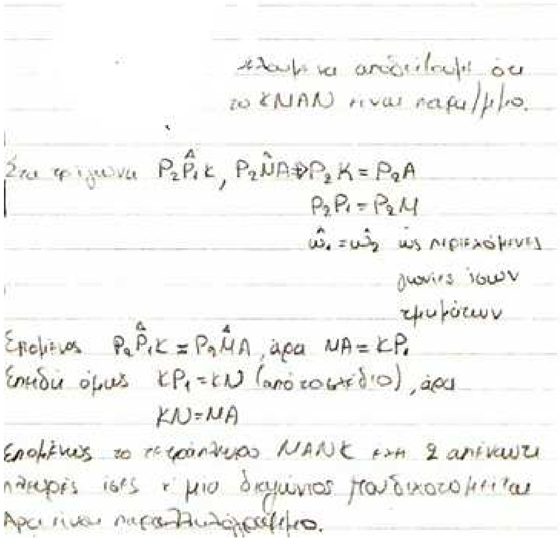
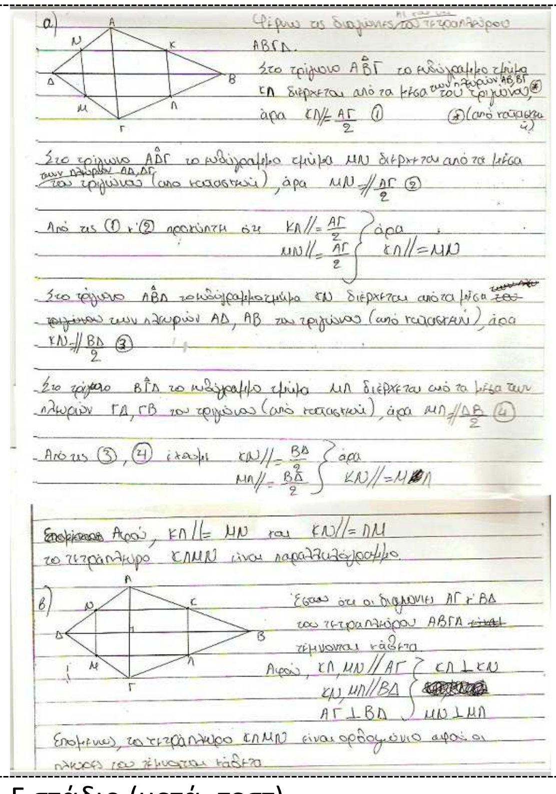
<u>Στο προ-τεστ</u>: δεν είχε ικανότητα μετάφρασης της λεκτικής πληροφορίας σε σχέδιο και αποδεικτική διαδικασία, καθώς και διαχωρισμού της υπόθεσης από το συμπέρασμα. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Α1, Α2, Α3, Α4, Α5, Α6, Α7.

<u>Στο μέσο-τεστ</u>: κατασκεύασε ένα ανακριβές διάγραμμα. Το παραλληλόγραμμο απέκτησε τον **χαρακτήρα συμβόλου** και η μαθήτρια κατανόησε τις πρωτεύουσες ιδιότητες του σχήματος. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Β1, Β2, Β3, Β4, Β5, Β6, Β7.

<u>Στο πραγματικό πρόβλημα</u>: κατασκεύασε ένα ακριβές διάγραμμα. Αναγνώρισε οπτικά ότι το σημείο βρίσκεται επί της «διάμεσου» στο τρίγωνο ΡΜΛ. Το τρίγωνο ΡΜΛ είναι σταθερό τρίγωνο, αφού οι κορυφές Μ, Λ είναι σημεία που προέκυψαν από περιστροφές σταθερών σημείων στο διάγραμμα. Επομένως, η μαθήτρια ανακάλυψε τη λύση η οποία ανήκει σε σταθερό ευθύγραμμο τμήμα , την οποία όμως δεν διατυπώνει με λόγια. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Π1, Π2, Π4, Π7.

<u>Στο μετά-τεστ</u>: διατύπωσε μη **οικονομικό ορισμό** του παραλληλογράμμου. Ανέπτυξε επιχειρηματολογία που βασίζεται στο διάγραμμα. Αναγνώρισε την ισότητα των απέναντι γωνιών του σχήματος και από αυτό ότι το σχήμα είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως, το παραλληλόγραμμο έχει αποκτήσει το χαρακτήρα σήματος. Στο δεύτερο σκέλος του προβλήματος διατύπωσε έναν **οικονομικό ορισμό** του ορθογωνίου. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Γ1, Γ3, Γ5, Γ6.

4.3.1.11. Ως προς τη συμμετοχή της Μ11 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

Α στάδιο (προ- τεστ)	Β στάδιο (μέσο- τεστ)
	
Σε τρίγωνο ισοσκελές να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν το μέσο Μ της βάσης με τα μέσα των ίσων πλευρών είναι μεταξύ τους ίσα.	*Να δείξετε ότι αν σε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες είναι ίσες είναι ορθογώνιο.*
	
Αναδιατυπωμένο πραγματικό πρόβλημα	Γ στάδιο (μετά- τεστ)

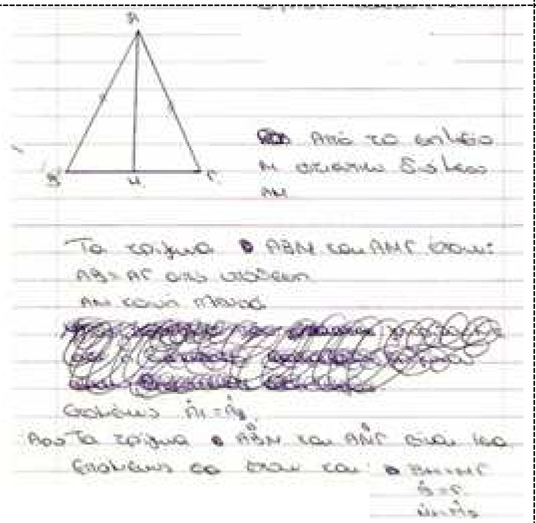
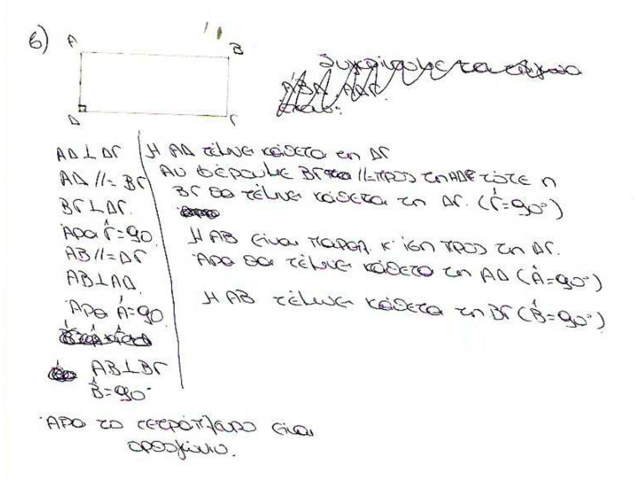
<u>Στο προ-τεστ</u> κατασκεύασε ακριβές διάγραμμα. Δεν είχε ικανότητα διαχωρισμού των στοιχείων της υπόθεσης από το συμπέρασμα της πρότασης. Δεν ολοκλήρωσε την απόδειξη. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Α1, Α2, Α5.

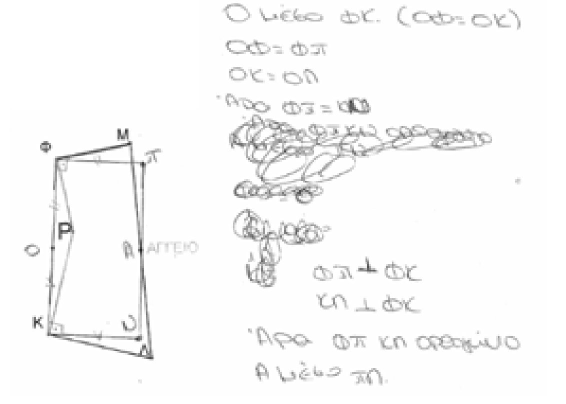
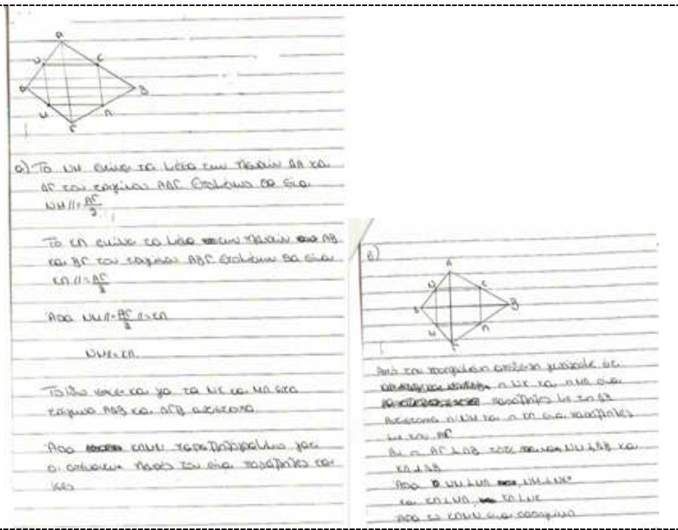
<u>Στο μέσο-τεστ</u> το παραλληλόγραμμο και το ορθογώνιο έχουν αποκτήσει το **χαρακτήρα συμβόλου**. Ανέπτυξε **παραγωγικά επιχειρήματα** αλλά δεν ολοκλήρωσε την απόδειξη. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Β3, Β4.

Στο πραγματικό πρόβλημα βασίστηκε σε στοιχείο του διαγράμματος και ανέπτυξε συνδυασμό **απαγωγικού και παραγωγικού συλλογισμού.** Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Π1, Π2, Π3, Π8.

Στο μετά-τεστ απέδειξε ότι οι απέναντι πλευρές του ΚΛΜΝ είναι παράλληλες και ίσες, με εφαρμογή του θεωρήματος ΘΜΠ και στο τέλος διατύπωσε ένα **μη οικονομικό ορισμό του παραλληλογράμμου**. Στο δεύτερο σκέλος ανέπτυξε **παραγωγικό συλλογισμό** προκειμένου να αποδείξει την καθετότητα των πλευρών του εσωτερικού σχήματος, διατυπώνοντας έναν **αυθαίρετο οικονομικό ορισμό** για το ορθογώνιο («είναι ορθογώνιο αφού οι πλευρές του τέμνονται κάθετα»). Η μαθήτρια υπονοεί προτάσεις της γεωμετρίας, επομένως η αιτιολόγηση της είναι μεταξύ **γενικού παραδείγματος και πειράματος σκέψης** (Balachef, 1982, 1988b). Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Γ1, Γ3, Γ4, Γ5, Γ6, Γ7, Γ8, Γ9.

4.3.1.12. Ως προς τη συμμετοχή της Μ12 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

Α στάδιο (προ- τεστ)	Β στάδιο (μέσο- τεστ)
	
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ισοσκελές (ΑΒ=ΑΓ). Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις του σημείου Μ από τις ΑΒ, ΑΓ είναι ίσες μεταξύ τους.	*Να δείξετε ότι αν σε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες είναι ίσες είναι ορθογώνιο.*

	
Αναδιατυπωμένο πραγματικό πρόβλημα	Γ στάδιο (μετά- τεστ)

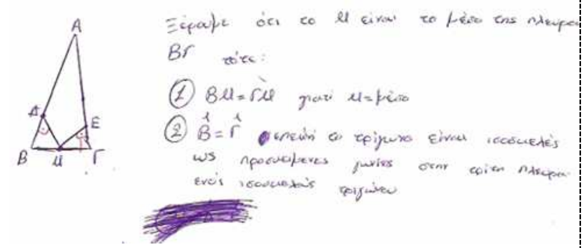
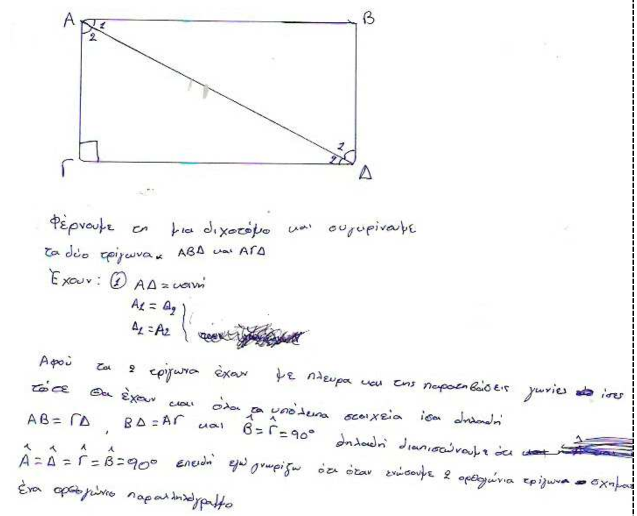
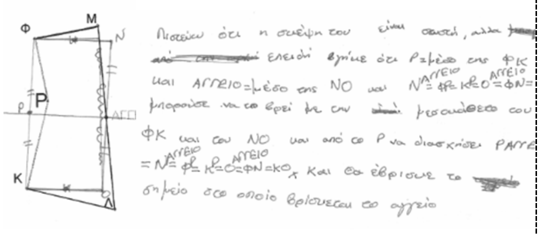
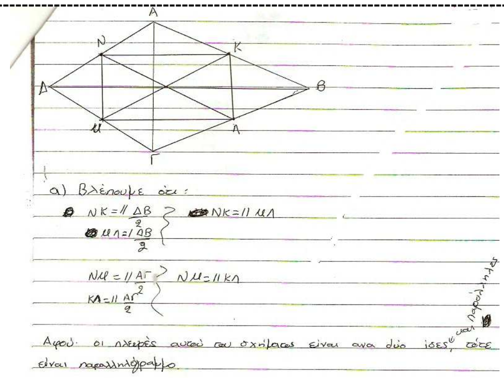
Στο προ-τεστ: η μαθήτρια μετέφρασε την έννοια της απόστασης λανθασμένα, δηλαδή δεν έχει αναπτύξει την ικανότητα μετάφρασης της λεκτικής διατύπωσης σε εικονική. Επομένως, η επίλυση του προβλήματος δε συσχετίζεται με τη λεκτική διατύπωση. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Α1, Α3, Α4, Α5, Α6, Α7.

Στο μέσο τεστ: έχει αποκτήσει την ικανότητα μετάφρασης μια **'αν…τότε'** δήλωσης. Έχει αποκτήσει την ικανότητα να **συσχετίζει έννοιες** (συσχετίζει την έννοια της παραλληλίας με την έννοια της καθετότητας) και αποδεικνύει ότι όλες οι γωνίες του σχήματος είναι ορθές, καταλήγοντας στο συμπέρασμα της πρότασης. Επομένως, εφάρμοσε **μη οικονομικό ορισμό** του ορθογωνίου και ανέπτυξε στοιχεία παραγωγικού συλλογισμού. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Β1, Β2, Β3, Β4, Β6, Β7.

Στο πραγματικό πρόβλημα: εξέφρασε τις σχέσεις μεταξύ των τμημάτων και διατύπωσε ότι το σχήμα είναι ορθογώνιο, χωρίς να αιτιολογήσει το συλλογισμό της. Κατασκεύασε ακριβές διάγραμμα, ως αποτέλεσμα της δυναμικής οπτικοποίησης της έννοιας της περιστροφής, εξέφρασε τις σχέσεις μεταξύ των τμημάτων και διατύπωσε ότι το σχήμα είναι ορθογώνιο, χωρίς να αιτιολογήσει το συλλογισμό της. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Π1, Π2, Π5, Π8.

Στο μετά-τεστ η απόδειξη της πρότασης ολοκληρώθηκε από τη μαθήτρια, αναπτύσσοντας **παραγωγικό συλλογισμό**. Δε διατύπωσε το ΘΜΠ και οδηγήθηκε σε συμπέρασμα για τις πλευρές του σχήματος, αποδεικνύοντας ότι είναι παραλληλόγραμμο διατυπώνοντας **μη οικονομικό ορισμό**, χρησιμοποίησε τα συμπεράσματα της προηγούμενης πρότασης για να ολοκληρώσει την απόδειξη του προβλήματος. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Γ1, Γ3, Γ5, Γ7.

4.3.1.13. Ως προς τη συμμετοχή του Μ13 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

Α στάδιο (προ- τεστ)	Β στάδιο (μέσο- τεστ)
	
Σε τρίγωνο ισοσκελές να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις του μέσου Μ της βάσης από τις ίσες πλευρές είναι μεταξύ τους ίσες.	*Να δείξετε ότι αν σε παραλληλόγραμμο η μια γωνία του είναι ορθή είναι ορθογώνιο.*
	
Αναδιατυπωμένο πραγματικό πρόβλημα	Γ στάδιο (μετά- τεστ)

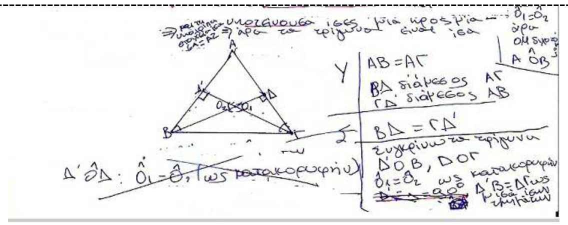
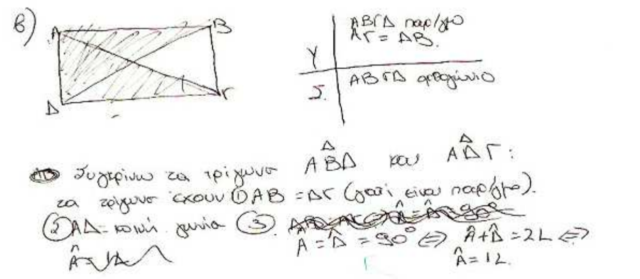
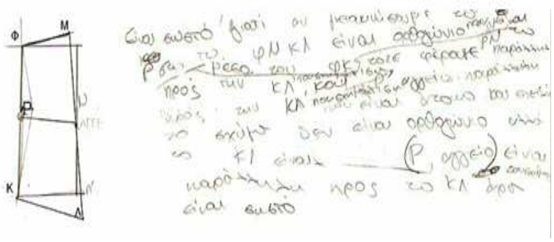
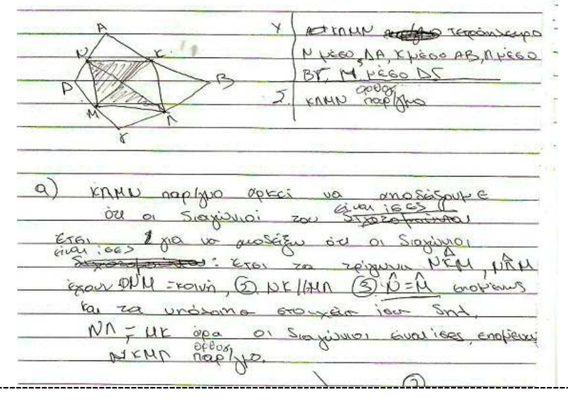
<u>Στο προ-τεστ</u> δεν είχε ικανότητα μετάφρασης της λεκτικής διατύπωσης σε εικονική, με αποτέλεσμα να κατασκευάσει ένα ανακριβές διάγραμμα. Χρησιμοποίησε στοιχεία της υπόθεσης αλλά δεν ολοκλήρωσε την απόδειξη της πρότασης, ούτε διατύπωσε κάποιο θεώρημα. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Α5, Α6, Α7.

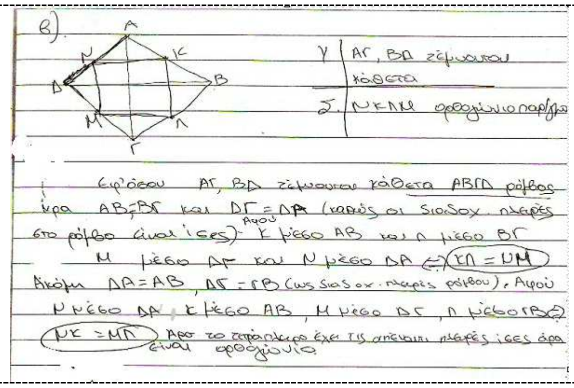
<u>Στο μέσο-τεστ</u> διατύπωσε το κριτήριο ισότητας τριγώνων για να αιτιολογήσει το συμπέρασμα του καθώς και συμπεράσματα όπως την ισότητα των απέναντι γωνιών του σχήματος, το οποίο τον οδήγησε να συμπεραίνει ότι το σχήμα είναι ορθογώνιο. Επομένως ανέπτυξε **παραγωγικό συλλογισμό**. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Β2, Β3, Β4, Β6, Β7.

Στο πραγματικό πρόβλημα ο μαθητής κατασκεύασε ένα ακριβές διάγραμμα ορθογωνίου στο οποίο περιέγραψε σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων του διαγράμματος, επομένως έχει αποκτήσει την ικανότητα δομικής ανάλυσης του σχήματος. Διαπίστωσε την ισότητα των τμημάτων ΦΡ, ΦΝ, d(Ν, αγγείο), ΚΛ και έδωσε λύση στο πρόβλημα. Ο μαθητής δέχθηκε ότι η μεσοκάθετος του ΦΚ είναι και μεσοκάθετος του ΝΟ, επομένως συμπέρανε από τα αποτελέσματα στην οθόνη την αιτία, δηλαδή ανέπτυξε **απαγωγικό συλλογισμό**. Έχει αναπτύξει την ικανότητα **λογικής εφαρμογής** των σχέσεων στο πρόβλημα. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Π1, Π2, Π3, Π5, Π8.

Στο μετά-τεστ: χρησιμοποίησε οπτικά στοιχεία του διαγράμματος και υπονοεί το θεώρημα για να αποδείξει την παραλληλία των δυο πλευρών του σχήματος, στη συνέχεια την παραλληλία και ισότητα των δυο άλλων πλευρών, επομένως ανέπτυξε **παραγωγικό συλλογισμό**. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Γ1, Γ3, Γ5, Γ6.

4.3.1.14. Ως προς τη συμμετοχή της Μ14 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

Α στάδιο (προ- τεστ)	Β στάδιο (μέσο- τεστ)
	
Σε τρίγωνο ισοσκελές να αποδείξετε ότι οι διάμεσοι προς τις ίσες πλευρές είναι μεταξύ τους ίσες.	*Να δείξετε ότι αν σε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες είναι ίσες είναι ορθογώνιο.*
	

	
Αναδιατυπωμένο πραγματικό πρόβλημα	Γ στάδιο (μετά- τεστ)

Στο προ-τεστ:κατασκεύασε ανακριβές διάγραμμα, χρησιμοποίησε στοιχεία του συμπεράσματος για την υπόθεση του προβλήματος αλλά δεν ολοκλήρωσε την απόδειξη. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Α1, Α2, Α3, Α4, Α5, Α6, Α7.

Στο μέσο-τεστ: έχει αναπτύξει την ικανότητα μετάφρασης της «αν…τότε» δήλωσης. Αιτιολογεί ανεπαρκώς και οδηγείται στο συμπέρασμα της πρότασης. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Β1, Β2, Β3, Β4, Β6, Β7.

Στο πραγματικό πρόβλημα: ανέπτυξε **μετασχηματιστικό συλλογισμό,** αφού ανέπτυξε **σκέψη με κίνηση** σε στατικό διάγραμμα και προέβλεψε λογικές σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων του διαγράμματος. Ανέπτυξε απαγωγικό συλλογισμό, αφού διατύπωσε την ισότητα d(Ρ, αγγείο)=ΚΛ και την παραλληλία («φέραμε παράλληλη προς την ΚΛ»), επομένως προσδιόρισε **την λύση του προβλήματος, χρησιμοποιώντας** στοιχεία από το διάγραμμα. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Π1, Π2, Π3, Π5.

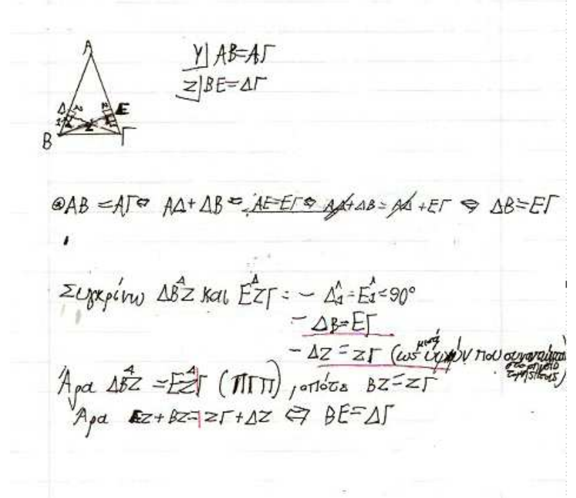
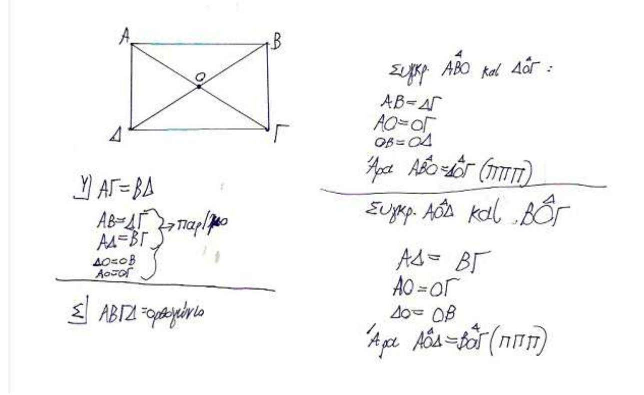
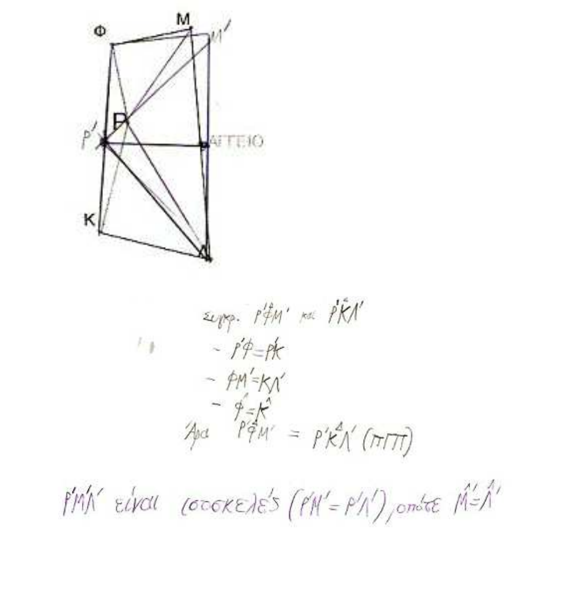
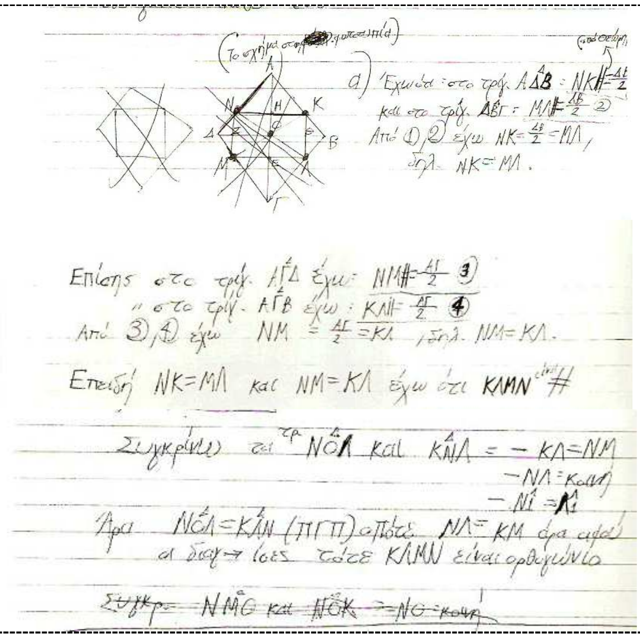
Στο μετά-τεστ: διατύπωσε έναν **οικονομικό ορισμό** για το ορθογώνιο. Ανέπτυξε συνδυασμό **απαγωγικού** και παραγωγικού **συλλογισμού**, προκειμένου να αποδείξει το συλλογισμό της. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Γ1, Γ2, Γ3, Γ5, Γ6.

4.3.2. Μέρος Β. Μελέτη της ομάδας ελέγχου

4.3.2.1.Ως προς τη συμμετοχή του ΜΕ1 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

Στο προ-τεστ: κατασκεύασε ακριβές διάγραμμα, χρησιμοποίησε ισότητα (ΑΔ=ΑΕ) την οποία συμπέρανε από το διάγραμμα, αναπτύσσοντας συνδυασμό **απαγωγικού και παραγωγικού συλλογισμού**. Αντιμετώπισε **γνωστικά εμπόδια,** προκειμένου να ολοκληρώσει την απόδειξη. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Α2, Α3, Α5, Α6, Α7.

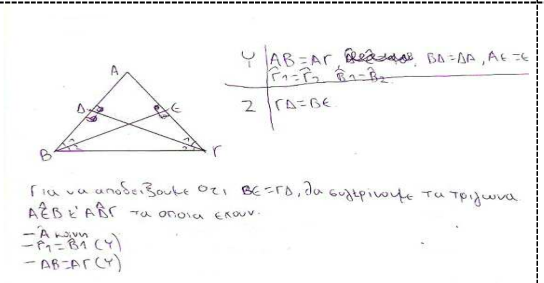
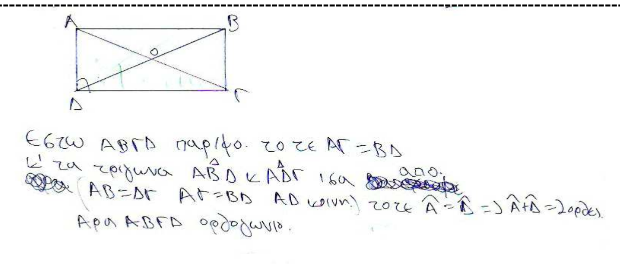
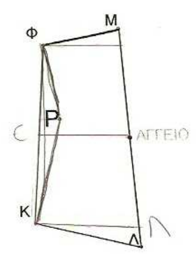
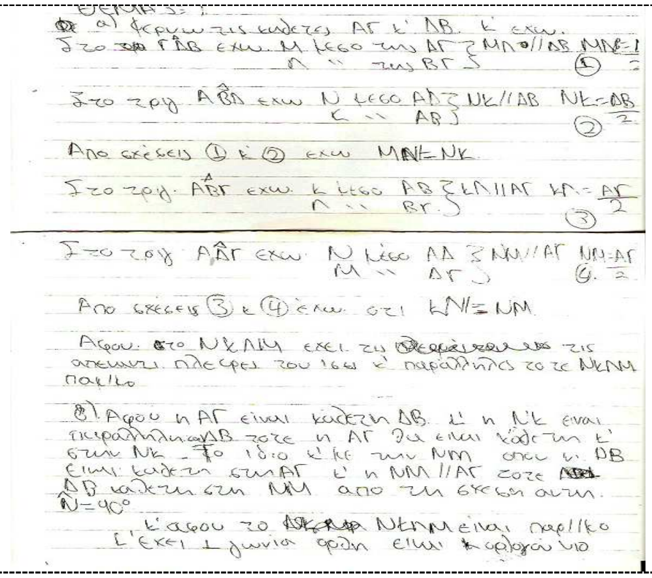
Στο μέσο-τεστ: δεν είχε ικανότητα μετάφρασης της **λεκτικής αναπαράστασης σε συμβολική, δηλαδή** ικανότητα μετάφρασης της «αν…τότε» δήλωσης. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Β1, Β4.

Α στάδιο (προ- τεστ)	Β στάδιο (μέσο- τεστ)
	
Σε τρίγωνο ισοσκελές να αποδείξετε ότι τα ύψη προς τις ίσες πλευρές είναι μεταξύ τους ίσα.	*Να δείξετε ότι αν σε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες είναι ίσες είναι ορθογώνιο.*
	
Αναδιατυπωμένο πραγματικό πρόβλημα	Γ στάδιο (μετά- τεστ)

Στο πραγματικό πρόβλημα: κατασκεύασε **ανακριβές διάγραμμα,** αφού δεν κατανόησε την έννοια της περιστροφής κατά 90^o και επομένως **δεν είχε ικανότητα εφαρμογής της λύσης** του προβλήματος. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Π5.

Στο μετά-τεστ: κατασκεύασε ένα ειδικό σχήμα (ρόμβο), παρερμηνεύοντας τα δεδομένα του προβλήματος, επομένως **δεν έχει αναπτύξει ικανότητες σχεδίασης**. Εφάρμοσε το θεώρημα ΘΜΠ, το οποίο δε διατύπωσε, επομένως **έχει αναπτύξει τη διαδικαστική γνώση** του θεωρήματος. Διατύπωσε έναν **οικονομικό ορισμό** του ορθογωνίου και λογικοπαραγωγικό επιχείρημα το οποίο δεν προέκυψε από την επίλυση του προβλήματος. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Γ1, Γ3, Γ4, Γ5, Γ6, Γ7, Γ8, Γ9.

4.3.2.2.Ως προς τη συμμετοχή του ΜΕ2 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

Α στάδιο (προ- τεστ)	Β στάδιο (μέσο- τεστ)
	
Σε τρίγωνο ισοσκελές να αποδείξετε ότι τα ύψη προς τις ίσες πλευρές είναι μεταξύ τους ίσα.	*Να δείξετε ότι αν σε παραλληλόγραμμο μια γωνία του είναι ορθή τότε είναι ορθογώνιο.*
	
Αναδιατυπωμένο πραγματικό πρόβλημα	Γ στάδιο (μετά- τεστ)

Στο προ-τεστ: ο μαθητής εξειδίκευσε το διάγραμμα, αφού παρερμήνευσε την ιδιότητα του ύψους και ως ιδιότητα της διχοτόμου και διαμέσου και δεν ολοκλήρωσε την απόδειξη. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Α3, Α4, Α6, Α7.

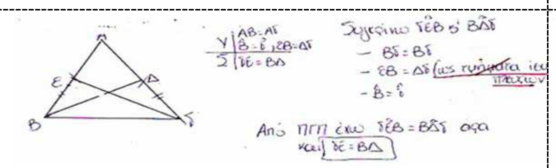
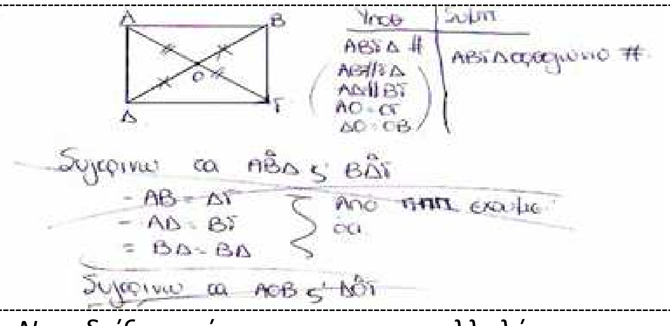
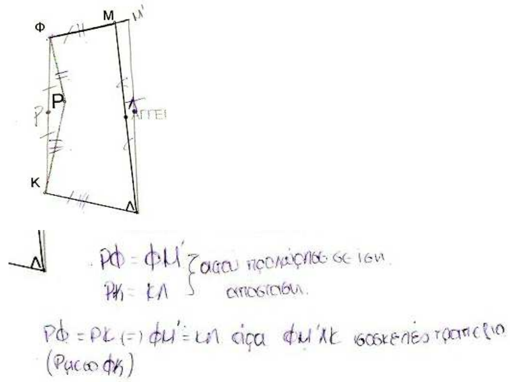
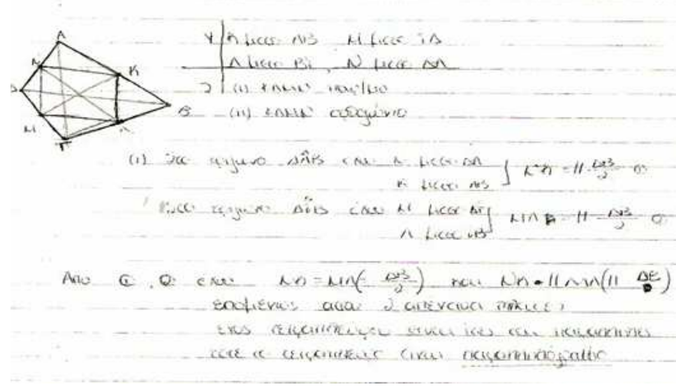
Στο μέσο-τεστ: κατασκεύασε ακριβές διάγραμμα, μετέφρασε την λεκτική διατύπωση του προβλήματος ανεπαρκώς, αφού δεν χρησιμοποίησε το στοιχείο της ορθής γωνίας. Επομένως, δεν είχε αποκτήσει την ικανότητα μετάφρασης της «αν…τότε» δήλωσης. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Β1, Β3, Β6.

Στο πραγματικό πρόβλημα: κατασκεύασε **ανακριβές διάγραμμα** αφού δεν κατανόησε την έννοια της περιστροφής κατά 90^o.

Μετασχημάτισε τα τμήματα ΦΟ, ΟΚ σε κάθετα αλλά άνισα τμήματα, με αποτέλεσμα να μην έχει την δυνατότητα να οπτικοποιήσει μέσω του διαγράμματος το σχήμα του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, το οποίο αποτελεί βασικό στοιχείο για την επίλυση του προβλήματος. Συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Π5.

Στο μετά-τεστ: ανέπτυξε την διαδικαστική **γνώση** του θεωρήματος ΘΜΠ, **παραγωγικό συλλογισμό** και διατύπωσε **οικονομικό ορισμό** του ορθογωνίου. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Γ1, Γ3, Γ6, Γ7.

4.3.2.3.Ως προς τη συμμετοχή του ΜΕ3 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

Α στάδιο (προ- τεστ)	Β στάδιο (μέσο- τεστ)
	
Σε τρίγωνο ισοσκελές να αποδείξετε ότι οι διάμεσοι προς τις ίσες πλευρές είναι μεταξύ τους ίσες.	*Να δείξετε ότι αν σε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες είναι ίσες τότε είναι ορθογώνιο.*
	
Αναδιατυπωμένο πραγματικό πρόβλημα	Γ στάδιο (μετά- τεστ)

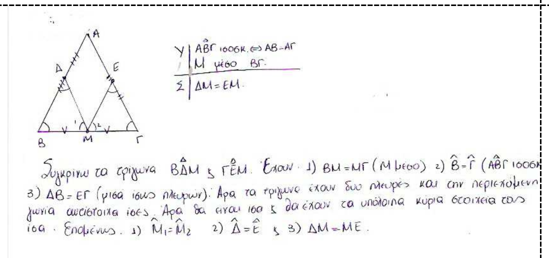
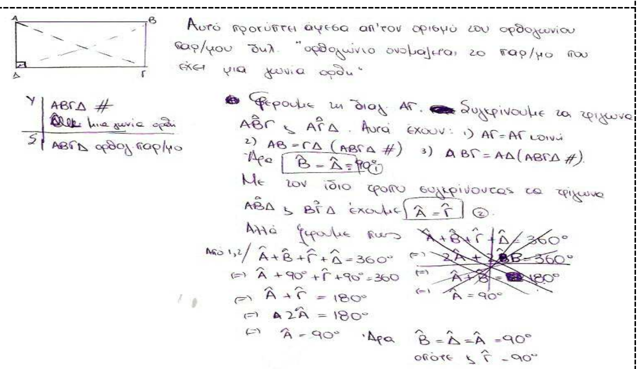
Στο προ-τεστ: η μαθήτρια δεν κατασκεύασε ακριβές διάγραμμα, αλλά ολοκλήρωσε την απόδειξη. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Α4, Α5, Α7.

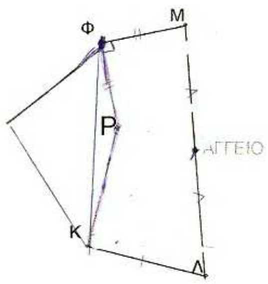
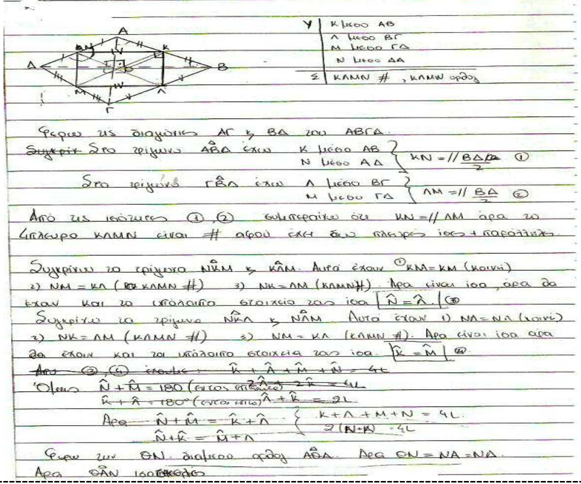
Στο μέσο-τεστ: η μαθήτρια κατασκεύασε ακριβές διάγραμμα και διατύπωσε τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου. Δεν ανέπτυξε την ικανότητα διαχωρισμού της υπόθεσης από το συμπέρασμα, καθώς και την ικανότητα να μεταφράσει τη λεκτική διατύπωση σε συμβολική αναπαράσταση. Επομένως, δεν έχει αποκτήσει την ικανότητα μετάφρασης της «αν…τότε» δήλωσης. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Β1, Β5.

Στο πραγματικό πρόβλημα: η μαθήτρια κατασκεύασε ανακριβές διάγραμμα αφού δεν κατανόησε την έννοια της περιστροφής κατά 90^o. Αναγνώρισε το σχήμα του ισοσκελούς τραπεζίου, επομένως υπέθεσε ότι τα τμήματα ΦΚ και Μ΄Λ είναι παράλληλα λόγω του οπτικού συλλογισμού που ανέπτυξε από το διάγραμμα. Συνεπώς το τυχαίο περιστατικό του διαγράμματος την εμπόδισε να οδηγηθεί στη λύση του προβλήματος. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Π4.

Στο μετά-τεστ: κατασκεύασε ανακριβές ειδικό διάγραμμα, ανέπτυξε την διαδικαστική **γνώση** του θεωρήματος ΘΜΠ, ανέπτυξε **παραγωγικό συλλογισμό** και διατύπωσε **οικονομικό ορισμό** του παραλληλογράμμου. Δεν ολοκλήρωσε την απόδειξη. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Γ1, Γ3, Γ5, Γ6, Γ7.

4.3.2.4.Ως προς τη συμμετοχή του ΜΕ4 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

Α στάδιο (προ- τεστ)	Β στάδιο (μέσο- τεστ)
	
Σε τρίγωνο ισοσκελές να αποδείξετε ότι οι διάμεσοι προς τις ίσες πλευρές είναι μεταξύ τους ίσες.	*Να δείξετε ότι αν σε παραλληλόγραμμο μια γωνία του είναι ορθή τότε είναι ορθογώνιο.*

	
Αναδιατυπωμένο πραγματικό πρόβλημα	Γ στάδιο (μετά- τεστ)

Στο προ-τεστ: Κατασκεύασε ακριβές διάγραμμα, μεταφράζοντας τη λεκτική διατύπωση. Χρησιμοποίησε κριτήριο ισότητας το οποίο διατύπωσε και ολοκλήρωσε την απόδειξη με **χρήση παραγωγικού συλλογισμού**. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Α2, Α4, Α7.

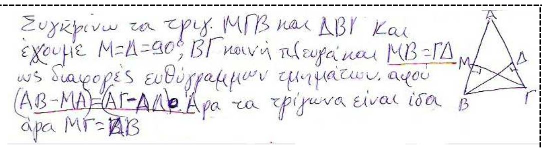
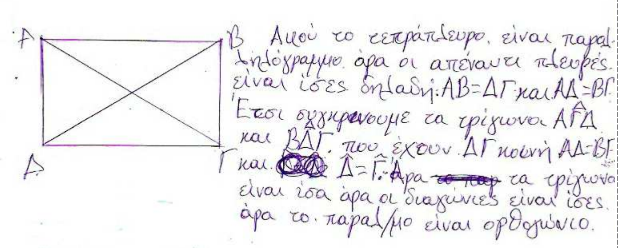
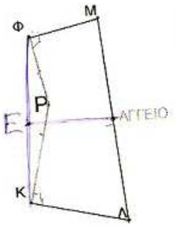
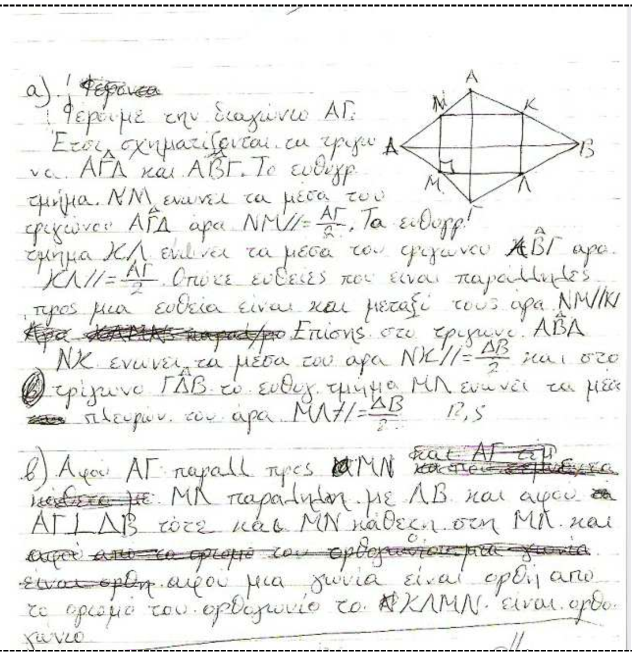
Στο μέσο-τεστ: Κατασκεύασε ακριβές διάγραμμα, διατύπωσε έναν **οικονομικό ορισμό, ανέπτυξε την ικανότητα μετάφρασης** της «αν…τότε» δήλωσης. **Στην απόδειξη της υπάρχουν στοιχεία παραγωγικού συλλογισμού.** Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Β1, Β2, Β3, Β6, Β7.

Στο πραγματικό πρόβλημα: Η μαθήτρια κατασκεύασε ανακριβές διάγραμμα αφού δεν κατανόησε την έννοια της περιστροφής κατά 90^o, το οποίο αποτέλεσε εμπόδιο στην επίλυση του προβλήματος. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Π5.

Στο μετά-τεστ: Κατασκεύασε ένα ειδικό διάγραμμα (ώστε το σημείο τομής των διαγωνίων του αρχικού τετράπλευρου να συμπίπτει με το σημείο τομής των διαγωνίων του ορθογωνίου), έχει αναπτύξει **την διαδικαστική γνώση** του θεωρήματος. Δεν ολοκλήρωσε την απόδειξη αφου δεν έχει αποκτήσει την ικανότητα της λογικής σύνδεσης των σχέσεων. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Γ1, Γ3, Γ4, Γ5, Γ6, Γ7, Γ8, Γ9.

4.3.2.5.Ως προς τη συμμετοχή του ΜΕ5 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

Α στάδιο (προ- τεστ)	Β στάδιο (μέσο- τεστ)

	
Σε τρίγωνο ισοσκελές να αποδείξετε ότι τα ύψη προς τις ίσες πλευρές είναι μεταξύ τους ίσα.	*Να δείξετε ότι αν σε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες είναι ίσες είναι ορθογώνιο.*
	
Αναδιατυπωμένο πραγματικό πρόβλημα	Γ στάδιο (μετά- τεστ)

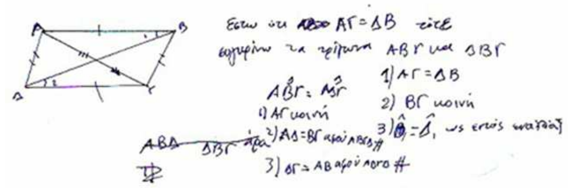
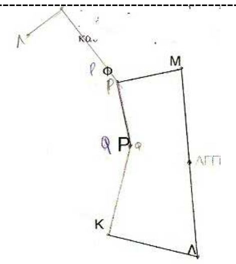
<u>Στο προ-τεστ</u>: ο μαθητής κατασκεύασε ένα **ανακριβές διάγραμμα**, δεν διατύπωσε υποθέσεις και συμπεράσματα της πρότασης, υπέθεσε στοιχεία προκειμένου να οδηγηθεί στην απόδειξη, αναπτύσσοντας **απαγωγικό συλλογισμό**. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Α2, Α4, Α6.

<u>Στο μέσο-τεστ</u>: **δεν ανέπτυξε την ικανότητα μετάφρασης** της «αν…τότε» δήλωσης. Απέδειξε την πρόταση χρησιμοποιώντας την ισότητα των γωνιών Δ και Γ που δεν γνώριζε από την υπόθεση. Απέδειξε ότι οι διαγώνιες είναι ίσες, δηλαδή κατέληξε σε συμπέρασμα που γνώριζε από την υπόθεση του προβλήματος. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Β5, Β8.

<u>Στο πραγματικό πρόβλημα</u>: κατασκεύασε ανακριβές διάγραμμα αφού δεν κατανόησε την έννοια της περιστροφής κατά 90^o, το οποίο αποτέλεσε εμπόδιο στην επίλυση του προβλήματος. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Π5.

Στο μετά-τεστ: κατασκεύασε ακριβές διάγραμμα, ανέπτυξε την διαδικαστική **γνώση** του θεωρήματος ΘΜΠ, **παραγωγικό συλλογισμό** και διατύπωσε **οικονομικό ορισμό** του παραλληλογράμμου. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Γ1, Γ3, Γ4, Γ5, Γ6, Γ7, Γ8, Γ9.

4.3.2.6.Ως προς τη συμμετοχή του ΜΕ6 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

Α στάδιο (προ- τεστ)	Β στάδιο (μέσο- τεστ)
	
Σε τρίγωνο ισοσκελές να αποδείξετε ότι τα ύψη προς τις ίσες πλευρές είναι μεταξύ τους ίσα.	*Να δείξετε ότι αν σε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες είναι ίσες είναι ορθογώνιο.*
	
Αναδιατυπωμένο πραγματικό πρόβλημα	Γ στάδιο (μετά- τεστ)

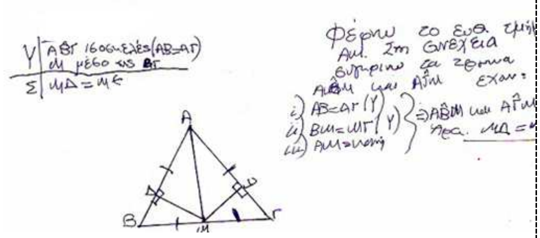
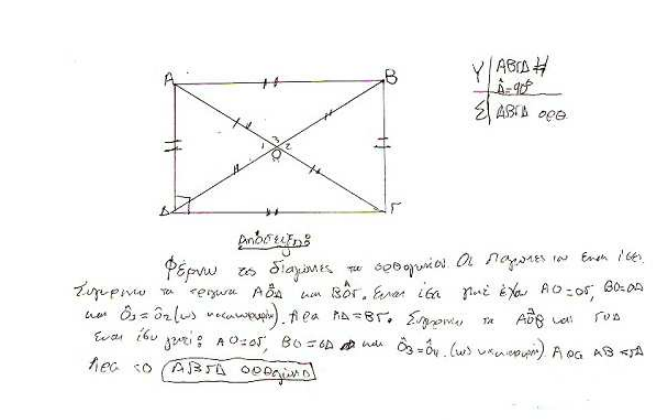
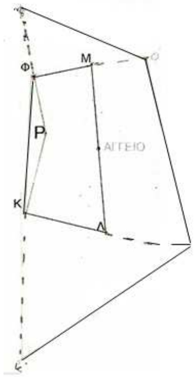
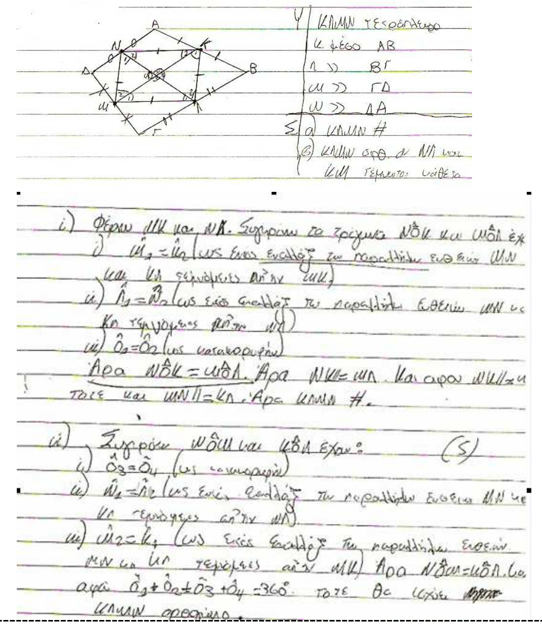
Στο προ-τεστ: Η μαθήτρια αντιμετώπιζε γνωστικά εμπόδια. Δεν είχε ικανότητα μετάφρασης της λεκτικής πληροφορίας σε σχέδιο, δεν διατύπωσε υποθέσεις και συμπεράσματα και δεν απέδειξε τη πρόταση. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Α1, Α2, Α3, Α4, Α5, Α6, Α7.

Στο μέσο-τεστ: Δεν είχε ικανότητα μετάφρασης της «αν…τότε» δήλωσης. Η μαθήτρια προσπάθησε να προσαρμόσει τις νέες γνώσεις **στο γνωστικό σχήμα** της σύγκρισης τριγώνων, χωρίς να καταφέρει να ολοκληρώσει την απόδειξη αφού αντιμετώπιζε **γνωστικά εμπόδια**. Το γραπτό τηςσυγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Β3, Β5, Β6.

Στο πραγματικό πρόβλημα: Δεν ανέπτυξε την ικανότητα μετάφρασης της διατύπωσης του προβλήματος σε ακριβές διάγραμμα, το οποίο αποτέλεσε εμπόδιο στην επίλυση του προβλήματος. Συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Π5.

Στο μετά-τεστ: Δεν είχε ικανότητα επίλυσης του προβλήματος.

4.3.2.7.Ως προς τη συμμετοχή του ΜΕ7 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

Α στάδιο (προ- τεστ)	Β στάδιο (μέσο- τεστ)
	
Σε τρίγωνο ισοσκελές να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις του μέσου Μ της βάσης από τις ίσες πλευρές είναι μεταξύ τους ίσες.	*Να δείξετε ότι αν σε παραλληλόγραμμο γωνία του είναι ορθή τότε είναι ορθογώνιο.*
	
Αναδιατυπωμένο πραγματικό πρόβλημα	Γ στάδιο (μετά- τεστ)

<u>Στο προ-τεστ</u>: δεν κατασκεύασε ακριβές διάγραμμα, σύγκρινε τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΓΜ και δεν απέδειξε την πρόταση. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Α3, Α4, Α6, Α7.

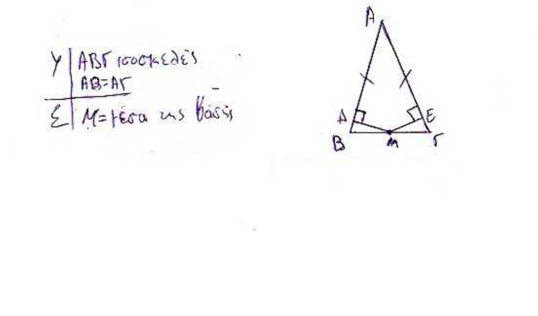
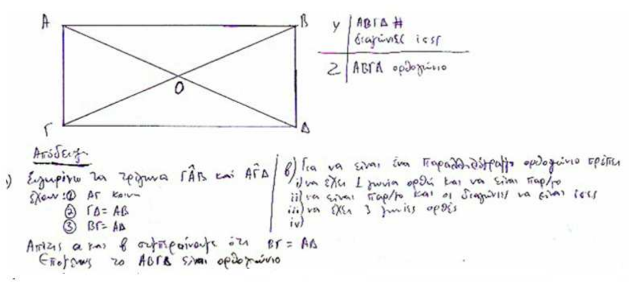
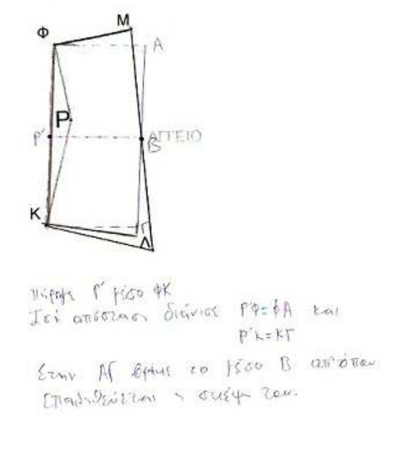
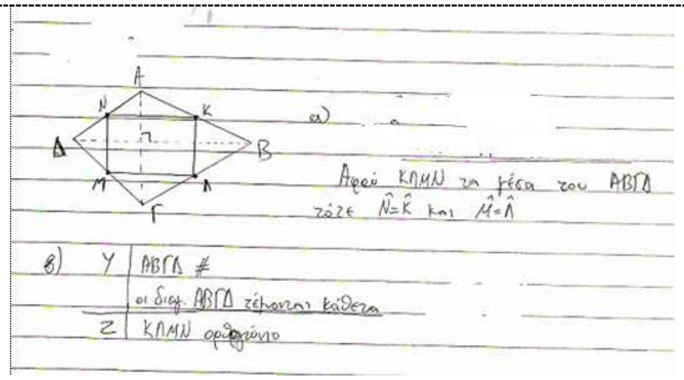
<u>Στο μέσο-τεστ</u>: κατασκεύασε ακριβές διάγραμμα στο οποίο σημείωσε όλα τα τμήματα με το ίδιο χαρακτηριστικό (τη διπλή γραμμή). Έχει αναπτύξει την ικανότητα διαχωρισμού της μετάφρασης της «αν…τότε» δήλωσης. Από τη σύγκριση των τριγώνων οδηγήθηκε σε σχέσεις

γνωστές από την υπόθεση. Επομένως αντιμετώπισε γνωστικά εμπόδια και δεν έχει αποκτήσει ικανότητα σύνδεσης των σχέσεων ώστε να παράγει την απόδειξη. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Β1, Β2, Β3, Β6.

<u>Στο πραγματικό πρόβλημα</u>: Δεν ανέπτυξε την ικανότητα μετάφρασης της διατύπωσης του προβλήματος σε ακριβές διάγραμμα, το οποίο αποτέλεσε εμπόδιο στην επίλυση του προβλήματος. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Π5.

<u>Στο μετά-τεστ</u>: Δεν έχει αναπτύξει την ικανότητα να διαχωρίσει τα στοιχεία της υπόθεσης και χρησιμοποιεί οπτικά στοιχεία για να αιτιολογήσει τους ισχυρισμούς του. Δεν έχει αναπτύξει την διαδικαστική ικανότητα εφαρμογής του ΘΜΠ και δεν ολοκλήρωσε την απόδειξη. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Γ1, Γ2, Γ4.

4.3.2.8.Ως προς τη συμμετοχή του ΜΕ8 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

Α στάδιο (προ- τεστ)	Β στάδιο (μέσο- τεστ)
	
Σε τρίγωνο ισοσκελές να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις του μέσου Μ της βάσης από τις ίσες πλευρές είναι μεταξύ τους ίσες.	*Να δείξετε ότι αν σε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες είναι ίσες είναι ορθογώνιο.*
	
Αναδιατυπωμένο πραγματικό πρόβλημα	Γ στάδιο (μετά- τεστ)

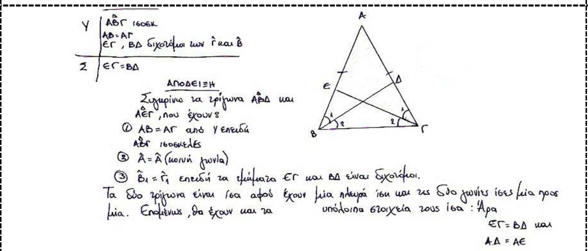
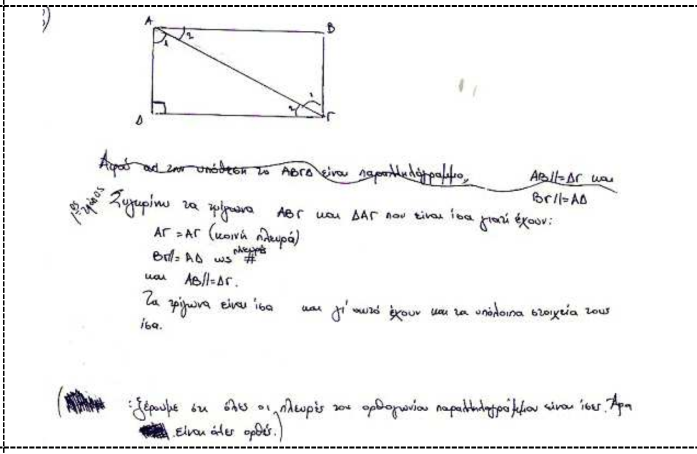
Στο προ-τεστ: Κατασκεύασε α**νακριβές διάγραμμα** και **δεν είχε δυνατότητα** διαχωρισμού της υπόθεσης από το συμπέρασμα καθώς και ικανότητα αποδεικτικής διαδικασίας. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Α3, Α4, Α6, Α7.

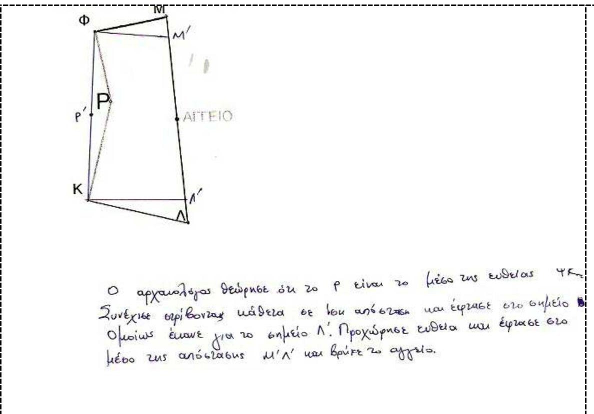
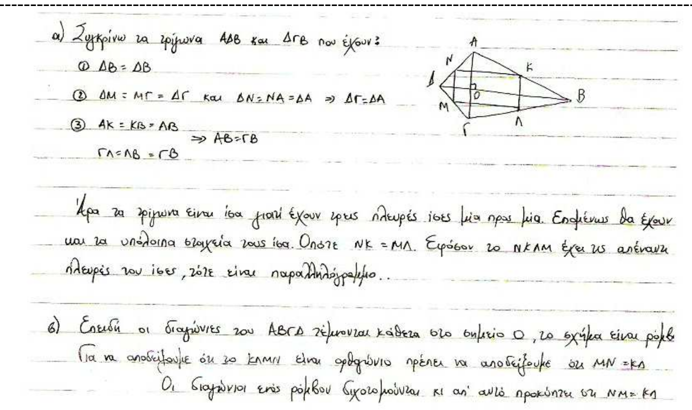
Στο μέσο-τεστ: Οδηγήθηκε σε σύγκριση τριγώνων και χρησιμοποίησε την ισότητα των διαγωνίων στην υπόθεση και στο συμπέρασμα της πρότασης. Διατύπωσε ιδιότητες-κριτήρια τα οποία όμως δεν είχε δυνατότητα να εφαρμόσει για να αποδείξει την πρόταση. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Β1, Β2, Β3, Β4, Β5, Β6, Β7.

Στο πραγματικό πρόβλημα: Κατασκεύασε **ακριβές διάγραμμα**, επομένως έχει αναπτύξει την ικανότητα μετάφρασης της λεκτικής διατύπωσης σε εικονική. Στο διάγραμμα έχει κατασκευάσει την περιστροφή των τμημάτων ΦΡ΄, Ρ΄Κ κατά ίσα και κάθετα τμήματα, που τον οδήγησε να σχεδιάσει το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, καθώς και την μεσοπαράλληλη του ορθογωνίου. Δεν έχει αναπτύξει την αποδεικτική ικανότητα, ούτε την ικανότητα εφαρμογής της λύσης. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Π1, Π2, Π3, Π4.

Στο μετά-τεστ: Κατασκεύασε ακριβές διάγραμμα, διαχώρισε την υπόθεση από το συμπέρασμα αλλά δεν απέδειξε την πρόταση. Στο γραπτό του παρουσιάζεται το χαρακτηριστικό Γ1.

4.3.2.9.Ως προς τη συμμετοχή του ΜΕ9 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

Α στάδιο (προ- τεστ)	Β στάδιο (μέσο- τεστ)
	
Σε τρίγωνο ισοσκελές να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι προς τις ίσες πλευρές είναι μεταξύ τους ίσες.	Αν σε παραλληλόγραμμο η μια γωνία είναι ορθή τότε είναι ορθογώνιο.

	
Αναδιατυπωμένο πραγματικό πρόβλημα	Γ στάδιο (μετά- τεστ)

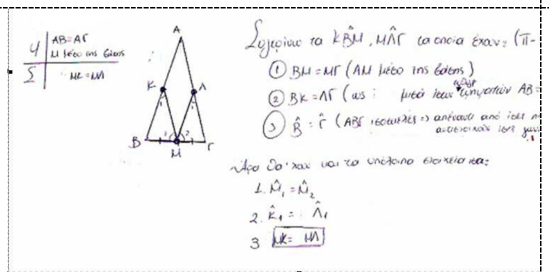
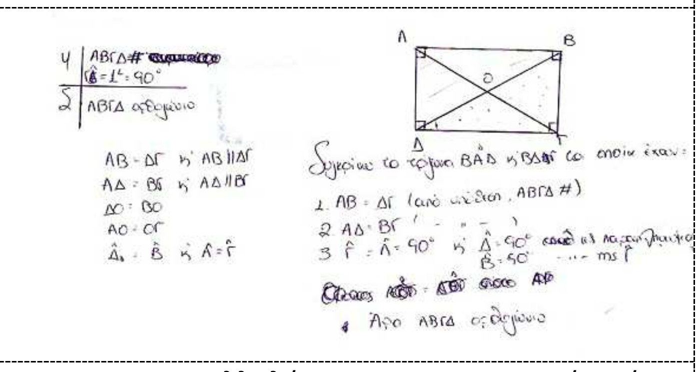
Στο προ-τεστ: η μαθήτρια ανέπτυξε **παραγωγικό συλλογισμό**. Διατύπωσε το κριτήριο ισότητας τριγώνων και ολοκλήρωσε την απόδειξη. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Α2, Α3, Α7.

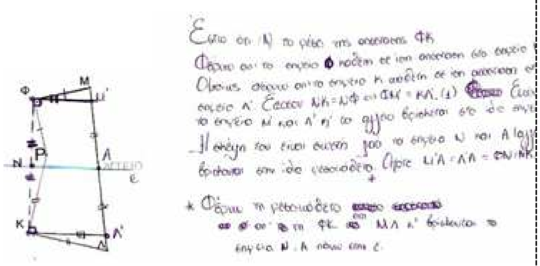
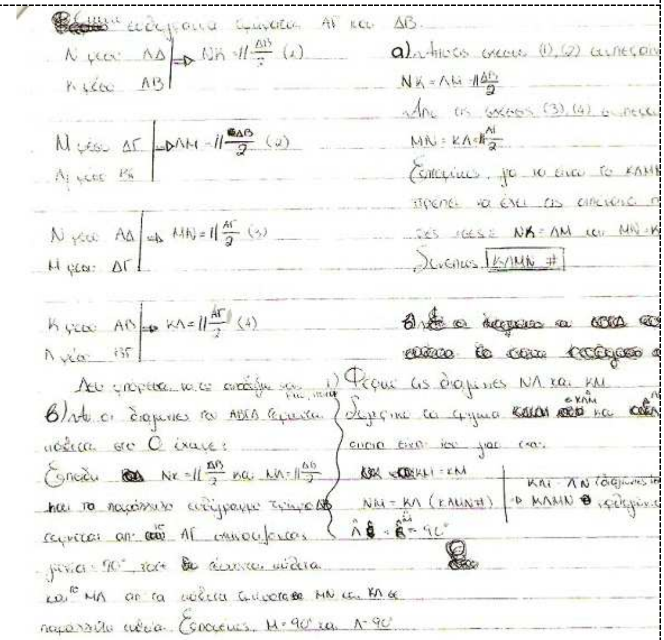
Στο μέσο-τεστ: ανέπτυξε **ανεπαρκή αιτιολόγηση** και δεν ολοκλήρωσε την απόδειξη αφού δεν διατύπωσε συμπεράσματα. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Β5.

Στο πραγματικό πρόβλημα: δεν ανέπτυξε την ικανότητα μετάφρασης της διατύπωσης του προβλήματος σε ακριβές διάγραμμα, το οποίο αποτέλεσε εμπόδιο στην επίλυση του προβλήματος. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Π5.

Στο μετά-τεστ: δεν ανέπτυξε την διαδικαστική ικανότητα εφαρμογής του ΘΜΠ. Η διατύπωση της «επειδή οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα το σχήμα είναι ρόμβος» μας οδηγεί να συμπεράνουμε ότι χρησιμοποίησε οπτικά στοιχεία για να συμπεράνει σχετικά με το είδος του διαγράμματος. Δεν ολοκλήρωσε την απόδειξη. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Γ4, Γ8.

4.3.2.10.Ως προς τη συμμετοχή του ΜΕ10 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

Α στάδιο (προ- τεστ)	Β στάδιο (μέσο- τεστ)
	
Σε τρίγωνο ισοσκελές να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν το	Αν σε παραλληλόγραμμο η μια γωνία είναι ορθή τότε είναι ορθογώνιο.

μέσο Μ της βάσης με τα μέσα των ίσων πλευρών είναι μεταξύ τους ίσα.	
	
Αναδιατυπωμένο πραγματικό πρόβλημα	Γ στάδιο (μετά- τεστ)

<u>Στο προ-τεστ</u>: η μαθήτρια κατασκεύασε ένα **ακριβές διάγραμμα**, διαχώρισε σωστά τις υποθέσεις και τα συμπεράσματα, σύγκρινε τρίγωνα, αιτιολογώντας τον συλλογισμό της και οδηγήθηκε στο συμπέρασμα αναπτύσσοντας **παραγωγικό συλλογισμό.** Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Α2, Α3, Α7.

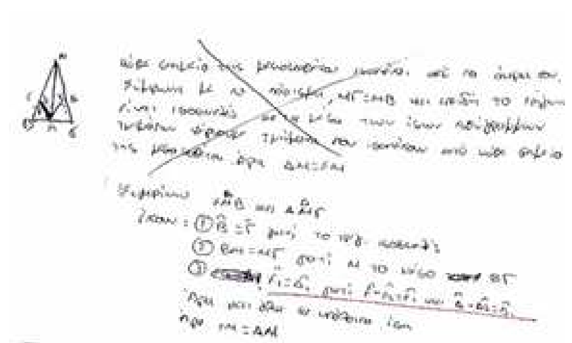
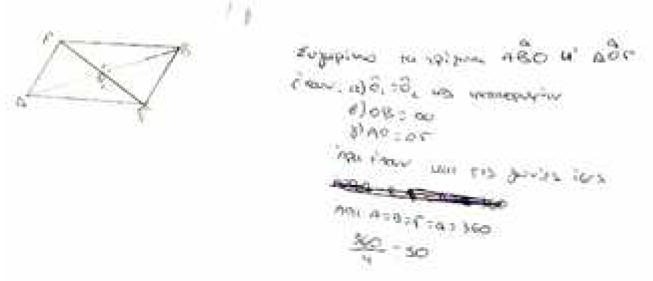
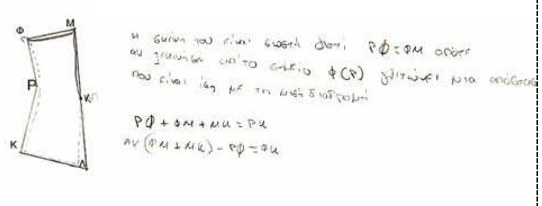
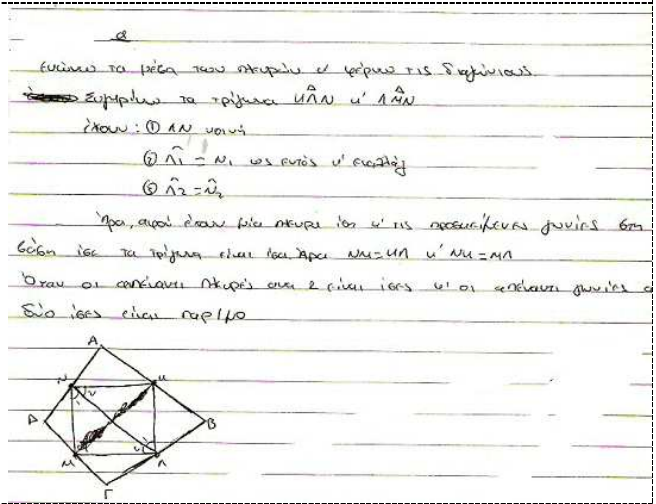
<u>Στο μέσο-τεστ</u>: σύγκρινε ανεπαρκώς τα τρίγωνα ΒΑΔ και ΒΔΓ και χρησιμοποίησε την ισότητα των γωνιών του παραλληλογράμμου για να οδηγηθεί στο συμπέρασμα. Επομένως, η μαθήτρια χρησιμοποίησε περισσότερα δεδομένα για να αποδείξει ότι ήταν αναγκαίο, αναπτύσσοντας **συμπερασματικό συλλογισμό**, χωρίς να έχει συνειδητή γνώση του χαρακτήρα συμβόλου του ορθογωνίου. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Β1, Β2, Β4, Β7.

<u>Στο πραγματικό πρόβλημα</u>: δεν έχει αναπτύξει την ικανότητα μετασχηματισμών. Διατύπωσε **λογικές σχέσεις** που αφορούν την καθετότητα των τμημάτων (κάθετη σε ίση απόσταση στο σημείο Λ΄) δεν μετέφρασε όμως την έννοια της ισότητας σε σωστή εικονική αναπαράσταση, με αποτέλεσμα να μην προκύπτει ένα ορθογώνιο. Διατύπωσε ως λύση την έννοια της μεσοκαθέτου, και οδηγήθηκε σε συμπεράσματα από οπτικά στοιχεία του διαγράμματος. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Π5, Π6, Π7.

<u>Στο μετά-τεστ</u>: η μαθήτρια έχει αναπτύξει την ικανότητα να οδηγηθεί σε **παραγωγικά / λογικά** συμπεράσματα, αν και οι διατυπώσεις της παραμένουν **ανεπαρκείς**. Στο γραπτό της ισχυρίστηκε

ότι «επειδή ΝΚ//= ΔΒ/2 και ΜΛ//=ΔΒ/2 και τα παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα τέμνονται από την ΑΓ σχηματίζοντας γωνία 90^{o} θα τέμνονται κάθετα και το ΜΛ από τα κάθετα τμήματα ΜΝ, ΚΛ σε παράλληλη ευθεία. Επομένως, Μ=90^{o} και Λ=90^{o}». Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Γ3, Γ4, Γ5, Γ6, Γ7, Γ8, Γ9.

4.3.2.11.Ως προς τη συμμετοχή του ΜΕ11 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

Α στάδιο (προ- τεστ)	Β στάδιο (μέσο- τεστ)
	
Σε τρίγωνο ισοσκελές να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν το μέσο Μ της βάσης με τα μέσα των ίσων πλευρών είναι μεταξύ τους ίσα.	*Να δείξετε ότι αν σε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες είναι ίσες είναι ορθογώνιο.*
	
Αναδιατυπωμένο πραγματικό πρόβλημα	Γ στάδιο (μετά- τεστ)

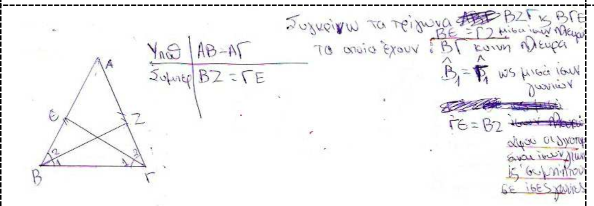
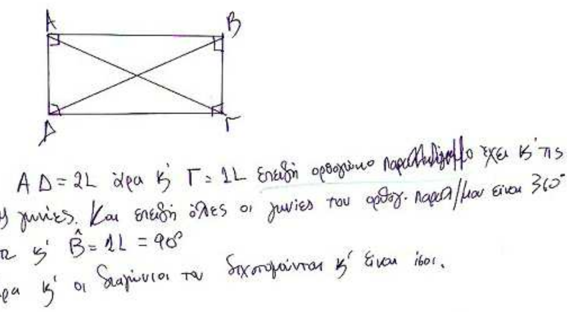
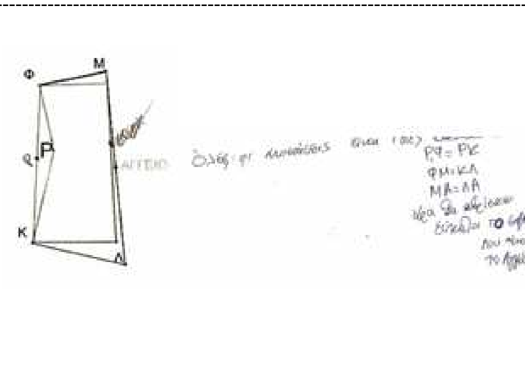
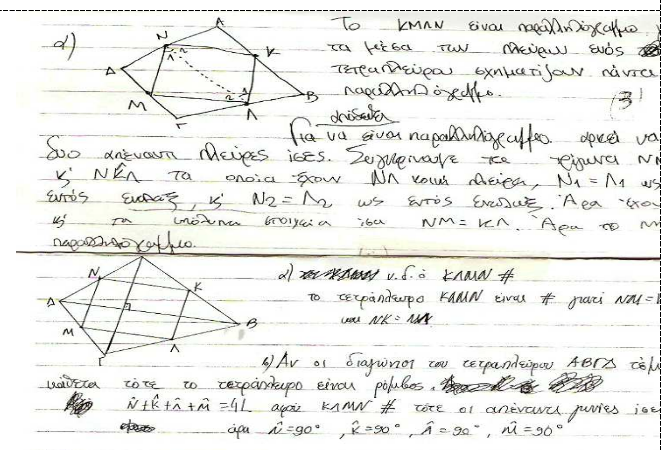
Στο προ-τεστ: κατασκεύασε ένα **ανακριβές διάγραμμα.** Στη σύγκριση του υπέθεσε ότι η γωνία Ε1=Δ1 και ανέπτυξε ανεπαρκή επιχειρηματολογία. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Α2, Α4, Α5, Α6.

Στο μέσο-τεστ: κατασκεύασε ένα **ανακριβές διάγραμμα.** Ανέπτυξε ανεπαρκή επιχειρηματολογία και δεν είχε δυνατότητα να ολοκληρώσει την απόδειξη. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Β5.

Στο πραγματικό πρόβλημα: δεν ανέπτυξε την ικανότητα μετάφρασης της διατύπωσης του προβλήματος σε ακριβές διάγραμμα, το οποίο αποτέλεσε εμπόδιο στην επίλυση του προβλήματος. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Π5.

Στο μετά-τεστ: ο μαθητής **δεν κατασκεύασε το χαρακτήρα συμβόλου του παραλληλογράμμου και του ορθογωνίου** και δεν έχει αποκτήσει την ικανότητα να διαχωρίσει τα στοιχεία της υπόθεσης από του συμπεράσματος. Διατύπωσε έναν **μη οικονομικό ορισμό** του παραλληλογράμμου. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Γ4, Γ8.

4.3.2.12.Ως προς τη συμμετοχή του ΜΕ12 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

Α στάδιο (προ- τεστ)	Β στάδιο (μέσο- τεστ)
	
Σε τρίγωνο ισοσκελές να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν το μέσο Μ της βάσης με τα μέσα των ίσων πλευρών είναι μεταξύ τους ίσα.	*Να δείξετε ότι αν σε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες είναι ίσες είναι ορθογώνιο.*
	
Αναδιατυπωμένο πραγματικό πρόβλημα	Γ στάδιο (μετά- τεστ)

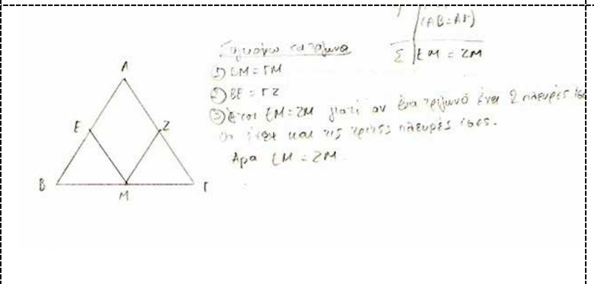
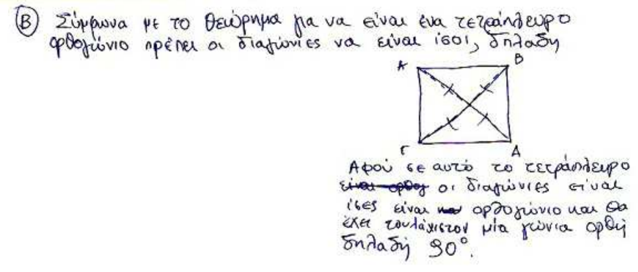
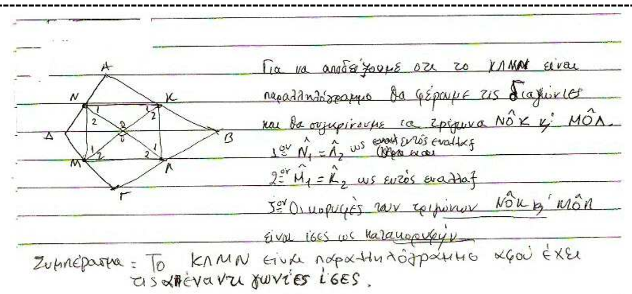
Στο προ-τεστ: κατασκεύασε **ακριβές διάγραμμα, παρερμήνευσε την έννοια της διχοτόμου με την έννοια της διαμέσου** αφού διατύπωσε ότι ΒΕ=ΓΖ. Δεν ολοκλήρωσε την απόδειξη. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Α1, Α2, Α4, Α5, Α6.

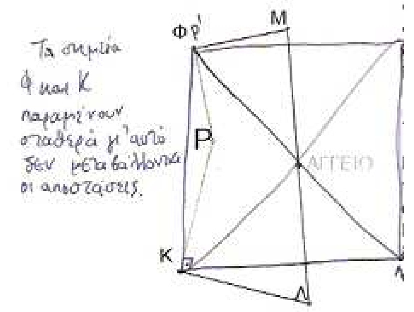
Στο μέσο-τεστ: χρησιμοποίησε διάφορα στοιχεία από την θεωρία, προσπαθώντας να αιτιολογήσει ότι «οι διαγώνιοι του σχήματος είναι ίσες». Ανέπτυξε ανεπαρκή αιτιολόγηση. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Β5, Β8.

Στο πραγματικό πρόβλημα: οδηγήθηκε στο μετασχηματισμό των τμημάτων, κατασκευάζοντας ένα **σχέδιο ορθογωνίου παραλληλογράμμου,** διατύπωσε τις σχέσεις που αντιλήφθηκε από το διάγραμμα, αλλά δεν οδηγήθηκε στη λύση του προβλήματος. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Π5.

Στο μετά-τεστ: διατύπωσε μια «**αν …τότε»** δήλωση και έναν **οικονομικό ορισμό** για το ορθογώνιο. Εξειδίκευσε τα συμπεράσματα του στο διάγραμμα και ανέπτυξε **απαγωγικό συλλογισμό** για να συμπεράνει ότι οι γωνίες είναι ορθές αλλά δεν ολοκλήρωσε την απόδειξη. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Γ2, Γ3, Γ4, Γ5.

4.3.2.13.Ως προς τη συμμετοχή του ΜΕ13 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

<table>
<tr><td>Α στάδιο (προ- τεστ)</td><td>Β στάδιο (μέσο- τεστ)</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Σε τρίγωνο ισοσκελές να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν το μέσο Μ της βάσης με τα μέσα των ίσων πλευρών είναι μεταξύ τους ίσα.</td><td>Να δείξετε ότι αν σε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες είναι ίσες είναι ορθογώνιο.</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
</table>

	
Αναδιατυπωμένο πραγματικό πρόβλημα	Γ στάδιο (μετά- τεστ)

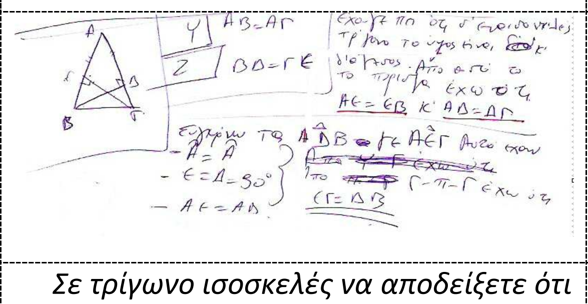
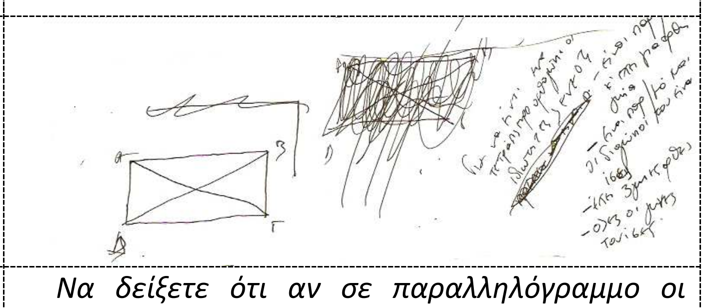
Στο προ-τεστ: κατασκεύασε ένα διάγραμμα ισοπλεύρου τριγώνου, και η απόδειξη του ήταν ανεπαρκής. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Α2, Α3, Α6, Α7.

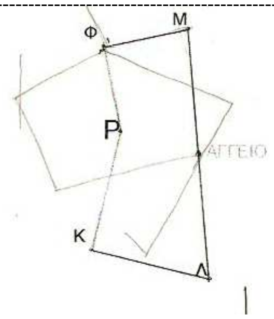
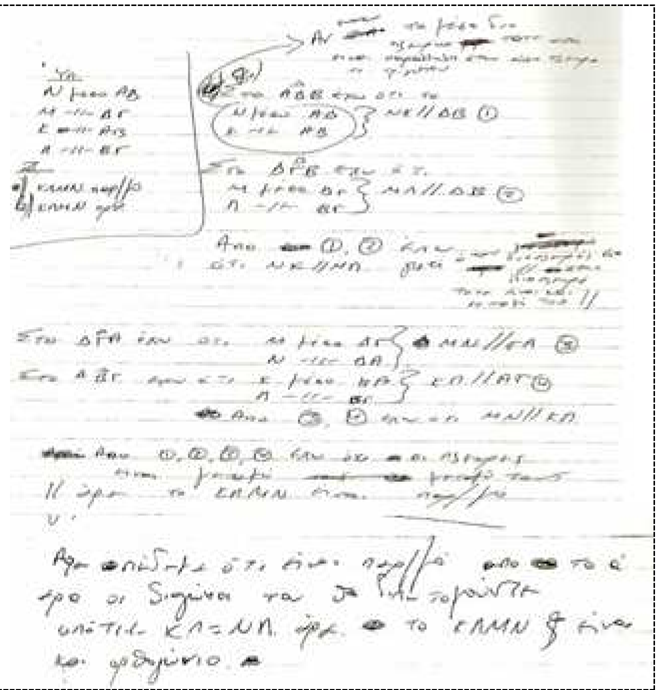
Στο μέσο-τεστ: διατύπωσε **έναν ανεπαρκή ορισμό** «για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο πρέπει οι διαγώνιες να είναι ίσες». Κατασκεύασε ένα τετράγωνο για να εξασφαλίσει την ισότητα των διαγωνίων και από το διάγραμμα οδηγήθηκε στο συμπέρασμα. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Α2, Β2, Β4.

Στο πραγματικό πρόβλημα: ο μαθητής μετασχημάτισε το τμήμα ΦΚ κατά ίσα και κάθετα τμήματα που σχημάτισαν ένα τετράγωνο. Το σχήμα αυτό ενδεχομένως να είναι αποτέλεσμα της οπτικοποίησης του προβλήματος στα δυναμικά μέσα αφού ο μαθητής συμμετείχε εθελοντικά στην πειραματική ομάδα με χρήση των ΣΟΕΑ. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Π1, Π7.

Στο μετά-τεστ: ο μαθητής αντιμετώπιζε **γνωστικά εμπόδια** που τον εμπόδισαν να ολοκληρώσει την απόδειξη. Το γραπτό του συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Γ1, Γ2, Γ4.

4.3.2.14.Ως προς τη συμμετοχή του ΜΕ14 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

Α στάδιο (προ- τεστ)	Β στάδιο (μέσο- τεστ)
	
Σε τρίγωνο ισοσκελές να αποδείξετε ότι τα ύψη προς τις ίσες πλευρές είναι μεταξύ τους ίσα.	*Να δείξετε ότι αν σε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες είναι ίσες είναι ορθογώνιο.*

	
Αναδιατυπωμένο πραγματικό πρόβλημα	Γ στάδιο (μετά- τεστ)

<u>Στο προ-τεστ</u>: η μαθήτρια κατασκεύασε ένα **ανακριβές διάγραμμα**, διατύπωσε ελλιπώς τις υποθέσεις, **παρερμήνευσε την έννοια** του ύψους με την έννοια της διαμέσου και συμπέρανε στοιχεία τα οποία χρησιμοποίησε για την απόδειξη της ισότητας τριγώνων. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Α1, Α2, Α4, Α5.

<u>Στο μέσο-τεστ</u>: κατασκεύασε ένα **ανακριβές διάγραμμα**. Διατύπωσε θεωρήματα τα οποία έχει αποστηθίσει αλλά **δεν είχε ικανότητα να εφαρμόσει** για να αποδείξει την πρόταση.Επομένως, ανέπτυξε ανεπαρκή αιτιολόγηση αν και διατύπωσε τα θεωρήματα.Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Β5, Β8.

<u>Στο πραγματικό πρόβλημα</u>: δεν ανέπτυξε την ικανότητα μετάφρασης της διατύπωσης του προβλήματος σε ακριβές διάγραμμα, το οποίο αποτέλεσε εμπόδιο στην επίλυση του προβλήματος.Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Π5.

<u>Στο μετά-τεστ</u>: Διατύπωσε συμπερασματικές δηλώσεις και ανέπτυξε την διαδικαστική ικανότητα του θεωρήματος ΘΜΠ. Το γραπτό της συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά Γ3, Γ4, Γ5, Γ6, Γ8.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Τα ευρήματα της έρευνας – Συζήτηση επί των ευρημάτων

5.1. Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο συζητείται η ανάπτυξη του επιπέδου van Hiele των μαθητών των δυο ομάδων, της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου που συμμετείχαν στην ερευνητική διαδικασία και απαντώνται τα ερευνητικά ερωτήματα που είχαν τεθεί για κάθε μαθητή. Παρουσιάζεται η εξέλιξη των μαθητών της πειραματικής ομάδας αναφορικά με τη συμμετοχή τους στο δυναμικό περιβάλλον, αλλά και στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι και αναφέρεται το επίπεδο van Hiele όπως αυτό αξιολογήθηκε από το τεστ Usiskin. Ομοίως, παρουσιάζεται η εξέλιξη των μαθητών της ομάδας ελέγχου ως προς τη συμμετοχή τους στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι, καθώς και η τελική αξιολόγηση του van Hiele τεστ. Τέλος ακολουθεί η σύγκριση της εξέλιξης κάθε μαθητή των δυο ομάδων όπως αυτή καταγράφηκε λόγω της συμμετοχής του στην ομάδα και λόγω της συμμετοχής του στα στατικά τεστ. Με αυτό τον τρόπο συγκρίνονται τα αποτελέσματα για κάθε μαθητή της πειραματικής ομάδας και ελέγχεται η εγκυρότητα των αποτελεσμάτων της πειραματικής διαδικασίας μέσω του λογισμικού, καθώς και η αξιοπιστία του τεστ Usiskin. Ομοίως, της εξέλιξης κάθε μαθητή της ομάδας ελέγχου ως προς το van Hiele τεστ.

Εξετάζεται αν ο κάθε μαθητής έχει μεταβεί σε ένα υψηλότερο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης van Hiele, ως αποτέλεσμα της συμμετοχής του στην προτεινόμενη διδακτική ακολουθία μέσω του μαθησιακού μονοπατιού συμπεριλαμβανομένων των ΣΟΕΑ (LVAR). Για τους μαθητές της ομάδας ελέγχου ελέγχεται πώς διαφοροποιείται η εξέλιξή τους ως προς το επίπεδο van Hiele, ως αποτέλεσμα της συμμετοχής τους στο πρόγραμμα σπουδών της τάξης τους και σε σχέση με τους μαθητές του ιδίου επιπέδου της πειραματικής ομάδας.

5.2. Πειραματική ομάδα

5.2.1. Εξέλιξη του επιπέδου van Hiele του Μ1

Α. Ως προς τη συμμετοχή του Μ1 στο δυναμικό περιβάλλον:

Ο Μ1 αρχικά δεν είχε ικανότητα μετάφρασης της λεκτικής περιγραφής σε σχέδιο ή της νοητικής του εικόνας για το αντικείμενο σε εικονική ή λεκτική. Αναλυτικότερα, στη διάρκεια της διαδικασίας παρουσιάστηκαν (Patsiomitou, 2012):

εμπόδια γνωστικής φύσης που αφορούν τη γεωμετρία: ο μαθητής δεν αναγνώριζε τα στοιχεία του σχήματος (ή δε γνώριζε τους όρους των στοιχείων του σχήματος) και δεν είχε ικανότητα να συνδέσει την κατασκευαστική διαδικασία με κάποιο ορισμό ή θεωρία

εμπόδια γνωστικής φύσης που αφορούν τη χρήση του λογισμικού: ο μαθητής

- δεν είχε κατασκευάσει *σχήματα χρήσης* των εργαλείων
- είχε αποστηθίσει τον τρόπο χρήσης των εργαλείων, γιατί δεν έχει συνδέσει με λογική την επιλογή των εργαλείων για την κατασκευή του, επομένως δε είχε τη *σειριακή, λεκτική και λειτουργική κατανόηση* των εργαλείων
- αποκωδικοποιούσε την κατασκευαστική διαδικασία με εργαλεία του λογισμικού όπως στα στατικά μέσα, εκτελώντας ενέργειες πολλές φορές περιττές.

Ο Μ1 αντιμετώπισε *γνωστικές συγκρούσεις* στα [2, 7, 46, 170, 198, 213] σημεία του διαλόγου, σε αλληλεπίδραση με τα εργαλεία σημείου (και πειραματικού συρσίματος), κύκλου (και πειραματικού συρσίματος), ανάκλασης και προσαρμ. εργαλείου.

Οι *γνωστικές συγκρούσεις* προέκυψαν λόγω των γνωστικών εμποδίων που αντιμετώπισε και που οφείλονταν είτε στην ίδια τη φύση των εννοιών της γεωμετρίας, είτε στο εργαλείο που επιχείρησε να χρησιμοποιήσει (δηλαδή εργαλειακών εμποδίων). Ειδικότερα αντιμετώπισε με την έννοια της αξονικής και κεντρικής συμμετρίας.

Μέσω του εργαλείου ανάκλασης και του συρσίματος σημείου (αρχικά *πειραματικού* και στη συνέχεια *θεωρητικού*), ο μαθητής απόκτησε μια αυξανόμενη δυνατότητα να εξετάζει τη δομή των σχημάτων αναλύοντας τα μέρη τους, χαρακτηριστικό επιπέδου 2 (Battista, 2007). Παρατηρήθηκε επομένως μια αυξανόμενη ικανότητα του Μ1 μετάφρασης μεταξύ αναπαραστάσεων (εσωτερικών, εξωτερικών) λόγω της διαμεσολάβησης των εργαλείων του λογισμικού. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να διατυπώσει **έννοιες-εν-δράσει** (π.χ [125], [138]) και να αναπτύξει την ***ικανότητα δομικής ανάλυσης***.

Το προσαρμ. εργαλείο βοήθησε το μαθητή να αναπτύξει την ικανότητα **λογικών συσχετίσεων,** καθώς και τη διατύπωση **μη οικονομικών ορισμών**, αρχικά στη δεύτερη φάση της ερευνητικής διαδικασίας. Κατανόησε ακόμα την έννοια της κεντρικής συμμετρίας μέσω του προσαρμ. εργαλείου. Κομβικό σημείο στην ερευνητική διαδικασία είναι το σημείο [200] όπου ο μαθητής αποκωδικοποίησε λεκτικά την εικονική πληροφορία, με συνδυασμό άτυπης και τυπικής γλώσσας, λόγω της επίδρασης του προσαρμ. εργαλείου. Επομένως, **οι συνδεόμενες αναπαραστάσεις** που ο μαθητής δημιούργησε στη διάρκεια της διαδικασίας αποτέλεσαν το μέσο ώστε να διαχειριστεί την επίλυση των προβλημάτων (π.χ η κατασκευή του τετραγώνου ως αποτέλεσμα αντιστροφής των ενεργειών για την κατασκευή των αξόνων συμμετρίας του σχήματος). Ανέπτυξε την ικανότητα να αναλύει νοητικά ένα σχήμα, την οποία ο μαθητής δεν είχε στην αρχή της διαδικασίας. Σε αλληλεπίδραση με τις ΣΟΕΑ της τέταρτης φάσης διαπιστώθηκε η ικανότητα μετατροπής από εικονική σε λεκτική ή νοητική και αντίστροφα. Δηλαδή, οι ΣΟΕΑ της τέταρτης φάσης αποτέλεσαν το τελευταίο στάδιο της διαδικασίας αναφορικά με την απόκτηση της ικανότητας μετατροπής μεταξύ των αναπαραστάσεων.

Ως προς την ικανότητα διατύπωσης εννοιών, διαπιστώθηκε ότι αρχικά διατύπωνε άτυπα ή με δυναμικό τρόπο ιδιότητες του παραλληλογράμμου ή ερμήνευε με συμβολικό τρόπο τις ιδιότητες των σχημάτων. Στη συνέχεια και ειδικότερα στην τέταρτη φάση της ερευνητικής διαδικασίας απόκτησε την ικανότητα διατύπωσης **οικονομικών** (ή μη οικονομικών) ορισμών σε συνεργασία με τα άλλα μέλη της ομάδας, χαρακτηριστικό επιπέδου 3.1 (Battista, 2007).

Ως προς την ανάπτυξη ειδών συλλογισμού προέκυψε ότι τα διαφορετικά εργαλεία του λογισμικού οδήγησαν στην ανάπτυξη των διαφορετικών ειδών συλλογισμού του μαθητή. Αναλυτικότερα, διαπιστώθηκε ότι το εργαλείο ανάκλασης συνέβαλλε στην ανάπτυξη **επαγωγικού συλλογισμού** και οι ΣΟΕΑ τέταρτης φάσης στην ανάπτυξη **θεωρημάτων-εν-δράσει, γενικεύσεων** (λόγω του εργαλείου ίχνους, πειραματικού συρσίματος) και **παραγωγικού συλλογισμού** (π.χ αποδεικτικών σχημάτων της μορφής του γενικού παραδείγματος ή πειράματος σκέψης) χαρακτηριστικό επιπέδου 3.2-3.3 (Battista, 2007) ως αποτέλεσμα της σύνθεσης εργαλείων.

Ως προς την ανάπτυξη ικανοτήτων συμπεραίνεται ότι σε αλληλεπίδραση με τους σύνθετους μετασχηματισμούς των ΣΟΕΑ ανέπτυξε οπτικές ικανότητες και αναγνώρισε οπτικά την λύση του προβλήματος (π.χ οπτικοποίησε την αμετάβλητη ιδιότητα σημείου λόγω της επίδρασης του πειραματικού συρσίματος στην αλληλουχία μετασχηματισμών του διαγράμματος ή οδηγήθηκε να αναπτύξει μια στρατηγική λόγω της επίδρασης του ίχνους και του συρσίματος). Ειδικότερα η σύνθεση των εργαλείων περιστροφής και θεωρητικού συρσίματος των ΣΟΕΑ οδήγησε στην ανάπτυξη ΑΟΑ και τη **δυναμική επανεφεύρεση** της λύσης του προβλήματος, αφού αναστοχάστηκε σε προηγούμενες ενέργειες και ανακάλεσε την έννοια της μεσοπαραλλήλου που είχε κατασκευάσει στη δεύτερη φάση. Διαπιστώθηκε ακόμα ότι ο Μ1 είχε αποκτήσει **ικανότητες εφαρμογής** του προβλήματος.

Β. Ως προς τη συμμετοχή του Μ1 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

Στο προ-τεστ αντιμετώπιζε γνωστικά εμπόδια και δεν ολοκλήρωσε την απόδειξη. Στο μέσο τεστ και μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας του ορθογωνίου παραλληλογράμμου στην τάξη, ο μαθητής δείχνει να έχει αποκτήσει την ικανότητα μετάφρασης της «αν…τότε» δήλωσης του προβλήματος. Το αποτέλεσμα ήταν να κατασκευάσει ακριβές διάγραμμα και αναπτύξει λογικά επιχειρήματα. Η επίδραση των μετασχηματισμών των δυναμικών διαγραμμάτων και η σύνδεση των αναπαραστάσεων των δυναμικών φάσεων εννοιολογικά και διαδικαστικά στην τέταρτη φάση του ΥΜΜ έδειξε ότι ήταν συνειδητή και στην επίλυση του πραγματικού προβλήματος. Ο μαθητής αν και δεν ολοκλήρωσε την απόδειξη συνέδεσε τη λύση του προβλήματος με τη διερευνητική φάση του προβλήματος στο λογισμικό, αφού έχει κατασκευάσει σχήμα εργαλειοποιημένης δράσης του εργαλείου περιστροφής και έχει αποκτήσει την ικανότητα να αναπτύσσει «σκέψη με κίνηση στα στατικά μέσα». Στο μετά-τεστ ο Μ1 ανέπτυξε λογική επιχειρηματολογία για να αποδείξει ότι το σχήμα είναι παραλληλόγραμμο. Το επίπεδο του στο προ-τεστ ήταν 1 (αυστηρό κριτήριο) και στο μετά-τεστ van Hiele 3 (αυστηρό κριτήριο).

5.2.2. Εξέλιξη του επιπέδου van Hiele της Μ2

Α. Ως προς τη συμμετοχή της Μ2 στο δυναμικό περιβάλλον:

Η Μ2 αντιμετώπιζε εμπόδια αποκωδικοποίησης της νοητικής της εικόνα σε εικονική, τα οποία προέκυψαν από την δυσκολία κατανόησης της σειριακής και θεσιακής επιλογής των σχηματικών μονάδων και εργαλείων του λογισμικού. Το εργαλείο σημείου (μέσω του πειραματικού *συρσίματος*) προκάλεσε γνωστικές συγκρούσεις στη μαθήτρια, (π.χ στα 3, 12, 66, 90) και λειτούργησε σταδιακά διαμεσολαβητικά ώστε να **αποκτήσει την ικανότητα να μετατρέψει μια** νοητική αναπαράσταση σε λεκτική και στη συνέχεια σε εικονική**.** Εργαλειακά εμπόδια αντιμετώπισε και με άλλα εργαλεία (π.χ περιστροφής).

Το προσαρμοσμένο εργαλείο συντέλεσε στην ανάπτυξη ικανότητας μετατροπής της εικονικής αναπαράστασης σε λεκτική και σε μετέπειτα φάση να συμπληρώσει νοητικά τις γραμμές του σχήματος και αναγνωρίσει το σχήμα του παραλληλογράμμου. Στην τέταρτη φάση διαπιστώνεται ότι η μαθήτρια έχει αναπτύξει την ικανότητα να **συνδέσει νοητικά αναπαραστάσεις**, που είχε αλληλεπιδράσει στις προηγούμενες φάσεις της ερευνητικής διαδικασίας, καθώς και την ικανότητα **δομικής ανάλυσης** του σχήματος και την ικανότητα να αποδίδει στα ίδια αντικείμενα **διπλούς ρόλους.**

Ως προς την ανάπτυξη ειδών συλλογισμού έχει προκύψει ότι τα διαφορετικά εργαλεία του λογισμικού οδήγησαν στην ανάπτυξη διαφορετικών ειδών συλλογισμού της μαθήτριας. Τα εργαλεία καθέτου, περιστροφής και ίχνους διαμεσολάβησαν στην κατασκευή **εννοιών-εν-δράσει και επαγωγικών επιχειρημάτων** της Μ2. Η μαθήτρια ανέπτυξε **απαγωγικά επιχειρήματα,** λόγω της επίδρασης των εργαλείων κύκλου, προσαρμ. εργαλείου, περιστροφής και σχολιασμού του διαγράμματος στην τρίτη φάση καθώς και στα σημεία [34, 80] της τέταρτης φάσης. Στην αρχή της διαδικασίας δεν είχε δυνατότητα διατύπωσης παραγωγικών επιχειρημάτων. Αυτή άρχισε να εμφανίζεται στην τρίτη φάση της διαδικασίας (π.χ στο 315) και κυρίως στην τέταρτη φάση λόγω της συμμετοχής της μαθήτριας στο μαθησιακό μονοπάτι και της αλληλεπίδρασης της με τις ΣΟΕΑ (π.χ 37, 55, 61,78).

Το εργαλείο περιστροφής ήταν το διαμεσολαβητικό μέσο των ΣΟΕΑ που συντέλεσε στην κατασκευή των **παραγωγικών επιχειρημάτων,** καθώς ο συνθετος μετασχηματισμός περιστροφής αντικειμένων και πειραματικού-θεωρητικού συρσίματος.

Η συμμετοχή στο μαθησιακό μονοπάτι ήταν σημαντική για την ανάπτυξη παραγωγικών επιχειρημάτων (π.χ στα σημεία 55, 59), αφού η μαθήτρια διατύπωσε **λογικές συσχετίσεις** μεταξύ στοιχείων το διαγράμματος (π.χ την έννοια του άξονα συμμετρίας) καθώς και συνδέσεις εννοιών που η μαθήτρια είχε κατασκευάσει σε προηγούμενη φάση. Στην γ φάση του ΥΜΜ οδηγήθηκε να διατυπώσει **αυθαίρετους οικονομικούς ορισμούς** σε αλληλεπίδραση με το διάγραμμα.

Τα σημεία [14, 59, 80] είναι σημεία **δυναμικής επανεφεύρεσης**. Στο [59, 78] η μαθήτρια οδηγήθηκε μέσω νοητικών μετασχηματισμών να συμπεράνει για ιδιότητες των στοιχείων του διαγράμματος και να αναγνωρίσει υπο-σχήματα σε ένα συνολικό σχήμα. Σ' αυτό συντέλεσε η ανάπτυξη ΑΟΑ εκ μέρους της μαθήτριας. Στο διάστημα [90-96] διαπιστώθηκε η **ικανότητα της να θέτει υποστόχους και να αναπτύσσει παραγωγικό** συλλογισμό για την απόδειξη τους, αλλά και να αποδίδει διπλούς ρόλους στα στοιχεία του διαγράμματος.

Οι αναπαραστάσεις της τελευταίας φάσης είναι συνδεδεμένες εννοιολογικά και διαδικαστικά με την α και β φάση της ερευνητικής διαδικασίας. Συνεπώς, ανέπτυξε την ικανότητα να λειτουργεί σε ένα πολυπλοκότερο σχήμα (αναγνωρίζει υποδομές, μετακινείται από ένα αναπαραστατικό σύστημα σε άλλο κλπ.), λόγω της επίδρασης των ΣΟΕΑ του μαθησιακού μονοπατιού.

<u>Β. Ως προς τη συμμετοχή της Μ2 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι</u>

Στο προ-τεστ η Μ2 κατασκεύασε ένα ειδικό διάγραμμα και ανέπτυξε **απαγωγικά επιχειρήματα** χωρίς να ολοκληρώσει την απόδειξη. Στο μέσο–τεστ ανέπτυξε την απόδειξη του προβλήματος, διατυπώνοντας και εφαρμόζοντας θεωρήματα τα οποία ήταν αναγκαία. Από την απόδειξη είναι εμφανές ότι το παραλληλόγραμμο και το ορθογώνιο έχουν αποκτήσει τον **χαρακτήρα σήματος**. Στο τεστ πραγματικού προβλήματος η μαθήτρια είχε αποκτήσει **ικανότητα μετάφρασης, την ικανότητα διατύπωσης οικονομικών ορισμών και** εφαρμογής της λύσης του προβλήματος. Στο μετά-τεστ είχε αναπτύξει τη **διαδικαστική και εννοιολογική γνώση** του θεωρήματος ΘΜΠ και ολοκλήρωσε την απόδειξη, αναπτύσσοντας **παραγωγικό συλλογισμό.**

Το επίπεδο της στο προ-τεστ ήταν 2 (αυστηρό κριτήριο) και στο μετά-τεστ van Hiele 4(ελαστικό κριτήριο).

5.2.3. Εξέλιξη του επιπέδου van Hiele του Μ3

<u>Α. Ως προς τη συμμετοχή του Μ3 στο δυναμικό περιβάλλον</u>:

Ο Μ3 αντιμετώπισε **γνωστικές συγκρούσεις** λόγω της αλληλεπίδρασης με τα εργαλεία σημείου (μέσω του πειραματικού συρσίματος αρχικά και θεωρητικού στη συνέχεια), κύκλου, παραμετρικού εργαλείου, προσαρμ. εργαλείου, περιστροφής (π.χ στα 3, 16, 23). Ακόμα αντιμετώπισε γνωστικά εμπόδια προερχόμενα από παρερμηνείες λόγω των γνωστικών εμποδίων του μαθητή.

Το σύνθετο εργαλείο παραμετρικού τμήματος-συρσίματος διαμεσολάβησαν ώστε ο μαθητής να αναπτύξει την ικανότητα μετατροπής μεταξύ αναπαραστάσεων, εφαρμόζοντας τη θεωρία της γεωμετρίας. Το προσαρμοσμένο εργαλείο διαδραμάτισε σημαντικό ρόλο στη μετάφραση και ανάπτυξη ικανότητας δομικής ανάλυσης των σχημάτων. Χρησιμοποίησε ακόμα το εργαλείο κύκλου με κατάχρηση και το προσαρμοσμένο εργαλείο με οικονομία σε διαδικασίες αποκωδικοποίησης νοητικών του εικόνων, σε σχήματα στην οθόνη.

Οι **συνδεόμενες αναπαραστάσεις της β φάσης** βοήθησαν το μαθητή να έρθει σε **γνωστική σύγκρουση**, και να αναδομήσει **γνωστικά σχήματα** αλλά και να αποδώσει σταδιακά σε στοιχεία του δυναμικού διαγράμματος διπλό ρόλο.

Τα εργαλεία καθέτου, περιστροφής, παραμετρικού εργαλείου και προσαρμ. εργαλείου διαμεσολάβησαν στην κατασκευή **εννοιών-εν-δράσει και επαγωγικών επιχειρημάτων** του Μ3.

Η αντιστροφή ενεργειών με σύνθεση εργαλείων και τεχνικών στη δεύτερη φάση του ΥΜΜ και ειδικότερα στο στάδιο της **ιεραρχικής δομικής ανάλυσης**, οδήγησε τον Μ3 στη νοητική σύνδεση αναπαραστάσεων εννοιολογικά και διαδικαστικά. Αυτή η φάση βοήθησε το μαθητή να ιεραρχήσει δομικά τα παραλληλόγραμμα και να αποκτήσει την **ικανότητα αυθαίρετων οικονομικών ορισμών**. Η συμμετοχή του μαθητή στο ΥΜΜ ήταν σημαντική για την ανάπτυξη λογικών επιχειρημάτων (π.χ στα σημεία 55, 59) και συνδέσεων εννοιών. Τα [113, 190, 204] ήταν σημεία δυναμικής επανεφεύρεσης, τα οποία συντελέστηκαν με τη βοήθεια του προσαρμοσμένου εργαλείου. Τα εργαλεία μετασχηματισμού, όπως το εργαλείο περιστροφής και το προσαρμ. εργαλείο βοήθησαν τον μαθητή να αναπτύξει την ικανότητα **δομικής ανάλυσης**. Σ' αυτό συντέλεσε ο αναστοχασμός σε προηγούμενες ενέργειες όπου και αναπτύχθηκε ΑΟΑ. Στην αρχή της διαδικασίας δεν είχε δυνατότητα διατύπωσης **παραγωγικών** επιχειρημάτων. Αυτή άρχισε να εμφανίζεται κυρίως στην τέταρτη φάση λόγω της συμμετοχής του στο μαθησιακό μονοπάτι και της αλληλεπίδρασης με τις ΣΟΕΑ (π.χ 241, 49, 64, 99). Η εντολή περιστροφής ήταν το διαμεσολαβητικό μέσο των ΣΟΕΑ που συντέλεσε στην κατασκευή των **εννοιών-εν-δράσει**, ειδικότερα στα σημεία όπου μετασχηματίζεται το πειραματικό σύρσιμο αντικειμένων σε θεωρητικό. Στο διάστημα [49-117] της τέταρτης φάσης του ΥΜΜ διαπιστώθηκε η ικανότητα του να θέτει υποστόχους, να αποδίδει διπλούς ρόλους στα στοιχεία του διαγράμματος και να αναπτύσσει **παραγωγικό συλλογισμό** για την απόδειξη τους.

Συνεπώς, ανέπτυξε την ικανότητα να λειτουργεί (αναγνωρίζει υποδομές, μετακινείται από ένα αναπαραστατικό σύστημα σε άλλο κλπ.) σε ένα πολυπλοκότερο σχήμα λόγω της επίδρασης των ΣΟΕΑ του μαθησιακού μονοπατιού.

<u>Β. Ως προς τη συμμετοχή του Μ3 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι</u>

Στο προ-τεστ ο Μ3 κατασκεύασε ένα ακριβές διάγραμμα, το οποίο τον βοήθησε να αναπτύξει **απαγωγικά επιχειρήματα**, χωρίς να ολοκληρώσει την απόδειξη. Στο μέσο–τεστ ανέπτυξε την απόδειξη του προβλήματος, διατυπώνοντας και εφαρμόζοντας θεωρήματα τα οποία ήταν αναγκαία. Στο μετά-τεστ ανέπτυξε τη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση του θεωρήματος ΘΜΠ και ολοκλήρωσε την απόδειξη, αναπτύσσοντας **παραγωγικό συλλογισμό**.

Το επίπεδο του Μ3 στο μετά-τεστ van Hiele ήταν 4 (αυστηρό κριτήριο).

5.2.4. Εξέλιξη του επιπέδου van Hiele του Μ4

Α. Ως προς τη συμμετοχή της Μ4 στο δυναμικό περιβάλλον

Η Μ4 αντιμετώπισε **γνωστικές συγκρούσεις** λόγω των εργαλείων σημείου (πειραματικού συρσίματος αρχικά και στη συνέχεια θεωρητικού), ανάκλασης, και καθέτου. Αντιμετώπισε γνωστικά εμπόδια αναφορικά με την αξονική συμμετρία των παραλληλογράμμων και η μαθησιακή πορεία μέσω του ΥΜΜ βοήθησε τη μαθήτρια να αναδομήσει τις έννοιες. Το εργαλείο της ανάκλασης διαμεσολάβησε ώστε από εικονική **αναπαράσταση στην οθόνη να οδηγηθεί** μέσω **νοητικών μετασχηματισμών σε μια λεκτική αναπαράσταση, και επομένως** να επανεφεύρει την έννοια.

Ο συνδυασμός περιστροφής με πειραματικό σύρσιμο του σημείου άκρου του τμήματος είχε επίδραση στην σκέψη της Μ4. Το εργαλείο καθέτου σε συνδυασμό με το προσαρμοσμένο εργαλείο είχε ως αποτέλεσμα την κατασκευή **συνδέσεων εννοιών** από τη μαθήτρια (π.χ στο 159, 164) καθώς και την ανάπτυξη **ικανότητας δομικής ανάλυσης** των σχημάτων.

Ο συνδυασμός του προσαρμοσμένου εργαλείου, εργαλείου κύκλου και θεωρητικού συρσίματος οδήγησαν στη διατύπωση εκφράσεων οι οποίες υποδήλωναν την ανάπτυξη **ικανότητας ιεράρχησης** των σχημάτων. Η αντιστροφή ενεργειών με σύνθεση εργαλείων και τεχνικών στη δεύτερη φάση του ΥΜΜ και ειδικότερα στο στάδιο της **ιεραρχικής δομικής ανάλυσης**, οδήγησε την Μ4 στη νοητική σύνδεση αναπαραστάσεων εννοιολογικά και διαδικαστικά, ώστε να ιεραρχήσει δομικά τα παραλληλόγραμμα και να αποκτήσει την **ικανότητα αυθαίρετων οικονομικών ορισμών**. Το προσαρμοσμένο εργαλείο συντέλεσε ειδικότερα στην ανάπτυξη της διορατικότητας της μαθήτριας. Τα [191, 221, 12, 87] είναι σημεία **δυναμικής επανεφεύρεσης,** λόγω της χρήσης του προσαρμοσμένου εργαλείου, περιστροφής με πειραματικό σύρσιμο του σημείου άκρου καθώς και σύνθεσης εργαλείων των ΣΟΕΑ (και κυρίως το εργαλείο απόκρυψης-εμφάνισης).

Στο πραγματικό πρόβλημα με χρήση των ΣΟΕΑ, η εντολή περιστροφής ήταν το διαμεσολαβητικό μέσο των ΣΟΕΑ που συντέλεσε στην κατασκευή των **εννοιών-εν-δράσει**, καθώς και την ανάπτυξη **παραγωγικού συλλογισμού** (π.χ στο 243, 68, 124).

Η μαθήτρια οδηγήθηκε μέσω νοητικών μετασχηματισμών να συμπεράνει για ιδιότητες των στοιχείων του διαγράμματος και να αναγνωρίσει υπο-σχήματα σε ένα συνολικό σχήμα. Σ’ αυτό συντέλεσε ο αναστοχασμός σε προηγούμενες ενέργειες όπου και αναπτύχθηκε ΑΟΑ. Στην τέταρτη φάση η επίλυση του προβλήματος στους διαφορετικούς τύπους οδήγησαν τη μαθήτρια στην ανάπτυξη εικασιών, **μετασχηματιστικού συλλογισμού και αλυσίδας παραγωγικών δηλώσεων**. Διαπιστώθηκε ακόμα η **ικανότητα της να θέτει υποστόχους και να αναπτύσσει παραγωγικό** συλλογισμό για την απόδειξη τους.

Β. Ως προς τη συμμετοχή της Μ4 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

Στο προ-τεστ η Μ4 κατασκεύασε ένα ακριβές διάγραμμα, σύγκρινε τα σχήματα βάσει των ιδιοτήτων τους, ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

Στο μέσο–τεστ ανέπτυξε την απόδειξη του προβλήματος, διατυπώνοντας ένα σύνολο ιδιοτήτων και εφαρμόζοντας θεωρήματα τα οποία ήταν αναγκαία. Στο μετά-τεστ είχε αναπτύξει τη **διαδικαστική και εννοιολογική γνώση** του θεωρήματος ΘΜΠ και ολοκλήρωσε την απόδειξη, αναπτύσσοντας **παραγωγικό συλλογισμό**.

Το επίπεδο της Μ4 στο μετά-τεστ van Hiele ήταν 4 (αυστηρό κριτήριο).

5.2.5. Εξέλιξη του επιπέδου van Hiele του Μ5

Α. Ως προς τη συμμετοχή του Μ5 στο δυναμικό περιβάλλον:

Ο Μ5 αντιμετώπισε γνωστικές συγκρούσεις λόγω των εργαλείων σημείου, κύκλου, ανάκλασης. Ο μετασχηματισμός του πειραματικού συρσίματος σε θεωρητικό (π.χ στην κορυφή του ρόμβου) είχε επίδραση στη σκέψη του Μ5.

Μέσω του εργαλείου ανάκλασης αντιμετώπισε γνωστικές συγκρούσεις και ανέπτυξε την **αντιληπτική ιεράρχηση** των εννοιών (π.χ (α) ρόμβος ως αποτέλεσμα ανάκλασης ισοσκελούς και (β) ρόμβος ως σύνθεση ισοπλεύρων). Το εργαλείο απόκρυψης σε συνδυασμό με το εργαλείο καθέτου, ανάκλασης και πειραματικού συρσίματος έπαιξε σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση νοητικών σχημάτων και την ανάπτυξη ικανότητας μετάφρασης μιας νοητικής αναπαράστασης σε εικονική και λεκτική. Κομβικό σημείο στη διαμόρφωση της σκέψης του Μ5 ήταν το σημείο [28], όπου ο μαθητής διατύπωσε μέσω του θεωρητικού συρσίματος έναν *αυθαίρετο οικονομικό ορισμό* του ρόμβου, ένδειξη ότι ο ρόμβος απέκτησε το χαρακτήρα συμβόλου.

Τα σημεία [16, 28, 38, 103, 107, 133, 170] είναι ενδεικτικά σημεία κατασκευής **εννοιών-εν-δράσει και επαγωγικού συλλογισμού** του μαθητή, τα οποία προέκυψαν με σύνθεση εργαλείων (π.χ το σημείο 28 με σύνθεση των εργαλείων απόκρυψης, ανάκλασης, καθέτου και πειραματικού συρσίματος). Αρχικά διατύπωνε **ανεπαρκείς αιτιολογήσεις** ως αποτέλεσμα της επίδρασης της σύνθεσης των εργαλείων ανάκλασης, απόκρυψης και καθέτου. Στην τρίτη φάση το σχήμα του ρόμβου απέκτησε το χαρακτήρα σήματος και οι ιδιότητες του ρόμβου αντικατέστησαν την εικόνα του ρόμβου, ώστε σε συνεργασία με τον Μ6, απέκτησε την ικανότητα να αναπτύσσει λογικά επιχειρήματα. Τα [125], [168] και [194] ήταν σημεία στα οποία ο Μ5 ανέπτυξε **μετασχηματιστικό και παραγωγικό συλλογισμό**, καθώς και την ικανότητα **δυναμικής επανεφεύρεσης** λόγω της ΑΟΑ που αναπτύχθηκε από την αλληλεπίδραση με τις συνδεόμενες αναπαραστάσεις. Ανέπτυξε την ικανότητα πολλαπλών στρατηγικών για τη λύση ενός προβλήματος, να **ανακαλύπτει ιδιότητες** του διαγράμματος και να εφαρμόζει τη λύση του προβλήματος.

Οι **συνδεόμενες αναπαραστάσεις** που ο μαθητής κατασκεύασε στη διερευνητική και μαθησιακή διαδικασία μέσω του ΥΜΜ, διαμεσολάβησαν ώστε να **συνδέσει έννοιες**. Συνεπώς, ανέπτυξε **την ικανότητα** να λειτουργεί (π.χ αναγνωρίζει υποδομές, μετακινείται από το ένα αναπαραστατικό σύστημα στο άλλο κλπ.) σε ένα πολυπλοκότερο σχήμα λόγω της επίδρασης των ΣΟΕΑ.

Ο μαθητής ανέπτυξε την ικανότητα να κάνει την ανάλυση του σχήματος σε πραγματικό ή νοητό επίπεδο, να αντιστρέφει νοητικά μια διαδικασία προκειμένου να οδηγηθεί σε λύση του προβλήματος, έχοντας αναπτύξει *αφαιρετική* και λογική *ικανότητα*.

<u>Β. Ως προς τη συμμετοχή του Μ5 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι</u>

Στο προ-τεστ ο Μ5 κατασκεύασε ένα ανακριβές διάγραμμα και υπέθεσε οπτικά στοιχεία τα οποία δε γνώριζε από την υπόθεση του προβλήματος. Στο μέσο –τεστ ανέπτυξε **παραγωγικό συλλογισμό**, διατύπωσε και εφάρμοσε θεωρήματα για την απόδειξη του προβλήματος αλλά δεν ολοκλήρωσε την απόδειξη. Στην επίλυση του πραγματικού προβλήματος κατασκεύασε ένα ακριβές διάγραμμα αποτυπώνοντας τη διαδικασία που είχε εφαρμόσει στο δυναμικό μέσο. Για να ολοκληρώσει την απόδειξη χρησιμοποίησε συνδυασμό **απαγωγικού** και **παραγωγικού** συλλογισμού. Στο μετά-τεστ ανέπτυξε **παραγωγικό συλλογισμό** και διατύπωσε οικονομικούς ορισμούς.

Το επίπεδο του στο μετά-τεστ van Hiele ήταν 4 (ελαστικό κριτήριο).

5.2.6. Εξέλιξη του επιπέδου van Hiele του Μ6

<u>Α. Ως προς τη συμμετοχή του Μ6 στο δυναμικό περιβάλλον</u>:

Ο Μ6 αντιμετώπισε γνωστικές συγκρούσεις λόγω των εργαλείων σημείου, κύκλου, ανάκλασης. Το εργαλείο ανάκλασης **διαμεσολάβησε σ**τη διαμόρφωση της δομής του ρόμβου ως σύνθεσης ισοσκελών. Ο μετασχηματισμός του πειραματικού συρσίματος σε θεωρητικό (π.χ της κορυφής του ρόμβου που προήλθε από ανάκλαση ισοσκελούς) είχε επίδραση στη σκέψη του Μ6. Το αποτέλεσμα της **γνωστικής σύγκρουσης**, λόγω του *θεωρητικού συρσίματος* του εργαλείου σημείου οδήγησε στην **επανεφεύρεση** της ιδιότητας της ισότητας των πλευρών του σχήματος. Το εργαλείο απόκρυψης σε συνδυασμό με το εργαλείο καθέτου, ανάκλασης και πειραματικού συρσίματος έπαιξε σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση νοητικών σχημάτων και την ανάπτυξη ικανότητας μετάφρασης μιας νοητικής αναπαράστασης σε εικονική και λεκτική. Επομένως, τα εργαλεία βοήθησαν το μαθητή να κατανοήσει τις έννοιες (π.χ την έννοια «ρόμβος ως σύνθεση ισοσκελών από ανάκλαση»), να αναπτύξει την ικανότητα δομικής ανάλυσης του διαγράμματος και το σχήμα να αποκτήσει το **χαρακτήρα σήματος**.

Η σύνθεση των εργαλείων ανάκλασης, απόκρυψης και καθέτου σε συνδυασμό με το πειραματικό σύρσιμο διαμεσολάβησε στη διαμόρφωση σύνδεσης εννοιών και **λογικών συσχετίσεων** των στοιχείων του σχήματος. Από τις εκφράσεις του Μ6 διαπιστώνεται ότι ο μαθητής κατασκεύασε **έννοιες-εν-δράσει, ανεπαρκείς αιτιολογήσεις** και **απαγωγικού τύπου επιχειρήματα,** σε μια ακολουθιακή σειρά κατά τη διάρκεια των φάσεων.

Ο μαθητής ανέπτυξε σταδιακά την ικανότητα (α) να χρησιμοποιεί οπτικά και θεωρητικά στοιχεία για να αναπτύξει το συλλογισμό του (β) να αποδίδει διπλούς ρόλους σε τμήματα και σημεία (γ) να αναγνωρίζει υποδομές μέσα σε βασικές δομές που έχει κατανοήσει και (δ) να καταλήγει σε συμπεράσματα για μια ιδιότητα του σχήματος, όπως αυτή προκύπτει συνεπαγωγικά από άλλες ιδιότητες. Οι **συνδεόμενες αναπαραστάσεις** που ο μαθητής κατασκεύασε στη διερευνητική και μαθησιακή διαδικασία μέσω του ΥΜΜ, διαμεσολάβησαν ώστε να αποκτήσει την ικανότητα αιτιολόγησης, σύνδεσης εννοιών, **μεταφράζοντας τις ιδιότητες της εικονικής αναπαράστασης σε λεκτικές αιτιολογήσεις μέσω νοητικών μετασχηματισμών**, καθώς ακόμα και στη **δυναμική επανεφεύρεση** της λύσης

Παραγωγικά επιχειρήματα διατυπώθηκαν από τον Μ6 στην τρίτη και τέταρτη φάση των ΣΟΕΑ. Ο μαθητής αρχικά δεν είχε την ικανότητα κατασκευής νοητικών αποδεικτικών σχημάτων. Τα **νοητικά αποδεικτικά σχήματα** (π.χ πειράματα σκέψης) εμφανίστηκαν στη τρίτη και τέταρτη φάση. Το εργαλείο απόκρυψης διαμεσολάβησε στην **επανεφεύρεση ιδιότητας** του σχήματος στην τέταρτη φάση, σημείο στο οποίο ο μαθητής ανέπτυξε ΑΟΑ, συνδέοντας νοητικά αναπαραστάσεις τις οποίες είχε δημιουργήσει σε προηγούμενα σημεία της ερευνητικής διαδικασίας. Ο μαθητής απέκτησε την ικανότητα να εκτελεί νοητικούς μετασχηματισμούς και να οδηγείται σε **αφαιρετικές διαδικασίες σκέψης,** γενικεύοντας. Ακόμα να διαχωρίζει τους υποστόχους, οι οποίοι θα τον οδηγήσουν στη λύση του προβλήματος.

Β. Ως προς τη συμμετοχή του μαθητή στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

Στο προ-τεστ ο μαθητής αιτιολόγησε ανεπαρκώς, χρησιμοποιώντας οπτικά στοιχεία του διαγράμματος. Στο μέσο-τεστ τα σχήματα των παραλληλογράμμου και ορθογωνίου έχουν αποκτήσει τον **χαρακτήρα συμβόλου**. Ο μαθητής διατύπωσε **μη οικονομικό ορισμό** για να ολοκληρώσει την απόδειξη του προβλήματος. Στο πραγματικό πρόβλημα οδηγήθηκε στη λύση του προβλήματος με απόδειξη. Σ' αυτό συντέλεσε το νοητικό σχήμα που είχε κατασκευάσει κατά τη διάρκεια διερεύνησης του προβλήματος στο δυναμικό μέσο με χρήση των ΣΟΕΑ. Στο μετά-τεστ κατασκεύασε ένα ακριβές διάγραμμα, διατύπωσε **οικονομικό ορισμό** του ορθογωνίου, και ανέπτυξε **παραγωγικό συλλογισμό**.

Το επίπεδο του στο μετά-τεστ van Hiele ήταν 4 (αυστηρό κριτήριο).

5.2.7. Εξέλιξη του επιπέδου van Hiele του Μ7

Α. Ως προς τη συμμετοχή της Μ7 στο δυναμικό περιβάλλον

Η Μ7 αντιμετώπισε **γνωστικές συγκρούσεις** και εργαλειακά εμπόδια λόγω του εργαλείου σημείου (και πειραματικού ή θεωρητικού) συρσίματος, του εργαλείου κύκλου, περιστροφής και προσαρμοσμένου εργαλείου. Το εργαλείο περιστροφής και η χρήση του πειραματικού–θεωρητικού συρσίματος διαμεσολάβησαν ώστε να κατασκευάσει **μια νοητική αναπαράσταση** για τα συμμετρικά αντικείμενα από περιστροφή **με αποτέλεσμα στη συνέχεια να την αποκωδικοποιήσει εικονικά και λεκτικά** μέσω της χρήσης του εργαλείου, κατασκευάζοντας σχήματα χρήσης του εργαλείου δευτέρου επιπέδου (π.χ [186-187]).

Ως αποτέλεσμα των **γνωστικών συγκρούσεων** η μαθήτρια κατασκεύασε ***έννοιες-εν-δράσει*** (π.χ στα 71, 76, 85, 187, 242). Στην αρχή της διαδικασίας δεν είχε ικανότητα επαρκούς αιτιολόγησης (π.χ σημεία 85, 89, 242). Απόκτησε αυτή την ικανότητα στην τρίτη και τέταρτη φάση της ερευνητικής διαδικασίας. Η μαθήτρια *ανέπτυξε* ***παραγωγικό συλλογισμό*** στα σημεία 269, 276, 316, 347 καθώς και στα σημεία 412, 49, 90 λόγω της επίδρασης των ΣΟΕΑ.

Αναλυτικότερα: Η Μ7 ωθήθηκε σε γνωστικές συγκρούσεις σε αλληλεπίδραση με τα εργαλεία σημείου και περιστροφής. Τα εργαλεία αυτά προκάλεσαν διαδικασίες σκέψης για την ολοκλήρωση διαδικαστικών ενεργειών λόγω των εργαλειακών εμπόδιων που δημιουργήθηκαν. Το εργαλείο περιστροφής συντέλεσε στη αυξανομένη ανάπτυξη ικανότητας μετατροπής μεταξύ αναπαραστάσεων εσωτερικών–εξωτερικών. Η μαθήτρια δεν είχε κατανοήσει την διαδικασία ως 1-1 αντιστοίχηση του αντικειμένου και του συμμετρικού του (σχηματικών μονάδων 0D, 1D). Στην εξέλιξη της διαδικασίας κατασκεύασε ΣΕΔ του εργαλείου για τα ευθύγραμμα τμήματα από περιστροφή *και επέκτεινε το ΣΕΔ* για τα τρίγωνα από περιστροφή στην τέταρτη φάση της ερευνητικής διαδικασίας. Αυτό είχε ως συνεπεία την κατανόηση της ισότητας των στοιχείων των περιστρεφομένων σχηματικών μονάδων 2D. Η σύνθεση των εργαλείων ανάκλασης και καθέτου λειτούργησε διαμεσολαβητικά στην ανάπτυξη ικανότητας δομικής ανάλυσης των σχημάτων, στη δημιουργία συνδεόμενων αναπαραστάσεων και την επανεφεύρεση δευτερευόντων ιδιοτήτων των σχημάτων. Η ανάπτυξη της σκέψης της Μ7 προέκυψε σταδιακά

- στην δεύτερη φάση με την **υπέρβαση γνωστικών εμποδίων** αναφορικά με την αξονική συμμετρία των σχημάτων (εργαλείου καθέτου, ανάκλασης και θεωρητικού συρσίματος)˙
- στην τρίτη φάση με την **ανάπτυξη ικανότητας ερμηνείας μιας δευτερεύουσας ιδιότητας σχήματος με διπλό τρόπο** (π.χ οι διαγώνιοι του ρόμβου, ως άξονες συμμετρίας του ορθογωνίου) και την ικανότητα **δομικής ανάλυσης των σχημάτων** (θεωρητικό σύρσιμο και σχολιασμός)˙
- στην τέταρτη φάση ανέπτυξε την ικανότητα να αναλύει νοητικά ένα σχήμα με αποτέλεσμα μια ιδιότητα του σχήματος να σηματοδοτεί άλλες ιδιότητες (π.χ ορθογώνιο, αξονική συμμετρία ορθογωνίου) (ΣΟΕΑ β, δ φάσης).

Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας ήταν το **νοητικό γεφύρωμα μεταξύ των ιδιοτήτων** των τετραπλεύρων, αναγκαία προϋπόθεση για την ανάπτυξη αποδεικτικών διαδικασιών και ικανότητας **παραγωγικού συλλογισμού**.

Οι συνδεόμενες αναπαραστάσεις που δημιουργήθηκαν από την μαθήτρια στην διάρκεια της διαδικασίας τη βοήθησαν να συνδέσει τις πρωτεύουσες ιδιότητες του σχήματος, (ιδιότητες δηλαδή που έχουν σχέση με την παραλληλία των πλευρών) με τις δευτερεύουσες ιδιότητες του σχήματος (δηλαδή ιδιότητες που έχουν σχέση με τη συμμετρία του σχήματος), να **επανεφεύρει** διαδικασίες κατασκευής. Ακόμα οδήγησαν τη μαθήτρια σε γνωστικές συγκρούσεις και την ώθησαν να αναπτύξει διαδικασίες σκέψης, διαμεσολαβώντας στην αποκωδικοποίηση της νοητικής της εικόνας σε εικονική και στη συνέχεια της εικονικής σε λεκτική.

Συμπεραίνεται από την ανάλυση των δεδομένων ότι η Μ7 στην αρχή της διαδικασίας διατύπωνε **δυναμικούς ορισμούς, έννοιες-εν-δράσει και απαγωγικά επιχειρήματα** ή ανεπαρκείς αιτιολογήσεις, λόγω της επίδρασης των εργαλείων του μενού Μετασχηματισμός. Στην τρίτη και τέταρτη φάση, ανέπτυξε την ικανότητα να διατυπώνει **οικονομικούς και αυθαίρετους ακριβείς ορισμούς**, καθώς και **παραγωγικά επιχειρήματα**. Ανέπτυξε αποδεικτικά σχήματα με το χαρακτηριστικό του πειράματος σκέψης (Balachef, 1982, 1988b). Η μετάβαση προς την ανάπτυξη ικανότητας των αποδεικτικών σχημάτων δεν ήταν ομαλή, αφού ακόμα και στην τρίτη φάση η μαθήτρια αντιμετώπισε γνωστικές συγκρούσεις (π.χ. σημείο [385]). Στην τέταρτη φάση η επίλυση του προβλήματος στους διαφορετικούς τύπους οδήγησαν τη μαθήτρια στην ανάπτυξη εικασιών, **μετασχηματιστικού συλλογισμού και αλυσίδας παραγωγικών δηλώσεων**. Ανέπτυξε την ικανότητα **παραγωγικού συλλογισμού και οικονομικών ορισμών**.

Β. Ως προς τη συμμετοχή της Μ7 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

Στο προ-τεστ κατασκεύασε ένα ακριβές διάγραμμα. Στην απόδειξη της χρησιμοποίησε συνδυασμό οπτικών και θεωρητικών στοιχείων. Στο μέσο-τεστ ακολούθησε αυθαίρετο τρόπο απόδειξης της πρότασης και διατύπωσε **μη οικονομικό ορισμό** του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Από τα γραπτά της συμπεραίνεται ότι η μαθήτρια αρχικά χρησιμοποίησε συνδυασμό οπτικών και θεωρητικών στοιχείων. Η επίλυση του πραγματικού προβλήματος την οδήγησε να κατασκευάσει ένα ακριβές διάγραμμα και να αναπτύξει **απαγωγικά και επαγωγικά επιχειρήματα**. Στο μετά-τεστ κατασκεύασε ένα ακριβές διάγραμμα και ανέπτυξε **παραγωγικό συλλογισμό**.

Το επίπεδο της στο μετά-τεστ van Hiele ήταν 4 (αυστηρό κριτήριο).

5.2.8. Εξέλιξη του επιπέδου van Hiele του Μ8

Α. Ως προς τη συμμετοχή του Μ8 στο δυναμικό περιβάλλον

Ο Μ8 αντιμετώπισε **γνωστικές συγκρούσεις** και εργαλειακά εμπόδια λόγω του εργαλείου σημείου (και πειραματικού ή θεωρητικού) συρσίματος, του εργαλείου καθέτου, περιστροφής. Ειδικότερα, αντιμετώπισε εργαλειακά εμπόδια ως προς την αποκωδικοποίηση της νοητικής αναπαράστασης του σε εικονική, αν και είχε κατασκευάσει το σχήμα χρήσης του εργαλείου καθέτου. Αυτό είναι ένα σημείο της ερευνητικής διαδικασίας στο οποίο επιβεβαιώνεται ότι η κατασκευή σχήματος χρήσης ενός εργαλείου του λογισμικού δε συνεπάγεται πάντοτε την ορθή αποκωδικοποίηση της νοητικής αναπαράστασης του υποκειμένου σε εικονική.

Το εργαλείο περιστροφής διαμεσολάβησε στην ανάπτυξη της κατανόησης του μετασχηματισμού της συμμετρίας ως προς κέντρο, ως 1-1 διαδικασίας του σημείου και του συμμετρικού του σημείου. Η κατανόηση αυτή προέκυψε σταδιακά ως ανάπτυξη της ικανότητας αποκωδικοποίησης της περιστροφής και κατά συνέπεια της ικανότητας μετατροπής μιας νοητικής αναπαράστασης σε εικονική και λεκτική. Το εργαλείο περιστροφής και το θεωρητικό σύρσιμο τον βοήθησαν να αναπτύξει τη **μερολογική κατανόηση** του παραλληλογράμμου, να υπερβεί γνωστικό εμπόδιο, και να αναπτύξει εικασία («αν…τότε» δήλωση) και συνδέσεις εννοιών.

Μέσω της διερευνητικής και μαθησιακής διαδικασίας του ΥΜΜ «κατέληξε σε συμπεράσματα για τη συνεπαγωγική εμφάνιση των ιδιοτήτων του σχήματος μέσα από την ανάλυση που προκύπτει από την ιεράρχηση των σχημάτων» (Battista, 2007,p.852) (χαρακτηριστικό επιπέδου 3.2).

Οι συνδεόμενες αναπαραστάσεις που ο μαθητής δημιούργησε, ανέπτυξε και συνέδεσε στη δεύτερη και τρίτη φάση, τον βοήθησαν να ερμηνεύσει το ίδιο στοιχείο με διαφορετικούς τρόπους. Στην τέταρτη φάση απέκτησε την ικανότητα να αποκωδικοποιεί μια εικονική αναπαράσταση μέσω νοητικών μετασχηματισμών και να συμπεραίνει για τα στοιχεία του διαγράμματος, διατυπώνοντας λεκτικά το συλλογισμό του.

Αναφορικά με τις έννοιες που ο μαθητής παρήγαγε στη διάρκεια της διαδικασία παρατηρήθηκε μια αυξανομένη ικανότητα διαβάθμισης των τύπων ορισμού. Αρχικά διατύπωνε **δυναμικούς ορισμούς** ως **έννοιες-εν-δράσει** και στην εξέλιξη της διαδικασίας **αυθαίρετους οικονομικούς ορισμούς**. Ακόμα ανέπτυξε την ικανότητα να ιεραρχεί τις έννοιες των τετράπλευρων λόγω των δραστηριοτήτων της δεύτερης φάσης και μέσω της διαμεσολάβησης της σύνθεσης εργαλείου καθέτου, ανάκλασης και θεωρητικού συρσίματος.

Αναφορικά με το είδος συλλογισμού που ο μαθητής ανέπτυξε στη διάρκεια της διαδικασία παρατηρήθηκε η ανάπτυξη της ικανότητας αιτιολόγησης στην τρίτη φάση της ερευνητικής διαδικασίας. Οι αιτιολογήσεις του βασίστηκαν σε νοητικές λειτουργίες (νοητική αιτιολόγηση) στην κατηγορία του **πειράματος σκέψης ή στον απαγωγικό συλλογισμό** που ο μαθητής ανέπτυξε. Στο τέλος της τρίτης φάσης ο μαθητής είχε αναπτύξει την ικανότητα **αυθαίρετων οικονομικών ορισμών** και αιτιολογήσεων οι οποίες συνιστούσαν **αλυσίδες παραγωγικών επιχειρημάτων,** επομένως ανάπτυξη **παραγωγικού συλλογισμού**. Στην τέταρτη φάση ανέπτυξε εικασίες λόγω του εργαλείου ίχνους και παραγωγικό συλλογισμό, καθώς και την ικανότητα εφαρμογής της λύσης του προβλήματος.

Β. Ως προς τη συμμετοχή του Μ8 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

Στο προ-τεστ ανέπτυξε επιχειρηματολογία με **απαγωγικά επιχειρήματα.** Στο μέσο-τεστ κατασκεύασε την απόδειξη αναπτύσσοντας συνδυασμό **απαγωγικού** και **παραγωγικού** συλλογισμού. Στο πραγματικό πρόβλημα ο μαθητής ανέπτυξε **μετασχηματιστικό συλλογισμό** και συμπέρανε ότι το σχήμα είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μέσα από λογικές σχέσεις. Στο μετά-τεστ ανέπτυξε **παραγωγικό συλλογισμό** και διατύπωσε **οικονομικό ορισμό** του παραλληλογράμμου. Το επίπεδο του στο μετά-τεστ van Hiele ήταν 4 (ελαστικό κριτήριο).

5.2.9. Εξέλιξη του επιπέδου van Hiele του Μ9

<u>Α. Ως προς τη συμμετοχή της Μ9 στο δυναμικό περιβάλλον</u>

Η Μ9 αντιμετώπισε εργαλειακά εμπόδια λόγω του εργαλείου σημείου (και πειραματικού ή θεωρητικού) συρσίματος, του εργαλείου καθέτου, περιστροφής και ωθήθηκε σε γνωστικές συγκρούσεις. Το θεωρητικό σύρσιμο του εργαλείου σημείου διαμεσολάβησε **στην επανεφεύρεση** μιας ιδιότητας του διαγράμματος. Τα εργαλεία αυτά προκάλεσαν τις διαδικασίες σκέψης για την ολοκλήρωση διαδικαστικών ενεργειών και στην διαμόρφωση μιας εικονικής αναπαράστασης και στην συνέχεια την μετάφραση της εικονικής σε λεκτική.

Διαπιστώθηκε ότι κατά τη διάρκεια της διαδικασίας της πρώτης φάσης του ΥΜΜ η Μ9 αντιμετώπιζε γνωστικά εμπόδια και ήταν σε **κατάσταση ανισσοροπίας ως προς τις έννοιες, δεν είχε ακόμα ικανότητα ιεράρχησης των σχημάτων** (π.χ, ιεράρχησης του ρόμβου που προκύπτει ως σύνθεση ισοσκελών ή ως σύνθεση ισοπλεύρων). Αυτό ήταν και ένα σημείο στο οποίο επισημάνθηκε ο σημαντικός ρόλος στην ανάπτυξη κατανόησης εκ μέρους των μαθητών, **λόγω της σειράς προτεραιότητας εισαγωγής και αλληλεπίδρασης με τις δραστηριότητες** του ΥΜΜ στη μαθησιακή ακολουθία εισαγωγής των εννοιών.

Η Μ9 στην αρχή της διαδικασίας διατύπωνε ανεπαρκείς ορισμούς, έννοιες-εν-δράσει και απαγωγικά επιχειρήματα ή ανεπαρκείς αιτιολογήσεις, σε άτυπη γλώσσα. **Λογικές συσχετίσεις** εμφανίστηκαν στα σημεία 305, 321, 422 λόγω του συνδυασμού των εργαλείων ίχνους, ανάκλασης και θεωρητικού συρσίματος. Το εργαλείο περιστροφής, και ανάκλασης ώθησαν την μαθήτρια σε γνωστική σύγκρουση για την ιεράρχηση των σχημάτων.

Το εργαλείο ανάκλασης και καθέτου λειτούργησαν διαμεσολαβητικά στη δημιουργία συνδεόμενων αναπαραστάσεων και την επανεφεύρεση δευτερευόντων ιδιοτήτων των σχημάτων. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας ήταν η ανάπτυξη ικανότητας αντίληψης των σχέσεων των σχημάτων και η ανάπτυξη αιτιολόγησης. Η μαθήτρια απέκτησε την ικανότητα να «περιγράφει τα στοιχεία των σχημάτων, χρησιμοποιώντας γεωμετρικές έννοιες και όρους» (Battista, 2007, p. 851) (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.2).

Ανέπτυξε **επαγωγικό / μετασχηματιστικό συλλογισμό και εμπειρικά αποδεικτικά σχήματα** με το χαρακτηριστικό του **θεωρήματος-εν-δράσει**. Η μη συνεπής συμμετοχή της στην πειραματική διαδικασία στις δυο τελευταίες φάσεις είχαν ως αποτέλεσμα να διακόψουν την εξέλιξη της, όπως διαπιστώνεται από τη συμμετοχή της στο περιβάλλον χαρτί –μολύβι. Στο 458 κατασκεύασε ΣΟΕΑ με το σημείο 439.

<u>Β. Ως προς τη συμμετοχή της Μ9 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι</u>

Στο προ-τεστ κατασκεύασε ανακριβές διάγραμμα και δεν διατύπωσε υποθέσεις. Στο μέσο-τεστ κατασκεύασε ανακριβές διάγραμμα, αναγνώρισε τα υποσχήματα των τριγώνων που έπρεπε να συγκρίνει για να ολοκληρώσει την απόδειξη και ανέπτυξε επιχειρήματα που περιέχουν στοιχεία παραγωγικού συλλογισμού.

Το επίπεδο της στο μετά-τεστ van Hiele ήταν 2 (αυστηρό κριτήριο).

5.2.10. Εξέλιξη του επιπέδου van Hiele του Μ10

<u>Α. Ως προς τη συμμετοχή της Μ10 στο δυναμικό περιβάλλον</u>

Η Μ10 αντιμετώπισε **γνωστικές συγκρούσεις** λόγω του εργαλείου σημείου (και πειραματικού ή θεωρητικού) συρσίματος και του παραμετρικού εργαλείου. Στην αρχή της διαδικασίας επιβεβαιώθηκε η θεωρία των van Hiele για το ρόλο που παίζουν τα γλωσσικά σύμβολα στην κατανόηση που αναπτύσσεται μεταξύ υποκειμένων που επεξεργάζονται την ίδια δραστηριότητα.

Η κατασκευή του παραμετρικού τμήματος δεν προκάλεσε την **ΑΟΑ** της Μ10. Η αλληλεπίδραση με το εργαλείο είχε ως αποτέλεσμα να αναπτύξει **την ικανότητα να αποκωδικοποιήσει τη λειτουργία του εργαλείου** και τα αποτελέσματα της χρήσης του με γλωσσικό συμβολισμό, σε τυπική μαθηματική γλώσσα. Μέσω της διαδικασίας απόκτησε μια **αυξανομένη ικανότητα** μετατροπής της εικονικής αναπαράστασης σε λεκτική και αντίστροφα. Το παραμετρικό εργαλείο διαμεσολάβησε στην υπέρβαση γνωστικού εμποδίου της Μ10 και τη διαμόρφωση **θεωρήματος-εν-δράσει**. Το εργαλείο ανάκλασης βοήθησε τη μαθήτρια να αναπτύξει την ικανότητα δομικής ανάλυσης των σχημάτων. Αυτό επιβεβαιώθηκε στην τρίτη φάση όπου η μαθήτρια έχει αποκτήσει την ικανότητα να αναλύει δομικά ένα σχήμα και να περιγράφει τις ιδιότητες των στοιχείων του σχήματος με τυπικό τρόπο. Στην αρχή της διαδικασίας διατύπωνε **αντιληπτικούς ανακριβείς ορισμούς**, στην εξέλιξη απέκτησε σταδιακά την ικανότητα διαμόρφωσης **ορισμών οικονομικών ή μη οικονομικών** σε συνεργασία. Στο τέλος της διαδικασίας απέκτησε την ικανότητα διατύπωσης **αυθαίρετων οικονομικών ορισμών,** καθώς και συσχέτισης εννοιών.

Η Μ10 αρχικά εκφραζόταν με αυστηρά άτυπο τρόπο και οι αιτιολογήσεις της ήταν ανεπαρκείς. Το εργαλείο ανάκλασης, σημείου και πειραματικού συρσίματος διαμεσολάβησε στην ανάπτυξη **απαγωγικών επιχειρημάτων**.

Στην τρίτη φάση απέκτησε την ικανότητα να αναπτύσσει **παραγωγικό συλλογισμό ή συνδυασμό απαγωγικού και παραγωγικού συλλογισμού** σε αλληλεπίδραση με την ομάδα.

Επομένως, «έχει μετακινηθεί από τον οπτικό συλλογισμό επειδή το σημαντικότερο κριτήριο για τον προσδιορισμό ενός σχήματος είναι να ικανοποιεί, ένα ακριβές σύνολο τυπικών ιδιοτήτων» (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.3 Battista (2007, p. 851).

Β. Ως προς τη συμμετοχή της Μ10 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

Στο προ-τεστ δεν είχε ικανότητα μετάφρασης της λεκτικής πληροφορίας σε σχέδιο καθώς και διαχωρισμού της υπόθεσης από το συμπέρασμα. Στο μέσο-τεστ κατασκεύασε ένα ανακριβές διάγραμμα και από τις διατυπώσεις της το παραλληλόγραμμο διαπιστώνεται ότι απέκτησε το **χαρακτήρα συμβόλου.** Στο πραγματικό πρόβλημα κατασκεύασε ένα ακριβές διάγραμμα, ανακάλυψε τη λύση εικονικά, την οποία όμως δεν διατύπωσε με λόγια. Στο μετά-τεστ το παραλληλόγραμμο απέκτησε το χαρακτήρα σήματος με αποτέλεσμα να διατυπώσει μη **οικονομικό ορισμό (ή οικονομικό ορισμό) των σχημάτων**. Ανέπτυξε επιχειρηματολογία που βασίζεται στο διάγραμμα, επομένως απαγωγικό συλλογισμό.

Το επίπεδο της στο μετά-τεστ van Hiele ήταν 3 (ελαστικό κριτήριο).

5.2.11. Εξέλιξη του επιπέδου van Hiele του Μ11

Α. Ως προς τη συμμετοχή της Μ11 στο δυναμικό περιβάλλον

Η Μ11 ωθήθηκε σε διαδικασίες σκέψης ώστε να **επανεφεύρει δυναμικά** μια ιδιότητα του σχήματος (π.χ του ορθογωνίου) λόγω των συνδεόμενων αναπαραστάσεων που δημιουργήθηκαν από το πειραματικό σύρσιμο σε διάφορα σημεία της ερευνητικής διαδικασίας. Για παράδειγμα στο [40], ανακάλυψε μια διαδικασία να κατασκευάζει την ιδιότητα της ισότητας του σχήματος, στο [221] ενσωμάτωσε στο γνωστικό σχήμα που είχε κατασκευάσει για την αξονική συμμετρία του ορθογωνίου, την αξονική συμμετρία του ρόμβου.

Τα εργαλεία σημείου (και πειραματικού ή θεωρητικού συρσίματος) και εργαλείου καθέτου προκάλεσαν **γνωστικές συγκρούσεις** στη μαθήτρια (π.χ στα 38, 98, 115, 221).

Η μαθήτρια σταδιακά απόκτησε την ικανότητα να αποκωδικοποιεί τη νοητική της εικόνα σε εικονική και λεκτική αναπαράσταση. Τα εργαλεία ανάκλασης καθέτου, και προσαρμ. εργαλείου (σε συνδυασμό με το πειραματικό ή θεωρητικό σύρσιμο) διαμεσολάβησαν στην κατασκευή **εννοιών-εν-δράσει** της Μ11.

Η μαθήτρια κατασκεύασε **λογικές συσχετίσεις** λόγω του εργαλείων κύκλου (στα σημεία 47, 68, 106). Το προσαρμ. εργαλείο διαμεσολάβησε στην αποκωδικοποίηση της νοητικής της εικόνας σε εικονική στην οθόνη, καθώς και στην ανάπτυξη ικανότητας δομικής ανάλυσης του σχήματος και διατύπωσης απαγωγικών επιχειρημάτων.

Το διάστημα [236-281] είναι κομβικό για τη μαθήτρια αφού τα σχήματα των τετραπλεύρων απέκτησαν το **χαρακτήρα σήματος**. Επομένως, ανακάλυψε ιδιότητες των σχημάτων, δηλαδή ανέπτυξε την ικανότητα **δυναμικής επανεφεύρεσης**, εξειδικεύοντας τη δομή των τεμνόμενων διχοτομούμενων διαγωνίων του παραλληλογράμμου σε σημείο Ο. Επέκτεινε την δομή των τεμνόμενων διαγώνιων που έχει κατασκευάσει για το παραλληλόγραμμο, συμπεριλαμβάνοντας στην έννοια της καθετότητας και διχοτόμησης των αξόνων. Επομένως, εξειδίκευσε τη δομή των αξόνων συμμετρίας ως: «τμημάτων που διχοτομούνται και τέμνονται κάθετα με κοινό μέσο το Ο (σημείο τομής των διαγωνίων). Δηλαδή, **επανεφηύρε δυναμικά** την έννοια των διαγωνίων του ρόμβου ως: «τμημάτων διχοτομούμενων και καθέτων με κοινό μέσο το Ο».

Οι **συνδεόμενες αναπαραστάσεις της β φάσης** βοήθησαν τη μαθήτρια να έρθει σε **γνωστική σύγκρουση**, και να αναδομήσει **γνωστικά σχήματα** αλλά και να αποδώσει σταδιακά σε στοιχεία του δυναμικού διαγράμματος διπλό ρόλο.

Η αντιστροφή ενεργειών με σύνθεση εργαλείων και τεχνικών στη δεύτερη φάση του ΥΜΜ και ειδικότερα στο στάδιο της **ιεραρχικής δομικής ανάλυσης**, οδήγησε την Μ11 στη νοητική σύνδεση αναπαραστάσεων εννοιολογικά και διαδικαστικά. Αυτή η φάση βοήθησε το μαθητή να ιεραρχήσει δομικά τα παραλληλόγραμμα και να αποκτήσει την **ικανότητα αυθαίρετων οικονομικών ορισμών**.

Στην αρχή της διαδικασίας δεν είχε δυνατότητα παραγωγικών επιχειρημάτων. Αυτή άρχισε να εμφανίζεται στην τρίτη φάση της διαδικασίας. Η συμμετοχή στο μαθησιακό μονοπάτι θεωρήθηκε αναγκαία για την **ανάπτυξη παραγωγικών επιχειρημάτων** (π.χ στα σημεία 281, 333), αφού η μαθήτρια διατύπωσε λογικές συσχετίσεις μεταξύ στοιχείων το διαγράμματος (π.χ την έννοια του άξονα συμμετρίας) καθώς και **συνδέσεις εννοιών** που η μαθήτρια είχε κατασκευάσει σε προηγούμενη φάση. Οι αναπαραστάσεις της τελευταίας φάσης (λεκτικές και εικονικές) της Μ11 είναι **συνδεδεμένες εννοιολογικά** και διαδικαστικά με την πρώτη και δεύτερη φάση της ερευνητικής διαδικασίας. Συνεπώς, ανέπτυξε την ικανότητα να λειτουργεί (αναγνωρίζει υποδομές, μετακινείται από ένα αναπαραστατικό σύστημα σε άλλο κλπ.) σε ένα πολυπλοκότερο σχήμα λόγω της επίδρασης των ΣΟΕΑ του μαθησιακού μονοπατιού.

Β. Ως προς τη συμμετοχή της Μ11 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

Στο προ-τεστ κατασκεύασε ακριβές διάγραμμα και δεν ολοκλήρωσε την απόδειξη. Στο μέσο-τεστ ανέπτυξε **παραγωγικά επιχειρήματα** αλλά δεν ολοκλήρωσε την απόδειξη. Το παραλληλόγραμμο και το ορθογώνιο απέκτησαν το **χαρακτήρα συμβόλου**. Στο πραγματικό πρόβλημα βασίστηκε σε στοιχείο του διαγράμματος και ανέπτυξε συνδυασμό **απαγωγικού και**

παραγωγικού συλλογισμού. Στο μετά-τεστ απέδειξε ότι οι απέναντι πλευρές του ΚΛΜΝ είναι παράλληλες και ίσες, με εφαρμογή του θεωρήματος ΘΜΠ και στο τέλος διατύπωσε ένα **μη οικονομικό ορισμό του παραλληλογράμμου**. Στο δεύτερο σκέλος ανέπτυξε **παραγωγικό συλλογισμό** προκειμένου να αποδείξει την καθετότητα των πλευρών του εσωτερικού σχήματος, διατυπώνοντας έναν **αυθαίρετο οικονομικό ορισμό** για το ορθογώνιο.

Το επίπεδο της στο μετά-τεστ van Hiele ήταν 4 (ελαστικό κριτήριο).

5.2.12. Εξέλιξη του επιπέδου van Hiele του Μ12

Α. Ως προς τη συμμετοχή της Μ12 στο δυναμικό περιβάλλον

Η Μ12 αντιμετώπισε **γνωστικές συγκρούσεις** στα σημεία [97, 118, 193, 220] οι οποίες προκύπτουν μέσω της επίδρασης του συρσίματος (πειραματικού η θεωρητικού) του εργαλείου σημείου (π.χ ως προς την διατήρηση της ισότητας μεταξύ πλευρών σχήματος, την ιεράρχηση τετράπλευρων όταν σύρεται μια κορυφή του, καθώς και τη θεσιακή κατανόηση της επιλογής σημείου για την εφαρμογή του προσαρμ. εργαλείου).

Κατασκεύασε ***έννοιες-εν-δράσει*** και ***θεωρήματα-εν-δράσει***, αναπτύσσοντας ***επαγωγικό συλλογισμό*** λόγω τη επίδρασης του εργαλείου ανάκλασης. Ο σύνθετος μετασχηματισμός του διαγράμματος που προέκυψε λόγω του *θεωρητικού συρσίματος* και της ανάκλασης είχε επίδραση στη διατύπωση ***εικασιών και λογικών συσχετίσεων*** (π.χ σημείο 130, 162-164).

Η μαθήτρια ανέπτυξε δυναμική **οπτικοποίηση** αμέσως **μετά την εμφάνιση** του ανακλώμενου σημείου, αφού **νοητικά σχημάτισε** τις αποστάσεις των σημείων από τον άξονα συμμετρίας.

Ωθήθηκε σε διαδικασίες σκέψης ώστε να ανακαλύψει μια διαδικασία για να κατασκευάσει ιδιότητες των τετραπλεύρων στη δεύτερη φάση της ερευνητικής διαδικασίας. Το προσαρμ. εργαλείο διαμεσολάβησε στην *αποκωδικοποίηση* της νοητικής εικόνας σε εικονική στην οθόνη, καθώς και στην ανάπτυξη ικανότητας δομικής ανάλυσης του σχήματος και διατύπωσης ***απαγωγικών επιχειρημάτων*** (για παράδειγμα στο διάστημα (253-292). Το εργαλείο στην περίπτωση αυτή λειτουργεί ως δομική μονάδα (building block), αφού είναι σχεδιασμένο να φέρει εγγενώς ως αναπαραστατικό μέσο κάποιες ιδιότητες. Οι **συνδεόμενες αναπαραστάσεις της δεύτερης φάσης** βοήθησαν τη μαθήτρια να έρθει σε **γνωστική σύγκρουση**, και να αναδομήσει **γνωστικά σχήματα** αλλά και να αποδώσει σταδιακά σε στοιχεία του δυναμικού διαγράμματος διπλό ρόλο.

Η αντιστροφή ενεργειών με σύνθεση εργαλείων και τεχνικών στη δεύτερη φάση του ΥΜΜ και ειδικότερα στο στάδιο της **ιεραρχικής δομικής ανάλυσης**, οδήγησε την Μ12 στην **ιεράρχηση του σχήματος του τετραγώνου ως ειδική κατηγορία ρόμβου και ορθογωνίου** και στη νοητική σύνδεση αναπαραστάσεων εννοιολογικά και διαδικαστικά. Αυτή η φάση βοήθησε το μαθητή να ιεραρχήσει δομικά τα παραλληλόγραμμα και να αποκτήσει την **ικανότητα αυθαίρετων οικονομικών ορισμών**. Επομένως, σταδιακά απέκτησε την ικανότητα σύνδεσης αναπαραστάσεων νοητικά και στη συνέχεια τη διαδικαστική και εννοιολογική ικανότητα να τις διαχειρίζεται.

Το διάστημα αυτό ήταν σημαντικό για την εξέλιξη του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης της μαθητρίας, αφού τα σχήματα των τετραπλεύρων απόκτησαν το ***χαρακτήρα σήματος***. Επομένως, ανακάλυψε ιδιότητες των σχημάτων, δηλαδή ανέπτυξε την ικανότητα ***δυναμικής επανεφεύρεσης***, εξειδικεύοντας τη δομή των τεμνόμενων διχοτομούμενων διαγωνίων του παραλληλογράμμου σε σημείο Ο.

Στην αρχή της διαδικασίας δεν είχε δυνατότητα ***παραγωγικών επιχειρημάτων***. Αυτή άρχισε να εμφανίζεται στην τρίτη φάση της διαδικασίας. Η συμμετοχή στο μαθησιακό μονοπάτι θεωρείται αναγκαία προϋπόθεση για την ανάπτυξη *παραγωγικών επιχειρημάτων* (π.χ στα σημεία 281, 333), αφού η μαθήτρια διατύπωσε λογικές συσχετίσεις μεταξύ στοιχείων του διαγράμματος (π.χ την έννοια του άξονα συμμετρίας) καθώς και συνδέσεις εννοιών που η μαθήτρια είχε κατασκευάσει σε προηγούμενη φάση. Οι αναπαραστάσεις της τελευταίας φάσης (λεκτικές και εικονικές) της Μ12 είναι συνδεδεμένες εννοιολογικά και διαδικαστικά με την πρώτη και δεύτερη φάση της ερευνητικής διαδικασίας. Συνεπώς, ανέπτυξε την ικανότητα να λειτουργεί με τα σχήματα αναγνωρίζει υποδομές, και να μετακινείται από ένα αναπαραστατικό σύστημα σε άλλο.

Β. Ως προς τη συμμετοχή της Μ12 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

Στο προ-τεστ η μαθήτρια μετέφρασε την έννοια της απόστασης λανθασμένα, δηλαδή δεν έχει αναπτύξει την ικανότητα μετάφρασης της λεκτικής διατύπωσης σε εικονική. Στο μέσο τεστ έχει αποκτήσει την ικανότητα μετάφρασης μιας **'αν…τότε'** δήλωσης. Έχει αποκτήσει την ικανότητα να **συσχετίζει έννοιες.** Στο πραγματικό πρόβλημα εξέφρασε τις σχέσεις μεταξύ των τμημάτων και διατύπωσε ότι το σχήμα είναι ορθογώνιο, χωρίς να αιτιολογήσει το συλλογισμό της. Κατασκεύασε ακριβές διάγραμμα, ως αποτέλεσμα της δυναμικής οπτικοποίησης. Στο μετά-τεστ η απόδειξη της πρότασης ολοκληρώθηκε από τη μαθήτρια με **παραγωγικό συλλογισμό,** αφού οδηγήθηκε σε συμπέρασμα για τις πλευρές του σχήματος, αποδεικνύοντας ότι είναι παραλληλόγραμμο με χρήση **μη οικονομικού ορισμού.**

Το επίπεδο της στο μετά-τεστ van Hiele ήταν 4 (ελαστικό κριτήριο).

5.2.13. Εξέλιξη του επιπέδου van Hiele του Μ13

Α. Ως προς τη συμμετοχή του Μ13 στο δυναμικό περιβάλλον

Από το διάγραμμα συμπεραίνεται ότι στο [5, 61, 92, 98, 108, 170, 214, 239, 245] ο μαθητής αντιμετώπισε **γνωστικές συγκρούσεις** μέσω των εργαλείων σημείου (και πειραματικού συρσίματος), περιστροφής, κύκλου, παραμετρικού εργαλείου ανάκλασης και προσαρμ. εργαλείου.

Η εμφάνιση των γνωστικών συγκρούσεων ήταν αποτέλεσμα των γνωστικών εμποδίων που αντιμετώπισε, όπως μη ικανότητα μετάφρασης της νοητικής του εικόνας για το αντικείμενο σε εικονική ή λεκτική και ειδικότερα τις έννοιες της αξονικής και κεντρικής συμμετρίας.

Στη διάρκεια της διαδικασίας απόκτησε μια αυξανόμενη ικανότητα μετάφρασης μεταξύ αναπαραστάσεων (εσωτερικών, εξωτερικών), λόγω της διαμεσολάβησης των εργαλείων του λογισμικού. Για παράδειγμα, μέσω του εργαλείου ανάκλασης ο μαθητής απόκτησε μια αυξανόμενη δυνατότητα να εξετάζει τη δομή των σχημάτων, αναλύοντας τα μέρη τους χαρακτηριστικό επιπέδου 2 (Battista, 2007).

Οι συνδεόμενες οπτικές αναπαραστάσεις της δεύτερης φάσης της διαδικασίας διαμεσολάβησαν στη **μερολογική κατανόηση** σχημάτων (π.χ του ρόμβου ως σύνθεση ισοσκελών). Επομένως, μέσω της διαδικασίας δημιούργησε **συνδεόμενες νοητικές αναπαραστάσεις**. Κατά συνέπεια, οι **συνδεόμενες αναπαραστάσεις των δυναμικών εργαλείων** οδήγησαν το μαθητή σε γνωστικές συγκρούσεις και τον ώθησαν να αναπτύξει διαδικασίες σκέψης, **διαμεσολαβώντας στην αποκωδικοποίηση της νοητικής εικόνας του σε εικονική και της εικονικής σε λεκτική**. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να διατυπώσει **έννοιες-εν-δράσει** (π.χ [78], [122]). Το εργαλείο περιστροφής και εργαλείο ανάκλασης βοήθησαν το μαθητή να αναπτύξει την ικανότητα **λογικών συσχετίσεων**. Κομβικό σημείο στην ερευνητική διαδικασία είναι το σημείο [257] όπου ο μαθητής αποκωδικοποίησε λεκτικά και εικονικά την νοητική του εικόνα, χρησιμοποιώντας το προσαρμοσμένο εργαλείο με κατάχρηση. Επομένως, οι συνδεόμενες αναπαραστάσεις που ο μαθητής δημιούργησε στη διάρκεια της διαδικασίας αποτέλεσαν το μέσο ώστε να διαχειριστεί την επίλυση των προβλημάτων (π.χ η κατασκευή του τετραγώνου ως αποτέλεσμα αντιστροφής ενεργειών).

Σε αλληλεπίδραση με τις ΣΟΕΑ ανέπτυξε την ικανότητα **μετασχηματιστικού συλλογισμού**, καθώς εκδήλωσε την ικανότητα μετατροπής από εικονική σε λεκτική ή νοητική και αντίστροφα.

Δηλαδή, οι ΣΟΕΑ της τρίτης και τέταρτης φάσης αποτέλεσαν το τελευταίο στάδιο της διαδικασίας αναφορικά με την ικανότητα μετατροπής μεταξύ των αναπαραστάσεων. Σε αλληλεπίδραση με τους σύνθετους μετασχηματισμούς των ΣΟΕΑ της τρίτης φάσης συμπεραίνεται ότι έχει αναπτύξει ικανότητες **παραγωγικού συλλογισμού** (π.χ στα σημεία 388, 408, 427). Στην τέταρτη φάση οπτικοποίησε την αμετάβλητη ιδιότητα σημείου λόγω της επίδρασης συρσίματος στην αλληλουχία μετασχηματισμών του διαγράμματος των ΣΟΕΑ ή λόγω της επίδρασης του ίχνους και του συρσίματος, αναγνώρισε οπτικά την λύση του προβλήματος και οδηγήθηκε να αναπτύξει μια στρατηγική, σημείο **δυναμικής επανεφεύρεσης** της λύσης του προβλήματος, ανακαλώντας την έννοια της μεσοπαραλλήλου, που είχε κατασκευάσει στην δεύτερη φάση. Διαπιστώθηκε ακόμα η ικανότητα του στην **εφαρμογή της λύσης** του πραγματικού προβλήματος.

Β. Ως προς τη συμμετοχή του Μ13 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι

Στο προ-τεστ δεν είχε ικανότητα μετάφρασης της λεκτικής διατύπωσης σε εικονική και δεν ολοκλήρωσε την απόδειξη της πρότασης. Στο μέσο-τεστ διατύπωσε το κριτήριο ισότητας τριγώνων για να αιτιολογήσει το συμπέρασμα του, καθώς και συμπεράσματα, όπως την ισότητα των απέναντι γωνιών του σχήματος, το οποίο τον οδήγησε να συμπεράνει ότι το σχήμα είναι ορθογώνιο. Επομένως ανέπτυξε **παραγωγικό συλλογισμό**. Στο πραγματικό πρόβλημα ο μαθητής κατασκεύασε ένα ακριβές διάγραμμα ορθογωνίου και διατύπωσε λογικές σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του διαγράμματος στο πρόβλημα. Στο μετά-τεστ χρησιμοποίησε οπτικά στοιχεία του διαγράμματος και ανέπτυξε **παραγωγικό συλλογισμό**.

Το επίπεδο του στο μετά-τεστ van Hiele ήταν 3 (αυστηρό κριτήριο).

5.2.14. Εξέλιξη του επιπέδου van Hiele του Μ14

Α. Ως προς τη συμμετοχή της Μ14 στο δυναμικό περιβάλλον

Η Μ14 αντιμετώπισε ***γνωστικές συγκρούσεις*** λόγω του εργαλείου σημείου (και πειραματικού ή θεωρητικού συρσίματος), εργαλείου καθέτου και του παραμετρικού εργαλείου. Το παραμετρικό εργαλείο διαμεσολάβησε στην **υπέρβαση γνωστικού εμποδίου**.

Στην αρχή της διαδικασίας επιβεβαιώθηκε η θεωρία των van Hiele για το ρόλο που παίζουν τα γλωσσικά σύμβολα στην κατανόηση που αναπτύσσεται μεταξύ υποκειμένων που επεξεργάζονται την ίδια δραστηριότητα. Μέσω της διαδικασίας απέκτησε μια αυξανομένη ικανότητα μετατροπής της εικονικής αναπαράστασης σε λεκτική και αντίστροφα. Το εργαλείο ανάκλασης βοήθησε τη μαθήτρια να αναπτύξει την ικανότητα **δομικής ανάλυσης** των σχημάτων και αναγνώριση υποσχημάτων.

Αυτή η ικανότητα επιβεβαιώθηκε στην τρίτη φάση, όπου η μαθήτρια είχε αποκτήσει την ικανότητα να αναλύει δομικά ένα σχήμα και να περιγράφει τις ιδιότητες των στοιχείων του σχήματος με τυπικό τρόπο. Επομένως, «είχε μετακινηθεί από τον οπτικό συλλογισμό, επειδή το σημαντικότερο κριτήριο για τον προσδιορισμό ενός σχήματος είναι αν ικανοποιεί, ένα ακριβές σύνολο τυπικών ιδιοτήτων» (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.3 Battista (2007, p. 851).

Στην αρχή της διαδικασίας διατύπωνε ***δυναμικούς ορισμούς***, και στην εξέλιξη απέκτησε σταδιακά την ικανότητα διαμόρφωσης ορισμών ***μη οικονομικών*** *ή οικονομικών* σε συνεργασία. Στο τέλος της διαδικασίας απέκτησε την ικανότητα διατύπωσης ***αυθαίρετων οικονομικών ορισμών*** καθώς και συσχέτισης εννοιών.

Το εργαλείο ανάκλασης διαμεσολάβησε στην ανάπτυξη ικανότητας ***αντιληπτικής ιεράρχησης***. Οι συνδεόμενες αναπαραστάσεις της τρίτης φάσης διαμεσολάβησαν, ώστε να συσχετίσει την μορφή του τετραπλεύρου στο εσωτερικό με την ιδιότητα που αποκτούν οι διαγώνιες στο εξωτερικό τετράπλευρο και να αντιμετωπίσει γνωστικές συγκρούσεις, εκφράζοντας θεωρήματα-εν-δράσει. Η μαθήτρια αντικατέστησε σε διάφορα σημεία της διαδικασίας το λανθασμένο *σχήμα* με ένα σχήμα ***εμπειρικό–αντιληπτικό***. Απέκτησε την ικανότητα να αναπτύσσει ***παραγωγικό συλλογισμό*** ή συνδυασμό ***απαγωγικού και παραγωγικού συλλογισμού*****.** Στο τέλος της διαδικασίας ανέπτυξε την ικανότητα διαμόρφωσης υποστόχων και αποδεικτικής διαδικασίας με ***παραγωγικό συλλογισμό***.

<u>Β. Ως προς τη συμμετοχή της Μ14 στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι</u>

Στο προ-τεστ κατασκεύασε ανακριβές διάγραμμα και δεν ολοκλήρωσε την απόδειξη. Στο μέσο-τεστ έχει αναπτύξει την ικανότητα μετάφρασης της «αν…τότε» δήλωσης αλλά αιτιολόγησε ανεπαρκώς. Στο πραγματικό πρόβλημα ανέπτυξε **μετασχηματιστικό συλλογισμό,** αφού ανέπτυξε **σκέψη με κίνηση** σε στατικό διάγραμμα και προέβλεψε λογικές σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων. Προσδιόρισε ακόμα **τη λύση του προβλήματος, χρησιμοποιώντας** στοιχεία από το διάγραμμα. Στο μετά-τεστ διατύπωσε έναν **οικονομικό ορισμό** για το ορθογώνιο. Ανέπτυξε συνδυασμό **απαγωγικού** και παραγωγικού **συλλογισμού**. Το επίπεδο της στο μετά-τεστ van Hiele ήταν 3 (αυστηρό κριτήριο).

5.3. Ομάδα ελέγχου

5.3.1. Εξέλιξη του επιπέδου van Hiele του ΜΕ1

Ο μαθητής στο προ-τεστ είχε δυνατότητα κατασκευής αποδεικτικής διαδικασίας, αναπτύσσοντας συνδυασμό **απαγωγικού και παραγωγικού συλλογισμού**. Αντιμετώπιζε **γνωστικά εμπόδια και χρησιμοποίησε οπτικά στοιχεία** προκειμένου να ολοκληρώσει την απόδειξη. Στην εξέλιξη της διαδικασίας και από τα συμπεράσματα που προκύπτουν από το γραπτό του μετά τη μελέτη των ορθογωνίων παραλληλογράμμων στην τάξη, διαπιστώνεται ότι ο μαθητής δεν είχε ικανότητα μετάφρασης της **λεκτικής αναπαράστασης σε συμβολική, δηλαδή** ικανότητα μετάφρασης της «αν…τότε» δήλωσης, αποστήθιζε ιδιότητες τις οποίες και αναφέρει αλλά δεν μπορεί από το διάγραμμα να οδηγηθεί στην απόδειξη της πρότασης η οποία παραμένει ανεπαρκής. Στο πραγματικό πρόβλημα δεν είχε δυνατότητα να μεταφράσει με ακρίβεια την έννοια της περιστροφής και ως συνέπεια αυτού δεν είχε ικανότητα να προχωρήσει στη λύση του πραγματικού προβλήματος. Στο τέλος της διαδικασίας είχε αναπτύξει τη διαδικαστική γνώση των θεωρημάτων αλλά όχι την εννοιολογική, αφού διατύπωνε έννοιες ασύνδετες με τις διαδικασίες που ακολουθεί, στην προσπάθεια του να τεκμηριώσει τα συμπεράσματά του.

Το επίπεδο του στο μετά –τεστ van Hiele ήταν 3 (ελαστικό κριτήριο).

5.3.2. Εξέλιξη του επιπέδου van Hiele του ΜΕ2

Ο μαθητής αρχικά εξειδίκευσε το διάγραμμα, αφού παρερμήνευσε την ιδιότητα του ύψους και ως ιδιότητα της διχοτόμου και διαμέσου και δεν ολοκλήρωσε την απόδειξη. Στην εξέλιξη της διαδικασίας και από τα συμπεράσματα που προκύπτουν από το γραπτό του μετά τη μελέτη των ορθογωνίων παραλληλογράμμων στην τάξη, διαπιστώνεται ότι ο μαθητής δεν είχε ικανότητα μετάφρασης της **λεκτικής αναπαράστασης** επαρκώς καθώς και της «αν…τότε» δήλωσης. Στο πραγματικό πρόβλημα δεν είχε δυνατότητα να μεταφράσει με ακρίβεια την έννοια της περιστροφής και ως συνέπεια αυτού να προχωρήσει στη λύση του πραγματικού προβλήματος. Στο τέλος ανέπτυξε τη διαδικαστική γνώση του θεωρήματος ΘΜΠ, **παραγωγικό συλλογισμό** και διατύπωσε **οικονομικό ορισμό** του ορθογωνίου. Το επίπεδο του στο μετά –τεστ van Hiele ήταν 3 (ελαστικό κριτήριο).

5.3.3. Εξέλιξη του επιπέδου van Hiele του ΜΕ3

Η μαθήτρια αρχικά δεν είχε ικανότητα επαρκούς μετάφρασης του προβλήματος σε διάγραμμα, αποδεικνύει χρησιμοποιώντας διαδικαστικές γνώσεις οι οποίες ταιριάζουν σε σχήματα αυθεντίας. Στην εξέλιξη της διαδικασίας και από τα συμπεράσματα που προκύπτουν από το γραπτό της, διαπιστώνεται ότι απαριθμεί ένα πλήθος ιδιοτήτων χωρίς να έχει ικανότητα να επιλέξει τις αναγκαίες για την απόδειξη, δεν είχε ικανότητα διαχωρισμού της υπόθεσης από το συμπέρασμα, καθώς και ικανότητα να μεταφράσει τη λεκτική διατύπωση σε συμβολική αναπαράσταση. Δεν έχει αποκτήσει την ικανότητα μετάφρασης της «αν…τότε» δήλωσης. Στο πραγματικό πρόβλημα δεν είχε δυνατότητα να μεταφράσει με ακρίβεια την έννοια της περιστροφής και ως συνέπεια αυτού να προχωρήσει στη λύση του πραγματικού προβλήματος. Στο τέλος ανέπτυξε τη διαδικαστική **γνώση** του θεωρήματος ΘΜΠ, **παραγωγικό συλλογισμό** και διατύπωσε **οικονομικό ορισμό** του ορθογωνίου αλλά δεν ολοκλήρωσε την απόδειξη. Το επίπεδο της στο μετά –τεστ van Hiele ήταν 2 (εφαρμόζοντας το ελαστικό κριτήριο). Η μαθήτρια όμως συγκέντρωσε και σωστές απαντήσεις στις ερωτήσεις 16-20. Επομένως, ενδεχομένως να βρισκόταν σε μετάβαση μεταξύ επιπέδων.

5.3.4. Εξέλιξη του επιπέδου van Hiele του ΜΕ4

Η μαθήτρια αρχικά είχε ικανότητα διατύπωσης κριτηρίων και απόδειξης με χρήση **παραγωγικού συλλογισμού.** Στην εξέλιξη της διαδικασίας και από τα συμπεράσματα που προκύπτουν από το γραπτό της μετά τη μελέτη των ορθογωνίων παραλληλογράμμων στην τάξη, διαπιστώνεται ότι διατύπωσε έναν **οικονομικό ορισμό, ανέπτυξε την ικανότητα μετάφρασης** της «αν…τότε» δήλωσης. **Στην απόδειξη της υπάρχουν στοιχεία παραγωγικού συλλογισμού.** Στο πραγματικό πρόβλημα δεν είχε δυνατότητα να μεταφράσει με ακρίβεια την έννοια της περιστροφής και ως συνέπεια αυτού να προχωρήσει στη λύση του πραγματικού προβλήματος. Στο τέλος ανέπτυξε τη διαδικαστική **γνώση** του θεωρήματος ΘΜΠ, αλλά δεν ολοκλήρωσε την απόδειξη, αφού δεν έχει αποκτήσει την ικανότητα της λογικής σύνδεσης των σχέσεων. Το επίπεδο της στο μετά –τεστ van Hiele ήταν 3 (ελαστικό κριτήριο).

5.3.5. Εξέλιξη του επιπέδου van Hiele του ΜΕ5

Ο μαθητής αρχικά δεν είχε ικανότητα μετάφρασης της διατύπωσης σε ακριβές διάγραμμα, και ανέπτυξε **απαγωγικό συλλογισμό.** Στην εξέλιξη της διαδικασίας και από τα συμπεράσματα που προκύπτουν από το γραπτό του μετά τη μελέτη των ορθογωνίων παραλληλογράμμων στην τάξη, διαπιστώνεται ότι **δεν ανέπτυξε την ικανότητα μετάφρασης** της «αν…τότε» δήλωσης. Στο πραγματικό πρόβλημα δεν είχε δυνατότητα να μεταφράσει με ακρίβεια την έννοια της περιστροφής και ως συνέπεια αυτού να προχωρήσει στη λύση του πραγματικού προβλήματος. Στο τέλος ανέπτυξε τη διαδικαστική **γνώση** του θεωρήματος ΘΜΠ, **παραγωγικό συλλογισμό** και διατύπωσε **οικονομικό ορισμό** του ορθογωνίου. Το επίπεδο του στο μετά –τεστ van Hiele ήταν 3 (αυστηρό κριτήριο).

5.3.6. Εξέλιξη του επιπέδου van Hiele του ΜΕ6

Η μαθήτρια αντιμετώπιζε γνωστικά εμπόδια. Δεν είχε ικανότητα μετάφρασης της λεκτικής πληροφορίας σε σχέδιο, δε διατύπωσε υποθέσεις και συμπεράσματα και δεν απέδειξε τη πρόταση. Στην εξέλιξη της διαδικασίας και από τα συμπεράσματα που προκύπτουν από το γραπτό του μετά τη μελέτη των ορθογωνίων παραλληλογράμμων στην τάξη, διαπιστώνεται ότι δεν είχε ικανότητα μετάφρασης της «αν…τότε» δήλωσης. Η μαθήτρια προσπάθησε να προσαρμόσει τις νέες γνώσεις **στο γνωστικό σχήμα** της σύγκρισης τριγώνων, χωρίς να καταφέρει να ολοκληρώσει την απόδειξη. Το επίπεδο της στο μετά –τεστ van Hiele ήταν 1 (αυστηρό κριτήριο).

5.3.7. Εξέλιξη του επιπέδου van Hiele του ΜΕ7

Ο μαθητής αντιμετώπιζε γνωστικά εμπόδια και δεν απέδειξε τη πρόταση. Στην εξέλιξη της διαδικασίας και από τα συμπεράσματα που προκύπτουν από το γραπτό του μετά τη μελέτη των ορθογωνίων παραλληλογράμμων στη τάξη, διαπιστώνεται ότι κατασκεύασε ακριβές διάγραμμα και **ανέπτυξε την ικανότητα μετάφρασης** της «αν…τότε» δήλωσης. Από τη σύγκριση των τριγώνων όμως οδηγήθηκε σε σχέσεις γνωστές από την υπόθεση και δεν ολοκλήρωσε την απόδειξη. Επομένως αντιμετώπιζε γνωστικά εμπόδια και δεν έχει αποκτήσει ικανότητα σύνδεσης των σχέσεων ώστε να παράγει την απόδειξη. Στο πραγματικό πρόβλημα δεν είχε δυνατότητα να μεταφράσει με ακρίβεια την έννοια της περιστροφής και ως συνέπεια αυτού να προχωρήσει στη λύση του πραγματικού προβλήματος. Στο τέλος δεν έχει αναπτύξει την διαδικαστική ικανότητα εφαρμογής του ΘΜΠ και δεν ολοκλήρωσε την απόδειξη. Το επίπεδο του στο μετά –τεστ van Hiele ήταν 1 (αυστηρό κριτήριο).

5.3.8. Εξέλιξη του επιπέδου van Hiele του ΜΕ8

Ο μαθητής κατασκεύασε α**νακριβές διάγραμμα** και **δεν είχε δυνατότητα** διαχωρισμού της υπόθεσης από το συμπέρασμα καθώς και ικανότητα αποδεικτικής διαδικασίας. Δεν βελτιώθηκαν οι ικανότητες διαχωρισμού υπόθεσης- συμπεράσματος στο επόμενο διάστημα, διατύπωσε για την απόδειξη ιδιότητες που δεν ειχε δυνατότητα να εφαρμόσει. Στο πραγματικό πρόβλημα κατασκεύασε **ακριβές διάγραμμα**, επομένως έχει αναπτύξει την ικανότητα μετάφρασης της λεκτικής διατύπωσης σε εικονική. Δεν έχει αναπτύξει την αποδεικτική ικανότητα, ούτε την ικανότητα εφαρμογής της λύσης. Στο τέλος κατασκεύασε ακριβές διάγραμμα, διαχώρισε την υπόθεση από το συμπέρασμα αλλά δεν απέδειξε την πρόταση. Το επίπεδο του στο μετά –τεστ van Hiele ήταν 2 (ελαστικό κριτήριο).

5.3.9. Εξέλιξη του επιπέδου van Hiele του ΜΕ9

Στο προ-τεστ η μαθήτρια ανέπτυξε **παραγωγικό συλλογισμό**. Διατύπωσε το κριτήριο ισότητας τριγώνων και ολοκλήρωσε την απόδειξη. Στο μέσο-τεστ ανέπτυξε **ανεπαρκή αιτιολόγηση** και δεν ολοκλήρωσε την απόδειξη. Στο πραγματικό πρόβλημα δεν είχε δυνατότητα να μεταφράσει με ακρίβεια την έννοια της περιστροφής και ως συνέπεια αυτού να προχωρήσει στη λύση του πραγματικού προβλήματος. Στο μετα-τεστ απόδειξης δεν ολοκλήρωσε την απόδειξη αφού δεν ανέπτυξε την διαδικαστική ικανότητα εφαρμογής του ΘΜΠ. Το επίπεδο του στο μετά –τεστ van Hiele ήταν 2 (αυστηρό κριτήριο).

5.3.10. Εξέλιξη του επιπέδου van Hiele του ΜΕ10

Στο προ-τεστ η μαθήτρια κατασκεύασε ένα **ακριβές διάγραμμα**, διαχώρισε σωστά τις υποθέσεις και τα συμπεράσματα, σύγκρινε τρίγωνα, αιτιολογώντας τον συλλογισμό της και οδηγήθηκε στο συμπέρασμα αναπτύσσοντας **παραγωγικό συλλογισμό.** Στο μέσο-τεστ χρησιμοποίησε περισσότερα δεδομένα για να αποδείξει ότι ήταν αναγκαίο, αναπτύσσοντας **συμπερασματικό συλλογισμό.** Στο πραγματικό πρόβλημα δεν έχει αναπτύξει την ικανότητα μετασχηματισμών. Διατύπωσε **λογικές σχέσεις** και οδηγήθηκε σε συμπεράσματα από οπτικά στοιχεία του διαγράμματος. Στο μετά-τεστ η μαθήτρια έχει αναπτύξει την ικανότητα να οδηγηθεί σε **παραγωγικά / λογικά** συμπεράσματα, αν και οι διατυπώσεις της παραμένουν **ανεπαρκείς.** Το επίπεδο του στο μετά –τεστ van Hiele ήταν 3 (αυστηρό κριτήριο).

5.3.11. Εξέλιξη του επιπέδου van Hiele του ΜΕ11

Στο προ-τεστ ο μαθητής κατασκεύασε ένα **ανακριβές διάγραμμα** και ανέπτυξε ανεπαρκή επιχειρηματολογία. Στο μέσο-τεστ κατασκεύασε ένα **ανακριβές διάγραμμα.** Ανέπτυξε ανεπαρκή επιχειρηματολογία και δεν είχε δυνατότητα να ολοκληρώσει την απόδειξη. Στο πραγματικό πρόβλημα δεν ανέπτυξε την ικανότητα μετάφρασης της διατύπωσης του προβλήματος σε ακριβές διάγραμμα, το οποίο αποτέλεσε εμπόδιο στην επίλυση του προβλήματος. Στο μετά-τεστ δεν έχει αποκτήσει την ικανότητα να διαχωρίσει τα στοιχεία της υπόθεσης από του συμπεράσματος και προσπάθησε να αποδείξει την πρόταση νε βάση το γνωστικό σχήμα της σύγκρισης τριγώνων, το οποίο όμως δεν ήταν επαρκές για την απόδειξη. Το επίπεδο του στο μετά –τεστ van Hiele ήταν 3 (ελαστικό κριτήριο).

5.3.12. Εξέλιξη του επιπέδου van Hiele του ΜΕ12

Στο προ-τεστ κατασκεύασε **ακριβές διάγραμμα αλλά δεν** ολοκλήρωσε την απόδειξη. Στο μέσο-τεστ χρησιμοποίησε διάφορα στοιχεία από την θεωρία και ανέπτυξε ανεπαρκή αιτιολόγηση. Στο πραγματικό πρόβλημα μετέφρασε σωστά εικονικά τον μετασχηματισμό των τμημάτων αλλά δεν οδηγήθηκε στη λύση του προβλήματος. Στο μετά-τεστ η μαθήτρια διατύπωσε μια «**αν …τότε»** δήλωση και έναν **οικονομικό ορισμό** για το ορθογώνιο. Εξειδίκευσε τα συμπεράσματα της στο διάγραμμα και ανέπτυξε **απαγωγικό συλλογισμό** για να συμπεράνει ότι οι γωνίες είναι ορθές αλλά δεν ολοκλήρωσε την απόδειξη. Το επίπεδο του στο μετά –τεστ van Hiele ήταν 3 (αυστηρό κριτήριο).

5.3.13. Εξέλιξη του επιπέδου van Hiele του ΜΕ13

Στο προ-τεστ κατασκεύασε ένα διάγραμμα ισοπλεύρου τριγώνου, και η απόδειξη του ήταν ανεπαρκής. Στο μέσο-τεστ διατύπωσε **έναν ανεπαρκή ορισμό** και από το διάγραμμα οδηγήθηκε στο συμπέρασμα. Στο πραγματικό πρόβλημα ο μαθητής μετασχημάτισε το τμήμα ΦΚ κατά ίσα και κάθετα τμήματα που σχημάτισαν ένα τετράγωνο. Το σχήμα αυτό ενδεχομένως να είναι αποτέλεσμα της οπτικοποίησης του προβλήματος στα δυναμικά μέσα αφού ο μαθητής συμμετείχε εθελοντικά στην πειραματική ομάδα με χρήση των ΣΟΕΑ. Στο μετά-τεστ ο μαθητής αντιμετώπιζε **γνωστικά εμπόδια** που τον εμπόδισαν να ολοκληρώσει την απόδειξη. Το επίπεδο του στο μετά –τεστ van Hiele ήταν 2 (αυστηρό κριτήριο). Ο μαθητής παρουσίασε ενδείξεις μετάβασης σε υψηλότερο επίπεδο.

5.3.14. Εξέλιξη του επιπέδου van Hiele του ΜΕ14

Στο προ-τεστ η μαθήτρια κατασκεύασε ένα **ανακριβές διάγραμμα**, εξειδίκευσε τα στοιχεία του διαγράμματος και οδηγήθηκε σε μια ανεπαρκή απόδειξη. Στο μέσο-τεστ κατασκεύασε ένα **ανακριβές διάγραμμα**. Διατύπωσε θεωρήματα τα οποία έχει αποστηθίσει αλλά **δεν είχε ικανότητα να εφαρμόσει** για να αποδείξει την πρόταση. Στο πραγματικό πρόβλημα δεν ανέπτυξε την ικανότητα μετάφρασης της διατύπωσης του προβλήματος σε ακριβές διάγραμμα, το οποίο αποτέλεσε εμπόδιο στην επίλυση του προβλήματος. Στο μετά-τεστ ανέπτυξε ανεπαρκή αιτιολόγηση, αν και διατύπωσε τα θεωρήματα. Το επίπεδο της στο μετά –τεστ van Hiele ήταν 3 (ελαστικό κριτήριο).

5.4. Αποτελέσματα της συγκριτικής μελέτης των μαθητών επιπέδου 1

Α ΣΤΑΔΙΟ (ΠΡΟ- ΤΕΣΤ)

<u>Κοινά χαρακτηριστικά των μαθητών της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου</u>

Α1. Δεν έχει ικανότητα μετάφρασης της λεκτικής πληροφορίας σε σχέδιο.
Α2. Εξειδικεύει το διάγραμμα, ως αποτέλεσμα του οπτικού συλλογισμού που αναπτύσσει (πχ σχεδιάζει ισόπλευρο και όχι ισοσκελές) ή συνυπολογίζει στο διάγραμμα άσχετες ιδιότητες (χαρακτηριστικό επιπέδου 1) (Burger & Shaughnessy, 1986)
Α3. Δεν έχει ικανότητα διαχωρισμού της υπόθεσης από το συμπέρασμα ή χρησιμοποιεί στοιχεία του συμπεράσματος ως υπόθεση ή δε διατυπώνει καθόλου υποθέσεις
Α4. Χρησιμοποιεί ανακριβείς ιδιότητες (χαρακτηριστικό επιπέδου 1) (Burger & Shaughnessy, 1986)
Α5. Δεν έχει ικανότητα να αντιληφθεί τις ιδιότητες του σχήματος (χαρακτηριστικό επιπέδου 1) (Mason, 1998; Gawlick, 2005)
Α6. Δεν κατασκευάζει την απόδειξη ή κατασκευάζει μια λανθασμένη απόδειξη
Α7. Αντιμετωπίζει γνωστικά εμπόδια.

Πίνακας 5.1.Συγκριτική μελέτη των χαρακτηριστικών στο Α στάδιο-Επίπεδο 1

	M1	M9	M10	M12	M13	M14	ME2	ME3	ME6	ME7	ME8	ME13
A1	.		.	.		.			.			
A2			.			.			.			.
A3	.	.	.	.		.	.		.	.	.	.
A4	.		.	.		.	.	.	.	.	.	
A5	.		.	.	.	.		.	.			
A6	.		.	.	.	.	.		.	.	.	.
A7	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Σύγκριση

Από την σύγκριση των χαρακτηριστικών που συγκεντρώνουν οι μαθητές των δυο ομάδων του επιπέδου 1 μπορούμε να συμπεράνουμε τα παρακάτω:

1. Τέσσερις από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας (στον πίνακα επάνω οι Μ1, Μ10, Μ12, Μ14) έχουν το χαρακτηριστικό Α1, δηλαδή δεν έχουν ικανότητα μετάφρασης της λεκτικής πληροφορίας σε σχέδιο. Από τους μαθητές της ομάδας ελέγχου μόνο ένας μαθητής (ΜΕ6) έχει το χαρακτηριστικό Α1.
2. Ίσος αριθμός μαθητών και από τις δυο ομάδες έχει το χαρακτηριστικό Α2, Α3, δηλαδή εξειδικεύει το διάγραμμα και δεν έχει ικανότητα διαχωρισμού της υπόθεσης από το συμπέρασμα ή χρησιμοποιεί στοιχεία του συμπεράσματος ως υπόθεση ή δε διατυπώνει καθόλου υποθέσεις.
3. Ίσος περίπου αριθμός μαθητών και από τις δυο ομάδες έχει το χαρακτηριστικό Α4 δηλαδή χρησιμοποιούν ανακριβείς ιδιότητες.
4. Πέντε μαθητές της πειραματικής ομάδας έχουν το χαρακτηριστικό Α5 και δυο της ομάδας ελέγχου.
5. Πέντε μαθητές της πειραματικής ομάδας δεν κατασκευάζουν την απόδειξη ή δεν ολοκληρώνουν την απόδειξη και ίσος αριθμός μαθητών της ομάδας ελέγχου.
6. Τέλος, όλοι οι μαθητές και στις δυο ομάδες αντιμετωπίζουν γνωστικά εμπόδια, δεν συνδέουν τις διαδικασίες με τις έννοιες και συνήθως τις παρερμηνεύουν.

Από τη σύγκριση των γραπτών των μαθητών της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου συνάγεται ότι οι μαθητές και των δύο ομάδων στο αρχικό στάδιο παρουσίαζαν κοινά χαρακτηριστικά, με βάση τα οποία έγινε η έρευνα. Συμπεραίνεται ότι οι μαθητές της *ομάδας ελέγχου* ήταν σε κάπως πλεονεκτικότερη θέση από τους μαθητές της *πειραματικής ομάδας* ως προς την ικανότητα μετάφρασης της πληροφορίας σε σχέδιο. Ίσος αριθμός μαθητών είχε αδυναμία διάκρισης της υπόθεσης από το συμπέρασμα είτε χρησιμοποίησε στοιχεία του συμπεράσματος ως υπόθεση ή δεν διατύπωσε καθόλου υποθέσεις. Ίσος αριθμός μαθητών και στις δύο ομάδες δεν κατασκεύασε την απόδειξη ή δεν ολοκλήρωσε την απόδειξη. Όλοι οι μαθητές αντιμετώπισαν *γνωστικά εμπόδια* και η επίλυση του προβλήματος στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι προέκυψε ως μέρος του «διδακτικού συμβολαίου» (Brousseau, 1992, p. 169), δηλαδή ως μέρος των υποχρεώσεων των μαθητών να απαντήσουν στις ερωτήσεις.

<u>Β ΣΤΑΔΙΟ (ΜΕΣΟ-ΤΕΣΤ)</u>

Β1. Έχει ικανότητα μετάφρασης της λεκτικής πληροφορίας σε σχέδιο.
Β2. Έχει ικανότητα μετάφρασης της ‘αν …τότε’ δήλωσης
Β3. Συγκρίνει τα σχήματα βάσει των ιδιοτήτων τους (Burger & Shaughnessy, 1986)
Β4: Βλέπει τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων (Mason, 1998 ; Gawlick, 2005).
Β5: Ενεργοποιεί τον κατάλογο των ιδιοτήτων που ξέρει, αλλά δεν μπορεί να διακρίνει ποιες ιδιότητες είναι αναγκαίες και επαρκείς για να περιγράψουν το αντικείμενο (Mason, 1998 ; Gawlick, 2005).
Β6: Έχει αναπτύξει την ικανότητα δομικής ανάλυσης του σχήματος (περιγραφή ιδιοτήτων του σχήματος και αναγνώριση υποσχημάτων)
Β7: Ολοκληρώνει την απόδειξη

Πίνακας 5.2.Συγκριτική μελέτη των χαρακτηριστικών στο Β στάδιο-Επίπεδο 1

	M1	M9	M10	M12	M13	M14	ME2	ME3	ME6	ME7	ME8	ME13
B1	.		.	.	.	.	.	.		.	.	A2
B2	.		.	.	.	.				.	.	.
B3	A2.	A2	.	ΠΣ	.	.	.		.	.	.	
B4			.	.	.	.					.	.
B5	.	.						.	.		.	
B6	.		.	.	.	.	.		.	.	.	
B7			.	.	.	.					.	

<u>Σύγκριση</u>

Η σύγκριση των χαρακτηριστικών που συγκεντρώνουν οι μαθητές των δύο ομάδων του επιπέδου 1 έδωσε τα εξής αποτελέσματα:

1. Πέντε από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα μετάφρασης της λεκτικής πληροφορίας σε σχέδιο, ενώ από την ομάδα ελέγχου τέσσερις.
2. Πέντε από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα μετάφρασης της «αν …τότε» δήλωσης, ενώ από την ομάδα ελέγχου τρεις.

3. Τέσσερις από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα να συγκρίνουν τα σχήματα βάσει των ιδιοτήτων τους, ενώ από την ομάδα ελέγχου τρεις.
4. Τέσσερις από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα να διακρίνουν τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων, ενώ από την ομάδα ελέγχου δύο.
5. Τρεις από τους μαθητές της ομάδας ελέγχου ενεργοποιούσαν τον κατάλογο των ιδιοτήτων που γνώριζαν, ενώ από την πειραματική ομάδα δύο. Επομένως οι μαθητές της πειραματικής ομάδας οδηγούνταν σε συμπεράσματα λόγω της αποστήθισης των ιδιοτήτων αλλά επειδή άρχισαν να αποκτούν την κριτική/λογική ικανότητα να διακρίνουν ποια ιδιότητα είναι σημαντική για την απόδειξη.
6. Τέσσερις από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα να κατασκευάζουν την απόδειξη, ενώ από την ομάδα ελέγχου ένας.

<u>ΑΝΑΔΙΑΤΥΠΩΜΕΝΟ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ</u>

Π1: Κατανοεί την έννοια της περιστροφής κατά 90^o

Π2: Έχει ικανότητα να μετατρέψουν την λεκτική πληροφορία σε σχέδιο

Π3: Έχει ικανότητα μοντελοποίησης και επίλυσης του προβλήματος

Π4: Έχει αναπτύξει την ικανότητα να προσδιορίσουν τις σχέσεις μεταξύ στοιχείων του διαγράμματος με άτυπο τρόπο και οι περιγραφές βασίζονται στην οπτική αντίληψη (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.1)

Π5: Έχει αναπτύξει την ικανότητα να προσδιορίσει τις σχέσεις μεταξύ στοιχείων του διαγράμματος με συνδυασμό τυπικών και άτυπων περιγραφών που παραμένουν ανεπαρκείς (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.2)

Π6: Έχει αναπτύξει την ικανότητα να προσδιορίσει τις σχέσεις μεταξύ στοιχείων του διαγράμματος τυπικά και το σημαντικότερο κριτήριο για τον προσδιορισμό ενός σχήματος είναι αν ικανοποιεί ένα ακριβές σύνολο ιδιοτήτων (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.3)

Π7: Αναπτύσσει μετασχηματιστικό συλλογισμό.

Π8: Στο γραπτό του υπάρχουν στοιχεία παραγωγικού συλλογισμού

Πίνακας 5.3.Συγκριτική μελέτη των χαρακτηριστικών στην επίλυση πραγματικού προβλήματος -Επίπεδο 1

	M1	M9	M10	M12	M13	M14	ME2	ME3	ME6	ME7	ME8	ME13
Π1	.	.	.	.	.	.					.	.
Π2	.	.	.	.	.	.					.	
Π3	.				.	.					.	
Π4			.					.			.	
Π5	.	.		.	.	.						
Π6												
Π7			.		.							.
Π8				.	.			.				

Η μελέτη στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι έδωσε τα εξής αποτελέσματα:

1. Πέντε από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα να κατανοούν την έννοια της περιστροφής κατά 90^o, να μετατρέπουν δηλαδή τη λεκτική πληροφορία σε σχέδιο, ενώ από την ομάδα ελέγχου δύο.
2. Τέσσερις από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα μοντελοποίησης και επίλυσης του προβλήματος, ενώ από την ομάδα ελέγχου ένας.
3. Δύο από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα σύγκρισης των σχημάτων βάσει των ιδιοτήτων τους, ενώ από την ομάδα ελέγχου τρεις.
4. Δύο από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα ανάπτυξης παραγωγικού συλλογισμού και διατύπωσης μιας λογικής σχέσης μεταξύ των στοιχείων του διαγράμματος, ενώ από την ομάδα ελέγχου ένας.

Γ ΣΤΑΔΙΟ (ΜΕΤΑ-ΤΕΣΤ)

Γ1: Κατασκευάζει ένα ακριβές διάγραμμα.

Γ2: Συγκρίνει τα σχήματα βάσει των ιδιοτήτων τους (χαρακτηριστικό επιπέδου 2) (Burger & Shaughnessy, 1986).

Γ3: Βλέπει τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων (χαρακτηριστικό επιπέδου 2) (Mason, 1998 ; Gawlick, 2005).

Γ4: Έχει αναπτύξει την ικανότητα να προσδιορίσει τις σχέσεις μεταξύ στοιχείων του διαγράμματος με συνδυασμό τυπικών και άτυπων περιγραφών που παραμένουν ανεπαρκείς (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.2) (Battista, 2007).

Γ5: Έχει αναπτύξει την ικανότητα να προσδιορίσει τις σχέσεις μεταξύ στοιχείων του διαγράμματος τυπικά και το σημαντικότερο κριτήριο για τον προσδιορισμό ενός σχήματος είναι αν ικανοποιεί ένα ακριβές σύνολο ιδιοτήτων, διατυπώνει οικονομικό ορισμό (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.3) (Battista, 2007).

Γ6: Καταλήγει στο συμπέρασμα ότι αν ένα σχήμα έχει μια ιδιότητα έχει και μια άλλη (χαρακτηριστικό επιπέδου 3.1) (Battista, 2007).

Γ7: Συνεπαγωγική εμφάνιση ιδιοτήτων και ανάλυση σε πραγματικό ή νοητό επίπεδο (χαρακτηριστικό επιπέδου 3.2) (Battista, 2007).

Πίνακας 5.4.Συγκριτική μελέτη των χαρακτηριστικών στο Γ στάδιο-Επίπεδο 1

	M1	M9	M10	M12	M13	M14	ME2	ME3	ME6	ME7	ME8	ME13
Γ1	.		.	.	.	.	.	.		.	.	.
Γ2						.				.		.
Γ3	.	.	.	.	.	.	.	.				
Γ4		.								.		.
Γ5	.		.	.	.	.		.				
Γ6	.	.	.		.	.	.	.				
Γ7	.			.			.	.				

Η σύγκριση των χαρακτηριστικών που συγκεντρώνουν οι μαθητές των δύο ομάδων του επιπέδου 1 στο τελικό στάδιο της μελέτης στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι έδωσε τα εξής αποτελέσματα:

1. Όλοι οι μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα να διακρίνουν τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων, ενώ από την ομάδα ελέγχου μόνο δυο.
2. Πέντε μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα (α) να προσδιορίζουν τις σχέσεις μεταξύ στοιχείων του διαγράμματος τυπικά (και το σημαντικότερο κριτήριο για τον προσδιορισμό ενός σχήματος είναι να ικανοποιεί ένα ακριβές σύνολο ιδιοτήτων), (β) να διατυπώνουν οικονομικό ορισμό, (γ) να καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι αν ένα σχήμα έχει μια ιδιότητα έχει και μια άλλη. Οι ικανότητες αυτές εμφανίστηκαν μόνο σε δύο μαθητές από την ομάδα ελέγχου.

5.5. Αποτελέσματα της συγκριτικής μελέτης των μαθητών επιπέδου 2

Α ΣΤΑΔΙΟ (ΠΡΟ- ΤΕΣΤ)

Κοινά χαρακτηριστικά των μαθητών της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου

Α1. Εξειδικεύει το διάγραμμα, ως αποτέλεσμα του οπτικού συλλογισμού που αναπτύσσει (πχ σχεδιάζει ισόπλευρο και όχι ισοσκελές) ή συνυπολογίζει στο διάγραμμα άσχετες ιδιότητες (χαρακτηριστικό επιπέδου 1) (Burger & Shaughnessy, 1986)
Α2.Συγκρίνει τα σχήματα βάσει των ιδιοτήτων τους (χαρακτ. επιπέδου 2) (Burger & Shaughnessy, 1986)
Α3:Βλέπει τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων (χαρακτ. επιπέδου 2) (Mason, 1998 ; Gawlick, 2005).

A4:Έχει αναπτύξει την ικανότητα αναγνώρισης των υποσχημάτων αλλά είναι ανεπαρκής (Mason, 1998 ; Gawlick, 2005).
A5: Αναπτύσσει συνδυασμό οπτικού και παραγωγικού συλλογισμού
A6: Εφαρμόζει μια προσωπική μέθοδο για την απόδειξη του προβλήματος
A7: Ολοκληρώνει την απόδειξη

Πίνακας 5.5.Συγκριτική μελέτη των χαρακτηριστικών στο Α στάδιο-Επίπεδο 2

	ΑΡΧΙΚΟ ΤΕΣΤ- - **Επίπεδο 2**															
	Πειραματική ομάδα								**ομάδας ελέγχου**							
	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M11	ME1	ME4	ME5	ME9	ME10	ME11	ME12	ME14
A1	.						.	.							.	.
A2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
A3			.	.	.	.			.			.	.			
A4	.				.					.	.			.	.	.
A5	.	.			.		.	.	.					.	.	.
A6	.	.	.		.				.		.			.	.	
A7			.	.		.			.	.		.	.			

Σύγκριση

Η σύγκριση των χαρακτηριστικών που συγκεντρώνουν οι μαθητές των δύο ομάδων του επιπέδου 2 έδωσε τα εξής αποτελέσματα:

1. Τρεις από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας εξειδίκευσαν το διάγραμμα, ως αποτέλεσμα του οπτικού συλλογισμού που ανέπτυξαν, ενώ από την ομάδα ελέγχου δύο.
2. Ίσος αριθμός μαθητών και από τις δύο ομάδες συνέκριναν τα σχήματα βάσει των ιδιοτήτων τους ή διέκριναν τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων.
3. Δύο μαθητές της πειραματικής ομάδας ανέπτυξαν την ικανότητα αναγνώρισης των υποσχημάτων, ενώ από την ομάδα ελέγχου πέντε.
4. Πέντε μαθητές της πειραματικής ομάδας ανέπτυξαν συνδυασμό οπτικού και παραγωγικού συλλογισμού κατά τη διάρκεια επίλυσης προβλημάτων, ενώ από την ομάδα ελέγχου τρεις.
5. Ίσος αριθμός μαθητών και από τις δύο ομάδες εφάρμοσε μια προσωπική μέθοδο για την απόδειξη του προβλήματος.
6. Τέλος, τρεις από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας ολοκλήρωσαν την απόδειξη, ενώ από την ομάδα ελέγχου τέσσερις.

Β ΣΤΑΔΙΟ (ΜΕΣΟ- ΤΕΣΤ)

Β1. Έχει ικανότητα μετάφρασης της 'αν …τότε' δήλωσης με συμβολικό τρόπο.
Β2. Έχει ικανότητα διατύπωσης 'αν …τότε' δηλώσεων (χαρακτηριστικό επιπέδου 3) (Burger & Shaughnessy, 1986)

B3. Αντιλαμβάνεται τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων (χαρακτηριστικό επιπέδου 3) (Mason, 1998 ; Gawlick, 2005).
B4. Έχει αναπτύξει την ικανότητα να προσδιορίσει τις σχέσεις μεταξύ στοιχείων του διαγράμματος με συνδυασμό τυπικών και άτυπων περιγραφών που παραμένουν ανεπαρκείς ή διατυπώνει μη οικονομικό ορισμό (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.2) (Battista, 2007). Ακόμα, ενεργοποιεί τον κατάλογο των ιδιοτήτων που ξέρει, αλλά δεν μπορεί να διακρίνει ποιες ιδιότητες είναι αναγκαίες και επαρκείς για να περιγράψουν το αντικείμενο (χαρακτηριστικό επιπέδου 2) (Mason, 1998 ; Gawlick, 2005).
B5. Έχει αναπτύξει την ικανότητα να προσδιορίσει τις σχέσεις μεταξύ στοιχείων του διαγράμματος τυπικά και το σημαντικότερο κριτήριο για τον προσδιορισμό ενός σχήματος είναι αν ικανοποιεί ένα ακριβές σύνολο ιδιοτήτων, διατυπώνει οικονομικό ορισμό (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.3) (Battista, 2007)
B6. Έχει αναπτύξει την ικανότητα παραγωγικού συλλογισμού (χαρακτηριστικό επιπέδου 4) (Burger & Shaughnessy, 1986; Mason, 1998 ; Gawlick, 2005;Battista, 2007)
B7: Ολοκληρώνει την απόδειξη.
B8: Χρησιμοποιεί συνδυασμό οπτικών και θεωρητικών στοιχείων (το διάγραμμα επηρεάζει τον τρόπο σκέψης του μαθητή).

Πίνακας 5.6.Συγκριτική μελέτη των χαρακτηριστικών στο Β στάδιο-Επίπεδο 2

	ΜΕΣΟ-ΤΕΣΤ- - Επίπεδο 2															
	Πειραματική ομάδα								ομάδας ελέγχου							
	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M11	ME1	ME4	ME5	ME9	ME10	ME11	ME12	ME14
B1	•	•	•	•	•	•	•		•	•			•			
B2	•	•	•	•			•			•			•			
B3	•	•			•	•	•	•		•						
B4			•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•
B5	•	•		•												
B6	•	•		•	•	•	•			•						
B7	•	•		•	•	•	•			•			•			
B8											•				•	•

Η σύγκριση των χαρακτηριστικών που συγκεντρώνουν οι μαθητές των δύο ομάδων του επιπέδου 2 έδωσε τα εξής αποτελέσματα:

1. Επτά από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα μετάφρασης της «αν …τότε» δήλωσης με συμβολικό τρόπο, ενώ από την ομάδα ελέγχου τρεις.
2. Πέντε από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα διατύπωσης «αν …τότε» δήλωσης, ενώ από την ομάδα ελέγχου δύο.
3. Έξι από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα να αντιλαμβάνονται τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων, ενώ από την ομάδα ελέγχου ένας.
4. Τρεις από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν χαρακτηριστικό επιπέδου 2.3 (Battista, 2007), ενώ από την ομάδα ελέγχου κανένας.

5. Τέσσερις από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα παραγωγικού συλλογισμού, ενώ από την ομάδα ελέγχου κανένας.
6. Έξι από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα να ολοκληρώνουν την απόδειξη, ενώ από την ομάδα ελέγχου δύο.
7. Τέλος, τρεις μαθητές της ομάδας ελέγχου χρησιμοποιούσαν συνδυασμό οπτικών και θεωρητικών στοιχείων στην απόδειξή τους.

<u>ΑΝΑΔΙΑΤΥΠΩΜΕΝΟ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ</u>

Π1: Κατανοεί την έννοια της περιστροφής κατά 90^{o}

Π2: Έχει ικανότητα να μετατρέψει την λεκτική πληροφορία σε σχέδιο

Π3: Έχει αποκτήσει την ικανότητα μοντελοποίησης και επίλυσης του προβλήματος

Π4: Έχει αναπτύξει την ικανότητα να προσδιορίσει τις σχέσεις μεταξύ στοιχείων του διαγράμματος με άτυπο τρόπο και οι περιγραφές βασίζονται στην οπτική αντίληψη (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.1)

Π5: Έχει αναπτύξει την ικανότητα να προσδιορίσει τις σχέσεις μεταξύ στοιχείων του διαγράμματος με συνδυασμό τυπικών και άτυπων περιγραφών που παραμένουν ανεπαρκείς (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.2)

Π6: Έχει αναπτύξει την ικανότητα να προσδιορίσει τις σχέσεις μεταξύ στοιχείων του διαγράμματος τυπικά και το σημαντικότερο κριτήριο για τον προσδιορισμό ενός σχήματος είναι αν ικανοποιεί ένα ακριβές σύνολο ιδιοτήτων (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.3)

Π7: Αναπτύσσει μετασχηματιστικό συλλογισμό.

Π8: Αναπτύσσει παραγωγικό συλλογισμό.

Πίνακας 5.7.Συγκριτική μελέτη των χαρακτηριστικών στην επίλυση πραγματικού προβλήματος -Επίπεδο 2

	ΑΝΑΔΙΑΤΥΠΩΜΕΝΟ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ - Επίπεδο 2															
	Πειραματική ομάδα								ομάδας ελέγχου							
	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M11	ME1	ME4	ME5	ME9	ME10	ME11	ME12	ME14
Π1	.			.	.	.	.	.								
Π2	.			.	.	.	.	.								
Π3	.			.	.		.	.								
Π4																
Π5									.	.	.	.	.	.	.	.
Π6	.			.	.								.			
Π7	.					.							.			
Π8	.			.	.	.	.	.								

<u>Συνοπτικά στο αναδιατυπώμενο πρόβλημα</u>

Από τη σύγκριση των γραπτών των μαθητών συνάγεται ότι οι μαθητές και των δύο ομάδων παρουσίαζαν κοινά χαρακτηριστικά. Οι μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα να μετατρέπουν τη λεκτική πληροφορία σε σχέδιο, καθώς και την ικανότητα μοντελοποίησης και επίλυσης του προβλήματος. Όλοι οι μαθητές ανέπτυξαν *παραγωγικό συλλογισμό*. Αντιθέτως, οι μαθητές της ομάδας ελέγχου δεν είχαν αναπτύξει την ικανότητα μοντελοποίησης του πραγματικού προβλήματος, λόγω της έννοιας της περιστροφής. Επομένως, ο προσδιορισμός των σχέσεων μεταξύ των στοιχείων του διαγράμματος παραμένει ανεπαρκής.

<u>Γ ΣΤΑΔΙΟ (ΜΕΤΑ-ΤΕΣΤ)</u>

Γ1: Κατασκευάζει ένα ακριβές διάγραμμα

Γ2: Συγκρίνει τα σχήματα βάσει των ιδιοτήτων τους (χαρακτηριστικό επιπέδου 2) (Burger & Shaughnessy, 1986)

Γ3: Βλέπει τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων (χαρακτηριστικό επιπέδου 2) (Mason, 1998 ; Gawlick, 2005).

Γ4. Έχει αναπτύξει την ικανότητα να προσδιορίσει τις σχέσεις μεταξύ στοιχείων του διαγράμματος με συνδυασμό τυπικών και άτυπων περιγραφών που παραμένουν ανεπαρκείς ή διατυπώνει μη οικονομικό ορισμό (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.2) (Battista, 2007). Ακόμα, ενεργοποιεί τον κατάλογο των ιδιοτήτων που ξέρει, αλλά δεν μπορεί να διακρίνει ποιες ιδιότητες είναι αναγκαίες και επαρκείς για να περιγράψουν το αντικείμενο (χαρακτηριστικό επιπέδου 2) (Mason, 1998 ; Gawlick, 2005).

Γ5. Έχει αναπτύξει την ικανότητα να προσδιορίσει τις σχέσεις μεταξύ στοιχείων του διαγράμματος τυπικά και το σημαντικότερο κριτήριο για τον προσδιορισμό ενός σχήματος είναι αν ικανοποιεί ένα ακριβές σύνολο ιδιοτήτων, διατυπώνει οικονομικό ορισμό (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.3) (Battista, 2007)

Γ6. Έχει αναπτύξει την ικανότητα παραγωγικού συλλογισμού (χαρακτηριστικό επιπέδου 4) (Burger & Shaughnessy, 1986; Mason, 1998 ; Gawlick, 2005;Battista, 2007)

Γ7: Ολοκληρώνει την απόδειξη

Γ8:Καταλήγει στο συμπέρασμα ότι αν ένα σχήμα έχει μια ιδιότητα έχει και μια άλλη (χαρακτηριστικό επιπέδου 3.1) (Battista, 2007)

Γ9:Συνεπαγωγική εμφάνιση ιδιοτήτων και ανάλυση σε πραγματικό ή νοητό επίπεδο (χαρακτηριστικό επιπέδου 3.2) (Battista, 2007)

Πίνακας 5.8.Συγκριτική μελέτη των χαρακτηριστικών στο Γ στάδιο-Επίπεδο 2

	ΜΕΤΑ ΤΕΣΤ- - Επίπεδο 2															
	Πειραματική ομάδα								ομάδας ελέγχου							
	Μ2	Μ3	Μ4	Μ5	Μ6	Μ7	Μ8	Μ11	ΜΕ1	ΜΕ4	ΜΕ5	ΜΕ9	ΜΕ10	ΜΕ11	ΜΕ12	ΜΕ14
Γ1	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•					
Γ2															•	
Γ3	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•		•	•
Γ4	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
Γ5	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•		•	•
Γ6	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•			•
Γ7		•	•	•	•	•		•	•	•	•		•			
Γ8	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•
Γ9	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•			

<u>Συνοπτικά στο τελικό στάδιο:</u>

Από τη σύγκριση των γραπτών των μαθητών συνάγεται ότι οι μαθητές και των δύο ομάδων στο τελικό στάδιο παρουσίαζαν κοινά χαρακτηριστικά. Συμπεραίνεται ότι οι μαθητές της *πειραματικής ομάδας* ήταν σε πλεονεκτικότερη θέση από τους μαθητές της *ομάδας ελέγχου* ως προς την ικανότητα προσδιορισμού των σχέσεων μεταξύ στοιχείων του διαγράμματος τυπικά και το σημαντικότερο κριτήριο για τον προσδιορισμό ενός σχήματος είναι αν ικανοποιεί ένα ακριβές σύνολο ιδιοτήτων. Επίσης, οι μαθητές αυτοί έχουν αποκτήσει την ικανότητα διατύπωσης οικονομικών ορισμών, την ικανότητα συνεπαγωγικής εμφάνισης ιδιοτήτων, ανάλυσης σε πραγματικό ή νοητό επίπεδο, παραγωγικού συλλογισμού και ολοκλήρωσης της απόδειξης.

Συζήτηση

Στη συνέχεια θα γίνει μια σύντομη ανασκόπηση των μελετών που διεξήχθησαν τα προηγούμενα χρόνια και θα επισημανθεί η σχέση της παρούσας εργασίας με τις μελέτες αυτές. Επιπλέον, θα δειχθεί πώς η παρούσα εργασία εμπλουτίζει τη βιβλιογραφία τη σχετική με τη θεωρία των van Hiele, και θα συζητηθούν τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την απόδοση των μαθητών στο αντικείμενο της γεωμετρίας όταν αλληλεπίδρασαν με το υποστηρικτικό υλικό που σχεδίασε (ή δημιούργησε) και χρησιμοποίησε η ερευνήτρια. Ειδικότερα, θα δειχθεί πώς το μαθησιακό μονοπάτι το οποίο οικοδομήθηκε με Συνδεόμενες Οπτικές Ενεργές Αναπαραστάσεις με τις οποίες αλληλεπίδρασαν οι μαθητές κατά τη διάρκεια της έρευνας συνέβαλε στη βιβλιογραφία τη σχετική με τη θεωρία των van Hiele, παρέχοντας μια πρωτότυπη ιδέα. Τέλος, θα διατυπωθούν ορισμένες προτάσεις για τη βελτίωση της ερευνητικής διαδικασίας στο μέλλον.

5.6. Αναφορικά με την επιβεβαίωση των συμπερασμάτων άλλων ερευνών

Στο κεφάλαιο 1 έγινε εκτενής αναφορά στις έρευνες που χρησιμοποιούν τη θεωρία των van Hiele δείχνοντας πώς αυτές συνέβαλαν στη μελέτη της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών. Η παρούσα εργασία επιβεβαίωσε σε πολλά σημεία την εγκυρότητα της ίδιας της θεωρίας των van Hiele και ορισμένων από τις υποθέσεις της, αλλά και της διαπίστωσης ότι το επίπεδο 5 δεν εμφανίζεται σε μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (βλ. ενδεικτικά Wirszup, 1976; Hoffer, 1981; Mayberry, 1983; Usiskin, 1982; Burger & Shaughnessy, 1986). Τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά κάθε επιπέδου στις διαδικασίες αναγνώρισης, ορισμού, βασικών ιδιοτήτων των σχημάτων και απόδειξης (ενδεικτικά Hoffer, 1981; Burger & Shaughnessy, 1986; Gutierrez, Jaime, & Fortuny, 1991) επιβεβαιώθηκαν και εδώ όπως επίσης και το ότι η θεωρία των van Hiele προσφέρεται για να περιγράψει τις διαδικασίες σκέψης των μαθητών κατά την επίλυση προβλημάτων και την κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών (ενδεικτικά Burger & Shaughnessy, 1986; Clements & Battista, 1990; Fuys, Geddes & Tischler, 1988).

Μια άλλη διαπίστωση ήταν ότι η έννοια των παραλληλογράμμων και ειδικότερα η ιεραρχική δομή τους φέρνει τους μαθητές αντιμέτωπους με δυσκολίες που αφορούν την εκμάθηση κατανόηση, εμπέδωση της έννοιας.

Οι *γνωστικές συγκρούσεις* επιβεβαιώθηκαν, όπως και η θεωρία του Piaget (1937/1971), όταν οι μαθητές έρχονταν σε επαφή με νέες πληροφορίες. Παρατηρήθηκαν σημεία στα οποία το περιβάλλον προκάλεσε *διαταραχή* (von Glaserfeld, 1995) στη γνωστική ισορροπία των μαθητών όπως και το ότι η *προσαρμογή* της νέας πληροφορίας στο ήδη υπάρχον *γνωστικό σχήμα* προκύπτει μέσα από *γνωστικές συγκρούσεις*.

Η παρούσα εργασία, ως προς το ένα σκέλος της, προστίθεται σε όλες εκείνες τις μελέτες που έχουν αναπτύξει και εφαρμόσει στην τάξη δραστηριότητες σε δυναμικά περιβάλλοντα –και, ειδικότερα, το Geometer’s Sketchpad (Jackiw, 1991)– σε μια προσπάθεια να εντάξουν στη διδασκαλία της γεωμετρίας τις νέες τεχνολογίες (π.χ., Clement & Battista, 1992; De Villiers 1998; Yerushalmy & Chasan 1993; Oldknow, 1995; Sanchez & Sacristan, 2003; Hollebrands, 2003, 2004, 2007; Christou, Mousoulides, Pittalis & Pitta, 2004, 2005; Pitta-Pantazi, & Christou, 2007, 2008). Σύμφωνα με τα αποτελέσματα και της παρούσας εργασίας, τα υποστηρικτικά υλικά του Προγράμματος Σπουδών που βασίζονται στη θεωρία των van Hiele καθώς και η χρήση του Geometers’ Sketchpad έχουν παίξει σημαντικό ρόλο στη γνωστική ανάπτυξη των μαθητών (ενδεικτικά Elchuck, 1992; Choi-Koh, 1999; Olive, 2000; Almeqdadi, 2000; Olkun, Sinoplu & Deryakulu, 2005).

Μια άλλη διαπίστωση της έρευνας ήταν η ανάπτυξη διαφορετικών ειδών συλλογισμού κατά τη χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας σε προβλήματα με τετράπλευρα βλ. ενδεικτικά Galindo, 1998; Hoyles, 1998; Arzarello et al., 1998; Hoyles & Healy, 1999; Mariotti, 2000; Hadas, Hershkowitz, & Schwarz, 2000; Marrades & Gutiérrez, 2000; Healy, 2000; Hölzl, 2001; Christou, Mousoulides, Pittalis and Pitta, 2004, 2005; Talmon & Yerushalmy, 2006).

Στο σχεδιασμό της η έρευνα είχε προβλέψει την επίδραση που έχουν οι κατασκευαστικές διαδικασίες τετραπλεύρων σε λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας στον τρόπο συλλογισμού των μαθητών (βλ. ενδεικτικά Mariotti, 1997, 2001; Vincent, 1998; Vincent & McCrae, 2001; Leung &

Or, 2007), η συμμετρία των τετραπλεύρων (βλ. ενδεικτικά Arzarello, Micheletti, Olivero, & Robutti, 1998; Healy, 2000; Hadas, Hershkowitz & Schwarz, 2001; Mariotti, 2001; Jones, 2001; de Villiers, 2004; Wares, 2004; Leikin, 2004; Jiang, 2002; Christou, Mousoulides, Pittalis, & Pitta-Pantazi, 2004; Belfort & Guimarães, 2004; Graumman, 2005), αλλά και την επίδραση των μετασχηματισμών της περιστροφής και ανάκλασης μέσω του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας (βλ. ενδεικτικά Edwards, 1991; Natsoulas, 2000; Hollebrands, 2003, 2004).

Στην παρούσα εργασία υιοθετήθηκε η θεώρηση πολλών ερευνητών ως μέσο παρακολούθησης της μετακίνησης των μαθητών από το ένα επίπεδο van Hiele στο επόμενο (Hoffer, 1981; Burger & Shaughnessy, 1986; Gutierrez, Jaime, & Fortuny, 1991, Jaime & Guitierrez, 1994) αναφορικά με τις διατυπώσεις ορισμών, την ικανότητα απόδειξης και τις σχέσεις εγκλεισμού των σχημάτων.

Ως προς τη διατύπωση ορισμών: Διαφορετικοί τύποι ορισμού διατυπώθηκαν από τους μαθητές και στην παρούσα έρευνα. Αξιολογήθηκε η εξέλιξη των τύπων ορισμού κατά τη διάρκεια της μελέτης σε κάθε μαθητή της πειραματικής ομάδας ή της ομάδας ελέγχου. Σε συμφωνία με άλλους ερευνητές (Govender & de Villiers, 2003) διαπιστώθηκε ότι οι *ανεπαρκείς ορισμοί* προέρχονται από μαθητές χαμηλού επιπέδου γεωμετρικής σκέψης, ενώ *οικονομικοί ορισμοί* (ενδεικτικά αναφέρονται Govender & de Villiers, 2003; Linchevsky, Vinner & Karsenty, 1992) εμφανίζονται όταν οι μαθητές έχουν αναπτύξει το επίπεδο van Hiele τους. Χρησίμευσαν επομένως ως μέτρο σύγκρισης της προόδου του μαθητή στα επίπεδα van Hiele, καθώς ο μαθητής μεταβαίνει από το ένα επίπεδο στο άλλο. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, τα εργαλεία του λογισμικού διαμεσολάβησαν στην ανάπτυξη της ικανότητας διατύπωσης οικονομικών ορισμών.

Ως προς την ικανότητα απόδειξης: Εξετάστηκε και επιβεβαιώθηκε ακόμα η γνωστική ανάπτυξη του μαθητή, ως ανάπτυξη των αποδεικτικών σχημάτων (π.χ., Balacheff, 1988; Harel & Sowder, 1998), δηλαδή η μετάβαση από την *εμπειρική μορφή* αποδείξεων στη *νοητική/εννοιολογική*, αλλά και η ικανότητα σταδιακής εξέλιξης των *εσωτερικών αναπαραστάσεων* που ο μαθητής κατασκευάζει (π.χ., Cifarelli, 1998, 2000). Κατά τη μελέτη διαπιστώθηκε η δυσκολία των μαθητών της ομάδας ελέγχου να ανακαλέσουν γλωσσικά σύμβολα και συμβολικές αναπαραστάσεις που διδάχθηκαν στην πορεία της ερευνητικής διαδικασίας. Αντιθέτως, οι μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν σταδιακά την ικανότητα αφενός να ανακαλούν και να συνδέουν αναπαραστάσεις οι οποίες είχαν χρησιμοποιηθεί σε προηγούμενα σημεία της μελέτης, αφετέρου να γενικεύουν τη σκέψη τους.

Αναλύθηκε επίσης η ικανότητα μετασχηματιστικού, επαγωγικού, απαγωγικού ή παραγωγικού συλλογισμού. Η ανάλυση των επιχειρημάτων έγινε με βάση το «μειωμένο σχήμα» του μοντέλου

Toulmin (1958) που προτάθηκε από τον Krummheuer (1995). Οι μαθητές της ομάδας ελέγχου σύμφωνα με τη συγκριτική μελέτη δεν απέκτησαν την ικανότητα παραγωγικού συλλογισμού στο επίπεδο που αυτή εμφανίστηκε στους μαθητές της πειραματικής ομάδας. Η ανάπτυξη αφαιρετικής ικανότητας ήταν ένα ακόμα ζήτημα, αφού προέκυψε με την αποδεικτική διαδικασία. Ειδικότερα εξετάστηκε σε ποιες φάσεις της ερευνητικής μελέτης της πειραματικής ομάδας υπήρξε γνωστική ανάπτυξη ενός μαθητή, ως αποτέλεσμα της δράσης επί των αντικειμένων, αναπτύσσοντας δύο βασικούς συντελεστές, τον οπτικο-χωρικό και λεκτικο-παραγωγικό (Tall, 1995).

Ως προς την ικανότητα ιεράρχησης των σχημάτων: Επιβεβαιώθηκε και εδώ ότι οι μαθητές επιπέδου 1 δεν αναγνωρίζουν καμιά λογική σχέση μεταξύ των σχημάτων, δεν μπορούν, επομένως, και να τα ιεραρχήσουν, ενώ στο επίπεδο 2 οι μαθητές αρχίζουν να αποκτούν μια τέτοια ικανότητα. Επίσης ότι τα εργαλεία του λογισμικού διαμεσολάβησαν στην ανάπτυξη της ικανότητας αντιληπτικής ιεράρχησης των σχημάτων στους μαθητές επιπέδου 1 (π.χ. Μ9, Μ13, Μ14), γεγονός το οποίο στη συνέχεια οδήγησε στην ανάπτυξη της ικανότητας ιεράρχησης των σχημάτων, ειδικότερα στην τρίτη φάση της ερευνητικής διαδικασίας. Αυτό έγινε φανερό στους τύπους ορισμών που οι μαθητές διατύπωναν, οι οποίοι βασίζονταν στην ιεραρχία των τετραπλεύρων και οι οποίοι, σύμφωνα με τους Whiteley & Moshe (2005), είναι καταλληλότεροι καθώς στηρίζονται σε μια γενίκευση του σχήματος.

Η λεπτομερειακή ανάλυση έδειξε επίσης ότι οι μαθητές των δύο ομάδων ακολούθησαν διαφορετική πορεία ως προς την ανάπτυξη των ικανοτήτων κατά Niss (1999). Δηλαδή, ως προς την αναπαραστατική ικανότητα, την ικανότητα απόδειξης και τη δομική ικανότητα που είναι ανάλογες με τις ικανότητες κατά Hoffer (1981) – οπτικές, λεκτικές, σχεδίασης, λογικές και εφαρμογής. Όσον αφορά την ικανότητα χρήσης των εργαλείων (Niss, 1999) έχει επίσης διερευνηθεί ποιοι μαθητές της πειραματικής ομάδας χρησιμοποίησαν τα εργαλεία του λογισμικού *κανονικά ή με οικονομία* (*κατάχρηση*) όπως και ποιες ήταν οι επιπτώσεις αυτής της χρήσης (α) στην κατασκευή εννοιών ή (β) στην εμφάνιση *γνωστικών συγκρούσεων* με αποτέλεσμα την αναδόμηση του *γνωστικού σχήματος* που έχει κατασκευάσει ένας μαθητής για μια έννοια.

Η κονστρουκτιβιστική προσέγγιση μέσω του μαθησιακού μονοπατιού αποτέλεσε τη βάση για τη θεμελίωση της χρήσης ενός τέτοιου περιβάλλοντος στην εκμάθηση της γεωμετρίας (Clements & Battista, 1992). Το συμπέρασμα αυτό συμφωνεί με τις υπόλοιπες μελέτες (βλ. ενδεικτικά van Hiele, 1986; Fuys, Geddes & Tischler, 1984; Crowley, 1987; Gutierrez, Jaime & Fortuny, 1991;

Clements & Battista, 1992, 2002), ότι δηλαδή η οργάνωση και το περιεχόμενο της διδασκαλίας, καθώς επίσης και τα υποστηρικτικά υλικά έχουν θετικές επιπτώσεις στη γνωστική ανάπτυξη των μαθητών. Συμφωνεί επίσης με την προτεινόμενη *εκπαιδευτική ανάπτυξη* (educational development) των Μαθηματικών του Freudenthal (1973), η οποία αξιοποιεί τα υποστηρικτικά υλικά του Προγράμματος Σπουδών και ενθαρρύνει την πραγματική αλλαγή στη διδασκαλία στην τάξη (Gravemeijer & Terwel, 2000, p. 779). Επιβεβαιώθηκε ακόμα ο σημαντικός ρόλος του ερευνητή/εκπαιδευτικού στη διαμόρφωση του Προγράμματος Σπουδών που δοκιμάζεται ή αξιολογείται στην πράξη από τους μαθητές (Remillard, 1999). Ως προς το μαθησιακό μονοπάτι, για την επιλογή, τη δημιουργία και σχεδίαση διδακτικών δραστηριοτήτων και προβλημάτων που ενθαρρύνουν και κεντρίζουν τη *μαθηματική επανεφεύρεση* (Freudenthal, 1973) επιβεβαιώνεται ο Gravemeijer (2004) ο οποίος υποστηρίζει ότι ο δάσκαλος των μαθηματικών πρέπει να μετακινηθεί νοητικά από *τη θέση του παρατηρητή εκπαιδευτικού* στη *θέση του δρώντα/ενεργούντα μαθητή* (Cobb, Yackel & Wood, 1992 όπ. αναφ. στο Gravemeijer, 2004).

Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας έδειξαν ότι συμφωνούν με τα αποτελέσματα προηγούμενων ερευνών όπου εμφανίστηκε υψηλότερη απόδοση στα μετά-τεστ [ενδεικτικά Yousef (1997), Almeqdadi (2000)] στους μαθητές που αλληλεπίδρασαν με δραστηριότητες σε λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Sketchpad, σε σύγκριση με τους μαθητές που χρησιμοποίησαν τα εργαλεία των στατικών μέσων της γεωμετρίας και, επομένως, στην ανάπτυξη του επιπέδου van Hiele των μαθητών (Battista & Borrow, 1997)

Ακόμα συμφωνούν

- με έρευνες που περιείχαν έννοιες μετασχηματισμού [ενδεικτικά αναφέρεται η έρευνα της Dixon (1996)], και ειδικότερα αναφορικά με τα αποτελέσματα στην επίλυση του αναδιατυπωμένου πραγματικού προβλήματος στο τεστ με χαρτί-μολύβι, καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές που διδάχτηκαν τις έννοιες της ανάκλασης και της περιστροφής στο περιβάλλον του GSP ξεπέρασαν σημαντικά τους συνομήλικους τους που είχαν διδαχθεί παραδοσιακά τις έννοιες.
- με έρευνες που διερεύνησαν τους τρόπους με τους οποίους το λογισμικό μέσω της χρήσης των μετασχηματισμών διαμεσολάβησε στην κατανόηση των μαθητών της διαφοράς μεταξύ της κατασκευής ενός σχήματος και της κατασκευής ενός σχεδίου [ενδεικτικά αναφέρεται η έρευνα της Hollebrands (2003, 2007)]
- με έρευνες που περιείχαν προκατασκευασμένα διαγράμματα [ενδεικτικά αναφέρεται η έρευνα της Sinclair (2001)], καταλήγοντας στο ίδιο συμπέρασμα με

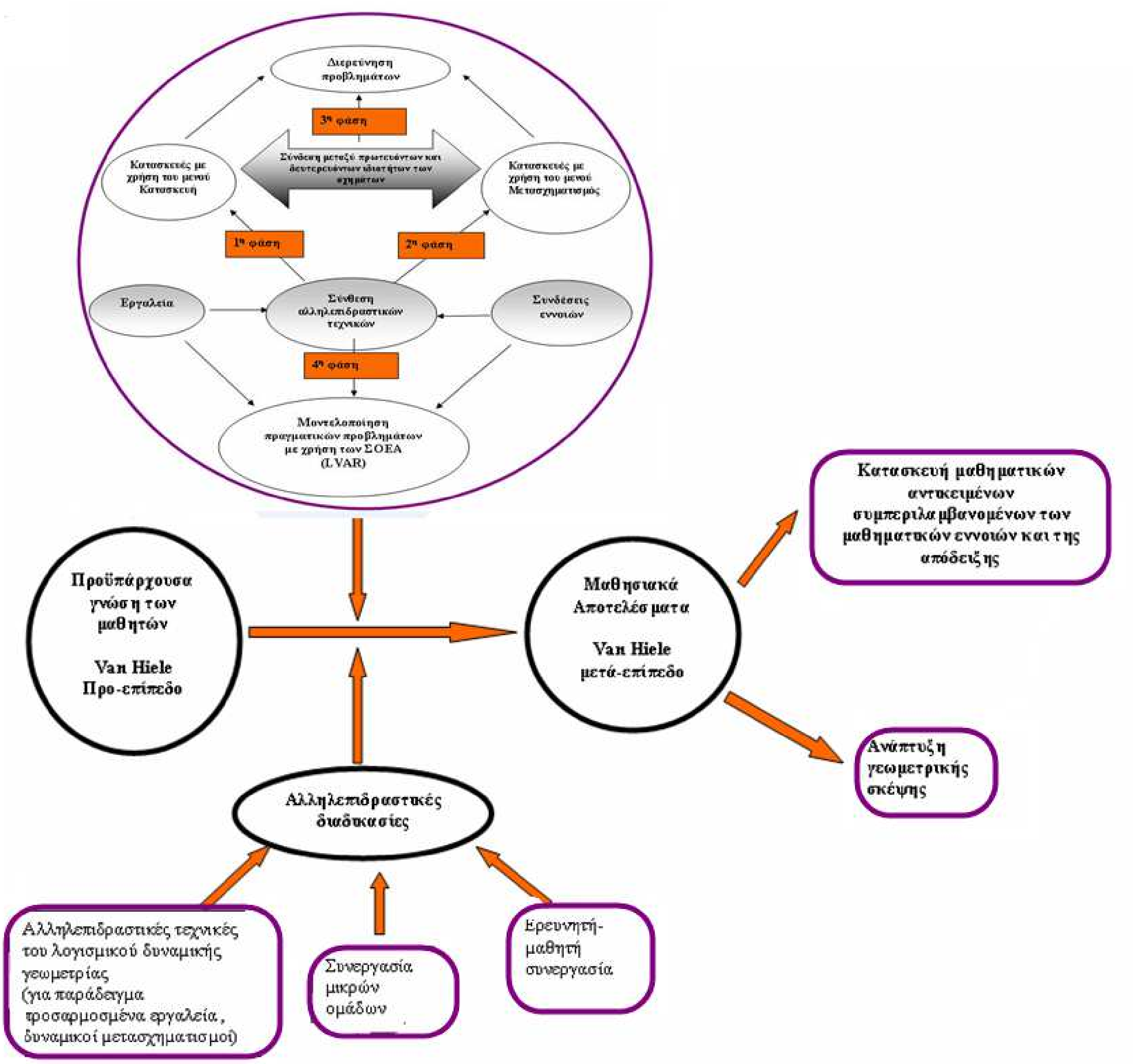
τη Sinclair (2001) «ότι οι μαθητές παρακινήθηκαν από το λογισμικό, το οποίο τους βοήθησε να αναπτύξουν το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης τους ειδικά στο επίπεδο οπτικοποίησης και ανάλυσης, υποστηρίζοντας την εξερεύνηση, τον οπτικό συλλογισμό και την επικοινωνία» (p. 136).

- με έρευνες που το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας χρησιμοποιήθηκε για την ανάπτυξη ικανότητας παραγωγικών επιχειρημάτων [ενδεικτικά αναφέρεται η έρευνα της Olivero (2002)]. Η προαναφερόμενη έρευνα έχει χρησιμοποιήσει διαφορετικά ερευνητικά δεδομένα αναφορικά με τα υποκείμενα της μελέτης αφού οι μαθητές οι οποίοι συμμετείχαν στην έρευνα της Olivero (2002) έπρεπε να πληρούν «την προϋπόθεση το επίπεδο τους να είναι άνω του μέσου όρου» (Olivero, 2002, p. 83), γεγονός που μειώνει την σημασία του λογισμικού ως προς την ανάπτυξη παραγωγικών επιχειρημάτων εκ μέρους των μαθητών.
- με έρευνες που διερεύνησαν πως η μοντελοποίηση πραγματικών προβλημάτων με το Geometer's Sketchpad διευκόλυνε την κατασκευή καθώς και την ικανότητα μάθησης και κατανόησης της γεωμετρικής απόδειξης [ενδεικτικά αναφέρεται η έρευνα του Abdelfatah (2011)].

5.7. Η καινοτομία της εργασίας

Μια σημαντική καινοτομία της παρούσας εργασίας είναι η δημιουργία ενός πρωτότυπου μαθησιακού μονοπατιού στο οποίο περιγράφονται τέσσερις φάσεις και υποφάσεις σχεδιασμού και ανασχεδιασμού. Η διαδικασία σχεδιασμού στο λογισμικό και τα αποτελέσματα της έρευνας με τους μαθητές οδήγησαν στην εισαγωγή της έννοιας των Συνδεόμενων Οπτικών Ενεργών Αναπαραστάσεων (ΣΟΕΑ) (βλ. ενδεικτικά Patsiomitou, 2008 a,b, 2010; Patsiomitou & Koleza, 2008, 2009; Πατσιομίτου, 2008).

Διακρίθηκαν επίσης οι τύποι των ΣΟΕΑ με τους οποίους οι μαθητές αλληλεπίδρασαν στα μοντελοποιημένα προβλήματα στο λογισμικό κατά την τελευταία φάση της μελέτης. Με τις ΣΟΕΑ (LVAR) εισάγεται έτσι ο ορισμός μιας *νέας ιδέας* στη διεθνή βιβλιογραφία (Blaxter, Hughes & Tischer, 2001). Η διάκριση των ΣΟΕΑ σε πέντε διαφορετικούς τύπους (LVAR modes) (π.χ. Patsiomitou, 2008b; Patsiomitou, 2010; Patsiomitou & Emvalotis, 2009) στη βάση της θεωρίας των van Hiele αποτελεί καινοτόμο επέκταση του θεωρητικού πλαισίου και παρέχει νέα δεδομένα στη θεωρία των συνδεόμενων αναπαραστάσεων.



:

Σχήμα 5. 1. Εκπαιδευτικός σχεδιασμός (instructional design) της πειραματικής ομάδας

Η μελέτη της μετακίνησης των μαθητών της πειραματικής ομάδας στο επόμενο επίπεδο σύμφωνα με τη θεωρία των van Hiele προέκυψε μέσα από δραστηριότητες που διακρίθηκαν σε φάσεις και οικοδομήθηκαν με ΣΟΕΑ του λογισμικού. Όπως διαπιστώθηκε, τα ημιπροκατασκευασμένα συνδεόμενα διαγράμματα ΣΟΕΑ σε διαδοχικές εκπαιδευτικές δραστηριότητες, στην ίδια ή σε διαφορετικές φάσεις του μαθησιακού μονοπατιού, συμβάλλουν στην κατασκευή των εννοιών αλλά και στην κατανόηση, την επιχειρηματολογία και την αφαιρετική ικανότητα των μαθητών (Patsiomitou, 2008a, b, c, d, 2009, 2010, 2011, 2012;

Patsiomitou & Koleza, 2008, 2009; Patsiomitou & Emvalotis, 2009 a, b, c, d; 2010 a, b; Patsiomitou, Barkatsas & Emvalotis, 2010; Πατσιομίτου, 2008 α, β; Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2009 α, β; Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2010 α, β; Πατσιομίτου, 2011; Πατσιομίτου & Εμβαλωτής 2011 α, β).

Ο σχεδιασμός του μαθησιακού μονοπατιού με ΣΟΕΑ, αλλά και η πρόβλεψη ώστε οι μαθητές να κατασκευάσουν νοητικά συνδεόμενες αναπαραστάσεις αναπτύσσοντας έτσι τη γεωμετρική σκέψης τους, συνιστά μια καινοτόμο παρέμβαση στο Πρόγραμμα Σπουδών, ως προς τη διδασκαλία και εκμάθηση των γεωμετρικών εννοιών. Θα συμφωνήσουμε ότι η γνωστική ανάπτυξη ενός μαθητή εξαρτάται περισσότερο από το υποστηρικτικό υλικό και τις κατάλληλες παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού (π.χ. ερωτήσεις σκαλωσιάς, δραστηριότητες κατασκευασμένες στο λογισμικό). Ως προς το σχεδιασμό τους, οι δυναμικές αναπαραστάσεις βασίστηκαν στη μελέτη των αλληλεπιδράσεων που προκαλούν τα διαφορετικά εργαλεία και οι εντολές του λογισμικού στους μαθητές. Αξιοποιήθηκε επίσης η «δυναμική σύνδεση» (automatic translation or “dynalinking”) (Ainsworth, 1999, p. 133) ώστε να «μειωθεί το γνωστικό φορτίο του μαθητή και να […] συγκεντρωθεί στις συνέπειες των ενεργειών τους».

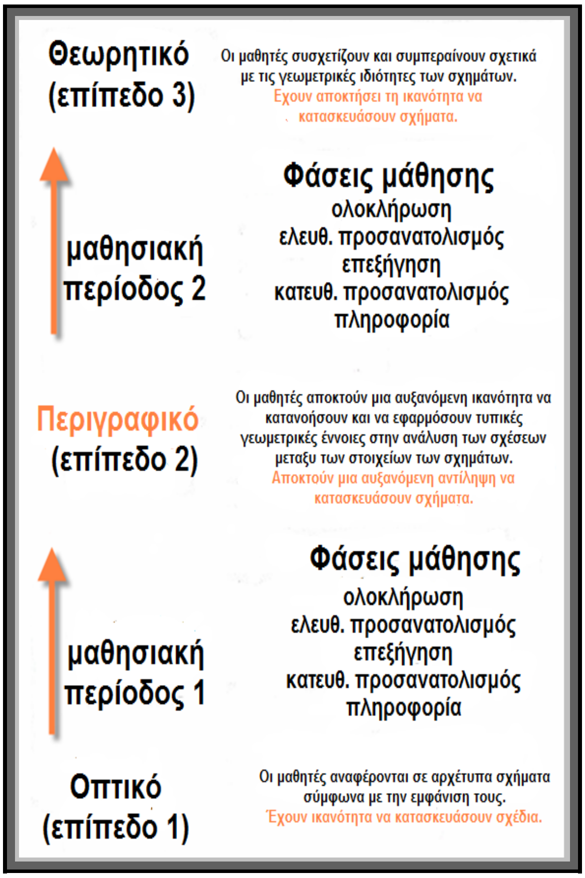
Κατά συνέπεια, ο σχεδιασμός των ημιπροκατασκευασμένων δυναμικών αναπαραστάσεων στο δυναμικό περιβάλλον του λογισμικού επέδρασε στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές οικοδόμησαν τις εσωτερικές αναπαραστάσεις για τις μαθηματικές έννοιες κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων, είτε αυτές απευθύνονταν στον μεμονωμένο μαθητή είτε στον μαθητή σε περιβάλλον συνεργασίας (π.χ. ομάδα συνεργασίας, περιβάλλον τάξης).

Η «δυναμική» επανεφεύρεση των εννοιών, δηλαδή η γνώση την οποία επανευφευρίσκουν οι μαθητές αλληλεπιδρώντας με τα τεχνουργήματα (artifacts) που έχουν δημιουργηθεί στο περιβάλλον του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας, είναι «γνώση για την οποία είναι οι ίδιοι υπεύθυνοι» (Gravemeijer & Terwel, 2000, p.786). Η «δυναμική» επανεφεύρεση επιβεβαίωσε ότι οι μαθητές μπορούν να αναπαράγουν πιστά μια επιστημονική δραστηριότητα που περιλαμβάνει την κατασκευή, τη διατύπωση και την απόδειξη εννοιών και θεωρημάτων μέσω των δυναμικών ή αυθαίρετων ορισμών αλλά και των εννοιολογικών αποδεικτικών σχημάτων. Ο ρόλος της ερευνήτριας στη διαμόρφωση της μαθηματικής συζήτησης και ειδικότερα στις ερωτήσεις παρέμβασης ήταν σημαντικός για τους μαθητές επιπέδου 1 σύμφωνα με τη θεωρία των van Hiele.

Σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη της διαδικασίας διαδραμάτισε η δημιουργία ενός προσαρμοσμένου εργαλείου (π.χ., Patsiomitou & Emvalotis 2009c, Patsiomitou, 2012) από την ερευνήτρια. Η χρήση του με τον *προβλεπόμενο* ή μη από την ερευνήτρια τρόπο συνέβαλε ώστε οι μαθητές να κατασκευάσουν γνωστικά σχήματα ή να υπερβούν διδακτικά και εννοιολογικά εμπόδια αναφορικά με την έννοια της συμμετρίας. Καταλήγουμε λοιπόν ότι οι εννοιολογικές πληροφορίες που μεταβιβάζονται από αυτό διευκόλυναν την επίλυση προβλήματος, ενισχύοντας την αφαιρετική σκέψη των μαθητών και επηρεάζοντας έτσι το *μετασχηματισμό* του χαρακτήρα *συμβόλου των μαθητών σε χαρακτήρα σήματος*. Το εργαλείο μπορεί να θεωρηθεί επομένως *δομική μονάδα*, ενώ η χρήση του να επιτρέψει: (α) τις ιδιότητες μερικών σημαντικών σχημάτων να αναλυθούν και στη συνέχεια, (β) να συντεθούν σε σχήματα. Κατ' αυτό τον τρόπο, το σχήμα γίνεται ένα *εννοιολογικό αντικείμενο* (Sfard, 1991) και οι οπτικές αντιλήψεις των μαθητών μεταφράζονται σε λεκτικές διατυπώσεις, κατανοώντας τις σημαντικές ιδιότητες (*χαρακτήρας σήματος*). Η χρήση συνεπώς του δυναμικού εργαλείου επηρέασε τον προσανατολισμό της σκέψης των μαθητών (Sang Sook Choi-Koh, 1999), την κατασκευή εκ μέρους τους σχημάτων χρήσης του εργαλείου, την επέκτασή τους με οικονομία και κατάχρηση του εργαλείου και, κατά συνέπεια, των νοητικών σχημάτων με αντίκτυπο στα επίπεδα van Hiele τους. Η θεωρητική σχέση, δηλαδή, μεταξύ του χαρακτήρα συμβόλου και του χαρακτήρα σήματος λόγω της επίδρασης του εργαλείου έχει αντίκτυπο στα επίπεδα van Hiele των μαθητών.

Για τις ανάγκες της μελέτης η ερευνήτρια αναπροσάρμοσε το διάγραμμα των μαθησιακών περιόδων και φάσεων με βάση το τελευταίο μοντέλο των van Hiele, που είχε κατασκευαστεί από την Teppo (1991) σύμφωνα με την κατηγοριοποίηση του Battista (2007) και τις έννοιες του Parsysz (1988) περί σχεδίου και σχήματος οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν στην ανάλυση των δεδομένων της παρούσας εργασίας.

Το διάγραμμα διαφέρει ουσιαστικά ως προς την περιγραφή των επιπέδων, τον τρόπο που αντιλαμβάνονται οι μαθητές ένα σχήμα στις διαφορετικές μαθησιακές περιόδους και στα διαφορετικά επίπεδα, αλλά και ως προς την ικανότητά τους να κατασκευάσουν ένα σχέδιο ή σχήμα.



Σχήμα 5.2. Προσαρμογή του διαγράμματος της Teppo (1991) για την παρούσα μελέτη

Η χρήση των εργαλείων και εντολών του μενού του λογισμικού αποδείχθηκε ότι είναι μια διαδικασία που **δεν** διενεργείται με τον ίδιο τρόπο από τους μαθητές των δύο επιπέδων, λόγω της κατανόησης της επιλογής των σχηματικών μονάδων και εντολών, που οφείλεται κυρίως στη διαφορετική *ικανότητα αποκωδικοποίησης των μαθητών*.

Οι μαθητές εξωτερικεύουν στην οθόνη κατασκευές που έχουν σχηματίσει νοητικά, χρησιμοποιώντας τα πρωτότυπα γεωμετρικά αντικείμενα του λογισμικού και τα εργαλεία ή εντολές του μενού, προκειμένου να αποκωδικοποιήσουν τις νοητικές τους αναπαραστάσεις σε ενέργειες στο λογισμικό – να *αποκωδικοποιήσουν εργαλειακά*, δηλαδή να αποκτήσουν την ικανότητα να μεταφράσουν ένα σχήμα με τη χρήση εργαλείων του λογισμικού. Το πώς η *εργαλειακή αποκωδικοποίηση* (instrumental decoding) (Patsiomitou, 2011) επιδρά στην ικανότητα των μαθητών για κατασκευή εννοιών μπορεί να οδηγήσει στην κατανόηση του πώς η χρήση των εργαλείων εκ μέρους τους παίζει θεμελιώδη ρόλο ως μη *γλωσσική εγγύηση*, με την έννοια που έχει η *εγγύηση* (warrant) στο μοντέλο Toulmin (1958/1993).

Κατά συνέπεια, η διαδικασία για να ολοκληρωθεί απαιτεί την ανάπτυξη της διαδικαστικής γνώσης (γνώσης εργαλείων του λογισμικού και εφαρμογής των κανόνων), η οποία βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν διαισθητικά τους κανόνες που πρέπει να ακολουθήσουν στο λογισμικό, ώστε να συνδέσουν, μέσω της αμεταβλητότητας των αναπαραστάσεων, το *εννοιολογικό με το διαδικαστικό πεδίο*. Εν προκειμένω, οδηγεί τους μαθητές να κατασκευάσουν την έννοια του ευκλείδειου αιτήματος μέσω της συνεχούς αλληλεπίδρασης μεταξύ του *χωρογραφικού και θεωρητικού πεδίου* του λογισμικού (Laborde, 2005). Αναπτύσσεται έτσι η εννοιολογική γνώση των μαθητών καθώς το σχήμα αποκτά το *χαρακτήρα συμβόλου* (van Hiele, 1986). Η εγκυρότητα της μαθηματικής κατασκευής στηρίζεται σε λειτουργίες του λογισμικού που επιτρέπουν στα υποκείμενα να πειραματιστούν στο χωρογραφικό πεδίο και να κατανοήσουν ότι πρέπει να αναπροσαρμόσουν τις ενέργειές τους στο θεωρητικό πεδίο (Laborde, 2005).

Ένα άλλο σημαντικό εύρημα της έρευνας είναι οι έννοιες της *σειριακής, λεκτικής και θεσιακής κατανόησης* (Patsiomitou, 2011; Πατσιομίτου, 2011) τις οποίες πρέπει να αναπτύξει ο μαθητής κατά τη διάρκεια μιας κατασκευής. Πιο συγκεκριμένα, η ικανότητα της εργαλειακής αποκωδικοποίησης στο λογισμικό εξαρτάται από (Patsiomitou, 2011): α) τη *σειριακή κατανόηση* της επιλογής των εργαλείων, δηλαδή να ακολουθήσει μια προκαθορισμένη σειρά· β) τη *λεκτική κατανόηση* της επιλογής των εργαλείων – δηλαδή ο μαθητής να έχει την ικανότητα να εκφράσει τη διαδικασία· γ) τη *θεσιακή λειτουργία των στοιχείων* της κατασκευής που στηρίζεται στην *αντιληπτική κατανόηση*. Τότε ο μαθητής έχει κατασκευάσει τη *λειτουργική κατανόηση* των στοιχείων του σχήματος για την κατασκευή, δηλαδή την ικανότητα να λειτουργήσει την κατασκευή του.

Η έννοια επίσης του *δυναμικού σημείου* (Patsiomitou, 2011; Πατσιομίτου, 2011) και του *δυναμικού τμήματος* (Patsiomitou, 2011; Πατσιομίτου, 2011) κατασκευασμένων σε ένα δυναμικό περιβάλλον όπως διατυπώθηκαν για τις ανάγκες της μελέτης οδήγησε στη διάκριση από τις έννοιες του ευκλείδειου τμήματος και σημείου. Αναλυτικότερα, διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν εμπόδια που οφείλονται σε δυσκολία ή αδυναμία για *εργαλειακή αποκωδικοποίηση* (εργαλειακά εμπόδια) (Patsiomitou, 2011; Πατσιομίτου, 2011). Τα εμπόδια αυτά οδηγούν τους μαθητές σε *γνωστική σύγκρουση* σε σχέση με τη δική τους γνώση ή την κατανόηση χρήσης του εργαλείου. Διακρίθηκαν διάφοροι τύποι εργαλειακών εμποδίων (π.χ. που οφείλονται στην αδυναμία εργαλειακής αποκωδικοποίησης ή στη διαφορετική ερμηνεία του ορισμού του τμήματος στο δυναμικό περιβάλλον) (Patsiomitou, 2011; Πατσιομίτου, 2011):

(α) εμπόδια που οφείλονται στην επιλογή των εργαλείων

Οι μαθητές επιπέδου 1 παρουσίαζαν αδυναμία σχετικά με τη *σειριακή κατανόηση* της επιλογής των πρωτοτύπων και των εντολών του λογισμικού καθώς δυσκολεύονταν να κατανοήσουν τη λογική της ακολουθίας ενεργειών ή να συνδέσουν αυτή τη λογική με τη θεωρία της γεωμετρίας.

Οι μαθητές επιπέδου 2 ανέπτυξαν τα τρία είδη κατανόησης σε συνεργασία με τα άλλα μέλη της ομάδας. Η λεκτική κατανόηση ακολουθούσε ή ήταν ταυτόχρονη της σειριακής κατανόησης.

(β) εμπόδια που οφείλονται στην εργαλειακή αποκωδικοποίηση του ευκλείδειου ορισμού του τμήματος

Οι μαθητές, προσπαθώντας να αποκωδικοποιήσουν την πρόταση «επίλεξε το τμήμα», ανακαλούσαν τον ορισμό του ευκλείδειου τμήματος, επέλεγαν δηλαδή και το τμήμα και τα άκρα του τμήματος. Οδηγούνταν έτσι σε εργαλειακό εμπόδιο, αφού η εντολή δεν ενεργοποιούνταν (π.χ., προκειμένου να κατασκευαστεί το μέσο του τμήματος ή η κάθετος). Με τις ενέργειες αυτές οι μαθητές αναγκάζονταν να θέσουν επαγωγικά κάποιους κανόνες και να κατανοηθούν αυτοί εμπειρικά, κάτι που θα μπορούσαμε να ορίσουμε απαντώντας στην ερώτηση **τι είναι δυναμικό τμήμα** (Patsiomitou, 2011; Πατσιομίτου, 2011):

> **Δυναμικό τμήμα** είναι ένα τμήμα [δυναμικής] ευθείας γραμμής χωρίς σημεία. Τα ‘δυναμικά’ σημεία μπορούν να τοποθετηθούν στο δυναμικό τμήμα ανεξάρτητα και να κινηθούν εκεί με ένα βαθμό ελευθερίας. Αυτό σημαίνει ότι ένα σημείο που τοποθετείται πάνω στο τμήμα μετασχηματίζει τους *δυο βαθμούς ελευθερίας σε έναν βαθμό ελευθερίας*. Επιπροσθέτως, ένα τμήμα στο δυναμικό περιβάλλον ‘ορίζεται’ με την επιλογή μόνο του εσωτερικού του η οποία αναπαριστά το σύνολο των σημείων του Ευκλείδειου ορισμού.

Έγινε έτσι κατανοητό ότι:

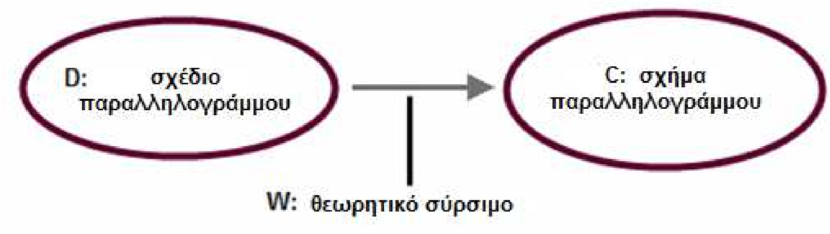
- Οι μαθητές επιπέδου 1 συναντούν **εργαλειακό** εμπόδιο διότι, εκτός από το γνωστικό εμπόδιο, λόγω της άγνοιας των ορισμών και προτάσεων της ευκλείδειας γεωμετρίας, αντιμετωπίζουν επιπλέον πρόβλημα εφαρμογής τους στο περιβάλλον της δυναμικής γεωμετρίας.
- Οι μαθητές επιπέδου 2 συναντούν **εργαλειακό** εμπόδιο διότι ενδεχομένως προσπαθούν να εφαρμόσουν κάποιους κανόνες της ευκλείδειας γεωμετρίας στο περιβάλλον της δυναμικής, στο οποίο αξιωματικά δεν έχουν εφαρμογή.

Τα εργαλειακά εμπόδια όμως ήταν σημαντικός λόγος για την εμφάνιση των γνωστικών συγκρούσεων στους μαθητές. Η μη ενεργοποίηση μιας εντολής, για παράδειγμα, έφερνε τους μαθητές σε *γνωστική σύγκρουση*, την οποία εξέφραζαν με άτυπο τρόπο. Η κατανόηση κατ’ αναλογία της επιλογής των αντικειμένων είχε ως αποτέλεσμα λεκτικές διατυπώσεις οι οποίες προέκυπταν ταυτόχρονα με τη δράση των μαθητών στο λογισμικό. Για παράδειγμα, ο Μ13 επιπέδου 1 οδηγήθηκε σε άτυπη λεκτική διατύπωση («το ίδιο θα κάνουμε και από την άλλη») στην αρχή της διαδικασίας. Συνεπώς ο μαθητής αντιληπτικά και νοητικά είχε κατασκευάσει κάποιες ιδιότητες του παραλληλογράμμου τις οποίες δεν διατύπωνε λεκτικά αλλά μέσω του σχεδίου (αποτυπώνοντας στην οθόνη νοητικές του εικόνες). Ο Μ3 ομοίως, επιπέδου 2, στο αρχικό τεστ εκλογίκευσε την ενέργεια κατασκευής της παραλλήλου και κατασκεύασε τη σειριακή και λεκτική κατανόηση της χρήσης των εργαλείων του λογισμικού για την κατασκευή της καθέτου, επομένως και το σχήμα χρήσης του εργαλείου της καθέτου. Σε αυτό οδηγούμαστε από τη συμπερασματική του δήλωση: «άρα με την ίδια λογική θα κάνουμε και την άλλη παράλληλη».

Ένα άλλο σημαντικό εύρημα της έρευνας είναι οι έννοιες του *θεωρητικού και πειραματικού συρσίματος.* Υπενθυμίζεται ότι υπάρχουν δύο σημαντικές διακρίσεις στον τρόπο με τον οποίο ενεργεί κάποιος χρήστης προκειμένου να μετασχηματιστεί το δυναμικό διάγραμμα (Patsiomitou, 2011; Πατσιομίτου, 2011): (α) *Θεωρητικό σύρσιμο*, όταν ο μαθητής στοχεύει να καταστήσει το *σχέδιο* που είναι στην οθόνη *σχήμα* ή όταν μετασχηματίζει με πρόθεση ένα σχέδιο ώστε να αποκτήσει κάποιες πρόσθετες ιδιότητες˙ (β) *πειραματικό σύρσιμο*, όταν ο μαθητής διερευνά αν το σχήμα πληροί ορισμένες ιδιότητες ή αν η τροποποίηση (ανατοποθέτηση ή αλλαγή προσανατολισμού ή οπτική μετατροπή) του σχήματος οδηγεί στην κατασκευή ενός άλλου σχήματος. Ουσιαστικό ρόλο στη διαδικασία είχε η ικανότητα του μαθητή να μετατρέπει το πειραματικό σύρσιμο σε θεωρητικό αλλά και η αντιμετώπιση και υπέρβαση των εμποδίων, γνωστικών και εργαλειακών που παρουσιάστηκαν.

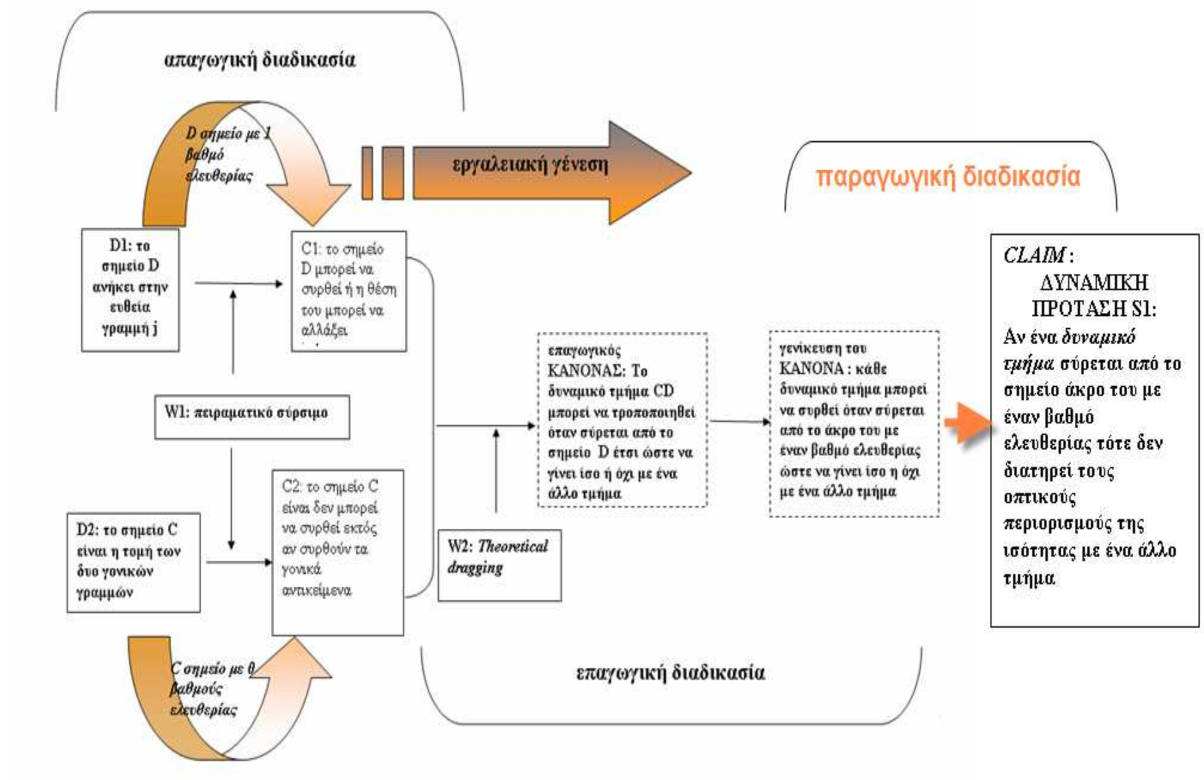
Αποτέλεσμα των ποικίλων αλληλεπιδράσεων της παρούσας εργασίας ήταν οι *δυναμικές έννοιες* (Patsiomitou, 2011; Πατσιομίτου, 2011) που προέκυψαν στο δυναμικό περιβάλλον ταυτόχρονα και παράλληλα με τις γεωμετρικές έννοιες που οι μαθητές εξετάζουν/συναντούν στα βιβλία τους ή και επανεφευρίσκουν οι ίδιοι. Οι δυναμικές έννοιες είναι αποτέλεσμα-απάντηση στην *εργαλειακή γένεση* (π.χ., Rabardel, 1995) από τη χρήση των εργαλείων και την ανάπτυξη επιχειρηματολογίας ως διαλεκτικής διαδικασίας που υποστηρίζεται από την οπτικοποίηση που παρέχεται από το δυναμικό διάγραμμα.

Η ανάγκη αναπαράστασης αυτής της διαδικασίας οδήγησε την ερευνήτρια στην επινόηση ενός ψευδομοντέλου *Toulmin* (Patsiomitou, 2011, 2012; Πατσιομίτου, 2011) με το οποίο θα ερμηνεύονταν οι δυναμικές προτάσεις. Για παράδειγμα, το δεδομένο μπορεί να είναι ένα στοιχείο ή αντικείμενο του διαγράμματος και η εγγύηση ένα εργαλείο ή μια εντολή που εξασφαλίζει το αποτέλεσμα που είναι ο ισχυρισμός.



Σχήμα 5.3. Ψευδο-μοντέλο Toulmin με εγγύηση το θεωρητικό σύρσιμο

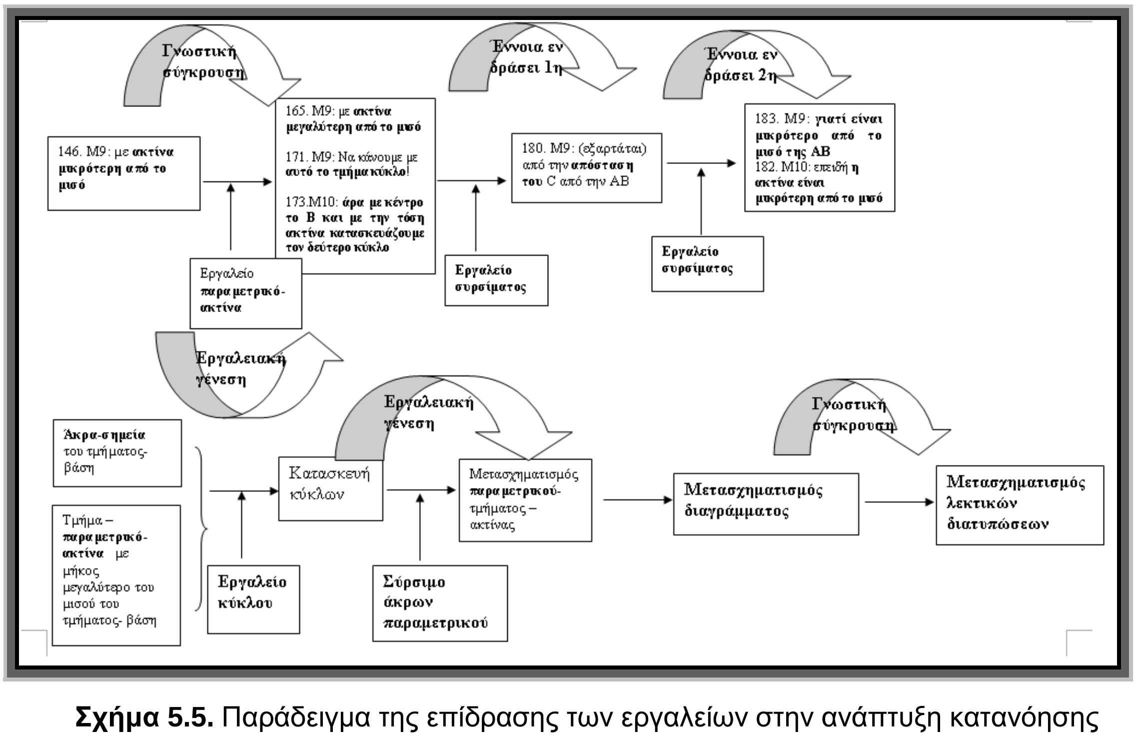
Στο διάγραμμα κάτω αναπαρίσταται μέσω του *ψευδο-μοντέλου Toulmin* με τη χρήση των εργαλείων του *θεωρητικού και πειραματικού* συρσίματος, πώς ο μαθητής οδηγείται να διατυπώσει μια *δυναμική πρόταση* λόγω της σταθερότητας / (ή μεταβλητότητας) δυναμικού σημείου. Τα σημεία C, D είναι τα δεδομένα για τις ενέργειες που ακολουθούν. Το πειραματικό σύρσιμο λειτουργεί ως *μη γλωσσική εγγύηση* για την κατανόηση της σταθερότητας του σημείου C, της μεταβλητότητας του σημείου D καθώς επίσης και της μεταβλητότητας του τμήματος CD. Η κατασκευή των ισχυρισμών C1, C2 ξεκινά από ένα παρατηρούμενο γεγονός. Έτσι είναι το *απαγωγικό μέρος* της διαδικασίας. Το εργαλείο διαμέσου της *εργαλειακής γένεσης* επιδρά στην κατανόηση της ισότητας των απέναντι πλευρών.



Σχήμα 5.4. Διαδικασία διατύπωσης δυναμικής έννοιας από μαθητή

Το *θεωρητικό σύρσιμο* επιδρά στην κατασκευή ενός υπονοούμενου *επαγωγικού κανόνα* (δηλαδή «το δυναμικό τμήμα CD μπορεί να μεταβληθεί όταν σύρεται από το σημείο D έτσι ώστε να γίνει ίσο ή όχι με ένα άλλο τμήμα») που οδηγεί στην γενίκευση του κανόνα για κάθε δυναμικό τμήμα (δηλαδή «κάθε δυναμικό τμήμα μπορεί να μεταβληθεί όταν σύρεται από το ένα άκρο του με έναν βαθμό ελευθερίας έτσι ώστε να γίνει ίσο ή όχι με ένα άλλο τμήμα»). Ο μετασχηματισμός του τμήματος οδηγεί στην κατανόηση της δυναμικής πρότασης S1 η οποία είναι ένας *παραγωγικός ισχυρισμός* (δηλαδή «αν ένα δυναμικό τμήμα σύρεται από το σημείο άκρο του που έχει ένα βαθμό ελευθερίας τότε δεν διατηρεί τα οπτικούς περιορισμούς της ισότητας με ένα άλλο τμήμα»). Επομένως, η δυναμική πρόταση S1 οδηγεί τους μαθητές να κατανοήσουν την έννοια των δυναμικών τμημάτων ως αποτέλεσμα του βαθμού ελευθερίας των άκρων σημείων του τμήματος. Κατά συνέπεια, η *εργαλειακή γνώση του δυναμικού περιβάλλοντος* είναι «γνώση με τους [δικούς της εννοιολογικούς] κανόνες», παραφράζοντας την *εργαλειακή κατανόηση* που εκφράζεται από τον Skemp ως "κανόνες δίχως λογική» (Skemp, 1978, p.9). Αυτοί οι κανόνες ενισχύουν την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών, με την ενίσχυση της *συσχετιστικής και λογικής κατανόησης* (Skemp, 1978).

Για να αποσαφηνιστεί πώς τα εργαλεία του λογισμικού παίζουν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της κατανόησης των μαθητών και στη διαμόρφωση των διατυπώσεων παρουσιάζεται το παρακάτω παράδειγμα από το διάλογο των μαθητών Μ9, Μ10, Μ14, επιπέδου 1 στο προ-τεστ.



Σχήμα 5.5. Παράδειγμα της επίδρασης των εργαλείων στην ανάπτυξη κατανόησης

Οι μαθήτριες λόγω του συρσίματος του άκρου του παραμετρικού τμήματος οδηγούνται σε επαγωγικού τύπου δηλώσεις (π.χ. η Μ9 «από την απόσταση του C από την AB», η Μ10 στο 182). Η αιτιολόγηση των μαθητριών προκύπτει από ακολουθία ενεργειών επί του σχήματος, επομένως θεωρούμε ότι η αιτιολόγησή τους είναι εμπειρικό σχήμα που δεν προέκυψε από μετρήσεις αλλά λόγω αντιληπτικής δραστηριότητας επί του σχήματος σύμφωνα με τους Harel & Sowder (1996, 2007). Στο σχήμα μέσα από το ψευδομοντέλο Toulmin αναπαρίσταται η διαδικασία μέσω της οποίας οι μαθητές οδηγούνται σε μετασχηματισμό λεκτικών διατυπώσεων ως αποτέλεσμα των γνωστικών συγκρούσεων που προκύπτουν από τους μετασχηματισμούς του δυναμικού διαγράμματος. Τα εργαλεία του παραμετρικού τμήματος, συρσίματος και κύκλου σταδιακά παρεμβαίνουν στη διαδικασία μετασχηματισμού των ορισμών και κατανόησης των μαθητών. Συγκεκριμένα οι μαθήτριες αιτιολογούν το μετασχηματισμό στο σχήμα του ισοσκελούς στην οθόνη συνδέοντάς το με το μετασχηματισμό του παραμετρικού τμήματος. Επομένως μέσω της εργαλειακής γένεσης οι μαθήτριες κατασκευάζουν ένα σχήμα εργαλειοποιημένης δράσης του εργαλείου τμήμα-παραμετρικό και κατασκευάζουν τις έννοιες εν δράσει στο [182], [183]. Το εργαλείο του συρσίματος επομένως και το τεχνούργημα του παραμετρικού τμήματος διαμεσολαβούν στην ανάπτυξη της κατανόησης των μαθητών και υπέχουν το ρόλο της εγγύησης (warrant) στο αποτέλεσμα.

Αναφορικά με τους μαθητές επιπέδου 1 ή 2 στο αρχικό van Hiele test οι παρατηρήσεις για καθεμιά φάση συνοψίζονται ως ακολούθως:

Α φάση της διαδικασίας – επίπεδο 1

Παρατηρήθηκε ότι στην πρώτη φάση τα χαρακτηριστικά που εμφανίστηκαν στους μαθητές του επιπέδου 1 από την αλληλεπίδρασή τους με τα εργαλεία είναι χαρακτηριστικά που ανήκουν στα επίπεδα 1 και στην εξέλιξη της 2.1 (Battista, 2007) ως προς τη θεωρία των van Hiele.

(α) Το εργαλείο σημείου με *πειραματικό σύρσιμο* οδήγησε τους μαθητές (π.χ. Μ1, Μ9, Μ14) σε *γνωστική σύγκρουση* λόγω της λανθασμένης αναγνώρισης του αντικειμένου (π.χ., της διατήρησης της ισότητας μεταξύ πλευρών σχήματος, της ιεράρχησης τετραπλεύρων όταν σύρεται μια κορυφή του, καθώς και της *θεσιακής κατανόησης* της επιλογής σημείου για την εφαρμογή εργαλείου). Επιπλέον, επιβεβαιώθηκε η θεωρία των van Hiele για το ρόλο των γλωσσικών συμβόλων στην κατανόηση που αναπτύσσεται μεταξύ υποκειμένων που επεξεργάζονται την ίδια δραστηριότητα (π.χ. Μ9, Μ10, Μ14). Με άλλα λόγια οι μαθητές αυτού του επιπέδου δυσκολεύονται να μετατρέψουν μια νοητική αναπαράσταση σε λεκτική ή εικονική, αλλά και μια εικονική σε λεκτική. Το *θεωρητικό σύρσιμο* του εργαλείου σημείου διαμεσολάβησε στη *δυναμική* *επανεφεύρεση* ιδιοτήτων του διαγράμματος (π.χ. Μ9, Μ13). Συνετέλεσε επομένως στη μετατροπή της νοητικής αναπαράστασης σε εικονική και λεκτική.

(β) Το *παραμετρικό εργαλείο* (Patsiomitou, 2009), από την άλλη, οδήγησε τους μαθητές (π.χ. Μ10, Μ13, Μ14) σε *γνωστική σύγκρουση* λόγω της λανθασμένης αναγνώρισης του αντικειμένου κατά τη διάρκεια της μελέτης, διαμεσολαβώντας επομένως στην *υπέρβαση γνωστικού εμποδίου*. Ως συνέπεια, οι μαθητές Μ10, Μ14 πέρασαν στη φάση αναγνώρισης του αντικειμένου μέσω του εργαλείου κύκλου και του *πειραματικού συρσίματος* του σημείου. Η εντολή καθέτου/παραλλήλου και το *πειραματικό σύρσιμο* οδήγησε στην αναγνώριση του αντικειμένου και στη μετατροπή της λεκτικής αναπαράστασης σε εικονική.

(γ) Παρατηρήθηκε αδυναμία μετάφρασης των μαθητών της λεκτικής περιγραφής σε σχέδιο ή της νοητικής εικόνας τους για το αντικείμενο σε εικονική ή λεκτική, καθώς και γνωστικά εμπόδια αναφορικά με τις έννοιες της αξονικής και περιστροφικής συμμετρίας. Τα εργαλεία περιστροφής και ανάκλασης του λογισμικού προκάλεσαν τις διαδικασίες σκέψης για την ολοκλήρωση διαδικαστικών ενεργειών και συνετέλεσαν στη διαμόρφωση μιας εικονικής αναπαράστασης και στη συνέχεια στη μετάφραση της εικονικής αναπαράστασης σε λεκτική.

(δ) Σύμφωνα λοιπόν με τα αποτελέσματα, οι μαθητές στην αρχή της διαδικασίας διατύπωναν *ανεπαρκείς ορισμούς*, *έννοιες-εν-δράσει* και επιχειρήματα που βασίζονταν σε οπτική επιβεβαίωση του διαγράμματος ή ανεπαρκείς αιτιολογήσεις σε άτυπη γλώσσα. Ως προς την κατασκευή των εννοιών διαπιστώθηκε ότι το εργαλείο σημείου και το *θεωρητικό σύρσιμο* προκάλεσαν τη διατύπωση *δυναμικών ορισμών* στους μαθητές Μ1, Μ13, Μ14 ενώ το εργαλείο παραλλήλου/καθέτου οδήγησε σε *ανεπαρκείς ορισμούς*.

(ε) Τα προβλήματα γνωστικής φύσης αλλά και κατανόησης των γεωμετρικών εννοιών επιβεβαιώθηκαν και στη μελέτη στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι. Τέσσερις από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας (Μ1, Μ10, Μ12, Μ14) είχαν αδυναμία μετάφρασης της λεκτικής πληροφορίας σε σχέδιο, αδυναμία διάκρισης της υπόθεσης από το συμπέρασμα είτε χρησιμοποίησαν στοιχεία του συμπεράσματος ως υπόθεση ή δεν διατύπωσαν καθόλου υποθέσεις. Χρησιμοποίησαν ανακριβείς ιδιότητες ή δεν αντιλήφθηκαν καθόλου τις ιδιότητες του σχήματος και είχαν αδυναμία κατασκευής της απόδειξης. Όλοι οι μαθητές και στις δύο ομάδες αντιμετώπισαν γνωστικά εμπόδια, δεν συνέδεσαν τις διαδικασίες με τις έννοιες ή τις παρερμήνευσαν.

Από τη σύγκριση των γραπτών των μαθητών της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου συνάγεται ότι οι μαθητές και των δύο ομάδων στο αρχικό στάδιο παρουσίαζαν κοινά χαρακτηριστικά, με βάση τα οποία έγινε η έρευνα. Συμπεραίνεται ότι οι μαθητές της *ομάδας ελέγχου* ήταν σε κάπως πλεονεκτικότερη θέση από τους μαθητές της *πειραματικής ομάδας* ως προς την ικανότητα μετάφρασης της πληροφορίας σε σχέδιο. Ίσος αριθμός μαθητών είχε αδυναμία διάκρισης της υπόθεσης από το συμπέρασμα είτε χρησιμοποίησε στοιχεία του συμπεράσματος ως υπόθεση ή δεν διατύπωσε καθόλου υποθέσεις. Ίσος αριθμός μαθητών και στις δύο ομάδες δεν κατασκεύασε την απόδειξη ή δεν ολοκλήρωσε την απόδειξη. Όλοι οι μαθητές αντιμετώπισαν *γνωστικά εμπόδια* και η επίλυση του προβλήματος στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι προέκυψε ως μέρος του «διδακτικού συμβολαίου» (Brousseau, 1992, p. 169), δηλαδή ως μέρος των υποχρεώσεων των μαθητών να απαντήσουν στις ερωτήσεις.

Β φάση της διαδικασίας – επίπεδο 1

Στη διάρκεια της διαδικασίας οι μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν μια αυξανόμενη ικανότητα μετάφρασης μεταξύ αναπαραστάσεων (εσωτερικών, εξωτερικών).

(α) *Παρερμηνείες* των μαθητών για έννοιες του προγράμματος σπουδών στις οποίες συναντούν *γνωστικά εμπόδια* παρουσιάστηκαν, με αποτέλεσμα να ερμηνευτούν εικονικά με διαφορετικό τρόπο από τον προβλεπόμενο. Για παράδειγμα, οι μαθητές δεν κατανοούσαν ποια η διαφορά του ρόμβου που παράγεται από την ανάκλαση ισοσκελούς από το ρόμβο που παράγεται από την ανάκλαση ισοπλεύρου. Διαπιστώθηκε επίσης ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν γνωστικά εμπόδια με την έννοια της αξονικής συμμετρίας των σχημάτων, κάτι το οποίο έγινε αντιληπτό μέσω της αποκωδικοποίησης του λανθασμένου νοητικού σχήματος σε λεκτικό και εικονικό κώδικα. Ο σύνθετος μετασχηματισμός του διαγράμματος που προέκυψε από το συνδυασμό των εργαλείων ανάκλασης και καθέτου λειτούργησε διαμεσολαβητικά στη δημιουργία οπτικά *συνδεόμενων αναπαραστάσεων*, με αποτέλεσμα την αναγνώριση υποσχημάτων στην εξέλιξη της διαδικασίας, όπως και την ανάπτυξη ικανότητας *δομικής ανάλυσης των σχημάτων* και την επανεφεύρεση *δευτερευουσών ιδιοτήτων* των σχημάτων. Οι μαθητές απέκτησαν μια αυξανόμενη ικανότητα να εξετάζουν τη δομή των σχημάτων αναλύοντας τα μέρη τους –χαρακτηριστικό επιπέδου 2 (Battista, 2007)– με αποτέλεσμα να διατυπώσουν *έννοιες-εν-δράσει*. Ο συνδυασμός *θεωρητικού συρσίματος,* ίχνους και ανάκλασης των αντικειμένων είχε επίδραση στη διατύπωση εικασιών και λογικών συσχετίσεων.

Επιπλέον, το εργαλείο ανάκλασης συνέβαλε στην ανάπτυξη *επαγωγικού συλλογισμού, απαγωγικών επιχειρημάτων και εννοιών-εν-δράσει*. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας ήταν η ανάπτυξη ικανότητας αντίληψης των σχέσεων των σχημάτων και η ανάπτυξη αιτιολόγησης.

Ο συνδυασμός του εργαλείου περιστροφής και ανάκλασης οδήγησε κάποιους μαθητές σε *γνωστική σύγκρουση* για την ιεράρχηση των σχημάτων. Ανέπτυξαν *επαγωγικό/μετασχηματιστικό* συλλογισμό και *εμπειρικά αποδεικτικά σχήματα* με το χαρακτηριστικό του *θεωρήματος-εν-δράσει*. Το εργαλείο περιστροφής και το εργαλείο ανάκλασης βοήθησαν επίσης τους μαθητές να αναπτύξουν την *ικανότητα λογικών συσχετίσεων*.

(β) Οι μαθητές προσπαθούσαν να αποστηθίσουν διαδικασίες στο λογισμικό χωρίς να τις συνδέσουν με κάποια λογική σειρά, με αποτέλεσμα να επιβαρύνονται με ένα επιπλέον γνωστικό φορτίο. *Εργαλειακά εμπόδια* (instrumental obstacles) (Patsiomitou, 2011) παρουσιάστηκαν ως προς τη *θεσιακή και σειριακή κατανόηση* όλων των εργαλείων και ειδικότερα του προσαρμοσμένου εργαλείου, για το οποίο οι μαθητές δεν επινοούσαν κάποια ιδιαίτερη χρήση, ούτε το χρησιμοποιούσαν για να απλουστεύσουν διαδικασίες (π.χ. Μ9, Μ10), ή ακόμη παρερμήνευαν το λόγο για τον οποίο είχε κατασκευαστεί με αποτέλεσμα να χρησιμοποιείται κυρίως από τους μαθητές του επιπέδου αυτού με *κατάχρηση* (π.χ. Μ12, Μ13). Για παράδειγμα, οι μαθητές (π.χ. Μ12) χρησιμοποιούσαν αυτό το εργαλείο για να κατασκευάσουν το μέσο τμήματος, η εφαρμογή του όμως δεν έδινε σταθερή κατασκευή. Η συνεργασία επομένως με μαθητές επιπέδου 2 διαδράματισε σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη του επιπέδου των μαθητών επιπέδου 1, (Για παράδειγμα: οι Μ1, Μ12 συνεργάζονταν με τις Μ2, Μ11 (επιπέδου 2 στο αρχικό τεστ) και ο Μ13 συνεργαζόταν με τους Μ7, Μ8 (επιπέδου 2 στο αρχικό τεστ), ενώ οι Μ9, Μ10, Μ14 δεν συνεργάζονταν με μαθητή επιπέδου 2 και το επίπεδο όλων ήταν 1 στο αρχικό τεστ).

(γ) Οι μαθητές οδηγήθηκαν σε παρανόηση λόγω της προσπάθειας *αφομοίωσης* της έννοιας της αξονικής συμμετρίας με την έννοια της συμμετρίας ως προς κέντρο. Ένα εργαλείο το οποίο διαμεσολάβησε στην κατανόηση της έννοιας της περιστροφικής συμμετρίας, αλλά και της ανάπτυξης της ικανότητας *λογικών συσχετίσεων,* καθώς και τη διατύπωση *μη οικονομικών* ορισμών στη δεύτερη φάση της ερευνητικής διαδικασίας ήταν το προσαρμοσμένο εργαλείο. Το προσαρμοσμένο εργαλείο τότε διαμεσολάβησε στην αποκωδικοποίηση της νοητικής εικόνας σε εικονική στην οθόνη, καθώς και στην ανάπτυξη ικανότητας δομικής ανάλυσης του σχήματος και διατύπωσης *απαγωγικών επιχειρημάτων* (π.χ. Μ13, Μ12) αλλά και στην *υπέρβαση εννοιολογικών εμποδίων*. Από την άλλη, το προσαρμοσμένο εργαλείο διαμεσολάβησε στη σύνδεση εννοιών (π.χ. της έννοιας της συμμετρίας ως προς κέντρο με την έννοια του μέσου ευθύγραμμου τμήματος).

Το διάστημα της δεύτερης φάσης της ερευνητικής διαδικασίας –και η χρήση του προσαρμοσμένου εργαλείου ή των άλλων εντολών μετασχηματισμού– ήταν σημαντικό για την εξέλιξη του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης των μαθητών, αφού υπήρξε μια αυξανόμενη ικανότητα των μαθητών (σε συνεργασία με τα άλλα μέλη της ομάδας) να ανακαλύψουν ιδιότητες των σχημάτων, ώστε τα σχήματα να αποκτήσουν το *χαρακτήρα σήματος* (π.χ. Μ1, Μ13, Μ12). Οι μαθητές επομένως ανέπτυσσαν σταδιακά την ικανότητα *δυναμικής επανεφεύρεσης*, μέσω της αλληλεπίδρασης και της ανάπτυξης ικανότητας χρήσης των εργαλείων. Ειδικότερα, εξειδικεύοντας τη δομή των *τεμνόμενων διχοτομούμενων διαγωνίων* του παραλληλογράμμου σε σημείο Ο. Κομβικά σημεία στην ερευνητική διαδικασία ήταν τα σημεία όπου οι μαθητές αποκωδικοποιούσαν λεκτικά και εικονικά τη νοητική τους εικόνα, χρησιμοποιώντας το προσαρμοσμένο εργαλείο (πολλές φορές με οικονομία ή με κατάχρηση και όχι με τον τρόπο που είχε προβλεφθεί για τη χρήση του από την ερευνήτρια).

Οι συνδεόμενες αναπαραστάσεις που οι μαθητές (π.χ. Μ1, Μ13, Μ12) δημιούργησαν στη διάρκεια της διαδικασίας αποτέλεσαν το μέσο για να διαχειριστούν την επίλυση των προβλημάτων ως αποτέλεσμα αντιστροφής ενεργειών σε συνεργασία με μαθητές επιπέδου 2.

Η σύγκριση των χαρακτηριστικών που συγκεντρώνουν οι μαθητές των δύο ομάδων του επιπέδου 1 έδωσε τα εξής αποτελέσματα:

1. Πέντε από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα μετάφρασης της λεκτικής πληροφορίας σε σχέδιο, ενώ από την ομάδα ελέγχου τέσσερις.
2. Πέντε από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα μετάφρασης της «αν …τότε» δήλωσης, ενώ από την ομάδα ελέγχου τρεις.
3. Τέσσερις από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα να συγκρίνουν τα σχήματα βάσει των ιδιοτήτων τους, ενώ από την ομάδα ελέγχου τρεις.
4. Τέσσερις από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα να διακρίνουν τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων, ενώ από την ομάδα ελέγχου δύο.
5. Τρεις από τους μαθητές της ομάδας ελέγχου ενεργοποιούσαν τον κατάλογο των ιδιοτήτων που γνώριζαν, ενώ από την πειραματική ομάδα δύο. Επομένως οι μαθητές της πειραματικής ομάδας οδηγούνταν σε συμπεράσματα όχι λόγω της αποστήθισης των ιδιοτήτων αλλά επειδή άρχισαν να αποκτούν την κριτική/λογική ικανότητα να διακρίνουν ποια ιδιότητα είναι σημαντική για την απόδειξη.
6. Τέσσερις από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα να κατασκευάζουν την απόδειξη, ενώ από την ομάδα ελέγχου ένας.

Από τη σύγκριση των γραπτών των μαθητών συνάγεται ότι οι μαθητές και των δύο ομάδων στο αρχικό στάδιο παρουσίαζαν κοινά χαρακτηριστικά. Συμπεραίνεται ότι οι μαθητές της *πειραματικής ομάδας ήταν –στο στάδιο αυτό–* σε πλεονεκτικότερη θέση από τους μαθητές της *ομάδας ελέγχου* ως προς την ικανότητα μετάφρασης της «*αν …τότε*» δήλωσης και κατασκευής της απόδειξης. Ταυτόχρονα παρατηρείται η βελτίωση των μαθητών Μ1, Μ10, Μ12, Μ14 της πειραματικής ομάδας ως προς την ικανότητα μετάφρασης της λεκτικής πληροφορίας σε σχέδιο, κοινό χαρακτηριστικό με το πρώτο στάδιο.

Γ φάση της διαδικασίας – επίπεδο 1

(α) Όπως είδαμε στη δεύτερη φάση, το εργαλείο ανάκλασης βοήθησε τους μαθητές επιπέδου 1 της πειραματικής ομάδας να αναπτύξουν την ικανότητα δομικής ανάλυσης των σχημάτων όσο και την ικανότητα αντιληπτικής ιεράρχησης. Αυτό έγινε φανερό στην τρίτη φάση, όπου οι μαθητές **άρχισαν να περιγράφουν** τις ιδιότητες των στοιχείων του σχήματος με τυπικό τρόπο. Στην αρχή της διαδικασίας διατύπωναν *αντιληπτικούς ανακριβείς* ορισμούς, στην πορεία όμως προέβησαν σταδιακά στη διαμόρφωση *μη οικονομικών ορισμών ή οικονομικών* σε συνεργασία (π.χ. η Μ14, Μ10 εκφραζόταν με αυστηρά άτυπο τρόπο και οι αιτιολογήσεις της ήταν ανεπαρκείς). Στο τέλος πια της διαδικασίας είχαν καταφέρει να διατυπώνουν *αυθαίρετους οικονομικούς ορισμούς* και να προβαίνουν στη συσχέτιση εννοιών.

(β) Στην αρχή της διαδικασίας οι μαθητές αδυνατούσαν να διατυπώσουν *παραγωγικά επιχειρήματα*. Μια τέτοια δυνατότητα άρχισε να εμφανίζεται στην τρίτη φάση, όπου μπόρεσαν να αναπτύξουν παραγωγικό συλλογισμό ή συνδυασμό απαγωγικού και παραγωγικού συλλογισμού, αλληλεπιδρώντας με τις *ερωτήσεις σκαλωσιάς* της ερευνήτριας. Δηλαδή, «μετακινήθηκαν από τον οπτικό συλλογισμό, επειδή το σημαντικότερο κριτήριο για τον προσδιορισμό ενός σχήματος είναι αν ικανοποιεί ένα ακριβές σύνολο τυπικών ιδιοτήτων» (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.3, Battista 2007, p. 851).

(γ) Η συμμετοχή στο μαθησιακό μονοπάτι θεωρείται αναγκαία προϋπόθεση για την ανάπτυξη παραγωγικών επιχειρημάτων. Επιπλέον, και σε μικρότερο βαθμό, οδηγήθηκαν σε συνδέσεις εννοιών που είχαν κατασκευάσει σε προηγούμενη φάση. Για παράδειγμα, οι αναπαραστάσεις της τρίτης φάσης (λεκτικές και εικονικές) της Μ12 είναι συνδεδεμένες εννοιολογικά και διαδικαστικά με την πρώτη και δεύτερη φάση της ερευνητικής διαδικασίας. Συνεπώς, οι μαθητές ανέπτυξαν την ικανότητα να λειτουργούν με τα σχήματα (αναγνωρίζουν υποδομές, μετακινούνται από το ένα αναπαραστατικό σύστημα στο άλλο). Οι μαθητές μπόρεσαν να διατυπώσουν λογικές συσχετίσεις μεταξύ στοιχείων του διαγράμματος (π.χ. την έννοια του άξονα συμμετρίας) λόγω των *συνδεόμενων οπτικών αναπαραστάσεων* που είχαν συνδέσει νοητικά.

Μέσω της διαδικασίας οι μαθητές απέκτησαν την ικανότητα μετατροπής της εικονικής αναπαράστασης σε λεκτική, και αντίστροφα. Οι συνδεόμενες αναπαραστάσεις της τρίτης φάσης διαμεσολάβησαν ώστε οι μαθητές να συσχετίσουν τη μορφή στο εσωτερικό με την ιδιότητα που αποκτούν οι διαγώνιες στο εξωτερικό τετράπλευρο και να εκφράσουν *θεωρήματα-εν-δράσει* ή να αντιμετωπίσουν *γνωστικές συγκρούσεις* ως προς την *ιεραρχία των σχημάτων*. Αντικατέστησαν ακόμα σε διάφορα σημεία της διαδικασίας το *λανθασμένο σχήμα αυθεντίας* με ένα σχήμα *εμπειρικό-αντιληπτικό*. Στο τέλος πια της διαδικασίας οι μαθητές είχαν αναπτύξει την ικανότητα διαμόρφωσης υποστόχων και αποδεικτικής διαδικασίας με *παραγωγικό συλλογισμό* (π.χ. Μ1, Μ12, Μ13, Μ14).

Η μελέτη στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι έδωσε τα εξής αποτελέσματα:

1. Πέντε από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα να κατανοούν την έννοια της περιστροφής κατά 90^o, να μετατρέπουν δηλαδή τη λεκτική πληροφορία σε σχέδιο, ενώ από την ομάδα ελέγχου δύο.
2. Τέσσερις από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα μοντελοποίησης και επίλυσης του προβλήματος, ενώ από την ομάδα ελέγχου ένας.
3. Δύο από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα σύγκρισης των σχημάτων βάσει των ιδιοτήτων τους, ενώ από την ομάδα ελέγχου τρεις.
4. Δύο από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα ανάπτυξης παραγωγικού συλλογισμού και διατύπωσης μιας λογικής σχέσης μεταξύ των στοιχείων του διαγράμματος, ενώ από την ομάδα ελέγχου ένας.

Από τη σύγκριση των γραπτών των μαθητών συνάγεται ότι οι μαθητές και των δύο ομάδων στο αρχικό στάδιο παρουσίαζαν κοινά χαρακτηριστικά. Συμπεραίνεται ότι οι μαθητές της *πειραματικής ομάδας* ήταν σε πλεονεκτικότερη θέση από τους μαθητές της *ομάδας ελέγχου* ως προς την ικανότητα να μετασχηματίσουν ένα αντικείμενο με περιστροφή και, επομένως, την ικανότητα να μετατρέψουν τη λεκτική πληροφορία σε σχέδιο. Επομένως οι μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα μοντελοποίησης και επίλυσης του προβλήματος με σύγκριση των σχημάτων βάσει των ιδιοτήτων τους, όπως επίσης και την ικανότητα παραγωγικού συλλογισμού.

Δ φάση της διαδικασίας – επίπεδο 1

Σε αλληλεπίδραση με τους σύνθετους μετασχηματισμούς των ΣΟΕΑ παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές ανέπτυξαν *οπτικές ικανότητες*, καθώς οπτικοποίησαν αμετάβλητες ιδιότητες λόγω της επίδρασης συρσίματος στην αλληλουχία μετασχηματισμών του διαγράμματος ή λόγω της επίδρασης του ίχνους και του συρσίματος, αναγνώρισαν οπτικά τη λύση του προβλήματος και μπόρεσαν να αναπτύξουν μια στρατηγική –σημείο δυναμικής επανεφεύρεσης της λύσης του προβλήματος– ανακαλώντας έννοιες (π.χ. της μεσοπαραλλήλου) που είχαν κατασκευάσει στη δεύτερη φάση. Παρατηρήθηκε ακόμα η ανάπτυξη της ικανότητας *μετασχηματιστικού συλλογισμού* (π.χ. Μ13), καθώς οι μαθητές εκδήλωσαν την ικανότητα μετατροπής από εικονική σε λεκτική ή νοητική και αντίστροφα.

Οι ΣΟΕΑ της τέταρτης φάσης δηλαδή αποτέλεσαν το τελευταίο στάδιο της διαδικασίας αναφορικά με την απόκτηση και τον έλεγχο της ικανότητας μετατροπής μεταξύ των αναπαραστάσεων. Ως προς τη λεκτική ικανότητα: αρχικά οι μαθητές διατύπωναν άτυπα ή με δυναμικό τρόπο ιδιότητες του παραλληλογράμμου ή ερμήνευαν με συμβολικό τρόπο ιδιότητες των σχημάτων. Στη συνέχεια απέκτησαν την ικανότητα διατύπωσης οικονομικών (ή μη οικονομικών) ορισμών, χαρακτηριστικό επιπέδου 3.1 (Battista, 2007).

Οι ΣΟΕΑ τέταρτης φάσης διαμεσολάβησαν στην ανάπτυξη *θεωρημάτων-εν-δράσει, γενικεύσεων* (λόγω του εργαλείου ίχνους, πειραματικού συρσίματος) και *παραγωγικού συλλογισμού* (π.χ. αποδεικτικών σχημάτων της μορφής του *γενικού παραδείγματος* ή *πειράματος σκέψης*), χαρακτηριστικό επιπέδου 3.2-3.3 (Battista, 2007), ως αποτέλεσμα της σύνθεσης εργαλείων. Επιπλέον οι μαθητές απέκτησαν *ικανότητες εφαρμογής* του προβλήματος.

Η μη συμμετοχή της Μ9 στην πειραματική διαδικασία στις δυο τελευταίες φάσεις είχε ως αποτέλεσμα να ανακόψει την εξέλιξή της στη σκάλα των επιπέδων σύμφωνα με τη θεωρία των van Hiele, όπως διαπιστώθηκε από τη συμμετοχή της στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι.

Η σύγκριση των χαρακτηριστικών που συγκεντρώνουν οι μαθητές των δύο ομάδων του επιπέδου 1 στο τελικό στάδιο της μελέτης στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι έδωσε τα εξής αποτελέσματα:

1. Όλοι οι μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα να διακρίνουν τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων, ενώ από την ομάδα ελέγχου μόνο δυο.
2. Πέντε μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα (α) να προσδιορίζουν τις σχέσεις μεταξύ στοιχείων του διαγράμματος τυπικά (και το σημαντικότερο κριτήριο για τον προσδιορισμό ενός σχήματος είναι να ικανοποιεί ένα ακριβές σύνολο ιδιοτήτων), (β) να διατυπώνουν οικονομικό ορισμό, (γ) να καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι αν ένα σχήμα έχει μια ιδιότητα έχει και μια άλλη. Οι ικανότητες αυτές εμφανίστηκαν μόνο σε δύο μαθητές από την ομάδα ελέγχου.

Από τη σύγκριση των γραπτών των μαθητών συνάγεται ότι οι μαθητές και των δύο ομάδων στο τελικό στάδιο παρουσίαζαν κοινά χαρακτηριστικά. Συμπεραίνεται ότι οι μαθητές της *πειραματικής ομάδας* ήταν σε πλεονεκτικότερη θέση από τους μαθητές της *ομάδας ελέγχου* ως προς την ικανότητα να διακρίνουν σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων όπως τις αντιλαμβάνονται από το διάγραμμα, να προσδιορίσουν τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του διαγράμματος τυπικά, να διατυπώσουν οικονομικό ορισμό, να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι αν ένα σχήμα έχει μια ιδιότητα έχει και μια άλλη και να κάνουν ανάλυση σε πραγματικό ή νοητό επίπεδο.

Α φάση της διαδικασίας – επίπεδο 2

Στην πρώτη φάση τα χαρακτηριστικά που εμφανίστηκαν στους μαθητές του επιπέδου 2, ως συνέπεια της αλληλεπίδρασης τους με τα εργαλεία, είναι:

(α) Το εργαλείο σημείου και η μεταβλητότητά του με το *πειραματικό σύρσιμο* προκάλεσε τη γνωστική σύγκρουση των μαθητών. Παρατήρησαν ότι το σύρσιμο σημείου-κορυφής του σχεδίου του παραλληλογράμμου δεν διατηρεί τις ιδιότητες της παραλληλίας και ισότητας (π.χ. Μ7). Η τεχνική του *θεωρητικού συρσίματος* και ο μετασχηματισμός της θέσης του σημείου επέδρασε στον τρόπο συλλογισμού των μαθητών (π.χ. Μ7, Μ11, Μ6), ώστε μέσω της διαδικασίας οδηγήθηκαν να *επανεφεύρουν δυναμικά* την ιδιότητα της ισότητας των τμημάτων. Οδηγήθηκαν έτσι σε διαδικασίες σκέψης ώστε να ανακαλύψουν μια διαδικασία για να κατασκευάσουν μια ιδιότητα του σχήματος, σημείο στο οποίο αντιμετώπισαν *γνωστική σύγκρουση* λόγω του εργαλείου σημείου. Η λεκτική κατανόηση εμφανίστηκε σχεδόν ταυτόχρονα με τη *θεσιακή κατανόηση* επιλογής των σχηματικών μονάδων. Συνεπώς οι μαθητές ανέπτυξαν την ικανότητα μετατροπής μιας νοητικής αναπαράστασης σε εικονική και λεκτική. Ανέπτυξαν επίσης *επαγωγικό συλλογισμό* ως αποτέλεσμα του *πειραματικού συρσίματος* επί του σημείου.

Το εργαλείο συρσίματος διαμεσολάβησε στη σύνδεση *της διαδικαστικής με την εννοιολογική* γνώση των μαθητών. Οι δράσεις μαθηματικοποίησης των μαθητών είχαν οριζόντιο χαρακτήρα. Οι μαθητές χρησιμοποίησαν εργαλεία από το περιβάλλον του λογισμικού για την κατασκευή της παραλληλίας των πλευρών. Μέσω του εργαλείου του συρσίματος κατασκεύασαν την έννοια της *αμεταβλητότητας της παραλληλίας* των πλευρών, συνέδεσαν επομένως αφηρημένες οντότητες. Το εργαλείο δηλαδή του συρσίματος σε συνδυασμό με το εργαλείο της κατασκευής παραλλήλων οδήγησε τους μαθητές σε *κατακόρυφη μορφή μαθηματικοποίησης.*

(β) Λόγω δυσκολίας κατανόησης της *σειριακής* και *θεσιακής επιλογής* των σχηματικών μονάδων και εργαλείων κατασκευής καθέτων του λογισμικού, οι μαθητές οδηγήθηκαν σε *εργαλειακά εμπόδια* (π.χ. Μ4), ωθούμενοι έτσι από το περιβάλλον του λογισμικού να αναπτύξουν την *ικανότητα αποκωδικοποίησης* μιας νοητικής ή και λεκτικής αναπαράστασης σε εικονική στην οθόνη.

(γ) Οι μαθητές εξειδίκευαν τις κατασκευές τους, προσδίδοντας στο διάγραμμα περισσότερες ιδιότητες από αυτές που ήταν αναγκαίες, που σημαίνει ότι δεν γνώριζαν ποιες ήταν οι ιδιότητες του σχήματος (παραλληλογράμμου, ρόμβου κ.λπ.) ή ότι δεν είχαν την ικανότητα να εκλεπτύνουν σε έννοια υψηλότερου επιπέδου από του χαμηλότερου (π.χ. του ορθογωνίου παραλληλογράμμου από την έννοια του παραλληλογράμμου), δεν είχαν δηλαδή αναπτύξει την ικανότητα ιεράρχησης των σχημάτων.

(δ) Με *θεωρητικό σύρσιμο* σημείου οι μαθητές κατασκεύασαν μη σταθερές κατασκευές ώστε οπτικά να επιβεβαιώνουν ιδιότητες του σχήματος τις οποίες όμως δεν διατύπωναν λεκτικά (π.χ. Μ8).

(ε) Απέκτησαν την ικανότητα χρήσης εργαλείων με μεγαλύτερη ευκολία από τους μαθητές του επιπέδου 1 (π.χ. Μ5, Μ6, Μ7, Μ8), αποκωδικοποιώντας τις διαδικασίες, επινοώντας προσωπικό διαδικαστικό τρόπο και χρησιμοποιώντας τα εργαλεία του λογισμικού με οικονομία. Η *αποκωδικοποίηση* των εργαλείων γινόταν ταυτόχρονα λεκτικά και εικονικά (π.χ. Μ8 στο [155]).

(στ) Η χρήση εργαλείου του λογισμικού με *κατάχρηση* (π.χ. η χρήση του εργαλείου κύκλου από τον Μ3) δεν οδηγούσε σε σταθερές κατασκευές, με αποτέλεσμα οι μαθητές να οδηγούνται να αναπτύξουν διαδικασίες σκέψης ώστε η κατασκευή τους να γίνει σταθερή.

(ζ) Το *παραμετρικό εργαλείο* βοήθησε αντιληπτικά τους μαθητές (π.χ. Μ3) να υπερβούν το *εργαλειακό εμπόδιο*, με αποτέλεσμα να διατυπώσουν συμπερασματική έκφραση και να αναπτύξουν την *ικανότητα αποκωδικοποίησης* της νοητικής αναπαράστασης σε εικονική.

Η σύγκριση των χαρακτηριστικών που συγκεντρώνουν οι μαθητές των δύο ομάδων του επιπέδου 2 έδωσε τα εξής αποτελέσματα:

1. Τρεις από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας εξειδίκευσαν το διάγραμμα, ως αποτέλεσμα του οπτικού συλλογισμού που ανέπτυξαν, ενώ από την ομάδα ελέγχου δύο.
2. Ίσος αριθμός μαθητών και από τις δύο ομάδες συνέκριναν τα σχήματα βάσει των ιδιοτήτων τους ή διέκριναν τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων.
3. Δύο μαθητές της πειραματικής ομάδας ανέπτυξαν την ικανότητα αναγνώρισης των υποσχημάτων, ενώ από την ομάδα ελέγχου πέντε.
4. Πέντε μαθητές της πειραματικής ομάδας ανέπτυξαν συνδυασμό οπτικού και παραγωγικού συλλογισμού κατά τη διάρκεια επίλυσης προβλημάτων, ενώ από την ομάδα ελέγχου τρεις.
5. Ίσος αριθμός μαθητών και από τις δύο ομάδες εφάρμοσε μια προσωπική μέθοδο για την απόδειξη του προβλήματος.
6. Τέλος, τρεις από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας ολοκλήρωσαν την απόδειξη, ενώ από την ομάδα ελέγχου τέσσερις.

Από τη σύγκριση των γραπτών των μαθητών συνάγεται ότι στο αρχικό στάδιο ίσος αριθμός μαθητών και της πειραματικής και της ομάδας ελέγχου παρουσίαζαν κοινά χαρακτηριστικά. Τέσσερις μαθητές της *ομάδας ελέγχου ολοκλήρωσαν την απόδειξη της πρότασης,* ενώ της *πειραματικής ομάδας* τρεις. Συμπεραίνεται ότι οι μαθητές της *ομάδας ελέγχου* στο στάδιο αυτό της μελέτης ήταν σε ίση (ή και σε πλεονεκτικότερη θέση) από τους μαθητές της *πειραματικής* *ομάδας* ως προς την ικανότητα μετάφρασης της πληροφορίας σε σχέδιο, διαχωρισμού της υπόθεσης από το συμπέρασμα και την ικανότητα απόδειξης μιας πρότασης.

Β φάση της διαδικασίας – επίπεδο 2

(α) Η εντολή περιστροφής οδήγησε τους μαθητές σε *εργαλειακό εμπόδιο αποκωδικοποίησης* της *σειριακής* χρήσης του, που σημαίνει ότι οι μαθητές δεν είχαν κατασκευάσει νοητικά την αντιστοίχηση 1-1 του αντικειμένου και του συμμετρικού του στα στατικά μέσα, γεγονός που εκφράστηκε και λεκτικά.

(β) Το *θεωρητικό σύρσιμο* του κέντρου περιστροφής τριγώνων ώστε τα μέσα των συμμετρικών πλευρών και το σημείο περιστροφής να συμπέσουν οδήγησε –μέσω της διαδικασίας *εργαλειακής γένεσης* που αναπτύχθηκε– στην αναγνώριση του παραλληλογράμμου ως αποτελούμενου από τα υποσχήματα των συμμετρικών τριγώνων. Οι μαθητές αναγνώρισαν δηλαδή το σχήμα του παραλληλογράμμου, ως *δομική σύνθεση* δύο συμμετρικών τριγώνων, το κέντρο του οποίου είναι το μέσο της βάσης του αρχικού τριγώνου. Συμπεραίνουμε έτσι ότι μέσω της διαδικασίας ανέπτυξαν σταδιακά την κατανόηση των μερών του παραλληλογράμμου, δηλαδή τη *μερολογική κατανόηση* του σχήματος.

(γ) *Εργαλειακά εμπόδια* παρουσιάστηκαν ως προς τη *θεσιακή κατανόηση* του προσαρμοσμένου εργαλείου (π.χ. Μ3). Το αποτέλεσμα της κατανόησης της χρήσης του εργαλείου και επομένως της κατασκευής του σχήματος χρήσης του εργαλείου οδήγησε στην κατανόηση του συμμετρικού αντικειμένου ως προς κέντρο. Για παράδειγμα, η χρήση του προσαρμοσμένου εργαλείου για την κατασκευή των συμμετρικών σημείων ευθύγραμμου τμήματος είχε ως αποτέλεσμα την κατασκευή των τεμνόμενων τμημάτων με κοινό μέσο το σημείο Ο, δηλαδή τη δομή των τεμνόμενων διαγωνίων του παραλληλογράμμου. Σύροντας την κατασκευή από το σημείο Ο, οι ιδιότητες του σχήματος παρέμεναν αμετάβλητες, δηλαδή το σημείο Ο παρέμενε το μέσο των δύο τμημάτων και τα συμμετρικά σημεία διατηρούσαν τις ιδιότητες των συμμετρικών αντικειμένων, αφού είχαν κατασκευαστεί ως 1-1 αντιστοιχήσεις, λόγω της χρήσης του προσαρμοσμένου εργαλείου. Αυτή η εγγενής ιδιότητα του εργαλείου οδήγησε τους μαθητές (π.χ. Μ4, Μ11) να αναγνωρίσουν το σχήμα του παραλληλογράμμου, να χρησιμοποιήσουν τυπική γλώσσα στην αιτιολόγηση και κριτήριο το παραλληλόγραμμο.

(δ) Οι μαθητές απέκτησαν έτσι την ικανότητα να μετατρέψουν μια εικονική αναπαράσταση σε λεκτική (π.χ. μέσω της οπτικοποίησης των τεμνόμενων διαγωνίων), αλλά και να συμπληρώσουν τις γραμμές του σχήματος προκειμένου να αναγνωρίσουν οπτικά το σχήμα του παραλληλογράμμου ενώ δεν είχε εμφανιστεί ολόκληρο στην οθόνη ή είχαν εμφανιστεί ορισμένα στοιχεία του. Συνεπώς, απέκτησαν σταδιακά την ικανότητα να ολοκληρώνουν ένα σχήμα νοητικά ως σύνθεση των υποσχημάτων του.

(ε) 1. Παρερμηνείες για έννοιες του Προγράμματος Σπουδών στις οποίες οι μαθητές συναντούν γνωστικά εμπόδια παρουσιάστηκαν και ερμηνεύτηκαν εικονικά με διαφορετικό τρόπο από τον προβλεπόμενο. Διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν γνωστικά εμπόδια με την έννοια της αξονικής συμμετρίας των σχημάτων, κάτι που έγινε αντιληπτό μέσω της αποκωδικοποίησης του λανθασμένου νοητικού σχήματος σε λεκτικό και εικονικό κώδικα. Οι μαθητές οδηγήθηκαν δηλαδή σε παρανόηση λόγω της προσπάθειας αφομοίωσης της έννοιας της αξονικής συμμετρίας με την έννοια της συμμετρίας ως προς κέντρο. Για παράδειγμα, μέσω της χρήσης του προσαρμοσμένου εργαλείου (π.χ. Μ3) η έννοια «άξονες συμμετρίας του σχήματος» με την έννοια «συμμετρικό του σχήματος ως προς την πλευρά του». Το εργαλείο ανάκλασης τους βοήθησε να επανεφεύρουν δυναμικά μια ιδιότητα του σχήματος και να υπερβούν κάποιο *γνωστικό εμπόδιο*, ιεραρχώντας αντιληπτικά τα σχήματα.

Μόνοι τους ή σε συνεργασία με άλλο μαθητή του ίδιου επιπέδου van Hiele οδηγούνται να συνδέσουν την έννοια της αξονικής συμμετρίας του ορθογωνίου με την έννοια των μεσοπαραλλήλων (π.χ. ομάδα Μ3, Μ4 ή Μ11, Μ12, Μ1). Αντιλαμβάνονται ότι η ιδιότητα των αξόνων συμμετρίας που ισχύει στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο δεν ισχύει και στο ρόμβο, οδηγούνται έτσι σε μια αντιληπτική ιεράρχηση των εννοιών λόγω των αξόνων συμμετρίας τους. Αναλύουν συνεπώς δομικά το σχήμα λόγω των ιδιοτήτων του με αποτέλεσμα να οργανώσουν μια συνεπαγωγική ιεράρχηση των σχημάτων. Το προσαρμοσμένο εργαλείο και το εργαλείο ανάκλασης διαμεσολάβησαν επομένως στην ανάπτυξη της ικανότητας *δομικής ανάλυσης* του σχήματος.

Η απόκρυψη της μεσοκαθέτου και η ανάκλαση του ισοσκελούς (βλ. σχήμα 5.47) είχε ως αποτέλεσμα (α) την οπτικοποίηση του ρόμβου ως σύνθεση ισοσκελών, (β) την ταύτιση της μεσοκαθέτου με την κατακόρυφη διαγώνιο του ρόμβου.

Ο συνδυασμός των εργαλείων απόκρυψης, ανάκλασης και πειραματικού συρσίματος οδήγησε τους μαθητές (π.χ. Μ5) να σχηματίσουν νοητικά την κατακόρυφη διαγώνιο του σχήματος, η οποία συμπίπτει με τη μεσοκάθετο του ισοσκελούς τριγώνου, ώστε να διατυπώσουν την ιδιότητα της διχοτόμησης και καθετότητας, να μεταφράσουν συνεπώς μια εικονική αναπαράσταση σε λεκτική. Η κατανόηση των ιδιοτήτων του ρόμβου, τις οποίες δεν γνώριζαν εξαρχής, επήλθε σε αλληλεπίδραση με τα εργαλεία.

Έτσι, με την ανάκλαση του ισοσκελούς ως προς τη βάση του προσάρμοσαν το *γνωστικό σχήμα* που είχαν κατασκευάσει μέσω της διδασκαλίας για το ρόμβο, αναπτύσσοντας την *αντιληπτική ιεράρχηση* των εννοιών (α) ρόμβος ως αποτέλεσμα ανάκλασης ισοσκελούς και (β) ρόμβος ως σύνθεση ισοπλεύρων (π.χ. Μ5). Το εργαλείο ανάκλασης διαμεσολάβησε στη διαμόρφωση της δομής του ρόμβου ως σύνθεσης ισοσκελών. Συμπεραίνεται ότι μέσω της διαδικασίας οι μαθητές οδηγήθηκαν να αντιληφθούν και να ερμηνεύσουν τις διαγώνιες του ρόμβου με διπλό τρόπο: (α) την οριζόντια διαγώνιο του ρόμβου και ως βάση του ισοσκελούς, και (β) τη μεσοκάθετο του ισοσκελούς και ως κάθετη διαγώνιο του ρόμβου – να αντιληφθούν συνεπώς τους διπλούς ρόλους κάποιων στοιχείων του διαγράμματος, χαρακτηριστικό επιπέδου 3.

(ε). 2. Οι μαθητές αντιμετώπισαν επιπλέον γνωστικό εμπόδιο αφού θεώρησαν ότι οι διαγώνιες του παραλληλογράμμου είναι και άξονες συμμετρίας του σχήματος. Το εργαλείο της ανάκλασης διαμεσολάβησε ώστε να κατανοήσουν ότι οι κορυφές δεν είναι συμμετρικές ως προς τις διαγώνιες (π.χ. Μ4, Μ11). Δηλαδή, η κατασκευή του συμμετρικού μιας κορυφής του σχήματος ως προς άξονα συμμετρίας τη διαγώνιό τους –με τη λειτουργία ανάκλασης του λογισμικού– είχε ως αποτέλεσμα τη γνωστική σύγκρουση μεταξύ αυτού που οπτικοποιούν στην οθόνη και αυτού που γνωρίζουν. Μέσω της διαδικασίας *εργαλειακής γένεσης* οι μαθητές κατασκεύασαν ένα όργανο που περιλαμβάνει το αντικείμενο και τις ιδιότητές του (π.χ. το είδωλο του σημείου εκτός του σχήματος) οι οποίες δεν προσαρμόζονται στο γνωστικό σχήμα που ήδη υπήρχε, ήρθαν έτσι σε γνωστική σύγκρουση και οδηγήθηκαν να κατασκευάσουν ένα νέο γνωστικό σχήμα που περιλάμβανε την έννοια του συμμετρικού ως προς άξονα συμμετρίας τη διαγώνιο, καθώς και την αντιληπτική ιεράρχηση των παραλληλογράμμων (π.χ. Μ4, Μ5). Αντιμετώπισαν γνωστική σύγκρουση καθώς οπτικά δεν επιβεβαιώνεται η ιδιότητα της καθετότητας στη μεσοπαράλληλο του ρόμβου την οποία είχαν συσχετίσει με την έννοια του άξονα συμμετρίας.

(ε) 3. Στη δεύτερη φάση της ερευνητικής διαδικασίας οι μαθητές συνέδεσαν την έννοια της αξονικής συμμετρίας του ορθογωνίου με την έννοια των μεσοπαραλλήλων. Η γενίκευση αυτής της έννοιας για κάθε τετράπλευρο οδήγησε τους μαθητές σε *γνωστικές συγκρούσεις* (π.χ. στην κατασκευή των αξόνων συμμετρίας του ρόμβου) και στη συνέχεια στη συσχέτιση της αξονικής συμμετρίας με την έννοια της καθετότητας. Η *γνωστική σύγκρουση* οδήγησε τους μαθητές να κατανοήσουν ότι το πλήθος των αξόνων συμμετρίας στο τετράγωνο ως ειδικότερου σχήματος τετραπλεύρου διαφέρει από των υπόλοιπων τετραπλεύρων. Μέσω δηλαδή της διαδικασίας κατασκευάστηκε συνειδητά η έννοια της αξονικής συμμετρίας λόγω της επίδρασης του εργαλείου ανάκλασης, σε δραστηριότητα που έχει προηγηθεί, με αποτέλεσμα οι μαθητές να αποκτήσουν την ικανότητα να αποκωδικοποιούν τη νοητική πληροφορία σε εικονική και λεκτική πληροφορία. Η δραστηριότητα της δεύτερης φάσης διαμεσολάβησε ώστε να αναπτύξουν την ικανότητα ιεράρχησης μεταξύ των τετραπλεύρων ως ειδικότερων ή γενικότερων κατασκευών του παραλληλογράμμου.

(στ) Η ικανότητα χρήσης των εργαλείων έπαιξε σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη της διαδικασίας κατασκευής των εννοιών, αφού οι μαθητές εφάρμοσαν συνδυασμούς διαφορετικών εργαλείων και εντολών για να αποκωδικοποιήσουν τη νοητική τους εικόνα σε εικονική και στη συνέχεια σε λεκτική, διατυπώνοντας τυπικά τις ιδιότητες του σχήματος. Ανέπτυξαν μια αυξανομένη ικανότητα να περιγράψουν τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων των σχημάτων, «χρησιμοποιώντας ένα συνδυασμό άτυπων και τυπικών περιγραφών, οι οποίες όμως εξακολουθούν να μην μπορούν να διευκρινίσουν επαρκώς τα σχήματα» (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.2) (Battista, 2007, p. 851).

Οι μαθητές ανέπτυξαν την ***ικανότητα αντιστροφής ενεργειών*** μέσω της αποκωδικοποίησης ιδιοτήτων με σύνθετη χρήση εργαλείων (π.χ. Μ11, Μ4, Μ7). Η κατασκευή των σχημάτων προέκυψε με συνδυασμούς εργαλείων (π.χ. το προσαρμοσμένο εργαλείο, καθέτου, κύκλου), έτσι ώστε να αποκωδικοποιούνται οπτικά ιδιότητες των σχημάτων τις οποίες οι μαθητές είχαν κατασκευάσει στο πρώτο τμήμα της δεύτερης φάσης της διαδικασίας (π.χ. με αντίστροφη διαδικασία της κατασκευής αξόνων συμμετρίας). Οι διατυπώσεις τους καταδεικνύουν ότι οι μαθητές συνέδεσαν την έννοια του άξονα με την έννοια της καθετότητας (καθώς και τη σύνδεση παραλληλίας και καθετότητας), δηλαδή συνδέσεις μεταξύ εννοιών. Ανέπτυξαν επομένως *αφαιρετικές διαδικασίες σκέψης* και οδηγήθηκαν να κατασκευάσουν συσχετίσεις ιδιοτήτων. Η κατανόηση των ιδιοτήτων είναι συνειδητή και εμπεδωμένη και εμφανίστηκε στην τρίτη φάση.

Ο συνδυασμός των εργαλείων διαμεσολάβησε ώστε οι μαθητές να ανακαλύψουν /επανεφεύρουν ιδιότητες των σχημάτων και (α) στην αποκωδικοποίηση μιας νοητικής εικόνας σε εικονική και στη συνέχεια σε λεκτική, (β) στην κατασκευή του *χαρακτήρα σήματος* του σχήματος και (γ) στην ανάπτυξη ικανότητας ερμηνείας ενός στοιχείου του σχήματος με διαφορετικό τρόπο. Δηλαδή, την απόδοση διπλού ρόλου στο τμήμα.

Συνεπώς, οι μαθητές μέσω των διαδικασιών της δεύτερης φάσης απέκτησαν την ικανότητα να εκλεπτύνουν τη δομή του παραλληλογράμμου προσθέτοντας στο σχήμα του περισσότερες ιδιότητες. Έτσι, το σχήμα του ορθογωνίου απέκτησε μια θέση στην ιεραρχικά υψηλότερη δομή ως ειδικότερη μορφή από τη μορφή του παραλληλογράμμου. Οι μαθητές ανέπτυξαν επομένως την *ικανότητα ιεράρχησης* των τετραπλεύρων.

(ζ) Από την οπτική γωνία της δομικής ανάλυσης των σχημάτων διαπιστώνεται μια *αυξανομένη ικανότητα* των μαθητών «να αναγνωρίζουν και να περιγράφουν τα στοιχεία των σχημάτων, χρησιμοποιώντας γεωμετρικές έννοιες και όρους που παραμένουν ανεπαρκείς για να διευκρινίσουν τα σχήματα» (Battista, 2007, p. 851) (χαρακτηριστικό επιπέδου 2.2). Αυτό προκύπτει ως αποτέλεσμα της νοητικής σύνδεσης των αναπαραστάσεων στα διαφορετικά σημεία της ερευνητικής διαδικασίας. Κατά συνέπεια, οι *συνδεόμενες αναπαραστάσεις* οδήγησαν τους μαθητές σε *γνωστικές συγκρούσεις* και τους ώθησαν να αναπτύξουν διαδικασίες σκέψης, διαμεσολαβώντας στην αποκωδικοποίηση της νοητικής της εικόνας σε εικονική και στη συνέχεια της εικονικής σε λεκτική. Σταδιακά, στοιχεία του σχήματος ερμηνεύθηκαν με διαφορετικούς τρόπους, αποδίδοντάς τους έτσι διπλό ρόλο, που οφείλεται στην ανάπτυξη *αφαιρετικών διαδικασιών σκέψης* εναλλάσσοντας τους ρόλους που έχουν τα στοιχεία του σχήματος.

Οι συνδεόμενες αναπαραστάσεις της δεύτερης φάσης βοήθησαν τους μαθητές να έρθουν σε γνωστική σύγκρουση και να ενσωματώσουν στο γνωστικό σχήμα που είχαν κατασκευάσει για την έννοια της αξονικής συμμετρίας την περίπτωση του ρόμβου, συμβάλλοντας έτσι στην επέκταση του *γνωστικού σχήματος* της έννοιας. Επίσης βοήθησαν τους μαθητές (α) να συνδέσουν τις πρωτεύουσες ιδιότητες σχημάτων –ιδιότητες δηλαδή που έχουν σχέση με την παραλληλία των πλευρών– με τις δευτερεύουσες ιδιότητες του σχήματος – ιδιότητες δηλαδή που έχουν σχέση με τη συμμετρία του σχήματος, και (β) να οδηγηθούν σε γνωστικές συγκρούσεις και στην αποκωδικοποίηση της νοητικής εικόνας τους σε εικονική και στη συνέχεια της εικονικής σε λεκτική.

<u>Ως προς την κατασκευή εννοιών-εν-δράσει</u>

(α) Ο συνδυασμός δυναμικού σημείου, *πειραματικού συρσίματος* και στη συνέχεια *θεωρητικού συρσίματος* καθώς και η εντολή καθετότητας διαμεσολάβησαν στην κατασκευή *εννοιών-εν-δράσει* (π.χ. του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ως «παραλληλογράμμου που προέκυψε από κάθετες ευθείες») (π.χ. Μ11) και, συνεπώς, στην *αντιληπτική ιεράρχηση* των τετραπλεύρων.

Στη φάση αυτή ο συνδυασμός του εργαλείου καθετότητας και θεωρητικού συρσίματος επέδρασε μέσω της διαδικασίας *εργαλειακής γένεσης* στην κατασκευή ενός οργάνου που εκφράστηκε με τις *έννοιες-εν-δράσει* ή *θεωρήματα-εν-δράσει* που κατασκεύασαν οι μαθητές (π.χ. «στο τετράγωνο έχουμε τέσσερις άξονες συμμετρίας, είναι και οι διαγώνιες»). Επομένως, παρουσίασαν στα σημεία αυτά *εννοιολογική αλλαγή* αφού κατανόησαν ότι μια ιδιότητα ισχύει σε πιο εκλεπτυσμένη μορφή σε κάποιο σχήμα (π.χ. «[η μεσοπαράλληλος] είναι και άξονας συμμετρίας» στο τετράγωνο, όπως και στο ορθογώνιο, καθώς και οι διαγώνιες είναι άξονες συμμετρίας στο τετράγωνο, όπως και στο ρόμβο). Αποτέλεσμα αυτής της κατανόησης ήταν οι διατυπώσεις των *αυθαίρετων οικονομικών ορισμών*. Δηλαδή, «κατέληξαν σε συμπεράσματα για τη συνεπαγωγική εμφάνιση των ιδιοτήτων του σχήματος μέσα από την ανάλυση που προκύπτει από την ιεράρχηση των σχημάτων» (Battista, 2007, p. 852) (χαρακτηριστικό επιπέδου 3.2), αναπτύσσοντας έτσι την κατανόηση της σχέσης εγκλεισμού των σχημάτων (π.χ. ότι το τετράγωνο έχει πρόσθετες ιδιότητες που δεν αφορούν μόνο τις πλευρές και γωνίες του σχήματος αλλά και τους άξονες συμμετρίας του).

(β) Το εργαλείο περιστροφής προκάλεσε την κατασκευή *εννοιών-εν-δράσει* (π.χ. Μ3 του παραλληλογράμμου ως τριγώνου από περιστροφή), την ανάπτυξη *επαγωγικού συλλογισμού* και τη διατύπωση *ανακριβών ή δυναμικών ορισμών* (π.χ. Μ3, Μ4, Μ8) για τα συμμετρικά τμήματα, ως αποτέλεσμα του *σχήματος εργαλειοποιημένης δράσης*.

Για παράδειγμα, η Μ7 συσχέτισε την έννοια-εν-δράσει των συνευθειακών σημείων με την περιστροφή τμήματος κατά 180^o και ο Μ8 συνέδεσε διαδικαστικά και εννοιολογικά την έννοια της περιστροφής τμήματος καθέτου σε ευθεία-άξονα συμμετρίας με την έννοια της απόστασης του τμήματος από τον άξονα, κατασκεύασε δηλαδή συνδέσεις μεταξύ εννοιών.

(γ) Το προσαρμοσμένο εργαλείο βοήθησε τους μαθητές (π.χ. Μ3, Μ4) να αντιληφθούν ιδιότητες του σχήματος, να διατυπώσουν *οικονομικούς ορισμούς ή αυθαίρετους οικονομικούς ορισμούς* σε συνεργασία τους οποίους επανεφηύραν μέσα από τη διαδικασία. Διαμεσολάβησε ακόμα ώστε το σχήμα να αποκτήσει το *χαρακτήρα σήματος*. Η *λειτουργική κατανόηση* του προσαρμοσμένου εργαλείου διαδραμάτισε σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη *επαγωγικών και απαγωγικών* επιχειρημάτων (π.χ. Μ4, «οι πλευρές είναι παράλληλες γιατί είναι παραλληλόγραμμα») ή *γενικεύσεων και θεωρημάτων-εν-δράσει* (Μ3, Μ4).

(δ) Το εργαλείο ανάκλασης διαμεσολάβησε στη διατύπωση *εννοιών-εν-δράσει* (π.χ. όπως η έννοια της συμμετρίας, της διχοτόμησης και καθετότητας των διαγωνίων του ρόμβου), ώστε να κατασκευάσουν *δευτερεύουσες ιδιότητες* του σχήματος ή και *ανεπαρκών ή και δυναμικών ορισμών*, καθώς και να *συσχετίσουν έννοιες* (π.χ. Μ6, Μ7). Μέσω της διαδικασίας τα σχήματα απέκτησαν το *χαρακτήρα συμβόλου*. Οι μαθητές συνέθεσαν απαντήσεις χρησιμοποιώντας μια λίστα δευτερευουσών ιδιοτήτων που οπτικοποίησαν στην οθόνη ή σχημάτισαν έναν *μη οικονομικό ορισμό* (ή και *θεώρημα-εν-δράσει*) από τα στοιχεία του διαγράμματος.

Ο συνδυασμός του εργαλείου των ΣΟΕΑ λόγω ανάκλασης, ίχνους και συρσίματος βοήθησε στη διατύπωση *εννοιών-εν-δράσει* των μαθητών (π.χ. του «ίσου και αντίστροφου» σχήματος) λόγω του αντίστροφου προσανατολισμού του σχήματος (Μ7, Μ8). Διαμεσολάβησε στην ανάπτυξη *επαγωγικού συλλογισμού* καθώς και *αυθαίρετων οικονομικών ορισμών* (π.χ. Μ8) ως αποτέλεσμα της επίδρασης του *θεωρητικού συρσίματος* μιας κορυφής του σχήματος, ώστε να ενισχύεται η *αντιληπτική ιεράρχηση* των σχημάτων (π.χ. του τετραγώνου ως ορθογωνίου).

Από την άλλη, ο συνδυασμός εργαλείων των ΣΟΕΑ λόγω καθέτου, ανάκλασης και απόκρυψης/εμφάνισης συνετέλεσε στην ανάπτυξη *απαγωγικού συλλογισμού* (π.χ. Μ5, Μ6, Μ7), δυναμικής οπτικοποίησης των μαθητών αλλά και *δυναμικής επανεφεύρεσης* των ιδιοτήτων του σχήματος (π.χ. ο Μ5 συμπεραίνει από τα αποτελέσματα, δηλαδή την καθετότητα των διαγωνίων, την αιτία, δηλαδή ότι το σχήμα είναι ρόμβος). Έχει κατασκευάσει νοητικά τις διαγώνιες του σχήματος, συνδέοντας τις απέναντι κορυφές. Οδηγεί ακόμα σε διατυπώσεις που όταν συντεθούν κατασκευάζουν *θεωρήματα-εν-δράσει* που ο μαθητής κατασκευάζει λόγω της επίδρασης του σύνθετου μετασχηματισμού που προκύπτει από το εργαλείο συρσίματος και ανάκλασης.

Η σύγκριση των χαρακτηριστικών που συγκεντρώνουν οι μαθητές των δύο ομάδων του επιπέδου 2 έδωσε τα εξής αποτελέσματα:

1. Επτά από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα μετάφρασης της «αν …τότε» δήλωσης με συμβολικό τρόπο, ενώ από την ομάδα ελέγχου τρεις.
2. Πέντε από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα διατύπωσης «αν …τότε» δήλωσης, ενώ από την ομάδα ελέγχου δύο.
3. Έξι από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα να αντιλαμβάνονται τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων, ενώ από την ομάδα ελέγχου ένας.
4. Τρεις από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν χαρακτηριστικό επιπέδου 2.3 (Battista, 2007), ενώ από την ομάδα ελέγχου κανένας.
5. Τέσσερις από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα παραγωγικού συλλογισμού, ενώ από την ομάδα ελέγχου κανένας.
6. Έξι από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα να ολοκληρώνουν την απόδειξη, ενώ από την ομάδα ελέγχου δύο.
7. Τέλος, τρεις μαθητές της ομάδας ελέγχου χρησιμοποιούσαν συνδυασμό οπτικών και θεωρητικών στοιχείων στην απόδειξή τους.

Γ φάση της διαδικασίας – επίπεδο 2

Στη φάση αυτή οι μαθητές σε αλληλεπίδραση με τις ΣΟΕΑ τρίτης φάσης ανέπτυξαν εμπειρικά αποδεικτικά σχήματα (π.χ. γενικό παράδειγμα) (π.χ. Μ2, Μ3) καθώς η αιτιολόγησή τους βασίζεται σε ένα παράδειγμα στην οθόνη, χαρακτηριστικά αντιπροσωπευτικό μιας κλάσης. Οδηγήθηκαν σε συμπεράσματα καθώς η κατανόηση προέκυψε ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης του χωρογραφικού πεδίου του λογισμικού με το θεωρητικό πεδίο της γεωμετρίας. Το σύρσιμο των κορυφών των εξωτερικών τετραπλεύρων και ο σχολιασμός του διαγράμματος είχε ως αποτέλεσμα την αναγνώριση των εσωτερικών σχημάτων και τη διατύπωση θεωρημάτων-εν-δράσει. Στη φάση αυτή επιβεβαιώθηκε η σημασία της δεύτερης φάσης του μαθησιακού μονοπατιού στην εξέλιξη της διαδικασίας. Οι μαθητές αναγνώριζαν υποσχήματα από τις ιδιότητές τους τις οποίες εξέφραζαν μέσω ενός ορισμού (π.χ. οικονομικού ή αυθαίρετου οικονομικού). Επομένως, λειτουργώντας νοητικά μετέφραζαν μια εικονική αναπαράσταση σε λεκτική, αναγνωρίζοντας υποδομές του σχήματος. Οι συνδεόμενες αναπαραστάσεις που διερευνήθηκαν σταδιακά από τους μαθητές στην προηγούμενη φάση διαμεσολάβησαν ώστε να συνδέσουν έννοιες (π.χ. την έννοια της μεσοκαθέτου με την έννοια του ρόμβου και στη συνέχεια με την έννοια του ορθογωνίου στο εσωτερικό του σχήματος). Συνεπώς, οι μαθητές ανέπτυξαν την ικανότητα να λειτουργούν (αναγνωρίζουν υποδομές, μετακινούνται από το ένα αναπαραστατικό σύστημα στο άλλο κ.λπ.) σε ένα πολυπλοκότερο σχήμα λόγω της επίδρασης των ΣΟΕΑ. Αυτή η ικανότητα εμφανίστηκε σε πιο ανεπτυγμένη μορφή στην τέταρτη φάση.

Τα επιχειρήματα που οι μαθητές ανέπτυξαν αναλύθηκαν με το μειωμένο σχήμα του μοντέλου Toulmin (1958). Επιβεβαιώθηκαν στην αρχή της διαδικασίας *επαγωγικά επιχειρήματα* και *θεωρήματα-εν-δράσει* και στη συνέχεια *απαγωγικά και παραγωγικά επιχειρήματα*. Προς το τέλος της τρίτης φάσης χρησιμοποίησαν *αλυσίδες παραγωγικών επιχειρημάτων* προκειμένου να αποδείξουν τους ισχυρισμούς τους και ανέπτυξαν κανόνες λογικής για να κατασκευάσουν την απόδειξη.

Από τη σύγκριση των γραπτών των μαθητών συνάγεται ότι οι μαθητές και των δύο ομάδων δεν παρουσίαζαν κοινά χαρακτηριστικά. Οι μαθητές της πειραματικής ομάδας απέκτησαν την ικανότητα να μετατρέπουν τη λεκτική πληροφορία σε σχέδιο, καθώς και την ικανότητα μοντελοποίησης και επίλυσης του προβλήματος. Όλοι οι μαθητές ανέπτυξαν *παραγωγικό συλλογισμό*. Αντιθέτως, οι μαθητές της ομάδας ελέγχου δεν είχαν αναπτύξει την ικανότητα μοντελοποίησης του πραγματικού προβλήματος, λόγω της έννοιας της περιστροφής. Επομένως, ο προσδιορισμός των σχέσεων μεταξύ των στοιχείων του διαγράμματος παραμένει ανεπαρκής.

Δ φάση της διαδικασίας – επίπεδο 2

Η διερεύνηση μέσω των εργαλείων ίχνους, περιστροφής και πειραματικού ή θεωρητικού συρσίματος οδήγησε τους μαθητές μέσω νοητικού πειράματος να αναπτύξουν *μετασχηματιστικό συλλογισμό*, αφού προέβλεψαν μια ενέργεια και τα αποτελέσματά της (π.χ. Μ3, Μ4 Μ5, Μ6, Μ7, Μ8). Αναλυτικότερα, η απόκρυψη-εμφάνιση των ευθύγραμμων τμημάτων που συνέδεσαν τα σημεία με το πειραματικό σύρσιμο διαμόρφωσαν συνδεόμενες αναπαραστάσεις.

Οι διατυπώσεις των μαθητών (π.χ. Μ3, Μ5, Μ6) μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι έχουν σχηματίσει νοητικά τις περιστροφές. Επομένως, μέσω του συρσίματος κατανοούν ιδιότητες του σχήματος αντιληπτικά τις οποίες προσπαθούν να αναπαράγουν νοητικά για να προκύψει το αποτέλεσμα και να ανακαλύψουν τη λύση του προβλήματος. Έχουν δηλαδή αποκτήσει την ικανότητα να μεταφράζουν μια νοητική αναπαράσταση σε εικονική και λεκτική, **και το αντίστροφο,** προσδιορίζοντας τις ιδιότητες των σχημάτων μέσω νοητικών μετασχηματισμών.

Αυτό που επισημαίνεται στην παρούσα φάση για τους μαθητές επιπέδου 2 είναι ότι το *σχήμα εργαλειοποιημένης δράσης* του εργαλείου περιστροφής που είχαν κατασκευάσει στη δεύτερη φάση της διαδικασίας για την περιστροφή τμημάτων (στοιχειώδες σχήμα) λειτουργεί ως δομική μονάδα για τη δημιουργία του *σχήματος εργαλειοποιημένης δράσης* περιστροφής τριγώνου (π.χ. στον δεύτερο τύπο των ΣΟΕΑ για ορθογώνια τρίγωνα, στον τρίτο τύπο για σκαληνά τρίγωνα) (Drijvers & Trouche, 2008). Τότε οι μαθητές ανέπτυξαν ΑΟΑ (π.χ Μ2, Μ3, Μ6, Μ7) επεκτείνοντας το σχήμα που είχαν κατασκευάσει και συνδέοντας με την προϋπάρχουσα γνώση.

ΑΟΑ αναπτύχθηκε στους μαθητές και λόγω της αλληλεπίδρασης με άλλα εργαλεία του λογισμικού:

- **Το παραμετρικό εργαλείο**

Για παράδειγμα, η κατασκευή του παραμετρικού τμήματος προκάλεσε την ΑΟΑ της Μ7, δεν οδήγησε όμως σε αναστοχασμό τη Μ10 ή τον Μ13 αφού δεν συνέδεσαν την κατασκευή κύκλου με σχετική πρόταση της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Η Μ7 αρχικού επιπέδου 2 διατύπωσε ταυτόχρονα με τη χρήση του παραμετρικού εργαλείου τη σχετική πρόταση την οποία επαναλάμβανε με αποστήθιση. Ομοίως η Μ9 μπόρεσε να κατανοήσει και να υπερβεί το διδακτικό εμπόδιο που την οδηγούσε σε λανθασμένη διατύπωση. Οι μαθητές Μ10, Μ13 επιπέδου 1 αντιμετώπιζαν γνωστικά εμπόδια.

- **Το εργαλείο απόκρυψης/ εμφάνισης**

Για παράδειγμα, η απόκρυψη των διαγωνίων του ρόμβου οδήγησε στη νοητική σύνδεση αναπαραστάσεων, με αποτέλεσμα ο Μ5 να αναστοχαστεί επί των ενεργειών του στην οθόνη. Το ίδιο εργαλείο προκάλεσε την ΑΟΑ του Μ6 ο οποίος διατύπωσε ένα **απαγωγικό επιχείρημα.** Αλλά και των μαθητών Μ7, Μ13 οι οποίοι στην τέταρτη φάση αναστοχάστηκαν πάνω στις ενέργειές τους, ανέπτυξαν μετασχηματιστικό συλλογισμό προκειμένου να επανεφεύρουν μια λύση του προβλήματος [συνδεδεμένη διαδικαστικά και εννοιολογικά με τη δεύτερη φάση της ερευνητικής διαδικασίας]. Το εργαλείο απόκρυψης προκάλεσε ακόμα την ΑΟΑ του Μ13 που είχε αναπτύξει την ικανότητα δομικής ανάλυσης του σχήματος στη δεύτερη και τρίτη φάση της ερευνητικής διαδικασίας.

Οι διάφοροι τύποι των ΣΟΕΑ διαμεσολάβησαν ώστε οι μαθητές να αναπτύξουν *απαγωγικό συλλογισμό*, να επιχειρηματολογήσουν με *απαγωγικά επιχειρήματα*, ως αποτέλεσμα του τι παρατηρούν στην οθόνη και τι είναι αναγκαίο για να καταλήξουν στο συμπέρασμα, τα οποία στη συνέχεια τους βοηθούν να κατασκευάσουν την απόδειξη του προβλήματος. Οι μαθητές συνέδεσαν νοητικά τις αναπαραστάσεις που οπτικοποίησαν στην οθόνη με έννοιες που είχαν κατασκευάσει στις προηγούμενες φάσεις της ερευνητικής διαδικασίας και διατύπωσαν «αν …τότε» δηλώσεις, χαρακτηριστικό επιπέδου 3. Οι μαθητές σε συνεργασία ή μόνοι τους ανέπτυξαν *παραγωγικό συλλογισμό*.

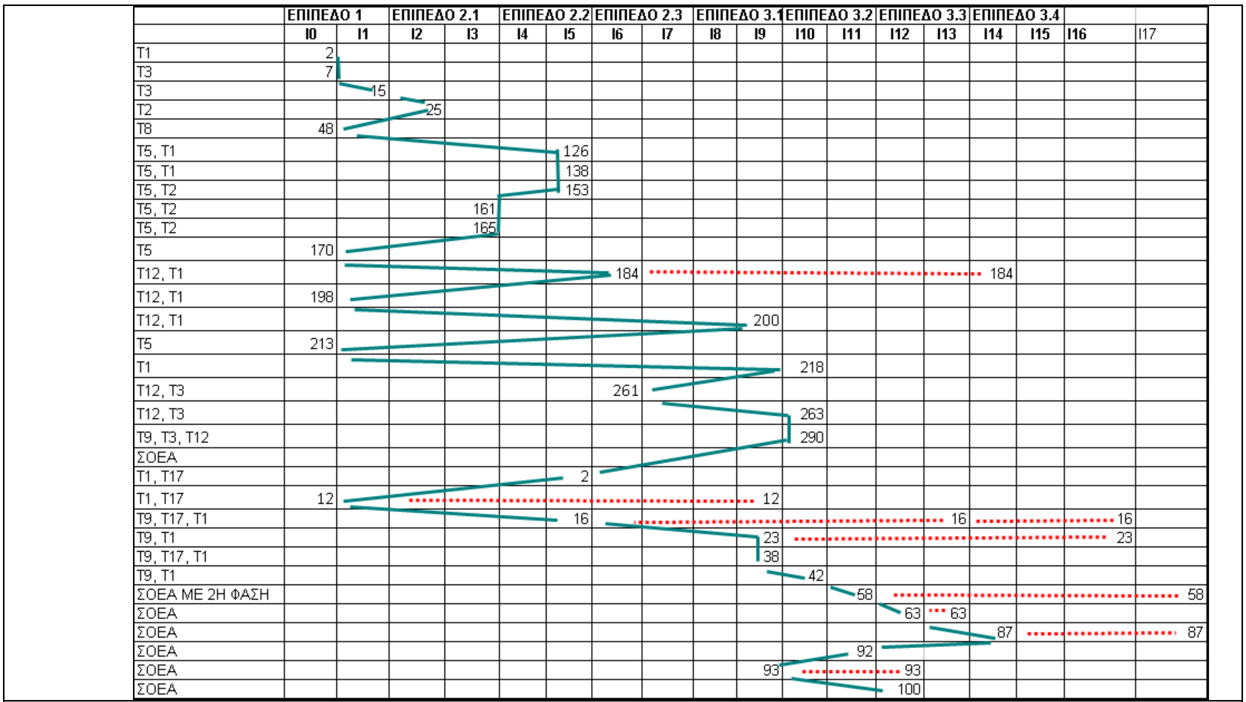
Επομένως, ανέπτυξαν την ικανότητα να κάνουν την ανάλυση του σχήματος σε πραγματικό ή νοητό επίπεδο, αναπτύσσοντας αφαιρετική ικανότητα και χρήση της λογικής. Διατυπώνουν αποδεικτικούς υποστόχους, αναπτύσσοντας παραγωγικό συλλογισμό σε αλυσίδα παραγωγικών επιχειρημάτων. Αναπτύσσουν *δυναμική οπτικοποίηση* και *τη διορατικότητα* που τους βοηθά να διατυπώσουν τη λύση του προβλήματος, αφού στις εκφράσεις τους υπάρχουν οι έννοιες της κίνησης (θα κινηθεί) της περιστροφής (αφού στρέφεται) της μετακίνησης (να προχωρήσει) και εφαρμόζουν τη λύση στο πραγματικό πρόβλημα. Η ανάλυση του σχήματος προκύπτει από τις ιδιότητες με αποτέλεσμα οι μαθητές να διαμορφώνουν λογικές απαντήσεις, οι οποίες συνιστούν και τη λύση του προβλήματος. Έχουν **αναπτύξει την ικανότητα να αντιστρέψουν νοητικά τη διαδικασία**, με διαφορετικές στρατηγικές για τη λύση των προβλημάτων, καθώς και ικανότητες οπτικές, λογικές, εφαρμογής.

Η οπτικοποίηση του διαγραμματικού μετασχηματισμού οδήγησε τους μαθητές σε *αλυσιδωτούς συνδεόμενους νοητικούς μετασχηματισμούς* και αυτοί σε διατυπώσεις *παραγωγικών επιχειρημάτων*.

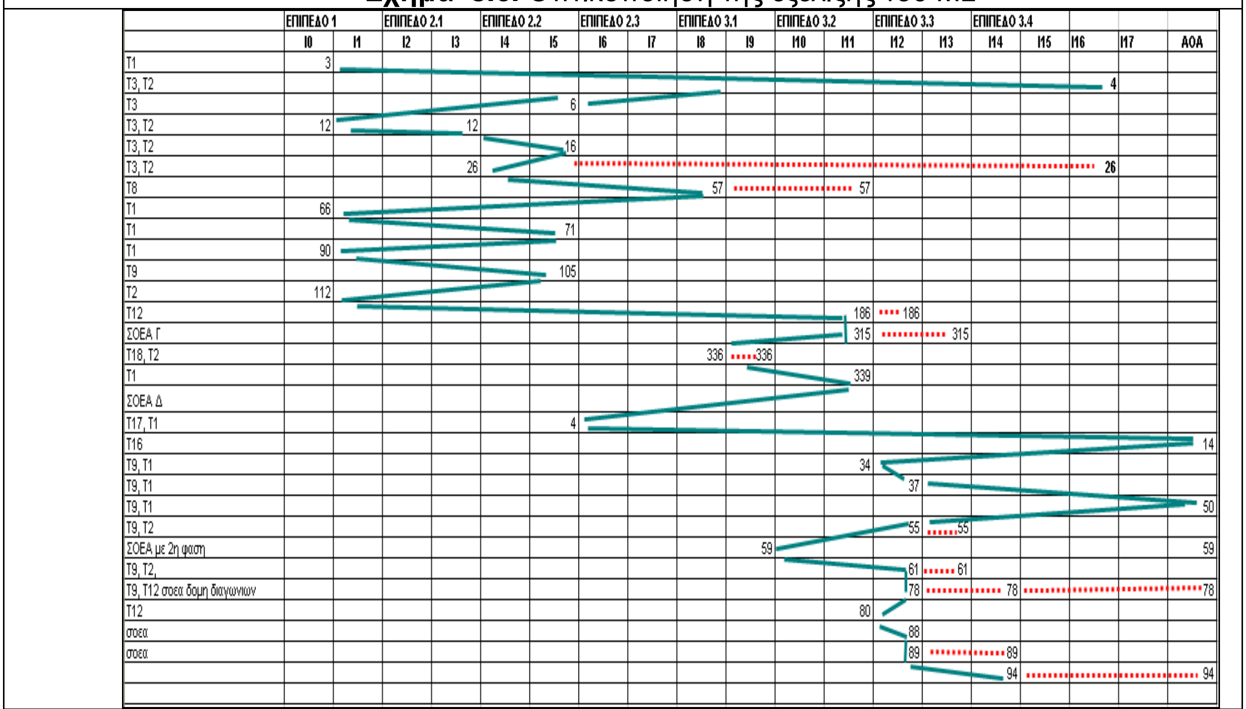
Από τη σύγκριση των γραπτών των μαθητών συνάγεται ότι οι μαθητές και των δύο ομάδων στο τελικό στάδιο παρουσίαζαν κοινά χαρακτηριστικά. Συμπεραίνεται ότι οι μαθητές της *πειραματικής ομάδας* ήταν σε πλεονεκτικότερη θέση από τους μαθητές της *ομάδας ελέγχου* ως προς την ικανότητα προσδιορισμού των σχέσεων μεταξύ στοιχείων του διαγράμματος τυπικά ιδιοτήτων. Επίσης, οι μαθητές αυτοί έχουν αποκτήσει την ικανότητα διατύπωσης οικονομικών ορισμών, την ικανότητα συνεπαγωγικής εμφάνισης ιδιοτήτων, ανάλυσης σε πραγματικό ή νοητό επίπεδο, παραγωγικού συλλογισμού και ολοκλήρωσης της απόδειξης.

5.7.1. Συγκεντρωτικές παρατηρήσεις της επίδρασης των εργαλείων

Τα εργαλεία κωδικοποιήθηκαν και κάθε εργαλείο πήρε έναν συγκεκριμένο κωδικό, καθώς και τα διαφορετικά χαρακτηριστικά των επιπέδων van Hiele κατηγοριοποιήθηκαν από I0-I15 σε συμφωνία με την κατηγοριοποίηση του Battista (2007) (Κεφάλαιο 3 της παρούσας μελέτης, σελ. 154). Στα σχήματα 5.6 και 5.7 παρουσιάζονται ενδεικτικά η οπτικοποίηση της εξέλιξης των μαθητών M1 και M2 κατά τη διάρκεια της ερευνητικής διαδικασίας.



Σχήμα 5.6. Οπτικοποίηση της εξέλιξης του M1



Σχήμα 5.7. Οπτικοποίηση της εξέλιξης της M2

Η οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων της μελέτης οδήγησε στην ποσοτική μελέτη της επίδρασης των εργαλείων του λογισμικού. Στη συνέχεια κατασκευάστηκε ένας πίνακας για κάθε χαρακτηριστικό, δηλαδή συνολικά 17 πίνακες. Σε κάθε πίνακα (π.χ τον πίνακα χαρακτηριστικού Ι0) στην πρώτη οριζόντια γραμμή τοποθετήθηκαν οι μαθητές της πειραματικής ομάδας με τον κωδικό που είχαν λάβει στην αρχή της διαδικασίας και στην κατακόρυφη στήλη οι κωδικοί των εργαλείων/εντολών όπως είχαν οριστεί στην προηγούμενη διαδικασία. Με την πινακοποίηση αυτή ελέγχθηκε η συχνότητα της εμφάνισης κάποιου χαρακτηριστικού σε μαθητές του επιπέδου 1 ή του επιπέδου 2 και ποιο εργαλείο του λογισμικού το προκάλεσε.

Έτσι διαπιστώθηκαν τα εξής αποτελέσματα για τους μαθητές επιπέδου 1 και επιπέδου 2.

Επίπεδο 1

1) Το *πειραματικό σύρσιμο* σημείου (Τ1) προκάλεσε *γνωστικές συγκρούσεις* (χαρακτηριστικό Ιο) στους 5 από τους 6 μαθητές (5/6) επιπέδου 1 που συμμετείχαν στη διαδικασία. *Γνωστικές συγκρούσεις* επίσης προκάλεσαν τα εργαλεία κύκλου (Τ8) (3/6), το εργαλείο ανάκλασης (Τ5) (2/6), το παραμετρικό εργαλείο (Τ11) (3/6), το προσαρμ. εργαλείο (Τ12) με πειραματικό σύρσιμο του άκρου σημείου (2/6), ο συνδυασμός των εργαλείων περιστροφής (Τ9), καθέτου (Τ3) και θεωρητικού συρσίματος (Τ2) (2/6).
2) Το χαρακτηριστικό Ι1 (άτυπες και δυναμικές εκφράσεις) εμφανίστηκε λόγω της επίδρασης του *πειραματικού συρσίματος* σημείου (2/6), του κύκλου (3/6) του συνδυασμού καθέτου και θεωρητικού συρσίματος (2/6) και της ανάκλασης (2/6).
3) Το χαρακτηριστικό Ι2 (δυναμικός/αντιληπτικός ορισμός) εμφανίστηκε λόγω της επίδρασης του *θεωρητικού συρσίματος* σημείου (2/6), της καθέτου (2/6), και του *πειραματικού συρσίματος.*
4) Το χαρακτηριστικό Ι3 (άτυπες και τυπικές περιγραφές) εμφανίστηκε λόγω της επίδρασης της καθέτου (3/6), της καθέτου και *θεωρητικού συρσίματος* (2/6), κυρίως όμως λόγω του μετασχηματισμού της ανάκλασης (Τ5) (4/6).
5) Το χαρακτηριστικό Ι5 (έννοιες-εν-δράσει) εμφανίστηκε λόγω της επίδρασης της καθέτου και *θεωρητικού συρσίματος* (2/6), του μετασχηματισμού της ανάκλασης (Τ5) και πειραματικού ή *θεωρητικού συρσίματος* σημείου (4/6), καθώς και του μετασχηματισμού που προκλήθηκε από την εφαρμογή του προσαρμ. εργαλείου (4/6). Ακόμα ο συνδυασμός των εργαλείων ίχνους, ανάκλασης και *πειραματικού συρσίματος* (2/6) και οι ΣΟΕΑ προκάλεσαν την εμφάνιση του συγκεκριμένου χαρακτηριστικού (2/6).

6) Το χαρακτηριστικό Ι6 (τυπική έκφραση/ ή μη οικονομικός ορισμός) εμφανίστηκε λόγω της αλληλεπίδρασης με το συνδυασμό καθέτου και πειραματικού συρσίματος (2/6) και στο ίδιο ποσοστό για το συνδυασμό προσαρμ. εργαλείου και πειραματικού συρσίματος.
7) Το χαρακτηριστικό Ι7 (συνδέσεις εννοιών) εμφανίστηκε σε μικρό ποσοστό(2/6) λόγω του συνδυασμού του μετασχηματισμού ανάκλασης, ίχνους και πειραματικού συρσίματος.
8) Το χαρακτηριστικό Ι8 (οικονομικός ορισμός) εμφανίστηκε λόγω της χρήσης των ΣΟΕΑ (4/6)
9) Το χαρακτηριστικό Ι9 (λογικές συσχετίσεις) εμφανίστηκε λόγω της αλληλεπίδρασης με το μετασχηματισμό της ανάκλασης με ή χωρίς την επίδραση του θεωρητικού συρσίματος (3/6).
10) Τα χαρακτηριστικά Ι10, Ι11, κλπ. εμφανίστηκαν στους μαθητές του επιπέδου 1 μετά την χρήση των ΣΟΕΑ και επομένως στην τέταρτη φάση της διαδικασίας. Συγκεκριμένα τα Ι10, Ι11 σε ποσοστό (3/6) το Ι12 (4/6) το Ι13 (5/6) , το Ι14 (4/6) και τα Ι16, Ι17 (2/6).

Επίπεδο 2

1) Το πειραματικό σύρσιμο σημείου (Τ1) προκάλεσε γνωστικές συγκρούσεις (χαρακτηριστικό Ιο) στους 7 από τους 8 μαθητές (7/8) επιπέδου 2 που συμμετείχαν στη διαδικασία. Γνωστικές συγκρούσεις επίσης προκάλεσαν το θεωρητικό σύρσιμο σημείου (4/8), το εργαλείο κύκλου (Τ8) (4/8), ο μετασχηματισμός ανάκλασης (Τ5) (2/8), το προσαρμ. εργαλείο (Τ12) (4/8) με πειραματικό ή θεωρητικό σύρσιμο του άκρου σημείου, η εντολή καθέτου ή παραλλήλου (Τ3) με πειραματικό ή θεωρητικό σύρσιμο του άκρου σημείου (5/8). Ο συνδυασμός των εργαλείων απόκρυψης, ανάκλασης, καθέτου και πειραματικού συρσίματος (στη δεύτερη φάση της διαδικασίας) προκάλεσε γνωστικές συγκρούσεις(2/8).
2) Το χαρακτηριστικό Ι1 (άτυπες και δυναμικές εκφράσεις) εμφανίστηκε λόγω της επίδρασης του πειραματικού συρσίματος σημείου (2/8), του κύκλου (3/8) του συνδυασμού καθέτου και συρσίματος (2/8).
3) Το χαρακτηριστικό Ι3 (άτυπες και τυπικές περιγραφές) εμφανίστηκε λόγω της επίδρασης της καθέτου (2/8).
4) Το χαρακτηριστικό Ι4 (ανεπαρκείς ορισμοί) εμφανίστηκε λόγω της επίδρασης του συνδυασμού των εργαλείων απόκρυψης, ανάκλασης, καθέτου και πειραματικού συρσίματος (στη δεύτερη φάση της διαδικασίας) (3/8). Ανεπαρκείς ορισμοί εμφανίστηκαν και λόγω του συνδυασμού των εργαλείων σχολιασμού του διαγράμματος και θεωρητικού συρσίματος (στην τρίτη φάση) (2/8).

5) Το χαρακτηριστικό Ι5 (έννοιες-εν-δράσει) εμφανίστηκε λόγω της επίδρασης της καθέτου και πειραματικού συρσίματος (4/8), του μετασχηματισμού της ανάκλασης (Τ5) και πειραματικού ή θεωρητικού συρσίματος σημείου (3/8), του μετασχηματισμού της περιστροφής και πειραματικού συρσίματος (4/8), του μετασχηματισμού που προκλήθηκε από την εφαρμογή του προσαρμ. εργαλείου (2/8), λόγω της επίδρασης του συνδυασμού των εργαλείων απόκρυψης, ανάκλασης, καθέτου και πειραματικού συρσίματος (στη δεύτερη φάση της διαδικασίας) (3/8). Ακόμα οι ΣΟΕΑ με συνδυασμό των εργαλείων ίχνους, και πειραματικού συρσίματος (4/8) (στη τέταρτη φάση της διαδικασίας) καθώς και οι ΣΟΕΑ τρίτης φάσης προκάλεσαν την εμφάνιση του συγκεκριμένου χαρακτηριστικού, με συνδυασμό των εργαλείων σχολιασμού του διαγράμματος και θεωρητικού συρσίματος (2/8).
6) Το χαρακτηριστικό Ι6 (τυπική έκφραση/ ή μη οικονομικός ορισμός) εμφανίστηκε λόγω της αλληλεπίδρασης με το εργαλείο κύκλου (2/8).
7) Το χαρακτηριστικό Ι7 (συνδέσεις εννοιών) εμφανίστηκε σε μικρό ποσοστό (2/6) λόγω της αλληλεπίδρασης με το εργαλείο καθέτου. Ακόμα λόγω του μετασχηματισμού της περιστροφής και πειραματικού ή θεωρητικού συρσίματος (4/8).
8) Το χαρακτηριστικό Ι8 (οικονομικός ορισμός) εμφανίστηκε λόγω της χρήσης διαφορετικών εργαλείων σε όλους τους μαθητές σε διαφορετικές φάσεις και κυρίως με τη μορφή των αυθαίρετων οικονομικών ορισμών στην τρίτη φάση της διαδικασίας.
9) Το χαρακτηριστικό Ι9 (λογικές συσχετίσεις) εμφανίστηκε λόγω της αλληλεπίδρασης εμφανίστηκε λόγω της αλληλεπίδρασης με το εργαλείο κύκλου (3/8), καθώς και λόγω του μετασχηματισμού της περιστροφής και πειραματικού ή θεωρητικού συρσίματος (4/8). Ακόμα οι ΣΟΕΑ με συνδυασμό των εργαλείων ίχνους, και πειραματικού συρσίματος (στη τέταρτη φάση της διαδικασίας) διαδραμάτισαν σημαντικό ρόλο στην εμφάνιση του συγκεκριμένου χαρακτηριστικού (4/8).
10) Το χαρακτηριστικά Ι10 (ικανότητα δομικής ανάλυσης) εμφανίστηκε κυρίως λόγω της αλληλεπίδρασης με το προσαρμοσμένο εργαλείο (3/8) και το θεωρητικό σύρσιμο του άκρου σημείου, καθώς και οι ΣΟΕΑ τρίτης φάσης προκάλεσαν την εμφάνιση του συγκεκριμένου χαρακτηριστικού, με συνδυασμό των εργαλείων σχολιασμού του διαγράμματος και θεωρητικού συρσίματος (4/8).
11) Το χαρακτηριστικό Ι11 (λογικο-απαγωγικά επιχειρήματα) εμφανίστηκαν στη δεύτερη φάση της ερευνητικής διαδικασίας κυρίως λόγω της αλληλεπίδρασης με το

προσαρμοσμένο εργαλείο (3/8), καθώς και οι ΣΟΕΑ τρίτης φάσης προκάλεσαν την εμφάνιση του συγκεκριμένου χαρακτηριστικού, με συνδυασμό των εργαλείων σχολιασμού του διαγράμματος και θεωρητικού συρσίματος (2/8).

12) Το χαρακτηριστικό Ι12 (παραγωγικά επιχειρήματα) προκλήθηκαν λόγω της αλληλεπίδρασης με τις ΣΟΕΑ τρίτης φάσης (4/8) αλλά κυρίως στην τέταρτη φάση της ερευνητικής διαδικασίας (6/8). Αποτέλεσμα της ανάπτυξης του παραγωγικού συλλογισμού των μαθητών ήταν η διατύπωση επιχειρημάτων του τύπου γενικού παραδείγματος (Ι13) (4/8) και του τύπου πειράματος σκέψης (6/8).
13) Το χαρακτηριστικό Ι17 (δυναμική επανεφεύρεση) εμφανίστηκε σε διάφορες φάσεις της διαδικασίας, αλλά κυρίως προκλήθηκε λόγω της αλληλεπίδρασης με τις ΣΟΕΑ (5/8).

5.8. Σύντομη ανακεφαλαίωση: Οι στόχοι και τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας

Τα ζητήματα που αφορούν την ερευνητική μεθοδολογία και τα ερευνητικά ερωτήματα εξετάστηκαν στο κεφάλαιο 3. Στο κεφάλαιο 4 αναλύθηκε η έννοια του μαθησιακού μονοπατιού και όλα τα στάδια σχεδιασμού και ανασχεδιασμού της μελέτης. Στο κεφάλαιο 5 παρουσιάστηκε η εξέλιξη των μαθητών της πειραματικής ομάδας μέσα από την ανάλυση των δεδομένων της ερευνητικής διαδικασίας, στο κεφάλαιο 6 τα δεδομένα της μελέτης στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι, τόσο για τους μαθητές της πειραματικής ομάδας όσο και της ομάδας ελέγχου, ενώ στο κεφάλαιο 7 τα αποτελέσματα της έρευνας, και ειδικότερα η εξέλιξη κάθε μαθητή της πειραματικής ομάδας, τα κοινά ή διαφορετικά χαρακτηριστικά μαθητών διαφορετικών επιπέδων, και πώς αυτά τα χαρακτηριστικά εξελίχθηκαν στα διαφορετικά επίπεδα μέσα από τις φάσεις του μαθησιακού μονοπατιού. Επίσης, εξετάστηκε ποιοι μαθητές είχαν αναπτύξει το επίπεδο της γεωμετρικής σκέψης τους, συγκρίνοντας την εξέλιξή τους με εκείνη μαθητών από τον διεθνή χώρο. Τέλος, στο κεφάλαιο 8 επισημάνθηκε ο ρόλος που έπαιξαν οι νοητικές συνδεόμενες αναπαραστάσεις που οι μαθητές σχημάτισαν κατά την ερευνητική διαδικασία, στην αλληλεπίδρασή τους με τις δυναμικές ΣΟΕΑ του δυναμικού περιβάλλοντος. Επίσης αναλύθηκε ο ρόλος των διαφορετικών εργαλείων και εντολών του λογισμικού στην ανάπτυξη των ορισμών, των διαφορετικών ειδών συλλογισμού καθώς και της αποδεικτικής διαδικασίας, αλλά και ο ρόλος των φάσεων και η σημασία της ακολουθίας δραστηριοτήτων στην εξέλιξη της γεωμετρικής και αφαιρετικής σκέψης των μαθητών και την ανάπτυξη αφαιρετικών διαδικασιών. Εξετάστηκε ακόμη ο ρόλος των εργαλείων και των φάσεων στην εξέλιξη της αναπαραστατικής ικανότητας των μαθητών στα στατικά τεστ αλλά και η ικανότητα μετάφρασης μεταξύ διαφορετικών μορφών αναπαραστάσεων ή και αλληλεπίδρασης εσωτερικής-εξωτερικής αναπαράστασης.

5.8.1 Τι είναι οι Συνδεόμενες Οπτικές Ενεργές Αναπαραστάσεις (ΣΟΕΑ)

Ο σχεδιασμός και ανασχεδιασμός του μαθησιακού μονοπατιού καθώς και τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τα ερευνητικά δεδομένα με οδήγησαν στο συμπέρασμα ότι ένας μαθητής αναπτύσσει αφαιρετικές ικανότητες όταν οι γνωστικές δομές του συνδέονται μέσα από συνδεόμενες αναπαραστάσεις που ο μαθητής αναπτύσσει στη διάρκεια της μαθησιακής διαδικασίας.

Συνδεόμενες αναπαραστάσεις μπορεί ο μαθητής να κατασκευάσει κατά τη συμμετοχή του σε ένα μαθησιακό μονοπάτι. Στο μαθησιακό μονοπάτι της παρούσας εργασίας, ΣΟΕΑ σχηματίστηκαν στις διαφορετικές φάσεις (Patsiomitou, 2012).

Στην πρώτη φάση: Η κατασκευή των σχημάτων με τη χρήση των εργαλείων του λογισμικού αλλά και των υποκείμενων κανόνων της θεωρητικής γεωμετρίας, ώστε η κατασκευή να είναι σταθερή οδήγησε στις ΣΟΕΑ ενός σχήματος. Η διαδικασία της κατασκευής παραλληλογράμμων αλλά και του συρσίματος μιας κορυφής του «θεωρητικά» ώστε να προσδώσουμε στο σχήμα του παραλληλογράμμου μια πρόσθετη ιδιότητα δίνει μια «μεταβλητή» κατασκευή ορθογωνίου. Αν κατασκευάσουμε μια διαγώνιο στο παραλληλόγραμμο και το σύρουμε θεωρητικά τότε μπορούμε να σχηματίσουμε ένα ρόμβο και έπειτα ένα τετράγωνο αναλύοντας το σχήμα σε υποσχήματα. Επομένως το θεωρητικό σύρσιμο γίνεται ένας *μη γλωσσικός εγγυητής* στην αντίληψη των μαθητών αλλά και στη σύνδεση μεταξύ αναπαραστάσεων διαδικαστικά και εννοιολογικά.

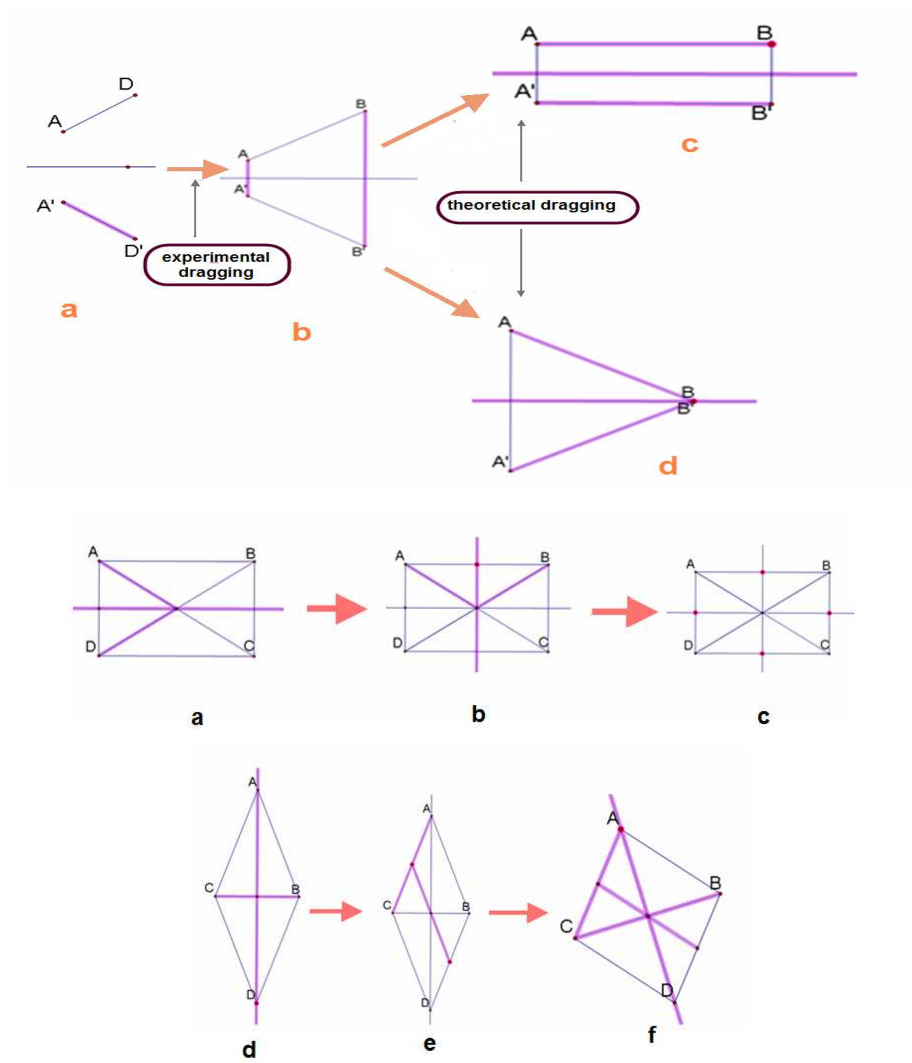
Συνεπώς, όταν ο μαθητής οικοδομεί μια αναπαράσταση (π.χ. ενός παραλληλογράμμου) ώστε να προκύψει μια σταθερή κατασκευή

- εξωτερικεύοντας μια νοητική προσέγγιση ή γενικότερα μετατρέποντας μια εσωτερική αναπαράσταση σε εξωτερική˙
- προσθέτοντας διαδικαστικά στην κατασκευή ώστε το κατασκευαστικό αποτέλεσμα αφενός να οδηγεί στη σύνθεση μιας δομής και αφετέρου να γίνεται όλο και περισσότερο σύνθετο˙
- συνδέοντας εννοιολογικά τα βήματα της κατασκευής (π.χ. η κατασκευή παράλληλης από σημείο εκτός ευθείας προκειμένου να κατασκευαστεί η δομή ενός παραλληλογράμμου)

τότε κατασκευάζει εξωτερικά συνδεδεμένες αναπαραστάσεις διαδικαστικά, και εννοιολογικά συνδεδεμένες αναπαραστάσεις εσωτερικά [νοητικά].

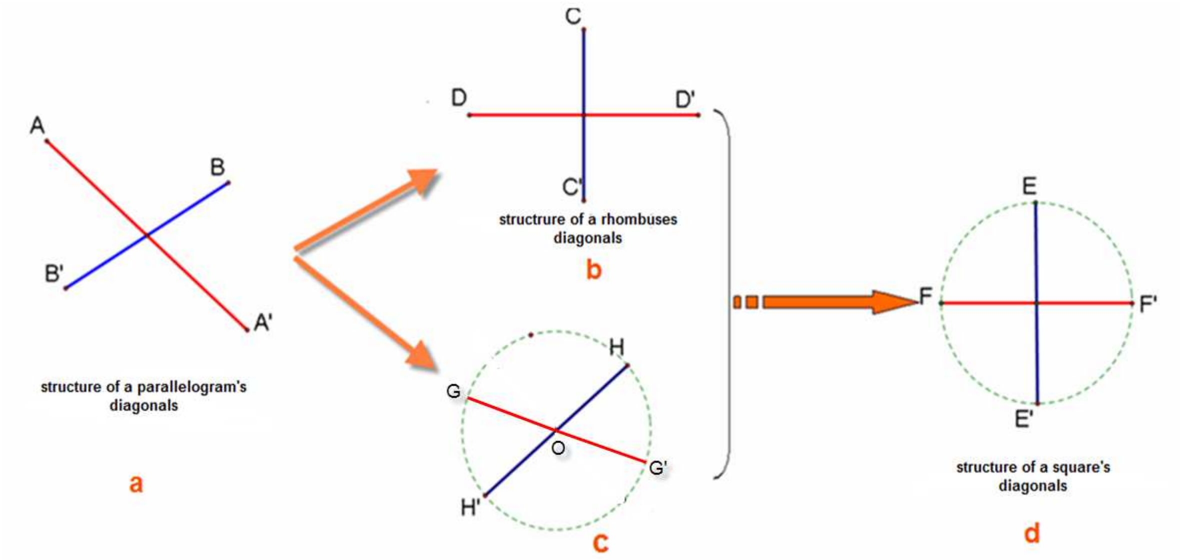
Το τέλος της πρώτης φάσης ανέδειξε ένα σημαντικό ζήτημα. Μπορούν οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν τις δευτερεύουσες ιδιότητες για να κατασκευάσουν ένα τετράπλευρο;

Στη δεύτερη φάση: Οι μετασχηματισμοί (π.χ. ανάκλαση, περιστροφή) σε πρωτότυπα στοιχεία (π.χ. σημεία, ευθύγραμμα τμήματα) οδήγησαν στην οπτικοποίηση αντικειμένων που είχαν κατασκευαστεί στην πρώτη φάση της διαδικασίας με αποτέλεσμα να γίνει αντιληπτή κάποια ιδιότητα συμμετρίας του σχήματος αρχικά στο οπτικό επίπεδο. Αναλυτικότερα



Σχήμα 5.8. Συνδεόμενες οπτικές αναπαραστάσεις της Β φάσης (Patsiomitou, 2012)

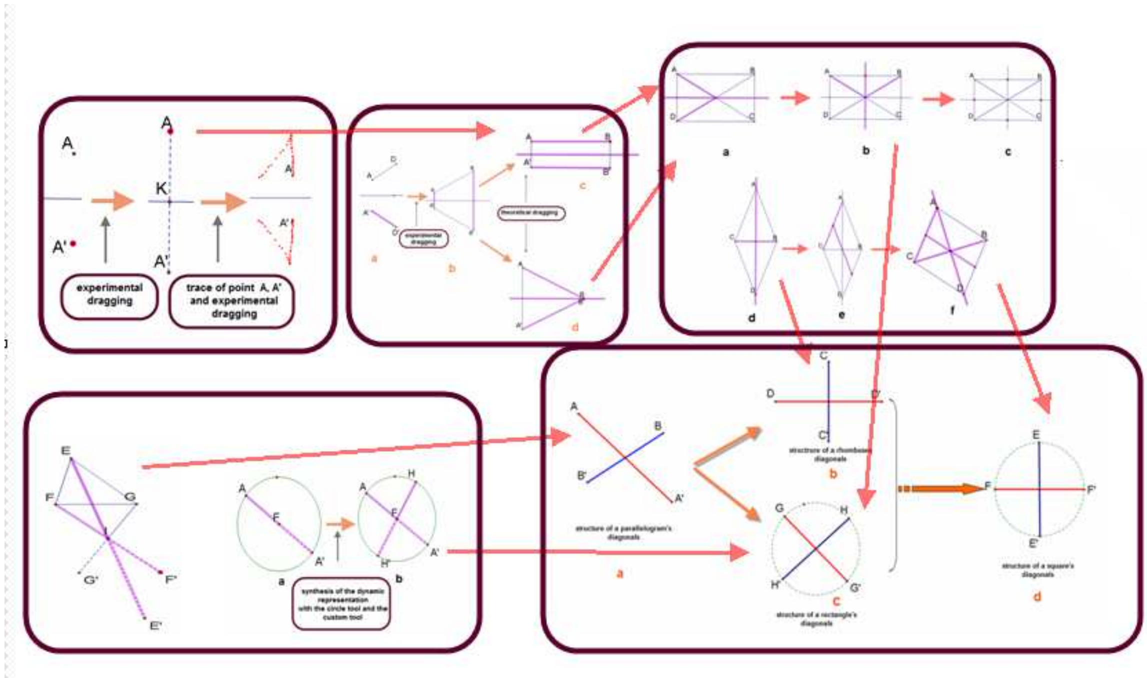
Παρατηρήθηκε ότι κατά τη διαδικασία οι μαθητές συνέδεαν στο νου τους αναπαραστάσεις που τους βοηθούσαν να απαντήσουν στο επόμενο επίπεδο σύμφωνα με τη θεωρία των van Hiele. Έτσι τα βήματα a, b, c είναι συνδεόμενες αναπαραστάσεις της κατασκευής του ορθογωνίου, τα βήματα c, d του παραπάνω σχήματος είναι ομοίως συνδεδεμένα με τα ίδια βήματα a, b, c, αλλά τα a και e δεν είναι συνδεδεμένες αναπαραστάσεις γιατί δεν συνδέουν νοητικά τις διαδικασίες καθώς οδηγούν σε γνωστικές συγκρούσεις.



Σχήμα 5.9. Συνδεόμενες οπτικές αναπαραστάσεις μεταξύ των διαγωνίων των τετραπλεύρων(Patsiomitou, 2012)

Οι διαγώνιες των σχημάτων των τετραπλεύρων οδηγούν σε συνδεόμενες αναπαραστάσεις. Αν, για παράδειγμα, σύρουμε θεωρητικά τις διαγώνιες του παραλληλογράμμου ώστε να αποκτήσουν την ιδιότητα της ισότητας, οδηγούμαστε στις διαγώνιες του ορθογωνίου. Οι μετασχηματισμοί δηλαδή επί των δυναμικών ενεργών αναπαραστάσεων προκάλεσαν τις συνδέσεις με τα αντικείμενα της πρώτης φάσης αλλά και τις εννοιολογικές συνδέσεις. Συνάγεται επομένως ότι

- Η κατασκευή των σχημάτων οδήγησε στην ανάλυσή τους ή, διαφορετικά, στην αποκωδικοποίησή τους με χρήση εργαλείων και ιδιοτήτων της θεωρητικής γεωμετρίας.
- Η κατασκευή των διαγωνίων δημιούργησε συνδέσεις με τα οπτικοποιημένα φαινόμενα από τους μαθητές στην αρχή της δεύτερης φάσης και επομένως την κρυστάλλωση (σταθεροποίηση) κάποιων σχέσεων, αλλά και τη δημιουργία εννοιολογικών συνδέσεων μεταξύ των πρωτευουσών και δευτερευουσών ιδιοτήτων του σχήματος.
- Η ανασύνθεσή τους έχοντας ως αρχή κάποια ιδιότητα της συμμετρίας, δηλαδή με αντιστροφή της διαδικασίας (οι μαθητές από το σχήμα συμπεραίνουν αρχικά για τις ιδιότητές του, επομένως και τη συμμετρία του) οδήγησε σε συνδεόμενες αναπαραστάσεις. Αυτές είναι συνδεόμενες αναπαραστάσεις που δημιουργήθηκαν στην ίδια φάση και είναι συνθετότερες από τις προηγούμενες.



Σχήμα 5.10. Εννοιολογικές και διαδικαστικές συνδέσεις μεταξύ των φάσεων (Patsiomitou, 2012)

Στην τρίτη φάση: Οι μετασχηματισμοί μέσω πειραματικού συρσίματος του διαγράμματος δημιουργούν συνδέσεις τόσο με τις προηγούμενες φάσεις εννοιολογικά όσο και μεταξύ των αντικειμένων της ίδιας φάσης, με αποτέλεσμα η αντιληπτική ιεράρχηση να παγιωθεί στο νου του μαθητή και να σχηματιστεί μια συμπαγής δομή του αντικειμένου τοποθετημένου οριστικά στην ιεραρχική δομή των σχημάτων. Έτσι, όταν ο μαθητής μετασχηματίζει αναπαραστάσεις, ώστε με την προσθήκη ιδιοτήτων οι επόμενες να προκύπτουν από τις προηγούμενες (π.χ., ο μετασχηματισμός ενός παραλληλογράμμου σε ορθογώνιο με θεωρητικό σύρσιμο μιας κορυφής του ώστε οι πλευρές του να αποκτήσουν την ιδιότητα της καθετότητας) συνδέει νοητικά ιδιότητες ανατροφοδοτούμενος από το θεωρητικό σύρσιμο, (π.χ. η κατασκευή των αξόνων συμμετρίας του τετραγώνου όταν έχουν προηγηθεί οι κατασκευές αξόνων συμμετρίας του ορθογωνίου και ρόμβου). Συνδέει έτσι τις εξελικτικές διαδικαστικές πτυχές ώστε να οδηγήσουν σε μια δυναμική επανεφεύρεση (π.χ. το σύρσιμο της πλευράς ενός ορθογωνίου ώστε να αποκτήσει την ιδιότητα της ισότητας μπορεί να οδηγήσει τον μαθητή στην οπτική αντίληψη του τετραγώνου ως ορθογωνίου με πρόσθετες ιδιότητες).

Μέσω των ΣΟΕΑ οι μαθητές οδηγούνται σε μια αμφίδρομη διαδικασία, στην οποία γνωστικά συνδέουν τις ενέργειες στο λογισμικό και τις περιεχόμενες έννοιες: αφενός επεξεργαζόμενοι τις δυναμικές αναπαραστάσεις ενεργούν σε αυτές με τη χρήση των εργαλείων αλλά και αντίστροφα από τη δράση των εργαλείων οδηγούνται να σχηματίσουν τις έννοιες.

Ο δυναμικός χειρισμός των αντικειμένων στο λογισμικό οδήγησε τους μαθητές να κατασκευάσουν τις ιδιότητες του σχήματος. Η χρήση των εργαλείων μετασχηματισμού του λογισμικού επηρέασε τον προσανατολισμό της σκέψης τους, καθόσον η χρήση τους επέτρεψε τις ιδιότητες των σχημάτων να αναλυθούν και να συντεθούν στη συνέχεια σε σχήματα. Συνεπώς μέσω των δυναμικών μετασχηματισμών μετατρέπεται ο *χαρακτήρας συμβόλου* σε *χαρακτήρα σήματος*. Οι μαθητές ανέπτυξαν τη γεωμετρική σκέψη τους, όπως διαπιστώθηκε από το μετασχηματισμό των απαντήσεων αλλά και το μετα-τεστ van Hiele. Όπως αναφέρουν οι Furringhetti & Paola (2003) «στην περίπτωση αυτή η επανεφεύρεση είναι καθοδηγούμενη με τη χρήση του περιβάλλοντος της δυναμικής γεωμετρίας» αφού, σύμφωνα με τον Freudenthal (1991), «δίνεται η δυνατότητα [στους μαθητές] να οικοδομήσουν τη δική τους μαθηματική γνώση στη βάση μιας τέτοιας μαθησιακής διαδικασίας».

Ως αποτέλεσμα των μετασχηματισμών στις ΣΟΕΑ επέρχεται ένας μετασχηματισμός στις λεκτικές διατυπώσεις των μαθητών λόγω των υποκείμενων κανόνων στις οργανωμένες ενέργειες του χρήστη (μαθητή). Κατά συνέπεια: η δόμηση και ο μετασχηματισμός των ημιπροκατασκευασμένων ΣΟΕΑ οδηγούν τους μαθητές να περάσουν από έναν οπτικό τρόπο σε έναν θεωρητικό τρόπο σκέψης, και σε νοητικούς μετασχηματισμούς μέσω συνδεόμενων νοητικών συνδέσεων. Οι μαθητές χρησιμοποιούν λεκτικές διατυπώσεις για να ανταλλάξουν τις ιδέες τους, που σημαίνει ότι μετασχηματίζουν τα νοητικά αντικείμενά τους σε μια γλωσσική αντιστοίχηση των μετασχηματισμών των ΣΟΕΑ στις σελίδες του λογισμικού. Ένας μαθητής επομένως έχει μετακινηθεί στα επίπεδα van Hiele όταν κινείται μόνο μέσω νοητικών μετασχηματισμών μεταξύ συνδεόμενων οπτικών αναπαραστάσεων.

Συμπερασματικά ένας μαθητής κατασκευάζει Συνδεόμενες Οπτικές Ενεργές Αναπαραστάσεις

- όταν οικοδομεί μια αναπαράσταση με σκοπό να κατασκευάσει μια σταθερή κατασκευή ή γενικώς όταν μετασχηματίζει μια εξωτερική ή εσωτερική αναπαράσταση σε μια άλλη στο ίδιο αναπαραστατικό σύστημα ή σε άλλο˙
- όταν ανατροφοδοτείται από το θεωρητικό σύρσιμο ώστε να συνδέσει νοητικά ιδιότητες των σχημάτων, έτσι με την προσθήκη ιδιοτήτων οι επόμενες αναπαραστάσεις να προκύψουν από τις προηγούμενες˙

- όταν συνδέει νοητικά τις πτυχές μιας δυναμικής επανεφεύρεσης˙
- όταν αντιστρέφει μια διαδικασία ή δημιουργεί το ίδιο σχήμα σε μια φάση ενός δ-ΥΜΜ ή μεταξύ φάσεων του δ-ΥΜΜ.

Συνεπώς ο ορισμός των Συνδεόμενων Οπτικών Ενεργών Αναπαραστάσεων μπορεί να αναδιατυπωθεί ως ακολούθως (Patsiomitou, 2012):

Συνδεόμενες οπτικές ενεργές αναπαραστάσεις

είναι τα διαδοχικά δομικά βήματα των δυναμικών αναπαραστάσεων ενός προβλήματος ή μεταξύ προβλημάτων που επαναλαμβάνουν τα ίδια διαδικαστικά βήματα ή βήματα που αποκαλύπτουν την ίδια διαδικαστική δραστηριότητα ή βήματα που αντιστρέφουν μια διαδικασία, στο ίδιο πρόβλημα ή σε διαφορετικά προβλήματα, στην ίδια φάση ή μεταξύ διαφορετικών φάσεων ενός υποθετικού μαθησιακού μονοπατιού. Αυτά τα βήματα αποκαλύπτουν μια συνεχώς αυξανόμενη δομική πολυπλοκότητα λόγω της εννοιολογικής και δομικής σύνδεσης των μετασχηματιστικών βημάτων του χρήστη στο λογισμικό (δασκάλου ή μαθητή), ενέργειες που προκαλούνται μέσω των τεχνικών του λογισμικού με στόχο να εξωτερικεύσουν τα μετασχηματιστικά βήματα που έχει οπτικοποιήσει νοητικά (ή που υπάρχουν στο νου του) ή που οργανώνει ως αποτέλεσμα της ανάπτυξης της σκέψης και της κατανόησης των γεωμετρικών εννοιών.

5.9. Περιορισμοί της μελέτης και συστάσεις για επιπλέον έρευνα

Ως προς τα μαθησιακό μονοπάτι: Η σειρά των εργαλείων που ακολουθήθηκε στην ερευνητική διαδικασία ήταν καθορισμένη και εφαρμόστηκε σε κάθε ομάδα μαθητών με κάποιες βέβαια διαφοροποιήσεις. Έτσι δεν ακολούθησαν όλες οι ομάδες τις ίδιες στρατηγικές επίλυσης. Επιπλέον δεν γνωρίζουμε πώς θα αντιδρούσε ένας μαθητής σε κάθε στάδιο του μαθησιακού μονοπατιού. Θα ήταν επομένως ενδιαφέρον να επαναληφθεί η ερευνητική διαδικασία για περιπτώσεις μελέτης είτε μεμονωμένων μαθητών επιπέδου 1 (ή επιπέδου 2) είτε ομάδας μαθητών επιπέδου 1 (ή 2), όπου ο κάθε μεμονωμένος μαθητής θα είχε τη δυνατότητα να ακολουθήσει το προτεινόμενο μαθησιακό μονοπάτι και να πειραματιστεί με όλα τα εργαλεία. Με τον τρόπο αυτό κάποια μεμονωμένα περιστατικά της μελέτης θα επιβεβαιώνονταν προσδίδοντας εγκυρότητα στα αποτελέσματα, ειδικότερα όταν η αλληλεπίδραση με τα εργαλεία έδινε το ίδιο αποτέλεσμα.

Η μοντελοποίηση προβλημάτων μέσω των πέντε διαφορετικών τύπων ΣΟΕΑ είναι ένα επιπλέον ζήτημα που πρέπει να ελεγχθεί πειραματικά. Όπως επίσης πρέπει να ελεγχθεί η επίδραση των πέντε τύπων ΣΟΕΑ σε περιπτώσεις μελέτης ενός μαθητή επιπέδου 1 (ή επιπέδου 2) είτε και ομάδας μαθητών επιπέδου 1 όσο και 2, ώστε να διαπιστωθεί η πορεία του καθενός στην κατανόηση ενός προβλήματος ή θεωρήματος μέσω των διαφορετικών σταδιακών φάσεων και πολλαπλών συνδέσεων της λύσης ενός προβλήματος.

Επιπλέον, είναι αναγκαία μια εκτενής μελέτη ενορχηστρωμένης διαδικασίας καθώς και μελέτες περιπτώσεων ενορχηστρωμένων διαδικασιών ακολουθώντας τη σειρά των εργαλείων. Αυτό θα είχε σαν αποτέλεσμα τη διερεύνηση της εφαρμογής του μαθησιακού μονοπατιού σε περιβάλλον τάξης.

Ως προς τη μεθοδολογία της μελέτης: Η παρούσα μελέτη διερεύνησε, μεταξύ άλλων, τη μετακίνηση των μαθητών της πειραματικής ομάδας οι οποίοι αλληλεπίδρασαν με το λογισμικό. Όπως επισημάνθηκε στην ενότητα 3.5 («Αξιοπιστία και εγκυρότητα της μελέτης») η χρήση του ίδιου υποστηρικτικού υλικού μπορεί να οδηγήσει σε διαφορετικά αποτελέσματα σε μια ποιοτική μελέτη άλλου ερευνητή. Μια εκτενέστερη μελέτη επομένως της επίδρασης των εργαλείων με περισσότερους μαθητές αλλά και σε αλληλεπίδραση με διαφορετικούς ερευνητές θα διαφοροποιούσε τις παραμέτρους της μελέτης και θα ενίσχυε την εγκυρότητα της θεωρίας.

Είναι αναγκαία, επομένως, η μελέτη της διαδικασίας με διαφορετικούς ερευνητές (ή ερευνητές-δασκάλους) όπως και της διαφοροποίησης αυτής της παραμέτρου στα αποτελέσματα, αναφορικά με τις ερωτήσεις σκαλωσιάς που θα χρησιμοποιηθούν, τις πιθανές αλλαγές ως προς τη σειρά χρήσης των εργαλείων ή και τις διαφορετικές παρεμβάσεις στη σύνθεση του μαθησιακού μονοπατιού.

Μια άλλη παράμετρος είναι το επίπεδο συλλογισμού καθώς πολλές μελέτες έχουν επισημάνει χαμηλό επίπεδο συλλογισμού σε εκπαιδευτικούς εκπαιδευόμενους (π.χ. Mayberry, 1983).

Η μελέτη επομένως θα μπορούσε να επεκταθεί και να συμπεριλάβει και φοιτητές Πανεπιστημίων ή Παιδαγωγικών Σχολών, ώστε να διαπιστωθούν τα αποτελέσματα της μελέτης με ΣΟΕΑ ή και τα αποτελέσματα του μαθησιακού μονοπατιού στην κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών, στην εννοιολογική και διαδικαστική οικοδόμηση της γνώσης καθώς και στην ανάπτυξη αφαιρετικών ικανοτήτων.

Μια άλλη συνθήκη που πρέπει να εξεταστεί αφορά τη μελέτη της ομάδας ελέγχου σε μικρές ομάδες και σε αλληλεπίδραση με τον ερευνητή/ήτρια.

Ως προς τα μεμονωμένα εργαλεία: Οι μαθητές δεν γνώριζαν το λογισμικό στην αρχή της διαδικασίας αλλά προχωρούσαν στην εκμάθηση κάποιας εντολής ή εργαλείου παράλληλα με τη θεωρητική ανάπτυξη των εννοιών. Είναι άρα προφανές το ερώτημα που τίθεται και αφορά την εκ των προτέρων γνώση της χρήσης των εργαλείων, για τους μαθητές επιπέδου 2.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της μελέτης η αλληλεπίδραση των μαθητών με τα εργαλεία κατά τη διάρκεια της διαδικασίας οδήγησε σε συμπεράσματα (π.χ. η απόκρυψη/εμφάνιση ενός μαθηματικού αντικειμένου είχε ως αποτέλεσμα να προκαλέσει την ΑΟΑ των μαθητών του επιπέδου 2). Οι μαθητές αλληλεπίδρασαν με το συγκεκριμένο εργαλείο στη δεύτερη και τέταρτη φάση της μελέτης. Έτσι οι μαθητές οδηγήθηκαν σε αναστοχασμό και σύνδεση με την προϋπάρχουσα γνώση. Θα ήταν επομένως ενδιαφέρον να διερευνηθεί η επίδραση του εργαλείου αυτού σε μια διαφορετική φάση της μελέτης (π.χ. στην αρχική).

Ως προς τη σχεδίαση δραστηριοτήτων με ΣΟΕΑ: Πολλοί εκπαιδευτικοί προτιμούν την Άλγεβρα μάλλον παρά τη Γεωμετρία. Οι λόγοι είναι οι εξής: (α) η επίγνωση του κινδύνου αποτυχίας των μαθητών αλλά και (β) η δική τους έλλειψη αυτοπεποίθησης όσον αφορά τις γνώσεις τους στο αντικείμενο της γεωμετρίας. Πώς θα μεταβληθεί αυτή η αδυναμία όταν οι μαθητές θα μπορούν να επεξεργάζονται ημιπροκατασκευασμένες δυναμικές αναπαραστάσεις ΣΟΕΑ σε μια επίσημη πλατφόρμα, όπως το e-yliko του υπουργείου Παιδείας και Θρησκευμάτων; Πόσο θα ενισχυθεί η αυτοπεποίθηση των εκπαιδευτικών που θα χειρίζονται αυτή την πλατφόρμα για τους μαθητές τους, αναστοχαζόμενοι πάνω στις γνώσεις τους; Αυτά τα ερωτήματα θα πρέπει να συζητηθούν, όπως και ποιος θα εκπαιδεύσει τους σχεδιαστές των δραστηριοτήτων, **ώστε το υλικό να είναι συνεπές με την ιδέα που εμπεριέχεται, απαντά στο διδακτορικό**. **Από την άλλη, είναι ευνόητο ότι η κακή χρήση της έννοιας για κατασκευή δραστηριοτήτων με τον τρόπο του κάθε εκπαιδευτικού ίσως οδηγήσει σε αντίθετα αποτελέσματα**. Είναι, επομένως, αναγκαία η επιμόρφωση σχολικών συμβούλων, εκπαιδευτικών και γενικά φορέων της εκπαίδευσης οι οποίοι θα διασπείρουν τις ΣΟΕΑ με **συνεπείς και ανάλογες διαδικασίες ως προς την έννοια**.

Επέκταση της μελέτης σε διαφορετικά θεματικά πλαίσια: Η μελέτη επαναλήφθηκε για την κατανόηση του Πυθαγορείου θεωρήματος. Συγκεκριμένα η ερευνήτρια κατασκεύασε τις πολλαπλές αποδείξεις του Πυθαγορείου θεωρήματος, χρησιμοποιώντας Συνδεόμενες Οπτικές Ενεργές Αναπαραστάσεις με τις οποίες οι μαθητές αλληλεπίδρασαν. Στη συνέχεια οι μαθητές κατασκεύασαν μοντελοποιήσεις του θεωρήματος σε χαρτόνια, προσπαθώντας να κάνουν τις βοηθητικές ενδιάμεσες γραμμές να εμφανίζονται σταδιακά και να καθοδηγήσουν μέσω αυτών τις λεκτικές διατυπώσεις που οδηγούν από τις διαδικασίες τις οποίες εφάρμοσαν σταδιακά στη θεωρητική απόδειξη. Συμπεραίνεται επομένως πως ένα τεχνολογικό εργαλείο είναι σημαντικό όπως και ο σχεδιασμός τεχνουργημάτων με αυτό, όταν τα αποτελέσματα στη διδακτική χρήση μπορούν να γενικευθούν και να επαναληφθούν σε οποιαδήποτε ομάδα μαθητών, σε διαφορετικές χρονικές περιόδους αλλά και σε οποιοδήποτε θεματικό πλαίσιο (π.χ. στο αντικείμενο της φυσικής ή της χημείας).

Πώς θα επηρεαζόταν, για παράδειγμα, η κατανόηση των μαθητών αν εφαρμοζόταν η ανάπτυξη μιας διδακτικής ενότητας της φυσικής ή των αρχαίων ελληνικών και της ιστορίας με χρήση των ΣΟΕΑ; Θα κατανοούσαν κάποια δυσνόητα σημεία της Οπτικής ή του Ηλεκτρισμού, λόγω της αλληλεπίδρασης με τις κατάλληλες ημιπροκατασκευασμένες δυναμικές αναπαραστάσεις; Μπορούν να αναπτύξουν οι μαθητές δικές τους συνδεδεμένες εννοιολογικά και διαδικαστικά αναπαραστάσεις στα αντικείμενα αυτά;

Τέλος, μετά την ολοκλήρωση της μελέτης η οποία βασίζεται στη θεωρία των van Hiele, θα συμφωνήσουμε ότι τεκμηριώνεται η άποψη του Battista (2007) αναφορικά με το δύσκολο έργο προσδιορισμού των γνωστικών διαδικασιών που διέπουν τα επίπεδα van Hiele. Για να επιτευχθεί σημαντική πρόοδος στον τομέα αυτό είναι σημαντικό για τα μαθηματικά, ερευνητές της εκπαίδευσης να λάβουν σοβαρά υπόψη την εργασία των ερευνητών σε άλλους τομείς, όπως γνωστική επιστήμη (cognitive science) και νευροεπιστήμη (neuroscience). Αυτή η έρευνα μπορεί να ενισχύσει με πολύτιμη διορατικότητα τους ερευνητές ώστε να διαχειριστούν αυτές τις διαδικασίες που είναι δύσκολο να παρατηρηθούν (Battista, 2007, pp.858-859). Ωστόσο είναι σημαντικό να συνεχίσουμε τις έρευνες σ’αυτόν το ζωτικής σημασίας τομέα έρευνας, με μαθησιακά μονοπάτια κατασκευασμένα από παιδιά, ώστε μέσω των συνδεόμενων οπτικών αναπαραστάσεων που θα παραχθούν από αυτά, να ερμηνεύσουμε πως κατασκευάζουν νόημα για τις γεωμετρικές έννοιες.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Abdelfatah, H. (2011) Improving Attitudes towards Geometric Proof through A Suggested Story-Based Dynamic Geometry Approach. PhD Thesis, University of Education Karlsruhe, Baden-Württemberg, Germany. (January 2011).

Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. *Computers & Education,* (33), 131-152.

Ainsworth, S. E. (2006). DeFT: A conceptual framework for learning with multiple representations. *Learning and Instruction,* 16(3), 183-198.

Airasian, P. W., & Walsh, M. E. (1997). Constructivist cautions. *Phi Delta Kappan, 78*, 444-449.

Almeqdadi, F. (2000). *The effect of using the geometer's sketchpad (GSP) on Jordanian students' understanding of geometrical concepts*. Jordon: Yarmouk University.

Altrichter, H. and Posch, P. (1989) Does 'grounded theory' approach offer a guiding paradigm for teacher research? *Cambridge Journal of Education* 19(1): 21-31.

Andresen, M.: 2004, 'Introduction of 'Flexibility' of mathematical conceptions as a learning goal', in McDougall, D.E & Ross, J. A. (Eds.). (2004). *Proceedings of the twenty-sixth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 1, pp. 119-126.

Artigue, M. (2000). Instrumentation issues and the integration of computer technologies into secondary mathematics teaching. *Proceedings of the Annual Meeting of the GDM*. *Potsdam, 2000*: Retrieved from: http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/gdm/2000

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34*(3), 66-72.

Arzarello, F., C. Micheletti, F. Olivero, and O. Robutti 1998. A Model for Analysing the Transition to Formal Proofs in Geometry. *Proceeding of the 22th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Stellenbosch, South Africa, 2: 24-31.

Arzarello, F., Gallino, G., Micheletti, C., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (1998). Dragging in Cabri and modalities of transition from conjectures to proofs in geometry. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 32-39). Stellenbosh, South Africa

Artigue, M. (2002) Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*, 245-274.

Aspinwall, L. (1995). *The role of graphical representation and students' images in understanding the derivative in calculus: Critical case studies.* Doctoral Dissertation, The Florida State University

Athanasopoulou, 2008. An inquiry approach to the study of quadrilaterals using Geometer's Sketchpad: A study with pre-service and in-service teachers. PhD Thesis, University of North Carolina at Charlotte, Nov *2008*

Atebe, H. U. (2008). Students' van Hiele levels of geometric thought and conception in plane geometry: a collective case study of Nigeria and South Africa. PhD thesis, Rhodes University, Vol. 1 pp.1-363

Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M. (2009). Conjecturing and Proving in Dynamic Geometry: the Elaboration of Some Research Hypotheses. *Proceedings of the 6th Conference on European Research in Mathematics Education* (pp.231-240). Lyon.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situation de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*, 147-176.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.),*Mathematics, Teachers and Children* (pp. 216-238). London: Hodder and Soughton.

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen, & J. van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers

Balacheff, N. (1998). Construction of Meaning and Teacher Control of Learning. In T. D & J. D.C. (Eds.), *Information and communication technology in shcool mathematics* : Chapman & Hall.

Balacheff, N. (1999). Apprendre la preuve. In S. J & S. J. J (Eds.), *Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle* (pp. 197-236). Paris: PUF.

Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of proof. In L. I. Tatsien (Ed.), *the International Congress of Mathematicians* (Vol. III, pp. 907-920). Beijing: Higher Education Press.

Barbin, E. (1988). La dimostrazione matematica: significati epistemologici e questioni didattiche. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 17B*, 212-246.

Baroody, A.J. (1989). Manipulatives don't come with guarantees. *Arithmetic Teacher 37*(2), 4–5.

Baroody, A. J., Feil, Y., & Johnson, A. R. (2007). Research commentary: An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education. 38*(2), 115-131.

Bartolini Bussi, M.: 1991, 'Social interaction and mathematical knowledge', in E Furinghetti (ed.), *Proceedings of the 15th International PME Conference,* vol. 1, Assisi (Italy), The Program Committee of the 15th PME Conference, pp. 1

Bartolini Bussi M. G. (1996), Mathematical Discussion and Perspective Drawing in Primary School, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 31, 11-41.

Bartolini Bussi, M., & Mariotti, M. A. (1998). From drawing to construction: teacher's mediation within the Cabri environment. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 247-254). Stellenbosh, South Africa.

Battista, M.T. (1999). The mathematical miseducation of America's youth: Ignoring research and scientific study in education. *Phi Delta Kappan*, 80 (6), 425-433.

Battista, M.T. (2004). Applying cognition-based assessment to elementary school students' development of understanding of area and volume measurement. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 185-204.

Battista, M. and Borrow, C. (1997). Shape Makers: A computer microworld for promoting dynamic imagery in support of geometric reasoning. *Proceedings of the Nineteenth Annual Meeting, North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Volume 2, October 18–21, 1997, pp. 571–578.

Battista, M. T. (2007).The development of geometric and spatial thinking.In Lester, F. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). NCTM. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Battista, M. T. (2008). Representations and cognitive objects in modern school geometry. In G.W.Blume & M.K.Heid (Eds.). *Research on Technology and the teaching and learning of mathematics: Vol.2.Cases and Perspectives*.Charlotte, NC: Information Age.

Bauersfeld, H. (1995). The structuring of the structures: development and function of mathematizing as a social practice. In L. Steffe and J. Gale (Ed.), *Constructivism in Education*, pp. 137-158. LEA.

Belfort, E. & Guimarães, L. C. 2004. Teacher�s Practices and Dynamic Geometry. *Proceeding of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Bergen-Norway 2: 503-510.

Bell, A.W.: 1976a The Learning of General Mathematical Strategies (Doctoral Dissertation), Shell Center for Mathematical Education, Nottingham (U.K)

Bell, A.W.: 1976b A study of pupil's proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7(1), 23-40*

Biggs, J., & Collis, K. (1982). Evaluating the Quality of Learning: the SOLO Taxonomy.New York: Academic Press.

Biggs, J. & Collis, K. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligent behaviour.In H. Rowe (Ed.), Intelligence, Reconceptualization and Measurement. New Jersey.Laurence Erlbaum Assoc.

Blaxter, L. Hughes, C. & Tight, M. (Eds.). (2001). *How to research* (2nd ed.). Buckingham, UK: Open University Press.

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, 7/8.* *http://www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html*

Boero, P., Dapueto, C., Ferrari P., Ferrero, E., Garuti, R., Parenti, L., Scali, E, (1995) Aspect of the Mathematics-Culture relationship, *Procedings of PME XIX*, Recife, I, 151-166

Bodgan, R. C., & Biklen, S. K. (1998). *Qualitative Research in Education*. Boston London: Allyn and Bacon, Inc.

Bowers & Stephens, 2011. Using technology to explore mathematical relationships: a framework for orienting mathematics courses for prospective teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education* , pp. 1-20

Brousseau, G. (1992). Didactique: What it can do for the teacher. In R. Douady & A. Mercier (Eds.), Research in didactique of mathematics (pp. 7-39). Grenoble, France: La Pensee Sauvagek.

Brousseau, G. (1997): *The theory of didactical situations in mathematics*. London

Bruce E. Meserve and Dorothy T. Meserve (1984): Teacher education and the teaching of geometry. In: Robert Morris (Ed), *Studies in mathematics education,* UNESCO, Paris. Vol. 5

Bruner, J. S. (1966). *Towards a Theory of Instruction*, New York: Norton.

Bryman, A. and Bell, E. (2003). *Business research methods*. New York: Oxford University Press.

Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17*, 31-48.

Brown, A.L. .(2002). Design Experiments: Theoretical and Methodological Challenges in Creating Complex Intervention in Classroom Settings. *The Journal of the Learning Science,* 2(2), 141-178.

Zan, R. (2002). Episode II: Marco and Anna - Each following their own path da Learning from learners. *Proceedings of the 26th PME Conference,* Norwich, UK.

Campbell, D. & Stanley, J. 1963, 'Experimental and quasi-experimental designs for research on teaching', in Gage, N., (ed) *Handbook of Research on Teaching*, Chicago, Rand McNally

Cannizzaro, L., & Menghini, M. (2003). Geometric Figures from Middle to Secondary School: Mediating Theory and Practice. CERME 3.(vol. CD) ISBN/ISSN: 88 8492 1848

Carpenter, T. P. (1986). Conceptual knowledge as a foundation for procedural understanding. In J. Hiebert (Ed*.), Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics.*Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M., Levi, L., & Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively Guided Instruction.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Carr, W. & Kemmis, S. (1986) *Becoming Critical: education, knowledge and action research*. Lewes, Falmer.

Cerulli, M. (2004): *Introducing pupils to algebra as a theory: L'Algebrista as an instrument of semiotic mediation*. PhD Thesis, Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Pisa

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 359-387.

Chein, I. (1981). Appendix: An introduction to sampling. In L. H. Kidder (Ed.), *Selltiz, Wrightsman & Cook's research methods in social relations. (4th ed)* Austin, TX or New York: Holt, Rinehart and winston.

Chi Ming, Or (2005). Experimentation, construction, conjecturing and explanation in a dynamic geometry environment. PhD thesis. The University of Hong Kong

Choi-Koh Sang Sook (1999). A student's learning of geometry using the computer, *Journal of Educational Research* 92 (1999), pp. 301–311

Christensen, C.M. and Sundahl, D.M. (2001) The Process of Building theory, online] (cited 14 January 2006) Available from

Christiansen, B. & Walther, G. 1986. Task and Activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, and M. Otte (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education,* 243-307.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., & Pitta-Pantazi, D. (2005). Problem solving and problem posing in a dynamic geometry environment. The *Montana Mathematics Enthousiast, 2*(2), 125-143.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D. (2004a). Proofs through exploration in dynamic geometry environments. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2*(3), 339-352.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D. (2004b). Proofs through exploration in dynamic geometry environments. *The 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp 215-222). Bergen, Norway.

Christou, C., Pittalis, M., Mousoulides, N., & Jones, K. (2005). Developing 3D dynamic geometry software: Theoretical perspectives on design. In F. Olivero & R. Sutherland (Eds.), *Proceedings of the 7th International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (Vol.1, pp. 69-77). Bristol, UK: University of Bristol.

Cifarelli, V. (1998). The development of mental representations as a problem solving. *Journal of Mathematical Behavior,* 17(2), 239-264.

Cifarelli, V. (2000). Mental projection in mathematical problem solving: abductive inference and schemes of action in the evolution of mathematical knowledge. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 185-192). Hiroshima, Japan.

Clements, D. H. (2002b). Linking research and curriculum development. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 599-630). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Clements, D. & Sarama, J. (2002) Effects of a Preschool Mathematics Curriculum : Research on the NSF-funded Building Blocks Project, http://www.gse.buffalo.edu/org/buildingblocks/writings

Clements, D. & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6(2),* 81-89.

Clements, D. & Sarama, J. (2007). *Building Blocks- SRA Real Math, Grade PreK. Colombus,* OH: SRA/McGraw-Hill.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York: Routledge. Retrieved from http://literacyencyclopedia.ca/pdfs/Learning_Trajectories_in_Early_Mathematics_-_Sequences_of_Acquisition_and_Teaching.pdf

Clements, D. H. (2003). Teaching and learning geometry. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 151-178). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial Reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Clements, D. H., Battista, M. T., & Sarama, J. (Eds.). (2001). *Logo and geometry*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Clements, D., Wilson, D., & Sarama, J. (2004). Young children's composition of geometric figures: A learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6(2),* 163-184

Clements, D. H., Battista, M. T. (1990) "Constructivist Learning and Teaching." *Arithmetic Teacher* 38 (September 1990), 34-35.

Czarnocha, B., Dubinsky, E., Prabhu, V., Vidakovic, D., (1999). One theoretical perspective in undergraduate mathematics education research. *Proceedings of PME 23*, I, 95–110.

Cobb, P. & Bauersfeld, H. (1995): Introduction: The coordination of psychological and sociological perspectives in mathematics education. In: P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 1–16). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Cobb, P., & Bauersfeld, H. (Eds.). (1995). The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures. Hillsdale, NJ: Erlbaum

Cobb, P. Yackel, E. & Wood, T. (1989): Young childrens emotional acts while doing mathematical problem solving. In: D. B. McLeod & V. M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (pp. 117–148). New York: Springer-Verlag.

Cobb, P., & Bauersfeld, H. (Eds.). (1995). The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures. Hillsdale, NJ: Erlbaum

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1991). Curriculum and teacher development: Psychological and anthropological perspectives. In E. Fennema, T. P. Carpenter, & S. J. Lamon (Eds.), *Integrating research on teaching and learning mathematics*. Albany, NY: State University of New York Press.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(1) 2-33.

Cohen, L., & Manion, L. (2000). *Research methods in education.* Routledge. p. 254. (5th edition).

Corbett, E. P. J.: 1986, 'The changing strategies of argumentation from ancient to modern times', in J. L. Golden and J. J. Pilotta (Eds.), *Practical reasoning in human affairs* (pp.21-36). Norwell, MA: Kluwer.

Corbin, J., & Strauss, A. (1990). Grounded theory research: Procedures, canons, and evaluative criteria. *Qualitative Sociology, 13*, 3-21.

Corbitt, M. K. ; Edwards C. H. (1979). Mathematical Modelling and Cool Buttermilk in the Summer. In: Sharron, S.(Ed.). *Applications in school mathematics (Yearbook – NCTM: 1979)*. Reston: NCTM, p. 217 – 226

Corcoran, T., Mosher, F. A., & Rogat, A. (2009). *Learning progressions in science: An evidence-based approach to reform*. (Research Report #RR-63). Philadelphia: Consortium for Policy Research in Education. Retrieved from http://www.cpre.org/images/stories/cpre_pdfs/lp_science_rr63.pdf

De Corte, E., Verschaffel, L., & Greer, B. (2000). Connecting mathematics problem solving to the real world. In: Proceedings of the International Conference on Mathematics Education into the 21st Century: Mathematics for living (pp. 66-73). Amman, Jordan: The National Center for Human Resource Development

Coxford, A. F., Usiskin Z. P.: Geometry: A Transformation Approach, Laidlaw Brothers, Publishers, 1975

Creswell, J. W. (1994). *Research design qualitative and quantitative approaches*. Thousand Oaks, CA: SAGEpublications.

Creswell, J. W. (1998). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five traditions.* Thousand Oaks, CA: Sage.

Creswell, J. W. (2007). *Qualitative inquiry and research method: Choosing among five approaches* (2nd. ed.). Thousand Oaks, CA: Sage

Crowley, M. (1987). *The van Hiele model of development of geometric thought*. In M. M. Lindquist, (Ed.), Learning and teaching geometry, K-12 (pp.1-16). Reston, VA: NCTM.

Crook, C.K. (1994) *Computers and the collaborative experience of learning*. London: Routledge.

Cuoco, A.A. and F.R., Curcio, (Eds.) (2001). The Roles of Representation in School Mathematics: 2001 Yearbook. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

De Villiers, M. (1994) The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals, *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11-18.

De Villiers, M.D. (1996). *Some adventures in Euclidean geometry*. Durban: University of Durban-Westville

De Villiers, M. (1998). An alternative approach to proof in dynamic geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 369-393). London: Lawrence Erlbaum.

De Villiers, M. (1999). Mathematical treasure hunting. *KZN Math Journal, 4*(2), Nov, 23-28 and *Proceedings of AMESA 2000,* Univ. Free State, 271-276.

De Villiers, M. (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 35*, 703–724.

Dekker, R., & Elshout-Mohr, M. (2004). Teacher interventions aimed at mathematical level raising during collaborative learning. *Educational Studies in Mathematics*. 56(1), 39-65.

Dewey, J. (1933). *How We Think: A Restatement of the Relation of Reflective Thinking to the Educative Process*. Boston: D.C. Heath.

diSessa, A. (1994). Comments on Ed Dubinsky's Chapter. In A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp.248-256), Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Dixon, J. (1996). English language proficiency and spatial visualization in middle school students' construction of the concepts of reflection and rotation using the GSP. Dissertation Abstract International, DAI-A 56111, University of Florida.

Dreyfus,T. (1991). On the Status of Visual Reasoning in Mathematics and Mathematics Education. In Furighetti, F. (Eds.). *Proceedings of the XV Meeting of the International Group fot the Psychology of Mathematics Education,* Vol. I (pp. 33-48). Assisi, Italy.

Drijvers, P. H. M. (1999). Students encountering obstacles using CAS: A developmental-research pilot study. In P. Kent, J. Monaghan, & N. Zehavi (Eds.), *Papers (Presentations, Reactions and Keynotes) of the CAME (Computer Algebra in Mathematics Education) meeting at the Weizmann Institute of Science, Rehovot,Israel, August 1-2, 1999* (pp. 34-49). Available online from http://metric.ma.ic.ac.uk/came/events/weizmann

Drijvers, P.H.M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment. Design research on the understanding of the concept of parameter*, Dissertation. Utrecht: CD-press.Retrieved from www.fi.uu.nl/~pauld/dissertation

Drijvers, P., & Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the* *teaching and learning of mathematics: Vol. 2. Cases and perspectives* (pp. 363-392). Charlotte, NC: Information Age.

Dubinsky, E. (1994). A theory and practice of learning college mathematics. In A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp.221-243), Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Dubinsky, E. & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In D. Holton (Ed). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*. New ICMI Study Series, Vol. 7 (pp. 273-280). Dordrecht: Kluwer.

Retrieved from http://www.math.kent.edu/~edd/ICMIPaper.pdf

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 233-261.

Duval, R. (1992–1993). Argumenter démontrer expliquer : Continuité ou rupture cognitive? Petit X, 31, 37–61.Grenoble: IREM (Ed.).

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berne: Peter Lang

Duval, R. (1996). Argomentare, dimostrare, spiegare: continuità o rottura cognitiva? *La matematica e la sua didattica, 2*, 130-152.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Volume 1* (pp. 3-26). Cuernavaca, Morelos, Mexico.

Duval, R. (2006). Cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 61(1-2), 103-131

Dvora & Dreyfus (2004) Unjustified assumptions based on diagrams in geometry *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol 2 pp 311–318

Edgington, C. (2009). "Teaching mathematics for understanding: The social culture of the classroom". *Paper presented at the annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, OMNI Hotel, Atlanta, GA* Vol. 5, pp. 371-378

Edwards, L. D. (1991). Children's learning in a computer microworld for transformation geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(2), 122-137

Edwards, L. (1998). Embodying mathematics and science: Microworls as representations. *Journal of Mathematics Behavior,* 17(1), 53-78.

Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1990). On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann & S. Cunninham (Ed.). *Visualization in Teaching and Mathematics* (pp. 25-37). Washington DC: Mathematical Association of America.

Eisenhardt, M. K. (2002). Building theories from case study research. In A. Huberman & M. Miles (Eds.), *The qualitative researcher's companion* (pp. 5-36). Thousand Oaks: Sage Publications

Elchuck, L. M. (1992). *The Effects of Software Type, Mathematics Achievement, Spatial Visualization, Locus of Control, Independent Time of Investigation, and van Hiele Level on Geometric Conjecturing Ability*. A thesis at The Graduate School, College of Education, The Pennsylvania State University.

Elliott, J. (1991) *Action Research for Educational Change* (Buckingham, Open University Press).

Engeström, Y. (1987). *Learning by expanding: An activity-theoretical approach to developmental research*. Helsinki: Orienta-Konsultit.

Engestrom, Y. (1999). Activity theory and individual social transformation. In Y. Engestrom & R. Miettinen (Eds.), Perspectives in activity theory (pp. 19–38). Cambridge: Cambridge UniversityPres

Ennis, R.: 1969, Logic in Teaching, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Erez, M. & Yerushalmy, M. (2006) "If you can turn a rectangle into a square, you can turn a square into a rectangle": young students' experience the dragging tool, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11(3), 271-299

Erbilgin, E. (2003). Effects of spatial visualization and achievement on students' use of multiple representations . Master Thesis. The Florida State University. Retrieved from

http://etd.lib.fsu.edu/theses/available/etd-09172003- 182500/unrestricted/evrim_thesis.pdf

Even, R. (1998). Factors Involved in Linking Representations of Functions. *Journal of Mathematical Behavior,* 17(1), 105-121.

Farkota, R.M. (2003) The effects of a 15-minute direct instruction intervention in the regular mathematics class on students' mathematical self-efficacy and achievement. PhD thesis. Faculty of Education, Monash University. (September, 2003)

Fairclough, N. (1992). *Discourse and social change*. Cambridge, UK: Polity Press

Ferrando, E. (2005). Abductive Processes in Conjecturing and Proving. Ph.D. Thesis, Purdue University, West Lafayette, Indiana. USA.

Fey, J. (1989). Technology and Mathematics Education: A Survey of Recent Developments and Important Problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 3, 237-272.

Finlow-Bates, K. (1997) “Investigating notions of proof: A study of students proof activities within the context of a fallibilist and social theory”. Unpublished PhD dissertation, London South Bank University.

Fischbein, E. (1993) The theory of figural concepts, *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162.

Fletcher, T. J.: 1970-71, 'The teaching of geometry: Present problems and future aims', Educational Studies in Mathematics 3, 395-412.

Forman, E. A., Larreamendy-Joerns, J., Stein, M. K. & Brown, C. A. (1998). “You’re going to want to find out which and prove it”: collective argumentation in a mathematics classroom. *Learning and Instruction, 8*(6), 527-548.

Forman, E. A., McCormick, D. & Donato, R. (1998). Learning what counts as a mathematical explanation, *Linguistics and Education, 9*(4), 313-339.

Freudenthal (1991), *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1971) Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics*, 3 (3/4), 413± 435.

Freudenthal, H.: 1973, *Mathematics as an Educational Task*, Reidel, Dordrecht.

Fujita, T. and Jones, K. 2007. Learners’ Understanding of the Definitions and Hierarchical Classification of Quadrilaterals: towards a theoretical framing, *Research in Mathematics Education*. 9(1&2): 3-20.

Furinghetti, F. & Paola, D.(2003). Revisiting guided reinvention: icons, indexes, and symbols in the construction of mathematical objects. http://math.uncc.edu//~sae/dg7/fuinghetti.pdf

Furinghetti, F., Olivero, F. & Paola, D.: 2001, ‘Students approaching proof through conjectures: snapshots in a classroom’, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, v.32, 319-335.

Furner, J. M. and Marinas, C. A. (2007). Geometry sketching software for elementary children: Easy as 1, 2, 3. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education,*3 (1) 83–91

Fuson, K. C., Carroll, W. M., & Drueck, J. V. (2000). Achievement results for second and third graders using the *Standards*-based curriculum *Everyday Mathematics*. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*, 277-295.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education*: Monograph Number 3.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (Eds). (1984). *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele.* Brooklyn: Brooklyn College. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 287 697).

Gamow, G. (1988). *One, two, three--infinity.* New York: Dover Publications. (Original work published 1947

Gawlick, Th. (2005). Connecting arguments to actions–dynamic geometry as means for the attainment of higher van Hiele levels. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* Vol. 37 (5), 361-370

Geddes, D., & Fortunato, I. (1993). Geometry: Research and Classroom Activities. In D.T.Owens (Ed.), Research Ideas for the Classroom: Middle grades mathematics (pp.199-225). New York: Macmillan Publishing Company.

Genz, R. (2006). Determining high school geometry students' geometric understanding using van Hiele levels: Is there a difference between standards-based curriculum students and nonstandards-based curriculum. Unpublished Master's thesis, Brigham Young University, USA. Available on line from http://contentdm.lib.byu.edu/ETD/image/etd1373.pdf

Giraldo, V., Belfort, E., & Carvalho, L. M. (2004). Descriptions and conflicts in dynamic geometry. In M. J. Heines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME International Conference, 2,* 455-462.

Glasersfeld, E. (1991). *Radical Constructivism in Mathematics Education.* Kluwer Academic Publishers.

Glasersfeld, E. v. (1987).Learning as a constructivist activity. In C. Janvier (Ed.),Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp.3-18). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Glasersfeld, E. v. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning*. London:Falmer Press

Glaser, BG., Strauss, Al. (1967) . *The discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research* New York: Aldine de Gruyter

Golafshani, N. (2003). Understanding reliability and validity in qualitative Research. *The Qualitative Report, 8*(4), 597-607. Retrieved 8/24/07 from http://www.nova.edu/ssss/QR8-4/golafshani.pdf

Goldin, G. (1998). The PME working group on representations. *Journal of Mathematical Behavior,* 17(2), 283-301.

Goldin, G. (2003). Representation in school mathematics: A unifying research perspective. In J. Kilpatrick, Martin, W., Schifter, D., & National Council of Teachers of Mathematics (Ed.). *A research companion to Principles and standards for school mathematics*, Vol.17 (pp. 1-4). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Goldin, G., & Janvier, C. (1998). Representations and the psychology of mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior,* 17(1), 1-4.

Goldin, G., & Kaput J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin, & B. Greer (Eds.). *Theories of mathematical learning* (pp. 397-430). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and development of mathematical concepts. In A. Cucoco, & Curcio, F (Ed.). *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-23). Reston: National Council of Teachers Mathematics.

González G., Herbst P. (2009) Students' conceptions of congruency through the use of dynamic geometry software. *International Journal of Computers for Mathematical Learning.* 14 (2) 153-182.

Goodyear, P & Steeples, C (1999) Asynchronous multimedia conferencing in continuing professional development: issues in the representation of practice through user-created videoclips, Distance Education (20, 1) 31-48

Goos, M. (1998). “I don’t know if I’m doing it right or I’m doing it wrong!” Unresolved uncertainty in the collaborative learning of mathematics. In C. Kanes, M. Goos, & E. Warren (Eds.), *Teaching mathematics in new times* (Proceedings of the 21st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Vol. 1, pp. 225-232). Brisbane: MERGA.

Goos, M. (2000) Collaborative problem solving in senior secondary mathematics classrooms, In J. Bana & A. Chapman (Eds), Mathematics education beyond 2000: Proceedings of the 23rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (Vol.1. pp.38-45). Perth: Mathematics Education Research Group of Australasia

Goos, M., Galbraith, P., & Renshaw, P. (2002). Socially mediated metacognition: Creating collaborative zones of proximal development in small group problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 49*(2), 193–223.

Govender, R. & De Villiers, M. "A dynamic approach to quadrilateral definitions." Pythagoras 58 (2004): 34-45.

Graeber, A. O. (1999). Forms of knowing mathematics: What preservice teachers should learn. *Educational Studies in Mathematics, 38*, 189-208.

Graumann, G. 2005. Investigating and ordering Quadrilaterals and their analogies in space-problem fields with various aspects. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), 37*(3), 190-198.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht, The Netherlands: CD-B Press.

Gravemeijer, K. and Terwel, J. (2000) Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies,* 32(6), 777–796.

Gravemeijer, K. P. E. (2004). *Creating Opportunities for Students to Reinvent Mathematics*. Paper presented at ICME 10, Kopenhagen, Denmark. July 4-11

Gravemeijer, K., Bowers, J., & Stephan, M. (2003). A hypothetical learning trajectory on measurement and flexible arithmetic. In M. Stephan, J. Bowers, P. Cobb, & K. Gravemeijer (Eds.), *Supporting students' development of measuring conceptions: Analyzing students' learning in social context* (pp. 51-66). Reston: NCTM.

Growman, M. (1996). Integrating Geometer's sketchpad into a geometry course for secondary education mathematics majors. *Association of Small Computer users in Education (ASCUE) Summer Conference Proceedings*, 29th, North Myrtle Beach, SC

Guin, D., & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *3*(3), 195-227.

Gutierrez, R. (1995). *Practices, beliefs, and cultures of high school math departments: Understanding their impact on student advancement.* Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, CA.

Gutiérrez, A. & Jaime, A. (1987). Study of the characteristics of the Van Hiele Levels. In J.Bergeron, R. Hershkowitz & C. Kieran (Eds.) *Proceedings of the 11th InternationalConference of PME* (Vol. 3, pp. 131-137), Montreal, Canada: Authors.

Gutierrez, A.& Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning, *Focus on Learning Problems in Mathematics 20* (2/3), 27-46. www.uv.es/Angel.Gutierrez

Gutierrez, A., Jaime, A., & Fortuny, J. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*, 237-251.

Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1/2), 127-150.

Hanna G., Janke N. (1996). Proof and proving. In: Bishop A. et al. (eds.) *International handbook of mathematics education*, pagg. 877-908. Dordrecht, Kluwer Acad. Pub.

Hanna, C. & Janke, H. N.(2002). Another Approach to Proof: Arguments from Physics. *ZDM, 34* (1), 1-8. http://www.fiz-karlsruhe.de/fiz/publications/zdm/zdm021a1.pdf

Hanna, G. (1989). More than formal proof. *For the Learning of Mathematics, 9*(1), 20-23.

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics, 15*(3), 42-49.

Hanna, G. (1996). The ongoing value of proof. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 21-33). Valencia, Spain.

Hanna, G. (1998). Proof as explanation in geometry. *Focus on learning problems in mathematics, 20*(2&3), 4-13.

Hanna, G. (2000). A critical examination of three factors in the decline of proof. *Interchange, 31*(1), 21-33.

Hanna, G. 2001. Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 44, Issue 1/2, p25, 29p.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Harel, G. & Sowder, L (2007). Toward a comprehensive perspective on proof, In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, National Council of Teachers of Mathematics, 805-842.

Harel, G. & Sowder, L. (2009). College instructors views of students vis-a-vis proof. In M. Blanton, D. Stylianou, & E. Knuth (Eds.) *Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K-16 Perspective*. Routledge/Taylor & Francis

Harel, G. (2008). DNR Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction: Focus on Proving, Part I. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 40, 487–500

Harel, G. and Tall, D. (1991); The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics; in *For the Learning of Mathematics* 11(1), p.38-42,FLM Publishing association: White Rock, Canada.

Harel, G., & Sowder, L. (1996). Classifying processes of proving. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.),*Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematical Education* (Vol. 3, pp. 59-66). Valencia, Spain.

Hasegawa, J. (1997). Concept formation of triangles and quadrilaterals in the second grade. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 157–179.

Healy, L. 2000. Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri constructions. *Proceeding of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Hiroshima-Japan, Vol. 1, pp 103-117.

Healy, L. and Hoyles, C. (1999): *Technical report on the nationwide survey: Justifying and proving in school mathematics.* London, Institute of Education, University of London.

Hegedus, S. (2005). Dynamic representations: A new perspective on instrumental genesis. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of CERME4, The Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Barcelona, Spain: Ramon Llull University.

Hegedus, S., & Kaput, J. (2004). An introduction to the profound potential of connected algebra activities: Issues of representation, engagement and pedagogy. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 129-136). Bergen, Norway: Program Committee.

Heinze, A. (2004). *Zum Umgang mit Fehlern im Unterrichtsgespräch der Sekundarstufe* I. [Mistake-handling in the classroom discourse on the lower secondary level] Journal für Mathematik-Didaktik 25 (3/4), 221 - 244.

Hershkovitz, R.: 1990, 'Psychological aspects of learning geometry', in P. Nesher and J. Kilpatrick (eds), Mathematics and Cognition, Cambridge University Press, Cambridge

Hiebert, J. & Carpenter, T. P . (1992). Learning and teaching with understanding. In D. Grouws (Ed.), *A handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-100). New York: Macmillan Library Reference Simon & Schuster Macmillan

Hiebert, J. (Ed.). (1986). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hitt, F. (Ed.) (2002). Representations and mathematics visualization. In Proceedings of the Twenty-Fourth North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Georgia, USA.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher, 74*, 11-18

Hollebrands, K. (2002). The role of a dynamic software program for geometry in high school students' understandings of geometric transformations. In D. Mewborn, P. Sztajn, D. White, H. Wiegel, R. Bryant, & K. Nooney (Eds.), Proceedings of the PME-NA Annual Conference (pp. 695-705). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Hollebrands, K. F. (2003). High school students' understanding of geometric transformations in the context of a technological environment. *Journal of Mathematical Behavior* 22, 55-72.

Hollebrands, K. F. (2004). High school students' intuitive understandings of geometric transformations. *The Mathematics Teacher, 97*(3), 207-214.

Hollebrands, K. F. (2006). Exploration I - V :Transformation activities using geometer's sketchpad. In P. Eley (Ed.) (pp. 27). Raleigh, NC.

Hollebrands, K. (2007). The role of a dynamic software program for geometry in the strategies high school mathematics students employ. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(2), 164-192.

Hollebrands, K. F., Conner, A., & Smith, R.C. (2010). The Nature of Arguments Provided by College Geometry Students With Access to Technology While Solving Problems *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(3), 324-350

Hollebrands, K., Laborde, C., & StraBer, R. (2008). Technology and the learning of geometry at the secondary level. *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics*, *1*, 155-205.

Hollebrands, K.F. & Smith, R.C. (2009). Using dynamic geometry software to teach secondary school geometry: Implications from research. In T. Craine (Ed.) *Understanding Geometry for a Changing World: 2009 Yearbook of the NCTM*. (pp. TBD). Reston: VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hölzl R.(2001). Using Dynamic Geometry Software to Add Contrast to Geometric Situations - A Case Study. *International Journal of Computers for Mathematical Learning.,* 6(3), 63–86

Hölzl, R. (1996). How does 'dragging' affect the learning of geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 1*, 169-187.

Hohenwarter, M. (2002) *GeoGebra - Ein Software system für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene*. Master thesis, University of Salzburg

Hoyles, C. & Noss, R. (1993). Deconstructing microworlds. In D. Ferguson (Ed.), *Advanced technologies in the teaching of mathematics and science* (pp. 415-438). Berlin: Springer-Verlag.

Hoyles, C. (1998). A culture of proving in school mathematics. In J. Tinsley & D.Johnson (Eds.), *Information and communication technologies in school mathematics* (pp. 169181). London: Chapman Hall.

Hoyles, C. and D. Kuchemann: 2002, 'Students' Understanding of Logical Implication'. Educational Studies in Mathematics 51(3), 193–223.

Hoyles, C., & Healy, L. (1999). Linking informal argumentation with formal proof through-computer integrated teaching experiments. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 3, pp. 105112). Haifa, Israel: PME.

Inglis, M., Maija-Ramos, J. P. and Simpson, A.: 2007, 'Modelling mathematical argumentation: the importance of qualification', Educational Studies in Mathematics, 66(1), 3-21.

Jackiw, N. & Finzer, W. (1993). *The Geometer's Sketchpad*: Programming by Geometry," *Watch What I Do: Programming by Demonstration.* Cambridge, MA: The MIT Press, 293-308

Jackiw, N. (1991). *The Geometer's Sketchpad* [Computer Software].Berkeley, CA: Key Curriculum Press

Jackiw, N. (2006) Mathematics and the Aesthetic: New Approaches to an Ancient Affinity. *Mechanism and Magic in the Psychology of Dynamic Geometry*. Heidelberg: Springer Verlag.

Jackiw, N. and Sinclair, N. "Understanding and Projecting ICT Trends in Mathematics Education," *Teaching Secondary Mathematics with ICT.* (Berkshire: Open University Press, 2004).

Jahn, A. P. (2002). "Locus" and "trace" in Cabri-géomètre: relationships between geometric and functional aspects in a study of transformations. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(3), 78–84.

Jaime, A., & Gutiérrez, A. (1994): A model of test design to assess the Van Hiele levels, *Proceedings of the 18th PME Conference* 3, pp. 41-48

Jaime, A., & Gutierrez, A. (1995). Guidelines for teaching plane isometries in secondary school. *The Mathematics Teacher, 88*(7), 591-597

Janvier, C. (1987). *Problems of Representations in the Learning and Teaching of Mathematics.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Jaworski, B. (2003). Inquiry as a pervasive pedagogic process in mathematics education development, *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Bellaria, Italy. Retrieved February 14, 2010, from http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3

Jiang, Z. 2002. Developing Preservice Teachers Mathematical Reasoning and Proof Abilities in the Geometers Sketchpad Environment. *Proceedings of the Annual Meeting [of the] North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Volumes 1-4.

Jonassen, D., Cole, P., & Bamford, C. (1992). *Leaner-generated vs. instructor provided analysis of semantic relationships.* Paper presented at the Convention of the Association for Educational Communications and Technology, 15th, New Orleans, LA. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 362 170).

Jones, K. 2001. Providing a Foundation for Deductive Reasoning: Students' Interpretations when Using Dynamic Geometry Software and their Evolving Mathematical Explanations. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1/2), 55-85.

Johnston, B. L., and Richman, F. 1997. *Numbers and Symmetry: An Introduction to Algebra*. Boca Raton: CRC Press.

Kadijevich, Dj. & Haapasalo, L (2001). Linking procedural and conceptual mathematical knowledge through CAL. *Journal of Computer Assisted Learning* (2001) 17, 156-165

Kadunz, G. (2002). Macros and modules in geometry. *ZDM, 34*(3), 73-77.

Kaput, J. (1987). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-26). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. In E. Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 53-74). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Kaput, J. (1999). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *Journal of Mathematical Behavior,* 17(2), 256-281.

Kaput, J. (2001). *Learning algebra using dynamic simulations and visually editable graphs of rate and totals quantities*. Paper presented at the QCA International Seminar on “Reasoning, Explanation and Proof in School Mathematics and Their Place in the Intended Curriculum”. London, England.

Kaput, J. J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In S. Wagner & C. Kieran, *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 167-194). Hillsdale, NJ: Erlbaum

Kemmis, S. & McTaggart, R. (1982). *The action research planner*. Geelong, Victoria: Deakin University Press.

Kilpatrick, J. and Wirszup, I. (eds.): 1969-1977, Soviet Studies in the Psychology of Learn- ing and Teaching Mathematics, School Mathematics Study Group, Stanford, California

Klein, F. (1896). The arithmetizing of mathematics. An address delivered at the public meeting of the Royal Academy of Sciences of Göttingen, November 2, 1895 (Translated by I. Maddison), *Bulletin of the American Mathematical Society* s.II, v.2, 241–249.

Knipping, C.: 2003, ‘Argumentation structures in classroom proving situations’. In: M. A.Mariotti (ed.): Proceedings of the Third Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Bellaria, Italy, ERME.

Kordaki, M. (2003). The effect of tools of a computer microworld on students’ strategies regarding the concept of conservation of area. *Educational Studies in Mathematics,* 52, 177-209.

Kordaki, M., & Potari, D. (1998). A learning environment for the conservation of area and its measurement: a computer microworld. *Computers & Education,* 31, 405-422

Korthagen, F.A.J. (2001). Linking practice and theory: The pedagogy of realistic teacher education. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kozulin, A.: 1998, *Psychological Tools*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Küchemann, D., & Hoyles, C. (2001). *Investigating factors that influence students’ mathematical reasoning*. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the*

International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 257-264). Utrecht, The Netherlands: PME.

Kuhn, D.: 1992, 'Thinking as arguments', *Harvard Educational Review, 62*, 155-178.

Kynigos, C. (2007) Half-Baked Logo Microworlds as Boundary Objects in Integrated Design, *Informatics in Education,* 2007, Vol. 6, No. 2, 1–24, Institute of Mathematics and Informatics, Vilnius.

Laborde, C., C. Kynigos, K. Hollebrands and R. Strasser (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutiérrez, P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education:Past, Present and Future*. Sense Publishers, pp. 275–304.

Laborde, C. (1993). The computer as part of the learning environment: The case of geometry. In *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology* edited by Christine Keitel & Kenneth Ruthven, 48-67. Berlin: Springer-Verlag

Laborde, C. (1998). Relationship between the spatial and theoretical in geometry: the role of computer dynamic representations in problem solving. In J. D. Tinsley & D. C. Johnson (Eds.), *Information and Communications Technologies in School Mathematics* (pp. 183-195). London: Chapman & Hall.

Laborde, C (2003). Technology used as a tool for mediating knowledge in the teaching of mathematics: the case of Cabri-geometry. *Plenary speech delivered at the Asian Technology Conference in Mathematics*. Chung Hau University, Taiwan.

Laborde, C. (2005). The hidden role of diagrams in students' construction of meaning in geometry. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Shovsmose & P. Valero (Eds.), *Meaning in mathematics education* (pp. 159–179). New York: Springer

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., and Strässer, R. 2006. Teaching and Learning Geometry with Technology. In A. Gutiérrez, P. and Boero (Eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future.* 275-304.

Laborde, C.:1993, The computer as part of the learning environment: the case of geometry,Keithel, C. & Ruthven, K., *Learning from computers: mathematics education and technology*, NATO ASI Series, Springer Verlag, 48-67.

Laborde, J-M., Baulac, Y., & Bellemain, F. (1988) Cabri Géomètre [Software]. Grenoble, France: IMAG-CNRS, Universite Joseph Fourier

Lakatos, I.: 1979, *Dimostrazioni e Confutazioni*,Milano, (*Proofs and refutation*, Cambridge University Press, Cambridge, 1976).

Lakoff, G. (1993). The contemporary theory of metaphor. In Ortony, A. (ed.) (1993), *Metaphor and Thought, Second edition* . Cambridge: Cambridge University Press. pp. 202-250

Lavy (2006) Dynamic visualization and the case of 'stars in cages. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 25-32. Prague: PME.

Leikin, R. 2004. Towards High Quality Geometrical Tasks: Reformulation of a Proof Problem. *Proceeding of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Bergen-Norway, Vol. 3, pp 209-2

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 33-40). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Leung, A & Or C.M (2007) From construction to proof: explanations in dynamic geometry environment. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, pp. 177-184. Seoul: PME.

Leung, A. (2008). Dragging in a dynamic geometry environment through the lens of variation. International Journal of Computers for Mathematical

Leung, A., & Lopez-Real, F. (2002). Theorem justification and acquisition in dynamic geometry: A case of proof by contradiction. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*(2), 145-165.

Linchevsky, L.; Vinner, S. & Karsenty, R. (1992): To be or not to be minimal? Student teachers views about definitions in geometry. In: W. Geeslin & K. Graham (Eds.), *Proceedings of the Sixteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2 (pp.48–55). U.S.A.: Durham

Lincoln, Y. S., & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Beverly Hills, CA: Sage.

Lopez-Real, F.J. & Leung, A. (2004). The conceptual tools of Euclidean and dynamic geometry environments, *Paper presented in Topic Study* Group 10: Research and development in the teaching and learning of geometry, ICMI 10. Copenhagen, Demark.

Lopez-Real, F., & Leung, A. (2006). Dragging as a conceptual tool in dynamic geometry environments. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(6), 665–679.

Mariotti, M. A. & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. Educational Studies in Mathematics 34, 219-248.

Mariotti, M-A. (1995). Images and concepts in geometrical reasoning. In R. Sutherland & J. Mason (Eds), *Exploiting Mental imagery with Computers in Mathematics Education* (pp. 97-116). Berlin: Springer-Verlag

Mariotti, M. A. (1997). Justifying and proving in geometry: the mediation of a microworld. In M. Hejny & J. Novotna (Eds.) *Proceedings of the European Conference on Mathematical Education* (pp. 21�26). Prague: Prometheus Publishing House.

Mariotti, A. (2000) Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment *Educational Studies in Mathematics pp.25*-53 Kluwer Academic Publishers

Mariotti, M. A. 2001. Introduction to Proof: The Mediation of a Dynamic Software Environment. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1/2), 25-53.

Mariotti, M. A., Bartolini Bussi, M., Boero, P., Ferri, F., & Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition, *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 180-195). Lathi, Finland.

Markman, E. M. (1991) *Categorization and Naming in Children: problems of induction* (Cambridge, MA: MIT Press). Revised edition

Marrades, R. and Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics,* 44 (1–2), 87–124.

Mason, J. (1980); When is a symbol symbolic? in For the Learning of Mathematics 1(2), p.8-12, FLM Publishing association: Montreal, Canada.

Mason, J. and Pimm, D. (1984); Generic examples: seeing the general in the particular; in Educational Studies in Mathematics 15, p.277-289, D. Reidel Publishing Company: Dordrecht, the Netherlands.

Mason, M. M. (1997). The van Hiele model of geometric understanding and mathematically talented students. *Journal for the Education of the Gifted, 21*(1), 39-53.

Mason, M. M. (1998). *The van Hiele levels of geometric understanding*. Retrieved from *http://66.102.1.104/scholar?q=cache:5G1KlwNt-PEJ:scholar.google.com/&hl=en*

Mason, M. M. (1998). *The van Hiele levels of geometric understanding*. Retrieved from *http://66.102.1.104/scholar?q=cache:5G1KlwNt-PEJ:scholar.google.com/&hl=en*

Mayberry, J. (1983). The Van Hiele Levels of Geometric Thought in Undergraduates Preservice Teachers, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. ? , No. 14,pp. 58-61.

McDonald, J. L.: 1989, 'Cognitive development and the structuring of geometric content', Journalfor Research in Mathematics Education 20(1), 1-21.

McMillan, J. H. (2000). *Educational Research. Fundamentals for the consumers* (3rd ed.). New York: Addison Wesley

McGraw, R. H. (2002). *Facilitating whole-class discussion in secondary mathematics classrooms*. Unpublished doctoral dissertation, Indiana University, Bloomington, IN.

McTaggart R. (1994) Participatory action research: issues in theory and practice. Educational Action Research 2, 313±337.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education*. San Francisco: Jossey-Bass

Merriam, S. B. and Simpson, E. L. *A Guide to Research for Educators and Trainers of Adults* (2d ed.). Malabar, FL: Krieger, 1995.

Mesquita, A. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of Mathematical Behavior,* 17(2), 183-195.

Messick, R. G., & Reynolds, K. E. (1992). *Middle level curriculum in action*. White Plains, NY: Longman.

Mezirow, J. (1997). Transformative learning: Theory to practice. New Directions for Adult & Continuing Education, 74, 5–12.Miles, M., & Huberman, A. (1994). *Qualitative Data Analysis*. London: Sage

Mitchelmore, M, & White, P. (2007). Abstraction in Mathematics Learning. *Mathematics Education Research Journal, 19*(2), 1–9.

Mitchelmore, M., & White, P. (2004). Abstraction in mathematics and mathematics learning. In M. J. Høines, & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 329-336). Bergen, Norway: Bergen University College.

Monaghan, F. (2000) What difference does it make? Children views of the difference between some quadrilaterals, *Educational Studies in Mathematics*, 42(2), 179–196.

Moritz, J. B. (1998). Observing students learning from students. In S. Groves, B. Jane, I. Robottom, & R. Tytler (Eds.), *Contemporary Approaches to Research in Mathematics, Science, Health and Environmental Education 1997* (pp. 160-165). Geelong, VIC: Deakin University

Morris, R. (editor). (1984). Studies in mathematics education: Teaching of Geometry. Vol. 5. UNESCO

N.C.T.M.: 1930, The Teaching of Geometry, 5th Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, Columbia University Press, New York.

N.C.T.M.: 1970a, A History of Mathematics Education in the United States and Canada, 32nd Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C.

N.C.T.M.: 1970b, The Teaching of Secondary School Mathematics, 33rd Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C.

Nardi, B. A.: 1996, "Studying context: a comparison of Activity Theory, Situade Action Models, and Distributed Cognition". In Nardi, B. A. (ed.), *Context and Consciousness*, pp. 69-102.Cambridge MA: The MIT press.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM. Electronic format: http://standards.nctm.org accessed 25/11/2001

Natsoulas, A. (2000). Group symmetries connect art and history with mathematics. *The Mathematics Teacher, 93*(5), 364-370.

Neff, A.M. 2006. *Fundamentals of Math II.* Retrieved May 17, 2007, from South Texas College, Web site: http://www.southtexascollege.edu/aneff/fomii/LN/92.pdf

Nichols, S. E., Tippins, D. & Wieseman, K. (1997). A toolkit for developing critically reflective science teachers, *Journal of Science Teacher Education*, 8(2), 77–106.

Niss, M. (1999), Kompetencer og Uddannelsesbeskrivelse (Competencies and subject description). *Uddanneise* , *9*, 21-29.

Noraini Idris, 2009 The Impact of Using Geometers' Sketchpad on Malaysian Students' Achievement and Van Hiele Geometric Thinking. Journal of Mathematics Education December 2009, Vol. 2, No. 2, pp.94-107

Noss, R. and C. Hoyles. 1996. *Windows on Mathematical Meanings: Learning cultures and computers*. Dordrecht: Kluwer

OECD (2006). *Assessing scientific, reading, and mathematical literacy: A framework for PISA 2006*, http://213.253.134.43/oecd/pdfs/browseit/9806031E.pdf.

Oldknow, A. (1995). Computer aided research into triangle geometry. *The Mathematical Gazette*, 79(485), 263-274.

Olive, J., & Makar, K., with V. Hoyos, L. K. Kor, O. Kosheleva, & R. Straesser (2010). Mathematical knowledge and practices resulting from access to digital technologies. In C. Hoyles & J. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology – Rethinking the terrain. The 17th ICMI Study* (pp. 133–177). New York: Springer.

Olive, J. & Steffe, L. P. (2002). The construction of an iterative fractional scheme: The case of Joe. *Journal of Mathematical Behavior, 20*, 413-437.

Olive, J. (1999). From fractions to rational numbers of arithmetic: A reorganization hypothesis. *Mathematical Thinking and Learning,* 1(4), 279-314.

Olive, J. (2000). Implications of Using Dynamic Geometry Technology for Teaching and Learning dalam pembentangan kertas dalam *Conference on Teaching and Learning Problems in Geometry*. Retrieved 2 July, 2001 from World Wide Web: http://jwilson.coe.uga.edu/olive/Portugal/Portugal_paper.html

Olivero, F. (2002). *The proving process within a dynamic geometry environment*. Unpublished PhD thesis, Bristol: University of Bristol

Olkun, S., Altun, A. & Deryakulu, D. (2006). Development of a Digital Learning Tool about Children's Mathematical Thinking for Elementary School Teachers. In E. Pearson & P. Bohman (Eds.), *Proceedings of World Conference on Educational Multimedia, Hypermedia and Telecommunications 2006* (pp. 3056-3061). Chesapeake, VA: AACE. Retrieved from http://www.editlib.org/p/23441.

Olkun, S., Sinoplu, N. B., & Deryakulu, D. (2005). Geometric exploration with dynamic geometry applications based on van Hiele levels. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/olkun.pdf

Pandiscio, E., & Orton, R. E. (1998). Geometry and metacognition: An analysis of Piaget's and van Hiele's perspectives. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 20,* 78-87.

Palmer, S. (1978). Fundamental aspects of cognitive representation. In E. Rosch, & Lloyd, B. (Ed.), *Cognition and categorization* (pp. 259-303). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Panaoura, A, Elia, I., Stamboulides, N., Spyrou, P. (2009). Students' structure for the understanding of the axis of reflective symmetry in mathematics. (English) Acta Didactica Universitatis Comenianae. Mathematics, 9, 41-62.

Pandit N.R. (1996), "The Creation of Theory: A Recent Application of the Grounded Theory Method", The Qualitative Report, Volume 2, Number 4, December, 1996, http://www.nova.edu/ssss/QR/QR2-4/pandit.html

Pandit, N. R. (1995). *Towards a grounded theory of corporate turnaround: A case study approach*. Unpublished doctoral thesis, University of Manchester, UK.

Pape, S., & Tchoshanov, M. (2001). The role of representation(s) in developing mathematical understanding. *Theory into Practice,* 40(2), 118-125.

Parzysz, B. (1988). Knowing versus seeing: problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, *19*, 79–92.

Patsiomitou, S. (2005) Fractals as a context of comprehension of the meaning of sequence in a Dynamic Software environment. Master Thesis. *Department of Mathematics. National and Kapodistrian University of Athens* (in cooperation with the University of Cyprus).

Patsiomitou, S. (2007) Fractals as a context of comprehension of the meanings of the sequence and the limit in a Dynamic Software environment. *Electronic Proceedings of the 8th International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (ICTMT8) in Hradec Králové (E. Milková, Pavel Prazák, eds.), University of Hradec Králové, ISBN 397-80-7041-285-5 (cd-rom).

Patsiomitou, S. (2008a). The development of students' geometrical thinking through transformational processes and interaction techniques in a dynamic geometry environment. *Issues in Informing Science and Information Technology Journal,* 5, 353-393. Available on line http://iisit.org/IssuesVol5.htm

Patsiomitou, S., (2008b) Linking Visual Active Representations and the van Hiele model of geometrical thinking. In Yang, W-C, Majewski, M., Alwis T. and Klairiree, K. (Eds.) "Enhancing Understanding and Constructing Knowledge in Mathematics with Technology». *Proceedings of the 13th Asian Conference in Technology in Mathematics.* pp 163-178. Bangkok, Thailand: Suan Shunanda Rajabhat University. Available on line http://atcm.mathandtech.org/EP2008/pages/regular.htm

Patsiomitou, S., (2008c) Do geometrical constructions affect students algebraic expressions? In Yang, W., Majewski, M., Alwis T. and Klairiree, K. (Eds.) "Enhancing Understanding and Constructing Knowledge in Mathematics with Technology". *Proceedings of the 13th Asian Conference in Technology in Mathematics.* pp 193-202 Bangkok, Thailand: Suan Shunanda Rajabhat University. Available on line http://atcm.mathandtech.org/EP2008/pages/regular.html

Patsiomitou, S., (2008d) Custom tools and the iteration process as the referent point for the construction of meanings in a DGS environment. In Yang, W-C, Majewski, M., Alwis T. and Klairiree, K. (Eds.) "Enhancing Understanding and Constructing Knowledge in Mathematics with Technology". Proceedings *of the 13th Asian Conference in Technology in Mathematics.* Pp179-192 Published by Mathematics and Technology, LLC. ISBN 978-0-9821164-1-8. Bangkok, Thailand: Suan Shunanda Rajabhat University. Available on line http://atcm.mathandtech.org/EP2008/pages/regular.html

Patsiomitou, S. (2009) The Impact of Structural Algebraic Units on Students' Algebraic Thinking in a DGS Environment at the *Electronic Journal of Mathematics and Technology (eJMT)*, *3*(3), 243-260.

Patsiomitou, S. (2010). Building LVAR (Linking Visual Active Representations) modes in a DGS environment. *Electronic Journal of Mathematics and Technology,* 4(1), 1-25.

Patsiomitou, S. (2011). Theoretical dragging: A non-linguistic warrant leading to dynamic propositions. *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 361-368. Ankara, Turkey: PME

Patsiomitou, S. (2012) A Linking Visual Representation DHLP for student's cognitive development. *Global Journal Of Computer Science and Technology*. Online ISSN:0975-4172 & Print: 0975-4350, pp. 53-82, Vol. 12 Issue 6 version 1. March 2012

Patsiomitou, S.& Koleza, E. (2008). Developing students geometrical thinking through linking representations in a dynamic geometry environment. In O. Figueras, & Sepúlveda, A. (Eds.). *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 89-96). Morelia, Michoacán, México: PME

Patsiomitou, S. & Koleza, E. (2009). The development of students' geometrical thinking through Linking Visual Active Representations. In M. Kourkoulos & Tzanakis, C. (Eds.). *Proceedings of the 5th International Colloquium on the Didactics of Mathematics* (Vol. II), pp.157-171. Rethymnon, Greece.

Patsiomitou, S. and Emvalotis A. (2009a). Developing geometric thinking skills through dynamic diagram transformations. *Proceedings of MEDCONF 2009, The Sixth Mediterranean Conference on Mathematics Education.* pp.249-258. Plovdiv, Bulgaria

Patsiomitou, S. and Emvalotis A. (2009b). Does the Building and transforming on LVAR modes impact students way of thinking? In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, C. (Eds.).

Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4, pp. 337-344. Thessaloniki, Greece: PME.

Patsiomitou, S., and Emvalotis A. (2009c) 'Economy' and 'Catachrèse' in the use of custom tools in a Dynamic geometry problem-solving process *Electronic Proceedings of the 9th International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (ICTMT8) in Metz

Patsiomitou, S., and Emvalotis A. (2009d) Composing and testing a DG research–based curriculum designed to develop students' geometrical thinking. Paper at the annual European Conference on Educational Research (ECER) Vienna, Sept. 25. - 28., 2009 http://www.eera-ecer.eu/ecer-programmes-and-presentations/conference/ecer-2009/contribution/1961

Patsiomitou, S & Emvalotis, A. (2010a).The development of students' geometrical thinking through a DGS reinvention process. In M. Pinto, & Kawasaki, T. (Eds), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol.4 (pp. 33-40), Belo Horizonte. Brazil: PME

Patsiomitou, S. & Emvalotis A. (2010b). Students' movement through van Hiele levels in a dynamic geometry *guided reinvention* process R. M. Aliguliyev & J. A. Jafarzade (Eds.) *Journal of Mathematics and Technology* (JMT), (3), Progress Press Inc., Baku, Azerbaijan, pp.18-48.

Patsiomitou, S., Barkatsas, A., Emvalotis, A. (2010). Secondary students' "dynamic reinvention of geometric proof" through the utilization of linking visual active representations, *Journal of Mathematics and Technology,* vol 5, Progress Press Inc., Baku, Azerbaijan, pp. 43-56.

Patton, M. (1990). *Qualitative evaluation methods (2nd ed.)*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Patton, M. Q. (1987); How to Use Qualitative Methods in Evaluation, Sage Publications: Newbury Park, USA

Pedemonte, B. (2001). Some cognitive aspects of the relationship between argumentation and proof in mathematics. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 33�40). Utrecht, The Netherlands: PME.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed ? *Educational Studies in Mathematics, 66*, 23-41.

Pedemonte, B.: 2005, 'Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et d´emonstration'. Recherches en Didactique des Math´ematiques 25, 313–348.

Pegg, J. (2003). Assessment in Mathematics: a developmental approach. In J.M. Royer (Ed.) *Advances in Cognition and Instruction*. pp. 227- 259. New York: Information Age Publishing Inc

Pegg, J., & Davey, G. (1998). Interpreting student understanding of geometry: A synthesis of two models. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 109-135). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Pegg, J., & Tall, D. (2005). The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. *International Reviews on Mathematical Education (Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*), vol. 37, no.6, pp. 468-475.

Peirce, C. S. (1992, c. 1878a). Deduction, induction, and hypothesis. In N. Houser & C. Kloesel, (Eds.), *The Essential Peirce: Selected philosophical writings, Volume 1*, 186-199. Bloomington: Indiana University Press.

Peirce, C. S. (1998, c. 1901). On the logic of drawing history from ancient documents, especially from testimonies. In N. Houser & C. Kloesel, (Eds.), *The Essential Peirce: Selected philosophical writings, Volume 2*, 75-114. Bloomington: Indiana University Press.

Peirce, C. S. (1998, c. 1903d). The three normative sciences. In N. Houser & C. Kloesel, (Eds.), *The Essential Peirce: Selected philosophical writings, Volume 2*, 196-207. Bloomington: Indiana University Press.

Peirce, C.S. (1960) *Collected Papers*, II, Elements of Logic, Harvard, University Press, 372.

Peirce, Charles Sanders 1998 [1903]. Nomenclature and divisions of triadic relations, as far as they are determined. In: Houser, Nathan; Kloesel, Christian (eds.), *The Essential Peirce: Selected Philosophical Writings, Vol. 2*, 289–299

Peressini, D., Borko, H., Romagnano, L., Knuth, E., & Willis-Yorker, C. (2004). A conceptual framework for learning to teach secondary mathematics: A situative perspective. *Educational Studies in Mathematics, 56*(1), 67-96.

Piaget, J. & Garcia, R. (1983). *Psychogenèse et Histoire des Sciences*. Paris: Flammarion.

Piaget, J. (1934). *Le langage et la pensée chez l'enfant*. Neuchâtel : Delachaux et Niestlé

Piaget, J. (1937/1971). *The construction of reality in the child* (M. Cook, Trans.). New York:Basic Books.

Piaget, J. (1954). The construction of reality in the child (M. Cook, Trans.). New York: Basic Books. (Original work published 1937)

Piaget J. (1956). *La psychologie de l'intelligence*. Paris: Armand Colin.

Piaget, J., & Inhelder, B. The child's conception of space. New York: Norton, 1967.

Pratt, D & Ainley, J. (1997): The Design of Activities for the Abstraction of Geometric Construction. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 1(3)

Presmeg, N. (1986).Visualisation and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics,* 17, 297-311.

Presmeg, N. (1998). Metaphoric and metonymic signification in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior,* 17(1), 25-32.

Pusey, E. L. (2003). *The Van Hiele Model of Reasoning in Geometry: A Literature Review. Mathematics Education Raleigh,* Unpublished *Master of Science Thesis,* Available on line from http://repository.lib.ncsu.edu/ir/bitstream/1840.16/2275/1/etd.pdf

Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains. Paris : Armand Colin.

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica III, 7*, 5-41.

Rasmussen, C. L., Zandieh, M., King, K. D., and Teppo, A. (October, 2000). Advanced mathematical thinking: Aspects of students' mathematical activity. Paper presented at the 22nd annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education – North American Chapter. Tucson, AZ.

Remillard, J. T. (1999). Curriculum materials in mathematics education reform: A framework for examining teachers' curriculum development. *Curriculum Inquiry, 29*(3), 315-342.

Richardson, V. (1996). The case for formal research and practical inquiry in teacher education, in: F. B. Murray (Ed.) *The Teacher Educator's Handbook: building a knowledge base for the preparation of teachers* (San Francisco, CA, Jossey-Bass).

Rodd, M. M.: 2000, 'On mathematical warrants: proof does not always warrant, and a warrant may be other than a proof', Mathematical thinking and learning, 2(3), 221-244.54

Rogers, R. R. (2001). Reflection in higher education: A concept analysis. Innovative Higher Education, 26(1), 37–57.

Sacristán, A. & Sánchez, E. (2002) Processes of proof with the use of technology: discovery, generalization and validation in a computer microworld. In Cockburn, A. D., Nardi, E. (eds) Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Norwich, UK, July 2002. Vol. 4, pp. 169-176.

Sáenz-Ludlow, A., & Athanasopoulou, A. (2008). The GSP, as a technical-symbolic tool mediating both geometric conceptualizations and communication. In L. Radford, G. Schubring, and F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture,* 195-214. Rottendam: Sense Publishers

Sanchez, E. and Sacristan, A. I. (2003) Influential aspects of dynamic geometry activities in the construction of proofs. In *Proceedings of the Joint meeting of InternationalGroup for the Psychology of Mathematics Education and North American Chapter* edited by Neil A. Pateman, Barbara J. Dougherty, and Joseph. T. Zilliox , v. 4, 111-118. Honolulu, Hawaii: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

Sang Sook Choi-Koh (1999). A student's learning of geometry using the computer, *Journal of Educational Research* 92 (1999), pp. 301–311

Savery, J. R., & Duffy, T. M. (1995). Problem based learning: An instructional model and its constructivist framework. Educational Technology, 35(5), 31–38.

Schattschneider, D. & King, J. *Preface: Making Geometry Dynamic*. Retrieved from World Wide Web: http://forum.swarthome.edu/dynamic/geometry_turned_on/about/Preface.html

Scher, D. (2000). Lifting the curtain: The evolution of the Geometer's Sketchpad. The Mathematics Educator, 10(1), 42–48.

Scher, D. (2003). Dynamic visualization and proof: A new approach to a classic problem. *The Mathematics Teacher, 96*(6), 394.

Schifter, D. and Fosnot, C.T. (1993). *Reconstructing Mathematics Education: Stories of Teachers Meeting the Challenge of Reform*. New York, New York: Teachers College Press

Schoenfeld, Alan H. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. In Alan H.Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 53-70). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, Alan H. "Looking toward the 21st century: Challenges of educational theory and practice," *Educational Researcher*, 28-7, (1999), 4-14.

Schoenfeld, Alan H. "Purposes and Methods of Research in Mathematics Education," *Notices of the AMS,* 47-6, (2000), 641-649.

Schön, D. A. (1983). The reflective practitioner: How professionals think in action. New York: Basic Books.

Schon, D.A. (1987). *Educating the reflective practitioner.* San Francisco: Jossey-Bass

Schumann, H. (2004): Reconstructive Modelling with Dynamic Geometry Systems. In: *EduMath* 19, issue 12, pp. 3 – 21.

Schwartz J. and Yerushalmy M. (1985). The Geometric Supposer, Sunburst Communications, Pleasantville, N.Y.

Schwartz, B., Herschkowitz, R., & Dreyfus, T. (2001) Emerging knowledge structures in and with algebra .J. Novotna (ed), *European Research in Mathematics Education II, Proceedings of the CERME2.* Praga: Charles University, 269-280.

Seale, C. (1999). Quality in qualitative research. *Qualitative Inquiry, 5*(4), 465-478

Sedig, K., & Sumner, M. (2006). Characterizing interaction with visual mathematical representations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *11*, 1-55. New York: Springer.

Sedig, K. and Liang, H. (2008). Learner-information interaction: A macro-level framework characterizing visual cognitive tools. *Journal of Interactive Learning Research*, 19(1), 147-173

Semadeni, Z. (1984); Action proofs in primary mathematics teaching and in teacher training; in For the Learning of Mathematics 4, FLM Publishing association: Montreal, Canada.

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? *Mathematics Teacher*, *78*, 449-456.

Senk, S. L. (1989). Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*, 309�321.

Sfard, A.(1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

Sfard, A. (2001). Learning mathematics as developing a discourse. In R. Speiser, C. Maher, C. Walter (Eds), Proceedings of 21st Conference of PME-NA (pp. 23-44). Columbus, Ohio: Clearing House for Science, mathematics, and Environmental Education http://mathcenter-k6.haifa.ac.il/articles(pdf)/sfard.pdf

Sfard, A., Neshler, P., Streefland, L, Cobb, P.,& Mason, J. (1998) Learning mathematics through conversation : Is it as good as they say? For the learning of Mathematics, 18(1), 41-51.

Shawer, S. (2006b). Effective Teaching and Learning in Generic Education and Foreign Language Teaching Methodology: Learners' cognitive styles, foreign language skills instruction and teachers' professional development. Cairo: Dar El-Fikr El-Arabi.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26* (2), 114-145

Simon, M.A. (1996). 'Beyond inductive and deductive reasoning: the search for a sense of knowing', *Educational Studies in Mathematics*, 30, 197-210.

Simon, M.A. & Shifter, D. (1991). Towards a constructivist perspective: An intervention study of mathematics teacher development. *Educational Studies in Mathematics, 22*(4), 309-331.

Simon, M.A.: 1996 'Beyond inductive and deductive reasoning: the search for a sense of knowing', Educational Studies in Mathematics, v.30, 197-210.

Sinclair N., & Jackiw, N. (2007). Modeling practices with The Geometer's Sketchpad. *Proceedings of the ICTMA-13*. Bloomington, IL: Indiana University

Sinclair, M.P. (2001). *Supporting student efforts to learn with understanding: an investigation of the use of Javasketchpad sketches in the secondary school geometry classroom*. *Unpublished doctoral dissertation*, University of Toronto, Graduate Department of Education.

Sinclair, N. and Crespo, S. (2006). Learning mathematics in dynamic computer environments. *Teaching Children Mathematics,* 12 (9), 436–444.

Sinclair, N., & Yurita, V. (2008). To be or to become: How dynamic geometry changes discourse. Research in Mathematics Education, 10(2), 135–150.

Skemp, R. (1978). The relational understanding and instrumental understanding. Arithmetic *Teacher*, 26(3), pp. 9-15.

Skemp, R. (1986). The psychology of learning mathematics (2nd ed.) Harmondsworth, UK: Penguin

Smith, C., Wiser, M., Anderson, C., & Krajcik, J. (2006). Implications of research on children's learning for standards and assessment: A proposed learning progression or matter and the atomic-molecular theory. *Measurement, 14(1&2),* 1-98.

Smith, R. (2010). A comparison of middle school students' mathematical arguments in technological and non-technological environments. PhD thesis. North Carolina State University.

Son, J. (2006). Investigating preservice teachers' understanding and strategies on a students' errors of reflective symmetry. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, N. Stehlikova (Eds), *Proceedings of the 30th of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Vol.5. (146−155). Prague

Sowder, L., & Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *The Mathematics Teacher*, *91*, 670-675.

Steketee, C. (2004). Action research as an investigative approach within a computer base community of learners. In R. Atkinson, C. McBeath, D. Jonas-Dwyer & R. Phillips (Eds), Beyond the comfort zone: *Proceedings of the 21st ASCILITE Conference* (pp. 875-880).

Steffe, L. P. (2004). On the construction of learning trajectories for children: The case of commensurate fractions. *Mathematical Thinking and Learning, 26*(2), 129-162

Steffe, L. P. & Olive, J. (1996). Symbolizing as a constructive activity in a computer microworld. *Journal of Educational Computing Research,* 14, 2, 113-138.

Steffe, L. P., von Glasersfeld, E., Richards, J. and Cobb, P. (1983); ChildrensÕ Counting Types: Philosophy, Theory, and Application, Praeger Scientific, New York, USA.

Steffe, L. P., & Gale, J. E. (1995).Constructivism in education. Hillsdale, NJ: Lawerence Erlbaum.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008) Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10, 313-340.

Stenbacka, C. (2001). Qualitative research requires quality concepts of its own. *Management Decision, 39*(7), 551-555

Strauss, A., & Corbin, J. (1990). Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques. Newbury Park, CA: Sage Publications, Inc.

Swedosh, P., & Clark, J. (1998). Mathematical misconceptions – we have an effective method for reducing their incidence but will the improvement persist? In C. Kanes, M. Goos, & E. Warren (Eds.), *Teaching mathematics in new time* (Proceedings of the 21st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Vol. 2, pp. 588-595). Brisbane: MERGA.

Tabach, M (2007).Learning Beginning Algebra in a Computer Intensive Environment (CIE). PhD thesis. *Scientific Council of the Weizmann Institute of Science Rehovot, Israel* . Retrieved from http:// www.weizmann.ac.il/menu/dissertations/full/MichalTabachPhD.doc

Tall, D. (1995). Cognitive development, representations and proof. In L. Healy & C. Hoyles (Eds.), *Proceedings of the Conference: Justifying and Proving in School Mathematics* (pp. 27-38). London: Institute of Education.

http://www-cabri.imag.fr/Preuve/Resumes/Tall/Tall9 accessed 25/5/2000.

Tall D.O. & Vinner S. 1981: 'Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity', Educational Studies in Mathematics, 12 151-169.

Tall, D. O., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva M., Cheng, Y.-H.(2011) The Cognitive Development of Proof. In Fou-Lai Lin, Feng-Jui Hsieh, G. Hanna, M. de Villiers (Eds) Proof and Proving in Mathematics Education. ICMI Study Series.

Talmon, V., & Yerushalmy, M. (2004). Understanding Dynamic Behavior: Parent-Child Relations in Dynamic Geometry Environments. Educational Studies in Mathematics, 57, 91-119.

Talmon, V., & Yerushalmy, M. (2006). Computer "Knowledge" and Student's Images of Figures: The Case of Dragging. In the proceedings of the 30th International Conference for the Psychology of Mathematics Education: Prague, Czech Republic.

Teppo, A. (1991). Van Hiele levels of geometric thought revisited. *Mathematics Teacher, 84*, 210-221.

Terwel, J. (1999). Constructivism and its implications for curriculum theory and practice.*Journal of Curriculum Studies, 31*, 195-299.

Thornton, S. and Reynolds, N. (2006) Analysing classroom interactions using critical discourse analysis In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 5, pp. 273-280. Prague: PME. 5 – 273

Toulmin, S.E. (1958). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University Press.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of the human/machine interaction in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 9,* 281-307. Kluwer Academic Publishers.

Üstün, I & Ubuz, B. (2004) Student's Development of Geometrical Concepts Through a Dynamic Learning Environment, TSG 16: Visualisation in the teaching and learning of mathematics. www.icme-organisers.dk/tsg16/papers/Ubuz.TSG16.pdf

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry*. (Final report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project). Chicago: University of Chicago.(ERIC Document Reproduction Service, No. ED 220 288).

Usiskin, Z., & Senk, S. (1990). Evaluating a Test of van Hiele levels: A response to Crowley and Wilson. Journal for Research in Mathematics Education, 21(3), 242-245.

van den Akker, J.J.H. (2002). The potential of development research for improving the relation between curriculum research and curriculum development. In M. Rosenmund, A.V. Fries, & W. Heller (Eds.), *Comparing curriculum-making process.*(pp. 1-12). Berlin: Peter Lang

Van Dormolen, J. (1977). Learning to understand what giving a proof really means. *Educational Studies in Mathematics*, *8*, 27-34.

van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education.* Orlando, Florida: Academic Press.

van Hiele, P. M.: 1984, 'A child's thought and geometry', in D. Geddes, D. Fuys, and R. Tischler (eds.), English Translation of Selected Writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele, part of the research project 'An Investigation of the van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents', Research in Science Education (RIE) Program of the National Science Foundation, Grant No. SED 7920640, NSF, Washington, D.C. (Original published in 1959).

Van Hiele-Geldof, D. (1957/1984). The didactics of geometry in the lowest class of secondary school. In D. Fuys, D. Geddes, & R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele*. Brooklyn: Brooklyn College. Original document in Dutch. *De didakteik van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.*Unpublished thesis, University of Utrecht, 1957. (ERIC Document Reproduction Service, No. ED 287 697).

Vergnaud, G. (1987). Conclusion. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 227-232). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G. (1996): The Theory of Cenceptual Fields. In: Steffe, L.P. / Nesher, P. (Hrsg.): *Theories of mathematical learning*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum. pp. 219-239.

Vergnaud, G. (1997): The Nature of Mathematical Concepts. In: NUNES, T. / BRYANT, P. (Hrsg.): *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective.* Hove, UK: Psychology Press. pp. 5-28.

Vergnaud, G. (1998). Comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematics Behavior,* 17(2), 167-181.

Vérillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artefacts: A contribution to the study of though [sic] in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education, 10*, 77–103.

Vincent, J. (1998). *Learning geometry: Cabri-géomètre and the van Hiele levels*.Unpublished M.Ed. thesis. Melbourne: University of Melbourne.

Vincent, J., & McCrae, B. (2001). Mechanical linkages and the need for proof in secondary school geometry. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 4, pp. 367–374). Utrecht, The Netherlands: PME.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Hingham, MA: Kluwer Academic Publishers.

Vinner S. & Hershkowitz R.1980 : 'Concept Images and some common cognitive paths in the development of some simple geometric concepts', Proceedings of the Fourth International Conferenceof P.M.E., Berkeley,177-184.

Vinner, S. (1989). The avoidance of visual considerations in calculus students. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11, 149-156.

Viholainen, A. (2008). Prospective mathematics teachers' informal and formal reasoning about the concepts of derivative and differentiability. Doctoral thesis. University of Jyväskylä.

Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2)*,* 275-298.

Voigt,J.(1995). Thematic Patterns of Interaction and Sociomathematical Norms. In P.Cobb & H. Bauersfeld (eds) *The emergence of mathematical meaning:Interaction in Classroom Cultures,* pp.163-201.

Voss J. F. and Van Dyke, J. A.: 2001, 'Argumentation in psychology: Background comments', *Discourse Processes, 32*, 89-111.

Vygotsky, L. (1986). Thought and Language. In Kozulin, A. (Ed.). Cambridge, MA: MIT Press.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Vygotsky, L.S. (1934/1962). *Thought and language.* MIT Press

Vygotsky, L.S. (1981) The genesis of higher mental functions. In J.V.Wertsch (Ed.) *The concept of activity in Soviet psychology*. Armonk, NY: Sharpe.

Vygotsky, L.S. (1987) Thinking and speech. In R.W. Rieber and A.S. Carton (Eds.), *The collected works of L.S. Vygotsky, Volume 1: Problems of general psychology*, (Trans. N.Minick). New York: Plenum.

Wares, A. 2004. Conjectures and proofs in a dynamic geometry environment. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 35(1), 1-10.

Wartofsky, M.W. (1979). Models: representation and the scientific understanding. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Watson, A. 2007. The nature of participation afforded by tasks, questions and promptsin mathematics classrooms. *Research in Mathematics Education*, Vol. 9(1&2): 111-126.

Watson, J.M. & Moritz, J.B. (2001). The role of cognitive conflict in developing student's understanding of chance measurement. In J.Bobis, B.Perry, & M.Mitchelmore (Eds), *Numeracy and beyond (Proceedings of the 24th Annual Conferenc of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, (Vol. 2, pp.523-530). Sydney: MERGA

Weaver, J. L. & Quinn, R. J. 1999. Geometer�s Sketchpad in Secondary Geometry. *Computers in the Schools, 15*(2), 83-95.

Weber, K. and L. Alcock: 2005, 'Using warranted implications to understand and validate proofs'. For the Learning of Mathematics 25(1), 34–38.

Wertsch, J. 1998. *Mind As Action*. NewYork NY: Oxford University Press.

Wertsch, J. V. (1991). Voices of the mind: A sociocultural approach to mediated action. Cambridge: Harvard University Press.

Whetten, D. A. (1989). What constitutes a theoretical contribution? *Academy of Management Review,14*, 490-495.

White, P., & Mitchelmore, M. C. (2010) Teaching for abstraction: A model. *Mathematical Thinking and Learning*. 12(3), 205-226.

Whiteley & Moshé, (2005) Making Sense of Transformations and Symmetry - the Heart of Geometry http://www.docstoc.com/docs/17713922/Exploring-the-Parallelogram-through-Symmetry

Wilson, P.H. 2009 A learning trajectory for equipartitioning and curricula: An analysis of *Investigations in Data, Number, and Space* and *Everyday Mathematics*

Winter, R. (1989). *Learning from experience: Principles and practice in action-research.* London: The Falmer Press.

Wirszup, I. (1976). Breakthrough in the psychology of learning and teaching geometry. In J.L. Martin & D.A. Bradbard (Eds.), *Space and geometry.* Columbus, OH: ERIC Center for Science, Mathematics and Environmental Education.

Wittgenstein, Ludwig 1953. *Philosophical Investigations*. (Anscombe, G.E.M., trans.). Oxford: Basil Blackwell.

Wood, D., Bruner, J.S., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry and Allied Disciplines, 17*, 89-100

Yackel, E. & Rasmussen, C. (2002): Beliefs and norms in the mathematics classroom. In: G. Leder, E. Pehkonen & G. Toerner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 313–330). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. MATHDI 2003c.02416

Yackel, E.: 2001, 'Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms'.In: M. van den Heuvel-Panhuizen (ed.): Proceedings of the 25th International Conference on the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1. Utrecht, Holland, pp. 9–23, IGPME

Yackel, E.; Cobb, P.; Wood, T.; Wheatley, G. & Merkel, G. (1990): The importance of social interactions in childrens construction of mathematical knowledge. In: T. Cooney (Ed.), *Teaching and learning mathematics in the 1990s*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Yackel, E. & Rasmussen, C. (2002): Beliefs and norms in the mathematics classroom. In: G. Leder, E. Pehkonen & G. Toerner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 313–330). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. MATHDI 2003c.02416

Yackel, E. and Cobb, P.(1994) "Classroom Microcultures and Reform in Mathematics Education", *Annual Meeting of the American Educational Research Association*, New Orleans.

Yackel, E.; Rasmussen, C. & King, K. (2001): Social and sociomathematical norms in an advanced undergraduate mathematics course. *Journal of Mathematical Behavior* 19, 1–13 http://math.coe.uga.edu/olive/EMAT8990FYDS08/Conner_Arg_Proof_for_8990.pdf

Yackel, Ema. (1984). *Characteristics of problem representation indicative of understanding in mathematical problem solving.* Unpublished doctoral dissertation, Purdue University.

Yackel, Erna and Cobb, Paul (1994) "Classroom Microcultures and Reform in Mathematics Education", *paper presented to the Annual Meeting of the American Educational Research Association*, New Orleans.

Yang, K. L., & Lin, F. L. (2008). A model of reading comprehension of geometry proof. Educational Studies in Mathematics, 67(1), 59-76

Yerushalmy, M. & Chazan, D. (1993): Overcoming visual obstacles with the aid of the Supposer. In: Schwartz, Yerushlamy & Wilson (eds.), *The Geometric Supposer. What is it a case of?*, Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 26-56.

Yuen Lie Lim, L.-A. (2011). A comparison of students' reflective thinking across different years in a problem-based learning environment. *Instructional Science, 39*(2), 171-188.

Yousef, A. (1997) The Effect of the GSP on the Attitude toward Geometry of High School Students. Dissertation Abstract International, A 58105, Ohio University.

Yu, P. and Barrett, J. (2005). Discourse and prototype development among middle school students in a dynamic geometry environment. *Proceedings of the 27th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.*

Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics, 49*. 379-402.

Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2002). Arithmetic sequence as a bridge among conceptual fields. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 2*(1). 91-118.

Zimmerman, W., & Cunningham, S. (1991). Editors introduction: What is mathematical visualization? In W. Zimmerman, & Cunningham, S. (Eds.) *Visualization in teaching and learning mathematics*. *Notes Number 19* (pp. 1-7). Washington DC: Mathematical Association of America.

Zulkardi, (2002). Developing a learning environment on realistic mathematics education for indonesian student teachers, Doctoral dissertation. Enschede, The Netherlands: University of Twente.

Αργυράκης Δ., Βουργάνας Π., Μεντής Κ., Τσικοπούλου Σ., Χρυσοβέργης Μ. (2007α), *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου*, ΟΕΔΒ, Αθήνα, εκδ. Α΄.

Αργυρόπουλος Η., Βλάμος Π., Κατσούλης Γ., Μαρκάτης Σ., Σιδέρης Π., (2001), *Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Ενιαίου Λυκείου*, ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Βανδουλάκης Ι., Καλλιγάς Χ., Μαρκάκης Ν., Φερεντίνος Σ., (2007α), *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου*, ΟΕΔΒ, Αθήνα, εκδ. Α΄.

Ιωσηφίδης, Θ. (2008) *Ποιοτικές Μέθοδοι Έρευνας στις Κοινωνικές Επιστήμες*. Αθήνα: Κριτική (σ. 324) (ISBN 978-960-218-599-5) (Νέα αναθεωρημένη και εμπλουτισμένη έκδοση του βιβλίου: *Ανάλυση Ποιοτικών Δεδομένων στις Κοινωνικές Επιστήμες*, Κριτική, 2003, ISBN 960-218-318-7, σ. 160).

Πατσιομίτου, Σ. (2006). Τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας ως μέσο διερεύνησης -επαλήθευσης και ανακάλυψης νέων σχέσεων. *περιοδικό Ευκλείδης Γ΄*, τεύχος 65, σελ.55-78

Πατσιομίτου, Σ. (2008a). Μοντελοποίηση των Προτάσεων των Στοιχείων του Ευκλείδη σε λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας. *περιοδικό Αστρολάβος* , τεύχος 8 ,σελ. 61-89

Πατσιομίτου, Σ. (2008b) Το λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας Geometer's Sketchpadv4 ως μέσο για ερμηνεία-σχεδιασμό Προτάσεων των Στοιχείων του Ευκλείδη Πρακτικά 1ου *Πανελλήνιου*

Συνεδρίου ΤΠΕ, "Ψηφιακό Υλικό για την υποστήριξη του παιδαγωγικού έργου των εκπαιδευτικών" σσ.325-333, Νάουσα, 9 – 11, Μαΐου 2008

Πατσιομίτου, Σ. (2008c) Επίλυση προβλήματος με απόδειξη μέσω των Συνδεόμενων Οπτικών Ενεργών Αναπαραστάσεων σε λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Πρακτικά 6ου Πανελληνίου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή «Οι τεχνολογίες της πληροφορίας και των επικοινωνιών στην εκπαίδευση» ΕΤΠΕ , Κύπρος 25-28 Σεπτεμβρίου 2008, Πανεπιστήμιο Κύπρου, σσ. 81-88

Πατσιομίτου, Σ. και Κολέζα, Ε. (2008):Από τα σχήματα (schemes) στα κοινωνικά σχήματα (social schemes) σε μια διαδικασία εργαλειακής ενορχήστρωσης. *περιοδικό Ευκλείδης Γ΄* τεύχος 68, σελ.105-130

Πατσιομίτου, Σ. (2009a). Γνωστικό-θεωρητικές συνδέσεις και λειτουργία του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας Geometer's Sketchpad. Πρακτικά *5ου Πανελλήνιου Συνεδρίου ΤΠΕ,* με τίτλο: «Αξιοποίηση των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στη διδακτική πράξη», σ. 583-591. 8, 9, 10 Μαΐου 2009, Σύρος.

Πατσιομίτου, Σ. (2009b). Οπτική απόδειξη μέσω της ανασύνθεσης ισοδυνάμων σχημάτων σε λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Πρακτικά *5ου Πανελλήνιου Συνεδρίου ΤΠΕ ,* με τίτλο: «Αξιοποίηση των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στη διδακτική πράξη», σ. 592-600. 8, 9, 10 Μαΐου 2009, *Σύρος.*

Πατσιομίτου, Σ. (2009c) Γνωστικές αλληλεπιδράσεις στις κατασκευές μέσω του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας Geometer's Sketchpad Πρακτικά 1ου Εκπαιδευτικού Συνεδρίου ΕΤΠΕ με τίτλο «Ένταξη και χρήση των ΤΠΕ στην Εκπαιδευτική διαδικασία», σ. 129-134, Βόλος.

Πατσιομίτου, Σ. και Εμβαλωτής, Α. (2009a). Επίδραση των μετασχηματισμών Συνδεόμενων Οπτικών Ενεργών Αναπαραστάσεων στην επίλυση προβλήματος. *26ο Πανελλήνιο Συνέδριο της ΕΜΕ,* σ. 763-775 , Θεσσαλονίκη

Πατσιομίτου, Σ. και Εμβαλωτής, Α. (2009b). Οικονομία και κατάχρηση στην χρήση εργαλείου αρχείων εντολών λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας κατά την επίλυση προβλήματος. *26ο Πανελλήνιο Συνέδριο της ΕΜΕ,* σ. 776-785 , Θεσσαλονίκη

Πατσιομίτου, Σ. και Εμβαλωτής, Α. (2010a). Επίδραση των μετασχηματισμών δυναμικού διαγράμματος στο τρόπο συλλογισμού των *μαθητών 7ο Πανελλήνιο Συνέδριο με Διεθνή Συμμετοχή «Οι τεχνολογίες της πληροφορίας και των επικοινωνιών στην εκπαίδευση»* ΕΤΠΕ ,σ. 445-452. Κόρινθος, Σεπτέμβριος 2010.

Πατσιομίτου, Σ. και Εμβαλωτής, Α. (2010β). Η ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών μέσω μιας «δυναμικής» επανεφεύρεσης. *27ο Πανελλήνιο Συνέδριο της ΕΜΕ,* σ.935-947, Χαλκίδα.

Πατσιομίτου, Σ., Εμβαλωτής, Α., Μπαρκάτσας, Α. (2010).Η ανάπτυξη των δεξιοτήτων μαθητών μέσω μετασχηματισμών «δυναμικού» προβλήματος. *7ο Πανελλήνιο Συνέδριο με Διεθνή Συμμετοχή «Οι τεχνολογίες της πληροφορίας και των επικοινωνιών στην εκπαίδευση» ΕΤΠΕ* σ.425-432. Κόρινθος, Σεπτέμβριος 2010

Πατσιομίτου, Σ. (2011) Θεωρητικό σύρσιμο. Μη γλωσσική εγγύηση στην ανάπτυξη δυναμικών εννοιών από τους μαθητές. *28ο Πανελλήνιο Συνέδριο της ΕΜΕ,* σ.562-574, Μαθηματικό Τμήμα Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών.

Πατσιομίτου, Σ και Εμβαλωτής, Α (2011): Οι αναπαραστάσεις μαθηματικών αντικειμένων ως μέσο οικοδόμησης της μαθηματικής γνώσης: Τα συστήματα δυναμικής γεωμετρίας ως αναπαραστατικά εργαλεία. *Θέματα στην Εκπαίδευση,* Τόμος 2, Τεύχος 3, σ. 247-272, Εκδόσεις Κλειδάριθμος.

Πατσιομίτου, Σ. (2012) Επίδραση των μετασχηματισμών Συνδεόμενων Οπτικών Ενεργών Αναπαραστάσεων στο συλλογισμό των μαθητών. 8ο *Πανελλήνιο Συνέδριο με Διεθνή Συμμετοχή «Οι τεχνολογίες της πληροφορίας και των επικοινωνιών στην εκπαίδευση»* ΕΤΠΕ http://hcicte2012.uth.gr/main/sites/default/files/proc/Proceedings/Patsiomitou.pdf

Σταμάτης Ε. Ευκλείδου Γεωμετρία , Στοιχείων βιβλία Ι,ΙΙ,ΙΙΙ,ΙV. Ο.Ε.Δ.Β.Αθήνα, 1957

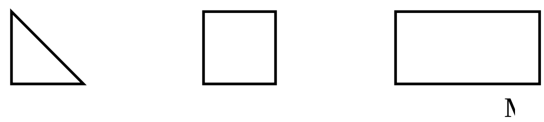
Χαβιάρης, Π., Καφούση, Σ., & Καλαβάσης, Φ. (2003). «Εργαλεία για την ανάλυση της κοινωνικής αλληλεπίδρασης στη σχολική τάξη των Μαθηματικών». *Πρακτικά 2ου Συνεδρίου για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση*, με θέμα «Τα Μαθηματικά στο Γυμνάσιο», Αθήνα. (Έκδοση Πρακτικών σε cd).

Παράρτημα A

Τεστ αξιολόγησης Van Hiele στη Γεωμετρία[10] –

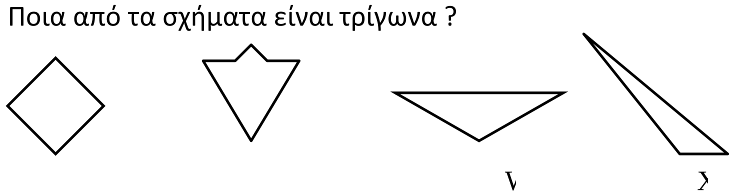
Μετάφραση: Σταυρούλα Πατσιομίτου

1. Ποια από τα σχήματα είναι τετράγωνα?



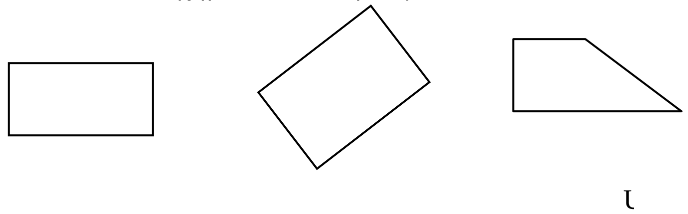
A. Το K μόνο.
B. Το L μόνο.
C. Το M μόνο.
D. Το L και το M μόνο.
E. Όλα είναι τετράγωνα.

2. Ποια από τα σχήματα είναι τρίγωνα ?



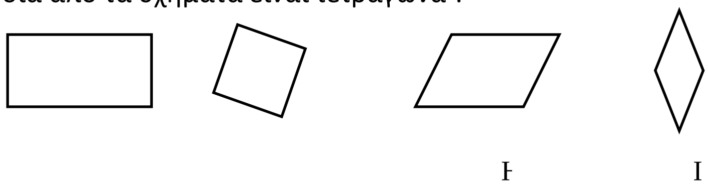
A. Κανένα από αυτά δεν είναι τρίγωνο.
B. Το V μόνο.
C. Το W μόνο.
D. Το W και το X μόνο.
E. Το V και το W μόνο.

3. Ποια από τα σχήματα είναι ορθογώνια ?



A. Το S μόνο.
B. Το T μόνο.
C. Το S και το T μόνο.
D. Το S και το U μόνο.
E. Όλα είναι ορθογώνια.

4. Ποια από τα σχήματα είναι τετράγωνα ?



A. Κανένα από αυτά δεν είναι τετράγωνο.

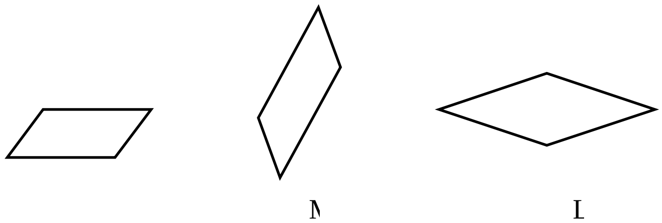
B. Το G μόνο.

C. Το F και το G μόνο.

D. Το G και το I μόνο.

E. Όλα είναι τετράγωνα.

5. Ποια από τα σχήματα είναι παραλληλόγραμμα ?



A. Το J μόνο.

B. Το L μόνο.

C. Το J και το M μόνο.

D. Κανένα από αυτά δεν είναι παραλληλόγραμμο.

E. Όλα είναι παραλληλόγραμμα.

6. Το PQRS είναι τετράγωνο. Ποια σχέση είναι αληθής σε όλα τα τετράγωνα ?

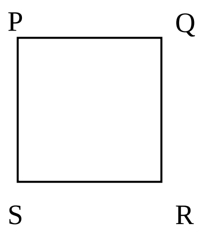
A. Τα PR και το RS έχουν το ίδιο μήκος .

B. Τα QS και το PR είναι κάθετα τμήματα.

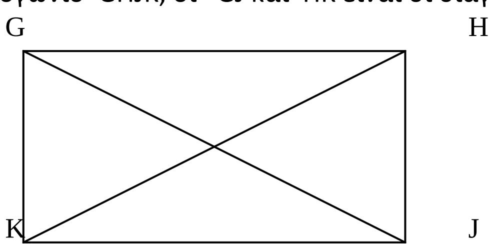
C. Τα PS και το QR είναι κάθετα τμήματα .

D. Τα PS και το QS έχουν το ίδιο μήκος.

E. Η γωνία Q είναι μεγαλύτερη από την γωνία R.



7. Στο ορθογώνιο GHJK, οι GJ και HK είναι οι διαγώνιες



Ποια από τις σχέσεις (A)-(D) δεν είναι αληθής σε κάθε ορθογώνιο ?

A. Υπάρχουν 4 ορθές γωνίες .

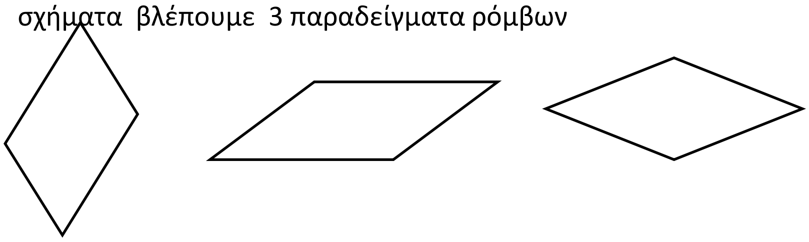
B. Υπάρχουν 4 πλευρές.

C. Οι διαγώνιες έχουν το ίδιο μήκος

D. Οι απέναντι πλευρές έχουν το ίδιο μήκος .

E. Όλες οι σχέσεις από το (A)-(D) είναι αληθείς σε κάθε ορθογώνιο .

8. Ένας ρόμβος είναι ένα σχήμα 4 πλευρών με όλες τις πλευρές να έχουν το ίδιο μήκος . Στα σχήματα βλέπουμε 3 παραδείγματα ρόμβων



Ποιο από τα (A)-(D) δεν είναι αληθές σε κάθε ρόμβο ?

A. Οι δυο διαγώνιες έχουν το ίδιο μήκος .

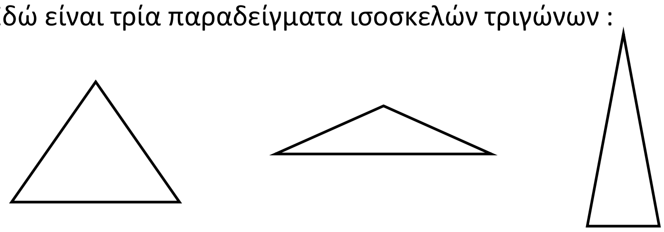
B. Κάθε διαγώνιος διχοτομεί δυο γωνίες του ρόμβου .

C. Οι δυο διαγώνιες είναι κάθετες.

D. Οι απέναντι γωνίες έχουν το ίδιο μέτρο.

E. Όλα από το (A)-(D) είναι αληθή σε κάθε ρόμβο .

9. Ένα ισοσκελές τρίγωνο είναι ένα τρίγωνο που έχει δυο ίσες πλευρές.
Εδώ είναι τρία παραδείγματα ισοσκελών τριγώνων :



Ποιο από τα (A)-(D) είναι αληθές σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ?

A. Οι τρεις πλευρές πρέπει να έχουν το ίδιο μήκος .

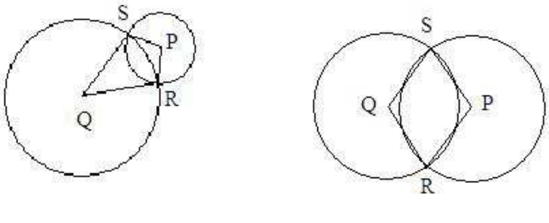
B. Μια πλευρά πρεπει να είναι διπλάσια από μια άλλη πλευρά .

C. Πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον δυο γωνίες με το ίδιο μέτρο.

D. Οι τρεις γωνίες πρέπει να έχουν το ίδιο μέτρο .

E. Καμμιά από τις (A)-(D) δεν είναι αληθής σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο .

10. Δύο κύκλοι με κέντρα P και Q τέμνονται στα R και S σχηματίζοντας ένα τετράπλευρο, το PRQS. Εδώ είναι δύο παραδείγματα.



Ποιο από τα (A)-(D) δεν είναι πάντα αληθές ?

A. Το PRQS θα εχει δυο ζευγάρια πλευρών ίσου μήκους.

B. Το PRQS θα έχει τουλάχιστον δυο γωνίες ίσου μέτρου.

C. Τα τμήματα PQ και RS θα είναι κάθετα.

D. Οι γωνίες P και Q θα έχουν το ίδιο μέτρο.

E. Όλες, από το (A)-(D) είναι αληθείς.

11. Έχουμε δύο δηλώσεις .

Δήλωση 1: Το σχήμα F είναι ένα ορθογώνιο .

Δήλωση 2: Το σχήμα F είναι ένα τρίγωνο .

Ποιο είναι σωστό ?

A. Αν η 1 είναι αληθής τότε είναι και η 2.

B. Αν η 1 είναι λάθος τότε η 2 είναι αληθής.

C. Το 1 και το 2 δεν μπορεί να είναι και τα δυο αληθή .

D. Το 1 και το 2 δεν μπορεί να είναι και τα δυο ψευδή.

E. Κανένα από τα (A)-(D) δεν είναι σωστό.

12. Έχουμε δύο δηλώσεις.

Δήλωση-υπόθεση S:Το τρίγωνο ABC έχει τρεις πλευρές του ιδίου μήκους .

Δήλωση-υπόθεση T:Στο τρίγωνο ABC ,η γωνία B και η γωνία C έχουν το ίδιο μέτρο.

Ποιο είναι σωστό ?

A. Η Δήλωση S και η T δεν μπορούν να είναι αληθείς και οι δύο.

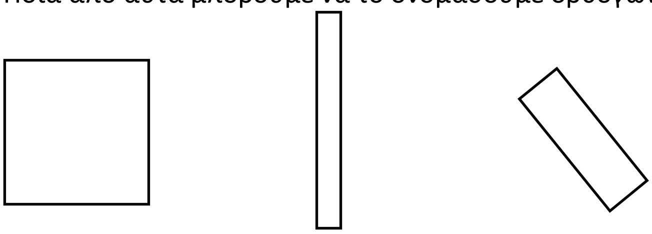
B. Εάν η S είναι αληθής, τότε η T είναι αληθής.

C. Εάν η T είναι αληθής ,τότε η S είναι αληθής .

D. Αν η S είναι ψευδής , τότε η T είναι ψευδής .

E. Καμμιά από τις (A)-(D) δεν είναι αληθής .

13. Ποια από αυτά μπορούμε να το ονομάσουμε ορθογώνιο ?



F

A. Όλα.

B. Το Q μόνο.

C. Το R μόνο.

D. Το P και Q μόνο.

E. Το Q και R μόνο.

14. Ποια είναι αληθής ?

A. Όλες οι ιδιότητες των ορθογωνίων είναι και ιδιότητες όλων των τετραγώνων

B. Όλες οι ιδιότητες των τετραγώνων είναι και ιδιότητες όλων των ορθογωνίων

C. Όλες οι ιδιότητες των ορθογωνίων είναι και ιδιότητες όλων των παραλληλογράμμων.

D. Όλες οι ιδιότητες των τετραγώνων είναι και ιδιότητες όλων των παραλληλογράμμων.

E. Καμμία από τις (A)-(D) δεν είναι αληθής .

15. Τι έχουν όλα τα ορθογώνια που μερικά παραλληλόγραμμα δεν έχουν ?

A. Απέναντι πλευρές ίσες.

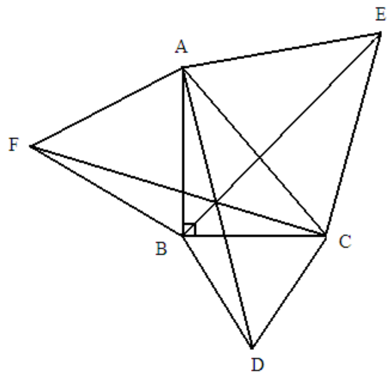
B. Διαγώνιες ίσες.

C. Απέναντι πλευρές παράλληλες.

D. Απέναντι γωνίες ίσες.

E. Καμμία από τις (A)-(D).

16. Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ABC. Τα ισόπλευρα τρίγωνα ACE, ABF, και BCD έχουν κατασκευαστεί στις πλευρές του ABC. Από αυτή την πληροφορία, μπορείτε να αποδείξετε ότι οι AD, BE, και CF έχουν ένα κοινό σημείο;



A. Μόνο σ΄αυτό το τρίγωνο οι AD,BE και CF έχουν ένα κοινό σημείο .

B. Σε μερικά, αλλά όχι σε όλα τα ορθογώνια τρίγωνα, οι AD, BE and CF έχουν ένα κοινό σημείο .

C. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο οι AD, BE και CF έχουν ένα κοινό σημείο .

D. Σε κάθε τρίγωνο οι AD, BE και CF έχουν ένα κοινό σημείο.

E. Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο οι AD, BE και CF έχουν ένα κοινό σημείο.

17. Έχουμε τρεις ιδιότητες ενός σχήματος .

Ιδιότητα D: Έχει ίσες διαγώνιες.
Ιδιότητα S: Είναι τετράγωνο.
Ιδιότητα R: Είναι ορθογώνιο.

Ποια είναι αληθής ?

A. Η D συνεπάγεται την S η οποία συνεπάγεται την R.

B. Η D συνεπάγεται την R η οποία συνεπάγεται την S.

C. Η S συνεπάγεται την R η οποία συνεπάγεται την D.

D. Η R συνεπάγεται την D η οποία συνεπάγεται την S.

E. Η R συνεπάγεται την S η οποία συνεπάγεται την D.

18. Έχουμε δύο δηλώσεις.

I: Εάν ένα σχήμα είναι ορθογώνιο, τότε οι διαγώνιές του διχοτομούν η μια την άλλη.
II: Εάν οι διαγώνιές ενός σχήματος διχοτομούν η μια την άλλη, το σχήμα είναι ορθογώνιο.
Ποιο είναι σωστό ?

A. Για να αποδείξεις ότι η I είναι αληθής, είναι αρκετό να αποδείξεις ότι η η II είναι αληθής.

B. Για να αποδείξεις ότι η II είναι αληθής , είναι αρκετό να αποδείξεις ότι η I είναι αληθής .

C. Για να αποδείξεις ότι η II είναι αληθής , είναι αρκετό να βρεις ένα ορθογώνιο του οποίου οι διαγώνιες να διχοτομούν η μια την άλλη.

D. Για να αποδείξεις ότι η II είναι ψευδής , είναι αρκετό να βρεις ένα σχήμα που δεν είναι ορθογώνιο του οποίου οι διαγώνιες διχοτομούν η μια την άλλη.

E. Καμμία από τις (A)-(D) δεν είναι αληθής .

19. Στη γεωμετρία :

A. Κάθε όρος μπορεί να ορισθεί και κάθε αληθής δήλωση μπορεί να αποδειχθεί.

B. Κάθε όρος μπορεί να ορισθεί αλλά είναι αναγκαίο να υποθέσουμε ότι ορισμένες δηλώσεις είναι αληθείς.

C. Μερικοί όροι μπορεί να μην ορισθούν, αλλά κάθε αληθής δήλωση μπορεί να αποδειχθεί.

D. Μερικοί όροι μπορεί να να μην ορισθούν αλλά είναι αναγκαίο να έχουμε κάποιες δηλώσεις που υποτίθενται να είναι αληθείς.

E. Καμμία από τις δηλώσεις (A)-(D) δεν είναι αληθής.

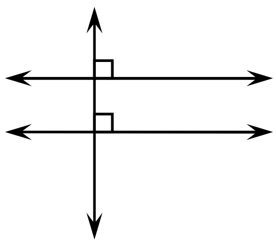
20. Εξετάστε αυτές τις τρεις προτάσεις .

1. Δυο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία είναι παράλληλες.

2. Μια ευθεία που είναι κάθετη στη μια από τις δύο παράλληλες ευθείες είναι κάθετη και στην άλλη.

3. Εάν δύο ευθείες ισαπέχουν, τότε είναι παράλληλες.

Στο σχήμα παρακάτω, δίδεται ότι οι γραμμές m και p είναι κάθετες και οι γραμμές n και p είναι κάθετες. Ποιες από τις ανωτέρω προτάσεις θα μπορούσαν να αιτιολογήσουν ότι η γραμμή m είναι παράλληλη στην γραμμή n?



A. Η (1) μόνο

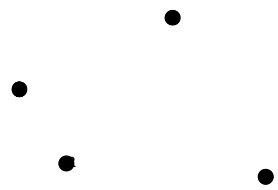
B. Η (2) μόνο

C. Η (3) μόνο

D. Είτε η (1) είτε η (2).

E. Είτε η (2) είτε η (3).

21. Στην F-γεωμετρία , υπάρχουν ακριβώς τέσσερα σημεία και έξι γραμμές. Κάθε γραμμή περιέχει ακριβώς δύο σημεία. Εάν τα σημεία είναι τα P, Q, R και S, και οι γραμμές είναι οι {P,Q}, {P,R}, {P,S}, {Q,R}, {Q,S}, και {R,S}.



Ορίστε πώς οι λέξεις “τέμνονται ” και “ είναι παράλληλες” χρησιμοποιούνται μέσα στην F-γεωμετρία. Οι γραμμές {P,Q} και {P,R} τέμνονται στο P επειδή {P,Q} και {P,R} έχουν το P κοινό .
Οι γραμμές {P,Q} και {R,S} είναι παράλληλες επειδή δεν έχουν κανένα σημείο .
Από αυτές τις πληροφορίες, ποιές είναι σωστές?

A. Οι {P,R} και {Q,S} τέμνονται.
B. Οι {P,R} και {Q,S} είναι παράλληλες.
C. Οι {Q,R} και {R,S} είναι παράλληλες.
D. Οι {P,S} και {Q,R} τέμνονται.
E. Καμμιά από τις (A)-(D) δεν είναι σωστή .

22. Για να τριχοτομήσουμε μια γωνία σημαίνει να τη διαιρέσουμε σε τρία μέρη που έχουν ίσο μέτρο. Το 1847, ο P.L. Wantzel απέδειξε ότι, γενικά, είναι αδύνατο να τριχοτομήσουμε μια γωνία χρησιμοποιώντας μόνο διαβήτη και μη σημειωμένο χάρακα. Από την απόδειξή του, τι μπορείτε να συμπεράνετε ?

A. Γενικά, είναι αδύνατο να τριχοτομήσουμε τις γωνίες χρησιμοποιώντας μόνο ένα διαβήτη και ένα μη σημειωμένο χάρακα .
B. Γενικά, είναι αδύνατο να τριχοτομήσουμε γωνία χρησιμοποιώντας μόνο ένα διαβήτη και ένα σημειωμένο χάρακα.
C. Γενικά, είναι αδύνατο να τριχοτομήσουμε τις γωνίες χρησιμοποιώντας γεωμετρικά όργανα.
D. Είναι ακόμα δυνατό ότι στο μέλλον κάποιος μπορεί να βρεί ένα γενικό τρόπο να τριχοτομήσει γωνίες χρησιμοποιώντας μόνο ένα διαβήτη και ένα μη σημειωμένο χάρακα.
E. Κανένας δεν θα είναι σε θέση στο μέλλον να βρεί μια γενική μέθοδο για την τριχοτόμηση γωνιών χρησιμοποιώντας μόνο διαβήτη και μη σημειωμένο χάρακα.

23. Υπάρχει μια γεωμετρία που εφευρίσκεται από έναν μαθηματικό J στην οποία τα εξής είναι αληθινά:

Το άθροισμα των μέτρων των γωνιών ενός τριγώνου είναι λιγότερο από 180°. Ποιο είναι σωστό από τα παρακάτω ?

A. O J έκανε λάθος στη μέτρηση των γωνιών του τριγώνου.
B. O J έκανε λάθος στο λογικό συλλογισμό.
C. O J έχει μια λανθασμένη ιδέα γι’ αυτό που σημαίνει "αληθής ”.
D. O J άρχισε με διαφορετικές υποθέσεις από εκείνες στην Ευκλείδεια γεωμετρία.
E. Καμμία από τις (A)-(D) δεν είναι αληθής.

24. Δυο βιβλία γεωμετρίας ορίζουν το ορθογώνιο με διαφορετικούς τρόπους.
Ποιος είναι αληθής?

A. Ένα από τα βιβλία έχει λάθος.

B. Ένας από τους ορισμούς είναι λάθος. Δεν μπορούν να υπάρξουν δύο διαφορετικοί ορισμοί για το ορθογώνιο.

C. Τα ορθογώνια στο ένα από τα δυο βιβλία πρέπει να έχουν διαφορετικές ιδιότητες από εκείνες στο άλλο βιβλίο.

D. Τα ορθογώνια στο ένα από τα βιβλία πρέπει να έχουν τις ίδιες ιδιότητες με εκείνες στο άλλο βιβλίο.

E. Οι ιδιότητες των ορθογωνίων στα δύο βιβλία ίσως να ήταν διαφορετικές.

25. Υποθέστε ότι έχετε αποδείξει τις δηλώσεις I και II.

I: Αν p, τότε q.
II: Αν s, τότε όχι q.

Ποια δήλωση ακολουθεί μετά τη δήλωση I και II?

A. Αν p, τότε s.

B. Αν όχι p, τότε όχι q.

C. Αν p ή q, τότε s.

D. Αν s, τοτε όχι p.

E. Αν όχι s, τότε p.

ΣΩΣΤΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΤΕΣΤ van Hiele

VAN HIELE ΤΕΣΤ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

<u>ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ</u>

<u>Κυκλώστε τη σωστή απάντηση</u>

1.	A	B	C	D	E
2.	A	B	C	D	E
3.	A	B	C	D	E
4.	A	B	C	D	E
5.	A	B	C	D	E
6.	A	B	C	D	E
7.	A	B	C	D	E
8.	A	B	C	D	E
9.	A	B	C	D	E
10.	A	B	C	D	E
11.	A	B	C	D	E
12.	A	B	C	D	E
13.	A	B	C	D	E
14.	A	B	C	D	E
15.	A	B	C	D	E
16.	A	B	C	D	E
17.	A	B	C	D	E
18.	A	B	C	D	E
19.	A	B	C	D	E
20.	A	B	C	D	E
21.	A	B	C	D	E
22.	A	B	C	D	E
23.	A	B	C	D	E
24.	A	B	C	D	E
25.	A	B	C	D	E