ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΕΚ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΝ

ΕΡΑΝΙΘΕΝΤΑ ΤΕ ΚΑΙ ΣΥΝΤΕΘΕΝΤΑ

ΠΑΡΑ ΤΟΥ ΙΕΡΟΛΟΓΙΩΤΑΤΟΥ

ΚΥΡΙΟΥ ΑΓΑΠΙΟΥ ΡΗΓΑ,

ΤΟΥ ΕΚ ΠΟΛΕΩΣ ΠΑΡΓΗΣ.

Πρὸς χρῆσιν τῶν φιλομαθῶν τε καὶ ἐραστῶν τῆς Πρακτικῆς Ἀριθμητικῆς Ἐπιστήμης. Καὶ ἰδίοις αὐτοῦ ἀναλώμασι νῦν πρῶτον Τύποις ἐκδοθέντα, καὶ τοῖς φιλομούσοις Νέοις προσφωνηθέντα τε, καὶ ἀφιερωθέντα.

Ἐπιστασίᾳ

ΙΩΑΚΕΙΜ ΙΕΡΟΔΙΑΚΟΝΟΥ ΠΟΛΙΤΟΥ,

ἐκ Καλαμάτας τῆς Πελοποννήσου.

,αωκζ'. ΕΝ ΒΕΝΕΤΙΑ. 1827.

ΠΑΡΑ ΜΙΧΑΗΛῼ ΓΛΥΚΕΙ Τῼ ΕΞ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ.

ΠΡΟΣΦΩΝΗΣΙΣ.

Συνήθεια ἐπεκράτησεν εἰς ὅλους ἐκείνους, οἵτινες συντάττουσιν, ἢ συγγράφουσί τι σύγγραμμα, ἢ πόνημα, τὸ ὁποῖον μέλλουσι νὰ ἐκδώσωσιν εἰς φῶς διὰ τοῦ Τύπου, νὰ ζητῶσι κἀνένα μέγα καὶ ἔνδοξον ὑποκείμενον, πρὸς τὸ ὁποῖον ν' ἀφιερώνωσι τὸ πόνημά των, ἵνα λάβῃ δι' αὐτοῦ τὴν ἀπαιτουμένην ὑπεράσπισιν, ὑπόληψίν τε καὶ πρέπουσαν ὑποδοχήν. Ἔπρεπεν ἄρα, κατὰ τὸ ἐπικρατοῦν ἔθος, νὰ ζητήσω καὶ ἐγὼ τινὰ προστάτην τε καὶ ὑπερασπιστὴν τῶν πονηματίων μου, ἵνα διὰ τῆς προστασίας καὶ ὑπολήψεώς του παρακινηθῶσιν οἱ φιλομαθεῖς πρὸς κτῆσιν τῶν νεοφανῶν τούτων Βιβλιαρίων μου, καὶ δι' αὐτῶν τῆς τε Ἀριθμητικῆς Ἐπιστήμης, καὶ Γραμματικῆς τέχνης εὐκολοτέραν τε καὶ τελειοτέραν κατάληψιν.

Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ στενὸν τοῦ καιροῦ, καὶ ἡ κατεπείγουσά με χρεία τοῦ Τύποις ἐκδοῦναι τὰ πονημάτια πρὸ τοῦ με τὸ ζῆν ἀπολείψῃ, ἐφ' ὃ φυσικῶς ἤδη κλίνει ἡ πρεσβυτική μου ἡλικία, δέν με συγχωρεῖ εἰς τὴν τοῦ ἀπαιτουμένου ὑποκειμένου ἀναζήτησίν τε καὶ ἀφιέρωσιν· ὅθεν δι' ἔλλειψιν τούτου, ἔκρινα εὔλογον ν' ἀφιερώσω ταῦτα τὰ διττά μου πονημάτια εἰς τοὺς Νέους παντὸς Χριστιανικοῦ καὶ φιλομούσου Ἔθνους· χάριν τῶν ὁποίων τοὺς τοσούτους κατέβαλον κόπους, καὶ τὰ τοσαῦτα κατηνάλωσα χρήματα· ἐπικαλούμενος ὑπερασπιστάς τε καὶ κηδεμόνας τῶν πονηματίων μου, τοὺς ἐγκρίτους Προεστῶτας παντὸς φιλομούσου Ἔθνους,

τοὺς

τὰς φιλόπαιδας Γονεῖς, καὶ τὰς φιλομούσους καθηγητὰς καὶ Διδασκάλους τῶν Νέων· καὶ εἰμὶ εὔελπις, ὅτι οἱ ῥηθέντες θέλουσι παρακινήσῃ τὰς φιλομαθεῖς Νέους, πρὸς κτῆσιν τῶν ῥηθέντων πονηματίων. Δεχθῆτε λοιπὸν εὐμενῶς, ὦ φιλόμουσοι Νέοι, καὶ φιλόκαλλοι Γονεῖς τε καὶ Προεστῶτες, τὰ προσφερόμενα ὑμῖν ταῦτα διττὰ πονημάτια· καὶ θέλετε λάβῃ, οἱ μὲν Νέοι τὴν ἀνάλογον τῆς ἐπιμελείας Σας, ἐν τοῖς μαθήμασι πρόοδον. Οἱ δὲ Γονεῖς καὶ προϊστάμενοι, εἰς ἀνταμοιβὴν τῆς προστασίας Σας, τὴν ἐντὸς ὀλίγου εἰς τὰ κρείττω προκοπὴν τῶν φιλτάτων Σας, καὶ συμπολιτῶν Σας. Ἔῤῥωσθε.

Τῆς ὑμετέρας ἀγάπης τε

Καὶ προστασίας ὅλος ἐκκρεμὴς

ΑΓΑΠΙΟΣ ΡΗΓΑΣ

ὁ ἐκ πόλεως Πάργης.

ΤΑ

ΤΑ ΟΝΟΜΑΤΑ ΤΩΝ ΕΝΤΙΜΩΝ ΚΥΡΙΩΝ ΣΥΝΔΡΟΜΗΤΩΝ.

Ὁ Αἰδεσιμολογιώτατος Διδάσκαλος κύριος Παππᾶ Ἀνδρέας Ἰδρομένος Πάργειος . . . . Σῶμα	1
Ὁ Αἰδεσιμολογ. κύριος Παππᾶ Σπυρίδων Δεσίλας Πάργειος	1
Ὁ Αἰδεσιμολογ. κύριος Παππᾶ Παναγιώτης Στανέλος Πάργειος	1
Ὁ Αἰδεσιμ. κύριος Παππᾶ Γεώργιος Ἁγιοβλασίτης Πάργειος	1
Ὁ Πανοσιώτ. κύριος Χριστόφορος Δεσίλας Πάργειος .	1
Ὁ Σοφολογ. κύριος Βενέδικτος Μαυροϊωάννης Πάργειος .	1
Ὁ Λογιώτ. κύριος Ἰωάννης Λοῦμπος Πάργειος . .	1
Ὁ Ἐντιμολογ. κύριος Ἀναστάσιος Ἀναγνώστης Δημουλίτζας Πάργειος	1
Ὁ Λογιώτ. κύριος Σπυρίδων Μαυροϊωάννης Πάργειος .	1
Ὁ Λογιώτ. κύριος Γεώργιος Βρανᾶς Πάργειος . .	1
Ὁ Λογιώτ. κύριος Εὐθύμιος Ἰδρομένος Πάργειος . .	1
Ὁ Ἐντιμ. κύριος Ἰωάννης Κάφηεις Πάργειος . .	1
Ὁ Εὐγενέστατος κύριος Δημήτριος Μάστρακας Δεσίλας Πάργειος	1
Ὁ Ἐντιμ. κύριος Σωτήρης Μαυροϊωάννης Πάργειος .	1
Ὁ Ἐντιμ. κύριος Ἀναστάσιος Μαυροϊωάννης Πάργειος .	1
Ὁ Ἐντιμ. κύριος Γεώργιος Βασιλᾶς Πάργειος . .	1
Ὁ Ἐντιμ. κύριος Δημήτριος Τζοῦκος Δεσίλας Πάργειος .	1
Ὁ Ἐντιμ. κύριος Ἀναστάσιος Μανιάκης Πάργειος . .	1
Ὁ Ἐντιμ. κύριος Δημήτριος Ζώλας Πάργειος . .	1
Ὁ Τιμιώτ. κύριος Κωνσταντῖνος Ἀναγνώστης Μαυροϊωάννης Πάργειος	1
Ὁ Τιμιώτ. κύριος Γεωργάκης Κατεργάρης Δεσίλας Πάργειος	1
Ὁ Τιμιώτ. Δόκτωρ κύριος Νικόλαος Μανιάκης Πάργειος .	1
Ὁ Τιμιώτ. κύριος Ἀνδρέας Μ. Λυσαῖος . . .	1
Ὁ Τιμιώτ. κύριος Ἰωάννης Βέγιας	1

Οἱ

Οἱ ἐν Τεργέστῃ, καὶ ἄλλων Πόλεων.

Τὸ ἐν Τεργέστῃ Γυμνάσιον τοῦ τοῦ Γένους Ἑλλήνων. Σώμ. 4
Ὁ Πανοσιολογιώτατος Ἀρχιμανδρίτης κύριος Ἰωακεὶμ Φώτιος ἐκ Βεῤῥοίας 2
Ὁ Πανοσιολογ. Ἀρχιμ. κύριος Ἰγνάτιος Σκαλιόρας ἐκ Θεσσαλίας Ῥαψάνη 1
Ὁ Πανοσιολογ. Ἀρχ. κύριος Μισαὴλ Ἀποστολίδης Κρὴς. 1
Ὁ Πανοσιολογ. κύριος Σεραφεὶμ Πομέγας Θεσσαλονικεὺς. 1
Ὁ Αἰδεσιμολογ. ἐν Ἱερεῦσι κύριος Πολυχρόνιος ἐκ Βόλ. Μακρινίτζας 1
Ὁ Ὁσιολογ. ἐν Ἱεροδιακόνοις κύριος Χρύσανθος Κονοφάος Πάργειος 1
Ὁ Ἐντιμολογ. κύριος Προκόπιος Δημ. Καρτζιώτης Πελοποννήσιος 2
Ὁ Ἐξοχώτ. καὶ φιλόμουσος Ἰατρὸς κύριος Ἰωάννης Βορδόνης Κερκυραῖος 1
Ὁ Ἐντιμ. καὶ φιλογενὴς κύριος Ἀντώνιος Μ. Ἀντωνόπουλος Πελοποννήσιος 1
Ὁ Ἐντιμ. κύριος Κωνσταντῖνος Θεοδώρου Πολίτης Πελοποννήσιος 5
Ὁ Ἐντιμ. κύριος Ἀλέξιος Μανουὴλ Ἡσαΐας Σμυρναῖος. 1
Ὁ Ἐντιμ. κύριος Δημήτριος Ἀποστολόπουλος Πελοποννήσ. 1
Ὁ Μουσικολογ. κύριος Πελοπίδης Πελοποννήσιος . . 1
Ὁ Λογιώτ. κύριος Πέτρος Σουμαρίπης Κρὴς . . 1
Ὁ Λογιώτ. κύριος Νικόλαος Ζαφείρης Σμυρναῖος . . 1
Ὁ Ἐντιμ. κύριος Γεώργιος Μόσρας ἐξ Ἄρτης . . 1
Ὁ Τιμιώτ. κύριος Ἀναστάσιος Τζιμὴς ἐξ Ἄρτης . . 1
Ὁ Τιμιώτ. κύριος Θεόδωρος Ἀναγνώστη Παχὺς ἐξ Ἄρτης. 1
Ὁ Τιμιώτ. κύριος Ἰωάννης Γούναρης ἐξ Ἄρτης . . 1
Ὁ Τιμιώτατος κύριος Χριστόδουλος Ἀναγνώστου Παχὺς ἐξ Ἄρτης 1
Ὁ Πανοσιολογιώτατος Διδάσκαλος κύριος Θεοδώρητος Καρύδης Κερκυραῖος 1
Ὁ Πανοσιολογιώτατος Πρωτοσύγγελος κύριος Χρύσανθος Μασέλλης Κερκυραῖος 1
Ὁ Ἐκλαμπρότατος Ἰππεὺς κύριος Ἀνδρέας Μουσοξύδης Κερκυραῖος 1

Ὁ

Ὁ Ἐκλαμπρότατος Ἰππεὺς κύριος Ἄγγελος Μουσοξύδης Κερκυραῖος 1
Ὁ Ἐκλαμπρότατος Ἰππεὺς, καὶ Σύμβουλος Κολεγίου Ῥωσσίας κύριος Μ. Φίλης Κερκυραῖος . . . 1
Ὁ Νεανίσκος κύριος Φίλιππος Καρύδης Κερκυραῖος . 1

Οἱ ἐν Βενετίᾳ.

Ἀφιέρωσεν ὁ Συγγραφεὺς εἰς τὸ ἐν Βενετίᾳ Ἑλληνικὸν Γυμνάσιον τοῦ Φλαγγίνη Σώματα πέντε τῆς διτόμου Γραμματικῆς, καὶ πέντε τῆς Ἀριθμητικῆς . . 10
Ὁ Πανοσιολογιώτατος κύριος Βαρθολομαῖος Κουτλουμουσιανὸς Ἴμβριος 1
Ὁ Ἐντιμ. Ἄρχων κύριος Ἀντώνιος Παππαδόπουλος ἐκ Βενετίας 2
Ὁ Ἐντιμ. καὶ φιλογενὴς κύριος Κωνσταντῖνος Καβάκος ἔφορος τοῦ Γένους, καὶ τοῦ Σχολείου ἐκ Βενετίας . 2
Ὁ Ἐντιμ. κύριος Ἀλέξιος Νικολαΐδης ἔφορος τοῦ Γένους Ζαγοραῖος 2
Ὁ Ἐντιμ. κύριος Ἄγγελος Φορέστης ἐκ Κεφαλληνίας . 1
Ὁ Ἐκλαμπρ. κύριος Ἀλέξανδρος Γκίκας Σύμβουλ. τῆς ἐπικρατείας τοῦ Σεβαστοῦ Αὐτοκράτορος πάσης Ῥωσσίας. 1
Ὁ Ἐκλαμπρότατος Ἰππεὺς κύριος Σπυρίδων Νεράντζης Ζακύνθιος 1
Ὁ Ἐντιμ. κύριος Ἰωάννης Χριστοδούλου Νινῆς Θεσσαλονικ. 1
Ὁ Ἐντιμ. κύριος Ἰακωμῆς Πολυζώης Θεσσαλονικεὺς . 1
Ὁ Ἐλλογιμ. κύριος Δημήτριος Ν. τοῦ Πρέσσης ἐκ Βυζαντίου. 1
Ὁ Λογιώτ. κύριος Ἀντώνιος Ἀνδρέου Πατεράκης Χῖος . 1
Ὁ Τιμιώτ. κύριος Ἀθανάσιος, καὶ Ἀδελφοὶ Παππᾶ Θεοδώρου ἐκ Καλλαῤῥυτῶν τῆς Ἠπείρου. . . . 11
Ὁ Τιμιώτ. κύριος Παναγιώτης Ἰωάννου Μπάρδης ἐκ Θερμοπύλας 1
Ὁ Τιμιώτ. κύριος Γεώργιος Μ. Μπιτζάκος ἐκ Καλλαῤῥυτῶν τῆς Ἠπείρου 1
Οἱ Τιμιώτ. κύριοι Ἰωάννης, Δημήτριος, καὶ Χριστόδουλος Γεωργίου Μπιριάκ. ἐκ Καλλαῤῥυτῶν τῆς Ἠπείρου . 1
Ὁ Μουσικολογ. κύριος Ἰωσὴφ Βελοῦδος ἐκ Βενετίας . 2
Ὁ Τιμιώτ. κύριος Νικόλαος Βρελκιος ἐξ Ἁγίας Μαύρας. 2

ΠΑΣΙ ΤΟΙΣ ΕΝΤΕΥΞΟΜΕΝΟΙΣ ΤΕ.

ΚΑΙ ΑΝΑΓΙΝΩΣΚΟΥΣΙ ΦΙΛΕΠΙΣΤΗΜΟΣΙ,

ΠΑΝ Ο, ΤΙ ΕΦΕΤΟΝ ΚΑΙ ΣΩΤΗΡΙΟΝ ΕΠΕΥΧΟΜΕΝΟΣ,
ΤΗΝ ΕΚΑΣΤῼ ΟΦΕΙΛΟΜΕΝΗΝ ΠΡΟΣΡΗΣΙΝ ΑΠΟΝΕΜΩ.

Ὅσον μὲν τὸ χρήσιμον ἡ τῆς Ἀριθμητικῆς ἕξεως πεπλούτηκε κτῆσις, εἰπεῖν οὐκ ἔχω· ὅσην δ᾽ αὖ τὴν ὠφέλειαν παρέχεται τοῖς τὴν Ἐπιστήμην ταύτην κτησαμένοις, οὐκ ἀκοῇ μόνῃ, πείρᾳ δ᾽ ἀποχρώντως πάλαι ποτὲ μεμάθηκα, ἱκανῶς ταύτῃ ἐνδιατρίψας· δι᾽ αὐτῆς γὰρ ὁ ἀνθρώπινος νοῦς θηγόμενός τε, καὶ ὡς ἔπος εἰπεῖν, ὀξυνόμενος, κρείττων ἑαυτοῦ γίνεται. Οἵων δ᾽ ἀγαθῶν χορηγὸς τῷ κοινωνικῷ ἡμῶν καθέστηκε βίῳ, παντί που δῆλον, πᾶσα μὲν γὰρ δοσοληψία δι᾽ αὐτῆς ἐνσημαίνεται, πᾶς δ᾽ ὑπολογισμὸς, δι᾽ αὐτῆς ἐκπεραίνεται, ἀντιλογίας δὲ πάσης τοῖς τὸν ἐμπορικὸν βίον ἑλομένοις, εἴποτε τύχοι, αὕτη μόνη πέρας τε καὶ λυτήριον πέφυκε. Ταύτῃ γὰρ οἱ περί τινος χρηματικῆς ποσότητος λογιζόμενοι καὶ ἐν σφίσιν αὐτοῖς ἀντιφερόμενοι, ἢ ἄλλως πῶς ἠπατεῖσθαι τῷ ὑπολογισμῷ ἐνδοιάζοντες, οἷα δή τινι Λυδίᾳ λίθῳ προσχρώμενοι, τὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ ἤτοι ὀρθῶς, ἢ ἑτέρως πως ἔχοντα, ἐξελέγχουσι. Καὶ τὰ μὲν καλῶς ἔχοντα ἧπερ ἔχουσιν ἐῶντες, τὰ δ᾽ ἐσφαλμένα ἐπιδιορθώσαντες, τοῦ λοιποῦ ἐφησυχάζουσί τε καὶ εἰρηνεύουσιν, ἀντιλογίας πάσης τε καὶ ἐνδοίας ἀπαλλαγέντες.

Οὐ μὴν ἀλλὰ καὶ ταῖς ὑπερκειμέναις τῶν Ἐπιστημῶν, ἐκ περιουσίας τὴν ἑαυτῆς οὐχ ἧττον παρέχεται λυσιτέλειαν. Διὸ καὶ κλεῖν αὐτὴν Ἐπιστήμης ἁπάσης εἰπών τις, οὐκ ἂν ἁμάρτοι τῆς κλήσεως.

Περὶ ταύτης οὖν τῆς ἐν πᾶσιν ἐπωφελοῦς Ἐπιστήμης πολλοῖς τε καὶ ἄλλοις πανσόφοις ἀνδράσι καὶ πάλαι, καὶ νῦν, τοῖς μὲν γενικώτερον, τοῖς δ᾽ εἰδικώτερον ἐν ταῖς κατ᾽ αὐτοὺς πραγματείαις πεφιλοπόνηται. Τῷ τε γὰρ κλεινῷ Εὐγενίῳ τῷ Βουλγάρει, καὶ Νικηφόρῳ Θεοτόκῃ τῷ πάνυ, Βαλάνῳ τε τῷ Βασιλοπούλῳ καὶ τῷ τούτου υἱεῖ Κοσμᾷ τῷ Οἰκονόμῳ· νυμφίῳ καὶ τῷ Σοφολογιωτάτῳ Κωνσταντίνῳ Κούμμα τῷ Λαρισσαίῳ, καὶ Δημητρίῳ Γοβδελᾷ τῷ Θετταλῷ, τοῖς μὲν ἐλλειπῶς πως, τοῖς δ' ὑπερεκπερισσοῦ διείληπται, ὡς ἔξεστι τῷ βουλομένῳ μετιέναι. Ἀλλ' οἱ πλείους μὲν τούτων βραχέα τινὰ περὶ τῆς πρακτικῆς Ἀριθμητικῆς, προανακρουσάμενοι, ἐπὶ τὴν καθόλου λογιστικὴν εἴτ' οὖν ἀναλυτικήν, τὴν καὶ Ἄλγεβραν ἐκ φύλῳ ὀνόματι καλουμένην, ἐτράπησαν Μέθοδον, ἡμῖν ἀλλ' οὖν ἐν τῷ παρόντι πονηματίῳ περὶ μόνης τῆς πρακτικῆς ἔγνωσται διαλαβεῖν, ἵν' ἔχοιεν οἱ παρ' ἐμοὶ μαθητιῶντες καὶ τὸν ἔλλιπα στοιχειούμενοι λόγον, καὶ ταυτηνὶ τὴν Ἐπιστήμην προσκτήσασθαι, καὶ τῶν παρ' αὐτῆς καλῶν ἀπόνασθαι. Οἱ γὰρ ἐν ταύτῃ προγυμνασθέντες κἀν τῇ θεωρητικῇ, ἀπονωτέρως εἰσχωρῆσαι δυνήσονται, καὶ τὰ παραλελειμμένα μοι ἐκ τῶν περὶ ταύτης διειληφότων βίβλων, ὡς ἐκ πηγῆς τινος πολυχεύμονος ἀρύσονται, τὸ λυσιτελὲς καὶ ὠφέλιμον ἑαυτοῖς, ποικιλαχῶς πανταχόθεν, πονεῖν ἐθέλοντες, καρπώσονται, εἶεν.

Διαίρεσις τῆς Βίβλου.

Διήρηται δέ μοι τουτί, ὃ μετὰ χεῖρας φέρεις, ὦ φιλόμουσ' ἀναγνῶστα, πονημάτιον, ἐν βιβλιαρίοις τέσσαρσιν· συνῳδὰ τοῖς τῶν Ἀριθμητικῶν πράξεων πάθεσιν· ὧν ἕκαστον αὖθις ὑποδιαιρεῖται εἴτε Κεφαλαίοις καὶ Παραγράφοις, διά τε τὸ εὐμνημόνευτον, καὶ τὰς ἐν ταῖς προηγουμέναις καὶ προλεχθείσαις διδασκαλίαις παραπομπάς· ἵνα μὴ τὰ αὐτὰ πολλάκις ἀναμηρυκιζόμενα, ὄχλου τε καὶ ἀηδίας τοῖς μετιοῦσι πρόξενα γένοιτο.

Προτέτακται δέ μοι τουτωνὶ τῶν βιβλιαρίων, εἰσαγωγή τις εἰς ἅπασαν ἐν γένει τὴν Ἀριθμητικήν· μεθ' ἣν οἵ τε γενικοὶ καὶ εἰδικοὶ ἐφέπονται Ὁρισμοί· ἀναμὶξ δὲ τούτων αἵ τε Ὑποθέσεις, τὰ Πορίσματα καὶ τὰ Σχόλια παρεντίθενται· τελευταῖον δὲ περί τε δυνάμεως τῶν χαρακτήρων, ἣν ἐκ τῆς τοῦ τόπου ὑποδύονται θέσεως, καὶ περὶ Ἀριθμήσεως, εἴτ' οὖν ἀπαγγελίας οἱασδηποτοῦν σειρᾶς ἀριθμητικοῦ του στίχου δοθείσης, καὶ τῆς τούτου εἰς κλάσεις διαιρέσεως, καὶ τίσι σημείοις ἐφ' ἑκάστην τούτων χρηστέον παρενείρας, τέλος τῇ εἰσαγωγῇ ἐπιτίθημι.

Συ-

Συνοπτικὴ Περίληψις τῶν ἐφ' ἑκάστῳ Βιβλιαρίῳ τε καὶ Κεφαλαίῳ περιεχομένων.

Ἐν μὲν δὴ τῷ πρώτῳ Βιβλιαρίῳ, περὶ ὁλοχερῶν ὁμοειδῶν τε καὶ ἑτεροειδῶν ἀριθμῶν τὴν διδασκαλίαν ποιοῦμαι· διαιρεῖται δὲ ἐν ὀκτὼ Κεφαλαίοις, ἀνὰ δύω ἑκάστῃ Ἀριθμητικῇ πράξει ἀφοσιούμενα, ἰσαρίθμως τοῖς Ἀριθμητικοῖς Πάθεσι· τῇ Προσθέσει φημί, τῇ Ἀφαιρέσει, τῷ πολλαπλασιασμῷ, καὶ τῇ διαιρέσει· ἐφ' ἑκάστου δ' αὖ τούτων προτάττονται οἵ τε Ὁρισμοί, αἱ Ὑποθέσεις, τὰ Ἀξιώματα, αἱ σημειώσεις, οἱ ἐφ' ἑκάστης πράξεως προαπαιτούμενοι Κανόνες, τὰ προβλήματα, τὰ ὑποδείγματα, αἱ τούτων λύσεις τε καὶ δείξεις, τὰ πορίσματα, καὶ τέλος αἱ τῆς πράξεως βάσανοι.

Τὸ Δεύτερον δὲ βιβλιάριον ἐν δυσὶ διαιρεῖται τμήμασι, καὶ ἐν μὲν τῷ Πρώτῳ τμήματι περὶ κλασμάτων καὶ κλασματικῶν Ἀριθμῶν εἰσηγοῦμαι· ἐν δὲ τῷ Δευτέρῳ περὶ τῶν δεκαδικῶν καλουμένων Κλασμάτων, καὶ τῆς αὐτῶν δυνάμεως ἐκ τῆς τοῦ τόπου θέσεως τὸν λόγον ποιοῦμαι· ὑποδιαιρεῖται δ' ἕκαστον τούτων, ὡσαύτως ἐν Κεφαλαίοις καὶ παραγράφοις.

Καὶ τὸ μὲν Πρῶτον τμῆμα ἓξ περιενήνοχε κεφάλαια· ὧν τὸ μὲν πρῶτον περὶ Κλασμάτων καὶ τῆς κατ' εἶδος αὐτῶν διαιρέσεως, καὶ ὅπως ἕκαστον Κλάσμα γράφεσθαι δεῖ τὴν διδασκαλίαν ποιεῖται. Προτάττονται δὲ κἀν τούτῳ, οἱ Ὁρισμοί, αἱ Ὑποθέσεις, τὰ πορίσματα, τὰ θεωρήματα, καὶ αἱ αὐτῶν δείξεις.

Τὸ Δεύτερον δὲ περὶ τῆς τῶν Κλασμάτων ἀναγωγῆς, καὶ τῆς διαφόρου αὐτῶν διαλαμβάνει ἀλλοιώσεώς τε καὶ μεταμορφώσεως. Προτάττονται δὲ κἀνταῦθα, οἱ Ὁρισμοί, αἱ ὑποθέσεις, τὰ προβλήματα, τὰ θεωρήματα, αἱ τούτων λύσεις, τὰ πορίσματα, καὶ Σημειώσεις.

Τὸ δὲ Τρίτον Κεφάλαιον, περὶ τῆς τῶν Κλασμάτων εἰσηγεῖται προσθέσεως· προτάττεται δὲ καὶ ἐν αὐτῷ ὁ τῆς προσθέσεως ὁρισμός, οἵ τε προαπαιτούμενοι τῆς πράξεως Κανόνες, τὰ προβλήματα, καὶ ὑποδείγματα, καὶ αἱ ἐφ' ἑκάστῳ ἀνήκουσαι λύσεις.

Τὸ δὲ Τέταρτον περὶ τῆς τῶν Κλασμάτων καὶ κλασματικῶν ποσοτήτων διαλαμβάνει ἀφαιρέσεως.

Τὸ

Τὸ δὲ Πέμπτον περὶ πολλαπλασιασμοῦ τῶν αὐτῶν, ὥσπερ τὸ Ἕκτον περὶ τῆς αὐτῶν διαιρέσεως. Προτάττονται δὲ πάντων τούτων τῶν Κεφαλαίων, οἵ τε Ὁρισμοί, οἱ ἐφ' ἑκάστῃ πράξει προαπαιτούμενοι Κανόνες, μεθ' οὓς τάττονται τὰ προβλήματα, αἱ τούτων λύσεις καὶ ὑποδείγματα, αἱ σημειώσεις καὶ τὰ πορίσματα.

Τὸ Δεύτερον δὲ Τμῆμα τοῦ δευτέρου βιβλίου διαιρεῖται εἰς πέντε Κεφάλαια. Καὶ ἐν μὲν τῷ πρώτῳ Κεφαλαίῳ προθεωρία τις ἐστὶ περὶ τῶν δεκαδικῶν τούτων Κλασμάτων, ὅπως τε ἀναφύονταί τε καὶ ἐκ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν διαστέλλονται.

Ἐν δὲ τῷ Δευτέρῳ περὶ τῆς τούτων προσθέσεως, ἐν τῷ Τρίτῳ δ' αὖ περὶ τῆς αὐτῶν ἀφαιρέσεως, ὥσπερ ἐν τῷ τετάρτῳ περὶ πολλαπλασιασμοῦ, κἀν τῷ Πέμπτῳ περὶ τῆς αὐτῶν διαιρέσεως πραγματεύεται· προτάττονται δὲ κἀν τούτῳ τῷ Τμήματι, οἵ τε Ὁρισμοὶ καὶ χρειώδεις Κανόνες, τὰ προβλήματα καὶ ὑποδείγματα, αἱ τούτων λύσεις, δείξεις τε καὶ πορίσματα.

Τὸ Τρίτον δὲ βιβλιάριον ἐν δυσὶ διαιρεῖται Τμήμασι. Καὶ τὸ μὲν πρῶτον Τμῆμα, πέντε περιενήνοχε Κεφάλαια, τὸ δεύτερον δέ, δύω.

Καὶ τὸ μὲν Πρῶτον Κεφάλαιον τοῦ Πρώτου Τμήματος, περὶ λόγων τε καὶ Ἀναλογιῶν, Ἀριθμητικῶν τε καὶ Γεωμετρικῶν, καὶ τὴν τῆς κατ' εἶδος αὐτῶν διαιρέσεώς τε καὶ διαφορᾶς, μυρίοις ὁρισμοῖς, ὑποθέσεσί τε, καὶ οἷς τισι σημείοις ἐφ' ἑκάστην χρηστέον, ὑποδείγμασί τε καὶ θεωρήμασι, δείξεσί τε καὶ πορίσμασι, καὶ διαφόροις γενικοῖς τε καὶ εἰδικοῖς τύποις Ἀλγεβραϊκοῖς, διαλαμβάνει, διδασκαλίαν.

Τὸ δὲ Δεύτερον περί τε τῆς τῶν Γεωμετρικῶν Ἀναλογιῶν χρήσεως, καὶ περὶ τῆς καλουμένης ὀρθῆς καὶ πλαγίας Μεθόδου τῶν τριῶν, ἥτις καὶ ἁπλῆ μέθοδος λέγεται.

Τὸ Τρίτον δὲ περί τε τῆς ὀρθῆς καὶ πλαγίας συνθέτου Μεθόδου τῶν τριῶν, ἥτις καὶ μέθοδος τῶν πέντε ἤκουσε.

Τὸ δ' αὖ Τέταρτον περὶ τῆς τῶν ἑπτὰ ὀρθῆς τε καὶ πλαγίας λεγομένης Μεθόδου ἑρμηνεύει τοὺς τρόπους, διαφόροις Κανόσι τε καὶ Ἀλγεβραϊκοῖς τύποις, ἢ διαγράμμασι.

Καὶ τέλος τὸ Πέμπτον Κεφάλαιον τοῦ Πρώτου Τμήματος, περὶ τῆς Ἀριθμητικῆς διδάσκει Ἀναλογίας, καὶ τῆς τῶν Τριῶν Ἀριθμητικῆς Μεθόδου.

Ἐν δέ γε τῷ Δευτέρῳ Τμήματι, τὸ μὲν Πρῶτον Κεφάλαιον, περὶ τῆς Ἀριθμητικῆς προόδου τὴν διδασκαλίαν ποιεῖται,

ποικίλοις ὁρισμοῖς, πορίσμασί τε καὶ θεωρήμασιν, ὑπέρ τι ἄλλο καταγλαϊθέν.

Καὶ τέλος τὸ Δεύτερον περὶ εὑρέσεως οἱουδήποτ' αἰτηθέντος ὅρου τῶν τῇ Ἀριθμητικῇ Προόδῳ ἐνθεωρουμένων πραγματεύεται. Κεκόσμηται δέ μοι καὶ τοῦτο, διαφόροις προβλήμασί τε καὶ ὑποδείγμασι, προστέθεινται δὲ τούτῳ οἵ τε Ἀλγεβραϊκοὶ Τύποι, καὶ ἡ ἑκάστῳ προσήκουσα ἑρμηνεία, ἥτε τῶν ὑποδειγμάτων ἐν τοῖς Τύποις ἐφαρμογή τε καὶ λύσις Ἀλγεβραϊκῶς τε καὶ Ἀριθμητικῶς.

Τὸ δ' αὖ Τέταρτον βιβλιάριον ἐν δυσὶν ὁμοίως διῄρηταί μοι Τμήμασι.

Καὶ τὸ μὲν Πρῶτον ἓξ περιέχει κεφάλαια, τὸ Δεύτερον δέ, τρία. Καὶ ἐν μὲν τῷ πρώτῳ Κεφαλαίῳ τοῦ Πρώτου Τμήματος, τὴν ἐπὶ τῆς τῶν τριῶν ὀρθῆς Μεθόδου ἀναγομένην Ἑταιρείαν κατέταξα Μέθοδον, προσθεὶς καὶ διάφορα ὑποδείγματα καὶ τὰς τούτων ἐπιφέρων λύσεις τε καὶ δείξεις, καὶ τὰ τῆς ἐργασίας σχήματα ὑποστρώσας.

Ἐν δὲ τῷ Δευτέρῳ τὰ ἐπὶ τὴν Πλαγίαν Μέθοδον τῆς Ἑταιρείας ἐνεθέμην ὑποδείγματα.

Ἐν δὲ τῷ Τρίτῳ τὰ ἐπὶ τῆς ὀρθῆς συνθέτου μεθόδου τῆς αὐτῆς Ἑταιρείας κατέταξα.

Κἀν τῷ Τετάρτῳ τὴν περὶ τῆς ἐκ ψευδοῦς ὑποθέσεως λεγομένην Μέθοδον κατέγραψα, διαφόροις Προβλήμασι λύσεσί τε καὶ Ἀριθμητικοῖς σχήμασι τοῦτο καθωραΐσας.

Καὶ ἐν τῷ Πέμπτῳ περὶ Μεθόδου, καθ' ἣν αἰνίγματα λύειν ἔχομεν διαλαβών, μέχρι τῶν ΚΔ΄. Προβλημάτων τὴν περὶ ταύτης διδασκαλίαν ἐξέτεινα, καὶ τὴν τούτων λύσιν, ὡς οἷόν τε ἀκριβῶς διαφόροις τρόποις, Ἀριθμητικῶς τε καὶ Ἀλγεβραϊκῶς ἐπέφερον, τὰ πλείω μὲν παρὰ τῶν ἐμμέτρων Παλαιῶν ἐρανισθεὶς Προβλημάτων, τὰ δ' αὐτὸς ἐγὼ συντιθείς.

Ἐν δὲ τῷ Δευτέρῳ Τμήματι, τὸ μὲν πρῶτον Κεφάλαιον περὶ Μεθόδου τῆς μίξεως καὶ Κράσεως, διαφόρων οὐσιῶν τε καὶ ὑλῶν, εἴτε ὑγραὶ καὶ ῥοώδεις εἰσίν, εἴτε ξηραί, εἴτε τηκταὶ καὶ τῷ πυρὶ χωνευταί, διαλαμβάνει. Προτάττεται δὲ κἀν τούτῳ λημμάτιόν τι Γεωμετρικόν, πρὸς δεῖξιν τῶν παραλαμβανομένων Προβλημάτων, καὶ τῶν ἐπαγομένων ὑποδειγμάτων, προτίθενται δὲ οἵ τε Ὁρισμοί, αἱ ὑποθέσεις καὶ τὰ ἑκάστης πράξεως σχήματα.

Τὸ Δεύτερον δὲ περὶ γενέσεως παντοίων Ἀριθμητικῶν βαθμῶν

μῶν τὸν τρόπον εἰσηγεῖται· ἔτι περί τε τὴν τῆς τετραγωνείου ῥίζης ἐξαγωγὴν, ἔκ τε ὁλοκερῶν τετραγώνων ἀριθμῶν, ἔκ τε κεκλασμένων καὶ δεκαδικῶν κλασμάτων· ἀλλὰ δὴ καὶ τὴν μὴ τετραγώνων, τὴν ὡς ἔγγιστα τῆς ἀληθοῦς εὑρίσκειν ῥίζαν. Προτίθενται δὲ, οἵ τε Ὁρισμοὶ, τὰ Θεωρήματα, τὰ πορίσματα, οἱ ἐφ᾽ ἑκάστῃ πράξει προαπαιτούμενοι Κανόνες, τὰ ὑποδείγματα, καὶ τὰ τῆς ἐργασίας σχήματα.

Τὸ δέ γε Τρίτον καὶ τελευταῖον Κεφάλαιον τοῦ Δευτέρου Τμήματος τοῦ Τετάρτου βιβλιαρίου, περιέχει περὶ συστάσεως τοῦ Κυβικοῦ Ἀριθμοῦ, καὶ τῆς ἐξαγωγῆς τῆς ῥίζης αὐτοῦ· προτάττονται δὲ κἀν τούτῳ τά τε Θεωρήματα καὶ Προβλήματα, οἵ τε τῆς πράξεως Κανόνες, καὶ τὰ τούτοις ἀνάλογα ὑποδείγματα, καὶ διαγράμματα, μετὰ τῆς προσηκούσης Ἑρμηνείας.

ΠΙΝΑΞ ΚΕΦΑΛΑΙΩΔΗΣ

ΤΩΝ ΕΝ ΤΑΥΤῌ Τῌ ΒΙΒΛΩ͂ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ. ΚΑΙ ΠΡΩΤΟΝ ΤΩΝ ΕΝ ΤΟΙΣ ΠΡΟΛΕΓΟΜΕΝΟΙΣ.

Μέχρι μὲν τούτου ἐθέσαμεν τοὺς Ἑλληνικοὺς ἀριθμοὺς, ἐν τοῖς ἑξῆς δὲ θέτομεν τοὺς Ἀραβικοὺς χαρακτῆρας.

Π Ι Ν Α Ξ

Τῶν ἐν τῷ Πρώτῳ Βιβλίῳ Περιεχομένων.

ΠΙ-

Π Ι Ν Α Ξ

Τῶν ἐν τῷ Δευτέρῳ Βιβλίῳ Περιεχομένων.

Περὶ

Π Ι Ν Α Ξ

Τῶν ἐν τῷ Τρίτῳ Βιβλίῳ Περιεχομένων.

ΠΙΝΑΞ

Τῶν ἐν τῷ Παραρτήματι τῆς περὶ Καλενδαρίου κατασκευῆς περιεχομένων.

Περὶ

Τέλος τῶν Ἐλέγχων, ἢ Πινάκων Πασῶν τῶν ἐν τόδε τῷ τεύχει Περιεχομένων τε, καὶ συνενουμένων Βίβλων.

ΑΡΙΘ-

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ

ΣΧΕΔΙΑΣΘΕΙΣΑ ΕΛΛΗΝΙΣΤΙ ΜΕΝ ΤΟ ΠΡΩΤΟΝ,

Ὕστερον δὲ καὶ εἰς τὴν καθομιλουμένην ἁπλοελληνικὴν γλῶσσαν μεταφρασθεῖσαν παρὰ τοῦ Ὁσιολογιωτάτου Ἀγαπίου Ῥήγα τοῦ ἐκ πόλεως Πάργης.

ΠΡΟΣΛΑΛΙΑ ΠΡΟΣ ΠΑΝΤΑΣ ΤΟΥΣ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ.

Φιλομαθέστατοι ὁμογενεῖς, χαίροιτε ἐν Κυρίῳ. Σχολαρχῶν ἐγώ ποτε, εἰς τὸ κατὰ τὸ Φωξάνιον τῆς Μολδοβλαχίας Αὐθεντικὸν, καὶ κοινὸν Ἑλληνομουσεῖον, καὶ δεκαετίαν ὅλην παραδίδων τοῖς ἐκεῖσε προσφοιτῶσι τὰ Ἐγκύκλια τῶν μαθημάτων, ἐντοπίοις τε καὶ ξένοις, προσελθόντες πολλοὶ τῶν εὐγενῶν καὶ πραγματευτῶν, παρεκάλουν, διὰ νὰ παραδίδω, ἐκ διαλειμμάτων, τοῖς υἱοῖς αὐτῶν, πρὸς τοῖς ἄλλοις μαθήμασι καὶ τὴν Ἀριθμητικὴν Ἐπιστήμην, ὡς ἀναγκαίαν οὖσαν αὐτοῖς· (ἐπειδὴ οἱ περισσότεροι μαθηταὶ, ἦσαν υἱοὶ πραγματευτῶν) γνωρίσας οὖν τὴν δικαίαν καὶ χρειώδη αὐτῶν αἴτησιν, καὶ εὐμενῶς δεξάμενος τὴν ἱκέσιον αὐτῶν δέησιν, ὑπεσχέθην αὐτοῖς τοῦτο ποιῆσαι.

Σκεψάμενος δὲ τὰς Ἀριθμητικὰς βίβλους, ὅπου τότε εἶχον, καὶ εὑρὼν, τὰς μὲν ἐλλειπῶς, τρόπον τινὰ, περὶ τῆς ἐπιστήμης ταύτης διαλαμβανούσας, τὰς δὲ, καὶ ὑπὲρ τὸ δέον ἐκτεινομένας, ἐσοχάσθην νὰ ἐκλέξω ἐξ αὐτῶν, τὰ πλέον καιριώδη, καὶ νὰ συνθέσω μίαν σύντομον καὶ εὔληπτον Ἀριθμητικὴν, ἀνάλογον μὲ τὴν δύναμιν τῶν μαθητῶν· (ἦσαν γὰρ ἤδη ἱκανῶς γεγυμνασμένοι εἰς τὴν γραμματικὴν τέχνην.) Λοιπὸν, φιλοτιμηθεὶς εἰς τοῦτο, ἔκρινα εὔλογον, νὰ μὴ ἀπομακρύνω τοὺς μαθητὰς ἀπὸ τὴν ἀνὰ χεῖρας διδασκαλίαν τῆς γραμματικῆς τέχνης, γράφων χυδαϊστί· ἀλλὰ νὰ συνθέσω μίαν Ἀριθμητικὴν ὅπου νὰ ἔχῃ σχέσιν μὲ αὐτήν. Διὸ, καὶ πολλαχόθεν

θεν

θεν συλλέξας τὰ δόξαντά μοι τότε ὠφέλιμα, ἐσχεδίασα μίαν μετρίαν Ἀριθμητικὴν, τὰ περισσότερα παρ' ἄλλων ἐρανισθείς.

Τώρα δὲ ἐσχάτως, βλέπων ὅτι εἶναι χρήσιμος μόνον εἰς τοὺς λογίους, καὶ εἰς τοὺς τὴν Ἑλληνικὴν μόνον γλῶσσαν ἐξησκημένους, τοῖς δὲ μὴ τοιούτοις, πολλὰ ὀλίγον (διὰ νὰ μὴ εἴπω εἰς τὸ οὐδὲν) χρήσιμος, καὶ ἔχων χρέος ἀπαραίτητον, οὐ μόνον εἰς τοὺς σοφοὺς καὶ πεπαιδευμένους, ἀλλὰ καὶ εἰς τοὺς ἀγραμμάτους καὶ ἁπλοϊκοὺς, κατὰ τὸν οὐρανοβάμονα Παῦλον, μετέφρασα ταύτην εἰς τὴν ἁπλοελληνικὴν καὶ συνειθισμένην τωρινὴν γλῶσσαν τῶν ὁμογενῶν μου, διὰ νὰ τὴν μεταχειρίζονται ὅλοι κοινῶς, λόγιοί τε καὶ ἀμαθεῖς, καὶ νὰ ἀπολαμβάνωσιν ἐξ ἴσου, οἱ θέλοντες μὲ ὀλίγους κόπους, τὴν ἐξ αὐτῆς ὠφέλειαν.

Παρέφρασα δ' αὐτὴν, οὐχὶ χυδαϊστὶ καὶ διόλου βαρβαρικῶς, ἀλλ' ἐφύλαξα τὴν μεσαίαν φράσιν τῆς τε παλαιᾶς, καὶ τωρινῆς διαλέκτου, διὰ νὰ μὴ ἀπομακρυνθῶ πολλὰ ἀπὸ τὴν εὐγενῆ καὶ Πατρῴαν ἡμῖν διάλεκτον.

Δεχθῆτε, παρακαλῶ, εὐμενῶς, ὅλοι οἱ ὁμογενεῖς τὴν παροῦσαν Ἀριθμητικὴν, λόγιοί τε, καὶ ἰδιῶται· καὶ εἶμαι εὔελπις, ὅτι θέλετε ὠφεληθῇ ἀμφότεροι, συνεχῶς τε καὶ προσεκτικῶς ταύτην ἀναγινώσκοντες, τῆς γὰρ ἐπιμελείας πάντα δοῦλα γίνεται· ἔῤῥωσθαι οἱ Ἀναγινώσκοντες, μεμνημένοι ἐν ταῖς πρὸς Θεὸν ἡμῶν δεήσεσι, κἀμοῦ τοῦ ἐν Διδασκάλοις ἐλαχίστου Ἀγαπίου Ἱεροδιακόνου Ῥήγα, τοῦ ἐκ πόλεως Πάργης· οὗ τὸ ἄπειρον ἔλεος εἴη μεθ' ὑμῶν ὁδηγοῦν ὑμᾶς εἰς πᾶν ἔργον Ἀγαθὸν, κἀπὶ τὴν ἐντελῆ κατάληψιν τοῦ βιβλιαρίου τούτου, συγγνωμονοῦντες, εἴπου τι ἐλλειπὲς, ἢ ἐσφαλμένον ἐν τῷ δε τῷ βιβλιαρίῳ ἀπαντήσητε, οὐ κακίζοντες ἐπὶ τοῦτο, ἀλλ' ἐπιδιορθοῦντες αὐτὸ οἱ δυνάμενοι, εἰδότες, ὅτι τὸ μηδόλως ἁμαρτεῖν, θεῖόν ἐστιν, οὐκ ἀνθρώπινον ἔργον.

ΠΡΟΛΕΓΟΜΕΝΑ

ΕΙΣ ΤΗΝ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΝ.

Συνειθίζεται ἀπὸ τοὺς περισσοτέρους συγγραφεῖς τέχνης τινὸς, ἢ Ἐπιστήμης, πρὸ τοῦ νὰ ἀρχίσουν τὴν διδασκαλίαν ἐκείνης τῆς ὑποθέσεως διὰ τὴν ὁποίαν συγγράφουσι, νὰ προτάττωσι τινὰς ἑρμηνείας, ὁποῦ ἀνήκουσιν εἰς τὴν ὅλην ὑπόθεσίν των, διὰ νὰ ἐξομαλίσωσι κάθε δυσκολίαν ὁποῦ ἠμπορεῖ ν' ἀκολουθήσῃ εἰς τὴν διδασκαλίαν ὁποῦ μέλλουσι νὰ κάμωσι.

Τούτους λοιπὸν μιμούμενοι καὶ ἡμεῖς, ἐκρίναμεν εὔλογον νὰ προτάξωμεν αὐτῆς, ἐκεῖνα τὰ ἀναγκαῖα μέσα, ὁποῦ προαπαιτοῦνται εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν Ἐπιστήμην.

Τοιαῦτα δὲ εἰσὶν, οἱ Ὁρισμοὶ, τὰ Ἀξιώματα, τὰ Προβλήματα, τὰ Αἰτήματα, τὰ Θεωρήματα, τὰ Πορίσματα, αἱ Ὑποθέσεις, τὰ Λήμματα, τὰ Σχόλια, καὶ τέλος, ἡ τῆς ὅλης πραγματείας εἰς τὰ οἰκεῖα μέρη διαίρεσις, περὶ τῶν ὁποίων, διὰ νὰ δώσωμεν μίαν καθαρὰν ἰδέαν εἰς τὸν ἀναγινώσκοντα, ἀρχίζομεν ἐφεξῆς κατὰ τάξιν.

§. Α'. Ὁρισμὸς λοιπὸν ἐστὶ, λόγος σύντομος, δηλωτικὸς τοῦ ὁριζομένου Πράγματος.

§. Β'. Ἀξίωμα δὲ ἐστὶ, λόγος ἀναπόδεικτος, αὐτὸς ἐφ' ἑαυτοῦ γνωριζόμενος, καὶ τὸ πιστὸν ἐν ἑαυτῷ ἔχων, ὡς τὸ, ὁ Θεὸς ἐστὶν Ἀγαθός· ὁ Ἥλιος φωτιστικὸς, τὸ πῦρ καυστικόν.

§. Γ'. Πρόβλημα δὲ ἐστὶν ἀλήθεια, τὴν ὁποίαν, πρῶτον μὲν πρέπει νὰ τὴν κατασκευάσῃ τινὰς, ἔπειτα δὲ νὰ τὴν ἀποδείξῃ, ὅτι οὕτως ἔχει, καὶ οὐχὶ ἄλλως.

§. Δ'. Θεώρημα δὲ ἐστὶν, ἀλήθεια, ἡ ὁποία ἀποδίδεται, κατ' εὐθεῖαν εἰς τὴν ὕλην ἐκείνην, περὶ τῆς ὁποίας γίνεται ἡ διδασκαλία, καὶ ἔχει χρείαν ἀποδείξεως.

§. Ε'. Πόρισμα δὲ ἐστὶν ἀλήθεια, ἥτις ἀναφύεται αὐτομάτως, ἀπὸ ἐκεῖνα, ὁποῦ προαπεδείχθησαν, καὶ δὲν ἔχει χρείαν ἀπὸ ξεχωριστὴν καὶ ἰδίαν ἀπόδειξιν.

§. Ϛ'. Τὸ δὲ λῆμμα, ἐστὶν ἀλήθεια φαινομένη μὲν, ὅτι εἶναι ἀλλοτρία τῆς ἐν χερσὶν ὑποθέσεως, δεικνύεται δὲ, διὰ νὰ ἀποδειχθῇ ἔπειτα ἄλλο τι, διὰ μέσου αὐτῆς.

§. Ζ'. Σχόλιον δὲ, ἢ ὑποσημείωσις ἐστὶν, ἐκεῖνο τὸ μέρος, εἰς τὸ ὁποῖον σημειοῦται, ὅ, τι λόγου ἄξιον.

§. Η'. Διαίρεσις δὲ, τέλος πάντων, ἐστὶ, διανομὴ τοῦ ὅλου πράγματος εἰς τὰ οἰκεῖα μέρη· καὶ διαιρεῖται εἰς τρία, εἰς Διαίρεσιν, Ἐπιδιαίρεσιν, καὶ Ὑποδιαίρεσιν.

Αὐτὰ εἶναι ἐκεῖνα, ὁποῦ προαπαιτοῦνται εἰς τὴν διδασκαλίαν καὶ εὔκολον κατάληψιν τῆς Ἀριθμητικῆς Ἐπιστήμης. Τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ τὰ ἐξηγῇ ὁ διδάσκαλος πρὸς τὸν μαθητὴν του, ἕνα πρὸς ἕνα; μὲ μεγάλην σκέψιν καὶ προσοχὴν, φέρων καὶ διάφορα ὑποδείγματα, διὰ νὰ τοῦ δώσῃ μίαν καθαρὰν καὶ ἀναμφίβολον ἰδέαν, ὅλης τῆς ἀνὰ χεῖρας Ἐπιστήμης. Εἰς τὴν ὁποίαν ἀναγκαίως προηγοῦνται οἱ ἐφεξῆς Ὁρισμοὶ, καὶ ἡ τῆς καθολικῆς πραγματείας εἰς τὰ κατάλληλα αὐτῆς μέρη γενική τε καὶ εἰδικὴ διαίρεσις.

Ὁρισμός.

§. Θ'. Ἡ Ἀριθμητικὴ λοιπὸν, ἐστὶ μία ἐπιστήμη, ὁποῦ θεωρεῖ τοὺς λόγους καὶ τὰ πάθη, ὁποῦ συμβαίνουσιν εἰς τοὺς Ἀριθμοὺς, καὶ διαιρεῖται εἰς δύω, εἰς θεωρητικὴν, καὶ πρακτικήν.

§. Ι'. Καὶ θεωρητικὸν μὲν καλεῖται, ἐκεῖνο τὸ μέρος, τὸ ὁποῖον ἀναθεωρεῖ τὰς ἀναλογίας σχέσεις τε καὶ πάθη, ὁποῦ ἔχουσι μεταξύ των συγκρινόμενοι οἱ ἀριθμοί.

§. ΙΑ'. Πρακτικὸν δὲ λέγεται, ἐκεῖνο τὸ μέρος, εἰς τὸ ὁποῖον διδάσκει τὸν τρόπον καὶ τοὺς Κανόνας, κατὰ τοὺς ὁποίους πρέπει νὰ γίνεται κάθε Ἀριθμητικὴ πρᾶξις.

Ὁρισμός.

§. ΙΒ'. Ἀριθμὸς δὲ ἐστὶ πολλῶν μονάδων εἰς ταὐτὸ σύνθεσις, ἢ συνάψις, ἢ καὶ Ἄθροισις· ὁ ὁποῖος δηλοῦται διὰ μέσου τινῶν χαρακτήρων, ἢ σημείων λεγομένων. Κάθε ἀριθμὸς, ἤτοι ἁπλοῦς ἐστὶν, ἢ σύνθετος, καὶ πάλιν καθένας ἀπὸ αὐτοὺς, ἢ εἶναι ὁμοειδὴς, ἢ ἑτεροειδής.

Ὁρισμός.

§. ΙΓʹ. Χαρακτὴρ δὲ ἐςὶ παράςασις ἔγγραφος σημείου τινὸς, κατὰ συνθήκην καὶ ὁμόνοιαν πολλῶν τε, καὶ Ἐλλογίμων ἀνδρῶν ἐπινοηθέντος, πρὸς τὸ παρις᾵ν καὶ δηλᾶν δι' αὐτᾶ διωρισμένον τι ποσόν.

Ὑποσημείωσις.

Οἱ χαρακτῆρες, ἢ τὰ σημεῖα, ὁποῦ ἐπενοήθησαν ἀπὸ τοὺς λογίους ἄνδρας, καὶ πρώτους εὑρετὰς, εἰσὶ δέκα, οὕτω γραφόμενοι. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Καὶ οἱ μὲν ἐννέα, ῥητοί τε καὶ λογικοὶ ὀνομάζονται, ὡσὰν ὁποῦ φανερώνουσι τινὰ ποσότητα. Ὀνομάζονται δὲ οὕτω· τὸ μὲν (1) ἕν· τὸ δὲ (2) δύω· τὸ δὲ (3) τρία· τὸ δὲ (4) τέσσαρα· τὸ δὲ (5) πέντε· τὸ δὲ (6) ἕξ· τὸ δὲ (7) ἑπτά· τὸ δὲ (8) ὀκτώ· τὸ δὲ (9) ἐννέα, καὶ τὸ δέκατον, μηδενικὸν καθ' ἕλληνας λέγεται· κατὰ δὲ Λατίνους νοῦλα ὀνομάζεται· καλεῖται δὲ, ἄλογον, καὶ ἄῤῥητον.

Ὁρισμός.

§. ΙΔʹ. Οὐδὲν δ' ἐστι, πᾶν τὸ μὴ δυνάμενον ἀριθμεῖσθαι, καὶ ὁσάκις ἂν τεθείη μόνον, ἢ προτεθείη ἄλλου τινὸς τῶν ἐκτεθέντων καὶ ὀνομασθέντων ῥητῶν ἐννέα χαρακτήρων, οὐδὲν σημαῖνον, ὑποτασσόμενον δὲ τούτοις, συσχηματίζει, καὶ τάς τε δεκάδας, ἑκατοντάδας, χιλιάδας, καὶ τοὺς λοιποὺς ἀνωτέρους βαθμοὺς συναποτελεῖ.

Ὁρισμός.

§. ΙΕʹ. Ἁπλοῦς μὲν Ἀριθμός ἐςιν, ἐκεῖνος ὁποῦ ἔχει ἕνα τινὰ χαρακτῆρα· οἷον, 2, ἢ 3, ἢ 5. κτλʹ.

Σύνθετος δὲ, ἐκεῖνος ὁποῦ ἔχει περισσότερον ἀπὸ ἕνα χαρακτῆρα· οἷον, 15, 34, 86, 278, κτλʹ.

Καὶ ὁμοειδὴς μὲν ἀριθμός ἐςιν, ἐκεῖνος ὁποῦ περιέχει ὁμοειδεῖς μόνον μονάδας, ἢ δεκάδας, ἢ ἑκατοντάδας, κτλʹ. ὁποῦ νὰ φανερώνει δηλ. ἑνὸς μόνον εἴδους πρᾶγμα.

§. ΙϚʹ.

§. ΙϚʹ. Ἑτεροειδὴς δὲ Ἀριθμὸς ἐςὶν, ἐκεῖνος ὁποῦ περιέχει ἐν ταὐτῷ, ὁμοειδεῖς τε καὶ ἑτεροειδεῖς μονάδας, ἢ δεκάδας, ἢ ἑκατοντάδας, κτλʹ. οἷον, γρόσια, παράδας, ἄσπρα, ἢ λεπτὰ, κτλʹ.

Ὁρισμός.

§. ΙΖʹ. Μονὰς δέ ἐςιν, ἀφηρημένον τὶ, δι' οὗ, ἢ καθ' ὃ ἓν λέγεται· ἢ, μονὰς ἐςὶ τοῦτε Ἀριθμοῦ, καὶ τῶν μορίων αὐτῶν μεθόριον.

Πόρισμα Αʹ.

§. ΙΗʹ. Ἡ μονὰς ἄρα, οὐκ ἀριθμὸς, ἀλλ' ἀρχὴ ἀριθμοῦ· διότι ἀπὸ αὐτὴν, ὡσὰν ἀπὸ ἕνα σπέρμα, ἢ ῥίζαν, κάθε ἀριθμὸς αὐξάνεται προστιθεμένης, ἢ σμικρύνεται, ἀφαιρουμένης· ἡ μονὰς ἄρα, μὲ τὸ νὰ εἶναι ἀμετάθετος, καὶ ἡ αὐτὴ πάντοτε, ἐκείνη ἡ ποσότης ὁποῦ ἤθελε πολλαπλασιασθῇ, ἢ διαιρεθῇ δι' αὐτῆς, μένει πάντοτε ἡ αὐτὴ ἀναλλοίωτος.

Ὁρισμός.

§. ΙΘʹ. Ποσὸν δὲ, ἢ ποσότης ἐςὶ, κάθε πρᾶγμα ὁποῦ σύγκειται ἐκ μερῶν, καὶ ἐςὶν αὐξήσεως, ἢ μειώσεως ἐπιδεκτικόν· διαιρεῖται δὲ ἡ ποσότης εἰς συνεχῆ, καὶ διακεκριμένην.

Καὶ συνεχὴς μὲν ποσότης ἐςὶν, ἐκείνη ὁποῦ δύναται νὰ ἐκταθῇ ἐπ' ἄπειρον, χωρὶς νὰ μεσολαβίσῃ ἄλλη τις ποσότης μεταξὺ αὐτῆς· ἥτις ἐκ συνεχῶν μερῶν συγκειμένη, τῆς Γεωμετρίας ἐςὶν ἀντικείμενον, ἢ ὑποκείμενον.

§. Κʹ. Ποσότης δὲ διακεκριμένη ἐςὶν ἐκείνη, τῆς ὁποίας τὰ μέρη δύνανται νὰ θεωρηθῶσι ξεχωριςὰ τὸ ἓν, ἀπὸ τ' ἄλλο, καὶ συςαίνει τὴν Ἀριθμητικὴν, τῆς ὁποίας ἐςὶ τὸ ὑποκείμενον, καὶ ἡ ὕλη· ὡσὰν ὁποῦ δηλοῦται καὶ ἐνεργεῖται ἡ πρᾶξις αὐτῆς, διὰ τῶν Ἀριθμῶν, περὶ ἧς ἡμῖν ἐνταῦθα ὁ λόγος.

Πόρισμα Βʹ.

Ποσότης ἄρα πᾶσα, ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ, ἢ ὡς συνεχὴς, ἢ ὡς διακεκριμένη, καὶ ἤτοι ὡς συγκεκριμένη, ἢ ὡς ἀφηρημένη.

Ὁρισ-

Ὁρισμός.

§. ΚΑ'. Ποσότης μὲν ἓν συγκειμένη ἐστὶν, ἡ μεθ' ἑτέρας τινὸς καταληπτή· οἷον, τρεῖς ἄνθρωποι, πέντε νομίσματα, δέκα τάλαντα, ἑκατὸν γρόσια, κτλ'.

Ὁρισμός.

§. ΚΒ'. Ποσότης δὲ ἀφῃρημένη ἐστὶν, ἡ ἀπολύτως ἐκφερομένη· οἷον τρεῖς, πέντε, δέκα, ἑκατὸν, κτλ'.

Ἔτι, πᾶσα ποσότης ἤτοι ὡρισμένη ἐστὶν, ἢ ἀόριστος· καὶ ἢ θετικὴ, ἢ ἀποφατική.

Ὁρισμός.

§. ΚΓ'. Ποσότης λοιπὸν ὡρισμένη ἐστιν, ἡ πρὸς τὴν δοθεῖσαν μονάδα, ἢ δεκάδα, ἢ ἑκατοντάδα, ἢ ἄλλην τινὰ τῶν ἀνωτέρων ὀνομασιῶν, ἀναφερομένη. οἷον μοναδικὸς, δεκαδικὸς, ἑκατοσὸς, ἢ χιλιοσὸς ἀριθμός.

Ἀόριστος δὲ, ἡ πρὸς τὴν μονάδα, ἢ δεκάδα, ἢ ἄλλην τινὰ παρονομασίαν, μὴ ἀναφερομένη· οἷον ἀγέλη, στρατὸς, σωρεία, κτλ'.

§. ΚΔ'. Ποσότης δὲ θετικὴ ἐστὶν, ἡ μείζων τοῦ μηδενὸς, καλεῖται δὲ, καὶ καταφατικὴ, καὶ ὑπαρκτική.

§. ΚΕ'. Ποσότης δ' ἀποφατικὴ, ἢ στερητικὴ λέγεται, ἡ ἐλάττω τοῦ μηδενὸς, καλεῖται δὲ καὶ λειπτική.

Σχόλιον.

§. ΚϚ'. Τὰ ὀνόματα, ὁποῦ μεταχειριζόμεθα ἀριθμοῦντες εἰς τὴν ἁπλοελληνικὴν γλῶσσάν μας, εἶσι δέκα· οἷον, ἕνα, δύω, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτὰ, ὀκτὼ, ἐννέα, δέκα. Καὶ διὰ τοῦτο δέκα μόνον ἐπινενόηνται χαρακτῆρες, οἱ ἐκτεθέντες ἀνωτέρω, ἀπὸ τοὺς ὁποίους, οἱ μὲν ἐννέα σημαντικοὶ εἶσιν ἀριθμοῦ τινος, ὡς ἐλέγετο· ὁ δὲ δέκατος τοῦ μηδενὸς ἐστὶ δηλωτικὸς, ἢ σημεῖον τοῦ μηδενὸς, ἢ μηδενικὸν αὐτὴν ὠνομάσωμεν· διὰ τοῦτο, ὅταν εὑρίσκεται μόνος τῳ, ἢ βαίνεται προτήτερα ἀπὸ ἄλλον τινὰ χαρακτῆρα, οὐδὲν σημαίνει· οἷον, 0. 05.

006,

006, κτλ'. ὅταν ὅμως βαίνεται ὕστερα ἀπὸ τινὰ χαρακτῆρα συσσημαίνει, καὶ κάμνει τὰς δεκάδας, ἑκατοντάδας, χιλιάδας, καὶ τὰς ἀνωτέρας ὀνομασίας· οἷον, 10. 20. 30. κτλ'. 100, 200, 300. κτλ'. 1000, ἢ 10000. κτλ'.

§. ΚΖ'. Προφέρονται δὲ οἱ Ἀριθμητικοὶ χαρακτῆρες, ἢ ἀρσενικῶς, ἢ θηλυκῶς, ἢ οὐδετέρως, κατὰ τὰ ὑποκείμενα καὶ ὑπ' αὐτῶν δηλούμενα πράγματα, ὁποῦ ὀνομάζονται καὶ σημειώνονται δι' αὐτῶν τῶν χαρακτήρων. Ἐπειδὴ, ἀνίσως καὶ εἶναι ἀρσενικὸν, κατὰ τὴν φωνὴν, ἐκεῖνο τὸ πρᾶγμα ὁποῦ ὀνομάζεται δι' αὐτῶν, ἀρσενικῶς πρέπει νὰ τὸ προφέρωμεν· εἰδὲ θηλυκὸν, θηλυκῶς· εἰδὲ οὐδέτερον, οὐδετέρως· καὶ πάλιν, ἀνίσως καὶ σημαίνει ἕνα μόνον πρᾶγμα, νὰ τὸ προφέρωμεν ἑνικῶς· εἰδὲ σημαίνει πολλὰ, νὰ τὸ ἀπαγγέλωμεν, πληθυντικῶς, κατὰ τὴν χρείαν.

Ὁρισμός.

§. ΚΗ'. Δεκὰς ἐστὶν, ἢ καλεῖται, τὸ ἐκ δέκα μονάδων σύστημα· καθὼς καὶ εἴκοσι, τὸ ἐκ δύω δεκάδων, καὶ τριάκοντα, τὸ ἐκ τριῶν, καὶ τεσσαράκοντα, τὸ ἐκ τεσσάρων, κτλ'.

§. ΚΘ'. Ἑκατοντὰς δὲ ἐστὶ, τὸ ἐκ δέκα δεκάδων συμπλήρωμα, ὥσπερ τῶν διακοσίων, τὸ ἐξ εἴκοσι δεκάδων, καὶ τῶν τριακοσίων, τὸ ἐκ τριάκοντα δεκάδων σύστημα, κτλ'.

§. Λ'. Ἡ δὲ χιλιὰς, τῶν δέκα ἑκατοστύων ἐστὶ συμπλήρωμα, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρι τῶν ἐννεακοσίων· ὥσπερ δεκὰς χιλιάδος, τὸ ἐκ δέκα δεκαδικῶν χιλιάδων ἄθροισμα, ἡ δὲ τῶν χιλιάδων χιλιὰς, μιλλιόνιον λέγεται. Τὸ δὲ μιλλιόνιον τῶν μιλλιονίων, διλλιόνιον ὀνομάζεται, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, τριλλιόνιον, τετραλλιόνιον, πενταλιόνιον, ὀνομάζομεν, κατὰ τὸν διορισθέντα τρόπον, τὰ ὀνόματα προσαρμόζοντες.

Ὑποσημείωσις.

§. ΛΑ'. Πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν, ὅτι ἕως τῆς σήμερον, δὲν εὑρέθη κανένας χαρακτὴρ, τῶν δεκάδων, ἢ ἑκατοντάδων, ἢ τῶν χιλιάδων, καὶ τῶν ὑπερτέρων ὀνομασιῶν δηλωτικὸς· διὰ τοῦτο, ἵνα ἀναπληρώσωμεν τὸ ἐλλειπὲς αὐτῶν, λαμβάνομεν τοὺς ἐκτεθέντας ἐννέα λογικοὺς χαρακτῆρας, καὶ προστίθεμεν μηδενικόν· καὶ εἰς μὲν τὰς δεκάδας βαίνομεν ἕνα (0) εἰς δὲ

τὰς

τὰς ἑκατοντάδας δύω (00) εἰς τὰς χιλιάδας δὲ τρία (000). Εἰς δὲ τὰς δέκα χιλιάδας τέσσαρα (0000) καὶ εἰς τὰς ἑκατὸν χιλιάδας πέντε (00000) καὶ οὕτω καθεξῆς.

Περὶ Δυνάμεως τῶν χαρακτήρων, τὴν ὁποίαν λαμβάνουσιν ἐκ τῆς θέσεως τοῦ τόπου ὁποῦ μεταφέρονται.

§. ΛΒ΄. Κάθε ἕνας ἀπὸ τοὺς δηλωθέντας ἐννέα λογικοὺς χαρακτῆρας, δύναται μὲν νὰ φυλάττῃ τὴν αὐτὴν ὀνομασίαν, ὅπου ἤθελε τύχῃ, οὐχὶ ὅμως νὰ φανερώνῃ καὶ τὴν αὐτὴν ποσότητα· ἀλλ' ἐάν τις τῶν ἐννέα τύπων χαρακτήρων, ἤθελεν εἶναι εἰς τὸν πρῶτον βαθμὸν τῶν μονάδων (κάμνοντας ἀρχὴν τῆς Ἀριθμήσεως, ἀπὸ τὸν δεξιώτατον τόπον τοῦ δοθέντος Ἀριθμητικοῦ στίχου, καὶ πηγαίνοντας πρὸς τὰ ἀριστερὰ) μονάδας τότε δηλοῖ, ἐὰν δὲ ἐπὶ τοῦ δευτέρου, δεκάδας φανερώνει· ἐὰν δὲ ἐπὶ τοῦ τρίτου, ἑκατοντάδας· ἐὰν δὲ πάλιν εὑρίσκεται, ἢ ἤθελε μετατεθῇ ἐπὶ τοῦ τετάρτου τόπου, πρὸς ἀριστερὰν δηλ. χιλιάδας τότε παριστᾷ· ἐὰν δὲ ἐπὶ τοῦ πέμπτου, δέκα χιλιάδας· καὶ ἐπὶ τοῦ ἕκτου τόπου, ἑκατὸν χιλιάδας ἐμφαίνει, καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν βαθμῶν ἀναλόγως.

Πόρισμα Γ΄.

§. ΛΓ΄. Ὁ τόπος ἄρα δεκαπλασίαν δύναμιν, ἢ αὔξησιν εἰς τὸν χαρακτῆρα, (ἐκ συνθήκης τῶν εὑρόντων, καὶ ταξαμένων τοὺς χαρακτῆρας) λαμβάνει· ἤγουν ὁ ἴδιος χαρακτὴρ, τοσαύτας δεκάδας φανερώνει, εἰς τὸν δεύτερον τόπον, πρὸς τὰ ἀριστερὰ μέρη μετατιθέμενος, ὅσας μονάδας ἐφανέρωνεν, ὅταν εὑρίσκετο μόνος εἰς τὸν πρῶτον τόπον τῶν μονάδων, τοσαύτας δὲ ἑκατοντάδας δηλοῖ, ἐν τῷ τρίτῳ τόπῳ μεταφερόμενος, ὅσας δεκάδας μὲν ἐν τῷ δευτέρῳ, μονάδας δὲ ἐν τῷ πρώτῳ ἐδήλου· τοσαύτας δὲ πάλιν χιλιάδας ἐν τῷ τετάρτῳ μετακομιζόμενος τόπῳ, ὅσας μονάδας μὲν ἐν τῷ πρώτῳ, δεκάδας δὲ ἐν τῷ δευτέρῳ, καὶ ἑκατοντάδας ἐν τῷ τρίτῳ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Περὶ Ἀριθμήσεως καὶ ἀπαγγελίας, τοῦ οἱουδήποτε δοθέντος Ἀριθμητικοῦ στίχου, ἢ σειρᾶς χαρακτήρων.

§. ΛΔ΄. Ὅταν ἤθελε μᾶς δοθῇ κάνένας Ἀριθμητικὸς στίχος, ὁποῦ νὰ συνίσταται ἀπὸ περισσοτέρους τῶν δώδεκα χαρακτήρων, τὸν ὁποῖον προστάζόμεθα νὰ τὸν προφέρωμεν, διὰ νὰ σηκώσωμεν κάθε δυσκολίαν, καὶ νὰ τὸν ἀπαγγείλωμεν εὐκολώτερα, πρῶτον νὰ τὸν καταχωρίσωμεν εἰς κλάσεις, ἢ κόμματα, ἡ δὲ τοιαύτη καταχώρησις, νὰ γίνεται ἀνὰ ἓξ χαρακτῆρας, καὶ εἰς κάθε κόμμα νὰ βάνωμεν ὑποδιαστολὴν, κάμνοντες ἀρχὴν ἀπὸ τῆς δεξιωτάτης στήλης τῶν μονάδων, χωρὶς νὰ φροντίζωμεν, ἀνίσως τὸ ἀριστερότατον κόμμα ἔχῃ δύω, ἢ καὶ ἕνα χαρακτῆρα· ἀφ' οὗ δὲ καταχωρίσωμεν τοὺς χαρακτῆρας τοῦ δοθέντος στίχου τοιουτοτρόπως, ἐπάνωθεν τοῦ πρώτου χαρακτῆρος τοῦ δευτέρου κόμματος μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν, νὰ βάνωμεν, ἢ ἕνα μηδενικὸν (0), ἢ μίαν στιγμὴν, (.) διὰ νὰ γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ χαρακτὴρ ὁποῦ ἔχει ἐπάνωθέν του αὐτὸ τὸ σημεῖον, σημαίνει χιλιάδας, ὅπου ἤθελεν εἶσθαι. Εἰς δὲ τὸν τέταρτον χαρακτῆρα ἀπ' αὐτὸν, ὁποῦ εὑρίσκεται εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ τρίτου κόμματος μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν, νὰ βάνωμεν ἐπάνωθέν του ἕνα γραμμίδιον (I), διὰ νὰ γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ χαρακτὴρ, ὁποῦ ἔχει αὐτὸ τὸ σημεῖον, φανερώνει μιλλιούνια. Πάλιν ὁ τέταρτος ἀπὸ τοῦτον ὁποῦ εὑρίσκεται εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ τετάρτου κόμματος, ἐπειδὴ φανερώνει χιλιάδας τοῦ μιλλιονίου, ἂς σημειώνεται μὲ τὸ μηδενικὸν, ἢ τὴν στιγμήν. Ὁμοίως δὲ καὶ ὁ τέταρτος ἀπὸ τοῦτον, ἐπειδὴ καὶ φανερώνει διλλιόνια, ἂς σημειώνεται μὲ δύω γραμμίδια (II), καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Καὶ εἰς μὲν τὰς χιλιάδας, νὰ βάνεται τὸ σημεῖον τῶν χιλιάδων, εἰς δὲ τὸ μιλλιόνιον, τὸ σημεῖον τοῦ μιλλιονίου (I), εἰς δὲ τὸ διλλιόνιον, δύω (II), εἰς δὲ τὸ τριλλιόνιον (III) τρία, ὥσπερ εἰς τὸ τετραλλιόνιον τέσσαρα (IIII), καὶ εἰς τὸ πενταλλιόνιον, πέντε (IIIII), καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ἂς δοθῇ, ὑποδείγματος χάριν, ὁ ἐφεξῆς ἀριθμητικὸς στίχος, ἐκ τριάκοντα δύω χαρακτήρων συντεθειμένος, ἂς διαιρεθῇ εἰς κόμματα, καὶ ἂς ἐπιτεθῶσι τὰ σημεῖα· οἷον,

IIIII ° IIII ° III ° II ° I °
28, 543, 207, 691, 240, 506, 701, 051, 987, 642, 815.

Π Ι Ν Α Ξ

Τῶν ἐν τῷ Τετάρτῳ Βιβλίῳ Περιεχομένων.

Ἀπαγγέλλεται δὲ οὕτω, 28 πεντιλλιόνια, ϗ 543 χιλιάδ. καὶ 207, τετραλλιόνια, ϗ 691, χιλιάδας, ϗ 240 τριλλιόνια, ϗ 506 χιλιάδ. ϗ 701, διλλιόνια, ϗ 051, χιλιάδα, ϗ 987 μιλλιόνια, ϗ 642, χιλιάδ. ϗ 815 μονάδας.

Λῆμμα.

§. ΛΕ'. Εἰς τέσσαρα πάθη ὑπόκεινται ἅπαντες οἱ ἀριθμοί· δηλ. εἰς τὴν Πρόσθεσιν, ἢ σύναψιν, εἰς τὴν Ἀφαίρεσιν, ἢ μείωσιν, εἰς τὸν Πολλαπλασιασμὸν, ϗ εἰς τὴν διαίρεσιν.

Ὑπόθεσις.

§. ΛϚ'. Σημεῖον τῆς μὲν προσθέσεως, ἔστω τοῦτο τὸ σημεῖον, (+) τῆς δὲ Ἀφαιρέσεως, τοῦτο (—)· τοῦ δὲ πολλαπλασιασμοῦ, τοῦτο (X), ἢ τοῦτο (.) ἀδιάφορον γάρ. Καὶ τῆς διαιρέσεως, τοῦτο τὸ δίστιγμον (:), ἢ τοῦτο, (÷) = 4. καὶ ἐπὶ τῆς ἰσότητος τοῦτο (=).

Πόρισμα Δ'.

§. ΛΖ'. Κάθε ποσότης ἄρα, μὲ τὴν πρόσθεσιν μὲν, καὶ μὲ τὸν Πολλαπλασιασμὸν αὐξάνει, μὲ τὴν Ἀφαίρεσιν δὲ, ϗ τὴν διαίρεσιν σμικρύνεται· ὥστε ὁποῦ καὶ ὁ Πολλαπλασιασμὸς, ἤθελεν ὀνομαστῇ δικαίως σύντομος πρόσθεσις, ὥσπερ καὶ ἡ διαίρεσις ἐπιτετμημένη Ἀφαίρεσις, καὶ ἐκ τούτου συμπεραίνεται, ὅτι κάθε ποσότης, κατὰ δύω τρόπους δύναται νὰ ἀλλοιωθῇ, μὲ τὴν αὔξησιν δηλ. ϗ τὴν μείωσιν.

Καὶ ταῦτα μὲν ἱκανὰ πρὸς παράστασιν τῆς ἰδέας τῆς Ἀριθμητικῆς Ἐπιστήμης, τῆς τε δυνάμεως τῶν χαρακτήρων ἐκ τῆς τοῦ τόπου θέσεως, καὶ τῆς ἀπαγγελίας τοῦ οἱουδήποτε δοθέντος ἀριθμητικοῦ στίχου, καὶ τῶν προαπαιτουμένων ἐπὶ πάσης Ἐπιστημονικῆς διδασκαλίας· νῦν δὲ ἐπ' αὐτὴν τὴν πρᾶξιν βαδίζωμεν, τὸν τῶν καλῶν δοτῆρα Θεὸν ἡγεῖσθαι τοῦ ἔργου, εἰλικρινῇ τῇ πίστει δεξάμενοι.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΒΙΒΛΙΟΝ Α'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

Περὶ Προσθέσεως, ἢ Συνάψεως τῶν Ἀκεραίων Ἀριθμῶν.

Ὁρισμός.

§. 1. Ἡ Πρόσθεσις εἶναι μία σύναψις, τῶν Ἀριθμῶν ἐκείνων ὁποῦ ἤθελαν μᾶς δοθῶσι, διὰ νὰ γνωρίσωμεν τὸ Κεφάλαιον, ὁποῦ ἤθελε γένῃ ἀπὸ αὐτούς.

Ὑπόθεσις.

Ἐκεῖναι αἱ Ποσότητες ὁποῦ ἤθελαν μᾶς δοθῶσιν, ὀνομάζονται Ἀθροισταί τε καὶ γνωσταί· αἱ δὲ ζητούμεναι, ἄγνωστοι· τὸ δ' ἐξ αὐτῶν συμποσούμενον, κεφάλαιον λέγεται.

Ἀξιώματα.

§. 2. Α'. Τὸ ὅλον εἶναι ἴσον μὲ ὅλα του τὰ μέρη, ὁμοῦ λαμβανόμενα.

§. 3. Β'. Τὸ ὅλον εἶναι μεγαλήτερον, ἀπὸ κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ μέρη του.

§. 4. Γ'. Αἱ Ποσότητες ἐκεῖναι, ὁποῦ εἶναι ἴσαι μὲ ἄλλην τινὰ Ποσότητα τρίτην, ϗ ἀναμεταξύ των εἶναι ἴσαι.

§. 5. Δ'. Ἐκεῖναι δὲ αἱ Ποσότητες, ὁποῦ ἡ μὲν μία εἶναι ἴση μὲ ἄλλην τρίτην Ποσότητα, ἡ δὲ ἄλλη εἶναι ἄνισος, ἐκεῖναι ϗ ἀναμεταξύ τους εἰσὶν ἄνισοι.

§. 6. Ε΄. Ἀνίσως εἰς τὰς ἴσας Ποσότητας ἤθελαν προστεθῶσιν ἴσα ποσὰ, ὅλαι αἱ Ποσότητες αὐταὶ θέλει εἶναι ἴσαι, ἐὰν δὲ ἄνισα, ἄνισοι.

§. 7. Ϛ΄. Ἐὰν ἀπὸ ἴσας Ποσότητας, ἤθελαν ἀφαιρεθῶσιν ἴσα ποσὰ, ἐκεῖνα ὁπῦ μένουσι θέλει εἶναι ἴσα.

§. 8. Ζ΄. Κάθε Ποσότης ὁποῦ ἤθελεν ἀφαιρεθῇ ὅλη ἀπὸ τὸν ἑαυτόν της, γίνεται μηδὲν, ἢ γίνεται ἴση μὲ τὸ μηδέν.

§. 9. Η΄. Τὰ τοῦ αὐτοῦ Ποσῦ, ἢ τῶν ἴσων Ποσῶν διπλάσια, καὶ ἀναμεταξύ των εἶναι ἴσα.

§. 10. Θ΄. Τὰ τοῦ αὐτῦ Ποσῦ, ἢ τῶν ἴσων Ποσῶν ἡμίση, καὶ ἀναμεταξύ των εἶναι ἴσα.

§. 11. Ι΄. Τὸ ὅλον εἶναι μεγαλήτερον, ἀπὸ τὸ μέρος τυ.

§. 12. ΙΑ΄. Ὅλα τὰ μέρη κάθε πράγματος, εἶναι ἴσα μὲ τὸ ὅλον αὐτὸ πρᾶγμα.

§. 13. ΙΒ΄. Ἐκεῖνα τὰ ποσὰ ὁποῦ ἤθελαν Πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσιν ἀπὸ τὴν μονάδα, μένουσιν ἐκεῖνα τὰ ἴδια ὁποῦ ἦσαν καὶ πρὸ τοῦ νὰ πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ νὰ διαιρεθῶσιν.

§. 14. ΙΓ΄. Ἐκείνη ἡ Ποσότης, ὁπῦ ἤθελε διαιρεθῇ μὲ τὸν ἑαυτόν της, ἢ μὲ ἄλλην Ποσότητα ἴσην μὲ αὐτὴν, τὸ Πηλίκον ὁπῦ εὑγῇ, θέλει εἶναι μονάς.

§. 15. ΙΔ΄. Αἱ ἴσαι Ποσότητες, ὅταν ἤθελαν διαιρεθῶσιν μὲ ἴσα Ποσὰ, ἴσα θέλει εἶναι καὶ τὰ Πηλίκα· ἐκείνων δὲ τῶν Ποσοτήτων ὁπῦ ἤθελαν διαιρεθῶσι μὲ ἴσα Ποσὰ, καὶ τὰ Πηλίκα ἐκεῖνα θέλει εἶναι ἴσα ἀναμεταξύ των παραβαλλόμενα.

Αὐτὰ εἶναι, ὦ φίλτατοι ἀναγνῶσται, τὰ μέσα ἐκεῖνα, ὁπῦ προαπαιτοῦνται κάθε Ἀριθμητικῆς Πράξεως, τὰ ὁποῖα τὰ ἐβάλαμεν ἐδῶ εἰς τὴν ἀρχὴν, ὄχι ἁπλῶς καὶ ὡς ἔτυχε, (καθὼς ἤθελεν ὑπολάβῃ τινὰς ἀνεπιστήμων) ἀλλὰ διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ἄλλα τινὰ χρειώδη τε καὶ ἀναγκαῖα εἰς τὰς διδαχθησομένας ἀριθμητικὰς πράξεις, καὶ ἐργασίας δι᾽ αὐτῶν, καὶ μάλιστα εἰς τὰς δείξεις· τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ τὰ ἐξηγῇ ὁ διδάσκαλος πλατύτερον εἰς τὸν μαθητήν. Πρὸ τῦ δὲ νὰ ἀρχίσωμεν τὴν διδασκαλίαν τῆς Προσθέσεως, ἂς προσθέσωμεν ὀλίγα τινα.

Ἐκεῖνος ὖν ὁπῦ μέλλει νὰ συνάψῃ χωρὶς λάθος, δύω, ἢ τρεῖς, ἢ καὶ περισσοτέρυς ἀριθμοὺς, διὰ νὰ γνωρίσῃ ἐκεῖνο τὸ Κεφάλαιον ὁπῦ συμποσοῦται ἀπὸ αὐτοὺς, εἶναι ἀναγκαῖον ν᾽ ἀναγινώσκῃ μετ᾽ ἐπιμελείας καὶ μεγάλης, προσοχῆς τὰς ἑφεξῆς

ξῆς

ξῆς ἐκτεθέντας μοι Κανόνας, οἵτινες ἀνήκυσιν ἰδίως τε καὶ κυρίως εἰς τὴν πρᾶξιν ταύτην τῆς προσθέσεως, εἰδὲ καὶ δὲν προσέχει, εἰς μάτην κοπιάζει.

Κανὼν Α΄.

§. 16. Ὁπὸν θέλῃς νὰ συνάψῃς ἀριθμὺς, ὁπῦ ἤθελαν σοι δοθῶσιν, πρέπει νὰ τοὺς γράφῃς ὑπαλλήλως, δηλ. ἴσια τὸν ἕνα ὑποκάτω τῦ ἄλλυ· ἤγουν τὰς μὲν μονάδας, ὑποκάτω τῶν μονάδων, τὰς δὲ δεκάδας, ὑποκάτω τῶν δεκάδων, τὰς δὲ ἑκατοντάδας, ὑπὸ τῶν ἑκατοντάδων, καὶ τὰς χιλιάδας, ὑποκάτω τῶν χιλιάδων, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως.

Κανὼν Β΄.

§. 17. Ἀνίσως δὲ κἂνένας Ἀριθμὸς, ἀπὸ ἐκείνους ὁποῦ μέλλῃς νὰ γράψῃς, ἤθελεν ἔχῃ περισσοτέρυς χαρακτῆρας, ἀπὸ ἐκείνυς τοὺς ἀριθμὺς ὁπῦ ἐγράφησαν προτήτερα, ἀρχινῶντας ἀπὸ τὴν μονάδα, καὶ φθάνοντας εἰς τὺς προγεγραμμένυς, νὰ ἐξαπλώνεται πρὸς τὰ ἀριστερὰ μέρη.

Κανὼν Γ΄.

§. 18. Πρὸ τῦ δὲ νὰ ἀρχίσῃς τὴν σύναψιν, τράβιξε μίαν ὁριζόντειον γραμμὴν, ὑποκάτω τῶν ἀριθμῶν ὁπῦ ἐβάλθησαν, (διὰ νὰ χωρίζωνται οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ ὁποῦ μέλλεις νὰ συνάψῃς ἀπὸ τὸ ἐξ αὐτῶν γενόμενον Κεφάλαιον) ὑποκάτω εἰς τὴν ὁποίαν θέλεις γράψῃ ἐκεῖνον τὸν Ἀριθμὸν, ὁποῦ ἤθελε γένῃ ἀπὸ ὅλυς τὺς ἀριθμοὺς ὁπῦ εὑρίσκονται ἐπάνωθεν τῆς γραμμῆς ὁπῦ ἐτράβιξες, καὶ μὲ αὐτὸν τὸν τρόπον θέλεις δυνηθῇ νὰ συνάψῃς τὺς δοθέντας σοι ἀριθμοὺς, εἰς ἕνα ὁλικὸν Κεφάλαιον, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς συνάψεως. (§. 1.)

Κανὼν Δ΄.

§. 19. Ὅταν δὲ μέλλῃς νὰ συνάψῃς, πρέπει νὰ ἀρχίσῃς ἀπὸ τὴν δεξιωτάτην στήλην τῶν μονάδων, καὶ ἀφ᾽ οὗ συνάψῃς ὅλας τὰς μονάδας, ὁποῦ εὑρίσκονται εἰς αὐτὴν, ὁ Ἀριθμὸς ὁποῦ γένῃ ἀπὸ αὐτὰς, εἰ μὲν ἤθελεν εἶναι μικρότερος ἀπὸ

τινὰ

τινὰ δεκαδικὸν Ἀριθμόν, (δεκαδικοὶ δὲ ἀριθμοὶ λέγονται ἀπὸ τὰ 10, ἕως τὰ 90) ἂς γραφῇ ὑποκάτω τῆς γραμμῆς, ὑπαλλήλως μὲ τὴν στήλην τῶν μονάδων. (§. 16.)

Κανὼν Ε΄.

§. 20. Εἰδὲ ἤθελεν εἶναι μεγαλήτερος τινὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἐκεῖνος ὁποῦ ἤθελε γένῃ ἀπὸ τὴν στήλην τῶν μονάδων, ὁ μὲν δεκαδικὸς ἀριθμός, ἂς φυλάττεται, διὰ νὰ προστεθῇ εἰς τὴν ἀκόλουθον πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλην τῶν δεκάδων· ἐκεῖνο δὲ ὁποῦ ἤθελε περισσεύσῃ ἀπὸ τὸν δεκαδικὸν ἀριθμόν, ἂς γραφῇ ὑπὸ τὴν στήλην τῶν μονάδων.

Κανὼν Ϛ΄.

§. 21. Εἰδὲ τέλος πάντων, ὁ γινόμενος ἀριθμὸς ἀπὸ τὴν πρώτην στήλην τῶν μονάδων, δὲν ὑπερβαίνει, μήτε ἐλλείπει, ἀλλ' εἶναι ἴσος μὲ τινὰ δεκαδικὸν ἀριθμόν, τότε ἂς φυλάττεται μὲν ὁ δεκαδικὸς ἀριθμός, διὰ νὰ προστεθῇ εἰς τὴν ἀκόλουθον στήλην τῶν δεκάδων, (§. 20.) ὑπὸ δὲ τὴν γραμμήν, ἂς γραφῇ μηδενικόν, διὰ νὰ μὴ συμβῇ κἀμμία ἀπάτη, ἢ σύγχυσις, μένωντας ὁ τόπος τῆς πρώτης στήλης χωρὶς κἀνένα χαρακτῆρα ὑπὸ τὴν γραμμήν· αὐτὸ τὸ ἴδιον ἂς γίνεται καὶ εἰς τὰς λοιπὰς πρὸς ἀριστερὰν στήλας τῶν δεκάδων, ἑκατοντάδων, χιλιάδων, καὶ τῶν λοιπῶν ὀνομασιῶν ὁποῦ ἤθελαν τύχωσιν. Εἰς δὲ τὴν ὁλοϋστερινὴν στήλην, ἐὰν περισσεύῃ τὸ ὑπ' αὐτῆς γινόμενον δεκαδικοῦ τινὸς ἀριθμοῦ, ἂς βαίνεται ὁλόκληρος ὁ ἀριθμός, ἐκτεινόμενος πρὸς τὰ ἀριστερὰ μέρη τῆς στήλης, καὶ μὲ αὐτὸν τὸν τρόπον θέλουσι συναφθῶσιν ὅλοι οἱ δοθέντες Ἀριθμοί, εἰς ἕνα ἰσοδύναμον μὲ αὐτούς.

Πρόβλημα Α΄.

§. 22. Δύω, ἢ καὶ περισσοτέρων ἀριθμῶν δοθέντων, νὰ εὕρωμεν ἐκεῖνο τὸ κεφάλαιον ὁποῦ συμποσοῦται ἀπὸ αὐτούς, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς Προσθέσεως. (§. 1.)

Ὑπόδειγμα Α΄.

Α	=	4356
Β	=	3312
Κ	=	7668

Ἂς δοθῶσιν οἱ ἀντικρὺ τοῦ Α, καὶ Β κείμενοι Ἀριθμοί, τοὺς ὁποίους πρέπει νὰ τοὺς συνάψωμεν, διὰ νὰ εὕρωμεν ἕνα ἀριθμὸν ἴσον μὲ αὐτοὺς τοὺς δύω. Πρῶτον ἂς γραφῶσιν ὁ ἕνας ὑποκάτω τοῦ ἄλλου ἴσια, κατὰ τὸν πρῶτον κανόνα, (§. 16.) Δεύτερον ἂς τραβιχθῇ μία ὁριζόντειος γραμμὴ ὑποκάτωθεν αὐτῶν, κατὰ τὸν τρίτον Κανόνα, (§. 18.) Τρίτον ἀρχίζωντας ἀπὸ τὴν στήλην τῶν μονάδων (κατὰ τὸν τέταρτον Κανόνα, (§. 19.) λέγε, 2. αἱ μονάδες τοῦ Β, καὶ 6. αἱ τοῦ Α, κάμνουσιν 8. Καὶ ἐπειδὴ τὰ 8, δὲν ὑπερβαίνουσι τὸν δεκαδικὸν ἀριθμόν, ἂς γραφῇ, ὁ 8, ὑποκάτω τῆς στήλης τῶν μονάδων, ἀντικρὺ τοῦ Κ, (κατὰ τὸν Δ΄. Κανόνα, (§. 19.) Ἔπειτα περνῶντας εἰς τὴν δευτέραν στήλην τῶν δεκάδων, λέγε· ἕνα ὁ τοῦ Β, καὶ 5 ὁ τοῦ Α, κάμνουσιν 6. γράψον λοιπὸν καὶ αὐτὸν ὑπὸ τὴν γραμμὴν ὑπαλλήλως τῇ στήλῃ τῶν δεκάδων. Ὁμοίως καὶ ἐπὶ τὴν τρίτην καὶ τετάρτην στήλην μεταβάς, κάμνε τὸ ἴδιον, ἐκεῖνο δὲ τὸ Κεφάλαιον Κ, ὁποῦ ἤθελε γένῃ ἀπὸ αὐτούς, εἶναι ἴσον μὲ τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ Α καὶ Β, ὁποῦ μᾶς ἐδόθησαν, (κατὰ τὸ πρῶτον ἀξίωμα, (§. 2.)

Ὑπόδειγμα Β΄.

Α	=	3845.
Β	=	.267.
Γ	=	.473.
Δ	=	..89
Ε	=	5321
Κ	=	9995

Ἂς δοθῶσι, δεύτερον, οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, ἀριθμοί, τοὺς ὁποίους πρέπει νὰ συνάψωμεν εἰς ἕνα ὁλικὸν ἀριθμὸν τὸν Κ, ἴσον μὲ ὅλους τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς (κατὰ τὸν (§. 1.) ἂς γένῃ, καθὼς εἴπομεν εἰς τὸ πρῶτον ὑπόδειγμα, καὶ ἐπειδὴ συνάπτωντας τὰς μονάδας τῆς πρώτης στήλης, ὑπερβαίνει τὸ ἐξ αὐτῆς γινόμενον τὸν δεκαδικὸν ἀριθμόν, ἂς γένωσιν ἐκεῖνα ὁποῦ εἴπομεν εἰς τὸν Ε΄. Κανόνα, (§. 20.) Καὶ ἀφ' οὗ γράψωμεν τὰ 5, εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων, ἀντικρὺ τοῦ Κ, αἱ δύω δεκάδες ὁποῦ φυλάττονται, ἂς προστεθῶσιν εἰς τοὺς χαρακτῆρας ὁποῦ εὑρίσκονται εἰς τὴν δευτέραν πρὸς ἀριστερὰν στήλην τῶν δεκάδων, κατὰ τὸν πέμπτον Κανόνα, (§. 20.) οἱ ὁποῖοι, ἀφ' οὗ συναφθῶσι, γίνεται ὁ 29. Λοιπὸν

πὸν τὸν μὲν 9, γράψετον ὑποκάτω τῆς στήλης τῶν δεκάδων· αἱ δὲ δύω δεκάδες πάλιν, ὁποῦ φυλάττονται, ἂς συναφθῶσι μὲ τοὺς χαρακτῆρας ὁποῦ εὑρίσκονται εἰς τὴν τρίτην στήλην τῶν ἑκατοντάδων. Ἀφ' οὗ δὲ συναφθῶσι καὶ αὐτοὶ, γίνεται ὁ 19 ἀριθμὸς, καὶ τὸν μὲν 9, γράψετον ὑπὸ τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων, τὴν δὲ φυλαττομένην δεκάδα πρόσθεσέ την εἰς τοὺς χαρακτῆρας τῆς τετάρτης στήλης τῶν χιλιάδων, οἵτινες ἀφ' οὗ συναφθῶσι καὶ αὐτοὶ, γίνεται ὁ 9· γράψον καὶ αὐτὸν ὑπὸ τὴν τετάρτην στήλην, καὶ ἂς γένῃ ὁ ἀντικρὺ τοῦ K ἀριθμὸς, καὶ αὐτὸς εἶναι τὸ ζητούμενον Κεφάλαιον τῶν A, B, Γ, Δ, E, δοθέντων ἀριθμῶν, καὶ εἶναι ἴσος μὲ ὅλους τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς, κατὰ τὸ πρῶτον Ἀξίωμα, (§. 2.)

Ὑπόδειγμα Γ'.

9,642
5,823
5,960
8,575
K = 30 000

Ἂς δοθῶσι, τρίτον, οἱ ἀντικρὺ κείμενοι ἀριθμοὶ, τοὺς ὁποίους πρέπει νὰ συνάψωμεν εἰς ἕνα ὁλικὸν ἀριθμὸν, τὸν ἀντικρὺ τοῦ K, λοιπὸν ἂς συναφθῶσι πρῶτον αἱ μονάδες ὁποῦ εἶναι εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων, καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, εἶναι ἴσον μὲ τὸν 10 ἀριθμὸν, ἂς γραφῇ ὑποκάτω τῆς γραμμῆς ὑπὸ τὴν στήλην τῶν μονάδων, ἀντικρὺ τοῦ K, μηδενικὸν, κατὰ τὸν Ϛ'. Κανόνα, (§. 21.) ἡ δὲ μία δεκὰς, ἂς συναφθῇ μὲ τοὺς χαρακτῆρας τῆς δευτέρας στήλης τῶν δεκάδων, κατὰ τὸν πέμπτον Κανόνα, (§. 20.) καὶ ἀφ' οὗ συναφθῶσι καὶ αὐτοὶ, ἐπειδὴ ἐκεῖνο ὁποῦ γίνεται εἶναι ἴσον μὲ τὸ 20, ἂς γραφῇ πάλιν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν δεκάδων μηδενικὸν, αἱ δὲ 2. δεκάδες ὁποῦ φυλάττονται, ἂς συναφθῶσι μὲ τοὺς χαρακτῆρας τῆς τρίτης στήλης τῶν ἑκατοντάδων, καὶ ἀφ' οὗ συναφθῶσι καὶ αὐτοὶ, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸν 30 ἀριθμὸν, ἂς γραφῇ ὑπὸ τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων μηδενικόν· ὁ δὲ 3, ἂς προστεθῇ εἰς τοὺς χαρακτῆρας τῆς τετάρτης στήλης τῶν χιλιάδων· οἱ ὁποῖοι τέλος πάντων, ἀφ' οὗ συναφθῶσι, γίνεται ὁ 30 ἀριθμός. Καὶ τὸ μὲν μηδενικὸν, ἂς γραφῇ ὑπὸ τὴν τετάρτην στήλην τῶν χιλιάδων, αἱ δὲ τρεῖς δεκάδες τῶν χιλιάδων, ἂς γραφῶσι πρὸς τὰ ἀριστερὰ μέρη τοῦ μηδενικοῦ, κατὰ τὸν δεύτερον Κανόνα, (§. 17.)

Ἂς βαλθῶσι καὶ τὰ ἀντικρὺ ὑποδείγματα, χάριν τῶν πρωτοπείρων.

.2988	.326	..5241
..352	.480	..8670
....6	.932	.29536
64290	..20	...208
.8579	1806	..4203
K = 76215	.450	.76340
	4014	83
		124281

Πόρισμα.

Ἀπὸ ἐκεῖνα ἄρα τὰ ὑποδείγματα ὁποῦ ἑρμηνεύσαμεν, εἶναι φανερὸν, ὅτι τὴν αὐτὴν τάξιν καὶ μέθοδον μεταχειριζόμενοι, καὶ εἰς τοὺς ἐκτεθέντας Κανόνας προσέχοντες, θέλομεν δυνηθῇ εὐκόλως νὰ συνάψωμεν, καὶ κάθε ἄλλον ἀριθμὸν, ὅπου ἤθελε τύχῃ.

Ὑποσημείωσις.

Πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν, ὅτι ὅταν οἱ ἀριθμοὶ ὁποῦ μέλλομεν νὰ συνάψωμεν, ἤθελαν εἶναι πολλοὶ, δηλ. εἰς πολλὰς ἀράδας, δὲν εἶναι νόμιμον νὰ τοὺς συνάπτωμεν ὅλους μαζῆ, ἀλλὰ νὰ τοὺς χωρίζωμεν εἰς Κλάσεις, ὁποῦ νὰ μὴ περιέχωσι περισσότερον ἀπὸ δέκα στίχους, ἢ ἀράδας· καὶ ὑποκάτωθεν τοῦ κόμματος, νὰ ἀφίνωμεν τόπον, διὰ νὰ γράψωμεν τὸ κεφάλαιον τοῦ πρώτου κόμματος· καὶ ἂν εἶναι περισσότεροι οἱ στίχοι, τὸ ἴδιον νὰ κάμνωμεν καὶ εἰς τὸ δεύτερον, τρίτον, καὶ τέταρτον, ἂν τύχῃ, κόμμα, καὶ νὰ τραβίζωμεν τὸ συμποσούμενον εἰς τὸ κατώτατον κόμμα· καὶ οὕτω δὲν σφάλλωμεν ποτέ.

Καὶ περὶ μὲν τῆς Προσθέσεως, ἢ Συνάψεως τῶν Ἀκεραίων ἀριθμῶν, εἶναι ἱκανὰ τὰ ἐκτεθέντα καὶ ἑρμηνευθέντα ὑποδείγματα. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ εἰς τὰς Ἀριθμητικὰς πράξεις ὁποῦ ἀκολουθοῦσι καθημερινῶς εἰς τὰς ἐμπορικὰς δοσοληψίας, δὲν εἶναι μόνον ὁμοειδεῖς καὶ καθαροὶ ἀριθμοὶ, ἀλλὰ καὶ Ἑτεροειδεῖς, ἂς εἰπῶμεν καὶ περὶ τῆς συνάψεως αὐτῶν ὀλίγα τινὰ, καὶ νὰ δώσωμεν εἰς τὸν ἀναγινώσκοντα μίαν καθαρὰν ἰδέαν τοῦ τρόπου, τῆς Προσθέσεως καὶ αὐτῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

Περὶ Προσθέσεως, ἢ Συνάψεως τῶν Ἑτεροειδῶν καλουμένων Ἀριθμῶν.

Ὁρισμός.

§. 23. Πρόσθεσις τῶν Ἑτεροειδῶν ἀριθμῶν ἐστι, πολλῶν δοθεισῶν ὁμοῦ ὁμοειδῶν τε καὶ Ἑτεροειδῶν ποσοτήτων, ἢ ἀριθμῶν, εἰς ἕνα ὁλικὸν κεφάλαιον σύναψις.

Σχόλιον.

Ἑτεροειδεῖς ἀριθμοί, ἢ ποσότητες καλοῦνται ἐδῶ, ἐκεῖνα τὰ ποσά, ὁποῦ διαφέρουσι τὸ ἓν ἀπὸ τὸ ἄλλο, κατά τινα ἀξίαν, ἢ δύναμιν· ἐπειδὴ ὅταν παραβάλληται τὸ ἓν πρὸς τὸ ἄλλο, δύναται νὰ εἶναι μεγαλήτερον, ἢ μικρότερον. Καὶ τὸ μὲν μικρότερον, εἶναι μέρος, ἢ μέρη τοῦ μεγαλητέρου, καὶ περιέχεται ἐν αὐτῷ, πλέον, ἢ μίαν φοράν· παραδείγματος χάριν, ἀπὸ γρόσια, παράδες, λεπτά, κτλ. ἢ ὁποῦ συνίσανται, ἀπὸ φλωρίνια, γροσίκια, σταυροφόρα, καὶ φενίγκα, κτλ. ἢ ὁποῦ εἶναι μεμιγμένοι ἀπὸ ὀργυιάς, πόδας, δακτύλους, ἢ ἀπὸ ὀκάδας, λίτρας, δραχμάς, κτλ. ἢ ἀπὸ ἡμέρας, ὥρας, λεπτά, καὶ ἄλλα μέτρα καὶ σταθμοὺς ὁποῦ πολιτεύονται καὶ μεταχειρίζονται εἰς τὰ συναλάγματα καὶ δοσοληψίας, διάφορα Ἔθνη, καὶ Πόλεις.

Πόρισμα.

Ἐκ τῶν ῥηθέντων ἄρα, εἶναι φανερόν, ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ συνάψῃ τις, ἢ νὰ ἀφαιρέσῃ, ἢ νὰ πολλαπλασιάσῃ, ἢ τέλος πάντων, νὰ διαιρέσῃ, τὰς Ἑτεροειδεῖς ποσότητας, ἢ ἀριθμούς, ὁποῦ εἶναι ἐκ διαφόρων εἰδῶν νομισμάτων τε καὶ μέτρων συνιστάμενοι, ἀλλὰ πρέπει νὰ ἠξεύρῃ καὶ νὰ προγινώσκῃ, τό, πόσαι μονάδες τῶν μικροτέρων μέτρων τε καὶ σταθμῶν, κάμνουσι μίαν μονάδα τῶν ἐγγὺς αὐτῶν πρὸς ἀριστερὰν μεγαλητέρων εἰδῶν· ἤγουν, πόσα λεπτά, κάμνουσιν ἕνα παρᾶν, καὶ

πό-

πόσοι παράδες, κάμνουσιν ἕνα γρόσι· καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων εἰδῶν ὁμοίως. Διότι κατ' ἄλλον τρόπον, δὲν θέλῃ δυνηθῇ τινὰς νὰ κάμῃ τὴν τοιαύτην σύναψιν τῶν Ἑτεροειδῶν, Ἀριθμῶν.

Πρόβλημα Β'.

§. 24. Διαφόρων ἀριθμῶν, ὁμοειδῶν τε καὶ Ἑτεροειδῶν ὁμοῦ δοθέντων, τούτους προσαθροῖσαι· ἤγουν νὰ εὕρῃς τὸ ἐξ αὐτῶν συμποσούμενον κεφάλαιον.

Λύσις.

Εἰς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου, θέλομεν μεταχειρισθῇ τοὺς ἀκολούθους Κανόνας.

Κανὼν Α'.

§. 25. Πρῶτον, ἂς βαλθῶσιν εἰς τὴν τάξιν τους οἱ ὁμοειδεῖς ἀριθμοί, γεγραμμένοι κατὰ βάθος, ἐκ τῶν ἄνωθεν, ἐπὶ τὰ κάτω, κατὰ τὸν πρῶτον Κανόνα τῆς συνάψεως (§. 16.) ὅρα τὰ ἐκεῖ, καὶ νὰ βαλθῶσι μὲ τέτοιαν τάξιν, ὥστε ὁποῦ, οἱ μεγαλήτεροι ἀριθμοὶ κατὰ τὸ εἶδος, νὰ βαίνωνται εἰς τὰ ἀριστερὰ μέρη τῶν μικροτέρων, κατὰ τὸ εἶδος.

Κανὼν Β'.

§. 26. Δεύτερον, κάμνοντας ἀρχὴν τῆς συνάψεως, ἀπὸ τὸ πλέον μικρότερον εἶδος, κατὰ τὸν τέταρτον Κανόνα τῆς συνάψεως, (§. 19.) λάβε τὸ ἄθροισμα τοῦ μικροτέρου πάντων εἴδους, καὶ φέρετο εἰς τὰς μονάδας τοῦ ἐγγὺς αὐτοῦ, πρὸς ἀριστερὰν, μεγαλητέρου εἴδους· ἐκεῖνο δὲ τὸ μέρος αὐτοῦ ὁποῦ δὲν δύναται νὰ φερθῇ, δηλ. νὰ συστήσῃ μίαν μονάδα τοῦ μεγαλητέρου του, ἂς γραφῇ ὑπὸ τὴν στήλην τοῦ αὐτοῦ εἴδους· αὐτὸ τὸ ἴδιον ἔργον, ἂς γίνεται καὶ εἰς τοὺς λοιποὺς Ἑτεροειδεῖς Ἀριθμούς, ἕως τὸν ἀριστερώτατον, καὶ πάντων μεγαλήτερον, κατὰ τὸ εἶδος.

Διὰ νὰ καταλάβῃς ὅμως πλέον καλήτερα αὐτὰ ὁποῦ ἑρμηνεύσαμεν, ἂς βαλθῶσι καὶ μερικὰ ἐξ αὐτῶν ὑποδείγματα.

Ὑπό-

Ὑπόδειγμα Α'.

Εἰς ἕνα Κατάστιχον εὑρίσκονται κατεστρωμένα τὰ ἔξοδα ἐκεῖνα, ὁποῦ ἔγιναν εἰς τι ἔργον μὲ τοὺς ἀντικρὺ γεγραμμένους Ἑτεροειδεῖς Ἀριθμούς· τῶν ὁποίων ζητεῖται τὸ ὁλικὸν Κεφάλαιον.

Γρόσια,	Παράδες.	Λεπτά.
.135	17	.5
...8	.0	11
1250	15	.4
..45	.8	.9
.700	.0	.7
7099	18	.0
.355	.7	.8
..40	12	10
9634	15	00

Πρῶτον, συναπτόμενα τὰ λεπτά, γίνονται = 54. τὰ ὁποῖα διαιρεθέντα ἐπὶ τὸν 3 ἀριθμόν, (τρία γὰρ λεπτά, ἕνα συνιστῶσι παρᾶν) δίδουσιν εἰς Πηλίκον = 18 παράδας· οἷον $\frac{54}{3}$ = 18. καὶ δὲν μένει κανένα λεπτόν· βάλε λοιπὸν μηδενικὸν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν λεπτῶν, τοὺς δὲ 18 παράδας, σύναψέ τους μὲ τοὺς παράδας ὁποῦ εὑρίσκονται εἰς τὴν ἐγγὺς τῶν παράδων πρὸς ἀριστερὰν στήλην, κατὰ τὸν ἐκτεθέντα δεύτερον Κανόνα· (§. 26.) οἵτινες συναπτόμενοι, γίνονται = 95. Διαιρεθέντες δὲ καὶ αὐτοὶ ἐπὶ τὸν 40 Ἀριθμόν, (τὸ γὰρ γρόσι, ἐκ τεσσαράκοντα συγκροτεῖται παράδων,) κάμνουσι 2 γρόσια, καὶ μένουσι παράδες 15. οἷον $\frac{95}{40}$ = 2 15. ἂς γραφῶσι λοιπὸν οἱ 15 παράδες ὑπὸ τὴν στήλην τῶν παράδων, τὰ δὲ 2 γρόσια, μετατεθέντα εἰς τὴν ἐγγὺς πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλην τῶν γροσίων, καὶ συναπτόμενα μὲ αὐτά, γίνεται καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἴσον = 9634. ὡς ὁρᾶται ἐπὶ τοῦ διαγράμματος.

Πόρισμα.

Αἱ δοθεῖσαι ἄρα ὁμοῦ Ἑτεροειδεῖς ποσότητες, ἢ ἀριθμοί, συναφθεῖσαι, εὕρηται τὸ ὁλικὸν αὐτῶν κεφάλαιον, ἴσον γροσίοις μέν, 9634. παράδων δὲ = 15. καὶ λεπτ. οὐδενί, ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον· γέγονεν ἄρα τὸ ἐπιταχθέν.

Ὑπόδειγμα Β'.

Εἰς μίαν τινὰ οἰκοδομήν, ἐξοδιάσθησαν τὰ ἀντικρὺ σημειωθέντα διάφορα εἴδη τῶν νομισμάτων· πόσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὁλικὸν τούτων Κεφάλαιον;

Φιορίνια,	Γροσίκια,	Σταυρ.	Φένιγα.
.286	48	48	26
.150	15	37	10
..22	.8	.3	56
1752	36	38	29
..50	.4	.9	12
2268	.7	.0	.1

Λύσις.

Πρῶτον, ἂς βαλθῶσι καὶ εἰς αὐτὸ τὸ ὑπόδειγμα, τὰ ὀνομασθέντα διάφορα εἴδη τῶν νομισμάτων, κατὰ τάξιν, κατὰ τὸν πρῶτον Κανόνα. (§. 25.) Δεύτερον ἄρχισε τὴν σύναψιν τοῦ μικροτάτου εἴδους τῶν νομισμάτων, δηλ. τῶν Φενίγκων, κατὰ τὸν δεύτερον Κανόνα· (§. 26.) λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν φενίγκων γίνεται = 133, τὸ ὁποῖον διαιρεθὲν μὲ τὸν 4 ἀριθμόν, (τέσσαρα γὰρ φένιγκα, κάμνουσιν ἕνα σταυροφόρον) δίδουσιν εἰς πηλίκον = 33 σταυροφόρα, καὶ μένει ἕνα· οἷον $\frac{133}{4}$ = $33\frac{1}{4}$· γράψε λοιπὸν τὸ ἐναπολειφθὲν Φένιγκον, ὑπὸ τὴν στήλην τῶν φενίγκων· τὰ δὲ 33 μετάφερέ τα εἰς τὴν στήλην τῶν Σταυροφόρων, κατὰ τὸν δεύτερον Κανόνα· (§. 26.) τὰ ὁποῖα συναπτόμενα, γίνονται = 168. διαίρεσέ τα μὲ τὸν 3 ἀριθμόν, (ἐπειδὴ τρία σταυροφόρα, συνισῶσιν ἕνα γροσίκιον) καὶ δίδουσιν εἰς πηλίκον 56 σταυροφόρα, καὶ δὲν μένει οὐδέν· ἂς γραφῇ λοιπὸν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν σταυροφόρων μηδενικόν, τὰ δὲ 56, ἂς μετατεθῶσιν εἰς τὴν στήλην τῶν γροσικίων, καὶ ἀφοῦ συναφθῶσι καὶ αὐτά, γίνονται = 167. τὰ ὁποῖα, διαιρεθέντα μὲ τὸν 20 ἀριθμόν, (ἐπειδὴ τὸ φιορίνιον, ἰσοδυναμοῖ, μὲ 20 γροσίκια) δίδουσι καὶ αὐτὰ πηλίκον 8 φιορίνια, καὶ μένουσιν 7. ἂς γραφῶσι λοιπὸν τὰ 7 ὑπὸ τὴν στήλην τῶν γροσικίων, τὰ δὲ 8 φιορίνια, μεταφερθέντα εἰς τὴν στήλην τῶν φιορινίων, καὶ συναφθέντα μὲ αὐτά, γίνονται φιορίνια = 2268.

Πόρισμα.

Τὸ ὁλικὸν ἄρα Κεφάλαιον τῶν Νομισμάτων ἐκείνων, ὁποῦ ἐξοδιάσθησαν εἰς τὴν ῥηθεῖσαν οἰκοδομὴν, εἶναι = φιορίνια 2268, γροσίκ. 7, σταυροφόρα 0, καὶ ἐνὶ φοίνικι· ὡς ὁρᾶται ἐν τῷ ἐκτεθέντι διαγράμματι· καὶ τοῦτο ἦν τὸ ζητούμενον· γέγονεν τὸ ἐπιταχθέν.

Ὑπόδειγμα Γ'.

Ἐγένετό τις οἰκοδομὴ ἀπὸ τὰ ἀντικρὺ κατεστρωμένα μέρη τῆς τοιχοποιΐας, δηλ. ἀπὸ ὀργυιὰς, πόδας, δακτύλους· πόσον ἄρα εἶναι τὸ ὁλικὸν αὐτῆς Κεφάλαιον;

Ὀργυιαί,	Πόδ.	Δάκτυλοι.
. 30	25	120
. 17	52	. 87
. 12	15	. 54
. 25	20	. 35
102	. 2	. 08

Λύσις.

Πρῶτον, ἂς συναφθῶσιν οἱ δάκτυλοι, ὁποῦ εἶναι εἰς τὴν δεξιωτάτην στήλην· τὸ δὲ τούτων ἄθροισμα εἶναι = 296. τὸ ὁποῖον διαιρεθὲν ἐπὶ τὸν 16 ἀριθμὸν, (δεκαὲξ γὰρ δάκτυλοι συνιστῶσι ἕνα πόδα) δίδει πηλίκον, πόδας = 18 μένουσι δὲ, καὶ 8 δάκτυλοι, οἷον $\frac{296}{16} = 18\frac{8}{16}$ ἂς γραφῶσι λοιπὸν οἱ ἐναπολειφθέντες 8 δάκτυλοι, ὑπὸ τὴν στήλην τῶν δακτύλων· οἱ δὲ 18 πόδες, μετατεθέντες εἰς τὴν ἐγγὺς, πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλην τῶν ποδῶν, καὶ συναφθέντες μαζὶ μὲ αὐτοὺς, τὸ ἄθροισμα καὶ αὐτῶν εἶναι ἴσον = 110, τὸ ὁποῖον, διαιρεθὲν διὰ τοῦ 6 ἀριθμοῦ, (ἓξ γὰρ πόδες, μίαν συνιστῶσιν ὀργυιὰν) δίδουσι πηλίκον ὀργυιὰς 18, καὶ μένουσι πόδες 2. οἷον, $\frac{110}{6} = 18\frac{2}{6}$· ἂς γραφῶσι λοιπὸν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν ποδῶν οἱ ἐναπολειφθέντες 2 πόδαις, αἱ δὲ 18 ὀργυιαὶ, μετατεθεῖσαι εἰς τὴν στήλην τῶν ὀργυιῶν, ἂς συναφθῶσι μὲ αὐτὰς, καὶ γίνονται ὀργυιαὶ = 102.

Τὸ ὁλικὸν ἄρα ἄθροισμα τῆς τοιχοποιΐας ἐστὶν ἴσον ὀργυιαῖς μὲν 102, ποσὶ δὲ 2, καὶ δακτύλοις 8, ὃ ἦν τὸ ζητούμενον· γέγονεν ἄρα τὸ ἐπιταχθέν.

Ὑπό-

Ὑπόδειγμα Δ'.

Ἔσκαψέ τις εἰς ἕνα μεταλλεῖον, καὶ εὔγαλεν ἀσημόχωμα, τὸ ὁποῖον εἶχε βάρος, τὰ ἀντικρὺ σημειωθέντα μέρη τοῦ σταθμοῦ· πόσον ἄρα εἶναι τὸ ὁλικὸν τούτου ἄθροισμα;

Ὀκάδαις,	Λίτρ.	Δραχμαῖς.
. . 3	. 5	47
. 12	. 2	86
. 18	65	37
120	50	98
184	. 0	68

Λύσις.

Τὸ ἄθροισμα τῶν δραχμῶν ἐστὶν = 268, τὸ ὁποῖον διαιρεθὲν ἐπὶ τὸν 100 ἀριθμὸν, (διότι ἑκατὸν δραχμαὶ, συμπληροῦσι μίαν λίτραν) δίδει πηλίκον λίτρας 2 καὶ μένουσιν 68, δραχμαί· οἷον $\frac{268}{100} = 2\frac{68}{100}$· ἂς γραφῶσι μὲν αἱ 68 δραχμαὶ, ὑπὸ τὴν στήλην αὐτῶν, αἱ δὲ 2 λίτραι, μετατεθεῖσαι εἰς τὴν ἐγγὺς πρὸς ἀριστερὰν στήλην τῶν λιτρῶν, καὶ συναφθεῖσαι μὲ αὐτὰς, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι ἴσον μὲ 124, τὸ ὁποῖον, ἐπὶ τὸν 4 ἀριθμὸν διαιρεθὲν, (τέσσαρες γὰρ λίτραι, μίαν συμπληροῦσιν ὀκᾶν) δίδουσι πηλίκον ὀκάδ. 31, καὶ δὲν μένει τίποτες. Ἂς γραφῇ λοιπὸν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν λιτρῶν μηδενικὸν, αἱ δὲ 31 ὀκάδες, μεταφερθεῖσαι ἐπὶ τὴν ἐγγὺς πρὸς ἀριστερὰν στήλην τῶν ὀκάδων, καὶ μὲ αὐτὰς συναφθεῖσαι, τὸ τούτων ἄθροισμα ἴσον ἐστὶ 184. Τὸ ὁλικὸν ἄρα τοῦ ἀσημοχώματος ἄθροισμα ἐστὶν ὀκάδες 184, καὶ δραχμαὶ 68. ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Ὑπόδειγμα Ε'.

Ἂς δοθῶσιν οἱ ἐν τῷ ἀντικρὺ διαγράμματι καταστρωθέντες Ἑτεροειδεῖς Ἀριθμοί· ἀπὸ τοὺς ὁποίους, οἱ μὲν ἂς φανερώνωσιν ἡμέρας· οἱ δὲ ὥρας, καὶ οἱ ἄλλοι λεπτά· πόσον ἄρα εἶναι τὸ ὁλικὸν αὐτῶν ἄθροισμα.

Ἡμέραι,	Ὧραι,	Λεπτά.
. 8	17	48
13	20	16
21	19	30
. 5	18	38
50	. 4	12

Λύ-

Λύσις.

Πρῶτον, σιωάψον τὰ λεπτὰ, καὶ γίνονται $=$ 132. διαιρεσέτα μὲ τὸν 60. ἀριθμὸν, (διότι ἡ ὥρα εἶναι ἴση μὲ ἑξῆντα λεπτὰ) καὶ δίδουσιν εἰς πηλίκον ὥρας 2, καὶ μένουσι 12 λεπτὰ, οἷον $\frac{132}{60} = 2\frac{12}{60}$· καὶ τὰ μὲν λεπτὰ, ἂς γραφῶσιν ὑπὸ τὴν στήλην αὐτῶν, αἱ δὲ 2 ὧραι, μετατεθεῖσαι εἰς τὴν ἐγγὺς στήλην τῶν ὡρῶν, ἂς συναφθῶσι μὲ αὐτὰς, καὶ θέλει γένῃ τὸ αὐτῶν ἄθροισμα $=$ 76. τοῦτο λοιπὸν ἐπὶ τὸν 24 ἀριθμὸν διαιρεθὲν, (εἰκοσιτέσσαρες γὰρ ὧραι, ἓν ἀπαρτίζουσι νυχθήμερον) δίδει πηλίκον ἡμέρας 3, καὶ μένουσι 4 ὧραι· λοιπὸν ἂς γραφῶσιν αἱ 4 ὧραι, ὑπὸ τὴν στήλην τῶν ὡρῶν, αἱ δὲ 3 ἡμέραι, μετατεθεῖσαι εἰς τὴν στήλην τῶν ἡμερῶν, καὶ συναφθεῖσαι μὲ αὐτὰς, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι $=$ 50.

Τὸ ὁλικὸν ἄρα τοῦ ὑποδείγματος ἄθροισμα εἶναι ἡμέραι μὲν 50, ὧραι δὲ 4, καὶ λεπτὰ, 12.

Πόρισμα.

Τὴν αὐτὴν ἄρα μέθοδον καὶ εἰς ἄλλην ὁποιανδήποτε τοιουτότροπον σύναψιν τῶν Ἑτεροειδῶν Ἀριθμῶν μεταχειριζόμενοι, θέλομεν τὴν κάμῃ εὔκολα, μεταφέροντες πάντοτε τὸ μικρότερον εἶδος εἰς τὸ πρὸς ἀριστερὰν αὐτοῦ μεγαλήτερον, κατὰ τοὺς ἐκτεθέντας Κανόνας.

Καὶ ταῦτα μὲν περὶ προσθέσεως, ἑξῆς δὲ περὶ ἀφαιρέσεως εἴπωμεν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

Περὶ Ἀφαιρέσεως τῶν Ἀκεραίων Ἀριθμῶν.

Ὁρισμός.

§. 27. Ἀφαίρεσίς ἐστιν εὕρεσις διαφορᾶς δύω ἀριθμῶν, κατὰ τὴν ὁποίαν διαφέρει ὁ μεγαλήτερος τοῦ μικροτέρου.

Ὑπό-

Ὑπόθεσις.

Εἰς τὴν ἀφαίρεσιν, ἐκεῖνο μὲν τὸ μέρος ὁποῦ ἀφαιρεῖται, καλεῖται Ἀφαιρετέον, τὸ ὁποῖον εἰς τὴν πρᾶξιν ἂς σημειώνεται μὲ τὸ Α. ἐκεῖνο δὲ, ἀπὸ τὸ ὁποῖον γίνεται ἡ ἀφαίρεσις, ὀνομάζεται Μειωτέον· καὶ ἂς σημειώνεται μὲ τὸ Μ. Ἐκεῖνο δὲ ὁποῦ μένει, λέγεται διαφορά· καὶ σημειώνεται μὲ τὸ Δ.

Πορίσματα.

Ἡ ἀφαίρεσις ἄρα, δὲν εἶναι ἄλλο τι, παρὰ ἕνας ξεπεσμὸς τῶν μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων, καὶ τῶν λοιπῶν ἀνωτέρων ὀνομασιῶν τοῦ Μειωτέου, ἰσάριθμος μὲ τὰς μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας, καὶ τὰς ὑπερτέρας ὀνομασίας τοῦ Ἀφαιρετέου, διὰ νὰ γνωρίσωμεν τὴν διαφορὰν, τὴν ὁποίαν ἔχουσιν ἀναμεταξύ των.

Τὸ Ἀφαιρετέον ἄρα, πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδὲς μὲ τὸ Μειωτέον· διότι κατ᾽ ἄλλον τρόπον, δὲν ἠμπορεῖ νὰ γένῃ ἀφαίρεσις.

Διὰ νὰ γένῃ δὲ ἡ περὶ τούτου διδασκαλία καὶ ἑρμηνεία κατὰ τάξιν, ἂς προταχθῶσι καὶ εἰς αὐτὸ τὸ περὶ ἀφαιρέσεως Κεφάλαιον, μερικοὶ Κανόνες, τοὺς ὁποίους μεταχειριζόμενοι οἱ ἀναγινώσκοντες, θέλουν δυνηθῇ νὰ κάμνωσι τὴν πρᾶξιν εὔκολα, καὶ νὰ μὴ πλανῶνται ὧδε κἀκεῖσε, τὸν καιρὸν τῆς ἐργασίας, ἐπαποροῦντες.

Κανὼν Α΄.

§. 28. Καὶ πρῶτον μὲν, ἂς γραφῇ ὁ μεγαλήτερος ἀριθμὸς, δηλ. ὁ Μειωτέος Μ. ὑποκάτω δὲ αὐτοῦ, ἂς βαλθῇ ὁ μικρότερος, δηλ. ὁ Ἀφαιρετέος Α, ὡς εἴπομεν. (§. 16.) Ἐπειδὴ εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ μεγαλήτερος ἀριθμὸς, ἀπὸ τὸν μικρότερον.

Κανὼν Β΄.

§. 29. Δεύτερον δὲ, ἀφ᾽ οὗ βαλθῶσιν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἰς τὸν τόπον, ὅπου πρέπει, ἂς τραβιχθῇ ὑποκάτωθεν αὐ-

τῶν,

τῶν, μία ὀριζόντειος γραμμὴ, ὑπὸ τὴν ὁποίαν νὰ βάνεται ἡ διαφορὰ Δ, καὶ νὰ μὴ ἀνακατώνεται μὲ τοὺς ἀριθμοὺς ὁποῦ μᾶς ἐδόθησαν, καὶ τῶν ὁποίων μέλλομεν νὰ κάμωμεν τὴν ἀφαίρεσιν· κατὰ τὸν τρίτον Κανόνα. (§. 18.)

Κανὼν Γ'.

§. 30. Τρίτον δὲ, πρέπει νὰ ἀρχίσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν, ἀπὸ τὴν στήλην τῶν μονάδων· ἡ δὲ διαφορὰ ἂς γράφεται ὑπὸ τὴν γραμμὴν ὑπαλλήλως (ἤγουν ἴσια) μὲ τὰς μονάδας τοῦ Μειωτέου, διὰ νὰ μὴ ἀκολουθήσῃ κάμμία σύγχυσις· κατὰ τὸν πρῶτον Κανόνα. (§. 16.) Αὐτὸ τὸ ἴδιον θέλεις κάμῃ καὶ εἰς τὰς δεκάδας, ἑκατοντάδας, χιλιάδας, καὶ τὰς λοιπὰς ὑπερτέρας ὀνομασίας τῶν Ἀριθμητικῶν βαθμῶν, καὶ θέλει γνωρισθῇ ἡ διαφορὰ, κατὰ τὴν ὁποίαν διαφέρει ὁ Μειωτέος τοῦ Ἀφαιρετέου· καθὼς λέγει ὁ ὁρισμὸς τῆς ἀφαιρέσεως. (§. 27.)

Κανὼν Δ'.

§. 31. Τέταρτον δὲ, ὅταν αἱ μονάδες, δεκάδες, ἑκατοντάδες, καὶ αἱ λοιπαὶ ἀνώτεραι ὀνομασίαι τοῦ Ἀφαιρετέου, ἤθελαν εἶναι μικρότεραι ἀπὸ τὰς τοῦ Μειωτέου, ἂς ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τὰς τοῦ Μειωτέου· ἡ δὲ διαφορὰ, ἂς γραφῇ ὑπὸ τὴν γραμμὴν, ἴσια μὲ τὴν στήλην ἐκείνην, ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἔγινεν ἡ ἀφαίρεσις. Ὅταν δὲ ἤθελε τύχῃ εἰς κάμμίαν στήλην τοῦ Ἀφαιρετέου μηδενικὸν, ἐπειδὴ τὸ μηδενικὸν δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τινὰ ἀριθμὸν, ἂς καταβιβασθῇ ὁ ἐπάνωθεν αὐτοῦ εὑρισκόμενος χαρακτὴρ τοῦ Μειωτέου, ἐκεῖνο δὲ ὁποῦ ἤθελεν ἀπομείνῃ ὑπὸ τὴν γραμμὴν, θέλει σοὶ δείξῃ τὴν διαφορὰν, κατὰ τὴν ὁποίαν διαφέρει ὁ Μειωτέος τοῦ Ἀφαιρετέου.

Κανὼν Ε'.

§. 32. Πέμπτον, ὅταν δὲ ὅλοι οἱ χαρακτῆρες τοῦ Ἀφαιρετέου, ἤθελαν εἶναι ἴσοι μὲ τοὺς χαρακτῆρας τοῦ Μειωτέου, ἤγουν ἤθελαν ἔχωσι τὴν αὐτὴν ποσότητα, τότε νὰ βάνωμεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν τόσα μηδενικὰ, ὅσοι εἶναι καὶ οἱ χαρακτῆρες αὐτῶν, καὶ τότε ἡ διαφορὰ, θέλει εἶναι ἴση μὲ τὸ μηδέν· κατὰ τὸ Ζ'. Ἀξίωμα. (§. 8.)

Κα-

Κανὼν Ϛ'.

§. 33. Ἕκτον δὲ καὶ τελευταῖον, ὅταν αἱ μονάδες, δεκάδες, ἑκατοντάδες, καὶ αἱ λοιπαὶ τῶν ὑπερτέρων βαθμῶν ὀνομασίαι τοῦ Ἀφαιρετέου, (ἔξω ἀπὸ τὴν ἀριστερωτάτην στήλην) ἤθελαν εἶναι μεγαλήτεραι, ἀπὸ τὰς τοῦ Μειωτέου, ἐπειδὴ εἰς τὴν τοιαύτην περίστασιν, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν μεγαλήτερον χαρακτῆρα, ἢ ἀριθμὸν, ἀπὸ τὸν μικρότερον, ἂς παρθῇ, μὲ τὸν νοῦν, μία δεκὰς, ἀπὸ τὰς δεκάδας τοῦ Μειωτέου, καὶ ἀφ' οὗ συναφθῇ, κατ' ἐπίνοιαν, μὲ τὰς μονάδας αὐτοῦ, ἢ μὲ τὸ μηδενικὸν (ἀνίσως ἤθελε τύχῃ) ἂς ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ αὐτὰς, αἱ μονάδες τοῦ Ἀφαιρετέου, ἡ δὲ διαφορὰ, ἂς γραφῇ ὑπὸ τὴν στήλην τῶν μονάδων. Ἔπειτα, ἀφ' οὗ προστεθῇ ἡ ἀφαιρεθεῖσα δεκὰς τοῦ Μειωτέου, μὲ τὰς δεκάδας τοῦ Ἀφαιρετέου, ἂς παραβληθῇ, μὲ τὰς δεκάδας τοῦ Μειωτέου· καὶ τὰ λοιπὰ ἂς γίνονται κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον, ὁποῦ εἴπομεν εἰς τὰς μονάδας· καὶ ἀφ' οὗ τελειώσῃ ἡ πρᾶξις, θέλει γένῃ φανερὰ ἡ διαφορὰ, κατὰ τὴν ὁποίαν διαφέρει ὁ Μειωτέος, τοῦ Ἀφαιρετέου.

Ἀλλὰ διὰ νὰ καταλάβωμεν καλλιώτερα τοὺς κανόνας ὁποῦ εἴπομεν, ἂς τοὺς βάλωμεν καὶ εἰς πρᾶξιν, διὰ μέσου τῶν ἐφεξῆς ἐκτεθησομένων ὑποδειγμάτων.

Πρόβλημα Γ'.

§. 34. Ὅταν μᾶς δοθῶσι δύω ἀριθμοὶ ὁμογενεῖς, νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν μικρότερον, ἀπὸ τὸν μεγαλήτερον· ἤγουν, νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

Ὑποσημείωσις.

Κατὰ τρεῖς τρόπους ἐνδέχεται νὰ εἶναι οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ, εἰς αὐτὴν τὴν πρᾶξιν τῆς Ἀφαιρέσεως· διότι, αἱ μονάδες, δεκάδες, ἑκατοντάδες, καὶ οἱ λοιποὶ βαθμοὶ τοῦ Ἀφαιρετέου Α, ἢ εἶναι μικρότεραι ἀπὸ τὰς τοῦ Μειωτέου Μ, ἢ ἴσαι, ἢ μεγαλήτεραι, πλὴν τοῦ ἀριστερωτάτου χαρακτῆρος, καθὼς θέλει γένῃ φανερὸν εἰς τὰ ὑποδείγματα.

Ὑπό-

Ὑπόδειγμα Α'.

Μ	= 4635
Α	= 2513
Δ	= 2122
Κ	= 4635

Ἂς δοθῶσιν οἱ Μ, καὶ Α, ἀριθμοί· ὁ μὲν Μ, ὡς Μειωτέος, ὁ δὲ Α, ὡς Ἀφαιρετέος. Πρῶτον, ἂς βαλθῶσι λοιπὸν, ὁ ἕνας, ὑποκάτω τοῦ ἄλλου· δηλ. ὁ μικρότερος Ἀριθμὸς, ὑπὸ τὸν μεγαλήτερον· κατὰ τὸν πρῶτον Κανόνα. (§. 28.) Δεύτερον, ἂς τραβιχθῇ μία ὁριζόντειος γραμμὴ ὑποκάτω αὐτῶν· κατὰ τὸν δεύτερον Κανόνα. (§. 29.) Κάμνωντας δὲ ἀρχὴν τῆς Ἀφαιρέσεως ἀπὸ τὴν δεξιωτέρην στήλην τῶν μονάδων, κατὰ τὸν τρίτον Κανόνα, (§. 30.) λέγε· τρεῖς αἱ μονάδες τοῦ Ἀφαιρετέου Α, ἕως τὰς 5, τοῦ Μειωτέου Μ, ἐναπομένουσι δύω 2. Λοιπὸν γράψε ὑπὸ τὴν γραμμὴν ἴσια μὲ τὰς μονάδας τοῦ Μειωτέου, τὰς 2, ὡς εἴπομεν εἰς τὸν τρίτον Κανόνα. Αὐτὸ τὸ ἴδιον ἂς γένῃ καὶ εἰς τὰς λοιπὰς στήλας τῶν δεκάδων, ἑκατοντάδων, καὶ τῶν λοιπῶν. Καὶ ἡ Δ ποσότης θέλει ἦσθαι ἡ διαφορὰ, κατὰ τὴν ὁποίαν διαφέρει ὁ Μειωτέος Μ, τοῦ Ἀφαιρετέου Α, καθὼς θέλει ὁ ὁρισμὸς τῆς Ἀφαιρέσεως, (27) καὶ τὸ ὁποῖον ἦτον τὸ ζητούμενον.

Βάσανος, ἡ δοκιμὴ τῆς Ἀφαιρέσεως.

§. 35. Θέλοντας δὲ νὰ γνωρίσῃς, ἀνίσως καὶ ἔγινεν ὀρθῶς ἡ πρᾶξις, ποίησον οὕτω· σύναψον τοὺς χαρακτῆρας τοῦ Ἀφαιρετέου Α, μὲ τοὺς χαρακτῆρας τῆς εὑρεθείσης διαφορᾶς Δ, καὶ ἐκεῖνο ὁποῦ ἤθελε γένῃ ἀπὸ αὐτὰς, τραβίζοντας μίαν γραμμὴν ὑποκάτω τῆς διαφορᾶς Δ, γράψετο ὑπ᾽ αὐτὴν, ἀντικρὺ τοῦ Κ, καὶ ἀνίσως ἡ πρᾶξις ἔγινεν ὀρθῶς καὶ χωρὶς λάθος, θέλει εἶναι βέβαια ἡ ἀντικρὺ τοῦ Κ ποσότης, ἴση μὲ τὴν ποσότητα τοῦ Μειωτέου Μ, καθὼς φαίνεται εἰς τὸ διάγραμμα. Ἀλλαμὴν ἐστὶν ἴση, ἄρα ὀρθῶς ἡ πρᾶξις ἐγένετο. Αὐτὸ τὸ ἴδιον ἂς γίνεται, καὶ εἰς κάθε ἄλλην ἀφαίρεσιν, διὰ νὰ γνωρίζῃς, ἂν εἶναι σωστή.

Ὑπό-

Ὑπόδειγμα Β'.

Μ	= 4635
Α	= 4635
Δ	= 0000

Ἂς δοθῶσι πάλιν οἱ ἀντικρὺ τοῦ Μ, καὶ Α ἀριθμοί· ὁ μὲν, ὡς Μειωτέος, ὁ δὲ, ὡς Ἀφαιρετέος· καὶ ζητηθήτω ἡ μεταξὺ αὐτῶν διαφορὰ Δ. λοιπὸν, ἀφ᾽ οὗ ἀφαιρεθῶσιν αἱ μονάδες, δεκάδες, ἑκατοντάδες, καὶ χιλιάδες τοῦ Ἀφαιρετέου Α, ἀπὸ τὰς τοῦ Μειωτέου Μ, ἐπειδὴ δὲν ἔμεινε τίποτες, ἐβάλθησαν μηδενικὰ, κατὰ τὸν Ε'. Κανόνα τῆς Ἀφαιρέσεως. (§. 32.) ἡ Δ ἄρα διαφορὰ ἴση ἐστὶ μὲ τὸ μηδέν, κατὰ τὸ Ζ'. Ἀξίωμα. (§. 8.)

Ὑπόδειγμα Γ'.

Μ	= 82354
Α	= 69785
Δ	= 12569
Κ	= 82354

Ἂς δοθῶσι τρίτον, οἱ ἀντικρὺ τοῦ Μ, καὶ Α ἀριθμοὶ, ὡς ἄνωθεν. Καὶ ἐπειδὴ ὁ 5, τοῦ Ἀφαιρετέου Α, εἶναι μεγαλήτερος ἀπὸ τὸν 4, τοῦ Μειωτέου Μ, ἂς παρθῇ μία μονὰς ἀπὸ τοῦ ἐγγὺς πρὸς ἀριστερὰν, τοῦ Μειωτέου χαρακτῆρος 5, κατὰ τὸν ϛ'. Κανόνα· (§. 33.) ἥτις, μὲ τὸ νὰ εἶναι εἰς τὸν τόπον τῶν δεκάδων, σημαίνει δέκα, καὶ μὲ τὸν 4 ὁποῦ εἶναι εἰς τὸν τόπον τῶν μονάδων, γίνονται 14. ἂς ἀφαιρεθῇ λοιπὸν ὁ τοῦ Ἀφαιρετέου Α χαρακτὴρ 5, ἀπὸ τὸν 14, καὶ μένουσιν 9. ἂς γραφῇ οὖν ὁ 9 ὑπὸ τὴν γραμμὴν ὑπαλλήλως, ἤγουν ἴσια, μὲ τὴν στήλην τῶν μονάδων, ἡ δὲ φυλαττομένη δεκὰς, προσεθεῖσα εἰς τὰς 8 δεκάδας τοῦ Ἀφαιρετέου Α, γίνονται 9. καὶ ἐπειδὴ πάλιν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ 9 ἀπὸ τὸν πέντε 5 τοῦ Μειωτέου, ἂς παρθῇ πάλιν μονὰς ἀπὸ τοῦ ἐγγὺς χαρακτῆρος τοῦ Μειωτέου 3, ὡς ἄνωθεν, καὶ γίνονται 15. ἀπὸ τὸν ὁποῖον ἀφαιρεθεὶς πάλιν ὁ 9, μένουσιν 6. γράψον δὲ καὶ αὐτὸν ὑπὸ τὴν γραμμὴν ὑπαλλήλως μὲ τὴν στήλην τῶν δεκάδων, ἡ δὲ φυλαττομένη δεκὰς, ἑκατοντάδων οὖσα σημαντικὴ, ἂς συναφθῇ μὲ τὸν 7 χαρακτῆρα τῶν ἑκατοντάδων τοῦ Ἀφαιρετέου Α, καὶ γίνονται 8. Καὶ ἐπειδὴ πάλιν τὰ 8, δὲν ἠμποροῦν νὰ Ἀφαιρεθοῦν ἀπὸ τὸν τρίτον χαρακτῆρα 3 τοῦ Μειωτέου, ἂς παρθῇ πάλιν, κατ᾽ ἐπίνοιαν, μονὰς ἀπὸ τὸν 2 χαρακτῆρα, τῆς τετάρτης στήλης τῶν χιλιάδων παραστατικὸν, τοῦ Μειωτέου, καὶ γί-

γίνονται 13. Ἀφαιρέσας δὲ τὰ 8, ἀπὸ τὰ 13, μένουσι 5. θὲς καὶ αὐτὰ ὑπὸ τὴν γραμμὴν, ὑπαλλήλως μὲ τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων· ἡ δὲ φυλαττομένη δεκὰς προστεθεῖσα μὲ τὰ 9 τῆς τετάρτης στήλης τοῦ Ἀφαιρετέου Α, γίνονται 10. πάλιν ὁ δέκα μὴ δυνάμενος νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸν 2 τοῦ Μειωτέου, ἂς ληφθῇ πάλιν μονὰς ἀπὸ τὸν πέμπτον χαρακτῆρα τοῦ Μειωτέου 8, καὶ γίνονται 12. Ἀφαίρεσον δὲ τὸν 10, ἀπὸ τὸν 12, καὶ μένουσι 2. γράψε καὶ αὐτὸν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν χιλιάδων, τὴν δὲ φυλαττομένην δεκάδα πρόσθεσέ την εἰς τὸν 6 χαρακτῆρα τοῦ Ἀφαιρετέου Α, καὶ γίνονται 7. Ἀφαιρέσας δὲ τὰ 7 ἀπὸ τὰ 8, μένει μονάς· γράψον δὴ καὶ αὐτὴν ὑπὸ τὴν γραμμὴν ὑπαλλήλως μὲ τὴν στήλην τῶν δεκακισχιλίων· καὶ οὕτως ἐτελείωσεν ἡ πρᾶξις καὶ τοῦ ζ'του ὑποδείγματος. Λέγω δὲ, ὅτι ἡ Δ, εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν δοθέντων Ἀριθμῶν, καὶ εἶναι ἴση μὲ τὸν 12569 ἀριθμὸν, ἥτις ἐζητεῖτο, καὶ εἶναι σωστὴ ἡ πρᾶξις, καθὼς φαίνεται εἰς τὸ διάγραμμα· ἔγινεν ἄρα τὸ προσταττόμενον.

Ὑποσημείωσις.

Εἰς τὰ ὑποδείγματα ὁποῦ ἐβάλαμεν, καὶ ἐξηγήσαμεν πῶς γίνεται ἡ πρᾶξις τῆς ἀφαιρέσεως, διὰ νὰ κάμνωμεν τὴν πρᾶξιν εὐκολώτερα, τὸν μὲν μεγαλήτερον Ἀριθμὸν, τὸν ὀνομάσαμεν Μειωτέον, καὶ τὸν ἐσημειώσαμεν μὲ τὸ Μ. τὸν δὲ μικρότερον, Ἀφαιρετέον, καὶ τὸν ἐσημειώσαμεν μὲ τὸ Α. τὴν δὲ διαφορὰν, μὲ τὸ Δ, καὶ τὸ Κεφάλαιον τοῦ Ἀφαιρετέου Α, καὶ τῆς διαφορᾶς Δ, τὸ ἐσημειώσαμεν μὲ τὸ Κ. ὥστε ὁποῦ, διὰ νὰ γένῃ ἡ δοκιμὴ, πρέπει νὰ εἶναι τὸ Ἀφαιρετέον Α, ὁμοῦ μὲ τὴν διαφορὰν Δ, ἴσον μὲ τὸν Μειωτέον Μ. οἷον $Α + Δ = Μ$. κατὰ τὸ ΙΑ'. ἀξίωμα. (§. 12.) Ἀλλὰ διὰ νὰ μὴ γίνεται σύγχυσις βαίνωντας δύω φοραῖς τὸ Μ, δηλ. εἰς τὸν Μειωτέον καὶ εἰς τὸ γινόμενον ἐκ τοῦ Ἀφαιρετέου Α, καὶ τῆς διαφορᾶς Δ, ἐλάβαμεν τὸ ἰσοδύναμον τοῦ Μ, Κ. ὅθεν ἔσται $Α + Δ = Κ$.

Ἂς προστεθῶσι δὲ τούτοις, καὶ τὰ ἐφεξῆς ὑποδείγματα, χάριν τῶν πρωτοπείρων.

Μ = 8476	Μ = 39478	Μ = 80236	Μ = 80000
Α = 5798	Α = 10540	Α = 79857	Α = 68574
Δ = 2678	Δ = 28938	Δ = ..379	Δ = 11426
Κ = 8476	Κ = 39478	Κ = 80236	Κ = 80000
Μ = 60503	Μ = 73604	Μ = 73500	Μ = 35823
Α = 59876	Α = 60850	Α = 64653	Α = 20000
Δ = ..627	Δ = 12754	Δ = .8847	Δ = 15823
Κ = 60503	Κ = 73604	Κ = 73500	Κ = 35823

Αὐτὰ, καὶ ἄλλα παραδείγματα, ἂς προβάλλῃ ὁ διδάσκαλος, εἰς τοὺς μαθητάς του, προστάζωντας αὐτοὺς νὰ κάμνωσι τὴν πρᾶξιν αὐτῶν, ὄχι μόνον ἐκ συνηθείας, ἀλλὰ νὰ λέγωσι καὶ τὸν λόγον κάθε πράξεως ὁποῦ ἤθελαν κάμωσι, προσαρμόζοντες αὐτὰ, εἰς τοὺς περὶ αὐτῆς προεκτεθέντας μοι Κανόνας· καὶ οὕτω θέλουσι γυμνασθῇ τὴν πρᾶξιν μετὰ λόγου καὶ θεωρίας τῆς πρὸς ἀλλήλους σχέσεως αὐτῶν τῶν Ἀριθμῶν.

Καὶ περὶ μὲν τῆς ἀφαιρέσεως τῶν ὁμοειδῶν τε καὶ ἀκεραίων Ἀριθμῶν, καὶ τῆς δοκιμῆς αὐτῶν, στοχάζομαι, ὅτι εἶναι ἱκανὰ τὰ ῥηθέντα μοι περὶ αὐτῆς· τώρα δὲ, ἂς εἰπῶμεν μερικὰ καὶ περὶ τῆς Ἀφαιρέσεως τῶν Ἑτεροειδῶν ὀνομαθέντων, τὴν αὐτὴν πάντοτε τηροῦντες τάξιν τῆς διδασκαλίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

Περὶ Ἀφαιρέσεως τῶν Ἑτεροειδῶν Ἀριθμῶν.

Ὁρισμός.

§. 36. Ἀφαίρεσις τῶν Ἑτεροειδῶν Ἀριθμῶν ἐστὶν, εὕρεσις διαφορᾶς δύω Ἀριθμῶν, ἐκ διαφόρων εἰδῶν ποσότητος συγκειμένων, κατὰ τὴν ὁποίαν διαφέρει ὁ μεγαλήτερος Ἀριθμὸς τοῦ μικροτέρου, διὰ νὰ γνωρισθῇ ἡ μεταξὺ αὐτῶν ἐνοῦσα διαφορά.

Πρόβλημα Δ΄.

§. 37. Ὅταν ἤθελε μᾶς δοθῶσι δύω Ἀριθμοί, ὁποῦ νὰ εἶναι καθ᾽ ἕνας ἀπὸ αὐτοὺς ἀπὸ διάφορα εἴδη ποσότητος συγκείμενος, νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν αὐτῶν, κατὰ τὴν ὁποίαν διαφέρει ὁ μεγαλήτερος τοῦ μικροτέρου.

Κανὼν Α΄.

§. 38. Πρῶτον μὲν, ἂς βαλθῶσιν οἱ δοθέντες Ἑτεροειδεῖς Ἀριθμοὶ κατ᾽ εἶδος, ὁ ἕνας ὑποκάτω τοῦ ἄλλου, καθὼς εἴπομεν εἰς τὸν πρῶτον Κανόνα, τῆς συνάψεως αὐτῶν. (§. 35.)

Κανὼν Β΄.

§. 39. Δεύτερον δὲ, ἂς τραβιχθῇ μία ὁριζόντειος γραμμὴ ὑπ᾽ αὐτοὺς, κατὰ τὴν συνήθειαν, καὶ κάμνωντας ἀρχὴν τῆς ἀφαιρέσεως ἀπὸ τοῦ μικροτέρου εἴδους, ὁποῦ εὑρίσκεται εἰς τὸ δεξιώτατον μέρος τῶν δοθέντων, στοχάσου εἰς αὐτὸ τὸ μέρος τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ Ἀφαιρετέου, καὶ ἂν εἶναι ὀλιγώτεροι, ἀφαίρει τὸ αὐτῶν ἄθροισμα, ἀπὸ τοὺς τοῦ Μειωτέου, ἡ δὲ διαφορὰ, ἂς γραφῇ ὑπὸ τὴν γραμμὴν, κατὰ τὸν τρίτον Κανόνα τῆς Ἀφαιρέσεως. (§. 30.)

Κανὼν Γ΄.

§. 40. Τρίτον, ἀνίσως δὲ, αἱ μονάδες, ἢ δεκάδες κτλ. τοῦ Ἀφαιρετέου Α, ἤθελαν εἶναι μεγαλήτεραι ἀπὸ τὰς τοῦ Μειωτέου Μ, εἰς αὐτὸ τὸ μικρότερον εἶδος, ἀπὸ τὰ ἄλλα, νὰ λαμβάνῃς κατ᾽ ἐπίνοιαν, (ἤγουν μὲ τὸν νοῦν σου) μίαν μονάδα, ἀπὸ τὸ ἐγγὺς αὐτοῦ, πρὸς ἀριστερὰν, μεγαλήτερον εἶδος· τὴν ὁποίαν ἀφ᾽ οὗ τὴν ἀναλύσῃς εἰς τὰ μέρη τοῦ μικροτέρου εἴδους, νὰ τὴν μεταφέρῃς εἰς τὴν μονάδα, τοῦ μεγαλητέρου εἴδους, κατὰ τὸν δεύτερον Κανόνα τῆς συνάψεως αὐτῶν. (§. 26.) Ἐκεῖνο δὲ τὸ μέρος ὁποῦ δὲν εἶναι ἀρκετὸν νὰ συστήσῃ μίαν μονάδα τοῦ μεγαλητέρου εἴδους, ἂς γραφῇ ὑπὸ τὴν γραμμὴν τοῦ αὐτοῦ εἴδους. Τοῦτο αὐτὸ ἂς γίνεται καὶ εἰς τὰ λοιπὰ πρὸς ἀριστερὰν αὐτῶν εἴδη, καὶ θέλει γνωσθῇ ἡ μεταξὺ τῶν δοθέντων Ἑτεροειδῶν Ἀρι-

Ἀριθμῶν ζητουμένη διαφορὰ, κατὰ τὴν ὁποίαν διαφέρει ὁ μεγαλήτερος τῶν δοθέντων Ἀριθμὸς, τοῦ μικροτέρου, κατὰ τὸ τέταρτον Πρόβλημα. (§. 37.)

Πρέπει ὅμως νὰ εἶναι γνωστὸν, τὸ, πόσαι μονάδες τοῦ μικροτέρου εἴδους, συνισῶσι μίαν μονάδα τοῦ μεγαλητέρου, ἀλλέως δὲν ἠμπορῇ νὰ γένῃ ἡ ἀφαίρεσις αὐτῶν.

Πρὸς δὲ κατάληψιν τῶν εἰρημένων, ἂς βαλθῶσι καὶ μερικὰ ὑποδείγματα.

Ὑπόδειγμα Α΄.

Ἕνας ἄνθρωπος εἶχε νὰ λάβῃ ἀπὸ ἄλλον τινὰ, γρόσια 458, καὶ παράδες 37. ἔλαβε δὲ γρόσια 365, καὶ παράδες 18. πόσα ἄρα ἔχει νὰ λάβῃ ἔτι ἀπὸ αὐτόν;

Λύσις.

	Γρόσια.	Παρ.
Μ =	458	37
Α =	365	18
Δ =	. 93	19
Κ =	458	37

Εἰς λύσιν τούτου, ἂς βαλθῶσι τὰ ὀνομασθέντα μέρη εἰς τὴν τάξιν των, καὶ πρῶτον ἂς βαλθῇ ὁ μεγαλήτερος ἀριθμὸς, δηλ. ὁ Μειωτέος Μ, ὑπ᾽ αὐτὸν δὲ, ὁ Ἀφαιρετέος Α, κατὰ τὸν Α΄. Κανόνα. (§. 38.) Δεύτερον, ἂς τραβιχθῇ μία γραμμὴ ὑπ᾽ αὐτοὺς, κατὰ τὸν Β΄. Κανόνα, (§. 39.) καθὼς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ διάγραμμα· καὶ ἐπειδὴ εἰς αὐτὸ τὸ ὑπόδειγμα εἶναι ὀλιγώτεροι οἱ παράδες τοῦ Ἀφαιρετέου Α, ἀπὸ τοὺς τοῦ Μειωτέου Μ, καὶ δὲν ἠμποροῦν νὰ ἀφαιρεθῶσιν οἱ 8, ἀπὸ τοὺς 7, λάβε μίαν δεκάδα ἀπὸ τὴν δευτέραν στήλην τῆς δεκάδος τῶν παράδων κατ᾽ ἐπίνοιαν, καθὼς εἴπομεν εἰς τὸν Ϛ΄. Κανόνα τῆς Ἀφαιρέσεως, (§. 33.) καὶ γίνονται 17. ἀφαιρῶντας λοιπὸν τὸν 8, τοῦ ἀφαιρετέου Α, ἀπὸ τὸν 17 τοῦ μειωτέου Μ, ἐναπομένουσιν 9· βάλετα ὑπὸ τὴν γραμμὴν τῶν παρ. τὴν δὲ φυλαττομένην δεκάδα, σύναψον μὲ τὴν δεκάδα τοῦ Ἀφαιρετέου Α, καὶ γίνονται 2, ἀφαιρῶντας λοιπὸν τὰς 2 δεκάδας, ἀπὸ τὰς 3 τοῦ Μειωτέου Μ, μένει μία· γράψε λοιπὸν καὶ αὐτὴν ὑπὸ τὴν γραμμὴν ὑπαλλήλως μὲ τὰς δεκάδας τῶν παρ. μεταβαίνωντας δὲ καὶ εἰς τὸ πρὸς ἀριστερὰν εἶδος τῶν γροσίων, λέγε, 5 αἱ μονάδες τοῦ Ἀφαιρετέου ἕως τὰς 8 τοῦ Μειωτέου, περισσεύουσι 3, ἂς γραφῶσι καὶ αὐταὶ ὑπὸ τὴν γραμμὴν, μίω, ὑπαλλήλως μὲ τὰς μονάδας τῶν γροσίων· μεταβὰς δὲ, καὶ εἰς τὴν δευτέραν αὐτῶν στήλην τῶν δεκάδων, ἐπειδὴ ὁ Ἀφαιρετέος 6, εἶναι μεγαλήτερος ἀπὸ τὸν Μειωτέον 5, λάβε μίαν δεκάδα ἀπὸ τὸν πρὸς ἀριστερὰν αὐτῷ 4, καὶ γίνονται 15. ἀφαίρεσον ἔν τὸν 6, τοῦ 15, καὶ μένει 9. γράψον αὐτὸν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν δεκάδων, ἡ δὲ φυλαττομένη δεκὰς, ἀφ' ἧς συναφθῇ μὲ τὰς 3 ἑκατοντάδας τοῦ Ἀφαιρετέου, γίνεται ὁ 4, ὅς τις ἀφαιρεθεὶς ἀπὸ τὸν 4 τοῦ Μειωτέου, οὐδὲν ἀπολείπεται· θὲς ἔν ὑπ' αὐτοὺς μηδενικόν.

Πόρισμα.

Ἡ διαφορὰ ἄρα τῶν δοθέντων Ἑτεροειδῶν Ἀριθμῶν εἶναι γρόσια 93, καὶ παράδες 19. τὸ ὁποῖον ἐζητεῖτο, καὶ τόσον χρεωστᾷ ἔτι νὰ τοῦ δώσῃ, ὡς ἐν τῷ διαγράμματι φαίνεται.

Ὑποσημείωσις.

Πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν, ὅτι τὸ μὲν γρόσιον, εἶναι ἴσον μὲ 40 παράδες, ὁ δὲ παρᾶς μὲ 3 λεπτά· ὅθεν ὅταν τὸ καλέσῃ ἡ χρεία διὰ νὰ ἀναλύσωμεν τοὺς παράδας εἰς λεπτὰ, νὰ τοὺς πολλαπλασιάζωμεν μὲ τὸ 3. ὅταν δὲ θέλωμεν νὰ κάμωμεν τὰ λεπτὰ παράδας, ἐκ τοῦ ἐναντίου νὰ τὰ διαιρῶμεν μὲ τὸ 3. καὶ πάλιν, ὅταν θέλωμεν νὰ ἀναλύσωμεν τὰ γρόσια εἰς παράδες, νὰ τὰ πολλαπλασιάζωμεν μὲ 40. ὅταν δὲ θέλωμεν νὰ κάμωμεν τοὺς παράδας γρόσια, ἐκ τοῦ ἐναντίου νὰ τοὺς διαιρῶμεν μὲ 40.

Ὑπόδειγμα Β'.

Ἄλλος δέ τις ἄνθρωπος ἐδάνεισεν εἰς ἕνα του φίλον, φιορίνια μὲν 260, γροσίκια δὲ 10, σταυροφόρον 1, καὶ φένιγκα 2, ἔλαβε δὲ ἀπὸ αὐτὸν, φιορίνια 135, γροσίκια 18, σταυροφόρα 2, καὶ φένιγκα 3. πόσα ἄρα χρεωστᾷ ἔτι νὰ τοῦ δώσῃ;

Λύ-

Λύσις.

	Φιορίν.	Γροσίκ.	Σταυροφ.	Φένιγ.
M	= 260	10	1	2
A	= 135	18	2	3
Δ	= 124	11	1	3
K	= 260	10	1	2

Πρῶτον, ἂς βαλθῇ ὁ Μειωτέος κατ' εἶδος ἑξῆς· ὁμοίως ἂς βαλθῇ καὶ ὁ Ἀφαιρετέος ὑποκάτω αὐτῶν, καθὼς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ διάγραμμα, κατὰ τὸν πρῶτον Κανόνα. (§. 38.)

Δεύτερον, ἐπειδὴ καὶ τὰ μέρη τοῦ Ἀφαιρετέου Α, εἶναι μεγαλήτερα ἀπὸ τὰ τοῦ Μειωτέου Μ, (πλὴν τοῦ ἀριστερωτέρου) δανείσου μίαν μονάδα ἀπὸ τὸ εἶδος τῶν σταυροφόρων, (κατὰ τὸν ζ'ον Κανόνα, §. 40.) καὶ ἀνάλυσαί την εἰς τὸ εἶδος τῶν φενίγκων, (4 γὰρ φένιγ. κάμνουσιν ἓν σταυροφόρον) ἔπειτα ἀφαίρεσον τὸν Ἀφαιρετέον, ἀπὸ τὸν Μειωτέον· οἷον $4+2=6-3,=3$. βάλε λοιπὸν τὰ 2 ὑπὸ τὴν στήλην τῶν φενίγκων, τὴν δὲ μονάδα τῶν σταυροφόρων ὁποῦ ἔγινεν ἀπὸ τὰ φένιγ. πρόσθεσαί την εἰς τὰ σταυροφόρα τοῦ Ἀφαιρετέου, καὶ γίνονται 3. οἷον, $2+1=3$, καὶ ἐπειδὴ δὲν ἠμποροῦν νὰ ἀφαιρεθοῦν τὰ 3, ἀπὸ τὸ 1, δανείσου μίαν μονάδα ἀπὸ τὰ γροσίκια, καὶ ἀναλύωντάς την εἰς σταυροφόρα, πρόσθεσαί την εἰς τὰ σταυροφόρα τοῦ Μειωτέου, καὶ ἔπειτα ἀφαίρεσαι τὸν Ἀφαιρετέον τοῦ Μειωτέου, (3 σταυροφ. κάμνουσιν ἓν γροσίκιον) οἷον, $3+1=4-3=1$, καὶ γίνεται 1 γροσίκ. μένει 1, γράψε λοιπὸν τὸ ἓν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν σταυροφόρων, τὴν δὲ γενομένην μονάδα, πρόσθεσαί την εἰς τὰ γροσίκια τοῦ Ἀφαιρετέου, καὶ γίνονται 19. καὶ ἐπειδὴ πάλιν δὲν δύνανται νὰ ἀφαιρεθοῦσι τὰ 19, ἀπὸ τὰ 10, λάβε μίαν μονάδα ἀπὸ τὰ φιορίνια, καὶ ἀναλύωντάς την εἰς γροσίκια, κάμε τὴν Ἀφαίρεσιν. (ἓν δὲ φιορίνιον, κάμνει 20 γρόσ.) οἷον, $20+10=30-19=11$. γίνεται οὖν ἓν φιορίνιον, καὶ μένουσιν 11. βάλε λοιπὸν καὶ αὐτὰ ὑπὸ τὴν στήλην τῶν γροσικίων· ἡ δὲ γενομένη μονὰς τῶν φιορινίων, ἂς προστεθῇ εἰς τὴν μονάδα τοῦ Ἀφαιρετέου, καὶ γίνονται 136· οἷον $135+1=136$· ἂς ἀφαιρεθοῦσι λοιπὸν, ἀπὸ τὰ τοῦ Μειωτέου, καὶ μένουσιν 124· οἷον $260-136=124$. χρεωστᾷ ἄρα νὰ τοῦ δώσῃ ἔτι, φιορίνια μὲν 124, γροσίκια δὲ ἕνδεκα, σταυροφόρον ἕν, καὶ 3 φένιγκα, τὸ ὁποῖον ἦτον τὸ ζητούμενον, ἔγινεν ἄρα τὸ προσαχθέν.

Ση-

Σημείωσις.

Πρέπει νὰ ἠξεύρῃς, ὅτι 4, φεύγκα, κάμνουσιν ἓν σταυροφόρον· 3 δὲ σταυροφόρα, ἓν γροσίκιον· καὶ 20 γροσίκια, ἓν φιορίνιον.

Ὅταν λοιπὸν μέλλῃς νὰ ἀναλύσῃς τὰ σταυροφόρα εἰς φεύγκα, νὰ τὰ πολλαπλασιάζῃς μὲ τὸ 3. καὶ ἐκ τοῦ ἐναντίου, ὅταν θέλῃς νὰ κάμῃς τὰ φεύγ. σταυρ. νὰ τὰ διαιρῇς πάλιν μὲ τὸ 3. Ὅταν δὲ θέλῃς νὰ ἀναλύσῃς τὰ γροσίκια εἰς σταυροφ. νὰ τὰ πολλαπλασιάσῃς μὲ 3. καὶ ἐκ τοῦ ἐναντίου, ὅταν βούλεσαι νὰ κάμῃς τὰ σταυροφ. γροσίκια, νὰ τὰ διαιρῇς πάλιν μὲ 3. Ὅταν δὲ, τέλος πάντων, θέλῃς νὰ ἀναλύσῃς τὰ φιορίνια εἰς γροσίκια, νὰ τὰ πολλαπλασιάζῃς μὲ τὸ 20. καὶ ἐκ τοῦ ἐναντίου, θέλωντας νὰ κάμῃς τὰ γροσίκια φιορίνια, νὰ τὰ διαιρῇς πάλιν μὲ τὸ 20.

Ὑπόδειγμα Γ΄.

Ἀγάπιος Ἰωαννίδης ῥήγας, ὁ ἐκ πόλεως Πάργης, ἐγεννήθη εἰς τοὺς 1754, εἰς τὰς 8 τοῦ Μαρτίου, ἔγραψε δὲ τὴν Ἀριθμητικὴν ταύτην εἰς τὸ Φωξάνιον τῆς Μολδοβλαχίας, εἰς τοὺς 1815, Ἰουλίου 25. Πόσων ἄρα χρόνων, μηνῶν, καὶ ἡμερῶν ἦτον ὅταν ἔγραφεν αὐτήν;

Λύσις.

	Χρόνοι.	Μῆνες.	Ἡμέρ.
Μ =	1815	5	25
Α =	1754	0	8
Δ =	61	5	17
Κ =	1815	5	25

Πρῶτον, βάλε τὸν μεγαλήτερον ἀριθμὸν, δηλαδὴ τὸν 1815, ἀντὶ τοῦ Μειωτέου. Δεύτερον ὑποκάτωθεν αὐτοῦ τὸν 1754, ἀντὶ τοῦ Ἀφαιρετέου. Τρίτον, μέτρησον τοὺς μῆνας ἀπὸ τὸν Μάρτιον, ἕως τὸν Ἰούλιον, καὶ γίνονται 5. βάλε λοιπὸν 5 εἰς τὴν στήλην τῶν μηνῶν τοῦ Μειωτέου, βάλε δὲ καὶ τὰς 25 ἡμέρας εἰς τὴν στήλην τῶν ἡμερῶν τοῦ αὐτοῦ Μειωτέου. Καὶ ἐπειδὴ εἰς τὸν Ἀφαιρετέον δὲν ἔχομεν μῆνας, βάλε ὑπὸ τὸν 5 μηδενικὸν (0) εἰς δὲ τὴν στήλην τῶν ἡμερῶν, τίθει τὰς 8 ἡμέρας· καὶ ἐπειδὴ εἰς αὐ-

τὸ τὸ ὑπόδειγμα, ὅλα τὰ μέρη τοῦ Ἀφαιρετέου, εἶναι μικρότερα, ἀπὸ τὰ τοῦ Μειωτέου, ἂς γένῃ ἀφαίρεσις, καὶ ἐναπολείπονται χρόνοι μὲν 61, μῆνες δὲ 5, καὶ ἡμέραι 17, καὶ αὐτὴ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν δοθέντων Ἑτεροειδῶν Ἀριθμῶν, καθὼς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ διάγραμμα· ἄρα ἦτον ὁ ῥηθεὶς Ἀγάπιος ἑξήκοντα καὶ ἑνὸς χρόνων· πέντε μηνῶν, καὶ ἡμερῶν δεκαεπτὰ ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Ὑπόδειγμα Δ΄.

Ἀπὸ ἕνα τόπον ὁποῦ περιεῖχεν, ὀργυιὰς μὲν τετραγωνικὰς 1530, πόδας δὲ τοιούτους 18, ἀγόρασέ τις ἀπὸ αὐτὸν τὸν τόπον, ὀργυιὰς 645, πόδας 25, πόση ἄρα εἶναι ἡ ἐναπομείνασα τοῦ ῥηθέντος τόπου περιοχή;

Λύσις.

Ἐπειδὴ καὶ εἰς αὐτὸ τὸ ὑπόδειγμα, εἶναι περισσότεροι οἱ 25 πόδες τοῦ Ἀφαιρετέου, ἀπὸ τοὺς 18 τοῦ Μειωτέου, ἀφ' οὗ τοὺς καταστρώσῃς εἰς τὸν διορισμένον τους τόπον, καθὼς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ διάγραμμα, λάβε μίαν μονάδα ἀπὸ τὰς ὀργυιὰς τοῦ Μειωτέου, καὶ σύναψέ την μὲ τοὺς 18 πόδας, καὶ γίνονται 54 πόδες· (ἡ δὲ τετραγωνικὴ ὀργυιὰ περιέχει 36 τετραγωνικοὺς πόδας· οἷον 36 + 18 = 54. ἀφαίρεσον λοιπὸν τοὺς 25 τετραγωνικοὺς πόδας τοῦ Ἀφαιρετέου, ἀπὸ τοὺς 54, καὶ μένουσιν 29. οἷον 54 — 25 = 29. γράψε λοιπὸν ὑπὸ τὴν γραμμὴν τῶν ποδῶν 29, τὴν δὲ μονάδα ὁποῦ ἔλαβες ἀπὸ τὸν Μειωτέον, προσθέσας εἰς τὰς μονάδας τοῦ Ἀφαιρετέου, γίνονται 6. οἷον, 5 + 1 = 6. καὶ ἐπειδὴ τὰ 6 τοῦ Ἀφαιρετέου, εἶναι περισσότερα ἀπὸ τὸ μηδενικὸν τοῦ Μειωτέου, λάβε πάλιν μίαν μονάδα ἀπὸ τὴν δευτέραν δεκαδικὴν στήλην τοῦ Μειωτέου 3, καὶ συνάψας αὐτὴν μὲ τὸ μηδενικὸν, (0) γίνονται 10, οἷον 1 + 0 = 10, ἀφαίρεσε λοιπὸν ἀπὸ τὸν 10, τὰ 6, καὶ μένουσι τέσσαρα· οἷον 10 — 6 = 4, γράψε οὖν τὸν 4 ὑπὸ τὴν στήλην τῶν μονάδων τῶν ὀργυιῶν. Προσθέσας δὲ τὴν μονάδα ὁποῦ ἔλαβες ἀπὸ τὸν Μειωτέον, εἰς τὸν 4 τοῦ Ἀφαιρετέου, γίνονται 5·

	Ὀργυιαὶ, τετραγ.	Πόδ. τετραγ.
Μ =	1530	18
Α =	645	25
Δ =	884	29
Κ =	1530	18

5· οἷον $4 + 1 = 5$. Καὶ ἐπειδὴ πάλιν τὰ πέντε 5, δὲν ἠμποροῦν νὰ ἀφαιρεθοῦν ἀπὸ τὰ 3 τοῦ Μειωτέου, λάβε ἔτι μίαν μονάδα ἀπὸ τὰ 5, τρίτην στήλην τοῦ Μειωτέου, καὶ συνάψας αὐτὴν μὲ τὰ 3, γίνονται 13. οἷον $10 + 3 = 13$. ἀφαίρεσε δὲ τὰ 5, ἀπὸ τὰ 13, καὶ μένουσιν 8. οἷον $13 - 5 = 8$. γράψε καὶ αὐτὰ ὑπὸ τὴν στήλην τῶν δεκάδων. Πρόσθεσε πάλιν τὴν μονάδα ὅπου ἔλαβες ἀπὸ τὸν 5 τοῦ Μειωτέου, εἰς τὸν 6 τοῦ Ἀφαιρετέου, καὶ γίνονται 7. οἷον $6 + 1 = 7$. καὶ ἐπειδὴ εἶναι καὶ αὐτὸς μεγαλήτερος ἀπὸ τὸν 5 τοῦ Μειωτέου, λάβε τὴν μονάδα τοῦ Μειωτέου, καὶ γίνονται 15. οἷον $10 + 5 = 15$. Ἀφαιρέσας δὲ καὶ τὸν 7, τοῦ 15, μένουσιν 8. οἷον $15 - 7 = 8$. γράψε τὸν 8 ὑπὸ τὴν τρίτην στήλην, καὶ θέλει εἶναι ἡ διαφορὰ 884 ὀργιὰς καὶ πόδες 29.

Πορίσματα.

Ἐπειδὴ τὸ ὅλον εἶναι ἴσον μὲ ὅλα τὰ μέρη ὁμοῦ λαμβανόμενα, εἰς τὴν Ἀφαίρεσιν ἄρα, ὁ ἀφαιρετέος, ὁμοῦ μὲ τὴν Διαφορὰν, πρέπει νὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν Μειωτέον.

Τὸ τέλειον ἄρα τῆς Ἀφαιρέσεως, διὰ τῆς Προσθέσεως τοῦ Ἀφαιρετέου, καὶ τῆς Διαφορᾶς βασανιζόμενον, γνωρίζεται, ἂν ἔγινεν ὀρθῶς ἡ πρᾶξις, ἢ δὲν ἔγινε καλῶς.

Καὶ περὶ μὲν τῆς Ἀφαιρέσεως, καὶ τῶν Ἑτεροειδῶν ἀριθμῶν, εἶναι ἀρκετὰ τὰ ἐκτεθέντα ὑποδείγματα, καὶ οἱ περὶ αὐτῶν τρεῖς Κανόνες. Τώρα δὲ ἂς εἰπῶμεν καὶ περὶ πολλαπλασιασμοῦ, ὅσον ἐνδέχεται συνοπτικῶς τε ἅμα καὶ ἐντελῶς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'.

Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ.

Ὁρισμός.

§. 41. Ὁ Πολλαπλασιασμὸς εἶναι λῆψις, ἢ εὕρεσις ἀγνώστου ἀριθμοῦ, τοσάκις, ὅσαις φοραῖς εὑρίσκεται ἡ μονὰς εἰς ἄλλον ἀριθμόν.

Ὑπό-

Ὑπόθεσις.

Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν, ἐκεῖνος ὁ ἀριθμὸς, ὅπου λαμβάνεται πολλαῖς φοραῖς, (καθὼς εἰς τοὺς συνθέτους ἀριθμοὺς) καλεῖται πολλαπλασιαστέος, ὁ δὲ ἄλλος ὅπου φανερώνει πόσαις φοραῖς λαμβάνεται, ὀνομάζεται πολλαπλασιαστής. Ἐκεῖνο δὲ ὅπου γίνεται ἀπὸ αὐτοὺς, γινόμενον λέγεται.

Πόρισμα Α'.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς ἄρα ἐστὶ, τὸ νὰ λάβῃς τόσαις φοραῖς τὸν πολλαπλασιαστέον, ὅσαις φοραῖς εὑρίσκεται ἡ μονὰς εἰς τὸν πολλαπλασιαστὴν, διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον ἀπὸ αὐτούς.

Πόρισμα Β'.

Εἰς τὸ γινόμενον ἄρα, τόσαις φοραῖς ἐμπεριέχεται ὁ πολλαπλασιαστέος, ὅσαις φοραῖς ἡ μονὰς εὑρίσκεται εἰς τὸν πολλαπλασιαστήν. Ὥστε ἀναλογικῶς, ἡ μονὰς ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ πρὸς τὸν πολλαπλασιαστέον, καθὼς ὁ πολλαπλασιαστὴς εἰς τὸ γινόμενον.

Σχόλιον.

Οἱ ἀριθμοὶ ὅπου μέλλουν νὰ πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ εἶναι καὶ οἱ δύω ἁπλοῖ, ἢ εἶναι σύνθετοι, ἢ ὁ μὲν εἷς εἶναι ἁπλοῦς, δηλ. ἀπὸ ἁπλᾶς μόνον μονάδας, ὁ δὲ ἄλλος σύνθετος, δηλ. σύγκειται ἀπὸ μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας, καὶ τὰς λοιπὰς ἀνωτέρας ὀνομασίας. Ἀνίσως λοιπὸν, καὶ ὁ ἕνας, καὶ ὁ ἄλλος ἤθελαν ἦσθαι ἀπὸ ἁπλᾶς μόνον μονάδας, δὲν ἀκολουθεῖ κἀμμία δυσκολία εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν. Ἐπειδὴ πολλαπλασιαζόμενος ὁ μεγαλήτερος χαρακτὴρ, μὲ τὸν μικρότερον, ἐκεῖνο ὅπου γίνεται ἀπὸ αὐτοὺς, εἶναι ὁ ζητούμενος ἄγνωστος ἡμῖν ἀριθμός. Εἰδὲ ἤθελαν εἶναι, ὁ μὲν ἕνας ἁπλοῦς, ὁ δὲ ἄλλος σύνθετος, ἂς φυλάττωνται οἱ ἐφεξῆς Κανόνες.

Κα-

Κανὼν Α'.

§. 42. Πρῶτον μὲν, ἂς γραφῶσιν οἱ ἀριθμοὶ ὁποῦ μέλλουσι νὰ πολλαπλασιασθῶσιν, ὑπαλλήλως. Ἤγουν ὁ ἕνας ὑποκάτω τοῦ ἄλλου, κατὰ τὸν πρῶτον Κανόνα τῆς συνάψεως. (§. 16.) Ἀφ' οὗ δὲ καταστρωθῶσιν εἰς τὸν ἁρμόδιον τόπον, ἂς τραβιχθῇ ὑποκάτω αὐτῶν, μία ὁριζόντειος γραμμὴ, ὑπὸ τὴν ὁποίαν νὰ γράφεται τὸ ὑπ' αὐτῶν γινόμενον, διὰ νὰ μὴ ἀνακατώνεται μὲ τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς, κατὰ τὸν τρίτον Κανόνα. (§. 18.)

Κανὼν Β'.

§. 43. Δεύτερον, ἀνίσως δὲ καὶ οἱ δύω Ἀριθμοὶ ὁποῦ μέλλουσι νὰ πολλαπλασιασθῶσιν, ἤθελαν εἶναι συντεθειμένοι ἀπὸ ἁπλᾶς μονάδας, ἂς πολλαπλασιάσῃ ὁ ἕνας τὸν ἄλλον, πάντοτε ὅμως ὁ μικρότερος χαρακτὴρ νὰ πολλασιάζῃ τὸν μεγαλήτερον, διὰ τὸ εὐκολώτερον. Τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν γινόμενον, ἂς γράφεται ὑπὸ τὴν γραμμὴν, ἴσια μὲ τὰς μονάδας ἐκείνου ὁποῦ πολλαπλασιάζει.

Κανὼν Γ'.

§. 44. Τρίτον, εἰδὲ ὁ μὲν πολλαπλασιαστέος ἤθελεν εἶναι σύνθετος, ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς ἁπλοῦς, ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ πρῶτος χαρακτὴρ τοῦ πολλαπλασιαστέου, ὁποῦ εὑρίσκεται εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων, μὲ τὸν χαρακτῆρα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἢ τὸ ἀνάπαλιν, οὐδὲν γὰρ διαφέρει (πάντοτε ὅμως ὁ μικρότερος νὰ πολλαπλασιάζῃ τὸν μεγαλήτερον, ὡς ἀνωτέρω εἴρηται.) Τὸ δὲ γενόμενον, ἀνίσως ἤθελεν εἶναι μικρότερον ἀπὸ κἀνένα δεκαδικὸν ἀριθμὸν (ἰδὲ τὸν τέταρτον Κανόνα τῆς συνάψεως, §. 19.) ἂς γράφεται ὑπὸ τὴν γραμμὴν, ἴσια μὲ τὰς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.

Κανὼν Δ'.

§. 45. Τέταρτον, ἀνίσως δὲ τὸ γενόμενον ἤθελεν εἶναι ἴσον μὲ τινὰ δεκαδικὸν ἀριθμὸν, ἂς γραφῇ μηδενικὸν, κατὰ τὸν

τὸν

τὸν ς'. Κανόνα τῆς συνάψεως (§. 21.) Εἰδὲ περισσεύῃ, τὸ μὲν περισσότερον τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, ἂς γραφῇ ὑπὸ τὴν γραμμήν· ὁ δὲ δεκαδικὸς ἀριθμὸς, ἂς φυλάττεται, διὰ νὰ προστεθῇ εἰς ἐκεῖνο ὁποῦ ἤθελε γένῃ ἀπὸ τὸν δεύτερον χαρακτῆρα τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν, (κατὰ τὸν πέμπτον Κανόνα. §. 20.) Ὁπόταν δὲ εἰς τὴν δεκαδικὴν στήλην τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἤθελεν εἶναι μηδενικὸν, τότε ἀνίσως καὶ φυλάττεται κἀνένας δεκαδικὸς ἀριθμὸς, ὁποῦ ἔγινεν ἀπὸ τὸν πρὸ αὐτοῦ χαρακτῆρα, ἂς γράφεται εἰς τὴν δεκαδικὴν στήλην ἴσια μὲ τὸ μηδενικὸν τοῦ πολλαπλασιαστέου. Ἀφ' οὗ δὲ τελειώσῃ ἡ πρᾶξις, ὁ ἀριθμὸς ὁποῦ ἤθελεν εὑρεθῇ ὑπὸ τὴν γραμμὴν, θέλει σοι δείξῃ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν. (§. 41.)

Κανὼν Ε'.

§. 46. Πέμπτον, εἰδὲ καὶ οἱ δύω δοθέντες ἀριθμοὶ, ἤθελαν εἶναι συνθεμένοι ἀπὸ δύω χαρακτῆρας, ἢ ὁ μὲν ἕνας ἀπὸ αὐτοὺς ἤθελεν εἶναι ἀπὸ περισσοτέρους, ὁ δὲ ἄλλος ἀπὸ δύω μόνον, ἢ καὶ οἱ δύω ἤθελαν εἶναι ἀπὸ περισσοτέρους χαρακτῆρας συντεθειμένοι, πρῶτον μὲν, ἂς πολλαπλασιασθῶσιν ὅλοι οἱ χαρακτῆρες τοῦ πολλαπλασιαστέου (ἀρχίζοντας ἀπὸ τὴν στήλην τῶν μονάδων) μὲ τὸν δεξιώτατον χαρακτῆρα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ· δεύτερον δὲ, ἐπὶ τὸν δεύτερον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Οἱ δὲ ἀριθμοὶ ὁποῦ γίνονται ἀπὸ τοὺς χαρακτῆρας τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἐπὶ τοὺς τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, νὰ γράφωνται ὁ ἕνας ὑποκάτω τοῦ ἄλλου, μὲ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ὁποῦ ἐκεῖνο ὁποῦ γίνεται, κατὰ πρώτην φορὰν, ἀπὸ τὸν πρῶτον χαρακτῆρα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, μὲ ὅλους τοὺς χαρακτῆρας τοῦ πολλαπλασιαστέου, νὰ βάνεται ἴσια μὲ τὸν χαρακτῆρα ὁποῦ πολλαπλασιάζει· ἐκεῖνο δὲ ὁποῦ γίνεται ἀπὸ τὸν δεύτερον νὰ βάνεται ἴσια μὲ τὸν δεύτερον· καὶ καθεξῆς ὁμοίως. Δηλ. κάθε ἕνας ἀριθμὸς, ὁποῦ προκύπτει ἀπὸ τοὺς ἀκολούθους πρὸς ἀριστερὰν χαρακτῆρας, νὰ ξαβίζεται πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἕνα βαθμόν.

Κανὼν ς'.

§. 47. Ἕκτον, ἀφ' οὗ δὲ ἡ πρᾶξις λάβῃ τέλος, ἂς ξαβιχθῇ πάλιν μία ὁριζόντειος γραμμὴ, ὑπὸ τὰ γινόμενα μέρη,

καὶ

καὶ ἂς συναφθῶσιν ὅλα τὰ μέρη ὁποῦ ἔγιναν ὑπ' αὐτὴν ἴσια. Δηλ. αἱ μονάδες ὑπὸ τὰς μονάδας, αἱ δεκάδες, ὑπὸ τὰς δεκάδας, αἱ ἑκατοντάδες ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, κατὰ τὸν τρίτον Κανόνα τῆς συνάψεως. (§. 18.) Τὸ δὲ ἄθροισμα τούτων, θέλει εἶναι βέβαια, ἐκεῖνο ὁποῦ γίνεται ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστέον, καθὼς ἀπαιτεῖ ὁ ὁρισμὸς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. (§. 41.)

Κανὼν Ζ΄.

§. 48. Ἕβδομον, ἐὰν δὲ ἤθελε τύχῃ νὰ εἶναι μηδενικὰ εἰς τὸν πολλαπλασιαστέον, ἢ εἰς τὸν πολλαπλασιαστὴν, τότε νὰ πολλαπλασιάζωμεν, πρῶτον μόνον τοὺς χαρακτῆρας ὁποῦ εὑρίσκονται εἰς αὐτούς· ἔπειτα, ὅσα μηδενικὰ εὑρίσκονται εἰς τὸν ἕνα ἀπὸ αὐτοὺς, ἢ καὶ εἰς τοὺς δύω, ἂς γράφωνται εἰς τὰ δεξιὰ μέρη ἐκείνου τοῦ ἀριθμοῦ ὁποῦ ἔγινεν ἀπὸ τοὺς χαρακτῆράς των· καὶ θέλει γενῇ ἐκεῖνο τὸ ἴδιον, ὁποῦ ἤθελε γενῇ, ἀνίσως καὶ ἐπολλαπλασιάζωμεν, τὰ μηδενικὰ μὲ ὅλους τοὺς χαρακτῆρας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ. Ἐπειδὴ τὸ μηδενικὸν, μὲ ὁποῖον χαρακτῆρα πολλαπλασιασθῇ, παράγει μηδενικόν. Ὁ δὲ τοιοῦτος πολλαπλασιασμὸς, ὀνομάζεται ἐπιτετμημένος, ἤγουν σύντομος. Αὐτὸ ὅμως, εἶναι ἀδύνατον νὰ γενῇ εἰς ἐκείνους τοὺς ἀριθμοὺς ὁποῦ εὑρίσκονται ἀναμεταξὺ τῶν χαρακτήρων μηδενικά. Ἐπειδὴ τότε, καὶ εἰς αὐτὰς τὰς πράξεις, πρέπει νὰ γίνεται ὁ πολλαπλασιασμὸς εἰς τὴν ἀράδαν, μὲ ὅλους τοὺς χαρακτῆρας, κατὰ τὸν Ε΄. Κανόνα. (§. 46.)

Ὑπόθεσις.

§. 49. Ἐκεῖνος ὁ ἀριθμὸς ὁποῦ μέλλει νὰ πολλαπλασιασθῇ, (τὸν ὁποῖον ὀνομάζω Α,) δὲν εἶναι ἄλλο τι, παρὰ συμπλήρωμα μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων, καὶ τῶν λοιπῶν μεγαλητέρων ὀνομασιῶν, (ἂν ἤθελαν τύχωσι) δηλωτικὸν, ἀπὸ τοὺς ὁποίους ἀριθμοὺς εἶναι συντεθειμένος. Ὁμοίως καὶ ἐκεῖνος ὁποῦ μέλλει νὰ τὸν πολλαπλασιάσῃ, δηλ. ὁ πολλαπλασιαστὴς (τὸν ὁποῖον καλῶ Β.) Τὸ δὲ γινόμενον ἀπὸ αὐτοὺς, δηλ. τὸν Ἄλφα, καὶ Βῆτα, ἂς ὀνομάζεται Γ, διότι, ἀφ' οὗ τελειώσῃ ἡ πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, μὲ τοὺς τρόπους ἐκείνους, ὁποῦ ἑρμηνεύσαμεν εἰς τοὺς περὶ τούτου Κανόνας, πρῶτον λαμβάνον-

ται

ται αἱ μονάδες, ἔπειτα αἱ δεκάδες, μετὰ ταῦτα δὲ αἱ ἑκατοντάδες, καὶ αἱ λοιπαὶ ὀνομασίαι, τοῦ ὀνομασθέντος ἀριθμοῦ Α, ὅσαις φοραῖς εὑρίσκεται ἡ μονὰς εἰς τὸν πολλαπλασιαστὴν Β, καθὼς ὁ ὁρισμὸς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀπαιτεῖ. (§. 41.)

Πρόβλημα Ε΄.

§. 50. Νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν Α, διὰ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ Β, τοῦτο δὲ εἶναι νὰ εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον ἀριθμὸν ὁποῦ γίνεται ἀπὸ αὐτοὺς, δηλ. τὸν Γ.

Ὑπόδειγμα Α΄.

Περὶ ἁπλοῦ Πολλαπλασιασμοῦ.

Α =	25
Β =	.3
Γ =	75

Ἂς δοθῇ ὁ Α ἀριθμὸς, τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ Πολλαπλασιάσωμεν διὰ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ Β. Πρῶτον, λοιπὸν, ἂς βαλθῶσιν ὁ ἕνας ὑποκάτω τοῦ ἄλλου, δηλ. πρῶτον ὁ Πολλαπλασιαστέος Α, ὑποκάτω δὲ αὐτοῦ, ὁ Πολλαπλασιαστὴς Β. Δεύτερον, ἂς τραβιχθῇ ὑπ' αὐτοὺς μία ὁριζόντειος γραμμὴ, κατὰ τὸν πρῶτον Κανόνα, (§. 16. καὶ 42.) καὶ ἂς Πολλαπλασιασθῇ ὁ τοῦ Β 3 χαρακτὴρ ἐπὶ τὸν 5, τοῦ Α. Καὶ ἐπειδὴ γίνεται ὁ 15, αἱ μὲν 5 μονάδες, ἂς γραφῶσιν ὑπὸ τὴν γραμμὴν ὑποκάτω τοῦ 3, κατὰ τὸν δεύτερον Κανόνα. (§. 44.) Πάλιν ὁ αὐτὸς 3, πολλαπλασιάσας καὶ τὸν δεύτερον, πρὸς τὰ ἀριστερὰ, χαρακτῆρα τοῦ Α, δηλ. τὸν 2, παράγει τὸν 6, εἰς τὸν ὁποῖον ἀφ' οὗ προστεθῇ ἡ φυλαττομένη δεκὰς, γίνεται ὁ 7. οἷον $6 + 1 = 7$. ἂς γραφῇ λοιπὸν καὶ αὐτὸς ὑπὸ τὴν γραμμὴν ἴσια μὲ τὸν 2, δεύτερον χαρακτῆρα τοῦ Α, ὁ δὲ γενόμενος Γ, εἶναι ἐκεῖνος ὁποῦ παράγεται ἀπὸ τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς Α, καὶ Β.

Ὑπό-

Ὑπόδειγμα Β'.

Ἐπὶ τοῦ Συνθέτου Πολλαπλασιασμοῦ.

Α =	.43
Β =	.21
	.43
	86.
Γ =	903

Ἄς δοθῶσι δεύτερον, οἱ Α, καὶ Β, ἀριθμοί, καὶ ἄς ἔχῃ ὁ καθ' εἷς, ἀπὸ δύω χαρακτῆρας, διὰ νὰ πολλαπλασιασθῶσιν, ἀναμεταξύ των, ἵνα εὕρῃ ἐξ αὐτῶν ὁ ἄγνωστος Γ, ὅς τις ζητεῖται, (§. 48.) ἄς γραφῇ ὁ ἕνας ὑποκάτω τοῦ ἄλλου, κατὰ τὴν συνήθειαν· καὶ ἄς ῥαβιχθῇ ὑπ' αὐτοὺς, μία ὁριζόντειος γραμμή. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μονὰς ὁποῦ εὑρίσκεται εἰς τὸν Β, πολλαπλασιάζουσα τὸν 3, καὶ τὸν 4, οἵ τινες εὑρίσκονται εἰς τὸν πολλαπλασιαστέον Α, παράγει τὸν αὐτὸν 3, καὶ 4, ἄς γραφῇ ὁ μὲν 3, ὑπὸ τὴν γραμμὴν ἴσια μὲ τὴν μονάδα τοῦ Β, ὁποῦ τὸν ἐπολλαπλασίασε, κατὰ τὸν δεύτερον Κανόνα. (§. 43.) Ὁ δὲ 4, μὲ τὸ νὰ εἶναι δεκάδων δηλωτικὸς, ἄς γραφῇ ὑπαλλήλως εἰς τὰς δεκάδας, πρὸς ἀριστερὰν τοῦ γραφέντος 3. Ὁ δὲ δεύτερος χαρακτὴρ τοῦ Β, 2, πολλαπλασιάσας τὸν πρῶτον τοῦ Α χαρακτῆρα 3, παράγει τὸν 6. ἄς γραφῇ δὲ καὶ αὐτὸς ὑπὸ τὰς δεκάδας, ἴσια μὲ τὸν 2, Ἀριθμὸν, ὁποῦ τὸν ἐπολλαπλασίασε, κατὰ τὸν πέμπτον Κανόνα. (§. 46.) (Ἐπειδὴ καὶ ὁ 3, εἴκοσι φοραῖς λαμβανόμενος, κάμνει τὸν 60, μὲ τὸν ὁποῖον ἔχει ἀναλογίαν ὁ 6, ὡς δεκάδων σημαντικός.) Ἀφ' οὗ δὲ πολλαπλασιάσῃ καὶ τὸν δεύτερον χαρακτῆρα 4, παράγει τὸν 8. ἄς γραφῇ λοιπὸν καὶ αὐτὸς, πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ 6, κατὰ τὸν αὐτὸν Κανόνα. Καὶ ἀφ' οὗ πάλιν ῥαβίξῃς μίαν γραμμὴν ὑπ' αὐτοὺς, ἄς συναφθῶσιν ἐκεῖνα τὰ μέρη ὁποῦ ἔγιναν ἀπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον Α, ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν Β, κατὰ τὸν ϛ'. Κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, (§. 47.) καὶ ἄς γραφῶσιν ὑπὸ τὴν γραμμήν· τὸ δὲ γενόμενον Γ, εἶναι, βέβαια ἐκεῖνο ὁποῦ ἔγινεν ἀπὸ τοὺς δοθέντας Ἀριθμοὺς Α, καὶ Β, τὸ ὁποῖον ἐζητεῖτο, ὡς εἰς τὸ διάγραμμα φαίνεται.

Ὑπόδειγμα Γ'.

Πόσων ἄρα ὀργυιῶν τετραγωνικῶν εἶναι, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τόπου ἐκείνου, τοῦ ὁποίου, τὸ μὲν μῆκος ἐστὶν ἴσον μὲ τὸν Α ἀριθμόν· τὸ δὲ πλάτος ἴσον μὲ τὸν Β;

Πρῶ-

Α =	4580
Β =	3645
	22900'
	18320.
	27480..
	13740...
Γ =	16,694,100

Πρῶτον, ἄς γραφῶσιν ὑπαλλήλως, κατὰ τὸν Α'. Κανόνα. (§. 42.) Δεύτερον, ἄς πολλαπλασιασθῶσιν ὅλοι εἰς τὴν ἀράδαν, οἱ χαρακτῆρες τοῦ πολλαπλασιαστέου Α, ἐπὶ τὸν πρῶτον ἐν δεξιοῖς χαρακτῆρα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ Β, κατὰ τὸν Ε'. Κανόνα. (§. 46.) καὶ ἐκ μὲν τοῦ πρώτου 5, ἐπὶ πάντας τοὺς χαρακτῆρας τοῦ Α, γίνεται ὁ 22,900. ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου 4, ὁ 18,320. ἐκ δὲ τοῦ τρίτου χαρακτῆρος τοῦ Β 6, ὁ 2,748,000. καὶ τέλος ὁ ἐκ τοῦ τετάρτου 3, ἐπὶ πάντας τοὺς χαρακτῆρας τοῦ Α 13,740,000. λοιπὸν ἄς συναφθῶσιν αὐτὰ τὰ τέσσαρα γινόμενα μέρη, κατὰ τὸν ϛ'. Κανόνα, (§. 47.) καὶ γίνεται ὁ Γ ἀριθμὸς, ὅς τις ἐζητεῖτο. Ἄρα τὸ ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου Α, ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν Β γινόμενον τοῦ ῥηθέντος τόπου ἐμβαδὸν, εἶναι τὸ Γ, ἴσον μὲ 16,694,100. ἔγινε ἄρα τὸ προσταχθέν.

Ὑπόδειγμα Δ'.

Ἐπὶ τοῦ Ἐπιτετμημένου Πολλαπλασιασμοῦ.

Ἀγόρασέ τις 268 ὀκάδ. ὀψώνιον, πρὸς 40 παρ. τὴν ὀκᾶν· πόσους ἄρα παρ. χρεωστᾶ νὰ πληρώσῃ δι' αὐτό;

Λύσις.

Α =	..268
Β =	...40
Γ =	10720

Ἄς βαλθῶσιν οἱ ὀνομασθέντες Ἀριθμοί, ὁ ἕνας ὑποκάτω τοῦ ἄλλου, καὶ ἄς τραβιχθῇ ὁριζόντειος γραμμὴ, κατὰ τὴν συνήθειαν· καὶ ἀφήνοντας τὸ μηδενικὸν τοῦ Β πολλαπλασιαστοῦ, πολλαπλασίασε μὲ τὸν 4, ὅλους τοὺς χαρακτῆρας τοῦ πολλαπλασιαστέου Α, λέγοντας· 4. 8 = 32. γράψε οὖν τὸ 2 ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστὴν 4, αἱ δὲ τρεῖς δεκάδες, ἄς φυλάττωνται, διὰ νὰ προστεθῶσιν εἰς ἐκεῖνο ὁποῦ γένῃ ἀπὸ τὸν αὐτὸν 4, ἐπὶ τὸν δεύτερον τοῦ Α χαρακτῆρα 6. πολλαπλασιασθεὶς δὲ, γίνεται ὁ 24, προστιθέντας δὲ καὶ τὰς τρεῖς δεκάδας ὁποῦ φυλάττονται, γίνεται ὁ 27· οἷον 4. 6 = 24 + 3 = 27. γρά-

ψε

ψε δὴ καὶ τὸν 7, πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ 2. αἱ δὲ 2 δεκάδες, ἃς φυλάττωνται διὰ νὰ προστεθῶσι μὲ ἐκεῖνο ὁποῦ γένῃ ἀπὸ τὸν αὐτὸν 4 ἐπὶ τὸν 2, τοῦ Α χαρακτῆρα· ὅστις πολλαπλασιαζόμενος, παράγει τὸν 8, προσθέτοντας δὲ καὶ τὰς 2 φυλαττομένας δεκάδας, γίνεται ὁ 10. οἷον 2. 4 = 8 + 2 = 10. γράψε καὶ αὐτὸν εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ 7, βάνοντας δὲ εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων καὶ τὸ μηδενικὸν, ὁποῦ ἄφησες, γίνεται ὁ Γ ἀριθμὸς, καθὼς εἰς τὸ διάγραμμα φαίνεται, καὶ πόσους παράδες ἔχει νὰ πληρώσῃ.

Ὑπόδειγμα Ε'.

Πόσας ἄρα τετραγωνικὰς ὀργυιὰς περιέχει, ἕνας Κάμπος, τοῦ ὁποίου, τὸ μὲν μῆκος εἶναι 6700, ὀργυιαῖς, τὸ δὲ πλάτος, 480;

Λύσις.

Α =	6 700
Β =	. 480
	536 . .
	2 68 . . .
Γ =	3,216,000

Ἃς βαλθῶσιν ὁ ἕνας ἀριθμὸς ὑποκάτω τοῦ ἄλλου, ὡς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ διάγραμμα· καὶ ἀφήνοντας τὰ μηδενικά, ἃς πολλαπλασιασθῇ ὁ 7, ἐπὶ τὸν 8, καὶ γίνεται ὁ 56. γράψε δὲ τὸν 6, ὑπὸ τὴν γραμμὴν, ἴσια μὲ τὸν πολλαπλασιασθέντα 7. αἱ δὲ πέντε δεκάδες, ἃς φυλάττωνται, διὰ νὰ προστεθῶσιν εἰς τὸ γινόμενον ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ 8, ἐπὶ τὸν 6· καὶ γίνονται 48· εἰς τὸν ὁποῖον, ἃς προστεθῶσιν καὶ αἱ 5 φυλαττόμεναι δεκάδες, καὶ θέλῃ γένῃ ὁ 53. οἷον 6, 8 = 48 + 5 = 53. γράψε καὶ αὐτὸν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ 6. πολλαπλασίασον πάλιν τὸν 7, ἐπὶ τὸν 4, καὶ γίνονται 28. οἷον 4, 7 = 28. γράψε λοιπὸν τὸν 8, ὑπὸ τὸν 3, αἱ δὲ 2 δεκάδες, ἃς φυλάττωνται διὰ νὰ προστεθῶσιν εἰς τὸ γινόμενον ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ 4, ἐπὶ τὸν 6, καὶ γίνονται 24, προστεθεῖσαι δὲ καὶ αἱ φυλαττόμεναι 2 δεκάδες, γίνεται ὁ 26. οἷον 4, 6 = 24 + 2 = 26. τράβιξε πάλιν μίαν εὐθεῖαν ὑποκάτω τῶν δύω γινομένων, καὶ ἀφ' οὗ συνάψῃς αὐτὰ, γίνεται ὁ 3216, εἰς τὸν ὁποῖον προσθέτοντας καὶ τὰ τρία μηδενικὰ ὁποῦ ἀφέθησαν εἰς τὴν πρᾶξιν, συμποσοῦνται ὁ 3,216,000. Ἀριθμὸς Γ, καὶ τόσας ὀργυιὰς τετραγωνικὰς περιέχει ὁ ῥηθεὶς κάμπος· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον αὐτοῦ ἐμβαδόν.

Ὑπό-

Ὑπόδειγμα Ϛ'.

Ἕνας τόπος εἶναι, κατὰ μὲν τὸ μάκρος, στάδια 300, κατὰ δὲ τὸ πλάτος 100. πόσα ἄρα στάδια εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

Λύσις.

Διὰ νὰ πολλαπλασιασθῶσι τὰ 300, μὲ τὰ 100, εἶναι ἀρκετὸν νὰ γραφῶσιν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 300, δύω μηδενικὰ ὁποῦ ἔχει ὁ 100, καὶ θέλουσιν εὑρεθῇ στάδια 300,00.

Πορίσματα.

Ἀπὸ τὰ τρία ὑποδείγματα ὁποῦ εἴπομεν διὰ τὸν ἐπιτετμημένον πολλαπλασιασμὸν, εἶναι φανερὸν, ὅτι εἰς κάθε ἀριθμοῦ πολλαπλασιασμὸν μὲ τὸ 10, νὰ προσθέτῃς εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ ἐκείνου, ἕνα μηδενικόν. Ὅταν δὲ θέλῃς νὰ τὸν πολλαπλασιάσῃς μὲ 100, νὰ προσθέτῃς δύω, ὅταν μὲ 1000, νὰ βάνῃς εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ τρία κτλ.

Διὰ νὰ πολλαπλασιασθῇ τις ἀριθμὸς μὲ 20, ἃς πολλαπλασιασθῇ μὲ τὸν 2, καὶ εἰς ἐκεῖνο ὁποῦ γένῃ, ἃς προστεθῇ εἰς τὰ δεξιὰ μέρη τὸ μηδενικὸν ὁποῦ ἦτον εἰς τὸ 20. οἷον, 8. 20 = 16 + 0 = 160. Διὰ νὰ πολλαπλασιασθῇ 8, ἐπὶ 40, διὰ νὰ φέρωμεν τὰ γρόσια εἰς παράδες, ἃς πολλαπλασιάσωμεν τὸν 8, ἐπὶ τὸν 4, καὶ εἰς τὸ γινόμενον 32, ἃς προσθέσωμεν εἰς τὰ δεξιὰ τὸ μηδενικὸν ὁποῦ ἦτον εἰς τὰ 40. οἷον 4, 8 = 32 + 0 = 320. διὰ νὰ πολλαπλ. τὸ 12, ἐπὶ 60, ὡς ὅταν θέλωμεν νὰ ἀναλύσωμεν τὰ φιορίνια εἰς σταυροφόρα, ἃς πολλαπλασιασθῇ ὁ 12, ἐπὶ τὸν 6, εἰς δὲ τὸ γενόμενον, ἃς προστεθῇ τὸ μηδενικὸν τοῦ 60, οἷον, 12, 6 = 72 + 0 = 720.

Ὁμοίως ὅταν θέλῃς νὰ ἀναλύσῃς τὰς ὥρας εἰς λεπτὰ, ἃς πολλαπλασιασθῇ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν, ἐπὶ τὸν 6, καὶ εἰς ἐκεῖνο ὁποῦ ἤθελε γένῃ, ἃς προστεθῇ εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τὸ μηδενικὸν ὁποῦ ἦτον εἰς τὸν 60, οἷον, 28, 6 = 168 + 0 = 1680. κτλ.

Καὶ περὶ μὲν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, εἴπομεν ἀρκετά· τώρα δὲ, ἃς εἴπωμεν καὶ περὶ τῆς δοκιμῆς, ἢ βασάνου αὐτοῦ.

Περὶ

Περὶ βασάνου, ἢ δοκιμῆς τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ.

§. 51. Κατὰ δύω τρόπους εἶναι δυνατὸν νὰ γένῃ ἡ βάσανος, ἢ δοκιμὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Καί, ἢ διὰ Γεωμετρικῆς ἀναλογίας, ἢ διὰ τῆς διαιρέσεως. Καὶ διὰ μὲν τῆς ἀναλογίας, πρέπει νὰ μεταχειρισθῶμεν, τὸν ἀκόλουθον τρόπον.

Α΄. Ἂς βαλθῇ μία μονάς· Β΄. ὁ πολλαπλασιαστής· Γ΄. ὁ πολλαπλασιαστέος· καὶ Δ΄. τὸ Γινόμενον. ἂς λάβωμεν δὲ εἰς παράδειγμα, τὸ ὄπισθεν Α΄. ὑπόδειγμα, οἷον τό, 25 : 3 : 75· εἶναι λοιπὸν ∺ 1 : 3 :: 25 : 75. ἀνίσως δὲ ἡ πρᾶξις ἔγινε καλῶς, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ὁποῦ ἐβάλθησαν, εἶναι ἀνάλογον· ἤγουν, ὡς ἔχει ἡ μονὰς 1, πρὸς τὸν 3, οὕτως ἔχει καὶ ὁ 25: πρὸς τὸν 75. Ἐπειδή, ἀνίσως τέσσαρες ἀριθμοὶ εἶναι ἀνάλογον, ἐκεῖνος ὁ ἀριθμὸς ὁποῦ γίνεται ἀπὸ τοὺς δύω ἄκρους, δηλ. τὸν Α΄. καὶ Δ΄. εἶναι ἴσος μὲ ἐκεῖνον ὁποῦ γίνεται ἀπὸ τοὺς δύω μέσους, δηλ. τὸν Β΄. καὶ Γ΄.

Ἂς πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύω ἄκροι, δηλαδὴ ἡ μονὰς 1, μὲ τὸν Δ, 75, καὶ ἐπειδὴ ἡ μονὰς 1, μὲ ὁποιανδήποτε ποσότητα ἤθελε πολλαπλασιασθῇ, ἡ αὐτὴ ποσότης ἀμετάτρεπτος μένει, κατὰ τὸ ΙΑ΄. Ἀξίωμα, (§. 13.) ἂς πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύω μέσοι· δηλ. ὁ 3, μὲ τὸν 25, οἷον 3, 25 = 75. ἄρα εἰς κάθε πολλαπλασιασμόν, ὡς ἔχει ἡ μονὰς πρὸς τὸν πολλαπλασιαστήν, οὕτως ἔχει καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος πρὸς τὸ γινόμενον· ἄρα ἡ πρᾶξις ὀρθῶς ἐγένετο· καὶ ἔστιν ὡς ά. πρὸς τὸν β΄. ὁ γ΄. πρὸς τὸν δ΄.

Διὰ δὲ τῆς διαιρέσεως, ἂς γίνεται ἡ βάσανος, κατὰ τὸν ἐφεξῆς τρόπον.

Α΄. Ἂς βαλθῇ τὸ γινόμενον, ἀντὶ τοῦ διαιρετέου, Β΄. ὁ πολλαπλασιαστής, ἀντὶ διαιρέτου, καὶ ἂς διαιρεθῇ τὸ γινόμενον. Καὶ ἀνίσως τὸ πηλίκον ἤθελεν εἶναι ἴσον μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον, ὀρθῶς, καὶ χωρὶς λάθος ἔγινεν ἡ πρᾶξις· οἷον, ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω ὑποδείγματος, $\frac{75}{3} = 25$. ὁ μὲν πολλαπλασιαστὴς ἦτον 3. ὁ δὲ πολλαπλασιαστέος ἦτον 25. τὸ δὲ γινόμενον 75. διαιρεθὲν ἄρα τὸ γινόμενον 75. ἐπὶ τὸν 3. ἔδωκεν εἰς πηλίκον τὸν 25, ἀλλὰ καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος εἶναι ἴσος μὲ τὸν 25, ἄρα ὀρθῶς ἡ πρᾶξις ἔγινεν. ἂς βαλθῶσι καὶ οἱ δύω τρόποι εἰς τὸ ἀντικρὺ διάγραμμα.

Σημείωσις.

Πρέπει νὰ ἠξεύρῃς, ὅτι ὅταν ἤθελε διαιρεθῇ διὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ τὸ διὰ πολλαπλασιασμοῦ ὑπὸ δύω τινῶν Ἀριθμῶν γινόμενον, θέλει εὕγῃ ὁ πολλαπλασιαστέος, ὡς ἀντικρὺ φαίνεται. Ὅταν δὲ διαιρεθῇ διὰ τοῦ πολλαπλασιαστέου, θέλει εὕγῃ ὁ πολλαπλασιαστής· ὡς ἀντικρὺ ὁρᾶται.

∺	1 : 3 :: 25 : 75	
	1 . 75 =	75
∺	3 . 25 =	75
Καὶ	$\frac{75}{3:}$ =	25
Καὶ	$\frac{75}{25:}$ =	3.

Καὶ περὶ μὲν τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν Ἀκεραίων Ἀριθμῶν, ἀρκούντως ἡμῖν δεδήλωται· νῦν δὲ περὶ πολλαπλασιασμοῦ τῶν Ἑτεροειδῶν Ἀριθμῶν εἴπωμεν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ϛ΄.

Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν Ἑτεροειδῶν Ἀριθμῶν.

Ὁρισμός.

§. 52. Πολλαπλασιασμὸς τῶν Ἑτεροειδῶν ἀριθμῶν ἐστὶ θέσις διαφόρων εἰδῶν ποσότητος, ὁποῦ δίδονται μαζῆ, ἴσαι τὸν ἀριθμὸν μὲ τὰς πολυειδεῖς μονάδας, ὁποῦ εὑρίσκονται εἰς τὴν ἄλλην ποσότητα, διὰ νὰ γνωρίσωμεν ἐκεῖνο, ὁποῦ γίνεται ἀπὸ αὐτάς, εἰς ἓνα ὁλικὸν κατ᾽ εἶδος κεφάλαιον.

Πρόβλημα Ϛ΄.

§. 53. Νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύω δοθείσας Ἑτεροειδεῖς ποσότητας ἀναμεταξύ των, ὁποῦ νὰ εἶναι δηλ. καὶ αἱ δύω ἀπὸ διάφορα εἴδη συντεθειμέναι, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐξ αὐτῶν γινόμενον.

Ὑπόθεσις.

Τὸν μὲν πολλαπλασιαστέον, ἂς ὀνομάσωμεν Α, τὸν δὲ πολλαπλασιαστὴν Β, καὶ τὸ ἐκ τούτων γινόμενον, Γ. ἀλλὰ διὰ τὸ εὐκολώτερον τῆς πράξεως, ἂς προτάξωμεν τοὺς ἐφεξῆς Κανόνας.

Κανὼν Α'.

§. 54. Ὅταν ἤθελαν μᾶς δοθῶσι δύω ποσότητες, ὁποῦ νὰ εἶναι συνθεμέναι ἀπὸ διάφορα εἴδη, διὰ νὰ τὰς πολλαπλασιάσωμεν, πρῶτον μὲν νὰ τὰς κατασρώσωμεν εἰς τὸν διωρισμένον τους τόπον, κατὰ τὸν πρῶτον Κανόν. τῆς συνάψεως αὐτῶν. (§. 25.)

Κανὼν Β'.

§. 55. Δεύτερον δὲ, νὰ ἀρχίσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν, ἀπὸ τὸ δεξιώτατον καὶ μικρότατον πάντων εἶδος. Καὶ ἀφ' οὗ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὁμοειδεῖς ἀριθμοὺς αὐτοῦ τοῦ εἴδους, πρὸ τοῦ νὰ τοὺς γράψωμεν ὑπὸ τὴν ξεχωριστὴν γραμμὴν αὐτῶν, νὰ τοὺς μεταφέρωμεν εἰς τὴν μονάδα τοῦ πρὸς ἀριστερὰν αὐτῶν μεγαλητέρου εἴδους, κατὰ τὸν Β'. Κανόνα τῆς προσθέσεως, (§. 26.) ἐκεῖνο δὲ τὸ μέρος ὁποῦ δὲν εἶναι ἱκανὸν νὰ μεταφερθῇ εἰς τὴν ῥηθεῖσαν μονάδα, ἤγουν δὲν φθάνει νὰ συστήσῃ μίαν μονάδα, ἂς γραφῇ ὑπαλλήλως τῶν ὁμοειδῶν. Τὸ αὐτὸ ἂς γίνεται καὶ εἰς τὰ λοιπὰ πρὸς ἀριστερὰν αὐτοῦ εἴδη, ἕως τοῦ μεγαλητέρου πάντων, καὶ θέλει γνωρισθῇ τὸ ὑπ' αὐτῶν γινόμενον ὁλικὸν κατ' εἶδος κεφάλαιον. (§. 52.)

Ὑπόδειγμα Α'.

Ἂς δοθῶσι τὰ εἰς τὸ ἀντικρὺ διάγραμμα βλεπόμενα διάφορα εἴδη τῶν νομισμάτων· λοιπὸν πολλαπλασιασθέντα τὰ 7 λεπτὰ, ἐπὶ τὰ 8, γίνονται 56. καὶ ἀφ' οὗ τὰ φέρωμεν εἰς τὴν μονάδα τοῦ μεγαλητέρου εἴ-

	Γρόσια,	Παρ.	Λεπτά.
Α =	16 +	12 +	8
Β =	5 +	9 +	7
Γ =	83 +	6 +	2

δους

δους τῶν παράδων, μᾶς δίδουσιν εἰς πηλίκον παράδ. 18, καὶ μένουσι 2 λεπτά· οἷον 7. 8 = $\frac{56}{3}$ = 18 $\frac{2}{3}$· γράφομεν οὖν τὰ δύω λεπτὰ ὑπὸ τὴν ἰδίαν των γραμμήν· ἔπειτα περνοῦμεν εἰς τὸ πρὸς ἀριστερὰν αὐτοῦ εἶδος τοῦ παρ. καὶ πολλαπλασιάσαντες τὸν 9, μὲ τὸν 12, προσθέτομεν εἰς τὸ ὑπ' αὐτοῦ γενόμενον, τοὺς 18 παρ. ὁποῦ ἔγιναν ἐκ τοῦ λεπτοῦ· καὶ γίνονται 126, φέρωμεν καὶ αὐτοὺς εἰς τὴν μονάδα τοῦ πρὸς ἀριστερὰν αὐτοῦ εἴδους τοῦ γροσίων, καὶ μᾶς δίδουσιν εἰς πηλίκον 3 γρόσια, καὶ μένουσιν παρ. 6· οἷον $\frac{126}{40}$ = 3 + $\frac{6}{40}$· γράφομεν λοιπὸν τοὺς 6 παρ. ὑπὸ τὴν γραμ. τῆς στήλης των· περνῶντας δὲ καὶ εἰς τὴν ἀριστερωτάτην στήλην τῶν γροσίων, πολλαπλασιάζομεν τὰ 5 γρόσ. μὲ τὰ 16, καὶ εἰς τὸ γενόμενον 80, προσθέτομεν καὶ τὰ 3 ὁποῦ ἔγιναν ἀπὸ τοὺς παρ. καὶ γίνονται 83· οἷον 16. 5 = 80 + 3 = 83.

Πόρισμα.

Τὰ δοθέντα ἄρα μέρη τῶν Ἑτεροειδῶν ἀριθμῶν, πρὸς ἄλληλα πολλαπλασιασθέντα, δίδουσι γινόμενον, ἤτοι τὸ κατ' εἶδος αὐτῶν ὁλικὸν κεφάλαιον = γρόσ. μὲν 83, παράδες δὲ 6, καὶ λεπτὰ 2· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Ὑπόδειγμα Β'.

Ἂς μᾶς δοθῶσι Δεύτερον, τὰ διάφορα εἴδη τῶν νομισμάτων, ὁποῦ φαίνονται εἰς τὸ ἐφεξῆς διάγραμμα. Καὶ ἂς πολλαπλασιασθῶσιν, ὡς ἄνωθεν· τὰ 9 ἐπὶ 4, γίνονται φένιγκα 36· τὰ ὁποῖα διαιρεθέντα ἐπὶ 4, δίδουσι πηλίκον 9, καὶ δὲν μένει τίποτες· οἷον $\frac{36}{4}$ = 9 + 0. γράφομεν οὖν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν φενίγ.

	Φιορίνια,	Γροσίκια,	Σταυρ.	Φένιγκα.
Α =	52 +	14 +	12 +	9
Β =	8 +	6 +	9 +	4
Γ =	422 +	3 +	0 +	0

(0) μηδενικόν· πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ 12 σαυροφόρα, μὲ τὸν 9, καὶ γίνονται 108· προσθέτομεν καὶ τὰ 9, ὁποῦ ἔγιναν ἀπὸ τὰ φένιγκα, καὶ γίνονται 117· οἷον 12. 9 = 108 + 9 = 117. τὰ διαιροῦμεν μὲ τὸ 3, καὶ μᾶς δίδουν πηλίκον 39, καὶ δὲν μένει τίποτες· οἷον $\frac{117}{3}$ = 39 + 0· γράφομεν μηδενικὸν πάλιν, ὑπὸ τὴν στήλην τῶν σαυροφόρων. πολλαπλασιάζομεν δὲ

δὲ

δὲ καὶ τὰ 14 γροσίκια, μὲ τὸν 6, καὶ γίνονται 84· εἰς τὰ ὁποῖα προσθέτοντες καὶ τὰ 39, ὁποῦ ἔγιναν ἀπὸ τὰ σαυροφόρα, γίνονται 123. τὰ ὁποῖα διαιροῦντες μὲ τὸ 20, διὰ νὰ τὰ μεταφέρωμεν εἰς φιορίνια, δίδουσι πηλίκον 6, καὶ μένουσι 3· οἷον $\frac{123}{20} = 6 + \frac{3}{20}$. τὰ μὲν 3 γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν γροσικίων· πολλαπλασιάσαντες δὲ, τέλος πάντων, καὶ τὰ 52 φιορίνια, μὲ τὰ 8, καὶ προσθέτοντες τὰ 3 ὁποῦ ἔγιναν ἀπὸ τὰ γροσίκια, γίνονται 422.

Ἄρα τὰ ἐπιπολλαπλασιασθέντα πρὸς ἄλληλα διάφορα μέρη, ἔδωκαν γινόμενον, ἢ κεφάλαιον, 422 φιορίνια, καὶ 3 γροσίκια μόνον· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Διὰ νὰ καταλάβῃς καλήτερα τὴν πρᾶξιν τῶν ἐκτεθέντων δύω ὑποδειγμάτων, ἀνάγνωσον ἐκεῖνα, ὁποῦ εἴπομεν εἰς τὸ α. καὶ β΄. ὑπόδειγμα τῆς συνάψεως αὐτῶν. (§. 24.)

Ὑπόδειγμα Γ΄.

Ἂς δοθῶσι τρίτον, οἱ ἐν τῷ διαγράμματι Ἑτεροειδεῖς Ἀριθμοὶ, καὶ ἂς πολλαπλασιασθῶσιν ἀναμεταξύ των, ὡς ἄνωθεν· πολλαπλασιαζόμενα δὲ τὰ λεπτὰ, παράγουσι τὸν 480, διαιρεθεὶς δὲ ἐπὶ τὸν 60, δίδει εἰς πηλίκον ὥρας 8. (ὅρα §. 26.) Ὑπόδειγμα Ε΄. καὶ δὲν μένει τίποτες· γράψε εἰς τὰ λεπτὰ μηδενικόν. Πολλαπλασιάσας δὲ καὶ τὰς ὥρας, γίνονται 96· προσθέτωντας δὲ καὶ τὰς 8 ὁποῦ ἔγιναν ἀπὸ τὰ λεπτὰ, συμποσοῦνται 104. διαιρεσέ τας μὲ τὸ 24, καὶ δίδωσι πηλίκον ἡμέρας 4, καὶ μένην 8· γράψε τὰς 8 ὥρας, ὑπὸ τὴν γραμμήν· πολλαπλασιάσας δὲ καὶ τὰς ἡμέρας, πρόσθεσε εἰς αὐτὰς καὶ τὰς 4, ὁποῦ ἔγιναν ἀπὸ τὰς ὥρας, καὶ γίνονται 229 ἡμέραι· τὰς ὁποίας διαιρῶντας μὲ τὰ 30, δίδουσιν εἰς πηλίκον μῆνας 7, καὶ μένουσιν ἡμέραι 19· γράψεται ὑπὸ τὴν γραμμήν των· πολλαπλ. δὲ καὶ τοὺς μῆνας, καὶ προσθέτωντας εἰς αὐτοὺς καὶ τὰς 7 ὁποῦ ἔγιναν ἀπὸ τὰς ἡμέρας, γίνονται καὶ αὐτοὶ 167.

	Μῆνες,	Ἡμέραι,	Ὧραι,	Λεπτά.
Α =	20 +	25 +	16 +	48
Β =	8 +	9 +	6 +	10
Γ =	167 +	19	+ 8	+ 0

Ἄρα τὸ γινόμενον ἀπὸ τοὺς ἐκτεθέντας πολυειδεῖς ἀριθμοὺς, εἶναι ἴσον μὲ 167 μῆνας, 19 ἡμέρας, 8 ὥρας, καὶ

καὶ οὐδὲν λεπτόν. (καθὼς φαίνεται εἰς τὸ διάγραμμα) ὃ ἦν τὸ ζητούμενον:

Ὑπόδειγμα Δ΄.

Ἂς δοθῶσι τέταρτον, οἱ ἀριθμοὶ, ὁποῦ φαίνονται εἰς τὸ ἀντικρὺ διάγραμμα, καὶ γίνονται Ὀργυαὶ μὲν 364, Πόδες δὲ 3, καὶ δάκτυλος οὐδείς. Ἀνάγνωθι τὰ ῥηθέντα (§. 26, εἰς τὸ Γ΄. Ὑπόδειγμα) καὶ θέλει γνωρίσῃς τὴν πρᾶξιν ταύτην καλήτερα.

	Ὀργυαὶ,	Πόδ.	Δάκτυλοι.
Α =	30 +	5 +	14
Β =	12 +	4 +	8
Γ =	364 +	3	+ 0

Ὑπόδειγμα Ε΄.

Ἂς δοθῶσι πέμπτον, οἱ ἀντικρὺ τετράγωνοι ἀριθμοί· καὶ ἂς πολλαπλασιασθῶσιν ἀναμεταξύ των κατ' εἶδος, κατὰ τὸν Β΄. Κανόνα (§. 55.) διὰ νὰ γνωρίσωμεν τὸ ἐξ αὐτῶν γινόμενον· γενομένης δὲ τῆς πράξεως, γίνονται ὀργυαὶ μὲν τετράγωνοι 3446, πόδες δὲ τοιοῦτοι 13, καὶ δάκτυλοι 160. ἀνάγνωθι τὰ ῥηθέντα εἰς τὸ Δ΄. Ὑπόδειγμα (§. 26.) καὶ θέλεις καταλάβῃ τὴν πρᾶξίν των.

	Ὀργυαὶ, τετραγ.	Πόδες, τετραγ.	Δάκτυλ. τετραγ.
Α =	86 +	28 +	60
Β =	40 +	8 +	24
Γ =	3446 +	13 +	160

Ὑπόδειγμα Ϛ΄.

Ἂς δοθῶσιν Ἕκτον καὶ τελευταῖον, οἱ ἀντικρὺ διάφοροι Ἑτεροειδεῖς Ἀριθμοί· Α΄. πολλαπλασιασθεῖσαι αἱ δραχμαὶ, γίνονται 4500 (κατὰ τὸν §. 48.) αἵτινες διαιρεθεῖσαι μὲ τὸν 100, δίδουσιν εἰς πηλίκον 45, καὶ δὲν μένει τίποτες· γράψε μηδενικὸν ὑπὸ τὴν στήλην των· πολλαπλασιαζόμεναι δὲ καὶ αἱ λίτραι, γίνονται 96· προσθέτωντας δὲ εἰς αὐτὰς καὶ τὰς 45, ὁποῦ ἔγιναν ἐκ τῶν δραχμῶν, γίνονται 141, αἵτινες διαιρεθεῖσαι μὲ τὸ 4, δίδουσιν εἰς πηλίκον 35, καὶ μένει μία· γράψε τὴν ὑπὸ τὴν

	Ὀκάδαις,	Λίτρ.	Δραχμαί.
Α =	65 +	12 +	90
Β =	.9 +	.8 +	50
Γ =	620	.1	.0

τὴν γραμμὴν των· πολλαπλασιαζόμεναι δὲ καὶ αἱ 65 ὀκάδ. μὲ τὰς 9, παράγουσι 585· αἱ ὁποῖαι συναπτόμεναι μὲ τὰς 35 ὁποῦ ἔγιναν ἀπὸ τὰς λίτρας, γίνονται τέλος πάντων καὶ αὐταὶ 620, ὡς ὁρᾶται ἐν τῷ διαγράμματι. Ἀνάγνωθι τὸ Δ΄. Ὑπόδειγμα τοῦ (§. 26.) καὶ θέλεις καταλάβῃ καὶ αὐτὴν τὴν πρᾶξιν.

Καὶ περὶ μὲν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν Ἑτεροειδῶν ἀριθμῶν, εἶναι ἱκανὰ τὰ ἐκτεθέντα, καὶ, ὅσον ἦτον εἰς ἐμὲ δυνατὸν, ἑρμηνευθέντα ἓξ ὑποδείγματα· τώρα δὲ, ἂς εἴπωμεν ὀλίγα τινὰ καὶ περὶ διαιρέσεως τῶν ὁλοσχερῶν, ἢ ἀκεραίων ἀριθμῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄.

Περὶ Διαιρέσεως.

Ὁρισμός.

§. 56. Ἡ διαίρεσις, εἶναι εὕρεσις πηλίκη, (ἤγουν ἀριθμοῦ ἀγνώστου) τὸ ὁποῖον προκύπτει, ἢ εὑγαίνει, ἀπὸ δύω ποσότητας, ἢ ἀριθμοὺς, ὁποῦ ἤθελαν μᾶς δοθῶσιν. Εἰς τὴν ὁποίαν διαίρεσιν, τοσάκις περιέχεται ἡ μονὰς, ὅσαις φοραῖς εὑρίσκεται ἡ μία ποσότης, εἰς τὴν ἄλλην.

Ὑπόθεσις.

Ὁ ἀριθμὸς ὁποῦ θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν, ἂς τὸν ὀνομάσωμεν διαιρετέον· ἐκεῖνος δὲ ὁ ἀριθμὸς, διὰ μέσου τοῦ ὁποίου γίνεται ἡ διαίρεσις, ἂς ὀνομασθῇ διαιρέτης· ἐκεῖνος δὲ ὁ ἀριθμὸς ὁποῦ φανερώνει πόσαις φοραῖς ὁ διαιρέτης εὑρίσκεται εἰς τὸν διαιρετέον, ἂς ὀνομασθῇ πηλίκον.

Πορίσματα.

Ἡ διαίρεσις ἄρα, δὲν εἶναι ἄλλο τίποτες, παρὰ ἀφαίρεσις τοῦ διαιρέτου, ἀπὸ τὸν διαιρετέον τόσαις φοραῖς, ὁπόσαις εὑρίσκεται ἡ μονὰς εἰς τὸ πηλίκον.

Ἡ

Ἡ διαίρεσις ἄρα, εἶναι μία σύντομος ἀφαίρεσις, διὰ μέσου τῆς ὁποίας ἀφαιρεῖται ἡ μία ποσότης ἀπὸ τὴν ἄλλην, διὰ νὰ γνωρισθῇ πόσαις φοραῖς ἡ μία ποσότης, εὑρίσκεται εἰς τὴν ἄλλην.

Εἰς τὸν διαιρετέον ἄρα, τόσαις φοραῖς ὁ διαιρέτης περιέχεται, ὅσαις φοραῖς ἡ μονὰς εὑρίσκεται εἰς τὸ πηλίκον· ὥστε ἀναλογικῶς, ἡ μονάδα ἔχει πρὸς τὸ πηλίκον, ὡς ὁ διαιρέτης, πρὸς τὸν διαιρετέον.

Κάθε διαίρεσις, ἢ εἶναι ἁπλῆ, ἢ σύνθετος. Καὶ ἁπλῆ μὲν διαίρεσις λέγεται ἐκείνη, τῆς ὁποίας ὁ διαιρέτης ἔχει ἕνα μόνον χαρακτῆρα· σύνθετος δὲ ἐκείνη, τῆς ὁποίας ὁ διαιρέτης ἔχει περισσότερον ἀπὸ ἕνα χαρακτῆρα.

Σχόλιον.

§. 57. Πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν, ὅτι ὁ διαιρετέος Ἀριθμὸς πρέπει νὰ εἶναι ὁμογενὴς, ἢ μὲ τὸν διαιρέτην, ἢ μὲ τὸ πηλίκον· ἐπειδὴ κατ᾽ ἄλλον τρόπον, δὲν ἠμπορῇ νὰ εἶναι ἀσφαλὴς καὶ χωρὶς λάθος ἡ διαίρεσις. Παραδείγματος χάριν· ἀνίσως ἤθελε ζητηθῇ, τὰ 3 φλωρεία, πόσαις ἄρα φοραῖς εὑρίσκονται εἰς τὰ 12 φλωρία; εἶναι φανερὸν, ὅτι τέσσαρες. Τὸ πηλίκον ἄρα ἀφηρημένως ἐπάρθη· 3 δὲ, καὶ 12, εἶναι ὁμογενῆ· διότι καὶ οἱ δύω αὐτοὶ Ἀριθμοὶ, δηλοῦσι φλωρεία· εἰς αὐτὸ λοιπὸν τὸ παράδειγμα, εἶναι ὁ μογενὴς ὁ διαιρετέος, μὲ τὸν διαιρέτην. Ἀνίσως δὲ ὁ διαιρετέος, ἤθελεν εἶναι ὁμογενὴς μὲ τὸ ζητούμενον πηλίκον, θέλει ἔχῃ τὸ πηλίκον πρὸς τὸν διαιρετέον, τὴν σχέσιν καὶ ἀναφορὰν. Παραδείγματος χάριν, ἀνίσως ἤθελε ζητηθῇ, ὅτι 8 φλωρεία, νὰ μοιρασθοῦν εἰς δύω πτωχοὺς, πόσα ἄρά γε τυχαίνει νὰ πάρῃ ὁ καθ᾽ εἷς ἀπὸ αὐτοὺς; πάλιν εἶναι φανερὸν, ὅτι 4. γνωστὸν εἶναι λοιπὸν, ὅτι εἰς αὐτὸ τὸ παράδειγμα, εἶναι ὁμογενὴς ὁ διαιρετέος, μὲ τὸ πηλίκον· ἐπειδὴ καὶ ὁ διαιρετέος, καὶ τὸ πηλίκον, φλωρεία δηλοῦσιν· ὁ δὲ διαιρέτης ἀφηρημένως ἐβάλθη.

Ἀλλὰ διὰ νὰ γίνεται ἡ διδασκαλία τῆς διαιρέσεως κατὰ τάξιν, καὶ νὰ τελειώνεται ἡ πρᾶξις αὐτῆς εὐκολώτερα, ἐστοχάσθην νὰ προτάξω καὶ εἰς αὐτὴν τοὺς ἀναγκαίους Κανόνας· εἰς τοὺς ὁποίους ἀκολουθοῦντες οἱ ἀναγινώσκοντες, θέλουσι μάθῃ, εἰς μίαν (σχεδὸν) ἡμέραν, τοὺς διαφόρους τρόπους τῆς διαιρέσεως.

Κα-

Κανὼν Α΄.

§. 58. Πρῶτον λοιπὸν, (πρὶν νὰ ἀρχίσῃς τὴν πρᾶξιν) ἂς τραβιχθῶσι δύω εὐθεῖαι, ἡ μία ὁριζόντειος, καὶ ἡ ἄλλη κατὰ κάθετον, καὶ ἂς κάμνωσι τὴν τυχοῦσαν γωνίαν· καὶ εἰς μὲν τὰ δεξιὰ τῆς καθέτου, ἂς βαλθῇ ὁ Διαιρέτης· εἰς δὲ τὰ ἀριστερὰ, ὁ Διαιρετέος· τὸ δὲ Πηλίκον, ὑποκάτω τῆς γραμμῆς, ὑπαλλήλως μὲ τὸν Διαιρέτην, διὰ νὰ ξεχωρίζεται ἀπό τε τὸν Διαιρέτην, καὶ Διαιρετέον, καὶ νὰ μὴ ἀνακατόνεται μὲ αὐτοὺς, καθὼς σοὶ δείχνει τὸ ἀντικρὺ διάγραμμα.

Διαιρετέος.	Διαιρέτης.
	Πηλίκον.

Κανὼν Β΄.

§. 59. Δεύτερον δὲ, ἀφ' οὗ βαλθῶσιν οἱ δοθέντες Ἀριθμοὶ εἰς τὴν τάξιν των, καθὼς εἴπομεν εἰς τὸν πρῶτον Κανόνα (§. 58.) στοχάσου, πόσαις φοραῖς εὑρίσκεται ὁ Διαιρέτης, εἰς τὸν πρῶτον πρὸς ἀριστερὰν χαρακτῆρα τοῦ Διαιρετέου, (ἀνίσως ἤθελε τύχῃ νὰ εἶναι μεγαλήτερος ἀπὸ τὸν διαιρέτην) εἰ δὲ ἤθελε τύχῃ νὰ εἶναι μικρότερος, στοχάσου πόσαις φοραῖς ὅ, τε πρῶτος καὶ πρὸς δεξιὰν αὐτοῦ δεύτερος, περιέχουσιν αὐτὸν, τὸν διαιρέτην δηλ. ἐκεῖνον δὲ τὸν Ἀριθμὸν ὅπου περιέχεται εἰς τὸν α΄. ἢ εἰς τὸν α΄. καὶ δεύτερον ὁμοῦ χαρακτῆρα τοῦ Διαιρετέου, γράψετον ὑπὸ τὴν γραμμὴν, ὅπου εἶναι διωρισμένος ὁ τόπος τοῦ πηλίκου, ὑποκάτω δηλ. τοῦ Διαιρέτου· διὰ δὲ τοῦ εὑρεθέντος πηλίκου, πολλαπλασίασον τὸν Διαιρέτην, καὶ ἐκεῖνον τὸν ἀριθμὸν ὅπου ἤθελε γένῃ, γράψετον ὑποκάτω τοῦ α΄. ἢ καὶ τοῦ β΄. χαρακτῆρος τοῦ Διαιρετέου, τραβίξας δὲ μίαν γραμμὴν ὑποκάτω αὐτοῦ, κάμε ἀφαίρεσιν ἀπὸ τὸν α΄. ἢ α΄. καὶ β΄. χαρακτῆρα τοῦ Διαιρετέου, ἐκεῖνο δὲ ὅπου ἤθελε μείνῃ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν, γράψετο ὑπὸ τὴν γραμμὴν ἴσια μὲ τὸν χαρακτῆρα ἐκεῖνον, τοῦ ὁποίου ἔγινεν ἡ ἀφαίρεσις· εἰ δὲ καὶ δὲν μείνῃ τίποτες, γράψε μηδενικόν.

Κα-

Κανὼν Γ΄.

§. 60. Τρίτον, κατεβάσας δὲ καὶ τὸν ἀκόλουθον χαρακτῆρα τοῦ διαιρετέου, βάλετον εἰς τὰ δεξιὰ ἐκείνου, ὅπου ἔμεινεν ἀπὸ τὴν Ἀφαίρεσιν, ἢ ἂν δὲν ἔμεινε τίποτες, τοῦ μηδενικοῦ· καὶ στοχάσου πάλιν, πόσαις φοραῖς ὁ Διαιρέτης εὑρίσκεται εἰς αὐτόν· ἐκεῖνος δὲ ὁ Ἀριθμὸς ὅπου ἤθελεν εὑρεθῇ, ἂς γραφῇ εἰς τὰ δεξιὰ μέρη τοῦ πρώτου εὑρεθέντος πηλίκου. Εἰ δὲ καὶ δὲν εὑρίσκεται ὁ Διαιρέτης εἰς αὐτὸ τὸ μέρος μήτε μίαν φορὰν, γράψε εἰς τὸν ῥηθέντα τόπον τοῦ πηλίκου, μηδενικὸν, διὰ νὰ μὴ μείνῃ ὁ τόπος ἄδειος, καὶ ἤθελε γένῃ κάμμία ἀπάτη. (§. 21.) Ἔπειτα κατεβάσας καὶ τὸν ἀκόλουθον χαρακτῆρα τοῦ Διαιρετέου, (ἀνίσως καὶ ἤθελεν εἶναι) ἂς γίνεται ἡ διαίρεσις, κατὰ τὸν ὅμοιον τρόπον, ὅπου ἑρμηνεύσαμεν. Πάντοτε ὅμως εἰς κάθε χαρακτῆρα τοῦ Διαιρετέου ὅπου κατεβάζεις, νὰ βάνῃς ἐπάνωθέν του μίαν στιγμὴν, διὰ νὰ γνωρίζεται ὅτι τὸν κατέβασες, διὰ νὰ μὴ γελασθῇς καὶ κατεβάσῃς τὸν ἴδιον χαρακτῆρα δύω φοραῖς.

Κανὼν Δ΄.

§. 61. Τέταρτον, ἀφ' οὗ δὲ τελειώσῃ ἡ διαίρεσις, ἀνίσως ἤθελαν ἀπομείνωσι τινὲς χαρακτῆρες τοῦ Διαιρετέου, οἵτινες δὲν περιέχουσι τὸν Διαιρέτην, ἂς τραβιχθῇ μία ὁριζόντειος γραμμὴ εἰς τὰ δεξιὰ μέρη τοῦ Πηλίκου, καὶ ἂς γραφῶσιν ἐκεῖνοι οἱ χαρακτῆρες ὅπου ἔμειναν ἐπάνωθεν τῆς γραμμῆς· ὑποκάτω δὲ αὐτῆς, ὁ Διαιρέτης· τὸ ὁποῖον Κλάσμα, φανερώνει, ὅτι δὲν περιέχεται διόλου ὁ Διαιρέτης εἰς τὸν Διαιρετέον, ἀλλὰ μένει τί μέρος τῆς μονάδος· τὸ ὁποῖον φέρωντάς το εἰς ἐλαχίστους ὅρους, θέλεις τὸ γνωρίσῃ καλήτερα.

Κανὼν Ε΄.

§. 62. Πέμπτον, ἀνίσως εἶναι σύνθετος ὁ Διαιρέτης, δηλ. ἔχει περισσότερον ἀπὸ ἕνα χαρακτῆρα, ἀφ' οὗ βαλθῶσιν εἰς τὸν πρέποντα τόπον, (Κανὼν πρῶτον §. 58.) στοχάσου, πόσαις φοραῖς περιέχεται ὁ εἰς τὰ ἀριστερὰ α΄. χαρακτὴρ τοῦ Διαιρέτου, εἰς τὸν ἐν ἀριστερᾷ α΄. χαρακτῆρα τοῦ Διαιρετέου, ἢ καὶ εἰς

τοὺς

τὺς δύω, ἀνίσως δεν περιέχεται εἰς τὸν ά. Καὶ πρὸ τοῦ νὰ σημειωθῇ τὸ πηλίκον, ςοχάσε, νὰ μὴ ἤθελεν εἶναι μεγαλήτερον, ἢ μικρότερον, ἀπὸ ἐκεῖνο ὁπῦ χρειάζεται. Λοιπὸν ἂς πολλαπλασιασθῇ μὲ τὸν νῦν σε ὅλος ὁ διαιρέτης, μὲ τὸ πηλίκον ἐκεῖνο ὁπῦ ςοχάζεσαι, ὅτι εἶναι ἱκανόν. Καὶ ἀνίσως ἐκεῖνος ὁ Ἀριθμὸς ὁπῦ γίνεται ἀπὸ τὸ πηλίκον καὶ ὅλον τὸν διαιρέτlω, δεν ὑπερβαίνει τους χαρακτῆρας τῦ διαιρετέου μὲ τὺς ὁποίυς εἶναι ὑπάλληλον, δεν εἶναι μεγαλήτερον, παρὰ ὅσον πρέπει· διὰ τῦτο ἂς γραφῇ εἰς τὸν τόπον τῦ πηλίκυ, κατὰ τὸν πρῶτον Κανόν. (§. 58.) Εἰ δὲ καὶ ἤθελεν ὑπερέχῃ τὺς χαρακτῆρας τῦ διαιρετέυ, ἂς σμικρυνθῇ τὸ πηλίκον μίαν μονάδα, ἢ δύω, ἕως ὁπῦ ἐκεῖνος ὁ Ἀριθμὸς ὁπῦ γίνεται ἐκ τῦ διαιρέτυ καὶ τῦ πηλίκυ, νὰ μὴ εἶναι μεγαλήτερος ἀπὸ τὺς χαρακτῆρας τῦ διαιρετέυ, καὶ ὕτως ἂς σημειωθῇ εἰς τὸ πηλίκον. Αὐτὸ τὸ ἴδιον ἂς γίνεται καὶ εἰς τὺς λοιπὺς χαρακτῆρας τῦ διαιρετέυ, καὶ θέλεις ἔχῃ τὸ ζητέμενον ἀνάλογον πηλίκον, τlὼ εἰς διαίρεσιν δοθέντων ἀριθμῶν.

Κανὼν Ϛ'.

§. 63. Ἔσχατον δὲ καὶ τελευταῖον. Ὅταν ἤθελαν τύχωσιν ἕν, ἢ δύω, ἢ καὶ περισσότερα μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος τῦ διαιρετέυ, ἢ τῦ διαιρέτυ, ἢ καὶ τlὼ δύω, ἠμποροῦμεν νὰ ἀποκόπτωμεν ἴσα μηδενικά, καὶ ἀπὸ τὸν διαιρέτlω, καὶ ἀπὸ τὸν διαιρετέον, καὶ νὰ διαιρῦμεν ἐκεῖνο, ὁπῦ ἔμεινεν εἰς τὸν διαιρετέον, μὲ ἐκεῖνο ὁπῦ ἀπέμεινεν εἰς τὸν διαιρέτlω· ἡ ὁποία λέγεται ἐπιτετμημένη, ἤγεν σύντομος διαίρεσις.

Θέλωντας δὲ νὰ δοκιμάσῃς ἂν εἶναι σωστὴ ἡ διαίρεσις, πολλαπλασίασον τὸ πηλίκον μὲ τὸν διαιρέτlω, καὶ εἰς ἐκεῖνο ὁπῦ ἤθελε γένῃ, νὰ προσθέσῃς τὰ ἀποκοπέντα μηδενικά, ἢ τὺς χαρακτῆρας, ἢ καὶ ἐκεῖνα τὰ μέρη τῆς μονάδος ὁπῦ ἤθελαν ἀπομείνῃ ἀπὸ τlὼ διαίρεσιν, καὶ ἂν εὕρῃ ἴσα μὲ τὸν διαιρετέον, εἶναι σωςή, εἰδὲ μή, εἶναι ἐσφαλμένη.

Πρόβλημα Ζ'.

§. 64. Τὸν δοθέντα Ἀριθμὸν Α, διὰ τῦ δοθέντος Β, διελεῖν, ἤγουν νὰ εὕρῃς Ἀριθμὸν Π, ὁπῦ νὰ φανερώνει πόσαις φοραῖς ὁ διαιρετέος Α, περιέχει τὸν διαιρέτην Β.

Ὑπό-

Ὑπόδειγμα Α'.

Ἐπὶ τῆς ἁπλῆς Διαιρέσεως.

Ἡ γραμμικὴ Ὀργυιά, συντίθεται ἀπὸ 6 πόδας· λοιπὸν 2634 Πόδες, πόσας Ὀργυιὰς ἄρα κάμνυσι;

Λύσις.

Πρῶτον, ἂς τραβιχθῶσι δύω γραμμαί, τlὼ τυχοῦσαν κάμνυσαι γωνίαν, κατὰ τὸν πρῶτον Κανόνα τῆς διαιρέσεως, (§. 58.) καὶ ἂς βαλθῶσιν οἱ Ἀριθμοί, ὁπῦ μᾶς ἐδόθησαν εἰς τlὼ τάξιν των. Δεύτερον, ςοχάσου πόσαις φοραῖς εὑρίσκεται ὁ διαιρέτης, (τὸν ὁποῖον ὀνόμασα Β) εἰς τοὺς δύω πρώτυς πρὸς ἀριςερὰν χαρακτῆρας τῦ διαιρετέυ, (τὸν ὁποῖον ὀνομάζω Α, κατὰ τὸν δεύτερον Κανόνα §. 59.) Καὶ ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης Β = 6, τέσσαρες φοραῖς εὑρίσκεται εἰς αὐτούς, γράψε τὸν 4 ὑπὸ τlὼ γραμμὴν εἰς τὸν τόπον τῦ πηλίκυ, ἀντικρὺ τοῦ Π, ὑποκάτω τοῦ Διαιρέτυ Β. Τρίτον, πολλαπλασίασον τὸ εὑρεθὲν πηλίκον 4, ἐπὶ τὸν Διαιρέτην 6· τὸ δὲ γενόμενον 24, γράψετο ὑπὸ τlὼ γραμμlὼ, ὑπαλλήλως μὲ τὸν 26 τῦ Διαιρετέυ Α· καὶ ἀφ' ὗ τραβίξῃς μίαν γραμμήν, ἀφαίρεσον τὸν 24 ἀπὸ τὸν 26, καὶ μένυσι 2. Τέταρτον, ἀφ' ὗ δὲ βάλῃς μίαν ςιγμlὼ ἐπάνωθεν τῦ 3, (ξ'ίτε χαρακτῆρος τῦ Διαιρετέυ Α) κατέβασέ τον, καὶ γράψετον εἰς τὰ δεξιὰ μέρη τοῦ ἐναπομείναντος 2, καὶ ἂς γένῃ ὁ 23. (κατὰ τὸν Γ'. Κανόνα (§. 60.) καὶ ςοχάσε πάλιν, πόσαις φοραῖς εὑρίσκεται ὁ 6 Διαιρέτης, εἰς τὸν 23· καὶ ἐπειδὴ εὑρίσκεται τρεῖς φοραῖς, γράψε τὸν 3 πρὸς τὰ δεξιὰ τῦ πρώτυ εὑρεθέντος πηλίκυ 4. Καὶ ἀφ' ὗ πάλιν πολλαπλασιάσῃς τὸν 3 ἐπὶ τὸν 6 Διαιρέτlω, τὸ γενόμενον 18, γράψετο ὑποκάτω τοῦ 23, καὶ τραβίξας ἕνα γραμμίδιον ὑπὸ τὸν 18, ἀφαίρεσον, καὶ μένει ὁ 5. Πέμπτον, βάλων-

Διαιρετέος.	Διαιρέτης.
Α = 2634	Β = 6
24	Πηλίκον.
023	Π = 439
18	
=54	
54	
00	

νωντας πάλιν μίαν στιγμὴν ἐπάνωθεν τοῦ 4, ὑστερινοῦ χαρακτῆρος τοῦ Διαιρετέου Α, καὶ γράψας καὶ αὐτὸν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ἐναπομείναντος 5, γίνεται ὁ 54. στοχάσου λοιπὸν πάλιν, πόσαις φοραῖς εὑρίσκεται ὁ Διαιρέτης 6, εἰς τὸν 54. Καὶ ἐπειδὴ εὑρίσκεται 9 φοραῖς, γράψε τὸν 9, εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 3, ὡς ὑστερινὸν μέρος τοῦ πηλίκου. Ἔπειτα, πολλαπλασίασον τὸν 9, ἐπὶ τὸν 6, καὶ γίνεται ὁ 54. ἂς γραφῇ καὶ αὐτὸς ὑποκάτω τοῦ εἰς τὸν Διαιρετέον 54, καὶ ἂς τραβιχθῇ τὸ συνηθισμένον γραμμίδιον ὑπ᾽ αὐτούς· ἀφαίρεσον καὶ αὐτὸν τὸν 54, ἀπὸ τὸν ἐπάνωθεν αὐτοῦ 54, καὶ ἐπειδὴ δὲν ἀπέμεινε τίποτες, βάλε ὑπὸ τὸ γραμμίδιον δύω μηδενικὰ (00) ἢ τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος. (=)

Πόρισμα.

Πόδες ἄρα 2634, διαιρεθέντες ἐπὶ τὸν 6, δίδουσιν εἰς πηλίκον Ὀργυιὰς 439· καὶ αὐτὸ ἦτον τὸ ζητούμενον· ἔγινεν ἄρα τὸ προσαχθέν.

Ὑπόδειγμα Β΄.

Ἐπὶ τῆς συνθέτου Διαιρέσεως.

Στρατιῶται 35, ἐμοιράσθησαν ὁ καθ᾽ εἷς εἰς τὴν ὑπηρεσίαν των, καὶ μὲ τὸ νὰ ἐδούλευσαν πιστά, ἐχάρισεν ὁ στρατηγὸς εἰς αὐτοὺς 640 ἀργύρια· πόσα ἄρα τυχαίνει εἰς τὸν καθ᾽ ἕνα νὰ πάρῃ ἀπὸ αὐτά;

Λύσις.

Ἀφ᾽ οὗ γράψῃς τοὺς ὀνομασθέντας Ἀριθμοὺς εἰς τὸν διωρισμένον τους τόπον, (κατὰ τὸν Α΄. Κανόνα §. 58.) στοχάσου πόσαις φοραῖς εὑρίσκεται ὁ 35 Διαιρέτης Β, ἐπὶ τὸν 64, τοῦ Διαιρετέου Α, κατὰ τὸν Β΄. Κανόνα (§. 59.) καὶ ἐπειδὴ εὑρίσκεται, μίαν φοράν, γράψε τὸν ἕνα 1, εἰς τὸ πηλίκον ἀντικρὺ τοῦ Π, ὑπὸ

Α = 640	Β = 35
35	Π = $18\frac{10}{35}$ $= \frac{2}{7}$
290	
280	
010	

τὸν

τὸν Διαιρέτην, ὡς πρῶτον μέρος τοῦ ζητουμένου πηλίκου· ἔπειτα λέγε, μία οἱ 35, παράγουσι τὸν 35 (κατὰ τὸ ΙΒ΄. Ἀξίωμα. §. 13.) γράψε λοιπὸν τὸν 35, ὑποκάτω εἰς τὸν 64· τραβίξας δὲ ὑπ᾽ αὐτοὺς ἕνα γραμμίδιον, ἀφαίρεσον, καὶ μένουσιν 29. οἷον 64 — 35 = 29. γράψετον ὑπὸ τὸ γραμμίδιον· καταβάσας δὲ καὶ τὸ μηδενικὸν ὅπου εἶναι εἰς τὸν Διαιρετέον Α, γράψετο εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ἐναπολειφθέντος 29, καὶ γίνεται ὁ 290. καὶ στοχάσου πάλιν, πόσαις φοραῖς εὑρίσκεται ὁ Διαιρέτης Β 35, εἰς τὸν Διαιρετέον Α 290, τέτοιας λογῆς ὅμως, ὅπου νὰ ἀντιστοιχῇ, ὁ μὲν Διαιρέτης 3, εἰς τὸν 29, ὁ δὲ 5, εἰς τὸ μηδενικόν· ἂς δοκιμασθῇ λοιπὸν ὁ 9, καὶ πολλαπλασιασθεὶς (μὲ τὸν νοῦν) ὅλος ὁ Διαιρέτης 35, ἐπὶ τὸν 9, κάμνει τὸν 315· ὁ ὁποῖος ὑπερβαίνει τὸν 290. Ἀριθμὸν τοῦ Διαιρετέου Α· ἂς σμικρυνθῇ ὁ 9, μίαν μονάδα, κατὰ τὸν Ε΄. Κανόνα, (§. 62.) καὶ ἂς μείνῃ ὁ 8. εἰς τὸ πηλίκον. Ἀφ᾽ οὗ δὲ πολλαπλασιασθῇ ὁ 8, μὲ τὸν 35 Διαιρέτην, παράγει τὸν 280· οἷον 35. 8 = 280. καὶ μὲ τὸ νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὸν Διαιρετέον 290, ἂς γραφῇ ὑπ᾽ αὐτόν· καὶ τραβίξας γραμμίδιον ὑπ᾽ αὐτούς, ἂς γένῃ ἀφαίρεσις, καὶ μένουσι, 10· οἷον 290 — 280 = 10. τὰ ὁποῖα, τραβίξας μίαν γραμμὴν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ πηλίκου, σημείωσέ τα ἐπάνωθεν τῆς γραμμῆς, βάνωντας ὑποκάτωθεν τὸν Διαιρέτην 35, κατὰ τὸν Δ΄. Κανόνα. (§. 61.) ὥστε $\frac{10}{35} = \frac{2}{7}$.

Πόρισμα.

Καθ᾽ ἕνας ἄρα ἀπὸ τοὺς ῥηθέντας στρατιώτας, τυχαίνει νὰ πάρῃ πρὸς 18 ἀργύρια, καὶ τοὺς ἀπέμειναν καὶ δύω ἕβδομα, τοῦ ἀργυρίου, διὰ νὰ τὰ μοιράσουν ἐξ ἴσου ἀναμεταξύ των· καὶ τοῦτο ἦτον τὸ ζητούμενον· ἔγινεν ἄρα τὸ προσαχθέν.

Ὑπόδειγμα Γ΄.

Δάκτυλοι 256, τετραγωνικοί, συμπληροῦσιν ἕνα τετραγωνικὸν πόδα· πόσοι ἄρα πόδες τετραγωνικοὶ εὑρίσκονται εἰς τούς, 130320, τετραγωνικοὺς δακτύλους;

Λύ-

Λύσις.

Ἂς βαλθῶσιν εἰς τὸν διορισμένον τόπον τους, κατὰ τὴν συνήθειαν. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Διαιρέτης 256, δὲν περιέχεται εἰς τοὺς τρεῖς πρώτους χαρακτῆρας τοῦ διαιρετέου, δηλ. εἰς τὸν 130, ἂς λάβωμεν

$A = 130320$	$B = 256$
1280	$\Pi = 509\frac{1}{16}$
$== 2320$	
2304	$= \frac{1}{16}$
$== 16$	

καὶ τὸν τέταρτον χαρακτῆρα 3, διὰ νὰ γένῃ ὁ 1303, κατὰ τὸν Β΄. Κανόνα (§. 59.) καὶ στοχάσου πόσαις φοραῖς εὑρίσκεται εἰς αὐτὸν ὁ Διαιρέτης 256· καὶ ἐπειδὴ εὑρίσκεται πεντάκις, γράψε τὸν 5 εἰς τὸ πηλίκον Π· ἔπειτα πολλαπλασίασον ὅλον τὸν Διαιρέτην ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν Πηλίκον 5, καὶ γίνεται ὁ 1280· οἷον $256 . 5 = 1280$. Γράψετον λοιπὸν ὑποκάτω τῶν τεσσάρων χαρακτήρων τοῦ Διαιρετέου, καὶ ἀφαίρεσον, καὶ μένουσιν 23· οἷον $1303 - 1280 = 23$. Κατέβασε καὶ τὸν πέμπτον χαρακτῆρα τοῦ διαιρετέου 2, καὶ γίνεται ὁ 232. Καὶ ἐπειδὴ εἰς αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν, δὲν εὑρίσκεται μήτε μίαν φορὰν ὁ 256 Διαιρέτης, γράψε εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ Πηλίκου πέντε 5, μηδενικὸν, κατὰ τὸν Γ΄. Κανόνα (§. 60.) καὶ γίνεται ὁ 2320· οἷον $232 + 0 = 2320$. Στοχάσου πάλιν πόσαις φοραῖς εὑρίσκεται εἰς τὸν 2320 Διαιρετέον, ὁ 256 Διαιρέτης. Ἂς δοκιμάσωμεν τὸν 9. Πολλαπλασιάζοντες δὲ τὸν Διαιρέτην, μὲ τὸν 9, γίνεται ὁ 2304· οἷον $256 . 9 = 2304$. Καὶ ἐπειδὴ δὲν ὑπερβαίνει τὸν Διαιρετέον, ἂς γράψωμεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ μηδενικοῦ τὸν 9. Ἀφαιρῶντας δὲ τὸν 2304, ἀπὸ τὸν 2320 Διαιρετέον, μένουσι 16· οἷον $2320 - 2304 = 16$· τὸ ὁποῖον Κλάσμα, φέρωντάς το εἰς ἐλαχίστους ὅρους, εἶναι $= \frac{1}{16}$· ἤγουν ἓν δέκατον ἕκτον.

Πόρισμα.

Ἄρα οἱ 130320, τετραγωνικοὶ δάκτυλοι, κάμνουσι πόδας τετραγωνικοὺς $509\frac{1}{16}$· τὸ ὁποῖον ἦτον τὸ ζητούμενον· ἐγένετο ἄρα τὸ προσαχθέν·

Περὶ

Περὶ Ἐπιτετμημένης Διαιρέσεως.

§. 65. Ἡ μὲν ἁπλῆ καὶ σύνθετος διαίρεσις, κατὰ τοὺς ἑρμηνευθέντας γίνονται τρόπους· ἡ δὲ ἐπιτετμημένη, ἤγουν σύντομος διαίρεσις, γίνεται κατὰ τοὺς ἀκολούθους.

Ὅταν εὑρίσκωνται εἰς τὸ τέλος τοῦ διαιρετέου, ἢ τοῦ διαιρέτου, ἕνα, ἢ δύω, ἢ καὶ περισσότερα μηδενικὰ, ἠμποροῦμεν τότε νὰ κόψωμεν καὶ ἀπὸ τοὺς δύω ἴσα τὸν ἀριθμὸν μηδενικὰ, καὶ νὰ διαιρῶμεν ἐκεῖνο, ὁποῦ ἀπομείνῃ εἰς τὸν διαιρετέον, μὲ ἐκεῖνο, ὁποῦ ἀπέμεινεν εἰς τὸν διαιρέτην. Ὅταν ὅμως δὲν εἶναι μηδενικὰ εἰς τὸν διαιρέτην, ἀλλὰ μόνον σημαντικοὶ χαρακτῆρες, τότε δὲν ἠμποροῦμεν νὰ ἀποκόψωμεν κἀνένα μηδενικὸν τοῦ διαιρετέου, ἀλλὰ πρέπει νὰ γίνεται ἡ διαίρεσις, καθὼς ἐγίνετο εἰς τὴν ἁπλῆν, ἂν ἔχῃ ἕνα μόνον χαρακτῆρα ὁ διαιρέτης· εἰ δὲ καὶ ἔχει δύω, νὰ γίνεται καθὼς εἰς τὴν σύνθετον. Εἰδὲ τέλος πάντων, ὁ μὲν διαιρέτης ἔχει μηδενικὰ, ὁ δὲ διαιρετέος μόνον χαρακτῆρας, ἠμποροῦμεν τότε νὰ κόψωμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον τόσους χαρακτῆρας, ὅσα μηδενικὰ ἐκόψαμεν ἀπὸ τὸν διαιρέτην, καθὼς θέλομεν τὸ ἰδῇ εἰς τὰ ἑφεξῆς ὑποδείγματα.

Ὑπόδειγμα Δ΄.

§. 66. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ στρατιωτικὴ τάξις, συνίσταται ἀπὸ 500, στρατιώτας· ἕνα λοιπὸν στράτευμα, τὸ ὁποῖον εἶναι συνθεμένον ἀπὸ 35000, στρατιώτας, πόσας ἄρα περιέχει τάξεις;

Λύσις.

Α΄. γράψε τοὺς ὀνομασθέντας ἀριθμοὺς, καθ᾽ ἕνα εἰς τὸν τόπον του, καθὼς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ διάγραμμα. Καὶ ἐπειδὴ καὶ ὁ Διαιρέτης, καὶ ὁ Διαιρετέος ἔχουσι κατὰ τὸ τέλος μηδενικὰ, ἂς ἀποκοπῶσι τὰ δύω τοῦ Διαιρέτου, καὶ τὰ ἄλλα δύω τοῦ Διαιρετέου, μὲ τὴν ὑποδια-

$A = 350,00$	$B = 5,00$
35	$\Pi = 70$
000	
5	
0	

50-

σολὼ, (§. 63.) κ̀ θέλει μείνη, ὁ μὲν Διαιρετέος 350 ὁ δὲ Διαιρέτης 5· ἂς διαιρέσῃ λοιπὸν ὁ Διαιρέτης ὁπῦ ἔμεινε τοὺς δύω πρώτους πρὸς ἀριστερὰν χαρακτῆρας τῦ Διαιρετέυ, δηλ. τὸν 35. Καὶ ἐπειδὴ ὁ 5, εὑρίσκεται 7 φοραῖς εἰς τὸν 35, γράψε τὸν 7 εἰς τὸν τόπον τῦ Πηλίκυ, ἀντικρὺ τῦ Π· κ̀ πολλαπλασιάσας τὸν 5 Διαιρέτην, ἐπὶ τὸν ἑπτὰ τῦ Πηλίκυ, γίνονται 35· οἷον 7. 5 = 35. Γράψετον λοιπὸν ὑπὸ τὸν 35 τῦ Διαιρετέου, καὶ τραβίξας ἕνα γραμμίδιον, ἀφαίρεσον τὸν ἕνα ἀπὸ τὸν ἄλλον· καὶ ἐπειδὴ δὲν ἔμεινε τίποτες, γράψε ὑπὸ τὴν γραμμὴν δύω μηδενικὰ (00), ἢ τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος. (=) Κατεβάσας δὲ καὶ τὸ μηδενικὸν ὁποῦ ἔμεινεν εἰς τὸν Διαιρετέον, διαίρεσέ το μὲ τὸν Διαιρέτην 5. κ̀ ἐπειδὴ ὁ 5, διαιρῶν τὸ μηδενικὸν, λαμβάνει εἰς Πηλίκον μηδενικὸν, γράψε τὸ μηδενικὸν εἰς τὰ δεξιὰ μέρη τοῦ 7 Πηλίκου, καὶ θέλει γένῃ ὁ 70 Ἀριθμός.

Πόρισμα.

Τριανταπέντε ἄρα χιλιάδες στρατιῶται, συγκροτοῦσιν ἑβδομήντα τάξεις, πρὸς πεντακοσίους στρατιώτας ἡ κάθε τάξις λογιζομένη· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον. Ἐγένετο ἄρα τὸ ἐπιταχθέν.

Ὑπόδειγμα Ε'.

Πόσα γρόσια κάμνουσι παράδες 9725;

Λύσις.

Ἐπειδὴ κ̀ εὑρίσκεται εἰς τὸ τέλος τῦ Διαιρέτου Β μηδενικὸν, κόψετο μὲ μίαν ὑποδιαστολὴν, ὁμοίως κόψε καὶ τὸν δεξιώτατον χαρακτῆρα τοῦ Διαιρετέου Α 5 (§. 63.) Ἔπειτα διαίρεσον τοὺς ἐναπομείναντας πρὸς ἀριστερὰν τοῦ 5 τρεῖς χαρακτῆρας τῦ Διαιρετέου Α, δηλ. τὰ 972, μὲ τὸν ἐναπομείναντα τῦ Διαιρέτυ Β χαρακτῆρα

Α = 972,5	Β = 4,0
8	Π = 243 $\frac{5}{40}$
17	
16	243. 4 = 972 + 5 = = 9725
12	
= 12	
= 0	

4,

4, καὶ εὐγαίνει εἰς Πηλίκον γρόσια 243, καὶ μένουσι $\frac{5}{40}$· καθὼς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα. Καὶ διὰ νὰ τὸν δοκιμάσῃς, ἂν εἶναι σωστός, πολλαπλασίασον τὸ Πηλίκον 243, μὲ τὸν Διαιρέτην 4, καὶ εἰς ἐκεῖνο ὁπῦ ἤθελε γένῃ, γράψε εἰς τὰ δεξιὰ τῦ γενομένυ τὸν ἀποκοπέντα χαρακτῆρα τῦ Διαιρετέυ, δηλ. τὸν 5, κ̀ θέλει γένῃ ὁ Διαιρετέος Α, καθὼς τὸ βλέπεις εἰς τὸ Διάγραμμα. Ἄρα 9725 παρ. κάμνυσι γρόσια 243, καὶ μένυσι $\frac{5}{40}$· τὸ ὁποῖον Κλάσμα εἶναι ἴσον μὲ παρ. 5. Ἔγινεν ἄρα τὸ προσαχθέν.

Ὑπόδειγμα Ϛ'.

Πόσα ἄρα φιορίνια κάμνυσιν, τὰ 7,898 σταυροφόρα;

Λύσις.

Κόψε τὸ μηδενικὸν τῦ 60, καὶ μένουσιν 6· κόψε καὶ ἀπὸ τὸν Διαιρετέον Α, τὸν δεξιώτατον χαρακτῆρα 8, καὶ μένουσιν 789. Διαίρεσέ τα μὲ τὸν 6, κ̀ εὐγαίνει Πηλίκον 131 $\frac{38}{60}$· καὶ διὰ νὰ κάμῃς τὴν δοκιμὴν, ὡς ἄνωθεν, πολλαπλασίασον τὸ Πηλίκον 131, μὲ τὸ 6, κ̀ γίνονται 786, βάλε κ̀ τὰ 38, ὁπῦ ἔμειναν, κ̀ γίνονται = 7,898, καθὼς φαίνεται εἰς τὸ Διάγραμμα. Ἄρα 7,898 σταυροφόρα, κάμνυσι φιορίνια = 131, καὶ μένυσι $\frac{38}{60}$.

Α = 789,8	Β = 6,0
6	Π = 131 $\frac{38}{60}$
18	7868
18	3
= 9	7898
6	
3	

Ὑπόδειγμα Ζ'.

Πόσας ἄρα ὥρας κάμνυσι λεπτὰ 5782;

Ἡ ὥρα ἔχει 60 λεπτά· λοιπὸν κάμε ὡς ἄνωθεν ἑρμηνεύσαμεν, καὶ εὐγαίνυσιν ὥραις 96, κ̀ μένυσι λεπτὰ 22. καθὼς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα.

Α = 578,2	Β = 6,0
54	Π = 96 $\frac{22}{60}$
= 38	
36	
= 2	

 Πο-

Πορίσματα.

Α = 250,00	Β = 1,00
	Π = 250

Ὁ αἰὼν συνίσαται ἀπὸ 100 χρόνυς· πόσυς ἄρα αἰῶνας περιέχει ὁ Α, Διαιρετέος;

Ἀπόκοψε τὰ δύω μηδενικὰ τῦ Διαιρέτυ Β, 1,00, καὶ μένει = 1, ἀπόκοψε καὶ δύω ἀπὸ δύω ἀπὸ τὸν Διαιρετέον Α, 250,00, καὶ μένουν 250. κατὰ τὸ ΙΒ'. Ἀξίωμα. (§. 13.)

Α = 50,4	Β = 1,0
	Π = $50\frac{4}{10}$

Ὅταν θέλης νὰ διαιρέσης κανένα Ἀριθμὸν μὲ τὸ 10, κόψε τὴν μονάδα τῦ Ἀριθμῦ, καὶ ἐκεῖνο ὁπῦ μένει, εἶναι τὸ Πηλίκον· οἷον θέλοντας νὰ διαιρέσης τὸν 504 Ἀριθμόν, μὲ τὸ 10, κόψε τὴν μονάδα 4, καὶ μένουν 50· σαβίξας δὲ ἕνα γραμμίδιον εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ Πηλίκου, βάλε ἐπάνωθεν μὲν τὸν ἀποκοπέντα χαρακτῆρα 4, ὑποκάτω δὲ ὅλον τὸν Διαιρέτην 10· κατὰ τὸν Δ'. Κανόνα, (§. 61.) (ὡς φαίνεται εἰς τὸ Διάγραμμα) καὶ ἐγίνεν ἡ Διαίρεσις.

Α = 35,849	Β = 1,000
	Π = $35\frac{849}{1000}$

Ὅταν δὲ θέλης νὰ διαιρέσης τινὰ Ἀριθμὸν μὲ 1000. οἷον τὸν 35,849 ἀπόκοψον τὰ τρία μηδενικὰ τῦ χίλια, καὶ μένει μονάς, ὡς ἄνωθεν, κόπτοντας δὲ καὶ ἀπὸ τὸν Διαιρετέον Α, 35,849, τὰς τρεῖς πρὸς τὰ δεξιὰ χαρακτῆρας, εὐγαίνει εἰς Πηλίκον 35· καὶ μένυσι $\frac{849}{1000}$. (§. 63.) καθὼς βλέπεις εἰς τὸ Διάγραμμα.

Αὐτὸς εἶναι καὶ ὁ τρόπος τῆς Ἐπιτετμημένης Διαιρέσεως· τώρα δὲ ἂς εἴπωμεν, καὶ περὶ Βασάνου (ἤτοι δοκιμῆς) τῆς Διαιρέσεως γενικῶς.

Περὶ Βασάνυ τῆς Διαιρέσεως.

§. 67. Βουλόμενος οὖν διὰ νὰ δοκιμάσης, ἂν ἔγινε χωρὶς λάθος ἡ Διαίρεσις, πρῶτον μὲν, ἂς πολλαπλασιασθῇ τὸ Πηλίκον μὲ τὸν Διαιρέτην. (αὐτὸ νὰ ἐννοῆται εἰς καθὲ Διαίρεσιν.) Δεύτερον δὲ, εἰς ἐκεῖνο ὁπῦ ἤθελε γένῃ, νὰ προστίθεται, καὶ ἐκεῖνο, ὁπῦ ἤθελε μείνῃ, ἀπὸ τὴν Διαίρεσιν, (ἂν ἔμει-

νε τίποτες.) Ὁμοίως νὰ προστίθεται καὶ ὁ χαρακτὴρ ἐκεῖνος ὁποῦ ἤθελον ἀποκοπῇ. (ὡσὰν εἰς τὴν Ἐπιτετμημένην Διαίρεσιν·) καὶ συμπίπτωντας τὸ γινόμενον μὲ ἐκεῖνο ὁπῦ ἐναπέμεινεν, ἢ ἐκόπη, θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸν Διαιρετέον. Ἔσω εἰς δοκιμὴν τὸ Α'. Ὑπόδειγμα. οἷον

Α = 2634	Β = 6
24	Π = 439
= 23	6
18	2634
= 54	
54	
00	

Λοιπὸν ἐπολλαπλασιάσθη τὸ Πηλίκον Π, 439, μὲ τὸν 6 Διαιρέτην, καὶ εὐγῆκεν ὁ Διαιρετέος Α, 2634· ἄρα εἶναι σωστὴ ἡ πρᾶξις. Ἀνάγνωθι τὰ ῥηθέντα εἰς τὴν βάσανον τοῦ Πολλαπλασιασμῦ, (§. 51.) καὶ θέλεις γνωρίσῃ καλήτερα τὴν δοκιμήν.

Καὶ περὶ μὲν τῆς Διαιρέσεως τῶν ἀκεραίων Ἀριθμῶν εἶναι ἱκανὰ τὰ ῥηθέντα· νῦν δὲ περὶ τῆς τῶν Ἑτεροειδῶν Ἀριθμῶν Διαιρέσεως εἴπωμεν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η'.

Περὶ Διαιρέσεως τῶν Ἑτεροειδῶν Ἀριθμῶν.

Ὁρισμός.

§. 68. Διαίρεσις τῶν Ἑτεροειδῶν Ἀριθμῶν ἐστίν, εὕρεσις, Πηλικότητος, κατ' εἶδος, τῶν δοθέντων διαφόρων Ἀριθμῶν. Εἰς τὴν ὁποίαν Διαίρεσιν, πόσαις φοραῖς περιέχεται ἡ μονὰς τῦ κατ' εἶδος Διαιρέτου Β, ὁσάκις εὑρίσκεται εἰς τὸν κατ' εἶδος Διαιρετέον Α.

Διὰ νὰ καταλάβωμεν ὅμως καλλιώτερα τὸν τρόπον τῆς Διαιρέσεως τῶν Ἑτεροειδῶν Ἀριθμῶν, ἂς προτάξωμεν τὰς ἐφεξῆς Κανόνας, πρὸς ὁδηγίαν καὶ τῆς πράξεως αὐτῆς.

Κανὼν Α'.

§. 69. Ὅταν ὁ μὲν Διαιρετέος εἶναι συγκείμενος ἐκ διαφόρων εἰδῶν, ὁ δὲ Διαιρέτης ἐξ ἑνὸς εἴδυς μόνον, πρῶτον, ἂς διαι-

διαιρεθῇ τὸ πρὸς ἀριστερὰν μεγαλήτερον εἶδος τοῦ Διαιρετέου Α, ἐπὶ τὸν Διαιρέτην Β· τὸ δὲ ἐκ τούτου Πηλίκον Π, ἂς γραφῇ εἰς τὸν διωρισμένον τόπον, καθὼς εἴπομεν εἰς τὸν πρῶτον Κανόνα τῆς Διαιρέσεως. (§. 58.)

Κανὼν Β'.

§. 70. Δεύτερον, ἀνίσως μείνῃ τι λείψανον ἀπὸ τὴν πρώτην Διαίρεσιν, ἂς ἀναλυθῇ εἰς τὴν μονάδα τοῦ πρὸς δεξιὰν ἀκολούθου εἴδους τοῦ Διαιρετέου· τὸ δὲ γινόμενον, συναφθὲν μὲ τὰς μονάδας τοῦ αὐτοῦ εἴδους, τὸ τούτων ἄθροισμα, διαιρεθήτω ἐπὶ τὸν Διαιρέτην. Καὶ τὸ ἐκ ταύτης τῆς δευτέρας Διαιρέσεως ἐκκύψαν Πηλίκον, γραφήτω ἐν δεξιᾷ τοῦ πρώτου Πηλίκου, χωριζόμενον ἀπὸ αὐτὸ μὲ τοῦτο τὸ σημεῖον, (+) ἢ μὲ δύω στίγματα. (:)

Κανὼν Γ'.

§. 71. Τρίτον, ἀνίσως δὲ πάλιν ἀπομείνῃ τι καὶ ἀπὸ τὴν δευτέραν Διαίρεσιν, ἂς ἀναλυθῇ καὶ αὐτό, εἰς τὴν μονάδα τοῦ πρὸς δεξιὰν αὐτοῦ τρίτου εἴδους τοῦ Διαιρετέου, τὸ δὲ γινόμενον ἂς συναφθῇ μὲ τὰς μονάδας τοῦ αὐτοῦ, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν, ἂς διαιρεθῇ ἐπὶ τὸν Διαιρέτην, καὶ τὸ ἐκ τούτου Πηλίκον, ἂς γραφῇ ἐν δεξιᾷ τοῦ δευτέρου Πηλίκου, χωριζόμενον ἀπ' αὐτοῦ μὲ τὸ σημεῖον, ὡς ἀνωτέρω εἴρηται· (§. 70.) καὶ οὕτω καθεξῆς, ἂν τύχῃ νὰ εἶναι περισσότερα τὰ εἴδη τοῦ Διαιρετέου.

Κανὼν Δ'.

§. 72. Τέταρτον, ὅταν δέ, τέλος πάντων, καὶ ὁ Διαιρετέος, καὶ ὁ Διαιρέτης εἶναι μὲν τοῦ αὐτοῦ εἴδους, αἱ μονάδες ὅμως τοῦ Πηλίκου, πρέπει νὰ εἶναι διάφοροι ἀπὸ τὰς μονάδας τοῦ Διαιρετέου, εἰς αὐτὴν τὴν περίστασιν, ἂς γίνεται ἡ Διαίρεσις, κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον.

Πρῶτον, ἂς ἀναλυθῇ ὅλος ὁ Διαιρετέος, καὶ ὁ Διαιρέτης, εἰς τὸ πλέον μικρότερον εἶδος τοῦ Διαιρετέου· καὶ ἂς διαιρεθῇ ὁ α. διὰ τοῦ β'. δηλ. ὁ Διαιρετέος, διὰ τοῦ Διαιρέτου, καὶ ἂς γραφῇ τὸ ἐξ αὐτῶν Πηλίκον εἰς τὸν διωρισμένον τόπον τοῦ Πηλίκου, ὡς εἴρηται. (§. 58.)

Κα-

Δεύτερον, ἐκεῖνο δὲ ὁποῦ ἤθελεν ἀπομείνῃ ἀπὸ αὐτὴν τὴν πρώτην Διαίρεσιν, ἂς πολλαπλασιασθῇ μὲ τὸν Ἀριθμὸν ἐκεῖνον, ὁποῦ φανερώνει πόσαις φοραῖς εὑρίσκεται ἡ μονὰς ἐκείνου τοῦ εἴδους ὁποῦ μέλλει νὰ γραφῇ εἰς δεύτερον Πηλίκον, εἰς τὴν μονάδα ἐκείνου τοῦ εἴδους ὁποῦ ἐγράφη εἰς τὸ πρῶτον Πηλίκον. Καὶ ἐκεῖνο ὁποῦ ἤθελε γενῇ, ἂς διαιρεθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν Διαιρέτην, καὶ τὸ δεύτερον αὐτὸ Πηλίκον, ἂς γραφῇ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ πρώτου Πηλίκου. (§. 70.)

Τρίτον, ἐκεῖνο δὲ πάλιν, ὁποῦ ἤθελεν ἀπομείνῃ καὶ ἀπὸ αὐτὴν τὴν δευτέραν Διαίρεσιν, ἂς πολλαπλασιασθῇ μὲ ἐκεῖνον τὸν Ἀριθμόν, ὁποῦ φανερώνει ποσάκις ἡ μονὰς τοῦ δευτέρου Πηλίκου, εὑρίσκεται εἰς ἐκεῖνο τὸ εἶδος ὁποῦ μέλλει νὰ ἀναχθῇ· τὸ δὲ γενόμενον, ἂς συναφθῇ μὲ τὰς μονάδας αὐτοῦ τοῦ τρίτου εἴδους, καὶ τὸ ἄθροισμα τούτων διαιρεθὲν ἐπὶ τὸν αὐτὸν Διαιρέτην, γραφήτω εἰς τὸν τρίτον τόπον τοῦ Πηλίκου, ὡς τρίτον μέρος· καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Αὐτοὶ οἱ τέσσαρες Κανόνες, εἶναι ἀρκετοὶ διὰ νὰ μᾶς ὁδηγήσουν εἰς τὴν πρᾶξιν τῆς Διαιρέσεως τῶν Ἑτεροειδῶν Ἀριθμῶν, εἰς κάθε περίστασιν ὁποῦ ἤθελε τύχῃ. Διὰ νὰ γνωρίσωμεν ὅμως πλέον καλήτερα, ἐκεῖνα ὁποῦ εἴπομεν εἰς τοὺς Κανόνας, ἂς προσθέσωμεν καί τινα Προβλήματα, καὶ τὰ κατάλληλα αὐτοῖς Ὑποδείγματα.

Πρόβλημα Α'.

§. 73. Μόνου τοῦ Διαιρετέου ἐκ διαφόρων εἰδῶν ὄντος συγκειμένου, καὶ τῶν τοῦ Πηλίκου μονάδων ὁμοειδῶν ὀφειλουσῶν εἶναι, ταῖς τοῦ Διαιρέτου μονάσι, τὴν Διαίρεσιν ἀπεργάσασθαι.

Ὑπόδειγμα Α'.

Διὰ νὰ μοιρασθῶσι 546 γρόσια, παρ. 25, καὶ λεπτὰ 2, εἰς 10 ἀνθρώπους, πόσα ἄρα τυχαίνει τὸν καθ' ἕνα;

Αὐ-

Λύσις.

Γρόσια,	Παράδ.	Λεπτά.	
A = 546 +	25 +	2	B = 10
54	265:	17	Π = 54 + 26 + 1 $\frac{7}{10}$.
006	26	10	
40	005 =	7	
240	3		
	15		
	2		
	17		

Τὰ 546 γρόσια, διαιρεθέντα ἐπὶ τὸν Διαιρέτην B=10 δίδȣσι Πηλίκον γρ. 54 (κατὰ τὸν Α'. Κανόνα §. 69.) ἂς γραφῶσι λοιπὸν τὰ 54 γρ. εἰς τὸν διωρισμένον τόπον τȣ̃ Πηλίκȣ. (κατὰ τὸν Α'. Κανόν. τῆς Διαιρέσεως. §. 58.) τὰ δὲ 6 γρόσ. ὁποὺ ἀπέμειναν, ἂς ἀναλυθῶσιν ἐπὶ τὸ πρὸς δεξιὰν εἶδος τȣ̃ Διαιρετέȣ Α, δηλ. εἰς παρ. πολλαπλασιασθέντα ȣ̃ν ἐπὶ τὸν 40, (κατὰ τὸν §. 26. (Ὑπόδειγμα Α'.) γίνονται παρ. 240· εἰς αὐτȣ̀ς πρόσθεσον ϗ τοὺς 25 παρ. ὁποὺ εἶναι εἰς τὸ πρὸς δεξιὰν δεύτερον εἶδος τȣ̃ Διαιρετέȣ Α, (κατὰ τὸν Β'. Κανόνα §. 70.) ϗ γίνονται 265. διαίρεσέ τȣς μὲ τὸν αὐτὸν Διαιρέτην 10, ϗ δίδȣσιν εἰς Πηλίκον παρ. 26, ϗ μένȣσι 5· ἂς γραφῶσι ϗ αὐτοὶ ἐν δεξιᾷ τȣ̃ πρώτȣ Πηλίκȣ, χωριζόμενοι τῶν γρ. μὲ τὸ σημεῖον (+) κατὰ τὸν αὐτὸν Β'. Κανόνα· οἱ δὲ 5 παράδες ὁπȣ̀ ἀπέμειναν ἀπὸ αὐτὴν τὴν δευτέραν Διαίρεσιν, ἂς ἀναλυθῶσιν εἰς τὴν μονάδα, τȣ̃ τρίτȣ εἴδȣς τȣ̃ Διαιρετέȣ, δηλ. τῶν λεπτῶν πολλαπλασιασθέντες μὲ τὸν 5, τὸ δὲ γινόμενον, συναφθὲν μὲ τὰς μονάδας τȣ̃ αὐτȣ̃ εἴδȣς, ἂς διαιρεθῇ τὸ τȣ́των ἄθροισμα, ἐπὶ τὸν Διαιρέτην 10, (κατὰ τὸν Γ'. Καν. §. 71.) ϗ δίδει Πηλίκον ἓν λεπτὸν, καὶ μένȣσιν 7· ἂς γραφῇ ϗ ἡ μονὰς αὕτη εἰς τὸ Πηλίκον, δεξιὰ τῶν παρ. χωριζομένη μὲ τὸ σημεῖον εἰς δὲ τὰ δεξιὰ τῆς μονάδος, ἂς τραβιχθῇ ὁριζόντειος γραμμὴ, ἐπάνωθεν τῆς ὁποίας, ἂς γραφῶσι τὰ 7 λεπτὰ ὁποὺ ἔμειναν, ὑποκάτω δὲ αὐτῆς ὁ 10 μεριστής· οἷον $\frac{7}{10}$. Κατὰ τὸν Δ'. Κανόνα τῆς Διαιρέσεως. (§. 61.) ὡς κᾀν τῷ Διαγράμματι φαίνεται.

Πόρισμα.

Πενταϰόσια σαραντάεξ γρόσια, ἄρα, ϗ παρ. 25, ϗ 2 λεπτὰ, νὰ μοιρασθȣ̃ν εἰς δέκα ἀνθρώπȣς, πέρνει ὁ καθεἷς πρὸς γρόσια 54, παράδες 26, ϗ λεπτὸν ἕν, ϗ μένȣσιν 7 λεπτά· ὃ ἦν τὸ ζητȣ́μενον.

Ὑπόδειγμα Β'.

Ἕνας ἄνθρωπος ἔδωκε γρόσια 15, ϗ παράδες 30, ϗ ἀγόρασεν 6 ὀκάδες πρᾶγμα· πόσον ἄρα τιμᾶται, ἢ κοστίζει, ἡ κάθε ὀκᾶ;

Λύσις.

Τȣ̃το τὸ Ὑπόδειγμα, μὲ τὸ νὰ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ἀνώτερον, ἂς γένῃ ἡ πρᾶξίς τȣ, καθὼς ἐκείνȣ, ϗ θέλει δώσῃ Πηλίκον γρόσια 2, ϗ παρ. 25· ὡς φαίνεται ἀντικρὺ εἰς τὸ Διάγραμμα.

Γρόσ.	Παράδ.	Γρόσ.	Παράδ.
A = 15 +	30	6	
12	120	Π = 2 + 25.	
= 3	150		
40	12		
120	= 30		
	30		
	00		

Πόρισμα.

Τιμᾶται ἄρα ἡ κάθε ὀκᾶ, πρὸς γρόσια 2, ϗ παράδες 25· ὃ ἦν τὸ ζητȣ́μενον. Καὶ εἰσὶν αἱ μονάδες τȣ̃ Πηλίκȣ, ὁμοειδεῖς μὲ τὰς τȣ̃ Διαιρετέȣ ϗ εἰς τὰ δύω Ὑποδείγματα· κατὰ τὸ Η'. Πρόβλημα (§. 73.) ὅπερ ἦν τὸ ἐπιταχθέν.

Πρόβλημα Θ'.

§. 74. Τȣ̃τε Διαιρετέȣ ϗ Διαιρέτȣ ὁμοειδῶν ὄντων, τῶν δὲ τȣ̃ Πηλίκȣ μονάδων ὀφειλȣσῶν Ἑτεροειδῶν εἶναι τοῦ Διαιρετέου, ποιῆσαι ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει τὴν Διαίρεσιν.

Ὑπόδειγμα Γ΄.

Ἕνας πραγματευτής, μὲ τὸ νὰ ἐγνώριζεν, ὅτι ὀλιγοστεύουν τὰ ἄσπρα του εἰς τὰ καθημερινὰ ἔξοδά του, καὶ θέλωντας νὰ μάθῃ εἰς πόσον καιρὸν ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ τὰ διωρισμένα του καθημερινὰ ἔξοδα, ἐμέτρησε τὰ ἄσπρα, ὁποῦ τοῦ ἀπέμειναν, καὶ εὗρεν γρόσια 88, καὶ παράδες 8, τὰ δὲ διωρισμένα του ἔξοδα ἦσαν πρὸς γρόσια 8, καὶ παράδες 16, εἰς πόσας ἄρα ἡμέρας θέλουν τὸν φθάσουσι τὰ ἄσπρα ὁποῦ ἔχει;

Λύσις.

Εἰς λύσιν τούτου, α. ἂς ἀναλυθῇ καὶ ὁ Διαιρετέος, καὶ ὁ Διαιρέτης εἰς τὸ μικρότερον εἶδος τῶν παράδων, (κατὰ τὸν Δ΄. Κανόνα, §. 72.) καὶ ἐκ μὲν τοῦ Διαιρετέου Α, γίνονται παρ. 3528· οἷον 88. 40 = 3520 + 8 = 3528. ἐκ δὲ τοῦ Διαιρέτου γίνονται παρ. 336· οἷον 8. 40 = 320 + 16 = 336. καὶ οὕτως ἔγιναν καὶ οἱ δύω ὁμοειδεῖς· δηλ. παρ. ἂς διαιρεθῇ ὁ Α΄. Ἀριθμὸς τῶν παράδων, διὰ τοῦ Β΄. δηλ. ὁ 3528, διὰ τοῦ 336· καὶ δίδει πρῶτον μὲν Πηλίκον ἡμέρας 10, καὶ ἐναπομένουσιν ἡμέραι 168· αἱ ὁποῖαι, πολλαπλασιασθεῖσαι ἐπὶ 24, (ἐπειδὴ τόσας ὥρας ἔχει τὸ ἡμερονύκτιον) γίνονται ὧραι 4032. αὗται δὲ διαιρεθεῖσαι διὰ τοῦ αὐτοῦ Διαιρέτου 336, δίδουσιν εἰς Πηλίκον ὥρας 12, μετ' οὐδενὸς καταλείπου· ἄρα θέλει ἔχῃ ὁ πραγματευτὴς νὰ ἐξοδεύσῃ ἡμέρας 10, καὶ ὥρας 12· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον. Καὶ εἰσὶν αἱ μονάδες τοῦ Πηλίκου Ἑτεροειδεῖς τοῦ Διαιρετέου, κατὰ τὸ ἐκτεθὲν Θ΄. Πρόβλημα· ὃ ἦν τὸ προσαχθέν.

Γρόσια,	Παράδ.	Γρόσια,	Παράδ.
88 +	8	8 +	16
40		Π 40	
3520 + 8 =		320 + 16 =	
Α = 3528		Β = 336	
336		Π = 10 $\frac{1}{2}\frac{2}{4}$.	
= 168			
24			
672			
336			
4032			
336			
= 672			
00			

Ὑπόδειγμα Δ΄.

Πόσας ἄρα λίτρας Καφφὲ, ἠμπορῶ νὰ ἀγοράσω, μὲ 17 λίτρας μονέδας, καὶ σολδία 9, καὶ δέκα δηνάρια, κατὰ ἀναλογίαν πρὸς 3 λίτρας μονέδας, τὴν κάθε λίτραν τοῦ Καφφέ;

Λύσις.

Αἱ μονάδες τοῦ Πηλίκου, θέλει εἶναι λίτραι ζυγίσματος, Ἑτεροειδεῖς δηλ. τῶν τοῦ Διαιρετέου λιτρῶν τῆς μονέδας, διὰ τοῦτο, ἂς ἀναλυθῶσιν αἱ 17 λίτραι τοῦ Διαιρετέου, καὶ τὰ 9 σολδία εἰς δηνάρια· ὁμοίως καὶ αἱ 3 λίτραι τοῦ Διαιρέτου. (κατὰ τὸν Δ΄. Κανόνα §. 72.) Λοιπὸν αἱ 17 λίτραι τοῦ Διαιρετέου, πολλαπλασιασθεῖσαι ἐπὶ 240 δηνάρια, (τόσον γὰρ ἰσοδυναμεῖ ἡ λίτρα τοῦ νομίσματος) παράγουσι δηνάρια 4080· ἀναλυθέντα δὲ καὶ τὰ 9 σολδία, κάμνουσι δηνάρια 108· (τὸ γὰρ σολ. ἴσον 12 δηναρίοις) προστεθέντα δὲ τούτοις καὶ τὰ 10 δηνάρια, γίνονται ὅλα τὰ τοῦ Διαιρετέου, δηνάρια 4198· καὶ αὐτὸς εἶναι ὁ Διαιρετέος Ἀριθμός. Ἀναλυθεῖσαι δὲ καὶ αἱ 3 λίτραι τοῦ σταθμοῦ τοῦ Διαιρέτου, παράγουσι δηνάρια 720· καὶ αὐτός ἐστιν ὁ Διαιρέτης. Καὶ οὕτως ἔγιναν καὶ οἱ δύω ὁμοειδεῖς. Λοιπὸν ἂς Διαιρεθοῦν τά, 4198 δηνάρια, μὲ τὰ 720, καὶ δίδουν Πηλίκον 5 λίτρας Καφφὲ, καὶ μένουσι

Λίτραι νομίσματος.	Σολδ.	Δηνάρ.	Λίτραι σταθμοῦ.
17 +	9 +	10	3
240			240
4080			720
108			
10	Β = 720		
Α = 4198	Π = 5 + 13 + 2 $\frac{1}{4}\frac{4}{5}$		
3600			
= 598			
16			
3588			
598			
Α = 9568			
720			
2368			
2160			
= 208 .	8 = 1664		
	1440		
	= 224		

598. Τὸ δεύτερον Πηλίκον (μετὰ τὰς λίτρας) θέλει εἶναι οὐγγίαις. Ἂς πολλαπλασιασθοῦν λοιπὸν αἱ 598 λίτραι ὁποῦ ἀπέμειναν μὲ τὸ 16, (ἐπειδὴ ἡ λίτρα τῆς Γαλλίας εἶναι ἴση μὲ 16 οὐγγίας) καὶ δίδει εἰς δεύτερον Πηλίκον 13 οὐγγίας, καὶ μένουν 208. Καὶ ἐπειδὴ τὸ τρίτον Πηλίκον θέλει εἶναι δραχμαὶ, ἂς πολλαπλασιασθῶσι αἱ 208 οὐγγίαις, μὲ 8, (ἡ γὰρ οὐγγία εἶναι ἴση μὲ 8 δραχμὰς) καὶ γίνονται δραχμαὶ 1664· διαιρούμεναι δὲ καὶ αὐταὶ ἐπὶ τὸν 720 Διαιρέτην, δίδουσιν εἰς Πηλίκον δραχμὰς 2, καὶ μένουσι 224 τῶν 720 $=\frac{14}{45}$.

Πόρισμα.

Ἄρα μὲ 17 λίτρας νομίσματος, σολδία 9, καὶ δινάρια 10, πρὸς 3 λίτρας νομίσματος τὴν κάθε λίτραν τοῦ Καφφὲ, θέλω ἀγοράσῃ 5 λίτρας, 13 οὐγγίας, 2 δραχμὰς καὶ $\frac{14}{45}$ τῆς δραχμῆς, ὡς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγγραμμα· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Πρόβλημα Ι'.

§. 75. Νὰ διαιρέσωμεν ἕνα Ἀριθμὸν, ἐξ Ἑτεροειδῶν, ἢ ὁμοειδῶν Ἀριθμῶν συνιστάμενον μὲ ἐξ Ἑτεροειδῶν, Ἀριθμῶν συγκείμενον.

Ὑπόδειγμα Ε'.

Ἓξ ὀργυιαὶ τόπου τινος, καὶ 5 πόδες, ἐξετιμήθησαν διὰ 47 λίτρας νομίσματος, καὶ 3 σολδία· πόσου ἄρα τιμᾶται ὁ κάθε Πούς;

Λύσις.

Α'. ἀνάλυσε τὰς ὀργυιὰς εἰς πόδας, πολλαπλασιάσας αὐτὰς μὲ 6, καὶ γίνονται 36· εἰς τοὺς ὁποίους προσθέτων καὶ τοὺς 5 πόδας, γίνονται 41·

Διαιρετέος Λίτραι	Σολδ.	Διαιρέτης Οργ.	Πόδ.
47	+ 3	6 +	5
41		6	
= 6.20 = 120 +		36 + 5 = 41	
3 = 123		Πηλίκον	
123		1 + 3	
000			

οἷον

οἷον 6. 6 = 36 + 5 = 41· καὶ αὐτὸς εἶναι ὁ Διαιρέτης. Διαίρεσε μὲ αὐτὸν τὰς 47 λίτρας νομίσματος, δηλ. τὴν τιμὴν τοῦ ξετιμηθέντος τόπου, καὶ μας δίδει πρῶτον Πηλίκον μίαν λίτραν νομίσματος, καὶ ἐναπομένουσιν 6 λίτραι· οἷον 47 : 41 = 1 + $\frac{6}{41}$. Πολλαπλασίασον τὰς ἐναπολειφθείσας 6 λίτρας, μὲ τὰ 20 σολδία ὁποῦ ἔχει ἡ κάθε λίτρα, καὶ γίνονται σολ. 120· πρόσθεσον εἰς αὐτὰ καὶ τὰ 3 σολδία, καὶ γίνονται 123· οἷον 6. 20 = 120 + 3 = 123. Διαίρεσέ τα μὲ τὸ 41, καὶ δίδουν Πηλίκον σολδία 3· οἷον 123. 41 = 3· καθὼς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα.

Ἄρα τιμᾶται ὁ κάθε Ποὺς τοῦ ῥηθέντος τόπου, μιᾶς λίτρας νομίσματος, καὶ 3 σολδίων· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Καὶ περὶ μὲν τῶν ἀκεραίων καὶ Ἑτεροειδῶν Ἀριθμῶν, ἀρκούντως εἴπομεν εἰς τὸ πρῶτον Βιβλίον, τώρα δὲ εἰς τὸ ἀκόλουθον δεύτερον Βιβλίον, ἂς εἴπωμεν περὶ Κλασμάτων, καὶ Κλασματικῶν Ἀριθμῶν, τὴν αὐτὴν ἀκολουθοῦντες τάξιν καὶ μέθοδον, ὁποῦ ἐμεταχειρίσθημεν εἰς ὅλον τὸ πρῶτον Βιβλίον, τὸν Θεὸν ἡγεμόνα τοῦ ἔργου πάντοτε ποιούμενοι.

Ὧδε μὲν ἤδη τίθημι τῆς πρώτης Βίβλου τέλος·
τῷ δ' ἐμ' ἐνδυναμώσαντι Θεῷ, δόξα καὶ κλέος.

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

Περὶ Κλασμάτων καὶ Κλασματικῶν Ἀριθμῶν, καὶ τί ἐστὶ Κλάσμα, καὶ πῶς πρέπει νὰ γράφεται.

Ἀφ᾿ οὗ εἴπομεν, καθ᾿ ὅσον ἦτον δυνατὸν συντόμως τε ἅμα καὶ καθαρῶς, περὶ ἀκεραίων, ὁμοειδῶν τε καὶ Ἑτεροειδῶν Ἀριθμῶν εἰς τὸ Α΄. Βιβλίον, ἀκόλουθον εἶναι διὰ νὰ εἴπωμεν μερικὰ, καὶ περὶ Κλασμάτων, καὶ Κλασματικῶν Ἀριθμῶν εἰς τὸ Β΄. τοῦτο Βιβλίον, διὰ νὰ ἠμπορῶσιν οἱ Μαθηταὶ καὶ οἱ ἀναγινώσκοντες νὰ τελειώνωσι μὲ εὐκολίαν, καὶ ἐκείνας τὰς Ἀριθμητικὰς πράξεις, ὁποῦ περιέχονται εἰς τοὺς Κεκλασμένους Ἀριθμοὺς, καὶ νὰ μὴ ἀπορῶσιν ὅταν ἤθελε τύχῃ νὰ κάμωσι κάμμιαν τοιαύτην πρᾶξιν.

Ὁρισμός.

§. 76. Κλασματικοὶ, ἢ Κεκλασμένοι Ἀριθμοὶ εἶναι ἐκεῖνοι, οἱ ὁποῖοι δὲν περιέχουσι μίαν ὁλόκληρον μονάδα, ἀλλὰ φανερώνουσιν, ἢ μέρος, ἢ μέρη τινὰ τῆς μονάδος, διὰ τοῦ Ἀριθμητοῦ, ὅς τις βαίνεται ἐπάνωθεν τῆς ὁριζοντείου γραμμῆς, καὶ τοῦ ἐξ ὑποθέσεως Παρονομαστοῦ, ὁποῦ βαίνεται ὑποκάτωθεν αὐτῆς.

Ὑπόθεσις.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ μονάδα εἶναι διῃρημένη εἰς δύω, ἢ τρία, ἢ τέσσαρα, ἢ καὶ περισσότερα μέρη, καὶ θέλεις νὰ πάρῃς ἀπὸ αὐτὰ τὰ μέρη, τὸ ἥμισυ, καθ᾿ ὑπόθεσιν, ἢ τὸ τρίτον, ἢ τὸ τέταρτον, ἢ ὅ,τι ἄλλο ἀπὸ τὰ μέρη ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ὑποτίθεται, ὅτι εἶναι διῃρημένη ἡ μονάς. Αὐτὸ λοι-

λοιπὸν τὸ μέρος, ὁποῦ θέλεις νὰ λάβῃς, ὀνομάζεται Κλάσμα, ὡσὰν ὁποῦ φανερώνει, ἢ μέρος, ἢ μέρη τινὰ τῆς ὑποτιθεμένης μονάδος.

Πόρισμα.

§. 77. Εἶναι ἄρα ἀναγκαῖον εἰς κάθε Κλάσμα, νὰ ἔχῃ δύω ὅρους· τὸν μὲν ἕνα ὑποκάτωθεν τῆς γραμμῆς, ὡσὰν ὁποῦ διορίζει τὰ μέρη ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι διῃρημένη ἡ μονάς· τὸν δὲ ἄλλον, ἐπάνωθεν τῆς γραμμῆς, ὡσὰν ὁποῦ φανερώνει τὰ μέρη ἐκεῖνα, ὁποῦ λαμβάνονται ἀπὸ τὴν μονάδα. Διὰ τοῦτο λοιπὸν, ὁ μὲν Ἀριθμὸς, ἢ χαρακτὴρ, ὁποῦ εὑρίσκεται ἐπάνωθεν τῆς γραμμῆς, ὀνομάζεται Ἀριθμητής· ὁ δὲ ὑποκάτωθεν αὐτῆς, (μὲ τὸ νὰ φανερώνῃ τὸ ὅλον διῃρημένον εἰς μέρη) Παρονομαστὴς καλεῖται. Παραδείγματος χάριν, τὸ μὲν ἥμισυ, οὕτω νὰ γράφηται ($\frac{1}{2}$) τὸ δὲ τριτημόριον, οὕτω ($\frac{1}{3}$) τὸ τεταρτημόριον δὲ, οὕτω ($\frac{1}{4}$) καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὁμοίως. Εἰς τὰ ὁποῖα Ὑποδείγματα, ὁ μὲν Παρονομαστὴς, φανερώνει, ὅτι ἡ μονὰς εἶναι διῃρημένη εἰς δύω, ἢ τρία, ἢ τέσσαρα μέρη· ὁ δὲ Ἀριθμητὴς φανερώνει, ὅτι λαμβάνομεν ἕνα, ἢ δύω, ἢ τρία, ἢ καὶ περισσότερα ἀπὸ αὐτὰ τὰ μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι διῃρημένη ἡ μονάς.

Ὁρισμός.

§. 78. Ἥμισυ μὲν ἐστι, τὸ κάθε ἕνα μέρος τῆς μονάδος ἐκείνης, ὁποῦ ἤθελε διαιρεθῇ εἰς δύω ἴσα μέρη. Τριτημόριον δὲ εἶναι, τὸ τρίτον μέρος τῆς μονάδος· καθὼς καὶ τὸ τεταρτημόριον, τὸ τέταρτον αὐτῆς μέρος, καὶ κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον λέγομεν καὶ δεκατημόριον, ἑκατοστημόριον, χιλιοστημόριον, καὶ ἑξῆς ὁμοίως ὀνομάζοντες φερωνύμως, μὲ τὸν Ἀριθμὸν ἐκεῖνον, εἰς τὸν ὁποῖον εἶναι διῃρημένη ἡ μονάς.

Σημείωσις.

Κάθε Ἀριθμὸν ὁποῦ προφέρομεν μεζοῦντες, ἢ τὸν προφέρομεν μὲ τὸν Ἀριθμητὴν ὀνομαζόμενον Ἀριθμὸν, ἢ μὲ τὸν πάντων λεγόμενον.

Ὁρισ-

Ὁρισμός.

§. 79. Ἀριθμητὸς λοιπὸν Ἀριθμὸς εἶναι ἐκεῖνος, τὸν ὁποῖον κοινῶς μεταχειριζόμεθα μετροῦντες· οἷον ἕνα, δύω, τρία, καὶ δέκα, εἴκοσι, ἑκατὸν, χίλια. Τακτὸς δὲ Ἀριθμὸς εἶναι ἐκεῖνος, ὁποῦ μεταχειριζόμεθα κατὰ τάξιν· οἷον πρῶτος, δεύτερος, τρίτος, καὶ δέκατος, εἰκοστὸς, ἑκατοστὸς, χιλιοστὸς, κτλ.

Ὑπόθεσις.

Ὁ Ἀριθμητὴς λοιπὸν, ἂς προφέρεται μὲ τὸν Ἀριθμητὸν Ἀριθμόν· ὁ δὲ Παρονομαστὴς, μὲ τὸν τακτόν· καὶ οἱ δύω ὅμως νὰ προφέρωνται μὲ τὸ οὐδέτερον γένος, διὰ νὰ προσυπακούωνται μέρη· οἷον δύω τρίτα, τρία τέταρτα, πέντε ἕκτα, κτλ.

Τὰ Κλάσματα, ἢ εἶναι ὁμογενῆ, ἢ ἑτερογενῆ.

Ὁρισμός.

§. 80. Κλάσματα ὁμογενῆ μὲν εἶναι ἐκεῖνα, ὁποῦ ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς Παρονομαστάς· ἐκεῖνα δὲ ὁποῦ ἔχουσιν ἀνομοίους, ἤγουν διαφόρους Παρονομαστὰς, λέγονται ἑτερογενῆ. Κάθε Κλάσμα, ἢ εἶναι κύριον, ἢ ἄκυρον, ἤγουν νόθον.

Ὁρισμός.

§. 81. Κλάσμα μὲν κύριον, ἢ γνήσιον εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸν Ἀριθμητήν του μικρότερον ἀπὸ τὸν Παρονομαστήν του· οἷον $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{12}$, κτλ. Νόθον δὲ, ἢ ἄκυρον Κλάσμα εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει μεγαλήτερον τὸν Ἀριθμητήν του ἀπὸ τὸν Παρονομαστήν του· οἷον $\frac{6}{5}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{20}{1}$, κτλ. Κάθε Κλάσμα πάλιν, ἢ εἶναι Ἁπλοῦν, ἢ Σύνθετον, ἢ τέλος πάντων, μικτόν.

Ὁρισμός.

§. 82. Καὶ Ἁπλοῦν μὲν Κλάσμα εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει Ἀριθμητὴν, καὶ Παρονομαστὴν μόνον. Σύνθετον δὲ εἶναι ἐκεῖνο, (τὸ ὁποῖον καὶ Κλάσμα Κλάσματος ὀνομάζεται) ὁποῦ σύγκειται ἀπὸ πολλὰ Κλάσματα· οἷον $\frac{2}{3}$ ἀπὸ $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{5}{6}$ ἀπὸ $\frac{3}{4}$ κτλ. Κλάσμα δὲ μικτὸν εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον σύγκειται ἀπότε ἀκέραιον Ἀριθμὸν, καὶ κεκλασμένον· οἷον $8\frac{3}{4}$, $3\frac{1}{3}$, $12\frac{5}{9}$, $1\frac{1}{4}$, $24\frac{7}{8}$, καὶ ἑξῆς ὁμοίως.

Θεώρημα Α'.

§. 83. Ὅταν καὶ οἱ δύω ὅροι τοῦ Κλάσματος, δηλ. καὶ ὁ Ἀριθμητὴς, καὶ ὁ Παρονομαστὴς, ἤθελαν πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ αὐτοῦ Ἀριθμοῦ, ἡ δύναμις τοῦ Κλάσματος μένει ἀμετακίνητος· ἤτοι γίνεται ἄλλο Κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν δύναμιν, μὲ αὐτὸ τὸ ἴδιον Κλάσμα ὁποῦ ἐπολλαπλασιάσθη, ἢ ἐδιαιρέθη· οἷον $\frac{2}{3} . 2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Καὶ $\frac{5}{8} . 8 \frac{40}{64} = \frac{5}{8}$. Καὶ, $\frac{2}{4} : 2 = \frac{1}{2}$. Καὶ, $\frac{1}{2} . 2 = \frac{2}{4}$. Καὶ, $\frac{8}{12} : 4 = \frac{2}{3}$. Καὶ $\frac{8}{12} . 6 = \frac{48}{72} = \frac{8}{12}$.

Πόρισμα.

Ἐκ τούτου ἄρα εἶναι φανερὸν, ὅτι διάφορα Κλάσματα, εἰ καὶ ἔχουσι μεγαλητέρους Παρονομαστὰς, καὶ Ἀριθμητὰς, ὅμως θέλει ἔχουσι τὴν αὐτὴν δύναμιν ἀμετακίνητον, ἀνίσως ἤθελεν εὑρεθῇ Ἀριθμὸς ὁποῦ νὰ διαιρῇ καὶ τὸν Ἀριθμητὴν, καὶ τὸν Παρονομαστήν· οἷον $\frac{3}{12} : 3 = \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$. Καὶ $\frac{4}{80} : 4 = \frac{1}{20} = \frac{4}{80}$.

Ὑπόθεσις.

Σημεῖον τοῦ μεγαλητέρου Κλάσματος ἂς εἶναι τοῦτο $>$ τοῦ δὲ μικροτέρου τοῦτο $<$. Φανερώνει δὲ, ὅτι εἶναι μεγαλήτερον ἐκεῖνο τὸ Κλάσμα, πρὸς τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἀνοικτὸν μέρος τοῦ σημείου· μικρότερον δὲ ἐκεῖνο, πρὸς τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ κλειστόν· οἷον $\frac{3}{5} > \frac{4}{7}$.

Θεώρημα Β'.

§. 84. Ἀνίσως μένωντας ὁ αὐτὸς Παρονομαστὴς, ὁ Ἀριθμητὴς ἤθελεν αὐξήσῃ, τὸ Κλάσμα γίνεται μεγαλήτερον ἀπὸ ὅ,τι ἦτον πρότερον· οἷον $\frac{3}{4} < \frac{6}{4}$. Εἰδὲ μένωντας ὁ αὐτὸς Ἀριθμητὴς, ὁ Παρονομαστὴς ἤθελεν αὐξήσῃ, τὸ Κλάσμα μικρύκρυώεται· οἷον $\frac{1}{4} > \frac{1}{6}$· ἐπειδὴ τὸ μὲν $\frac{1}{4}$ τοῦ γροσίου, καθ᾽ ὑπόθεσιν, εἶναι $=$ μὲ 30 παράδες· τὸ δὲ $\frac{1}{6}$, εἶναι ἴσον μὲ 20.

Πορίσματα.

Ἐὰν ἄρα δύω Κλάσματα ἔχωσι τὸν Παρονομαστὴν κοινὸν, ἤγουν τὸν ἴδιον, ἐκεῖνο τὸ Κλάσμα εἶναι μεγαλήτερον, τοῦ ὁποίου, ὁ Ἀριθμητὴς εἶναι μεγαλήτερος· οἷον $\frac{4}{5} > \frac{1}{5}$.

Ἐὰν ἄρα οἱ Ἀριθμηταὶ δύω Κλασμάτων, εἶναι οἱ αὐτοὶ, ἐκεῖνο τὸ Κλάσμα ὁποῦ ἔχει μικρότερον Παρονομαστὴν, εἶναι μεγαλήτερον, καὶ κατὰ τόσον περισσότερον, καθ᾽ ὅσον ὁ Παρονομαστὴς σμικρυώεται· οἷον $\frac{1}{5} > \frac{1}{7}$.

Ὁπόταν ἄρα καὶ ὁ Ἀριθμητὴς, καὶ ὁ Παρονομαστὴς ὁποιουδήποτε Κλάσματος, συναυξάνωσιν, ἢ σμικρυώονται, τότε τὸ Κλάσμα, ἢ συναυξανόμενον μὲ ἐκείνους, δηλ. τὸν Ἀριθμητὴν καὶ Παρονομαστὴν, ἢ συμμικρυνόμενον, δὲν λαμβάνει κἀμμίαν ἀλλοίωσιν, ἀλλὰ μένει τὸ ἴδιον. (§. 83.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

Περὶ Ἀναγωγῆς τῶν Κλασμάτων.

Ὁρισμός.

§. 85. Ἀναγωγὴ τῶν Κλασμάτων εἶναι, μία μεταμόρφωσις τινὸς Ποσότητος, ἥτις φαίνεται, ὅτι γίνεται εἰς αὐτὴν κάποια μεταβολὴ, δὲν εἶναι ὅμως οὐδεμία μεταβολή· Ἐπειδὴ καὶ ἡ δύναμις ἐκείνη, ὁποῦ εἶχε καὶ πρὶν τῆς μεταμορφώσεως, μένει ἡ αὐτὴ ἀμετακίνητος· κατὰ τὸ πρῶτον Θεώρημα. (§. 83.)

Πρόβλημα Α΄.

§. 86. Τὸ Κλάσμα, ὁποῦ ἤθελέ σοι δοθῇ, νὰ τὸ ἀνάξῃς εἰς ὅλον.

Λύ-

Λύσις.

Εἶναι φανερὸν, ὅτι δὲν ἠμποροῦμεν ἀπὸ Κλάσμα νὰ κάμωμεν ὁλόκληρον μονάδα, ἀνίσως καὶ αὐτὸ δὲν εἶναι ἴσον μὲ μίαν μονάδα. Καὶ λοιπὸν, ὅταν ἤθελεν ἀκολουθήσῃ ἕνα τοιοῦτον πρᾶγμα, ἂς θεωρῆται τὸ Κλάσμα, ὡσὰν μία σεσημειωμένη Διαίρεσις· οἷον $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Καὶ, $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. Καὶ, $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. καὶ, $\frac{4}{4} = 1$· καὶ τὰ ἑξῆς. Εἰδὲ καὶ ἤθελεν εἶναι μεγαλήτερος ὁ Ἀριθμητὴς, ἀπὸ τὸν Παρονομαστὴν, ἂς διαιρεθῇ ὁ Ἀριθμητὴς διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ, καὶ θέλεις ἔχῃ ἐκεῖνο ὁποῦ ζητεῖς· οἷον $\frac{6}{2} = 3$. Καὶ, $\frac{24}{6} = 4$. Καὶ, $\frac{15}{3} = 5$. Καὶ, $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$. Καὶ, $\frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$. κτλ.

Πρόβλημα Β΄.

§. 87. Τὸ μεγαλήτερον εἶδος μιᾶς δοθείσης Ποσότητος, νὰ τὸ φέρῃς εἰς μικρότερον εἶδος.

Λύσις.

Ἂς πολλαπλασιαθῇ ὁ Ἀριθμὸς τοῦ μεγαλητέρου εἴδους, ἐπὶ τὸν Ἀριθμὸν ἐκεῖνον, ὁποῦ φανερώνει πόσαις φοραῖς εὑρίσκεται ἡ μονὰς τοῦ μικροτέρου εἴδους, εἰς τὴν μονάδα τοῦ μεγαλητέρου, καὶ θέλεις ἔχῃ ἐκεῖνο, ὁποῦ ζητεῖς. Ἂς δοθῶσι, καθ᾽ ὑπόθεσιν, 6 γρόσια, διὰ νὰ τὰ φέρῃς εἰς τὸ μικρότερον εἶδος τῶν παράδων. Καὶ ἐπειδὴ τὸ γρόσιον ὑποτίθεται, ὅτι εἶναι ἴσον μὲ 40 παράδες, ἂς πολλαπλασιαθῇ ὁ 6 ἐπὶ τὸν 40, καὶ θέλεις φέρῃ τὸ μεγαλήτερον εἶδος τῶν γροσίων, εἰς τὸ εἶδος τῶν παράδων· οἷον $6 . 40 = 240$.

Πρόβλημα Γ΄.

§. 88. Τὸ μικρότερον εἶδος τῆς Ποσότητος, νὰ τὸ φέρῃς εἰς τὸ μεγαλήτερον εἶδος.

Λύσις.

Αὕτη ἡ πρᾶξις, μὲ τὸ νὰ εἶναι ἐναντία τῆς ἀνωτέρω, ζητεῖ Διαίρεσιν τοῦ Ἀριθμοῦ ὁποῦ φανερώνει πόσαις φοραῖς ἡ

7 μο-

μονὰς τοῦ μικροτέρου εἴδους, ἐμπεριέχεται εἰς τὴν μονάδα τοῦ μεγαλητέρου· οἷον 240 παρ. πόσα ἀργύρια κάμνουσιν; διαίρεσον τὰ 240, μὲ τὸ 40, ὁποῦ ἰσοδυναμοῦν μὲ ἕνα ἀργύριον, καὶ θέλεις ἔχη τὸ ζητούμενον· οἷον $\frac{240}{40} = 6$.

Πρόβλημα Δ΄.

§. 89. Ἀριθμὸν ὅλον, νὰ τὸν φέρῃς εἰς Κλάσμα.

Λύσις.

Ἂν εἶναι χρεία νὰ φέρωμεν τὸν ὅλον Ἀριθμὸν εἰς εἶδος Κλάσματος μόνον, ἂς τραβιχθῇ ὑποκάτωθεν αὐτοῦ μία ὁριζόντειος γραμμὴ, καὶ ἂς βαλθῇ ὑπ᾽ αὐτὴν μονὰς, καὶ ἔσται τὸ ζητούμενον· οἷον $\frac{6}{1}$. $\frac{20}{1}$. $\frac{1}{1}$. κτλ. Εἰδὲ ἤθελε ζητηθῇ νὰ φέρῃς ὅλον (ἤγουν ἀκέραιον) Ἀριθμὸν εἰς Κλάσμα, τοῦ ὁποίου Κλάσματος ἤθελεν εἶναι διωρισμένος ὁ Παρονομαστὴς, ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ δοθεὶς ὅλος Ἀριθμὸς ἐπὶ τὸν διωρισμένον Παρονομαστὴν, καὶ ἂς σημειωθῇ ἐκεῖνο ὁποῦ ἤθελε γένῃ, ὡσὰν νὰ ἐδιαιρεῖτο ἐπὶ τοῦ Παρονομαστοῦ. Ἂς δοθῇ, παραδείγματος χάριν, ὁ 4, ὅλος Ἀριθμὸς, διὰ νὰ τὸν φέρῃς εἰς Κλάσμα· ὁ δὲ Παρονομαστής του, ἂς εἶναι διωρισμένος ὁ 5· δηλ. νὰ φερθῇ εἰς πέμπτα. Ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ 4, ὅλος, ἐπὶ τὸν 5, διωρισθέντα Ἀριθμητήν· εἰς δὲ τὸ γενόμενον, ἂς βαλθῇ ὑποκάτωθεν τῆς γραμμῆς ὁ Παρονομαστὴς, καὶ ἔσται τὸ ζητούμενον· οἷον 4. $\frac{5}{5} = \frac{20}{5}$. 8. $\frac{4}{4} = \frac{32}{4}$.

Πρόβλημα Ε΄.

§. 90. Νὰ φέρῃς τὴν δύναμιν τοῦ Κλάσματος ὁποῦ ἤθελέ σοι δοθῇ, εἰς εἶδος μικρότερον.

Λύσις.

Ἂς διαιρεθῇ ὁ Ἀριθμητὴς διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ, καὶ θέλει φερθῇ τὸ δοθὲν Κλάσμα εἰς μικρότερον εἶδος· οἷον $\frac{26}{5} = 5\frac{1}{5}$. Καὶ, $\frac{28}{7} = 4$. Καὶ, $\frac{60}{12} = 5$· καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρό-

Πρόβλημα Ϛ΄.

§. 91. Νὰ φέρῃς τὸ Κλάσμα ὁποῦ ἤθελέ σοι δοθῇ, εἰς ἁπλουστέραν παράστασιν.

Λύσις.

Ἂς διαιρεθῇ καὶ ὁ Ἀριθμητὴς, καὶ ὁ Παρονομαστὴς τοῦ Κλάσματος, διὰ τοῦ αὐτοῦ Ἀριθμοῦ, καὶ θέλεις ἔχη ἐκεῖνο, ὁποῦ ζητεῖς· οἷον $\frac{4}{20}$: $4 = \frac{1}{5}$. Καὶ, $\frac{8}{32}$: $8 = \frac{1}{4}$. κτλ.

Πρόβλημα Ζ΄.

§. 92. Ὅταν ἤθελαν σοι δοθῶσι δύω Ἀριθμοὶ, νὰ εὕρῃς τὸν μέγιστον καὶ κοινὸν Διαιρέτην, καὶ τῶν δύω αὐτῶν Ἀριθμῶν.

Λύσις.

Διαίρεσον τὸν μεγαλήτερον Ἀριθμὸν, διὰ τοῦ μικροτέρου, καὶ μὲ ἐκεῖνο ὁποῦ ἤθελεν ἀπομείνῃ, διαίρεσον τὸν μικρότερον· καὶ οὕτω καθ᾽ ἑξῆς· καὶ ἀφ᾽ οὗ ἤθελες παραβλέψῃ ὅλα τὰ Πηλίκα, τὸν πλέον ὕστερον Διαιρέτην ὁποῦ εὑρήσεις, ὅτι διαιρεῖ καὶ τοὺς δύω Ἀριθμοὺς χωρὶς νὰ ἀπομείνῃ τίποτες, ἐκεῖνος εἶναι ὁ μέγιστος καὶ κοινὸς Διαιρέτης καὶ τῶν δύω δοθέντων σοι Ἀριθμῶν, δηλ. καὶ τοῦ Ἀριθμητοῦ, καὶ Παρονομαστοῦ· οἷον εἰς τὸ $\frac{8}{24}$ Κλάσμα, ὁ 8 διαιρεῖ καὶ τοὺς δύω, χωρὶς νὰ ἀπομείνῃ τίποτες· $\frac{8}{24}$: $= \frac{1}{3}$· λοιπὸν, ὁ μέγιστος καὶ κοινὸς Διαιρέτης τοῦ 8, καὶ 24, εἶναι ὁ 8. Εἰς δὲ τὸ $\frac{14}{35}$, διαίρεσον τὸν 35, διὰ 14, καὶ εὑρίσκεις ὑπόλοιπον τὸν 7. διὰ τοῦ 7 λοιπὸν, διαιρῶντας τὸν 14, εὑρίσκω τὸν 2. διαιρῶν δὲ καὶ τὸν 35, διὰ τοῦ αὐτοῦ 7, εὑρίσκω τὸν 5. ὁ 7 λοιπὸν, εἶναι ὁ μέγιστος καὶ κοινὸς Διαιρέτης καὶ τῶν δύω, δηλ. τοῦ 14, καὶ 35· οἷον $\frac{14}{35}$: $7 = \frac{2}{5}$.

Σημείωσις.

Εἶναι πολλὰ χρήσιμος ἡ λύσις αὐτοῦ τοῦ προβλήματος, διὰ νὰ γνωρίζεται τὸ Κλάσμα καλήτερα, ὁποῦ ἔχει μεγάλον

Ἀριθ-

Ἀριθμητὴν, καὶ Παρονομαστήν· οἷον τὸ μὲν $\frac{9}{247}$ Κλάσμα, εἶναι δυσνόητον· τὸ δὲ ὑπὸ τοῦ ἴσου μὲ αὐτὸ $\frac{1}{29}$, ὁποῦ εἶναι ὀλιγαλμένον ἀπὸ τὸ ἴδιον, εἶναι εὐκολονόητον· ὡσαύτως, τὸ μὲν ὑπὸ τοῦ $\frac{192}{448}$, εἶναι δυσκολονόητον· τὸ δὲ ὑπὸ τοῦ ἴσου αὐτῷ $\frac{3}{7}$, εἶναι εὐκολονόητον· οἷον $\frac{192}{448} = \frac{96}{224} = \frac{24}{56} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$. λοιπὸν, τὸ $\frac{192}{448}$, εὑρέθη ἴσον τῷ $\frac{3}{7}$.

Πρόβλημα Η'.

§. 93. Ὅταν ἤθελαν μας δοθῶσι, δύω, ἢ καὶ περισσότερα Κλάσματα, τῶν ὁποίων οἱ Παρονομασταὶ εἶναι διάφοροι, νὰ τὰ φέρωμεν εἰς τοὺς αὐτοὺς Παρονομαστὰς, ἤγουν νὰ εὕρωμεν ἄλλα δύω Κλάσματα, ἴσα μὲ ἐκεῖνα ὁποῦ μας ἐδόθησαν, καὶ νὰ ἔχωσι τοὺς αὐτοὺς Παρονομαστὰς καὶ τὰ δύω.

Λύσις.

Α'. Εἰ μὲν ἤθελαν εἶναι δύω μόνον τὰ δοθέντα Κλάσματα, ἂς πολλαπλασιαθῶσιν ἀναμεταξύτων, κατὰ σχῆμα χιαστὸν, δηλ. ὁ Ἀριθμητὴς τοῦ ἑνὸς, ἐπὶ τὸν Παρονομαστὴν τοῦ ἄλλου ἀμοιβαδὸν, καὶ ἐκεῖνο ὁποῦ γενῇ ἀπὸ τὸν καθ' ἕνα, εἶναι οἱ Ἀριθμηταί· ἂς βαλθῶσιν λοιπὸν ξεχωριστά. Ἔπειτα, ἂς πολλαπλασιασθῶσι, καὶ οἱ Παρονομασταὶ αὐτῶν ἀναμεταξύτων, καὶ ἐκεῖνο ὁποῦ ἤθελε γενῇ, εἶναι ὁ ζητούμενος κοινὸς Παρονομαστής· οἷον δοθέντων τῶν ἐν τῷ Διαγράμματι δύω Κλασμάτων, ἂς πολλαπλασιασθῶσι· καὶ ἐκ μὲν τοῦ 2 Ἀριθμητοῦ, ἐπὶ τὸν τοῦ ἄλλου Παρονομαστὴν 7, ἂς γενῇ ὁ 14· ἐκ δὲ τοῦ ἑτέρου Ἀριθμητοῦ 4, ἐπὶ τὸν τοῦ ἄλλου Παρονομαστὴν 3, ἂς γενῇ ὁ 12· πολλαπλασιασθέντων δὲ πρὸς ἀλλήλους καὶ τῶν Παρονομαστῶν τῶν δοθέντων, δηλ. τοῦ 7, ἐπὶ τὸν 3, γίνεται ὁ 21. Ἂς βαλθῇ λοιπὸν ὑποκάτω τῶν δύω Κλασμάτων ὁποῦ ἔγιναν, δηλ. τοῦ 14, καὶ 12, καὶ ἔγινε τὸ προσαχθὲν, καθὼς φαίνεται εἰς τὸ Διάγραμμα· οἷον $\frac{2}{3} . \frac{4}{7} = \frac{14}{21} + \frac{12}{21}$.

$$\frac{2}{3} . \frac{4}{7} = \qquad = \frac{14}{21} . \frac{12}{21}$$

Β'. Εἰ δὲ καὶ ἤθελαν εἶναι περισσότερα τὰ δοθέντα Κλάσματα, ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ τοῦ καθ' ἑνὸς Κλάσματος Ἀριθμητὴς, ἐπὶ τοὺς Παρονομαστὰς τῶν ἄλλων Κλασμάτων, πλὴν τοῦ ἑαυτοῦ του· καὶ ἐκεῖνα ὁποῦ γένωσιν, ἂς βαλθῶσιν χωριστὰ τὸ

τὰ

τὸ καθ' ἕνα ὑποκάτω τῶν δοθέντων, καὶ αὐτὰ θέλει εἶναι οἱ Ἀριθμηταί των. Καὶ ἐκ μὲν τοῦ 2 Ἀριθμητοῦ, ἐπὶ τοὺς Παρονομαστὰς τῶν ἄλλων, δηλ. τοῦ 6, καὶ 8, ἂς γενῇ ὁ 96· ἐκ δὲ τοῦ 5 Ἀριθμητοῦ τοῦ Β'. Κλάσματος, ἐπὶ τοὺς Παρονομαστὰς τῶν ἄλλων δύω, δηλ. τοῦ 3, καὶ 8, ἂς γενῇ ὁ 120 Ἀριθμητής· καὶ ἐκ τοῦ Ἀριθμητοῦ 3, τοῦ Γ'. Κλάσματος, ἐπὶ τοὺς Παρονομαστὰς τῶν ἄλλων δύω, δηλ. τοῦ 6, καὶ 3, ἂς γενῇ ὁ 54 Ἀριθμητής· ἂς πολλαπλασιασθῶσι, καὶ οἱ τρεῖς Παρονομασταὶ, ὁ ἕνας μὲ τὸν ἄλλον εἰς τὴν ἀράδαν, δηλ. ὁ 3, ἐπὶ τὸν 6, καὶ 8, καὶ ἂς γενῇ ὁ 144 κοινὸς Παρονομαστής. Ἂς βαλθῇ λοιπὸν ὑποκάτω εἰς τὸ καθε ἕνα Κλάσμα, καὶ αὐτὸς εἶναι ὁ ζητούμενος Παρονομαστής· ἔγινεν ἄρα τὸ προσαχθέν.

$$\frac{2}{3} . \frac{5}{6} . \frac{3}{8}$$

$$\frac{96}{144} : \frac{120}{144} : \frac{54}{144}$$

Πρόβλημα Θ'.

§. 94. Ὅταν μας δοθῶσι Κλάσματα Σύνθετα, (§. 82.) νὰ τὰ φέρωμεν εἰς Ἁπλᾶ Κλάσματα, καὶ εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν, (§. 93.) φυλαττομένης ἀμετακινήτου τῆς αὐτῶν δυνάμεως. (§. 85.)

Λύσις.

Ἂς δοθῶσι τὰ ἀντικρὺ δύω Σύνθετα Κλάσματα, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ τὰ φέρωμεν εἰς Ἁπλᾶ Κλάσματα, καὶ εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστήν. Ἀφ' οὗ βαλθῶσιν κατὰ σειρὰν, ποίησον οὕτω·

$$\frac{3}{6}, \frac{2}{3} + \frac{6}{8}, \frac{4}{6} \text{. Σύνθετα.}$$

$$\frac{6}{18} + \frac{24}{48} \text{. Ἁπλᾶ.}$$

$$\frac{288}{864} + \frac{432}{864} \text{ εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστήν.}$$

Α'. Ἂς πολλαπλασιαθῶσιν οἱ Ἀριθμηταὶ τοῦ α. Συνθέτου Κλάσματος ἀναμεταξύτων· ὁμοίως καὶ οἱ Παρονομασταί· ὡσαύτως δὲ καὶ οἱ τοῦ β'. Κλάσματος· καὶ ἐκ μὲν τοῦ α. πολλαπλασιαζόμενος ὁ 2, ἐπὶ τὸν 3, γίνεται ὁ 6 Ἀριθμητής· καὶ ἐκ τοῦ 3, ἐπὶ τὸν 6, ὁ 18 Παρονομαστής· ἐκ δὲ τοῦ β'. πολλαπλασιαθεὶς ὁ 6 Ἀριθμητὴς, ἐπὶ τὸν 4, γίνεται ὁ

24

24 Ἀριθμητὴς, καὶ ὁ ἐκ τῶν Παρονομαστῶν 6, ἐπὶ 8, ὁ 48 Παρονομαστής· καὶ οὕτως ἔγιναν Ἁπλᾶ Κλάσματα, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ τὰ φέρωμεν εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστήν.

Β΄. Ἂς πολλαπλασιασθῶσιν αὐτὰ τὰ δύω Ἁπλᾶ Κλάσματα ἀναμεταξύ των, κατὰ σχῆμα χιαστὸν, καθὼς ἑρμηνεύσαμεν εἰς τὴν λύσιν τοῦ Η. Προβλήματος, (§. 93.) καὶ θέλεις τὰ φέρη εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν, καθὼς φαίνεται εἰς τὸ Διάγραμμα. Ἔγινεν ἄρα τὸ προσταχθὲν, χωρὶς νὰ μετακινηθῇ ἡ δύναμίς των.

Γ΄. Θέλοντας δὲ, νὰ γνωρίσῃς τὴν δύναμίν των, φέρεται (§. 83.) εἰς ἐλαχίστους ὅρους, κατὰ τὸ Ϛ΄. Πρόβλημα. (§. 91.) καὶ τὸ μὲν $\frac{288}{864}$ Κλάσμα, θέλει γένη ἴσον με τὸ $\frac{1}{3}$ ἴσον μὲ τὸ Ἁπλοῦν $\frac{4}{12}$, τὸ δὲ $\frac{432}{864}$, θέλει γένη ἴσον μὲ τὸ $\frac{1}{2}$. ἴσον μὲ τὸ Ἁπλοῦν $\frac{24}{48}$. ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.

$$\frac{288}{864} = \frac{32}{96} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{432}{864} = \frac{54}{108} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Πρόβλημα Ι΄.

§. 95. Ὅταν ἤθελαν σοι δοθῶσι δύω Κλάσματα, νὰ εὕρῃς ποῖον ἀπὸ αὐτὰ εἶναι μεγαλήτερον.

Λύσις.

Εἰς λύσιν τούτου τοῦ Προβλήματος, Α΄. μὲν, φέρεται εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστήν· κατὰ τὸ Η΄. Πρόβλ. (§. 93.) Β΄. φέρεται εἰς ἐλαχίστους ὅρους, κατὰ τὸ Ζ΄. Πρόβλ. (§. 92.) καὶ θέλει γνωρισθῇ τὸ μεγαλήτερον, τοῦ μικροτέρου. Ἂς δοθῶσι λοιπὸν τὰ δύω Κλάσματα ὁποῦ εἶναι εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα, δηλ. τὰ, $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{5}{6}$· τὰ ὁποῖα φέροντάς τα εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν, γίνονται ἄλλα δύω, ἴσα μὲ αὐτά· τὰ, $\frac{18}{24}$, καὶ $\frac{20}{24}$· ἂς ἀφαιρεθῇ λοιπὸν ὁ Ἀριθμητὴς τοῦ Α΄. Κλάσματος 18, ἀπὸ τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ Β΄. 20, καὶ μένουσι $\frac{2}{24}$· διαίρεσον τὸν 2 Ἀριθμητὴν, καὶ τὸν 24 Παρονομαστὴν, μὲ τὰ 2, καὶ θέλει εἶναι τὸ Β΄. Κλάσμα μεγαλήτερον ἀπὸ τὸ Α΄. μὲ ἕνα δωδεκατημόριον, ὡς φαίνεται εἰς τὸ Διάγραμμα· ἔγινεν ἄρα τὸ προσταχθέν.

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} =$$

$$= \frac{18}{24} \quad \frac{20}{24} \quad \text{ὅθεν.}$$

$$20 - 18 = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}.$$

Πρόβλημα ΙΑ΄.

§. 96. Ὅταν ἤθελε μας δοθῇ κἀμμία Ποσότης μικτὴ, δηλ. ἀκέραιος Ἀριθμὸς μὲ Κλάσμα, νὰ τὸν φέρωμεν εἰς Ἁπλοῦν μόνον Κλάσμα.

Λύσις.

Διὰ νὰ φέρωμεν τὴν δοθεῖσαν ἀκέραιον καὶ Κλασματώδη Ποσότητα εἰς Ἁπλοῦν Κλάσμα, ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀκέραιος Ἀριθμὸς, ἐπὶ τὸν Παρονομαστὴν τοῦ Κλάσματός του, καὶ εἰς ἐκεῖνο ὁποῦ ἤθελε γένη, ἂς προστεθῇ καὶ ὁ Ἀριθμητής του. Ἂς δοθῶσιν οἱ ἀντικρὺ τρεῖς Ἀριθμοὶ μὲ τὰ Κλάσματά των, καὶ ἂς γένη καθὼς ἑρμηνεύσαμεν· καὶ ἐκ μὲν τοῦ $18\frac{2}{5}$, γίνεται τὸ $\frac{92}{5}$ Ἁπλοῦν Κλάσμα· ἐκ δὲ τοῦ $12\frac{5}{8}$, τὸ $\frac{101}{8}$· καὶ ἐκ τοῦ $18\frac{6}{8}$ τὸ $\frac{150}{8}$· ὡς ὁρᾶται ἐν τῷ Διαγράμματι· ἔγινεν ἄρα τὸ προσταχθέν.

$$18\tfrac{2}{5} = \tfrac{92}{5}.$$

$$\text{Καὶ, } 12\tfrac{5}{8} = \tfrac{101}{8}.$$

$$\text{Καὶ, } 18\tfrac{6}{8} = \tfrac{150}{8}.$$

Πρόβλημα ΙΒ.

§. 97. Ὅταν ἤθελαν μας δοθῶσι δύω, ἢ καὶ περισσότεροι Ἀριθμοὶ μὲ Κλάσματα, νὰ τοὺς φέρωμεν εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστήν.

Λύσις.

Ἂς δοθῶσιν οἱ ἀντικρὺ Α, καὶ Β, Ἀριθμοὶ, μὲ τὰ Κλάσματά των. Ἂς πολλαπλασιασθῇ λοιπὸν, ὁ Α, Ἀριθμὸς ἐπὶ τὸ Κλάσμα του, καὶ ἂς γένη τὸ Γ, Κλάσμα, κατὰ τὸ ΙΑ΄. Πρόβλημα. (§. 95.) Ὁμοίως δὲ, καὶ ὁ Β, καὶ ἂς γένη τὸ Δ, Κλάσμα, ὡς φαίνεται. Καὶ ἐπειδὴ αὐτὰ εἶναι ἑτερώνυμα, ἤγουν ἔχουσι διαφόρους Παρονομαστὰς,

$$A = 8\tfrac{2}{3} + B = 12\tfrac{5}{6}.$$

$$\Gamma = \frac{26}{3} + \Delta = \tfrac{77}{6}$$

$$E = \tfrac{156}{18} + Z = \tfrac{231}{18}$$

στὰς, ἂς φερθῶσιν εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν, κατὰ τὸ Η'. Πρόβλημα. (§. 93.) Καὶ ἂς γένῃ, ἐκ μὲν τοῦ Γ, τὸ Ε, Κλάσμα· ἐκ δὲ τοῦ Δ, τὸ Ζ· καθὼς φαίνεται εἰς τὸ Διάγραμμα.

Λέγω, ὅτι τὰ Ε, καὶ Ζ, Κλάσματα, εἶναι ἴσα μὲ τὸν Α, καὶ Β, Ἀριθμὸν, καὶ μὲ τὰ Κλάσματά των· ἐφέρθησαν δὲ, καὶ εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν· ὃ ἦν τὸ προσταττόμενον.

Δεῖξις Α'.

Ὅτι δὲ τὰ Ε, καὶ Ζ, Κλάσματα, εἶναι ἴσα μὲ τοὺς δοθέντας Ἀριθμοὺς Α, καὶ Β, καὶ μὲ τὰ Κλάσματά των, τὸ ἀποδείχνομεν. Ἐπειδὴ τὸ Γ, Κλάσμα, ἔγινεν ἴσον μὲ τὸν Α, Ἀριθμὸν, καὶ μὲ τὸ Κλάσμα του, κατὰ τὸ ΙΑ'. Πρόβλημα· (§. 95.) τὸ δὲ Δ, ἔγινεν ἴσον μὲ τὸν Β, Ἀριθμὸν, καὶ μὲ τὸ Κλάσμα του. Ἐκ δὲ τῶν Γ, καὶ Δ, Κλασμάτων, ἔγιναν τὰ Ε, καὶ Ζ, κατὰ τὸ Η'. Πρόβλημα. (§. 93.) Τὸ Ε, ἄρα εἶναι ἴσον μὲ τὸν Α, Ἀριθμὸν, καὶ μὲ τὸ Κλάσμα του. Τὸ δὲ Ζ, μὲ τὸν Β, Ἀριθμὸν, καὶ μὲ τὸ Κλάσμα του· ἔχουσι δὲ καὶ τὸν αὐτὸν Παρονομαστήν· οἱ ἄρα Α, καὶ Β, Ἀριθμοὶ, μὲ τὰ Κλάσματά των ἐφέρθησαν εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστήν, κατὰ τὸ προσταττόμενον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Δεῖξις Β'. κατ' ἄλλον τρόπον.

$$156 : 18 = 8\tfrac{12}{18} = \tfrac{2}{3}$$
$$231 : 18 = 12\tfrac{15}{18} = \tfrac{5}{6}.$$

Τὰ Ε, καὶ Ζ, Κλάσματα, ἂς Διαιρεθῇ τὸ καθὲ ἕνα ἐπὶ τὸν κοινὸν αὐτοῖς Παρονομαστὴν· καὶ ἀπὸ μὲν τὸ Ε, Κλάσμα, εὐγαίνει Πηλίκον ὁ 8 Ἀριθμὸς, καὶ μένουν $\tfrac{12}{18}$· τὰ φέρομεν εἰς ἐλαχίστους ὅρους, κατὰ τὸ ϛ'. Πρόβλημα, (§. 91.) καὶ γίνεται ἴσον μὲ $\tfrac{2}{3}$· ὅσος δηλ. ἦτον ὁ δοθεὶς Α, Ἀριθμὸς, καὶ τὸ Κλάσμα του· Διαιρεθεὶς δὲ καὶ ὁ Ζ, ἐπὶ τὸν αὐτὸν κοινὸν Παρονομαστὴν 18, δίδει Πηλίκον τὸν 12 Ἀριθμὸν, καὶ μένουν $\tfrac{15}{18}$. φερόμενα δὲ καὶ αὐτὰ εἰς ἐλαχίστους ὅρους, γίνονται ἴσα μὲ $\tfrac{5}{6}$. ἀλλὰ καὶ ὁ Ζ, εἶναι ἴσος μὲ τὸν Β, Ἀριθμὸν, καὶ μὲ τὸ Κλάσμα του, ἄρα ὀρθῶς ἡ πρᾶξις ἐγένετο, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Καὶ αὐτὰ μὲν ὁποῦ εἴπομεν, εἶναι ἀρκετά· τώρα δὲ, ἂς ἔλθωμεν καὶ εἰς τὰς πράξεις τῶν Κλασμάτων, καὶ Κλασματι-

κῶν

κῶν Ἀριθμῶν, διὰ τὰς ὁποίας ἐβάλθησαν προτήτερα, καὶ ἑρμηνεύθησαν τὰ ῥηθέντα δώδεκα Προβλήματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

Περὶ Προσθέσεως Κλασμάτων.

Ὁρισμός.

§. 98. Πρόσθεσις, ἢ Σύναψις τῶν Κλασμάτων, εἶναι συνάθροισις, τὸ ὀλιγώτερον, δύω Κεκλασμένων μονάδων, (ὅ,τι ἤθελεν εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ἀντὶ μονάδος) διὰ νὰ ἤθελε γνωρισθῇ, ἐκεῖνο τὸ Κεφάλαιον ὁποῦ συμποσοῦται ἀπὸ αὐτάς.

Ἀλλὰ πρὶν νὰ ἀρχίσωμεν τὴν Σύναψιν τῶν Κλασμάτων, μοὶ ἐφάνη, ὅτι εἶναι ἀναγκαῖον, νὰ βάλωμεν προτήτερα τοὺς Κανόνας ἐκείνους, ὁποῦ ἁρμόζουσιν εἰς αὐτὴν τὴν πρᾶξιν τῆς Συνάψεως· εἰς τοὺς ὁποίους Κανόνας ἀκολουθοῦντες ἐκεῖνοι, ὁποῦ κατὰ ἀλήθειαν ἀγαποῦσι νὰ μάθωσι τὴν Ἀριθμητικὴν Ἐπιστήμην, θέλουσιν ἠμπορέσῃ εὔκολα νὰ κάμνωσιν ἐκεῖνα ὁποῦ προστάζονται· (ἀνίσως ἤθελαν προτιμήσουν τοὺς κόπους, ἀπὸ τὴν ἀμέλειαν, καὶ κάθε ἄλλην ἡδυπάθειαν.)

Λοιπὸν, ὅταν θέλωμεν νὰ συνάψωμεν, δύω, ἢ τρία, ἢ καὶ περισσότερα Κλάσματα, καὶ, ἢ Ἁπλᾶ εἶναι αὐτὰ, ἢ Σύνθετα, ἢ τέλος πάντων, ἀνακατωμένα μὲ ἀκεραίους Ἀριθμοὺς, εἶναι ἀναγκαῖον νὰ προσέχωμεν εἰς τοὺς ἐφεξῆς Κανόνας.

Κανὼν Α'.

§. 99. Πρῶτον λοιπὸν ἀπὸ ὅλα, ἂς γραφῶσιν εἰς τὴν ἀράδαν ἐκεῖνα τὰ Κλάσματα, τὰ ὁποῖα μέλλουσι νὰ συναφθῶσι, καὶ εἴτε Ἁπλᾶ Κλάσματα ἤθελαν εἶναι αὐτὰ, ἢ καὶ ἀνακατωμένα μὲ ἀκεραίους Ἀριθμούς· ὄχι ὅμως νὰ γράφωνται κατὰ βάθος, δηλ. τὸ ἕνα ὑποκάτω τοῦ ἄλλου, καθὼς εἴπομεν εἰς τὴν Σύναψιν τῶν ἀκεραίων Ἀριθμῶν· (§. 25.) ἀλλὰ κατὰ πλάτος· οἷον $\tfrac{2}{3} + \tfrac{4}{7} + \tfrac{3}{4} + \tfrac{6}{9} + \tfrac{7}{10} + 12\tfrac{2}{3}$. κτλ.

Κα-

Κανὼν Β΄.

§. 100. Δεύτερον, καὶ εἰμὲν ἔχουσι τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν, ἤ. νὰ συνάψωμεν τοὺς Ἀριθμητὰς αὐτῶν, καὶ εἰς ἐκεῖνο ὁπου ἤθελε γένη, νὰ τραβίξωμεν ὑποκάτωθεν αὐτοῦ, μίαν ὁριζόντειον γραμμήν· (§. 18.) καὶ ὑποκάτω αὐτῆς, νὰ γράψωμεν τὸν κοινὸν Παρονομαστήν· (§. 77.) οἷον $\frac{4}{6}+\frac{5}{6}=\frac{9}{6}=1\frac{3}{6}$. Καὶ, $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}+\frac{[illegible]}{7}+\frac{[illegible]}{7}=\frac{[illegible]}{7}=3\frac{[illegible]}{7}$.

Κατ' αὐτὸν λοιπὸν τὸν τρόπον συνάπτονται τὰ Κλάσματα ἐκεῖνα, ὁπου ἔχουσι τὸν αὐτὸν Παρονομαστήν. Εἰδὲ καὶ ἤθελε τύχη νὰ ἔχωσι διαφόρους Παρονομαστὰς, θέλει εἶναι διάφορος καὶ ὁ τρόπος τῆς Συνάψεως αὐτῶν, τὸν ὁποῖον θέλομεν τὸν γνωρίση ἀπὸ τὸν ἐφεξῆς τρίτον Κανόνα.

Κανὼν Γ΄.

§. 101. Τρίτον, ὅταν λοιπὸν τὰ Κλάσματα ὁπου μέλλομεν νὰ συνάψωμεν ἔχωσι διαφόρους Παρονομαστὰς, πρῶτον νὰ τὰ φέρωμεν εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν· κατὰ τὸ Η΄. Πρόβλημα, (§. 93.) καὶ τὴν αὐτοῦ ἑρμηνείαν. Δεύτερον, νὰ συνάψωμεν τοὺς Ἀριθμητάς των, ὡς ἄνωθεν· καὶ τραβίξαντες ὑποκάτω αὐτῶν μίαν γραμμὴν, νὰ γράψωμεν ὑποκάτωθεν τῶν Ἀριθμητῶν, τὸν κοινὸν Παρονομαστήν. Τρίτον, νὰ διαιρέσωμεν τὸν Ἀριθμητὴν μὲ τὸν κοινὸν Παρονομαστήν, κατὰ τὸ Ε΄. Πρόβλημα· (§. 90.) ἐκεῖνο δὲ, ὁπου ἤθελεν ἀπομείνη, νὰ τὸ φέρωμεν εἰς ἐλαχίστους ὅρους· (κατὰ τὸ Ϛ΄. Πρόβλημα· §. 91.) τὸ δὲ Πηλίκον, θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον Κεφάλαιον τῶν δοθέντων Κλασμάτων, κατὰ τὸν Ὁρισμὸν τῆς Συνάψεως αὐτῶν. (§. 98.) ὅρα τὸ ἀντικρὺ Ὑπόδειγμα εἰς τὸ Διάγραμμα.

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=$$
$$\frac{18}{24}+\frac{20}{24}=\frac{38}{24}=1\frac{14}{24}=$$
$$=1\frac{7}{12}.$$

Κανὼν Δ΄.

§. 102. Ἀνίσως δὲ τὰ Κλάσματα ἐκεῖνα ὁπου μέλλουσι νὰ συναφθῶσιν, εἶναι Σύνθετα, (§. 82.) δηλ. Κλάσματα Κλασμάτων· πρῶτον, ἂς φερθῶσιν εἰς Ἁπλᾶ Κλάσματα· (§. 94.) δεύτερον, εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν, κατὰ τὴν ἑρμηνείαν τοῦ Θ΄. Προβλήματος· (§. 93.) τρίτον, ἂς συναφθῶσιν οἱ Ἀριθμηταὶ αὐτῶν, καὶ εἰς ἐκεῖνο ὁπου ἤθελε γένη, ἂς βαλθῇ ὑποκάτωθεν ὁ κοινὸς Παρονομαστής. Καὶ τὰ ἄλλα, ἂς γένωσι, καθὼς ἑρμηνεύσαμεν εἰς τὸν Β΄. Κανόνα. (§. 100.)

Κανὼν Ε΄.

§. 103. Ἐὰν δὲ τὰ Κλάσματα ὁπου μέλλομεν νὰ συνάψωμεν, εἶναι Σύμμικτα, (§. 82.) δηλ. ἀνακατωμένα μὲ ἀκεραίους Ἀριθμοὺς, πρῶτον, νὰ φέρωμεν καθ' ἕνα ἀπὸ τοὺς ἀκεραίους Ἀριθμοὺς, ἐπὶ τὸ ἴδιον Κλάσμα, ἀνίσως ἔχῃ· κατὰ τὸ ΙΑ΄. Πρόβλημα, καὶ τὴν αὐτοῦ ἑρμηνείαν. (§. 96.) Εἰδὲ καὶ δὲν ἔχει, ἐπὶ τὸ δοθὲν Κλάσμα· (κατὰ τὸ δ΄. Πρόβλημα. §. 87.) Δεύτερον, ἂς φερθῶσιν εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν, κατὰ τὸ ΙΒ΄. Πρόβλημα. (§. 96.) τρίτον, ἂς συναφθῶσι τότε οἱ Ἀριθμηταὶ αὐτῶν, καὶ ἂς βαλθῇ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα ὁ κοινὸς πάντων Παρονομαστής· ἢ ἐκεῖνο τὸ Κλάσμα ὁπου ἤθελε συσταθῇ, ἂς διαιρεθῇ ἐπὶ τὸν Παρονομαστήν του· τὸ δὲ Πηλίκον, θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον Κεφάλαιον τῶν δοθέντων Ἀριθμῶν, ὁμοῦ μὲ τὰ Κλάσματά των, κατὰ τὸν Ὁρισμόν τους. (§. 98.)

Κανὼν Ϛ΄.

§. 104. Ἕκτον δὲ καὶ τελευταῖον, ἀνίσως, ὕστερα ἀπὸ τὴν Διαίρεσιν τοῦ Ἀριθμητοῦ ἐπὶ τὸν Παρονομαστήν, ἤθελεν ἀπομείνη τὶ λείψανον, ἂς γραφῇ εἰς τὰ δεξιὰ μέρη τοῦ Πηλίκου, ὡς σεσημειωμένη Διαίρεσις, κατὰ τὸ Α΄. Πρόβλημα. (§. 85.) αὐτοῦ δὲ τοῦ λειψάνου, ἂς ζητηθῇ ὁ μέγιστος καὶ κοινὸς Διαιρέτης καὶ τῶν δύω, δηλ. τοῦ Ἀριθμητοῦ, καὶ Παρονομαστοῦ, κατὰ τὸ Ζ΄. Πρόβλημα· (§. 91.) καὶ θέλει ἔλθη τὸ ἐναπολειφθὲν Κλάσμα, εἰς ἁπλουστέραν ἔκθεσιν, κατὰ τὸ Ϛ΄. Πρόβλημα. (§. 90.)

Σχό-

Σχόλιον.

§. 105. Διὰ νὰ καταλάβῃς τὴν δύναμιν τοῦ ἐναπολειφθέντος Κλάσματος πλέον καλήτερα, πόσα δηλ. μέρη τοῦ ὅλου φανερώνει, μεταχειρίσου τὴν Μέθοδον τῶν Τριῶν. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Παρονομαστὴς σημαίνει ἕνα ἀκέραιον, (ἢ γρόσι ἤθελεν εἶναι αὐτὸ, ἢ τάλαρον, ἢ φιορίνιον, ἢ ὀργυιὰ, ἢ ὅ,τι ἄλλο πρᾶγμα) ἂς βαλθῇ εἰς τὸν πρῶτον ὅρον τῆς Μεθόδου τῶν Τριῶν· ἀντὶ δὲ διὰ δευτέρου ὅρου, βάλε τὸν Ἀριθμὸν ἐκεῖνον, εἰς τὸν ὁποῖον διαιρεῖται τὸ ὅλον ὑποτιθέμενον πρᾶγμα. Καὶ ἀντὶ τοῦ τρίτου ὅρου, βάλε τὸν Ἀριθμητὴν, ἐπειδὴ καὶ αὐτὸς φανερώνει τὰ μέρη ὁποῦ ἐπῆρεν ἀπὸ τὸ ὅλον· λοιπὸν ἀφ' οὗ βάλῃς τοὺς ῥηθέντας τρεῖς ὅρους κατὰ σειρὰν, πολλαπλασίασον τὸν β΄. ὅρον ἐπὶ τὸν γ΄. καὶ ἐκεῖνο ὁποῦ ἤθελε γένῃ, διαίρεσον αὐτὸ ἐπὶ τὸν α΄. ὅρον, καὶ τὸ Πηλίκον θέλει σοὶ δείξῃ, πόσα μέρη τοῦ ὅλου φανερώνει ὁ ἐναπολειφθεὶς Ἀριθμητὴς τοῦ Κλάσματος.

Καὶ οἱ μὲν ἐκτεθέντες Κανόνες περὶ τῆς Συνάψεως τῶν Κλασμάτων, εἰσὶν ἱκανοί· τώρα δὲ, ἂς προσθέσωμεν, καὶ μερικὰ Ὑποδείγματα, διὰ νὰ κάμωμεν φανερὰν μὲ τὴν πρᾶξιν, τὴν ὠφέλειαν τῶν Κανόνων.

Ὑποδείγματα τῆς Συνάψεως τῶν Κλασμάτων.

Ὑπόδειγμα Α΄.

Ἐπὶ τῆς Συνάψεως τῶν ὁμωνύμων.

§. 106. Ἕνας δεκατιστὴς ἐσυνάξε τὸ δέκατον τῶν διαφόρων γεννημάτων, καὶ καρπῶν· καὶ ἀπὸ μὲν ἕνα ἄνθρωπον ἔλαβε $\frac{2}{3}$ τοῦ μεδίμνου· ἀπὸ δὲ ἄλλον $\frac{1}{3}$· καὶ ἀπὸ ἄλλον $\frac{4}{3}$· ἔλαβε δὲ καὶ ἐξ ἑτέρου $\frac{5}{3}$. λοιπὸν θέλω νὰ μάθω πόσοι γίνονται αὐτοὶ οἱ μέδιμνοι ὁποῦ ἔλαβε.

Λύσις.

Πρῶτον, γράψε τὰ δοθέντα μέρη κατὰ σειράν. (κατὰ τὸν Α΄. Κα-

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{4}{3}+\frac{5}{3}=\frac{12}{3}=4.$$

να-

νόνα. §. 99.) Δεύτερον, καὶ ἐπειδὴ τὰ Κλάσματα αὐτὰ εἶναι ὁμογενῆ, δηλ. ἔχουσι τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν, σύναψον τοὺς Ἀριθμητὰς, καὶ τραβίξας μίαν ὁριζόντειον γραμμὴν, γράψε ὑποκάτω αὐτῆς τὸν κοινὸν Παρονομαστὴν, κατὰ τὸν Β΄. Κανόνα. (§. 100.) Τρίτον, διαίρεσον τὸν Ἀριθμητὴν μὲ τὸν Παρονομαστὴν, κατὰ τὸ Ε΄. Πρόβλημα, (§. 90.) καὶ τὸ Πηλίκον 4, εἶναι τὸ Κεφάλαιον ἐκείνων τῶν μεδίμνων ὁποῦ ἔλαβε, καθὼς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα. Ἔλαβεν ἄρα ὁ δεκατιστὴς ἀπὸ ὅλους, μεδίμνους 4· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Ὑπόδειγμα Β΄.

Ἐπὶ τῆς Συνάψεως τῶν Ἑτερωνύμων Κλασμάτων.

Ὁ αὐτὸς δεκατιστὴς, συνάζων τὸ δέκατον τοῦ κριθαρίου, ἔλαβεν ἀπὸ μὲν ἕνα γεωργὸν $\frac{4}{6}$ τοῦ μεδίμνου· ἀπὸ ἄλλον δὲ, $\frac{5}{8}$· καὶ ἀπὸ ἄλλον $\frac{7}{9}$. λοιπὸν θέλω νὰ μάθω καὶ ἐδῶ πόσους μεδίμνους κριθάρι ἐσυνάξε.

Λύσις.

$$\frac{4}{6}+\frac{5}{8}+\frac{7}{9}=\frac{288}{432}+\frac{270}{432}+\frac{336}{432}=\frac{894}{432}=2\frac{30}{432}=\frac{10}{144}=\frac{5}{72}.$$

Εἰς λύσιν τούτου, πρῶτον, ἂς βαλθῶσι κατὰ σειρὰν τὰ ὀνομασθέντα μέρη ὁποῦ ἔλαβε, κατὰ τὸν Α΄. Κανόνα. (§. 99.) Δεύτερον, καὶ ἐπειδὴ αὐτὰ τὰ μέρη ἔχουσι διαφόρους Παρονομαστὰς, φέρεται εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν, κατὰ τὸν Γ΄. Κανόνα. (§. 101.) καὶ θέλουσι γένη ἄλλα τρία Κλάσματα, ἰσοδύναμα μὲ τὰ δοθέντα, κατὰ τὸ Η΄. Πρόβλημα. (§. 93.) Τρίτον, ἂς συναφθῶσιν οἱ Ἀριθμηταὶ τῶν τριῶν τούτων ὁμωνύμων Κλασμάτων, καὶ ἂς γραφῇ ὑπ' αὐτοὺς ὁ κοινὸς Παρονομαστὴς, καὶ τὸ συσταθὲν Κλάσμα, θέλει εἶναι ἴσον μὲ ὅλα τὰ δοθέντα μέρη, κατὰ τὸ ΙΒ΄. Πρόβλημα. (§. 97.) Τέταρτον, καὶ ἐπειδὴ ὁ Ἀριθμητὴς τοῦ συσταθέντος Κλάσματος, εἶναι μεγαλήτερος ἀπὸ τὸν Παρονομαστήν του, ἂς διαιρεθῇ δι' αὐτοῦ, κατὰ τὸ Ε΄. Πρόβλημα. (§. 89.) Τὸ δὲ Πηλίκον,

θέ-

θέλει εἶναι ὁ ζητέμενος Ἀριθμὸς τῶν μεδίμνων, ἴσος $2 + \frac{10}{144}$. καθὼς φαίνεται εἰς τὸ Διάγραμμα. Αὐτὸ λοιπὸν τὸ μέρος ὁπῦ ἀπέμεινεν, ἂς γραφῇ εἰς τὰ δεξιὰ μέρη τῦ Πηλίκου, ὡς σεσημειωμένη Διαίρεσις, κατὰ τὸ Α'. Πρόβλημα. (§. 85.) ἔλαβεν ἄρα ὁ ῥηθεὶς δεκατιςὴς, 2 μεδίμνες κριθαρίου, καὶ 5 τῶν 72 τῦ μεδίμνυ· ὃ ἦν τὸ ζητέμενον.

Σημείωσις.

Ὁ μέδιμνος εἶναι 160 λίτρας ςαθμῦ· λοιπὸν θέλωντας νὰ μάθῃς πόσας λίτρας περιέχει τὸ ἀπολειφθὲν Κλάσμα, βάλετο εἰς τὴν Μέθοδον τῶν Τριῶν, καθὼς ἑρμηνεύσαμεν εἰς τὸ Σχόλιον, (§. 105.) καὶ θέλεις γνωρίσῃ τὴν δύναμίν του· καθὼς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα. Πολλαπλασιάσας οὖν τὸν Β'. ὅρον ἐπὶ τὸν Γ'. παράγεται ὁ 800, ὅςτις διαιρεθεὶς ἐπὶ τὸν Α'. ὅρον 72, δίδει Πηλίκον λίτρας 11, καὶ μένουσιν 8 τῶν 72· τὰ ὁποῖα φέρωντάς τα εἰς ἐλαχίστους ὅρους, γίνεται ἴσον μὲ $\frac{1}{9}$ τῆς λίτρας· ἔλαβεν ἄρα ὁ ῥηθεὶς μεδίμνους 2, λίτρας 11, καὶ $\frac{1}{9}$ τῆς λίτρας.

Α'. Β'. Γ'.

$$\div\ 72 : 160 :: 5 = \frac{800}{72 :} = 11 + \frac{8}{72} = \frac{1}{9}\ \text{τῆς λίτρας.}$$

Ὑπόδειγμα Γ'.

Ἐπὶ τῶν Συνθέτων Κλασμάτων.

Ἕνας Τελώνης, ἤγουν Κομερκιάρης, καθήμενος εἰς τὸ Τελώνιον, ἐσύναζε τὸ αὐθεντικὸν δίκαιον· καὶ ἐπειδὴ ἀπερνοῦσαν δύω Πραγματευταὶ, ὁ ἕνας μὲ κρασὶ, καὶ ὁ ἄλλος μὲ μέλι, ἔλαβεν εἰς δίκαιον τοῦ Τελωνίου, ἀπὸ μὲν τὸν α'. $\frac{2}{3}$, τῶν $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀργυρίου· ἀπὸ δὲ τὸν β'. ἔλαβε $\frac{2}{6}$, τῶν $\frac{4}{8}$ τοῦ ἀργυρίου· λοιπὸν θέλω νὰ μάθω, πόσα ἔλαβεν ἀπὸ τοὺς δύω.

Λύσις.

Πρῶτον, γράψε κατὰ σειρὰν τὰ ὀνομασθέντα Σύνθετα Κλάσματα, κατὰ τὸν Α'. Κανόνα, (§. 99.) καθὼς φαίνονται εἰς

εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα. Δεύτερον, ἐπειδὴ καὶ εἶναι Σύνθετα Κλάσματα, φέρετα εἰς Ἁπλᾶ. Τρίτον, φέρετα εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαςὴν, κατὰ τὸ Η'. Πρόβλημα. (§. 93.) Τέταρτον, σύναψον τοὺς Ἀριθμητὰς, καὶ εἰς ἐκεῖνο ὁπῦ γένῃ, βάλε ὑποκάτω τὸν κοινὸν Παρονομαςτήν. Καὶ ἐπειδὴ αὐτὸ τὸ συςαθὲν Κλάσμα $\frac{384}{576}$, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ διαιρεθῇ, μὲ τὸ νὰ εἶναι μεγαλήτερος ὁ ἀντὶ Διαιρέτου λαμβανόμενος Παρονομαςὴς, τῦ ἀντὶ Διαιρετέυ εἰλημμένυ Ἀριθμητῦ, φέρετο εἰς ἐλαχίςυς ὅρυς, κατὰ τὸ Ϛ'. Πρόβλημα· (§. 91.) καθὼς φαίνεται εἰς τὸ Διάγραμμα. $\frac{384}{576} = \frac{192}{288} = \frac{32}{48} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$. Ἔλαβεν ἄρα ἀπὸ αὐτοὺς δύω τρίτα τοῦ ἀργυρίου = παρ. $26\frac{2}{3}$· ὃ ἦν τὸ ζητέμενον.

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4} + \frac{2}{6}, \frac{4}{8}\ \text{σύνθετα.}$$
$$\frac{6}{12} + \frac{8}{48} = \frac{288}{576} + \frac{96}{576} =$$
$$= \frac{384}{576} = \frac{32}{48} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}.$$

Ὑπόδειγμα Δ'.

Ἐπὶ τῆς Συνάψεως τῶν Συμμίκτων, μετὰ ἀκεραίων Κλασμάτων.

Ὁ ἴδιος Κομερκιάρης, καθήμενος εἰς τὸ Τελώνιόν τυ, ἀπερνῦσαν τρεῖς Πραγματευταὶ, μὲ διάφορα εἴδη πραγματειῶν. Καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ α'. ἔλαβε διὰ δίκαιον, ἀργύρια $12\frac{2}{3}$· ἀπὸ δὲ τῦ β'. $6\frac{4}{6}$. Καὶ ἀπὸ τῦ γ'. ἀργύρια $2\frac{6}{8}$· θέλω ἦν νὰ μάθω πόσα ἔλαβεν καὶ ἀπὸ τὺς τρεῖς Πραγματευτάς.

Λύσις.

Εἰς λύσιν τούτου, πρῶτον βάλε κατὰ σειρὰν, κατὰ τὴν συνήθειαν, τὺς δοθέντας Ἀριθμοὺς, μὲ τὰ Κλάσματά των, ὡς ἀντικρὺ φαίνονται. Δεύτερον, ἂς μεταφερθῇ ὁ καθε Ἀριθμὸς ἐπὶ τὸ ἰδιόν του Κλάσμα, κατὰ τὸν Ε'. Κανόνα, καὶ τὸ ΙΑ'. Πρόβλημα. (§. 102. καὶ 96.) καὶ ἂς γένωσιν ἄλλα τρία Κλάσματα μό-

$$12\frac{2}{3} + 6\frac{4}{6} + 2\frac{6}{8} =$$
$$= \frac{38}{3} + \frac{40}{6} + \frac{22}{8} =$$
$$= \frac{1824}{144} + \frac{960}{144} + \frac{396}{144} =$$
$$= \frac{3180}{144 :} = 22\frac{12}{144} = \frac{1}{12}$$

μόνον, ἴσα μὲ τοὺς Ἀριθμοὺς, καὶ μὲ τὰ Κλάσματά των. Τρίτον, φέρετα εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν, κατὰ τὸ ΙΒ'. Πρόβλημα. (§. 97.) Τέταρτον, σύναψον τοὺς Ἀριθμητάς των, καὶ βάλε ὑπὸ τὸ γινόμενον τὸν κοινὸν αὐτοῖς Παρονομαστὴν, καὶ διαίρεσον τὸν Ἀριθμητὴν, μὲ τὸν Παρονομαστήν του· τὸ δὲ Πηλίκον, θέλει εἶναι 22 ἀργυρίων, καὶ $\frac{1}{12}$ τοῦ ἀργυρίου, καθὼς φαίνεται εἰς τὸ Διάγραμμα· ἔλαβον ἄρα ἀπὸ τοὺς τρεῖς ἀργύρια 22, καὶ ἕνα δωδέκατον τοῦ ἀργυρίου.

Πόρισμα.

Ἄρα εἶναι φανερὸν ἀπὸ ἐκεῖνα ὁποῦ εἴπομεν περὶ τῆς Συνάψεως τῶν Κλασμάτων, ὅτι ὅταν μεταχειρίζηται τινὰς μὲ προσοχὴν καὶ ἐπιμέλειαν τοὺς Κανόνας, καὶ τοὺς διαφόρους τρόπους, ὁποῦ ἑρμηνεύσαμεν, θέλει δυνηθῇ νὰ λύῃ εὐκόλως, καὶ ἄλλα περισσότερα Προβλήματα ἀπὸ ἐκεῖνα ὁποῦ εἴπομεν· ἀλλὰ πρὸς γύμνασιν τῶν πρωτοπείρων, ἂς βάλωμεν καὶ μερικὰ Ὑποδείγματα, χωρὶς τὴν ἑρμηνείαν τῆς λύσεως αὐτῶν· τὰ ὁποῖα πρέπει ὁ Διδάσκαλος νὰ τὰ προβάλλῃ εἰς τοὺς Μαθητὰς νὰ τὰ λύωσι, καὶ νὰ τὰ προσαρμόζουν εἰς τὰ Προβλήματα, καὶ εἰς τοὺς ἐκτεθέντας Κανόνας.

Διά-

Διάφορα Ὑποδείγματα τῆς Συνάψεως τῶν Κλασμάτων.

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\frac{4}{4}=\frac{10}{4:}=2\frac{1}{2}$$

$$\frac{4}{5}+\frac{3}{5}+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{10}{5:}=2$$

$$\frac{6}{8}+\frac{3}{8}+\frac{5}{8}+\frac{7}{8}=\frac{21}{8:}=2\frac{5}{8}$$

$$\frac{3}{12}+\frac{4}{12}+\frac{6}{12}+\frac{8}{12}=\frac{21}{12:}=1\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{4}{6}+\frac{5}{8}=\frac{32}{48}+\frac{30}{48}=\frac{62}{48:}=1\frac{14}{48:}=\frac{7}{24}$$

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{48}{72}+\frac{54}{72}+\frac{60}{72}=\frac{162}{72:}=2\frac{18}{72:}=\frac{1}{4}$$

("Ορα τὸν Β'. Κανόνα. §. 100.)

$$\frac{6}{8}+\frac{5}{6}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}=\frac{1152}{1536}+\frac{1280}{1536}+\frac{1152}{1536}+\frac{1344}{1536}=\frac{4928}{1536:}=3\frac{320}{1536}=\frac{5}{24}$$

("Ορα τὸν Γ'. Κανόνα. §. 101.)

$$\frac{2}{3},\frac{3}{4}+\frac{5}{6},\frac{4}{5}==\frac{6}{12}+\frac{20}{30}==\frac{180}{360}+\frac{240}{360}==\frac{420}{360:}=1\frac{60}{300}=\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{2},\frac{3}{4}+\frac{5}{6},\frac{2}{3}=\frac{3}{8}+\frac{10}{18}==\frac{54}{144}+\frac{80}{144}==\frac{134}{144}=\frac{67}{72}$$

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3}+\frac{3}{4},\frac{6}{8}=\frac{2}{6}+\frac{18}{32}==\frac{64}{192}+\frac{108}{192}==\frac{172}{192}=\frac{43}{48}$$

("Ορα τὸν Δ'. Κανόνα. §. 102.)

$\frac{5}{8}, \frac{4}{6} + \frac{2}{4}, \frac{2}{3} =$	$5\frac{2}{4} + \frac{2}{3} =$	$6\frac{1}{3} + 8\frac{3}{5} =$	$6\frac{1}{3} + 5\frac{2}{4} + 7\frac{5}{6} =$
$= \frac{20}{48} + \frac{4}{12} =$	$\frac{22}{4} + \frac{2}{3} =$	$\frac{19}{3} + \frac{43}{5} =$	$\frac{19}{3} + \frac{22}{4} + \frac{47}{6} =$
$= \frac{240}{576} + \frac{192}{576} =$	$\frac{66}{12} + \frac{8}{12} =$	$\frac{95}{15} + \frac{129}{15} =$	$= \frac{456}{72} + \frac{396}{72} +$
$= \frac{432}{576} = \frac{72}{96} =$	$= \frac{74}{12}: = 6\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$	$= \frac{224}{15}: = 14\frac{14}{15}$	$+ \frac{564}{72} = \frac{1416}{72}: =$
$= \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$			$= 19\frac{48}{72} = \frac{2}{3}.$

("Ορα τὸν Ε'. Κανόνα. §. 103.)

Καὶ περὶ μὲν τῆς Συνάψεως τῶν Κλασμάτων, καὶ Κλασματικῶν Ἀριθμῶν, ἱκανὰ καὶ ταῦτα· νῦν δὲ περὶ τῆς τούτων Ἀφαιρέσεως εἴπωμεν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

Περὶ Ἀφαιρέσεως τῶν Κλασμάτων.

Ὁρισμός.

§. 107. Ἡ Ἀφαίρεσις τῶν Κλασμάτων, εἶναι εὕρεσις Περισσότητος, ἢ ὑπεροχῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν ὑπερέχει τὸ μεγαλήτερον Κλάσμα τοῦ μικροτέρου, διὰ νὰ γνωρισθῇ ἡ μεταξὺ αὐτῶν Διαφορά.

Πρόβλημα.

Ὅταν μας δοθῶσι δύω Κλάσματα, νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ μικρότερον ἀπὸ τὸ μεγαλήτερον· ἤγουν νὰ εὕρωμεν τὴν μεταξὺ αὐτῶν Διαφοράν.

Ὑπόθεσις.

Εἰς τὴν Ἀφαίρεσιν τῶν Κλασμάτων, ἐκεῖνο τὸ μέρος ὁποῦ ἀφαιρεῖται, καλεῖται Ἀφαιρετέον, καὶ τὸ σημειώνομεν μὲ τὸ σημεῖον

μεῖον

μεῖον τῆς Ἀφαιρέσεως. (—) Ἐκεῖνο δὲ, ἀπὸ τὸ ὁποῖον γίνεται ἡ Ἀφαίρεσις, ὀνομάζεται Μειωτέον, καὶ τὸ σημειώνομεν μὲ τὸ σημεῖον τῆς ὑπάρξεως. (+) Καὶ ἐκεῖνο ὁποῦ ἀπομένει, λέγεται Διαφορὰ, ἢ ὑπεροχὴ, καὶ τὸ σημειώνομεν μὲ τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος (=) Δ.

Σημείωσις.

Τὰ Κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἀκολουθοῦσιν εἰς τὰς Ἀριθμητικὰς πράξεις, εἶναι τριῶν λογιῶν· δηλ. ἢ εἶναι Ἁπλᾶ Κλάσματα, ἢ Σύνθετα, ἢ τέλος πάντων Σύμμικτα. (§. 82.)

Ἔτι πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν, ὅτι τὰ Κλάσματα ἐκεῖνα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα μέλλομεν νὰ κάμωμεν τὴν Ἀφαίρεσιν, πρέπει, ἢ νὰ εἶναι, ἢ νὰ γίνωνται ὁμογενῆ· δηλ. νὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν Παρονομαστήν· ἐπειδὴ κατ' ἄλλον τρόπον, δὲν ἠμπορεῖ νὰ γένῃ Ἀφαίρεσις.

Διὰ νὰ γένῃ ὅμως, ἡ διδασκαλία τῆς Ἀφαιρέσεως τῶν Κλασμάτων, κατὰ τάξιν, καὶ διὰ νὰ καταλάβωμεν καλλιώτερα τοὺς διαφόρους τρόπους, καὶ τῆς πράξεως ταύτης, ἂς προτάξωμεν καὶ ἐδῶ μερικοὺς Κανόνας, εἰς τοὺς ὁποίους ἀκολουθοῦντες, θέλομεν ἐπιτύχῃ τοῦ σκοποῦ.

Κανὼν Α'.

§. 108. Πρῶτον, ἀπὸ ὅλα λοιπὸν, ἂς βαλθῶσι κατὰ σειρὰν τὰ Κλάσματα ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα μέλλουσι νὰ ἀφαιρεθῶσι, καθὼς εἴπομεν καὶ εἰς τὴν Πρόθεσιν αὐτῶν· (§. 98.) καὶ νὰ βαίνηται πρῶτον τὸ Μειωτέον, μὲ τὸ σημεῖόν του· καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ, νὰ βαίνηται τὸ Ἀφαιρετέον, πάλιν μὲ τὸ σημεῖόν του· καὶ εἰς ἐκεῖνο, ὁποῦ ἤθελεν ἀπομείνῃ ἀπὸ τὴν Ἀφαίρεσιν, νὰ βαίνηται τὸ σημεῖον τοῦτο (=) τῆς ἰσότητος, διὰ νὰ δείχνῃ τὴν Διαφορὰν, ἢ ὑπεροχήν.

Κανὼν Β'.

§. 109. Δεύτερον, καὶ εἰμὴ ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς Παρονομαστὰς καὶ τὰ δύω Κλάσματα, ἂς ἀφαιρεθῇ ὁ Ἀριθμητὴς τοῦ Μικροτέρου Κλάσματος, ἀπὸ τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ μεγαλητέρου, καὶ εἰς ἐκεῖνο ὁποῦ ἤθελεν ἀπομείνῃ, δηλ. εἰς τὴν Διαφορὰν, ἂς γρά-

βιβίζηται μία γραμμὴ, καὶ ἂς βάνηται ἡ μὲν Διαφορὰ, ἐπάνωθεν αὐτῆς· ὁ δὲ κοινὸς Παρονομαστὴς, ὑποκάτωθεν· καὶ τὸ Κλάσμα ὅπου ἤθελε συσταθῇ, εἶναι ἡ ζητουμένη Διαφορὰ, κατὰ τὴν ὁποίαν, διαφέρει τὸ μεγαλήτερον Κλάσμα τοῦ μικροτέρου, κατὰ τὸν Ὁρισμὸν τῆς Ἀφαιρέσεως. (§. 107.)

Κανὼν Γ'.

§. 110. Τρίτον, εἰδὲ καὶ ἤθελε τύχη νὰ ἔχωσι τὰ δοθέντα Κλάσματα διαφόρους Παρονομαστάς, Α'. νὰ τὰ φέρῃς εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν, κατὰ τὸ Η'. Πρόβλημα, καὶ τὴν ἐκεῖ ἑρμηνείαν. (§. 93.) Ἔπειτα, ἂς ἀφαιρεθῇ ὁ Ἀριθμητὴς τοῦ μικροτέρου Κλάσματος, ἀπὸ τὸν τοῦ μεγαλητέρου· καὶ τ' ἄλλα, ἂς γίνωνται καθὼς εἴπομεν εἰς τὸν Β'. Κανόνα. (§. 109.) Πρέπει ὅμως, τὸ Μειωτέον Κλάσμα, νὰ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ Ἀφαιρετέου, ὁ δὲ Ἀφαιρετέος, νὰ εἶναι, ἢ νὰ γένῃ ὁμογενὴς μὲ τὸν Μειωτέον· δηλ. νὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν Παρονομαστήν.

Κανὼν Δ'.

§. 111. Τέταρτον, ἀνίσως τὰ Κλάσματα ὅπου μέλλουν νὰ Ἀφαιρεθῶσιν, ἤθελε τύχη νὰ εἶναι Σύνθετα, ἤγ. Κλάσματα Κλασμάτων, (§. 82.) α'. ἂς φερθῶσιν εἰς Ἁπλᾶ Κλάσματα, κατὰ τὸ Θ'. Πρόβλημα. (§. 94.) β'. Ἂς φερθῶσιν εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν, κατὰ τὸ Η'. Πρόβλημα. (§. 93.) γ'. Ἂς ἀφαιρεθῇ ὁ Ἀριθμητὴς τοῦ μικροτέρου Κλάσματος, ἀπὸ τὸν τοῦ μεγαλητέρου· καὶ τ' ἄλλα, ἂς γένωσιν ὡς εἴρηται. Κανόνα Β'. (§. 109.)

Κανὼν Ε'.

§. 112. Πέμπτον, ἀνίσως ἤθελε τύχη διὰ νὰ ἀφαιρεθῇ κἀνένα Κλάσμα ἀπὸ ἀκέραιον Ἀριθμὸν, α'. ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀκέραιος Ἀριθμὸς, ἐπὶ τὸν Παρονομαστὴν τοῦ Κλάσματος. β'. Ἂς ἀφαιρεθῇ, ἀπὸ ἐκεῖνο ὅπου ἤθελε γένη, ὁ Ἀριθμητὴς τοῦ Κλάσματος, καὶ ἐκεῖνο ὅπου ἤθελεν ἀπομείνη, ἂς διαιρεθῇ ἐπὶ τὸν Παρονομαστὴν, καὶ τὸ Πηλίκον, μαζῆ μὲ τὸ ἐπίλοιπον Κλάσμα, (ἀνίσως ἤθελε ἀπομείνῃ τι) θέλει εἶναι ἡ Διαφορὰ, ἥτις ζητεῖται.

Κα-

Κανὼν Ϛ'.

§. 113. Ἕκτον, ἀνίσως ἤθελε τύχη διὰ νὰ ἀφαιρεθῇ κἀνένα Κλάσμα, ἀπὸ ἄλλον Ἀριθμὸν, ὅπου νὰ ἔχῃ καὶ Κλάσμα· α'. ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀκέραιος Ἀριθμὸς, ἐπὶ τὸν Παρονομαστὴν τοῦ Κλάσματός του, καὶ εἰς ἐκεῖνο, ὅπου ἤθελε γένη, ἂς προστεθῇ καὶ ὁ Ἀριθμητής του, καὶ ἂς βαλθῇ ὑποκάτωθέν του ὁ Παρονομαστὴς τοῦ Κλάσματος, καὶ θέλει γένη ἓν Κλάσμα ἴσον μὲ τὸν ἀκέραιον Ἀριθμὸν, καὶ μὲ τὸ Κλάσμα του· κατὰ τὸ ΙΑ'. Πρόβλημα. (§. 96.) β'. Ἂς φερθῇ τὸ συσταθὲν Κλάσμα, μὲ τὸ ἄλλο Κλάσμα, εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν· κατὰ τὸ Η'. Πρόβλημα. (§. 93.) Καὶ τ' ἄλλα, ἂς γένωσι καθὼς εἴπομεν εἰς τὸν Β'. Κανόνα· (§. 109.) καὶ θέλει γνωρισθῇ ἡ αὐτῶν Διαφορά.

Κανὼν Ζ'.

§. 114. Ἕβδομον, ἀνίσως, τέλος πάντων, ἤθελε τύχη, νὰ ἔχωσι καὶ οἱ δύω δοθέντες Ἀριθμοὶ Κλάσματα, α'. ἂς πολλαπλασιασθῇ καὶ ὁ ἕνας, καὶ ὁ ἄλλος, ἐπὶ τὸ ἰδιόν του Κλάσμα, ὡς ἄνωθεν, (§. 112.) καὶ ἂς γένωσι δύω Κλάσματα, ἴσα μὲ τοὺς ἀκεραίους Ἀριθμοὺς, καὶ μὲ τὰ Κλάσματά των· κατὰ τὸ ΙΑ'. Πρόβλημα. (§. 96.) β'. Ἂς φερθῶσι τὰ συσταθέντα Κλάσματα, εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν· κατὰ τὸ ΙΒ'. Πρόβλημα. (§. 97.) γ'. Ἂς ἀφαιρεθῇ ὁ Ἀριθμητὴς τοῦ μικροτέρου Κλάσματος, ἀπὸ τὸν τοῦ μεγαλητέρου, καὶ ἐκεῖνο ὅπου ἤθελεν ἀπομείνη, ἂς διαιρεθῇ ἐπὶ τὸν κοινὸν Παρονομαστὴν, καὶ τὸ Πηλίκον, θέλει σοι δείξῃ τὴν Διαφορὰν, κατὰ τὴν ὁποίαν διαφέρει ὁ Μειωτέος, τοῦ Ἀφαιρετέου· κατὰ τὸν Ὁρισμὸν τῆς Ἀφαιρέσεως, (§. 107.) τῶν Κλασμάτων.

Ἀλλὰ πρὸς σαφεστέραν κατάληψιν τῶν ἐκτεθέντων Κανόνων, ἂς βαλθῶσι καὶ ἐδῶ, μερικὰ Ὑποδείγματα.

Ὑπό-

Ὑπόδειγμα Α'.

Ἐπὶ τῆς τῶν ὁμωνύμων Κλασμάτων Ἀφαιρέσεως.

§. 115. Ἕνας γεωργὸς, θέλωντας νὰ σπείρῃ τὸ χωράφιόν του, ἐμέτρησε τὸν σπόρον του· καὶ ἐπειδὴ δὲν τοῦ ἔφθανεν ὁ σπόρος, τὸν ὁποῖον εἶχεν, ἐδανείσθη ἀπὸ ἕνα γείτονά του, ἓξ ὄγδοα τοῦ μεδίμνου, δίδωντάς του ὑπόσχεσιν, ὅτι εἰς τὸ θέρος νὰ τοῦ δώσῃ ἑπτὰ ὄγδοα. Λοιπὸν, ἀφ' οὗ ἐθέρισε τὸ χωράφιόν του, καὶ ἀλώνισε τὸ σιτάρι του, τὴν μὲν πρώτην φορὰν ἔδωκεν εἰς ἐκεῖνον τὸν δανειστήν του $\frac{3}{8}$· ὕστερα ἀπὸ μερικὰς ἡμέρας, τοῦ ἔδωκε $\frac{2}{8}$· καὶ πάλιν τρίτην φορὰν $\frac{1}{8}$· λοιπὸν ζητεῖ νὰ μάθῃ, πόσον ἔτι τοῦ χρεωστεῖ, διὰ νὰ τὸν ἀποπληρώσῃ, κατὰ τὴν ὑπόσχεσιν ὁποῦ τοῦ ἔκαμεν.

Λύσις.

Πρῶτον, βάλε τὸ μέρος ἐκεῖνο, ὁποῦ ὑπεσχέθη νὰ τοῦ δώσῃ. Δεύτερον, τίθει κατὰ σειρὰν ἐκεῖνα τὰ μέρη ὁποῦ τοῦ ἔδωκε.

$$\text{οἷον} \; +\frac{7}{8}-\frac{3}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=-\frac{6}{8}$$

$$\text{ὅθεν} \; +\frac{7}{8}-\frac{6}{8}=-\frac{1}{8}.$$

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι παρώνυμα, δηλ. ἔχουσι τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν, σύναψον τοὺς Ἀριθμητάς των, κατὰ τὸν Β'. Κανόνα (§. 109.) καὶ ἂς βαλθῇ ὑποκάτωθεν ὁ κοινὸς Παρονομαστής· καὶ ἐκεῖνο τὸ Κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἤθελε γένῃ, ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἐκεῖνο, ὁποῦ ἐχρεώστει νὰ δώσῃ, καὶ ἡ Διαφορὰ θέλει σοὶ δείξῃ τὸ χρεωστούμενον μέρος· ὡς ἐν τῷ Διαγράμματι καθορᾶται· οἷον $\frac{7}{8}-\frac{6}{8}=\frac{1}{8}$. ἄρα τοῦ χρεωστεῖ ἔτι ἓν ὄγδοον· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Ὑπόδειγμα Β'.

Ἐπὶ τῆς τῶν Ἑτερωνύμων Ἀφαιρέσεως.

Ἕνας ἄλλος γεωργὸς, δανεισθεὶς ἀπὸ ἄλλον γεωργὸν, πέντε ὄγδοα τοῦ μεδίμνου, ὑπεσχέθη νὰ τοῦ δώσῃ εἰς τὸν διωρισ-

ρισμένον καιρὸν, ἓξ ὄγδοα· καὶ ἀφ' οὗ ἦλθεν ἡ διορία, πρῶτον τοῦ ἔδωκε δύω ὄγδοα· ἔπειτα τοῦ ἔδωκεν ἕνα πέμπτον· λοιπὸν ζητεῖ νὰ μάθῃ, πόσον ἔτι χρεωστῇ νὰ τοῦ δώσῃ.

Λύσις.

Εἰς λύσιν τούτου, ἐπειδὴ τὰ δοθέντα μέρη εἶναι ἑτερώνυμα, βαίνωντάς τα κατὰ σειρὰν, πρῶτον φέρετα εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστήν· κατὰ τὸν Γ'. Κανόνα. (§. 110.) οἷον $\frac{2}{8}+\frac{1}{5}=\frac{10}{40}+\frac{8}{40}$. Καὶ ἐπειδὴ αὐτὰ ἀναφερόμενα εἰς τὸ δάνειον, εἶναι ἑτερώνυμα, φέρε καὶ αὐτὰ εἰς τὸν ἴδιον Παρονομαστὴν μὲ τὸ δάνειον· οἷον $\frac{6}{8}-\frac{18}{40}=\frac{240}{320}-\frac{144}{320}=-\frac{96}{320}=\frac{12}{40}=\frac{3}{10}$. καὶ γίνονται $=-\frac{144}{320}$. ἀφαιρῶντας λοιπὸν τὸν 144 Ἀριθμητὴν τοῦ μικροτέρου Κλάσματος, ἀπὸ τὸν 240 Ἀριθμητὴν τοῦ μεγαλητέρου Κλάσματος, κατὰ τὸν αὐτὸν Γ'. Κανόνα, λείπουσι $\frac{96}{320}$. τὰ ὁποῖα φέρωντάς τα εἰς ἐλαχίστους ὅρους, γίνονται $=-\frac{3}{10}$ τοῦ μεδίμνου. Καὶ τόσον χρεωστεῖ νὰ τοῦ δώσῃ, ὡς φαίνεται εἰς τὸ Διάγραμμα.

$$\frac{2}{8}+\frac{1}{5}=\frac{10}{40}+\frac{8}{40}=\frac{18}{40}.$$

ὅθεν

$$+\frac{6}{8}-\frac{18}{40}=\frac{240}{320}-\frac{144}{320}=$$

$$=-\frac{96}{320}=\frac{12}{40}=-\frac{3}{10}.$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ μέδιμνος ὑποτίθεται $=$ 160 λιτρῶν, τὰ δὲ $\frac{3}{10}$ τῶν 160, κάμνουσι λίτρας 48, ὁ ῥηθεὶς ἄρα γεωργὸς χρεωστεῖ ἔτι εἰς τὸν δανειστήν του, λίτρ. 48. ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Ὑπόδειγμα Γ'.

Ἐπὶ τῆς τῶν Συνθέτων Κλασμάτων Ἀφαιρέσεως.

Ἕνας πτωχὸς, μὲ τὸ νὰ ἐχρεώσῃ εἰς ἕνα πλούσιον, τρία τέταρτα, τῶν τεσσάρων πέμπτων τοῦ χρυσίου, τοῦ ἔδωκε πέντε ὄγδοα, τῶν πέντε δεκάτων ὀγδόων· ζητεῖ νὰ μάθῃ πόσα ἔτι τοῦ χρεωστεῖ.

Λύσις.

Ἐπειδὴ καὶ εἰς αὐτὸ τὸ Ὑπόδειγμα, καὶ τὰ χρεωςούμενα, καὶ τὰ δοθέντα, εἶναι Σύνθετα Κλάσματα, πρῶτον, φέρεται εἰς Ἁπλᾶ Κλάσματα· κατὰ τὸ Θ΄. Πρόβλημα. (§. 94.) οἷον $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ — $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{18}$ = $\frac{12}{20}$ — $\frac{25}{144}$· καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἑτερώνυμα, φέρεται εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαςὴν, κατὰ τὸ Η΄. Πρόβ. (§. 93.) οἷον $\frac{12}{20}$ — $\frac{25}{144}$ = $\frac{1728}{2880}$ — $\frac{500}{2880}$.

$$\frac{3}{4}, \frac{4}{5} - \frac{5}{8}, \frac{5}{18}. = \frac{12}{20} - \frac{25}{144} = \frac{1728}{2880} - \frac{500}{2880} = -\frac{1228}{2880} = -\frac{307}{720}.$$

Ἔπειτα ἂς ἀφαιρεθῇ ὁ Ἀριθμητὴς τοῦ μικροτέρου Κλάσματος, ἀπὸ τὸν τοῦ μεγαλητέρου, καὶ ἐκεῖνο ὁποῦ μείνῃ, θέλει εἶναι ἡ Διαφορά· οἷον $\frac{1728}{2880}$ — $\frac{500}{2880}$ = — $\frac{1228}{2880}$ = — $\frac{307}{720}$· ἄρα μένει ἔτι νὰ τοῦ δώσῃ τριακόσια ἑπτὰ, τῶν ἑπτακοσίων εἴκοσι, ἴσον σχεδὸν $\frac{17}{40}$· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Ὑπόδειγμα Δ΄.

Ἐπὶ τῆς τῶν Συμμίκτων Κλασμάτων Ἀφαιρέσεως.

Ἕνας ἄνθρωπος, ἐκόνεψεν εἰς ἕνα Πανδοχεῖον, ἔδωκε δὲ εἰς τὸν Πανδοχέα, γρόσια $7\frac{2}{4}$· καὶ ἐπειδὴ μετὰ δώδεκα ἡμέρας ἔμελλε νὰ ἀναχωρήσῃ, λογαριάζωντας ὁ Πανδοχεὺς τὰ ὅσα τοῦ ἔδωκεν εἰς τροφήν του, ἔγιναν ἀργύρια 9, καὶ $\frac{5}{8}$· πόσα ἄρα χρεωςεῖ ἔτι νὰ δώσῃ εἰς τὸν Πανδοχέα!

Λύσις.

Πρῶτον, βάλε ἐκεῖνα ὁποῦ χρεωςεῖ, ἔπειτα ἐκεῖνα ὁποῦ τοῦ ἔδωκε. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἀκέραιοι Ἀριθμοὶ μὲ τὰ Κλάσματά των, φέρε καὶ τοὺς δύω εἰς τὸ ἴδιον Κλάσμα, κατὰ τὸν Γ΄. Κανόνα

$$= 9\frac{5}{8} - 7\frac{2}{4}. = \frac{77}{8} - \frac{30}{4} = \frac{308}{32} - \frac{240}{32}.\ \text{ὅθεν}\ 308 - 240 = -\frac{68}{32}: = 2\frac{4}{32} = \frac{1}{8}.$$

τῆς

τῆς Ἀφαιρέσεως. (§. 114.) ἔπειτα φέρεται εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαςὴν, κατὰ τὸ ΙΒ΄. Πρόβλημα. (§. 97.) Ὕςερα ἀφαίρεσον τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ μικροτέρου Κλάσματος, ἀπὸ τὸν τοῦ μεγαλητέρου, κατὰ τὸν Β΄. Κανόνα· (§. 109.) καὶ ἐκεῖνο ὁποῦ ἤθελε μείνῃ, εἶναι ἡ Διαφορὰ, καθὼς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα. Λοιπὸν χρεωςεῖ ἔτι τοῦ Πανδοχέως 2 ἀργύρια καὶ $\frac{1}{8}$.

Ὑπόδειγμα Ε΄.

Εἷς ἄνθρωπος ἐχρεώςει ἄλλου τινὸς ἀργύρια 6· ἔδωκε δὲ τὸν δανειςήν του, πρῶτον $\frac{2}{3}$ τοῦ ἀργυρίου· δεύτερον $\frac{3}{4}$· καὶ πάλιν τρίτην φορὰν τοῦ ἔδωκε $\frac{5}{8}$· λοιπὸν ζητεῖ νὰ μάθῃ πόσα χρεωςεῖ ἔτι νὰ τοῦ δώσῃ.

Λύσις.

Πρῶτον, βάλε κατὰ σειρὰν τὰ δοθέντα μέρη. Δεύτερον, φέρεται εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαςήν. Τρίτον, σύναψον τοὺς Ἀριθμητάς των, καὶ βάλε ὑπὸ τὸ γενόμενον τὸν κοινὸν Παρονομαςὴν, καὶ ἂς γένῃ ἕνα ὁλικὸν Κλάσμα, ἴσον μὲ τὰ δοθέντα τρία. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Ἀριθμὸς, ἀπὸ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ Ἀφαιρέσῃς αὐτὸ τὸ ὁλικὸν Κλάσμα, εἶναι ἀκέραιος, σχημάτισον αὐτὸν εἰς εἶδος Κλάσματος, βάνωντας ὑπ᾽ αὐτὸν τὴν μονάδα· κατὰ τὸ Δ΄. Πρόβλημα. (§. 89.) Ἔπειτα φέρε καὶ τὰ δύω Κλάσματα εἰς τὸν κοινὸν Παρονομαςτήν· ἀφαιρῶντας δὲ τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ μικροτέρου Κλάσματος, ἀπὸ τὸν τοῦ μεγαλητέρου Ἀριθμητὴν, καὶ ἐκεῖνο ὁποῦ μείνει, διαίρεσον αὐτὸ ἐπὶ τὸν κοινὸν Παρονομαςήν· καὶ τὸ Πηλίκον μετὰ τοῦ ἐναπολειφθέντος, θέλει σοὶ δείξῃ τὴν Διαφορὰν, ἐκεῖνο δὲ, ὁποῦ ἐναπομείνει, διὰ νὰ τὸ γνωρίσῃς καλήτερα, φέρετο εἰς ἐλαχίςους ὅρους, κατὰ τὸ Ζ΄. Πρόβλημα. (§. 92.) οἷον $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} = \frac{64}{96} + \frac{72}{96} + \frac{60}{96} = \frac{196}{96}$

$$6 - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} = \frac{64}{96} + \frac{72}{96} + \frac{60}{96} = \frac{196}{96}.\ \text{ὅθεν} + \frac{6}{1}.\ \frac{196}{96} = \frac{576}{96} + \frac{196}{96}.\ \text{ὅθεν} + \frac{576}{96} - \frac{196}{96} = \frac{380}{96}: = 3\frac{92}{96} = \frac{23}{24}.$$

$\frac{196}{96}$. ὅθεν $\frac{6}{1}-\frac{196}{96}=\frac{576}{96}-\frac{196}{96}=\frac{380}{96}=3\frac{92}{96}=\frac{23}{24}$. Ἄρα χρεωστεῖ ἔτι νὰ τοῦ δώσῃ, ἀργύρια 3, καὶ $\frac{23}{24}$ τοῦ ἀργυρίου· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Διὰ γύμνασιν ὅμως τῶν πρωτοπείρων, ἂς προσθέσωμεν καὶ ἄλλα τινὰ Ὑποδείγματα, χωρὶς τὴν ἑρμηνείαν τῆς αὐτῶν πράξεως, διὰ νὰ τὰ διαλύωσι μόνοι των, βοηθούμενοι ἀπὸ τοὺς Κανόνας.

$+\frac{5}{6}-\frac{4}{6}=\frac{1}{6}$.	$+\frac{2}{3}-\frac{2}{5}=\frac{10}{15}-\frac{6}{15}=\frac{4}{15}$.	$+\frac{6}{7}-\frac{7}{9}=\frac{54}{63}-\frac{49}{63}=\frac{5}{63}$.	$+\frac{7}{8}-\frac{4}{5}=\frac{35}{40}-\frac{32}{40}=\frac{3}{40}$.
$+\frac{6}{7}-\frac{4}{7}=\frac{2}{7}$.	$+\frac{4}{5}-\frac{3}{6}=\frac{24}{30}-\frac{15}{30}=\frac{9}{30}=\frac{3}{10}$.	$+\frac{6}{8}-\frac{2}{4}=\frac{24}{32}-\frac{16}{32}=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$.	$+\frac{2}{3}-\frac{3}{5}=\frac{10}{15}-\frac{9}{15}=\frac{1}{15}$.
$+\frac{7}{8}-\frac{6}{8}=\frac{1}{8}$.			
$+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$.			

Ὅρα §. 115. Ὑπόδ. Α'. Διὰ τὰ ἄνωθεν ὅρα §. 115. Ὑπόδ. Β'.

$+\frac{2}{3},\frac{4}{5}-\frac{2}{4},\frac{4}{6}=\frac{8}{15}-\frac{8}{24}=\frac{192}{360}-\frac{120}{360}=\frac{72}{360}=\frac{8}{40}=\frac{1}{5}$.	$+\frac{7}{8},\frac{3}{4}-\frac{2}{8},\frac{4}{5}=\frac{21}{32}-\frac{8}{40}=\frac{840}{1280}-\frac{256}{1280}=\frac{584}{1280}=\frac{73}{160}$.	$+\frac{2}{3},\frac{6}{8}-\frac{4}{5},\frac{2}{6}=\frac{12}{24}-\frac{8}{30}=\frac{360}{720}-\frac{192}{720}=\frac{168}{720}=\frac{21}{90}=\frac{7}{30}$.

Ὅρα τὴν Ἑρμηνείαν τῆς πράξεως τῶν ἄνωθεν Ὑποδειγμάτων §. 115. Ὑπόδ. Γ'.

$8-\frac{5}{6}=\frac{48}{6}-\frac{5}{6}=\frac{43}{6}=7\frac{1}{6}$.	$6-\frac{2}{3}=\frac{18}{3}-\frac{2}{3}=\frac{16}{3}=5\frac{1}{3}$.	$5-\frac{5}{8}=\frac{40}{8}-\frac{5}{8}=\frac{35}{8}=4\frac{3}{8}$.	$2-\frac{3}{4}=\frac{8}{4}-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$.	$6-\frac{2}{3}+\frac{5}{4}+\frac{5}{8}=\frac{64}{96}+\frac{72}{96}+\frac{60}{96}=\frac{196}{96}=2\frac{4}{96}=\frac{1}{24}$.

Ὅρα τὴν πρᾶξιν τῶν ἄνωθεν §. 115. Ὑπόδ. Ε'.

$+9\frac{5}{8}-7\frac{2}{3}=\frac{77}{8}-\frac{23}{3}=\frac{231}{24}-\frac{184}{24}=\frac{47}{24}$.	$+24\frac{5}{6}-18\frac{3}{4}=\frac{149}{6}-\frac{75}{4}=\frac{596}{24}-\frac{450}{24}=\frac{146}{24}=6\frac{1}{6}$.	$+8\frac{1}{4}-5\frac{2}{3}=\frac{33}{4}-\frac{17}{3}=\frac{99}{12}-\frac{68}{12}=\frac{31}{12}=2\frac{7}{12}$.	$+38\frac{5}{6}-26\frac{3}{4}=\frac{233}{6}-\frac{107}{4}=\frac{932}{24}-\frac{642}{24}=\frac{290}{24}=12\frac{1}{12}$.
$+60\frac{3}{8}-56\frac{4}{5}=\frac{483}{8}-\frac{284}{5}=\frac{2415}{40}-\frac{2272}{40}=\frac{143}{40}=3\frac{23}{40}$.	$+15\frac{2}{3}-12\frac{3}{4}=\frac{47}{3}-\frac{51}{4}=\frac{188}{12}-\frac{153}{12}=\frac{35}{12}=2\frac{11}{12}$.	$+12-3\frac{2}{3}+5\frac{2}{5}+2\frac{6}{8}=\frac{11}{3}+\frac{27}{5}+\frac{22}{8}=\frac{440}{120}+\frac{648}{120}+\frac{330}{120}=\frac{12}{1}-\frac{1418}{120}=\frac{1440}{120}-\frac{1418}{120}=\frac{22}{120}=\frac{11}{60}$.	

Ὅρα τὴν πρᾶξιν τῶν ἄνωθεν §. 115. Ὑποδείγματι Δ'.

Καὶ περὶ μὲν τῆς Ἀφαιρέσεως τῶν Κλασμάτων, ἱκανὰ τὰ ἐκτεθέντα Ὑποδείγματα· νῦν δὲ περὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ αὐτῶν εἴπωμεν.

ΚΕ-

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

Περὶ πολλαπλασιασμοῦ τῶν Κλασμάτων.

Ὁρισμός.

§. 116. Πολλαπλασιασμὸς τῶν Κλασμάτων εἶναι, τὸ νὰ πολλαπλασιάσῃς ἕνα Ἀριθμὸν Κλασματικὸν, μὲ ἄλλον τοιοῦτον, διὰ νὰ ἤθελε γνωρισθῇ ἐκεῖνο ὁποῦ παράγεται, ἢ γίνεται ἀπὸ αὐτούς.

Πρόβλημα.

Τὸ δοθὲν Κλάσμα, δι᾽ ἑτέρου Κλάσματος, καὶ αὐτοῦ δοθέντος, πολλαπλασιάσαι.

Σχόλιον.

§. 117. Πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν, ὅτι τὰ Κλάσματα, πολλαπλασιάζονται ἀναμεταξύ των, καθὼς καὶ οἱ ἀκέραιοι Ἀριθμοί· διότι καθὼς εἰς τὸν Πολλαπλασιασμὸν τῶν ἀκεραίων Ἀριθμῶν, ὅταν μας δοθῶσι δύω Ἀριθμοὶ, ζητοῦμεν τὸν τρίτον, ὁ ὁποῖος νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν Ἀναλογίαν πρὸς ἐκεῖνον ὁποῦ πολλαπλασιάζεται, τὴν ὁποίαν ἔχει καὶ ὁ Πολλαπλασιαστὴς πρὸς τὴν μονάδα· κατὰ τὸν ὅμοιον τρόπον ἀκολουθεῖ, καὶ εἰς τὸν Πολλαπλασιασμὸν τῶν Κλασμάτων, ὅταν μας δοθῶσι δύω Κλάσματα, ζητοῦμεν τὸ τρίτον, τὸ ὁποῖον θέλει ἔχῃ τὴν ἰδίαν Ἀναλογίαν πρὸς τὸ πολλαπλασιαζόμενον Κλάσμα, τὴν ὁποίαν ἔχει καὶ τὸ πολλαπλασιάζον, πρὸς τὴν μονάδα.

Ἀλλ᾽ εἰς μὲν τοὺς ἀκεραίους Ἀριθμοὺς, ἐπειδὴ ὁ Πολλαπλασιαστὴς, εἶναι μεγαλήτερος ἀπὸ τὴν μονάδα, διὰ τοῦτο καὶ ὁ τρίτος Ἀριθμὸς ὁποῦ ἤθελε γενῇ ἀπὸ τὸν Πολλαπλασιασμὸν τῶν δοθέντων δύω Ἀριθμῶν, θέλει εἶναι βέβαια μεγαλήτερος ἀπὸ τὴν μονάδα. Εἰς τὸν Πολλαπλασιασμὸν ὅμως τῶν Κλασμάτων, δὲν συμβαίνει πάντοτε αὐτό. Ἐπειδὴ, ὅταν τὸ Κλάσμα ὁποῦ πολλαπλασιάζει, ἤγουν ὁ Πολλαπλασιαστὴς τοῦ

τοῦ Κλάσματος, ἤθελεν εἶναι ἴσος μὲ μίαν μονάδα, τότε καὶ ἐκεῖνο τὸ τρίτον Κλάσμα ὁποῦ ἤθελεν εὑρεθῇ, διὰ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν δύω Κλασμάτων, θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸν Πολλαπλασιαστήν. Ὅταν ὅμως τὸ Κλάσμα ὁποῦ πολλαπλασιάζει, ἤθελεν εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὴν μονάδα, τότε βέβαια καὶ ἐκεῖνο τὸ Κλάσμα ὁποῦ ἤθελεν εὑρεθῇ, θέλει εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸ Κλάσμα ὁποῦ ἐπολλαπλασιάσθη.

Ὑποσημείωσις.

Τὰ Κλάσματα, τὰ ὁποῖα μέλλουσι νὰ πολλαπλασιασθῶσιν ἀναμεταξύ των, ἢ εἶναι Ἁπλᾶ Κλάσματα, ἢ Σύνθετα, ἢ Σύμμικτα· δηλαδὴ ἀνακατωμένα μὲ ἀκεραίους Ἀριθμούς· ὁπωσδήποτε ὅμως ἤθελαν εἶναι αὐτὰ, πρέπει νὰ προσέχωμεν μὲ μεγάλην φροντίδα καὶ ἐπιμέλειαν, εἰς τοὺς ἐφεξῆς προτιθεμένους τῆς πράξεως Κανόνας, ἀνίσως καὶ θέλωμεν νὰ ἐπιδώσωμεν, εἰς αὐτὸ τὸ εἶδος τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ.

Κανὼν Α΄.

§. 118. Κατὰ πρώτην ἀρχὴν λοιπὸν, ἂς γραφῶσι τὰ δοθέντα Κλάσματα ἐφεξῆς, καθὼς εἴπομεν καὶ εἰς τὴν Σύναψιν αὐτῶν. (§. 98.) Καὶ εἰμὲν ἤθελαν εἶναι Ἁπλᾶ Κλάσματα, ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ Ἀριθμητὴς τοῦ ἑνὸς, μὲ τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ ἄλλου Κλάσματος· ὁμοίως καὶ ὁ Παρονομαστὴς, μὲ τὸν Παρονομαστὴν τοῦ ἄλλου, τὸ δὲ Κλάσμα ἐκεῖνο ὁποῦ ἤθελε συναχθῇ, θέλει εἶναι ἐκεῖνο τὸ τρίτον Κλάσμα, τὸ ὁποῖον ζητεῖται· καθὼς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα. Αὐτὸ τὸ ἴδιον, ἂς γίνεται, ἀνίσως ἤθελαν εἶναι καὶ περισσότερα ἀπὸ δύω τὰ Κλάσματα ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα μας ἐδόθησαν νὰ τὰ πολλαπλασιάσωμεν, καθὼς φαίνονται ἀντικρύ.

$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{6} = \frac{8}{18}$.
$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{8} = \frac{30}{224}$.
$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{\Theta} = \frac{40}{270}$.

Κανὼν Β'.

§. 119. Δεύτερον, εἰδὲ ἤθελαν εἶναι Σύνθετα, (§. 82.) ἤγουν Κλάσματα Κλασμάτων λεγόμενα, α. ἂς φερθῶσιν εἰς Ἁπλᾶ Κλάσματα. (§. 111.) β'. Ἂς φερθῶσιν εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν, κατὰ τὸ Η'. Πρόβλημα, (§. 93.) καὶ τὴν τούτων ἑρμηνείαν, ὡς φαίνονται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα.

$$\frac{2}{4},\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{8},\frac{3}{4}=$$
$$\frac{8}{20}\cdot\frac{6}{32}=$$
$$\frac{256}{640}+\frac{120}{640}=\frac{376}{640}$$
$$=\frac{94}{160}=\frac{47}{80}\,.$$

Κανὼν Γ'.

§. 120. Τρίτον, εἰδὲ ἤθελε χρειασθῇ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιόν τινα Ἀριθμὸν, μὲ τὶ Κλάσμα, ἢ τοὐναντίον, τὶ Κλάσμα μὲ ἀκέραιον Ἀριθμὸν, Α'. ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀκέραιος Ἀριθμὸς ἐπὶ τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ Κλάσματος, καὶ εἰς ἐκεῖνο ὅπου ἤθελε γένη, ἂς βαλθῇ ὑποκάτωθεν ὁ Παρονομαστὴς τοῦ Κλάσματος, καὶ ἂς γένη ἓν Κλάσμα, ἴσον μὲ τὸν ἀκέραιον Ἀριθμὸν, καὶ μὲ τὸ δοθὲν Κλάσμα, κατὰ τὸ ΙΑ'. Πρόβλημα. (§. 96.) Β'. Ἂς διαιρεθῇ αὐτὸ τὸ συσταθὲν Κλάσμα, ἐπὶ τὸν Παρονομαστὴν του, καὶ θέλει μας δείξῃ ἐκεῖνο ὅπου γίνεται ἀπὸ αὐτὸν τὸν πολλαπλασιασμόν· ὡς φαίνεται εἰς τὸ Διάγραμμα.

$$8\cdot\frac{3}{4}=\frac{24}{4}=6.$$
$$\frac{6}{8}\cdot 12=\frac{72}{8:}=9.$$

Κανὼν Δ'.

§. 121. Τέταρτον, εἰδὲ πάλιν ἤθελε χρειασθῇ, νὰ πολλαπλασιάσωμεν κανένα ἀκέραιον Ἀριθμὸν, ὅπου νὰ ἔχῃ καὶ Κλάσμα, μὲ ἄλλο Κλάσμα, α. μεν, ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀκέραιος Ἀριθμὸς ἐπὶ τὸν Παρονομαστὴν τοῦ Κλάσματός του, καὶ εἰς ἐκεῖνο ὅπου γένη, ἂς προστεθῇ ὁ Ἀριθμητής του, καὶ ἂς βαλθῇ ὑπαυτὸ ὁ Παρονομαστής του, καὶ θέλει συσταθῇ ἓν Κλάσμα, ἴσον μὲ τὸν ἀκέραιον Ἀριθμὸν, καὶ μὲ τὸν Κλάσμα

του·

του· κατὰ τὸν Γ'. Κανόνα τῆς Ἀφαιρέσεως. (§. 113.) Β'. Ἂς πολλαπλασιασθῇ αὐτὸ τὸ συσταθὲν Κλάσμα, μὲ τὸ δοθὲν ἄλλο Κλάσμα, κατὰ τὸν Α'. Κανόνα* (§. 118.) Καὶ ἐκεῖνο τὸ Κλάσμα, ὅπου ἤθελε γένη ἀπ' αὐτὰ τὰ δύω Κλάσματα, ἂς διαιρεθῇ ἐπὶ τὸν Παρονομαστὴν του, καὶ θέλει μας δείξῃ ἐκείνην τὴν Ποσότητα, ὅπου γίνεται ἀπὸ αὐτά· ὡς φαίνεται εἰς τὸ Διάγραμμα.

$$6\,\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}=\frac{41}{6}\,.$$
$$\frac{3}{4}=\frac{123}{24:}=5\,\frac{3}{24}=\frac{1}{8}.$$

Κανὼν Ε'.

§. 122. Πέμπτον δὲ καὶ τελευταῖον, εἰδὲ καὶ ἤθελε μας δοθῇ κανένας Ἀριθμὸς μὲ Κλάσμα, διὰ νὰ τὸν πολλαπλασιάσωμεν μὲ ἄλλον Ἀριθμὸν, ὅπου καὶ αὐτὸς νὰ ἔχῃ Κλάσμα· α. ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ καθ' ἕνας ἀπὸ αὐτοὺς μὲ τὸ ἴδιόν του Κλάσμα, καὶ ἂς γένωσι δύω Κλάσματα, ἴσα μὲ τοὺς ἀκεραίους Ἀριθμοὺς, καὶ μὲ τὰ Κλάσματά των· κατὰ τὸν Γ'. Κανόνα. (§. 120.) β'. Ἂς πολλαπλασιασθῶσιν αὐτὰ τὰ δύω Κλάσματα ἀναμεταξύ των, κατὰ τὸν Α'. Κανόνα· (§. 118.) καὶ ἂς γένη ἕνα ὁλικὸν Κλάσμα. Γ'. Ἂς διαιρεθῇ ὁ Ἀριθμητὴς τοῦ συσταθέντος Κλάσματος, ἐπὶ τὸν Παρονομαστήν του, καὶ τὸ Πηλίκον, μὲ τὸ ὑπόλοιπον, ἀνίσως ἤθελεν ἀπομείνῃ τι, θέλει μας δείξῃ ἐκεῖνο ὅπου γίνεται ἀπὸ τοὺς δοθέντας δύω Ἀριθμοὺς, ὁμοῦ μὲ τὰ Κλάσματά των· ὡς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα.

$$4\,\frac{2}{3}\cdot 6\,\frac{3}{5}=$$
$$\frac{14}{3}\cdot\frac{33}{5}=$$
$$\frac{462}{15:}=30\,\frac{12}{15}=\frac{4}{5}\,.$$

Διὰ νὰ καταλάβωμεν ὅμως μὲ τὴν πρᾶξιν, πλέον καλήτερα τοὺς ἐκτεθέντας Κανόνας, ἂς βαλθῶσιν ὑπ' ὄψιν τὰ ἐφεξῆς Ὑποδείγματα.

Ὑπόδειγμα Α'.

§. 123. Ἕνας ἄνθρωπος ἀγόρασεν ἀπὸ ἕνα Πραγματευτὴν, πέντε ὄγδοα τῆς πήχης· τοῦ ὁποίου ἀπὸ κάποιον εἶδος πανίου, ἡ τιμὴ, εἶχε πρὸς τέσσαρα ἔκτα τοῦ γροσίου ἡ κάθε πήχη·

λοι-

λοιπὸν ζητεῖ νὰ μάθῃ πόσα χρεωστεῖ νὰ δώσῃ εἰς τὸν Πραγματευτὴν, διὰ τὰ πέντε ὄγδοα τῆς πήχης ὁποῦ ἀγόρασε.

Λύσις.

Ἐπειδὴ καὶ εἰς τὸ παρὸν Ὑπόδειγμα εἶναι Ἁπλᾶ Κλάσματα, ἂς πολλαπλασιασθῇ Ἀριθμητὴς, ἐπὶ Ἀριθμητὴν, καὶ Παρονομαστὴς, ἐπὶ Παρονομαστὴν, κατὰ τὸν Α΄. Κανόνα· (§. 118.) καὶ θέλει γένη τὸ $\frac{20}{48}$ Κλάσμα· τὸ ὁποῖον φέροντάς το εἰς ἐλαχίστους ὅρους, κατὰ τὸ Ϛ΄. Πρόβλημα· (§. 91.) θέλει μας δείξη τὴν τιμὴν τοῦ ἀγορασθέντος πράγματος, καθὼς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα. Χρεωστεῖ ἄρα νὰ δώσῃ εἰς τὸν Πραγματευτὴν, πέντε δωδέκατα τοῦ γροσίου, ὁποῦ εἶναι ἴσον μὲ 50 ἄσπρα· ἤγουν παρ. 18 $\frac{3}{4}$ τοῦ παρᾶ, ἴσον δύω ἄσπρα· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{6} = \frac{20}{48} = \frac{5}{12}.$$

Δεῖξις.

Ἡ κάθε πήχη, διαιρεῖται εἰς ὀκτὼ μέρη ἰσάλληλα, ῥούπια λεγόμενα· τὸ δὲ γρόσιον, διαιρεῖται εἰς 120 μέρη, ἄσπρα, ἢ λεπτὰ ὀνομαζόμενα· ἡ δὲ τιμὴ τῆς κάθε πήχης, ὑποτίθεται ἴση μὲ τέσσαρα ἕκτα τοῦ γροσίου· τὰ δὲ τέσσαρα ἕκτα, εἶναι ἴσα μὲ δύω τρίτα· τὰ δὲ $\frac{2}{3}$ τῶν 120, εἶναι ἴσα μὲ 80 λεπτά. Κάθε ὄγδοον ἄρα τῆς πήχης, θέλει τιμηθῆ πρὸς 10 λεπτά· ἀλλὰ τὰ πέντε ὄγδοα, θέλουν τιμηθῆ, μὲ πενῆντα λεπτὰ, ἴσον παρ. 18 $\frac{3}{4}$. Ἄρα ὀρθῶς εἰς τὸν Πολλαπλασιασμὸν τῶν Κλασμάτων, πολλαπλασιάζεται ὁ Ἀριθμητὴς τοῦ ἑνὸς Κλάσματος, μὲ τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ ἄλλου, καὶ ὁ Παρονομαστὴς τοῦ ἑνὸς, μὲ τὸν Παρονομαστὴν τοῦ ἄλλου Κλάσματος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὑπόδειγμα Β΄.

Ὁ ἴδιος ἄνθρωπος ἀγόρασε, καὶ ἀπὸ ἄλλο εἶδος πανίου, τρία τέταρτα, τῶν τεσσάρων ὀγδόων τῆς πήχης· ἡ δὲ τιμὴ καὶ αὐτοῦ τοῦ πανίου ἦτον πρὸς τέσσαρα ἕκτα, τῶν τριῶν τετάρτων τοῦ γροσίου· ζητεῖ λοιπὸν νὰ μάθῃ πόσον χρεωστεῖ νὰ πληρώσῃ καὶ δι᾽ αὐτό.

Λύ-

Λύσις.

Ἐπειδὴ εἰς τὸ Β΄. τοῦτο Ὑπόδειγμα, τὰ Κλάσματα ὁποῦ μας ἐδόθησαν νὰ πολλαπλασιάσωμεν εἶναι Σύνθετα. (§. 82.) Α΄. Ἄς τὰ φέρωμεν εἰς Ἁπλᾶ Κλάσματα, κατὰ τὸν Β΄. Κανόνα. (§. 119.) Β΄. Ἄς πολλαπλασιασθῶσιν, ὡς ἄνωθεν, καὶ ἂς γένη ἕνα ὁλικὸν Κλάσμα, ἴσον μὲ τὰ δοθέντα Σύνθετα Κλάσματα, καὶ γίνεται τὸ, $\frac{144}{768}$ Κλάσμα· τὸ ὁποῖον εἰς ἐλαχίστους ὅρους φερόμενον, (κατὰ τὸ Ϛ΄. Πρόβλημα, §. 91.) γίνεται τὸ, $\frac{3}{16}$ Κλάσμα, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ 22 λεπτὰ, καὶ $\frac{1}{2}$ τοῦ λεπτοῦ· ἤγουν ἴσον μὲ παράδες 7, καὶ λεπτὸν 1 $\frac{1}{2}$. Καὶ τόσον ἔχει νὰ δώσῃ· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

$$\frac{3}{4}, \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{6}, \frac{3}{4}$$
$$\frac{12}{32} \cdot \frac{12}{24} =$$
$$\frac{144}{768} = \frac{18}{96} = \frac{3}{16}.$$

Ὑπόδειγμα Γ΄.

Ἕνας ἄνθρωπος ἀγόρασεν ἀπὸ ἕνα Κεραμιδᾶν, 360 κεραμίδια· ἡ δὲ τιμὴ τοῦ κάθε κεραμιδίου ἦτον, πρὸς $\frac{2}{3}$ τοῦ λεπτοῦ. Λοιπὸν ζητεῖ νὰ μάθῃ πόσον χρεωστεῖ νὰ δώσῃ τὸν Κεραμιδᾶν διὰ τὰ 360 κεραμίδια.

Λύσις.

Ἐπειδὴ καὶ εἰς αὐτὸ τὸ Ὑπόδειγμα, δίδεται ἀκέραιος Ἀριθμὸς, νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ Κλάσμα, ἂς πολλαπλασιασθῇ οὖν ὁ ἀκέραιος Ἀριθμὸς, ἐπὶ τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ Κλάσματος, καὶ ἂς βαλθῇ εἰς ἐκεῖνο ὁποῦ ἤθελε γένη, ὁ Παρονομαστὴς τοῦ Κλάσματος, κατὰ τὸν Γ΄. Κανόνα. (§. 120.) Ἔπειτα, ἂς διαιρεθῇ ὁ Ἀριθμητὴς τοῦ συσταθέντος Κλάσματος, ἐπὶ τὸν Παρονομαστήν του, τὸ δὲ Πηλίκον, θέλει μας δείξη τί μέλλει νὰ δώσῃ. Γενομένης δὲ τῆς πράξεως, ὡς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα, χρεωστεῖ νὰ δώσῃ τοῦ Κεραμιδᾶ διὰ τὰ 360 κεραμίδια, λεπτὰ διακόσια τεσσαράκοντα, ἴσον γρόσια 2· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

$$360 \cdot \frac{2}{3} =$$
$$\frac{720}{3:} = 240 \text{ λεπ.}$$
$$= \text{γρόσια } 2.$$

Ὑπό-

Ὑπόδειγμα Δ'.

Ἕνας χωριάτης ἀγόρασεν ἀπὸ κάποιον εἶδος πανίου, 8 πήχες, καὶ πέντε ὄγδοα τῆς πήχης· ἡ δὲ τιμὴ τῆς κάθε πήχης ἦτον, πρὸς $\frac{1}{4}$ τοῦ γροσίου. Λοιπὸν ζητεῖ νὰ μάθῃ πόσα χρεωστεῖ νὰ δώσῃ τὸν Πραγματευτήν, διὰ τὸ πανὶ ὁποῦ ἀγόρασε.

Λύσις.

Καὶ εἰς τοῦτο τὸ τέταρτον Ὑπόδειγμα οἱ δοθέντες Ἀριθμοὶ εἶναι ἀκέραιος Ἀριθμὸς μὲ Κλάσμα, διὰ νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ ἄλλο Κλάσμα. α'. Βάλε τα κατὰ σειράν. β'. Ἂς φερθῇ ὁ ἀκέραιος Ἀριθμός, ἐπὶ τὸ ἴδιόν του Κλάσμα· καὶ τ' ἄλλα ἂς γενῶσι, καθὼς εἴπομεν εἰς τὸν δ'. Κανόνα. (§. 121.) Καὶ θέλει μας δώσῃ Πηλίκον, γρόσια 6, καὶ $\frac{15}{32}$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ λεπτὰ 56, καὶ $\frac{1}{4}$ τοῦ λεπτοῦ = παράδ. 18, λεπτὰ 2, καὶ ἕνα τέταρτον τοῦ λεπτοῦ· ἄρα χρεωστεῖ νὰ πληρώσῃ τοῦ Πραγματευτοῦ διὰ ὀκτὼ πήχες, καὶ πέντε ὄγδοα τῆς πήχης, πρὸς $\frac{1}{4}$ τοῦ γροσίου, γρ. 6, παράδ. 18, λεπτὰ $2\frac{1}{4}$.

$$8\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{4}$$
$$\frac{69}{8}\cdot\frac{3}{4}=\frac{207}{32}=6\frac{15}{32}=\text{λεπτὰ } 56\frac{1}{4}$$

Ὑπόδειγμα Ε'.

Ἄλλος τις ἄνθρωπος ἀγόρασεν ἀπὸ κάποιον εἶδος πανίου, πήχεις 7, καὶ $\frac{6}{8}$ τοῦ πήχεως· ἡ δὲ τιμὴ τοῦ κάθε πήχεως ἦτον πρὸς παράδ. $18\frac{1}{3}$. Λοιπὸν ζητεῖ καὶ αὐτὸς νὰ μάθῃ, τί χρεωστεῖ νὰ πληρώσῃ.

Λύσις.

Ἐπειδὴ εἰς αὐτὸ τὸ Ὑπόδειγμα δίδονται δύω ἀκέραιοι Ἀριθμοί, μὲ τὰ Κλάσματά των· α'. ἂς φερθῇ ὁ καθ' εἷς ἀπὸ αὐτοὺς ἐπὶ τὸ ἴδιον Κλάσμα, καὶ ἂς γενῶσι δύω Κλάσματα, ἴσα μὲ τοὺς ἀκεραίους Ἀριθμούς, καὶ μὲ τὰ Κλάσματά των, κατὰ τὸν ε'. Κανόνα. (§. 122.) Καὶ

$$7\frac{6}{8}\cdot 18\frac{1}{3}=$$
$$\frac{62}{8}\cdot\frac{55}{3}=$$
$$=\frac{3410}{24}=142\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$$

τ' ἄλ-

τ' ἄλλα ἂς γενῶσι, κατὰ τὴν ἑρμηνείαν τοῦ αὐτοῦ Κανόνος, καὶ θέλει μας δώσῃ Πηλίκον, παράδες 142, καὶ $\frac{1}{12}$ τοῦ παρᾶ· καθὼς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα· οἱ ὁποῖοι κάμνουσι γρόσια 3, καὶ παράδες 22, καὶ ἕνα δωδέκατον τοῦ παρᾶ, καὶ τόσα ἔχει νὰ πληρώσῃ· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Ἂς προστεθῶσι, καὶ ἐδῶ, τὰ ἐφεξῆς Ὑποδείγματα· τὰ ὁποῖα ἂς προβάλλωνται εἰς τοὺς Μαθητάς, διὰ νὰ τὰ λύσωσι μόνοι των, μὲ μόνην τὴν βοήθειαν τῶν ἐκτεθέντων πέντε Κανόνων.

$$\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{15}{56}$$
$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$$
$$\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$$
$$\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{8}=\frac{30}{224}=\frac{15}{112}$$
$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{8}=\frac{48}{120}=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{8}{10}=\frac{120}{800}=\frac{3}{20}$$
$$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{5}=\frac{120}{840}=\frac{30}{210}=\frac{1}{7}$$
$$\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{5}{8}=\frac{120}{576}=\frac{60}{288}=\frac{10}{48}=\frac{5}{24}$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{2}{9}=\frac{96}{2160}=\frac{24}{540}=\frac{4}{90}=\frac{2}{45}$$
$$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{8}=\frac{288}{5040}=\frac{36}{630}=\frac{4}{70}=\frac{2}{35}$$

Ὅλα τὰ ἐκτεθέντα Ὑποδείγματα, λύονται διὰ τοῦ πρώτου Κανόνος. (§. 118.)

$$\frac{2}{3},\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6},\frac{3}{4}=\frac{8}{18}\cdot\frac{12}{24}=\frac{96}{432}=\frac{24}{108}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$$
$$\frac{2}{3},\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{6},\frac{5}{8}=\frac{6}{12}\cdot\frac{20}{48}=\frac{120}{576}=\frac{20}{96}=\frac{5}{24}$$
$$\frac{2}{8},\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{3},\frac{3}{4}=\frac{8}{48}\cdot\frac{6}{12}=\frac{48}{576}=\frac{8}{96}=\frac{2}{24}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{2}{5},\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{4},\frac{5}{8}=\frac{8}{30}\cdot\frac{15}{32}=\frac{120}{960}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$$

Τὰ ἄνωθεν Ὑποδείγματα, λύονται διὰ τοῦ δευτέρου Κανόνος. (§. 119.)

$$8\cdot\frac{3}{4}=\frac{24}{4}=6$$
$$5\cdot\frac{2}{3}=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$$
$$12\cdot\frac{5}{6}=\frac{60}{6}=10$$
$$20\cdot\frac{6}{8}=\frac{120}{8}=15$$
$$3\cdot\frac{6}{8}=\frac{18}{8}=2\frac{1}{4}$$
$$7\cdot\frac{4}{5}=\frac{28}{5}=5\frac{3}{5}$$

Τὰ ἐκτεθέντα 6, Ὑποδείγ. λύονται διὰ τοῦ γ'. Κανόνος. (§. 120.)

$6\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot$	$18\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{8}\cdot\frac{5}{6}$	$7\frac{5}{8}\cdot\frac{7}{10}$	$3\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}$
$\frac{41}{6}\cdot\frac{3}{4}=$	$=\frac{73}{4}\cdot\frac{2}{3}$	$=\frac{17}{8}\cdot\frac{5}{6}$	$=\frac{61}{8}\cdot\frac{7}{10}$	$=\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{8}$
$=\frac{123}{24}=$	$=\frac{146}{12}=$	$=\frac{85}{48}=$	$=\frac{427}{80}=$	$=\frac{35}{16}=2\frac{3}{16}.$
$5\frac{3}{24}=\frac{1}{8}.$	$12\frac{2}{12}=\frac{1}{6}.$	$1\frac{37}{48}.$	$5\frac{27}{80}.$	

Τὰ ἐκτεθέντα πέντε Ὑποδείγματα, λύονται διὰ τοῦ Δ'. Κανόνος. (§. 121.)

$6\frac{5}{6}\cdot 4\frac{2}{3}$	$12\frac{1}{3}\cdot 6\frac{2}{8}$	$8\frac{3}{4}\cdot 5\frac{2}{3}$	$18\frac{5}{8}\cdot 6\frac{3}{4}$
$=\frac{41}{6}\cdot\frac{14}{3}$	$=\frac{37}{3}\cdot\frac{50}{8}$	$=\frac{35}{4}\cdot\frac{17}{3}$	$=\frac{149}{8}\cdot\frac{27}{4}=$
$=\frac{574}{18}=$	$=\frac{1850}{24}=$	$=\frac{595}{12}=$	$\frac{4023}{32}=125\frac{23}{32}.$
$31\frac{16}{18}=\frac{8}{9}.$	$77\frac{1}{12}.$	$49\frac{7}{12}.$	

Τὰ ἐκτεθέντα Δ'. Ὑποδείγματα, λύονται διὰ τοῦ Ε'. Κανόνος. (§. 122.)

Καὶ περὶ μὲν τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν Κλασμάτων, εἶναι ἱκανὰ τὰ ἐκτεθέντα Ὑποδείγματα· νῦν δὲ καὶ περὶ Διαιρέσεως αὐτῶν εἴπωμεν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ϛ'.

Περὶ Διαιρέσεως τῶν Κλασμάτων, καὶ Κλασματικῶν Ἀριθμῶν.

Ὁρισμός.

§. 124. Διαίρεσις Κλασμάτων, ἢ Κλασματικῶν Ποσοτήτων εἶναι, τὸ νὰ διαιρέσωμεν τὸ Κλάσμα ὁποῦ ἤθελε μας δοθῇ, ἢ τὴν Κεκλασμένην Ποσότητα, δι' ἄλλου τοιούτου Κλάσματος, καὶ αὐτοῦ δοθέντος.

Σχόλιον.

Καθὼς εἰς τὴν Διαίρεσιν τῶν ἀκεραίων Ἀριθμῶν, μᾶς δίδονται δύω Ἀριθμοί, ὁ ἕνας ὡς Διαιρετέος, καὶ ὁ ἄλλος ὡς Διαιρέτης, καὶ ζητεῖται τρίτος Ἀριθμός, ὁ ὁποῖος φανερώνει ποσάκις ἀριθμεῖται ὁ μερίζων Ἀριθμός, εἰς τὸν μεριζόμενον, καί, ἢ καθολικῶς, ἢ κατὰ μέρος· κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἀκολουθεῖ καὶ εἰς τὴν Διαίρεσιν τῶν Κλασμάτων· δίδονται δηλ. δύω Κλάσματα, ἢ Κλασματικαὶ Ποσότητες, καὶ ζητεῖται τρίτον Κλάσμα, ἢ Κλασματικὴ Ποσότης· τὸ ὁποῖον θέλει φανερώσῃ, ὁποῖόν τι μέρος, ἢ μόριον, εἶναι τὸ μερίζον, τοῦ μεριζομένου. Τοῦτο δὲ εἶναι, νὰ ἔχῃ Ἀναλογίαν τὸ μερίζον Κλάσμα, πρὸς τὸ μεριζόμενον, ὡς ἡ μονὰς πρὸς αὐτό.

Κάθε Κλάσμα, ἢ εἶναι Ἁπλοῦν, ἢ Σύνθετον, ἢ τέλος πάντων, Σύμμικτον. (§. 82.) Διὰ τὰ ὁποῖα Κλάσματα, ἂς βαλθῶσιν οἱ ἐφεξῆς Κανόνες, τῆς Διαιρέσεως αὐτῶν.

Κανὼν Α'.

§. 125. Ὅταν θέλωμεν νὰ διαιρέσωμεν κἀνένα Κλάσμα, μὲ ἄλλο Κλάσμα, α. νὰ βάλωμεν ἐκεῖνο τὸ Κλάσμα, τὸ ὁποῖον μέλλει νὰ μερισθῇ, καὶ εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ νὰ βάλωμεν ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον μέλλει νὰ τὸ μερίσῃ. β'. Ἀφ' οὗ τὰ βάλωμεν εἰς τὴν τάξιν των, ἂς πολλαπλασιαθῶσιν ἀναμεταξύ των, κα-τὸ σχῆμα χιαστόν· δηλ. ὁ Ἀριθμητὴς τοῦ μερισθησομένου Κλάσματος, ἐπὶ τὸν Παρονομαστὴν τοῦ μερίζοντος· ἐκεῖνο δὲ ὁποῦ γένῃ, νὰ τὸ βάλωμεν εἰς τόπον Ἀριθμητοῦ· καὶ ὁ Παρονομαστὴς τοῦ μερισθησομένου, ἐπὶ τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ μερίζοντος· καὶ ἐκεῖνο ὁποῦ γένῃ, ἂς βαλθῇ εἰς τόπον Παρονομαστοῦ· τὸ δὲ Κλάσμα ὁποῦ ἤθελε συσταθῇ, εἶναι ἐκεῖνο τὸ Πηλίκον, τὸ ὁποῖον ζητοῦμεν· ὡς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα.

$$\text{οἷον } \frac{2}{3} : \frac{8}{18} =$$
$$\frac{36}{24} : = 1\frac{1}{2}.$$

Κανὼν Β΄.

§. 126. Δεύτερον, ἀνίσως τὰ Κλάσματα, ὁποῦ μέλλομεν νὰ διαιρέσωμεν, ἤθελαν εἶναι Σύνθετα, (§. 82.) α΄. νὰ τὰ φέρωμεν εἰς Ἁπλᾶ Κλάσματα. (§. 119.) β΄. Πολλαπλασιασθήτωσαν ἀναμεταξύ των, ὡς ἄνωθεν. Κανὼν Α΄. (§. 125.) Τὸ δὲ γενόμενον Κλάσμα, θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον Πηλίκον· οἷον δοθέντα τὰ ἀντικρὺ Σύνθετα Κλάσματα, καὶ ἐλθόντα εἰς Ἁπλᾶ Κλάσματα, καὶ πολλαπλασιασθέντα, ἔγινε τὸ, $\frac{324}{576}$· τὸ ὁποῖον ἀφ' οὗ τὸ ἐφέραμεν εἰς ἐλαχίστους ὅρους, ἔδωκεν εἰς Πηλίκον, ἴσον ἐπὶ + $\frac{17}{64}$· ὡς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα· καὶ αὐτὸ ἦτον τὸ ζητούμενον Πηλίκον.

$$\frac{3}{4}, \frac{6}{8} : \frac{2}{3}, \frac{4}{6} =$$
$$\frac{18}{32} \times \frac{8}{18} =$$
$$\frac{324}{576} : \frac{256}{576} = \text{II}\ 1\frac{68}{256} = \frac{17}{64}.$$

Κανὼν Γ΄.

§. 127. Τρίτον, ἀνίσως δὲ ὁ Ἀριθμὸς, ὅστις μέλλει νὰ μερισθῇ εἶναι ἀκέραιος, ἐκεῖνο δὲ, τὸ ὁποῖον μέλλει νὰ τὸν μερίσῃ εἶναι Κλάσμα, ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀκέραιος Ἀριθμὸς, ἐπὶ τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ Κλάσματος, καὶ τὸ γενόμενον, ἂς τὸ λάβωμεν ἀντὶ Ἀριθμητοῦ, καὶ ἂς βαλθῇ ὑπ' αὐτὸν ὁ Παρονομαστὴς τοῦ Κλάσματος, καὶ ἂς γένῃ ἕνα ὁλικὸν Κλάσμα, ἴσον μὲ τὸν ἀκέραιον Ἀριθμὸν, καὶ μὲ τὸ Κλάσμα· κατὰ τὸ ΙΑ΄. Πρόβλημα. (§. 96.) Ἂς διαιρεθῇ λοιπὸν ὁ Ἀριθμητὴς τοῦ Κλάσματος, μὲ τὸν Παρονομαστήν του, καὶ ἐκεῖνο

ὁποῦ

ὁποῦ ἤθελε εὑγῇ, εἶναι τὸ ζητούμενον Πηλίκον· καθὼς φαίνεται εἰς τὸ Διάγραμμα.

$$8 : \frac{2}{4} = \frac{16}{4} : = 4.$$
$$6 : \frac{3}{4} = \frac{18}{4} : = 4\frac{1}{2}.$$

Κανὼν Δ΄.

§. 128. Τέταρτον, ἀνίσως ὁ μερισθησόμενος Ἀριθμὸς εἶναι Σύμμικτος, (§. 94.) δηλ. ἔχει καὶ Κλάσμα, τὸ δὲ μερίζον εἶναι Κλάσμα μόνον, α΄. ἂς μεταφερθῇ ὁ ἀκέραιος Ἀριθμὸς ἐπὶ τὸ ἴδιόν του Κλάσμα, κατὰ τὸ ΙΑ΄. Πρόβλημα, (§. 96.) Τὸ δὲ γενόμενον Κλάσμα, ἂς πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ Κλάσμα ὁποῦ μέλλει νὰ τὸ διαιρέσῃ, κατὰ σχῆμα χιαστὸν, δηλ. Ἀριθμητὴς, ἐπὶ Παρονομαστὴν, καὶ Παρονομαστὴς ἐπ' Ἀριθμητήν. (§. 125.) Ἔπειτα, ἂς διαιρεθῇ ὁ Ἀριθμητὴς ὁποῦ ἤθελε γένῃ ἀπὸ τὰ δοθέντα Κλάσματα, ἐπὶ τὸν Παρονομαστήν του, καὶ τὸ Πηλίκον, θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον· ὡς εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα φαίνεται.

$$6\frac{1}{2} : \frac{2}{3} =$$
$$\frac{13}{2} \times \frac{2}{3} =$$
$$\frac{39}{4} : = 9\frac{3}{4}.$$

Κανὼν Ε΄.

§. 129. Πέμπτον, εἰδὲ ἤθελε δοθῇ ἀκέραιος Ἀριθμὸς, διὰ νὰ μερισθῇ μὲ ἄλλον ἀκέραιον Ἀριθμὸν, ὁποῦ νὰ ἔχῃ καὶ Κλάσμα, α΄. ἂς βαλθῇ μονὰς ὑπὸ τὸν ἀκέραιον Ἀριθμὸν, καὶ ἂς σχηματισθῇ εἰς εἶδος Κλάσματος· κατὰ τὸ Δ΄. Πρόβλημα. (§. 89.) β΄. Ἂς μεταφερθῇ ὁ μεριστὴς Ἀριθμὸς ἐπὶ τὸ ἴδιόν του Κλάσμα· κατὰ τὸν Γ΄. Κανόνα. (§. 127.) γ΄. Ἂς φερθῶσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν Παρονομαστήν· κατὰ τὸ ΙΒ΄. Πρόβλημα. (§. 97.) Ἔπειτα, ἂς διαιρέσῃ ὁ Διαιρέτης, τὸν Διαιρετέον· καὶ τὸ Πηλίκον μαζῆ

$$8 : 4\frac{2}{3}$$
$$\frac{8}{1} . \frac{14}{3} = .$$
$$\frac{24}{3} : \frac{14}{3} = 1\frac{10}{14} = \frac{5}{7}.$$

μὲ

μὲ τὸ ὑπόλοιπον, θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος Ἀριθμός· κατὰ τὸν Ὁρισμὸν τῆς Διαιρέσεως. (§. 56.) Ὡς φαίνεται καὶ εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα.

Κανὼν Ϛ'.

§. 130. Ἕκτον, ἐὰν δέ, τέλος πάντων, ἤθελαν δοθῶσι δύω Ἀριθμοὶ μὲ Κλάσματα, διὰ νὰ διαιρεθῶσι, α'. ἂς μεταφερθῇ ὁ καθ' ἕνας ἀπὸ αὐτοὺς, ἐπὶ τὸ ἴδιόν του Κλάσμα. β'. Ἂς φερθῶσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν Παρονομαστήν· κατὰ τὸ ΙΒ'. Πρόβλημα. (§. 97.) γ'. Ἂς διαιρεθῇ ὁ Διαιρετέος Ἀριθμητὴς, ἐπὶ τὸν Διαιρέτην Ἀριθμητὴν, καὶ τὸ Πηλίκον μαζὶ μὲ τοῦ ὑπολοίπου, θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος τρίτος Ἀριθμὸς, κατὰ τὸν Ὁρισμὸν τῆς Διαιρέσεως· ὅρα τὴν πρᾶξιν εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα.

$$12\frac{2}{3} : 4\frac{5}{6} =$$
$$\frac{38}{3} : \frac{29}{6} =$$
$$\frac{228}{18} \cdot \frac{87}{18} \quad \text{ὅθεν}$$
$$\frac{228}{87} : = 2\frac{54}{87} = \frac{18}{29}.$$

Ἂς βαλθῶσι καὶ ἐδῶ μερικὰ Ὑποδείγματα, μὲ τὴν λύσιν των, κατὰ τοὺς ἐκτεθέντας Κανόνας, διὰ νὰ ἔχωσιν οἱ πρωτόπειροι πρὸ ὀφθαλμῶν, καὶ τὴν πρᾶξιν τῆς Διαιρέσεως τῶν Κλασμάτων, καὶ Κεκλασμένων Ἀριθμῶν.

Ὑπόδειγμα Α'.

§. 131. Ἕνας ἄνθρωπος ἀγόρασεν ἀπὸ ἓν εἶδος πανίου $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως, καὶ ἔδωκεν $\frac{20}{48}$ μερῶν τοῦ γροσίου· θέλει λοιπὸν νὰ μάθῃ, πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς.

Λύσις.

Εἰς λύσιν τούτου, ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ Ἀριθμητὴς τοῦ α'. Κλάσματος, ὅστις παρασταίνει τὰ μέρη τοῦ δοθέντος γροσίου, δηλ. ὁ 20, ἐπὶ τὸν Παρονομαστὴν τοῦ β'. Κλάσματος, ὁ ὁποῖος φανερώνει τὴν τιμὴν τοῦ ἀγορασθέντος πανίου, δηλ. τὸν 8· καὶ ἐκεῖνο ὁποῦ ἤθελε γένῃ, ἂς τεθῇ εἰς τόπον Ἀριθμητοῦ. Ἔπειτα, ἂς πολλαπλασιασθῇ, καὶ ὁ Ἀριθμητὴς τοῦ β'.
Κλάσ-

Κλάσματος, δηλ. ὁ 5, ἐπὶ τὸν Παρονομαστὴν τοῦ α'. Κλάσματος, δηλ. τὸν 48· καὶ τὸ γενόμενον, ἂς τεθῇ εἰς τόπον Παρονομαστοῦ, καὶ θέλει γένῃ ἓν Κλάσμα, ἴσον μὲ τὰ δύω· καὶ αὐτὸ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον τρίτον Κλάσμα· τὸ ὁποῖον φέρωντάς το εἰς ἐλαχίστους ὅρους, θέλεις γνωρίσῃ τὴν δύναμίν του καλήτερα, κατὰ τὸ Ϛ'. Πρόβλημα· (§. 91.) καὶ ὡς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα. Ἄρα τιμᾶται ὁ πῆχυς $\frac{2}{3}$ τοῦ γροσίου· ἴσον λεπτοῖς 80· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

$$\frac{20}{48} : \frac{5}{8} =$$
$$= \frac{160}{240} = \frac{2}{3}.$$

Ὑπόδειγμα Β'.

Ὁ ἴδιος ἄνθρωπος ἀγόρασε καὶ ἀπὸ ἄλλον εἶδος πανίου, τρία τέταρτα, τῶν ἓξ ὀγδόων, καὶ ἔδωκεν ἐννέα τῶν τριανταδύω μερῶν τοῦ γροσίου· θέλει οὖν νὰ μάθῃ, πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς καὶ τούτου τοῦ πανίου.

Λύσις.

Πρῶτον, ἂς γραφῇ εἰς τὸν διωρισμένον τόπον τὸ Κλάσμα ἐκεῖνο, ὁποῦ μέλλει νὰ διαιρεθῇ· δηλ. τὸ $\frac{9}{32}$· καὶ εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ, ἐκεῖνο ὁποῦ μέλλει νὰ μερίσῃ, δηλ. τὸ, $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$· καὶ ἐπειδὴ ἐκεῖνο ὁποῦ μέλλει νὰ μερισθῇ εἶναι Ἁπλοῦν Κλάσμα, ἐκεῖνο δὲ ὁποῦ μέλει νὰ μερίσῃ, εἶναι Σύνθετον, ἂς μεταφέρωμεν α'. τὸ Σύνθετον Κλάσμα εἰς Ἁπλοῦν· κατὰ τὸν Β'. Κανόνα. (§. 126.) β'. Πολλαπλασίασον τὰ δύω Ἁπλᾶ Κλάσματα, κατὰ τὸν Α'. Κανόνα, (§. 125.) καὶ τὸ Κλάσμα ὁποῦ γένῃ, φέρε το εἰς ἐλαχίστους ὅρους· καὶ ἐκεῖνο θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον Πηλίκον, ὡς ἐν τῷ ἀντικρὺ φαίνεται Διαγράμματι. Τιμᾶται ἄρα καὶ τοῦτο ὁ πῆχυς ἥμισυ γροσίου· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

$$\frac{9}{32} : \frac{3}{4}, \frac{6}{8} =$$
$$\frac{9}{32} : \frac{18}{32} = \frac{288}{576}$$
$$= \frac{72}{144} = \frac{1}{2}.$$

Ὑπό-

Ὑπόδειγμα Γ'.

Ἕνας ἄνθρωπος ἀγόρασεν ἀπὸ κάποιον ὀψώνιον, ὀκάδες $6\frac{1}{2}$· καὶ ἔδωκεν, $8\frac{2}{3}$ τοῦ ἀργυρείου. Λοιπὸν ζητεῖ νὰ μάθῃ πόσον εἶναι ἡ τιμὴ τῆς κάθε ὀκᾶς.

Λύσις.

Εἰς λύσιν τούτου, βάλε τὰ ὀνομασθέντα μέρη κατὰ σειρὰν, δηλ. α'. τὸν Ἀριθμὸν τῶν ἀργυρείων, καὶ δεξιὰ αὐτῶν, τὸν Ἀριθμὸν τῶν ὀκάδων. β'. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἀκέραιοι Ἀριθμοὶ μὲ Κλάσματα, φέρε τὸν καθ' ἕνα ἀπὸ αὐτοὺς, ἐπὶ τὸ ἴδιον Κλάσμα, καὶ ἂς γένωσι δύω Κλάσματα, ἴσα μὲ τοὺς ἀκεραίους Ἀριθμοὺς, καὶ μὲ τὰ Κλάσματά των· κατὰ τὸν ϛ'. Κανόνα, (§. 130.) γ'. Ἂς φερθῶσιν εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν, καὶ ἂς διαιρεθῇ ὁ ἀντὶ Διαιρετέου Ἀριθμητὴς, ἐπὶ τὸν ἀντὶ Διαιρέτου Ἀριθμητήν· τὸ δὲ Πηλίκον θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη τιμὴ τῆς κάθε ὀκᾶς· ὡς εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα φαίνεται. Ἄρα τιμᾶται ἡ κάθε ὀκᾶ, πρὸς ἓν ἀργύρειον καὶ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἀργυρείου.

$$8\frac{2}{3} : 6\frac{1}{2} =$$
$$\frac{26}{3} \cdot \frac{13}{2} =$$
$$\frac{52}{6} : \frac{39}{6} = 1\frac{13}{39} = \frac{1}{3}.$$

Ὑπόδειγμα Δ'.

Ἕνας ἄνθρωπος ἀγόρασεν ἀπὸ ἕνα εἶδος πανίου, πήχεις $8\frac{5}{8}$· καὶ ἔδωκεν εἰς αὐτὸ, ἀργύρια $18\frac{3}{4}$ τοῦ ἀργυρείου. Λοιπὸν ζητεῖ νὰ μάθῃ, πόσον ἔχει ὁ κάθε πῆχυς.

Λύσις.

Πρῶτον, βάλε εἰς τὸν διωρισμένον τόπον τὰ ἀργύρεια, τὴν τιμὴν δηλ. τοῦ πανίου· καὶ εἰς τὰ δεξιὰ αὐτῶν, βάλε τὸν Ἀριθμὸν τῶν πήχεων, ὅπου ἀγόρασε. Δεύτερον, φέρε τὸν καθ' ἕνα Ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ ἴδιον Κλάσμα. Τρίτον, ἂς πολλαπλασιασθῶσιν αὐτὰ τὰ συσταθέντα δύω Κλάσματα, κατὰ

σχῆ-

σχῆμα χιαστόν· καὶ ἂς διαιρεθῇ ὁ Ἀριθμητὴς ἐπὶ τὸν Παρονομαστήν του, καὶ τὸ Πηλίκον θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον. Τιμᾶται ἄρα ὁ κάθε πῆχυς ἀργύρεια 2, καὶ $\frac{4}{23}$ τοῦ ἀργυρείου = λεπ. 20 + $\frac{20}{23}$ τοῦ λεπτοῦ.

$$18\frac{3}{4} : 8\frac{5}{8} =$$
$$\frac{75}{4} \cdot \frac{69}{8} =$$
$$\frac{600}{276} = 2\frac{48}{276} = \frac{4}{23}.$$

Ἂς βάλωμεν καὶ ἐδῶ μερικὰ Ὑποδείγματα, χωρὶς τὴν ἑρμηνείαν των.

$\frac{12}{16} : \frac{2}{5} =$	$\frac{3}{4} : \frac{2}{5} =$	$\frac{6}{8} : \frac{2}{3} =$	$\frac{7}{8} : \frac{3}{5} =$	$\frac{5}{6} : \frac{2}{3} =$
$60 : 32 =$	$15 : 8 =$	$18 : 16 =$	$35 : 24 =$	$15 : 12 =$
$1\frac{28}{32} = \frac{7}{8}.$	$1\frac{7}{8}.$	$1\frac{1}{8}.$	$1\frac{11}{24}.$	$1\frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$

Τὰ ἄνωθεν Ὑποδείγ. λύονται κατὰ τὸν Α'. Κανόν. (§. 125.)

$\frac{6}{8}, \frac{2}{3} : \frac{2}{5}, \frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}\ \frac{4}{5} : \frac{1}{3}, \frac{2}{5}$	$\frac{3}{4}, \frac{4}{6} : \frac{2}{3}, \frac{3}{5}$	$\frac{7}{9}, \frac{4}{5} : \frac{2}{4}, \frac{5}{8}$
$= \frac{12}{24} : \frac{6}{20} =$	$= \frac{20}{30} \cdot \frac{2}{15} =$	$= \frac{12}{24} \cdot \frac{6}{15} =$	$= \frac{28}{45} \cdot \frac{10}{32} =$
$\frac{240}{144} : = 1\frac{96}{144}$	$\frac{300}{60} : = 5.$	$\frac{180}{144} : = 1\frac{36}{144}$	$\frac{896}{450} : = 1\frac{223}{225}.$
$= \frac{12}{18} = \frac{2}{3}.$		$= \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$	

Τὰ ἄνωθεν λύονται διὰ τοῦ Β'. Κανόνος. (§. 126.)

$6 : \frac{2}{3} =$	$9 : \frac{3}{6} = \frac{45}{6} :$	$8 : \frac{4}{5} = \frac{32}{5} :$	$12 : \frac{7}{8} =$	$5 : \frac{2}{3} =$
$\frac{12}{3} : = 4.$	$= 7\frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$	$= 6\frac{2}{5}.$	$\frac{84}{8} : = 10\frac{1}{2}.$	$\frac{10}{3} : = 3\frac{1}{3}.$

Τὰ ἄνωθεν λύονται διὰ τοῦ Γ'. Κανόνος. (§. 127.)

$6\frac{1}{2} : \frac{2}{3}$	$7\frac{2}{3} : \frac{5}{6} =$	$23\frac{1}{2} : \frac{4}{5} =$	$3\frac{5}{6} : \frac{5}{4} =$	$8\frac{5}{8} : \frac{8}{9} =$	$12\frac{1}{3} : \frac{4}{7} =$
$\frac{13}{2} \cdot \frac{2}{3} =$	$\frac{23}{3} \cdot \frac{5}{6} =$	$\frac{47}{2} \cdot \frac{4}{5} =$	$\frac{23}{6} \cdot \frac{5}{4} =$	$\frac{69}{8} \cdot \frac{8}{9} =$	$\frac{37}{3} \cdot \frac{4}{7} =$
$\frac{39}{4}: = 9\frac{3}{4}.$	$\frac{138}{15}: = 9\frac{1}{5}.$	$\frac{235}{8}: = 29\frac{3}{8}.$	$\frac{92}{18}: = 5\frac{1}{9}.$	$\frac{621}{64}: = \frac{25}{964}$	$\frac{259}{12}: = 21\frac{7}{12}.$

Τὰ ἄνωθεν λύονται διὰ τοῦ Δ'. Κανόνος. (§. 128.)

$8\frac{2}{5} : 3\frac{1}{4} =$	$12\frac{5}{6} : 5\frac{2}{5} =$	$26\frac{5}{6} : 8\frac{1}{4} =$	$85\frac{1}{3} : 18\frac{5}{6} =$
$\frac{42}{5} \times \frac{13}{4} =$	$\frac{77}{6} \times \frac{17}{5} = \frac{231}{102}:$	$\frac{161}{6} \times \frac{33}{4} = \frac{644}{198}:$	$\frac{256}{3} \times \frac{115}{6} = \frac{1536}{339}:$
$\frac{168}{65}: = 2\frac{38}{65}.$	$= 2\frac{27}{102} = \frac{9}{34}.$	$= 3\frac{50}{198} = \frac{25}{99}.$	$= 4\frac{180}{339} = \frac{60}{113}.$

Τὰ ἄνωθεν λύονται κατὰ τὸν ϛ'. Κανόνα. (§. 130.)

Καὶ περὶ μὲν τῶν Κλασμάτων, καὶ Κεκλασμένων Ἀριθμῶν, κατὰ τὰ τέσσαρα τῶν Ἀριθμητικῶν πράξεων εἴδη, δηλ. τὴν Σύναψιν, Ἀφαίρεσιν, Πολλαπλασιασμὸν, καὶ Διαίρεσιν, ἀρκούντως μοι εἴρηται· νῦν δὲ περὶ δεκαδικῶν Κλασμάτων, τὴν ἰδίαν τάξιν ἀκολουθοῦντες, εἴπωμεν.

ΤΜΗΜΑ Β'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

Περὶ δεκαδικῶν Κλασμάτων.

§. 132. Τὰ δεκαδικὰ λεγόμενα Κλάσματα, καὶ μ' ὅλον ὁποῦ δὲν τὰ μεταχειριζόμεθα εἰς τὰς Ἀριθμητικὰς πράξεις, αἱ ὁποῖαι καθημερινῶς ἀκολουθοῦσιν εἰς τὰς δοσοληψίας τῶν πραγμάτων ἐκείνων ὁποῦ ἀγοράζομεν, ἢ πωλοῦμεν, εἶναι ὅμως χρήσιμα, μᾶλλον δὲ ἀναγκαῖα, εἰς τὰς Ἐπιστήμας. Διὰ τοῦτο ἀφ' οὗ εἴπομεν περὶ Κλασμάτων, καὶ Κλασματικῶν Ἀριθμῶν, ἂς εἴπωμεν ὀλίγα τινα καὶ περὶ δεκαδικῶν Κλασμάτων, διὰ νὰ ἔχωμεν καὶ περὶ τούτων μίαν καθαρὰν ἰδέαν, καὶ νὰ μὴ ἀπορῶμεν, ὅταν ἤθελε τύχῃ νὰ ἀπαντήσωμεν εἰς τὰς Γεωμετρικὰς, ἢ Ἀστρονομικὰς καὶ Ἐπιστημονικὰς Βίβλους, τὰ τοιαῦτα δεκαδικὰ Κλάσματα· ἀλλ' εὐθὺς ὁποῦ τὰ ἰδοῦμεν, νὰ γνωρίζωμεν τὴν σχετικὴν αὐτῶν σημασίαν καὶ δύναμιν, ἐκ τῆς τοῦ τόπου, καθ' ὃν εἰσι ταῦτα, θέσεως. Πρὸς δὲ τούτοις θέλει μας χρησιμεύσῃ ἡ περὶ τούτων διδασκαλία, καὶ εἰς τὴν Διαίρεσιν· ἐπειδὴ ὅταν ἤθελεν ἀπομείνῃ τὶ λείψανον Διαιρέσεως, ἤγουν Κλάσμα, καὶ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ τὸ φέρωμεν ἐπ' ἐλαχίστους ὅρους, (§. 91.) τότε τὸ ἀνάγομεν εἰς τὰ δεκαδικὰ ταῦτα Κλάσματα, καὶ θέλομεν γνωρίσῃ τὴν δύναμίν του, καθὼς θέλομεν τὸ καταλάβῃ καλλιώτερα, εἰς τὰ ἐφεξῆς Προβλήματα.

Ὁρισμός.

§. 133. Δεκαδικὸν οὖν, Κλάσμα ἐστὶ, τὸ ἔχον Παρονομαστὴν 10, ἢ 100, ἢ 1000· καὶ ὅλως τὸ ἔχον Παρονομαστὴν μίαν μονάδα, μετὰ μηδενικῶν χαρακτήρων προσκειμένην· οἷον $\frac{1}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{5}{1000}$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Αἰτήματα.

§. 134. Ζητῶ νὰ μοὶ δοθῇ μία μονάς· (ὁποιαδήποτε ἤθελεν εἶναι αὐτή· ἢ ὀργυιά, ἢ μίλλιον, ἢ λέγα, ἢ ὥρα, ἢ ὀκᾶ, ἢ ὅ,τι ἄλλο) ἡ ὁποία μονὰς, νὰ συντίθεται ἀπὸ ἄλλας δέκα μονάδας, ἢ ἀπὸ δέκα ἄλλα μέρη, τὰ ὁποῖα νὰ εἶναι ἴσα τὸ ἕνα μὲ τὸ ἄλλο· κάθε μία λοιπὸν ἀπὸ αὐτὰς τὰς δέκα δευτέρας μονάδας, εἶναι ἕνα $\frac{1}{10}$ τῆς πρώτης.

Ζητῶ δὲ πάλιν, ὅτι κάθε μία ἀπὸ αὐτὰς τὰς δευτέρας μονάδας, νὰ εἶναι συνθεμένη, ἀπὸ ἄλλας δέκα καινούριας μονάδας, ἤγουν νὰ διαιρεῖται εἰς ἄλλα δέκα μέρη. Κάθε μία λοιπὸν ἀπὸ αὐτὰς τὰς τρίτας μονάδας, εἶναι ἑκάστης μὲν μονάδος τῶν δευτέρων $\frac{1}{10}$· ἑκάστης δὲ τῶν πρώτων $\frac{1}{100}$.

Ζητῶ πάλιν, ὅτι κάθε μία ἀπὸ αὐτὰς τὰς τρίτας μονάδας, νὰ συντίθεται ἀπὸ ἄλλας δέκα μονάδας· κάθε μία λοιπὸν ἀπὸ αὐτὰς τῆς τετάρτης τάξεως τὰς μονάδας, θέλει εἶναι, τῶν μὲν τρίτων μονάδων $= \frac{1}{10}$· τῶν δὲ δευτέρων $= \frac{1}{100}$· τῶν δὲ πρώτων $= \frac{1}{1000}$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· διαιρουμένης δηλ. ἑκάστης τῶν τετάρτων μονάδων, εἰς ἄλλας δέκα καινούριας μονάδας. Ὁμοίως καὶ τῶν πέμπτων, καὶ ἕκτων, καὶ τῶν λοιπῶν ἐπ' ἄπειρον. Ἐκ τούτου λοιπὸν, γεννῶνται τὰ δεκαδικὰ καλούμενα Κλάσματα.

Πόρισμα Α΄.

§. 135. Κάθε ἄρα Κλάσμα, Παρονομαστὴν ἔχει τὴν μονάδα, (§. 75.) μὲ ἕν, ἢ περισσότερα μηδενικά· οἷον $\frac{1}{10}$, $\frac{27}{100}$, $\frac{10}{1000}$, $\frac{12}{10000}$, $\frac{26}{1000000}$, $\frac{5}{10000000}$, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πόρισμα Β΄.

§. 136. Ἀνίσως αὐτὰ τὰ δεκαδικὰ Κλάσματα πηγαίνουν ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιά, κατὰ τὴν σχετικὴν αὐτῶν δύναμιν, ἀρχίζοντα ἀπὸ τὰ δεκαδικά, ἡ δύναμις αὐτῶν θέλει σμικρυνθῇ, κατὰ τὰς ἐκ διαδοχῆς μονάδας τῶν Ἀριθμῶν (§. ΛΒ΄. καὶ ΛΓ΄.) μὲ τοιαύτην τάξιν· δεκατημόρια, ἑκατοστημόρια, χιλιοστημόρια, δεκάκις χιλιοστημόρια, ἑκατοντάκις χιλιοστημόρια, Μιλλιονιστημόρια, κτλ. οἷον $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{100000}$, $\frac{1}{1000000}$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ὑπό-

Ὑπόδειγμα. Α΄.

§. 137. Θέλοντας, Ὑποδείγματος χάριν, νὰ εὕρωμεν τὴν Περιφέρειαν οἱουδήποτε Κύκλου, λαμβάνομεν ἀντὶ μονάδος, τὴν Διάμετρον τοῦ Κύκλου, καὶ τὴν ἐφαρμόζομεν εἰς τὴν Περιφέρειαν αὐτοῦ τρεῖς φοραῖς, σὺν $\frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000}$ τῆς Διαμέτρου. Ἀνίσως λοιπὸν γραφῇ πρῶτον 3, ἔπειτα πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ οἱ Ἀριθμηταί, 1, 4, 1, 5, κατὰ τὴν τάξιν τῶν δυνάμεων, ἀποχωριζόμενοι διὰ τῆς ὑποδιαστολῆς (,) κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον· 3, 1415. ἡ μὲν μονὰς 1, ὅπου εὑρίσκεται μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, δηλώσει $\frac{1}{10}$· τὰ 4 δὲ, δηλώσουσιν $\frac{4}{100}$· ἡ δὲ μετὰ τὸ 4 μονὰς 1, δηλώσει $\frac{1}{1000}$· τὰ δὲ 5, δηλώσει $\frac{5}{10000}$. κτλ.

Πόρισμα Γ΄.

§. 138. Ὅταν λοιπὸν ἠθέλαμεν παρατηρήσῃ, ὅτι ὁ μὲν πρὸς δεξιὰν τῆς ὑποδιαστολῆς πρῶτος χαρακτήρ, σημαίνει δεκατημόρια· ὁ δὲ δεύτερος, ἑκατοστημόρια· ὁ δὲ τρίτος, χιλιοστημόρια· ὁ δὲ τέταρτος, δεκάκις χιλιοστημόρια· ὁ δὲ πέμπτος, μιλλιονιστημόρια· καὶ οὕτως ἐφεξῆς, (§. ΛΔ΄.) εὔκολα θέλομεν εὕρῃ τὴν δύναμιν τοῦ καθ' ἑνὸς χαρακτῆρος, ὅπου εὑρίσκεται μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, ἀναγινώσκοντες κατὰ τάξιν, οὕτω· δεκατημόρια, ἑκατοστημόρια, χιλιοστημόρια, κτλ. (§. 136.) ἕως ὅπου νὰ φθάσωμεν εἰς τὸν χαρακτῆρα ἐκεῖνον, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὴν δύναμιν. Παραδείγματος χάριν, ἀνίσως ἤθελε μας προβάλλῃ τινάς, νὰ εὕρωμεν τὴν δύναμιν τοῦ 5, καὶ 2, εἰς τοῦτο τὸ δεκαδικὸν Κλάσμα, 1,0000 52· ἐπειδὴ εὑρίσκεται εἰς τὸ ἑκατοντάκις χιλιοστημόριον, εἶναι ἄρα $\frac{5}{100000}$· ὁ δὲ 2, φανερώνει $\frac{2}{1000000}$.

Πόρισμα Δ΄.

§. 139. Εὐθὺς, ἄρα, ὅπου ἤθελε φανῇ ἡ τάξις, ἢ ὁ τόπος, εἰς τὸν ὁποῖον εὑρίσκεται ὁ δεκαδικὸς χαρακτήρ, θέλει γνωρισθῇ ἡ δύναμίς του, καὶ χωρὶς νὰ γραφῇ ὑπ' αὐτὸν ὁ Παρονομαστής του· οἷον εὐθὺς ὅπου ἰδῶ τὸν 5, ἐπὶ τοῦ πέμπτου τόπου, εἰς τὸ ἀνώτερον Ὑπόδειγμα, συμπεραίνω ἐκ τούτου, ὅτι

ὁ

ὁ Παρονομαστὴς τοῦ εἶναι μονὰς, παρακολουθέντων καὶ πέντε μηδενικῶν· οἷον $\frac{5}{100000}$.

Πόρισμα Ε'.

§. 140. Ὅταν εὑρίσκωνται εἰς τὰ δεξιὰ μέρη τοῦ ὁλοσχεροῦς Ἀριθμοῦ, μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν τὰ δεκατημόρια, ἔπειτα τὰ ἑκατοστημόρια, καὶ τὰ λοιπὰ κατὰ τὴν τάξιν, ὅπου ἐσημειώσαμεν, (§. 139.) κάθε μονὰς, ἡ ὁποία ἤθελε ληφθῇ ἀπό τινα χαρακτῆρα, καθὼς ἤθελε μας φανῇ εὔλογον, πάντοτε ἔχει δεκαπλασίαν δύναμιν τοῦ χαρακτῆρος ἐκείνου, ὅπου εὑρίσκεται πλησίον αὐτῆς εἰς τὰ δεξιὰ μέρη. (§. ΛΓ'.) Τοῦτο αὐτὸ ἀκολουθεῖ, καὶ εἰς τὰ δεκαδικὰ Κλάσματα· ἡ μονὰς τοῦ ὁλοσχεροῦς 3, σημαίνει $\frac{10}{10}$, χωρὶς ὅμως τῆς μονάδος τοῦ ὁλοσχεροῦς Ἀριθμοῦ, ἡ μονὰς ἐκείνη ὅπου εὑρίσκεται πλησίον αὐτῆς μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν, σημαίνει μόνον $\frac{1}{10}$· πρεπόντως ἄρα, δέκα μονάδες τόπου τινος, πάντοτε ἔχουσι δύναμιν μὲ μίαν μονάδα, τοῦ χαρακτῆρος ὅπου εὑρίσκεται εἰς τὰ ἀριστερὰ μέρη αὐτῆς.

Πόρισμα ς'.

§. 141. Διὰ νὰ ἐκθέσωμεν διὰ μέσου χαρακτήρων, κἀνένα Κλάσμα δεκαδικὸν, τὸ ὁποῖον δηλοῦται ἡμῖν διὰ τοῦ προφορικοῦ μόνον λόγου, ἀφ' οὗ γράψομεν τὸν ὁλοσχερῆ Ἀριθμὸν, ἢ ἀνίσως δὲν εἶναι ὁλοσχερὴς, ἓν μηδενικὸν, καὶ βάνοντες πρὸς δεξιὰν τοῦ ὁλοσχεροῦς, ἢ τοῦ μηδενικοῦ μίαν ὑποδιαστολὴν, πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτῆς γράφομεν τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ Κλάσματος· ὅστις περιέχει τόσους χαρακτῆρας, ὅσους περιέχει ὁ Παρονομαστὴς αὐτοῦ, πλὴν ἑνός· αὐτοῦ δὲ τοῦ Παρονομαστοῦ παραμελοῦμεν, ἤγουν δὲν τὸν γράφομεν.

Ὑπόδειγμα Β'.

§. 142. Εἰς ἔκθεσιν λεγῶν 4, καὶ $\frac{5}{10}$ τῆς λέγας, ἂς βαλθῇ ἕνας μόνος χαρακτὴρ οὕτω· 4, 5. διὰ δὲ τοῦ $\frac{6}{100}$, ἂς γραφῇ οὕτω· 0, 0 6· δηλ. βάνονται δύω χαρακτῆρες εἰς τὰ δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς, διὰ τοὺς τρεῖς χαρακτῆρας τοῦ Παρονομαστοῦ· καὶ ἐπειδὴ εἰς αὐτὸ τὸ β'. Ὑπόδειγμα, δὲν εὑρίσκεται Ἀριθ-

Ἀριθμὸς ὁλοσχερὴς, τίθεται μηδενικὸν, ἀντὶ τοῦ ὁλοσχεροῦς· ὅτι δὲ ὁ 6, δηλοῖ ἑκατοστημόρια, μὲ τὸ νὰ μὴ ἔχῃ πρὸ αὐτοῦ δεκατημόρια, διὰ τοῦτο γράφεται εἰς τὸν τόπον αὐτῶν μηδενικόν. Διὰ δὲ τὸ $\frac{37}{10000}$, ἂς γραφῇ τὸ 0, 0037. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $\frac{37}{10000}$ ἐστὶν $= \frac{3}{1000} + \frac{7}{10000}$. Ἀλλ' ἀμὴν τὸ, $\frac{10}{10000}$, εἶναι ἴσον τῷ, $\frac{1}{1000}$. Ἄρα βάνεται ὁ 3, εἰς τὸν τόπον τῶν χιλιοστημορίων, σημειωμένων δύω μηδενικῶν εἰς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ, τὸ ἓν μὲν, διὰ τὰ ἐλλείποντα δεκατημόρια· τὸ ἄλλο δὲ, διὰ τὰ ἑκατοστημόρια.

Πόρισμα Ζ'.

§. 143. Ἐκ τοῦ ἐναντίου ἄρα, διὰ νὰ ἐκφρασθῶσιν οἱ ἐκτεθειμένοι χαρακτῆρες, πλέον καλλιώτερα, εἶναι συγκεχωρημένον ἐκ τῶν εἰρημένων Ὑποδειγμάτων, ἢ νὰ ἀποδίδωμεν εἰς καθ' ἕνα χαρακτῆρα ξεχωριστὰ τὸν ἁρμόζοντα αὐτῷ Παρονομαστὴν, κατὰ τὸν τόπον, εἰς τὸν ὁποῖον εὑρίσκεται, ἢ νὰ ἀποδίδωμεν εἰς ὅλους ὁμοῦ Παρονομαστὴν, φανερώμενον διὰ μονάδος, ἥτις νὰ τραβᾷ εἰς τὰ δεξιά της τόσα μηδενικὰ, ὅσοι εἶναι εἰς τὰ δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς οἱ χαρακτῆρες.

Ὑπόδειγμα Γ'.

Ἐὰν, καθ' ὑπόθεσιν, ἐκλάβωμεν τὴν Διάμετρον τῆς γῆς, ὡς μίαν μονάδα, ἡ Διάμετρος Πλανήτου τινὸς, εὑρίσκεται ὅτι εἶναι 25, 235. ταύτην οὖν τὴν ἔκθεσιν, θέλομεν τὴν ἀπαγγείλῃ, ἢ προφέρῃ οὕτως· 25 γῆς Διάμετροι, σὺν $\frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{5}{1000}$, τῆς Διαμέτρου· ἤγουν ἀποδίδοντες τοῦ, 235, Ἀριθμητῇ, Παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1, μὲ τρία μηδενικὰ, θέλομεν τὴν ἀπαγγείλῃ ἐπὶ 25, σὺν $\frac{235}{1000}$. Ἤγουν 25 γῆς Διάμετροι, σὺν 235 χιλιοστημορίοις τῆς Διαμέτρου.

Ὑπόδειγμα Δ'.

Ἐπὶ τὸ δεκαδικὸν τοῦτο Κλάσμα· 0, 0502, θέλομεν τὸ ἀπαγγείλῃ, ἢ $\frac{5}{100}$, σὺν $\frac{2}{10000}$, ἢ βάνοντες Παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1, μὲ τέσσαρα μηδενικὰ, ὡσὰν ὅπου εὑρίσκονται τέσσαρες χαρακτῆρες πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς, καὶ ποιοῦντες αὐτὸ $\frac{502}{10000}$, ἤγουν 502 δεκάκις χιλιοστημόρια.

Πόρισμα Η'.

§. 144. Ὅσα μηδενικὰ ἤθελαν γραφῶσιν εἰς τὰ δεξιὰ μέρη τῶν τοιούτων Κλασμάτων, δὲν θέλει μετακινηθῇ ποτὲ ἡ δύναμις, καὶ ἡ σημασία τοῦ Κλάσματος, ἀλλὰ θέλει μείνῃ πάντοτε ἡ αὐτή, οὕτως· οὐδὲν διαφέρει τό, 0, 3000, τοῦ 0, 3. ἤγουν $\frac{3}{10}$. Καὶ αὐτὸ εἶναι καθ' ἑαυτὸ φανερόν· ἐπειδὴ ὅλα τὰ μηδενικὰ ὁποῦ εἶναι εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 3, φανερώνουν μόνον, ὅτι ἔξω ἀπὸ τὰ $\frac{3}{10}$, δὲν εἶναι μήτε ἑκατοστημόριον, μήτε χιλιοστημόριον, ἀλλὰ εἰς ἔκφρασιν 0, 3000 μόνον λαμβάνεται ὁ Παρονομαστής· 1000. (§. 143.) ἀλλὰ τὸ $\frac{3000}{10000}$· ἴσον ἐστὶ τῶν $\frac{3}{10}$, ἢ τῶν 0, 3. καὶ τὰ ἑξῆς.

Πόρισμα Θ'.

§. 145. Διὰ τοῦ αὐτοῦ ἄρα λογισμοῦ, ἤγουν λογαριασμοῦ, καθ' ἕνας θέλει καταπεισθῇ, καὶ βεβαιωθῇ, ὅτι ὁσοιδήποτε χαρακτῆρες θετικοί, ἀπὸ ἐκείνους ὁποῦ εὑρίσκονται εἰς τὰ δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς τῶν δεκαδικῶν τούτων Κλασμάτων, δὲν θέλουσι λάβῃ ποτὲ τὴν δύναμιν μιᾶς μονάδος 1, τοῦ χαρακτῆρος ἐκείνου, ὅστις εὑρίσκεται εἰς τὰ ἀριστερὰ τῆς ὑποδιαστολῆς. Καὶ ὁ 0,3, ἢ ὁ 0, $\frac{3}{10}$, εἶναι μεγαλήτερος τοῦ 0,29999999, κατὰ τὴν Ποσότητα μὲ $\frac{1}{1{,}000{,}000{,}000}$.

Σχόλιον.

Ὁ λογισμός, ἢ λογαριασμὸς τῶν δεκαδικῶν Κλασμάτων, ἀγκαλὰ καὶ δὲν χρησιμεύει εἰς τὸν κοινωνικὸν ἡμῶν βίον, ὡς εἴρηται, (§. 132.) εἰς τοὺς Γεωμέτρας ὅμως, εἶναι εὔχρηστότατος. Ἐπειδὴ καὶ διὰ μέσου αὐτοῦ, κατασκευάζουσι τοὺς Πίνακας τῆς ἐξαγωγῆς τῶν ῥιζῶν, τῶν λογαρίθμων τε καὶ ἡμιτόνων, καὶ τῶν λοιπῶν Γεωμετρικῶν, ἢ Ἀστρονομικῶν Ὑπολογισμῶν, τὰς δείξεις τῶν Προβλημάτων, κτλ.

Πρό-

Πρόβλημα Α'.

§. 146. Ὅταν ἤθελεν ἀπομείνῃ ἔκ τινος Διαιρέσεως τὶ λείψανον, ἢ Κλάσμα, νὰ τὸ φέρωμεν εἰς δεκαδικὰ Κλάσματα.

Λύσις.

Γράψον εἰς τὰ δεξιὰ μέρη τοῦ λειψάνου, ἤγουν τοῦ Ἀριθμητοῦ, ἕνα μηδενικόν, καὶ διαίρεσον αὐτὸ διὰ τοῦ Διαιρέτου, ἤγουν Παρονομαστοῦ. (§. 88.)

Ὑπόδειγμα Ε'.

Διὰ τὸ λείψανον, ἢ Κλάσμα $\frac{9}{20}$, γράψον ἓν μηδενικὸν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 9, καὶ διαίρεσον τό, $\frac{90}{20}$ διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ 20. καὶ θέλει σοὶ δώσῃ Πηλίκον 4, καὶ μένει κατάλοιπον δέκα· οἷον $\frac{90}{20} = 4 + \frac{10}{20}$. Γράψον πάλιν εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ ἕνα μηδενικόν, καὶ ἂς γένῃ τὸ $\frac{100}{20}$. Κλάσμα διαίρεσέ το λοιπὸν πάλιν, καὶ δίδει Πηλίκον 5· οἷον $\frac{100}{20} = 5$. Θέλει εἶναι ἄρα τὸ δεκαδικὸν Κλάσμα $= 0,45$, ἡ δύναμις τοῦ $\frac{9}{20}$.

Δεῖξις.

Μὲ τὸ νὰ ἐτέθη εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ λειψάνου 9, μηδενικόν, ὁ Διαιρετέος 90, ἔγινε δεκάκις μεγαλήτερος ἀπ' ὅ,τι ἦτον, ὁμοίως θέλει δώσῃ καὶ Πηλίκον δέκα φοραῖς μεγαλήτερον· φανερώνει ἄρα ὁ 4, δεκατημόρια· πρὸς δεξιὰν δὲ τοῦ ἐκ ταύτης τῆς Διαιρέσεως ἐναπολειφθέντος λειψάνου 10, μὲ τὸ νὰ ἐγράφῃ ἔτι ἓν μηδενικόν, καὶ γενόμενος 100, ὁ νέος αὐτῆς Διαιρετέος, κατεστάθη, τοῦ μὲν 10, δεκαπλάσιος· τοῦ δὲ 4, ἑκατονταπλάσιος. Τὸ ἄρα Πηλίκον 5, φανερώνει ἑκατοστημόρια. Ἀλλ' ἀμὴν ὁ 0,45 δηλοῖ $\frac{4}{10} + \frac{5}{100}$. (§. 137.) ἄρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὑπόδειγμα Ϛ'.

Ἡ Περιφέρεια, καθ' ὑπόθεσιν, τινὸς Πλανήτου, εἶναι ἴση $= \frac{10656000}{333}$ μὲ λέγας· διὰ νὰ γνωρισθῇ λοιπὸν ἡ δύναμις

τῆς

τῆς Περιφερείας ταύτης, κατὰ μὲν πρώτην Διαίρεσιν, εὑρίσκεται 9424 λέγαι, καὶ ἀπομένουσι $\frac{88}{113}$ τῆς λέγας· ἃς γραφῇ ἓν ἐπὶ τούτου τοῦ λειψάνου, ἢ Κλάσματος, ἓν μηδενικὸν, καὶ ἂς γένῃ ὁ 880· ὅστις διαιρεθεὶς ἐπὶ τὸν Παρονομαστήν του, ἢ Διαιρέτην 113, δίδει Πηλίκον 7, καὶ ἐναπομένουσι 89· καὶ τὸν αὐτὸν λοιπὸν τρόπον ἐπαναλαμβανομένης τῆς Διαιρέσεως, θέλει εὑρεθῇ εἰς ὁλοσχερεῖς Ἀριθμοὺς, καὶ εἰς δεκαδικὰ Κλάσματα, Πηλίκον = 942,477,876,106,194,690,265. (Ὅρα §. ΛΔ'.)

Ὑποσημείωσις.

Εἰς αὐτὸ τὸ Ὑπόδειγμα, εἶναι δυνατὸν νὰ ἴδῃ καὶ νὰ καταλάβῃ τινὰς, ὅτι μερικαῖς φοραῖς, εἶναι ἀδύνατον εἰς ἓν λείψανον, ἢ Κλάσμα Διαιρέσεώς τινος, νὰ ἀναχθῇ ἐντελῶς εἰς δεκαδικὰ Κλάσματα· καὶ μ' ὅλον ὁποῦ πάντοτε ἠμπορεῖ νὰ εὑρεθῇ Ἀριθμὸς δεκαδικῶν Κλασμάτων, ὁποῦ νὰ φθάνῃ κοντὰ εἰς τὸ ἀληθές· διότι, εἰς τοῦτο τὸ Ὑπόδειγμα, ἀνίσως καὶ ἐξακολουθήσωμεν τὴν Πρόσθεσιν τῶν μηδενικῶν, καὶ τὴν Διαίρεσιν, ὡς ἄνωθεν, ἠμποροῦν νὰ γραφῶσιν ἐνδεξιᾷ τοῦ ἐσχάτου δεκαδικοῦ χαρακτῆρος 5, νέοι δεκαδικοὶ χαρακτῆρες ἄπειροι· οἵτινες ὅλοι ὁμοῦ, δὲν ἰσοδυναμοῦσι μήτε μὲ μίαν μονάδα τοῦ ὁλοσχεροῦς. (§. 145.) Τόσον ἄρα εἶναι μικρότατον ἐκεῖνο τὸ μέρος τοῦ δεκαδικοῦ Κλάσματος, τὸ ὁποῖον ἀπέμεινεν ἀπὸ τὸ ὑστερινὸν Κλάσμα 5, ὥστε ὁποῦ καὶ ἕως εἰς αὐτὸν τὸν δέκατον ἕβδομον τόπον τοῦ 5 Κλάσματος, τὸ οὐδὲν λογίζεται· εὑρίσκεται ἄρα ἡ ζητουμένη τοῦ Πλανήτου Διάμετρος, ὀλιγότερον σχεδὸν ἀπὸ 100,000,000,000,000,000. μέρη τῆς λέγας.

Καὶ αὐτὰ μὲν, τὰ ὁποῖα εἴπομεν, ἐν εἴδει εἰσαγωγῆς περὶ τῶν δεκαδικῶν Κλασμάτων, εἶναι ἱκανὰ, εἰς τὸ νὰ δώσωσιν (εἰς τὸν Μαθητὴν, ἢ ἀναγινώσκοντα) μίαν ἰδέαν τῆς σχετικῆς δυνάμεως, τὴν ὁποίαν λαμβάνουσιν οἱ χαρακτῆρες, ἐκ τῆς τοῦ τόπου θέσεως. (§. ΛΒ'.) Καὶ πῶς πρέπει νὰ γράφωνται, καὶ νὰ ἀπαγγέλλωνται. (§. 138. Καὶ 143.)

Τώρα δὲ, ἂς ἔλθωμεν καὶ εἰς τὴν διδασκαλίαν τῆς τετραπλῆς αὐτῶν πράξεως, δηλ. τῆς Συνάψεως, τῆς Ἀφαιρέσεως, τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ, καὶ τῆς Διαιρέσεως τῶν δεκαδικῶν Κλασμάτων· ὡς οἷόν τε συνοπτικῶς τε ἅμα καὶ σαφῶς· κάμνοντες ἀρχὴν ἐκ τῆς πρώτης· δηλ. τῆς Προσθέσεως, ἢ Συνάψεως.

ΚΕ-

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

Περὶ Προσθέσεως, ἢ Συνάψεως τῶν δεκαδικῶν Κλασμάτων.

Πρόβλημα Β'.

§. 147. Τὰ δοθέντα οἱαδήποτε δεκαδικὰ Κλάσματα Προσθέναι, ἢ Συνάψαι.

Λύσις.

Κάμε καὶ ἐδῶ τὴν πρᾶξιν τῆς Συνάψεως, καθὼς καὶ εἰς τὴν Σύναψιν τῶν ὁλοσχερῶν, ἢ ἀκεραίων Ἀριθμῶν, γράφων μετὰ προσοχῆς πάντα τὰ δεκαδικὰ Κλάσματα, κατὰ στήλην μίαν, (§. 16.) ἄνωθεν ἐπὶ τὰ κάτω, χωρίζων αὐτὰ τῶν ἀκεραίων Ἀριθμῶν, διὰ τῆς ἀφοσιουμένης αὐτοῖς ὑποδιαστολῆς. (§. 141.) Ὁμοίως ἅπαντα τὰ ἑκατοστημόρια, χιλιοστημόρια, καὶ καθ' ἑξῆς ὡσαύτως· ὑπαλλήλως μέντοι, κατὰ τὴν ἀξίαν, ἢ δύναμιν, ἣν ἐκ τῆς τοῦ τόπου θέσεως ἕκαστον αὐτῶν εἴληφεν.

Ὑπόδειγμα Α'.

15,37.
0,005
4,3..
0,89.
20,565

Ἃς δοθῶσιν, οἵ τε ὁλοσχερεῖς Ἀριθμοὶ, καὶ τὰ μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν ἐχόμενα τούτοις δεκαδικὰ Κλάσματα, καθὼς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα. Ἄρχισον λοιπὸν τὴν Σύναψιν, ὡσὰν νὰ ἦσαν καὶ ἀκέραιοι Ἀριθμοί. (§. 19.) Καὶ ἀφ' οὗ τὰ συνάψῃς, ἐπειδὴ εἶναι τρεῖς στῆλαι τῶν δεκαδικῶν Κλασμάτων, ἂς ἀποχωρισθῶσι τοῦ συμποσουμένου, διὰ τῆς ὑποδιαστολῆς, οἱ πρὸς δεξιὰν τρεῖς χαρακτῆρες, καὶ θέλει γένῃ τὸ προσαπτόμενον. Τὰ ἄρα τούτων ἄθροισμα, ἢ Κεφάλαιον ἐστὶν = 20 μὲν ἀκεραίοις, σὺν $\frac{5}{10} + \frac{6}{100} + \frac{5}{1000}$· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Ὑπό-

Ὑπόδειγμα Β΄.

Δοθήτωσαν πάλιν διὰ νὰ συναφθῶσιν, οἱ ἀντικρὺ δοθέντες Ἀριθμοί, ὁμοῦ μὲ τὰ δεκαδικά, ἑκατονταδικά, καὶ τὰ ἑφεξῆς αὐτῶν Κλάσματα, διὰ νὰ γνωρισθῇ τὸ τούτων ἄθροισμα, ἤγουν ὁλικὸν Κεφάλαιον. (§. 1. καὶ 23.)

35,9....
0,07
118,2054.
1,8....
0,99...
8,70907
165,67447

Λύσις.

Ἄς γενῇ καὶ αὐτὰ ὡς ἄνωθεν, καὶ θέλει εἶναι τὸ ὁλικὸν τούτων Κεφάλαιον, ἴσον μὲ 165 ἀκεραίους Ἀριθμούς, σὺν $\frac{6}{10} + \frac{7}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{4}{10000} + \frac{7}{100000}$ ὡς ἐν τῷ Διαγράμματι καθορᾶται· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Δεῖξις.

§. 148. Δείκνυται· ἐπειδὴ ἡ θεωρία αὐτῆς τῆς πράξεως, ἐπιστηρίζεται εἰς ἐκεῖνα ὅπου ἐσημειώθησαν εἰς τὸ Ε΄. Πόρισμα. (§. 140.) Παραδείγματος χάριν, δέκα ἑκατοστημόρια, συνισῶσιν ἓνα δεκατημόριον· καὶ δέκα δεκατημόρια, συνισῶσι μίαν μονάδα τῶν ὁλοχερῶν Ἀριθμῶν. Ὀρθῶς ἄρα αἱ δεκάδες ὅπου συναθροίζονται ἀπὸ ἐκεῖνα τὰ Κλάσματα, ὅπου εὑρίσκονται εἰς τὰ δεξιὰ μέρη τῆς ὑποδιαστολῆς, συναθροισθεῖσαι, προστίθενται εἰς τοὺς ὁλοσχερεῖς Ἀριθμούς, ὡς ἐν τοῖς ἐκτεθεῖσι δυσὶν Ὑποδείγμασι καθορᾶται· ἄρα κτλ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὑποσημείωσις.

3,150600
4,789000
6,620000
4,753647
19,313247

Πρῶτον, γράφομεν τοὺς ἀκεραίους Ἀριθμοὺς ὑπαλλήλως, ἐν τῷ προσήκοντι τόπῳ· ὥστε αἱ τούτων ὑποδιαστολαί, νὰ εἶναι ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ· ἔπειτα γράφομεν πρὸς τὰ

δε-

δεξιὰ αὐτῆς καὶ τὰ δεκαδικὰ Κλάσματα ὑπάλληλα· τουτέστι, τὰ δεκατημόρια, ὑπὸ τῶν δεκατημορίων, τὰ ἑκατοστημόρια, ὑποκάτω τῶν ἑκατοστημορίων· καὶ οὕτως ἑφεξῆς. Ὅταν δέ τις σειρὰν, ἔχῃ πλείονας δεκαδικοὺς Ἀριθμούς, διὰ νὰ μὴ γένῃ ἀπάτη τις εἰς τὴν Σύναψιν, ἀναπληροῦμεν τότε τοὺς κενοὺς τόπους τῶν ἄλλων σειρῶν, διὰ ἰσαρίθμων μηδενικῶν ὡς ὁρᾶται ἐν τῷ ἀντικρὺ Διαγράμματι, καὶ δὲν μεταβάλλεται ἡ δύναμις αὐτῶν, ὅσα ἂν προσθείη τις μηδενικά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

Περὶ Ἀφαιρέσεως τῶν δεκαδικῶν Κλασμάτων.

Πρόβλημα Γ΄.

§. 149. Νὰ ἀφαιρέσωμεν τοὺς δοθέντας ὁλοχερεῖς Ἀριθμούς, ὁμοῦ μὲ τὰ δεκαδικὰ αὐτῶν Κλάσματα, ἀπὸ ἄλλους Ἀριθμοὺς τοιούτους, καὶ αὐτοὺς δοθέντας, διὰ νὰ γνωρισθῇ ἡ μεταξὺ αὐτῶν Διαφορά. (§. 27 καὶ 36.)

Λύσις.

Γράψον καὶ ἐδῶ, καθὼς καὶ εἰς τὴν Πρόσθεσιν αὐτῶν, (§. 147.) τοὺς μὲν ὁλοσχερεῖς, ὑποκάτω τῶν ὁλοχερῶν Ἀριθμῶν, τὰ δὲ δεκαδικά, ὑπαλλήλως τῶν δεκαδικῶν· δηλ. κάθε χαρακτῆρα, ὑπὸ τὸν ὁμοειδῆ αὐτῷ χαρακτῆρα, κατὰ τὴν σχετικήν, ἣν πρὸς ἀλλήλους ἔχουσι δύναμιν. Ἔπειτα ἀφαίρεσον, καθὼς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους Ἀριθμούς. (§. 28 καὶ 29.) Καὶ ἀφ' οὗ ἀφαιρέσῃς, ἀποχώρισον τόσας στήλας, ἀπὸ τὴν εὑρεθεῖσαν Διαφοράν, ὅσας ἔχουσι τὰ δεκαδικὰ Κλάσματα, καθὼς ἔκαμες καὶ εἰς τὴν Σύναψιν αὐτῶν, καὶ θέλεις γνωρίσῃ τὴν μεταξὺ αὐτῶν ζητουμένην Διαφοράν, κατὰ τὴν ὁποίαν διαφέρει ὁ Μειωτέος τοῦ Ἀφαιρετέου. (§. 27.)

Ὑπό-

Ὑπόδειγμα Α'.

Ἓν ἀγγεῖον χωρεῖ ὑγρόντι οὐγγίας 15,072· πλὴν 3,98. Γράψον λοιπὸν τὰ δοθέντα, ὡς ἡρμήνευται, καὶ εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα καθορᾶται.

+ 15, + 072	Μειωτέος.	
— 3, — 980	Ἀφαιρετέος.	
= 11, + 092	=	
15, 072		

Καὶ ἐπειδὴ εἰς αὐτὸ τὸ Ὑπόδειγμα εὑρίσκονται τρεῖς στῆλαι Κλασμάτων, χώρισον διὰ τῆς ὑποδιαστολῆς, ἐκ τῆς Διαφορᾶς, τοὺς πρὸς δεξιὰν τρεῖς χαρακτῆρας, καὶ θέλει εὑρεθῇ ἡ μεταξὺ τοῦ Μειωτέου, καὶ Ἀφαιρετέου ζητουμένη Διαφορά, ἴση μὲ 11,092· ὃ δηλοῖ ἕνδεκα οὐγγίας + $\frac{9}{100}$ + $\frac{2}{1000}$ τῆς οὐγγίας.

Ὑπόδειγμα Β'.

Ἀπὸ 9 λίτρας, ζητοῦται νὰ ἀφαιρέσωμεν 5,0942. Πόση ἄρα εἶναι ἡ μεταξὺ αὐτῶν Διαφορά;

Λύσις.

Ἐπειδὴ εἰς τὸ παρὸν Ὑπόδειγμα, ὁ μὲν Μειωτέος, δὲν ἔχει κἀνὲν μηδενικόν· ὁ δὲ Ἀφαιρετέος ἔχει τέσσαρα δεκαδικὰ Κλάσματα, γράψον τέσσαρα μηδενικὰ ἐκ δεξιῶν τοῦ 9, μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, καὶ δὲν θέλει μετακινηθῇ ἡ δύναμίς του. (§. 144.)

+ 9, + 0000	Μειωτέος.	
— 5, 0942	Ἀφαιρετέος.	
= 3, 9058	=	
9, + 0000		

Ἔπειτα ἀφαίρεσον, καθὼς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους Ἀριθμούς· ἀποχωρίσας δὲ τῆς Διαφορᾶς τοὺς πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτῆς τέσσαρας χαρακτῆρας, διὰ τὰ εὑρισκόμενα τέσσαρα δεκαδικὰ Κλάσματα, θέλεις ἔχῃ τὴν Διαφορὰν ἴσην, 3,9058· ἤγουν 3, + $\frac{9}{10}$ + $\frac{5}{1000}$ + $\frac{8}{10000}$· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Σχόλιον.

Ἡ μὲν Δεῖξις, εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ ἐκείνην τῆς Προσθέσεως, (§. 148.) ἡ δὲ Βάσανος, ἤγουν δοκιμή, καὶ τῆς Προσθέσεως,

καὶ

καὶ τῆς Ἀφαιρέσεως, εἶναι ἡ ἰδία ἐκείνη, τὴν ὁποίαν ἡρμηνεύσαμεν εἰς τοὺς ὁλοσχερεῖς, ἢ ἀκεραίους Ἀριθμούς· (§. 35.) καὶ δὲν εἶναι χρεία νὰ τὴν ἑρμηνεύσωμεν ἐδῶ· πλὴν ἐὰν θέλῃς νὰ κάμῃς τὴν δοκιμήν, σύναψον τὸν Ἀφαιρετέον μὲ τὴν Διαφοράν· καὶ εἰμὲν εὕρῃ ὁ Μειωτέος, εἶναι σωστή, καὶ ἀσφαλὴς ἡ πρᾶξις· εἰδὲ μή, ξανάκαμέ την. Ἐπιστηρίζεται δὲ ἡ πρᾶξις τῆς δοκιμῆς, (εἰς τὸ ΙΑ'. Ἀξίωμα. §. 12. καὶ εἰς τὸ Α'. §. 2.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν δεκαδικῶν Κλασμάτων.

Πρόβλημα Δ'.

§. 150. Τοὺς δοθέντας ὁλοσχερεῖς Ἀριθμούς, σὺν τοῖς δεκαδικοῖς αὐτῶν Κλάσμασι, πρὸς ἀλλήλους πολλαπλασιάσαι. ὅρα (§. 41.)

Λύσις.

Πολλαπλασίασον τούς τε ὁλοσχερεῖς, καὶ τὰ δεκαδικά των Κλάσματα, ὡσὰν νὰ ἦσαν καὶ ἀκέραιοι Ἀριθμοί. Ἔπειτα διαχώρισον ἐκ τοῦ γενομένου, τόσους χαρακτῆρας, ὅσα δεκαδικὰ Κλάσματα ἦσαν καὶ εἰς τὸν Πολλαπλασιαστήν, καὶ εἰς τὸν Πολλαπλασιαστέον· καὶ θέλεις ἔχῃ τὸ ζητούμενον.

Ὑπόδειγμα Α'.

Δοθήτω δὴ ὁ 2,05, νὰ τὸν πολλαπλασιάσωμεν μὲ τὸν ἑαυτόν του, ἤγουν νὰ τὸν τετραγωνίσωμεν, ὁμοῦ μὲ τὰ δεκαδικά του Κλάσματα· πολλαπλασίασον αὐτὸν κατὰ τοὺς Κανόνας τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ, τῶν ἀκεραίων Ἀριθμῶν. (ὅρα §. 42. μέχρι τῶν 48.) Καὶ ἐπειδὴ εἰς αὐτὸ τὸ Ὑπόδειγμα, εὑρίσκονται δύω δεκαδικοὶ χαρακτῆρες εἰς τὸν Πολλαπλασιαστέον, καὶ δύω εἰς τὸν Πολλαπλασιαστήν, διαχώρισον τέσσαρας χαρακτῆρας, πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου, διὰ

2,05
2,05
10,25
4 10
4,20 25

τῆς

τῆς ὑποδιαστολῆς, καὶ θέλεις ἔχῃ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ζητεῖς· καθὼς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα. Ἔσται ἄρα τὸ γινόμενον ἴσον τῷ, $4,2025 = 4 + \frac{2}{10} + \frac{2}{1000} + \frac{5}{10000} = 4, \frac{2025}{10000}$.

Δεῖξις.

Δείκνυται· 2,05, ἐστὶν $= 2 + \frac{5}{100}$· ἤγουν $\frac{205}{100}$. (ὅρα §. 87.) Ἀλλαμὴν $\frac{205}{100}$ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ $\frac{205}{100}$, παράγει τὸν, $\frac{42025}{10000}$. Αὐτὸ δὲ κατ' ἀλήθειαν εἶναι ἴσον τῷ, $4\,\frac{2025}{10000}$. ἤγουν τὸ ἴδιον μὲ τὸ 4,2025. κατὰ τὸ Β'. Πόρισμα. (§. 136.) Ἄρα τὸ ὑπὸ τοῦ 2,05· ἐφ' ἑαυτοῦ πολλαπλασιασθέντος, τὸ γινόμενον, ἢ ὁ τετράγωνος αὐτοῦ Ἀριθμὸς ἐστὶν ὁ 4,2025· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὑποσημείωσις.

§. 151. Πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν, ὅτι ὅταν εἰς τὸ παραγόμενον, ἢ γινόμενον διὰ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν δεκαδικῶν Κλασμάτων, δὲν εὑρίσκονται ἱκανοὶ χαρακτῆρες, διὰ νὰ ἠμπορῶσι νὰ ἀποχωρισθῶσι διὰ τῆς ὑποδιαστολῆς, ὅσοι δεκαδικοὶ χαρακτῆρες εὑρίσκονται εἰς τὸν Πολλαπλασιαστέον, καὶ εἰς τὸν Πολλαπλασιαστήν, τοσαῦτα μηδενικὰ πρέπει νὰ βάλωμεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ γενομένου, διὰ νὰ εἶναι δυνατὸν, εἰς τὸ νὰ ἀποχωρίσωμεν τοὺς ἀναγκαίους χαρακτῆρας· καθὼς θέλομεν τὸ ἰδῇ εἰς τὸ ἐφεξῆς Ὑπόδειγμα.

Ὑπόδειγμα Β'.

Δεδόσθω, καθ' ὑπόθεσιν, νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ, 0,007 Κλάσμα, διὰ τοῦ, 0,0004· λέγε οὖν 4. 7 = 28. Καὶ ἐπειδὴ εὑρίσκονται ἑπτὰ μηδενικὰ, καὶ εἰς τοὺς δύω, δηλ. εἰς τὸν Πολλαπλασιαστήν, καὶ εἰς τὸν Πολλαπλασιαστέον, θὲς πέντε μηδενικὰ πρὸς ἀριστερὰν τοῦ 28, καὶ πρὸς δεξιὰν τῆς ὑποδιαστολῆς, κατὰ τὴν ἀνωτέρω ὑποσημείωσιν, καὶ θέλει εἶναι τὸ γινόμενον ἴσον τῷ, 0,0000028 δεκαδικῷ Κλάσματι· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον. Τοῦτο δὲ ἐστὶν $=$ τῷ, $\frac{2}{1000000} + \frac{8}{10000000}$.

0, 007
0, 0004
0,0000028

Δεῖ-

Δεῖξις.

Δείκνυται· τὸ, 0,007 Κλάσμα, ἐστὶν ἴσον τῷ, $\frac{7}{1000}$· τὸ δὲ 0,0004, ἐστὶν ἴσον τῷ, $\frac{4}{10000}$. ἄρα τὸ, $\frac{7}{1000}$ πολλαπλασιασθὲν διὰ $\frac{4}{10000}$, δίδει γινόμενον τὸ, $\frac{28}{10000000}$· τὸ ὁποῖον δύναται ἴσα μὲ τὸ, 0,0000028· κατὰ τὸ ϛ'. Πόρισμα. (§. 141.) Ἄρα κτλ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόβλημα Ε'.

§. 152. Νὰ εὕρωμεν τὴν δύναμιν τοῦ δεκαδικοῦ ἐκείνου Κλάσματος, τὸ ὁποῖον φανερώνει ὀργυιὰς, ἢ λίτρας, ἢ ὀκάδας, ἢ πήχεις, ἢ νομίσματα, ἢ ὁ, τιοῦν ἕτερον.

Λύσις.

Πολλαπλασίασον τὸ Κλάσμα, δι' ἐκείνου τοῦ Ἀριθμοῦ, ὅστις φανερώνει ποσάκις μία μονὰς τοῦ εἴδους ἐκείνου ὁποῦ μέλλει νὰ γραφῇ, ἐμπεριέχεται εἰς τὴν μονάδα τοῦ Κλάσματος ὁποῦ παρασταίνεται, καὶ θέλεις ἔχῃ ἐκεῖνο, ὁποῦ ζητεῖς.

Ὑπόδειγμα Γ'.

Πόσους πόδας, καὶ δάκτυλα κάμνουσι 4,532 τῆς ὀργυιᾶς κατὰ μῆκος;

Λύσις.

Εἰς λύσιν τούτου, α'. ἀνάλυσον τὰς ὀργυιὰς εἰς πόδας, πολλαπλασιάσας αὐτὰς, ἐπὶ τὸν 6 Ἀριθμόν. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ὀργυιὰ συνίσταται ἀπὸ ἓξ πόδας κατὰ μῆκος, γίνονται πόδες 27192· οἷον 4,532. 6 = 27192· χώρισον τοὺς ἐν δεξιᾷ τρεῖς χαρακτῆρας διὰ τῆς ὑποδιαστολῆς, διὰ τὰ τρία Κλάσματα ὁποῦ εὑρίσκονται εἰς τὸν Πολλαπλασιαστέον, καὶ ἐναπομένουσι πόδες 27· καὶ ἐναπομένει πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς, τὸ 192 Κλάσμα. Πρόσθεσον εἰς αὐτὸ ἓν μηδενικὸν, καὶ πολλαπλασίασον αὐτὸ, ἐπὶ 16, (ἐπειδὴ τόσους δακτύλους περιέχει ὁ κατὰ μῆκος Πούς·) καὶ γίνεται ὁ 3072.

διὰ

Διαχώρισον πάλιν τοὺς πρὸς δεξιὰν τρεῖς χαρακτῆρας, διὰ τῆς ὑποδιαστολῆς, διὰ τὰ τρία Κλάσματα, καὶ ἐναπομένουσι τρεῖς δάκτυλοι, καὶ λείψανον 0,072 $= \frac{7}{100} + \frac{2}{1000}$ τοῦ δακτύλου. Ἄρα τέσσαρες ὀργυιαὶ κατὰ μῆκος, σὺν $\frac{5}{10} + \frac{1}{100} + \frac{2}{1000}$ τῆς ὀργυιᾶς, περιέχουσι πόδας μὲν 27, δακτύλους δὲ 3, σὺν $\frac{7}{1000} + \frac{2}{10000}$ τοῦ δακτύλου· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Ὑπόδειγμα Δ'.

Πόσων γροσίων τιμῶνται 5,25 ὀργυιαὶ κατὰ μῆκος, πρὸς 5 γρόσια ἡ κάθε ὀργυιά;

Λύσις.

Ἂς πολλαπλασιασθῶσιν ἀ. αἱ 5 ὀργυιαὶ ὁμοῦ μὲ τὰ Κλάσματά των, ἐπὶ τὰ 5 γρόσια, καὶ γίνεται ὁ 2625 Ἀριθμός· ἀποχώρισον τοὺς δύω πρὸς δεξιὰν χαρακτῆρας διὰ τῆς ὑποδιαστολῆς, καὶ μένει ὁ 26 Ἀριθμὸς, ὅς τις δηλοῖ γρόσια· καὶ ἐναπομένουσιν 25. Ἂς τεθῇ εἰς τὰ ἀριστερὰ μέρη τοῦ καταλείπου 25, ἓν μηδενικὸν, εἰς τὸν τόπον τῆς μονάδος, καὶ γίνεται τὸ 0,25 Κλάσμα· τοῦτο ἂς πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν 40, (ἐπειδὴ εἰς τόσους παράδες διαιρεῖται τὸ κάθε γρόσιον) καὶ γίνεται ὁ 1000 Ἀριθμός· ἀποχώρισον πάλιν τοὺς πρὸς δεξιὰν δύω χαρακτῆρας, διὰ τὰ δύω Κλάσματα, καὶ μένει ὁ 10, χωρὶς κανὲν λείψανον, καὶ αὐτὸς δηλοῖ παράδ.

5,25
5
26,25
0,25
40
10,00 =
= 26 + 10

Ἄρα πέντε ὀργυιαὶ κατὰ μῆκος τόπου τινὸς + 25 ὀργυιᾶς $= \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$, πρὸς γρόσια 5, δίδουσι γρόσ. 26, καὶ παράδ. 10· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Ὑπόδειγμα Ε'.

Πόσου ἄρα τιμῶνται λίτραι 4,248 χαβιάρι, πρὸς ὀβολοὺς 30 ἡ κάθε λίτρα;

Λύσις.

Πολλαπλασίασον τὰς λίτρας ὁμοῦ μὲ τὰ Κλάσματά των, ἐπὶ τοὺς 30 ὀβολοὺς, καὶ γίνεται ὁ 127,440 Ἀριθμός· ἀποχώρισον

χώρισον τοὺς πρὸς δεξιὰν τούτου τρεῖς χαρακτῆρας, διὰ τὰ εὑρισκόμενα τρία δεκαδικὰ Κλάσματα, καὶ δίδουσιν ὀβολοὺς 127, καὶ ἐναπομένει τὸ, 440 Κλάσμα· θὲς εἰς τὰ ἀριστερὰ τούτου, ἓν μηδενικὸν, εἰς τὸν τόπον τῆς μονάδος, δι' ἔλλειψιν αὐτῆς, καὶ πολλαπλασίασον αὐτὸ ἐπὶ τὸν 4 Ἀριθμὸν, (εἰς τέσσαρα γὰρ λεπτὰ διαιρεῖται ὁ ὀβολός·) καὶ γίνεται ὁ 1760 Ἀριθμός. Ἀποχωρίσας οὖν τοὺς πρὸς δεξιὰν τρεῖς χαρακτῆρας, διὰ τὰ τρία Κλάσματα, δίδει λεπτὸν ἓν, καὶ ἐναπομένει Κλάσμα τὸ, 760 $= \frac{7}{10} + \frac{6}{100}$ τοῦ λεπτοῦ· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

4,248
30
127,440
0,440
4
1,760 =
$= 127 + 1 + \frac{7}{10} + \frac{6}{100}$

Ἄρα ἡ δύναμις τῶν 4 λιτρῶν χαβιαρίου, σὺν $\frac{2}{10} + \frac{4}{100} + \frac{8}{1000}$ τῆς λίτρας, τιμᾶται ὀβολῶν 127, σὺν ἑνὶ λεπτῷ, σὺν $\frac{7}{10} + \frac{6}{100}$ τοῦ λεπτοῦ.

Ὑπόδειγμα Ϛ'.

Πόσου ἄρα τιμῶνται ὀκάδες 28,135, πρὸς γρόσια 4 ἡ κάθε ὀκᾶ;

Λύσις.

Πολλαπλασίασον μὲ τὴν δοθεῖσαν τιμὴν δηλ. μὲ τὰ 4 γρόσ. τὰς δοθείσας ὀκάδας μὲ τὰ Κλάσματά των, τοῦ δὲ γενομένου, ἀποχώρισον τοὺς πρὸς δεξιὰν τρεῖς χαρακτῆρας, διὰ τὰ τρία Κλάσματα τῆς ὀκᾶς· καὶ τὰ μὲν πρὸς ἀριστερὰν τῆς ὑποδιαστολῆς, εἶναι γρόσια, τὸ δὲ πρὸς δεξιὰν, μένει Κλάσμα. Βάλε ἓν μηδενικὸν πρὸς ἀριστερὰν τοῦ Κλάσματος, εἰς τόπον τῆς μονάδος, καὶ πολλαπλασίασον αὐτὸ, ἐπὶ 40 παρ. τοῦ δὲ γενομένου, ἀποχώρισον πάλιν τοὺς πρὸς δεξιὰν τρεῖς χαρακτῆρας, καὶ μένει πρὸς ἀριστερὰν τῆς ὑποδιαστολῆς παρ. εἰς δὲ τὸ πρὸς δεξιὰν τῆς ὑποδιαστολῆς ἐναπολειφθὲν Κλάσ-

28,135		
4		
112,540		
0,540		
40		
21,600		
0,600		
3		
1,800		
Γρόσ.	Παρ.	Λεπτ.
112 :	21 :	$1 + \frac{8}{10}$

Κλάσμα, πρόσθεσον πάλιν, ὡς ἄνωθεν ἓν μηδενικὸν, εἰς τόπον τῆς μονάδος, καὶ πολλαπλασίασον αὐτὸ ἐπὶ τὸν 8, διὰ νὰ γένωσι λεπτά. (Ἐπειδὴ τρία λεπτὰ περιέχει ὁ κάθε παρᾶς) ἀποχώρισον πάλιν τοὺς πρὸς δεξιὰν τρεῖς χαρακτῆρας, καὶ μένουσι πρὸς μὲν τὰ ἀριστερὰ λεπτὰ, πρὸς δὲ τὰ δεξιὰ Κλάσμα ἀδιαίρετον, ὡς φαίνεται εἰς τὸ προτεθὲν Διάγραμμα. Ἄρα αἱ 28 ὀκάδες, σὺν $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$ τῆς ὀκᾶς, πρὸς 4 γρόσια ἡ ὀκᾶ, τιμῶνται γρόσια 112, παρ. 21, λεπτὸν $1 + \frac{8}{10}$ τοῦ λεπτοῦ· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Ὑπόδειγμα Ζ'.

Πόσου ἄρα τιμῶνται 16,12 πήχεις ὑφάσματος τινὸς, πρὸς ὀβολοὺς 18, ὁ κάθε πῆχυς;

Λύσις.

16,12
18
128,96
161,26
290,16
0,16
4
0,64 =
$= 290 + 0 + \frac{6}{10} + \frac{4}{100}$

Πολλαπλασίασον τοὺς δοθέντας πήχεις ὁμοῦ μὲ τὰ Κλάσματά των, ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν τιμήν· δηλ. τοὺς 18 ὀβολοὺς, καὶ γίνεται ὁ 290,16 Ἀριθμός· ἀποχωρίσας τοὺς πρὸς δεξιὰν δύω χαρακτῆρας, διὰ τὰ δύω Κλάσματα, μένουσι πρὸς μὲν ἀριστερὰν 290, καὶ αὐτοὶ εἶναι ὀβολοί· πρὸς δὲ δεξιὰν 16, καὶ αὐτὸ εἶναι Κλάσμα· πρόσθεσον εἰς τὰ ἀριστερά του ἓν μηδενικὸν εἰς τόπον τῆς μονάδος, καὶ πολλαπλασίασον αὐτὸ μὲ τὰ 4 λεπτὰ, ἐφ' οἷς διαιρεῖται ὁ ὀβολὸς, καὶ γίνεται ὁ 64 Ἀριθμός· ἀποχώρισον τοὺς πρὸς δεξιὰν δύω χαρακτῆρας, καὶ μένει μηδενικὸν, καὶ πρὸς δεξιὰν $64 = \frac{6}{10} + \frac{4}{100}$ τοῦ λεπτοῦ: οἱ 16 πήχεις ἄρα, σὺν $\frac{1}{10} + \frac{2}{100}$ τοῦ πήχεως, πρὸς ὀβολοὺς 18, μας δίδει ὀβολοὺς μὲν 290, σὺν οὐδενὶ λεπτῷ, σὺν $\frac{6}{10} + \frac{4}{100}$ τοῦ λεπτοῦ· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Καὶ περὶ μὲν τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν δεκαδικῶν ἅλις· νῦν δὲ περὶ τῆς Διαιρέσεως αὐτῶν εἴπωμεν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'.

Περὶ Διαιρέσεως τῶν δεκαδικῶν Κλασμάτων.

Πρόβλημα Ϛ'.

§. 153. Νὰ διαιρέσωμεν τοὺς ὁλοκερεῖς Ἀριθμοὺς, ὁμοῦ μὲ τὰ δεκαδικά των Κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἤθελαν μας δοθῶσι, δι' ἄλλου τοιούτου Ἀριθμοῦ, καὶ αὐτοῦ δοθέντος· διὰ νὰ γνωρίσωμεν, ποσάκις ὁ Διαιρέτης εὑρίσκεται εἰς τὸν Διαιρετέον. (§. 51.)

Πρὸ τοῦ νὰ ἀρχίσωμεν τὴν πρᾶξιν τῆς τοιαύτης Διαιρέσεως, ἂς προτάξωμεν τοὺς ἐφεξῆς Κανόνας, κατὰ τοὺς ὁποίους θέλει γίνεται ἡ τῶν δεκαδικῶν Κλασμάτων Διαίρεσις.

Κανὼν Α'.

§. 154. Πρῶτον δὴ, ἀφ' οὗ θέσῃς εἰς τὸν διωρισμένον τόπον, τοὺς Ἀριθμοὺς μὲ τὰ Κλάσματά των, τοὺς ὁποίους μέλλεις νὰ διαιρέσῃς, (κατὰ τὸν τῆς Διαιρέσεως Α'. Κανόν.) (§. 53.) Ἴσωσον τοὺς τόπους τῶν δεκαδικῶν Κλασμάτων, ὅπου εὑρίσκονται εἰς τὸν Διαιρετέον, καὶ Διαιρέτην, προσθέτων, ἂν ἤθελε κάμῃ χρεία, εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ἑνὸς, τόσα μηδενικὰ, ὅσα εἶναι ἱκανὰ νὰ ἐξισωθῶσι τὰ δύω Κλάσματα, κατὰ τὸ Η'. Πόρισμα. (§. 144.)

Κανὼν Β'.

§. 155. Δεύτερον, διαίρεσον, ὡσὰν νὰ ἦσαν καὶ ὁλοσχερεῖς Ἀριθμοί. (§. 54.)

Κανὼν Γ'.

§. 156. Τρίτον, ἀφ' οὗ διαιρέσῃς, ἂν ἴσως ἀπομείνῃ τι λείψανον, προσθέτων εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ μέρη, ἓν μηδενικὸν, ἐπανάλαβε τὴν Διαίρεσιν, καθὼς ἔγινεν εἰς τὸ Ε'. Ὑπόδειγμα τοῦ Α΄. Προβλήματος. (§. 146.) Τὸν αὐτὸν τρόπον θέλεις ἐξακολουθήσῃ, ἐὰν ἀπομείνῃ τὶ λείψανον, καὶ εἰς τὴν β΄. γ΄. δ΄. Διαίρεσιν κτλ. ἐκ τῆς ὁποίας ἀλληλοδιαδόχου Διαιρέσεως, ἀναφύονται καὶ γεννῶνται τὰ δεκαδικὰ Κλάσματα.

Ὑπόδειγμα Α΄.

Διαιρετέος	Διαιρέτης
8, 44	4, 22
8, 44	Πηλίκον
0, 00	2, 00

Δοθήτωσαν οὖν, καθ᾿ ὑπόθεσιν, οἱ ἐν τῷ ἀντικρὺ Διαγράμματι ὁλοσχερεῖς Ἀριθμοί, ὁμοῦ μὲ τὰ δεκαδικά των Κλάσματα· ὁ μὲν, 8,44, ὡς Διαιρετέος, ὁ δὲ, 4,22, ὡς Διαιρέτης· διαιρέσαντες δὲ τὸν Διαιρετέον ἐπὶ τὸν ἐν δεξιᾷ αὐτοῦ Διαιρέτην, μας δίδει Πηλίκον τὸν 2 ὁλοσχερῆ Ἀριθμόν, χωρὶς νὰ ἀπομείνῃ τὶ λείψανον· ὡς ἐν τῷ Διαγράμματι καθορᾶται. Δὶς ἄρα ὁ Διαιρέτης 4, 22, εὑρίσκεται εἰς τὸν Διαιρετέον, 8, 44, κατὰ τὸν τῆς Διαιρέσεως Ὁρισμόν· (§. 51.) καὶ τὸ ϛ΄. Πρόβλημα· (§. 153.) ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Δεῖξις.

Δείκνυται· τὸ μὲν, 8,44, εἶναι ἴσον τῷ, $\frac{844}{100}$, τὸ δὲ 4, 22 ἴσον τῷ, $\frac{422}{100}$. (§. 87.) εἶναι ἄρα φανερὸν, ὅτι τὸ, $\frac{422}{100}$, δύω φοραῖς εὑρίσκεται εἰς τὸ, $\frac{844}{100}$. Ἄρα ὁ 2 ἐστὶ τὸ ζητούμενον Πηλίκον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Πολλαπλασιασθὲν γὰρ τὸ Πηλίκον 2, ἐπὶ τὸν Διαιρέτην 4,22, παράγει τὸν Διαιρετέον, κατὰ τὴν τῆς Διαιρέσεως Βάσανον· (§. 61.) ἄρα ὀρθῶς ἡ πρᾶξις ἐγένετο· οἷον 4,22. 2 = 8,44.

Ὑπόδειγμα Β΄.

Ἂς δοθῶσι πάλιν οἱ ἐν τῷ Διαγράμματι δοθέντες ὁλοσχερεῖς Ἀριθμοί, ὁμοῦ μὲ τὰ δεκαδικά των Κλάσματα· ὁ μὲν, 125,202, ὡς Διαιρετέος, ὁ δὲ, 54,2, ὡς Διαιρέτης. Ἂς βαλθῶσιν εἰς τὸν διωρισμένον τους τόπον, κατὰ τὸν Α΄. Κανόνα. (§. 154.) Καὶ ἐπειδὴ εἰς αὐτὸ τὸ Ὑπόδειγμα, ὁ μὲν Διαιρετέος ἔχει τρία δεκαδικὰ Κλάσματα, ὁ δὲ Διαιρέτης μόνον ἓν, ἂς γραφῶσι πρὸς δεξιὰν τοῦ Διαιρέτου δύω μηδενικά, διὰ

νὰ

Διαιρετέος	Διαιρέτης
125,202	54,200
108,400	Πηλίκον
=16,8020	2,31
16,2600	
==,54200	
54200	
00000	

νὰ ἐξισωθῶσι, καὶ νὰ ἔχῃ καὶ αὐτὸς τρία μηδενικά, κατὰ τὸν αὐτὸν Κανόνα· (§. 154.) λοιπὸν διαιρεθεὶς ὁ Διαιρετέος ἐπὶ τὸν Διαιρέτην, δίδει Πηλίκον τὸν ὁλοσχερῆ 2, καὶ ἐναπομένει λείψανον, ὁ 16802 Ἀριθμός· πρόσθεσον οὖν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ ἓν μηδενικὸν, κατὰ τὸν Γ΄. Κανόνα, (§. 156.) καὶ ἂς γένῃ, ὁ 168020. Καὶ πάλιν διαιρέσας καὶ αὐτὸν ἐπὶ τὸν αὐτὸν Διαιρέτην, δίδει Πηλίκον τὸν 3, πρῶτον δεκαδικὸν Κλάσμα· θὲς λοιπὸν αὐτὸ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ πρώτου Πηλίκου ὁλοσχεροῦς 2, χωρίζων αὐτὰ μὲ τὴν ὑποδιαστολὴν, διὰ νὰ μὴ ἀνακατώνωνται οἱ ὁλοσχερεῖς, ἢ ἀκέραιοι Ἀριθμοί, μὲ τὰ δεκαδικὰ Κλάσματα· ἐναπομένει δὲ καὶ εἰς αὐτὴν τὴν β΄. Διαίρεσιν, τὸ 16802 Κλάσμα· πρόσθεσον οὖν εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ, ἓν μηδενικὸν, κατὰ τὸν αὐτὸν Κανόνα, (§. 156.) καὶ ἂς γένῃ, ὁ 168020· διαιρέσας δὲ καὶ αὐτὸν, δίδει Πηλίκον μονάδα, καὶ δὲν μένει οὐδέν· βάλε οὖν τὴν μονάδα εἰς τὰ δεξιὰ μέρη τοῦ 3, πρώτου δεκαδικοῦ Πηλίκου, καὶ ἐτελείωσεν ἡ Διαίρεσις. Ὅλον ἄρα τὸ Πηλίκον, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἀπὸ τὴν παροῦσαν Διαίρεσιν, εἶναι ὁ 2 ὁλοσχερὴς Ἀριθμός, καὶ τὸ 31 δεκαδικὸν Κλάσμα = τῷ $\frac{3}{10}$ + τῷ $\frac{1}{100}$· καὶ τοσάκις εὑρίσκεται ὁ Διαιρέτης ἐπὶ τὸν Διαιρετέον· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον. Κατὰ τὸν Ὁρισμὸν τῆς Διαιρέσεως. (§. 51.)

Ὑπόδειγμα Γ΄.

Διαιρετέος	Διαιρέτης
4,.0	2, 5
25	Πηλίκον
1, 50	1,6
1, 50	
0 00	

Δοθήτω ὁ ὁλοσχερὴς Ἀριθμὸς 4, διὰ νὰ διαιρεθῇ ἐπὶ τὸν 2,5 Ἀριθμὸν καὶ Κλάσμα. Καὶ ἐπειδὴ εἰς αὐτὸ τὸ Ὑπόδειγμα, ὁ μὲν Διαιρέτης ἔχει δύω χαρακτῆρας, ὁ δὲ Διαιρετέος ἓνα μόνον, ἂς προστεθῇ καὶ εἰς αὐτὸν ἓν μηδενικὸν πρὸς δεξιὰν αὐτοῦ, διὰ νὰ ἔχῃ καὶ αὐτὸς ἴσους χαρακτῆρας, μὲ τὸν Διαιρέτην, κατὰ τὸν Α΄. Κανόνα, (§. 154.) καὶ ἂς γένῃ, ὁ 4,0. ὅστις διαιρεθεὶς ἐπὶ τὸν 2,5 δίδει Πηλίκον τὴν μονάδα, καὶ μένουσι 15. ἂς προστεθῇ λοιπὸν εἰς τὰ δεξιὰ τούτου ἓν μηδενικὸν, καὶ ἂς γένῃ, ὁ 150, κατὰ τὸν Γ΄. Κανόνα, (§. 156.) ὅστις διαιρεθεὶς ἐπὶ τὸν 2,5 δίδει Πηλίκον 6, καὶ δὲν ἀπομένει τίποτες· εἶναι ἄρα καὶ εἰς αὐτὴν τὴν Διαίρεσιν Πηλίκον οὐ ὁλοχερὲς, καὶ $\frac{6}{10}$· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Ὑπόδειγμα Δ΄.

Διαιρετέος	Διαιρέτης
127,440.	30,.000
120	
007,440.0	Πηλίκον
6000 0	42,48
1440 0.0	
1240 0 0	
0200 00.0	
200 00 0	
000 00 0	

Δοθήτω πάλιν ὁ 127,440 ὁλοχερὴς Ἀριθμὸς μὲ τὸ Κλάσμα του, διὰ νὰ διαιρεθῇ ἐπὶ τὸν 30 ὁλοχερῆ μόνον Ἀριθμόν· ἂς βαλθῶσιν εἰς τὸν διωρισμένον τους τόπον· (§. 154.) καὶ ἐπειδὴ ὁ μὲν Διαιρετέος ἔχει τρία δεκαδικὰ Κλάσματα, ὁ δὲ Διαιρέτης, οὐδὲν, ἂς προστεθῶσι τρία μηδενικὰ ἐν δεξιᾷ τοῦ Διαιρέτου, διὰ νὰ ἐξισωθῇ καὶ αὐτὸς μὲ τὸν Διαιρετέον· διαιρεθεὶς οὖν ὁ Διαιρετέος ἐπὶ τὸν Διαιρέτην, δίδει α. Πηλίκον τὸν ὁλοσχερῆ 4, καὶ ἐναπολείπεται ὁ 7,440· πρόσθεσον ἐν δεξιᾷ τούτου τοῦ καταλείπου ἓν μηδενικὸν, κατὰ τὸν Γ΄. Κανόνα· (§. 156.) καὶ γίνεται ὁ 7,4400, διαιρεθεὶς οὖν, δίδει Πηλίκον τὸν ὁλοσχερῆ 2, καὶ ἐναπομένει τὸ 1,4400· πρόσθεσον πάλιν ἓν μηδενικὸν, καὶ ἂς γένῃ, ὁ 1,44000· διαιρέσας οὖν τοῦτον, δίδει α. δεκαδικὸν Πηλίκον τὸ 4, καὶ ἐναπολείπεται ὁ 12000· προσθέντων πάλιν ἓν μηδενικὸν, καὶ διαιρῶντας, δίδει β΄. δεκαδικὸν Πηλίκον τὸν 8, καὶ δὲν μένει οὐδέν· ἄρα διαιρεθεὶς ὁ 127,440, ἐπὶ τὸν 30 ὁλοσχερῆ Ἀριθμὸν, δίδει Πηλίκον 42 ὁλοσχερεῖς $+\frac{4}{10}+\frac{8}{100}$· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Ὑπό-

Ὑπόδειγμα Ε΄.

Διαιρετέος	Διαιρέτης
112,540	4,.000
8000	
32,540	Πηλίκον
32000	28,135
00,540	
400	
1400.0	
1200 0	
0200 0.0	
200 0 0	
000 0 0	

Δοθήτω αὖθις ὁ 112,540 Ἀριθμὸς ὁμοῦ μὲ τὰ δεκαδικά του Κλάσματα, διὰ νὰ διαιρεθῇ ἐπὶ τὸν 4 ὁλοχερῆ Ἀριθμόν· ἀφ᾽ οὗ βαλθῶσιν οἱ δοθέντες Ἀριθμοὶ εἰς τὸν τόπον τους· ἂς γένῃ ἡ πρᾶξις ὡς ἄνωθεν· καὶ α. μὲν, ἂς προστεθῶσι τρία μηδενικὰ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ Διαιρέτου, διὰ τὰ ἐν τῷ Διαιρετέῳ εὑρισκόμενα τρία Κλάσματα, κατὰ τὸν Α΄. Κανόνα. (§. 154.) Ἔπειτα διαίρεσον, καὶ εὐγαίνει Ἀριθμὸς μὲν ὁλοχερὴς, ὁ 28· δεκαδικὰ δὲ Κλάσματα τὰ 135· ἴσον τῷ $\frac{1}{10}+\frac{3}{100}+\frac{5}{1000}$· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον· ὁ ἄρα 112,540, διαιρεθεὶς ἐπὶ τὸν ὁλοχερῆ 4, δίδει Πηλίκον, τὸν 28 ὁλοχερῆ Ἀριθμὸν, καὶ τὰ 135 δεκαδικὰ Κλάσματα· ὡς ὁρᾶται ἐν τῷ ἀντικρὺ Διαγράμματι.

Ὑπόδειγμα Ϛ΄.

Διαιρετέος	Διαιρέτης
27,25	5,2.0
2600	
01,25.0	Πηλίκον
1040	0,24
021 0.0	
208 0	
—— —— 2 0	

Δοθήτω ὁ 27,25 Ἀριθμὸς μὲ τὰ Κλάσματά του, νὰ διαιρεθῇ ἐπὶ τὸν 5,2 Ἀριθμὸν μὲ τὸ Κλάσμα του· α. θὲς τοὺς δοθέντας εἰς τὸν διωρισμένον τους τόπον, καὶ ἴσωσον τὸν Διαιρέτην τῷ Διαιρετέῳ, προσθεὶς εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ Διαιρέτου ἓν μηδενικὸν, κατὰ τὸν α. Κανόν. (§. 154.) διαίρεσον, καὶ δίδει α. Πηλίκον τὸν 5 ὁλοχερῆ, καὶ ἐναπολείπεται ὁ 125. πρόσθες ἓν μηδενικὸν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ καταλείπου, καὶ διαιρέσας, δίδει α. δεκαδικὸν Πηλίκον τὸν 2, καὶ μένει

μένει

νει λείψανον 210· πρόσθεσον πάλιν τὸ μηδενικόν, καὶ διαίρεσον, καὶ δίδει Πηλίκον τὸν 4, καὶ ἐναπομένει ὁ 20, καὶ αὐτό, ἂς λογίζηται ἀδιαίρετον· ἐπειδὴ ἐπαναλαμβάνων τὴν πρᾶξιν μέχρι τῆς μονάδος τῶν διλλιονίων, πάντοτε ἀπομένει τὶ λείψανον $= \frac{2}{1000}$· λέγομεν, ὅτι ὁ Διαιρετέος 27,25 διαιρεθεὶς ἐπὶ τὸν 5,2· δίδει Πηλίκον 5 ὁλοκερῆ, σὺν $\frac{2}{10} + \frac{4}{100}$· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Βάσανος.

§. 157. Βασανίζεται δέ, ὁ μὲν Πολλαπλασιασμός, διὰ τῆς Διαιρέσεως· ἡ δὲ Διαίρεσις διὰ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ· ὅρα τὰ ῥηθέντα (§. 50, καὶ 61.) ἤγουν εἰς κάθε Διαίρεσιν τῶν ἐκτεθέντων Ὑποδειγμάτων, ἀνίσως πολλαπλασιασθῇ τὸ Πηλίκον, ἐπὶ τὸν Διαιρέτην, θέλει δώσῃ τὸν Διαιρετέον, προστεθέντος τῷ γινομένῳ καὶ τοῦ λειψάνου, εἰ ἄρα καταλείποιτο τὶ λείψανον. Ὁμοίως καὶ εἰς τὸν Πολλαπλασιασμόν, διαιρεθὲν τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸν Πολλαπλασιαστήν, θέλει δώσῃ εἰς Πηλίκον τὸν Πολλαπλασιαστέον.

Καὶ περὶ μὲν τῶν τεσσάρων παθῶν, τὰ ὁποῖα θεωροῦνται εἰς τὰ δεκαδικὰ καλούμενα Κλάσματα, δηλ. τὴν Πρόσθεσιν, Ἀφαίρεσιν, Πολλαπλασιασμόν, καὶ Διαίρεσιν, εἰσὶν ἀρκετὰ τὰ συνοπτικῶς μοι ῥηθέντα.

Νῦν δὲ τέλος ἐπιθέντες κἀντῷ Β'. τουτωῒ Βιβλιαρίῳ, περὶ Ἀναλογιῶν τε καὶ διαφόρων Μεθόδων ἐν τῷ ἑπομένῳ τρίτῳ Βιβλιαρίῳ εἴπωμεν, τὴν αὐτὴν τοῖς προτεθεῖσι Βιβλιαρίοις κἀντούτῳ τηροῦντες τάξιν.

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

Περὶ Λόγων τε, καὶ Ἀναλογιῶν.

Ὁρισμός.

§. 157. Λόγος, ἢ σχέσις καὶ Ἀναλογία εἶναι, εἷς τρόπος συγκρίσεως, κατὰ τὸν ὁποῖον, ἠμπορεῖ νὰ παραβαλθῇ μία Ποσότης, πρὸς ἄλλην τινὰ Ποσότητα.

Σχόλιον.

Ἀνίσως λοιπόν, δύω Ποσότητες, ἤθελαν παραβάλλωνται, ἢ συγκρίνωνται ἀναμεταξύ των, ὡς μεγαλητέρα, ἢ μικροτέρα ἡ μία τῆς ἄλλης, αὐτὴ ἡ σύγκρισις λέγεται λόγος Ἀριθμητικός. Εἰ δὲ ἤθελαν θεωρηθῶσιν ὡς περιεκτικὴ ἡ μία τῆς ἄλλης, ἢ ὁλικῶς, ἢ κατὰ μέρος, ὁ λόγος, ἢ ἡ Ἀναλογία τότε, ὀνομάζεται Γεωμετρικός.

Πόρισμα Α'.

Δύω ἄρα εἶναι τὰ εἴδη τῶν Ἀναλογιῶν· τὸ μὲν ἓν Ἀριθμητικόν, τὸ δὲ ἄλλο Γεωμετρικόν.

Ὑποσημείωσις.

Ἀλλὰ πρὸ τοῦ νὰ ἀρχίσωμεν τὴν διδασκαλίαν τῶν Ἀναλογιῶν, μοὶ ἐφάνη εὔλογον, ἵνα προτάξω τὰ σημεῖα ἐκεῖνα, διὰ μέσου τῶν ὁποίων γίνονται αἱ Ἀριθμητικαὶ πράξεις, καὶ οἱ Συμβολικοὶ Τύποι τῶν Ἀναλογιῶν.

Ἔκθεσις τῶν σημείων πάσης Ἀναλογίας.

Ὑπόθεσις Α'.

§. 158. Α'. Τοῦτο τὸ σημεῖον, ($\div\!\!\div$) τίθεται ἔμπροσθεν κάθε Γεωμετρικῆς Ἀναλογίας· καὶ εἰς μὲν τὴν Συνεχῆ λεγομένην Ἀναλογίαν, οὕτω γράφεται $\div\!\!\div$ 2 : 4 : 6. ἢ $\div\!\!\div$ Α : Β : Γ. Εἰς δὲ τὴν Διῃρημένην, οὕτω· $\div\!\!\div$ 2 : 4 : : 6 : 12. ἤ, $\div\!\!\div$ 2 : 4 = 6 : 12. ἢ Α : Β = Γ : Δ.

Β'. Τοῦτο δὲ πάλιν ($\div$) τίθεται ἔμπροσθεν τῆς Ἀριθμητικῆς Ἀναλογίας. Καὶ εἰς μὲν τὴν Συνεχῆ, ἢ Συνημμένην, οὕτω· $\div$ 3. 5. 7. 9. ἢ $\div$ Α. Β : Γ. Δ. Εἰς δὲ τὴν Διῃρημένην, οὕτω $\div$ 3. 5 : 7. 9 :

Γ'. Αἱ δὲ δύω εὐθεῖαι, αἵτινες γράφονται οὕτω (=) σημεῖον ἰσότητος ὀνομάζεται· ἐπειδὴ καὶ ὅταν εὑρίσκηται ἀναμεταξὺ εἰς δύω Ποσότητας, ἢ Ἀριθμούς, φανερώνει, ὅτι ἡ μία μὲ τὴν ἄλλην εἶναι ἴσαι· οἷον 8 = 8. Καὶ Α = Β.

Δ'. Τοῦτο δὲ τὸ σημεῖον, (+) φανερώνει Πρόσθεσιν, ἢ Σύναψιν· εἶναι δὲ σημαντικὸν Ποσότητος θετικῆς. Καλεῖται δὲ καὶ σημεῖον ὑπάρξεως, καὶ πλεονασμοῦ.

Ε'. Τοῦτο δὲ (—) εἶναι σημεῖον τῆς Ἀφαιρέσεως· ἐπειδὴ ὅταν θέλωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν 3, ἀπὸ 5, σημαίνομεν τὴν Ἀφαίρεσιν οὕτω· 5 — 3 = 2. Καὶ Α — Β = Γ. καλεῖται δὲ ἀποφατικόν, ἢ λειπτικόν· καὶ προφέρεται διὰ τοῦ πλήν.

Ϛ'. Τοῦτο δὲ τὸ χιαστὸν (×) εἶναι σημεῖον τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ· ἐπειδὴ θέλοντες νὰ φανερώσωμεν τὸν Πολλαπλασιασμὸν τοῦ 6, ἐπὶ τὸν 5, γράφομεν οὕτω· 5 × 6 = 30. μερικοὶ δὲ ἀντὶ τούτου τοῦ σημείου (×) θέτουσι μίαν στιγμὴν ἀναμεταξὺ τῶν Ἀριθμῶν ἐκείνων, οἵτινες μέλλουσι νὰ πολλαπλασιασθῶσιν ἀναμεταξύ των οὕτω· (.) τὸ ὁποῖον σημεῖον τῆς στιγμῆς, τὸ μεταχειριζόμεθα καὶ ἡμεῖς εἰς κάθε Πολλαπλασιασμόν· οἷον 5. 6 = 30. Καί, Α. Β = Γ.

Ζ'. Τοῦτο δὲ πάλιν τὸ σημεῖον, (:) εἶναι σημαντικὸν τῆς Διαιρέσεως· οἷον 8 : 4. ἢ Α : Β. σημαίνει δὲ τὸ Πηλίκον, τὸ ὁποῖον εὑγαίνει ἀπὸ τὴν Διαίρεσιν τοῦ 8, ἐπὶ τὸν 4 Ἀριθμόν· οἷον 8 : 4 = 2. τινὲς δὲ μεταχειρίζονται τὴν ὁριζόντειον γραμμήν, βάνοντες ἐπάνωθεν μὲν τῆς γραμμῆς τὸν Διαιρετέον,

τέον, ὑποκάτωθεν δὲ αὐτῆς τὸν Διαιρέτην· οἷον $\frac{12}{4} = 3$. Καὶ $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \Gamma$. τὰ ὁποῖα σημεῖα μεταχειριζόμεθα καὶ τὰ δύω, εἰς τὴν Διαίρεσιν, κατὰ τὴν χρείαν.

Τοῦτο δέ, τέλος πάντων, τὸ σημεῖον ($\sqrt{\ }$) δηλοῖ τὴν ἐξαγωγὴν τῆς ῥίζης· φανερώνει δέ, ὅτι οἱ Ἀριθμοί, οἵτινες εὑρίσκονται ὑπὸ τὴν κεραίαν τοῦ σημείου, εἰμὲν καὶ εἶναι δύω, ἀφ' οὗ πολλαπλασιασθῶσιν ἀναμεταξύ των, νὰ εὑγάλωμεν τὴν τετραγωνικὴν αὐτῶν ῥίζαν· εἰδὲ καὶ εἶναι εἷς μόνον χαρακτήρ, πολλαπλασιαθεὶς ἐφ' ἑαυτόν, νὰ εὑγάλωμεν τὴν ῥίζαν του· οἷον 6 : $\sqrt{16}$. Καὶ 2 : $\sqrt{3}$. ἢ Α : $\sqrt{\mathrm{B}}$. Γ. κτλ.

Ὑποσημείωσις.

Πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν, ὅτι κάθε Ποσότης ἠμπορεῖ νὰ παρασταίνηται, ἢ διὰ τῶν χαρακτήρων, ἢ διὰ τῶν τοῦ ἀλφαβήτου γραμμάτων. Καὶ εἰς μὲν τὴν διωρισμένην καὶ γνωστὴν Ποσότητα, μεταχειριζόμεθα τὰ πρῶτα στοιχεῖα τοῦ ἀλφαβήτου· εἰς δὲ τὴν ἀδιόριστον καὶ ἄγνωστον, μεταχειριζόμεθα τὰ ὕστερα στοιχεῖα, κατὰ τὴν χρείαν.

Ὁρισμός.

§. 159. Λοιπὸν λόγος, ἢ Ἀναλογία Ἀριθμητικὴ εἶναι, ἡ ὑπεροχή, ἢ ἡ Διαφορά, κατὰ τὴν ὁποίαν διαφέρει μία Ποσότης παραβαλλομένη πρὸς ἄλλην τινὰ Ποσότητα· οἷον $\div$ 10 — 8 = 2. Ἄρα γνωρίζεται ἡ Διαφορὰ μὲ τὴν Ἀφαίρεσιν.

Ὁρισμός.

§. 160. Λόγος δέ, ἢ Ἀναλογία Γεωμετρικὴ εἶναι, τὸ Πηλίκον, τὸ ὁποῖον φανερώνει ποσάκις μία Ποσότης, περιέχεται εἰς ἄλλην τινὰ Ποσότητα $\frac{10}{2} = 5$. ἢ $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ κτλ. Εἰ δὲ ἠθέλαμεν ὑποθέσῃ τὸν μὲν 10, ὡς Διαιρέτην, τὸν δὲ 2, ὡς Διαιρετέον, θέλει εἶναι, $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$· ἄρα γνωρίζεται τὸ Πηλίκον διὰ τῆς Διαιρέσεως.

Ὑπό-

Ὑπόθεσις Β΄.

§. 161. Κάθε Ἀριθμητικὴ Ἀναλογία, τοῦ 10, καθ' ὑπόθεσιν, πρὸς τὸν 2, ἂς βαίνηται οὕτω ÷ 10. 2. κτλ. Ἡ δὲ Γεωμετρικὴ Ἀναλογία, οὕτω ∺ 10: 2. Καὶ τοὺς δύω αὐτοὺς Τύπους ἀπαγγέλλομεν, ὡς δέκα πρὸς 2.

§. 162. Ὅταν λοιπὸν τέσσαρες Ποσότητες, ἢ Ἀριθμοὶ τίθωνται ἐφεξῆς τοιουτοτρόπως, ὥστε ὅπου, ἐκείνην τὴν σχέσιν καὶ Ἀναλογίαν ὅπου ἔχει ἡ α΄. Ποσότης, πρὸς τὴν β΄. Ποσότητα, τὴν αὐτὴν Ἀναλογίαν νὰ ἔχῃ καὶ ἡ γ΄. Ποσότης πρὸς τὴν δ΄. αὐταὶ αἱ τέσσαρες Ποσότητες, ἢ Ἀριθμοὶ, λέγονται ὅτι εἶναι ἀνάλογον· οἷον αὐτοὶ οἱ τέσσαρες Ἀριθμοὶ ÷ 2. 5: 4. 7. Ἀριθμητικὴν παριστάνουσιν Ἀναλογίαν· ἐπειδὴ ἐκείνη ἡ Διαφορὰ, ἥτις εὑρίσκεται εἰς τοὺς δύω πρώτους Ἀριθμοὺς, δηλ. μεταξὺ τοῦ 2, καὶ 5, ἡ αὐτὴ Διαφορὰ εὑρίσκεται καὶ εἰς τοὺς δύω ὑστέρους, δηλ. τὸν 4, καὶ 7. διότι, 5 — 2 = 3. Καὶ 7 — 4 = 3.

Οἱ δὲ Ἀριθμοὶ, ∺ 2: 6: : 5: 15. Γεωμετρικὴν παριστῶσιν Ἀναλογίαν. Ἐπειδὴ τὸ Πηλίκον, ἢ ὁ Γεωμετρικὸς λόγος, ὅπου εὑρίσκεται εἰς τοὺς δύω πρώτους Ἀριθμοὺς, δηλ. μεταξὺ τοῦ 2, καὶ 6, ὁ αὐτὸς λόγος εὑρίσκεται καὶ εἰς τοὺς δύω ὑστέρους, δηλ. μεταξὺ τοῦ 5, καὶ 15. ἐπειδὴ ὁ 6, διαιρεθεὶς ἐπὶ τὸν 2, δίδει Πηλίκον τὸν 3· οἷον $\frac{6}{2}$ = 3. Καὶ ὁ 15, διαιρεθεὶς διὰ τοῦ 5, δίδει πάλιν τὸ αὐτὸ Πηλίκον 3, οἷον $\frac{15}{5}$ = 3.

Πόρισμα Β΄.

§. 163. Κάθε Γεωμετρικὴ ἄρα Ἀναλογία, τέσσαρας Ποσότητας, ἤγουν ὅρους περιέχει. Καὶ ὁ μὲν α. καὶ δ΄. ὀνομάζονται ἄκροι· ὁ δὲ β΄. ὅρος, καὶ γ΄. λέγονται μέσοι· οἷον ∺ 2: 6: : 5: 15.

Δύω λογιῶν εἶναι ἡ Γεωμετρικὴ Ἀναλογία, δηλ. Ὀρθὴ, καὶ Πλαγία.

Ὁρισ-

Ὁρισμός.

§. 164. Καὶ Ὀρθὴ μὲν Ἀναλογία εἶναι, ὅταν ἐκεῖνον τὸν λόγον καὶ σχέσιν ὁποῦ ἔχει ὁ α. ὅρος πρὸς τὸν β΄. τὸν αὐτὸν λόγον νὰ ἔχῃ καὶ ὁ γ΄. πρὸς τὸν δ΄. ὅρον· οἷον ∺ 2: 6: : 5: 15. ἀλλ' ὁ α. ὅρος εἶναι τριπλάσιον τοῦ β΄. ἀλλὰ καὶ ὁ γ΄. τριπλάσιον εἶναι τοῦ δ΄. ὅρου· ἄρα Ὀρθὴ εἶναι ἡ Ἀναλογία.

Ὁρισμός.

§. 165. Πλαγία, ἢ Ἀντίθετος καὶ Ἀντίστροφος, Ἀναλογία εἶναι, ὅταν ἐκεῖνον τὸν λόγον καὶ σχέσιν, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ α. ὅρος, πρὸς τὸν β΄. τὸν αὐτὸν λόγον νὰ ἔχῃ καὶ ὁ δ΄. ὅρος, πρὸς τὸν γ΄. οἷον ∺ 2: 6: : 15: 5.

Ἐπειδὴ εἰς μὲν τὴν Ὀρθὴν Ἀναλογίαν, διαιρούμενος ὁ β΄. ὅρος διὰ τοῦ α. τὸ ἴδιον Πηλίκον θέλει εὕγῃ, ἀνίσως λε διαιρεθῇ καὶ ὁ δ΄. ὅρος, διὰ τοῦ γ΄. οἷον $\frac{6}{2}$ = 3. $\frac{15}{5}$ –
ἐδῶ δὲ εἰς τὴν Πλαγίαν Ἀναλογίαν, θέλωντες διὰ νὰ εὕγῃ τὸ ἴδιον Πηλίκον, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν ὄχι τὸν δ΄. ὅρον διὰ τοῦ γ΄. ἀλλὰ τὸ ἐναντίον· δηλ. τὸν γ΄. διὰ τοῦ δ΄. ὅρου· οἷον ∺ 2: 6: : 5: 15. = $\frac{15}{5}$ = 3.

Κάθε Γεωμετρικὴ Ἀναλογία, ἢ εἶναι Συνεχὴς, ἢ Διηρημένη.

Ὁρισμός.

§. 166. Καὶ Συνεχὴς μὲν Ἀναλογία λέγεται, ὅταν ὁ ἑπόμενος ὅρος τοῦ α. λόγου, ἤθελε γένῃ ἡγούμενος τοῦ β΄. λόγου· οἷον ∺ 2: 6: : 6: 18. ὁ δὲ β΄. ὅρος 6, ὅστις λαμβάνεται δύω φοραῖς (καθὼς φαίνεται εἰς αὐτὸ τὸ παράδειγμα) μέσος ἀνάλογος ὅρος ὀνομάζεται· τὸν ὁποῖον συνειθίζουσι νὰ τὸν γράφωσι μίαν φορὰν οὕτω· ∺ 2: 6: 18. Καὶ, ∺ 4: 6: 9. Καὶ, ∺ 3: 6: 12. κτλ.

Ὁρισμός.

6. 167. Διηρημένη δὲ Ἀναλογία εἶναι, ὅταν ἐκεῖνον τὸν λόγον καὶ σχέσιν, ὁποῦ ἔχει ὁ α. ὅρος πρὸς τὸν β΄. τὴν αὐ-

τὴν

τὴν Ἀναλογίαν νὰ ἔχῃ καὶ ὁ γ'. ὅρος πρὸς τὸν δ'. οἷον ∺ 4: 6:: 8: 12. Καὶ, ∺ 3: 9:: 6: 18. Καὶ, ∺ 4: 8:: 5: 10.

Θεώρημα.

§. 168. Εἰς κάθε Γεωμετρικὴν Ἀναλογίαν, ἀνίσως μὲν εἶναι Συνεχὴς, (§. 166.) ἐκεῖνος ὁ Ἀριθμὸς, ὁποῦ γίνεται διὰ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν δύω ἄκρων ὅρων, δηλ. τοῦ ά. ἐπὶ τὸν γ'. εἶναι ἴσος μ' ἐκεῖνον τὸν Ἀριθμὸν, ὅςτις γίνεται ἀπὸ τὸν μεσινὸν, δηλ. τὸν β'. ὅταν ἤθελε πολλαπλασιαθῇ μὲ τὸν ἑαυτόν του· οἷον ∺ 2: 8: 32. ὅθεν 2. 32 = 64. Καὶ 8. 8 = 64. ἄρα τὰ ἑξῆς.

Εἰδὲ καὶ εἶναι Διηρημένη ἡ Ἀναλογία, (§. 167.) ἐκεῖνος ὁ Ἀριθμὸς ὁποῦ γίνεται διὰ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν δύω ἄκρων ὅρων, δηλ. τοῦ ά. ἐπὶ τὸν δ'. θέλει εἶναι ἴσος μὲ ἐκεῖνον ὁποῦ γίνεται διὰ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν δύω μεσινῶν, δηλ. τοῦ β'. ἐπὶ τὸν γ'. οἷον ∺ 2: 8:: 5: 20. ὅθεν 2. 20 = 40. Καὶ 5. 8 = 40. ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.

Πόρισμα Γ'.

§. 169. Ἀπὸ αὐτοὺς ἄρα τοὺς τέσσαρας ὅρους, τοὺς ὁποίους Συμβολικῶς παρισάνω διὰ μέσου τῶν τοῦ ἀλφαβήτου στοιχείων, δηλ. τοῦ Α, Β, Γ, Δ, ἐὰν οἱ τρεῖς ἀπὸ αὐτοὺς εἶναι γνωστοὶ, εὐκόλως θέλει γνωρισθῇ, καὶ ἡ δύναμις τοῦ τετάρτου, διὰ μέσου τῶν ἀντικρὺ Συμβολικῶν Τύπων. Α = 2. Β = 6. Γ = 5. Δ = Φ: = 15.

Ὑπόθεσις Γ'.

$\Delta = \frac{B\,.\,\Gamma}{A:}$	Τύπος Α'.
$\Gamma = \frac{A\,.\,\Delta}{B:}$	Τύπος Β'.
$B = \frac{A\,.\,\Delta}{\Gamma:}$	Τύπος Γ'.
$A = \frac{B\,.\,\Gamma}{\Delta:}$	Τύπος Δ'.

§. 170. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ μὲν Α, εἶναι ἴσον μὲ τὸ 2. τὸ δὲ Β, ἴσον μὲ τὸ 6. καὶ τὸ Γ, ἴσον μὲ τὸ 5. τὸ δὲ Δ, μὲ τὸ νὰ εἶναι ἀγνώριστον, ἂς εἶναι ἴσον μὲ τὸ Φ.

Ἔσω, καθ' ὑπόθεσιν, ὅτι μας ἐδόθησαν οἱ Α, Β, Γ, Ἀριθμοὶ, οἵτινες εἰσὶ γνωστοὶ μας, καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν Δ'. ὅρον Δ, τὸν ὁποῖον δὲν γνωρίζομεν, καὶ διὰ τοῦτο τὸν ὀνομάσαμεν Φ. Ἂς πολλαπλασιαθῶ-

σι λοιπὸν ἀναμεταξύ των ὁ Β., ἐπὶ τὸν Γ, καθὼς λέγει ὁ Συμβολικὸς Τύπος, καὶ ἂς γένῃ ὁ 30 Ἀριθμός· τὸν ὁποῖον, λέγει ὁ Τύπος, νὰ τὸν διαιρέσῃς ἐπὶ τὸν Α, Ἀριθμὸν, καὶ θέλει σοι δώσῃ Πηλίκον τὸν ζητούμενον δ'. ὅρον Δ = τῷ Φ· οἷον 5. 6 = $\frac{30}{2:}$ = 15· ἄρα ὁ ζητούμενος δ'. ὅρος Δ, εἶναι ἴσος μὲ τὸν 15 Ἀριθμόν· καὶ εἶναι ὀρθὴ ἡ Ἀναλογία. (§. 164.) εἶναι δὲ καὶ Διηρημένη· (§. 167.) διότι ὡς ὁ ά. ὅρος πρὸς τὸν β'. οὕτως ὁ γ'. πρὸς τὸν ζητούμενον δ'. (§. 168.) οἷον ∺ 2: 6:: 5: 15. ἐπεὶ, 2. 15 = 30. Καὶ 5. 6 = 30.

Δοθήτωσαν δεύτερον, καθ' ὑπόθεσιν, οἱ Α, Β, καὶ Δ, Ἀριθμοὶ, (ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ Ὑποδείγματος) καὶ ζητοῦμεν τὸν γ'. ὅρον Γ, ἐπὶ τῆς Ἀντιστρόφου, ἢ Πλαγίας Ἀναλογίας. (§. 165.) Ἂς πολλαπλασιαθῇ ὁ ά. ὅρος ἐπὶ τὸν δ'. δηλ. ὁ Α, ἐπὶ τὸν Δ, τὸ δὲ γενόμενον, ἂς διαιρεθῇ, ἐπὶ τὸν β'. ὅρον, δηλ. τὸν Β, καθὼς διδάσκει ὁ β'. Τύπος, καὶ τὸ Πηλίκον θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος γ'. ὅρος Γ, οἷον ∺ 2: 6:: 15: Χ. Ὅθεν 2. 15 = $\frac{30}{6:}$ = 5. ἄρα 5 εἶναι ὁ ζητούμενος γ'. ὅρος Γ, και, ὡς ὁ ά. ὅρος 2, πρὸς τὸν β'. 6, οὕτως ὁ εὑρεθεὶς πρὸς τὸν γ'. 15. οἷον ∺ 2: 6:: 15: 5, κατὰ τὸν Ὁρισμὸν τῆς Ἀντιστρόφου Ἀναλογίας. (§. 165.)

Ἂς δοθῶσι, τρίτον, καθ' ὑπόθεσιν τρεῖς Ἀριθμοὶ, (πάλιν εἰς τὸ ἴδιον Ὑπόδειγμα) δηλ. οἱ Α, Γ, καὶ Δ. καὶ ἂς ζητηθῇ ὁ β'. ὅρος Β, ἂς πολλαπλασιασθῇ λοιπὸν ὁ ά. ὅρος Α, ἐπὶ τὸν δ'. Δ, τὸ δὲ γενόμενον, ἂς διαιρεθῇ ἐπὶ τὸν γ'. ὅρον Γ, καθὼς δεικνύει ὁ τρίτος Τύπος, καὶ τὸ Πηλίκον, θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος β'. ὅρος Β, οἷον 2: 5:: 15: 6. ὅθεν, 2. 15 = $\frac{30}{5:}$ = 6. ἄρα ὁ 6 εἶναι ὁ ζητούμενος β'. ὅρος Β.

Ἂς δοθῶσι, τέταρτον (εἰς τὸ ἴδιον Ὑπόδειγμα) τρεῖς Ἀριθμοὶ δηλ. οἱ Β, Γ, Δ. καὶ ἂς ζητηθῇ ὁ ά. ὅρος Α, ἂς πολλαπλασιασθῇ λοιπὸν ὁ β'. ὅρος Β, ἐπὶ τὸν γ'. ὅρον Γ. τὸ δὲ γενόμενον, ἂς διαιρεθῇ ἐπὶ τὸν δ'. ὅρον Δ, καθὼς σὲ ἑρμηνεύει ὁ δ'. Τύπος, καὶ τὸ Πηλίκον θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος ά. ὅρος Α, οἷον ∺ 6: 5:: 15. ὅθεν 5. 6 = $\frac{30}{15:}$ = 2. ἄρα ὁ 2. εἶναι ὁ ζητούμενος ά. ὅρος Α. Καὶ οἱ τρεῖς Τύποι ἀνάγονται εἰς τὴν Πλαγίαν Ἀναλογίαν· διὰ νὰ καταλάβωμεν ὅμως καλλιώτερα τὰς τέσσαρας πράξεις, τὰς ὁποίας ἐπράξαμεν ἐπάνω εἰς τοὺς τέσσαρας Συμβολικοὺς Τύπους, ἂς τὰς θέσωμεν εἰς τὸ ἀντικρὺ ά. Διάγραμμα. Καὶ εἰς μὲν τὴν Ὀρθὴν

Διηρημένην Ἀναλογίαν, εἶναι, ὡς ὁ α'. 2, πρὸς τὸν β'. 6. οὕτως ὁ γ'. ὅρος 5, πρὸς τὸν δ'. 15· διότι ἐκεῖνο, ὅπου γίνεται ἀπὸ τοὺς δύω ἀκρινοὺς ὅρους, εἶναι ἴσον μὲ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον γίνεται ἀπὸ τοὺς δύω μεσινούς· οἷον $2 . 15 = 30$: Καὶ $5 . 6 = 30$. καὶ αὐτὸ φανερώνει ὁ Α'. Συμβολικὸς Τύπος.

$\div$ 2 : 6 ::	5 :	15
$\div$ 2 : 6 ::	15 :	5
$\div$ 2 : 5 ::	15 :	6
$\div$ 5 : 6 ::	15 :	2

Ἐπὶ δὲ τῆς Πλαγίας, διὰ τὴν ὁποίαν ἔγινεν ὁ Β'. Τύπος εἶναι, ὡς ὁ α. ὅρος 2, πρὸς τὸν β'. 6. οὕτως ὁ δ'. 5, πρὸς τὸν γ'. 15, εἶναι ἴσον μὲ ἐκεῖνο, ὅπου γίνεται ἀπὸ τὸν β'. ὅρον 5, ἐπὶ τὸν δ'. 6 οἷον $2. 15 = 30$. Καὶ $5. 6 = 30$.

Ὁμοίως εἰς τὴν αὐτὴν Πλαγίαν, διὰ τὴν ὁποίαν ἔγινεν ὁ τρίτος Τύπος, εἶναι, ὡς ὁ α. ὅρος 2, πρὸς τὸν γ'. 15, οὕτως ὁ β'. 5, πρὸς τὸν δ'. 6· οἷον $2. 15 = 30$. Καὶ $5 . 6 = 30$.

Εἰς δὲ τὸ τέταρτον Ὑπόδειγμα, διὰ τὸ ὁποῖον ἔγινεν ὁ Δ'. Τύπος, εἶναι ὡς ὁ α. ὅρος 5, πρὸς τὸν β'. 6, οὕτως ὁ δ'. 2. πρὸς τὸν γ'. 15. οἷον $5. 6 = 30$. Καὶ $2. 15 = 30$.

Καὶ τοσαῦτα μὲν ἐπὶ τῆς Διηρημένης Ἀναλογίας· ἂς εἴπωμεν δὲ ὀλίγα καὶ διὰ τὴν Συνεχῆ Ἀναλογίαν, εἰς τὴν ὁποίαν δίδονται δύω μόνον ὅροι, καὶ ζητεῖται ὁ γ'. Ἐπειδὴ καὶ ὁ β'. ὅρος δύω φοραῖς λαμβάνεται· ὡς ἐλέγετο. (§. 166.)

Ὑπόθεσις Δ'.

§. 171. Ὅταν λοιπὸν ἡ Ἀναλογία εἶναι Συνεχής, θέλομεν μεταχειρισθῆ, τοὺς ἀντικρὺ τρεῖς Συμβολικοὺς, καὶ γενικοὺς Τύπους, εἰς τοὺς ὁποίους μεταχειρίζομαι τά, Α, Β, Γ, στοιχεῖα, ἀντὶ Ἀριθμητικῶν χαρακτήρων.

$\Gamma = \frac{B.^2}{A:}$	Τύπος Α'.
$A = \frac{B.^2}{\Gamma:}$	Τύπος Β'.
$B = \sqrt{A.\Gamma}$	Τύπος Γ'.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι μας δίδονται δύω Ἀριθμοί· Καὶ ἢ δίδεται ὁ α. καὶ β'. καὶ ζητεῖται ὁ γ'. αὐτοῖς ἀνάλογος ὅρος· ἢ μας δίδεται ὁ β'. ὅρος καὶ γ'. καὶ ζητεῖται ὁ α. αὐτοῖς ἀνάλογος· ἢ τέλος πάντων, μας δίδεται ὁ α. καὶ γ'. καὶ ζητεῖται ὁ β'. ὅς τις καὶ μέσος ἀνάλογος λέγεται. (§. 166.)

Ἀνί-

Ἀνίσως λοιπὸν μας δοθῇ, ὁ Α, καὶ Β, καὶ μας ζητηθῇ ὁ γ'. αὐτοῖς Ἀνάλογος Γ, τότε πολλαπλασιάζομεν τὸν Β, μὲ τὸν ἑαυτόν του, κατὰ τὸ Θεώρημα (§. 168.) καὶ ἐκεῖνο, ὅπου ἤθελε γένη, τὸ διαιροῦμεν μὲ τὸν α. ὅρον Α, καὶ τὸ Πηλίκον θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος γ'. ἀνάλογος ὅρος, καθὼς φαίνεται εἰς τὸν Συμβολικὸν καὶ γενικὸν Α'. Τύπον.

$A = 2 : B = 6$
καὶ $\Gamma = \chi = 18$

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ μὲν Α, εἶναι ἴσον μὲ τὸν 2 Ἀριθμόν· τὸ δὲ Β, ἴσον μὲ τὸν 6· τὸ δὲ Γ, ἐπειδὴ εἶναι εἰς ἡμᾶς ἔτι ἄγνωστον, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι ἴσον μὲ τὸ χ· πολλαπλασιάζοντες οὖν τὸν Β, Ἀριθμὸν μὲ τὸν ἑαυτόν του, δηλ. τὸν 6, γίνεται ὁ 36, ὁ ὁποῖος διαιρεθεὶς διὰ τοῦ α. ὅρου Α, = 2, δίδει Πηλίκον τὸν ζητούμενον γ'. ὅρον Γ, οἷον $6 . 6 = \frac{36}{2} = 18$· ὁ ζητούμενος ἄρα γ'. ὅρος εἶναι ὁ 18· καὶ εἶναι ἀνάλογον μὲ τοὺς δοθέντας δύω ὅρους, δηλ. τὸν Α, καὶ Β, οἷον $\div 2 : 6 : 18$: Ὅταν δὲ εἶναι τρεῖς Ἀριθμοὶ ἀνάλογοι, ἐκεῖνος ὁ Ἀριθμός, ὅς τις γίνεται διὰ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ ἀπὸ τοὺς δύω ἀκρινοὺς ὅρους, εἶναι ἴσος μὲ ἐκεῖνον, ὅπου γίνεται ἀπὸ τὸν μεσινόν, πολλαπλασιασθέντα μὲ τὸν ἑαυτόν του, κατὰ τὸ ῥηθὲν Θεώρημα· (§. 168.) οἷον $2 . 18 = 36$. Καὶ $6 . 6 = 36$. ἄρα. κτλ.

Ἂς δοθῶσι δεύτερον, εἰς αὐτὸ τὸ Ὑπόδειγμα, ὁ β'. καὶ γ'. ὅρος ἴσος μὲ τὸ Β, καὶ Γ, = 6, καὶ 18. ἂς πολλαπλασιασθῇ λοιπὸν ὁ β'. ὅρος Β, ὡς ἄνωθεν, καὶ ἂς γένη ὁ $\Psi = 36$. ἂς διαιρεθῇ ἐπὶ τὸν $\Gamma = 18$, καὶ τὸ Πηλίκον θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος α. ὅρος Α, οἷον $6. 6 = \frac{36}{18} : = 2$. ὁ 2 ἄρα εἶναι ὁ ζητούμενος ἀνάλογος τοῦ Β, καὶ Γ, πρῶτος ὅρος Α, $2. 18 = 36$: καὶ $6. 6 = 36$.

Ἂς δοθῶσι, τρίτον καὶ τελευταῖον, ὁ α. ὅρος Α, καὶ ὁ γ'. Γ, καὶ ἂς ζητηθῇ ὁ μέσος αὐτοῖς ἀνάλογος Β, ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ Α, ἐπὶ τὸν Γ, καὶ ἐκεῖνος ὁ Ἀριθμός, ὅς τις ἤθελε γένη, ἂς εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα, καὶ ἐκείνη θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος μέσος ἀνάλογος β'. ὅρος Β, τῶν δοθέντων α. καὶ γ'. δηλ. τοῦ Α, καὶ Γ, οἷον $2. 18 = 6 \sqrt{36}$. Ἐπειδὴ τοῦ 36, εἶναι ῥίζα τετράγωνος ὁ 6. ἄρα ὁ 6 εἶναι ὁ ζητούμενος μέσος ἀνάλογος ὅρος τοῦ 2, καὶ 18· οἷον $2. 18 = 36$ καὶ $6. 6 = 36$, ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.

Πό-

Πόρισμα Δ΄.

Ἐὰν ἄρα εἰς τὴν Συνεχῆ Ἀναλογίαν, γνωρίζω μὲν τὸν α΄. καὶ β΄. ὅρον, δὲν ἠξεύρω ὅμως τὸν γ΄. καὶ θέλω νὰ τὸν εὕρω, πολλαπλασιάζω τὸν β΄. ὅρον μὲ τὸν ἑαυτόν του, καὶ ἐκεῖνο, ὅπου ἤθελε γένῃ, τὸ διαιρῶ μὲ τὸν α. ὅρον, καὶ τὸ Πηλίκον θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος γ΄.

Ἐὰν δὲ γνωρίζω τὸν β΄. καὶ γ΄. ὅρον, δὲν ἠξεύρω δὲ τὸν α. πολλαπλασιάζω τὸν β΄. ὅρον μὲ τὸν ἑαυτόν του, καὶ ἐκεῖνο ὅπου γένῃ, τὸ διαιρῶ μὲ τὸν γ΄. ὅρον, καὶ τὸ Πηλίκον θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος α. ὅρος.

Ἐὰν δὲ τέλος πάντων, ἠξεύρω τὸν α. καὶ γ΄. ὅρον, ἀγνοῶ δὲ τὸν β΄. μέσον αὐτοῖς ἀνάλογον, πολλαπλασιάζω τὸν α. ὅρον, ἐπὶ τὸν γ΄. καὶ ἀπ' ἐκεῖνο ὅπου ἤθελε γένῃ, εὐγάζω τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, καὶ ἐκείνη θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος β΄. ὅρος.

Σχόλιον.

Πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν, ὅτι ἐπάνω εἰς τοὺς ἐκτεθέντας Συμβολικοὺς καὶ γενικοὺς Τύπους, καὶ τὴν ἑρμηνείαν, τὴν ὁποίαν ἐκάμαμεν εἰς τὸν (§. 170.) παράγραφον, ἐπιστηρίζεται καὶ ἡ τῶν τριῶν Γεωμετρικὴ Μέθοδος, ἡ ὁποία ἔχει τόσην μεγάλην δύναμιν, ἐπάνω εἰς ὅλας τὰς ἄλλας Μεθόδους, καθὼς θέλομεν τὸ γνωρίσῃ εἰς ὅλον τοῦτο τὸ Βιβλιάριον, καὶ ἡ ὁποία εἶναι τόσον χρήσιμος καὶ ἀναγκαία, εἰς τὸν κοινωνικὸν ἡμῶν βίον, ὅπου σχεδὸν δὲν εἶναι ἄλλη, ἥτις νὰ ἰσοσταθμίζῃ, καὶ διευθύνῃ πᾶσαν Ἀριθμητικὴν πρᾶξιν, πάρεξ αὐτὴ μόνη· διὰ τὴν ὁποίαν ἐβάλθη προτήτερα ἀπὸ αὐτήν, ἡ διδασκαλία τῶν Ἀναλογιῶν, οἱ Ὁρισμοί, αἱ Ὑποθέσεις, τὸ γενικὸν Θεώρημα, οἱ γενικοὶ καὶ Συμβολικοὶ Τύποι, καὶ τὰ εἰς αὐτὰς ἀναγόμενα Ὑποδείγματα· καὶ ἐν συντόμῳ εἰπεῖν, ὅλα ὅσα εἴπομεν εἰς ὅλον τὸ πρῶτον τοῦτο Κεφάλαιον, δι' αὐτὴν καὶ μόνην, ὡς ἀναγκαῖα τινὰ προλεγόμενα αὐτῆς τὰ εἴπομεν· Λοιπὸν εἶναι καιρὸς τώρα μετὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν Ἀναλογιῶν, νὰ εἴπωμεν καὶ περὶ αὐτῆς, καθ' ὅσον εἶναι δυνατὸν συντόμως τε, καὶ ἀνελλειπῶς.

ΚΕ-

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

Περὶ Γεωμετρικῶν Μεθόδων.

§. 172. Τὰ εἴδη τῶν Ἀναλογιῶν, Μεθόδους οἱ περισσότεροι ὀνομάζουσι· δηλ. Μέθοδον τῶν Τριῶν, τῶν Πέντε, τῶν Ἑπτά. Κάθε μία δὲ ἀπὸ αὐτάς, διαιρεῖται εἰς Ἁπλῆν καὶ Σύνθετον. Καὶ πάλιν κάθε μία ἀπὸ αὐτὰς ἐπιδιαιρεῖται εἰς Ὀρθὴν, καὶ Πλαγίαν· καὶ Ἁπλῆ μὲν εἶναι ἐκείνη, ἥτις συνίσταται ἀπὸ τρεῖς, ἢ τέσσαρας ὅρους. Σύνθετος δὲ ὀνομάζεται ἐκείνη, ἡ ὁποία συντίθεται ἀπὸ περισσοτέρους τῶν τεσσάρων ὅρους· ἡ ὁποία εἶναι ἡ λεγομένη Μέθοδος τῶν Πέντε, ὥσαν ὅπου συνίσταται ἀπὸ πέντε ὅρους· ἡ δὲ ἄλλη ἡ ὀνομαζομένη τῶν Ἑπτά, ὥσαν ὅπου οἱ ὅροι, οἱ ὁποῖοι δίδονται εἰς αὐτὴν εἶναι ἑπτά. Καὶ αἱ δύο δὲ αὗται Μέθοδοι, ὥσαν ὁποῦ εἶναι Σύνθετοι, ἐπὶ τὴν πρώτην, ὥσαν ὅπου εἶναι Ἁπλῆ, ἀνάγονται, καὶ διαλύονται τὰ Προβλήματα ὅπου βάνονται εἰς αὐτάς· καθὼς θέλομεν τὸ γνωρίσῃ, ὅταν φθάσωμεν εἰς τὰς πράξεις αὐτῶν.

Περὶ τῆς Ὀρθῆς Μεθόδου τῶν Τριῶν.

Ὁρισμός.

§. 173. Μέθοδος τῶν Τριῶν Ὀρθὴ εἶναι, εἰς τὴν ὁποίαν ὅταν μας δοθῶσι τρεῖς ὅροι, ἢ Ἀριθμοί, ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὸν τέταρτον· ὁ ὁποῖος θέλει ἔχῃ Ἀναλογίαν πρὸς τὸν τρίτον ὅρον, ὡς ὁ δεύτερος πρὸς τὸν πρῶτον.

Σχόλιον.

Οἱ Ἀριθμοί, οἵτινες μας δίδονται, ἢ εἶναι ἐν Συνεχεῖ Ἀναλογίᾳ, (§. 166.) ἢ ἐν Διῃρημένῃ· (§. 167.) ὁπωσδήποτε ὅμως ἤθελαν εἶναι οἱ δοθέντες ὅροι, ὁ τρόπος τῆς εὑρέσεως τοῦ τετάρτου ὅρου, εἶναι ὁ ἴδιος. Ἀλλὰ πρὶν νὰ ἀρχίσωμεν τὴν πρᾶξιν, ἂς προτάξωμεν τοὺς Κανόνας ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι μας ὁδηγοῦσιν εἰς τὴν πρᾶξιν.

Κα-

Κανὼν Α'.

§. 174. Πρῶτον, ἀφ' ὃ βάλλομεν κατὰ σειρὰν τοὺς τρεῖς ὅρους, ἢ Ἀριθμοὺς ὁποῦ μας δίδονται, νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν δεύτερον ὅρον, ἐπὶ τὸν τρίτον· καὶ ἐκεῖνον τὸν Ἀριθμὸν, ὅςτις ἤθελε γενῇ ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμὸν αὐτῶν τῶν δύω ὅρων, ἢ Ἀριθμῶν, νὰ τὸν διαιρέσωμεν ἐπὶ τὸν ά. ὅρον· τὸ δὲ Πηλίκον, τὸ ὁποῖον ἤθελεν εὑγῇ ἀπ' αὐτὴν τὴν Διαίρεσιν, θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος τέταρτος ἀνάλογος ὅρος· καθὼς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα· καὶ εἶναι ἐν Συνεχεῖ Ἀναλογίᾳ. Ἐπειδὴ ὁ εὑρεθεὶς δ'. ὅρος 24, ἔχει Ἀναλογίαν πρὸς τὸν γ'. 12, ὡς ὁ β'. 6, πρὸς τὸν ά. 3· οἷον ∺ 3 : 6 :: 12 : 24. Ἰδοὺ ἐπροσθέσαμεν καὶ τὸν Συμβολικὸν κ̔ γενικὸν τῆς Ὀρθῆς Μεθόδου τῶν τριῶν Τύπον· εἰς τὸν ὁποῖον θέλομεν προσαρμόσῃ, καὶ κάθε ἄλλον Ἀριθμὸν ὁποῦ δοθῇ ἡμῖν.

$$\begin{array}{cccc} \alpha'. & \beta'. & \gamma'. & \delta'. \end{array}$$
$$3 : 6 :: 12 =$$
$$6 \,.\, 12 = \frac{72}{3 :} = 24$$
$$\Delta = \frac{B \,.\, \Gamma}{A :}$$

Κανὼν Β'.

§. 175. Δεύτερον, ἀνίσως οἱ τρεῖς Ἀριθμοὶ ὁποῦ μας δοθῶσιν, ἔχουσι καὶ Κλάσματα, ά. ἂς μεταφερθῇ ὁ καθ' ἕνας ἀπὸ αὐτοὺς ἐπὶ τὸ ἴδιόν του Κλάσμα, κ̔ ἂς γένωσι τρία Κλάσματα, ἴσα μὲ τοὺς ἀκεραίους Ἀριθμοὺς, καὶ μὲ τὰ Κλάσματά των. (§. 119.) β'. Ἂς πολλαπλασιαθῶσιν ἀναμεταξύ των τὰ δύω Κλάσματα, ὁποῦ εὑρίσκονται εἰς τὰ δεξιὰ, Ἀριθμητὴς ἐπ' Ἀριθμητὴν, καὶ Παρονομαστὴς ἐπὶ Παρονομαστὴν, καὶ ἂς γενῇ ἕνα Κλάσμα, ἴσον μὲ τὰ δύω· τοῦτο δὲ τὸ συσταθὲν Κλάσμα, ἂς πολλαπλασιασθῇ μὲ τὸ πρὸς ἀριστερὰν ά. Κλάσμα, κατὰ σχῆμα χιαστὸν, δηλ. ὁ Ἀριθμητὴς τοῦ ά. Κλάσματος, μὲ τὸν Παρονομαστὴν τοῦ β'. καὶ

$$3 : 5\frac{2}{3} :: 8\frac{1}{4} = X$$
$$= 13\frac{5}{14} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{17}{3} \,.\, \frac{33}{4}$$
$$= \frac{561}{24} \times \frac{7}{2} = \frac{1122}{84}$$
$$= 13\frac{30}{84} = \frac{5}{14}$$

ὁ

ὁ Παρονομαστὴς τοῦ β'. Κλάσματος, μὲ τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ πρώτου, κ̔ ἂς γενῇ ἓν ὁλικὸν Κλάσμα. γ'. Ἂς διαιρεθῇ αὐτὸ τὸ ὁλικὸν Κλάσμα ἐπὶ τὸν Παρονομαστὴν του, κ̔ τὸ Πηλίκον ὁμοῦ μὲ ἐκεῖνο, ὁποῦ ἤθελε μείνῃ, θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος τέταρτος ἀνάλογος ὅρος· ὡς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα.

Κανὼν Γ'.

§. 176. Τρίτον, Ἀνίσως οἱ Ἀριθμοὶ, οἱ ὁποῖοι μας δοθῶσιν, ὁ μὲν ά. ἔχῃ Κλάσμα, οἱ δὲ ἄλλοι δύω εἶναι χωρὶς Κλάσμα, ά. ἂς βαλθῇ ὑποκάτω εἰς τοὺς ἀκεραίους Ἀριθμοὺς μονὰς, καὶ ἂς γένωσιν εἰς εἶδος Κλάσματος, (§. 89.) β'. ἂς πολλαπλασιαθῶσιν οἱ ἐν δεξιοῖς δύω Ἀριθμοὶ, Ἀριθμητὴς ἐπ' Ἀριθμητὴν, καὶ Παρονομαστὴς ἐπὶ Παρονομαστὴν, ὡς ἄνωθεν, καὶ ἂς γενῇ ἓν Κλάσμα. γ'. Αὐτὸ τὸ Κλάσμα, ἂς πολλαπλασιαθῇ ἐπὶ τὸ ἐν ἀριστεροῖς ά. Κλάσμα, κατὰ σχῆμα χιαστὸν, ὡς ἄνωθεν, καὶ ἂς γενῇ ἓν ὁλικὸν Κλάσμα· τὸ ὁποῖον ἀφ' οὗ διαιρεθῇ ἐπὶ τὸν ἴδιόν του Παρονομαστὴν, τὸ Πηλίκον θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος τέταρτος ἀνάλογος ὅρος τῶν δοθέντων Ἀριθμῶν, καθὼς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα.

$$6\frac{2}{3} : \frac{9}{1} : \frac{12}{1} = \Phi = 16\frac{1}{5}$$
$$\frac{20}{3} \quad \frac{108}{1}$$
$$\frac{108}{1} \times \frac{20}{3} = \frac{324}{20 :}$$
$$= 16\frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

Κανὼν Δ'.

§. 177. Τέταρτον, Ἀνίσως, τέλος πάντων μας δοθῶσι μόνον Κλάσματα, χωρὶς ἀκέραιον Ἀριθμὸν, ἀφ' ὃ τὰ βάλλομεν κατὰ σειρὰν, ά. ἂς πολλαπλασιασθῶσιν ἀναμεταξύ των, τὰ δύω Κλάσματα ὁποῦ εἶναι πρὸς τὰ δεξιὰ, δηλ. τὸ β'. ἐπὶ τὸ γ'. Ἀριθμητὴς ἐπ' Ἀριθμητὴν, καὶ Παρονομαστὴς ἐπὶ Παρονομαστὴν, καὶ ἂς γενῇ ἓν Κλάσμα ἴσον μὲ τὰ δύω. β'. Ἂς βαλθῇ εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τὸ ά. Κλάσμα ὁποῦ ἦτον εἰς τὰ ἀριστερὰ, καὶ ἂς πολλαπλασιασθῶσιν ἀναμεταξύ των κατὰ σχῆμα χιαστὸν, καὶ ἂς συσταθῇ ἓν ὁλικὸν Κλάσμα· τὸ ὁποῖον, ἀφ' οὗ διαιρεθῇ ἐπὶ τὸν ἴδιόν του Παρονομαστὴν, τὸ

Πη-

Πηλίκον θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος τέταρτος ἀνάλογος ὅρος τῶν δοθέντων Κλασμάτων· καθὼς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα.

$$\frac{1}{4} : \frac{2}{3} :: \frac{5}{8} : \times = 1\frac{2}{3}$$
$$\frac{10}{24} \times \frac{1}{4} = \frac{40}{24} = 1 + \frac{16}{24} = \frac{2}{3}.$$

Πρόβλημα Α΄.

§. 178. Τριῶν Ἀριθμῶν ἀκεραίων δοθέντων, τέταρτον ἀνάλογον αὐτοῖς εὑρεῖν.

Ὑπόδειγμα Α΄.

Δύω ἐργάται ἔκτισαν, εἰς κάποιαν τοιχοποιΐαν, τέσσαρας ὀργυιὰς τοῖχον, πόσας ἄρα ὀργυιὰς θέλουσι κτίση ἐργάται πέντε;

Λύσις.

Εἰς λύσιν τούτου, α΄. ἂς βαλθοῦν καθ᾽ ἑξῆς οἱ ὀνομασθέντες Ἀριθμοὶ Α, Β, Γ· ὡς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα. β΄. Ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ β΄. ὅρος Β, ἐπὶ τὸν γ΄. Γ, τὸ δὲ γενόμενον 20, ἂς διαιρεθῇ ἐπὶ τὸν α΄. ὅρον Α $= 2$. καὶ τὸ Πηλίκον $= 10$, ἔσται ὁ ζητούμενος τέταρτος ἀνάλογος τῶν δοθέντων ὅρος. Ἔστι γάρ, ὡς 10 : 5 : οὕτω 4 : 2. εἶναι δὲ καὶ ἡ Ἀναλογία Διῃρημένη· ὅθεν τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν δύω ἀκραίων ὅρων, εἶναι ἴσον μὲ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον γίνεται ἀπὸ τοὺς δύω μεσινοὺς ὅρους (§. 168.) οἷον $2 . 10 = 20$. Καὶ $4 . 5 = 20$· ἄρα οἱ πέντε ἐργάται θέλουσι κτίση δέκα ὀργυιάς· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον. Ἐπροσθέσαμεν δὲ καὶ τὸν Συμβολικὸν καὶ γενικὸν Τύπον, διὰ νὰ προσαρμόζωμεν ἐπάνω εἰς αὐτόν, καὶ κάθε ἄλλον Ἀριθμητικὸν ὅρον, ὁ ὁποῖος ἤθελε μας δοθῇ.

$$A : B :: \Gamma = \Phi :$$
$$2 : 4 :: 5 : = 10 = \Delta.$$
$$4 . 5 = \frac{20}{2} = 10$$
$$\Delta = \frac{B . \Gamma}{A :}$$

Δεῖ-

Δεῖξις.

Ἐπειδή, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, 2 ἐργάται ἔκτισαν 4 ὀργυιάς, ὁ εἷς ἄρα ἤθελε κτίση τὸ ἥμισυ τῶν 4, ἤγουν τὰς δύω ὀργυιάς· οἱ πέντε ἐργάται ἄρα, θέλουν κτίση, πέντε φοραῖς τὰς 2, ἤγουν δέκα· οἷον $2 . 5 = 10$. ἐκ τούτου ἄρα εἶναι φανερόν, ὅτι ἔπρεπε νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν β΄. ὅρον ἐπὶ τὸν γ΄. τὸ δὲ γενόμενον Κλάσμα, νὰ τὸ ἐπιπολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν α΄. ὅρον, κατὰ σχῆμα χιαστὸν κατὰ τὸν α΄. Κανόνα. (§. 174.) Καὶ καθὼς μας δείχνει ὁ γενικός τε καὶ Συμβολικὸς τύπος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόβλημα Β΄.

§. 179. Τριῶν πάλιν Ἀριθμῶν μετὰ Κλασμάτων δοθέντων, τέταρτον ἀνάλογον αὐτοῖς εὑρεῖν.

Ὑπόδειγμα Β΄.

Ἄλλος τις ἄνθρωπος, ἀγόρασεν ἀπὸ ἓν εἶδος ῥούχου ἓξ πήχεις, καὶ δύω τρίτα τοῦ πήχεως, καὶ ἔδωκε γρόσια σαρανταπέντε, καὶ ἕνα τέταρτον τοῦ γροσίου· ἀγόρασε δὲ ἀπὸ τὸ ἴδιον ῥοῦχον μὲ τὴν ἰδίαν τιμήν, καὶ ἕτερός τις, δεκατρεῖς πήχεις καὶ ἥμισυ, πόσα ἄρα, ἀναλόγως, θέλει δώσῃ καὶ αὐτός;

Λύσις.

Πρῶτον, βάλε κατὰ σειρὰν τοὺς καθ᾽ ὑπόθεσιν δοθέντας Ἀριθμοὺς μὲ τὰ Κλάσματά των, καθὼς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα· β΄. ἂς φερθῇ ὁ καθ᾽ εἷς Ἀριθμὸς ἐπὶ τὸ ἴδιόν του Κλάσμα, καὶ ἂς γένωσι τρία Κλάσματα, ἴσα μὲ τοὺς Ἀριθμούς, καὶ μὲ τὰ Κλάσματά των· κατὰ τὸν Β΄. Κανόνα. (§. 175.) γ΄. Ἂς πολλαπλασιασθῶσιν ἀνα-

$$6\frac{2}{3} : 45\frac{1}{4} :: 13\frac{1}{2} = \times$$
$$\frac{20}{3} : \frac{181}{4} . \frac{27}{2} = \frac{4887}{8}$$
$$\times \frac{20}{3} = \frac{14661}{160 :}$$
$$= 91\,\frac{101}{160} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}.$$

μεν

μεταξύ των, τὰ δύω πρὸς δεξιὰν Κλάσματα, κατὰ τὸν αὐτὸν Κανόνα· καὶ ἂς γένῃ ἓν Κλάσμα, ἴσον μὲ τὰ δύω. δ'. Ἂς πολλαπλασιασθῇ τὸ συσταθὲν Κλάσμα, ἐπὶ τὸ ἐν ἀριστεροῖς ά. Κλάσμα, κατὰ σχῆμα χιαστὸν, καὶ ἂς γένῃ ἓν ὁλικὸν Κλάσμα, ἴσον μὲ τοὺς δοθέντας τρεῖς Ἀριθμοὺς, καὶ μὲ τὰ Κλάσματά των· τὸ ὁποῖον διαιρεθὲν ἐπὶ τὸν Παρονομαστήν του, θέλει σοι δώσῃ Πηλίκον 91 $\frac{105}{160} = \frac{25}{40} =$ 25 παράδες. Ἄρα χρεωστεῖ νὰ δώσῃ διὰ τὰς 13 $\frac{1}{2}$ πήχεις ροῦχον, γρόσ. 91, καὶ παράδ. 25· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Πρόβλημα Γ'.

§. 180. Τριῶν Κλασμάτων δοθέντων, τέταρτον αὐτοῖς ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ὑπόδειγμα Γ'.

Τὶς ἄνθρωπος ἀγόρασεν ἀπὸ κάποιον εἶδος πανίου, πέντε ὄγδοα τοῦ πήχεως, καὶ ἔδωκεν ἑπτὰ ὄγδοα τοῦ γροσίου· ἀγοράσας δὲ καὶ ἄλλος τις ἀπὸ τὸ ἴδιον πανίον, καὶ μὲ τὴν ἰδίαν τιμήν, ἐννέα ὄγδοα τοῦ πήχεως, ζητεῖ νὰ μάθῃ πόσον χρεωστεῖ νὰ πληρώσῃ.

Λύσις.

Πρῶτον, θὲς τὰ δοθέντα μέρη ἐφεξῆς. Καὶ ἐπειδὴ ἔχουσι τὸν αὐτὸν Παρονομαστήν, ἂς πολλαπλασιασθῶσιν ἀναμεταξύ των οἱ Ἀριθμηταὶ τῶν δύω Κλασμάτων, οἵτινες εἰσὶν εἰς τὰ δεξιὰ μέρη, καὶ ἂς γένῃ ὁ 63· ὅστις διαιρεθεὶς ἐπὶ τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ ά. Κλάσματος 5, δίδει Πηλίκον 12 $\frac{3}{5}$· καὶ αὐτὸς εἶναι ὁ ζητούμενος δ'. ὅρος. Ἄρα χρεωστεῖ νὰ δώσῃ καὶ αὐτὸς 12 $\frac{3}{5}$ = 1 γρόσ. καὶ παράδ. 24· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

$$\frac{5}{8} : \frac{7}{8} :: \frac{9}{8} = \Psi = 12\frac{3}{5}.$$

$$7 \cdot 9 = \frac{63}{5:} = \frac{12}{8} + \frac{3}{5} = \text{παρ. } 63.$$

$$9 \cdot 7 = 63 \text{. Καὶ } 5 \cdot 12 = 60 + 3 = \text{παράδ. } 63$$

Ὑπό-

Ὑπόδειγμα Δ'.

Εἷς ἄνθρωπος ἀγόρασεν ἀπὸ κάποιον εἶδος πανίου, $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως· καὶ ἔδωκεν $\frac{5}{6}$ τοῦ γροσίου· ἄλλος δέ τις ἀγοράσας $\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως, ζητεῖ νὰ μάθῃ πόσον χρεωστεῖ νὰ δώσῃ.

Λύσις.

Πρῶτον, ἂς βαλθῶσι κατὰ σειρὰν τὰ δοθέντα Κλάσματα· β'. ἂς πολλαπλασιασθῶσι τὰ δύω πρὸς δεξιὰν, Ἀριθμητὴς ἐπ' Ἀριθμητὴν, καὶ Παρονομαστὴς ἐπὶ Παρονομαστὴν, καὶ ἂς γένῃ ἓν Κλάσμα τὸ $\frac{15}{24}$· τοῦτο, ἂς πολλαπλασιασθῇ, μὲ τὸ πρῶτον Κλάσμα $= \frac{7}{8}$, κατὰ σχῆμα χιαστὸν, καὶ ἂς γένῃ ἓν ὁλικὸν Κλάσμα, τὸ $\frac{120}{168}$. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι μεγαλήτερος ὁ Παρονομαστὴς, ἀπὸ τὸν Ἀριθμητὴν, φέρετο εἰς ἐλαχίστους ὅρους, καὶ γίνεται τὸ $\frac{30}{42} = \frac{6}{7}$· καὶ τόσον χρεωστεῖ νὰ πληρώσῃ, διὰ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως. ὅρα τὸν Δ'. Κανόνα, (§. 177.) καὶ κάμνε καθὼς σε διδάσκει.

$$\frac{7}{8} : \frac{5}{6} :: \frac{3}{4} = \Phi$$

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{24} \times \frac{7}{8} =$$

$$\frac{120}{168} = \frac{30}{42} = \frac{5}{7} = \text{παρ. } 28\tfrac{1}{7}.$$

Πόρισμα.

Εἶναι φανερὸν ἄρα, ὅτι ὁπόταν τὰ διδόμενα Κλάσματα ἔχουσι τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν, πρέπει νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ β'. Κλάσματος, ἐπὶ τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ γ'. καὶ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἤθελε γένῃ, νὰ τὸ διαιρῶμεν μὲ τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ ά. Κλάσματος, καὶ εἰς τὸ Πηλίκον, νὰ θέτωμεν ὑποκάτω τὸν κοινὸν Παρονομαστήν· καθὼς φαίνεται εἰς τὸ Γ'. Ὑπόδειγμα.

Ὑποσημείωσις.

§. 181. Πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν, ὅτι εἰς τὴν Μέθοδον τῶν Τριῶν, ὅταν βαίνται καμμία παρονομασία εἰς τοὺς ὅρους, εἶναι εἰς χρέος ὁ ά. ὅρος νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν παρονομασίαν μὲ

τὸν

τὸν γ΄. ἢ μὲ τὸν β΄. ὅρον· διότι τότε, ὁ β΄. ὅρος, ἢ ὁ γ΄. θέλει εἶναι τῆς αὐτῆς παρονομασίας μὲ τὴν δ΄. ὅρον. Παραδείγματος χάριν, ἀνίσως, καθ' ὑπόθεσιν εἰποῦμεν, ὅτι τὰ 30 ἀργύρια, μας δίδουσι κέρδος 60 παράδες, ἠμποροῦμεν τότε νὰ εἰπῶμεν, τὰ 50 ἄρα ἀργύρια, πόσους παράδ. θέλουσι μας δώσῃ κέρδος! ἐπειδὴ εἰς αὐτὸ τὸ Ὑπόδειγμα, ὁ α΄. ὅρος φυλάττει τὴν αὐτὴν παρονομασίαν μὲ τὸν γ΄. ὅρον, (ἐπειδὴ καὶ οἱ δύω ἔχουσι τὴν αὐτὴν παρονομασίαν τῶν ἀργυρίων) καὶ ὁ β΄. ὅρος, τὴν αὐτὴν μὲ τὸν δ΄. (ἐπειδὴ καὶ ὁ β΄. καὶ ὁ δ΄. δηλοῦσι παράδ.) Εἰδὲ ἠθέλαμεν εἰπῇ, ὅτι ἀνίσως τὰ 30 ἀργύρια, μας δίδουσι κέρδος ἀργύρια 8, δυνάμεθα τότε νὰ εἴπωμεν, οἱ 60 παράδ. πόσους ἄρα παράδ. θέλουν μας δώσῃ κέρδος! ἐπειδὴ εἰς αὐτὸ τὸ παράδειγμα ὁ α΄. ὅρος φυλάττει τὴν αὐτὴν παρονομασίαν μὲ τὸν β΄. καὶ ὁ γ΄. μὲ τὸν δ΄. ἐπειδὴ οἱ πρῶτοι δύω, ἔχουσι τὴν αὐτὴν παρονομασίαν τῶν ἀργυρίων· οἱ δὲ ἄλλοι δύω δεύτεροι, ἔχουσι τὴν παρονομασίαν τῶν παράδων.

Εἰδὲ, τέλος πάντων, ἤθελε δοθῇ, ὅτι τὰ 30 ἀργύρια, δίδουσι κέρδος 12 δραχμὰς, δὲν ἠμποροῦμεν τότε νὰ εἴπωμεν, οἱ 50 ἄρα σατῆρες, πόσους ὀβολοὺς θέλουσι μας δώσῃ! διότι, καὶ μ' ὅλον ὁποῦ οἱ Ἀριθμητικοὶ ὅροι, ὅταν βάνωνται ἀπολύτως, καὶ χωρὶς τινος παρονομασίας, δύνανται νὰ φυλάττωσι τὸν ῥυθμὸν καὶ τάξιν τῆς Ἀναλογίας, ὅταν ὅμως, καθ' εἷς ἀπὸ τοὺς ὅρους, εὑρίσκεται μὲ τινὰ ἰδίαν παρονομασίαν, τότε ἡ πρᾶξις θέλει εἶναι ἐσφαλμένη· διότι ὁ σατὴρ παραβαλλόμενος πρὸς τὸν ὀβολὸν, δὲν ἔχει τὴν αὐτὴν Ἀναλογίαν, τὴν ὁποίαν ἔχει καὶ τὸ ἀργύριον πρὸς τὴν δραχμήν· ἐπειδὴ ἡ μὲν δραχμὴ, ἑπτάκις, σχεδὸν, καταμετρεῖ τὸ ἀργύριον, ὁ δὲ ὀβολὸς καταμετρεῖ τὸν σατῆρα εἰκοσιτέσσαρες φοραῖς.

Περὶ Βασάνου, ἢ δοκιμῆς τῆς Μεθόδου τῶν Τριῶν.

§. 182. Θέλων δὲ διὰ νὰ γνωρίσῃς, ἀνίσως ἡ πρᾶξις τῆς Γεωμετρικῆς Μεθόδου τῶν Τριῶν ἔγινεν ὀρθῶς, καὶ χωρὶς λάθος. Εἰς μὲν τοὺς ἀκαιρέους Ἀριθμοὺς, ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ α΄. ὅρος ἐπὶ τὸν εὑρεθέντα δ΄. ὅρον· ὁ δὲ β΄. ἐπὶ τὸν γ΄. καὶ ἀνίσως ἐκεῖνος ὁ Ἀριθμὸς, ὅστις γίνεται ἀπὸ τοὺς δύω ἀκρινοὺς ὅρους, εἶναι ἴσος μὲ ἐκεῖνον, ὁποῦ γίνεται ἀπὸ τοὺς δύω μέσους (ὁμοῦ μὲ ἐκεῖνο τὸ μέρος ὁποῦ ἤθελε μείνῃ εἰς

τὸν

τὸν εὑρεθέντα δ΄. ὅρον,) θέλει εἶναι ἡ πρᾶξις ὀρθή, εἰδὲ καὶ δὲν εἶναι ἴσος, εἶναι ἐσφαλμένη.

Εἰς δὲ τὰ Κλάσματα γίνεται ἡ δοκιμὴ, κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον· ἀφ' οὗ τελειώσῃ ἡ πρᾶξις, θὲς τὰ τέσσαρα Κλάσματα κατὰ σειράν. Καὶ α΄. μὲν, φέρεται εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστήν· β΄. δὲ, ἂς πολλαπλασιασθῇ τὸ α΄. Κλάσμα, μὲ τὸ εὑρεθὲν δ΄. ὁμοίως καὶ τὸ β΄. ἐπὶ τὸ γ΄. καὶ ἀνίσως ὁ Ἀριθμὸς, ὁποῦ γένῃ ἀπὸ τὰ δύω ἀκρινὰ Κλάσματα, ἤθελεν εἶναι ἴσος μὲ ἐκεῖνον, ὁποῦ γίνεται ἀπὸ τὰ δύω μεσινὰ, εἶναι σωστὴ ἡ πρᾶξις· εἰδὲ καὶ δὲν εἶναι ἴσος, εἶναι ἐσφαλμένη.

Εἰδὲ πάλιν ἤθελαν εἶναι τὰ Κλάσματα Σύμμικτα μὲ ἀκεραίους Ἀριθμοὺς, α΄. ἂς φερθῇ καθ' εἷς ἀπὸ τοὺς ἀκεραίους, ἐπὶ τὸ ἴδιόν του Κλάσμα. β΄. Ἂς φερθῶσιν εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστήν. γ΄. Ἂς πολλαπλασιασθῶσιν, ὡς ἄνωθεν τὰ δύω ἀκρινὰ Κλάσματα χωριστὰ, ὁμοίως καὶ τὰ δύω μεσινά· καὶ ἂν οἱ Ἀριθμοὶ ὁποῦ γίνονται ἀπὸ τὰ ἀκρινὰ, καὶ μεσινὰ, ἤθελαν εἶναι ἴσοι, ὀρθῶς ἔγινεν ἡ πρᾶξις.

Διὰ νὰ γνωρίσωμεν ὅμως καλήτερα τὴν δοκιμὴν μὲ τὴν πρᾶξιν, ἂς προσθέσωμεν μερικὰ Ὑποδείγματα, κάμνοντες καὶ τὴν δοκιμὴν τῶν.

Περὶ

$\div 3 : 6 :: 12 : \times = 24$ $\frac{72}{3:}$ $3 : 6 :: 12 : 24.$ $6 . 12 = 72$. Καὶ $3 . 24 = 72.$	$\div 6 : 8 :: 12 : \times\ 16$ $\frac{96}{6:}$ $6 . 16 = 96$. Καὶ $8 . 12 = 96.$
$\div 5 : 7 :: 9 : \times\ 12\frac{3}{5}.$ $\frac{63}{5:}$ $5 : 7 :: 9 : 12\frac{3}{5}.$ $7 . 9 = 63$. Καὶ $5 . 12$ $= 60 + 3 = 63.$	$\div \frac{1}{4} : \frac{2}{3} :: \frac{5}{8} : = \times \frac{40}{24}.$ $2 . 5 = \frac{10}{24} \times \frac{1}{4} = \frac{40}{24:} = 1\frac{16}{24}$ $= \frac{2}{3} . \frac{1}{4} : \frac{2}{3} :: \frac{5}{8} : \frac{40}{24} =$ $\frac{576}{2304} : \frac{1536}{2304} :: \frac{1440}{2304} : \frac{3840}{2304}.$ $3840 . 576 = 2211840.$ $1536 . 1440 = 2211840.$
$3\frac{1}{2} : 5\frac{2}{3} :: 8\frac{1}{4} =$ $13\frac{5}{14} . \frac{7}{2} \quad \frac{17}{3} \quad \frac{33}{4}$ $\frac{33}{4} . \frac{17}{3} = \frac{561}{12} \times \frac{7}{2}$ $= \frac{1122}{84:} = 13\frac{30}{84} = \frac{5}{14}.$	$3\frac{1}{2} : 5\frac{2}{3} :: 8\frac{1}{4} : 13\frac{5}{14}.$ $\frac{7}{2} \quad \frac{17}{3} \quad \frac{33}{4} \quad \frac{187}{14} =$ $\frac{1176}{336} : \frac{1904}{336} : \frac{2772}{336} : \frac{4488}{336}.$ $2772 . 1904 = 5277888.$ Καὶ $4488 . 1176 = 5277888.$

Καὶ περὶ μὲν τῆς ὀρθῆς Μεθόδου τῶν Τριῶν, καὶ τῆς δοκιμῆς αὐτῆς, εἰς κάθε περίστασιν, εἶναι ἀρκετὰ ὅσα εἴπομεν· τώρα δὲ, ἂς εἴπωμεν καὶ περὶ τῆς Πλαγίας.

Περὶ

Περὶ τῆς Πλαγίας Μεθόδου τῶν Τριῶν.

Ὁρισμός.

§. 183. Πλαγία, ἢ Ἀντίςροφος Ἀναλογία ἐςὶν, ὅταν οἱ ὅροι αὐτῆς δὲν βαίνονται κατὰ τάξιν, καθὼς εἰς τὴν Ὀρθὴν, ἀλλὰ τρόπον τινὰ ἀτάκτως, καὶ συγκεχυμένως· (§. 165.) διότι ἐκεῖ μὲν εἰς τὴν Ὀρθὴν, ὁποίαν Ἀναλογίαν εἶχεν ὁ α΄. ὅρος πρὸς τὸν β΄. τὴν αὐτὴν εἶχε καὶ ὁ γ΄. πρὸς τὸν δ΄. (§. 164.) ὧδε δὲ εἰς τὴν Πλαγίαν, μεταλλάττονται οἱ ὅροι· ἐπειδὴ, ὁποίαν Ἀναλογίαν ἔχει ὁ α΄. ὅρος πρὸς τὸν β΄. τὴν αὐτὴν ἔχει ὁ δ΄. πρὸς τὸν γ΄. οἷον ÷ 2: 6:: 15: 5.

Σχόλιον.

Διὰ νὰ γνωρίζωμεν καλήτερα τὴν Πλαγίαν, ἢ Ἀντίςροφον ταύτην Μέθοδον, καὶ νὰ τὴν διακρίνωμεν ἀπὸ τὴν Ὀρθὴν, ἂς προσθέσωμεν τοὺς ἐφεξῆς δύω Κανόνας.

Κανὼν Α΄.

§. 184. Ὅταν ὁ β΄. ἡγούμενος ὅρος, ἤθελεν εἶναι μεγαλήτερος, ἀπὸ τὸν α΄. ἡγούμενον ὅρον, ὁ δὲ β΄. ἑπόμενος, ἤθελεν εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν α΄. ἑπόμενον ὅρον, τότε ἡ Ἀναλογία εἶναι Ἀντίστροφος, ἤγουν Πλαγία· οἷον ÷ 3: 6:: 10: 5. πρῶτος μὲν ἡγούμενος ἐδῶ, λέγεται ὁ 3, καὶ δεύτερος ἡγούμενος, λέγεται ὁ 10. Ὁμοίως, πρῶτος μὲν ἑπόμενος, λέγεται ὁ 6, δεύτερος δὲ, ὁ 5.

Κανὼν Β΄.

§. 185. Ὁμοίως· καὶ ὅταν ὁ β΄. ἡγούμενος ὅρος, ἤθελεν εἶναι μικρότερος τοῦ α΄. ἡγουμένου ὅρου, ὁ δὲ β΄. ἑπόμενος ὅρος ἤθελεν εἶναι μεγαλήτερος τοῦ α΄. ἑπομένου ὅρου, Ἀντίςροφος, ἢ ἐν ἀντιπεπονθότι λόγῳ ἐστὶν ἡ Ἀναλογία· οἷον· ÷ 10: 20:: 5: 40.

Ὑπο-

Ὑποσημείωσις.

Εἰς τὴν ἐργασίαν τῆς Πλαγίας ταύτης Μεθόδου τῶν Τριῶν κατὰ τρεῖς τρόπους ἐνδέχεται νὰ εἶναι τὰ Προβλήματα ὅπου ἀνάγονται εἰς αὐτήν. Ἐπειδὴ, ἢ ζητεῖται ὁ ἐπὶ τῆς ὀρθῆς γ'. ὅρος, ἢ ὁ β'. ἢ γοῦν ὁ α'. ὁποῖος δήποτε ὅμως ἤθελε ζητηθῆ, ὅρα τὸν τρόπον τῆς εὑρέσεως αὐτοῦ εἰς τὸν γενικόν τε καὶ Συμβολικὸν τετραπλοῦν Τύπον, τὸν ὁποῖον ἐκθέσαμεν εἰς τὴν περὶ αὐτῶν ὑπόθεσιν, (§. 170.) καὶ θέλεις ὁδηγηθῆ ἐπὶ τὴν πρᾶξιν τῆς εὑρέσεως τοῦ ζητουμένου ὅρου· ἀλλὰ δὴ καὶ εἰς τὰ ἐφεξῆς Προβλήματα, λύσεις τε, καὶ Ὑποδείγματα προσέχων, θέλεις γνωρίσῃ καλλιώτερα ἐκεῖνα ὅπου εἰς τὴν ῥηθεῖσαν ὑπόθεσιν εἴπομεν.

Πρόβλημα Α'. Τρόπος Α'.

§. 186. Ὅταν ἤθελαν μας δοθῶσι τρεῖς Ἀριθμοὶ, ἢ ὅροι, δηλ. ὁ Α, Β, καὶ Δ, νὰ εὕρωμεν τὸν Γ, ὥστε ὅπου νὰ ἔχῃ ἀναλογίαν πρὸς τὸν Δ, ὡς ὁ Α, πρὸς τὸν Β.

Λύσις.

Ἃς δοθῶσιν οἱ ἐν τῷ Διαγράμματι σημειωθέντες Α, Β, Δ Ἀριθμοὶ, καὶ ἃς ζητηθῆ ὁ ἀνάλογος αὐτοῖς Ἀριθμὸς Γ· ἃς πολλαπλασιασθῆ ὁ Α, Ἀριθμὸς, ἐπὶ τὸν Δ, τὸ δὲ γενόμενον, ἃς διαιρεθῆ ἐπὶ τὸν Β, Ἀριθμὸν, καὶ τὸ Πηλίκον Χ, θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος γ'. ὅρος Γ, καθὼς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα, καὶ ὁ Συμβολικὸς κελεύει Τύπος.

$$\mathrm{A} : \mathrm{B} : \Delta : \mathrm{X} = \Gamma.$$
$$\div\!\!\div\; 3 : 6 :: 10 : \quad 5$$
$$3 \,.\, 10 = \tfrac{30}{6} = 5 = \Gamma$$
$$\Gamma = \frac{\mathrm{A} \,.\, \Delta}{\mathrm{B} :}$$

Δεῖξις.

Ὅτι δὲ ὁ 5 ἐστὶν ὁ ζητούμενος γ'. ὅρος Γ, δείκνυται. α'. Ἃς βαλθῶσι κατὰ σειρὰν οἱ δοθέντες τρεῖς Ἀριθμοὶ, καὶ μετ' αὐτοὺς ὁ εὑρεθεὶς δ'. ὅρος· β'. ἃς μετατεθῆ ὁ εὑρεθεὶς δ'.

ὅρος

ὅρος ἐπὶ τὸν γ'. τόπον τῶν ὅρων, ὁ δὲ γ'. ἐπὶ τὸν δ'. καὶ ἃς πολλαπλασιασθῶσιν ἀναμεταξύ των οἱ δύω μέσοι ὅροι, δηλ. ὁ 6 ἐπὶ τὸν 5, καὶ ἃς γένῃ ὁ 30 Ἀριθμός. Ἃς πολλαπλασιασθῶσιν ὁμοίως καὶ οἱ δύω ἄκροι, δηλ. ὁ 10, ἐπὶ τὸν 3, καὶ γίνεται ὁ αὐτὸς Ἀριθμὸς 30· οἷον 10 . 3 = 30. Ἄρα οἱ τέσσαρες Ἀριθμοὶ εἰσὶν ἀνάλογον, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ α'. 3, πρὸς τὸν β'. 6, οὕτως ὁ εὑρεθεὶς γ'. 5, πρὸς τὸν δ'. 10· ὁ ἦν τὸ ἐξ ἀρχῆς ζητούμενον· ἄρα ὁ 5 ἐστὶν ὁ ζητούμενος γ'. ὅρος.

$$\text{οἷον} : 3 : 6 :: 10 : \mathrm{X} = 5$$
$$\div\!\!\div\; 3 : 6 :: 5 : 10.$$
$$10 \,.\, 3 = 30.\ \text{Καὶ}\ 5 \,.\, 6 = 30.$$

Ἃς δοθῶσι πάλιν οἱ Α, Β, Δ Ἀριθμοὶ, καὶ ἃς ζητηθῆ ὁ Χ = Γ· ὁ ὁποῖος νὰ ἔχῃ ἀναλογίαν πρὸς τὸν Δ, ὡς ὁ Α, πρὸς τὸν Β. Ἃς γένῃ ὡς ἄνωθεν καὶ θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος γ'. ὅρος Γ, ἴσος μὲ τὸν 4 Ἀριθμὸν, ὡς ἐν τῷ Διαγράμματι φαίνεται· ἔστι δὲ καὶ πρὸς τὸν δ'. ὅρον Δ, ὡς ὁ Α, πρὸς τὸν Β· ἄρα ὁ 4 ἐστὶν ὁ ζητούμενος ἀνάλογος γ'. ὅρος Γ· ἡ Δεῖξις ἡ αὐτὴ τῇ ἀνωτέρῳ.

$$\mathrm{A} : \mathrm{B} : \Delta = \mathrm{X} = \Gamma$$
$$6 : 18 : 12 :$$
$$6 \,.\, 12 = \frac{72}{18:} = 4 = \Gamma$$
$$\div\!\!\div\; 6 : 18 :: 4 : 12$$
$$\Gamma = \frac{\mathrm{A} \,.\, \Delta}{\mathrm{B} :}$$

Ὑπόδειγμα Α'.

Εἷς τις ἄνθρωπος, ἔχων ἀργύρια 331, καὶ λεπτὰ 60, καὶ θέλων ἵνα ἀγοράσῃ μετάξι, ζητεῖ νὰ μάθῃ πόσας λίτρας δύναται νὰ ἀγοράσῃ μὲ αὐτὴν τὴν Ποσότητα τῶν ἀργυρίων ὅπου ἔχει, τοῦ ὁποίου μεταξίου ἡ τιμὴ εἶναι πρὸς 2 ἀργύρια, καὶ λεπτὰ 15.

Λύσις.

Εἰς λύσιν τούτου, α'. ἃς ἀναλύσωμεν τὰ ἀργύρια εἰς λεπτά· τοῦτο δὲ γίνεται διὰ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ. Ἃς πολλαπλασιασθῶσι λοιπὸν τὰ δύω ἀργύρια τὸ τίμημα τῆς μιᾶς λίτρας, ἐπὶ τὸν 120 Ἀριθμὸν τῶν λεπτῶν. (τόσων γὰρ λεπτῶν ἴσον ὑποτίθεται τὸ ἀργύριον· ὅρα §. 26. εἰς τὸ Α'.

Ὑπό-

Ὑπόδειγμα) καὶ εἰς ἐκεῖνο ὅπου γένῃ, ἂς προστεθῶσι τὰ 15 λεπτά· οἷον $120 . 2 = 240 + 15 = 255$, καὶ αὐτὸν τὸν Ἀριθμὸν, βάλετον εἰς τὸν βʹ. τόπον τῶν ὅρων τῆς Μεθόδου. βʹ. Ἂς πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν 120 Ἀριθμὸν, καὶ τὰ 331 ἀργύρια, καὶ εἰς ἐκεῖνο ὅπου ἤθελε γένῃ, ἂς προστεθῶσι καὶ τὰ 60 λεπτά· οἷον $331 . 120 = 39720 + 60 = 39780$· καὶ αὐτὸν θέσετον εἰς τὸν γʹ. τόπον τῶν ὅρων· λαμβανομένης δὲ καὶ τῆς μονάδος ἀντὶ τοῦ αʹ. ὅρου.

$$
\boxed{\begin{array}{l}
A : B : \Delta = \Gamma \\
1 : 255 : 39780 \\
\dfrac{39780}{255 :} = 156 . \\
\div 1 : 255 :: 156 : 39780
\end{array}}
$$

Ἂς εἰπῶμεν· ἀνίσως μία λίτρα μεταξίου τιμᾶται λεπτῶν 255, πόσας ἄρα λίτρας δύναται νὰ ἀγοράσῃ τινὰς μὲ, 39780 λεπτά! τοῦτο δὲ θέλει εὑρεθῇ, ἀνίσως πολλαπλασιασθῇ ὁ Αʹ. ὅρος ἐπὶ τὸν Δʹ. καὶ τὸ γενόμενον, νὰ διαιρεθῇ ἐπὶ τὸν Βʹ. ὅρον· καθὼς ὁ Συμβολικὸς Τύπος κελεύει· τὸ δὲ Πηλίκον ἔσαι ὁ ζητούμενος δʹ. ὅρος Γ· καθὼς φαίνεται εἰς τὸ Διάγραμμα. Καὶ ἐπειδὴ ὁ αʹ. ὅρος Α, μὲ τὸ νὰ εἶναι μονὰς, δὲν αὐξαίνει τὸν Ἀριθμὸν ἐκεῖνον ὁποῦ ἤθελε πολλαπλασιάσῃ, ἢ διαιρέσῃ, ἀλλὰ μένει πάντοτε ὁ ἴδιος Ἀριθμὸς, ὅς τις ἦτον καὶ πρὸ τοῦ νὰ πολλαπλασιασθῇ (κατὰ τὸ ΙΒʹ. Ἀξίωμα, §. 73.) ἂς διαιρεθῇ ὁ γʹ. ὅρος Δ, ἐπὶ τὸν βʹ. Β, καὶ τὸ Πηλίκον ἔσαι ὁ ζητούμενος γʹ. ὅρος $= 156$. Ἄρα μὲ τὰ 331 ἀργύρ. καὶ λεπτὰ 60, θέλει ἀγοράσῃ 156 λίτρας μεταξίον· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον. Καί ἐστιν, ὡς ὁ αʹ. ὅρος, πρὸς τὸν βʹ. ὁ γʹ. πρὸς τὸν δʹ. ἐπειδὴ καὶ ὁ Ἀριθμὸς, ὅς τις γίνεται ἀπὸ τοὺς δύω ἀκρινοὺς ὅρους, εἶναι ἴσος μὲ ἐκεῖνον, ὁποῦ γίνεται ἀπὸ τοὺς δύω μέσους· ἄρα. κτλ.

Τοιοῦτος λοιπὸν εἶναι ὁ Αʹ. τρόπος τῆς Πλαγίας τῶν Τριῶν Μεθόδου· εἶναι ὅμως καὶ ἄλλοι δύω τρόποι, εἰς τοὺς ὁποίους, διδομένων τριῶν Ἀριθμῶν, ζητεῖται, ἢ ὁ βʹ. ὅρος, ἢ γοῦν ὁ αʹ. Καὶ αὐτὴ εἶναι ἡ κυρίως τεταραγμένη Ἀναλογία. (§. 165. καὶ 183.) Γίνεται δὲ κατὰ τοὺς ἐφεξῆς τρόπους.

Πρόβλημα Βʹ. Τρόπος Βʹ.

§. 187. Τριῶν πάλιν Ἀριθμῶν δοθέντων, Αʹ. Γʹ. καὶ Δʹ. τὸν Βʹ. αὐτοῖς ἀνάλογον εὑρεῖν, ὅς τις νὰ ἔχῃ σχέσιν καὶ ἀναλογίαν, πρὸς τὸν Αʹ. ὅρον, ὡς ὁ Δʹ. πρὸς τὸν Γʹ.

Λύ-

Λύσις.

Ἂς δοθῶσιν οἱ Α, Γ, Δ Ἀριθμοὶ, καὶ ἂς ζητηθῇ ὁ βʹ. ὅρος Β, αʹ. ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ αʹ. ὅρος Α, ἐπὶ τὸν δʹ. Δ, τὸ δὲ γενόμενον, ἂς διαιρεθῇ ἐπὶ τὸν γʹ. ὅρον Γ, τὸ δὲ Πηλίκον θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος βʹ. ὅρος Β, καθὼς φαίνεται εἰς τὸ Διάγραμμα, καὶ ὁ Συμβολικός σε διδάσκει Τύπος· ἄρα ὁ ζητούμενος βʹ. ὅρος Β, ἔστιν ἴσος μὲ $6\frac{2}{5}$.

$$
\boxed{\begin{array}{l}
A : \Gamma :: \Delta : \times = B . \\
4 \quad 5 \quad 8 \\
4 . 8 = \dfrac{32}{5 :} = 6\dfrac{2}{5} \\
4 : 6\dfrac{2}{5} :: 5 : 8 \\
4 . 8 = 32 . \text{ Καὶ } 5 . 6 \\
= 30 + 2 = 32 \\
\hline
B = \dfrac{A . \Delta}{\Gamma :}
\end{array}}
$$

Δεῖξις.

Ὅτι δὲ ὁ $6\frac{2}{5}$ ἐστὶν ὁ ζητούμενος βʹ. ὅρος, δείκνυται. Ἂς τεθῇ ὁ Α, Ἀριθμὸς εἰς τὸν αʹ. τόπον τῶν ὅρων· ὁ δὲ εὑρεθεὶς δʹ. $B = 6\frac{2}{5}$, εἰς τὸν βʹ. τόπον· ὁ δὲ βʹ. Γ, εἰς τὸν τρίτον, καὶ ὁ γʹ. ὅρος Δ, εἰς τὸν δʹ. τόπον τῶν ὅρων. Ἔπειτα, ἂς πολλαπλασιασθῶσιν ἀναμεταξύ των οἱ δύω ἀκρινοὶ ὅροι, καὶ ἂς γένῃ ὁ 32 Ἀριθμός· οἷον $4 . 8 = 32$. ἔπειτα ἂς πολλαπλασιασθῶσι καὶ οἱ δύω μέσοι, δηλ. ὁ 6, ἐπὶ τὸν 5, καὶ εἰς ἐκεῖνο, ὁπου γένῃ, ἂς προστεθῇ καὶ ὁ Ἀριθμητὴς τοῦ Κλάσματος 2. καὶ γεννήσεται ὁ αὐτὸς Ἀριθμός· οἷον $5 . 6 = 30 + 2 = 32$. ἄρα κτλ.

Ὑπόδειγμα Βʹ.

Εἷς τυπογράφος ἔθεσεν εἰς ἓν Βιβλίον, εἰς μὲν τὴν αʹ. ἔκδοσιν, σελίδας 400· πᾶσα δὲ σελὶς εἶχε πρὸς 30 στίχους· εἰς δὲ τὴν βʹ. ἔκδοσιν τοῦ αὐτοῦ Βιβλίου, ἔθεσεν εἰς κάθε σελίδα, πρὸς 40 στίχους· πόσαι ἄρα σελίδες ἐμβῆκαν εἰς τὴν βʹ. ἔκδοσιν!

Λύ-

Λύσις.

Εἶναι φανερὸν ὅτι, μὲ τὸ νὰ ἐμβῆκαν περισσότεροι σίχοι εἰς κάθε σελίδα, θέλουσιν εἶναι ὀλιγότεραι αἱ σελίδες· βάνωντας λοιπὸν κατὰ σειρὰν, τὰς 400 σελίδας, καὶ τοὺς 30 στίχους τῆς α'. ἐκδόσεως, καὶ τοὺς 40 στίχους τῆς β'. ἐκδόσεως, ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ α'. ὅρος Α, ἐπὶ τὸν β'. Β, τὸ δὲ γενόμενον διαιρεθὲν ἐπὶ τὸν γ'. Δ, θέλει σοι δώσῃ τὸν ζητούμενον δ'. Γ, καθὼς εἰς τὸ ἀντικρὺ φαίνεται Διάγραμμα· μετατεθέντος δὲ τοῦ εὑρεθέντος δ'. ὅρου = 300, ἐπὶ τὸν γ'. τόπον τῶν ὅρων, ἔσαι τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν δύω ἄκρων ὅρων, ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν δύω μέσων· εἰς τὴν δευτέραν ἄρα ἔκδοσιν θέλουσι ἔμβῃ σελίδες 300· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον. κτλ.

$$
\begin{array}{l}
A, B, \Delta, \Gamma = \\
\div 400 : 30 :: 40 \\
400 . 30 = \frac{12000}{40} = 300 \\
400 : 40 :: 300 : 30 \\
400 . 30 = 12000 \\
40 . 300 = 12000
\end{array}
$$

Πρόβλημα Γ'. Τρόπος Γ'.

§. 188. Τριῶν αὖθις Ἀριθμῶν δοθέντων, δηλ. τοῦ Β, Γ, καὶ Δ, τὸν Α, αὐτοῖς ἀνάλογον εὑρεῖν, καὶ εἰς τὴν δοθεῖσαν Ἀναλογίαν, ὥστε ὁποῦ νὰ ἔχῃ ἀναφορὰν πρὸς τὸν Β, ὡς ὁ Γ, πρὸς τὸν Δ.

Λύσις.

Ἂς δοθῶσιν οἱ Β, Γ, Δ, Ἀριθμοὶ, καὶ ἂς ζητηθῇ ὁ δ'. ὅρος Α, ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ α'. ὅρος Β, ἐπὶ τὸν β'. ὅρον Γ· τὸ δὲ γενόμενον, ἂς διαιρεθῇ ἐπὶ τὸν γ'. ὅρον Δ, καὶ τὸ Πηλίκον ἔσται ὁ ζητούμενος α'. ὅρος Α, καθὼς εἰς τὸ Διάγραμμα φαίνεται ὁ 4 = Α.

$$
\begin{array}{l}
B : \Gamma : \Delta : = A \\
6 : 8 :: 12 = \\
6 . 8 = \frac{48}{12} = 4
\end{array}
$$

Δεῖ-

Δεῖξις.

Ὅτι δὲ ὁ 4 ἐσὶν ὁ ζητούμενος α'. ὅρος Α, δείκνυται· α'. ἂς τεθῶσιν οἱ ὅροι ἐφεξῆς· β'. ἂς μετατεθῇ ὁ εὑρεθεὶς δ'. ὅρος 4 = Α, ἐπὶ τὸν α'. τόπον τῶν ὅρων· ὁ δὲ α'. Β, ἐπὶ τὸν β'. τόπον· καὶ ὁ β'. Γ, ἐπὶ τὸν γ'. ὁ δὲ γ'. Δ, ἐπὶ τὸν δ'. τόπον· ἔχει δὲ σχέσιν ὁ εὑρεθεὶς α'. ὅρος = 4, πρὸς τὸν β'. ὅρον = 6, ὡς ὁ γ'. ὅρος = 8, πρὸς τὸν δ'. = 12· τὸ γὰρ ὑπὸ τῶν δύω ἄκρων ὅρων γενόμενον, ἴσον ἐσὶ τὸ ὑπὸ τῶν δύω μέσων. κτλ.

$$
\begin{array}{l}
B : \Gamma :: \Delta = \quad A \\
8 : 6 :: 12 : \quad 4 \\
4 : 8 :: 6 : \quad 12 \\
4 . 12 = 48 . \text{Καὶ } 6 . 8 = 48 \\
\hline
A = \frac{B . \Gamma}{\Delta :}
\end{array}
$$

Ὑπόδειγμα Β'.

Εἷς ἄνθρωπος ἠγόρασεν ἀπὸ ἓν ῥοῦχον, (τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος ἦτον εἷς πῆχυς) ἐννέα πήχεις· ἠγόρασε δὲ καὶ ἀπὸ ἄλλο εἶδος πήχεις 6. καὶ ἔκαμεν ἀπὸ αὐτὰ δύω φορέματα ἴσια τὸ ἓν μὲ τὸ ἄλλο, καὶ κατὰ τὸ μάκρος, καὶ κατὰ τὸ πλάτος· ζητῶ νὰ μάθω πόσον ἄραγε ἦτον τὸ πλάτος τοῦ β'. ῥούχου;

Λύσις.

Εἰς λύσιν τούτου, τὴν πρώτην χώραν τῶν ὅρων θέλει τὴν ἔχῃ τὸ πλάτος τοῦ α'. ῥούχου δηλ. ἡ μία πῆχη· τὴν δὲ β'. ὁ Ἀριθμὸς τῶν πηχέων, δηλ. ὁ 9, καὶ τὴν γ'. ὁ Ἀριθμὸς τῶν πηχέων τοῦ β'. ῥούχου δηλ. ὁ 6· οἷον. 1 : 9 :: 6 : X Καὶ ἐπειδὴ ὁ πῆχυς διαιρεῖται εἰς μέρη ὀκτὼ, ῥούπια καλούμενα, ἂς βάλωμεν τὸν 8 Ἀριθμὸν, ἀντὶ τῆς μονάδος ὁποῦ εἶναι εἰς τὸν α'. ὅρον Β· καὶ ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ α'. ὅρος Β, ἐπὶ τὸν β'. ὅρον Γ· τὸ δὲ γενόμενον, ἂς διαιρεθῇ ἐπὶ τὸν γ'. ὅρον Δ· καθὼς σὲ διδάσκει ὁ Τύπος·

$$
\begin{array}{l}
8 : 9 :: 6 : X = A \\
1 = : B : \Gamma :: \Delta : = A \\
8 . 9 = \frac{72}{6} = \quad 12 \\
\hline
B = \frac{A . \Delta}{\Gamma :}
\end{array}
$$

καὶ

καὶ τὸ Πηλίκον = 12 ἔσται ὁ ζητούμενος αʹ. ὅρος Α· ὥστε τὸ πλάτος τοῦ βʹ. ῥέχου ἦτον ῥούπια = 12· ἴσον μὲ ἕνα πῆχυν καὶ ἥμισυν· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Δεῖξις.

Ὅτι δὲ αὐτὸς ὁ τρόπος γίνεται μὲ ὀρθὸν στοχασμὸν, δείκνυται· ἂς βαλθῇ ὁ εὑρεθεὶς δʹ. ὅρος = 12, εἰς τὸν αʹ. τόπον· καὶ τότε θέλει ἔχει σχέσιν καὶ ἀναλογίαν, πρὸς τὸν βʹ. ὅρον = 8, ὡς ὁ γʹ. 9, πρὸς τὸν δʹ. ὅρον = 6.

$$12 : 8 :: 9 : 6$$
$$8 . 9 = 72 . \text{ καὶ } 12 . 6 = 72.$$

ἐπειδὴ ἐκεῖνος ὁ Ἀριθμὸς ὅς τις γίνεται ἀπὸ τοὺς δύω ἄκρους ὅρους, εἶναι ἴσος μὲ ἐκεῖνον ὁποῦ γίνεται ἀπὸ τοὺς δύω μέσους· ἄρα ὁ 12 ἐστὶν ὁ ζητούμενος αʹ. ὅρος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὑπόδειγμα Γʹ.

Ἄνθρωποι τέσσαρες, ἐδούλευσαν εἰς μίαν ἐργασίαν ἡμέρας τριάκοντα· λοιπὸν ζητῶ νὰ μάθω, εἰς πόσας ἡμέρας ἤθελαν κάμῃ τὴν ἰδίαν ἐργασίαν δέκα ἄνθρωποι.

Λύσις.

Ἀνίσως ἤθελαν γραφῶσιν οἱ δοθέντες τρεῖς ὅροι κατὰ σειράν· οἷον 4 ἄνθρωποι, 30 ἡμέραι, 10 ἄνθρωποι κατὰ τὸν Βʹ. τρόπον τῆς Πλαγίας Μεθόδου, τῆς καὶ κυρίως τεταραγμένης ὀνομασθείσης, πολλαπλασιασθήτω ὁ αʹ. ὅρος, ἐπὶ τὸν βʹ. τὸ δὲ γενόμενον διαιρεθὲν διὰ τοῦ γʹ. ὅρου, θέλει σοι δώσῃ Πηλίκον τὸν ζητούμενον δʹ. ὅρον, ὡς φαίνεται εἰς τὸ Διάγραμμα, καὶ ὁ Συμβολικὸς κελεύει Τύπος.

Ἀνθρ.	Ἡμέρ.	Ἀνθρ.	Ἡμέρ.
4 :	30 :	10	

$$4 . 30 = \frac{120}{10:} = 12.$$
$$4 : 30 :: 10 : 12$$
$$\Delta = \frac{A . B}{\Gamma:}$$

Τοιαύτη μὲν εἶναι καὶ ἡ Πλαγία, ἢ Ἀντίστροφος αὕτη Μέθοδος τῶν Τριῶν, διὰ μέσου τῆς ὁποίας θέλομεν δυνηθῇ εὐκόλως νὰ διαλύωμεν καὶ ἄλλα τοιαῦτα Προβλήματα, ἀκολουθοῦντες τοὺς τρόπους, τοὺς ὁποίους ἑρμηνεύσαμεν, καὶ ἔχοντες πρὸ

πρὸ ὀφθαλμῶν πάντοτε τοὺς ἐκτεθέντας Συμβολικούς τε καὶ γενικοὺς Τύπους. Εἶναι ὅμως δυνατὸν νὰ ἀνορθωθῇ, καὶ νὰ μεταφερθῇ καὶ αὐτὴ ἡ Πλαγία Μέθοδος τῶν Τριῶν εἰς τὴν Ὀρθὴν, μὲ τὴν Ἀντιστροφὴν καὶ μετάθεσιν τῶν ὅρων· διὰ τὴν ὁποίαν ἀνόρθωσιν, ἂς εἴπωμεν ὀλίγα τινά.

Περὶ Ἀντιστροφῆς τῶν ὅρων.

§. 189. Διὰ νὰ μεταβληθῇ λοιπὸν ἡ Ἀντίστροφος αὕτη τοῦ βʹ. τρόπου Πλαγία Μέθοδος, ἐπὶ τὴν Ὀρθὴν Μέθοδον τῶν Τριῶν, ἂς μετατεθῇ ὁ αʹ. ὅρος, εἰς τὸν τόπον τοῦ βʹ. ὁ δὲ γʹ. ἂς μεταφερθῇ εἰς τὸν τόπον τοῦ αʹ. ὅρου· ἔπειτα, ἂς γίνεται ἡ πρᾶξις, καθὼς καὶ εἰς τὴν Ὀρθὴν Μέθοδον τῶν Τριῶν· οἷον ἐπὶ τοῦ ἐκτεθέντος ὑστερινοῦ Ὑποδείγματος· αὐτὶ νὰ βάλλωμεν, 4 ἄνθρωποι: 30 ἡμέραι :: 10 ἄνθρωποι· ἂς θέσωμεν ÷ 10 ἄνθρωποι: 30 ἡμέραι :: 4 ἄνθρωποι· ἀφ' οὗ λοιπὸν μετατεθῶσιν οἱ ὅροι τοιουτοτρόπως, ἂς γένῃ ἡ εὔτακτος Μέθοδος τῶν Τριῶν καὶ θέλει εὑρεθῇ ὁ δʹ. ὅρος ἴσον 12· οἷον ÷ 10 : 30 :: 4 : = 30 . 4 = $\frac{120}{10:}$ = 12.

Δεῖξις.

Ἐπὶ τὴν Ἀντίστροφον διάθεσιν τῆς Μεθόδου τῶν Τριῶν, 4 ἄνθρωποι : 30 ἡμέραι :: 10 ἄνθρωποι : 12 ἡμέραι· ὁ δʹ. ὅρος 12, περιέχει τοσάκις τὸν αʹ. ὅρον 4, ὁσάκις ὁ βʹ. ὅρος 30, περιέχει τὸν γʹ. ὅρον 10· ἀφ' οὗ λοιπὸν ἤθελαν τεθῶσιν, ὁ μὲν αʹ. Ἀριθμὸς 4, εἰς τὸν τόπον τοῦ γʹ. 10, καὶ τἀνάπαλιν, θέλει συστηθῇ μία νέα τοιαύτη διάθεσις· 10 ἄνθρωποι : 30 ἡμέραι :: 4 ἄνθρωποι : 12 ἡμέραι· εἰς τὴν ὁποίαν νέαν διάθεσιν, ὁ δʹ. ὅρος 12, τοσάκις περιέχει τὸν γʹ. ὅρον 4, ὁσάκις ὁ βʹ. ὅρος 30, περιέχει τὸν αʹ. ὅρον 10· εἶναι δὲ τοῦτο ἰδίωμα τῆς Ὀρθῆς τῶν Τριῶν Μεθόδου. Ἄρα οἱ τέσσαρες Ἀριθμοὶ εἰσὶν ἀνάλογον· ἔστι γὰρ, ὡς ὁ αʹ. ὅρος 10, πρὸς τὸν βʹ. 30, οὕτως ὁ γʹ. 4, πρὸς τὸν δʹ. 12· ἔστι γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν δύω ἄκρων γινόμενον, ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν δύω μέσων ὅρων γινομένῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

$$\div\ 4 : 30 :: 10 .$$
$$\div\ 10 : 30 : 4 = \times$$
$$4 . 30 = \tfrac{120}{10:} = 12.$$
$$4 : 30 :: 10 : 12 .$$

Ἀλ-

Ἀλλὰ διὰ νὰ τελειώνουσιν εὐκόλως οἱ πρωτόπειροι τὰς πράξεις τῶν Προβλημάτων ὅπου ἀνάγονται εἰς τὴν Ὀρθήν τε καὶ Πλαγίαν Μέθοδον τῶν Τριῶν, ἂς βαλθῶσι καὶ οἱ Τύποι αὐτῶν.

$\div\!\!\div\ 10 : 30 :: 4 : 12$

$10 \cdot 12 = 120$

$30 \cdot 4 = 120$

$A = \frac{B^2}{\Gamma:}$	$\Gamma = \frac{B^2}{A:}$	$B = \sqrt{A.\Gamma.}$	$\Delta = \frac{B.\Gamma}{A:}$	αὐτὸς ὁ Τύπος ἀνάγεται εἰς τὴν Ὀρθὴν Μέθοδον τῶν Τριῶν.
αὐτοὶ οἱ Τύποι εἶναι ἐπὶ τῆς συνεχοῦς Ἀναλογίας· ὅταν μας δίδωνται δύω ὅροι, καὶ ζητεῖται ὁ γ'.			ὅρα. §. 174.	

$\Gamma = \frac{A.\Delta}{B:}$	$B = \frac{A.\Delta}{\Gamma:}$	$A = \frac{B.\Gamma.}{\Delta:}$	$\Delta = \frac{A.B}{\Gamma:}$
αὐτοὶ οἱ τρεῖς Τύποι ἀνάγονται εἰς τὴν Πλαγίαν Μέθοδον τῶν Τριῶν· ὅρα §. 170. καὶ §. 188.			οὗτος δὲ ἀνάγεται εἰς τὴν Πλαγίαν καὶ τεταραγμένην καλουμένην.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

Περὶ τῆς Μεθόδου τῶν Πέντε· ἥτις καὶ Σύνθετος Μέθοδος τῶν Τριῶν ὀνομάζεται.

Ὁρισμός.

§. 190. Σύνθετος Μέθοδος τῶν Τριῶν ἐστίν, ἡ ἐκ περισσοτέρων, ἢ τεσσάρων ὅρων συγκροτουμένη.

Σχόλιον.

Ἡ Μέθοδος αὕτη, τῶν Πέντε παρονομάζεται, μὲ τὸ νὰ δίδωνται εἰς αὐτὴν πέντε ὅροι· καλεῖται δὲ Σύνθετος Ἀναλογία· ὅθεν καὶ εἰς τὴν τῶν Τριῶν Ὀρθὴν Μέθοδον ἀνάγεται, ὥσαν ὅπου εἶναι ἁπλῆ. Διαιρεῖται δὲ τὸ ἐπ' αὐτὴν ἀναγόμενον Πρόβλημα εἰς δύω μέρη. Καὶ εἰς μὲν τὸ πρῶτον μέρος, τρεῖς περιέχονται ὅροι. Εἰς δὲ τὸ δεύτερον, δύω. Ἀφ' οὗ λοιπὸν

τὸν γράψωμεν τοὺς δοθέντας πέντε ὅρους κατὰ σειράν, πρέπει νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὸν πρῶτον ὅρον ἐπὶ τὸν δεύτερον· ἐκεῖνον δὲ τὸν Ἀριθμὸν ὅπου ἤθελε γεννηθῇ, νὰ τὸν λαμβάνωμεν ἀντὶ τοῦ πρώτου ὅρου τῆς Μεθόδου τῶν Τριῶν· τὸν δὲ τρίτον ὅρον αὐτῆς, νὰ τὸν λαμβάνωμεν ἀντὶ τοῦ δευτέρου· ὁμοίως πολλαπλασιάζοντες καὶ τὸν τέταρτον αὐτῆς ὅρον ἐπὶ τὸν πέμπτον, ἐκεῖνον τὸν Ἀριθμὸν ὅπου ἤθελε γεννηθῇ, νὰ τὸν λαμβάνωμεν ἀντὶ τοῦ τρίτου ὅρου. Ἔπειτα ἀφ' οὗ ἤθελε διατεθῇ τοιαύτης λογῆς ἡ Ἀναλογία, νὰ γίνεται ἡ πρᾶξις, ὥσαν καὶ εἰς τὴν Ὀρθὴν Μέθοδον τῶν Τριῶν, καὶ τὸ Πηλίκον θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος ἕκτος ὅρος.

Πρόβλημα Α'.

§. 191. Πέντε ὅρων, ἢ Ἀριθμῶν δοθέντων, τὸν ἕκτον προσευρεῖν.

Λύσις. Τρόπος Α'.

$A : B : \Gamma : \Delta : E = ϛ.$

$\frac{20 \cdot 8}{160} \cdot \frac{6}{6} \quad \frac{30 \cdot 12}{360}$

$360 \cdot 6 = \frac{2160}{160:} = 13\frac{1}{2}$

Ἂς δοθῶσιν οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε Ἀριθμοί· οἵτινες σημειώνονται ἐν τῷ ἀντικρὺ Διαγράμματι· καὶ ἂς ζητηθῇ ὁ ϛ· ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ α'. ὅρος Α = 20, ἐπὶ τὸν β'. Β = 8, καὶ ἂς γεννηθῇ ὁ 160 Ἀριθμός, καὶ λάβετον ἀντὶ τοῦ α'. ὅρου. Ἂς προστεθῇ καὶ ὁ γ'. Γ = 6, εἰς τὴν δευτέραν χώραν τῶν ὅρων. Ἂς πολλαπλασιασθῇ καὶ ὁ δ'. ὅρος Δ = 30, ἐπὶ τὸν ε'. Ε = 12, καὶ ἂς γεννηθῇ ὁ 360· καὶ μὲ αὐτὸν τὸν τρόπον ἐφέραμεν τὴν Ὀρθὴν Μέθοδον τῶν Πέντε, εἰς τὴν Ὀρθὴν Μέθοδον τῶν Τριῶν. Ἂς πολλαπλασιασθῇ λοιπόν, ὁ γ'. ὅρος 360, ἐπὶ τὸν β'. 6, καὶ ἂς γεννηθῇ ὁ 2160 Ἀριθμός· ὅστις διαιρούμενος ἐπὶ τὸν α'. ὅρον 160, δίδει Πηλίκον τὸν $13\frac{8}{160} = \frac{1}{2}$· καὶ αὐτὸς εἶναι ὁ ζητούμενος ϛ'. ὅρος.

Δεῖξις.

Ὅτι δὲ ὁ $13\frac{1}{2}$ ἐστὶν ὁ ζητούμενος ϛ'. ὅρος, δείκνυται· ἂς βαλθῶσι κατὰ σειρὰν οἱ τέσσαρες Ἀριθμοί, ὡς φαίνεται εἰς

εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα· λέγω, ὅτι οἱ τέσαρες Ἀριθμοὶ εἶναι ἀνάλογον, δηλ. ὡς ὁ 160 : πρὸς τὸν 6 : : οὕτως ὁ 360 : πρὸς τὸν 13 καὶ $\frac{80}{160}$· ἂς πολλαπλασιασθῶσιν οἱ

$$\therefore 160 : 6 :: 360 : 13\tfrac{80}{160}.$$
$$360 \,.\, 6 = 2160$$
$$160 \,.\, 13 = 2080 + 80 =$$
$$= 2160.$$

δύω μέσοι ὅροι, δηλ. ὁ 360, ἐπὶ τὸν 6, καὶ ἂς γενῇ ὁ 2160· ἂς πολλαπλασιασθῇ καὶ ὁ 160 ἐπὶ τὸν δ'. 13, καὶ εἰς ἐκεῖνο ὁποῦ γενῇ, ἂς προστεθῇ καὶ τὸ λοίπανον 80, καὶ γίνεται ὁ αὐτὸς Ἀριθμός. Ἄρα ὀρθῶς ἡ πρᾶξις ἐγένετο· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Μὲ αὐτὸν τὸν τρόπον ἀνάγεται ἡ Ὀρθὴ αὕτη Μέθοδος τῶν Πέντε, ἐπὶ τὴν Ὀρθὴν Μέθοδον τῶν Τριῶν. Εἶναι δὲ δυνατὸν, νὰ εὑρεθῇ ὁ ζητούμενος ϛ'. ὅρος, καὶ κατ' ἄλλον τρόπον, τὸν ὁποῖον θέλομεν διδάξῃ ἐφεξῆς.

Τρόπος Β'.

§. 192. Ἂς τεθῶσι πάλιν κατὰ σειρὰν οἱ ἴδιοι Ἀριθμοὶ ὁποῦ ἐβάλθησαν εἰς τὸ Πρόβλημα τοῦ Α'. τρόπου, ὡς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα· ἂς πολλαπλασιασθῶσιν ἀναμεταξύ των, οἱ εἰς τὰ δεξιὰ τρεῖς ὅροι· δηλ. ὁ Γ, Δ, Ε· τὸ δὲ γενόμενον = 2160, ἂς βαλθῇ ὡς Διαιρετέος. (§. 51.) Ἂς πολλαπλασιασθῶσιν ὁμοίως, καὶ οἱ ἄλλοι δύω ὅροι, δηλ. ὁ Α, ἐπὶ τὸν Β, καὶ ἂς γενῇ ὁ 160, καὶ αὐτὸς, ἂς βαλθῇ ὑποκάτω τοῦ Ἀριθμοῦ ὁποῦ ἔγινεν ἀπὸ τοὺς τρεῖς, δηλ. τοῦ 2160, ὡς Διαιρέτης· ἂς διαιρέσῃ λοιπὸν τὸν ἐπάνωθεν αὐτοῦ Ἀριθμὸν 2160, καὶ τὸ Πηλίκον $13\frac{80}{160} = \frac{1}{2}$ εἶναι βέβαια ὁ ζητούμενος ϛ'. ὅρος. Ἰδοὺ λοιπὸν ὁποῦ μας ἔδωκεν εἰς Πηλίκον τὸν ἴδιον Ἀριθμὸν, τὸν ὁποῖον μας ἔδωκεν καὶ διὰ μέσου τοῦ Α'. τρόπου, χωρὶς νὰ τὴν μεταφέρωμεν εἰς τὴν Μέθοδον τῶν Τριῶν. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Β'. αὐτὸς τρόπος, εἶναι εὐκολώτερος ἀπὸ τὸν Α'. πρέπει νὰ προκρίνωμεν τοῦτον, ἐκείνου. Καὶ διὰ νὰ καταλάβωμεν καλήτερα τὸν Β'. τοῦτον τρόπον, ἐπρόσθεσα καὶ τὸν γενικὸν καὶ Συμβολικὸν τοῦ Τύπον· κατὰ τὸν ὁποῖον νὰ γίνεται ἡ πρᾶξις τῆς Ὀρθῆς Μεθόδου τῶν Πέντε· ἂς βαλθῶσι καὶ μερικὰ Ὑποδείγματα.

$$A : B : \Gamma : \Delta : E : X = ϛ.$$
$$\underline{20 : 8} : \underline{6 : 30 : 12} : =$$
$$160 \qquad \frac{2160}{160:} = 13\tfrac{1}{2}$$
$$ϛ = \frac{\Gamma \,.\, \Delta \,.\, E}{A \,.\, B:}$$

Ὑπό-

Ὑπόδειγμα Α'.

Ἄνδρες 4, κοπιάσαντες εἰς κάποιαν ὑπηρεσίαν ἡμέρας 12, ἔλαβον διὰ μισθὸν ἀργύρια 50. ὕστερα ἀπὸ αὐτοὺς ἄνδρες 6, εἰς τὸ ἴδιον ἔργον, καὶ μὲ τὴν ἰδίαν συμφωνίαν, κοπιάσαντες ἡμέρας 8, πόσα ἄρα ἀργύρια θέλουν λάβῃ καὶ αὐτοί!

Λύσις.

Ἂς γενῇ καὶ αὐτὴ ἡ πρᾶξις κατὰ τὸν Β'. τρόπον, διὰ τὸ εὐκολώτερον, καὶ θέλεις ἔχῃ τὸν ζητούμενον ϛ'. ὅρον, ἴσον 50 ἀργύρια. Θέλουν λάβῃ ἄρα καὶ αὐτοὶ ἀργύρια 50· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

$$A : B : \Gamma : \Delta : E = ϛ.$$
$$4 : 12 : 50 : 6 : 8 = 50$$
$$4 \,.\, 12 = 48 \,.\, 50 \,.\, 6 \,.\, 8 =$$
$$2400 = \frac{2400}{48:} = 50$$

Ὑπόδειγμα Β'.

Ἄνδρες 3, κοπιάσαντες ἡμέρας 10, ἔλαβον ἀργύρια 80. ἄνδρες δὲ 8, κοπιάσαντες ἡμέρας 16, μὲ τὴν αὐτὴν συμφωνίαν, πόσα ἄρα θέλουσι λάβῃ καὶ αὐτοί!

Λύσις.

Πολλαπλασίασον, ὡς ἄνωθεν τοὺς τρεῖς ὅρους, οἱ ὁποῖοι εἶναι εἰς τὰ δεξιὰ, καὶ γίνεται ὁ 10240 Ἀριθμὸς, καὶ αὐτὸς εἶναι ὁ Διαιρετέος. Πολλαπλασίασον καὶ τοὺς πρὸς ἀριστερὰν ἄλλους δύω, καὶ γίνεται ὁ 30· διαιρούμενος δὲ ὁ Διαιρετέος 10240, μὲ τὸν Διαιρέτην 30, δίδει Πηλίκον ἀργύρια $341\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$· ἄρα θέλουν λάβῃ καὶ αὐτοὶ ἀργύρια $341\frac{1}{3}$, καὶ οὕτω τρίτον.

$$A : B : \Gamma : \Delta : E : = ϛ.$$
$$3 : 10 : 80 : 8 : 16 =$$
$$80 \,.\, 8 \,.\, 16 = \frac{10240}{30:}$$
$$3 : 10 =$$
$$3 \,.\, 10 = 341\tfrac{1}{3}$$

Ὑπό-

Ὑπόδειγμα Γ'.

Ἕνας Τραπεζίτης, μὲ τὸ νὰ ἐδανείσεν ἄλλου τινὸς ἀνθρώπου, ἀργύρια 36, εἰς διορίαν ἡμερῶν 60, ἐσυμφώνησαν νὰ τοῦ δώσῃ εἰς τὴν διορίαν διάφορον, 4 ἀργύρια· ἔπειτα τοῦ ἐζήτησε καὶ εἷς ἄλλος ἀργύρια 8, εἰς διορίαν ἡμερῶν 144, μὲ τὴν ἰδίαν συμφωνίαν, τὴν ὁποίαν εἶχε μὲ τὸν α. ἄνθρωπον· λοιπὸν ζητεῖ νὰ μάθῃ ὁ Τραπεζίτης, πόσα θέλει λάβῃ καὶ ἀπὸ αὐτὸν διάφορον, τελειώνοντας ἡ ῥηθεῖσα διορία;

Λύσις.

A : B : Γ : Δ : E : = ϛ.
$2160 : 46080 = 21\frac{720}{2160}$
$= \frac{240}{720} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$

Α'. Ἂς βαλθῶσιν οἱ ὀνομασθέντες ὅροι ἐφεξῆς, ὡς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα. Β'. Ἂς πολλαπλασιαθῶσιν οἱ εἰς τὰ δεξιὰ τρεῖς ὅροι, καὶ ἂς γένῃ ὁ 46080 Ἀριθμός. Γ'. Ἂς πολλαπλασιασθῶσι καὶ οἱ λοιποὶ πρὸς τὰ ἀριστερὰ δύω, καὶ ἂς γένῃ ὁ 2160· αὐτὸς λοιπὸν, ἂς διαιρέσῃ τὸν Ἀριθμὸν, ὅστις ἔγινεν ἀπὸ τοὺς τρεῖς ὅρους, καὶ θέλει δώσῃ Πηλίκον $21 \frac{720}{2160} = \frac{1}{3}$· καὶ αὐτὸς εἶναι ὁ ζητούμενος ς'. ὅρος. Θέλει λάβῃ καὶ ἀπὸ αὐτὸν διάφορον, ἀργύρια 21 καὶ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἀργυρίου.

Ὑπόδειγμα Δ'.

Εἷς Πραγματευτὴς ἐδανείσθη ἀπὸ ἄλλον ἄνθρωπον, ἀργύρια 564, καὶ ἐσυμφώνησε μὲ αὐτὸν, ὅτι εἰς διορίαν δέκα μηνῶν, νὰ τοῦ δώσῃ διάφορον, κατ' ἀναλογίαν τῶν 15, πρὸς τὰ 100. Ἀφ' οὗ λοιπὸν ἐπλείωσεν ἡ διορία, καὶ δίδωντας τὰ 564, εἰς ἐκεῖνον ὁποῦ τοῦ τὰ ἐδάνεισεν, ζητεῖ νὰ μάθῃ πόσα ἄρα ἀργύρια χρεωστεῖ νὰ τοῦ δώσῃ, διὰ τὸ διάφορον ὁποῦ ἐσυμφώνησαν!

Λύσις.

Διὰ τῆς αὐτῆς Μεθόδου ἠμποροῦμεν νὰ λύσωμεν καὶ αὐτό· πρέπει ὅμως, εἰς τὸν α. τόπον τῶν ὅρων, νὰ βάλλωμεν τὸν 100 Ἀριθμόν· εἰς τὸν β'. νὰ θέσωμεν τὸν 12, ὅστις σημαίνει τοὺς μῆνας τοῦ χρόνου· εἰς δὲ τὸν γ'. τόπον, τὸν 15, ὁποῦ φανερώνει τὸ χρονικὸν διάφορον, τῶν 100 ἀργυρίων· εἰς τὸν δ'. τὸν Ἀριθμὸν τῶν ἀργυρίων, ὁποῦ ἐδανείσθη, δηλ. τὸν 564· καὶ εἰς τὸν ε'. τὸν 10, ὅστις εἶναι ἡ διορία τῶν δέκα μηνῶν. Ἀφ' οὗ λοιπὸν καταταχθῶσιν οἱ ὅροι, ὡς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα, λέγομεν· ἀνίσως τὰ 100 ἀργύρια, εἰς 12 μῆνας, μας δίδουσι διάφορον 15, τὰ 564 ἀργύρια, εἰς 10 μῆνας, πόσον διάφορον θέλουν μας δώσῃ; πράξεως δὲ γενομένης, μας δίδουσι ἀργύρια ἑβδομήκοντα καὶ ἥμισυ· καὶ τόσα ἔχει νὰ δώσῃ ὁ Πραγματευτὴς τοῦ δανειστοῦ του, διὰ διάφορον· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

ἀργύρ.	μῆν.	διάφ.	ἀργύρ.	μῆν.	διάφ.
A :	B :	Γ :	Δ :	E : =	ϛ.
100 :	12 :	15 :	564 :	10 =	
12.00 :			84600 =		$70\frac{1}{2}$ = ϛ

Ὑποσημείωσις.

Ἤθελεν ἀπορήσῃ τινὰς μὲ δίκαιον τρόπον, διὰ ποίαν αἰτίαν εἰς αὐτὴν τὴν Μέθοδον τῶν Πέντε, πρέπει ὁ α. ὅρος νὰ πολλαπλασιάζηται ἐπὶ τὸν β'. καὶ ὁ δ'. ἐπὶ τὸν Ε'. καὶ μὲ αὐτὸν τὸν τρόπον νὰ ἀνάγηται εἰς τὴν Μέθοδον τῶν Τριῶν; κατὰ τὸν Α'. τρόπον, ὄχι βέβαια δι' ἄλλην αἰτίαν, παρὰ μόνον διὰ νὰ γνωρισθῇ ἡ Ποσότης τῶν ἡμερῶν ὁποῦ ἐκοπίασαν, ἢ ἡ Ποσότης τῶν ἀργυρίων· διότι ἀνίσως ὑποθέσωμεν, ὅτι 12 ἄνδρες ἐκοπίασαν 6 ἡμέρας· πολλαπλασιάζοντες τὸν 6 ἐπὶ τὸν 12, γίνεται ὁ 72 Ἀριθμὸς, ὅστις παριστάνει τοὺς κόπους, οἱ ὁποῖοι ἔγιναν εἰς τὰς 6 ἡμέρας, δηλ. τὰ ἐργατικά. Ἐπειδὴ εἶναι τὸ ἴδιον νὰ εἰπῶμεν, ὅτι κοπιάζουσι 12 ἄνδρες εἰς 6, ἡμέρας, ἢ νὰ εἰπῶμεν, ὅτι ἕνας μόνος ἀνὴρ ἐκοπίασεν 72 ἡμέρας. Ὁμοίως ἂν ὑποθέσωμεν πάλιν, ὅτι ἐδανείσθη τινὰς ἀργύρια 10, εἰς ἡμέρας 60, πολλαπλασιάζομεν τὸν 10 ἐπὶ τὸν 60, καὶ γίνεται ὁ 600· διότι δὲν ἔχει καμμίαν Διαφορὰν νὰ εἰπῶμεν, ὅτι ἐδανείσθη τινὰς ἀργύρια

10, εἰς διορίαν 60 ἡμερῶν, ἢ νὰ εἰπῶμεν, ὅτι ἐδανείσθη ἓν ἀργύρειον, εἰς διορίαν 600 ἡμερῶν. Ὀρθῶς ἄρα πολλαπλασιάζεται ὁ α΄. ὅρος ἐπὶ τὸν δεύτερον, καὶ ὁ δ΄. ἐπὶ τὸν Ε΄. ἐλύθη ἄρα ἡ ἀπορία μας.

Καὶ περὶ μὲν τῆς Ὀρθῆς Μεθόδου τοῦ Πέντε, εἴπομεν ἱκανά· ἂς εἰπῶμεν δὲ καὶ περὶ τῆς Πλαγίας.

Περὶ τῆς Ἀντιστρόφου, ἢ Πλαγίας Μεθόδου τοῦ Πέντε.

Πρόβλημα Β΄.

§. 193. Πέντε πάλιν Ἀριθμῶν, ἢ ὅρων δοθέντων, καὶ εἰς τὴν Πλαγίαν ταύτην Μέθοδον τῶν Πέντε, ζητεῖται, ἢ ὁ Ε΄. ἢ γοῦν ὁ Δ΄. ὅρος, τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ εὕρωμεν.

Σχόλιον.

Ὅταν μὲν οἱ ὅροι, ὀρθῶς τε καὶ κατὰ τάξιν, πρὸς ἀλλήλους ἀναφερόμενοι, δὲν λαμβάνουσι κάμμίαν μετάθεσιν, Ὀρθὴ τότε καὶ ἡ Μέθοδος ὀνομάζεται. Ὅταν δὲ Πλαγίως, καὶ κατ' Εὐκλείδην εἰπεῖν, τεταραγμένως, τότε καὶ ἡ Μέθοδος Πλαγία λέγεται. Διὰ τοῦτο λοιπὸν τότε, πρέπει νὰ μεταβάλλεται καὶ ἡ τάξις τῶν ὅρων· τούτου ἕνεκα ἀναγκαῖόν μοι ἐφάνη, νὰ προτάξω καὶ αὐτῆς, τοὺς χρειώδεις Κανόνας.

Κανὼν Α΄.

§. 194. Καὶ πρῶτον λοιπὸν, ὅταν μας δοθῶσι πέντε ὅροι, δηλ. ὁ Α΄. Β΄. Γ΄. Δ΄. καὶ ϛ΄. καὶ μας ζητηθῇ ὁ Ε΄. ὅρος, ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ Α΄. ὅρος ἐπὶ τὸν Β΄. ἢ τοὐναντίον, καὶ ἐκεῖνος ὁ Ἀριθμὸς, ὁποῦ ἤθελε γένη ἀπὸ αὐτοὺς, ἂς βαλθῇ εἰς τὸν τόπον τοῦ Β΄. ὅρου· ὁ δὲ Γ΄. ὅρος τοῦ Προβλήματος, ἂς μετατεθῇ εἰς τὸν τόπον τοῦ Α΄. ὅρου· καὶ ὁ ϛ΄. ἂς μεταφερθῇ εἰς τὸν τόπον τοῦ Γ΄. ὅρου. Ἀφ' οὗ λοιπὸν οἱ ὅροι μετατεθῶσι τέτοιας λογῆς, ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ Β΄. ὅρος ἐπὶ τὸν Γ΄. ἐκεῖνος δὲ ὁ Ἀριθμὸς, ὁποῦ γένη ἀπὸ αὐτοὺς, ἂς διαιρεθῇ ἐπὶ τὸν α΄. ὅρον, τὸ δὲ Πηλίκον, ἂς ἐπιδιαιρεθῇ ἐπὶ τὸν Δ΄. ὅρον· καὶ τὸ Δεύτερον Πηλίκον, ἔσται ὁ ζητούμενος Ε΄. ὅρος.

Κα-

Κανὼν Β΄.

195. Δεύτερον· εἰ δὲ ἤθελε μας ζητηθῇ ὁ Δ΄. ὅρος, ἀφ' οὗ γένωσιν ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἐδιωρίσαμεν εἰς τὸν Α΄. Κανόνα, (§. 194.) τὸ πρῶτον Πηλίκον, ὁποῦ ἤθελεν εὑγῇ, ἂς ἐπιδιαιρεθῇ ἐπὶ τὸν Ε΄. ὅρον· καὶ τὸ δεύτερον Πηλίκον, ἔσται ὁ ζητούμενος Δ΄. ὅρος.

Πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν, ὅτι εἰς τὴν Πλαγίαν ταύτην Μέθοδον τοῦ Πέντε, ἀναγκαίως ἕπεται νὰ εἶναι γνωστὸς ὁ ϛ. ὅρος, καθὼς καὶ εἰς τὴν Ὀρθὴν, διότι ἀλλέως δὲν δύναται νὰ γένη.

Ὑπόδειγμα Α΄.

Εἰς τὴν Ὀρθὴν Μέθοδον τοῦ Πέντε, εἰς τὸ ὁποῖον ζητεῖται ὁ ϛ΄. ὅρος.

Ἄνδρες 4, ἀφ' οὗ ἐδούλευσαν εἰς τὸ ἀμπέλιον ἑνὸς πλουσίου ἡμέρας 12, ἔλαβον διὰ μισθόν τους ἀργύρεια 24· ὕστερον ἀπὸ αὐτοὺς, ἄνδρες ὀκτὼ δουλεύσαντες μὲ τὴν ἰδίαν συμφωνίαν εἰς τὸ ἴδιον ἀμπέλιον, ἡμέρας 80, πόσα ἄρα ἀργύρεια θέλουσι λάβῃ!

Λύσις.

ἄνδρ.	ἡμέρ.	ἀργ.	ἄνδρ.	ἡμέρ.	ἀργύρ.
4 :	12 :	24 :	8 :	80 :	= 320
48 :		24.	640		= 15360 / 48 :
= 320.					

Εἰς λύσιν τούτου, ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ α. ὅρος 4, ἐπὶ τὸν β΄. 12, καὶ ἂς γένῃ ὁ 48, καὶ αὐτὸς ἂς ληφθῇ ἀντὶ τοῦ α. ὅρου· ὁ δὲ γ΄. 24, ἀντὶ τοῦ β΄. ἂς πολλαπλασιασθῇ καὶ ὁ δ΄. 8, ἐπὶ τὸν ε. 80, καὶ ἂς γένῃ ὁ 640· καὶ αὐτὸς ἂς ληφθῇ ἀντὶ τοῦ γ΄. ὅρου. Λοιπὸν, ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ γ΄. ὅρος 640, ἐπὶ τὸν β΄. 24, καὶ ἂς γένῃ ὁ 15360· ὅστις διαιρεθεὶς ἐπὶ τὸν α. ὅρον 48, δίδει Πηλίκον 320· καὶ αὐτὸς εἶναι ὁ ζητούμενος ϛ΄. ὅρος. Ἄρα οἱ 8 ἄνδρες, οἱ ὁποῖοι ἐδούλευσαν 80 ἡμέρας, θέλουσι λάβῃ ἀργύρεια 320· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Τὸ

Τὸ αὐτὸ Ὑπόδειγμα εἰς τὴν Πλαγίαν Μέθοδον τῶν Πέντε, εἰς τὸ ὁποῖον ζητεῖται ὁ Ε'. ὅρος.

Ἐὰν ἄνδρες 4, κοπιάσαντες ἡμέρας 12, ἔλαβον ἀργύρια 24· ἐκεῖνοι οἱ 8 ἄνδρες, οἵτινες εἰργάσαντο ἔπειτα ἀπὸ αὐτούς, καὶ ἔλαβον τὰ 320· ἀργύρια, πόσας ἄρα ἡμέρας ἐκοπίασαν!

Λύσις.

Εἰς λύσιν τούτου, α. ἂς βαλθῶσιν οἱ δοθέντες ὅροι ἐφεξῆς, καθὼς ἄνωθεν, πλὴν τοῦ ε. ὅστις ζητεῖται· β'. ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ α. ὅρος 4, ἐπὶ τὸν β'. 12· τὸν δὲ γενόμενον 48, ἂς τὸν λάβωμεν ἀντὶ τοῦ β'. ὅρου· τὸν δὲ γ'. ὅρον τοῦ Ὑποδείγματος 24, ἂς τὸν λάβωμεν ἀντὶ τοῦ α. κ' τὸν πέμπτου ὅρου τάξιν ἔχοντα 320, ἀντὶ τοῦ γ'. ὅρου. γ'. Ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ γ'. ὅρος 320, ἐπὶ τὸν β'. 48, ὁ δὲ γενόμενος Ἀριθμὸς 15360, ἂς διαιρεθῇ ἐπὶ τὸν α. ὅρον 24, τὸ δὲ πρῶτον Πηλίκον 640, ἂς ἐπιδιαιρεθῇ, ἐπὶ τὸν δ'. ὅρον τοῦ Ὑποδείγματος 8, καὶ τὸ δεύτερον τοῦτο Πηλίκον $=$ 80, ἔσται ὁ ζητούμενος ε. ὅρος· καθὼς φαίνεται εἰς τὸ Διάγραμμα. Ἄρα οἱ 8 ὕστεροι ἄνδρες, οἱ ὁποῖοι ἔλαβον τὰ 320 ἀργύρια, ἐδούλευσαν ἡμέρας 80· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

ἄνδρ. ἡμέρ. ἀργ. ἄνδρ. ἀργ. ἡμέρ.

$$4 : 12 : 24 : 8 : 320 = 80$$

α. β'. γ'.

$$24 : 48 . 320 = \frac{15360}{24 :} = \frac{640}{8 :} = 80 .$$

Τὸ αὐτὸ Ὑπόδειγμα εἰς τὴν αὐτὴν Πλαγίαν Μέθοδον τῶν Πέντε, εἰς τὸ ὁποῖον ζητεῖται ὁ Δ'. ὅρος.

Ἐὰν ἄρα ἄνδρες 4, ἡμέρας 12 πονήσαντες, ἔλαβον εἰς μισθὸν ἀργύρια 24, οἱ 80 ἡμέρας πονήσαντες ἄνδρες, καὶ τὰ 320 ἀργύρια λαβόντες, πόσοι ἄρα ἦσαν!

Λύσις.

Ἂς τεθῶσι πάλιν κατὰ σειράν, οἱ δοθέντες πέντε Ἀριθμοί· καὶ ἂς πολλαπλασιασθῇ πάλιν ὁ α. ὅρος ἐπὶ τὸν β'. ὡς ἄνωθεν· ὁ δὲ ἐξ αὐτῶν γενόμενος 48, ἂς ληφθῇ ἀντὶ τοῦ β'. ὅρου· ὁ δὲ γ'. ἀντὶ τοῦ α. καὶ ὁ ε. ἀντὶ τοῦ γ'. ἀφ' οὗ λοιπὸν μεταβληθῶσι καὶ μετατεθῶσι τοιουτοτρόπως, ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ γ'. ὅρος ἐπὶ τὸν β'. ὡς ἄνωθεν· ὁ δὲ γενόμενος 15360, ἂς διαιρεθῇ, ἐπὶ τὸν α. 24, τὸ δὲ Πηλίκον 640, ἂς ἐπιδιαιρεθῇ ἐπὶ τὸν δ'. ὅρον τοῦ Προβλήματος 80, τὸ δὲ δεύτερον Πηλίκον $=$ 8, θέλει σοι δείξει τὸν ζητούμενον ς'. ὅρον, ἤγουν τὸν ζητούμενον δ'. ἐν τῷ Προβλήματι ὅρον. Ἄρα οἱ 80 ἡμέρας πονήσαντες, κ' 320 ἀργύρια λαβόντες δεύτεροι ἄνδρες, ἦσαν 8.

ἄνδρ. ἡμέρ. ἀργ. ἡμέρ. ἀργ. ἄνδρ.

$$4 : 12 : 24 . 80 : 320 = 8$$

α. β'. γ'.

$$24 : 48 . 320 = \frac{15360}{24 :} = \frac{640}{80 :} = 8 .$$

Αὐτὸς εἶναι ὁ συνειθισμένος καὶ καθολικὸς τρόπος, τῆς Ὀρθῆς τε κ' Πλαγίας Μεθόδου τῶν Πέντε, κατὰ τὸν Α'. τρόπον, ὃν εἴπομεν (§. 191.) εἶναι δὲ καὶ ἄλλος τρόπος εὐκολώτερος, τὸν ὁποῖον, ἂς τὸν προσθέσωμεν ἐφεξῆς.

Κανὼν Γ'.

§. 196. Α'. Ὅταν μας δοθῶσι πέντε ὅροι, καὶ ζητηθῇ ὁ ς'. ἂς γένωνται ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἐδιωρίσαμεν εἰς τὸν Β'. τρόπον (§. 192.) δηλ. ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ α. ὅρος ἐπὶ τὸν β'. καὶ ὁ γενόμενος Ἀριθμός, ἂς λαμβάνηται ἀντὶ Διαιρέτου· ὁμοίως ἂς πολλαπλασιασθῶσιν ἀναμεταξύ των, καὶ οἱ ἄλλοι τρεῖς ὅροι, δηλ. ὁ γ'. δ'. καὶ Ε'. κ' ὁ γενόμενος Ἀριθμὸς ἀπὸ αὐτούς, ἂς λαμβάνηται ὡς Διαιρετέος· καὶ τὸ Πηλίκον ἔσται ὁ ζητούμενος ς'. ὅρος· οἷον $4 . 12 = 48$. κ' $24 . 8 . 80 = \frac{15360}{48 :} = 320$. Ἰδοὺ λοιπὸν ὅπου εὑρέθη ὁ ς'. ὅρος, κ' μὲ τὸν β'. τοῦτον τρόπον, ἴσος μὲ τὸν α. τρόπον, κ' εὐκολώτερα.

ἄνδρ. ἡμέρ. ἀργ. ἄνδρ. ἡμέρ. ἀργ.

$$4 : 12 : 24 : 8 : 80 : 320$$

$$4 : 12 : = 48 : 24 . 8 . 80 = \frac{15360}{48 :} = 320 .$$

Λύσις.

Ἀφ' οὗ βαλθῶσιν ἐφεξῆς οἱ δοθέντες πέντε ὅροι, ἂς πολλαπλασιασθῶσι πάλιν ἀναμεταξύ των οἱ τρεῖς ὅροι· δηλ. ὁ Α'. Β'. καὶ Ϛ'. καθὼς προστάζει ὁ Συμβολικὸς Τύπος· τὸ δὲ γενόμενον, ἂς διαιρεθῇ ἐπὶ τὸν Γ'. ὅρον, τοῦ ὁποίου τὸ Πηλίκον ἐπιδιαιρεθὲν ἐπὶ τὸν Ε'. ὅρον, τὸ Πηλίκον ὁποῦ εὕγει, ἔσται ὁ ζητούμενος Δ'. ὅρος, ὡς φαίνεται εἰς τὸ Διάγραμμα· ἦσαν ἄρα τὰ ἀργύρια 380· διὰ τὰ ὁποῖα ἔδωκεν εἰς τὸν δανειστήν του 76 ἀργύρια τόκον, κατ' ἀναλογίαν, ὁποῦ ἔχουσι τὰ 15 πρὸς τὰ 100· ἀφ' οὗ τὰ ἐμεταχειρίσθη μῆνας 16· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

ἀργ. μῆν. ἀργ. Χ : μῆν. ἀργ.
100 : 12 : 15 : 16 : 76

$$100 . 12 . 76 = \frac{91200}{15 :} = \frac{6080}{16 :} = 380 = \text{Χ} .$$

$$\Delta = \frac{\text{Α} . \text{Β} . \text{Ϛ} .}{\Gamma :} = \frac{\text{Ε}}{\Phi :}$$

Καὶ περὶ μὲν τῆς Μεθόδου τῶν Πέντε Ὀρθῆς τε καὶ Πλαγίας εἶναι ἀρκετὰ τὰ ὅσα εἴπομεν· τώρα δὲ τοὺς Συμβολικοὺς αὐτῆς προσθέντες Τύπους, καὶ περὶ τῆς Μεθόδου τῶν Ἑπτὰ, εἴπωμεν.

Τύπος ἐπὶ τῆς Ὀρθῆς Μεθόδου τῶν Πέντε· εἰς ὃν ζητεῖται ὁ Ϛ'. ὅρος.	$\text{Ϛ} = \frac{\Gamma . \Delta . \text{Ε} .}{\text{Α} . \text{Β} :}$
Τύπος ἐπὶ τῆς Πλαγίας ἐν ᾧ ζητεῖται ὁ Ε'.	$\text{Ε} = \frac{\text{Α} . \text{Β} . \text{Ϛ} .}{\Gamma :} = \frac{\Phi}{\Delta :}$
Τύπος ἐπὶ τῆς αὐτῆς Πλαγίας ἐν ᾧ ζητεῖται ὁ Δ'. ὅρος.	$\Delta = \frac{\text{Α} . \text{Β} . \text{Ϛ} .}{\Gamma :} = \frac{\text{Χ}}{\text{Ε} :}$

ΚΕ-

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

Περὶ τῆς Ὀρθῆς Μεθόδου τῶν Ἑπτά.

Ὁρισμός.

§. 199. Μέθοδος τῶν Ἑπτὰ ὀρθή ἐστιν, ἐν ᾗ ἑπτὰ ὅρων, ἢ Ἀριθμῶν δοθέντων, ζητεῖται ὁ ὄγδοος.

Σχόλιον.

Συνειθίζεται κοινότερον ἀπὸ τοὺς Ἀριθμητικοὺς, ὕστερον ἀπὸ τὴν Μέθοδον τῶν Πέντε, νὰ κάμνωσι καὶ τὴν Μέθοδον τῶν Ἑπτὰ ὀνομαζομένην· ὡσὰν ὁποῦ συντίθεται ἀπὸ ἑπτὰ ὅρους. Εἶναι δὲ καὶ αὐτὴ Σύνθετος Ἀναλογία. Ἀνάγεται δὲ καὶ εἰς τὴν Ὀρθὴν Μέθοδον τῶν Τριῶν.

Διαιρεῖται δὲ καὶ ἐπ' αὐτῆς τὸ Πρόβλημα εἰς δύω μέρη. Καὶ εἰς μὲν τὸ πρῶτον μέρος, τέσσαρες περιέχονται ὅροι. Εἰς δὲ τὸ δεύτερον τρεῖς· ἀλλ' ἂς προτεθῇ καὶ ταύτης τῆς πράξεως ὁ ἐφεξῆς Κανών.

Κανὼν Α'. Τρόπος Α'.

§. 200. Ἀφ' οὗ βαλθῶσιν ἐφεξῆς οἱ δοθέντες ἑπτὰ ὅροι, ἢ Ἀριθμοὶ, ἂς Πολλαπλασιασθῶσιν ἀναμεταξύ των οἱ τρεῖς τοῦ ἐν ἀριστερᾷ πρώτου μέρους· δηλ. ὁ Α'. Β'. καὶ Γ'. ἐκεῖνος δὲ ὁ Ἀριθμὸς ὁποῦ ἤθελε γένῃ ἀπὸ αὐτοὺς, ἂς βαλθῇ εἰς τὴν α. χώραν τῶν ὅρων τῆς Ὀρθῆς Μεθόδου τῶν Τριῶν· ὁ δὲ μέσος αὐτῶν, δηλ. ὁ ἐν τῷ Προβλήματι Δ'. ἂς τεθῇ εἰς τὴν β'. χώραν· ὁμοίως ἂς πολλαπλασιασθῶσι καὶ οἱ ἄλλοι τρεῖς, οἵτινες εἰσὶ πρὸς τὸ δεξιὸν μέρος, δηλ. ὁ Ε'. Ϛ'. καὶ Ζ'. καὶ ὁ γενόμενος ἀπὸ αὐτοὺς Ἀριθμὸς, ἂς βαλθῇ εἰς τὸν τρίτον τόπον τῶν ὅρων· ἀφ' οὗ λοιπὸν μεταφερθῶσι καὶ ταχθῶσι τέτοιας λογῆς οἱ ὅροι, ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ γ'. ὅρος ἐπὶ τὸν β'. καὶ ὁ γενόμενος Ἀριθμὸς, ἂς διαιρεθῇ ἐπὶ τὸν α. κατὰ τὴν τάξιν τῆς Μεθόδου· τὸ δὲ Πηλίκον ἔσται ὁ ζητούμενος ὄγδοος ὅρος.

Πρό-

Πρόβλημα Α'.

§. 201. Ὅταν μας δοθῶσιν ἑπτὰ Ἀριθμητικοὶ ὅροι, οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ϛ, Ζ, νὰ εὕρωμεν τὸν Η'.

Λύσις.

Ἂς δοθῶσι λοιπὸν οἱ ἀντικρὺ ἑπτὰ Ἀριθμοὶ, ἢ ὅροι· ἂς πολλαπλασιασθῶσιν ἀναμεταξύ των οἱ τρεῖς ὅροι τοῦ α. μέρους, κατὰ τὴν ἑρμηνείαν τοῦ προειπεθέντος Κανόνος, καὶ ἂς γένῃ ὁ 240 Ἀριθμὸς, καὶ ἂς βαλθῇ ἀντὶ τοῦ α. ὅρου· ἂς βαλθῇ καὶ ὁ δ'. ὅρος τοῦ Προβλήματος εἰς τὸν β'. τόπον τῶν ὅρων· ἂς πολλαπλασιασθῶσιν ὁμοίως καὶ οἱ εἰς τὰ δεξιὰ ἄλλοι τρεῖς ὅροι, καὶ ἂς γένῃ ὁ 9000 Ἀριθμὸς, καὶ ἂς βαλθῇ εἰς τὸν τρίτον τόπον τῶν ὅρων· εἶτα ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ γ'. ὅρος ἐπὶ τὸν β'. τὸ δὲ γενόμενον 72000, διαιρεθὲν ἐπὶ τὸν α. ὅρον 240, δίδει Πηλίκον τὸν 300· καὶ αὐτὸς εἶναι ὁ ζητούμενος ὄγδοος ὅρος = Η.

Α : Β : Γ : Δ : Ε : Ϛ : Ζ : = Η
4 : 6 : 10 : 8 : 25 : 30 : 12 =
α. β'. γ'.
4 . 6 . 10 = 240 . 8 . 9000
$= \frac{72000}{240:} = 300 =$ Η.

Δεῖξις.

Ὅτι δὲ ὀρθῶς ἡ πρᾶξις ἐγένετο, δείκνυται· ἂς βαλθῶσιν οἱ ὅροι κατὰ σειράν· λέγω ὅτι ἐστιν· ὡς 240 : 8· οὕτω : 9000 : 300· τὸ γὰρ ὑπὸ τῶν δύω ἄκρων γενόμενον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῶν δύω μέσων γινομένῳ· ὁ 300 ἄρα ἐστὶν ὁ ζητούμενος ὄγδοος ὅρος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

240 : 8 : : 9000 : X = 300
9000 . 8 = 72000.
240 . 300 = 72000.

Ὑπόδειγμα Α'.

Ἄνδρες 4, μὲ 1800 ἀργύρια, εἰς μῆνας 6 πραγματευσάμενοι, ἐκέρδησαν ἀργύρια 360· ἐὰν ἄνδρες 8, μὲ ἀργύ-

ρια 850, εἰς μῆνας 12, τὴν ἰδίαν ποιούμενοι πραγματείαν, καὶ ἐπὶ τὴν ἰδίαν τιμὴν αὐτὴν πωλοῦντες, πόσα ἄρα θέλουσι κερδήσῃ!

Λύσις.

Ἀφ' οὗ βαλθῶσιν οἱ δοθέντες ἑπτὰ ὅροι ἐφεξῆς, ἂς γένῃ ὡς ἄνωθεν, καὶ τὸ Πηλίκον ἔσται ὁ ζητούμενος. ἡ. ὅρος· ἄρα οἱ 8 ὕστεροι ἄνδρες, μὲ ἀργύρια 850, εἰς 12 μῆνας, ἐκέρδησαν ἀργύρια 680· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον. Ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ α. ὅρος 43200, πρὸς τὸν β'. 360, οὕτως ὁ γ'. ὅρος 81600, πρὸς τὸν εὑρεθέντα δ'. 680· τὸ γὰρ ὑπὸ τῶν δύω ἄκρων ὅρων γενόμενον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν δύω μέσων γινομένῳ· ὡς εἰς τὸ Διάγραμμα φαίνεται· ἄρα. κτλ.

ἄνδ. ἀργ. μῆν. ἀργ. ἄνδ. ἀργ. μῆν.
4 : 1800 : 6 : 360 : 8 : 850 : 12 X
4 . 1800 : 6 = ...
$43200 : 360 . 81600 = \frac{29376000}{43200:}$
= 680 . X = Η.
81600 . 360 = 29376000.
43200 . 680 = 29376000.

Ὑπόδειγμα Β'.

Ἑκατόνταρχοι 3, μὲ στρατιώτας 360, εἰς ἡμέρας 45, ἐξόδευσαν εἰς τροφὴν των, ἀργύρια 5400. Ἑκατόνταρχοι δὲ πέντε, μὲ στρατιώτας 600, εἰς ἡμέρας 80, τὴν ἰδίαν τροφὴν μὲ τοὺς προτέρους μεταχειριζόμενοι, πόσα ἄρα ἐξοδιάσουσι!

Λύσις.

Εἰς λύσιν καὶ τούτου, ἀφ' οὗ βαλθῶσιν οἱ δοθέντες ἑπτὰ ὅροι ἐφεξῆς, ἂς γένῃ καὶ αὐτὴ ἡ πρᾶξις ὡς ἄνωθεν· ὅθεν ὁ ζητούμενος ἡ. ὅρος εἶ-

3 : 360 : 45 : 5400 : 5 : 600 : 80 = X.
3 . 360 . 45 =
α. β'. γ'.
$48600 . 5400 . 240000 = \frac{1296000000}{48600:}$
$= 26666\frac{32400}{48600} = \frac{2}{3} =$ Η.
48600 . 26666 = 1295967600 + 32400
= 1296000000.
240000 . 5400 = 1296000000.

ναι

ναι $= 26666 \frac{32400}{48600} = \frac{2}{3}$· ὡς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα· καὶ ἔστιν ὡς $48600 : 5400 :: 240000 : 26666 + \frac{32400}{48600} = \frac{324}{486} = \frac{2}{3}$· ἄρα ὀρθῶς ἡ πρᾶξις ἐγένετο.

Σχόλιον.

Καὶ αὐτὸς μὲν εἶναι ὁ τρόπος ὁ καθολικὸς εἰς τὸ νὰ μεταφέρωμεν τὴν Ὀρθὴν ταύτην Μέθοδον τοῦ Ἑπτὰ, ἐπὶ τὴν Ὀρθὴν Μέθοδον τοῦ Τριῶν· εἶναι ὅμως καὶ ἄλλος τρόπος πλέον εὐκολώτερος· γίνεται δὲ κατὰ τὸν ἐφεξῆς δεύτερον Κανόνα.

Κανὼν Β'.

§. 202. Ὅταν ἐπὶ τῆς Ὀρθῆς Μεθόδου τοῦ Ἑπτὰ, μας δοθῶσιν οἱ ἑπτὰ ὅροι, ἀφ᾽ οὗ τοὺς θέσωμεν ἐφεξῆς, ὡς ἄνωθεν· Α'. ἂς πολλαπλασιασθῶσιν ἀναμεταξύ των οἱ τρεῖς ὅροι τοῦ πρώτου μέρους τοῦ Προβλήματος. (ὅρα τὸ σχόλιον §. 199.) Δηλ. ὁ α'. β'. καὶ γ'. ἐκεῖνον δὲ τὸν Ἀριθμὸν, ὁποῦ γένῃ ἀπὸ αὐτοὺς, ἂς τὸν λάβωμεν ἀντὶ Διαιρέτου· Β'. ἂς πολλαπλασιασθῶσι καὶ οἱ λοιποὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τέσσαρες ὅροι ὁμοίως· τὸν δὲ γενόμενον Ἀριθμὸν ἀπὸ αὐτοὺς, ἂς τὸν λάβωμεν ἀντὶ Διαιρετέου· ὅς τις διαιρούμενος ἐπὶ τὸν, ὡς Διαιρέτην, τὸ Πηλίκον ἔσται ὁ ζητούμενος Η'. ὅρος· διὰ δὲ σαφήνειαν τοῦ λεγομένου, ἂς προσθέσωμεν τὸ ἐφεξῆς Ὑπόδειγμα.

Ὑπόδειγμα Γ'.

Ἄνδρες τέσσαρες, μὲ ἀργύρια 2500, εἰς 6 μῆνας πραγματευσάμενοι, ἐκέρδησαν ἀργύρια 500· ἄνδρες δὲ 6, μὲ ἀργύρια 6000, εἰς διάστημα μηνῶν δέκα, τὴν ἰδίαν πραγματείαν ποιοῦντες μὲ τοὺς προτέρους ἄνδρας, πόσα ἄρα θέλουσι κερδήσῃ!

Λύσις.

Εἰς λύσιν τούτου Α'. ἂς βαλθῶσιν ἐφεξῆς οἱ δοθέντες ἑπτὰ ὅροι, ὡς ἄνωθεν· Β'. ἂς πολλα-

$$\frac{4 : 2500 : 6}{60000} : \frac{500 : 6 : 6000 : 10}{180000000} : X = 3000.$$

πλα-

πλασιασθῶσιν ἀναμεταξύ των οἱ τρεῖς πρὸς ἀριστερὰν ὅροι, καὶ ἂς γένῃ ὁ 60,000, καὶ αὐτὸς ἂς εἶναι ὁ Διαιρέτης· Γ'. πολλαπλασιασθέντες δὲ καὶ οἱ ἄλλοι τέσσαρες ὅροι ὁμοίως, ἂς γένῃ ὁ 180,000,000, καὶ αὐτὸς ἂς εἶναι ὁ Διαιρετέος· λοιπὸν ἂς διαιρεθῇ ἐπὶ τὸν Διαιρέτην, καὶ τὸ Πηλίκον θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος ὄγδοος ὅρος = Η· ὡς φαίνεται εἰς τὸ Διάγραμμα, καὶ ὁ Συμβολικός σε διδάσκει Τύπος· οἱ 6 ἄρα δεύτεροι ἄνδρες, μὲ ἀργύρια 6000, εἰς μῆνας 10, ἐκέρδησαν ἀργύρια 3000· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Καὶ περὶ μὲν τῆς Ὀρθῆς Μεθόδου τοῦ Ἑπτὰ, εἶναι ἱκανὰ τὰ ῥηθέντα. Τώρα δὲ ἂς εἴπωμεν καὶ περὶ τῆς Ἀντιστρόφου, ἢ Πλαγίας Μεθόδου τοῦ Ἑπτά.

Περὶ τῆς Ἀντιστρόφου, ἢ Πλαγίας Μεθόδου τοῦ Ἑπτά.

Ὁρισμός.

§. 203. Ἀντίστροφος, ἢ Πλαγία Μέθοδος τοῦ Ἑπτὰ ἐστὶν, ὅταν ἤθελαν μας δοθῶσιν ἑπτὰ ὅροι, καθὼς καὶ εἰς τὴν Ὀρθὴν, καὶ ζητεῖται, ὄχι ὁ ὄγδοος, καθὼς εἰς ἐκείνην, ἀλλὰ, ἢ ὁ ἕβδομος, ἢ ὁ ἕκτος, ἢ γοῦν ὁ πέμπτος ὅρος· πρέπει ὅμως νὰ εἶναι γνωστὸς ὁ ὄγδοος ὅρος· διότι κατ᾽ ἄλλον τρόπον, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ γένῃ ἡ Πλαγία αὕτη μέθοδος. Διὰ δὲ τὸ εὐκολώτερον τῆς πράξεως, ἂς βαλθῶσι καὶ εἰς αὐτὴν οἱ ἐφεξῆς Κανόνες.

Κανὼν Α'.

§. 204. Α'. Εἰ μὲν δεδομένων ἑπτὰ ὅρων δηλ. Α'. Β'. Γ'. Δ'. Ε'. Ϛ'. καὶ Η'. ἤθελε ζητηθῇ ὁ Ζ'. ὅρος, τότε ἂς πολλαπλασιασθῶσιν ἀναμεταξύ των οἱ τρεῖς ὅροι τοῦ πρώτου μέρους τοῦ Προβλήματος, δηλ. ὁ α'. β'. καὶ γ'. ἐκεῖνος δὲ ὁ Ἀριθμὸς, ὁποῦ ἤθελε γένῃ ἀπὸ αὐτοὺς, νὰ τὸν λάβωμεν, ἀντὶ τοῦ β'. ὅρου τῆς Μεθόδου τοῦ Τριῶν· τὸν δὲ δ'. ὅρον τοῦ Προβλήματος, νὰ τὸν λάβωμεν ἀντὶ τοῦ α'. ὅρου, καὶ τὸν η'. ἀντὶ τοῦ γ'. Ἔπειτα, πολλαπλασιασθεὶς ὁ β'. ὅρος ἐπὶ τὸν γ'. ἢ τἀνάπαλιν, κατὰ τὴν συνήθειαν τῆς Μεθόδου τοῦ Τριῶν, ὁ γενόμενος Ἀριθμὸς ἀπὸ αὐτοὺς, ἂς διαιρεθῇ ἐπὶ τὸν α'. ὅρον, (ὅς τις ἦτον εἰς τὸ Πρόβλημα Δ'.) καὶ τὸ πρῶτον Πηλίκον, ὁποῦ ἤθεθελεν εὕγῃ, ἂς ἐπιδιαιρεθῇ ἐπὶ τὸν ϛ′. ὅρον τοῦ Προβλήματος· καὶ πάλιν τὸ Πηλίκον ὁποῦ ἤθελε εὕγῃ, ἀφ᾽ οὗ ὑποδιαιρεθῇ ἐπὶ τὸν Ε′. ὅρον, τὸ τρίτον τοῦτο Πηλίκον θέλει σοὶ δώσῃ τὸν ζητούμενον Ζ′. ὅρον.

Κανὼν Β′.

§. 205. Β′. Εἰ δὲ ἤθελε ζητηθῇ ὁ ϛ′. ὅρος, ἀφ᾽ οὗ κάμῃς τὴν ἰδίαν πρᾶξιν, τὴν ὁποίαν εἴπομεν ἀνωτέρω, τὸ πρῶτον Πηλίκον ὁποῦ ἤθελεν εὕγῃ, ἂς ἐπιδιαιρεθῇ ἐπὶ τὸν Ζ′. ὅρον τοῦ Προβλήματος· ἀφ᾽ οὗ δὲ καὶ τὸ δεύτερον τοῦτο Πηλίκον ὑποδιαιρεθῇ ἐπὶ τὸν Ε′. ὅρον τοῦ Προβλήματος, θέλει σοὶ δώσῃ τὸν ζητούμενον ϛ′. ὅρον.

Κανὼν Γ′.

§. 206. Γ′. Εἰ δὲ τέλος πάντων, ἤθελε ζητηθῇ ὁ Ε′. ὅρος, ἀφ᾽ οὗ κάμῃς τὴν ἰδίαν πρᾶξιν, ὡς ἄνωθεν· τὸ πρῶτον Πηλίκον ὁποῦ εὕγῃ, ἂς ἐπιδιαιρεθῇ ἐπὶ τὸν ϛ′. ὅρον τοῦ Προβλήματος· καὶ πάλιν τὸ δεύτερον τοῦτο Πηλίκον ὑποδιαιρεθὲν ἐπὶ τὸν Ζ′. ὅρον τοῦ Προβλήματος, θέλει σοὶ δώσῃ τὸν ζητούμενον Ε′. ὅρον.

Ἂς μεταφέρωμεν λοιπὸν καὶ ἐδῶ εἰς τὴν Πλαγίαν, ἢ Ἀντίστροφον Μέθοδον τῶν Ἑπτὰ τὸ Α′. Ὑπόδειγμα τῆς Ὀρθῆς, καὶ ἂς ζητηθῇ ὁ Ζ′. ὅρος.

Ὑπόδειγμα Α′.

Εἰς τὸ ὁποῖον ζητεῖται ὁ Ζ′. ὅρος.

Ἄνδρες 4, μὲ ἀργύρια 1800, εἰς μῆνας 6 πραγματευσάμενοι, ἐκέρδησαν ἀργύρια 360· Ἀνίσως λοιπὸν, ἄνδρες 8, μὲ ἀργύρια 850 κάμνοντες τὴν αὐτὴν πραγματείαν, τὴν ὁποίαν ἔκαμαν οἱ πρῶτοι, καὶ πωλοῦντας αὐτὴν εἰς τὴν ἰδίαν τιμὴν, εἰς πόσους ἄρα μῆνας ἤθελαν κερδήσωσι τὰ 670 ἀργύρια;

Λύσις.

Ἀφ᾽ οὗ βάλῃς τοὺς δοθέντας ἑπτὰ ὅρους ἐφεξῆς, ἂς γένωσιν ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἐδιωρίσαμεν εἰς τὸν Α′. Κανόνα· (§. 204.) καὶ εὑρήσεις τὸν ζητούμενον Ζ′. ὅρον, ὡς φαίνεται ἐν τῷ ἀντικρὺ Διαγράμματι· οἱ ἄρα 8 δεύτεροι ἄνδρες, μὲ ἀργύρια 550, ἐκέρδησαν τὰ 680 ἀργύρια, εἰς μῆνας 12· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον. Διὰ δὲ τὸ εὐκολομνημόνευτον, ἂς προστεθῇ καὶ ὁ τῆς πράξεως τοῦ Προβλήματος τούτου Συμβολικός τε καὶ γενικὸς Τύπος· τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ ἐνθυμᾶσαι, ἢ νὰ ἔχῃς πρὸ ὀφθαλμῶν, ὅταν ἤθελέ σοι ζητηθῇ ὁ Ζ′. ὅρος, ὡς εἰς τὸ ἄνωθεν Πρόβλημα.

$$\mathrm{A} : \mathrm{B} : \Gamma : \Delta : \mathrm{E} : ϛ : \mathrm{X} : \mathrm{H} :$$
$$4 : 1800 : 6 : 360 : 8 : 850 : 680 :$$
$$360 : 43200 : 680 = \frac{29{,}376{,}000}{360 :}$$
$$= \frac{81600}{850 :} = \frac{96}{8} = 12 = \mathrm{Z}'.$$

$$\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{A}.\mathrm{B}.\Gamma.\mathrm{H}.}{\Delta :} = \frac{\Phi}{ϛ :} = \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{E} :}$$

Ὑπόδειγμα Β′.

Εἰς τὸ ὁποῖον ζητεῖται ὁ ϛ′. ὅρος.

Ἐὰν ἄνδρες 4, μὲ ἀργύρια 1800 πραγματευθέντες, ἐκέρδησαν ἀργύρια 360· οἱ ἄρα ὀκτὼ ἄνδρες εἰς διάστημα μηνῶν 12, μὲ πόσα ἀργύρια ἐκέρδησαν τὰ 680 ἀργύρια;

Λύσις.

Ἀφ᾽ οὗ βαλθῶσιν ἐφεξῆς οἱ ὀνομασθέντες Ἀριθμοὶ, ἢ ὅροι, καθὼς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα, ἂς γένωσιν ἐκεῖναι αἱ ἐργασίαι, τὰς ὁποίας μᾶς διδάσκει ὁ Β′. Κα-

$$\mathrm{A} : \mathrm{B} : \Gamma : \Delta : \mathrm{E} : \mathrm{X} : \mathrm{Z} : \mathrm{H}.$$
$$4 : 1800 : 6 : 360 : 8 : \quad 12 : 680.$$
$$4 : 1800 . 6 = 43200.$$
$$\overset{\alpha.}{360} : \overset{\beta.}{43200} : \overset{\gamma.}{680} = \frac{29{,}376{,}000}{360 :}$$
$$= \frac{81600}{12 :} = \frac{6800}{8 :} = 850 = ϛ'.$$

$$ϛ = \frac{\mathrm{A}.\mathrm{B}.\Gamma.\mathrm{H}.}{\Delta :} = \frac{\Phi}{\mathrm{Z}} = \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{E}}.$$

νῶν καὶ ὁ γενικὸς καὶ Συμβολικὸς οὗτος Τύπος, καὶ ἔσται ὁ ζητούμενος Ϛ΄. ὅρος = 850· οἱ 8 ἄρα δεύτεροι ἄνδρες, μὲ 850 ἀργύρια, εἰς διάστημα μηνῶν 12, ἐκέρδησαν τὰ 680 ἀργύρια· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Ὑπόδειγμα Γ΄.

Εἰς τὸ ὁποῖον ζητεῖται ὁ Ε΄. ὅρος.

Ἂς ζητηθῇ εἰς τὸ ἴδιον Ὑπόδειγμα ὁ Ε΄. ὅρος· οἷον ἄνδρες 4, μὲ ἀργύρια 1800, εἰς 6 μῆνας ἐμπορευσάμενοι, ἐκέρδησαν ἀργύρια 360· πόσοι ἄρα ἦσαν οἱ ἄνδρες, οἵτινες μετὰ ἀργυρίων 850, εἰς μῆνας 12 πραγματευόμενοι, ἐκέρδησαν τὰ 680 ἀργύρια;

Λύσις.

Ἂς βαλθῶσι πάλιν κατὰ σειρὰν οἱ δοθέντες ἑπτὰ Ἀριθμοί, ἢ ὅροι, καὶ ἂς γένωσιν ἐκεῖναι αἱ ἐργασίαι, τὰς ὁποίας μας διδάσκει ὁ Γ΄. Κανών· καὶ τὸ ὕστερον γ΄. Πηλίκον = 8, θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος Ε΄. ὅρος· ὡς ὁρᾶται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα, καὶ ὁ Συμβολικὸς αὐτῷ ἁρμόζει Τύπος. Οἱ ἄρα δεύτεροι ἄνδρες, οἵτινες μετὰ ἀργυρίων 850, εἰς διάστημα μηνῶν 12 πραγματευόμενοι, καὶ τὰ 680 ἀργύρια κερδήσαντες, ἦσαν 8.

Α : Β : Γ : Δ : Χ : Ϛ : Ζ : Η.

4 : 1800 : 6 : 360. 850 : 12 : 680.

4 . 1800 . 6 = 43200.

α΄.

$$360 : 43200 \,.\, 680 = \frac{29376000}{360:} = \frac{81600}{850:} = \frac{96}{12:} = 8 = \text{Ε}.$$

$$\text{Ε} = \frac{\text{Α.Β.Γ.Η.}}{\text{Δ:}} = \frac{\Phi}{\text{Ϛ:}} = \frac{\text{Χ}}{\text{Ζ:}}$$

Τοιαύτη μὲν εἶναι καὶ ἡ ἔφοδος καὶ ἐργασία τῆς Ὀρθῆς τε καὶ Πλαγίας Μεθόδου τῶν Ἑπτά· διὰ μέσου τῆς ὁποίας εἶναι δυνατόν, εἰς ἐκείνους ὅπου ἀναγινώσκουσι, καὶ γυμνάζονται μὲ ἐπιμέλειαν καὶ προσοχήν, εἰς τοὺς ἐπ᾽ αὐτὴν ἐκτεθέντας Κανόνας, νὰ διαλύωσιν εὔκολα, καὶ ἄλλα πολλώτατα Προβλήματα, τὰ ὁποῖα ἀνάγονται εἰς τὴν Μέθοδον ταύτην. Ἂς βαλθῶσι καὶ ἐδῶ οἱ Συμβολικοὶ καὶ γενικοὶ τύποι ταύτης τῆς Μεθόδου· μὲ τὴν ὁποίαν τὴν ὁδηγίαν, δυνάμεθα νὰ λύσωμεν κάθε Πρόβλημα, τὸ ὁποῖον εἰς αὐτὴν ἀνάγεται, καὶ χωρὶς τῆς βοηθείας τῶν ἐπ᾽ αὐτῆς Κανόνων.

Τύπος ἐφ᾽ ὃν ζητεῖται ὁ Η΄. ὅρος· οἷον	$\text{Η} = \frac{\text{Δ.Ε.Ϛ.Ζ}}{\text{Α.Β.Γ:}}$	Τύπος ἐφ᾽ ὃν ζητεῖται ὁ Ζ΄. ὅρος· οἷον	$\text{Ζ} = \frac{\text{Α.Β.Γ.Η}}{\text{Δ:}} = \frac{\Phi}{\text{Ϛ:}} = \frac{\text{Χ}}{\text{Ε:}}$
Τύπος ἐφ᾽ ὃν ζητεῖται ὁ Ϛ΄. ὅρος· οἷον	$\text{Ϛ} = \frac{\text{Α.Β.Γ.Η}}{\text{Δ:}} = \frac{\Phi}{\text{Ζ:}} = \frac{\text{Χ}}{\text{Ε:}}$	$\text{Ζ} = \frac{\text{Α.Β.Γ.Η}}{\text{Δ:}} = \frac{\Phi}{\text{Ϛ:}} = \frac{\text{Χ}}{\text{Ζ:}}$ Τύπος ἐφ᾽ ὃν ζητεῖται ὁ Ε΄. ὅρος.	

Καὶ περὶ μὲν Γεωμετρικῶν Ἀναλογιῶν τε καὶ Μεθόδων εἶναι ἱκανὰ ὅσα εἴπομεν εἰς τὰ τέσσαρα Κεφάλαια τοῦ Γ΄. τούτου Βιβλιαρίου.

Τώρα δὲ ἂς εἴπωμεν ὀλίγα τινὰ εἰς τὰ ἐφεξῆς δύω Κεφάλαια, καὶ περὶ Ἀριθμητικῆς Ἀναλογίας, καὶ τῶν ἐπ᾽ αὐτὴν ἀναγομένων μεθόδων, καὶ τέλος περὶ Ἀριθμητικῆς καὶ Γεωμετρικῆς Προόδου· ὄχι ὅτι εἶναι ἀναγκαῖα, ἀλλὰ χρήσιμα, καὶ ἡδονήν τινὰ ἀποστάζοντα εἰς τὰς ψυχὰς τῶν ἀναγινωσκόντων, ὡσὰν ὅπου εἶναι περίεργα τὰ ἐπ᾽ αὐτὴν ἀναφερόμενα Προβλήματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

Περὶ Ἀριθμητικῆς Ἀναλογίας.

Ὁρισμός.

§. 207. **Α**ριθμητικὴ Ἀναλογία ἐστίν, ἡ Ὑπεροχή, ἢ ἡ Διαφορά, καθ᾽ ἣν διαφέρει Ποσότης, πρὸς ἄλλην τινὰ παραβαλλομένην Ποσότητα· ὡς εἴρηται. (§. 159.)

Πόρισμα Α΄.

Εἰς κάθε Ἀριθμητικὴν ἄρα Ἀναλογίαν χρειάζονται δύω Ποσότητες, διὰ νὰ παραβληθῶσιν ἀναμεταξύ των· αἱ ὁποῖαι ἂς ἂς ὀνομάζωνται ὅροι τοῦ λόγου· καὶ ὁ μὲν α'. ἡγούμενος καλεῖται· ὁ δὲ β'. ἑπόμενος.

Ὑπόδειγμα Α'.

Α = 10 . Β = 2
10 — 2 = Γ = 8

Ἂς μας δοθῶσι, παραδείγματος χάριν, δύω Ποσότητες· ὡς ἡ Α, καὶ Β· καὶ ἂς παραβαλθῶσιν ἀναμεταξύ των ἐν Ἀριθμητικῷ λόγῳ, διὰ νὰ γνωρίσωμεν τὴν Διαφορὰν, κατὰ τὴν ὁποίαν διαφέρει ἡ μία Ποσότης, τῆς ἄλλης· ὁ τῆς Α λοιπὸν Ἀριθμητικὸς λόγος, ἢ Ἀναλογία, ὅς τις παραβάλλεται πρὸς τὸ Β, εἶναι ἡ Ὑπεροχὴ, ἢ Διαφορὰ = Γ, κατὰ τὴν ὁποίαν ὑπερέχει τὸ Α, τοῦ Β· ἐπειδὴ ÷ 10 πλὴν 2, ἴσον Γ = 8· ἄρα γνωρίζεται ἡ Διαφορὰ δύω δοθέντων Ποσοτήτων, ἢ Ἀριθμῶν, διὰ τῆς Ἀφαιρέσεως.

Ὑπόθεσις.

§. 208. Κάθε Ἀριθμητικὴ Ἀναλογία, οὕτω τίθεται. ÷ 10. 2 πρὸς Διαφορὰν τῆς Γεωμετρικῆς, οὕτως ἐκτιθεμένης. ∺ 10: 2. (§. 161.) ἀπαγγέλλεται δὲ καὶ εἰς τὰς δύω ἀναλογίας ὡς 10, πρὸς 2.

Ὅταν δὲ τέσσαρες Ποσότητες, τίθενται τοιουτοτρόπως, ὥστε ὁ λόγος, ἢ ἡ σχέσις τῆς πρώτης Ποσότητος, ὅπου θεωρεῖται πρὸς τὴν β'. Ποσότητα, νὰ εἶναι ὁ αὐτὸς λόγος τῆς γ'. πρὸς τὴν δ'. αὗται αἱ τέσσαρες Ποσότητες ἔχουσιν ἀναμεταξύ των Ἀριθμητικὴν Ἀναλογίαν.

Πόρισμα.

Ἀριθμητικὴ Ἀναλογία ἄρα ἐστὶν, ἡ τῶν λόγων ἰσότης.

Ὑπόδειγμα Β'.

Οἱ τέσσαρες λοιπὸν, οὗτοι Ἀριθμοὶ ÷ 2. 5: 4. 7. παριστῶσιν Ἀριθμητικὴν Ἀναλογίαν· ἐπειδὴ, ἥτις Διαφορὰ, ἤτοι λόγος Ἀριθμητικὸς εἶναι τῶν δύω προτέρων, ἡ ἰδία εἶναι καὶ τῶν δύω ὑστέρων· ἐπειδὴ, 5 — 2 = 3. καὶ 7 — 4 = 3.

Πό-

Πόρισμα.

Πᾶσα ἄρα Ἀναλογία, τέσσαρας Ποσότητας, εἴτε ὅρους περιέχει· καὶ ὁ μὲν α'. καὶ ἔσχατος, ὀνομάζονται ἄκροι· ὁ δὲ β'. καὶ γ'. μέσοι· οἷον ÷ 2. 5: 4. 7· ὁ μὲν 2 καὶ 7, καλοῦνται ἄκροι. ὁ δὲ 5 καὶ 4 μέσοι.

Θεώρημα Α'.

§. 209. Εἰς κάθε Διηρημένην Ἀριθμητικὴν Ἀναλογίαν, τὸ ἄθροισμα, ἢ Κεφάλαιον τῶν δύω ἄκρων ὅρων, ἐστὶν ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύω μέσων· οἷον 2 + 7 = 9. Καὶ 4 + 5 = 9.

Δεῖξις.

Α . Β . Γ . Δ
÷ 3 . 5 : 10 . 12
3 + 12 = 15
5 + 10 = 15

Δεικνύεται· ἂς βαλθῶσι κατὰ σειρὰν, οἱ Α . Β . Γ . Δ· Ἀριθμοὶ λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύω ἄκρων ὅρων, ἐστὶν ἴσον μὲ τὸ τῶν δύω μέσων· ἂς συναφθῶσιν οἱ δύω ἄκροι, δηλ. ὁ Α, καὶ Δ· καὶ ἂς γένῃ ὁ 15· οἷον 3 + 12 = 15· ἂς συναφθῶσι καὶ οἱ δύω μέσοι, δηλ. ὁ Β, καὶ Γ· καὶ πάλιν γίνεται ὁ αὐτὸς Ἀριθμὸς 15· οἷον 5 + 10 = 15· ἄρα εἰς κάθε Διηρημένην Ἀριθμητικὴν Ἀναλογίαν, τὸ ἄθροισμα τῶν δύω ἄκρων, ἐστὶν ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύω μέσων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Θεώρημα Β'.

§. 210. Εἰς κάθε συνεχῆ Ἀριθμητικὴν Ἀναλογίαν, τὸ ἄθροισμα τῶν δύω ἄκρων ὅρων, ἐστὶν ἴσον τῷ ἀθροίσματι τοῦ μέσου ὅρου δὶς λαμβανομένου. Ἐπειδὴ ὁ μέσος Ἀνάλογος ὅρος τὸν τόπον πληρῶν τῶν δύω μέσων, ἅπαξ γράφεται.

Δεῖ-

Δεῖξις.

Ἂς βαλθῇ ἡ ἀντικρὺ Ἀναλογία, πρὸς ἀπόδειξιν αὐτοῦ τοῦ Β'. Θεωρήματος· τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν δύω ἄκρων ὅρων, δηλ. τοῦ Α, καὶ Γ, ἐστὶ διπλάσιον τοῦ μέσου Ἀναλόγου ὅρου, δηλ. τοῦ Β· οἷον ÷ 5 + 15 = 20· τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν δύω ἄκρων ὅρων ἐπὶ τῆς συνεχοῦς Ἀριθμητικῆς Ἀναλογίας ἴσον ἐστὶ μὲ τὸ διπλοῦν τοῦ μέσου Ἀναλόγου ὅρου· ὃ ἔδει δεῖξαι.

Α	Β	Γ.
5	10	15
5 + 15 = 20		
10 + 10 = 20		

Περὶ τῆς Ἀριθμητικῆς τῶν Τριῶν Μεθόδου.

Ὁρισμός.

§. 211. Μέθοδος Ἀριθμητικὴ ἐστὶν ὁ τρόπος, κατὰ τὸν ὁποῖον ἀφ' οὗ μας δοθῶσι τρεῖς Ποσότητες, ἢ Ἀριθμοί, νὰ εὕρωμεν διὰ μέσου αὐτῶν, ἄλλην τετάρτην Ποσότητα, ἥτις νὰ διαφέρῃ τῆς τρίτης, τόσον, καθ' ὅσον διαφέρει ἡ δευτέρα τῆς πρώτης.

Πόρισμα.

Ἐκ τούτου ἄρα εἶναι φανερὸν, ὅτι καθὼς τὰ εἴδη τῶν Ἀναλογιῶν εἶναι δύω, τὸ μὲν Γεωμετρικὸν, τὸ δὲ ἄλλο Ἀριθμητικὸν, τοιαύτης λογῆς καὶ ἡ Μέθοδος τῶν Τριῶν εἶναι δύω λογιῶν· ἡ μὲν Γεωμετρικὴ καλουμένη, περὶ τῆς ὁποίας εἴπομεν ἀρκετά· ἡ δὲ ἄλλη Ἀριθμητικὴ, διὰ τὴν ὁποίαν ἐφεξῆς θέλομεν εἰπῆ.

Ὑπόθεσις.

§. 212. Διὰ τὴν Ἀριθμητικὴν ταύτην μέθοδον, ἂς εἶναι δεδομένον εἰς ἡμᾶς, Α'. νὰ φανερώνωμεν διὰ χ, τὸν δ'. ζητούμενον ὅρον, διατάττοντες αὐτὸν ὕστερον ἀπὸ τοὺς τρεῖς δεδομένους ὅρους, μὲ σχῆμα Ἀναλογίας· οἷον ÷ Α. Β: Γ. Χ. β'. Καὶ εἰ μὲν ζητεῖται τινὰς ἀπὸ τοὺς ἀκρινοὺς ὅρους, ἀφαιρέσας τὸν γνωστὸν μέσον ὅρον, τὸ ἐναπολειφθὲν ἔσται ὁ ζητούμενος ἄκρος ὅρος· οἷον εἰ μὲν ἤθελε ζητηθῇ ὁ Δ'. ὅρος, ἔσαι Β + Γ − Α = Δ. ὑποτιθεμένου γὰρ τοῦ μὲν Α = 3, τοῦ δὲ Β = 7, καὶ τοῦ Γ = 11· συναφθέντων τῶν Β, καὶ Γ, Ἀριθμῶν, ἐκ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν, ἀφαιρεθεὶς ὁ γνωστὸς ἄκρος Α, δίδει τὸν ζητούμενον Δ· οἷον 7 + 11 = 18 − 3 = 15 = Δ.

Α	Β	Γ	Χ = Δ.
3	7	11 =	
Β + Γ − Α = Δ.			
7 + 11 = 18 − 3 = 15.			

Γ'. Εἰ δὲ ἤθελε ζητηθῇ ὁ α. ὅρος Α, ἔσαι ὁ ἀντικρὺ Συμβολικός τε καὶ γενικὸς Τύπος· οἷον συναφθέντων τῶν Β, καὶ Γ Ἀριθμῶν, ἀπὸ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἀφαιρεθεὶς ὁ γνωστὸς ἄκρος Δ, τὸ ἐναπολειφθὲν ἔσαι ὁ ζητούμενος Α· οἷον 7 + 11 = 18 − 15 = 3.

÷ Χ.	Β.	Γ.	Δ.
	7	11	15.
Β + Γ − Δ = Α			
7 + 11 − 15 = 3.			

Δ'. Εἰ δὲ ἤθελε ζητηθῇ τινὰς ἀπὸ τοὺς μέσους, ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄκρων, ἀφαίρεσον τὸν γνωστὸν μέσον ὅρον, καὶ τὸ ἐναπολειφθὲν, ἔσαι ὁ ζητούμενος μέσος· οἷον, δοθέντος τοῦ α. γ'. καὶ δ'. ὅρου, ἂς συναφθῇ ὁ Α'. μὲ τὸν Δ'. τοῦ δὲ γενομένου, ἀφαιρεθεὶς ὁ γνωστὸς μέσος Γ, τὸ ἐναπολειφθὲν ἐκ τῆς Ἀφαιρέσεως ἔσαι ὁ ζητούμενος Β ὅρος· οἷον 3 + 15 = 18 − 11 = 7.

÷ Α.	Χ.	Γ.	Δ. =
3.		11	.15
Α + Δ − Γ = Β			
3 + 15 − 11 = 7			
3.	7.	11.	15

Ε'. Δοθέντων δὲ τῶν Α. Β. Δ, ἂς ζητηθῇ ὁ Γ· ἂς συναφθῶσι πάλιν οἱ δύω ἄκροι ὅροι· δηλ. ὁ Α, καὶ ὁ Δ· ἀπὸ δὲ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν, ἀφαίρεσον τὸν γνωστὸν μέσον Β, καὶ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἀπομείνῃ, ἔσαι ὁ ζητούμενος μέσος Γ· οἷον 3 + 15 = 18 − 7 = 11 = Γ.

÷ Α.	Β.	Χ.	Δ.
3.	7.		15
Α + Δ − Β = Γ.			
3 + 15 − 7 = 11.			

Πρόβλημα Α'.

§. 213. Τριῶν Ἀριθμῶν Ἀριθμητικῶς Ἀναλόγων δοθέντων, τέταρτον Ἀνάλογον αὐτοῖς προσευρεῖν, διαφέροντα τοῦ γ'. καθ' ὅσον ὁ α. ὅρος τοῦ β'.

Λύ-

Λύσις.

Ἂς δοθῶσι δὴ οἱ Α, Β, Γ, Ἀριθμοί· ὡς ὁρᾶται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα· ἂς συναφθῶσιν οἱ δύω μέσοι δηλ. ὁ Β, καὶ Γ· ἀπὸ δὲ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν, ἂς ἀφαιρεθῇ ὁ γνωστὸς ἄκρος Α, καὶ θέλει ἐναπομείνῃ ὁ ζητούμενος δ΄. ὅρος Δ· οἷον 12 + 16 = 28 − 8 = 20.

÷ Α . Β . Γ . = Χ 20
8 . 12 . 16
Β + Γ − Α = Δ
12 + 16 − 8 = 20
8 . 12 : 16 . 20

Δεῖξις.

Δεικνύεται· ἂς ἔμβῃ ὁ εὑρεθεὶς 20 εἰς τὸν τόπον τοῦ Χ, καὶ θέλει συσταθῇ ἡ ἑξῆς Ἀριθμητικὴ Ἀναλογία· οἷον ÷ 8. 12 : 16. 20. καὶ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύω ἄκρων ὅρων, ἴσον τῷ ἀθροίσματι τῶν δύω μέσων· (§. 210.) οἷον ÷ 8 + 20 = 28. Καὶ ÷ 12 + 16 = 28. ἄρα εὑρέθη ἀνάλογος δ΄. ὅρος, ἐκείνων, ὅπου μᾶς ἐδόθησαν· ὃ ἦν τὸ α΄. ζητούμενον.

Διαφέρει δὲ καὶ τοῦ γ΄. ὅρου, ὡς ὁ α΄. τοῦ β΄. ἀφαιρεθεὶς γὰρ ὁ γ΄. ὅρος τοῦ δ΄. ἐναπομένει ὑπεροχὴ ὁ 4· οἷον 20 − 16 = 4. ἀλλὰ καὶ ὁ α΄. τοῦ β΄. ἀφαιρεθεὶς, ἡ αὐτὴ ἐναπομένει ὑπεροχή· οἷον 12 − 8 = 4. ἄρα κτλ. ὃ ἦν τὸ δεύτερον.

Πρόβλημα Β΄.

§. 214. Τριῶν πάλιν Ἀριθμῶν Ἀριθμητικῶς Ἀνάλογον δοθέντων, δηλ. β΄. γ΄. καὶ δ΄. τὸν α΄. αὐτοῖς Ἀνάλογον προσευρεῖν, ἔχοντα πρὸς τὸν β΄. ὡς ὁ γ΄. πρὸς τὸν δ΄.

Ἂς δοθῶσιν οἱ Β. Γ. Δ. Ἀριθμοί· καὶ ἂς ζητηθῇ ὁ Α, ἔχων πρὸς τὸν Β, ὡς ὁ Γ, πρὸς τὸν Δ, πρὸς εὕρεσιν τούτου, ἀφ᾽ οὗ συναφθῶσιν οἱ δύω μέσοι ὅροι, ἂς ἀφαιρεθῇ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν ὁ γνωστὸς ἄκρος Δ· καὶ τὸ ἐναπολειφθὲν, ἔσται ὁ ζητούμενός σοι α΄. ὅρος Α· οἷον 6 + 8 = 14 − 10 = 4· ὁ 4 ἄρα

÷ Β . Γ . Δ . Χ .
6 . 8 . 10
Β + Γ − Δ = Α
6 + 8 − 10 = 4
4 . 6 : 8 . 10

ἄρα ἐστὶν ὁ ζητούμενος α΄. ὅρος Α· ἂς βαλθῇ εἰς τὸν τόπον τοῦ Χ ὁ 4· καὶ ἔσται ἡ Ἀριθμητικὴ αὐτὴ Ἀναλογία οὕτω· ÷ 4 . 6 : 8 . 10· ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ εὑρεθεὶς α΄. πρὸς τὸν β΄. ὁ γ΄. πρὸς τὸν δ΄. τὸ γὰρ ὑπὸ τῶν δύω ἄκρων ἄθροισμα, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῶν δύω μέσων· οἷον 4 + 10 = 14. Καὶ 6 + 8 = 14· ἄρα κτλ.

Πρόβλημα Γ΄.

§. 215. Τριῶν αὖθις Ἀριθμῶν Ἀριθμητικῶς ἀνάλογον δοθέντων, δηλ. α΄. β΄. καὶ δ΄. τὸν γ΄. αὐτοῖς Ἀνάλογον εὑρεῖν.

Λύσις.

Ἂς δοθῶσι λοιπὸν οἱ Α, Β, Δ. Ἀριθμοί· καὶ ἂς ζητηθῇ ὁ γ΄. ἀνάλογος αὐτοῖς Γ, α΄. ἂς γραφῶσιν ἐφεξῆς· καὶ ἀφ᾽ οὗ συναφθῶσιν οἱ δύω ἄκροι δηλ. ὁ Α, καὶ Δ, ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀθροίσματος ὁ γνωστὸς μέσος Β, καὶ τὸ ἐναπολειφθὲν ἔσται ὁ ζητούμενος μέσος Γ· οἷον 4 + 46 = 50 − 20 = 30· ἂς βαλθῇ ὁ εὑρεθεὶς Γ, εἰς τὸν τόπον τοῦ Χ, καὶ εἰς τὴν γ΄. τάξιν τῶν ὅρων μετατεθεὶς, θέλει συσταθῇ αὐτὴ ἡ Ἀριθμητικὴ Ἀναλογία· ÷ 4 . 20 : 30 . 46· καὶ ἔστι τὸ ἄθροισμα τῶν δύω ἄκρων ὅρων, ἴσον μὲ τὸ τῶν δύω μέσων· οἷον 4 + 46 = 50. Καὶ 20 + 30 = 50.

÷ Α . Β . Δ . Χ 30
4 . 20 : 46 =
Α + Δ − Β = Γ.
4 + 46 − 20 = 30
4 . 20 : 30 : 46 .

Καὶ περὶ μὲν τῆς Διῃρημένης Ἀριθμητικῆς Ἀναλογίας, εἴπομεν ἀρκετά· νῦν δὲ ἂς εἴπωμεν καὶ περὶ τῆς Συνεχοῦς.

Πρόβλημα Δ΄.

§. 216. Δύω τινῶν Ἀριθμῶν Ἀριθμητικῶς Ἀνάλογον δοθέντων, τὸν γ΄. αὐτοῖς Ἀνάλογον εὑρεῖν.

Λύσις.

Εἰ μὲν ὁ α΄. καὶ β΄. δοθεῖεν, καὶ ζητηθῇ ὁ γ΄. ἂς διπλασιασθῇ ὁ β΄. τοῦ δὲ γενομένου ἀφαιρεθεὶς ὁ α΄. τὸ ἐναπολειφθὲν ἔσται ἔσαι ὁ ζητούμενος γʹ. ὅρος Γ· οἷον 20 + 20 = 40 − 5 = 35. λέγω ὅτι ὁ 35, εἶναι ὁ ζητούμενος γʹ. ὅρος· διότι εἰς κάθε συνεχῆ Ἀριθμητικὴν Ἀναλογίαν, τὸ ἄθροισμα τῶν δύω ἄκρων ὅρων, ἐστὶν ἴσον τῷ ἀθροίσματι τοῦ μέσου, δὶς λαμβανόμενον. (§. 210.)

```
÷ Α.Β.Χ = Γ
  5.20 = Χ
Β + Β
20 + 20 − 5 = 35.
5. 20: 35.
```

Βʹ. Εἰ δὲ ἤθελε δοθῇ ὁ βʹ. καὶ γʹ. ὅρος, καὶ ἤθελε ζητηθῇ ὁ αʹ. ἂς διπλασιασθῇ ὁ μέσος Β· ἀπὸ δὲ τοῦ γενομένου ἀθροίσματος, ἂς ἀφαιρεθῇ ὁ γνωστὸς Γ, καὶ τὸ ἐναπολειφθὲν ἔσαι ὁ ζητούμενος αʹ. ὅρος Α· οἷον 20 + 20 = 40 − 35 = 5 = Α.

```
÷ Β.Γ.Χ = Α
  20.35. =
Β + Β
20 + 20 − 35 = 5.
5 . 20 . 35
```

Γʹ. Εἰ δὲ, τέλος πάντων, ἤθελαν δοθῶσιν οἱ δύω ἄκροι, καὶ ἤθελε ζητηθῇ ὁ μέσος αὐτοῖς Ἀριθμητικῶς ἀνάλογον, ἀφ᾽ οὗ Συνάψῃς τοὺς δύω ἄκρους, ἀπὸ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν λαμβάνοντας τὸ ἥμισυ, θέλεις ἔχῃ τὸν ζητούμενον μέσον ἀνάλογον ὅρον· οἷον 3 + 9 = $\frac{12}{2}$ = 6· ἄρα ὁ 6 ἐστὶν ὁ μέσος αὐτοῖς ἀνάλογος.

```
+ Α. Χ. Γ
  3.    9.
Α + Β = 12/2 = 6 = Β
3 + 9
```

Καὶ περὶ μὲν Ἀριθμητικῶν Μεθόδων ἅλις· νῦν δὲ περὶ Ἀριθμητικῆς Προόδου εἴπωμεν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ϛʹ.

Περὶ Ἀριθμητικῆς Προόδου.

Ὁρισμός.

§. 217. Πρόοδος Ἀριθμητικὴ εἶναι, μία σειρὰ Ποσοτήτων, ἢ Ἀριθμῶν· ἡ ὁποία αὐξάνει, ἢ σμικρύνεται, κατὰ τὴν αὐτὴν καὶ ἰδίαν Διαφορὰν, ἤγουν Ἀριθμητικῶς ἀναλόγων, ἢ ἰσοδιαφόρων.

Πόρισμα Αʹ.

Ἡ Ἀριθμητικὴ ἄρα Πρόοδος δὲν εἶναι ἄλλο τι, πάρεξ μία συνεχὴς ἀναλογία Ἀριθμητικὴ, κατὰ τὴν ὁποίαν καθεὶς ἀπὸ τοὺς Προηγουμένους ὅρους διαφέρει ἐκείνου τοῦ ὅρου ὁποῦ ἀμέσως εἶναι ὕστερα ἀπὸ αὐτὸν, κατὰ τὴν αὐτὴν Διαφοράν· οἷον ÷ 2. 5. 8. 11. 14. 17. 20. κτλ.

Κάθε Ἀριθμητικὴ Πρόοδος, ἢ εἶναι αὐξάνουσα, ἢ σμικρυνομένη.

Ὁρισμός.

§. 218. Καὶ αὐξάνουσα μὲν ἐστὶν ἐκείνη, τῆς ὁποίας οἱ ὅροι αὐξάνουσι κατὰ συνέχειαν μὲ τὴν ἰδίαν Διαφοράν· οἷον ÷ 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. κτλ.

Ὁρισμός.

§. 219. Πρόοδος δὲ μειουμένη, ἢ σμικρυνομένη ἐστὶν ἐκείνη, τῆς ὁποίας οἱ ὅροι ἐκ τοῦ ἐναντίου ὁ εἷς τοῦ ἄλλου σμικρύνεται, κατὰ τὴν αὐτὴν Διαφορὰν, καὶ καταντᾷ εἰς τὸ μηδέν· οἷον ÷ 21. 19. 17. 15. 13. 11. 9. 7. 5. 3. 1. 0.

Πόρισμα Βʹ.

Κάθε Πρόοδος, ἄρα αὐξάνουσα γίνεται σμικρυνομένη, ὅταν ἡ τάξις τῶν ὅρων ἤθελεν ἀντιστραφῇ, καθὼς φαίνεται εἰς τὰ ἀνωτέρω δύω Ὑποδείγματα.

Θεώρημα Αʹ.

§. 220. Εἰς ὁποιανδήποτε Ἀριθμητικὴν Πρόοδον, εἴτε αὐξουμένην, εἴτε ἐλαττουμένην, ἡ αὐτὴ ὑπεροχὴ, ἢ Διαφορὰ λαμβάνεται πάντοτε μεταξὺ δύω ὅρων, ὁποῦ ἀμέσως ὁ εἷς ἔστη κατόπιν τοῦ ἄλλου.

Πόρισμα Γ'.

Εἷς τὴν Ἀριθμητικὴν ἄρα Πρόοδον, καθ' εἷς τῶν ὅρων γίνεται ἴσος μὲ τὸν ἀμέσως πρὸ αὐτοῦ ὅρον, ἢ μὲ τὴν Πρόσθεσιν τῆς Διαφορᾶς, ἢ μὲ τὴν ἔλλειψιν, καὶ Ἀφαίρεσιν αὐτῆς· μὲ τὴν Πρόσθεσιν μὲν, ὅταν ἡ Πρόοδος αὐξαίνει· μὲ τὴν ἔλλειψιν δὲ, ὅταν ἐλαττοῦται.

Θεώρημα Β'.

§. 221. Εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν Πρόοδον, καθ' εἷς ἀπὸ τοὺς ὅρους συντίθεται ἀπὸ τὸν α. ὅρον, ἢ μὲ τὴν Πρόσθεσιν, ἢ μὲ τὴν Ἀφαίρεσιν τῆς ὑπεροχῆς, ἢ Διαφορᾶς, ὅταν πολλαπλασιάζηται μὲ τὸν Ἀριθμὸν τῶν προλαβόντων αὐτῆς ὅρων.

Σχόλιον.

Διὰ νὰ ἐξηγήσωμεν αὐτὸ τὸ Θεώρημα, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ μὲν α. ὅρος ἐστὶ 2. ἡ δὲ Διαφορὰ 3. ἂς βάλλωμεν, χάριν παραδείγματος, τὴν ἐφεξῆς Ἀριθμητικὴν Πρόοδον· οἷον ÷ 2. 5. 8. 11. 14. κτλ. ἐδῶ εἶναι πέντε ὅροι· λοιπὸν εἰς τὴν αὐξανομένην Πρόοδον, ὁ μὲν τρίτος ὅρος 8, εἶναι ἴσος μὲ τὸν α. ὅρον 2, ὁμοῦ μὲ τὴν Διαφορὰν 3, ἀφ' οὗ πολλαπλασιασθῇ μὲ τὸν Ἀριθμὸν τῶν δύω ὅρων ὁποῦ προηγήσαντο αὐτοῦ· οἷον 2. 3 = 6 + 2 = 8. ὁ δὲ πέμπτος ὅρος 14, ἐστὶν ἴσος μὲ τὸν α. ὅρον 2, ὁμοῦ μὲ ἐκεῖνο ὁποῦ γίνεται ἀπὸ τὴν Διαφορὰν 3, πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸν Ἀριθμὸν τῶν προηγησαμένων αὐτοῦ τεσσάρων ὅρων· οἷον 3. 4 = 12 + 2 = 14.

Ἐπὶ δὲ τῆς μειουμένης Προόδου· οἷον ÷ 14. 11. 8. 5. 2. ὁ μὲν γ'. αὐτῆς ὅρος 8, εἶναι ἴσος μὲ τὸν α. 14, πλὴν τῆς Διαφορᾶς 3, πολλαπλασιασθείσης ἐπὶ τὸν Ἀριθμὸν τῶν προηγησαμένων αὐτοῦ δύω ὅρων· οἷον 2. 3 = 6. ὅθεν 14 − 6 = 8. ὁ δὲ πέμπτος ὅρος 2, εἶναι ἴσος μὲ τὸν α. 14, πλὴν τῆς Διαφοφορᾶς 3, πολλαπλασιασθείσης ἐπὶ τὸν Ἀριθμὸν τῶν προηγησαμένων αὐτοῦ τεσσάρων ὅρων· οἷον 3. 4 = 12· ὅθεν 14 − 12 = 2.

Πό-

Πόρισμα Δ'.

§. 222. Κάθε ὅρος ἄρα Προόδου Ἀριθμητικῆς, αὐξούσης μὲν, ἐστὶν ἴσος τῷ α. ὅρῳ σὺν τῷ παραγομένῳ ἐκ τῆς ἐνούσης τῇ Προόδῳ Διαφορᾶς, πολλαπλασιασθείσης ἐπὶ τὸν Ἀριθμὸν τῶν προηγησαμένων ὅρων. Μειουμένης δὲ, ἴσος τῷ α. ὅρῳ, πλὴν τοῦ παραγομένου ἐκ τῆς Διαφορᾶς, πολλαπλασιασθείσης ἐπὶ τὸν Ἀριθμὸν τῶν προηγησαμένων αὐτοῦ ὅρων.

Θεώρημα στοιχειῶδες.

§. 223. Πᾶσα Ἀριθμητικὴ Πρόοδος, δύναται σχηματισθῆναι διὰ τοῦ ἐφεξῆς γενικοῦ Ἀορίστου Τύπου· οἷον ÷ A ± Δ. A ± ²Δ· A ± ³Δ· A ± ⁴Δ. κτλ.

Πόρισμα Ε'.

Κάθε ἄρα Ἀριθμητικῆς Προόδου, τὸ Κεφάλαιον τῶν ὅρων, οἵτινες ἐξίσου ἀπέχουσι τῶν ἄκρων, ποσὸν ἐστὶ μόνιμον· ἰσοῦται γὰρ τῷ τῶν ἄκρων ἀθροίσματι, ἢ τῷ ἑτέρων δύω, οἵτινες καὶ αὐτοὶ ἴσον ἀπέχουσι τῶν ἄκρων· ἢ τέλος τῷ μέσῳ δὶς εἰλημμένῳ, εἰ τύχοι ὁ Ἀριθμὸς τῶν ὅρων τῆς Προόδου περιττός· οἷον ἐπὶ τῆς ἐξ ἑπτὰ ὅρων συγκειμένης τῆσδε Ἀριθμητικῆς Προόδου. ÷ 2. 5. 8. 11. 14. 17. 20. κτλ. τὸ ἄθροισμα τοῦ γ'. ὅρου 8, καὶ τοῦ ε'. 14 ἐστὶν ἴσον τῷ 22· οἷον 8 + 14 = 22. τὸ ὁποῖον γίνεται ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύω ἄκρων ὅρων· οἷον 2 + 20 = 22. καὶ τὸ τοῦ β'. καὶ ς'. ὅρου· οἷον 5 + 17 = 22. Καὶ τὸ τοῦ μέσου δὶς λαμβανομένου· οἷον 11 + 11 = 22.

Πόρισμα Ϛ'.

§. 224. Ἁπάσης Ἀριθμητικῆς Προόδου ἡ μεταξὺ τοῦ α. καὶ ἐσχάτου ὅρου Διαφορὰ, ἴση ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς κοινῆς Διαφορᾶς, καὶ τοῦ Ἀριθμοῦ τῶν ὅρων ὅλης τῆς Προόδου, μειωθέντος μονάδι· οἷον κείσθω ἡ ἐφεξῆς Ἀριθμητικὴ αὔξουσα Πρόοδος, ἐξ ἑπτὰ ὅρων συνισταμένη. ÷ 2. 5. 8. 11. 14. 17. 20. λέγω ὅτι ἡ μεταξὺ τοῦ α. ὅρου 2, καὶ τοῦ ἐσχάτου 20, Διαφορὰ ἐστὶν ἴση τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς κοινῆς τῶν ὅρων Δια-

φο-

φορᾶς 3, καὶ τοῦ Ἀριθμοῦ τῶν ὅρων ὅλης τῆς Προόδου, πλὴν μονάδος· οἷον $3.\ 7 = 21 - 1 = 20$. κείσθω αὖθις ἡ αὐτὴ μειουμένη· οἷον ÷ 20. 17. 14. 11. 8. 5. 2. λέγω ὅτι ἡ Διαφορὰ τοῦ α΄. ὅρου 20, καὶ τοῦ ἐσχάτου 2, ἐστὶν ἴση, πλὴν τοῦ γινομένου ὑπὸ τῆς κοινῆς Διαφορᾶς 3, καὶ τοῦ Ἀριθμοῦ τῶν ἡγησαμένων ὅρων, μειωθέντος μονάδι· ἡ τοίνυν Διαφορὰ ἐστὶ 3. ὁ δὲ Ἀριθμὸς τῶν ὅρων 7. ἔσται οὖν. $3.\ 7 = 21 - 1 = 20$. Ἐπὶ δὲ τῆς μειουμένης, ἡ Διαφορὰ τοῦ α΄. ὅρου 20, καὶ τοῦ ἐσχάτου 2, ἐστὶν ἴσον, πλὴν τοῦ γινομένου ὑπὸ τῆς κοινῆς Διαφορᾶς 3, καὶ τοῦ Ἀριθμοῦ τῶν προηγησαμένων ἓξ ὅρων· οἷον $3.\ 6 = 18$. ὅθεν $20 - 18 = 2$.

Πόρισμα Ζ΄.

§. 225. Γνωσθέντος ἄρα τοῦ α΄. ὅρου καὶ τῆς ἐπικρατούσης ἐν τῇ Προόδῳ Διαφορᾶς, ἅπας ὅρος εὑρεθήσεται, συναφθέντος τῷ α΄. ὅρῳ τοῦ παραγομένου ὑπὸ τῆς Διαφορᾶς καὶ τοῦ Ἀριθμοῦ τῶν ἡγησαμένων ὅρων τοῦ ζητουμένου.

Πόρισμα Η΄.

Κἀκτοὐναντίον ἄρα, ἵνα διορισθῇ ὁ τόπος ὅρου τινός, οὗ ἡ δύναμις δέδοται ἔν τινι Ἀριθμητικῇ Προόδῳ· ἀφαιρεθήτω μὲν τοῦ ζητουμένου ὅρου ὁ α΄. τῆς Προόδου ὅρος· τὸ δὲ κατάλοιπον διαιρεθήτω διὰ τῆς ἐπικρατούσης ἐν τῇ Προόδῳ Διαφορᾶς· τὸ δὲ Πηλίκον μονάδι αὐξηθὲν, δείξει σοι τὸν τόπον τοῦ εἰς ἔρευναν προτεθέντος ὅρου.

Πόρισμα Θ΄.

§. 226. Τὸ σύμπαν ἄθροισμα, εἴτ' οὖν Κεφάλαιον ἁπάσης Ἀριθμητικῆς Προόδου ἴσον ἐστὶ, τῷ παραγομένῳ ὑπὸ τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν ἄκρων, καὶ τοῦ Ἀριθμοῦ τῶν τῆς Προόδου ὅρων· οἷον ἐπὶ τῆσδε τῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου ÷ 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. τὸ ἄθροισμα τῶν δέκα τούτων ὅρων, ἐστὶν ἴσον τῷ 100. ἀλλ' εὑρήσομεν αὐτὸ, πολλαπλασιάσαντες τὸ ἄθροισμα τῶν δύω ἄκρων ὅρων, ἐπὶ τὸν Ἀριθμὸν τῶν τῆς Προόδου ὅρων, τὸ δὲ γενόμενον διελόντες διὰ τοῦ 2· οἷον $19 + 1 = 20.\ 10 = \frac{200}{2} = 100$.

Ὑπό-

Ὑπόθεσις.

§. 227. Ἐφ' ἑκάστης Ἀριθμητικῆς Προόδου, πέντε τινὰ ἀναγκαίως συνυπάρχουσι· α΄. ὁ α΄. ὅρος, ὃν ὀνομάσωμεν Α. β΄. ὁ ἔσχατος, ὃς κληθήτω Ω. γ΄. ἡ μεταξὺ τῶν ὅρων τῆς Προόδου ἐνθεωρουμένη Διαφορὰ, ἣν καλέσωμεν Δ. δ΄. ὁ Ἀριθμὸς τῶν ὅρων τῆς Προόδου, ὃν εἴπωμεν Ν καὶ ε΄. τὸ ἄθροισμα ἁπάντων τῶν τῆς Προόδου ὅρων, ὃ καλέσωμεν Κ. ἐκ τούτων δὴ τῶν ῥηθέντων πέντε στοιχειωδῶν μερῶν, ἐὰν τρία τινὰ δοθῶσι, τὰ λοιπὰ εὑρεθήσονται πάντως· καὶ εἰς τοῦτο τὰ μάλιστα συντείνει τὸ ἐφεξῆς Ἀξίωμα.

Ἀξίωμα.

§. 228. Ἐὰν Ποσότης τις, ἴση ᾖ ἑτέρᾳ ποσότητι, προστεθῇ δὲ ἑκατέρᾳ τὸ αὐτὸ ποσὸν, ἢ ἀφαιρεθῇ ἑκατέρας τὸ αὐτὸ, ἢ πολλαπλασιασθῇ ἑκατέρα ἐπὶ τὸ αὐτὸ, ἢ διαιρεθῇ ἑκατέρα διὰ τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ, τὰ ὅλα, ἢ τὰ κατάλοιπα, ἢ τὰ γινόμενα, ἢ τὰ Πηλίκα ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται.

Θεώρημα Γ΄.

§. 229. Ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ Προόδῳ, ἡ μεταξὺ τῶν ὅρων θεωρουμένη Διαφορὰ, ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ α΄. ὅρου Α πρὸς τὸν ἔσχατον ὅρον Ω ὑπεροχῇ, διαιρουμένῃ διὰ τοῦ Ἀριθμοῦ τῶν ὅρων Ν. πλὴν μονάδος.

Πόρισμα Ι΄.

Ἐὰν ἄρα δοθῇ ὁ α΄. ὅρος Α, ὅ, τε ἔσχατος Ω, καὶ ὁ τῶν ὅρων Ἀριθμὸς Ν. εὑρεθήσεται ἡ τῶν τῆς Προόδου ὅρων Διαφορὰ Δ.

Πόρισμα ΙΑ΄.

Διὰ μέσου ἄρα τοῦ Θεωρήματος τούτου, μεταξὺ δύω δοθέντων Ἀριθμῶν, ἢ ὅρων Α, καὶ Ω, εἶναι δυνατὸν νὰ εὕρωμεν τοσούτους μέσους Ἀριθμητικῶς ἀναλόγους ὅρους, ὅσους ἤθελε προ-

σταςάξῃ τις· ἐὰν τῆς Διαφορᾶς Δ, εὑρεθείσης, αὕτη προστεθείη τῷ ἀμέσως ἐφεξῆς ἑπομένῳ ὅρῳ· οἷον ἔστω· ὁ μὲν α'. ὅρος $A = 1$. ὁ δὲ ἔσχατος $\Omega = 25$. καὶ ὁ τῶν ὅρων Ἀριθμὸς $N = 9$. ὅθεν ἔσται $\Delta = \frac{25 - 1}{9 - 1} = \frac{24}{8} = 3$. καὶ ἐπὶ μὲν τῆς αὐξούσης Προόδου ἔσω ὁ ἀντικρὺ α'. Τύπος· ἐπὶ δὲ τῆς μειουμένης ὁ ὑπ' αὐτὸν δεύτερος· ἐκ τούτου ἄρα ἐκτεθήσεται ἡ μέσους συνεχῶς ἀναλόγους συνέχουσα ὅρους Πρόοδος αὕτη· οἷον ÷ 1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25.

$$\Delta = \frac{\Omega - A + 1}{N:}$$

$$\Delta = \frac{\Omega - A}{N - 1}$$

Θεώρημα Δ'.

§. 230. Τὸ Κεφάλαιον Κ. τῶν οἱασδηποτοῦν Ἀριθμητικῆς Προόδου ὅρων, ἰσοῦται τῷ γινομένῳ ἐκ τοῦ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἡμιαθροίσματος, ἐπὶ τὸν τῶν ὅρων πολλαπλασιασθέντος Ἀριθμόν. ὅρα (§. 226.)

Καὶ περὶ μὲν προθεωρίας καὶ Εἰσαγωγῆς, τῶν ἐπὶ τὴν Ἀριθμητικὴν Πρόοδον θεωρουμένων, (§. 227.) τοσαῦτα εἰρήσθω· νῦν δὲ ἐπὶ τὴν πρᾶξιν, τῶν δι' ὧν ἡ Εἰσαγωγὴ ἐγένετο, χωρῶμεν.

Ἀλλ' ἐπειδή, εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν ταύτην Πρόοδον, ὅλη ἡ μέθοδος καὶ ἐπιτηδειότης, συνίσταται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ οἱουδήποτε αἰτηθέντος ὅρου, εἴπωμεν περὶ ἑκάστου τούτων ἰδίᾳ, σαφέστερόν τε καὶ ἐντελέστερον, Προβλήματά τινα κἀνταῦθα ὡς ἔθος προτάξαντες, καὶ ἀνάλογα Ὑποδείγματα ἐφ' ἑκάστου τιθέντες· τούς τε γενικοὺς καὶ Συμβολικοὺς αὐτῶν Τύπους, ἐφ' οὓς ἕκαστον ἀνάγεσθαι ἔχει προχαράξαντες, καὶ τὴν τούτων Ἑρμηνείαν, ὡς οἷόν τε συνοπτικῶς ἐπιφέροντες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'.

Περὶ εὑρέσεως τοῦ οἱουδήποτε αἰτηθέντος ὅρου, τῶν ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ Προόδῳ θεωρουμένων.

Πρόβλημα Α'.

§. 231. Ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ Προόδῳ, δοθέντος τοῦ α'. ὅρου Α, τῆς τε τῶν ὅρων Διαφορᾶς Δ, καὶ τοῦ τῶν τῆς Προόδου ὅρων Ἀριθμοῦ Ν, εὑρεῖν τὸν ἔσχατον ὅρον Ω, ὡς ὁ ἀντικρὺ γενικός τε καὶ Συμβολικὸς αἰνίττεται Τύπος.

$$\boxed{\Omega = (A + N - 1.)\,\Delta}$$

Ἑρμηνεία τοῦ ἐκτεθέντος Συμβολικοῦ Τύπου.

Ὁ ζητούμενος ἔσχατος ὅρος Ω, εὑρεθήσεται, ἐὰν ὁ Ἀριθμὸς τῶν ὅρων Ν, μειωθῇ μὲ μίαν μονάδα, καὶ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὴν Διαφορὰν Δ, τῷ δὲ γενομένῳ προστεθῇ ὁ α'. ὅρος Α, τὸ δὲ συμποσωθὲν ἔσται δήπου ὁ ζητούμενος ἔσχατος ὅρος Ω. ὅρα (§. 224.)

Ὑπόδειγμα Α'.

Εἷς ἄνθρωπος ἐσυμφώνησε μὲ ἄλλον τινὰ νὰ τοῦ δουλεύσῃ εἰς τὸν ἀμπελῶνά του ἡμέρας 30, μὲ τοιαύτην συμφωνίαν· ὅτι τὴν μὲν α'. ἡμέραν, νὰ τοῦ δώσῃ εἰς μισθὸν 12 ὀβολοὺς· τὴν δὲ β'. 15· τὴν δέ γε γ'. 18· καὶ ἑξῆς ὡσαύτως, κατὰ ταύτην τὴν Ἀριθμητικὴν Πρόοδον: 12. 15. 18. 21. κτλ. πόσους ἄρα ὀβολοὺς χρεωστεῖ νὰ τοῦ δώσῃ διὰ τὴν τριακοστὴν ἡμέραν;

Λύσις.

Ἐνταῦθα ὁ μὲν α'. ὅρος Α, ἐστὶ, 12· ἡ δὲ τῶν ὅρων Διαφορὰ Δ, 3· καὶ ὁ τῶν ὅρων Ἀριθμὸς, ἤγουν αἱ ἡμέραι, διὰ τὰς ὁποίας ἐσυμφώνησαν $N = 30$· ἔσται οὖν κατὰ τὸν ἐκτετεθέντα Τύπον· τριάκοντα πλὴν μονάδος = 29· πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὴν Διαφορὰν 3, γίνεται ὁ 87 Ἀριθμός· προστεθέντος δὲ τούτῳ καὶ τοῦ α΄. ὅρου Α = 12· γίνεται ὁ 99. Ἄρα εὕρηται ὁ ζητούμενος ἔσχατος ὅρος Ω, ἴσον 99 ὀβολοῖς· καὶ τόσους χρεωστεῖ νὰ τοῦ δώσῃ, διὰ τὴν τριακοστὴν ἡμέραν· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Α . Δ . Ν	
12 . 3 . 30 . ὅθεν	
30 − 1 = 29 . 3 = 87 +	
12 = 99 = Ω .	

Ὑπόδειγμα Β΄.

Ἄλλος τις ἄνθρωπος, ἐσυμφώνησε μετά τινος ποιμένος, νὰ τοῦ πωλήσῃ 80 πρόβατα, μὲ τοιαύτην συμφωνίαν· ὅτι διὰ μὲν τὸ α΄. πρόβατον, νὰ τοῦ δώσῃ 6 ὀβολοὺς· διὰ δὲ τὸ β΄. 14· διὰ δὲ τὸ γ΄. 22· καὶ οὕτως ἐφεξῆς, κατὰ ταύτην τὴν Ἀριθμητικὴν Πρόοδον· ÷ 6. 14. 22. 30: κτλ. πόσους ἄρα ὀβολοὺς χρεωστεῖ νὰ τοῦ δώσῃ διὰ τὸ ὀγδοηκοστὸν πρόβατον!

Λύσις.

Ἂς γένῃ καὶ αὐτὸ ὡς ἄνωθεν· καὶ ἔσται ἡ τιμὴ τοῦ ὀγδοηκοστοῦ προβάτου ἴση, 638 ὀβολοῖς· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Α . Δ . Ν . ὅθεν	
6 . 8 . 80	
80 − 1 = 79 . 8 =	
632 + 6 = 638 = Ω .	

Πρόβλημα Β΄.

§. 232. Ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ Προόδῳ, δοθέντος τοῦ ἐσχάτου ὅρου Ω, τῆς τε Διαφορᾶς Δ, καὶ τοῦ Ἀριθμοῦ τῶν ὅρων τῆς Προόδου Ν, εὑρεῖν τὸν α΄. ὅρον Α. Ὁ Τύπος ὁ αὐτικρύ.

Ἑρμηνεία τοῦ αὐτικρὺ Τύπου. | Α = (Ω − Δ .) Ν − 1 . |

Ὁ Ἀριθμὸς τῶν ὅρων Ν, μονάδι μειωθείς, πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὴν Διαφορὰν Δ· τὸ δὲ γενόμενον, τοῦ ἐσχάτου ὅρου Ω, ἀφαιρεθέν, τὸ λειπόμενον ἔσται πάντως ὁ ζητούμενος α΄. ὅρος Α.

Ὑπό-

Ὑπόδειγμα Γ΄.

Σταῦρος Ἰακουμίδης ὁ Νικομηδεύς, ὡρισμένην τινὰ χρημάτων Ποσότητα ἐν τῇ τῶν Κύβων πεττείᾳ, ἕως ὀκτὼ καὶ δεκάκις ἐνέβαλεν, ὥστε, τὸ πρώτως αὐτῷ καταβληθὲν, ὀκτὼ ὀβολοῖς ἐς ἀεὶ αὔξειν· ἡ ἐσχάτως ἀλλ᾽ ἐν καταβληθεῖσα ὑπ᾽ αὐτοῦ Ποσότης ἴση ἦν, ὀβολοῖς 140· πόσους ἄρα ὀβολοὺς ἐν πρώτοις ἐν τῇ πεττείᾳ κατέθετο!

Λύσις.

Εἰς αὐτὸ τὸ Ὑπόδειγμα, δίδοται μὲν ὁ ἔσχατος ὅρος Ω, ἴσος 140· ἥτε τῶν ὅρων Διαφορὰ Δ = 8· καὶ ὁ τῶν ὅρων Ἀριθμὸς Ν = 18· ζητεῖται δὲ ὁ α΄. ὅρος Α· οὗ εἰς εὕρεσιν, γενέσθω ὡς ὁ περὶ τούτου ἐκτεθεὶς κελεύει Τύπος· οἷον 18 − 1 = 17 . 8 = 136· ὅθεν 140 − 136 = 4 = Α· ὁ α΄. ὅρος Α ἐστὶ 4. Ἄρα τέσσαρας ὀβολοὺς πρώτως ἐνέβαλεν· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Ω . Δ . Ν	
140 . 8 . 18 . ὅθεν	
18 − 1 = 17 . 8 = 136 .	
140 − 136 = 4 = Α .	

Ὑπόδειγμα Δ΄.

Ἄνθρωπός τις πολυκτήμων, τὴν τῶν ἑαυτοῦ κτημάτων πρόσοδον οὕτω βελτιῶσαι ἐπειράσατο, ὥστε ἐν ἑκάστῳ ἔτει 1500 θαλήρους πλεῖον τῆς προτέρας προσόδου κέρδος ἀπολαμβάνειν· τῷ ἐσχάτῳ οὖν τῆς ἐκείνων βελτιώσεως ἔτει, ἔγνω ἑαυτὸν 16500 θαλήρους καρπώσασθαι· πόσους ἄρα θαλήρους τὸ α΄. ἐναπέλαβεν ἔτος!

Λύσις.

Γενέσθω ὡς ἄνωθεν, καὶ ἔσται ὁ ζητούμενος α΄. ὅρος Α = 3000 θαλήροις· οἷον 10 − 1 = 9 . 1500 = 13500· ἔσται οὖν 16500 − 13500 = 3000 = Α· ὁ ῥηθεὶς ἄρα πολυκτήμων, ἐκ τῆς τῶν κτημάτων

Ω . Δ . Ν − 1	
16500 . 1500 . 10 . ὅθεν	
10 − 1 = 9 . 1500 = 13500	
16500 − 13500 = 3000 = Α .	

αὐ-

αὐτοῦ βελτιώσεως ἀπέλαβε τὸ ζητούμενον α'. ἔτος, θαλήρους τριχιλίους· ὡς ἐν τῷ Διαγράμματι καθορᾶται.

Πρόβλημα Γ'.

§. 233. Ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ Προόδῳ, δοθέντος τοῦ α'. ὅρου Α, τοῦ ἐσχάτου Ω, καὶ τοῦ Ἀριθμοῦ τῶν τῆς Προόδου ὅρων Ν, εὑρεῖν τὴν τῶν ὅρων Διαφορὰν Δ· ὁ Τύπος ἔστω οὗτος.

Ἑρμηνεία τοῦ ἀντικρὺ Τύπου.

$$\boxed{\Delta = \frac{\Omega - A}{N - 1}}$$

Ἀφαιρεθήτω ὁ α'. ὅρος Α, τοῦ ἐσχάτου Ω, τὸ δὲ λειπόμενον, ἐπὶ τὸν τῶν ὅρων Ἀριθμὸν Ν, πλὴν μονάδος, διαιρεθὲν, τὸ Πηλίκον ἔσται ἡ ζητουμένη τῶν ὅρων Διαφορὰ Δ. ὅρα (§. 229.)

Ὑπόδειγμα Ε'.

Ἐξαετεῖ Παιδαρίῳ, πρὸς ἐθισμὸν τῆς τῶν βαρέων ἀγωγῆς, δυεῖν ὀκάδων βάρος ἐν πρώτοις ἐπετίθεντο βαστάζειν· εἰκοσιπενταετὲς ἀλλ' οὖν γενόμενον, 122 ὀκάδων βάρος φέρειν ἐδύνατο· πόσον ἄρα ἐν τῷ μεταξὺ χρόνῳ ἐβάσταζε βάρος!

Λύσις.

Ἐν τούτῳ τῷ Ὑποδείγματι, δίδοται μὲν ὁ α'. ὅρος Α = 2· ὅτε ἔσχατος Ω = 122· καὶ ὁ Ἀριθμὸς τῶν ὅρων Ν = 25· ζητεῖται δὲ ἡ μεταξὺ τῶν ὅρων Διαφορὰ Δ· γενέσθω ὡς ὁ περὶ τούτου ἐκτεθεὶς Συμβολικὸς κελεύει Τύπος, καὶ ἕξεις τὴν ζητουμένην Διαφορὰν Δ = 5· οἷον $\frac{122 - 2}{25 - 1} = \frac{120}{24:} = 5 = \Delta$· ἐβάσταζεν ἄρα τὸ Παιδάριον ἐν τῷ μεταξὺ χρόνῳ 5 ὀκάδες βάρος· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

$$\boxed{\begin{array}{l} \Omega \;.\; A \;.\; N - 1\;. \\ 122 : 2 \;.\; 25\;.\; \text{ἔσται} \\ 122 - 2 = \dfrac{120}{25 - 1} = \dfrac{120}{24:} \\ = 5 = \Delta \end{array}}$$

Ὑπό-

Ὑπόδειγμα ς'.

Ἐργάτης τις, ἐσυμφώνησε μετά τινος γεωργοῦ, νὰ δουλεύσῃ εἰς τὸν ἀγρόν του ἡμέρας τεσσαράκοντα· καὶ τὴν μὲν α'. ἡμέραν τοῦ ἔδωκεν 8 ὀβολούς· τὴν δὲ β'. χ. ἐπειδὴ καὶ δὲν λέγει τὴν τῶν ὅρων Διαφορὰν, ἀλλὰ τοῦτο λέγει, ὅτι διὰ τὴν τεσσαρακοστὴν ἡμέραν τοῦ ἔδωκεν ὀβολοὺς 476. πόσους ἄρα ὀβολοὺς ἐν τῷ μεταξὺ ἐλάμβανεν!

Λύσις.

Καὶ εἰς αὐτὸ τὸ Ὑπόδειγμα, δίδοται μὲν ὁ α'. ὅρος Α = 8· ὅ,τε ἔσχατος Ω = 476· καὶ ὁ τῶν ὅρων Ἀριθμὸς Ν = 40· ζητεῖται δὲ ἡ μεταξὺ τῶν ὅρων Διαφορὰ Δ· γενέσθω ὡς ἄνωθεν, καὶ ἕξεις τὴν τῶν ὅρων Διαφορὰν Δ = 12· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον. ὅρα (§. 229.)

$$\boxed{\begin{array}{l} A \;.\; \Omega \;.\; N \\ 8 \;.\; 476 \;.\; 40 \;.\; \text{ἔσται οὖν} \\ 476 - 8 = \dfrac{468}{40 - 1} \\ = \dfrac{468}{39:} = 12 = \Delta\,. \end{array}}$$

Πρόβλημα Δ'.

§. 234. Ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ Προόδῳ, δοθέντος τοῦ α'. ὅρου Α, τοῦ ἐσχάτου Ω, καὶ τῆς τῶν ὅρων Διαφορᾶς Δ, εὑρεῖν τὸν τῶν ὅρων Ἀριθμὸν Ν· ὁ Τύπος ὁ ἀντικρύ.

Ἑρμηνεία τοῦ Τύπου.

$$\boxed{N = \frac{\Omega - A + 1\,.}{\Delta:}}$$

Ἀφαιρεθήτω ὁ α'. ὅρος Α, τοῦ ἐσχάτου Ω, τὸ δὲ λοιπὸν, διαιρεθήτω ἐπὶ τὴν τῶν ὅρων Διαφορὰν Δ, καὶ τὸ Πηλίκον μονάδι αὐξηνθὲν, τὸ τούτων ἄθροισμα ἔσται ὁ ζητούμενος Ἀριθμὸς τῶν ὅρων. Ν.

Ὑπόδειγμα Ζ'.

Φιλόπονός τις μαθητὴς καὶ τῶν Μουσῶν γνήσιος ἐραστὴς, πρὸς μείζονα τοῦ μνημονικοῦ αὐτοῦ ἄσκησιν, ἔγνω ὁσημέραι λέξεις τινὰς ἀπὸ μνήμης ἀποδιδόναι οὕτως, ὥστε ἐν μὲν τῇ α'. ἡμέ-

ἡμέρᾳ μίαν μόνην λέξιν τῇ μνήμῃ ἀποταμιεύοντα μανθάνειν· ἑκάστῃ δὲ τῶν λοιπῶν ἡμερῶν, δύω προστιθέναι· ἔτυχε δὲ ἐν μιᾷ τῶν ἡμερῶν, ἑκατὸν ὀγδοήκοντα μίαν λέξεις ἀπαγγεῖλαι· ποσταία ἄρα ἦν ἐκείνη ἡ ἡμέρα;

Λύσις.

Γενέσθω ὡς ὁ περὶ τούτου ἐκτεθεὶς διδάσκει Τύπος, καὶ ἕξεις ἐννενηκοστὴν πρώτην ἡμέραν· καθ᾽ ἣν 181 λέξεις ἀπὸ μνήμης ἀπέδωκεν ὁ ῥηθείς· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

$$
\begin{array}{l}
A \,.\, \Omega \,.\, \Delta \\
1 \,.\, 181 \,.\, 2 \,.\ \text{ὅθεν} \\
181 - 1 = \dfrac{180}{2} = \\
90 + 1 = 91 = N.
\end{array}
$$

Ὑπόδειγμα Η'.

Ἔν τινι Κωμοπόλει, στρατιωτῶν Ἀριθμός τις ἐν τοῖς γειτνιάζουσιν οἴκοις οὕτω διετάχθη, ὥστε ἐν μὲν τῇ α'. οἰκίᾳ δύω καταλῦσαι στρατιώτας· ἐν δὲ τῇ β'. γ'. καὶ λοιπαῖς ἀεὶ δυοῖν πλείους· ἐν τῷ ἐσχάτῳ ἀλλ᾽ ἓν καταλύματι, ἀπηριθμοῦνται εἷς καὶ τριάκοντα στρατιῶται· μέχρι πόσων ἄρα οἰκημάτων, τὰ τούτων παρετάθη καταλύματα;

Λύσις.

Κἀν τούτῳ τῷ Ὑποδείγματι, δίδοται μὲν ὁ α'. ὅρος $A = 1$· ὅ, τε ἔσχατος $\Omega = 31$· καὶ ἡ Διαφορὰ $\Delta = 2$· ζητεῖται δὲ ὁ τῶν ὅρων Ἀριθμὸς $N = X$· γενέσθω δὴ ὡς ἄνωθεν, καὶ ἕξεις τὸν ζητούμενον τῶν ὅρων Ἀριθμὸν $N = 15 + 1 = 16$· παρετάθη ἄρα τὰ τούτων καταλύματα μέχρι τῶν 16 οἰκημάτων· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

$$
\begin{array}{l}
A \,.\, \Omega \,.\, \Delta .\quad \text{ὅθεν} \\
1 \,.\, 31 \,.\, 2 \\
31 - 1 = \dfrac{30}{2} = 15 \\
+ 1 = 16.
\end{array}
$$

Πρόβλημα Ε'.

§. 235. Ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ Προόδῳ, δοθέντος τοῦ α'. ὅρου A, τοῦ ἐσχάτου Ω, καὶ τοῦ Ἀριθμοῦ τῶν ὅρων N, εὑρεῖν τὸ

πάντων τῶν τῆς Προόδου ὅρων ἄθροισμα, ἤτοι Κεφάλαιον K· οὗ τινος ὁ ἀντικρὺ ἔστω Τύπος.

$$
K = (A + \Omega.)\,\frac{N}{2}.
$$

$$
K = \frac{(A + \Omega.)\,N}{2}
$$

Ἑρμηνεία τῶν Τύπων.

Συναφθήτω ὁ α'. ὅρος A, τῷ ἐσχάτῳ Ω· τὸ δὲ τούτων ἄθροισμα, πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸν ἥμισυν Ἀριθμὸν τῶν ὅρων N, (ἐὰν ὑπάρχῃ ἄρτιος) ὡς ὁ α'. Τύπος κελεύει· τὸ δὲ γινόμενον, ἔσται τὸ πάντων τῶν τῆς Προόδου ὅρων ζητούμενον ἄθροισμα, εἴτ᾽ οὖν Κεφάλαιον K.

Ἐὰν δὲ ὁ τῶν ὅρων Ἀριθμός N, ἐστὶ περιττός, τότε συνάψας τὸν A, τῷ Ω, τὸ τούτων ἄθροισμα, πολλαπλασίασον ἐπὶ τὸν ὅλον Ἀριθμὸν τῶν ὅρων N, τὸ δὲ γενόμενον διαίρεσον διὰ τοῦ 2 Ἀριθμοῦ, ὡς ὁ β'. κελεύει Τύπος, καὶ ἕξεις τὸ ζητούμενον Κεφάλαιον K.

Ὑπόδειγμα Θ'.

Ἄνθρωπός τις ἠγόρασε 24 πρόβατα· καὶ διὰ μὲν τὸ α'. πρόβατον, ἔδωκεν ὀβολοὺς 8· διὰ τὸ ἔσχατον 100. πόσους ἄρα ὀβολοὺς ἔδωκε διὰ τὰ 24 πρόβατα;

Ἂς γένῃ ὡς ἄνωθεν ἡρμηνεύεται, καὶ ἔσται τὸ ὁλικὸν τούτων Κεφάλαιον $K = 1296$ ὀβολοῖς· οἷον $100 + 8 = 108$. ὅθεν $\frac{24}{2} = 12$. $108 = 1296$. ἔδωκεν ἄρα ὀβολοὺς 1296· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Ὑπόδειγμα Ι'.

Ἄλλος τις ἄνθρωπος, ἠγόρασεν 97 αἶγας· καὶ διὰ μὲν τὴν πρώτην αἶγαν, ἔδωκε τῷ αἰγοπόλῳ ὀβολοὺς 12· διὰ δὲ τὴν ὑστέραν, δηλ. τὴν 97, ἔδωκεν ὀβολοὺς 684· πόσον ἄρα ἔδωκε διὰ ὅλας τὰς αἶγας;

Λύσις.

Εἰς αὐτὸ τὸ Ὑπόδειγμα, ἐπειδὴ ὁ τῶν ὅρων Ἀριθμὸς $N = 97$, ἐστὶ περιττὸς, ἂς συναφθῇ ὁ α'. ὅρος A, τῷ ἐσχάτῳ Ω· τὸ δὲ τούτων ἄθροισμα ἂς πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ὅλοὁλοσχερῆ τῶν ὅρων Ἀριθμὸν Ν, καθὼς κελεύει ὁ β'. Τύπος· τὸ δὲ γινόμενον διαιρεθὲν ἐπὶ τὸν 2 Ἀριθμὸν, τὸ Πηλίκον ἔσαι τὸ πάντων τῶν τῆς Προόδου ὅρων ζητούμενον ἄθροισμα, εἴτ' οὖν Κεφάλαιον Κ. οἷον 684 + 12 = 696. 97 = $\frac{67512}{2:}$ = 33756 = Κ. ἄρα ἡ ὁλικὴ τιμὴ τῶν 97 αἰγῶν, ἦν = 33756 ὀβολοῖς· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον Κεφάλαιον Κ.

Σχόλιον.

Διὰ μέσου τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων Θεμελιωδῶν Τύπων, (§. 231. καὶ 235.) δυνάμεθα νὰ λύωμεν πολλὰ Προβλήματα, τὰ ὁποῖα συμβαίνουσι καὶ εἰς τὴν Μαθηματικὴν, καὶ εἰς τὸν κοινωνικὸν ἡμῶν βίον· διότι εἰς τὰ ἐφεξῆς ἐκτεθησόμενα Προβλήματα, μὲ τὸ νὰ εἶναι δύω εἴδη ἐξισώσεων, ἐν οἷς ἐμπεριέχονται ὁ α. ὅρος Α, ὁ ἔσχατος Ω, ὁ τῶν τῆς Προόδου ὅρων Ἀριθμὸς Ν, ἥτε μεταξὺ τῶν ὅρων θεωρουμένη Διαφορὰ Δ, καὶ τὸ πάντων τῶν ὅρων τῆς Προόδου ἄθροισμα, εἴτ' οὖν Κεφάλαιον Κ. ἐκ τούτων δὴ τῶν ῥηθέντων πέντε θεμελιωδῶν ὅρων, ἀναγκαίως ἕπεται νὰ δοθῶσι τρία τινὰ, πρὸς βοήθειαν τῆς λύσεως ὁποιουδήποτε Προβλήματος, ἀναφερομένου ἐπὶ τὴν Ἀριθμητικὴν ταύτην Πρόοδον· δι' ὧν τὰ ἐν ἐρεύνῃ προτιθέμενα δύω ζητούμενα εὑρεθήσεται, ἔκ τε τῆς ἐπιτηδειότητος, τῆς τε συνεχοῦς μελέτης καὶ γυμνασίας, ἣν ἔχομεν ἐπὶ τὸ εἶδος τοῦτο τῆς ἐξισώσεως, ἔκ τε τῆς δυνάμεως τῆς διπλῆς ἐκθέσεως τῶν ζητουμένων· διὰ τοῦτο οὖν ἐν τοῖς ἐφεξῆς Προβλήμασιν, ἀνὰ δύω ἐκτεθήσονται Τύποι· ἐκ δὲ τῶν διαφόρων αὐτῶν μετασχηματισμῶν, ῥᾳδίως ἐπιλυθήσεται, καὶ τὰ ἐφεξῆς Προβλήματα.

Πρόβλημα Ϛ'.

§. 236. Ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ Προόδῳ, δοθέντος τοῦ α. ὅρου Α, τοῦ ἐσχάτου Ω, καὶ τῆς μεταξὺ τῶν ὅρων Διαφορᾶς Δ, εὑρεῖν τὸν τῶν ὅρων Ἀριθμὸν Ν, καὶ τὸ πάντων τῶν ὅρων τῆς Προόδου ἄθροισμα· εἴτ' οὖν Κεφάλαιον Κ· ὧν οἱ ἀντικρὺ ἑςῶσαν Τύποι.

$$N = \frac{\Omega - A}{\Delta :} + 1$$

$$K = \frac{(A + \Omega)N}{2}$$

Ἑρμηνεία τῶν Τύπων.

Ἀφαι-

Ἀφαιρεθήτω τοῦ ἐσχάτου ὅρου Ω, ὁ α. ὅρος Α· τὸ δὲ λοιπὸν διαιρεθήτω ἐπὶ τὴν Διαφορὰν Δ, τὸ δὲ Πηλίκον μονάδι αὐξηνθὲν, δώσει σοι τὸν ζητούμενον Ἀριθμὸν τῶν ὅρων Ν· ὃ ἦν τὸ πρῶτον ζητούμενον. (ὅρα §. 234.)

Συναφθήτω ὁ α. ὅρος Α, τῷ ἐσχάτῳ Ω, τὸ δὲ τούτων ἄθροισμα, πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸν εὑρεθέντα Ἀριθμὸν τῶν ὅρων Ν. τὸ δὲ γινόμενον διαιρεθὲν ἐπὶ τὸν 2 Ἀριθμὸν, δώσει σοι τὸ πάντων τῶν τῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου ζητούμενον ἄθροισμα, εἴτ' οὖν Κεφάλαιον Κ. ὅπερ ἦν τὸ δεύτερον. (§. 235.)

Ὑπόδειγμα ΙΑ'.

Ὁ Μνησίλοχος εἰς τὸ παιγνίδιον τῶν Κύβων, α. μὲν ἕνα κατέβαλε θάλληρον. β'. δὲ τέσσαρας. γ'. ἑπτά· καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως, κατὰ ταύτην τὴν Ἀριθμητικὴν Πρόοδον· οἷον ÷ 1. 4. 7. 10. κτλ. τὴν δὲ ὑστερινὴν φορὰν 88. ποσάκις ἄρα κατέθετο! πόσον τε ἦν τῶν πεττηθέντων αὐτῷ ὁλικὸν τῶν θαλήρων Κεφάλαιον Κ!

Λύσις.

Εἰς αὐτὸ τὸ Ὑπόδειγμα, ὁ μὲν α. ὅρος Α, ἐστὶν = 1. ὁ δὲ ἔσχατος Ω = 88. καὶ ἡ τῶν ὅρων Διαφορὰ Δ = 3. ζητεῖται δὲ ὁ τῶν ὅρων Ἀριθμὸς Ν, καὶ τὸ πάντων τῶν ὅρων ἄθροισμα, εἴτ' οὖν Κεφάλαιον Κ. γενέσθω δὴ ὡς ὁ Συμβολικὸς κελεύει Τύπος· οἷον 88 − 1 = $\frac{87}{3:}$ = 29 + 1 = 30. ὁ ζητούμενος ἄρα Ἀριθμὸς τῶν ὅρων Ν, ἦν 30. καὶ ποσάκις ἐν τῇ πεττείᾳ ἐνέβαλεν· ὃ ἦν τὸ α. ζητούμενον.

$$A = 1 . \Omega = 88 . \Delta = 3 . N = X$$

$$88 - 1 = \frac{87}{3:} = 29 + 1 = 30 = N$$

$$88 + 1 = 89 . 30 = \frac{2670}{2:} = 1335 = K$$

Εὑρεθήτω δὴ καὶ τὸ πάντων τῶν ὅρων ἄθροισμα, εἴτ' οὖν Κεφάλαιον Κ· ὡς ὁ Τύπος κελεύει· ἔσαι οὖν· 88 + 1 = 89. 30 = $\frac{2670}{2:}$ = 1335 = Κ· τὸ Κεφάλαιον ἄρα ὅλων τῶν πεττηθέντων θαλήρων ἦν ἴσον 1335· ὃ ἦν τὸ β'. ζητούμενον.

Πρό-

Πρόβλημα Ζ'.

§. 237. Ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ Προόδῳ δοθέντος τοῦ α. ὅρου Α, τοῦ ἐσχάτου Ω, καὶ τοῦ πάντων τῶν ὅρων τῆς Προόδου Κεφαλαίου Κ, εὑρεῖν τὸν Ἀριθμὸν τῶν ὅρων Ν, καὶ τὴν μεταξὺ τῶν ὅρων ὑπάρχουσαν Διαφορὰν Δ· ὧν ἔστωσαν οἱ ἀντικρὺ Τύποι.

$$N = \frac{2K.}{A + Ω:}$$

$$Δ = \frac{Ω - A}{N - 1:}$$

Ἑρμηνεία τῶν Τύπων.

Διπλασιαθήτω τὸ δοθὲν Κεφάλαιον Κ· τὸ δὲ γενόμενον διαιρεθὲν ἐπὶ τὸν α. καὶ ἔσχατον ὅρον ὁμοῦ, τὸ Πηλίκον ἔσται ὁ ζητούμενος τῶν ὅρων Ἀριθμὸς Ν· ὃ εἶναι τὸ α. ζητούμενον· ὡς ὁ ἀντικρὺ περὶ τούτου κελεύει Τύπος.

Πρὸς εὕρεσιν δὲ καὶ τῆς Διαφορᾶς Δ, ἀφαιρεθήτω ὁ α. ὅρος Α, τοῦ ἐσχάτου Ω, τὸ δὲ λειπόμενον, ἐπὶ τὸν εὑρεθέντα Ἀριθμὸν τῶν ὅρων Ν, πλὴν μονάδος, διαιρεθὲν, τὸ Πηλίκον ἔσται ἡ μεταξὺ τῶν ὅρων ὑπάρχουσα Διαφορὰ Δ· ὃ εἶναι τὸ β'. ζητούμενον.

Ὑπόδειγμα ΙΒ'.

Ἄνθρωπός τις ἠγόρασε βόας· (δὲν εἶναι ὅμως γνωστὸν πόσους) καὶ ἔδωκεν ὑπὲρ μὲν τοῦ α. βοὸς γρόσια 3. ὑπὲρ δὲ τοῦ β'. καὶ τῶν ἑξῆς, εἶναι ἄγνωστος καὶ ἡ τῶν ὅρων Διαφορά· ὑπὲρ δὲ τοῦ ἐσχάτου ἔδωκε γρόσια 480· καὶ ὑπὲρ τῶν ὅλων· βοῶν, τοὺς ὁποίους ἠγόρασεν ἔδωκε γρόσια 19320· πόσοι ἄρα ἦσαν οἱ ἀγορασθέντες βόες, καὶ πόση ἡ μεταξὺ τοῦ α. καὶ β'. εἶναι Διαφορὰ Δ;

Λύσις.

Εἰς εὕρεσιν τοῦ Ἀριθμοῦ τῶν ὅρων Ν, ἤγουν τῶν βοῶν ὅπου ἠγόρασε, γενέσθω ὡς ὁ περὶ τούτου κελεύει Τύπος· οἷον· $19320 . 2 \frac{38640}{3 + 480:} = \frac{38640}{483:} = 80 = N$. ἄρα ἦσαν οἱ βόες ὀγδοήκοντα· ὃ εἶναι τὸ α.

Εἰς εὕρεσιν δὲ καὶ τῆς ζητουμένης τῶν ὅρων Διαφορᾶς Δ, γενέσθω ὡς ὁ περὶ ταύτης Τύπος κελεύει· οἷον $480 - 3 =$

$\frac{477}{80 - 1:} = \frac{477}{79:} = 3. = Δ$. ἄρα ἡ τῶν ὅρων Διαφορὰ εἶναι τρία· ὃ εἶναι τὸ β'.

Πρόβλημα Η'.

§. 238. Ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ Προόδῳ, δοθείσης τῆς μεταξὺ τῶν ὅρων Διαφορᾶς Δ, τοῦ τε Ἀριθμοῦ τῶν τῆς Προόδου ὅρων Ν, καὶ τοῦ ἀθροίσματος, εἴτ' οὖν Κεφαλαίου πάντων τῶν ὅρων Κ, εὑρεῖν τὸν α. ὅρον Α, καὶ τὸν ἔσχατον Ω· ὧν Τύποι ἔστωσαν οἱ ἀντικρὺ ὁρώμενοι.

$$A = \frac{K}{N:} = Φ - N - 1.$$

$$Δ = \frac{X}{2} - Φ.$$

$$Ω = N - 1 . . Δ + A$$

Ἑρμηνεία τῶν ἀντικρὺ Τύπων.

Ὁ α. ὅρος Α, εὑρεθήσεται, ἐὰν τὸ Κεφάλαιον πάντων τῶν ὅρων τῆς Προόδου, ἐπὶ τὸν Ἀριθμὸν τῶν ὅρων διαιρεθῇ· τὸ δὲ Πηλίκον Φ, ἀφαιρεθῇ τοῦ γινομένου ἐκ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ τοῦ Ἀριθμοῦ τῶν ὅρων Ν, πλὴν μονάδος, ἐπὶ τὴν Δ, Διαφορὰν, καὶ διαιρεθέντος διὰ τοῦ 2.

Ὁ δὲ ἔσχατος ὅρος Ω, εὑρεθήσεται, ἐὰν τοῦ Ἀριθμοῦ τῶν ὅρων Ν, μειωθέντος μονάδι, τὸ λοιπὸν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὴν Διαφορὰν τῶν τῆς Προόδου ὅρων Δ, τῷ δὲ γενομένῳ προστεθῇ ὁ α. ὅρος Α.

Ὑπόδειγμα ΙΓ'.

Εἷς ἄνθρωπος ἠγόρασε 40 ἀρνία, καὶ ἔδωκε δι' αὐτὰ 3600 ὀβολούς· ἡ δὲ Διαφορὰ τοῦ α. ἀρνίου, πρὸς τὸ β'. εἶναι 4. πόσους ἄρα ὀβολοὺς ἔδωκε διὰ τὸ α. ἀρνίον, καὶ πόσους διὰ τὸ ὑστερινόν;

Λύσις.

Εἰς αὐτὸ τὸ Ὑπόδειγμα, δίδοται μὲν ὁ Ἀριθμὸς τῶν ὅρων $N = 40$· ἥτε Διαφορὰ $Δ = 4$· καὶ τὸ ἄθροισμα, εἴτ' οὖν Κεφάλαιον πάντων τῶν ὅρων τῆς Προόδου $K = 3600$· ζητεῖται δὲ ὁ α. ὅρος Α, καὶ ὁ ἔσχατος Ω. γενέσθω οὖν ὡς ἑρμηνεύεται· οἷον $\frac{3600}{40:} = 90 . - 40 - 1 = 39 . 4 = \frac{156}{2:} = 78$.

ὅθεν

ὅθεν 90 — 78 = 12· ὁ α. ἄρα ὅρος Α, ἰδοὺ 12· ὃ ἰδοὺ τὸ α. ζητούμενον.

Εὑρεθήτω δὴ καὶ ὁ ἔσχατος ὅρος Ω· οἷον 40 — 1 = 39 . 4 = 156 + 12 = 168· ὁ ἔσχατος ἄρα ὅρος Ω, ἰδοὺ 168· ὃ ἦν τὸ β'. ζητούμενον.

$$\frac{1600}{40:} = 90 - 40 - 1 = 39 \cdot 4 = \frac{156}{2} = 78.$$
$$\text{ὅθεν}\cdot\ 90 - 78 = 12 = A.$$
$$\text{Καὶ}\ 40 - 1 = 39 \cdot 4 = 156 + 12 = 168 = \Omega$$

Πρόβλημα Θ'.

§. 239. Ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ Προόδῳ, δοθέντος τοῦ α. ὅρου Α, τῆς τε μεταξὺ τῶν ὅρων Διαφορᾶς Δ, καὶ τοῦ Ἀριθμοῦ τῶν ὅρων Ν, εὑρεῖν τὸν ἔσχατον ὅρον Ω, καὶ τὸ πάντων τῶν τῆς Προόδου ὅρων ἄθροισμα, εἴτ' οὖν Κεφάλαιον Κ· ὧν Τύποι οἱ ἀντικρύ.

$$\Omega = (A + N - 1.)\Delta$$
$$K = \frac{(A + \Omega.)N.}{2}$$

Ἑρμηνεία τῶν Τύπων.

Πρὸς εὕρεσιν μὲν τοῦ ἐσχάτου ὅρου Ω, ὁ τῶν ὅρων Ἀριθμὸς Ν, μονάδι μειωθείς, πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὴν Διαφορὰν Δ· τῷ δὲ γενομένῳ, προστεθήτω ὁ α. ὅρος Α· καὶ τὸ τούτων ἄθροισμα ἔσται ὁ ζητούμενος ἔσχατος ὅρος Ω.

Πρὸς εὕρεσιν δὲ καὶ τοῦ πάντων τῶν ὅρων τῆς Προόδου ἀθροίσματος, εἴτ' οὖν Κεφαλαίου Κ, συναφθήτω ὁ α. ὅρος Α. τῷ ἐσχάτῳ Ω. τὸ δὲ τούτων ἄθροισμα, πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸν τῶν ὅρων Ἀριθμὸν Ν. τὸ δὲ γενόμενον, ἐπὶ τὸν 2 Ἀριθμὸν διαιρεθέν, τὸ Πηλίκον ἔσται τὸ ζητούμενον Κεφάλαιον Κ.

Ὑπόδειγμα ΙΔ'.

Ἄνθρωπός τις, βουληθεὶς φρέαρ κατορύξαι ἐν τῇ ἐπαύλῃ αὐτοῦ, μετεπέμψατο τοὺς πρὸς τοὔργον τοῦτο ἐπιτηδείους· ἀγνοοῦντες δὲ τὸ τοῦ κατορυχθησομένου φρέατος βάθος, συνεφώνησαν πρὸς ἀλλήλους, ὥστε ὑπὲρ μὲν τῆς α. ὀργυᾶς ἀργύρια 8 μισθὸν αὐτοῖς παρέξειν· ὑπὲρ δὲ τῆς β'. 12· καὶ οὕτω καθεξῆς, ὡς τοῦ ἔργου μᾶλλον ἐπιπονωτέρου ὄντος· κατορύξαντες δὲ ὀργυὰς 12, εὑρέθη τὸ ὕδωρ· πόσα ἄρα ὀφείλει δοῦναι αὐτοῖς

τοῖς

τοῖς ἀργύρια ὑπὲρ τῆς δωδεκάτης ὀργυᾶς, ἀναλόγως τῷ συμφωνηθέντι μισθῷ! πόσα τε ἀργύρια ὑπὲρ τοῦ ὁλικοῦ ὀρύγματος τῶν 12 ὀργυῶν!

Λύσις.

Ἐν τούτῳ τῷ Προβλήματι, δίδοται μὲν ὁ α. ὅρος Α = 8. ἥτε τῶν ὅρων Διαφορὰ Δ = 4. καὶ ὁ Ἀριθμὸς τῶν τῆς Προόδου ὅρων Ν = 12. ζητεῖται δὲ ὁ ἔσχατος ὅρος Ω, καὶ τὸ πάντων τῶν τῆς Προόδου ὅρων ἄθροισμα, εἴτ' οὖν Κεφάλαιον Κ.

Γενέσθω δὴ ὡς οἱ περὶ τούτων κελεύουσι Τύποι, καὶ ἡ αὐτῶν Ἑρμηνεία· οἷον 12 — 1 = 11 . 4 = 44 + 8 = 52 = Ω. Καὶ 52 + 8 = 60 . 12 = $\frac{720}{2:}$ = 360 : Κ.

$$12 - 1 = 11 \cdot 4 = 44 + 8 = 52 = \Omega.$$
$$52 + 8 = 60 \cdot 12 = \frac{720}{2:} = 360 = K.$$

Ὀφείλει ἄρα δοῦναι αὐτοῖς, ὑπὲρ μὲν τῆς 12 ὀργυᾶς, ἀργύρια 52· ὑπὲρ δὲ τῆς ὁλικῆς τῶν ὀργυῶν Ποσότητος, ἀργύρια 360· ὃ ἰδοὺ τὸ ζητούμενον.

Πρόβλημα Ι'.

§. 240. Ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ Προόδῳ, δοθέντος τοῦ ἐσχάτου ὅρου Ω, καὶ τῆς Διαφορᾶς Δ, εὑρεῖν τὸν α. ὅρον Α, καὶ τὸν τῶν ὅρων Ἀριθμὸν Ν· ὧν οἱ ἀντικρὺ ἔστωσαν Τύποι.

$$A = (\Omega - 2\Delta - 1.)\Delta.$$
$$N = \frac{\Omega - A}{\Delta:} + 1$$

Ἑρμηνεία τῶν ἀντικρὺ Τύπων.

Εἰς τοῦτο τὸ Πρόβλημα, δίδοται μὲν ὁ ἔσχατος ὅρος Ω, καὶ ἡ Διαφορὰ Δ· ζητεῖται δὲ ὁ α. ὅρος Α, καὶ ὁ τῶν ὅρων Ἀριθμὸς Ν· καὶ ἐπειδὴ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν χωρὶς τοῦ ἄλλου, διὰ τοῦτο εἰς ἀναπλήρωσιν τοῦ ἐλλείποντος, λαμβάνομεν τὸ διπλοῦν τῆς Διαφορᾶς Δ, πλὴν μονάδος· καὶ τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὴν αὐτὴν Διαφορὰν Δ, τὸ δὲ γινόμενον, ἀφαιροῦμεν τοῦ ἐσχάτου ὅρου Ω· τὸ δὲ λειπόμενον ἔσται δήπου ὁ ζητούμενος α. ὅρος Α.

Πρὸς

Πρὸς εὕρεσιν δὲ καὶ τοῦ Ἀριθμοῦ τῶν ὅρων N, ἀφαιροῦμεν τοῦ ἐσχάτου ὅρου Ω, τὸν ἤδη εὑρεθέντα α΄. ὅρον A· τὸ δὲ λοιπὸν διαιροῦμεν ἐπὶ τὴν Διαφορὰν Δ· τῷ δὲ Πηλίκῳ προστίθεμεν μίαν μονάδα, καὶ τὸ συμποσωθὲν ἔσται πάντως· ὁ ζητούμενος Ἀριθμὸς τῶν ὅρων N.

Ὑπόδειγμα ΙΕ΄.

Ἄνθρωπός τις ἠγόρασεν ἀρνία, δὲν λέγει ὅμως μήτε πόσον ἐσυμφώνησε νὰ δώσῃ διὰ τὸ α΄. μήτε πόσα ἦσαν τὰ ἀρνία· ἀλλὰ τοῦτο μόνον λέγει, ὅτι ἡ μεταξὺ τῶν ὅρων Διαφορὰ ἦτον 8 παράδες, καὶ ὅτι διὰ τὸ ἔσχατον ἀρνίον ἔδωκε παρ. 360. πόση ἄρα ἦτον ἡ τιμὴ τοῦ α΄. ἀρνίου, καὶ πόσα τὰ ἀγορασθέντα ἀρνία!

Λύσις.

Εἰς λύσιν τοῦ Προβλήματος τούτου, γενέσθω ὡς οἱ περὶ τούτου ἐκτεθέντες κελεύουσι Τύποι· οἷον $360 - 15 . 8 = - 120$. ὅθεν $360 - 120 = 240 = A$. Καὶ $360 - 240 = \frac{120}{8} = 15 + 1 = 16 = N$.

$\Omega = 360 . \Delta = 8$
$360 - 15 . 8 = 120$. ὅθεν $360 - 120 = 240 = A$
Καὶ $360 - 240 = \frac{120}{8} = 15 + 1 = 16 = N$.

Ἰδοὺ εὑρέθη ὁ μὲν α΄. ὅρος $= 240$ παράδες, καὶ αὕτη ἦν ἡ τιμὴ τοῦ α΄. ἀρνίου· ὃ ἦν τὸ πρῶτον ζητούμενον. Εὑρέθη δὲ καὶ ὁ τῶν ὅρων Ἀριθμὸς $N = 16$· καὶ τόσα ἦσαν τὰ ἀγορασθέντα ἀρνία· ὃ ἦν τὸ δεύτερον.

Καὶ περὶ μὲν Ἀριθμητικῆς Προόδου ἅλις ἂν ἔχοι τὰ ἐκτεθέντα Προβλήματα, καὶ Ὑποδείγματα· καὶ οἱ ἐπὶ τούτων σποράδην ἐκτεθέντες γενικοί τε καὶ Συμβολικοὶ Τύποι· ἀλλὰ διὰ τὸ εὐμνημόνευτον, ἔγνων αὖθις κἀνταῦθα τοὺς αὐτοὺς Τύπους ἐγχαράξαι.

<table>
<tr><td colspan="2">$\Omega = (A + N - 1.)\Delta.$
(ὅρα §. 231.)</td><td>$A = (\Omega - \Delta.)N - 1.$
(ὅρα §. 232.)</td></tr>
<tr><td>$\Delta = \frac{(\Omega - A)}{N - 1}$:
(ὅρα §. 233.)</td><td>$N = \frac{\Omega - A + 1.}{\Delta}$:
(ὅρα §. 234.)</td><td>$K = \frac{(A + \Omega.)}{2}N.$:
(ὅρα §. 235.)</td></tr>
<tr><td>$N = \frac{\Omega - A}{\Delta} + 1$:
$K = \frac{(A + \Omega.)}{2}N$:
(ὅρα §. 236.)</td><td>$N = \frac{2K}{A + \Omega}$:
$\Delta = \frac{\Omega - A}{N - 1}$:
(ὅρα §. 237.)</td><td>$\Omega = (A + N - 1.)\Delta.$
$K = \frac{(A + \Omega.)}{2}N.$:
(ὅρα §. 239.)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$A = (\Omega - 2\Delta - 1.)\Delta.$
$N = \frac{(\Omega - A + 1)}{\Delta}$:
(ὅρα §. 240.)</td><td>$A = \frac{K}{N} = \Phi - N - 1.$
$\Delta = \frac{X}{2} - \Phi.$
$\Omega = (N - 1.)\Delta + A$
(ὅρα §. 238.)</td></tr>
</table>

Καὶ περὶ μὲν Ἀριθμητικῆς Προόδου, ἀρκούντως μοι εἴρηται· νῦν δὲ καὶ περὶ Γεωμετρικῆς Προόδου, βραχέα τινὰ εἴπωμεν.

ΠΕΡΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ.

Ἀφ' οὗ εἴπομεν περὶ τῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου, καὶ τῆς εὑρέσεως τοῦ οἱουδήποτε, τῶν ἐπ' αὐτὴν θεωρουμένων, αἰτηθέντος ὅρου, τῆς τε ἐκθέσεως τῶν Τύπων, καὶ τὴν ἐφ' ἑκάστῳ τούτων προσήκουσαν ἑρμηνείαν, ἀκόλουθόν ἐστι νὰ εἴπωμεν ὀλίγα τινὰ, καὶ περὶ τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου, ἐκ τοῦ Ὁρισμοῦ αὐτῆς ἀρξάμενοι.

Ὁρισμός.

§. 241. Πρόοδος Γεωμετρική ἐστι Πληθύς τις Ἀριθμῶν, ἢ Ποσοτήτων, ἐν τάξει λαμβανομένων καὶ χωρούντων, κατά τινα ἴσον Γεωμετρικὸν λόγον, καὶ διαφερόντων ἀλλήλων, κατὰ τὸ αὐτὸ Πηλίκον.

Θεώρημα στοιχειῶδες.

§. 242. Πᾶσα Γεωμετρικὴ αὔξουσα Πρόοδος, δύναται νὰ ἀναχθῇ, εἰς τὸν ἐφεξῆς γραφόμενον Τύπον· οἷον ∺ $A : A\Pi : A\Pi^2 : A\Pi^3 : A\Pi^4 : A\Pi^5 : A\Pi^6 : A\Pi^7 : A\Pi^8 : A\Pi^9 : A\Pi^{10}$: κτλ.

Δεῖξις.

Δείκνυται· ἐν ταύτῃ τῇ Προόδῳ, ἅπας ἑπόμενος ὅρος, ἴσος ἐστὶ τῷ ἡγουμένῳ, πολλαπλασιασθέντι, διὰ τοῦ Πηλίκου Π. Πρὸς μέντοι σαφεστέραν κατάληψιν τοῦ λεγομένου, ἔστω, ὁ μὲν α. ὅρος τῆς Προόδου, ἴσος Α. τὸ δὲ κοινὸν Πηλίκον $=$ Π. ὁ ἑπόμενος ὅρος ἔσται $= A\Pi$. ὁ δὲ τούτου ἑπόμενος ἔσται $= A\Pi^2$. Καὶ πάλιν ὁ ἑπόμενος τούτου $= A\Pi^3$. Καὶ πάλιν τούτῳ ὡς ἡγουμένῳ λαμβανομένῳ, ὁ ἑπόμενος ὅρος ἔσται $= A\Pi^4$. Καὶ οὕτω χωρεῖ ἐπ' ἄπειρον τὸ λεγόμενον. Ἑκάστη ἄρα αὔξουσα Γεωμετρικὴ Πρόοδος, δύναται ἐκτεθῆναι, κατὰ τὸν προτεθέντα Τύπον.

Πόρισμα Α'.

243. Ταύτην τὴν προεκτεθεῖσαν σειρὰν τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου, θεωροῦντες πάλιν, κατὰ δεύτερον λόγον, εὑρίσκομεν, ὅτι ἕκαστος τῶν ἑπομένων ὅρων, συνίσταται ἐκ τοῦ α. ὅρου Α, πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸ Πηλίκον Π, ὑψωμένον ὄν, εἰς ἐκείνην τὴν δύναμιν, ἥτις ἐμφαίνει τὴν πληθὺν τῶν προηγησαμένων ὅρων. Ὁ δὲ τούτου λόγος εἶναι, ὅτι εἰς μίαν Πρόοδον, ἅπαντες οἱ ὅροι, πλὴν τοῦ α. εἶναι πεπολλαπλασιασμένοι, μετὰ τοῦ κοινοῦ τῶν ὅρων Πηλίκου. Καὶ ἡ διὰ τοῦ Πηλίκου πολλαπλασίασις, γίνεται τοσάκις, ὅσοι εἶναι οἱ ὅροι τῆς Προόδου, πλὴν τοῦ α. οἷον ἐπὶ τῆς προεκτεθείσης Προόδου. ὁ ι'. ὅρος εἶναι $A\Pi^9$. ὅστις συνίσταται ἐκ τοῦ α. ὅρου, πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸ κοινὸν Πηλίκον, ἀρθὲν εἰς τὴν ἐννάτην δύναμιν, ἥτις ἐστὶν ἴση μὲ τὴν πληθὺν τῶν πρὸ αὐτοῦ ἡγησαμένων ὅρων· ὥσπερ καὶ ὁ δωδέκατος ὅρος εἶναι $= A\Pi^{11}$.

Πόρισμα Β'.

§. 244. Τὸ ἐκ τῶν δύω ἄκρων, τουτέστι τὸ ἐκ τοῦ α. καὶ ἐσχάτου ὅρου γινόμενον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἐκ τοῦ β. καὶ παραλήγοντος ὅρου γινομένῳ. Καὶ γενικῶς, τὸ ἐκ τῶν δύω ἄκρων παραγόμενον, ἀεὶ ἴσον ἐστὶ, τῷ γινομένῳ ἐκ δύω ἑτέρων ὅρων, οἵτινες ἐπίσης ἀφίστανται, ἐκ τῶν δύω ἄκρων ὅρων. Καὶ τοῦτο δείκνυται σαφῶς, ἐν τῇ προεκτεθείσῃ σειρᾷ· ἐπειδὴ τὸ μὲν ἐκ τοῦ α. καὶ δεκάτου ὅρου παραγόμενον εἶναι $= A^2\Pi^9$. τὸ δὲ ἐκ τοῦ β'. καὶ θ'. $= A^2\Pi^9$. τὸ δὲ ἐκ τοῦ γ'. καὶ η'. ὅρου πάλιν $= A^2\Pi^9$. τὸ δὲ ἐκ τοῦ δ'. καὶ ζ'. πάλιν ἴσον ἐστὶ τῷ $A^2\Pi^9$. κἀπὶ τῶν λοιπῶν ὁμοίως· ὁ δὲ λόγος τούτου εἶναι, ὅτι εἰς κάθε Ἀναλογίαν, τὸ ἐκ τῶν ἄκρων παραγόμενον, εἶναι ἴσον τῷ ἐκ τῶν μέσων παραγομένῳ· ἐπειδὴ κάθε Πρόοδος εἶναι μία πληθὺς ὅρων Ἀναλόγων.

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, ἡ ἐν Ἀριθμοῖς ἐκδηλουμένη ἐφεξῆς Γεωμετρικὴ Πρόοδος, διὰ τὸ εὐληπτότερον· οἷον ∺ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64. κτλ. τὰ ἐκ τῶν ἐπίσης ἀφισταμένων ὅρων παραγόμενα εἰσὶ τὰ, $64 . 2 = 128$. καὶ, $32 . 4 = 128$. Καὶ, $8 . 16 = 128$. κτλ.

Εἰ δὲ ὁ Ἀριθμὸς τῶν ὅρων ἤθελε τύχῃ νὰ εἶναι περιττὸς, τότε ὁ μεσαίτατος καὶ μόνος ἐγκαταλειπόμενος ὅρος, πολλαπλασιάζεται ἐφ' ἑαυτόν· καὶ ἑπομένως τὸ τετράγωνον τούτου, εἶναι ἴσον μὲ τὸ παραγόμενον ὑπὸ δύω ἄλλων ὅρων, τῶν ἐπίσης ἀπεχόντων τῶν ἄκρων· οἷον ∺ 2: 4: 8: 16: 32. Καὶ γὰρ 2. 32 = 64. Καὶ, 4. 16 = 64. Καὶ, 8. 8 = 64. καὶ ἑξῆς ὡσαύτως.

Πόρισμα Γ'.

§. 245. Ἐκ ταύτης, ἄρα, τῆς γενικῆς ἐκθέσεως τῶν Γεωμετρικῶν Ἀναλογιῶν, ἕπεται, ὅτι ὁ α'. ὅρος ἔχει πρὸς τὸν γ'. τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ τετράγωνον τοῦ α'. ὅρου, πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ β'. οἷον ὁ α'. ὅρος Α, ἔχει πρὸς τὸν γ'. $\mathrm{A\Pi^2}$, ὡς τὸ τετράγωνον τοῦ α'. $\mathrm{A^2}$, πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ β'. $\mathrm{A^2\Pi^2}$. Ἐπειδὴ καὶ εἰς τοὺς δύω τούτους λόγους, εἶναι τὸ Πηλίκον $\mathrm{\Pi^2}$. Καὶ εἶναι ἄρα ἐνταῦθα μία ἀληθὴς Ἀναλογία. Ἔτι, ὁ α'. ὅρος Α, ἔχει πρὸς τὸν δ'. Δ, ὡς ὁ Κύβος τοῦ α'. ὅρου, πρὸς τὸν Κύβον τοῦ β'. ὅρου· οἷον ∺ $\mathrm{A\Pi^3 = A^3 : A^3\Pi^3}$. κτλ.

Πόρισμα Δ'.

Ἀνίσως λοιπὸν, ἐπὶ ταύτης τῆς γενικῆς Γεωμετρικῆς Προόδου ἐκθέσεως, ὁ α'. ὅρος εἶναι = 1, τότε ἡ Πρόοδος ἔσται ∺ $\mathrm{A : A\Pi^1 : A\Pi^2 : A\Pi^3}$. κτλ. Καὶ μεταβέπεται εἰς τὴν ∺ $\mathrm{1 : 1\Pi^1 : 1\Pi^2 : 1\Pi^3}$. κτλ. Ἐπειδὴ κάθε Ποσότης, ἢ Ὅρος, τοῦ ὁποίου ὁ δυναμοδείκτης εἶναι = τῷ 0, εἶναι καθ' ἑαυτὸν ἴσος μὲ μίαν μονάδα. Δυνάμεθα λοιπὸν διὰ τοῦτο, ἀντὶ τῆς μονάδος, νὰ μεταχειρισθῶμεν, τὸ $\mathrm{\Pi^0}$. καὶ νὰ βάλλωμεν αὐτὸ, εἰς τὸν τόπον αὐτῆς· κἀντεῦθεν ἅπασα ἡ Πρόοδος δύναται νὰ ἐκτεθῇ οὕτω ∺ $\mathrm{\Pi^0 : \Pi^1 : \Pi^2 : \Pi^3 : \Pi^4}$. καὶ ἑξῆς ὡσαύτως.

Ὅθεν γίνεται φανερὸν, ὅτι αἱ μὲν δυνάμεις τῶν Ποσῶν, ἵστανται ἐν Γεωμετρικῇ Προόδῳ· οἱ δὲ δυναμοδεῖκται, χωροῦσι, κατὰ Πρόοδον Ἀριθμητικήν· οἷον ÷ 1. 2. 3. 4. κτλ.

Σχό-

Σχόλιον Β'.

Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε λεχθέντων περί τε Προόδων καὶ Γεωμετρικῶν Ἀναλογιῶν, προκύπτουσι καὶ ἕτεροι Τύποι, οἵτινες συμβάλλουσιν εἰς λύσιν Γεωμετρικῶν Προβλημάτων, ἀναφορὰν ἐχόντων πρὸς τὰς Προόδους· διότι, ἐπειδὴ κάθε Πρόοδος, εἶναι πληθύς τις λόγων, ἐπίσης καὶ κατὰ τάξιν προαγομένων· (§. 242.) διὰ τοῦτο καὶ εἰς μίαν τοιαύτην Πρόοδον, τὸ Κεφάλαιον πάντων τῶν ἡγουμένων ὅρων, ἔχει λόγον πρὸς τὸ Κεφάλαιον τῶν ἑπομένων, τὸν ὁποῖον ἔχει κάθε ἡγούμενος, ἢ πρῶτος ὅρος, πρὸς τὸν ἑπόμενον, ἢ δεύτερον ὅρον· ἀλλὰ μὴν εἰς μίαν Πρόοδον, ἕκαστος ὅρος, πλὴν τοῦ ἐσχάτου, εἶναι ἡγούμενος λόγου. Ὁμοίως ἕκαστος ὅρος, πλὴν τοῦ α'. εἶναι ἑπόμενος τοῦ αὐτοῦ λόγου. Ἔστι δὲ καὶ τὸ Κεφάλαιον πάντων τῶν ὅρων τῆς Προόδου = Κ. ἄρα, τὸ Κεφάλαιον πάντων τῶν ἡγουμένων, εἶναι αὐτὸ τὸ ἴδιον Κεφάλαιον πάντων τῶν ὅρων, πλὴν τοῦ ἐσχάτου· οἷον = Κ — Ω. Ὥσπερ δὲ καὶ τὸ Κεφάλαιον τῶν ἑπομένων, εἶναι αὐτὸ τὸ Κεφάλαιον πάντων τῶν τῆς Προόδου ὅρων, πλὴν τοῦ α'. οἷον = Κ — Α. αὕτη τοίνυν ἡ Ἀναλογία, ἐκτίθεται οὕτω. Κ — Ω: Κ — Α = Α: ΑΠ. Καὶ διὰ τῆς πολλαπλασιάσεως τῶν ἄκρων, καὶ μέσων ὅρων, γίνεται ἐξίσωσις. Κ. Α. Π — Ω. Α. Π = Κ. Α — Α. Κ. Καὶ λοιπὸν, ἐκ ταύτης τῆς ἐξισώσεως, δύναται νὰ εὕρῃ τις, κατὰ τοὺς τῆς ἐξισώσεως Κανόνας, τόσον τὴν δύναμιν τοῦ Α, ὅσον καὶ τοῦ Ω, καὶ Π, καὶ Κ. Καὶ διὰ νὰ γένῃ σαφὲς τὸ λεγόμενον, δι' ἑνὸς Ὑποδείγματος, ἔσω ἡ ἑξῆς Γεωμετρικὴ Πρόοδος ∺ 3: 9: 27: 81: 243: 729: 2187. κτλ.

Εἰς ταύτην τὴν ἐκτεθεῖσαν Γεωμετρικὴν Πρόοδον, ὁ μὲν α'. ὅρος ἐστὶ 3 = Α. τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ β'. αὐτῆς ὅρου, ἐπὶ τοῦ α'. προκύπτον Πηλίκον, ἐστὶ 3 = Π. ὁ ἔσχατος αὐτῆς ὅρος ἐστὶ, 2187 = Ω. ὁ Ἀριθμὸς τῶν ὅρων, 7 = Ν. Καὶ τὸ Κεφάλαιον πάντων τῶν ὅρων τῆς Προόδου, 3279 = Κ.

Ἐκ τούτων λοιπῶν τῶν πέντε στοιχειωδῶν μερῶν, ὅταν μας δοθῶσι τὰ τρία, τὰ λοιπὰ εὔκολα εὑρίσκονται, διὰ τῶν ἐφεξῆς ἐκτεθησομένων Συμβολικῶν τε καὶ γενικῶν τῆς Προόδου ταύτης Τύπων.

Σχό-

Πρόβλημα Α'.

§. 246. Δοθέντος τοῦ ἐσχάτου ὅρου Ω, τοῦ τε Πηλίκου Π, καὶ τοῦ Κεφαλαίου πάντων τῶν ὅρων τῆς Προόδου Κ, νὰ εὕρωμεν τὸν α. ὅρον Α· ὁ Τύπος ἔσω ὁ ἔνερθεν.

Ἑρμηνεία τοῦ ἀντικρὺ ἐκτεθέντος Τύπου.

$$A = \Omega \,.\, \Pi + K - \Pi \,.\, K.$$

Ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ ἔσχατος ὅρος Ω, ἐπὶ τὸ Πηλίκον Π, τῷ δ' ἐξ αὐτῶν γινομένῳ, προστεθήτω τὸ Κεφάλαιον Κ· τούτου δέ, ἀφαιρεθήτω, τὸ ἐκ τοῦ Πηλίκου Π, καὶ Κ γινόμενον, τὸ δὲ λοιπὸν ἔσαι δήπου ὁ ζητούμενος α. ὅρος Α· οἷον 2187. 3 = 6561 + 3279 = 9840 — 3279 . 3 = 9837 = 3 = Α· ἄρα ὁ α. ὅρος τῆς ἐκτεθείσης Γεωμετρικῆς Προόδου ἦν = τῷ 3· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Πρόβλημα Β'.

§. 247. Δοθέντος δέ, τοῦ α. ὅρου Α, τοῦ τε Πηλίκου Π, καὶ τοῦ Κεφαλαίου πάντων τῶν ὅρων τῆς Προόδου Κ, νὰ εὕρωμεν τὸν ἔσχατον ὅρον Ω· ὁ Τύπος.

Ἑρμηνεία τοῦ ἀντικρὺ Τύπου.

$$\Omega = \frac{K \,.\, \Pi + A - K}{\Pi :}$$

Πολλαπλασιασθήτω τὸ Κεφάλαιον Κ, ἐπὶ τὸ Πηλίκον Π, τοῦ δὲ γενομένου, ἀφαιρεθήτω τὸ αὐτὸ Κεφάλαιον Κ· εἰς δὲ τὸ λειπόμενον, προστεθεὶς ὁ α. ὅρος Α, διαιρεθήτω διὰ τοῦ Πηλίκου Π, καὶ τὸ προκύψαν Πηλίκον, ἔσται ὁ ἔσχατος ὅρος Ω· οἷον 3279 . 3 = 9837 — 3297 = 6558 + 3 = $\frac{6561}{3}$ = 2187 = Ω· εὕρηται ἄρα ὁ ζητούμενος ἔσχατος ὅρος Ω = 2187.

Πρόβλημα Γ'.

§. 248. Δοθέντος τοῦ α. ὅρου Α, τοῦ τε ἐσχάτου Ω, καὶ τοῦ Κεφαλαίου πάντων τῶν ὅρων τῆς Προόδου Κ, εὑρεῖν τὸ Πηλίκον Π· ὁ Τύπος ὁ ἀντικρύ.

Ἑρμηνεία τοῦ ἀντικρὺ Τύπου.

$$\Pi = \frac{K - A}{K - \Omega :}$$

Ἀφαι-

Ἀφαιρεθήτω ὁ α. ὅρος Α, τοῦ Κεφαλαίου Κ, τὸ δὲ ἐναπολειφθὲν διαιρεθήτω ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ Κεφαλαίου Κ, πλὴν τοῦ ἐσχάτου ὅρου Ω· τὸ δὲ προκύψαν ἔσαι τὸ ζητούμενον κοινὸν τῶν ὅρων Πηλίκον Π = Χ· οἷον 3279 — 3 = 3276 : 3279 — 2187 = 1092· ὅθεν 3276 : 1092 = 3 . = Π· εὕρηται τὸ ζητούμενον κοινὸν τῶν ὅρων Πηλίκον Π = 3.

Πρόβλημα Δ'.

§. 249. Δοθέντος τοῦ α. ὅρου Α, τοῦ τε ἐσχάτου Ω, καὶ τοῦ κοινοῦ Πηλίκου τῶν ὅρων τῆς Προόδου Π, νὰ εὕρωμεν τὸ πάντων τῆς Προόδου Κεφάλαιον Κ· ὁ Τύπος ὁ ἀντικρύ.

Ἑρμηνεία τοῦ Τύπου.

$$K = \frac{\Omega \,.\, \Pi - A}{\Pi - 1 :}$$

Πολλαπλασιασθήτω ὁ ἔσχατος ὅρος Ω, ἐπὶ τὸ κοινὸν τῶν ὅρων τῆς Προόδου Πηλίκον Π· τοῦ δὲ γενομένου, ἀφαιρεθήτω ὁ α. ὅρος Α, τὸ δὲ λοιπόμενον, διαιρεθὲν διὰ τοῦ κοινοῦ Πηλίκου Π, πλὴν μονάδος τὸ προκύψαν Πηλίκον, ἔσαι τὸ ζητούμενον πάντων τῶν τῆς Προόδου ὅρων Κεφάλαιον Κ· οἷον 2187. 3 = 6561 — 3 = 6558 : 2 = 3279 = Κ· εὕρηται ἄρα τὸ πάντων τῶν ὅρων ζητούμενον Κεφάλαιον Κ = 3279.

Πρόβλημα Ε'.

§. 250. Δοθέντος τοῦ α. ὅρου Α, τοῦ τε ἐσχάτου Ω, καὶ τοῦ κοινοῦ τῶν ὅρων τῆς Προόδου Πηλίκου Π, νὰ εὕρωμεν τὸν Ἀριθμὸν τῶν ὅρων τῆς Προόδου Ν· ὁ Τύπος.

Ἑρμηνεία τοῦ ἀντικρὺ Τύπου.

$$N = \Pi^{\nu} = \frac{\Omega \,.\, \Pi}{A :}$$

Ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ ἔσχατος ὅρος Ω, ἐπὶ τὸ κοινὸν τῶν ὅρων τῆς Προόδου Πηλίκον Π, τὸ δὲ γενόμενον, ἂς διαιρεθῇ ἐπὶ τὸν α. ὅρον Α, καὶ προκύψει τι Πηλίκον = Χ· ἔπειτα λαβόντες τὸ κοινὸν τῶν ὅρων τῆς Προόδου Πηλίκον Π, προάγομεν αὐτὸ ὑψοῦντες εἰς δυνάμεις ἀλληλοδιαδόχους, ἕως οὗ νὰ φθάσῃ νὰ ἐξισωθῇ μὲ τῷ ἀνωτέρω ἐκ τῆς διαιρέσεως προκύψαντι Πηλίκῳ Χ· αἱ δὲ εὑρεθεῖσαι δυνάμεις, δείξουσιν ἡμῖν τὴν ζητουμένην τῶν ὅρων Πλῆθυν Ν· οἷον 2187.

3

$3 = \frac{6561}{3} = 2187$· ὅθεν $3 . 3 . 3 . 3 . 3 . 3 = 2187$. Καὶ γὰρ $\div 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187$· εὕρηται ἄρα ὁ Ἀριθμὸς τῶν ὅρων τῆς Προόδου $N = 7$.

Σχόλιον.

Αὐτοὶ εἶναι οἱ Τύποι, διαμέσου τῶν ὁποίων ἠμπορεῖ νὰ εὕρῃ τινὰς ὁποιονδήποτε τῶν ἐν τῇ Γεωμετρικῇ Προόδῳ θεωρουμένων πέντε στοιχειωδῶν μερῶν.

Ἀλλὰ διὰ νὰ γένωσιν εὐληπτότερα τὰ ῥηθέντα, ἂς προθέσωμεν καί τινα Ὑποδείγματα, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ λυθῶσι διὰ μέσου τῶν ἐκτεθέντων Τύπων.

Ὑπόδειγμα Α΄.

Ἕνας ἄνθρωπος ἔβαλεν εἰς τὸ δημόσιον λαχεῖον, ἤγουν λοτταρίαν, τὴν μὲν α΄. φορὰν 3 ἀργύρια· τὴν δὲ β΄. 9. τὴν γ΄. 27. καὶ οὕτω καθεξῆς. Πόσα ἄρα ἔβαλε τὴν ζ΄. φοράν;

Λύσις.

Εἰς αὐτὸ τὸ Ὑπόδειγμα δίδοται ὁ α΄. ὅρος $A = 3$· τὸ κοινὸν τῶν ὅρων τῆς Προόδου Πηλίκον $\Pi = 3$· καὶ ὁ Ἀριθμὸς τῶν ὅρων τῆς Προόδου $N = 7$. Ζητεῖται δὲ ὁ ἔσχατος ὅρος $\Omega = X$. ἂς γένῃ ἡ λύσις αὐτοῦ κατὰ τὸν Τύπον καὶ τὴν ἑρμηνείαν ὁποῦ ἐκάμαμεν εἰς τὸ β΄. Πρόβλημα (§. 247.) καὶ θέλει εὑρεθῇ $= 2187$. καὶ πόσα εἶναι τὰ ζητούμενα ἀργύρια, τὰ ὁποῖα ἔβαλε τὴν ζ΄. φοράν.

Ὑπόδειγμα Β΄.

Ὅταν ὁ ῥηθεὶς ἄνθρωπος ἔβαλεν εἰς τὴν λοτταρίαν, τὴν μὲν α΄. φορὰν 3 ἀργύρια· τὴν δὲ β΄. 9, τὴν γ΄. 27. καὶ οὕτως ἐφεξῆς, τὴν δὲ ζ΄. φορὰν ἔβαλεν ἀργύρια 2187. πόσα ἄρα ἦσαν ὅλα τὰ ἀργύρια ὁποῦ ἔβαλε;

Λύ-

Λύσις.

Καὶ εἰς αὐτὸ τὸ Ὑπόδειγμα, δίδοται ὁ α΄. ὅρος $A = 3$. τὸ κοινὸν τῶν ὅρων τῆς Προόδου Πηλίκον $\Pi = 3$. καὶ ὁ ἔσχατος ὅρος $\Omega = 2187$. ζητεῖται δὲ τὸ πάντων τῶν ὅρων τῆς Προόδου Κεφάλαιον $K = X$· ἂς γένῃ καὶ αὐτό, ὡς κελεύει ὁ ἀντικρὺ Τύπος,

$$\boxed{K = \frac{\Omega . \Pi - A}{\Pi - 1} :}$$

καὶ ἔσται τὸ ζητούμενον Κεφάλαιον $K = 3279$· οἷον $2187 . 3 = 6561 - 3 = \frac{6558}{2} = 3279$· ἄρα ὅλα, ὅσα ἔβαλεν εἰς τὸ λόττον ἦσαν ἀργύρια τρισχίλια διακόσια ἑβδομήκοντα ἐννέα· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Ὑπόδειγμα Γ΄.

Ὁ αὐτὸς ἄνθρωπος λέγει, ὅτι ἔβαλεν εἰς τὸ λόττον, τὴν ὑστέραν φορὰν ἀργύρια 2187, τὸ δὲ Κεφάλαιον τῶν ὑπ' αὐτοῦ καταβληθέντων ἀργυρίων ἦτον 3279, καὶ τὸ κοινὸν τῶν ὅρων Πηλίκον, ἦτον 3· πόσα ἀργύρια κατέβαλε τὴν α΄. φοράν;

Λύσις.

Καὶ εἰς τοῦτο τὸ Ὑπόδειγμα, δίδοται ὁ μὲν ἔσχατος ὅρος $\Omega = 2187$· τὸ δὲ Κεφάλαιον ὅλων τῶν καταβληθέντων ἀργυρίων $K = 3279$· καὶ τὸ κοινὸν τῶν ὅρων Πηλίκον $\Pi = 3$· ζητεῖται δὲ α΄. ὅρος $A = X$. Ἂς γένῃ λοιπὸν ἡ πρᾶξις τούτου, ὡς κελεύει

$$\boxed{A = \Omega . \Pi + K - K . \Pi}$$

ὁ ἀντικρὺ Τύπος, καὶ ἔσται ὁ ζητούμενος α΄. ὅρος $A = 3$· οἷον $2187 . 3 = 6561 + 3279 = 9840 - 3279 . 3 = 9837$· ὅθεν $9840 - 9837 = 3 = A$· ἔβαλεν ἄρα τὴν α΄. φορὰν ἀργύρια τρία· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Ὑπόδειγμα Δ΄.

Ἕνας ἄνθρωπος ἔβαλεν εἰς τὸ λόττον τὴν μὲν α΄. φορὰν ἀργύρια 3· τὴν δὲ ὑστερινήν, 2187· καὶ ἔγιναν ὅλα, ὅσα ἔβαλεν, ἀργ. 3279· πόσον λοιπὸν ἦτον τὸ κοινὸν τῶν ὅρων Πηλίκον αὐτῆς τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου;

Λύ-

Λύσις.

Καὶ εἰς αὐτὸ τὸ Ὑπόδειγμα, δίδοται ὁ α. ὅρος Α = 3· ὁ ἔσχατος ὅρος Ω = 2187· καὶ τὸ πάντων τῶν ὅρων τῆς Προόδου Κεφάλαιον Κ = 3279· ζητεῖται δὲ τὸ κοινὸν τῶν ὅρων Πηλίκον Π = Χ· γενέσθω καὶ τοῦτο ὡς ὁ Τύπος κελεύει, καὶ εὑρεθήσεται τὸ ζητούμενον Πηλίκον Π = 3· οἷον 3279 − 3 = 3276 : 3279 − 2187 = 1092· ὅθεν $\frac{3276}{1092}$ = 3 = Π.

$$\Pi = \frac{K - A}{K - \Omega}:$$

Ὑπόδειγμα Ε'.

Ὁ ἴδιος ἄνθρωπος κατέθεσεν εἰς τὸ λόττον τὴν μὲν α. φορὰν ἀργύρια 3· τὴν δὲ ὑστερινὴν 2187· τὸ δὲ κοινὸν τῶν ὅρων Πηλίκον ἦτον 3· εἰς πόσας καταθέσεις κατέβαλε τὰ 2187 ἀργύρια;

Λύσις.

Καὶ εἰς αὐτὸ τὸ πέμπτον Ὑπόδειγμα, δίδοται μὲν ὁ α. ὅρος Α = 3· ὁ ἔσχατος Ω = 2187, καὶ τὸ κοινὸν τῶν ὅρων Πηλίκον Π = 3· ζητεῖται δὲ ὁ Ἀριθμὸς τῶν ὅρων τῆς Προόδου Ν = Χ. Ἄς γένη λοιπὸν καὶ τούτου ἡ πρᾶξις, ὡς ὁ ἀντικρὺ κελεύει Τύπος, καὶ εὑρεθήσεται ὁ Ἀριθμὸς τῶν ὅρων τῆς Προόδου Ν = 7· οἷον 2187 . 3 = $\frac{6561}{3}$ = 2187· ἂς ὑψωθῇ δὲ καὶ τὸ κοινὸν τῶν ὅρων Πηλίκον Π, ἕως οὗ νὰ ἐξισωθῇ μὲ τὸν 2187 Ἀριθμόν, καὶ θέλει σοι δείξῃ τὴν ζητουμένην Ποσότητα τῶν ὅρων Ν· οἷον ∺ 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 = Ν· ἄρα εὕρηται καὶ ὁ ζητούμενος Ἀριθμὸς τῶν ὅρων τῆς Προόδου = 7.

$$N = \Pi^{\nu} = \frac{\Omega . \Pi}{A}:$$

Σημείωσις.

Πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν, ὅτι ἐπὶ πάσης Γεωμετρικῆς Προόδου· πέντε τινὰ ἀναγκαίως θεωροῦνται· ὁ α. ὅρος, ὃν ὠνομάσαμεν Α· ὁ ἔσχατος, ὃν ἐκαλέσαμεν Ω. Τὸ κοινὸν τῶν ὅρων τῆς Προόδου Πηλίκον, ὃ εἴπομεν Π· ὁ Ἀριθμὸς τῶν ὅρων τῆς Προόδου, ὃν ἐσημειώσαμεν μὲ τὸ Ν· καὶ τέλος τὸ πάντων τῶν ὅρων τῆς Προόδου ἄθροισμα, ἤτοι Κεφάλαιον, ὃ ἐδηλώσαμεν διὰ τοῦ Κ· ἀφ' οὗ λοιπὸν ἐγχαράξαμεν τοὺς Συμβολικοὺς καὶ γενικοὺς Τύπους τῶν ἄνω εἰρημένων ὅρων ἢ ζητουμένων, καὶ ἡρμηνεύσαμεν τὴν λύσιν ἑνὸς ἑκάστου τῶν ἐκτεθέντων γενικῶν Τύπων, προσηρμόσαμεν ἐπάνω εἰς αὐτοὺς· ἓνα μόνον παράδειγμα ἐφ' ἕκαστον τύπων, διὰ νὰ δώσωμεν μίαν βεβαίαν ἰδέαν εἰς τοὺς ἀναγινώσκοντας, ὅτι οὕτω πρέπει νὰ γίνεται ἡ πρᾶξις, εἰς κάθε ζητούμενον ἐκ τῶν ῥηθέντων πέντε ὅρων, ἢ ζητημάτων, καὶ οὐχὶ κατ' ἄλλον τρόπον, καθ' ὅσον εἶναι δυνατὸν νὰ λύωμεν τὰ ἐπ' αὐτὴν Προβλήματα, διὰ μέσου τῆς Ἀριθμητικῆς ἐπιστήμης· διὰ δὲ τῆς Ἀλγέβρης, ἠμποροῦν νὰ λυθῶσι διαφόρως, καθὼς εἶναι γνωστὸν εἰς τοὺς τὴν ἐπιστήμην ταύτην κεκτημένους· ὡσὰν ὁποῦ ἐνασχολεῖται εἰς τὸ καθόλου ποσὸν καὶ οὐχὶ μόνον εἰς τὸ διακεκριμένον, καθὼς ἡ Ἀριθμητική, καὶ διὰ τοῦτο καλεῖται καὶ καθόλου λογιστική, καὶ ἀναλυτικὴ μέθοδος, μὲ τὸ νὰ ἐκτείνηται εἰς ὅλας τὰς ἐπιστήμας.

Πλὴν διὰ νὰ γένῃ πλέον εὐληπτοτέρα καὶ ἐντελεστέρα ἡ τῆς Γεωμετρικῆς ταύτης Προόδου Διδασκαλία, ἔκρινα εὔλογον νὰ ἐνταυθοῖ ὀλίγον τι πλατύτερον, χάριν τῶν φιλομαθῶν καὶ γνησίων ἐραστῶν τῆς Ἀριθμητικῆς ἐπιστήμης, προσθεὶς ἐφ' ἕκαστον τῶν ἐπ' αὐτὴν ζητουμένων, διάφορα Ὑποδείγματα, πρὸς ὁδηγίαν καὶ ἀκριβῆ ἄσκησιν, ἐφ' ὅ,τι οὖν τῶν ἐπ' αὐτὴν ἀναγομένων Προβλημάτων.

Πρόβλημα Α'.

Ἄνθρωπός τις ἠγόρασε 12 ἄλογα· καὶ διὰ μὲν τὸ α. ἄλογον ἔδωκεν 3 ὀβολούς· διὰ δὲ τὸ β'. τὸ τριπλοῦν τοῦ πρώτου, διὰ δὲ τὸ γ'. τὸ τριπλοῦν τοῦ δευτέρου, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρι τοῦ δωδεκάτου. Πόσους ἄρα ὀβολοὺς ἔδωκε διὰ τὸ δωδέκατον! καὶ πόσους διὰ τὰ δώδεκα, καὶ πρὸς πόσους ὀβολοὺς τιμᾶται τὸ καθ' ἓν ἐξ αὐτῶν!

Λύσις.

Ἐν τούτῳ τῷ Προβλήματι, δίδοται ὁ α. ὅρος Α = 3, τὸ κοινὸν Πηλίκον τῶν τῆς Προόδου ὅρων Π = 3. Καὶ ὁ Ἀριθμὸς τῶν ὅρων Ν = 12· ζητεῖται δὲ ὁ ἔσχατος ὅρος Ω = Φ.

τό, τε

τό, τε Κεφάλαιον πάντων τῶν ὅρων τῆς Προόδου Κ = Χ, καὶ ἡ ἑκάστου ἀλόγου τιμὴ = Ψ. Ἂς γένῃ ἡ τούτου πρᾶξις, ὡς ὁ ἀντικρὺ κελεύει Τύπος. Πολλαπλασιασθήτω ὁ α. ὅρος Α, ἐπὶ τὸ Πηλίκον Π, συνεχῶς μέχρι τῆς ἑνδεκάτης δυνάμεως, τὸ δὲ γενόμενον ἔσται δήπου ὁ ζητούμενος ἔσχατος ὅρος Ω· οἷον $\Pi^{\nu} - 1 = \Omega = 531441$· οἷον 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561 : 19683 : 59049 : 177147 : 531441 = Ω· ὃ ἦν τὸ πρῶτον ζητούμενον.

$$\boxed{\Omega = \mathrm{A} \cdot \Pi^{\nu} - 1.}$$

Διὰ δὲ τὸ ζητούμενον Κεφάλαιον πάντων τῶν ὅρων τῆς Προόδου Κ, γενέσθω ὡς ὁ ἀντικρὺ κελεύει Τύπος· οἷον 531441 . $3 = 1594323 - 3 = \dfrac{1594320}{3-1=2} = 797160 = \mathrm{K}$· ἄρα τὸ ζητούμενον τῶν 12 ἀλόγων Κεφάλαιον Κ, ἦν = 797160· ὃ ἦν τὸ δεύτερον ζητούμενον· λείπεται δὲ νὰ εὕρωμεν καὶ τὴν τιμὴν τοῦ κάθε ἀλόγου.

$$\boxed{\mathrm{K} = \Omega \cdot \Pi - \mathrm{A}.}$$

Ἂς διαιρεθῇ τὸ εὑρεθὲν ὁλικὸν τῶν ὅρων Κεφάλαιον Κ, ἐπὶ τὸν τῶν ὅρων Ἀριθμόν, καὶ τὸ Πηλίκον δείξει σοι τὴν τιμὴν ἑκάστου ἀλόγου, ὡς ὁ ἀντικρὺ Τύπος κελεύει· οἷον $\frac{797160}{12} = 66430$· εὕρηται ἄρα καὶ ἡ τιμὴ ἑκάστου ἀλόγου = ὀβολοῖς 66430· ὃ ἦν τὸ γ'. ζητούμενον.

$$\boxed{\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{N}}:}$$

Πρόβλημα Β'.

Ἄνθρωπός τις φιλελεήμων ἐμοίραζεν εἰς τοὺς πτωχοὺς ἐλεημοσύνην, καθ' ἑκάστην ἡμέραν τῆς ἑβδομάδος ὀβολούς, ἐκ τῆς α. ἤγουν Κυριακῆς ἀρχόμενος· τὴν δὲ ἑβδόμην ἡμέραν ἔδωκεν ὀβολοὺς 16384· καὶ εἰς ὅλην τὴν ἑβδομάδα ἔγιναν τὰ ὅσα ἔδωκεν ἴσον 21844· τὸ δὲ κοινὸν Πηλίκον τῶν ὅρων ἦτον 4. πόσους ὀβολοὺς ἔδωκε τὴν α. ἡμέραν;

Λύσις.

Εἰς τοῦτο τὸ Πρόβλημα, δίδοται ὁ μὲν ἔσχατος ὅρος Ω τῶν τε δοθέντων ὀβολῶν τὸ ἄθροισμα εἴτ' οὖν Κεφάλαιον Κ, καὶ τὸ κοινὸν τῶν ὅρων τῆς Προόδου Πηλίκον Π· ζητεῖται δὲ ὁ α. ὅρος Α. Ἂς γένῃ καὶ αὐτό, ὡς ὁ ἀντικρὺ κελεύει Τύπος, καὶ

$$\boxed{\mathrm{A} = \Omega \cdot \Pi + \mathrm{K} - \mathrm{K} \cdot \Pi}$$

ἕξεις τὸν ζητούμενον α. ὅρον Α = 4· οἷον 16384 . 4 = 65536 + 21844 = 87380 − 21844 . 4 = 87376· ὅθεν 87380 − 87376 = 4 = Α· εὕρηται ἄρα ὁ ζητούμενος α. ὅρος Α = 4.

Πρόβλημα Γ'.

Ἄνθρωπός τις ἠγόρασεν ἓξ βόας· καὶ διὰ μὲν τὸν α. βοῦν, ἔδωκε πέντε ὀβολούς· διὰ δὲ τὸν ς'. 15625· καὶ διὰ τοὺς ἓξ ὁμοῦ βόας 19530· πόσον ἄρα ἦτον τὸ κοινὸν τῶν ὅρων Πηλίκον!

Λύσις.

Καὶ εἰς αὐτὸ τὸ Πρόβλημα, δίδοται μὲν ὁ α. τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου ὅρος Α = 5· ὅ, τε ἔσχατος ὅρος Ω = 15625· καὶ τὸ πάντων τῶν ὅρων ἄθροισμα, ἤγουν Κεφάλαιον Κ = 19530· ζητεῖται δὲ τὸ κοινὸν τῶν ὅρων τῆς Προόδου Πηλίκον Π = Χ· Ἂς γένῃ ἡ πρᾶξις καὶ εἰς αὐτό, καθὼς σε διδάσκει ὁ ἀντικρὺ γενικός τε καὶ Συμβολικὸς Τύπος· οἷον 19530 − 5 = 19525 : − 19530 − 15625 = 3905· ὅθεν $\frac{19525}{3905:} = 5 = \Pi$· εὕρηται ἄρα τὸ ζητούμενον κοινὸν τῶν ὅρων Πηλίκον Π = 5.

$$\boxed{\Pi = \frac{\mathrm{K} - \mathrm{A}}{\mathrm{K} - \Omega}:}$$

Πρόβλημα Δ'.

Ἄνθρωπός τις ἠγόρασεν ἓξ πρόβατα· καὶ διὰ μὲν τὸ α. ἔδωκεν ὀβολοὺς 3· διὰ δὲ τὸ ἔσχατον Ω = 729· τὸ δὲ κοινὸν Πηλίκον τῶν ὅρων ἦτον 3 = Π· πόσους ἄρα ὀβολοὺς ἔδωκε διὰ τὰ ἓξ πρόβατα!

Λύσις.

Καὶ εἰς αὐτὸ τὸ Πρόβλημα, δίδοται μὲν ὁ α. ὅρος Α = 3 : ὁ ἔσχατος Ω = 729· καὶ τὸ κοινὸν Πηλίκον τῶν ὅρων τῆς Προόδου Π = 3, νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα, ἢ Κεφάλαιον πάντων τῶν ὅρων τῆς Προόδου Κ = Χ.

Ἂς γένῃ καὶ ἡ πρᾶξις τούτου, ὡς ὁ ἀντικρὺ Τύπος λέγει· οἷον 729 . $3 = 2187 - 3 = \frac{2184}{2:} = 1092 = \mathrm{K}$· εὕρηται ἄρα

ἄρα τὸ ζητούμενον ἄθροισμα, πάντων τῶν ὅρων τῆς Προόδου Κ = 1092, καὶ πόσους ὀβολοὺς ἔδωκε διὰ τὰ ἓξ πρόβατα ὅπου ἠγόρασε.

$$\boxed{K = \frac{\Omega . \Pi - A}{\Pi - 1:}}$$

Πρόβλημα Ε΄.

Ἄλλος ἄνθρωπος ἠγόρασε πολυτίμους τινὰς λίθους· καὶ διὰ μὲν τὴν α΄. λίθον ἔδωκεν ἀργύρια πέντε· διὰ δὲ τὴν ἐσχάτην 78125· τὸ δὲ κοινὸν τῆς Προόδου Πηλίκον, ἦτον πέντε, πόσας ἄρα πολυτίμους λίθους ἠγόρασεν οὗτος!

Λύσις.

Καὶ εἰς αὐτὸ τὸ ὑστερινὸν Πρόβλημα, δίδοται ὁ μὲν α΄. ὅρος Α = 5· ὁ δὲ ἔσχατος ὅρος Ω = 78125. Καὶ τὸ κοινὸν τῶν ὅρων τῆς Προόδου Πηλίκον Π = 5· ζητεῖται δὲ ὁ τῶν ὅρων Ἀριθμὸς Ν = Χ· γενέσθω καὶ τοῦτο, ὡς ὁ περὶ τούτου κελεύει Τύπος· οἷον 78125 . 5 = $\frac{390625}{5}$ = 78125· ὑψωθεὶν δὲ καὶ τὸ Π^{ν}, ἕως οὗ γένηται = τῷ 78125, γνωσθήσεται ὁ ζητούμενος Ἀριθμὸς τῶν ὅρων Ν· οἷον 5 : 25 : 125 : 625 : 3125 : 15625 : 78125 = τῷ Ω· ἄρα ὁ ζητούμενος Ἀριθμὸς τῶν ὅρων Ν, ἤτοι αἱ ἀγορασθεῖσαι πολύτιμοι λίθοι, ἦσαν ἑπτά.

$$\boxed{N = \Pi^{\nu} = \frac{\Omega . \Pi .}{A :}}$$

Τοσαῦτα δὲ καὶ περὶ Γεωμετρικῆς εἰρήσθω μοι Προόδου· ἀλλὰ διὰ τὸ εὐμνημόνευτον, ἐκκείσθωσαν κἀνταῦθα οἱ περὶ ταύτης γενικοὶ Τύποι.

$\Omega = \frac{K . \Pi + A - K}{\Pi :}$ Τύπος α΄. ὅρα §. 247.	$A = \Omega . \Pi + K - K . \Pi .$ Τύπος β΄. ὅρα §. 246.	$K = \frac{\Omega . \Pi - A}{\Pi - 1 :}$ Τύπος γ΄. ὅρα §. 249.
$\Pi = \frac{K - A}{K - \Omega :}$ Τύπος δ΄. ὅρα §. 248.	$N = \Pi^{\nu} = \frac{\Omega . \Pi}{A :}$ Τύπος ε΄. ὅρα §. 250.	

Τέλος τοῦ Γ΄. Βιβλίου.

ΒΙ-

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

Περὶ Ἑταιρείας, ἤγουν Συντροφίας.

§. 251. Ἀφ' οὗ εἴπομεν περὶ τῶν Γεωμετρικῶν τε καὶ Ἀριθμητικῶν Μεθόδων τε καὶ Προβλημάτων, καὶ τῆς λύσεως καὶ ποικίλης πράξεως αὐτῶν, ἐν τῷ προλαβόντι τρίτῳ Βιβλιαρίῳ, ἀλλὰ δὴ καὶ περὶ Ἀριθμητικῆς καὶ Γεωμετρικῆς Προόδου, καὶ τῶν Τύπων αὐτῶν, ἐπάνω εἰς τοὺς ὁποίους προσαρμόζεται κάθε Πρόβλημα, τὸ ὁποῖον ἀνήκει εἰς αὐτούς, καθ' ὅσον ἦτον δυνατὸν συνοπτικῶς τε ἅμα καὶ ἀνελλιπῶς, ἀκόλουθον εἶναι νὰ εἰπῶμεν ὀλίγα τινὰ καὶ εἰς τὸ Δ΄. τοῦτο Βιβλιάριον περὶ Ἑταιρείας· προτάττοντες καὶ εἰς τοῦτο μερικὰ Προβλήματα, καὶ τὴν αὐτῶν Ἑρμηνείαν ἐπιτάττοντες. Ἐπειδὴ πολλά τε καὶ πολυειδῆ Προβλήματα ἔξω ἀπὸ ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα εἰς τὰ ἄλλα Βιβλιάρια εἴπομεν, εἶναι δυνατὸν νὰ μας προβάλλῃ τινάς.

Διὰ τοῦτο λοιπὸν ἐκεῖνα εὔλογον, νὰ εἰπῶ μερικὰ καὶ περὶ Ἑταιρείας, διὰ νὰ ἔχωσι καὶ περὶ αὐτῆς ἰδέαν, οἵ τε Μαθητιῶντες καὶ ἀναγινώσκοντες, καὶ νὰ μὴ ἐντρέπωνται, ὅταν ἤθελε τοὺς προβάλλῃ τινὰς κἀνὲν Πρόβλημα, ἀπὸ ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται εἰς τὰς διαφόρους πράξεις τῆς Ἑταιρείας· ἀλλὰ βοηθούμενοι ἀπὸ τὴν Διδασκαλίαν, τὴν ὁποίαν μέλλομεν νὰ πράξωμεν εἰς καθὲν Πρόβλημα, νὰ κάμνωσι τὴν λύσιν οἱουδήποτε Προβλήματος μὲ εὐκολίαν, ἀνίσως προσέχωσιν εἰς τὰς περὶ ἑκάστου τούτων ἐκτεθησομένας μοι Ἑρμηνείας.

Ὁρισμός.

§. 252. Ἑταιρεία, ἢ συντροφία, εἶναι ὁμόνοια καὶ συνένευσις τινῶν ἀνθρώπων, εἰς τὸ νὰ καταβάλλωσιν ἐκ συμφώνου, χρηματικήν τινα Ποσότητα, διὰ νὰ κερδήσωσιν ἐκ τῆς ἐμπορείας, καὶ νὰ λάβῃ ὁ καθ' εἷς ἐκ τοῦ κέρδους, ἢ τῆς ζημίας, ἀνα-

17

ἀναλόγως μὲ τὴν Ποσότητα τῶν χρημάτων, τὴν ὁποίαν κατέβαλεν εἰς τὴν συντροφίαν.

Πόρισμα Α΄.

Τὸ εἰς αὐτὴν ἄρα ζητούμενον εἶναι, τὸ νὰ μοιράσῃ τις τὸ ἐκ τῆς ἐμπορείας κέρδος, ἢ τὴν ζημίαν, ἀναλόγως μὲ τὴν χρηματικὴν Ποσότητα, τὴν ὁποίαν ὁ καθ' εἷς κατέβαλεν εἰς τὴν συντροφίαν.

Σχόλιον.

Ἐκεῖνοι, οἵτινες καταγίνονται εἰς τὴν ἐμπορείαν, καὶ πραγματείαν, μὲ τὸ νὰ προβλέπωσιν, ὅτι δὲν τοὺς ἐξαρκεῖ μόνη ἡ Ποσότης τῶν χρημάτων, τὴν ὁποίαν ἀνὰ χεῖρας ἔχουσι, πολλάκις λαμβάνουσι καὶ ἄλλους τινὰς συντρόφους εἰς τὴν πραγματείαν, τὴν ὁποίαν μέλλουσι νὰ κάμωσι· διὰ τοῦτο ἀφ' οὗ συμφωνήσωσι μερικοὶ διὰ νὰ κάμωσι μίαν κοινὴν πραγματείαν, καταβάλλει ὁ καθ' εἷς ἀπὸ αὐτοὺς, εἰς τὸ μέσον τῆς συντροφίας, χρηματικήν τινα Ποσότητα, κατὰ τὴν δύναμίν του· ἔπειτα πραγματεύονται· καὶ ἀνίσως ἤθελε τύχῃ νὰ κερδήσωσιν, ἢ καὶ νὰ ζημιωθῶσιν ἀπὸ αὐτὴν, ἀφ' οὗ λογαριασθῶσι, λαμβάνει ὁ καθ' εἷς τὸ ἀνάλογον μέρος ἐκ τοῦ κέρδους, ἢ τῆς ζημίας, μὲ τὴν χρηματικὴν Ποσότητα ὅπου κατέβαλεν εἰς τὴν συντροφίαν. Διὰ τοῦτο λοιπὸν ἡ Μέθοδος τῆς Ἑταιρείας, εἶναι πολλὰ χρήσιμος, μάλιστα δὲ ἀναγκαία, διὰ νὰ μοιράσῃ τις τὸ ἐξ αὐτῆς κέρδος, ἢ τὴν ζημίαν, ἀναλόγως μὲ τὴν Ποσότητα, τὴν ὁποίαν κατέβαλεν ὁ καθ' εἷς εἰς τὸ μέσον αὐτῆς τῆς συντροφίας.

Πόρισμα Β΄.

Εἰς τὴν Μέθοδον ἄρα τῆς Ἑταιρείας, τὸ Κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον συντίθεται ἀπὸ τὴν χρηματικὴν Ποσότητα, ὅπου κατέβαλον ὁμοῦ ὅλοι οἱ Ἑταῖροι, θέλει ἔχῃ Ἀναλογίαν μὲ τὴν Ποσότητα, τὴν ὁποίαν κατέβαλεν ὁ καθ' εἷς, κατὰ τὴν Ἀναλογίαν τοῦ ὅλου κέρδους, ἢ τῆς ζημίας, ὅπου ἔχει πρὸς τὸ ἀνῆκον κέρδος, ἢ τὴν ζημίαν ὅπου ἀνήκει εἰς κάθε μίαν κατὰ μέρος καταβληθεῖσαν Ποσότητα.

Πρό-

Πρόβλημα Α΄.

§. 253. Κάθε ὁλικὴ Ποσότης, ἡ ὁποία ἤθελε μας δοθῇ, νὰ τὴν μοιράσωμεν εἰς μέρη, τοιαύτης λογῆς, ὥστε ὅπου νὰ φυλάττωσι τὴν δοθεῖσαν Ἀναλογίαν ἑτέρου τινὸς πράγματος, καὶ αὐτοῦ δοθέντος.

Λύσις.

Εἰς λύσιν τοῦ Προβλήματος τούτου, καὶ τῶν ὁμοίων αὐτῷ, ὅταν θέλωμεν νὰ μοιράσωμεν τὸ ἐκ τῆς ἐμπορείας προελθὸν κέρδος, ἢ τὴν ζημίαν, ἑταίρων τινῶν καὶ συμμετόχων, α. νὰ συνάψωμεν εἰς ἕνα ὁλικὸν Κεφάλαιον, ὅλα τὰ μέρη ὅπου καταβλήθησαν ἀπὸ τὸν καθ' ἕνα, εἰς τὴν συντροφίαν, τὸν δὲ γενόμενον Ἀριθμὸν, νὰ τὸν λάβωμεν ἀντὶ τοῦ α. ὅρου τῆς τῶν Τριῶν Ὀρθῆς Μεθόδου· τὸ δὲ κέρδος, ἢ τὴν ζημίαν, ἀντὶ τοῦ β΄. καὶ ἀντὶ τοῦ γ΄. ὅρου, νὰ λάβωμεν τὰ μέρη ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα κατέβαλεν ὁ καθ' εἷς ξεχωριστὰ εἰς τὴν συντροφίαν. Καὶ ἀφ' οὗ γένῃ ἡ πρᾶξις κατὰ τὴν συνήθειαν τῆς μεθόδου (§. 174.) ὁ δ΄. ὅρος, ὅστις ἤθελεν εὑρεθῇ εἰς κάθε μίαν πρᾶξιν, ἔσται δηλωτικὸς ἐκείνου τοῦ μέρους, τὸ ὁποῖον ἀνήκει εἰς τὸν καθ' ἕνα ἐκ τοῦ κέρδους, ἢ τῆς ζημίας.

Ὑπόδειγμα Α΄.

Τῆς Ἑταιρείας, ἐπὶ τὴν Ἁπλῆν Μέθοδον τῶν Τριῶν ἀναγόμενον.

Τρεῖς συνέμποροι, κάμνοντες συντροφίαν, ὁ μὲν α. κατέβαλεν ἀργύρια 300, ὁ δὲ β΄. 600, καὶ ὁ γ΄. 900· ἐκέρδησαν δὲ, ἀργύρια 900· πόσα ἄρα τυχαίνουσι τὸν καθ' ἕνα νὰ λάβῃ, ἐκ τοῦ ῥηθέντος κέρδους, κατ' Ἀναλογίαν τῶν ἀργυρίων ὅπου κατέβαλεν εἰς τὴν συντροφίαν!

Λύ-

Λύσις.

Ἄς γένῃ ἡ πρᾶξις, κατὰ τὴν ἀνωτέρω Ἑρμηνείαν·

οἷον 300 + 600 + 900 = 1800 : 900. (α'. β'.) λαμβάνει ἄρα ὁ μὲν α'. ἀργύρια 150. ὁ δὲ β'. 300. καὶ ὁ γ'. 450.

300 Φ = 150.	ὁ α'.
600 Χ = 300.	ὁ β'.
900 Ψ = 450.	ὁ γ'.
900.	

Δεῖξις.

Ὅτι δὲ ἡ πρᾶξις αὕτη ὀρθῶς καὶ μετὰ λόγου ἐγένετο, δείκνυται· ἔχει γὰρ τὸ ὅλον Κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον κατέβαλον καὶ οἱ τρεῖς σύντροφοι, πρὸς τὸ ὅλον κέρδος ὁποῦ ἔκαμαν, ὡς ἔχει ἡ καθ' ἑνὸς καταβληθεῖσα Ποσότης, πρὸς τὸ ἀνῆκον αὐτῇ μερικὸν κέρδος· καὶ ἔστιν ὡς ὁ α'. ὅρος 1800 : πρὸς τὸν β'. 900 :: ὁ γ'. 300 : πρὸς τὸν δ'. 150· καὶ εἰς τὰ ἴδια μερίδια καὶ ἑπομένως τὸ ὑπὸ τῶν δύω ἄκρων γενόμενον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων γενομένῳ· (§. 168.) ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ὁλικὸν τῶν καταβληθέντων ἀργυρίων Κεφάλαιον, πρὸς τὸ ὁλικὸν κέρδος, οὕτως ἡ ὑφ' ἑκάστου καταβληθεῖσα Ποσότης, πρὸς τὸ ἀνῆκον αὐτῇ, ὃ ἔλαβε κέρδος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὑπόδειγμα Β'.

Ἄλλοι τρεῖς συνέμποροι, κάμνοντες συντροφίαν, ὁ μὲν α'. κατέβαλεν ἀργύρια 1000· ὁ δὲ β'. 800. καὶ ὁ γ'. 600. ἐκέρδησαν δὲ ἀργύρια 780· πόσα ἄρα τυχαίνουσι νὰ λάβῃ ὁ καθ' εἷς, ἐκ τοῦ ῥηθέντος κέρδους, κατ' Ἀναλογίαν τῶν ἀργυρίων, τὰ ὁποῖα κατέβαλλεν εἰς τὴν συντροφίαν!

Λύσις.

Ἄς γένῃ καὶ εἰς αὐτὸ ἡ πρᾶξις ὡς ἄνωθεν· οἷον 1000 + 800 + 600 = 2400 : 780. (α'. β'.)

ὅθεν ἔσται· | 2400 : 780 ::

1000. Φ = 325.	ὁ α'.
800. Χ = 260.	ὁ β'.
600. Ψ = 195.	ὁ γ'.
780	

Τυχαίνουν ἄρα τοῦ μὲν α'. διὰ τὰ 1000 ἀργύρια ὁποῦ ἔβαλεν ἀργ. 325. τοῦ δὲ β'. διὰ τὰ 800, ἀργ. 260. καὶ τοῦ γ'. διὰ τὰ 600, ἀργ. 195. τὰ ὁποῖα συναπτόμενα, κάμνουσι τὸν 780 Ἀριθμὸν, ἴσον μὲ τὸ ὁλικὸν διάφορον. ἄρα κτλ.

Ὑπόδειγμα Γ'.

Τρεῖς ἄνθρωποι ἐδάνεισαν εἰς ἕνα Πραγματευτὴν, μίαν Ποσότητα ἀργυρίων· ἀπὸ τοὺς ὁποίους ὁ μὲν α'. τοῦ ἐδάνεισεν ἀργύρια 2000· ὁ δὲ β'. 1200· καὶ ὁ γ'. 800· τὰ ὁποῖα γίνονται 4000· καὶ ἐπειδὴ ἐκεῖνος ὁ Πραγματευτὴς ἐδυστύχησε, καὶ μὴ ἔχων νὰ δώσῃ τὰ δάνεια, ἔφυγε κρυφίως εἰς ἄλλον τόπον· οἱ δὲ δανεισταὶ ἐκεῖνοι, μαθόντες τοῦτο, ἔδωκαν κατ' αὐτοῦ ἀγωγὴν εἰς τὸν Διοικητὴν· καὶ ἐκεῖνος ἀπεφάσισε νὰ πωληθῶσιν ὅλα τὰ κτήματα τοῦ Πραγματευτοῦ, καὶ νὰ λάβῃ ὁ καθ' εἷς ἀπὸ τὴν τιμὴν αὐτῶν, τὸ μέρος του, κατ' Ἀναλογίαν τῶν ἀργυρίων ὁποῦ ἐδάνεισε τοῦ ῥηθέντος· ἀφ' οὗ λοιπὸν τὰ ἐπώλησαν ὅλα, ἐσυνάχθησαν ἀργύρια 3000· πόσα ἄρα τυχαίνουν τὸν καθ' ἕνα νὰ λάβῃ ἀπὸ αὐτά! καὶ πόσα νὰ ζημιωθῇ ἀπὸ τὸ Κεφάλαιον ὁποῦ ἔδωκε!

Λύσις.

Καὶ εἰς αὐτὸ τὸ Ὑπόδειγμα, α'. μὲν ὅρος εἶναι τὰ 4000 ἀργύρια, τὰ ὁποῖα τοῦ ἐδάνεισαν καὶ οἱ τρεῖς. β'. δὲ, τὰ 3000, ὁποῦ ἐτιμήθησαν τὰ κτήματά του. Καὶ γ'. τὰ ἀργύρια, τὰ ὁποῖα ὁ καθ' εἷς ξεχωριστὰ τοῦ ἐδάνεισεν.

$$\text{ὅθεν ἔσαι}\cdot\ 4000:3000::\begin{cases}\overset{\alpha'.}{2000}\\ \overset{\beta'.}{1200}\\ \overset{\gamma'.}{800}\end{cases}\div 4000:3000::\begin{cases}2000.\Phi = 1500.\\ 1200.X = 900.\\ 800.\Psi = 600.\\ \hline 3000.\end{cases}$$

Τυχαίνου ἄρα εἰς μὲν τὸν α'. διὰ τὰς 2000, νὰ λάβῃ 1500· εἰς δὲ τὸν β'. διὰ τὰ 1200, τὰ 900· καὶ εἰς τὸν γ'. διὰ τὰ 800, νὰ λάβῃ 600· τὰ ὁποῖα συναθροιζόμενα, γίνονται 3000· ἴσον δηλ. μὲ τὴν τιμὴν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἐπωλήθησαν τὰ κτήματα τοῦ χρεοφειλέτου· ὃ ἦν τὸ α'. ζητούμενον.

Καὶ ἐπειδὴ ζητεῖται καὶ ἡ τοῦ καθ' ἑνὸς ἀνάλογος ζημία, ἂς ἀφαιρεθῇ ἐκεῖνο τὸ μέρος ὁποῦ ὁ καθ' εἷς ἔλαβεν, ἀπὸ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔδωκε, καὶ τὸ ἐναπολειφθὲν θέλει σοι δείξῃ τοῦ καθ' ἑνὸς τὴν ζημίαν.

οἷον

2000 — 1500 = 500:	τοῦ α'.
1200 — 900 = 300:	τοῦ β'.
800 — 600 = 200:	τοῦ γ'.

Τὸ ὁποῖον ἦτον τὸ β'. ζητούμενον. ἄρα κτλ.

Ὑπόδειγμα Δ'.

Τρεῖς συνέμποροι, ἀγοράσαντες ἔκ τινος Πραγματευτοῦ ἀπὸ κάποιον εἶδος πανίου πήχεις 120, ἔδωκαν δι' αὐτὸ ἀργύρ. 600· καὶ ἀφ' οὗ τὸ ἐμοίρασαν ἀναμεταξύ των, ὁ μὲν α'. ἔλαβε πήχεις 50· ὁ δὲ β'. 45· καὶ ὁ γ'. 25. πόσα ἄρα χρεωστεῖ νὰ πληρώσῃ ὁ καθ' εἷς ἐξ αὐτῶν, κατ' Ἀναλογίαν τῶν πήχεων ὁποῦ ἔλαβε;

Λύσις.

Καὶ εἰς αὐτὸ τὸ Ὑπόδειγμα, ἢ μᾶλλον εἰπεῖν Πρόβλημα, α'. μὲν ὅρος εἶναι οἱ 120 πήχεις· β'. δὲ τὰ 600. ἀργ. τὰ ὁποῖα ἔδωκαν δι' αὐτούς· καὶ γ'. οἱ πήχεις, τοὺς ὁποίους καθ' εἷς ἔλαβεν.

ὅθεν

$$\text{ὅθεν ἔσαι}\cdot\ \div 120:600::\begin{cases}50:\Phi = 250:\ \text{ὁ α'.}\\ 45:X = 225:\ \text{ὁ β'.}\\ 25:\Psi = 125:\ \text{ὁ γ'.}\\ \hline 600.\end{cases}$$

Χρεωστεῖ ἄρα νὰ δώσῃ ὁ μὲν α'. διὰ τοὺς 50 πήχεις, ἀργύρ. 250· ὁ δὲ β'. διὰ τοὺς 45, ἀργ. 225· καὶ ὁ γ'. διὰ τοὺς 25, ἀργύρια 125· τὰ ὁποῖα συναπτόμενα, κάμνουσιν ἀργύρια 600 τὴν ὁλικὴν τιμήν· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Ὑπόδειγμα Ε'.

Τρία ἁπλᾶ πράγματα ἐμβαίνουσιν εἰς κατασκευὴν ἰατρικοῦ τινος· καὶ ἡ μὲν τοῦ α'. δόσις, ἂς εἶναι καθ' ὑπόθεσιν, ἴση = 8 οὐγγίαις· ἡ δὲ τοῦ β'. = 5· καὶ ἡ τοῦ γ'. = 3· πρέπει λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὰς ἀφ' ἑκάστου ἐπιζητουμένας δόσεις, ὥστε ὁποῦ νὰ γένῃ τὸ σύνθετον ἰατρικὸν = 8 λίτρας.

Λύσις.

Εἰς λύσιν τούτου, καὶ τῶν ὁμοίων αὐτῷ, Προβλημάτων, α'. πρέπει νὰ συνάψωμεν τὰς ὑποτεθείσας ἁπλᾶς οὐγγίας· τὸν δὲ γενόμενον Ἀριθμὸν, νὰ τὸν λάβωμεν ἀντὶ τοῦ α'. ὅρου τῆς τῶν Τριῶν Ὀρθῆς Μεθόδου· (§. 174.) β'. νὰ ἀναλύσωμεν τὰς ζητουμένας 8 λίτρας εἰς οὐγγίας, διὰ νὰ γένωσιν ὁμογενῆ· καὶ τὸν γενόμενον Ἀριθμὸν, νὰ τὸν λάβωμεν ἀντὶ τοῦ β'. ὅρου· καὶ ἕκαστον τῶν ληφθεισῶν ἁπλῶν οὐγγιῶν, ἀντὶ τοῦ γ'. πράξεως δὲ γενομένης ὡς ὁ ἀντικρὺ γενικὸς κελεύει Τύπος, θέλουσιν εὑρεθῇ αἱ Ποσότητες ὁποῦ πρέπει νὰ λάβωμεν ἀφ' ἑκάστου τῶν ἁπλῶν δόσεων, πρὸς κατασκευὴν τῶν ζητουμένων 8 λιτρῶν τοῦ ἰατρικοῦ· οἷον $8 + 5 + 3 = \overset{\alpha'.}{16}$. Καὶ $8 . 8 = \overset{\beta'.}{64}$.

$$\boxed{\Delta = \frac{B\ .\ \Gamma}{A:}}$$

$$\text{ἔσαι οὖν}\cdot\ \div 16:64::\begin{cases}8:\Phi = 32.\\ 5:X = 20.\\ 3:\Psi = 12.\end{cases}\Longrightarrow \frac{64}{8:} = 8.$$

Ἐμβαίνουσιν ἄρα ἐκ μὲν τοῦ α'. ἁπλοῦ, οὐγγίαι 32· ἐκ δὲ τοῦ β'. οὐγγίαι 20· καὶ ἐκ τοῦ γ'. οὐγγίαι 12· αἵτινες συναπτόμεναι ποιοῦσι τὸν 64 Ἀριθμόν· οὗ τινος διαιρεθέντος ἐ-

πὶ

πὶ 8· (τοσαῦται γὰρ οὐγγίαι κάμνουσι μίαν λίτραν) παράγει Πηλίκον λίτρας 8· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Ὑπόδειγμα Ϛʹ.

Εἰς τὸ νὰ κατασκευασθῇ μία εὔχρηστος πυρῖτις κόνις, ἤγουν ἕνα καλὸν μπαροῦτι, ἐμβαίνουσι 16 μέρη νίτρου, 2 θειαφίου, καὶ 3 ἀνθράκων, ἤγουν καρβούνων· μᾶς χρειάζεται δὲ νὰ κατασκευάσωμεν 2000 ὀκάδες μπαροῦτι· πόσον ἄρα πρέπει νὰ λάβωμεν ἀπὸ κάθε ἓν εἶδος τῶν ῥηθέντων, διὰ νὰ κάμωμεν αὐτὴν τὴν Ποσότητα!

Λύσις.

Γενέσθω ὡς ἄνωθεν· οἷον $16 + 2 + 3 = 21$.

ὅθεν ἔσται· $\div\ 21 : 2000 :: \left\{ \begin{array}{l} 16 : \Phi = 1523\,\frac{17}{21} \\ 2 : X = 190\,\frac{10}{21} \\ 3 : \Psi = 285\,\frac{15}{21} \end{array} \right\}$ ὀκάδ. 2000.

Ἐμβαίνουσιν ἄρα ἐκ μὲν τοῦ νίτρου ὀκάδ. $1532 + \frac{17}{21}$· ἐκ δὲ τοῦ θειαφίου, ὀκάδες $190\,\frac{10}{21}$· καὶ ἐκ τῶν ἀνθράκων ὀκάδες $285\,\frac{15}{21}$· τὰ ὁποῖα συναπτόμενα· ἐκ μὲν τῶν Κλασμάτων, γίνονται ὀκάδ. 2· ἐκ δὲ τῶν Ἀκεραίων, ὀκάδες 1998· ὅθεν $1998 + 2 = 2000$· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Καὶ περὶ μὲν τῆς Ἑταιρείας τῆς ἀναγομένης ἐπὶ τὴν Ὀρθὴν Μέθοδον τῶν Τριῶν, εἶναι ἱκανὰ τὰ ἐκτεθέντα Ὑποδείγματα· τώρα δὲ ἂς εἴπωμεν μερικὰ ἀπὸ ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἀνάγονται εἰς τὴν Πλαγίαν Μέθοδον τῶν Τριῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Βʹ.

Περὶ τῆς ἐπὶ τὴν Πλαγίαν Μέθοδον τῶν Τριῶν ἀναγομένων Ὑποδειγμάτων τῆς Ἑταιρείας.

Ὑπόδειγμα Αʹ.

§. 254. **Ἄ**νδρες 4, κάμνοντες συντροφίαν, κατέβαλον ἀργύρια 12000· πραγματευσάμενοι δὲ, ἐκέρδησαν ἀργ. 2500· ἀπὸ τὰ ὁποῖα, ὁ μὲν αʹ. ἔλαβεν εἰς τὸ μερίδιόν του 900· ὁ δὲ βʹ. 750· καὶ ὁ γʹ. 600· καὶ ὁ δʹ. 250· ζητεῖται λοιπὸν ἡ Ποσότης τῶν ἀργυρίων, ὅπου κατέβαλεν ὁ καθ᾽ εἷς ἀπὸ αὐτοὺς εἰς τὴν συντροφίαν.

Λύσις.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου, ἂς λάβωμεν διὰ μὲν τὸν αʹ. ὅρον, τὴν ὁλικὴν Ποσότητα τῶν ἀργυρίων, τὴν ὁποίαν κατέβαλον καὶ οἱ 4 ὁμοῦ εἰς τὴν συντροφίαν, δηλ. τὰ 12000· διὰ δὲ τὸν βʹ. ὅρον, τὸ ὁλικὸν κέρδος, δηλ. τὰ 2500· καὶ διὰ τὸν γʹ. τὴν μερικὴν Ποσότητα ὅπου ἔλαβεν ὁ καθ᾽ εἷς εἰς τὸ μερίδιόν του, ἐκ τοῦ ῥηθέντος διαφόρου, δηλ. τὰ 900, τὰ 750, τὰ 600, καὶ τὰ 250· καὶ ἐπειδὴ ἡ Ἀναλογία εἶναι Πλαγία, (διδομένου γὰρ τοῦ δʹ. ὅρου, ζητεῖται ὁ γʹ.) ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ αʹ. ὅρος μὲ κάθε ἕνα ἀπὸ ἐκείνους ὅπου ἔχουν γʹ. ὅρου τάξιν· τὰ δὲ γενόμενα διαιρεθέντα ἐπὶ τὸν βʹ. ὅρον, τὰ Πηλίκα ἔσονται τὰ καταβληθέντα ἀργύρια ὑφ᾽ ἑκάστου ἐν τῇ Ἑταιρείᾳ· ὡς ὁ ἀντικρὺ παρίστησι Τύπος.

$$\boxed{\Gamma = \frac{A \cdot \Delta}{B}}$$

οἷον $\div\ \overset{\alpha'}{12000} : \overset{\beta'}{2500} :: \left\{ \begin{array}{l} \overset{\gamma'}{900} : \Phi = 4320.\ \text{ὁ } \alpha'. \\ 750 : X = 3600.\ \text{ὁ } \beta'. \\ 600 : \Psi = 2880.\ \text{ὁ } \gamma'. \\ 250 : \Upsilon = 1200.\ \text{ὁ } \delta'. \\ \hline \qquad\quad 12000 \end{array} \right.$

Ἄρα ὁ μὲν α΄. ἔβαλεν ἀργύρια = 4320· ὁ δὲ β΄. 3600· ὁ δὲ γ΄. 2880· καὶ ὁ δ΄. 1200· τὰ ὁποῖα συναπτόμενα γίνονται = 12000: δηλ. ὅσα ἔβαλαν οἱ τέσσαρες ὁμοῦ.

Καὶ ὁ μὲν τρόπος τῆς Ἁπλῆς Ὀρθῆς τε καὶ Πλαγίας Μεθόδου τῆς Ἑταιρείας εἶναι τοιοῦτος, ὅ,τι λογῆς τὸν ὑποθέσαμεν· ἀλλ᾽ ἐπειδὴ εἶναι δυνατὸν νὰ γένῃ καὶ κατ᾽ ἄλλον τρόπον μικτὸν, ἔκ τε τῆς Ὀρθῆς καὶ Πλαγίας Μεθόδου τῶν Τριῶν, ἂς βαλθῇ καὶ περὶ τοῦ τοιούτου τρόπου ἓν Ὑπόδειγμα ἀπὸ ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἀνάγονται εἰς αὐτόν.

Ὑπόδειγμα Β΄.

Τρεῖς Τραπεζῖται, βαλόντες μίαν Ποσότητα ἀργυρίων, ἐσυμφώνησαν ἀναμεταξύ των, ὅτι τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον ἤθελαν ἀποκτήσωσιν ἀπὸ τὴν καταβληθεῖσαν Ποσότητα καὶ τῶν Τριῶν ὁμοῦ, ὡσὰν ὁποῦ εἶναι ἀπὸ μίαν κοινὴν Ἑταιρείαν, ἢ συντροφίαν, νὰ μοιράζηται ἀναλόγως τῆς ὑφ᾽ ἑκάστου καταβληθείσης Ποσότητος. Καὶ τοῦ μὲν α΄. ἡ Ποσότης ἦν ἀργύρια 3000· ἡ δὲ τοῦ β΄. 4500· ἡ δὲ τοῦ γ΄. Ποσότης δὲν εἶναι γνωστὴ πόση ἦν· ἐκέρδησαν δὲ, ἀπό τε τὴν ἀλλαγὴν τῶν ἀργυρίων καὶ ἀπὸ τὰ κατὰ διαφόρους καιροὺς δανείσματα, ἀργύρια, 2600· ἀπὸ τὸ ὁποῖον κέρδος, ἔλαβεν ὁ γ΄. Τραπεζίτης εἰς τὸ μερίδιόν του, ἀργύρια 900· ζητεῖται λοιπὸν ἥτε Ποσότης τῶν ἀργυρίων, τὴν ὁποίαν κατέβαλεν εἰς τὴν συντροφίαν, καὶ τὸ μέρος ἐκ τοῦ ῥηθέντος κέρδους, ὁποῦ ἀνήκει εἴς τε τὸν α΄. καὶ β΄. Τραπεζίτην, κατ᾽ Ἀναλογίαν τῆς Ποσότητος τῶν ἀργυρίων, ὁποῦ κατέβαλεν ὁ καθ᾽ εἷς εἰς τὴν συντροφίαν.

Λύσις.

Εἰς λύσιν τοῦ Προβλήματος τούτου, α΄. νὰ ἀφαιρέσωμεν ἐκ τοῦ κέρδους, ἐκεῖνο τὸ μέρος, τὸ ὁποῖον ἔλαβεν ὁ γ΄. Τραπεζίτης. Καὶ ἐκεῖνο ὁποῦ ἀπομείνῃ, νὰ τὸ λάβωμεν ἀντὶ τοῦ α΄. ὅρου· β΄. ἀφ᾽ οὗ δὲ συνάψωμεν τὴν Ποσότητα τῶν ἀργυρίων, τὴν ὁποίαν κατέβαλον ὁμοῦ ὅ,τε α΄. καὶ β΄. Τραπεζίτης, νὰ τὴν λάβωμεν ἀντὶ τοῦ β΄. ὅρου· καὶ τὴν Ποσότητα ὁποῦ ἔλαβεν ἐκ τοῦ κέρδους ὁ γ΄. Τραπεζίτης, ἀντὶ τοῦ γ΄. ὅρου· οἷον 2600 − 900 = $\overset{α'}{1700}$. καὶ 3000 + 4500 = $\overset{β'}{7500}$: καὶ $\overset{γ'}{900}$· λοιπὸν ἀφ᾽

ἀφ᾽ οὗ τεχθῶσιν οἱ ὅροι τέτοιας λογῆς, δικαίως ἤθελον εἰπῇ τινάς. Ἀνίσως ὁ ἐκ τοῦ κέρδους ἐναπολειφθεὶς Ἀριθμὸς 1700, δίδει Ποσότητα ἀργυρίων 7500, ὁ 900 ἄρα, ὁποίαν Ποσότητα εἶχεν! Πολλαπλασιαζομένου δὲ τοῦ β΄. ὅρου ἐπὶ τὸν γ΄. καὶ τοῦ γενομένου, ἐπὶ τὸν α΄. μεριζομένου, τὸ Πηλίκον θέλει φανερώσῃ τὴν ζητουμένην Ποσότητα τοῦ γ΄. Τραπεζίτου· οἷον 1700 : 7500 :: 900 = 3970 $\frac{10}{17}$· ὁ ἄρα γ΄. Τραπεζίτης κατέβαλεν εἰς τὴν συντροφίαν ἀργύρια 3970 $\frac{10}{17}$ = παράδ. 23 $\frac{1}{3}$· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ καὶ τὸ ἐκ τοῦ κέρδους μέρος ὁποῦ ἀνήκει εἴς τε τὸν α΄. καὶ β΄. Τραπεζίτην, ἂς γένῃ πάλιν διπλῆ Μέθοδος τῶν Τριῶν, ἔχουσα διὰ μὲν α΄. ὅρον, τὴν Ποσότητα ὁποῦ κατέβαλον ὁμοῦ ὁ α΄. καὶ β΄. Τραπεζίτης, δηλ. τὰ $\overset{α'}{7500}$ ἀργύρ. ἐκεῖνο δὲ τὸ μέρος ὁποῦ ἀπέμεινεν ἐκ τοῦ κέρδους, τὸ ὁποῖον ἔλαβεν ὁ γ΄. Τραπεζίτης, δηλ. τὰ $\overset{β'}{1700}$, ἀντὶ τοῦ β΄. ὅρου· καὶ τὴν Ποσότητα ὁποῦ κατέβαλεν ὁ α΄. καὶ β΄. Τραπεζίτης χωριστὰ, ἀντὶ τοῦ γ΄. δηλ. τὰ, 3000, καὶ 4500.

$$\text{ἔσται οὖν} \therefore 7500 : 1700 :: \left\{ \begin{array}{l} 3000 : \Phi = 680 : \text{τὸ τοῦ α΄.} \\ 4500 : X = 1020 : \text{τὸ τοῦ β΄.} \\ \underline{900} : \text{τὸ τοῦ γ΄.} \\ 2600. \end{array} \right.$$

Λαμβάνει ἄρα ἐκ τοῦ κέρδους, ὁ μὲν α΄. ἀργύρ. 680· διὰ τὰ 3000, ὁποῦ κατέβαλεν· ὁ δὲ β΄. 1020, διὰ τὰς 4500· ἔλαβε δὲ καὶ ὁ γ΄. 900, διὰ τὰ 3970 $\frac{10}{17}$· ὁποῦ εὑρέθησαν ὅτι κατέβαλεν εἰς τὴν συντροφίαν· τὰ ὁποῖα συναπτόμενα, κάμνουσι τὸ ὁλικὸν κέρδος = 2600· ὃ ἦν τὸ β΄. ζητούμενον. ἄρα κτλ.

Καὶ περὶ μὲν τῆς ἐπὶ τὴν Ὀρθὴν Πλαγίαν τε καὶ Σύμμικτον Μέθοδον τῶν Τριῶν ἀναγομένης Ἑταιρείας εἶναι ἱκανὰ τὰ ἐκτεθέντα Ὑποδείγματα, καὶ ἡ τῆς πράξεως αὐτῶν Ἑρμηνεία· τώρα δὲ, ἂς εἰπῶμεν μερικὰ ἀπὸ ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἀνάγονται ἐπὶ τῆς Ὀρθῆς Συνθέτου Μεθόδου τῆς Ἑταιρείας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

Περὶ τῆς Ὀρθῆς Συνθέτου Μεθόδου τῆς Ἑταιρείας.

Ὑπόδειγμα Α΄.

§. 255. Τρεῖς συνέμποροι κάμνοντες συντροφίαν, ὁ μὲν α΄. κατέβαλεν ἀργύρια 2600, καὶ ἐστάθησαν μῆνας 6· ὁ δὲ β΄. 2300, καὶ ἐστάθησαν μῆνας 8· καὶ ὁ γ΄. κατέβαλεν ἀργύρια 1800, καὶ ἐστάθησαν μῆνας 12· ἐκέρδησαν δὲ ἀργύρια 2450· ζητεῖται λοιπὸν τὸ μέρος ἐκ τοῦ ῥηθέντος κέρδους ὁποῦ τυχαίνει νὰ λάβῃ ὁ καθ᾽ εἷς, κατ᾽ Ἀναλογίαν τῆς Ποσότητος τῶν ἀργυρίων ὁποῦ κατέβαλε, καὶ τοῦ χρόνου, ὁποῦ ἐστάθησαν τὰ ἀργύριά του εἰς τὴν συντροφίαν.

Λύσις.

Εἰς λύσιν τούτου καὶ τῶν ὁμοίων αὐτοῦ, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν Ποσότητα τῶν ἀργυρίων, τὴν ὁποίαν κατέβαλεν ὁ καθ᾽ εἷς εἰς τὴν συντροφίαν, μὲ τὸν καιρὸν ὁποῦ ἐστάθησαν εἰς αὐτήν· καὶ ἐκείνους τοὺς Ἀριθμοὺς ὁποῦ ἤθελαν γένῃ, νὰ τοὺς συνάψωμεν εἰς ἕνα ὁλικὸν Κεφάλαιον, καὶ νὰ τὸ λάβωμεν ἀντὶ τοῦ α΄. ὅρου· τὸν δὲ Ἀριθμὸν τοῦ κέρδους, ἀντὶ τοῦ β΄. καὶ τὴν Ποσότητα ὁποῦ κατέβαλεν ὁ καθ᾽ εἷς πολλαπλασιασμένην μὲ τὸ χρονικὸν διάστημα, ἀντὶ τοῦ γ΄. ὅρου· καὶ ἔπειτα νὰ τὴν φέρωμεν εἰς τὴν Ἁπλῆν Μέθοδον τῶν Τριῶν· τριπλῆς δὲ πράξεως γενομένης, τὰ Πηλίκα θέλουν μᾶς δείξῃ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον τυχαίνει τὸν καθ᾽ ἕνα ἐκ τοῦ ῥηθέντος κέρδους.

$$\begin{array}{lll} \text{οἷον } 2600 \,.\, 6 = 15600 : & \text{ἡ τοῦ α΄. Ποσότης.} \\ 2300 \,.\, 8 = 18400 : & \text{ἡ τοῦ β΄.} \\ 1800 \,.\, 12 = \underline{21600} : & \text{ἡ τοῦ γ΄.} \\ 55600. & \end{array}$$

$$\text{ὅθεν} \div 55600 : 2450 :: \left\{ \begin{array}{l} 15600 : \Phi = 687 + 16\tfrac{1}{3} \ \text{παράδ.} \\ 18400 : X = 810 + 31\tfrac{2}{3} \\ 21600 : \Psi = \underline{951} + \underline{23}. \\ \qquad\qquad\quad 2450 \,.\, 00 \end{array} \right.$$

Τυχαίνει ἄρα νὰ λάβῃ ἐκ τοῦ ῥηθέντος κέρδους, ὁ μὲν α΄. ἀργύρια 687 + παρ. 16 $\frac{1}{3}$· διὰ τὰς 2600 ἀργ. ὁποῦ ἐστάθησαν εἰς τὴν συντροφίαν μῆνας 6· ὁ δὲ β΄. 810 + παράδ. 31 $\frac{2}{3}$, διὰ τὰς 2300· τὰ ὁποῖα ἐστάθησαν μῆνας 8· καὶ ὁ γ΄. 951 + παράδ. 32, διὰ τὰ 1800 ὁποῦ ἐστάθησαν μῆνας 12· τὰ ὁποῖα συναπτόμενα, ἐκ μὲν τῶν Κλασμάτων γίνονται ἀργ. 2· ἐκ δὲ τῶν Ἀκεραίων ἀργύρ. 2448· ὅθεν 2448 + 2 = 2450· ἴσον μὲ τὸ ῥηθὲν ὁλικὸν κέρδος· ὁ ἦν τὸ ζητούμενον. ἄρα κτλ.

Ὑπόδειγμα Β΄.

Τρεῖς πάλιν συνέμποροι, κάμνοντες συντροφίαν, ἐσυμφώνησαν ἀναμεταξύ των, ὅτι ἀπὸ τὸ κέρδος ὁποῦ ἤθελαν κάμῃ, α΄. νὰ λαμβάνῃ καθ᾽ ἕνας ἀπὸ αὐτοὺς τόκον διὰ τὰ ἀργύρια ὁποῦ κατέβαλεν εἰς τὴν συντροφίαν, πρὸς 12 τὰ 100 τὸν χρόνον, φυλαττομένου καὶ τοῦ χρονικοῦ διαστήματος ὁποῦ ἐστάθησαν τὰ ἀργύριά των, εἰς τὴν αὐτὴν συντροφίαν. Καὶ ἔπειτα νὰ μοιράσωσι καὶ τὸ ἐναπολειφθὲν κέρδος, κατ᾽ Ἀναλογίαν τῆς καταβληθείσης Ποσότητος τῶν ἀργυρίων ἑκάστου· ἀφ᾽ οὗ λοιπὸν ἐσυμφώνησαν τέτοιας λογῆς, ὁ μὲν α΄. κατέβαλεν ἀργύρια 2500, τὰ ὁποῖα τὰ ἔλαβεν ἀπὸ τὴν συντροφίαν μετὰ 3 μῆνας· ὁ δὲ β΄. 2000, τὰ ὁποῖα ἔλαβε καὶ αὐτὸς μετὰ 5 μῆνας. Καὶ ὁ γ΄. κατέβαλε 1500, τὰ ὁποῖα ἔλαβε μετὰ μῆνας 8· πραγματευσάμενοι δὲ, ἐκέρδησαν ἀργύρια 2000· ζητεῖται λοιπὸν, πόσα τυχαίνουν τὸν καθ᾽ ἕνα ἐκ τοῦ ῥηθέντος κέρδους, διά τε τὸν τόκον τοῦ χρονικοῦ διαστήματος, καὶ διὰ τὸ ἐκ τῆς πραγματείας κέρδος;

Λύσις.

Πρὸς λύσιν τούτου, ἂς γένῃ τριπλῆ Μέθοδος τῶν Πέντε, ἔχουσα, διὰ μὲν α΄. ὅρον τὰ 100· διὰ β΄. δὲ, τὸν 12, τὸν τοῦ χρόνου μηνῶν σημαντικόν· διὰ γ΄. δὲ, πάλιν τὸν 12, τὸν τοῦ χρονικοῦ διαφόρου δηλωτικόν· δ'. δὲ, τὴν Ποσότητα τῶν ἀργυρείων ὁποῦ καθ' εἷς κατέβαλεν εἰς τὴν συντροφίαν. Καὶ ε'. τὸν χρόνον κατὰ τὸν ὁποῖον ἐνέμειναν οἱ τοῦ καθ' ἑνὸς Ποσότης εἰς τὴν αὐτὴν συντροφίαν.

$$\text{οἷον} \div 100 : 12 : 12 :: \left\{ \begin{array}{l} 2500 \,.\, 3 = 7500 \\ 2000 \,.\, 5 = 10000 \\ 1500 \,.\, 8 = 12000 \end{array} \right\} = 29500.$$

Ἀφ' οὗ λοιπὸν βαλθῶσιν εἰς τὴν ἀράδαν, ὡς φαίνεται, ἂς πολλαπλασιασθῶσιν ἀναμεταξύ των οἱ πρὸς τὰ δεξιὰ μέρη τρεῖς ὅροι, ὁ δὲ γενόμενος Ἀριθμὸς ἀπὸ αὐτοὺς, ἂς τὸν λάβωμεν ἀντὶ Διαιρετέου· ἔπειτα ἂς πολλαπλασιασθῶσι καὶ οἱ πρὸς τὰ ἀριστερὰ λοιποὶ δύω· καὶ ὁ γενόμενος Ἀριθμὸς, ἂς τὸν λάβωμεν ἀντὶ Διαιρέτου· πράξεως δὲ γενομένης, τὰ Πηλίκα θέλουσι φανερώσῃ τὸν χρεωστούμενον τοῦ καθ' ἑνὸς τόκον, κατὰ τὴν Ποσότητα ὁποῦ κατέβαλεν εἰς τὴν συντροφίαν, καὶ τὸν χρόνον ὁποῦ ἐστάθησαν εἰς αὐτήν.

$$\begin{array}{ll} & \text{Διαιρέτης.} \qquad\qquad \text{Διαιρετέος.} \\ & \left\{ 12 \,.\, 2500 \,.\, 3 = \dfrac{90000}{1200:} = \Phi = 75 : \text{τοῦ } \alpha'. \right. \\ \text{Ἔσται οὖν· } 100 \,.\, 12 = 1200 & \left\{ 12 \,.\, 2000 \,.\, 5 = \dfrac{120000}{1200:} = X = 100 : \text{τοῦ } \beta'. \right. \\ & \left\{ 12 \,.\, 1500 \,.\, 8 = \dfrac{144000}{1200:} = \Psi = \underline{120} : \text{τοῦ } \gamma'. \right. \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 295. \end{array}$$

Λαμβάνει ἄρα ὁ μὲν α'. τόκον ἀργύρεια $= 75$, διὰ τὰ 2500 εἰς 3 μῆνας· ὁ δὲ β'. 100, διὰ τὰς 2000, εἰς 5 μῆνας· καὶ ὁ γ'. 120, διὰ τὰ 1500 εἰς 8 μῆνας· τὰ ὁποῖα συναπτόμενα, κάμνουσιν ἀργύρια 295· ὃ ἦν τὸ α'. ζητούμενον.

Λείπεται δὲ νὰ εὕρωμεν καὶ τὸ δεύτερον ζητούμενον, τὸ ὁποῖον ἦτον, νὰ μοιράσωμεν καὶ τὸ ἐναπολειφθὲν ἐκ τοῦ κέρδους, κατὰ τὴν Ποσότητα, τὴν ὁποίαν καθ' εἷς κατέβαλεν εἰς τὴν συντροφίαν, καὶ τὸν χρόνον ὁποῦ ἐστάθη εἰς αὐτήν. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ καὶ αὐτὸ, α'. ἂς ἀφαιρεθῇ ὁ τόκος ὁποῦ ἔλαβαν καὶ οἱ τρεῖς, ἀπὸ τὸ ὁλικὸν κέρδος, καὶ τὸ ἐναπολειφθὲν, ἂς τὸ λάβωμεν ἀντὶ τοῦ β'. ὅρου· οἷον $2000 - 295 = \overset{\beta'}{1705}$· ἂς λάβωμεν δὲ καὶ τὰς τῶν Τριῶν καταβληθείσας Ποσότητας, καὶ

πολ-

πολλαπλασιασθείσας ἐπὶ τὸν ἴδιον ἑκάστη χρόνον, ὡς ὄπισθεν φαίνεται, ἀντὶ τοῦ α'. ὅρου· καὶ τὴν ἑκάστου Ποσότητα πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸν ἴδιον χρόνον, ἀντὶ τοῦ γ'. ὅρου· τριπλῆς δὲ πάλιν μεθόδου γενομένης, τὰ Πηλίκα φανερώσουσι, καὶ τὸ ἑκάστῳ ἀνάλογον κέρδος ἐκ τῆς πραγματείας.

$$\text{οἷον } \overset{\alpha'}{29500} : \overset{\beta'}{1705} :: \left\{ \begin{array}{l} 7500 : \Phi = 433\,\dfrac{140}{295} = \overset{\text{παρ.}}{20} : \text{τοῦ } \alpha'. \\ 10000 : X = 577\,\dfrac{285}{295} = 37 : \text{τοῦ } \beta'. \\ 12000 : \Psi = \underline{693}\,\dfrac{165}{295} = \dfrac{23}{00} : \text{τοῦ } \gamma'. \\ \qquad\qquad 1703 + 2 = 1705. \end{array} \right.$$

Ἔλαβεν ἄρα καὶ ἐκ τοῦ ἐναπολειφθέντος ἐκ τοῦ τόκου κέρδους, ὁ μὲν α'. ἀργ. 433 + παράδ. 20· ὁ δὲ β'. 577 + παρ. 37· καὶ ὁ γ'. 693 + 23· τὰ ὁποῖα συναπτόμενα κάμνουσιν ἀργ. 1705· ὅσα δηλ. ἀπέμειναν ἐκ τοῦ τόκου· ὃ ἦν τὸ β'. ζητούμενον.

Ὑπόδειγμα Γ'.

Ἐργάται 4, ἐσυμφώνησαν μὲ ἕνα γεωργὸν, νὰ τοῦ σκάψωσιν εἰς τὰ ἀμπέλιά του ἡμέρας 30· καὶ νὰ τοὺς δώσῃ εἰς μισθὸν ἀργύρεια 450· ἀφ' οὗ λοιπὸν ἄρχισαν νὰ σκάπτωσιν, ὁ μὲν α'. ἔσκαψε 12 ἡμέρας, καὶ ἔπειτα ἔφυγεν εἰς οἰκειακήν του ὑπηρεσίαν· ὁ δὲ β'. σκάψας 15 ἡμέρας, ἠσθένησεν· ὁ δὲ γ'. σκάψας καὶ αὐτὸς ἡμέρας 25, ἐκωράσθη καὶ ἔπαυσε τοῦ ἔργου· μόνος δὲ ὁ δ'. ἔσκαψε τὰς 30 ἡμέρας, κατὰ τὴν μετὰ τοῦ γεωργοῦ συμφωνίαν· λοιπὸν διὰ νὰ μὴ ἀδικηθῇ οὔτε ὁ γεωργὸς, οὔτε οἱ ἐργάται, ζητεῖται τὸ χρεωστούμενον εἰς τὸν καθ' ἕνα, ἐκ τοῦ ῥηθέντος μισθοῦ, κατ' Ἀναλογίαν τῶν ἡμερῶν, ὁποῦ ἐδούλευσεν ὁ καθ' εἷς ἐξ αὐτῶν.

Λύσις.

Εἰς λύσιν τοῦ Προβλήματος τούτου, ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ Ἀριθμὸς τῶν συμφωνηθέντων ἡμερῶν, ἐπὶ τὸν Ἀριθμὸν

τῶν

τῶν ἐργατῶν, τὸν δὲ γενόμενον, ἂς τὸν λάβωμεν ἀντὶ τοῦ α. ὅρου· οἷον 30 . 4 = $\overset{\alpha}{120}$· τὸν δὲ Ἀριθμὸν τοῦ διωρισμένου μισθοῦ ἀντὶ τοῦ β'. καὶ τὰς ἡμέρας ὁποῦ ἐδούλευσεν ὁ καθ' εἷς, ἀντὶ τοῦ γ'. τριπλῆς δὲ μεθόδου γενομένης, τὰ Πηλίκα θέλουσι μας φανερώσῃ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον εἰς τὸν καθ' ἕνα ἐκ τοῦ συμφωνηθέντος μισθοῦ ἀνήκει.

οἷον ∺ 120 : 450 ::
12 : Φ = 45. τοῦ α'. διὰ 12 : ἡμέρ.
15 : Χ = 56 $\frac{1}{4}$. τοῦ β'. διὰ 15 :
25 : Ψ = 93 $\frac{3}{4}$. τοῦ γ'. διὰ 25.
30 : ϒ = 112 $\frac{1}{2}$. τοῦ δ'. διὰ 30.

Δεῖξις.

Ὅτι μὲν ἡ πρᾶξις ὀρθῶς καὶ μετὰ λόγου ἐγένετο, δείκνυται· ἔχει γάρ, ὡς ὁ α'. ὅρος πρὸς τὸν β'. οὕτω καὶ ἕκαστος γ'. πρὸς ἕκαστον εὑρεθέντα δ'. τὸ γὰρ ὑπὸ τῶν δύω ἄκρων ὅρων γενόμενον, εἶναι ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν δύω μέσων γινομένῳ εἰς κάθε περίστασιν· ἄρα ἐδόθη εἰς τὸν καθ' ἕνα ἐκ τοῦ συμφωνηθέντος μισθοῦ, κατ' Ἀναλογίαν τῶν ἡμερῶν ὁποῦ ἐδούλευσεν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὑπόδειγμα Δ'.

Εἰς ἑκατὸν στρατιώτας, ἐδόθησαν διὰ τὸν μισθόν τους ἀργύρια 2720· καὶ ζητοῦσι νὰ μάθωσι, πόσα τυχαίνουν νὰ λάβῃ ὁ καθ' εἷς ἀπὸ αὐτούς· τέτοιας λογῆς ὅμως νὰ τὰ μοιράσωσιν, ὥστε ὁποῦ οἱ μὲν 40 στρατιῶται, νὰ λάβωσι πρὸς 5 ἀργύρια τὸν μῆνα· οἱ δὲ 30, πρὸς 7· καὶ οἱ λοιποὶ 30, πρὸς 9.

Λύσις.

Πρὸς λύσιν τοῦ Προβλήματος τούτου, Α'. ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ Ἀριθμὸς τῆς κάθε τάξεως τῶν στρατιωτῶν, ἐπὶ τὸν Ἀριθμὸν τῶν ἀργυρίων, τὸν ὁποῖον λαμβάνουσι διὰ μισθὸν τὸν κάθε μῆνα· Β'. ἂς συναφθῶσι τὰ γενόμενα εἰς ἕνα ὁλικὸν Κεφάλαιον, καὶ αὐτὸ νὰ τὸ λάβωμεν ἀντὶ τοῦ α. ὅρου· τὸν δ' Α-

δ' Ἀριθμὸν τῶν ἀργυρίων ὁποῦ τοὺς ἐδόθησαν, ἀντὶ τοῦ β'. καὶ ἀντὶ τοῦ γ'. ἑκάστην τάξιν τῶν στρατιωτῶν, πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸν μηνιαῖον μισθόν· καὶ τὰ μὲν πρῶτα Πηλίκα, θέλουσι μας δείξῃ, τὸ πόσα τυχαίνουσι νὰ λάβῃ ἡ κάθε τάξις· τὰ δὲ δεύτερα, θέλουσι μας φανερώσῃ, καὶ πόσα τυχαίνουσι τὸν κάθε στρατιώτην ἑκάστης τάξεως· οἷον 40 . 5 = 200 . Καί, 30 . 7 = 210 . Καί, 30 . 9 = 270 ὅθεν 200 + 210 + 270 =
$\overset{\alpha}{680} : \overset{\beta}{2720} :$ | 200. 210. 270.

ὅθεν ἔσται ∺ 680 : 2720 ::
200 : Φ = $\frac{800}{40:}$ = 20. πᾶς στρατιώτης τῆς α'.
210 : Χ = $\frac{840}{30:}$ = 28. τῆς β'. τάξεως.
270 : Ψ = $\frac{1080}{30:}$ = 36. τῆς γ'. τάξεως.
ὅθεν 800 + 840 + 1080 = 2720.

Τυχαίνει ἄρα τῆς μὲν τάξεως, ἡ ὁποία λαμβάνει πρὸς 5 ἀργύρ. τὸν μῆνα, νὰ λάβῃ ἀργ. 200· καὶ πᾶς στρατιώτης πρὸς 20· τῆς δὲ τάξεως, ἥτις λαμβάνει πρὸς 7 ἀργύρ. 210· καὶ κάθε στρατιώτης πρὸς 28· τῆς δὲ γ'. τάξεως, ὁποῦ λαμβάνει πρὸς 9 ἀργύρ. 1080· καὶ κάθε στρατιώτης πρὸς 36· καθὼς φαίνεται εἰς τὸ Διάγραμμα· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Δεῖξις.

Ὅτι δὲ οὕτως ἔχει ἡ πρᾶξις, δείκνυται· ὃν γὰρ λόγον ἔχουσι τὰ 680· πρὸς τὰ 2720· τὸν αὐτὸν ἔχουσι, καὶ τὰ 200· πρὸς τὰ 800· καὶ τὰ 210· πρὸς τὰ 840. Καὶ τὰ 270, πρὸς τὰ 1080, καὶ ἐναλλάξ· ὃν λόγον ἔχει ὁ 680· πρὸς ἕκαστον τῶν 5, καὶ 7, καὶ 9, τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ ὁ 2720· πρὸς ἕκαστον τῶν 20· καὶ 28, καὶ 36· ὅπερ ἔδει δεῖξαι· ἄρα ἡ πρᾶξις ὀρθῶς τε καὶ ἀσφαλῶς ἐγένετο.

Καὶ τὰ μὲν ἐκτεθέντα Προβλήματα, ἢ Ὑποδείγματα, εἰσὶν ἱκανά· τώρα δέ, ἂς εἴπωμεν καὶ περὶ τῆς ἐκ ψευδοῦς Ὑποθέσεως λεγομένης Μεθόδου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

Περὶ τῆς ἐκ ψευδοῦς Ὑποθέσεως λεγομένης Μεθόδου.

§. 256. Δὲν εἶναι ξένη, οὔτε πολλὰ μεμακρυσμένη ἀπὸ τὴν ἐκτεθεῖσαν Μέθοδον τῆς Ἑταιρείας, καὶ ἡ ἐφεξῆς Μέθοδος, ἥτις ἔχει τὴν ἀρχὴν καὶ βάσιν της ἐπάνω εἰς μίαν ψευδῆ Ὑπόθεσιν· τὴν ὁποίαν συνειδίζωμεν νὰ τὴν μεταχειριζώμεθα πολλάκις, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν αἰτούμενον Ἀριθμόν, διὰ μέσου ἄλλου τινὸς Ἀριθμοῦ, ἢ καὶ στοιχείου· τὸν ὁποῖον Ἀριθμόν, ἢ στοιχεῖον, τὸν λαμβάνομεν, καθ' Ὑπόθεσιν, καθὼς ἤθελε μας φανῇ εὔλογον. Εἰς τὴν ζητουμένην ὅμως ἀλήθειαν, εἶναι κατὰ πολλὰ σύμφωνος καὶ ἁρμόδιος· καθὼς θέλομεν τὸ γνωρίσῃ εἰς τὴν λύσιν τῶν ἐφεξῆς ἐκτεθησομένων Προβλημάτων.

Πρόβλημα Α΄.

§. 257. Τρεῖς συνέμποροι, ἀφ' οὗ κατέβαλον μίαν Ποσότητα ἀργυρίων, εἰς μίαν δημόσιον ὑπηρεσίαν, ἐκέρδησαν ἀπὸ κοινοῦ ἀργ. 20000· τὸ ὁποῖον κέρδος τὸ ἐμοίρασαν ἀναμεταξύ των, κατ' Ἀναλογίαν τῆς Ποσότητος, ὁποῦ κατέβαλεν ὁ καθ' εἷς εἰς αὐτὴν τὴν συντροφίαν· λέγουσιν ὅμως ὅτι ἡ Ποσότης, τὴν ὁποίαν κατέβαλεν ὁ β΄. ἦν διπλασία, τῆς ὑπὸ τοῦ γ΄. καταβληθείσης Ποσότητος· ἡ δὲ ὑπὸ τοῦ α΄. ἦν διπλασία τῆς Ποσότητος τῶν δύω ὁμοῦ· λοιπὸν ζητῶ νὰ μάθω πόσον μέρος ἐκ τοῦ ῥηθέντος κέρδους ἔλαβεν ὁ καθ' εἷς ἀπὸ αὐτούς;

Λύσις.

Εἰς λύσιν τοῦ Προβλήματος τούτου, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ γ΄. κατέβαλεν ἓν μόνον ἀργύριον· ὁ δὲ β΄. 2· (ὡσὰν ὁποῦ λέγει ὅτι ἦτον διπλασία τοῦ γ΄.) καὶ ὁ α΄. 6· (ἐπειδὴ λέγει, ὅτι ἡ Ποσότης ὁποῦ κατέβαλεν ὁ α΄. ἦν διπλασία ἀπὸ ἐκείνην, τὴν ὁποίαν κατέβαλον οἱ δύω ὁμοῦ.) Αὐτὰ λοιπὸν τὰ ὑποτεθέντα μέρη, ἀφ' οὗ τὰ συνάψομεν, γίνεται ὁ 9, Ἀριθμός· οἷον $1+2+6=9$· τοῦτον οὖν, ἂς τὸν λάβωμεν ἀντὶ τοῦ α΄. ὅρου·

ὅρου· τὸν δὲ τοῦ κέρδους, ἀντὶ τοῦ β΄. καὶ ἀντὶ τοῦ γ΄. ἐκείνους τοὺς Ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους ὑποθέσαμεν ὅτι κατέβαλεν ὁ καθ' εἷς· τριπλῆς δὲ Μεθόδου τῶν Τριῶν γενομένης, τὰ Πηλίκα θέλουσι μας φανερώσῃ, τὸ ἀληθινὸν μέρος ὁποῦ ἔλαβεν ὁ καθ' εἷς ἀπὸ αὐτοὺς ἐκ τοῦ ῥηθέντος κέρδους.

$$\text{ἔσται οὖν}\cdot \div 9 : 20000 :: \left\{ \begin{array}{l} 1 : \Phi = 2222 + \frac{2}{9} : \text{τὸ μέρος τοῦ γ΄.} \\ 2 : X = 4444 + \frac{4}{9} : \text{τὸ τοῦ β΄.} \\ 6 : \Psi = \underline{13333} + \frac{3}{9} : \text{τὸ τοῦ α΄.} \\ \qquad\quad 19999 \qquad 1 \\ \text{ὅθεν } 19999 + 1 = 20000. \end{array}\right.$$

Τυχαίνει ἄρα, εἰς μὲν τὸν γ΄. ὁ $=\Phi$: Ἀριθμός· εἰς δὲ τὸν β΄. ὁ $= X$: καὶ εἰς τὸν α΄. ὁ $=\Psi$· τὰ ὁποῖα μέρη συναπτόμενα κάμνουσι τὸν 20000· ἴσον μὲ τὸ ῥηθὲν ὁλικὸν κέρδος, ὡς φαίνεται εἰς τὸ Διάγραμμα· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Πρόβλημα Β΄.

§. 258. Θέων, Ἀλκιβιάδης, Κλεόμβροτός τε, καὶ Πεισίστρατος, οἱ τέσσαρες ὁμοῦ, μετροῦσιν 110· χρόνους τῆς ἡλικίας των· ἀλλ' ὁ μὲν Ἀλκιβιάδης, ἔχει τριπλασίους χρόνους τῶν τοῦ Θέωνος· ὁ δὲ Κλεόμβροτος διπλασίους τῶν τοῦ Ἀλκιβιάδου· καὶ ὁ Πεισίστρατος, διπλασίους τῶν τοῦ Κλεομβρότου· πόσους ἄρα χρόνους ἔχει ὁ καθ' εἷς ἀπὸ αὐτοὺς ξεχωριστά!

Λύσις.

Εἰς λύσιν τοῦ Προβλήματος τούτου, καὶ ἄλλων ὁμοίων αὐτῷ, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ ἡλικία τοῦ Θέωνος, οὖσα ἡ μικροτέρα τῶν ἄλλων ἡλικιῶν, ἂς τὴν ὀνομάσωμεν ὅτι εἶναι ἴση μὲ τὸ X· ἡ δὲ τοῦ Ἀλκιβιάδου οὖσα τριπλῆ τῆς τοῦ Θέωνος, ἔστω $= 3X$· ἡ δὲ τοῦ Κλεομβρότου, διπλῆ οὖσα τῆς τοῦ Ἀλκιβιάδου, ἔσται $= 6X$· καὶ ἡ τοῦ Πεισιστράτου διπλῆ οὖσα ταύτης ἔσται $= 12X$· ἂς συναφθῶσι λοιπὸν ὅλα τὰ X, καὶ ἂς γένωσιν $22X$· οἷον $X + 3X + 6X + 12X = 22X$· καὶ αὐτά, ἂς τὰ λάβωμεν ἀντὶ τοῦ α΄. ὅρου· τοὺς δὲ 110 χρόνους, ὁποῦ ἔχουσιν ὅλοι ὁμοῦ, ἂς τοὺς λάβωμεν ἀντὶ τοῦ β΄. καὶ ἀντὶ τοῦ γ΄.

γ'. τὸ X τοῦ Θέωνος· καὶ ἐπειδὴ ὁ β'. ὅρος 110, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸ X, δίδει γινόμενον τὸν αὐτὸν Ἀριθμὸν 110 κατὰ τὸν (§. 13.) ἂς διαιρεθῇ ὁ β'. ὅρος ἐπὶ τὸν ά. καὶ τὸ Πηλίκον θέλει μας φανερώσῃ τὴν δύναμιν τοῦ X· οἷον 110 X : διαιρεθὲν ἐπὶ 22 X, δίδει Πηλίκον 5 X.

$$\frac{110\ X}{22\ X} = 5\ X$$

ἄρα τὸ X εἶναι ἴσον 5· καὶ πόση ἐστὶν ἡ ἡλικία τοῦ Θέωνος· ἡ δὲ τοῦ Ἀλκιβιάδου ἐστὶν $5 \cdot 3 = 15$· ἡ δὲ τοῦ Κλεομβρότου διπλῆ οὖσα ταύτης, ἔσται $15 \cdot 2 = 30$· καὶ ἡ τοῦ Πεισιστράτου διπλῆ πάλιν οὖσα τῆς τοῦ Κλεομβρότου, ἔσται $30 \cdot 2 = 60$· αἵτινες συναπτόμεναι, ποιοῦσι 110 χρόνους· οἷον $5 + 15 + 30 + 60 = 110$· εὑρέθησαν ἄρα οἱ χρόνοι τοῦ καθ' ἑνός· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Πρόβλημα Γ'.

§. 259. Ἰωάννης λοῦμπος, Γεώργιος βρανᾶς, καὶ Σπυρίδων λοῦμπος, συνοδοιποροῦντες, κατέλυσαν (ἤγουν ἐκόνεψαν) εἰς ἓν Πανδοχεῖον· καὶ μέλλοντες νὰ δειπνήσωσιν, ἐσυμφώνησαν ἀναμεταξύ των, ὅτι ὁ μὲν Γεώργιος νὰ δώσῃ τὸ διπλοῦν ἔξοδον τῆς τροφῆς των, ἀπ' ὅ,τι δώσῃ ὁ Ἰωάννης· ὁ δὲ Σπυρίδων, τὸ διπλοῦν ἀπ' ὅ,τι δώσῃ ὁ Γεώργιος· δειπνήσαντες δέ, καὶ λογαριασθέντες μετὰ τοῦ Πανδοχέως, ἔγιναν τὰ ἔξοδα τῆς τροφῆς των ὀβολοὶ 84· πόσους ἄρα ὀβολοὺς τυχαίνουσι νὰ πληρώσῃ ὁ καθ' εἷς ἀπὸ αὐτούς, κατὰ τὴν μεταξὺ αὐτῶν συνθήκην!

Λύσις.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ μὲν Ἰωάννης τυχαίνει νὰ πληρώσῃ ἕνα ὀβολόν· ὁ δὲ Γεώργιος 2· καὶ ὁ Σπυρίδων 4· οἵτινες συναπτόμενοι, ποιοῦσι τὸν 7· οἷον $1 + 2 + 4 = 7$· καὶ ἐπειδὴ αὐτὸς ὁ Ἀριθμὸς εἶναι ὀλιγώτερος ἀπὸ τὸν ζητούμενον 84, ἂς γένῃ Μέθοδος τῶν Τριῶν, ἔχουσα ά. ὅρον τὸν 7· β'. τὸν ζητούμενον 84· καὶ γ'. τὴν μονάδα ἀντὶ τοῦ ά. τὸν 2 ἀντὶ τοῦ β'. καὶ τὸν 4, ἀντὶ τοῦ τρίτου συνοδοιπόρου· τὰ δὲ Πηλίκα θέλουσι φανερώσῃ ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα τυχαίνουσι νὰ πληρώσῃ ὁ καθ' εἷς ἐξ αὐτῶν.

οἷον $\div\ 7 : 84 :: \left\{ \begin{array}{l} 1 : X = 12 : \text{ὁ Ἰωάννης.} \\ 2 : \Phi = 24 : \text{ὁ Γεώργιος.} \\ 4 : \Psi = \underline{48} : \text{ὁ Σπυρίδων.} \\ \qquad\quad\ 84 \end{array} \right.$

Ὁ ά. ἐπλήρωσε 12 ὀβολούς· ὁ δὲ β'. 24· καὶ ὁ γ'. 48· οἵτινες συναπτόμενοι, κάμνουσι τὸν ὑπὸ τοῦ Πανδοχέως ζητούμενον Ἀριθμὸν 84.

Δεῖξις.

Ὅτι δὲ ὀρθῶς καὶ μετὰ λόγου ἐγένετο αὕτη ἡ πρᾶξις, δείκνυται· ὁποίαν γὰρ Ἀναλογίαν ἔχει ὁ ἐξ Ὑποθέσεως ληφθεὶς Ἀριθμὸς 7, πρὸς τὸν ζητούμενον ὑπὸ τοῦ Πανδοχέως = 84, τὴν αὐτὴν Ἀναλογίαν ἔχει καὶ ἡ ἐξ Ὑποθέσεως ληφθεῖσα μονὰς ἀντὶ τοῦ μέρους τοῦ ά. ὁδοιπόρου, πρὸς τὸ ἀληθῶς χρεωστούμενον 12· καὶ ὁ 2 πρὸς τὸν 24, καὶ ὁ 4, πρὸς τὸν 48· ἐστὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν δύω ἄκρων ὅρων γενόμενον, ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν δύω μέσων· (§. 168.) εἰς ὅλας τὰς περιστάσεις· οἷον $\div\ 7 : 84 :: 1 : 12$. Καὶ $\div\ 7 : 84 :: 2 : 24$: Καὶ $\div\ 7 : 84 :: 4 : 48$· ἄρα ὀρθῶς ἡ πρᾶξις καὶ μετὰ λόγου ἐγένετο· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόβλημα Δ'.

§. 260. Εἷς οἰκοκύρης, ἀσθενήσας βαρέως, καὶ φοβούμενος τὸ ἄδηλον τοῦ θανάτου, ἔκαμε τοιαύτην διαθήκην· ὅτι, ἀνίσως ἡ γυνή του ἤθελε γεννήσῃ ἀρσενικὸν (ἦν γὰρ ἐγκυμονοῦσα) νὰ δώσωσιν οἱ Ἐπίτροποί του τὰ δύω μέρη τῆς περιουσίας του, εἰς τὸν υἱόν του, καὶ τὸ ἓν τρίτον, τῆς γυναικός του. Εἰ δὲ καὶ γεννήσει θηλυκόν, νὰ δώσωσι τὰ δύω τρίτα τῆς γυναικός του, καὶ τὸ ἓν τρίτον τῆς θυγατρός του· μετὰ δὲ ὀλίγας ἡμέρας, ἀπέθανεν· ἡ δὲ γυνή του μετὰ μῆνας τρεῖς ἐγέννησε δίδυμα· ἀπὸ τὰ ὁποῖα, τὸ μὲν ἦν ἀρσενικόν, τὸ δ' ἄλλο θηλυκόν· ἀφ' οὗ δὲ τὰ παιδία ἦλθον εἰς νόμου ἡλικίαν, οἱ Ἐπίτροποι ἐκεῖνοι θέλοντες νὰ κάμουν τὸ χρέος των, ἐξετίμησαν ὅλην τὴν περιουσίαν τοῦ ἀποθανόντος, καὶ ἐτιμήθη εἰς ἀργύρια 6300· ζητοῦσι λοιπὸν νὰ μάθωσι, πόσα πρέπει νὰ δώσωσιν εἰς τὸ ἀρσενικὸν, πόσα εἰς τὸ θηλυκὸν, καὶ πόσα εἰς τὴν Μητέρα των, διὰ νὰ φυλαχθῇ ἡ θέλησις τοῦ ἀποθανόντος;

Λύσις.

Εἰς λύσιν τούτου, ἐπειδὴ εἰς τὸ θηλυκὸν ἐδιωρίσθη τὸ μικρότερον μερίδιον, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τοῦ τυχαίνει ἓν ἀργύριον· εἰς δὲ τὴν Μητέρα του δύω, δηλ. τὸ διπλοῦν τοῦ θηλυκοῦ· καὶ εἰς τὸ ἀρσενικὸν, τέσσαρα δηλ. τὸ διπλοῦν τῆς Μητρός· ἂς γένῃ λοιπὸν ὡς ἄνωθεν· οἷον $1 + 2 + 4 = 7$.

ὅθεν ∺ $7 : 6300 ::$ { $1 : \Phi = 900$: τοῦ θηλυκοῦ.
 $2 : X = 1800$: τῆς Μητρός.
 $4 : \Psi = 3600$: τοῦ ἀρσενικοῦ.
 6300.

Τυχαίνουν ἄρα εἰς μὲν τὸ θηλυκὸν ἀργ. $= 900$· εἰς δὲ τὴν Μητέρα $= 1800$· καὶ εἰς τὸ ἀρσενικὸν $= 3600$· τὰ ὁποῖα συναπτόμενα, γίνονται $= 6300$· εὑρέθη ἄρα τὸ ζητούμενον.

Πρόβλημα Ε΄.

§. 261. Τρεῖς συνέμποροι, πραγματευσάμενοι συντροφικῶς, ἐκέρδησαν ἱκανὴν Ποσότητα ἀργυρίων· τὰ ὁποῖα ἐμοίρασαν ἀναμεταξύ των, κατὰ τὴν συνθήκην ὁποῦ εἶχον· καὶ ἔλαβεν ὁ καθ' εἷς ἀπὸ αὐτοὺς, τὸ ἀνάλογόν του μερίδιον· δὲν ἠξεύρομεν ὅμως τὴν μερισθεῖσαν τοῦ κέρδους Ποσότητα· ἐπειδὴ οὔτε ὁ πρῶτος οὔτε ὁ β΄. λέγουσι τὸ μερίδιον, τὸ ὁποῖον ἀπὸ τὸ ῥηθὲν κέρδος ἔλαβον· ἀλλὰ τοῦτο μόνον λέγουσιν, ὅτι ἐκ τοῦ κέρδους Ψ, ἔλαβεν ὁ β΄. τὸ τριτημόριον τοῦ α΄. ὁ δὲ γ΄. τὸ ἥμισυ ἀπ' ὅτι ἔλαβεν ὁ α΄. καὶ β΄. ὁμοῦ· καὶ ὅτι ἡ Ποσότης ὁποῦ ἔλαβεν ὁ γ΄. ἦν ἀργ. $= 6000$· ζητεῖται λοιπὸν ἥτε ὁλικὴ τοῦ κέρδους Ποσότης, καὶ τὸ μέρος ὃ ἐξ αὐτῆς ἔλαβεν, ὁ α΄. καὶ β΄. χωριστά.

Λύσις.

Εἰς λύσιν τοῦ Προβλήματος τούτου, ἂς λάβωμεν ἕνα Ἀριθμὸν ὁποῦ νὰ διαιρεῖται εἰς τρία μέρη· καθ' Ὑπόθεσιν τὸν 6· τοῦ ὁποίου, τρίτον μέρος εἶναι 2· οἷον $\frac{6}{3} = 2$· αὐτὸν λοι-

λοιπὸν τὸν 2, τὸν λαμβάνομεν, καθ' Ὑπόθεσιν, ἀντὶ τοῦ κέρδους, ὁποῦ ἔλαβεν ὁ β΄. ἂς συναφθῶσι λοιπὸν αὐτοὶ οἱ δύω Ἀριθμοὶ, καὶ ἂς γένῃ ὁ 8· οἷον $6 + 2 = 8$· λαμβάνομεν οὖν τὰ ἡμίση τούτου, ἀντὶ τοῦ μέρους ὁποῦ ἔλαβεν ὁ γ΄. ἔπειτα ἂς γένῃ διπλῆ Μέθοδος τῶν Τριῶν· ἔχουσα διὰ μὲν α΄. ὅρον τὸν 4· διὰ δὲ β΄. τὸν Ἀριθμὸν τῶν ἀργυρίων, τὸν ὁποῖον ἔλαβεν ἐκ τοῦ κέρδους ὁ γ΄. δηλ. τὸν 6000· καὶ ἀντὶ τοῦ γ΄. ὅρου, τὸν 6, καὶ τὸν 2· τὸν μὲν 6, ἀντὶ τοῦ μέρους ὁποῦ ἔλαβεν ὁ α΄. τὸν δὲ 2, ἀντὶ τοῦ τρίτου μέρους ὁποῦ ἔλαβεν ὁ β΄. οἷον $\frac{6}{3} = 2 + 6 = \frac{8}{2} = 4$.

ἔσται οὖν· ∺ $4 : 6000 ::$ { $6 : \Phi = 9000$: τὸ μέρος τοῦ α΄.
 $2 : X = 3000$: τὸ τοῦ β΄.
 6000 : τὸ τοῦ γνωστοῦ γ΄.
 18000.

Προστιθεμένου δὲ καὶ τοῦ γνωστοῦ μέρους τοῦ γ΄. δηλ. τοῦ 6000, γίνονται $= 18000$· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Δεῖξις.

Ὅτι δὲ τὰ εὑρεθέντα μέρη εἶναι ἀνάλογα μὲ τοὺς Ἀριθμοὺς ὁποῦ ὑποθέσαμεν, δείκνυται· ὃν γὰρ λόγον ἔχει ὁ α΄. ὅρος, πρὸς τὸν β΄. τὸν αὐτὸν ἔχει, καὶ ὁ γ΄. πρὸς τὸν δ΄. ∺ $4 : 6 :: 6000 : 9000$. Καὶ ἐναλλὰξ· ὃν λόγον ἔχει ὁ α΄. ὅρος, πρὸς ἑκάτερον γ΄. δηλ. 6, καὶ 2, τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ ὁ β΄. πρὸς ἑκάτερον εὑρεθέντα δ΄. ∺ $4 : 6 :: 6000 : 9000$: καὶ $4 : 2 :: 6000 : 3000$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόβλημα Ϛ΄.

§. 262. Τρεῖς ἄνθρωποι θέλουσι νὰ μοιράσωσιν ἀναμεταξύ των 600 ἀργύρια, ὄχι ὅμως νὰ λάβωσιν ὅλοι ἴσα μέρη· ἀλλ' ὁ μὲν α΄. ζητεῖ νὰ λάβῃ τὰ ἡμίση· ὁ β΄. τὸ ἓν τρίτον τῶν αὐτῶν, καὶ ὁ γ΄. τὸ ἓν τέταρτον· ζητῶ λοιπὸν νὰ μάθω πόσα τυχαίνουσι τὸν καθ' ἕνα νὰ λάβῃ εἰς τὸ μερίδιόν του;

Λύ-

Λύσις.

Διὰ νὰ λύσωμεν αὐτὸ τὸ Πρόβλημα, καὶ τὰ ὅμοια αὐτοῦ, ά. ἂς γράψωμεν τὰ ὀνομασθέντα μέρη Κλασματικῶς· (§. 76) β'. νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν Παρονομαστὴν τοῦ ἑνὸς, μὲ τὰς Παρονομαστὰς τῶν ἄλλων κατὰ σειρὰν, καὶ τὸν γενόμενον Ἀριθμὸν ἀπὸ αὐτοὺς, νὰ τὸν μοιράσωμεν, καὶ νὰ λάβωμεν τὸ ἥμισυ, ἀντὶ τοῦ μέρους τοῦ ά. τὸ τριτημόριον, ἀντὶ τοῦ μέρους τοῦ β'. καὶ τὸ τεταρτημόριον, ἀντὶ τοῦ μέρους τοῦ γ'. ἔπειτα νὰ συνάψωμεν αὐτὰ τὰ τρία μέρη, τὸν δὲ, γενόμενον Ἀριθμὸν, νὰ τὸν λάβωμεν ἀντὶ τοῦ ά. ὅρου· τὸν δὲ Ἀριθμὸν τῶν ἀργυρίων, τὸν ὁποῖον μέλλουσι νὰ μοιράσωσιν, ἀντὶ τοῦ β'. καὶ καθ' ἓν ἀπὸ τὰ ῥηθέντα μέρη, ἀντὶ τοῦ γ'. ὅρου. Τριπλῆς δὲ Μεθόδου τῶν Τριῶν γενομένης, τὰ Πηλίκα θέλουσι φανερώσῃ, πόσα τυχαίνει τὸν καθ' ἕνα· οἷον $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = 24$· τοῦ ὁποίου τὰ ἡμίση, εἶναι 12, τὸ ἓν τρίτον 8, καὶ τὸ ἓν τέταρτον 6· τὰ ὁποῖα συναπτόμενα, γίνονται 26· οἷον $12 + 8 + 6 = 26$.

$$\text{ἔσται οὖν}\; \because 26 : 600 :: \left\{ \begin{array}{l} 12 : \Phi = 276 + \frac{24}{26}.\ \text{τὸ μέρος τοῦ ά.} \\ 8 : X = 184 + \frac{16}{26}.\ \text{τὸ τοῦ β'.} \\ 6 : \Psi = 138 + \frac{12}{26}.\ \text{τὸ τοῦ γ'.} \\ \frac{52}{26} = 2.\ \text{ὅθεν}\ 598 + 2 = 600. \end{array} \right.$$

Τυχαίνουσιν ἄρα τὸν μὲν ά. ἀργ. 276 καὶ παράδ. 37. τὸν δὲ β'. 184. παράδ. $24\frac{2}{3}$· καὶ τὸν γ'. 138· παράδ. $18\frac{1}{2}$· τὰ ὁποῖα συναπτόμενα, κάμνουσι τὸν ὁλικὸν Ἀριθμὸν ἴσον 600· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Πρόβλημα Ζ'.

§. 263. Εἷς πλούσιος ἄνθρωπος ἠγόρασε τρία χωράφια· καὶ διὰ μὲν τὸ β'. χωράφιον ἔδωκε τὸ διπλοῦν, ἀπ' ὅ,τι ἔδωκε διὰ τὸ ά. διὰ δὲ τὸ γ'. τὸ τριπλοῦν ἀφ' ὅ,τι· ἔδωκε διὰ τὸ β'. ἡ δὲ τιμὴ τῶν τριῶν χωραφίων ἐμοῦ, εἶναι ἴση μὲ 63000 ἀργύρια. Πόσον ἄρα ἔδωκεν εἰς τὸ καθ' ἓν ξεχωριστά!

Λύσις.

Εἰς λύσιν τούτου, ἂς γένωσιν ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἑρμηνεύσαμεν εἰς τὸ Β'. Πρόβλημα· οἷον $X + 2X + 6X = 9X$· λοιπὸν $\frac{63000}{9X:} = 7000$· ἡ τιμὴ τοῦ ά. χωραφίου· καὶ $7000 . 2 = 14000$· ἡ τιμὴ τοῦ β'. Καὶ $14000 . 3 = 42000$· ἡ τιμὴ τοῦ γ'. ὅθεν $7000 + 14000 + 42000 = 63000$· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Πρόβλημα Η'.

§. 264. Ὁ Λιβάνιος βάνωντας μὲ τὸν νοῦν του ἕνα Ἀριθμὸν, εἶπε πρὸς τοὺς Μαθητάς του· αὐίσως ὁ Ἀριθμὸς, τὸν ὁποῖον ἔβαλα εἰς τὸν νοῦν μου, ἤθελε συναφθῇ μὲ τὸ τριπλοῦν αὐτοῦ, καὶ μὲ τὸ τετραπλοῦν, θέλει γένῃ ὁ 80 Ἀριθμός· ποῖος ἄρα νὰ ἦτον ἐκεῖνος ὁ Ἀριθμὸς, τὸν ὁποῖον ὁ Λιβάνιος ἔβαλεν εἰς τὸν νοῦν του!

Λύσις.

Αὐτὸ τὸ Πρόβλημα, μὲ τὸ νὰ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ Β'. καὶ Ζ'. ἂς γένῃ, καθὼς ἔγιναν καὶ εἰς ἐκεῖνα· οἷον, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ Ἀριθμὸς ὁποῦ ἐνθυμήθη ὁ Λιβάνιος ἦν X· διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὴν δύναμιν τοῦ X, ἔσται· $X + 3X + 4X = 8X$· καὶ $80 = a$· ὅθεν $\frac{a}{8X} = \frac{80}{8:} = 10$· ἄρα ὁ Ἀριθμὸς ἐκεῖνος ἦν 10· λοιπὸν $10 + 30 + 40 = 80$. ἄρα κτλ.

Πρόβλημα Θ'.

§. 264. Εἷς στρατηγὸς, ἐρωτηθεὶς ἀπὸ ἄλλον τινὰ, πόσους στρατιώτας ἔχει ὑπὸ τὴν ἐξουσίαν του; ἀπεκρίθη· αὐίσως εἶχον τὸ διπλοῦν, ἀπὸ ὅσους ἔχω· καὶ τὸ δέκατον, καὶ ἔτι ἑπτὰ χιλιάδας, ἤθελα ἔχῃ ἑκατὸν χιλιάδας· πόσους ἄρα στρατιώτας εἶχεν ὁ ῥηθεὶς στρατηγός!

Λύσις.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶχεν δέκα· λοιπὸν, τὸ διπλάσιον τοῦ δέκα, εἶναι εἴκοσι· τὸ δὲ δέκατον, ἕν· ἂς συναφθῶσι αὐτὰ τὰ μέρη, ὁποῦ ἐξ Ὑποθέσεως ἐλάβομεν, καὶ γίνεται ὁ 31 Ἀριθμός· οἷον $10 + 20 + 1 = 31$· καὶ ἐπειδὴ λέγει, αὖ εἶχον ἔτι ἑπτὰ χιλιάδας, ἤθελον ἔχῃ ἑκατὸν, ἂς ἀφαιρεθῶσιν αἱ ἑπτὰ χιλιάδες ἀπὸ τὰς ἑκατὸν, καὶ ἐναπομένουσιν ἐννενήκοντα τρεῖς· οἷον $100000 - 7000 = 93000$· ἂς γένῃ λοιπὸν Μέθοδος τῶν Τριῶν ἔχουσα, α. μὲν ὅρον, τὸν 31· β. δὲ τὸν 10, τὸν ὁποῖον ὑποθέσαμεν· καὶ γ΄. τὸν 93000· τὸ δὲ Πηλίκον θέλει μας φανερώσῃ τὸν Ἀριθμὸν τῶν στρατιωτῶν ὁποῦ εἶχε· διότι θέλομεν εἰπῇ, ὡσὰν ὁ 31 εἶχε Κεφάλαιον τὸν ὑποτεθέντα 10, ὁ 93000 ἄρα πόσον Κεφάλαιον εἶχε; ἔσται γὰρ $\div\, 31 : 10 :: 93000 : X = 30000$· εἶχεν ἄρα τριάκοντα χιλιάδας· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον. Ἐπειδὴ $30000 + 60000 + 3000 + 7000 = 100000$· ἄρα κτλ.

Καὶ περὶ μὲν τῆς ἐκ ψευδοῦς Ὑποθέσεως Μεθόδου, εἶναι ἀρκετὰ τὰ εἰρημένα· νῦν δὲ καὶ περὶ ἑτέρας τινὸς Μεθόδου εἴπωμεν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

Περὶ Μεθόδου, διὰ τῆς ὁποίας δυνάμεθα νὰ λύωμεν αἰνιγματώδη καὶ σκοτεινὰ Προβλήματα.

Πρόβλημα Α΄.

§. 265. Εἷς ἄνθρωπος, ἐρωτηθεὶς ἀπὸ ἕνα του πιστὸν φίλον, τὸ πόση ἄρα νὰ εἶναι ἡ Ποσότης τῶν χρημάτων ὁποῦ ἔχει; καὶ θέλων, οὔτε τὸν φίλον του νὰ λυπήσῃ, μὴ λέγοντάς του τὴν ἀλήθειαν, οὔτε πάλιν νὰ τοῦ φανερώσῃ καθαρὰ τὴν περιουσίαν καὶ τὸν πλοῦτόν του, τοῦ ἀπεκρίθη αἰνιγματωδῶς, καὶ σκιωδῶς, λέγων, ὦ φίλε μου, τὸ μὲν ἥμισυ μέρος τῶν χρημάτων μου, τὸ ἔδωκα τῷ πρωτοτόκῳ μου υἱῷ· τὸ δὲ ἕκτον, τῷ δευτέρῳ· τὸ δὲ δέκατον, τῷ τρίτῳ· τὸ δὲ δέκατον ὄγδοον,

ἐχάρισα τῷ δούλῳ μου· ἐκράτησα δὲ καὶ διὰ τὸν ἐμαυτόν μου, ἑκατὸν ἐννενήκοντα δύω φλωρία. Πόση ἄρα ἦτον ἡ Ποσότης τῶν χρημάτων του; καὶ πόσα ἔδωκεν εἰς καθ᾽ ἕνα ἀπὸ τοὺς υἱούς του; καὶ πόσα τῷ δούλῳ του;

Λύσις.

Εἰς λύσιν τοῦ Προβλήματος τούτου, καὶ τῶν ὁμοίων αὐτῷ, Α΄. ἂς βαλθῶσι κατὰ σειρὰν τὰ ὀνομασθέντα ἐν τῷ Προβλήματι Κλάσματα, ἀντὶ τῶν δοθέντων μερῶν τῶν χρημάτων, ὡς Παρονομασταὶ αὐτῶν· Β΄. ἂς πολλαπλασιασθῶσιν ἀναμεταξύ των οἱ Παρονομασταὶ, καὶ ἂς γένῃ ὁ 2160 Ἀριθμός· οἷον $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{18} + 192 = X + \alpha = 2160$· Γ΄. αὐτὸς δὲ ὁ Ἀριθμὸς, ὅστις ἔγινεν ἀπὸ τοὺς Παρονομαστὰς, ἂς διαιρεθῇ ἐπὶ τοὺς αὐτοὺς Παρονομαστὰς ὁποῦ ἔγινε, καὶ θέλει μας δώσῃ τὰ ἐφεξῆς Πηλίκα· $1080 + 360 + 216 + 120 = 1776$· τὰ ὁποῖα συναπτόμενα, κάμνουσι τὸν, 1776 Ἀριθμόν· Δ΄. ἂς ἀφαιρεθῇ αὐτὸς ὁ Ἀριθμὸς ἀπὸ τὸν κοινὸν Παρονομαστὴν $= 2160$, καὶ μένει ὁ 384· οἷον $2160 - 1776 = 384$· τοῦτον λοιπὸν, ἂς τὸν λάβωμεν ἀντὶ τοῦ α. ὅρου· τὸν δὲ γνωστὸν $= 192$, ἀντὶ τοῦ β΄. Καὶ ἀντὶ τοῦ γ΄. ἐκεῖνον, ὅστις ἔγινεν ἀπὸ τοὺς Παρονομαστὰς, δηλ. τὸν, 2160. Μεθόδου δὲ τῶν Τριῶν γενομένης, τὸ Πηλίκον θέλει μας φανερώσῃ τὴν Ποσότητα τῶν χρημάτων, τὴν εἶχεν ὁ ἐρωτηθείς· οἷον $\div\, 384 : 192 :: 2160 : X = 1080$· λέγω ὅτι τόσα εἶχεν· εὑρέθη ἄρα ἡ Ποσότης τῶν χρημάτων ὁποῦ εἶχεν· ὃ ἦν τὸ α΄. ζητούμενον.

Λείπεται δὲ νὰ εὕρωμεν καὶ τὰ μέρη ὁποῦ ἔδωκε τὸν καθ᾽ ἕνα ἀπὸ τοὺς ὀνομασθέντας ἐν τῷ Προβλήματι.

Διὰ νὰ εὕρωμεν καὶ αὐτὰ τὰ μέρη· Α΄. ἂς ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τὴν εὑρεθεῖσαν Ποσότητα, τὰ 192 φλωρία, τὰ ὁποῖα ἐκράτησε διὰ τὸν ἑαυτόν του, καὶ μένουσιν $= 888$· οἷον $1080 - 192 = 888$· Β΄. ἂς γένῃ Μέθοδος τῶν Τριῶν ἔχουσα, διὰ μὲν α. ὅρον, τὸν 1776 Ἀριθμὸν, ὅστις ἀπέμεινεν ἀπὸ τὴν Ἀφαίρεσιν τοῦ κοινοῦ Παρονομαστοῦ· β. δὲ, τὸν 888· καὶ γ΄. καθ᾽ ἕνα ὁποῦ ἔγινεν ἐκ τῆς Διαιρέσεως τοῦ κοινοῦ Παρονομαστοῦ, ἀπὸ τοὺς κατὰ μέρος Παρονομαστὰς, δηλ. τὸν 1080. Καὶ 360. Καὶ 216. Καὶ 120. τετραπλῆς δὲ Μεθόδου γενομένης, τὰ Πηλίκα θέλουσι μας φανερώσῃ τὸ μέρος, τὸ ὁποῖον ἔλαβεν ὁ καθ᾽ εἷς ἀπὸ αὐτούς.

ἔσται ἄν· $\div$ 1776 : 888 : : $\left\{\begin{array}{l} 1080 = 540 : \text{τὸ μέρος τοῦ α΄. ἀντὶ } \frac{1}{2}. \\ 360 = 180 : \text{τὸ τοῦ β΄. ἀντὶ τοῦ } \frac{1}{6}. \\ 216 = 108 : \text{τὸ τοῦ γ΄. ἀντὶ τοῦ } \frac{1}{10}. \\ 120 = \;\;60 : \text{τὸ τοῦ δούλου ἀντὶ τοῦ } \frac{1}{18}. \end{array}\right.$

$192 + 888 = 1080.$

Εὑρέθη ἄρα καὶ τὸ β΄. ζητούμενον, καθὼς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα, καὶ τὰ μέρη ὁποῦ ἔλαβεν ὁ καθ' εἷς· τὰ ὁποῖα συναπτόμενα, κάμνουσι τὸν 888 Ἀριθμόν· ὅσα δηλαδὴ ἀπέμειναν ἀπὸ τὴν ὁλικὴν εὑρεθεῖσαν Ποσότητα, μετὰ τὴν Ἀφαίρεσιν τῶν 192, ὁποῦ ἐκράτησε διὰ τὸν ἑαυτόν του· τὰ ὁποῖα προσιθέμενα, κάμνουσι τὸν εὑρεθέντα ὁλικὸν Ἀριθμόν· οἷον 888 + 192 = 1080. ἄρα κτλ.

Τὸ αὐτὸ Πρόβλημα κατ' ἄλλον τρόπον ἐκφρασθέν.

Ὁ ἴδιος ἄνθρωπος ἐρωτηθεὶς καὶ ἀπὸ ἄλλον τινὰ φίλον του, περὶ τῆς Ποσότητος τῶν χρημάτων ὁποῦ ἔχει, ἀπεκρίνατο καὶ πρὸς αὐτὸν οὕτως· ὦ φίλε μου, ἐὰν εἶχον τὸ διπλάσιον, τῶν χρημάτων ὁποῦ ἔχω, καὶ τὸ ἥμισυ, καὶ τὸ τέταρτον, καὶ τὸ ὄγδοον, μοι ἐδάνειζες καὶ σὺ πέντε φλωρία, ἤθελα ἔχω τρεῖς χιλιάδες καὶ ἑκατὸν δέκα φλωρία· ζητεῖται λοιπὸν καὶ ἐδῶ ἡ Ποσότης τῶν χρημάτων ὁποῦ εἶχε, καὶ μ' ὅλον ὁποῦ ἡ ἀπόκρισις ὁποῦ ἔκαμεν εἰς τὸν δεύτερον φίλον του, εἶναι διαφορετικὴ, ἀπὸ ἐκείνην ὁποῦ ἔκαμεν εἰς τὸν πρῶτον.

Λύσις.

Εἰς λύσιν τούτου, ἂς λάβωμεν ἕνα Ἀριθμὸν, ὅς τις νὰ διαιρεῖται εἰς δύω, εἰς τέσσαρα, καὶ ὀκτὼ μέρη· ὅτι λογῆς εἶναι ὁ 8· τοῦ ὁποίου διπλάσιος εἶναι ὁ 16· ἥμισυς δὲ ὁ 4· τέταρτον δὲ, ὁ 2· καὶ ὄγδοον ἡ μονὰς, τὰ ὁποῖα μέρη συναπτόμενα, κάμνουσι τὸν 23 Ἀριθμόν· οἷον 16 + 4 + 2 + 1 = 23· αὐτὸν λοιπὸν τὸν Ἀριθμὸν, ἂς τὸν λάβωμεν ἀντὶ τοῦ α΄. ὅρου· τὸν δὲ καθ' Ὑπόθεσιν τῆς ὁλικῆς Ποσότητος τῶν χρημάτων τοῦ ἐρωτηθέντος ληφθέντα 8, ἀντὶ τοῦ β΄. καὶ τὸν Ἀριθμὸν τῆς Ποσότητος ὁποῦ εἶπεν ὅτι ἤθελεν ἔχῃ, δηλ. τὸν 3110· (ἀφαιρῶντας τὰ πέντε ὁποῦ τοῦ ἐδάνεισε) δηλ. τὸν 3105. ἀντὶ τοῦ γ΄. (ἐπειδὴ εἰς αὐτὴν τὴν περίστασιν, ἤθελεν εἴπῃ τι-

νὰς) ἐὰν τὰ 23, εἶχον Κεφάλαιον 8, τὰ 3105, πόσον ἄρα Κεφάλαιον εἶχον! πράξεως δὲ γενομένης, τὸ Πηλίκον θέλει μας φανερώσῃ τὸν Ἀριθμὸν τῶν χρημάτων ὁποῦ εἶχεν· ἔσται ἄν $\div$ 23 : 8 : : 3105 : X = 1080· εὑρέθη ἄρα ὁ αὐτὸς Ἀριθμὸς πάλιν, ὡς καὶ εἰς τὸ ἀνώτερον πρῶτον ἐρώτημα· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον. ἄρα κτλ.

Δεῖξις.

Ὅτι δὲ αὐτὸς εἶναι ὁ Ἀριθμὸς, ὅς τις ἐζητεῖτο, δεικνύεται· ἂς βάλωμεν τὸ διπλάσιον τοῦ εὑρεθέντος 1080· καὶ τὸ ἥμισυ, καὶ τὸ τέταρτον, καὶ τὸ ὄγδοον, καὶ τὰ 5, ὁποῦ ἐδανείσθη, καὶ θέλει γένῃ ὁ Ἀριθμὸς ὁποῦ εἶπεν, δηλ. ὁ 3110· οἷον 2160 + 540 + 270 + 135 + 5 = 3110· ἄρα ὁ εὑρεθεὶς εἶναι ὁ ζητούμενος Ἀριθμός· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόβλημα Β΄.

§. 266. Ὁ Ἀντήνωρ, πορευθεὶς εἰς τὰς Ἀθήνας, τὴν μεν α΄. ἡμέραν κατηνάλωσε τὰ ἡμίση ἀπὸ τὰ ἀργύρια ὁποῦ εἶχε μαζῆ του· τὴν δὲ β΄. τὸ τέταρτον μέρος αὐτῶν· τὴν δὲ γ΄. τὸ δέκατον, καὶ τὴν δ΄. τὸ εἰκοστόν· τοῦ ἀπέμειναν δὲ καὶ δέκα ἀργύρια. Πόσα ἄρα ἀργύρια εἶχε μαζῆ του ὅταν ἐπῆγεν εἰς τὰς Ἀθήνας!

Λύσις.

Εἰς λύσιν τούτου, α΄. ἂς γραφῶσι κατὰ σειρὰν τὰ ὀνομασθέντα μέρη· β΄. ἂς φερθῶσιν εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστήν· (§. 93.) γ΄. ἂς συναφθῶσιν οἱ Ἀριθμηταὶ τῶν συναχθέντων Κλασμάτων, καὶ ἂς γένῃ ἓν ὁλικὸν Κλάσμα· δ΄. ἂς ἀφαιρεθῇ ὁ Ἀριθμητὴς τοῦ ὁλικοῦ τούτου Κλάσματος ἀπὸ τὸν κοινὸν Παρονομαστήν του· καὶ τὸν ἐναπολειφθέντα Ἀριθμὸν, νὰ τὸν λάβωμεν ἀντὶ τοῦ α΄. ὅρου· τὰ δὲ ἀργύρια ὁποῦ τοῦ ἔμειναν, ἀντὶ τοῦ β΄. καὶ τὸν κοινὸν Παρονομαστὴν, ἀντὶ τοῦ γ΄. Μεθόδου δὲ γενομένης, τὸ Πηλίκον θέλει μας φανερώσῃ τὸν Ἀριθμὸν τῶν ἀργυρίων, τὸν ὁποῖον εἶχε μαζῆ του· οἷον $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} = \frac{800}{1600} + \frac{400}{1600} + \frac{160}{1600} + \frac{80}{1600} = \frac{1440}{1600}$· ὅθεν 1600 − 1440 = 160 : 10 : : 1600 : X = $\frac{16000}{160}$ = 100 = X· ἄρα εἶχεν 100.

Δεῖ-

Δεῖξις.

Δείκνυται· ἂς ἀφαιρεθῶσι τὰ δηλωθέντα μέρη, τὰ ὁποῖα ἐξόδευσεν ὁ Ἀντήνωρ, ἀπὸ τὸν εὑρεθέντα Ἀριθμὸν, καὶ θέλουσι μείνῃ 10· οἷον $100 - 50 - 25 - 10 - 5 = 10$· ἄρα ὀρθῶς ἡ πρᾶξις ἐγένετο· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόβλημα Γ'.

§. 267. Ὁ Ἰωάννης, εἰς μὲν τὴν α'. ἡμέραν, κατηνάλωσε πέντε ἀργύρια ὀλιγότερον, ἀπὸ ὅσα ἐξόδευσε τὴν β'. Εἰς δὲ τὴν α'. καὶ β'. ὁμοῦ, τὰ ἥμισυ ἀπὸ ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἐξόδευσε τὴν γ'. ἡμέραν, πάντα δὲ τὰ καταναλωθέντα ἦσαν $= 75$. Πόσα ἄρα ἐξοδίαζε τὴν κάθε ἡμέραν ξεχωριστά!

Λύσις.

Εἰς λύσιν τούτου τὰ μὲν ἔξοδα τῆς α'. ἡμέρας, ἂς τὰ ὀνομάσωμεν X· καὶ τὰ $5 = \alpha$· λοιπὸν τὰ ἔξοδα τῆς β'. ἡμέρας ἔσονται $= 2X + \alpha$· τὰ δὲ τῆς γ'. διπλᾶ ὄντα τῶν προτέρων δύω ἡμερῶν, ἔσονται $= 4X + 2\alpha$· ὑποτεθείσης δὲ τῆς Ποσότητος ὅλης τῶν ἐξοδιασθέντων $75 =$ τῷ β· ἔσται $2X + \alpha + 4X + 2\alpha = \beta$· ἄρα $6X + 3\alpha = \beta$. Καὶ $6X = \beta - 3\alpha$. Καὶ $X = \frac{\beta - 3\alpha}{6:} = \frac{75 - 15}{6:} = \frac{60}{6:} = 10$. Καὶ $X + \alpha = 15$. Καὶ $4X + 2\alpha = 50$· τὸ X ἄρα εὑρέθη ἴσον τῷ 10· ὅθεν τὴν μὲν α'. ἡμέραν ἐξόδευσε 10· τὴν δὲ β'. 15· καὶ τὴν τρίτην 50· ἐπειδὴ $10 + 15 + 50 = 75$. ἄρα κτλ.

Πρόβλημα Δ'.

§. 268. Ἕνας ἐργάτης ἐσυμφώνησε μεθ' ἑνὸς πλουσίου, νὰ τοῦ ἐργάζηται εἰς κάθε ὑπηρεσίαν του, καὶ νὰ τοῦ δίδῃ διὰ μισθὸν, πόσον τὴν ἑβδομάδα· λοιπὸν λογαριάζοντας τὰς ἑβδομάδας, καὶ τὰ ἀργύρια ὁποῦ ἔλαβε, βλέπει ὅτι ἔχει τὸ πέμπτον μέρος τῶν 9 ἀργυρίων, ὁμοῦ μὲ τὸ πέμπτον μέρος τοῦ μισθοῦ ὁποῦ ἔλαβεν εἰς τρεῖς ἑβδομάδας· καὶ ὁμοῦ μὲ αὐτὸν τὸν Ἀριθμὸν, ἀφ' οὗ ἐσύναψε τὸν πέντε ἑβδομάδων μισθὸν, τοῦ εὑρέθησαν ἀργύ-

εια

εια 41· διὰ πόσον ἄρα μισθὸν εἰργάζετο τὴν κάθε ἑβδομάδα!

Λύσις.

Ἡ θέσις τοῦ Προβλήματος εἶναι αὕτη· τὸ πέμπτον μέρος τῶν ἐννέα ἀργυρίων, καὶ τοῦ τριπλοῦ μισθοῦ τῆς ἑβδομάδος, ὁμοῦ μὲ τὸν πενταπλοῦν τῆς ἑβδομάδος μισθὸν, ἔστιν ἴσος μὲ 41 ἀργύρ. Ὁ μὲν τῆς ἑβδομάδος μισθὸς ἔστω $= X$. Καὶ $9 = \alpha$. Καὶ $41 = \beta$· ἐξ ὧν, κατὰ τὴν θέσιν, ἔσται $\frac{\alpha + 3X}{5:} + 5X = \beta$· μεταθέσει δὲ καὶ ἀναγωγῇ ἔσται· $28X = \beta - \alpha$· ἄρα $X = \frac{5\beta - \alpha}{28:}$ ἢ $\frac{5.41}{28:} = \frac{205}{28:} = 7$· ἄρα εἰργάζετο διὰ 7 ἀργύρ. τὴν ἑβδομάδα· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Δεῖξις.

Τὸ $\frac{1}{5}$ τῶν 9 ἀργ. ἐστὶν ἴσον μὲ ἓν ἀργ. καὶ παράδ. 32· (ὅταν ὑποθέσωμεν χρόσ.) καὶ 3· πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ ἑπτὰ $= 21$· οἷον $3 . 7 = 21$· τοῦ ὁποίου τὸ $\frac{1}{5}$, εἶναι χρόσ. 4, καὶ παράδ. $8 = 6$ ἀργ. Καὶ 5· πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ 7, ποιεῖ 35· οἷον $5 . 7 = 35$· ὅθεν συναπτόμενα, γίνονται 41· οἷον $6 + 35 = 41$· ἄρα εἶχε 41· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόβλημα Ε'.

§. 269. Εἷς Πατὴρ τέκνων, μέλλων νὰ ἀποθάνῃ, ἔκαμε τὴν διαθήκην του· εἰς τὴν ὁποίαν ἀφίνει κληρονόμους τοὺς υἱούς του, λέγων· ὅτι ὁ μὲν πρωτότοκος υἱός του, νὰ λάβῃ εἰς κληρονομίαν, ἀργύρια χίλια, καὶ τὸ ἔννατον μέρος τῆς μετὰ τὴν Ἀφαίρεσιν τούτων, λοιπῆς περιουσίας του· ὁ δὲ β'. υἱός του νὰ λάβῃ δύω χιλιάδας, καὶ τὸ ἔννατον μέρος, μετὰ τὴν Ἀφαίρεσιν καὶ αὐτῶν, τῆς ἐπιλοίπου περιουσίας του· ὁμοίως καὶ ὁ γ'. καὶ οἱ λοιποὶ υἱοί του, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον νὰ λάβωσι τὴν κληρονομίαν· ἀλλὰ τέλος πάντων, εὑρέθησαν ὅλοι οἱ υἱοί του, ὅτι ἔλαβον ἴσην Ποσότητα· ἄρα πόση ἦτον ὅλη του ἡ περιουσία! καὶ πόσους υἱοὺς εἶχεν! ἐπειδὴ εἶναι ἀγνώριστος, καὶ ἡ περιουσία του, καὶ ὁ Ἀριθμὸς τῶν υἱῶν του.

Λύ-

Λύσις.

Ὅλη ἡ περιουσία τοῦ Πατρὸς ἐκείνου, ἂς ὀνομασθῇ χ· τὰ δὲ 1000 ἀργύρια, ἂς ὀνομασθῶσιν α· καὶ ἐπειδὴ λέγει, ὅτι ὁ α'. υἱός του νὰ λάβῃ 1000 ἀργ. καὶ τὸ $\frac{1}{9}$ μέρος τῆς λοιπῆς περιουσίας του, ἀφ' οὗ ἀφαιρεθῶσι δηλ. ἐξ αὐτῆς τὰ 1000 ἀργ. ἔσται τὸ μερίδιον τοῦ α'. υἱοῦ $= \frac{9\alpha + \chi - \alpha}{9:} = \frac{8\alpha + \chi}{9:}$.

Ἂς βαλθῇ δὲ τὸ, $\frac{8\alpha+\chi}{9:} = $ τῷ ρ· λοιπὸν ἐκεῖνο ὁποῦ ἀπέμεινεν ἀπὸ τὸ χ, ἐκ τοῦ ὁποίου ἀφῃρέθη τὸ μερίδιον $=\rho$, ἔσται $\chi - \rho$· τὸ δὲ μερίδιον τοῦ β'. υἱοῦ, μὲ τὸ νὰ εἶναι 2000 καὶ τὸ $\frac{1}{9}$ μέρος τοῦ $\chi - \rho - 2000$, ἔσται $2\alpha + \frac{\chi - \rho - \alpha}{9:}$, τὸ τοῦ β'. υἱοῦ μερίδιον· καὶ ἐπειδὴ αὐτὰ τὰ δύω Κλάσματα, ὄντα ἴσα, καὶ ἔχοντα τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν 9, ἀναγκαίως ἕπεται νὰ εἶναι ἴσοι καὶ οἱ Ἀριθμηταὶ αὐτῶν· ἔσται ἄρα, $8\alpha + \chi = 16\alpha - \rho$· μεταθέσει δὲ καὶ ἀναγωγῇ, $\rho = 8\alpha$· βαίνωντας δὲ εἰς τὸν τόπον τοῦ ρ, τὴν προτέραν αὐτοῦ δύναμιν $= \frac{8\alpha+\chi}{9:} = 8\alpha + \chi = 72\alpha - 8\alpha = 64\alpha$. Καὶ ἐπειδὴ τὸ α ἐστὶν ἴσον 1000, ἄρα τὸ χ εὑρέθη $= 64000$· καὶ τόση ἦν ὅλη ἡ περιουσία ἐκείνου τοῦ Πατρός· ὃ ἦν τὸ α'. ζητούμενον.

Λείπεται δὲ διὰ νὰ εὕρωμεν καὶ τὸν Ἀριθμὸν τῶν υἱῶν του, δηλ. πόσους υἱοὺς εἶχε. Καὶ ἐπειδὴ τὸ μερίδιον τοῦ α'. υἱοῦ ἐστὶν ἴσον μὲ τὸ μερίδιον τοῦ καθ' ἑνὸς ἀπὸ τοὺς ἄλλους υἱούς του, βαίνεται δὲ εἰς τὸ Πρόβλημα, ὅτι ἦτον ἴσον μὲ 1000 ἀργύρ. ὁμοῦ μὲ τὸ $\frac{1}{9}$ μέρος τῆς λοιπῆς περιουσίας του, ἔσται· $64000 - 1000 = 63000$· εἶναι ἄρα τὸ κάθε μερίδιον πρὸς 8000· λοιπὸν διαιρεθεὶς ὁ 64000 Ἀριθμὸς, ἐπὶ 8000, θέλει εὑρεθῇ καὶ ὁ Ἀριθμὸς τῶν υἱῶν ὁποῦ εἶχεν· οἷον $\frac{64000}{8000:} = 8$· ἦσαν ἄρα καὶ οἱ υἱοὶ αὐτοῦ ὀκτώ· ὃ ἦν τὸ β'. ζητούμενον.

Λύσις τοῦ ἰδίου Προβλήματος καὶ κατ' ἄλλον τρόπον.

Ἐπειδὴ ὁ ῥηθεὶς Πατὴρ λέγει εἰς τὴν διαθήκην του, ὅτι ὁ πρωτότοκος υἱός του νὰ λάβῃ ἀργ. 1000, καὶ τὸ ἔνατον μέρος τῆς ἐπιλοίπου περιουσίας του, βάλε τὸ ἔνατον μέρος εἰς εἶδος Κλάσματος· οἷον $\frac{1}{9}$. Καὶ λοιπὸν α'. ἀφαίρεσον τὸν Ἀριθμητὴν, ἀπὸ τὸν Παρονομαστὴν 9, καὶ μένουσιν 8· οἷον $9 - 1 = 8$· β'. τετραγώνισον τὸν 8, καὶ ἂς γένῃ ὁ 64· οἷον $8 . 8 = 64$· καὶ ἐπειδὴ λέγει, ὅτι ὁ πρῶτός του υἱὸς νὰ λάβῃ 1000 ἀργ. πολλαπλασίασον τὸν 64 ἐπὶ τὸν 1000, καὶ γίνονται 64000· οἷον $64 . 1000 = 64000$. ἀφαίρεσον τούτου τὸν 1000, καὶ μένουσιν 63000. Καὶ ἐπειδὴ πάλιν λέγει, ὅτι νὰ λάβῃ καὶ τὸ ἔνατον μέρος τῆς ἐπιλοίπου περιουσίας του, μέρισον τὸν 63000 μὲ τὸν 9, καὶ θέλει μας δώσῃ Πηλίκον 7000· οἷον $\frac{63000}{9:}$ 7000· προσθέτωντας εἰς αὐτὰς καὶ τὰ 1000, τὰ ὁποῖα ἔλαβε, γίνονται 8000· οἷον $7000 + 1000 = 8000$· λέγω, ὅτι τόσα ἔλαβεν ὁ πρῶτός του υἱός. Καὶ ἐπειδὴ ὅλοι οἱ υἱοί του ἔλαβον ἴσια μερίδια, μέρισον τὸν εὑρεθέντα ὁλικὸν Ἀριθμὸν 64000, ἐπὶ τὸ μέρος ὁποῦ ἔλαβεν ὁ καθ' εἷς ἀπὸ τοὺς υἱούς του, δηλ. τὸν 8000, καὶ θέλει μας δώσῃ Πηλίκον τὸν 8· οἷον $\frac{64000}{8000:}$ 8· ἐλύθη ἄρα τὸ Πρόβλημα καὶ κατ' ἄλλον τρόπον.

Πρόβλημα ϛ'.

§. 270. Εἷς βοσκὸς προβάτων, ἐρωτηθεὶς ὑπό τινος πόσα πρόβατα ποιμαίνει; τοῦ ἀπεκρίθη· ἡ Διαφορὰ τοῦ τετάρτου, καὶ δεκάτου μέρους τῶν προβάτων μου, ἐστὶ δεκαπέντε· πόσα ἄρα πρόβατα ἔβοσκε!

Λύσις.

Ὁ Ἀριθμὸς τῶν προβάτων, ἂς εἶναι $= \chi$. Καὶ ὁ $15 = \alpha$· ἡ θέσις τοῦ Προβλήματος, κάμνει φανερὰ τὴν ἐξίσωσιν· οἷον $\frac{\chi}{4} - \frac{\chi}{10} = \alpha$· ἀπαλλαγῇ δὲ τῶν Κλασμάτων $10\chi - 4\chi = 40\alpha$· ἄρα $6\chi = 40\alpha$. Καὶ $\chi = \frac{40\alpha}{6:}\ \frac{600}{6:}$ 100· ἄρα ἔβοσκεν ἑκατὸν πρόβατα· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Ἄλλως.

Ἄς βαλθῶσι κατὰ σειρὰν τὰ ὀνομασθέντα μέρη· οἷον $\frac{1}{4} - \frac{1}{10}$· ἄς πολλαπλασιαθῶσιν οἱ Παρονομασαὶ ἀναμεταξύ των, καὶ ἄς γενῇ ὁ 40· οἷον $4 . 10 = 40$· ἄς πολλαπλασιαθῶσι τὰ 40, ἐπὶ τὴν Διαφορὰν 15, καὶ ἄς γενῇ ὁ 600· οἷον $40 . 15 = 600$· ἀφαιρεθήτω ὁ 4 τοῦ 10, καὶ μένει ὁ 6· οἷον $10 - 4 = 6$· διαιρεθήτω ὁ 600, ἐπὶ τὸν 6, καὶ θέλει δώσῃ Πηλίκον τὸν 100· οἷον $\frac{600}{6}$ 100.

Δεῖξις.

Ὅτι ὁ ζητούμενος Ἀριθμὸς εἶναι ὁ 100, δείκνυται· τὸ τέταρτον τοῦ 100, εἶναι 25· τὸ δὲ δέκατον, εἶναι δέκα· ὅθεν $25 - 10 = 15$. ἄρα κτλ.

Πρόβλημα Ζ'.

§. 271. Εἶναι μία Πηγὴ, καὶ ἔχει 4 κρουνοὺς, ἤγουν κανούλια· ἀπὸ τοὺς ὁποίους, ὁ μὲν α'. γεμίζει τὴν δεξαμενὴν (ἤγουν γοῦρναν) εἰς δύω ὥρας· ὁ δὲ β'. εἰς 3· ὁ δὲ γ'. εἰς 4· καὶ ὁ δ'. εἰς 5· εἰς πόσας ὥρας ἄρα θέλουν τὴν γεμίσῃ καὶ οἱ 4 κρουνοὶ ὁμοῦ!

Λύσις.

Εἰς λύσιν τοῦ Προβλήματος τούτου, ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ μία ὥρα, θέλει δώσῃ ὕδωρ τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ α'. κρουνοῦ, τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ β'. τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ γ'. καὶ τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ δ'. α'. λοιπὸν, ἄς βαλθῶσιν ἐφεξῆς αὐτὰ τὰ ὑποθετικὰ Κλάσματα· β'. ἄς φερθῶσιν εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν· καὶ ἄς συναφθῶσιν οἱ Ἀριθμηταὶ τῶν Κλασμάτων, καὶ ἄς γενῇ ἓν ὁλικὸν Κλάσμα ἴσον μὲ ὅλα τὰ Κλάσματα· οἷον $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{60}{120} + \frac{40}{120} + \frac{30}{120} + \frac{24}{120} = \frac{154}{120}$· γ'. ἄς ἀναλυθῇ ἡ μία ὥρα εἰς 60 λεπτὰ πρῶτα, καὶ ἄς πολλαπλασιαθῇ ὁ 60, ἐπὶ τὸν κοινὸν Παρονομαστὴν· καὶ ὁ γενόμενος Ἀριθμὸς, διαιρεθήτω ἐπὶ τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ συσταθέντος ὁλικοῦ Κλάσματος· τὸ δὲ Πηλίκον θέλει μας δώσῃ λεπτὰ πρῶτα· τὸ δὲ ἐναπολειφθὲν ἀπὸ τὴν α'.

α'. Διαίρεσιν, ἄς πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν 60, καὶ ἄς διαιρεθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν Διαιρέτην, καὶ θέλει μας δώσῃ Πηλίκον λεπτὰ δεύτερα· τὸ ἴδιον ἄς γίνεται εἰς τὴν γ'. δ'. καὶ ε'. Διαίρεσιν. κτλ. Καὶ θέλεις εὕρῃ τὸ ζητούμενον· οἷον $120 . 60 = \frac{7200}{154}$: $\overset{0}{46} + \frac{116}{154}$. ὅθεν, $116 . 60 = \frac{6960}{154}$: $45 + \frac{30}{154}$. Καὶ $30 . 60 = \frac{1800}{154}$: $\overset{\mathrm{iii}}{11} + \frac{106}{154}$. Καὶ $106 . 60 = \frac{6300}{154}$: $\overset{\mathrm{iiii}}{40} + \frac{140}{154}$. Καὶ $140 . 60 = \frac{8400}{154}$: $\overset{\mathrm{iiiii}}{54} + \frac{84}{154}$. Καὶ $84 . 60 = \frac{5040}{154}$: $\overset{\mathrm{iiiiii}}{32} + \frac{112}{154}$. Καὶ $112 . 60 = \frac{6720}{154}$: $\overset{\mathrm{iiiiiii}}{43} + \frac{98}{154} = \frac{7}{11}$. ἄρα οἱ τέσσαρες κρουνοὶ ὁμοῦ, θέλουσι γεμίσῃ τὴν δεξαμενὴν εἰς λεπτά· $\overset{0}{46} + \overset{\mathrm{ii}}{45} + \overset{\mathrm{iii}}{11} + \overset{\mathrm{iiii}}{40} + \overset{\mathrm{iiiii}}{54} + \overset{\mathrm{iiiiii}}{32} + \overset{\mathrm{iiiiiii}}{43} + \frac{98}{154} = \frac{7}{11}$· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Αὐτὴν τὴν Μέθοδον μεταχειριζόμενος, θέλεις δυνηθῇ νὰ λύῃς καὶ ἄλλα πολλὰ Προβλήματα παρόμοια αὐτοῦ.

Πρόβλημα Η'.

§. 272. Ὁ Πολυκράτης, προσελθὼν εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τοῦ Πυθαγόρου, τὸν ἠρώτησε πόσους Μαθητὰς ἔχει; ἐκεῖνος τοῦ ἀπεκρίθη· ἀπ' ὅσους Μαθητὰς ἔχω, τὸ μὲν ἥμισυ μέρος αὐτῶν, καταγίνονται εἰς τὰ Μαθηματικά· τὸ δὲ τέταρτον, εἰς τὰ Φυσικά· καὶ τὸ ἕβδομον, εἰς τὰ Γραμματικά· εἶναι δὲ καὶ τρεῖς γυναῖκες, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἡ Θεανὼ, εἶναι ἡ προκομενεστέρα τῶν ἄλλων γυναικῶν· πόσους Μαθητὰς ἔχω ἐγώ· πόσους ἄρα εἶχε!

Λύσις.

Εἰς τοῦτο τὸ Πρόβλημα ζητεῖται εἷς Ἀριθμὸς χ, τοῦ ὁποίου τὸ $\frac{1}{2}$, τὸ $\frac{1}{4}$, τὸ $\frac{1}{7}$, καὶ μὲ τοὺς 3, κάμνουσι τὸν ζητούμενον

νον Ἀριθμὸν χ· ἔσαι ἂν $\chi = \frac{\chi}{2} + \frac{\chi}{4} + \frac{\chi}{7} + 3 = 56\chi = 28\chi + 14\chi + 8\chi + 168$· ὅθεν $56 - 50 = 6$. Καὶ $6\chi = 168$· ἄρα $\chi = \frac{168}{6:}$ 28· ἄρα εἶχον 28 Μαθητάς· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Λύσις τοῦ αὐτοῦ Ἀριθμητικῶς.

Καταγράψαντες ἐφεξῆς τὰ τοῦ Προβλήματος Κλάσματα, α΄. νὰ τὰ φέρωμεν εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν· (§. 93.) οἷον $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7} = \frac{28}{56} + \frac{14}{56} + \frac{8}{56} = \frac{50}{56}$· καὶ συνάπτοντες τοὺς Ἀριθμητάς, ἂς γένῃ ἓν ὁλικὸν Κλάσμα, ἴσον μὲ τὰ τρία Κλάσματα τὸ $\frac{50}{56}$· β΄. ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ κοινὸς Παρονομαστὴς 56, ἐπὶ τὸν ἐν τῷ Προβλήματι ἀκέραιον Ἀριθμὸν 3, καὶ γενέσθω ὁ 168· οἷον $56 . 3 = 168$· γ΄. ἂς ἀφαιρεθῇ ὁ ἐκ τῶν Ἀριθμητῶν γενόμενος 50, ἀπὸ τὸν κοινὸν Παρονομαστὴν 56, καὶ μένουσιν 6· οἷον $56 - 50 = 6$· μέρισον λοιπὸν μὲ τὸν 6, τὸν 168, καὶ δίδει Πηλίκον τὸν 28· οἷον $\frac{168}{6:}$ 28· ἦσαν ἄρα οἱ Μαθηταὶ 28· καθὼς εὑρέθη καὶ ἀνωτέρω.

Δεῖξις.

Ὅτι δὲ ὁ 28 ἐστὶν ὁ ζητούμενος Ἀριθμὸς χ, δείκνυται· ἂς διαιρεθῇ ὁ 28, μὲ τὸν Παρονομαστὴν τοῦ καθ᾽ ἑνὸς Κλάσματος. Καὶ ἐκ μὲν τοῦ $\frac{1}{2}$, γίνεται ὁ 14· ἐκ δὲ τοῦ $\frac{1}{4}$ ὁ 7, καὶ ἐκ τοῦ $\frac{1}{7}$, ὁ 4· οἷον $\frac{28}{2:}$ 14. Καὶ $\frac{28}{4:}$ 7. Καὶ $\frac{28}{7:}$ 4· οἱ ὁποῖοι συναπτόμενοι ποιοῦσι τὸν 25· οἷον $14 + 7 + 4 = 25$· προστεθέντα δὲ καὶ τὰ ἀκέραια 3, γίνεται ὁ 28· οἷον $25 + 3 = 28$· ἄρα κτλ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἦσαν δὲ καὶ οἱ μὲν περὶ τὰ Μαθηματικὰ ἀναχολούμενοι 14· οἱ δὲ περὶ τὰ Φυσικὰ 7· καὶ οἱ περὶ τὰ Γραμματικὰ 4· τρεῖς δὲ γυναῖκες ἦσαν χωριστὰ ἀπὸ αὐτοὺς ἀπὸ μία εἰς κάθε τάξιν.

Πρόβλημα Θ΄.

§. 273. Ἡ Ἀφροδίτη, βλέπουσα τὸν υἱόν της Ἔρωτα ἐν μιᾷ τῶν ἡμερῶν κατηφῆ, καὶ λυπημένον, εἶπε πρὸς αὐτόν· τί κακόν σοι ἐσυνέβη, ὦ τέκνον μου, καὶ εἶσαι τόσον πολλὰ λυπημένον; ἐκεῖνος τῆς εἶπεν· αἱ Μοῦσαι διήρπασάν μοι τὰ μῆλα, τὰ ὁποῖα ἔφερον ἀπὸ τὸν Ἑλικῶνα· αἱ μὲν δεξιόθεν, αἱ δὲ ἀριστερόθεν. Καὶ ἡ μὲν Κλειώ, ἥρπασε τὸ πέμπτον μέρος τῶν μήλων· ἡ δὲ Εὐτέρπη, τὸ δωδέκατον· ἡ δὲ Θάλεια, τὸ ὄγδοον· ἡ δὲ Μελπομένη, τὸ εἰκοστόν· ἡ δὲ Τερψιχόρη, τὸ τέταρτον· ἡ δὲ Ἐρατώ, τὸ ἕβδομον· ἡ δὲ Πολύμνιά μοι ἔκλεψε τριάκοντα μῆλα· ἡ Οὐρανία δέ, ἑκατὸν εἴκοσι· καὶ τέλος ἡ Καλλιόπη, τριακόσια· ἐγὼ δὲ ἔρχομαι πρὸς σὲ μὲ χέρια ἄδειανά, φέροντάς σοι αὐτὰ τὰ πενήντα μῆλα, τὰ ὁποῖα ἀπέμειναν ἀπὸ τὰς Μούσας.

Πόσα ἄρα ἦσαν τὰ μῆλα! καὶ πόσα ἥρπασαν ἡ κάθε μία ἀπὸ τὰς Μούσας!

Λύσις.

Ἔσω ὁ Ἀριθμὸς τῶν μήλων ὅπου ἔφερεν ὁ Ἔρως χ· τοῦ ὁποίου τὸ $\frac{1}{5} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{20} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + 30 + 120 + 300 + 50$ ἐστὶν $\chi = 3360$· καὶ τόσα ἦσαν τὰ μῆλα, τὰ ὁποῖα ἐκ τοῦ Ἑλικῶνος ὁ Ἔρως ἔφερεν· ὃ ἦν τὸ α΄. ζητούμενον.

Λείπεται δὲ νὰ εὕρωμεν καὶ πόσα μῆλα ἐπῆρεν ἡ κάθε μία. Ἂς διαιρεθῇ ὁ εὑρεθεὶς Ἀριθμὸς μὲ τὸν Παρονομαστὴν τοῦ καθ᾽ ἑνὸς Κλάσματος χωριστά· καὶ ἐκ μὲν τοῦ $\frac{1}{5}$ θέλει εὕγῃ Πηλίκον, ὁ 672· οἷον $\frac{3360}{5:}$ 672· ἐκ δὲ τοῦ $\frac{1}{12}$· ὁ 280· οἷον $\frac{3360}{12:}$ 280· ἐκ δὲ τοῦ $\frac{1}{8}$, ὁ 420· οἷον $\frac{3360}{8:}$ 420· ἐκ δὲ τοῦ $\frac{1}{20}$, ὁ 168· οἷον $\frac{3360}{20:}$ 168· ἐκ δὲ τοῦ $\frac{1}{4}$, ὁ 840· οἷον $\frac{3360}{4:}$ 840· καὶ ἐκ τοῦ $\frac{1}{7}$, ὁ 480· οἷον $\frac{3360}{7:}$ 480· τὰ ὁποῖα συναπτόμενα, ποιοῦσι τὸν 2860, Ἀριθμόν· οἷον $672 + 280 + 420 + 168 + 840 + 480 = 2860$· συναπτομένων δὲ καὶ τῶν ἀκεραίων Ἀριθμῶν, γίνεται ὁ 500· οἷον $30 + 120 + 300 + 50 = 500$· τὰ ὁποῖα προστιθέμενα, κάμνουσι τὸν 3360· ἀφήρπασεν ἄρα ἡ μὲν Κλειὼ 672· ἡ δὲ Εὐτέρπη 280· ἡ δὲ Θάλεια 420· ἡ δὲ Μελπομένη 168· ἡ δὲ Τερψιχόρη 840· ἡ δὲ Ἐρατὼ 480· ἔκλεψε δὲ καὶ ἡ Πολύμνια 30· ἡ δὲ Οὐρανία 120· ἡ δὲ Καλλιόπη 300· ἔμειναν δὲ καὶ τοῦ Ἔρωτος 50· ἄρα εὑρέθη καὶ τὸ πόσα ἐπῆρε κάθε μία· ὃ ἦν τὸ β΄. ζητούμενον.

Λύσις κατ' ἄλλον τρόπον.

Α'. Τεθήτωσαν ἐφεξῆς τὰ ἐν τῷ Προβλήματι διάφορα Κλάσματα· οἷον $\frac{1}{5}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{20}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}$. Β'. ἀχθήτωσαν εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν, καὶ συναφθήτωσαν οἱ Ἀριθμηταὶ αὐτῶν, καὶ γενέσθω ἓν ὁλικὸν Κλάσμα, ἴσον πᾶσι τοῖς Κλάσμασιν· οἷον $\frac{53760}{268800}+\frac{22400}{268800}+\frac{33600}{268800}+\frac{67200}{268800}+\frac{38400}{268800}=\frac{228800}{268800}$. Γ'. ἀφαιρεθήτω ὁ Ἀριθμητὴς τοῦ ὁλικοῦ Κλάσματος, ἀπὸ τὸν Παρονομαστήν του· καὶ τὸ ἐναπολειφθὲν ληφθήτω ἀντὶ τοῦ α. ὅρου· οἷον $268800-228800=\overset{\alpha'}{40000}$. Δ'. Συναφθήτωσαν καὶ οἱ ἐν τῷ Προβλήματι ἀκέραιοι Ἀριθμοὶ, ὁ δ' ἐξ αὐτῶν γενόμενος Ἀριθμὸς, ληφθήτω ἀντὶ τοῦ β'. ὅρου· οἷον $30+120+300+50=\overset{\beta'}{500}$· καὶ ἀντὶ τοῦ γ'. ὁ κοινὸς Παρονομαστὴς· δηλαδὴ ὁ $\overset{\gamma'}{268800}$· καὶ γενέσθω Μέθοδος τῶν Τριῶν· ὁ δὲ εὑρεθεὶς δ'. ὅρος, ἔσται ὁ ζητούμενος τῶν μήλων Ἀριθμὸς· ὡς ἐν τῷ Διαγράμματι καθορᾶται.
οἷον $\div \overset{\alpha'}{40000} : \overset{\beta'}{500} :: \overset{\gamma'}{268800}\ \chi = 3360$· ἄρα κτλ. Καὶ οὗτος μὲν ἔστιν ὁ καθολικὸς τρόπος τῆς λύσεως τῶν τοιούτων Προβλημάτων.

Πρόβλημα Ι'.

§. 274. Ἄλλοτε πάλιν φέρων μῆλα ὁ Ἔρως εἰς τὸν οἶκόν του, τοῦ τὰ ἥρπασαν αἱ Ἡρωΐδες, καὶ αὐτὸς καθήμενος ἔκλαιεν· ἐλθοῦσα δὲ ἡ μήτηρ του Ἀφροδίτη, τὸν ἠρώτησε τίνος ἕνεκα κλαίει; ὁ δ' ἀποκριθεὶς εἶπεν· ἐκ τῶν μήλων, ἃ ἔφερον, ἡ μὲν Ἰνὼ ἀφήρπασε τὸ $\frac{1}{3}$· ἡ δὲ Σεμέλη, τὸ $\frac{1}{8}$· ἡ δὲ Αὐτονόη, τὸ $\frac{1}{4}$· ἡ δὲ Ἀγαυὴ ἥρπασεν ἀπὸ τὸν κόλπον, τὸ $\frac{1}{5}$. Φυλάττω δὲ καὶ διὰ σὲ δέκα μῆλα· ἐγὼ δὲ, μὰ τὴν ἠγαπημένην μου μητέρα Ἀφροδίτην, αὐτὸ μόνον τὸ ἓν μῆλον ἔχω. Πόσα ἄρα ἦσαν τὰ μῆλα! καὶ πόσα τοῦ ἐπῆρεν ἡ καθε μία ἀπὸ αὐτάς!

Λύσις.

Καὶ ἐδῶ ζητεῖται νὰ εὕρωμεν ἕνα Ἀριθμὸν χ, τοῦ ὁποίου τὸ $\frac{1}{3}$ + τὸ $\frac{1}{8}$ + τὸ $\frac{1}{4}$ + τὸ $\frac{1}{5}$ + 10 + 1, νὰ εἶναι ἴσα μὲ τὸν ζητούμενον Ἀριθμὸν χ· ὃ ἦν τὸ α.

Ἔσται οὖν $\chi=\frac{\chi}{5}+\frac{\chi}{8}+\frac{\chi}{4}+\frac{\chi}{5}+10+1=120$· ἄρα ἦσαν τὰ μῆλα 120· ἐξ ὧν, ἡ μὲν Ἰνὼ ἥρπασε 40· ἡ δὲ Σεμέλη 15· ἡ δὲ Αὐτονόη 30· ἡ δὲ Ἀγαυὴ 24. Καὶ 10 τῆς Ἀφροδίτης· καὶ 1 τοῦ Ἔρωτος $=120$· ὃ ἦν τὸ β'.

Δεῖξις.

Ὅτι δὲ Ὀρθῶς ἡ πρᾶξις ἐγένετο, δεικνύεται· πολλαπλασιασθέντα γὰρ πρὸς ἄλληλα τὰ ἐν τῷ Προβλήματι Κλάσματα, ὡς ἐν τῷ ἀνωτέρω ἡρμήνευται Προβλήματι ποιοῦσι τὰ $\frac{160}{480}+\frac{60}{480}+\frac{120}{480}+\frac{96}{480}$ Κλάσματα· ἅπερ συναφθέντα ποιοῦσι τὸ, $\frac{436}{480}$ ὁλικὸν Κλάσμα· ἔσται οὖν· $480-436=$
$\overset{\alpha'}{44} : \overset{\beta'}{11} :: \overset{\gamma'}{480} : \chi = 120$· ἄρα κτλ. ὃ ἦν τὸ α. Καὶ $\frac{120}{3}$ 40. Καὶ $\frac{120}{8}$ 15. Καὶ $\frac{120}{4}$ 30. Καὶ $\frac{120}{5}$ 24· ὅθεν $40+15+30+24+10+1=120$· ἄρα κτλ. ὃ ἦν τὸ β'.

Πρόβλημα ΙΑ'.

§. 275. Ἡ Μυρτὼ φέρουσα μῆλα ἀπὸ τὸ περιβόλιόν της, τὰ ἐμοίρασεν εἰς ταῖς φιλενάδαις της· καὶ εἰς μὲν τὴν Χειλίδα ἔδωκε, τὸ $\frac{1}{5}$ τῶν μήλων ὁποῦ ἔφερεν· εἰς δὲ τὴν Ἡρὼ, τὸ $\frac{1}{4}$· εἰς δὲ τὴν Ψαμάθην, τὸ $\frac{1}{12}$· εἰς τὴν Κλεοπάτραν, τὸ $\frac{1}{10}$. Καὶ εἰς τὴν Παρθενόπειαν, τὸ $\frac{1}{20}$· ἐχάρισε δὲ καὶ 12 εἰς τὴν Εὐάδνην· ἔμειναν δὲ καὶ εἰς αὐτὴν ἀπὸ ὅλα τὰ μῆλα ὁποῦ ἔφερεν, 120· πόσα ἄρα ἦσαν τὰ μῆλα ὅλα! καὶ πόσα ἐχάρισεν εἰς κάθε μίαν ἀπὸ τὰς εἰρημένας!

Λύσις.

Ἔστω ὁ ζητούμενος Ἀριθμὸς χ· ὅθεν ἔσται· $\chi = \frac{\chi}{5} + \frac{\chi}{4} + \frac{\chi}{19} + \frac{\chi}{10} + \frac{\chi}{20} + 10 + 120 = \chi = 380$· καὶ αὐτός ἐστιν ὁ ζητούμενος Ἀριθμός· ὃ ἦν τὸ α΄. ζητούμενον. Ζητεῖται δὲ καὶ πόσα ἐχάρισεν εἰς ταῖς φιλενάδαις της.

Εἰς εὕρεσιν τούτου, ἂς διαιρεθῇ ὁ εὑρεθεὶς Ἀριθμὸς 380, ἐπὶ τοὺς κατὰ μέρος Παρονομαστάς, τὰ δὲ Πηλίκα, θέλουσι μας δείξῃ πόσα ἐχάρισε κάθε μιᾶς· οἷον $\frac{380}{5}$ 76· εἰς τὴν Χειρίδα. Καὶ $\frac{380}{4}$ 95· εἰς τὴν Ἡρώ. Καὶ $\frac{380}{19}$ 20· εἰς τὴν Ψαμάθην. Καὶ $\frac{380}{10}$ 38· εἰς τὴν Κλεοπάτραν. Καὶ $\frac{380}{20}$ 19 εἰς τὴν Παρθενόπειαν, τὰ ὁποῖα γίνονται $= 248$· προστιθέμενα δὲ καὶ τὰ 12 τῆς Εὐάδνης, καὶ τὰ 120 ὁπoῦ τῆς ἔμειναν, γίνονται 380· οἷον $248 + 12 + 120 = 380$· ὅσος εὑρέθη καὶ ὁ Ἀριθμὸς τῶν μήλων· ὃ ἦν τὸ β΄. ζητούμενον.

Πρόβλημα ΙΒ΄.

§. 276. Εἷς ἄνθρωπος εἶχεν εἰς τὸ ἀμπέλι του μίαν καρυδίαν, ἥτις ἦτον φορτωμένη ἀπὸ πολλὰ καρύδια· καὶ ἐν ᾧ ἐπῆγε νὰ τὰ συνάξῃ, τὴν εὗρηκε χωρὶς καρύδια, καὶ ἀποροῦσε ποῖος ἄρα του τὰ ἔκλεψεν! ἡ δὲ καρυδιὰ τοῦ εἶπε· τί ἀπορεῖς διὰ τὰ καρύδιά μου; αὐτὰ τὰ ἐσυνάξαν αἱ Ἡρωΐδες. Καὶ ἡ μὲν Παρθενόπεια, ἐσύναξε τὸ $\frac{1}{5}$ τῶν καρυδίων μου· ἡ δὲ Φίλινα, τὸ $\frac{1}{8}$· ἡ δὲ Ἀγανίππη, τὸ $\frac{1}{4}$· ἡ δὲ Ὠρείθυια, τὸ $\frac{1}{7}$· ἡ δὲ Εὐρυνόμη, τὸ $\frac{1}{6}$· αἱ δὲ τρεῖς χάριτες, ἐσύναξαν ἑκατὸν ἓξ καρύδια· αἱ δὲ ἐννέα Μοῦσαι ἐσύναξαν ἀπὸ ἐμὲ ἐννέα φοραῖς ἀπὸ ἐννέα· ἑπτὰ δὲ θέλεις τὰ ζητήσῃ εἰς τὰ πλέον μακρυνὰ κλωνάριά μου. Πόσα ἄρα καρύδια εἶχε! καὶ πόσα ἔλαβεν ἡ κάθε μία τῶν εἰρημένων!

Λύσις.

Καὶ ἐδῶ ζητεῖται εἷς Ἀριθμὸς χ, τοῦ ὁποίου τὸ $\frac{1}{5}$ μέρος $+ \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} + 106 + 81 + 7$, ἤθελεν εἶναι ἴσος μὲ τὸν ζητούμενον Ἀριθμὸν χ.

Ἔσται

Ἔσται δή· $\chi = \left(\frac{\chi}{5} + \frac{\chi}{8} + \frac{\chi}{4} + \frac{\chi}{7} + \frac{\chi}{6}\right) + 194 = \chi$· ἄρα $\chi = 1680$ καρύδια εἶχεν ἡ ῥηθεῖσα καρυδιά· ὃ ἦν τὸ α΄. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ καὶ τὸ β΄. ζητούμενον, ἂς διαιρεθῇ ὁ εὑρεθεὶς Ἀριθμὸς ἐπὶ τοὺς κατὰ μέρος Παρονομαστάς, ὡς ἄνωθεν, καὶ θέλουσι μας δώσῃ Πηλίκα τά, $336 + 210 + 420 + 240 + 260 = 1466 + 106 + 81 + 7 = 1680$· ἄρα κτλ. ὃ ἦν τὸ β΄. ζητούμενον.

Πρόβλημα ΙΓ΄.

§. 277. Τέσσαρες ταχυγράφοι, συνεριζόμενοι ἀναμεταξύ των, περὶ τῆς ἀντιγραφῆς ἑνὸς Βιβλίου, ἄρχισαν καὶ οἱ τέσσαρες κατὰ τὴν αὐτὴν καὶ ἰδίαν στιγμὴν νὰ τὸ ἀντιγράφωσι. Καὶ ὁ μὲν α΄. τὸ ἀντέγραψεν εἰς 4 ὥρας· ὁ δὲ β΄. εἰς 6· ὁ δὲ γ΄. εἰς 8· καὶ ὁ δ΄. εἰς 12. Ζητεῖται λοιπόν, ὅτι ἀνίσως καὶ οἱ τέσσαρες ὁμοῦ, ἤθελαν ἀντιγράψῃ ἓν μόνον ἀπὸ αὐτὸ τὸ Βιβλίον, καὶ ὄχι καθ' ἕνας τὸ ἐδικόν του ξεχωριστά, εἰς πόσας ὥρας ἄρα ἤθελαν τὸ ἀντιγράψωσι!

Λύσις.

Εἰς λύσιν τοῦ Προβλήματος τούτου, καὶ τῶν ὁμοίων αὐτῷ, α΄. ἂς γραφῶσι κατὰ σειρὰν οἱ δηλωθέντες Ἀριθμοὶ τῶν ὡρῶν, κατὰ τὰς ὁποίας ἔγραψεν ὁ καθ' εἷς τὸ Βιβλίον του· οἷον 4, 6, 8, 12· β΄. ἂς εὑρεθῇ εἷς Ἀριθμός, ὅς τις νὰ περιέχῃ ὅλους αὐτοὺς τοὺς Ἀριθμούς, καὶ αὐτὸς ἔστω ὁ 24· οὗτος οὖν, ἂς μερισθῇ ἐπὶ τοὺς Ἀριθμοὺς τῶν ὡρῶν· δηλ. τὸν 4, τὸν 6· τὸν 8, καὶ τὸν 12, καὶ θέλει δώσῃ Πηλίκα, τὸν 6, τὸν 4, τὸν 3, καὶ τὸν 2· τὰ ὁποῖα συναπτόμενα, ποιοῦσι τὸν 15· οἷον $6 + 4 + 3 + 2 = 15$· αὐτὸν λοιπόν, ἂς τὸν λάβωμεν ἀντὶ τοῦ α΄. ὅρου· ἀντὶ δὲ τοῦ β΄. τὸν 60· (εἰς τόσα γὰρ λεπτὰ πρῶτα διαιρεῖται ἡ ὥρα·) καὶ ἀντὶ γ΄. τὸν εὑρεθέντα Ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος περιλαμβάνει τοὺς ῥηθέντας τέσσαρες Ἀριθμούς· δηλ. τὸν 24. Μεθόδου δὲ τῶν Τριῶν γενομένης, ὁ εὑρεθεὶς δ΄. ὅρος θέλει μας φανερώσῃ τὸν ζητούμενον Ἀριθμὸν τῶν λεπτῶν, κατὰ τὸν ὁποῖον ἤθελον ἀντιγράψῃ τὸ Βιβλίον καὶ οἱ τέσσαρες ὁμοῦ· οἷον $\div 15 : 60 :: 24 : \chi = 96$· ἄρα θέλουσι τὸ ἀντιγράψῃ εἰς 96 λεπτὰ πρῶτα· τὰ ὁποῖα διαιρεθέντα

ἐπὶ

ἐπὶ τὸν 60, δίδουσι Πηλίκον ὥραν μίαν καὶ λεπτὰ $36 = \frac{1}{2} + 6$· ἄρα εὑρέθη ὁ ζητούμενος Ἀριθμὸς $= 1\frac{1}{2}$ ὥρα· καὶ λεπτὰ πρῶτα 6· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Πρόβλημα ΙΔʹ.

§. 278. Δύω σώματα τρέχουσι τὴν αὐτὴν ὁδόν· ἀλλὰ τὸ μὲν βʹ. σῶμα εἶναι ταχύτερον τοῦ αʹ. ἀφ' οὗ ὅμως ἤθελε γνωρισθῇ τὸ διάστημα τοῦ τόπου, κατὰ τὸ ὁποῖον ἀπέχει τὸ ἓν σῶμα τοῦ ἄλλου, καὶ ὁ λόγος τῆς ταχύτητος, ἤγουν βαδίσεως αὐτῶν, νὰ διορίσωμεν τὸν τόπον, εἰς τὸν ὁποῖον θέλει φθάσῃ τὸ βʹ. σῶμα, τὸ αʹ.

Λύσις.

Εἰς λύσιν τοῦ Προβλήματος τούτου, ἂς ὀνομασθῇ, τὸ μὲν γνωστὸν διάστημα, καθ' ὃ ἀπέχουσιν ἀλλήλων τὰ σώματα $= A$· τὸ δὲ διάστημα τοῦ τόπου, τὸ ὁποῖον ἐπεριπάτησε τὸ αʹ. σῶμα, πρὶν νὰ τὸ φθάσῃ τὸ βʹ. ἂς τὸ ὀνομάσωμεν $= \chi$· ὁ δὲ λόγος τῶν ταχυτήτων, ἤγουν ὁ Ἀριθμὸς ὁποῦ φανερώνει πόσαις φοραῖς ταχύτερον τρέχει τὸ βʹ. σῶμα, ἀπ' ὅ,τι τρέχει τὸ αʹ. ἂς τὸν ὀνομάσωμεν $= N$· εἶναι φανερὸν λοιπόν, ὅτι τὸ βʹ. σῶμα, διὰ νὰ φθάσῃ τὸ αʹ. χρεωστεῖ νὰ περιπατήσῃ τὸ ἀπόστημα τοῦ τόπου A, κατὰ τὸ ὁποῖον εἶναι μακρὰν τὸ ἓν σῶμα τοῦ ἄλλου, καὶ προσέτι τὸ διάστημα χ, τὸ ὁποῖον ἐπεριπάτησε τὸ αʹ. σῶμα, πρὶν νὰ τὸ φθάσῃ τὸ βʹ. Τὸ ἄρα διάστημα, τὸ ὁποῖον θέλει περιπατήσῃ τὸ βʹ. σῶμα, ἕως ὅπου νὰ φθάσῃ τὸ αʹ. ἔσται $A + \chi$. Ἀλλ' ἔτι τὸ διάστημα $A\chi$ τὸ ὁποῖον ἐπεριπάτησε τὸ βʹ. σῶμα, εἶναι ἴσον μὲ τὸ διάστημα χ· τὸ ὁποῖον ἐπεριπατήθη ἀπὸ τὸ αʹ. σῶμα τοσάκις, ὁσάκις θέλει τρέξῃ τὸ βʹ. σῶμα μὲ περισσοτέραν ταχύτητα, ἀπὸ τὸ αʹ. σῶμα. Εἶναι ἄρα ἡ ταχύτης τοῦ βʹ. σώματος, ἴση, ἀφ' οὗ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὴν ταχύτητα N· ἤγουν $\chi . N = \chi N$· ἐκ τούτων λοιπὸν ἡ ἐξίσωσις θέλει εἶναι $A + \chi = N\chi$.

Ἔκθεσις τῆς γενικῆς τοῦ παρόντος Προβλήματος θέσεως, διὰ κάθε ἄλλο Πρόβλημα ὁποῦ ἤθελεν εἶναι παρόμοιον αὐτῷ.

Μεταθέσει $A = N\chi - \chi$· διὰ νὰ μείνῃ δὲ ἡ δύναμις τοῦ χ μοναχὴ εἰς τὸ ἓνα μέλος τῆς ἐξισώσεως, πρέπει νὰ ζητήσωμεν ἐκείνην τὴν Ποσότητα, μὲ τὴν ὁποίαν, ἀφ' οὗ πολλαπλασιασθῇ ἡ δύναμις χ, θέλει ἀποδώσῃ $N\chi - \chi$. Ἀφ' οὗ λοιπὸν διαιρεθῇ ἡ παροῦσα ἐξίσωσις διὰ $N - 1$, θέλει ἀποδώσῃ $\chi = \frac{A}{N-1}$. Ἐλύθη ἄρα γενικῶς τὸ Πρόβλημα· λοιπὸν ἀπὸ αὐτὸν τὸν γενικὸν τῆς ἐξισώσεως Τύπον $\chi = \frac{A}{N-1}$, θέλουσι λυθῇ ὅλα τὰ μερικὰ Προβλήματα, ὁποῦ εἶναι τῆς αὐτῆς φύσεως μὲ τὸ παρὸν Πρόβλημα.

Ἂς ἐφαρμόσωμεν λοιπὸν αὐτό, εἰς τὰ ἐφεξῆς ἐκτεθησόμενα Προβλήματα.

Πρόβλημα ΙΕʹ.

§. 279. Εἷς Βασιλεὺς ἐκίνησεν ἀπὸ τὴν βασιλεύουσαν Πόλιν, διὰ νὰ ὑπάγῃ εἰς ἄλλην τινὰ Πόλιν· εἷς δὲ Γραμματοφόρος, ὢν μακρὰν ἀπὸ τὸν τόπον ὅπου ἐπεριπάτει ὁ Βασιλεὺς τρεῖς λέγας, περιπατῶν ὅμως μὲ τριπλῆν ταχύτητα ἀπὸ τὴν τοῦ Βασιλέως, φθάνωντάς τον, τοῦ ἐνεχείρισε τὴν ἐπιστολήν, νὰ διορίσωμεν, ἤγουν νὰ εὕρωμεν τὸν τόπον, εἰς τὸν ὁποῖον ἔφθασε τὸν Βασιλέα,

Λύσις.

Ἐπὶ τοῦ γενικοῦ Τύπου, τὸ μὲν ἀπόστημα A ἐστὶν $= 3$· ὁ δὲ λόγος τῆς ταχύτητος N, ἐστὶν $= 3$· ἡ δὲ ἐξίσωσις θέλει εἶναι $\chi = \frac{3}{3-1} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$· τὸ ἄρα διάστημα ὁποῦ μέλλει νὰ περιπατήσῃ ὁ Βασιλεύς, πρὶν νὰ τὸν φθάσῃ ὁ Γραμματοκομιστὴς ἔσται μία λέγα καὶ ἥμισυ· ἄρα εὕρηται τὸ ζητούμενον.

Πρόβλημα ΙϚ'.

§. 280. Βαλόντας τινὰς, τὸν μὲν ὡροδείκτην εἰς ἓν διωρισμένον, ἤγουν γνωστὸν λεπτὸν, τὸν δὲ λεπτοδείκτην εἰς ἄλλο λεπτὸν, καὶ αὐτὸ γνωστὸν, νὰ εὕρωμεν τὸν τόπον, εἰς τὸ ὁποῖον θέλει φθάσῃ ὁ λεπτοδείκτης τὸν ὡροδείκτην.

Λύσις.

Ἐπειδὴ εἶναι γνωστὸν, ὅτι ὁ λεπτοδείκτης κινεῖται μὲ δωδεκαπλῆν ταχύτητα, ἀπὸ τὴν τοῦ ὡροδείκτου, ἔσται ἐπὶ τοῦ γενικοῦ Τύπου $N = 12$· ἄρα $\chi = \frac{A}{11}$: · λοιπὸν, θέτων τὸν ὡροδείκτην ἐπὶ τῆς 11 ὥρας, τὸν δὲ λεπτοδείκτην ἐπὶ τῆς 12, τὸ ἀπόστημα ὁποῦ ἀπέχει ὁ εἷς τοῦ ἄλλου, ἔσται $A = 11$· ἤγουν ἕνδεκα ὥρας· τὰς ὁποίας χρεωστεῖ νὰ διέλθῃ ὁ λεπτοδείκτης· λοιπὸν ἔσται $\chi = \frac{A}{11} = \frac{11}{11}: 1$· ἤγουν ὁ ὡροδείκτης πρὶν νὰ τὸν φθάσῃ ὁ λεπτοδείκτης, θέλει περιπατήσῃ μίαν ὥραν· ἄρα θέλει τὸν φθάσῃ εἰς τὰς 12· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Πρόβλημα ΙΖ'.

§. 281. Δύω σώματα κινοῦνται κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον μίαν ἐναντίαν κίνησιν ἀναμεταξύ των· δηλ. τὸ μὲν κινεῖται ἐξ Ἀνατολῶν πρὸς Δυσμάς· τὸ δὲ ἄλλο ἐκ τοῦ ἐναντίου, ἐκ Δυσμῶν πρὸς Ἀνατολάς· ὅταν οὖν εἶναι γνωστὸν τὸ ἀπόστημα τοῦ τόπου A, κατὰ τὸ ὁποῖον ἀπέχουσιν ἀλλήλων, ὁμοίως εἶναι γνωστὸς καὶ ὁ λόγος τῶν ταχυτήτων N, καὶ Π, ὁποῦ ἔχουσιν ἀναμεταξύ των, νὰ διορίσωμεν τὸν τόπον εἰς τὸν ὁποῖον θέλουσι συναπαντηθῶσι.

Λύσις.

Ὁ δρόμος ὁποῦ ἐπεριπάτησε τὸ βραδύτερον σῶμα, ἂς ὀνομασθῇ χ· ὁ δὲ δρόμος ὁποῦ ἐβάδισε τὸ ταχύτερον ἔσται χ, τόσαις φοραῖς εἰλημμένον, ἤγουν παρμένον, ὅσαις φοραῖς εἶναι μεγαλητέρα ἡ ταχύτης αὐτοῦ, τῆς τοῦ ἑτέρου σώματος ταχύτητος,

ἤτοι χN· ἀλλ' αὐτὰ τὰ δύω σώματα θέλουσι περιπατήσῃ εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν τὸ διάστημα A, κατὰ τὸ ὁποῖον ἀπέχουσιν ἀλλήλων, ἕως ὁποῦ νὰ συναπαντηθῶσι· λοιπὸν θέλει εἶναι ἡ ἐξίσωσις $\chi + N\chi = A$· λοιπὸν $\chi = \frac{A}{N+1}$.

Αὐτὴ εἶναι μία γενικὴ ἐξίσωσις ἥτις εἶναι χρήσιμος, ὅταν ἐφαρμόζηται εἰς ἄλλα μερικώτερα Προβλήματα παρόμοια μὲ αὐτὸ, ὅ,τι λογῆς εἶναι τὰ ἐκτεθησόμενα ἐφεξῆς.

Πρόβλημα ΙΗ'.

§. 282. Ὁ Εὐθύφρων, καὶ ὁ Φίλιππος, εἰς ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν καιρὸν πορεύονται· ὁ μὲν Εὐθύφρων ἀπὸ τὴν Λάρισσαν διὰ τὴν Θεσσαλονίκην· ὁ δὲ Φίλιππος ἀπὸ τὴν Θεσσαλονίκην διὰ Λάρισσαν· ἀπέχουσι δὲ αὗται αἱ Πόλεις ἀπ' ἀλλήλων, ὥρας 60· εἰς ποίαν ὥραν ἄρα θέλουσιν ἀπαντηθῇ!

Λύσις.

Ἐπὶ τῆς γενικῆς ἐξισώσεως ἐστὶν. $A = 60$· καὶ $N = 2$· αὕτη δὲ ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\chi = \frac{60}{2+1} = \frac{60}{3}: 20$· ἄρα θέλουσιν ἀπαντηθῇ μετὰ παρέλθωσιν εἴκοσι ὡρῶν· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Πρόβλημα ΙΘ'.

§. 283. Πέτρος καὶ Παῦλος, περιπατοῦσι κατὰ τὸν αὐτὸν καιρὸν τὴν αὐτὴν ὁδὸν ἐξ ἐναντίας, δηλ. ὁ μὲν Πέτρος ἐκ Φωξανίου τὴν εἰς Βουκουρέστιον· ὁ δὲ Παῦλος τοὐναντίον ἐκ Βουκουρεστίου, τὴν εἰς Φωξάνιον· ἀλλ' ὁ μὲν Πέτρος περιπατεῖ μὲ διπλῆν ταχύτητα τῆς τοῦ Παύλου· ἀπέχουσι δὲ αἱ ῥηθεῖσαι Πόλεις ἡ μία τῆς ἄλλης ὥρας τριάκοντα δύω, εἰς ποίαν ὥραν ἄρα θέλουσιν ἀπαντηθῇ!

Λύσις.

Τὸ μὲν ἀπόστημα, κατὰ τὸ ὁποῖον ἀπέχουσιν ἀλλήλων αὗται αἱ Πόλεις, ἂς ὀνομασθῇ $A = 32$· ἡ δὲ ταχύτης τοῦ Παύ-

Παύλου $N = 1$· ἡ δὲ τοῦ Πέτρου $\Pi = 2$· ὁ δὲ χρόνος, κατὰ τὸν ὁποῖον θέλουσιν ἀπαντηθῆ, ἔστω χ· ἔσται οὖν· $\chi = \frac{A}{N + \Pi} = \frac{32}{3} : 10 + \frac{2}{3}$· ἄρα θέλουσι συναντηθῆ μετὰ δέκα ὥρας καὶ δύω τρίτα τῆς ὥρας· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Λύσις τοῦ αὐτοῦ κατ' ἄλλον τρόπον.

Ἐπειδὴ ἡ ταχύτης τοῦ Πέτρου εἶναι διπλῆ ἀπὸ τὴν τοῦ Παύλου, ἂς γραφῆ διὰ μὲν τὴν ταχύτητα τοῦ Πέτρου, ὁ 2 Ἀριθμός· διὰ δὲ τὴν τοῦ Παύλου, ἡ μονάς· σύναψον λοιπὸν τὸν δύω μὲ τὸν ἕνα, καὶ γίνονται τρία· οἷον $2 + 1 = 3$· λάβε λοιπὸν αὐτὸν τὸν Ἀριθμὸν τῶν ταχυτήτων $= 3$· ἀντὶ Διαιρέτου· τὸν δὲ 32· δηλ. τὸ ἀπόστημα τῶν ῥηθεισῶν Πόλεων, ἀντὶ Διαιρετέου· καὶ διαίρεσον τὸν 32 μὲ τὸν 3, καὶ θέλει σοὶ δώσῃ Πηλίκον τὸν 10 καὶ $\frac{2}{3}$· οἷον $\frac{32}{3} : 10 + \frac{2}{3}$· ἰδοὺ καὶ μὲ τὸν ἄλλον τρόπον προκύπτει τὸ ἴδιον Πηλίκον· καὶ ὁ μὲν Πέτρος θέλει περιπατήσῃ εἰκοσιμία ὥρα, καὶ δύω τρίτα τῆς ὥρας δρόμον ἐν χρόνῳ ὡρῶν δέκα καὶ δύω τρίτα· ὁ δὲ Παῦλος ὁδεύσει διάστημα ὡρῶν δέκα σὺν ἑνὶ τρίτῳ, ἐν ἴσῳ χρόνῳ· οἷον $21 + \frac{2}{3} + 10 + \frac{1}{3} = 32$. ἄρα κτλ.

Πρόβλημα Κ΄.

§. 284. Λουμπίδης, καὶ Βρανίδης, τὴν αὐτὴν ὁδὸν ἐναντίως ἀλλήλοις ὁδεύουσι. Καὶ ὁ μὲν ἐκ Κωνσταντινουπόλεως, τὴν εἰς Βιένναν ὁδεύει· ὁ δὲ Λουμπίδης, τὴν ἐκ Βιέννης εἰς Κωνσταντινούπολιν, κατὰ τὸν αὐτὸν ἀμφότεροι κινηθέντες χρόνον· ἀλλ' ὁ μὲν Λουμπίδης ὁδεύει μὲ τριπλασίαν ταχύτητα, τῆς τοῦ Βρανίδου· ἀπέχουσι δ' ἀλλήλων αἱ ῥηθεῖσαι Πόλεις ὥρας τετρακοσίας ὀκτώ· εἰς ποίαν ἄρα ὥραν θέλουσιν ἀπαντηθῆ!

Λύσις.

Ἀφ' οὗ συναφθῶσιν, ὡς ἄνωθεν, αἱ τῶν δύω ταχύτητες, ἂς γένῃ καὶ αὐτὸ ὁμοίως· καὶ τὸ Πηλίκον θέλει σοὶ δείξῃ τὴν ζητουμένην ὥραν· οἷον $3 + 1 = 4$· ὅθεν $\frac{408}{4} : 102$· ἄρα θέλουσι συναντηθῶσιν εἰς τὰς 102 ὥρας· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον. Καὶ ὁ μὲν Λουμπίδης θέλει περιπατήσῃ 306 ὡρῶν ὁδὸν, ἐν ᾧ ὁ Βρανίδης περιπατεῖ μόνον 102· ἂς συναφθῶσιν αἱ ῥηθεῖσαι ὧραι, καὶ θέλουσι δώσῃ τὸν αὐτὸν Ἀριθμὸν τῶν ὡρῶν, καθ' ἃς ἀπέχουσιν ἀλλήλων αἱ ῥηθεῖσαι Πόλεις· οἷον $306 + 102 = 408$. ἄρα κτλ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἕτερα Προβλήματα ἐπιτάφια, ἔμμετρα.

Τύμβος ἐγὼ κεύθω δὲ πολύστονα τέκνα Φιλίννις,
  Τοῖον μαψιτόκων καρπὸν ἔχων λαγόνων.
Πέμπτον ἐν ἠϊθέοις, τρίτατον δ' ἐνὶ παρθενικῇσι
  Τρεῖς δ' ἐμοὶ ἀρτιγάμους δῶκε Φίλινα κόρας.
Λοιποὶ δ' ἠλίοιο πανάμμοροι, ἠδὲ καὶ αὐδῆς
  Τέσσαρες ἐκ λαγόνων ἐς Ἀχέροντα πέσον.

Λύσις.

$\chi = \left(\frac{\chi}{5} + \frac{\chi}{3}\right) + 3 + 4 = \chi = 15$· ἄρα $5 + 3 = 8 + 7 = 15$· καὶ $\frac{5}{15} + \frac{3}{15} = \frac{8}{15}$. ὅθεν $15 - 8 - 7 : 7$. $15 \frac{105}{7:} 15$.

Ἕτερον.

Οὗτός τοι Διόφαντον ἔχει τάφος· ἃ μέγα θαῦμα.
  Καὶ τάφος ἐκ τέχνης μέτρα βιότοιο λέγει.
Ἕκτην κουρίζειν βιότου θεὸς ὤπασε μοίρην.
  Δωδεκάτην ἐπιθείς, μῆλα πόρε χλοάειν.
Τῇ δ' ἄρ' ἐφ' ἑβδομάτῃ τὸ γαμήλιον ἥψατο φέγγος,
  Ἐκ δὲ γάμων πέμπτῳ παῖδ' ἐπένευσεν ἔτει.
Αἲ, αἲ τηλύγετον, δειλὸν τέκος, ἥμισυ πατρὸς
  Μέτρον τοῦ κρυερὸς Μοῖρ' ἄφελε βιότου.
Πένθος δ' αὖ πισύρεσσι παρηγορέων ἐνιαυτοῖς,
  Τῇδε ποσοῦ σοφίῃ τέρμ' ἐπέρησε βίου.

Λύσις.

Ἔσται δή· $\chi = \left(\frac{\chi}{6} + \frac{\chi}{12} + \frac{\chi}{7}\right) + 5 + \frac{1}{2} + 4 = \chi = 84$. $\frac{84}{504} + \frac{42}{504} + \frac{72}{504} = \frac{198}{504} = \chi$.

Ἑτε-

Ἕτερον.

Παντὸς ὅσον βεβίωκε χρόνον, παῖς μὲν τὸ τέταρτον
  Δημοχάρης βεβίωκε· νεηνίσκος δὲ, τὸ πέμπτον
Τὸ τρίτον δ' εἰς ἄνδρας· πολιὸν δ' ὅτ' ἀφίκετο γῆρας
  Ἔζησε λοιπὰ τρεῖς καὶ δέκα γήραος οὐδῷ.

Λύσις.

$x\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)+13=x=60$· ἄρα $\underset{\alpha'}{15}+\underset{\beta'}{12}+\underset{\gamma'}{20}=47+13=60$· ἤγουν $60-47=13:13.60=\frac{780}{13}$ 60· ἔζησεν ἄρα ἔτη ἑξήκοντα. Ἐξ ὧν 15 παῖς, 12 νεανίσκος, 20 ἄνδρας, καὶ 13 γέρων.

Ἕτερον.

Δάκρυ παραστάξαντες ἀμείβετε· οἵδε γὰρ ἡμεῖς,
  Οὓς τόδε δῶμα ὤλεσεν Ἀντιόχου
Δαιτυμόνας· οἷσί τε θεὸς, δαιτός τε, τάφος τε
  Τὸν δ' ἔπορε χῶρον· τέσσαρες ἐκ Τεγέης
Κείμεθα. Μεσσήνης δὲ δυώδεκα· ἐκ δέ τε πέντε
  Ἄργεος· ἐκ Σπάρτης δ' ἥμισυ δαιτυμόνων.
Αὐτὸς δ' Ἀντίοχος· πέμπτη δέ τε πέμπτον ὄλοντο
  Κεκροπίδαι· σὺ δ' Ὕλαν κλαῖε Κόρινθε μόνον.

Λύσις.

Ἔστω ὁ πᾶς Ἀριθμὸς τῶν κειμένων $x=\frac{x}{2}+\frac{x}{25}+4+12+5+1+1=23=x\frac{25}{50}+\frac{2}{50}=\frac{27}{50}+23=x$· ὅθεν $50-27=23:23.50=\frac{1150}{23}$ 50. Καὶ γὰρ $\frac{x}{2}=25$. καὶ $\frac{x}{25}=2$· τοιγαροῦν $25+2+23=50$· ἦσαν ἄρα οἱ πάντες πεντήκοντα· δηλ. τέσσαρες Τεγεάται· δώδεκα Μεσσήνιοι· πέντε Ἀργεῖοι· εἰκοσιπέντε Σπαρτιᾶται· εἷς ὁ Ἀντίοχος· πέντε Κεκροπῖδαι, εἴτ' οὖν Ἀθηναῖοι, καὶ εἷς Κορίνθιος.

Ἑτε-

Ἕτερον.

Παλλὰς ἐγὼ χρυσῆ σφυρήλατος· αὐτὰρ ὁ χρυσὸς
  Αἰζηῶν πέλεται δῶρον ἀοιδοπόλων.
Ἥμισυ μὲν χρυσοῦ Χαρίσιος· ὀγδοάτην δὲ
  Θέσπις, καὶ δεκάτην δῶκε μοῖραν Σόλων.
Αὐτὰρ εἰκοστὴν Θεμίσων· τὰ δὲ λοιπὰ τάλαντα
  Ἐννέα, καὶ τέχνη δῶρον Ἀριστοδίκου.

Λύσις.

$$x=\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{8}+\frac{x}{10}+\frac{x}{20}\right)+9=x=40.$$

Ἑρμηνεία.

α΄. Ἀχθήτω ἕκαστος τῶν Ἀριθμητῶν, ἐπὶ τοὺς τῶν ἄλλων Κλασμάτων Παρονομαστάς· καὶ γενέσθωσαν οἱ 1600 + 400 + 320 + 160 Ἀριθμηταί· οἵτινες συναφθέντες, ποιήτωσαν τὸν 2480 Ἀριθμητήν· ἀχθέντων δ' ἐφεξῆς καὶ τῶν Παρονομαστῶν, γενέσθω ὁ κοινὸς Παρονομαστὴς 3200, καὶ ὑποκείσθω τῷ ἐκ τῶν τεσσάρων Ἀριθμητῇ καὶ γενέσθω ἓν ὁλικὸν Κλάσμα ἴσον τοῖς δοθεῖσι τὸ $\frac{2480}{3200}$· β΄. ἀφαιρεθήτω ὁ Ἀριθμητὴς τοῦ Παρονομαστοῦ, τὸ δὲ $\underset{\alpha'}{\text{κατάλειπον}}$ ληφθήτω ἀντὶ τοῦ α΄. ὅρου· οἷον $3200-2480=720$· ὁ δὲ $\underset{\beta'}{\text{ἐν}}$ τῷ Προβλήματι ὁλοσχερὴς Ἀριθμὸς ἐννέα· ἀντὶ τοῦ β΄. 9· λαμβανομένου δὲ καὶ τοῦ κοινοῦ Παρονομαστοῦ ἀντὶ τοῦ γ΄. ὅρου, γενέσθω Μέθοδος τῶν Τριῶν· τὸ δ' ἐξαχθὲν Πηλίκον, ἔσται δήπου ὁ ζητούμενος Ἀριθμὸς x· οἷον $\underset{\alpha'}{720}:\underset{\beta'}{9}::\underset{\gamma'}{3200}\,x=40$· εὕρηται ἄρα ὁ ζητούμενος Ἀριθμὸς x. ἴσον 40.

Καὶ περὶ μὲν τῆς Μεθόδου ταύτης, εἰσὶν ἱκανὰ τὰ ἐκτεθέντα μοι Προβλήματα· νυῦ δὲ καὶ περὶ ἄλλης τινὸς Μεθόδου εἴπωμεν.

ΚΕ-

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ϛ'.

Περὶ Μεθόδου τῆς Μίξεως, ἢ Κράσεως.

§. 285. Ἀφ' οὗ εἴπομεν περὶ διαφόρων Μεθόδων τε καὶ Προβλημάτων, καὶ τῆς αὐτῶν ἀπαιτουμένης λύσεως συμβολικῶς τε ἅμα καὶ Ἀριθμητικῶς, μοὶ ἐφάνη εὔλογον νὰ προσθέσω καὶ ἄλλην τινὰ Μέθοδον, τὴν περὶ Μίξεως, καὶ Κράσεως λεγομένην· τὴν ὁποίαν μεταχειριζόμενοι οἱ φιλομαθεῖς, καὶ μάλιστα οἱ τῆς Ἀριθμητικῆς ἕξεως ἐγκρατεῖς, θέλουσι δυνηθῆ νὰ γνωρίζωσιν εὐκόλως τοὺς διαφόρους τρόπους, κατὰ τοὺς ὁποίους, τὰ μὲν ὑγρᾶς καὶ ῥοώδους φύσεως ὄντα, συγκιρνῶνται· τὰ δὲ ξηρᾶς καὶ ἀτήκτου, συμμίγνυνται· τὰ δὲ τηκτῆς τε καὶ μεταλλώδους, συντήκονται. Παραδείγματος χάριν, ἀνίσως ἔχῃ τινὰς διάφορα εἴδη οἴνου, ἢ ῥακῆς, ἢ ἐλαίου, ἢ μέλιτος, ἢ κηροῦ, ἢ στέατος καὶ τῶν ὁμοίων, καὶ ὁποῦ νὰ ἔχωσι διαφόρους τιμάς, καὶ ἤθελε βουληθῇ ποτε νὰ κατασκευάσῃ ἐξ αὐτῶν τὶ Κρᾶμμα, ἢ Μίγμα διωρισμένης τιμῆς καὶ Ποσότητος, νὰ ἠξεύρῃ ἀναμφιβόλως, πόσα μέρη πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἀπὸ καθε εἶδος τοῦ οἴνου, ἢ τῆς ῥακῆς, ἢ τοῦ ἐλαίου. κτλ. Διὰ νὰ τὰ φέρῃ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν μεσαίαν καὶ ἀνάλογον τιμήν, καὶ ἀπαιτουμένην Ποσότητα· μὲ τοιαύτην ὅμως Μέθοδον, ὥστε ὁποῦ ὅλα τὰ κραθέντα διάφορα μέρη, νὰ ἔχωσι τὴν αὐτὴν τιμήν, ἣν εἶχον καὶ πρὶν νὰ κραθῶσιν.

Ὁμοίως θέλει κάμνῃ, καὶ εἰς τὰ διάφορα εἴδη, ὁμοειδῆ τε καὶ ἑτεροειδῆ τῶν διαφόρων σπερμάτων τε καὶ παντοίων καρπῶν, ὁποῦ θέλει νὰ ἀνακατώσῃ· ἢ τῶν διαφόρων ἡμιμετάλλων τε καὶ μετάλλων, ὁποῦ μέλλει νὰ ἀναλύσῃ, ἢ νὰ χωνεύσῃ, καὶ νὰ κατασκευάσῃ ἐξ αὐτῶν τὶ Μίγμα διαφόρου τιμῆς καὶ ζητουμένης Ποσότητος· καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων Μίξεών τε καὶ Κράσεων ὁμοίως, καθὼς θέλει γνωρίσῃ ὁ φιλομαθὴς ἀναγνώστης τὴν χρειωδεστάτην ὠφέλειαν τῆς Μεθόδου ταύτης, ἐπὶ τὰ κατὰ μέρος Προβλήματα, τὰ ὁποῖα θέλομεν προβάλλῃ εἰς τὰς πράξεις αὐτῆς τῆς ὠφελίμου Μεθόδου.

Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ἡ Μέθοδος αὕτη, φαίνεται ὅτι εἶναι πολλὰ δύσκολος, καὶ δυσνόητος, ὡσὰν ὁποῦ τὰ Προβλήματα, τὰ ὁποῖα ἀνάγονται εἰς αὐτήν, χρειάζονται πρᾶξίν τε καὶ ἀπόδειξιν,

ξιν,

ξιν, Ἁπλῆν τε καὶ Μικτήν, ἀναγκαίως ἕπεται νὰ προτάξωμεν τοῦ τε Ὁρισμοῦ καὶ τῆς Διαιρέσεως αὐτῆς, τὸ ἐφεξῆς Λημμάτιον. Πρῶτον μέν, διὰ νὰ γένωσιν εὐληπτότερα, δεύτερον δέ, διὰ νὰ ἀποδεικνύωνται εὐκολώτερα, ἐκεῖνα τὰ Προβλήματα καὶ Ὑποδείγματα, τὰ ὁποῖα μέλλομεν νὰ ἐκθέσωμεν εἰς τὴν διδασκαλίαν τῆς παρούσης Μεθόδου.

Λῆμμα.

§. 286. Δύω Ἀριθμῶν ἀνίσων δοθέντων, ἐὰν ἤθελαν παραβληθῶσι πρὸς ἄλλον τινὰ Ἀριθμὸν μέσον, αἱ Διαφοραὶ ὁποῦ ἤθελαν εὑρεθῶσι μεταξὺ αὐτῶν, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τοὺς αὐτοὺς Ἀριθμοὺς κατὰ σχῆμα χιαστὸν (§. 91.) οἱ γενόμενοι Ἀριθμοί, ὁμοῦ λαμβανόμενοι, ἴσοι ἔσονται, ἤτοι τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου τετραγώνῳ, ἢ τῷ ὑπό τε τοῦ μέσου καὶ τῶν Διαφορῶν συγκειμένῳ Ἀριθμῷ· πρέπει ὅμως ὁ μέσος Ἀριθμός, οὔτε νὰ ὑπερέχῃ καὶ τοὺς δύω δοθέντας Ἀριθμούς, οὔτε πάλιν νὰ ὑπερέχεται καὶ ὑπὸ τῶν δύω.

Ὑπόδειγμα Α'.

Ἂς δοθῶσι λοιπὸν δύω Ἀριθμοὶ ἄνισοι, ὁ Α, καὶ ὁ Β· μέσος δὲ τούτων ὁ Γ· ἂς παραβληθῶσιν οὖν καὶ οἱ δύω Α, Β Ἀριθμοί, μὲ τὸν μέσον Γ· καὶ ἔστω, τοῦ μὲν Α πρὸς τὸν Γ Διαφορὰ κατ' ἔλλειψιν ὁ Δ· τοῦ δὲ Β πρὸς τὸν Γ καθ' ὑπεροχήν, ὁ Ε. Τοῦτο δέ, κατὰ δύω τρόπους ἐνδέχεται νὰ γένῃ· διότι αἱ εὑρεθεῖσαι Διαφοραὶ συναπτόμεναι, ἢ εἶναι ἴσαι μὲ τὸν μέσον Γ, ἢ οὔ.

$A = 6.$ $\quad B = 15.$

$\Gamma = 9.$

$\Delta = 3 \quad + \quad E = 6.$

$Z = 9.$

$9 \cdot 9 = \quad 81 = H.$

$6 \cdot 6 = \quad 36 = \Theta.$

$3 \cdot 15 = \quad 45 = K.$

ὅθεν $36 + 45 = 81 = \Lambda.$

Πρῶτον, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι εἶναι ἴσαι· ἂς συναφθῶσι λοιπὸν αἱ Δ, καὶ Ε εὑρεθεῖσαι Διαφοραί, καὶ γενέσθω ὁ Ζ· ὅστις ἔγινεν ἴσος τῷ μέσῳ Ἀριθμῷ Γ. Ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ Γ ἐφ' ἑαυτόν, καὶ γενέσθω ὁ Η. Πολλαπλασιασθήτωσαν δὲ καὶ οἱ δοθέντες Ἀριθμοὶ Α, καὶ Β, ἐπὶ τὰς εὑρεθείσας Δια-

Δια-

Διαφορὰς Δ, καὶ Ε, πρὸς τὸν μέσον Γ, κατὰ σχῆμα χιαστόν· δηλ. ὁ μὲν Α, ἐπὶ τὴν Διαφορὰν Ε, καὶ γενέσθω ὁ Θ· ὁ δὲ Β, ἐπὶ τὴν Διαφορὰν Δ, καὶ γενέσθω ὁ Κ· οἵτινες ἀλλήλοις συναφθέντες, ποιοῦσι τὸν Λ· λέγω δὴ, ὅτι ὁ Λ, ἐστὶν ἴσος τῷ Η Ἀριθμῷ· ἄρα κτλ. ὃ ἦν τὸ πρῶτον ζητούμενον.

Ὑπόδειγμα Β'.

Δεύτερον, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι αἱ Διαφοραὶ Δ, καὶ Ε, δὲν εἶναι ἴσαι μὲ τὸν μέσον Ἀριθμὸν Γ· ἀλλ' ὁ Ἀριθμὸς, ὅς τις γίνεται ἀπὸ αὐτὰς, εἶναι μικρότερος τοῦ Γ, ὡς φαίνεται εἰς τὸ β'. αὐτικρὺ Διάγραμμα ὁ Ζ· ἐφ' ὃν πολλαπλασιασθεὶς ὁ Γ, ποιήτω τὸν Η· πολλαπλασιασθήτωσαν δὴ ὅ, τε Α, καὶ Β ἐπὶ τὰς Διαφορὰς Δ, καὶ Ε, ὡς ἄνωθεν, καὶ γενέσθωσαν ὁ Θ, καὶ Κ· οἵτινες συναπτόμενοι, ποιήτωσαν τὸν Λ· λέγω ὅτι ὁ Λ, ἐστὶν ἴσος τῷ Η· οἱ Θ, Κ ἄρα Ἀριθμοὶ, ὁμοῦ εἰλημμένοι, ἴσοι εἰσὶ τῷ Η Ἀριθμῷ· ἀλλ' ἐκ τῶν Θ, καὶ Κ, ἐγένετο ὁ Λ, ἄρα ἐστὶν ἴσος τῷ Η· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

$A = 6. \qquad B = 15.$
$\Gamma = 12.$
$\Delta = 3 \quad + \quad E = 6.$
$Z = 9 . 12 = 108 = H.$
$12 . 3 = \quad 36 = \Theta.$
$12 . 6 = \quad 72 = K.$
$36 + 72 = \quad 108 = \Lambda.$

§. 287. Ἔτι ἐὰν αἱ Διαφοραὶ αὐξηνθῶσιν, ἢ ἐλαττωθῶσιν Ἀναλόγως, γενήσεται τὸ αὐτό.

Πρῶτον, ἂς αὐξηνθῶσιν αἱ αὐταὶ Διαφοραὶ Δ, καὶ Ε, Ἀναλόγως, καὶ ποιήτωσαν τὰς Ζ, Η Ἀριθμούς· ἔπειτα συναφθέντες, ἂς κάμωσι τὸν Θ· ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιασθεὶς ὁ Γ, γενέσθω ὁ Κ· ἂς πολλαπλασιασθῶσι δὲ καὶ οἱ Α, Β Ἀριθμοὶ, ἐπὶ τὰς αὐξηνθείσας Διαφορὰς Ζ, Η, καὶ ἂς γένωσιν οἱ Λ, καὶ Μ

$A = 6. \qquad B = 15.$
$\Gamma = 12.$
$\Delta = \frac{6}{2} \quad + \quad E = \frac{3}{1}$
$Z = 8 \quad + \quad H = 4 = 12 = \Theta.$
$12 . 12 = \quad 144 = \quad K$
$4 . \ 6 = 24 \ \Lambda . 8 . 15 = 120 = M.$
ὅθεν $24 + 120 = 144 = N.$

Ἀ-

Ἀριθμοί· οἵτινες συναφθέντες, ποιήτωσαν τὸν Ν· ὁ Ν πάντως, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ἴσος ἐστὶ τῷ Κ· ἄρα ἐὰν αἱ Διαφοραὶ αὐξηνθῶσιν, ἢ ἐλαττωθῶσιν Ἀναλόγως, γενήσεται τὸ αὐτό· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Δεύτερον, ἂς ἐλαττωθῶσιν αἱ αὐταὶ Διαφοραὶ Δ, καὶ Ε, ἀντ' αὐτῶν δὲ λαμβανομένων τῶν Ζ, καὶ Η, ὥστε ἔχειν τὸν Δ, πρὸς τὸν Ζ, ὡς ὁ Ε, πρὸς τὸν Η. Ἂς συναφθῶσι λοιπὸν ὁ Ζ, καὶ Η, καὶ γενέσθω ὁ Θ· αὐτὸς δὲ ἐπὶ τὸν Γ· πολλαπλασιασθεὶς, ποιήτω τὸν Κ· πολλαπλασιασθέντων δὲ καὶ τοῦ μὲν Α, ἐπὶ τὸν Ζ, τοῦ δὲ Β, ἐπὶ τὸν Η, γενέσθωσαν οἱ Λ, καὶ Μ· οἵτινες συναπτόμενοι, ποιήτωσαν τὸν Ν· λέγω, ὅτι ὁ Ν, ἐστὶν ἴσος τῷ Κ· ἄρα ἐὰν αἱ Διαφοραὶ δύω Ἀριθμῶν, πρὸς ἄλλον τινὰ μέσον Ἀναλόγως αὐξηνθῶσιν, ἢ ἐλαττωθῶσι, τὸ αὐτὸ γενήσεται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

$A = 6. \qquad B = 15.$
$\Gamma = 12.$
$\Delta = 3 \quad + \quad E = 6.$
$Z = 2 \quad + \quad H = 4.$
$2 + 4 = 6 = \Theta.$
$6 . 12 = 72 = K.$
$6 . 2 = 12 = \Lambda.$
$15 . 4 = 60 = M.$
ὅθεν $12 + 60 = 72 = N.$

Ὁρισμός.

§. 288. Μίξις, ἢ Κρᾶσις ἐστὶ, διαφόρων ὑλῶν, ἢ οὐσιῶν εἰς ταὐτὸ ἕνωσις.

Σχόλιον.

Τοιαῦτα δέ εἰσι τά τε διάφορα εἴδη τοῦ οἴνου, τοῦ ἐλαίου, καὶ τῶν λοιπῶν ὑγρῶν· τοῦ σίτου, τῆς κριθῆς, τῆς φακῆς, καὶ τῶν λοιπῶν σπερμάτων· διαφόρου ἐκτιμήματος χρυσοῦ, ἢ ἀργύρου δοκίμου, καὶ κιβδήλου διαφόρου δοκιμασίας ἀκριβοῦς τε καὶ παρασήμου· Χαλκοῦ, κασσιτέρου, καὶ ἄλλων διαφόρων Μετάλλων· ὁ δὲ τρόπος δι' οὗ αὕτη Ἀναλόγως γίνεσθαι ἔχει, Κανὼν Μίξεως ὀνομάζεται.

Ἡ τῆς Μίξεως, ἢ Κράσεως Μέθοδος διαιρεῖται εἰς Ἁπλῆν, καὶ Σύνθετον. Καὶ πάλιν κάθε μία ἀπὸ αὐτὰς ἤτοι δι' ἀρτίου, ἢ διὰ περιττοῦ Ἀριθμοῦ γίνεται.

Ὑπό-

Ὑπόθεσις.

Τὴν μὲν Συμμιγὴν καὶ ἕνωσιν τῶν τε στερεῶν ὑλῶν, καὶ ἐκείνων, ἅτινα ἢ χωνεύονται εἰς τὴν φωτίαν, ἢ ἄλλως τήκονται καὶ ἀναλύονται, ἂς τὴν ὀνομάσωμεν Μίξιν, ἢ Μίγμα· τὴν δὲ τῶν ὑγρῶν καὶ ῥοαδῶν, Κρᾶσιν, ἢ Κρᾶμμα.

Ὁρισμός.

§. 289. Καὶ Ἁπλῆς μὲν Μίξεως Κανὼν λέγεται, ἡ Μέθοδος ἐκείνη, ἥτις μας διδάσκει νὰ εὕρωμεν τὸ μέσον τίμημα οἱουδήποτε Μίγματος, ἢ Κράμματος, ὁπόταν τά τε μέρη, τὰ ὁποῖα συνθέτουσιν αὐτὴν τὴν Μίξιν, ἢ Κρᾶμμα, εὕτινι Ἀναλογίᾳ δίδωνται. Καὶ τὸ τίμημα πάντων τῶν εἰς Μίξιν, ἢ Κρᾶσιν λαμβανομένων μερῶν ὁμοίως εἶναι γνωςόν.

Ὁρισμός.

§. 290. Συνθέτου δὲ Μίξεως, ἢ Κράσεως Κανών, ἐςὶ μία Μέθοδος διὰ τῆς ὁποίας, ἀφ' οὗ μας δοθῇ τὸ μέσον τίμημα, τοῦ ὁποιουδήποτε πράγματος, ὁποῦ μέλλομεν νὰ λάβωμεν μετὰ τὴν Συμμιγήν, ἢ Κρᾶσιν· καὶ χωριστὰ ἀπὸ αὐτό, μας δοθῇ καὶ τὸ τίμημα καθ' ἑνὸς πράγματος, ἀπὸ ἐκεῖνα ὁποῦ μέλλουσι νὰ συμμιχθῶσιν, ἢ νὰ Κραθῶσι, μας διδάσκει νὰ προσδιορίσωμεν τὸν Ἀριθμὸν τῶν μορίων ἐκείνων, ἐκ τῶν ὁποίων θέλει συςαθῇ ἡ Μίξις, ἢ τὸ Κρᾶμμα.

Καὶ ταῦτα μὲν ἐςὶν ἱκανὰ πρὸς προπαρασκευὴν καὶ ἀμυδρὰν κατάληψιν τῶν ῥηθησομένων· νῦν δ' ἐπ' αὐτὴν τὴν πρᾶξιν χωρῶμεν.

Πρόβλημα Α'.

§. 291. Ὅταν ἤθελαν μας δοθῶσι, δύω, ἢ τρεῖς, ἢ καὶ πλειοτέραι Ποσότητες πραγμάτων τινῶν, τὰ ὁποῖα ἔχουσι διαφόρους τιμάς, νὰ προσδιορίσωμεν τὰ μέρη, ἢ μόρια, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ λάβωμεν ἀφ' ἑκάςης τῶν δοθεισῶν Ποσοτήτων, διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν Μίξιν, ἢ Κρᾶσιν, τῆς ὁποίας τὸ μέζον, ἢ ἡ βαρύτης, ἔςαι Ἀνάλογον, μὲ ἓν μέσον τίμημα.

Αὐ-

Λύσις.

Εἰς λύσιν τοῦ Προβλήματος τούτου, καὶ τῶν ὁμοίων αὐτῷ, ἂς διαιρεθῇ τὸ ὁλικὸν τίμημα τοῦ Μίγματος, ἢ Κράμματος, διὰ τοῦ Ἀριθμοῦ τῶν μερῶν, ἐξ ὧν σύγκειται, καὶ τὸ Πηλίκον θέλει μας δώσῃ τὸ ζητούμενον μέσον τίμημα.

Ὑπόδειγμα Α'.

Εἷς ἄνθρωπος ἔχει δύω λογιῶν κρασία, τὰ ὁποῖα ἔχοντα διαφόρους τιμάς, θέλει νὰ τὰ συγκεράσῃ, καὶ νὰ κάμῃ ἐξ αὐτῶν ἓν Κρᾶμμα. Καὶ ἀπὸ μὲν ἐκεῖνο τὸ κρασὶ ὁποῦ τιμᾶται δέκα ὀβολῶν ἡ κανάτα, νὰ λάβῃ τέσσαρας κανάτας· ἀπὸ ἐκεῖνο δὲ ὁποῦ τιμᾶται 15, νὰ λάβῃ ἓξ κανάτας· ζητεῖ ὅμως νὰ μάθῃ πόσον ἄρα θέλει εἶναι τὸ μέσον τίμημα αὐτοῦ τοῦ Κράμματος;

Λύσις.

Ἂς πολλαπλασιασθῇ ἡ δοθεῖσα τιμὴ κάθε εἴδους κρασίου, ἐπὶ τὰς κανάτας, τὰς ὁποίας ἔλαβεν ἀπὸ καθ' ἕν· τὰ δὲ γενόμενα συναφθέντα, ποιήτωσαν τὸν 130 Ἀριθμόν· συναφθεισῶν δὲ καὶ τῶν κανάτων, γενέσθω ὁ 10 Ἀριθμός· διαίρεσον λοιπὸν μὲ αὐτὸν τὸν 130, καὶ θέλει σοι δώσῃ Πηλίκον τὸν 13, καὶ αὐτὸ εἶναι τὸ ζητούμενον μέσον τίμημα.

Κανάτ.	τιμὴ ὀβολ.	ὀβολ.
4.	10 =	40
6.	15 =	90
10;		130
ὅθεν $\frac{130}{10;}$	13	ὀβολ.

Δεῖξις.

Ὅτι δὲ ὁ 13 ἐςὶν ἡ ζητουμένη μέση τιμὴ τῶν δοθέντων δύω Ἀριθμῶν 10 καὶ 15, δεικνύεται. Ἂς βαλθῶσιν αἱ δοθεῖσαι τιμαὶ Α, καὶ Β, κατὰ σειράν· καὶ εἰς τὴν μέσην αὐτῶν, ὀλίγον κατωτέρον, ἂς βαλθῇ ἡ εὑρεθεῖσα μέση τιμὴ ἴση Γ. Καὶ ἡ μὲν Α Ποσότης, ἂς παραβληθῇ μὲ τὴν τοῦ Γ Ποσότητα· καὶ ἔστω Διαφορὰ κατ' ἔλλειψιν ἡ Δ· ἡ δὲ Β

Πο-

Α = 10.	Β = 15.
Γ = 23.	
Δ = 3 +	Ε = 2
Ζ = 5 . 13 = 65 = Η.	
10.	2 = 20 = Θ.
15.	3 = 45 = Κ.
	65 = Λ.
ὅθεν ὁ Λ. ἐστὶν ἴσον τῷ Η.	

Ποσότης, παραβληθεῖσα πρὸς τὴν αὐτὴν Γ, ἔσται Διαφορὰ καθ' ὑπεροχὴν ἡ Ε· συναφθήτωσαν λοιπὸν αἱ Δ + Ε Διαφοραὶ, καὶ ποιήτωσαν τὴν Ζ Ποσότητα· ἥτις πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν μέσον τίμημα Γ, γενέσθω ὁ Η Ἀριθμός. Πολλαπλασιασθήτωσαν δὲ καὶ οἱ δοθέντες Α, καὶ Β Ἀριθμοὶ, ἐπὶ τὰς αὐτὰς Διαφορὰς Δ, καὶ Ε, κατὰ σχῆμα χιαστόν. Καὶ ἐκ μὲν τοῦ Α, ἐπὶ τὴν Ε, γενέσθω ὁ 20 = Θ· ἐκ δὲ τῆς Β, ἐπὶ τὴν Δ, γενέσθω ὁ 45 = Κ· οἵτινες συναφθέντες, ποιήσωσαν τὸν Λ Ἀριθμὸν, λέγω, ὅτι ὁ Λ Ἀριθμός ἐστιν ἴσος τῷ Η· ἄρα δύω Ἀριθμῶν ἀνίσων δοθέντων, αἱ πρὸς ἄλλον τινὰ μέσον εὑρεθεῖσαι Διαφοραὶ, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τοὺς αὐτοὺς Ἀριθμοὺς, κατὰ σχῆμα χιαστὸν, οἱ γενόμενοι ἴσοι ἔσονται ὁμοῦ λαμβανόμενοι, ἤτοι τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου τετραγώνῳ, ἢ τῷ ὑπό τε τοῦ μέσου καὶ τῶν Διαφορῶν συγκειμένῳ (ὡς ἐνταῦθα) κατὰ τὸ Λῆμμα (§. 276.) ἄρα ὁ Λ, ἴσος τῷ Η Ἀριθμῷ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὑπόδειγμα Β'.

Ἄλλος τις ἄνθρωπος, ἔχων τέσσαρα εἴδη οἴνου διαφόρου τιμήματος, βούλεται νὰ τὰ συγκεράσῃ τέτοιας λογῆς· ἀπὸ μὲν ἐκεῖνον τὸν οἶνον, ὅστις τιμᾶται ὀκτὼ ὀβολῶν, νὰ λάβῃ 20 χοεῖς, ἢ κανάτας, ἢ ὅ,τι ἄλλο μέτρον· ἀπὸ δὲ ἐκεῖνον ὁποῦ τιμᾶται δέκα, 30. Ἀπὸ δὲ ἐκεῖνον ὁποῦ τιμᾶται δώδεκα, 40· καὶ ἀπὸ ἐκεῖνον ὁποῦ τιμᾶται δεκαέξ, 60· ζητεῖ οὖν καὶ αὐτὸς νὰ μάθῃ, πόσον ἄρα εἶναι τὸ μέσον τίμημα αὐτοῦ τοῦ Κράμματος! κατὰ τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ πωλῇ τὸν κάθε χοέα, ἢ ὅ,τιοῦν ἄλλο μέτρον, μετὰ τὴν Κρᾶσιν!

Λύσις.

Ἄς γένῃ καὶ αὐτὸ ὡς ἄνωθεν, καὶ θέλει εὑρεθῇ τὸ μέσον τίμημα, πρὸς ὀβολοὺς δώδεκα, καὶ δύω τρίτα τοῦ ὀβολοῦ· ὡς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα· ἄρα κτλ. ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Χοεῖς,	τιμαὶ ὀβολ.	ὀβολ.
20.	8 =	160.
30.	10 =	300.
40.	12 =	480.
60.	16 =	960.
150.		1900.

ὅθεν $\frac{1900}{150} = 12 + \frac{2}{3}$.

Δεῖξις.

Ὅτι δὲ κάθε χοεὺς, ἢ ὅ,τι ἄλλο μέτρον ὑποθέσομεν, τιμᾶται $12 + \frac{2}{3}$ εἰς ὀβολοὺς, ἢ παράδες, ἢ ὅ,τι ἄλλο νόμισμα ὑποθέσομεν τὴν τιμὴν τοῦ κάθε χοέως, ἢ ἄλλου τινὸς μέτρου, δεικνύεται· Α'. ἂς πολλαπλασιασθῇ τὸ εὑρεθὲν μέσον τίμημα $= 12 + \frac{2}{3}$, ἐπὶ τὸν Ἀριθμὸν τῶν χοέων $= 150$, καὶ ἂς γένωσι τὰ $= \frac{38}{3} . \frac{450}{3}$ Κλάσματα. (ὅρα §. 120.) Β'. Ἂς πολλαπλασιασθῶσιν αὐτὰ τὰ συσταθέντα Κλάσματα, Ἀριθμητὴς ἐπ' Ἀριθμητὴν, καὶ Παρονομαστὴς ἐπὶ Παρονομαστὴν, καὶ ἂς γένῃ ἐν ὁλικὸν Κλάσμα· (ὅρα §. 118.) τὸ ὁποῖον διαιρεθὲν ἐπὶ τὸν Παρονομαστήν του, δίδει Πηλίκον τὸν 1900 Ἀριθμὸν, ἴσον μὲ τὸν Ἀριθμὸν τῶν ὀβολῶν πάντων τῶν χοέων, ὡς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα· ἄρα τὸ ἐνταῦθα ζητούμενον μέσον τίμημα ἐστὶν ἴσον ὀβολοῖς 12, σὺν $\frac{2}{3}$ τοῦ ὀβολοῦ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

$$150 . 12\tfrac{2}{3} = \frac{38}{3} . \frac{450}{3} = \frac{17100}{9} = 1900$$

Ἐστὶν ἄρα ὡς ÷ 1 : $12\frac{2}{3}$ :: 150 : 1900· τὸ γὰρ ὑπὸ τῶν ἄκρων γενόμενον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῶν μέσων.

Πρόβλημα Β'.

§. 292. Ἐκ διαφόρων τιμημάτων, ἐπὶ τὸ δοθὲν τίμημα τὰ τιμώμενα ἀγαγεῖν, κατὰ τὴν δοθεῖσαν Ποσότητα.

Λύσις.

Εἰς λύσιν τοῦ Προβλήματος τούτου, ἂς βαλθῇ πρῶτον εἰς ἔρευναν ἐπὶ τῆς Ἁπλῆς Μεθόδου, ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον γίνεται διὰ μέσου ἀρτίου Ἀριθμοῦ.

Ὑπόδειγμα Α΄.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι εἷς ἄνθρωπος ἔχει τέσσαρα εἴδη οἴνου διαφόρων τιμημάτων· τῶν ὁποίων τιμημάτων ἔστωσαν δηλωτικοί, οἱ Α, Β, Γ, Δ Ἀριθμοί· τὸ δὲ δοθὲν τίμημα, ὁ Ε· καὶ ἡ ζητουμένη Ποσότης ὁ Ζ. Τοῦτο δὲ τὸ ζητούμενον εἶναι, νὰ εὕρωμεν διά τινος Μεθόδου, πόσους χοεῖς πρέπει νὰ λάβωμεν ἀπὸ καθ᾽ ἓν εἶδος τοῦ οἴνου, διὰ νὰ γένῃ, ἡ μὲν Ποσότης τῶν χοέων ἴση μὲ τὸν Ζ Ἀριθμόν· τὸ δὲ Κεφάλαιον τῶν νομισμάτων ὁποῦ γίνεται ἀπ᾽ ὅλους τοὺς χοεῖς, νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸν Ἀριθμὸν ὁποῦ γίνεται ἐκ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ τοῦ Ζ Ἀριθμοῦ, ἐπὶ τὸν Ε.

Α΄. ἂς γραφῶσιν ὑπαλλήλως, οἱ Α, Β, Γ, Δ Ἀριθμοί, ἀντὶ τῶν τιμημάτων, τῶν τεσσάρων εἰδῶν τοῦ οἴνου· πρὸς ἀριστερὰν δὲ αὐτῶν, κείσθωσαν ὑπαλλήλως ὅ, τε Ε, καὶ Ζ· ὁ μὲν Ε, ἀντὶ τοῦ ζητουμένου μέσου τιμήματος· ὁ δὲ Ζ, ἀντὶ τῆς ἀπαιτουμένης Ποσότητος τῶν χοέων, ὡς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα.

	Α = 6.	Θ = 6 = 36.
Ε = 9.	Β = 8.	Κ = 3 = 24.
Ζ = 13.	Γ = 12.	Λ = 1 = 12
	Δ = 15.	Η = 3 = 45
	Μ = 13 :	Ν = 117
	13 . 9 = 117.	

Β΄. Ἂς συζυγισθῶσιν οἱ μικρότεροι Ἀριθμοί, μὲ τοὺς μεγαλητέρους ἀνὰ δύω· καὶ ἂς παραβληθῇ ὁ καθ᾽ εἷς χωριστὰ μὲ τὸν Ε· αἱ δὲ Διαφοραὶ ὁποῦ ἤθελαν εὑρεθῶσι κάθε μιᾶς Συζυγίας, ἂς βάνωνται ἀντικρὺ τῶν Ἀριθμῶν ὁποῦ συνεζυγίσθησαν, ἐναλλάξ· ἤγουν ἡ Διαφορὰ τοῦ ἑνὸς Συζύγου, ἀντικρὺ τοῦ ἄλλου· οἷον, ἂς συζυγισθῶσι α΄. οἱ Α, καὶ Δ Ἀριθμοί. Καὶ ἂς παραβληθῶσι καὶ ὁ ἕνας, καὶ ὁ ἄλλος μὲ τὸν Ε· αἱ δὲ Διαφοραὶ αὐτῶν, ἂς εἶναι οἱ Η, καὶ Θ Ἀριθμοί· ἐκ τῶν ὁποίων, ὁ μὲν Η, μὲ τὸ νὰ εἶναι Διαφορὰ κατ᾽ ἔλλειψιν τοῦ Α, πρὸς τὸν Ε, ἂς βαλθῇ ἀντικρὺ τοῦ Δ, ὁ δὲ Θ, ἀντικρὺ τοῦ Α, Διαφορὰ γάρ ἐστι καθ᾽ ὑπεροχὴν τοῦ Δ, πρὸς τὸν Ε· αὐτὸ τὸ ἴδιον, ἂς γένῃ καὶ ἐπὶ τοῦ Β, καὶ Γ, καὶ ἡ μὲν τοῦ Β, πρὸς τὸν Ε, κατ᾽ ἔλλειψιν Διαφορὰ = Λ, ἂς βαλθῇ κατ᾽ ἀντικρὺ τοῦ Γ· ἡ δὲ τοῦ Γ, πρὸς τὸν Ε, καθ᾽ ὑπεροχὴν Διαφορὰ Κ, ἂς βαλθῇ ἀντικρὺ τοῦ Β· αὐτὸ τὸ ἴδιον, ἂς γίνεται, ἀνίσως καὶ αἱ τιμαὶ ἤθελαν εἶναι περισσότεραι ἀπὸ τοὺς δοθέντας τέσσαρας Ἀριθμούς.

Γ΄. Ἂς πολλαπλασιασθῇ δὴ ἑκάστη εὑρεθεῖσα Διαφορά, ἐπὶ τὴν πρὸς ἀριστερὰν αὐτῆς δοθεῖσαν τιμήν· δηλ. ἡ μὲν Θ, ἐπὶ τὴν Α· ἡ δὲ Κ, ἐπὶ τὴν Β· ἡ δὲ Λ, ἐπὶ τὴν Γ· καὶ ἡ Η, ἐπὶ τὴν Δ· καὶ γενέσθωσαν οἱ 36 καὶ 24, καὶ 12, καὶ 45 Ἀριθμοί· οἵτινες συναπτόμενοι, ποιήτωσαν τὸν Ἀριθμὸν Ν· ἂς συναφθῶσι καὶ αἱ εὑρεθεῖσαι Διαφοραί, καὶ γενέσθω ὁ Μ· ἂς παραβληθῇ λοιπὸν ὁ Μ, μὲ τὸν ζητούμενον τῶν χοέων Ἀριθμὸν Ζ· καὶ εἰ μὲν ἤθελεν εἶναι ἴσος μὲ αὐτόν, (καθὼς εἰς τὸ παρὸν Ὑπόδειγμα) εὑρέθη τὸ ζητούμενον· εἰ δὲ μή, εἶναι ἐσφαλμένη ἡ πρᾶξις.

Καὶ αὕτη ἐστὶν ἡ λεγομένη Ἁπλῆ Μέθοδος τῆς Μίξεως, ἢ Κράσεως· (§. 279.) διότι, ὅσας μονάδας ἔχει ἡ ἑνὸς τῶν συζυγισθέντων Ἀριθμῶν Διαφορά, τόσους χοεῖς πρέπει νὰ λάβωμεν ἐκ τοῦ ἄλλου εἴδους ὁποῦ εἶναι εἰς τὴν αὐτὴν Συζυγίαν, καὶ ὄχι περισσοτέρους· πρέπει ἄρα νὰ λάβωμεν, ἀπὸ μὲν τοῦ 6 ὀβολῶν τὸν χοέα τιμωμένου οἴνου, ἓξ χοεῖς· ἐκ δὲ τοῦ 8, τρεῖς· ἐκ δὲ τοῦ 12, ἕνα· καὶ ἐκ τοῦ 15, τρεῖς.

Δεῖξις.

Ὅτι δὲ ἡ πρᾶξις ὀρθῶς ἐγένετο, δείκνυται· πολλαπλασιασθεῖσαι γὰρ αἱ εὑρεθεῖσαι Διαφοραὶ Θ, Κ, Λ, Η, ἐπὶ τὰς Α, Β, Γ, Δ τιμὰς τῶν Διαφόρων τοῦ οἴνου εἰδῶν, ἐγένετο ὁ Ν Ἀριθμὸς ἐξ αὐτῶν· πολλαπλασιασθήτω οὖν καὶ ὁ Ε, ἐπὶ τὸν Ζ, δηλ. τὸ δοθὲν τίμημα ἐπὶ τὴν ζητουμένην Ποσότητα, καὶ γενέσθω ὁ Ξ· ἀλλ᾽ ὁ Ν ἴσος ἐστὶ τῷ Ξ· ἄρα ὀρθῶς καὶ μετὰ λόγου ἡ πρᾶξις ἐγένετο· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὑπό-

Ὑπόδειγμα Β΄.

Εἷς ἔμπορος ἠγόρασε τέσσαρα εἴδη ῥαπῆς· ἐξ ὧν, τὸ μὲν α΄. ἠγόρασε πρὸς 80 ὀβολοὺς τὸ μέτρον· τὸ δὲ β΄. πρὸς 60· τὸ δὲ γ΄. πρὸς 40· καὶ τὸ δ΄. πρὸς 30. Θέλει λοιπὸν νὰ κατασκευάσῃ ἐκ τῶν τεσσάρων αὐτῶν εἰδῶν, ἓν Κρᾶμμα, τὸ ὁποῖον νὰ τιμᾶται πενήντα ὀβολούς· πόσον ἄρα πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ τὸ κάθε εἶδος, διὰ νὰ κατασκευάσῃ 500 μέτρα!

Λύσις.

τιμὴ	ὀβολ.	μέτρ.	τὸ ὅλον Κρᾶμμα ἴσον Κ = 500
Ε = 50	Α = 30	. 30	Η = 900.
Ζ = 500	Β = 40	. 10	Θ = 400.
	Γ = 60	. 10	Κ = 600.
	Δ = 80	. 20	Λ = 1600.
		70 . 50 Ξ 3500 .	Μ = 70 Ν = 3500

Εἰς λύσιν τούτου, ἂς γένῃ ἡ ἀνωτέρα Μέθοδος, καθὼς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα· θέλει λάβῃ ἄρα, ἐκ μὲν τοῦ 30, ὀβολῶν τιμωμένου, μέτρα ἑξήκοντα· ἐκ δὲ τοῦ 40, μέτρα δέκα· ἐκ δὲ τοῦ 60, πάλιν δέκα· καὶ ἐκ τοῦ 80, εἴκοσι· ὃ ἦν τὸ αἰτούμενον· θέλων δὲ νὰ δοκιμάσῃς, ἂν καλῶς εὑρέθησαν τὰ εἰρημένα μέρη ἐκ τοῦ κάθε εἴδους, πολλαπλασίασον τοὺς Α, Β, Γ, Δ Ἀριθμοὺς, τοὺς παραστατικοὺς τῆς τιμῆς τοῦ κάθε εἴδους, ἐπὶ τὰ ἀντικρὺ αὐτῶν πρὸς δεξιὰν εὑρεθέντα μέρη, καὶ ἂς γένωσιν οἱ Η, Θ, Κ, Λ Ἀριθμοί· οἵτινες συναπτόμενοι, ποιοῦσι τὸν Ν· συναφθέντων δὲ καὶ τῶν εὑρεθέντων μερῶν, κάμνουσι τὸν Μ· ἂς πολλαπλασιασθῇ λοιπὸν ὁ Ἀριθμὸς Μ, ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν μέσην τιμὴν Ε, καὶ γενέσθω ὁ Ξ· ἀλλ' ὁ Ξ, ἴσος ἐστὶ τῷ Ν, ἄρα ὀρθῶς ἡ πρᾶξις ἐγένετο· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ὁ ῥηθεὶς ἔμπορος, θέλει νὰ κατασκευάσῃ Κρᾶμμα, οὐχὶ ἑβδομήκοντα, ἀλλὰ πεντακοσίων μέτρων, δὲν πρέπει νὰ ἡσυχάσωμεν ἕως ἐδῶ, ἀλλ' εἶναι χρεία νὰ καταφύγωμεν εἰς ἄλλην τινὰ Μέθοδον, ἕως ὅπου νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον· διὰ τοῦτο καὶ ἡ Μέθοδος αὕτη Μικτὴ, ἤγουν Σύνθετος ὀνομάζεται· λοιπὸν πρὸς εὕρεσιν τούτου, ἂς γένῃ τετραπλῆ

πλῆ Μέθοδος τῶν τριῶν ἔχουσα, ἀντὶ μὲν τοῦ α΄. ὅρου τὸν εὑρεθέντα Ἀριθμὸν τῶν μέτρων Μ = 70· ἀντὶ δὲ τοῦ β΄. τὴν ζητουμένην ὁλικὴν τοῦ Κράμματος Ποσότητα Ζ = 500· καὶ ἀντὶ τοῦ γ΄. καθ' ἕνα τῶν εὑρεθέντων Η, Θ, Κ, Λ, χωριστὰ, ὡς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα.

οἷον ∻ 70 : 500 ::

$$\left\{\begin{array}{l} 30 : \Phi = 214 + \frac{2}{7}. \\ 10 : X = 71 + \frac{3}{7}. \\ 10 : \Psi = 71 + \frac{3}{7}. \\ 20 : y = \underline{142} + \underline{\frac{6}{7}}. \\ \qquad\quad\ \ 498 \quad : 2 \end{array}\right.$$

ὅθεν 498 + 2 = 500 Ζ

Διὰ νὰ κατασκευάσῃ λοιπὸν 500 μέτρων Κρᾶμμα, πρέπει νὰ λάβῃ, ἐκ μὲν τῆς 30 ὀβολῶν τιμωμένης, μέτρα 214 $\frac{2}{7}$· ἐκ δὲ τῆς 40 μέτρα 70 $\frac{1}{6}$· ἐκ δὲ τῆς 60, μέτρα 71 $\frac{3}{7}$. Καὶ ἐκ τῆς 80, μέτρα 142 $\frac{6}{7}$· τὰ ὁποῖα συναπτόμενα, ποιοῦσι τὴν ζητουμένην Ποσότητα = τῷ Ζ· ὃ ἦν τὸ β΄. ζητούμενον.

Ὑπόδειγμα Γ΄.

Εἷς ἄνθρωπος ἐπορεύθη πρὸς ἕνα Πραγματευτὴν, καὶ τοῦ ἐζήτησε νὰ τοῦ δώσῃ ἀπὸ ἓξ εἰδῶν ὑφάσματα, ἤγουν πανία, τὰ ὁποῖα εἶχον διαφόρους τιμάς· τοῦ εἶπεν ὅμως, ὅτι ἡ μεσαία τιμὴ αὐτῶν τῶν ὑφασμάτων νὰ εἶναι ἴση 10. ὀβολῶν· ἡ δὲ Ποσότης τῶν πήχεων, ἴση 120. Πόσους ἄρα πήχεις πρέπει νὰ τοῦ δώσῃ ἀπὸ τὸ κάθε εἶδος, διὰ νὰ γένῃ, ὁ μὲν Ἀριθμὸς τῶν πήχεων = 120· ἡ δὲ τιμὴ ἑκάστου πήχεως = 10 ὀβολοῖς!

Λύσις.

Εἰς λύσιν τούτου, καὶ τῶν ὁμοίων αὐτῷ, τὰ μὲν διάφορα αὐτῶν τιμήματα, δηλούσθωσαν διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ γραμμάτων· τὸ δὲ δοθὲν μέσον τίμημα δηλούτω ὁ Θ· καὶ τὸν Ἀριθμὸν τῶν ζητηθέντων πήχεων, ὁ Η, ἂς γένῃ καὶ αὐτοῦ ἡ Μέθοδος, ὡς ἄνωθεν· καὶ θέλουσιν εὑρεθῇ πήχεις μὲν 28 = Κ· ὀβολοὶ δὲ 280 = Λ. Πολλαπλασιασθεῖσα γὰρ ἡ δοθεῖσα τιμὴ Θ = 10, ἐπὶ τὸν εὑρεθέντα Ἀριθμὸν τῶν πήχεων χέων Κ = 28, γίνεται ὁ Ἀριθμὸς Μ = 280, ἴσος τῷ Λ Ἀριθμῷ· ἄρα ὀρθῶς ἡ πρᾶξις ἐγένετο· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

	τιμήματα,	πήχεις,	ὀβολοί.
Θ = 10.	Α = 4.	10 =	40.
Η = 120.	Β = 7.	6 =	42.
	Γ = 9.	2 =	18.
	Δ = 12.	1 =	12.
	Ε = 16.	3 =	48.
	Ζ = 20.	6 =	120.
		Κ = 28.	Λ = 280.
	Θ = 10.	Κ = 28 =	Μ = 280.

Ἀλλ' ἐπειδὴ ζητοῦνται 120 πήχεις, οὐχὶ δὲ 28, ἂς γένῃ καὶ ἐδῶ Μέθοδος τῶν Τριῶν, ἔχουσα διὰ μὲν α. ὅρον, τὸν εὑρεθέντα Ἀριθμὸν τῶν πήχεων Λ = 28· διὰ δὲ β'. τὸν αἰτηθέντα ὁλικὸν Ἀριθμὸν τῶν πήχεων· Η = 120· καὶ διὰ γ'. ἕκαστον τῶν εὑρεθέντων Ἀριθμῶν τῶν πήχεων· δηλ. τὸν 10, καὶ 6, καὶ 2, καὶ 1, καὶ 3, καὶ 6· καὶ ἐξαχθήσονται τὰ ἐν τῷ ἀντικρὺ ὀνομαζόμενα Διαγράμματι μέρη.

οἷον ∴ 28 : 120 ::

10 =	$42 + \frac{6}{7}$
6 =	$25 + \frac{5}{7}$
2 =	$8 + \frac{4}{7}$
1 =	$4 + \frac{2}{7}$
3 =	$12 + \frac{6}{7}$
6 =	$25 + \frac{5}{7}$
	116 + 4 = 120.
ὅθεν 10 . 120 = 1200 = Κ.	

Πρέπει ἄρα νὰ δώσῃ, ἐκ μὲν τοῦ 4 ὀβολῶν τιμωμένου ὑφάσματος, πήχεις $42 + \frac{6}{7}$ τοῦ πήχεως· ἐκ δὲ τῶν 7, πήχεις $25 + \frac{5}{7}$· ἐκ δὲ τῶν 9, πήχεις $8 + \frac{4}{7}$· ἐκ δὲ τῶν 12, πήχεις $4 + \frac{2}{7}$· ἐκ δὲ τῶν 16, πήχεις $12 + \frac{6}{7}$· καὶ ἐκ τῶν 20, πήχεις $25 + \frac{5}{7}$· οἱ ὁποῖοι συναπτόμενοι, ποιοῦσι τὸν 120 Ἀριθμὸν, ἴσον τῷ αἰτηθέντι Ἀριθμῷ Η.

Δεῖξις.

Ὅτι δὲ τὰ εὑρεθέντα μέρη εἰσὶν ἀνάλογον, δείκνυται· ἔστι γὰρ ὡς ὁ α. ὅρος 28, πρὸς τὸν β'. 120, οὕτω καὶ ἕκαστος τῶν γ'. ὅρου λαχόντων τόπον, πρὸς ἕκαστον τῶν εὑρεθέντων δ'. ὅρον· ἐπὶ πασῶν γὰρ τῶν Ἀναλογιῶν, ὁ ὑπὸ τῶν δύω ἄκρων ὅρων γενόμενος, ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῶν δύω μέσων. ἄρα κτλ. Πολ-

Πολλαπλασιασθέντων ἐν τῶν εὑρεθέντων 120 πήχεων, ἐπὶ τὸ δοθὲν μέσον τίμημα Θ = 10, παράγεται ὁ 1200 Ἀριθμός· ἀλλ' οὗτος ὁ Ἀριθμὸς ἐστὶν ἴσος τῷ γινομένῳ ἔκ τε τοῦ αἰτηθέντος Ἀριθμοῦ τῶν πήχεων Η = 120, καὶ τοῦ δοθέντος μέσου τιμήματος Θ = 10· οἷον 120 . 10 = 1200· ἄρα ὀρθῶς, καὶ ἄνευ ἀπάτης ἡ πρᾶξις ἐγένετο· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Εὕρηται γὰρ ὅ,τε ζητούμενος τῶν πήχεων Ἀριθμὸς, καὶ τὸ ζητούμενον Κεφάλαιον τοῦ ὁλικοῦ τιμήματος, ὡς ἐν τῷ Διαγράμματι καθορᾶται.

Πρόβλημα Γ'.

§. 298. Ὅταν ἤθελον μας δοθῶσιν αἱ διάφοραι τιμαὶ δύω πραγμάτων, καὶ τὸ μεσαῖον τίμημα αὐτῶν, νὰ εὕρωμεν τὸν Ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν, τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ λάβωμεν ὑφ' ἑνὸς ἑκάστου αὐτῶν.

Λύσις.

Τὰ μέρη ὁποῦ πρέπει νὰ λάβωμεν, νὰ ἔχωσιν Ἀναλογίαν ἀναμεταξύ των, ἐν ἀντιστρόφῳ, ἢ ἀντιπεπονθότι λόγῳ, τῶν μεταξὺ αὐτῶν Θεωρουμένων Διαφορῶν, πρὸς τὸ δοθὲν μέσον, ἤγουν κοινὸν τίμημα· λοιπὸν διὰ νὰ γνωρίσωμεν χωρὶς λάθος τὸν Ἀριθμὸν ὁποῦ πρέπει νὰ λάβωμεν ἀφ' ἑκάστου τῶν ῥηθέντων πραγμάτων, ἢ εἰδῶν, πρέπει νὰ δώσωμεν, εἰς ἐκεῖνο μὲν ὁποῦ ἔχει μεγαλητέραν τιμὴν, τὴν Διαφορὰν ὁποῦ ἔχει τὸ μικρότερον, παραβαλλόμενον μὲ τὴν μεσαίαν τιμήν. Καὶ τοὐναντίον, τὴν Διαφορὰν τοῦ μεγαλητέρου, εἰς τὸ μικρότερον· οὗ εἰς κατάληψιν, κείσθω τὸ ἐφεξῆς Ὑπόδειγμα.

Ὑπόδειγμα.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ μὲν μία λίτρα τοῦ κασσιτέρου, τιμᾶται ὀβολῶν 16· ἡ δὲ τοῦ μολύβδου 10. Πόσας ἄρα λίτρας πρέπει νὰ λάβω ἀπὸ κάθε εἶδος, διὰ νὰ τὰ χωνεύσω, καὶ νὰ κάμω ἀπὸ αὐτὰ ἓν μίγμα, τὸ ὁποῖον νὰ τιμᾶται ἡ κάθε λίτρα πρὸς ὀβολοὺς 12· δηλ. μίαν μεσαίαν τιμὴν τῶν ῥηθέντων, 16, καὶ 10!

Λύ-

Λύσις.

Ἂς γένῃ καὶ τούτη ἡ πρᾶξις, ὡς ἑρμηνεύσαμεν εἰς τὸ Β΄. Πρόβλημα, (§. 282.) καὶ εἰς τὸ ἀντικρὺ καθορᾶται Διάγραμμα· οἷον τὴν μὲν τοῦ Β = 10 : πρὸς τὸν Γ = 12 : Διαφορὰν 2, κατ᾽ ἔλλειψιν οὖσαν, δοτέον τῷ μείζονα τιμὴν ἔχοντι Α = 16· τὴν δὲ τοῦ Α, πρὸς τὸν αὐτὸν Γ, καθ᾽ ὑπεροχὴν Διαφορὰν Ε = 4 δοτέον τῷ ἐλάττονι τιμὴν ἔχοντι Β.

$$A = 16.\quad B = 10$$
$$\Gamma = 12.$$
$$\Delta = 2 \;+\; E = 4$$
$$2 + 4 = 6.\ \text{ἄρα}\ \tfrac{2}{6},\ \tfrac{4}{6} = \tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{3}.$$

Ἐκ τῶν εὑρεθεισῶν ἄρα Διαφορῶν, Δ, καὶ Ε εἶναι γνωστὸν πόσα μέρη πρέπει νὰ λάβωμεν ἀπὸ τὸ καθ᾽ ἓν· δηλ. ἐκ μὲν τοῦ κασσιτέρου δύω μερίδια, ἐκ δὲ τοῦ μολύβδου 4· καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν μερῶν ἐξ ὧν σύγκειται τὸ μίγμα ἐστὶν = 6· οἷον 4 + 2 = 6, τὰ μέρη ὁποῦ πρέπει νὰ λάβωμεν καὶ ἐκ τῶν δύω, ἔσονται = $\frac{2}{6}$, $\frac{4}{6} = \frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$· πρέπει ἄρα νὰ λάβωμεν, ἓν τρίτον κασσιτέρου, καὶ δύω τρίτα μολύβδου· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Κατὰ τοῦτον λοιπὸν τὸν τρόπον ἤτε Ἁπλῆ καὶ Συνήθεις τοῦ Προβλήματος Μέθοδος τῆς Μίξεως, ἢ Κράσεως γίνεται, ἐπὶ τοῦ ἀρτίου Ἀριθμοῦ.

Ὅταν ὅμως τὰ τιμώμενα εἴδη διὰ περιττοῦ Ἀριθμοῦ παρίσανται, ἐπειδὴ ἀφ᾽ οὗ συζυγχθῶσιν οἱ ἄλλοι Ἀριθμοὶ, εἷς ἀπὸ αὐτοὺς μένει ἄζυγος, πρέπει α. νὰ τὸν παραβάλλωμεν μὲ τὸ δοθὲν τίμημα. Καὶ εἰ μὲν ἤθελε τύχῃ νὰ εἶναι μικρότερος ἀπὸ αὐτὸ, νὰ συζεύξωμεν καὶ αὐτὸν μὲ ἕνα τινὰ ἀπὸ τοὺς μεγαλητέρους. Εἰ δὲ πάλιν ἤθελεν εἶναι μεγαλήτερος τοῦ δοθέντος τιμήματος, νὰ τὸν συζεύξωμεν μὲ ἕνα τινὰ ἀπὸ τοὺς μικροτέρους. Ἔπειτα ἀφ᾽ οὗ γένῃ ἡ αὐτὴ πρᾶξις, θέλει εὑρεθῇ τὸ ζητούμενον, ὡς καὶ εἰς τὰ προλαβόντα Ὑποδείγματα.

Πρόβλημα Δ΄.

§. 294. Ὅταν μας δοθῶσι τρία εἴδη πραγμάτων, ὁποῦ ἔχουσι διάφορα τιμήματα, νὰ κατασκευάσωμεν ἓν Μίγμα, ἢ Κρᾶμμα τιμήματος μέσου.

Λύ-

Λύσις, καὶ Ὑπόδειγμα Α΄.

Ἂς μας δοθῶσι, λοιπὸν οἱ Α, Β, Γ Ἀριθμοὶ, ἀντὶ τῶν δοθέντων τριῶν εἰδῶν, καὶ διαφόρων αὐτῶν τιμημάτων. Τὸ δὲ ζητούμενον μέσον τίμημα, ἔστω ὁ Δ Ἀριθμός· ὡς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα. Ἂς λάβωμεν τὰ δοθέντα Α, Β, Γ τιμήματα ἀνὰ δύω· καὶ ἂς τὰ παραβάλλωμεν, μὲ τὸ πρὸς ἀριστερὰν αὐτῶν· μέσον τίμημα Δ, διὰ νὰ λάβωμεν τὴν μεταξὺ αὐτῶν εὑρισκομένην Διαφορὰν Ε, καὶ Ζ· τὴν μὲν Ε, Διαφορὰν οὖσαν καθ᾽ ὑπεροχὴν τοῦ Α, πρὸς τὸ Δ, νὰ τὴν βάλλωμεν ἀντικρὺ τοῦ Γ· τὴν δὲ Ζ, κατ᾽ ἔλλειψιν οὖσαν τοῦ Γ, πρὸς τὸ Δ, νὰ τὴν βάλλωμεν ἀντικρὺ τοῦ Α. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Ἀριθμὸς τῶν ἐκτιμημάτων εἶναι περιττὸς, διὰ νὰ παραβληθῇ καὶ τὸ ἀναπολειφθὲν τίμημα Β, ἂς λάβωμεν ἕνα ἀπὸ τοὺς παραβληθέντας δύω Ἀριθμοὺς Α, καὶ Γ· δηλ. ἐκεῖνον ὁποῦ ἁρμόζει περισσότερον εἰς τὴν παροῦσαν Ὑπόθεσιν, ἤγουν τὸν Γ, ὥσαν ὁποῦ τὸ μέσον τίμημα Δ, πίπτει μεταξὺ τοῦ Γ, καὶ Β Ἀριθμοῦ, οὐχὶ δὲ μεταξὺ τοῦ Α, καὶ Β. Καὶ ἀφ᾽ οὗ λάβωμεν τὴν Διαφορὰν 2, καὶ 4, ἂς βάλλωμεν τὴν μὲν Η = 4 Διαφορὰν κατ᾽ ἔλλειψιν οὖσαν τοῦ Γ πρὸς τὸ Δ, ἀντικρὺ τοῦ Β· τὴν δὲ 2, καθ᾽ ὑπεροχὴν οὖσαν τοῦ Β πρὸς τὸ Δ, ἀντικρὺ τοῦ Γ· ὅς τις ἔλαβε δύω Διαφορὰς, ὥσαν ὁποῦ παρεβλήθη δύω φοραῖς· λοιπὸν αἱ Διαφοραὶ, αἵτινες εὑρέθησαν εἰσὶ 4 + 4 + 6 + 2 = 16· εἶναι ἄρα φανερὸν, ὅτι ἐκ μὲν τοῦ εἴδους ὁποῦ τιμᾶται 20, νὰ λάβωμεν 4 μέρη· ἐκ δὲ τοῦ 16, πάλιν 4· καὶ ἐκ τοῦ 10, ὀκτώ· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

$$A = 20.\ Z = 4 = 80 = \Theta.$$
$$\Delta = 14.\ B = 16.\ H = 4 = 64 = K.$$
$$\Gamma = 10.\ E = 6 + 2 = 80 = \Lambda.$$
$$M = 16\quad N = 224.$$
$$\text{ὅθεν}\ \frac{224}{16:}\ 14\ \Xi.$$

Δεῖξις.

Ὅτι δὲ αἱ εὑρεθεῖσαι Διαφοραὶ εἶναι Ἀνάλογοι μὲ τὸ δοθὲν μέσον τίμημα Δ, δείκνυται· ἂς πολλαπλασιασθῶσιν αἱ εὑρεθεῖσαι Διαφοραὶ Ζ, Η, Ε, ἐπὶ τὰ ἀντικρὺ αὐτῶν διαδιάφορα τιμήματα, καὶ ἂς γένωσιν οἱ πρὸς δεξιὰν αὐτῶν Ἀριθμοί· δηλ. ὁ 80, καὶ 64, καὶ πάλιν 80· οἵτινες συναφθέντες, ποιήσωσιν τὸν Ν = 224· συναφθεισῶν δὲ καὶ τῶν Διαφορῶν Ζ + Η + Ε ποιήσωσιν τὸν Μ = 16· διαιρεθεὶς δὲ ὁ Ν ἐπὶ τὸν Μ, δίδει Πηλίκον τὸν Ξ· ἀλλ' ὁ Ξ, ἴσος ἐστὶ τῷ δοθέντι μέσῳ Ἀριθμῷ Δ· ἄρα αἱ εὑρεθεῖσαι Διαφοραὶ εἰσὶν αἱ ζητούμεναι· ἐπὶ πάσης γὰρ περιπτώσεως τὸ ὑπὸ τῶν δύω ἄκρων ὅρων γενόμενον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν δύω μέσων γενομένῳ.

οἷον ÷ 1 : 20 :: 4 : 80. Καὶ ÷ 1 : 16 :: 4 : 64. Καὶ ÷ 1 : 10 :: 8 : 80· ἄρα εἰσὶν ἀνάλογοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὑπόδειγμα Β'.

Εἷς ἄνθρωπος ἔχει πέντε εἴδη οἴνου· τὰ δὲ διάφορα αὐτῶν τιμήματα, δηλοῦσιν οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε Ἀριθμοί· βούλεται δὲ συγκεράσαι αὐτά, καὶ ποιῆσαι ἐξ αὐτῶν, ἓν εἶδος Κράμματος, τὸ ὁποῖον νὰ τιμᾶται 14 ὀβολῶν τὸ μέτρον· πόσα ἄρα μέτρα πρέπει νὰ λάβῃ ἀφ' ἑκάστου εἴδους, διὰ νὰ κατασκευάσῃ ἓν Κρᾶμμα ἑξακοσίων μέτρων, καὶ νὰ τὰ φέρῃ εἰς τὴν δοθεῖσαν τιμήν;

Λύσις.

Ἂς γένῃ καὶ αὐτό, ὡς ἄνωθεν ἡρμήνευται, καὶ ἕξεις τὸ ζητούμενον· ὡς ἐν τῷ ἀντικρὺ καθορᾶται Διαγράμματι.

	ὀβολοί,	μέτρα,	ὀβολοί.
Α =	24.	6 =	144.
Ζ = Β =	20.	2 =	40.
14. Γ =	16.	6 =	96.
Κ = Δ =	12.	6 =	72.
600. Ε =	8.	10 + 2 =	96.
		Η = 32 :	Θ = 448.
ὅθεν Θ = 448 / = 32 :	Ζ =	14.	Η

Θέλει λάβῃ ἄρα, ἐκ μὲν τοῦ 24, ὀβολῶν τιμωμένου οἴνου, μέτρα 6· ἐκ δὲ τοῦ 20, μέτρα 2· ἐκ δὲ τοῦ 16, μέτρα 6· ἐκ δὲ τοῦ 12, μέτρα 6· καὶ ἐκ τοῦ 8, μέτρα 12· τὰ ὁποῖα συναπτόμενα, ποιοῦσι τὸν Ἀριθμὸν Η = 32. Πολλαπλασιασθέντα δὲ αὐτὰ τὰ εὑρεθέντα μέτρα, ἐπὶ τὰ ἀντικρὺ αὐτῶν δοθέντα τιμήματα, Α, Β, Γ, Δ, Ε, κάμνουσι τοὺς 144 + 40 + 96 + 72 + 96 Ἀριθμοὺς· οἵ-

τινες συναφθέντες ποιοῦσι τὸν Θ = 448. Ἀριθμὸν τῶν ὀβολῶν· οὗτοι δὲ διαιρεθέντες ἐπὶ τὸν Ἀριθμὸν τῶν εὑρεθέντων μέτρων Η = 32, δίδουσι Πηλίκον τὸν 14· ὅστις δὲ ἐστὶν ἴσος τῷ δοθέντι μέσῳ τιμήματι Ζ = 14· ἄρα ὀρθῶς καὶ αὕτη ἁπάσης ἡ πρᾶξις ἐγένετο, ὅπερ ἔδει δεῖξαι· εὑρέθησαν δὲ καὶ τὰ ἀφ' ἑκάστου εἴδους ληφθησόμενα ἀνάλογα μέτρα· ἄρα κτλ.

Ἀλλ' ἐπειδὴ ζητοῦνται οὐχὶ 32, ἀλλ' 600 μέτρα, γενέσθω ἡ συνταπλῆ Μέθοδος τῶν Τριῶν· ἔχουσα, ἀντὶ μὲν τοῦ α. ὅρου, τὸν εὑρεθέντα Ἀριθμὸν τῶν μέτρων Η = 32· ἀντὶ δὲ τοῦ β'. τὸν ζητούμενον ὁλικὸν Ἀριθμὸν τῶν μέτρων Κ = 600. Καὶ ἀντὶ γ'. ἑκάστην τῶν εὑρεθεισῶν Διαφορῶν· δηλ. τὴν 6, καὶ 2, καὶ 6, καὶ 6, καὶ 12· τὰ δὲ Πηλίκα δείξουσιν ἡμῖν τὰ ἀφ' ἑκάστου εἴδους ληφθησόμενα μέρη τοῦ οἴνου, ὡς ἐν τῷ Διαγράμματι καθορᾶται.

οἷον ÷ 32 : 600 ::	6 : = 112 + $\frac{1}{2}$.
	2 : = 37 + $\frac{1}{2}$.
	6 : = 112 + $\frac{1}{2}$.
	6 : = 112 + $\frac{1}{2}$.
	12 : = 225. —
	598 + 2
= Κ = 600.	

Διὰ νὰ κατασκευάσῃ ἄρα τὴν ζητηθεῖσαν Ποσότητα Κ = 600 μέτρα, θέλει λάβῃ, ἐκ μὲν τοῦ 24 ὀβολῶν τὸ μέτρον τιμωμένου οἴνου, μέτρα $112\frac{1}{2}$· ἐκ δὲ τοῦ 20, μέτρα $37+\frac{1}{2}$· ἐκ δὲ τοῦ 16, μέτρα $112\frac{1}{2}$· ἐκ δὲ τοῦ 12, μέτρα $112\frac{1}{2}$· καὶ ἐκ τοῦ 8, μέτρα 225· τὰ ὁποῖα συναπτόμενα ποιοῦσι τὸν Κ = 600 Ἀριθμόν· ὅστις δὲ ἐστὶν ἴσος τῷ αἰτηθέντι. ἄρα κτλ.

Δεῖξις.

Ὅτι δὲ τὰ ἐξαχθέντα Πηλίκα εἰσὶν τὰ ἀφ' ἑνὸς ἑκάστου εἴδους τοῦ οἴνου ληφθησόμενα μέτρα, δείκνυται· ἂς πολλαπλασιασθῶσιν ἓν πρὸς ἓν τὰ εὑρεθέντα μέτρα, ἐπὶ τὴν ἑαυτῶν τιμήν. Καὶ ἐκ μὲν τοῦ 24 ὀβολῶν τιμωμένου οἴνου, ἐπὶ τὰ εὑρεθέντα μέτρα $112\frac{1}{2}$· παράγεται ὁ 2700. Ἀριθμὸς τῶν ὀβολῶν· ἐκ δὲ τοῦ 20, ἐπὶ $37\frac{1}{2}$ ὁ 750· ἐκ δὲ τοῦ 16, ἐπὶ τὰ $112\frac{1}{2}$, ὁ 1800· ἐκ δὲ τοῦ 12, ἐπὶ τὰ $112\frac{1}{2}$, ὁ 1350· καὶ ἐκ τοῦ 8, ἐπὶ 225, ὁ 1800· οἵτινες συναπτόμενοι ποιοῦσι τὸν 8400 Ἀριθμόν. Πολλαπλασιασθεὶς δὲ καὶ ὁ ὁλικὸς τοῦ Κράμματος Ἀριθμὸς Κ = 600, ἐπὶ τὸ δοθὲν μέσον τίμημα

Ζ

Z = 14· παράγεται ὁ αὐτὸς Ἀριθμὸς τῶν ὀβολῶν· οἷον 600. 14 = 8400. ἄρα κτλ.

Πρόβλημα Ε'.

§. 295. Ὅταν μας δοθῇ ἓν Μίγμα, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι συντεθειμένον, ἀπό τε διάφορα εἴδη καὶ διαφόρων τιμημάτων, δοθῇ δὲ καὶ ἡ ἑκάστου εἴδους τιμή, νὰ εὕρωμεν τὴν μεταξὺ αὐτῶν μέσαιαν τιμήν.

Λύσις.

Εἰς λύσιν τούτου, διαίρεσον τὸ ἄθροισμα τῆς τιμῆς ἐκείνης μὲ τὴν ὁποίαν τιμᾶται τὸ ὁλικὸν Μίγμα, διὰ τοῦ ὁλικοῦ ἀθροίσματος τῶν εἰσελθουσῶν Ποσοτήτων εἰς τὸ Μίγμα, τὸ δὲ Πηλίκον ἔσται ἡ ζητουμένη μέση τιμὴ τοῦ Μίγματος. (ὅρα §. 281.)

Ὑπόδειγμα.

Ὁ Κλεάνθης, ἀγοράσας ποτὲ 30 μὲν ὀκάδες ψονίσματος τινὸς πρὸς ὀβολοὺς 12, τὴν ὀκᾶν, 40 δὲ, πρὸς 14· πεντήκοντα δὲ, πρὸς 16, καὶ 100 πρὸς 18· ἔπειτα τὰ ἀνακάτωσεν ὅλα, καὶ ἔκαμεν ἐξ αὐτῶν ἓν Μίγμα· ἐκ τοῦ ὁποίου Μίγματος ἔδωκε τῷ Νικοκλεῖ, ὀκάδες 60· πόσον ἄρα χρεωστεῖ νὰ δώσῃ ὁ Νικοκλῆς διὰ τὰς 60· ὀκάδας τοῦ ῥηθέντος Μίγματος;

Λύσις.

Εἰς λύσιν τούτου καὶ τῶν ὁμοίων αὐτῷ, Α'. ἂς βαλθῶσιν ὑπαλλήλως τὰ ἀγορασθέντα εἴδη τῶν διαφόρων ψονισμάτων, ἐν δεξιᾷ δὲ αὐτῶν, ἡ ὑπὲρ ἑκάστου δοθεῖσα τιμή· ὡς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα.

	ὀκάδες,	ὀβολοὺς,	ὀβολοί.
Α =	30 .	12 =	360.
Β =	40 .	14 =	560.
Γ =	50 .	16 =	800.
Δ =	100 .	18 =	1800.
Ε =	220 :	Ζ =	3520.
	$\frac{3520}{220}$:	Η = 16.	
λοιπόν·	60 . 16 = Θ = 960.		

Β'. Ἂς πολλαπλασιαθῇ κάθε εἶδος ψονίσματος ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν τιμήν του, καὶ γενέσθωσαν οἱ ἀντικρὺ πρὸς δεξιὰν αὐτῶν Ἀριθμοὶ τῶν ὀβολῶν· οἵτινες συναφθέντες, ποιήτωσαν τὸν Z Ἀριθμόν· συναφθεισῶν δὲ καὶ τῶν ὀκάδων ἑκάστου εἴδους ψονίσματος, ποιήτωσαν τὸν Ε Ἀριθμόν· διαιρεθεὶς οὖν ὁ Z· ὁλικὸς τῶν ὀβολῶν Ἀριθμὸς, διὰ τοῦ Ε ὁλικοῦ Ἀριθμοῦ τῶν εἰσελθουσῶν Ποσοτήτων τῶν ὀκάδων εἰς τὸ ῥηθὲν Μίγμα, δίδει Πηλίκον τὸν 16 Ἀριθμὸν = τῷ Η· καὶ αὕτη ἐστὶν ἡ ζητουμένη μέση τιμὴ τοῦ Μίγματος· ὃ ἦν τὸ α'. ζητούμενον.

Γ'. Ἂς πολλαπλασιαθῇ λοιπὸν ὁ Ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων τοῦ Μίγματος, ὅστις ἐδόθη τῷ Νικοκλεῖ, ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν μέσον τίμημα Η = 16· καὶ ὁ γενόμενος Ἀριθμὸς Θ = 960· θέλει μας δείξῃ τὴν Ποσότητα τῶν ὀβολῶν, τὴν ὁποίαν χρεωστεῖ νὰ δώσῃ ὁ Νικοκλῆς τῷ Κλεάνθει, ὑπὲρ τῶν 60 ὀκάδων τοῦ Μίγματος· οἷον 60 . 16 = 960 = Θ· ἄρα χρεωστεῖ νὰ δώσῃ ὀβολοὺς ἐννεακοσίους ἑξήκοντα· ὃ ἦν τὸ β'. ζητούμενον.

Πρόβλημα Ϛ'.

§. 296. Ὅταν ἓν πρᾶγμα εἶναι μεμιγμένον, ἢ ἀνακατωμένον ἀπὸ τέσσαρα εἴδη μετάλλων, τῶν ὁποίων αἱ διάφοραι τιμαὶ καὶ βαρύτητες εἰσὶ δεδομέναι· ὁμοίως καὶ ἡ βαρύτης αὐτοῦ τοῦ μεμιγμένου πράγματος ὑπάρχει γνωστή, νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν ὁποῦ ἀξίζει αὐτὸ τὸ πρᾶγμα, οὕτω μεμιγμένον ὄν.

Λύσις.

Εἰς λύσιν τοῦ Προβλήματος τούτου, καὶ τῶν ὁμοίων αὐτῷ, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι μία φιάλη, ἤγουν κοῦπα, εἶναι συνθεμένη, ἢ μεμιγμένη, ἐκ τεσσάρων διαφόρων διαφερόντων ἀλλήλων μετάλλων. Καὶ ἡ μὲν τιμὴ τοῦ α'. μετάλλου ἔστω καθ' Ὑπόθεσιν 24 χαρακτήρων· ἡ δὲ τοῦ β'. 18· ἡ δὲ τοῦ γ'. 11· καὶ ἡ τοῦ δ'. 10. Ἔστω δὲ καὶ ἡ τῆς φιάλης βαρύτης 70 δραχμῶν· ἐξ ὧν, τὰς μὲν 10 δραχμὰς νὰ ἔχῃ ἐκ τοῦ α'. μετάλλου· τὰς δὲ 15, ἐκ τοῦ β'. τὰς δὲ 20, ἐκ τοῦ γ'. καὶ τὰς 25, ἐκ τοῦ δ'. καὶ ἂς ζητηθῇ, τὸ πόσον ἄρα τιμᾶται, ἢ ἀξίζει ἡ κάθε μία δραχμὴ αὐτῆς τῆς φιάλης, οὕτω μεμιγμένης ἐκ τῶν ὑποτεθέντων τεσσάρων μετάλλων;

Λύ-

Λύσις.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον τίμημα, α'. ἂς βαλθῶσιν ὑπαλλήλως τὰ ῥηθέντα τέσσαρα μέταλλα· ἀντικρὺ δὲ αὐτῶν, ἂς σημειωθῇ ἡ τιμή, καὶ βαρύτης τοῦ καθ' ἑνὸς μετάλλου· β'. ἂς πολλαπλασιασθῇ ἡ τιμὴ τοῦ καθ' ἑνὸς, μετάλλου ἐπὶ τὴν βαρύτητα αὐτοῦ, οἱ δὲ γινόμενοι Ἀριθμοὶ συναφθέντες, ποιήτωσαν τὸν Ἀριθμὸν τῶν δραχμῶν Ζ = 980· συναφθεῖσαι δὲ καὶ αἱ τῶν μετάλλων βαρύτητες· δηλ. αἱ 10 + 15 + 20 + 25, ποιήτωσαν τὸν Ε Ἀριθμόν· διαίρεσον οὖν τὸν Ζ Ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν Ε, καὶ θέλει σοι δώσῃ Πηλίκον τὸν Η = 14 Ἀριθμόν· καὶ αὐτὸς ἐστὶν ἡ ζητουμένη μέση τιμὴ ἑκάστης δραχμῆς τῆς φιάλης· τιμᾶται ἄρα κάθε δραχμὴ δεκατεσσάρων ὀβολῶν, ἢ παράδων, ἢ ὅ,τι ἄλλο νόμισμα ὑποθέσωμεν· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

μέταλλα,	τιμή, χαρακτ.	βαρύτης, δραχμαί,	δραχμαί.
Α =	24 .	10 =	240 .
Β =	18 .	15 =	270 .
Γ =	11 .	20 =	220 .
Δ =	10 .	25 =	250 .
		Ε = 70 :	Ζ = 980 .

$$\text{ὅθεν } \frac{Ζ = 980}{Ε = 70} : 14 = Η .$$

Ὑπόδειγμα Α'.

Εἷς ἄνθρωπος ἔδωκεν εἰς ἕνα χρυσοχόον ὀγδοήκοντα δραχμὰς χρυσίου καθαροῦ· τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ ἦν 24 χαρακτήρων, διὰ νὰ τοῦ κατασκευάσῃ ἕνα χρυσοῦν στέφανον· ἐκεῖνος δὲ νοθεύσας τὸ χρυσίον, τὸ ἔμιξε μὲ 15 δραχμὰς χαλκοῦ, τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ ἦν 2 χαρακτήρων· ζητεῖ λοιπὸν νὰ μάθῃ, πόσον τιμᾶται, ἢ ἀξίζει ἡ κάθε δραχμὴ τοῦ στεφάνου, καθὼς εἶναι μεμιγμένος μὲ τὸν χαλκόν;

Λύσις.

Κατὰ δύω τρόπους ἐνδέχεται νὰ ἐνόθευσεν· ὁ χρυσοχόος τὸ χρυσίον· διότι, ἢ ἀνέμιξε μὲ τὰς 80 δραχμὰς τοῦ καθαροῦ χρυσίου, καὶ 15 δραχμὰς χαλκοῦ, καὶ ἔγινε τὸ ὅλον Μῖγμα ἔκ τε τοῦ χρυσίου καὶ χαλκοῦ, ἴσον μὲ 95 δραχμάς, ἢ ἔκλεψεν

ἐκ

ἐκ τοῦ χρυσίου 15 δραχμάς, καὶ ἐπρόσθεσεν ἀντ' αὐτοῦ χαλκόν, διὰ νὰ ἀναπληρώσῃ τὴν Ποσότητα τῶν 80 δραχμῶν.

Τρόπος Α'.

Καὶ κατὰ μὲν τὴν πρώτην περίστασιν θέλει εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς κάθε δραχμῆς τοῦ στεφάνου, ἀφ' οὗ πολλαπλασιάσωμεν, τὰς μὲν 80 δραχμὰς τοῦ χρυσίου, μὲ τὴν τιμὴν τῶν 24 χαρακτήρων, καὶ τὰς 15 τοῦ χαλκοῦ ξεχωριστά, μὲ τὴν τιμήν των δηλ. τῶν 2 χαρακτήρων, καὶ νὰ συνάψωμεν τοὺς Ἀριθμοὺς, οἵτινες γίνονται ἐξ αὐτῶν εἰς ἕν, τὸν 1950· ἔπειτα νὰ συνάψωμεν καὶ τὰς 80 δραχμὰς τοῦ χρυσίου, μὲ τὰς 15 τοῦ χαλκοῦ, καὶ γίνονται 95· μὲ αὐτὰς λοιπὸν διαιροῦμεν τὸν Ἀριθμὸν τῶν χαρακτήρων = 1950, καὶ μας δίδει Πηλίκον, χαρακτῆρας $20 + \frac{10}{19}$. Καὶ τόσον εἶναι ἡ τιμὴ τῆς κάθε δραχμῆς τοῦ νενοθευμένου στεφάνου· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

χρυσίον, δραχμαί,	τιμή, χαρακτ.	χαλκ. δραχ.	τιμή χαρακτ.
80 .	24 = 1920 .	15 .	2 = 30

$$\text{ὅθεν } 80 + 15 = 95 . \text{ Καὶ } 1920 + 30 = \frac{1950}{95} : 20 + \frac{10}{19} .$$

Τρόπος Β'.

Ἐὰν δὲ κατὰ τὸν β'. τρόπον, ὑποθέσωμεν τὸ Πρόβλημα, α'. πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὴν Ποσότητα τοῦ δοθέντος καθαροῦ χρυσίου, τὴν Ποσότητα, τὴν ὁποίαν ὁ χρυσοχόος ἔκλεψε· β'. νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἐναπολειφθεῖσαν Ποσότητα τοῦ χρυσίου ἐπὶ τὴν τιμὴν τῶν 24 χαρακτήρων, καὶ γίνεται ὁ 1560. Ἀριθμός· ἔπειτα νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰς 15 δραχμὰς τοῦ χαλκοῦ, ἐπὶ τὴν τιμήν των δηλ. 2 χαρακτήρων, καὶ γίνεται ὁ 30 Ἀριθμός· ἀφ' οὗ δὲ συνάψωμεν αὐτοὺς τοὺς δύω Ἀριθμοὺς, γίνεται ὁ 1590· τοῦτον τὸν διαιροῦμεν ἐπὶ τὰς 80 δραχμάς, καὶ μας δίδει Πηλίκον $19\frac{1}{2}$ χαρακτήρων· καὶ τόσον τιμᾶται ἡ κάθε δραχμὴ τοῦ νενοθευμένου στεφάνου· ὃ ἦν τὸ β'. ζητούμενον.

χρυσίον, δραχμαί,	τιμή, χαρακτ.	χαλκός.	χαρακτῆρες.
80 — 15 = 65 .	24 =	15 .	2 = 30

$$= 1560 + 30 = \frac{1590}{80} : 19\tfrac{1}{2} .$$

Οὕτως

Οὕτως εὑρίσκεται ἡ τιμὴ καὶ ἀξιασμὸς τοῦ νενοθευμένου χρυσοῦ, ἢ ἀργύρου, ὅταν ἤθελε μας δοθῇ ἡ Ποσότης καὶ τιμὴ αὐτοῦ τε καὶ τῶν ἄλλων μετάλλων, ἐξ ὧν ὑπάρχει μεμιγμένος.

Πρόβλημα Ζ'.

§. 297. Ὅταν μας δοθῇ ἡ Ποσότης τοῦ καθαροῦ χρυσίου, ἢ ἀργύρου, ἢ ἄλλου τινὸς μετάλλου, νὰ εὕρωμεν τὴν Ποσότητα τοῦ μετάλλου ἐκείνου, μὲ τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ τὸ ἀνακατώσωμεν, καὶ νὰ τὸ φέρωμεν εἰς ἐκείνην τὴν τιμὴν ὁποῦ θέλομεν.

Λύσις.

Εἰς λύσιν τούτου, καὶ τῶν ὁμοίων αὐτῷ Προβλημάτων, πρέπει νὰ μεταχειρισθῶμεν τοιαύτην μέθοδον· α'. δηλ. νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν δεδομένην Ποσότητα, τοῦ χρυσοῦ ἢ ἀργύρου, ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν αὐτῷ τιμήν· β'. νὰ διαιρέσωμεν τὸν γενόμενον Ἀριθμὸν, ἐπὶ τὴν ζητουμένην τοῦ χρυσοῦ, ἢ ἀργύρου τιμήν· ἐκ δὲ τοῦ Πηλίκου ὁποῦ ἤθελε μας δώσῃ, νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν Ἀριθμὸν τῆς Ποσότητος τοῦ καθαροῦ χρυσοῦ, ἢ ἀργύρου, καὶ ἐκεῖνο ὁποῦ ἀπομείνῃ, θέλει μας κάμῃ γνωστὴν τὴν Ποσότητα τοῦ μετάλλου, μὲ τὴν ὁποίαν χρειάζεται νὰ ἀνακατωθῇ ὁ καθαρὸς χρυσὸς, ἢ ἄργυρος, διὰ νὰ τὸν φέρωμεν εἰς τὴν ζητουμένην κατωτέραν τιμήν.

Ὑπόδειγμα Α'.

Εἷς ἄνθρωπος ἔχων 60 δραχμὰς ἀργύρου καθαροῦ, τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ ἑκάστης δραχμῆς ἦτον 24 χαρακτήρων, καὶ θέλων νὰ τὸν φέρῃ εἰς μικροτέραν τιμήν· δηλ. 18 χαρακτήρων, ζητεῖ νὰ μάθῃ πόση ἄρα πρέπει νὰ εἶναι ἡ Ποσότης τοῦ χαλκοῦ, ἥτις χρειάζεται νὰ ἀναμιχθῇ μὲ τὴν ῥηθεῖσαν Ποσότητα τοῦ ἀργύρου;

Λύσις.

Ἡ πρᾶξις τούτου καὶ τῶν ὁμοίων Προβλημάτων, γίνεται κατὰ τὸν Β'. τρόπον τῆς Πλαγίας Μεθόδου τῶν Τριῶν. (§. 187.) Διὰ τοῦτο καὶ τὴν ζητουμένην Ἀναλογίαν, πρέπει νὰ

τὴν λάβωμεν ἐκ τῶν ἐν ἐκείνῃ Ὑποδειγμάτων. Ἐπειδὴ αὐξανομένης τῆς βαρύτητος τοῦ ἀργύρου, μὲ τὴν πρόσθεσιν τοῦ χαλκοῦ, συναυξάνεται τρόπον τινὰ καὶ ἡ τιμὴ αὐτοῦ, μὲ τὴν πρόσθεσιν τῆς τιμῆς τοῦ χαλκοῦ· λοιπὸν διὰ νὰ γένῃ ἡ εὕρεσις τοῦ ζητουμένου μὲ περισσοτέραν ἀκρίβειαν, καὶ χωρὶς λάθος, πρέπει νὰ καταφύγωμεν εἰς ἄλλην τινὰ πρᾶξιν, ἥτις ἐστὶν ἡ ἐφεξῆς.

$$A = 60.\ B = 24.\ \Gamma = 1440.$$
$$\Delta = 18.\ \text{ὅθεν}\ \frac{1440}{18:}\ Z = 80.$$
$$E = 2.\ \text{Καὶ}\ 80 - 60 = H = 20.$$
$$\text{Καὶ}\ 2.20 = \Theta = 40.$$
$$\text{λοιπὸν}\ 1440 + 40 = \frac{K = 1480}{\Delta = 18:}$$
$$82\frac{4}{18}.\ \Lambda.$$
$$\text{ἄρα}\ 82\frac{4}{18} - 60 = 22 + \frac{4}{18} = M.$$

Α'. Ἂς καταστρωθῶσιν ἐφεξῆς τὰ ἐν τῷ Προβλήματι ὀνομασθέντα μέρη. Καὶ ὁ μὲν Α Ἀριθμὸς, ἂς φανερώνῃ τὴν Ποσότητα τοῦ καθαροῦ ἀργύρου· ὁ δὲ Β, τὴν τιμὴν κάθε δραχμῆς αὐτοῦ· καὶ ὁ Γ, τὴν Ποσότητα τῆς ὁλικῆς τιμῆς τοῦ ἀργύρου· ὁ δὲ Δ, τὴν ζητουμένην τιμήν· καὶ ὁ Ε, τὴν τιμὴν τοῦ χαλκοῦ. Ἂς πολλαπλασιασθῇ λοιπόν· ὁ Α Ἀριθμὸς τῶν δραχμῶν τοῦ ἀργύρου ἐπὶ τὴν τιμὴν αὐτοῦ Β, καὶ γενέσθω ὁ Γ Ἀριθμός· ὅστις διαιρεθεὶς ἐπὶ τὴν ζητουμένην τιμὴν Δ, δίδει Πηλίκον τὸν Ζ Ἀριθμόν· ἀφαιρεθήτω λοιπὸν ὁ Α Ἀριθμὸς ἀπὸ τὸν Ζ καὶ ἐναπολείπεται ὁ Η· πολλαπλασιασθήτω δὲ καὶ ὁ Η, ἐπὶ τὴν τιμὴν τοῦ χαλκοῦ Ε, καὶ γενέσθω ὁ Θ· ὅστις συναφθεὶς μὲ τὸν Γ Ἀριθμὸν, ποιεῖ τὸν Κ· ὅστος δὲ διαιρεθεὶς ἐπὶ τὸν Δ, δίδει Πηλίκον τὸν Λ· οὗ τινος ἀφαιρεθεὶς ὁ Α, ἐναπολείπεται ὁ Μ· καθὼς φαίνεται εἰς τὸ Διάγραμμα· ὁ Μ Ἀριθμὸς, ἄρα παριστάνει ἀκριβῶς, καὶ χωρὶς λάθος τὴν Ποσότητα τῆς βαρύτητος τοῦ χαλκοῦ, ἥτις χρειάζεται νὰ μιχθῇ μὲ τὸν δοθέντα καθαρὸν ἄργυρον· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Ὑπόδειγμα Β'.

Ἄλλος δέ τις ἄνθρωπος ἔχων καθαρὸν ἄργυρον, ὡρισμένης Ποσότητος, βουλόμενος δὲ καὶ αὐτὸς ἵνα φέρῃ αὐτὸν εἰς κατωτέραν τιμήν, χωρὶς ὅμως νὰ αὐξηνθῇ, ἢ ἐλαττωθῇ ἡ βα-

βαρύτης τοῦ ἀργύρου, ζητεῖ νὰ μάθῃ πόσας ἄρα δραχμὰς πρέπει νὰ ἀφαιρέσῃ ἐκ τοῦ καθαροῦ ἀργύρου, ἀντὶ τοῦ ὁποίου νὰ προσθέσῃ χαλκόν;

Λύσις.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι καὶ αὐτὸς εἶχεν ὁμοίως 60 δραχμὰς ἀργύρου καθαροῦ, τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ ἦτον 24 χαρακτήρων· καὶ ὅτι ζητεῖ νὰ τὸν φέρῃ εἰς ὀλιγοτέραν τιμήν· δὸς εἰπεῖν, εἰς 18· ἂς ὑποθέσωμεν δέ, καὶ ὅτι ἡ κάθε δραχμὴ τοῦ χαλκοῦ τιμᾶται 2 χαρακτήρων. Ἂς τεθῶσι κατὰ σειράν, ὡς ἄνωθεν. Καὶ πολλαπλασιασθήτω ὁ Ἀριθμὸς τοῦ καθαροῦ ἀργύρου Α, ἐπὶ τὴν ζητουμένην κατωτέραν τιμὴν Β, καὶ γενέσθω ὁ Ἀριθμὸς τῶν χαρακτήρων Γ· οὗτος δὲ διαιρεθήτω ἐπὶ τὸν 24, τὴν τιμὴν δηλ. τοῦ καθαροῦ ἀργύρου, καὶ μας δίδει Πηλίκον τὸν Ζ· ἀφαιρεθήτω λοιπὸν ὁ Ζ ἐκ τοῦ Ἀριθμοῦ τοῦ καθαροῦ ἀργύρου Α, καὶ ἐναπολείπεται ὁ Η· οὗτος δὲ πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸν Ε, τὴν τιμὴν δηλ. τοῦ χαλκοῦ, καὶ ποιήτω τὸν Θ· οὗτος δὲ πάλιν συναφθεὶς τῷ Γ, ποιεῖ τὸν Κ· διαιρεθεὶς δὲ ὁ Κ· ἐπὶ τὸν 24, προκύπτει Πηλίκον ὁ Λ· ἀφαιρεθεὶς δὲ ὁ Λ, ἐκ τοῦ Α, ἐναπολειφθήσεται ὁ Μ. Καὶ ὁ Μ ἔσται πάντως δηλωτικὸς τοῦ ἀφαιρεθησομένου ἀργύρου, καὶ προστεθησομένου χαλκοῦ.

ἄργυρος,	χαρακτῆρ.	χαρακτῆρ.

$A = 60$. $B = 18 = \Gamma = 1080$.

χαλκός, ὅθεν $\frac{1080}{24;}$ $Z = 45$.

$\Delta = 18$.

λοιπὸν $60 - 45 = 15 = H$.

τιμή.

$E = 2 . 15 = 30 = \Theta$.

Καὶ $1080 + 30 \frac{K = 1110}{24;} 46\frac{1}{4}$

$= \Lambda$. ὅθεν $60 - 46\frac{1}{4} = 13\frac{3}{4} = M$.

Ἐκεῖνος ἄρα, ὅς τις ἔχει τὰς 60 δραχμὰς τοῦ καθαροῦ ἀργύρου, οὗ ἡ τιμὴ 24 χαρακτήρων, καὶ ζητεῖ νὰ τὸν μεταφέρῃ εἰς τιμὴν 18 χαρακτήρων, πρέπει νὰ ἀφαιρέσῃ ἐκ τοῦ καθαροῦ ἀργύρου δραχμὰς $13\frac{3}{4}$· ἀντὶ τῶν ὁποίων θέλει προσθέσει χαλκόν· καὶ ἐναπολειφθήσεται εἰς αὐτὸ τὸ Μίγμα ἄργυρος καθαρός, δραχμαὶ $46 + \frac{1}{4}$. ἄρα κτλ.

Ὑπό-

Ὑπόδειγμα Γ'.

Εἷς χρυσοχόος, ἀφ' οὗ ἔλαβεν ὑπό τινος δεκαοκτὼ οὐγγίας χρυσίον, τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ ἦτον 16 κόκκων σίτου, τὸ ἔβαλεν εἰς τὸ χωνευτήριον. Καὶ ἐπειδὴ τὸ χρυσίον ἐκεῖνο δὲν ἦτον καθαρόν, ἀφ' οὗ τὸ ἐχώνευσεν, ἐναπέμειναν οὐγγίαι 15· λοιπὸν ζητεῖ νὰ μάθῃ, πόσων ἄρα κόκκων σίτου ἔσται ἡ τιμὴ τοῦ ἐναπολειφθέντος χρυσίου;

Λύσις.

Εἰς εὕρεσιν τούτου, ἂς βαλθῶσιν ἐφεξῆς οἱ Α, Β, Γ Ἀριθμοί· ὑποκάτω δὲ τοῦ Α, ὁ Δ· καὶ ὁ μὲν Α, ἂς φανερώνῃ τὰς οὐγγίας τοῦ δοθέντος χρυσίου· ὁ δὲ Β, τὴν τιμὴν τῆς κάθε οὐγγίας· καὶ ὁ Γ, τὴν ὁλικὴν τιμὴν τοῦ χρυσίου· ὁ δὲ Δ, τὴν ἐναπολειφθεῖσαν Ποσότητα τοῦ χωνευθέντος χρυσίου· τούτων οὖν οὕτω τεθέντων, πολλαπλασιασθήτω ὁ Α, ἐπὶ τὸν Β, καὶ γενέσθω ὁ Γ· ὅς τις διαιρεθεὶς ἐπὶ τὸν Δ, δίδει Πηλίκον τὸν Ε· καὶ οὗτός ἐστιν ἡ τιμὴ τοῦ ἐναπολειφθέντος χρυσίου· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον· ὡς ἐν τῷ Διαγράμματι καθορᾶται· ἡ τιμὴ ἄρα τοῦ ἐναπολειφθέντος χρυσίου ἐστὶ κόκκων σίτου δεκαεννέα, καὶ ἑνὸς τρίτου τοῦ κόκκου.

Οὐγγίαι,	κόκκοι,	κόκκοι.

$A = 18$. $B = 16$. $\Gamma = 228$.

$\Delta = 15$, ὅθεν $\frac{288}{15;}$ $E =$

$= 19 + \frac{1}{3}$.

Ὑπόδειγμα Δ'.

Ὁ ἴδιος χρυσοχόος, ἔχοντας χρυσίον καθαρόν, τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ ἦτον 24 κόκκων σίτου, καὶ θέλων νὰ κατασκευάσῃ ἓν δακτυλίδιον ὁποῦ νὰ ἔχῃ τριῶν δραχμῶν βαρύτητα, ἀπὸ χρυσίον ὅμως, τὸ ὁποῖον νὰ τιμᾶται 16 κόκκων σίτου, ζητεῖ νὰ μάθῃ, πόσον μέρος πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ τοῦ καθαροῦ χρυσίου, καὶ πόσον ἐκ τοῦ χαλκοῦ διὰ νὰ κατασκευάσῃ τὸ δακτυλίδιον καθὼς βούλεται αὐτός;

Λύ-

Λύσις.

Εἰς εὕρεσιν τούτου, ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ A Ἀριθμὸς τῶν κόκκων τοῦ χρυσίου ὁποῦ θέλει νὰ τιμᾶται, τὸ δακτυλίδιον ὁποῦ μέλλει νὰ κατασκευάσῃ, ἐπὶ τὴν βαρύτητα B, τὴν ὁποίαν ζητεῖ νὰ ἔχῃ τὸ δακτυλίδιον, καὶ ἂς γένῃ ὁ Γ· ὅστις διαιρεθεὶς ἐπὶ τὸν Δ, τὸν παραστατικὸν τῆς τιμῆς τοῦ καθαροῦ χρυσίου, δίδει Πηλίκον τὸν E, δηλωτικὸν τῆς Ποσότητος ὁποῦ πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ τοῦ καθαροῦ χρυσίου· ἀφαιρεθέντος οὖν τοῦ Πηλίκου E, τῆς ζητουμένης βαρύτητος τοῦ δακτυλίου B, ἐναπολείπεται μονὰς $=$ Z· καὶ αὕτη ἐστὶ παραστατικὴ τῆς Ποσότητος τοῦ χαλκοῦ ὁποῦ πρέπει νὰ λάβῃ· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

κόκκοι, δραχμαί.

$A = 16. \; B = 3. \; \Gamma = 48$

$\Delta = 24.$ ὅθεν $\frac{48}{24}$ $E = 2.$

ἄρα. $3 - 2 = Z = 1.$

Πρέπει ἄρα ὁ ῥηθεὶς χρυσοχόος, διὰ νὰ κατασκευάσῃ ἓν τοιοῦτον δακτυλίδιον, νὰ λάβῃ, ἐκ μὲν τοῦ καθαροῦ χρυσίου, 2 δραχμάς· ἐκ δὲ τοῦ χαλκοῦ μίαν ὡς φαίνεται εἰς τὸ Διάγραμμα.

Καὶ περὶ μὲν τῆς Μεθόδου τῆς Μίξεώς τε καὶ Κράσεως εἰσὶν ἱκανὰ τὰ ἐκτεθέντα μοι Προβλήματά τε, καὶ Ὑποδείγματα, καὶ δὲν εἶναι χρεία νὰ ἐκτείνωμεν περαιτέρω τὴν περὶ τῆς Μεθόδου ταύτης Διδασκαλίαν. Ἐπειδὴ καὶ μόνος τις ὁ φιλεπιστήμων Μαθητὴς, ἢ καὶ Ἀναγνώστης τῆς Βίβλου ταύτης, δύναται νὰ συνθέσῃ μυρία τοιαῦτα Προβλήματα, καὶ Ὑποδείγματα, χωρὶς τῆς βοηθείας τοῦ Διδασκάλου· φθάνει μόνον νὰ γνωρίσῃ τοὺς τρόπους, καθ᾿ οὓς συντίθενται, διὰ νὰ λαμβάνῃ τὴν ὕλην καὶ ἔκθεσιν αὐτῶν, καθ᾿ ὁμοίωσιν τῆς ἐκθέσεως καὶ διαφόρου λύσεως καὶ ἑρμηνείας τῶν ἐκτεθέντων Προβλημάτων τε, καὶ Ὑποδειγμάτων. Εἶεν· ἀλλ᾿ ἐπειδὴ καὶ εἰς τὸ Ϛ΄. καὶ Z΄. Πρόβλημα· (§. 286. καὶ 287.) καὶ εἰς τὰ ἐν αὐτοῖς Ὑποδείγματα, ἐμνήσθημεν διαφόρων εἰδῶν τῶν σταθμῶν, ἢ ζυγίων, μὲ τὰ ὁποῖα σταθμίζεται, ἢ καὶ τιμᾶται ὅ, τε χρυσὸς, ἢ ἄργυρος, καὶ τὰ λοιπὰ πολύτιμα μέταλλα, διὰ νὰ σηκώσωμεν ἐκ τοῦ μέσου καὶ αὐτὴν τὴν ἐκ τῶν ἀσυνειθίστων ὀνομάτων προερχομένην δυσκολίαν τε καὶ ἀμφιβολίαν, ἂς εἴπωμεν καὶ περὶ αὐτῶν ὀλίγα τινά.

Πε-

Περὶ Ἑρμηνείας τῶν διαφόρων σταθμῶν, ἢ ζυγίων.

§. 298. Συνειθίζουσιν οἱ χρυσοχόοι, καὶ ἀργυροκόποι, νὰ
ἔχωσι διὰ πλέον μικρότερον μέτρον, ἀπὸ ὅλα τὰ σταθμὰ, ἢ
βάρη, μὲ τὰ ὁποῖα σταθμίζεται, ἤγουν ζυγιάζεται, ὁ χρυ-
σὸς, ἢ ἄργυρος, καὶ τὰ λοιπὰ μέταλλα, τὰ ὁποῖα μιγνύουσιν
εἰς τὴν τούτων χώνευσιν, τὸν κόκκον τοῦ σίτου. Μεγαλήτερον
δὲ ἀπὸ αὐτὸν ἐστὶν ὁ χαρακτήρ· ὅς τις καὶ λεπτὸν, καὶ δηνά-
ριον ὀνομάζεται. Τρίτον δὲ καὶ μεγαλήτερον ἀπὸ αὐτὸν ὑπάρ-
χει ἡ δραχμή· ἤγουν τὸ δράμι. Τέταρτον δὲ καὶ μεγαλήτερον
τούτου, εἶναι ἡ οὐγγία· καὶ πάλιν μεγαλήτερον ταύτης ἐστὶν ἡ
λίτρα· καὶ ταύτης μεγαλητέρα ἡ ὀκᾶ· καὶ ταύτης τὸ καντά-
ρι. κτλ.

Ἡ δὲ λίτρα, ἐστὶ διάφορος, παρὰ διαφόροις Ἔθνεσι·
διότι μερικὰ Ἔθνη, ὑποθέτουσι τὴν λίτραν ἴσην $133\frac{1}{3}$· δραχ-
μῆς· ἄλλα δὲ ὑποθέτουσιν αὐτὴν ἴσην εἶναι δραχμαῖς 96·
καὶ πάλιν, ἄλλα μὲν Ἔθνη διαιροῦσι τὴν λίτραν, εἰς οὐγ-
γίας 8· ἀφοσιοῦντες εἰς τὴν κάθε οὐγγίαν, ἀνὰ 12 δραχμάς·
ἄλλοι δὲ διαιροῦσι τὴν λίτραν εἰς 12 οὐγγίας, ἀποδίδοντες ἑ-
κάστῃ οὐγγίᾳ, ἀνὰ 8 δραχμάς· καὶ ἐν ἄλλοις Ἔθνεσιν ἴσως
ἄλλως. Τίς γὰρ ὁ τὴν οἰκουμένην πᾶσαν περιελθὼν, ἐξέ-
μαθε τὰ τοῖς πᾶσιν Ἔθνεσιν εἰς χρῆσιν ἥκοντα παντοῖα
σταθμά τε καὶ μέτρα, καὶ διάφορα τούτων νομίσματα, οἷς χρῶν-
ται αὐτὰ ἐν σφίσιν αὐτοῖς, ἢ καὶ μετὰ τῶν πλησιοχώρων αὐ-
τοῖς ἐμπορευόμενα; οὐδεὶς πάντως· εἰς ἡμᾶς ὅμως, ἔστωσαν
εἰς χρῆσιν τὰ ῥηθέντα.

Ὅταν λοιπόν σοι εἴπῃ τινὰς, ὅτι ἔχει χρυσὸν, ἢ ἄργυ-
ρον 24 μόνον, τότε νὰ ἐννοῇς, ὅτι ὁ χρυσὸς ἐκεῖνος, ἢ ἄργυ-
ρος, ἐστὶ καθαρὸς καὶ ἀνόθευτος.

Ὅταν δὲ πάλιν ἤθελέ σοι εἴπῃ, ὅτι ἔχει χρυσὸν, ἢ ἄρ-
γυρον 20 καὶ 4, τότε νὰ ἐννοῇς, ὅτι εὑρίσκεται εἰς τὸν χρυ-
σὸν, ἢ ἄργυρον, χαρακτῆρες μὲν χρυσοῦ, ἢ ἀργύρου 20· κόκ-
κοι δὲ σίτου 4· τὸ δὲ λοιπὸν ἐστὶ μέταλλον διαφόρου εἴδους.

Ἡ οὐγγία διαιρεῖται εἰς χαρακτῆρας 24· ὁ δὲ χαρακτὴρ
ὁμοίως διαιρεῖται εἰς κόκκους σίτου 24· ὅταν οὖν λέγῃ τις ὅτι
ἔχει χρυσὸν, ἢ ἄργυρον 8, καὶ 12 καὶ 6, φανερώνει διὰ τού-
των, ὅτι εἰς κάθε λίτραν ἔνεστι, καθαροῦ μὲν χρυσοῦ, ἢ ἀρ-
γύ-

γύρου, οὐγγίαι μὲν 8· χαρακτῆρες δὲ 12· καὶ σίτου κόκκοι 6· τὸ δὲ λοιπὸν μέταλλον ὑπάρχει ἑτέρου εἴδους.

Ἔτι ἡ δραχμὴ, ὑπό τινων μὲν διαιρεῖται εἰς 4 μέρη· καὶ πάλιν καθε τέταρτον μέρος ταύτης, ἐπιδιαιρεῖται εἰς λεπτὰ 4. Ἀνίσως λοιπὸν τὰ τέσσαρα μέρη αὐτῆς ἐπὶ 4· πολλαπλασιασθῶσιν, εὑρήσεις τὴν δραχμὴν ἐκ κόκκων σίτου 64 συγκειμένην. Ἀπὸ ἄλλους δὲ, κατὰ μὲν πρώτην Διαίρεσιν εἰς τρία μέρη τέμνεται, τὰ ὁποῖα καὶ λεπτὰ ὀνομάζουσι, καθε λεπτὸν δὲ, εἰς 24 κόκκους σίτου μερίζεται· ὥστε εἶναι φανερὸν, ὅτι οὐδὲ ἡ δραχμὴ εἶναι ἡ αὐτὴ παρὰ πᾶσιν Ἔθνεσι, διότι κατὰ τὴν δευτέραν ταύτην αὐτῆς Διαίρεσιν, ἐξ 72 κόκκων σίτου ἡ δραχμὴ συντίθεται, 3 γὰρ ἐπὶ 24, ποιεῖ 72. Πρέπει λοιπὸν ἐκεῖνος, ὅς τις βούλεται νὰ κάμνῃ τὴν πρᾶξιν εἰς τὰ τοιαῦτα Προβλήματα χωρὶς λάθος, νὰ ζητῇ, α. νὰ μάθῃ τὴν τάξιν τε καὶ Διαίρεσιν τῶν σταθμῶν, ἢ ζυγίων τοῦ καθε Ἔθνους, ἢ τόπου· καὶ ἔπειτα νὰ μεταχειρίζηται τὴν πρᾶξιν, καὶ λύσιν τῶν τοιούτων Προβλημάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄.

Περὶ Γενέσεως παντοίων Βαθμῶν Ἀριθμητικῶν, καὶ περὶ Ἐξαγωγῆς τῆς Τετραγωνικῆς Ῥίζης.

Ὁρισμός.

§. 299. Γένεσις βαθμοῦ ἐστὶ γινόμενον, τὸ ὁποῖον ἀναφύεται καὶ γεννᾶται, ὅταν μία Ποσότης, ἢ Ἀριθμὸς πολλαπλασιασθῇ ἐφ᾿ ἑαυτὸν, ἅπαξ, ἢ πολλάκις, καὶ εἰ μὲν ἅπαξ, ὁ γενόμενος, τετράγωνος Ἀριθμὸς, ἢ δευτέρα καλεῖται δύναμις, ἢ ἀξία· εἰ δὲ δὶς, τρίτη δύναμις λέγεται· καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως.

Ὁρισμός.

§. 300. Ἡ Ποσότης ἐκείνη, ἥτις γεννᾷ τὴν τοιαύτην δύναμιν, ῥίζα, ἢ πλευρὰ, τῆς δι᾿ αὐτῆς γενομένης δυνάμεως ὀνομάζεται.

Ὑπόδειγμα Α΄.

Δοθήτω δὴ, Ὑποδείγματος χάριν, ὁ 5 Ἀριθμός· ὅς τις ἅπαξ πολλαπλασιασθεὶς ἐφ᾿ ἑαυτὸν, ποιήτω τὸν 25· οἷον 5 . 5 = 25· ὁ μὲν οὖν 25, τετράγωνος Ἀριθμὸς, ἢ β΄. καλεῖται δύναμις· ὁ δὲ 5 ῥίζα, ἢ πλευρὰ τούτου κατονομάζεται, ὡς ἐξ αὐτῆς τὴν γέννησιν ἔχουσα.

Πόρισμα Α΄.

Πᾶς Ἀριθμὸς ἄρα, ἐφ᾿ ἑαυτὸν ἅπαξ πολλαπλασιασθεὶς, ὁ γενόμενος τετράγωνος ὀνομάζεται· ὁ δὲ δι᾿ οὗ, τετραγωνικὴ ῥίζα, ἢ πλευρὰ δικαίως καλεῖται, ὡς ἐξ αὐτοῦ τὴν γένεσιν ἔχων· ἀνίσως δὲ πάλιν ἤθελε πολλαπλασιασθῇ ὁ τετράγωνος οὗτος Ἀριθμὸς ἐπὶ τὴν γεννήσασαν αὐτὸν ῥίζαν, ὁ γινόμενος, κῦβος, ἢ γ΄. προσαγορεύεται δύναμις· οἷον 25 . 5 = 125· ὅς τις τῇ πρὸς τὸν κῦβον σχέσει καὶ ἀναφορᾷ, κυβικὴ ῥίζα λέγεται. Ἐὰν δὲ πάλιν ὁ κῦβος ἐπὶ τὴν ἑαυτοῦ ἐπιπολλαπλασιασθῇ ῥίζαν, ὁ γενόμενος διτετράγωνος, ἢ τετάρτη δύναμις ἤκουσεν· οἷον 125 . 5 = 625· οὗτος δὲ ἐπὶ τὴν αὐτὴν ῥίζαν 5· πολλαπλασιασθεὶς, ὁ γενόμενος δυναμόκυβος, ἢ πέμπτη δύναμις ὀνομάζεται· οἷον 625 . 5 = 3125· πολλαπλασιασθεὶς δὲ καὶ ὁ δυναμόκυβος, ἐπὶ τὴν πρώτως ληφθεῖσαν ῥίζαν 5, ὁ κυβόκυβος ἀναφύεται, ὅς τις καὶ ἕκτη δύναμις καλεῖται· οἷον 3125 . 5 = 15625· καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως.

Σημείωσις.

§. 301. Πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν, ὅτι, οἱ παλαιοὶ Ἕλληνες, ἐκεῖνον τὸν Ἀριθμὸν ὁποῦ ἐγίνετο ἀπὸ ἕνα Ἀριθμὸν, ἀφ᾿ οὗ ἤθελε πολλαπλασιασθῇ ἐφ᾿ ἑαυτὸν, δυναμοδύναμιν τὸν ὠνόμαζον· ἐπειδὴ πᾶς τετράγωνος Ἀριθμὸς, δύναμις παρ᾿ αὐτοῖς ὠνομάζετο, ἐκεῖνον δὲ τὸν Ἀριθμὸν, ὅς τις ἐγίνετο ἀπὸ τὸν τετράγωνον Ἀριθμὸν, ἀφ᾿ οὗ ἤθελε πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὴν ῥίζαν του, ἢ πλευράν του, δυναμόκυβον ἐκάλουν. Ἐκεῖνον δὲ πάλιν, ὁποῦ ἐγίνετο ἀπὸ τὸν κῦβον ἐφ᾿ ἑαυτὸν πολλαπλασιασθέντα, κυβόκυβον ἔλεγον· ἐκεῖνον δὲ τὸν Ἀριθμὸν, ὁ ὁποῖος δὲν εἶχε κανὲν ἀπὸ αὐτὰ τὰ ἰδιώματα, εἶχε δὲ ἐν ἑαυτῷ πλῆθος μονάδων, Ἀριθμὸν ἄλογον κατωνόμαζον· οἱ νεώτεροι ὅμως τοὺς τοιούτους Ἀριθμοὺς, ἀξίας, ἢ δυνάμεις καλοῦσι.

Πόρισμα Β'.

§. 302. Εἶναι φανερὸν λοιπὸν ἀπὸ ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἠξεύρομεν διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν (§. 50.) Ὑπόδειγμα ς'. ὅτι, ἀνίσως τοῦ Ἀριθμοῦ 5, τετράγωνος εἶναι ὁ 25, ἐὰν ὁ αὐτὸς 5, ἤθελεν αὐξηνθῇ μὲ ἓν μηδενικὸν οὕτω 50, τοὺς ἰδίους χαρακτῆρας θέλει ἔχῃ καὶ ὁ τετράγωνος αὐτοῦ, μὲ δύω μηδενικὰ προσηυξημένους· ὥστε ὁποῦ νὰ εἶναι 2500. Καὶ διὰ νὰ εἰπῶ γενικῶς, εἰς κάθε τετράγωνον Ἀριθμὸν, πάντοτε θέλει εἶναι τὰ μηδενικὰ σημεῖα, διπλάσια τῶν ὄντων ἐπὶ τῆς ῥίζης τοῦ τετραγώνου· οἷον ἐπὶ μὲν τοῦ 60 Ἀριθμοῦ, ὡς ῥίζης ἐκλαμβανομένου, εἶναι ἅπαξ τὸ μηδενικόν· ἐπὶ δὲ τοῦ ἐξ αὐτοῦ τετραγώνου, ἔσονται διπλᾶ τὰ μηδενικά· οἷον 60 . 60 = 3600· ἐπὶ δὲ τοῦ κύβου, τριπλάσια· οἷον 60 . 60 . 60 = 216000· καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὁμοίως. Καὶ ἐκ τοῦ ἐναντίου· ἐὰν ἡ ῥίζα ἤθελεν εἶναι 0, 5, ὁ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνος ἔσαι 0, 0025· καὶ καθεξῆς ὁμοίως· δηλ. οἱ χαρακτῆρες τοῦ τετραγώνου, οἵτινες βαίνονται μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν τῶν ἁπλῶν μονάδων, νὰ εἶναι διπλάσιοι ἐκείνων, ὁποῦ εὑρίσκονται εἰς τὴν ῥίζαν τοῦ τοιούτου γένους τῶν δεκαδικῶν Κλασμάτων· οἷον τούτου τοῦ Κλάσματος 0,005, ὁ τούτου τετράγωνος ἔσαι 0,000025. Καὶ διὰ νὰ εἴπω ἐν συντόμῳ, εἰς τὸ τετράγωνον τοῦ Κλασματικοῦ Ἀριθμοῦ, ἀντὶ μὲν Ἀριθμητοῦ, εἶναι ὁ τετράγωνος τοῦ Ἀριθμητοῦ· ἀντὶ δὲ Παρονομαστοῦ, ὁ τετράγωνος τοῦ Παρονομαστοῦ· οἷον τοῦ μὲν $\frac{2}{3}$, τετράγωνος ἐστὶν ὁ $\frac{4}{9}$· τοῦ δὲ $\frac{5}{2}$, ὁ $\frac{25}{4}$· τοῦ δὲ, $\frac{6}{8}$, ὁ $\frac{36}{64}$· καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὡσαύτως.

Παρόμοια ἤθελεν εἴπῃ τινὰς καὶ περὶ τῶν λεγομένων κύβων Ἀριθμῶν, καὶ τῶν ἀνωτέρων δυνάμεων, ἀνίσως καὶ προαιρεῖται νὰ περιπατῇ τὴν αὐτὴν ὁδόν· ἤγουν νὰ ἀκολουθῇ αὐτὸν τὸν ἴδιον τρόπον, καὶ μέθοδον, τὸν ὁποῖον ἐδείξαμεν εἰς τὴν γέννησιν καὶ σύστασιν τῶν τετραγώνων Ἀριθμῶν.

Πό-

Πόρισμα Γ'.

§. 303. Ἡ μονὰς ἄρα, ὁσάκις ἐφ' ἑαυτὴν πολλαπλασιαθῇ, ἀείποτ' ἐστὶ μονὰς, διὰ τὸ ἀμετάθετον ταύτην εἶναι, καὶ ἀεὶ ἑστηκεῖαν.

Πόρισμα Δ'.

Ἐκ τῶν εἰρημένων ἄρα μέχρι τοῦδε, εἶναι φανερὸν, ὅτι ἐστὶν εὔκολον νὰ ὑψώσωμεν εἰς τετράγωνον, ἢ κύβον, ἢ τετραγωνοτετράγωνον, ἢ κυβόκυβον, καὶ εἰς τὰς ἀνωτέρας δυνάμεις, ἢ ἀξίας, κάθε Ἀριθμὸν ὁποῦ ἤθελέ μας δοθῇ· οἷον τοῦ μὲν 3, τετράγωνος ἐστὶν ὁ 9· κύβος δὲ, ὁ 27· τετραγωνοτετράγωνος δὲ ὁ 81· κυβόκυβος δὲ, ὁ 729. κτλ. Δὲν εἶναι ὅμως τόσον εὔκολος ἡ ἐπαναστροφὴ καὶ ἐπάνοδος τῶν ῥηθέντων δυνάμεων, ἐπὶ τὰς ἀρχικὰς ῥίζας, ἢ πλευράς των· ἀλλ' εἶναι πολλὰ δύσκολος, θέλει δειχθῇ ὅμως εἰς τοὺς Μαθητιῶντας, καὶ ἀναγινώσκοντας, ὁδός τις καθολικωτέρα, τῆς τοιαύτης ἐπανόδου καὶ ἐπαναστροφῆς, ἐφ' οἱασοῦν δυνάμεως, ἐπὶ τὴν ἀρχικὴν ῥίζαν, ἢ πλευρὰν αὐτῆς.

Τώρα ὅμως, θέλομεν διδάξῃ καὶ παραστήσῃ τὸν τρόπον καὶ τὴν μέθοδον, κατὰ τὴν ὁποίαν θέλει δυνηθῇ ὁ φιλεπιστήμων, νὰ εὑρίσκῃ εὐκόλως τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, ἥτις γίνεται ἀπὸ κάθε Ἀριθμὸν ὁποῦ ἤθελε τύχῃ νὰ ἔχῃ τὴν ἀρχὴν τῆς γενέσεως καὶ συστάσεώς του ὁ ἐξ αὐτῆς τετράγωνος· ἐπειδὴ καὶ αὐτὸ τὸ Πρόβλημα συνεχῶς ἀκολουθεῖ νὰ τὸ ἀπαντήσωμεν εἰς τὰς Γεωμετρικὰς καὶ Ἐπιστημονικὰς Βίβλους· καὶ δὲν θέλει εἶναι τόσον πολλὰ δύσκολος ἡ τούτου ἐπίλυσις, ἐὰν φυλάξωμεν, καὶ ἀκολουθήσωμεν μετ' ἐπιμελείας καὶ προσοχῆς τοὺς περὶ τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἐκτεθησομένους μοι ἐφεξῆς Κανόνας.

Κανὼν Α'.

§. 304. Πρῶτον· ὁ ἐκ τοῦ μείζονος τῶν μοναδικῶν χαρακτήρων τετράγωνος Ἀριθμὸς, σύγκειται ἀπό τε τὸν 80, καὶ 1· οἷον 9 . 9 = 81 = 80 + 1.

Κα-

Κανὼν Β΄.

§. 305. Κάθε Σύνθετος Ἀριθμὸς ὁποῦ μας ἤθελε δοθῇ, εἶναι συγχωρημένον νὰ τὸν ἀναλύωμεν εἰς δύω μέρη, καὶ νὰ τὸν νομίζωμεν, ὅτι εἶναι ἴσος μὲ τοὺς ἐξ αὐτοῦ διαιρεθέντας δύω· οἷον τὸν 34, ὅτι εἶναι ἴσος μὲ τὸν 30 + 4· ὁμοίως καὶ τὸν 235, ὅτι εἶναι ἴσος μὲ τὸν 230 + 5· καὶ τὸν 355, ὅτι εἶναι ἴσος μὲ τὸν 300 + 55. κτλ.

Σχόλιον Α΄.

Ὁ δὲ λόγος τῆς τοιαύτης τομῆς καὶ Διαιρέσεως τῶν Ἀριθμῶν εἰς δύω μέρη (ὅ,τι λογῆς ἤθελε τύχῃ νὰ γένῃ ἡ τοιαύτη Διαίρεσις) εἶναι, ὅτι ὅταν μία εὐθεῖα γραμμὴ, ἤθελε τμηθῇ εἰς δύω μέρη, ὡς ἔτυχε, τὸ τετράγωνον ὁποῦ γίνεται ἀπ᾽ ὅλην τὴν ἄτμητον εὐθεῖαν, ἐστὶν ἴσον μὲ τὰ τετράγωνα ὁποῦ γίνονται ἀπὸ τὰ ἀποτμηθέντα αὐτῆς δύω μέρη, ὁμοῦ μὲ τὸ διπλοῦν ὀρθογώνιον ὁποῦ περιέχεται ὑπὸ τῶν αὐτῶν μερῶν τῆς τμηθείσης εὐθείας· κατὰ τὴν δ΄. Πρότασιν τοῦ Β΄. Βιβλίου τῆς Γεωμετρείας· τέμνεται δὲ εἰς δύω, ὡς ἔτυχε, καὶ πᾶς Σύνθετος Ἀριθμὸς, ὡς κἀκεῖ ἡ δοθεῖσα γραμμὴ, κατὰ τὸν Β΄. Κανόνα. (§. 295.) Ὅθεν ἐφέπεται τὸ ἑφεξῆς Θεώρημα.

Θεώρημα Α΄.

§. 306. Ἐὰν Ἀριθμός τις, τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ὑπὸ τοῦ δοθέντος ἀτμήτου Ἀριθμοῦ τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπὸ τῶν ἐξ ἑκατέρων τῶν μερῶν αὐτοῦ τετραγώνοις, σὺν τῷ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Σχόλιον Β΄.

Διὰ νὰ γνωρίσῃ ὁ Μαθητὴς πλέον καθαρὰ τὸ λεγόμενον, ἂς μᾶς δοθῇ καθ᾽ Ὑπόθεσιν ὁ 34 Ἀριθμὸς, ἂς διαιρεθῇ λοιπὸν ὡς ἔτυχεν, εἰς τὰ 30, φέρ᾽ εἰπεῖν, καὶ 4· πολλαπλασιασθήτω δὴ α. ὅλος ὁ 34, ἐφ᾽ ἑαυτὸν, καὶ ποιήτω τὸν 1156 τετράγωνον Ἀριθμόν. (§. 289.) Πολλαπλασιασθήτωσαν ἓν ἐφ᾽ ἑαυτὰ καὶ ἕκαστον τῶν μερῶν αὐτοῦ ξεχωριστὰ· καὶ ἐκ

ἐκ μὲν τοῦ 30, γενέσθω ὁ 900 τετράγωνος Ἀριθμὸς· οἷον 30 . 30 = 900· ἐκ δὲ τοῦ 4, ὁ 16 τετράγωνος Ἀριθμός· οἷον 4 . 4 = 16. πολλαπλασιασθήτω καὶ ὁ 4 ἐπὶ τὸν 30· δηλ. μὲ τὸ ὀρθογώνιον ὁποῦ περιέχεται εἰς αὐτὰ τὰ διαιρεθέντα δύω μέρη, καὶ γενέσθω ὁ 120· καὶ ἐπειδὴ λέγει σὺν τοῖς δυσὶ περιεχομένοις ὀρθογωνίοις, πολλαπλασιασθήτω πάλιν ὁ 30, ἐπὶ τὸν 4, καὶ ἐξάγεται ὁ αὐτὸς Ἀριθμὸς 120· ἂς συναφθῶσιν αὐτὰ τὰ τέσσαρα γινόμενα, καὶ γενέσθω ὁ 1156 Ἀριθμὸς, ἀλλ᾽ αὐτὸς ἐστὶν ἴσος μὲ τὸν ἐκ τοῦ 34 τετράγωνον. ἄρα κτλ.

34 . 34 =	1156.
30 . 30 =	900.
4 . 4 =	16.
30 . 4 =	120.
+ 30 . 4 =	120.
	1156.

Δοθήτω β΄. ὁ 335 Ἀριθμὸς, ἂς διαιρεθῇ ὡς ἔτυχεν· ἢ εἰς τὰ 330 + 5, ἢ εἰς τὰ 300 + 35· λέγω δὴ, ὅτι τὸ ὑπὸ τοῦ ὅλου Ἀριθμοῦ 335 γενόμενον τετράγωνον, ἴσον ἔσται τοῖς ὑπὸ τῶν δύω μερῶν αὐτοῦ 330 καὶ 5 τετραγώνοις, σὺν τῷ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καθὼς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα.

335 . 335 =	112225.
5 . 5 =	25.
330 . 330 =	108900.
330 . 5 =	1650.
5 . 330 =	1650.
	112225.

Ἂς διαιρεθῇ πάλιν ὁ αὐτὸς Ἀριθμὸς 335, εἰς 300, καὶ 35· καὶ ἂς γένῃ πάλιν ἡ αὐτὴ πρᾶξις· καὶ ἐκ μὲν τοῦ ὅλου Ἀριθμοῦ 335 τετράγωνος ἔστω ὁ Α· ἐκ δὲ τοῦ 300, γενέσθω ὁ Β τετράγωνος, τὸ δὲ ὀρθογώνιον τοῦ 300 ἐπὶ τὸν 35, ἔστω ὁ Γ· καὶ τοῦ 35 ἐπὶ 300 ὁ Δ· οἵτινες συναφθέντες, ποιήτωσαν τὸν Ζ· ἀλλ᾽ ὁ Ζ, ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ὅλου γενομένῳ τετραγώνῳ Α· ἄρα ἐὰν Ἀριθμὸς τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ὑπὸ τοῦ δοθέντος ἀτμήτου τετράγωνον, ἴσον ἔσται, κτλ.

335 . 335 =	112225. Α.
300 . 300 =	90000. Β.
35 . 35 =	1225.
300 . 35 =	10500. Γ.
35 . 300 =	10500. Δ.
	112225. Ζ.

Πόρισμα Ε΄.

§. 307. Πᾶς ἄρα Ἀριθμὸς τετράγωνος συνίσταται ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ α. αὐτοῦ μέρους· ἐκ τε τοῦ τετραγώνου τοῦ β΄. ὁμοῦ μὲ μὲ τὰ δύω ὀρθογώνια, ὁποῦ περιέχονται εἰς τὰ δύω αὐτὰ μέρη· ὡς γέγονε φανερὸν, ἐκ τῶν ἐκτεθέντων τριῶν Ὑποδειγμάτων.

Ὁρισμός.

§. 308. Νὰ εὐγάλωμεν τὴν ῥίζαν ἀπὸ τὴν δύναμιν ἐκείνην, ὁποῦ ἤθελέ μας δοθῇ, εἶναι νὰ εὕρωμεν ἕνα Ἀριθμὸν, ὅς τις πολλαπλασιασθεὶς ἐφ' ἑαυτὸν, θέλει δώσῃ τὴν δοθεῖσαν δύναμιν.

Ὁρισμός.

§. 309. Πᾶς δὲ τετράγωνος Ἀριθμὸς, ἤτοι ἐξ Ἁπλῶν μόνον σύγκειται μονάδων, καὶ καλεῖται Ἁπλοῦς, ἢ ἐκ τε μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων, καὶ τῶν ἀνωτέρων ὀνομασιῶν, καὶ καλεῖται Σύνθετος. Καὶ εἰ μὲν ἐξ ἑνὸς μόνου χαρακτῆρος συντίθεται, ἡ γεννῶσα αὐτὸν ῥίζα, μονώνυμος ὀνομάζεται. Εἰ δὲ ἐκ δύω, διώνυμος λέγεται. Εἰ δὲ ἐκ πλειόνων, ἢ δύω, πολυώνυμος προσαγορεύεται.

Πρόβλημα Α'.

§. 310. Ἐκ τῆς δοθείσης μονωνύμου δυνάμεως, ῥίζαν ὁποιανδηποτοῦν ἐξαγαγεῖν.

Λύσις.

Εἰ μὲν ὁ Ἀριθμὸς ὁποῦ ἤθελέ μας δοθῇ, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν, ἢ κυβικὴν, ἢ ἄλλης τινὸς ἀνωτέρας δυνάμεως, τὴν ῥίζαν, εἶναι εὔκολος ἡ ἐξαγωγὴ τῆς ῥίζης, τοῦ τοιούτου Ἀριθμοῦ, ἢ δυνάμεως, εἰς ἐκείνους, οἵ τινες ἔχουσι πρὸ ὀφθαλμῶν τὸν ἐφεξῆς τῆς τῶν ῥιζῶν ἐξαγωγῆς Πίνακα.

§. 311. Πίναξ τῶν ἀπὸ μονάδος ἀρχομένων Ἀριθμῶν, μέχρι δεκάδος.

Ῥίζαι τετραγων.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ἀριθ. τετράγ.	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Ἀριθ. κυβικοί.	1	8	27	64	125	216	343	512	729
Ἀριθ. διτετράγ.	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
Δυναμόκ. Ἀριθ.	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049
Ἀριθ. κυβόκυβοι.	1	64	729	4096	15625	46656	117649	262144	531441

Πολλαπλασιάζονται δὲ οἱ ἐκτεθέντες Ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ἄνωθεν ἐπὶ τὰ κάτω, καὶ συνιστῶσι τὰς διαφόρους δυνάμεις τῶν ὀνομασθέντων διαφόρων βαθμῶν· οἷον 2 . 2 = 4 . 2 = 8 . 2 = 16 . 2 = 32 . 2 = 64. Καὶ 3 . 3 = 9 . 3 = 27 . 3 = 81 . 3 = 243 . 3 = 729. Καὶ 4 . 4 = 16 . 4 = 64 . 4 = 256 . 4 = 1024 . 4 = 4096. Καὶ 5 . 5 = 25 . 5 = 125 . 5 = 625 . 5 = 3125 . 5 = 15625. Καὶ 6 . 6 = 36 . 6 = 216 . 6 = 1296 . 6 = 7776 . 6 = 46656. Καὶ 7 . 7 = 49 . 7 = 343 . 7 = 2401 . 7 = 16807 . 7 = 117649. καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὁμοίως.

Εἰ δὲ ὁ δοθεὶς τετράγωνος Ἀριθμὸς, ἤθελεν εἶναι ἀπὸ τοὺς διωνύμους, ἢ τριωνύμους· δηλ. ἀπὸ ἐκείνους, οἵ τινες συνίστανται ἀπὸ περισσοτέρους Ἀριθμοὺς τῶν δύω χαρακτήρων, τοῦ ὁποίου πρέπει νὰ εὐγάλωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, ἂς γίνεται ἡ πρᾶξις, κατὰ τοὺς ἐφεξῆς Κανόνας.

Κανόνες, ἐπὶ τῆς τῶν ῥιζῶν ἐξαγωγῆς τῶν πολυμερῶν Τετραγωνικῶν Ἀριθμῶν.

Κανὼν Α'.

§. 312. Πρῶτον μὲν οὖν, κάμνωντας ἀρχὴν ἐκ τῆς δεξιωτάτης στήλης τῶν μονάδων τοῦ δοθέντος Ἀριθμοῦ, διαίρεσον αὐτὸν εἰς Κλάσεις, ἢ κόμματα, ἀνὰ δύω χαρακτῆρας ἕκαστον αὐτῶν περιέχοντα, καὶ χωριζόμενα ἀπ' ἀλλήλων, διὰ μιᾶς καθέτου γραμμῆς, τοιουτοτρόπως, ὥστε ὁποῦ τὸ καθὲ κόμμα νὰ περιέχῃ ἕνα ῥιζικὸν χαρακτῆρα, καὶ νὰ εἶναι οἱ ἐν τῇ ἐξαχθείσῃ ῥίζῃ χαρακτῆρες, ἴσοι τὸν Ἀριθμὸν, μὲ τὰ μέλη ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ὑποδιεστάλθησαν, ἢ ἐχωρίσθησαν τὸ ἓν ἀπὸ τὸ ἄλλο, διὰ τῆς καθέτου, ἀπὸ τὰ ὁποῖα μέλη, ἢ κόμματα, αὐτίσως ἤθελε τύχῃ νὰ εἶναι περιττάριθμα, νὰ συνίσταται τὸ ἀριστερώτατον μέλος, ἢ κόμμα, ἀπὸ ἕνα μόνον χαρακτῆρα.

Κανὼν Β'.

§. 313. Δεύτερον· ἀφ' οὗ λοιπὸν διαχωρίσωμεν τὸν προτεθέντα Ἀριθμὸν εἰς Κλάσεις, ἢ κόμματα, ὡς εἴρηται, (§. 302.) ἂς γίνεται ἡ ἀρχὴ τῆς πράξεως, ἀπὸ τὸ ἀριστερώτατον κόμμα. Καὶ ἐπειδὴ εἰς αὐτὸ εὑρίσκεται τὸ τετράγωνον τοῦ ά. χαρακτῆρος τῆς ζητουμένης ῥίζης, ἂς ζητηθῇ εἰς τὸν Πίνακα τῶν ῥιζῶν ὁ τετράγωνος Ἀριθμός· ὅστις, ἢ εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἀριστερώτατον κόμμα, ἢ μέλος, ἢ εἶναι ὀλίγον τι μικρότερος· καὶ ἡ εὑρεθεῖσα αὐτοῦ ῥίζα, ἂς βαλθῇ ἀντικρὺ πρὸς δεξιὰν τοῦ δοθέντος Ἀριθμοῦ, εἰς τὸν τόπον ἐκεῖνον, ὅστις εἶναι χωρισμένος ἀπὸ αὐτὸν μὲ τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος (=) τὸ δὲ τετράγωνον ὁποῦ γίνεται ἀπὸ αὐτὸν τὸν εὑρεθέντα ά. χαρακτῆρα τῆς ῥίζης, ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ἀριστερωτάτου μέλους, ἢ κόμματος, καὶ ἂς σημειωθῇ τὸ ὑπόλοιπον, ἐὰν ἤθελεν ἀπομείνῃ τι, ὑποκάτω τῆς ὁριζοντείου γραμμῆς.

Κανὼν Γ'.

§. 314. Τρίτον· κοντὰ εἰς ἐκεῖνο τὸ μέρος ὁποῦ ἀπέμεινεν, (ἐὰν ἤθελεν ἀπομείνῃ τι, ἀπὸ τὴν Ἀφαίρεσιν) κατέβασον

τὸ

τὸ πρὸς δεξιὰν αὐτοῦ ἀκόλουθον μέλος, ἢ κόμμα, μέσα εἰς τὸ ὁποῖον ὑπόλοιπον, ὁμοῦ μὲ τὸ πρὸς δεξιὰν αὐτοῦ β'. κόμμα, πρέπει νὰ ἐμπεριέχηται τὸ διπλοῦν γινόμενον ἐκ τοῦ ά. τῆς ῥίζης χαρακτῆρος ἐπὶ τὸν β'. καὶ τὸ τοῦ β'. τετράγωνον· καὶ ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον τοῦ β'. χαρακτῆρος τῆς ῥίζης περιορίζεται κατὰ τὸν ὑστερινὸν πρὸς δεξιὰν χαρακτῆρα τοῦ β'. κόμματος, ἂς ἀποχωρισθῇ αὐτὸς ὁ ῥηθεὶς χαρακτὴρ ἀπὸ τὴν ὑποδιαστολὴν, ἢ κάθετον, μὲ αὐτὴν τὴν στιγμὴν (.) μὲ τὸ νὰ φυλάττηται ἀντὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ β'. χαρακτῆρος τῆς ζητουμένης ῥίζης· ἐκεῖνο δὲ ὁποῦ μένει πρὸς ἀριστερὰν τῆς στιγμῆς, θέλει εἶναι τὸ γινόμενον ἐκ τοῦ διπλοῦ Ἀριθμοῦ τοῦ ά. τῆς ῥίζης εὑρεθέντος χαρακτῆρος, ἐπὶ τὸν β'. χαρακτῆρα τῆς ῥίζης· τὸ ὁποῖον, ἀφ' οὗ διαιρεθῇ διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος ά. χαρακτῆρος τῆς ῥίζης, θέλει δώσῃ Πηλίκον τὸν ζητούμενον β'. χαρακτῆρα τῆς ῥίζης· τὸ ὁποῖον, ἂς βαλθῇ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ά. τῆς ῥίζης χαρακτῆρος· ἔπειτα, ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ μὲν Διαιρέτης ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν β'. Πηλίκον, τὸ δὲ Πηλίκον ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του, καὶ θέλει εὔγῃ τὸ διπλοῦν γινόμενον ἐκ τοῦ ά. τῆς ῥίζης χαρακτῆρος ἐπὶ τὸν β'. καὶ τὸ τοῦ β'. τετράγωνον· τὰ ὁποῖα, ἀφ' οὗ ἀφαιρεθῶσιν, ἂς σημειωθῇ τὸ ὑπόλοιπον, ὑπὸ τὴν γραμμὴν, ἐὰν ἐναπομείνῃ τι· εἰ δὲ μὴ, ἂς γραφῶσιν ὑπ' αὐτὴν μηδενικά.

Κανὼν Δ'.

§. 315. Τέταρτον· καταβίβασε καὶ τὸ πρὸς δεξιὰν τοῦ ὑπολοίπου γ'. μέλος, ἢ κόμμα· καὶ ἀφ' οὗ λάβῃς τὸ διπλοῦν τῶν εὑρεθέντων τῆς ῥίζης χαρακτήρων, τὸ ἐξ αὐτῶν συμποσούμενον, θέλει εἶναι ὁ Διαιρέτης· ἤγουν πολλαπλασίασον μὲ τὸν 2 τοὺς εὑρεθέντας τῆς ῥίζης χαρακτῆρας, καὶ ἐκεῖνον τὸν Ἀριθμὸν ὁποῦ γένῃ, λάβε τον ἀντὶ Διαιρέτου· γενομένης δὲ τῆς πράξεως κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὁποῦ εἴπομεν εἰς τὸν Γ'. Κανόνα, θέλει εὕρῃς καὶ τὸν ἀκόλουθον ζητούμενον τῆς ῥίζης χαρακτῆρα· ὅστις ἀφ' οὗ εὑρεθῇ, θέλουσιν εὑρεθῇ καὶ οἱ ἐπίλοιποι, κάμνωντας τὴν πρᾶξιν κατὰ τοὺς ἰδίους Κανόνας, καὶ λαμβάνωντας πάντοτε τὸ διπλοῦν τῆς εὑρεθείσης ῥίζης, ἀντὶ Διαιρέτου, καὶ πολλαπλασιάζωντας ἐπ' αὐτὸν τὸ εὑρεθὲν Πηλίκον, καὶ τὸ Πηλίκον ἐφ' ἑαυτό· καὶ εἰ μὲν οὐκ ἐναπολειφθείη τι λείψανον ἐκ τῆς ἐσχάτης Ἀφαιρέσεως, δῆλον ἔσται, ὅτι εὑρέθη θη ἡ ἀληθὴς ῥίζα τοῦ δοθέντος Ἀριθμοῦ. Εἰ δὲ ἐναπομείνῃ τὶ λεῖψανον, ὁ δοθεὶς Ἀριθμός, οὐκ ἔστι τετράγωνος, ἀλλ᾽ Ἀριθμὸς ἄλογος. (§. 291.) Καὶ ἡ εὑρεθεῖσα ῥίζα μικροτέρα ἐστὶ τῆς ζητουμένης ῥίζης τοῦ δοθέντος Ἀριθμοῦ· ἐπειδὴ ἀνίσως ἤθελε τετραγωνισθῇ, καὶ ἀφαιρεθῇ· τὸ τετράγωνον αὐτῆς ἐκ τοῦ δοθέντος Ἀριθμοῦ, ἀεὶ ἐναπολειφθήσεται τὶ λεῖψανον, ἐκ τοῦ μὴ ἐντελῶς τετραγώνου Ἀριθμοῦ.

Πρόβλημα Β'. Ὑπόδειγμα Α'.

§. 316. Ὅταν μας δοθῇ ἕνας τετράγωνος Ἀριθμός, ὅς τις εἶναι συνθεμένος ἀπὸ περισσοτέρους, ἢ δύω χαρακτῆρας, νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν αὐτοῦ ῥίζαν, ἐκ τῆς ὁποίας συνετέθη.

Λύσις, καὶ ἑρμηνεία.

Ἄς μας δοθῇ λοιπὸν ὁ αὐτικρὺ Ἀριθμός, οὗ δεῖ τὴν τετράγωνον αὐτοῦ ῥίζαν εὑρεῖν.

	56	76	41	69	64	=75342=Ρ.
	49					49.......
(14)	07	7.6				725......
	7	0				4509....
		2 5				60256..
(150)	0	51	4.1			301364
		45	0			5676416964
			9			
(1506)		06	32	6.9		
		6	02	4		
				1 6		
(15068)		0	30	13	6.4	
			30	13	6	
					4	
		0	00	00	00	

Α'. διαίρεσέ τον εἰς κόμματα, κατὰ τὸν Α'. Κανόνα (§. 302.) Β'. λάβε τὸν τετράγωνον τοῦ πρὸς ἀριστερὰν ά. κόμματος, κατὰ τὸν Β'. Κανόνα (§. 303.) καὶ εὑρίσκεται ὁ 7· βάλε αὐτὸν εἰς τὸν διωρισμένον του τόπον. Γ'. Ἄς πολλαπλασιασθῇ ἐφ᾽ ἑαυτόν, καὶ ἂς γένῃ ὁ 49· γράψε τον ὑπαλλήλως τοῦ

τοῦ ά. κόμματος, καὶ ἀφαίρεσον, καὶ ἐναπομένει ὁ 7· κατέβασε τὸ β'. πρὸς δεξιὰν αὐτοῦ κόμμα, καὶ βάλε εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ 6, μίαν στιγμήν· κατὰ τὸν Γ'. Κανόνα (§. 304.) λάβε τὸ διπλοῦν τῆς εὑρεθείσης ῥίζης 7, δηλ. τὸν 14, καὶ βάλετον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ 77.6, ὀλίγον κατώτερον· διαίρεσον τὸν 77 διὰ τοῦ 14, καὶ δίδει β'. Πηλίκον τὸν 5· πολλαπλασίασον τὸν εὑρεθέντα 5, ἐπὶ τὸν 14, καὶ γίνεται ὁ 70· πολλαπλασιασθήτω καὶ ὁ 5 ἐφ᾽ ἑαυτὸν καὶ γίνεται ὁ 25· γράψον καὶ αὐτὸν ὑπὸ τὸν 76, ὀλίγον κατώτερον τοῦ 70· ἀφαίρεσον, καὶ μένει ὁ 51· κατέβασε καὶ τὸ γ'. κόμμα, καὶ γίνεται ὁ 5141· σύξον τὴν μονάδα καὶ διπλασίασον τὸ εὑρεθὲν Πηλίκον, δηλ. τὸν 75, καὶ γενέσθω ὁ 150 Διαιρέτης. Ἄς βαλθῇ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Διαιρετέου 514· τὸν ὁποῖον διαιρέσας, δίδει Πηλίκον τὸν 3, τρίτον χαρακτῆρα τῆς ῥίζης· πολλαπλασιασθήτω ὁ 3 ἐπὶ τὸν Διαιρέτην 150, ὁ δὲ γινόμενος 450, γραφήτω ὑπ᾽ αὐτόν· πολλαπλασιασθεὶς δὲ καὶ ὁ 3 ἐφ᾽ ἑαυτόν, ποιήτω τὸν 9· γραφήτω δὴ ὑπ᾽ ἀλλήλως τῇ μονάδι· Ἀφαιρέσεως δὲ γενομένης, ἐναπολείπεται ὁ 632· κατέβασον καὶ τὸ ἐφεξῆς τέταρτον κόμμα, καὶ γενέσθω ὁ 63269 Ἀριθμός· σύξον τὸν 9, καὶ διαίρεσον τὸν 6326, ἐπὶ τὸ διπλοῦν τῆς εὑρεθείσης ῥίζης 753, δηλ. διὰ τοῦ (1506) καὶ δίδει τέταρτον Πηλίκον τὸν 4· πολλαπλασίασον τὸν Διαιρέτην 1506, ἐπ᾽ αὐτό, τὸ δὲ γινόμενον 6024, θὲς ὑπὸ τὸν Διαιρετέον· πολλαπλασιασθήτω καὶ ὁ 4 ἐφ᾽ ἑαυτόν, καὶ ποιήτω τὸν 16· θὲς ὂν καὶ αὐτὸν ὑπαλλήλως τῷ 6 ὀλίγον κατώτερον· ἀφαίρεσον, καὶ ἐναπολείπεται ὁ 3013· κατέβασον καὶ τὸ τελευταῖον κόμμα 64· σύξον τὸν 4, καὶ μένει ὁ 30136· διαίρεσέ τον μὲ τὸ διπλοῦν τῆς εὑρεθείσης ῥίζης 7534, δηλ. τὸν 15068, καὶ δίδει τελευταῖον Πηλίκον τὸν 2· πολλαπλασίασον μὲ τὸ Πηλίκον 2 τὸν Διαιρέτην, καὶ τὸ Πηλίκον ἐφ᾽ ἑαυτό· καὶ θὲς ὑπὸ τὸν Διαιρετέον τὸ γινόμενον· ἀφαιρέσεως δὲ γενομένης, ἐπειδὴ ἀπολείπεται οὐδέν, θὲς ὑπὸ τὴν γραμμὴν μηδενικά· εὑρέθη ἄρα ἡ ζητουμένη ῥίζα τοῦ δοθέντος τετραγώνου Ἀριθμοῦ 5676416964 = 75342· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Δεῖξις.

Ὅτι δὲ ἡ πρᾶξις ὀρθῶς ἐγένετο, καὶ ὁ 75342, ἐστὶν ἡ ζητουμένη ῥίζα τοῦ δοθέντος τετραγώνου Ἀριθμοῦ 5676416964, 416964, δείκνυται· τετραγωνισθεῖσα γὰρ ἡ εὑρεθεῖσα ῥίζα, παράγει τὸν δοθέντα τετράγωνον Ἀριθμόν· ὡς ἐν τῷ Διαγράμματι καθορᾶται· ὅρα (§. 50.) ἄρα ὀρθῶς ἡ πρᾶξις ἐγένετο· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

75342
75342
150684
301368
226026
376710
527394
5676416964

Διὰ γύμνασιν δὲ τῶν πρωτοπείρων, ἂς προστεθῶσι τὰ ἐφεξῆς Ὑποδείγματα· τῶν ὁποίων ἡ πρᾶξις, ἂς γίνεται κατὰ τοὺς ἐκτεθέντας περὶ τῆς τῶν ῥιζῶν ἐξαγωγῆς Κανόνας, καθὼς ἔγινε καὶ εἰς τὸ α'. Ὑπόδειγμα.

Ὑπόδειγμα Β'. Σχῆμα Β'.

	9	12	64	41	=3021
	9				
(6.)	0	1.2			
	0	00			
(60)		12	6.4		
		12	0		
			4		
(604:)		00	60	4.1	
			60	41	
			00	00	

Ὑπόδειγμα Γ'. Σχῆμα Γ'.

	21	38	13	76	=4624
	16				
	05	3.8			
(8:)	4	8			
		36			
	0	22	1.3		
		18	4		
			4		
		03	69	7.6	
		3	69	6	
				16	
		0	00	00	

Ὑπόδειγ. Δ'. Σχῆμα Δ'.

	11	97	16	=346.
	9			
	02	9.7		
(6:)	2	4		
		16		
	0	41	1.6	
		40	8	
		1	36	
		00	00	

Ὑπόδειγμα Ε'. Σχῆμα Ε'.

	5	52	25	=235.
	4			
	1	5.2		
(4:)	1	2		
		9		
(46:)	0	23	2.5	
		23	0	
			25	
		00	00	

Ὑπόδειγμα ϛ'. Σχῆμα ϛ'.

	74	64	96	=864.
	64			
	10	6.4		
(16:)	9	6		
		36		
	00	68	9.6	
(172:)		68	8	
			16	
		00	00	

Ὑπόδειγμα Ζ'. Σχῆμα Ζ'.

	10	73	21	76	0'0	=32760.
	9					
(6;)	1	7.3				
	1	24				
(64:)	0	49	2.1			
		44	8			
			49			
		03	92	7.6		
		3	92	4		
				36		
		0	00	00	0	

Ὑποδειγ. Η'. Σχῆμ. Η'.

	30	09	97	07	14	24	=548632.
	25						
	05	0.9					
(10:)	4	16					
	0	93	9.7				
(108:)		86	4				
			64				
(1096:)		06	93	0.7			
		6	57	6			
				36			
(10972:)		0	35	11	1.4		
			32	91	69		
			02	19	45	2.4	
(109726:)			2	19	45	24	
			0	00	00	00	

Πρόβλημα Γ'.

§. 317. Ὅταν μας δοθῇ εἷς Κλασματικὸς τετράγωνος Ἀριθμὸς, νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν αὐτοῦ ῥίζαν· πρέπει ὅμως καὶ ὁ Ἀριθμητὴς, καὶ ὁ Παρονομαστὴς νὰ εἶναι τετράγωνος.

Λύσις. Ὑπόδειγμα Α'. Σχῆμα Α'.

Δοθήτω δὴ, καθ' Ὑπόθεσιν, ὁ Κλασματικὸς τετράγωνος Ἀριθμὸς Α· τοῦ ὁποίου ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν αὐτοῦ ῥίζαν, ἂς εὑρεθῇ α. ἡ ῥίζα τοῦ Ἀριθμητοῦ 144, κατὰ τὸ β'. Πρόβλημα· (§. 306.) διαίρεσον τὸν 144, εἰς κόμματα, κατὰ τὸν α. Κανόνα· (§. 302.) καὶ ἂς γένῃ ἡ πρᾶξις, κατὰ τοὺς ἀποδοθέντας Κανόνας· καὶ εὑρίσκεται ὁ 12· ὡς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα.

$$A = \frac{144}{576} = B = \frac{12}{24}$$

1	44	= 12
1		12 . 12 = 144 = Γ
0	4.4	
(2:)	44	
	00	
5	76	= 24
4		24 . 24 = 576 = Δ.
1	7.6	
(4:) 1	6	
	16	
0	00	

Ἂς εὑρεθῇ β'. καὶ ἡ τοῦ Παρονομαστοῦ ῥίζα· τῆς αὐτῆς δὲ γενομένης πράξεως, εὑρίσκεται ὁ 24 τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ Παρονομαστοῦ· βάλε τόν τε Ἀριθμητὴν 12, καὶ Παρονομαστὴν 24, ἀντικρὺ τοῦ δοθέντος Α $\frac{144}{576}$ ὅπου τὸ Β· καὶ τὸ Β $\frac{12}{24}$. Κλάσμα εἶναι βέβαια ἡ ζητουμένη ῥίζα τοῦ δοθέντος Κλασματικοῦ τετραγώνου Α· ἥτις ἐζητεῖτο.

Δεῖξις.

Δείκνυται· πολλαπλασιασθεὶς γὰρ ὁ Β Ἀριθμητὴς ἐφ' ἑαυτὸν, ποιεῖ τὸν Γ Ἀριθμητήν· πολλαπλασιασθεὶς δὲ καὶ ὁ Παρονομαστὴς τοῦ αὐτοῦ Κλάσματος Β, ποιεῖ τὸν Δ Παρονομαστήν· ἀλλ' ὁ Γ ἐγένετο ἴσος τῷ Ἀριθμητῇ τοῦ Α Κλασματικοῦ τετραγώνου, ὁ δὲ Δ ἴσος τῷ ἐν τῷ Α Παρο-

νο-

νομαστῇ· ἄρα τὸ Β Κλάσμα ἐστὶν ἡ ζητουμένη Κλασματικὴ ῥίζα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὑπόδειγμα Β'. Σχῆμα Β'.

Δοθήτω δεύτερον ὁ Κλασματικὸς τετράγωνος Ἀριθμὸς Ε, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, ἂς γένῃ καὶ εἰς αὐτὸ τὸ Κλάσμα ἡ πρᾶξις, ὡς ἄνωθεν· καὶ ἔσται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ δοθέντος Κλάσματος Ε, τὸ Ζ Κλάσμα· καθὼς φαίνεται εἰς τὸ ἀντικρὺ Διάγραμμα· ἡ δεῖξις ἡ αὐτὴ τῇ ἀνωτέρῳ, πολλαπλασιασθεὶς γὰρ ὁ Ἀριθμητὴς Ζ, ἐφ' ἑαυτὸν παράγει τὸν Ε Ἀριθμητήν· οἷον 123. 123 = 15129· ὁμοίως καὶ ὁ Παρονομαστὴς τοῦ αὐτοῦ Ζ πολλαπλασιασθεὶς ἐφ' ἑαυτὸν, παράγει τὸν Ε Παρονομαστήν· οἷον 210 . 210 = 44100· ἄρα εὕρηται ἡ ζητουμένη ῥίζα.

$$E = \frac{15129}{44100} = Z = \frac{123}{210}.$$

1	51	29	= 123.
1			
0	5.1		
2:)	44		
24:)	07	2.9	
		29	
	0	00	
4	41	00	= 210.
4			
4:) 0	4.1		
	41	00	
	00	00	

Πρόβλημα Δ'.

§. 318. Ὅταν μας δοθῇ κάνενας τετράγωνος Ἀριθμὸς, ὅς τις νὰ εἶναι συνθεμένος ἐξ ἀκεραίων Ἀριθμῶν, καὶ δεκαδικῶν Κλασμάτων, νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν αὐτοῦ ῥίζαν.

Λύσις.

Δοθήτω δὴ, καθ' Ὑπόθεσιν, ὁ Α Ἀριθμὸς, ὅς τις εἶ-
ναι συνθεμένος, ἀπό τε ἀκεραίους Ἀριθμοὺς, καὶ δεκαδικὰ
Κλάσματα, χωριζόμενα τῶν ἀκεραίων, διὰ τῆς ὑποδιαστολῆς·
κατὰ τὸν (§. 273.) τοῦ ὁποίου ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τὴν τε-
τραγωνικὴν ῥίζαν. Εἰς εὕρεσιν ταύτης, καταχώρισον τὸν δο-
θέντα Ἀριθμὸν εἰς Κλάσεις, ὥστε νὰ ἦσαν ὁλοχερεῖς· κατὰ

τὸ

τὸν α. Κανόνα· (§. 302.) ὄχι ὅμως νὰ τοὺς χωρίσῃς μὲ τὴν ὑποδιαστολήν, ἢ τὴν κάθετον, καθὼς εἴπομεν εἰς τὸν αὐτὸν Κανόνα, διὰ νὰ μὴ ἀκολουθήσῃ σύγχυσις. Ἐπειδὴ καὶ ἡ ὑποδιαστολή, εἶναι διωρισμένη νὰ θέτηται μεταξὺ τῆς μονάδος καὶ τῶν δεκαδικῶν Κλασμάτων, (§. 141.) ἀλλὰ μὲ τὴν στιγμήν· ὡς φαίνεται εἰς τὸ Διάγραμμα. Ἔπειτα, ἂς γένῃ ἡ πρᾶξις, καθὼς εἴπομεν καὶ διὰ τοὺς ἀκεραίους Ἀριθμοὺς εἰς τὸν Β'. Κανόνα· (§. 303.) ἀφ' οὗ δὲ εὕρῃς τὴν ζητουμένην τετραγωνικὴν ῥίζαν τῶν τοιούτων ἀκεραίων τε καὶ δεκαδικῶν Κλασμάτων, ἀποχώρισον διὰ τῆς ὑποδιαστολῆς ἀπ' αὐτῆς τόσους χαρακτῆρας διὰ τοὺς ἀκεραίους Ἀριθμούς, ὅσαι ἦσαν αἱ ὑποδιαστολαί. Καὶ ἐπειδὴ εἰς αὐτὸ τὸ Ὑπόδειγμα, εὑρίσκονται εἰς τοὺς ἀκεραίους Ἀριθμοὺς δύω κόμματα, ἢ ὑποδιαστολαί, ἀποχώρισον τῆς ῥίζης τοὺς πρὸς ἀριστερὰν τῆς ῥίζης δύω χαρακτῆρας· οἱ δὲ λοιποὶ πρὸς δεξιὰν τῆς ὑποδιαστολῆς εἰσὶ Κλάσματα· εὑρέθη ἄρα ἡ ζητουμένη τετραγωνικὴ ῥίζα ἴση 12 ἀκεραίοις Ἀριθμοῖς, καὶ 23· οἷον 12, 23· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

A = 149, 5729 = B = 12, 23.		
1	49,	57.29 = 12923.
1		
0	4.9	
2:)	44	
	05	5.7
	4	84
	0	732.9
		7329
		0000

Πρόβλημα Ε'.

§. 319. Ὅταν ἤθελέ μας δοθῇ κανένας τετράγωνος Ἀριθμός, ὅστις νὰ εἶναι συνθεμένος ἀπὸ δεκαδικὰ μόνον Κλάσματα, νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν αὐτοῦ ῥίζαν, ἐκ τῆς ὁποίας εἶναι συντεθειμένος.

Λύσις.

Ἔστω καθ' Ὑπόθεσιν ὁ δοθεὶς δεκαδικὸς Ἀριθμὸς ὁ Μ· τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα· χώρισον αὐτὸν εἰς Κλάσεις διὰ τοῦ σίγματος. Ἔπειτα ποίησον τὴν αὐτὴν πρᾶξιν, τὴν ὁποίαν ἐδιωρίσαμεν εἰς τοὺς ἀκεραίους Ἀριθμούς· α. οὖν τετραγωνίσας τὴν μονάδα ὅπου εὑρίσκεται εἰς τὸ πρὸς

ἀρι-

ἀριστερὰν πρῶτον κόμμα, δίδει Πηλίκον μονάδα, θὲς οὖν τὴν μονάδα ἀντικρὺ τοῦ Μ, ὅπου τὸ Ν, ὡς πρῶτον μέρος τῆς ῥίζης· καὶ ἐπειδὴ εἶναι δεκαδικὰ Κλάσματα, βάλε πρῶτον τὸ μηδενικόν, καὶ χώρισέ το τῆς εὑρεθείσης μονάδος μὲ τὴν ὑποδιαστολήν. (§. 274.) Ἔπειτα κατεβάζωντας τὸ δεύτερον κόμμα, βάλετο ἔμπροσθεν τοῦ μηδενικοῦ, βάνωντας μεταξὺ τῶν καταβιβασθέντων χαρακτήρων, μίαν στιγμήν, καὶ ἀπομένει πρὸς ἀριστερὰν τῆς στιγμῆς, ὁ 7· διπλασίασον τὴν εὑρεθεῖσαν ῥίζαν, δηλ. τὴν μονάδα, καὶ γίνεται ὁ 2 Ἀριθμός· οἷον 1 + 1 = 2· διαίρεσον οὖν μὲ τὸν 2 τὸν 7, καὶ δίδει Πηλίκον τὸν 3, β'. χαρακτῆρα τῆς ζητουμένης ῥίζης· πολλαπλασιασθὲν δὲ τὸ Πηλίκον 3 ἐπὶ τὸν Διαιρέτην 2, παράγει τὸν 6· θὲς οὖν τὸν 6 ὑπὸ τὸν 7· πολλαπλασιάσας δὲ καὶ τὸν εὑρεθέντα 3· ἐφ' ἑαυτόν, γίνεται ὁ 9· θὲς δὴ καὶ αὐτὸν ὑπὸ τὸν 4· ἀφαιρέσας δὲ τὸν 69, τοῦ 74, ἐναπομένει ὁ 5· κατέβασον καὶ τὸ λοιπὸν τρίτον κόμμα, καὶ θὲς αὐτὸ πρὸς δεξιὰν τοῦ 5· χωρίσας δὲ καὶ αὐτὸ μὲ τὴν στιγμήν, ἐναπομένει εἰς τὰ ἀριστερὰ τῆς στιγμῆς ὁ 52· διπλασίασον τὴν εὑρεθεῖσαν ῥίζαν 13, καὶ γίνεται ὁ 26· οἷον 13 + 13 = 26· μερίσας δὲ μὲ αὐτὸν τὸν 52, δίδει Πηλίκον τὸν 2· τρίτον χαρακτῆρα τῆς ζητουμένης ῥίζης· θὲς δὴ τὸν 2 ἐν δεξιᾷ τοῦ Πηλίκου, καὶ πολλαπλασίασον μὲ τὸν 2 τὸν Διαιρέτην 26, τὸ δὲ γινόμενον 52, θὲς ὑπὸ τὸν Διαιρετέον 52· πολλαπλασιασθὲν δὲ καὶ τὸ εὑρεθὲν Πηλίκον 2, ἐφ' ἑαυτό, παράγει τὸν 4, θὲς δὴ καὶ αὐτὸν ὑπὸ τὸν 4· ἀφαιρέσας δὲ τὸν 524, τοῦ 524, δὲν ἀπομένει οὐδέν· θὲς ὑπ' αὐτοὺς μηδενικὰ (§. 304.) ἡ ζητουμένη ἄρα τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ δοθέντος δεκαδικοῦ Ἀριθμοῦ Μ, ἐστὶν ὁ ἀντικρὺ αὐτοῦ Ἀριθμὸς Ν 0,132· ὅστις σημαίνει $\frac{1}{10} + \frac{3}{100} + \frac{2}{1000}$· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον. Ὡς φαίνεται εἰς τὸ Διάγραμμα.

Μ = 0, 17424 = Ν = 0, 132.		
0, 1	74	24 = 13
1		
2:) 0	7.4	
	69	
26:)	05	2.4
	5	24
	0	00

Θεώ-

Θεώρημα Β′.

§. 320. Ἡ ῥίζα τοῦ δοθέντος ἀκεραίου Ἀριθμοῦ ὁποῦ δὲν εἶναι τετράγωνος, ἥτις δὲν εὐγαίνει εἰς ἀκεραίους Ἀριθμούς, δὲν θέλει εὔγῃ ποτὲ οὔτε εἰς κεκλασμένους, δηλ. εἰς δεκαδικὰ Κλάσματα.

Πρόβλημα ς′.

§. 321. Ὅταν ἤθελέ μας δοθῇ τινὰς Ἀριθμός, ὅς τις δὲν εἶναι τετράγωνος, νὰ εὕρωμεν τὴν πλησιεστέραν τῆς ἀληθοῦς, τετραγωνικὴν αὐτοῦ ῥίζαν· ἤγουν νὰ εὕρωμεν ἕνα Ἀριθμόν, ὅς τις πολλαπλασιαζόμενος ἐφ᾽ ἑαυτόν, νὰ δώσῃ ἕνα Ἀριθμὸν ὁποῦ νὰ εἶναι σχεδόν, ἴσος μὲ τὸν δοθέντα.

Λύσις.

Ἂς δοθῇ, καθ᾽ Ὑπόθεσιν, ὁ μὴ τετράγωνος Ἀριθμὸς Κ· καὶ ἂς ζητηθῇ ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα, ὡσὰν νὰ ἦτον καὶ τετράγωνος Ἀριθμός· καὶ εὑρίσκεται ὁ 10 ὁλοσχερής, καὶ μένουσι 19· πρόθεσον οὖν εἰς αὐτὸ τὸ ὑπόλοιπον δύω μηδενικά, εἰς τὸν τόπον τῶν δεκαδικῶν Κλασμάτων, καὶ ἂς γένῃ ὁ 1900 Ἀριθμός· κάμε τὴν πρᾶξιν, ὡσὰν νὰ ἦτον τετράγωνος, καὶ δίδει πρῶτον δεκαδικὸν Πηλίκον τὸν 9, καὶ μένουσι 19· πρόθεσον πάλιν, καὶ εἰς αὐτὸ τὸ ὑπόλοιπον δύω

K = 119. Λ = 10,3578166. κτλ.		
1	19	= Λ = 10,90871. κτλ.
1		
0	1.9	
(2:)	00	
(20:)	19	00
	18	0
		81
(218:)	00	19,00
		00 00
(2180:)	19	00,00
	17	44 0
		64
(21816:)	01	55 36,0.0
	1	52 71 2
		4 9
(218174:)	0	02 64 10.03
		2 18 1 74 1
		0 46 1 35 9

μη-

δενικά, καὶ ἂς γένῃ ὁ 1900 Ἀριθμός· διαίρεσον αὐτὸν διὰ τοῦ διπλοῦ τῆς εὑρεθείσης ῥίζης, δηλ. τοῦ 218, καὶ δίδει Πηλίκον μηδέν· θὲς οὖν ἐν δεξιᾷ τοῦ 9· μηδενικόν, β′. χαρακτῆρα Κλασματικόν· πρόθεσον πάλιν δύω μηδενικά, καὶ ἂς γένῃ ὁ 190000· διαίρεσον μὲ τὸ διπλοῦν τῆς ῥίζης 10,90, δηλ. τὸν 2180, καὶ δίδει Πηλίκον τὸν 8· τρίτην ῥίζαν δεκαδικήν· καὶ μένει ὁ 15536· πρόθεσον ἔτι δύω μηδενικά, καὶ διαίρεσον μὲ τὸ διπλοῦν τῆς ἄχρι τοῦδε εὑρεθείσης ῥίζης, δηλ. μὲ τὸν 21816, καὶ εὑρίσκεται Πηλίκον ὁ 7· καὶ μένει ὁ 26431, πρόσθεσον πάλιν καὶ διαίρεσον ὡς ἀνωτέρω, καὶ δίδει Πηλίκον τὴν μονάδα, πέμπτον δεκαδικὸν χαρακτῆρα τῆς ζητουμένης ῥίζης· τὸν αὐτὸν τρόπον, μεταχειριζόμενος, θέλουσιν εὑρεθῇ καὶ ἄλλαι πλησιεστέραι δεκαδικαὶ ῥίζαι· ἀλλ᾽ ὅμως ποτὲ δὲν θέλεις φθάσῃ εἰς τὴν ἀληθῆ ῥίζαν τοῦ μὴ ὄντος τετραγώνου Ἀριθμοῦ· κατὰ τὸ Β′. Θεώρημα (§. 310.) ἡ ἄρα ἕως ὧδε εὑρεθεῖσα ῥίζα ἐστὶν ἡ 10,90871· ἴσον $10 + \frac{1}{10} + \frac{8}{1000} + \frac{7}{10000} + \frac{1}{100000}$.

Πόρισμα.

Ἐκ τούτου ἄρα εἶναι φανερόν, ὅτι ὅταν ὁ δοθεὶς Ἀριθμὸς δὲν εἶναι τετράγωνος, εἶναι ἀδύνατον νὰ εὕρωμεν τὴν ἀληθινὴν αὐτοῦ ῥίζαν. Ἐπειδὴ ἐκεῖνος ὁ Ἀριθμός, ὅς τις δὲν εἶναι τετράγωνος, δὲν παράγεται ἀπὸ Ἀριθμὸν ὁποῦ πολλαπλασιάζει ἑαυτόν· (§. 289.) ἄρα δὲν θέλει εὑρεθῇ Ἀριθμός, ὅς τις πολλαπλασιασθεὶς ἐφ᾽ ἑαυτόν, δὲν θέλει δώσῃ τὸν τετράγωνον. Ἐπειδὴ καὶ κάθε Ἀριθμός, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιάζει ἑαυτόν, ποιεῖ τετράγωνον. Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον λοιπόν, εἴτε Κλασματικὸς ἤθελεν εἶναι ὁ μὴ τετράγωνος Ἀριθμός, εἴτ᾽ ἐξ ἀκεραίων καὶ δεκαδικῶν συγκείμενος, ἡ τούτου μὲν πλησιεστέρα εὑρεθήσεται ῥίζα, ἀνίσως ἤθελες προσθέσῃ πλησιεστέρα μηδενικά· ἀλλ᾽ ὅμως ὅσα ἤθελες προσθέσῃ, καὶ ὅσον ἤθελες κοπιάσῃ, ἀνίσως καὶ ὁ δοθεὶς δὲν εἶναι τετράγωνος, δὲν θέλεις δυνηθῇ ποτέ, εἰς τὸ νὰ εὕρῃς τὴν ἀληθῆ του ῥίζαν· καὶ εἶναι ἄρα ἡ τοιαύτη ῥίζα, Ἀριθμὸς ἄλογος· (§. 291.) καὶ ἐκεῖνος· ὅς τις θέλει νὰ εὕρῃ τὴν τοιαύτην ῥίζαν, εἰς μάτην κοπιάζει τέλους ἐπέκεινα.

Καὶ περὶ μὲν τῆς γενέσεως τῶν διαφόρων βαθμῶν, καὶ τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης εἴπομεν ἀρκετά. Τώ-

ρα

ρα δὲ, ἂς εἴπωμεν καὶ περὶ τῆς ἐξαγωγῆς τῆς κυβικῆς ῥίζης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η'.

Περὶ Συστάσεως τοῦ κυβικοῦ Ἀριθμοῦ, καὶ ἐξαγωγῆς τῆς ῥίζης αὐτοῦ.

§. 322. Καθὼς εἴπομεν ἐπὶ τῆς Συστάσεως τοῦ τετραγώνου Ἀριθμοῦ, (§. 292.) ὅτι τὰ μηδενικὰ σημεῖα βαίνονται διπλάσια, ἀπὸ ὅσα ἦσαν εἰς τὴν ῥίζαν του, οὕτω καὶ εἰς τὴν Σύστασιν τοῦ κυβικοῦ Ἀριθμοῦ, βαίνονται τρὶς τόσα, καθὼς ἀπαιτεῖ ἡ φύσις τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ· οἷον ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 50, ἔχει ἓν μηδενικόν· ὁ δὲ ἐξ αὐτῆς τετράγωνος, ἔχει δύω· οἷον 50 . 50 = 2500· ὁ δὲ κύβος ἔχει τρία· οἷον 50 . 50 . 50 = 125000. Ὁμοίως συμβαίνει καὶ εἰς τὰ δεκαδικὰ Κλάσματα· οἷον τῆς μὲν ῥίζης 0,5, ἢ 0,05, ὁ τετράγωνος εἶναι 0,0025· τῆς δὲ 0,0025, ὁ τετράγωνος 0,000025· ὁ δὲ κύβος ἔσται τοῦ μὲν 0,05, ὁ 0,00025· τοῦ δὲ 0,005, ὁ 0.00001250· ἤγουν οἱ χαρακτῆρες, οἵτινες εὑρίσκονται μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν, εἰς μὲν τοὺς τετραγώνους, εἰσὶ διπλάσιοι· εἰς δὲ τοὺς κύβους, τριπλάσιοι. Καὶ εἰς τὸν Κλασματικὸν δὲ κύβον, ἀντὶ μὲν Ἀριθμητοῦ, εἶναι ὁ κύβος τοῦ Ἀριθμητοῦ· ἀντὶ δὲ Παρονομαστοῦ, ὁ κύβος τοῦ Παρονομαστοῦ· οἷον τοῦ μὲν $\frac{2}{3}$, ὁ κύβος ἐστὶ $\frac{8}{27}$· τοῦ δὲ $\frac{2}{5}$, ὁ $\frac{8}{125}$· καθὼς καὶ εἰς τὴν Σύστασιν τοῦ Κλασματικοῦ τετραγώνου, καὶ οἱ δύω ὅροι τῆς ῥίζης εἰσὶ τετράγωνοι.

Θεώρημα.

§. 323. Παντὸς Ἀριθμοῦ, τοῦ ἐκ δύω μερῶν συγκειμένου, ὁ κύβος περιέχει τὸν τοῦ ά. μέρους κύβον, τό, τε τριπλάσιον τοῦ γινομένου, ἔκ τε τοῦ β'. μέρους, καὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ ά. τὸ τριπλάσιον τοῦ γινομένου ἔκ τε τοῦ ά. μέρους, καὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ β'. καὶ τὸν κύβον τοῦ β'. μέρους.

Ὑπό-

Ὑπόδειγμα Α'.

Διὰ νὰ καταλάβωμεν τὴν ἔννοιαν τοῦ ἐκτεθέντος Θεωρήματος, ἂς λάβωμεν ἕνα Ἀριθμὸν, ἐκ δύω μερῶν συντεθειμένον, οἷός ἐστιν ὁ 25· διαιρεθήτω δὴ εἰς τὰ ἐξ ὧν συντέθειται μέρη· δηλ. τὰ 20 + 5. Καὶ ά. μὲν ὑψωθήτω τὸ ά. μέρος τούτου 20, εἰς κύβον, καὶ γενέσθω ὁ 8000· οἷον 20 . 20 . 20 = 8000· β'. δὲ, ἂς τετραγωνισθῇ τὸ ά. μέρος 20, καὶ γενέσθω ὁ 400· οἷον 20 . 20 = 400· πολλαπλασιαθεὶς δὲ ὁ τετράγωνος τοῦ ά. μέρους 400, ἐπὶ τὸ β'. μέρος 5, γενέσθω ὁ 2000· οἷον 400 . 5 = 2000· τριπλασιαθὲν δὲ τοῦτο τὸ ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ ά. μέρους 20, ἐπὶ τὸ β'. μέρος 5· γενόμενον 2000, γενέσθω ὁ 6000· οἷον 2000 . 3 = 6000. γ'. δὲ, τετραγωνισθήτω τὸ β'. μέρος τοῦ δοθέντος Ἀριθμοῦ 25 = 20 + 5, δηλ. ὁ 5, καὶ γενέσθω ὁ 25· οἷον 5 . 5 = 25· τοῦτο δὲ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ ά. μέρος 20, γενέσθω ὁ 500· οἷον 25 . 20 = 500· τοῦτο δὲ τριπλασιασθὲν, ποιεῖ τὸν 1500· οἷον 500 . 3 = 1500· δ'. ἂς ὑψωθῇ εἰς κύβον καὶ τὸ β'. μέρος 5, καὶ γενέσθω ὁ 125· οἷον 5 . 5 . 5 = 125· ἄρα πᾶς κύβος Ἀριθμὸς ἐκ δύω μερῶν συνιστάμενος, ὁ κύβος περιέχει τὸν τοῦ ά. μέρους κύβον, τὸ τριπλάσιον τοῦ γενομένου ἔκ τε τοῦ β'. μέρους, καὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ ά. μέρους· τὸ τριπλάσιον τοῦ γενομένου ἔκ τε τοῦ ά. μέρους, καὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ β'. καὶ τὸν κύβον τοῦ β'. μέρους, ὡς ἐν τῷ Διαγράμματι καθορᾶται.

20 . 20 . 20 =	8000.
20 . 20 = 400 . 5 . 3 =	6000.
5 . 5 = 25 . 20 . 3 =	1500.
5 . 5 . 5 =	125.
Α = κύβος =	15625.

Δεῖξις.

Ὅτι μὲν ὀρθῶς ἡ πρᾶξις ἐγένετο, δεικνύεται· πολλαπλασιασθεὶς γὰρ ὁ δοθεὶς Ἀριθμὸς 25, ἐφ' ἑαυτὸν, ποιεῖ τὸν Ζ· τετράγωνον Ἀριθμὸν = τῷ 625· πολλαπλασιαθεὶς δὲ αὖθις ἐπὶ τὸν αὐτὸν 25, καὶ ὁ τετράγωνος Ἀριθμὸς Ζ· ποιεῖ τὸν κύβον Ἀριθμὸν Κ = 15625· ἀλλ' ὁ 15625, ἔστιν ἴσος τῷ ἀνωτέρω συσταθέντι κύβῳ Α· ἄρα ὀρθῶς ἡ πρᾶξις ἐγέ-

25 . 25 =	625 = Z.
625 . 20 =	15645 = K.

ἐγένετο· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Λέγεται δὲ, ὁ μὲν Ζ Ἀριθμὸς τετράγωνος· κατὰ τὸν (§. 290.) ὁ δὲ 25, ῥίζα, ἢ πλευρὰ αὐτοῦ ὀνομάζεται, ὡς ἐξ αὐτῆς τὴν ὕπαρξιν ἔχων· ὁ δὲ Κ, κύβος μὲν λέγεται τοῦ 25· ὁ δὲ 25, ῥίζα, ἢ πλευρὰ αὐτοῦ ὀνομάζεται, σχέσει τῇ πρὸς τὸν κύβον, ὡς ἐξ αὐτῆς τὴν γένεσιν ἔχων. Δὶς γὰρ κατὰ τὸ συνεχὲς ἐφ' ἑαυτὴν πολλαπλασιασθεῖσα, ποιεῖ τὸν κύβον Ἀριθμόν· οἷον 25 . 25 . 25 = 15625· καὶ ὁ μὲν Ζ δευτέρα δύναμις λέγεται, ὁ δὲ Κ, τρίτη. (§. 289.)

Σημείωσις.

§. 324. Πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν, ὅτι εἰς τὸ νὰ συστηθῇ εἷς Ἀριθμὸς κυβικὸς διὰ τῶν χαρακτήρων, ἀρκεῖ νὰ ὑψωθῇ ὁ δοθεὶς Ἀριθμὸς εἰς τὸν τρίτον βαθμόν· ἤγουν νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἑαυτὸν δίς. Διὰ νὰ συστηθῇ ὅμως Ἀλγεβραϊκῶς, εἶναι ἀναγκαῖον νὰ μεταχειρισθῶμεν, τὰ πρῶτα στοιχεῖα τοῦ Ἀλφαβήτου· τὰ ὁποῖα λαμβάνομεν, ἀντὶ οἱουδήποτε δοθέντος Ἀριθμοῦ. Ἐπειδὴ τοῦτο εἶναι εἰς τὴν ἐξουσίαν μας νὰ λάβωμεν τὸ Α, καθ' Ὑπόθεσιν, ἀντὶ τοῦ δεῖνος Ἀριθμοῦ, ἔν τινι πράξει, ἐν ἄλλῃ δὲ πράξει αὖθ' ἑτέρου· ὁμοίως καὶ τὸ Β, ἢ Γ, ἢ Δ, καὶ τὰ λοιπά· ὁ δὲ Ἀριθμὸς, ὅς τις μέλλει νὰ ὑψωθῇ εἰς τὴν ζητουμένην δύναμιν, πρέπει νὰ εἶναι Σύνθετος· καὶ ἤτοι ἐξ ἑνὸς χαρακτῆρος, ἢ δύω, ἢ καὶ ἐκ πλειόνων· (πᾶς γὰρ Ἀριθμὸς τὴν μονάδα ὑπερβαίνων, καλεῖται Σύνθετος·) διὰ νὰ ἠμπορῇ νὰ διαιρεῖται εἰς δύω ἄνισα μέρη, κατὰ τὸν Β'. Κανόνα· (§. 295.) καὶ εἰς μὲν τὸ α'. μέρος, νὰ περιέχηται ὁ μείζων Ἀριθμός· εἰς δὲ τὸ β'. ὁ ἐλάσσων. Προσλαμβάνονται ὅμως εἰς τὰς διὰ τῶν στοιχείων Ἀλγεβραϊκὰς πράξεις, καὶ οἱ Ἀριθμητικοὶ χαρακτῆρες. Καὶ ἐκεῖνοι μὲν, οἵ τινες βαίνονται πρὸ τῶν στοιχείων, ὀνομάζονται συνεργοί, ὡσὰν ὅπου συνεργοῦσι, καὶ ὁδηγοῦσιν ἡμᾶς ἐπὶ τὸν Πολλαπλασιασμὸν τῶν διὰ τῶν στοιχείων δηλουμένων Ἀριθμῶν. Ἐκεῖνοι δὲ, οἱ ὁποῖοι βαίνονται ἐπάνωθεν τῶν στοιχείων, καλοῦνται δεῖκται, ἢ βαθμοδεῖκται, ὡσὰν ὅπου δεικνύουσιν ἡμῖν τὸν βαθμὸν, ἢ δύναμιν καὶ ἀξίαν, εἰς τὴν ὁποίαν ἤτοι εἶναι, ἢ πρέπει νὰ ὑψωθῇ ὁ δοθεὶς Ἀριθμός. Ἀλλὰ διὰ νὰ καταλάβῃ ὁ φιλεπιστήμων ἀναγνώστης, πλέον καλλιώτερα, ταύτην τὴν σημείωσιν,

σιν,

σιν, καὶ νὰ γνωρίσῃ τὴν τοῦ προεκτεθέντος Θεωρήματος ἔννοιαν, (§. 313.) ἂς συστηθῇ ἕνας κύβος Ἀλγεβραϊκῶς, ἢ Συμβολικῶς, χάριν Ὑποδείγματος.

Ὑπόδειγμα Β'.

Θέλοντας νὰ ὑψώσωμεν εἰς κύβον, καθ' Ὑπόθεσιν τὸν 37 Ἀριθμὸν, διὰ τῶν στοιχείων, α'. διαιροῦμεν αὐτὸν εἰς δύω μέρη, εἰς 30 δηλ. καὶ 7, ἤτοι 30 + 7· καὶ ἀντὶ μὲν τοῦ 30, λαμβάνομεν τὸ Α· ἀντὶ δὲ τοῦ 7, λαμβάνομεν τὸ Β· καὶ τὰ χωρίζομεν διὰ τούτου τοῦ σημείου (+) ὅπερ σημαίνει ὕπαρξιν, καὶ προφέρεται σύν· ἢ διὰ τούτου (—) ὅπερ δηλοῖ ἀπόφασιν, καὶ στέρησιν, καὶ προφέρεται διὰ τοῦ πλήν. Καὶ α'. μὲν τὰ ὑψώνομεν εἰς τὴν β'. δύναμιν, κατὰ τὸν Γ'. Κανόνα. (§. 304.) β'. δὲ, τὰ ὑψώνομεν ἐπὶ τὴν γ'. δύναμιν. Καὶ ἐπειδὴ ὅταν μέλλωμεν νὰ τετραγωνίσωμέν τινα Ἀριθμὸν διὰ τῶν χαρακτήρων, θέτομεν δὶς τοὺς αὐτοὺς χαρακτῆρας, οὕτω ποιοῦμεν καὶ ἐπὶ τοῦ διὰ τῶν στοιχείων πολλαπλασιασμοῦ. Πολλαπλασιάζομεν δηλ. αὐτὰ, ὡσὰν νὰ ἦσαν Ἀριθμητικοὶ χαρακτῆρες· ξεχωρίζομεν ὅμως τὸ γινόμενον, ἀπὸ κάθε μέρος, μὲ τὸ σημεῖον, ὁποῦ χωρίζονται ἀπ' ἀλλήλων τὰ πολλαπλασιαζόμενα στοιχεῖα, δηλ. μὲ τὸ (+) ἢ (—) διαφέρει δὲ ὁ διὰ τῶν στοιχείων Πολλαπλασιασμὸς κατὰ τοῦτο μόνον, ὅτι εἰς μὲν τὸν διὰ τῶν χαρακτήρων Πολλαπλασιασμὸν, οὐ διαιροῦμεν, οὔτε τὸν Πολλαπλασιαστέον, οὔτε τὸν Πολλαπλασιαστήν. Εἰς δὲ τὸν διὰ τῶν στοιχείων, διαιροῦμεν ἀμφοτέρους, ἐὰν ὦσι πολυώνυμοι. Ἔτι εἰς μὲν τὸν διὰ τῶν χαρακτήρων Πολλαπλασιασμὸν, ἀρχίζομεν ἀπὸ τὰ δεξιὰ, καὶ πηγαίνομεν εἰς τὰ ἀριστερά· ἐπὶ δὲ τὸν τῶν στοιχείων, τοὐναντίον· ἐκ τῶν ἀριστερῶν δηλ. πρὸς τὰ δεξιά.

Ἀλλὰ

Ἀλλὰ διὰ νὰ γένωσιν εὐληπτότερα τὰ λεχθέντα, κείσθω τὸ ἀντικρὺ τῆς αὐτῆς πράξεως Ἀλγεβραϊκὸν σχῆμα.

ἔσω ὁ 37 Ἀριθμὸς $= 30 + 7 =$ τῷ $A + B$.

$A \quad + \quad B$
$A \quad + \quad B$

$AA + AB + BB$
$\quad + BA$

$A^2 + 2AB + B^2$. τετράγωνος.
$A \quad + \quad B$

$A^3 + 2AB + 2AB^2 + B^3$
$\quad + A^2B + AB =$

$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ κῦβος.

Καὶ ὁ μὲν $AA + AB + BA + BB$, ἐςὶν ὁ ἐκ τοῦ $A + B$ γενόμενος τετράγωνος, τὸν ὁποῖον διὰ νὰ τὸν ὑψώσωμεν εἰς κῦβον, δηλ. εἰς τὴν τρίτην δύναμιν, τὸν πολλαπλασιάζομεν πάλιν ἐπὶ τὴν ῥίζαν τοῦ $A + B$· καὶ γίνεται ὁ $AAA + 2AAB + ABB + AAB + BBB$· συνάπτομεν τὰ γινόμενα, καὶ γίνεται ὁ $AAA + 3AAB + 3ABB + BBB$· ὅς τις διὰ τὸ συντομώτερον γίνεται $=$ τῷ $A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

Ἐξήγησις τοῦ Συμβολικοῦ τούτου Τύπου.

Τὸ μὲν A^3, δηλοῖ νὰ ὑψωθῇ εἰς κῦβον τὸ α'. μέρος τῆς δοθείσης ῥίζης A. Τὸ δὲ γενόμενον νὰ γραφῇ διὰ τῶν Ἀραβικῶν χαρακτήρων.

Τὸ δὲ $3A^2B$, δηλοῖ, ὅτι ἀφ' οὗ τετραγωνισθῇ τὸ α'. μέρος τῆς ῥίζης A, νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ β'. μέρος τῆς ῥίζης B· τὸ δ' ἐξ αὐτοῦ γενόμενον, νὰ ἐπιπολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν 3 Ἀριθμόν.

Τὸ δὲ, $3AB^2$, δηλοῖ, ὅτι τὸ δεύτερον μέρος τῆς ῥίζης B, ἀφ' οὗ τετραγωνισθῇ, νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ α'. μέρος τῆς ῥίζης A, τὸ δὲ ἐξ αὐτοῦ γενόμενον, νὰ προσεπιπολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν 3 Ἀριθμόν.

Τὸ δὲ B^3, δηλοῖ, ὅτι τὸ β'. μέρος τῆς ῥίζης, νὰ ὑψωθῇ εἰς κῦβον, δηλ. νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἑαυτὸ δίς· ἀνάγνωθι τὸ ἐκτεθὲν Θεώρημα (§. 313.)

Γενέ-

$30 . 30 . 30 = 27000 = A^3$.
$30 . 30 = 900 . 7 = 6300 . 3 = 18900 = 3AB^2$.
$7 . 7 = 49 . 30 = 1470 . 3 = 4410 = 3AB^2$.
$7 . 7 . 7 = \qquad 343 = B^3$.
$\qquad 50653$.

οἷον· 27000.
18900.
.4410.
..343
$= 50653 = K$.

Γενέσθω δὴ καὶ ἐν χαρακτῆρσιν ἡ πρᾶξις τοῦ ἐν τῷ Διαγράμματι δοθέντος Ἀριθμοῦ $37 =$ τῷ $30 + 7 = A + B$· καὶ ἐκ μὲν τοῦ κύβου τοῦ α'. μέρους A, γενέσθω ὁ 27000 Ἀριθμός.

Ἐκ δὲ τοῦ τετραγώνου τοῦ α'. μέρους A^2, γενέσθω ὁ 900· ὅς τις πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸ β'. μέρος $B = 7$, γενέσθω ὁ 6300· ὅς τις ἐπιπολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν 3, γενέσθω ὁ $18900 = 3A^2B$.

Ἐκ δὲ τοῦ τραγώνου δὲ β'. μέρους $B = 7$, ἐπὶ τὸ α'. μέρος $A = 30$, γενέσθω ὁ 1470· ὅς τις ἐπιπολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν 3, γενέσθω ὁ 4410· οἷον $1470 . 3 = 4410 = 3AB^2$.

Καὶ τέλος ἐκ τοῦ κύβου τοῦ β'. μέρους τῆς ῥίζης $B = 7$, γενέσθω ὁ 343· οἷον $7 . 7 . 7 = 343 = B^3$, ὡς ἐν τῷ Διαγράμματι καθορᾶται.

Δεῖξις.

Ὅτι δὲ ὁ K ἐστιν ὁ ἐκ τοῦ 37 κῦβος δεικνύεται· ὑψωθήτω δὴ εἰς κῦβον ὁ δοθεὶς Ἀριθμὸς 37· καὶ γενέσθω ὁ 50653· οὗτος δὲ ἐςὶν ἴσος τῷ διὰ τῶν στοιχείων γενομένῳ K· ἄρα ὀρθῶς ἡ πρᾶξις ἐγένετο· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

37.
37.
259
111
1369
37
9583
4107
50653

Ὑπόδειγμα Γ'.

Δοθήτω αὖθις ὁ 3 Ἀριθμὸς, καὶ διαιρεθήτω εἰς δύω ἄνισα μέρη, κατὰ τὸν Β'. Κανόνα (§. 295.) τὰ $2 + 1 = A + B$· ὃν δεῖ ἐπὶ τὴν γ'. δύναμιν ὑψῶσαι· τὴν $A^3 + B^3$· ἔσαι οὖν· καὶ ἀντὶ μὲν τοῦ 2, ληφθήτω τὸ A· ἀντὶ δὲ

$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

γενήσεται οὖν ἐν Ἀριθμοῖς.
$2 . 2 . 2 = \qquad 8 = A^3$.
$4 . 1 = 4 . 3 = \qquad 12 = 3A^2B$.
$1 . 1 . 2 = 2 . 3 = \qquad 6 = 3AB^2$.
$1 . 1 . 1 = \qquad 1 = B^3$.
$\qquad 27 = K$.

τῆς

τῆς μονάδος, τὸ Β· πράξεως δὲ γενομένης εὑρεθήσεται τὰ ἐν τῷ Διαγράμματι καθορώμενα μέρη.

Καὶ ἐκ μὲν τοῦ 2 ὑψωθέντος εἰς κύβον, γίνεται ὁ 8· οἷον $2 . 2 . 2 = 8$.

Ἐκ δὲ τοῦ τετραγώνου τοῦ 2, ἐπὶ τὴν μονάδα, ἐπιπολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸν 3 Ἀριθμόν, γίνεται ὁ 12· οἷον $2 . 2 = 4 . 1 = 4 . 3 = 12$.

Ἐκ δὲ τοῦ τετραγώνου τῆς μονάδος ἐπὶ τὸν 2, ἐπιπολλαπλασιασθέντα ἐπὶ τὸν 3, γίνεται ὁ 6· οἷον $1 . 1 = 1$, $2 = 2 . 3 = 6$.

Καὶ ἐκ τοῦ κύβου τῆς μονάδος ἡ μονάς· οἷον $1 . 1 . 1 = 1$. Καὶ ἐν Ἀριθμοῖς· οἷον $3 . 3 . 3 = 27 = K$.

Πόρισμα.

Κατὰ τὸν αὐτὸν ἄρα τρόπον συσταθήσεται ὁ διὰ τῶν στοιχείων κύβος, καὶ ἐὰν ὁ ἀντὶ ῥίζης λαμβανόμενος Ἀριθμός, ἐκ πλειόνων, ἢ δύω σύγκειται χαρακτήρων· κείσθω καὶ περὶ τούτου τὸ ἐφεξῆς Ὑπόδειγμα.

Ὑπόδειγμα Δ΄.

Δοθήτω οὖν ὁ 214 Ἀριθμός, ὃν δεῖ ἐπὶ τὴν γ΄. δύναμιν ὑψῶσαι. Διαιρεθήτω δὴ εἰς δύω μέρη· τὰ 210, καὶ 4· κατὰ τὸν Β΄. Κανόνα. (§. 295.)

$$214 = 210 + 4 = A' + B'.$$
$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3.$$

α΄. Ἂς ὑψωθῇ τὸ α΄. μέρος εἰς κύβον· οἷον $210 . 210 . 210 = 9261000 = A^3$.

β΄. Τὸ τρεὶς ὑπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ α΄. μέρους, ἐπὶ τὸ β΄. οἷον $210 . 210 . 4 . 3 = 529200 = 3A^2B$.

γ΄. Τὸ τρεὶς ὑπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ β΄. μέρους, ἐπὶ τὸ α΄. γινόμενον· οἷον $4 . 4 . 210 . 3 = 10080 = 3AB^2$.

δ΄. Ὁ κύβος τοῦ β΄. μέρους· οἷον $4 . 4 . 4 = 64 = B^3$. τὰ ὁποῖα συναφθέντα, ποιοῦσι τὸν κύβον $K = 9800344$.

Λέγω δή, ὅτι οὗτός ἐστιν ὁ ἐκ τῆς 214 δοθείσης ῥίζης, ἢ πλευρᾶς γενόμενος κύβος $= K$.

Δεῖ-

Δεῖξις.

Πολλαπλασιασθεῖσα ἐφ' ἑαυτὴν δὶς ἡ δοθεῖσα ῥίζα 214· παράγει τὸν 9800344 κύβον, ὡς ἐν τῷ ἀντικρὺ καθορᾶται Διαγράμματι· ἀλλὰ μὴν οὗτός ἐστιν ἴσος τῷ διὰ τῶν στοιχείων γινομένῳ Κ· ἄρα ὀρθῶς ἡ πρᾶξις ἐγένετο· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

```
    214
    214
    ---
    856
   214
  428
  -----
  45796
    214
 ------
 183184
 45796
91592
-------
9800344
```

Ὑπόδειγμα Ε΄.

Δοθήτω πάλιν ὁ αὐτὸς Ἀριθμὸς 214· ὃν δεῖ εἰς κύβον ὑψῶσαι· διαιρεθήτω δὴ εἰς δύω μέρη, ὡς ἄνωθεν· οὐχὶ ὅμως εἰς $210 + 4$, ἀλλ' εἰς $200 + 14$· καὶ γενήσεται ὁ αὐτὸς κύβος $K = 9800344$.

ἔσται οὖν· $A^3 = 200 . 200 . 200 =$	8000000
$3A^2B = 200 . 200 = 40000 . 14 . 3 =$	1680000
$3AB^2 = 200 . 196 = 39200 . 3 =$	117600
$B^3 = 14 . 14 . 14 =$	2744
	9800344

Ἀλλὰ καὶ οὗτός ἐστιν ἴσος τῷ ἐκ τοῦ 210 καὶ 4 γινομένῳ· ἄρα κτλ.

Πόρισμα.

Ἐὰν ἄρα Ἀριθμός τις τμηθεὶς ὡς ἔτυχεν εἰς δύω ἄνισα μέρη, ὁ ὑπὸ τοῦ ὅλου Ἀριθμοῦ γενόμενος κύβος, ἴσος ἐστί, τῷ ὑπὸ τοῦ α΄. μέρους κύβῳ, σὺν τῷ τρεὶς ὑπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ α΄. μέρους, ἐπὶ τὸ β΄. γινομένῳ, σὺν τῷ τρεὶς ὑπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ β΄. μέρους, ἐπὶ τὸ α΄. καὶ τῷ ὑπὸ τοῦ β΄. μέρους γενομένῳ κύβῳ.

Καὶ

Καὶ περὶ μὲν συστάσεως κύβου, Ἀριθμητικῶς τε, καὶ Ἀλγεβραϊκῶς, ἱκανὰ τὰ ῥηθέντα· νῦν δὲ περὶ ἐξαγωγῆς τῆς κυβικῆς ῥίζης εἴπωμεν.

Περὶ ἐξαγωγῆς τῆς κυβικῆς ῥίζης Ἀριθμητικῶς.

§. 325. Καθὼς ἐλέγομεν περὶ τῆς Συνθέσεως τῶν τετραγώνων Ἀριθμῶν, (§. 293. Πόρισμα Δ'.) ὅτι ἡ μὲν Σύνθεσις αὐτῶν ῥᾳδία τέ ἐστι καὶ πάνυ εὔκολος· ἡ δὲ ἀνάλυσις καὶ ἐπάνοδος ἐκ τοῦ τετραγωνικοῦ Ἀριθμοῦ ἐπὶ τὴν ἑαυτοῦ ῥίζαν ἐστὶ δυσχερής τε καὶ δύσκολος, οὕτω κἀπὶ τῆς τοῦ κύβου Συστάσεως φαμέν· ὅτι ἐστὶ μὲν εὔκολον τὸ ὑψῶσαι τὸν οἱονδηποτοῦν δοθέντα Ἀριθμὸν ἐπὶ τὴν γ'. ἢ ἄλλην τινὰ τῶν ὑπερτέρων δυνάμεων, μεμνημένοι τὸ ἐπὶ τὴν σύστασιν τοῦ κύβου προτεθὲν Θεώρημα. (§. 313.) Ἡ δὲ ἐκ τούτου ἐπὶ τὴν αὐτοῦ ῥίζαν ἐπάνοδός τε καὶ ἀνάλυσις, δυσχερεστάτη τέ ἐστι καὶ ἐπίπονος· πειρασόμεθα δ' οὖν, (τὸ ἐφ' ἡμῖν) ἐξομαλίσαι τὸ δοκοῦν αὐτῆς ἄναντες καὶ πάντη δυσπρόσιτον, διὰ τῶν ἐφεξῆς ἐκτεθησομένων μοι Κανόνων· οἷς χρώμενοι οἱ ἀναγινώσκοντες, ἔχοιεν ἐπιτελεῖν ἀπονωτέρως τὰ προσαττόμενα.

Κανὼν Α'.

§. 326. Ἀριθμοῦ τινος ἡμῖν δοθέντος, ἵνα ἐξάξωμεν τὴν συστήσασαν αὐτὸν κυβικὴν ῥίζαν, ἢ πλευρὰν, α'. διαιρεθήτω εἰς Κλάσεις, ἢ κόμματα, ἢ μέλη, ἀνὰ τρεῖς χαρακτῆρας ἑκάστῳ ἀφοσιοῦντες κόμματι, καὶ διὰ τῆς ὑποδιαστολῆς, ἢ τῆς καθέτου ἀπ' ἀλλήλων τὰ κόμματα, ἢ μέλη χωρίζοντες· ἡ δὲ τοιαύτη κατατομὴ, δεξιόθεν πρὸς τὰ λαιὰ γινέσθω· μηδ' ὅλως φροντίζοντες, εἰ τὸ ἀριστερώτατον κόμμα, ἐκ δυοῖν μόνον, ἢ καὶ ἐξ ἑνὸς συνίσταται χαρακτῆρος.

Κανὼν Β'.

§. 327. Καταχωρίσαντες δ' αὐτὸν εἰς Κλάσεις, ἀρξόμεθα τῆς πράξεως, ἐκ τοῦ ἀριστερωτάτου κόμματος. Λαβόντες δὲ τὴν ἐνοῦσαν αὐτῷ κυβικὴν ῥίζαν, καταγράφομεν αὐτὴν ἐν δεξιᾷ τοῦ δοθέντος Ἀριθμοῦ, ἔνθα τὸ Ρ, ὃ ῥίζαν δηλοῖ, ὡς τὸ ἀντικρὺ τοῦ Α. ὑψώσαντες δὲ τὴν εὑρεθεῖσαν ῥίζαν ἐπὶ τὴν γ'. δύ-

ναμιν, (§. 291.) θέτομεν τὸν ἐξ αὐτῆς γενόμενον Ἀριθμὸν, ὑπὸ τοὺς χαρακτῆρας τοῦ πρώτου πρὸς ἀριστερὰν κόμματος· γραμμῆς δὲ ὁριζοντείου ὑπ' αὐτὸν ἀχθείσης, ἀφαιροῦμεν τοῦτον ἐκ τῶν τοῦ α'. κόμματος χαρακτήρων, τὸ δὲ λοιπὸν, εἰ ἄρα καταλίποιτό τι, γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν ὑπαλλήλως· εἰ δὲ μὴ ἀπολειφθείη τι, θέτομεν τὸ σημεῖον τουτὶ (=) τῆς ἰσότητος, ἢ μηδενικά· καταβιβάσαντες δὲ τοὺς τοῦ β'. πρὸς δεξιὰν κόμματος χαρακτῆρας, τοὺς γράφομεν πρὸς δεξιὰν τοῦ ὑπολοίπου.

Κανὼν Γ'.

§. 328. Τοῦτο δὲ τὸ ὑπόλοιπον σὺν τοῖς καταβιβασθεῖσι τοῦ β'. κόμματος χαρακτῆρσι, διαιροῦμεν διὰ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου· ἤγουν ἀφ' οὗ τετραγωνίσομεν πολλαπλασιάζομεν τὸν ἐξ αὐτῆς γενόμενον Ἀριθμὸν, ἐπὶ τὸν 3. τὸ δὲ Πηλίκον γράφομεν ἐν δεξιοῖς τῆς πρώτως εὑρεθείσης ῥίζης. Πολλαπλασιάσαντες δὲ τὸ εὑρεθὲν β'. μέρος τῆς ῥίζης, ἐπὶ τὸν Διαιρέτην, γράφομεν τὸ γινόμενον ὑπαλλήλως τῷ διαιρετέῳ οὕτως, ὥστε κεῖσθαι ὑπὸ τὸν α'. χαρακτῆρα τοῦ καταβιβασθέντος κόμματος, ὡς τὸ ἀντικρὺ τοῦ Β. τὸ δὲ ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ καινοῦ τούτου Πηλίκου, καὶ τῆς πρὸ αὐτοῦ κειμένης ῥίζης γινόμενον, βραχύ τι κατωτέρω γράφομεν, ὥστε ἐκτείνεσθαι μέχρι τοῦ β'. χαρακτῆρος τοῦ καταβιβασθέντος κόμματος, ὡς τὸ ἀντικρὺ τοῦ Γ. ὑψωθεὶς δὲ εἰς κύβον καὶ τὸ β'. τοῦτο τῆς ῥίζης μέρος, κείσθω ὀλίγον τι κατώτερον, ἐκτεινόμενον μέχρι τοῦ πρὸς δεξιὰν τοῦ γ'. χαρακτῆρος τοῦ καταβιβασθέντος κόμματος, ὡς τὸ ἀντικρὺ τοῦ Δ. γραμμῆς δ' αὖθις ἀχθείσης ἀφαιρεθήτωσαν τὰ τρία ταῦτα γινόμενα τοῦ Διαιρετέου, τὸ δὲ ὑπόλοιπον γεγράφθω ὑπὸ τὴν γραμμήν· καὶ καταβιβασθήτω τὸ πρὸς δεξιὰν τρίτον, εἴπερ εἴη, κόμμα.

Κανὼν Δ'.

§. 329. Τοῦτο δ' αὖ τὸ ὑπόλοιπον, μετὰ τοῦ καταβιβασθέντος γ'. κόμματος, διαιροῦμεν διὰ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τῆς ἄχρι τοῦ δε εὑρεθείσης ῥίζης, ὡς ἄνωθεν· τὸ δὲ Πηλίκον, ὡς τρίτον μέρος τῆς ζητουμένης ῥίζης γράφομεν ἐν δεξιᾷ τοῦ β'. μέρους· εἶτα πολλαπλασιάσαντες αὐτὸ ἐπὶ τὸν Διαιρέτην, γράφοφομεν τὸ γινόμενον ὑπὸ τὸν Διαιρετέον, ὡς ἄνωθεν, μέχρι τοῦ α. χαρακτῆρος τοῦ καταβιβασθέντος γ΄. κόμματος ἐκτεινόμενον, ὡς τὸ ἀντικρὺ τοῦ Ε. τὸ δὲ ἐκ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τούτου τοῦ καινοῦ τρίτου Πηλίκου, ἐπὶ τοὺς πρὸ αὐτοῦ δύω χαρακτῆρας τῆς ῥίζης πολλαπλασιάσαντες, γράφομεν τὸ γινόμενον ὀλίγον κατώτερον, μέχρις ὑπὸ τὸν μέσον χαρακτῆρα τοῦ καταβιβασθέντος κόμματος ἐκτεινόμενον, ὡς τὸ ἀντικρὺ τοῦ Ζ. ὑψώσαντες δ᾽ εἰς κῦβον καὶ τοῦτο τὸ τῆς ῥίζης εὑρεθὲν τρίτον μέρος, γράφομεν ὀλίγον κατώτερον, ὑπαλλήλως τῷ γ΄. χαρακτῆρι τοῦ κόμματος, ὡς τὸ ἀντικρὺ τοῦ Η. ἀφαιρέσαντες δ᾽ αὖθις τοῦ Διαιρετέου τὰ τρία ταῦτα γινόμενα, γράφομεν τὸ ὑπόλοιπον ὑπὸ τὴν ἀχθεῖσαν γραμμὴν καὶ καταβιβάζομεν τὸ ἐφεξῆς τέταρτον κόμμα.

Κανὼν Ε΄.

§. 330. Καὶ πάλιν διαιροῦμεν τὸ ὑπόλοιπον συνάμα τῷ καταχθέντι κόμματι ἐπὶ τὸν Διαιρέτην, ὅστις γίνεται ἐκ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τῶν εὑρεθέντων τριῶν τῆς ῥίζης χαρακτήρων, (ἤτοι τετραγωνίσαντες τοὺς εὑρεθέντας τρεῖς χαρακτῆρας τῆς ῥίζης, πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐξ αὐτῶν ἐπὶ τὸν 3) τὸ δὲ γινόμενον γράφομεν ὑπὸ τὸν Διαιρετέον, ὡς ἄνωθεν εἴρηται, ὡς τὸ ἀντικρὺ τοῦ Η. τὸ δὲ ἐκ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τοῦ καινοῦ τούτου τετάρτου Πηλίκου γινόμενον, ἐπὶ τοὺς πρὸ αὐτοῦ τρεῖς χαρακτῆρας τῆς ῥίζης πολλαπλασιάσαντες, γράφομεν τὸ ἐξ αὐτῶν ὀλίγον τι κατώτερον, ὡς (§. 318. Καν. Γ΄.) εἴρηται, ὡς τὸ ἀντικρὺ τοῦ Θ. ὑψώσαντες δὲ εἰς κῦβον καὶ αὐτὸ τὸ εὑρεθὲν τέταρτον μέρος τῆς ῥίζης, γράφομεν ὑπὸ τὰ ἐκτεθέντα δύω γενόμενα, ὡς τὸ ἀντικρὺ τοῦ Ι. ἀφαιρέσαντες δὲ ταῦτα τὰ τρία γενόμενα τοῦ Διαιρετέου, γράφομεν τὸ ὑπόλοιπον ὑπὸ τὴν γραμμὴν, ὡς ἔθος, καὶ καταβιβάζομεν καὶ τὸ λοιπὸν πέμπτον κόμμα.

Κανὼν ς΄.

§. 331. Διαιροῦμεν αὖθις καὶ αὐτὸν τὸν ὑπὸ τὴν γραμμὴν καταχθέντα Ἀριθμὸν, ἐπὶ τὸν καινὸν Διαιρέτην, ὅστις ἐκ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τῶν εὑρεθέντων τεσσάρων τῆς ῥίζης χαρακτήρων γινόμενον· τὸ δὲ ἐκ τούτου προκύπτον Πηλίκον, ἐν δεξιᾷ

ξιᾷ τοῦ δ΄. τῆς ῥίζης χαρακτῆρος ἐγγράψαντες, πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν Διαιρέτην· τὸ δὲ γινόμενον γράφομεν ὑπὸ τὸν Διαιρετέον, ὡς τὸ ἀντικρὺ τοῦ Κ. τὸ δ᾽ ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ καινοῦ τούτου πέμπτου Πηλίκου γινόμενον, ἐπὶ τοὺς πρὸ αὐτοῦ τέσσαρας χαρακτῆρας τῆς ῥίζης πολλαπλασιάσαντες, γράφομεν ὑπὸ τὸν Διαιρετέον, ὡς σύνηθες· ὡς τὸ ἀντικρὺ τοῦ Λ. καὶ πάλιν τὸ ἐκ τοῦ τετραγώνου τούτου τοῦ καινοῦ πέμπτου Πηλίκου γινόμενον, ἐπὶ τοὺς πρὸ αὐτοῦ τέσσαρας χαρακτῆρας τῆς ῥίζης πολλαπλασιάσαντες, γράφομεν τὸ ἐξ αὐτῶν ὑπὸ τὸν Διαιρετέον· ὡς τὸ ἀντικρὺ τοῦ Μ. κυβώσαντες δὲ καὶ τὸ εὑρεθὲν πέμπτον τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦτο μέρος, γράφομεν βραχύ τι κατώτερον, ὡς τὸ ἀντικρὺ τοῦ Ν. ἀφαιρέσαντες δὲ καὶ τὰ τρία ταῦτα γινόμενα ἐκ τοῦ Διαιρετέου, ἐπεὶ οὐδὲν ὑπολείπεται, γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν ἤτοι μηδενικὰ ὑπαλλήλως τοῖς ἀφαιρεθεῖσι χαρακτῆρσιν, ἢ τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος.

Καὶ οἱ μὲν ἐκτεθέντες ἓξ Κανόνες εἰσὶν ἱκανοὶ, πρὸς τὴν τῆς ῥίζης τοῦ δοθέντος κύβου ἐκ τῶν ἀκεραίων Ἀριθμῶν συνισαμένου ἐξαγωγήν· νῦν δ᾽ ἐπὶ τὴν πρᾶξιν αὐτὴν τῆς τῶν ῥιζῶν ἐξαγωγῆς ἴωμεν.

Πρόβλημα Α΄.

§. 332. Ἀριθμοῦ κύβου δοθέντος, τοῦ ἐξ ὁλοχερῶν συγκειμένου Ἀριθμῶν, τὴν κυβικὴν αὐτοῦ ῥίζαν εὑρεῖν.

Ὑπόδειγμα Α΄.

Δοθήτω δὴ ὁ ἀντικρὺ κῦβος Κ, οὗ δεῖ τὴν κυβικὴν αὐτοῦ ῥίζαν εὑρεῖν.

Α΄. Διαιρεθήτω εἰς κόμματα, κατὰ τὸν α. Κανόνα. (§. 316.)

Β΄. Ληφθήτω ὁ κῦβος τοῦ α. κόμματος, κατὰ τὸν Β΄. Κανόνα. (§. 317.)

Κ = 46	6 5 6	= Ρ = 36
3.3.3 = 27		Α = 27
19	6.5.6	
3.3 = 9.3 = 27) : 16	2	Β = 162
6.6.3.3 = 3	2 4	Γ = 324
6.6.6	2 1 6	Δ = 216
00	0 0 0	46656

Γ'. Τὸ εὑρεθὲν α'. μέρος τῆς ῥίζης = 3, γραφήτω ἀπέναντι τοῦ Ρ. καὶ ὑψωθὲν εἰς κύβον, γραφήτω ὑπαλλήλως τοῖς δυσὶ τοῦ α'. κόμματος χαρακτῆρσιν· εὐθείας δὲ γραμμῆς ὑπ' αὐτὸ ἀχθείσης, ἀφαιρεθήτω ὁ 27, τοῦ 46, καὶ ἐναπολείπεται ὁ 19· θεὶς οὖν αὐτὸν ὑπὸ τὴν γραμμὴν, κατάγαγε τὸ πρὸς δεξιὰν αὐτοῦ β'. κόμμα, καὶ γενέσθω ὁ 19656 Ἀριθμός· λαβὼν δὲ τὸ τριπλοῦν τετράγωνον τοῦ εὑρεθέντος Πηλίκου 3 ἀντὶ Διαιρέτου, ἐρεύνησον ποσάκις ὁ Διαιρέτης 27, ἐνυπάρχει τῷ τε λειψάνῳ καὶ τῷ α'. χαρακτῆρι τοῦ καταβιβασθέντος κόμματος, δηλ. τῷ 196, κατὰ τὸν Γ'. Κανόνα· καὶ εὑρὼν ἑξάκις, γράψον μὲν τὸν 6, ἐν δεξιᾷ τοῦ α'. μέρους τῆς ῥίζης 3, ὡς δεύτερον μέρος ὄντα τῆς ζητουμένης κυβικῆς ῥίζης· πολλαπλασιάσας δ' αὐτὸν, ἐπὶ τὸν Διαιρέτην 27, γράψον τὸν γινόμενον 162, ὑπὸ τὸν Διαιρετέον 196· κατὰ τὸν Γ'. Κανόνα (§. 318.) λαβὼν δ' αὖθις ἀντὶ Διαιρέτου τὸ τριπλοῦν τετράγωνον τοῦ καινοῦ τούτου Πηλίκου 6, πολλαπλασίασον αὐτὸ ἐπὶ τὸν α'. τῆς ῥίζης χαρακτῆρα 3· τὸ δ' ἐξ αὐτῶν γινόμενον 324, γράψον ὑπὸ τὸν Διαιρετέον βραχύ τι κατώτερον, ὥστε κεῖσθαι ὑπαλλήλως τῷ 5· ὑψώσας δὲ τέλος πάντων καὶ τὸ β'. μέρος τῆς ζητουμένης ῥίζης 6 ἐπὶ τὴν γ'. δύναμιν, γενέσθω ὁ 216· γράψας δὲ καὶ αὐτὸν ὑπὸ τὸν Διαιρετέον, κατὰ τὸν Γ'. Κανόνα (§. 318.) ποίησον τὴν Ἀφαίρεσιν· καὶ ἐπεὶ οὐδὲν ὑπολείπεται, θὲς ὑπὸ τὴν γραμμὴν μηδενικά· κατὰ τὸν Ϛ'. Κανόνα (§. 321.) καὶ ὁ 36 ἐστὶν ἡ ζητουμένη κυβικὴ ῥίζα τοῦ προτεθέντος κύβου Ἀριθμοῦ Κ· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Δεῖξις.

Ὅτι δὲ ἡ πρᾶξις ὀρθῶς, καὶ κατὰ τοὺς ἐκτεθέντας ἐγένετο Κανόνας, δεικνύεται· ἀφαιρεθέντων γὰρ τῶν τοῦ κύβου Κ = 46656, μερῶν, ἀφ' ὧν συντέθειται, δηλ. τῶν Α, Β, Γ, Δ, οὐδὲν ὑπολείπεται. ἄρα ὁ 36 ἐστὶν ἡ ζητουμένη κυβικὴ ῥίζα τοῦ δοθέντος κύβου Κ. πᾶσα γὰρ Ποσότης ἑαυτῆς ὅλη ἀφαιρεθεῖσα, γίνεται μηδὲν κατὰ τὸ Ζ'. Ἀξίωμα· ἕκαστον γὰρ ἐξ ὧν σύγκειται, εἰς αὐτὰ ταῦτα καὶ ἀναλύεται· συναφθέντων δ' αὖ τῶν ἀφαιρεθέντων μερῶν, ὁ αὐτὸς γίνεται Ἀριθμὸς, ὡς ἐν τῷ Διαγράμματι καθορᾶται· ἡ πρᾶξις ἄρα ὀρθῶς ἐγένετο, καὶ ἡ ζητουμένη ῥίζα ἐστὶν ὁ 36 Ἀριθμός· πολλαπλα-

σια-

σιασθεὶς γὰρ δὶς ἐφ' ἑαυτὸν, τὸν Κ. συνίστησι κύβον· οἷον 36. 36. 36 = 46656. ἄρα κτλ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὑπόδειγμα Β'.

Δοθήτω δεύτερον, ὁ Κ. κύβος = 427672606901688. οὗ δεῖ τὴν κυβικὴν αὐτοῦ ῥίζαν εὑρεῖν.

Ἑρμηνεία.

Διελὼν τὸν δοθέντα κύβον εἰς κόμματα (§. 316.), λάβε τὸν κύβον τοῦ α'. πρὸς ἀριστερὰν κόμματος (§. 317.) καὶ λαβὼν τὸ τριπλοῦν τετράγωνον τοῦ εὑρεθέντος α'. μέρους τῆς ῥίζης 7, δίελε τὸ ὑπόλοιπον σὺν τῷ πρώτῳ χαρακτῆρι τοῦ καταβιβασθέντος β'. κόμματος (§. 318.) τὸ δὲ Πηλίκον 5. γράψας ἐν δεξιᾷ τοῦ πρώτου μέρους τῆς ῥίζης, λάβε τὸ τριπλοῦν τετράγωνον αὐτοῦ, καὶ πολλαπλασιάσας ἐπὶ τὸν α'. τῆς ῥίζης χαρακτῆρα 7, γράψον τὸ γινόμενον ὑπὸ τὸν Διαιρετέον ἄχρι τοῦ μεσαίου ἐκτεινόμενον χαρακτῆρος· ὑψώσας δὲ καὶ τὸ εὑρεθὲν β'. μέρος τῆς ῥίζης 5. εἰς κύβον, καὶ ἀφαιρέσας τὰ τρία ταῦτα γινόμενα τοῦ Διαιρετέου, κατάγαγε τὸ πρὸς δεξιὰν τοῦ ὑπολοίπου γ'. κόμμα· διελὼν οὖν καὶ αὐτὸ, ὡς ἄνωθεν, διὰ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τῆς ἄχρι τοῦδε εὑρεθείσης ῥίζης, γράψον τὸ Πηλίκον ἐν δεξιᾷ τοῦ β'. μέρους τῆς ῥίζης 5, καὶ λαβὼν τὸ τριπλοῦν τετράγωνον τούτου, πολλαπλασιάσας τε αὐτὸ ἐπὶ τοὺς πρὸ αὐτοῦ δύω χαρακτῆρας τῆς ῥίζης, θὲς ὑπὸ τὸν Διαιρετέον τὸ γενόμενον (§. 319.) ὑψώσας δ' εἰς κύβον τὸν εὑρεθέντα τρίτον, τῆς ῥίζης χαρακτῆρα 3, θὲς βραχύ τι κατώτερον τὸ γενόμενον· ἀφαιρέσας δ' αὖθις τὰ τρία ταῦτα γινόμενα, καὶ ὑπὸ τὴν γραμμὴν θεὶς τὸ ὑπόλοιπον, κατάγαγε τὸ πρὸς δεξιὰν αὐτοῦ δ'. κόμμα· καὶ πάλιν διελὼν αὐτὸ διὰ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τῆς ἄχρι τοῦδε εὑρεθείσης ῥίζης (§. 320.) γράψον τὸ Πηλίκον ἐν δεξιᾷ τοῦ τρίτου χαρακτῆρος τῆς ῥίζης 3· πολλαπλασιάσας δ' αὐτὸ ἐπὶ τὸν Διαιρέτην, θὲς τὸ γινόμενον ὑπὸ τὸν Διαιρετέον, (ὡς εἴρηται §. 318.) λαβὼν δὲ καὶ τὸ τούτου τριπλοῦν τετράγωνον, πολλαπλασίασον αὐτὸ ἐπὶ τοὺς πρὸ αὐτοῦ τρεῖς χαρακτῆρας τῆς ῥίζης· τὸ δὲ γινόμενον ὑπόθες τῷ Διαιρετέῳ· ὑψώσας δ' εἰς κύβον καὶ τοῦτο, γράψον τὸ γινόμενον ὑπὸ τὸν Διαιρετέον, ἑνὶ χαρακτῆρι πρὸς δεξιὰν τοῦ

προ-

K =	427	672	606	901	688	P = 75342
7 · 7 · 7 =	343					= A.
	084	6.72				
7 · 7 · 3 = 147 =	73	5				= B.
5 . 5 . 3 . 7 =	5	25				= Γ.
5 . 5 . 5 =		125				= Δ.
	05	797	6.06			
75.75.3 = 16875.3 =	5	062	5			= E.
3.3 = 9.3 = 27.75 =		20	25			= Z.
3 . 3 . 3 =			27			= H.
	0	714	829	9.01		
753.753 . 3 = 170.1027.4 =		680	410	8		= Θ.
4 . 4 . 3 = 48 . 753 =			361	44		= I.
4 . 4 . 4 =				64		= K.
		034	057	597	6.88	
7534 . 7534 . 3 . 2 =		34	056	693	6	= Λ.
2 . 2 . 3 = 12 . 7534 =				904	08	= M.
2 . 2 . 2 =					8	= N.
		000	000	000	000	

προτεθέντος ἐκτεινόμενον· (§. 318.) ἀφαιρέσας δὲ πάλιν τὰ τρία ταυτὶ γινόμενα τοῦ Διαιρετέου, γράψον ὑπὸ τὴν γραμμὴν τὸ ὑπόλοιπον· καταγαγὼν δὲ καὶ τὸ ἐφεξῆς πέμπτον κόμμα, δίελε πάλιν τὸν Διαιρετέον διὰ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τῆς μέχρι τοῦδε εὑρεθείσης ῥίζης, τὸ δὲ Πηλίκον ἐν δεξιᾷ τοῦ τετάρτου χαρακτῆρος τῆς ῥίζης 4 γράψας, πολλαπλασίασον αὐτὸ ἐπὶ τὸν Διαιρέτην, (ὅστις γίνεται ἐκ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τῶν πρὸ αὐτοῦ εὑρεθέντων τεσσάρων τῆς ῥίζης χαρακτήρων (§. 321.) τὸ δὲ γινόμενον γράψον ὑπὸ τὸν Διαιρετέον (§. 318.) λαβὼν δὲ τὸ τριπλοῦν τετράγωνον τοῦ εὑρεθέντος τότε πέμπτου χαρακτῆρος τῆς ζητουμένης κυβικῆς ῥίζης = 2, καὶ ἐπὶ τοὺς πρὸ αὐτοῦ τέσσαρας χαρακτῆρας πολλαπλασιάσας, γράψον τὸ γινόμενον ὑπὸ τὸν Διαιρετέον· ὑψώσας δ᾽ εἰς κύβον, καὶ τὸ πέμπτον τοῦτο μέρος τῆς ῥίζης, θὲς τὸ γινόμενον ὑπὸ τὸν Διαιρετέον, μέχρι τοῦ ὑστάτου χαρακτῆρας τοῦ δοθέντος κύβου ἐκτεινόμενον· ἀφαιρέσας δὲ, τέλος πάντων, καὶ τὰ τρία ταῦτα γινόμενα τοῦ Διαιρετέου, ἐπεὶ οὐδὲν ὑπολείπεται, θὲς ὑπὸ τὴν γραμ-

γραμμὴν μηδενικὰ ἰσάριθμα τοῖς ἀφαιρεθεῖσι χαρακτῆρσι· καὶ τὸ P ἐστὶν ἡ ζητουμένη κυβικὴ ῥίζα· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Τοιαύτη μὲν ἐστὶν ἡ ἔφοδος τῆς τῶν ῥιζῶν τῶν ἐξ ἀκεραίων Ἀριθμῶν συγκειμένων κύβων ἐξαγωγῆς.

Ὑπόδειγμα Γ΄.

K =	143	548	584	256	= P = 5236.
5 . 5 . 5 =	125				= A.
	018	5.48			
5 . 5 . 3 = 75 . 2	15	0			= B.
2 . 2 . 3 = 12 . 5		60			= Γ.
2 . 2 . 2 =		8			= Δ.
	02	940	5.84		
52 . 52 . 3 = 8112 . 3 =	2	433	6		= E.
3.3 = 9.3 = 27 . 52 =		14	04		= Z.
3 . 3 . 3 =			27		= H.
	00	492	917	2.56	
523 . 523 . 3 = 820587 =		492	352	2	= Θ.
6 . 6 . 3 = 108 . 523 =			564	84	= I.
6 . 6 . 6 =				216	= K.
	00	000	000	000	

Ὑπόδειγμα Δ΄.

κῦβος.	1	9 53	1 25	= P = 125.
1 . 1 . 1 =	1			= A
	0	9.53		
1 . 1 . 3 : 2 =		6		= B.
2 . 2 . 3 = 12 . 1 =		1 2		= Γ.
2 . 2 . 2 =		8		= Δ.
		2 25	1.25	
12 . 12 . 3 = 432 . 5 =		2 16	0	= E.
5 . 5 . 3 = 75 . 12 =		9	0 0	= Z.
5 . 5 . 5 =			1 25	= H.
		0 00	0 00	

Ὑπόδειγμα Ε'.				
κῦβος.	34	0 12	2 24	= Ρ = 324.
3 . 3 . 3 =	27			= Α
	07	0.12		
3 . 3 = 9 . 3 = 27 . 2 =	5	4		= Β.
2 . 2 . 3 = 12 . 3 =		3 6		= Γ.
2 . 2 . 2 =		8		= Δ.
	1	2 44	2.24	
32 . 32 . 3 = 3072 . 4 =	1	2 28	8	= Ε.
4 . 4 . 3 = 48 . 32 =		15	3 6	= Ζ.
4 . 4 . 4 =			64	= Η.
	0	0 00	0 00	

Πρόβλημα Β'.

§. 333. Κλασματίου κύβου Ἀριθμοῦ δοθέντος, τὴν κυβικὴν αὐτοῦ ῥίζαν εὑρεῖν· δεῖ δὲ τόν τε Ἀριθμητὴν καὶ Παρονομαστὴν τοῦ Κλάσματος κῦβον εἶναι.

Ὑπόδειγμα Α'.

Δοθήτω δὴ ὁ Κλασματίας κῦβος $\frac{K = 2197}{\Lambda = 12167}$. οὗ δεῖ τὴν κυβικὴν αὐτοῦ ῥίζαν εὑρεῖν· α'. διαχωρείσας τὸν Ἀριθμητὴν τοῦ Παρονομαστοῦ, γράφον ἑκάτερον ἐν ἰδίῳ τόπῳ· καὶ διαιρέσας αὐτοὺς εἰς Κλάσεις, ποίησον τὴν πρᾶξιν, ὥσπερ κἀπὶ τῶν ἀκεραίων Ἀριθμῶν· β'. λαβὼν δὲ τὸν κῦβον τοῦ α'. κόμματος, θὲς τὸ Πηλίκον ἀπέναντι τοῦ Ρ· ὅπερ ἀφελὼν τοῦ α'. κόμματος, γράφον τὸ ὑπόλοιπον ὑπὸ τὴν γραμμήν· γ'. κατάγαγε δὴ καὶ τὸ β'. κόμμα· (§. 317.) καὶ διαιρέσας τὸν Διαιρετέον = 11, σοι δίδει Πηλίκον τὸν 3· πολλαπλασιάσας δὲ τὸ β'. Πηλίκον 3, ἐπὶ τὸν Διαιρέτην 3, τὸ δὲ γινόμενον 9· θὲς ὑπὸ τὸν Διαιρετέον 11· λαβὼν δὲ τὸ τριπλοῦν τετράγωνον τοῦ β'. τῆς ῥίζης χαρακτῆρος, πολλαπλασίασον αὐτὸ ἐπὶ τὸν α'. τῆς ῥίζης χαρακτῆρα· τὸ δὲ γινόμενον, θὲς ὑπὸ τὸν Διαιρετέον· (§. 318.) ὑψώσας δ' εἰς κῦβον καὶ τὸν β'. τῆς ῥί-

ζης χαρακτῆρα, γράφον καὶ αὐτὸν ὑπὸ τὸν Διαιρετέον· ἀφελὼν δὲ τὰ τρία ταῦτα γινόμενα τοῦ Διαιρετέου, ἐπεὶ ἀπολείπεται οὐδέν, θὲς ὑπὸ τὴν γραμμὴν μηδενικά· ἄρα εὑρέθη ἡ τοῦ Κ κύβου Ἀριθμοῦ κυβικὴ ῥίζα = 13· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Τῶν αὐτῶν αὖθις πραχθέντων, εὑρεθήσεται καὶ ἡ τοῦ Λ Παρονομαστοῦ κυβικὴ ῥίζα = 23· ὡς ἐν τῷ Διαγράμματι καθορᾶται.

Κ = 2	1 97	Ρ = 13	Λ =	12	1 67	Ρ =	23.
1				8			
1	1.97			04	1.67		
3 :	9		12 : =	3	6		
27 . 1 =	2 7		27 . 2 =		5 4		
3.3.3 =	27		3.3.3 =		27		
0	0 00			00	0 00		

Πρόβλημα Γ'.

§. 334. Δοθέντος τοῦ ἐξ ἀκεραίων Ἀριθμῶν καὶ δεκαδικῶν Κλασμάτων συγκειμένου κύβου, τὴν συστήσασαν αὐτὸν κυβικὴν ῥίζαν εὑρεῖν.

Ὑπόδειγμα Α'.

Δοθήτω δὴ ὁ ἐξ ἀκεραίων Ἀριθμῶν, καὶ δεκαδικῶν Κλασμάτων συγκείμενος κῦβος = Κ 1,771561· οὗ δεῖ τὴν συνιστῶσαν αὐτὸν ῥίζαν εὑρεῖν.

Κ = 1,	771.	561	= Ρ 1,21.
1 . 1 . 1 =	1		= Α.
0,	7.71		
1 . 3 . 2 =	6		= Β.
2 . 2 . 3 . 1 =	12		= Γ.
2 . 2 . 2 =	8		= Δ.
12 . 12 . 3 =	0 43	5.61	
	43	2	= Ε.
1 . 3 . 12 =		3 6	= Ζ.
1 . 1 . 1 =		1	= Η.
	0 00	0 00	

Α'. Στιχθήτωσαν οἱ τῶν δεκαδικῶν Κλασμάτων χαρακτῆρες ἀνὰ τρεῖς, ἐκ τῶν δεξιωτάτων μερῶν ἀρχῆς γενομένης, ἵνα μὴ σύγχυσις γένηται, διὰ τῶν με-

μεταξὺ τῆς μονάδος τῶν ἀκεραίων Ἀριθμῶν, καὶ τῶν δεκαδικῶν Κλασμάτων ἀφοσιωθεῖσαν ὑποδιαστολήν. (§. 137, καὶ 141.)

Β'. Γενέσθω ἡ πρᾶξις ὡς εἴπερ εἴησαν καὶ ὁλοσχερεῖς Ἀριθμοί· (§. 317.) τῆς δὲ πράξεως πέρας λαβούσης, ἀποχωρισθήτωσαν τῆς εὑρεθείσης ῥίζης διὰ τῆς ὑποδιαστολῆς τοσοῦτοι χαρακτῆρες, ὅσα ἦσαν τὰ κόμματα τῶν ἀκεραίων Ἀριθμῶν· οἱ δὲ λοιποὶ πρὸς δεξιὰν τῆς ὑποδιαστολῆς χαρακτῆρες τῆς ῥίζης, τὰ δεκαδικὰ δηλῶσουσι Κλάσματα ὡς ἐν τῷ Διαγράμματι καθορᾶται.

Ἡ κυβικὴ ἄρα ῥίζα τοῦ ἐξ ὁλοσχερῶν καὶ δεκαδικῶν Κλασμάτων συγκειμένου κύβου Κ, ἐστὶν ἡ μονάς, σὺν 21 = $\frac{2}{10} + \frac{1}{100}$ τῆς μονάδος· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Ὑπόδειγμα Β'.

Δοθήτω β'. ὁ ἐξ ἀκεραίων καὶ δεκαδικῶν Κλασμάτων συγκείμενος κύβος Κ· οὗ δεῖ τὴν κυβικὴν ῥίζαν εὑρεῖν.

```
                     K = 16, 309, 766.656 = | P = 25,36.
            2 . 2 . 2 =  8
                        08, 3.09
          2 . 2 . 3 . 5 =  6 0
          5 . 5 . 3 . 2 =  1 50
              5 . 5 . 5 =    1 25
                         0  6 84, 7.66
   25.25.3 = 1875.3 =       5 52  5
   3.3. = 9.3 = 27.25 =        6  75
           3 . 3 . 3 =               27
                           1 25  489, 6.56
   253.253.3 = 192027.6 =  1 25  216  2
       6 . 6 . 3 = 108 . 253 =   273  24
              6 . 6 . 6 =             2 16
                           000   000  000
```

Γενέσθω, ὡς ἄνωθεν· καὶ εὑρεθήσεται ἡ ζητουμένη κυβικὴ ῥίζα = 25,36· ἤτοι ἴσον εἰκοσιπέντε ὁλοχερέσιν Ἀριθμοῖς, καὶ

καὶ τριάκοντα ἓξ δεκαδικοῖς Κλάσμασιν = $\frac{3}{10} + \frac{6}{100}$· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Πρόβλημα Δ'.

§. 335. Δοθέντος τοῦ ἐκ δεκαδικῶν μόνον Κλασμάτων συγκειμένου κύβου Κ = 0,8365427· τὴν Κλασματικὴν κυβικὴν αὐτοῦ ῥίζαν εὑρεῖν.

Λύσις.

Α'. Στιχθήτωσαν οἱ δοθέντες δεκαδικοὶ χαρακτῆρες, ἀνὰ τρεῖς, ὡς ἡρμήνευται. (§.324.)

```
                    K = 0,8,365.427 = | P = 0,203.
           2 . 2 . 2 =  8             | = A.
                      0,0  365
           2 . 2 . 3 =     000        | = B.
                           365  427
     20 . 20 . 3 . 3 =     360  0     | = Γ.
   3.3 = 9.3 = 27.20 =       5  40    | = Δ.
           3 . 3 . 3 =           27   | = E.
                           000  000
```

Β'. Λαβὼν τὸν τοῦ α'. κόμματος κύβον, θὲς ἐν δεξιᾷ τῆς ὑποδιαστολῆς, ὅπου τὸ Ρ· καὶ ὑψώσας αὐτὸν εἰς κύβον, θὲς τὸ γινόμενον ὑπαλλήλως τῷ α. κόμματι· ἀφαιρέσας δὲ τοῦ Διαιρετέου 8, οὐδὲν ὑπολείπεται· θὲς ἓν μηδενικόν, καὶ καταβιβάσας τὸ β'. κόμμα, διαίρεσον τὸν α'. χαρακτῆρα τοῦ καταβιβασθέντος κόμματος, διὰ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τῆς εὑρεθείσης ῥίζης 2· κατὰ τὸν (§.318.) οἷον 2 . 2 . 3 = 12· καὶ ἐπεὶ οὐδὲ ἅπαξ εὑρίσκεται ὁ Διαιρέτης 12, ἐν τῷ καταβιβασθέντι α. χαρακτῆρι 3, θὲς μηδενικὸν ἐν δεξιᾷ τοῦ εὑρεθέντος α. χαρακτῆρος τῆς ῥίζης· πολλαπλασιάσας δὲ τὸν Διαιρέτην 12, ἐπὶ τὸ μηδενικόν, δίδει γινόμενον μηδενικόν, θὲς οὖν ὑπὸ τὸν Διαιρετέον μηδενικά· ἀφαιρέσας δέ, κατάγαγε καὶ τὸ ἐφεξῆς γ'. κόμμα· καὶ δίελε τὸν Διαιρετέον διὰ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τῆς ἄχρι τοῦ δε εὑρεθείσης ῥίζης· τὸ δὲ Πηλίκον θὲς ἐν δεξιᾷ τοῦ β'. χαρακτῆρος τῆς ῥίζης· λαβὼν δὲ τὸ τριπλοῦν· τετράγωνον τούτου, πολλαπλασίασον αὐτὸ ἐπὶ τοὺς πρὸ αὐτοῦ δύω χαρακτῆρας τῆς ῥίζης, καὶ θεὶς τὸ γινόμενον ὑπὸ τὸν Διαιρετέον· (§. 319.)

ὕψω-

ὕψωσον εἰς κύβον καὶ τὸν γ'. χαρακτῆρα τῆς εὑρεθείσης ῥίζης· καὶ ὑπὸ τὸν Διαιρετέον, ὡς ἔθος, τάξας, ποίησον τὴν Ἀφαίρεσιν· καὶ ἐπεὶ οὐδὲν ὑπολείπεται, θὲς μηδενικὰ ὑπὸ τὴν γραμμήν· ἡ ἄρα ζητουμένη ῥίζα τοῦ ἐκ δεκαδικῶν Κλασμάτων συγκροτουμένου κύβου, ἐστὶ τὸ Ρ = 0,203· ὅπερ ἰσοδυναμοῖ τῷ $\frac{2}{10} + \frac{3}{1000}$.

Πρόβλημα Ε'.

§. 336. Ἀριθμοῦ τινος δοθέντος τοῦ ἐξ ὁλοκλήρων μὲν Ἀριθμῶν συντεθειμένου, μὴ ὄντος δὲ κύβου, τὴν ὡς ἔγγιστα τῆς ἀληθοῦς κυβικὴν αὐτοῦ ῥίζαν εὑρεῖν.

Ἑρμηνεία τῆς πράξεως τούτου τοῦ Προβλήματος.

Δοθήτω δὴ ὁ μὴ ὢν κύβος Ἀριθμὸς Κ = 9312. καὶ ζητηθήτω ἡ ὡς ἔγγιστα τῆς ἀληθοῦς κυβικὴ αὐτοῦ ῥίζα· λαβὼν ἓν τὸν τοῦ α. κόμματος κύβον ἴσον 2, γράψον αὐτὸν ἀντικρὺ τοῦ Ρ. ὑψώσας δ' αὐτὸν εἰς κύβον, καὶ ὑπὸ τὸν Διαιρετέον τάξας, ἄφελε, ὡς ἔθος, καὶ ἐναπολείπεται μονάς· καταβιβάσας δὲ τὸ ἐφεξῆς β'. κόμμα γενέσθω ὁ 1312 Διαιρετέος· διαιρέσας ἓν αὐτὸν, ὡς ἔθος, διὰ τοῦ τριπλασίου τετραγώνου τῆς εὑρεθείσης ῥίζης 2, δίδωσι Πηλίκον τὴν μονάδα· λαβὼν δὲ τὸ τριπλοῦν τετράγωνον αὐτῆς, καὶ πολλαπλασιάσας αὐτὸ ἐπὶ τὸ α. μέρος τῆς ῥίζης, θὲς τὸ γινόμενον ὑπαλλήλως τῷ β'. χαρακτῆρι τοῦ καταβιβασθέντος κόμματος· ὑψώσας δὲ καὶ τὴν εὑρεθεῖσαν μονάδα εἰς κύβον, θὲς αὐτὸν ὑπὸ τὸν γ'. χαρακτῆρα· ἀφαιρέσας δὲ τὰ τρία ταῦτα γινόμενα ἐναπολείπεται τὸ 51 Κλάσμα, καὶ ἐπεὶ οὐ δύναται διαιρεθῆναι τὸ 51, ἐπὶ τὸ τριπλοῦν τετράγωνον τῶν δυοῖν χαρακτήρων τῆς ῥίζης = 1323, πρόσθεσον ἐνδεξιᾷ τῷ ὑπολοίπῳ τρία μηδενικά· διαιρέσας δὲ, ἐπεὶ οὐδ' ἅπαξ εὑρίσκεται ὁ Διαιρέτης 1323, ἐν τῷ Διαιρετέῳ 510, θὲς ἐν τῷ Πηλίκῳ μηδενικόν· καταβιβάσας δὲ τὸν Διαιρετέον, πρόσθες ἐν δεξιᾷ αὐτοῦ ἄλλα τρία μηδενικά· διελὼν δὲ αὐτὸν διὰ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τῆς τε ἀκεραίου καὶ Κλασματικῆς ἄχρι τοῦ δε εὑρεθείσης ῥίζης, δηλ. διὰ τοῦ 132300· τὸν 510000 Διαιρετέον, δίδωσι Πηλίκον τὸν 3, β'. δεκαδικὴν ῥίζαν, γράψον οὖν αὐτὸν ἐν δεξιᾷ τοῦ μηδενικοῦ, ὡς τέταρτον μέρος τῆς ζητουμένης ῥίζης· τὸ δὲ γινό-

με-

μενον ὑπό τε τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τούτου τοῦ 3, καὶ τῶν πρὸ αὐτοῦ τριῶν χαρακτήρων τῆς ῥίζης, γράψον ὑπὸ τὸν Διαιρετέον. 51000000· ὡς ἡρμήνευται (§. 318.) ὑψώσας δ' εἰς κύβον καὶ τὸν εὑρεθέντα δ'. χαρακτῆρα, καὶ θεὶς τὸ γινόμενον ὑπαλλήλως τῷ τελευταίῳ μηδενικῷ τοῦ Διαιρετέου, καὶ ὡς ἔθος ἀφελὼν ἐναπολείπεται τὸ, 11253273 Κλάσμα· προσθεὶς δ' αὖθις τούτῳ τῷ ὑπολοίπῳ τρία μηδενικά, τὴν αὐτὴν ποίει πρᾶξιν ὡς ἄνωθεν· καὶ εὑρεθήσεται Πηλίκον ὁ 8· καὶ πάλιν ἐναπολείπεται τὸ, 634973128 Κλάσμα· προσθεὶς δὲ πάλιν τούτῳ τῷ ὑπολοίπῳ τρία μηδενικά, καὶ τὴν αὐτὴν πρᾶξιν ἀναλαβὼν δίδωσιν ἕκτον Πηλίκον τὸν 4, μεθ' ὑπολοίπου 103846097896. πρόσθεσον αὖθις καὶ τούτῳ τρία μηδενικά, καὶ τὴν αὐτὴν πρᾶξιν ποιήσας, δίδωσιν εἰς Πηλίκον τὸν ἕβδομον χαρακτῆρα τῆς κυβικῆς ζητουμένης ῥίζης, καὶ αὖθις ὑπολείπεται τὸ, 10917790973577. Κλάσμα καὶ αὕτη ἐστὶν ἡ πλησιεστέρα τῆς ἀληθοῦς εὑρεθεῖσα ῥίζα· εἰ δέ σοι φίλον ἐγγυτέρω τῆς ἀληθοῦς ῥίζης γενέσθαι, πρόσθεσον αὖθις, καὶ πολλάκις ἀνὰ τρία μηδενικά, καὶ ποίει τὴν πρᾶξιν, ὡς ἄνωθεν· ὅσῳ γὰρ τὴν τοιαύτην ἐπαναλαμβάνεις πρᾶξιν, τοσούτῳ ἡ πλησιεστέρα τῆς ἀληθοῦς προκύψει ῥίζα, τὴν γὰρ τελείαν καὶ ἀληθῆ ἀμήχανον εὑρεῖν, τοῦ δοθέντος Ἀριθμοῦ μὴ ὄντος κύβου, αὐτὰ ταῦτα γενέσθωσαν εἴτε κεκλασμένος εἴη ὁ δοθεὶς Ἀριθμὸς ὁ μὴ ὢν κύβος, εἴτ' ἐξ ἀκεραίων, καὶ δεκαδικῶν Κλασμάτων, εἴτ' ἐκ δεκαδικῶν μόνον Κλασμάτων· ἀλλὰ πρὸς ῥᾳοτέραν κατάληψιν τῶν ῥηθέντων, κείσθω τὸ ἐφεξῆς Ὑπόδειγμα.

Κύ-

Κῦβος μὴ τετράγωνος· οὗ ῥίζα = 21,03847.

	9,3 12
2 . 2 . 2 =	8
	1,3.12
2 . 2 . 3 =	1 2
1 . 1 . 3 . 2 =	6
1 . 1 . 1 =	1
	0 0 51
	00
	51 000
21 . 21 . 3 = 1323 . =	00 0
	51 000 000
210 . 210 . 3 = 132300 . 3 =	39 690 0
3 . 3 = 9 . 3 = 27 . 210 =	56 70
3 . 3 . 3 =	27
	11 253 273 000
2103 . 2103 . 3 . 8 =	10 614 261 6
8 . 8 . 3 = 192 . 2103 =	4 037 76
8 . 8 . 8 =	512
	00 634 973 128 000
21038 . 21038 . 3 . 4 =	531 116 932 8
4 . 4 . 3 = 48 . 21038 =	10 098 24
4 . 4 . 4 =	64
	103 846 097 896 000
210384 . 210384 . 3 . 7 =	92 927 997 657 6
7 . 7 . 3 = 147 . 210384 =	309 264 48
7 . 7 . 7 =	343
	010 917 790 973 577

Σημείωσις.

Εἰδέναι δὲ δεῖ, ὅτι προστίθεμεν τρία μηδενικὰ ἐνδεξιῷ τοῦ ὑπολοίπου τοῦ μὴ ὄντος κύβου Ἀριθμοῦ διὰ τὸ ἐκ τριῶν χαρακτήρων συγκεῖσθαι ἅπαντα κῦβον ἐκ τῶν μεγίστων μοναδικῶν χαρακτήρων γενόμενον· τοῦ γὰρ 9 ὁ κῦβος ἐκ τῶν ἑπτακοσίων εἰκοσιεννέα συσταθήσεται· οἷον 9 . 9 . 9 = 729. ἐκ δὲ τοῦ 8, ὁ πεντακόσια δώδεκα· οἷον 8 . 8 . 8 = 512. ὁ δὲ ἐκ τοῦ ἑπτά ἐστιν ὁ ἐκ τῶν διακοσίων ἐννενήκοντα ὀκτώ· ὁ δὲ ἐκ τοῦ 6, ἐκ τῶν 212· καὶ ὁ ἐκ τοῦ 5, ἐκ τῶν 125.

Πόρισμα.

Ἡ ζητουμένη ἄρα ῥίζα τοῦ ἀνωτέρω δοθέντος μὴ ὄντος κύβου Ἀριθμοῦ, ἡ ὡς ἔγγιστα τῆς ἀληθοῦς εὕρηται ἴση 21,0 3847 = 21 ἀκέραιον σὺν $\frac{3}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{4}{10000} + \frac{7}{100000}$.

Καὶ περὶ μὲν Συστάσεως καὶ ἐξαγωγῆς τῆς ῥίζης τῶν κυβικῶν Ἀριθμῶν, ἔκ τε ἀκεραίων συνισαμένων Ἀριθμῶν, ἔκ τε ἀκεραίων τε καὶ Κεκλασμένων, καὶ ἔτι ἐκ δεκαδικῶν μόνον Κλασμάτων, καὶ πρὸς τούτοις ἐξ Ἀριθμῶν μὴ ὄντων κύβων, εἰσὶν ἱκανὰ τὰ ῥηθέντα, καὶ οὐ δεῖ περαιτέρω ἐκτείνειν τὴν περὶ τούτων διδασκαλίαν, ἅτε δὴ τοῦτο οὐκ ἔργον τῆς Ἀριθμητικῆς, ἀλλὰ τῆς καθόλου Λογιστικῆς, τῆς καὶ Ἀναλυτικῆς Μεθόδου καὶ Ἀλγέβρης ἐκ φύλου ὀνόματι καλουμένης· καὶ ἐν συντόμῳ εἰπεῖν πέρας ἤδη τίθημι, ἁπάσης Ἀριθμητικῆς πραγματείας· πλὴν ἢ τοῦτο ἔτι προστίθημι ἐν τῷ ἐφεξῆς παραρτήματι τὴν περὶ τῆς τοῦ Καλενδαρίου κατασκευῆς Μέθοδον.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ἐν ᾧ Μέθοδός τις προστίθεται τῆς τοῦ Καλενδαρίου κατασκευῆς· ἐρανισθεῖσά τε καὶ συνταχθεῖσα παρὰ τοῦ Ὁσιολογιωτάτου κυρίου Ἀγαπίου Ῥήγα τοῦ ἐκ πόλεως Πάργης.

Τῆς Τετραβίβλου ταύτης Ἀριθμητικῆς Μεθόδου πέρας λαβούσης, ἔδοξέ μοι ὠφέλιμον εἶναι, Μέθοδόν τινα, εἰ διαγένοιτό μοι, διὰ βραχέων προθεῖναι τῆς τοῦ Καλενδαρίου κατασκευῆς· ἵν᾽ ἔχοιεν, οἵ τε Μαθητιῶντές τε καὶ ἀναγινώσκοντες καὶ τὴν Μέθοδον ταύτην προσκτήσασθαι καὶ εἰδέναι ἐργάζεσθαι, καὶ μὴ ἐπαπορεῖν, μηδ᾽ ἐρυθριᾷν· ἀλλ᾽ ἔχοιεν ἑτοίμως ἀπαντᾷν, περὶ ἑκάστου τῶν ἐν τῷ Καλενδαρίῳ περιεχομένων, ὑπό τινων ἐρωτώμενοι, ἢ καὶ ὑπὸ μωμοσκόπων τε τινῶν, καὶ μαμακύθων ἄλλως ἐπηρεαζόμενοι· τοιαῦτα δ᾽ εἰσὶ τὰ ἐφεξῆς.

Πότε ἄρα Νέα Σελήνη γίνεται; πότε δ᾽ ὁ δεῖνας Μὴν ἄρχεται; ἐν ποίῳ ἄρα Μηνί, καὶ πόσῃ τοῦ καθ᾽ ἡμέρᾳ τὸ ἐρχόμενον Πάσχα ἕξομεν; καὶ τὰ ὅμοια τούτοις, ἵνα μὴ καθ᾽ ἓν ἕκαστον λέγων, ὀχληρὸς γένωμαι, τοῖς ἀναγινώσκουσί τε καὶ ἀκούουσιν· ἄλλως τε καὶ χρησίμου τῆς τοῦ Καλενδαρίου γνώσεως οὔσης (ἵνα μὴ ἀναγκαίας εἴπω) παντὶ εὐσεβοῦντι, πολλὴν τὴν ἡδονὴν τοῖς τὴν Μέθοδον ταύτην μεμελετηκόσι τε καὶ κτησαμένοις, ἡ ταύτης ἐργασία παρέχεται· ταῦτ᾽ οὖν ἐγνωκώς, ᾠήθην δεῖν μὴ κατοκνῆσαι· ἀλλ᾽ ὡς ἂν δυναίμην τοὺς ὁμογενεῖς ὠφελῆσαι, (τοῦτο γὰρ καὶ Θεῷ φίλον, καὶ τοῖς ὁμογενέσιν οὐκ ἄχαρι) ἐπιτετμημένως τε καὶ ἀνελλειπῶς καὶ περὶ ταυτησὶ τῆς Μεθόδου διαλαβεῖν· ἀλλὰ τό, τε προοιμιάζεσθαι καὶ περιττολογεῖν χαίρειν εἰπόντες, ἐπ᾽ αὐτὴν ἤδη τὴν τῆς Μεθόδου πρᾶξιν τραπώμεθα, τὴν θείαν ἀντίληψιν κᾀν τούτῳ τῷ πονηματίῳ προσκτησάμενοι ἀρωγόν.

Προ-

Προλεγόμενα τινὰ πάνυ ἀναγκαῖα.

§. 337. Πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν, ὅτι ἡ κατὰ Σάρκα Γέννησις τοῦ Κυρίου καὶ Σωτῆρος ἡμῶν Ἰησοῦ Χριστοῦ, (κατὰ τὸ δόγμα τῆς Ἀνατολικῆς Ἐκκλησίας) τὸ 5508. ἔτος τῆς Κοσμογενείας ἐγένετο.

§. 338. Ἀπὸ δὲ τῆς ἐνσάρκου οἰκονομίας (ἥτις καὶ Σωτήριος ἐποχὴ ὑπὸ τῶν Χριστιανῶν ὀνομάζεται) ἕως τῆς σήμερον, καθ᾽ ὃν Χρόνον ἔγραφον ταῦτα, εἰσὶν ἔτη 1816.

§. 339. Οἱ μὲν Κύκλοι τοῦ Ἡλίου εἰσὶν 28· καὶ ἀφ᾽ οὗ τελειώσουσιν αὐτοί, ἀρχίζομεν νὰ μετρῶμεν πάλιν ἐκ τοῦ α. Κύκλου, καὶ οὕτως ἐπ᾽ ἄπειρον.

§. 340. Οἱ δὲ Κύκλοι τῆς Σελήνης, εἰσὶ 19· οἱ ὁποῖοι ἀφ᾽ οὗ τελειώσουσι, πάλιν ἀρχίζομεν ἐκ τοῦ α. καθὼς καὶ εἰς τοὺς Κύκλους τοῦ Ἡλίου.

§. 341. Ἡ δὲ Ἰνδικτιών, περιέχει ἔτη 15· καὶ ἀφ᾽ οὗ τελειώσῃ ἡ δεκάτη πέμπτη, ἀρχίζομεν πάλιν ἐκ τῆς α. καὶ οὕτως ἐπ᾽ ἄπειρον.

§. 342. Ὁ δὲ Βίσεκτος γίνεται εἰς κάθε τέσσαρας Χρόνους· καὶ ὁ τότε Φεβρουάριος μὴν ἔχει ἡμέρας 29· καὶ ἀφ᾽ οὗ τελειώσουσιν οἱ 4. Χρόνοι, ἀρχίζομεν πάλιν ἀπὸ τὸν α. καὶ οὕτω καθεξῆς.

§. 343. Οἱ δὲ Μῆνες τοῦ Ἔτους εἰσὶ δώδεκα· καὶ ἀρχίζουσι νὰ μετρῶνται Ἀστρονομικῶς μὲν ἀπὸ τὸν Μάρτιον· ὡσαύτως καὶ οἱ Κύκλοι τοῦ Ἡλίου, τῆς Σελήνης, ἡ Ἰνδικτιών, καὶ ὁ Βίσεκτος· ἐποχικῶς δέ, ἀπὸ τὸν Ἰαννουάριον· ἡμεῖς ὅμως εἰς τὸ παρὸν πονημάτιον, ἀρχίζομεν ἀπὸ τὸν Μάρτιον, συμφώνως μὲ τὴν κίνησιν τῶν Πλανήτων· κάθε δὲ Μήν, ἔχει τὰς ἐφεξῆς σημειωμένας ἡμέρας, καὶ Ἐπακτάς.

Μῆνες,

Μῆνες,	Ἡμέραι,	Ἐπακταί.
Μάρτιος	31.	5.
Ἀπρίλλιος	30.	1.
Μάϊος	31.	3.
Ἰούνιος	30.	6.
Ἰούλιος	31.	1.
Αὔγουστος	31.	4.
Σεπτέμβριος	30.	7.
Ὀκτώβριος	31.	2.
Νοέμβριος	30.	5.
Δεκέμβριος	31.	7.
Ἰαννουάριος	31.	3.
Φεβρουάριος	28, ἢ 29.	6.

Εἰς ἐνθύμησιν ὅμως τῶν ῥηθέντων Ἐπακτῶν, προσετέθη τὸ ἐφεξῆς Τροπάριον εἰς ἦχον δ΄.

Ἔδωκας σημείωσιν.

Ἔχει πέντε Μάρτιος, καὶ μίαν μόνην Ἀπρίλλιος· ὁ δὲ Μάϊος ἔχει τρεῖς, Ἰούνιος ἕξ, Ἰούλιος μία, Αὔγουστος δὶς δύω, ὁ δὲ Σεπτέμβριος ἑπτά· δύω καὶ μόνας τε ὁ Ὀκτώβριος, πέντε ὁ Νοέμβριος, ἑπτὰ δὲ πάλιν Δεκέμβριος· τρεῖς ὁ Ἰαννουάριος, δὶς τρὶς Φεβρουάριος.

Καὶ ταῦτα μὲν ἀναγκαῖα ὄντα προγινώσκεσθαι, προετέθησαν τῆς τοῦ Καλενδαρίου κατασκευῆς· ἤδη δὲ καὶ ἐπ' αὐτὴν τὴν πρᾶξιν χωρῶμεν.

Πρόβλημα Α΄.

§. 344. Τῶν ἐκ τῆς Κοσμογενείας διελθόντων ἐτῶν δοθέντων, τὸν τοῦ Ἡλίου Κύκλον εὑρεῖν, καθ' ὃν Χρόνον ἡ περὶ τούτου ζήτησις γίνεται.

Λύσις καὶ Ἑρμηνείας τῆς Πράξεως.

Α΄. Θὲς τὰ ἀπὸ κτίσεως Κόσμου παρελθόντα ἔτη, ἕως τῆς Σωτηρίου ἐποχῆς· δηλαδὴ τά, 5508 (ὅρα §. 327.) Β΄. πρόσθεσον εἰς αὐτὰ καὶ τὰ ἀπὸ τῆς Σωτηρίου ἐποχῆς· δηλαδὴ ἀπὸ Χριστοῦ διελθόντα ἔτη, ἕως τὸ ἔτος ἐκεῖνο, καθ' ὃ ἡ ζήτησις γίνεται. Γ΄. Συνάψας δὲ ταῦτα, διαίρεσον τὸ τούτων ἄθροισμα ἐπὶ τοὺς 28 Κύκλους τοῦ Ἡλίου· (§. 329.) καὶ ἐκεῖνος ὁ Ἀριθμός, ὅστις ἤθελεν ἀπομείνῃ ἀπὸ τὴν Διαίρεσιν, ἔσται ὁ ζητούμενος Κύκλος τοῦ Ἡλίου. Ἐὰν ὅμως δὲν ἀπομείνῃ τίποτες, τότε ἔχομεν εἰκοστὸν ὄγδοον Κύκλον τοῦ Ἡλίου.

Ὑπό-

Ὑπόδειγμα Α΄.

Ἔστω καθ' Ὑπόθεσιν τὸ ἔτος κατὰ τὸ ὁποῖον ζητεῖται ὁ Κύκλος τοῦ Ἡλίου, τό, 1816· ἂς προστεθῶσιν εἰς αὐτὸ τὰ ἀπὸ κτίσεως Κόσμου, ἕως τῆς Χριστουγεννήσεως παρελθόντα ἔτη, καὶ τ' ἄλλα, ἂς γένωσι καθὼς ἡρμηνεύθηται· καὶ ἕξεις τὸ ζητούμενον· οἷον $1816 + 5508 = \frac{7324}{28:}$ $261 + \frac{16}{28}$· ἔχομεν· ἄρα εἰς τοὺς 1816, Ἡλίου Κύκλον 16· ὃ ἰδοὺ τὸ ζητούμενον.

$$1816 + 5508 = \frac{7324}{28:}$$

$$261 + \frac{16}{28}.$$

Τῆς αὐτῆς πράξεως γενομένης, καὶ εἰς ὁποιονδήποτε ἄλλον Χρόνον, τεύξῃ τοῦ ποθουμένου.

Πρόβλημα Β΄.

§. 345. Τῶν ἐκ τῆς Κοσμογενείας διελθόντων ἐτῶν δοθέντων, τὸν τῆς Σελήνης Κύκλον εὑρεῖν, καθ' ὃν Χρόνον ἡ περὶ τούτου ζήτησις γίνεται.

Ἑρμηνεία.

Ἂς γένῃ καὶ εἰς αὐτὸ τὸ Πρόβλημα ἡ πρᾶξις οὕτω· θὲς τὰ ἀπὸ κτίσεως Κόσμου διελθόντα ἔτη, ὡς ἄνωθεν· καὶ εἰς αὐτὰ πρόσθεσον καὶ τὰ ἀπὸ Χριστουγεννήσεως, ἕως τὸ ἔτος ἐκεῖνο, κατὰ τὸ ὁποῖον θέλεις νὰ εὕρῃς πόσους Κύκλους ἔχει ἡ Σελήνη. Ἔπειτα, ἀφ' οὗ τὰ συνάψῃς, διαίρεσον τὸν γενόμενον Ἀριθμὸν ἐπὶ τοὺς 19 Κύκλους τῆς Σελήνης· (§. 330.) καὶ ἐκεῖνος ὁ Ἀριθμὸς ὁποῦ ἀπομείνῃ ἀπὸ τὴν Διαίρεσιν θέλει σοι δείξῃ τὸν ζητούμενον Κύκλον τῆς Σελήνης.

Ὑπόδειγμα Β΄.

Ἔστω καθ' Ὑπόθεσιν ὁ Χρόνος, κατὰ τὸν ὁποῖον θέμομεν νὰ εὕρωμεν τὸν Κύκλον τῆς Σελήνης, ὁ 1818· ἔσται λοιπόν· $5508 + 1818 = \frac{7326}{19:}$

$$\begin{array}{r} 5508 \\ 1818 \\ \hline 7326 \end{array} \text{: ὅθεν } \frac{7326}{19:}$$

$$= 385 + \frac{11}{19}.$$

385

$385 + \frac{11}{19}$· εἰς τοὺς 1818· ἄρα ἔχομεν Κύκλον Σελήνης ἐνδέκατον· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Πρόβλημα Γ'.

§. 346. Τῶν τῆς Σελήνης Κύκλων δοθέντων, τὸ τῆς Σελήνης Θεμέλιον εὑρεῖν, ἐν ὁποιωδήποτε βούλῃ ἔτει.

Ἑρμηνεία.

Διὰ νὰ εὕρῃς τὸ Θεμέλιον τῆς Σελήνης, εἶναι χρεία νὰ σοὶ δοθῇ ὁ Κύκλος αὐτῆς, ἢ ἂν δὲν σοὶ δοθῇ, νὰ τὸν εὕρῃς μόνος σου, ὡς ἄνωθεν. Ἔπειτα νὰ τὸν πολλαπλασιάσῃς, ἐπὶ τὸν 11 Ἀριθμὸν, καὶ εἰς ἐκεῖνον τὸν Ἀριθμὸν ὅπου γένῃ, νὰ προσθέσῃς 3· ἔπειτα νὰ τὸν διαιρέσῃς ἐπὶ 30· καὶ ἐκεῖνο, ὅπου ἤθελεν ἀπομείνῃ ἀπὸ τὴν Διαίρεσιν, ἔσται τὸ ζητούμενον Θεμέλιον τῆς Σελήνης.

Ὑπόδειγμα Γ'.

Ἔστω καθ' Ὑπόθεσιν ὁ Χρόνος, καθ' ὃν ζητεῖται τὸ Θεμέλιον τῆς Σελήνης ὁ, 1818· εἰς τὸν ὁποῖον Χρόνον εὕρωμεν Κύκλον τῆς Σελήνης 11· τὸν πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸν ἕνδεκα Ἀριθμόν· καὶ εἰς ἐκεῖνο ὅπου γένῃ, προσθέτομεν 3· ἔπειτα διαιροῦμεν τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸν 30 Ἀριθμὸν, καὶ ἐκεῖνο ὅπου ἤθελεν ἀπομείνῃ ἐστὶ τὸ ζητούμενον Θεμέλιον· οἷον $11 . 11 = 121 + 3 = \frac{124}{30:}\ 3 + \frac{4}{30}$· ἄρα ἔχομεν Θεμέλιον Σελήνης 4· εἰς τοὺς 1818· ὡς ἐν τῷ Διαγράμματι καθορᾶται.

$11 . 11 = 121 + 3 = 124$.
ὅθεν $\frac{124}{30:} = 3 + \frac{4}{30}$.
ἄρα τὸ 1818· ἔτος ἔχομεν Θεμέλιον Σελήνης δ'.

Β'. Ἔστω ὅτι δὲν μᾶς ἐδόθη ὁ Κύκλος τῆς Σελήνης, καὶ ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τὸ Θεμέλιον αὐτῆς κατὰ τὸ 1820 ἔτος· εὑρεθήτω δὴ α'. ὁ Κύκλος αὐτῆς, κατὰ τὸ Β'. Πρόβλημα (§. 345.) καὶ εὑρίσκεται Κύκλος α'. εὑρεθήτω β'. καὶ τὸ Θεμέλιον αὐτῆς· κατὰ τὸ Γ'. Πρόβλημα (§. 336.) ἔσται οὖν· $1 . 11 = 11 + 3 = \frac{14}{30:}\ 0 + \frac{14}{30}$· ἄρα εἰς τοὺς 1820, θέλει ἔχομεν Θεμέλιον Σελήνης ιδ'. ὡς ἐν τῷ Διαγράμματι καθορᾶται· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

$1820 + 5508 = \frac{7328}{19:}$
$383 + \frac{1}{19}$· εὑρέθη ὁ Κύκλος τῆς Σελήνης
ὅθεν $1 . 11 = 11 +$
$3 = \frac{14}{30:}\ 0 + \frac{14}{30}$.
ἔστιν ἄρα Θεμέλιον 14.

Πρόβλημα Δ'.

§. 347. Τῶν ἀπὸ κτίσεως Κόσμου ἐτῶν δοθέντων, τὴν Ἰνδικτιῶνα εὑρεῖν, καθ' ὁποιοῦν ζητηθείη ἔτος.

Ἑρμηνεία.

Α'. Θέτομεν τὰ ἀπὸ κτίσεως Κόσμου διελθόντα ἔτη, μέχρι τῆς κατὰ Σάρκα Γεννήσεως τοῦ Κυρίου ἡμῶν Ἰησοῦ Χριστοῦ· (§. 327.) προσθέτομεν δὲ εἰς αὐτὰ καὶ τὰ ἀπὸ Χριστοῦ διελθόντα ἔτη, καθὼς ἐπράξαμεν καὶ εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ Κύκλου τοῦ Ἡλίου, ἢ τῆς Σελήνης. Ἔπειτα τὰ διαιροῦμεν μὲ τὸν 15 Ἀριθμὸν τῶν Ἰνδικτιώνων· (§. 331.) ὁ δὲ Ἀριθμὸς, ὅστις ἀπομείνει ἀπὸ αὐτὴν τὴν Διαίρεσιν, θέλει μᾶς δείξῃ τὴν Ἰνδικτιῶνα ὅπου ζητοῦμεν.

Ὑπόδειγμα.

Ἔστω καθ' Ὑπόθεσιν τὸ ἔτος ὁποῦ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τίνα Ἰνδικτιῶνα τὸ, 1816· ἔσται οὖν· $5508 + 1816 = \frac{7324}{15:}\ 488 + \frac{4}{15}$· ἔστιν ἄρα Ἰνδικτιὼν δ'. ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

$5508 + 1816 + 7324$.
ὅθεν $\frac{7324}{15:}\ 488 + \frac{4}{15}$.
ἔχομεν ἄρα εἰς τοὺς 1816, Ἰνδικτιῶνα δ'.

Πρόβλημα Ε'.

§. 348. Τῶν ἀπὸ κτίσεως Κόσμου ἐτῶν δοθέντων, τὸν Βίσεκτον, καθ' ὃν ἂν ζητηθείη Χρόνον εὑρεῖν.

Ἑρμηνεία.

Α'. Θὲς τὰ ἀπὸ κτίσεως Κόσμου παρελθόντα ἔτη, μέχρι τῆς Σωτηρίου ἐποχῆς. (§. 327.) β'. Πρόσθεσον εἰς αὐτὰ καὶ τὰ ἀπὸ Χριστουγεννήσεως διελθόντα, ἕως τὸ ἔτος ὁποῦ θέλεις νὰ εὕρῃς τὸ ἔτος ὁποῦ ἔχομεν μετὰ τὸν Βίσεκτον· ἔπειτα διαίρεσον αὐτὰ μὲ τὸ 4· (§. 332.) καὶ ὅ,τι ἀπομείνῃ ἀπὸ τὴν Διαίρεσιν, τόσοι Χρόνοι ἀπέρασαν ἀπὸ τὸν Βίσεκτον.

$$5508 + 1819 = 7327.$$
$$\text{ὅθεν } \frac{7327}{4:}\ 1831 + \frac{3}{4}.$$

Ὑπόδειγμα Ε΄.

Ἔςω καθ᾽ Ὑπόθεσιν νὰ εὕρωμεν τοὺς Χρόνους, οἵτινες ἀπέρασαν ἀπὸ τὸν Βίσεκτον, τὸ 1819· ἔτος τὸ Σωτήριον· ὅθεν ἔςαι· $5508 + 1819 = \frac{7327}{4:}\ 1831 + \frac{3}{4}$· ἀπέρασαν ἄρα ἀπὸ τὸν Βίσεκτον ἔτη 3· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Σημείωσις.

Πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν, ὅτι ὁ Χρόνος ἔχει ἡμέρας 365· καὶ ὥρας 6· (μάλιστα ἂν ζητήσωμεν λεπτομερῶς, θέλομεν εὕρῃ τὸν Χρόνον ὅτι ἔχει ἡμέρας μὲν = 365· ὥρας δὲ 5· καὶ λεπτὰ πρῶτα 49.) ὅθεν αὗται αἱ 6· ὧραι εἰς τέσσαρας Χρόνους, γίνονται 24· αἵτινες κάμνουσι μίαν ἡμέραν· διὰ τοῦτο εἰς κάθε τέσσαρας Χρόνους, ὁ Χρόνος ἔχει 366 ἡμέρας· τὸν ὁποῖον ὀνομάζομεν Βίσεκτον· καὶ αὐτὴν τὴν ἡμέραν τὴν προσθέτομεν εἰς τὸν Φεβρουάριον μῆνα· διὰ τοῦτο καὶ εἰς τὴν Διαίρεσιν ὁποῦ κάμνομεν διὰ νὰ εὕρωμεν πόσοι Χρόνοι ἀπέρασαν ἀπὸ τὸν Βίσεκτον, ἂν δὲν μείνῃ τίποτες, ὁ Χρόνος ἐςὶ Βίσεκτος.

Πρόβλημα ϛ΄.

§. 349. Τὴν ἡμέραν καθ᾽ ἣν ἕκαστος τῶν Μηνῶν ἄρχεται, εὑρεῖν.

Ἑρμηνεία.

Α΄. Λάβε τὸν Κύκλον, ὁποῦ ἔχει ὁ Ἥλιος τοῦ Ἔτους ἐκείνου, κατὰ τὸ ὁποῖον θέλεις νὰ μάθῃς τί ἡμέρα ἀρχίζει ὁ Μὴν, τὸν ὁποῖον θέλεις νὰ εὕρῃς· ἢ ἂν δὲν ἐνθυμᾶσαι τὸν Κύκλον τοῦ Ἡλίου, εὑρὲ αὐτὸν μόνος σου· κατὰ τὸν (§. 344.) παράγραφον. Β΄. Πρόσθεσον εἰς τὸν Κύκλον τοῦ Ἡλίου ὁποῦ ἔχεις, ἢ εὕρες, καὶ τοὺς ἐν αὐτῷ περιεχομένους Βισέκτους· (ἐπειδὴ εἰς κάθε τέσσαρας Κύκλους, εἷς ἐμπεριέχεται Βίσεκτος·) ὅρα (§. 332 καὶ 338.) πρόσθεσον ἔτι καὶ τὰς τοῦ ζητουμένου Μηνὸς Ἐπακτάς· (§. 333.) καὶ ἀφ᾽ οὗ τὰ συνάψῃς διαίρεσον τὸν Ἀριθμὸν ὁποῦ γένῃ μὲ τὸ 7· (ἐπειδὴ ἑπτὰ ἡμέρας ἔχει ἡ Ἑβδομάς·) ἐκεῖνος δὲ ὁ Ἀριθμὸς, ὅς τις ἀπομείνῃ ἀπὸ τὴν Διαίρεσιν, θέλει σοι φανερώσῃ τὴν ἡμέραν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἀρχίζει ὁ ζητούμενος Μήν· εἰ δὲ καὶ δὲν ἀπομείνῃ τι, ἀρχίζει ἀπὸ τὸ Σάββατον.

Ὑπόδειγμα ϛ΄.

Ἔστω καθ᾽ Ὑπόθεσιν τὸ ἔτος, ὁποῦ θέλω νὰ μάθω ποίαν ἡμέραν ἀρχίζει ὁ Αὔγουστος, τὸ 1816· κατὰ τὸ ὁποῖον εὕρομεν ὅτι ὁ Ἥλιος ἔχει Κύκλον ιβ΄. (§. 334.)

Καὶ ἐπειδὴ εἰς τοὺς 16 Κύκλους, τετράκις εὑρίσκεται τὸ 4· οἷον $\frac{16}{4:}$ 4· πρόσθεσον τὸ 4 εἰς τοὺς 16 Κύκλους τοῦ Ἡλίου, καὶ γίνονται 20· εἰς αὐτὰ πρόσθεσον καὶ τὰς 4 Ἐπακτὰς τοῦ Αὐγούστου μηνὸς ὁποῦ ζητεῖς ποίαν ἡμέραν τῆς Ἑβδομάδος ἀρχίζει· (§. 333.) καὶ γίνονται 24· οἷον $16 + 4 + 4 = 24$· διαίρεσον αὐτὰς μὲ τὸν Ἀριθμὸν τῶν τῆς Ἑβδομάδος ἡμερῶν = 7· καὶ μένουσι 3· οἷον $\frac{24}{7:}\ 3 + \frac{3}{7}$· ἄρα ἀρχίζει ὁ Αὔγουστος μὴν ἡμέρᾳ γ΄.

Ἄλλως.

Ἔςω καθ᾽ Ὑπόθεσιν, ὅτι θέλω νὰ μάθω πότε ἀρχίζει ὁ Μάρτιος μῆνας εἰς τὰς 1822· δὲν ἠξεύρω ὅμως οὔτε τὸν Κύκλον τοῦ Ἡλίου ὁποῦ θέλει ἔχῃ κατὰ τὸ ῥηθὲν ἔτος. Α΄. Εὑρὲ τὸν Κύκλον τοῦ Ἡλίου, καθὼς ἑρμηνεύσαμεν (§. 334.) ἔπειτα κάμε τὴν πρᾶξιν, ὡς ἄνωθεν, καὶ θέλεις εὕρῃ, ὅτι ὁ Μάρτιος μὴν ἄρχεται ἡμέρᾳ δ΄. οἷον ὁ μὲν Ἥλιος ἔχει Κύκλον 22 εἰς τὸν ὁποῖον εὑρίσκονται 5 Βίσεκτοι· ἔχει δὲ καὶ ὁ Μάρτιος Ἐπακτὰς 5, τὰ ὁποῖα συνάπτων, γίνεται ὁ 32 Ἀριθμὸς,

$$5508 + 1822 = 7330.$$
$$\text{ὅθεν } \frac{7330}{28:}\ 261 + \frac{22}{28}.\ \text{ἔχει}$$
ἄρα Κύκλους 22. λοιπόν.
$$22 + 5 + 5 = 32.\ \text{ὅθεν } \frac{32}{7:}$$
$$4 + \frac{4}{7}.\ \text{ἀρχίζει οὖν ἡμέρᾳ δ΄.}$$

μὸς, τὸν ὁποῖον διαιρῶν μὲ τὰς 7 ἡμέρας ὅπου ἔχει ἡ Ἑβδομὰς, μένουσι 4· οἷον $22 + 5 + 5 = \frac{32}{7}: 4 + \frac{4}{7}$· ἄρα εἰς τὰς 1822· θέλει ἀρχίσῃ ὁ Μάρτιος μὴν, ἡμέρα δ'. ὃ ἦν τὸ ζητούμενον· τὸν ἴδιον τρόπον θέλεις μεταχειρισθῇ καὶ εἰς καθε ἄλλο ἔτος νὰ εὑρίσκῃς τὴν ἡμέραν τῆς Ἑβδομάδος, κατὰ τὴν ὁποίαν ἀρχίζει ἕκαστος Μὴν, τὸν ὁποῖον θέλεις νὰ εὕρῃς.

Πρόβλημα Ζ'.

§. 350. Τῶν τῆς Σελήνης Κύκλων δοθέντων, τὸ Νομικὸν Φάσκα εὑρεῖν.

Ἑρμηνεία.

Πολλαπλασίασον τὸν Κύκλον ὅπου ἔχει ἡ Σελήνη, καθ' ὃ ἔτος γίνεται ἡ ζήτησις, μὲ τὸ 11, καὶ εἰς ἐκεῖνον τὸν Ἀριθμὸν ὁποῦ γένῃ, πρόσθεσον 6· (ὅταν ὅμως ἡ Σελήνη ἔχει Κύκλον 17, ἢ 18, ἢ 19, πρόσθεσον 7) καὶ ἀφ' οὗ τὰ συνάψῃς, διαίρεσον τὸν γενόμενον Ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν 30 (§. 336.) καὶ εἰς ἐκεῖνον τὸν Ἀριθμὸν ὁποῦ μείνῃ ἀπὸ τὴν Διαίρεσιν, πρόσθεσον ἐκ τῶν ἡμερῶν τοῦ Μαρτίου μηνὸς, ἕως ὅπου νὰ γένῃ ὁ 50 Ἀριθμός· εἰ δὲ καὶ δὲν φθάνουσιν αἱ ἡμέραι τοῦ Μαρτίου νὰ γένωσι πεντήκοντα, πρόσθεσον εἰς αὐτὰς καὶ ἐκ τῶν ἡμερῶν τοῦ Ἀπριλλίου, καὶ εἰς ἐκείνην τὴν ἡμέραν τοῦ Μηνὸς ὅπου τελειώνουσιν αἱ 50 ἡμέραι, θέλει εἶναι τὸ Νομικὸν Φάσκα.

Ὑπόδειγμα Ζ'.

Ἔστω καθ' Ὑπόθεσιν τὸ 1816. Σωτήριον ἔτος, κατὰ τὸ ὁποῖον ζητεῖται νὰ εὕρωμεν εἰς ποῖον Μῆνα καὶ εἰς τὰς πόσας τοῦ Μηνὸς, τελεῖται τὸ Νομικὸν Φάσκα· καὶ ἐπειδὴ κατὰ τὸ ῥηθὲν ἔτος ἡ Σελήνη ἔχει Κύκλον 9, τὸν πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸν 11 Ἀριθμὸν, καὶ γίνονται 99· (§. 336.) οἷον $11 . 9 = 99$· προσθέτωντας καὶ 6, γίνονται 105· διαίρεσον μὲ τὸν 30, καὶ μένουσι 15· οἷον $99 + 6 = \frac{105}{30}: 3 + \frac{15}{30}$· πρόσθεσον εἰς αὐτὰς καὶ τὰς 31

$9 . 11 = 99 + 6 = \frac{105}{30}$
$= 3 + \frac{15}{30}$.
ὅθεν $15 + 31 + 4 = 50$.
ἄρα τὸ Νομικὸν Φάσκα ἔσται εἰς τὰς 4 τοῦ Ἀπριλλίου.

ἡμέρας τοῦ Μαρτίου, καὶ γίνονται 46· οἷον $15 + 31 = 46$· ἕως τὰς 50 λείπουσι 4· πρόσθεσον αὐτὰς ἀπὸ τὸν Ἀπρίλλιον διὰ νὰ γένωσι 50· οἷον $46 + 4 = 50$· ἔσται ἄρα τὸ Νομικὸν Φάσκα τὸ 1816 ἔτος Ἀπριλλίου δ'. ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Πρόβλημα Η'.

§. 351. Τοῦ Νομικοῦ Φάσκα δοθέντος, τὸ Ἅγιον Πάσχα εὑρεῖν.

Ἑρμηνεία.

Ἀφ' οὗ εὕρῃς τὸ Νομικὸν Φάσκα, ἐρεύνησον εἰς ποίαν ἡμέραν ἐστί· (§. 339.) καὶ τὴν ἐρχομένην Κυριακὴν ἔσται τὸ Ἅγιον Πάσχα.

Ὑπόδειγμα Η'.

Ἐπειδὴ εἰς τὰς 1816, εὑρέθη τὸ Νομικὸν Φάσκα τῇ δ'. Ἀπριλλίου (§. 340.) ἂς εὑρεθῇ ἡ ἡμέρα, κατὰ τὴν ὁποίαν ἀρχίζει ὁ Ἀπρίλλιος μὴν· (§. 339.) οἷον $16 + 4 + 1 = \frac{21}{7}: 3 \frac{0}{7}$· καὶ εὑρίσκεται ἡμέρα Σαββάτου· ἀπὸ δὲ τὸ Σάββατον μετρῶντας ἕως τὰς τέσσαρας Ἀπριλλίου, εὑρίσκονται ἡμέραι 4· λοιπὸν τὸ Νομικὸν Φάσκα τελεῖται τῇ δ'. Ἀπριλλίου ἡμέρᾳ γ'. ἀπὸ δὲ τὴν γ'. ἕως τὴν Κυριακὴν εἰσὶν ἡμέραι 5· ὅθεν 4 Ἀπριλλίου τὸ Φάσκα, καὶ πέντε ἐκ τοῦ Φάσκα ἕως τὴν ἐρχομένην Κυριακὴν γίνονται 9· οἷον $4 + 5 = 9$· ἄρα τὸ Ἅγιον Πάσχα, εἰς τὰς 1816 ἔσται τῇ θ'. Ἀπριλλίου· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

$16 + 4 + 1 = \frac{21}{7}: 3 + \frac{0}{7}$.
ὅθεν $4 + 5 = 9$. ἄρα τῇ θ'. Ἀπριλ. ἐστὶ τὸ Πάσχα.

Πρόβλημα Θ'.

§. 352. Τοῦ Ἁγίου Πάσχα δοθέντος, τὴν Ἀπόκρεω εὑρεῖν.

Ἑρμηνεία.

Λάβε τὰς ἡμέρας τοῦ Μηνὸς, κατὰ τὴν ὁποίαν εὑρέθη ὅτι ἐστι τὸ Ἅγιον Πάσχα (§. 341.) καὶ πρόσθεσον εἰς αὐτὰς ἡμέρας ἕξ, εἰ δὲ εἶναι Βίσεκτος ὁ Χρόνος, (§. 338.) πρόσθεσον τέσσαρας. Καὶ εἰ μὲν ἀφ' οὗ προσθέσῃς τὰς ῥηθείσας ἡμέρας, ὁ Ἀριθμὸς τῶν Ἀριθμηθεισῶν ἡμερῶν, εἴσιν ἐν τῷ Μαρτίῳ μηνὶ, ἡ Ἀποκρέω κατὰ ταύτην τὴν ἡμέραν ἔσαι ἐν τῷ Ἰανουαρίῳ μηνί. Εἰ δὲ εἰς τὰς ἡμέρας τοῦ Ἀπριλλίου πληροῦται ὁ Ἀριθμὸς τῶν ῥηθεισῶν ἡμερῶν, ἡ Ἀποκρέω, ἐν τῷ Φεβρουαρίῳ μηνὶ ἔσαι.

Ὑπόδειγμα Θ΄.

Ἔστω εἰς Ὑπόδειγμα τὸ 1816 ἔτος· κατὰ τὸ ὁποῖον τὸ Ἅγιον Πάσχα εὕρηται τῇ θ΄. Ἀπριλλίου· (§. 341.) καὶ ἐπειδὴ ἐστι Βίσεκτος, (§. 338.) πρόσθεσον ἡμέρας 4, καὶ γίνονται 13· οἷον $9+4=13$· ἄρα ἡ Ἀποκρέω τοῦ 1816 ἔτους ἐστὶ τῇ ιγ΄. τοῦ Φεβρουαρίου μηνός· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

$9+4=13$. ὅθεν τῇ ιγ΄. τοῦ Φεβρουαρίου ἐστιν ἡ Ἀποκρέω.

Πρόβλημα Ι΄.

§. 353. Τῆς Ἀποκρέω δοθείσης, ἐν πόσῃ ἡμέρᾳ τοῦ Μηνὸς τὸ Τελώδιον ἄρχεται εὑρεῖν.

Ἑρμηνεία.

Λάβε τὴν ἡμέραν, κατὰ τὴν ὁποίαν εὑρέθη ἡ Ἀποκρέω· (§. 342.) καὶ ἀφ' οὗ ἀφαιρέσῃς ἐξ αὐτῶν ἡμέρας 14, ὁ Ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν ὁποῦ ἀπομείνῃ ἀπὸ τὴν Ἀφαίρεσιν, θέλει σοι δείξῃ τὴν ἡμέραν τοῦ Μηνὸς κατὰ τὴν ὁποίαν ἄρχεται τὸ Τελώδιον, τὸ δηλωθὲν ἔτος.

Ὑπό-

Ὑπόδειγμα Ι΄.

Κατὰ τὸ 1816. Σωτήριον ἔτος, εὑρέθη ἡ Ἀποκρέω τῇ ιγ΄. τοῦ Φεβρουαρίου μηνός. Καὶ ἐπειδὴ τὸ Πρόβλημα προσάζει νὰ ἀφαιρέσῃς ἡμέρας 14, ἀπὸ τὴν ἡμέραν τοῦ Μηνὸς κατὰ τὴν ὁποίαν εὑρέθη ἡ Ἀποκρέω, ἀφαίρεσον τὰς 13 τοῦ Φεβρουαρίου, καί μας λείπει ἔτι μία· ἀφαίρεσον λοιπὸν μίαν ἡμέραν ἀπὸ τὰς 31 τοῦ Ἰανουαρίου (§. 333.) καὶ ἐναπολείπονται 30· ἄρα τὸ Τελώδιον ἄρχεται κατὰ τὸ ῥηθὲν ἔτος Ἰανουαρίου λ΄.

$14-13-1=30$.
ὅθεν $31+13=$
$=44-14=30$.

Ἄλλως.

Θὲς τὰς ἡμέρας τοῦ Μηνὸς εἰς τὰς ὁποίας εὑρέθη ἡ Ἀποκρέω, καὶ ὅταν εἶναι ὀλιγώτεραι τῶν 14 ὁποῦ πρέπει νὰ ἀφαιρέσῃς, πρόσθεσον εἰς αὐτὰς καὶ τὰς ἡμέρας τοῦ πρὸ αὐτοῦ Μηνός· ἐκ δὲ τοῦ ἀθροίσματος τούτων τῶν συναφθέντων ἡμερῶν, ἀφαίρεσον τὰς 14, ἡμέρας, καὶ ὁ Ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν ὁποῦ ἐναπομείνῃ, θέλει σοι δείξῃ τὴν ἡμέραν καὶ τὸν Μῆνα, καθ' ἣν ἄρχεται τὸ Τελώδιον· οἷον 13 τοῦ Φεβρουαρίου, καὶ 31 τοῦ Ἰαννουαρίου, γίνονται 44· ὅθεν ἀφαιρῶντας τὰς 14, μένουσι 30 οἷον $13+31=44-14=30$· ἄρα ἡ Ἀποκρέω ἔσαι τῇ τριακοστῇ Ἰανουαρίου· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Πρόβλημα ΙΑ΄.

§. 354. Τῆς ἡμέρας τοῦ Μηνὸς καθ' ἣν εὕρηται τὸ Ἅγιον Πάσχα δοθείσης, τὴν ἡμέραν τῆς τῶν Ἁγίων Πάντων μνήμης εὑρεῖν. (§. 341.)

Ἑρμηνεία.

Λάβε τὴν ἡμέραν τοῦ Μηνὸς, κατὰ τὴν ὁποίαν εὑρέθη τὸ Ἅγιον Πάσχα, καὶ ἀφαίρεσον ἀπὸ αὐτὰς ἡμέρας 5· αἱ δὲ ἐναπολειφθεῖσαι, δείξουσί σοι τὴν ἡμέραν τοῦ Μηνὸς, καθ' ἣν τελεῖται ἡ τῶν Ἁγίων Πάντων μνήμη. Πρέπει ὅμως νὰ ἠξεύ-

ρῃς,

ρης, ὅτι ἀνίσως μετὰ τὴν Ἀφαίρεσιν τῶν πέντε ἡμερῶν, ὁ ἐναπολειφθεὶς Ἀριθμὸς ἤθελε μείνῃ εἰς τὰς ἡμέρας τοῦ Μαρτίου, ἡ μνήμη τῶν Ἁγίων Πάντων, ἔσται τὸν Μάϊον. Εἰ δὲ εἰς τὰς ἡμέρας τοῦ Ἀπριλλίου, ἔσται τὸν Ἰούνιον.

Ὑπόδειγμα ΙΑ΄.

Ἐπειδὴ κατὰ τὸ 1816. Σωτήριον ἔτος εὑρέθη τῇ θ΄. Ἀπριλλίου ἀφαίρεσον ἐξ αὐτῶν ἡμέρας 5, καὶ ἐναπολείπονται 4· οἷον $9 - 5 = 4$· ἄρα ἐστὶ τῇ δ΄. Ἰουνίου· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

$9 - 5 = 4$. ἄρα ἡ τῶν Ἁγίων Πάντων μνήμη, ἔσται Ἰουνίου δ΄.

Πρόβλημα ΙΒ΄.

§. 355. Τοῦ Ἁγίου Πάσχα δοθέντος, τὸν Ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν τῆς τῶν Ἁγίων Ἀποστόλων Νηστείας εὑρεῖν.

Ἑρμηνεία.

Μέτρησον τὰς ἡμέρας, ἀπὸ τὴν ἡμέραν τοῦ Μηνὸς ὅπου εὑρέθη τὸ Πάσχα· (§. 341.) ἕως εἰς τὰς 2 τοῦ Μαΐου μηνός· ὁ δὲ εὑρεθεὶς Ἀριθμός, θέλει σοι δείξῃ τὸν Ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν τῆς ζητουμένης τῶν Ἁγίων Ἀποστόλων Νηστείας.

Ὑπόδειγμα ΙΒ΄.

Τὸ Ἅγιον Πάσχα, εἰς τοὺς 1816, εὑρέθη τῇ θ΄. Ἀπριλλίου· (§. 341.) ἀπ' αὐτὴν λοιπὸν τὴν ἡμέραν τοῦ Πάσχα κάμνοντας ἀρχήν, μέτρησον τὰς ἡμέρας, ἕως τὰς 30 Ἀπριλλίου, καὶ εἶσιν 22, καὶ 2 ἐκ τοῦ Μαΐου γίνονται 24· ἡ Νηστεία ἄρα τῶν Ἁγίων Ἀποστόλων τὸ 1816. Σωτήριον ἔτος εἶσιν 24· οἷον 30 αἱ ἡμέραι τοῦ Ἀπριλλίου (§. 333.) καταβάζοντας τὰς 8, μένουσιν 22· προσθέτων καὶ 2 ἀπὸ τὸν Μάϊον, γίνονται 24· ὅθεν $30 - 8 = 22 + 2 = 24$· ἄρα κτλ. ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

$30 - 8 = 22 + 24$. ἄρα ἡ Νηστεία τῶν Ἁγίων Ἀποστόλων ἐστὶν ἡμέρας 24.

Πρό-

Πρόβλημα ΙΓ΄.

§. 356. Τῆς ἡμέρας τοῦ Μηνός, καθ' ἣν εὕρηται ἡ τῶν Ἁγίων Πάντων μνήμη δοθείσης, τόν τε Ἦχον, καὶ Ἑωθινόν, καθ' ἣν ἡμέραν τὸ Τριῴδιον ἄρχεται, εὑρεῖν, ἐν τῷ ἐφεξῆς ἔτει.

Ἑρμηνεία.

Α΄. Εὑρὲ τὴν ἡμέραν τοῦ Μηνός, κατὰ τὴν ὁποίαν ἀρχίζει τὸ Τριῴδιον ἐν τῷ ἐφεξῆς ἔτει. (§. 343.) Ἔπειτα μέτρησον τὰς ἡμέρας, ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῶν Ἁγίων Πάντων, ἕως τῆς ἡμέρας τοῦ Μηνὸς ὅπου εὗρες, ὅτι ἄρχεται τὸ Τριῴδιον· τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἡμερῶν ὅπου γένῃ, διαίρεσον μὲ τὸν 7 Ἀριθμόν, διὰ νὰ γένωσιν Ἑβδομάδες· ἔπειτα διαίρεσον καὶ τὰς γενομένας Ἑβδομάδας μὲ τὸν 8 Ἀριθμόν, καὶ ὁ Ἀριθμός, ὅς τις ἀπομείνῃ, θέλει σοι δείξῃ τὸν ζητούμενον Ἦχον· εἰ δὲ καὶ δὲν ἀπομείνῃ τίποτες ἀπὸ τὴν Διαίρεσιν, εἶναι Ἦχος Πλ. δ΄. διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ καὶ τὸ Ἑωθινόν, πρόσθεσον εἰς τὰς εὑρεθείσας Ἑβδομάδας ἔτι μίαν, καὶ διαίρεσον αὐτὰς μὲ τὸν 11 Ἀριθμόν· καὶ ὁ ἐναπολειφθεὶς Ἀριθμὸς μετὰ τὴν Διαίρεσιν, θέλει σοι δείξῃ τὸ ζητούμενον Ἑωθινόν. Εἰ δὲ καὶ δὲν μείνῃ τίποτες, ἔσται Ἑωθινὸν ια.

Ὑπόδειγμα ΙΓ΄.

Ἐπειδὴ ἡ μνήμη τῶν Ἁγίων Πάντων, τὸ 1816 ἔτος, εὑρέθη τῇ δ΄. Ἰουνίου (§. 356.) τὸ δὲ Τριῴδιον, ἐν τῷ ἐφεξῆς ἔτει, ἄρχεται τῇ ιδ΄. τοῦ Ἰανουαρίου. Ἀρίθμησον τὰς ἡμέρας ἀπὸ τὰς 4 Ἰουνίου, ἕως τὰς 14 Ἰανουαρίου, καὶ εὑρεθήσονται ἡμέραι 224· οἷον 26 αἱ λοιπαὶ τοῦ Ἰουνίου· 31 αἱ τοῦ Ἰουλίου αἱ τοῦ Αὐγούστου 31· αἱ τοῦ Σεπτεμβρίου 30· αἱ τοῦ Ὀκτωβρίου 31· αἱ τοῦ Νοεμβρίου 30· αἱ τοῦ Δεκεμβρίου 31· καὶ 14· αἱ τοῦ Ἰανουαρίου· συμποσοῦνται 224· οἷον $26 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 14 = 224$· ὅθεν $\frac{224}{7}$ 32· ἔγιναν 32. Ἑβδομάδες τὰς ὁποίας διαιρῶντας μὲ τὰ 8, δὲν μένει οὐδέν· οἷον $\frac{32}{8}$ 4

$\frac{224}{7}$ 32. $\frac{32}{8}$ $4 + \frac{0}{8}$ = Πλάγιον δ΄.
$32 + 1 = \frac{33}{11}$ $3 + \frac{0}{11}$.
Ἑωθινὸν ια.

$4 + \frac{0}{8}$· λοιπὸν ἔσται Ἦχος Πλ. δ΄. 32, αἵτινες εὑρέθησαν· καὶ μίαν ὁποῦ προσθέτομεν γίνονται 33· τὰς διαιροῦμεν μὲ τὰ 11, καὶ δὲν μένει τίποτες· οἷον $32 + 1 = \frac{33}{11} = 3 + \frac{0}{11}$· ἄρα ἔσται Ἑωθινὸν ιά. εὕρηται ἄρα τὰ ζητούμενα.

Πόρισμα.

Μὲ αὐτὴν ἄρα τὴν Μέθοδον, δύνασαι νὰ εὕρῃς τόν τε Ἦχον, καὶ τὸ Ἑωθινὸν, καὶ κάθε ἄλλης Κυριακῆς ὁποῦ ἤθελε τύχῃ νὰ ἀλησμονήσῃς· μετρῶν δηλαδὴ τὰς ἀπὸ τῶν Ἁγίων Πάντων ἡμέρας, ἕως τὴν ἡμέραν τοῦ Μηνὸς ἐκείνου τῆς Κυριακῆς ὁποῦ ζητεῖς νὰ εὕρῃς τὸν ἀλησμονηθέντα σοι Ἦχον, ἢ τὸ Ἑωθινόν· καὶ θέλεις τὰ εὕρῃ εὐκόλως.

Πρόβλημα ΙΔ΄.

§. 357. Τὴν ἡμέραν, καθ᾽ ἣν ἡ Νέα γίνεται Σελήνη εὑρεῖν, ἐν ὁποιωδήποτε Μηνί.

Ἑρμηνεία.

Λαβὼν τὸ Θεμέλιον τῆς Σελήνης ὁποῦ ἔχει τὸ ἔτος ἐκεῖνο, κατὰ τὸ ὁποῖον γίνεται ἡ ζήτησις, εἰς αὐτὸ πρόσθεσον καὶ τοὺς ἀπὸ Μαρτίου παρελθόντας Μῆνας, ἕως τὸν Μῆνα ἐκεῖνον, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ Νέα Σελήνη, εἰς ποίαν ἡμέραν τοῦ Μηνὸς γίνεται· καὶ εἰς ἐκεῖνον τὸν Ἀριθμὸν ὁποῦ γένῃ, πρόσθεσον ἐκ τῶν ἡμερῶν τοῦ αὐτοῦ Μηνὸς, ἕως ὁποῦ νὰ γένῃ ὁ 30 Ἀριθμός· καὶ εἰς ἐκείνην τὴν ἡμέραν ὁποῦ πληρωθῶσιν αἱ 30 ἡμέραι, θέλει γένῃ ἡ ζητουμένη Νέα Σελήνη.

Ὑπόδειγμα ΙΔ΄.

Θέλομεν καθ᾽ Ὑπόθεσιν νὰ εὕρωμεν εἰς ποίαν ἡμέραν τοῦ μηνὸς Αὐγούστου γίνεται ἡ Νέα Σελήνη, κατὰ τὸ 1816. Σωτήριον ἔτος· καθ᾽ ὃν Χρόνον ἔχομεν, Σελήνης μὲν Κύκλον 9. Θεμέλιον δὲ αὐτῆς 12· λαβόντες δὲ τὸ Θεμέλιον αὐτῆς, προσθέτομεν εἰς αὐτὸ τοὺς ἀπὸ τὸν Μάρτιον παρελθόντας 6 Μῆνας μέχρι τοῦ Αὐγούστου, καὶ γίνονται 18· οἷον $12 + 6 = 18$· λοιπὸν ἕως τὰς 30, λείπουσι δώδεκα· ἄρα ἡ Νέα

Σε-

Σελήνη γίνεται τῇ ιβ΄. τοῦ Αὐγούστου μηνός· κατὰ τὸ ῥηθὲν ἔτος ὅ ἐστι τὸ ζητούμενον.

$$12 + 6 = 18$$
$$30 - 18 = 12.$$

Τοιαύτη μὲν ἐστὶ καὶ ἡ περὶ τοῦ Καλενδαρίου, εἴτε Πασχαλίου Μέθοδος· τοῦ εὑρίσκειν ἕκαστον τῶν ἐκτεθέντων δεκατεσσάρων Προβλημάτων· ἀλλ᾽ ἐπεὶ περὶ Ἔτους καὶ Μηνῶν ἐμνήσθημεν, εἴπωμεν βραχέα τινὰ καὶ περὶ αὐτῶν.

Περὶ Ἐνιαυτοῦ, ἢ Ἔτους.

§. 358. Ὁ Ἐνιαυτὸς, ὃς καὶ ἔτος ὀνομάζεται, ἐστὶ διττός· Ἡλιακὸς, καὶ Σεληνιακός· ἑκάτερος δὲ τούτων ἐπιδιαιρεῖται εἰς Ἀστρονομικὸν, καὶ Πολιτικόν.

Καὶ Ἡλιακὸν μὲν Ἀστρονομικὸν ἔτος ἐστὶ, τὸ ἐξ ἡμερῶν 365, καὶ ὡρῶν 5, καὶ λεπτῶν πρώτων 49 συνιστάμενον.

Ἡλιακὸν δὲ Πολιτικὸν ἔτος ἐστι, τὸ ἐξ ἡμερῶν ὁλοκλήρων συγκείμενον· ὅτε μὲν, ἐκ 365· ὅτε δὲ ἐκ 366· ὃ δὴ καὶ Βίσεκτον ὀνομάζεται.

§. 359. Σεληνιακὸν δὲ Ἀστρονομικὸν ἔτος ἐστι, σύστημα δώδεκα Μηνῶν συνοδικῶν· ἤτοι περιεκτικὸν ἡμερῶν 357. ὡρῶν 8 λεπτῶν $\overset{\text{I}}{48}$, $\overset{\text{II}}{38}$, $\overset{\text{III}}{12}$.

Τὸ δὲ Σεληνιακὸν Πολιτικὸν ἔτος, ἐστι διττόν· τὸ μὲν κοινὸν, τὸ δὲ ἐμβόλιμον.

Καὶ κοινὸν μὲν ἐστὶ, τὸ ἐκ Μηνῶν Σεληνιακῶν Πολιτικῶν δώδεκα.

Ἐμβόλιμον δὲ, τὸ ἐκ δεκατριῶν Μηνῶν συγκείμενον. Κἀκεῖνο μὲν ἐστὶ 354. τοῦτο δὲ 384 ἡμερῶν περιεκτικόν.

Ἡ τοῦ Ἔτους ἀρχὴ ἐστιν ἡμέρα ὡρισμένη· ἐξ ἧς πᾶσαι αἱ λοιπαὶ ἡμέραι τοῦ Ἔτους συνεχῶς ἀριθμοῦνται. Οἰκειότερον δὲ ταύτην εἶναι, μίαν τῶν ἰσημερινῶν, ἢ τροπικῶν ἡμερῶν, ἵνα τὸ διάφορον αὐτῆς ᾖ καταφανὲς, πρὸς τὰς ἄλλας παραβαλλόμενον ἡμέρας· ἐν μὲν γὰρ ταῖς ἰσημερίαις, ἡ ἰσότης ὑπάρχει τῶν τε ἡμερῶν καὶ νυκτῶν· ἐν δὲ ταῖς τροπαῖς, ἡ ἀνισότης, κατὰ τὸ μέγιστον, καὶ ἐλάχιστον.

Ση-

Σημείωσις.

Τοῦτο ὑπό τινων Ἐθνῶν εὕρηται παρατηρούμενον. Χαλδαῖοι μὲν γὰρ καὶ Αἰγύπτιοι, περὶ τὴν μετοπωρινὴν Ἰσημερίαν τὴν τοῦ Ἔτους ἐποιοῦντο ἀρχήν. Ἰουδαῖοι δὲ, περὶ τὴν Ἐαρινήν, πρὸ τῆς εἰς Αἴγυπτον καταβάσεως, μετὰ γὰρ ταύτην, τὴν τῶν Αἰγυπτίων δέξασθαι λέγεται. Καὶ αὖθις παραλεῖψαι ταύτην ἐκεῖθεν ἐξελθόντες, οὕτω τοῦ Θεοῦ διὰ Μωϋσέως θεσπίσαντος. Οἱ δὲ Ῥωμαῖοι, πρὸ μὲν τοῦ Νουμᾶ, ἐκ Καλενδῶν Μαρτίου τοῦ Ἔτους τὴν ἀρχὴν ἐποιοῦντο· ὕστερον δὲ, ἐκ Καλενδῶν Ἰαννουαρίου, ὃ δὴ ἐξ ἐκείνων καὶ εἰς ἡμᾶς διεφοίτησε. Πλὴν ὅτι ἡμεῖς τῶν ἀπὸ τῆς Θείας ἐνανθρωπήσεως ἐτῶν ἐκ Καλενδῶν Ἰαννουαρίου τὴν ἀρχὴν τοῦ Ἔτους λαμβάνομεν· ἀρχὴν δὲ ἐνιαύσιον, Ἀστρονομικῶς τε καὶ Φυσικῶς, τὴν πρώτην Μαρτίου ἴσμεν. Πολιτικῶς δὲ, ἢ κρεῖττον εἰπεῖν Ἐκκλησιαστικῶς τὴν πρώτην Σεπτεμβρίου οἴδαμεν καὶ ἑορτάζομεν.

Περὶ Μηνῶν.

§. 360. Ὁ Μὴν διαιρεῖται εἰς Ἡλιακὸν, καὶ Σεληνιακόν· ὧν ἑκάτερος ἐπιδιαιρεῖται εἰς Ἀστρονομικὸν, καὶ Πολιτικόν.

Ὁ δὲ Σεληνιακὸς Ἀστρονομικὸς, διαιρεῖται, εἰς Συνοδικὸν, καὶ Περιοδικόν.

§. 361. Καὶ Μὴν μὲν Ἡλιακὸς Ἀστρονομικός ἐστι Χρόνος, ὃν ὁ Ἥλιος δαπανᾷ, διερχόμενος τὸ δωδεκατημόριον τοῦ διὰ μέσου τῶν Ζωδίων Κύκλου· ὅς τις κατὰ τοὺς ἀκριβεστέρους Ἀστρονόμους, ὑποτίθεται ἴσος 30 ἡμερῶν, 10 ὡρῶν, $29^{\prime}$ πρώτων λεπτῶν, καὶ $5^{\prime\prime}$ δευτέρων.

Μὴν δὲ Ἡλιακὸς Πολιτικός ἐστι Χρόνος, ἐξ ὡρισμένων ἡμερῶν συγκείμενος, καὶ προσεγγίζων τῷ Ἀστρονομικῷ.

§. 362. Μὴν Σεληνιακὸς Ἀστρονομικὸς, ὁ καὶ Περιοδικὸς λεγόμενός ἐστι Χρόνος, ἐν ᾧ ἡ Σελήνη ὅλον τὸν Ζωδιακὸν περιτρέχει Κύκλον, ἐπανακάμπτουσα ἐπὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι. Ὅς τις σύγκειται ἐξ ἡμερῶν 27, ὡρῶν 7, λεπτῶν $43^{\prime}$, $8^{\prime\prime}$.

Μὴν

Μὴν δὲ Σεληνιακὸς Ἀστρονομικὸς, ὁ καὶ Συνοδικὸς λεγόμενος, καὶ κατ' ἀντονομασίαν Σεληνιακός, ἐστι Χρόνος ὁ μεταξὺ δύω Συζυγιῶν, ἢ Συνόδων ἐφεξῆς κειμένων, Ἡλίου τε καὶ Σελήνης θεωρούμενος· σύγκειται δὲ, ἐξ ἡμερῶν 29, ὡρῶν 12, λεπτὰ $44^{\prime}$, $3^{\prime\prime}$, $11^{\prime\prime\prime}$.

Σχόλιον.

Ἵνα δὲ σαφέστερον γένηται τὸ λεγόμενον, δεδόσθω τὴν Σελήνην συνοδεύσασα τῷ Ἡλίῳ, κατά τι σημεῖον τῆς ἐκλειπτικῆς, φέρ' εἰπεῖν τοῦ Κριοῦ τὴν ἀρχήν· ἀποχωρῆσαί τε τούτου, φερομένην ἐπὶ τὰ ἑπόμενα τῶν Ζωδίων, κατὰ τὴν ἰδίαν αὐτῆς κίνησιν· τούτου τοίνυν ὑποτεθέντος, ἕπεται, ὅτι ἡνίκα καταλάβῃ πάλιν τὸ σημεῖον, ἐξ οὗ ἤρξατο φέρεσθαι, οὐ συνοδεύσει πάντως κατ' αὐτὸ τοῦτο τὸ σημεῖον αὖθις τῷ Ἡλίῳ, ὡς ἀποχωρήσαντος κἀκείνου ἐκεῖθεν τῇ ἰδίᾳ κινήσει πρὸς τὰ ἑπόμενα τῶν Ζωδίων· ἀλλὰ δεήσει κἀκεῖνο τὸ μέρος ἔτι διαδραμεῖν, ὃ διῆλθεν ὁ Ἥλιος, ἵνα καταλάβῃ αὐτὸν, καὶ ἑτέρα γένηται Σύνοδος. Ἐπεὶ δὲ διέρχεται ἡ Σελήνη τὸ διάστημα τοῦτο, κατὰ τοὺς Ἀστρονόμους, ἐν ἡμέραις 2, ὥρας 5, λεπτὰ $55^{\prime\prime}$, $11^{\prime\prime\prime}$, προστιθεμένων τούτων τῷ περιοδικῷ Μηνὶ, ἀναφύεται ὁ Συνοδικός.

Καὶ περὶ μὲν Ἔτους τε καὶ Μηνῶν καὶ τῆς τούτων διαιρέσεώς τε καὶ ἐπιδιαιρέσεως, ἅλις ἂν καὶ ταῦτ' ἔχῃ. Ἀλλ' ἵν' ἡ περὶ τοῦ Καλενδαρίου ταύτῃ ἑρμηνευθεῖσά μοι Μέθοδος εὐληπτοτέρα γένηται, τοῖς Μαθητιῶσιν, ἢ καὶ ἄλλως ἀναγινώσκουσιν, ᾠήθην δεῖν, καί τινα ἐκθέσθαι Κανόνια, εἴτε Διαγράμματα, ἢ Πίνακας, ἢ ὅ, τι οὖν ἕτερον βούλοιτό τις ταῦτα λέγειν τε καὶ καλεῖν· ἡμεῖς δὲ Κανόνια ταῦτ' εἴπομεν, ὡς διευθύνοντα τὸν βουλόμενον, καὶ ὁδηγοῦντα πρὸς τὴν τῶν ζητουμένων εὕρεσιν.

Καὶ τὸ μὲν Α'. Κανόνιον περὶ τοῦ εὑρίσκειν τό, τε Ἅγιον Πάσχα, καὶ τὸ Νομικὸν Φάσκα ἐν οἱῳδηποτοῦν ἔτει τὸν τρόπον εἰσηγεῖται.

Τὸ Β'. δὲ, περὶ τοῦ εὑρίσκειν τὸν Ἦχον, καὶ τὸ Ἑωθινὸν ὅταν ἄρχηται τὸ Τριῴδιον.

Τὸ

Τὸ Γ'. δὲ, περὶ τοῦ εὑρίσκειν τὴν τῶν Χριστουγέννων Παραμονὴν ἐν ποίᾳ τῶν ἡμερῶν τῆς Ἑβδομάδος ἐστι, πόσαι τε αἱ τῆς Κρεωφαγίας ἡμέραι, ἐν ποίῳ τε Μηνὶ καὶ πόστῃ ἡμέρᾳ τὸ Τριῴδιον ἄρχεται, ἤτε Ἀποκρέω τελεῖται· ἐν ποίῳ Μηνί τε καὶ πόστῃ τοῦθ' ἡμέρα τό, τε Ἅγιον Πάσχα, καὶ τὸ Νομικὸν Φάσκα ἑορτάζεται, ἐν ποίῳ Μηνὶ καὶ πόσθ' ἡμέρᾳ ἐστιν ἡ Ἀνάληψις, ἤτε Πεντηκοστὴ, καὶ ἡ τῶν Ἁγίων Πάντων μνήμη, πόσαι τε ἡ τῆς τῶν Ἁγίων Ἀποστόλων Νηστείας ἡμέραι, καὶ τέλος ἐν ποίᾳ ἡμέρᾳ ἡ αὐτῶν πανηγυρίζεται μνήμη, παναρίστως διδάσκει.

Τὸ δέ γε Δ'. Σεληνοδρόμιον παντοτινὸν περιέχει· δηλαδὴ εἰς ποίαν ἡμέραν ἑκάστου Μηνὸς ἡ Νέα Σελήνη γίνεται. Καὶ τέλος τὸ Ε'. περὶ τοῦ εὑρίσκειν ἐν ποίᾳ ἡμέρᾳ τῆς Ἑβδομάδος ἕκαστος τῶν Μηνῶν ἄρχεται· ταῦτ' εἰσιν, ὦ φιλόμουσ' ἀναγνῶστα, τὰ ἐν τοῖς Κανονίοις περιεχόμενα· ἅπερ ἐν τῷ τέλει ταυτησὶ τῆς Βίβλου κατέταξα.

Ἀλλ' ἵνα καθ' εἱρμὸν ἡ περὶ τούτων διδασκαλία βαδίζουσα βαίνῃ, καὶ μὴ ἀδιανόητος ὅλως ἡ ἐν αὐτοῖς περιεχομένη γνῶσις διαμένοι, πειρασόμεθα, ὡς οἷόν τε συνοπτικῶς τε ἅμα καὶ ἀνελλειπῶς, τὴν ἐφ' ἑκάστῳ Κανονίῳ ἀπαιτουμένην Ἑρμηνείαν, ἐχομένως ἐκθέσθαι.

Ἑρμηνεία περὶ τοῦ εὑρίσκειν τὸ Ἅγιον Πάσχα, ἐν τῷ Α'. Κανονίῳ.

§. 363. Ἀνίσως θέλῃς διὰ νὰ εὑρίσκῃς τὸ Ἅγιον Πάσχα, εἰς ὁποιον δήποτ' ἔτος θελήσεις, λάβε πρῶτον τὸν Κύκλον τοῦ Ἡλίου, τῆς τε Σελήνης, καὶ τὸ Θεμέλιον αὐτῆς, ὁποῦ τρέχει τὸ ἔτος ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ζητεῖς νὰ εὕρῃς τὸ Πάσχα· ἢ ἂν δὲν τὰ ἐνθυμῆσαι, εὑρέτα μόνος σου, κατὰ τὴν Ἑρμηνείαν, ἣν ἐκάμαμεν εἰς τὸν (§. 334. καὶ 335. καὶ 336.) παράγραφον. Ἔπειτα στοχάσου εἰς τὸ ῥηθὲν Κανόνιον, εἰς ποῖον τετραγωνίδιον ἀντικρύζουσιν, ὁ μὲν Κύκλος τῆς Σελήνης μὲ τὸ Θεμέλιον αὐτῆς ὁριζοντίως· ὁ δὲ Κύκλος τοῦ Ἡλίου κατὰ κάθετον, καὶ ἐκεῖ εἶναι σημειωμένος ὁ Μὴν καὶ ἡ ἡμέρα τοῦ Μηνὸς, κατὰ τὴν ὁποίαν θέλει ἔχωμεν τὸ Ἅγιον Πάσχα, καὶ ὑποκάτω αὐτοῦ εἶναι σημειωμένη ἡ ἡμέρα τῆς Ἑβδομάδος ὁποῦ εἶναι τὸ Νομικὸν Φάσκα.

Ὑπό-

Ὑπόδειγμα.

Εἰς τοὺς 1816, ἔχομεν, τοῦ μὲν Ἡλίου Κύκλον ιβ'. τῆς δὲ Σελήνης Θ'. καὶ Θεμέλιον αὐτῆς ιβ'. ὅρα (§. 334. 335. 336.) βλέπεις εἰς τὸ Κανόνιον, ὅτι ἀντικρύζει ὁ Κύκλος τῆς Σελήνης Θ, μὲ τὸ Θεμέλιον αὐτῆς ΙΒ'. στοχάσου καὶ τὸν Κύκλον τοῦ Ἡλίου ΙϚ'. ὁποῦ εἶναι σημειωμένον ἐπάνωθεν εἰς ἓν τετραγωνίδιον· κατέβα ἴσια κατὰ κάθετον, ἕως οὗ νὰ φθάσῃς εἰς τὸ τετραγωνίδιον ὁποῦ ἀντικρύζει ὁ Κύκλος τῆς Σελήνης μὲ τὸ Θεμέλιον αὐτῆς, καὶ ἐκεῖ εὑρίσκεις τὸ Ἅγιον Πάσχα, ὅτι εἶναι Ἀπριλλίου Θ'. τὸ δὲ Νομικὸν Φάσκα ἡμέρᾳ γ'. αὐτὸς εἶναι ὁ καθολικὸς τρόπος· καὶ οὕτω νὰ κάμνῃς.

Ἑρμηνεία περὶ τοῦ εὑρίσκειν τόν τε Ἦχον, καὶ τὸ Ἑωθινόν· ὅταν ἄρχηται τὸ Τριῴδιον ἐν τῷ Β'. Κανονίῳ.

§. 364. Εἰ δὲ θέλεις νὰ εὕρῃς τὸν Ἦχον, καὶ τὸ Ἑωθινὸν, τὸ ὁποῖον θέλει ἔχωμεν ὅταν ἄρχηται τὸ Τριῴδιον εἰς τὸ Β'. Κανόνιον, λάβε πάλιν, ἢ εὑρὲ, ὡς ἄνωθεν, τὸν Κύκλον τοῦ Ἡλίου καὶ τῆς Σελήνης, ὅστις τρέχει τὸν Χρόνον ἐκεῖνον ὁποῦ θέλεις νὰ κάμῃς τὴν ζήτησιν. Ἔπειτα στοχάσου, εἰς ποῖον τετραγωνίδιον συμπίπτουσιν, ὁ μὲν Κύκλος τῆς Σελήνης ὁριζοντίως, ὁ δὲ τοῦ Ἡλίου κατὰ κάθετον, καὶ ἐκεῖ εὑρίσκεις σημειωμένον τὸν Ἦχον, καὶ τὸ Ἑωθινὸν ὁποῦ ζητεῖς.

Ὑπόδειγμα.

Θέλομεν νὰ εὕρωμεν, καθ' Ὑπόθεσιν, τὸν Ἦχον, καὶ τὸ Ἑωθινὸν ὁποῦ θέλει ἔχωμεν, ὅταν ἄρχηται τὸ Τριῴδιον εἰς τοὺς 1816· εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ ῥηθὲν ἔτος θέλει ἔχωμεν Κύκλον μὲν τοῦ Ἡλίου ις'. τῆς δὲ Σελήνης θ'. βλέπομεν εἰς τὸ ῥηθὲν Κανόνιον, ὅτι εἰς τὸ τετραγωνίδιον ὁποῦ συμπίπτει, ὁ μὲν Κύκλος τῆς Σελήνης ὁριζοντίως, ὁ δὲ τοῦ Ἡλίου κατὰ κάθετον, καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι θέλει ἔχωμεν Ἦχον ά. Ἑωθινὸν ά.

Ἑρμηνεία περὶ τοῦ εὑρίσκειν τέλειον Πασχάλιον ἐν τῷ Γ'. Κανονίῳ.

§. 365. Ἀνίσως θέλῃς νὰ εὕρῃς τέλειον Πασχάλιον, ποίησον οὕτω. Πρῶτον μὲν, εὑρὲ τὸ Ἅγιον Πάσχα ἐν τῷ περὶ τούτου Α'. Κανονίῳ, καθὼς ἑρμηνεύσαμεν (§. 353.) Δεύτερον δὲ, λαμβά-

νωννοντας ἐκεῖθεν τὸν Μῆνα· καὶ τὴν ἡμέραν αὐτοῦ, κατὰ τὴν ὁποίαν εὑρέθη τὸ Πάσχα τοῦ ζητουμένου Ἔτους, θεώρησον τὸ Γ'. Κανόνιον, εἰς ποῖον Μῆνά τε καὶ ἡμέραν εἶναι σημειωμένον τὸ Ἅγιον Πάσχα· καὶ εἰς ἐκεῖνον τὸν στίχον θέλεις εὕρῃ τὰ πάντα σημειωμένα κατὰ σειράν.

Ὑπόδειγμα.

Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τέλειον Πασχάλιον, εἰς τοὺς 1816. Καὶ ἐπειδὴ ἐκεῖ εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ μὲν Ἥλιος εἰς αὐτὸ τὸ ἔτος, ἔχει Κύκλον 16· (ὅρα §. 334.) ἡ δὲ Σελήνη Θ'. καὶ τὸ Θεμέλιον αὐτῆς 12· θεώρησον εἰς τὸ Α'. Κανόνιον, κατὰ τὴν Ἑρμηνείαν ὁποῦ εἴπομεν (§. 353.) καὶ θέλει εὕρῃς τὸ Πάσχα, ὅτι εἶναι σημειωμένον τῇ Θ'. Ἀπριλλίου· γύρισον πάλιν εἰς τὸ Γ'. Κανόνιον, καὶ ἐκεῖ θέλεις εὕρῃ πάντα σεσημειωμένα· ὅτι δηλ. ἡ Παραμονὴ τῶν Χριστουγέννων ἐστὶν ἡμέρα Ζ'. Κρεοφαγία ἡμέραι Ν'. Τὸ Τριώδιον ἄρχεται Ἰαννουαρίου κθ'. ἡ Ἀποκρέω, Φεβρουαρίου ιβ'. τὸ Ἅγιον Πάσχα, Ἀπριλλίου Θ'. τῆς Ἀναλήψεως, Μαΐου ιη'. τῆς Πεντηκοστῆς, Μαΐου κη'. τῶν Ἁγίων Πάντων, Ἰουνίου δ'. ἡ Νηστεία τῶν Ἁγίων Ἀποστόλων, ἡμέραι κδ'. καὶ ἡ μνήμη αὐτῶν ἡμέρα ε'.

Οὕτω ποιῶν, θέλεις εὕρῃ εὔκολα τέλειον Πασχάλιον, οἱουδήποτε Ἔτους, εἴτε ἀπερασμένου, εἴτε μέλλοντος.

Ἑρμηνεία τοῦ εὑρίσκειν τὴν ἡμέραν ὁποῦ γίνεται ἡ Νέα Σελήνη· ἐν τῷ Δ'. Κανονίῳ.

§. 366. Ἀνίσως θέλῃς νὰ εὕρῃς τὴν ἡμέραν τοῦ Μηνός, κατὰ τὴν ὁποίαν σύνοδος γίνεται τῶν φωστήρων· δηλ. Ἡλίου καὶ Σελήνης, (τὸ ὁποῖον συνειθίζομεν κοινότερον νὰ λέγωμεν, ὅτι γίνεται Νέα Σελήνη) εἰς τὸ περὶ τούτου Δ'. Κανόνιον. α. λάβε, ἢ εὑρὲ τὸν Κύκλον τῆς Σελήνης, καὶ τὸ Θεμέλιον αὐτῆς, κατὰ τὴν Ἑρμηνείαν τοῦ (§. 335. καὶ 336.) παραγράφου. Ἔπειτα γυρίζωντας εἰς τὸ ῥηθὲν Δ'. Κανόνιον, εἰς τὸ ὁποῖον βλέπεις τοὺς μὲν δώδεκα Μῆνας σημειωμένους ἄνωθεν καθεξῆς εἰς τόσα τετραγωνίδια· τοὺς δὲ Κύκλους τῆς Σελήνης εἰς 19 τετραγωνίδια ἐκ τοῦ ἑνὸς μέρους, καὶ ἐκ τοῦ ἄλλου, εἰς ἄλλα τόσα τὸ Θεμέλιον αὐτῆς· καὶ ἀντικρύζων τὸ ἓν τοῦ ἄλλου

κατ'

κατ' εὐθεῖαν. Ἔπειτα στοχάσου εἰς ποῖον τετραγωνίδιον συμπίπτουσιν ὁ μὲν Κύκλος καὶ τὸ Θεμέλιον ὁριζοντίως· ὁ δὲ Μὴν κατὰ κάθετον, καὶ εἰς ἐκεῖνο τὸ τετραγωνίδιον εἶναι σημειωμένη ἡ ἡμέρα τοῦ Μηνὸς ἐκείνου, τοῦ ὁποίου γίνεται ἡ Νέα Σελήνη.

Ὑπόδειγμα.

Ἔστω Παραδείγματος χάριν ὁ μὲν Χρόνος, ὁ 1816· ὁ δὲ μὴν Μάρτιος· εἰς αὐτὸν τὸν Χρόνον ἔχομεν Σελήνης μὲν Κύκλον Θ'. Θεμέλιον δὲ αὐτῆς ιβ'. καὶ βλέπομεν ὅτι γίνεται εἰς τοὺς ιζ'. τοῦ Μαρτίου. Εἰς αὐτὸν τὸν ἴδιον στίχον εἶναι, σημειωμένη ἡ ἡμέρα, εἰς τὴν ὁποίαν γίνεται ἡ Νέα Σελήνη εἰς κάθε Μῆνα τοῦ ῥηθέντος Ἔτους· ἄρα ἡ Νέα Σελήνη τοῦ Μαρτίου μηνὸς εἰς τοὺς 1816, γίνεται τῇ ιζ'. ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Ἑρμηνεία κατ' ἄλλον τρόπον.

Εἰ δὲ θέλεις νὰ εὑρίσκῃς, τὴν ἡμέραν τοῦ Μηνὸς ὁποῦ γίνεται ἡ Νέα Σελήνη, καὶ χωρὶς τῆς βοηθείας, καὶ ὁδηγίας τοῦ ῥηθέντος Δ'. Κανονίου, λαμβάνωντας τὸ Θεμέλιον τῆς Σελήνης ὁποῦ ἔχει τὸ ἔτος ἐκεῖνο, κατὰ τὸ ὁποῖον γίνεται ἡ ζήτησις τῆς Νέας Σελήνης τοῦ δεῖνα Μηνός, πρόσθεσον εἰς αὐτὸ τοὺς ἐκ τοῦ Μαρτίου διελθόντας Μῆνας, ἕως τοῦ Μηνὸς ἐκείνου, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ Νέα Σελήνη· καὶ εἰς ἐκεῖνον τὸν Ἀριθμὸν ὁποῦ γένῃ πρόσθεσον καὶ ἐκ τῶν ἡμερῶν τοῦ αὐτοῦ Μηνός, ἕως νὰ γένωσι 30 ἡμέραι. Καὶ εἰς ἐκείνην τὴν ἡμέραν ὁποῦ τελειώσῃ ὁ Ἀριθμὸς τῶν 30· θέλει γένῃ ἡ Νέα Σελήνη.

Ὑπόδειγμα.

Ἔστω καθ' Ὑπόθεσιν Χρόνος μὲν ὁ αὐτὸς 1816. Μὴν δὲ ὁ Σεπτέμβριος· οὗ ζητεῖται ἡ Νέα Σελήνη· εἰς αὐτὸ λοιπὸν τὸ ἔτος ἔχομεν Θεμέλιον Σελήνης 12· ἐκ δὲ τοῦ Μαρτίου μηνὸς ἕως τοῦ Σεπτεμβρίου, διῆλθον Μῆνες 7· προσθέτωντας οὖν αὐτοὺς εἰς τὸ Θεμέλιον 12, γίνονται 19· ἕως οὖν εἰς τοὺς 30, λείπουσιν 11· οἷον $12 + 7 + 11 = 30$· ἄρα γίνεται ἡ Νέα Σελήνη τοῦ Σεπτεμβρίου μηνός, κατὰ τὸ 1816 ἔτος, εἰς τοὺς 11· ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Ἑρ-

Ἑρμηνεία περὶ τοῦ εὑρίσκειν τὴν ἡμέραν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἄρχεται ὁ κάθε Μὴν ἐν τῷ Ε΄. Κανονίῳ.

§. 367. Ἀνίσως θέλῃς νὰ εὕρῃς τὴν ἡμέραν ὁποῦ ἀρχίζει ὁ κάθε Μῆνας εἰς τὸ περὶ τούτου Ε΄. Κανόνιον, εἰς τὸ ὁποῖον οἱ μὲν κή. Κύκλοι τοῦ Ἡλίου εἶναι σημειωμένοι εἰς τόσα τετραγωνίδια, εἰς τὸ ἄνωθεν μέρος τοῦ Κανονίου· εἰς δὲ τὴν μίαν καὶ τὴν ἄλλην πλευρὰν τοῦ αὐτοῦ, εἶναι σημειωμένοι οἱ 12 Μῆνες μὲ τὰς ἡμέρας των, εἰς δώδεκα τετραγωνίδια, καὶ εἰς τὴν ἄλλην, ἀντικρὺ τοῦ κάθε Μηνὸς αἱ Ἐπακταί του· (ὅρα §. 333.) καὶ μεταξὺ τῶν ἡμερῶν τῶν Μηνῶν καὶ Ἐπακτῶν αὐτῶν, εἶναι σημειωμένη ἡ ἡμέρα τῆς Ἑβδομάδος, κατὰ τὴν ὁποίαν ἀρχίζει ὁ κάθε Μῆνας· λοιπὸν α΄. λάβε, ἢ εὑρὲ μόνος σου τὸν Κύκλον τοῦ Ἡλίου ὁποῦ τρέχει τὸ ἔτος ἐκεῖνο, κατὰ τὸ ὁποῖον θέλεις νὰ κάμῃς τὴν τοιαύτην ἔρευναν· (ὅρα §. 334.) β΄. θεώρησον εἰς ποῖον τετραγωνίδιον συμπίπτουσιν, ὁ μὲν Μὴν ὁριζοντίως, ὁ δὲ Κύκλος τοῦ Ἡλίου κατὰ κάθετον, καὶ ἐκεῖ εἶναι σημειωμένη ἡ ἡμέρα τῆς Ἑβδομάδος κατὰ τὴν ὁποίαν ἀρχίζει ὁ ζητούμενος Μήν.

Ὑπόδειγμα.

Ὑποδείγματος χάριν, εἰς τοὺς 1816, ἔχομεν Κύκλον τοῦ Ἡλίου ΙϚ΄. λοιπὸν θέλω νὰ εὕρω τὴν ἡμέραν ὁποῦ ἀρχίζει ὁ Αὔγουστος μήν· θεωρῶ εἰς τὸ ῥηθὲν Κανόνιον, ὅτι ὁ Κύκλος τοῦ Ἡλίου ΙϚ΄. συμπίπτει εἰς τὰς ἡμέρας τῆς Ἑβδομάδος τοῦ Αὐγούστου μηνὸς, μὲ τὴν γ΄. ἄρα ἄρχεται ὁ Αὔγουστος μὴν, ἡμέρᾳ γ΄. ὃ ἦν τὸ ζητούμενον.

Ἄλλως.

Εἰ δὲ πάλιν θέλεις νὰ εὕρῃς τὴν ἡμέραν τῆς Ἑβδομάδος, κατὰ τὴν ὁποίαν ἀρχίζει ἕκαστος τῶν Μηνῶν, καὶ χωρὶς τῆς ὁδηγίας τοῦ ῥηθέντος Κανονίου, ποίησον κατὰ τὴν Ἑρμηνείαν ὁποῦ ἐκάμαμεν, εἰς τὸ Ϛ΄. Πρόβλημα, (§. 339.) καὶ ἕξεις τὸ ζητούμενον.

Τέλος· τῷ δὲ Θεῷ δόξα τε καὶ κλέος.

ΙΔΟΥ Ω ΦΙΛΟΜΟΥΣΟΙ ΑΝΑΓΝΩΣΤΑΙ,

ΜΕΤΑ ΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΕΚΤΕΘΕΝΤΟΣ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΤΟΥ ΚΑΛΕΝΔΑΡΙΟΥ

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΤΕ ΚΑΙ ΕΡΜΗΝΕΙΑΣ,

ΕΚΤΙΘΕΝΤΑΙ ΚΑΙ ΤΑ ΥΠΟΣΧΕΘΕΝΤΑ ΜΟΙ

ΕΞ ΚΑΝΟΝΙΑ.

Κανόνιον Α'. τοῦ εὑρίσκειν, τὸ Ἅγιον Πάσχα ἐν ποίῳ Μηνὶ, καὶ πόστῃ τούτου ἡμέρᾳ· ὑφ' οὗ σεσημείωται καὶ τὸ Νομικὸν Φάσκα, ἐν ποίᾳ ἡμέρᾳ τῆς Ἑβδομάδος ἐστί.

ΟΙ ΚΗ'. ΚΥΚΛΟΙ ΤΟΥ ΗΛΙΟΥ.

Οἱ Κύκλοι τῆς Σελήνης.	Τὸ Νομικὸν Φάσκα.	Α'.	Β'.	Γ'.	Θ'.	Ι'.	Ε'.	Ϛ'.	Τὸ Θεμέλιον τῆς Σελήνης.
		Ζ'.	ΙΓ'.	ΙΔ'.	ΙΕ'.	ΚΑ'.	ΙΑ'.	ΙΖ'.	
		ΙΗ'.	ΙΘ'.	ΚΕ'.	ΚϚ'.	ΚΖ'.	ΚΒ'.	ΚΓ'.	
		ΙΒ'.	ΚΔ'.	Η'.	Κ'.	Δ'.	ΙϚ'.	ΚΗ'.	
α.	Ἀπρ. 2	Α'. 7 Γ'.	Α'. 6 Δ'.	Α'. 5 Ε'.	Α'. 4 Ϛ'.	Α'. 3 Ζ'.	Α'. 9 Α'.	Α'. 8 Β'.	ιδ'.
β'.	Μαρ. 22	Μ. 24 Ϛ'.	Μ. 23 Ζ'.	Μ. 29 Α'.	Μ. 28 Β'.	Μ. 27 Γ'.	Μ. 26 Δ'.	Μ. 25 Ε'.	κε'.
γ'.	Ἀπρ. 10	Α'. 14 Δ'.	Α'. 13 Ε'.	Α'. 12 Ϛ'.	Α'. 11 Ζ'.	Α'. 17 Α'.	Α'. 16 Β'.	Α'. 15 Γ'.	ϛ'.
δ'.	Μαρ. 30	Μ. 31 Ζ'.	Α'. 6 Α'.	Α'. 5 Β'.	Α'. 4 Γ'.	Α'. 3 Δ'.	Α'. 2 Ε'.	Α'. 1 Ϛ'.	ιζ'.
ε'.	Ἀπρ. 18	Α'. 21 Ε'.	Α'. 20 Ϛ'.	Α'. 19 Ζ'.	Α'. 25 Α'.	Α'. 24 Β'.	Α'. 23 Γ'.	Α'. 22 Δ'.	κη'.
ϛ'.	Ἀπρ. 7	Α'. 14 Α'.	Α'. 13 Β'.	Α'. 12 Γ'.	Α'. 11 Δ'.	Α'. 10 Ε'.	Α'. 9 Ϛ'.	Α'. 8 Ζ'.	θ'.
ζ'.	Μαρ. 27	Μ. 31 Δ'.	Μ. 30 Ε'.	Μ. 29 Ϛ'.	Μ. 28 Ζ'.	Α'. 3 Α'.	Α'. 2 Β'.	Α'. 1 Γ'.	κ'.
η'.	Ἀπρ. 15	Α'. 21 Β'.	Α'. 20 Γ'.	Α'. 19 Δ'.	Α'. 18 Ε'.	Α'. 17 Ϛ'.	Α'. 16 Ζ'.	Α'. 22 Α'.	α'.
θ'.	Ἀπρ. 4	Α'. 7 Ε'.	Α'. 6 Ϛ'.	Α'. 5 Ζ'.	Α'. 11 Α'.	Α'. 10 Β'.	Α'. 9 Γ'.	Α'. 8 Δ'.	ιβ'.
ι'.	Μαρ. 24	Μ. 31 Α'.	Μ. 30 Β'.	Μ. 29 Γ'.	Μ. 28 Δ'.	Μ. 27 Ε'.	Μ. 26 Ϛ'.	Μ. 25 Ζ'.	κγ'.
ια'.	Ἀπρ. 12	Α'. 14 Ϛ'.	Α'. 13 Ζ'.	Α'. 19 Α'.	Α'. 18 Β'.	Α'. 17 Γ'.	Α'. 16 Δ'.	Α'. 15 Ε'.	δ'.
ιβ'.	Ἀπρ. 1	Α'. 7 Β'.	Α'. 6 Γ'.	Α'. 5 Δ'.	Α'. 4 Ε'.	Α'. 3 Ϛ'.	Α'. 2 Ζ'.	Α'. 8 Α'.	ιε'.
ιγ'.	Μαρ. 21	Μ. 24 Ε'.	Μ. 23 Ϛ'.	Μ. 22 Ζ'.	Μ. 28 Α'.	Μ. 27 Β'.	Μ. 26 Γ'.	Μ. 25 Δ'.	κϛ'.
ιδ'.	Ἀπρ. 9	Α'. 14 Γ'.	Α'. 13 Δ'.	Α'. 12 Ε'.	Α'. 11 Ϛ'.	Α'. 10 Ζ'.	Α'. 16 Α'.	Α'. 15 Β'.	ζ'.
ιε'.	Μαρ. 29	Μ. 31 Ϛ'.	Μ. 30 Ζ'.	Α'. 5 Α'.	Α'. 4 Β'.	Α'. 3 Γ'.	Α'. 2 Δ'.	Α'. 1 Ε'.	ιη'.
ιϛ'.	Ἀπρ. 17	Α'. 21 Δ'.	Α'. 20 Ε'.	Α'. 19 Ϛ'.	Α'. 18 Ζ'.	Α'. 24 Α'.	Α'. 23 Β'.	Α'. 22 Γ'.	κθ'.
ιζ'.	Ἀπρ. 5	Α'. 7 Ϛ'.	Α'. 6 Ζ'.	Α'. 12 Α'.	Α'. 11 Β'.	Α'. 10 Γ'.	Α'. 9 Δ'.	Α'. 8 Ε'.	ι'.
ιη'.	Μαρ. 25	Μ. 31 Β'.	Μ. 30 Γ'.	Μ. 29 Δ'.	Μ. 28 Ε'.	Μ. 27 Ϛ'.	Μ. 26 Ζ'.	Α'. 1 Α'.	κα'.
ιθ'.	Ἀπρ. 13	Α'. 14 Ζ'.	Α'. 20 Α'.	Α'. 19 Β'.	Α'. 18 Γ'.	Α'. 17 Δ'.	Α'. 16 Ε'.	Α'. 15 Ϛ'.	β'.

Κανόνιον Β'. τοῦ εὑρίσκειν τόν τε Ἦχον, καὶ τὸ Ἑωθινὸν, ὅταν ἄρχηται τὸ Τριῴδιον.

ΟΙ ΚΗ'. ΚΥΚΛΟΙ ΤΟΥ ΗΛΙΟΥ.

Οἱ Κύκλοι τῆς Σελήνης.	Α'.	Β'.	Γ'.	Θ'.	Ι'.	Ε'.	Ϛ'.	Τὸ Θεμέλιον τῆς Σελήνης.
	Ζ'.	ΙΓ'.	ΙΔ'.	ΙΕ'.	ΚΑ'.	ΙΑ'.	ΙΖ'.	
	ΙΗ'.	ΙΘ'.	ΚΕ'.	ΚϚ'.	ΚΖ'.	ΚΒ'.	ΚΓ'.	
	ΙΒ'.	ΚΔ'.	Η'.	Κ'.	Δ'.	ΙϚ'.	ΚΗ'.	
α.	α'. α'.	α'. α'.	πλ. δ'. ια'.	πλ. δ'. ια'.	πλ. δ'. ια'.	α'. α'.	α'. α'.	ιδ'.
β'.	πλ. δ'. ια'.	πλ. δ'. ια'.	α'. α'.	α'. α'.	α'. α'.	α'. α'.	πλ. δ'. ια'.	κε'.
γ'.	πλ. α'. ε'.	πλ. α'. ε'.	πλ. α'. ε'.	δ'. δ'.	πλ. α'. ε'.	πλ. α'. ε'.	πλ. α'. ε'.	ϛ'.
δ'.	πλ. δ'. ια'.	α'. α'.	α'. α'.	α'. α'.	α'. α'.	α'. α'.	πλ. δ'. ια'.	ιζ'.
ε'.	πλ. α'. ε'.	πλ. α'. ε'.	πλ. α'. ε'.	πλ. α'. ε'.	πλ. α'. ε'.	πλ. α'. ε'.	πλ. α'. ε'.	κη'.
ϛ'.	α'. α'.	α'. α'.	α'. α'.	α'. α'.	πλ. δ'. ια'.	πλ. δ'. ια'.	πλ. δ'. ια'.	θ'.
ζ'.	α'. α'.	πλ. δ'. ια'.	πλ. δ'. ια'.	πλ. δ'. ια'.	α'. α'.	α'. α'.	α'. α'.	κ'.
η'.	πλ. α'. ε'.	πλ. α'. ε'.	πλ. α'. ε'.	πλ. α'. ε'.	πλ. α'. ε'.	δ'. δ'.	πλ. α'. ε'.	α'.
θ'.	α'. α'.	πλ. δ'. ια'.	πλ. δ'. ια'.	α'. α'.	α'. α'.	α'. α'.	α'. α'.	ιβ'.
ι'.	α'. α'.	α'. α'.	α'. α'.	α'. α'.	πλ. δ'. ια'.	πλ. δ'. ια'.	πλ. δ'. ια'.	κγ'.
ια'.	πλ. α'. ε'.	δ'. δ'.	πλ. α'. ε'.	πλ. α'. ε'.	πλ. α'. ε'.	πλ. α'. ε'.	πλ. α'. ε'.	δ'.
ιβ'.	α'. α'.	α'. α'.	α'. α'.	πλ. δ'. ια'.	πλ. δ'. ια'.	πλ. δ'. ια'.	α'. α'.	ιε'.
ιγ'.	πλ. δ'. ια'.	πλ. δ'. ια'.	πλ. δ'. ια'.	α'. α'.	α'. α'.	α'. α'.	α'. α'.	κϛ'.
ιδ'.	πλ. α'. ε'.	πλ. α'. ε'.	πλ. α'. ε'.	πλ. α'. ε'.	δ'. δ'.	πλ. α'. ε'.	πλ. α'. ε'.	ζ'.
ιε'.	πλ. δ'. ια'.	πλ. δ'. ια'.	α'. α'.	α'. α'.	α'. α'.	α'. α'.	πλ. δ'. ια'.	ιη'.
ιϛ'.	πλ. α'. ε'.	πλ. α'. ε'.	πλ. α'. ε'.	δ'. δ'.	πλ. α'. ε'.	πλ. α'. ε'.	πλ. α'. ε'.	κθ'.
ιζ'.	πλ. δ'. ια'.	πλ. δ'. ια'.	α'. α'.	α'. α'.	α'. α'.	πλ. δ'. ια'.	πλ. δ'. ια'.	ι'.
ιη'.	α'. α'.	α'. α'.	α'. α'.	α'. α'.	πλ. δ'. ια'.	πλ. δ'. ια'.	α'. α'.	κα'.
ιθ'.	πλ. α'. ε'.	πλ. α'. ε'.	πλ. α'. ε'.	πλ. α'. ε'.	πλ. α'. ε'.	πλ. α'. ε'.	πλ. α'. ε'.	β'.

Κανόνιον Γ'. τοῦ εὑρίσκειν τὴν Παραμονὴν τῶν
Πρέπει ὅμως νὰ ἠξεύρωμεν, ὅτι ὅταν ὁ Χρόνος εἶναι Βίσεκτος

Ἡ Παραμ. τῆς Χρισυγέννων ἡμέρ.	Κρεοφαγία ἡμέραι.	Τὸ Τελώδιον ἀρχεται Ἰανυαρ.	Ἡ Ἀποκρέω Ἰανυαρίῳ.	Τὸ Ἅγιον Πάσχα Μαρτίῳ.	Τῆς Ἀναλήψεως Ἀπριλλίῳ.	Τῆς Πεντηκοστῆς Μαΐῳ.	Τῶν Ἁγίων Πάντων Μαΐῳ.	Ἡ Νηστεία τῶν Ἀγ. Ἀποσ. ἡμέρ.	Καὶ ἡ μνήμη αὐτῶν ἡμέρα.
Ε'.	λβ'.	ια'.	κε'.	κβ'.	λ'.	ι'.	ιζ'.	μβ'.	β'.
Δ'.	λγ'.	ιβ'.	κς'.	κγ'.	Μαΐ. α'.	ια'.	ιη'.	μα'.	α'.
Γ'.	λδ'.	ιγ'.	κζ'.	κδ'.	β'.	ιβ'.	ιθ'.	μ'.	ζ'.
Β'.	λε'.	ιδ'.	κη'.	κε'.	γ'.	ιγ'.	κ'.	λθ'.	ς'.
Α'.	λς'.	ιε'.	κθ'.	κς'.	δ'.	ιδ'.	κα'.	λη'.	ε'.
Ζ'.	λζ'.	ις'.	λ'.	κζ'.	ε'.	ιε'.	κβ'.	λζ'.	δ'.
Ϛ'.	λη'.	ιζ'.	λα'.	κη'.	ς'.	ις'.	κγ'.	λς'.	γ'.
Ε'.	λθ'.	ιη'.	Φ. α'.	κθ'.	ζ'.	ιζ'.	κδ'.	λε'.	β'.
Δ'.	μ'.	ιθ'.	β'.	λ'.	η'.	ιη'.	κε'.	λδ'.	α'.
Γ'.	μα'.	κ'.	γ'.	λα'.	θ'.	ιθ'.	κς'.	λγ'.	ζ'.
Β'.	μβ'.	κα'.	δ'.	Ἀπ. α'.	ι'.	κ'.	κζ'.	λβ'.	ς'.
Α'.	μγ'.	κβ'.	ε'.	β'.	ια'.	κα'.	κη'.	λα'.	ε'.
Ζ'.	μδ'.	κγ'.	ς'.	γ'.	ιβ'.	κβ'.	κθ'.	λ'.	δ'.
Ϛ'.	με'.	κδ'.	ζ'.	δ'.	ιγ'.	κγ'.	λ'.	κθ'.	γ'.
Ε'.	μς'.	κε'.	η'.	ε'.	ιδ'.	κδ'.	λα'.	κη'.	β'.
Δ'.	μζ'.	κς'.	θ'.	ς'.	ιε'.	κε'.	Ἰουν. α'.	κζ'.	α'.
Γ'.	μη'.	κζ'.	ι'.	ζ'.	ις'.	κς'.	β'.	κς'.	ζ'.
Β'.	μθ'.	κη'.	ια'.	η'.	ιζ'.	κζ'.	γ'.	κε'.	ς'.

Χρισυγέννων, καὶ ἅπαντα τὰ ἑπόμενα.
τότε νὰ προστίθεται εἰς τὴν Κρεωφαγίαν, Τὸ Τελώδιον,
καὶ τὴν Ἀποκρέω μία ἡμέραν.

Ἡ Παραμ. τῆς Χρισυγέννων ἡμ.	Κρεοφαγία ἡμέραι.	Τὸ Τελώδιον ἀρχετ. Ἰανυαρ.	Ἡ Ἀποκρέω Φεβρυαρίῳ.	Τὸ Ἅγιον Πάσχα Ἀπριλ.	Τῆς Ἀναλήψ. Μαΐῳ.	Τῆς Πεντηκοστ. Μαΐῳ.	Τῶν Ἁγίων Πάντων Ἰυνίῳ.	Ἡ Νηστεία τῶν Ἀγ. Ἀποσ. ἡμ.	Καὶ ἡ μνήμη αὐτῶν ἡμέρα.
Α'.	ν'.	κθ'.	ιβ'.	θ'.	ιη'.	κη'.	δ'.	κδ'.	ε'.
Ζ'.	να'.	λ'.	ιγ'.	ι'.	ιθ'.	κθ'.	ε'.	κγ'.	δ'.
Ϛ'.	νβ'.	λα'.	ιδ'.	ια'.	κ'.	λ'.	ς'.	κβ'.	γ'.
Ε'.	νγ'.	Φ. α'.	ιε'.	ιβ'.	κα'.	λα'.	ζ'.	κα'.	β'.
Δ'.	νδ'.	β'.	ις'.	ιγ'.	κβ'.	Ἰουν. α'.	η'.	κ'.	α'.
Γ'.	νε'.	γ'.	ιζ'.	ιδ'.	κγ'.	β'.	θ'.	ιθ'.	ζ'.
Β'.	νς'.	δ'.	ιη'.	ιε'.	κδ'.	γ'.	ι'.	ιη'.	ς'.
Α'.	νζ'.	ε'.	ιθ'.	ις'.	κε'.	δ'.	ια'.	ιζ'.	ε'.
Ζ'.	νη'.	ς'.	κ'.	ιζ'.	κς'.	ε'.	ιβ'.	ις'.	δ'.
Ϛ'.	νθ'.	ζ'.	κα'.	ιη'.	κζ'.	ς'.	ιγ'.	ιε'.	γ'.
Ε'.	ξ'.	η'.	κβ'.	ιθ'.	κη'.	ζ'.	ιδ'.	ιδ'.	β'.
Δ'.	ξα'.	θ'.	κγ'.	κ'.	κθ'.	η'.	ιε'.	ιγ'.	α'.
Γ'.	ξβ'.	ι'.	κδ'.	κα'.	λ'.	θ'.	ις'.	ιβ'.	ζ'.
Β'.	ξγ'.	ια'.	κε'.	κβ'.	λα'.	ι'.	ιζ'.	ια'.	ς'.
Α'.	ξδ'.	ιβ'.	κς'.	κγ'.	Ἰουν. α'.	ια'.	ιη'.	ι'.	ε'.
Ζ'.	ξε'.	ιγ'.	κζ'.	κδ'.	β'.	ιβ'.	ιθ'.	θ'.	δ'.
Ϛ'.	ξς'.	ιδ'.	κη'.	κε'.	γ'.	ιγ'.	κ'.	η'.	γ'.

Κανόνιον Δ'. Σεληνοδρομίου παντοτινοῦ, περὶ τοῦ εὑρίσκειν τὴν ἡμέραν, καθ' ἣν γίνεται ἡ Νέα Σελήνη, ἐν ὁποιῳδήποτε ἔτει, καὶ Μηνί.

Οἱ Κύκλοι τῆς Σελήνης.	Μάρτιος.	Ἀπρίλλιος.	Μάϊος.	Ἰούνιος.	Ἰούλιος.	Αὔγουστος.	Σεπτέμβριος.	Ὀκτώβριος.	Νοέμβριος.	Δεκέμβριος.	Ἰαννουάριος.	Φεβρουάριος.	Τὸ Θεμέλιον τῆς Σελήνης.
α'.	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	ιδ'.
β'.	4	3	2	1.31	30	29	28	27	26	25	24	23	κε'.
γ'.	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	ς'.
δ'.	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	ιζ'.
ε'.	1.31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	κη'.
ς'.	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	θ'.
ζ'.	9	8	7	6	5	4	3	2	1.31	30	29	28	κ'.
η'.	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	α'.
θ'.	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	ιβ'.
ι'.	6	5	4	3	2	1.31	30	29	28	27	26	25	κγ'.
ια'.	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	δ'.
ιβ'.	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	ιε'.
ιγ'.	3	2	1.31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	κς'.
ιδ'.	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	ζ'.
ιε'.	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1.31	30	ιη'.
ις'.	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	κθ'.
ιζ'.	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	ι'.
ιη'.	8	7	6	5	4	3	2	1.31	30	29	28	27	κα'.
ιθ'.	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	β'.

Κανόνιον Ε'. περὶ τοῦ εὑρίσκειν τὴν ἡμέραν τῆς Ἑβδομάδος, καθ' ἣν ἕκαστος τῶν Μηνῶν ἄρχεται, ἐν ὁποιῳδηποτοῦν ἔτει.

ΟΙ ΚΗ'. ΚΥΚΛΟΙ ΤΟΥ ΗΛΙΟΥ.

Μῆνες. Οἱ δώδεκα	Αἱ ἡμέραι αὐτῶν.	Α'.	Β'.	Γ'.	Θ'.	Ι'.	Ε'.	Ϛ'.	Αἱ Ἐπακταὶ τῶν 12. Μηνῶν.
		Ζ'.	ΙΓ'.	ΙΔ'.	ΙΕ'.	ΚΑ'.	ΙΑ'.	ΙΖ'.	
		ΙΗ'.	ΙΘ'.	ΚΕ'.	ΚϚ'.	ΚΖ'.	ΚΒ'.	ΚΓ'.	
		ΙΒ'.	ΚΔ'.	Η'.	Κ'.	Δ'.	ΙϚ'.	ΚΗ'.	
Μάρτιος.	31	ς'.	ζ'.	α'.	β'.	γ'.	δ'.	ε'.	5
Ἀπρίλλιος.	30	β'.	γ'.	δ'.	ε'.	ς'.	ζ'.	α'.	1
Μάϊος.	31	δ'.	ε'.	ς'.	ζ'.	α'.	β'.	γ'.	3
Ἰούνιος.	30	ζ'.	α'.	β'.	γ'.	δ'.	ε'.	ς'.	6
Ἰούλιος.	31	β'.	γ'.	δ'.	ε'.	ς'.	ζ'.	α'.	1
Αὔγουστος.	31	ε'.	ς'.	ζ'.	α'.	β'.	γ'.	δ'.	4
Σεπτέμβρ.	30	α'.	β'.	γ'.	δ'.	ε'.	ς'.	ζ'.	7
Ὀκτώβριος.	31	γ'.	δ'.	ε'.	ς'.	ζ'.	α'.	β'.	2
Νοέμβριος.	30	ς'.	ζ'.	α'.	β'.	γ'.	δ'.	ε'.	5
Δεκέμβριος.	31	α'.	β'.	γ'.	δ'.	ε'.	ς'.	ζ'.	7
Ἰαννουάριος.	31	δ'.	ε'.	ς'.	ζ'.	α'.	β'.	γ'.	3
Φεβρουάριος.	28, ἢ 29	ζ'.	α'.	β'.	γ'.	δ'.	ε'.	ς'.	6

Παροράματα	Διόρθωσις	Σελὶς	Στίχος
μωμάθεκα γράφε	μεμάθηκα	1	η΄.
μεταχειρίζονται	μεταχειρίζωνται	17	ι΄.
αὐτῷ	αὐτοῦ	21	ϛ΄.
ἀριστερότατον	ἀριστερώτατον	25	ια΄.
παραβαλόμενα	παραβαλλόμενα	28	κε΄.
ἂς φυλάττεται	ἂς φυλάττηται	30	ζ΄.
ἀκεκεραίων	ἀκεραίων	47	η΄.
ἤθελεν	ἤθελαν	48	β΄.
ὀλιγότεροι	ὀλιγώτεροι	48	ιε΄.
ἄλλός τις	ἄλλος τις	79	ιε΄.
ὁ τοῦ Β. 3	ὁ τοῦ Α. 5 ἐπὶ τὸν 3.	59	ιη΄.
4. 7 = 28 —	4, 7 = 28	62	κδ΄.
4. 6 = 24 —	4. 6 = 24		
6. 8 = 48	6. 8 = 48		
φανερώνει	φανερώνῃ	74	λδ΄.
ἑρμενευθέντας	ἑρμηνευθέντας	79	γ΄.
τὸ ἀπὸ δύω	περισσεύει	82	ϛ΄.
ὧδε	ὧδε	91	ιθ΄.
πραγματαὶ	πραγματεύται	111	κ΄.
σειραὶ	σειρὰ	151	δ΄.
προθεμένων	προθέτων	162	κθ΄.
γεωμετρικὸς	γεωμετρικὴ	165	ιβ΄.
1. χρόσι γράφε	παράδες 24.	180	λα΄.
εἴπουμεν	εἴπωμεν	182	γ΄.
κέρδους	κέρδους	257	κϛ΄.
οἱ τοῦ καθ' ἑνὸς ποσότης	ἡ τοῦ καθ'	270	γ΄.
τριπλῆς δὲ. γράφε	τετραπλῆς δὲ	272	δ΄.
ὀλιγότερον	ὀλιγώτερον	286	ζ΄.
ἠλίοιο	ἠλίοιο	303	ι΄.
ἐπιστημανικὰς	ἐπιστημονικὰς	337	κδ΄.
ἐφ' ἑκατὸν	ἐφ' ἑαυτὸν	345	η΄.
ἀπὸ Χριστοῦ	τὰ ἀπὸ Χριστοῦ	380	κε΄.
λεπτὰ	λεπτῶν	395	ε΄.
ἡμέρα ζ΄. γράφε	ἡμέρα α΄.	398	ιε΄.