ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Ε. ΧΑΤΖΑΡΑΚΗ

ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΚΑΙ ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΛΥΣΕΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 2011

Η παρούσα Διδακτορική Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Διδακτορικού Διπλώματος που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε στις 18-03-2011 από την επταμελή εξεταστική επιτροπή:

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ	ΒΑΘΜΙΔΑ	ΥΠΟΓΡΑΦΗ
Ιωάννης Σταυρουλάκης	Καθηγητής	
Γεώργιος Καρακώστας	Καθηγητής	
Χρίστος Φίλος	Καθηγητής	
Σωτήριος Ντούγιας	Καθηγητής	
Παναγιώτης Τσαμάτος	Καθηγητής	
Γαρύφαλος Παπασχοινόπουλος	Καθηγητής	
Χρυσή Κοκολογιαννάκη	Αναπληρώτρια Καθηγήτρια	

Το πόνημα αυτό είναι αφιερωμένο στην αγαπημένη μου γυναίκα Μαρία, ως ελάχιστη ένδειξη αγάπης και εκτίμησης, για την αμέριστη ενθάρρυνση, συμπαράσταση και υπομονή της, καθόλη τη διάρκεια εκπόνησης της διδακτορικής μου διατριβής.

Θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου και τις θερμότατες ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή κ. Ιωάννη Σταυρουλάκη για την υπόδειξη του θέματος, τις συμβουλές του, τη συνεχή ερευνητική καθοδήγηση και το ειλικρινές ενδιαφέρον του καθόλη τη διάρκεια εκπόνησης της διατριβής.

Ευχαριστώ επίσης θερμά τα μέλη της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής, καθηγητές κκ. Χρίστο Φίλο και Γεώργιο Καρακώστα καθώς επίσης και τον καθηγητή κ. Ιωάννη Σφήκα (μέλος της επιτροπής αυτής έως ότου συνταξιοδοτήθηκε), για τη βοήθειά τους σε ερευνητικά θέματα που πραγματεύεται η διδακτορική διατριβή.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα υπόλοιπα μέλη της Επταμελούς Εξεταστικής Επιτροπής, καθηγητές κκ. Σωτήριο Ντούγια και Παναγιώτη Τσαμάτο, τον καθηγητή του Τμήματος Μηχανικών Περιβάλλοντος του Δημοκρίτειου Πανεπιστημίου Θράκης κ. Γαρύφαλο Παπασχοινόπουλο και την αναπληρώτρια καθηγήτρια του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών κ. Χρυσή Κοκολογιαννάκη, για το χρόνο που διέθεσαν στη μελέτη της διατριβής και για τις χρήσιμες και εύστοχες παρατηρήσεις τους.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλα τα μέλη του Τομέα Μαθηματικής Ανάλυσης, που το καθένα με τον τρόπο του με έκανε να αισθάνομαι άνετα και φιλικά κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διατριβής.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Διδακτορικού Διπλώματος που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, υπό την επίβλεψη του καθηγητή κ. Ιωάννη Σταυρουλάκη. Η Τριμελής Συμβουλευτική Επιτροπή, υπεύθυνη για την καθοδήγηση και εποπτεία του υποφαινόμενου κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διδακτορικής διατριβής, απαρτίζονταν από τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Ιωάννη Σταυρουλάκη και τους καθηγητές κκ. Χρίστο Φίλο και Γεώργιο Καρακώστα. Να σημειωθεί ότι, ο καθηγητής κ. Γεώργιος Καρακώστας, ορίστηκε μέλος της συμβουλευτικής επιτροπής στις 21-10-2009, αντικαθιστώντας το μέχρι τότε μέλος, καθηγητή κ. Ιωάννη Σφήκα ο οποίος συνταξιοδοτήθηκε.

Η κρίση της διδακτορικής διατριβής έγινε από Επταμελή Εξεταστική Επιτροπή, στην οποία συμμετείχαν, εκτός από τα μέλη της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής, οι καθηγητές κκ. Σωτήριος Ντούγιας και Παναγιώτης Τσαμάτος του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, ο καθηγητής κ. Γαρύφαλος Παπασχοινόπουλος του Τμήματος Μηχανικών Περιβάλλοντος του Δημοκρίτειου Πανεπιστημίου Θράκης και η αναπληρώτρια καθηγήτρια κ. Χρυσή Κοκολογιαννάκη του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών.

Εργασίες που προέκυψαν από την παρούσα Διδακτορική Διατριβή είναι οι ακόλουθες:

- G. E. Chatzarakis, R. Koplatadze and I. P. Stavroulakis, Oscillation criteria of first order linear difference equations with delay argument, *Nonlinear Anal.* **68** (2008), 994-1005.

- G. E. Chatzarakis, R. Koplatadze and I. P. Stavroulakis, Optimal oscillation criteria for first order difference equations with delay argument, *Pacific J. Math.* **235** (2008), 15-33.

- G. E. Chatzarakis, Ch. G. Philos and I. P. Stavroulakis, On the oscillation of the solutions to linear difference equations with variable delay, *Electron. J. Differential Equations* **2008** (2008), No. 50, pp. 1-15.

- G. E. Chatzarakis, Ch. G. Philos and I. P. Stavroulakis, An oscillation criterion for linear difference equations with general delay argument, *Port. Math.* **66** (2009), 513-533.

- G. E. Chatzarakis, G. L. Karakostas and I. P. Stavroulakis, Convergence of the positive solutions of a nonlinear neutral difference equation, *έχει υποβληθεί*.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Γίνεται μία σύντομη εισαγωγή στις εξισώσεις διαφορών, στη σπουδαιότητά τους σε πολλούς τομείς των επιστημών και ιδιαίτερα των εφαρμοσμένων και στη συνέχεια, μία επισκόπηση στην ερευνητική συμβολή της παρούσας διατριβής και στο περιεχόμενό της.

0.1. Εξισώσεις διαφορών – Εφαρμογές

Οι εξισώσεις διαφορών είναι ένας κλάδος των μαθηματικών με πολλές εφαρμογές, σε διάφορους τομείς των επιστημών, η χρήση των οποίων αποσκοπεί στην εξήγηση κάποιων φαινομένων και στην πρόβλεψη της μελλοντικής των εξέλιξης. Αυτό οφείλεται κατά κύριο λόγο στο γεγονός ότι, οι εξισώσεις διαφορών εκφράζουν μία από τις πιο βασικές ιδιότητες του πραγματικού κόσμου, τη ***διακριτότητά*** του (discreteness). Λόγω της ιδιότητας αυτής, οι εξισώσεις διαφορών εμφανίζονται με φυσικό τρόπο τόσο στην περιγραφή εξελικτικών φαινομένων όσο και στη διακριτοποίηση διαφορικών εξισώσεων. Εν τούτοις, μέχρι και πριν μερικά χρόνια, αυτές θεωρούνταν μόνο ως το διακριτό ανάλογο των διαφορικών εξισώσεων. Είναι όμως αναμφισβήτητο γεγονός ότι, οι εξισώσεις διαφορών εμφανίστηκαν νωρίτερα από τις διαφορικές εξισώσεις και μάλιστα, έπαιξαν σημαντικό ρόλο στην προσέγγιση των τελευταίων.

Παρά τα όσα πλεονεκτήματα έχουν οι εξισώσεις διαφορών έναντι των διαφορικών εξισώσεων, υπάρχουν περιπτώσεις όπου, λόγω δομικής αστάθειας του πραγματικού προβλήματος, οι αντίστοιχες διακριτοποιήσεις δεν αποδίδουν την πραγματική κατάσταση. Αυτός είναι και ένας επιπλέον λόγος για την ιδιαίτερη μελέτη τους. Για παράδειγμα, μια διαφορική εξίσωση μπορεί να παρουσιάζει ομαλές λύσεις και να είναι ασυμπτωτικά ή ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθής, ενώ η αντίστοιχη διακριτή να παρουσιάζει χάος και να έχει περιοδικές λύσεις με περίοδο οποιαδήποτε.

Τα τελευταία χρόνια μεγάλο πλήθος εργασιών σχετικών με εξισώσεις διαφορών έχουν δημοσιευθεί. Αυτό οφείλεται κυρίως, στην ταχεία ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών και των αριθμητικών μεθόδων, καθώς και στη χρήση τους για την αριθμητική επίλυση διαφόρων προβλημάτων.

Οι εξισώσεις διαφορών έχουν επίσης μεγάλη εφαρμογή σε διάφορα προβλήματα των επιστημών υγείας. Συγκεκριμένα, εμφανίζονται σε προβλήματα που σχετίζονται με την πρόβλεψη των ανωμαλιών των καρδιακών παλμών, τη συχνότητα με την οποίαν ασθενείς που συμμετέχουν σε ιατρικά πειράματα επισκέπτονται τους υπεύθυνους των πειραμάτων, καθώς και στην πρόβλεψη σύντομων αναταραχών στους επιχειρησιακούς κύκλους σχετικών με θέματα υγείας [70]. Εμφανίζονται επίσης σε προβλήματα που αφορούν τη δυναμική ενός συγκεκριμένου πληθυσμού [28, 31, 62]. Για παράδειγμα, το μέγεθος $x(n+1)$ της $n+1$ γενεάς ενός πληθυσμού είναι συνάρτηση του μεγέθους $x(n)$ της n-οστής γενεάς. Η σχέση αυτή εκφράζεται από μια εξίσωση διαφορών της μορφής

$$x(n+1) = f(x(n)) . \tag{0.1.1}$$

Τέλος, οι εξισώσεις διαφορών εμφανίζονται σε αρκετά άλλα προβλήματα τόσο των μαθηματικών (αριθμητική ανάλυση, προβλήματα συνοριακών τιμών, συνήθεις και με μερικές παραγώγους διαφορικές εξισώσεις, διακριτά μαθηματικά, επιστήμη των Η/Υ, θεωρία του χάους, fractals κλπ) όσο και των άλλων επιστημών. Ενδεικτικά αναφέρεται ότι, εμφανίζονται σε προβλήματα θεωρίας ουρών [33], θεωρίας παιγνίων [73], βιολογίας [19, 31, 62], μετεωρολογίας [62], χημείας [62] και οικονομίας [62]. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τις εφαρμογές των εξισώσεων διαφορών, ο αναγνώστης παραπέμπεται στη σχετική βιβλιογραφία, όπως [1-3, 18-20, 31, 33, 42, 62, 69-70, 73-74, 84] και τις αναφορές αυτών.

Η ταχεία ανάπτυξη των εφαρμοσμένων επιστημών και της τεχνολογίας, ιδιαίτερα στο χώρο των Η/Υ, των συστημάτων αυτόματου ελέγχου και των τηλεπικοινωνιών, οφείλεται κυρίως στη μεγάλη συνεισφορά των Μαθηματικών οι οποίοι ανέπτυξαν τεχνικές διακριτοποίησης των δεδομένων για μεταφορά και επικοινωνία, απαραίτητες για την ανάπτυξη του κατάλληλου λογισμικού και την κατασκευή στοιχείων, ικανά να επεξεργασθούν τα ψηφιοποιημένα προς μετάδοση δεδομένα (π.χ. φίλτρα Calman). Οι τεχνικές αυτές είναι άμεσα συνδεδεμένες με τις εξισώσεις διαφορών, αφού όλα αυτά τα στοιχεία περιγράφονται κατά το πλείστον από τέτοιες εξισώσεις. Και τούτο διότι στα γραμμικά και χρονικά δυναμικά συστήματα, ο υπολογισμός της επόμενης τιμής ενός σήματος βασίζεται σε προηγούμενες τιμές και στην αμέσως προηγούμενη. Οι συσχετίσεις αυτές των τιμών περιγράφονται με αναδρομικές εξισώσεις γνωστές ως *εξισώσεις διαφορών με υστέρηση* (σταθερή ή μεταβλητή).

Για τη βασική θεωρία εξισώσεων διαφορών ο αναγνώστης παραπέμπεται π.χ. στα βιβλία [20, 42, 62, 69, 74, 84].

0.2. Περιεχόμενο της διατριβής και συμβολή στην έρευνα

Η διατριβή αποτελείται από τέσσερα κεφάλαια:

Στο πρώτο κεφάλαιο, ορίζονται οι γραμμικές εξισώσεις διαφορών με υστέρηση (σταθερή ή μεταβλητή) ως τα διακριτά ανάλογα αντίστοιχων διαφορικών εξισώσεων, για τις οποίες δίνονται κάποια βασικά κριτήρια ταλάντωσης. Στη συνέχεια, αναφέρονται κριτήρια ταλάντωσης των λύσεων μίας γραμμικής εξίσωσης διαφορών με σταθερή υστέρηση, τα οποία παρουσιάζονται στη βιβλιογραφία τις τελευταίες δεκαετίες.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, μελετάται η γραμμική εξίσωση διαφορών με υστερημένο όρισμα $(\tau(n))_{n\geq 0}$ της μορφής

$$x(n+1)-x(n)+p(n)x(\tau(n))=0 ,$$

όπου $(p(n))_{n\geq 0}$ είναι μία ακολουθία μη-αρνητικών πραγματικών αριθμών και $(\tau(n))_{n\geq 0}$ είναι μία ακολουθία ακεραίων τέτοια ώστε

$$\tau(n)\leq n-1 \quad \text{για κάθε } n\geq 0 \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty}\tau(n)=\infty ,$$

με σκοπό την εύρεση ικανών συνθηκών ταλάντωσης των λύσεων αυτής. Αποδεικνύονται ικανές συνθήκες ταλάντωσης, οι οποίες είναι ανάλογες με γνωστές συνθήκες της γραμμικής εξίσωσης διαφορών με σταθερή υστέρηση, και ταυτόχρονα αποτελούν τα διακριτά αντίστοιχων γνωστών συνθηκών της διαφορικής εξίσωσης με μεταβλητή υστέρηση.

Στο τρίτο κεφάλαιο, μελετάται η γραμμική εξίσωση διαφορών με προωθημένο όρισμα $(\tau(n))_{n\geq 1}$ της μορφής

$$x(n)-x(n-1)-p(n)x(\tau(n))=0 ,$$

όπου $(p(n))_{n\geq 1}$ είναι μία ακολουθία μη-αρνητικών πραγματικών αριθμών και $(\tau(n))_{n\geq 1}$ είναι μία ακολουθία ακεραίων τέτοια ώστε

$$\tau(n) \geq n+1 \quad \text{για κάθε } n \geq 1$$

και διατυπώνονται ικανές συνθήκες για την ταλάντωση όλων των λύσεων αυτής, οι οποίες είναι ανάλογες ορισμένων συνθηκών της γραμμικής εξίσωσης διαφορών με υστερημένο όρισμα.

Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο, μελετάται η σύγκλιση των θετικών λύσεων μίας μη-γραμμικής εξίσωσης διαφορών ουδέτερου τύπου της μορφής

$$\Delta[x(n) - q(n)\,x(\sigma(n))] + p(n)\, f(x(\tau_1(n)), \cdots, x(\tau_k(n))) = 0\,,$$

με όρισμα υστέρησης $\sigma(n)$ και εκτρεπόμενα ορίσματα (υστέρησης ή προώθησης) $\tau_j(n)$, $j = 1, 2, \cdots, k$, $(p(n))_{n\geq 0}$ μία ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών, $(q(n))_{n\geq 0}$ μία ακολουθία είτε θετικών είτε αρνητικών πραγματικών αριθμών και f μια μη-γραμμική συνάρτηση η οποία ικανοποιεί κάποιες ασθενείς συνθήκες. Διατυπώνονται ικανές συνθήκες, οι οποίες εγγυώνται τη σύγκλιση των λύσεων προς το άπειρο ή προς το μηδέν.

Κεφάλαιο

1

Εξισώσεις Διαφορών – Συνθήκες Ταλάντωσης

Στο κεφάλαιο αυτό ορίζονται οι γραμμικές εξισώσεις διαφορών με υστέρηση (σταθερή ή μεταβλητή) ως τα διακριτά ανάλογα αντίστοιχων διαφορικών εξισώσεων, για τις οποίες δίνονται κάποια βασικά κριτήρια ταλάντωσης. Στη συνέχεια, αναφέρονται κριτήρια ταλάντωσης των λύσεων μίας γραμμικής εξίσωσης διαφορών με σταθερή υστέρηση, τα οποία παρουσιάζονται στη βιβλιογραφία τις τελευταίες δεκαετίες.

1.1. Γραμμικές εξισώσεις διαφορών με υστέρηση

Μία γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερή υστέρηση k, είναι της μορφής

$$\Delta x(n) + p(n)x(n-k) = 0\,, \tag{1.1.1}$$

όπου $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$ για $n \geq 0$, k είναι ένας θετικός ακέραιος και $(p(n))_{n\geq 0}$ είναι μία ακολουθία μη-αρνητικών πραγματικών αριθμών.

Με τον όρο *λύση* της εξίσωσης (1.1.1) εννοείται μία ακολουθία πραγματικών αριθμών $(x(n))_{n\geq -k}$ η οποία ικανοποιεί την εξίσωση (1.1.1) για κάθε $n \geq 0$.

Μία λύση $(x(n))_{n\geq -k}$ της εξίσωσης (1.1.1) ονομάζεται *ταλαντούμενη* (ως προς το μηδέν, σημείο ισορροπίας του συστήματος) αν για κάθε ακέραιο $n \geq -k$ υπάρχουν $n_1, n_2 \geq n$ τέτοια ώστε $x(n_1)x(n_2) \leq 0$. Με άλλα λόγια, μία λύση είναι ταλαντούμενη αν δεν είναι τελικά θετική ούτε τελικά αρνητική. Στην αντίθετη περίπτωση, η λύση ονομάζεται *μη ταλαντούμενη*.

Η επίλυση με τη μορφή αναδρομικού τύπου γίνεται με απλή αντικατάσταση, αλλά σε κλειστή μορφή είναι πρόβλημα. Ανεξάρτητα από τον τρόπο επίλυσης εξισώσεων της μορφής (1.1.1), ένα πολύ ενδιαφέρον πρόβλημα είναι η μελέτη της ταλάντωσης των λύσεων αυτής γύρω από ένα σημείο ισορροπίας και η οποία δεν εξαρτάται από τον ασυμπτωτικό τους χαρακτήρα. Συνδέεται δε, άμεσα με τις εφαρμογές της.

Ένας, έστω και όχι κύριος, οδηγός για τα κριτήρια ταλάντωσης και γενικά της σύγκλισης λύσεων εξισώσεων διαφορών, είναι τα γνωστά κριτήρια για τις διαφορικές εξισώσεις που έχουν δοθεί κατά καιρούς, μερικά εκ των οποίων αναφέρονται στη συνέχεια. Έτσι, μεγάλο πλήθος ερευνητών ασχολήθηκε τις τελευταίες δεκαετίες με προβλήματα ταλάντωσης των λύσεων μίας γραμμικής εξίσωσης διαφορών με σταθερή υστέρηση της μορφής (1.1.1), και πέτυχαν ως ένα βαθμό να δώσουν ικανοποιητικά ανάλογα κριτήρια ταλάντωσης και σύγκλισης των λύσεων αυτής ως αντίστοιχης της διαφορικής εξίσωσης με σταθερή υστέρηση. Βλέπε, για παράδειγμα, [2, 5, 7, 9-11, 15, 25, 34, 38-41, 48, 53-54, 56-57, 63, 66-67, 76-77, 79-80, 85-86, 88-92, 95-97, 98, 100, 112, 116-118] και τις αναφορές αυτών.

Η εξίσωση (1.1.1) είναι το διακριτό ανάλογο της διαφορικής εξίσωσης με σταθερή υστέρηση

$$x'(t) + p(t)x(t-T) = 0, \tag{1.1.2}$$

όπου p είναι μία μη-αρνητική συνεχής πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $[0,+\infty)$ και T μία πραγματική θετική σταθερά.

Η εξίσωση (1.1.2) αποτελεί ειδική περίπτωση της διαφορικής εξίσωσης με μεταβλητή υστέρηση

$$x'(t) + p(t)x(\tau(t)) = 0, \tag{1.1.3}$$

όπου p είναι μία μη-αρνητική συνεχής πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $[0,+\infty)$, τ είναι μία πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $[0,+\infty)$ με $\tau(t) \le t$ για $t \ge 0$ και $\lim_{t\to\infty} \tau(t) = +\infty$.

Με τον όρο *λύση* της εξίσωσης (1.1.3) εννοείται μία συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[\tau(T_0),\infty)$ για κάποιο $T_0 \ge 0$ και η οποία ικανοποιεί την εξίσωση (1.1.3) για $t \ge T_0$.

Μία λύση $x(t)$ της εξίσωσης (1.1.3) ονομάζεται *ταλαντούμενη*, εάν για κάθε μεγάλο t_1 υπάρχει ένα $t_2 > t_1$ τέτοιο ώστε $x(t_2) = 0$. Στην αντίθετη περίπτωση, η λύση $x(t)$ ονομάζεται *μη ταλαντούμενη*.

Η εξίσωση (1.1.3) αποτέλεσε αντικείμενο πολλών ερευνών. Βλέπε, για παράδειγμα, [12-14, 16-17, 21-24, 26, 28-30, 32, 35-36, 43-46, 50-52, 58, 60, 64-65, 71-72, 81, 83, 91, 98, 99, 103-104] και τις αναφορές αυτών. Το ενδιαφέρον των ερευνητών στράφηκε ιδιαίτερα στο να δοθούν συνθήκες ώστε οι λύσεις της εξίσωσης (1.1.3) να είναι ταλαντούμενες. Έτσι για παράδειγμα το 1972, οι Ladas, Lakshmikantham και Papadakis [55] απέδειξαν ότι εάν ισχύει η συνθήκη

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{t} p(s)\,ds > 1, \tag{1.1.4}$$

τότε όλες οι λύσεις της εξίσωσης (1.1.3) είναι ταλαντούμενες.

Το 1982, οι Koplatadze και Chanturia [45] απέδειξαν ότι εάν ισχύει η συνθήκη

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{t} p(s)\,ds > \frac{1}{e}, \tag{1.1.5}$$

τότε όλες οι λύσεις της εξίσωσης (1.1.3) είναι ταλαντούμενες, ενώ εάν ισχύει η συνθήκη

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{t} p(s)\,ds < \frac{1}{e}, \tag{1.1.6}$$

τότε η εξίσωση (1.1.3) έχει τουλάχιστο μία μη ταλαντούμενη λύση.

Στη συνέχεια, πλήθος ερευνητών απέδειξαν ικανές συνθήκες ταλάντωσης των λύσεων της εξίσωσης (1.1.3), για την περίπτωση κατά την οποίαν καμία από τις συνθήκες (1.1.4) και (1.1.5) δεν ισχύει. Για παράδειγμα, το 1988, οι Erbe και Zhang [24], απέδειξαν ότι εάν

$$0 < \alpha := \liminf_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{t} p(s)\,ds \le \frac{1}{e} \tag{1.1.7}$$

και ισχύει η συνθήκη

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{t} p(s)\,ds > 1 - \frac{\alpha^2}{4}, \tag{1.1.8}$$

τότε όλες οι λύσεις της εξίσωσης (1.1.3) είναι ταλαντούμενες.

Το 1991, ο Jian [36], απέδειξε ότι όλες οι λύσεις της εξίσωσης (1.1.3) είναι ταλαντούμενες εάν ισχύει η συνθήκη

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{t} p(s)\,ds > 1 - \frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)}. \tag{1.1.9}$$

Επίσης, το 1992, οι Yu και Wang [109] και οι Yu, Wang, Zhang και Qian [111], απέδειξαν ότι όλες οι λύσεις της εξίσωσης (1.1.3) είναι ταλαντούμενες εάν ισχύει η συνθήκη

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{t} p(s)\,ds > 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \alpha - \sqrt{1 - 2\alpha - \alpha^2}\right). \qquad (1.1.10)$$

1.2. Κριτήρια ταλάντωσης για την εξίσωση (1.1.1)

Το 1989, οι Erbe και Zhang [25] απέδειξαν ότι όλες οι λύσεις της εξίσωσης (1.1.1) είναι ταλαντούμενες, εάν ισχύει η συνθήκη

$$\liminf_{n\to\infty} p(n) > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \qquad (1.2.1)$$

ή η συνθήκη

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=n-k}^{n} p(i) > 1. \qquad (1.2.2)$$

Η συνθήκη (1.2.2) είναι προφανώς το διακριτό ανάλογο της συνθήκης (1.1.4) για την περίπτωση κατά την οποίαν $\tau(t) = t - T$.

Το ίδιο έτος, οι Ladas, Philos και Sficas [57] απέδειξαν ότι η συνθήκη

$$\liminf_{n\to\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=n-k}^{n-1} p(i) \right) > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}, \qquad (1.2.3)$$

είναι ικανή για την ταλάντωση όλων των λύσεων της εξίσωσης (1.1.1).

Είναι προφανές ότι, η συνθήκη (1.2.3) βελτιώνει τη συνθήκη (1.2.1) και είναι το διακριτό ανάλογο της συνθήκης (1.1.5) για την περίπτωση κατά την οποίαν $\tau(t) = t - T$, όπως συμβαίνει στην εξίσωση (1.1.2), αφού $\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1} = \frac{1}{e}$.

Στη συνέχεια, το ενδιαφέρον των ερευνητών στράφηκε στην αναζήτηση συνθηκών ταλάντωσης των λύσεων της (1.1.1), στην περίπτωση κατά την οποίαν καμία από τις συνθήκες (1.2.2) και (1.2.3) δεν ισχύει. Έτσι, για παράδειγμα, το 1994, οι Chen και Yu [9] απέδειξαν ότι εάν

$$0 < \alpha := \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=n-k}^{n-1} p(i) \le \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}, \tag{1.2.4}$$

τότε η συνθήκη

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=n-k}^{n} p(i) > 1 - \frac{1}{2}(1 - \alpha - \sqrt{1 - 2\alpha - \alpha^2}), \tag{1.2.5}$$

είναι ικανή για την ταλάντωση όλων των λύσεων της εξίσωσης (1.1.1).

Για περισσότερες συνθήκες ταλάντωσης των λύσεων της εξίσωσης (1.1.1), ο αναγνώστης παραπέμπεται στο άρθρο επισκόπησης Stavroulakis [90].

Κεφάλαιο

2

Εξισώσεις Διαφορών με μεταβλητή υστέρηση

Στο κεφάλαιο αυτό, μελετάται η γραμμική εξίσωση διαφορών με μεταβλητή υστέρηση, με σκοπό την εύρεση και διατύπωση ικανών συνθηκών ταλάντωσης όλων των λύσεων αυτής. Αποδεικνύονται ικανές συνθήκες ταλάντωσης, οι οποίες είναι ανάλογες με γνωστές συνθήκες της εξίσωσης (1.1.1) και αποτελούν ταυτόχρονα τα διακριτά ανάλογα γνωστών συνθηκών της διαφορικής εξίσωσης (1.1.3). Επιπρόσθετα, μια σειρά από παραδείγματα τονίζουν τη σπουδαιότητα των συνθηκών αυτών.

2.1. Εξισώσεις διαφορών με μεταβλητή υστέρηση

Έστω μία γραμμική εξίσωση διαφορών με υστερημένο όρισμα, της μορφής

$$\Delta x(n) + p(n)x(\tau(n)) = 0 \ , \qquad (2.1.1)$$

όπου $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$ για $n \geq 0$, $(p(n))_{n\geq 0}$ είναι ακολουθία μη-αρνητικών πραγματικών αριθμών και $(\tau(n))_{n\geq 0}$ είναι μία ακολουθία ακεραίων τέτοια ώστε

$$\tau(n) \le n-1 \quad \text{για κάθε } n \ge 0 \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} \tau(n) = \infty . \tag{2.1.2}$$

Η μεταβλητή υστέρηση της εξίσωσης (2.1.1) είναι $(n-\tau(n))_{n\ge 0}$.

Εισάγουμε το συμβολισμό

$$k = -\min_{n\ge 0} \tau(n) .$$

(Είναι φανερό ότι k είναι ένας θετικός ακέραιος.)

Με τον όρο *λύση* της εξίσωσης (2.1.1) εννοείται μία ακολουθία πραγματικών αριθμών $(x(n))_{n\ge -k}$ η οποία ικανοποιεί την εξίσωση (2.1.1) για κάθε $n \ge 0$.

Μία λύση $(x(n))_{n\ge -k}$ της εξίσωσης (2.1.1) ονομάζεται *ταλαντούμενη* αν για κάθε ακέραιο $n \ge -k$ υπάρχουν $n_1, n_2 \ge n$ τέτοια ώστε $x(n_1)x(n_2) \le 0$. Με άλλα λόγια, μία λύση είναι ταλαντούμενη αν δεν είναι τελικά θετική ούτε τελικά αρνητική. Στην αντίθετη περίπτωση, η λύση ονομάζεται *μη ταλαντούμενη*.

Η εξίσωση (2.1.1) είναι προφανώς το διακριτό ανάλογο της διαφορικής εξίσωσης (1.1.3) για την οποίαν, όπως ήδη έχει αναφερθεί, όλες οι λύσεις είναι ταλαντούμενες εάν ισχύουν οι συνθήκες

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{t} p(s)\, ds > 1, \tag{1.1.4}$$

ή

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{t} p(s)\, ds > \frac{1}{e}, \tag{1.1.5}$$

ή η γενικευμένη περίπτωση της εξίσωσης (1.1.1) για την οποίαν, όλες οι λύσεις είναι ταλαντούμενες εάν ισχύουν οι συνθήκες

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=n-k}^{n} p(i) > 1, \tag{1.2.2}$$

ή

$$\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1}p(i)\right)>\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}. \qquad (1.2.3)$$

Το 1991, ο Philos [75] γενίκευσε τη συνθήκη (1.2.3) αποδεικνύοντας ότι, εάν η ακολουθία $(\tau(n))_{n\geq 0}$ είναι αύξουσα και ισχύει η συνθήκη

$$\liminf_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n-\tau(n)}\sum_{i=\tau(n)}^{n-1}p(i)\right]>\limsup_{n\to\infty}\frac{(n-\tau(n))^{n-\tau(n)}}{(n-\tau(n)+1)^{n-\tau(n)+1}}, \qquad (2.1.3)$$

τότε όλες οι λύσεις της εξίσωσης (2.1.1) είναι ταλαντούμενες.

Στην παρούσα διατριβή αποδεικνύονται κατ' αρχήν αντίστοιχες ικανές συνθήκες ταλάντωσης για την εξίσωση (2.1.1) όταν $\lim_{n\to\infty}(n-\tau(n))=+\infty$.

2.2. Συνθήκες ταλάντωσης

Έστω $n_0\in\mathbf{N}$. Με U_{n_0} θα συμβολίζεται το σύνολο όλων των λύσεων της εξίσωσης (2.1.1), οι οποίες ικανοποιούν τη συνθήκη $x(n)>0$ για $n\geq n_0$. Επομένως, στην περίπτωση κατά την οποίαν δεν υπάρχουν λύσεις οι οποίες να ικανοποιούν τη συνθήκη αυτή, θα ισχύει $U_{n_0}=\varnothing$.

Θεώρημα 2.2.Α. *Έστω ότι ισχύει η σχέση* (2.1.2) *και* $(\sigma(n))_{n\geq 0}$ *μία ακολουθία ακεραίων τέτοια ώστε*

$$\sigma(n)=\max_{0\leq s\leq n}\tau(s) \quad \text{για } n\geq 0. \qquad (2.2.1)$$

Εάν ισχύει η συνθήκη

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=\sigma(n)}^{n}p(i)>1, \qquad (2.2.2)$$

τότε όλες οι λύσεις της εξίσωσης (2.1.1) *είναι ταλαντούμενες.*

Απόδειξη. Έστω ότι η εξίσωση (2.1.1) έχει μια θετική λύση $(x_0(n))$ για $n \geq n_0$. Τότε υπάρχει $n_1 \geq n_0$ έτσι ώστε $x_0(\tau(n)) > 0$ για κάθε $n \geq n_1$. Επομένως, από την εξίσωση (2.1.1) προκύπτει

$$\Delta x_0(n) = -p(n)x_0(\tau(n)) \leq 0\,, \quad \text{για κάθε } n \geq n_1$$

και ως εκ τούτου, για $n_2 \geq n_1$ η ακολουθία $(x_0(n))_{n \geq n_2}$ είναι φθίνουσα. Επομένως, επειδή $\sigma(n) \geq \tau(n)$, ισχύει η ανισότητα $x_0(\sigma(n)) \leq x_0(\tau(n))$, η οποία συνεπάγεται ότι

$$\Delta x_0(n) + p(n)x_0(\sigma(n)) \leq 0\,, \quad \text{για κάθε } n \geq n_2\,.$$

Αθροίζοντας κατά μέλη τις ανισότητες που προκύπτουν με εφαρμογή της παραπάνω σχέσης από $\sigma(n)$ έως n, όπου $n \geq n_2$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι η ακολουθία $(\sigma(n))_{n \geq 0}$ είναι αύξουσα και η ακολουθία $(x_0(n))_{n \geq n_2}$ είναι φθίνουσα, προκύπτει

$$x_0(\sigma(n)) \geq x_0(n+1) + \sum_{i=\sigma(n)}^{n} p(i)\, x_0(\sigma(i)) \geq \left(\sum_{i=\sigma(n)}^{n} p(i) \right) x_0(\sigma(n))\,.$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει η ανισότητα

$$x_0(\sigma(n)) \left(\sum_{i=\sigma(n)}^{n} p(i) - 1 \right) \leq 0\,,$$

οπότε

$$\limsup_{n \to \infty} \sum_{i=\sigma(n)}^{n} p(i) \leq 1\,.$$

Η τελευταία ανισότητα είναι σε αντίφαση με την υπόθεση (2.2.2). Επομένως, όλες οι λύσεις της εξίσωσης (2.1.1) είναι ταλαντούμενες. Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

Παρατήρηση. Η συνθήκη (2.2.2) είναι το διακριτό ανάλογο της (1.1.4), που ισχύει για την εξίσωση (1.1.3) και ανάλογη της (1.2.2), που ισχύει για την εξίσωση (1.1.1).

Στην ειδική περίπτωση κατά την οποίαν η ακολουθία $(\tau(n))_{n\geq 0}$ είναι αύξουσα, η ακολουθία $(\sigma(n))_{n\geq 0}$ συμπίπτει με την ακολουθία $(\tau(n))_{n\geq 0}$ και το Θεώρημα 2.2.Α διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 2.2.Α΄. *Έστω ότι ισχύει η σχέση* (2.1.2) *και η ακολουθία* $(\tau(n))_{n\geq 0}$ *είναι αύξουσα. Εάν ισχύει η συνθήκη*

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n} p(i) > 1, \qquad (2.2.2')$$

τότε όλες οι λύσεις της εξίσωσης (2.1.1) *είναι ταλαντούμενες.*

Παρατήρηση. Εάν $\tau(n) = n - k$, τα παραπάνω θεωρήματα οδηγούν στη συνθήκη ταλάντωσης (1.2.2) των λύσεων της εξίσωσης (1.1.1).

Στη συνέχεια δίνονται μερικά βασικά λήμματα, βάσει των οποίων αποδεικνύονται αναγκαίες συνθήκες ύπαρξης θετικών λύσεων της εξίσωσης (2.1.1) και μετά, αποδεικνύονται δύο θεωρήματα που αποτελούν ικανές συνθήκες ταλάντωσης των λύσεων της υστερημένης εξίσωσης διαφορών (2.1.1).

Α. Βασικά Λήμματα

Λήμμα Α.1. *Έστω* $n_0 \in \mathbf{N}$, $x \in U_{n_0}$, $\tau(n) \leq n-1$ *για κάθε* $n \geq 0$, *η ακολουθία* $(\tau(n))_{n\geq 0}$ *είναι αύξουσα και*

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) = c > 0\,. \qquad (2.2.3)$$

Τότε ισχύει η σχέση

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{x(\tau(n))}{x(n+1)} \le \frac{4}{c^2}. \qquad (2.2.4)$$

Απόδειξη. Από τη σχέση (2.2.3) είναι φανερό ότι, για κάθε $\varepsilon \in (0, c)$ υπάρχει $n_1 \ge n_0$ έτσι ώστε

$$\sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) \ge c - \varepsilon \qquad \text{για κάθε } n \ge n_1. \qquad (2.2.5)$$

Επιπρόσθετα, επειδή η $(x(n))$ είναι θετική λύση της εξίσωσης (2.1.1), υπάρχει $n_2 \ge n_1$ έτσι ώστε

$$x(\tau(n)) > 0 \quad \text{για κάθε } n \ge n_2. \qquad (2.2.6)$$

Επομένως, από την εξίσωση (2.1.1) προκύπτει

$$\Delta x(n) = -p(n)x(\tau(n)) \le 0$$

δηλαδή, η ακολουθία $(x(n))_{n\ge n_2}$ είναι φθίνουσα.

Στη συνέχεια, αποδεικνύεται ο ακόλουθος ισχυρισμός.

Ισχυρισμός. *Για κάθε* $n \ge n_2$, *υπάρχει ένας ακέραιος* $n^* \ge n$ *έτσι ώστε* $\tau(n^*) \le n-1$, *και*

$$\sum_{i=n}^{n^*} p(i) \ge \frac{c-\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad \sum_{i=\tau(n^*)}^{n-1} p(i) > \frac{c-\varepsilon}{2}. \qquad (2.2.7)$$

Για την απόδειξη του ισχυρισμού, έστω $n \ge n_2$. Διακρίνονται οι ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

1. Εάν $p(n) \geq \dfrac{c-\varepsilon}{2}$, επιλέγοντας ως $n^* = n$, είναι προφανές ότι $\tau(n^*) = \tau(n) \leq n-1$ και

$$\sum_{i=n}^{n^*} p(i) = \sum_{i=n}^{n} p(i) = p(n) \geq \frac{c-\varepsilon}{2}.$$

Επίσης, από την ανισότητα (2.2.5), προκύπτει ότι

$$\sum_{i=\tau(n^*)}^{n-1} p(i) = \sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) \geq c-\varepsilon > \frac{c-\varepsilon}{2},$$

δηλαδή, η σχέση (2.2.7) είναι αληθής.

2. Έστω $p(n) < \dfrac{c-\varepsilon}{2}$. Από την ανισότητα (2.2.5) είναι προφανές ότι

$$\sum_{i=n}^{\infty} p(i) = \infty .$$

Έτσι, καθώς $p(n) < \dfrac{c-\varepsilon}{2}$, υπάρχει ακέραιος $n^* > n$ τέτοιος ώστε

$$\sum_{i=n}^{n^*-1} p(i) < \frac{c-\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad \sum_{i=n}^{n^*} p(i) \geq \frac{c-\varepsilon}{2}.$$

Εάν $\tau(n^*) \geq n$ τότε ισχύει ότι

$$\sum_{i=\tau(n^*)}^{n^*-1} p(i) \leq \sum_{i=n}^{n^*-1} p(i) < \frac{c-\varepsilon}{2}.$$

Από την άλλη μεριά, η ανισότητα (2.2.5) δίνει

$$\sum_{i=\tau(n^*)}^{n^*-1} p(i) \geq c-\varepsilon > \frac{c-\varepsilon}{2}.$$

Συνδυασμός των δύο τελευταίων ανισοτήτων, οδηγεί προφανώς σε άτοπο. Έτσι $\tau(n^*) \leq n-1$. Επομένως,

$$\sum_{i=\tau(n^*)}^{n-1} p(i) = \sum_{i=\tau(n^*)}^{n^*-1} p(i) - \sum_{i=n}^{n^*-1} p(i) > (c-\varepsilon) - \frac{c-\varepsilon}{2} = \frac{c-\varepsilon}{2},$$

δηλαδή ισχύει και η δεύτερη ανισότητα της σχέσης (2.2.7). Η απόδειξη του ισχυρισμού είναι πλήρης.

Αθροίζοντας κατά μέλη τις σχέσεις που προκύπτουν με εφαρμογή της εξίσωσης (2.1.1) από n έως n^* και λαμβάνοντας υπόψη ότι, η ακολουθία $(\tau(n))_{n\geq 0}$ είναι αύξουσα και η ακολουθία $(x(n))_{n\geq n_2}$ είναι φθίνουσα, προκύπτει

$$x(n) - x(n^*+1) = \sum_{i=n}^{n^*} p(i)\, x(\tau(i)) \geq \left(\sum_{i=n}^{n^*} p(i)\right) x(\tau(n^*)) \geq \frac{c-\varepsilon}{2} x(\tau(n^*)),$$

οπότε

$$x(n) \geq \frac{c-\varepsilon}{2} x(\tau(n^*)). \tag{2.2.8}$$

Τώρα, αθροίζοντας από $\tau(n^*)$ έως $n-1$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι η ακολουθία $(\tau(n))_{n\geq 0}$ είναι αύξουσα και η ακολουθία $(x(n))_{n\geq n_2}$ είναι φθίνουσα, προκύπτει

$$x(\tau(n^*)) - x(n) = \sum_{i=\tau(n^*)}^{n-1} p(i)\, x(\tau(i)) \geq \left(\sum_{i=\tau(n^*)}^{n-1} p(i)\right) x(\tau(n-1)) \geq \frac{c-\varepsilon}{2} x(\tau(n-1)),$$

οπότε

$$x(\tau(n^*)) \geq \frac{c-\varepsilon}{2} x(\tau(n-1)). \tag{2.2.9}$$

Συνδυάζοντας τις ανισότητες (2.2.8) και (2.2.9), προκύπτει

$$\frac{x(\tau(n-1))}{x(n)} \le \frac{4}{(c-\varepsilon)^2}$$

και, για μεγάλες τιμές του n, η ανωτέρω ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$\frac{x(\tau(n))}{x(n+1)} \le \frac{4}{(c-\varepsilon)^2}$$

και ως εκ τούτου

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{x(\tau(n))}{x(n+1)} \le \frac{4}{(c-\varepsilon)^2}\,.$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει για κάθε $\varepsilon \in (0,c)$, επομένως για $\varepsilon \to 0$ προκύπτει η συνθήκη (2.2.4). Η απόδειξη του λήμματος είναι πλήρης.

Λήμμα Α.2. *Έστω* $n_0 \in \mathbf{N}$, $x \in U_{n_0}$, $\tau(n) \le n-1$ *για κάθε* $n \ge 0$, *η ακολουθία* $(\tau(n))_{n\ge 0}$ *είναι αύξουσα και*

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) = c > 0\,. \tag{2.2.3}$$

Τότε, για κάθε $\lambda > 4/c^2$ *ισχύει η σχέση*

$$\lim_{n\to\infty} x(n)\exp\left(\lambda \sum_{i=1}^{n-1} p(i)\right) = +\infty\,. \tag{2.2.10}$$

Απόδειξη. Έστω $\lambda > 4/c^2$. Θεωρούμε τυχόν $\delta \in \left(0, \lambda - \dfrac{4}{c^2}\right)$ και ορίζουμε ως $M := 4/c^2 + \delta$. Τότε $\lambda - M = \lambda - 4/c^2 - \delta > 0$.

Επειδή όλες οι συνθήκες του Λήμματος Α.1 ικανοποιούνται, είναι φανερό ότι υπάρχει $n_1 \ge n_0$ τέτοιο ώστε

$$\frac{x(\tau(n))}{x(n+1)} \le M \quad \text{για κάθε } n \ge n_1\,. \tag{2.2.11}$$

Επίσης, για κάθε $n \geq n_1$ προκύπτει

$$\sum_{n=n_1}^{k} \frac{\Delta x(n)}{x(n+1)} = \sum_{n=n_1}^{k} \left(1 - \frac{x(n)}{x(n+1)}\right) \leq -\sum_{n=n_1}^{k} \ln \frac{x(n)}{x(n+1)} = \ln \frac{x(k+1)}{x(n_1)}$$

οπότε

$$\sum_{n=n_1}^{k} \frac{\Delta x(n)}{x(n+1)} \leq \ln \frac{x(k+1)}{x(n_1)} \ . \tag{2.2.12}$$

Επιπλέον, από την εξίσωση (2.1.1), προκύπτει η σχέση

$$\sum_{n=n_1}^{k} \frac{\Delta x(n)}{x(n+1)} = -\sum_{n=n_1}^{k} p(n) \frac{x(\tau(n))}{x(n+1)} . \tag{2.2.13}$$

Συνδυάζοντας τις ανισότητες (2.2.13), (2.2.11) και (2.2.12), προκύπτει ότι

$$-M \sum_{n=n_1}^{k} p(n) \leq -\sum_{n=n_1}^{k} p(n) \frac{x(\tau(n))}{x(n+1)} = \sum_{n=n_1}^{k} \frac{\Delta x(n)}{x(n+1)} \leq \ln \frac{x(k+1)}{x(n_1)} ,$$

οπότε

$$x(k+1) \geq x(n_1) \exp\left(-M \sum_{n=n_1}^{k} p(n)\right) . \tag{2.2.14}$$

Η τελευταία ανισότητα δίνει

$$x(k+1) \exp\left(\lambda \sum_{n=n_1}^{k} p(n)\right) \geq x(n_1) \exp\left((\lambda - M) \sum_{n=n_1}^{k} p(n)\right) ,$$

οπότε

$$\liminf_{k \to \infty} x(k+1) \exp\left(\lambda \sum_{n=n_1}^{k} p(n)\right) \geq x(n_1) \liminf_{k \to \infty} \exp\left((\lambda - M) \sum_{n=n_1}^{k} p(n)\right) . \tag{2.2.15}$$

Επίσης, από τη σχέση (2.2.3) είναι φανερό ότι $\sum_{i=1}^{+\infty} p(i) = +\infty$. Έτσι, αφού $\lambda - M > 0$, η ανισότητα (2.2.15) συνεπάγεται ότι

$$\liminf_{k\to\infty} x(k+1)\exp\left(\lambda\sum_{n=n_1}^{k} p(n)\right) = +\infty ,$$

οπότε

$$\liminf_{n\to\infty} x(n)\exp\left(\lambda\sum_{i=n_1}^{n-1} p(i)\right) = +\infty . \qquad (2.2.16)$$

Τέλος, επειδή

$$\sum_{i=n_1}^{n-1} p(i) \le \sum_{i=1}^{n-1} p(i)$$

είναι φανερό ότι, η σχέση (2.2.16) οδηγεί στη συνθήκη (2.2.10). Η απόδειξη του λήμματος είναι πλήρης.

Λήμμα Α.3. *Έστω η ανισότητα διαφορών*

$$\Delta x(n) + q(n)\, x(\sigma(n)) \le 0 , \quad n \in \mathbf{N} \qquad (2.2.17)$$

όπου

$$q : \mathbf{N} \mapsto \mathbf{R}_+ , \quad \sigma : \mathbf{N} \mapsto \mathbf{N} \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} \sigma(n) = +\infty . \qquad (2.2.18)$$

Εάν

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) = c > 0 \qquad (2.2.3)$$

$$\sigma(n) \le \tau(n) \le n-1 \ , \quad p(n) \le q(n) \ \ \text{για} \ \ n \in \mathbf{N} \qquad (2.2.19)$$

και $(x(n))$ *είναι μια θετική λύση της ανισότητας* (2.2.17) *για* $n \ge n_0$, *τότε υπάρχει* $n_1 \ge n_0$ *τέτοιο ώστε η εξίσωση* (2.1.1) *να έχει μια θετική λύση* $(x_*(n))$ *για* $n \ge n_1$ *η οποία ικανοποιεί τη σχέση*

$$0 < x_*(n) \le x(n) \ \ \text{για} \ \ n \ge n_1 \qquad (2.2.20)$$

Απόδειξη. Έστω $(x(n))_{n\ge n_0}$ είναι μια θετική λύση της ανισότητας (2.2.17). Από τις σχέσεις (2.2.18) και (2.2.3) είναι φανερό ότι, υπάρχει $n_1 \ge n_0$ τέτοιο ώστε

$$x(\sigma(n)) > 0 \quad \text{και} \quad \sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) > 0 \quad \text{για } n \ge n_1. \tag{2.2.21}$$

Αθροίζοντας κατά μέλη τις ανισότητες που προκύπτουν με εφαρμογή της (2.2.17) από n έως $+\infty$, προκύπτει

$$x(n) \ge \sum_{i=n}^{+\infty} q(i)\, x(\sigma(i)) \quad \text{για } n \ge n_1. \tag{2.2.22}$$

Στη συνέχεια, θεωρώντας ως $n_* = \min\{\tau(n) : n \ge n_1\}$, ορίζεται μια ακολουθία συναρτήσεων x_i για $n \ge n_*$ και $i = 1, 2, \cdots$, με τύπο

$$x_1(n) = x(n)\ ,\ n \ge n_*$$

$$x_j(n) = \begin{cases} \sum_{i=n}^{+\infty} p(i)\, x_{j-1}(\tau(i))\ ,\ n \ge n_1 \\ x(n) \quad ,\ n \in [n_*, n_1) \quad (j = 2, 3, ...) \end{cases} \tag{2.2.23}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.2.19), (2.2.22) και λαμβάνοντας υπόψη ότι, η συνάρτηση x είναι φθίνουσα, προκύπτει

$$x_2(n) = \sum_{i=n}^{+\infty} p(i)\, x_1(\tau(i)) \le \sum_{i=n}^{+\infty} q(i)\, x(\sigma(i)) \le x(n) = x_1(n) \quad \text{για } n \ge n_1.$$

Έτσι,

$$x_j(n) \le x_{j-1}(n) \le x(n) \quad \text{για } n \ge n_1,\ (j = 2, 3, \cdots) \tag{2.2.24}$$

Έστω ότι $\lim_{j\to\infty} x_j(n) = x_*(n)$ (η σχέση (2.2.24) διασφαλίζει την ύπαρξη αυτού του ορίου). Επομένως, από τη σχέση (2.2.23), προκύπτει

$$x_*(n) = \sum_{i=n}^{+\infty} p(i)\, x_*(\tau(i)) \ , \ \text{για} \ n \ge n_1 , \qquad (2.2.25)$$

δηλαδή, η συνάρτηση x_* είναι μια λύση της εξίσωσης (2.1.1) για $n \ge n_1$ και ικανοποιεί την ανισότητα

$$0 \le x_*(n) \le x(n) \ \ \text{για} \ \ n \ge n_1 .$$

Αρκεί πλέον να δειχθεί ότι $x_*(n) > 0$ για $n \ge n_1$.

Πράγματι, έστω ότι υπάρχει $n_2 \ge n_1$ έτσι ώστε

$$x_*(n) = 0 \ \ \text{για} \ n \ge n_2 \ \text{και} \ x_*(n) > 0 \ \ \text{για} \ n \in [n_*, n_2) \qquad (2.2.26)$$

Εάν $\mathbf{N}^*$ είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών για τους οποίους ισχύει η σχέση $\tau(n) = n_2$ και $n^* = \min \mathbf{N}^*$, από τις σχέσεις (2.2.25) και (2.2.19), είναι προφανές ότι $n^* \ge n_2$. Επομένως, εάν $\mu = \min\left\{ x_*(\tau(i)) : \tau(n^*) \le i \le n^* - 1 \right\} > 0$, από τις σχέσεις (2.2.19) και (2.2.21), προκύπτει

$$x_*(n_2) = \sum_{i=n_2}^{+\infty} p(i)\, x_*(\tau(i)) \ge \sum_{i=\tau(n^*)}^{n^*-1} p(i)\, x_*(\tau(i)) \ge \mu \sum_{i=\tau(n^*)}^{n^*-1} p(i) > 0 ,$$

πράγμα άτοπο, διότι $x_*(n_2) = 0$. Επομένως, $x_*(n) > 0$ για $n \ge n_1$. Η απόδειξη του λήμματος είναι πλήρης.

Λήμμα Α.4. *Έστω* $n_0 \in \mathbf{N}$, $x \in U_{n_0}$, $\tau(n) \le n - 1$ *για* $n \ge 0$ *και*

$$\liminf_{n \to \infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) = c > 0 . \qquad (2.2.3)$$

Τότε, για κάθε $\lambda > 4 / c^2$, *ισχύει η συνθήκη* (2.2.10).

Απόδειξη. Επειδή $(x(n))_{n\geq n_0}$ είναι μια λύση της εξίσωσης (2.1.1), είναι φανερό ότι αποτελεί και λύση της ανισότητας

$$\Delta x(n)+q(n)\,x(\sigma(n))\leq 0\,,\quad \text{για } n\geq n_1\,,$$

όπου $n_1>n_0$ είναι ένας επαρκώς μεγάλος ακέραιος αριθμός και $(\sigma(n))_{n\geq 0}$ ακολουθία όπως ορίζεται στη σχέση (2.2.1).

Κατ’ αρχήν, θα δειχθεί ότι

$$\liminf_{n\to\infty}\sum_{i=\sigma(n)}^{n-1}p(i)=c\,. \tag{2.2.27}$$

Έστω λοιπόν ότι, η σχέση (2.2.27) δεν ισχύει. Τότε, υπάρχει μια ακολουθία φυσικών αριθμών $(n(i))_{i\geq 1}$ τέτοια ώστε $\sigma(n(i))\neq\tau(n(i))$ $(i=1,2,...)$ και

$$\liminf_{j\to\infty}\sum_{i=\sigma(n(j))}^{n(j)-1}p(i)=c_1<c\,. \tag{2.2.28}$$

Επίσης, από τον ορισμό της συνάρτησης σ και δεδομένου ότι $\sigma(n(i))\neq\tau(n(i))$, για κάθε $n(i)$, υπάρχει $n'(i)<n(i)$ έτσι ώστε $\sigma(n)=\sigma(n(i))$ για $n'(i)\leq n\leq n(i)$, $\lim_{i\to\infty}n'(i)=+\infty$ και $\sigma(n'(i))=\tau(n'(i))$.

Επομένως,

$$\sum_{j=\tau(n'(i))}^{n'(i)-1}p(j)=\sum_{j=\sigma(n'(i))}^{n'(i)-1}p(j)=\sum_{j=\sigma(n(i))}^{n'(i)-1}p(j)\leq\sum_{j=\sigma(n(i))}^{n(i)-1}p(j)\quad (i=1,2,...)\,. \tag{2.2.29}$$

Συνδυάζοντας τις ανισότητες (2.2.29) και (2.2.28), προκύπτει

$$\liminf_{i\to\infty}\sum_{j=\tau(n'(i))}^{n'(i)-1}p(j)\leq\liminf_{i\to\infty}\sum_{j=\sigma(n(i))}^{n(i)-1}p(j)=c_1<c\,.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο λόγω της σχέσης (2.2.3). Άρα, η σχέση (2.2.27) είναι αληθής.

Τώρα, με χρήση του Λήμματος Α.3, συνεπάγεται ότι η εξίσωση

$$\Delta x(n) + p(n)\, x(\sigma(n)) = 0$$

έχει μία λύση $(x_*(n))$ η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη

$$0 < x_*(n) \le x(n) \quad \text{για} \quad n \ge n_1 \tag{2.2.30}$$

όπου $n_1 > n_0$ είναι ένας επαρκώς μεγάλος ακέραιος αριθμός.

Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη ότι η ακολουθία $(\sigma(n))_{n\ge 0}$ είναι αύξουσα, με βάση το Λήμμα Α.2, προκύπτει

$$\lim_{n\to\infty} x_*(n) \exp\left(\lambda \sum_{i=1}^{n-1} p(i)\right) = +\infty\,, \tag{2.2.31}$$

όπου $\lambda > 4/c^2$. Τέλος, με συνδυασμό των σχέσεων (2.2.30) και (2.2.31), προκύπτει

$$\lim_{n\to\infty} x(n) \exp\left(\lambda \sum_{i=1}^{n-1} p(i)\right) = +\infty \quad \text{για κάθε } \lambda > 4/c^2$$

και ως εκ τούτου η απόδειξη του λήμματος είναι πλήρης.

Λήμμα Α.5. *Έστω* $(a(i))_{i\ge 1}$ *και* $(b(i))_{i\ge 1}$ *ακολουθίες μη αρνητικών αριθμών και*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a(i) < +\infty\,. \tag{2.2.32}$$

Εάν $A(i) = \sum_{j=i}^{+\infty} a(j)$, *τότε*

$$\sum_{i=1}^{n} a(i)b(i) = A(1)b(1) - A(n+1)b(n+1) - \sum_{i=1}^{n} A(i+1)\big(b(i) - b(i+1)\big). \tag{2.2.33}$$

Απόδειξη. Λόγω ισχύος της (2.2.32), προκύπτει

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} A(i+1)\big(b(i)-b(i+1)\big) &= \sum_{i=1}^{n} A(i+1)b(i) - \sum_{i=1}^{n} A(i+1)b(i+1)\\ &= \sum_{i=1}^{n} A(i+1)b(i) - \sum_{i=2}^{n+1} A(i)b(i)\\ &= A(2)b(1) - A(n+1)b(n+1) + \sum_{i=2}^{n} (A(i+1)-A(i))b(i)\\ &= A(2)b(1) - A(n+1)b(n+1) - \sum_{i=2}^{n} a(i)b(i)\\ &= A(1)b(1) - A(n+1)b(n+1) - \sum_{i=1}^{n} a(i)b(i)\end{aligned}$$

Η απόδειξη του λήμματος είναι πλήρης.

Το 2002, οι Koplatadze, Kvinikadze και Stavroulakis [47], απέδειξαν το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα Α.6 ([47]). *Έστω* $\varphi,\psi:\mathbf{N}\mapsto(0,+\infty)$, ψ *: φθίνουσα συνάρτηση και*

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(n)=+\infty\,, \tag{2.2.34}$$

$$\liminf_{n\to\infty}\psi(n)\,\tilde{\varphi}(n)=0 \tag{2.2.35}$$

όπου $\tilde{\varphi}(n)=\inf\{\varphi(s): s\ge n,\, s\in\mathbf{N}\}$. *Τότε, υπάρχει μία αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών* $(n(i))_{i\ge 1}$, *τέτοια ώστε*

$$\lim_{i\to\infty} n(i)=+\infty,\quad \tilde{\varphi}(n(i))=\varphi(n(i)),\quad \psi(n)\,\tilde{\varphi}(n)\ge\psi(n(i))\,\tilde{\varphi}(n(i))$$
$$(n=1,2,\ldots,n(i);\ i=1,2,\ldots).$$

Β. Αναγκαίες συνθήκες ύπαρξης θετικών λύσεων της εξίσωσης (2.1.1)

Θεώρημα Β.1. *Έστω* $n_0 \in \mathbf{N}$, $U_{n_0} \neq \varnothing$, $(p(n))_{n\geq 0}$ *είναι ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών και* $(\tau(n))_{n\geq 0}$ *είναι ακολουθία ακεραίων τέτοια ώστε*

$$\tau(n) \leq n-1 \quad \text{για κάθε } n \geq 0 \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} \tau(n) = \infty . \qquad (2.1.2)$$

Εάν ισχύουν οι σχέσεις

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) = c > 0 \qquad (2.2.3)$$

και

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) < +\infty , \qquad (2.2.36)$$

τότε, υπάρχει $\lambda \in [1, 4/c^2]$ *τέτοιο ώστε*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0^+}\left[\liminf_{n\to\infty} \exp\left((\lambda+\varepsilon)\sum_{i=1}^{n-1} p(i)\right)\sum_{i=n}^{+\infty} p(i)\exp\left(-(\lambda+\varepsilon)\sum_{\ell=1}^{\tau(i)-1} p(\ell)\right)\right] \leq 1 .$$

$$(2.2.37)$$

Απόδειξη. Επειδή $U_{n_0} \neq \varnothing$, η εξίσωση (2.1.1) έχει μια θετική λύση $(x(n))_{n\geq n_0}$.

Κατ' αρχήν, αποδεικνύεται ότι

$$\limsup_{n\to\infty} x(n)\exp\left(\sum_{i=1}^{n-1} p(i)\right) < +\infty . \qquad (2.2.38)$$

Πράγματι, εάν $n_1 \geq n_0$, τότε

$$\sum_{i=n_1}^{n} \frac{\Delta x(i)}{x(i)} = \sum_{i=n_1}^{n} \frac{x(i+1)}{x(i)} - (n-n_1)$$

$$= \sum_{i=n_1}^{n} \exp\left(\ln \frac{x(i+1)}{x(i)} \right) - (n-n_1)$$

$$\geq \sum_{i=n_1}^{n} \left(1 + \ln \frac{x(i+1)}{x(i)} \right) - (n-n_1) = \ln \frac{x(n+1)}{x(n_1)},$$

οπότε

$$\sum_{i=n_1}^{n} \frac{\Delta x(i)}{x(i)} \geq \ln \frac{x(n+1)}{x(n_1)}. \tag{2.2.39}$$

Επειδή δε η λύση $(x(n))_{n \geq n_1}$ είναι φθίνουσα, από την εξίσωση (2.1.1), συνεπάγεται ότι

$$\sum_{i=n_1}^{n} \frac{\Delta x(i)}{x(i)} = -\sum_{i=n_1}^{n} p(i) \frac{x(\tau(i))}{x(i)} \leq -\sum_{i=n_1}^{n} p(i) \ . \tag{2.2.40}$$

Συνδυασμός των (2.2.39) και (2.2.40) δίνει

$$\ln \frac{x(n+1)}{x(n_1)} \leq \sum_{i=n_1}^{n} \frac{\Delta x(i)}{x(i)},$$

οπότε

$$x(n+1) \exp\left(\sum_{i=n_1}^{n} p(i) \right) \leq x(n_1) \ .$$

Επομένως, με βάση την ανισότητα αυτή, η σχέση (2.2.38) είναι αληθής.

Επίσης, επειδή όλες οι συνθήκες του Λήμματος Α.4 ισχύουν, είναι προφανές ότι, η συνθήκη (2.2.10) ισχύει για κάθε $\lambda > 4/c^2$.

Έστω Λ το σύνολο όλων των λ για τα οποία ισχύει η σχέση

$$\lim_{n\to\infty} x(\tau(n)) \exp\left(\lambda \sum_{i=1}^{\tau(n)-1} p(i) \right) = +\infty \tag{2.2.41}$$

και $\lambda_0 = \inf \Lambda$.

Με βάση τις σχέσεις (2.1.2), (2.2.10) και (2.2.38), είναι προφανές ότι $\lambda_0 \in [1, 4/c^2]$. Επομένως, αρκεί να δειχθεί ότι, για $\lambda = \lambda_0$ η ανισότητα (2.2.37) είναι αληθής.

Κατ' αρχήν, αποδεικνύεται ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει η σχέση

$$\lim_{n\to\infty} x(\tau(n)) \exp\left((\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{i=1}^{\tau(n)-1} p(i) \right) = +\infty . \tag{2.2.42}$$

Πράγματι,

- Εάν $\lambda_0 \in \Lambda$, τότε λόγω της (2.2.41), η συνθήκη (2.2.42) είναι αληθής.
- εάν $\lambda_0 \notin \Lambda$, τότε από τον ορισμό του λ_0, υπάρχει $\lambda_n > \lambda_0$ έτσι ώστε $\lambda_n \to \lambda_0$ όταν $n \to \infty$ και $\lambda_n \in \Lambda$, $n = 1, 2, \ldots$. Άρα, η συνθήκη (2.2.42) ισχύει για κάθε $\lambda = \lambda_n$. Όμως, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\lambda_n = \lambda_n(\varepsilon)$ έτσι ώστε $\lambda_0 < \lambda_n \le \lambda_0 + \varepsilon$. Αυτό συνεπάγεται την ισχύ των (2.2.41) και (2.2.42) για κάθε $\varepsilon > 0$.

Με παρόμοιο τρόπο, αποδεικνύεται ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει η σχέση

$$\liminf_{n\to\infty} x(\tau(n))\exp\left((\lambda_0 - \varepsilon) \sum_{i=1}^{\tau(n)-1} p(i) \right) = 0\,. \tag{2.2.43}$$

Έτσι, με βάση τις σχέσεις (2.1.2), (2.2.42) και (2.2.43) είναι φανερό ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$, οι συναρτήσεις

$$\varphi(n) = x(\tau(n)) \exp\left((\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{i=1}^{\tau(n)-1} p(i) \right) \tag{2.2.44}$$

και

$$\psi(n) = \exp\left(-2\varepsilon \sum_{i=1}^{n-1} p(i) \right) \tag{2.2.45}$$

ικανοποιούν τις συνθήκες του Λήμματος Α.6 για επαρκώς μεγάλες τιμές του n. Επομένως, υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $(n(i))_{i\ge 1}$ έτσι ώστε $\lim_{i\to\infty} n(i) = +\infty$, και

$$\psi(n(i))\,\tilde{\varphi}(n(i)) \le \psi(n)\ \tilde{\varphi}(n) \quad \text{για} \quad n^* \le n \le n(i) \tag{2.2.46}$$

$$\tilde{\varphi}(n(i)) = \varphi(n(i)) \quad (i = 1, 2, \ldots) \tag{2.2.47}$$

όπου n^* είναι ένας επαρκώς μεγάλος ακέραιος αριθμός.

Τώρα, δεδομένου ότι ισχύει η ανισότητα

$$x(\tau(i))\exp\left((\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{\ell=1}^{\tau(i)-1} p(\ell) \right) \ge \inf\left(x(\tau(s))\exp(\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{\ell=1}^{\tau(s)-1} p(\ell) : s \ge i, s \in N \right) = \tilde{\varphi}(i),$$

από την εξίσωση (2.1.1) συνεπάγεται ότι

$$x(\tau(n(j))) \ge \sum_{i=\tau(n(j))}^{+\infty} p(i)\, x(\tau(i)) \ge \sum_{i=\tau(n)}^{+\infty} p(i)\, \tilde{\varphi}(i) \exp\left(-(\lambda_0 + \varepsilon) \sum_{\ell=1}^{\tau(i)-1} p(\ell) \right)$$

δηλαδή,

$$x(\tau(n(j))) \geq \sum_{i=\tau(n(j))}^{n(j)-1} p(i)\,\tilde{\varphi}(i)\exp\left(-2\varepsilon\sum_{\ell=1}^{i-1} p(\ell)\right)\exp\left(2\varepsilon\sum_{\ell=1}^{i-1} p(\ell)\right)$$
$$\times\exp\left(-(\lambda_0+\varepsilon)\sum_{\ell=1}^{\tau(i)-1} p(\ell)\right)+\sum_{i=n(j)}^{+\infty} p(i)\,\tilde{\varphi}(i)\exp\left(-(\lambda_0+\varepsilon)\sum_{\ell=1}^{\tau(i)-1} p(\ell)\right),$$

για $j=1,2,\dots$. Επομένως, με βάση τη σχέση (2.2.46) και λαμβάνοντας υπόψη ότι, η συνάρτηση $\tilde{\varphi}$ είναι αύξουσα, η τελευταία ανισότητα δίνει

$$x(\tau(n(j))) \geq \tilde{\varphi}(n(j))\exp\left(-2\varepsilon\sum_{\ell=1}^{n(j)-1} p(\ell)\right)$$
$$\times\sum_{i=\tau(n(j))}^{n(j)-1} p(i)\exp\left(2\varepsilon\sum_{\ell=1}^{i-1} p(\ell)\right)\exp\left(-(\lambda_0+\varepsilon)\sum_{\ell=1}^{\tau(i)-1} p(\ell)\right)$$
$$+\tilde{\varphi}(n(j))\sum_{i=n(j)}^{+\infty} p(i)\,\exp\left(-(\lambda_0+\varepsilon)\sum_{\ell=1}^{\tau(i)-1} p(\ell)\right),\quad (j=1,2,\dots) \qquad (2.2.48)$$

Επίσης, βάσει του Λήμματος Α.5, ισχύει

$$I(n(j),\varepsilon)=\sum_{i=\tau(n(j))}^{n(j)-1} p(i)\,\exp\left(2\varepsilon\sum_{\ell=1}^{i-1} p(\ell)\right)\exp\left(-(\lambda_0+\varepsilon)\sum_{\ell=1}^{\tau(i)-1} p(\ell)\right)$$
$$=\exp\left(2\varepsilon\sum_{i=1}^{\tau(n(j))-1} p(i)\right)\sum_{i=\tau(n(j))}^{+\infty} p(i)\,\exp\left(-(\lambda_0+\varepsilon)\sum_{\ell=1}^{\tau(i)-1} p(\ell)\right)$$
$$-\exp\left(2\varepsilon\sum_{i=1}^{n(j)-1} p(i)\right)\sum_{i=n(j)}^{+\infty} p(i)\,\exp\left(-(\lambda_0+\varepsilon)\sum_{\ell=1}^{\tau(i)-1} p(\ell)\right)$$
$$+\sum_{i=n(j)}^{n(j)-1}\left(\exp\left(2\varepsilon\sum_{\ell=1}^{i} p(\ell)\right)-\exp\left(2\varepsilon\sum_{\ell=1}^{i-1} p(\ell)\right)\right)$$
$$\times\sum_{i=1}^{+\infty} p(i)\,\exp\left(-(\lambda_0+\varepsilon)\sum_{\ell=1}^{\tau(i)-1} p(\ell)\right)\quad (j=1,2,\dots). \qquad (2.2.49)$$

Επειδή όμως ισχύει η σχέση

$$\exp\left(2\varepsilon\sum_{\ell=1}^{i} p(\ell)\right) - \exp\left(2\varepsilon\sum_{\ell=1}^{i-1} p(\ell)\right) \geq 0\,,$$

από την ανισότητα (2.2.49) συνεπάγεται ότι

$$I(n(j),\varepsilon) \geq \exp\left(2\varepsilon\sum_{i=1}^{\tau(n(j))-1} p(i)\right)\sum_{i=\tau(n(j))}^{+\infty} p(i)\,\exp\left(-(\lambda_0+\varepsilon)\sum_{\ell=1}^{\tau(i)-1} p(\ell)\right)$$
$$-\exp\left(2\varepsilon\sum_{i=1}^{n(j)-1} p(i)\right)\sum_{i=n(j)}^{+\infty} p(i)\,\exp\left(-(\lambda_0+\varepsilon)\sum_{\ell=1}^{\tau(i)-1} p(\ell)\right).$$

Επομένως, από τη σχέση (2.2.48), προκύπτει

$$x(\tau(n(j))) \geq \tilde{\varphi}(n(j))\exp\left(-2\varepsilon\sum_{\ell=1}^{n(j)-1} p(\ell)\right)\exp\left(2\varepsilon\sum_{\ell=1}^{\tau(n(j))-1} p(\ell)\right)$$
$$\times\sum_{i=\tau(n(j))}^{+\infty} p(i)\,\exp\left(-(\lambda_0+\varepsilon)\sum_{\ell=1}^{\tau(i)-1} p(\ell)\right).$$

Έτσι, από τις σχέσεις (2.2.44) και (2.2.47), συνεπάγεται ότι

$$\exp\left((\lambda_0+\varepsilon)\sum_{i=1}^{\tau(n(j))-1} p(i)\right)\sum_{i=\tau(n(j))}^{+\infty} p(i)\,\exp\left(-(\lambda_0+\varepsilon)\sum_{\ell=1}^{\tau(i)-1} p(\ell)\right) \leq \exp\left(2\varepsilon\sum_{i=\tau(n(j))}^{n(j)-1} p(i)\right).$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι ισχύει η σχέση (2.2.34) και θέτοντας

$$\mathrm{M} = \limsup_{\mathrm{n}\to\infty}\sum_{\mathrm{i}=\tau(\mathrm{n})}^{\mathrm{n}-1}\mathrm{p(i)}\,,$$

η τελευταία ανισότητα δίνει

$$\limsup_{j\to\infty}\exp\left((\lambda_0+\varepsilon)\sum_{i=1}^{\tau(n(j))-1} p(i)\right)\sum_{i=\tau(n(j))}^{+\infty} p(i)\,\exp\left(-(\lambda_0+\varepsilon)\sum_{\ell=1}^{\tau(i)-1} p(\ell)\right) \leq \exp(2\varepsilon M) \tag{2.2.50}$$

Έτσι, για κάθε $\varepsilon > 0$, η σχέση (2.2.50) δίνει

$$\liminf_{n\to\infty} \exp\left((\lambda_0+\varepsilon)\sum_{i=1}^{n-1} p(i) \right) \sum_{i=n}^{+\infty} p(i)\ \exp\left(-(\lambda_0+\varepsilon)\sum_{\ell=1}^{\tau(i)-1} p(\ell) \right) \le \exp\left(2\varepsilon M\right),$$

η οποία οδηγεί στη συνθήκη

$$\limsup_{\varepsilon\to 0^+}\left[\liminf_{n\to\infty} \exp\left((\lambda_0+\varepsilon)\sum_{i=1}^{n-1} p(i) \right) \sum_{i=n}^{+\infty} p(i) \exp\left(-(\lambda_0+\varepsilon)\sum_{\ell=1}^{\tau(i)-1} p(\ell) \right) \right] \le 1.$$

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

Παρατήρηση: Η συνθήκη (2.2.36) δεν είναι περιοριστική, αφού έχει αποδειχθεί ότι, εάν η ακολουθία $(\tau(n))_{n\ge 0}$ είναι αύξουσα και ισχύει η συνθήκη

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n} p(i) > 1,$$

τότε $U_{n_0} = \varnothing$, για κάθε $n_0 \in \mathbf{N}$ (σχέση (2.2.2΄), Θεώρημα 2.2.Α΄).

Θεώρημα Β.2. *Έστω ότι όλες οι συνθήκες του Θεωρήματος* Β.1 *ισχύουν. Τότε*

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) \le \frac{1}{e}. \qquad (2.2.51)$$

Απόδειξη. Βάσει του Θεωρήματος Β.1, υπάρχει $\lambda = \lambda_0 \in [1, 4/c^2]$ έτσι ώστε να ισχύει η ανισότητα (2.2.37).

Έστω ότι η συνθήκη (2.2.51) δεν ισχύει. Τότε, υπάρχει $n_1 \in \mathbf{N}$ και $\varepsilon_0 > 0$ τέτοια ώστε

$$\sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) \ge \frac{1+\varepsilon_0}{e} \quad \text{για} \quad n \ge n_1.$$

Επομένως, για κάθε $\varepsilon > 0$ και $n \ge n_1$, προκύπτει

$$I(n,\varepsilon)=\exp\left((\lambda_0+\varepsilon)\sum_{i=1}^{n-1}p(i)\right)\sum_{i=n}^{+\infty}p(i)\ \exp\left(-(\lambda_0+\varepsilon)\sum_{\ell=1}^{\tau(i)-1}p(\ell)\right)$$

$$\geq \exp\left(\frac{(\lambda_0+\varepsilon)(1+\varepsilon_0)}{e}\right)\exp\left((\lambda_0+\varepsilon)\sum_{i=1}^{n-1}p(i)\right)$$

$$\times\sum_{i=n}^{+\infty}p(i)\ \exp\left(-(\lambda_0+\varepsilon)\sum_{\ell=1}^{\tau(i)-1}p(\ell)\right). \qquad (2.2.52)$$

Ορίζοντας ως $\sum_{\ell=1}^{i-1}p(\ell)=a_{i-1}$, θα δειχθεί ότι

$$\liminf_{n\to\infty}\exp\big((\lambda_0+\varepsilon)\,a_{n-1}\big)\sum_{i=n}^{+\infty}p(i)\ \exp\big(-(\lambda_0+\varepsilon)\,a_{i-1}\big)\geq\frac{1}{\lambda_0+\varepsilon}.$$

Πράγματι, επειδή

$$\liminf_{n\to\infty}\sum_{i=\tau(n)}^{n-1}p(i)=c>0,$$

είναι φανερό ότι, $\sum_{i=1}^{+\infty}p(i)=+\infty$, και ως εκ τούτου, $\lim_{i\to\infty}a_i=+\infty$. Επομένως,

$$\exp\big((\lambda_0+\varepsilon)\,a_{n-1}\big)\sum_{i=n}^{+\infty}p(i)\ \exp\big(-(\lambda_0+\varepsilon)\,a_{i-1}\big)$$

$$=\exp\big((\lambda_0+\varepsilon)\,a_{n-1}\big)\sum_{i=n}^{+\infty}(a_i-a_{i-1})\ \exp\big(-(\lambda_0+\varepsilon)\,a_{i-1}\big)$$

$$=\exp\big((\lambda_0+\varepsilon)\,a_{n-1}\big)\sum_{i=n}^{+\infty}\ \exp\big(-(\lambda_0+\varepsilon)\,a_{i-1}\big)\int_{a_{i-1}}^{a_i}ds$$

$$\geq\exp\big((\lambda_0+\varepsilon)\,a_{i-1}\big)\sum_{i=n}^{+\infty}\ \int_{a_{i-1}}^{a_i}\exp\big(-(\lambda_0+\varepsilon)\,s\ \big)ds$$

$$=\exp\big((\lambda_0+\varepsilon)\,a_{i-1}\big)\int_{a_{i-1}}^{+\infty}\exp\big(-(\lambda_0+\varepsilon)\,s\ \big)ds=\frac{1}{\lambda_0+\varepsilon}.$$

Άρα, από την (2.2.50), προκύπτει η σχέση

$$\limsup_{\varepsilon\to0^+}(\liminf_{n\to\infty}I(n,\varepsilon))\geq\frac{1}{\lambda_0}\cdot\exp\left(\frac{\lambda_0(1+\varepsilon_0)}{e}\right)\geq1+\varepsilon_0\,.$$

Η τελευταία ανισότητα οδηγεί σε άτοπο, διότι ισχύει η σχέση (2.2.37) για $\lambda=\lambda_0$. Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

Γ. Ικανές συνθήκες για την ταλάντωση των λύσεων της εξίσωσης (2.1.1)

Θεώρημα Γ.1. *Έστω* $(p(n))_{n\geq 0}$ *ακολουθία μη-αρνητικών πραγματικών αριθμών και* $(\tau(n))_{n\geq 0}$ *μια ακολουθία ακεραίων για την οποίαν ισχύει η* (2.1.2). *Εάν*

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) = c > 0 \quad \text{και} \quad \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) < +\infty \qquad (2.2.53)$$

και για κάθε $\lambda \in [1, 4/c^2]$ *ισχύει η συνθήκη*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0^+}\left[\liminf_{n\to\infty}\left(\exp\left((\lambda+\varepsilon)\sum_{i=1}^{n-1} p(i)\right)\sum_{i=n}^{+\infty} p(i)\exp\left(-(\lambda+\varepsilon)\sum_{\ell=1}^{\tau(i)-1} p(\ell)\right)\right)\right] > 1, \quad (2.2.54)$$

τότε όλες οι λύσεις της εξίσωσης (2.1.1) *είναι ταλαντούμενες.*

Απόδειξη. Έστω, ότι η εξίσωση (2.1.1) έχει μια θετική λύση $(x(n))_{n\geq n_0}$ και ως εκ τούτου $U_{n_0} \neq \varnothing$. Επομένως, βάσει του Θεωρήματος Β.1, υπάρχει $\lambda_0 \in [1, 4/c^2]$ έτσι ώστε η συνθήκη (2.2.37) να ισχύει για $\lambda = \lambda_0$. Αυτό, έρχεται σε αντίφαση με τη σχέση (2.2.54). Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία με εκείνη του Θεωρήματος Β.2, αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα Γ.2. *Έστω ότι ισχύει η σχέση* (2.1.2). *Εάν ισχύουν οι συνθήκες*

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) < +\infty \qquad (2.2.55)$$

και

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) > \frac{1}{e}, \tag{2.2.56}$$

τότε όλες οι λύσεις της εξίσωσης (2.1.1) *είναι ταλαντούμενες.*

Η συνθήκη (2.2.56) είναι το πλήρες διακριτό ανάλογο της συνθήκης (1.1.5) της εξίσωσης (1.1.3) και αποτελεί γενίκευση της συνθήκης (1.2.3) της εξίσωσης (1.1.1).

Παρατήρηση: Η συνθήκη (2.2.56) είναι βέλτιστη για την εξίσωση (2.1.1) με την προϋπόθεση ότι $\lim_{n\to\infty}(n-\tau(n)) = +\infty$, αφού στην περίπτωση αυτή το σύνολο των φυσικών αριθμών αυξάνεται απεριόριστα στο διάστημα $[\tau(n), n-1]$ για $n \to \infty$.

Δ. Παραδείγματα

Δίνονται δύο παραδείγματα με σκοπό να τονισθεί το γεγονός ότι η συνθήκη (2.2.56) είναι βέλτιστη, από την άποψη ότι, δεν μπορεί να αντικατασταθεί από τη σχέση

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) \geq \frac{1}{e}$$

και στη συνέχεια, ένα τρίτο παράδειγμα όπου εφαρμόζεται το Θεώρημα Γ.2.

Παράδειγμα Δ.1. Δίνεται η εξίσωση διαφορών

$$\Delta x(n) + p(n)x(\tau(n)) = 0, \quad n = 0,1,2,\cdots$$

όπου

$$\tau(n) = [\alpha n], \quad p(n) = (n^{-\lambda} - (n+1)^{-\lambda})[\alpha n]^{\lambda},$$
$$\alpha \in (0,1), \quad \lambda = -\ln^{-1}\alpha$$

και $[\alpha n]$ συμβολίζει το ακέραιο μέρος της αn.

Επειδή $[\alpha n] \le \alpha n$ και $\alpha \in (0,1)$, ισχύει $[\alpha n] \le \alpha n < n$. Δεδομένου ότι οι αριθμοί $[\alpha n]$ και n είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί, είναι προφανές ότι $[\alpha n] \le n-1$ και ως εκ τούτου

$$\tau(n) = [\alpha n] \le n-1.$$

Επίσης,

$$\lim_{n\to\infty} \tau(n) = \lim_{n\to\infty} [\alpha n] = +\infty .$$

Άρα, ισχύει η συνθήκη (2.1.2) για τη δοθείσα εξίσωση διαφορών.

Επιπρόσθετα,

$$\lim_{n\to\infty}\left[n^{1+\lambda}(n^{-\lambda} - (n+1)^{-\lambda})\right] = \lim_{n\to\infty}\left[n\left(1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\lambda}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{\lambda}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left[\lambda\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\lambda-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2}\right] = \lambda$$

Επειδή

$$\frac{(\alpha n)^{\lambda}-1}{n^{\lambda}} < \frac{[\alpha n]^{\lambda}}{n^{\lambda}} \le \frac{(\alpha n)^{\lambda}}{n^{\lambda}} = \alpha^{\lambda} = \alpha^{-\ln^{-1}\alpha} = \frac{1}{e}$$

και

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(\alpha n)^{\lambda}-1}{n^{\lambda}}\right) = \alpha^{\lambda} = \alpha^{-\ln^{-1}\alpha} = \frac{1}{e},$$

είναι προφανές ότι $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{[\alpha n]^{\lambda}}{n^{\lambda}}\right) = \dfrac{1}{e}$.

Άρα

$$\lim_{n\to\infty}\left[n(n^{-\lambda} - (n+1)^{-\lambda})[\alpha n]^{\lambda^{\lambda}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[n^{1+\lambda}(n^{-\lambda} - (n+1)^{-\lambda})\right]\lim_{n\to\infty}\left(\frac{[\alpha n]^{\lambda}}{n^{\lambda}}\right)$$

$$= \lambda\cdot\frac{1}{e} = \frac{\lambda}{e}$$

Με βάση τα ανωτέρω, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\sum_{i=\tau(n)}^{n-1}p(i) &= \liminf_{n\to\infty}\sum_{i=[\alpha n]}^{n-1}(i^{-\lambda}-(i+1)^{-\lambda})[\alpha i]^{\lambda}\\ &= \liminf_{n\to\infty}\sum_{i=[\alpha n]}^{n-1} i\,(i^{-\lambda}-(i+1)^{-\lambda})[\alpha i]^{\lambda}\,\frac{1}{i}\\ &= \liminf_{n\to\infty}\sum_{i=[\alpha n]}^{n-1} i\,(i^{-\lambda}-(i+1)^{-\lambda})[\alpha i]^{\lambda}\cdot\liminf_{n\to\infty}\sum_{i=[\alpha n]}^{n-1}\frac{1}{i}\\ &= \frac{\lambda}{e}\cdot\liminf_{n\to\infty}\sum_{i=[\alpha n]}^{n-1}\frac{1}{i}.\end{aligned}$$

Επειδή, για μια φθίνουσα θετική συνάρτηση $f(x)$ ισχύει πάντα η ανισότητα

$$\int_{b-1}^{b} f(x)\,dx \geq f(b) \geq \int_{b}^{b+1} f(x)\,dx$$

και δεδομένου ότι η συνάρτηση $1/i$ είναι φθίνουσα και θετική, προκύπτουν τα εξής:

$$\sum_{i=[\alpha n]}^{n-1}\frac{1}{i} \geq \sum_{i=[\alpha n]}^{n-1}\int_{i}^{i+1}\frac{ds}{s} = \int_{[\alpha n]}^{n}\frac{ds}{s} = \ln\frac{n}{[\alpha n]} \to \ln\frac{1}{\alpha} \quad \text{για } n\to\infty$$

και

$$\sum_{i=[\alpha n]}^{n-1}\frac{1}{i} \leq \sum_{i=[\alpha n]}^{n-1}\int_{i-1}^{i}\frac{ds}{s} = \int_{[\alpha n]-1}^{n-1}\frac{ds}{s} = \ln\frac{n-1}{[\alpha n]-1} \to \ln\frac{1}{\alpha} \quad \text{για } n\to\infty\,.$$

Άρα,

$$\liminf_{n\to\infty}\sum_{i=\tau(n)}^{n-1}p(i) = \frac{\lambda}{e}\cdot\liminf_{n\to\infty}\sum_{i=[\alpha n]}^{n-1}\frac{1}{i} = \frac{\lambda}{e}\cdot\ln\frac{1}{\alpha} = \frac{\lambda}{e}\cdot\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{e}\,.$$

Συμπερασματικά, οι συνθήκες του Θεωρήματος Γ.2 ισχύουν, εκτός από τη συνθήκη (2.2.56). Επομένως, σ' αυτήν την περίπτωση δε διασφαλίζεται η ταλάντωση όλων των λύσεων της δοθείσης εξίσωσης διαφορών. Πράγματι, εύκολα διαπιστώνεται ότι η ακολουθία $x(n) = n^{-\lambda}$ είναι μια θετική λύση αυτής.

Παράδειγμα Δ.2. Δίνεται η εξίσωση διαφορών

$$\Delta x(n) + p(n)x(\tau(n)) = 0, \quad n = 2, 3, \cdots$$

όπου

$$\tau(n) = [n^{\alpha}], \ \ p(n) = (\ln^{-\lambda} n - \ln^{-\lambda}(n+1)) \ln^{\lambda}[n^{\alpha}],$$

$\alpha \in (0,1)$, $\lambda = -\ln^{-1}\alpha$ και $[n^{\alpha}]$ συμβολίζει το ακέραιο μέρος της n^{α}.

Επειδή $[n^{\alpha}] \leq n^{\alpha}$ και $\alpha \in (0,1)$, ισχύει $[n^{\alpha}] \leq n^{\alpha} < n$. Δεδομένου ότι οι αριθμοί $[n^{\alpha}]$ και n είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί, είναι προφανές ότι $[n^{\alpha}] \leq n-1$ και ως εκ τούτου

$$\tau(n) = [n^{\alpha}] \leq n-1.$$

Επίσης,

$$\lim_{n\to\infty} \tau(n) = \lim_{n\to\infty} [n^{\alpha}] = +\infty .$$

Άρα, ισχύει η συνθήκη (2.1.2) για τη δοθείσα εξίσωση διαφορών.

Επιπρόσθετα,

$$\lim_{n\to\infty} [n \ln^{1+\lambda} n (\ln^{-\lambda} n - \ln^{-\lambda}(n+1))] = \lim_{n\to\infty} \left(n \ln n \left(1 - \left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)} \right)^{\lambda} \right) \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(\dfrac{\ln n}{\ln(n+1)} \right)^{\lambda}}{\dfrac{1}{n \ln n}}.$$

Έστω η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{1 - \left(\dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}\right)^{\lambda}}{\dfrac{1}{x \ln x}} \quad \text{ορισμένη στο διάστημα } (1, +\infty) .$$

Τότε, υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \left(\dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}\right)^{\lambda}}{\dfrac{1}{x \ln x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln^{\lambda}(x+1) - \ln^{\lambda} x)\, x \ln x}{\ln^{\lambda}(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{\lambda}{\xi} \ln^{\lambda-1} \xi \cdot x \ln x}{\ln^{\lambda}(x+1)} = \lambda \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{\ln^{\lambda-1} \xi}{\xi} \cdot x \ln x}{\ln^{\lambda}(x+1)} .$$

Αλλά,

$$\frac{\dfrac{\ln^{\lambda-1} \xi}{\xi} \cdot x \ln x}{\ln^{\lambda}(x+1)} < \frac{\dfrac{\ln^{\lambda-1} x}{x} \cdot x \ln(x+1)}{\ln^{\lambda}(x+1)} = \left(\frac{\ln x}{\ln(x+1)}\right)^{\lambda-1} \to 1 \quad \text{για } x \to +\infty$$

$$\frac{\dfrac{\ln^{\lambda-1} \xi}{\xi} \cdot x \ln x}{\ln^{\lambda}(x+1)} > \frac{\dfrac{\ln^{\lambda-1}(x+1)}{x+1} \cdot x \ln x}{\ln^{\lambda}(x+1)} = \frac{\ln x}{\ln(x+1)} \cdot \frac{x}{x+1} \to 1 \quad \text{για } x \to +\infty ,$$

δηλαδή $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lambda \cdot 1 = \lambda$, και ως εκ τούτου $\lim_{n\to\infty} g(n) = \lambda$, ή ισοδύναμα

$$\lim_{n\to\infty} [n \ln^{1+\lambda} n \,(\ln^{-\lambda} n - \ln^{-\lambda}(n+1))] = \lambda .$$

Επειδή για $n \to \infty$ ισχύουν

$$\frac{\ln n \cdot \ln^{\lambda}[n^{\alpha}]}{\ln^{1+\lambda} n} \le \frac{\ln n \cdot \ln^{\lambda}(n^{\alpha})}{\ln^{1+\lambda} n} = \left(\frac{\ln(n^{\alpha})}{\ln n}\right)^{\lambda} \to \alpha^{\lambda} = \frac{1}{e}$$

και

$$\frac{\ln n\cdot \ln^{\lambda}[n^{\alpha}]}{\ln^{1+\lambda} n}>\frac{\ln n\cdot \ln^{\lambda}(n^{\alpha}-1)}{\ln^{1+\lambda} n}=\left(\frac{\ln(n^{\alpha}-1)}{\ln n}\right)^{\lambda}\to \alpha^{\lambda}=\frac{1}{e},$$

προκύπτει ότι

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln n\cdot \ln^{\lambda}[n^{\alpha}]}{\ln^{1+\lambda} n}\right)=\frac{1}{e}.$$

Άρα

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}[n\ln n\ln^{\lambda}[n^{\alpha}](\ln^{-\lambda} n-\ln^{-\lambda}(n+1))]\\ &=\lim_{n\to\infty}[n\ln^{1+\lambda} n(\ln^{-\lambda} n-\ln^{-\lambda}(n+1))]\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln n\cdot \ln^{\lambda}[n^{\alpha}]}{\ln^{1+\lambda} n}\right)=\lambda\cdot\frac{1}{e}=\frac{\lambda}{e}.\end{aligned}$$

Με βάση τα ανωτέρω, έχουμε

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\sum_{i=\tau(n)}^{n-1}p(i)&=\liminf_{n\to\infty}\sum_{i=[n^{\alpha}]}^{n-1}(\ln^{-\lambda} i-\ln^{-\lambda}(i+1))\ \ln^{\lambda}[i^{\alpha}]\\ &=\liminf_{n\to\infty}\sum_{i=[\alpha n]}^{n-1} i\ln i(\ln^{-\lambda} i-\ln^{-\lambda}(i+1))\ \ln^{\lambda}[i^{\alpha}]\ \frac{1}{i\ln i}\\ &=\liminf_{n\to\infty}\sum_{i=[n^{\alpha}]}^{n-1} i\ln i(\ln^{-\lambda} i-\ln^{-\lambda}(i+1))\ \ln^{\lambda}[i^{\alpha}]\cdot\liminf_{n\to\infty}\sum_{i=[n^{\alpha}]}^{n-1}\frac{1}{i\ln i}\\ &=\frac{\lambda}{e}\cdot\liminf_{n\to\infty}\sum_{i=[n^{\alpha}]}^{n-1}\frac{1}{i\ln i}.\end{aligned}$$

Αλλά,

$$\sum_{i=[n^{\alpha}]}^{n-1}\frac{1}{i\ln i}\le\sum_{i=[n^{\alpha}]}^{n-1}\int_{i-1}^{i}\frac{ds}{s\ln s}=\int_{[n^{\alpha}]-1}^{n-1}\frac{ds}{s\ln s}=\ln\frac{\ln(n-1)}{\ln[n^{\alpha}]-1}\to\ln\frac{1}{\alpha}\quad \text{για}\quad n\to\infty$$

$$\sum_{i=[n^{\alpha}]}^{n-1}\frac{1}{i\ln i}\ge\sum_{i=[n^{\alpha}]}^{n-1}\int_{i}^{i+1}\frac{ds}{s\ln s}=\int_{[n^{\alpha}]}^{n}\frac{ds}{s\ln s}=\ln\frac{\ln n}{\ln[n^{\alpha}]}\to\ln\frac{1}{\alpha}\quad \text{για}\quad n\to\infty.$$

Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=[n^{\alpha}]}^{n-1}\frac{1}{i\ln i}=\ln\frac{1}{\alpha}$$

και ως εκ τούτου

$$\liminf_{n\to\infty}\sum_{i=\tau(n)}^{n-1}p(i)=\frac{\lambda}{e}\cdot\liminf_{n\to\infty}\sum_{i=[n^{\alpha}]}^{n-1}\frac{1}{i\ln i}=\frac{\lambda}{e}\cdot\ln\frac{1}{\alpha}=\frac{\lambda}{e}\cdot\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{e}.$$

Διαπιστώνεται και πάλι ότι, οι συνθήκες του Θεωρήματος Γ.2 ισχύουν, εκτός από τη συνθήκη (2.2.56). Επομένως, σ' αυτήν την περίπτωση δε διασφαλίζεται η ταλάντωση όλων των λύσεων της δοθείσης εξίσωσης διαφορών. Πράγματι, εύκολα διαπιστώνεται ότι η ακολουθία $x(n)=\ln^{-\lambda}n$ είναι μια θετική λύση αυτής.

Παράδειγμα Δ.3. Δίνεται η εξίσωση διαφορών

$$\Delta x(n)+p(n)x(\tau(n))=0\,,\quad n\geq 0$$

με

$$p(n)=\frac{5/e}{3n+2},\qquad \tau(n)=\left[\frac{n^2}{2n+2}\right]-1,$$

όπου $\left[\frac{n^2}{2n+2}\right]$ είναι το ακέραιο μέρος του $\frac{n^2}{2n+2}$.

Είναι προφανές ότι $(p(n))_{n\geq 0}$ είναι ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών, $\tau(n)\leq n-1$ για κάθε $n\geq 0$ και $\lim_{n\to\infty}\tau(n)=+\infty$. Επίσης, ισχύει $\lim_{n\to\infty}(n-\tau(n))=+\infty$. Πράγματι,

$$\left[\frac{n^2}{2n+2}\right]\leq\frac{n^2}{2n+2}<\frac{n^2}{2n}=\frac{n}{2}.$$

Επομένως,

$$1-\frac{n}{2}<1-\left[\frac{n^2}{2n+2}\right]=-\tau(n),$$

ή, ισοδύναμα

$$1+\frac{n}{2}<n-\tau(n).$$

Από την τελευταία ανισότητα, είναι προφανές ότι $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\tau(n))=+\infty$.

Τώρα, για επαρκώς μεγάλες τιμές του n, ισχύουν οι ανισότητες

$$\begin{aligned}\sum_{i=\tau(n)}^{n-1}p(i)&=\sum_{i=\tau(n)}^{n-1}\frac{5/e}{3i+2}\geq\frac{5}{e}\sum_{i=\tau(n)}^{n-1}\int_i^{i+1}\frac{ds}{3s+2}\\&=\frac{5}{e}\int_{\tau(n)}^{n}\frac{ds}{3s+2}=\frac{5}{3e}\ln\frac{3n+2}{3\tau(n)+2}\\&=\frac{5}{3e}\ln\frac{3n+2}{3\left(\left[\frac{n^2}{2n+2}\right]-1\right)+2}=\frac{5}{3e}\ln\frac{3n+2}{3\left[\frac{n^2}{2n+2}\right]-1}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\sum_{i=\tau(n)}^{n-1}p(i)&=\sum_{i=\tau(n)}^{n-1}\frac{5/e}{3i+2}\leq\frac{5}{e}\sum_{i=\tau(n)}^{n-1}\int_{i-1}^{i}\frac{ds}{3s+2}\\&=\frac{5}{e}\int_{\tau(n)-1}^{n-1}\frac{ds}{3s+2}=\frac{5}{3e}\ln\frac{3(n-1)+2}{3(\tau(n)-1)+2}\\&=\frac{5}{3e}\ln\frac{3n-1}{3\left(\left[\frac{n^2}{2n+2}\right]-1-1\right)+2}=\frac{5}{3e}\ln\frac{3n-1}{3\left[\frac{n^2}{2n+2}\right]-4}\end{aligned}$$

Αλλά,

$$\frac{3n+2}{3\left[\frac{n^2}{2n+2}\right]-1}\geq\frac{3n+2}{3\frac{n^2}{2n+2}-1}=\frac{(3n+2)(2n+2)}{3n^2-2n-2}\to 2\quad\text{για } n\to\infty$$

$$\frac{3n+2}{3\left[\frac{n^2}{2n+2}\right]-1}<\frac{3n+2}{3\left(\frac{n^2}{2n+2}-1\right)-1}=\frac{(3n+2)(2n+2)}{3n^2-8n-8}\to 2\quad\text{για } n\to\infty$$

$$\frac{3n-1}{3\left[\frac{n^2}{2n+2}\right]-4} \geq \frac{3n-1}{3\frac{n^2}{2n+2}-4} = \frac{(3n-1)(2n+2)}{3n^2-8n-8} \to 2 \quad \text{για } n \to \infty$$

$$\frac{3n-1}{3\left[\frac{n^2}{2n+2}\right]-4} < \frac{3n-1}{3\left(\frac{n^2}{2n+2}-1\right)-4} = \frac{(3n-1)(2n+2)}{3n^2-14n-14} \to 2 \quad \text{για } n \to \infty \,.$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{3e}\ln\frac{3n+2}{3\left[\frac{n^2}{2n+2}\right]-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{3e}\ln\frac{3n-1}{3\left[\frac{n^2}{2n+2}\right]-4}\right) = \frac{5\ln 2}{3e}\,.$$

Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) = \frac{5\ln 2}{3e}$$

και ως εκ τούτου $\liminf\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) = \frac{5\ln 2}{3e} > \frac{1}{e}$.

Άρα ισχύει η συνθήκη (2.2.56) του Θεωρήματος Γ.2 και γιαυτό όλες οι λύσεις της εξίσωσης διαφορών είναι ταλαντούμενες.

2.3. Συνθήκες ταλάντωσης των λύσεων της εξίσωσης (2.1.1) όταν δεν ισχύουν οι συνθήκες ταλάντωσης της Παραγράφου 2.2.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον, παρουσιάζει η αναζήτηση ικανών συνθηκών ταλάντωσης των λύσεων της εξίσωσης (2.1.1) στην περίπτωση κατά την οποίαν, καμία από τις συνθήκες (2.2.2) ή (2.2.2΄) και (2.2.56) δεν ισχύει. Με το σκεπτικό αυτό, αποδεικνύεται κατ' αρχήν ένα λήμμα και με βάση αυτό και το Λήμμα Α.3, αποδεικνύονται δύο θεωρήματα, στα οποία δίδονται ικανές συνθήκες ταλάντωσης των λύσεων της εξίσωσης (2.1.1).

Λήμμα 2.3.Α. *Έστω ότι ισχύει η σχέση* (2.1.2) *για την εξίσωση* (2.1.1), *η ακολουθία* $(\tau(n))_{n\geq 0}$ *είναι αύξουσα,* x *μια θετική λύση αυτής και*

$$\alpha := \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) . \tag{2.3.1}$$

i) *Εάν* $\alpha \in (0,1]$ *τότε ισχύει η σχέση*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x(n+1)}{x(\tau(n))} \geq (1-\sqrt{1-\alpha})^2 . \tag{2.3.2}$$

ii) *Εάν* $\alpha \in (0,1)$ *και* $p(n) \geq 1-\sqrt{1-\alpha}$ *για όλα τα μεγάλα* n, *τότε ισχύει η σχέση*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x(n+1)}{x(\tau(n))} \geq \alpha \frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1-\alpha}} . \tag{2.3.3}$$

Απόδειξη. Από τη σχέση (2.3.1) είναι φανερό ότι, για κάθε $\varepsilon \in (0,\alpha)$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N}$, έτσι ώστε

$$\sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) \geq \alpha - \varepsilon \qquad \text{για } n \geq n_0 . \tag{2.3.4}$$

Επειδή η $(x(n))$ είναι μία θετική λύση της (2.1.1), υπάρχει $n_1 \geq n_0$ τέτοιο ώστε

$$x(\tau(n)) > 0 \quad \text{για} \quad n \geq n_1 .$$

Έτσι, από την εξίσωση (2.1.1), προκύπτει

$$\Delta x(n) = -p(n)x(\tau(n)) \leq 0$$

και ως εκ τούτου η ακολουθία $(x(n))_{n\geq n_1}$ είναι φθίνουσα.

Περαιτέρω, ας θεωρήσουμε έναν αυθαίρετο πραγματικό αριθμό ω με $0 < \omega < \alpha - \varepsilon$. Θα αποδείξουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό (βλ. και σελ. 13).

Ισχυρισμός. *Για κάθε* $n \geq n_1$, *υπάρχει ένας ακέραιος* $n^* \geq n$ *τέτοιος ώστε* $\tau(n^*) \leq n-1$, *και*

$$\sum_{i=n}^{n^*} p(i) \geq \omega\,, \tag{2.3.5}$$

$$\sum_{i=\tau(n^*)}^{n-1} p(i) > (\alpha - \varepsilon) - \omega\,. \tag{2.3.6}$$

Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό αυτόν, ας θεωρήσουμε έναν αυθαίρετο ακέραιο $n \geq n_1$. Υποθέτουμε, πρώτα, ότι $p(n) \geq \omega$, και επιλέγουμε $n^* = n$. Τότε $\tau(n^*) = \tau(n) \leq n-1$. Επιπλέον, έχουμε

$$\sum_{i=n}^{n^*} p(i) = \sum_{i=n}^{n} p(i) = p(n) \geq \omega$$

και, από τη (2.3.4),

$$\sum_{i=\tau(n^*)}^{n-1} p(i) = \sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) \geq \alpha - \varepsilon > (\alpha - \varepsilon) - \omega\,.$$

Έτσι, οι (2.3.5) και (2.3.6) ικανοποιούνται. Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι $p(n) < \omega$. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η (2.3.4) εγγυάται ότι

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = \infty\,.$$

Ειδικότερα, ισχύει

$$\sum_{i=n}^{\infty} p(i) = \infty\,.$$

Επομένως, καθώς $p(n) < \omega$, υπάρχει ένας ακέραιος $n^* > n$ έτσι ώστε

$$\sum_{i=n}^{n^*-1} p(i) < \omega \tag{2.3.7}$$

και η (2.3.5) να ισχύει. Ισχυριζόμαστε ότι $\tau(n^*) \le n-1$. Αλλιώς, $\tau(n^*) \ge n$. Έχουμε επίσης $\tau(n^*) \le n-1$. Άρα, από τη (2.3.7), λαμβάνουμε

$$\sum_{i=\tau(n^*)}^{n^*-1} p(i) \le \sum_{i=n}^{n^*-1} p(i) < \omega .$$

Από την άλλη πλευρά, η (2.3.4) δίνει

$$\sum_{i=\tau(n^*)}^{n^*-1} p(i) \ge \alpha - \varepsilon > \omega .$$

Έχουμε φτάσει σε μία αντίφαση, η οποία αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας.

Περαιτέρω, αθροίζοντας κατά μέλη τις σχέσεις που προκύπτουν με εφαρμογή της εξίσωσης (2.1.1) από n έως n^* και δεδομένου ότι, η ακολουθία $(\tau(n))_{n\ge 0}$ είναι αύξουσα και η ακολουθία $(x(n))_{n\ge n_1}$ είναι φθίνουσα, προκύπτει

$$x(n) - x(n^*+1) = \sum_{i=n}^{n^*} p(i)\, x(\tau(i)) \ge \left(\sum_{i=n}^{n^*} p(i) \right) x(\tau(n^*)) \ge \omega\, x(\tau(n^*)) ,$$

οπότε

$$x(n) \ge x(n^*+1) + \omega\, x(\tau(n^*)) . \tag{2.3.8}$$

Τώρα, αθροίζοντας από $\tau(n^*)$ έως $n-1$ και δεδομένου ότι, η ακολουθία $(\tau(n))_{n\ge 0}$ είναι αύξουσα και η ακολουθία $(x(n))_{n\ge n_1}$ είναι φθίνουσα, προκύπτει

$$\begin{aligned} x(\tau(n^*)) - x(n) = \sum_{i=\tau(n^*)}^{n-1} p(i)\, x(\tau(i)) &\ge \left(\sum_{i=\tau(n^*)}^{n-1} p(i) \right) x(\tau(n-1)) , \\ &\ge [(\alpha-\varepsilon) - \omega]\, x(\tau(n-1)) \end{aligned}$$

οπότε

$$x(\tau(n^*)) \ge x(n) + [(\alpha-\varepsilon) - \omega]\, x(\tau(n-1)) . \tag{2.3.9}$$

Με συνδυασμό των σχέσεων (2.3.8) και (2.3.9), λαμβάνουμε

$$x(n) \geq x(n^* + 1) + \omega[x(n) + ((\alpha - \varepsilon) - \omega)\, x(\tau(n-1))]$$

ή

$$x(n) \geq \frac{\omega[(\alpha - \varepsilon) - \omega]}{1 - \omega} x(\tau(n-1)) . \qquad (2.3.10)$$

Ορίζοντας τη συνάρτηση $g : (0, \alpha - \varepsilon) \mapsto (0,1)$ με τύπο

$$g(\omega) = \frac{\omega[(\alpha - \varepsilon) - \omega]}{1 - \omega} \qquad (2.3.11)$$

αποδεικνύεται ότι, στο σημείο $\omega = 1 - \sqrt{1 - (\alpha - \varepsilon)}$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο, με τιμή

$$g_{\max} = (1 - \sqrt{1 - (\alpha - \varepsilon)})^2 .$$

Επομένως, για $\omega = 1 - \sqrt{1 - (\alpha - \varepsilon)} \in (0, \alpha - \varepsilon)$ η ανισότητα (2.3.10) δίνει

$$x(n) \geq (1 - \sqrt{1 - (\alpha - \varepsilon)})^2\, x(\tau(n-1)) ,$$

οπότε

$$\frac{x(n)}{x(\tau(n-1))} \geq (1 - \sqrt{1 - (\alpha - \varepsilon)})^2 \qquad (2.3.12)$$

και για μεγάλες τιμές του n, η ανωτέρω ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$\frac{x(n+1)}{x(\tau(n))} \geq (1 - \sqrt{1 - (\alpha - \varepsilon)})^2$$

και ως εκ τούτου

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{x(n+1)}{x(\tau(n))} \geq (1 - \sqrt{1 - (\alpha - \varepsilon)})^2 .$$

Η ανισότητα ισχύει για κάθε $\varepsilon \in (0, \alpha)$, επομένως για $\varepsilon \to 0$ προκύπτει η συνθήκη

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x(n+1)}{x(\tau(n))} \ge (1-\sqrt{1-\alpha})^2, \quad \alpha \in (0,1].$$

Η απόδειξη του μέρους i) του λήμματος έχει ολοκληρωθεί.

Έστω τώρα, ότι $p(n) \ge 1-\sqrt{1-\alpha}$ για όλες τις μεγάλες τιμές του n και $\alpha \in (0,1)$.

Στην περίπτωση αυτή, η εξίσωση (2.1.1) δίνει

$$x(n) = x(n+1) + p(n)\, x(\tau(n)) \ge (1-\sqrt{1-\alpha})\, x(\tau(n)). \qquad (2.3.13)$$

Αθροίζοντας κατά μέλη τις σχέσεις που προκύπτουν με εφαρμογή της εξίσωσης (2.1.1) από $\tau(n)$ έως $n-1$ και δεδομένου ότι, η ακολουθία $(\tau(n))_{n\ge 0}$ είναι αύξουσα και η ακολουθία $(x(n))_{n\ge n_1}$ είναι φθίνουσα, προκύπτει

$$x(\tau(n)) - x(n) = \sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i)\, x(\tau(i)) \ge \left(\sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) \right) x(\tau(n-1)) \ge (\alpha-\varepsilon)\, x(\tau(n-1)),$$

οπότε

$$x(\tau(n)) \ge x(n) + (\alpha-\varepsilon)\, x(\tau(n-1)). \qquad (2.3.14)$$

Με συνδυασμό των ανισοτήτων (2.3.13) και (2.3.14), προκύπτει

$$x(n) \ge (1-\sqrt{1-\alpha})[x(n) + (\alpha-\varepsilon)\, x(\tau(n-1))],$$

οπότε

$$\frac{x(n)}{x(\tau(n-1)} \ge (\alpha-\varepsilon)\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1-\alpha}}.$$

Για μεγάλες τιμές του n, η ανωτέρω ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$\frac{x(n+1)}{x(\tau(n))} \geq (\alpha-\varepsilon)\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1-\alpha}}$$

και ως εκ τούτου

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{x(n+1)}{x(\tau(n))} \geq (\alpha-\varepsilon)\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1-\alpha}}.$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει για κάθε $\varepsilon \in (0,\alpha)$, επομένως για $\varepsilon \to 0$ προκύπτει η συνθήκη

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{x(n+1)}{x(\tau(n))} \geq \alpha\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1-\alpha}}, \quad \alpha \in (0,1).$$

Η απόδειξη του μέρους ii) του λήμματος έχει ολοκληρωθεί. Η απόδειξη του λήμματος είναι πλήρης.

Θεώρημα 2.3.Β. *Έστω ότι για την εξίσωση* (2.1.1) *ισχύει η σχέση* (2.1.2) *και*

$$\alpha := \liminf_{n\to\infty}\sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) \tag{2.3.1}$$

και $(\sigma(n))_{n\geq 0}$ *ακολουθία ακεραίων οριζόμενη από τη σχέση*

$$\sigma(n) = \max_{0\leq s\leq n}\tau(s) \quad \text{για } n \geq 0. \tag{2.2.1}$$

I) *Εάν* $\alpha \in (0,1]$ *και ισχύει η συνθήκη*

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=\sigma(n)}^{n} p(i) > 1-(1-\sqrt{1-\alpha})^2 \tag{2.3.15}$$

τότε όλες οι λύσεις της εξίσωσης (2.1.1) *είναι ταλαντούμενες.*

II) *Εάν* $\alpha \in (0,1)$, $p(n) \geq 1-\sqrt{1-\alpha}$ *για όλα τα μεγάλα* n *και ισχύει η συνθήκη*

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=\sigma(n)}^{n} p(i) > 1-\alpha\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1-\alpha}} \tag{2.3.16}$$

τότε όλες οι λύσεις της εξίσωσης (2.1.1) *είναι ταλαντούμενες.*

Απόδειξη. Κατ' αρχήν, θα δειχθεί ότι

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=\sigma(n)}^{n-1} p(i) = \alpha . \tag{2.3.17}$$

Πράγματι, επειδή $\tau(n) \le \sigma(n)$, από τη σχέση (2.3.1) προκύπτει

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=\sigma(n)}^{n-1} p(i) \le \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) = \alpha . \tag{2.3.18}$$

Επομένως, υπάρχει μια υπακολουθία φυσικών αριθμών $(n(i))_{i\ge1}$ τέτοια ώστε

$$\lim_{i\to\infty} n(i) = +\infty$$

και

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=\sigma(n)}^{n-1} p(i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=\sigma(n(i))}^{n(i)-1} p(j) . \tag{2.3.19}$$

Επίσης, από τον ορισμό της ακολουθίας $(\sigma(n))$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\lim_{n\to\infty} \tau(n) = +\infty \quad \text{για κάθε } n(i) \quad (i = 1, 2, \cdots),$$

υπάρχει $n'(i) \le n(i)$ έτσι ώστε $\sigma(n) = \sigma(n(i))$ επειδή $n'(i) \le n \le n(i)$, $\lim_{i\to\infty} n'(i) = +\infty$, και $\sigma(n'(i)) = \tau(n'(i))$ $(i = 1, 2, \cdots)$. Επομένως, ισχύει η (2.2.29).

Με συνδυασμό των (2.2.29) και (2.3.19), προκύπτει

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=\sigma(n)}^{n-1} p(i) \ge \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) = \alpha . \tag{2.3.20}$$

Έτσι, από τις (2.3.18) και (2.3.20) είναι φανερό ότι η σχέση (2.3.17) είναι αληθής.

Έστω τώρα ότι, η $(x(n))$ είναι μια θετική λύση της εξίσωσης (2.1.1). Τότε, για επαρκώς μεγάλες τιμές του n, η ακολουθία $(x(n))$ είναι θετική λύση της ανισότητας

$$\Delta x(n) + p(n)\, x(\sigma(n)) \le 0 .$$

Με βάση το Λήμμα Α.3, η εξίσωση

$$\Delta x(n) + p(n)\, x(\sigma(n)) = 0 \tag{2.3.21}$$

έχει μια θετική λύση $(x_*(n))_{n \ge n_0}$, όπου $n_0 \in \mathbf{N}$ και είναι επαρκώς μεγάλο.

Έτσι, εάν $\alpha \in (0,1]$, δεδομένης της (2.3.17), η ανισότητα (2.3.2) γίνεται

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{x_*(n+1)}{x_*(\sigma(n))} \ge (1 - \sqrt{1-\alpha})^2 \ . \tag{2.3.22}$$

Επομένως, για κάθε $\varepsilon \in (0, (1-\sqrt{1-\alpha})^2)$ και για επαρκώς μεγάλα n, ισχύει η σχέση

$$x_*(n+1) \ge ((1-\sqrt{1-\alpha})^2 - \varepsilon)\, x_*(\sigma(n)) . \tag{2.3.23}$$

Αθροίζοντας κατά μέλη τις σχέσεις που προκύπτουν με εφαρμογή της εξίσωσης (2.3.21) από $\sigma(n)$ έως n και δεδομένου ότι, η ακολουθία $(\sigma(n))_{n \ge 0}$ είναι αύξουσα και η ακολουθία $(x_*(n))$ είναι φθίνουσα, προκύπτει

$$x_*(\sigma(n)) \ge x_*(n+1) + \left(\sum_{i=\sigma(n)}^{n} p(i) \right) x_*(\sigma(n)) . \tag{2.3.24}$$

Συνδυάζοντας τις ανισότητες (2.3.23) και (2.3.24), προκύπτει

$$x_*(\sigma(n)) \ge \left((1-\sqrt{1-\alpha})^2 - \varepsilon + \sum_{i=\sigma(n)}^{n} p(i) \right) x_*(\sigma(n)) .$$

Άρα

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=\sigma(n)}^{n} p(i) \le 1-(1-\sqrt{1-\alpha})^2 + \varepsilon$$

και για $\varepsilon \to 0$ προκύπτει η ανισότητα

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=\sigma(n)}^{n} p(i) \le 1-(1-\sqrt{1-\alpha})^2 ,$$

που είναι σε αντίφαση με τη (2.3.15). Άρα, όλες οι λύσεις είναι ταλαντούμενες. Η απόδειξη του μέρους Ι) του θεωρήματος έχει ολοκληρωθεί.

Έστω τώρα ότι $p(n) \ge 1-\sqrt{1-\alpha}$ για όλες τις μεγάλες τιμές του n και $\alpha \in (0,1)$. Δεδομένης της σχέσης (2.3.17), η ανισότητα (2.3.3) γίνεται

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{x_*(n+1)}{x_*(\sigma(n))} \ge \alpha\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1-\alpha}} . \qquad (2.3.25)$$

Με παρόμοια διαδικασία, όπως και στο μέρος Ι), προκύπτει η ανισότητα

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=\sigma(n)}^{n} p(i) \le 1-\alpha\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1-\alpha}} ,$$

που είναι σε αντίφαση με τη (2.3.16). Άρα, όλες οι λύσεις είναι ταλαντούμενες. Η απόδειξη του μέρους ΙΙ) του θεωρήματος έχει ολοκληρωθεί. Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

Πόρισμα. *Έστω ότι*

$$0 < \alpha := \liminf_{n\to\infty}\sum_{i=n-k}^{n-1} p(i) \le \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}$$

και

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=n-k}^{n} p(i) > 1-(1-\sqrt{1-\alpha})^2 . \qquad (2.3.15΄)$$

Τότε όλες οι λύσεις της εξίσωσης (1.1.1) *είναι ταλαντούμενες.*

Επιπρόσθετα, εάν $p(n) \geq 1 - \sqrt{1-\alpha}$ *για όλα τα μεγάλα* n *και*

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=n-k}^{n} p(i) > 1 - \alpha \frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1-\alpha}} \tag{2.3.16΄}$$

τότε όλες οι λύσεις της εξίσωσης (1.1.1) *είναι ταλαντούμενες.*

Στο παράδειγμα που ακολουθεί φαίνεται η ισχύς της συνθήκης (2.3.15΄) ενώ καμία από τις συνθήκες (1.2.2) και (1.2.3) δεν ισχύει.

Παράδειγμα. Δίνεται η εξίσωση διαφορών

$$\Delta x(n) + p(n)\, x(n-12) = 0\,, \quad n \geq 0$$

όπου

$$p(13n+1) = \cdots = p(13n+12) = \frac{35}{1200}\,, \quad p(13n+13) = \frac{35}{1200} + \frac{600}{1000}\,, \quad n \geq 0\,.$$

Είναι προφανές ότι $k = 12$, και εύκολα διαπιστώνονται τα παρακάτω

$$\alpha = \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=n-12}^{n-1} p(i) = \frac{35}{100} < \left(\frac{12}{13}\right)^{13} \approx 0.3532585$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=n-12}^{n} p(i) = \frac{35}{1200} + \frac{950}{1000} = 0.9791666$$

Επειδή

$$0.9791666 > 1 - (1 - \sqrt{1-\alpha})^2 \approx 0.9624515\,,$$

η συνθήκη (2.3.15΄) ισχύει, και ως εκ τούτου όλες οι λύσεις της εξίσωσης είναι ταλαντούμενες. Εντούτοις,

$$0.9791666 < 1\,,$$

$$\alpha = 0.35 < \left(\frac{12}{12+1}\right)^{12+1} \approx 0.3532585$$

και ως εκ τούτου, καμία από τις συνθήκες (1.2.2) και (1.2.3) δεν ισχύει.

Παρατήρηση 1. Εάν η ακολουθία $(\tau(n))_{n\geq 0}$ είναι αύξουσα, το Θεώρημα 2.3.Β διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 2.3.Β΄. *Έστω ότι για την εξίσωση* (2.1.1) *ισχύει η σχέση* (2.1.2), *η ακολουθία* $(\tau(n))_{n\geq 0}$ *είναι αύξουσα και*

$$\alpha := \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i)\,. \qquad (2.3.1)$$

I) *Εάν* $\alpha \in (0,1]$ *και ισχύει η συνθήκη*

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n} p(i) > 1-(1-\sqrt{1-\alpha})^2\,, \qquad (2.3.15΄΄)$$

τότε όλες οι λύσεις της εξίσωσης (2.1.1) *είναι ταλαντούμενες.*

II) *Εάν* $\alpha \in (0,1)$, $p(n) \geq 1-\sqrt{1-\alpha}$ *για όλα τα μεγάλα n και ισχύει η συνθήκη*

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n} p(i) > 1-\alpha\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1-\alpha}}\,, \qquad (2.3.16΄΄)$$

τότε όλες οι λύσεις της εξίσωσης (2.1.1) *είναι ταλαντούμενες.*

Παρατήρηση 2. Βάσει της σχέσης (2.2.56) του Θεωρήματος Γ.2, το α στα Θεωρήματα 2.3.Β και 2.3.Β΄ (σχέση (2.3.1)) περιορίζεται στο διάστημα $(0,1/e]$.

Θεώρημα 2.3.Γ. *Έστω ότι* $\alpha \in (0,1]$ *και ότι υπάρχει* $n_0 \in \mathbf{N}$ *και συνάρτηση* $\tilde{p} \in L_{loc}(R_+, R_+)$ *έτσι ώστε*

$$t^2\,\tilde{p} \text{ είναι αύξουσα συνάρτηση}, \quad \tilde{p}(i) \leq p(i) \text{ για } i \geq n_0 \qquad (2.3.26)$$

και

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\tau(n)-1}^{n-1} \tilde{p}(s)\,ds \geq \alpha\,. \qquad (2.3.27)$$

Τότε η συνθήκη (2.3.15) (*ή, η συνθήκη* (2.3.16), *εάν* $p(n) \geq 1-\sqrt{1-\alpha}$ *για όλα τα μεγάλα* n) *είναι ικανή για την ταλάντωση των λύσεων της εξίσωσης* (2.1.1).

Απόδειξη. Βάσει του Λήμματος 2.3.Α και του Θεωρήματος 2.3.Β, αρκεί να δειχθεί ότι

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) \geq \alpha \,. \tag{2.3.28}$$

Από τις σχέσεις (2.3.26) και (2.3.27), προκύπτει

$$\begin{aligned}\sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) &\geq \sum_{i=\tau(n)}^{n-1} \frac{(i-1)\,i^2}{i}\,\tilde{p}(i)\int_{i-1}^{i}\frac{ds}{s^2} \geq \sum_{i=\tau(n)}^{n-1}\frac{i-1}{i}\int_{i-1}^{i}\tilde{p}(s)\,ds \\ &\geq \frac{\tau(n)-1}{\tau(n)}\sum_{i=\tau(n)}^{n-1}\int_{i-1}^{i}\tilde{p}(s)\,ds = \frac{\tau(n)-1}{\tau(n)}\int_{\tau(n)-1}^{n-1}\tilde{p}(s)\,ds\,.\end{aligned}$$

Επομένως, επειδή $\lim_{n\to\infty}\tau(n) = +\infty$, η τελευταία ανισότητα γίνεται

$$\liminf_{n\to\infty}\sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) \geq \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{\tau(n)-1}{\tau(n)}\int_{\tau(n)-1}^{n-1}\tilde{p}(s)\,ds\right) = \liminf_{n\to\infty}\int_{\tau(n)-1}^{n-1}\tilde{p}(s)\,ds \geq \alpha\,,$$

δηλαδή η (2.3.28) είναι αληθής. Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

Πόρισμα 1. *Ας θεωρήσουμε την εξίσωση διαφορών* (2.1.1) *και έστω* $c \in (0,+\infty)$, $\beta \in (0,1)$, $c\ln\beta \geq -1$. *Εάν*

$$p(n) \geq \frac{c}{n}\ , \quad \tau(n) \leq [\beta n] \quad \text{για όλα τα μεγάλα } n$$

και

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=[\beta n]}^{n} p(i) > 1-(1-\sqrt{1-\alpha})^2\,, \quad \alpha = \ln\beta^{-c}\,,$$

τότε όλες οι λύσεις της εξίσωσης (2.1.1) *είναι ταλαντούμενες.*

Απόδειξη. Λαμβάνοντας

$$\widetilde{p}(t) = \frac{c}{t},$$

παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $t^2\,\widetilde{p}(t)$ είναι αύξουσα και ότι

$$\widetilde{p}(i) \le p(i) \text{ για } i \ge n_0 .$$

Επίσης

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\tau(n)-1}^{n-1} \widetilde{p}(s)\,ds \ge \liminf_{n\to\infty} \int_{[\beta n]-1}^{n-1} \frac{c}{s} ds$$

$$= c \liminf_{n\to\infty}\left(\ln\frac{n-1}{[\beta n]-1} \right) \ge c \liminf_{n\to\infty}\left(\ln\frac{n-1}{\beta n-1} \right) = c\ln\beta^{-1} = \alpha .$$

Επομένως, ισχύουν όλες οι συνθήκες του Θεωρήματος 2.3.Γ, και ως εκ τούτου οι λύσεις της εξίσωσης είναι ταλαντούμενες.

Πόρισμα 2. *Ας θεωρήσουμε την εξίσωση διαφορών* (2.1.1) *και έστω* $c \in (0,+\infty)$, $\beta \in (0,1)$, $c\ln\beta \ge -1$. *Εάν*

$$p(n) \ge \frac{c}{n\ln n} \ , \quad \tau(n) \le [n^{\beta}] \quad \text{για όλα τα μεγάλα } n$$

και

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=[n^{\beta}]}^{n} p(i) > 1-(1-\sqrt{1-\alpha})^2, \quad \alpha = \ln\beta^{-c},$$

τότε όλες οι λύσεις της εξίσωσης (2.1.1) *είναι ταλαντούμενες.*

Απόδειξη. Λαμβάνοντας

$$\widetilde{p}(t) = \frac{c}{t\ln t},$$

παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $t^2\,\widetilde{p}(t)$ είναι αύξουσα και ότι

$$\widetilde{p}(i) \le p(i) \text{ για } i \ge n_0 .$$

Επίσης

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\int_{\tau(n)-1}^{n-1}\widetilde{p}(s)\,ds &\geq \liminf_{n\to\infty}\int_{[n^{\beta}]-1}^{n-1}\frac{c}{s\ln s}ds\\ &= c\liminf_{n\to\infty}\left(\ln\frac{\ln(n-1)}{\ln([n^{\beta}]-1)}\right)\\ &\geq c\liminf_{n\to\infty}\left(\ln\frac{\ln(n-1)}{\ln(n^{\beta}-1)}\right)=c\ln\beta^{-1}=\alpha\,.\end{aligned}$$

Επομένως, ισχύουν όλες οι συνθήκες του Θεωρήματος 2.3.Γ, και ως εκ τούτου οι λύσεις της εξίσωσης είναι ταλαντούμενες.

2.4. Νέες συνθήκες ταλάντωσης των λύσεων της εξίσωσης (2.1.1)

Στη συνέχεια αποδεικνύεται, κατ' αρχήν, ένα λήμμα και, με βάση αυτό, αποδεικνύεται ένα θεώρημα, στο οποίο δίδονται ικανές συνθήκες ταλάντωσης των λύσεων της υστερημένης εξίσωσης διαφορών (2.1.1).

Έστω

$$k=-\min_{n\geq 0}\tau(n)\,.$$

(Είναι φανερό ότι k είναι ένας θετικός ακέραιος.)

Λήμμα 2.4.Α. *Υποθέτουμε ότι η ακολουθία* $(\tau(n))_{n\geq 0}$ *είναι αύξουσα, και ορίζουμε τον πραγματικό αριθμό* α *με την ισότητα* (2.3.1), *δηλαδή θέτουμε*

$$\alpha:=\liminf_{n\to\infty}\sum_{i=\tau(n)}^{n-1}p(i)\,. \tag{2.4.1}$$

Έστω $(x(n))_{n\geq -k}$ *μία μη ταλαντούμενη λύση της υστερημένης εξίσωσης διαφορών* (2.1.1). *Τότε έχουμε:*

(i) *Εάν* $0<\alpha\leq\frac{1}{2}$, *τότε*

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{x(n+1)}{x(\tau(n))}\geq\frac{1}{2}(1-\alpha-\sqrt{1-2\alpha})\,. \tag{2.4.2}$$

(ii) *Εάν* $0 < \alpha \le 6 - 4\sqrt{2}$ *και, επιπρόσθετα,*

$$p(n) \ge \frac{\alpha}{2} \quad \text{για όλα τα μεγάλα } n, \tag{2.4.3}$$

τότε

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x(n+1)}{x(\tau(n))} \ge \frac{1}{4}(2 - 3\alpha - \sqrt{4 - 12\alpha + \alpha^2}). \tag{2.4.4}$$

Σημειώνουμε ότι, εάν $0 < \alpha \le 1/2$, τότε $1 - 2\alpha \ge 0$ και

$$0 < \frac{1}{2}(1 - \alpha - \sqrt{1 - 2\alpha}) < \frac{1}{2}.$$

Επίσης, όταν $0 < \alpha \le 6 - 4\sqrt{2}$ (προφανώς, $6 - 4\sqrt{2} < \frac{1}{2}$), έχουμε $4 - 12\alpha + \alpha^2 \ge 0$ και

$$0 < \frac{1}{4}\left(2 - 3\alpha - \sqrt{4 - 12\alpha + \alpha^2}\right) < \frac{1}{2}.$$

Επιπλέον, με την προϋπόθεση ότι $0 < \alpha \le 6 - 4\sqrt{2}$, έχουμε επίσης

$$\frac{1}{4}\left(2 - 3\alpha - \sqrt{4 - 12\alpha + \alpha^2}\right) > \frac{1}{2}(1 - \alpha - \sqrt{1 - 2\alpha}). \tag{2.4.5}$$

Επομένως, στην περίπτωση όπου $0 < \alpha \le 6 - 4\sqrt{2}$ και η (2.4.3) ισχύει, η (2.4.5) εγγυάται ότι η (2.4.4) είναι μία βελτίωση της (2.4.2).

***Απόδειξη του Λήμματος* 2.4.Α.** Επειδή η λύση $(x(n))_{n\ge -k}$ της υστερημένης εξίσωσης διαφορών (2.1.1) είναι μη ταλαντούμενη, αυτή θα είναι είτε τελικά θετική ή τελικά αρνητική. Καθώς η $(-x(n))_{n\ge -k}$ είναι επίσης μία λύση της (2.1.1), αρκεί να περιορισθούμε μόνο στην περίπτωση όπου $x(n) > 0$ για όλα τα μεγάλα n. Έστω ότι $\rho \ge -k$ είναι ένας ακέραιος τέτοιος ώστε $x(n) > 0$ για όλα τα $n \ge \rho$, και ας θεωρήσουμε έναν ακέραιο $r \ge 0$ έτσι ώστε $\tau(n) \ge \rho$ για $n \ge r$

(προφανώς, $r > \rho$). Τότε από τη (2.1.1) έπεται ότι $\Delta x(n) \le 0$ για κάθε $n \ge r$, το οποίο σημαίνει ότι η ακολουθία $(x(n))_{n \ge r}$ είναι φθίνουσα.

Ας υποθέσουμε ότι $0 < \alpha \le \frac{1}{2}$, όπου α ορίζεται από τη σχέση (2.4.1). Ας θεωρήσουμε έναν αυθαίρετο πραγματικό αριθμό ε με $0 < \varepsilon < \alpha$. Τότε μπορούμε να επιλέξουμε έναν ακέραιο $n_0 > r$ τέτοιο ώστε $\tau(n) \ge r$ για $n \ge n_0$, και

$$\sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) \ge \alpha - \varepsilon \qquad \text{για όλα τα } n \ge n_0. \tag{2.4.6}$$

Περαιτέρω, ας θεωρήσουμε έναν αυθαίρετο πραγματικό αριθμό ω με $0 < \omega < \alpha - \varepsilon$. Όπως στην Παράγραφο 2.3, αποδεικνύεται ο ακόλουθος ισχυρισμός.

Ισχυρισμός. *Για κάθε $n \ge n_0$, υπάρχει ένας ακέραιος $n^* \ge n$ τέτοιος ώστε $\tau(n^*) \le n-1$, και*

$$\sum_{i=n}^{n^*} p(i) \ge \omega, \tag{2.4.7}$$

$$\sum_{i=\tau(n^*)}^{n-1} p(i) > (\alpha - \varepsilon) - \omega. \tag{2.4.8}$$

Στη συνέχεια, επιλέγουμε έναν ακέραιο $N > n_0$ τέτοιον ώστε $\tau(n) \ge n_0$ για $n \ge N$. Ας θεωρήσουμε έναν αυθαίρετο ακέραιο $n \ge N$. Από τον ισχυρισμό μας, υπάρχει ένας ακέραιος $n^* \ge n$ τέτοιος ώστε $\tau(n^*) \le n-1$, και οι (2.4.7) και (2.4.8) να ισχύουν. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η ακολουθία $(\tau(s))_{s \ge 0}$ είναι αύξουσα και ότι η ακολουθία $(x(t))_{t \ge r}$ είναι φθίνουσα και χρησιμοποιώντας τη (2.4.7), από τη (2.1.1), λαμβάνουμε

$$x(n) - x(n^* + 1) = \sum_{i=n}^{n^*} p(i)\, x(\tau(i)) \ge \left(\sum_{i=n}^{n^*} p(i) \right) x(\tau(n^*)) \ge \omega\, x(\tau(n^*))$$

και συνεπώς

$$x(n) \ge x(n^* + 1) + \omega\, x(\tau(n^*)) . \qquad (2.4.9)$$

Περαιτέρω, λαμβάνοντας ξανά υπόψη ότι η $(\tau(s))_{s\ge 0}$ είναι αύξουσα και ότι η $(x(t))_{t\ge r}$ είναι φθίνουσα και χρησιμοποιώντας τη (2.4.8), από τη (2.1.1), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} x(\tau(n^*)) - x(n) &= \sum_{i=\tau(n^*)}^{n-1} p(i)\, x(\tau(i)) \\ &\ge \left(\sum_{i=\tau(n^*)}^{n-1} p(i) \right) x(\tau(n-1)) \\ &> [(\alpha - \varepsilon) - \omega]\, x(\tau(n-1)) \end{aligned}$$

και έτσι

$$x(\tau(n^*)) > x(n) + [(\alpha - \varepsilon) - \omega]\, x(\tau(n-1)) . \qquad (2.4.10)$$

Από τις (2.4.9) και (2.4.10), λαμβάνουμε

$$x(n) \ge x(n^* + 1) + \omega\, x(\tau(n^*)) > \omega\, x(\tau(n^*)) > \omega \left\{ x(n) + [(\alpha - \varepsilon) - \omega]\, x(\tau(n-1)) \right\}$$

και επομένως

$$x(n) > \omega \frac{(\alpha - \varepsilon) - \omega}{1 - \omega} x(\tau(n-1)) .$$

Έχουμε αποδείξει συνεπώς ότι

$$x(n) > \omega \lambda_1\, x(\tau(n-1)) \quad \text{για όλα τα } n \ge N , \qquad (2.4.11)$$

όπου

$$\lambda_1 = \frac{(\alpha - \varepsilon) - \omega}{1 - \omega}.$$

Τώρα, έστω n ένας αυθαίρετος ακέραιος με $n \geq N$. Χρησιμοποιώντας τον ισχυρισμό μας, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένας ακέραιος $n^* \geq n$ τέτοιος ώστε $\tau(n^*) \leq n-1$, και οι (2.4.7) και (2.4.8) να ικανοποιούνται. Τότε, οι (2.4.9) και (2.4.10) ικανοποιούνται επίσης. Επιπλέον, από τη (2.4.11) (για τον ακέραιο n^*+1), έχουμε

$$x(n^*+1) > \omega\lambda_1\, x(\tau(n^*))\,. \tag{2.4.12}$$

Χρησιμοποιώντας τις (2.4.9), (2.4.12) και (2.4.10), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} x(n) &\geq x(n^*+1) + \omega\, x(\tau(n^*)) > \omega\lambda_1\, x(\tau(n^*)) + \omega\, x(\tau(n^*)) \\ &= \omega(\lambda_1+1)\, x(\tau(n^*)) > \omega(\lambda_1+1)\left\{x(n) + [(\alpha-\varepsilon)-\omega]\, x(\tau(n-1))\right\}, \end{aligned}$$

το οποίο δίνει

$$[1-\omega(\lambda_1+1)]\, x(n) > \omega(\lambda_1+1)[(\alpha-\varepsilon)-\omega]\, x(\tau(n-1))\,.$$

Ιδιαίτερα, αυτό συνεπάγεται ότι $1-\omega(\lambda_1+1) > 0$. Συνεπώς,

$$x(n) > \omega\frac{(\lambda_1+1)[(\alpha-\varepsilon)-\omega]}{1-\omega(\lambda_1+1)}\, x(\tau(n-1))\,.$$

Επομένως, έχει αποδειχθεί ότι

$$x(n) > \omega\lambda_2\, x(\tau(n-1)) \quad \text{για όλα τα } n \geq N\,,$$

όπου

$$\lambda_2 = \frac{(\lambda_1+1)[(\alpha-\varepsilon)-\omega]}{1-\omega(\lambda_1+1)}\,.$$

Ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία, μπορούμε επαγωγικά να κατασκευάσουμε μία ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών $(\lambda_\nu)_{\nu\geq 1}$ με $1-\omega(\lambda_\nu+1) > 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ και

$$\lambda_{\nu+1} = \frac{(\lambda_\nu + 1)[(\alpha - \varepsilon) - \omega]}{1 - \omega(\lambda_\nu + 1)} \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

τέτοια ώστε

$$x(n) > \omega\lambda_\nu \, x(\tau(n-1)) \quad \text{για όλα τα } n \geq N \quad (\nu = 1, 2, \ldots). \quad (2.4.13)$$

Αφού $\lambda_1 > 0$, λαμβάνουμε

$$\lambda_2 = \frac{(\lambda_1 + 1)[(\alpha - \varepsilon) - \omega]}{1 - \omega(\lambda_1 + 1)} > \frac{(\alpha - \varepsilon) - \omega}{1 - \omega} = \lambda_1,$$

δηλαδή, $\lambda_2 > \lambda_1$. Εύκολα με επαγωγή, μπορούμε να δούμε ότι η ακολουθία $(\lambda_\nu)_{\nu \geq 1}$ είναι γνησίως αύξουσα. Περαιτέρω, λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι η ακολουθία $(x(t))_{t \geq r}$ είναι φθίνουσα και χρησιμοποιώντας τη (2.4.13) (για $n = N$), λαμβάνουμε

$$x(\tau(N-1)) \geq x(N) > \omega\lambda_\nu \, x(\tau(N-1)) \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Επομένως, για κάθε $\nu \geq 1$, έχουμε $\omega\lambda_\nu < 1$, δηλαδή $\lambda_\nu < \dfrac{1}{\omega}$. Αυτό εξασφαλίζει ότι η ακολουθία $(\lambda_\nu)_{\nu \geq 1}$ είναι φραγμένη. Αφού η $(\lambda_\nu)_{\nu \geq 1}$ είναι γνησίως αύξουσα και φραγμένη ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών, προκύπτει ότι το $\lim\limits_{\nu \to \infty} \lambda_\nu$ υπάρχει ως ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Θέτουμε

$$\Lambda = \lim_{\nu \to \infty} \lambda_\nu .$$

Τότε, η (2.4.13) δίνει

$$x(n) \geq \omega\Lambda \, x(\tau(n-1)) \quad \text{για όλα τα } n \geq N. \quad (2.4.14)$$

Από τον ορισμό της $(\lambda_\nu)_{\nu \geq 1}$, έχουμε

$$\Lambda = \frac{(\Lambda + 1)[(\alpha - \varepsilon) - \omega]}{1 - \omega(\Lambda + 1)}.$$

δηλαδή, $\omega\Lambda^2 - [1-(\alpha-\varepsilon)]\Lambda + [(\alpha-\varepsilon)-\omega] = 0$. Επομένως, είτε

$$\Lambda = \frac{1}{2\omega}\left(1-(\alpha-\varepsilon)-\sqrt{1-2(\alpha-\varepsilon)+[(\alpha-\varepsilon)-2\omega]^2}\right)$$

ή

$$\Lambda = \frac{1}{2\omega}\left(1-(\alpha-\varepsilon)+\sqrt{1-2(\alpha-\varepsilon)+[(\alpha-\varepsilon)-2\omega]^2}\right).$$

Και στις δύο περιπτώσεις, ισχύει

$$\Lambda \geq \frac{1}{2\omega}\left(1-(\alpha-\varepsilon)-\sqrt{1-2(\alpha-\varepsilon)+[(\alpha-\varepsilon)-2\omega]^2}\right).$$

Άρα, από τη (2.4.14), προκύπτει ότι

$$x(n) \geq \frac{1}{2}\left(1-(\alpha-\varepsilon)-\sqrt{1-2(\alpha-\varepsilon)+[(\alpha-\varepsilon)-2\omega]^2}\right)x(\tau(n-1)) \quad (2.4.15)$$

για όλα τα $n \geq N$. Αλλά, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η συνάρτηση

$$f(\omega) = \frac{1}{2}\left(1-(\alpha-\varepsilon)-\sqrt{1-2(\alpha-\varepsilon)+[(\alpha-\varepsilon)-2\omega]^2}\right) \quad \text{για } 0<\omega<\alpha-\varepsilon$$

λαμβάνει το μέγιστό της στο σημείο $\omega = \dfrac{\alpha-\varepsilon}{2}$. Έτσι, επιλέγοντας $\omega = \dfrac{\alpha-\varepsilon}{2}$, από τη (2.4.15) λαμβάνουμε

$$x(n) \geq \frac{1}{2}(1-(\alpha-\varepsilon)-\sqrt{1-2(\alpha-\varepsilon)})\,x(\tau(n-1)) \quad \text{για όλα τα } n \geq N. \quad (2.4.16)$$

Η ανισότητα (2.4.16) δίνει

$$x(n+1) \geq \frac{1}{2}(1-(\alpha-\varepsilon)-\sqrt{1-2(\alpha-\varepsilon)})\,x(\tau(n)) \quad \text{για κάθε } n \geq N-1$$

ή

$$\frac{x(n+1)}{x(\tau(n))} \geq \frac{1}{2}(1-(\alpha-\varepsilon)-\sqrt{1-2(\alpha-\varepsilon)}) \quad \text{για κάθε } n \geq N-1.$$

Συνεπώς,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x(n+1)}{x(\tau(n))} \geq \frac{1}{2}(1-(\alpha-\varepsilon)-\sqrt{1-2(\alpha-\varepsilon)}) \ .$$

Η ανωτέρω ανισότητα ισχύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς ε με $0<\varepsilon<\alpha$. Επομένως, λαμβάνουμε την (2.4.2). Η απόδειξη του Μέρους (i) του λήμματος είναι πλήρης.

Στο υπόλοιπο αυτής της απόδειξης, θα υποθέσουμε ότι $0<\alpha\leq 6-4\sqrt{2}$ (το οποίο συνεπάγεται ότι $0<\alpha<\frac{1}{2}$) και, επιπρόσθετα, ότι η (2.4.3) ισχύει. Λόγω της (2.4.3), μπορούμε να θεωρήσουμε έναν ακέραιο $L\geq N$ τέτοιον ώστε $p(n)\geq\frac{\alpha}{2}$ για κάθε $n\geq L$. Τότε

$$p(n)>\frac{\alpha-\varepsilon}{2} \quad \text{για όλα τα } n\geq L . \tag{2.4.17}$$

Από τη (2.4.16), έχουμε

$$x(n)\geq\theta_1\, x(\tau(n-1)) \quad \text{για όλα τα } n\geq L , \tag{2.4.18}$$

όπου

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\left[1-(\alpha-\varepsilon)-\sqrt{1-2(\alpha-\varepsilon)}\right].$$

Ας θεωρήσουμε έναν αυθαίρετο ακέραιο $n\geq L$. Χρησιμοποιώντας τις (2.4.17) και (2.4.18) (για τον ακέραιο $n+1$), από τη (2.1.1), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} x(n) &= x(n+1)+p(n)x(\tau(n)) > x(n+1)+\frac{\alpha-\varepsilon}{2}x(\tau(n)) \\ &\geq \theta_1 x(\tau(n))+\frac{\alpha-\varepsilon}{2}x(\tau(n)) \end{aligned}$$

και συνεπώς

$$x(n)>\left(\theta_1+\frac{\alpha-\varepsilon}{2}\right)x(\tau(n)) . \tag{2.4.19}$$

Περαιτέρω, λαμβάνοντας υπόψη ότι η $(\tau(s))_{s\geq 0}$ είναι αύξουσα και ότι η $(x(t))_{t\geq r}$ είναι φθίνουσα και χρησιμοποιώντας τη (2.4.6), από τη (2.1.1), λαμβάνουμε

$$x(\tau(n)) - x(n) = \sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i)\, x(\tau(i)) \geq \left(\sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) \right) x(\tau(n-1)) \geq (\alpha - \varepsilon)\, x(\tau(n-1))$$

και συνεπώς

$$x(\tau(n)) \geq x(n) + (\alpha - \varepsilon)\, x(\tau(n-1)) . \qquad (2.4.20)$$

Ο συνδυασμός των (2.4.19) και (2.4.20) δίνει

$$x(n) > \left(\theta_1 + \frac{\alpha - \varepsilon}{2} \right) \left[x(n) + (\alpha - \varepsilon)\, x(\tau(n-1)) \right],$$

δηλαδή,

$$\left[1 - \left(\theta_1 + \frac{\alpha - \varepsilon}{2} \right) \right] x(n) > \left(\theta_1 + \frac{\alpha - \varepsilon}{2} \right) (\alpha - \varepsilon)\, x(\tau(n-1)) .$$

Αυτό εγγυάται, ειδικότερα, ότι $1 - \left(\theta_1 + \frac{\alpha - \varepsilon}{2} \right) > 0$. Έτσι,

$$x(n) > \frac{\left(\theta_1 + \frac{\alpha - \varepsilon}{2} \right)(\alpha - \varepsilon)}{1 - \left(\theta_1 + \frac{\alpha - \varepsilon}{2} \right)}\, x(\tau(n-1)) .$$

Έχουμε επομένως αποδείξει ότι

$$x(n) > \theta_2\, x(\tau(n-1)) \quad \text{για όλα τα } n \geq L ,$$

όπου

$$\theta_2 = \frac{\left(\theta_1 + \frac{\alpha - \varepsilon}{2} \right)(\alpha - \varepsilon)}{1 - \left(\theta_1 + \frac{\alpha - \varepsilon}{2} \right)} .$$

Ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία, μπορούμε επαγωγικά να κατασκευάσουμε μία ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών $(\theta_\nu)_{\nu \geq 1}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις

$$1 - \left(\theta_\nu + \frac{\alpha - \varepsilon}{2} \right) > 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

και

$$\theta_{\nu+1} = \frac{\left(\theta_\nu + \dfrac{\alpha-\varepsilon}{2}\right)(\alpha-\varepsilon)}{1-\left(\theta_\nu + \dfrac{\alpha-\varepsilon}{2}\right)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) .$$

Αυτή η ακολουθία είναι τέτοια ώστε να ισχύει η (2.4.18), και

$$x(n) > \theta_\nu \, x(\tau(n-1)) \quad \text{για όλα τα } n \geq L \quad (\nu = 2, 3, \ldots) . \quad (2.4.21)$$

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των θ_1 και θ_2, εύκολα βρίσκουμε ότι

$$\theta_2 = 1-(\alpha-\varepsilon)-\sqrt{1-2(\alpha-\varepsilon)} = 2\theta_1 ,$$

δηλαδή, $\theta_2 > \theta_1$. Επαγωγικά, μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι η ακολουθία $(\theta_\nu)_{\nu\geq 1}$ είναι γνησίως αύξουσα. Περαιτέρω, λαμβάνοντας υπόψη ότι η $(x(t))_{t\geq r}$ είναι φθίνουσα και χρησιμοποιώντας (για $n = L$) την ανισότητα (2.4.21), λαμβάνουμε

$$x(\tau(L-1)) \geq x(L) > \theta_\nu \, x(\tau(L-1)) \qquad (\nu = 2, 3, \ldots) .$$

Επομένως, $\theta_\nu < 1$ για κάθε $\nu \geq 2$, το οποίο εγγυάται ότι η ακολουθία $(\theta_\nu)_{\nu\geq 1}$ είναι φραγμένη. Συνεπώς, το $\lim\limits_{\nu\to\infty} \theta_\nu$ υπάρχει ως ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Θέτουμε

$$\Theta = \lim_{\nu\to\infty} \theta_\nu .$$

Τότε από τη (2.4.21) προκύπτει ότι

$$x(n) \geq \Theta \, x(\tau(n-1)) \quad \text{για όλα τα } n \geq L . \qquad (2.4.22)$$

Από τον ορισμό της $(\theta_\nu)_{\nu\geq 1}$, ο αριθμός Θ ικανοποιεί τη σχέση

$$\Theta = \frac{\left(\Theta + \frac{\alpha-\varepsilon}{2}\right)(\alpha-\varepsilon)}{1-\left(\Theta + \frac{\alpha-\varepsilon}{2}\right)},$$

ή, ισοδύναμα,

$$2\Theta^2 - [2-3(\alpha-\varepsilon)]\Theta + (\alpha-\varepsilon)^2 = 0 \ .$$

Έτσι, είτε

$$\Theta = \frac{1}{4}\left(2-3(\alpha-\varepsilon) - \sqrt{4-12(\alpha-\varepsilon)+(\alpha-\varepsilon)^2}\right)$$

ή

$$\Theta = \frac{1}{4}\left(2-3(\alpha-\varepsilon) + \sqrt{4-12(\alpha-\varepsilon)+(\alpha-\varepsilon)^2}\right).$$

Σημειώνουμε ότι, αφού $0<\alpha-\varepsilon<6-4\sqrt{2}$, ισχύει

$$4-12(\alpha-\varepsilon)+(\alpha-\varepsilon)^2 > 0 .$$

Υποχρεωτικά έχουμε

$$\Theta \geq \frac{1}{4}\left(2-3(\alpha-\varepsilon) - \sqrt{4-12(\alpha-\varepsilon)+(\alpha-\varepsilon)^2}\right)$$

και συνεπώς η (2.4.22) δίνει

$$x(n) \geq \frac{1}{4}\left(2-3(\alpha-\varepsilon) - \sqrt{4-12(\alpha-\varepsilon)+(\alpha-\varepsilon)^2}\right)x(\tau(n-1)) \quad \text{για} \quad n \geq L \ .$$

Τελικά, βλέπουμε ότι η τελευταία ανισότητα μπορεί ισοδύναμα να γραφεί ως ακολούθως

$$x(n+1) \geq \frac{1}{4}\left(2-3(\alpha-\varepsilon) - \sqrt{4-12(\alpha-\varepsilon)+(\alpha-\varepsilon)^2}\right)x(\tau(n)) \quad \text{για} \ n \geq L-1,$$

δηλαδή,

$$\frac{x(n+1)}{x(\tau(n))} \geq \frac{1}{4}\left(2-3(\alpha-\varepsilon) - \sqrt{4-12(\alpha-\varepsilon)+(\alpha-\varepsilon)^2}\right) \quad \text{για} \quad n \geq L-1 .$$

Επομένως,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x(n+1)}{x(\tau(n))} \geq \frac{1}{4}\left(2-3(\alpha-\varepsilon) - \sqrt{4-12(\alpha-\varepsilon)+(\alpha-\varepsilon)^2}\right).$$

Καθώς η ανισότητα αυτή ικανοποιείται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς ε με $0<\varepsilon<\alpha$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η (2.4.4) ισχύει. Έτσι, το Μέρος (ii) του λήμματος έχει αποδειχθεί. Η απόδειξη του λήμματος είναι πλήρης.

Παρατήρηση 1. Παρατηρούμε ότι:

(i) Όταν $0<\alpha\le\frac{1}{2}$, είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι

$$\frac{1}{2}(1-\alpha-\sqrt{1-2\alpha})>(1-\sqrt{1-\alpha})^2,$$

και επομένως η ανισότητα (2.4.2) βελτιώνει την ανισότητα (2.3.2).

(ii) Όταν $0<\alpha\le 6-4\sqrt{2}$, επειδή

$$1-\sqrt{1-\alpha}>\frac{\alpha}{2},$$

βλέπουμε ότι η υπόθεση (2.4.3) είναι ασθενέστερη της υπόθεσης $p(n)\ge 1-\sqrt{1-\alpha}$ για όλα τα μεγάλα n, και, επιπλέον, μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$\frac{1}{4}\left(2-3\alpha-\sqrt{4-12\alpha+\alpha^2}\right)>\alpha\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1-\alpha}}$$

και έτσι η ανισότητα (2.4.4) βελτιώνει την ανισότητα (2.3.3).

Παρατήρηση 2. Τίθεται το ερώτημα εάν η ανισότητα (2.4.2) μπορεί να βελτιωθεί ως ακολούθως

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{x(n+1)}{x(\tau(n))}\ge\frac{1}{2}\left(1-\alpha-\sqrt{1-2\alpha-\alpha^2}\right), \qquad (2.4.23)$$

υπό την προϋπόθεση $0<\alpha\le -1+\sqrt{2}$. Αυτό το ερώτημα προκύπτει από το λήμμα των Chen και Yu [9].

Σύμφωνα με αυτό, εάν $0<\alpha_0\le\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}$, όπου $\alpha_0=\liminf_{n\to\infty}\sum_{i=n-k}^{n-1}p(i)$, τότε κάθε μη ταλαντούμενη λύση της εξίσωσης διαφορών με σταθερή υστέρηση (1.1.1) ικανοποιεί την ανισότητα

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{x(n+1)}{x(n-k)}\geq\frac{1}{2}\left(1-\alpha_0-\sqrt{1-2\alpha_0-\alpha_0^2}\right).$$

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό, δίνεται στην Παράγραφο 2.5. Παρατηρούμε, πάντως, ότι όταν $0<\alpha\leq 6-4\sqrt{2}$, είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι

$$\frac{1}{4}\left(2-3\alpha-\sqrt{4-12\alpha+\alpha^2}\right)>\frac{1}{2}\left(1-\alpha-\sqrt{1-2\alpha-\alpha^2}\right),$$

και επομένως, σ' αυτήν την περίπτωση και όταν η (2.4.3) ισχύει, η ανισότητα (2.4.4) στο Λήμμα 2.4.Α βελτιώνει την ανισότητα (2.4.23).

Θεώρημα 2.4.Β. *Υποθέτουμε ότι η ακολουθία* $(\tau(n))_{n\geq 0}$ *είναι αύξουσα, και ορίζουμε το* α *με τη* (2.4.1). *Τότε έχουμε:*

(I) *Εάν* $0<\alpha\leq\frac{1}{2}$, *τότε η συνθήκη*

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=\tau(n)}^{n}p(i)>1-\frac{1}{2}(1-\alpha-\sqrt{1-2\alpha}) \tag{2.4.24}$$

είναι ικανή για την ταλάντωση όλων των λύσεων της υστερημένης εξίσωσης διαφορών (2.1.1).

(II) *Εάν* $0<\alpha\leq 6-4\sqrt{2}$ *και ισχύει η* (2.4.3), *τότε η συνθήκη*

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=\tau(n)}^{n}p(i)>1-\frac{1}{4}\left(2-3\alpha-\sqrt{4-12\alpha+\alpha^2}\right), \tag{2.4.25}$$

είναι ικανή για την ταλάντωση όλων των λύσεων της (2.1.1).

Απόδειξη. Υποθέτουμε, για να οδηγηθούμε σε αντίφαση, ότι η υστερημένη εξίσωση διαφορών (2.1.1) έχει μια μη ταλαντούμενη λύση $(x(n))_{n\geq -k}$. Αφού η $(-x(n))_{n\geq -k}$ είναι επίσης λύση της (2.1.1), μπορούμε να περιορίσουμε τη συζήτησή μας μόνο στην περίπτωση όπου η λύση $(x(n))_{n\geq -k}$ είναι τελικά θετική. Θεωρούμε έναν ακέραιο $\rho \geq -k$ έτσι ώστε $x(n) > 0$ για κάθε $n \geq \rho$, και έστω $r \geq 0$ ένας ακέραιος τέτοιος ώστε $\tau(n) \geq \rho$ για $n \geq r$ (προφανώς, $r > \rho$). Τότε από τη (2.1.1) λαμβάνουμε άμεσα ότι $\Delta x(n) \leq 0$ για όλα τα $n \geq r$, και συνεπώς η ακολουθία $(x(n))_{n\geq r}$ είναι φθίνουσα.

Τώρα, θεωρούμε έναν ακέραιο $n_0 \geq r$ τέτοιον ώστε $\tau(n) \geq r$ για $n \geq n_0$. Επιπλέον, επιλέγουμε έναν ακέραιο $N > n_0$ έτσι ώστε $\tau(n) \geq n_0$ για $n \geq N$. Τότε, λαμβάνοντας υπόψη ότι η ακολουθία $(\tau(s))_{s\geq 0}$ είναι αύξουσα και ότι η ακολουθία $(x(t))_{t\geq r}$ είναι φθίνουσα, από τη (2.1.1) λαμβάνουμε, για κάθε $n \geq N$,

$$x(\tau(n)) - x(n+1) = \sum_{i=\tau(n)}^{n} p(i)\, x(\tau(i)) \geq \left(\sum_{i=\tau(n)}^{n} p(i) \right) x(\tau(n)) .$$

Συνεπώς,

$$\sum_{i=\tau(n)}^{n} p(i) \leq 1 - \frac{x(n+1)}{x(\tau(n))} \quad \text{για όλα τα } n \geq N ,$$

η οποία δίνει

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n} p(i) \leq 1 - \liminf_{n\to\infty} \frac{x(n+1)}{x(\tau(n))} . \tag{2.4.26}$$

Υποθέτουμε, κατ' αρχήν, ότι $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. Τότε, από το Λήμμα 2.4.Α, η ανισότητα (2.4.2) ικανοποιείται, και έτσι η (2.4.26) μας οδηγεί στο

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n} p(i) \leq 1 - \frac{1}{2}(1 - \alpha - \sqrt{1-2\alpha}) ,$$

που είναι σε αντίφαση με τη (2.4.24).

Στη συνέχεια, ας υποθέσουμε ότι $0 < \alpha \leq 6 - 4\sqrt{2}$ και ότι (2.4.3) ισχύει. Τότε, το Λήμμα 2.4.A, εξασφαλίζει ότι η (2.4.4) ικανοποιείται. Άρα, από την (2.4.26) συνεπάγεται ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n} p(i) \le 1 - \frac{1}{4}\left(2 - 3\alpha - \sqrt{4 - 12\alpha + \alpha^2}\right),$$

που είναι σε αντίφαση με τη (2.4.25). Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

Εάν παραληφθεί η συνθήκη ότι η ακολουθία $(\tau(n))_{n\ge 0}$ είναι αύξουσα, τότε οι συνθήκες (2.4.24) και (2.4.25) αντικαθίστανται από τις συνθήκες

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=\sigma(n)}^{n} p(i) > 1 - \frac{1}{2}(1 - \alpha - \sqrt{1 - 2\alpha}),$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=\sigma(n)}^{n} p(i) > 1 - \frac{1}{4}\left(2 - 3\alpha - \sqrt{4 - 12\alpha + \alpha^2}\right),$$

αντίστοιχα, όπου η ακολουθία ακεραίων $(\sigma(n))_{n\ge 0}$ ορίζεται από τη σχέση (2.2.1). Προφανώς, η ακολουθία $(\sigma(n))_{n\ge 0}$ είναι αύξουσα. Σημειώνουμε ότι ισχύει η σχέση (2.3.17), και επομένως

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=\sigma(n)}^{n-1} p(i) = \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i).$$

Με χρήση της παραπάνω ισότητας και με εφαρμογή του Λήμματος A.3 (βλέπε επίσης [75] και [48]), το Θεώρημα 2.4.B γενικεύεται ως εξής:

Θεώρημα 2.4.B΄. *Έστω ότι η ακολουθία* $(\sigma(n))_{n\ge 0}$ *ορίζεται από τη* (2.2.1) *και* α *ορίζεται από τη* (2.4.1).

(I) *Εάν* $0 < \alpha \le \frac{1}{2}$, *τότε η συνθήκη*

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=\sigma(n)}^{n} p(i) > 1 - \frac{1}{2}(1 - \alpha - \sqrt{1 - 2\alpha}) \qquad (2.4.24')$$

είναι ικανή για την ταλάντωση όλων των λύσεων της υστερημένης εξίσωσης διαφορών (2.1.1).

(II) *Εάν* $0 < \alpha \le 6 - 4\sqrt{2}$ *και ισχύει η* (2.4.3), *τότε η συνθήκη*

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=\sigma(n)}^{n} p(i) > 1 - \frac{1}{4}\left(2 - 3\alpha - \sqrt{4 - 12\alpha + \alpha^2}\right) \qquad (2.4.25΄)$$

είναι ικανή για την ταλάντωση όλων των λύσεων της (2.1.1).

Πόρισμα. *Ας θεωρήσουμε την εξίσωση διαφορών με σταθερή υστέρηση* (1.1.1) *και έστω*

$$0 < \alpha := \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=n-k}^{n-1} p(i) \le \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}.$$

Τότε η συνθήκη

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=n-k}^{n} p(i) > 1 - \frac{1}{2}(1 - \alpha - \sqrt{1-2\alpha}), \qquad (2.4.24΄΄)$$

είναι ικανή για την ταλάντωση όλων των λύσεων της εξίσωσης (1.1.1).

Επιπλέον, εάν $0 < \alpha \le 6 - 4\sqrt{2}$ *και ισχύει η* (2.4.2), *τότε η συνθήκη*

$$\limsup_{n\infty} \sum_{i=n-k}^{n} p(i) > 1 - \frac{1}{4}\left(2 - 3\alpha - \sqrt{4 - 12\alpha + \alpha^2}\right) \qquad (2.4.25΄΄)$$

είναι ικανή για την ταλάντωση όλων των λύσεων της εξίσωσης (1.1.1).

Παρατήρηση 3. Παρατηρούμε τα ακόλουθα (βλέπε Παρατήρηση 1):

(i) Όταν $0 < \alpha \le \frac{1}{2}$, η συνθήκη (2.4.24) είναι ασθενέστερη της συνθήκης (2.3.15΄΄).

(ii) Όταν $0 < \alpha \le 6 - 4\sqrt{2}$, οι συνθήκες (2.4.3) και (2.4.25) είναι ασθενέστερες των συνθηκών $p(n) \ge 1 - \sqrt{1-\alpha}$ για όλα τα μεγάλα n και (2.3.16΄΄), αντίστοιχα.

Παρατήρηση 4. Με βάση το λήμμα που αναφέρθηκε στην Παρατήρηση 2, οι Chen και Yu [9] εξήγαγαν το ακόλουθο κριτήριο ταλάντωσης στην ειδική περίπτωση της εξίσωσης διαφορών με σταθερή υστέρηση (1.1.1):

Εάν $0 < \alpha_0 \le \left(\dfrac{k}{k+1}\right)^{k+1}$, όπου $\alpha_0 = \liminf\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=n-k}^{n-1} p(i)$, τότε η συνθήκη

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=n-k}^{n} p(i) > 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \alpha_0 - \sqrt{1 - 2\alpha_0 - \alpha_0^2}\right) \qquad (2.4.27)$$

συνεπάγεται ότι της οι λύσεις της (1.1.1) είναι ταλαντούμενες. Από την τελευταία ανισότητα, είναι ενδιαφέρον να αναρωτηθούμε εάν, με την προϋπόθεση ότι $0 < \alpha \le -1 + \sqrt{2}$, η συνθήκη

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n} p(i) > 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \alpha - \sqrt{1 - 2\alpha - \alpha^2}\right) \qquad (2.4.28)$$

(η οποία είναι ασθενέστερη της (2.4.24)) είναι ικανή για την ταλάντωση όλων των λύσεων της εξίσωσης (2.1.1). Και αυτό το ερώτημα, απαντάτε στην Παράγραφο 2.5. Εν τούτοις, θα πρέπει να αναφερθεί (βλέπε Παρατήρηση 2) ότι, όταν $0 < \alpha \le 6 - 4\sqrt{2}$ και η (2.4.3) ισχύει, η συνθήκη (2.4.25) του Θεωρήματος 2.4.Β είναι ασθενέστερη της συνθήκης (2.4.28) και ειδικότερα, όταν $\alpha = 6 - 4\sqrt{2} \approx 0.3431457$, το κατώτερο φράγμα στην (2.4.28) είναι 0.8929094, ενώ στην (2.4.25) είναι 0.7573593.

Παράδειγμα 1. Θεωρούμε την εξίσωση

$$\Delta x(n) + p(n)x(n-2) = 0,$$

όπου

$$p(3n) = \frac{1474}{10000}, \quad p(3n+1) = \frac{1488}{10000}, \quad p(3n+2) = \frac{6715}{10000}, \quad n \ge 0$$

Εδώ $k = 2$ και είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\alpha = \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=n-2}^{n-1} p(i) = \frac{1474}{10000} + \frac{1488}{10000} = 0.2962 < \left(\frac{2}{3}\right)^3 \approx 0.2962963,$$

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=n-2}^{n} p(i) = 0.8203 + \frac{1474}{10000} = 0.9677\ .$$

Παρατηρούμε ότι

$$0.9677 > 1 - \frac{1}{2}(1-\alpha-\sqrt{1-2\alpha}) \approx 0.967317794\,,$$

δηλαδή, η συνθήκη (2.4.24΄΄) ικανοποιείται, και γιαυτό όλες οι λύσεις της εξίσωσης (1.1.1) είναι ταλαντούμενες. Παρατηρούμε, όμως, ότι

$$0.9677 < 1\,,$$

$$\alpha = 0.2962 < \left(\frac{2}{3}\right)^3 \approx 0.2962963\,,$$

$$0.9677 < 1-(1-\sqrt{1-\alpha})^2 \approx 0.974055774$$

και ως εκ τούτου, καμία από τις συνθήκες (1.2.2), (1.2.3), και (2.3.15΄) δεν ισχύει.

Εάν, από την άλλη πλευρά, στην παραπάνω εξίσωση έχουμε

$$p(3n) = p(3n+1) = \frac{1481}{10000}\,, \quad p(3n+2) = \frac{6138}{10000}\,,\ \ n \geq 0$$

είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\alpha = \liminf_{n\to\infty}\sum_{i=n-2}^{n-1} p(i) = \frac{1481}{10000} + \frac{1481}{10000} = 0.2962 < \left(\frac{2}{3}\right)^3 \approx 0.2962963\,,$$

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=n-2}^{n} p(i) = \frac{1481}{10000} + 0.7619 = 0.91\,.$$

Επιπλέον, είναι φανερό ότι $p(n) \geq \dfrac{\alpha}{2}$ για όλα τα μεγάλα n. Σ' αυτήν την περίπτωση

$$0.91 > 1 - \frac{1}{4}\left(2-3\alpha-\sqrt{4-12\alpha+\alpha^2}\right) \approx 0.904724375\,,$$

δηλαδή, η συνθήκη (2.3.25΄΄) ικανοποιείται και ως εκ τούτου όλες οι λύσεις της εξίσωσης (1.1.1) είναι ταλαντούμενες. Παρατηρούμε, όμως, ότι

$$0.91 < 1,$$
$$\alpha = 0.2962 < \left(\frac{2}{3}\right)^3 \approx 0.2962963,$$
$$0.91 < 1-(1-\sqrt{1-\alpha})^2 \approx 0.974055774,$$
$$0.91 < 1-\frac{1}{2}(1-\alpha-\sqrt{1-2\alpha-\alpha^2}) \approx 0.930883291$$

και γιαυτό, καμία από τις συνθήκες (1.2.2), (1.2.3), (2.3.15΄), και (1.2.5) δεν ισχύει.

Παράδειγμα 2. Δίνεται η εξίσωση διαφορών

$$\Delta x(n) + p(n)x(\tau(n)) = 0, \quad n \geq 0 \tag{2.4.29}$$

όπου $\tau(0) = -1$ και $\tau(n) = [n^\beta]$ για $n \geq 1$, $[n^\beta]$ είναι το ακέραιο μέρος του n^β, $\beta \in (0,1)$.

Για $\alpha \in (0,1/e]$, ας είναι

$$y = 1 - \frac{1-\alpha-\sqrt{1-2\alpha}}{2}, \quad z = 1-(1-\sqrt{1-\alpha})^2$$

θετικοί πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει προφανώς η διάταξη $y < z < 1$.

Έστω d ένας θετικός πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε : $y < \alpha + d < z$, και

$$p(n) = \begin{cases} \dfrac{c}{(n+1)\ln(n+1)}, & n \in \mathbf{N}_0 \setminus B \\ \\ d, & n \in B \end{cases}, \qquad c = \frac{\alpha}{\ln \beta^{-1}},$$

με B το σύνολο των όρων της ακολουθίας

$$a(n) = [(a(n-1)+1)^{1/\beta}+1]+1, \; n \geq 1, \quad a(0) = 0.$$

Είναι προφανές ότι $(p(n))_{n\geq 0}$ είναι ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών, $\tau(n)\leq n-1$ για κάθε $n\geq 0$, και $\lim_{n\to\infty}\tau(n)=\infty$. Επιπρόσθετα, η ακολουθία $(\tau(n))_{n\geq 0}$ είναι και αύξουσα.

Κατ' αρχήν θα αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=[n^\beta]}^{n-1}\frac{c}{(i+1)\ln(i+1)}=\alpha\,. \tag{2.4.30}$$

Πράγματι, για αρκούντως μεγάλες τιμές του n, ισχύουν

$$\begin{aligned}\sum_{i=[n^\beta]}^{n-1}\frac{c}{(i+1)\ln(i+1)}&\geq c\sum_{i=[n^\beta]}^{n-1}\int_i^{i+1}\frac{ds}{(s+1)\ln(s+1)}\\&=c\int_{[n^\beta]}^{n}\frac{ds}{(s+1)\ln(s+1)}=c\ln\frac{\ln(n+1)}{\ln([n^\beta]+1)}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\sum_{i=[n^\beta]}^{n-1}\frac{c}{(i+1)\ln(i+1)}&\leq c\sum_{i=[n^\beta]}^{n-1}\int_{i-1}^{i}\frac{ds}{(s+1)\ln(s+1)}\\&=c\int_{[n^\beta]-1}^{n-1}\frac{ds}{(s+1)\ln(s+1)}=c\ln\frac{\ln n}{\ln[n^\beta]}\end{aligned}$$

Αλλά, εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$\lim_{n\to\infty}\left(c\ln\frac{\ln(n+1)}{\ln([n^\beta]+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(c\ln\frac{\ln n}{\ln[n^\beta]}\right)=c\ln\beta^{-1}=\frac{\alpha}{\ln\beta^{-1}}\ln\beta^{-1}=\alpha\,.$$

Επομένως, είναι προφανές ότι η (2.4.30) είναι αληθής.

Αποδεικνύεται επίσης ότι

$$a(n-1)<[(a(n))^\beta]\leq a(n)-1 \quad \text{για όλα τα μεγάλα } n. \tag{2.4.31}$$

Πράγματι, για όλα τα μεγάλα n, ισχύει $[(a(n))^\beta]\leq (a(n))^\beta$, και επειδή $\beta\in(0,1)$, είναι προφανές ότι

$$[(a(n))^\beta]<a(n)\,.$$

Αλλά, $[(a(n))^{\beta}], a(n) \in \mathbf{N}$ και ως εκ τούτου ισχύει $[(a(n))^{\beta}] \le a(n) - 1$.

Επίσης,

$$\begin{aligned}
[(a(n))^{\beta}] &> (a(n))^{\beta} - 1 = ([(a(n-1)+1)^{1/\beta} + 1] + 1)^{\beta} - 1 \\
&> ((a(n-1)+1)^{1/\beta} + 1 - 1 + 1)^{\beta} - 1 \\
&= ((a(n-1)+1)^{1/\beta} + 1)^{\beta} - 1 \\
&> a(n-1) + 1 - 1 = a(n-1).
\end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, η σχέση (2.4.31) είναι αληθής.

Άμεση συνέπεια των σχέσεων (2.4.30) και (2.4.31) είναι προφανώς η σχέση

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=[(a(n))^{\beta}]}^{a(n)-1} \frac{c}{(i+1)\ln(i+1)} = \alpha . \tag{2.4.32}$$

Επίσης, δεδομένης της (2.4.31), εύκολα διαπιστώνεται ότι

$$\sum_{i=[(a(n))^{\beta}]}^{a(n)-1} p(i) = \sum_{i=[(a(n))^{\beta}]}^{a(n)-1} \frac{c}{(i+1)\ln(i+1)} \quad \text{για όλα τα μεγάλα } n$$

και ως εκ τούτου, βάσει της (2.4.32), προκύπτει

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=[(a(n))^{\beta}]}^{a(n)-1} p(i) = \alpha . \tag{2.4.33}$$

Επιπρόσθετα, επειδή $d \ge \dfrac{c}{(i+1)\ln(i+1)}$ για όλα τα μεγάλα i, ισχύει

$$\sum_{i=[n^{\beta}]}^{n-1} p(i) \ge \sum_{i=[n^{\beta}]}^{n-1} \frac{c}{(i+1)\ln(i+1)} \quad \text{για όλα τα μεγάλα } n,$$

η οποία, βάσει της (2.4.30), δίνει

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=[n^{\beta}]}^{n-1} p(i) \ge \alpha . \tag{2.4.34}$$

Από τις σχέσεις (2.4.33) και (2.4.34), προκύπτει ότι

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=[n^{\beta}]}^{n-1} p(i) = \alpha \,. \tag{2.4.35}$$

Στη συνέχεια, θα δειχθεί ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=[n^{\beta}]}^{n} p(i) = \alpha + d \,. \tag{2.4.36}$$

Πράγματι, είναι προφανές ότι

$$\sum_{i=[(a(n))^{\beta}]}^{a(n)} p(i) = \sum_{i=[(a(n))^{\beta}]}^{a(n)-1} p(i) + d \quad \text{για όλα τα μεγάλα } n,$$

και με βάση την (2.4.33), ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=[(a(n))^{\beta}]}^{a(n)} p(i) = \alpha + d \,. \tag{2.4.37}$$

Επιπρόσθετα, εύκολα αποδεικνύεται ότι, από το $[n^{\beta}]$ έως το n, υπάρχει το πολύ ένας όρος της ακολουθίας $(a(n))$. Με βάση αυτό, είναι φανερό ότι, για όλα τα μεγάλα n ισχύει

$$\sum_{i=[n^{\beta}]}^{n} p(i) \le \sum_{i=[n^{\beta}]}^{n} \frac{c}{(i+1)\ln(i+1)} + d = \frac{c}{(n+1)\ln(n+1)} + \sum_{i=[n^{\beta}]}^{n-1} \frac{c}{(i+1)\ln(i+1)} + d \,,$$

η οποία, λόγω της σχέσης (2.4.30), δίνει

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=[n^{\beta}]}^{n} p(i) \le \alpha + d \,. \tag{2.4.38}$$

Από τις (2.4.37) και (2.4.38), προκύπτει το συμπέρασμα ότι η (2.4.36) είναι αληθής.

Επομένως,

$$y < \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=[\beta n]}^{n} p(i) = \alpha + d \,,$$

δηλαδή ισχύει η συνθήκη (2.4.24) του Θεωρήματος 2.4.Β και γι' αυτό όλες οι λύσεις της εξίσωσης (2.4.29) είναι ταλαντούμενες. Εντούτοις,

$$\alpha + d < z < 1, \qquad \alpha \le 1/e$$

και ως εκ τούτου, καμία από τις συνθήκες (2.3.15΄΄), (2.2.2΄) και (2.2.56) δεν ισχύει.

2.5. Συνθήκη ταλάντωσης των λύσεων της εξίσωσης (2.1.1), ανάλογη της (1.2.5)

Αποδεικνύεται, κατ' αρχήν, ένα λήμμα και, με βάση αυτό, αποδεικνύεται ένα θεώρημα στο οποίο δίδεται ικανή συνθήκη ταλάντωσης των λύσεων της υστερημένης εξίσωσης διαφορών (2.1.1) η οποία είναι ανάλογη της συνθήκης (1.2.5).

Έστω

$$k = -\min_{n \ge 0} \tau(n).$$

(Είναι φανερό ότι k είναι ένας θετικός ακέραιος.)

Λήμμα 2.5.Α. *Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία* $(\tau(n))_{n\ge 0}$ *είναι αύξουσα. Επιπλέον, ας υποθέσουμε ότι* $0 < \alpha \le -1 + \sqrt{2}$, *όπου το* α *ορίζεται από τη* (2.3.1), *δηλαδή*

$$\alpha := \liminf_{n \to \infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i). \tag{2.5.1}$$

Τότε κάθε μη ταλαντούμενη λύση $(x(n))_{n \ge -k}$ *της υστερημένης εξίσωσης διαφορών* (2.1.1) *ικανοποιεί την ανισότητα*

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{x(n+1)}{x(\tau(n))} \ge \frac{1}{2}(1 - \alpha - \sqrt{1 - 2\alpha - \alpha^2}). \tag{2.5.2}$$

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$q(t) = p(n) \quad \text{για } n \le t < n+1 \quad (n = 0, 1, \cdots).$$

Προφανώς, η q είναι μία μη-αρνητική πραγματική συνάρτηση στο διάστημα $[0, \infty)$, η οποία συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα

$(n, n+1)$ $(n = 0,1,\cdots)$. Σημειώνουμε ότι $q(n) = p(n)$ για κάθε ακέραιο $n \geq 0$. Επιπλέον, θεωρούμε μία πραγματική συνάρτηση σ ορισμένη στο διάστημα $[0,\infty)$ ως ακολούθως

$$\sigma(t) = \tau(n) \quad \text{για } n \leq t < n+1 \quad (n = 0,1,\cdots).$$

Είναι φανερό ότι, για κάθε $n = 0,1,\cdots$, η συνάρτηση σ είναι συνεχής στο διάστημα $(n, n+1)$. Σημειώνουμε ότι $\sigma(n) = \tau(n)$ για όλους τους ακέραιους $n \geq 0$. Μπορούμε άμεσα να δούμε ότι

$$\sigma(t) < t \quad \text{για όλα τα } t \geq 0 \quad \text{και} \quad \lim_{t\to\infty} \sigma(t) = \infty .$$

Επίσης, καθώς η ακολουθία $(\tau(n))_{n\geq 0}$ είναι αύξουσα, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση σ είναι αύξουσα στο διάστημα $[0,\infty)$.

Έστω $(x(n))_{n\geq -k}$ μία λύση της υστερημένης εξίσωσης διαφορών (2.1.1). Ορίζουμε

$$y(t) = x(n) + \left(\Delta x(n)\right)(t-n) \quad \text{για } n \leq t < n+1 \quad (n = -k, -k+1,\cdots).$$

Είναι φανερό ότι

$$y(n) = x(n) \quad \text{για όλους τους ακέραιους } n \geq -k .$$

Επιπλέον, είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι η πραγματική συνάρτηση y είναι συνεχής στο διάστημα $[-k,\infty)$. Επίσης, μπορούμε να δούμε ότι η y συνεχώς παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $(n, n+1)$ $(n = -k, -k+1,\cdots)$ με

$$y'(t) = \Delta x(n) \quad \text{για } n < t < n+1 \quad (n = -k, -k+1,\cdots).$$

Περαιτέρω, καθώς η $(x(n))_{n\geq -k}$ ικανοποιεί την (2.1.1) για όλους τους ακέραιους $n \geq 0$, μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι η συνάρτηση y ικανοποιεί την εξίσωση

$$y'(t) + q(t)\, y(\sigma(t)) = 0 \quad \text{για } n < t < n+1 \quad (n = 0,1,\cdots). \qquad (2.5.3)$$

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι η λύση $(x(n))_{n\geq -k}$ της (2.1.1) είναι μη ταλαντούμενη. Τότε αυτή είναι είτε τελικά θετική ή τελικά αρνητική. Καθώς η $(-x(n))_{n\geq -k}$ είναι επίσης μία λύση της (2.1.1), μπορούμε (και το κάνουμε) να περιορισθούμε μόνο στην περίπτωση όπου $x(n) > 0$ για όλα τα μεγάλα n. Έστω $\rho \geq -k$ ένας ακέραιος τέτοιος ώστε $x(n) > 0$ για όλα τα $n \geq \rho$, και θεωρούμε έναν ακέραιο $r \geq 0$ έτσι ώστε $\tau(n) \geq \rho$ για $n \geq r$ (προφανώς, $r > \rho$). Τότε έπεται άμεσα από τη (2.1.1) ότι $\Delta x(n) \leq 0$ για κάθε $n \geq r$, που σημαίνει ότι η ακολουθία $(x(n))_{n\geq r}$ είναι φθίνουσα. Επιπλέον, δεν είναι δύσκολο να συμπεράνουμε ότι η συνάρτηση y είναι θετική στο διάστημα $[\rho, \infty)$ και η y είναι φθίνουσα στο διάστημα $[r, \infty)$.

Θεωρούμε έναν αυθαίρετο πραγματικό αριθμό ε με $0 < \varepsilon < \alpha$. Τότε μπορούμε να επιλέξουμε έναν ακέραιο $n_0 > r$ τέτοιον ώστε $\tau(n) \geq r$ για $n \geq n_0$, και

$$\sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) \geq \alpha - \varepsilon \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Για κάθε σημείο $t \geq n_0$, υπάρχει ένας ακέραιος $n \geq n_0$ τέτοιος ώστε $n \leq t < n+1$ και συνεπώς

$$\int_{\sigma(t)}^{t} q(s)\, ds = \int_{\tau(n)}^{t} q(s)\, ds \geq \int_{\tau(n)}^{n} q(s)\, ds = \sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) > \alpha - \varepsilon .$$

Έτσι έχουμε

$$\int_{\sigma(t)}^{t} q(s)\, ds > \alpha - \varepsilon \quad \text{για όλα τα } t \geq n_0. \qquad (2.5.4)$$

Περαιτέρω, θα αποδείξουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό.

Ισχυρισμός. *Για κάθε σημείο* $t \geq n_0$, *υπάρχει ένα* $t^* > t$ *τέτοιο ώστε* $\sigma(t^*) < t$ *και*

$$\int_t^{t^*} q(s)\,ds = \alpha - \varepsilon \,. \tag{2.5.5}$$

Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού, θεωρούμε ένα αυθαίρετο σημείο $t \geq n_0$. Θέτουμε

$$f(\nu) = \int_t^{\nu} q(s)\,ds \quad \text{για } \nu \geq t \,.$$

Βλέπουμε ότι $f(t) = 0$. Επιπλέον, δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε ότι (2.5.4) εγγυάται ότι

$$\int_0^{\infty} q(s)\,ds = \infty$$

και, ειδικότερα,

$$\int_t^{\infty} q(s)\,ds = \infty \,,$$

δηλαδή, $\lim_{\nu\to\infty} f(\nu) = \infty$. Επομένως, αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[t,\infty)$, υπάρχει πάντοτε ένα σημείο $t^* > t$ τέτοιο ώστε $f(t^*) = \alpha - \varepsilon$, δηλαδή, τέτοιο ώστε η (2.5.5) ικανοποιείται. Χρησιμοποιώντας την (2.5.4) (για το σημείο t^*) καθώς επίσης και την (2.5.5), λαμβάνουμε

$$\int_{\sigma(t^*)}^{t} q(s)\,ds = \int_{\sigma(t^*)}^{t^*} q(s)\,ds - \int_t^{t^*} q(s)\,ds > (\alpha - \varepsilon) - (\alpha - \varepsilon) = 0$$

και συνεπώς, αναγκαστικά έχουμε $\sigma(t^*) < t$. Η απόδειξη του ισχυρισμού είναι πλήρης.

Τώρα επιλέγουμε έναν ακέραιο $N > n_0$ τέτοιον ώστε $\tau(n) \geq n_0$ για κάθε $n \geq N$.

Ας θεωρήσουμε ένα αυθαίρετο σημείο $t \ge N$. Σύμφωνα με τον ισχυρισμό μας, υπάρχει $t^* > t$ τέτοιο ώστε $\sigma(t^*) < t$ και, η (2.5.5) να ισχύει. Από την (2.5.3) έπεται ότι

$$y(t) = y(t^*) + \int_t^{t^*} q(s)\, y(\sigma(s))\, ds\,. \tag{2.5.6}$$

Έστω s ένα σημείο με $t \le s \le t^*$. Καθώς η συνάρτηση σ είναι αύξουσα στο διάστημα $[0,\infty)$, έχουμε $n_0 \le \sigma(t) \le \sigma(s) \le \sigma(t^*) < t$, και $r \le \sigma(u) \le \sigma(t)$ για κάθε u με $\sigma(s) \le u \le t$. Συνεπώς, λαμβάνοντας υπόψη ότι η συνάρτηση y είναι φθίνουσα στο διάστημα $[r,\infty)$, από την (2.5.3) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} y(\sigma(s)) &= y(t) + \int_{\sigma(s)}^{t} q(u)\, y(\sigma(u))\, du \\ &\ge y(t) + \left[\int_{\sigma(s)}^{t} q(u)\, du \right] y(\sigma(t)) \\ &= y(t) + \left[\int_{\sigma(s)}^{s} q(u)\, du - \int_t^s q(u)\, du \right] y(\sigma(t)). \end{aligned}$$

Έτσι, εφαρμόζοντας τη (2.5.4) (για το σημείο s), λαμβάνουμε

$$y(\sigma(s)) > y(t) + \left[(\alpha - \varepsilon) - \int_t^s q(u)\, du \right] y(\sigma(t)).$$

Αφού αυτή η ανισότητα ισχύει για όλα τα s με $t \le s \le t^*$, έπεται από την (2.5.6) ότι

$$y(t) \ge y(t^*) + \int_t^{t^*} q(s) \left\{ y(t) + \left[(\alpha - \varepsilon) - \int_t^s q(u)\, du \right] y(\sigma(t)) \right\} ds = y(t^*)$$
$$+ \left[\int_t^{t^*} q(s)\, ds \right] y(t) + \left\{ (\alpha - \varepsilon) \int_t^{t^*} q(s)\, ds - \int_t^{t^*} q(s) \left[\int_t^s q(u)\, du \right] ds \right\} y(\sigma(t))$$

και συνεπώς, λόγω της (2.5.5),

$$y(t) \geq y(t^*) + (\alpha-\varepsilon)\, y(t) + \left\{(\alpha-\varepsilon)^2 - \int_t^{t^*} q(s)\left[\int_t^s q(u)\,du\right]ds\right\} y(\sigma(t)) . \qquad (2.5.7)$$

Με βάση το γνωστό τύπο

$$\int_t^{t^*} q(s)\left[\int_t^s q(u)\,du\right]ds = \int_t^{t^*} q(u)\left[\int_u^{t^*} q(s)\,ds\right]du\ ,$$

ή

$$\int_t^{t^*} q(s)\left[\int_t^s q(u)\,du\right]ds = \int_t^{t^*} q(s)\left[\int_s^{t^*} q(u)\,du\right]ds\ ,$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}\int_t^{t^*} q(s)\left[\int_t^s q(u)\,du\right]ds &= \frac{1}{2}\left\{q(s)\left[\int_t^s q(u)\,du\right]ds + \int_t^{t^*} q(s)\left[\int_s^{t^*} q(u)\,du\right]ds\right\}\\ &= \frac{1}{2}\int_t^{t^*} q(s)\left[\int_t^s q(u)\,du + \int_s^{t^*} q(u)\,du\right]ds\\ &= \frac{1}{2}\int_t^{t^*} q(s)\left[\int_t^{t^*} q(u)\,du\right]ds = \frac{1}{2}\left[\int_t^{t^*} q(s)\,ds\right]^2\end{aligned}$$

και επομένως, από την (2.5.5),

$$\int_t^{t^*} q(s)\left[\int_t^s q(u)\,du\right]ds = \frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)^2 .$$

Άρα, η (2.5.7) γράφεται ως εξής

$$y(t) \geq y(t^*) + (\alpha-\varepsilon)\, y(t) + \frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)^2\, y(\sigma(t)) . \qquad (2.5.8)$$

Αυτή δίνει

$$y(t) > (\alpha-\varepsilon)\, y(t) + \frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)^2\, y(\sigma(t))\ ,$$

δηλαδή,

$$y(t) > \frac{(\alpha-\varepsilon)^2}{2[1-(\alpha-\varepsilon)]}\, y(\sigma(t)) .$$

(Σημειώνουμε ότι $0 < \alpha - \varepsilon < \alpha \leq -1 + \sqrt{2} < 1$). Έχουμε επομένως αποδείξει ότι

$$y(t) > \lambda_1 \, y(\sigma(t)) \quad \text{για όλα τα } t \geq N, \tag{2.5.9}$$

όπου

$$\lambda_1 = \frac{(\alpha - \varepsilon)^2}{2[1 - (\alpha - \varepsilon)]}.$$

Τώρα, λόγω της (2.5.9) (για το σημείο t^*), έχουμε

$$y(t^*) > \lambda_1 \, y(\sigma(t^*)).$$

Αλλά, αφού $\sigma(t^*) < t$ και η συνάρτηση y είναι φθίνουσα στο διάστημα $[r, \infty)$, έχουμε επίσης

$$y(\sigma(t^*)) \geq y(t).$$

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες ανισότητες, λαμβάνουμε

$$y(t^*) > \lambda_1 \, y(t)$$

και επομένως από την (2.5.8) προκύπτει

$$y(t) > \lambda_1 \, y(t) + (\alpha - \varepsilon) \, y(t) + \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)^2 \, y(\sigma(t))$$

ή

$$[1 - (\alpha - \varepsilon) - \lambda_1] \, y(t) > \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)^2 \, y(\sigma(t)).$$

Αυτό συνεπάγεται, ειδικότερα, ότι

$$1 - (\alpha - \varepsilon) - \lambda_1 > 0.$$

Συνεπώς,

$$y(t) > \frac{(\alpha-\varepsilon)^2}{2[1-(\alpha-\varepsilon)-\lambda_1]}\, y(\sigma(t)) .$$

Άρα, έχει αποδειχθεί ότι

$$y(t) > \lambda_2\, y(\sigma(t)) \quad \text{για όλα τα } t \geq N ,$$

όπου

$$\lambda_2 = \frac{(\alpha-\varepsilon)^2}{2[1-(\alpha-\varepsilon)-\lambda_1]} .$$

Ακολουθώντας την ανωτέρω διαδικασία, μπορούμε επαγωγικά να κατασκευάσουμε μία ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών $(\lambda_\nu)_{\nu\geq 1}$ με

$$1-(\alpha-\varepsilon)-\lambda_\nu > 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

και

$$\lambda_{\nu+1} = \frac{(\alpha-\varepsilon)^2}{2[1-(\alpha-\varepsilon)-\lambda_\nu]} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

τέτοια ώστε

$$y(t) > \lambda_\nu\, y(\sigma(t)) \quad \text{για όλα τα } t \geq N \quad (\nu = 1, 2, \ldots) . \tag{2.5.10}$$

Καθώς $\lambda_1 > 0$, λαμβάνουμε

$$\lambda_2 = \frac{(\alpha-\varepsilon)^2}{2[1-(\alpha-\varepsilon)-\lambda_1]} > \frac{(\alpha-\varepsilon)^2}{2[1-(\alpha-\varepsilon)]} = \lambda_1 ,$$

δηλαδή, $\lambda_2 > \lambda_1$. Εύκολα προκύπτει με επαγωγή ότι η ακολουθία $(\lambda_\nu)_{\nu\geq 1}$ είναι γνησίως αύξουσα. Περαιτέρω, λαμβάνοντας υπόψη ότι η συνάρτηση y είναι φθίνουσα στο διάστημα $[r, \infty)$ και χρησιμοποιώντας την (2.5.9) (για $t = N$), λαμβάνουμε

$$y(N) > \lambda_\nu\, y(\sigma(N)) \geq \lambda_\nu\, y(N) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) .$$

Επομένως, για κάθε ακέραιο $\nu \geq 1$, έχουμε $\lambda_\nu < 1$. Αυτό εξασφαλίζει ότι η ακολουθία $(\lambda_\nu)_{\nu\geq 1}$ είναι φραγμένη. Αφού η $(\lambda_\nu)_{\nu\geq 1}$ είναι γνησίως αύξουσα και φραγμένη ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών, έπεται ότι το $\lim_{\nu\to\infty}\lambda_\nu$ υπάρχει ως ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Θέτουμε

$$\Lambda = \lim_{\nu\to\infty}\lambda_\nu .$$

Τότε η (2.5.10) δίνει

$$y(t) \geq \Lambda\, y(\sigma(t)) \quad \text{για όλα τα } t \geq N . \tag{2.5.11}$$

Από τον ορισμό της $(\lambda_\nu)_{\nu\geq 1}$, ισχύει

$$\Lambda = \frac{(\alpha-\varepsilon)^2}{2[1-(\alpha-\varepsilon)-\Lambda]} ,$$

δηλαδή,

$$\Lambda^2 - [1-(\alpha-\varepsilon)]\Lambda + \frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)^2 = 0 .$$

Επομένως, είτε

$$\Lambda = \frac{1}{2}\left(1-(\alpha-\varepsilon)-\sqrt{1-2(\alpha-\varepsilon)-(\alpha-\varepsilon)^2}\right)$$

ή

$$\Lambda = \frac{1}{2}\left(1-(\alpha-\varepsilon)+\sqrt{1-2(\alpha-\varepsilon)-(\alpha-\varepsilon)^2}\right).$$

Και στις δύο περιπτώσεις, έχουμε

$$\Lambda \geq \frac{1}{2}\left(1-(\alpha-\varepsilon)-\sqrt{1-2(\alpha-\varepsilon)-(\alpha-\varepsilon)^2}\right)$$

και συνεπώς από την (2.5.11) προκύπτει

$$y(t) \geq \frac{1}{2}\left(1-(\alpha-\varepsilon)-\sqrt{1-2(\alpha-\varepsilon)-(\alpha-\varepsilon)^2}\right) y(\sigma(t)) \tag{2.5.12}$$

για όλα τα $t \geq N$.

Έστω n ένας αυθαίρετος ακέραιος με $n \geq N$. Τότε, από την (2.5.12),

$$y(t) \geq \frac{1}{2}\left(1-(\alpha-\varepsilon)-\sqrt{1-2(\alpha-\varepsilon)-(\alpha-\varepsilon)^2}\right) y(\sigma(t)) \quad \text{για } n \leq t < n+1 .$$

Αλλά, $y(\sigma(t)) = y(\tau(n)) = x(\tau(n))$ για $n \leq t < n+1$. Έτσι,

$$y(t) \geq \frac{1}{2}\left(1-(\alpha-\varepsilon)-\sqrt{1-2(\alpha-\varepsilon)-(\alpha-\varepsilon)^2}\right)x(\tau(n)) \quad \text{για } n \leq t < n+1$$

και επομένως

$$\lim_{t\to(n+1)-0} y(t) \geq \frac{1}{2}\left(1-(\alpha-\varepsilon)-\sqrt{1-2(\alpha-\varepsilon)-(\alpha-\varepsilon)^2}\right)x(\tau(n)) .$$

Σημειώνουμε ότι $\lim_{t\to(n+1)-0} y(t) = y(n+1) = x(n+1)$. Έχουμε επομένως αποδείξει ότι

$$x(n+1) \geq \frac{1}{2}\left(1-(\alpha-\varepsilon)-\sqrt{1-2(\alpha-\varepsilon)-(\alpha-\varepsilon)^2}\right)x(\tau(n)) . \quad (2.5.13)$$

για όλα τα $n \geq N$

Τελικά, βλέπουμε ότι η (2.5.13) γράφεται ως εξής

$$\frac{x(n+1)}{x(\tau(n))} \geq \frac{1}{2}\left(1-(\alpha-\varepsilon)-\sqrt{1-2(\alpha-\varepsilon)-(\alpha-\varepsilon)^2}\right) \quad \text{για κάθε } n \geq N$$

και συνεπώς

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x(n+1)}{x(\tau(n))} \geq \frac{1}{2}\left(1-(\alpha-\varepsilon)-\sqrt{1-2(\alpha-\varepsilon)-(\alpha-\varepsilon)^2}\right).$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς ε με $0 < \varepsilon < \alpha$. Επομένως, μπορούμε να εξάγουμε την (2.5.2).

Η απόδειξη του λήμματος είναι πλήρης.

Θεώρημα 2.5.Β. *Έστω ότι οι υποθέσεις του Λήμματος* 2.5.Α *ισχύουν. Τότε η συνθήκη*

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n} p(i) > 1 - \frac{1}{2}\left(1-\alpha-\sqrt{1-2\alpha-\alpha^2}\right) \quad (2.5.14)$$

είναι ικανή για την ταλάντωση όλων των λύσεων της υστερημένης εξίσωσης διαφορών (2.1.1).

Απόδειξη. Υποθέτουμε, για να οδηγηθούμε σε αντίφαση, ότι υπάρχει μία μη ταλαντούμενη λύση $(x(n))_{n\ge -k}$ της υστερημένης εξίσωσης διαφορών (2.1.1). Αφού η $(-x(n))_{n\ge -k}$ είναι επίσης μία λύση της (2.1.1), μπορούμε να περιορίσουμε τη συζήτησή μας μόνο στην περίπτωση όπου η λύση $(x(n))_{n\ge -k}$ είναι τελικά θετική. Θεωρούμε έναν ακέραιο $\rho \ge -k$ έτσι ώστε $x(n) > 0$ για κάθε $n \ge \rho$, και έστω $r \ge 0$ ένας ακέραιος τέτοιος ώστε $\tau(n) \ge \rho$ για $n \ge r$ (προφανώς, $r > \rho$). Τότε από τη (2.1.1) άμεσα εξάγουμε ότι $\Delta x(n) \le 0$ για όλα τα $n \ge r$, και συνεπώς η ακολουθία $(x(n))_{n\ge r}$ είναι φθίνουσα.

Τώρα, επιλέγουμε έναν ακέραιο $n_0 > r$ τέτοιον ώστε $\tau(n) \ge r$ για $n \ge n_0$. Περαιτέρω, θεωρούμε έναν ακέραιο $N > n_0$ έτσι ώστε $\tau(n) \ge n_0$ για $n \ge N$. Καθώς η ακολουθία $(\tau(n))_{n\ge 0}$ είναι αύξουσα και η ακολουθία $(x(n))_{n\ge r}$ είναι φθίνουσα, έπεται από την (2.1.1) ότι, για κάθε $n \ge N$,

$$x(\tau(n)) - x(n+1) = \sum_{i=\tau(n)}^{n} p(i)\, x(\tau(i)) \ge \left(\sum_{i=\tau(n)}^{n} p(i) \right) x(\tau(n)) .$$

Αυτή δίνει

$$\sum_{i=\tau(n)}^{n} p(i) \le 1 - \frac{x(n+1)}{x(\tau(n))} \quad \text{για όλα τα } n \ge N .$$

Επομένως,

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n} p(i) \le 1 - \liminf_{n\to\infty} \frac{x(n+1)}{x(\tau(n))} . \tag{2.5.15}$$

Αλλά, λόγω του Λήμματος 2.5.A, η ανισότητα (2.5.2) ισχύει. Έτσι, λαμβάνουμε

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n} p(i) \le 1 - \frac{1}{2}(1 - \alpha - \sqrt{1 - 2\alpha - \alpha^2}) ,$$

που είναι σε αντίφαση με την (2.5.14). Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

Εάν παραληφθεί η συνθήκη ότι η ακολουθία $(\tau(n))_{n\ge 0}$ είναι αύξουσα, τότε η συνθήκη (2.5.14) αντικαθίστανται από τη συνθήκη

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=\sigma(n)}^{n} p(i) > 1 - \frac{1}{2}(1-\alpha-\sqrt{1-2\alpha-\alpha^2}),$$

όπου η ακολουθία των ακεραίων $(\sigma(n))_{n\ge 0}$ ορίζεται από τη σχέση (2.2.1). Είναι φανερό ότι η ακολουθία $(\sigma(n))_{n\ge 0}$ είναι αύξουσα. Επίσης ισχύει η σχέση (2.3.17) και επομένως

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=\sigma(n)}^{n-1} p(i) = \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i).$$

Με χρήση της παραπάνω ισότητας και με εφαρμογή του Λήμματος Α.3 (βλέπε επίσης [75] και [48]), το Θεώρημα 2.5.Β ακολούθως μπορεί νε γενικευθεί ως εξής:

Θεώρημα 2.5.Β΄. *Έστω η ακολουθία* $(\sigma(n))_{n\ge 0}$ *όπως ορίζεται από τη* (2.2.1). *Επιπλέον, υποθέτουμε ότι* $0<\alpha\le -1+\sqrt{2}$, *όπου* α *ορίζεται από τη* (2.5.1). *Τότε η συνθήκη*

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=\sigma(n)}^{n} p(i) > 1 - \frac{1}{2}(1-\alpha-\sqrt{1-2\alpha-\alpha^2}) \tag{2.5.14΄}$$

είναι ικανή για την ταλάντωση όλων των λύσεων της υστερημένης εξίσωσης διαφορών (2.1.1).

Πόρισμα. *Ας θεωρήσουμε την εξίσωση διαφορών με σταθερή υστέρηση* (1.1.1) *και έστω*

$$0<\alpha := \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=n-k}^{n-1} p(i) \le \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}.$$

Τότε η συνθήκη

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=n-k}^{n} p(i) > 1 - \frac{1}{2}(1-\alpha-\sqrt{1-2\alpha-\alpha^2}) \tag{2.5.14΄΄}$$

είναι ικανή για την ταλάντωση όλων των λύσεων της εξίσωσης (1.1.1).

Επομένως, στην περίπτωση αυτή, η συνθήκη (2.5.14΄΄) δίνει τη συνθήκη (1.2.5) των Chen και Yu [9].

Παρατήρηση 1. Παρατηρούμε ότι, όταν $0 < \alpha \le -1+\sqrt{2}$, είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\frac{1-\alpha-\sqrt{1-2\alpha-\alpha^2}}{2} > \alpha\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1-\alpha}} > \frac{1-\alpha-\sqrt{1-2\alpha}}{2} > (1-\sqrt{1-\alpha})^2$$

και επομένως η συνθήκη (2.5.14) είναι ασθενέστερη των συνθηκών (2.3.15΄΄), (2.4.24) και (2.3.16΄΄).

Παρατήρηση 2. Παρατηρούμε ότι, το Λήμμα 2.5.Α και το Θεώρημα 2.5.Β είναι τα διακριτά ανάλογα των αντίστοιχων αποτελεσμάτων των Yu, Wang, Zhang και Qian [111] όσον αφορά τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης με μεταβλητή υστέρηση (1.1.3) (και, ειδικότερα, της διαφορικής εξίσωσης με σταθερή υστέρηση (1.1.2)).

Στο σημείο αυτό, ακολουθεί ένα παράδειγμα μίας εξίσωσης διαφορών με μεταβλητή υστέρηση, το οποίο καταδεικνύει τη σημασία της συνθήκης ταλάντωσης που δίνεται στο Θεώρημα 2.5.Β.

Παράδειγμα. Έστω α ένας πραγματικός αριθμός με $0 < \alpha \le 1/e$, και ας ορίσουμε

$$A_1 = 1-(1-\sqrt{1-\alpha})^2, \quad A_2 = 1-\frac{1}{2}(1-\alpha-\sqrt{1-2\alpha}), \quad A_3 = 1-\alpha\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1-\alpha}}$$

και

$$A_4 = 1-\frac{1}{2}(1-\alpha-\sqrt{1-2\alpha-\alpha^2}).$$

Σημειώνουμε ότι (βλέπε Παρατήρηση 1) $A_1 > A_2 > A_3 > A_4$. Στη συνέχεια, θεωρούμε ένα θετικό πραγματικό αριθμός d τέτοιον ώστε

$A_4 - \alpha < d < A_3 - \alpha$ (σημειώνουμε ότι $A_4 > \alpha$). Έτσι, έχουμε $A_1 > A_2 > A_3 > \alpha + d > A_4$. Περαιτέρω, έστω β ένας πραγματικός αριθμός με $0 < \beta < 1$, και ας θέσουμε $c = \dfrac{\alpha}{-\ln \beta}$ και $r = 2 + \left[\dfrac{1}{\beta}\right]$ ($\left[\dfrac{1}{\beta}\right]$ συμβολίζει τον μεγαλύτερον ακέραιον που είναι μικρότερος ή ίσος του $\dfrac{1}{\beta}$).

Θεωρούμε τώρα την υστερημένη εξίσωση διαφορών (2.1.1) με

$$p(n) = \begin{cases} \dfrac{c}{n}, & n \in \{1,2,\ldots\} \setminus \{r, r^2, \cdots\}, \\[2ex] d\,, & n \in \{0, r, r^2, \cdots\}, \end{cases}$$

και

$$\tau(0) = -1 \quad \text{και} \quad \tau(n) = [\beta n] \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Εδώ η $(p(n))_{n \ge 0}$ είναι μία ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών, και $(\tau(n))_{n \ge 0}$ είναι μία ακολουθία ακεραίων τέτοια ώστε $\tau(n) \le n-1$ για όλα τα $n \ge 0$ και $\lim\limits_{n\to\infty} \tau(n) = \infty$. Επιπλέον, σημειώνουμε ότι η ακολουθία $(\tau(n))_{n \ge 0}$ είναι αύξουσα.

Κατ' αρχήν, θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=[\beta n]}^{n-1} \frac{c}{i} = \alpha\,. \tag{2.5.16}$$

Για τον σκοπό αυτόν, λαμβάνουμε, για n αρκούντως μεγάλα,

$$\sum_{i=[\beta n]}^{n-1} \frac{c}{i} \ge c \sum_{i=[\beta n]}^{n-1} \int_i^{i+1} \frac{ds}{s} = c \int_{[\beta n]}^{n} \frac{ds}{s} = c \ln \frac{n}{[\beta n]}$$

και

$$\sum_{i=[\beta n]}^{n-1} \frac{c}{i} \le c \sum_{i=[\beta n]}^{n-1} \int_{i-1}^{i} \frac{ds}{s} = c \int_{[\beta n]-1}^{n-1} \frac{ds}{s} = c \ln \frac{n-1}{[\beta n]-1}\,.$$

Αλλά, είναι εύκολο να δούμε

$$\lim_{n\to\infty}\left(c\ln\frac{n}{[\beta n]}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(c\ln\frac{n-1}{[\beta n]-1}\right)=c\ln\frac{1}{\beta}=\alpha\ .$$

Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι η (2.5.16) ισχύει. Ειδικότερα, έπεται από την (2.5.16) ότι

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=[\beta r^n]}^{r^n-1}\frac{c}{i}=\alpha\ . \tag{2.5.17}$$

Παρατηρούμε ότι

$$r^{n-1}<[\beta r^n]<r^n-1 \quad \text{για μεγάλα } n. \tag{2.5.18}$$

Πράγματι, για κάθε ακέραιο $n\ge 0$, έχουμε ότι $[\beta r^n]\le \beta r^n$ και, επειδή $\dfrac{\beta r^n}{r^n-1}\to\beta<1$, καθώς $n\to\infty$, ισχύει ότι $[\beta r^n]<r^n-1$ για όλα τα μεγάλα n. Από την άλλη πλευρά, για $n\ge 0$, λαμβάνουμε

$$[\beta r^n]-r^{n-1}>(\beta r^n-1)-r^{n-1}=(\beta r-1)r^{n-1}-1.$$

Αλλά

$$\beta r-1=\beta\left(2+\left[\frac{1}{\beta}\right]\right)-1>\beta\left(1+\frac{1}{\beta}\right)-1=\beta>0$$

και έτσι $\lim\limits_{n\to\infty}[(\beta r-1)r^{n-1}-1]=\infty$, που εγγυάται ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\left([\beta r^n]-r^{n-1}\right)=\infty$. Άρα, $[\beta r^n]-r^{n-1}>0$, για όλα τα μεγάλα n. Επομένως, η (2.5.18) αποδείχθηκε.

Τώρα, από τη (2.5.18), λαμβάνουμε

$$\sum_{i=[\beta r^n]}^{r^n-1}p(i)=\sum_{i=[\beta r^n]}^{r^n-1}\frac{c}{i} \quad \text{για όλα τα μεγάλα } n$$

και συνεπώς, εξαιτίας (2.5.17),

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=[\beta r^n]}^{r^n-1} p(i)=\alpha . \tag{2.5.19}$$

Περαιτέρω, επειδή $d\ge\frac{c}{i}$ για όλα τα μεγάλα i, λαμβάνουμε

$$\sum_{i=[\beta n]}^{n-1} p(i)\ge\sum_{i=[\beta n]}^{n-1}\frac{c}{i} \quad \text{για όλα τα μεγάλα } n,$$

η οποία, βάσει της (2.5.16), δίνει

$$\liminf_{n\to\infty}\sum_{i=[\beta n]}^{n-1} p(i)\ge\alpha . \tag{2.5.20}$$

Από τις σχέσεις (2.5.19) και (2.5.20) προκύπτει ότι

$$\liminf_{n\to\infty}\sum_{i=[\beta n]}^{n-1} p(i)=\alpha . \tag{2.5.21}$$

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε ότι

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=[\beta n]}^{n} p(i)=\alpha+d . \tag{2.5.22}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{i=[\beta r^n]}^{r^n} p(i)=\sum_{i=[\beta r^n]}^{r^n-1} p(i)+d \quad \text{για όλα τα μεγάλα } n,$$

και έτσι, εξαιτίας της (2.5.19),

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=[\beta r^n]}^{r^n} p(i)=\alpha+d . \tag{2.5.23}$$

Περαιτέρω, βλέπουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln n}{\ln r}-\frac{\ln[\beta n]}{\ln r}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln\dfrac{n}{[\beta n]}}{\ln r}\right)=\frac{\ln\dfrac{1}{\beta}}{\ln r}<1,$$

που συνεπάγεται ότι

$$\frac{\ln n}{\ln r} - \frac{\ln[\beta n]}{\ln r} < 1 \quad \text{για αρκούντως μεγάλα } n.$$

Άρα, για κάθε μεγάλο n, υπάρχει το πολύ ένας ακέραιος n^* τέτοιος ώστε

$$\frac{\ln[\beta n]}{\ln r} \le n^* \le \frac{\ln n}{\ln r} \quad \text{ή} \quad \ln[\beta n] \le n^* \ln r \le \ln n,$$

δηλαδή, τέτοιος ώστε

$$[\beta n] \le r^{n^*} \le n.$$

Με βάση αυτό, λαμβάνουμε

$$\sum_{i=[\beta n]}^{n} p(i) \le \sum_{i=[\beta n]}^{n} \frac{c}{i} + d = \sum_{i=[\beta n]}^{n-1} \frac{c}{i} + \frac{c}{n} + d \quad \text{για όλα τα μεγάλα } n.$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τη (2.5.16), λαμβάνουμε

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=[\beta n]}^{n} p(i) \le \alpha + d. \qquad (2.5.24)$$

Από τις (2.5.23) και (2.5.24), συμπεραίνουμε ότι η (2.5.22) ισχύει πάντα.

Εδώ, παρατηρούμε ότι η (2.5.21) συμπίπτει με τη (2.3.1). Επιπλέον, αφού

$$A_4 < \alpha + d < A_3 < A_2 < A_1,$$

έπεται από τη (2.5.22) ότι η συνθήκη (2.5.14) του Θεωρήματος 2.5.Β ικανοποιείται και επομένως όλες οι λύσεις της εξίσωσης (2.1.1) είναι ταλαντούμενες. Παρατηρούμε, από την άλλη πλευρά, ότι καμία από τις συνθήκες (2.3.16΄΄), (2.4.24) και (2.3.15΄΄) δεν ικανοποιείται. Επιπρόσθετα, άμεσα βλέπουμε ότι οι συνθήκες (2.2.2΄), (2.1.3) και (2.2.56) επίσης δεν ικανοποιούνται.

Κεφάλαιο

3

Εξισώσεις Διαφορών με μεταβλητή προώθηση

Στο κεφάλαιο αυτό, μελετάται η γραμμική εξίσωση διαφορών με προωθημένο όρισμα και διατυπώνονται ικανές συνθήκες για την ταλάντωση των λύσεων αυτής.

3.1. Εξισώσεις Διαφορών με μεταβλητή προώθηση

Μία γραμμική εξίσωση διαφορών με προωθημένο όρισμα $(\tau(n))_{n\geq 1}$ είναι της μορφής

$$x(n)-x(n-1)-p(n)x(\tau(n))=0\ , \tag{3.1.1}$$

όπου, $(p(n))_{n\geq 1}$ είναι ακολουθία μη-αρνητικών πραγματικών αριθμών και $(\tau(n))_{n\geq 1}$ είναι μία ακολουθία θετικών ακεραίων τέτοια ώστε

$$\tau(n)\geq n+1 \quad \text{για κάθε } n\geq 1 . \tag{3.1.2}$$

Η μεταβλητή προώθηση της εξίσωσης (3.1.1) είναι $(\tau(n)-n)_{n\geq 1}$.

Με τον όρο *λύση* της εξίσωσης (3.1.1) εννοείται μια ακολουθία $(x(n))$ η οποία ορίζεται για $n\geq 0$ και ικανοποιεί την εξίσωση (3.1.1) για κάθε $n\geq 1$.

Μία λύση $(x(n))_{n\geq 0}$ της εξίσωσης (3.1.1) ονομάζεται *ταλαντούμενη* (γύρω από το μηδέν) αν για κάθε θετικό ακέραιο n υπάρχουν $n_1, n_2\geq n$

έτσι ώστε $x(n_1)x(n_2) \leq 0$. Με άλλα λόγια, μία λύση είναι ταλαντούμενη αν δεν είναι τελικά θετική ούτε τελικά αρνητική. Στην αντίθετη περίπτωση, η λύση ονομάζεται *μη ταλαντούμενη*.

Η εξίσωση (3.1.1), είναι προφανώς το διακριτό ανάλογο της διαφορικής εξίσωσης

$$x'(t) - p(t)x(\tau(t)) = 0 \ , \tag{3.1.3}$$

όπου, p είναι μια μη-αρνητική συνεχής πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $[0, +\infty)$, και τ είναι μια συνάρτηση με $\tau(t) \geq t$ για $t \geq 0$.

Στην ειδική περίπτωση κατά την οποίαν, $\tau(t) = t + T$, όπου T είναι μια θετική πραγματική σταθερά, η εξίσωση (3.1.3) παίρνει τη μορφή [49, 61, 107, 113]

$$x'(t) - p(t)x(t+T) = 0 \ . \tag{3.1.4}$$

Για την εξίσωση (3.1.4), το 1982, οι Ladas και Stavroulakis [61] απέδειξαν ότι, εάν ισχύει η συνθήκη

$$\liminf_{t\to\infty} \int_t^{t+T} p(s)\, ds > \frac{1}{e} , \tag{3.1.5}$$

τότε όλες οι λύσεις της εξίσωσης (3.1.4) είναι ταλαντούμενες.

Το διακριτό ανάλογο της διαφορικής εξίσωσης (3.1.4) είναι της μορφής

$$x(n) - x(n-1) - p(n)x(n+k) = 0 \ , \tag{3.1.6}$$

όπου k είναι ένας θετικός ακέραιος.

Για την εξίσωση (3.1.6), δεν υπάρχουν ανάλογες των (1.2.2) και (1.2.3) συνθήκες ταλάντωσης των λύσεων αυτής και λίγες εργασίες έχουν γίνει συγκριτικά με την αντίστοιχη εξίσωση διαφορών με σταθερή υστέρηση (1.1.1) (βλέπε για παράδειγμα, [80], [106] και τις αναφορές αυτών). Ούτε ανάλογες συνθήκες με αυτές της εξίσωσης (1.1.1) για την περίπτωση όπου καμία από τις συνθήκες (1.2.2) και (1.2.3) δεν ισχύει.

Το ίδιο ισχύει και για την εξίσωση (3.1.1), για την οποία στο κεφάλαιο αυτό αποδεικνύονται ικανές συνθήκες ταλάντωσης, ανάλογες με αυτές των προηγούμενων παραγράφων και οι οποίες αφορούν την εξίσωση (2.1.1).

3.2. Κριτήρια ταλάντωσης των λύσεων της εξίσωσης (3.1.1)

Θεώρημα 3.2.Α. *Έστω ότι η ακολουθία* $(\tau(n))_{n\geq 1}$ *είναι αύξουσα, και*

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{\tau(n)} p(i) > 1. \tag{3.2.1}$$

Τότε όλες οι λύσεις της προωθημένης εξίσωσης διαφορών (3.1.1) *είναι ταλαντούμενες.*

Απόδειξη. Έστω ότι η εξίσωση (3.1.1) έχει μία μη ταλαντούμενη λύση $(x(n))_{n\geq 0}$. Τότε αυτή είναι είτε τελικά θετική είτε τελικά αρνητική. Επειδή όμως η $(-x(n))_{n\geq 0}$ είναι επίσης λύση της εξίσωσης (3.1.1), αρκεί να εξετασθεί μόνο η περίπτωση όπου $x(n)>0$ για όλα τα μεγάλα n. Έστω λοιπόν ότι, η εξίσωση (3.1.1) έχει μια θετική λύση $(x(n))$. Τότε, υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ έτσι ώστε $x(n-1)>0$ για κάθε $n \geq n_0$ και ως εκ τούτου

$$x(n),\ x(\tau(n)) > 0 \quad \text{για κάθε } n \geq n_0 .$$

Επομένως, από την εξίσωση (3.1.1), προκύπτει

$$x(n) - x(n-1) = p(n)x(\tau(n)) \geq 0 \quad \text{για κάθε } n \geq n_0$$

δηλαδή, η ακολουθία $(x(n))_{n\geq n_0}$ είναι αύξουσα.

Αθροίζοντας κατά μέλη τις σχέσεις που προκύπτουν με εφαρμογή της εξίσωσης (3.1.1) από n έως $\tau(n)$ και δεδομένου ότι, οι ακολουθίες $(x(n))_{n\geq n_0}$ και $(\tau(n))_{n\geq 1}$ είναι αύξουσες, προκύπτει

$$x(\tau(n)) = x(n-1) + \sum_{i=n}^{\tau(n)} p(i)\, x(\tau(i)) \geq \left(\sum_{i=n}^{\tau(n)} p(i) \right) x(\tau(n)),$$

οπότε

$$x(\tau(n)) \left[\sum_{i=n}^{\tau(n)} p(i) - 1 \right] \leq 0 .$$

Η τελευταία ανισότητα έρχεται σε αντίφαση με τη σχέση (3.2.1). Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

Παράδειγμα 1. Δίνεται η εξίσωση διαφορών

$$x(n) - x(n-1) - p(n)\, x(\tau(n)) = 0, \quad n \geq 1, \tag{3.2.2}$$

όπου $\tau(n) = n^2 + 1$, $n \geq 1$ και

$$p(n) = \frac{c}{(n+2)\ln(n+2)}, \quad n \geq 1, \quad c = \frac{e}{\ln 4}.$$

Είναι προφανές ότι $(p(n))_{n\geq 1}$ είναι μια ακολουθία μη-αρνητικών πραγματικών αριθμών, και $\tau(n) \geq n+1$ για κάθε $n \geq 1$. Επιπρόσθετα, η ακολουθία $(\tau(n))_{n\geq 1}$ είναι και αύξουσα.

Επειδή $\dfrac{c}{(n+2)\ln(n+2)}$ είναι φθίνουσα ακολουθία, ισχύουν οι ανισότητες:

$$\begin{aligned} \sum_{i=n}^{n^2+1} \frac{c}{(i+2)\ln(i+2)} &\geq c \sum_{i=n}^{n^2+1} \int_i^{i+1} \frac{ds}{(s+2)\ln(s+2)} \\ &= c \int_n^{n^2+2} \frac{ds}{(s+2)\ln(s+2)} = c \ln \frac{\ln(n^2+4)}{\ln(n+2)}, \end{aligned}$$

ή

$$\sum_{i=n}^{n^2+1} \frac{c}{(i+2)\ln(i+2)} \geq c \ln \frac{\ln(n^2+4)}{\ln(n+2)}$$

και

$$\sum_{i=n}^{n^2+1} \frac{c}{(i+2)\ln(i+2)} \le c \sum_{i=n}^{n^2+1} \int_{i-1}^{i} \frac{ds}{(s+2)\ln(s+2)}$$

$$= c \int_{n-1}^{n^2+1} \frac{ds}{(s+2)\ln(s+2)} = c \ln \frac{\ln(n^2+3)}{\ln(n+1)},$$

ή

$$\sum_{i=n}^{n^2+1} \frac{c}{(i+2)\ln(i+2)} \le c \ln \frac{\ln(n^2+3)}{\ln(n+1)} \ .$$

Αλλά, εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$\lim_{n\to\infty}\left(c \ln \frac{\ln(n^2+4)}{\ln(n+2)} \right) = \lim_{n\to\infty}\left(c \ln \frac{\ln(n^2+3)}{\ln(n+1)} \right) = c \ln 2 = \frac{e}{\ln 4} \ln 2 = \frac{e}{2} .$$

Επομένως, βάσει του θεωρήματος των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{n^2+1} p(i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{n^2+1} \frac{c}{(i+2)\ln(i+2)} = \frac{e}{2}$$

και ως εκ τούτου

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{n^2+1} p(i) = \frac{e}{2} > 1 .$$

Δηλαδή, όλες οι συνθήκες του Θεωρήματος 3.2.Α ισχύουν, άρα οι λύσεις της εξίσωσης (3.2.2) είναι ταλαντούμενες.

Θεώρημα 3.2.Β. *Έστω ότι η ακολουθία* $(\tau(n))_{n\ge 1}$ *είναι αύξουσα, και*

$$\alpha := \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=n+1}^{\tau(n)} p(i) . \tag{3.2.3}$$

I) *Εάν* $\alpha \in (0,1]$ *και ισχύει η συνθήκη*

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\tau(n)} p(i) > 1 - (1-\sqrt{1-\alpha})^2 , \tag{3.2.4}$$

τότε όλες οι λύσεις της προωθημένης εξίσωσης διαφορών (3.1.1) *είναι ταλαντούμενες.*

ΙΙ) *Εάν* $\alpha \in (0,1)$, $p(n) \geq 1-\sqrt{1-\alpha}$ *για όλα τα μεγάλα* n, *και ισχύει η συνθήκη*

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{\tau(n)} p(i) > 1-\alpha\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1-\alpha}}, \tag{3.2.5}$$

τότε όλες οι λύσεις της εξίσωσης (3.1.1) *είναι ταλαντούμενες.*

Θεώρημα 3.2.Γ. *Έστω ότι η ακολουθία* $(\tau(n))_{n\geq 1}$ *είναι αύξουσα και το* α *ορίζεται από τη* (3.2.3).

Ι) *Εάν* $\alpha \in (0, 1/2]$, *τότε η συνθήκη*

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{\tau(n)} p(i) > 1-\frac{1}{2}(1-\alpha-\sqrt{1-2\alpha}), \tag{3.2.6}$$

είναι ικανή για την ταλάντωση όλων των λύσεων της προωθημένης εξίσωσης διαφορών (3.1.1).

ΙΙ) *Εάν* $\alpha \in (0, 6-4\sqrt{2}]$ *και, επιπρόσθετα,*

$$p(n) \geq \frac{\alpha}{2} \quad \text{για όλα τα μεγάλα } n, \tag{3.2.7}$$

τότε η συνθήκη

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{\tau(n)} p(i) > 1-\frac{1}{4}\left(2-3\alpha-\sqrt{4-12\alpha+\alpha^2}\right), \tag{3.2.8}$$

είναι ικανή για την ταλάντωση όλων των λύσεων της εξίσωσης (3.1.1).

Οι αποδείξεις των Θεωρημάτων 3.2.Β και 3.2.Γ είναι σε γενικές γραμμές παρόμοιες με τις αποδείξεις των θεωρημάτων 2.3.Β και 2.4.Β που αφορούν την εξίσωση (2.1.1) και έχουν παρουσιαστεί στο προηγούμενο κεφάλαιο. Για να τονισθούν όμως οι διαφορές που υπάρχουν, θα δοθεί η απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.Γ η οποία βασίζεται στο παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 3.2.Δ. *Έστω ότι η ακολουθία* $(\tau(n))_{n\geq 1}$ *είναι αύξουσα,* $(x(n))_{n\geq 0}$ *μία μη ταλαντούμενη λύση και*

$$\alpha := \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=n+1}^{\tau(n)} p(i)\,. \tag{3.2.3}$$

i) *Εάν* $0<\alpha\leq 1/2$ *, τότε ισχύει η ανισότητα*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x(n-1)}{x(\tau(n))} \geq \frac{1}{2}\left(1-\alpha-\sqrt{1-2\alpha}\right). \tag{3.2.9}$$

ii) *Εάν* $0<\alpha\leq 6-4\sqrt{2}$ *και ισχύει η* (3.2.7), *τότε ισχύει η ανισότητα*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x(n-1)}{x(\tau(n))} \geq \frac{1}{4}\left(2-3\alpha-\sqrt{4-12\alpha+\alpha^2}\right). \tag{3.2.10}$$

Απόδειξη. Επειδή η λύση $(x(n))_{n\geq 0}$ της εξίσωσης (3.1.1) είναι μη ταλαντούμενη, αυτή θα είναι είτε τελικά θετική είτε τελικά αρνητική. Επειδή όμως η $(-x(n))_{n\geq 0}$ είναι επίσης λύση της εξίσωσης (3.1.1), αρκεί να εξετασθεί μόνο η περίπτωση όπου $x(n)>0$ για όλα τα μεγάλα n.

Από τη σχέση (3.2.3), είναι φανερό ότι, για κάθε $\varepsilon\in(0,\alpha)$ υπάρχει $n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbf{N}$ έτσι ώστε

$$\sum_{i=n+1}^{\tau(n)} p(i) \geq \alpha-\varepsilon \qquad \text{για κάθε } n\geq n_0\,. \tag{3.2.11}$$

Επειδή η $(x(n))$ είναι μια θετική λύση της εξίσωσης (3.1.1), υπάρχει $n_1\geq n_0$, έτσι ώστε $x(n-1)>0$ για κάθε $n\geq n_1$. Επομένως,

$$x(n),\, x(\tau(n))>0 \quad \text{για κάθε } n\geq n_1\,.$$

Έτσι, από την εξίσωση (3.1.1), προκύπτει

$$x(n)-x(n-1)=p(n)x(\tau(n))\geq 0 \quad \text{για κάθε } n\geq n_1$$

και ως εκ τούτου, η ακολουθία $(x(n))_{n\geq n_1}$ είναι αύξουσα.

Στη συνέχεια, για τυχαίο πραγματικό αριθμό ω με $0<\omega<\alpha-\varepsilon$, αποδεικνύεται ο ακόλουθος ισχυρισμός (βλέπε και σελ. 36).

Ισχυρισμός. *Για κάθε* $n \ge n_1$, *υπάρχει ένας ακέραιος* $n^* \le n$ *έτσι ώστε* $\tau(n^*) \ge n+1$, *και*

$$\sum_{i=n^*}^{n} p(i) \ge \omega \tag{3.2.12}$$

$$\sum_{i=n+1}^{\tau(n^*)} p(i) > (\alpha-\varepsilon)-\omega . \tag{3.2.13}$$

Για την απόδειξη του ισχυρισμού, έστω ακέραιος $n \ge n_1$. Διακρίνονται οι ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

1. Εάν $p(n) \ge \omega$, επιλέγοντας ως $n^* = n$, είναι προφανές ότι $\tau(n^*) = \tau(n) \ge n+1$ και

$$\sum_{i=n^*}^{n} p(i) = \sum_{i=n}^{n} p(i) = p(n) \ge \omega .$$

Επίσης, από την ανισότητα (3.2.11), προκύπτει

$$\sum_{i=n+1}^{\tau(n^*)} p(i) = \sum_{i=n+1}^{\tau(n)} p(i) \ge \alpha-\varepsilon > (\alpha-\varepsilon)-\omega ,$$

δηλαδή, οι σχέσεις (3.2.12) και (3.2.13) είναι αληθείς.

2. Εάν $p(n) < \omega$, η ανισότητα (3.2.11) συνεπάγεται ότι

$$\sum_{i=n}^{\infty} p(i) = \infty .$$

Έτσι, καθώς $p(n) < \omega$, υπάρχει πάντοτε ακέραιος $n^* < n$ έτσι ώστε

$$\sum_{i=n^*+1}^{n} p(i) < \omega \quad \text{και} \quad \sum_{i=n^*}^{n} p(i) \ge \omega .$$

Επιπρόσθετα, εάν δεν ισχύει $\tau(n^*) \ge n+1$, τότε $\tau(n^*) \le n$. Επίσης, $\tau(n^*) \ge n^*+1$. Έτσι, δεδομένου ότι $\sum_{i=n^*+1}^{n} p(i) < \omega$, προκύπτει

$$\sum_{i=n^*+1}^{\tau(n^*)} p(i) \le \sum_{i=n^*+1}^{n} p(i) < \omega .$$

Από την άλλη μεριά, η ανισότητα (3.2.11) δίνει

$$\sum_{i=n^*+1}^{\tau(n^*)} p(i) \ge \alpha - \varepsilon > \omega .$$

Συνδυασμός των δύο τελευταίων ανισοτήτων, οδηγεί προφανώς σε άτοπο. Έτσι $\tau(n^*) \ge n+1$. Επομένως,

$$\sum_{i=n+1}^{\tau(n^*)} p(i) = \sum_{i=n^*+1}^{\tau(n^*)} p(i) - \sum_{i=n^*+1}^{n} p(i) > (\alpha - \varepsilon) - \omega ,$$

δηλαδή ισχύουν οι (3.2.12) και (3.2.13). Η απόδειξη του ισχυρισμού είναι πλήρης.

Περαιτέρω, αθροίζοντας κατά μέλη τις σχέσεις που προκύπτουν με εφαρμογή της εξίσωσης (3.1.1) από n^* έως n και δεδομένου ότι οι ακολουθίες $(\tau(n))_{n\ge 1}$ και $(x(n))_{n\ge n_1}$ είναι αύξουσες, προκύπτει

$$x(n) = x(n^* - 1) + \sum_{i=n^*}^{n} p(i)\, x(\tau(i)) \ge x(n^* - 1) + \left(\sum_{i=n^*}^{n} p(i) \right) x(\tau(n^*)) ,$$

ή, λόγω της σχέσης (3.2.12)

$$x(n) \ge x(n^* - 1) + \omega\, x(\tau(n^*)) . \tag{3.2.14}$$

Τώρα, αθροίζοντας από $n+1$ έως $\tau(n^*)$ και δεδομένου ότι οι ακολουθίες $(\tau(n))_{n\ge 1}$ και $(x(n))_{n\ge n_1}$ είναι αύξουσες, προκύπτει

$$x(\tau(n^*)) = x(n) + \sum_{i=n+1}^{\tau(n^*)} p(i)\, x(\tau(i)) \ge x(n) + \left(\sum_{i=n+1}^{\tau(n^*)} p(i) \right) x(\tau(n+1)) ,$$

ή, λόγω της σχέσης (3.2.13)

$$x(\tau(n^*)) \ge x(n) + [(\alpha - \varepsilon) - \omega]\, x(\tau(n+1)) . \tag{3.2.15}$$

Με συνδυασμό των σχέσεων (3.2.14) και (3.2.15), προκύπτει

$$x(n) \geq x(n^* - 1) + \omega[x(n) + ((\alpha - \varepsilon) - \omega)\, x(\tau(n+1))]$$

οπότε

$$x(n) \geq \frac{\omega[(\alpha - \varepsilon) - \omega]}{1 - \omega} x(\tau(n+1)) .$$

Ισχύει λοιπόν,

$$x(n) \geq \omega\lambda_1\, x(\tau(n+1)) \quad \text{για κάθε } n \geq n_1. \tag{3.2.16}$$

όπου

$$\lambda_1 = \frac{(\alpha - \varepsilon) - \omega}{1 - \omega}.$$

Τώρα, ας είναι n ένας ακέραιος με $n \geq n_1$. Υπάρχει λοιπόν ένας ακέραιος $n^* \leq n$ έτσι ώστε $\tau(n^*) \geq n+1$ και ταυτόχρονα να ισχύουν οι σχέσεις (3.2.12), (3.2.13). Επομένως, ισχύουν και οι (3.2.14) και (3.2.15). Έτσι, η (3.2.16) (για τον ακέραιο $n^* - 1$), παίρνει τη μορφή

$$x(n^* - 1) \geq \omega\lambda_1\, x(\tau(n^*)) . \tag{3.2.17}$$

Συνδυάζοντας τις (3.2.14), (3.2.16) και (3.2.15), προκύπτει

$$\begin{aligned} x(n) &\geq x(n^* - 1) + \omega\, x(\tau(n^*)) \geq \omega\lambda_1\, x(\tau(n^*)) + \omega\, x(\tau(n^*)) \\ &= \omega(1 + \lambda_1)\, x(\tau(n^*)) \geq \omega(1 + \lambda_1)\left\{x(n) + [(\alpha - \varepsilon) - \omega]\, x(\tau(n+1))\right\}, \end{aligned}$$

ή

$$[1 - \omega(1 + \lambda_1)]\, x(n) \geq \omega(1 + \lambda_1)[(\alpha - \varepsilon) - \omega]\, x(\tau(n+1)) .$$

Ιδιαίτερα, αυτό συνεπάγεται ότι $1 - \omega(1 + \lambda_1) > 0$. Συνεπώς,

$$x(n) \geq \omega \frac{(1 + \lambda_1)[(\alpha - \varepsilon) - \omega]}{1 - \omega(1 + \lambda_1)} x(\tau(n+1)) .$$

Επομένως, έχει αποδειχθεί ότι

$$x(n) \geq \omega\lambda_2\, x(\tau(n+1)) \quad \text{για κάθε } n \geq n_1,$$

όπου

$$\lambda_2 = \frac{(1 + \lambda_1)[(\alpha - \varepsilon) - \omega]}{1 - \omega(1 + \lambda_1)} .$$

Ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία, μπορούμε επαγωγικά να κατασκευάσουμε μία ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών $(\lambda_\nu)_{\nu\ge 1}$, ίδια ακριβώς με την αντίστοιχη του Λήμματος 2.4.Α, και ως εκ τούτου (εντελώς ανάλογα) αποδεικνύεται τελικά ότι ισχύει η ανισότητα

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x(n-1)}{x(\tau(n))} \ge \frac{1}{2}(1-\alpha-\sqrt{1-2\alpha})\ ,$$

δηλαδή, η απόδειξη του μέρους i) του λήμματος έχει ολοκληρωθεί.

Εντελώς ανάλογα με το μέρος ii) του Λήμματος 2.4.Α, αποδεικνύεται και το μέρος ii) του λήμματος. Η απόδειξη του λήμματος είναι πλήρης.

***Απόδειξη του θεωρήματος* 3.2.Γ.** Υποθέτουμε, για να οδηγηθούμε σε αντίφαση, ότι υπάρχει μία μη ταλαντούμενη λύση $(x(n))_{n\ge 0}$ της προωθημένης εξίσωσης διαφορών (3.1.1). Αφού η $(-x(n))_{n\ge 0}$ είναι επίσης μία λύση της (3.1.1), μπορούμε να περιορίσουμε τη συζήτησή μας μόνο στην περίπτωση όπου η λύση $(x(n))_{n\ge 0}$ είναι τελικά θετική.

Από τη σχέση (3.2.3), είναι φανερό ότι, για κάθε $\varepsilon \in (0,\alpha)$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ έτσι ώστε

$$\sum_{i=n+1}^{\tau(n)} p(i) \ge \alpha - \varepsilon \qquad \text{για κάθε } n \ge n_0 .$$

Επειδή η $(x(n))$ είναι μια θετική λύση της εξίσωσης (3.1.1), υπάρχει $n_1 \ge n_0$, έτσι ώστε $x(n-1) > 0$ για κάθε $n \ge n_1$. Επομένως,

$$x(n),\, x(\tau(n)) > 0 \quad \text{για κάθε } n \ge n_1 .$$

Έτσι, από την εξίσωση (3.1.1), προκύπτει

$$x(n) - x(n-1) = p(n)x(\tau(n)) \ge 0 \quad \text{για κάθε } n \ge n_1$$

και ως εκ τούτου, η ακολουθία $(x(n))_{n\ge n_1}$ είναι αύξουσα.

Επιπλέον, εάν $0<\alpha\le 1/2$, με βάση το μέρος i) του Λήμματος 3.2.Δ, έχουμε

$$\frac{x(n-1)}{x(\tau(n))}\ge\frac{1}{2}[1-(\alpha-\varepsilon)-\sqrt{1-2(\alpha-\varepsilon)})]. \tag{3.2.18}$$

Αθροίζοντας κατά μέλη τις σχέσεις που προκύπτουν με εφαρμογή της εξίσωσης (3.1.1) από n έως $\tau(n)$ και δεδομένου ότι, οι ακολουθία $(\tau(n))_{n\ge 1}$ και $(x(n))_{n\ge n_1}$ είναι αύξουσες, λαμβάνουμε

$$x(\tau(n))=x(n-1)+\sum_{i=n}^{\tau(n)}p(i)\,x(\tau(i))\ge x(n-1)+\left(\sum_{i=n}^{\tau(n)}p(i)\right)x(\tau(n)),$$

οπότε

$$\frac{x(n-1)}{x(\tau(n))}\le 1-\sum_{i=n}^{\tau(n)}p(i).$$

Με βάση τη (3.2.18), η τελευταία ανισότητα γίνεται

$$\frac{1}{2}[1-(\alpha-\varepsilon)-\sqrt{1-2(\alpha-\varepsilon)})]\le 1-\sum_{i=n}^{\tau(n)}p(i)$$

οπότε

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{\tau(n)}p(i)\le 1-\frac{1}{2}[1-(\alpha-\varepsilon)-\sqrt{1-2(\alpha-\varepsilon)}].$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει για κάθε $\varepsilon\in(0,\alpha)$. Επομένως, για $\varepsilon\to 0$, λαμβάνουμε

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{\tau(n)}p(i)\le 1-\frac{1}{2}(1-\alpha-\sqrt{1-2\alpha})$$

που είναι σε αντίθεση με τη (3.2.6). Η απόδειξη του μέρους I) του θεωρήματος έχει ολοκληρωθεί.

Στη συνέχεια, εάν $0<\alpha\le 6-4\sqrt{2}$ και ισχύει η (3.2.7), με παρόμοια διαδικασία όπως στην απόδειξη του I) μέρους, λαμβάνουμε

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{\tau(n)}p(i)\le 1-\frac{1}{4}(2-3\alpha-\sqrt{4-12\alpha+\alpha^2})$$

που είναι σε αντίθεση με τη (3.2.8). Η απόδειξη του μέρους ΙΙ) του θεωρήματος έχει ολοκληρωθεί. Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

Παράδειγμα 2. Δίνεται η εξίσωση διαφορών

$$x(n)-x(n-1)-p(n)x(n+1+[\beta n])=0\,,\quad n\geq 1\,,\qquad (3.2.19)$$

όπου $\tau(n)=n+1+[\beta n]$, $\beta\in(0,1)$ και

$$p(n)=\begin{cases}\dfrac{c}{n}, & n\in\{1,2,\ldots\}\setminus\{r,r^2,\cdots\}\\[2ex] \dfrac{95e-100}{100e}, & n\in\{r,r^2,\cdots\}\end{cases}\,,\qquad r=2+\left[\frac{1}{\beta}\right],\qquad c=\frac{1/e}{\ln(1+\beta)}$$

Είναι προφανές ότι $(p(n))_{n\geq 1}$ είναι ακολουθία μη-αρνητικών πραγματικών αριθμών, και $\tau(n)\geq n+1$ για κάθε $n\geq 1$. Επιπρόσθετα, η ακολουθία $(\tau(n))_{n\geq 1}$ είναι και αύξουσα.

Κατ’ αρχήν, θα αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n+1}^{n+1+[\beta n]}\frac{c}{i}=\frac{1}{e}\,.\qquad (3.2.20)$$

Πράγματι, επειδή c/i είναι φθίνουσα, για επαρκώς μεγάλες τιμές του n ισχύουν οι ανισότητες

$$\sum_{i=n+1}^{n+1+[\beta n]}\frac{c}{i}\geq c\sum_{i=n+1}^{n+1+[\beta n]}\int_i^{i+1}\frac{ds}{s}=c\int_{n+1}^{n+2+[\beta n]}\frac{ds}{s}=c\ln\frac{n+2+[\beta n]}{n+1}$$

$$\sum_{i=n+1}^{n+1+[\beta n]}\frac{c}{i}\leq c\sum_{i=n+1}^{n+1+[\beta n]}\int_{i-1}^{i}\frac{ds}{s}=c\int_{n}^{n+1+[\beta n]}\frac{ds}{s}=c\ln\frac{n+1+[\beta n]}{n}\,.$$

Αλλά, εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(c\ln\frac{n+2+[\beta n]}{n+1}\right)&=\lim_{n\to\infty}\left(c\ln\frac{n+1+[\beta n]}{n}\right)=c\ln(1+\beta)\\ &=\frac{1/e}{\ln(1+\beta)}\ln(1+\beta)=\frac{1}{e}\end{aligned}\,.$$

Επομένως, είναι προφανές ότι η (3.2.20) είναι αληθής, και ως εκ τούτου ισχύει

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=r^n+1}^{r^n+1+[\beta r^n]}\frac{c}{i}=\frac{1}{e}. \tag{3.2.21}$$

Αποδεικνύεται επίσης, ότι

$$r^n < r^n+1 \le r^n+1+[\beta r^n] < r^{n+1} \quad \text{για μεγάλες τιμές του } n. \tag{3.2.22}$$

Πράγματι, για κάθε ακέραιο $n \ge 1$, ισχύει $[\beta r^n] \le \beta r^n$ και, επειδή $\dfrac{\beta r^n}{r^n-1} \to \beta < 1$, καθώς $n \to \infty$, ισχύει προφανώς $[\beta r^n] < r^n - 1$ για όλα τα μεγάλα n.

Έτσι, δεδομένου ότι $r > 1$, ισχύει

$$1+[\beta r^n] < 1 + r^n - 1 = r^n < r^n(r-1) = r^{n+1} - r^n,$$

ή

$$r^n + 1 + [\beta r^n] < r^{n+1} \quad \text{για μεγάλες τιμές του } n.$$

Επομένως, η (3.2.22) είναι αληθής.

Με βάση λοιπόν τη σχέση (3.2.22), εύκολα διαπιστώνεται ότι

$$\sum_{i=r^n+1}^{r^n+1+[\beta r^n]} p(i) = \sum_{i=r^n+1}^{r^n+1+[\beta r^n]}\frac{c}{i} \quad \text{για όλα τα μεγάλα } n$$

και ως εκ τούτου, βάσει της (3.2.21), προκύπτει

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=r^n+1}^{r^n+1+[\beta r^n]} p(i) = \frac{1}{e}. \tag{3.2.23}$$

Επιπρόσθετα, επειδή $\dfrac{95e-100}{100e} \ge \dfrac{c}{i}$ για όλα τα μεγάλα i, ισχύει

$$\sum_{i=n+1}^{n+1+[\beta n]} p(i) \ge \sum_{i=n+1}^{n+1+[\beta n]}\frac{c}{i} \quad \text{για όλα τα μεγάλα } n,$$

η οποία, βάσει της (3.2.20), δίνει

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=n+1}^{n+1+[\beta n]} p(i) \geq \frac{1}{e}. \tag{3.2.24}$$

Από τις σχέσεις (3.2.23) και (3.2.24), προκύπτει ότι

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=n+1}^{n+1+[\beta n]} p(i) = \frac{1}{e}. \tag{3.2.25}$$

Στη συνέχεια, θα δειχθεί ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{n+1+[\beta n]} p(i) = \frac{1}{e} + \frac{95e-100}{100e} = \frac{95}{100} = 0.95\,. \tag{3.2.26}$$

Πράγματι, είναι προφανές ότι

$$\sum_{i=r^n}^{r^n+1+[\beta r^n]} p(i) = \frac{95e-100}{100e} + \sum_{i=r^n+1}^{r^n+1+[\beta r^n]} p(i) \quad \text{για όλα τα μεγάλα } n,$$

και με βάση τη σχέση (3.2.23), ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=r^n}^{r^n+1+[\beta r^n]} p(i) = \frac{95e-100}{100e} + \frac{1}{e} = 0.95\,. \tag{3.2.27}$$

Επιπρόσθετα, ισχύει

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(n+1+[\beta n])}{\ln r} - \frac{\ln(n+1)]}{\ln r}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln\dfrac{n+1+[\beta n]}{n+1}}{\ln r}\right) = \frac{\ln(1+\beta)}{\ln r} < 1,$$

άρα

$$\frac{\ln(n+1+[\beta n])}{\ln r} - \frac{\ln(n+1)]}{\ln r} < 1 \quad \text{για επαρκώς μεγάλες τιμές του } n.$$

Έτσι, για κάθε μεγάλο n, υπάρχει το πολύ ένας ακέραιος n^* τέτοιος ώστε

$$\frac{\ln(n+1)]}{\ln r} \leq n^* \leq \frac{\ln(n+1+[\beta n])}{\ln r} \quad \text{ή} \quad \ln(n+1) \leq n^* \ln r \leq \ln(n+1+[\beta n]),$$

δηλαδή, έτσι ώστε

$$n+1 \le r^{n^*} \le n+1+[\beta n].$$

Με βάση αυτό, είναι φανερό ότι

$$\sum_{i=n}^{n+1+[\beta n]} p(i) \le \sum_{i=n}^{n+1+[\beta n]} \frac{c}{i} + \frac{95e-100}{100e} = \frac{c}{n} + \sum_{i=n+1}^{n+1+[\beta n]} \frac{c}{i} + \frac{95e-100}{100e}$$

για όλα τα μεγάλα n.

Με βάση τη σχέση (3.2.20), η τελευταία ανισότητα δίνει

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{n+1+[\beta n]} p(i) \le \frac{1}{e} + \frac{95e-100}{100e} = 0.95. \qquad (3.2.28)$$

Από τις (3.2.27) και (3.2.28), προκύπτει ότι η (3.2.26) είναι αληθής. Έτσι,

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{n+1+[\beta n]} p(i) = 0.95 > 1 - \frac{1}{2}(1-\alpha-\sqrt{1-2\alpha}) \approx 0.940961683,$$

δηλαδή, ισχύει η συνθήκη (3.2.6) του Θεωρήματος 3.2.Γ και γι' αυτό όλες οι λύσεις της εξίσωσης (3.2.19) είναι ταλαντούμενες. Εντούτοις,

$$0.95 < 1,$$

$$0.95 < 1 - (1-\sqrt{1-\alpha})^2 \approx 0.957999636$$

και ως εκ τούτου, καμία από τις συνθήκες (3.2.1) και (3.2.4) δεν ισχύει.

Κεφάλαιο

4

Εξισώσεις Διαφορών ουδέτερου τύπου

Στο κεφάλαιο αυτό, αποδεικνύονται ικανές συνθήκες για τη σύγκλιση των θετικών λύσεων μίας πρώτης τάξης εξίσωσης διαφορών ουδέτερου τύπου.

4.1. Εισαγωγή - Διατύπωση του προβλήματος – Βασικό λήμμα

Τα διακριτά ανάλογα των διαφορικών εξισώσεων ουδέτερου τύπου ονομάζονται *εξισώσεις διαφορών ουδέτερου τύπου*. Οι εξισώσεις διαφορών και οι διαφορικές εξισώσεις *ουδέτερου τύπου* παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον σε πολλές θεματικές περιοχές των εφαρμοσμένων μαθηματικών, όπως για παράδειγμα στη θεωρία κυκλωμάτων [6], bifurcation analysis [4], δυναμική των πληθυσμών [28, 93], θεωρία ευστάθειας [102], δυναμική συμπεριφορά των συστημάτων με υστέρηση [120] και πολλά άλλα.

Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίον οι εξισώσεις αυτές προκάλεσαν το ερευνητικό ενδιαφέρον τις τελευταίες δεκαετίες, με αποτέλεσμα να δημοσιευθούν πολλές εργασίες, σχετικά με τον ασυμπτωτικό χαρακτήρα, και ειδικότερα, με κριτήρια ταλάντωσης και ευστάθειας. Βλέπε, για παράδειγμα, [2, 8, 27, 37, 59, 68, 78, 82, 87, 94, 102, 105, 108-110, 114-115, 119] και τις αναφορές αυτών.

Έστω μία πρώτης τάξης εξίσωση διαφορών ουδέτερου τύπου της μορφής

$$\Delta[x(n) - q(n)\,x(\sigma(n))] + p(n)\,f(x(\tau_1(n)), \cdots, x(\tau_k(n))) = 0\,, \qquad (4.1.1)$$

όπου $\sigma(n)$, $n = 1, 2, \cdots,$ είναι ένα όρισμα υστέρησης και $\tau_j(n)$, $j = 1, 2, \cdots, k$ είναι εκτρεπόμενα ορίσματα (υστέρησης ή προώθησης). Υποθέτουμε επίσης ότι οι συντελεστές $p(n)$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί κάποιες ασθενείς συνθήκες.

Δίνονται ικανές συνθήκες σύγκλισης των θετικών λύσεων της εξίσωσης (4.1.1), όταν ο συντελεστής q(n) έχει τελικά σταθερό πρόσημο για όλες τις τιμές του n. Οι συνθήκες αυτές είναι νέες και λόγω της μη-γραμμικότητας της f, δεν χρησιμοποιούνται προσεγγίσεις όπως αυτές που έχουν χρησιμοποιηθεί αλλού, βλέπε για παράδειγμα [8, 27, 59, 68, 78, 82, 94, 101, 105, 110, 114-115, 119] και τις αναφορές αυτών. Στις περισσότερες από αυτές τις εργασίες η χαρακτηριστική αλγεβρική εξίσωση δίνει χρήσιμες πληροφορίες σχετικά με την ταλάντωση και την ευστάθεια. Τα αποτελέσματα που δίνονται εδώ είναι νέα, ακόμα και για τις γνωστές περιπτώσεις, όπου όλοι οι παράγοντες είναι της μορφής $n - \tau$.

Δίνονται κατ' αρχήν κάποια προκαταρκτικά που είναι απαραίτητα για τις αποδείξεις. Στη συνέχεια, αποδεικνύονται ικανές συνθήκες που εξασφαλίζουν ότι οι λύσεις συγκλίνουν προς το $+\infty$ και τέλος, ερευνάται η σύγκλιση των λύσεων προς το μηδέν.

Με στόχο τη μελέτη σύγκλισης των θετικών λύσεων της εξίσωσης (4.1.1), δίνονται στη συνέχεια κάποιες συνθήκες.

$(\mathrm{C1})$: *Η ακολουθία* $(\sigma(n))$ *ικανοποιεί τη σχέση*

$$\sigma(n) \le n-1 \quad \text{για κάθε } \mathrm{n} \ge 0 . \tag{4.1.2}$$

Έστω επίσης ότι, για κάθε μεγάλο ακέραιο N, *υπάρχει ένας ακέραιος* ζ *έτσι ώστε*

$$[N,+\infty) \cap \mathbf{N} \subseteq \mathrm{Range}(\sigma\big|_{[\zeta,+\infty)\cap\mathbf{N}}) . \tag{4.1.3}$$

Με το σύμβολο $\zeta(N)$ *θα παριστάνεται ο πιο μικρός ακέραιος με την ιδιότητα* (4.1.3) *για τον οποίον υποθέτουμε ότι ισχύει* $\lim\limits_{N\to+\infty} \zeta(N) = +\infty$.

Στη συνέχεια, αποδεικνύεται ένα λήμμα, το οποίο είναι απαραίτητο για τα κριτήρια σύγκλισης των λύσεων της εξίσωσης (4.1.1).

Λήμμα 4.1.Α. *Έστω*

$$M(n) := \min\{ r : \sigma(r) \ge n \} .$$

Εάν ισχύει η συνθήκη (4.1.2), *τότε για κάθε* $\tilde{n}$ *υπάρχει κάποιο* β *έτσι ώστε, για όλα τα* $n \ge M(\tilde{n})$, *υπάρχει ένας θετικός ακέραιος* $m(n)$ *που ικανοποιεί τη διπλή ανισότητα*

$$\tilde{n} \le \sigma^{(m(n))}(n) \le \beta \tag{4.1.4}$$

και

$$\lim_{n\to\infty} m(n) = +\infty . \tag{4.1.5}$$

Απόδειξη. Έστω ότι η σχέση (4.1.4) δεν είναι αληθής. Τότε υπάρχει κάποιο $\tilde{n}$ έτσι ώστε, για κάθε k να υπάρχει κάποιο $n(k) \ge M(\tilde{n})$ το οποίο για όλους τους θετικούς ακέραιους m ικανοποιεί τη σχέση

$$\sigma^{(m)}(n(k)) > k .$$

Με διαδοχική εφαρμογή της ανωτέρω ανισότητας, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} k &< \sigma^{(m)}(n(k)) \le \sigma^{(m-1)}(n(k)) - 1 \le \sigma^{(m-2)}(n(k)) - 2 \\ &\le \cdots \le \sigma(n(k)) - (m-1) \le \eta(k) - m . \end{aligned}$$

Επομένως,

$$k \le \lim_{m\to\infty}[\eta(k) - m] = -\infty \ ,$$

το οποίο είναι αδύνατο. Ως εκ τούτου, η σχέση (4.1.4) είναι αληθής.

Έστω ότι η σχέση (4.1.5) δεν είναι αληθής. Τότε, υπάρχει κάποιο $\gamma > 0$ έτσι ώστε

$$m(n) \le \gamma \ , \quad n = 1, 2, \cdots .$$

Επειδή η ακολουθία $(m(n))$ αποτελείται από μη αρνητικούς ακεραίους, υπάρχει μία γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων n_λ έτσι ώστε, όλοι οι όροι της ακολουθίας $(m(n_\lambda))$ να είναι ίσοι με ένα σταθερό θετικό ακέραιο, έστω A. Επομένως,

$$m(n_\lambda) =: A, \quad \lambda = 1, 2, \cdots .$$

Από τη σχέση (4.1.4), προκύπτουν διαδοχικά

$$\tilde{n} \le \sigma^A(n_\lambda) \le \beta =: B .$$

$$\sigma(\sigma^{A-1}(n_\lambda)) \le \beta =: B_1 .$$

$$\sigma(\sigma^{A-2}(n_\lambda)) \le \beta =: B_2 .$$

$$\vdots$$

$$n_\lambda \le \beta =: B_A .$$

Άρα, η ακολουθία (n_λ) είναι φραγμένη, πράγμα άτοπο. Ως εκ τούτου, η σχέση (4.1.5) είναι αληθής. Η απόδειξη του λήμματος είναι πλήρης.

Για δοθέν $\tilde{n}$ και κάθε $n \ge \tilde{n}$, ο πιο μικρός θετικός ακέραιος β εξαρτώμενος από το n θα συμβολίζεται στο εξής με $\beta(n)$. Επίσης, ο πιο μεγάλος θετικός ακέραιος $m(n)$ εξαρτώμενος από το $\tilde{n}$ και το n θα συμβολίζεται στο εξής με $m(\tilde{n}, n)$.

Το παράδειγμα που ακολουθεί, αποτελεί άμεση εφαρμογή του Λήμματος 4.1.Α.

Παράδειγμα. Έστω $\sigma(n)$ ο πιο μεγάλος περιττός ακέραιος, για κάθε θετικό ακέραιο n, ο οποίος είναι γνησίως μικρότερος από το n. Αυτό σημαίνει ότι:

- Εάν n είναι ένας περιττός ακέραιος, έστω $2\lambda+1$, τότε
  $$\sigma(n)=2\lambda-1 \quad \text{και} \quad \sigma(n+1)=\sigma(2\lambda+2)=2\lambda+1.$$
- Εάν n είναι ένας άρτιος ακέραιος, έστω 2λ, τότε
  $$\sigma(n)=2\lambda-1 \quad \text{και} \quad \sigma(n+1)=\sigma(2\lambda+1)=2\lambda-1.$$

Τα παραπάνω δείχνουν ότι, για κάθε n, η ποσότητα

$$M(\tilde{n}):=\beta(n)=2\left[\frac{n}{2}\right]+1$$

ικανοποιεί τις απαιτήσεις του Λήμματος 4.1.Α. Επίσης, εύκολα αποδεικνύεται ότι,

$$\sigma^{(k)}:=2\left[\frac{n}{2}\right]+1-2k$$

και

$$m(\tilde{n},n):=\left[\frac{n-\tilde{n}}{2}\right].$$

4.2. Κριτήρια σύγκλισης των λύσεων της εξίσωσης (4.1.1)

► Περίπτωση $q(n)\geq 0$

Πριν δοθούν τα κύρια αποτελέσματα ως προς τη σύγκλιση των λύσεων, είναι απαραίτητο να θεωρηθεί ότι υπάρχει ένα αρχικό σημείο $n_0\in\mathbf{N}$ έτσι ώστε

$$\min\{\sigma(n),\tau_1(n),\tau_2(n),\cdots,\tau_k(n)\}\geq 1, \quad n\geq n_0$$

και ένα αρχικό σύνολο

$$J(n_0) := [n_0, \beta(n_0)] \cap \mathbf{N} .$$

Δίνονται επίσης οι ακόλουθες συνθήκες:

$(\mathrm{C}2)$: *Η ακολουθία* $(p(n))$ *αποτελείται από μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς και ικανοποιεί την ιδιότητα: Υπάρχει ένα συγκεκριμένο* $\alpha > 0$ *και για κάθε* $n \in \mathbf{N}$ *υπάρχει* $N(n) \in \mathbf{N}$ *έτσι ώστε* $N(n) > n$ *και*

$$\sum_{j=n}^{N(n)} p(j) \geq \alpha . \tag{4.2.1}$$

$(\mathrm{C}3)$: *Η ακολουθία* $(q(n))$ *αποτελείται από μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς και είναι φραγμένη.*

$(\mathrm{C}4)$: Για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$\inf\left\{ f(u^1, u^2, \cdots, u^k) : u^j \geq \varepsilon, \quad j = 1, 2, \cdots, k \right\} > 0 .$$

Παρατήρηση. Εύκολα αποδεικνύεται ότι, οι δύο επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες με τη συνθήκη $(\mathrm{C}4)$:

$(\mathrm{C}4_{\mathrm{a}})$: *Για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει κάποιο* $\delta > 0$ *έτσι ώστε οι σχέσεις*

$$u^j \geq \varepsilon, \; j = 1, 2, \cdots, k$$

συνεπάγονται ότι

$$f(u^1, u^2, \cdots, u^k) \geq \delta .$$

$(\mathrm{C}4_{\mathrm{b}})$: *Δεδομένων των ακολουθιών* $y^j(n), \; j = 1, 2, \cdots, k$, *η σχέση*

$$\lim_{n\to\infty} f(y^1(n), y^2(n), \cdots, y^k(n)) = 0$$

συνεπάγεται ότι, υπάρχει κάποιος δείκτης $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$ *και μία υπακολουθία* $(\mu(n))$ *έτσι ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} y^j(\mu(n)) = 0 .$$

Τέλος, από τη συνθήκη (C4), είναι εύκολο να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f:\mathbf{R}^k \mapsto \mathbf{R}$ ικανοποιεί την ιδιότητα του προσήμου $f(u^1,u^2,\cdots,u^k)>0$ για κάθε $u^j>0$.

Θεώρημα 4.2.Α. *Έστω ότι ισχύουν οι συνθήκες* (C1) – (C4) *και επιπλέον*

$$\lim_{n\to\infty}\sigma(n)=\lim_{n\to\infty}\tau_1(n)=\lim_{n\to\infty}\tau_2(n)=\cdots=\lim_{n\to\infty}\tau_k(n)=+\infty .$$

Εάν $m(n_0,n)$ *είναι η ποσότητα που ορίζεται στο Λήμμα* 4.1.Α *και ισχύει η συνθήκη*

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{j=0}^{m(n_0,n)-1} q(\sigma^{(j)}(n))=+\infty , \tag{4.2.2}$$

τότε, κάθε τελικά μη-αρνητική λύση $(x(n))$ *της εξίσωσης* (4.1.1) *με*

$$S(n_0):=\min\{x(n): n\in J(n_0)\}>0 , \tag{4.2.3}$$

τείνει προς το $+\infty$.

Απόδειξη. Έστω $\beta(n)$ η ποσότητα με όλες τις ιδιότητες, όπως αυτή περιγράφεται στο Λήμμα 4.1.Α. Για $n\ge n_0$, ας είναι

$$z(n):=x(n)-q(n)\,x(\sigma(n)) .$$

Επομένως, από την εξίσωση (4.1.1), προκύπτει

$$\Delta z(n)=-p(n)\, f(x(\tau_1(n)),x(\tau_2(n)),\cdots,x(\tau_k(n)))\le 0 .$$

Ως εκ τούτου, η ακολουθία $(z(n))$ είναι φθίνουσα και γι' αυτό το όριο

$$\ell:=\lim_{n\to\infty} z(n)$$

υπάρχει και ανήκει στο διάστημα $[-\infty,+\infty)$.

Περίπτωση 1. $\ell\ge 0$. Είναι προφανές ότι

$$x(n)-q(n)\,x(\sigma(n))=z(n)\ge 0$$

και επομένως

$$x(n)\ge q(n)\,x(\sigma(n)) . \tag{4.2.4}$$

Με διαδοχική εφαρμογή της ανωτέρω ανισότητας, προκύπτει η σχέση

$$\begin{aligned} x(n) &\geq q(n)\,x(\sigma(n)) \geq q(n)\,q(\sigma(n))\,x(\sigma^{(2)}(n)) \\ &\geq \cdots \geq \prod_{j=0}^{m(n_0,n)-1} q(\sigma^{(j)}(n))\ S(n_0), \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

η οποία, λόγω της σχέσης (4.2.2), τείνει προς το $+\infty$. Επομένως, $\lim_{n\to\infty} x(n) = +\infty$.

Περίπτωση 2. $\ell < 0$. Ισχυριζόμαστε ότι το ℓ δεν μπορεί να είναι πεπερασμένο. Πράγματι, έστω ότι είναι πεπερασμένο. Από την εξίσωση (4.1.1) προκύπτει

$$z(n+1) - z(n) + p(n)\, f(x(\tau_1(n)), x(\tau_2(n)), \cdots, x(\tau_k(n))) = 0 \tag{4.2.6}$$

Εάν $N(n)$ είναι η ποσότητα που ορίζεται από τη συνθήκη $(C2)$, αθροίζοντας κατά μέλη τις σχέσεις που προκύπτουν με εφαρμογή της εξίσωσης (4.2.6) από n έως $N(n)$, προκύπτει

$$z(N(n)+1) - z(n) + \sum_{j=n}^{N(n)} p(j)\, f(x(\tau_1(j)), x(\tau_2(j)), \cdots, x(\tau_k(j))) = 0,$$

ή

$$\begin{aligned} -[z(N(n)+1) - z(n)] &= \sum_{j=n}^{N(n)} p(j)\, f(x(\tau_1(j)), x(\tau_2(j)), \cdots, x(\tau_k(j))) \\ &\geq \alpha \min\left\{ f(x(\tau_1(j)), \cdots, x(\tau_k(j))) : j = n, \cdots, N(n) \right\} \\ &= \alpha\, f(x(\tau_1(t(n))), x(\tau_2(t(n))), \cdots, x(\tau_k(t(n)))), \end{aligned}$$

για κάποιο $t(n) \in [n, N(n)] \cap \mathbf{N}$.

Αλλά, επειδή

- $\alpha > 0$
- η λύση είναι μη-αρνητική, και
- το όριο ℓ είναι πεπερασμένος πραγματικός αριθμός,

είναι προφανές ότι

$$\lim_{n\to\infty} f(x(\tau_1(t(n))), x(\tau_2(t(n))), \cdots, x(\tau_k(t(n)))) = 0$$

και, δεδομένης της συνθήκης $(\mathrm{C4_b})$, υπάρχει κάποιος δείκτης $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$ και μία υπακολουθία $(\mu(n))$ έτσι ώστε

$$\lim_{n\to\infty} x(\tau_j(\mu(n))) = 0 .$$

Έστω ένα μεγάλο n που εγγυάται την ύπαρξη του αριθμού $\zeta(\tau_j(\mu(n)))$ που ικανοποιεί τη συνθήκη (4.1.3). Άρα, υπάρχει ακέραιος $r \geq \zeta(\tau_j(\mu(n)))$ έτσι ώστε

$$\sigma(r) = \tau_j(\mu(n)) .$$

Έστω $r(n)$ είναι ο μικρότερος ακέραιος από όλους τους r που αντιστοιχούν στο n. Είναι προφανές ότι

$$\lim_{n\to\infty} r(n) = +\infty$$

και επιπλέον

$$z(r(n)) - x(r(n)) = -q(r(n))\, x(\sigma(r(n))) = -q(r(n))\, x(\tau_j(\mu(n))) ,$$

που τείνει προς στο μηδέν. Έτσι,

$$0 = \lim_{n\to\infty}(z(r(n)) - x(r(n))) = \ell - \lim_{n\to\infty} x(r(n)) ,$$

αδύνατον, αφού $\ell < 0$ και η λύση $(x(n))$ είναι μη-αρνητική. Επομένως $\ell = -\infty$, δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} z(n) = -\infty .$$

Αυτό, σε συνδυασμό με την ανισότητα

$$z(n) = x(n) - q(n)\, x(\sigma(n)) \geq -q(n)\, x(\sigma(n)) ,$$

δίνει

$$\lim_{n\to\infty} x(\sigma(n)) = +\infty , \tag{4.2.7}$$

αφού, λόγω της συνθήκης $(\mathrm{C3})$, η ακολουθία $(q(n))$ είναι φραγμένη.

Στη συνέχεια, θα δειχθεί ότι $\lim\limits_{n\to\infty} x(n) = +\infty$. Πράγματι, εάν δεν ισχύει, τότε θα υπάρχει μία υπακολουθία $(x(s(n)))$ της $(x(n))$ η οποία θα έχει πεπερασμένο όριο. Επομένως, είναι άνω φραγμένη, και έστω b ένα άνω φράγμα αυτής, δηλαδή

$$0 \le x(s(n)) \le b. \tag{4.2.8}$$

Από τη σχέση (4.1.3) προκύπτει ότι, για κάθε μεγάλο n, υπάρχει κάποιο $\nu(n) \ge \zeta(\sigma(n))$ έτσι ώστε

$$s(n) \ge \sigma(\nu(n)).$$

Έτσι, από τη σχέση (4.2.8), προκύπτει

$$x(\sigma(\nu(n))) \le b,$$

άτοπο, λόγω της (4.2.7). Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

Παρατήρηση. Στο παράδειγμα που ακολουθεί, φαίνεται η σπουδαιότητα των συνθηκών (4.1.3) και (4.2.3). Εάν δεν ισχύουν, τότε το κριτήριο σύγκλισης του Θεωρήματος 4.2.Α ενδέχεται να μην ισχύει.

Παράδειγμα. Δίνεται η εξίσωση διαφορών ουδέτερου τύπου

$$\Delta[x(n) - 2x(\sigma(n))] + \chi_E(n)\, x(\sigma(n)-1) = 0, \tag{4.2.9}$$

όπου, η ακολουθία $(\sigma(n))$ είναι αυτή του παραδείγματος της παραγράφου 4.1, και χ_E είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου E, που αποτελείται από όλους τους θετικούς ακέραιους της μορφής 2^k για κάποιο θετικό ακέραιο k.

Είναι προφανές ότι, η σταθερή ακολουθία $q(n) := 2$, $n \in \mathbf{N}$ ικανοποιεί τη σχέση (4.2.2). Πράγματι, για κάθε $\tilde{n}$ υπάρχει ο αριθμός $\beta(\tilde{n}) = 2[\tilde{n}/2] + 1$ που ικανοποιεί τις απαιτήσεις του Λήμματος 4.1.Α.

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{j=0}^{m(n_0,n)-1} q(\sigma^{(j)}(n)) = \lim_{n\to\infty}\left(2^{\left[\frac{n-n_0}{2}\right]}\right) = +\infty ,$$

οπότε και η σχέση (4.2.2) ισχύει.

Επίσης, η ακολουθία $p(n) := \chi_E(n)$ ικανοποιεί τη συνθήκη (4.2.1). Πράγματι, για κάθε θετικό ακέραιο n ας είναι $N(n)$ ο πιο μικρός αριθμός της μορφής 2^k που είναι μεγαλύτερος του n. Τότε, η συνθήκη $(\mathrm{C}2)$ ισχύει για $\alpha = 1$.

Ισχύουν επίσης και οι συνθήκες $(\mathrm{C}3)$ και $(\mathrm{C}4)$. Παρόλα αυτά, η σχέση (4.1.3) δεν ισχύει, διότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης σ απαρτίζεται μόνο από περιττούς ακέραιους.

Εάν τώρα, η εξίσωση (4.2.9) γραφεί στη μορφή

$$x(n+1) = 2x(\sigma(n+1)) + x(n) - 2x(\sigma(n)) - \chi_E(n)\, x(\sigma(n)-1) , \quad (4.2.10)$$

εύκολα φαίνεται ότι, οποιεσδήποτε 4 διαδοχικές τιμές x_1, x_2, x_3, x_4 είναι επαρκείς για την εύρεση όλων των επόμενων όρων της ακολουθίας. Επίσης, επειδή η εξίσωση (4.2.10) είναι γραμμική, εάν οι τιμές αυτές είναι μηδενικές, όλοι οι επόμενοι όροι της ακολουθίας είναι μηδενικοί.

Θεωρούμε τη λύση $(x(n))$ με αρχικές τιμές

$$x(0) := 0, \quad x(1) := -\frac{1}{2}, \quad x(2) := 1 .$$

Τότε παρατηρούμε ότι $J(0) = \{0,1\}$ και ως εκ τούτου η σχέση (4.2.3) με $n_0 = 0$ δεν ισχύει. Η λύση $(x(n))$ με τις ανωτέρω αρχικές τιμές, δίνει

$$x(3) = 0 , \quad x(4) = 1 , \quad x(5) = x(6) = x(7) = x(8) = 0 ,$$

επομένως, όλοι οι όροι $x(j)$ για $j \geq 9$ είναι μηδενικοί. Δηλαδή, η λύση τείνει προς το μηδέν και όχι προς το $+\infty$, όπως θα περίμενε κανείς βάσει του Θεωρήματος 4.2.A. Αιτία είναι, το ότι οι σχέσεις (4.1.3) και (4.2.3) δεν ισχύουν, γεγονός που δεν εγγυάται την ισχύ του προηγούμενου συμπεράσματος.

► Περίπτωση $q(n) < 0$

Έστω η συνθήκη,

$(C5)$*: η ακολουθία* $(q(n))$ *αποτελείται από αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς.*

Θεώρημα 4.2.B. *Έστω ότι ισχύουν οι συνθήκες* $(C2)$, $(C4)$ *και* $(C5)$ *καθώς επίσης και η σχέση* (4.1.3). *Τότε, κάθε τελικά μη-αρνητική λύση* $(x(n))$ *ικανοποιεί τη σχέση*

$$\liminf_{n\to\infty} x(n) = 0 . \tag{4.2.11}$$

Επιπρόσθετα, εάν ισχύει η συνθήκη

$$-1 < \liminf_{n\to\infty} q(n) \leq 0 , \tag{4.2.12}$$

τότε $\lim_{n\to\infty} x(n) = 0$.

Απόδειξη. Έστω ότι η ακολουθία $(x(n))$ είναι μία μη-αρνητική λύση της εξίσωσης (4.1.1). Είναι φανερό ότι και η συνάρτηση

$$z(n) := x(n) - q(n)\, x(\sigma(n)) \tag{4.2.13}$$

είναι μη-αρνητική, και δεδομένης της συνθήκης $(C4)$, η εξίσωση (4.1.1) δίνει $\Delta z(n) \leq 0$.

Επομένως, η ακολουθία $(z(n))$ είναι μη-αρνητική και φθίνουσα και ως εκ τούτου συκλίνει προς κάποιο $\ell \geq 0$.

Περίπτωση 1. $\ell = 0$. Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι

$$z(n) := x(n) - q(n)\, x(\sigma(n)) \geq x(n) \geq 0 ,$$

είναι προφανές, ότι και η ακολουθία $(x(n))$ τείνει προς το μηδέν. Άρα, η σχέση (4.2.11) είναι αληθής.

Περίπτωση 2. $\ell > 0$. Έστω, ότι η σχέση (4.2.11) δεν ισχύει. Τότε για κάποιο $\varepsilon > 0$ και n_0, ισχύει $x(\tau_j(n)) \geq \varepsilon$, για κάθε $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$ και $n \geq n_0$. Έτσι, από τη συνθήκη (C4) υπάρχει ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε

$$f(x(\tau_1(n)), x(\tau_2(n)), \cdots, x(\tau_k(n))) \geq \delta, \tag{4.2.14}$$

για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως, από την εξίσωση (4.1.1), προκύπτει

$$0 = \Delta z(n) + p(n)\, f(x(\tau_1(n)), \cdots, x(\tau_k(n))) \geq \Delta z(n) + p(n)\,\delta,$$

ή

$$\Delta z(n) \leq -p(n)\,\delta.$$

Αθροίζοντας κατά μέλη τις σχέσεις που προκύπτουν με εφαρμογή της τελευταίας ανισότητας από n έως $N(n)$ και λαμβάνοντας υπόψη τη συνθήκη (C2), προκύπτει

$$z(N(n)+1) - z(n) \leq -\alpha\,\delta,$$

και ως εκ τούτου

$$\lim_{n\to\infty}[z(N(n)+1) - z(n)] = \ell - \ell = 0 \leq -\alpha\,\delta,$$

άτοπο. Άρα η σχέση (4.2.11) είναι αληθής.

Έστω τώρα, ότι ισχύει η σχέση (4.2.12).

Περίπτωση 1΄. $\ell = 0$. Είναι προφανές, ότι η ακολουθία $(x(n))$ τείνει προς το μηδέν.

Περίπτωση 2΄. $\ell > 0$. Όπως και προηγουμένως, υπάρχει μια ακολουθία $(\mu(n))$ τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} x(\mu(n)) = 0.$$

Από τη σχέση (4.2.13) προκύπτει

$$\ell = \lim_{n\to\infty} z(n) = \lim_{n\to\infty}[x(n) - q(n)\,x(\sigma(n))] \geq \limsup_{n\to\infty} x(n) \geq 0$$

και
$$z(\mu(n)) = x(\mu(n)) - q(\mu(n))\, x(\sigma(\mu(n))) \,,$$
οπότε
$$\begin{aligned}\ell &= \lim_{n\to\infty} z(\mu(n)) = \lim_{n\to\infty}[x(\mu(n)) - q(\mu(n))\, x(\sigma(\mu(n)))] \\ &= \limsup_{n\to\infty}[-q(\mu(n))\, x(\sigma(\mu(n)))] \le \limsup_{n\to\infty}[-q(\mu(n))]\ \limsup_{n\to\infty}[x(\sigma(\mu(n)))] < \ell \,,\end{aligned}$$

άτοπο. Άρα $\ell = 0$, γεγονός που συνεπάγεται ότι η ακολουθία $(x(n))$ συγκλίνει προς το μηδέν. Η απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.B είναι πλήρης.

Παρατήρηση. Στην απόδειξη του προηγουμένου θεωρήματος, η συνθήκη (4.2.12) παίζει σπουδαίο ρόλο. Εάν αυτή αντικατασταθεί με τη συνθήκη $-1 \le \liminf_{n\to\infty} q(n) \le 0$, τότε το συμπέρασμα $\lim_{n\to\infty} x(n) = 0$ ενδέχεται να μην ισχύει.

Για την απόδειξη του ισχυρισμού αυτού, δίνεται το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα. Δίνεται η εξίσωση διαφορών ουδέτερου τύπου
$$\Delta[x(n) - q(n-1)x(n-1)] + \min\{x(n), x(n-1)\} = 0 \,, \qquad (4.2.15)$$
όπου οι συντελεστές $q(n)$ ορίζονται από τη σχέση
$$q(n) := \frac{1}{2}[(-1)^n - 1] \,, \quad n \in \mathbf{N} \,.$$
Η εξίσωση (4.2.15), μπορεί να γραφεί στη μορφή
$$x(n+1) = (1+q(n))\, x(n) - q(n-1)x(n-1) - \min\{x(n), x(n-1)\} \,,$$
ενώ οι συντελεστές $\mathrm{q(n)}$ ικανοποιούν τη σχέση
$$\liminf_{n\to\infty} q(n) = -1 \,.$$
Εύκολα αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση
$$f(u_1, u_2) := \min\{u_1, u_2\} \,,$$

ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος 4.2.Β. Εάν η ακολουθία $(x(n))$ είναι μια λύση της εξίσωσης (4.2.15) με αρχικές τιμές

$$x(0)=0 \quad \text{και} \quad x(1)=1,$$

αποδεικνύεται ότι:

- εάν n είναι άρτιος τότε $x(n)=0$, και
- εάν n είναι περιττός τότε $x(n)=1$.

Δηλαδή, για τη λύση $(x(n))$, δεν ισχύει $\lim_{n\to\infty} x(n)=0$, όπως θα περίμενε κανείς βάσει του Θεωρήματος 4.2.Β. Αιτία είναι, το ότι η συνθήκη (4.2.12) δεν ισχύει, γεγονός που δεν εγγυάται την ισχύ του προηγούμενου συμπεράσματος.

Έστω τώρα ότι

$$\tau_j(n)=\tau(n), \quad j\in\{1,2,\cdots,k\},$$

$(C6)$: *Δοθέντος ενός μεγάλου ακεραίου N, υπάρχει ένας ακέραιος ρ έτσι ώστε*

$$[N,+\infty)\cap \mathbf{N} \subseteq \mathrm{Range}(\tau\big|_{[\rho,+\infty)\cap\mathbf{N}}).$$

Με το σύμβολο $\rho(N)$ θα παριστάνεται ο πιο μικρός ακέραιος με την ιδιότητα αυτή για τον οποίον υποθέτουμε ότι $\lim_{N\to+\infty}\rho(N)=+\infty$.

$(C7)$: *Ισχύει η σχέση $\liminf_{n\to\infty} p(n)>0$.*

Θεώρημα 4.2.Γ. *Έστω ότι ισχύουν οι συνθήκες* $(C4)$, $(C5)$, $(C6)$ *και* $(C7)$ *καθώς επίσης και η σχέση* (4.1.3). *Τότε, κάθε μη-αρνητική λύση* $(x(n))$ *της εξίσωσης*

$$\Delta[x(n)-q(n)\,x(\sigma(n))]+p(n)\,f(x(\tau(n)))=0, \qquad (4.2.16)$$

συγκλίνει προς το μηδέν.

Απόδειξη. Έστω ότι η ακολουθία $(x(n))$ είναι μία μη-αρνητική λύση της εξίσωσης (4.2.16). Είναι φανερό ότι και η συνάρτηση

$$z(n) := x(n) - q(n)\,x(\sigma(n))$$

είναι μη-αρνητική, και δεδομένης της συνθήκης (C4), ισχύει $\Delta z(n) \le 0$. Επομένως, η ακολουθία $(z(n))$ είναι μη-αρνητική και φθίνουσα και ως εκ τούτου συγκλίνει προς κάποιο $\ell \ge 0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχει κάποιο n_1 έτσι ώστε $|\Delta z(n)| < \varepsilon$, για κάθε $n \ge n_1$. Ως εκ τούτου

$$p(n)\, f(x(\tau(n))) < \varepsilon \quad \text{για κάθε } n \ge n_1. \tag{4.2.17}$$

Έστω, ότι υπάρχει μία αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων $(\mu(n))$ έτσι ώστε

$$\lim_{n\to\infty} x(\mu(n)) =: \ell_1 > 0. \tag{4.2.18}$$

Είναι φανερό ότι $\ell > 0$. Αυτό διότι, στην αντίθετη περίπτωση όπου $\ell = 0$, θα ίσχυε

$$\lim_{n\to\infty} [q(\mu(n))\, x(\sigma(\mu(n)))] = \ell_1.$$

Επομένως, η ακολουθία $(q(n))$ αποτελείται από θετικούς όρους, πράγμα άτοπο, λόγω της συνθήκης (C5). Έτσι, $\ell > 0$.

Ισχυριζόμαστε ότι, υπάρχει μία ακολουθία θετικών ακεραίων $\xi(n)$ η οποία συγκλίνει στο $+\infty$ έτσι ώστε, για κάποιο $\delta > 0$ και ένα δείκτη $n_2 \ge n_1$ να ισχύει

$$n \ge n_2 \Rightarrow x(\tau(\xi(n))) \ge \delta. \tag{4.2.19}$$

Παρατηρούμε επίσης ότι

$$n \ge n_2 \Rightarrow x(\mu(n)) + [-q(\mu(n))\, x(\sigma(\mu(n)))] = x(\mu(n)) - q(\mu(n))\, x(\sigma(\mu(n))) \ge \ell.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι, για κάθε σταθερό $n \geq n_2$, ισχύει τουλάχιστο μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

$$(a) \quad x(\mu(n)) \geq \frac{\ell}{2}, \qquad (b) \quad -q(\mu(n))\, x(\sigma(\mu(n))) \geq \frac{\ell}{2}.$$

Περίπτωση (a): Εάν ισχύει $x(\mu(n)) \geq \ell/2$ για άπειρο πλήθος δεικτών, θα υπάρχει μία ακολουθία $\eta(n)$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$n \geq n_2 \Rightarrow x(\mu(\eta(n))) \geq \frac{\ell}{2}.$$

Τότε, λόγω της συνθήκης (C6), υπάρχει ένα $n_3 \geq n_2$ και μία αύξουσα ακολουθία $(\xi(n))$ με $\xi(n) \geq \rho(\mu(\eta(n)))$ και $\tau(\xi(n)) = \mu(\eta(n))$. Είναι φανερό ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \xi(n) = +\infty$. Έτσι ισχύει

$$x(\tau(\xi(n))) \geq \frac{\ell}{2},$$

για όλα τα $n \geq n_3$, και ως εκ τούτου ο ισχυρισμός μας ότι ισχύει η σχέση (4.2.19) αληθεύει για $\delta = \ell/2$.

Περίπτωση (b): Εάν ισχύει $-q(\mu(n))\, x(\sigma(\mu(n))) \geq \ell/2$ για όλους τους όρους κάποιας ακολουθίας $\eta(n)$, θεωρώντας ένα άνω φράγμα B της ακολουθίας $(-q(n))$, προκύπτει

$$\frac{\ell}{2} \leq -q(\eta(n))\, x(\sigma(\eta(n))) \leq B\, x(\sigma(\eta(n))),$$

για όλα τα $n \geq n_2$. Αυτό, σε συνδυασμό με τη συνθήκη (4.1.3), εγγυάται την ύπαρξη μίας αύξουσας και μη φραγμένης ακολουθίας $(\xi(n))$ με $\xi(n) \geq \rho(\sigma(\eta(n)))$ και κάποιο $n_3 \geq n_2$ έτσι ώστε $\tau(\xi(n)) = \sigma(\eta(n))$. Έτσι,

$$x(\tau(\xi(n))) \geq \frac{\ell}{2B},$$

για όλα τα $n \geq n_3$, και ως εκ τούτου ο ισχυρισμός μας ότι ισχύει η σχέση (4.2.19) αληθεύει για $\delta = \ell/2B$.

Τώρα, από τη συνθήκη $(C4)$, προκύπτει ότι υπάρχει ένα $\theta > 0$ έτσι ώστε

$$f(x(\tau(\xi(n)))) \geq \theta,$$

για όλα τα $n \geq n_3$. Λαμβάνοντας υπόψη τη (C4) και την (4.2.17), προκύπτει

$$\varepsilon > p(\xi(n))\, f(x(\tau(\xi(n)))) \geq p(\xi(n))\,\theta,$$

για όλα τα $n \geq n_3$. Η τελευταία ανισότητα, δεδομένης της συνθήκης $(C7)$, καταλήγει προφανώς σε άτοπο. Επομένως, δεν υπάρχει ακολουθία $(\mu(n))$ που να ικανοποιεί τη σχέση (4.2.18), το οποίο σημαίνει ότι η λύση $(x(n))$ συγκλίνει προς το μηδέν.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.Γ είναι πλήρης.

Περίληψη

Τα ερευνητικά θέματα που μελετώνται στην παρούσα Διδακτορική διατριβή είναι ο ταλαντωτικός χαρακτήρας των λύσεων μίας γραμμικής εξίσωσης διαφορών με εκτρεπόμενο όρισμα (υστέρησης ή προώθησης) καθώς επίσης και ο ασυμπτωτικός χαρακτήρας των λύσεων μίας μη-γραμμικής εξίσωσης διαφορών ουδέτερου τύπου. Συγκεκριμένα :

- Για τη γραμμική εξίσωση διαφορών

$$x(n+1) - x(n) + p(n)x(\tau(n)) = 0 \ ,$$

με όρισμα υστέρησης $\tau(n)$ και μη-αρνητικό πραγματικό συντελεστή $p(n)$, αποδεικνύεται ότι όλες οι λύσεις είναι ταλαντούμενες εάν ισχύει η συνθήκη

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n} p(i) > 1 \, ,$$

ή η συνθήκη

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) > \frac{1}{e} \, .$$

Στη συνέχεια, βρίσκονται ικανές συνθήκες ταλάντωσης των λύσεων αυτής στην περίπτωση κατά την οποίαν δεν ισχύουν οι ανωτέρω συνθήκες.

- Για τη γραμμική εξίσωση διαφορών

$$x(n) - x(n-1) - p(n)x(\tau(n)) = 0 \ ,$$

με όρισμα προώθησης $\tau(n)$ και μη-αρνητικό πραγματικό συντελεστή $p(n)$, αποδεικνύεται ότι όλες οι λύσεις είναι ταλαντούμενες εάν ισχύει η συνθήκη

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\tau(n)} p(i) > 1 \, .$$

Στη συνέχεια, βρίσκονται ικανές συνθήκες ταλάντωσης των λύσεων αυτής στην περίπτωση κατά την οποίαν δεν ισχύει η ανωτέρω συνθήκη.

- Επίσης, μελετάται η σύγκλιση των θετικών λύσεων μίας μη-γραμμικής εξίσωσης διαφορών ουδέτερου τύπου της μορφής

$$\Delta[x(n) - q(n)\,x(\sigma(n))] + p(n)\,f(x(\tau_1(n)), \cdots, x(\tau_k(n))) = 0\,,$$

με όρισμα υστέρησης $\sigma(n)$ και εκτρεπόμενα ορίσματα $\tau_j(n)$, $j = 1, 2, \cdots, k$. Οι όροι της ακολουθίας $(p(n))_{n\geq 0}$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί ενώ της ακολουθίας $(q(n))_{n\geq 0}$ είναι πραγματικοί αριθμοί σταθερού προσήμου. Η συνάρτηση f είναι μη-γραμμική και ικανοποιεί κάποιες ασθενείς συνθήκες. Για την εξίσωση αυτή βρίσκονται ικανές συνθήκες για τη σύγκλιση των λύσεων προς το άπειρο ή προς το μηδέν. Η εύρεση των συνθηκών, λόγω της μη-γραμμικότητας της f, βασίζεται σε διαφορετικές προσεγγίσεις από τις έως τώρα χρησιμοποιούμενες οι περισσότερες εκ των οποίων στηρίζονται στη χαρακτηριστική αλγεβρική εξίσωση.

Abstract

The topics which are studied in the present Ph.D. Thesis include the oscillatory behavior of the solutions of a linear difference equation with deviated argument (retarded or advanced), as well as the asymptotic behavior of the solutions of a nonlinear neutral difference equation. More specifically:

- For the linear difference equation

$$x(n+1)-x(n)+p(n)x(\tau(n))=0 \ ,$$

with retarded argument $\tau(n)$ and non-negative real coefficient $p(n)$, it is proved that all solutions are oscillatory, if each one of the following conditions

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=\tau(n)}^{n}p(i)>1 \, ,$$

or,

$$\liminf_{n\to\infty}\sum_{i=\tau(n)}^{n-1}p(i)>\frac{1}{e} \, ,$$

is satisfied. Subsequently, sufficient conditions for the oscillation of all solutions are established, in the case where none of the above conditions is satisfied.

- For the linear difference equation

$$x(n)-x(n-1)-p(n)x(\tau(n))=0 \ ,$$

with advanced argument $\tau(n)$ and non-negative real coefficient $p(n)$, it is proved that all solutions are oscillatory, if the condition

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{\tau(n)}p(i)>1 \, ,$$

is satisfied. Subsequently, sufficient conditions for the oscillation of all solutions are satisfied, in the case where the above condition is not satisfied.

- Also, the convergence of the positive solutions of a nonlinear neutral difference equation of the form

$$\Delta[x(n) - q(n)\,x(\sigma(n))] + p(n)\,f(x(\tau_1(n)),\cdots,x(\tau_k(n))) = 0,$$

with retarded argument $\sigma(n)$ and deviated arguments $\tau_j(n)$, $j = 1, 2, \cdots, k$, is studied. The terms of the sequence $(p(n))_{n\geq 0}$ are positive real numbers, while those of the sequence $(q(n))_{n\geq 0}$ are real numbers of constant (non-changing) sign. The function f is a non-linear function that satisfies some rather mild conditions. For that equation, sufficient conditions for the convergence of solutions to infinity, or to zero, are established. Due to the non-linearity of f, the search for sufficient conditions is based on a different approach in comparison to the existing ones, that mainly depend on the algebraic characteristic equation.

Βιβλιογραφία

[1] R. P. Agarwal, *Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods, and Applications*, Second Edition, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **228**, Marcel Dekker, Inc., New York, 2000.

[2] R. P. Agarwal, M. Bohner, S. R. Grace and D. O'Regan, *Discrete Oscillation Theory*, Hindawi Publishing Corporation, New York, 2005.

[3] R. P. Agarwal and P. J. Wong, *Advanced Topics in Difference Equations*, Mathematics and its Applications, **404**, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.

[4] A. G. Balanov, N. B. Janson, P. V. E. McClintock, R. W. Tucks and C.H. T. Wang, Bifurcation analysis of a neutral delay differential equation modelling the torsional motion of a driven drill-string, *Chaos Solitons Fractals* **15** (2003), 381-394.

[5] J. Baštinec and J. Diblik, Remark on positive solutions of discrete equation $\Delta u(k+n) = -p(k)u(k)$, *Nonlinear Anal.* **63** (2005), e2145-e2151.

[6] A. Bellen, N. Guglielmi and A. E. Ruchli, Methods for linear systems of circuit delay differential equations of neutral type, *IEEE Trans. Circuits Systems* I *Fund. Theory Appl.* **46** (1999), 212 - 216.

[7] G.E. Chatzarakis and I.P. Stavroulakis, Oscillations of first order linear delay difference equations, *Aust. J. Math. Anal. Appl.* **3** (2006), Art.14, 11pp.

[8] M-P Chen, B. S. Lalli and J. S. Yu, Oscillation in neutral delay difference equations with variable coefficients, *Comput. Math. Appl.* **29** (1995), 5-11.

[9] M.P. Chen and Y.S. Yu, Oscillations of delay difference equations with variable coefficients, *Proc. First Int. Conference on Difference Equations*, Gordon and Breach , London 1995, 105-114.

[10] S.S. Cheng and B.G. Zhang, Qualitative theory of partial difference equations (I): Oscillation of nonlinear partial difference equations, *Tamkang J. Math.* **25** (1994), 279-298.

[11] S.S. Cheng and G. Zhang, "Virus" in several discrete oscillation theorems, *Appl. Math. Lett.* **13** (2000), 9-13.

[12] J. Diblik, Positive and oscillating solutions of differential equations with delay in critical case, *J. Comput. Appl. Math.* **88** (1998), 185-2002.

[13] Y. Domshlak, Sturmian comparison method in oscillation study for discrete difference equations, I, II, *Differential Integral Equations* **7** (1994), 571-582, 583-592.

[14] Y. Domshlak, Delay-difference equations with periodic coefficients: sharp results in oscillation theory, *Math. Inequal. Appl.* **1** (1998), 403-422.

[15] Y. Domshlak, What should be a discrete version of the Chanturia-Koplatadze Lemma?, *Funct. Differ. Equ.* **6** (1999), 299-304.

[16] Y. Domshlak and A. Aliev, On oscillatory properties of the first order differential equations with one or two retarded arguments, *Hiroshima Math. J.* **18** (1998), 31-46.

[17] Y. Domshlak and I.P. Stavroulakis, Oscillations of first-order delay differential equations in a critical state, *Appl. Anal.* **61** (1996), 359-371.

[18] V. Dorodnitsyn, *Applications of Lie Groups to Difference Equations*, Keldysh Inst. of Applied Mathematics, Moscow, Russia, 2010.

[19] L. Edelstein-Keshet, *Mathematical Models in Biology*, McGraw-Hill, New York, 1987.

[20] S. N. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*, Second Edition, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1999.

[21] A. Elbert and I.P. Stavroulakis, Oscillations of first order differential equations with deviating arguments, *Recent Trends in Differential Equations*, 163-178, World Sci. Ser. Appl. Anal.,1, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992.

[22] A. Elbert and I. P. Stavroulakis, Oscillation and nonoscillation criteria for delay differential equations, *Proc. Amer. Math. Soc.* **123** (1995), 1503-1510.

[23] L. H. Erbe, Qingkai Kong and B.G. Zhang, *Oscillation Theory for Functional- Differential Equations*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **190**, Marcel Dekker, Inc., New York, 1995.

[24] L. H. Erbe and B.G. Zhang, Oscillation of first order linear differential equations with deviating arguments, *Differential Integral Equations* **1** (1988), 305-314.

[25] L. H. Erbe and B.G. Zhang, Oscillation of discrete analogues of delay equations, *Differential Integral Equations* **2** (1989), 300-309.

[26] N. Fukagai and T. Kusano, Oscillation theory of first order functional differential equations with deviating arguments, *Ann. Mat. Pura Appl.* **136** (1984), 95-117.

[27] D. A. Georgiou, E. A. Grove and G. Ladas, Oscillation of neutral difference equations, *Appl. Anal.* **33** (1989), 243-253.

[28] K. Gopalsamy, *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*, Mathematics and its Applications, **74**, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1992.

[29] I. Gyori and G. Ladas, *Oscillation Theory of Delay Differential Equations: With Applications*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1991.

[30] J. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Second Edition, Applied Mathematical Sciences, Vol. **3**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1997.

[31] F. C. Hoppensteadt, *Mathematical Methods of Population Biology*, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York, 1977.

[32] A. F. Ivanov and V. N. Shevelo, Oscillation and asymptotic behavior of solutions of first order functional-differential equations, *Ukrain. Mat. Zh.* **33** (1981), 745-751, 859.

[33] D. L. Jagerman, *Difference Equations with Applications to Queues*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **233**, Marcel Dekker, Inc., New York, 2000.

[34] J. Jaroš and I.P. Stavroulakis, Necessary and sufficient conditions for oscillations of difference equations with several delays, *Utilitas Math.* **45** (1994), 187-195.

[35] J. Jaroš and I.P. Stavroulakis, Oscillation tests for delay equations, *Rocky Mountain J. Math.* **29** (1999), 197-207.

[36] C. Jian, On the oscillation of linear differential equations with deviating arguments, *Math. Practice Theory* **1** (1991), 32-41 (Chinese).

[37] G. L. Karakostas, Convergence in a neutral delay differential equation, *Appl. Anal.* **40** (1991), 225-231.

[38] G. L. Karakostas, On the asymptotic behavior of the difference equation $x_{n+1} = x_n[a - F(x_{n-1})]F(x_{n-2})$, *Math. Sci. Res. J.* **6** (2002), 558-572.

[39] G. L. Karakostas, Asymptotic behavior of the solutions of the difference equation $x_{n+1} = x_n^2 f(x_{n-1})$, *J. Difference Equ. Appl.* **9** (2003), 599-602.

[40] G. L. Karakostas and Stevic S., On the difference equation $x_{n+1} = Af(x_n) + f(x_{n-1})$, *Appl. Anal.* **83** (2004), 309-323.

[41] G. L. Karakostas and Stevic S., On a higher order difference equation, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal.* **14** (2007), 789-803.

[42] W. G. Kelley and A. C. Peterson, *Difference Equations: An Introduction with Applications*, Second Edition, Harcourt/Academic Press, San Diego, CA, 2001.

[43] M. Kon, Y.G. Sficas and I.P. Stavroulakis, Oscillation criteria for delay equations, *Proc. Amer. Math. Soc.* **128** (2000), 2989-2997.

[44] R. Koplatadze, On oscillatory properties of solutions of functional-differential equations, *Mem. Differential Equations Math. Phys.* **3** (1994), 179pp.

[45] R. G. Koplatadze and T. A. Chanturija, Oscillating and monotone solutions of first-order differential equations with deviating argument, *Differentsial'nye Uravneniya* **18** (1982), 1463-1465, 1472.

[46] R. G. Koplatadze and G. Kvinikadze, On the oscillation of solutions of first-order delay differential inequalities and equations, *Georgian Math. J.* **1** (1994), 675-685.

[47] R. G. Koplatadze, G. Kvinikadze and I. P. Stavroulakis, Oscillation of second-order linear difference equations with deviating arguments, *Adv. Math. Sci. Appl.* **12** (2002), 217-226.

[48] I.-G. E. Kordonis and Ch. G. Philos, Oscillation and nonoscillation in linear delay or advanced difference equations, *Math. Comput. Modelling* **27** (1998), 11-21.

[49] T. Kusano, On even-order functional-differential equations with advanced and retarded arguments, *J. Differential Equations* **45** (1982), 75-84.

[50] M. K. Kwong, Oscillation of first-order delay equations, *J. Math. Anal. Appl.* **156** (1991), 274-286.

[51] G. Ladas, Sharp conditions for oscillations caused by delays, *Applicable Anal.* **9** (1979), 93-98.

[52] G. Ladas, Oscillations of equations with piecewise constant mixed arguments. *Differential Equations and Applications*, *Vol. I, II* (Columbus, OH, 1988), 64-69, Ohio Univ. Press, Athens, OH, 1989.

[53] G. Ladas, Explicit conditions for the oscillation of difference equations, *J. Math. Anal. Appl.* **153** (1990), 276-287.

[54] G. Ladas, Recent developments in the oscillation of delay difference equations, *International Conference on Differential Equations, Stability and Control*, Marcel Dekker, New York, 1990.

[55] G. Ladas, V. Lakshmikantham and J. S. Papadakis, Oscillations of higher-order retarded differential equations generated by retarded arguments, *Delay and Functional Differential Equations and Their Applications*, Academic Press, New York, 1972, pp. 219-231.

[56] G. Ladas, L. Pakula and Z. C. Wang, Necessary and sufficient conditions for the oscillation of difference equations, *Panamer. Math. J.* **2** (1992), 17-26.

[57] G. Ladas, Ch. G. Philos and Y. G. Sficas, Sharp conditions for the oscillation of delay difference equations, *J. Appl. Math. Simulation* **2** (1989), 101-111.

[58] G. Ladas, C. Qian and J. Yan, A comparison result for the oscillation of delay differential equations, *Proc. Amer. Math. Soc.* **114** (1992), 939-947.

[59] G. Ladas and Y. G. Sficas, Oscillations of neutral delay differential equations, *Canad. Math. Bull.* **29** (1986), 438-445.

[60] G. Ladas, Y.G. Sficas and I. P. Stavroulakis, Nonoscillatory functional-differential equations, *Pacific J. Math.* **115** (1984), 391-398.

[61] G. Ladas and I. P. Stavroulakis, Oscillations caused by several retarded and advanced arguments, *J. Differential Equations* **44** (1982), 134-152.

[62] V. Lakshmikantham and D. Trigiante, *Theory of Difference Equations: Numerical Methods and Applications*, Mathematics in Science and Engineering, **181**, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.

[63] B. Lalli and B. G. Zhang, Oscillation of difference equations, *Colloq. Math.* **65** (1993), 25-32.

[64] B. T. Li, Oscillations of delay differential equations with variable coefficients, *J. Math. Anal. Appl.* **192** (1995), 312-321.

[65] B. T. Li, Oscillations of first order delay differential equations, *Proc. Amer. Math. Soc.* **12**4 (1996), 3729-3737.

[66] Z. Luo and J. Shen, New results for oscillation of delay difference equations, *Comput. Math. Appl.* **41** (2001), 553-561.

[67] Z. Luo and J. Shen, New oscillation criteria for delay difference equations, *J. Math. Anal. Appl.* **264** (2001), 85-95.

[68] Malgorzata Migda and Guang Zhang, On unstable neutral difference equations with maxima, *Math. Slovaca* **56** (2006), 451-463.

[69] R. E. Mickens, *Difference Equations: Theory and Applications*, Second Edition, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1990.

[70] L. A. Moye and A. S. Kapadia, *Difference Equations with Public Health Applications*, Marcel-Dekker, 2000.

[71] A. D. Myshkis, Linear homogeneous differential equations of first order with deviating arguments, *Uspekhi Mat. Nauk* **5** (1950), 160-162 (Russian).

[72] A. D. Myshkis, *Linear Differential Equations with Retarded Argument*, "Nauka", Moscow, 1972 (Russian).

[73] G. Owen, *Game Theory*, Second Edition, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1982.

[74] Ε. Ν. Πετροπούλου και Π. Δ. Σιαφαρίκας, *Εξισώσεις Διαφορών και Εφαρμογές Αυτών*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 2006.

[75] Ch. G. Philos, On oscillations of some difference equations, *Funkcial. Ekvac.* **34** (1991), 157-172.

[76] Ch. G. Philos, Oscillations in a nonautonomous delay logistic difference equation, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **35** (1992), 121-131.

[77] Ch. G. Philos and I. K. Purnaras, Oscillations in linear difference equations with variable coefficients, *J. Appl. Math. Stochastic Anal.* **4** (1991), 241-257.

[78] Ch. G. Philos and I. K. Purnaras, The behavior of the solutions of periodic linear neutral delay difference equations, *J. Comput. Appl. Math.* **175** (2005), 209-230.

[79] Ch. G. Philos and I. K. Purnaras, Sufficient conditions for the oscillation of linear difference equations with variable delay, *J. Difference Equ. Appl.* **14** (2008), 629-644.

[80] Ch. G. Philos, I. K. Purnaras and I. P. Stavroulakis, Sufficient conditions for the oscillation of delay difference equations, *J. Difference Equ. Appl.* **10** (2004), 419-435.

[81] Ch. G. Philos and Y. G. Sficas, An oscillation criterion for first order linear delay differential equations, *Canad. Math. Bull.* **41** (1998), 207-213.

[82] Y. G. Sficas and I. P. Stavroulakis, Necessary and sufficient conditions for oscillations of neutral differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* **123** (1987), 494-507.

[83] Y. G. Sficas and I. P. Stavroulakis, Oscillation criteria for first-order delay equations, *Bull. London Math. Soc.* **35** (2003), 239-246.

[84] A. N. Sharkovsky, Yu. L. Maistrenko and E. Yu. Romanenko, *Difference Equations and Their Applications*, Translated from the 1986 Russian original by D. V. Malyshev, P. V. Malyshev and Y. M. Pestryakov, Mathematics and its Applications, **250**, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

[85] J. H. Shen and Z. Luo, Some oscillation criteria for difference equations, *Comput. Math. Appl.* **40** (2000), 713-719.

[86] J. H. Shen and I. P. Stavroulakis, Oscillation criteria for delay difference equations, *Electron. J. Differential Equations* **2001** (2001), 15pp.

[87] W. Snow, Existence, uniqueness and stability for nonlinear differential-difference equations in the neutral case, *N. Y. U. Courant Inst. Math. Sci.*, IMM-NYU **328** (February 1965).

[88] I. P. Stavroulakis, Oscillations of delay difference equations, *Comput. Math. Applic.* **29** (1995), 83-88.

[89] I. P. Stavroulakis, Oscillation criteria for first order delay difference equations, *Mediterr. J. Math.* **1** (2004), 231-240.

[90] I. P. Stavroulakis, Oscillation criteria for delay, difference and functional equations, *Funct. Differ. Equ.* **11** (2004), 163-183.

[91] I. P. Stavroulakis, A survey on the oscillation of delay and difference Equations with variable delay, *Int. J. Qual. Theory Differ. Eqns Appl.* **1** (2007), 223-239.

[92] X. H. Tang, Oscillations of delay difference equations with variable coefficients, (Chinese), *J. Central So. Univ. Technology,* **29** (1998), 287-288.

[93] X. H. Tang and S. S. Cheng, Positive solutions of a neutral difference equation with positive and negative coefficients, *Georgian Math. J.* **11** (2004), 177-185.

[94] X. H. Tang and Xiaoyan Lin, Necessary and sufficient conditions for oscillation of first-order nonlinear neutral difference equations, *Comput. Math. Appl.* **55** (2008), 1279-1292.

[95] X. H. Tang and J. S. Yu, Oscillation of delay difference equations, *Comput. Math. Appl.* **37** (1999), 11-20.

[96] X. H. Tang and J. S. Yu, A further result on the oscillation of delay difference equations, *Comput. Math. Appl.* **38** (1999), 229-237.

[97] X. H. Tang and J. S. Yu, Oscillation of delay difference equations, *Hokkaido Math. J.* **29** (2000), 213-228.

[98] X. H. Tang and J. S. Yu, Oscillation of first order delay differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* **248** (2000), 247-259.

[99] X. H. Tang, J. S. Yu and Z. C. Wang, Comparison theorems of oscillation of first order delay differential equations in a critical state with applications, *Kexue Tongbao (Chinese)* **44** (1999), 26-30.

[100] X. H. Tang and R. Y. Zhang, New oscillation criteria for delay difference equations, *Comput. Math. Appl.* **42** (2001), 1319-1330.

[101] E. Thandapani, R. Arul and P. S. Raja, Oscillation of 1rst order neutral delay difference equations, *Appl. Math. E-Notes* **3** (2003), 88-94.

[102] C. J. Tian and S. S. Cheng, Oscillation criteria for delay neutral difference equations with positive and negative coefficients, *Bol. Soc. Parana. Mat.* **21**(2003), 19-30.

[103] A. Tomaras, Oscillatory behaviour of first order delay differential equations, *Bull. Austral. Math. Soc.* **19** (1978), 183-190.

[104] Z. C. Wang, I. P. Stavroulakis and X. Z. Qian, A Survey on the oscillation of solutions of first order linear differential equations with deviating arguments, *Appl. Math. E-Notes* **2** (2002), 171-191.

[105] Wenrui Shan and Weigao Ge, Oscillation of neutral difference equations with positive and negative coefficients, *Compu. Math. Appl.* **47** (2004), 1647-1657.

[106] L. Xianyi and Z. Deming, Oscillation of advanced difference equations with variable coefficients, *Ann. Differential Equations* **18** (2002), 254-263.

[107] L. Xianyi, Z. Deming and W. Hanqing, Oscillation for advanced differential equations with oscillating coefficients, *Internat. J. Math. Math. Sci.* **33** (2003), 2109-2118.

[108] W. Xiong and J. Liang, Novel stability criteria for neutral systems with multiple time delays, *Chaos Solitons Fractals* **32**(2007), 1735-1741.

[109] J. S. Yu and Z. C. Wang, Some further results on oscillation of neutral differential equations, *Bull. Austral. Math. Soc.* **46** (1992), 149-157.

[110] J. S. Yu and Z. C. Wang, Asymptotic behavior and oscillation in neutral delay difference equations, *Funkcial. Ekvac.* **37** (1994), 241-248.

[111] J. S. Yu, Z. C. Wang, Z. C. Zhang and B. G.-Qian, X. Z, Oscillations of differential equations with deviating arguments, *Panamer. Math. J.* **2** (1992), 59-78.

[112] J. S. Yu, B. G. Zhang and Z. C. Wang, Oscillation of delay difference equations, *Appl. Anal.* **53** (1994), 117-124.

[113] B. G. Zhang, Oscillation of solutions of the first-order advanced type differential equations, *Science exploration* **2** (1982), 79-82.

[114] G. Zhang, Oscillation for nonlinear neutral difference equations, *Appl. Math. E-Notes* **2** (2002), 22-24.

[115] B. G. Zhang and S. S. Cheng, Oscillation criteria for a neutral difference equation with delay, *Appl. Math. Lett*. **8** (1995), 13-17.

[116] B. G. Zhang and C. J. Tian, Oscillation criteria for difference equations with unbounded delay, *Comput. Math. Appl.* **35** (1998), 19-26.

[117] B. G. Zhang and C. J. Tian, Nonexistence and existence of positive solutions for difference equations with unbounded delay, *Comput. Math. Appl.* **36**(1998), 1-8.

[118] B. G. Zhang and Yong Zhou, Comparison theorems and oscillation criteria for difference equations, *J. Math. Anal. Appl.* **247** (2000), 397-409.

[119] Y. Zhou, Oscillations of neutral difference equations, *Kyungpook Math. J.* **39**(1999), 283-291.

[120] J. Zhou, T. Chen and L. Xiang, Robust synchronization of delayed neutral networks based on adaptive control and parameters identification, *Chaos Solitons Fractals* **27**(2006), 905-913.