ΣΥΛΛΟΓΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ.

Πωλεῖται πρὸς Δραχ. 12 ἕκαστον ἀντίτυπον, παρὰ τῷ Τυπογράφῳ, Βιβλιοπώλῃ καὶ Ἐκδότῃ Κυρίῳ Α. Κορομηλᾷ. Ἐν Ἀθήναις, κατὰ τὴν ὁδὸν τοῦ Ἑρμοῦ Ἀριθ. 215.

ΣΥΛΛΟΓΗ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

ΕΚ ΤΗΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ

ὑπὸ

Σ. ΣΟΥΤΖΟΥ

καὶ

Α. ΡΙΖΟΥ ΡΑΓΚΑΒΗ.

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ,

ΕΚ ΤΗΣ ΒΑΣΙΛΙΚΗΣ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΑΣ.

1836.

ΣΥΛΛΟΓΗ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

ΕΚ ΤΗΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΛΓΕΒΡΗΣ

Μετὰ τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς λύσεως.

ὑπὸ

Σ. ΣΟΥΤΣΟΥ.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ,

ΕΚ ΤΗΣ ΒΑΣΙΛΙΚΗΣ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΑΣ.

1836.

ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ

ΤΗΣ ΕΦΗΜΕΡΙΔΟΣ ΤΗΣ ΚΥΒΕΡΝΗΣΕΩΣ

ΤΟΥ 1833

Ἀριθμ. 35, Σελ. 267·

Η ΕΠΙ ΤΩΝ ΕΚΚΛΗΣΙΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΗΜ. ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ ΓΡΑΜΜΑΤΕΙΑ ΤΗΣ ΕΠΙΚΡΑΤΕΙΑΣ·

Διὰ τοῦ ἀπὸ 27 Αὐγ. (8 Σεπτ.) Βασιλ. Διατάγματος ἐδόθη εἰς τοὺς Κ. Κ. Σκαρλάτον Σοῦτζον καὶ Ἀλέξανδρον Ῥίζον Ῥαγκαβῆν προνόμιον ἀποκλειστικῆς ἐκδόσεως τοῦ συγγράμματός των ἐπιγραφομένου «Συλλογὴ Μαθηματικῶν Προβλημάτων,», ἐπιβαλλομένης εἰς τοὺς παραβάτας ποινῆς 1000 Δρ. εἰς Πρόστιμον, καὶ τῆς πληρωμῆς τῆς ζημίας·

Ἐν Ναυπλίῳ τὴν 27 Αὐγ. (8 Σεπτ.) 1833.

Ὁ ἐπὶ τῶν Ἐκκλησιαστικ. καὶ τῆς Δημ. Ἐκπαιδεύσεως
Γραμματεὺς τῆς Ἐπικρατείας
Σ. ΤΡΙΚΟΥΠΗΣ.

ΠΡΟΟΙΜΙΟΝ.

Τὸ προκείμενον βιβλίον δὲν εἶναι διδακτικὸν τῶν στοιχείων τῆς Μαθηματικῆς· ἀλλ' οὐχ ἧττον ἡ χρῆσίς του εἶναι ἀναπόφευκτος εἰς ὅλους γενικῶς τοὺς διδασκομένους τὴν ἐπιστήμην. Βιβλία πολλὰ στοιχειώδη αὐτῆς καὶ συνεγράφησαν καὶ μετεφράσθησαν, καὶ τοὺς κανόνας τῆς ἀλγέβρης καὶ τῆς γεωμετρίας διδάσκουν πολλάκις ἐκ στήθους οἱ καθηγηταί. Ἀλλ' ἡ ἁπλῆ τῶν κανόνων κατάληψις, μὴ βοηθουμένη ὑπὸ τῆς πράξεως δὲν ἀναδεικνύει ἐμπείρους μαθηματικούς. Τὰ διδακτικὰ βιβλία περιέχουν σπανίως παραδείγματα, καὶ ταῦτα πάντοτε ὀλιγάριθμα· τὴν ἔλλειψιν ταύτην ἀναπληροῦν οἱ παρόντες τόμοι, ὄντες καὶ πρὸς ἐκεῖνα, ὡς εἰς τὴν σπουδὴν τῶν γλωσσῶν, τὰ θέματα πρὸς τὴν γραμματικήν. Εἰς τὰ σχολεῖα τῆς Γερμανίας, καὶ ἰδίως τὰ στρατιωτικά, τὰ ἐμπορικὰ καὶ τὰ τῶν τεχνῶν, ἕκαστος μαθητὴς ὑποχρεοῦται νὰ ἔχῃ ἓν τοιοῦτον βιβλίον καὶ νὰ γυμνάζεται κατ' αὐτό. Εἰς τὴν σύνταξιν τοῦ προκειμένου ἐχρησίμευσεν ὡς βάσις ἓν ὅμοιον Γερμανικόν, τυπωθὲν εἰς τὴν Γερμανίαν εἰς πολλὰς ἐκδόσεις, διπλασιασθὲν δὲ ἤδη διὰ παμπληθῶν προσθηκῶν καὶ διὰ τροπολογιῶν.

Εἰς τὸν πρῶτον τόμον ἡ ἐργασία τῶν λύσεων δὲν συμπεριελήφθη, ἀλλὰ μόνον τὸ πόρισμα αὐτῆς, πρὸς ὁδηγίαν τῶν ἀσκουμένων. Ἀλλ' εἰς τὸν δεύτερον δὲν ἔγινε τὸ αὐτό, διότι τὸ σκοπούμενον εἰς αὐτὸν εἶναι ἡ ἕξις γεωμετρικῆς τινος, οὕτως εἰπεῖν, διαγνώσεως, εἰς τὴν ὁποίαν συντελεῖ κυρίως ἡ ἔκθεσις τῆς μεθόδου τῆς λύσεως. Εἰς αὐτὸν ὑπεδείχθησαν ἀκροθιγῶς πῶς καὶ αἱ μέθοδοι τοῦ γεωμετρᾷν τῶν ἀρχαίων, ὅτε ἡ ἀνάλυσις δὲν εἶχεν εἰσέτι χύσει τὰ φῶτα της εἰς τὴν ἐπιστήμην. Τοιοῦτον εἶναι τὸ περὶ ἐπιπέδων τόπων κεφάλαιον. Ἡ προσθήκη αὕτη ἐλπίζομεν, ὅτι δὲν θέλει δυσαρεστήσει τοὺς σπουδάζοντας τὰς ἐπιστήμας φιλοσοφικώτερον, καὶ ἐπιθυμοῦντας νὰ ἐξετάζωσι πῶς ὁ ἀνθρώπινος νοῦς κατὰ διαφόρους ἐποχὰς διὰ διαφόρων ὁδῶν καταντᾷ εἰς τὰ αὐτὰ ἀποτελέσματα, ὅταν αὐτὰ ἦναι ἀπόῤῥοιαι τῆς ἀπολύτου ἀληθείας.

Ἐν Ἀθήναις, τῇ 23 Μαΐου 1836.

ΠΙΝΑΞ.

Πρῶτον τμῆμα.

Δεύτερον τμῆμα.

Τρίτον τμῆμα.

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ. *Διορθώσεις.*

Σελ.	Στίχ.	—	—	—	—	
44	δ)	ἁπλῶν			ἀτελῶν	
153	8	Σελ.	158	Σελ.	157	
190	Σχόλιον	Σελ.	103	»	106	
252	»	Σελ.	147—152	»	148 — 153	
302	»	Σελ.	107	»	110	
307	»	»	180	»	176	

ΠΡΩΤΟΝ ΤΜΗΜΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΝ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΤΡΟΠΩΝ ΤΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

Α. Δεκαδικά.

Τί εἶναι δεκαδικὸν κλάσμα; ὁποία μεταβολὴ γίνεται εἰς τὰς ποσότητας ὅταν ἡ δεκαδικὴ ὑποδιαςολὴ τίθεται κατά τίνας χαρακτῆρας πρὸς τὰ ἀριςερὰ ἢ πρὸς δεξιά; Πῶς ἀνάγονται κοινὰ κλάσματα εἰς δεκαδικά; Πῶς ἐκτελεῖται ἡ πρόσθεσις, ἡ ἀφαίρεσις, ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις τῶν δεκαδικῶν; Πῶς ἐκτελοῦνται τὰ αὐτά, ὅταν πρόκειται δεκαδικὰ καὶ κοινὰ κλάσματα; — Τί εἶναι περίοδος εἰς τὰ δεκαδικὰ κλάσματα; Ὅταν κοινὸν κλάσμα ἀνάγεται εἰς δεκαδικόν, πόσους χαρακτῆρας τὸ πολὺ ἠμπορεῖ νὰ περιέχῃ ἡ τοιαύτη περίοδος; — Ὅταν ἦναι συγχωρημένον νὰ παραλείπωνται εἰς τὰ γινόμενα καὶ πηλίκα οἱ τελευταῖοι δεκαδικοὶ χαρακτῆρες ὡς ἀσήμαντοι, ἐφαρμόζεται ἡ σύντομος διαίρεσις καὶ ὁ πολλαπλασιασμός. — Ποῖον εἶναι τὸ ὄφελος αὐτῶν; καὶ διὰ ποίων μέσων προάγεται;

1) Πρόσθεσις

1) $\begin{array}{r} 0{,}857 \\ 0{,}678 \\ \hline 1{,}535 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 1{,}007 \\ 2{,}346 \\ \hline 3{,}353 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 0{.}000{,}76 \\ 13{,}795 \\ \hline 13{,}79576 \end{array}$

4) $$\begin{array}{r} 12{,}0134 \\ 196{,}785 \\ 7{,}00006 \\ \hline 215{,}79846 \end{array}$$

5) $$\begin{array}{r} 0{,}90058 \\ 7{,}634 \\ 3{,}007956 \\ \hline 11{,}542536 \end{array}$$

6) $$\begin{array}{r} 3{,}04 \\ 26{,}1735 \\ 7{,}5 \\ \hline 36{,}7135 \end{array}$$

7) $$\begin{array}{r} 23{,}07543 \\ 0{,}923 \\ 6{,}0024 \\ \hline 30{,}00083 \end{array}$$

8) $$\begin{array}{r} 312 \\ 25{,}73 \\ 0{,}364 \\ \hline 338{,}094 \end{array}$$

9) $$\begin{array}{r} 564{,}3 \\ 20{,}26405 \\ 0{,}343 \\ \hline 584{,}90705 \end{array}$$

10) $$\begin{array}{r} 7{,}345 \\ 8{,}26 \\ 37{,}534 \\ 19{,}0005 \\ 10{,}94 \\ 103{,}729 \\ \hline 186{,}8085 \end{array}$$

11) $$\begin{array}{r} 7{,}6 \\ 138{,}05934 \\ 15{,}4 \\ 10{,}76 \\ 0{,}3592176 \\ 1365{,}7 \\ 37{,}6483 \\ 0{,}005 \\ \hline 1575{,}5318576 \end{array}$$

12) $$\begin{array}{r} 113{,}67849 \\ 76{,}859 \\ 9{,}7 \\ 5 \\ 152{,}6043 \\ 7{,}85976 \\ 9{,}437 \\ 8{,}65 \\ 7{,}94 \\ \hline 391{,}72855 \end{array}$$

13) $$\begin{array}{r} 19{,}3576 \\ 17{,}2340 \\ 7652{,}007 \\ 0{,}5 \\ 39{,}069534 \\ 7{,}83 \\ 5{,}69784 \\ 2{,}350006 \\ \hline 7744{,}04598 \end{array}$$

14) $0{,}2+\frac{4}{5}=1$ 15) $3{,}465+\frac{3}{4}=4{,}215$

16) $4{,}5236+\frac{2}{3}=5{,}1902$ 17) $0{,}9243+\frac{1}{9}=1{,}0354$

2) Ἀφαίρεσις.

1) $$\begin{array}{r} 13 \\ 2{,}346 \\ \hline 10{,}654 \end{array}$$

2) $$\begin{array}{r} 0{,}947 \\ 0{,}195 \\ \hline 0{,}752 \end{array}$$

3) $$\begin{array}{r} 9{,}567 \\ 3{,}078 \\ \hline 6{,}489 \end{array}$$

4) $$\begin{array}{r} 12{,}3257 \\ 4{,}56 \\ \hline 7{,}7657 \end{array}$$

5) $$\begin{array}{r} 60{,}57 \\ 0{,}9856 \\ \hline 59{,}5844 \end{array}$$

6) $$\begin{array}{r} 213{,}5734 \\ 87{,}6572 \\ \hline 125{,}9162 \end{array}$$

7) $$\begin{array}{r} 54{,}763 \\ 0{,}921 \\ \hline 53{,}842 \end{array}$$

8) $$\begin{array}{r} 73{,}5673 \\ 12{,}889 \\ \hline 60{,}6783 \end{array}$$

9) $$\begin{array}{r} 385{,}76943 \\ 72{,}57 \\ \hline 313{,}19943 \end{array}$$

10) $$\begin{array}{r} 27{,}003 \\ 7{,}6854 \\ \hline 19{,}3176 \end{array}$$

11) $$\begin{array}{r} 129{,}57 \\ 6{,}894356 \\ \hline 122{,}675644 \end{array}$$

12) $$\begin{array}{r} 0{,}975 \\ 0{,}483764 \\ \hline 0{,}491236 \end{array}$$

13) $$\begin{array}{r} 23{,}005 \\ 4{,}76943 \\ \hline 18{,}23557 \end{array}$$

14) $$\begin{array}{r} 96{,}5 \\ 0{,}000783 \\ \hline 96{,}499217 \end{array}$$

15) $$\begin{array}{r} 05 \\ 0{,}0003 \\ \hline 0{,}4997 \end{array}$$

16) $0{,}25-\frac{1}{4}=0$ 17) $\frac{2}{3}-0{,}6666...=$

18) $\frac{17}{6}-1{,}34=1{,}4933$

3) Πολλαπλασιασμός.

1) $3{,}57\times 6=21{,}42$

2) 5,798 × 18 = 104,364
3. 0,5 × 36000 = 18000
4) 0,26 × 17 = 4,42
5) 0,00563 × 17 = 0,09571
6) 0,0000054 × 3785 = 0,020439
7) 1,44 × 1,2 = 1,728
8) 3,046 × 0,32 = 0,97472
9) 0,337 × 0,023 = 0,007751
10) 3,7 × 2,6 = 9,62
11) 5,78 × 3,4 = 19,652
12) 3,9765 × 4,378 = 17,409117
13) 32,76859 × 13,0076 = 426,24071284
14) 138,5 × 7,695708 = 1065,855558
15) 0,43 × 0,65 = 0,2795
16) 0,576 × 0,3854 = 0,2219904
17) 0,005 × 0,017 = 0,000085
18) 0,007853 × 0,00476 = 0,0000373828
19) 113,5 × 0,072 = 8,172
20) 0,372106 × 0,0054 = 0,0020093724
21) 0,137 × 0,00056 = 0,00007672
22) 0,376 × 0,007694 = 0,002892144
23) 4,587 × 10 = 45,87
24) 9,307 × 100 = 930,7
25) 0,5386 × 1000 = 538,6
26) 2,04 × $\frac{3}{4}$ = 1,53
27) $\frac{5}{6}$ × 0,23 = 0,19

Σύντομος πολλαπλασιασμός.

1)
```
  7,65340958
×   2,56307
-----------
 153068191 6
  38267047 9
   4592045 7
    229602 2
      5357 3
-----------
 19,61622447
```

2)
```
 0,7653478
    0,3576
----------
  22960434
   3826739
    535742
     45920
----------
0,27368835
```

3)
```
   8,99875477
× 0,43429448
-----------
 3,599501908
   269962643
    35995019
     1799752
      809887
       35995
        3599
         719
-----------
 3,908109522
```

4)
```
  2,30258909
× 3,9600901
-----------
  6,90775527
  2,07232658
    13815510
       20723
          23
-----------
  9,11844441
```

5) 0,07693421 0834	6) 37,34685 9416
× 0,000003057026	× 0,007003458
2308026325 02	261428015912
3846710541	112040578
538539475	14938743
1538684	1867342
461605	298774
0,000000235289882807	0,261557161349

7) 8,5679432 3	8) 15,7356783
× 0,5284765	× 2,564725
4283971615	314713566
172358864	78678391
68543545	9441406
3426177	629426
599755	141620
51407	3147
4283	786
4,527959646	39,3576771

---

4) Διαίρεσις.

1) 5,64 : 2 = 2,82
2) 7,5832 : 8 = 0,9479
3) 3,045 : 15 = 0,203
4) 7,356 : 6 = 1,226
5) 23 : 4 = 5,75
6) 694 : 32 = 21,6875

7) 76 : 125 = 0,608
8) 0,3276941 4 : 18 = 0,0182052 3
9) 0,01765125 : 375 = 0,00004707
10) 75 : 16 = 4,6875
11) 731 : 8 = 91,375
12) 3,54 : 7 = 0,5057142 8 (Περίοδος 571428)
13) 5 : 3 = 1,6666 .... (Περ. 6)
14) 7 : 11 = 0,636363 ..... (Περ. 63)
15) 6 : 7 = 0,857142857142 ... Περ. 857142)
16) 8,2356 : 17 = 0,484447 ..... (Περ. 4705882352941176)
17) 273,694 : 543 = 0,5040405 1 .....
18) 6938,57 : 276 = 25,13974637 .....
19) 0,000215 : 316 = 0,0000006803797 .....
20) 400 : 0,25 = 1600
21) 378 : 0,01 = 37800
22) 24 : 0,006 = 4000
23) 5640 : 0,0015 = 3760000
24) 183260 : 0,476 = 385000
25) 183260 : 0,044 = 4165000
26) 1 : 0,24 = 4,166666 ......
27) 2,134 : 0,12 = 17,7833
28) 0,0036 : 4,8 = 0,00075
29) 2,53944 : 7,2 = 0,3527
30) 0,0238245 : 0,37 = 0,064385
31) 1114,86945005 : 0,385 = 2895,764013
32) 56,4 : 0,00015 = 376000
33) 10287,36 : 0,0036 = 2857600
34) 0,0001 : 0,02 = 0,005

35) 145,817 : 0,0563 = 2590
36) 374 : 2,4 = 155,833333 .....
37) 15,713 : 18,13 = 0,86668505 .....
38) 137,51634 : 27,65 = 4,97346618 ......
39) 0,5 : 76,91342 = 0,0065008 1 .....
40) 0,046 : 0,00762089 = 6,0360404 .....
41) 1 : 3,2561047 = 0,30711543 .....
42) 38076 : 137 = 277,92700729 .....
43) 53,436 : 10 = 5,3436
44) 32,43 : 100 = 0,3243
45) 5,38 : 1000 = 0,00538

Σύντομος διαίρεσις.

1)
7,632035 | 3,716048
7,432096 | 2,053804
199939
185802
14137
11148
2989
2972
17
14
3

2)
2,0000000 | 15,314865
15315865 | 0,13059209
4685135
4594459
90676
76574
14102
13782
320
306
14
13
1

3)
0,439862 | 0,58433
409024 | 0,75278..
30841
29216
1625
1168
457
408
49
46
3

4)
3,07564 | 0,6437
25748 | 4,778..
5008
4505
503
450
53
51
2....

5)
10,926954 | 0,3547808
10,643424 | 30,79917...
283530
248346
35184
31930
3254
3192
62
35
27
24
3...

6)
3,00000000 | 0,0035843297
28674637 6 | 836,97659.....
13253624
10752989
2500635
2150597
350038
322588
27450
25090
2360
2150
210
179
31
31

```
7) 2,3032402 | 1,0203423
   20406846  | 2,257211
   --------
    2625556
    2040685
    -------
     584871
     510171
     ------
      74700
      71424
      -----
       3276
       3076
       ----
        215
        204
        ---
         11
         10
         --
          1
```

[illegible]

```
8) 3,021542043 | 1,235267811
   2470535642  | 2,446062299
   ----------
    551006401
    494107128
    ---------
     56899273
     49410713
     --------
      7488560
      7411607
      -------
        76953
        74116
        -----
         2837
         2470
         ----
          367
          246
          ---
          121
          111
          ---
            9
            9
```

5) Ἀναγωγὴ τῶν κοινῶν κλασμάτων εἰς δεκαδικά.

1) $\frac{1}{2} = 0,5$
2) $\frac{3}{4} = 0,75$
3) $\frac{13}{16} = 0,8125$
4) $\frac{17}{20} = 0,85$
5) $\frac{3}{40} = 0,075$
6) $\frac{17}{125} = 0,136$
7) $\frac{7}{800} = 0,00875$
8) $\frac{372}{1250} = 0,2976$
9) $\frac{11}{16000} = 0,0006875$
10) $\frac{15}{1280} = 0,01171875$
11) $\frac{347}{25600} = 0,013554687$5

12) $\frac{1}{10000} = 0,0001$
13) $\frac{3476}{15625} = 0,222464$
14) $\frac{1}{2048000} = 0,00000048828125$
15) $\frac{2}{3} = 0,666666$ .... (Περίοδος: 6)
16) $\frac{3}{7} = 0,428571 4$ .... (Περ. 428571)
17) $\frac{15}{17} = 0,88235$ ....Περ. 8823529411764705)
18) $\frac{3}{35} = 0,0857142857$.... Περ. 857142
19) $\frac{17}{19} = 0,894736842105263157$ ....
20) $\frac{19}{1365} = 0,0139194139$ .....
21) $\frac{706}{5907} = 0,1195192144$ .....
22) $\frac{1}{679} = 0,0014727540$ ......
23) $\frac{1}{8076934} = 0,0000001238$ .....
24) $\frac{13}{569437} = 0,0000228295$ .....
25) $\frac{130}{2769135} = 0,0000469460$ .....
26) $\frac{17}{30000} = 0,00056666$ ......
27) $\frac{47}{71000000} = 0,0000006619$ .....

1) Ποσὸν τοῦ ἔτους εἶναι ἡ ἡμέρα, ἂν τὸ ἔτος ἔχῃ 365 ἡμέρας 6 ὥρας;
'Απ. 0,0027378507 ....

2) Πόσον ὅμως αὐτοῦ ἤθελεν εἶναι, ἂν τὸ ἔτος ἐλαμβάνετο, κατὰ τὸ ἀκριβές, πρὸς 365,2422453 ἡμέρας; 'Απ. 0,0027379034...

3) Ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου μερίζεται εἰς 360 μέρη ὀνομαζόμενα μοίρας, ἡ μοῖρα εἰς 60 λεπτὰ καὶ τὸ λεπτὸν εἰς 60 δεύτερα λεπτά. Κατὰ τὴν νεωτέραν ὅμως διαίρεσιν τῶν Γάλλων διαιρεῖται ὁ κύκλος εἰς 400 μοίρας καὶ αἱ ὑποδιαιρέσεις αὐτῶν ἐκφράζονται διὰ δεκαδικῶν.

Πῶς ἀναλογοῦν λοιπὸν αἱ μοῖραι, τὰ λεπτὰ καὶ δεύτερα λεπτὰ τῆς προτέρας διαιρέσεως μὲ ἐκεῖνα τῶν Γάλλων; 'Απ. Αἱ μοῖραι, τὰ λεπτὰ καὶ δεύτερα λεπτὰ σημειωμένα ὡς: ^{0}, $'$, $''$ εἶναι $1^{0} = 1^{0},111111$ .... γαλ. $1' = 0^{0},015818$.. γαλ. $1'' = 0^{0},000308$ γαλ.

4) Πόσας συνήθεις μοίρας, λεπτὰ καὶ δεύτερα λεπτὰ ἀποτελοῦν $57^{0},9467$ τῆς διαιρέσεως τῶν Γάλλων; 'Απ. $52^{0}\ 9'\ 7,308''$

5) Πόσα ἀποτελοῦν 43° 6' 20" τῆς συνήθους διαιρέσεως μεταβαλλόμενα εἰς τὴν Γαλλικήν;
'Απ. 47°,895 .....

6) Ποῖος εἶναι ὁ τέταρτος μέσος ἀνάλογος τῶν τριῶν ἀριθμῶν 0,45, 0,8, 0,367. 'Απ. 0,65244 ....

7) Εἷς κυβικὸς δάκτυλος καθαρωτάτου χυτοῦ χρυσοῦ βαρύνει περίπου 19,64 περισσότερον ἑνὸς κυβικοῦ δακτύλου κατεςαγμένου ὕδατος; εἷς κυβικὸς δάκτυλος Ἰαπωνικοῦ χαλκοῦ βαρύνει μόνον 9 φορὰς περισσότερον. Πόσον μεγάλον πρέπει νὰ ἦναι ἓν τμῆμα χαλκοῦ διὰ νὰ βαρύνῃ ἴσον μὲ $\frac{3}{4}$ ἑνὸς κυβικοῦ δακτύλου τοῦ εἰρημένου χρυσοῦ; 'Απ. 1,6366 ... Κυβ. δακτ.

B. Ὑπολογισμὸς διὰ γραμμάτων ἐν γένει.

Ἡ σημαντικὴ πρόοδος τῆς μαθηματικῆς εἰς τοὺς τελευταίους αἰῶνας, ἡ ἐκ τούτου προελθοῦσα ποικιλία καὶ περιπλοκὴ τῶν μεθόδων καὶ θεωρημάτων αὐτῆς καὶ ὁ περιορισμὸς τῶν νοερῶν μας δυνάμεων, κατέςησαν ἀναγκαίαν τὴν ἐφεύρεσιν σημείων ἐκφραζόντων τοὺς συλλογισμούς, ἢ τὴν γλῶσσαν τῶν σημείων, ἥτις ὡς συντομωτέρα ἠμπορεῖ νὰ ἐκφράζῃ καὶ ὅλα ἀκριβέςερα τοῦ λόγου. — Πῶς κατορθόνει τὸν σκοπὸν τοῦτον ὁ διὰ γραμμάτων ὑπολογισμός; Ποῖα σημεῖα χρειάζεται διὰ τὴν πρόσθεσιν, ἀφαίρεσιν, πολλαπλασιασμὸν καὶ διαίρεσιν; — Τί ἐννοοῦν ὑπὸ τὴν λέξιν ποσοτήτων ἄθροισμα; Τί σημαίνουν αἱ παρενθέσεις καὶ τὰ τόξα; Ποῦ τὰ μεταχειρίζονται; Ἤθελεν ἀλλάζει τὸ νόημα ἂν παρελίποντο αὐτά; — Τί εἶναι προσθέτης; Ποῖαι ὀνομάζονται ἀντίςροφοι ποσότητες; Ποῦ εὑρίσκονται παραδείγματα αὐτῶν; — Τί σημαίνει θετικὸν καὶ ἀποθετικὸν ἢ ἀρνητικόν; — Ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον καθιςᾷ ποσότητα ἀντίςροφον, εἶναι ἰδιότης αὐτῆς, ἀναφορὰ τῆς μιᾶς πρὸς τὴν ἄλλην. — Πῶς ὀνομάζεται ἡ ποσότης, ἂν δὲν θεωρηθῇ αὐτὴ ἡ ἀναφορά; Ἕνωσις ἀντιςρόφων ποσοτήτων εἶναι ἀφαίρεσις ἀπολύτων ποσοτήτων· διατί;

I) Πρόσθεσις

α) Πρόσθεσις ἁπλῶν ποσοτήτων.

$$1)\ \begin{array}{r}\alpha\\ \alpha\\ \hline 2\alpha\end{array}\qquad 2)\ \begin{array}{r}7\alpha\\ 5\alpha\\ \hline 12\alpha\end{array}\qquad 3)\ \begin{array}{r}8\gamma\\ \gamma\\ \hline 9\gamma\end{array}\qquad 4)\ \begin{array}{r}\alpha\\ \beta\\ \hline \alpha+\beta\end{array}$$

$$5)\ \begin{array}{r}7\alpha\\ 10\chi\\ \hline 7\alpha+10\chi\end{array}\qquad 6)\ \begin{array}{r}\alpha\\ -\alpha\\ \hline 0\end{array}\qquad 7)\ \begin{array}{r}17\alpha\\ -6\alpha\\ \hline 11\alpha\end{array}\qquad 8)\ \begin{array}{r}5\alpha\\ -9\alpha\\ \hline -4\alpha\end{array}$$

$$9)\ \begin{array}{r}-6\alpha\\ 10\alpha\\ \hline 4\alpha\end{array}\qquad 10)\ \begin{array}{r}+3\alpha\\ 2\alpha\\ \hline -\alpha\end{array}\qquad 11)\ \begin{array}{r}\alpha\\ -\beta\\ \hline \alpha-\beta\end{array}\qquad 12)\ \begin{array}{r}8\alpha\\ -5\beta\\ \hline 8\alpha-5\beta\end{array}$$

$$13)\ \begin{array}{r}-7\alpha\\ \beta\\ \hline -7\alpha+\beta\\ \text{ἢ } \beta-7\alpha\end{array}\qquad 14)\ \begin{array}{r}-\alpha\\ -\alpha\\ \hline -2\alpha\end{array}\qquad 15)\ \begin{array}{r}-3\alpha\\ -8\alpha\\ \hline -11\alpha\end{array}\qquad 16)\ \begin{array}{r}-8\alpha\\ -3\beta\\ \hline -8\alpha-3\beta\\ \text{ἢ } -(8\alpha+3\beta)\end{array}$$

$$17)\ \begin{array}{r}3\alpha\\ -5\alpha\\ 8\alpha\\ \hline 6\alpha\end{array}\qquad 18)\ \begin{array}{r}-12\beta\\ -4\beta\\ 13\beta\\ \hline -3\beta\end{array}\qquad 19)\ \begin{array}{r}-6\gamma\\ 9\gamma\\ 13\gamma\\ -8\gamma\\ \hline 8\gamma\end{array}\qquad 20)\ \begin{array}{r}-7\delta\\ -5\delta\\ -3\delta\\ \hline -15\delta\end{array}$$

$$21)\ \begin{array}{r}5\delta\\ 7\delta\\ \delta\\ -8\delta\\ \hline 5\delta\end{array}\qquad 22)\ \begin{array}{r}8\varepsilon\\ -4\varepsilon\\ 7\varepsilon\\ -11\varepsilon\\ \hline 0\end{array}\qquad 23)\ \begin{array}{r}3\gamma\\ 2\zeta\\ -5\gamma\\ 7\zeta\\ -10\gamma\\ \hline -12\gamma+9\zeta\\ \text{ἢ } 9\zeta-12\gamma\end{array}\qquad 24)\ \begin{array}{r}3\alpha\\ -5\alpha\\ 7\alpha\\ 2\beta\\ -\gamma\\ 4\beta\\ \hline 5\alpha+6\beta-\gamma\end{array}$$

β) Προσθέσεις μικτῶν ποσοτήτων.

1) $$\begin{array}{r} 7\alpha-5\gamma+3\beta \\ 2\alpha-3\gamma-7\beta \\ \hline 9\alpha-8\gamma-4\beta \end{array}$$

2) $$\begin{array}{r} 5\alpha+4\beta-3\gamma-7\delta+8 \\ 3\alpha-12\beta+7\gamma-10\delta-4 \\ \hline 8\alpha-8\beta+4\gamma-17\delta+4 \end{array}$$

3) $$\begin{array}{r} 12\zeta-3\gamma-7\varphi+3\varsigma \\ -3\zeta+8\gamma-2\varphi-9\varsigma+5\chi \\ \hline 9\zeta+5\gamma-9\varphi-6\varsigma+5\chi \end{array}$$

4) $$\begin{array}{r} 16\alpha-5\beta+10\gamma-9\delta \\ 3\alpha+18\beta-5\gamma-7\delta+3\varepsilon \\ -7\alpha-2\beta-3\delta+5\varepsilon-9\varsigma \\ 11\alpha-3\beta+2\gamma+8\delta+7\varsigma \\ \hline 23\alpha+8\beta+7\gamma-11\delta+8\varepsilon-2\varsigma \end{array}$$

5) $$\begin{array}{r} 7\chi-6\psi+5\varphi+3-\zeta \\ -\chi-3\psi-8-\zeta \\ -\chi+\psi-3\varphi-1+7\zeta \\ -2\chi+3\psi+3\varphi-1-\zeta \\ \chi+8\psi-5\varphi+9+\zeta \\ \hline 4\chi+3\psi+2+5\zeta \end{array}$$

6) $$\begin{array}{r} 8\alpha+\beta \\ 2\alpha-\beta+\gamma \\ -3\alpha+5\beta+2\delta \\ -6\beta-3\gamma+3\delta \\ -5\alpha+7\gamma-2\delta \\ \hline 2\alpha-\beta+5\gamma+3\delta \end{array}$$

7) $$\begin{array}{r} -\alpha+3\beta-\gamma-115\delta+6\varepsilon-5\varsigma \\ 3\alpha-2\beta-3\gamma-\delta+27\varepsilon \\ 5\beta-8\gamma+3\varepsilon-7\varsigma \\ -7\alpha-6\beta+17\gamma+9\delta-5\varepsilon+11\varsigma \\ -3\alpha-5\gamma-2\delta+6\varepsilon-9\varsigma+\zeta \\ \hline -8\alpha-109\delta+37\varepsilon-10\varsigma+\zeta \end{array}$$

8) $$\begin{array}{r} -7\varsigma+3\alpha \\ 4\varsigma-2\alpha \\ 3\varsigma-3\alpha \\ +2\alpha \\ \hline 0 \end{array}$$

Σημ. Καλὸν εἶναι νὰ ἀντικαθιστᾷ ὁ διδάσκαλος ἀριθμοὺς εἰς τὰ γράμματα διὰ νὰ ἀποδεικνύῃ ὀφθαλμοφανῶς εἰς τὸν μαθητὴν τὴν ὀρθότητα τῶν παραγομένων. Τοῦτο εἶναι ὠφελιμώτατον πρὸ πάντων διὰ τοὺς ἀρχαρίους.

Ἀφαίρεσις.

α) Ἀφαίρεσις ἁπλῶν ποσοτήτων.

1) $\begin{array}{r} \alpha \\ \alpha \\ \hline 0 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 7\alpha \\ 3\alpha \\ \hline 4\alpha \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 10\varsigma \\ 10\varsigma \\ \hline 0 \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} 5\delta \\ 11\delta \\ \hline -6\delta \end{array}$

5) $\begin{array}{r} 7\alpha \\ 5\beta \\ \hline 7\alpha-5\beta \end{array}$ 6) $\begin{array}{r} \alpha \\ -\alpha \\ \hline 2\alpha \end{array}$ 7) $\begin{array}{r} 8\alpha \\ -\alpha \\ \hline 9\alpha \end{array}$ 8) $\begin{array}{r} 6\alpha \\ -5\alpha \\ \hline 11\alpha \end{array}$

9) $\begin{array}{r} \alpha \\ -4\alpha \\ \hline 5\alpha \end{array}$ 10) $\begin{array}{r} \alpha \\ -\beta \\ \hline \alpha+\beta \end{array}$ 11) $\begin{array}{r} 3\alpha \\ -2\beta \\ \hline 3\alpha+2\beta \end{array}$ 12) $\begin{array}{r} -9\alpha \\ 3\alpha \\ \hline -12\alpha \end{array}$

13) $\begin{array}{r} -7\alpha \\ -7\alpha \\ \hline 0 \end{array}$ 14) $\begin{array}{r} -19\alpha \\ -20\alpha \\ \hline \alpha \end{array}$ 15) $\begin{array}{r} -6\alpha \\ -5\alpha \\ \hline -\alpha \end{array}$ 16) $\begin{array}{r} -3\alpha \\ -5\beta \\ \hline -3\alpha-5\beta \\ \text{ἢ } 5\beta-3\alpha \end{array}$

17) $\begin{array}{r} -13 \\ 3 \\ \hline -16 \end{array}$ 18) $\begin{array}{r} -8 \\ -17 \\ \hline 9 \end{array}$ 19) $\begin{array}{r} 12 \\ -7 \\ \hline 19 \end{array}$ 20) $\begin{array}{r} -13 \\ -8 \\ \hline -5 \end{array}$

β) Ἀφαίρεσις μικτῶν ποσοτήτων.

1) $$\begin{array}{r} 7\varsigma+3\mu-8\chi \\ -6\varsigma-5\mu-2\chi+3\delta+8 \\ \hline -\varsigma+8\mu-6\chi-3\delta+8 \end{array}$$

2) $$\begin{array}{r} 3\alpha-2\beta+6 \\ 2\alpha-7\beta-3 \\ \hline \alpha+5\beta+9 \end{array}$$

3) $$\begin{array}{r} 13\alpha-2\beta+9\gamma-3\delta \\ 8\alpha-6\beta+9\gamma-10\delta+12 \\ \hline 5\alpha+4\beta+7\delta-12 \end{array}$$

4) $$\begin{array}{r} 2\alpha-\varepsilon-\zeta-\lambda \\ 9\alpha-3\varepsilon+4\zeta-\lambda-\gamma \\ \hline -7\alpha+2\varepsilon-5\zeta+\gamma \end{array}$$

5) $$\begin{array}{r} -\alpha-5\beta+7\gamma-\delta \\ 4\beta-3\nu+2\delta+3\zeta \\ \hline -\alpha-9\beta+10\gamma-3\delta-3\zeta \end{array}$$

6) $$\begin{array}{r} 3\zeta-2\kappa \\ 9\lambda-7-8\kappa \\ \hline 3\zeta-9\lambda+6\kappa+7 \end{array}$$

$$7)\ \begin{array}{l} -3\alpha+\beta-8\gamma+7\varepsilon-5\zeta+3\varsigma-7\chi-13\upsilon\iota \\ \kappa+2\alpha\quad -9\gamma+8\varepsilon+7\zeta\quad -7\chi-\upsilon\iota-3\lambda-\eta \\ \hline -5\alpha+\beta+\gamma-\varepsilon-12\zeta+3\varsigma\quad -12\upsilon\iota+3\lambda \end{array}$$

$$8)\ \begin{array}{l} 5\beta-3\alpha+203\gamma+5 \\ -2\beta-8\alpha+67\gamma+7 \\ \hline 7\beta+5\alpha+136\gamma-2 \end{array} \qquad 9)\ \begin{array}{l} -14\beta+3\gamma-27\delta+3-5\zeta \\ 7\alpha-5\gamma-8\delta+3\beta-12+7\zeta \\ \hline -7\alpha-17\beta+8\gamma-19\delta+15-12\zeta \end{array}$$

$$10)\ \begin{array}{l} 6\alpha+5-3\beta-5\zeta-\varsigma-\eta \\ -2\alpha-9\beta+8\varsigma-9\eta+7\zeta-8 \\ \hline 8\alpha+6\beta+13-12\zeta-9\varsigma+8\eta \end{array} \qquad 11)\ \begin{array}{l} 3\gamma-2\lambda+5\gamma \\ 8\lambda+7\gamma-4\lambda \\ \hline \gamma-6\lambda \end{array}$$

$$12)\ \begin{array}{l} 3\alpha-17\beta-10\beta+13\alpha-2\alpha \\ 6\beta-8\alpha-\beta-2\alpha+3\delta+9\alpha-5\eta \\ \hline 15\alpha-32\beta-\quad 3\delta+5\eta \end{array} \qquad 13)\ \begin{array}{l} 5\gamma+3 \\ 2\gamma-9-7\gamma \\ \hline 10\gamma+12 \end{array}$$

$$14)\ \begin{array}{l} 8\alpha-5\beta-3\gamma-7\delta+5\varepsilon-8\zeta+3\eta+17\kappa \\ -2\kappa+3\gamma-5\beta+2\delta-4\varepsilon-7\zeta+9\eta+5\kappa-\lambda \\ \hline 8\alpha-6\gamma-9\delta+9\varepsilon-\zeta-6\eta+24\kappa+\lambda \end{array}$$

15) $32\alpha+3\beta-(5\alpha+17\beta)=27\alpha-14\beta$

16) $13\alpha-(5\gamma+3\zeta-7\alpha-5\chi+3\alpha)=17\alpha-5\gamma-3\zeta+5\chi$

17) $-8\alpha+5\beta-3\gamma-(7\alpha-3\beta-2\gamma)=-15\alpha+8\beta-\gamma$

18) $3\alpha-5\gamma+3\delta-(7\alpha-6\delta+8\gamma-2\varepsilon)=8\delta+2\varepsilon-4\alpha-13\gamma$

19) $37\alpha-5\zeta-(3\alpha-2\beta-5\gamma)-(6\alpha-4\beta+3\theta)=$
$28\alpha+6\beta-5\zeta+5\gamma-3\theta$

20) $\alpha+\beta-(2\alpha-3\beta)-(5\alpha+7\beta)-(-13\alpha+2\beta)=7\alpha-5\beta$

21) $\frac{1}{2}\alpha-\frac{5}{6}\chi-(\frac{3}{4}\alpha-\frac{1}{2}\chi)-(3\beta+\frac{1}{4}\chi-\frac{2}{3}\alpha)=\frac{5}{12}\alpha-\frac{17}{12}\chi$
$-3\beta=\frac{5\alpha}{12}-\frac{17\chi}{12}-3\beta$

---

3) Πολλαπλασιασμός.

α) Πολλαπλασιασμὸς ἁπλῶν ποσοτήτων.

1) $\alpha\times\beta=\beta\times\alpha=\alpha\beta=\beta\alpha=\beta.\alpha=\alpha.\beta$

2) $\alpha\times\beta\times\gamma=\alpha\beta\gamma=\alpha\gamma\beta=\beta\gamma\alpha=\gamma\alpha\beta=\gamma\beta\alpha=\beta\alpha\gamma$

3) $-\alpha\times\beta=-\alpha\beta$

4) $\alpha\times-\beta=-\alpha\beta$

5 $-\alpha\times-\beta=\alpha\beta$

6) $6\alpha\times7\beta=42\alpha\beta$

7) $17\alpha\times\frac{3}{4}\beta=\frac{51}{4}\alpha\beta=\frac{51\alpha\beta}{4}$

8) $\frac{3\alpha}{2}\times\frac{5\zeta}{4}=\frac{15\alpha\zeta}{8}=\frac{15}{8}\alpha\zeta$

9) $-3\alpha\times14\gamma=-42\alpha\gamma$

10) $7\alpha\times-10\beta=-70\alpha\beta$

11) $\frac{3}{8}\alpha\times-\frac{2}{3}\beta=\frac{1}{4}\alpha\beta=\frac{\alpha\beta}{4}$

12) $\alpha\times-7\beta=-7\alpha\beta$

13) $-6\alpha\times-11\chi=66\alpha\chi$

14) $-\frac{5\alpha}{4}\times-\frac{3\beta}{7}=\frac{15\alpha\beta}{28}$

15) $\alpha\beta\times\gamma\delta\varepsilon=\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$

16) $-5\alpha\beta\gamma\times-7\alpha\delta\varepsilon=35\alpha\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$

17) $-5\beta\delta\times9\beta\beta\delta\chi\psi=-45\beta\beta\beta\delta\delta\chi\psi$

18) $-\frac{1}{2}\alpha\beta\delta\times\frac{1}{4}\gamma\delta\varepsilon\zeta=-\frac{1}{8}\alpha\beta\gamma\delta\delta\varepsilon\zeta$

19) $17\alpha\gamma\varepsilon\times5=85\alpha\gamma\varepsilon$

20) $\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$

21) $-\frac{3\zeta\eta}{5\gamma\delta\varepsilon}\times\alpha\theta=-\frac{3\alpha\zeta\theta\eta}{5\gamma\delta\varepsilon}$

22) $\frac{1}{\zeta\eta\theta}\times4\gamma\delta=\frac{4\gamma\delta}{\zeta\eta\theta}$

23) $-\frac{5\alpha\gamma}{6\delta\varepsilon}\times-\frac{7\beta\zeta\eta}{3\alpha\delta}=\frac{35\gamma\zeta\eta}{3\delta\delta\varepsilon}$

24) $\frac{\theta}{2\zeta\eta}\times\frac{\eta}{3\theta}=\frac{1}{6\zeta}$

25) $3\alpha\beta\times2\gamma\delta\times\delta\zeta\eta=6\alpha\beta\gamma\delta\delta\zeta\eta$

26) $-\frac{\alpha}{\beta}\times\beta\times-5\delta\zeta=5\alpha\delta\zeta$

27) $-4\alpha\beta\times-\frac{3\gamma\delta\epsilon}{2\alpha\alpha\beta}\times-\frac{1}{5\gamma\zeta}=-\frac{6\delta\epsilon}{5\alpha\zeta}$

28) $-\alpha\times-\alpha\times-\alpha\times-\alpha=\alpha\alpha\alpha\alpha$

29) $\frac{2\alpha\gamma}{\beta\eta}\times-\frac{3\beta\delta}{4\gamma\zeta\theta}\times\eta\zeta=-\frac{3\alpha\delta}{2\theta}$

30) $\frac{1}{\alpha}\times\frac{3\alpha\gamma}{\chi}\times\frac{\gamma}{\chi}=\frac{3\gamma\gamma}{\chi\chi}$

31) $\frac{2\zeta\eta}{\beta\delta\theta}\times\frac{3\chi\psi}{7\zeta\varphi}\times-\frac{\beta\gamma}{5\delta}=-\frac{6\gamma\eta\chi\psi}{35\delta\delta\theta\varphi}$

32) $\frac{3\alpha\beta}{2\gamma}\times-\frac{2\alpha\gamma}{3}\times\frac{2\beta\gamma\gamma}{3\alpha}\times\delta=-\frac{2\alpha\beta\beta\gamma\gamma\delta}{3}$

33) $\frac{1}{4}\alpha\beta\times\frac{4\alpha\gamma\delta}{\beta\epsilon}\times\frac{3}{2}\alpha\beta\epsilon\times\frac{2}{3}=\alpha\alpha\alpha\beta\gamma\delta$

β) Πολλαπλασιασμὸς μικτῶν ποσοτήτων.

1) $(6\alpha+3\beta-5\zeta)\times5\eta=30\alpha\eta+15\beta\eta-25\zeta\eta$

2) $(-2\beta+3\gamma-\eta)\times-8\theta=16\beta\theta-24\gamma\theta+8\eta\theta$

3) $(7\alpha\delta-15\beta\gamma-16\alpha\gamma\zeta)\times10\alpha\beta=70\alpha\alpha\beta\delta-150\alpha\beta\beta\gamma$
$-160\alpha\alpha\beta\gamma\zeta$

4) $\left(\frac{5\alpha}{\beta}-\frac{13\gamma}{2\delta}-\frac{6\theta}{5\beta\eta}+7\delta\right)\times\frac{3\alpha}{5\delta}=\frac{3\alpha\alpha}{\beta\delta}-\frac{39\alpha\gamma}{10\delta\delta}-\frac{18\alpha\theta}{25\beta\delta\eta}+\frac{21\alpha}{5}$

5) $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)=\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\delta+\beta\delta$

6) $(\alpha+\beta-\gamma)(\delta-\epsilon)=\alpha\delta+\beta\delta-\gamma\delta-\alpha\epsilon-\beta\epsilon+\gamma\epsilon$

7) $(2\alpha-3\beta-8\gamma-\delta+9\epsilon)(7\zeta+2\eta-\theta)=14\alpha\zeta-21\beta\zeta$
$-56\gamma\zeta-7\delta\zeta+63\epsilon\zeta+4\alpha\eta-6\beta\eta-16\gamma\eta-2\delta\eta$
$+18\epsilon\eta-2\alpha\theta+3\beta\theta+8\gamma\theta+\delta\theta-9\epsilon\theta$

8) $(7\lambda=2\mu-9)\times(3\lambda-11\mu)=21\lambda\lambda-83\lambda\mu-27\lambda$
$+22\mu\mu+99\mu$

9) $(2\alpha+5\beta+3\gamma-5\epsilon)\times(3\alpha+10\beta+15\zeta)=6\alpha\alpha+35\alpha\beta$
$+9\alpha\gamma-15\alpha\epsilon+50\beta\beta+30\beta\gamma-50\beta\epsilon+30\alpha\zeta+75\beta\zeta$
$+45\gamma\zeta-75\epsilon\zeta$

10) $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha\alpha-\beta\beta$

11) $(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)=\alpha\alpha+2\alpha\beta+\beta\beta$

12) $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha\alpha-2\alpha\beta+\beta\beta$

13) $(3\alpha+5\beta-\frac{7}{2}\gamma)\times(\alpha-2\beta+9\gamma)=3\alpha\alpha-\alpha\beta+\frac{47}{2}\alpha\gamma$
$-10\beta\beta+52\beta\gamma-\frac{63}{2}\gamma\gamma$

14) $(3\gamma-5\delta+\frac{3}{4}\eta-\frac{5}{3}\theta)\times(\frac{2}{3}\gamma-\delta+7\eta+\frac{5}{2}\theta)=2\gamma\gamma-\frac{19}{3}\gamma\delta$
$+\frac{43}{2}\gamma\eta+\frac{7}{18}\gamma\theta+5\delta\delta-\frac{143}{4}\delta\eta-\frac{5}{6}\delta\theta+\frac{21}{4}\eta\eta-\frac{271}{24}\eta\theta$
$-\frac{5}{6}\theta\theta$

15) $(5\alpha\beta+3\alpha\gamma-4\beta\gamma)\times(7\alpha\beta-18\alpha\gamma+2\beta\gamma+\delta)=35\alpha\alpha\beta\beta$
$-69\alpha\alpha\beta\gamma-18\alpha\beta\beta\gamma+5\alpha\beta\delta-54\alpha\alpha\gamma\gamma+78\alpha\beta\gamma\gamma$
$+3\alpha\gamma\delta-8\beta\beta\gamma\gamma-4\beta\gamma\delta$

16) $(13\beta\gamma\delta+20\beta\gamma\epsilon-10\beta\delta\epsilon)\times(4\beta\gamma+3\beta\delta-12\epsilon)=52\beta\beta\gamma\gamma\delta$
$+80\beta\beta\gamma\gamma\epsilon+20\beta\beta\gamma\delta\epsilon+39\beta\beta\gamma\delta\delta-30\beta\beta\delta\delta\epsilon-156\beta\gamma\delta\epsilon$
$-240\beta\gamma\epsilon\epsilon+120\beta\delta\epsilon\epsilon$

17) $(5\alpha\alpha-3\alpha\beta+7\beta\beta)\times(3\alpha-\beta)=15\alpha\alpha\alpha-14\alpha\alpha\beta$
$+24\alpha\beta\beta-7\beta\beta\beta$

18) $(\alpha+\beta+\gamma)\times(\alpha+\beta-\gamma)=\alpha\alpha+2\alpha\beta+\beta\beta-\gamma\gamma$

19) $(3\alpha\alpha\alpha+35\alpha\alpha\beta-17\alpha\beta\beta-13\beta\beta\beta)\times(3\alpha\alpha+26\alpha\beta-57\beta\beta)$
$=9\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha+183\alpha\alpha\alpha\alpha\beta+688\alpha\alpha\alpha\beta\beta-2476\alpha\alpha\beta\beta\beta$
$+631\alpha\beta\beta\beta\beta+741\beta\beta\beta\beta\beta$

20) $(3\alpha-\beta+2\gamma-3\delta+5\epsilon)\times(17\alpha-2\beta+12\gamma)=51\alpha\alpha$
$-23\alpha\beta+70\alpha\gamma-51\alpha\delta+85\alpha\epsilon+2\beta\beta-16\beta\gamma+6\beta\delta$
$-10\beta\epsilon+24\gamma\gamma-36\gamma\delta+60\gamma\epsilon$

21) $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\times(\alpha-\beta-\gamma-\delta)=\alpha\alpha-\beta\beta-2\beta\gamma-2\beta\delta$
$-\gamma\gamma-2\gamma\delta-\delta\delta$

22) $(-2\alpha+3\beta-\gamma\gamma)\times(-3\zeta-7\alpha+\gamma\gamma)=6\alpha\zeta-9\beta\zeta+3\gamma\gamma\zeta$
$+14\alpha\alpha-21\alpha\beta+5\alpha\gamma\gamma+3\beta\gamma\gamma-\gamma\gamma\gamma\gamma$

23) $(\frac{3}{2}\mu-5\nu-\frac{1}{3}\pi\pi)\times(\frac{1}{4}\mu-2\nu+6\pi\pi=)\frac{3}{8}\mu\mu-\frac{17}{4}\mu\nu$

$+\frac{107}{12}\mu\pi\pi + 10\nu\nu - \frac{88}{3}\nu\pi\pi - 2\pi\pi\pi\pi$

24) $\left(\frac{5\zeta\zeta}{\eta} - \frac{7\zeta\eta}{40} + 3\zeta\right) + \left(\frac{7\eta}{\zeta} + \frac{2\zeta}{\eta}\right) = 35\zeta - \frac{49\eta\eta}{40} + 21\eta + \frac{10\zeta\zeta\zeta}{\eta\eta}$
$- \frac{7\zeta\zeta}{20} + \frac{6\zeta\zeta}{\eta}$

25) $\left(\frac{\alpha\alpha}{\chi\chi} - \frac{\alpha\beta}{2\chi\psi} + \frac{\beta\beta}{\psi\psi}\right) + \left(\frac{3\alpha\alpha}{\chi\chi} - \frac{2\alpha\beta}{5\chi\psi} + \frac{\beta\beta}{\psi\psi}\right) = \frac{3\alpha\alpha\alpha\alpha}{\chi\chi\chi\chi} - \frac{19\alpha\alpha\alpha\beta}{10\chi\chi\chi\psi} + \frac{21\alpha\alpha\beta\beta}{5\chi\chi\psi\psi}$
$- \frac{9\alpha\beta\beta\beta}{10\chi\psi\psi\psi} + \frac{\beta\beta\beta\beta}{\psi\psi\psi\psi}$

---

4) Διαίρεσις

α) Διαίρεσις ἁπλῶν ποσοτήτων.

1) $\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta}$
2) $\alpha : \beta = -\frac{\alpha}{\beta}$
3) $\alpha : -\beta = -\frac{\alpha}{\beta}$
$-\alpha : -\beta = \frac{\alpha}{\beta}$
5) $5\alpha : 3\beta = \frac{5\alpha}{3\beta}$
6) $-16\alpha : 8\beta = -\frac{2\alpha}{\beta}$
7) $12\alpha : -4\beta = -\frac{3\alpha}{\beta}$
8) $-14\alpha : -4\beta = \frac{7\alpha}{2\beta}$
9) $\alpha\beta\gamma : \alpha = \beta\gamma$
10) $\alpha\beta\gamma : \alpha\delta = \frac{\beta\gamma}{\delta}$
11) $8\zeta\mu\nu : -2\zeta\eta\mu = -\frac{4\nu}{\eta}$
12) $-12\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon : -8\alpha\gamma\delta = \frac{3\beta\varepsilon}{2}$
13) $6\alpha\beta\delta\varepsilon : -2\beta\zeta = -\frac{3\alpha\delta\varepsilon}{\zeta}$
14) $27\alpha\alpha\alpha\beta\beta\gamma\zeta\eta : -18\alpha\beta\gamma\eta\theta\kappa = -\frac{3\alpha\alpha\beta\zeta}{2\theta\kappa}$
15) $35\alpha\beta\zeta\eta\mu : 5\alpha\alpha\beta\zeta\zeta\eta\mu\nu = \frac{7}{\alpha\zeta\nu}$
16) $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta}{\beta\delta}$
17) $\frac{3\alpha\zeta\chi}{\beta\gamma} : \frac{2\zeta\chi\chi}{5\gamma\delta\varepsilon} = \frac{15\alpha\delta\varepsilon}{2\beta\chi}$
18) $3\zeta\mu : -\frac{3\alpha\mu}{5\beta\eta} = -\frac{5\beta\zeta\eta}{\alpha}$
19) $\frac{2\alpha\psi}{5\beta\gamma\chi} : 3\alpha\gamma = \frac{2\psi}{15\beta\gamma\gamma\chi}$
20) $\frac{1}{7\zeta\eta\eta\lambda} : \frac{1}{4\zeta\lambda\nu} = \frac{4\nu}{7\eta\eta}$

21) $\frac{3}{4}\alpha\gamma : \frac{7}{6}\alpha\beta\delta = \frac{9\gamma}{10\beta\delta}$

β) Διαίρεσις μικτῶν ποσοτήτων.

1) $\left(3\alpha\gamma - 2\alpha\delta\varepsilon - \zeta + \frac{\gamma}{\delta}\right) : 2\alpha = \frac{3\gamma}{2} - \delta\varepsilon - \frac{\zeta}{2\alpha} + \frac{\gamma}{2\alpha\delta}$
2) $(18\alpha\gamma\zeta - 6\beta\delta\varepsilon\zeta - 2\alpha\delta) : 3\alpha\delta\zeta = \frac{6\gamma}{\delta} - \frac{2\beta\varepsilon}{\alpha} - \frac{2}{3\zeta}$
3) $(8\alpha\alpha - 6\alpha\beta + 4\gamma + 1) : -2\alpha = -4\alpha + 3\beta - \frac{3\gamma}{\alpha} - \frac{1}{2\alpha}$
4) $(12\alpha\gamma\zeta\eta - 4\alpha\zeta\zeta\eta + 3\zeta\eta\kappa\theta) : 4\alpha\alpha\beta\beta\zeta\eta = \frac{3\gamma}{\alpha\beta\beta} - \frac{\zeta}{\alpha\beta\beta} + \frac{3\kappa\theta}{4\alpha\alpha\beta\beta}$
5) $\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\zeta\delta}{\alpha\gamma} - 3\alpha\gamma + 7\right) : \frac{3\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta}{3\beta\gamma} + \frac{\zeta\delta\delta}{3\alpha\gamma\gamma} - \alpha\delta + \frac{7\delta}{3\gamma}$
6) $(\alpha\beta - \alpha\gamma) : (\beta - \gamma) = \alpha$
7) $(\alpha\gamma - \beta\gamma + \alpha\delta - \beta\delta) : (\alpha - \beta) = \gamma + \delta$
8) $(4\alpha\alpha + 6\alpha\beta - 4\alpha\chi + 9\beta\chi - 15\chi\chi) : (2\alpha + 3\chi) = 2\alpha + 3\beta$
$- 5\chi$
9) $(14\alpha\zeta - 21\beta\zeta + 7\gamma\zeta + 6\alpha\eta - 9\beta\eta + 3\gamma\eta) : (7\zeta + 3\eta)$
$= 2\alpha - 3\beta + \gamma$
10) $(4\chi\chi\chi + 4\chi\chi - 29\chi + 21) : (2\chi - 3) = 2\chi\chi + 5\chi - 7$
11) $(\frac{3}{2}\chi\chi\chi - \frac{5}{4}\chi\chi - 8\chi + 9) : (\frac{1}{2}\chi - 1) = 3\chi\chi + \frac{7}{2}\chi - 9$
12) $(\alpha\alpha + \alpha\beta + 2\alpha\gamma - 2\beta\beta + 7\beta\gamma - 3\gamma\gamma) : (\alpha + 2\beta - \gamma) = \alpha$
$- \beta + 3\gamma$
13) $(12\alpha\alpha + 26\alpha\beta - 36\alpha\gamma + 18\alpha\delta - 10\beta\beta + 29\beta\gamma - 6\beta\delta$
$- 21\gamma\gamma + 9\gamma\delta) : (6\alpha - 2\beta + 3\gamma) = 2\alpha + 5\beta - 7\gamma + 3\delta$
14) $(119\gamma\gamma - 200\gamma\delta + 408\gamma\varepsilon - 113\gamma\zeta - 39\delta\delta + 72\delta\varepsilon$
$+ 37\delta\zeta - 96\varepsilon\zeta + 20\zeta\zeta) : (17\gamma + 3\delta - 4\zeta) = 7\gamma$
$- 13\delta + 24\varepsilon - 5\zeta$
15) $\left(3\alpha\alpha - \frac{7\alpha\beta}{2} - \frac{21\alpha\gamma}{4} - \frac{5\beta\beta}{2} + \frac{83\beta\gamma}{8} - \frac{3\gamma\gamma}{2}\right) : \left(3\alpha - 5\beta + \frac{3\gamma}{4}\right)$
$= \alpha + \frac{\beta}{2} - 2\gamma$

16) $\left(2\zeta\zeta-\frac{55\zeta\theta}{12}+\frac{29\zeta\chi}{9}+\frac{21\theta\theta}{8}-\frac{15\theta\chi}{4}+\frac{\chi\chi}{3}\right):\left(\frac{2\zeta}{3}-\frac{3\theta}{4}+\chi\right)$
$=3\zeta-\frac{7\theta}{2}+\frac{\chi}{3}$

17) $(30\alpha\alpha\beta-6\alpha\alpha\gamma+75\alpha\beta\beta-15\alpha\beta\gamma):(15\alpha\beta-3\alpha\gamma)$
$=2\alpha+5\beta$

18) $(36\alpha\alpha\beta-63\alpha\beta\beta+20\beta\beta\beta):(12\alpha\beta-5\beta\beta)=3\alpha-4\beta$

19) $(72\chi\chi\chi\chi-78\chi\chi\chi\psi-10\chi\chi\psi\psi+17\chi\psi\psi\psi+3\psi\psi\psi\psi)$
$:(6\chi\chi-4\chi\psi-\psi\psi)=12\chi\chi-5\chi\psi-3\psi\psi$

20) $(\frac{1}{3}\chi\chi\chi\chi-\frac{11}{12}\chi\chi\chi+\frac{41}{8}\chi\chi-\frac{23}{4}\chi+6):(\frac{2}{3}\chi\chi-\frac{5}{6}\chi+1)$
$=\frac{1}{2}\chi\chi-\frac{3}{4}\chi+6$

21) $\left(\frac{15\alpha\alpha}{2}-\frac{113\alpha\beta}{6}+9\alpha\gamma+2\beta\beta-\beta\gamma\right):\left(\frac{5\alpha}{4}-3\beta+\frac{3\gamma}{2}\right)$
$=6\alpha-\frac{2\beta}{3}$

22) $\left(-\frac{5\chi\chi}{9}+\frac{11\chi\psi}{3}-\frac{10\varphi\chi}{3}+\frac{15\psi\psi}{4}+25\varphi\psi\right):(-\frac{2}{3}\chi+5\psi)$
$=\frac{5\chi}{6}+\frac{3\psi}{4}+5\varphi$

23) $(18\alpha\alpha+33\alpha\beta+42\alpha\gamma-12\alpha\gamma-30\beta\beta+124\beta\gamma+8\beta\delta$
$-16\gamma\gamma-32\gamma\delta):(6\alpha+15\beta-2\gamma-4\delta)=3\alpha-2\beta$
$+8\gamma$

24) $(108\alpha\alpha-33\alpha\gamma-9\alpha\delta-9\alpha\varepsilon-24\alpha\beta+10\beta\gamma+2\beta\delta+2\beta\varepsilon$
$-5\gamma\gamma-\gamma\delta-\gamma\varepsilon):(12\alpha-5\gamma-\delta-\varepsilon)=9\alpha-2\beta+\gamma$

25) $\left(\frac{5}{2}\chi\psi+\frac{85}{9}\psi\psi-\frac{223}{54}\psi\omega-\frac{10}{9}\psi\varphi-\frac{3}{4}\omega\chi+\frac{7}{18}\omega\omega+\frac{\varphi\omega}{3}\right)$
$:(\frac{3}{2}\chi+\frac{17}{3}\psi-\frac{7}{9}\omega-\frac{2}{3}\varphi)=\frac{5}{3}\psi-\frac{1}{2}\omega$

26) $(-75\alpha\alpha\beta\zeta\chi\chi+65\alpha\alpha\gamma\chi\psi+60\alpha\beta\chi\psi\psi+65\alpha\chi\varphi$
$+180\alpha\beta\zeta\chi\chi\psi-156\alpha\gamma\chi\psi\psi-144\beta\psi\psi\psi+156\varphi\chi\psi):$
$(15\alpha\beta\zeta\chi-12\beta\psi\psi-13\alpha\gamma\psi+13\varphi)=-5\alpha\chi+12\chi\psi$

27) $\left(\frac{\alpha\alpha}{\beta\gamma}-\frac{2\alpha}{\delta}+\frac{\alpha\gamma}{\beta\varepsilon}+\frac{\beta\gamma}{\delta\delta}-\frac{\gamma\gamma}{\delta\varepsilon}\right):\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}\right)=\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\delta}+\frac{\gamma}{\varepsilon}$

28) $\left(\frac{5\alpha\alpha\chi}{\beta}-\frac{5\alpha\beta\psi}{\gamma}+5\alpha\delta-\alpha\chi+\frac{\beta\beta\psi}{\gamma}-\beta\delta\right):\left(\frac{\alpha\chi}{\beta}-\frac{\beta\psi}{\gamma}+\delta\right)$
$=5\alpha-\beta$

29) $\left(\frac{\alpha\alpha\gamma\chi\chi}{\beta\delta}+\frac{\alpha\beta\chi\chi}{\gamma\gamma\delta}-\frac{\alpha\gamma\chi\chi}{\delta\delta}-\frac{\beta\beta\chi}{\gamma\delta\delta}+\frac{\alpha\alpha\chi}{\beta\gamma}-\frac{\alpha}{\delta}\right):\left(\frac{\alpha\chi}{\gamma}-\frac{\beta}{\delta}\right)=\frac{\alpha\gamma\chi\chi}{\beta\delta}$
$+\frac{\beta\chi}{\delta\delta}+\frac{\beta\chi}{\gamma\delta}+\frac{\alpha}{\beta}$

30) $(\alpha\alpha-\beta\beta):(\alpha-\beta)=\alpha+\beta$

31) $(\alpha\alpha\alpha\alpha-9\alpha\alpha\beta\beta-6\alpha\beta\gamma\gamma-\gamma\gamma\gamma\gamma):(\alpha\alpha-3\alpha\beta-\gamma\gamma)=\alpha\alpha$
$+3\alpha\beta+\gamma\gamma$

32) $(\alpha\alpha\alpha\alpha-\beta\beta\beta\beta):(\alpha-\beta)=\alpha\alpha\alpha+\alpha\alpha\beta+\alpha\beta\beta+\beta\beta\beta$

33) $(32\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha+\beta\beta\beta\beta\beta):(2\alpha+\beta)=16\alpha\alpha\alpha\alpha-8\alpha\alpha\alpha\beta+4\alpha\alpha\beta\beta$
$-2\alpha\beta\beta\beta+\beta\beta\beta\beta$

34) $\left(\frac{9\alpha\alpha\beta\beta}{4\gamma\gamma}-\frac{25\zeta\zeta\mu\mu}{\eta\eta}+\frac{70\delta\zeta\mu}{\eta}-49\delta\delta\right):\left(\frac{3\alpha\beta}{2\gamma}+\frac{5\zeta\mu}{\eta}-7\delta\right)=\frac{3\alpha\beta}{2\gamma}$
$-\frac{5\zeta\mu}{\eta}+7\delta$

γ) Μερικὴ διαίρεσις διὰ τὰς περιπτώσεις καθ' ἃς ὁ διαιρέτης δὲν διαιρεῖ τὸν διαιρετέον ἐντελῶς.

1) $1:(1-\beta)=1+\frac{\beta}{1-\beta}$
$=1+\beta+\frac{\beta\beta}{1-\beta}$
$=1+\beta+\beta\beta+\frac{\beta\beta\beta}{1-\beta}$
$=1+\beta+\beta\beta+\beta\beta\beta+\frac{\beta\beta\beta\beta}{1-\beta}$
$=1+\beta+\beta\beta+\beta\beta\beta+\beta\beta\beta\beta+\ldots$

2) $1:(1+\beta)=1-\frac{\beta}{1-\beta}$
$=1-\beta+\frac{\beta\beta}{1+\beta}$
$=1-\beta+\beta\beta-\frac{\beta\beta\beta}{1+\beta}$
$=1-\beta+\beta\beta-\beta\beta\beta+\frac{\beta\beta\beta\beta}{1+\beta}$
$=1-\beta+\beta\beta-\beta\beta\beta+\beta\beta\beta\beta-\ldots$

3) $\gamma:(\alpha-\beta)=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta\gamma}{\alpha(\alpha-\beta)}$
$=\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\beta\gamma}{\alpha\alpha}+\frac{\beta\beta\gamma}{\alpha\alpha(\alpha-\beta}$

$$=\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\beta\gamma}{\alpha\alpha}+\frac{\beta\beta\gamma}{\alpha\alpha\alpha}+\frac{\beta\beta\beta\gamma}{\alpha\alpha\alpha(\alpha-\beta)}$$

$$=\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\beta\gamma}{\alpha\alpha}+\frac{\beta\beta\gamma}{\alpha\alpha\alpha}+\frac{\beta\beta\beta\gamma}{\alpha\alpha\alpha\alpha}+\ldots$$

4) $\gamma:(\alpha+\beta)=\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\beta\gamma}{\alpha(+\beta)}$

$$=\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\beta\gamma}{\alpha\alpha}+\frac{\beta\beta\gamma}{\alpha\alpha(\alpha+\beta)}$$

$$=\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\beta\gamma}{\alpha\alpha}+\frac{\beta\beta\gamma}{\alpha\alpha\alpha}-\frac{\beta\beta\beta\gamma}{\alpha\alpha\alpha(\alpha+\beta)}$$

$$=\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\beta\gamma}{\alpha\alpha}+\frac{\beta\beta\gamma}{\alpha\alpha\alpha}-\frac{\beta\beta\beta\gamma}{\alpha\alpha\alpha\alpha}$$

5) $(1+\chi):(1-\chi)=1+\frac{2\chi}{1-\chi}$

$$=1+2\chi+\frac{2\chi\chi}{1-\chi}$$

$$=1+2\chi+2\chi\chi+\frac{2\chi\chi\chi}{1-\chi}$$

$$=1+2\chi+2\chi\chi+2\chi\chi\chi+\ldots$$

Γ. Ὑπολογισμὸς μὲ δυνάμεις.

Τί σημαίνει δύναμις εἰς τὴν ἄλγεβραν; Τί ὁ ἐκθέτης αὐτῆς; καὶ τί ἡ βάσις της; — Μεταβάλλεται κατά τι τὸ μέγεθος ἢ ἡ ἀξία δυνάμεώς τινος ἂν ἀνταλλαχθῇ ἡ βάσις μὲ τὸν ἐκθέτην; — Πῶς πολλαπλασιάζονται δυνάμεις τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ πῶς διαιροῦνται; Ὁποῖον λόγον ἔχουν αὗται μεταξύ των, ὅταν αἱ βάσεις ἦναι διάφοροι; Ὅταν ἀπαντῶνται εἰς τὴν διαίρεσιν δυνάμεις μὲ 0 ἢ μὲ ἀποθετικὸν ἐκθέτην, ποῖαι σημασίαι πρέπει νὰ δίδωνται εἰς τοιαύτας δυνάμεις; Ἠμπορεῖ τις νὰ μεταχειρίζεται τοὺς αὐτοὺς κανόνας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως εἰς τοιαύτας δυνάμεις. — Ὁ ἐκθέτης 1 ἠμπορεῖ νὰ παραλείπεται ἢ νὰ ὑπονοῆται, χρείας τυχούσης — Γίνεται συγκοπὴ καὶ ἀφαίρεσίς τις εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν τῶν δυνάμεων; καὶ εἰς ποίας περιπτώσεις; — Τί ἀπαιτεῖται, ὅταν εἰς τὰ γινόμενα καὶ πηλίκα γίνεται παρομοία συγκοπή; ὅταν εἰς κλάσμα ἡ δύναμις πρέπῃ νὰ μετατεθῇ ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν εἰς τὸν παρονομαστὴν

καὶ τὸ ἀνάπαλιν ἀπὸ τὸν παρονομαστὴν εἰς τὸν ἀριθμητήν, ὁποία μεταβολὴ πρέπει νὰ ἐκτελεσθῇ εἰς τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως αὐτῆς;

1) Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις.

1) $\alpha\chi^\nu+\beta\chi^\nu+\gamma\chi^\nu+\delta\chi^\nu=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\chi^\nu$

2) $\alpha\chi^\nu+\beta\chi^\nu-\gamma\chi^\nu-\delta\chi^\nu=(\alpha+\beta-\gamma-\delta)\chi^\nu$

3) $\alpha^3+2\alpha\chi+\chi^2-\alpha^3+2\alpha\chi-\chi^2=4\alpha\chi$

4) $10\alpha^4+3\alpha^4+6\alpha^4-\alpha^4-5\alpha^4=13\alpha^4$

5) $3\alpha^{-7}+10\alpha^{-7}-5\alpha^{-7}+\alpha^2\beta=8\alpha^{-7}+\alpha^2\beta$

6) $16\alpha^4\beta^3\gamma^5-6\alpha^4\beta^3\gamma^5+7\alpha^4\beta^3\gamma^5=17\alpha^4\beta^3\gamma^5$

7) $6^4+2.8^3+3^2-19.6^4+5.8^3=7.8^3-18.6^4+3^2$

8) $\frac{5\alpha^3}{\beta^4}-\frac{7\alpha^3}{\beta^4}+\frac{11\alpha^3}{\beta^4}+\alpha^4=\frac{9\alpha^3}{\beta^4}+\alpha^4$

9) $\alpha^\nu\beta^\mu-9\alpha^\mu+5\alpha^\nu\beta^\mu+6\alpha^\mu+10\alpha^\nu\beta^\mu=16\alpha^\nu\beta^\mu-3\alpha^\mu$

10) $\alpha^\mu\beta^2+2\gamma^3\chi^{\mu+1}-3\gamma^3\chi^{\mu+1}+10\alpha^\mu\beta^2=11\alpha^\mu\beta^2-\gamma^3\chi^{\mu+1}$

11) $5\alpha^{-3}\beta^2+7\alpha\beta^2\gamma-3\alpha^\mu\beta^{-5}-12\alpha\beta^2\gamma+6\alpha^{-3}\beta^2-9\alpha^3\beta^3$
$+\beta^{-x}-8\alpha^\mu\beta^{-5}-3\beta^{-x}=11\alpha^{-3}\beta^2-5\alpha\beta^2\gamma$
$-11\alpha^\mu\beta^{-5}-9\alpha^3\beta^3-2\beta^{-x}$

12) $3.2^{-7}+5^6-8.2^{-7}+3\alpha^\nu\beta^{-\mu}+13.5^6+4\alpha.2^{-7}$
$+\gamma\alpha^\nu\beta^{-\mu}=(4\alpha-5)2^{-7}+14.5^6+(\gamma+3)\alpha^\nu\beta^{-\mu}$

13) Πρόσθεσις

$$\begin{array}{l} 5\alpha^4\beta+3\alpha^{-2}\beta^2\gamma-7\alpha\beta \\ -6\alpha^4\beta+2\alpha^{-2}\beta^2\gamma+17\alpha\beta \\ 9\alpha^4\beta-8\alpha^{-2}\beta^2\gamma-10\alpha\beta \\ \hline 8\alpha^4\beta-3\alpha^{-2}\beta^2\gamma \end{array}$$

14) Πρόσθ.

$$\begin{array}{l} 3\alpha\beta+2\alpha\gamma+3\delta^2\eta \\ 2\alpha\beta-5\alpha\gamma-3\delta\eta^2 \\ \hline 5\alpha\beta-3\alpha\gamma+3\delta^2\eta-3\delta\eta^2 \end{array}$$

15) Πρόσθ.
$$\left\{\begin{array}{l} 8\alpha\chi-3\beta\gamma-5\delta\chi+12 \\ -\alpha\chi+7\beta\gamma+2\delta\chi-8 \\ \hline 7\alpha\chi+4\beta\gamma-3\delta\chi+4 \end{array}\right.$$

16) Πρόσθ.
$$\left\{\begin{array}{l} \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3 \\ \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3 \\ \hline 2\alpha^3+6\alpha\beta^3 \end{array}\right.$$

17) Πρόσθ.
$$\left\{\begin{array}{l} 5\alpha^\mu\beta^\pi+3\alpha^{\nu-3}\beta^{\mu-1}-3\frac{\alpha^3}{\chi^\pi} \\ -3\gamma\alpha^\mu\beta^\pi+4\zeta^2\alpha^{\nu-3}\beta^{\mu-1}-\alpha+\frac{10\alpha^3}{\chi^\pi} \\ \alpha^\mu\beta^\pi+\alpha+3\alpha^2\beta^2-2\zeta^2\alpha^{\nu-3}\beta^{\mu-1} \\ \hline (6-3\gamma)\alpha^\mu\beta^\pi+(2\zeta^2+3)\alpha^{\nu-3}\beta^{\mu-1}+\frac{7\alpha^3}{\chi^\pi}+3\alpha^2\beta^2 \end{array}\right.$$

18) Πρόσθ.
$$\left\{\begin{array}{l} 9\alpha^{\nu-3}\beta^{-2}\gamma^4-\frac{7\beta}{\alpha^3} \\ \frac{18\beta}{\alpha^3}-5\alpha^\nu\beta^\mu+\gamma\chi-3\cdot2^5 \\ 3\alpha^\nu\beta^\mu-\eta\alpha^{\nu-3}\beta^{-2}\gamma^4+3\gamma\chi-5\cdot2^5 \\ \hline (9-\eta)\alpha^{\nu-3}\beta^{-2}\gamma^4-2\alpha^\nu\beta^\mu+\frac{11\beta}{\alpha^3}+4\gamma\chi-8\cdot2^5 \end{array}\right.$$

19) Πρόσθ.
$$\left\{\begin{array}{l} 3^\nu+2^2+5^\mu-4^{\nu-1} \\ 2^3-4^\nu-3^{\nu-1}+2^2 \\ \hline 3^\nu+16+5^\mu-4^{\nu-1}-4^\nu-3^{\nu-1} \end{array}\right.$$

20) Πρόσθ.
$$\left\{\begin{array}{l} 3^2+2^{\nu-1}+4^{2\mu}-5^{-2\nu}-3 \\ 2.2^\nu-3^2+2.2^{\nu-1}+2.5^{-2\nu} \\ \hline 2+2\cdot2^\nu+3^{\nu-1}+4^{2\mu}-5^{-2\nu} \end{array}\right.$$

21) Ἀφαίρ.
$$\left\{\begin{array}{l} \alpha^2\beta-4\gamma \\ 5\alpha^2\beta-\delta\gamma-4\gamma \\ \hline \delta\gamma-4\alpha^2\beta \end{array}\right.$$

22) Ἀφαίρ.
$$\left\{\begin{array}{l} 5\alpha\chi-\chi^2-3\alpha-9 \\ 3\alpha\chi+\chi^2+30-3\alpha-56 \\ \hline 2\alpha\chi-2\chi^2-39+56 \end{array}\right.$$

23) Ἀφαίρ.
$$\left\{\begin{array}{l} 9\alpha^\mu\chi^2-13+20\alpha\beta^3\chi-4\beta^\mu\gamma\chi^2 \\ 3\beta^\mu\gamma\chi^2+9\alpha^\mu\chi^2-6+3\alpha\beta^3\chi \\ \hline 17\alpha\beta^3\chi-7\beta^\mu\gamma\chi^2-7 \end{array}\right.$$

24) Ἀφαίρ.
$$\left\{\begin{array}{l} 5\alpha^\mu\chi^2-20+7\alpha\beta^3\chi-4\beta^\mu\gamma\chi^2 \\ 2\beta^\mu\gamma\chi^2+5\alpha^\mu\chi^2+8-2\alpha^3\beta\chi \\ \hline 7\alpha\beta^3\chi+2\alpha^3\beta\chi-28-6\beta^\mu\gamma\chi^2 \end{array}\right.$$

25) Ἀφαίρ.
$$\left\{\begin{array}{l} 5\alpha^4-7\alpha^3\beta^2-3\gamma^{-1}\delta^2+7\delta \\ 3\alpha^4-15\alpha^3\beta^2-7\gamma^{-1}\delta^2-3\alpha^2 \\ \hline 2\alpha^4+8\alpha^3\beta^2+4\gamma^{-1}\delta^2+7\delta+3\alpha^2 \end{array}\right.$$

26) Ἀφαίρ.
$$\left\{\begin{array}{l} \alpha^{\nu-3}+3^{2\mu}-7^{\frac{2}{3}} \\ 4^{2\mu}+\chi^{\nu-3}+7^{\frac{2}{3}} \\ \hline \alpha^{\nu-3}+3^{2\mu}-4^{2\mu}-\chi^{\nu-3}-2.7^{\frac{2}{3}} \end{array}\right.$$

27) Ἀφαίρ.
$$\left\{\begin{array}{l} 2^3-2\alpha^\mu+3\alpha^{\nu-1}-4 \\ \alpha^2+3\alpha^\mu-3\alpha^{\nu-1}+2 \\ \hline 2-5\alpha^\mu+6\alpha^{\nu-1} \end{array}\right.$$

28) Ἀφαίρ.
$$\left\{\begin{array}{l} 4^2+2\alpha-2\alpha^2+4\alpha^{\mu-1} \\ 4+2\alpha-\alpha^3+4\alpha^2 \\ \hline 12+\alpha^3+4\alpha^{\mu-1}-6\alpha^2 \end{array}\right.$$

2) Πολλαπλασιασμός.

α) Πολλαπλασιασμὸς ἁπλῶν ποσοτήτων.

1) $\alpha^\mu \times \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$

2) $\alpha^{-\mu} \times \alpha^\nu = \alpha^{-\mu+\nu} = \alpha^{\nu-\mu}$.

3) $\alpha^{\mu} \times \alpha^{-\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$

4) $\alpha^{-\mu} \times \alpha^{-\nu} = \alpha^{-\mu-\nu} = \alpha^{-(\mu+\nu)}$

5) $5\alpha^3 \times \alpha^7 \times 7\alpha^5 \times 3\alpha^6 = 105\alpha^{21}$

6) $11\alpha^{-2} \times 2\alpha^{-5} \times 4\alpha^6 \times 9\alpha^7 = 792\alpha^6$

7) $2\alpha^{-3} \times 7\alpha^{-9} \times -3\alpha^6 = -42\alpha^{-6} = -\frac{42}{\alpha^6}$

8) $\alpha^{-5}\beta \times \alpha^{-7}\delta \times 10\alpha = 10\alpha^{-11}\beta\delta = \frac{10\beta\delta}{\alpha^{11}}$

9) $3.7^{-9} \times 7^{-2} \times 4.7^8 = 12.7^{-3} = \frac{12}{343}$

10) $-\alpha^{\pi-\rho} \times 3\alpha^{3\rho-2}\zeta \times 5\alpha^{\pi+7}\gamma\chi = -15\alpha^{2\pi+2\rho+5}\zeta\beta\chi$

11) $5\alpha^3\beta^{-4} \times 10\alpha^2\beta^5\gamma \times -3\alpha^7 = -150\alpha^{12}\beta\gamma$

12) $-7\alpha^{-1}\beta^4\gamma^{-5} \times 3\alpha^2\beta^{-5}\gamma = -21\alpha\beta^{-1}\gamma^{-4} = \frac{21\alpha}{\beta\gamma^4}$

13) $5\alpha^3\beta^4 \times \alpha^2\beta^8 \times 4\alpha\gamma\beta^{-3} = 20\alpha^6\beta^{-9}\gamma$

14) $\eta^4\lambda^{11}\chi \times \eta^{-7}\lambda^{-9} \times 3\eta^{-2}\lambda^{-6}\chi^3 = 3\eta^{-5}\lambda^{-4}\chi^4 = \frac{3\chi^4}{\eta^5\lambda^4}$

15) $-13\alpha^{-2}\gamma^{-3} \times -4\alpha^{-3}\beta^{-6}\gamma^2 = 52\alpha^{-4}\beta^{-6}\gamma^{-1} = \frac{52}{\alpha^4\beta^6\gamma}$

16) $-\frac{5}{2}\alpha^{-2}\beta^3\gamma^{-\mu}\delta^{-1} \times \frac{2}{3}\alpha^2\beta^{-3}\gamma^{-2}\delta^4 = -\frac{5}{3}\gamma^{-\mu-2}\delta^3 = -\frac{5\delta^3}{3\gamma^{\mu+2}}$

17) $\alpha^{-\mu}\beta^{\pi}\gamma^{\rho} \times \alpha^{\nu}\beta^{-\tau}\gamma^{\sigma} \times \alpha^{\nu+\mu}\beta = \alpha^{2\nu}\beta^{\pi-\tau+1}\gamma^{\rho-\sigma}$

18) $\zeta^{\chi}\eta^{\mu-1}\theta\delta \times 2\zeta^{\mu+3}\theta^{2-\mu} \times 4\eta^{2\mu+1}\theta^{\mu+2}\delta^3 = 8\zeta^{\chi+\mu+3}\eta^{3\mu}\theta^5\delta^4$

19) $(\alpha+\psi)^{-3}\theta^5\lambda^4 \times (\alpha+\psi)^{\mu+3}\lambda^{-4}\mu \times (\alpha+\psi) = \mu\theta^5(\alpha+\psi)^{\mu+1}$

20) $\frac{18\alpha^{-5}\beta^3}{7\gamma^{-2}\delta^{-6}} \times \frac{4\alpha^6\beta^{-5}}{9\gamma^3\delta^9} = \frac{72\alpha\beta^{-2}}{63\gamma\delta^3} = \frac{8\alpha}{7\gamma\delta^3\beta^2}$

21) $\frac{6\alpha^4\beta^5\gamma^{-7}}{11\zeta^3\delta\eta^{-4}} \times \frac{3\alpha^{-2}\beta^4\gamma^{-1}}{5\eta^2\zeta^6} = \frac{18\alpha^2\beta^9\gamma^{-8}}{55\zeta^9\delta\eta^{-2}} = \frac{18\alpha^2\beta^9\eta^2}{55\zeta^9\delta\gamma^8}$

22) $\frac{1}{3\alpha^{-3}\beta^{-\mu}\gamma} \times \frac{1}{4\alpha^{-\pi}\beta} = \frac{1}{12\alpha^{-\pi-3}\beta^{-\mu+1}\gamma} = \frac{\alpha^{\pi+3}\beta^{\mu-1}}{12\gamma}$

23) $\frac{2\alpha^{-\mu-3}\beta^{\mu+2}}{3\chi^{-5}\psi^{-\nu}\omega^{\pi}} \times \frac{6\alpha^{-1}\beta^{-\mu}}{\chi^{-\pi}\psi^3} = \frac{12\alpha^{-\mu-4}\beta^2}{3\chi^{-\pi-5}\psi^{-\nu+3}\omega^{\pi}} = \frac{4\beta^2\chi^{\pi+5}\psi^{\nu-3}}{\alpha^{\mu+4}\omega^{\pi}}$

24) $\frac{3\alpha^{-5}\beta^2\gamma^3\chi^4}{(\alpha+\beta)^{-\mu}(\gamma^2+\chi^2)} \times \frac{\alpha^2\beta^{-5}\gamma^{-2}\chi^{-4}}{(\alpha+\beta)^{\mu-2}(\gamma^2+\chi^2)^{-\nu+4}} = \frac{3\alpha^{-3}\beta^{-3}\gamma}{(\alpha+\beta)^{-2}(\gamma^2+\chi^2)^{-\nu+5}} = \frac{3\gamma(\alpha+\beta)^2(\gamma^2+\chi^2)^{\nu-5}}{\alpha^3\beta^3}$

β) Πολλαπλασιασμὸς μικτῶν ποσοτήτων.

1) $(\alpha^2-3\alpha\beta-5\beta^2) \times 4\alpha^2\beta = 4\alpha^4\beta-12\alpha^3\beta^2-20\alpha^2\beta^3$

2) $(2\alpha^3\beta^5-5\alpha^2\gamma^6+9\alpha^3\beta^2\gamma^3) \times 3\alpha^2\beta\gamma^2 = 6\alpha^5\beta^6\gamma^2-15\alpha^4\beta\gamma^8+27\alpha^5\beta^3\gamma^5$

3) $\left(7\theta^{-5}\lambda+\frac{2\lambda^3}{\theta^4}-3\alpha\theta^{-3}\lambda^2+7\right) \times -8\theta^4\lambda^{-5} = -56\theta^{-1}\lambda^{-4}-16\lambda^{-2}+24\alpha\theta\lambda^{-3}-56\theta^4\lambda^{-5} = \frac{24\alpha\theta}{\lambda^3}-\frac{56}{\theta\lambda^4}-\frac{56\theta^4}{\lambda^5}-\frac{16}{\lambda^2}$

4) $(2\alpha-3\alpha^2\beta+\beta\gamma^2) \times 6\alpha\beta^2\delta = 12\alpha^2\beta^2\delta-18\alpha^3\beta^3\delta+6\alpha\beta^3\gamma^2\delta$

5) $(\alpha^3+3\alpha^2\beta+4\alpha\beta^2) \times -2\alpha\beta^2\gamma = -2\alpha^4\beta^2\gamma+6\alpha^3\beta^3\gamma-8\alpha^2\beta^4\gamma$

6) $\left(\alpha^3\beta^{-4}-\gamma\beta^{-5}\delta^3\zeta+\frac{3\gamma^{\mu}}{\kappa^3}\right) \times 2\beta\gamma^{-2}\delta = 2\alpha^3\beta^{-3}\gamma^{-2}\delta-2\beta^{-4}\gamma^{-1}\delta^4\zeta+\frac{6\beta\gamma^{\mu-2}\delta}{\kappa^3} = \frac{2\alpha^3\delta}{\beta^3\delta^2}-\frac{2\delta^4\zeta}{\beta^4\gamma}+\frac{6\beta\gamma^{\mu-2}\delta}{\kappa^3}$

7) $(4\alpha-30+\beta^2\gamma^{\mu}) \times 5\alpha\beta^{\nu}\gamma = 20\alpha^2\beta^{\nu}\gamma-150\alpha\beta^{\nu}\gamma+5\alpha\beta^{\nu+2}\gamma^{\mu+1}$

8) $(\alpha^{\mu-1}\beta^{2\mu+3}-6\alpha^{3-\mu}\beta^{\pi}+\alpha\beta^{-\mu}) \times \alpha^{3\mu+2}\beta^{\mu-1} = \alpha^{4\mu+1}\beta^{3\mu+2}-6\alpha^{2\mu+5}\beta^{\pi+\mu-1}+\frac{\alpha^{3\mu+3}}{\beta}$

9) $(3\alpha^2-2\alpha\chi+\chi^2) \times (2\alpha-3\chi) = 6\alpha^3-13\alpha^2\chi+8\alpha\chi^2-3\chi^3$

10) $(\alpha+\beta) \times (\alpha+\beta) = (\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

11) $(\alpha-\beta) \times (\alpha-\beta) = (\alpha-\beta)^2 = \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

12) $(\alpha+\beta) \times (\alpha-\beta) = \alpha^2-\beta^2$

13) $(\alpha^4-2\beta^3) \times (\alpha-\beta) = \alpha^5-2\alpha\beta^3-\alpha^4\beta+2\beta^4$

14) $(\chi^2-3\chi-7) \times (\chi-2) = \chi^3-5\chi^2-\chi+14$

15) $(3\kappa^2-5\kappa\lambda+2\lambda^2) \times (\kappa^2-7\kappa\lambda) = 3\kappa^4-26\kappa^3\lambda+37\kappa^2\lambda^2-14\kappa\lambda^3$

16) $(6\zeta^2-17\zeta\lambda+3\lambda^2) \times (\zeta^5+4\zeta^4\lambda) = 6\zeta^7+7\zeta^6\lambda-65\zeta^5\lambda^2+12\zeta^4\lambda^3$

17) $(4\alpha^2-16\alpha\chi+3\chi^2) \times (5\alpha^3-2\alpha^2\chi) = 20\alpha^5-88\alpha^4\chi+47\alpha^3\chi^2-9\alpha^2\chi^3$

18) $(\alpha^2+\alpha^4+\alpha^6)\times(\alpha^2-1)=\alpha^8-\alpha^2$

19) $(\alpha^4-2\alpha^3\beta+4\alpha^2\beta^2-8\alpha\beta^3+16\beta^4)\times(\alpha+2\beta)=\alpha^5+32\beta^5$

20) $(2\alpha^4\chi^2-3\beta^4\psi^2)\times(2\alpha^4\chi^2+3\beta^4\psi^2)=4\alpha^8\chi^4-9\beta^8\psi^4$

21) $(7\alpha^3-5\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2-2\beta^3)\times(3\alpha^4-4\alpha^3\beta+16\alpha^2\beta^2)=21\alpha^7-43\alpha^6\beta+150\alpha^5\beta^2-110\alpha^4\beta^3+104\alpha^3\beta^4-32\alpha^2\beta^5$

22) $(\frac{5}{4}\chi^4+3\alpha\chi-\frac{7}{3}\alpha^2)\times(2\chi^2-\alpha\chi-\frac{1}{2}\alpha^2)=5\chi^4+\frac{7}{4}\alpha\chi^3-\frac{107}{12}\alpha^2\chi^2+\frac{5}{6}\alpha^3\chi+\frac{7}{6}\alpha^4$

23) $(\alpha^6-3\alpha^4\beta^2+5\alpha^2\beta^4)\times(7\alpha^4-4\alpha^2\beta^2+\beta^4)=7\alpha^{10}-25\alpha^8\beta^2+48\alpha^6\beta^4-23\alpha^4\beta^6+5\alpha^2\beta^8$

24) $(\alpha^5-5\alpha^4\beta+10\alpha^3\beta^2-10\alpha^2\beta^3+5\alpha\beta^4-\beta^5)\times(\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3)=\alpha^8-8\alpha^7\beta+28\alpha^6\beta^2-56\alpha^5\beta^3+70\alpha^4\beta^4-56\alpha^3\beta^5+28\alpha^2\beta^6-8\alpha\beta^7+\beta^8$

25) $(\alpha^2+\alpha\omega+\omega^2)\times(\alpha^2-\alpha\omega+\omega^2)=\alpha^4+\alpha^2\omega^2+\omega^4$

26) $(15\alpha^{-6}\beta^2-7\alpha^{-5}\beta^4+6\alpha^{-4}\beta^6)\times(8\alpha^{-2}\beta^2-3\alpha^{-1}\beta^4)=120\alpha^{-8}\beta^4-101\alpha^{-7}\beta^6+69\alpha^{-6}\beta^8-18\alpha^{-5}\beta^{10}$

27) $(13\alpha^{-5}\beta+10\alpha^{-4}\beta^2-4\alpha\beta^3)\times(6\alpha^{-3}\beta^2-18\beta^3-7\alpha^3\beta^4)=78\alpha^{-8}\beta^3-174\alpha^{-5}\beta^4-295\alpha^{-2}\beta^5+24\alpha\beta^6+28\alpha^4\beta^7$

28) $(3\chi^{-2}\psi^{-7}-2\chi^2\psi^{-5}+8\chi^6\psi^{-3})\times(2\chi^{-3}\psi^{-5}+6\chi\psi^{-3}+12\chi^5\psi^{-1})=6\chi^{-5}\psi^{-12}+14\chi^{-1}\psi^{-10}+40\chi^3\psi^{-8}+24\chi^7\psi^{-6}+96\chi^{11}\psi^{-4}$

29) $(5\alpha^3\beta^3\gamma^2-6\alpha^4\beta^2\gamma^5+7\alpha^8\beta^5\gamma^6)\times(2\alpha^3\beta^3+3\alpha^4\beta^2\gamma^5-6\alpha^7\beta^4\gamma^3)=10\alpha^6\beta^6\gamma^4+3\alpha^7\beta^5\gamma^7+14\alpha^{11}\beta^8\gamma^8-18\alpha^8\beta^4\gamma^{10}+21\alpha^{12}\beta^7\gamma^{11}-30\alpha^{10}\beta^7\gamma^5+36\alpha^{11}\beta^6\gamma^8-42\alpha^{15}\beta^9\gamma^9$

30) $(14\alpha^5\gamma^2-6\alpha^2\beta\gamma^2+\gamma^3)\times(14\alpha^5\gamma^2+6\alpha^2\beta\gamma^2-\gamma^3)=196\alpha^{10}\gamma^4-36\alpha^4\beta^2\gamma^4+12\alpha^2\beta\gamma^5-\gamma^6$

31) $\left(\frac{\alpha^2}{\beta^4}+\frac{2\gamma^3\delta^4}{\beta^5}-\frac{7\gamma^2}{2\alpha^4\beta^3}\right)\times\left(\frac{\alpha^2}{\beta^3}-\frac{2\gamma^3\delta^4}{\beta^5}+\frac{7\gamma^2}{2\alpha^4\beta^3}\right)=\frac{\alpha^4}{\beta^8}-\frac{4\alpha^6\delta^8}{\beta^{10}}+\frac{14\gamma^5\delta^4}{\alpha^4\beta^8}-\frac{49\gamma^4}{4\alpha^8\beta^6}$

32) $(\alpha^\mu+\beta^\pi-2\gamma^\nu)\times(2\alpha^\mu-3\beta)=2\alpha^{2\mu}+2\alpha^\mu\beta^\pi-4\alpha^\mu\gamma^\nu-3\alpha^\mu\beta-3\beta^{\pi+1}+6\beta\gamma^\nu$

33) $(2\alpha^{3-2\mu}\beta^{\nu+3}+3\alpha^{\mu+1}\beta^{\nu+2}+\gamma^\pi)\times(\alpha^{\mu-1}\beta^{1-2\mu}-\gamma\alpha^\pi)=2\alpha^{2-\mu}\beta^{\nu-2\mu+4}+3\alpha^{2\mu}\beta^{\nu-2\mu+3}+\alpha^{\mu-1}\beta^{1-2\mu}\gamma^\pi-2\gamma\alpha^{\pi+3-2\mu}\beta^{\nu+3}-3\gamma\alpha^{\pi+\mu+1}\beta^{\nu+2}-\alpha^\pi\gamma^{\pi+1}$

34) $(2\alpha^{3-2\mu}\beta\gamma^{\mu-2}-5\alpha^{-2}\beta^{\mu+1})\times(3\alpha^{4\mu-5}\beta^{2\mu}\gamma^{3-4\mu}-6)=6\alpha^{2\mu-2}\beta^{2\mu+1}\gamma^{1-3\mu}-15\alpha^{4\mu-7}\beta^{3\mu+1}\gamma^{3-4\mu}-12\alpha^{3-2\mu}\beta\gamma^{\mu-2}+30\alpha^{-2}\beta^{\mu+1}$

35) $(\chi^{-3\pi}+3\alpha^\mu\chi^{-2\pi}-10\alpha^{2\mu}\chi^{-\pi})\times(\alpha^2\chi^\rho+5\alpha^{\mu+2}\chi^{\pi+\rho}-2\alpha^{2\mu+2}\chi^{\rho+2\pi})=\alpha^2\chi^{\rho-3\pi}+8\alpha^{\mu+2}\chi^{\rho-2\pi}+3\alpha^{2\mu+2}\chi^{\rho-\pi}-56\alpha^{3\mu+2}\chi^\rho+20\alpha^{4\mu+2}\chi^{\rho+\pi}$

36) $(3\alpha^{4-3\mu}\beta\gamma^{\mu-2}+17\alpha^{-3}\beta^{\mu+1})\times(3\alpha^{6\mu-2}\beta^{2\mu}\gamma^{3-4\mu}-8)$ $9\alpha^{3\mu+2}\beta^{2\mu+1}\gamma^{1-3\mu}+51\alpha^{6\mu-5}\beta^{3\mu+1}\gamma^{3-4\mu}-24\alpha^{4-3\mu}\beta\gamma^{\mu-2}-136\alpha^{-3}\beta^{\mu+1}$

Οἱ τύποι 6, 7, 8, 9) περιέχουν σημαντικὰ θεωρήματα: πῶς ἠμποροῦν τὰ αὐτὰ νὰ ἐκφρασθοῦν διὰ λόγων;

---

3) Διαίρεσις.

α) Διαίρεσις ἁπλῶν ποσοτήτων.

1) $\alpha^\mu:\alpha^\nu=\alpha^{\mu-\nu}$

2) $\alpha^\mu:\alpha^{-\nu}=\alpha^{\mu+\nu}$

3) $\alpha^{-\mu}:\alpha^\nu=\alpha^{-\mu-\nu}=\alpha^{-(\mu+\nu)}$

4) $\alpha^{-\mu}:\alpha^{-\nu}=\alpha^{\nu-\mu}$

5) $8\alpha^{10}:2\alpha^4=4\alpha^6$

6) $5\alpha\beta^2:3\beta^2\gamma=\frac{5\alpha}{3\gamma}$

7) $\frac{7}{3}\alpha^3 : \frac{2}{5}\alpha^7 = \frac{35}{6}\alpha^{-4} = \frac{35}{6\alpha^4}$

8) $6\alpha^2\beta : -2\alpha\gamma = -\frac{3\alpha\beta}{\gamma}$

9) $\frac{14}{5}\alpha^{-8} : -3\alpha = -\frac{14}{15}\alpha^{-9} = -\frac{14}{15\alpha^9}$

10) $\gamma\alpha^{18} : \delta\alpha^{-6} = \frac{\gamma\alpha^{24}}{\delta}$

11) $5\alpha^2\beta^3\gamma\delta : -\alpha\beta^2\delta = -5\alpha\beta\gamma$

12) $6(\alpha+\beta)^{-9} : 4(\alpha+\beta)^{-5} = \frac{3}{2}(\alpha+\beta)^{-4} = \frac{3}{2(\alpha+\beta)^4}$

13) $\frac{5}{3}\alpha^{-7}\beta^3\gamma : \frac{1}{2}\alpha^{-9}\beta^{-5}\gamma^3\zeta = \frac{10\alpha^2\beta^8\zeta}{3\gamma^2}$

14) $(\alpha+\chi)^2(\alpha+\psi)^{-3} : (\alpha+\chi)^{-4}(\alpha+\psi)^{-7} = (\alpha+\chi)^6(\alpha+\psi)^4$

15) $-8\alpha^\mu\beta^3\gamma : -2\alpha\beta^\nu = 4\alpha^{\mu-1}\beta^{3-\nu}$

16) $-3\alpha^\mu\beta^\nu : -4\alpha^\pi\beta^\rho\gamma^\sigma = \frac{3\alpha^{\mu-\pi}\beta^{\nu-\rho}}{4\gamma^\sigma}$

17) $\alpha^\mu\beta^{1-\nu} : \alpha^\mu\beta^{1-\nu} = 1$

18) $-15\alpha^3\beta : 5\alpha^3\beta = -3$

19) $-\frac{5\gamma^2\alpha^{-\mu}\beta^\nu}{8} : 3\gamma\delta^5\alpha^\pi\beta^{-\rho} = -\frac{5\gamma\beta^{\nu+\rho}}{24\delta^5\alpha^{\mu+\pi}}$

20) $\frac{3\alpha^3\delta}{2\beta^5} : \frac{\beta^3}{4\alpha^2\gamma^7} = \frac{6\alpha^5\gamma^7\delta}{\beta^8}$

21) $\frac{3\alpha^3\delta}{2\beta^5} : \frac{2\beta^3\delta}{4\alpha^2\gamma^7} = \frac{6\alpha^5\gamma^7}{2\beta^8}$

22) $\frac{2\gamma^3(1+\omega^2)^2}{\delta^7\omega^9} : \frac{5\gamma^5\zeta^3(1+\omega^2)^{-6}}{2\delta^9\omega^5} = \frac{4\delta^2(1+\omega^2)^8}{5\gamma^2\zeta^3\omega^4}$

23) $\frac{2\chi^{3\nu-5\mu}\psi^{2\nu-3}}{7\alpha^\mu\beta^3\gamma} : \frac{4\chi^{1-5\mu}}{3\alpha\beta^{\nu-1}\psi^5} = \frac{3\beta^{\nu-4}\psi^{2\nu+2}\chi^{3\nu-1}}{14\alpha^{\mu-1}\gamma}$

6) Διαίρεσις μικτῶν ποσοτήτων.

1) $(6\alpha^2\beta - 10\alpha\chi) : 2\alpha = 3\alpha\beta - 5\chi$

2) $(4\alpha^2\beta - 2\chi + 3\alpha) : 2\beta = 2\alpha^2 - \frac{\chi}{\beta} + \frac{3\alpha}{2\beta}$

3) $(6\alpha^3\beta^2 - 10\alpha^2\zeta + 7\alpha^4\beta\chi) : 2\alpha^2 = 3\alpha\beta^2 - 5\zeta + \frac{7}{2}\alpha^2\beta\chi$

4) $(\frac{3}{4}\alpha^2\chi^5 - \frac{7}{9}\alpha\chi^3 + 3\alpha\beta^2\chi) : \frac{2}{3}\alpha^2\chi^3 = \frac{9}{8}\chi^2 - \frac{7}{6\alpha} + \frac{9\beta^2}{2\alpha\chi^2}$

5) $\left(\frac{3\alpha^2\beta^6}{4} - \frac{5\alpha\gamma}{6\beta} + 2\alpha^3\gamma^2 - \frac{2\alpha^2\gamma^2}{5\beta(\alpha+\psi)^2}\right) : -\frac{2\alpha^5\beta^2}{3\gamma} = -\frac{9\beta^4\gamma}{8\alpha^3} + \frac{15\gamma^2}{2\alpha^4\beta^3}$
$- \frac{3\gamma^3}{\alpha^2\beta^2} + \frac{3\gamma^3}{5\alpha^3\beta^3(\alpha+\psi)^2}$

6) $(\beta\gamma^3 - \gamma^3\chi) : (\beta - \chi) = \gamma^3$

7) $(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) : (\alpha + \beta) = \alpha + \beta$

8) $(\alpha^3 + \alpha^2\beta - \alpha\beta^2 - \beta^3) : (\alpha - \beta) = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

9) $(\alpha^3 - \beta^3) : (\alpha - \beta) = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$

10) $(3\alpha^5 + 16\alpha^4\beta - 33\alpha^3\beta^2 + 14\alpha^2\beta^3) : (\alpha^2 + 7\alpha\beta) = 3\alpha^3 -$
$5\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2$

11) $\alpha^7 - 6\alpha^6\beta^3 + 14\alpha^5\beta^6 - 12\alpha^4\beta^9) : (\alpha^3 - 2\alpha^2\beta^3) = \alpha^4 - 4\alpha^3\beta^3$
$+ 6\alpha^2\beta^6$

12) $(6\alpha^2 - \beta^2 - \alpha\beta + \alpha\delta) : (3\alpha + \beta) = 2\alpha - \beta + \frac{\alpha\delta}{3\alpha+\beta}$

13) $(\alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4) : (\alpha^2 - \beta^2) = \alpha^2 - \beta^2$

14) $[\alpha^2\beta\chi^8 - (\alpha^3\beta - \alpha^5)\chi^7 - 8\alpha^6\chi^6 + 7\alpha^7\chi^5] : (\alpha^2\chi^2 - \alpha^3\chi) =$
$\beta\chi^6 + \alpha^3\chi^5 - 7\alpha^4\chi^4$

15) $(-\alpha^8\beta^4 + 15\alpha^{11}\beta^5 - 48\alpha^{14}\beta^6 - 20\alpha^{17}\beta^7) : (10\alpha^9\beta^2 - \alpha^6\beta)$
$= \alpha^2\beta^3 - 5\alpha^5\beta^4 - 2\alpha^8\beta^5$

16) $(\alpha^8 - 16\omega^8) : (\alpha^2 - 2\omega^2) = \alpha^6 + 2\alpha^4\omega^2 + 4\alpha^2\omega^4 + 8\omega^6$

17) $(2\alpha^4 - 13\alpha^3\beta + 31\alpha^2\beta^2 - 38\alpha\beta^3 + 24\beta^4) : (2\alpha^2 - 3\alpha\beta +$
$4\beta^2) = \alpha^2 - 5\alpha\beta + 6\beta^2$

18) $(\beta^2\gamma^2\chi^2 - 3\beta^2\gamma\chi^3 - 3\beta\gamma^2\chi^4 + 9\beta^2\chi^5) : (\beta^2\gamma\chi - 3\beta^2\chi^2) =$
$\gamma\chi - 3\chi^3$

19) $(4\gamma^4 - 9\beta^2\gamma^2 + 6\beta^3\gamma - \beta^4) : (2\gamma^2 - 3\beta\gamma + \beta^2) = 2\gamma^2 +$
$3\beta\gamma - \beta^2$

20) ($\frac{1}{4}\chi^5 - 4\chi^4 +$ [illegible] $\chi^3 -$ [illegible] $\chi^2 -$ [illegible] $\chi + 27) : (\frac{1}{2}\chi^2 - \chi + 3)$
$= \frac{1}{2}\chi^3 - 5\chi^2 + \frac{1}{4}\chi + 9$

21) $(-1 + \alpha^3\nu^3) : (-1 + \alpha\nu) = 1 + \alpha\nu + \alpha^2\nu^2$

22) $(3\alpha^4\beta^{12} - 8\alpha^7\beta^8 - \frac{51}{2}\alpha^{10}\beta^6 + \frac{5}{4}\alpha^{10}\beta^4 + \frac{17}{4}\alpha^{13}\beta^2) : (\frac{3}{2}\alpha^3\beta^5 -$
$\frac{1}{4}\alpha^6\beta) = 2\alpha\beta^7 - 5\alpha^4\beta^3 - 17\alpha^7\beta$

23) $(5\alpha^5\beta^3\gamma^5 - 22\alpha^4\beta^3\gamma^6 + 5\alpha^3\beta^3\gamma^7 + 12\alpha^2\beta^3\gamma^8 - 7\alpha^3\beta^2\gamma^8 +$
$28\alpha\beta^2\gamma^9) : (\alpha^2\beta\gamma^2 - 4\alpha\beta\gamma^3) = 5\alpha^3\beta^2\gamma^3 - 2\alpha^2\beta^2\gamma^4 -$
$3\alpha\beta^2\gamma^5 - 7\beta\gamma^6$

24) $(12\alpha^4\beta - 24\alpha^3\beta\gamma - 3\alpha^2\beta\gamma^2 + 30\alpha\beta\gamma^3 - 15\beta\gamma^4) : (3\alpha^2\beta + 6\alpha\beta\gamma + 3\beta\gamma^2) = 4\alpha^2 - 5\gamma^2$

25) $\left(\frac{\alpha^7\beta^2}{5} - \frac{47\alpha^6\beta^3}{40} + \frac{9\alpha^5\beta^4}{2} - 12\alpha^4\beta^5\right) : \left(\frac{2\alpha^3\beta^2}{5} - \frac{3\alpha^2\beta^3}{4} + 6\alpha\beta^4\right) = \frac{1}{2}\alpha^4 - 2\alpha^3\beta$

26) $(-2\alpha^{-8}\chi^5 + 17\alpha^{-4}\chi^6 - 5\chi^7 - 24\alpha^4\chi^8) : (2\alpha^{-3}\chi^3 - 3\alpha\chi^4) = -\alpha^{-5}\chi^2 + 7\alpha^{-1}\chi^3 + 8\alpha^3\chi^4$

27) $\left(\frac{\alpha^3\gamma}{\beta^5} + \frac{\alpha^4\gamma}{\beta^4} - \frac{7\alpha^5\gamma}{\beta^3} - \frac{3\alpha^6\gamma}{\beta^2} + \frac{\alpha^2\gamma^3}{\beta^2} - \frac{2\alpha^3\gamma^3}{\beta} - \alpha^4\gamma^3\right) : \left(\frac{\alpha}{\beta^3} + \frac{3\alpha^2}{\beta^2} + \gamma^2\right) = \frac{\alpha^2\gamma}{\beta^2} - \frac{2\alpha^3\gamma}{\beta} - \alpha^4\gamma$

28) $(\alpha^3\delta^3 - 3\alpha^2\gamma\delta^3 + 3\alpha\gamma^2\delta^3 - \gamma^3\delta^3 + \alpha^2\gamma^2\delta^2 - \alpha\gamma^3\delta^2) : (\alpha^2\delta^2 - 2\alpha\gamma\delta^2 + \gamma^2\delta^2 + \alpha\gamma^2\delta) = \alpha\delta - \gamma\delta$

29) $(\alpha^6 + 2\alpha^3\omega^3 + \omega^6) : (\alpha^2 - \alpha\omega + \omega^2) = \alpha^4 + \alpha^3\omega + \alpha\omega^3 + \omega^4$

30) $(\frac{1}{3} - 6\omega^2 + 27\omega^4) : (\frac{1}{3} + 2\omega + 3\omega^2) = 1 - 6\omega + 9\omega^2$

31) $(\alpha^6 - 16\alpha^3\chi^3 + 64\chi^6) : (\alpha^2 - 4\alpha\chi + 4\chi^2) = \alpha^4 + 4\alpha^3\chi + 12\alpha^2\chi^2 + 16\alpha\chi^3 + 16\chi^4$

32) $(\alpha^{3\mu-2\nu}\beta^{2\pi}\gamma - \alpha^{2\mu+\nu-1}\beta^{1-\pi}\gamma^{\nu} + \alpha^{-\nu}\beta^{-1}\gamma^{\mu} + \alpha^{3\mu-\nu}\beta^{2\pi+2}\gamma^{\nu} - \alpha^{2\mu+2\nu-1}\beta^{3}\gamma^{2\nu-1} + \beta^{\pi+1}\gamma^{\mu+\nu-2}) : (\alpha^{-\nu}\beta^{-\pi-1} + \beta\gamma^{\nu-1}) = \alpha^{3\mu-\nu}\beta^{3\pi+1}\gamma - \alpha^{2\mu+2\nu-1}\beta^{2}\gamma^{\nu} + \beta^{\pi}\gamma^{\mu}$

33) $(\alpha^{\mu+\nu}\beta^{\nu} - 4\alpha^{\mu+\nu-1}\beta^{2\nu} - 27\alpha^{\mu+\nu-2}\beta^{3\nu} + 42\alpha^{\mu+\nu-3}\beta^{4\nu}) : (\alpha^{\nu}\beta^{\nu} - 7\alpha^{\nu-1}\beta^{2\nu}) = \alpha^{\mu} + 3\alpha^{\mu-1}\beta^{\nu} - 6\alpha^{\mu-2}\beta^{2\nu}$

34) $(\alpha^{\nu} - \beta^{\nu}) : (\alpha - \beta) = \alpha^{\nu-1} + \alpha^{\nu-2}\beta + \alpha^{\nu-3}\beta^2 + \ldots\ldots + \beta^{\nu-1}$

γ) Περιπτώσεις, καθ' ἃς ὁ διαιρέτης διαιρῶν τὸν διαιρετέον δὲν δίδει ἐντελὲς πηλίκον.

1) $\frac{\alpha}{1+\chi} = \alpha - \alpha\chi + \alpha\chi^2 - \alpha\chi^3 + \alpha\chi^4 - \ldots$

2) $\frac{\alpha}{1-\chi} = \alpha + \alpha\chi + \alpha\chi^2 + \alpha\chi^3 + \alpha\chi^4 + \ldots$

3) $\frac{\alpha}{\chi+1} = \frac{\alpha}{\chi} - \frac{\alpha}{\chi^2} + \frac{\alpha}{\chi^3} - \frac{\alpha}{\chi^4} + \ldots$

4) $\frac{\alpha}{\chi-1} = \frac{\alpha}{\chi} + \frac{\alpha}{\chi^2} + \frac{\alpha}{\chi^3} + \frac{\alpha}{\chi^4} + \ldots$

5) $\frac{\alpha+\chi}{\beta+\chi} = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha-\beta}{\beta^2}\chi + \frac{\alpha-\beta}{\beta^3}\chi^2 - \frac{\alpha-\beta}{\beta^4}\chi^3 + \ldots$

6) $\frac{\alpha-\chi}{\beta-\chi} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha-\beta}{\beta^2} + \frac{\alpha-\beta}{\beta^3}\chi^2 + \frac{\alpha-\beta}{\beta^4}\chi^3 + \ldots$

7) $\frac{\chi+\alpha}{\chi-\beta} = 1 + \frac{\alpha+\beta}{\chi} + \frac{\beta(\alpha+\beta)}{\chi^2} + \frac{\beta(\alpha+\beta)}{\chi^3} + \ldots$

Δ) Δυνάμεις δυνάμεων.

1) $\left[\left((\alpha^{\mu})^{\nu}\right)^{\pi}\right]^{\rho} = \alpha^{\mu\nu\pi\rho}$

2) $\left[\left((\alpha^{-\mu})^{-\nu}\right)^{\pi}\right]^{\rho} = \alpha^{\mu\nu\pi\rho}$

3) $\left[\left((\alpha^{-\mu})^{-\nu}\right)^{-\pi}\right]^{-\rho} = \alpha^{\mu\nu\pi\rho}$

4) $\left[\left((\alpha^{\mu})^{-\nu}\right)^{-\pi}\right]^{-\rho} = \alpha^{-\mu\nu\pi\rho}$

5) $\left[(\alpha^3\beta\gamma^2)^5\right]^6 = \alpha^{90}\beta^{30}\gamma^{60}$

6) $(\alpha^{-2}\beta^3\gamma^{-5}\zeta^6\chi^{-1})^{-3} = \alpha^6\beta^{-9}\gamma^{15}\zeta^{-18}\chi^3$

7) $(\alpha^{\mu}\beta^{-\nu}\gamma^{\pi}\delta)^{\rho} = \alpha^{\mu\rho}\beta^{-\nu\rho}\gamma^{\pi\rho}\delta^{\rho}$

8) $(\alpha^{3\mu-\nu}\zeta^{2\nu-1}\chi^{\nu})^{-3\mu} = \alpha^{3\mu\nu-9\mu\mu}\zeta^{3\mu-6\mu\nu}\chi^{-3\mu\nu}$

9) $\left[\alpha^3(\alpha+\beta)^2\right]^{\mu} = \alpha^{3\mu}(\alpha+\beta)^{2\mu}$

10) $\left(\frac{\alpha^{\mu}\beta^{\nu}\gamma^{\pi}\delta^{-\sigma}}{\zeta^{\nu}\eta^{-\mu}}\right)^{-\rho} = \frac{\alpha^{-\mu\rho}\beta^{-\nu\rho}\gamma^{-\pi\rho}\delta^{\sigma\rho}}{\zeta^{-\nu\rho}\eta^{\mu\rho}}$

11) $\left(\frac{\alpha^4\beta^5}{\gamma^3\delta\zeta}\right)^4 = \frac{\alpha^{16}\beta^{20}}{\gamma^{12}\delta^4\zeta^4}$

12) $\left[\left(\frac{\alpha^2\beta^3}{\gamma^5}\right)^{-1}\right]^{-2\mu} = \frac{\alpha^{4\mu}\beta^{6\mu}}{\gamma^{10\mu}} = \left(\frac{\alpha^4\beta^6}{\gamma^{10}}\right)^{\mu}$

13) $(-\alpha^2)^5 = -\alpha^{10}$

14) $(-\beta^{-3})^4 = \beta^{-12}$

15) $\left[\left((-\alpha)^3\right)^4\right]^5 = \alpha^{60}$

16) $\left[(-\alpha)^{-4}\right]^{-6} = \alpha^{24}$

17) $\left[(-\alpha)^{-3}\right]^{-5} = -\alpha^{15}$

18) $(-\alpha)^{2\mu}=\alpha^{2\mu}$

19) $(-\alpha)^{2\mu+1}=-\alpha^{2\mu+1}$

20) $\left[\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)^{3}\right]^{-4}=\frac{\beta^{12}}{\alpha^{12}}$

Δ. ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΡΙΖΙΚΩΝ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ.

Τί σημαίνει ἡ ἐξαγωγὴ τῆς ῥίζης ἑνὸς ἀριθμοῦ; Καὶ τί εἶναι ῥιζικόν; — Εὑρίσκονται ἀριθμοί, τῶν ὁποίων ἡ ῥίζα ἠμπορεῖ νὰ ἐκφρασθῇ πότε δι' ἀκεραίων ἀριθμῶν καὶ πότε διὰ κοινῶν κλασμάτων; Καὶ ἂν ὑπάρχωσι τοιοῦτοι πῶς ἀποδεικνύονται; — Πῶς ὀνομάζεται ὁ ῥιζικὸς ἀριθμὸς, ὅςτις παρίςαται δι' ἀκεραίων ἀριθμῶν ἢ καὶ διὰ κλασμάτων; — Τί σημαίνουν αἱ λέξεις σύμμετρος καὶ ἀσύμμετρος; — Οἱ ἄλογοι λοιπὸν ἀριθμοὶ ὡς πρὸς ἀκεραίους ἀριθμοὺς καὶ κοινὰ κλάσματα, εἶναι ἀναγκαίως ἀσύμμετροι ποσότητες. — Εἶναι ὅμως καὶ μεταξύ των; Καὶ εἰς ποῖα παραδείγματα δὲν εἶναι; Ὁποία συγκοπὴ ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν τῶν ῥιζικῶν; Καὶ τί ἀπαιτεῖται εἰς τοῦτο; — Ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν ῥιζικῶν ποσοτήτων συγκοπή τις; Καὶ ὁποία; — Τί πρέπει νὰ γίνῃ διὰ νὰ δοθῇ εἰς ῥιζικὸν ἀνώτερος ἐκθέτης τῆς ῥίζης; Πρὸς τί τέλος γίνεται αὐτὸ ἐνίοτε, ἐνῷ κατὰ τὰ ἄλλα εἶναι καλήτερον νὰ ἦναι κατωτέρου βαθμοῦ τὰ σημεῖα τῆς ῥίζης παρὰ ἀνωτέρου;

1) Τετραγωνικαὶ καὶ κυβικαὶ ῥίζαι ἀριθμῶν.

α) Τετραγωνικαὶ ῥίζαι.

1) $\sqrt{256}=16$
2) $\sqrt{625}=25$
3) $\sqrt{4096}=64$
4) $\sqrt{56644}=238$
5) $\sqrt{390625}=625$
6) $\sqrt{582169}=763$

7) $\sqrt{956484}=978$
8) $\sqrt{9351364}=3058$
9) $\sqrt{57198969}=7563$
10) $\sqrt{64000000}=8000$
11) $\sqrt{68492176}=8276$
12) $\sqrt{25836889}=5083$
13) $\sqrt{236144689}=15367$
14) $\sqrt{1607448649}=40093$
15) $\sqrt{780811249}=27943$
16) $\sqrt{2561169664}=50608$
17) $\sqrt{1420913025}=37695$
18) $\sqrt{4912467921}=70089$
19) $\sqrt{6548046400}=80920$
20) $\sqrt{285970396644}=534762$
21) $\sqrt{41605800625}=203975$
22) $\sqrt{48303584206084}=6950078$
23) $\sqrt{12088868379025}=3476905$
24) $\sqrt{5}=2,23606....$
25) $\sqrt{13}=3,60555....$
26) $\sqrt{22}=4,69041....$
27) $\sqrt{96}=9,79795....$
28) $\sqrt{153}=12,36931....$
29) $\sqrt{101}=10,04987....$
30) $\sqrt{34695}=186,26593....$
31) $\sqrt{7,65}=2,76586....$
32) $\sqrt{9,6}=3,09838....$
33) $\sqrt{15,2379}=3,90357....$,
34) $\sqrt{594,823321}=24,38899....$

35) $\sqrt{0{,}056} = 0{,}23664\ldots$
36) $\sqrt{0{,}00789} = 0{,}08882\ldots$
37) $\sqrt{0{,}9430} = 0{,}97108\ldots$
38) $\sqrt{0{,}003} = 0{,}05477\ldots$
39) $\sqrt{0{,}014} = 0{,}11832\ldots$
40) $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$
41) $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$
42) $\sqrt{\frac{64}{81}} = \frac{8}{9}$
43) $\sqrt{\frac{256}{361}} = \frac{16}{19}$
44) $\sqrt{\frac{2}{5}} = 0{,}63245\ldots$
45) $\sqrt{\frac{3}{8}} = 0{,}61237\ldots$
46) $\sqrt{\frac{7}{4}} = 1{,}32287\ldots$
47) $\sqrt{\frac{14}{9}} = 1{,}24721\ldots$
48) $\sqrt{11\frac{11}{16}} = 3{,}41869\ldots$
49) $\sqrt{7\frac{13}{36}} = 2{,}71313\ldots$
50) $\sqrt{8\frac{15}{49}} = 2{,}88203\ldots$
51) $\sqrt{\frac{5}{3}} = 1{,}29099\ldots$
52) $\sqrt{\frac{7}{8}} = 0{,}93541\ldots$
53) $\sqrt{\frac{5}{12}} = 0{,}64549\ldots$
54) $\sqrt{\frac{1}{17}} = 0{,}24253\ldots$
55) $\sqrt{10\frac{3}{10}} = 3{,}20936\ldots$

β) Κυβικαὶ ῥίζαι.

1) $\sqrt[3]{12167} = 23$
2) $\sqrt[3]{884736} = 96$
3) $\sqrt[3]{405224} = 74$
4) $\sqrt[3]{2460375} = 135$

5) $\sqrt[3]{11089567} = 223$
6) $\sqrt[3]{1191016} = 106$
7) $\sqrt[3]{17173512} = 258$
8) $\sqrt[3]{49836032} = 368$
9) $\sqrt[3]{40353607} = 343$
10) $\sqrt[3]{64481201} = 401$
11) $\sqrt[3]{8000000} = 200$
12) $\sqrt[3]{74088000} = 420$
13) $\sqrt[3]{92959677} = 453$
14) $\sqrt[3]{131096512} = 508$
15) $\sqrt[3]{238328000} = 620$
16) $\sqrt[3]{311665752} = 678$
17) $\sqrt[3]{318611987} = 683$
18) $\sqrt[3]{340068392} = 698$
19) $\sqrt[3]{6372783864} = 1854$
20) $\sqrt[3]{7256313856} = 1936$
21) $\sqrt[3]{111980168000} = 4820$
22) $\sqrt[3]{115145914625} = 4865$
23) $\sqrt[3]{18970074963} = 2667$
24) $\sqrt[3]{8108486729} = 2009$
25) $\sqrt[3]{113028882875} = 4835$

6) Πρόσθ.

$$\begin{array}{l} 10\sqrt{2}+5\sqrt[7]{8}-7\sqrt[\mu]{5}+2\sqrt[3]{\alpha} \\ 5\sqrt{2}+\sqrt[7]{8}+4\sqrt[\mu]{5}-3\sqrt[3]{\alpha} \\ \underline{-3\sqrt{2}-9\sqrt[7]{8}-3\sqrt[\mu]{5}+\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt{\alpha\beta}} \\ 12\sqrt{2}-3\sqrt[7]{8}-6\sqrt[\mu]{5}+\sqrt{\alpha\beta} \end{array}$$

7) Πρόσθ.

$$\begin{array}{l} 13\sqrt[5]{12\alpha^2\beta\gamma}+17\sqrt[\mu]{3}-5\sqrt[\nu]{6} \\ 7\sqrt[5]{12\alpha^2\beta\gamma}+2\sqrt[\nu]{6}+3\sqrt[\mu]{3}-2\alpha\sqrt{\gamma}+\frac{1}{2}\sqrt[7]{9\alpha} \\ \underline{-20\sqrt[5]{12\alpha^2\beta\gamma}+9\sqrt[5]{12\alpha^2\beta\gamma}+\sqrt{\gamma}-3\sqrt[7]{9\alpha}} \\ 20\sqrt[\mu]{3}-3\sqrt[\nu]{6}+9\sqrt[5]{12\alpha^2\beta\gamma}-(2\alpha-1)\sqrt{\gamma}-\frac{5}{2}\sqrt[7]{9\alpha} \end{array}$$

8) Ἀφαίρ.

$$\begin{array}{l} 18\sqrt{7}-5\sqrt{6}+10\sqrt[4]{11}-3\sqrt[3]{13} \\ \underline{6\sqrt{7}-2\sqrt{6}+\frac{17}{2}\sqrt[4]{11}+2\sqrt[3]{13}} \\ 12\sqrt{7}-3\sqrt{6}+\frac{3}{2}\sqrt[4]{11}-5\sqrt[3]{13} \end{array}$$

9) Ἀφαίρ.

$$\begin{array}{l} 16\sqrt[4]{6\alpha\beta}-\sqrt[6]{9\gamma^3}+3\sqrt[\mu]{7\alpha}-\sqrt{10} \\ \underline{-8\sqrt[6]{9\gamma^3}-5\sqrt[\mu]{7\alpha}+3\sqrt[4]{6\alpha\beta}+2\sqrt[4]{10}} \\ 13\sqrt[4]{6\alpha\beta}+7\sqrt[5]{9\gamma^3}+8\sqrt[\mu]{7\alpha}-\sqrt{10}-2\sqrt[4]{10} \end{array}$$

β) Συγκοπαί καί μεταβολαί.

1) $\sqrt{160}=4\sqrt{10}$

) $\sqrt[3]{400}=2\sqrt[3]{50}$

$4\sqrt{8}+5\sqrt{8}=18\sqrt{2}$

4) $\sqrt{50}-\sqrt{18}=2\sqrt{2}$

5) $\sqrt{24}+\sqrt{54}-\sqrt{6}=4\sqrt{6}$

6) $2\sqrt{8}-7\sqrt{18}+5\sqrt{72}-\sqrt{50}=8\sqrt{2}$

7) $\sqrt{12}+2\sqrt{27}+3\sqrt{75}-9\sqrt{48}=-13\sqrt{3}$

8) $8\sqrt{\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}\sqrt{12}+4\sqrt{27}-2\sqrt{\frac{3}{16}}=\frac{29}{2}\sqrt{3}=\frac{29\sqrt{3}}{2}$

9) $2\sqrt{\frac{5}{3}}+\sqrt{60}-\sqrt{15}+\sqrt{\frac{3}{5}}=\frac{28}{15}\sqrt{15}$

10) $7\sqrt[3]{54}+3\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{128}=8\sqrt[3]{2}$

11) $\sqrt[3]{81}-2\sqrt[3]{24}+28+2\sqrt{63}=8\sqrt{7}-\sqrt[3]{3}$

12) $\sqrt[4]{32}+2\sqrt[3]{40}=2\sqrt[4]{2}+4\sqrt[3]{5}$

13) $3\sqrt{5}-2\sqrt{2}+3\sqrt{6}=\sqrt{45}-\sqrt{8}+\sqrt{54}$

14) $5\sqrt[3]{7}+3\sqrt{2}+2\sqrt[4]{3}=\sqrt[3]{875}+\sqrt{18}+\sqrt[4]{48}$

15) $4\sqrt[5]{\frac{1}{2}}+3\sqrt[3]{2}-5\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt[5]{512}+\sqrt[3]{54}-\sqrt{\frac{25}{3}}$

16) $\sqrt{45\gamma^3}-\sqrt{80\gamma^3}+\sqrt{5\alpha^2\gamma}=(\alpha-\gamma)\sqrt{5\gamma}$

17) $\sqrt[3]{16\alpha^3\beta}+\sqrt{4\alpha^2\beta}-\sqrt{\alpha^2\beta}-\sqrt[3]{54\alpha^3\beta}=\alpha\sqrt{\beta}-\alpha\sqrt[3]{2\beta}$

18) $\sqrt{18\alpha^5\beta^3}+\sqrt{50\alpha^3\beta^3}=(3\alpha^2\beta+5\alpha\beta)\sqrt{2\alpha\beta}$

19) $\sqrt[4]{2^{14}\alpha^{13}\beta^5\gamma}-\sqrt[4]{4.5^4\alpha^5\beta^9\gamma^5}+\sqrt[4]{4.6^4\alpha\beta^5\gamma}=(8\alpha^3\beta-5\alpha\beta^2\gamma$
$+6\beta)\sqrt[4]{4\alpha\beta\gamma}$

20) $\sqrt{\frac{\alpha^4\gamma}{\beta^3}}+\sqrt{\frac{\alpha^2\gamma^3}{\beta\delta^2}}-\sqrt{\frac{\alpha^2\gamma\delta^2}{\beta\varepsilon^2}}=\left(\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\alpha\gamma}{\delta}-\frac{\alpha\delta}{\varepsilon}\right)\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}$

21) $\sqrt[3]{\frac{27\alpha^5\chi}{2\beta}}-\sqrt[3]{\frac{\alpha^2\chi}{2\beta}}=(3\alpha-1)\sqrt[3]{\frac{\alpha^2\chi}{2\beta}}$

22) $6\alpha\beta^2-12\alpha\beta\gamma-3\alpha\beta=3\alpha\beta(2\beta-4\gamma-1)$

23) $\sqrt{948\alpha^3\chi^6}=2\alpha\chi^3\sqrt{237\alpha}$

24) $2\alpha\beta\chi-3\delta\eta\chi=\chi(2\alpha\beta-3\delta\eta)$

3) $\sqrt{\left(\alpha^2-\alpha\beta+\frac{\beta^2}{4}\right)}=\alpha-\frac{\beta}{2}$

4) $\sqrt{(\chi^2+2\chi+1)}=\chi+1$

5) $\sqrt{(\zeta^6+6\zeta^3\chi^4+9\chi^8)}=\zeta^3+3\chi^4$

6) $\sqrt{\left(\frac{9\alpha^8}{4}+2\alpha^4\gamma^3+\frac{4\gamma^6}{9}\right)}=\frac{3\alpha^4}{2}+\frac{2\gamma^3}{3}$

7) $\sqrt{\left(\frac{25}{4}\alpha^2\beta^2-\frac{5}{3}\alpha\beta\gamma^2+\frac{1}{9}\gamma^4\right)}=\frac{5}{2}\alpha\beta-\frac{1}{3}\gamma^2$

8) $\sqrt{(\chi^4-\alpha\chi^3+\frac{1}{4}\alpha^2\chi^2)}=\chi^2-\frac{1}{2}\alpha\chi$

9) $\sqrt{(\alpha^4+6\alpha^3\beta+5\alpha^2\beta^2-12\alpha\beta^3+4\beta^4)}=\alpha^2+3\alpha\beta-2\beta^2$

10) $\sqrt{(\alpha^{2\mu}+2\alpha^\mu\chi^\nu+\chi^{2\nu})}=\alpha^\mu+\chi^\nu$

11) $\sqrt{(\alpha^{2\mu}-4\alpha^{\mu+\nu}+4\alpha^{2\nu})}=\alpha^\mu+2\alpha^\nu$

12) $\sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}-\frac{4\alpha}{3\gamma}+\frac{4\beta^2}{9\gamma^2}\right)}=\frac{\alpha}{\beta}-\frac{2\beta}{3\gamma}$

13) $\sqrt{(\alpha^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+\beta^2+2\beta\gamma+\gamma^2)}=\alpha+\beta+\gamma$

14) $\sqrt{(\beta^2-2\beta\delta+\delta^2+2\beta\gamma-2\gamma\delta+\gamma^2)}=\beta-\delta+\gamma$

15) $\sqrt{\left(9\chi^2-30\alpha\chi-3\alpha^2\chi+25\alpha^2+5\alpha^3+\frac{\alpha^4}{4}\right)}=3\chi-5\alpha$
$-\frac{\alpha^2}{2}$

16) $\sqrt{(\alpha^4+4\alpha^3-8\alpha^4+4)}=\alpha^2-2\alpha-2$

17) $\sqrt{\left(\alpha^2-2\alpha\chi+\chi^2+\alpha\beta-\beta\chi+\frac{\beta^2}{4}\right)}=\alpha-\chi+\frac{\beta}{2}$

18) $\sqrt{(4-8\alpha+4\alpha^3+\alpha^4)}=2-2\alpha-\alpha^2$

19) $\sqrt{(4\chi^4+8\alpha\chi^3+4\alpha^2\chi^2+16\beta^2\chi^2+16\alpha\beta^2\chi+16\beta^4)}=$
$2\chi^2-2\alpha\chi+4\beta^2$

20) $\sqrt{(9\alpha^2-6\alpha\beta+30\alpha\gamma+6\alpha\delta+\beta^2-10\beta\gamma-2\beta\delta+25\gamma^2}$
$+10\gamma\delta+\delta^2)=3\alpha-\beta+5\gamma+\delta$

21) $\sqrt{(\frac{9}{4}+6\chi-17\chi^2-28\chi^3+49\chi^4)}=\frac{3}{2}+2\chi-7\chi^2$

22) $\sqrt{(9\gamma^2-12\gamma\delta\varepsilon+4\delta^2\varepsilon^2+24\gamma\zeta\eta-16\delta\zeta\varepsilon\eta+16\zeta^2\eta^2)}=$
$3\gamma-2\delta\varepsilon+4\zeta\eta$

23) $\sqrt{\left(9\chi^4-3\alpha\chi^3+6\beta\chi^3+\frac{\alpha^2\chi^2}{4}-\alpha\beta\chi^2+\beta^2\chi^2\right)}=3\chi^2-$
$\frac{\alpha\chi}{2}+\beta\chi$

24) $\sqrt{(4\alpha^4-12\alpha^3\beta+9\alpha^2\beta^2-16\alpha^2\beta^2+24\alpha\beta^3+16\beta^4)}=$
$2\alpha^2-3\alpha\beta-4\beta^2$

25) $\sqrt{(\frac{4}{9}\alpha^2\chi^4-\frac{4}{3}\alpha\beta\chi^3\omega+\frac{8}{3}\alpha^2\beta\chi^2\omega^2+\beta^2\chi^2\omega^2-4\alpha\beta^2\chi\omega^3+4\alpha^2}$
$\beta^2\omega^4)=\frac{2}{3}\alpha\chi^2-\beta\chi\omega+2\alpha\beta\omega^2$

26 $\sqrt{\frac{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}{\chi^4+4\alpha\chi^2+4\alpha^2}}=\frac{\alpha-\beta}{\chi^2+2\alpha}$

27 $\sqrt{\frac{\alpha^2\chi^2+2\alpha\beta^2\chi^3+\beta^4\chi^4}{\alpha^{2\mu}+2\alpha^\mu\chi^\nu+\chi^{2\nu}}}=\frac{\alpha\chi+\beta^2\chi^2}{\alpha^\mu+\chi^\nu}$

28) $\sqrt{(\alpha^{2\mu}\chi^{2\nu}+10\gamma\alpha^{2\mu-1}\chi^{2\nu+1}-6\alpha^{\mu+1}\chi^{\nu-1}+25\gamma^2\alpha^{2\mu-2}}$
$\chi^{2\nu+2}-30\gamma\alpha^{\mu}\chi^\nu+\frac{9\alpha^2}{\chi^2})=\alpha^\mu\chi^\nu+5\gamma\alpha^{\mu-1}\chi^{\nu+1}-\frac{3\alpha}{\chi}$

29) $\sqrt{\left(\frac{9\alpha^{2\mu-2}\gamma^2}{4\delta^{6\pi}}-\frac{3\alpha^{\mu+\nu-1}\beta^{2\nu-1}\gamma}{\delta^{3\pi-3}}-\frac{2^8\alpha^{\mu-1}\beta\chi\gamma}{\delta^{3\pi}}+\alpha^{2\nu}\beta^{4\nu-2}\delta^6+\right.}$
$\left.\frac{2^9}{3}\alpha^\nu\beta\chi^{+2\nu-1}\delta^3+\frac{2^{16}\beta^2\chi^2}{9}\right)=\frac{3\alpha^{\mu-1}\gamma}{2\delta^{3\pi}}-\alpha^\nu\beta^{2\nu-1}\delta^3-\frac{2^8\beta\chi}{3}$

γ) Κυβικαὶ ῥίζαι ποσοτήτων ἐκφρασμένων διὰ μικτῶν γραμμάτων.

1) $\sqrt[3]{(\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3)}=\alpha+\beta$

2) $\sqrt[3]{(\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3)}=\alpha-\beta$

3) $\sqrt[3]{(\chi^3+6\chi^2+12\chi+8)}=\chi+2$

4) $\sqrt[3]{(1-3\chi+3\chi^2-\chi^3)}=1-\chi$

5) $\sqrt[3]{\left(27\alpha^3+\frac{27\alpha^2}{2}+\frac{9\alpha}{4}+\frac{1}{8}\right)}=3\alpha+\frac{1}{2}$

6) $\sqrt[3]{(8\alpha^3+36\alpha^2\beta+54\alpha\beta^2+27\beta^3)}=2\alpha+3\beta$

7) $\sqrt[3]{(8\alpha^3-84\alpha^2\chi+294\alpha\chi^2-343\chi^3)}=2\alpha-7\chi$

8) $\sqrt[3]{(\chi^6-6\gamma\chi^5+12\gamma^2\chi^4-8\gamma^3\chi^3)}=\chi^2-2\gamma\chi$

9) $\sqrt[3]{(8\alpha^3\beta-12\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2-\beta^6)}=2\alpha\beta-\beta^2$

10) $\sqrt{(\alpha^{3\mu}-6\alpha^{2\mu+1}\chi^\nu+12\alpha^{\mu+2}\chi^{2\nu}-8\alpha^3\chi^{3\nu})}=\alpha^\mu-2\alpha\chi^\nu$

11) $\sqrt[3]{(8-12\chi^{3\nu-1}+6\chi^{6\nu-2}-\chi^{9\nu-3})}=2-\chi^{3\nu-1}$

12) $\sqrt[3]{\left(\frac{\alpha^3\gamma^3}{\beta^3}\chi^6-\frac{3\alpha^2\gamma}{\beta}\chi^5+\frac{3\alpha\beta}{\gamma}\chi^4-\frac{\beta^3}{\gamma^3}\chi^3\right)}=\frac{\alpha\gamma}{\beta}\chi^2-\frac{\beta}{\gamma}\chi$

13) $\sqrt[3]{\left(\beta^3+\frac{3\alpha^2\beta^2}{3\gamma^2}\chi^{-2}+\frac{3\alpha^4\beta}{4\gamma^4}\chi^{-4}+\frac{\alpha^6}{8\gamma^6}\chi^{-6}\right)}=\beta+\frac{\alpha^2}{2\gamma^2}\chi^{-2}=$
$\beta+\frac{\alpha^2}{2\gamma^2\chi^2}$

14) $\sqrt[3]{(\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha^2\gamma+3\alpha\beta^2+6\alpha\beta\gamma+3\alpha\gamma^2+\beta^3+3\beta^2\gamma}$
$+3\beta\gamma^2+\gamma^3)=\alpha+\beta+\gamma$

15) $\sqrt[3]{(1+3\alpha-5\alpha^3+3\alpha^5-\alpha^6}=1+\alpha-\alpha^2$

16) $\sqrt[3]{(8\alpha^6+12\alpha^5-30\alpha^4-35\alpha^3+45\alpha^2+27\alpha-27)}=$
$2\alpha^2+\alpha-3$

17) $\sqrt[3]{(27\omega^6-54\alpha\omega^5+63\alpha^2\omega^4-44\alpha^3\omega^3+21\alpha^4\omega^2-6\alpha^5\omega}$
$+\alpha^6)=3\omega^2-2\alpha\omega+\alpha^2$

18) $\sqrt[3]{\left(\frac{\alpha^3\psi^3}{\beta^6\gamma^3}+\frac{3\alpha^2\gamma\psi^4}{\beta^4\delta}-\frac{3\alpha^3\psi^2}{\beta^4\gamma^2}+\frac{3\alpha\gamma^5\psi^5}{\beta^2\delta^2}-\frac{6\alpha^2\gamma^2\psi^3}{\beta^2\delta}+\frac{3\alpha^3\psi}{\beta^2\gamma}+\frac{\gamma^9\psi^6}{\delta^3}\right.}$
$\left.-\frac{3\alpha\gamma^6\psi^4}{\delta^2}+\frac{3\alpha^2\beta^3\psi^2}{\delta}-\alpha^3\right)=\frac{\alpha\psi}{\beta^2\gamma}+\frac{\gamma^3\psi^2}{\delta}-\alpha$

19) $\sqrt[3]{(8\chi^6+48\gamma\chi^5+60\gamma^2\chi^4-80\gamma^3\chi^3-90\gamma^4\chi^2+108\gamma^5\chi}$
$-27\gamma^6)=2\chi^2+4\gamma\chi-3\gamma^2$

20) $\sqrt[3]{[(\alpha+\beta)^{6\mu}\chi^3+6\gamma\alpha^\pi(\alpha+\beta)^{4\mu}\chi^2+12\gamma^2\alpha^{2\pi}\times(\alpha+\beta)^{2\mu}\chi}$
$+8\gamma^3\alpha^{3\pi}]=(\alpha+\beta)^{2\mu}\chi+2\gamma\alpha^\pi$

δ) Τετραγωνικαὶ καὶ κυβικαὶ ῥίζαι ἁπλῶν τετραγώνων καὶ κύβων.

1) $\sqrt{(\alpha^2-\chi^2)}=\alpha-\frac{\chi^2}{2\alpha}-\frac{\chi^4}{8\alpha^3}-\frac{\chi^6}{16\alpha^5}-\frac{5\chi^8}{128\alpha^7}+\dots$

2) $\sqrt{(\alpha^2+\chi^2)}=\alpha+\frac{\chi^2}{2\alpha}-\frac{\chi^4}{8\alpha^3}+\frac{\chi^6}{16\alpha^5}-\frac{5\chi^8}{128\alpha^7}+\dots$

3) $\sqrt{(1-\chi)}=1-\frac{\chi}{2}-\frac{\chi^2}{8}-\frac{\chi^3}{16}-\frac{5\chi^4}{128}-\dots$

4) $\sqrt{(1+\chi)}=1+\frac{\chi}{2}-\frac{\chi^2}{8}+\frac{\chi^3}{16}-\frac{5\chi^4}{128}+\dots$

5) $\sqrt[3]{(\alpha^3-\chi^3)}=\alpha-\frac{\chi^3}{3\alpha^2}-\frac{\chi^6}{9\alpha^5}-\frac{5\chi^9}{81\alpha^8}-\frac{10\chi^{12}}{243\alpha^{11}}-\dots$

6) $\sqrt[3]{(\alpha^3+\chi^3)}=\alpha+\frac{\chi^3}{3\alpha^2}-\frac{\chi^6}{9\alpha^5}+\frac{5\chi^9}{81\alpha^8}-\frac{10\chi^{12}}{243\alpha^{11}}\dots$

7) $\sqrt[3]{(1-\chi)}=1-\frac{\chi}{3}-\frac{\chi^2}{9}-\frac{5\chi^3}{81}-\frac{10\chi^4}{243}-\dots$

8) $\sqrt[3]{(1+\chi)}=1+\frac{\chi}{3}-\frac{\chi^2}{9}+\frac{5\chi^3}{81}-\frac{10\chi^4}{243}+\dots$

Ὁ διδάσκαλος ἠμπορεῖ νὰ ἀποδείξῃ εἰς τοὺς μαθητάς του τὸ ὄφελος τῶν σειρῶν τούτων εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῶν τετραγωνικῶν καὶ κυβικῶν ῥιζῶν διά τινων παραδειγμάτων, ἐκλαμβάνων εἰς τοὺς τύπους 1, 2, 5, 6, τὸ α=με τοὺς τύπους 2, 3, 4, 5 κτλ. τὸ χ=1· καὶ εἰς τοὺς τύπους 3, 4, 7, 8 τὸ χ=$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ κτλ.

---

3) Ὑπολογισμὸς μὲ ῥιζικά.

α) Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις.

1) $\beta\sqrt[\mu]{\alpha}+\gamma\sqrt[\mu]{\alpha}-\delta\sqrt[\mu]{\alpha}=(\beta+\gamma-\delta)\sqrt[\mu]{\alpha}$

2) $3\sqrt[6]{5}+17\sqrt[6]{5}-12\sqrt[6]{5}-7\sqrt[6]{5}=\sqrt[6]{5}$

3) $6\sqrt{2}-5\sqrt{2}+\frac{3}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{5}{4}\sqrt{2}$

4) $6\sqrt[4]{\frac{3}{2}}-2\sqrt[4]{\frac{3}{2}}+\alpha\sqrt[4]{\frac{3}{2}}-\frac{2\beta}{\gamma}\sqrt[4]{\frac{3}{2}}=\left(4+\alpha-\frac{2\beta}{\gamma}\right)\sqrt[4]{\frac{3}{2}}$

5) $5\sqrt[7]{9}-2\sqrt[5]{14}+\sqrt[3]{2}-5\sqrt[5]{14}-2\sqrt[7]{9}=3\sqrt[7]{9}-7$
$\sqrt[5]{14}+\sqrt[3]{2}$

6) Πρόσθ.

$$10\sqrt{2}+5\sqrt[7]{8}-7\sqrt[\mu]{5}+2\sqrt[3]{\alpha}$$
$$5\sqrt{2}+\sqrt[7]{8}+4\sqrt[\mu]{5}-3\sqrt[3]{\alpha}$$
$$-3\sqrt{2}-9\sqrt[7]{8}-3\sqrt[\mu]{5}+\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt{\alpha\beta}$$
$$12\sqrt{2}-3\sqrt[7]{8}-6\sqrt[\mu]{5}+\sqrt{\alpha\beta}$$

7) Πρόσθ.

$$13\sqrt[5]{12\alpha^2\beta\gamma}+17\sqrt[\mu]{3}-5\sqrt[\nu]{6}$$
$$7\sqrt[5]{12\alpha^2\beta\gamma}+2\sqrt[\nu]{6}+3\sqrt[\mu]{3}-2\alpha\sqrt{\gamma}+\tfrac{1}{2}\sqrt[7]{9\alpha}$$
$$-20\sqrt[5]{12\alpha^2\beta\gamma}+9\sqrt[5]{12\alpha^2\beta\gamma}+\sqrt{\gamma}-3\sqrt[7]{9\alpha}$$
$$20\sqrt[\mu]{3}-3\sqrt[\nu]{6}+9\sqrt[5]{12\alpha^2\beta\gamma}-(2\alpha-1)\sqrt{\gamma}-\tfrac{5}{2}\sqrt[7]{9\alpha}$$

8) Αφαίρ.

$$18\sqrt{7}-5\sqrt{6}+10\sqrt[4]{11}-3\sqrt[3]{13}$$
$$6\sqrt{7}-2\sqrt{6}+\tfrac{17}{2}\sqrt[4]{11}+2\sqrt[3]{13}$$
$$12\sqrt{7}-3\sqrt{6}+\tfrac{3}{2}\sqrt[4]{11}-5\sqrt[3]{13}$$

9) Αφαίρ.

$$16\sqrt[4]{6\alpha\beta}-\sqrt[5]{9\gamma^3}+3\sqrt[\mu]{7\alpha}-\sqrt{10}$$
$$-8\sqrt[5]{9\gamma^3}-5\sqrt[\mu]{7\alpha}+3\sqrt[4]{6\alpha\beta}+2\sqrt[4]{10}$$
$$13\sqrt[4]{6\alpha\beta}+7\sqrt[5]{9\gamma^3}+8\sqrt[\mu]{7\alpha}-\sqrt{10}-2\sqrt[4]{10}$$

β) Συγκοπαί καί μεταβολαί.

1) $\sqrt{160}=4\sqrt{10}$

) $\sqrt[3]{400}=2\sqrt[3]{50}$

$4\sqrt{8}+5\sqrt{8}=18\sqrt{2}$

4) $\sqrt{50}-\sqrt{18}=2\sqrt{2}$

5) $\sqrt{24}+\sqrt{54}-\sqrt{6}=4\sqrt{6}$

6) $2\sqrt{8}-7\sqrt{18}+5\sqrt{72}-\sqrt{50}=8\sqrt{2}$

7) $\sqrt{12}+2\sqrt{27}+3\sqrt{75}-9\sqrt{48}=-13\sqrt{3}$

8) $8\sqrt{\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}\sqrt{12}+4\sqrt{27}-2\sqrt{\frac{3}{16}}=\frac{29}{2}\sqrt{3}=\frac{29\sqrt{3}}{2}$

9) $2\sqrt{\frac{5}{3}}+\sqrt{60}-\sqrt{15}+\sqrt{\frac{3}{5}}=\frac{28}{15}\sqrt{15}$

10) $7\sqrt[3]{54}+3\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{128}=8\sqrt[3]{2}$

11) $\sqrt[3]{81}-2\sqrt[3]{24}+\sqrt{28}+2\sqrt{63}=8\sqrt{7}-\sqrt[3]{3}$

12) $\sqrt[4]{32}+2\sqrt[3]{40}=2\sqrt[4]{2}+4\sqrt[3]{5}$

13) $3\sqrt{5}-2\sqrt{2}+3\sqrt{6}=\sqrt{45}-\sqrt{8}+\sqrt{54}$

14) $5\sqrt[3]{7}+3\sqrt{2}+2\sqrt[4]{3}=\sqrt[3]{875}+\sqrt{18}+\sqrt[4]{48}$

15) $4\sqrt[5]{\frac{1}{2}}+3\sqrt[3]{2}-5\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt[5]{512}+\sqrt[3]{54}-\sqrt{\frac{25}{3}}$

16) $\sqrt{45\gamma^3}-\sqrt{80\gamma^3}+\sqrt{5\alpha^2\gamma}=(\alpha-\gamma)\sqrt{5\gamma}$

17) $\sqrt[3]{16\alpha^3\beta}+\sqrt{4\alpha^2\beta}-\sqrt{\alpha^2\beta}-\sqrt[3]{54\alpha^3\beta}=\alpha\sqrt{\beta}-\alpha\sqrt[3]{2\beta}$

18) $\sqrt{18\alpha^5\beta^3}+\sqrt{50\alpha^3\beta^3}=(3\alpha^2\beta+5\alpha\beta)\sqrt{2\alpha\beta}$

19) $\sqrt[4]{2^{14}\alpha^{13}\beta^5\gamma}-\sqrt[4]{4.5^4\alpha^5\beta^9\gamma^5}+\sqrt[4]{4.6^4\alpha\beta^5\gamma}=(8\alpha^3\beta-5\alpha\beta^2\gamma$
$+6\beta)\sqrt[4]{4\alpha\beta\gamma}$

20) $\sqrt{\frac{\alpha^4\gamma}{\beta^3}}+\sqrt{\frac{\alpha^2\gamma^3}{\beta\delta^2}}-\sqrt{\frac{\alpha^2\gamma\delta^2}{\beta\epsilon^2}}=\left(\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\alpha\gamma}{\delta}-\frac{\alpha\delta}{\epsilon}\right)\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}$

21) $\sqrt[3]{\frac{27\alpha^5\chi}{2\beta}}-\sqrt[3]{\frac{\alpha^2\chi}{2\beta}}=(3\alpha-1)\sqrt[3]{\frac{\alpha^2\chi}{2\beta}}$

22) $6\alpha\beta^2-12\alpha\beta\gamma-3\alpha\beta=3\alpha\beta(2\beta-4\gamma-1)$

23) $\sqrt{948\alpha^3\chi^6}=2\alpha\chi^3\sqrt{237\alpha}$

24) $2\alpha\beta\chi-3\delta\eta\chi=\chi(2\alpha\beta-3\delta\eta)$

25) $\sqrt[3]{3}\beta\sqrt{\alpha^5\gamma}+\frac{2}{\gamma}\sqrt{\alpha^5\gamma^3}-\gamma^4\sqrt{\frac{\alpha\gamma}{\beta^2}}=\left(\sqrt[3]{3}\alpha\beta+2\alpha^2-\frac{\gamma^4}{\beta}\right)\sqrt{\alpha\gamma}$

26) $5\alpha\sqrt[3]{\frac{\alpha^2}{\beta}}+\beta\sqrt[3]{\frac{\beta^2\gamma^3}{\alpha}}=\left(\frac{5\alpha}{\beta}+\frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2}$

27) $3\sqrt[3]{(8+16\sqrt{5})}-2\sqrt[3]{(1+\sqrt{20})}=4\sqrt[3]{(1+2\sqrt{5})}$

28) $\sqrt[3]{54\alpha^{\mu+6}\beta^3}-\sqrt[3]{16\alpha^{\mu-3}\beta^6}+\sqrt[3]{2\alpha^{4\mu+9}}+\sqrt[3]{2\gamma^3\alpha^\mu}=$
$\left(3\alpha^2\beta-\frac{2\beta^2}{\alpha}+\alpha^{\mu+3}+\gamma\right)\sqrt[3]{2\alpha^\mu}$

29) $\sqrt[\mu]{2^\mu\alpha^{\mu\pi+3}\beta^{\mu\nu+5}}+\sqrt[\mu]{3^\mu\alpha^{2\mu-\mu\nu+3}\beta^{\mu+5}}-\sqrt[\mu]{\alpha^3\beta^5\gamma^{2\mu}}=$
$(2\alpha^\pi\beta^\nu+3\alpha^{2-\nu}\beta-\gamma^2)\sqrt[\mu]{\alpha^3\beta^5}$

30) $\sqrt[6]{\frac{3.2^3\gamma^3\zeta^4}{\delta^4\eta}}+\sqrt[6]{\frac{2^3\eta^{11}}{3^5\gamma^3\delta^4\zeta^2}}=\left(\frac{\zeta}{\delta}+\frac{\eta^2}{3\gamma\delta}\right)\sqrt[6]{\frac{3.2^3\gamma^3\delta^2}{\zeta^2\eta}}$

31) $\sqrt[2\nu]{\frac{\alpha^{6\nu}+4\beta^{2\nu}-3\gamma^{2\mu\nu}}{\delta^{9\nu}+5\zeta^2\eta^\pi+2\nu-1}}=\frac{\alpha^3\beta\gamma^\mu}{\delta^4\eta}\sqrt[2\nu]{\frac{\alpha^4}{\delta^\nu+5\zeta^2\eta^\pi-1\beta^3}}$

32) $\sqrt{(\alpha^2\gamma+\alpha^2\delta)}=\alpha\sqrt{(\gamma+\delta)}$

33) $\sqrt[3]{(\alpha^{6\mu}\beta-\alpha^{7\mu}\zeta^2)}=\alpha^{2\mu}\sqrt[3]{(\beta-\alpha^\mu\zeta^2)}$

34) $\sqrt[7]{\left(\frac{\alpha^{10}}{\beta^6\gamma^6}+\frac{\alpha^8}{\beta^5\gamma^5}\right)}=\frac{\alpha}{\beta\gamma}\sqrt[7]{(\alpha^3\beta\gamma+\alpha\beta^2\gamma^2)}$

35) $\sqrt{\left(\frac{\alpha^3\beta^2}{\gamma\delta^2}-\frac{2\alpha^2\beta^3}{\gamma^2\delta}\right)}=\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}\sqrt{(\alpha\gamma-2\beta\delta)}$

36) $\chi\sqrt[3]{\left(\frac{8\alpha^4}{27\beta^3}+\frac{16\alpha^3}{27\beta^2}\right)}=\frac{2\alpha\chi}{3\beta}\sqrt[3]{(\alpha+2\beta)}$

37) $\sqrt{(3\alpha^2\gamma+6\alpha\beta\gamma+3\beta^2\gamma)}=(\alpha+\beta)\sqrt{3\gamma}$

38) $\sqrt{(4\alpha^5\beta^2-20\alpha^3\beta^3+25\alpha\beta^4)}=(2\alpha^2-5\beta)\sqrt{\alpha\beta^2}$

39) $\alpha\chi+\chi^2=\chi(\alpha+\chi)$

40) $\psi+\beta\psi=\psi(1+\beta)$

41) $\sqrt{(2\alpha\chi^2-4\alpha\chi+2\alpha)}=(\chi-1)\sqrt{2\alpha}$

42) $\sqrt{\frac{\alpha^3\beta-4\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3}{\gamma^2\delta^2}}=\frac{\alpha-2\beta}{\gamma\delta}\sqrt{\alpha\beta}$

43) $\sqrt{\frac{\alpha^2\chi-2\alpha\chi^2+\chi^3}{\alpha^2+2\alpha\chi+\chi^2}}=\frac{\alpha-\chi}{\alpha+\chi}\sqrt{\chi}$

44) $\sqrt{\frac{\alpha\gamma}{\alpha^2\beta\delta-2\alpha\beta^2\delta+\beta^3\delta}}=\frac{1}{\alpha-\beta}\sqrt{\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}}$

45) $\sqrt{\frac{\chi^3+2\chi^2+\chi}{\alpha^3+\alpha^2\beta}}=\frac{\chi+1}{\alpha}\sqrt{\frac{\chi}{\alpha+\beta}}$

46) $\sqrt{\frac{\alpha^3-\alpha^2\chi-\alpha\chi^2+\chi^3}{\beta^5\gamma^3\delta}}=\frac{\alpha-\chi}{\beta^2\gamma}\sqrt{\frac{\alpha+\chi}{\beta\gamma\delta}}$

47) $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\sqrt{\frac{\alpha\gamma}{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}}=\frac{\sqrt{\alpha\gamma}}{\alpha+\beta}$

48) $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}=\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}$

49) $(\chi+1)\sqrt{\frac{\zeta^2\eta}{\chi^2-1}}=\sqrt{\frac{(\chi+1)^2\zeta^2\eta}{(\chi+1)(\chi-1)}}=\sqrt{\frac{(\chi+1)\zeta^2\eta}{\chi-1}}$

50) $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\sqrt[\pi]{\sqrt[\rho]{\alpha}}}}=\sqrt[\mu\nu\pi\rho]{\alpha}$

51) $\sqrt[3]{(2\sqrt{5})}=\sqrt[6]{20}$

52) $\sqrt[\mu]{(\alpha\sqrt[\nu]{\beta})}=\sqrt[\mu\nu]{\alpha^\nu\beta}$

γ) Πολλαπλασιασμός.

1) $\sqrt[\mu]{\alpha}\times\sqrt[\mu]{\beta}\times\sqrt[\mu]{\gamma}=\sqrt[\mu]{\alpha\beta\gamma}$

2) $\alpha\sqrt[\nu]{\chi}\times\beta\sqrt[\nu]{\psi}\times\gamma\sqrt[\nu]{\omega}=\alpha\beta\gamma\sqrt[\nu]{\chi\psi\omega}$

3) $\sqrt[3]{4}\times7\sqrt[3]{6}\times\frac{1}{2}\sqrt[3]{5}=\frac{7}{2}\sqrt[3]{120}$

4) $3\sqrt{6}\times4\sqrt{2}=24\sqrt{3}$

5) $4\times2\sqrt[6]{3}\times\sqrt[6]{72}=8\sqrt{6}$

6) $5\sqrt{3}\times7\sqrt{\frac{8}{3}}\times\sqrt{2}=140$

7) $5\sqrt[3]{3}\times\sqrt{6}=5\sqrt[6]{1944}$

8) $\gamma\sqrt{\alpha}\times\delta\sqrt{\alpha}=\alpha\gamma\delta$

9) $\sqrt[\mu]{\alpha}\times\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\mu\nu]{\alpha^\nu}\times\sqrt[\mu\nu]{\beta^\mu}=\sqrt[\mu\nu]{\alpha^\nu\beta^\mu}$

10) $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[4]{5}=\sqrt[12]{648000}$

11) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{\frac{1}{3}}\times\sqrt[8]{3}=\sqrt[24]{\frac{256}{3}}$

12) $\sqrt[4]{20}\times 6\sqrt{3}=6\sqrt{(6\sqrt{5})}$

13) $\sqrt[5]{4}\times\sqrt[10]{3}\times\sqrt[15]{6}=\sqrt[30]{3981312}$

14) $\sqrt[7]{\frac{4}{9}}\times\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\times\sqrt[14]{6}=\sqrt[42]{\frac{2}{27}}$

15) $\alpha\sqrt[\mu]{\beta}\times\gamma\sqrt[\nu]{\delta}=\alpha\gamma\sqrt[\mu\nu]{\beta^{\nu}\delta^{\mu}}$

16) $\alpha\sqrt[\mu]{\chi}\times\beta\sqrt[\nu]{\psi}\times\gamma\sqrt[\pi]{\omega}=\alpha\beta\gamma\sqrt[\mu\nu\pi]{\chi^{\nu\pi}\psi^{\mu\pi}\omega^{\mu\nu}}$

17) $\sqrt[12]{\frac{\alpha}{\beta\gamma}}\times\sqrt[8]{\frac{\alpha^{\mu}}{\beta}}=\sqrt[24]{\frac{\alpha^{3\mu+2}}{\beta^{5}\gamma^{2}}}$

18) $\frac{\alpha\gamma}{\beta^{3}\delta^{5}}\sqrt[3]{\beta\gamma\delta}\times\sqrt[6]{\frac{\beta^{10}\delta^{72}}{\alpha^{2}\gamma^{5}}}=\frac{1}{\beta\delta}\sqrt[6]{\frac{\alpha^{4}\gamma^{3}}{\delta^{38}}}$

19) $(\sqrt{5}+2\sqrt{7}+3\sqrt{10})\times 2\sqrt{5}=10+4\sqrt{35}+6\sqrt{50}$

20) $(\sqrt{6}+\sqrt[3]{2}-2\sqrt[4]{5})\times\sqrt{3}=\sqrt{18}+\sqrt[6]{108}-2\sqrt[4]{45}$

21) $(3+\sqrt{5})\times(2-\sqrt{5})=1-\sqrt{5}$

22) $(7+2\sqrt{6})+(9-5\sqrt{6})=3-17\sqrt{6}$

23) $(9-7\sqrt{13})\times(5-6\sqrt{13})=591-89\sqrt{13}$

24) $(6+12\sqrt{7})\times(3-5\sqrt{7})=6\sqrt{7}-402$

25) $(9\sqrt{12}+3)\times(5\sqrt{12}+8)=564+87\sqrt{12}$

6) $(13-\sqrt{5})\times(7+3\sqrt{5})=76+32\sqrt{5}$

) $(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{2}})\times(\frac{1}{2}-7\sqrt{\frac{1}{2}})=-8-\frac{37}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}$

) $(-5-\sqrt{\frac{3}{4}})\times(-5+\sqrt{\frac{3}{4}})=24\frac{1}{4}$

9) $(9+2\sqrt{10})\times(9-2\sqrt{10})=41$

30) $3\sqrt[3]{(2\sqrt{10})}\times 2\sqrt[5]{(5\sqrt{100})}=60$

31) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})\times(2\sqrt{2}-\sqrt{3})=1+\sqrt{6}$

32) $(5\sqrt{14}+3\sqrt{5})\times(7\sqrt{14}-2\sqrt{5})=460+11\sqrt{70}$

33) $(2\sqrt{7}-5\sqrt{6})\times\left(\frac{3\sqrt{7}}{2}-2\sqrt{6}\right)=81-\frac{23}{2}\sqrt{42}$

34) $(4\sqrt{\frac{7}{3}}+5\sqrt{\frac{1}{2}})\times(\sqrt{\frac{7}{3}}+2\sqrt{\frac{1}{2}})=\frac{43}{3}+13\sqrt{\frac{7}{6}}$

35) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{3}=11\sqrt{2}+9\sqrt{3}$

36) $(\sqrt{7}-\sqrt{3})\times(\sqrt{5}-2)=\sqrt{35}-\sqrt{15}-\sqrt{14}+\sqrt{6}$

37) $(5-8\sqrt{7})\times(9+10\sqrt{3})=45-72\sqrt{7}+50\sqrt{3}-80\sqrt{21}$

38) $(7\sqrt{6}+2\sqrt{3})\times(\sqrt{5}+\sqrt{6})=7\sqrt{30}+2\sqrt{15}+42+2\sqrt{18}$

39) $(3\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{3}})\times(5\sqrt{\frac{5}{6}}+\sqrt{\frac{2}{7}})=15\sqrt{\frac{5}{12}}-5\sqrt{\frac{5}{18}}+3\sqrt{\frac{1}{7}}-\sqrt{\frac{2}{21}}$

40) $(5\sqrt{3}-7\sqrt{6})\times(2\sqrt{8}-3)=41\sqrt{6}-71\sqrt{3}$

41) $(2\sqrt{6}-3\sqrt{5})\times(4\sqrt{3}-\sqrt{10})=39\sqrt{2}-16\sqrt{15}$

42) $(\sqrt{12}-2\sqrt{7})\times(2+\sqrt{21})=2\sqrt{7}-10\sqrt{3}$

43) $(3\sqrt{5}+2\sqrt{6}-2)\times(2\sqrt{5}+18\sqrt{6})=246+58\sqrt{30}-4\sqrt{5}-36\sqrt{6}$

44) $(2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2})\times(\sqrt{72}-5\sqrt{20}-2\sqrt{2})=-174+42\sqrt{10}$

45) $(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}-8\sqrt{6})\times(2+5\sqrt{2}-3\sqrt{12})=30+4\sqrt{5}+150\sqrt{2}-34\sqrt{6}+10\sqrt{10}-40\sqrt{12}-6\sqrt{60}$

46) $(3\sqrt{2}+2\sqrt{5}+\sqrt{7})\times(\sqrt{6}+5\sqrt{3}+\sqrt{10})=3\sqrt{12}+2\sqrt{30}+\sqrt{42}+15\sqrt{6}+10\sqrt{15}+5\sqrt{21}+3\sqrt{20}+2\sqrt{50}+\sqrt{70}$

47) $(2\sqrt{3}\times(6-\sqrt{7})=12\sqrt{3}-2\sqrt{21}$

48) $(\sqrt[3]{5}-2\sqrt[3]{6})\times(3\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{36})=12+3\sqrt[3]{20}-6\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{180}$

49) $(5\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{16})\times(2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{4})=44-4\sqrt[3]{32}-15\sqrt[3]{16}$

50) $(2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})\times(2+\sqrt[3]{9})=4\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{18}+6\sqrt[6]{3}$

51) $(5+\sqrt[3]{4}+2\sqrt[4]{5})\times(\sqrt{6}+\sqrt{5})=5\sqrt{6}+5\sqrt{5}+2\sqrt[4]{125}+2\sqrt[4]{180}+2\sqrt[6]{54}+\sqrt[6]{2000}$

52) $(\alpha\times\sqrt{\beta})\times(\alpha-\sqrt{\beta})=\alpha^2-\beta$

53) $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\times(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})=\alpha-\beta$

54) $(\gamma\sqrt{\alpha}+\delta\sqrt{\beta})\times(\gamma\sqrt{\alpha}-\delta\sqrt{\beta})=\alpha\gamma^2-\beta\delta^2$

55) $(\alpha+\sqrt{\chi})\times(\beta+\sqrt{\psi})=\alpha\beta+\alpha\sqrt{\psi}+\beta\sqrt{\chi}+\sqrt{\chi\psi}$

56) $\left(\sqrt{\frac{\alpha\delta^2}{\gamma^3}}+\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta}}\right)\times(\sqrt{\alpha\gamma}+\sqrt{\beta^3})=\frac{\alpha\delta}{\gamma}+\alpha\beta+\left(\alpha+\frac{\beta^2\delta}{\gamma^2}\right)\sqrt{\frac{\alpha\gamma}{\beta}}$

57) $\left(\sqrt{\frac{\alpha\gamma^2}{\alpha+\beta}}+\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\right)\times\left(\frac{\gamma}{\delta}\sqrt{(\alpha+\beta)\alpha}-\sqrt{\frac{\beta^5}{\gamma^2}}\right)=\frac{\alpha\gamma^2}{\delta}-\frac{\beta^2}{\gamma}+\left(\frac{\gamma}{\beta\delta}-\frac{\beta^2}{\alpha+\beta}\right)\sqrt{(\alpha+\beta)\alpha\beta}$

58) $(\sqrt{\alpha}+\gamma\sqrt[3]{\beta})\times(\sqrt{\alpha}-\gamma\sqrt[3]{\beta})=\alpha-\gamma^2\sqrt[3]{\beta^2}$

59) $(2\sqrt{\alpha}+3\gamma\sqrt[3]{\beta})\times(\sqrt{\alpha}+4\sqrt[3]{\beta})=2\alpha+12\gamma\sqrt[3]{\beta^2}+(3\gamma+8)\sqrt[6]{\alpha^3\beta^2}$

$(\gamma\sqrt[4]{\alpha}+\delta\sqrt[4]{\beta})\times(\zeta\sqrt[4]{\alpha}+\eta\sqrt[4]{\beta})=\gamma\zeta\sqrt{\alpha}+\delta\eta\sqrt{\beta}+(\delta\zeta+\gamma\eta)\sqrt[4]{\alpha\beta}$

$(\sqrt[4]{\alpha}+\sqrt[4]{\beta}+\sqrt[4]{\gamma})^2=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}+2\sqrt[4]{\alpha\beta}+$

$2\sqrt[4]{\alpha\gamma}+2\sqrt[4]{\beta\gamma}$

62) $(\alpha\sqrt{\beta\gamma}\times(3\sqrt{\alpha\beta}-\sqrt{\gamma})=3\alpha\beta\sqrt{\alpha\gamma}-\alpha\gamma\sqrt{\beta}$

63) $\sqrt{(\alpha+\sqrt{\beta})}\times\sqrt{(\gamma+\sqrt{\delta})}=\sqrt{(\alpha\gamma+\gamma\sqrt{\beta}+\alpha\sqrt{\delta}+\sqrt{\beta\delta})}$

64) $\sqrt[\nu]{(\alpha+\sqrt{\beta})}\times\sqrt[\nu]{(\alpha-\sqrt{\beta})}=\sqrt[\nu]{(\alpha^2-\beta)}$

65) $\sqrt[\mu]{(\alpha+\sqrt[\nu]{\beta})}\times\sqrt[\mu]{(\gamma+\sqrt[\pi]{\gamma})}=\sqrt[\mu]{(\alpha\gamma+\gamma\sqrt[\nu]{\beta}+\alpha\sqrt[\pi]{\delta}+\sqrt[\nu\pi]{\beta^\pi\delta^\nu})}$

66) $\sqrt[4]{(5+2\sqrt{6})}\times\sqrt{(3+\sqrt{6})}=\sqrt[4]{(147+60\sqrt{6})}$

67) $3\sqrt[\nu]{(2+4\sqrt[3]{3})}\times4\sqrt[\nu]{(6+2\sqrt[3]{9})}=12\sqrt[\nu]{(36+4\sqrt[3]{9}+24\sqrt[3]{3})}$

68) $5\sqrt{2}\times3\sqrt{(4+6\sqrt{2})}=30\sqrt{(2+3\sqrt{2})}$

69) $3\sqrt[3]{(2+4\sqrt{3})}\times4\sqrt[3]{(6+2\sqrt{9})}=24\sqrt[3]{[9+(6+\sqrt[3]{3})\sqrt[3]{3}]}$

δ) Διαίρεσις.

1) $\sqrt[\mu]{\alpha}:\sqrt[\mu]{\beta}=\sqrt[\mu]{\frac{\alpha}{\beta}}$

2) $\gamma\sqrt[\mu]{\alpha}:\delta\sqrt[\mu]{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\sqrt[\mu]{\frac{\alpha}{\beta}}$

3) $\alpha:\sqrt[\mu]{\beta}=\sqrt[\mu]{\frac{\alpha^\mu}{\beta}}$

4) $\alpha:\sqrt{\alpha}=\sqrt{\alpha}$

5) $2\alpha\beta^2\gamma^3:4\sqrt[3]{\alpha^3\beta\gamma^5\delta}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{\beta^5\gamma^4}{\delta}}$

6) $\sqrt[5]{\alpha\beta^{\nu-1}\gamma^2}:\sqrt[5]{\frac{\alpha^3\beta^2}{\delta\gamma^{\nu-1}}}=\sqrt[5]{\frac{\beta^{\nu-3}\gamma^{\nu+1}\delta}{\alpha^2}}$

7) $\sqrt[\nu]{\frac{\zeta^3\eta^2}{\delta\chi^5}}:\sqrt[\nu]{\frac{\zeta\eta}{\delta\chi}}=\sqrt[\nu]{\frac{\zeta^2\eta}{\chi^4}}$

8) $\sqrt[3]{\alpha^2\beta\gamma}:\sqrt[6]{\alpha\beta^2\gamma^3}=\sqrt[16]{\frac{\alpha^7}{\beta\gamma^4}}$

9) $\sqrt[4]{\frac{\alpha}{\beta}}:\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=\sqrt[4]{\frac{\beta}{\alpha}}$

10) $\sqrt{12}:\sqrt{3}=2$

11) $4\sqrt[3]{12}:2\sqrt{3}=2\sqrt[6]{\frac{16}{3}}$

12) $\sqrt[5]{64}:2=\sqrt[5]{2}$

13) $2\sqrt{6}:3\sqrt[3]{9}=\frac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{8}{3}}$

14) $9:\sqrt[3]{6}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{36}$

15) $\sqrt[2\nu]{\frac{\alpha^{\mu}\beta}{\gamma^2\delta}}:\sqrt[3\nu]{\frac{\alpha^{\mu-1}\gamma^3}{\delta^5}}=\sqrt[6\nu]{\frac{\alpha^{\mu+2}\beta^3\delta^7}{\gamma^{12}}}$

16) $\gamma\sqrt{(\alpha^2-\chi^2)}:\sqrt{(\alpha+\chi)}=\gamma\sqrt{(\alpha-\chi)}$

17) $\sqrt{(\alpha\beta^2-\beta^2\gamma)}:\sqrt{(\alpha-\gamma)}=\beta$

18) $\sqrt{(\alpha^2-\beta^2)}:(\alpha+\beta)=\sqrt{\frac{(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)}}$

19) $\sqrt{(\alpha^2-\omega^2)}:(\alpha-\omega)=\sqrt{\frac{\alpha+\omega}{\alpha-\omega}}$

20) $(\sqrt{72}-\sqrt{32}):\sqrt{8}=1$

21) $(\sqrt{72}+\sqrt{32}-4):\sqrt{8}=5-\sqrt{2}$

22) $(\sqrt{6}+4\sqrt{18}-3-8\sqrt{2}):\sqrt{3}=\sqrt{2}+4\sqrt{6}-\sqrt{3}$
$-8\sqrt{\frac{2}{3}}$

23) $(3\sqrt{15}-\sqrt{20}+\sqrt{10}-7):2\sqrt{5}=\frac{3}{2}\sqrt{3}-1+\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{49}{5}}$

4) $(2\sqrt{32}+3\sqrt{2}+4):4\sqrt{8}=\frac{11}{8}+\frac{1}{4}\sqrt{2}$

) $(6+2\sqrt{3}-\sqrt[3]{18}):\sqrt{6}=\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt[6]{\frac{3}{2}}$

26) $(\sqrt{8}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[4]{2}):2\sqrt{2}=1+\frac{\sqrt[6]{18}}{2}+\frac{\sqrt[4]{8}}{4}$

27) $1:(\sqrt{3}+2)=2-\sqrt{3}$ (1)

28) $3:(1+\sqrt{2})=3\sqrt{2}-3$

29) $12:(5-\sqrt{21})=15+3\sqrt{21}$

30) $7:(\sqrt{8}-2)=\frac{7}{2}(\sqrt{2}+1)$

31) $8:\sqrt{(3-\sqrt{5})}=6\sqrt{(3-\sqrt{5})}+2\sqrt{(15-5\sqrt{5})}$

32) $\sqrt{3}:(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})=\sqrt{15}+\frac{3}{2}\sqrt{6}$

33) $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{5}{6}}:(\sqrt{\frac{1}{2}}-2)=-\frac{\sqrt{15}+2\sqrt{30}}{28}$

34) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}:(\sqrt{2}+3\sqrt{\frac{1}{2}})=\frac{1}{10}$

35) $(1+\sqrt{2}):(2-\sqrt{2})=2+\frac{3}{2}\sqrt{2}$

36) $(5-7\sqrt{3}):(1+\sqrt{3})=6\sqrt{3}-13$

37) $(6-3\sqrt{5}):(\sqrt{5}-1)=\frac{3}{4}\sqrt{5}-\frac{9}{4}$

38) $(\sqrt{3}+\sqrt{2}):(\sqrt{3}-\sqrt{2})=5+2\sqrt{6}$

39) $(3\sqrt{5}-2\sqrt{2}):(2\sqrt{5}-\sqrt{18})=9+\frac{5}{2}\sqrt{10}$

40) $(6\sqrt{7}-3\sqrt{3}):(\sqrt{5}-2)=6\sqrt{35}+12\sqrt{7}-3\sqrt{15}$
$-6\sqrt{3}$

41) $1:(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})=\frac{\sqrt{30}}{12}+\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{6}$

42) $7:(\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{3})=35\sqrt{10}+77\sqrt{2}+63\sqrt{3}$
$+14\sqrt{60}$

43) $\sqrt{2}:(1+2\sqrt{2}-\sqrt{5})=\frac{3}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{4}\sqrt{10}-\frac{1}{2}$

44) $(2-\sqrt{3}):(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})=1+\frac{5}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{3}{4}\sqrt{6}$

---

(1) Εἰς τὰ ἑξῆς προβλήματα πρέπει νὰ θεωρῆται τὸ πηλίκον ὡς κλάσμα τοῦ ὁποίου ὁ παρωνομαστὴς εἶναι τὸ κεφάλαιον δύω ἀριθμῶν καὶ διὰ νὰ γίνῃ ὁ αὐτὸς ἔλλογος πολλαπλασιάζεται τὸ ὅλον κλάσμα μὲ τὴν διαφορὰν τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν· καθὼς εἰς τὸ πρ. 27 πολλαπλασιάζεται τὸ $\frac{1}{\sqrt{3}+2}$ μὲ τὴν διαφορὰν $\sqrt{3}-2$· ἢ μὲ τὸ κεφάλαιον, ὅταν ὁ παρωνομαστὴς ἦναι ἡ διαφορὰ τῶν δύω ἀριθμῶν· καθὼς εἰς τὸ πρ. 29.

45) $(3+\sqrt{7}):(4-\sqrt{6})=\frac{12+3\sqrt{6}+4\sqrt{7}+\sqrt{42}}{10}$

46) $(3+4\sqrt{3}):(\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{5})=\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{5}$

47) $(156+12\sqrt{11}):(6+14\sqrt{2}-2\sqrt{11})=7\sqrt{2}+\sqrt{11}-3$

48) $(2\sqrt{6}+3\sqrt{10}):(3\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})=\frac{7}{10}\sqrt{30}+\frac{27}{10}\sqrt{5}-\frac{3}{2}\sqrt{3}-3\sqrt{2}$

49) $(2\sqrt{6}+3\sqrt{10}):(3\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})=\frac{7\sqrt{30}+27\sqrt{5}-15\sqrt{3}-30\sqrt{2}}{10}$

50) $\sqrt{\alpha}:(\beta+\sqrt{\gamma})=\frac{\beta\sqrt{\alpha}-\sqrt{\alpha\gamma}}{\beta^2-\gamma}$

51) $\sqrt{\alpha}:(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})=\frac{\sqrt{\alpha\beta}-\sqrt{\alpha\gamma}}{\beta-\gamma}$

52) $(\gamma\sqrt{\alpha}+\delta\sqrt{\beta}):(\zeta\sqrt{\theta}+\eta\sqrt{\lambda})=\frac{\gamma\zeta\sqrt{\alpha\theta}+\delta\zeta\sqrt{\beta\theta}-\gamma\eta\sqrt{\alpha\lambda}-\delta\eta\sqrt{\beta\lambda}}{\theta\zeta^2-\lambda\eta^2}$

53) $\left[(\zeta^2-\theta\eta^2\mu)\sqrt{\mu}+2\eta\mu\sqrt{\theta}\right]:(\zeta+\eta\sqrt{\theta}+\sqrt{\mu})=\zeta\sqrt{\mu}-\eta\sqrt{\theta\mu}+\mu$

54) $1:\sqrt[\nu]{(\alpha+\sqrt{\beta})}=\sqrt[\nu]{\frac{\alpha-\sqrt{\beta}}{\alpha^2-\beta}}$

55) $\sqrt[\nu]{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}:\sqrt[\nu]{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})}=\sqrt[\nu]{\frac{\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha-\beta}}$

56) $1:(\sqrt[4]{\alpha}+\sqrt[4]{\beta})=\frac{\sqrt[4]{\alpha^3}-\sqrt[4]{\alpha^2\beta}+\sqrt[4]{\alpha\beta^2}-\sqrt[4]{\beta^3}}{\alpha-\beta}$ (1)

57) $(\sqrt[4]{\alpha}+\sqrt[4]{\beta}):(\sqrt[4]{\alpha}-\sqrt[4]{\beta})=\frac{\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}+2\sqrt[4]{\alpha^3\beta}+2\sqrt[4]{\alpha\beta^3}}{\alpha-\beta}$

58) $\sqrt{(\alpha\beta+\sqrt{\alpha\zeta})}:\sqrt{\alpha}=\sqrt{\left(\beta+\sqrt{\frac{\zeta}{\alpha}}\right)}$

(1) Ὁ διαιρέτης καὶ ὁ διαιρετέος πολλαπλασιάζεται μὲ $\sqrt[4]{\alpha}-\sqrt[4]{\beta}$ καὶ ἡ ἐργασία ἐξακολουθεῖται ὡς συνήθως.

ε) Τετραγωνικαὶ ῥίζαι διωνύμου τοῦ σχήματος $A\pm\sqrt{B}$

Τύπος·

$$\sqrt{(A\pm\sqrt{B})}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{(A^2-B)}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A^2-\sqrt{(A-B)}}{2}}$$

Παραδείγματα.

1) $\sqrt{(7+4\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}$

2) $\sqrt{(43-15\sqrt{8})}=5-3\sqrt{2}$

3) $\sqrt{(5-\sqrt{24})}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

4) $\sqrt{(3-2\sqrt{2})}=\sqrt{2}-1$

5) $\sqrt{(28+5\sqrt{12})}=5+\sqrt{3}$

6) $\sqrt{(87-12\sqrt{42})}=3\sqrt{7}-2\sqrt{6}$

7) $\sqrt{(\frac{3}{2}+\sqrt{2})}=1+\frac{1}{2}\sqrt{2}$

8) $\sqrt{(2+\sqrt{3})}=\frac{1}{2}\sqrt{6}+\frac{1}{2}\sqrt{2}$

9) $\sqrt{(\sqrt{27}+2\sqrt{6})}=\sqrt[4]{12}+\sqrt[4]{3}$ (1)

10) $\sqrt{(\sqrt{32}-\sqrt{24})}=\sqrt[4]{18}-\sqrt[4]{2}$

11) $\sqrt{(3\sqrt{5}+\sqrt{40})}=\sqrt[4]{20}+\sqrt[4]{5}$

12) $\sqrt{(3\sqrt{6}+2\sqrt{12})}=\sqrt[4]{24}+\sqrt[4]{6}$

13) $\sqrt{(18-4)}=\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{2}$

14) $\sqrt{(\alpha^2+\beta+2\alpha\sqrt{\beta})}=\alpha+\sqrt{\beta}$

15) $\sqrt{(\alpha\gamma^2+\beta\delta^2+2\gamma\delta\sqrt{\alpha\beta})}=\gamma\sqrt{\alpha}+\delta\sqrt{\beta}$

16) $\sqrt{\left[2\alpha+2\sqrt{(\alpha^2-\beta^2)}\right]}=\sqrt{(\alpha+\beta)}+\sqrt{(\alpha-\beta)}$

(1) Ἂν τεθῇ τὸ $A=\sqrt{27}$.

17) $\sqrt{[\chi-2\sqrt{(\chi-1)}]}=\sqrt{(\chi-1)}-1$

18) $\sqrt{\left[\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\gamma}{2}\sqrt{(\alpha^2-\gamma^2)}\right]}=\frac{\gamma+\sqrt{(\alpha^2-\gamma^2)}}{2}$

19) $\sqrt{(\chi+\chi\psi-2\chi\sqrt{\psi})}=(\sqrt{\psi}-1)\sqrt{\chi}$

20) $\sqrt{[\alpha\pi-2\alpha\sqrt{(\alpha\pi-\alpha^2)}]}=\sqrt{(\alpha\pi-\alpha^2)}-\alpha$

21) $\sqrt{\left[\frac{3\alpha}{\beta}+\sqrt{\left(\frac{12\alpha^3\gamma^2}{\beta\delta^2}-\frac{4\alpha^4\gamma^4}{\delta^4}\right)}\right]}=\frac{\alpha\gamma}{\delta}+\sqrt{\left(\frac{3\alpha}{\beta}-\frac{\alpha^2\gamma^2}{\delta^2}\right)}$

22) $\sqrt{[\beta^2-\alpha\beta+\frac{\alpha^2}{4}+\sqrt{(4\alpha\beta^3-8\alpha^2\beta^2+\alpha^3\beta)}]}=\sqrt{\alpha\beta}+$
$\sqrt{\left(\beta^2-2\alpha\beta+\frac{\alpha^2}{4}\right)}$

Ε. ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΤΩΝ ΡΙΖΙΚΩΝ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ ΜΕ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΥΣ ΕΚΘΕΤΑΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΥΤΩΝ.

Δύναμις μὲ κλασματικὸν ἐκθέτην ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς ἔμμεσος ὅρος σειρᾶς δυνάμεων μὲ ἀκεραίους ἐκθέτας· μ' ὅλον τοῦτο ἡ συνήθης θεωρία, κατὰ τὴν ὁποίαν κλασματικὸς ἐκθέτης δεικνύει τὴν ὕψωσιν ῥίζης εἰς ὁποιανδήποτε δύναμιν, εἶναι εὐληπτοτέρα δι' ἀρχαρίους. Τότε ὅλη ἡ διδασκαλία, καθὼς οἱ εἰς αὐτὴν θεμελιονόμεναι κανόνες τῶν λογαρίθμων, ἀποδεικνύονται μὲ εὐκλείδειον ἀκρίβειαν καὶ μόνον διὰ σημείων. Καθυποβάλλεται ὅμως ἡ γνώμη αὕτη εἰς τὴν κρίσιν τῶν ἐμπείρων, χωρὶς νὰ θεωρῆται τὸ πρᾶγμα ἀποφασιστικῶς.

1) Παράστασις.

1) $\sqrt[3]{\alpha^3}=\alpha^{\frac{3}{3}}$

2) $\sqrt{\alpha\beta^3}=\alpha^{\frac{1}{2}}\beta$

3) $\sqrt[\mu]{\alpha^\nu}=\alpha^{\frac{\nu}{\mu}}$

4) $\frac{1}{\sqrt[\mu]{\alpha^\nu}}=\alpha^{-\frac{\nu}{\mu}}$

5) $\sqrt[\mu]{\alpha^\nu\beta^\pi\gamma^\rho}=\alpha^{\frac{\nu}{\mu}}\beta^{\frac{\pi}{\mu}}\gamma^{\frac{\rho}{\mu}}=(\alpha^\nu\beta^\pi\gamma^\rho)^{\frac{1}{\mu}}$

6) $\sqrt[\mu]{\frac{\alpha^\nu\beta^\pi}{\gamma^\rho\delta^\sigma\epsilon^\tau}}=\alpha^{\frac{\nu}{\mu}}\beta^{\frac{\pi}{\mu}}\gamma^{-\frac{\rho}{\mu}}\delta^{-\frac{\sigma}{\mu}}\epsilon^{-\frac{\tau}{\mu}}$

7) $\gamma\sqrt[4]{\alpha^3}+\frac{\delta}{\sqrt[7]{\alpha^2}}=\gamma\alpha^{\frac{3}{4}}+\delta\alpha^{-\frac{2}{7}}$

8) $\sqrt[5]{\alpha^2\beta\gamma}=\alpha^{\frac{2}{5}}\beta^{\frac{1}{5}}\gamma^{\frac{1}{5}}=(\alpha^2\beta\gamma)^{\frac{1}{5}}$

9) $\sqrt[6]{\frac{\alpha^5\beta^7}{\gamma^{12}}}+\sqrt[4]{\frac{\alpha^6\beta^4}{\delta^{20}}}=\alpha^{\frac{5}{6}}\beta^{\frac{7}{6}}\gamma^{-2}+\alpha^{\frac{3}{4}}\beta^{\frac{1}{2}}\delta^{-\frac{5}{4}}$

10) $\sqrt[4]{(\alpha^2-\beta^3)}=(\alpha^2-\beta^3)^{\frac{1}{4}}$

11) $\frac{\sqrt{(\gamma+\delta)}}{\sqrt[3]{\gamma^5}}=(\gamma+\delta)^{\frac{1}{2}}\gamma^{-\frac{5}{3}}$

12) $\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}}=\alpha^{\frac{1}{3}}(\alpha^2-\beta^2)^{-\frac{1}{3}}$

13) $\frac{1}{\sqrt[3]{(\alpha^2-\epsilon^2)^2}}=(\alpha^2-\epsilon^2)^{-\frac{2}{3}}$

14) $\frac{\sqrt{(\alpha^2-\chi^2)}}{\sqrt[3]{\alpha\sqrt[3]{(\alpha+\chi)}}}=\alpha^{-\frac{1}{2}}(\alpha+\chi)^{-\frac{1}{3}}(\alpha^2-\chi^2)^{\frac{1}{2}}$

15) $\frac{\sqrt{(\alpha+\beta)^7\gamma^4}}{\sqrt[5]{\zeta^2}\cdot\sqrt[6]{\eta^2}}=\frac{\gamma^{\frac{4}{3}}(\alpha+\beta)^{\frac{7}{3}}}{\zeta^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{1}{3}}}=\gamma^{\frac{4}{3}}\zeta^{-\frac{2}{3}}\eta^{-\frac{1}{3}}(\alpha+\beta)^{\frac{7}{3}}$

2) Ὑπολογισμὸς μὲ κλασματικοὺς ἐκθέτας.

α) Πολλαπλασιασμός.

1) $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\times\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\pi}{\rho}}=\alpha^{\frac{\mu\rho+\nu\pi}{\nu\rho}}$

2) $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\times\alpha^{-\frac{\pi}{\rho}}=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}-\frac{\pi}{\rho}}=\alpha^{\frac{\mu\rho-\nu\pi}{\nu\rho}}$

3) $\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}}\times\alpha^{-\frac{\pi}{\rho}}=\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}-\frac{\pi}{\rho}}=\alpha^{\left(-\frac{\mu}{\nu}+\frac{\pi}{\rho}\right)}=\alpha^{-\frac{\mu\rho+\nu\pi}{\nu\rho}}$

4) $\alpha^{\frac34}\times\alpha^{\frac53}=\alpha^{\frac{29}{12}}=\alpha^2\sqrt[12]{\alpha^5}$

5) $\alpha^{-\frac12}\times\alpha^{\frac74}\times\alpha^{-\frac15}=\alpha^{\frac{21}{20}}=\alpha\sqrt[20]{\alpha}$

6) $\alpha^{-\frac34}\times\alpha^{-\frac78}=\alpha^{-\frac{13}{8}}=\frac{1}{\alpha\sqrt[8]{\alpha^5}}$

7) $\alpha^{-\frac34}\beta^{-2}\times\alpha^{\frac56}\beta^{\frac12}\gamma=\alpha^{\frac1{12}}\beta^{-\frac32}\gamma=\frac{\gamma}{\beta}\sqrt[12]{\frac{\alpha}{\beta^6}}$

8) $\frac{\alpha}{\beta^{\frac12}\gamma^{\frac34}}\times\frac{\alpha^{\frac78}\beta}{\gamma^{-\frac12}}=\alpha^{\frac{15}{8}}\beta^{\frac12}\gamma^{-\frac14}=\alpha^2\sqrt[8]{\frac{\beta^4}{\alpha\gamma^2}}$

9) $\sqrt[5]{\alpha^{12}}\times\sqrt[7]{\alpha^3}\times\sqrt[6]{\alpha^4}=\alpha^{\frac{12}{5}}.\alpha^{\frac37}.\alpha^{\frac23}=\alpha^{\frac{367}{105}}=\alpha^3\sqrt[105]{\alpha^{52}}$

10) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\alpha^2}}\times\sqrt[6]{\sqrt[4]{\alpha^9}}=\alpha^{\frac2{15}}.\alpha^{\frac38}=\sqrt[120]{\alpha^{61}}=\sqrt[120]{\alpha}.\sqrt{\alpha}$

11) $\sqrt[5]{\frac{(\gamma^2-\psi^2)^3}{(\alpha+\chi)^8}}\times\sqrt[6]{\frac{(\gamma^2-\psi^2)^{\frac32}}{\alpha+\chi}}=(\gamma^2-\psi^2)^{\frac{17}{20}}(\alpha+\chi)^{-\frac{53}{30}}=\frac{\gamma^2-\psi^2}{(\alpha+\chi)^2}\sqrt[60]{\frac{(\alpha+\chi)^{14}}{(\gamma^2-\psi^2)^9}}$

12) $\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\times\sqrt[3]{\alpha\gamma}\times\frac{\sqrt[4]{\gamma^3}}{\sqrt{\beta}}=\beta\alpha^{-\frac12}\times\alpha^{\frac13}\gamma^{\frac13}\times\gamma^{\frac34}\beta^{-\frac12}=\alpha^{-\frac16}\beta^{\frac12}\gamma^{\frac{13}{12}}$
$=\gamma\sqrt[12]{\frac{\beta^6\gamma}{\alpha^2}}$

13) $(\sqrt[4]{\alpha^3}+\sqrt[5]{\beta^2})\times(\sqrt[4]{\alpha^3}-\sqrt[5]{\beta^2})=(\alpha^{\frac34}+\beta^{\frac25})\times(\alpha^{\frac34}-\beta^{\frac25})$
$=\alpha^{\frac32}-\beta^{\frac45}=\alpha\sqrt{\alpha}-\sqrt[5]{\beta^4}$

14) $\left(5\sqrt[4]{\alpha^7}-\frac{6\alpha\beta}{\sqrt[4]{\alpha}}\right)\times\left(\sqrt[3]{\alpha}-\frac{7\beta}{\sqrt[3]{\alpha^2}}\right)=(5\alpha^{\frac74}-6\alpha^{\frac34}\beta)\times(\alpha^{\frac13}-$
$7\alpha^{-\frac23}\beta)=5\alpha^{\frac{25}{12}}-41\alpha^{\frac{13}{12}}\beta+42\alpha^{\frac1{12}}\beta^2=(5\alpha^2-41\alpha\beta$
$+42\beta^2)\sqrt[12]{\alpha}$

15) $\left(\sqrt[5]{\alpha\beta^3}+3\sqrt[6]{\frac{\beta^8}{\alpha^4}}\right)\times\left(\sqrt{\alpha\beta}+\frac{2}{\beta^2}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)=(\alpha^{\frac15}\beta^{\frac35}+3\beta^{\frac43}\alpha^{-\frac23})$
$\times(\alpha^{\frac12}\beta^{\frac12}+2\alpha^{-\frac12}\beta^{-\frac32})=\alpha^{\frac7{10}}\beta^{\frac{11}{10}}+2\alpha^{-\frac3{10}}\beta^{-\frac9{10}}+$
$3\alpha^{-\frac3{10}}\beta^{\frac{41}{20}}+6\alpha^{-\frac{13}{10}}\beta^{\frac1{10}}=\left(\alpha\beta+\frac2\beta+3\beta^2+\frac6\alpha\right)\sqrt[10]{\frac{\beta}{\alpha^3}}$

16) $\left(\sqrt[6]{\frac{1}{\alpha^3\beta^2}}-\frac{2\sqrt[3]{\beta^2\gamma^3}}{\alpha\sqrt{\alpha}}\right)\times\left(\sqrt[5]{\alpha^2}-\frac{\beta}{\sqrt[5]{\alpha^3}}\right)=(\alpha^{-\frac12}\beta^{-\frac13}-2\alpha^{-\frac32}$
$\beta^{\frac23}\gamma)\times(\alpha^{\frac25}-\alpha^{-\frac35}\beta)=\alpha^{-\frac1{10}}\beta^{-\frac13}-2\alpha^{-\frac{11}{10}}\beta^{\frac23}\gamma$
$-\alpha^{-\frac{11}{10}}\beta^{\frac23}+2\alpha^{-\frac{21}{10}}\beta^{\frac53}\gamma=\left(1-\frac{2\beta\gamma}{\alpha}-\frac{\beta}{\alpha}+\frac{2\beta^2\gamma}{\alpha^2}\right)\sqrt[30]{\frac{1}{\alpha^3\beta^{10}}}$

17) $\left(\frac{\beta}{\gamma}\sqrt[5]{\frac{\alpha\delta}{\zeta}}-\gamma\delta\sqrt[3]{\frac{\alpha\gamma}{\beta\eta}}\right)\times\left(\sqrt[5]{\frac{\alpha\beta^5\delta}{\gamma^5\zeta}}+\sqrt[3]{\frac{\alpha\gamma^4\delta^3}{\beta\eta}}\right)=\left[\frac{(\alpha\delta)^{\frac15}\beta}{\gamma\zeta^{\frac15}}-\right.$
$\left.\frac{(\alpha\gamma)^{\frac13}\gamma\delta}{(\beta\eta)^{\frac13}}\right]\times\left[\frac{(\alpha\delta)^{\frac15}\beta}{\gamma\zeta^{\frac15}}+\frac{(\alpha\gamma)^{\frac13}\gamma\delta}{(\beta\eta)^{\frac13}}\right]=\frac{(\alpha\delta)^{\frac25}\beta^2}{\gamma^2\zeta^{\frac25}}-\frac{(\alpha\gamma)^{\frac23}\gamma^2\delta^2}{(\beta\eta)^{\frac23}}=$
$\frac{\beta^2}{\gamma^2}\sqrt[5]{\frac{\alpha^2\delta^2}{\zeta^2}}-\gamma^2\delta^2\sqrt[3]{\frac{\alpha^2\gamma^2}{\beta^2\eta^2}}$

β) Διαίρεσις.

1) $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}:\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}-\frac{\pi}{\rho}}=\alpha^{\frac{\mu\rho-\nu\pi}{\nu\rho}}$

2) $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}:\alpha^{-\frac{\pi}{\rho}}=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\pi}{\rho}}=\alpha^{\frac{\mu\rho+\nu\pi}{\nu\rho}}$

3) $\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}}:\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}=\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}-\frac{\pi}{\rho}}=\alpha^{-\left(\frac{\mu}{\nu}+\frac{\pi}{\rho}\right)}=\alpha^{-\frac{\mu\rho+\nu\pi}{\nu\rho}}$

4) $\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}}:\alpha^{-\frac{\pi}{\rho}}=\alpha^{\frac{\pi}{\rho}-\frac{\mu}{\nu}}=\alpha^{\frac{\nu\rho-\mu\pi}{\nu\rho}}=\alpha^{-\frac{\mu\rho-\nu\pi}{\nu\rho}}$

5) $\gamma\alpha^{\frac34}:\delta\alpha^{\frac56}=\frac{\gamma\alpha^{-\frac1{12}}}{\delta}=\frac{\gamma}{\delta\sqrt[12]{\alpha}}$

6) $\alpha^{\frac{3}{5}}\beta^{\frac{1}{2}} : \alpha^{-\frac{7}{5}}\beta^{-\frac{1}{4}}\gamma = \frac{\alpha^2\beta^{\frac{3}{4}}}{\gamma} = \frac{\alpha^2}{\gamma}\sqrt[4]{\beta^3}$

7) $\theta : \frac{\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{1}{4}}}{\gamma\delta^{\frac{1}{2}}} = \frac{\gamma\theta\sqrt{\delta}}{\sqrt[12]{\alpha^4\beta^3}}$

8) $\frac{\alpha^{-\frac{2}{5}}\beta^{\frac{1}{3}}}{\gamma^{\frac{1}{6}}\delta^3} : \frac{\alpha^{-\frac{27}{4}}\delta^{\frac{14}{3}}}{\beta^{\frac{8}{5}}\gamma} = \frac{\alpha^{\frac{13}{4}}\beta^{\frac{34}{15}}\gamma}{\gamma^{\frac{1}{6}}\delta^{\frac{23}{3}}} = \frac{\alpha^3\beta^2\gamma}{\delta^7}\sqrt[60]{\frac{\beta^{16}\delta^{20}}{\alpha^{15}\gamma^{10}}} = \frac{\alpha^3\beta^2\gamma}{\delta^7}\sqrt[12]{\frac{\delta^4}{\alpha^3\gamma^2}}\sqrt[15]{\beta^4}$

9) $(\alpha^3 - 2\sqrt[4]{\alpha^2\beta^3} - \alpha^2\sqrt[6]{\alpha^3\beta^2} + 2\beta\sqrt[12]{\beta}) : (\sqrt{\alpha} - \sqrt[3]{\beta}) = (\alpha^3 - 2\alpha^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{3}{4}} - \alpha^{\frac{5}{2}}\beta^{\frac{1}{3}} + 2\beta^{\frac{13}{12}}) : (\alpha^{\frac{1}{2}} - \beta^{\frac{1}{3}}) = \alpha^{\frac{5}{2}} - 2\beta^{\frac{3}{4}}$
$= \alpha^2\sqrt{\alpha} - 2\sqrt[4]{\beta^3}$.

10) $\sqrt[12]{\alpha^{10}\beta^9} - \gamma\sqrt[10]{\alpha^7}.\sqrt[6]{\beta^5} - \frac{3}{2}\alpha\sqrt[4]{\beta^3} + \frac{3\alpha\beta\gamma}{2}\sqrt[30]{\frac{1}{\alpha^4\beta^5}} : (\sqrt[6]{\alpha\beta} - \frac{3}{2}\sqrt[6]{\alpha^4\beta^3}) = \alpha^{\frac{5}{6}}\beta^{\frac{3}{4}} - \gamma\alpha^{\frac{7}{10}}\beta^{\frac{5}{6}} - \frac{3}{2}\alpha\beta^{\frac{3}{4}} + \frac{3}{2}\gamma\alpha^{\frac{13}{15}}\beta^{\frac{5}{6}}) : (\alpha^{\frac{1}{6}}\beta^{\frac{1}{6}} - \frac{3}{2}\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{1}{2}}) = \alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{1}{4}} - \gamma\alpha^{\frac{1}{5}}\beta^{\frac{1}{3}} = \sqrt[12]{\alpha^4\beta^3} - \gamma\sqrt[15]{\alpha^3\beta^5}$

11) $(5\alpha^2 - 41\alpha\beta + 42\beta^2)\sqrt[12]{\alpha} : \left(\sqrt[3]{\alpha} - \frac{7\beta}{\sqrt[3]{\alpha^2}}\right) = (5\alpha^{\frac{25}{12}} - 41\alpha^{\frac{13}{12}}\beta + 42\alpha^{\frac{1}{12}}\beta^2) : (\alpha^{\frac{1}{3}} - 7\beta\alpha^{-\frac{2}{3}}) = 5\alpha^{\frac{7}{4}} - 6\alpha^{\frac{3}{4}}\beta$
$= (5\alpha - 6\beta)\sqrt[4]{\alpha^3}$

12) $(\sqrt[4]{\alpha^3} - \sqrt[4]{\beta^3}) : (\sqrt[4]{\alpha} - \sqrt[4]{\beta}) = (\alpha^{\frac{3}{4}} - \beta^{\frac{3}{4}}) : (\alpha^{\frac{1}{4}} - \beta^{\frac{1}{4}}) = \alpha^{\frac{1}{2}} + \alpha^{\frac{1}{4}}\beta^{\frac{1}{4}} + \beta^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt[4]{\alpha\beta}$

γ) Δυνάμεις δυνάμεων.

1) $(\alpha^4)^3 = \alpha^4.\alpha^4.\alpha^4 = \alpha^{4+4+4} = \alpha^{12}$

) $(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}})^{\frac{\pi}{\rho}} = \sqrt[\rho]{(\sqrt[\nu]{\alpha^\mu})^\pi} = \alpha^{\frac{\mu\pi}{\nu\rho}} = \sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\pi}}$

3) $(\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}})^{\frac{\pi}{\rho}} = \sqrt[\rho]{\left(\frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}}\right)^\pi} = \alpha^{-\frac{\mu\pi}{\nu\rho}} = \frac{1}{\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\pi}}}$

4) $(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}})^{-\frac{\pi}{\rho}} = \frac{1}{\sqrt[\rho]{(\sqrt[\nu]{\alpha^\mu})^\pi}} = \alpha^{-\frac{\mu\pi}{\nu\rho}} = \frac{1}{\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\pi}}}$

5) $(\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}})^{-\frac{\pi}{\rho}} = \frac{1}{\sqrt[\rho]{\left(\frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}}\right)^\pi}} = \alpha^{\frac{\mu\pi}{\nu\rho}} = \sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\pi}}$

6) $(\alpha^\mu\beta^\nu)^4 = \alpha^\mu\beta^\nu.\alpha^\mu\beta^\nu.\alpha^\mu\beta^\nu.\alpha^\mu\beta^\nu = \alpha^{4\mu}\beta^{4\nu}$

7) $(-\alpha^\mu\beta\gamma^3)^2 = -\alpha^\mu\beta\gamma^3 \times -\alpha^\mu\beta\gamma^3 = \alpha^{2\mu}\beta^2\gamma^6$

8) $(\alpha^{\frac{3}{4}}\beta^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{3}} = \alpha^{\frac{1}{4}}\beta^{\frac{2}{9}} = \sqrt[36]{\alpha^9\beta^8}$

9) $(\alpha^2\beta^{-\frac{1}{2}}\gamma^{\frac{2}{5}})^{-\frac{1}{4}} = \alpha^{-\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{8}}\gamma^{-\frac{1}{10}} = \sqrt[40]{\frac{\beta^5}{\alpha^{20}\gamma^4}}$

10) $\left[(\alpha^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{5}}\right] = \alpha^{-\frac{1}{20}} = \sqrt[20]{\frac{1}{\alpha}}$

11) $\sqrt[6]{(\alpha^3\beta\sqrt[5]{\alpha^3\beta\gamma})^5} = (\alpha^{\frac{18}{5}}\beta^{\frac{6}{5}}\gamma^{\frac{1}{5}})^{\frac{5}{6}} = \alpha^3\beta\gamma^{\frac{1}{6}} = \alpha^3\beta\sqrt[6]{\gamma}$

12) $\left(\frac{\alpha^2}{\beta^\nu}\right)^\mu = \frac{\alpha^{2\mu}}{\beta^{\mu\nu}}$

13) $\left[\frac{\gamma^2\delta}{(\alpha+\beta)^{\frac{3}{2}}}\right]^{-\frac{1}{3}} = \frac{\gamma^{-\frac{2}{3}}\delta^{-\frac{1}{3}}}{(\alpha+\beta)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\alpha+\beta}}{\sqrt[3]{\gamma^2\delta}} = \sqrt[6]{\frac{(\alpha+\beta)^3}{\gamma^4\delta^2}}$

14) $\sqrt[4]{\left(\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt[3]{\alpha\beta}}\right)^3} = (\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{1}{6}})^{\frac{3}{4}} = \alpha^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{\alpha^4\beta}$

15) $\sqrt[4]{\frac{\sqrt{(\gamma-\delta)}.\sqrt[3]{(\alpha+\chi^2)^4}}{\gamma^6\delta^{5\mu}}} = \left[\frac{(\gamma-\delta)^{\frac{1}{2}}(\alpha+\chi^2)^{\frac{4}{3}}}{\gamma^6\delta^{5\mu}}\right]^{\frac{1}{4}} = \frac{(\gamma-\delta)^{\frac{1}{8}}(\alpha+\chi^2)^{\frac{1}{3}}}{\gamma^{\frac{3}{2}}\delta^{\frac{5\mu}{4}}} =$

$\frac{1}{\gamma\delta^\mu}\sqrt[24]{\frac{(\gamma-\delta)^3(\alpha+\chi^2)^8}{\gamma^{12}\delta^{6\mu}}}$

ΣΤ. ὙΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΩΝ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ.

Ἀρτία ῥίζα ἀποθετικῆς δυνάμεως εἶναι ἀδύνατος καὶ ὀνομάζεται φανταστικὴ ποσότης. Ἀπαντᾶται ὅμως ἐνίοτε καὶ τοιαύτη εἰς τὸν ὑπολογισμὸν, ὅταν αὐτὸ καθεαυτο ἦναι ἀδύνατον νὰ ἐκπληρωθῇ τὸ ζήτημα τοῦ προβλήματος, ἢ, ὅταν τὸ ὑποτιθέμενον σχῆμα τοῦ πορίσματος ἦναι ἀδύνατον. Εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν εἶναι τῷόντι μόνον σχήματα· δὲν ἠμποροῦν ὅμως νὰ φέρουν εἰς ψευδεῖς συνεπείας, ὅταν ὁ ὑπολογισμὸς ἐξακολουθῇ, καὶ ἐκτελῆται μὲ ὀρθὰ συμπεράσματα παραγόμενα ἀπὸ ἀληθεῖς ἀρχάς. Αὐτὰ παρέχουν μέγα ὄφελος εἰς τὸν ὑπολογισμὸν, καθότι δι' αὐτῶν ὁδηγεῖται τις συχνάκις ἀφ' ἑαυτοῦ εἰς ἀνακάλυψιν νέων ἀληθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἠμποροῦν νὰ εὑρεθοῦν ἐπίσης καὶ δι' ἄλλων τρόπων, μ' ὅλον τοῦτο διὰ βραδυτέρων.

$\sqrt{-\alpha}$ εἶναι $= \sqrt{\alpha}.\sqrt{-1}$. Πρὸς τούτοις ἠμπορεῖ νὰ ἀποδειχθῇ αὐστηρῶς, ὅτι ὅλαι αἱ φανταστικαὶ ποσότητες ἠμποροῦν νὰ καταντήσουν εἰς τὸ σχῆμα $\theta + \varkappa\sqrt{-1}$, ὅπου θ καὶ κ εἶναι πραγματικαὶ ποσότητες· καὶ ὑπὸ τοῦτο τὸ σχῆμα εἶναι ὁ ὑπολογισμὸς αὐτῶν εὐκολώτατος.

---

1) Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις.

1) $\alpha + \beta\sqrt{-1} + \gamma\sqrt{-1} - \delta\sqrt{-1} = \alpha + (\beta + \gamma - \delta)\sqrt{-1}$

2) $3\sqrt{-4} - \sqrt{-25} + 4\sqrt{-9} = 13\sqrt{-1}$

3) $2\sqrt{-48} + 3\sqrt{-12} + 5\sqrt{-8} - 7\sqrt{-32} = (14\sqrt{3} - 18\sqrt{2})\sqrt{-1}$

4) Πρόσθ.
$$\begin{array}{l} 3\sqrt{-2} + 2\sqrt{-4} - 5\sqrt{-1} \\ 2\sqrt{-2} - 4\sqrt{-4} - 2\sqrt{-1} \\ \hline 5\sqrt{-2} - \sqrt{4} - 7\sqrt{-1} \end{array}$$

5) Ἀφαίρ.
$$\begin{array}{l} 3\sqrt{-2} + \sqrt{-4} - 5\sqrt{-1} \\ -2\sqrt{-2} - 2\sqrt{-4} - 2\sqrt{-1} \\ \hline \sqrt{-2} + 3\sqrt{-4} - 3\sqrt{-1} \end{array}$$

2) Πολλαπλασιασμός.

1) $\alpha \times \sqrt{-\alpha} = \alpha\sqrt{\alpha}.\sqrt{-1}$

2) $(\gamma\sqrt{-\alpha} \times \delta\sqrt{-\beta} + \zeta) \times \sqrt{-\alpha} = -\alpha\gamma - \delta\sqrt{\alpha\beta} + \zeta\sqrt{\alpha}.\sqrt{-1}$

3) $\alpha\sqrt{-\beta} \times \gamma\sqrt{-\delta} = \alpha\sqrt{\beta\delta}.\sqrt{-1} \times \gamma\sqrt{\delta}.\sqrt{-1} = -\alpha\gamma\delta\sqrt{\beta}$

4) $\alpha\sqrt{\beta\delta} \times \gamma\sqrt{-\delta} = \alpha\sqrt{\beta\delta} \times \gamma\sqrt{\delta}.\sqrt{-1} = \alpha\gamma\delta\sqrt{-\beta}$

5) $\gamma\sqrt{-\alpha} \times \delta\sqrt{-\beta} = \gamma\sqrt{\alpha}.\sqrt{-1} \times \delta\sqrt{\beta}.\sqrt{-1} = -\gamma\delta\sqrt{\alpha\beta}$

6) $(2 - \sqrt{-3}) \times (10 - \sqrt{-8}) = 20 - \sqrt{24} - (10\sqrt{3} + 4\sqrt{2})\sqrt{-1}$

7) $(7 - \sqrt{-5}) \times (10 - 3\sqrt{-6}) = 70 - 3\sqrt{30} - (10\sqrt{5} + 21\sqrt{6})\sqrt{-1}$

8) $(4 + \sqrt{-3}) \times (4 - \sqrt{-3}) = 19$

9) $(-1 + \sqrt{-3}) \times (-1 - \sqrt{-3}) = 4$

10) $(-1 + \sqrt{-3}) \times (-1 + \sqrt{-3}) = 1 - 2\sqrt{-3} - 3$

11) $(-1 - \sqrt{-3}) \times (-1 - \sqrt{-3} = 1 + 2\sqrt{-3} - 3$

12) $(-1 + \sqrt{-3}) \times (-2 - 2\sqrt{-3}) = 8$

13) $(3 - \sqrt{-5}) \times (4 - 2\sqrt{-5}) = 2 - 10\sqrt{5}.\sqrt{-1}$

14) $(2 - 5\sqrt{-3}) \times (7 - 4\sqrt{-3}) = -46 - 43\sqrt{3}.\sqrt{-1}$

15) $(9 + 6\sqrt{-1}) \times (3 + 7\sqrt{-1}) = -15 + 81\sqrt{-1}$

16) $(7 - \sqrt{-\tfrac{1}{2}}) \times (1 - \sqrt{-\tfrac{1}{2}}) = \tfrac{13}{2} - 4\sqrt{2}.\sqrt{-1}$

17) $(1 - \sqrt{-1})^2 = -2\sqrt{-1}$

18) $(\sqrt{2} - 3\sqrt{-5}) \times (\sqrt{7} - \sqrt{-3}) = \sqrt{14} - 3\sqrt{15} - (3\sqrt{35} + \sqrt{6})\sqrt{-1}$

19) $(2\sqrt{3} - \sqrt{-5}) \times (4\sqrt{3} - 2\sqrt{-5}) = 14 - 8\sqrt{-15}$

20) $(\sqrt{2} + \sqrt{-2}) \times (3 + \sqrt{-6}) = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{-2} + \sqrt{-12} - \sqrt{12}$

21) $(2\sqrt{-3}-5\sqrt{-4}-7\sqrt{-2})\times(\sqrt{-7}-2\sqrt{-1})=$
$-2\sqrt{21}+5\sqrt{28}+7\sqrt{14}+4\sqrt{3}\quad 20-14\sqrt{2}$

22) $(\sqrt{\alpha}.\sqrt{-1}+\sqrt{\beta}.\sqrt{-1})^2=-(\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta})$

23) $(\alpha+\sqrt{\beta}.\sqrt{-1})\times(\alpha-\sqrt{\beta}.\sqrt{-1})=\alpha^2+\beta$

24) $(\alpha\pm\sqrt{\beta}.\sqrt{-1})^2=\alpha^2-\beta\pm2\alpha\sqrt{\beta}.\sqrt{-1}$

25) $(\alpha\pm\beta.\sqrt{-1})^3=\alpha^3-3\alpha\beta\pm(3\alpha^2\sqrt{\beta}-\beta\sqrt{\beta})\sqrt{-1}$

26) $(\alpha\sqrt{-1})^{4\nu}=\alpha^{4\nu}$

27) $(\alpha\sqrt{-1})^{4\nu+1}=\alpha^{4\nu+1}\sqrt{-1}$

28) $(\alpha\sqrt{-1})^{4\nu+2}=-\alpha^{4\nu+2}$

29) $(\alpha\sqrt{-1})^{4\nu+3}=-\alpha^{4\nu+3}\sqrt{-1}$

3) Διαίρεσις.

1) $\sqrt{-\alpha\beta}:\sqrt{\alpha}=\sqrt{-\beta}$

2) $\sqrt{-\alpha\beta}:\sqrt{-\beta}=\sqrt{\alpha}$

3) $\beta\sqrt{-1}:\gamma\sqrt{-1}=\frac{\beta}{\gamma}$

4) $1:\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}$

5) $\alpha:\beta\sqrt{-1}=-\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{-1}$

6) $\alpha:\sqrt{\alpha}.\sqrt{-1}=-\sqrt{\alpha}.\sqrt{-1}$

7) $(\sqrt{-12}+\sqrt{-6}+\sqrt{-9}):\sqrt{-3}=2+\sqrt{2}+\sqrt{3}$

8) $(2\sqrt{8}-\sqrt{-10}):-\sqrt{-2}=\sqrt{5}-4\sqrt{-1}$

9) $(3\sqrt{-4}-2\sqrt{-12}+\sqrt{6}-9:-3\sqrt{-2}=-\sqrt{2}+\frac{1}{3}\sqrt{6}$
$+\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{-1}$

10) $6:(1+\sqrt{-2})=2-2\sqrt{2}.\sqrt{-1}$

11) $8:(-1+\sqrt{-3})=-2-2\sqrt{3}.\sqrt{-1}$

12) $1:(3-2\sqrt{-3})=\frac{3+2\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{21}$

13) $14:(4\sqrt{-3}-2\sqrt{-5})=-(2\sqrt{3}+\sqrt{5})\sqrt{-1}$

14) $(5-\sqrt{-2}):(1+\sqrt{-2})=1-2\sqrt{2}.\sqrt{-1}$

15) $(-3+\sqrt{-5}):(3+\sqrt{-5})=\frac{-2+3\sqrt{-5}}{7}$

16) $(4\sqrt{5}-20):(\frac{1}{2}\sqrt{-10}-5\sqrt{-\frac{1}{2}})=(\sqrt{10}+\sqrt{2})2\sqrt{-1}$

17) $[14-\sqrt{15}-(7\sqrt{3}+2\sqrt{5})\sqrt{-1}]:(7-\sqrt{5}.\sqrt{-1})=$
$2-\sqrt{3}.\sqrt{-1}$

18) $1:[2+(\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{-1}]=\frac{12+2\sqrt{15}+(3\sqrt{5}-\sqrt{3})\sqrt{-1}}{42}$

4) Τετραγωνικὴ ῥίζα διωνύμου τοῦ σχήματος

$A+B\sqrt{-1}$

Τύπος.

$$\sqrt{(A+B\sqrt{-1})}=\sqrt{\frac{\sqrt{(A^2+B^2)}+A}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{(A^2+B^2)}-A}{2}}.\sqrt{-1}$$

Παραδείγματα.

1) $\sqrt{(7+6\sqrt{-2})}=\sqrt{(7+6\sqrt{2}.\sqrt{-1})}=3+\sqrt{2}.\sqrt{-1}$

2) $\sqrt{(31+42\sqrt{-2})}=7+3\sqrt{2}.\sqrt{-1}$

3) $\sqrt{(16-24\sqrt{-5})}=6-2\sqrt{5}.\sqrt{-1}$

4) $\sqrt{(-3+\sqrt{-16})}=1+2\sqrt{-1}$

5) $\sqrt{(4\sqrt{-6}-2)}=2+\sqrt{6}.\sqrt{-1}$

6) $\sqrt{(-83-60\sqrt{-3})}=5-6\sqrt{3}.\sqrt{-1}$

7) $\sqrt{(2+4\sqrt{-42})}=\sqrt{14}+2\sqrt{3}\ \sqrt{-1}$

8) $\sqrt{(-2-2\sqrt{-15})}=\sqrt{3}-\sqrt{5}.\sqrt{-1}$

9) $\sqrt{\left(\frac{\alpha^2\gamma}{\beta^2}-\gamma\delta+\frac{\alpha\gamma\sqrt{4\delta}}{\beta}\sqrt{-1}\right)}=\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{\gamma}+\sqrt{\gamma\delta}.\sqrt{-1}$

10) $\sqrt{\left(\frac{25\alpha^2\delta}{\gamma^2}-\frac{4\alpha^2\beta}{\delta}-\frac{20\alpha^2\sqrt{\beta}}{\gamma}\sqrt{-1}\right)}=\frac{5\alpha\sqrt{\delta}}{\gamma}-2\alpha\sqrt{\frac{\beta}{\delta}}.\sqrt{-1}$

11) $\sqrt{[\alpha^4\zeta^4-\alpha^3\beta^2-\alpha^2\beta^3-2\alpha^3\beta\zeta^2\sqrt{(\alpha+\beta)}\sqrt{-1}]}=\alpha^2\zeta^2-$
$\alpha\beta\sqrt{(\alpha+\beta)}.\sqrt{-1}$

12) $\sqrt[4]{-1}=\sqrt{(0+\sqrt{-1})}=\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{1}$

13) $\sqrt{(-\sqrt{-1})}=\sqrt{(0-\sqrt{-1})}=\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{-1}$

14) $\sqrt{(8\sqrt{-1})} = \sqrt{(0+8\sqrt{-1})} = 2+2\sqrt{-1}$

15) $\sqrt{\left(\frac{2\gamma^2}{\delta^2}\cdot\sqrt{-1}\right)} = \frac{\gamma}{\delta}(1+\sqrt{-1})$

16) $\sqrt{(2\gamma\delta\sqrt{-1})} = (1+\sqrt{-1})\sqrt{\gamma\delta}$

17) $\sqrt{(2+\sqrt{-5})} = \sqrt{\frac{\sqrt{7}+2}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{7}-2}{2}}\cdot\sqrt{-1}$

18) $\sqrt{(5-\sqrt{-1})} = \sqrt{\frac{\sqrt{26}+5}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{26}-5}{2}}\cdot\sqrt{-1}$

Ζ. ἈΝΑΓΩΓΑΙ.

1) Ἀναγωγὴ διὰ τῆς ἑνώσεως τῶν κλασμάτων.

1) $\frac{\alpha}{\beta}+\gamma = \frac{\alpha+\beta\gamma}{\beta}$

2) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta}$

3) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\alpha\delta\zeta+\beta\gamma\zeta+\beta\delta\varepsilon}{\beta\delta\zeta}$

4) $\frac{3\alpha}{5\beta}+\frac{\gamma}{4\delta}+\theta = \frac{12\alpha\delta+5\beta\gamma+20\beta\delta\theta}{20\beta\delta}$

5) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}-\frac{\varepsilon}{\zeta}-\frac{\eta}{\theta}-\kappa = \frac{\alpha\delta\zeta\theta+\beta\gamma\zeta\theta-\beta\delta\varepsilon\theta-\beta\delta\zeta\eta-\beta\delta\zeta\theta\kappa}{\beta\delta\zeta\theta}$

6) $\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} = \frac{\beta\gamma-\alpha\gamma+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}$

7) $\frac{3\alpha}{4\beta}+\frac{5\zeta}{8\lambda}-\frac{\chi}{7\psi} = \frac{42\alpha\lambda\psi+35\beta\zeta\psi-8\beta\lambda\chi}{56\beta\lambda\psi}$

8) $\frac{\alpha\zeta}{4\beta\eta}-\frac{5\gamma\delta}{12\beta\theta}+\frac{2}{3} = \frac{3\alpha\zeta\theta-5\gamma\delta\eta+8\beta\eta\theta}{12\beta\eta\theta}$

9) $\frac{\alpha}{4\beta\gamma\delta}-\frac{\theta}{2\beta\gamma\eta}+\frac{2\gamma\delta}{5\beta\eta} = \frac{5\alpha\eta-10\delta\theta+8\gamma^2\delta^2}{20\beta\gamma\delta\eta}$

10) $\frac{2\alpha}{3\beta\gamma}+\frac{6\delta\zeta}{8\beta^2\gamma}-\frac{\delta\varepsilon\eta}{6\beta^2\gamma^2} = \frac{16\alpha\beta\gamma+18\gamma\delta\zeta-4\delta\varepsilon\eta}{24\beta^2\gamma^2}$

11) $\alpha-\beta-\frac{\delta}{\varepsilon\zeta}-\frac{\gamma}{\varepsilon\eta} = \frac{(\alpha-\beta)\varepsilon\zeta\eta-\delta\eta-\gamma\zeta}{\varepsilon\zeta\eta}$

12) $\varepsilon-\zeta-\frac{\eta^3}{2\varepsilon\zeta}+\frac{\zeta^2}{3\varepsilon\eta} = \frac{6\varepsilon\zeta\eta(\varepsilon-\zeta)-3\eta^4+2\zeta^3}{6\varepsilon\zeta\eta}$

13) $\frac{\alpha^2\delta}{3\beta^7\gamma^3}-\frac{3\alpha\delta}{2\beta^4\gamma^2}-\frac{\beta^2}{\gamma\delta} = \frac{2\alpha^2\delta^2-9\alpha\beta^3\gamma\delta^2-6\beta^9\gamma^2}{6\beta^7\gamma^3\delta}$

14) $\frac{\alpha}{\beta^\nu}+\frac{\gamma}{\beta^{\nu-\rho}}+\frac{\delta}{\beta^{\nu-2\rho}} = \frac{\alpha+\gamma\beta^\rho+\delta\beta^{2\rho}}{\beta^\nu}$

15) $\frac{\alpha}{\chi^\nu}-\frac{\gamma}{\chi^{\nu-1}}+\frac{\delta}{\chi^{\nu-\rho-\sigma}} = \frac{\alpha-\gamma\chi+\delta\chi^{\rho+\sigma}}{\chi^\nu}$

16) $\gamma+2\alpha\beta-3\alpha\beta-\frac{\beta^2\gamma-5\alpha\beta^2\gamma+\alpha^3}{\beta^2-\beta\gamma} = \frac{2\alpha\beta^3-\beta\gamma^2+3\alpha\beta\gamma^2-\alpha^3}{\beta^2-\beta\gamma}$

17) $\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2} = \alpha$

18) $\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2} = \beta$

19) $\frac{13\alpha-5\beta}{4}-\frac{7\alpha-2\beta}{6}-\frac{3\alpha}{5} = \frac{89\alpha-55\beta}{60}$

20) $\frac{3\alpha-4\beta}{7}-\frac{2\alpha-\beta}{3}-\gamma+\frac{15\alpha-4\gamma}{12} = \frac{85\alpha-20\beta}{84}$

21) $\frac{3\alpha+2\beta}{\gamma}-\frac{5\beta\delta-2\alpha-3\delta}{4\gamma\delta} = \frac{12\alpha\delta+3\beta\delta+2\alpha+3\delta}{4\gamma\delta}$

22) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha-3\beta}{\gamma\delta}+\frac{\alpha^2-\beta^2-\alpha\beta}{\beta\gamma\delta} = \frac{\alpha\gamma\delta-4\beta^2+\alpha^2}{\beta\gamma\delta}$

23) $\gamma\zeta+\frac{\alpha^2}{\gamma^5\zeta}-\frac{\alpha-\beta-\gamma^2}{\beta\gamma^5\zeta^3} = \frac{\beta\gamma^6\zeta^4+\alpha^2\beta\zeta^2-\alpha+\beta-\gamma^2}{\beta\gamma^5\zeta^3}$

24) $\frac{3\alpha+\beta+\chi}{5\alpha}-\frac{2\alpha+\beta}{3\beta}+\frac{7\alpha-2\beta}{9\alpha} = \frac{47\alpha\beta-\beta^2+9\beta\chi-30\alpha^2}{45\alpha\beta}$

25) $\frac{3\alpha^\mu(\alpha+\beta)^{\mu-2}}{\gamma^{\mu+2}\delta^{\mu-3}\zeta^4}-\frac{\alpha^{3\mu}-2\alpha\gamma\delta^{4-\mu}}{\gamma^{\mu+1}\delta\zeta^\nu(\alpha+\beta)^2}-\frac{1}{\gamma^{\mu-2}\zeta^{\nu-3}(\alpha+\beta)^2}$
$= \frac{3\alpha^\mu\zeta^\nu-4(\alpha+\beta)^\mu-\gamma\alpha^{3\mu}\delta^{\mu-4}+2\alpha\gamma^2-\gamma^4\zeta^3\delta^{\mu-3}}{\gamma^{\mu+2}\delta^{\mu-3}\zeta^\nu(\alpha+\beta)^2}$

26) $\frac{(\alpha+\chi)^{\frac{\pi}{\rho}-1}}{3\beta^2(\gamma+\chi)^{\frac{\mu}{\nu}}}-\frac{\beta^{\frac{3}{5}}\chi^2(\gamma+\chi)^{-\frac{\mu}{\nu}}}{(\alpha+\chi)^{1-\frac{\pi}{2\rho}}} = \frac{(\alpha+\chi)^{\frac{\pi}{2\rho}}-3\beta^{\frac{8}{5}}\chi^2}{3\beta^2(\gamma+\chi)^{\frac{\mu}{\nu}}(\alpha+\chi)^{1-\frac{\pi}{2\rho}}}$

27) $\frac{\alpha}{\alpha+\omega}+\frac{\omega}{\alpha-\omega} = \frac{\alpha^2+\omega^2}{\alpha^2-\omega^2}$

28) $\frac{\zeta+\eta}{3\zeta-2\eta}-\frac{5\zeta-2\eta}{2\zeta-9\eta} = \frac{9\zeta\eta-13\zeta^2-13\eta^2}{6\zeta^2-31\zeta\eta+18\eta^2}$

29) $\frac{\alpha}{\beta+\chi}-\frac{\gamma}{\chi}+\frac{3\gamma}{4\chi}+2\beta = \frac{8\beta\chi^2+(8\beta^2+4\alpha-\gamma)\chi-\beta\gamma}{4\beta\chi+4\chi^2}$

30) $\frac{3\alpha+2\chi}{\alpha+\chi} - \frac{5\alpha-\chi}{\alpha-\chi} + \frac{\alpha}{2\chi} = \frac{\alpha^3-4\alpha^2\chi-11\alpha\chi^2-2\chi^3}{2\chi(\alpha^2-\chi^2)}$

31) $\frac{\alpha\omega}{\alpha^2-\omega^2} - \frac{\alpha-\omega}{\alpha+\omega} = \frac{3\alpha\omega-\alpha^2-\omega^2}{\alpha^2-\omega^2}$

32) $\frac{\alpha\gamma}{\alpha^2-4\psi^2} + \frac{\beta\delta}{\alpha\gamma+2\gamma\psi} = \frac{\alpha\gamma^2+\alpha\beta\delta-2\beta\delta\psi}{\gamma(\alpha^2-4\psi^2)}$

33) $\frac{\alpha^3}{(\alpha+\beta)^3} - \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha^3+\alpha\beta^2+\beta^3}{(\alpha+\beta)^3}$

34) $\frac{\alpha^\mu}{(\alpha+\beta)^\nu} + \frac{\alpha^{\mu-2}\beta^\rho}{(\alpha+\beta)^{\nu-1}} - \frac{\alpha^{\mu-3}\beta^\rho}{(\alpha+\beta)^{\nu-2}} = \frac{\alpha^\mu-\alpha^{\mu-2}\beta^{\rho+1}-\alpha^{\mu-3}\beta^{\rho+1}}{(\alpha+\beta)^\nu}$

35) $\frac{2\alpha\chi+\chi^2}{(\alpha-\chi)^2} - \frac{\alpha^2+5\alpha\chi}{(\alpha+\chi)^2} - \frac{\chi}{\alpha-\chi} = \frac{2\chi^4+13\alpha^2\chi^2-2\alpha^3\chi-\alpha^4}{(\alpha^2-\chi^2)^2}$

36) $\frac{\alpha-(\nu+1)\alpha^{\nu+1}}{1-\alpha} + \frac{\alpha^2(1-\alpha^\nu)}{(1-\alpha)^2} = \frac{\alpha-(\nu+1)\alpha^{\nu+1}+\nu\alpha^{\nu+2}}{(1-\alpha)^2}$

37) $\frac{1}{1-\omega^2} - \frac{1}{\mu+1+(\mu-1)\omega^2} = \frac{\mu(1+\omega^2)}{\mu(1+\omega^4)+(1-\omega^2)^2}$

38) $\frac{3}{4(1-\chi)^2} + \frac{3}{8(1-\chi)} + \frac{1}{8(1+\chi)} - \frac{1-\chi}{4(1+\chi^2)} = \frac{1+\chi+\chi^2}{1-\chi-\chi^4+\chi^5}$

39) $\frac{1+2\chi}{(3-\chi)(1+\chi)} + \frac{7}{(2+\chi)(1-3\chi)} + \frac{\chi}{(1+\chi)(2+\chi)} =$
$\frac{23+16\chi-30\chi^2-3\chi^3}{(3-\chi)(1+\chi)(2+\chi)(1-3\chi)}$

40) $\frac{3\theta}{(\theta-2\chi)^2} + \frac{2\theta+\chi}{(\theta+\chi)(\theta-2\chi)} - \frac{5}{\theta+\chi} = \frac{20\theta\chi-22\chi^2}{(\theta+\chi)(\theta-2\chi)^2}$

2) Ἀναγωγαὶ διὰ τῆς ἐξαλείψεως τῶν κλασμάτων. (1)

1) $\frac{\alpha\chi+\chi^2}{3\beta\chi-\gamma\chi} = \frac{\alpha+\chi}{3\beta-\gamma}$

(1) Ἡ ἐξάλειψις τῶν κλασμάτων προϋποθέτει, ὅτι ἠμπορεῖ τις νὰ εὕρῃ τὸν …νὸν διαιρέτην τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ τῶν κλασμάτων. Τὸ πῶς αὐτὸς …ίσκεται, διδάσκεται σχεδὸν εἰς ὅλας τὰς ἀριθμητικάς, καὶ ἑπομένως ἠμπορεῖ προϋποτεθῇ ὡς γνωστόν. Παρομοία ἐργασία ἠμπορεῖ νὰ ἐκτελεσθῇ καὶ εἰς τὰς …γραμμάτων ἐκφράσεις· ὁδηγεῖ ὅμως ἐνίοτε εἰς σχοινοτενεῖς ὑπολογισμούς, …δὲ τούτου ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων δίδει παράγοντας, καὶ ἠμπορεῖ πολλάκις νὰ …σιμεύσῃ ὡς πρὸς τοῦτο ἐπωφελῶς. Ἡ ἕξις ὅμως καὶ ὀλίγη προσοχὴ εἰς τὴν …σιν τῶν ἐκφράσεων, ὁδηγοῦν ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον πολλὰ εὐκολώτερα εἰς τὴν …οπόν.

2) $\frac{\alpha\gamma^3-\beta\gamma^5-\gamma^7}{3\beta\gamma^2+\gamma^4} = \frac{\alpha\gamma-\beta\gamma^3-\gamma^5}{3\beta+\gamma^2}$

3) $\frac{21\alpha^3\beta^2\gamma-9\alpha\beta^3\gamma^2}{15\alpha^2\beta^2\gamma+3\alpha^5\beta^4\gamma^2-12\alpha\beta^2\gamma} = \frac{7\alpha^2-3\beta\gamma}{5\alpha+\alpha^4\beta^2\gamma-4}$

4) $\frac{2\alpha^{\nu+\rho}\beta^{\mu-1}\gamma-4\alpha^\nu\beta^{2\mu-1}\gamma^2\delta+2\alpha^{\rho+1}\beta^\mu\gamma+6\alpha^{\rho-1}\beta^{\mu-1}\gamma^\nu}{8\alpha^{\rho+5}\beta^{\mu+2}\gamma^2-2\alpha^{\rho+3}\beta^\mu\gamma+10\alpha^\rho\beta^3\gamma^4}$
$= \frac{\alpha^\nu-2\beta^\mu\gamma\delta+\alpha\beta+3\alpha^{-1}\gamma^{\nu-1}}{4\alpha^5\beta^3\gamma-\alpha^3\beta+5\beta^{4-\mu}\gamma^3}$

5) $\frac{14\alpha^2-7\alpha\beta}{10\alpha\gamma-5\beta\gamma} = \frac{7\alpha}{5\gamma}$

6) $\frac{12\alpha^3\chi^4+2\alpha^2\chi^5}{18\alpha\beta^2\chi+3\beta^2\chi^2} = \frac{2\alpha^2\chi^3}{3\beta^2}$

7) $\frac{6\alpha\gamma+9\beta\gamma-5\gamma^2}{12\alpha\delta\zeta+18\beta\delta\zeta-10\gamma\delta\zeta} = \frac{\gamma}{2\delta\zeta}$

8) $\frac{45\alpha^3\beta^4\gamma+27\alpha^8\beta^7\gamma\delta-9\alpha^4\beta^3\delta^3}{30\alpha^2\beta^2\gamma^3\delta^4+18\alpha^7\beta^5\gamma^3\delta^5-6\alpha^3\gamma^2\delta^7} = \frac{3\alpha\beta^2}{2\gamma^2\delta^4}$

9) $\frac{30\alpha^{3\nu}\beta^\rho\gamma^{\rho+2}-6\alpha^{2\nu}\beta^3\gamma^\rho\delta^{\rho+1}}{20\alpha^\nu\beta^\rho\gamma^2\delta^2-4\alpha\beta^2\delta^{\rho+1}} = \frac{3\alpha^{2\nu}\beta\gamma^\rho}{2\delta^2}$

10) $\frac{5\alpha^2+5\alpha\chi}{\alpha^2-\chi^2} = \frac{5\alpha}{\alpha-\chi}$

11) $\frac{\alpha^3-\chi^3}{(\alpha-\chi)^2} = \frac{\alpha^2+\alpha\chi+\chi^2}{\alpha-\chi}$

12) $\frac{\nu^2-2\nu+1}{\nu^2-1} = \frac{\nu+1}{\nu+1}$

13) $\frac{\alpha^3+(1+\alpha)\alpha\psi+\psi^2}{\alpha^4-\psi^2} = \frac{\alpha+\psi}{\alpha^2-\psi}$

14) $\frac{\alpha\gamma+\beta\delta+\alpha\delta+\beta\gamma}{\alpha\zeta+2\beta\chi+2\alpha\chi+\beta\zeta} = \frac{\gamma+\delta}{\zeta+2\chi}$

15) $\frac{6\alpha\gamma+10\beta\gamma+9\alpha\delta+15\beta\delta}{6\gamma^2+9\gamma\delta-2\gamma-3\delta} = \frac{3\alpha+5\beta}{3\gamma-1}$

16) $\frac{\nu^3-2\nu^2}{\nu^2-4\nu+4} = \frac{\nu^2}{\nu-2}$

17) $\frac{\chi^2+2\chi-3}{\chi^2+5\chi+6} = \frac{\chi-1}{\chi+2}$

18) $\frac{9\chi^3+53\chi^2-9\chi-18}{\chi^2+11\chi+30} = \frac{9\chi^2-\chi-3}{\chi+5}$

19) $\frac{2\chi^3+\chi^2-8\chi+5}{7\chi^2-12\chi+5}=\frac{3\chi^2+3\chi-5}{7\chi-5}$

20) $\frac{2\chi^3+3\chi^2+\chi}{\chi^3-\chi^2-2\chi}=\frac{2\chi+1}{\chi-2}$

21) $\frac{\alpha^3\beta^3+\gamma^3\chi^3}{\alpha^2\beta^2-\gamma^2\chi^2}=\frac{\alpha^2\beta^2-\alpha\beta\gamma\chi+\gamma^2\chi^2}{\alpha\beta-\gamma\chi}$

22) $\frac{\alpha\chi^{\mu}-\beta\chi^{\mu+1}}{\alpha^2\beta\chi-\beta^3\chi^3}=\frac{\chi^{\mu-1}}{\alpha\beta+\beta^2\chi}$

23) $\frac{2\chi^3-(3\gamma+\delta+2)\chi^2+(3\gamma+\delta)\chi}{\chi^4-\chi}=\frac{2\chi-3\gamma-\delta}{\chi^2+\chi+1}$

24) $\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma}{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2-2\beta\gamma}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha-\beta-\gamma}$

25) $\frac{\alpha^2-3\alpha\beta+\alpha\gamma+2\beta^2-2\beta\gamma}{\alpha^2-\beta^2+2\beta\gamma-\gamma^2}=\frac{\alpha-2\beta}{\alpha+\beta-\gamma}$

26) $\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)}{2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4}=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)}{4\beta^2\gamma^2-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2}$

$=\frac{\alpha+\beta}{(\gamma+\alpha-\beta)(\beta-\alpha+\gamma)}$ (1)

3) Ἀναγωγὴ διὰ τῆς ἀναλύσεως εἰς παράγοντας. (2)

1) $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)^2$

2) $\alpha^2-2\alpha\beta^2+\beta^4=(\alpha-\beta^2)^2$

3) $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\gamma)(\alpha-\beta)$

4) $\beta^4-\delta^2=(\beta^2+\delta)(\beta^2-\delta)$

5) $(\beta^2-1)=(\beta+1)(\beta-1)$

6) $\alpha^3+3\alpha^2+2\alpha=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)$

7) $2\beta^3+3\beta^2+\beta=\beta(\beta+1)(2\beta+1)$

(1) Εἰς ταύτην τὴν ἀναγωγὴν ἠμπορεῖ ὁ διδάσκαλος νὰ κάμῃ πολλὰς παρατηρήσεις εἰς τὸν μαθητήν του.

(2) Καὶ εἰς τὸν προλαβόντα παράγραφον λύονται πολλὰ προβλήματα διὰ τῆς ἀναλύσεως ταύτης εἰς παράγοντας τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ τῶν κλασμάτων καὶ διὰ τῆς ἐξαλείψεως τῶν αὐτῶν παραγόντων, καθὼς εἰς τὰ προβλήματα 13. 19 κτλ. Εἰς τοῦτο, ἐκτὸς τῶν κανόνων, οἱ ὁποῖοι δίδονται εἰς καθ᾽ ἕκαστον, ἀπαιτεῖται καὶ μεγάλη ἕξις.

8) $\varepsilon^3-3\varepsilon^2+2\varepsilon=\varepsilon(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)$

9) $2\mu^3+3\lambda\mu^2+3\lambda\mu-2\mu=\mu(\mu+1)(2\mu-2+3\lambda)$

10) $2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4=(\alpha+\beta+\gamma)$
$(\alpha+\beta-\gamma)(\gamma+\alpha-\beta)(\beta+\gamma-\alpha)$

4) Μικταὶ ἀναγωγαί.

1) $\sqrt{\alpha\chi}+\frac{\alpha\chi}{\alpha-\sqrt{\alpha\chi}}=\frac{\alpha\sqrt{\alpha\chi}}{\alpha-\sqrt{\alpha\chi}}=\frac{\alpha\sqrt{\chi}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\chi}}$

2) $\frac{\gamma\sqrt{\chi}}{\sqrt{(\alpha+\chi)}}+\frac{\delta\sqrt{\chi}}{\sqrt{(\alpha-\chi)}}+\frac{\alpha\sqrt{(\alpha\chi^3+\chi^4)}}{\sqrt{(\alpha^2-\chi^2)}}-\sqrt{(\alpha^2-\chi^2)}=$
$\frac{\gamma\sqrt{(\alpha\chi-\chi^2)}+(\alpha\chi+\delta)\sqrt{(\alpha\chi+\chi^2)}+\chi^2-\alpha^2}{\sqrt{(\alpha^2-\chi^2)}}$

3) $\frac{2\chi^2}{(1-\chi^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{(1-\chi^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{3\chi^2-1}{(1-\chi^2)\sqrt{(1-\chi^2)}}$

4) $\frac{\alpha\chi^3}{(\alpha+\chi)^{\frac{8}{3}}}+\frac{\beta\chi^2}{(\alpha+\chi)^{\frac{5}{3}}}+\frac{\gamma\chi}{(\alpha+\chi)^{\frac{2}{3}}}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)\chi^3+(\alpha\beta+2\alpha\gamma)\chi^2+\alpha^2\gamma\chi}{(\alpha+\chi)^2\sqrt[3]{(\alpha+\chi)^2}}$

5) $\sqrt{\left(1-\frac{\zeta^2}{(\zeta-\eta)^2}\right)}=\frac{\sqrt{(\eta^2-2\zeta\eta)}}{\zeta-\eta}$

6) $\frac{\alpha+\sqrt{-\beta}}{\alpha-\sqrt{-\beta}}=\frac{\alpha^2-\beta+2\alpha\sqrt{-\beta}}{\alpha^2+\beta}$

7) $\frac{\alpha+\sqrt{-\beta}}{\alpha-\sqrt{-\beta}}+\frac{\alpha-\sqrt{-\beta}}{\alpha+\sqrt{-\beta}}=\frac{2(\alpha^2-\beta)}{\alpha^2+\beta}$

8) $\frac{\sqrt{(\alpha+\chi)}+\sqrt{(\alpha-\chi)}}{\sqrt{(\alpha+\chi)}-\sqrt{(\alpha-\chi)}}=\frac{\alpha+\sqrt{(\alpha^2-\chi^2)}}{\chi}$

9) $\frac{\beta}{\sqrt[\nu]{[\alpha-\sqrt{(\alpha^2-\beta^\nu)}]}}=\sqrt[\nu]{[\alpha+\sqrt{(\alpha^2-\beta^\nu)}]}$

10) $\sqrt{(\alpha+\sqrt{\beta})}\pm\sqrt{(\alpha-\sqrt{\beta})}=\sqrt{[2\alpha\pm2\sqrt{(\alpha^2-\beta)}]}$ (1)

(1) Ἡ ἀπαιτουμένη ἀναγωγὴ εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ κατὰ δύω τρόπους: 1) ἂν ἐξάξῃ τις τὴν ῥίζαν τοῦ $\alpha+\sqrt{\beta}$ καὶ τοῦ $\alpha-\sqrt{\beta}$ καὶ τὰς προσθέσῃ ἔπειτα· ἢ 2) ἂν τὸ ὅλον τετραγωνισθῇ καὶ τεθῇ τὸ σημεῖον τῆς ῥίζης πρὸ τοῦ εὑρεθέντος τετραγώνου. Τὸ αὐτὸ ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ καὶ εἰς τὰς δύω ἑφεξῆς ἀναγωγάς. Καὶ εἰς τὰ δύω λαμβάνεται τὸ σημεῖον $+$.

11) $\sqrt{(\alpha+\sqrt{-\beta})}\pm\sqrt{(\alpha-\sqrt{-\beta})}=\sqrt{[2\alpha\pm2\sqrt{(\alpha^2+\beta)}]}$

12) $\sqrt{\left(\frac{\alpha\beta\zeta+\gamma^2}{\beta\gamma}+\sqrt{\frac{4\alpha\zeta}{\beta}}\right)}+\sqrt{\left(\frac{\alpha\beta\zeta+\gamma^2}{\beta\gamma}-\sqrt{\frac{4\alpha\zeta}{\beta}}\right)}=\sqrt{\frac{4\alpha\zeta}{\gamma}}$

13) $\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}}{\frac{\varepsilon}{\zeta}+\frac{\eta}{\theta}}=\dfrac{(\alpha\delta+\beta\gamma)\zeta\theta}{(\varepsilon\theta+\zeta\eta)\beta\delta}$

14) $\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\varepsilon}{\zeta}}{\frac{\eta}{\theta}+\frac{\iota}{\kappa}+\frac{\lambda}{\mu}}=\dfrac{(\alpha\delta\zeta+\beta\gamma\zeta+\beta\delta\varepsilon)\theta\kappa\mu}{(\eta\kappa\mu+\theta\iota\mu+\theta\kappa\lambda)\beta\delta\zeta}$

15) $\dfrac{\frac{\alpha^3\zeta^3}{\beta^2\gamma^2}-\frac{\alpha^4\zeta}{\beta\gamma}+\alpha^2\gamma}{\frac{\alpha^2\eta}{\beta\gamma^2\delta}-\frac{\alpha^6\gamma}{\beta^2\eta^2\theta}+\frac{\alpha^3}{\beta\gamma}}=\dfrac{(\alpha\zeta^3-\alpha^2\beta\gamma\zeta+\beta^2\gamma^3)\delta\eta^2\theta}{\beta\eta^3\theta-\alpha^4\gamma^3\delta+\alpha\beta\gamma\delta\eta^2\theta}$

16) $\dfrac{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}}{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}-\frac{\beta}{\alpha+\beta}}=\dfrac{\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$

17) $\dfrac{\frac{\gamma^2}{\delta^2}-\frac{\gamma^3}{\alpha+\beta}}{\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}-\frac{\gamma^4}{\delta\theta^2}}=\dfrac{(\alpha+\beta-\gamma\delta^2)\theta^2}{\delta^2\theta^2-(\alpha+\beta)\gamma^2\delta}$

18) $\dfrac{1+\frac{\sqrt{(\alpha^2-\chi^2)}}{\sqrt{(\alpha^2+\chi^2)}}}{\sqrt{(\alpha^2+\chi^2)}+\sqrt{(\alpha^2-\chi^2)}}=\dfrac{1}{\sqrt{(\alpha^2+\chi^2)}}$

) $\dfrac{\sqrt{(1-\chi)}+\frac{1}{\sqrt{(1+\chi)}}}{1+\frac{1}{\sqrt{(1-\chi^2)}}}=\sqrt{(1-\chi)}$

$\dfrac{\alpha^2+\alpha\chi+\chi^2}{\alpha^4+\alpha^3\chi+\alpha^2\chi^2+\alpha\chi^3+\chi^4}=\dfrac{\alpha^3-\chi^3}{\alpha^5-\chi^5}$

$\dfrac{\alpha^3-\alpha^2\chi+\alpha\chi^2-\chi^3}{\alpha^5-\alpha^4\chi+\alpha^3\chi^2-\alpha^2\chi^3+\alpha\chi^4-\chi^5}=\dfrac{\alpha^4-\chi^4}{\alpha^6-\chi^6}$

22) $\dfrac{\alpha^2-2\alpha\chi+4\chi^2}{\alpha^3-2\alpha^2\chi+4\alpha\chi^2-8\chi^3}=\dfrac{\alpha^3+8\chi^3}{\alpha^4-16\chi^4}$(1)

23) $9\sqrt{(6\sqrt{28})}+3\sqrt{(12\sqrt{7})}-8\sqrt{(4\sqrt{63})}=8\sqrt[4]{63}$

24) $3\sqrt[3]{(40\sqrt{12})}+2\sqrt[3]{(5\sqrt{48})}-4\sqrt[3]{(15\sqrt{27}}=4\sqrt[6]{75}$

25) $4\sqrt[3]{(6\sqrt[3]{32})}+\sqrt[3]{(9\sqrt[3]{162})}+2\sqrt{(75\sqrt[9]{50})}=21\sqrt{18}$

26) $5\sqrt[3]{(4\sqrt{192})}+7\sqrt{(18\sqrt[3]{81})}=31\sqrt[3]{24}$

27) $3\sqrt[3]{(8+16\sqrt{5})}-2\sqrt[3]{(1+\sqrt{20})}=4\sqrt{(1+2\sqrt[3]{5})}$

28) $3\sqrt{(54-36\sqrt{27})}-\sqrt{(16-16\sqrt{12})}=7\sqrt{(2-4\sqrt{3})}$

29) $(\alpha\alpha'+\beta\beta')^2+(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2)$ (2)

30) $(\alpha\alpha'+\beta\beta')^2+(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2+\alpha'^2\gamma^2+\beta'^2\gamma^2=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\times(\alpha'^2+\beta'^2)$

31) $(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')^2+(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2+(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')^2+(\beta\gamma'-\gamma\beta')^2=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)$.

32) $(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'+\delta\delta')^2+(\alpha\beta'-\beta\alpha'+\gamma\delta'-\delta\gamma')^2+(\alpha\gamma'-\beta\delta'-\gamma\alpha'+\delta\beta')^2+(\alpha\delta'+\beta\gamma'-\gamma\beta'-\delta\alpha')^2$
$=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+\delta'^2)$

33) $(\alpha^2+\Lambda\beta^2)(\alpha'^2+\Lambda\beta'^2)=(\alpha\alpha'\pm\Lambda\beta\beta')^2+\Lambda(\alpha\beta'\mp\beta\alpha')^2$(3)

---

(1) Πολλαπλασιάζεται ὁ ἀριθμητὴς καὶ παρωνομαστὴς τοῦ κλάσματος μὲ $\alpha+2\chi$ καὶ ἡ ἐργασία ἐξακολουθεῖ.

(2) Ἐνίοτε σημειοῦνται αἱ ποσότητες, διὰ τὴν συμμετρίαν διὰ τονουμένων γραμμάτων ὑπὸ τὰ ἑξῆς σχήματα: α, β, γ, κτλ. α', β', γ', κτλ'. α'', β'', γ'', κτλ''. α''', β''', γ''', κτλ'''. ἐννοοῦνται ὅμως πάντοτε διάφοροι ποσότητες, μ'ὅλον ὅτι ἠμποροῦν αὐταὶ νὰ ἦναι καὶ ἴσαι μεταξύ των.

(1) Τὰ σχήματα 29, 30, 31, 32, 33 λύουν μερικὰ προβλήματα τῆς ἀορίστου ἀναλύσεως, τὰ ὁποῖα ἀκολουθοῦν. Καταπείθεται δέ τις περὶ τῆς ὀρθότητός των διὰ τῆς πραγματικῆς ἀναπτύξεως τῶν τετραγώνων καὶ γινομένων των. Καὶ εἰς αὐτὴν τὴν ἀνάπτυξιν ἠμποροῦν νὰ χρησιμεύσουν μικραὶ εὐκολίαι, τὰς ὁποίας ὁ προσεκτικὸς ἠμπορεῖ νὰ εὕρῃ καὶ μόνος του.

$$34)\ (\alpha\beta'-\beta\alpha')(\alpha\beta''-\beta\alpha'')+(\beta\gamma'-\gamma\beta')(\beta\gamma''-\gamma\beta'')+(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')(\gamma\alpha''-\alpha\gamma'')=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma'')-(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')(\alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma'')$$

---

5) Ἀναγωγαὶ διὰ τῆς ἐλλόγου ἐκφράσεως τῶν παρωνομαστῶν τῶν κλασμάτων.

1) $\sqrt[3]{\frac{3}{7}}=\frac{\sqrt[3]{147}}{7}$

2) $\sqrt[3]{\frac{5}{12}}=\frac{\sqrt[3]{90}}{6}$

3) $\frac{5}{\sqrt{18}}=\frac{5}{6}\sqrt{2}$

4) $\sqrt[5]{\frac{\alpha}{\beta^2\gamma^8(1+\chi)}}=\frac{\sqrt[5]{\alpha\beta^3\gamma^2(1+\chi)^4}}{\beta\gamma^2(1+\chi)}$

5) $\sqrt[3]{\frac{1+\chi}{1-\chi+2\chi^2}}=\frac{\sqrt[3]{(1+\chi)(1-\chi+2\chi^2)^2}}{1-\chi+2\chi^2}$

6) $\frac{8}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=4(\sqrt{7}-\sqrt{5})$

7) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$

8) $\frac{5}{\sqrt{4}+2}=5\sqrt{4}+10$

9) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{1}}=\sqrt{6}+\sqrt{3}$

10) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\frac{1}{2}\sqrt{5}+\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{3}(\sqrt{10}+\sqrt{6}-\sqrt{15}-2)$

11) $\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{3}}=-\frac{2}{3}(\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{6})$

12) $\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}-2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\frac{1}{3}\sqrt{5}}=\frac{1}{7}(36+3\frac{1}{2}\sqrt{10}-6\sqrt{5}-7\sqrt{6})$

Η. ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ.

Τί σημαίνει ὁ λογάριθμος ἑνὸς ἀριθμοῦ; τί ἡ βάσις του; Τί ἐννοοῦν π.χ. ὅταν λέγουν, ἔςω διὰ τὴν βάσιν α ὁ λογάριθμος ἑνὸς ἀριθμοῦ N=6,67; — Τί εἶναι ἓν λογαριθμικὸν σύςημα; Καὶ ποῖον εἶναι ἰδίως τὸ ὀνομαζόμενον σύστημα τοῦ Ἑρίκου Βρίγκ (Henry Brigg); — Πῶς ἠμποροῦν νὰ παρασταθοῦν διὰ λέξεων οἱ τρεῖς ἑπόμενοι πρώτιστοι τύποι; Καὶ πῶς ἀποδεικνύονται; — Εἶναι δυνατὸν νὰ ληφθῇ τὸ 1 ὡς βάσις συστήματος; — Τί εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ 1; — Ὅταν ἡ βάσις ἦναι > ἀπὸ 1, τότε ὁ λογάριθμος ἀριθμοῦ, ὅστις εἶναι μεγαλήτερος ἀπὸ 1, εἶναι θετικός· ἐξεναντίας, ὁ λογάριθμος ἀριθμοῦ, ὅστις εἶναι μικρότερος ἀπὸ 1, εἶναι ἀρνητικός. Πῶς γίνεται ὅμως ὅταν ἡ βάσις ἦναι < 1; — Ὀλίγοι λογάριθμοι μόνον εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ ἐπίλοιποι περιέχουν ἀκέραιον ἀριθμὸν καὶ κλάσμα, δηλ: τοιοῦτους ὅστις δὲν εὑρίσκεται ἐντελῶς. — Πῶς ὀνομάζεται ὁ ἀκέραιος αὐτῶν ἀριθμὸς καὶ πῶς τὸ κλάσμα των; — Τί εἶναι εἰς τὸ σύστημα τοῦ Βριγκ τὸ χαρακτηριστικὸν ἀριθμοῦ, ὅστις εὑρίσκεται μεταξὺ τοῦ 10^{ν} καὶ τοῦ $10^{\nu+1}$; καὶ τί εἶναι τὸ χαρακτηριστικὸν κλάσματος μεταξὺ $\frac{1}{10^{\nu}}$ καὶ $\frac{1}{10^{\nu+1}}$; Ἂν αἱ διαφοραὶ τῶν ἀριθμῶν θεωρούμεναι ὡς πρὸς αὐτοὺς τοὺς ἀριθμοὺς ἦναι πολλὰ μικραί, τότε αἱ διαφοραὶ τῶν λογαρίθμων ἔχουν πρὸς ἀλλήλας σχεδὸν, ὡς αἱ διαφοραὶ αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν. Ὁ λόγος αὐτοῦ ἠμπορεῖ νὰ δοθῇ εἰς τὴν ἀνάλυσιν. Εἰς τί χρησιμεύουν οἱ ἀναλογικοὶ μέσοι, οἱ ὁποῖοι εἶναι σημειωμένοι εἰς τοὺς μεγαλητέρους λογαριθμικοὺς πίνακας;

---

1) Πρώτιςοι τύποι.

1) $\lambda o\gamma\, AB=\lambda o\gamma\, A+\lambda o\gamma\, B$

2) $\lambda o\gamma\, \frac{A}{B}=\lambda o\gamma\, A-\lambda o\gamma\, B$

3) $\lambda o\gamma\, A^{\nu}=\nu\, \lambda o\gamma\, A$

ΣΗΜ. Εἰς τὸ 3) τὸ ν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι θετικὸς, ἀρνητικὸς, ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς ἀριθμός.

---

2) Ἐφαρμογὴ αὐτῶν εἰς προσδιορισμὸν τῶν λογαρίθμων γινομένων, πηλίκων, δυνάμεων καὶ ῥιζῶν.

α) Διὰ γενικὰς ἢ διὰ γραμμάτων ἐκφράσεις.

1) $\lambda o\gamma\ \alpha\beta\gamma\delta = \lambda o\gamma\ \alpha + \lambda o\gamma\ \beta + \lambda o\gamma\ \gamma + \lambda o\gamma\ \delta$

2) $\lambda o\gamma\ \frac{\varphi\zeta}{\gamma\delta} = \lambda o\gamma\ \varphi + \lambda o\gamma\ \zeta - \lambda o\gamma\ \gamma - \lambda o\gamma\ \delta.$

3) $\lambda o\gamma\ \alpha^{\mu}\beta^{\nu}\gamma^{\pi} = \mu\ \lambda o\gamma\ \alpha + \nu\ \lambda o\gamma\ \beta + \pi\ \lambda o\gamma\ \gamma$

4) $\lambda o\gamma\ \frac{\alpha^{\mu}\beta^{-\nu}}{\gamma^{\pi}\delta^{\rho}} = \mu\ \lambda o\gamma\ \alpha - \nu\ \lambda o\gamma\ \beta - \pi\ \lambda o\gamma\ \gamma - \rho\ \lambda o\gamma\ \delta$

5) $\lambda o\gamma\ \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\beta^{-\frac{\pi}{\rho}}\gamma = \frac{\mu}{\nu}\lambda o\gamma\ \alpha - \frac{\pi}{\rho}\lambda o\gamma\ \beta + \lambda o\gamma\ \gamma$

6) $\lambda o\gamma\ \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}\beta^{-\nu}\gamma^{\frac{\pi}{\rho}}} = \frac{\mu}{\nu}\lambda o\gamma\ \alpha - \lambda o\gamma\ \beta + \frac{\pi}{\nu\rho}\lambda o\gamma\ \gamma$

7) $\lambda o\gamma\ \frac{\alpha\sqrt[\nu]{\gamma^{\mu}}}{\beta\sqrt{\delta}} = \lambda o\gamma\ \alpha + \frac{\mu}{\nu}\lambda o\gamma\ \gamma - \lambda o\gamma\ \beta - \frac{1}{2}\lambda o\gamma\ \delta$

8) $\lambda o\gamma\ \frac{(\alpha+\beta)^{\nu}\gamma^{\mu}}{(\gamma+\delta)\sqrt[4]{\delta^{3}}} = \nu\ \lambda o\gamma\ (\alpha+\beta) + \mu\ \lambda o\gamma\ \gamma - \lambda o\gamma\ (\gamma+\delta)$
$- \frac{3}{4}\lambda o\gamma\ \delta$

9) $\lambda o\gamma\ \frac{1}{(\alpha+\beta^{\nu})^{\mu}} = -\mu\ \lambda o\gamma\ (\alpha+\beta^{\nu}).$

10) $\lambda o\gamma\ \frac{1}{\sqrt[\nu]{(\alpha+\beta)}} = -\frac{1}{\nu}\lambda o\gamma\ (\alpha+\beta).$

11) $\lambda o\gamma\ \sqrt[\mu]{(\alpha^{2}-\chi^{2})} = \frac{1}{\mu}\lambda o\gamma\ (\alpha^{2}-\chi^{2}) = \frac{1}{\mu}\lambda o\gamma\ (\alpha+\chi) +$
$\frac{1}{\mu}\lambda o\gamma\ (\alpha-\chi)$

12) $\chi\ \lambda o\gamma\ \alpha = \lambda o\gamma\ \alpha^{\chi}$.

13) $\nu\ \lambda o\gamma\ \alpha + \mu\ \lambda o\gamma\ \beta - \pi\ \lambda o\gamma\ \gamma = \lambda o\gamma\ \frac{\alpha^{\nu}\beta^{\mu}}{\gamma^{\pi}}$

$\nu\ \lambda o\gamma(\alpha+\psi) + \lambda o\gamma\ \gamma - \mu\ \lambda o\gamma(\alpha-\psi) = \lambda o\gamma\ \frac{\gamma(\alpha+\psi)^{\nu}}{(\alpha-\psi)^{\mu}}$

$\frac{1}{\psi}\lambda o\gamma\ (2\alpha+3\beta) - \frac{2}{3}\lambda o\gamma\ \gamma = \lambda o\gamma\ \frac{\sqrt[\psi]{(2\alpha+3\beta)}}{\sqrt[3]{\gamma^{2}}}$

β) Αἱ ἐκφράσεις ἀριθμῶν κατὰ τὸ Βρίγκιον σύστημα:

1) λογ (93 × 3514) = 5,5142847
2) λογ (1225 × 387) = 5,6758471
3) λογ (628 × 493) = 5,4908066
4) λογ (3748 × 1752 × 4065) = 10,4263942
5) λογ $\frac{5}{4}$ = 0,0969100
6) λογ $\frac{39}{7}$ = 0,7459666
7) λογ $\frac{14}{3}$ = 0,6690068
8) λογ 15$\frac{3}{4}$ = 1,1972806
9) λογ 7$\frac{4}{13}$ = 0,8637803
10) λογ 367$\frac{5}{8}$ = 2,5654050
11) λογ 187$\frac{9}{11}$ = 2,2737376
12) λογ $\frac{2}{3}$ = 0,8239087 — 1
13) λογ $\frac{5}{8}$ = 0,7958800 — 1
14) λογ $\frac{1}{9}$ = 0,0457575 — 1
15) λογ $\frac{1}{26}$ = 0,5850267 — 2
16) λογ $\frac{6}{37}$ = 0,2099495 — 1
17) λογ $\frac{18}{1267}$ = 0,1524959 — 2
18) λογ $\frac{357}{695}$ = 0,7106834 — 1
19) λογ $\frac{1}{5432}$ = 0,2650402 — 4
20) λογ $\frac{8}{9243}$ = 0,9372770 — 4
21) λογ $\frac{3542}{7905}$ = 0,6480628 — 1
22) λογ 3,5 = 0,5440680
23) λογ 12,63 = 1,1014034
24) λογ 15,432 = 1,1884222
25) λογ 7348,4 = 3,8661928
26) λογ 1,3567 = 0,1324838

27) λογ $0{,}7 = 0{,}8450980 - 1$

28) λογ $0{,}036 = 0{,}5563025 - 2$

29) λογ $0{,}0065 = 0{,}8129134 - 3$

30) λογ $0{,}0039953 = 0{,}6015494 - 3$

31) λογ $0{,}0005637 = 0{,}7510480 - 4$

32) λογ $\frac{319 \times 765}{138} = 3{,}2475730$

33) λογ $\frac{213 \times 7{,}655}{3145 \times 718} = 8585798 - 4$

34) λογ $\frac{3{,}5347 \times 2{,}685}{137{,}65 \times 6944} = 0{,}0644419 - 5$

35) λογ $\frac{47 \times 0{,}653 \times 12\frac{5}{6}}{3576 \times 1520} = 0{,}8601095 - 5$

36) λογ $\frac{0{,}765 \times 0{,}0018}{31457 \times 567\frac{5}{13}} = 0{,}8873146 - 11$

37) λογ $\frac{0{,}018594 \times 763\frac{13}{15}}{7654{,}3 \times 794} = 0{,}3686643 - 6$

38) λογ $3^{15} = 7{,}1568188$ (1)

39) λογ $5^{27} = 18{,}8721901$

40) λογ $16^{20} = 24{,}0823997$

41) λογ $(\frac{7}{3})^{14} = 5{,}1516750$

42) λογ $(\frac{15}{13})^{16} = 0{,}9943665$

43) λογ $(\frac{12}{5})^{32} = 12{,}1667597$

44) λογ $(\frac{3}{4})^{30} = 0{,}2518379 - 4$

45) λογ $(\frac{357}{1432})^{12} = 0{,}7607024 - 8$

46) λογ $(\frac{1}{14})^{125} = 0{,}7339955 - 144$

47) λογ $[(14{,}418)^{9} \times (3{,}71)^{7}] = 13{,}8463886$

(1) Διὰ νὰ εὑρεθῶσι λογάριθμοι ὀλίγον ὑψηλῶν δυνάμεων μὲ ἑπτὰ δεκαδικά, πρέπει εἰς τὸν ὑπολογισμὸν νὰ μεταχειρισθῇ τις λογαρίθμους μὲ περισσότερα δεκαδικὰ τῶν ἑπτά, ἄλλως δὲν θέλουν συμφωνεῖ ὁλοτελῶς οἱ τελευταῖοι ἀριθμοὶ τοῦ παραγομένου μὲ τὰ δοθέντα.

48) λογ $\left[(0{,}0534)^{3} \times \left(\frac{32768}{3875}\right)^{10}\right] = 5{,}4544061$

49) λογ $\frac{(0{,}5936)^{20} \times 386}{(0{,}076)^{23}} = 23{,}7977525$

50) λογ $\sqrt{5} = 0{,}3494850$

51) λογ $\sqrt[3]{73567} = 2{,}4333415$

52) λογ $\sqrt[8]{135} = 0{,}7\ 01112$

53) λογ $\sqrt[5]{15276} = 0{,}5230012$

54) λογ $\sqrt[100]{35107} = 0{,}9090787$

55) λογ $\sqrt[7]{13} = 0{,}0111394$

56) λογ $\sqrt[5]{\frac{15}{4}} = 0{,}0820045$

57) λογ $\sqrt[16]{\frac{4}{9}} = 0{,}9295635 - 1$

58) λογ $\sqrt[35]{\frac{3587}{20393}} = 0{,}9525632$

59) λογ $\sqrt[17]{\frac{803}{91054}} = 0{,}9412973 - 1$

60) λογ $\sqrt[11]{(954)^{12}} = 2{,}1032106$

61) λογ $\sqrt[3]{(\frac{12}{7})^{28}} = 0{,}5958482$

62) λογ $\sqrt[14]{(\frac{547}{935})^{207}} = 0{,}2927210 - 4$

63) λογ $\sqrt[16]{(\frac{1}{3})^{187}} = 0{,}6270232 - 7$

64) λογ $\sqrt[80]{(\frac{14}{267})^{715}} = 0{,}7828746 - 58$

65) λογ $\sqrt[540]{0{,}00534} = 0{,}9715943 - 1$

66) λογ $\sqrt[12]{0{,}00007} = 0{,}9923057 - 1$

67) λογ $\sqrt[31]{(0{,}34576)^{7}} = 0{,}7309519 - 1$

68) λογ $\sqrt{(356{,}27)^{11}} = 0{,}8771741$

69) λογ $\sqrt[5]{\frac{0,365\times\sqrt{2}}{783}}=0,3632563-1$

70) λογ $\sqrt[10]{\frac{78563\sqrt[3]{\frac{5}{3}}}{15\sqrt[4]{0,2}}}=0,3967819$

71) λογ $\sqrt[9]{\frac{347\sqrt[7]{0,0073}}{126\sqrt{\frac{4}{9}}}}=0,0280126$

3) Χρῆσις τῶν ἀναλογικῶν μέσων εἰς τοὺς λογαρίθμους.

α) Προσδιορισμὸς τῶν λογαρίθμων ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι ὑπερβαίνουν τὰ ὅρια τῶν πινάκων.

1) λογ 185273=6,2674705
2) λογ 14459809=7,1601626
3) λογ 10134761=7,0058135
4) λογ 7095137=6,8509608
5) λογ 506860900=8,7048888
6) λογ 3,614699=0,5580721
7) λογ 84,827567=1,9285370
8) λογ 211447,39=5,3252023
9) λογ 0,0013514133=0,1307882—3
10) λογ 0,0003599547=0,5562478—4
11) λογ $75907\frac{1}{8}$=4,8802825
12) λογ $32116\frac{7}{9}$=4,5067320
13) λογ $252881\frac{1}{4}$=6,4029164
14) λογ $522076\frac{2}{13}$=5,7177339

6) Προσδιορισμὸς τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες ἀνήκουν εἰς λογαρίθμους, οἱ ὁποῖοι δὲν εὑρίσκονται ἀκριβῶς εἰς τοὺς πίνακας.

1) ἀρ. λογ 1,0742664=11,86496....
2) ἀρ. λογ 3,5947835=3933,538....
3) ἀρ. λογ 0,7813427=6,044254....
4) ἀρ. λογ 2,0037683=100,8714....
5) ἀρ. λογ 4,0005673=10013,07....
6) ἀρ. λογ. 5,6165834=413602,7....
7) ἀρ. λογ 3,7694480=5880,956....
8) ἀρ. λογ 0,2307611=1,710222....
9) ἀρ. λογ 4,2923065=19602,27....
10) ἀρ. λογ. 6,1785400=1508481....

4) Πραγματικὸς ὑπολογισμὸς ἀριθμῶν τινων διὰ τῶν λογαρίθμων.

1) $\sqrt[7]{8}=1,345900....$
2) $\sqrt[4]{35246}=13,70179....$
3) $\sqrt[12]{567348}=3,016389....$
4) $\sqrt[6]{235,78}=2,485522.....$
5) $\sqrt[5]{\frac{13}{16}}=0,959322....$
6) $\sqrt[7]{\frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{7}{5}}=1,190747....$
7) $\sqrt[3]{17705\frac{2}{9}}=26,06356....$
8) $\sqrt[9]{1350\frac{2}{8}}=2,227645....$
9) $\sqrt[8]{172\frac{2}{8}}=1,904159....$

10) $\sqrt[13]{\frac{1348}{569}}=1{,}146055\ldots$

11) $\left(\frac{9}{8}\right)^{21}=11{,}86322\ldots$

12) $\left(2\frac{5}{6}\right)^{9}=11767{,}35\ldots$

13) $\left(\frac{643}{637}\right)^{123}=3{,}168104\ldots$

14) $\left(317\frac{3}{4}\right)^{0,6}=31{,}71402\ldots$

15) $\left(\frac{167}{53}\right)^{0,32}=1{,}443779\ldots$

16) $\left(\frac{5}{7}\right)^{0,0537}=0{,}982093\ldots$

17) $\frac{(991{,}767)^5\times 12{,}34}{(20{,}358\times 10{,}1575)^6}=151{,}4369\ldots$

18) $\frac{(52072)^{13}\times\sqrt{(0{,}000734)^9}}{(255608)^8}=8930{,}834\ldots$

19) $\left(\frac{42666}{1147}\right)^{12}\times\left(\frac{765}{19432}\right)^{10}=62756{,}88\ldots$

20) $\sqrt[5]{\left(\frac{7}{3}\sqrt[4]{6}\right)}=1{,}295695\ldots$

21) $\sqrt[3]{\left(0{,}26\sqrt{\frac{2}{3}}\right)}=0{,}596544\ldots$

22) $\sqrt[5]{\frac{3{,}425\sqrt[7]{136}}{0{,}00034}}=28{,}94639\ldots$

23) $253\sqrt[3]{\frac{716{,}5}{\sqrt{2}}}=2016{,}914\ldots$

24) $\sqrt[4]{\frac{132\times(7{,}356)^9}{\sqrt{(3{,}25)^5}}}=144{,}5972\ldots$

26) $\sqrt[8]{\left(21+\sqrt[6]{19}\right)}=1{,}476875\ldots$

27) $\sqrt[3]{5{,}03+\sqrt[5]{0{,}2}}=1{,}792020\ldots$

28) $\sqrt[5]{\left(9{,}921-3\sqrt{5{,}02}\right)}=1{,}261866\ldots$

29) $\sqrt[16]{\frac{43+5\sqrt[3]{278}}{\sqrt[5]{17}}}=1{,}264848$

. . . .

Τὰ ἑξῆς εὐαπόδεικτα θεωρήματα εἶναι προσέτι ἄξια παρατηρήσεως.

Ἂς ὑποτεθοῦν Α, Β, δύω λογαριθμικὰ συςήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἀνήκουν αἱ βάσεις α, β. Πρὸς τούτοις χ καὶ ψ οἱ λογάριθμοι ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τῶν δύω τούτων συςημάτων· τότε εἶναι πάντοτε ψ:χ = λογ α: λογ β ἂν ληφθῶσιν οἱ δύω τελευταῖοι λογάριθμοι ἀπὸ ὁποιονδήποτε τρίτον σύστημα Γ.

2), Ὅθεν ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ κ εὑρίσκεται εἰς τὸ σύςημα Β, ὅταν διαιρέσῃ τις τὸν λογάριθμον τοῦ κ εἰς τὸ σύστημα Α διὰ τοῦ λογαρίθμου τοῦ β εἰς τὸ αὐτὸ σύςημα.

3) Ἐκ τούτου οἱ λογάριθμοι τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν εἰς δύω διάφορα συςήματα ἔχουν πάντοτε τὸν αὐτὸν λόγον μεταξύ των.

4) Ὅταν γνωρίζῃ τις λοιπὸν τὸν λογάριθμον ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ δύω διαφόρων συστημάτων, ἠμπορεῖ πάντοτε νὰ εὕρῃ ἀριθμὸν, μὲ τὸν ὁποῖον νὰ πολλαπλασιάσῃ ὅλους τοὺς λογαρίθμους τοῦ ἑνὸς συστήματος διὰ νὰ εὕρῃ τοὺς λογαρίθμους τοῦ ἄλλου συστήματος. Ἂς ὀνομασθῇ αὐτὸς τύπος (εἰς τὴν συνήθη καὶ μερικωτέραν σημασίαν σημαίνει αὕτη ἡ λέξι, μόνον ἐκεῖνον τὸν ἀριθμὸν, μὲ τὸν ὁποῖον πρέπει να πολλαπλασιασθῶσιν οἱ λογάριθμοι τοῦ ὑπερβολικοῦ ἢ φυσικοῦ συστήματος, τῶν ὁποίων ἡ βάσις εἶναι 2,718281828459..., διὰ νὰ εὑρεθοῦν οἱ λογάριθμοι ἑνὸς ἄλλου λογαριθμικοῦ συστήματος.)

Θ. ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ, ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ ΚΑΙ ΜΕΤΑΒΟΛΑΙ.

Τί σημαίνουν αἱ λέξεις μεταθέτω, συνδυάζω καὶ μεταβάλλω; Καὶ κατὰ τί διακρίνονται τὰ τρία αὐτὰ εἴδη τοῦ νὰ θεωρῶνται τὰ πράγματα εἰς τὴν σύζευξιν καὶ θέσιν αὐτῶν; — Κατὰ ποίους κανόνας γίνονται αἱ ἐργασίαι τῶν μεταθέσεων καὶ συζεύξεων; Καὶ εἰς τί θεμελιόνονται οἱ κανόνες οὗτοι;

Ἡ διδασκαλία τῶν συνδυασμῶν, ὡς ἀνεξάρτητος ἐπιστήμη θεωρουμένη, δὲν περιορίζεται μόνον εἰς τὰς εἰρημένας τρεῖς ἐργασίας, οὔτε εἰς μόνην τὴν τοῦ ποσοῦ ἐπιστήμην· αὐτὴ περιλαμβάνει ἐξεναντίας ὅλα, εἰς ὅσα πρόκειται λόγος περί τινος διατάξεως κατὰ ῥητοὺς νόμους. Ὑπὸ ταύτην ὅμως τὴν ἐκτεταμνην σημασίαν δὲν ἀνήκει ἐδῶ.

Ἐντελῆ συγγράμματα περὶ τῆς διδασκαλίας τῶν συνδυασμῶν εἶναι γερμανικὰ, μεταξὺ ἄλλων: Η ἔκθεσις τῆς διδασκαλίας τῶν συνδυασμῶν τοῦ Στάαλ, μὲ ἐφαρμογὴν αὐτῆς εἰς τὴν ἀνάλυσιν (Stahls Grundrifs der Combinations Lehre, nebst Anwendung derselben auf die Analysis, Leipzig 1800) καὶ τὸ σύγγραμμα τοῦ Βαϊνγκέρτνερ περὶ συνδυαστικῆς ἀναλύσεως, κατὰ τὴν θεωρίαν τοῦ Κ. Πρ. Χίνδεμβούργ. (Weingärtners Lehrbuch der combinatorischen Analysis, nach der Theorie des Herrn Prof. Hindenburg, Leipzig 1801).

1) Μετάθεσις.

α) Πραγματικὴ ἔκθεσις τῶν μεταθέσεων, δεδομένων πραγμάτων ἢ στοιχείων.

1) Μετάθ. (αβγ) =

αβγ
αγβ
βαγ
βγα
γαβ
γβα

2) Μετάθ. (ααββ) =

ααββ
αβαβ
αββα
βααβ
βαβα
ββαα

3) Μετάθ. (αβγδ) =

αβγδ	γαβδ
αβδγ	γαδβ
αγβδ	γβαδ
αγδβ	γβδα
αδβγ	γδαβ
αδγβ	γδβα
βαγδ	δαβγ
βαδγ	δαγβ
βγαδ	δβαγ
βγδα	δβγα
βδαγ	δγαβ
βδγα	δγβα

4) Μετάθ. (αββγ) =

αββγ
αβγβ
αγββ
βαβγ
βαγβ
ββαγ
ββγα
βγαβ
βγβα
γαββ
γβαβ
γββα

5) Μετάθ. (ααββγ) =

ααββγ	βαβγα
ααβγβ	βαγαβ
ααγββ	βαγβα
αβαβγ	ββααγ
αβαγβ	ββαγα
αββαγ	ββγαα
αββγα	βγααα
αβγαβ	βγαβα
αβγβα	βγβαα
αγαββ	γααββ
αγβαβ	γαβαβ
αγββα	γαββα
βααβγ	γβααβ
βααγβ	γβαβα
βαβαγ	γββαα

6) Μετάθ. (ααααββ) =

ααααββ
αααβαβ
αααββα
ααβααβ
ααβαβα
ααββαα
αβαααβ
αβααβα
αβαβαα
αββααα
βααααβ
βαααβα
βααβαα
βαβααα
ββαααα

7) Μετάθ. (ααβγδ) =

ααβγδ	αγαβδ	βααγδ	γααβδ	δααβγ
ααβδγ	αγαβδ	βααδγ	γααδβ	δααγβ
ααγβδ	αγβαδ	βαγαδ	γαβαδ	δαβαγ
ααγδβ	αγβδα	βαγδα	βγαδα	δαβγα
ααδβγ	αγδαβ	βαδαγ	γαδαβ	δαγαβ
ααδγβ	αγδβα	βαδγα	γαδβα	δαγβα
αβαγδ	αδαβγ	βγααδ	γβααδ	δβααγ
αβαδγ	αδαγβ	βγαδα	γβαδα	δβαγα
αβγαδ	αδβαγ	βγδαα	γβδαα	δβγαα
αβγδα	αδβγα	βδααγ	γδααβ	δγααβ
αβδαγ	αδγαβ	βδαγα	γδαβα	δγαβα
αβδγα	αδγβα	βδγαα	γδβαα	δγβαα

8) Μετάθ. $(α^2β^2γ^2)$ = (ααββγγ)=

ααββγγ	αγαββγ	βαγαβγ	βγβααγ	γβααβγ
ααβγβγ	αγαβγβ	βαγαγβ	βγβαγα	γβααγβ
ααβγγβ	αγαγββ	βαγβαγ	βγβγαα	γβαβαγ
ααγββγ	αγβαβγ	βαγβγα	βγγααβ	γβαβγα
ααγβγβ	αγβαγβ	βαγγαβ	βγγαβα	γβαγαβ
ααγγββ	αγββαγ	βαγγβα	βγγβαα	γβαγβα
αβαβγγ	αγββγα	ββααγγ	γααββγ	γββααγ
αβαγβγ	αγβγαβ	ββαγαγ	γααβγβ	γββαγα
αβαγγβ	αγβγβα	ββαγγα	γααγββ	γββγαα
αββαγγ	αγγαββ	ββγααγ	γαβαβγ	γβγααβ
αββγαγ	αγγβαβ	ββγαγα	γαβαγβ	γβγαβα
αββγγα	αγγββα	ββγγαα	γαββαγ	γβγβαα
αβγαβγ	βααβγγ	βγααβγ	γαββγα	γγααββ
αβγαγβ	βααγβγ	βγααγβ	γαβγαβ	γγαβαβ
αβγβαγ	βααγγβ	βγαβαγ	γαβγβα	γγαββα
αβγβγα	βαβαγγ	βγαβγα	γαγαββ	γγβααβ
αβγγαβ	βαβγαγ	βγαγαβ	γαγβαβ	γγβαβα
αβγγβα	βαβγγα	βγαγβα	γαγββα	γγββαα

δ) Ἀριθμὸς τῶν μεταθέσεων (1)

Τύποι.

I. Ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταθέσεων N διαφόρων ςοιχείων εἶναι $=1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,\ldots\ldots(N-1)N.$

II. Ὅταν μεταξὺ τῶν δεδομένων ςοιχείων ἦναι πολλὰ ἴσα, τότε εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταθέσεων τῆς συζεύξεως $α^λβ^μγ^νδ^π\ldots$ (ἂν $λ+μ+π+$ κτλ. $=N$)

$$=\frac{1.\,2.\,3.\,\ldots\ldots\ldots\ldots(N-1)N}{1.2.3\ldots\lambda\times1.2.3\ldots\mu\times1.2.3\ldots\nu\times1.2.3\ldots\pi\chi\ldots}$$
$$=\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)\ldots\ldots\ldots(N-1)N}{1.\,2.\,3\ldots\mu\times1.\,2.\,3\ldots\nu\times\,1.\,2.\,3\ldots\pi\chi\ldots}$$

(1) Οἱ ἐδῶ ἀπαντώμενοι ἐκθέται πρέπει νὰ θεωρῶνται μόνον ὡς ἐπαναλαμβανόμενοι ἐκθέται, οἱ ὁποῖοι δεικνύουν, ποσάκις τὰ γράμματα, ὅπου αὐτοὶ εὑρίσκονται πρέπει νὰ ἐπαναληφθῶσι. μτ. ἀρ. σημαίνει μεταθέσεως ἀριθμός.

$$=\frac{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)\ldots\ldots\ldots(N-1)N}{1.2.3\ldots\lambda\times1.2.3\ldots\nu\times1.2.3\ldots\pi\chi\ldots}$$
$$=\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)\ldots\ldots\ldots(N-1)N}{1.\,2.\,3\ldots\lambda\times1.\,2.\,3\ldots\mu\times\,1.\,2.\,3\ldots\pi\chi\ldots}$$

κ. ο. κ.

ὅπου τὰ γινόμενα 1. 2. 3. .., λ, 1. 2. 3. ... μ, 1. 2. 3. ... ν, 1. 2. 3 ... π, κτλ, εἶναι τόσα, ὅσα διάφορα γράμματα εὑρίσκονται εἰς τὴν σύζευξιν.

Παραδείγματα.

1) μτ. ἀρ, $(α)=1$
2) μτ. ἀρ. $(αβ)=2$
3) μτ. ἀρ, $(αβγ)=6$
4) μτ. ἀρ. $(αβγδ)=24$
5) μτ. ἀρ. $(αβγδε)=120$
6) μτ. ἀρ. $(αβγδεζ)=720$
7) μτ. ἀρ. $(α^2βγ)=12$
8) μτ. ἀρ. $(α^2β^2)=6$
9) μτ. ἀρ. $(α^3β^5γ^2)=2520$
10) μτ. ἀρ. $(α^2β^4γδ)840$
11) μτ. ἀρ. $(α^2β^2γ^2)=90$
12) μμ. ἀρ. $(α^3β^7γ^4δ)=1801800$
13) μτ. ἀρ. $α^2β^3γ^8δ^4)=30630600$
14) μτ. ἀρ. $(α^2β^{10}γδ^2ε^3)=73513440$
15) μτ. ἀρ. $(α^5β^5γ^4δ^2)=30270240$
16) μτ. ἀρ. $(α^{13}β^2γ^5δ^3ε^2)=864913896000$
17) μτ. ἀρ. $(α^3β^7γ^4δ^2ε^3ζ^5)=593676898214400$
18) μτ. ἀρ. $(α^μ)=1$
19) μτ. ἀρ. $(α^{μ-1}β)=μ$

20) μτ. ἀρ. $(α^{μ-2}β^2)=\frac{μ(μ-1)}{1.2}$

21) μτ. ἀρ. $(α^{μ-3}β^3)=\frac{μ(μ-1)(μ-2)}{1.2.3.}$

22) μτ. ἀρ. $(α^{μ-4}β^4)=\frac{μ(μ-1)(μ-2)(μ-3)}{1.2.3.4}$

23) μτ. ἀρ. $(α^{μ-5}β^5)=\frac{μ(μ-1)(μ-2)(μ-3)(μ-4)}{1.2.3.4.5.}$

κ. ο. κ.

2) Συνδυασμοί.

α) Συνδυασμοὶ μὲ ἐπαναλήψεις.

1) Συνδ. (α, β, γ, δ) τῆς δευτέρας τάξως.
αα, αβ, αγ, αδ, ββ, βγ, βδ, γγ, γδ, δδ.

2) Συνδ. (α, β, γ, δ, ε) τῆς δευτέρας τάξεως
αα, αβ, αγ, αδ, αε, ββ, βγ, βδ, βε, γγ, γδ, γε, δδ, δε, εε

3) Συνδ. (α, β, γ)

Τρίτη τάξις.

ααα
ααβ
ααγ
αββ
αβγ
αγγ
βββ
ββγ
βγγ
γγγ

4) Συνδ. (α, β, γ, δ)

Τρίτη τάξις.

ααα	βββ
ααβ	ββγ
ααγ	ββδ
ααδ	βγγ
αββ	βγδ
αβγ	βδδ
αβδ	γγγ
αγε	γγδ
αγδ	γδδ
αδδ	δδδ

5) Συνδ. (α, β, γ, δ, ε)

Τρίτη τάξις.

ααα	αδδ	βεε
ααβ	αδε	γγγ
ααγ	αεε	γγδ
ααδ	βββ	γγε
ααε	ββγ	γδδ
αββ	ββδ	γδε
αβγ	ββε	γεε
αβδ	βγγ	δδδ
αβε	βγδ	δδε
αγγ	βγε	δεγ
αγδ	βδδ	εεε
αγε	βδε	

6) Συνδ. (α, β, γ)

Τετάρτη τάξις.

αααα
αααβ
αααγ
ααββ
ααβγ
ααγγ
αβββ
αββγ
αβγγ
αγγγ
ββββ
βββγ
ββγγ
βγγγ
γγγγ

Συνδ. (α, β, γ, δ)

(Τετάρτη τάξις).

αααα	αββδ	ββγδ
αααβ	αβγγ	ββδδ
αααγ	αβγδ	βγγγ
αααδ	αβδδ	βγγδ
ααββ	αγγγ	βγδδ
ααβε	αγγδ	βδδδ
ααβδ	αγδδ	γγγγ
ααγγ	αδδδ	γγγδ
ααγδ	ββββ	γγδδ
ααδδ	βββγ	γδδδ
αβββ	βββδ	δδδδ
αββγ	ββγγ	

8) Συνδ. (α, β, γ, δ, ε)

(Τετάρτη τάξις).

αααα	αββε	βββγ	βδεε
αααβ	αβγγ	βββδ	βεγε
αααγ	αβγδ	βββε	γγγγ
αααδ	αβγε	ββγγ	γγγδ
αααε	αβδδ	ββγδ	γγγε
ααββ	αβδε	ββγε	γγδδ
ααβγ	αβδε	ββδδ	γγδε
ααβδ	αβεε	ββδε	γγεε
ααβε	αγγγ	ββεε	γδδδ
ααγγ	αγγδ	βγγγ	γδδε
ααγδ	αγδδ	βγγδ	γδεε
ααγε	αγδε	βγγε	γεεε
ααδδ	αγεε	βγδδ	δδδδ
ααδε	αδδδ	βγδε	δδδε
ααεε	αδδε	βγεε	δδεε
αβββ	αδεε	βδδδ	δεεε
αββγ	αεεε	βδδε	εεεε
αββδ	ββββ		

9) Συνδ. (α, β, γ)

(Πέμπτη τάξις).

ααααα	αβββγ
ααααβ	αββγγ
ααααγ	αβγγγ
αααββ	αγγγγ
αααβγ	βββββ
αααγγ	ββββγ
ααβββ	βββγγ
ααβγγ	ββγγγ
ααγγγ	βγγγγ
αββββ	γγγγγ

10) Συνδ. (α, β, γ, δ)

(Πέμπτη τάξις).

ααααα	ααβγδ	αβγδδ	ββγγδ
ααααβ	ααβδδ	αβδδδ	ββγδδ
ααααγ	ααγγγ	αγγγγ	ββδδδ
ααααδ	ααγγδ	αγγγδ	βγγγγ
αααββ	ααγδδ	αγγδδ	βγγγδ
αααβγ	ααδδδ	αγδδδ	βγγδδ
αααβδ	αββββ	αδδδδ	βγδδδ
αααγγ	αβββγ	βββββ	βδδδδ
αααγδ	αβββδ	ββββγ	γγγγγ
αααδδ	αββγγ	ββββδ	γγγγδ
ααβββ	αββγδ	βββγγ	γγγδδ
ααββγ	αββδδ	βββγδ	γγδδδ
ααββδ	αβγγγ	βββδδ	γδδδδ
ααβγγ	αβγγδ	ββγγγ	δδδδδ

Ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν μὲ ἐπαναλήψεις διὰ ν στοιχεῖα εἶναι διὰ τὴν 1ην τάξιν $= \nu$

» » 2αν » $= \frac{\nu(\nu+1)}{1.2}$

» » 3ην » $= \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{1.2.3.}$

» » 4ην » $= \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2) \ldots\ldots (\nu+3)}{1.1.3.4.}$

. . . .

» » μην » $= \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2) \ldots\ldots (\nu+\mu-1)}{1.2.3 \ldots\ldots \mu.}$

ε) Συνδυασμοὶ χωρὶς ἐπαναλήψεις.

Συνδ. (α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ι)

(Δευτέρα τάξις).

αβ	αθ	βη	γη	δθ	ζη
αγ	αι	βθ	γθ	δι	ζθ
αδ	βγ	βι	γι	εζ	ζι
αε	βδ	γδ	δε	εη	ηθ
αζ	βε	γε	δζ	εθ	ηι
αη	βζ	γζ	δη	ει	θι

2) Συνδ. (α, ϐ, γ, δ, ε, ζ)

(Τρίτη τάξις).

αϐγ	αγδ	αδζ	ϐγζ	γδε
αϐδ	αγε	αεζ	ϐδε	γδζ
αϐε	αγζ	ϐγδ	ϐδζ	γεζ
αϐζ	αδε	ϐγε	ϐεζ	δεζ

3) Συνδ. (α, ϐ, γ, δ, ε, ζ, η, θ)

(Τρίτη τάξις).

αϐγ	αδζ	ϐγζ	ϐζθ	γηθ
αϐδ	αδη	ϐγη	ϐηθ	δεζ
αϐε	αδθ	ϐγθ	γδε	δεη
αϐζ	αεζ	ϐδε	γδζ	δεθ
αϐη	αεη	ϐδζ	γδη	δζη
αϐθ	αεθ	ϐδη	γδθ	δζθ
αγδ	αζη	ϐδθ	γεζ	δηθ
αγε	αζθ	ϐεζ	γεη	εζη
αγζ	αηθ	ϐεη	γεθ	εζθ
αγη	ϐγδ	ϐεθ	γζη	εηθ
αγθ	ϐγε	ϐζη	γζθ	ζηθ
αδε				

4) Συνδ. (α, ϐ, γ, δ, ε, ζ, η)

(Τετάρτη τάξις).

αϐγδ	αϐζη	αδζη	ϐδεη
αϐγε	αγδε	αεζη	ϐδζη
αϐγζ	αγδζ	ϐγδε	ϐεζη
αϐγη	αγδη	ϐγδζ	γδεζ
αϐδε	αγεζ	ϐγδη	γδεη
αϐδζ	αγεη	ϐγεζ	γδζη
αϐδη	αγζη	ϐγεη	γεζη
αϐεζ	αδεζ	ϐγζη	δεζη
αϐεη	αδεη	ϐδεζ	

5) Συνδ. α, ϐ, γ, δ, ε, ζ, η, θ)

(Πέμπτη τάξις).

αϐγδε	αϐδζθ	αγεζθ	ϐγεζθ
αϐγδζ	αϐδηθ	αγζηθ	ϐγεηθ
αϐγδη	αϐεζη	αδεζη	ϐγζηθ
αϐγδθ	αϐεζθ	αδεζθ	ϐδεζη
αϐγεζ	αϐεηθ	αδεηθ	ϐδεζθ
αϐγεη	αϐζηθ	αδζηθ	ϐδεηθ
αϐγεθ	αγδεζ	αεζηθ	ϐδζηθ
αϐγζη	αγδεη	ϐγδεζ	ϐεζηθ
αϐγζθ	αγδεθ	ϐγδεη	γδεζη
αϐγζθ	αγδζη	ϐγδεθ	γδεζθ
αϐδεζ	αγδζθ	ϐγδζη	γδεηθ
αϐδεη	αγδηθ	ϐγδζθ	γδζηθ
αϐδεθ	αγεζη	ϐγδηθ	γεζηθ
αϐδζη	αγεζθ	ϐγεζη	δεζηθ

Ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν χωρὶς ἐπαναλήψεις διὰ ν ςοιχεῖα εἶναι:

διὰ τὴν 1ην τάξιν $= \nu$

» » 2αν » $= \frac{\nu(\nu-1}{1.\,2}$

» » 3ην » $= \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.\,3.\,3}$

» » 4ην » $= \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1.\,2.\,3.\,4}$

. . . .

» » μην » $= \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\ \ldots.\ (\nu-\mu+1)}{1.\,2.\,3\ \ldots.\ \mu}$

3) Μεταβολαί.

α) Μεταβολαὶ μὲ ἐπαναλήψεις.

1) Μεταβ. (α, β, γ, δ, ε, ζ)

(Δευτέρα τάξις).

αα	βα	γα	δα	εα	ζα
αβ	ββ	γβ	δβ	εβ	ζβ
αγ	βγ	γγ	δγ	εγ	ζγ
αδ	βδ	γδ	δδ	εδ	ζδ
αε	βε	γε	δε	εε	ζε
αζ	βζ	γζ	δζ	εζ	ζζ

2) Μεταβ. (α, β, γ, δ)

(Τρίτη τάξις).

ααα	αδβ	βγγ	γβδ	δβα
ααβ	αδγ	βγδ	γγα	δββ
ααγ	αδδ	βδα	γγβ	δβγ
ααδ	βαα	βδβ	γγγ	δβδ
αβα	βαβ	βδγ	γγδ	δγα
αββ	βαγ	βδδ	γδα	δγβ
αβγ	βαδ	γαα	γδβ	δγγ
αβδ	ββα	γαβ	γδγ	δγδ
αγα	βββ	γαγ	γδδ	δδα
αγβ	ββγ	γαδ	δαα	δδβ
αγγ	ββδ	γβα	δαβ	δδγ
αγδ	βγα	γββ	δαγ	δδδ
αδα	βγβ	γβγ	δαδ	

2) Μεταβ. (α, β, γ,)

(Τετάρτη τάξις).

αααα	αβγγ	βαγα	βγββ	γβαγ
αααβ	αγαα	βαγβ	βγβγ	γββα
αααγ	αγαβ	βαγγ	βγγα	γβββ
ααβα	αγαγ	ββαα	βγγβ	γββγ
ααββ	αγβα	ββαβ	βγγγ	γβγα
ααβγ	αγββ	ββαγ	γγαα	γβγβ
ααγα	αγβγ	βββα	γααβ	γβγγ
ααγβ	αγγα	ββββ	γααγ	γγαα
ααγγ	αγγβ	βββγ	γαβα	γγαβ
αβαα	αγγγ	ββγα	γαββ	γγαγ
αβαβ	βααα	ββγβ	γαβγ	γγβα
αβαγ	βααβ	ββγγ	γαγα	γγββ
αββα	βααγ	βγαα	γαγβ	γγβγ
αβββ	βαβα	βγαβ	γαγγ	γγγα
αββγ	βαββ	βγαγ	γβαα	γγγβ
αβγα	βαβγ	βγβα	γβαβ	γγγγ
αβγβ				

Ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταβολῶν μὲ ἐπαναλήψεις ν στοιχείων, διὰ τὴν μ^{ην} τάξιν, εἶναι $= ν^μ$

β) Μεταβολαὶ χωρὶς ἐπαναλήψεις.

Μεταβ. $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$.

αβγδ	αεγβ	βδεα	γδαβ	δβγα	εαδβ
αβγε	αεγδ	βδεγ	γδαε	δβγε	εαδγ
αβδγ	αεδβ	βεαγ	γδβα	δβεα	εβαγ
αβδε	αεδγ	βεαδ	γδβε	δβεγ	εβαδ
αβεγ	βαγδ	βεγα	γδεα	δγαβ	εβγα
αβεδ	βαγε	βεγδ	γδεβ	δγαε	εβγδ
αγβδ	βαδγ	βεδα	γεαβ	δγβα	εβδα
αγβε	βαδε	βεδγ	γεαδ	δγβε	εβδγ
αγδβ	βαεγ	γαβδ	γεβα	δγεα	εγαβ
αγδε	βαεδ	γαβε	γεβδ	δγεβ	εγαδ
αγεβ	βγαδ	γαδβ	γεδα	δεαβ	εγβα
αγεδ	βγαε	γαδε	γεδβ	δεαγ	εγβδ
αδβγ	βγδα	γαεβ	δαβγ	δεβα	εγδα
αδβε	βγδε	γαεδ	δαβε	δεβγ	εγδβ
αδγβ	βγεα	γβαδ	δαγβ	δεγα	εδαβ
αδγε	βγεδ	γβαε	δαγε	δεγβ	εδαγ
αδεβ	βδαγ	γβδα	δαεβ	εαβγ	εδβα
αδεγ	βδαε	γβδε	δαεγ	εαβδ	εδβγ
αεβγ	βδγα	γβεα	δβαγ	εαγβ	εδγα
αεβδ	βδγε	γβεδ	δβαε	εαγδ	εδγβ

Ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταβολῶν χωρὶς ἐπαναλήψεις διὰ ν ϛοιχεῖα εἶναι

διὰ τὴν $1^{\eta\nu}$ τάξιν $=\nu$

» » $2^{\alpha\nu}$ » $=\nu(\nu-1)$

» » $3^{\eta\nu}$ » $=\nu(\nu-1)(\nu-2)$

» » $4^{\eta\nu}$ » $=\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)$

. . . .

» » $\mu^{\eta\nu}$ » $=\nu(\nu-1)(\nu-2)\dots(\nu-\mu+1)$

γ. ΤΟ ΔΙΩΝΥΜΟΝ ΚΑΙ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΝ ΔΙ' ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ ΘΕΤΙΚΟΥΣ ΕΚΘΕΤΑΣ.

1) Τὸ Διώνυμον.

Τύποι.

I. $$(\alpha \pm \beta)^\nu = \alpha^\nu \pm \frac{\nu}{1}\alpha^{\nu-1}\beta^1 + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\alpha^{\nu-2}\beta^2 \pm \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3}\alpha^{\nu-3}\beta^3 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1.2.3.4}\alpha^{\nu-4}\beta^4 \pm \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)}{1.2.3.4.5}\alpha^{\nu-5}\beta^5 + \dots \pm \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\dots\dots 1}{1.2.3\dots\dots\nu}\beta^\nu$$

Ἀπὸ τὰ $\pm$, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται ἐδῶ, τὸ $+$ ἀνήκει εἰς τὸ $(\alpha+\beta)^\nu$, καὶ τὸ $-$ εἰς τὸ $(\alpha-\beta)^\nu$. Ὁ τελευταῖος ὅρος εἶναι πάντοτε $=\beta^\nu$ καὶ λαμβάνει δι' ἄρτιον ν τὸ σημεῖον $+$, διὰ περιττὸν ὅμως τὸ σημεῖον $-$.

II. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς εἶναι $=\nu+1$. Ὁ νόμος τῶν ἐκθετῶν τοῦ α καὶ β εἶναι φανερός. Οἱ προσθέται αὐξάνουν ἕως εἰς τὸ μέσον, καὶ μειοῦνται πάλιν κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν καὶ τὸ μέγεθος, μὲ τρόπον ὥϛε αἱ προσθέται τῶν ὅρων, οἵτινες ἐπίσης ἀπέχουν ἀπὸ τὸν πρῶτον καὶ τελευταῖον εἶναι ἴσοι μεταξύ των. Δι' ἄρτιον ν εἶναι εἷς μέσος ὅρος, καὶ τοῦτο εἶναι διὰ τὸ $(\alpha+\beta)^\nu$

$$+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\dots\dots(\frac{\nu}{2}+1)}{1.2.3\dots\frac{\nu}{2}}\alpha^{\frac{\nu}{2}}\beta^{\frac{\nu}{2}}$$

Διὰ τὸ $(\alpha-\beta)^\nu$ λαμβάνει αὐτὸς ὁ ὅρος τὸ σημεῖον $-$, ὅταν τὸ ν ἦναι τοῦ σχήματος $4\mu+2$, ἄλλως ὅμως $+$. Διὰ περιττὸν ν ἐξεναντίας εἶναι δύω μέσοι ὅροι, καὶ αὐτοὶ εἶναι διὰ τὸ $(\alpha+\beta)^\nu$.

$$+\frac{\nu(\nu-1)\dots\frac{\nu+3}{2}}{1.2\dots\frac{\nu-1}{2}}\alpha^{\frac{\nu+1}{2}}\beta^{\frac{\nu-1}{2}} + \frac{\nu(\nu-1)\dots\frac{\nu+1}{2}}{1.2\dots\frac{\nu+1}{2}}\alpha^{\frac{\nu-1}{2}}\beta^{\frac{\nu+1}{2}}$$

$$=\frac{\nu(\nu-1)\dots\frac{\nu+3}{2}}{1.2\dots\frac{\nu-1}{2}}\left(+\alpha^{\frac{\nu+1}{2}}\beta^{\frac{\nu-1}{2}}+\alpha^{\frac{\nu-1}{2}}\beta^{\frac{\nu+1}{2}}\right)$$

Διὰ τὸ $(\alpha-\beta)^\nu$ ἔχει ὁ πρῶτος ὅρος τὸ σημεῖον $+$ καὶ ὁ δεύτερος τὸ σημεῖον $-$, ὅταν τὸ ν ἦναι τοῦ σχήματος $4\mu+1$ καὶ τὸ ἀνάπαλιν, ὅταν τὸ ν ἦναι τοῦ σχήματος $4\mu+3$

III. Ὁ ἀόριστος $(\mu+1)^{\text{ος}}$ ὅρος τῆς σειρᾶς εἶναι:

$$\pm\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots\ldots(\nu-\mu+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots\ldots\ldots\ldots\mu}\alpha^{\nu-\mu}\beta^{\mu}$$

Ἀπὸ τὰ σημεῖα $\pm$ τὸ ἄνω εἶναι δι' ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ $(\alpha+\beta)^\nu$ καὶ διὰ τοὺς περιττοὺς τοῦ $(\alpha-\beta)^\nu$, το κάτω ὅμως μόνον διὰ τοὺς ἀρτίους ὅρους τοῦ $(\alpha-\beta)^\nu$

IV. τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν προσθετῶν εἰς τὴν σειρὰν διὰ τὸ $(\alpha+\beta)^\nu$, ἤ $1+\frac{\nu}{1}+\frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot2}+$ κτλ. εἶναι $=(1+1)^\nu=2^\nu$, καὶ τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν προσθετῶν εἰς τὴν σειρὰν διὰ τὸ $(\alpha-\beta)^\nu$, ἂν θεωρηθῶσι τὰ σημεῖα, ἤ $1-\frac{\nu}{1}+\frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot2}-$ κτλ. εἶναι $=(1-1)^\nu=0$

V. Ἂν τεθῇ $\frac{\beta}{\alpha}=\text{P}$ καὶ ὁ πρῶτος ὅρος τῆς σειρᾶς Α, ὁ δεύτερος Β καὶ ὁ τρίτος Γ, τότε εἶναι;

$$(\alpha\pm\beta)^\nu=\text{A}\pm\frac{\nu}{1}\text{AP}+\frac{\nu-1}{2}\text{BP}\pm\frac{\nu-2}{3}\Gamma\text{P}+\frac{\nu-3}{4}\Delta\text{P}$$
$$\pm\frac{\nu-4}{5}\text{EP}\ldots\ldots$$

τύπος, ὁ ὁποῖος εἶναι πολλὰ χρήσιμος πρὸς ὑπολογισμὸν τῶν ἑπομένων ὅρων ἐκ τῶν προηγουμένων.

Παραδείγματα.

1) $(\alpha\pm\beta)^1=\alpha\pm\beta$

2) $(\alpha\pm\beta)^2=\alpha^2\pm2\alpha\beta+\beta^2$

3) $(\alpha\pm\beta)^3=\alpha^3\pm3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2\pm\beta^3$

4) $(\alpha\pm\beta)^4=\alpha^4\pm4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2\pm4\alpha^3\beta+\beta^4$

5) $(\alpha\pm\beta)^5=\alpha^5\pm5\alpha^4\beta+10\alpha^3\beta^2\pm10\alpha^2\beta^3+5\alpha\beta^4+\beta^5$

6) $(\alpha\pm\beta)^6=\alpha^6\pm6\alpha^5\beta+15\alpha^4\beta^2\pm20\alpha^3\beta^3+15\alpha^2\beta^4\pm6\alpha\beta^5+\beta^6$

7) $(\alpha\pm\beta)^7=\alpha^7\pm7\alpha^6\beta+21\alpha^5\beta^2\pm35\alpha^4\beta^3+35\alpha^3\beta^4\pm21\alpha^2\beta^5+7\alpha\beta^6\pm\beta^7$

8) $(\alpha\pm\beta)^8=\alpha^8\pm8\alpha^7\beta+28\alpha^6\beta^2\pm56\alpha^5\beta^3+70\alpha^4\beta^4\pm56\alpha^3\beta^5+28\alpha^2\beta^6\pm8\alpha\beta^7+\beta^8$

9) $(\alpha\pm\beta)^9=\alpha^9\pm9\alpha^8\beta+36\alpha^7\beta^2\pm84\alpha^6\beta^3+126\alpha^5\beta^4\pm126\alpha^4\beta^5+84\alpha^3\beta^6\pm36\alpha^2\beta^7+9\alpha\beta^8+\beta^9$

10) $(\alpha\pm\beta)^{10}=\alpha^{10}\pm10\alpha^9\beta+45\alpha^8\beta^2\pm120\alpha^7\beta^3+210\alpha^6\beta^4\pm252\alpha^5\beta^5+210\alpha^4\beta^6\pm120\alpha^3\beta^7+45\alpha^2\beta^8\pm10\alpha\beta^9+\beta^{10}$

11) $(1\pm\chi)^{11}=1\pm11\chi+55\chi^2\pm165\chi^3+330\chi^4\pm462\chi^5+462\chi^6\pm330\chi^7+165\chi^8\pm55\chi^9+11\chi^{10}\pm\chi^{11}$

12) $(1\pm\chi)^{12}=1\pm12\chi+66\chi^2\pm220\chi^3+495\chi^4\pm792\chi^5+924\chi^6\pm792\chi^7+495\chi^8\pm220\chi^9+66\chi^{10}\pm12\chi^{11}+\chi^{12}$

13) $(5-4\chi)^4=625-2000\chi+2400\chi^2-1280\chi^3+256\chi^4$

14) $(3-2\chi^2)^6=729-2916\chi^2+4860\chi^4-4320\chi^6+2160\chi^8-576\chi^{10}+64\chi^{12}$

15) $(\frac{1}{2}\chi+2\psi)^7=\frac{1}{128}\chi^7+\frac{7}{32}\chi^6\psi+\frac{21}{8}\chi^5\psi^2+\frac{35}{2}\chi^4\psi^3+70\chi^3\psi^4+168\chi^2\psi^5+224\chi\psi^6+128\psi^7$

16) $(\alpha^3+3\alpha\beta)^9=\alpha^{27}+27\alpha^{25}\beta+324\alpha^{23}\beta^2+2268\alpha^{21}\beta^3+10206\alpha^{19}\beta^4+30618\alpha^{17}\beta^5+61236\alpha^{15}\beta^6+78732\alpha^{13}\beta^7+59049\alpha^{11}\beta^8+19683\alpha^9\beta^9$

17) $(3\alpha\gamma-2\beta\delta)^5=243\alpha^5\gamma^5-810\alpha^4\gamma^4\beta\delta+1080\alpha^3\gamma^3\beta^2\delta^2-720\alpha^2\gamma^2\beta^3\delta^3+240\alpha\gamma\beta^4\delta^4-32\beta^5\delta^5$

18) $(5\alpha^2\gamma^2\delta-4\alpha\beta\delta^2)^4=625\alpha^8\gamma^8\delta^4-2000\alpha^7\beta\gamma^6\delta^5+2400\alpha^6\beta^2\gamma^4\delta^6-1280\alpha^5\beta^3\gamma^2\delta^7+256\alpha^4\beta^4\delta^8$

19) $(\frac{2\alpha\gamma}{\beta^2}+\frac{1}{4}\beta\gamma^2\delta)^6=64\alpha^6\gamma^6\beta^{-12}+48\alpha^5\gamma^7\delta\beta^{-9}$
$+15\alpha^4\gamma^8\delta^2\beta^{-6}+\frac{5}{2}\alpha^3\gamma^9\delta^3\beta^{-3}+\frac{15}{64}\alpha^2\gamma^{10}$

$$\delta^4 + \frac{3}{256}\alpha\beta^3\gamma^{11}\delta^5 + \frac{1}{4096}\beta^6\gamma^{12}\delta^6$$

20) $(\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta})^4 = \alpha^2 + 6\alpha\beta + \beta^2 \pm (4\alpha + 4\beta)\sqrt{\alpha\beta}$

21) $(\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta})^7 = (\alpha^3 + 21\alpha^2\beta + 35\alpha\beta^2 + 7\beta^3)\sqrt{\alpha} \pm (7\alpha^3 + 35\alpha^2\beta + 21\alpha\beta^2 + \beta^3)\sqrt{\beta}$

22) $(\alpha + \beta)^\nu + (\alpha - \beta)^\nu = 2\left(\alpha^\nu + \frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2}\alpha^{\nu-2}\beta^2 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\alpha^{\nu-4}\beta^4 + \frac{\nu\ldots\nu-5}{1\ldots 6}\alpha^{\nu-6}\beta^6 + \ldots\ldots\right)$ (1)

23) $(\alpha + \beta)^\nu - (\alpha - \beta)^\nu = 2\left(\frac{\nu}{1}\alpha^{\nu-1}\beta + \frac{\nu(\nu-1)}{1\,.\,2}\frac{(\nu-2)}{3}\alpha^{\nu-3}\beta^3 + \frac{\nu\ldots\nu-4}{1\ldots 5}\alpha^{\nu-5}\beta^5 + \frac{\nu\ldots\nu-6}{1\ldots 7}\alpha^{\nu-6}\beta^7 + \ldots\ldots\right)$

24) $(\alpha \pm \beta\sqrt{-1})^\nu = \alpha^\nu - \frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2}\alpha^{\nu-2}\beta^2 + \frac{\nu\ldots\nu-3}{1\ldots 4}\alpha^{\nu-4}\beta^4 - \text{κτλ} \pm \left(\frac{\nu}{1}\alpha^{\nu-1}\beta - \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1\,.\,2\cdot 3}\alpha^{\nu-3}\beta^3 + \frac{\nu\ldots\nu-4}{1\ldots 5}\alpha^{\nu-5}\beta^5 - \text{κτλ.}\right)\sqrt{-1}$

25) $\frac{(\alpha + \beta\sqrt{-1})^\nu - (\alpha - \beta\sqrt{-1})^\nu}{\sqrt{-1}} = 2\left[\nu\alpha^{\nu-1}\beta - \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1\cdot 2}\alpha^{\nu-3}\beta^3 + \frac{\nu\ldots\nu-4}{1\ldots 5}\alpha^{\nu-5}\beta^5 - \text{κτλ.}\right]$ (2)

26) $(\alpha + \beta\sqrt{-1})^\nu + (\alpha - \beta\sqrt{-1})^\nu =$

(1) Αἱ σειραὶ 22, 23, 24, 25, 26 ἐξακολουθοῦνται ἕως ὅτου νὰ ἀποκοπῶσι δηλ. ἕως ὅτου ὅλοι οἱ προσθέται νὰ γίνωσιν $= 0$.

(2) Ὅθεν τὸ $(\alpha + \beta\sqrt{-1})^\nu + (\alpha - \beta\sqrt{-1})^\nu$ καθὼς καὶ τὸ $[(\alpha + \beta\sqrt{-1})^\nu - (\alpha - \beta\sqrt{-1})^\nu] : \sqrt{-1}$ εἶναι πραγματικὴ ποσότης.

$$2\left[\alpha^\nu - \frac{\nu(\nu-1)}{1\,.\,2}\alpha^{\nu-2}\beta^2 + \frac{\nu\ldots\nu-3}{1\ldots 4}\alpha^{\nu-4}\beta^4 - \text{κτλ.}\right]$$

Προσδιορισμὸς ἰδίων ὅρων.

27) Ὁ $3^{ος}$ ὅρος τοῦ $(\alpha + \beta)^{15}$ εἶναι $= 105\alpha^{13}\beta^2$

28) — $5^{ος}$ — — $(\alpha + \beta)^{16}$ εἶναι $= 1820\alpha^{12}\beta^4$

29) — $6^{ος}$ — — $(\alpha + \beta)^{30}$ εἶναι $= -142506\alpha^{25}\beta^5$

30) — $4^{ος}$ ὅρος τοῦ $(\alpha - \beta)^{100}$ εἶναι $= -161700\alpha^{97}\beta^3$

31) — $5^{ος}$ — — $(\alpha^2 - \beta^2)^{12}$ εἶναι $= 495\alpha^{16}\beta^8$

32) — $9^{ος}$ — — $(2\alpha\beta - \gamma\delta)^{14}$ εἶναι $= 192192\alpha^6\beta^6\gamma^8\delta^8$

33) Ὁ μεσαίτατος ὅρος τοῦ $(\alpha - \beta)^{16}$ εἶναι $= 12870\alpha^8\beta^8$

34) — — — — $(\alpha - \beta)^{18}$ εἶναι $= -48620\alpha^9\beta^9$

35) Οἱ δύω μεσαίτατοι ὅροι τοῦ $(\alpha - \beta)^{17}$ εἶναι $24310\alpha^9\beta^8 - 24310\alpha^8\beta^9$

36) — — — — — $(\alpha - \beta)^{19}$ εἶναι $-92378\alpha^{10}\beta^9 + 92378\alpha^9\beta^{10}$

---

2) Τὸ Πολυώνυμον.

Τύποι.

I. Ἡ $\nu^{η}$ δύναμις τοῦ πολυωνύμου $\alpha + \beta + \gamma + \delta \ldots \ldots + \chi$ συνίσταται ἀπὸ τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν συνδυασμῶν μὲ ἐπαναλήψεις τῶν ποσοτήτων $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots\ldots \chi$ εἰς τὴν $\nu^{ην}$ τάξιν, ἂν ἔχῃ ἑκάστη τὸν ἀνήκοντα ἀριθμὸν τῆς μεταθέσεως.

II. Ὅθεν ὅταν τὸ πολυώνυμον $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots \ldots + \chi$ σύγκειται ἀπὸ μ ὅρους, τότε θέλει περιέχει ἡ δύναμις $\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots\ldots(\mu+\nu-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\nu}$ ὅρους. Τὸ κεφάλαιον τῶν ἐκθετῶν τοῦ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots\ldots \chi$, εἰς ἕκαστον ὅρον θέλει εἶναι $= \nu$, καὶ τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν προσθετῶν $= \mu^\nu$.

III. Ἂν τεθῇ διὰ συντομίαν τὸ $\beta + \gamma + \delta + \ldots\ldots + \chi = \pi$, τότε εἶναι:

$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots\ldots + \chi)^\nu = (\alpha + \pi)^\nu =$$
$$\alpha^\nu + \frac{\nu}{1}\alpha^{\nu-1}\pi + \frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2}\alpha^{\nu-2}\pi^2 + \ldots\ldots + \pi^\nu.$$

τύπος, ὁ ὁποῖος ἠμπορεῖ νὰ χρησιμεύσῃ εἰς πολλὰς περιπτώσεις μὲ ὄφελος.

Παραδείγματα.

1) $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + \beta^2 + 2\beta\gamma + \gamma^2$

2) $(\alpha+\beta+\gamma)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha^2\gamma + 3\alpha\beta^2 + 6\alpha\beta\gamma + 3\alpha\gamma^2 + \beta^3 + 3\beta^2\gamma + 3\beta\gamma^2 + \gamma^3$

3) $(\alpha+\beta+\gamma)^5 = \alpha^5 + 5\alpha^4\beta + 5\alpha^4\gamma + 10\alpha^3\beta^2 + 20\alpha^3\beta\gamma + 10\alpha^3\gamma^2 + 10\alpha^2\beta^3 + 30\alpha^2\beta^2\gamma + 30\alpha^2\beta\gamma^2 + 10\alpha^2\gamma^3 + 5\alpha\beta^4 + 20\alpha\beta^3\gamma + 30\alpha\beta^2\gamma^2 + 20\alpha\beta\gamma^3 + 5\alpha\gamma^4 + \beta^5 + 5\beta^4\gamma + 10\beta^3\gamma^2 + 10\beta^2\gamma^3 + 5\beta\gamma^4 + \gamma^5$

5) $(\alpha+\beta+\gamma)^6 = \alpha^6 + 6\alpha^5\beta + 6\alpha^5\gamma + 15\alpha^4\beta^2 + 30\alpha^4\beta\gamma + 15\alpha^4\gamma^2 + 20\alpha^3\beta^3 + 60\alpha^3\beta^2\gamma + 60\alpha^3\beta\gamma^2 + 20\alpha^3\gamma^3 + 15\alpha^2\beta^4 + 60\alpha^2\beta^3\gamma + 90\alpha^2\beta^2\gamma^2 + 60\alpha^2\beta\gamma^3 + 15\alpha^2\gamma^4 + 6\alpha\beta^5 + 30\alpha\beta^4\gamma + 60\alpha\beta^3\gamma^2 + 60\alpha\beta^2\gamma^3 + 30\alpha\beta\gamma^4 + 6\alpha\gamma^5 + \beta^6 + 6\beta^5\gamma + 15\beta^4\gamma^2 + 20\beta^3\gamma^3 + 15\beta^2\gamma^4 + 6\beta\gamma^5 + \gamma^6$

6) $(\alpha+\beta+\gamma)^7 = \alpha^7 + 7\alpha^6\beta + 7\alpha^6\gamma + 21\alpha^5\beta^2 + 42\alpha^5\beta\gamma + 21\alpha^5\gamma^2 + 35\alpha^4\beta^3 + 105\alpha^4\beta^2\gamma + 105\alpha^4\beta\gamma^2 + 35\alpha^4\gamma^3 + 35\alpha^3\beta^4 + 140\alpha^3\beta^3\gamma + 210\alpha^3\beta^2\gamma^2 + 140\alpha^3\beta\gamma^3 + 35\alpha^3\gamma^4 + 21\alpha^2\beta^5 + 105\alpha^2\beta^4\gamma + 210\alpha^2\beta^3\gamma^2 + 210\alpha^2\beta^2\gamma^3 + 105\alpha^2\beta\gamma^4 + 105\alpha^2\gamma^5 + 7\alpha\beta^6 + 42\alpha\beta^5\gamma + 105\alpha\beta^4\gamma^2 + 140\alpha\beta^3\gamma^3 + 105\alpha\beta^2\gamma^4 + 42\alpha\beta\gamma^5 + 7\alpha\gamma^6 + \beta^7 + 7\beta^6\gamma + 21\beta^5\gamma^2 + 35\beta^4\gamma^3 + 35\beta^3\gamma^4 + 21\beta^2\gamma^5 + 7\beta\gamma^6 + \gamma^7$

7) $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\alpha\delta + \beta^2 + 2\beta\gamma + 2\beta\delta + \gamma^2 + 2\gamma\delta + \delta^2$

8) $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha^2\gamma + 3\alpha^2\delta + 3\alpha\beta^2 + 6\alpha\beta\gamma + 6\alpha\beta\delta + 3\alpha\gamma^2 + 6\alpha\gamma\delta + 3\alpha\delta^2 + \beta^3 +$

$3\beta^2\gamma + 3\beta^2\delta + 3\beta\gamma^2 + 6\beta\gamma\delta + 3\beta\delta^2 + \gamma^3 + 3\gamma^2\delta + 3\gamma\delta^2 + \delta^3$

9) $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^4 = \alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 4\alpha^3\gamma + 4\alpha^3\delta + 6\alpha^2\beta^2 + 12\alpha^2\beta\gamma + 12\alpha^2\beta\delta + 6\alpha^2\gamma^2 + 12\alpha^2\gamma\delta + 6\alpha^2\delta^2 + 4\alpha\beta^3 + 12\alpha\beta^2\gamma + 12\alpha\beta^2\delta + 12\alpha\beta\gamma^2 + 24\alpha\beta\gamma\delta + 12\alpha\beta\delta^2 + 4\alpha\gamma^3 + 12\alpha\gamma^2\delta + 12\alpha\gamma\delta^2 + 4\alpha\delta^3 + \beta^4 + 4\beta^3\gamma + 4\beta^3\delta + 6\beta^2\gamma^2 + 12\beta^2\gamma\delta + 6\beta^2\delta^2 + 4\beta\gamma^3 + 12\beta\gamma^2\delta + 12\beta\gamma\delta^2 + 4\beta\delta^3 + \gamma^4 + 4\gamma^3\delta + 6\gamma^2\delta^2 + 4\gamma\delta^3 + \delta^4$

10) $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^5 = \alpha^5 + 5\alpha^4\beta + 5\alpha^4\gamma + 5\alpha^4\delta + 10\alpha^3\beta^2 + 20\alpha^3\beta\gamma + 20\alpha^3\beta\delta + 10\alpha^3\gamma^2 + 20\alpha^3\gamma\delta + 10\alpha^3\delta^2 + 10\alpha^2\beta^3 + 30\alpha^2\beta^2\gamma + 30\alpha^2\beta^2\delta + 30\alpha^2\beta\gamma^2 + 60\alpha^2\beta\gamma\delta + 30\alpha^2\beta\delta^2 + 10\alpha^2\gamma^3 + 30\alpha^2\gamma^2\delta + 30\alpha^2\gamma\delta^2 + 10\alpha^2\delta^3 + 5\alpha\beta^4 + 20\alpha\beta^3\gamma + 20\alpha\beta^3\delta + 30\alpha\beta^2\gamma^2 + 60\alpha\beta^2\gamma\delta + 30\alpha\beta^2\delta^2 + 20\alpha\beta\gamma^3 + 60\alpha\beta\gamma^2\delta + 60\alpha\beta\gamma\delta^2 + 20\alpha\beta\delta^3 + 5\alpha\gamma^4 + 20\alpha\gamma^3\delta + 30\alpha\gamma^2\delta^2 + 20\alpha\gamma\delta^3 + 5\alpha\delta^4 + \beta^5 + 5\beta^4\gamma + 5\beta^4\delta + 10\beta^3\gamma^2 + 20\beta^3\gamma\delta + 10\beta^3\delta^2 + 10\beta^2\gamma^3 + 30\beta^2\gamma^2\delta + 30\beta^2\gamma\delta^2 + 10\beta^2\delta^3 + 5\beta\gamma^4 + 20\beta\gamma^3\delta + 30\beta\gamma^2\delta^2 + 20\beta\gamma\delta^3 + 5\beta\delta^4 + \gamma^5 + 5\gamma^4\delta + 10\gamma^3\delta^2 + 10\gamma^2\delta^3 + 5\gamma\delta^4 + \delta^5$

11) $(\alpha + 2\beta - \gamma)^3 = \alpha^3 + 6\alpha^2\beta - 3\alpha^2\gamma + 12\alpha\beta^2 - 12\alpha\beta\gamma + 3\alpha\gamma^2 + 8\beta^3 - 12\beta^2\gamma + 6\beta\gamma^2 - \gamma^3$

12) $\left(3\alpha - 5\beta - \frac{2\gamma}{3}\right)^4 = 81\alpha^4 - 540\alpha^3\beta - 72\alpha^3\gamma + 1350\alpha^2\beta^2 + 360\alpha^2\beta\gamma + 24\alpha^2\gamma^2 - 1500\alpha\beta^3 - 600\alpha\beta^2\gamma - 80\alpha\beta\gamma^2 - \frac{32}{9}\alpha\gamma^3 + 625\beta^4 + \frac{1000}{3}\beta^2\gamma^2 + \frac{160}{27}\beta\gamma^3 + \frac{16}{81}\gamma^4$

13) $(7\alpha^2 - 3\alpha\beta + 4\beta^2)^3 = 343\alpha^6 - 441\alpha^5\beta + 777\alpha^4\beta^2 - 531\alpha^3\beta^3 + 444\alpha^2\beta^4 - 144\alpha\beta^5 + 64\beta^6$

14) $\left(\frac{2\beta^3\gamma}{3\alpha^4} + 7\alpha^2\beta - \frac{1}{2}\right)^6 = \frac{32}{243}\alpha^{-20}\beta^{15}\gamma^5 + \frac{400}{81}\alpha^{-14}\beta^{13}\gamma^4 - \frac{40}{81}\alpha^{-16}\beta^{12}\gamma^4 + \frac{3920}{27}\alpha^{-8}\beta^{11}\gamma^3 - \frac{560}{27}\alpha^{-10}\beta^{10}\gamma^3 + \frac{20}{27}\alpha^{-12}\beta^9\gamma^3 + \frac{13720}{9}\alpha^{-2}\beta^9\gamma^2 - \frac{980}{3}\alpha^{-4}\beta^8\gamma^2 +$

$\frac{79}{3}\alpha^{-6}\beta^{7}\gamma^{2} - \frac{4}{9}\alpha^{-8}\beta^{6}\gamma^{2} - \frac{24010}{3}\alpha^{4}\beta^{7}\gamma -$
$\frac{6860}{3}\alpha^{2}\beta^{6}\gamma + 2455\beta^{5}\gamma - \frac{35}{3}\alpha^{-2}\beta^{4}\gamma + \frac{5}{24}\alpha^{-4}\beta^{3}\gamma$
$+ 16807\alpha^{10}\beta^{5} - \frac{12005}{2}\alpha^{8}\beta^{4} + \frac{1715}{4}\alpha^{6}\beta^{3}$
$- \frac{245}{4}\alpha^{4}\beta^{2} + \frac{35}{16}\alpha^{2}\beta - \frac{1}{32}$

15) $\left(\frac{2\alpha\beta}{\gamma^{\mu}} - 5\alpha^{3}\gamma^{3\mu} - 3\alpha\beta^{2} + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^{3} = 8\alpha^{3}\beta^{3}\gamma^{-3\mu} -$
$60\alpha^{5}\beta^{2}\gamma^{\mu} - 36\alpha^{3}\beta^{4}\gamma^{-2\mu} + 6\alpha\beta^{3}\gamma^{-2\mu} +$
$150\alpha^{7}\beta\gamma^{5\mu} + 180\alpha^{5}\beta^{3}\gamma^{2\mu} - 30\alpha^{3}\beta^{2}\gamma^{2\mu} +$
$54\alpha^{3}\beta^{5}\gamma^{-\mu} - 18\alpha\beta^{4}\gamma^{-\mu} + \frac{3}{2}\alpha^{-1}\beta^{3}\gamma^{-\mu} - 125\alpha^{9}\gamma^{9\mu}$
$- 225\alpha^{7}\beta^{2}\gamma^{6\mu} + \frac{75}{2}\alpha^{5}\beta\gamma^{6\mu} - 135\alpha^{5}\beta^{4}\gamma^{3\mu}$
$+ 45\alpha^{3}\beta^{3}\gamma^{3\mu} - \frac{15}{4}\alpha\beta^{2}\gamma^{3\mu} - 27\alpha^{3}\beta^{6} +$
$\frac{27}{2}\alpha\beta^{5} - \frac{9}{4}\alpha^{-1}\beta^{4} + \frac{1}{8}\alpha^{-3}\beta^{3}$

α. ΛΟΓΟΙ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ.

Τί εἶναι λόγος δύω ποσοτήτων πρὸς ἀλλήλας; Ποῖος ὀνομάζεται ἀριθμητικὸς καὶ ποῖος γεωμετρικὸς λόγος; καὶ κατά τι διακρίνονται οἱ δύω αὐτοὶ λόγοι εἰς τὴν ἔκφρασίν των.— Τί εἶναι ἀναλογία καὶ ποῖα τὰ μέλη ἢ οἱ ὅροι αὐτῆς;— Ἀπὸ πόσους ὅρους σύγκειται ἑκάστη;— Τί εἶναι ἄκρα καὶ μέσα ἀναλογίας;— Πῶς ἀποδεικνύεται ὅτι εἰς ἑκάστην ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν τὸ κεφάλαιον τῶν μέσων εἶναι ἴσον μὲ το κεφάλαιον τῶν ἄκρων καὶ εἰς ἑκάστην γεωμετρικὴν τὸ γινόμενον αὐτῶν;—Μεταβάλλεται ἡ ἀξία γεωμετρικῆς ἀναλογίας, ὅταν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύω πρῶτοι ὅροι ἢ οἱ δύω τελευταῖοι ὅροι αὐτῆς ἢ καὶ οἱ δύω ἡγούμενοι ἢ οἱ δύω ἑπόμενοι μὲ ὁποιονδήποτε ἀριθμόν, καθὼς καὶ τῆς ἀριθμητικῆς;— Τί εἶναι εὐθὺς καὶ τί εἶναι ἀντίστροφος λόγος ἢ ἀναλογία;— Τί εἶναι ἁπλῆ καὶ τί σύνθετος ἀναλογία; ὁ λόγος δύω ποσοτήτων ἠμπορεῖ νὰ σύγκειται ἀπὸ δύω τρεῖς ἢ καὶ περισσοτέρους ἁπλοὺς λόγους;

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τοῦτο τὸ μέρος εἶναι πολλὰ σημαντικὸν καὶ ἡ

ἐφαρμογή του πολλὰ συνεχὴς καὶ ἐκτεταμένη εἰς τὴν ἄλγεβραν· καὶ ἐκτὸς τῶν προβλημάτων, τὰ ὁποῖα συνισοῦν χωριστὸν κεφάλαιον εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου τμήματος, ἀπαντῶνται καὶ ἄλλα πολλὰ εἰς τὸ τρίτον τμῆμα, τὰ ὁποῖα ἠμποροῦν νὰ λυθῶσιν εὐκολώτατα διὰ τούτου τοῦ τρόπου, ἐτέθησαν ὅμως ἐκεῖ, καθότι τὰ αὐτὰ ἐπιλύονται καὶ δι᾽ ἐξισώσεων.

16. Σειραί.

1) Ἀριθμητικαὶ σειραί.

I. Ἔσω ὁ πρῶτος ὅρος α, ὁ τελευταῖος ω, ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων ν, ἡ διαφορὰ δ καὶ τὸ κεφάλαιον τῆς ἀριθμητικῆς σειρᾶς κ· τότε εἶναι

1) $\omega = \alpha + (\nu - 1)\delta$

2) $\varkappa = (\alpha + \omega)\,\frac{\nu}{2} = [2\alpha + (\nu - 1)\delta]\,\frac{\nu}{2}$.

Δι' αὐτῶν τῶν δύω τύπων προσδιορίζονται αἱ ἀξίαι τοῦ ω καὶ κ, ὅταν αἱ ἀξίαι τοῦ α, δ, ν ἦναι δεδομέναι.

Παραδείγματα.

Ἀρ.	Δεδομέναι ἀξίαι·			Ζητούμενα·	
1	$\alpha = 1$,	$\delta = 1$	$\nu = 14$	$\omega = 14$	$\varkappa = 105$
2	$\alpha = 2$,	$\delta = 3$	$\nu = 17$	$\omega = 50$	$\varkappa = 442$
3	$\alpha = 7$	$\delta = \frac{1}{4}$	$\nu = 16$	$\omega = 10\frac{3}{4}$	$\varkappa = 142$
4	$\alpha = 2\frac{1}{2}$	$\delta = \frac{1}{3}$	$\nu = 100$	$\omega = 35\frac{1}{2}$	$\varkappa = 1900$
5	$\alpha = \frac{3}{4}$	$\delta = \frac{1}{8}$	$\nu = 26$	$\omega = 3\frac{7}{8}$	$\varkappa = 60\frac{1}{8}$
6	$\alpha = \frac{5}{7}$	$\delta = 1\frac{2}{3}$	$\nu = 13$	$\omega = 20\frac{5}{7}$	$\varkappa = 139\frac{2}{7}$
7	$\alpha = -7$	$\delta = 3$	$\nu = 8$	$\omega = 14$	$\varkappa = 28$
8	$\alpha = -6$	$\delta = \frac{3}{4}$	$\nu = 30$	$\omega = 15\frac{3}{4}$	$\varkappa = 146\frac{1}{4}$
9	$\alpha = \frac{1}{2}$	$\delta = -\frac{1}{8}$	$\nu = 20$	$\omega = -1\frac{7}{8}$	$\varkappa = -13\frac{3}{4}$
10	$\alpha = 3\frac{1}{3}$	$\delta = -2\frac{5}{6}$	$\nu = 15$	$\omega = -36\frac{1}{3}$	$\varkappa = -247\frac{1}{2}$
11	$\alpha = 0$	$\delta = \frac{1}{2}$	$\nu = 11$	$\omega = 5$	$\varkappa = 27\frac{1}{2}$
12	$\alpha = -10$	$\delta = -2$	$\nu = 6$	$\omega = -20$	$\varkappa = -90$
13	$\alpha = -\frac{3}{4}$	$\delta = -\frac{7}{8}$	$\nu = 25$	$\omega = -21\frac{3}{4}$	$\varkappa = -281\frac{1}{4}$

II. Ὅταν ἀπὸ τὰς πέντε ποσότητας α, δ, ν, ω, κ αἱ τρεῖς ἦναι δεδομέναι, ἠμποροῦν νὰ προσδιορισθῶσιν αἱ ἐπίλοιποι δύω· πρὸς τοῦτο χρησιμεύει ὁ ἑξῆς πίναξ.

Τύπων πίναξ τῆς ἀριθμητικῆς σειρᾶς.

Ἀρ	Διδόμενα	Ζητούμενα·	Τύποι.
1	α, δ, ν	ω	$\omega = \alpha + (\nu - 1)\delta$
2	α, δ, κ	ω	$\omega = \frac{1}{2}\delta \mp \sqrt{[2\delta\varkappa + (\alpha - \frac{1}{2}\delta)^2]}$
3	α, ν, κ	ω	$\omega = \frac{2\varkappa}{\nu} - \alpha$
4	δ, ν, κ	ω	$\omega = \frac{\varkappa}{\nu} + \frac{(\nu - 1)\delta}{2}$
5	α, δ, ν	κ	$\varkappa = \frac{1}{2}\nu[2\alpha + (\nu - 1)\delta]$
6	α, δ, ω	κ	$\varkappa = \frac{\alpha + \omega}{2} + \frac{(\omega + \alpha)(\omega - \alpha)}{2\delta}$
7	α, ν, ω	κ	$\varkappa = \frac{1}{2}\nu(\alpha + \omega)$
8	δ, ν, ω	κ	$\varkappa = \frac{1}{2}\nu[2\omega - (\nu - 1)\delta]$
9	α, ν, ω	δ	$\delta = \frac{\omega - \alpha}{\nu - 1}$
10	α, ν, ω	δ	$\delta = \frac{2\omega - 2\alpha\nu}{\nu(\nu - 1)}$
11	α, ω, κ	δ	$\delta = \frac{(\omega + \alpha)(\omega - \alpha)}{2\varkappa - \omega - \alpha}$
12	ν, ω, κ	δ	$\delta = \frac{2\nu\omega - 2\varkappa}{\nu(\nu - 1)}$

Ἀρ.	Διδόμενα	Ζητούμενα	Τύποι.
13	α, δ, ω		$\nu = 1 + \frac{\omega - \alpha}{\delta}$
14	α, δ, κ		$\nu = \frac{\delta - 2\alpha}{2\delta} \pm \sqrt{\left[\frac{2\kappa}{\delta} + \left(\frac{2\alpha - \delta}{2\delta}\right)^2\right]}$
15	α, ω, κ	ν	$\nu = \frac{2\kappa}{\alpha + \omega}$
16	δ, ω, κ		$\nu = \frac{2\omega + \delta}{2\delta} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{2\omega + \delta}{2\delta}\right)^2 - \frac{2\kappa}{\delta}\right]}$
17	δ, ν, ω		$\alpha = \omega - (\nu - 1)\delta$
18	δ, ν, κ	α	$\alpha = \frac{\kappa}{\nu} - \frac{(\nu - 1)\delta}{2}$
19	δ, ω, κ		$\alpha = \frac{1}{2}\delta \pm \sqrt{\left[\left(\omega + \frac{1}{2}\delta\right)^2 - 2\delta\kappa\right]}$
20	ν, ω, κ		$\alpha = \frac{2\kappa}{\nu} - \omega$

Τί εἶναι ἀριθμητικὴ σειρὰ τῆς πρώτης, δευτέρας, τρίτης κτλ. τάξεως; Καὶ πῶς παράγονται αἱ ἑπόμεναι τάξεις ἀπὸ τὴν σειρὰν τῆς πρώτης τάξεως α, $\alpha + \delta$, $\alpha + 2\delta$, $\alpha + 3\delta$ κτλ;

Τί εἶναι εἰκονικοὶ ἀριθμοί; Καὶ πῶς παράγονται ἀπὸ τὴν σειρὰν 1, $1 + \delta$, $1 + 2\delta$ κτλ. Τί εἶναι ἰδίως πολυγωνικοὶ καὶ πυραμιδικοὶ ἀριθμοί; (1)

(1) Η ὀρθότης τοῦ γενικοῦ ὅρου εἰς τὰς ἑπομέναις σειρὰς ἠμπορεῖ νὰ ἀποδειχθῇ εὐκολώτατα μὲ ἁπλὴν ἀφαίρεσιν, ἢ τὸ ἀνάπαλιν μὲ μόνην τὴν πρόσθεσιν· καθότι ἂν ἀφαιρέσῃ τις ἀπὸ τὸν γενικὸν ὅρον ἑκάστης σειρᾶς τὸν ἀμέσως προηγούμενον τούτου, εὑρίσκει τὸν γενικὸν ὅρον τῆς σειρᾶς, ἐκ τῆς ὁποίας ἐπροκύψε διὰ τῆς προσθέσεως· οὕτω, παραδείγματος χάριν, ἠμπορεῖ ἀπὸ τὸν γενικὸν ὅρον τῶν τριγωνικῶν ἀριθμῶν $\frac{\nu(\nu+1)}{1 \cdot 2}$ νὰ εὑρεθῇ ὁ γενικὸς ὅρος τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν $= \frac{\nu(\nu+1)}{1 \cdot 2} = \frac{(\nu-1)\nu}{1 \cdot 2} = \nu$

Σειραὶ τῆς πρώτης τάξεως μὲ τὸν ἀρχικὸν ὅρον 1,

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6 \ldots\ldots \nu$

$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11 \ldots\ldots 2\nu - 1$

$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16 \ldots\ldots 3\nu - 2$

$1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 17,\ 21 \ldots\ldots 4\nu - 3$

. . . .

$1,\ 1 + \delta,\ 1 + 2\delta,\ 1 + 3\delta \ldots, \ldots\ \delta\nu - \delta + 1$

Πολυγωνικοὶ ἀριθμοί.

$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21 \ldots\ldots \frac{\nu(\nu+1)}{1 \cdot 2}$

$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36 \ldots\ldots \nu^2$

$1,\ 5,\ 12,\ 22,\ 35,\ 51 \ldots\ldots \frac{\nu(3\nu-1)}{1 \cdot 2}$

$1,\ 6,\ 15,\ 28,\ 45,\ 66 \ldots\ldots \nu(2\nu-1)$

. . . .

$1,\ 2 + \delta,\ 3 + 3\delta,\ 4 + 6\delta \ldots\ldots \frac{\nu(\delta\nu - \delta + 2)}{1 \cdot 2}$

Πυραμιδικοὶ ἀριθμοί.

$1,\ 4,\ 10,\ 20,\ 35,\ 56\ \ldots\ldots \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}$

$1,\ 5,\ 14,\ 30,\ 55,\ 91\ \ldots\ldots \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3}$

$1,\ 6,\ 18,\ 40,\ 75,\ 126\ \ldots\ldots \frac{\nu^2(\nu+1)}{1\ .\ 2}$

$1,\ 7,\ 22,\ 50,\ 95,\ 161\ \ldots\ldots \frac{\nu(\nu+1)(4\nu-1)}{1\ .\ 2\ .\ 3}$

. . . .

$1,\ 3+\delta,\ 6+4\delta,\ 10+10\delta\ \ldots \frac{\nu(\nu+1)(\delta\nu-\delta+3)}{1\ .\ 2\ .\ 3}$

Σειραὶ, αἱ ὁποῖαι πηγάζουν ἐκ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν διὰ τῆς προθέσεως.

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\ \ldots\ldots\ \nu$

$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21\ \ldots\ldots \frac{\nu(\nu+1)}{1\ .\ 2}$

$1,\ 4,\ 10,\ 20,\ 35,\ 56\ \ldots\ldots \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}$

$1,\ 5,\ 15,\ 35,\ 70,\ 126\ \ldots\ldots \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4}$

x . o . x

2) Γεωμετρικαὶ σειραί.

I. Ἂν τεθῇ α ὁ πρῶτος ὅρος, π τὸ πηλίκον, ω ὁ τελευταῖος ὅρος, ν ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων καὶ x τὸ κεφάλαιον γεωμετρικῆς σειρᾶς· τότε εἶναι:

$$1)\ \omega = \alpha\pi^{\nu-1}$$

$$2)\ x = \frac{\pi\omega-\alpha}{\pi-1} = \frac{\alpha(\pi^{\nu}-1)}{\pi-1}$$

Διὰ τῶν δύο τύπων εὑρίσκονται αἱ ἀξίαι τοῦ ω καὶ x, ὅταν α, π, ν, καὶ δεδομένα.

Παραδείγματα.

Ἀρ.	Δεδομένα			Ζητούμενα	
1	$\alpha=1$,	$\pi=2$,	$\nu=7$	$\omega=64$	$x=127$
2	$\alpha=4$,	$\pi=3$,	$\nu=10$	$\pi=78732$,	$x=118096$
3	$\alpha=5$,	$\pi=4$,	$\nu=9$	$\omega=327680$,	$x=436905$
4	$\alpha=9$,	$\pi=\frac{7}{4}$,	$\nu=7$	$\omega=258\frac{2073}{4096}$,	$x=591\frac{2741}{4096}$,
5	$\alpha=6\frac{1}{4}$,	$\pi=\frac{3}{2}$,	$\nu=8$	$\omega=106\frac{403}{512}$,	$x=307\frac{441}{512}$,
6	$\alpha=6$,	$\pi=\frac{3}{4}$,	$\nu=6$	$\omega=1\frac{217}{512}$,	$x=19\frac{373}{512}$,
7	$\alpha=8$,	$\pi=\frac{1}{2}$,	$\nu=15$	$\omega=\frac{1}{2048}$,	$x=15\frac{2047}{2048}$,
8	$\alpha=3\frac{1}{2}$	$\pi=\frac{3}{5}$,	$\nu=8$	$\omega=\frac{15309}{156250}$,	$x=8\frac{[illegible]}{78125}$,
9	$\alpha=\frac{5}{6}$,	$\pi=\frac{2}{3}$,	$\nu=11$	$\omega=\frac{2560}{177147}$,	$x=2\frac{[illegible]}{[illegible]}$,
10	$\alpha=3$,	$\pi=\frac{7}{5}$,	$\nu=25$	$\omega=9642,59\ldots$,	$x=33741,59\ldots$
11	$\alpha=7\frac{1}{2}$,	$\pi=[illegible]$,	$\nu=31$	$\omega=60964,11\ldots$,	$x=235125,85\ldots$
12	$\alpha=63$,	$\pi=[illegible]$	$\nu=58$	$\omega=1238530,19\ldots$,	$x=7777637,01\ldots$
13	$\alpha=5560$,	$\pi=\frac{9}{11}$,	$\nu=40$	$\omega=2,219309\ldots$	$x=30570,01310\ldots$
14	$\alpha=393\frac{1}{2}$,	$\pi=\frac{5}{12}$,	$\nu=17$	$\omega=0,000324624\ldots$,	$x=674,2854824\ldots$
15	$\alpha=1$,	$\pi=\frac{1}{2}$,	$\nu=\infty$	$\omega=0$,	$x=2$
16	$\alpha=40$,	$\pi=\frac{3}{7}$,	$\nu=\infty$	$\omega=0$,	$x=70$
17	$\alpha=9$,	$\pi=\frac{2}{3}$,	$\nu=\infty$	$\omega=0$,	$x=27$

Εἰς τὰ παραδείγματα 10, 11, 12, 13, 14 εὑρίσκονται αἱ ἀξίαι τοῦ ω εὐκολώτερα μὲ λογαρίθμους, καὶ τότε ἠμπορεῖ νὰ εὑρεθῇ καὶ ἡ ἀξία τοῦ x εὔκολα.

. . . .

Τί εἶναι τὸ κεφάλαιον τῆς γεωμετρικῆς σειρᾶς ν ὅρων: $\alpha, \beta, \frac{\beta^2}{\alpha}, \frac{\beta^3}{\alpha^2}, \frac{\beta^4}{\alpha^3} \ldots\ldots \frac{\beta^{\nu-1}}{\alpha^{\nu-2}}$; Καὶ τί εἶναι τὸ κεφάλαιον αὐτῶν, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων ἦναι ἀόριστος ἢ καὶ ἄπειρος;

Ἀπόκρ. Τὸ κεφάλαιον τῆς πεπερασμένης σειρᾶς εἶναι $= \frac{\beta^\nu - \alpha^\nu}{(\beta-\alpha)\alpha^{\nu-2}} = \frac{\alpha^\nu - \beta^\nu}{(\alpha-\beta)\alpha^{\nu-2}}$ · καὶ τῆς ἀπείρου $= \frac{\alpha^2}{\alpha-\beta}$.

Τί εἶναι τὸ κεφάλαιον τῆς ἀορίστου γεωμετρικῆς σειρᾶς $\alpha - \beta + \frac{\beta^2}{\alpha} - \frac{\beta^3}{\alpha^2} + \frac{\beta^4}{\alpha^3} -$ κτλ.;

Ἀπ. $\frac{\alpha^2}{\alpha+\beta}$.

Πῶς ἠμπορεῖ νὰ ἐκφρασθῇ διὰ κοινοῦ κλάσματος τὸ περιοδικὸν κλάσμα $0{,}868686 \ldots\ldots = 86\,(0{,}01 + 0{,}0001 + 0{,}000001 + \ldots\ldots)$;

Ἀπ. Διὰ $\frac{86}{99}$.

Πῶς τὸ περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα $0{,}375375375\ldots$;

Ἀπ. Διὰ $\frac{375}{999} = \frac{125}{333}$.

Πῶς τὸ δεκαδικὸν κλάσμα $0{,}142857\ldots\ldots$, τοῦ ὁποίου ἡ περίοδος εἶναι 142857;

Ἀπ. Διὰ $\frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$

Ὅθεν κάθε ἀόριστον περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα ἠμπορεῖ νὰ ἐκφρασθῇ διὰ πεπερασμένου κλάσματος.

. . . .

I. Ὅταν ἀπὸ τὰς ποσότητας $\alpha, \pi, \nu, \omega, \varkappa$ τρεῖς εἶναι δεδομέναι, ἠμποροῦν πάντοτε αἱ λοιπαὶ δύω νὰ προσδιορισθῶσι καὶ τοῦτο χρησιμεύει ὁ ἑξῆς πίναξ.

Τύπων πίναξ τῶν γεωμετρικῶν σειρῶν

Ἀρ.	Διδόμενα	Ζητούμενα	Τύποι.
1	α, π, ν	ω	$\omega = \alpha\pi^{\nu-1}$
2	$\alpha, \pi, \varkappa$		$\omega = \frac{\alpha + (\pi-1)\varkappa}{\pi}$
3	$\alpha, \nu, \varkappa$		$\omega = \omega(\varkappa-\omega)^{\nu-1} - \alpha(\varkappa-\alpha)^{\nu-1} = 0$
4	$\pi, \nu, \varkappa$		$\omega = \frac{(\pi-1)\varkappa\pi^{\nu-1}}{\pi^\nu - 1}$
5	α, π, ν	$\varkappa$	$\varkappa = \frac{\alpha(\pi^\nu - 1)}{\pi-1}$
6	α, π, ω		$\varkappa = \frac{\omega\pi - \alpha}{\omega - 1}$
7	α, ν, ω		$\varkappa = \frac{\omega^{\frac{\nu}{\nu-1}} - \alpha^{\frac{\nu}{\nu-1}}}{(\pi-1)\pi^{\nu-1}}$
8	π, ν, ω		$\varkappa = \frac{\omega(\pi^\nu - 1)}{(\pi-1)\pi^{\nu-1}}$
9	π, ν, ω	α	$\alpha = \frac{\omega}{\pi^{\nu-1}}$
10	$\pi, \nu, \varkappa$		$\alpha = \frac{(\pi-1)\varkappa}{\pi^\nu - 1}$
11	$\pi, \omega, \varkappa$		$\alpha = \omega\pi - (\pi-1)\varkappa$
12	$\pi, \omega, \varkappa$		$\alpha(\varkappa-\alpha)^{\nu-1} - \omega(\varkappa-\omega)^{\nu-1} = 0$

Ἀρ.	Δεδόμενα	Ζητούμενα	Τύποι
13	α, ν, ω		$\pi = \sqrt[\nu-1]{\frac{\omega}{\alpha}}$
14	α, ν, κ	π	$\pi^{\nu} - \frac{\kappa}{\alpha}\pi + \frac{\kappa-\alpha}{\alpha} = 0$
15	α, ω, κ		$\pi = \frac{\kappa-\alpha}{\kappa-\omega}$
16	ν, ω, κ		$\pi^{\nu} - \frac{\kappa}{\kappa-\omega}\pi^{\nu-1} + \frac{\omega}{\kappa-\omega} = 0$
17	α, π, ω		$\nu = \frac{\lambda o\gamma.\,\omega - \lambda o\gamma.\,\alpha}{\lambda o\gamma.\,\pi} + 1$
18	α, π, κ	ν	$\nu = \frac{\lambda o\gamma\,[\alpha + (\pi - 1)\kappa] - \lambda o\gamma.\,\alpha}{\lambda o\gamma.\,\pi}$
19	α, π, κ		$\nu = \frac{\lambda o\gamma.\,\omega - \lambda o\gamma.\,\alpha}{\lambda o\gamma.\,(\kappa-\alpha) - \lambda o\gamma.\,(\kappa-\omega)} + 1$
20	π, ω, κ		$\nu = \frac{\lambda o\gamma.\,\omega - \lambda o\gamma.\,[\pi\omega - (\pi - 1)\kappa]}{\lambda o\gamma.\,\pi} + 1$

ΙΓʹ. Συνεχῆ κλάσματα.

1) Συνεχῆ κλάσματα ἐν γένει.

I. Συνεχὲς κλάσμα εἶναι κλάσμα τοῦ ἑξῆς σχήματος:

$$\cfrac{1}{\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \cfrac{1}{\varepsilon + \kappa\tau\lambda.}}}}}$$

τοῦ ὁποίου ἡ σημασία προκύπτει ἐκ τοῦ τρόπου, καθ' ὃν αὐτὸ γράφεται. Πρέπει ἐνταυτῷ νὰ ἐκληφθῇ, ὅτι αἱ ποσότητες α, β, γ, δ, ε, κτλ., αἱ ὁποῖαι ὀνομάζονται πηλίκα, εἶναι ὅλαι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ καὶ ὄχι μικρότεροι τῆς μονάδος. Τὰ κλάσματα

$$\frac{1}{\alpha},\ \cfrac{1}{\alpha + \cfrac{1}{\beta}},\ \cfrac{1}{\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma}}},\ \kappa\tau\lambda.$$

ὀνομάζονται προσεγγίσεως κλάσματα τοῦ αὐτοῦ, καθότι πραγματικῶς πλησιάζει τις εἰς τὸ δοθὲν κλάσμα, καθ' ὅσον ἐξακολουθεῖται ἡ ἐργασία.

II. Ἂν μεταβληθῶσιν αὐτὰ τὰ ἐκ προσεγγίσεως κλάσματα εἰς κοινὰ κλάσματα, προκύπτουν αἱ ἑπόμεναι προσεγγίζουσαι ἀξίαι:

1) $\frac{1}{\alpha}$

2) $\frac{\beta}{\alpha\beta + 1}$

3) $\frac{\beta\gamma + 1}{(\alpha\beta + 1)\gamma + \alpha}$

4) $\frac{(\beta\gamma + 1)\delta + \beta}{(\alpha\beta\gamma + \gamma + \alpha)\delta + \alpha\beta + 1}$

5) $\frac{(\beta\gamma\delta + \delta + \beta)\varepsilon + \beta\gamma + 1}{(\alpha\beta\gamma\delta + \gamma\delta + \alpha\delta + \alpha\beta + 1)\varepsilon + \alpha\beta\gamma + \gamma + \alpha}$

κ. ο. κ.

III. Αὗται αἱ προσεγγίζουσαι ἀξίαι ἠμποροῦν νὰ παραχθῶσιν ἡ μία ἐκ τῆς ἄλλης, ὡς ἕπεται. Ἔστω $\frac{\Pi}{\Sigma}$ ἡ $(\nu - 1)^{\eta}$ καὶ $\frac{T}{\Upsilon}$ ἡ $(\nu - 2)^{\alpha}$ ἀξία. Ἂς ἦναι πρὸς τούτοις π τὸ $\nu^{o\nu}$ τῶν πηλίκων

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$, κ. τ. λ., τότε ἡ νὴ προσεγγίζουσα ἀξία εἶναι $\frac{\pi\Sigma + T}{\pi\Sigma + Y}$.

IV. Τοιαύτη εὑρεθεῖσα προσεγγίζουσα ἀξία ἀπαντᾶται εἰς τὸ ἁπλοῦν της σχῆμα· ὁ ἀριθμητὴς καὶ παρωνομαστὴς αὐτῆς δὲν ἔχουν ποτὲ κοινὸν διαιρέτην.

V. Αἱ προσεγγίζουσαι ἀξίαι εἶναι ἐναλλὰξ μεγαλήτεραι καὶ μικρότεραι τῆς ἀξίας ὅλου τοῦ συνεχοῦς κλάσματος ἢ τῆς ποσότητος, μὲ τὴν ὁποίαν ἐκείνη εἶναι ἴση.

VI. Ἡ διαφορὰ μεταξὺ δύω πλησιεστάτων προσεγγιζουσῶν ἀξιῶν εἶναι ἐναλλὰξ θετικὴ καὶ ἀρνητική· αὐτὴ εἶναι πάντοτε κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς εἶναι $= 1$ καὶ ὁ παρωνομαστὴς γινόμενον τῶν παρωνομαστῶν τῶν δύω ἐκείνων ἀξιῶν.

VII. Ἂν μεταχειρισθῇ τις ὅλα τὰ πηλίκα εἰς προσδιορισμὸν τῆς προσεγγιζούσης ἀξίας, εὑρίσκει τὴν ἀξίαν ὅλου τοῦ συνεχοῦς κλάσματος.

VIII. Διὰ νὰ μεταβληθῇ ἡ ποσότης X, ὁποιουδήποτε σχήματος, εἰς συνεχὲς κλάσμα, δίδεται εἰς αὐτὴν τὸ σχῆμα $\alpha + \frac{1}{\chi}$, ὅπου α δεικνύει τὸν μεγαλήτερον εἰς τὸ X εὑρεθέντα ἀκέραιον ἀριθμὸν καὶ ἑπομένως ἠμπορεῖ νὰ ἦναι $= 0$, ὅταν ὑποθῇ τὸ $X < 1$. Ἐπίσης δίδουν εἰς τὸν παρωνομαστὴν X τὸ σχῆμα $\alpha' = \frac{1}{\chi'}$. Εἰς τὸν παρωνομαστὴν χ' τὸ σχῆμα $\alpha'' + \frac{1}{\chi''}$. Εἰς τὸν παρωνομαστὴν χ'' τὸ σχῆμα $\alpha''' + \frac{1}{\chi'''}$. κ. τ. λ.

ἂν ἐκληφθῶσι τὰ α', α'', α''', κτλ. ὡς οἱ μεγαλήτεροι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ περιεχόμενοι εἰς τὸ χ, χ', χ'', κτλ.
Τότε προκύπτει:

$$X = \alpha + \cfrac{1}{\alpha' + \cfrac{1}{\alpha'' + \cfrac{1}{\alpha''' + \text{κτλ.}}}}$$

Ἂν ἡ ποσότης X ἠμπορῇ πραγματικῶς νὰ ἐκφρασθῇ διὰ κοινοῦ κλάσματος, τότε περαιοῦται καὶ τὸ συνεχὲς κλάσμα. Εἰς τὴν ἐναντίαν ὅμως περίπτωσιν προχωρεῖ αὐτὸ ἐπ' ἄπειρον.

IX. Ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς ποσότητος X καὶ ὁποίας δήποτε προσεγγιζούσης ἀξίας εἶναι πάντοτε μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{\pi^2}$, ὅταν τὸ π παριστᾷ τὸν παρωνομαστὴν τῆς προσεγγιζούσης ἀξίας. Ἑπομένως εἶναι βέβαιον μέσον διὰ νὰ γνωρίζῃ τις, κατὰ πόσον πλησιάζει ἑκάστοτε εἰς τὴν ποσότητα X.

2) Ἀναγωγὴ τῶν κοινῶν κλασμάτων εἰς συνεχῆ.

Τὸ ἑπόμενον σχῆμα σαφηνίζει τὴν ἐργασίαν, τὴν ὁποίαν προκαὶ νὰ παρατηρήσῃ τις θεωρῶν καὶ τὴν γενικὴν ἀρχὴν εἰς τὸ VIII.

$$\frac{351}{965} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{87}}}}}$$

Παραδείγματα.

Ἀρ.	Διδόμενα κτλ.	Πηλίκα	Προσεγγίζουσαι ἀξίαι
1	$\frac{351}{965}$	2, 1, 2, 1, 87	$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{11}$
2	$\frac{251}{764}$	2, 22, 1, 4, 2	$\frac{1}{3}$, $\frac{22}{67}$, $\frac{23}{70}$, $\frac{114}{347}$
3	$\frac{1760}{5539}$	3, 7, 1, 2, 4, 5, 1, 2	$\frac{1}{3}$, $\frac{7}{22}$, $\frac{8}{25}$, $\frac{23}{72}$, $\frac{100}{313}$, $\frac{523}{1637}$, $\frac{623}{1950}$
4	$\frac{907}{18564}$	20, 2, 7, 5, 2, 1, 3	$\frac{1}{20}$, $\frac{2}{41}$, $\frac{15}{307}$, $\frac{77}{1576}$, $\frac{169}{3459}$, $\frac{246}{5035}$
5	$\frac{2047}{3339}$	1, 1, 2, 1, 1, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3	$\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{11}{19}$, $\frac{40}{69}$, $\frac{91}{157}$, $\frac{131}{226}$, $\frac{222}{383}$, $\frac{575}{992}$,
6	$\frac{487}{1943}$	3, 3, 4, 2, 3, 1, 1, 2	$\frac{1}{3}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{13}{43}$, $\frac{29}{96}$, $\frac{100}{331}$, $\frac{129}{427}$, $\frac{229}{758}$

Ἀρ.	Διδόμενα κτλ.	Πηλίκα	Προσεγγίζουσαι ἀξίαι
7	$\frac{50665}{135904}$	2, 1, 2, 1, 7, 1, 1, 1, 2, 1, 13	$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{31}{85}$, $\frac{35}{96}$, $\frac{66}{181}$, $\frac{101}{277}$, $\frac{268}{735}$, $\frac{369}{1012}$
8	$\frac{5743}{80937}$	14, 10, 1, 2, 1, 3, 3, 3, 3,	$\frac{1}{14}$, $\frac{10}{141}$, $\frac{11}{155}$, $\frac{32}{451}$, $\frac{43}{606}$, $\frac{161}{2269}$, $\frac{526}{7413}$, $\frac{1739}{24508}$
9	$\frac{13957}{59476}$	4, 3, 1, 4, 1, 2, 1, 11, 2, 6	$\frac{1}{4}$, $\frac{3}{13}$, $\frac{4}{17}$, $\frac{19}{81}$, $\frac{23}{98}$, $\frac{65}{277}$, $\frac{88}{375}$, $\frac{1033}{4402}$, $\frac{2154}{9179}$,
10	$\frac{3215763}{94218274}$	29, 3, 2, 1, 8, 1, 1, 6, κτλ.	$\frac{1}{29}$, $\frac{3}{88}$, $\frac{7}{205}$, $\frac{10}{293}$, $\frac{87}{2549}$, $\frac{97}{2842}$, $\frac{184}{5391}$, κτλ.

Ὁ σεληνιακὸς μὴν ἢ ὁ καιρὸς, καθ' ὃν ἡ σελήνη ἀποτελεῖ πραγματικῶς τὴν περίοδόν της εἰς τὸν οὐρανὸν, ἔχει 27,321661 ἡμέρας, ἂν ὑπολογισθῇ εἰς διάστημα ἑκατὸν ἐτῶν. Κατὰ τοῦτο ἤθελε κάμνει εἰς 27321661 ἡμέρας, 1000000 περιστροφάς. Πῶς ἠμπορεῖ νὰ ἐκφρασθῇ μὲ μικροτέρους ἀριθμοὺς οὗτος ὁ λόγος, ὁ ὁποῖος εἶναι ἐκφρασμένος διὰ τόσον μεγάλων ἀριθμῶν;

Ἀπ. Αἱ προσεγγίζουσαι ἀξίαι τοῦ 27,321661 εἶναι $\frac{27}{1}$, $\frac{82}{3}$, $\frac{765}{28}$, $\frac{3907}{143}$, κτλ. Ἂν ληφθῇ ἡ τρίτη, τότε κάμνει ἡ σελήνη 28 περιόδους εἰς 765 ἡμέρας, τὸ ὁποῖον διαφέρει κατὰ τὸ ἀληθὲς μόνον κατά τι ὑπὲρ 0,0001.

Κατὰ τὸν Λαπλάς, ἕνα τῶν καλητέρων μαθηματικῶν τοῦ αἰῶνος, διαρκεῖ ὁ καιρὸς τῆς ἰσημερινῆς περιόδου τοῦ Ἑρμοῦ 87,969255 καὶ ὁ τῆς Ἀφροδίτης 224,700817 ἡμέρας. Πῶς ἠμποροῦν νὰ παρασταθῶσιν αὐτοὶ οἱ καιροὶ τῆς περιόδου διὰ μικροτέρων ἀριθμῶν;

Ἀπ. Ὁ τοῦ Ἑρμοῦ διὰ $\frac{87}{1}$, $\frac{88}{1}$, $\frac{2815}{32}$, κτλ.
Τῆς Ἀφροδίτης διὰ $\frac{224}{1}$, $\frac{225}{1}$, $\frac{899}{4}$, $\frac{1573}{7}$, $\frac{2247}{10}$, $\frac{26290}{117}$, κτλ.
Τὰ κλάσματα $\frac{2815}{32}$ καὶ $\frac{26290}{117}$ τοὺς παριςοῦν ἀρκετὰ ἀκριβῶς.

Ἡ περιφέρεια κύκλου ἔχει πρὸς τὴν διάμετρον αὐτοῦ ὡς 3,14159265.. Πρὸς 1. Πῶς ἠμπορεῖ νὰ ἐκφρασθῇ ὁ λόγος οὗτος διά μικροτερων ἀριθμῶν;

Ἀπ. Διὰ 3 : 1. 22 : 7. 333 : 106; 355: 113. 103993 : 33102 : 33102. κ. ο. κ.

3) Μεταβολὴ τοῦ ῥιζικοῦ $\sqrt{A}$ εἰς συνεχὲς κλάσμα.

Ἐκλαμβάνεται ὅτι τὸ A εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς καὶ τότε τὸ ἑξῆς σχῆμα δεικνύει τὸν τρόπον τῆς ἐργασίας ἂν θεωρηθῇ καὶ ἡ γενικὴ ἀρχὴ τοῦ Η.

$$X = \sqrt{19} = 4 + \frac{\sqrt{19}-4}{1} \left(= \frac{1}{\chi}\right)$$
$$\chi = \frac{1}{\sqrt{19}-4} = \frac{\sqrt{19}+4}{3} = 2 + \frac{\sqrt{19}-2}{3} \left(= \frac{1}{\chi^{I}}\right)$$
$$\chi^{I} = \frac{3}{\sqrt{19}-2} = \frac{\sqrt{19}+2}{5} = 1 + \frac{\sqrt{19}-3}{5} \left(= \frac{1}{\chi^{II}}\right)$$
$$\chi^{II} = \frac{5}{\sqrt{19}-3} = \frac{\sqrt{19}+3}{2} = 3 + \frac{\sqrt{19}-3}{2} \left(= \frac{1}{\chi^{III}}\right)$$
$$\chi^{III} = \frac{2}{\sqrt{19}-3} = \frac{\sqrt{19}+3}{5} = 1 + \frac{\sqrt{19}-2}{5} \left(= \frac{1}{\chi^{IV}}\right)$$
$$\chi^{IV} = \frac{5}{\sqrt{19}-2} = \frac{\sqrt{19}+2}{3} = 2 + \frac{\sqrt{19}-4}{3} \left(= \frac{1}{\chi^{V}}\right)$$
$$\chi^{V} = \frac{3}{\sqrt{19}-4} = \frac{\sqrt{19}+4}{1} = 8 + \frac{\sqrt{19}-4}{1} \left(= \frac{1}{\chi^{VI}}\right)$$
$$\chi^{VI} = \frac{1}{\sqrt{19}-4} = \frac{\sqrt{19}+4}{3} = 2 + \text{κτλ.}$$

Ἑπομένως ἐδῶ τὰ πηλίκα εἶναι 4, 2, 1, 3, 1, 2, 8, 2, κτλ.

Παραδείγματα.

Ἀρ.	Δεδομέν. ῥιζικά.	Πηλίκα.	Προσεγγίζουσαι ἀξίαι.
1	$\sqrt{28}$	5, 3, 2, 8, 10, κτλ.	$\frac{5}{1}, \frac{16}{3}, \frac{37}{7}, \frac{127}{24}, \frac{1307}{247}$, κτλ
2	$\sqrt{31}$	5, 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10, κτλ.	$\frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \frac{11}{2}, \frac{39}{7}, \frac{206}{37}, \frac{657}{118}, \frac{863}{155}, \frac{1520}{273}, \frac{16063}{2885}$, κτλ.
3	$\sqrt{44}$	6, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 12, κτλ.	$\frac{6}{1}, \frac{7}{1}, \frac{13}{2}, \frac{20}{3}, \frac{53}{8}, \frac{73}{11}, \frac{126}{19}, \frac{199}{30}, \frac{2514}{379}$, κτλ.
4	$\sqrt{45}$	3, 1, 2, 2, 2, 1, 12, κτλ.	$\frac{6}{1}, \frac{7}{1}, \frac{20}{3}, \frac{47}{7}, \frac{114}{17}, \frac{161}{24}, \frac{2040}{305}$, κτλ.

Ἀρ.	Δεδομένα ῥιζικά.	Πηλίκα	Προσεγγίζουσαι ἀξίαι
5	$\sqrt{52}$	7, 4, 1, 2, 1, 4, 14, κτλ.	$\frac{7}{1}$, $\frac{29}{4}$, $\frac{36}{5}$, $\frac{101}{14}$, $\frac{137}{19}$, $\frac{649}{90}$, $\frac{9223}{1279}$, κτλ.
6	$\sqrt{53}$	7, 3, 1, 1, 3, 14, κτλ.	$\frac{7}{1}$, $\frac{22}{3}$, $\frac{29}{4}$, $\frac{51}{7}$, $\frac{182}{25}$, $\frac{2599}{357}$, κτλ.
7	$\sqrt{59}$	7, 1, 2, 7, 2, 1, 14, κτλ.	$\frac{7}{1}$, $\frac{8}{1}$, $\frac{23}{3}$, $\frac{169}{22}$, $\frac{361}{47}$, $\frac{530}{69}$, $\frac{7781}{1013}$, κτλ.
8	$\sqrt{67}$	8, 5, 2, 1, 1, 7, 1, 1, 2, 5, 16, κτλ.	$\frac{8}{1}$, $\frac{41}{5}$, $\frac{90}{11}$, $\frac{131}{16}$, $\frac{221}{27}$, $\frac{1678}{205}$, $\frac{1899}{232}$, $\frac{3577}{437}$, $\frac{9053}{1106}$, $\frac{48842}{5967}$, $\frac{790525}{96578}$, κτλ.

Μετὰ προσεκτικὴν παρατήρησιν τῶν πηλίκων διὰ τὸ ῥιζικὸν $\sqrt{A}$ εὑρίσκονται αἱ ἑξῆς ἰδιότητες.

1) Τὰ πηλίκα σχηματίζουν περιόδους καὶ ἐπομένως ἤθελεν εἶσθαι ἀρκετὸν ἂν εἰς τὰ ἄνω παραδείγματα ἦτον μόνον ἡ πρώτη δεδομένη. Αὐτὴ ἀρχίζει μὲ τὸ πρῶτον πηλίκον καὶ περαιοῦται μὲ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον εἶναι διπλάσιον τοῦ πρώτου.

2) Ἂν μεταβληθῇ τὸ τελευταῖον πηλίκον τῆς περιόδου, τὰ ἐπίλοιπα φυλάττουν τὴν ἑξῆς τάξιν:

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon \ldots\ldots\ldots\ldots \varepsilon,\ \delta,\ \gamma,\ \beta,\ \alpha$$

ὥστε ἡ συνέχεια καὶ τὸ μέγεθός των μένει ἀναλλοίωτον, ἂν γραφῶσι καὶ εἰς ἀντίστροφον τάξιν.

3) Ἂν παριστᾷ ἐν γένει $\frac{\pi}{\rho}$ τὴν προσεγγίζουσαν ἀξίαν, ἡ ὁποία ἀνήκει εἰς τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον προηγεῖται τοῦ τελευταίου πηλίκου ὁποιασδήποτε περιόδου· τότε εἶναι πάντοτε:

$$\pi^2 - A\rho^2 = \pm 1$$

Τὰ ἄνω παραδείγματα τὸ σαφηνίζουν, τοὐλάχιστον διὰ τὴν πρώτην περίοδον· καθότι εἶναι:

$$127^2 - 28\ .\ 24^2 = +1,$$
$$1520^2 - 31\ .\ 273^2 = +1,\ 199^2 - 44\ .\ 30^2 = +1,$$
$$161^2 - 45\ .\ 24^2 = +1,\ 649^2 - 52\ .\ 90^2 = +1,$$
$$182^2 - 53\ .\ 25^2 = -1,\ 530^2 - 59\ .\ 69^2 = +1,$$
$$48842^2 - 67\ .\ 5967^2 = +1.$$

4) Δηλαδὴ εἶναι $\pi^2 - A\rho^2 = +1$ ἐπίσης δι' ὅλας τὰς περιόδους, ὅταν ἡ περίοδος, ἥτις ἀνήκει εἰς τὸν ἀριθμὸν A, συνίσταται ἀπὸ ἄρτιον ἀριθμὸν πηλίκων· ὅταν ἐξεναντίας αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς ἦναι περιττὸς, τότε εἶναι $\pi^2 - A\rho^2$ ἐναλλὰξ $= -1$ καὶ $+1$.

5) Εἰς τὰς μεταβολὰς, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀναγκαῖαι διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν πηλίκων, ἐργάζεταί τις πάντοτε μὲ ἀκεραίους ἀριθμοὺς καὶ ποτὲ μὲ κλάσματα.

. . . .

Τὰ συνεχῆ κλάσματα, ἔχουν ἐκτὸς τῶν προειρημένων καὶ ἄλλας πολλὰς ἀξιοπαρατηρήτους ἰδιότητας. Αὐτὰ ἔχουν πρὸς τούτοις σημαντικωτάτην πρακτικὴν ἀξίαν. Διὰ τῆς βοηθείας αὐτῶν π. χ. εἶναι δυνατὸν νὰ παρασταθῶσι μὲ μεγάλην ἀκρίβειαν διὰ μικροτέρων ἀριθμῶν, ὅσοι λόγοι εἶναι ἐκφρασμένοι διὰ πολλὰ μεγάλων ἀριθμῶν καθὼς ἐδείχθη ἤδη εἰς προηγηθέντα παραδείγματα. Ἠμπορεῖ, δηλαδὴ, νὰ ἀποδειχθῇ αὐστηρῶς, ὅτι ὅταν γραφῶσιν οἱ ὅροι τοῦ λόγου εἰς σχῆμα κλάσματος καὶ ζητηθῶσιν αἱ προσεγγίζουσαι ἀξίαι αὐτοῦ, δὲν ἠμπορεῖ νὰ εὑρεθῇ κάμμία, ἥτις ἔπρεπε νὰ γραφῇ μὲ μικροτέρους ἀριθμοὺς, καὶ μ' ὅλον τοῦτο νὰ προσεγγίζῃ ἐνταυτῷ τὸ δοθὲν κλάσμα, καθὼς αἱ παριστάμεναι διὰ συνεχῶν κλασμάτων.

Μικρὸν ἀλλ' ἀρκετὰ ἐντελὲς καὶ εὐκρινέστατον σύγγραμμα περὶ τῶν συνεχῶν κλασμάτων, εἶναι τὸ ἑξῆς: « Διδασκαλία τῶν συνεχῶν κλασμάτων μὲ τὴν κυριωτάτην ἐφαρμογήν των εἰς τὴν ἀριθμητικὴν καὶ ἄλγεβραν, συγγραφὲν παρὰ Κ. Ι. Κάουσλερ. Στουτγάρδη 1803. » (Die Lehre von den kontinuirlichen Brüchen nebst ihren vorzüglichen Anwendungen auf Arithmetik und Algebra, vollstændig abgehandelt von C. J. Kausler. Stuttgard. 1803.) Ἐντελὲς, ἂν καὶ μόνον κατὰ τὸ ἀριθμητικὸν μέρος, εὑρίσκεται αὐτὸ τὸ ἀντικείμενον εἰς τὴν « θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν, σύγγραμμα τοῦ Λεζάνδρου » (Théorie des nombres par Legendre), ὅπου εὑρίσκονται πρὸς τοῖς ἄλλοις καὶ αἱ ἀποδείξεις τοῦ τελευταίου τῶν προηγηθέντων θεωρημάτων.

ΔΕΥΤΕΡΟΝ ΤΜΗΜΑ.

ΠΕΡΙΕΧΟΝ

ΤΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΪΚΑΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.

θ. *Ἀκριβὴς λύσις τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων καὶ ἄλλαι τινὲς παρατηρήσεις*

1) Ἐξισώσεις ἐν γένει.

I. Ἐξίσωσις ἐν γένει, χωρὶς πλησιέστερον προσδιορισμὸν, δὲν εἶναι ἄλλο παρὰ ἴσωσις δύω ἐκφράσεων· αὗται ὀνομάζονται μέλη τῆς ἐξισώσεως. ἡ ἐξίσωσις, ὅταν δὲν ἦναι ταυτότης, εἶναι ἀναλυτικὴ ἢ ἀλγεβραϊκή,

II. Ἀναλυτικὴ ἐξίσωσις εἶναι ἐκείνη, ὅπου ἡ ἰσότης δύω μελῶν ἠμπορεῖ νὰ ἀποδειχθῇ διὰ μόνης τῆς ἐξηγήσεως τῶν σημείων καὶ σημειωμένων ἰδεῶν ἀμέσως ἢ καὶ διὰ σειρᾶς πορισμάτων. Ἐπομένως πρέπει νὰ προκύψωσιν ὅλαι αἱ μεταβολαὶ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀναγκαῖαι διὰ νὰ δοθῇ τὸ σχῆμα τοῦ ἑνὸς μέλους καὶ εἰς τὸ ἄλλο, διὰ μόνης τῆς ἐξηγήσεως τῶν σημείων καὶ τῶν σημειωμένων ἰδεῶν. Ὅλαι αἱ εἰς τὸ προλαβὸν τμῆμα ἀπαντηθεῖσαι ἐξισώσεις ἦσαν σχεδὸν αὐτοῦ τοῦ εἴδους. Ἂν περιέχωσι γράμματα, εἶναι ἀδιάφορον ὁποῖαι ἀξίαι δίδονται εἰς αὐτά, τὰ δύω μέλη μένουν πάντοτε ἴσα μεταξύ των.

III. Ἐξεναντίας ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις εἶναι ἐκείνη, ἥτις τότε μόνον ἠμπορεῖ νὰ ἀληθεύσῃ, ὅταν δίδωνται εἰς τὰς ἐν αὐτῇ περιλαμβανομένας, μὲ γράμματα σημειωμένας ποσότητας, σταθεραὶ καὶ ὄχι ἑκούσιαι ἀριθμῶν ἀξίαι, ἢ τοὐλάχιστον ὅταν εὑρίσκεται εἰς μίαν αὐτῶν τοιοῦτος λόγος πρὸς τὰς ἄλλας, ὥστε καταντᾷ ἡ ἐξίσωσις ἀναλυτική, δηλ: τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὴν ἀξίαν τῶν ἐπιλοίπων. Τοῦ αὐτοῦ εἴδους εἶναι σχεδὸν ὅλαι αἱ εἰς τὸ παρὸν τμῆμα ἀπαντώμεναι ἐξισώσεις.

IV. Ἡ Ἄλγεβρα εἶναι ἐπιστήμη τῆς παραγωγῆς τοῦ ζητουμένου ἀπὸ τὸ δοθὲν διὰ σημείων καὶ ἐξισώσεων. Ὅθεν ἀντικείμενον ἔχει τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων. Τὸ πρόβλημα καταμελίζεται, εὑρίσκονται σχέσεις μεταξὺ τοῦ ζητουμένου καὶ δοθέντος καὶ αὗται αἱ σχέσεις παριστῶνται διὰ τῶν σημείων καὶ ἐξισώσεων, χωρὶς νὰ γίνῃ καμμία ἄλλη διαφορὰ μεταξὺ τοῦ δοθέντος καὶ ζητουμένου, παρὰ ἡ τῶν σημείων. Τὰ τελευταῖα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου χρησιμεύουν συνήθως πρὸς δεῖξιν τοῦ ζητουμένου.

V. Ἡ ἀλάλυσις τῶν νεωτέρων καταγίνεται μόνον εἰς τὴν μεταβολὴν τῶν σχημάτων καὶ ἑπομένως μόνον εἰς ἀναλυτικὰς ἐξισώσεις. Ἡ ἀνάλυσεις τῶν νεωτέρων εἶναι ἑπομένως οὐσιωδῶς διάφορος ἀπὸ τὴν ἄλγεβραν, μ' ὅλον ὅτι μένουν ἑνωμέναι εἰς τὰ ὑψηλότερά των μέρη καὶ δὲν ἠμποροῦν νὰ ἀποποιηθῶσι τὴν ἀμοιβαίαν των βοήθειαν. Ὅ,τι ἐννοεῖται συνήθως ὑπὸ τὸ ὄνομα *ἄλγεβρα*, περιέχει μόνον τὰ στοιχεῖα τούτου τοῦ πολλὰ ἐκτεταμένου κλάδου τῆς ἐπιστήμης τοῦ μεγέθους.

V. Ἡ ἀνάλυσις τῶν παλαιῶν ἐξεναντίας δὲν διαφέρει οὐσιωδῶς πολὺ ἀπὸ τὴν ἄλγεβραν. Ἡ τελευταία ἔχει μόνον τὸ σημαντικώτατον προτέρημα τῆς ἐπιστημονικῆς ἐκφράσεως. Ἐκτὸς τούτου καὶ αἱ δύω καταγίνονται εἰς τὴν παραγωγὴν τοῦ ζητουμένου ἀπὸ τὸ δοθέν, δι' ἀναζητήσεως τῶν ἀμοιβαίων σχέσεών των, καὶ

διὰ τῆς ἐπαναγωγῆς τῶν αὐτῶν εἰς ἁπλουστέρας καὶ ὀλιγώτερον περιπεπλεγμένας.

VII. Τὸ πῶς αἱ ἐξισώσεις τροποποιοῦνται καὶ λύονται, διδάσκεται εἰς μαθηματικὰ βιβλία, τὰ ὁποῖα πραγματεύονται ἰδίως περὶ αὐτοῦ. Μ' ὅλον τοῦτο τὸ ἑξῆς πρέπει καλῶς νὰ παρατηρηθῇ, καθότι ἀρχάριοι σφάλλουν ὡς ἐπιτοπλεῖστον εὐκόλως κατὰ τοῦτο εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων. Πρὸς ἐντελῆ προσδιορισμὸν τῶν ζητουμένων ποσοτήτων διὰ τῶν δοθεισῶν, χρειάζονται τόσαι ἐξισώσεις, ὅσαι καὶ ζητούμεναι ποσότητες εὑρίσκονται. Ἀπὸ αὐτὰς ὅμως τὰς ἐξισώσεις δὲν πρέπει νὰ ἦναι καμμία ἀναλυτική, ἐπίσης δὲν πρέπει καμμία ἀπὸ αὐτὰς νὰ ἦναι ἀναγκαῖον πόρισμα τῶν ἐπιλοίπων καὶ νὰ παράγεται ἀπὸ αὐτάς. Ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι δὲν ἐκπληροῦν τὰς δύω ταύτας συνθήκας, πρέπει νὰ ἀποβάλλωνται ὡς ἄχρηστοι πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος.

---

2) Ἐξισώσεις τοῦ πρώτου βαθμοῦ.

α) Μὲ μίαν ἄγνωστον.

1) Ἐξ. $\alpha\chi \pm \beta = \gamma$ (1)

Α. $\chi = \frac{\gamma \mp \beta}{\alpha}$

2) Ἐξ. $3\alpha + \chi - 5\beta + 2 = 7\beta - \alpha + \gamma + 6$

Α. $\chi = 12\beta - 4\alpha + \gamma + 4$

---

(1) Ἐξ. σημαίνει ἐξίσωσις καὶ Α. Λύσις.

3) Ἐξ. $7 - 9\alpha - 5\chi + 3\gamma\delta + \chi = \frac{7}{4} - 3\alpha - 2\gamma\delta - 2\chi$

A. $\chi = \frac{21}{8} - 3\alpha + \frac{5}{2}\gamma\delta$

4) Ἐξ. $8\chi - 5 = 13 - 7\chi$

A. $\chi = 1\frac{1}{5}$

5) Ἐξ. $13\frac{3}{4} - \frac{\chi}{2} = 2\chi - 8\frac{3}{4}$

A. $\chi = 9$

6) Ἐξ. $2\chi + 7 + \frac{1}{2}\chi = 5\chi - 23$

A. $\chi = 12$

7) Ἐξ. $12\frac{1}{4} + 3\chi - 6 - \frac{7\chi}{3} = \frac{3\chi}{4} - 5\frac{3}{8}$

A. $\chi = 139\frac{1}{2}$

8) Ἐξ. $-6\frac{1}{3}\chi + 158\frac{1}{2} - 10\chi = -\frac{37\chi}{6} + 19 + \frac{3}{8}\chi$

A. $\chi = 13\frac{59}{253}$

9) Ἐξ. $8\frac{1}{4} + \frac{3\chi}{7} - \frac{5}{6} + 2\chi - \frac{12\chi}{5} + 13 + \frac{\chi}{4} = 0$

A. $\chi = -75\frac{10}{117}$

10) Ἐξ. $\frac{3\chi}{5} - \frac{7\chi}{10} + \frac{3\chi}{4} - \frac{7\chi}{8} = -15$

A. $\chi = 66\frac{2}{3}$

11) Ἐξ. $3\frac{2}{3} - \chi - \frac{9\chi}{2} + 8 = -17 - \frac{3\chi}{5} + \frac{3}{2}\chi$

A. $\chi = 4\frac{23}{48}$

12) Ἐξ. $\frac{\chi}{2} + \frac{\chi}{3} + \frac{\chi}{4} = 7\chi - 712 + \frac{\chi}{5}$

A. $\chi = 116\frac{148}{367}$

13) Ἐξ. $11\frac{1}{2}\chi = \frac{11\chi}{8} + 66\frac{3}{8} - 5\chi - 9\frac{1}{4}$

A. $\chi = 3\frac{94}{121}$

14) Ἐξ. $-\frac{10\chi}{7} = -\frac{1}{2}\chi + 412\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\chi - 316\frac{1}{2}$

A. $\chi = -80\frac{80}{88}$

15) Ἐξ. $32\frac{1}{10}\chi + 176\frac{3}{4} - \chi = 19\frac{1}{5}\chi + 7345 - \frac{2\chi}{3}$

A. $\chi = 576\frac{390}{746}$

16) Ἐξ $3{,}25\chi - 5{,}007 - \chi = 0{,}2 - 0{,}34\chi$

A. $\chi = 2{,}010424\ \ldots$

17) Ἐξ. $13{,}2\cdot\chi - \frac{3\chi}{4} + 7{,}6953 = \frac{\chi}{5} + 7834{,}5$

A. $\chi = 638{,}92283\ \ldots$

18) Ἐξ. $\frac{7{,}53\chi}{18} + 100 = \frac{2\chi}{5} + 3{,}86 - \frac{\chi}{6}$

A. $\chi = -519{,}67567\ \ldots$

19) Ἐξ. $\alpha\chi + \gamma = \beta\chi + \delta$

A. $\chi = \frac{\delta - \gamma}{\alpha - \beta}$

20) Ἐξ. $\frac{\eta^2\chi}{\gamma\theta} - \frac{\alpha^2}{\eta} + \gamma\chi = \frac{\kappa\chi}{\theta} - \gamma + (\alpha + \gamma)\chi$

A. $\chi = \frac{(\alpha^2 - \gamma\eta)\gamma\theta}{(\eta^2 - \gamma\kappa - \alpha\gamma\theta)\eta}$

21) Ἐξ. $\chi = \alpha + \frac{\beta\gamma}{\delta} + \frac{\gamma\rho\chi}{\delta\varepsilon}$

A. $\chi = \frac{(\alpha\delta + \beta\gamma)\varepsilon}{\delta\varepsilon - \gamma\rho}$

22) Ἐξ. $\frac{\varepsilon\chi}{\eta} + \frac{\gamma\chi}{\delta} + \frac{\alpha\chi}{\beta} - \theta = \kappa$

A. $\chi = \frac{(\kappa + \theta)\beta\delta\eta}{\beta(\delta\varepsilon + \gamma\eta) + \alpha\delta\eta}$

23) $\frac{3}{5}\alpha\beta + \frac{4}{5}\alpha\gamma - \frac{3}{5}\gamma\chi = \frac{3}{4}\alpha\gamma + 2\alpha\beta - \beta\gamma\chi$

A. $\chi = \frac{(70\beta - 3\gamma)\alpha}{320\gamma}$

24) Ἐξ. $\frac{\chi}{\alpha} - 1 - \frac{\delta\chi}{\gamma} + 3\alpha\beta = 0$

Α. $\chi = \frac{\alpha\gamma(1 - 3\alpha\beta)}{\gamma - \alpha\delta}$

25) Ἐξ. $\frac{\alpha\gamma\varepsilon}{\delta} - \frac{(\alpha+\beta)^2\chi}{\alpha} - \beta\chi = \alpha\varepsilon - 3\beta\chi$

Α. $\chi = \frac{\alpha^2\varepsilon(\gamma - \delta)}{(\alpha^2+\beta^2)\delta}$

26) Ἐξ. $\frac{\alpha + 3\chi}{4\alpha} - \frac{7\alpha - 5\chi}{6\beta} + 3 - \frac{9\chi}{4} = \frac{\chi}{\alpha\beta} + \frac{5\chi}{6\beta}$

Α. $\chi = \frac{39\alpha\beta - 14\alpha^2}{27\alpha\beta - 9\beta + 12}$

27) Ἐξ. $5\alpha^3\gamma\chi + \alpha\gamma^2\chi - 5\alpha\beta\gamma^2 - 3\alpha^3\gamma^3 = 5\alpha^2\beta\gamma\chi + \beta\gamma^2\chi - 3\alpha^2\beta\gamma^3 - 5\alpha^2\gamma^2$

Α. $\chi = \frac{3\alpha^2\gamma^2 - 5\alpha\gamma}{5\alpha^2 + \gamma}$

28) Ἐξ. $2\alpha^2\beta^2\gamma + \alpha\beta^2\chi - 2\alpha\beta^3\gamma - \alpha\beta\gamma^2\delta - 3\alpha^3\chi = (\beta^3 - 3\alpha^2\beta)\chi - \beta^2\gamma\delta$

Α. $\chi = \frac{2\alpha\beta^2\gamma - \beta\gamma^2\delta}{3\alpha^2 - \beta^2}$

29) Ἐξ. $\frac{\alpha\beta}{\chi} = \beta\gamma + \delta + \frac{1}{\chi}$

Α. $\chi = \frac{\alpha\beta - 1}{\beta\gamma + \delta}$

30) Ἐξ. $\frac{3\alpha + \chi}{\chi} - 5 = \frac{\beta}{\chi}$

Α. $\chi = \frac{3\alpha - \beta}{4}$

31) Ἐξ. $\frac{\alpha^2\chi}{\beta - \gamma} + \delta\gamma = \beta\chi - \alpha\gamma$

Α. $\chi = \frac{\gamma(\alpha+\delta)(\beta-\gamma)}{\beta(\beta-\gamma) - \alpha^2}$

32) Ἐξ. $\gamma = \alpha + \frac{\mu(\alpha - \chi)}{3\alpha + \chi}$

Α. $\chi = \frac{\alpha(\mu - 3\gamma + 3\alpha)}{\gamma - \alpha + \mu}$

33) Ἐξ. $\frac{\alpha(\delta^2 + \chi^2)}{\delta\chi} = \alpha\gamma + \frac{\alpha\chi}{\delta}$

Α. $\chi = \frac{\delta}{\gamma}$

34) Ἐξ. $\frac{\gamma\chi^\mu}{\alpha + \beta\chi} = \frac{\eta\chi^\mu}{\delta + \varepsilon\chi}$

Α. $\chi = \frac{\gamma\delta - \alpha\eta}{\beta\eta - \gamma\varepsilon} = \frac{\alpha\eta - \gamma\delta}{\gamma\varepsilon - \beta\eta}$

35) Ἐξ. $\frac{7\chi^\nu}{\chi - 1} = \frac{6\chi^{\nu+1} + \chi^\nu}{\chi + 1} - \frac{3\chi^\nu + 6\chi^{\nu+2}}{\chi^2 - 1}$

Α. $\chi = -\frac{11}{12}$

36) Ἐξ. $\frac{3\alpha - 5\chi}{\alpha - \gamma} + \frac{2\alpha - \chi}{\delta} = \frac{\alpha + \eta}{\alpha - \gamma} - \delta\chi$

Α. $\chi = \frac{\delta(\eta - 2\alpha) - 2\alpha(\alpha - \gamma)}{(\alpha - \gamma)(\delta^2 - 1) - 5\delta}$

37) Ἐξ. $\frac{\alpha}{\beta\chi} + \frac{\gamma}{\delta\chi} - \frac{\varepsilon}{\zeta\chi} + \frac{\eta}{\theta\chi} = \kappa$

Α. $\chi = \frac{\alpha\delta\zeta\theta + \beta\gamma\zeta\theta + \beta\delta\varepsilon\theta + \beta\delta\zeta\eta}{\beta\delta\zeta\theta\kappa}$

38) Ἐξ. $\frac{3\alpha^2\beta\gamma}{\alpha + \beta} + \frac{\alpha^2\beta^2}{(\alpha+\beta)^3} + \frac{(2\alpha+\beta)\beta^2\chi}{\alpha(\alpha+\beta)^2} = 3\gamma\chi + \frac{\beta\chi}{\alpha}$

Α. $\chi = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}$

39) Ἐξ. $\frac{\beta\chi}{2\beta - \alpha} - \frac{(3\beta\gamma + \alpha\delta)\chi}{2\alpha\beta(\alpha+\beta)} - \frac{5\alpha\beta}{3\gamma - \delta} = \frac{(3\beta\gamma - \alpha\delta)\chi}{2\alpha\beta(\alpha - \beta)} - \frac{5\alpha(2\beta - \alpha)}{\alpha^2 - \beta^2}$

Α. $\chi = \frac{5\alpha(2\beta - \alpha)}{3\gamma - \delta}$

40) 'Εξ. $(\alpha+\chi)(\beta+\chi)-\alpha(\beta+\gamma)=\frac{\alpha^2\gamma}{\beta}+\chi^2$

Α. $\chi=\frac{\alpha\gamma}{\beta}$

41) 'Εξ. $\sqrt[\mu]{\chi}=\alpha$

Α. $\chi=\alpha^{\mu}$

42) 'Εξ. $\sqrt[\mu]{(\alpha\chi+\beta)}=\sqrt[\mu]{(\gamma\chi+\delta)}$

Α. $\chi=\frac{\delta-\beta}{\alpha-\gamma}$

43) 'Εξ. $\theta\sqrt[3]{(\alpha\chi-\beta)}=\varkappa\sqrt[3]{(\gamma\chi+\delta\chi-\zeta)}$

Α. $\chi=\frac{\beta\theta^3-\zeta\varkappa^3}{\alpha\theta^3-(\gamma+\delta)\varkappa^3}$

44) 'Εξ. $\sqrt{\tfrac{2}{2}}\sqrt[6]{\chi}+4\sqrt[3]{\chi}=2\sqrt[6]{\chi}+1$

Α. $\chi=64$

45) 'Εξ. $\sqrt{(\alpha^2+\gamma)}=\sqrt[4]{\frac{\alpha^2+\gamma}{\delta(\chi+\eta)}}$

Α. $\chi=\frac{1}{\delta\sqrt[3]{(\alpha^2+\gamma)}}-\eta$

46) 'Εξ. $\sqrt[4]{\left(\frac{(\chi^3+5)\,12}{13}\right)}=\chi$

Α. $\chi=5$

47) 'Εξ. $\sqrt[\mu]{(\alpha+\chi)}=\sqrt[2\mu]{(\chi^2+5\alpha\chi+\beta^2)}$

Α. $\chi=\frac{\alpha^2-\beta^2}{3\alpha}$

48) 'Εξ. $\gamma-\beta\sqrt[\mu]{(\chi+\delta)}=\zeta$

Α. $\chi=\left(\frac{\zeta-\gamma}{\beta}\right)^{\mu}-\delta$

49) 'Εξ. $\frac{\alpha\chi}{\beta}\sqrt{(\zeta^2\chi^2+\delta^2)}+\frac{\alpha\zeta\chi^2}{\beta}=\gamma\chi$

Α. $\chi=\frac{\beta^2\gamma^2-\alpha^2\delta^2}{2\alpha\beta\gamma\zeta}=\frac{(\beta\gamma+\alpha\delta)(\beta\gamma-\alpha\delta)}{2\alpha\beta\gamma\zeta}$

50) 'Εξ. $\alpha^{\chi}=\beta$

Α. $\chi=\frac{\lambda o\gamma : \beta}{\lambda o\gamma : \alpha}$

51) 'Εξ. $\alpha^{\mu\chi}\,\beta^{\nu\chi}=\gamma$

Α. $\chi=\frac{\lambda o\gamma : \gamma}{\mu\lambda o\gamma : \alpha+\nu\lambda o\gamma\beta}=\frac{\lambda o\gamma\gamma}{\lambda o\gamma\,\alpha^{\mu}\beta^{\nu}}$

52) 'Εξ. $\alpha^{\mu\chi+\zeta}\beta^{\nu\chi+\eta}=\gamma^{\pi\chi+\theta}\delta^{\rho\chi+\varkappa}$

Α. $\chi=\frac{\theta\lambda o\gamma\gamma+\varkappa\lambda o\gamma\delta-\zeta\lambda o\gamma\alpha-\eta\lambda o\gamma\beta}{\mu\lambda o\gamma\alpha+\nu\lambda o\gamma\beta-\pi\lambda o\gamma\gamma-\rho\lambda o\gamma\delta}=$

$$\left(\lambda o\gamma\frac{\gamma^{\theta}\delta^{\varkappa}}{\alpha^{\zeta}\beta^{\eta}}\right):\left(\lambda o\gamma\frac{\alpha^{\mu}\beta^{\nu}}{\gamma^{\pi}\delta^{\rho}}\right)$$

53) 'Εξ. $\alpha\gamma^{\mu\chi}-\beta\gamma^{\frac{\mu\chi}{2}}=\delta$

Α. $\chi=\frac{2}{\mu.\lambda o\gamma\gamma}\times\lambda o\gamma\left[\frac{\beta\pm\sqrt{(\beta^2+4\alpha\delta)}}{2\alpha}\right]$

54) 'Εξ. $3^{\chi}=177147$

Α. $\chi=11$

55) 'Εξ. $2^{\chi}=769$

Α. $\chi=9{,}586839\ldots$

56) 'Εξ. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\chi}=51\frac{1}{2}$

Α. $\chi=-13{,}701172\ldots$

57) 'Εξ. $\left(\frac{756}{345}\right)^{\frac{3\chi}{2}}=54783$

Α. $\chi=9{,}272299\ldots$

58) 'Εξ. $\left(\frac{21}{20}\right)^{\chi}\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{7\chi}{2}}=\frac{7}{12}$

Α. $\chi=0{,}309928\ldots$

59) Ἐξ. $\left(\frac{1058}{867}\right)^{3-\chi} = 632 \cdot \left(\frac{56}{39}\right)^{-\frac{1\chi}{8}}$

Α. $\chi = 11,040270\ldots$

60) Ἐξ. $3^{2\chi} \cdot 5^{4\chi-7} = 9^{\chi-2} \cdot 7^{1-\chi}$

Α. $\chi = 0,759965\ldots$

6. Μὲ πολλὰς ἀγνώστους.

1) Ἐξ. $\left\{\begin{array}{l} \chi + \psi = \alpha \\ \chi - \psi = \beta \end{array}\right\}$

Α. $\chi = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $\psi = \frac{\alpha-\beta}{2}$

2) Ἐξ. $\left\{\begin{array}{l} 3\chi + 2\psi = 118 \\ \chi + 5\psi = 191 \end{array}\right\}$

Α. $\chi = 16$, $\psi = 35$

3) Ἐξ. $\left\{\begin{array}{l} 7\chi + \frac{3}{2}\psi = 41\frac{5}{2} \\ 39\chi - 14\psi = -935\frac{2}{15} \end{array}\right\}$

Α. $\chi = 17\frac{1}{2}$, $\psi = 115\frac{1}{2}$

4) Ἐξ. $\left\{\begin{array}{l} 5\chi - 8\frac{1}{5} = 7\psi - 44 \\ 2\chi = \psi + \frac{3}{7} \end{array}\right\}$

Α. $\chi = 4\frac{1}{2}$, $\psi = 8\frac{4}{7}$

5) Ἐξ. $\left\{\begin{array}{l} 5\frac{3}{4}\psi - 11\chi = 4\psi + 117\frac{4}{8} \\ 8\chi + 175 = 2\psi \end{array}\right\}$

Α. $\chi = 9$, $\psi = 123\frac{1}{2}$

6) Ἐξ. $\left\{\begin{array}{l} 7\psi = 2\chi - 3\psi \\ 19\chi = 60\psi + 621\frac{1}{4} \end{array}\right\}$

Α. $88\frac{3}{4}$, $\psi = 17\frac{3}{4}$

7) Ἐξ. $\left\{\begin{array}{l} 113\frac{1}{2}\chi - 27\frac{3}{7}\psi = 10\psi + 5488\frac{4}{7} \\ 9\psi - 347 = 5\chi - 420 \end{array}\right\}$

Α. $\chi = 56$, $\psi = 23$

8) Ἐξ. $\left\{\begin{array}{l} 13\chi + 7\psi - 341 = 7\frac{1}{2}\psi + 43\frac{1}{2}\chi \\ 2\chi + \frac{1}{2}\psi = 1 \end{array}\right\}$

Α. $\chi = -12$, $\psi = 50$

9) Ἐξ. $\left\{\begin{array}{l} 168\frac{15}{44} - 19\chi + \frac{3}{11}\psi = 12\frac{3}{4}\chi + 1084 \\ \frac{1}{7}\chi - 149\frac{1}{2} = 319\frac{2}{9} - \frac{2}{3}\psi \end{array}\right\}$

Α. $\chi = -27\frac{2}{3}$, $\psi = 136\frac{5}{9}$

10) Ἐξ. $\left\{\begin{array}{l} \chi + \psi = 18,73 \\ 0,56\chi + 13,421\psi = 763,4 \end{array}\right\}$

Α. $\chi = -39,8121\ldots$, $\psi = 58,5421$

11) Ἐξ. $\left\{\begin{array}{l} (\chi+5)(\psi+7) = (\chi+1)(\psi-9) + 112 \\ 2\chi + 10 = 3\psi + 1 \end{array}\right\}$

Α. $\chi = 3$, $\psi = 5$

12) Ἐξ. $\begin{array}{l} \alpha\chi = \beta\psi \\ \chi + \psi = \gamma \end{array}$

Α. $\chi = \frac{\beta\gamma}{\alpha+\beta}$, $\psi = \frac{\alpha\gamma}{\alpha+\beta}$

13) Ἐξ. $\begin{array}{l} \alpha\chi + \beta\psi = \gamma \\ \zeta\chi + \eta\psi = \theta \end{array}$

Α. $\chi = \frac{\gamma\eta - \beta\theta}{\alpha\eta - \beta\zeta}$, $\psi = \frac{\alpha\theta - \gamma\zeta}{\alpha\eta - \beta\zeta}$

14) Ἐξ. $\left\{\begin{array}{l} \frac{\alpha}{\beta+\psi} = \frac{\beta}{3\alpha+\chi} \\ \alpha\chi + 2\beta\psi = \delta \end{array}\right\}$

Α. $\chi = \frac{2\beta^2 - 6\alpha^2 + \delta}{3\alpha}$, $\psi = \frac{3\alpha^2 - \beta^2 + \delta}{3\beta}$

15) Ἐξ. $\left\{\begin{array}{l} \beta\gamma\chi = \gamma\psi - 2\beta \\ \beta^2\psi + \frac{\alpha(\gamma^3 - \beta^3)}{\beta\gamma} = \frac{2\beta^3}{\gamma} + \gamma^3\chi \end{array}\right\}$

Α. $\chi = \frac{\alpha}{\beta\gamma}$, $\psi = \frac{\alpha+2\beta}{\gamma}$

16) 'Εξ. $\begin{cases} 3\chi + 5\psi = \dfrac{(8\beta - 2\zeta)\beta\zeta}{\beta^2 - \zeta^2} \\ \beta^2\chi - \dfrac{\beta\gamma\zeta^2}{\beta+\zeta} + (\beta + \gamma + \zeta)\zeta\psi = \zeta^2\chi(\beta + 2\zeta)\beta\zeta \end{cases}$

Α. $\chi = \dfrac{\beta\zeta}{\beta - \zeta}, \psi = \dfrac{\beta\zeta}{\beta + \zeta}$

17) 'Εξ. $\begin{cases} \chi + \psi = 10 \\ \chi + \omega = 19 \\ \psi + \omega = 23 \end{cases}$

Α. $\chi = 3, \psi = 7, \omega = 16$

18) 'Εξ. $\begin{cases} \chi + \psi + \omega = 29\frac{1}{4} \\ \chi + \psi - \omega = 18\frac{1}{4} \\ \chi - \psi + \omega = 13\frac{3}{4} \end{cases}$

Α. $\chi = 16, \psi = 7\frac{3}{4}, \omega = 5\frac{1}{2}$

19) 'Εξ. $\begin{cases} \chi + \psi + \omega = \alpha \\ \mu\psi = \nu\chi \\ \pi\omega = \rho\chi \end{cases}$

Α. $\chi = \dfrac{\alpha\mu\pi}{\mu\pi + \nu\pi + \mu\rho}, \psi = \dfrac{\alpha\nu\pi}{\mu\pi + \nu\pi + \mu\rho}$

$\omega = \dfrac{\alpha\mu\rho}{\mu\pi + \nu\pi + \mu\rho}$

20) 'Εξ. $\begin{cases} 3\chi + 5\psi = 161 \\ 7\chi + 2\omega = 209 \\ 2\psi + \omega = 89 \end{cases}$

Α. $\chi = 17, \psi = 22, \omega = 45$

21) 'Εξ. $\begin{cases} \psi + \frac{1}{2}\chi = 41 \\ \psi + \frac{1}{4}\omega = 20\frac{1}{2} \\ \psi + \frac{1}{3}\omega = 34 \end{cases}$

Α. $\chi = 18, \psi = 32, \omega = 10$

22) 'Εξ. $\begin{cases} \alpha\chi + \beta\psi = \gamma \\ \delta\chi + \varepsilon\psi = \zeta \\ \eta\psi + \theta\omega = \lambda \end{cases}$

Α. $\chi = \dfrac{\gamma\varepsilon - \beta\zeta}{\alpha\varepsilon - \beta\delta}, \psi = \dfrac{\alpha\zeta - \gamma\delta}{\alpha\varepsilon - \beta\delta}, \omega = \dfrac{\alpha(\varepsilon\lambda - \zeta\eta) - \delta(\beta\lambda - \gamma\eta)}{\theta(\alpha\varepsilon - \beta\delta)}$

23) 'Εξ. $\begin{cases} 53 - \frac{1}{2}\chi - \frac{1}{2}\omega = \psi - 109 \\ \frac{1}{4}\chi + \frac{1}{8}\psi = 26 \\ 5\psi = 4\omega \end{cases}$

Α. $\chi = 64, \psi = 80, \omega = 100$

24) 'Εξ. $\begin{cases} 2\chi - \frac{3}{4}\psi = 93 - \frac{1}{2}\chi - \frac{1}{4}\psi \\ 7\chi - 5\omega = \psi + \chi - 86 \\ \frac{1}{2}\chi + \frac{1}{3}\psi + \frac{1}{4}\omega = 58 \end{cases}$

Α. $\chi = 48, \psi = 54, \omega = 64$

25) 'Εξ. $\begin{cases} 3\chi - 100 = 5\psi + 360 \\ 2\frac{1}{3}\chi + 200 = 16\frac{1}{2}\omega - 610 \\ 2\psi + 3\omega = 548 \end{cases}$

Α. $\chi = 360, \psi = 124, \omega = 100$

26) 'Εξ. $\begin{cases} 4\chi + 7\psi + 159 = 0 \\ 3\frac{1}{3}\chi = \frac{1}{6}\omega - 55 \\ 2\chi + \psi + 9\omega = 498 \end{cases}$

Α. $\chi = -13\frac{1}{2}, \psi = -15, \omega = 60$

27) 'Εξ. $\begin{cases} 2\chi + 5\psi - 7\omega = -288 \\ 5\chi - \psi + 3\omega = 227 \\ 7\chi + 6\psi + \omega = 297 \end{cases}$

Α. $\chi = 13, \psi = 24, \omega = 62$

28) Ἐξ. $\begin{cases} \chi + \psi + \omega = 30 \\ 8\chi + 4\psi + 2\omega = 50 \\ 27\chi + 9\psi + 3\omega = 64 \end{cases}$

Α. $\chi = \frac{2}{3}$, $\psi = -7$, $\omega = 36\frac{1}{8}$

29) Ἐξ. $\begin{cases} 18\chi - 7\psi - 5\omega = 11 \\ 4\frac{2}{3}\psi - \frac{1}{3}\chi + \omega = 108 \\ 3\frac{1}{2}\omega + 2\psi = \frac{3}{4}\chi = 80 \end{cases}$

Α. $\chi = 12$, $\psi = 25$, $\omega = 6$

30) Ἐξ. $\begin{cases} \alpha\chi + \beta\psi + \gamma\omega = \theta \\ \alpha'\chi + \beta'\psi + \gamma'\omega = \theta' \\ \alpha''\chi + \beta''\psi = \gamma''\omega = \theta'' \end{cases}$

Α. $\chi = \dfrac{\theta\beta'\gamma'' - \theta\beta''\gamma' + \theta'\beta''\gamma - \theta'\beta\gamma'' + \theta''\beta\gamma' - \theta''\beta'\gamma}{\alpha\beta'\gamma'' - \alpha\beta''\gamma' + \alpha'\beta''\gamma - \alpha'\beta\gamma'' + \alpha''\beta\gamma' - \alpha''\beta'\gamma}$

$\psi = \dfrac{\alpha\theta'\gamma'' - \alpha\theta''\gamma' + \alpha'\theta''\gamma - \alpha'\theta\gamma'' + \alpha''\theta\gamma' - \alpha''\theta'\gamma}{\alpha\beta'\gamma'' - \alpha\beta''\gamma' + \alpha'\beta''\gamma - \alpha'\beta\gamma'' + \alpha''\beta\gamma' - \alpha''\beta'\gamma}$

$\omega = \dfrac{\alpha\beta'\theta'' - \alpha\beta''\theta' + \alpha'\beta''\theta - \alpha'\beta\theta'' + \alpha''\beta\theta' - \alpha''\beta'\theta}{\alpha\beta'\gamma'' - \alpha\beta''\gamma' + \alpha'\beta''\gamma - \alpha'\beta\gamma'' + \alpha''\beta\gamma' - \alpha''\beta'\gamma}$

31) Ἐξ $\begin{cases} \frac{1}{\chi} + \frac{1}{\psi} = \alpha \\ \frac{1}{\chi} + \frac{1}{\omega} = \beta \\ \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\omega} = \gamma \end{cases}$

Α. $\chi = \dfrac{2}{\alpha + \beta - \gamma}$, $\psi = \dfrac{2}{\alpha - \beta + \gamma}$, $\omega = \dfrac{2}{\beta + \gamma - \alpha}$

32) Ἐξ. $\begin{cases} \frac{2}{\chi} - \frac{5}{3\psi} + \frac{1}{\omega} = 3\frac{4}{27} \\ \frac{1}{4\chi} + \frac{1}{\psi} + \frac{2}{\omega} = 6\frac{11}{72} \\ \frac{5}{6\chi} - \frac{1}{\psi} + \frac{4}{\omega} = 12\frac{1}{36} \end{cases}$

Α. $\chi = 6$, $\psi = 9$, $\omega = \frac{1}{5}$

33) Ἐξ. $\begin{cases} \dfrac{2\chi + 3\psi}{\chi + \psi} = 2\frac{1}{5} \\ \dfrac{\chi + \omega}{5(\chi - \omega)} = \frac{1}{3} \\ \dfrac{10\chi - 3\omega}{4\chi - 3\omega} = 2\frac{9}{14} \end{cases}$

Α. $\chi = 16$, $\psi = 4$, $\omega = 4$ κ. ο. κ. (ἀόριστον)

34) Ἐξ. $\begin{cases} \alpha\chi + \beta\psi = \lambda \\ \gamma\chi + \delta\varphi = \mu \\ \varepsilon\chi + \zeta\omega = \nu \\ \eta\psi + \theta\omega = \pi \end{cases}$

Α. $\chi = \dfrac{\beta\theta\nu + (\eta\lambda - \beta\pi)\zeta}{\beta\varepsilon\theta + \alpha\zeta\eta}$

$\psi = \dfrac{\alpha\zeta\pi + (\varepsilon\lambda - \alpha\nu)\theta}{\beta\varepsilon\theta + \alpha\zeta\eta}$

$\omega = \dfrac{\beta\varepsilon\pi + (\alpha\nu - \varepsilon\lambda)\eta}{\beta\varepsilon\theta + \alpha\zeta\eta}$

$\varphi = \dfrac{\beta\theta(\varepsilon\mu - \gamma\nu) + \eta\zeta(\alpha\mu - \gamma\lambda) + \beta\gamma\zeta\pi}{\delta(\beta\varepsilon\theta + \alpha\zeta\eta)}$

35) Ἐξ. $\begin{cases} \chi - 9\psi + 3\omega - 10\varphi = 21 \\ 2\chi + 7\psi - \omega - \varphi = 683 \\ 3\chi + \psi + 5\omega + 2\varphi = 195 \\ 4\chi - 6\psi - 2\omega + 9\varphi = 516 \end{cases}$

Α. $\chi = 100$, $\psi = 60$, $\omega = -13$, $\varphi = -50$

36) Ἐξ. $\begin{cases} \chi + \psi + \omega + \varphi = 1 \\ 16\chi + 8\psi + 4\omega + 2\varphi = 9 \\ 81\chi + 27\psi + 9\omega + 3\varphi = 36 \\ 256\chi + 64\psi + 16\omega + 4\varphi = 100 \end{cases}$

Α. $\chi = \frac{1}{4}$, $\psi = \frac{1}{2}$, $\omega = \frac{1}{4}$, $\varphi = 0$

37) Ἐξ. $\left\{\begin{array}{l} \frac{\chi}{3} + \frac{\psi}{5} + \frac{2\omega}{7} = 58 \\ \frac{5\chi}{4} + \frac{\psi}{6} + \frac{\omega}{3} = 76 \\ \frac{\chi}{2} + \frac{3\chi}{8} + \frac{\varphi}{5} = 79 \\ \psi + \omega + \varphi = 248 \end{array}\right\}$

Α. $\chi = 12,\ \psi = 30,\ \omega = 168,\ \varphi = 50$

38) Ἐξ. $\left\{\begin{array}{l} \frac{\chi\psi}{\alpha\psi + \beta\chi} = \lambda \\ \frac{\psi\omega}{\gamma\omega + \delta\psi} = \mu \\ \frac{\chi\omega}{\varepsilon\omega + \zeta\chi} = \nu \end{array}\right\}$

Α. $\chi = \frac{\lambda\mu\nu\,(\beta\delta\varepsilon + \alpha\gamma\zeta)}{\gamma\zeta\mu\nu - \beta\zeta\lambda\nu + \beta\delta\lambda\mu}$,

$\psi = \frac{\lambda\mu\nu\,(\beta\delta\varepsilon + \alpha\gamma\zeta)}{\alpha\zeta\lambda\mu + \delta\varepsilon\mu\nu - \alpha\delta\lambda\mu}$.

$\omega = \frac{\lambda\mu\nu\,(\beta\delta\varepsilon + \alpha\gamma\zeta)}{\beta\varepsilon\lambda\nu - \gamma\varepsilon\mu\nu + \alpha\gamma\lambda\mu}$

39) Ἐξ. $\left\{\begin{array}{l} \chi + \psi + \omega + \tau + \varphi = \alpha \\ \chi + \psi + \omega + \varphi + \upsilon = \beta \\ \chi + \psi + \omega + \tau + \upsilon = \gamma \\ \chi + \psi + \varphi + \tau + \upsilon = \delta \\ \chi + \omega + \varphi + \tau + \upsilon = \varepsilon \\ \psi + \omega + \varphi + \tau + \upsilon = \zeta \end{array}\right\}$

Α. $\chi = \frac{\varkappa}{5} - \zeta,\ \psi = \frac{\varkappa}{5} - \varepsilon,\ \omega = \frac{\varkappa}{5} - \delta,$

$\varphi = \frac{\varkappa}{5} - \gamma,\ \tau = \frac{\varkappa}{5} - \beta,\ \upsilon = \frac{\varkappa}{5} - \alpha$

(Ἂν τεθῇ τὸ $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta = \varkappa$)

3) Ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

α) Μὲ μίαν ἄγνωστον.

Τύπος.

Ἐξ. $\chi^2 + \Pi\chi = \mathrm{P}$

Α. $\chi = -\frac{\Pi}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Pi^2}{4} + \mathrm{P}\right)}$

Παραδείγματα.

1) Ἐξ. $\alpha\chi^2 = \beta$

Α. $\chi = +\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}},\ \chi = -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$

2) Ἐξ. $\chi^2 + 6\chi = 27$

Α. $\chi = 3,\ \chi = -9$

3) Ἐξ. $\chi^2 - 7\chi + 3\frac{1}{4} = 0$

Α. $\chi = 6\frac{1}{2},\ \chi = \frac{1}{2}$

4) Ἐξ. $\chi^2 - 5\frac{3}{4}\chi = 18$

Α. $\chi = 8,\ \chi = -2\frac{1}{4}$

5) Ἐξ. $3\chi^2 - 2\chi = 65$

Α. $\chi = 5,\ \chi = -4\frac{1}{3}$

6) Ἐξ. $622\chi = 15\chi^2 + 6384$

Α. $\chi = 22\frac{4}{5},\ \chi = 18\frac{2}{3}$

7) Ἐξ. $20748 - 1616\chi + 21\chi^2 = 0$

Α. $\chi = 60\frac{2}{3},\ \chi = 16\frac{2}{7}$

8) Ἐξ. $9\frac{3}{5}\chi - 21\frac{15}{16} = \chi^2$

Α. $\chi = 5\frac{17}{20},\ \chi = 3\frac{3}{4}$

9) Ἐξ. $11\frac{3}{4}\chi - 3\frac{1}{2}\chi^2 = -41\frac{3}{4}$

Α. $\chi = -2\frac{1}{7}$, $\chi = 5\frac{1}{2}$

10) Ἐξ. $9\frac{1}{3}\chi^2 - 90\frac{1}{3}\chi + 195 = 0$

Α. $\chi = 6\frac{3}{7}$, $\chi = 3\frac{1}{4}$

11) Ἐξ. $\frac{18\chi^2}{5} + \frac{18078\chi}{65} + 4728 = 0$

Α. $\chi = -25\frac{12}{39}$, $\chi = -52$

12) Ἐξ. $\chi^2 - 8\chi = 14$

Α. $\chi = 4 + \sqrt{30}$, $\chi = 4 - \sqrt{30}$

ἢ $\chi = 9{,}4772 \ldots$, $\chi = -1{,}4772 \ldots$

13) Ἐξ. $3\chi^2 + \chi = 7$

Α. $\chi = \frac{-1 + \sqrt{85}}{6}$, $\chi = \frac{-1 - \sqrt{85}}{6}$

ἢ $\chi = 1{,}3699 \ldots$, $\chi = -1{,}7032 \ldots$

14) Ἐξ. $118\chi - 2\frac{1}{2}\chi^2 = 20$

Α. $\chi = \frac{118 + \sqrt{13724}}{5}$, $\chi = \frac{118 - \sqrt{13724}}{5}$

ἢ $\chi = 47{,}0298 \ldots$, $\chi = 0{,}1701 \ldots$

15) Ἐξ. $6\chi - 30 = 3\chi^2$

Α. $\chi = 1 + \sqrt{-9}$, $\chi = 1 - \sqrt{-9}$

16) Ἐξ. $8\chi^2 - 7\chi + 34 = 0$

Α: $\chi = \frac{7 + \sqrt{-1039}}{16}$, $\chi = \frac{7 - \sqrt{-1039}}{16}$

17) Ἐξ. $4\chi^2 - 9\chi = 5\chi^2 - 255\frac{3}{4} - 8\chi$

Α. $\chi = 15\frac{1}{2}$, $\chi = -16\frac{1}{2}$

18) Ἐξ. $80\chi + \frac{3\chi^2}{4} + \frac{21\chi - 27782}{12} = 1859\frac{1}{3} - 3\chi^2$

Α. $\chi = -46$, $\chi = 24\frac{1}{5}$

19) Ἐξ. $\frac{\chi}{\chi + 60} = \frac{7}{3\chi - 5}$

Α. $\chi = 14$, $\chi = -10$

20) Ἐξ. $\frac{40}{\chi - 5} + \frac{27}{\chi} = 13$

Α. $\chi = 9$, $\chi = 1\frac{2}{13}$

21) Ἐξ. $\frac{8\chi}{\chi + 2} - 6 = \frac{20}{3\chi}$

Α. $\chi = 10$, $\chi = -\frac{2}{3}$

22) Ἐξ. $\frac{48}{\chi + 3} = \frac{165}{\chi + 10} - 5$

Α. $\chi = 5\frac{2}{5}$, $\chi = 5$

23) Ἐξ. $\frac{31}{6\chi} = \frac{16}{117 - 2\chi} + 1$

Α. $\chi = 67\frac{1}{6}$, $\chi = 4\frac{1}{2}$

24) Ἐξ. $\frac{2\chi + 3}{10 - \chi} = \frac{2\chi}{25 - 3\chi} - 6\frac{1}{2}$

Α. $\chi = 13\frac{22}{31}$, $\chi = 8$

25) Ἐξ. $\frac{25\chi + 180}{10\chi - 81} = \frac{40\chi}{5\chi - 8} - \frac{3}{5}$

Α. $\chi = 14\frac{3}{5}$, $\chi = \frac{72}{245}$

26) Ἐξ. $\frac{18 + \chi}{6(3 - \chi)} = \frac{20\chi + 9}{19 - 7\chi} - \frac{65}{4(3 - \chi)}$

Α. $\chi = 7\frac{22}{113}$, $\chi = 2\frac{1}{2}$

27) Ἐξ. $\alpha\delta\chi - \alpha\gamma\chi^2 = \beta\gamma\chi - \beta\delta$

Α. $\chi = \frac{\delta}{\gamma}$, $\chi = -\frac{\beta}{\alpha}$

28) Ἐξ. $\frac{\alpha^2\chi^2}{\zeta^2} - \frac{2\alpha\chi}{\eta} + \frac{\zeta^2}{\eta^2} = 0$

Α. $\chi = \frac{\zeta^2}{\alpha\eta}$, $\chi = \frac{\zeta^2}{\alpha\eta}$

29) Ἐξ. $\alpha\beta\chi^2 + \frac{3\alpha^2\chi}{\gamma} = \frac{6\alpha^2+\alpha\beta-2\beta^2}{\gamma^2} - \frac{\beta^2\chi}{\gamma}$

Α. $\chi = \frac{2\alpha-\beta}{\alpha\gamma}$, $\chi = -\frac{3\alpha+2\beta}{\beta\gamma}$

30) Ἐξ. $\frac{2\gamma^2}{\delta^2} + \frac{\alpha\gamma}{\delta} - (\alpha-\beta)(2\gamma+\alpha\delta)\frac{\chi}{\delta} = (\alpha+\beta)\frac{\gamma\chi}{\delta}$
$- (\alpha^2-\beta^2)\chi^2$

Α. $\chi = \frac{2\gamma+\alpha\delta}{\delta(\alpha+\beta)}$, $\chi = \frac{\gamma}{\delta(\alpha-\beta)}$

31) Ἐξ. $32\alpha^{2\mu}\gamma^{\nu-1} + 4\alpha^{\mu+3}\gamma^{\nu-1}(\alpha\gamma^3-2)\chi = \alpha^7\gamma^{\nu+2}\chi^2$

Α. $\chi = 4\alpha^{\mu-3}$, $\chi = -\frac{8\alpha^{\mu-4}}{\gamma^3}$

32) Ἐξ. $\gamma\chi + \frac{\alpha\gamma}{\alpha+\beta} = (\alpha+\beta)\chi^2$

Α. $\chi = \frac{\gamma+\sqrt{(\gamma^2+4\alpha\gamma)}}{2(\alpha+\beta)}$, $\chi = \frac{\gamma-\sqrt{(\gamma^2+4\alpha\gamma)}}{2(\alpha+\beta)}$

33) Ἐξ. $9\alpha^4\beta^4\chi^2 - 6\alpha^3\beta^2\chi - \beta^2 = 0$

Α. $\chi = \frac{\alpha+\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}{3\alpha^2\beta^2}$, $\chi = \frac{\alpha-\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}{3\alpha^2\beta^2}$

34) Ἐξ. $\alpha\beta\chi^2 - 2\chi(\alpha+\beta)\sqrt{\alpha\beta} = (\alpha-\beta)^2$

Α. $\chi = \frac{\alpha+\beta\pm\sqrt{(2\alpha^2+2\beta^2)}}{\sqrt{\alpha\beta}}$

35) Ἐξ. $\alpha\chi^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2 + 2\beta\gamma + 2(\beta-\gamma)\chi\sqrt{\alpha}$

Α. $\chi = \frac{\beta-\gamma+\alpha}{\sqrt{\alpha}}$, $\chi = \frac{\beta-\gamma-\alpha}{\sqrt{\alpha}}$

36) Ἐξ. $\gamma\chi^2 - 2\gamma\chi\sqrt{\delta} = \delta\chi^2 - \gamma\delta$

Α. $\chi = \frac{\sqrt{\gamma\delta}}{\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta}}$, $\chi = \frac{\sqrt{\gamma\delta}}{\sqrt{\gamma}-\sqrt{\delta}}$

37) Ἐξ. $(4\alpha^2 - 9\gamma\delta^2)\chi^2 + (4\alpha^2\gamma^2 + 4\alpha\beta\delta^2)\chi +$
$(\alpha\gamma^2 + \beta\delta^2)^2 = 0$

Α. $\chi = -\frac{\alpha\gamma^2+\beta\delta^2}{2\alpha+3\delta\sqrt{\gamma}}$, $\chi = -\frac{\alpha\gamma^2+\beta\delta^2}{2\alpha-3\delta\sqrt{\gamma}}$

38) Ἐξ. $\alpha\beta^3\chi^2 + (1+\gamma)\beta\delta\sqrt{\gamma} + \gamma\beta^2\chi^2 =$
$[\beta^3\delta\sqrt{\gamma} + (\alpha\beta+\gamma)(1+\gamma)]\chi$

Α. $\chi = \frac{\beta\delta\sqrt{\gamma}}{\alpha\beta+\gamma}$, $\chi = \frac{1+\gamma}{\beta^2}$

39) Ἐξ. $\frac{5\alpha+10\alpha\beta^2}{9\beta^2-3\alpha^2\beta^2}\chi^2 - \left(\frac{5\sqrt{(\alpha+\beta)}}{3\beta^3} + \frac{(1+2\beta^2)\gamma^\delta\sqrt{\gamma}}{3-\alpha^2}\right)\chi$
$+ \frac{\gamma^\delta}{\alpha\beta}\sqrt{(\alpha+\beta)\gamma} = 0$

Α. $\chi = \frac{(3-\alpha^2)\sqrt{(\alpha+\beta)}}{\alpha\beta(1+2\beta^2)}$, $\chi = \frac{3\beta^2\gamma^\delta\sqrt{\gamma}}{5\alpha}$

40) Ἐξ. $\alpha\chi = \beta + \sqrt{\gamma\chi}$

Α. $\chi = \frac{2\alpha\beta+\gamma+\sqrt{(4\alpha\beta\gamma+\gamma^2)}}{2\alpha^2}$ (1)

41) Ἐξ. $3\sqrt{(112-8\chi)} = 19 + \sqrt{(3\chi+7)}$

Α. $\chi = 6$

42) Ἐξ. $\sqrt{(2\chi+7)} + \sqrt{(3\chi-18)} = \sqrt{(7\chi+1)}$

Α. $\chi = 9$

43) Ἐξ. $5\sqrt{(62+3\chi)} - \frac{1}{2}\sqrt{(95\tfrac{2}{3}-5\chi)} = 41$

Α. $\chi = 6\frac{1}{3}$

44) Ἐξ. $7\sqrt{(\frac{3}{2}\chi-5)} - \sqrt{(\frac{\chi}{5}+45)} - \frac{7}{4}\sqrt{(10\chi+56)} = 0$

Α. $\chi = 20$

45) Ἐξ. $\alpha\chi^{2\nu} + \beta\chi^\nu = \gamma$

Α. $\chi = \sqrt[\nu]{\frac{-\beta+\sqrt{(\beta^2+4\alpha\gamma)}}{2\alpha}}$, $\chi = \sqrt[\nu]{\frac{-\beta-\sqrt{(\beta^2+4\alpha\gamma)}}{2\alpha}}$

46) Ἐξ. $\chi^4 - 74\chi^2 = -1225$

Α. $\chi = \pm 5$; $\chi = \pm 7$

---

(1) Μόνον αὕτη ἡ ἀξία τοῦ χ ἠμπορεῖ ἰδῶ νὰ χρησιμεύσῃ, ἡ ἄλλη ἀνήκει εἰς

47) Ἐξ. $3\chi^6 + 42\chi^3 = 3321$

Α. $\chi = 3, = -\sqrt[3]{41}$

β) Μὲ πολλὰς ἀγνώστους.

1) Ἐξ. $\left\{ \begin{matrix} \chi^2 + \psi^2 = \alpha \\ \chi^2 - \psi^2 = \beta \end{matrix} \right\}$

Α. $\chi = \pm \sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2}}, \psi = \pm \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{2}}$

2) Ἐξ. $\left\{ \begin{matrix} \chi + \psi = \alpha \\ \chi\psi = \beta \end{matrix} \right\}$

Α. $\chi = \frac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2 - 4\beta)}}{2}, \psi = \frac{\alpha + \sqrt{(\alpha^2 - 4\beta)}}{2}$

ἢ $\chi = \frac{\alpha + \sqrt{(\alpha^2 - 4\beta)}}{2}, \psi = \frac{\alpha + \sqrt{(\alpha^2 - 4\beta)}}{2}$

3) Ἐξ. $\left\{ \begin{matrix} \chi + \psi = \alpha \\ \chi^2 + \psi^2 = \beta \end{matrix} \right\}$

Α. $\chi = \frac{\alpha + \sqrt{(2\beta - \alpha^2)}}{2}, \psi = \frac{\alpha + \sqrt{(2\beta - \alpha^2)}}{2}$

ἢ $\chi = \frac{\alpha - \sqrt{(2\beta - \alpha^2)}}{2}, \psi = \frac{\alpha + \sqrt{(2\beta - \alpha^2)}}{2}$

4) Ἐξ. $\left\{ \begin{matrix} \chi\psi = \alpha \\ \chi^2 + \psi^2 = \beta \end{matrix} \right\}$

Α. $\chi = \pm \sqrt{\frac{\beta + \sqrt{(\beta^2 - 4\alpha^2)}}{2}}, \psi = \pm \sqrt{\frac{\beta - \sqrt{(\beta^2 - 4\alpha^2)}}{2}}$

ἢ $\chi = \pm \sqrt{\frac{\beta - \sqrt{(\beta^2 - 4\alpha^2)}}{2}}, \psi = \pm \sqrt{\frac{\beta + \sqrt{(\beta^2 - 4\alpha^2)}}{2}}$

τὴν ἐξίσωσιν $\alpha\chi = \beta - \sqrt{\gamma\chi}$· καθότι αὐτὴ καθὼς καὶ ἡ δοθεῖσα ὁδηγοῦν εἰς τὴν αὐτὴν τελικὴν ἐξίσωσιν $\alpha^2\chi^2 - (2\alpha\beta + \gamma)\chi + \beta^2 = 0$. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον γίνεται ἡ ἐργασία καὶ εἰς τὰς ἐξισώσεις 41, 42, 43, 44.

5) Ἐξ. $\left\{ \begin{matrix} \chi + \psi = \alpha \\ \chi^3 + \psi^3 = \beta \end{matrix} \right\}$

Α. $\chi = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{4\beta - \alpha^3}{12\alpha}}, \psi = \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{4\beta - \alpha^3}{12\alpha}}$

ἢ $\chi = \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{4\beta - \alpha^3}{12\alpha}}, \psi = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{4\beta - \alpha^3}{12\alpha}}$

6) Ἐξ. $\left\{ \begin{matrix} 2\chi + 3\psi = 118 \\ 5\chi^2 - 7\psi^2 = 4333 \end{matrix} \right\}$

Α. $\chi = 35, \psi = 16$

ἢ $\chi = -229\frac{6}{17}, \psi = 192\frac{4}{17}$

7) Ἐξ. $\left\{ \begin{matrix} \alpha\chi + \beta\psi = \theta \\ \gamma\chi^2 + \delta\psi^2 = \kappa \end{matrix} \right\}$

Α. $\chi = \frac{\alpha\delta\theta \pm \beta\sqrt{(\alpha^2\delta\kappa - \gamma\delta\theta^2 + \beta^2\gamma\kappa)}}{\alpha^2\delta + \beta^2\gamma}$

$\psi = \frac{\beta\gamma\theta \pm \alpha\sqrt{(\alpha^2\delta\kappa - \gamma\delta\theta^2 + \beta^2\gamma\kappa)}}{\alpha^2\delta + \beta^2\gamma}$

8) Ἐξ. $\left\{ \begin{matrix} \chi^2 + \psi^2 = \theta \\ (\chi + \psi + \alpha)^2 + (\chi - \psi + \alpha)^2 = \kappa \end{matrix} \right\}$

Α. $\chi = \frac{-\alpha \pm \sqrt{(2\theta + \kappa - \alpha^2)}}{2}$

$\psi \pm \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\kappa - \theta \mp \alpha\sqrt{(2\theta + \kappa - \alpha^2)}}{2}}$

9) Ἐξ. $\left\{ \begin{matrix} \frac{18\chi}{\psi} = \frac{8\psi}{\chi} \\ 3\chi\psi + 2\chi + \psi = 485 \end{matrix} \right\}$

Α. $\chi = 10, \psi = 15$

ἢ $\chi = -10\frac{7}{9}, \psi = -16\frac{1}{6}$ (*)

(*) Αὗται αἱ ἐξισώσεις ἐπιδέχονται ἀκόμη δύο ἄλλας λύσεις, εἶον: $\chi = \frac{1 + \sqrt{-34919}}{18}, \psi = \frac{-1 - \sqrt{-34919}}{12}$, καὶ $\chi = \frac{1 - \sqrt{-34919}}{18}$

10) Ἐξ. $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\alpha\chi}{\psi} = \dfrac{\epsilon\psi}{\chi} \\ \gamma\chi\psi + \delta\chi + \epsilon\psi = \theta \end{array} \right\}$

(*) Α. $\left\{ \begin{array}{l} \chi = \dfrac{-(\epsilon\sqrt{\alpha}+\delta\sqrt{\beta}) \pm \sqrt{[(\epsilon\sqrt{\alpha}+\delta\sqrt{\beta})^2 + 4\gamma\theta\sqrt{\alpha\beta}]}}{2\gamma\sqrt{\alpha}} \\ \psi = \dfrac{-(\epsilon\sqrt{\alpha}+\delta\sqrt{\beta}) \pm \sqrt{[(\epsilon\sqrt{\alpha}-\delta\sqrt{\beta})^2 - 4\gamma\theta\sqrt{\alpha\beta}]}}{2\gamma\sqrt{\alpha}} \end{array} \right.$

ἤ $\left\{ \begin{array}{l} \chi = \dfrac{-(\epsilon\sqrt{\alpha}-\delta\sqrt{\beta}) \pm \sqrt{[(\epsilon\sqrt{\alpha}-\delta\sqrt{\beta})^2 - 4\gamma\theta\sqrt{\alpha\beta}]}}{2\gamma\sqrt{\alpha}} \\ \psi = \dfrac{+(\epsilon\sqrt{\alpha}-\delta\sqrt{\beta}) + \sqrt{[(\epsilon\sqrt{\alpha}-\delta\sqrt{\beta})^2 - 4\gamma\theta\sqrt{\alpha\beta}]}}{2\gamma\sqrt{\beta}} \end{array} \right.$

11) Ἐξ. $\left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi + \chi^2 + \psi^2 = \alpha \\ \chi - \psi + \chi^2 - \psi^2 = \beta \end{array} \right\}$

Α. $\chi = \dfrac{-1 \pm \sqrt{(2\alpha + 2\beta + 1)}}{2}$

$\psi = \dfrac{-1 \pm \sqrt{(2\alpha - 2\beta + 1)}}{2}$

ἤ $\chi = \dfrac{-1 \pm \sqrt{(2\alpha + 2\beta + 1)}}{2}$

$\psi = \dfrac{-1 \mp \sqrt{(2\alpha - 2\beta + 1)}}{2}$ (2)

12) Ἐξ. $\left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi = \chi\psi \\ \chi + \psi + \chi^2 + \psi^2 = \alpha \end{array} \right\}$

Α. $\chi = \dfrac{1 \pm \sqrt{(4\alpha+1)} + \sqrt{[4\alpha - 6 \mp 6\sqrt{(4\alpha+1)}]}}{4}$

$\psi = \dfrac{1 \pm \sqrt{(4\alpha+1)} - \sqrt{[4\alpha - 6 \mp 6\sqrt{(4\alpha+1)}]}}{4}$ (3)

$\psi = \dfrac{-1 + \sqrt{-34919}}{12}$, αἱ ὁποῖαι ὅμως, καθὼς βλέπομεν, εἶναι φανταστικαί.

(*) Ἑπομένως αὗται αἱ ἐξισώσεις δίδουν τέσσαρα ζεύγη σχετικῶν ἀξιῶν τοῦ χ καὶ ψ.

(2) Αὗται αἱ ἐξισώσεις δίδουν ἐπίσης τέσσαρα ζεύγη σχετικῶν ἀξιῶν τοῦ χ καὶ ψ.

(3) Αἱ ἀξίαι τοῦ χ καὶ ψ ἠμποροῦν νὰ ἀνταλλαχθῶσι καὶ μεταξύ των.

13) Ἐξ. $\left\{ \begin{array}{l} \alpha\chi - \beta\psi = \eta \\ \alpha^3\chi^3 - \beta^3\psi^3 = \theta\chi\psi \end{array} \right\}$

Α. $\chi = \dfrac{\eta}{2\alpha}\left(1 \pm \sqrt{\dfrac{\theta + \alpha\beta\eta}{\theta - 3\alpha\beta\eta}}\right)$, $\psi = \dfrac{\eta}{2\alpha}\left(-1 \pm \dfrac{\theta + \alpha\beta\eta}{\theta - 3\alpha\beta\eta}\right)$

14) Ἐξ. $\left\{ \begin{array}{l} (\chi - \psi)(\chi^2 - \psi^2) = \alpha \\ (\chi + \psi)(\chi^2 + \psi^2) = \beta \end{array} \right\}$

Α. $\chi = \dfrac{\sqrt{(2\beta - \alpha)} \pm \sqrt{\alpha}}{2\sqrt[6]{(2\beta - \alpha)}}$, $\psi = \dfrac{\sqrt{(2\beta - \alpha)} \mp \sqrt{\alpha}}{2\sqrt[6]{(2\beta - \alpha)}}$

15) Ἐξ. $\left\{ \begin{array}{l} \chi^2 + \psi^2 + \omega^2 = \alpha \\ \psi^2 = 2\chi\omega + \beta \\ \gamma\chi = \delta\omega \end{array} \right\}$

Α. $\chi = \dfrac{\delta\sqrt{(\alpha - \beta)}}{\gamma + \delta}$, $\psi = \dfrac{\sqrt{[2\alpha\gamma\delta + \beta(\gamma^2 + \delta^2)]}}{\gamma + \delta}$,

$\omega = \dfrac{\gamma\sqrt{(\alpha - \beta)}}{\gamma + \delta}$

16) Ἐξ. $\left\{ \begin{array}{l} \chi(\psi + \omega) = \alpha \\ \psi(\chi + \omega) = \beta \\ \omega(\chi + \psi) = \gamma \end{array} \right\}$

Α. $\chi = \pm\sqrt{\dfrac{(\alpha - \gamma + \beta)(\alpha - \beta + \gamma)}{2(\gamma - \alpha + \beta)}}$

$\psi = \pm\sqrt{\dfrac{(\alpha - \gamma + \beta)(\gamma - \alpha + \beta)}{2(\alpha - \beta + \gamma)}}$

$\omega = \pm\sqrt{\dfrac{(\gamma - \alpha + \beta)(\alpha - \beta + \gamma)}{2(\alpha - \gamma + \beta)}}$

17) Ἐξ. $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\chi\psi\omega}{\chi + \psi} = \alpha \\ \dfrac{\chi\psi\omega}{\psi + \omega} = \beta \\ \dfrac{\chi\psi\omega}{\chi + \omega} = \gamma \end{array} \right\}$

$$\text{Α.}\ \chi = \pm \sqrt{\frac{2\alpha\beta\gamma(\alpha\beta - \alpha\gamma + \beta\gamma)}{(\alpha\beta + \alpha\gamma - \beta\gamma)(\beta\gamma + \alpha\gamma - \alpha\beta)}}$$

$$\psi = \pm \sqrt{\frac{2\alpha\beta\gamma(\beta\gamma + \alpha\gamma - \alpha\beta)}{(\alpha\beta + \alpha\gamma - \beta\gamma)(\alpha\beta - \alpha\gamma + \beta\gamma)}}$$

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{2\alpha\beta\gamma(\alpha\beta + \alpha\gamma - \beta\gamma)}{(\alpha\beta - \alpha\gamma + \beta\gamma)(\beta\gamma + \alpha\gamma - \alpha\beta)}}$$

18) Ἐξ. $\left\{\begin{array}{l} \chi\psi = \pi \\ (\beta - \psi)\omega = \pi' \\ (\alpha - \chi)(\gamma - \omega) = \pi'' \end{array}\right\}$

$$\text{Α.}\ \chi = \frac{-\text{Α} \pm \sqrt{[\text{Α}^2 - 4\pi(\pi' - \beta\gamma)(\pi'' - \alpha\gamma)]}}{2(\pi'' - \beta\gamma)}$$

$$\psi = \frac{-\text{Α} \mp \sqrt{[\text{Α}^2 - 4\pi(\pi' - \beta\gamma)(\pi'' - \alpha\gamma)]}}{2(\pi'' - \alpha\gamma)}$$

$$\omega = \frac{-\text{Β} \mp \sqrt{[\text{Β}^2 - 4\pi'(\pi - \alpha\beta)(\pi'' - \alpha\gamma)]}}{2(\pi - \alpha\beta)}$$

(Ἂν τεθῇ $\gamma\pi - \alpha\pi' - \beta\pi'' + \alpha\beta\gamma = \text{Α}$, $\gamma\pi - \alpha\pi' + \beta\pi''$

$- \alpha\beta\gamma = \text{Β}$.)

19) Ἐξ. $\left\{\begin{array}{l} \chi^2 + \psi^2 + \omega^2 = \varkappa \\ \alpha\chi + \alpha'\psi + \alpha''\omega = 0 \\ \beta\chi + \beta'\psi + \beta''\omega = 0 \end{array}\right\}$

Α. $\chi = (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')\,\text{Α}$, $\psi = (\alpha''\beta - \alpha\beta'')\,\text{Α}$,

$\omega = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)\,\text{Α}$

Ἂν τεθῇ $\pm \sqrt{\dfrac{\varkappa}{(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2 + (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')^2 (\alpha''\beta - \alpha\beta'')^2}} = \text{Α}$

20) Ἐξ. $\left\{\begin{array}{l} \alpha\chi\psi + \beta\chi + \gamma\psi + \delta = 0 \\ \alpha'\psi\omega + \beta'\psi + \gamma'\omega + \delta' = 0 \\ \alpha''\omega\chi + \beta''\omega + \gamma''\chi + \delta'' = 0 \end{array}\right\}$

Α. Ἡ ἀναζήτησις τοῦ ψ καὶ ω φέρει εἰς τὴν ἑξῆς ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ:

$$(\alpha''\chi + \beta'')[(\beta\beta' - \alpha\delta')\chi + \beta'\delta - \gamma\delta'] +$$
$$(\gamma''\chi + \delta'')[\alpha\gamma' - \alpha'\beta)\chi + \gamma\gamma' - \alpha'\delta] = 0$$

Ὅταν ἐκ τούτου προσδιορισθῇ τὸ χ, τότε εὑρίσκεται καὶ τὸ ψ καὶ ω.

(Τὰ δύω τελευταῖα εἴδη τῶν ἐξισώσεων εὑρίσκονται γενικώτερον ἐκφρασμένα εἰς τὴν Σελ. 158).

Λύσις τῶν ὑψηλῶν ἐξισώσεων.

α) Καρδανικὸς τύπος.

Ἐξ. $\chi^3 = \Pi\chi + \text{Ρ}$

$$\text{Α.}\ \chi = \sqrt[3]{\frac{\text{Ρ} + \sqrt{(\text{Ρ}^2 - \frac{4\Pi^3}{27})}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{\text{Ρ} - \sqrt{(\text{Ρ}^2 - \frac{4\Pi^3}{27})}}{2}}$$

Παραδείγματα.

1) Ἐξ. $\chi^3 - 3\chi - 2 = 0$

Α. $\chi = 2$

2) Ἐξ. $\chi^3 + 12\chi + 63 = 0$

Α. $\chi = -3$

3) Ἐξ. $\chi^3 - 21\chi + 344 = 0$

Α. $\chi = -8$

4) Ἐξ. $\chi^3 - 6\chi - 40 = 0$

Α. $\chi = \sqrt[3]{(20 + \sqrt{392})} + \sqrt[3]{(20 - \sqrt{392})} =$
$\sqrt[3]{(2 + \sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{2})^3} = 4$

5) Ἐξ. $\chi^3 + 3\chi - 14 = 0$

Α. $\chi = \sqrt[3]{(7 + \sqrt{50})} + \sqrt[3]{(7 - \sqrt{50})} =$
$\sqrt[3]{(1 + \sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(1 - \sqrt{2})^3} = 2$

6) Ἐξ. $\chi^3 - \frac{15}{2}\chi + 290\frac{1}{2} = 0$

Α. $\chi = \sqrt[3]{\frac{-581 + \sqrt{337311}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{-581 - \sqrt{337311}}{4}}$

$= \sqrt[3]{\left(\frac{-7 + \sqrt{39}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{-7 - \sqrt{39}}{2}\right)^3} = -7$

7) Ἐξ. $\chi^3 - 12\chi^2 + 57\chi - 94 = 0$

Α. $\chi = 4 + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9} = 3{,}36216\ \ldots$

8) Ἐξ. $\chi^3 - 12\chi - 28 = 0$

Α. $\chi = \sqrt[3]{(14 + \sqrt{132})} + \sqrt[3]{(14 - \sqrt{132})} = 4{,}30213\ldots$

9) Ἐξ. $\chi^3 + 6\chi^2 + 20\chi + 15 = 0$

Α. $\chi = -2 + \sqrt[3]{\frac{81 + \sqrt{12705}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{81 - \sqrt{12705}}{18}}$

$= -2 + \sqrt[3]{\left(\frac{3 + \sqrt{105}}{6}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{3 - \sqrt{105}}{6}\right)^3} = -1$

10) Ἐξ. $\chi^3 - 15\chi^2 + 71\chi - 297 = 0$

Α. $\chi = 5 + \sqrt[3]{\frac{864 + \sqrt{746304}}{9}} + \sqrt[3]{\frac{864 - 746304}{9}}$

$= 5 + \sqrt[3]{\left(\frac{9 + \sqrt{69}}{3}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{9 - \sqrt{69}}{3}\right)^3} = 11$

11) Ἐξ. $\chi^3 - 12\chi^2 + 36\chi - 7 = 0$

Α. $\chi = 4 + \sqrt[3]{\frac{-9 + \sqrt{-175}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-9 - \sqrt{-175}}{2}}$

$= 4 + \sqrt[3]{\left(\frac{3 + \sqrt{-7}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{3 - \sqrt{-7}}{2}\right)^3} = 7$

6) Διὰ τῆς ἀναζητήσεως τῶν ἐλλόγων ῥιζῶν των. (1)

1) Ἐξ. $\chi^3 - 9\chi^2 + 26\chi - 24 = 0$
Ρ. 2, 3, 4

2) Ἐξ. $\chi^3 - 8\chi^2 + 5\chi + 14 = 0$
Ρ. -1, 2, 7

3) Ἐξ. $\chi^3 - 49\chi - 120 = 0$
Ρ. -3, -5, 8

4) Ἐξ. $\chi^3 - 18\chi^2 + 87\chi - 110 = 0$
Ρ. 2, 5, 11

5) Ἐξ. $\chi^4 - 10\chi^3 + 35\chi^2 - 50\chi + 24 = 0$
Ρ. 1, 2, 3, 4

6) Ἐξ. $\chi^4 - 45\chi^2 - 40\chi + 84 = 0$
Ρ. 1, -2, -6, 7

7) Ἐξ. $\chi^4 + 29\chi^3 + 287\chi^2 + 1147\chi + 1560 = 0$
Ρ. -3, -5, -8, -13

8) Ἐξ. $\chi^3 - \frac{17}{4}\chi^2 - \frac{29}{8}\chi + \frac{15}{4} = 0$
Ρ. $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{4}$, -6

(1) Ρ. δηλοῖ ῥίζας τῆς ἐξισώσεως.

9) Ἐξ. $\chi^3 - \frac{13}{12}\chi^2 + \frac{3}{8}\chi - \frac{1}{24} = 0$
Ῥ. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$

10) Ἐξ. $\chi^3 - \frac{14}{3}\chi^2 + 7\chi - \frac{10}{3} = 0$
Ῥ. $1, \frac{5}{3}, 2$

11) Ἐξ. $\chi^3 + \frac{8}{5}\chi^2 + \frac{9}{100}\chi - \frac{9}{100} = 0$
Ῥ. $\frac{1}{5}, -\frac{3}{10}, -\frac{3}{2}$

12) Ἐξ. $\chi^3 - \frac{39}{28}\chi^2 + \frac{31}{56}\chi - \frac{3}{56} = 0$
Ῥ. $\frac{1}{2}, \frac{1}{7}, \frac{3}{4}$

13) Ἐξ. $\chi^3 - \frac{139}{24}\chi^2 + \frac{329}{48}\chi + \frac{55}{16} = 0$
Ῥ. $-\frac{3}{4}, \frac{5}{3}, \frac{11}{4}$

14) Ἐξ. $\chi^3 + \frac{82}{15}\chi^2 - \frac{173}{5}\chi - \frac{126}{5} = 0$
Ῥ. $-\frac{2}{3}, \frac{21}{5}, -9$

15) Ἐξ. $\chi^4 - \frac{19}{4}\chi^3 + \frac{49}{8}\chi^2 - \frac{11}{4}\chi + \frac{3}{8} = 0$
Ῥ. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1, 3$

16) Ἐξ. $\chi^4 - \frac{41}{8}\chi^3 + \frac{287}{32}\chi^2 - \frac{393}{64}\chi + \frac{45}{32} = 0$
Ῥ. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{15}{8}, 2$

17) Ἐξ. $\chi^3 - 14\chi^2 - 5\chi + 70 = 0$
Ῥ. $14, +\sqrt{5}, -\sqrt{5}$

18) Ἐξ. $\chi^3 - 13\chi^2 + 49\chi - 45 = 0$
Ῥ. $5, 4 + \sqrt{7}, 4 - \sqrt{7}$

19) Ἐξ. $\chi^3 - 13\chi^2 + 38\chi + 16 = 0$
Ῥ. $8, \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{33}, \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{33}$

20) Ἐξ. $\chi^3 - 6\chi^2 + 19\chi - 44 = 0$
Ῥ. $4, 1 + \sqrt{-10}, 1 - \sqrt{-10}$

21) Ἐξ. $\chi^3 + \frac{7}{6}\chi^2 + \frac{13}{2}\chi + \frac{21}{2} = 0$
Ῥ. $-\frac{3}{2}, \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{-251}, \frac{1}{6} - \sqrt{-251}$

22) Ἐξ. $\chi^4 + \chi^3 - 24\chi^2 + 43\chi - 21 = 0$
Ῥ. $1, 3, -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{53}; -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{53}$

23) Ἐξ. $\chi^5 - 3\chi^4 - 8\chi^3 + 24\chi^2 - 9\chi + 27 = 0$
Ῥ. $3, 3, -3, +\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$

24) Ἐξ. $\chi^5 - \frac{3}{2}\chi^4 - 6\chi^3 + 9\chi^2 - 13\chi + 19\frac{1}{2} = 0$
Ῥ. $\frac{3}{2}, +\sqrt{(3 + \sqrt{22})}, -\sqrt{(3 + \sqrt{22})},$
$+\sqrt{(3 - \sqrt{22})}, -\sqrt{(3 - \sqrt{22})}$

---

5) *Γενικαί τινὲς περιπτώσεις, ὅπου αἱ ἐξισώσεις μὲ πολλὰς ἀγνώστους ἠμποροῦν νὰ λυθῶσιν εὐκόλως.*

1. Ἂς παριστάνωσι $\chi', \chi'', \chi''', \ldots\ldots \chi^{\nu}$, ν ἀγνώστους. Ἂν ἦναι λοιπὸν ἐξίσωσις τοῦ σχήματος:

$$\alpha'\chi'^{\mu} + \alpha''\chi''^{\mu} + \alpha'''\chi'''^{\mu} + \alpha''''\chi''''^{\mu} + \ldots\ldots + \alpha^{\nu}(\chi^{\nu})^{\mu} = K$$

καὶ ἦναι ἀκόμη ν − 1 ἐξισώσεις τοῦ ἑξῆς σχήματος δεδομέναι, ὅπου αἱ ἄγνωστοι δὲν ὑπερβαίνουν τὸν πρῶτον βαθμόν:

$$\beta'\chi' + \beta''\chi'' + \beta'''\chi''' + \beta''''\chi'''' + \ldots\ldots + \beta^{\nu}\chi^{\nu} = 0$$
$$\gamma'\chi' + \gamma''\chi'' + \gamma'''\chi''' + \gamma''''\chi'''' + \ldots\ldots + \gamma^{\nu}\chi^{\nu} = 0$$
$$\delta'\chi' + \delta''\chi'' + \delta'''\chi''' + \delta''''\chi'''' + \ldots\ldots + \delta^{\nu}\chi^{\nu} + 0$$

κ. ο. κ.

τότε ἠμποροῦν, διὰ τῆς λύσεως τῶν τελευταίων τούτων ἐξισώσεων, νὰ ἐκφρασθῶσιν ὅλαι αἱ ἄγνωστοι διὰ μιᾶς καὶ μόνης, καὶ μάλιστα ὡς ἕπεται: $\chi'' = \Lambda''\chi'$, $\chi''' = \Lambda'''\chi'$, $\chi'''' = \Lambda''''\chi'$, . . . $\chi^{\nu} = \Lambda^{\nu}\chi'$, ὅπου Λ'', Λ''', Λ'''', ... Λ^{ν} θέλουν εἶναι γνωσταὶ ποσότητες. Αὗται αἱ ἀξίαι εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν ἀντικαθιστάμεναι δίδουν:

$$\chi' = \sqrt[\mu]{\frac{\mathrm{K}}{\alpha' + \alpha''\Lambda''^{\mu} + \alpha'''\Lambda'''^{\mu} + \alpha''''\Lambda''''^{\mu} \ldots + \alpha^{\nu}(\Lambda^{\nu})^{\mu}}}$$

ὅθεν προκύπτουν αἱ ἀξίαι τοῦ χ'', χ''' . . . . χ^{ν}.

Τοῦτο ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ πολλὰ γενικώτερον· ἀπόκειται ὅμως εἰς τὴν κρίσιν τοῦ ἀναγνώστου.

II. Ἂς ἦναι αἱ ν ἑπόμεναι αὐτοπαθεῖς ἐξισώσεις μεταξὺ τῶν ν ἀγνώστων ποσοτήτων

χ', χ'', χ''' . . . . χ^{ν} δεδομέναι.

$$
\begin{array}{lllll}
\alpha'\chi'\chi'' & + \beta'\chi' & + \gamma'\chi'' & + \delta' & = 0 \\
\alpha''\chi''\chi''' & + \beta''\chi'' & + \gamma''\chi''' & + \delta'' & = 0 \\
\alpha'''\chi'''\chi'''' & + \beta'''\chi''' & + \gamma'''\chi'''' & + \delta''' & = 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha^{(\nu-1)'}\chi^{(\nu-1)'}\chi^{\nu'} & + \beta^{(\nu-1)'}\chi^{(\nu-1)'} & + \gamma^{(\nu-1)'}\chi^{\nu'} & + \delta^{(\nu-1)'} & = 0 \\
\alpha^{\nu'}\chi^{\nu'}\chi' & + \beta^{\nu'}\chi^{\nu'} & + \gamma^{\nu'}\chi' & + \delta^{\nu'} & = 0
\end{array}
$$

Ἀπὸ τὴν πρώτην προσδιορίζεται ἡ ἀξία τοῦ χ'' διὰ τοῦ χ', ἔπειτα ἀντικαθίσταται αὕτη ἡ ἀξία τοῦ χ'' εἰς τὴν δευτέραν καὶ προσδιορίζεται τὸ χ''' ἐπίσης διὰ τοῦ χ', κ. ο. κ. οὕτως εὑρίσκεται τελευταῖον τὸ $\chi^{\nu'}$ διὰ τοῦ χ' ἐκφρασμένον καὶ μάλιστα κατὰ τὸ ἑξῆς σχῆμα: $\chi^{\nu'} = \frac{\mathrm{A}\chi' + \mathrm{B}}{\Gamma\chi' + \Delta}$. Ἂν ἔπειτα ἀντικατασταθῇ αὕτη ἡ ἀξία εἰς τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν, εὑρίσκεται διὰ τὸ χ' ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ. Αὕτη δίδει τὴν ἀξίαν τοῦ χ',

ἀκολούθως καὶ τὴν ἀξίαν τῶν ἐπιλοίπων ἀγνώστων.

. . . .

Ὅταν αἱ ῥίζαι ἐξισώσεως ἦναι δεδομέναι, ἠμπορεῖ νὰ εὑρεθῇ καὶ αὐτὴ ἡ ἐξίσωσις: κατὰ ποῖον τρόπον; Ποίαν ἐξίσωσιν ἔχουν π. χ. αἱ ῥίζαι 1, 3 — 1, — 4; Ποίαν αἱ ῥίζαι 6, $2 + 3\sqrt{-1}$, $2 - 3\sqrt{-1}$; Οἱ προσθέται λοιπὸν ἐξισώσεως εὑρίσκονται εἰς προσδιωρισμένον τινα σύνδεσμον μὲ τὰς ῥίζας αὐτῆς: εἰς ποῖον; — Ὅταν αἱ ἑξῆς τρεῖς ἐξισώσεις I. $\chi + \psi + \omega = \alpha$, II. $\chi\psi + \chi\omega + \psi\omega = \beta$, III. $\chi\psi\omega = \gamma$, ἢ αἱ ἑξῆς τέσσαρες I. $\chi + \psi + \omega + \varphi = \alpha$, II. $\chi\psi + \chi\omega + \chi\varphi + \psi\omega + \psi\varphi + \omega\varphi = \beta$, III. $\chi\psi\omega + \chi\psi\varphi + \chi\omega\varphi + \psi\omega\varphi = \gamma$, IV. $\chi\psi\omega\varphi = \delta$ ἦναι δεδομέναι, τότε εὑρίσκεται εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν ἐξίσωσις τοῦ τρίτου βαθμοῦ, εἰς δὲ τὴν δευτέραν τοῦ τετάρτου, ἡ ὁποία παρέχει ἐνταυτῷ ὅλας τὰς ἀγνώστους: πῶς μορφοῦται ἡ ἐξίσωσις; — Ὅταν εἶναι μ ῥίζαι ἐξισώσεως τοῦ $\nu^{ου}$ βαθμοῦ γνωσταί, τότε δὲν χρειάζεται εἰς προσδιορισμὸν τῶν λοιπῶν εἰμὴ ἡ λύσις ἐξισώσεως τοῦ $(\nu-\mu)^{ου}$ βαθμοῦ: πῶς εὑρίσκεται αὕτη ἡ ἐξίσωσις; — Ὅταν ὁ βαθμὸς ἐξισώσεως ἐκφράζεται διὰ περιττοῦ ἀριθμοῦ, τότε ἔχει ἀναγκαίως τοὐλάχιστον μίαν πραγματικὴν ῥίζαν: διατί; — Ὅταν $\theta + \kappa\sqrt{-1}$ ἦναι ὁποιαδήποτε φανταστικὴ ῥίζα ἐξισώσεως, τότε πρέπει καὶ τὸ $\theta - \kappa\sqrt{-1}$ νὰ ἦναι ῥίζα αὐτῆς· πῶς ἀποδεικνύεται αὐτό; — Ὅταν προϋποτεθῇ, τὸ ὁποῖον καὶ ἀποδεικνύεται ἀκριβῶς, ὅτι ὅλαι αἱ φανταστικαὶ ποσότητες καταντοῦν εἰς τὸ σχῆμα $\theta + \kappa\sqrt{-1}$: πόσας φανταστικὰς καὶ πόσας πραγματικὰς ῥίζας ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ μία ἐξίσωσις τοῦ $\nu^{του}$ βαθμοῦ, καθὸ ὁ ἀριθμὸς ν εἶναι ἄρτιος ἢ περιττός; — Ὅταν ὁ καρδανικὸς τύπος δίδῃ φανταστικὸν πόρισμα, δὲν ἔχει τότε ἡ ἐξίσωσις κἀμμίαν πραγματικὴν ῥίζαν; ἢ πρέπει αὐτὸ μόνον νὰ δείξῃ, ὅτι τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἤθελαν νὰ ἐπιβάλωσιν εἰς τὴν ῥίζαν εἶναι ἀδύνατον;

ΙΕ. *Λύσις τῶν ἐξισώσεων διὰ τῆς προσεγγίσεως.*

1) Ἐξισώσεις μὲ μίαν ἄγνωστον.

Πρώτη μέθοδος.

Ἔστω $\chi = 0$ ὁποιαδήποτε ἐξίσωσις διὰ τὴν ἄγνωστον χ. Ἔστω προσέτι φ διὰ δοκιμῶν εὑρεθεῖσα ἀξία τοῦ χ, ἡ ὁποία διαφέρει ἀπὸ τὴν ἀληθῆ ἀξίαν αὐτοῦ ὀλιγώτερον τῆς μονάδος. Ἂν τεθῇ λοιπὸν $\varphi + \theta$ ἀντὶ τοῦ χ εἰς ἐκείνην τὴν ἐξίσωσιν, τότε πρέπει, εἰς ἀκριβῆ προσδιορισμὸν, τὸ θ νὰ ἦναι < 1. Ἐπομένως ἂν φυλαχθῇ μόνον ἡ πρώτη δύναμις τοῦ θ εἰς τὴν ἀνάπτυξιν καὶ παραμεληθῶσιν αἱ ὑψηλότεραι δυνάμεις αὐτοῦ ὡς ὀλιγώτερον σημαντικαί, μεταβάλλεται ἡ ἐξίσωσις $\chi = 0$ εἰς ἄλλην ἐξίσωσιν τοῦ σχήματος $A + B\theta = 0$, ὅπου A, B, εἶναι γνωσταὶ ποσότητες. Ἐκ τούτου εὑρίσκεται καὶ τὸ θ, ἐπομένως καὶ $\chi = \varphi + \theta$, τοὐλάχιστον ὡς ἔγγιστα. Μὲ αὐτὴν τὴν νέαν ἀξίαν τοῦ χ ἠμπορεῖ ἐπίσης νὰ ἐκτελῆται ἡ ἐργασία, καθὼς καὶ προτοῦ μὲ τὸ φ, καὶ ἂν ἐπαναληφθῇ πολλάκις νὰ πλησιάζῃ βαθμηδὸν τὴν ἀληθῆ ἀξίαν τοῦ χ.

Διὰ τῆς ἐφαρμογῆς αὐτῆς τῆς ἀρχῆς εἰς τὴν γενικὴν ἐξίσωσιν:

$$\chi^\mu + \alpha\chi^{\mu-1} + \beta\chi^{\mu-2} + \gamma\chi^{\mu-3} + \ldots + \theta\chi^2 + \kappa\chi + \lambda = 0$$

εὑρίσκεται ἡ ἑξῆς ἔκφρασις διὰ τὴν ἑκασταχοῦ ὡς ἔγγιστα ἀξίαν:

$$\frac{(\mu-1)\varphi^\mu + (\mu-2)\alpha\varphi^{\mu-1} + (\mu-3)\beta\varphi^{\mu-2} + \ldots + 1\theta\varphi^2 - \lambda}{\mu\varphi^{\mu-1} + (\mu-1)\alpha\varphi^{\mu-2} + (\mu-2)\beta\varphi^{\mu-3} + \ldots + 2\theta\varphi + \kappa}$$

Ἐπομένως διὰ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ τρίτου βαθμοῦ

$\chi^3 + \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ εἶναι

$$\chi = \frac{2\varphi^3 + \alpha\varphi^2 - \gamma}{3\varphi^2 + 2\alpha\varphi + \beta}$$

Διὰ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ τετάρτου βαθμοῦ

$\chi^4 + \alpha\chi^3 + \beta\chi^2 + \gamma\chi + \delta = 0$ εἶναι

$$\chi = \frac{3\chi^4 + 2\alpha\varphi^3 + \beta\varphi^2 - \delta}{4\varphi^3 + 3\alpha\varphi^2 + 2\beta\varphi + \delta}$$

Διὰ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ πέμπτου βαθμοῦ

$\chi^5 + \alpha\chi^4 + \beta\chi^3 + \gamma\chi^2 + \delta\chi + \varepsilon = 0$ εἶναι

$$\chi = \frac{4\varphi^5 + 3\alpha\varphi^4 + 2\beta\varphi^3 + \gamma\varphi^2 - \varepsilon}{5\varphi^4 + 4\alpha\varphi^3 + 3\beta\varphi^2 + 2\gamma\varphi + \delta}$$

κ. ο. κ.

Παραδείγματα.

1) Ἐξ. $\chi^3 = 2$
$\varphi = 1$, $\varphi' = \frac{4}{3}$, $\varphi'' = \frac{91}{72}$, $\varphi''' = \frac{2253638}{1788696}$, κ. ο. κ. (*)

2) Ἐξ. $\chi^3 = 30$
$\varphi = 3$, $\varphi' = \frac{28}{9}$, $\varphi'' = \frac{65774}{21168}$, κ. ο. κ.

3) Ἐξ. $\chi^3 - 12\chi^2 + 57\chi - 94 = 0$
$\varphi = 3$, $\varphi' = \frac{10}{3}$, $\varphi'' = \frac{938}{279}$, κ. ο. κ.

4) Ἐξ. $\chi^3 - 15\chi^2 + 72\chi - 109 = 0$
$\varphi = 5$, $\varphi' = \frac{16}{3}$, $\varphi'' = \frac{385}{72}$, κ. ο. κ.

(*) φ, φ', φ'', κ. ο. κ. σημαίνουν τὰς διαδοχικὰς ὡς ἔγγιστα ἀξίας τοῦ χ. Ἐδῶ γίνεται ὑπολογισμὸς μιᾶς μόνης ῥίζης. Διὰ τὰς ἄλλας ῥίζας, ἂν ἦναι δυνατόν, ἠμπορεῖ νὰ ἐφαρμοσθῇ ὁ αὐτὸς τρόπος τῆς ἐργασίας.

5) 'Εξ. $\chi^3 - 13\chi^2 + 38\chi + 17 = 0$

$\varphi = 8,\ \varphi' = \frac{175}{22},\ \varphi'' = \frac{1775084}{223074}$, κ. ο. κ.

6) 'Εξ. $\chi^3 + 2\chi^2 + 3\chi - 52 = 0$

$\varphi = 3,\ \varphi' = \frac{62}{21},\ \varphi'' = \frac{1119676}{379323}$, κ. ο. κ.

7) 'Εξ. $\chi^3 - 12\chi - 132 = 0$

$\varphi = 6,\ \varphi' = \frac{47}{8},\ \varphi'' = \frac{1375645}{234286}$, κ. ο. κ.

8) 'Εξ. $\chi^4 - 4\chi^3 + 18 = 0$

$\varphi = 2,\ \varphi' = \frac{17}{8},\ \varphi'' = \frac{137597}{64736}$, κ. ο. κ.

9) 'Εξ. $\chi^4 + 8\chi^2 + 16\chi - 440 = 0$

$\varphi = 4,\ \varphi' = \frac{167}{42},\ \varphi'' = \frac{4096064771}{1030240056}$, κ. ο. κ.

Διὰ νὰ ἐξακολουθῆται εὐκολώτερα ὁ ὑπολογισμὸς εἶναι καλὸν ἡ διὰ τὸ φ'' εὑρεθεῖσα ἀξία νὰ ἀναπτύσσεται ἕως τρία δεκαδικὰ, καθότι σπανίως συμβαίνει νὰ παραχθῇ ἡ ῥίζα ἀκριβέστερον διὰ τῆς τρίτης προσεγγίσεως.

Δευτέρα μέθοδος

Ἔστω $X = 0$ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἰς τὸ χ· ζητεῖται νὰ ἀναπτυχθῇ ὁποιαδήποτε ῥίζα της διὰ τῶν συνεχῶν κλασμάτων. Κατὰ τὴν γενικὴν ἀρχὴν τοῦ II σελ. 115 ἐκτελεῖται ἡ ἐργασία ὡς ἕπεται:

Τίθεται $\alpha + \frac{1}{\chi^{\mathrm{I}}}$ ἀντὶ τοῦ χ καὶ μεταβάλλεται διὰ τούτου ἡ ἐξίσωσις $X = 0$ εἰς ἄλλην $X^{\mathrm{I}} = 0$ ἀντὶ χ^{I}. Ἂς ἦναι α^{I} καὶ $\alpha^{\mathrm{I}} + 1$ οἱ δύω ἀκέραιοι ἀριθμοὶ μεταξὺ τῶν ὁποίων συμπίπτει ἡ ῥίζα αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως· τότε τίθεται τὸ $\alpha^{\mathrm{I}} + \frac{1}{\chi^{\mathrm{II}}}$ ἀντὶ χ^{I} καὶ μεταβάλλεται διὰ τούτου ἡ ἐξίσωσις $X^{\mathrm{I}} = 0$, εἰς ἄλλην

$X^{\mathrm{II}} = 0$ ἀντὶ χ^{II}. Ὅταν λοιπὸν μία ῥίζα τῆς τελευταίας ταύτης ἐξισώσεως συμπίπτῃ μεταξὺ τοῦ α^{II} καὶ $\alpha^{\mathrm{II}} + 1$, τότε τίθεται πάλιν τὸ $\alpha^{\mathrm{II}} + \frac{1}{\chi^{\mathrm{III}}}$ ἀντὶ τοῦ χ^{II}, καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐξακολουθεῖται ἡ ἐργασία. Οὕτως εὑρίσκεται ἡ ῥίζα χ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἐκφρασμένη διὰ συνεχοῦς κλάσματος, ὡς:

$$\chi = \alpha + \frac{1}{\chi^{\mathrm{I}}} = \alpha + \frac{1}{\alpha^{\mathrm{I}} + \frac{1}{\chi^{\mathrm{II}}}} = \alpha + \cfrac{1}{\alpha^{\mathrm{I}} + \cfrac{1}{\alpha^{\mathrm{II}} + \kappa\tau\lambda.}}$$

Ἂν μετὰ τοῦτο ἀναλυθῇ αὐτὸ τὸ κλάσμα εἰς τὰ ὡς ἔγγιστα αὐτοῦ κλάσματα, εὑρίσκονται αἱ ὡς ἔγγιστα ἀξίαι τῆς ζητουμένης ῥίζης τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Παραδείγματα

1) $\chi^3 - 2 = 0$

. . . .

$X = \chi^3 - 2 = 0$	$\chi = 1 + \frac{1}{\chi^{\mathrm{I}}}$
$X^{\mathrm{I}} = \chi^{\mathrm{I}3} - 3\chi^{\mathrm{I}2} - 3\chi^{\mathrm{I}} - 1 = 0$	$\chi^{\mathrm{I}} = 3 + \frac{1}{\chi^{\mathrm{II}}}$
$X^{\mathrm{II}} = 10\chi^{\mathrm{II}3} - 6\chi^{\mathrm{II}2} - 6\chi^{\mathrm{II}} - 1 = 0$	$\chi^{\mathrm{II}} = 1 + \frac{1}{\chi^{\mathrm{III}}}$
$X^{\mathrm{III}} = 3\chi^{\mathrm{III}3} - 12\chi^{\mathrm{III}2} - 24\chi^{\mathrm{III}} - 10 = 0$	$\chi^{\mathrm{III}} = 5 + \frac{1}{\chi^{\mathrm{IV}}}$
$X^{\mathrm{IV}} = 55\chi^{\mathrm{IV}3} - 81\chi^{\mathrm{IV}2} - 33\chi^{\mathrm{IV}} - 3 = 0$	$\chi^{\mathrm{IV}} = 1 + \frac{1}{\chi^{\mathrm{V}}}$
$X^{\mathrm{V}} = 62\chi^{\mathrm{V}3} + 30\chi^{\mathrm{V}2} - 84\chi^{\mathrm{V}} - 55 = 0$	$\chi^{\mathrm{V}} = 1 + \frac{1}{\chi^{\mathrm{VI}}}$

κ. ο. κ.

Ὡς ἔγγιστα ἀξίαι: 1, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{29}{23}$, $\frac{34}{27}$, $\frac{63}{50}$, κτλ.

Ἀληθὴς ῥίζα: 1,25992 . . . .

2) $\chi^3 - 15\chi^2 + 63\chi - 50 = 0$

. . . .

$$\begin{array}{l|l} X = \chi^3 - 15\chi^2 + 63\chi - 50 = 0 & \chi = 1 + \frac{1}{\chi'} \\ X' = \chi'^3 - 36\chi'^2 + 12\chi' - 1 = 0 & \chi' = 35 + \frac{1}{\chi''} \\ X'' = 806\chi''^3 - 1167\chi''^2 - 69\chi'' - 1 = 0 & \chi'' = 1 + \frac{1}{\chi'''} \\ X''' = 431\chi'''^3 - 15\chi'''^2 - 1251\chi''' - 806 = 0 & \chi''' = 1 + \frac{1}{\chi^{IV}} \end{array}$$

κ. ο. κ.

Ὡς ἔγγιστα ἀξίαι: 1, $\frac{36}{35}$, $\frac{37}{36}$, $\frac{73}{71}$, κτλ.

Ἀληθὴς ῥίζα: 1,02803 . . . . .

3) $\chi^3 - 12\chi^2 + 45\chi - 53 = 0$

. . . .

$$\begin{array}{l|l} X = \chi^3 - 12\chi^2 + 45\chi - 53 = 0 & \chi = 5 + \frac{1}{\chi'} \\ X' = 3\chi'^3 - 3\chi' - 1 = 0 & \chi' = 1 + \frac{1}{\chi''} \\ X'' = \chi''^3 - 6\chi''^2 - 9\chi'' - 3 = 0 & \chi'' = 7 + \frac{1}{\chi'''} \\ X''' = 17\chi'''^3 - 54\chi'''^2 - 15\chi''' - 1 = 0 & \chi''' = 3 + \frac{1}{\chi^{IV}} \\ X^{IV} = 73\chi^{IV3} - 120\chi^{IV2} - 99\chi^{IV} - 17 = 0 & \chi^{IV} = 2 + \frac{1}{\chi^{V}} \\ X^{V} = 111\chi^{V3} - 297\chi^{V2} - 318\chi^{V} - 73 = 0 & \chi^{V} = 3 + \frac{1}{\chi^{VI}} \\ X^{VI} = 703\chi^{VI3} - 579\chi^{VI2} - 702\chi^{VI} - 111 = 0 & \chi^{VI} = 1 + \frac{1}{\chi^{VII}} \end{array}$$

κ. ο. κ.

Ὡς ἔγγιστα ἀξίαι: 5, 6, $\frac{47}{8}$, $\frac{147}{25}$, $\frac{341}{58}$, $\frac{1170}{199}$, $\frac{1511}{257}$, κτλ.

Ἀληθὴς ῥίζα: 5,879385 . . . . .

4) $\chi^3 - 12\chi^2 + 57\chi - 94 = 0$

. . . .

$$\begin{array}{l|l} X = \chi^3 - 12\chi^2 + 57\chi - 94 = 0 & \chi = 3 + \frac{1}{\chi'} \\ X' = 4\chi'^3 - 12\chi'^2 + 3\chi' - 1 = 0 & \chi' = 3 - \frac{1}{\chi''} \\ X'' = 8\chi''^3 - 39\chi''^2 + 24\chi'' - 4 = 0 & \chi'' = 4 + \frac{1}{\chi'''} \\ X''' = 20\chi'''^3 - 96\chi'''^2 - 57\chi''' - 8 = 0 & \chi''' = 5 + \frac{1}{\chi^{IV}} \\ X^{IV} = 193\chi^{IV3} - 483\chi^{IV2} - 204\chi^{IV} - 20 = 0 & \chi^{IV} = 3 + \frac{1}{\chi^{V}} \end{array}$$

κ. ο. κ.

Ὡς ἔγγιστα ἀξίαι: 3, $\frac{10}{3}$, $\frac{37}{11}$, $\frac{195}{58}$, $\frac{622}{185}$, κτλ.

Ἀληθὴς ῥίζα: 3,36216 . . . . .

5) $\chi^3 - 12\chi - 28 = 0$

. . . .

$$\begin{array}{l|l} X = \chi^3 - 12\chi - 28 = 0 & \chi = 4 + \frac{1}{\chi'} \\ X' = 12\chi'^3 - 36\chi'^2 - 12\chi' - 1 = 0 & \chi' = 3 + \frac{1}{\chi''} \\ X'' = 37\chi''^3 - 96\chi''^2 - 72\chi'' - 12 = 0 & \chi'' = 3 + \frac{1}{\chi^{IV}} \\ X''' = 93\chi'''^3 - 351\chi'''^2 - 237\chi''' - 37 = 0 & \chi^{IV} = 4 + \frac{1}{\chi^{V}} \end{array}$$

$$\chi^{\text{iv}}=649\chi^{\text{iv}3}-1419\chi^{\text{iv}2}-765\chi^{\text{iv}}-93=0 \,\Big|\, \chi^{\text{iv}}=3-\frac{1}{\chi^{\text{v}}}$$

κ. ο. κ.

Ὡς ἔγγιστα ἀξίαι: $4,\ \frac{13}{3},\ \frac{43}{10},\ \frac{185}{43},\ \frac{598}{139},$ κτλ.

Ἀληθὴς ῥίζα: 4,30213 . . . . .

Εἰς ταύτην τὴν μέθοδον τῆς προσεγγίσεως ἠμποροῦν νὰ χρησιμεύσωσι μερικαὶ εὐκολίαι καὶ συγκοπαὶ, αἱ ὁποῖαι ὅμως δὲν ἀνήκουν ἐδῶ. Αὐτὴ ἠμπορεῖ νὰ ἑνωθῇ ἐπωφελῶς καὶ μὲ τὴν πρώτην μέθοδον, ὅταν πλησιάσῃ τις ἤδη κατά τι τὴν ῥίζαν.

---

2) Ἐξισώσεις μὲ πολλὰς ἀγνώστους.

Ἂς ἦναι $X=0$ καὶ $X_1=0$ δύω ἐξισώσεις διὰ τὰς ἀγνώστους χ καὶ ψ. Ἐκλαμβάνεται, ὅτι αἱ ἀξίαι τοῦ χ καὶ ψ εἶναι σχεδὸν γνωσταί. καὶ ζητεῖται νὰ προσδιορισθῶσιν αἱ αὐταὶ ἀκριβέστερα.

I. Ἂς ἦναι $\chi=\alpha$, $\psi=\beta$ αἱ ἀξίαι αὐταί. τότε τίθενται $\alpha+\theta$ ἀντὶ χ, $\beta+\varkappa$ ἀντὶ ψ εἰς τὰς δύω δοθείσας ἐξισώσεις $X=0$, $X_1=0$ καὶ φυλάττονται εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν ἐκφράσεων X, X_1 μόνον ἐκεῖνοι οἱ ὅροι, ὅπου μόνον τὸ θ καὶ $\varkappa$ ἀπαντῶνται εἰς τὴν πρώτην δύναμιν, ὄχι ὅμως τὰ γινόμενα καὶ αἱ ὑψηλότεραι δυνάμεις αὐτῶν, καθότι αὐταὶ παραλείπονται ὡς ἀσήμαντοι. Ἐκ τούτου αἱ δύω ἐξισώσεις $X=0$, $X_1=0$ μεταβάλλονται εἰς δύω ἄλλας τοῦ ἑξῆς σχήματος:

$$A+B\theta+\Gamma\varkappa=0$$
$$A'+B'\theta+\Gamma'\varkappa=0$$

ὅπου A, B, Γ, A', B', Γ', θέλουν εἶσθαι γνωστοὶ ἀριθμοί.

ἂν ἐκ τούτου προσδιορισθῇ τὸ θ, $\varkappa$, εὑρίσκονται καὶ αἱ διορθώσεις τῶν ἀξιῶν α, β καὶ ἀκολούθως αἱ ὡς ἔγγιστα ἀξίαι τοῦ χ, ψ, οἷον: $\chi=\alpha+\theta$, $\psi=\beta+\varkappa$, αἱ ὁποῖαι πλησιάζουν ἤδη τὰς ἀληθεῖς ἀξίας περισσότερον παρὰ ὅ,τι αἱ προλαβοῦσαι α, β.

II. Μὲ αὐτὰς τὰς ἀξίας γίνεται ἡ ἐργασία ἐπίσης καθὼς καὶ πρότερον μὲ τὸ α, β καὶ εὑρίσκονται ἐκ νέου αἱ ἀναγκαῖαι διορθώσεις καί τινες ὡς ἔγγιστα ἀξίαι τοῦ χ, ψ, αἱ ὁποῖαι πλησιάζουν ἀκόμη περισσότερον, εἰς τὰς ἀληθεῖς ἀξίας τῶν ποσοτήτων τούτων ἀπὸ τὰς προλαβούσας.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐξακολουθεῖται ἡ ἐργασία, ἕως ὅτου νὰ φανῇ ὅτι πλησιάζει ἀρκετὰ τὰς ἀξίας τοῦ χ, ψ. Ἐκτὸς τούτων εἰς τοὺς ἀναγκαίους ὑπολογισμοὺς αὐτῶν ἠμποροῦν νὰ χρησιμεύσωσιν ἐπωφελῶς οἱ λογάριθμοι.

Παράδειγμα.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις:

$$\chi^7-5\chi^2\psi^4+1506=0$$
$$\chi^5-3\chi^4\psi-103=0$$

Αἱ ἀξίαι $\chi=2$, $\psi=3$, ἐπαρκοῦν σχεδὸν εἰς αὐτὰς τὰς ἐξισώσεις:

Πρώτη διόρθωσις.

$$14-1172\theta-2160\varkappa=0$$
$$-4-288\theta+357\varkappa=0$$

Ἐκ τούτου: $\theta=-0{,}0035$, $\varkappa=+0{,}0084$

ὅθεν: $\chi=1{,}9965$, $\psi=3{,}0084$

Δευτέρα διόρθωσις.

$$-0{,}486-1189{,}170\theta-2170{,}576\varkappa=0$$
$$0{,}026-287{,}293\theta+361{,}890\varkappa=0$$

Ἐκ τούτου: $\theta = -0{,}000113$, $\varkappa = -0{,}000161$
$\chi = 1{,}996387$, $\psi = 3{,}008239$

Αἱ τελευταῖαι ὡς ἔγγιστα ἀξίαι τοῦ χ, ψ, εἶναι ἤδη ἕως τὸ ἕκτον δεκαδικὸν ὀρθαί, καὶ ἑπομένως δὲν χρειάζονται πλέον κάμμίαν διόρθωσιν, ἂν ἄλλως δὲν ἦναι ἀνάγκη νὰ εὑρεθῶσι κατά τι ἀκριβέστερα.

Αὕτη ἡ μέθοδος ἠμπορεῖ νὰ παρασταθῇ διὰ γενικῶν ἐκφράσεων, ὡς ἕπεται: Λ. ἦναι ν ἐξισώσεις $\chi = 0$, $\chi_{I} = 0$, $\chi_{II} = 0$, κτλ. μεταξὺ τῶν ν ἀγνώστων ποσοτήτων χ, ψ, ω κτλ. δεδομέναι. Λ. ἦναι πρὸς τούτοις α, β, γ κτλ. αἱ ἀξίαι τοῦ χ, ψ, ω κτλ. αἱ ὁποῖαι πλησιάζουν ἐκείνας ἀρκετά, ὥστε ἡ διαφορὰ ἀπὸ τὰς ἀληθεῖς ἀξίας ἠμπορεῖ νὰ ἐκληφθῇ < 1. Τότε ἀντικαθίσταται $\alpha + \theta$, $\beta + \varkappa$, $\gamma + \lambda$ κτλ. εἰς τὰ χ, ψ, ω, κτλ. εἰς ἐκείνας τὰς ἐξισώσεις καὶ ἀναπτύσσονται μὲ τρόπον, ὥστε φυλάττονται αἱ πρῶται μόνον δυνάμεις τοῦ θ, $\varkappa$, λ, κτλ. ὄχι ὅμως καὶ τὰ γινόμενα καὶ αἱ ὑψηλότεραι δυνάμεις αὐτῶν. οὕτως εὑρίσκονται ν ἐξισώσεις, μεταξὺ τῶν ν ποσοτήτων θ, $\varkappa$, λ κτλ. τοῦ σχήματος

$$A + B\theta + \Gamma\varkappa + \Delta\lambda + \text{κτλ.} = 0$$

Ἂν καταριθμηθῶσιν ἐκ τούτων αἱ διορθώσεις θ, $\varkappa$, λ, κτλ. εὑρίσκονται αἱ πρῶται ὡς ἔγγιστα ἀξίαι τοῦ χ, ψ, ω, κτλ. οἷον: $\chi = \alpha + \theta$, $\psi = \beta + \varkappa$, $\omega = \gamma + \lambda$, κτλ. Μὲ αὐτὰς λοιπὸν τὰς ἀξίας ἐξακολουθεῖται ἡ ἐργασία, καθὼς καὶ πρότερον μὲ τὸ α, β, γ, κτλ. Αἱ διορθώσεις ἐντοσούτῳ ἐξακολουθοῦνται ἕως ὅτου νὰ πλησιάσωσιν ἀρκετὰ τὰς ἀξίας τοῦ χ, ψ, ω, κτλ.

Τὸ οὐσιῶδες τῆς μεθόδου ταύτης, δηλαδή: ἡ διαδοχικὴ διόρθωσις, εἶναι ἡ βάσις τῶν περισσοτέρων μεθόδων προσεγγίσεως. Αὕτη εἶναι ἀξία νὰ τὴν παραδεχθῶσιν ὅλα τὰ βιβλία τῆς ἀλγέ-

βρης, διὰ τὸ μεγάλον ὄφελος καὶ τὴν ἁπλότητά της, μόλον ὅτι αὐτὴ καθ' ὅλην της τὴν ἔκτασιν καὶ τὰς ἀπαντωμένας εἰς αὐτὴν συγκοπὰς δὲν ἠμπορεῖ νὰ παραδοθῇ παρὰ εἰς τὴν ἀνάλυσιν·

ΤΡΙΤΟΝ ΤΜΗΜΑ.

ΠΕΡΙΕΧΟΝ

Προβλήματα πρὸς ἐφαρμογὴν καὶ ἄσκησιν τῶν προειρημένων.

Ις. Προβλήματα τῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ μίαν ἄγνωστον.

1) Δύω τραπεζῖται μετροῦν τὰ χρήματα των καὶ προκύπτει, ὅτι ὁ εἷς ἔχει διπλάσια τοῦ ἄλλου, καὶ οἱ δύω μαζῆ ἔχουν 38700 δραχμάς. Πόσας εἶχεν ἕκαστος αὐτῶν;

Ἀπ. Ὁ εἷς εἶχε 12900 καὶ ὁ ἄλλος 25800 δρ.

2) Κεφάλαιον 2500 δραχμῶν πρέπει νὰ διανεμηθῆ εἰς δύω ἀδελφοὺς μὲ τρόπον, ὥστε ὁ εἷς νὰ λάβῃ τετραπλάσια τοῦ ἄλλου. Πόσας θέλει λάβει ἕκαστος αὐτῶν;

Ἀπ. Ὁ εἷς 500 καὶ ὁ ἄλλος 2000.

3) Ἔμπορος εἶχε 2640 δραχμὰς καὶ ἐξ αὐτῶν $4\frac{1}{2}$ φορὰς περισσοτέρας εἰς μικρὸν νόμισμα παρὰ εἰς μεγάλον. Πόσα εἶχεν ἀπὸ ἕκαστον εἶδος;

Ἀπ. 2160 δραχμὰς εἰς μικρὸν νόμισμα καὶ 480 εἰς μεγάλον.

4) Ζητεῖται νὰ διαμοιρασθῶσι 1000 δραχμαὶ εἰς δύω ἀνθρώπους, ἐξ ὧν ὁ πρῶτος νὰ λάβῃ 74 περισσοτέρας τοῦ δευτέρου. Ποῖαι θέλουν εἶσθαι αἱ μερίδες;

Ἀπ. 537 καὶ 463.

5) Ὁ ἀριθμὸς 237 πρέπει νὰ μερισθῆ εἰς δύω μέρη, ὥστε τὸ ἓν νὰ περιέχεται $1\frac{1}{4}$ φορὰς εἰς τὸ ἄλλο. Ποῖα εἶναι τὰ μέρη;

Ἀπ. $105\frac{1}{3}$ καὶ $131\frac{2}{3}$

6) Δύω ποιμένες ἠγόρασαν δύω πρόβατα διὰ 153 δραχμάς. Ἡ τιμὴ τοῦ πρώτου ἦτον κατὰ 11 μεγαλήτερα ἀπὸ ἐκείνην τοῦ δευτέρου. Πόση ἦτον ἡ τιμὴ ἑκάστου;

Ἀπ. Τοῦ ἑνὸς 82 καὶ τοῦ ἄλλου 71.

Τί ἔχουν τὰ ἓξ προλαβόντα προβλήματα κοινὸν μεταξύ των.

7) Ζητοῦνται δύω ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον $= \alpha$ καὶ ὁ εἷς μ φορὰς μεγαλήτερος τοῦ ἄλλου. Ποῖοι εἶναι;

Ἀπ. $\frac{\alpha}{\mu+1}$ καὶ $\frac{\mu\alpha}{\mu+1}$

8) Κεφάλαιον 1200 δραχμῶν πρέπει νὰ διανεμηθῆ εἰς δύω ἀνθρώπους Α καὶ Β μὲ τρόπον ὥστε ἡ μερὶς τοῦ ἑνὸς νὰ ἔχῃ πρὸς τὴν τοῦ ἄλλου ὡς 2 πρὸς 7. Ποῖα εἶναι ἑκάστου ἡ μερίς;

Ἀπ. Τοῦ Α $266\frac{2}{3}$, τοῦ Β $933\frac{1}{3}$ δραχμαί.

Πῶς ἠμπορεῖ νὰ ἐκφρασθῆ γενικώτερα τὸ πρόβλημα τοῦτο;

9) Ζητεῖται νὰ μερισθῆ ὁ ἀριθμὸς 39 εἰς δύω μέρη, ὥστε τὸ πρῶτον νὰ ἦναι 12 πλάσιον τοῦ δευτέρου. Ποῖα εἶναι αὐτὰ τὰ μέρη;

Ἀπ. 36 καὶ 3.

10) Ζητεῖται νὰ διαιρεθῆ ὁ ἀριθμὸς 116 εἰς 8 μέρη, ὥστε ἕκαστον μέρος νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ προηγούμενόν του κατὰ 3. Ποῖα εἶναι τὰ μέρη;

Ἀπ. 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25.

11) Ζητεῖται νὰ μερισθῆ ὁ ἀριθμὸς α εἰς δύω μέρη, ὥστε τὸ ἓν νὰ ἔχῃ πρὸς τὸ ἄλλο ὡς μ πρὸς ν. Ποῖα εἶναι τὰ μέρη του;

Ἀπ. $\frac{\mu}{\mu+\nu}\alpha$, $\frac{\nu}{\mu+\nu}\alpha$.

Τί ἔχει αὐτὸ τὸ πρόβλημα κοινὸν μὲ τὸ ἕβδομον; καὶ πῶς ἐφαρμόζεται τὸ ἓν εἰς τὸ ἄλλο;

12) Πόσα χρήματα ἔχω, ἂν τὸ τέταρτον καὶ πέμπτον μέρος αὐτῶν κάμνουν 2 τάλληρα (*) καὶ 6 γροσίκια.

Ἀπ. 5 τάλληρα.

13) Δύω φίλοι ἀπήντησαν ἱπποφορβὸν καὶ ἀπεφάσισαν νὰ ἀγοράσωσιν ἕνα ἵππον. Ἀφοῦ ἐσυμφώνησαν μὲ τὸν πωλητὴν εἶδαν, ὅτι ὁ πρῶτος εἶχε μόνον τὸ πέμπτον καὶ ὁ ἄλλος μόνον τὸ ἕβδομον μέρος τῶν ἀναγκαίων χρημάτων· τότε ἐσυμφώνησαν νὰ τὸν δώσωσι μόνον ὅσα εἶχαν· αὐτὰ ὅμως ἦσαν 48 τάλ. Πόσα εἶχε ζητήσει ὁ πωλητής;

Ἀπ. 140 τάλ.

Αὐτὸ καὶ τὸ προλαβὸν πρόβλημα εἶναι ὅμοια.— Πῶς ἠμπορεῖ νὰ παρασταθῇ αὐτὴ ἡ ὁμοιότης διὰ γενικῶν ἐκφράσεων;

14) Ζητεῖται νὰ διαιρεθῇ ἀριθμός τις πρῶτον διὰ μ καὶ ἔπειτα διὰ ν καὶ νὰ προστεθῶσι τὰ δύω πηλίκα· τὸ κεφάλαιον αὐτῶν εἶναι $=$ α. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος;

Ἀπ. $\frac{\mu\nu\alpha}{\mu+\nu}$

15) Ὁ ἀριθμὸς 46 πρέπει νὰ μερισθῇ εἰς δύω ἄνισα μέρη, ὥστε ὅταν τὸ ἓν διαιρεθῇ διὰ 7 καὶ τὸ ἄλλο διὰ 3 τὸ κεφάλαιον τῶν πηλίκων νὰ ἀποτελῇ τὸν ἀριθμὸν 10.

Ποῖα εἶναι τὰ μέρη αὐτά;

Ἀπ. 28 καὶ 18.

16) Ὁ ἀριθμὸς α πρέπει νὰ μερισθῇ εἰς δύω τοιαῦτα μέρη, ὥστε τὸ κεφάλαιον τῶν πηλίκων, τὰ ὁποῖα προκύπτουν ὅταν

(*) Ἓν τάλληρον ἔχει 24 γροσίκια, 1 γροσίκι 3 κραϊτσάρια καὶ 1 κραϊτσάρι 3 φένιγα (Γερμ. Νόμισμα).

τὸ ἓν διαιρεθῇ διὰ μ καὶ τὸ ἄλλο διὰ ν, νὰ ἦναι $=$ β. Ποῖα εἶναι αὐτὰ τὰ μέρη;

Ἀπ. $\frac{\mu(\nu\beta-\alpha)}{\nu-\mu}$, $\frac{\nu(\mu\beta-\alpha)}{\mu-\nu}$

17) Εἰς συντροφίαν 266 ἀνθρώπων, συγκειμένην ἀπὸ στρατιωτικούς, ἐμπόρους καὶ δικαστάς, εὑρίσκοντο τετραπλάσιοι ἔμποροι καὶ διπλάσιοι στρατιωτικοὶ τῶν δικαστῶν. Πόσοι ἦσαν ἑκάστου ἐπαγγέλματος;

Ἀπ. 38 δικασταί, 152 ἔμποροι καὶ 76 στρατιωτικοί.

18) Ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἶναι τόσον μεγάλη, ὥστε εἰς 67 δεύτερα λεπτὰ ἠμπορεῖ νὰ διαδοθῇ κατὰ 126 πόδας περισσότερον ἀπὸ 3 μίλια (τὸ μίλι πρὸς 24000 πόδας)· πόσους πόδας διατρέχει λοιπὸν ὁ ἦχος εἰς ἓν δεύτερον λεπτόν;

Ἀπ. 1078.

19) Εἰς φρούριον εὑρίσκοντο 2600 φύλακες μεταξὺ αὐτῶν ἦσαν ἐννεαπλάσιοι πεζοὶ καὶ τριπλάσιοι πυροβολισταὶ τῶν ἱππέων. Πόσοι ἔτυχαν ἑκάστου τάγματος;

Ἀπ. 200 ἱππεῖς, 600 πυροβολισταὶ καὶ 1800 πεζοί.

20) Χωρικὸς ἐπώλει τρεῖς βόας καὶ ἐρωτηθεὶς περὶ τῆς ἀξίας αὐτῶν, ἀπεκρίθη: τοῦ μεγάλου ἡ ἀξία εἶναι κατὰ 4 δραχμὰς μεγαλητέρα ἐκείνης τοῦ μεσαίου καὶ τοῦ μικροῦ κατὰ 7 δρ. μικροτέρα τοῦ μεγάλου· ἂν ἠμπορέσω ὅμως νὰ τοὺς πωλήσω ὅλους μαζῇ, ἐκπίπτω 3 δραχμὰς τῆς ὅλης ἀξίας καὶ τοὺς δίδω διὰ 62 δραχμάς. Ποία ἦτον ἡ ἀξία ἑκάστου αὐτῶν;

Ἀπ. Τοῦ πρώτου $25\frac{1}{3}$, τοῦ μεσαίου $21\frac{1}{3}$, καὶ τοῦ τρίτου $18\frac{1}{3}$ δρ.

21) Ὁδοιπόρος ἔλεγεν: ὅλαι μου αἱ ὁδοιπορίαι ἀποτελοῦν 3040 λεύγας· ἐκ τούτων ἔκαμα $3\frac{1}{2}$ φορὰς περισσότερον διὰ θαλάσσης, παρὰ ἔφιππος· καὶ $2\frac{1}{4}$ περισσότερον πεζὸς παρὰ διὰ

θαλάσσης. Πόσας λεύγας ἔκαμεν αὐτὸς καθ' ἕκαστον τῶν εἰρημένων τρόπων;

'Απ. 240 λεύγας ἔφιππος, 840 διὰ θαλάσσης καὶ 1960 πεζός.

Τί κοινὸν ἔχουν μεταξύ των τὰ τέσσαρα προλαβόντα προβλήματα.

22) 'Ο ἀριθμὸς α πρέπει νὰ μερισθῇ εἰς τρία μέρη, ὥστε τὸ δεύτερον νὰ ἦναι μ=κις καὶ τὸ τρίτον ν=κις μεγαλήτερον ἀπὸ τὸ πρῶτον. Ποῖα εἶναι τὰ μέρη;

'Απ. $\frac{\alpha}{1+\mu+\nu}$, $\frac{\mu\alpha}{1+\mu+\nu}$, $\frac{\nu\alpha}{1+\mu+\nu}$.

23) Πολλαπλασιάζω ἀριθμὸν ἐπὶ 4, διαιρῶ τὸ γινόμενον διὰ 3 καὶ εὑρίσκω 24. Ποῖος εἶναι αὐτὸς ὁ ἀριθμός;

'Απ. 18.

24) Κῆπος 864 ὀργυιῶν πρέπει νὰ μερισθῇ εἰς τρεῖς χωρικοὺς Α, Β, Γ, μὲ τρόπον, ὥστε ἡ μερὶς τοῦ Α νὰ ἔχῃ πρὸς τὴν τοῦ Β ὡς 5 πρὸς 11 καὶ ὁ Γ νὰ λάβῃ, ὅσα ὁ Α καὶ Β μαζῆ. Πόσα θέλει λάβει ἕκαστος αὐτοῦ;

'Απ. Α 135, Β 297, Γ 432 ὀργυιάς.

25) 1170 τάλληρα πρέπει νὰ διανεμηθῶσιν εἰς τρεῖς υἱοὺς Α, Β, Γ κατὰ λόγον τῆς ἡλικίας των. 'Ο Β ἦτον κατὰ τὸ τρίτον πλέον ἡλικιωμένος τοῦ Α καὶ ὁ Γ διπλασίως τοῦ Α. Πόσα θέλει λάβει ἕκαστος;

'Απ. Α 270, Β 360, Γ 540 τάλ.

26) Εἰς πόλεμον ἐχρειώστουν τρεῖς πόλεις Α, Β, Γ νὰ συνεισφέρωσι 594 στρατιώτας. Ἡ διανομὴ ἔπρεπε νὰ γίνῃ κατὰ λόγον τοῦ πληθυσμοῦ τῶν πόλεων. Ἂν ὁ πληθυσμὸς τῆς Α ἔχει πρὸς τὸν τῆς Β ὡς 3 πρὸς 5 καὶ ὁ τῆς Β πρὸς τὸν τῆς Γ ὡς 8 πρὸς 7: πόσους στρατιώτας θέλει συνεισφέρει ἑκάστη πόλις;

'Απ. Ἡ Α 144, ἡ Β 240, ἡ Γ 210.

27) 'Ο ἀριθμὸς 720 πρέπει νὰ μερισθῇ εἰς τρία μέρη, ὥστε τὸ πρῶτον νὰ ἔχῃ πρὸς τὸ δεύτερον ὡς 3 : 4 καὶ τὸ δεύτερον πρὸς τὸ τρίτον ὡς 5 : 6. Ποῖον εἶναι τὸ πρῶτον μέρος.

'Απ. $183\frac{3}{59}$.

Ἔμπορος πρέπει νὰ διανέμῃ 21000 τάλ. εἰς τέσσαρας δανειστάς, Α, Β, Γ, Δ κατὰ λόγον τοῦ δανείου των. Το δάνειόν τοῦ Α ἔχει πρὸς τὸ τοῦ Β ὡς 2 πρὸς 3, τὸ τοῦ Β πρὸς τὸ τοῦ Γ ὡς 4 πρὸς 5 καὶ τὸ τοῦ Γ πρὸς τοῦ Δ ὡς 6 πρὸς 7. Πόσα θέλει λάβει ἕκαστος;

'Απ. 'Ο Α 3200, ὁ Β 4800, ὁ Γ 6000, ὁ Δ 7000 τάλ.

29) 'Ο ἀριθμὸς α πρέπει νὰ μερισθῇ εἰς τρία τοιαῦτα μέρη, ὥστε τὸ πρῶτον νὰ ἔχῃ πρὸς τὸ δεύτερον ὡς μ πρὸς ν καὶ τὸ δεύτερον πρὸς τὸ τρίτον ὡς π πρὸς ρ. Ποῖα εἶναι τὰ μέρη;

'Απ. $\frac{\mu\pi\alpha}{\mu\pi+\nu\pi+\nu\rho}$, $\frac{\nu\pi\alpha}{\mu\pi+\nu\pi+\nu\rho}$, $\frac{\nu\rho\alpha}{\mu\pi+\nu\pi+\nu\rho}$.

30) Κτηματίας ἔλεγε: τὸ τρίτον μέρος τῶν προσόδων μου ἐξοδεύω εἰς τροφὴν καὶ ἐνοίκιον, τὸ ὄγδοον εἰς ἐνδύματα, τὸ δέκατον εἰς ἄλλα μικρὰ ἔξοδα καὶ φυλάττω ἀκόμη ἐτησίως 318 ταλ. Πόσαι εἶναι αἱ ἐτήσιοί του πρόσοδοι;

'Απ. 720 τάλ.

31) Φρούραρχος ἐρωτηθεὶς περὶ τῆς δυνάμεως τῆς φρουρᾶς, ἀπεκρίθη τὰ δύω τρίτα τῆς φρουρᾶς εἶναι πεζικόν, τὸ ἕκτον αὐτῆς ἱππικὸν καὶ τὸ ὄγδοον πυροβολικόν· ἐκτὸς τούτων εἶναι καὶ πεντακόσιοι ἀπόμαχοι; Ποσάριθμος ἦτον ἡ φρουρὰ ὅλη;

'Απ. 12000.

32) Ἔμπορος μεταχειρισθεὶς εὐτυχῶς τὰ κεφάλαιά του ἐκέρδισε 15 τὰ ἑκατὸν, ὥστε ηὔξησεν ἡ κατάστασίς του ἕως 15571

τάλ. Πόσον ἦτον τὸ κατατεθὲν κεφάλαιον. (1)

Ἀπ. 13540 τάλ.

33) Κεφάλαιον ἐδόθη εἰς δάνειον μὲ τόκους πρὸς $4\frac{1}{2}$ τὰ ἑκατὸν δι' ἓν ἔτος. Εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους ἔλαβεν ὁ δανειστὴς εἰς κεφάλαια καὶ τόκους 13167 τάλ. Πόσον ἦτον κατ' ἀρχὰς τὸ κεφάλαιον;

Ἀπ. 12600 τάλ.

34) Αἱ πρόσοδοι ὑποστατικοῦ ηὔξησαν, ἐξαιτίας καλῆς οἰκονομίας, τὸ παρὸν ἔτος κατὰ 8 τὰ ἑκατὸν περισσότερον τοῦ παρελθόντος. Ἡ ἐφετινὴ πρόσοδος εἶναι 1890 τάλ. Πόση ἦτον ἡ τοῦ παρελθόντος ἔτους;

Ἀπ. 1750 τάλ.

35) Χωρικὸς ἠγόρασε κῆπον καὶ ἐπλήρωσε διὰ κάθε 5 πλέθρα 15 τάλ. Μετὰ καιρὸν τὸν ἐπώλησε πάλιν καὶ ἔλαβε δι' ἑκάστην ὀκτάδα πλέθρων 36 τάλ. εἰς τρόπον ὥστε ἐκέρδισεν 150 τάλ. Πόσων πλέθρων ἦτον ὁ κῆπος;

Ἀπ. 100.

36) Κτηματίας ἐρωτηθεὶς πρὸς πόσα ἠγόρασε τὸ πλέθρον τοῦ δάσους του, ἀπεκρίθη: ἡ ἀξία δύω πλέθρων ὑπερβαίνει κατὰ τόσον τὴν ἀξίαν 9 ταλ., καθόσον ἡ τῶν 5 πλέθρων ὑπερβαίνει τὴν τῶν 27. Πόση ἦτον ἡ ἀξία ἑκάστου πλέθρου;

Ἀπ. 6 τάλ.

37) Ἡ λίτρα ὀσπρίων πωλεῖται πρὸς 18 γρ. καὶ κερδίζει ὁ πωλητὴς $12\frac{1}{2}$ τὰ ἑκατόν. Πόση ἦτον ἡ ἀξία τοῦ καντaρίου (2)

Ἀπ. $73\frac{1}{3}$ τάλ.

---

(1) Ἐδῶ προϋποτίθεται ἡ γνῶσις τῶν ἀναλογιῶν διὰ τῶν ὁποίων εὑρίσκεται πόσα δίδει κεφάλαιόν τι κατὰ μῆνα ἢ κατ' ἔτος, ὅταν ἦναι γνωστὸν πόσα δίδουν τὰ 100.

(2) Τὸ καντάρι πρὸς 110 λίτρας καὶ τὸ τάλληρον 24 γροσίκια.

38) Ζητεῖται τὸ ποσὸν κεφαλαίου, τοῦ ὁποίου οἱ πενταετεῖς τόκοι, πρὸς 4 τὰ ἑκατὸν ἐτησίως, δίδουν 8208 τάλ.

Ἀπ. 6840 τάλ.

39) Πόσον εἶναι τὸ κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον, μὲ ἁπλοῦς τόκους ν ἐτῶν, ἀποτελεῖ τὴν ποσότητα β, ἂν λογισθῶσιν οἱ ἐτήσιοι τόκοι πρὸς α τὰ ἑκατόν;

Ἀπ. $\frac{100\,\beta}{100 + \alpha\nu}$.

40) Κυβευτὴς μετὰ τὸ τέλος τοῦ παιγνιδίου του εἶπε: χθὲς ἐκέρδισα 93 δρ. καὶ σήμερον ἔχασα 49· ἠξεύρω ὅμως, ὅτι σήμερον ἔλαβα μαζῆ μου τριπλάσια τῶν χθεσινῶν καὶ ἔχω μόλον τοῦτο τώρα, ὅσα καὶ χθὲς μετὰ τὸ παιγνίδιον. Πόσα εἶχε χθὲς καὶ πόσα σήμερον;

Ἀπ. 41 χθὲς καὶ 123 σήμερον.

41) Χαρτοπαίκτης ἔχασεν εἰς τὸ πρῶτον παιγνίδιον τὸ ἕκτον τῶν χρημάτων του, εἰς τὸ δεύτερον τὸ δέκατον. εἰς τὸ τρίτον ὅμως ἐκέρδισε τὸ τρίτον μέρος αὐτῶν. Εἰς τὸ τέλος ἐμέτρησε τὰ χρήματά του καὶ ηὗρεν ὅτι ἐκέρδισε 3 τάλληρα. Πόσα εἶχε κατ' ἀρχάς;

Ἀπ. 45 τάλ.

42) Ἁλιεὺς ἐσυμφώνησε μὲ τὸν υἱόν του νὰ τὸν δίδῃ 5 δρ. εἰς πᾶσαν εὐτυχῆ βολὴν τοῦ δικτύου του, εἰς πᾶσαν δυστυχῆ ὅμως νὰ τὸν δίδῃ ὁ υἱός του 3 δρ. Μετὰ 12 βολὰς εὑρίσκεται ὁ πατὴρ χρεώστης 28 δρ. εἰς τὸν υἱόν. Πόσαι ἦσαν αἱ εὐτυχεῖς καὶ πόσαι αἱ δυστυχεῖς βολαί;

Ἀπ. Αἱ εὐτυχεῖς 8 καὶ αἱ ἄλλαι 4.

43) Εἶναι δύω ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον εἶναι 96 καὶ ὁ εἷς ὑπερέχει τὸν ἄλλον κατὰ 16. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. 40 καὶ 56.

44) 18 ἐργάται ὑπεσχέθησαν νὰ τελειώσουν τεῖχος εἰς 7

ἑβδομάδας· ἀφοῦ ἠργάσθησαν 7 ἡμέρας, 3 ἐξ αὐτῶν ἠσθένησαν· οἱ λοιποὶ 15 ἠργάσθησαν ἀκόμη 11 ἡμέρας καὶ τότε ἠσθένησαν ἀκόμη 4 ἐξ αὐτῶν.

Πόσον καιρὸν ἔπρεπε νὰ ἐργασθῶσιν ἀκόμη οἱ ἐπίλοιποι 11 διὰ νὰ ἀποτελειώσωσι τὸ τεῖχος;

Ἀπ. 7 ἑβδομάδας καὶ 3 $\frac{8}{11}$ ἡμέρας.

45) Μετὰ πώλησιν εὐτυχῆ τῶν πραγματειῶν δύω ἐμπόρων, ἔπρεπε νὰ διαμοιρασθῶσι τὸ κέρδος των συμποσούμενον εἰς 1200 τάλληρα μὲ τρόπον ὥστε ὁ εἷς, ὡς ἔκτακτος σύντροφος, νὰ λάβῃ μόνον τὸ ἥμισυ τοῦ ἄλλου καὶ ἐκτὸς τούτου ἀκόμη 50 τάλληρα διὰ τὸν πολύν του κόπον. Πόσα ἔπρεπε νὰ λάβῃ ἕκαστος αὐτῶν;

Ἀπ. Ὁ εἷς 766 $\frac{2}{3}$, ὁ ἄλλος 433 $\frac{1}{3}$ τάλ.

46) 1520 τάλληρα πρέπει νὰ διανεμηθῶσιν εἰς τρεῖς ἀνθρώπους Α, Β, Γ, ὥστε ὁ Β νὰ λάβῃ 100 περισσότερα τοῦ Α καὶ ὁ Γ 270 περισσότερα τοῦ Β. Πόσα ἀνήκουν εἰς ἕκαστον αὐτῶν;

Ἀπ. εἰς τὸν Α 350, εἰς τὸν Β 450, καὶ εἰς τὸν Γ, 720 τάλ.

47) Χήρα ἔπρεπε νὰ μερισθῇ μὲ τοὺς δύω υἱοὺς καὶ τρεῖς θυγατέρας της ποσότητα 7500 ταλλήρων, κατὰ τὴν διαθήκην τοῦ ἀνδρός της, ὡς ἀκολούθως. Ἕκαστος υἱὸς νὰ λάβῃ τὸ διπλοῦν τῆς μερίδος τῆς θυγατρὸς, ἡ μήτηρ ὅμως ὅσα ἤθελαν λάβει ὅλα της τὰ τέκνα μαζῇ καὶ ἀκόμη 500 τάλ. Πόσα ἔλαβεν ἕκαστος;

Ἀπ. Ἡ χήρα 4000, ἕκαστος υἱὸς 1000 καὶ ἑκάστη θυγάτηρ 500 τάλ.

48) Στράτευμα συγκείμενον πρὸ τῆς μάχης ἀπὸ τετραπλασίους πεζοὺς τῶν ἱππέων ἔχασεν εἰς αὐτὴν 1000 πεζοὺς καὶ 500 ἱππεῖς, ὥστε ὁ ἀριθμὸς τῶν πρώτων μετὰ τὴν μάχην ἦτον πενταπλάσιος τῶν δευτέρων. Ποσάριθμον λοιπὸν ἦτον ἕκαστον σῶμα εἰς αὐτὸ τὸ στράτευμα;

Ἀπ. 6000 πεζοὶ καὶ 1500 ἱππεῖς.

49) Συντροφία 90 ἀτόμων, ἀνδρῶν γυναικῶν καὶ παίδων εὑρίσκετο εἰς ἓν μέρος. Οἱ ἄνδρες ἦσαν κατὰ 4 περισσότεροι τῶν γυναικῶν, οἱ παῖδες ὅμως 10 περισσότεροι τῶν ἀνδρῶν καὶ γυναικῶν μαζῇ. Πόσοι ἦσαν ἑκάστου γένους;

Ἀπ. 22 ἄνδρες, 18 γυναῖκες, 50 παῖδες.

50) Οἰκογένειαι ἐκ 3 μελῶν συγκειμένη ἔχει 120 ἔτη· ὁ ἀνὴρ ἔχει διπλάσια τῆς συζύγου καὶ αὐτὴ τριπλάσια τοῦ υἱοῦ. Ποίας ἡλικίας ἦτον ἕκαστος αὐτῶν;

Ἀπ. Ὁ πατὴρ 72 ἐτῶν, ἡ γυνὴ 39 καὶ ὁ υἱὸς 12.

51) Ἀλέξανδρος ὁ μέγας εἶπε ποτὲ πρός τινα τῶν στρατηγῶν του: ἐγὼ εἶμαι κατὰ 2 ἔτη πρεσβύτερος τοῦ Ἠφεστίωνος, ὁ Κλεῖτος ὅμως κατὰ 4 πρεσβύτερος καὶ τῶν δύω μας. Τότε εἶπεν ὁ Καλλισθένης: ὁ Πατήρ μου εἶναι 96 ἐτῶν καὶ ἐπομένως ἡλικιωμένος ὅσον ἀποτελεῖ ἡ ἡλικία ὅλων ὑμῶν μαζῇ. Πόσον ἡλικιωμένος ἦτον ἕκαστος αὐτῶν;

Ἀπ. Ὁ Ἠφεστίων 22 ἐτῶν, ὁ Ἀλέξανδρος 24 καὶ ὁ Κλεῖτος 50.

52) Σοφὸς ἔλεγε: μόλον ὅτι εἶμαι ἀρκετὰ ἡλικιωμένος, ἔχω ἀκόμη πατέρα καὶ πάππον· καὶ ἐρωτηθεὶς πόσον ἐτῶν εἶναι; ἀπεκρίθη: ὁ πατήρ μου ἦτον 23 ἐτῶν ὅταν μὲ ἐγέννησεν ἡ μήτηρ μου. καὶ ὁ πάππος μου ἦτον 22 ἐτῶν, ὅταν ἐγεννήθη ὁ πατήρ μου· πρὸ 20 ἐτῶν ἦτον ὅμως ἡ ἡλικία μου ἡμίσεια τῆς τωρινῆς τοῦ πατρός μου. Πόσης ἡλικίας ἦτον ἕκαστος αὐτῶν;

Ἀπ. Ὁ υἱὸς 63 ἐτῶν, ὁ πατὴρ 86 καὶ ὁ πάππος 108.

53) Νέος διηγεῖτο, ὅτι ἐγευμάτισε μὲ οἰκογένειαν, ἥτις συνέκειτο ἐκ 5 ἀτόμων· ὅλων ἡ ἡλικία μαζῇ ἀπετέλει 300 ἔτη καὶ ἐρωτηθεὶς πόσων ἐτῶν ἦτον ἕκαστος αὐτῶν, εἶπεν: ὁ πατὴρ ἦτον κατὰ 20 ἔτη πρεσβύτερος τῆς μητρὸς καὶ αὐτὴ κατὰ 15 πρεσβυτέρα τοῦ προγόνου· ὁ πρόγονος κατα 10 ἔτη μεγαλήτερος τοῦ

υἱοῦ καὶ αὐτὸς κατὰ 5 ἔτη μεγαλήτερος τῆς θυγατρός. Πόσων ἐτῶν ἦτον ἕκαστος;

Ἀπ. Ἡ θυγάτηρ 40 ἐτῶν, ὁ υἱὸς 45, ὁ πρόγονος 55, ἡ μήτηρ 70, ὁ πατὴρ 90.

54) Δάσος 8000 τετραγωνικῶν ποδῶν ἔπρεπε νὰ διαμερισθῇ εἰς τρεῖς χωρικοὺς Α, Β, Γ, ὥστε ὁ Β νὰ λάβῃ 276 πόδας ὀλιγώτερον τοῦ Α, καὶ ὁ Γ 1112 περισσότερον τοῦ Β. Πόσον ἔλαβεν ἕκαστος;

Ἀπ. Α 2480, Β 2204, Γ 3316 τετρ. πόδας.

55) Πατὴρ ἐχάρισεν εἰς τοὺς πέντε του υἱοὺς 1000 τάλληρα, τὰ ὁποῖα ἔπρεπε νὰ διαμερισθῶσι μεταξύ των κατὰ λόγον τῆς ἡλικίας των καὶ μὲ τρόπον, ὥστε νὰ λαμβάνῃ πάντοτε ὁ μεγαλήτερος 20 τάλ. περισσότερα τοῦ ἐγγὺς νεωτέρου του ἀδελφοῦ. Πόσα θέλει λάβει ὁ νεώτερος αὐτῶν;

Ἀπ. 160 τάλ.

56) Ἔμπορος ἀποθανὼν ἄφησεν εἰς τοὺς τρεῖς του υἱοὺς 6700 δραχμὰς καὶ κατὰ τὴν διαθήκην του ἔπρεπεν ὁ δεύτερος νὰ λάβῃ 300 περισσοτέρας τοῦ πρώτου· ὁ τρίτος ὅμως 100 περισσοτέρας τοῦ δευτέρου. Πόσας ἔλαβεν ἕκαστος αὐτῶν;

Ἀπ. Ὁ πρῶτος 2000, ὁ δεύτερος 2300 καὶ ὁ τρίτος 2400.

57) Δραχμῶν ποσότης πρέπει νὰ διαμερισθῇ μεταξὺ τριῶν ἐμπόρων Α, Β, Γ, ὡς ἀκολούθως: ὁ Α πρέπει νὰ λάβῃ 3000 δρ. ὀλιγωτέρας ἀπὸ τὸ ἥμισυ, ὁ Β 1000 δρ. ὀλιγωτέρας ἀπὸ τὸ τριτημόριον καὶ ὁ Γ 800 περισσοτέρας ἀπὸ τὸ τεταρτημόριον τοῦ κεφαλαίου. Πόσον εἶναι τὸ κεφάλαιον; καὶ πόσα θέλει λάβει ἕκαστος αὐτῶν;

Ἀπ. Τὸ κεφάλαιον εἶναι 38400 δραχμαί· ὁ Α λαμβάνει 16200, ὁ Β 11800, ὁ Γ 10400.

58) Τρεῖς νέοι ἐκληρονόμησαν 4800 δραχμὰς. κατὰ τὴν

διαθήκην τοῦ πατρός των ὁ δεύτερος ἔπρεπε νὰ λάβῃ τριπλάσια τοῦ πρώτου ἧττον 100· ὁ τρίτος ὅμως 175 περισσότερα ἀπὸ τὸ τεταρτημόριον τῆς μερίδος τοῦ δευτέρου. Πόσα ἀνήκουν εἰς ἕκαστον αὐτῶν;

Ἀπ. Εἰς τὸν πρῶτον 1000, εἰς τὸν δεύτερον 2900 καὶ εἰς τὸν τρίτον 900.

59) Κατὰ τὴν διαθήκην ἀποθνήσκοντός τινος διεμερίσθησαν τὰ χρήματά του, ὡς ἀκολούθως: εἰς τὴν γυναῖκα του ἐδόθη τὸ ἥμισυ, εἰς ἕκαστον τῶν δύω υἱῶν του τὸ ἑκτημόριον αὐτῶν, εἰς τὸν ὑπηρέτην του τὸ δωδεκατημόριον καὶ αἱ ἐπίλοιπαι 600 δρ. εἰς τοὺς πτωχούς. Πόσα ἦσαν ὅλα του τὰ ὑπάρχοντα;

Ἀπ. 7200 δραχμαί.

60) Πεδιὰς 2850 τετραγωνικῶν ποδῶν πρέπει νὰ διαμερισθῇ εἰς τρεῖς κτηματίας Α, Β, Γ. Ἡ μερὶς τοῦ Α ἔχει πρὸς τὴν τοῦ Β ὡς 6 πρὸς 11 καὶ ὁ Γ πρέπει νὰ λάβῃ 300 τετραγωνικοὺς πόδας περισσοτέρους ἀπὸ ὅσους θέλουν λάβει ὁ Α καὶ Β μαζῆ. Πόσους θέλει λάβει ἕκαστος;

Ἀπ. Ο Α 450, ὁ Β 825 καὶ ὁ Γ 1575.

61) Πατὴρ ἀποθνήσκων ἄφησεν εἰς τοὺς τέσσαρας υἱούς του Α, Β, Γ, Δ 2520 δρ. τὰς ὁποίας ἔπρεπε νὰ διαμερισθῶσιν, ὡς ἀκολούθως: ὁ Γ νὰ λάβῃ 360, ὁ Β ὅσα ὁ Γ καὶ Δ μαζῆ, καὶ ὁ Α 1000 ὀλιγωτέρας ἀπὸ τὸ διπλάσιον τοῦ Β. Πόσα ἔλαβεν ὁ Α, Β καὶ Δ.

Ἀπ. ὁ Α 760, ὁ Β 880 καὶ ὁ Δ 520.

62) Πέντε κληρονόμοι πρέπει νὰ διαμερισθῶσι 5600 δρ. μεταξύ των, ὡς ἀκολούθως: ὁ Β νὰ λάβῃ ὅσα καὶ ὁ Α καὶ περιπλέον 200 δρ. ὁ Γ 400 ὀλιγωτέρας ἀπὸ τὸ τριπλάσιον τοῦ Α, ὁ Δ 150 περισσοτέρας ἀπὸ τὸ ἥμισυ τοῦ Β καὶ Γ μαζῆ. Ὁ Ε 475 περισσοτέρας ἀπὸ τὸ τεταρτημόριον τοῦ ὅλου τῶν προηγηθέντων τεσσάρων. Πόσα ἔλαβεν ἕκαστος;

Ἀπ. Ὁ Α 500, ὁ Β 1200, ὁ Γ 1100, ὁ Δ 1300 καὶ ὁ Ε 1500.

63) Πέντε παῖκται ἔχασαν μαζῆ 40 τάλληρα 15 γροσίκια κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον: τὸ χάσιμον τοῦ Ε ἦτον $\frac{1}{2}$ τάλ. περισσότερον ἀπὸ τὸ τριπλάσιον τοῦ Α, τὸ χάσιμον τοῦ Γ 2 ταλ. ὀλιγώτερον ἀπὸ τὸ διπλάσιον τοῦ Β. Ὁ Δ ἔχασεν $\frac{1}{4}$ ταλ. ὀλιγώτερον ἀφ' ὅ,τι ὁ Α καὶ Β μαζῆ καὶ ὁ Ε 3 γροσίκια ὀλιγώτερα ἀπὸ τὸ διπλάσιον τοῦ Β. Πόσα ἔχασεν ἕκαστος;

Ἀπ. Ὁ Α 2 τάλ., ὁ Β $6\frac{1}{2}$, ὁ Γ 11, ὁ Δ $8\frac{1}{4}$ καὶ ὁ Ε $12\frac{7}{8}$.

64) Ἀπὸ μίαν πραγματείαν, τῆς ὁποίας τὸ βάρος ἦτον 40 κανταρίων, ἐπωλήθη ἓν μέρος καὶ τὸ ὑπόλοιπον ὑπερεῖχε κατὰ 8 τὸ πωληθέν. Πόσα καντάρια ἐπωλήθησαν;

Ἀπ. 16.

65) Εἶχα μίαν φορὰν 42 τάλληρα, ἐκ τούτων ἔδωκα τινα καὶ μὲ ἔμειναν τριπλάσια τῶν ὅσω ἔδωκα. Πόσα εἶχα δώσει;

Ἀπ. $10\frac{1}{2}$ τάλ.

66) Δύω κύριοι ἔπαιζαν χαρτία· ὁ Α εἶχε πρὸ τῆς ἀρχῆς τοῦ παιγνιδίου 42 τάλληρα καὶ ὁ Β 24. Μετά τινα ἀριθμὸν παιγνιδίων, κερδεμένων καὶ χαμένων εὑρέθησαν εἰς τὸν Α πενταπλάσια ἀπὸ ὅσα εἶχαν μείνει εἰς τὸν Β. Πόσα ἐκέρδισεν ὁ Α;

Ἀπ. 13 τάλ.

67) Ἡ φρουρὰ πόλεώς τινος σύγκειται ἀπὸ 1250 στρατιώτας, πεζοὺς καὶ ἱππεῖς. Πᾶς ἕκαστος ἱππεὺς λαμβάνει 5 τάλληρα μηνιαῖον καὶ ἕκαστος πεζὸς 3. Ὁ μηνιαῖος μισθὸς ὅλης τῆς φρουρᾶς εἶναι 4150 τάλ. Πόσοι ἱππεῖς καὶ πόσοι πεζοὶ εὑρίσκονται μεταξὺ αὐτῶν;

Ἀπ. 200 ἱππεῖς καὶ 1050 πεζοί.

68) Εἷς τοιχοποιὸς, δώδεκα κτίσται καὶ τέσσαρες χειρονάκται ἔλαβαν διὰ ῥητὸν καιρὸν 61 τάλληρα καὶ 12 γροσίκια ὡς μισθόν· ὁ τοιχοποιὸς ἐλάμβανεν ἡμερουσίως 12 γροσίκια, ἕκαστος κτίστης 10 καὶ ἕκαστος χειρωνάκτης 8. Πόσας ἡμέρας ἔπεται νὰ ἠργάσθησαν δι' αὐτὰ τὰ χρήματα;

Ἀπ. 9 ἡμέρας.

69) Κεφαλαιοῦχος λαμβάνει 2940 τάλληρα ἐτήσιον εἰσόδημα ἐκ τοῦ τοκιζομένου κεφαλαίου του. Τὰ τέσσαρα πέμπτα αὐτοῦ δίδουν τέσσαρα τὰ ἑκατὸν καὶ τὸ ἓν πέμπτον 5 τὰ ἑκατόν. Πόσον ἦτον τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον;

Ἀπ. 70000 τάλ.

70) Στοχάζομαι ἕνα ἀριθμὸν, λέγει ὁ Α πρὸς τὸν Β· πάσχισε νὰ τὸν εὕρῃς. Τὸν πολλαπλασιάζω μὲ 7, προσθέτω εἰς τὸ γινόμενον 3, τὸ διαιρῶ ἔπειτα μὲ 2, ἀφαιρῶ ἀπὸ τὸ πηλίκον 4 καὶ εὑρίσκω 15. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός;

Ἀπ. 5.

71) Ζητεῖται ἀριθμὸς εἰς τοῦ ὁποίου τὸ τριπλάσιον ἂν προστεθῇ τὸ τετραπλοῦν, τὸ ὅλον κεφάλαιον νὰ ὑπερέχῃ αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν κατὰ 8. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός;

Ἀπ. $1\frac{1}{3}$.

72) Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς ἀπὸ τὰ ἑξῆς διδόμενα: Ἂν ἀπὸ τὸ τριπλάσιον τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ ἀφαιρεθῇ 1, ἔπειτα διπλασιασθῇ τὸ ὑπόλοιπον καὶ ἀφαιρεθοῦν 8 ἀπὸ αὐτὸ, τὸ νέον ὑπόλοιπον θέλει εἶναι κατὰ 1 μικρότερον ἀπὸ τὸν ζητούμενον ἀριθμόν. Ποῖος εἶναι αὐτός;

Ἀπ. $1\frac{4}{5}$.

73) Ζητοῦνται τρεῖς τοιοῦτοι ἀριθμοὶ, ὥστε ὁ δεύτερος διὰ τοῦ πρώτου διαιρούμενος νὰ δίδῃ πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον 1 ὁ τρίτος διὰ τοῦ δευτέρου διαιρούμενος νὰ δίδῃ 3 πηλίκον καὶ 3 ὑπόλοιπον καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν τριῶν νὰ ἦναι 70. Ποῖοι εἶναι αὐτοὶ οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. 7, 15, 48.

74) Ἂν ἡ περίμετρος τῆς γῆς ἦτον κατὰ 189 γεωγραφικὰ μίλια μικροτέρα ἀπὸ ὅ,τι πραγματικῶς εἶναι, τὸ τρίτον μέρος αὐτῆς ἤθελεν εἶναι= μὲ τὸ ἔτος 1737, καθ' ὃ κατεμετρήθη κατὰ πρῶτον ἀκριβῶς τὸ κυκλοειδὲς τῆς γῆς. Ζητεῖται πόσων γεωγραφικῶν μιλίων εἶναι ἡ περίμετρος τῆς γῆς;

Ἀπ. 5400.

75) Ἂν εἶχα, $\frac{\nu}{\mu}$ τῶν ὅσων ἔχω χρημάτων, ἤθελα ἔχει α περισσότερα τῶν ὅσα ἔχω. Πόσα εἶχεν αὐτός;

Ἀπ. $\frac{\mu\alpha}{\nu-\mu}$

76) Πόσα χρήματα ἔχεις ἠρώτησέ τις τὸν φίλον του; Ἔχω τόσα, ἀπεκρίθη αὐτός, ὥστε ἂν πολλαπλασιάσω τὸν ἀριθμόν των μὲ 5, ἀφαιρέσω ἀπὸ τὸ γινόμενον 3, πολλαπλασιάσω ἔπειτα τὸ ὑπόλοιπον μὲ 4 καὶ προσθέσας 2 εἰς τὸ γινόμενον ἀποῤῥίψω τελευταῖον ἀπὸ τὸ παραγόμενον τὸ εἰς τὰ δεξιὰ εὑρισκόμενον μηδενικὸν, εὑρίσκω 23. Πόσα εἶχεν αὐτός;

Ἀπ. 12.

77) Αἱ μέλισσαι εἶναι πολλὰ ἐλαφρὰ ζωΰφια, καθότι ἂν αὐξυνθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν μελισσῶν, ὅσαι βαρύνουν ἓν λότι κατὰ 1 καὶ τὸ κεφάλαιον διαιρεθῇ μὲ 3 προκύπτει τὸ αὐτὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον ἤθελε προκύψει ἂν ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ηὐξάνετο κατὰ 51 καὶ διῃρεῖτο διὰ 4. Πόσαι μέλισσαι βαρύνουν ἓν λότι;

Ἀπ. 149.

78) Διδάσκαλος ἐξήτει ἀπὸ μαθητὴν νὰ εὕρῃ τὸν ἀριθμὸν, τὸν ὁποῖον αὐτὸς εἶχε κατὰ νοῦν, ἀπὸ τὰ ἑξῆς διδόμενα. Πολλαπλασιάζω τὸν ἀριθμὸν μὲ 5, ἀφαιρῶ ἀπὸ τὸ γινόμενον 24, διαιρῶ τὸ ὑπόλοιπον μὲ 6 καὶ προσθέτω εἰς τὸ πηλίκον 13 καὶ

οὕτως εὑρίσκω τὸν ζητούμενον ἀριθμόν. Ποῖος εἶναι;

Ἀπ. 54.

79) Γραφεὺς γράφει καθημέραν 5 φύλλα χαρτίου. Ἀφοῦ αὐτὸς ἠργάσθη 10 ἡμέρας, ἤρχισε δεύτερος γραφεὺς νὰ γράφῃ, πλὴν αὐτὸς ἔγραφε 7 φύλλα ἡμερουσίως. Πόσα λοιπὸν ἔγραψεν ἕκαστος αὐτῶν ἂν εἰς τὸ τέλος καὶ τῶν δύω ἦσαν ἴσα;

Ἀπ. 175 φύλλα.

80) Πεζοδρόμος στέλλεται κατόπιν ἄλλου, ὅστις εἶχε κινήσει πρὸ 10 ἡμερῶν ἀπὸ τὸν αὐτὸν τόπον, διὰ νὰ τὸν φθάσῃ. Ὁ πρωτοςαλεὶς κάμνει 4 λεύγας τὴν ἡμέραν καὶ ὁ δεύτερος 9. Πόσας ἡμέρας θέλει χρειασθῇ ὁ δεύτερος διὰ νὰ φθάσῃ τὸν πρῶτον;

Ἀπ. 8 ἡμέρας.

81) Πρὸ ν ἡμερῶν ἐκίνησε πεζοδρόμος ἀπὸ ἐδῶ, καὶ ἔκαμνεν α λεύγας τὴν ἡμέραν· κατόπιν αὐτοῦ ἐστάλη καὶ ἄλλος, ὅστις ἔκαμνε καθημερινῶς 6 λεύγας: Πόσας ἡμέρας ἔπεται νὰ ἐχρειάσθη ὁ δεύτερος διὰ νὰ φθάσῃ τὸν πρῶτον;

Ἀπ. $\frac{\nu\alpha}{6-\alpha}$ ἡμέρας.

82) Εἰς πόσας ἡμέρας ὅμως ἤθελε φθάσει ὁ δεύτερος τὸν πρῶτον, ἂν ὁ δεύτερος ἐκίνει 12 ἡμέρας ὕστερον ἀπὸ τὸν πρῶτον καὶ ἡ ταχύτης αὐτοῦ εἶχε πρὸς τὴν τοῦ πρώτου ὡς 8 πρὸς 3;

Ἀπ. Εἰς $7\frac{1}{5}$ ἡμέρας.

83) Δύω σώματα κινοῦνται εἰς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου. τὸ δεύτερον ἤρχισε ν λεπτὰ ὑστερώτερα νὰ κινῆται, καὶ ἡ ταχύτης του ἔχει πρὸς τὴν ταχύτητα τοῦ πρώτου ὡς π πρὸς ρ. Μετὰ πόσον καιρὸν θέλουν συμπέσει τὰ δύω σώματα;

Ἀπ. Ἂν τὸ ρ ἐκληφθῇ μικρότερον ἀπὸ τὸ π ποτέ, ἂν μεγαλήτερον $\frac{\pi\nu}{\rho-\pi}$ λεπτὰ μετὰ τὸν μισευμὸν τοῦ δευτέρου.

ΚΓ

84) Ἀπό τινα τόπον στέλλεται ταχυδρόμος, ὅστις εἰς 5 ὥρας διατρέχει 7 λεύγας. μετὰ 8 ὥρας στέλλεται δεύτερος κατόπιν αὐτοῦ διὰ νὰ τὸν φθάσῃ καὶ αὐτὸς κάμνει εἰς 3 ὥρας 5 λεύγας. Πότε θέλουν ἀνταμωθῇ;

Ἀπ. 42 ὥρας μετὰ τὸν μισευμὸν τοῦ δευτέρου ταχυδρόμου.

85) Ἂν ὅλα μείνωσι καθὼς εἰς τὸ προλαβὸν πρόβλημα, μόνον ὁ πρῶτος ταχυδρόμος ἐκτὸς τοῦ προτητερινοῦ μισευμοῦ, κινήσῃ καὶ ἀπὸ μέρος 8 λεύγας πρὸ τοῦ ἄλλου κείμενον· μετὰ πόσας ὥρας θέλουν ἀνταμωθῇ;

Ἀπ. 72 ὥρας μετὰ τὸν μισευμὸν τοῦ δευτέρου ταχυδρόμου.

86) Διὰ νὰ γίνῃ τὸ προλαβὸν πρόβλημα γενικώτερον ἂς ἦναι ὁ τόπος, ἀπὸ τὸν ὁποῖον ὁ πρῶτος ταχυδρόμος ἐκίνησε κατὰ α λεύγας μακρύτερα τοῦ ἄλλου· ἔτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν, καθ' ἃς αὐτὸς προτήτερα ἐκίνησε $= \beta$· ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου ταχυδρόμου τόση, ὥστε εἰς δ ὥρας νὰ κάμνῃ γ λεύγας καὶ ἡ ταχύτης τοῦ δευτέρου τόση, ὥστε εἰς ζ ὥρας νὰ κάμνῃ ε λεύγας. Εἰς πόσας ὥρας μετὰ τὸν μισευμὸν τοῦ δευτέρου θέλουν ἀνταμωθῇ;

Ἀπ. Εἰς $\frac{(\alpha\delta + \beta\gamma)\zeta}{\delta\varepsilon - \gamma\zeta}$ ὥρας.

87) Εἰς πόσας ὥρας ὅμως θέλουν ἀνταμωθῇ, ὅταν ὁ πρῶτος ταχυδρόμος ἀντὶ τοῦ νὰ κινήσῃ ἀπὸ τόπον κατὰ α λεύγας ἐμπρὸς κείμενον, κινήσῃ ἀπὸ τόπον κατὰ τὰς αὐτὰς λεύγας ὀπίσω κείμενον;

Ἀπ. Εἰς $\frac{(\beta\gamma - \alpha\delta)\zeta}{\delta\varepsilon - \gamma\zeta}$

Τί πρέπει νὰ γίνῃ διὰ νὰ ἐφαρμοσθῇ ἡ λύσις τοῦ προλαβόντος προβλήματος εἰς τὴν παροῦσαν περίστασιν;

88) Δύω φίλοι κατῴκουν εἰς δύω πόλεις, αἱ ὁποῖαι ἀπεῖχαν 170 λεύγας ἀπ' ἀλλήλων. Μίαν ἡμέραν ἐκίνησαν καὶ οἱ δύω

ἐνταυτῷ ἀπὸ τὰς κατοικίας των διὰ νὰ ἀνταμωθῶσιν εἰς τὸν δρόμον. Ὁ πρῶτος ἔκαμνε καθημερινῶς 9 λεύγας, ὁ δεύτερος μόνον 8 λεύγας. Μετὰ πόσον καιρὸν θέλουν ἀπαντηθῇ αὐτοί, καὶ πόσας λεύγας θέλει κάμνει ἕκαστος;

Ἀπ. Μετὰ 10 ἡμέρας· ὁ πρῶτος κάμνει 90 λεύγας καὶ ὁ δεύτερος 80.

89) Ἀπὸ τὸν τόπον Α κινᾷ τάγμα κατ' εὐθεῖαν πρὸς τὸν τόπον Β καὶ κάμνει καθημερινῶς $3\frac{1}{2}$ λεύγας. Ἀπὸ τὸν τόπον Β κινᾷ 8 ἡμέρας ὑστερώτερα ἄλλο τάγμα κατ' εὐθεῖαν πρὸς τὸ Α καὶ κάμνει καθημερινῶς $5\frac{1}{6}$ λεύγας. Ἂν οἱ δύω τόποι ἀπέχουν 80 λεύγας ἀπ' ἀλλήλων: πόσας ἡμέρας μετὰ τὸν μισευμὸν τοῦ πρώτου θέλουν ἑνωθῇ τὰ δύω τάγματα;

Ἀπ. τὴν δεκάτην τετάρτην.

Ποῖαι ἀξίαι πρέπει νὰ δοθοῦν εἰς τὰς ποσότητας α, β, γ, δ, ε, ζ εἰς τὸ 86ον πρόβλημα διὰ νὰ ἐφαρμοσθῇ ἡ ἐκεῖ λύσις εἰς τὴν παροῦσαν μερικὴν περίπτωσιν, ἂν δὲν θέλῃ τις νὰ λύσῃ τὸ αὐτὸ πρόβλημα πάλιν ἐκ νέου;

90) Δύω σώματα κινοῦνται κατ' ἐναντίαν διεύθυνσιν· τὸ ἓν διατρέχει εἰς ἓν δεύτερον λεπτὸν γ πόδας, τὸ ἄλλον Γ πόδας. Οἱ δύω τόποι ἀπὸ τοὺς ὁποίους καὶ τὰ δύω ἐνταυτῷ κινοῦν ἀπέχουν δ πόδας ἀπ' ἀλλήλων. Πότε θέλουν συμπέσει;

Ἀπ. Μετὰ $\frac{\delta}{\Gamma + \gamma}$ δεύτερα λεπτά.

91) Πότε ὅμως ἤθελαν συμπέσει, ἂν ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον εἰς ἓν δεύτερον λεπτοῦ κάμνει Γ πόδας ἔτρεχε κατόπιν τοῦ ἄλλου;

Ἀπ. Μετὰ $\frac{\delta}{\Gamma - \gamma}$ δεύτερα.

Εἶναι τὸ πρόβλημα πάντοτε δυνατόν, καθὼς παρεστάθη ἐδῶ; Καὶ τί ἀπαιτεῖται διὰ νὰ ἦναι δυνατόν; Τί σημαίνει ἡ ἔκφρασις

$\frac{\delta}{\Gamma-\gamma}$, ὅταν ἦναι τὸ $\Gamma = \gamma$; Καὶ πῶς πρέπει νὰ παρασταθῇ ὅταν ἦναι τὸ $\Gamma < \gamma$;

92) Ἐχθρικὸν σῶμα ἐκίνησε πρὸ δύω ἡμερῶν ἀπό τινα τόπον καὶ κάμνει ἡμερουσίως $4\frac{1}{2}$ λεύγας. Ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος κινήσαντες ἄλλοι θέλουν νὰ τὸ φθάσωσι καὶ μάλιστα εἰς ἓξ ἡμέρας. Πόσας λεύγας πρέπει νὰ κάμωσιν οἱ δεύτεροι ἡμερουσίως διὰ νὰ φθάσωσι τοὺς πρώτους;

Ἀπ. 6 λεύγας.

93) Δύω σώματα κινοῦνται τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου εἰς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν. Τὸ ἓν εὑρίσκεται κατὰ δ μονάδας μήκους (π. χ. πόδας) προτήτερα τοῦ ἄλλου καὶ τ μονάδας χρόνου (π. χ. δεύτερα λεπτά). Τὸ πρῶτον διατρέχει εἰς μίαν μονάδα χρόνου γ, τὸ δεύτερον Γ μονάδας μήκους. Εἰς πόσας μονάδας χρόνου θέλουν ἑνωθῆ τὰ δύω σώματα;

Ἀπ. Εἰς $\frac{\delta+\gamma\tau}{\Gamma-\gamma}$ μονάδας χρόνου.

94) Πόσας μονάδας χρόνου θέλουν χρειασθῆ, ἂν ἀντὶ νὰ τρέχωσι τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου, τρέχουν τὸ ἓν ἐναντίον τοῦ ἄλλου; Τὰ λοιπὰ ὡς καὶ εἰς τὸ προλαβὸν πρόβλημα.

Ἀπ. $\frac{\delta-\gamma\tau}{\Gamma+\gamma}$ μονάδας χρόνου.

Πῶς ἠμπορεῖ νὰ παραχθῇ αὕτη ἡ ἔκφρασις ἀπὸ τὰ εὑρεθέντα εἰς τὸ προλαβὸν πρόβλημα;

95) Ὁ ὡροδείκτης τοῦ ὡρολογίου εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν 7 καὶ 8 ὡρῶν καὶ ὁ λεπτοδείκτης ἐπὶ τῶν 12. Ζητεῖται πότε ὁ δεύτερος θέλει φθάσει τὸν πρῶτον;

Ἀπ. Μετὰ $38\frac{2}{11}$ λεπτά.

96) Ὁ ὡροδείκτης ἑνὸς ὡρολογίου δεικνύει 17 λεπτὰ καὶ ὁ λεπτοδείκτης 24, δηλ: ἡ ὥρα εἶναι 3 καὶ 24 λεπτά. Ζητεῖται μετὰ πόσην ὥραν θέλουν εὑρεθῆ οἱ δεῖκται ὁ εἷς ἐπὶ τοῦ ἄλλου;

Ἀπ. $57\frac{2}{11}$ λεπτά.

97) Εἰς τὰς 12 ὥρας στέκονται καὶ οἱ δύω δεῖκται ἑνὸς ὡρολογίου εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον. Πότε καὶ ποσάκις θέλουν εὑρεθῆ εἰς τὰς ἐφεξῆς δώδεκα ὥρας ἐπ' ἀλλήλων;

Ἀπ. 11 φορὰς θέλουν εὑρεθῆ οἱ δεῖκται ὁ εἷς ἐπὶ τοῦ ἄλλου καὶ μάλιστα $5\frac{5}{11}$ λεπτὰ μετὰ τὴν μίαν, $10\frac{10}{11}$ λεπτὰ μετὰ τὰς δύω, $16\frac{5}{11}$ λεπτὰ μετὰ τὰς τρεῖς, κ. ο. κ. δηλ: εἰς πᾶσαν ἑπομένην ὥραν κατὰ $5\frac{5}{11}$ λεπτὰ ὑστερώτερα.

98) Δύω σώματα κινοῦνται τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου ἐπὶ τῆς περιφερείας κύκλου, π ποδῶν. Κατ' ἀρχὰς ἀπέχουν κατὰ τόξον δ ποδῶν ἀπ' ἀλλήλων. Τὸ πρῶτον κάμνει γ πόδας, τὸ δεύτερον Γ εἰς ἓν δεύτερον λεπτόν. Πότε θέλουν συμπέσει τὰ δύω σώματα διὰ πρώτην, δευτέραν φορὰν κ. ο. κ. ἂν προϋποτεθῇ ὅτι τοῦ ἑνὸς ἡ κίνησις δὲν συγχίζει τὸ ἄλλο;

Ἀπ. $\frac{\delta}{\Gamma-\gamma}$, $\frac{\pi+\delta}{\Gamma-\gamma}$, $\frac{2\pi+\delta}{\Gamma-\gamma}$, $\frac{3\pi+\delta}{\Gamma-\gamma}$ κ. ο. κ. δεύτερα λεπτά.

99) Πότε ὅμως θέλουν συμπέσει ἂν τὸ πρῶτον κινήσῃ κατὰ τ δεύτερα λεπτὰ προτήτερα τοῦ ἄλλου;

Ἀπ. Μετὰ $\frac{\delta+\gamma\tau}{\Gamma-\gamma}$, $\frac{\pi+\delta+\gamma\tau}{\Gamma-\gamma}$, $\frac{2\pi+\delta+\gamma\tau}{\Gamma-\gamma}$, $\frac{3\pi+\delta+\gamma\tau}{\Gamma-\gamma}$ κ. ο. κ. δεύτερα λεπτά.

100) Πότε ἀκόμη, ἂν τὸ πρῶτον κινήσῃ κατὰ τ δεύτερα λεπτὰ ὕστερον τοῦ ἄλλου;

Ἀπ. Μετὰ $\frac{\delta-\gamma\tau}{\Gamma-\gamma}$, $\frac{\pi+\delta-\gamma\tau}{\Gamma-\gamma}$, $\frac{2\pi+\delta-\gamma\tau}{\Gamma-\gamma}$, κ. ο. κ. δεύτερα λεπτά.

101) Πότε, ἂν τὸ πρῶτον, ἀντὶ νὰ ὑπάγῃ πρὸ τοῦ ἄλλου, πηγαίνῃ ἐναντίον τοῦ ἄλλου καὶ κινήσῃ κατὰ τ λεπτὰ πρωτήτερα;

'Απ. Μετὰ $\frac{\delta - \gamma\tau}{\Gamma + \gamma}$, $\frac{\pi + \delta - \gamma\tau}{\Gamma + \gamma}$, $\frac{2\pi + \delta - \gamma\tau}{\Gamma + \gamma}$,

κ. ο. κ. δεύτερα λεπτά.

102) Πότε ὅμως, ἂν τώρα τὸ πρῶτον πηγαίνῃ ἐναντίον τοῦ ἄλλου καὶ ἐκίνησε κατὰ τ δεύτερα λεπτὰ ὑστερώτερα;

'Απ. Μετὰ $\frac{\delta + \gamma\tau}{\Gamma + \gamma}$, $\frac{\pi + \delta + \gamma\tau}{\Gamma + \gamma}$, $\frac{2\pi + \delta + \gamma\tau}{\Gamma + \gamma}$

κ. ο. κ. δεύτερα λεπτά.

Πόθεν προέρχεται ἡ μεταβολὴ τῶν σημείων εἰς τὰς λύσεις τούτων τῶν πέντε προβλημάτων, τὰ ὁποῖα εἶναι τόσον ὅμοια μεταξύ των, ἐνῶ μάλιστα καὶ ἄλλως αἱ ἐκφράσεις εἶναι καθ' ὅλα ὅμοιαι; — Δὲν ἦτον δυνατὸν νὰ παραχθῇ τὸ ἓν ἀπὸ τὸ ἄλλο διὰ τῆς παρατηρήσεως τοῦ ἐναντίου; — Τί σημαίνουν αὗται αἱ ἐκφράσεις εἰς τὸ 98, 99 καὶ 70ον πρόβλημα ἂν τὸ Γ τεθῇ $= \gamma$. Καὶ πῶς ἐκφράζονται ὅταν ἦναι τὸ $\Gamma < \gamma$.

103) Ἀπὸ δύω τρύπας ὑδροδοχείου διαφόρου μεγέθους ῥέει ὕδωρ μὲ ἄνισον ταχύτητα. Εἶναι γνωστὸν, ὅτι οἱ σωλῆνες ἔχουν πρὸς ἀλλήλους ὡς 5 πρὸς 13, αἱ ταχύτητες ὅμως τοῦ ὕδατος ὡς 8 πρὸς 7. εἶναι πρὸς τούτοις γνωστὸν, ὅτι εἰς ῥητὸν διάστημα χρόνου ῥέουν 561 κυβικοὶ πόδες περισσότερον διὰ τοῦ ἑνὸς παρὰ διὰ τοῦ ἄλλου σωλῆνος. Πόσην ποσότητα ὕδατος ἔδιδεν ἕκαστος σωλὴν εἰς αὐτὸ τὸ διάστημα; (1)

'Απ. Ὁ πρῶτος 440 καὶ ὁ ἄλλος 1001 κυβικοὺς πόδας.

(1) Αὐτὸ καθὼς καὶ πολλὰ τῶν ἑξῆς προβλημάτων ἐπιλύονται εὐκολώτατα δι' ἀναλογιῶν ἰδὲ Σελ. 103 Ια' περὶ λόγων καὶ ἀναλογιῶν, σημ.

104) Σκύλος ἐκυνήγα λαγωόν. Πρὸ τοῦ νὰ ἀρχίσῃ ὁ σκύλος νὰ τρέχῃ, εἶχε κάμει ὁ λαγωὸς 50 πηδήματα καὶ αὐτὴ ἦτον ἡ ἀρχική των ἀπόστασις. Ἂν λοιπὸν ὁ λαγωὸς κάμνει εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν 6 πηδήματα καθ' ὃν ὁ σκύλος 5 καὶ 9 λαγοῦ πηδήματα κατὰ τὸ μέγεθός των ἦναι ἴσα μὲ 7 σκύλου πηδήματα: Πόσα πηδήματα ἔπεται νὰ ἔκαμεν ἀκόμη ὁ λαγωὸς πρὸ τοῦ νὰ τὸν φθάσῃ ὁ σκύλος;

'Απ. 700 πηδήματα.

105) Δύω πυροβολισαὶ ῥίπτουν ἀπὸ ἓν κανονοστάσιον διαφόρους σφαίρας. ὁ πρῶτος εἶχεν ἤδη κάμνει 36 βολὰς πρὸ τοῦ νὰ ἀρχίσῃ ὁ δεύτερος νὰ ῥίπτῃ καὶ ἔκαμνεν εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν 8 βολὰς, καθ' ὃν ὁ δεύτερος 7. ἐξεναντίας ὁ δεύτερος διὰ 3 βολὰς ἐχρειάζετο τόσην πυρίκονιν, ὅσην ὁ πρῶτος διὰ 4. Πόσας βολὰς ἔκαμεν ὁ δεύτερος, ἕως ὅτου νὰ ἐξοδεύσῃ τόσην πυρίκονιν ὅσην καὶ ὁ πρῶτος,

'Απ. 189 βολάς.

106) Διατί, ἠρώτησε πεζοδρόμος τις τὸν σύντροφόν του, μὲ ὑπερέβης 3000 πόδας, ἐνῶ ἔκαμνα διπλάσια βήματα σοῦ κατὰ τὸ μέγεθος. — Μάλιστα, ἀπεκρίθη αὐτὸς, ἐγὼ ὅμως ἔκαμνα πενταπλάσια βήματα σοῦ κατὰ τὸν ἀριθμόν. Ἂν αὐτὰ τὰ διδόμενα ἦναι ἀληθῆ, πόσα ἔκαμεν ἕκαστος αὐτῶν;

'Απ. Ὁ πρῶτος 2000, ὁ δεύτερος 5000.

107) Διὰ νὰ γίνῃ τὸ προλαβὸν πρόβλημα γενικώτερον, ἔστω ὁ ἀριθμὸς τῶν ποδῶν, κατὰ τοὺς ὁποίους ὁ δεύτερος προεπορεύετο τοῦ πρώτου $= \alpha$. ὁ λόγος τῶν βημάτων των, ὡς πρὸς τὸ μέγεθος $= \beta : \gamma$ καὶ ὡς πρὸς τὸν ἀριθμὸν $= \delta : \varepsilon$. Πῶς ἠμπορεῖ νὰ ἐκφρασθῇ ὁ δρόμος των;

Απ. $\frac{\alpha\beta\delta}{\gamma\varepsilon - \beta\delta}$, $\frac{\alpha\gamma\varepsilon}{\gamma\varepsilon - \beta\delta}$.

108) Δύω ποσότητες, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ $= \delta$, εὑρίσκονται εἰς λόγον προσαλλήλας ὡς $\mu : \nu$. δι' ἄλλην ὅμως ὁποιανδήποτε ἀκόμη αἰτίαν, ἥτις δὲν καταλύει τὸν ἄνω λόγον, εὑρίσκονται εἰς δεύτερον λόγον ὡς $\mu' : \nu'$. Πῶς ἐκφράζονται αὗται αἱ ποσότητες;

$$\text{'Απ. } \frac{\mu\mu'\delta}{\nu\nu' - \mu\mu'}, \ \frac{\nu\nu'\delta}{\nu\nu' - \mu\mu'}, \text{ ἢ } \frac{\mu\mu'}{\nu\nu' - \mu\mu'}\delta, \ \frac{\nu\nu'}{\nu\nu' - \mu\mu'}.\delta.$$

Ἡ μονὰς εἶναι δὲ εἰς ἑκάστην μερικὴν περίπτωσιν, ἐκείνη διὰ τῆς ὁποίας ἐκφράζεται τὸ δ.

Ὁποῖαι ἀξίαι πρέπει νὰ δοθῶσιν εἰς τὰ γράμματα μ, μ', ν, ν', δ, ἂν τὰ προβλήματα 103, 104, 105, 106, 107 πρέπει νὰ συμπεριληφθῶσιν εἰς αὐτά;

109) Δύω ποσότητες, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ $= \delta$, εὑρίσκονται εἰς τοὺς ἑξῆς λόγους $\mu : \nu$, $\mu' : \nu'$, $\mu'' : \nu''$. Πῶς ἠμποροῦν νὰ ἐκφρασθῶσιν αἱ δύω αὗται ποσότητες;

$$\text{'Απ. } \frac{\mu\mu'\mu''}{\nu\nu'\nu'' - \mu\mu'\mu''}.\delta, \ \frac{\nu\nu'\nu''}{\nu\nu'\nu'' - \mu\mu'\mu''},$$ εἶναι αἱ ζητούμεναι ἐκφράσεις. Ἡ μονὰς εἶναι ἡ αὐτὴ καθὼς καὶ εἰς τὸ δ.

110) Ὅταν ὅμως ἀντὶ τῆς διαφορᾶς δ ἦναι τὸ κεφάλαιον x τῶν ποσοτήτων δομένον. Πῶς θέλουν ἐκφρασθῆ αὗται;

$$\text{'Απ. } \frac{\mu\mu'\mu''}{\nu\nu'\nu'' + \mu\mu'\mu''}.x, \text{ καὶ } \frac{\nu\nu'\nu''}{\nu\nu'\nu'' + \mu\mu'\mu''}.x$$ εἶναι τότε αἱ ζητούμεναι ἐκφράσεις.

111) Κεφαλαιοῦχος ἔδωκεν εἰς τόκους κεφάλαιον 5500 ταλλήρων πρὸς 4 τὰ ἑκατόν· μετὰ $4\frac{1}{2}$ ἔτη ἔδωκε καὶ ἄλλο κεφάλαιον 8000 ταλ. πρὸς 5 τὰ ἑκατόν. Ἂν ἀφήσῃ αὐτὰ τὰ κεφάλαια συνεχῶς εἰς τόκους. Εἰς πόσα ἔτη θέλει λάβει καὶ ἀπὸ τὰ δύω ἴσους τόκους;

'Απ. Εἰς 10 ἔτη μετὰ τὴν ἀπόδοσιν τοῦ πρώτου κεφαλαίου.

112) Μηχανικὸς ἔχει ὄχημα εἰς τὸ ὁποῖον, δι' ἰδιαιτέρου μηχανισμοῦ, ἠμπορεῖ νὰ προσδιορίσῃ τὸν ἀριθμὸν τῶν περικυκλισμῶν τῶν τροχῶν, ὅταν αὐτὸ κινῆται. Εἶναι γνωστὸν, ὅτι ἕκαστος τῶν ἐμπροσθινῶν μικρῶν τροχῶν ἔχει $5\frac{1}{4}$ πόδας περιφέρειαν καὶ ἕκαστος τῶν ὀπισθινῶν $7\frac{1}{8}$. Ἂν λοιπὸν εἰς ὁδοιπορίαν ὁ ἐμπροσθινὸς τροχὸς ἔκαμε 2000 στροφὰς περισσότερον ἀπὸ τὸν ὀπισθινόν: Πόση ἦτον ἡ ὅλη ἀπόστασις;

'Απ. 39900 πόδας ἢ περίπου $1\frac{2}{3}$ λεύγας.

113) Ἂν ὁ ἐμπροσθινὸς τροχὸς, παρομοίου ὀχήματος, ἔχῃ α πόδας περιφέρειαν καὶ ὁ ὀπισθινὸς β: πόση θέλει εἶναι ἡ ἀπόστασις, ἂν ὁ ἐμπροσθινὸς τροχὸς κάμῃ ν στροφὰς περισσοτέρας ἀπὸ τὸν ὀπισθινόν;

'Απ. $\frac{\alpha\beta\nu}{\beta - \alpha}$ πόδας.

114) Οἰνοπώλης τις ἔχει δύω εἰδῶν οἶνον· ἡ ἀξία ἑνὸς τετάρτου τοῦ πρώτου εἴδους εἶναι 36 λεπτῶν, ἡ ἀξία τοῦ δευτέρου 20. Αὐτὸς ὅμως θέλει νὰ κάμῃ μῖξιν τῶν δύω, ὥστε νὰ γίνωσι 50 τέταρτα, ἐξ ὧν ἕκαστον νὰ πωλῆται πρὸς 30 λεπ., χωρὶς ὄφελος καὶ χωρὶς ζημίαν. Πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ ἕκαστον τῶν δύο εἰδῶν διὰ τὴν ζητουμένην μῖξιν;

'Απ. $31\frac{1}{4}$ τέταρτα ἀπὸ τὸ καλήτερον καὶ $18\frac{3}{4}$ ἀπὸ τὸ ἄλλο εἶδος.

115) Ἔστω ἡ τιμὴ τοῦ καλοῦ εἴδους τοῦ οἴνου εἰς τὸ προλαβὸν πρόβλημα $= \alpha$; ἡ τιμὴ τοῦ κακοῦ $= \beta$, ὁ ἀριθμὸς τῶν τετάρτων, ὁ ὁποῖος πρέπει νὰ ἀποτελεσθῇ μετὰ τὴν μῖξιν $= \nu$ καὶ ἡ τιμὴ τῆς μίξεως $= \gamma$. Πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ ἕκαστον τῶν δύο εἰδῶν;

Ἀπ. $\frac{(\alpha-\gamma)\nu}{\alpha-\beta}$ τέταρτα ἀπὸ τὸ κακὸν καὶ $\frac{(\gamma-\beta)\nu}{\alpha-\beta}$ ἀπὸ τὸ καλήτερον εἶδος.

116) Ἔμπορός τις ἔχει δύω εἴδη ἀργύρου· τοῦ πρώτου ἡ δραχμὴ τιμᾶται 16 λεπτὰ, τοῦ δευτέρου 4· καὶ θέλει νὰ κάμῃ μίγμα 30 δραχμῶν, ὥστε νὰ πωλῆται πρὸς 10 λεπ. Ζητεῖται πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ ἕκαστον εἶδος;

Ἀπ. 15.

117) Χρυσοχόος ἔχει δύω εἴδη ἀργύρου δεκατεσσάρων λοτίων (δηλ. τοῦ ὁποίου τὸ μάρκον ἔχει 14 λότια καθαροῦ ἀργύρου καὶ 2 λότια μίγμα) καὶ 8 λοτίων· Δὲν χρειάζεται ὅμως οὔτε τόσον καλὸν, καθὼς τὸ πρῶτον, οὔτε τόσον κακὸν καθὼς τὸ δεύτερον, καθότι θέλει νὰ κάμῃ ἀγγεῖον 20 μάρκων βάρους καὶ περιέχον δώδεκα μόνον λότια. Πόσα μάρκα πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ ἕκαστον εἶδος διὰ νὰ προκύψῃ ἐνταυτῷ τὸ ἀναγκαῖον βάρος καὶ ἡ ζητουμένη ποιότης;

Ἀ. $13\frac{1}{3}$ μάρκα ἀπὸ τὸ καλήτερον καὶ $6\frac{2}{3}$ ἀπὸ τὸ ἄλλο εἶδος.

118) Οἰνοπώλης ἔχει 40 τέταρτα οἴνου, ἡ τιμὴ ἑκάστου τετάρτου εἶναι 1 τάλ. 8 γροσίκια. Ἐπειδὴ ὅμως αὐτὴ ἡ τιμὴ εἶναι πολλὰ μεγάλη διὰ τοὺς ἀγοραστὰς, ἐστοχάσθη νὰ χύσῃ νερὸν εἰς αὐτὸν, ὥστε τὸ τέταρτον τοῦ μιγμένου οἴνου νὰ πωλῆται πρὸς 20 γροσίκια. Πόσον νερὸν πρέπει νὰ προστεθῇ;

Ἀπ. 24 τέταρτα.

119) Χρυσοχόος ἔχει 35 μάρκα 15 λοτίων ἀργύρου καὶ θέλει νὰ προσθέσῃ εἰς αὐτὰ τόσον χαλκὸν, ὥστε νὰ περιέχῃ τὸ μάρκον μόνον 12 λότια καθαρὸν ἄργυρον.

Ἀπ. $8\frac{3}{4}$.

120) Πόσον ἄργυρον 8 λοτίων πρέπει νὰ προσθέσῃ τις εἰς 7 μάρκα 14 λοτίων, ἂν τὸ περιεχόμενον πρέπῃ νὰ ἔχῃ 9 λοτίων ἄργυρον;

Ἀπ. 30.

121) Κάποιος ἐζήτει 17 νομίσματα ἀργυρὰ, δηλ: τεσσάρων καὶ ἓξ γροσικίων νομίσματα διὰ 3 τάλ. καὶ 18 γροσίκια. Πόσα νομίσματα ἔλαβεν ἀπὸ ἕκαστον εἶδος;

Ἀπ. 6 $4^{ων}$ καὶ ἕνδεκα 6 γροσικίων.

122 Ὁ ἀριθμὸς 60 πρέπει νὰ διαιρεθῇ εἰς 2 μέρη, ὥστε τὸ κεφάλαιον τοῦ μεγαλητέρου διὰ 4 διῃρημένου καὶ τοῦ δευτέρου διὰ 8 νὰ ἦναι $=12$· Πόσον μεγάλον εἶναι ἕκαστον μέρος;

Ἀπ. 36 καὶ 24.

123) Ζητοῦνται δύω ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον εἶναι $=\alpha$· καὶ ἂν ὁ πρῶτος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ μ καὶ ὁ ἄλλος ἐπὶ ν, παράγονται δύω γινόμενα, τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον $=\beta$. Ποῖαι ἐκφράσεις παριστοῦν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους;

Ἀπ. $\frac{\beta-\nu\alpha}{\mu-\nu}$, $\frac{\mu\alpha-\beta}{\mu-\nu}$

Τί σημαίνουν αὗται αἱ ἐκφράσεις, ὅταν ἦναι τὸ $\mu=\nu$; Καὶ τί ἂν γίνῃ ἐνταυτῷ $\beta=\nu\alpha=\mu\alpha$.

124) Νέος ἐρωτηθεὶς πόσων χρόνων εἶναι; ἀπεκρίθη: Ἂν ἀπὸ τὸ διπλάσιον τῆς νῦν ἡλικίας μου ἀφαιρεθῇ τὸ τριπλάσιον τῆς πρὸ ἓξ ἐτῶν, εὑρίσκεται τὸ ζητούμενον. Πόσων χρόνων ἦτον λοιπόν;

Ἀπ. 9 ἐτῶν.

125) Φίλος μου εἶναι 40 ἐτῶν καὶ ὁ υἱός του 9: μετὰ πόσα ἔτη θέλει γίνει ὁ πατὴρ διπλάσιος τοῦ υἱοῦ κατὰ τὴν ἡλικίαν;

Ἀπ. Μετὰ 22.

126) Ἀνὴρ εἶναι 30 ἐτῶν ἡλικίας· ὁ μετ' αὐτὸν νεώτερος

ἀδελφὸς 20 καὶ ἐπομένως ὁ λόγος τῆς ἡλικίας τοῦ πρώτου πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου ὡς 3 : 2. μετὰ πόσα ἔτη θέλει γίνει ὁ λόγος ὡς 5 : 4.

Ἀπ. Μετὰ 20.

127) Πρὸ πόσων ἐτῶν ἦτον ὁ αὐτὸς ἑξαπλάσιος τοῦ ἀδελφοῦ του κατὰ τὴν ἡλικίαν;

Ἀπ. Πρὸ 18.

128) Ὁ αὐτὸς ἔχει ἐκτὸς τοῦ εἰρημένου ἀδελφοῦ ἀκόμη ἕνα, ὅστις εἶναι μόνον 6 ἐτῶν.

Πότε θέλουν γίνει καὶ οἱ δύω του ἀδελφοὶ μαζῆ τόσον ἡλικιωμένοι ὅσον αὐτός;

Ἀπ. Μετὰ 4 ἔτη.

129) Ὁ πατὴρ του εἶναι τώρα 49 ἐτῶν καὶ ἐπομένως αἱ ἡλικίαι καὶ τῶν τριῶν ἄνω υἱῶν του μαζῆ ὑπερβαίνει κατὰ 7 τὴν ἡλικίαν τοῦ πατρός. Πρό τινος ὅμως χρόνου ἦτον ὁ πατὴρ ἡλικιωμένος, ὅσον καὶ οἱ τρεῖς του υἱοὶ μαζῆ. Πρὸ πόσων ἐτῶν ἦτον αὐτό;

Ἀπ. Πρὸ $3\frac{1}{2}$.

130) Ἐν μιᾷ τῶν ἡμερῶν ἔλεγε πρὸς τοὺς υἱούς του ὁ πατὴρ (ὁ μικρὸς υἱὸς δὲν ἦτον ἀκόμη γεννημένος) ἐγὼ πρὸ τινὸς καιροῦ ὑπερέβαινα, κατὰ τὸ τέταρτον τὴν ἡλικίαν καὶ τῶν δύω σας μαζῆ. Πρὸ πόσου καιροῦ;

Ἀπ. Πρὸ 9 ἐτῶν.

131) Πατὴρ ἔλεγε: τώρα εἶμαι α ἐτῶν καὶ ὁ υἱός μου β ἐτῶν: Μετὰ πόσα ἔτη θέλει ἔχει ὁ υἱός μου $\frac{\nu}{\mu}$ τῆς ἡλικίας μου;

Ἀπ. Μετὰ $\frac{\nu\alpha - \mu\beta}{\mu - \nu}$.

132) Εἰς μίγμα νίτρου καὶ θείου 80 λιτρῶν ὑπάρχει τοιαύτη ἀναλογία, ὥστε εἰς 7 μέρη νίτρου εἶναι 3 μέρη θείου. Πόσον νίτρον πρέπει νὰ προστεθῇ ἀκόμη εἰς τὸ μίγμα διὰ νὰ κατορθωθῇ εἰς 11 μέρη νίτρου νὰ εὑρίσκωνται 4 μέρη θείου.

Ἀπ. 10 λίτραι.

133) Πόσον θεῖον ὅμως πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ ὅλον, διὰ νὰ παραχθῇ ὁ αὐτὸς λόγος 11 : 4.

Ἀπ. $3\frac{7}{11}$ λίτραι.

134) Ἂν ὅμως πρέπῃ νὰ προστεθῇ εἰς τὸ ὅλον τόσον νίτρον, ὅσον θεῖον ἀφαιρεθῇ, διὰ νὰ μὴ μεταβληθῇ τὸ βάρος τοῦ μίγματος: Πόσον νίτρον πρέπει νὰ προστεθῇ;

Ἀπ. $2\frac{2}{3}$ λίτρας.

135) Εἰς πολυάριθμον συντροφίαν ἦσαν οἱ ἄνδρες τριπλάσιοι τῶν γυναικῶν· μετέπειτα ἔφυγαν 8 ἄνδρες μὲ τὰς γυναῖκας των καὶ ὁ λόγος μετεβλήθη, καθότι οἱ ἄνδρες ἔγιναν πενταπλάσιοι τῶν ὑπολειφθησῶν γυναικῶν κατὰ τὸν ἀριθμόν. Πόσοι ἦσαν ἑκατέρωθεν εἰς ταύτην τὴν συντροφίαν κατ' ἀρχάς.

Ἀπ. 48 ἄνδρες καὶ 16 γυναῖκες.

136) Ποῖος ἀριθμὸς πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς τοὺς δύω γνωστοὺς ἀριθμοὺς α καὶ β, ἂν τὰ κεφάλαια πρέπῃ νὰ εὑρίσκωνται πρὸς ἄλληλα ὡς μ : ν; ἢ τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτό: εἰς ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β, ἂν τὰ κεφάλαια αὐτῶν πρέπῃ νὰ ἦναι εἰς λόγον ὡς μ : ν;

Ἀπ. $\frac{\mu\beta - \nu\alpha}{\nu - \mu}$ εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός.

137) Ποῖος ἀριθμὸς πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς τὸ α καὶ νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ β, διὰ νὰ ἔχῃ τὸ κεφάλαιον πρὸς τὴν διαφορὰν ὡς μ : ν;

Ἀπ. $\frac{\mu\beta - \nu\alpha}{\mu + \nu}$.

138) Ποῖος ἀριθμὸς πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοὺς α καὶ β, ἵνα αἱ διαφοραὶ πρέπῃ νὰ ἔχωσιν πρὸς ἀλλήλας ὡς μ: ν;

'Απ. $\frac{\nu\alpha - \mu\beta}{\nu - \mu}$.

Εἰς τὰ τρία ταῦτα τελευταῖα προβλήματα περιλαμβάνονται τὰ προβλήματα 125, 126, 127, 132, 133, 134 ὡς μερικαὶ περιπτώσεις. Ὁποῖαι ἀξίαι πρέπει νὰ δοθῶσιν εἰς τὰς ποσότητας α, β, μ, ν διὰ νὰ ἐφαρμοσθῶσιν οἱ τύποι εἰς ἐκείνας τὰς περιστάσεις;

139) Εἰς ἀγγεῖον οἴνου εὑρίσκονται τρεῖς σωλῆνες· διὰ τοῦ πρώτου ἠμπορεῖ νὰ χυθῇ ὁ οἶνος εἰς 2 ὥρας, διὰ τοῦ δευτέρου εἰς 3 καὶ διὰ τοῦ τρίτου εἰς 4. Ἂν τρέχωσι καὶ οἱ τρεῖς σωλῆνες ἐνταυτῷ εἰς πόσον καιρὸν θέλει χυθῆ ὅλος ὁ οἶνος;

'Απ. Εἰς $55\frac{5}{13}$ λεπτά.

140) Ὑδροδοχεῖον ἠμπορεῖ νὰ γεμισθῇ διὰ τριῶν σωλήνων· διὰ τοῦ πρώτου εἰς $1\frac{1}{3}$ ὥρας, διὰ τοῦ δευτέρου εἰς $3\frac{1}{3}$ καὶ διὰ τοῦ τρίτου εἰς 5. Ἂν τρέχωσιν ἐνταυτῷ καὶ οἱ τρεῖς σωλῆνες εἰς πόσον καιρὸν θέλει γεμίσει;

'Απ. Εἰς 48 λεπτά.

141) Διὰ νὰ γίνῃ τὸ προλαβὸν πρόβλημα γενικώτερον, ἔστω ὁ καιρὸς, εἰς τὸν ὁποῖον ὁ πρῶτος σωλὴν γεμίζει τὸ ὑδροδοχεῖον $= \alpha$, ὁ καιρὸς, τὸν ὁποῖον ὁ δεύτερος χρειάζεται $= \beta$ καὶ ὁ καιρὸς, τὸν ὁποῖον ὁ τρίτος $= \gamma$. Πῶς ἐκφράζεται ὁ καιρὸς, εἰς τὸν ὁποῖον θέλει γεμίσει τὸ ὑδροδοχεῖον διὰ τῶν τριῶν σωλήνων ἐνταυτῷ;

'Απ. $\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma}$.

142) Πῶς ἐκφράζεται ὅμως ὁ καιρὸς, εἰς τὸν ὁποῖον τέσσαρες σωλῆνες θέλουν γεμίσει τὸ ὑδροδοχεῖον, ἂν ἕκαστος αὐτῶν τὸ γεμίζῃ ἰδιαιτέρως εἰς α, β, γ, δ καιρούς;

'Απ. $\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta}$.

143) Εἶναι τρεῖς μύλοι, ἐξ ὧν ὁ πρῶτος ἀλέθει εἰς 2 ὥρας 6 κοιλά· ὁ δεύτερος εἰς 3 ὥρας 5 κοιλά· ὁ τρίτος εἰς 4 ὥρας 3 κοιλά. Εἰς πόσας ὥρας θέλουν ἀλέσει 130 κοιλὰ οἱ τρεῖς μύλοι μαζῇ καὶ πόσα ἕκαστος αὐτῶν;

'Απ. Εἰς 24 ὥρας καὶ ὁ πρῶτος 72, ὁ δεύτερος 40 καὶ ὁ τρίτος 18 κοιλά.

144) Τρεῖς κτίσται οἰκοδομοῦν τεῖχος· ὁ πρῶτος ἠμπορεῖ νὰ κτίσῃ εἰς 5 ἡμέρας 8 κυβικοὺς πόδας, ὁ δεύτερος 9 κυβ. πόδας εἰς 4 ἡμέρας καὶ ὁ τρίτος 10 εἰς 6 ἡμέρας. Πόσον καιρὸν χρειάζονται ἐργαζόμενοι καὶ οἱ τρεῖς ἐνταυτῷ διὰ νὰ οἰκοδομήσωσιν 756 κυβικοὺς πόδας;

'Απ. $137\frac{11}{331}$ ἡμέρας.

145) Ἐργάτης ἠμπορεῖ νὰ τελειώσῃ ῥητὴν ἐργασίαν α, εἰς ῥητὸν καιρὸν β. ἄλλος ἐργάτης τὴν ἐργασίαν γ εἰς δ καιρὸν καὶ τρίτος τὴν ἐργασίαν ε εἰς ζ καιρόν. Εἰς πόσον καιρὸν ἠμποροῦν καὶ οἱ τρεῖς ἐνταυτῷ ἐργαζόμενοι νὰ τελειώσωσι τὴν ἐργασίαν η;

'Απ. $\frac{\beta\delta\zeta\eta}{\alpha\delta\zeta + \beta\gamma\zeta + \beta\delta\epsilon}$. Εἰς ταύτην τὴν ἔκφρασιν αἱ ποσότητες β, δ, ζ ἀναφέρονται εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου.

146) Ὑδροδοχεῖον $755\frac{1}{4}$ κυβικῶν ποδῶν πρέπει νὰ γεμισθῇ ἀπὸ τρεῖς σωλῆνας. Ἀπὸ τὸν πρῶτον τρέχουν 12 κυβ. πόδες εἰς $3\frac{1}{4}$ ἡμέρας, ἀπὸ τὸν δεύτερον $15\frac{1}{5}$ κυβ. ποδ. εἰς $2\frac{1}{4}$ ἡμέρας καὶ ἀπὸ τὸν τρίτον 17 κυβ. πόδες εἰς 3 ἡμέρας. Εἰς πόσον καιρὸν θέλει γεμίσει τὸ δοχεῖον;

Ἀπ. Εἰς $48\frac{3}{4}$ ἡμέρας.

147) Τρεῖς αἰτίαι παράγουν εἰς τοὺς καιρούς τ, τ', τ'' τὰς ἐργασίας ε, έ, ε''. Εἰς πόσον καιρὸν ἠμποροῦν αἱ τρεῖς αἰτίαι ἐνταυτῷ ἐργαζόμεναι νὰ παράξωσι τὴν ἐργασίαν Ε, χωρὶς ὅμως νὰ ἔχῃ ἡ μία ἐπιρροίαν ἐπὶ τῆς ἄλλης;

Ἀπ. $\frac{E\tau\tau'\tau''}{\varepsilon\tau'\tau''+\varepsilon'\tau\tau''+\varepsilon''\tau'\tau}$. Ἡ μονὰς τοῦ χρόνου εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὸν δεδομένον χρόνον τ, τ', τ''.

Τὰ προβλήματα 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146 περιλαμβάνονται εἰς τοῦτο. Πῶς;—

148) Μεταλλουργὸς ἔχει τρία τμήματα μετάλλου τοῦ αὐτοῦ μεγέθους. Ἀπὸ τὸ πρῶτον 5 κυβικοὶ πόδες βαρύνουν $69\frac{3}{4}$ λότια, ἀπὸ τὸ δεύτερον $3\frac{1}{2}$ κυβ. πόδες 41 λότια καὶ ἀπὸ τὸ τρίτον $4\frac{2}{7}$ κυβ. πόδες 91 λότια. Ἂν τὰ τρία τμήματα μαζῆ βαρύνουν $949\frac{2}{3}$ λότια; πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκάστου τμήματος;

Ἀπ. 20 κυβ. πόδ.

149) Ἀνὴρ ἀγαθοποιὸς ἤθελε νὰ συνάξῃ ποσότητα χρημάτων εἰς πολυάριθμον συντροφίαν δι' ἕνα πτωχόν, δι' ὃν συνεισέφερεν ἕκαστος τῶν παρόντων 16 γροσίκια· πλὴν τότε εὑρέθησαν τὰ συναχθέντα κατὰ 10 τάλληρα περισσότερα τῶν ἀναγκαιούντων. Ἐπρόβαλε τότε ὁ συνάζων νὰ δώσῃ ἕκαστος τῶν παρευρισκομένων μόνον 10 γροσίκια· πλὴν τότε εὑρέθησαν 12 τάλ. καὶ 12 γρ. ὀλιγώτερα τῶν ζητουμένων. Ἀπὸ πόσα ἄτομα συνέκειτο ἡ συντροφία; Πόσων εἶχεν ἀνάγκην ὁ πτωχός; Καὶ πόσα ἔπρεπεν ἕκαστος νὰ συνεισφέρῃ διὰ νὰ συναχθῶσι τὰ ἀναγκαῖα χρήματα;

Ἀπ. Ἡ συντροφία συνίστατο ἀπὸ 90 ἀνθρώπους· τὸ κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον ἔπρεπε νὰ συναχθῇ ἦτον 60 τάλ. καὶ ἡ συνεισφορὰ ἑκάστου ἔπρεπε νὰ ἦναι 13 γροσ. καὶ 1 κραϊτσάρι.

150) Ἔμπορος ἠναγκάσθη νὰ πωλήσῃ πραγματείαν μὲ ἐκπεσμένην τιμὴν διὰ νὰ ἐκπληρώσῃ κατεπείγουσαν ποσότητα χρέ-

ους. Δὲν ἐνθυμεῖτο ὅμως οὔτε τὸ βάρος οὔτε τὴν τιμὴν τῆς πραγματείας. Ἐνθυμεῖτο μόνον, ὅτι ἂν ἐπώλει τὴν λίτραν πρὸς 30 γροσίκια, ἤθελε κερδίσει 5 τάλ. καὶ ἂν τὸ ἐπώλει πρὸς 22 γροσ: ἤθελε χάσει 15 τάλ. Πόσον ἕπεται νὰ ἦτον τὸ βάρος καὶ ἡ τιμὴ τῆς πραγματείας κατὰ τὰ ἄνω διδόμενα;

Ἀπ. Τὸ βάρος ἦτον 60 λιτρῶν καὶ ἡ τιμὴ 26 γροσικίων.

151) Κάποιος ἤθελε νὰ βάλῃ χρυσοῦν ὡρολόγιον εἰς τὸ λαχεῖον καὶ ἔκαμεν ἀριθμὸν κλήρων. Ἂν ἔδιδε τὸν κλῆρον πρὸς 1 τάλληρον καὶ 6 γροσίκια ἤθελε χάσει 20 τάλ., καθότι ἡ τιμὴ τοῦ ὡρολογίου ἦτον μεγαλητέρα· ἂν ἔδιδεν ὅμως τὸν κλῆρον πρὸς 1 τάλ. καὶ 16 γρ: ἤθελε κερδίσει 13 τάλ. καὶ 8 γρ. Πόση ἦτον λοιπὸν ἡ τιμὴ τοῦ ὡρολογίου καὶ πόσους κλήρους εἶχε κάμει;

Ἀπ. 120 τάλ. καὶ 80 κλήρους.

152) Τειχοποιὸς ἔλαβε πρὸς οἰκοδομὴν κτιρίου τινος ἕνα τινα ἀριθμὸν ἐργατῶν. Ἀφοῦ ἔκαμε τὸν λογαριασμόν του, ηὗρεν, ὅτι ἂν ἔδιδεν εἰς ἕκαστον μ δραχμάς, ἤθελε χρειάζεται ἡμερουσίως α δρ. ὀλιγωτέρας, ἂν ὅμως ἔδιδεν εἰς ἕκαστον ν δρ. ἤθελαν τὸν λείψει β δρ. Πόσους ἐργάτας ἀνεδέχθη; Καὶ πόσον ἦτον τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου ἐργάτου;

Ἀπ. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν ἦτον $\frac{\alpha+\beta}{\nu-\mu}$ καὶ τὸ ἡμερομίσθιόν των $\frac{\alpha\nu+\beta\mu}{\nu-\mu}$ γρ.

153) Ἂν πολλαπλασιασθῇ ἀριθμὸς ἐπὶ μ καὶ μ', προκύπτουν δύω γινόμενα, τὰ ὁποῖα ὑπερέχουν ἄλλον ἀριθμὸν κατὰ α καὶ ά. Ποῖος εἶναι ὁ πρῶτος καὶ ποῖος ὁ δεύτερος ἀριθμός;

Ἀπ. Ὁ πρῶτος $\frac{\alpha-\alpha'}{\mu-\mu'}$, ὁ δεύτερος $\frac{\mu'\alpha-\mu\alpha'}{\mu-\mu'}$. Ποῖαι ἀξίαι πρέπει νὰ δοθῶσιν εἰς τὰ γράμματα μ, μ', α, ά διὰ νὰ συμπεριληφθῶσι τὰ προβλήματα 149, 150, 151, 152 εἰς τὸ παρόν;

154) Ζητεῖται ἀριθμὸς, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 5, δίδει γινόμενον, τὸ ὁποῖον ὑπερβαίνει κατὰ τόσον τὸν ἀριθμὸν 20, καθ᾿ ὅσον ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τοῦ 20. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός;

᾿Απ. 6 $\frac{1}{3}$.

155) Διὰ νὰ ἠμπορῶ νὰ ἐπαρκῶ εἰς ὅλα μου τὰ ἔξοδα, ἔλεγεν οἰκοδεσπότης, πρέπει νὰ ἔχω ἐτήσιον εἰσόδημα 540 ταλλήρων καὶ τότε ὅμως δὲν θέλω ἔχει ἀρκετά. Ἂν τὰ εἰσοδήματά μου ἦσαν $3\frac{1}{2}$ φορὰς περισσότερα ἀπὸ ὅ,τι πραγματικῶς εἶναι ἤθελα ἠμπορεῖ ὄχι μόνον νὰ ἐπαρκῶ εἰς τὰ ἔξοδά μου, ἀλλ᾿ ἤθελα οἰκονομεῖ ἀκόμη τόσα ἐτησίως, ὅσα τώρα μὲ λείπουν. Πόσα εἶναι τὰ εἰσοδήματα του;

᾿Απ. 240 ταλ.

156) Ζητεῖται ἀριθμὸς τῶν ἑξῆς ἰδιοτήτων. Ἂν τὸ ἥμισυ αὐτοῦ προστεθῇ εἰς τὸ ὅλον του, τὸ κεφάλαιον αὐτὸ ὑπερέχει κατὰ τόσα τὸν ἀριθμὸν 30, καθόσα ὁ ἀριθμὸς 25 ὑπερβαίνει τὸν ζητούμενον ἀριθμόν. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός;

᾿Απ. 22.

157) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς, ὅστις ἐπὶ 6 πολλαπλασιασμένος δίδει γινόμενον, το ὁποῖον εἶναι κατὰ τόσον μικρότερον τοῦ 50, καθόσον ὁ ἀριθμὸς 10 ὑπερβαίνει τὸν ζητούμενον;

᾿Απ. 8.

158) ᾿Αντιγραφεὺς ἠρωτήθη πόσας κόλλας ἠμπορεῖ νὰ γράψῃ ἑβδομαδιαίως. «᾿Εγὼ, ἀπεκρίθη, ἐργάζομαι μόνον τέσσαρας ὥρας τὴν ἡμέραν καὶ ἑπομένως δὲν ἠμπορῶ νὰ γράψω 70 κόλλας, καθὼς ἤθελα. Ἂν ἠμπόρουν ὅμως νὰ ἐργασθῶ 10 ὥρας τὴν ἡμέραν, ἤθελα γράφει τὴν ἑβδομάδα περισσοτέρας ἀπὸ

70 κόλλας καὶ μάλιστα τόσας, ὅσας τώρα γράφω ὀλιγώτερον.» Πόσας κόλλας ἔγραφε τὴν ἑβδομάδα;

᾿Απ. 40.

159) Γεωμέτρης ἐρωτηθεὶς πόσον ἀπέχουν δύω σημεῖα ἀπ᾿ ἀλλήλων, τὰ ὁποῖα εἶχεν ἤδη μετρήσει αὐτὸς, ἀπεκρίθη: «Ἡ ἀπόστασις εἶναι πολλὰ μικροτέρα ἀπὸ 1000 πόδας, καθότι ἂν προσθέσω εἰς τὴν ἀπόστασίν των τὸ τρίτον μέρος αὐτῆς καὶ ἀκόμη 176 καὶ πολλαπλασιάσω τὸ κεφάλαιον ἐπὶ $2\frac{1}{2}$, εὑρίσκω τὸν ἀριθμὸν κατὰ τόσα μεγαλήτερον ἀπὸ 1000, καθόσον αὐτὸς εἶναι τώρα μικρότερος. Πόσον ἕπεται νὰ ἀπεῖχαν τὰ δύω σημεῖα ἀπ᾿ ἀλλήλων;

᾿Απ. 360 πόδας.

160) Κτηματίας ἤθελε νὰ ἀγοράσῃ οἶκον καὶ διὰ νὰ λάβῃ τὴν ἀναγκαίαν ποσότητα ἀπεφάσισε νὰ ζητήσῃ ἀπὸ ἕκαστον τῶν χρεωστῶν του ἴσην ποσότητα χρημάτων. Κατὰ πρῶτον ἐδοκίμασεν ἂν ἦναι ἀρκετὸν νὰ λάβῃ ἀπὸ ἕκαστον αὐτῶν 250 τάλληρα· ἐπειδὴ ὅμως εἶδεν, ὅτι κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον τὸν λείπουν 2000 τάλ. ἐζήτησεν ἀπὸ ἕκαστον 340 τάλ: τότε ὅμως εἶχεν 880 τάλ. περισσότερα. Πόσους χρεώστας εἶχε; Πόσον ἦτον τὸ ζητούμενον κεφάλαιον; Καὶ πόσα ἔπρεπε νὰ λάβῃ ἀπὸ ἕκαστον τῶν χρεωστῶν;

᾿Απ. Ὁ ἀριθμὸς τῶν χρεωστῶν του ἦτον 32, τὸ κεφάλαιον 10000 τάλ. καὶ ἡ ἀπαιτουμένη ποσότης ἀπὸ ἕκαστον $312\frac{1}{2}$ τάλ.

161) Ἔμπορος ἐχρεώστει νὰ πληρώσῃ τὰς ἑξῆς ποσότητας εἰς τρεῖς διωρίας: 2832 τάλ. μετὰ τρεῖς μῆνας 2560 τάλ. μετὰ 9 καὶ 1450 μετὰ 16. Ὁ δανειστὴς ὅμως ἐπεθύμει νὰ λάβῃ ὁλόκληρον τὸ κεφάλαιον τῶν 6842 τάλ. διὰ μιᾶς. Πότε ἕπεται νὰ ἔγινεν ἡ πληρωμή;

᾿Απ. Μετὰ 8 μῆνας.

162) Ὁ αὐτὸς πρέπει νὰ πληρώσῃ τὰς ἑξῆς ποσότητας εἰς τέσσαρας διωρίας: α μετὰ λ μῆνας, β μετὰ μ, γ μετὰ ν καὶ δ μετὰ π. Ἂν αὐτὸς θέλῃ νὰ ἐξαλείψῃ ὅλον του τὸ χρέος α + β + γ + δ διαμιᾶς, πότε πρέπει νὰ γίνῃ ἡ πληρωμή;

Ἀπ. Μετὰ $\frac{\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu + \delta\pi}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$ μῆνας.

163) Τραπεζίτης ὑπεσχέθη εἰς ἔμπορον νὰ τὸν δανείσῃ 16000 τάλληρα διὰ 15 μῆνας. Ἐπειδὴ ὅμως δὲν ἠμπόρει νὰ τὸν δώσῃ ὅλην τὴν ποσότητα διαμιᾶς, ἐσυμφώνησαν καὶ οἱ δύω νὰ δοθῇ ἡ ποσότης κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον: Κατὰ πρῶτον 5000 τάλ. μετὰ παρέλευσιν 6 μηνῶν ἀκόμη 3000 καὶ ἔπειτα πάλιν μετὰ 8 μῆνας 8000 τάλ. Πόσον καιρὸν λοιπὸν ἠμπορεῖ ἀκόμη ὁ τραπεζίτης νὰ κρατήσῃ τὸ ὅλον κεφάλαιον τῶν 16000 ταλ. χωρὶς νὰ ἀδικηθῇ κανείς;

Ἀπ. $9\frac{1}{8}$ μῆνας.

164) Χωρικὸς εἶχε συμφωνήσει μὲ τὸν γείτονά του νὰ δεχθῇ 400 πρόβατα εἰς τὰ δάση του νὰ βοσκήσωσι 16 μῆνας. Αὐτὸς ὅμως ἔστειλε, μὲ συγκατάνευσιν τοῦ γείτονός του, κατ' ἀρχὰς μόνον 200 ζῶα, μετὰ 7 μῆνας 250 καὶ μετὰ 8 ἀκόμη 150. Πόσον καιρὸν χρεωστεῖ ὁ χωρικὸς νὰ ἀφήσῃ ἀκόμη τὰ 600 ζῶα τοῦ γείτονός του νὰ βοσκήσωσιν, ἂν θέλῃ κατ' ἀκρίβειαν νὰ φυλάξῃ τὴν ὑπόσχεσίν του.

Ἀπ. $2\frac{1}{3}$ μῆνας.

165) Κάποιος ἤθελε νὰ ἀγοράσῃ πραγματείας διὰ 4500 τάλ. ἤθελεν ὅμως νὰ πληρώσῃ τὴν ποσότητα εἰς ἓν ἔτος. Ἔκαμε λοιπὸν τὴν ἑξῆς συμφωνίαν μὲ τὸν πωλητήν: Κατ' ἀρχὰς νὰ τὸν πληρώσῃ μετρητὰ 1500 τάλ. καὶ τὰ λοιπὰ 3000 εἰς τέσσαρας ἴσας προθεσμίας ἀνὰ 750. Ποῖαι προθεσμίαι πρέπει νὰ

προσδιορισθῶσι, χωρὶς ζημίαν οὔτε τοῦ ἑνός, οὔτε τοῦ ἄλλου;

Ἀπ. $7\frac{1}{3}$ μηνῶν.

166) Ποσότης χρημάτων πρέπει νὰ πληρωθῇ ὡς ἀκολούθως: 1376 τάλ. μετὰ 5 μῆνας, μετὰ 3 μῆνας (1) ἀκόμη 2560· καὶ τὰ ἐπίλοιπα μετὰ 5 μῆνας ὑστερώτερα. Ἂν ὅλη ἡ ποσότης ἐπληρόνετο ἐνταυτῷ ἔπρεπε νὰ γίνῃ ἡ πληρωμὴ μετὰ 10 μῆνας. Πόση ἦτον ὅλη ἡ χρεωστουμένη ποσότης;

Ἀπ. 7936 τάλ.

167) Χρεώστης πρέπει νὰ πληρώσῃ 7000 τάλ. ὡς ἀκολούθως: 2000 τάλ. μετὰ $3\frac{1}{2}$ μῆνας, 3500 μετὰ 4 (2) καὶ 1500 μετὰ 14. Ὁ δανειστὴς τὸν προβάλλει νὰ πληρώσῃ τὴν ποσότητα εἰς δύω προθεσμίας ἑκάστοτε τὸ ἥμισυ καὶ μάλιστα μὲ τρόπον, ὥστε ἡ δευτέρα προθεσμία νὰ ἦναι καθ' ἕνα μῆνα μεγαλητέρα τῆς πρώτης. Ἂν λοιπὸν ὁ χρεώστης συγκατανεύσῃ εἰς τοῦτο, μετὰ πόσον καιρὸν πρέπει νὰ τεθῇ ἡ πρώτη προθεσμία;

Ἀπ. Μετὰ $3\frac{2}{3}$ μῆνας.

168) Εἰς τὴν πώλησιν κήπου παρευρίσκονται δύω ἀγορασταί. Ὁ πρῶτος δίδει 7705 τάλ. ὡς ἕπεται: 3365 τάλ. ἀμέσως καὶ 4340 μετὰ 8 ἔτη, ἢ ἂν ὁ πωλητὴς τὸ ἀπαιτῇ, τὴν τελευταίαν ποσότητα εὐθὺς πρὸς 5 τὰ ἑκατὸν ἁπλοῦν ἐκπεσμένη. Ὁ δεύτερος ἀγοραστὴς προσφέρει ἄλλην ποσότητα, ἥτις, ἀπὸ τῆς σήμερον πρέπει νὰ πληρωθῇ εἰς τρεῖς προθεσμίας δύω ἐτῶν ἑκάστην καὶ μάλιστα εἰς ἴσα μέρη, ὡς ἐφεξῆς: τὸ πρῶτον τρίτον μετὰ 2 ἔτη, τὸ δεύτερον τρίτον μετὰ 4 καὶ τὸ τελευταῖον τρί-

---

(1) 3 μῆνας μετὰ τοὺς 5, δηλ: 8· καὶ ἔπειτα ἄλλους 5 μῆνας μετὰ τοὺς 3, δηλ: ἀπὸ τὴν ἀρχὴν ἕως τώρα 13.

(2) Εἰς αὐτὸ τὸ πρόβλημα οἱ 4 μῆνες δὲν λογαριάζονται μετὰ τοὺς $3\frac{1}{2}$, ἀλλ' ἐξ ἀρχῆς, ἐπίσης καὶ οἱ ἑπόμενοι 14.

τον μετὰ 4 καὶ τὸ τελευταῖον τρίτον μετὰ 6 ἔτη ἢ ἀμέσως μετρητὰ ἂν θέλῃ ὁ πωλητής, πλὴν πρὸς 5 τὰ ἑκατὸν ἄπλοῦν ἐκπεσμόν. Ὁ πωλητὴς εὑρίσκει καὶ τὰ δύω ὡς ἴσα. Πόσα ἔδωκεν ὁ δεύτερος;

Ἀπ. 7722 τάλ.

169) Τρεῖς ἔμποροι Α, Β, Γ ἐσυμφώνησαν νὰ κάμωσιν ἐμπορικὴν συντροφίαν. Ὁ Α κατέθεσε 1200, ὁ Β 800 καὶ ὁ Γ 600 τάλ. ὁ Α ἄφησε τὰ χρήματά του 8 μῆνας, ὁ Β 10 καὶ ὁ Γ 14. Τὸ ὅλον κέρδος ἦτον 500 τάλ. Πόσα θέλει λάβει ἕκαστος ἀπὸ αὐτὸ τὸ κέρδος;

Ἀπ. Ὁ Α $184\frac{8}{13}$, ὁ Β $153\frac{11}{13}$, ὁ Γ $161\frac{7}{13}$, τάλ.

170) Ἂς τεθῇ εἰς τὸ προλαβὸν πρόβλημα τὸ κεφάλαιον τοῦ $Α = α$, τοῦ $Β = β$, τοῦ $Γ = γ$· ὁ Α ἀφίνει τὰ χρήματα του λ μῆνας εἰς τὴν συντροφίαν, ὁ Β μ καὶ ὁ Γ ν. Τὸ κέρδος εἶναι $= η$. Πόσον μέρος τοῦ κέρδους ἀνήκει εἰς ἕκαςον;

Ἀπ. Τὸ μέρος τοῦ Α εἶναι $= \frac{αλη}{αλ + βμ + γν}$, τοῦ Β $=$ $\frac{βμη}{αλ + βμ + γν}$ καὶ τοῦ Γ $= \frac{γνη}{αλ + βμ + γν}$.

171) Τρεῖς ἔμποροι ἐπεχειρίσθησαν ἐκ συμφώνου ἐμπόριον. Ὁ πρῶτος ἔδωκε 17000 τάλ. ὁ δεύτερος 13000. καὶ ὁ τρίτος 10000. Ἐπειδὴ ὅμως εἶχεν ἀνάγκην ἀτόμου πρὸς διαχείρησιν τοῦ ὅλου, ἐπρόβαλεν ἐκεῖνος, ὅστις εἶχε καταβάλει τὰ ὀλιγώτερα νὰ ἀναλάβῃ τὸ βάρος ἐπὶ συμφωνίᾳ νὰ λαμβάνῃ ἀπὸ τὸ κέρδος 3 τὰ ἑκατὸν περισσότερα ἀφ᾽ ὅσα ἀνήκουν εἰς αὐτόν. Εἰς τὸ τέλος εὑρέθη τὸ ὅλον κέρδος $35262\frac{1}{2}$ τάλ. Ποσα θέλει λάβει ἕκαστος;

172) Εἰς κληρονομίαν 3139 ταλλήρων, παρουσιάσθησαν

τρεῖς ζητηταὶ δανείων· ὁ πρῶτος 2000 τάλ. ὁ δεύτερος 2500 καὶ ὁ τρίτος 35000. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ κληρονομία δὲν ἐπήρκει νὰ εὐχαριστήσῃ καὶ τοὺς τρεῖς, ἀπεφασίσθη μὲν νὰ μερισθῶσιν εἰς τοὺς τρεῖς τὰ χρήματα, πλὴν κατὰ λόγον τῶν ἀπαιτήσεών των· μόνον ὁ δεύτερος δι᾽ ἰδιαιτέρους λόγους ἔπρεπε νὰ λάβῃ 10 καὶ ὁ τρίτος 25 τὰ ἑκατὸν περισσότερα ἀπὸ ὅσα τὸν ἀνήκουν. Πόσα ἔπεται νὰ ἔλαβεν ἕκαστος αὐτῶν;

Ἀπ. Ὁ πρῶτος 688, ὁ δεύτερος 946 καὶ ὁ τρίτος 1505 τάλ.

173) Ἂς τεθῇ ἡ εἰς τὸ προλαβὸν πρόβλημα κληρονομία $= α$, αἱ ἀπαιτήσεις τῶν τριῶν ζητητῶν $= ζ, η, θ$, πρὸς τούτοις ἂς θέτομεν ὁ δεύτερος πρέπει νὰ λάβῃ περισσότερον μ καὶ ὁ τρίτος ν τὰ ἑκατόν· Πόσα θέλει λάβει ἕκαςος;

Ἀπ. Ὁ πρῶτος $\frac{100αζ}{100(ζ + η + θ) + μ + θν}$,

ὁ δεύτερος $\frac{(100 + μ)αη}{100(ζ + η + θ) + ημ + θν}$,

ὁ τρίτος $\frac{(100 + ν)αθ}{100(ζ + η + θ) + ημ + θν}$ τάλ.

Πῶς πρέπει νὰ μεταβληθῶσιν οἱ τύποι οὗτοι, ἂν ὁ δεύτερος, ἀντὶ νὰ λάβῃ μ τὰ ἑκατὸν περισσότερα, λάβῃ μ τὰ ἑκατὸν ὀλιγώτερα;

174) Τρεῖς ἔμποροι Α, Β, Γ κατέθεσαν ποσότητα διὰ νὰ ἐμπορευθῶσιν. Ὁ Β ἔδωκε κατὰ τὸ ἥμισυ περισσότερα τοῦ Α καὶ ὁ Γ 300 τάλ. περισσότερα τοῦ Α καὶ Β μαζῆ. Μετὰ πόσον καιρὸν διενεμήθη τὸ ὅλον κέρδος, τὸ ὁποῖον συνεποσοῦντο εἰς 5020 τάλ. καὶ ὁ Γ ἔλαβε 2570 τάλ: διὰ τὸ μέρος του. Πόσα εἶχε καταθέσει ἕκαςος;

Ἀπ. Ὁ Α 2450, ὁ Β 3675, καὶ ὁ Γ 6425 τάλ.

175) Τρεῖς ἄλλοι ἔμποροι Α, Β, Γ συνεισέφεραν ποσότητας διὰ νὰ ἐμπορευθῶσιν. Ὁ Γ κατέθεσε 5600 τάλ., ὁ Α 320 ὀλιγότερα τοῦ Β. Ὁ Α ἄφησε τὰ χρήματά του 7 μῆνας εἰς τὸ ἐμπόριον, ὁ Β 14 καὶ ὁ Γ 12. Τὸ ἐκ τούτων κέρδος 2402 $\frac{1}{6}$ τάλ. διεμερίσθησαν οἱ τρεῖς σύντροφοι κατὰ λόγον τῶν καταθέσεών των καὶ τοῦ χρόνου τῆς καταθέσεως. Ὁ Β ἔλαβε διὰ τὸ μέρος του 879 τάλ. 16 γροσίκια. Πόσα κατέθεσαν λοιπὸν ὁ Α καὶ Β;

Ἀπ. Ὁ Α 3450, ὁ Β 3770 τάλ.

176) Πατὴρ ἀποθνήσκων ἄφησεν εἰς τοὺς τέσσαράς του υἱοὺς 1000 τάλ. περιουσίαν. Μετὰ 10 μῆνας ἐγνωστοποιήθη ἡ διαθήκη· εἰς αὐτὸ τὸ διάςημα ὅμως εἶχαν καταδαπανήσει οἱ νέοι καὶ τὸ κεφάλαιον καὶ τοὺς τόκους. Μὲ ἴσα ἔξοδα καὶ ἴσους τόκους εἶχαν ἐξοδεύσει τρεῖς ἄλλοι νέοι κεφάλαιον 1200 ταλ. εἰς 15 μῆνας. Πόσοι ἦσαν εἰς τὰ δύω αὐτὰ κεφάλαια οἱ τόκοι; Καὶ πόσον καιρὸν ἠμποροῦν νὰ ζήσωσι 6 νέοι μὲ 1650 τάλ. ἂν δὲν μεταβληθῇ τίποτε κατὰ τὰ ἄλλα;

Ἀπ. Οἱ τόκοι ἦσαν μηνιαίως $\frac{2}{3}$ τὰ ἑκατὸν καὶ οἱ 6 νέοι ἠμπόρουν μόνον 10 μῆνες νὰ ζήσωσιν.

177) Πέντε ἀδελφοὶ ἐδαπάνησαν εἰς διάςημα 9 μηνῶν κεφάλαιον 4800 ταλλήρων καὶ ἐνταυτῷ ὅλους τους τόκους. Μετὰ αὐτὰ ἔξοδα εἶχαν δαπανήσει ἄλλοτε δύω ἄλλοι κεφάλαιον 3320 ταλ. μαζῇ μὲ τοὺς τόκους εἰς 16 μῆνας. Ὁ τόκος ἦτον καὶ τῶν δύω ὁ αὐτός. Πόσα εἶχεν ἐξοδεύσῃ ἕκαςος αὐτῶν;

Ἀπ. 110 $\frac{2}{3}$ τάλ.

178) Ὑπηρέτης ἐλάμβανεν ἐτησίως ἀπὸ τὸν κύριόν του 40 τάλ. καὶ ἔνδυμα ὡς μισθόν. Ἀφοῦ ὑπηρέτησε 5 μῆνας ἠθέλησε νὰ φύγῃ καὶ ἔλαβε δι᾽ αὐτὸν τὸν καιρὸν τὸ ἔνδυμα καὶ μόνον 6 τάλ. καὶ 4 γρ. Πόση ἦτον ἡ τιμὴ τοῦ ἐνδύματος;

Ἀπ. 18 τάλ.

179) Χωρικὸς εἶχε δύω ἐργάτας, οἱ ὁποῖοι ἠργάζοντο παρ᾽ αὐτῷ μὲ τὸν αὐτὸν μισθόν. Εἰς τὸν ἕνα ἔδωκε μίαν φορὰν διὰ 56 ἡμέρας 4 κοιλὰ σίτου καὶ 14 τάλ., εἰς τὸν ἄλλον διὰ 84 ἡμέρας 7 $\frac{1}{2}$ κοιλὰ σίτου, 17 τάλ. καὶ 6 γρ. Πόση ἦτον ἡ τιμὴ ἑνὸς κοιλοῦ σίτου;

Ἀπ. 2 τάλ. καὶ 12 γρ.

180) Ὑπηρέτης ἔλαβεν ἀπὸ τὸν κύριόν του μίαν φορὰν 7 προυσικὰ φλωρία, 16 τάλληρα καὶ 22 γροσίκια διὰ 7 μηνῶν μισθόν· ἄλλοτε ἔλαβε 5 προυσσικά, 44 τάλ. καὶ 2 γρ. διὰ 9 μῆνας. Πόση ἦτον ἡ τιμὴ τοῦ προυσικοῦ φλωρίου;

Ἀπ. 5 τάλ. καὶ 14 γρ.

181) Δεσπότης λαβὼν ὑπηρέτην τὸν ὑπεσχέθη 8 γρ. ἡμερούσιον μισθόν, ὅταν ἐργάζεται δι᾽ αὐτόν. Ὅταν ὅμως ἐργάζεται ἀλλοῦ νὰ τὸν δίδῃ ὁ ὑπηρέτης 5 γρ. διὰ τὴν τροφήν. Μετὰ 50 ἡμέρας ἔκαμαν τὸν λογαριασμόν των καὶ ὁ ὑπηρέτης ἔλαβεν 9 τάλ. καὶ 2 γρ. Πόσας ἡμέρας ἠργάσθη λοιπὸν διὰ τὸν κύριόν του;

Ἀπ. 36.

182) Χωρικὸς ἔφερεν αὐγὰ εἰς τὴν ἀγορὰν καὶ ἔδιδε τὸ αὐγὸν πρὸς 7 λεπτά. Παραστικὸς ἐκτύπησε κατὰ σύμπτωσιν τὸ καλάθιον τοῦ χωρικοῦ καὶ συνέτριψε 5 αὐγά. Ἀφοῦ αὐτὸς ἀπεζημιώθη ἀπὸ τὸν διαβάτην, ἀπεφάσισε νὰ πωλήσῃ ὅσα αὐγὰ τὸν εἶχαν μείνει ἀκόμη πρὸς 8 λεπτὰ τὸ ἕν, λέγων: ὅτι κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον θέλει λάβει ὅσα καὶ κατὰ τὸν ἄλλον ἂν εἶχεν ὅλα του τὰ αὐγά. Πόσα αὐγὰ ἔφερεν αὐτὸς μαζῇ του;

Ἀπ. 40.

183) Μάγειρος φέρων μῆλα ἠρωτήθη πόσα εἶναι αὐτά; Καὶ αὐτός, ἐπειδὴ ἦτον καλὸς ἀριθμητικός, ἀπεκρίθη κατὰ τὸν ἑξῆς αἰνιγματώδη τρόπον: « Ἡ δωδεκὰς αὐτῶν ἔχει 18 λεπ: ἂν ἐλάμβανα ὅμως ἀκόμη 5, τὰ ὁποῖα ἐγὼ ἐζήτησα ὡς χάριν,

ἤθελε μὲ ἔλθει ἡ τιμὴ τῆς δωδεκάδος κατὰ $2\frac{1}{2}$ λεπ. μικροτέρα. Πόσα μῆλα εἶχεν;

'Απ. 31.

184) Ἔμπορος ἠγόρασεν ὕφασμα πρὸς $2\frac{1}{2}$ τάλ. τὸν πῆχυν. Τὸ ἐμέτρησεν ὅμως ἐκ δευτέρου καὶ εὗρεν, ὅτι εἶχε 5 πήχας περισσότερον ἀφ' ὅ,τι ἔπρεπε, τοιαύτης ὅμως ποιότητος, ὥςε ἠναγκάσθη νὰ πωλήσῃ τὸν πῆχυν μόνον πρὸς 2 τάλ. Καὶ τοῦτο ὅμως τὸ ἔκαμε μὲ χάσιμον $13\frac{1}{3}$ τὰ ἑκατόν. Πόσων πήχεων ἦτον τὸ ὅλον;

'Απ. Κατὰ τὸ δοθὲν 60, πραγματικῶς ὅμως 65.

185) Τώρα ἐξοδεύω τὸ ἕβδομον μέρος τῶν εἰσοδημάτων μου εἰς τὸ θέατρον καὶ τὰ ἐπίλοιπα εἰς τὰ τακτικὰ ἔξοδά μου· ἂν ἐλάμβανα ὅμως τακτικῶς ἄλλα 100 τάλ. ἤθελα τότε ἐξοδεύει τὸ πέμπτον μέρος τῶν εἰσοδημάτων μου εἰς τὸ θέατρον καὶ μόλον τοῦτο ἤθελα φυλάττει ἀκόμη 40 τάλ. διὰ τὰ τακτικά μου ἔξοδα. Ποῖα ἦσαν τὰ εἰσοδήματά του;

'Απ. 700 τάλ.

186) Φιλόμουσος ἀνὴρ, ὅςις μέχρι τοῦδε ἐξώδευε πάντοτε τὸ τέταρτον μέρος τῶν εἰσοδημάτων του εἰς ἀγορὰν βιβλίων, ἀπεφάσισε, δι' αὔξησιν τοῦ εἰσοδήματος, νὰ ἐξοδεύῃ εἰς τὸ ἑξῆς τὸ τρίτον μέρος αὐτῶν διὰ βιβλία, καθότι καὶ οὕτω τὸν ἔμεναν πάλιν τόσα χρήματα διὰ τὰ τακτικά του ἔξοδα, ὅσα καὶ πρότερον. Πόση ἦτον λοιπὸν ἡ αὔξησις τῶν εἰσοδημάτων του;

'Απ. Τὸ ὄγδοον μέρος αὐτῶν.

187) Εἰς πόλιν ἐχρεώστει πᾶς ἕκαςος οἰκοδεσπότης νὰ δίδῃ τὸ ἕβδομον μέρος τοῦ ἐνοικίου εἰς τὴν Κυβέρνησιν. Μετὰ καιρὸν ηὔξησεν αὐτὸς ὁ φόρος καὶ ἔπρεπε νὰ δίδῃ πᾶς ἕκαςος τὸ ἕκτον μέρος τοῦ ἐνοικίου. Κατὰ πόσον ἔπρεπε νὰ αὐξήσῃ τὸ

ἐνοίκιον, ἂν οἱ οἰκοδεσπόται ἤθελαν νὰ λαμβάνωσιν, ὅσα καὶ πρότερον;

'Απ. Κατὰ τὸ 35ον μέρος τοῦ προτέρου ἐνοικίου.

188) Ἄλλοτε εἶχα ποσότητα χρημάτων. ἐξ αὐτῶν ἔλαβα τὸ τρίτον μέρος, κατέθεσα ὅμως ἀντ' αὐτοῦ 50 τάλ. Ἔπειτα ἔλαβα πάλιν ἀπὸ τὸ αὐξηθὲν κεφάλαιον τὸ τέταρτον μέρος καὶ κατέθεσα ἀντ' αὐτοῦ 70 τάλ. Τότε μετρήσας τὸ ὅλον ηὗρα 120 τάλ. Πόσα ἦσαν κατ' ἀρχάς;

'Απ. 25 τάλ.

189) Ἀπὸ ποσότητα χρημάτων ἀφῃρέθησαν 50 τάλ. περισσότερα τοῦ ἡμίσεως, ἔπειτα ἐκ τῶν ἐπιλοίπων ἀκόμη 30 τάλ. περισσότερα τοῦ πεμπτημορίου αὐτῶν καὶ ἐκ τοῦ τελευταίου ὑπολοίπου πάλιν 20 τάλ. περισσότερα τοῦ τεταρτημορίου τοῦ αὐτοῦ. Μόλα ταῦτα εἶχαν μείνει εἰς τὸ τέλος ἀκόμη 10 τάλ. Πόση ἦτον κατ' ἀρχὰς ἡ ποσότης;

'Απ. 275 τάλ.

190) Ἀνὴρ πλούσιος προσδιώρισε διὰ τῆς διαθήκης του ποσότητά τινα νὰ διαμερισθῇ εἰς τρία ἄτομα τοῦ οἴκου του, ὡς ἀκολούθως: Ὁ ὑπηρέτης νὰ λάβῃ 200 τάλ. καὶ ἀκόμη τὸ ἥμισυ τοῦ ὑπολοίπου. Ἐκ τῶν ἐπιλοίπων νὰ λάβῃ ὁ μάγειρος τὸ πέμπτον μέρος καὶ ἀκόμη 400 τάλ. Τέλος ὁ ἡνίοχος νὰ λάβῃ τὰ ἀπολειφθέντα 520 τάλ. Πόσον ἔπεται νὰ ἦτον τὸ δοθὲν κεφάλαιον;

'Απ. 2500 τάλ.

191) Χωρικὸς ἔφερεν εἰς τὴν πόλιν αὐγὰ ἐξ αὐτῶν ἐπώλησε κατ' ἀρχὰς τὸ ἥμισυ καὶ ἀκόμη 4. Ἔπειτα ἐπώλησεν ἀπὸ τὰ ἐπίλοιπα πάλιν τὸ ἥμισυ καὶ 2 ἀκόμη. Ἀπὸ ἀφροντισίαν του ὅμως ἔχασεν 6 αὐγὰ περισσότερα ἀπὸ τὸ ἥμισυ τῶν ἀπολειφθέν-

των καὶ οὕτω λυπημένος ἐπέστρεψεν εἰς τὸν οἶκόν του μὲ 2 μόνον αὐγά. Πόσα εἶχεν ὁ χωρικὸς κατ' ἀρχάς;

'Απ. 80.

192) Ἔμπορος αὐξάνει τὰ ὑπάρχοντά του ἐτησίως κατὰ τὸ τρίτον μέρος, λαμβάνει ὅμως διὰ τὰ ἔξοδά του 1000 τάλ. Εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου ἔτους, ἀφοῦ ἔλαβε τὰ τελευταῖα 1000 τάλ, εὑρίσκει τὰ ὑπάρχοντά του διπλασιασμένα. Πόσα εἶχε κατ' ἀρχάς;

'Απ. 11100 τάλ.

193) Ἔμπορος αὐξάνει τὰ ὑπάρχοντά του κατὰ 20 τὰ ἑκατὸν ἐτησίως, ἀφαιρεῖ ὅμως ἀπὸ αὐτὰ 1000 τάλ. διὰ τὰ ἔξοδά του. Ἀφοῦ παρῆλθαν τρία ἔτη καὶ ἔλαβε καὶ τὰ τελευταῖα 1000 τάλ. ηὗρεν εἰς τὸ τέλος, ὅτι ἔχει 200 τάλ. περισσότερα τῶν δύω πέμπτων τοῦ κατατεθέντος κεφαλαίου. Πόσον ἦτον αὐτό;

'Απ. 30000 τάλ.

194) Πατὴρ ἔφερε μῆλα εἰς τοὺς υἱούς του καὶ τὰ διένειμε κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον: Εἰς τὸν πρῶτον ἔδωκεν 8 μῆλα ὀλιγώτερα τοῦ ἡμίσεως τοῦ ὅλου. Εἰς τὸν δεύτερον 8 ὀλιγώτερα τοῦ ἡμίσεως τῶν ὑπολοίπων, κ. ο. κ. εἰς τὸν τρίτον καὶ τέταρτον. Εἰς τὸν πέμπτον ἔδωκε τὰ ἀπολειφθέντα 20 μῆλα. Πόσα ἔφερεν ὁ πατὴρ μαζῆ του;

'Απ. 80.

195) Πολλαπλασιάζω ἀριθμὸν ἐπὶ $3\frac{3}{7}$, ἀφαιρῶ ἀπὸ τὸ γινόμενον 60, πολλαπλασιάζω τὸ ὑπόλοιπον ἐπὶ $2\frac{1}{2}$ καὶ ἀφοῦ ἀφαιρέσω ἀκόμη 30, δὲν μὲ μένει πλέον τίποτε. Ποῖος εἶναι αὐτὸς ὁ ἀριθμός;

'Απ. [illegible]

196) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ $\frac{1}{3}$ εἶναι κατὰ 2 μεγαλήτερον ἀπὸ τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ;

'Απ. 24.

197) Ζητεῖται ἀριθμός, ὅστις δίδει 8, ἂν προστεθῇ 8 εἰς αὐτόν, καὶ τὸ κεφάλαιον διαιρεθῇ διὰ 8 καὶ ἀφαιρεθοῦν 8 ἀπὸ τὸ πηλίκον;

'Απ. 120.

198) Ζητεῖται ἀριθμός, ὅστις δίδει δ, ἂν προστεθῇ εἰς αὐτὸν α, διαιρεθῇ τὸ κεφάλαιον διὰ β καὶ ἀφαιρεθῇ γ ἀπὸ τὸ πηλίκον;

'Απ. $\beta(\delta + \gamma) - \alpha$

199) Ἄσωτος ἔδωκε τὰ ὑπάρχοντά του εἰς τόκους πρὸς 4 τὰ ἑκατόν. Ἀφοῦ τὰ ἄφησε δύω ἔτη εἰς τόκους, ἔλαβεν ἀπὸ αὐτὰ τὸ τέταρτον μέρος καὶ ἔδωκε τὸ ὑπόλοιπον εἰς τόκους διὰ 7 μῆνας. Μετὰ παρέλευσιν ταύτης τῆς προθεσμίας ἔλαβε πάλιν τὸ τέταρτον μέρος αὐτοῦ, ἔδωκε τὸ σμικρυνθὲν κεφάλαιον διὰ 13 μῆνας εἰς τόκους καὶ ἔλαβε μετὰ τοῦτο ὅλον τὸ ἐπίλοιπόν του κεφάλαιον ὀπίσω. Εἰς αὐτὸ τὸ διάστημα τῶν 44 μηνῶν ἔλαβεν εἰς τόκους $6093\frac{3}{4}$ τάλ. Πόσον ἦτον λοιπὸν κατ' ἀρχὰς τὸ κεφάλαιόν του;

'Απ. 50000 τάλ.

200) Πατὴρ ἀποθνήσκων ἄφησεν εἰς τοὺς τέσσαράς του υἱοὺς 9282 τάλ. διὰ νὰ τὰ μοιρασθοῦν κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον: ὁ δεύτερος υἱὸς ἔπρεπε νὰ λάβῃ ἓν δέκατον περισσότερον τοῦ πρώτου, ὁ τρίτος ἓν δέκατον περισσότερον τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τέταρτος ἓν δέκατον περισσότερον τοῦ τρίτου. Πόσα ἔπεται νὰ ἔλαβεν ἕκαστος;

'Απ. Ὁ πρῶτος 2000, ὁ δεύτερος 2200, ὁ τρίτος 2420 καὶ ὁ τέταρτος 2662.

201) Πατὴρ ἀποθνήσκων ἄφησεν εἰς τοὺς υἱούς του ποσότητά τινα διὰ νὰ τὴν μοιρασθοῦν κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον: Ὁ πρῶτος ἔπρεπε νὰ λάβῃ 100 τάλ. καὶ ἀκόμη τὸ δέκατον μέρος τοῦ ὑπολοίπου, ὁ δεύτερος 200 τάλ. καὶ ἀκόμη τὸ δέκατον μέρος

τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου· ὁ τέταρτος 300 τάλ. καὶ τὸ δέκατον τῶν ἀπολειφθέντων καὶ οὕτω καθεξῆς, πάντοτε ὁ ἑπόμενος 100 ταλ. περισσότερα ἀπὸ τὸν ἀμέσως προηγούμενον καὶ ἀκόμη τὸ δέκατον τῶν ἀπολειφθέντων μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν μερίδων. Εἰς τὸ τέλος εὑρέθη, ὅτι ὅλοι ἔλαβαν ἴσα. Πόσον μεγάλη ἦτον ἡ ὅλη κληρονομία; Καὶ πόσοι ἦσαν οἱ υἱοί;

Ἀπ. Ἡ κληρονομία 8100 τάλ. καὶ οἱ υἱοὶ 9.

202) Πόση μεγάλη ἔπρεπεν ὅμως νὰ ἦναι ἡ περιουσία καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν υἱῶν, ἂν ὁ πρῶτος ἐλάμβανε 30 τάλ. καὶ τὸ ἔννατον τοῦ ὑπολοίπου, ὁ δεύτερος 60 τάλ. καὶ τὸ ἔννατον τοῦ ὑπολοίπου κ. ο. κ. κατὰ τὸν ἄνω κανόνα, και ἔμεναν εἰς τὸ τέλος εἰς ὅλους τὰ αὐτά;

Ἀπ. 1920 τάλ. καὶ 8 οἱ υἱοί.

203) Πόση ἤθελεν εἶναι ἡ περιουσία, ὁ ἀριθμὸς τῶν υἱῶν καὶ ἡ μερὶς ἑκάστου, ἂν ἐν γένει ὁ πρῶτος υἱὸς ἐλάμβανε α τάλ. καὶ τὸ $\nu^{\text{ον}}$ μέρος τοῦ ὑπολοίπου· καὶ ἕκαστος τῶν ἑπομένων τὸ $\nu^{\text{ον}}$ μέρος τοῦ ὑπολοίπου καὶ α τάλ. περισσότερα ἀπὸ τὸν προηγούμενον καὶ εὑρίσκοντο εἰς τὸ τέλος ὅλοι μὲ ἴσα;

Ἀπ. Ἡ περιουσία $(\nu - 1)^2 \alpha$, ὁ ἀριθμὸς τῶν υἱῶν $\nu - 1$ καὶ ἡ μερὶς ἑκάστου $(\nu - 1)\alpha$.

204) Στρατηγὸς ἤθελε νὰ κατατάξῃ τὸ σῶμά του εἰς τετράγωνον καὶ τὸ ἐδοκίμασε κατὰ δύω τρόπους. Τὴν πρώτην φορὰν τὸν ἔμειναν 39 περισσότεροι· τὴν δευτέραν ὅμως, ἐπειδὴ ηὔξησε τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου καθ' ἕνα ἄνδρα, τὸν ἔλλειπαν 50 στρατιῶται πρὸς ἀποπλήρωσιν τοῦ τετραγώνου. Ἀπὸ πόσους συνίστατο τὸ σῶμά του;

Ἀπ. Ἀπὸ 1975 Στρατιώτας.

205) Ὁδοιπόροι ηὗραν καθοδὸν βαλάντιον πλῆρες φλωρίων

καὶ θέλοντες νὰ τὰ μοιρασθοῦν παρετήρησαν, ὅτι ἂν λάβῃ πᾶς ἕκαστος ἀνὰ 24, περισσεύουν 16· ἂν λάβῃ ὅμως ἀνὰ 25 ἐλλείπουν 14. Πόσοι ἦσαν οἱ ὁδοιπόροι καὶ πόσα τὰ εὑρεθέντα φλωρία;

Ἀπ. 30 καὶ 736.

206) Πλούσιος εἶχε ποσότητα ταλλήρων, τὰ ὁποῖα ἤθελε νὰ θέσῃ εἰς σχῆμα τετραγώνου. Εἰς τὴν πρώτην δοκιμὴν τὸν ἔμειναν 130 τάλ. ἀφοῦ ὅμως ηὔξησε τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου κατὰ 3 τὸν ἔμειναν μόνον 31 τάλ. περιττά. Πόσα εἶχεν;

Ἀπ. 355.

207) Ζητεῖται ἀριθμὸς, εἰς τὸν ὁποῖον ἂν προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β, ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν νὰ ἦναι $= \delta$. Ποῖος εἶναι αὐτὸς ὁ ἀριθμός;

Ἀπ. $\frac{\delta - \alpha^2 + \beta^2}{2(\alpha - \beta)}$.

208) Ὁ ἀριθμὸς α πρέπει νὰ διαιρεθῇ εἰς δύω μέρη, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν γινομένων αὐτῶν, ἂν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ δύω γνωστῶν ἀριθμῶν μ καὶ ν, νὰ ἦναι $= \delta$. Ποῖα εἶναι τὰ μέρη;

Ἀπ. $\frac{\nu\alpha + \delta}{\mu + \nu}$, $\frac{\mu\alpha - \delta}{\mu + \nu}$.

209) Ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ τὸ μέγεθος τριῶν ἀγγείων ἀπὸ τὰ ἑξῆς διδόμενα: Ἂν τὸ πρῶτον κενὸν ἀγγεῖον γεμισθῇ ἀπὸ τὸ δεύτερον πλῆρες, μένουν εἰς τὸ δεύτερον μόνον $\frac{2}{9}$ τοῦ οἴνου. Ἂν γεμισθῇ τὸ δεύτερον κενὸν ἀγγεῖον ἀπὸ τὸ πλῆρες τρίτον, τότε μένει εἰς τὸ τρίτον μόνον $\frac{1}{4}$ τοῦ οἴνου· ἂν ὅμως ἔπρεπε νὰ γεμισθῇ τὸ τρίτον κενὸν ἀγγεῖον ἀπὸ τὸ πρῶτον πλῆρες ἤθελαν λείπει 50 τέταρτα. Πόσα τέταρτα περιέχει ἕκαστον τῶν τριῶν ἀγγείων;

Ἀπ. Τὸ πρῶτον 70 τέταρτα, τὸ δεύτερον 90 καὶ τὸ τρίτον 140.

10) Οἰνοπώλης ἔχει τέσσαρα ἀγγεῖα διαφόρου μεγέθους. Ἂν γεμίσῃ τὸ δεύτερον κενὸν ἀπὸ τὸ πρῶτον πλῆρες, μένουν εἰς τὸ πρῶτον μόνον $\frac{4}{7}$ τοῦ οἴνου. Ἂν γεμίσῃ τὸ τρίτον κενὸν ἀπὸ τὸ δεύτερον πλῆρες, μένει εἰς τὸ δεύτερον μόνον $\frac{1}{4}$ τοῦ οἴνου. Ἂν ὅμως γεμίσῃ τὸ τέταρτον κενὸν ἀπὸ τὸ τρίτον πλῆρες, γεμίζονται μόνον $\frac{9}{16}$ τοῦ τετάρτου· καὶ ἂν θελήσῃ νὰ γεμίσῃ τὸ τρίτον καὶ τέταρτον ἀπὸ τὸ πρῶτον πλῆρες, ὄχι μόνον γεμίζουν αὐτά, ἀλλὰ μένουν καὶ 15 τέταρτα ἀκόμη. Πόσα τέταρτα περιέχει ἕκαστον;

Ἀπ. Τὸ πρῶτον 140 τέταρτα, τὸ δεύτερον 60, τὸ τρίτον 45 καὶ τὸ τέταρτον 80.

ΙΖ. *Προβλήματα τῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ πολλὰς ἀγνώστους.*

1) Ζητοῦνται δύω ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον εἶναι 70 καὶ ἡ διαφορὰ 16. Ποῖοι εἶναι αὐτοί;

Ἀπ. 43 καὶ 27.

2) Ζητοῦνται δύω ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον $= α$ καὶ ἡ διαφορὰ $= β$. Πῶς ἠμποροῦν νὰ ἐκφρασθῶν αὐτοὶ οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. Ὁ πρῶτος εἶναι $= \frac{α + β}{2}$, ὁ δεύτερος $= \frac{α - β}{2}$.

3) Δύω βαλάντια περιέχουν μαζὴ 300 τάλ. ἂν ἀπὸ τὸ πρῶτον ἀφαιρεθῶσι 30 καὶ τεθοῦν εἰς τὸ δεύτερον, τότε θέλουν ἔχει καὶ τὰ δύω ἐπίσης ἴσα. Πόσα περιέχει ἕκαστον αὐτῶν;

Ἀπ. Τὸ πρῶτον 180, τὸ δεύτερον 120.

4) Ὁ Α λέγει πρὸς τὸν Β. Δός μοι ἑκατὸν τάλ. καὶ θέλω ἔχει

τόσα, ὅσα καὶ σύ. Ὄχι λέγει ὁ Β πρὸς τὸν Α: δός μοι σὺ 100 τάλ. καὶ τότε θέλω ἔχει διπλάσια σοῦ. Πόσα ἔχει ἕκαστος αὐτῶν;

Ἀπ. Ὁ Α 500, ὁ Β 700 τάλ.

5) Χωρικός τις ἔλεγε πρὸς τὸν γείτονά του: ἂν ἤθελες νὰ μὲ πωλήσῃς 4 πλέθρα τοῦ ὑποστατικοῦ σου ἤθελα ἔχει διπλάσια σοῦ. Ἂν μὲ δώσῃς ὅμως, εἶπε ὁ γείτων πρὸς αὐτόν, 16 πλέθρα, θέλω ἔχει τριπλάσια σοῦ. Πόσα εἶχεν ἕκαστος αὐτῶν;

Ἀπ. Ὁ χωρικὸς 28 καὶ ὁ γείτων του 20 πλέθρα.

6) Κάποιος ἔχει δύω βαλάντια. Ἂν βάλῃ 8 τάλ. εἰς τὸ πρῶτον, θέλει ἔχει αὐτὸ τὸ ἥμισυ τῆς ἀξίας τοῦ ἄλλου. Ἂν τὰ βάλῃ ὅμως εἰς τὸ δεύτερον, τότε ἡ ἀξία αὐτοῦ θέλει γίνει τριπλασία τοῦ πρώτου. Πόση εἶναι ἡ ἀξία ἑκάστου;

Ἀπ. Τοῦ πρώτου 24, τοῦ δευτέρου 64 τάλληρα.

7) Κρατῶν τις καὶ εἰς τὰς δύω χεῖρας ὀβολούς, ἔλεγεν: ἂν μεταθέσω ἀπὸ τὴν ἀριστεράν μου χεῖρα εἰς τὴν δεξιὰν ἕνα ὀβολόν, θέλω ἔχει ἴσους καὶ εἰς τὰς δύω· ἂν ὅμως μεταθέσω ἕνα ὀβολὸν ἀπὸ τὴν δεξιὰν εἰς τὴν ἀριστεράν, οἱ εἰς τὴν ἀριστερὰν ὀβολοὶ θέλουν εἶναι διπλάσιοι τῶν εἰς τὴν δεξιάν. Πόσους ὀβολοὺς εἶχεν εἰς τὰς χεῖράς του;

Ἀπ. Εἰς τὴν μίαν 5 καὶ εἰς τὴν ἄλλην 7.

8) Ὁ Α καὶ Β ἔχουν μαζὴ 570 ταλλήρων ὑπάρχοντα. Ἂν τὸ κεφάλαιον τοῦ Α ἦτον τριπλοῦν καὶ τὸ κεφάλαιον τοῦ Β πενταπλοῦν τοῦ πραγματικοῦ, ἤθελαν ἀποτελεῖ αἱ δύω ποσότητες 2350 τάλ. Πόσα ἔχει ἕκαστος;

Ἀπ. Ὁ Α 250 καὶ ὁ Β 320 τάλ.

9) Εἶναι δύω ἀριθμοὶ ὁ πρῶτος πλέον τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ δευτέρου $= 20$ καὶ ὁ δεύτερος πλέον τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ πρώτου $= 20$. Ποῖοι εἶναι;

Ἀπ. 12 καὶ 16.

10) Ποῖοι εἶναι οἱ δύω ἀριθμοὶ, τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον εἶναι 20 καὶ τὸ κεφάλαιον τοῦ $\frac{1}{3}$ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ $\frac{1}{4}$ τοῦ ἄλλου $= 6$;

Ἀπ. 8 καὶ 12.

11) Ζητοῦνται δύω τοιοῦτοι ἀριθμοὶ, ὥστε: ἄν εἰς τὸ τριτημόριον τοῦ μεγαλητέρου προστεθῇ τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ μικροτέρου νὰ προκύπτῃ ὁ ἀριθμός 8· καὶ ἂν ἀπὸ τὸ πέμπτον τοῦ μεγαλητέρου ἀφαιρεθῇ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ μικροτέρου νὰ προκύπτῃ 1. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. 15 καὶ 6.

12) Ζητοῦνται δύω ἀριθμοὶ τῆς ἑξῆς ἰδιότητος: ἂν προστεθῇ εἰς τὸν πρῶτον τὸ τρίτον μέρος τοῦ δευτέρου, ἢ εἰς τὸν δεύτερον τὸ τριτημόριον τοῦ πρώτου, νὰ προκύπτῃ καὶ εἰς τὰς δύω περιπτώσεις ὁ ἀριθμὸς 100. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. $72\frac{8}{11}$ καὶ $81\frac{9}{11}$.

13) Ζητοῦνται δύω τοιοῦτοι ἀριθμοὶ, ὥστε ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ πρῶτος ἐπὶ 2, ὁ δεύτερος ἐπὶ 5 καὶ προστεθοῦν τὰ γινόμενά των, τὸ κεφάλαιόν των νὰ ἦναι $= 31$. ἂν ὅμως πολλαπλασιασθῇ ὁ πρῶτος ἐπὶ 7 καὶ ὁ δεύτερος ἐπὶ 4 καὶ προστεθῶσι τὰ γινόμενά των, τὸ κεφάλαιον νὰ ἦναι $= 68$. Ποῖοι εἶναι αὐτοὶ οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. Ὁ πρῶτος 8, ὁ δεύτερος 3.

14) Ζητοῦνται δύω ἀριθμοί: ἂν προστεθῇ εἰς τὸν πρῶτον α καὶ ἀπὸ τὸν δεύτερον ἀφαιρεθῇ β τὰ δύω παραγόμενα γίνονται ἴσα· ἐπίσης καὶ τὰ γινόμενα, ὅταν ὁ πρῶτος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ γ καὶ ὁ δεύτερος ἐπὶ δ. Ποῖοι εἶναι αὐτοί;

Ἀπ. $\frac{(\alpha+\beta)\,\delta}{\gamma \quad \delta}$, $\frac{(\alpha+\beta)\,\gamma}{\gamma-\delta}$.

15) Ἂν ὁ πρῶτος δύω ἀριθμῶν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ α καὶ ὁ

δεύτερος ἐπὶ β, τὸ κεφάλαιον τῶν γινομένων των θέλει εἶναι $= \kappa$· ἂν ὅμως πολλαπλασιασθῇ ὁ πρῶτος ἐπὶ α' καὶ ὁ δεύτερος ἐπὶ β', τὸ κεφάλαιον τῶν γινομένων θέλει εἶναι $= \kappa'$. Πῶς ἠμποροῦν νὰ ἐκφρασθῶσιν αὐτοὶ οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. Διὰ $\frac{\beta'\kappa - \beta\kappa'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$, $\frac{\alpha\kappa' - \alpha'\kappa}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$.

16) Ζητοῦνται δύω ἀριθμοί: ἂν αὐξηνθῇ ὁ πρῶτος κατὰ 11 γίνεται διπλάσιος τοῦ δευτέρου· ἂν ὅμως αὐξηθῇ ὁ δεύτερος κατὰ 8, γίνεται διπλάσιος τοῦ πρώτου. Ποῖοι εἶναι οἱ δύω αὐτοὶ ἀριθμοί;

Ἀπ. 9 καὶ 10.

17) Δύω ἀριθμοὶ εἶναι διὰ τῶν ἑξῆς ἐκφρασμένοι: ἂν προστεθῇ εἰς τὸν πρῶτον 4, γίνεται $3\frac{1}{2}$ φορὰς μεγαλήτερος ἀπὸ τὸν δεύτερον· ἂν ὅμως προστεθῇ εἰς τὸν δεύτερον 8, τότε μόλις γίνεται αὐτὸς τὸ ἥμισυ τοῦ πρώτου. Ποῖοι εἶναι αὐτοὶ οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. 48 καὶ 16.

18) Ζητεῖται νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 99 εἰς δύω τοιαῦτα μέρη, ὥστε τὸ πρῶτον νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ 7 καὶ τὸ δεύτερον διὰ 6, χωρὶς νὰ μένῃ κἀνὲν ὑπόλοιπον. Ποῖα εἶναι τὰ μέρη;

Ἀπ. 63 καὶ 36.

19) Εἶναι δύω ἀριθμοί: ἂν αὐξηθῇ ὁ πρῶτος κατὰ α, γίνεται μ=πλάσιος τοῦ δευτέρου· καὶ ἂν αὐξηθῇ ὁ δεύτερος κατὰ β γίνεται ν=πλάσιος τοῦ πρώτου. Πῶς ἐκφράζονται αὐτοὶ οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. Ὁ πρῶτος διὰ $\frac{\alpha+\mu\beta}{\mu\nu-1}$ καὶ ὁ δεύτερος διὰ $\frac{\beta+\nu\alpha}{\mu\nu-1}$

20) Πόσης ἡλικίας εἴμεθα, ἠρώτησεν ὁ υἱὸς τὸν πατέρα του. Πρὸ 6 ἐτῶν, ἀπεκρίθη αὐτός, ἡ ἡλικία μου ὑπερέβαινε κατὰ τὸ

τρίτον τὸ τριπλάσιον τῆς ἡλικίας σου· μετὰ τρία ἔτη ὅμως θέλω γίνει τόσον γέρων, ὥστε ἂν πολλαπλασιασθῇ τότε ἡ ἡλικία μου μὲ $2\frac{1}{3}$ θέλει γίνει ἴση μὲ τὴν ἰδικήν σου; Πόσης ἡλικίας εἶναι;

Ἀπ. Ὁ πατὴρ 36 ἐτῶν καὶ ὁ υἱός 15.

21) Πατὴρ διένειμεν εἰς τοὺς υἱούς του μῆλα, τὰ ὁποῖα εἶχεν εἰς ἀγγεῖον. Κατ' ἀρχὰς ἔδωκεν εἰς ἕκαστον ἀνὰ 10 καὶ ἐπειδὴ ἔμεινεν ἀκόμη $\frac{1}{7}$ τῶν ὅλων ἤθελε νὰ δώσῃ ἀκόμη εἰς ἕκαστον ἀνὰ δύω· πλὴν διὰ τῆς διανομῆς ταύτης ἐτελείωσαν τὰ μῆλα;

Ἀπ. 6 καὶ 70.

22) Ὁ Α καὶ Β ἔχουν μαζῆ 9800 τάλ. ὁ Α. ἐξώδευσε τὸ ἑκτημόριον καὶ ὁ Β τὸ πεμπτημόριον τοῦ κεφαλαίου του καὶ ἔμειναν ἀμφότεροι μὲ ἴσα. Πόσα εἶχεν ἕκαστος;

Ἀπ. ὁ Α 4800 τάλ. καὶ ὁ Β 5000.

23) Ὁ Α ἔχει 1200 τάλ. χρέος καὶ ὁ Β 2550· οὐδεὶς ὅμως αὐτῶν δὲν εἶναι εἰς στάσιν νὰ πληρώσῃ τὸ χρέος του. Δάνεισέ με λέγει ὁ Α πρὸς τὸν Β τὸ ὄγδοον μέρος τοῦ κεφαλαίου σου καὶ τότε θέλω δυνηθῇ νὰ πληρώσω τὸ χρέος μου. Ὁ Β ἀπεκρίθη, δός μοι σὺ τὸ ἕκτον μέρος τοῦ κεφαλαίου σου καὶ τότε ἠμπορῶ καὶ ἐγὼ νὰ πληρώσω τὸ χρέος μου. Πόσον εἶναι τὸ κεφάλαιον ἑκάστου;

Ἀπ. Τοῦ Β 900 τάλ. καὶ τοῦ Β 2400.

24) Τραπεζίτης ἐδανείσθη μὲ μετρίους τόκους 8000 τάλ. καθότι ἔλαβεν εὐκαιρίαν νὰ δανείσῃ 23000 τάλ. μὲ μεγαλητέρους τόκους καὶ ἐκέρδισεν ἐκ τούτου 905 τάλ., εἰς ἐτησίους τόκους. Ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας ἔλαβε πρότερον 9400 τάλληρα καὶ ἐδάνεισεν 17500 καὶ ἐκ τούτου ἐκέρδισεν $539\frac{1}{2}$ τάλ. εἰς

ἐτησίους τόκους. Μὲ ποίους τόκους ἐδανείσθη καὶ μὲ ποίους ἐδάνεισε τὰ χρήματα;

Ἀπ. $4\frac{1}{2}$ καὶ $5\frac{1}{2}$ τὰ ἑκατόν.

25) Σιδηρουργὸς ἔχει δύω τμήματα σιδήρου καὶ ζητεῖ τὸ βάρος των· ηὗρε, ὅτι $\frac{2}{5}$ τοῦ πρώτου βαρύνουν 96 λίτρας ὀλιγώτερον ἀπὸ $\frac{3}{4}$ τοῦ δευτέρου καὶ ὅτι $\frac{5}{8}$ τοῦ δευτέρου τμήματος βαρύνουν ὅσον καὶ $\frac{4}{9}$ τοῦ πρώτου. Πόσον βαρύνει ἕκαστον;

Ἀπ. Τὸ πρῶτον 720, τὸ δεύτερον 512 λίτρας.

26) Πατὴρ μὲ τὸν υἱόν του πίνουν ἀγγεῖον οἴνου εἰς 14 ἡμέρας. Ὁ πατὴρ μόνος του ἠμπορεῖ νὰ τὸ πίῃ εἰς 22 ἡμέρας. Εἰς πόσας ἠμπορεῖ ὁ υἱὸς μόνος νὰ τὸ πίῃ;

Ἀπ. Εἰς $38\frac{1}{2}$ ἡμέρας.

27) Δεξαμενὴ 210 μέτρων ἠμπορεῖ νὰ γεμισθῇ διὰ δύω σωλήνων. Διὰ πρώτης δοκιμῆς εὑρέθη, ὅτι ὁ πρῶτος εἰς 4 ὥρας καὶ ὁ δεύτερος εἰς 5 χύνουν 90 μέτρα ὕδατος. Εἰς δευτέραν δοκιμὴν, ὅπου ὁ πρῶτος σωλὴν ἦτον 7 ὥρας καὶ ὁ δεύτερος $3\frac{1}{2}$ ὥρας ἀνοικτὸς, ἐχύθησαν 126 μέτρα. Πόσα χύνει εἰς μίαν ὥραν ἕκαστος σωλήν; Καὶ εἰς πόσον καιρὸν θέλει γεμίσει ἡ δεξαμενὴ, ἂν καὶ οἱ δύω σωλῆνες τρέχουν ἐνταυτῷ;

Ἀπ. Ὁ πρῶτος σωλὴν χύνει 15 καὶ ὁ δεύτερος 6 μέτρα· διὰ νὰ γεμίσῃ ἡ δεξαμενὴ χρειάζονται 10 ὧραι.

28) Βιενναῖζος ἔχει 500 νομίσματα, 17=άρια καὶ 7=ρια· ἡ τιμὴ ὅλων μαζῆ εἶναι 12 φιορίνια καὶ 40 κραϊτσάρια. Πόσα ἔχει ἀπὸ ἕκαστον εἶδος;

Ἀπ. 326 17=ρια καὶ 174=ρια.

29) Ἔμπορος ἔχει δύω εἰδῶν πραγματείας· 8 λίτραι τοῦ πρώτου εἴδους καὶ 19 τοῦ δευτέρου ἔχουν 18 τάλ. καὶ 5 γρ. Πρὸς τούτοις 20 λίτραι τοῦ πρώτου καὶ 16 τοῦ δευτέρου ἔχουν

25 τάλ. καὶ 20 γρ. Πόση εἶναι ἡ τιμὴ τῆς λίτρας ἑκάστου εἴδους;

Ἀπ. 19 γρ. καὶ 15.

30) Κάπηλος ἠγόρασε 3 μέτρα οἴνου τῆς Σάμου καὶ Κύπρου διὰ 29 δραχμάς· ἄλλοτε διὰ 15 μέτρα τοῦ πρώτου εἴδους καὶ 2 τοῦ δευτέρου εἶχε πληρώσει 25 δρ. Ζητεῖται ἡ τιμὴ ἑκάστου εἴδους, ἂν ὑποτεθῇ, ὅτι ἡ τιμὴ δὲν εἶχε μεταβληθῆ.

Ἀπ. Τὸ Σάμιον πρὸς 3 καὶ τὸ Κύπρ. πρὸς 5.

31) Πωλοῦνται δύω εἴδη χαρτίου: 6 δέμματα τοῦ πρώτου εἴδους καὶ τοῦ δευτέρου διὰ 304 δραχμάς. Πρὸς τούτοις 10 δέμματα τοῦ πρώτου καὶ 15 τοῦ δευτέρου διὰ 480 γρόσ. Πόση εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ δέμματος ἑκάστου εἴδους;

Ἀπ. 24 καὶ 16.

32) 15 πήχεις τῆς Σιλεζίας καὶ 33 τῆς Λειψίας ἀποτελοῦν $39\frac{1}{2}$ πήχεις τῆς Βραβάντης· προς τούτοις 24 πήχεις τῆς Σιλεζίας καὶ 55 τῆς Λειψίας εἶναι ἴσοι μὲ 65 τῆς Βραβάντης. Εἰς τίνα λόγον εὑρίσκεται κατ' αὐτὰ τὰ διδόμενα, ὁ πήχυς τῆς Σιλεζίας καὶ Λειψίας πρὸς τὸν πήχυν τῆς Βραβάντης. Ἔπειτα ὁποῖον ἔχει ὁ τῆς Σιλεζίας πρὸς τὸν τῆς Λειψίας; Καὶ κατὰ πόσα τὰ ἑκατὸν διαφέρουν οἱ δύω τελευταῖοι;

Ἀπ. Ὁ Σιλεζικὸς πήχυς ἔχει πρὸς τὸν τῆς Βραβάντης ὡς 5 πρὸς 6, ὁ τῆς Λειψίας πρὸς τὸν τῆς Βραβάντης ὡς 9: 11 ὁ Σιλεζικὸς πρὸς τὸν τῆς Λειψίας ὡς 55 : 54· καὶ ὁ Σιλεζικὸς εἶναι κατὰ $1\frac{23}{27}$ τὰ ἑκατὸν μακρύτερος ἀπὸ τὸν πήχυν τῆς Λειψίας.

33) $17\frac{1}{2}$ πόδες τῆς Δανζίκης καὶ 19 τοῦ Βερολίνου κάμνουν $34\frac{3}{4}$ τοῦ Ῥήνου· προστούτοις 5 τῆς Δανζίκης καὶ $9\frac{1}{2}$ τοῦ Βερολίνου κάμνουν $13\frac{33}{35}$ τοῦ Ῥήνου. Ὁποίαν ἀναλογίαν ἔχουν, κατ' αὐτὰ τὰ διδόμενα, ὁ Δανζικὸς καὶ Βερολινικὸς ποῦς πρὸς τὸν Ῥηνικόν; Ὁποίαν ὁ Δανζικὸς πρὸς τὸν Βερολινικόν; Καὶ κατὰ πόσα τὰ ἑκατὸν διαφέρουν οἱ δύω τελευταῖοι;

Ἀπ. Ὁ Δανζικὸς ἔχει πρὸς τὸν Ῥηνικὸν ὡς 32 πρὸς 35, ὁ Βερολινικὸς πρὸς τὸν Ῥηνικὸν ὡς 75 πρὸς 76, ὁ Δανζικὸς πρὸς τὸν Βερολινικὸν ὡς 2432 πρὸς 2625 καὶ ὁ Βερολινικὸς εἶναι κατὰ $7\frac{580}{608}$ τὰ ἑκατὸν ἢ περίπου κατὰ $7\frac{14}{15}$ τὰ ἑκατὸν μακρύτερος ἀπὸ τὸν Δανζικόν.

34) 40 γαλλικὰ μίλια κάμνουν $12\frac{1}{2}$ γερμανικά, ἢ γεωγραφικὰ μίλια περισσότερα ἀπὸ ὅσα κάμνουν 53 ἀγγλικά· 10 γαλλικὰ καὶ $26\frac{1}{2}$ ἀγγλικὰ κάμνουν $11\frac{3}{4}$ γερμανικὰ μίλια. Ποῖον λόγον ἔχει λοιπὸν τὸ γαλλικὸν καὶ ἀγγλικὸν μίλι πρὸς τὸ γερμανικόν; Καὶ ποῖον τὸ γαλλικὸν πρὸς τὸ ἀγγλικόν;

Ἀπ. Τὸ γαλλικὸν μίλι ἔχει πρὸς τὸ γερμανικὸν ὡς 3 πρὸς 5, τὸ ἀγγλικὸν πρὸς τὸ γερμανικὸν ὡς 23 πρὸς 106, καὶ τὸ γαλλικὸν πρὸς τὸ ἀγγλικὸν ὡς 318 πρὸς 115.

35) Κάποιος ἤλλαξε 250 Προυσικὰ μὲ φλωρία Βενετικὰ καὶ ἔλαβε 439 Βενετικὰ καὶ 14 γροσίκια. Μὲ τὴν αὐτὴν τιμὴν ἤλλαξεν ἀκόμη 100 Προυσικὰ καὶ ἔλαβε 481 Βενετικὰ καὶ 16 γρ. Πόση ἦτον ἡ τιμὴ ἑκάστου νομίσματος;

Ἀπ. Τὸ Προυσικὸν εἶχε 5 τάλ. καὶ 10 γρ. καὶ τὸ Βενετικὸν 3 τάλ. καὶ 2 γρ.

36) Ὁδοιπόρος ἔλεγε: «Περιηγήθην εἰς τὴν Γερμανίαν, Γαλλίαν καὶ Ἀγγλίαν καὶ ἐξώδευσα εἰς τοὺς τρεῖς αὐτοὺς τόπους 8325 τάλ. Εἰς τὴν Γερμανίαν 1520 τάλ. εἰς τὴν Γαλλίαν 7540 φράγκα καὶ εἰς τὴν Ἀγγλίαν 820 λίρας.» Ἐρωτηθεὶς τότε ἀπὸ Γερμανὸν περὶ τῆς τιμῆς τῶν ξένων αὐτῶν νομισμάτων, ἀπεκρίθη: 5 λίραι κάμνουν 3 τάλ. περισσότερα ἀπὸ ὅσα κάμνουν 118 φράγκα. Πόση ἦτον ἡ τιμὴ ἑκάστου νομίσματος;

Ἀπ. Ἡ λίρα πρὸς 6 ταλ. καὶ τὸ φράγκον πρὸς 6 γροσίκια.

37) Ἐργάτης ἐδούλευσε 12 ἡμέρας· εἰς τὰς 7 αὐτῶν συνηργάσθη καὶ ἡ σύζυγός του καὶ ἔλαβαν διὰ μισθὸν 74 δρ. ἄλλοτε πάλιν ἐδούλευσαν 8 ἡμέρας καὶ τότε συνηργάσθη ἡ σύζυγός του μόνον 5 ἡμέρας καὶ ἔλαβαν 50 δρ. ὁ μισθὸς ἦτον ὁ αὐτὸς καὶ εἰς τὰς δύω ἐργασίας. Πόσον ἦτον λοιπὸν τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου;

Ἀπ. Τοῦ ἀνδρὸς 5 δρ. καὶ τῆς γυναικὸς 2.

38) Εἰς ἐργοστάσιον ἠργάζοντο ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παῖδες. Τὴν πρώτην ἑβδομάδα 6 παῖδες, 3 γυναῖκες καὶ 8 ἄνδρες· τὴν δευτέραν 8 παῖδες, 5 γυναῖκες καὶ 6 ἄνδρες· τὴν τρίτην ἑβδομάδα 10 παῖδες, 4 γυναῖκες καὶ 9 ἄνδρες. Ὁ ἐπιστάτης ἐπλήρωσε τὴν πρώτην ἑβδομάδα $12 \frac{1}{2}$ τάλ. τὴν δευτέραν $12 \frac{3}{4}$ καὶ τὴν τρίτην $15 \frac{3}{4}$. Τί ἐδίδετο εἰς ἕκαστον αὐτῶν;

Ἀπ. Εἰς τὸν ἄνδρα 1 τάλ. εἰς τὴν γυναῖκα 18 γρ. καὶ εἰς ἕκαστον παῖδα 9 γρ.

39) Ἔχων τις δύω ἀργυρὰ σκεύη διαφόρου ἀξίας, ἔλεγεν: ἂν προσθέσω εἰς τὸ πρῶτον 10 δρ. ἡ τιμή του θέλει γίνει διπλασία τῆς τοῦ δευτέρου· ἂν ὅμως προσθέσω τὰς 10 αὐτὰς δρ. εἰς τὸ δεύτερον θέλουν γίνει τὰ δύο ἰσότιμα· Ποία ἦτον ἡ ἀξία ἑκάστου;

Ἀπ. Τοῦ ἑνὸς 30 δρ. καὶ τοῦ ἄλλου 20.

40) Ἱππεὺς εἶχε δύω σάγματα καὶ δύω ἵππους. ἡ ἀξία τοῦ πρώτου σάγματος ἦτον 50 ταλλήρων καὶ τοῦ δευτέρου μόνον 2. Ὅταν ἔθετε τὸ καλήτερον ἐπὶ τοῦ πρώτου ἵππου καὶ τὸ ἄλλο ἐπὶ τοῦ δευτέρου, ἡ τιμὴ τοῦ δευτέρου ἐγίνετο κατὰ 8 τάλ. μικροτέρα τοῦ πρώτου. Ἂν ὅμως ἔθετε τὸ κακὸν ἐπὶ τοῦ πρώτου ἵππου καὶ τὸ καλήτερον ἐπὶ τοῦ δευτέρου, τότε ἐγίνετο ὁ πρῶτος $3 \frac{3}{4}$ φορὰς πολυτιμώτερος τοῦ ἄλλου. Πόση ἦτον ἡ τιμὴ ἑκάστου ἵππου;

Ἀπ. Τοῦ πρώτου 30 ταλ. καὶ τοῦ δευτέρου 70.

41) Ζητεῖται κλάσμα, εἰς τοῦ ὁποίου τὸν ἀριθμητὴν ἂν προστεθῇ 1 γίνεται $= \frac{1}{3}$, ἂν ὅμως προστεθῇ 1 εἰς τὸν παρωνομαστὴν γίνεται $= \frac{1}{4}$. Ποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον κλάσμα;

Ἀπ. $\frac{4}{15}$.

42) Ζητεῖται κλάσμα ἀπὸ τοῦ ὁποίου τὸν ἀριθμητὴν καὶ παρωνομαστὴν ὅταν ἀφαιρῆται 3 γίνεται $\frac{1}{4}$, ὅταν ὅμως προστίθεται ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ παρωνομαστήν, γίνεται $\frac{5}{11}$. Ποῖον εἶναι τὸ κλάσμα;

Ἀπ. $\frac{7}{19}$.

43) Ὁ Β ἐδάνεισε 12600 τάλ. περισσότερα ἀπὸ τὸν Α καὶ μάλιστα μὲ τόκους πρὸς ἓν τὰ ἑκατὸν μεγαλητέρους ἀπὸ αὐτόν, διὸ καὶ ἔλαβε 730 τάλ. περισσότερα εἰς ἐτησίους τόκους. Ὁ Γ ἔδωκε 3000 τάλ. περισσότερα ἀπὸ τὸν Α καὶ μὲ τόκους κατὰ 2 τὰ ἑκατὸν μεγαλητέρους, διὰ τοῦτο καὶ ἔλαβε 380 τάλ. περισσότερα εἰς ἐτησίους τόκους ἀπὸ τὸν Α. Πόσα εἶχε δανείσει ἕκαστος; Καὶ μὲ ποίους τόκους;

Ἀπ. Ὁ Α ἔδωκε 10000, ὁ Β 22600, ὁ Γ 13600· ὁ Α πρὸς 4 τὰ ἑκατόν, ὁ Β πρὸς 5 καὶ ὁ Γ πρὸς 6.

44) Τρεῖς ἔμποροι ἐσυμφώνησαν νὰ ἐμπορευθῶσι συνεισφέροντες ἕκαστος ῥητὴν ποσότητα χρημάτων. Μετὰ τὸ τέλος τοῦ ἐμπορίου ἐκέρδισαν 15 τὰ ἑκατόν. ἐπειδὴ δὲ ἐμερίσθησαν τὰ κέρδη κατὰ λόγον τῶν καταθέσεων, οἱ δύω πρῶτοι ἔλαβαν 124 τάλ. τὸ κέρδος τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου ἦτον 140 τάλ. καὶ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου 120. Πόσα ἐκέρδισε λοιπὸν ἕκαστος αὐτῶν; Καὶ πόσα ἔδωκεν εἰς τὸ ἐμπόριον;

Ἀπ. Τὸ κέρδος τοῦ πρώτου ἦτον 52 ταλ. τοῦ δευτέρου 72 καὶ τοῦ τρίτου 68. Ἡ κατάθεσις τοῦ πρώτου $346 \frac{2}{3}$ τάλ, τοῦ δευτέρου 480 καὶ τοῦ τρίτου $453 \frac{1}{3}$.

45) Μία συντροφία ἐξώδευσε εἰς ξενοδοχεῖον διὰ τὸ δεῖπνον ποσότητά τινα χρημάτων, ἕκαστος ἴσην. Ἂν εὑρίσκοντο εἰς τὴν συντροφίαν 5 περισσότεροι καὶ ἐξώδευεν ἕκαστος 3 γρ: περισσότερα, ἤθελε κάμει τὸ ὅλον 6 τάλ· καὶ 13 γρ. περιπλέον· ἂν ἦσαν ὅμως 3 ὀλιγώτεροι καὶ ἐξώδευεν ἕκαστος αὐτῶν 2 γρ. ὀλιγώτερα, τότε ἤθελαν εἶσθαι τὰ ἔξοδα 3 τάλ. καὶ 10 γρ. ὀλιγώτερα, ἀπὸ τὰ πραγματικῶς ἐξωδευθέντα. Ἀπὸ πόσους συνέκειτο ἡ συντροφία καὶ πόσα ἐξώδευσεν ἕκαστος αὐτῶν;

Ἀπ. Ἀπὸ 14 ἄτομα καὶ ἕκαστος αὐτῶν ἐξώδευσεν 20 γροσίκια.

46) Σύγγραμμα πρέπει νὰ τυπωθῇ κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον; Εἰς ἑκάστην σελίδα πρέπει νὰ τεθῇ ῥητὸς ἀριθμὸς γραμμῶν καὶ εἰς ἑκάστην γραμμὴν ῥητὸς ἀριθμὸς στοιχείων. Ἂν εὑρίσκοντο εἰς ἑκάστην σελίδα τρεῖς γραμμαὶ περισσότεραι καὶ εἰς ἑκάστην γραμμὴν 4 στοιχεῖα περισσότερα, ἤθελαν περιληφθῇ εἰς αὐτὸ 224 στοιχεῖα περισσότερα ἀπὸ πρότερον· ἂν ὅμως εἰς ἑκάστην σελίδα ἐθέτοντο 2 γραμμαὶ ὀλιγώτεραι καὶ εἰς ἑκάστην γραμμὴν 3 στοιχεῖα ὀλιγώτερα, τότε ἤθελαν ἔλθει εἰς ἑκάστην σελίδα 145 στοιχεῖα ὀλιγώτερα. Πόσαι γραμμαὶ ἔπρεπε νὰ τεθῶσιν εἰς τὴν σελίδα καὶ πόσα στοιχεῖα εἰς ἑκάστην γραμμήν;

Ἀπ. 29 γραμμαὶ καὶ 32 στοιχεῖα.

47) Ζητοῦνται δύω ἀριθμοί: ἂν ὁ πρῶτος αὐξηθῇ κατὰ α καὶ ὁ δεύτερος κατὰ β, τὸ γινόμενον τῶν δύω τούτων κεφαλαίων ὑπερτερεῖ τὸ γινόμενον τῶν δύω ἀριθμῶν κατὰ γ. ἂν ὅμως ὁ πρῶτος κατὰ α' καὶ ὁ δεύτερος κατὰ β', τὸ γινόμενον τῶν δύω τούτων κεφαλαίων ὑπερτερεῖ τὸ γινόμενον αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν κατὰ γ'. Πῶς ἐκφράζονται οἱ δύω αὐτοὶ ἀριθμοί;

Ἀπ. Διὰ $\frac{\alpha'\gamma - \alpha\gamma' + \alpha\alpha'(\beta' - \beta)}{\alpha'\beta - \alpha\beta'}$ καὶ

$$\frac{\beta\gamma' - \beta'\gamma + \beta\beta'(\alpha - \alpha')}{\alpha'\beta - \alpha\beta'}.$$

Περιλαμβάνονται τὰ τρία προλαβόντα προβλήματα εἰς τοῦτο; Καὶ ποῖαι ἀξίαι πρέπει νὰ ἀντικατασταθῶσιν εἰς τὰ στοιχεῖα α, β, γ, α', β', γ' ἂν πρέπῃ δι' αὐτῶν νὰ λυθῶσι τὰ ἄνω προβλήματα;

48) Ἔμπορος ἔλεγε: Δὲν εἶναι πολὺς καιρὸς, ὅπου τὸ κοιλὸν τοῦ σίτου ἐπωλεῖτο πρὸς ἓν τάλ. καὶ ἓν κοιλὸν κριθῆς πρὸς 21 γρ. ὀλιγώτερον ἀπὸ τώρα. τότε ἡ τιμὴ τοῦ σίτου εἶχε πρὸς τὴν τιμὴν τῆς κριθῆς ὡς 10 πρὸς 7· ὁ λόγος οὗτος εἶναι τώρα ὡς 4 πρὸς 3. Ποία εἶναι ἡ τιμὴ ἑκάστου εἴδους;

Ἀπ. Τὸ κοιλὸν τοῦ σίτου ἔχει 3 τάλ. καὶ 12 γρ., τῆς κριθῆς 2 τάλ. καὶ 15 γρ.

49) Οἰνοπώλης ἔχει δύω ἀγγεῖα καὶ εἰς ἕκαστον αὐτῶν ποσότητα οἴνου. Διὰ νὰ ἔχῃ καὶ εἰς τὰ δύω ἴσην ποσότητα χύνει ἀπὸ τὸ πρῶτον τόσον εἰς τὸ δεύτερον, ὅσον εὑρίσκετο εἰς αὐτὸ, ἔπειτα χύνει ἀπὸ τὸ δεύτερον εἰς τὸ πρῶτον πάλιν ὅσον ἦτον εἰς αὐτὸ καὶ ἔπειτα πάλιν ἀπὸ τὸ πρῶτον εἰς τὸ δεύτερον, ὅσον ἦτον εἰς αὐτό. Τότε μόλις εὑρέθησαν εἰς ἕκαστον ἀγγεῖον 16 τέταρτα οἴνου. Πόσα τέταρτα περιεῖχε πᾶν ἕκαστον κατ' ἀρχάς.

Ἀπ. Τὸ πρῶτον 22 τέταρτα καὶ τὸ δεύτερον 10.

50) Ἂν εἰς τὸ προλαβὸν πρόβλημα εὑρίσκοντο εἰς ἕκαστον ἀγγεῖον α τέταρτα εἰς τὸ τέλος τῆς ἐργασίας: πόσα ἔπεται νὰ ἦσαν εἰς αὐτὰ κατ' ἀρχάς;

Ἀπ. Εἰς τὸ πρῶτον $\frac{11}{8}$ α καὶ εἰς τὸ δεύτερον $\frac{5}{8}$ α τέταρτα.

51) Οἰνοπώλης ἔχει δύω εἰδῶν οἶνον. Ἂν μίξῃ 3 τέταρτα τοῦ καλητέρου μὲ 5 τοῦ ἄλλου, ἠμπορεῖ νὰ πωλήσῃ τὸ τέταρτον πρὸς 20 γρ. καὶ 6 φέν· ἂν ὅμως μίξῃ $3\frac{3}{4}$ τοῦ καλητέρου μὲ $7\frac{1}{2}$ τέταρτα τοῦ δευτέρου, τότε ἠμπορεῖ νὰ πωλήσῃ τὸ τέταρτον πρὸς 20 γρ. Πόση εἶναι ἡ τιμὴ ἑκάστου;

Ἀπ. Τοῦ καλοῦ 28 γροσίκια καὶ τοῦ ἄλλου 16.

52) Ἡ τιμὴ μίξεως α τετάρτων τοῦ πρώτου οἴνου καὶ β τετάρτων τοῦ δευτέρου εἴδους εἶναι γ γρ. πρὸς τούτοις ἡ τιμὴ ζ τετάρτων τοῦ πρώτου καὶ η τοῦ δευτέρου εἶναι θ γρ. Ποία εἶναι ἡ τιμὴ ἑκάστου εἴδους;

Ἀπ. Ἡ τιμὴ τοῦ τετάρτου τοῦ πρώτου εἴδους εἶναι $\frac{(\alpha+\beta)\gamma\eta-(\zeta+\eta)\beta\theta}{\alpha\eta-\beta\zeta}$ καὶ τοῦ δευτέρου $\frac{(\alpha+\beta)\gamma\zeta-(\zeta+\eta)\alpha\theta}{\beta\zeta-\alpha\eta}$ γρ.

53) 37 λίτραι κασσιτέρου χάνουν εἰς τὸ νερὸν ἐκ τοῦ βάρους των 5 λίτρας (1) καὶ 23 λίτραι μολύβδου χάνουν 2 λίτρας· Ἓν μίγμα ἐκ κασσιτέρου καὶ μολύβδου (βαρύνον 120 λίτρας) χάνει 14 λίτρας εἰς τὸ νερόν· Πόσος κασσίτερος καὶ πόσος μόλυβδος ἔπεται νὰ περιέχεται εἰς αὐτὸ τὸ μίγμα;

Ἀπ. 74 λίτραι κασσιτέρου καὶ 46 μολύβδου.

54) 21 λίτραι ἀργύρου χάνουν εἰς τὸ νερὸν 2 λίτρας καὶ 9 λίτραι ἰαπωνικοῦ χαλκοῦ χάνουν 1 λίτραν. Ἂν μίγμα ἐξ ἀργύρου καὶ χαλκοῦ, βαρύνον 148 λίτρας, χάνῃ 14 $\frac{2}{7}$ λίτρας εἰς τὸ νερόν: Πόσος ἄργυρος καὶ πόσος χαλκὸς ἐμπεριέχεται εἰς αὐτό;

Ἀπ. 112 λίτραι ἀργύρου καὶ 36 χαλκοῦ.

55) Μίγμα μετάλλου συγκείμενον ἐκ δύω ἄλλων μετάλλων Α καὶ Β, βαρύνει π λίτρας καὶ χάνει α εἰς τὸ νερόν· π λίτραι τοῦ Α χάνουν β λίτρας εἰς τὸ νερόν, καὶ Π τοῦ Β χάνουν γ εἰς τὸ νερόν. Πόσον μέταλλον ἑκάστου εἴδους ἔπεται νὰ περιέχεται εἰς τὸ δοθὲν μίγμα;

Ἀπ. $\frac{(\gamma-\alpha)\pi}{\gamma-\beta}$ λίτρας τοῦ Α καὶ $\frac{(\alpha-\beta)\pi}{\gamma-\beta}$ τοῦ Β.

56) Κατὰ τὴν διήγησιν τοῦ Βιτρουβίου ἐβάρυνε τὸ διάδημα τοῦ Ἱέρωνος βασιλέως τῶν Συρακουσῶν 20 λίτρας καὶ ἔχανεν 1 $\frac{1}{4}$

(1) Ἡ ἐξήγησις τούτου εἶναι εὔκολος καὶ ἀφίνεται εἰς τὸν διδάσκαλον.

λίτρας εἰς τὸ νερόν· ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι αὐτὸ συνέκειτο μόνον ἐκ χρυσοῦ καὶ ἀργύρου καὶ ὅτι 19, 64 λίτρας χρυσοῦ χάνουν 1 λίτραν εἰς τὸ νερὸν καὶ 10, 5 ἀργύρου πάλιν 1 λίτραν. Πόσον χρυσὸν καὶ πόσον ἄργυρον ἔπεται νὰ περιεῖχεν αὐτὸ τὸ διάδημα;

Ἀπ. 14, 77... λίτρας χρυσοῦ καὶ 5,22.... ἀργύρου.

Περιλαμβάνεται τοῦτο τὸ πρόβλημα εἰς τὸ προλαβόν; Καὶ τί πρέπει νὰ ἀντικατασταθῇ ἐδῶ διὰ τὰ στοιχεῖα π, α, β, γ.

57) Ὁ μόλυβδος εἶναι κατὰ 11,324 βαρύτερος ἀπὸ τὸ νερόν· ὁ φελλὸς ὅμως βαρύνει 0,24 μόνον σχετικῶς ὡς πρὸς τὸ νερὸν καὶ ἡ ἐλάτος 0,45. Ζητεῖται νὰ συνδεθῇ τμῆμα μολύβδου μὲ φελλόν, εἰς τοιαύτην ὅμως ἀναλογίαν, ὥστε ἐκ τούτου νὰ παραχθῇ σῶμα 80 λιτρῶν καὶ ἐνταυτῷ νὰ ἦναι τόσον βαρύ, ὅσον καὶ ἓν τμῆμα ἐλάτου τοῦ αὐτοῦ ὄγκου|: ἑπομένως νὰ ἠμπορῇ νὰ πλέῃ: Πόσος μόλυβδος καὶ πόσος φελλὸς πρέπει νὰ συνδεθῇ μαζῆ;

Ἀπ. 38, 14... λίτραι μολυβ. μὲ 41, 85 φελλοῦ·

58) Δύω διαφοροειδεῖς ὗλαι, ἐξ ὧν ἡ μία εἶναι π καὶ ἡ ἄλλη π' βαρεῖα σχετικῶς ὡς πρὸς τὸ νερόν, πρέπει νὰ ἑνωθῶσι μὲ τρόπον, ὥστε τὸ ἐκ τούτων συντεθὲν σῶμα, νὰ ἦναι π'' βαρὺ ὡς πρὸς τὸ νερὸν καὶ νὰ βαρύνῃ ρ λίτρας. Πόσαι λίτραι πρέπει νὰ ληφθῶσιν ἀπὸ ἑκάστην ὕλην;

Ἀπ. $\frac{\rho\pi(\pi'-\pi'')}{\pi''(\pi'-\pi)}$ ἀπὸ τὴν πρώτην καὶ ἀπὸ τὴν δευτέραν $\frac{\rho\pi'(\pi''-\pi)}{\pi''(\pi'-\pi)}$.

59) Ζητοῦνται δύω ἀριθμοί, τῶν ὁποίων ἡ διαφορά, τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ γινόμενον ἔχουν πρὸς ἄλληλα ὡς 2, 3, 5, δηλ: ἡ διαφορὰ πρὸς τὸ κεφάλαιον ὡς 2 πρὸς 3 καὶ τὸ κεφάλαιον πρὸς

τὸ γινόμενον ὡς 3 πρὸς 5. Ποῖοι εἶναι αὐτοὶ οἱ ἀριθμοί;

'Απ. 2 καὶ 10.

60) Ποῖοι εἶναι οἱ δύω ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον εἶναι διπλάσιον καὶ τὸ γινόμενον δωδεκαπλάσιον τῆς διαφορᾶς των;

'Απ. 24 καὶ 8.

61) Ζητοῦνται δύω ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον εἶναι μ=πλάσιον καὶ τὸ γινόμενον ν=πλάσιον τῆς διαφορᾶς των: Ποῖοι εἶναι αὐτοὶ οἱ ἀριθμοί;

'Απ. $\frac{2\nu}{\mu-1}$, $\frac{2\nu}{\mu+1}$

62) Ποῖοι εἶναι οἱ δύω ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον=13 καὶ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων των=39;

'Απ. 5 καὶ 8.

63) Τὸ κεφάλαιον δύω ἀριθμῶν εἶναι=α, ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων των=β. Ποῖοι εἶναι αὐτοί;

'Απ. $\frac{\alpha^2+\beta}{2\alpha}$, $\frac{\alpha^2-\beta}{2\alpha}$

64) Τὸ κεφάλαιον δύω ἀριθμῶν εἶναι=α, τὸ προκύπτον πηλίκον, ὅταν ὁ πρῶτος διαιρεθῇ διὰ τοῦ δευτέρου=β. Ποῖοι εἶναι αὐτοί;

'Απ. $\frac{\alpha}{\beta+1}$, $\frac{\alpha\beta}{\beta+1}$.

65) Υἱὸς ἐρωτηθεὶς περὶ τῆς ἡλικίας του καὶ ἐκείνης τοῦ πατρὸς καὶ πάππου του, ἀπεκρίθη: ἂν ἡ ἰδική μου ἡλικία προστεθῇ εἰς τὴν τοῦ πατρός μου προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 56· ἡ τοῦ πατρὸς καὶ πάππου μου εἶναι=100, ἡ ἰδική μου ὅμως καὶ τοῦ πάππου μου εἶναι=80. Πόση ἦτον ἡ ἡλικία ἑκάστου;

'Απ. Τοῦ υἱοῦ 18 ἐτῶν, τοῦ πατρὸς 38 καὶ τοῦ πάππου του 62.

66) Ζητοῦνται νὰ εὑρεθῶσι δύω ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ἑξῆς διδομένων: ἂν προστεθῇ τὸ κεφάλαιον εἰς τὴν διαφοράν των, προκύπτει τὸ γινόμενον αὐτῶν· ἂν ὅμως ἀπὸ τὴν διαφοράν των ἀφαιρεθῇ ὁ μικρότερος, προκύπτει τὸ πηλίκον αὐτῶν. Ποῖοι εἶναι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί;

'Απ. 8 καὶ 2.

67) Ζητοῦνται δύω ἀριθμοί: ἂν εἰς τὸ κεφάλαιόν των προστεθῇ ἡ διαφορά των, προκύπτει τὸ γινόμενον αὐτῶν· ἂν ὅμως ἀπὸ τὸ κεφάλαιόν των ἀφαιρεθῇ ἡ διαφορά των, προκύπτει τὸ πηλίκον αὐτῶν. Ποῖοι εἶναι;

'Απ. 8 καὶ 2.

68) Ζητεῖται ἀριθμὸς τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος συγκείμενος ἀπὸ 2 ψηφεῖα· αὐτὸς εἶναι ἴσος μὲ τὸ τετραπλάσιον τῶν 2 ψηφείων κατ' ἰδίαν· καὶ ἂν ὁ ἀριθμὸς 18 προστεθῇ εἰς τὸν ζητούμενον, τότε προκύπτει ἄλλος ἀριθμὸς ἴσος μὲ τὰ ψηφεῖα τοῦ ζητουμένου, εἰς ἀνεστραμμένην ὅμως τάξιν. Ποῖος εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός;

'Απ. 24.

69) Τὸ κεφάλαιον τριῶν ἀριθμῶν ἀνὰ δύω λογιζομένων εἶναι α, β, γ. Ποῖοι εἶναι αὐτοί;

'Απ. $\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$, $\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}$, $\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$.

70) Ὁ Α, Β καὶ Γ ἔχουν μαζῆ χρέος 2190 τάλ. καὶ κανεὶς ἐξ αὐτῶν δὲν εἶναι εἰς στάσιν νὰ τὸ πληρώσῃ μόνος του. Ἂν ὅμως ἑνωθῶσιν, ἠμπορεῖ τοῦτο νὰ γίνῃ κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον: ὁ Β προσθέτει $\frac{3}{5}$ τοῦ κεφαλαίου του εἰς τὸ τοῦ Α, ἢ ὁ Γ προσθέτει $\frac{5}{9}$ τοῦ κεφαλαίου του εἰς τὸ τοῦ Β, ἢ ὁ Α τὰ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἰδικοῦ του

κεφαλαίου εἰς τὸ τοῦ Γ. Πόσα ἔχει ἕκαστος αὐτῶν;

Ἀπ. Ὁ Α 1530, ὁ Β 1540 καὶ ὁ Γ 1170 τάλ.

71) Πατὴρ ἀφίνων κληρονομίαν 1000 φλωρίων εἰς τοὺς δύω του υἱοὺς, παρήγγειλε νὰ τὰ μερισθῶσι κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον: Τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς μερίδος τοῦ Α νὰ ὑπερέχῃ τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς μερίδος τοῦ Β κατὰ 10. Πόσα θέλει λάβει λοιπὸν ἕκαστος αὐτῶν;

Ἀπ. Ὁ Α $577\frac{2}{3}$ καὶ ὁ Β $442\frac{1}{3}$.

72) Ὁ Α καὶ Β ἔχουν μαζῆ $\frac{1}{3}$ τοῦ κεφαλαίου τοῦ Γ. Ὁ Β καὶ ὁ Γ ἔχουν ἑξαπλάσια τοῦ Α· ἂν ὁ Β ἦτον κατὰ 680 τάλ. πλουσιώτερος ἀφ' ὅ,τι πραγματικῶς εἶναι, τότε ἤθελεν ἔχει ὅσα ὁ Α καὶ Γ μαζῆ. Πόσα εἶχεν ἕκαστος αὐτῶν;

Ἀπ. ὁ Α εἶχε 200 τάλ. ὁ Β 360 καὶ ὁ Γ 840.

73) Κάποιος παρεπονεῖτο κατὰ τοῦ ἀδελφοῦ του, λέγων: Ἀπὸ τὰ πέντε τάλαντα τῆς πατρικῆς μου κληρονομίας δὲν μὲ ἔδωκεν ὁ ἀδελφός μου παρὰ τὸ $\frac{1}{5}$ τῶν $\frac{7}{11}$ τῶν ὅσων ἐκεῖνος ἔλαβε. Πόσα ἔλαβεν ἕκαστος;

Ἀπ. Ὁ πρῶτος $4\frac{27}{62}$ καὶ ὁ δεύτερος $\frac{35}{62}$.

74) Ἔχω τρία βαλάντια εἰς ἕκαστον τῶν ὁποίων εὑρίσκεται ῥητὴ ποσότης χρημάτων. Ἂν λάβω ἀπὸ τὸ πρῶτον 20 τάλ. καὶ τὰ προσθέσω εἰς τὸ δεύτερον, τότε θέλουν εἶναι εἰς αὐτὸ τετραπλάσια ἀπὸ ὅσα ἔμειναν εἰς τὸ πρῶτον. Ἂν λάβω ἀπὸ τὸ δεύτερον 60 τάλ. καὶ τὰ προσθέσω εἰς τὸ τρίτον, τότε εὑρίσκονται εἰς αὐτὸ $1\frac{1}{4}$ φορὰς περισσότερα ἀπὸ ὅσα ἔμειναν εἰς τὸ δεύτερον. Ἂν ὅμως λάβω ἀπὸ τὸ τρίτον 40 τάλ. καὶ τὰ θέσω εἰς τὸ πρῶτον, τότε μένουν εἰς τὸ τρίτον ἀκόμη $2\frac{7}{11}$ φορὰς περισσότερα ἀφ' ὅσα εὑρίσκονται εἰς τὸ πρῶτον μετὰ τὴν τελευταίαν προσθήκην. Πόσα εἶναι εἰς ἕκαστον βαλάντιον;

Ἀπ. Εἰς τὸ πρῶτον 120 τάλ., εἰς τὸ δεύτερον 38 καὶ εἰς τὸ τρίτον 500.

75) Ὁ Α λέγει πρὸς τὸν Β: Δός μοι δύω μνᾶς καὶ θέλω

ἔχει διπλασίας σου· ὁ Β λέγει: δός μοι σὺ δύω μνᾶς καὶ τότε θέλω ἔχει τριπλασίας σου. Πόσας εἶχεν ἕκαστος;

Ἀπ. Ὁ Α $3\frac{5}{7}$ μνᾶς καὶ ὁ Β $4\frac{6}{7}$.

76) Ὁ Α, Β καὶ Γ παραβάλλουν τὰ ὑπάρχοντά των. Ὁ Α λέγει πρὸς τὸν Β: Δός μοι 700 τάλ. ἀπὸ τὸ κεφάλαιόν σου, καὶ τότε θέλω ἔχει διπλάσια τῶν ὑπολοίπων σου. Ὁ Β λέγει πρὸς τὸν Γ: Δός μοι 140 τάλ. καὶ θέλω ἔχει τριπλάσια τοῦ ὑπολοίπου σου· ὁ Γ λέγει πρὸς τὸν Α: δός μοι 420 τάλ. καὶ τότε θέλω ἔχει πενταπλάσια τῶν ὑπολοίπων σου. Πόσα ἔχει ἕκαστος;

Ἀπ. Ὁ Α 980 τάλ. ὁ Β 1540 καὶ ὁ Γ 2380.

77) Ζητοῦνται τρεῖς ἀριθμοὶ τῶν ἑξῆς ἰδιοτήτων: Ἂν ἀφαιρεθῶσι 4 ἀπὸ τὸν πρῶτον καὶ προστεθῶσιν εἰς τὸν δεύτερον, τὸ ὑπόλοιπον θέλει ἔχει πρὸς τὸ κεφάλαιον ὡς 1 : 2. Ἂν ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τὸν δεύτερον 10 καὶ προστεθῶσιν εἰς τὸν τρίτον, τότε θέλει ἔχει τὸ ὑπόλοιπον πρὸς τὸ κεφάλαιον ὡς 3 : 10. Ἂν ὅμως ἀφαιρεθῶσι 5 ἀπὸ τὸν πρῶτον καὶ προστεθῶσιν εἰς τὸν τρίτον, ὁ λόγος τοῦ ὑπολοίπου πρὸς τὸ κεφάλαιον θέλει εἶναι ὡς 3 : 11. Ποῖοι εἶναι αὐτοὶ οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. 20, 28, 50.

78) Ὁ Α, Β καὶ Γ ἔχουν μαζῆ 1820 ταλ. Ἂν δώσῃ ὁ Β 200 τάλ. ἀπὸ τὸ κεφάλαιόν του εἰς τὸν Α, τότε ἔχει ὁ Α 160 τάλ. περισσότερα ἀπὸ τὸν Β, ἂν ὅμως δώσῃ ὁ Γ 70 εἰς τὸν Β, τότε ἔχουν καὶ οἱ δύω ἴσα. Πόσα ἔχει ἕκαστος;

Ἀπ. Ὁ Α 400, ὁ Β 640 καὶ ὁ Γ 780 τάλ.

79) Τρεῖς ἐξώδευσαν μαζῆ ποσότητά τινα· κἀνεὶς ὅμως ἀπὸ αὐτοὺς δὲν ἦτον εἰς στάσιν νὰ τὴν πληρώσῃ μόνος. Ὁ Α λέγει πρὸς τὸν Β: Δός μοι τὸ τέταρτον μέρος τῶν χρημάτων σου καὶ τότε ἠμπορῶ νὰ τὰ πληρώσω ἐγὼ μόνος. Ὁ Β λέγει πρὸς τὸν Γ: δός μοι τὸ ὄγδοον μέρος τοῦ κεφαλαίου σου καὶ τότε καὶ ἐγὼ

γὼ τὰ πληρόνω μόνος. Τότε λέγει ὁ Γ πρὸς τὸν Α: Καὶ ἐγὼ ἠμπορῶ μόνος νὰ τὰ πληρώσω ἂν μὲ δώσῃς τὸ ἥμισυ τῶν χρημάτων σου, μόλον ὅτι δὲν ἔχω παρὰ 4 τάλ. Πόσα ἐξώδευσαν; Καὶ πόσα εἶχεν ὁ Α καὶ Β;

Ἀπ. ἐξώδευσαν $6\frac{1}{2}$ τάλ. ὁ Α εἶχε 5 τάλ. καὶ ὁ Β 6.

80) Χρυσοχόος ἔχει τρία τμήματα ἀργύρου ἀνίσου βάρους, οἷον: 15, 10 καὶ 9 λοτίων. Ἂν μιχθῇ τὸ 15 καὶ 10 λοτίων μαζῇ, προκύπτει μίγμα ἀργύρου βαρύνον $11\frac{2}{3}$ λότια. Τοῦ αὐτοῦ βάρους μένει ὁ ἄργυρος καὶ ἂν μιχθῇ τὸ 15 μὲ τὸ 9 λοτίων τμῆμα. Τὰ τρία μαζῇ βαρύνουν 34 μάρκα. Πόσα βαρύνει ἕκαστον;

Ἀπ. Τὸ 15=λοτίων βαρύνει 8 μάρκα, τὸ 10=λοτίων 16 καὶ τὸ 9=λοτίων 10.

81) Τραπεζίτης ἐπλήρωσε διὰ 67 τάλ. καὶ 6 γρ. 5 βενετικὰ φλωρία, 7 προυσσικὰ καὶ 2 γαλλικά· ἄλλοτε διὰ 213 τάλ. καὶ 14 γρ. ἔδωκε 4 βενετικὰ 9 προυσσικὰ καὶ 8 γαλλικά. καὶ ἄλλοτε διὰ 96 τάλ. 12 βενετικά, 6 προυσσικὰ καὶ 1 γαλλικόν. Ποία ἦτον ἡ ἀξία ἑκάστου νομίσματος, ἂν εἰς τὰς διαφόρους πληρωμὰς δὲν μετεβάλλετο;

Ἀπ. Τοῦ βενετικοῦ 3 τάλ. καὶ 2 γρ., τοῦ προυσσικοῦ 5 τάλ. καὶ 14 γρ. καὶ τοῦ γαλλικοῦ 6 τάλ. καὶ 9 γρ.

82) Οἰκονόμος ἔχει τρεῖς ἀποθήκας, ἐξ ὧν ἑκάστη ἔχει τρία εἴδη γεννημάτων, οἷον: κριθήν, σῖτον καὶ φακήν. Ἡ πρώτη ἀποθήκη περιέχει ὀκτὼ κοιλὰ κριθῆς; 3 σίτου καὶ 5 φακῆς· ἡ δευτέρα περιέχει 3 κοιλὰ κριθῆς, 10 σίτου καὶ 7 φακῆς· ἡ τρίτη 6 κοιλὰ κριθῆς, 9 σίτου καὶ 13 φακῆς. Ἡ ἀξία τῆς πρώτης ἀποθήκης εἶναι 734 τάλ., τῆς δευτέρας 812 καὶ τῆς τρίτης 1130. Πόση εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ κοιλοῦ ἑκάστου τῶν τριῶν γεννημάτων;

Ἀπ. Τὸ κοιλὸν τῆς κριθῆς ἔχει 56 τάλ., τοῦ σίτου 42 καὶ τῆς φακῆς 32.

83) Ὁ Α, Β καὶ Γ ἠγόρασαν μὲ τὴν αὐτὴν τιμὴν καφέν, ζάχαρην καὶ τσάϊ· ὁ Α ἐπλήρωσεν 11 τάλ. καὶ 15 γρ διὰ $7\frac{1}{2}$ λίτρας καφέ, 3 ζάχαρης καὶ $2\frac{1}{4}$ τσαΐου· ὁ Β ἐπλήρωσε 16 τάλ. καὶ 6 γρ. διὰ 9 λίτρας καφέ, $5\frac{1}{4}$ ζάχαρης καὶ 4 τσαΐου. Ποία εἶναι ἡ τιμὴ τῆς λίτρας ἑκάστου εἴδους;

Ἀπ. Τοῦ καφὲ 18 γρ., τῆς ζάχαρης 12 καὶ τοῦ τσαΐου 2 τάλ.

84) Τρεῖς τειχοποιοὶ Α, Β, Γ ἤθελαν νὰ οἰκοδομήσωσι τεῖχος. Ὁ Α καὶ Β ἤθελαν τελειώσει τὴν οἰκοδομὴν εἰς 12 ἡμέρας· ὁ Β καὶ Γ εἰς 20 ἡμέρας καὶ ὁ Α καὶ Γ εἰς 15 ἡμέρας. Πόσον καιρὸν ἤθελε χρειασθῇ ἕκαστος αὐτῶν μόνος; Καὶ εἰς πόσον καιρὸν ἤθελε τελειώσει τὸ τεῖχος, ἂν ἠργάζοντο καὶ οἱ τρεῖς μαζῇ;

Ἀπ. Ὁ Α εἰς 20 ἡμέρας, ὁ Β εἰς 30 καὶ ὁ Γ εἰς 60· ὅλοι ὅμως μαζῇ εἰς 10 ἡμ.

85) Διά τινα ἐργασίαν προσδιορίζονται τρεῖς ἐργάται· ὁ Α καὶ Β ἠμποροῦν νὰ τελειώσωσι τὸ ἔργον εἰς α ἡμέρας· ὁ Α καὶ Γ εἰς β καὶ ὁ Β καὶ Γ εἰς γ. Πόσον καιρὸν θέλει χρειασθῇ ἕκαστος αὐτῶν ἐργαζόμενος μόνος, ἂν προϋποτεθῇ, ὅτι ὅλοι ἐπίσης ἐργάζονται; Καὶ πόσον καιρὸν χρειάζονται διὰ νὰ τὸ τελειώσωσιν ὅλοι μαζῇ ἐργαζόμενοι;

Ἀπ. Ὁ Α χρειάζεται $\frac{2\alpha\beta\gamma}{\beta\gamma+\alpha\gamma-\alpha\beta}$ ἡμέρας, ὁ Β $\frac{2\alpha\beta\gamma}{\beta\gamma+\alpha\beta-\alpha\gamma}$ καὶ ὁ Γ $\frac{2\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\alpha\gamma-\beta\gamma}$ ὅλοι μαζῇ $\frac{2\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma}$.

86) Δύω βρύσεις τρέχουσαι συγχρόνως γεμίζουν δοχεῖον εἰς 12 λεπτά, τὸ ὁποῖον περιέχει 39 μέτρα ὕδατος. Ἡ πρώτη χύνει

εἰς ἓν λεπτὸν 4 μέτρα ἡ δευτέρα 3. Ζητεῖται πόσον καιρὸν ἔτρεξεν ἑκάστη αὐτῶν ἕως ὅτου τὸ δοχεῖον νὰ γεμίσῃ;

Ἀπ. Ἡ πρώτη 3 λεπτὰ καὶ ἡ δευτέρα 9.

87) Δεξαμενὴ ἠμπορεῖ νὰ γεμισθῇ διὰ τριῶν σωλήνων Α, Β, Γ. Διὰ τῶν σωλήνων Α καὶ Β εἰς 70 λεπτά, διὰ τοῦ Α καὶ Γ εἰς 84 καὶ διὰ τοῦ Β καὶ Γ εἰς 140. Πόσον καιρὸν χρειάζεται ἕκαστος σωλὴν κατ' ἰδίαν; Καὶ εἰς πόσον καιρὸν θέλει γεμίσει ἡ δεξαμενή, ἂν τρέχωσι καὶ οἱ τρεῖς σωλῆνες συγχρόνως;

Ἀπ. Ὁ Α χρειάζεται 105 λεπτά, ὁ Β 210 καὶ ὁ Γ 420, καὶ ὅλοι μαζῆ μίαν ὥραν.

Περιλαμβάνονται εἰς τὸ 85 πρόβλημα τὰ δύω προλαβόντα. Καὶ κατά τι πρέπει νὰ μεταβληθῇ ἡ ἔκφρασις αὐτῶν διὰ νὰ ἐφαρμοσθῶσιν εἰς ἐκεῖνο ἀκριβῶς;

88) Χαλκεὺς ἔχει τρία τμήματα μετάλλου, τῶν ὁποίων ἕκαστον σύγκειται ἀπὸ χρυσόν, ἄργυρον καὶ χαλκόν. Τὸ πρῶτον περιέχει 5 λότια χρυσοῦ, 15 ἀργύρου καὶ 30 χαλκοῦ. Τὸ δεύτερον 20 λότια χρυσοῦ, 28 ἀργύρου καὶ 48 χαλκοῦ· τὸ τρίτον 12 χρυσοῦ, 39 ἀργύρου καὶ 24 χαλκοῦ. Ἐκ τούτων θέλει νὰ λάβῃ μέρος διὰ νὰ κάμῃ τρίτον μίγμα 10 λοτίων χρυσοῦ, 23 ἀργύρου καὶ 26 χαλκοῦ. Πόσον ἔπρεπε νὰ λάβῃ ἀπὸ ἕκαστον τμῆμα;

Ἀπ. Ἀπὸ τὸ πρῶτον 10 λότια, ἀπὸ τὸ δεύτερον 24 καὶ ἀπὸ τὸ τρίτον 25.

89) Χρυσοχόος ἔχει 4 μίγματα συγκείμενα ἐκ χρυσοῦ, ἀργύρου, χαλκοῦ καὶ μολύβδου· τὸ πρῶτον περιέχει εἰς 100 δραχμάς: 90 χρυσοῦ, 5 ἀργύρου, 3 χαλκοῦ καὶ 2 μολύβδου· τὸ δεύτερον ὁμοίως εἰς 100 δραχμάς: 80 χρυσοῦ, 12 ἀργύρου, 4 χαλκοῦ καὶ 34 μολύβδου· τὸ τρίτον 70 χρυσοῦ, 20 ἀργύρου, 5 χαλκοῦ καὶ 5 μολύβδου· τὸ τέταρτον 60 χρυσοῦ, 25 ἀργύρου, 10 χαλκοῦ καὶ 5 μολύβδου. Ζητεῖ νὰ συνθέσῃ ἐκ τούτων πέμπτον

μίγμα, τὸ ὁποῖον νὰ περιέχῃ εἰς 100 δραχμὰς 84 χρυσοῦ, 9,25 ἀργύρου, 3,80 χαλκοῦ καὶ 2,95 μολύβδου. Ζητεῖται πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ ἕκαστον τῶν τεσσάρων μιγμάτων;

Ἀπ. 60 δραχμὰς ἀπὸ τὸ πρῶτον, 25 ἀπὸ τὸ δεύτερον, 10 ἀπὸ τὸ τρίτον καὶ 5 ἀπὸ τὸ τέταρτον.

90) Τρεῖς στρατιῶται Α, Β, Γ ἥρπασαν ἐν καιρῷ μάχης 96 τάλ. καὶ ἤθελαν νὰ τὰ μερισθῶσιν ἐξίσου μεταξύ των, καθότι εἶχαν κινδυνεύσει ἐπίσης. Ἔδωκε λοιπὸν ὁ Α, ὅστις εἶχε λάβει τὰ περισσότερα, τόσα εἰς τὸν Β καὶ Γ, ὅσα ἤδη ἕκαστος αὐτῶν εἶχε. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐμέρισεν ἔπειτα καὶ τὰ ἰδικά του ὁ Β μὲ τὸν Α καὶ Γ καὶ ὁ Γ μὲ τὸν Α καὶ Β. Ἂν ἡ ζητουμένη ἴση διανομὴ ἔγινε κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐντελῶς; Πόσα εἶχεν ἁρπάξει ἕκαστος αὐτῶν;

Ἀπ. Ὁ Α 52, ὁ Β 28 καὶ ὁ Γ 16 τάλ.

91) Εἰς τὰς τρεῖς θήκας τῆς τραπέζης μου εὑρίσκοντο 162 τάλ. ἀνίσως διανεμημένα. Διὰ νὰ ἔχω εἰς ὅλας τὰς θήκας ἴσα, ἔλαβα ἀπὸ τὴν πρώτην θήκην, ὅσα ἦσαν ἀναγκαῖα, καὶ ἔθεσα εἰς τὴν δευτέραν καὶ τρίτην τὸ ἥμισυ τῶν ὅσα εἶχαν ἤδη αὐταί. Ἔπειτα ἔλαβα ἀπὸ τὴν δευτέραν καὶ τρίτην διὰ νὰ θέσω πάλιν εἰς τὰς δύω ἄλλας τὸ ἥμισυ ἐκείνων, ὅσα εἶχαν ἤδη αὐταί. Ἂν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον κατωρθώθη τὸ ζητούμενον, πόσα τάλληρα ἦσαν κατ' ἀρχὰς εἰς ἑκάστην θήκην;

Ἀπ. Εἰς τὴν πρώτην 70 τάλ., εἰς τὴν δευτέραν 52 καὶ εἰς τὴν τρίτην 40.

92) Ὁ Α, Β καὶ Γ παίζουν φαραώ. Εἰς τὸ πρῶτον παιγνίδιον κρατεῖ ὁ Α τὴν τράπεζαν· ὁ Β καὶ Γ θέτουν τὸ τρίτον μέρος τοῦ κεφαλαίου των καὶ κερδίζουν. Εἰς τὸ δεύτερον παιγνίδιον κρατεῖ ὁ Β τὴν τράπεζαν· ὁ Α καὶ Γ θέτουν τὸ τρίτον μέρος τῶν χρημάτων των καὶ κερδίζουν ἐπίσης· Τότε ἔλαβεν ὁ Γ

τὴν τράπεζαν· ὁ Α καὶ Β ἔθεσαν ἐπίσης τὸ τρίτον μέρος τῶν χρημάτων των καὶ ἐκέρδισαν πάλιν. Τότε ἐμέτρησαν ὅλοι τὰ χρήματά των καὶ ηὗραν, ὅτι ἕκαστος αὐτῶν ἔχει 96 φλωρία. Πόσα εἶχεν ἕκαστος πρὸ τῆς ἀρχῆς τοῦ παιγνιδίου;

Ἀπ. Ὁ Α 75 φλωρία, ὁ Β 63 καὶ ὁ Γ 54.

93) Ὁ Α, Β, Γ, Δ καὶ Ε ἔπαιζαν χαρτία, ἐπὶ συμφωνία ὅστις χάσῃ νὰ δίδῃ εἰς τοὺς ἄλλους, ὅσα ἤδη αὐτοὶ ἔχουν. Κατὰ πρῶτον ἔχασεν ὁ Α, ἔπειτα ὁ Β, Γ, Δ καὶ τελευταῖον ὁ Ε. Ὅλοι ἔχασαν κατὰ σειρὰν καὶ μόλον τοῦτο ὅλοι εἶχαν ἴσα εἰς τὸ τέλος τοῦ παιγνιδίου δηλ: ἕκαστος 32 τάλ. Πόσα ἔπεται νὰ εἶχεν ἕκαστος πρὸ τοῦ παιγνιδίου;

Ἀπ. Ὁ Α 81, ὁ Β 41, ὁ Γ 21, ὁ Δ 11 καὶ ὁ Ε 6 τάλ.

94) Εἰς τρία τάγματα ἔπρεπε νὰ διανεμηθῶσι 2652 τάλ. ὡς ἀμοιβὴ μὲ τρόπον ὅμως, ὥστε ὅλοι οἱ στρατιῶται τοῦ ἐξόχως διαπρέψαντος τάγματος νὰ λάβωσιν ἀνὰ ἓν τάλληρον· τὰ δὲ λοιπὰ νὰ διανεμηθῶσιν εἰς τὰ δύω ἄλλα τάγματα. Ἂν δοθῇ αὐτὸ τὸ τάλληρον εἰς τὸ πρῶτον τάγμα, πᾶς ἕκαστος στρατιώτης τῶν δύω ἄλλων ταγμάτων θέλει λάβει $\frac{1}{2}$ τάλ. Ἂν δοθῇ εἰς τὸ δεύτερον, πᾶς ἕκαστος τῶν ἄλλων θέλει λάβει $\frac{1}{3}$ τάλ. ἂν δοθῇ ὅμως τὸ τάλληρον εἰς τὸ τρίτον τάγμα, τότε θέλει λάβει ἕκαστος τῶν λοιπῶν μόνον $\frac{1}{4}$ τάλ. Πόση εἶναι ἡ δύναμις ἑκάστου τάγματος;

Ἀπ. Τοῦ πρώτου 780 τοῦ δευτέρου 1716 καὶ τοῦ τρίτου 2028.

95) Ζητοῦνται τρεῖς ἀριθμοὶ τῶν ἑξῆς ἰδιοτήτων: Ἂν ὁ πρῶτος προστεθῇ εἰς τὸ $\mu =$ πλάσιον τῶν λοιπῶν, τὸ κεφάλαιον θέλει εἶναι $= \alpha$. ἂν ὁ δεύτερος προστεθῇ εἰς τὸ $\mu' =$ πλάσιον τῶν λοιπῶν, τὸ κεφάλαιον θέλει εἶναι $= \alpha'$· ἂν ὅμως προστεθῇ ὁ τρίτος εἰς τὸ $\mu'' =$ πλάσιον τῶν ἄλλων θέλει γίνει τὸ κεφάλαιον $= \alpha''$. Ποῖοι εἶναι αὐτοὶ οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. $\frac{\mu}{\mu-1} + \frac{\mu'}{\mu'-1} + \frac{\mu''}{\mu''-1} = \Lambda$, $\frac{\alpha}{\mu-1} + \frac{\alpha'}{\mu'-1} + \frac{\alpha''}{\mu''-1} = \mathrm{B}$ τεθέντων τότε εἶναι οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ $\frac{1}{\mu-1}\left(\frac{\mu \mathrm{B}}{\Lambda-1} - \alpha\right)$, $\frac{1}{\mu'-1}\left(\frac{\mu' \mathrm{B}}{\Lambda-1} - \alpha'\right)$, $\frac{1}{\mu''-1}\left(\frac{\mu'' \mathrm{B}}{\Lambda-1} - \alpha''\right)$, καὶ τὸ κεφάλαιον αὐτῶν $= \frac{\mathrm{B}}{\Lambda-1}$.

96) Ἂν, διὰ νὰ γίνῃ τὸ πρόβλημα γενικώτερον, τεθῇ ἀντὶ τοῦ 3, ἄλλη ποσότης ἀριθμῶν: διὰ τίνος τύπου θέλουν προσδιορισθῇ οὗτοι οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. Ἔστω $\frac{\mu}{\mu-1} + \frac{\mu'}{\mu'-1} + \frac{\mu''}{\mu''-1} + \frac{\mu'''}{\mu'''-1} +$ κτλ· $= \Lambda$, $\frac{\alpha}{\mu-1} + \frac{\alpha'}{\mu'-1} + \frac{\alpha''}{\mu''-1} + \frac{\alpha'''}{\mu'''-1} +$ κτλ. $= \mathrm{B}$, τότε οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ ἐκφράζονται διὰ τῶν ἑξῆς τύπων $\frac{1}{\mu-1}\left(\frac{\mu \mathrm{B}}{\Lambda-1} - \alpha\right)$, $\frac{1}{\mu'-1}\left(\frac{\mu' \mathrm{B}}{\Lambda-1} - \alpha'\right)$, $\frac{1}{\mu''-1}\left(\frac{\mu'' \mathrm{B}}{\Lambda-1} - \alpha''\right)$, $\frac{1}{\mu'''-1}\left(\frac{\mu''' \mathrm{B}}{\Lambda-1} - \alpha'''\right)$, κτλ. καὶ τὸ κεφάλαιον ὅλων αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν $= \frac{\mathrm{B}}{\Lambda-1}$.

97) Ζητοῦνται τρεῖς ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον $=$ 83. Ἂν ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τὸν πρῶτον καὶ δεύτερον 7, θέλουν ἔχει τὰ ὑπόλοιπα πρὸς ἄλληλα ὡς 5 πρὸς 3· ἂν ὅμως ἀφαιρεθῶσι 3 ἀπὸ τὸν δεύτερον καὶ τρίτον, τότε θέλουν ἔχει τὰ ὑπόλοιπα ὡς 11 πρὸς 9. Ποῖοι εἶναι αὐτοὶ οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. 37, 25 καὶ 21.

98) Ζητοῦνται τρεῖς ἀριθμοὶ τῶν ἑξῆς ἰδιοτήτων: τὸ κεφάλαιον τῶν τριῶν εἶναι $=$ 25 καὶ τὰ κεφάλαια τῶν γινομένων τῶν τριῶν ἀριθμῶν, ἂν ὁ πρῶτος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 5, ὁ δεύτερος ἐπὶ 6 καὶ ὁ τρίτος ἐπὶ 9 εἶναι $=$ 180· ἂν ὅμως ὁ

πρῶτος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 3, ὁ δεύτερος ἐπὶ 4 καὶ ὁ τρίτος ἐπὶ 2 καὶ τὰ γινόμενά των προστεθῶσι, τὸ κεφάλαιον αὐτὸ θέλει εἶναι = 70. Ποῖοι εἶναι αὐτοὶ οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. 6, 7 καὶ 12.

99) Ζητοῦνται τρεῖς ἀριθμοὶ ἀπὸ τὰ ἑξῆς διδόμενα: Ἂν προστεθῇ εἰς τὸν πρῶτον καὶ δεύτερον 6, τότε ἔχουν τὰ κεφάλαια πρὸς ἄλληλα ὡς 2 πρὸς 3· ἂν ὅμως προστεθῇ εἰς τὸν πρῶτον καὶ τρίτον ὁ ἀριθμὸς 5, τότε ἔχουν ὡς 7 πρὸς 11· καὶ ἂν ἀφαιρεθῶσι 36 ἀπὸ τὸν δεύτερον καὶ τρίτον, τότε ἔχουν τὰ ὑπόλοιπα πρὸς ἄλληλα ὡς 6 πρὸς 7. Ποῖοι εἶναι αὐτοὶ οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. 30, 48 καὶ 50.

100) Ζητοῦνται δύω ἀριθμοί, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ ἔχει πρὸς τὸ κεφάλαιον ὡς α πρὸς β καὶ τὸ κεφάλαιον πρὸς τὸ γινόμενον ὡς γ πρὸς δ. Ποῖοι εἶναι αὐτοὶ οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. $\frac{2\beta\delta}{\gamma(\beta-\alpha)}, \frac{2\beta\delta}{\gamma(\beta+\alpha)}$.

101) Ἀριθμὸς γράφεται μὲ τρία ψηφεῖα, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν. Ἂν αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς διαιρεθῇ διὰ τοῦ κεφαλαίου τῶν ψηφείων αὐτῶν καθ' ἑαυτῶν (: δηλ. χωρὶς νὰ θεωρηθῇ ἡ ἀξία, τὴν ὁποίαν αὐτὰ ἔχουν διὰ τὴν τάξιν των:) τὸ πηλίκον θέλει εἶναι 48. Ἂν ἀφαιρεθῇ ὅμως ἀπὸ αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν 198, προκύπτει ἄλλος ἀριθμός, ὅστις περιέχει τὰ αὐτὰ ψηφεῖα μὲ ἐκεῖνα τοῦ ζητουμένου, ὅμως εἰς ἀντίθετον τάξιν. Ποῖος εἶναι αὐτὸς ὁ ἀριθμός;

Ἀπ. 432.

102) Ὁ ἀριθμὸς τοῦ χρόνου, καθὸν ἐγράφη τὸ πρῶτον γερμανικὸν βιβλίον, σύγκειται ἀπὸ τρεῖς χαρακτῆρας, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὰς ἑξῆς ἰδιότητας. Ἂν ληφθῇ ὁ πρῶτος ἀριστερὰ 80 = πλάσιος, (χωρὶς νὰ θεωρηθῇ ἡ ἀξία κατὰ τὴν τάξιν των) ὁ δεύ-

τερος 32 = πλάσιος καὶ ὁ τρίτος τετραπλάσιος προκύπτει ἄλλος ἀριθμός, ὅστις εἶναι κατὰ 1 μικρότερος ἀπὸ τὸ ἔτος αὐτό· πρὸς τούτοις τὸ τέταρτον μέρος τοῦ πρώτου χαρακτῆρος προστιθέμενον εἰς τὸ ἔννατον μέρος τοῦ τρίτου δίδει τὸ ἥμισυ τοῦ δευτέρου. Καὶ ἂν σμικρυνθῇ ὁ τρίτος κατὰ τὸ ἥμισυ τοῦ δευτέρου, προκύπτουν $\frac{3}{4}$ τοῦ πρώτου. Πότε ἐγράφη λοιπὸν τὸ πρῶτον γερμανικὸν βιβλίον;

Ἀπ. Εἰς τὸ ἔτος 869.

103) Ὁδοιπόρος ἐξώδευσεν ὅλα του τὰ χρήματα εἰς ὁδοιπορίαν. Εἰς τὴν πρώτην πόλιν εἶχεν ἐξοδεύσει α καὶ πρὸς τούτοις τὸ $\beta^{ον}$ μέρος τοῦ ὑπολοίπου· εἰς τὴν δευτέραν ἐξώδευσε 2α καὶ πάλιν τὸ $\beta^{ον}$ μέρος τοῦ ὑπολοίπου. κ. ο. κ. ἕως ὅτου κατηνάλωσεν ὅλα του τὰ χρήματα. Ζητεῖται λοιπόν, πόσα ἦταν τὰ χρήματα; καὶ εἰς πόσας πόλεις μετέβη, ἂν ὑποτεθῇ ὅτι εἰς ἑκάστην αὐτῶν ἐξώδευσεν ἴσα;

Ἀπ. $\alpha(\beta-1)^2$, $\beta-1$.

104) Λέξις συνίσταται ἀπὸ τρία γράμματα· ἂν γραφῇ τὸ ἀλφάβητον κατὰ τὴν συνήθη του τάξιν καὶ κάτωθεν τῶν γραμμάτων οἱ πρῶτοι 24 φυσικοὶ ἀριθμοὶ κατὰ τὴν συνήθη των τάξιν, ἕκαστος αὐτῶν θέλει ἀντιστοιχεῖ εἰς ἓν γράμμα, ὡς: τὸ 1 εἰς τὸ α, τὸ 2 εἰς τὸ β, κ. ο. κ. Κατ' αὐτὸ καὶ κατὰ τὰ ἑξῆς διδόμενα ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ λέξις: Τὸ κεφάλαιον τοῦ δευτέρου (ἢ ἐκείνου, ὅστις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ δεύτερον γράμμα τῆς λέξεως) καὶ τοῦ τρίτου ἀριθμοῦ εἶναι κατὰ 3 μικρότερον ἀπὸ τὸν πρῶτον ἀριθμόν· τὸ τριτημόριον τοῦ τρίτου εἶναι = μὲ τὸ τριπλάσιον τοῦ δευτέρου καὶ τὸ κεφάλαιον τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τρίτου = 22. Ποία εἶναι ἡ ζητουμένη λέξις;

Ἀπ. Ναί.

ΣΗ. Προβλήματα τῶν ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ μὲ μίαν ἢ μὲ πολλὰς ἀγνώστους.

1) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὸ ἥμισυ ἐπὶ τοῦ τρίτου αὐτοῦ πολλαπλασιασμένον δίδει 24;

'Απ. 12.

2) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὸ ἥμισυ ἐπὶ τοῦ τρίτου αὐτοῦ πολλαπλασιασμένον δίδει τὸν ἀριθμὸν 864;

'Απ. 72.

3) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὸ ἕβδομον ἐπὶ τοῦ ὀγδόου πολλαπλασιασμένον καὶ διὰ 3 διῃρημένον δίδει ὡς πηλίκον τὸν ἀριθμὸν $298\frac{2}{3}$.

'Απ. 224.

4) Ζητεῖται ἀριθμὸς, εἰς τὸν ὁποῖον ἂν προστεθῇ 5 καὶ τὸ κεφάλαιον τοῦτο πολλαπλασιασθῇ μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κατὰ 5 ἐλαττωθέντα, παράγει τὸν ἀριθμὸν 96. Ποῖος εἶναι αὐτός;

'Απ. 11.

5) Ἂν ὁ ἀριθμὸς 6 ἀφαιρεθῇ καὶ προστεθῇ εἰς ἄλλον ἀριθμὸν καὶ τὸ ὑπόλοιπον πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τοῦ κεφαλαίου, τὸ γινόμενον θέλει εἶναι $= 189$. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος;

'Απ. 15.

6) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὸ ἥμισυ ἂν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τοῦ τετάρτου του καὶ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τὸ γινόμενον 10, προκύπτει ἡ διαφορὰ 152.

'Απ. 36.

7) Ζητεῖται ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὸ 7=πλάσιον προστιθέμενον εἰς τὸ τετράγωνον αὐτοῦ, ἀποτελεῖ τὸ κεφάλαιον 44.

'Απ. 4.

8) Ζητεῖται ἀριθμὸς, ἀπὸ τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ἂν ἀφαιρεθῇ τὸ 7=πλάσιον προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 44.

'Απ. 11.

9) Ζητεῖται ἀριθμὸς, εἰς τὸν ὁποῖον ἂν προστεθῇ 94 καὶ ἔπειτα ἀφαιρεθῇ ὁ αὐτὸς ἀπὸ 94, τὸ γινόμενον τοῦ ὑπολοίπου ἐπὶ τοῦ κεφαλαίου προκύπτει 8512. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς;

'Απ. 18.

10) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον προστιθέμενον εἰς τὸν ἀριθμὸν 15, δίδει τὸ 8=πλάσιον τοῦ ζητουμένου;

'Απ. 3.

11) Ποῖοι εἶναι οἱ δύω ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων τὸ πηλίκον 8 καὶ τὸ γινόμενον $= 8192$;

'Απ. 32 καὶ 256.

12) Ποῖοι εἶναι οἱ δύω ἀριθμοὶ, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον $= 750$ καὶ τὸ πηλίκον $= 3\frac{1}{3}$;

'Απ. 50 καὶ 15.

13) Τὸ γινόμενον δύω ἀριθμῶν $= \alpha$ καὶ τὸ πηλίκον αὐτῶν $= \beta$. Πῶς ἐκφράζονται;

'Απ. Διὰ $\sqrt{\alpha\beta}$ καὶ $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$.

14) Ποῖος εἶναι ὁ μέσος γεωμετρικὸς ἀνάλογος μεταξὺ τοῦ 8 καὶ 72;

'Απ. 24.

15) Ζητοῦνται δύω κλάσματα, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον $= \frac{5}{6}$ καὶ τὸ πηλίκον $= \frac{8}{15}$.

'Απ. $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{5}{4}$.

16) Ζητοῦνται δύω ἀριθμοὶ, τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τῆς διαφορᾶς $= 627$· καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων των $= 1685$;

'Απ. 34 καὶ 23.

17) Ποῖοι εἶναι οἱ δύω ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα

προστιθέμενα εἶναι $= 13001$, ἀφαιρούμενα ὅμως εἶναι $= 1449$;
Ἀπ. 85 καὶ 76.

18) Τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων δύω ἀριθμῶν εἶναι $= \alpha$, ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων των $= \beta$. Πῶς ἠμποροῦν νὰ ἐκφρασθῶσιν αὐτοί;

Ἀπ. $\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2}}$, $\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{2}}$.

19) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς, ἀπὸ τὸν ὁποῖον ἂν ἀφαιρεθῇ τὸ τεσσαρακοστὸν τοῦ τετραγώνου του δίδει ὑπόλοιπον $9\frac{3}{5}$;
Ἀπ. 24 ἢ 16.

20) Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ, οἵτινες ἔχουν πρὸς ἀλλήλους ὡς 3 πρὸς 4 καὶ τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα προστιθέμενα διδοῦν τὸν ἀριθμὸν 324900;
Ἀπ. 342, 456.

21) Ὁ λόγος δύω ἀριθμῶν πρὸς ἀλλήλους εἶναι ὡς $\mu : \nu$ καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων των $= \beta$. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. $\frac{\mu\sqrt{\beta}}{\sqrt{(\mu^2+\nu^2)}}$, $\frac{\nu\sqrt{\beta}}{\sqrt{(\mu^2+\nu^2)}}$.

22) Ποῖοι ἀριθμοὶ ἔχουν ὡς μ πρὸς ν καὶ δίδουν ὡς διαφορὰν τῶν τετραγώνων των τὸν ἀριθμὸν β;

Ἀπ. $\frac{\mu\sqrt{\beta}}{\sqrt{(\mu^2-\nu^2)}}$, $\frac{\nu\sqrt{\beta}}{\sqrt{(\mu^2-\nu^2)}}$.

23) Κεφάλαιον εὑρίσκεται εἰς τόκους πρὸς 4 τὰ ἑκατόν· ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν συμποσούντων το κεφάλαιον ταλλήρων ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ταλ. τῶν πενταμηνιαίων τόκων προκύπτει ὁ ἀριθμὸς $11704\frac{2}{3}$. Πόσον εἶναι αὐτὸ τὸ κεφάλαιον;
Ἀπ. 2650 τάλ.

24) Δεσμοφύλαξ ἠγόρασεν ἅλυσον τῆς ὁποίας ἕκαστος κρίκος

ἐπληρώθη μὲ τόσας δραχμὰς, ὅσοι ἦσαν κρίκοι· Τοῦ ὅλου ἡ τιμὴ ἦτον 5776. γρ. Πόσοι ἦσαν οἱ κρίκοι;
Ἀπ. 76.

25) Ἔμπορος ἔχει τριῶν εἰδῶν πραγματείας, τῶν ὁποίων ἡ ἀξία εἶναι 230 τάλ. καὶ 5 γρ. Ἡ λίτρα ἑκάστου εἴδους τιμᾶται τόσα, ὅσα ἕκαστον αὐτῶν περιέχει λίτρας. Ἀπὸ τὸ δεύτερον ὅμως εἶδος ἔχει $\frac{1}{3}$ περισσότερον παρὰ ἀπὸ το πρῶτον καὶ ἀπὸ τὸ τρίτον $3\frac{1}{2}$ φορὰς περισσότερον, ὅσον ἀπὸ τὸ δεύτερον. Πόσας λίτρας ἔχει ἀπὸ ἕκαστον εἶδος;
Ἀπ. Ἀπὸ τὸ πρῶτον 15, ἀπὸ τὸ δεύτερον 20 καὶ ἀπὸ τὸ τρίτον 70.

26) Ἔμπορος ἐρωτηθεὶς πόσων λιτρῶν εἶναι αἱ πραγματεῖαι του, ἀπεκρίθη: « Ἂν πωλήσω τὴν λίτραν μὲ τιμὴν $2\frac{1}{2}$ ἀνωτέραν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν λιτρῶν, θέλω λάβει τόσα περισσότερα τῶν 6 ταλ. καὶ 11 γροσικίων ὅσα ὀλιγώτερα ἤθελα λάβει, ἂν ἐπώλουν τὴν λίτραν μὲ τιμὴν ἡμίσειαν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν λιτρῶν. » Πόσας λίτρας εἶχεν αὐτός;
Ἀπ. 10 λίτρας.

27) Φαντάζομαι ἀριθμὸν, τὸν πολλαπλασιάζω πρῶτον ἐπὶ $2\frac{1}{3}$, προσθέτω εἰς τὸ γινόμενον 7, πολλαπλασιάζω τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τοῦ ὀκταπλασίου αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ, τὸ διαιρῶ διὰ 14, καὶ ἀφοῦ ἀφαιρέσω ἀπὸ τὸ πηλίκον τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ, εὑρίσκω 2352. Ποῖος εἶναι αὐτὸς ὁ ἀριθμός;
Ἀπ. 42.

28) Ζητοῦνται τρεῖς ἀριθμοί: τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τοῦ δευτέρου $= \alpha$, τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τοῦ τρίτου $= \beta$ καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου $= \gamma$. Ποῖοι εἶναι αὐτοὶ οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. $\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\gamma}}$, $\alpha\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha^2+\beta^2}}$, $\beta\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha^2+\beta^2}}$.

29) Ποῖοι εἶναι οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ, οἵτινες ἀνὰ δύω μεταξύ των πολλαπλασιαζόμενοι δίδουν τὰ πηλίκα α, β, γ, ἂν ἕκαςον γινόμενον διαιρεθῇ διὰ τοῦ τρίτου ἀριθμοῦ;

Ἀπ. $\sqrt{\alpha\beta}$, $\sqrt{\alpha\gamma}$, $\sqrt{\beta\gamma}$.

30) Ζητοῦνται τρεῖς ἀριθμοί: τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τοῦ δευτέρου, τοῦ δευτέρου ἐπὶ τοῦ τρίτου, καὶ τοῦ τρίτου ἐπὶ τοῦ πρώτου, δίδουν κατὰ σειρὰν τοὺς ἀριθμοὺς α, β, γ;

Ἀπ. $\sqrt{\frac{\alpha\gamma}{\beta}}$, $\sqrt{\frac{\alpha\beta}{\gamma}}$, $\frac{\beta\gamma}{\alpha}$.

31) Ποῖοι εἶναι οἱ πέντε ἀριθμοὶ, οἵτινες πολλαπλασιαζόμενοι ἀπὸ τὸν πρῶτον ἕως τὸν τελευταῖον, ἕκαςος ἐπὶ τοῦ ἀμέσως ἑπομένου του καὶ ὁ τελευταῖος μὲ τὸν πρῶτον παράγουν τὰ γινόμενα α, β, γ, δ, ε;

Ἀπ. $\sqrt{\frac{\alpha\gamma\varepsilon}{\beta\delta}}$, $\sqrt{\frac{\alpha\beta\delta}{\gamma\varepsilon}}$, $\sqrt{\frac{\beta\gamma\varepsilon}{\alpha\delta}}$, $\sqrt{\frac{\alpha\gamma\delta}{\beta\varepsilon}}$, $\sqrt{\frac{\beta\delta\varepsilon}{\alpha\gamma}}$.

32) Ὅταν ὅμως ἀντὶ πέντε ἀριθμῶν ζητηθῶσιν 7, οἵτινες πρέπει νὰ παράξωσι τὰ γινόμενα α, β, γ, δ, ε, ς, ζ. Ποῖοι θέλουν εἶναι οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. $\sqrt{\frac{\alpha\gamma\varepsilon\zeta}{\beta\delta\varsigma}}$, $\sqrt{\frac{\alpha\beta\delta\varsigma}{\gamma\varepsilon\zeta}}$, $\sqrt{\frac{\beta\gamma\varepsilon\zeta}{\alpha\delta\varsigma}}$, $\sqrt{\frac{\alpha\gamma\delta\varsigma}{\beta\varepsilon\zeta}}$, $\sqrt{\frac{\beta\delta\varepsilon\zeta}{\alpha\gamma\varsigma}}$, $\sqrt{\frac{\alpha\gamma\varepsilon\varsigma}{\beta\delta\zeta}}$, $\sqrt{\frac{\beta\delta\varsigma\eta}{\alpha\gamma\varepsilon}}$.

Παρόμοιαι ἐκφράσεις ἠμποροῦν νὰ εὑρεθῶσι δι' ἕκαςον περιττὸν ἀριθμὸν τῶν ζητουμένων ποσοτήτων, ὅμως μόνον μὲ ῥητὰς συνθήκας διὰ ἄρτιον ἀριθμόν. Διατί; — Καὶ εἰς ποίας συνθήκας πρέπει νὰ καθυποβληθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ κτλ. ἂν μόλα ταῦτα πρέπῃ νὰ ἐκπληρωθῇ τὸ ζητούμενον;

33) Ζητοῦνται δύω ἀριθμοὶ, ἐξ ὧν ὁ πρῶτος ὑπερβαίνει κατὰ 8 τὸν δεύτερον καὶ τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον $= 240$. Ποῖοι εἶναι αὐτοί;

Ἀπ. 12 καὶ 20.

34) Τὸ κεφάλαιον δύω ἀριθμῶν εἶναι $= \alpha$, τὸ γινόμενόν των $= \beta$. Ποῖοι εἶναι;

Ἀπ. $\frac{\alpha + \sqrt{(\alpha^2 - 4\beta)}}{2}$, $\frac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2 - 4\beta)}}{2}$.

35) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ὑπερβαίνει τὸν ἀριθμὸν κατὰ 306;

Ἀπ. 18.

36) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὸ τριπλάσιον προστιθέμενον εἰς τὸ διπλάσιον τετράγωνον αὐτοῦ εἶναι $= 65$;

Ἀπ. 5.

37) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὸ τρίτον ἂν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τοῦ τετάρτου αὐτοῦ καὶ εἰς τὸ γινόμενον προστεθῇ τὸ πέμπτον αὐτοῦ, προκύπτει ἄλλος ἀριθμὸς, ὅστις κατὰ τόσα ὑπερβαίνει τὸν ἀριθμὸν 200, καθόσον ὁ ζητούμενος εἶναι κατώτερος τοῦ 280;

Ἀπ. 48.

38) Δύω νέοι ἐκληρονόμησαν ποσότητα χρηματικήν· ὁ πρῶτος ἔλαβε $\frac{2}{3}$ τῆς μερίδος τοῦ δευτέρου· ἂν πολλαπλασιασθῇ ὅμως ἡ μερὶς τοῦ πρώτου μὲ τὴν τοῦ δευτέρου, προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 9600; Πόσα ἔλαβεν ἕκαστος;

Ἀπ. 120. τάλ.

39) Δύω χαρτοπαῖκται ἔθεσαν ἴσην ποσότητα χρημάτων διὰ νὰ παίξωσιν· ἀφοῦ ἔπαιξαν ὀλίγον, ὁ πρῶτος ἐκέρδισε $2\frac{1}{2}$ τάλ. καὶ ἂν ἐπολλαπλασιάζετο ἡ ποσότης τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα ἔμειναν εἰς τὸν ἕνα ἐπὶ τῆς ποσότητος τοῦ ἄλλου, τὸ γινόμενον ἦτον $= 2\frac{3}{4}$. Ζητεῖται πόσα ἕκαστος κατέθεσεν;

Ἀπ. 3.

40) Κάποιος ἐρωτηθεὶς περὶ τῆς ἡλικίας του, ἀπεκρίθη: « ἡ μήτηρ μου μὲ ἐγέννησεν εἰς τὸ εἰκοστὸν ἔτος τῆς ἡλικίας της· ἡ

ἡλικία της πολλαπλασιασμένη ἐπὶ τῆς ἰδίας μου, ὑπερβαίνει τὸ κεφάλαιον τῶν ἡλικιῶν μας κατὰ 2500.» Πόσων ἐτῶν ἦτον αὐτός;

Ἀπ. 42.

41) Ἔμπορος ἔχει δύω εἰδῶν ζάχαρης διαφόρου βάρους καὶ τιμῆς. Τὸ βάρος τοῦ πρώτου ἔχει πρὸς τὸ δεύτερον ὡς 4 πρὸς 3. Ἡ λίτρα τοῦ πρώτου εἴδους τιμᾶται τόσα γροσίκια, ὅσας περιέχει μονάδας τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν λιτρῶν. Ἡ λίτρα τοῦ δευτέρου τιμᾶται 6 γρ. ὀλιγώτερον ἀπὸ τὴν λίτραν τοῦ πρώτου· ἡ ἀξία τῆς ὅλης ζάχαρης εἶναι 218 τάλ. καὶ 8 γρ. Πόσον βαρύνει ἕκαστον εἶδος;

Ἀπ. Τὸ πρῶτον 80 λίτρας καὶ τὸ δεύτερον 60.

42) Χρυσοχόος κατεσκεύασεν ἀργυροῦν ἀγγεῖον καὶ ἐρωτηθεὶς πόσων λοτίων ἄργυρος περιέχεται εἰς αὐτὸ, ἀπεκρίθη: « Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν λοτίων τοῦ μίγματος εἶναι ἴσον μὲ τὸ βάρος τοῦ ἀγγείου. Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν λοτίων τοῦ ἀργύρου εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἕκτην δύναμιν τοῦ μίγματος, διῃρημένην διὰ τοῦ $20\frac{1}{4}$. Πόσον βαρὺ ἦτον λοιπὸν τὸ ἀγγεῖον; Καὶ πόσον μίγμα καὶ ἄργυρος περιείχετο εἰς αὐτό;

Ἀπ. 9 λότια· 3 λότια μίγματος καὶ 6 ἀργύρου· ἐπομένως τὸ ἀγγεῖον ἦτον $10\frac{1}{2}$ λοτίων.

43) Ἔμπορος ἔχει τρία δέματα πανίου, ἐξ ὧν τὸ δεύτερον ἔχει 3 πήχεις καὶ τὸ τρίτον 5 περισσοτέρους ἀπὸ τὸ πρῶτον. Ὁ πῆχυς τοῦ πρώτου ἔχει τόσα γρ., ὅσους πήχεις περιέχει αὐτό· ὁ πῆχυς τοῦ δευτέρου ἔχει 10 γρ. καὶ τοῦ τρίτου 20 γρ. περισσότερα ἀπὸ τοῦ πρώτου. Ἡ ὅλη ἀξία τοῦ πανίου, εἶναι 397 τάλ. καὶ 2 γρ. Πόσους πήχεις ἔχει τὸ πρῶτον τμῆμα;

Ἀπ. 50.

44) Τὰ ὑπάρχοντα τριῶν ἀνθρώπων Α, Β, Γ πρέπει νὰ προσδιορισθῶσιν ἀπὸ τὰ ἑξῆς διδόμενα: Ὁσάκις ἔχει ὁ Α 5 τάλ.

τοσάκις ἔχει ὁ Β 9 καὶ ὁ Γ 10. Ἐκτὸς τούτου ἂν τὰ χρήματα τοῦ Α (εἰς τάλληρα ἐκφρασμένα καὶ ὡς ἁπλοῦς ἀριθμὸς θεωρούμενα) πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τοῦ Β καὶ τοῦ Β ἐπὶ τοῦ Γ καὶ προστεθῶσι τὰ δύω ταῦτα γινόμενα εἰς τὸ κεφάλαιον τῶν τριῶν, προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 8832. Πόσα ἔχει ἕκαστος αὐτῶν;

Ἀπ. ὁ Α 40, ὁ Β 72 καὶ ὁ Γ 80.

45) Ἔμπορος ἠγόρασε διάφορα πανία μὲ ἴσην τιμὴν διὰ 60 τάλ. Ἂν τὰ πανία ἦσαν 3 περισσότερα διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν, τότε ἤθελεν ἔχει τὸ τμῆμα ἓν τάλληρον ὀλιγώτερον. Πόσα πανία ἠγόρασεν;

Ἀπ. 12.

46) Πλούσιος ἔδωκε 36 τάλ. διὰ νὰ μοιρασθῶσιν ἐξίσου εἰς τοὺς πτωχοὺς μικρᾶς πόλεως. Ἐπειδὴ ὅμως ἐξ αὐτῶν δὲν εἶχαν πλέον χρείαν βοηθείας, ἔλαβεν ἕκαστος τῶν λοιπῶν 2 γρ. περισσότερα ἀφ' ὅ,τι ἤθελε λάβει ἂν ἐλάμβαναν ὅλοι. Πόσοι πτωχοὶ ἦσαν κατ' ἀρχάς;

Ἀπ. 8.

47) Ζητεῖται ἀριθμὸς, ὅστις ἂν διαιρέσῃ τὸν ἀριθμὸν γ, ἢ ἂν διαιρεθῇ δι' ἄλλου κατ' α μεγαλητέρον, ἡ διαφορὰ τῶν δύω πηλίκων νὰ ἦναι = δ. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός;

Ἀπ. $-\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha\gamma}{\delta}\right)}$.

περιλαμβάνονται τὰ τρία προηγούμενα προβλήματα εἰς τοῦτο.

48) Εἰς ξενοδοχεῖον ἐξώδευσαν 20 ἄνθρωποι, ἄνδρες καὶ γυναῖκες 48 τάλ. δηλ: οἱ ἄνδρες 24 καὶ αἱ γυναῖκες ἄλλα τόσα. Κατὰ τὸν λογαριασμὸν ὅμως ἔπρεπεν ἕκαστος τῶν ἀνδρῶν νὰ πληρώσῃ ἓν τάλληρον περισσότερον ἑκάστης γυναικός. Πόσοι ἄνδρες ἦσαν;

Ἀπ. 8.

57) Δύω ἔμποροι κατέθεσαν μαζῆ 500 τάλ. διὰ νὰ τὰ πραγματευθῶσιν· ὁ πρῶτος ἄφησε τὰ χρήματά του πέντε μῆνας, ὁ δεύτερος μόνον δύω καὶ ἕκαστος αὐτῶν ἔλαβεν εἰς τὸ τέλος 450 τάλ. κεφάλαια καὶ κέρδος. Πόσα ἔδωκεν ἕκαστος αὐτῶν;

'Απ. Ο πρῶτος 200, ὁ δεύτερος 300 τάλ.

58) Οἱ αὐτοὶ ἔθεσαν μετὰ καιρὸν 2000 τάλ. εἰς ἐμπόριον. Ὁ πρῶτος ἄφησε τὰ χρήματά του 17 μῆνας καὶ ἔλαβε κεφάλαια καὶ κέρδος 1710 τάλ. ὁ ἄλλος τὰ ἄφησε 12 μῆνας καὶ ἔλαβε κεφάλαια καὶ κέρδος 1040 τάλ. Πόσα κατέθεσεν ἕκαστος;

'Απ. Ο πρῶτος 1200 καὶ ὁ δεύτερος 800 τάλ.

59) Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον $=41$ καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων των $=901$;

'Απ. 15 καὶ 26.

60) Εἰς ποίους ἀριθμοὺς εἶναι τὸ κεφάλαιον $=\alpha$ καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων των $=6$; (1)

'Απ. Εἰς τὸν $\frac{\alpha+\sqrt{(26-\alpha^2)}}{2}$ καὶ $\frac{\alpha-\sqrt{(26-\alpha^2)}}{2}$. Πότε γίνονται αὗται αἱ ἐκφράσεις φανταστικαί;

61) Ποῖοι εἶναι οἱ δύω ἀριθμοί, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ εἶναι $=8$ καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων των $=544$.

'Απ. 12 καὶ 20.

62) Ποῖοι εἶναι οἱ δύω ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον $=255$ καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων $=514$;

'Απ. 15 καὶ 17.

63) Ὁ ἀριθμὸς 100 πρέπει νὰ μερισθῆ εἰς δύω μέρη, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν νὰ ἦναι $=2304$. Ποῖα εἶναι τὰ μέρη;

'Απ. 64 καὶ 36.

(1) Τοιούτου εἴδους προβλήματα ἀπαντῶνται πολλὰ εἰς τὴν σελ. 147—152.

64) Ὁ ἀριθμὸς π πρέπει νὰ μερισθῆ εἰς δύω μέρη τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον $=\rho$. Ποῖα εἶναι αὐτά;

'Απ. Καὶ τὰ δύω $=\frac{1}{2}[\pi\pm\sqrt{(\pi^2-\rho)}]$.

65) Εἰς ποῖα μέρη πρέπει νὰ διαιρεθῆ ὁ ἀριθμὸς 16, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν δύω μερῶν προστιθέμενον εἰς τὰ τετράγωνα αὐτῶν νὰ δίδη τὸ κεφάλαιον 208,

'Απ. 4 καὶ 12.

66) Εἰς δύω μέρη πρέπει νὰ μερισθῆ ὁ ἀριθμὸς 39, ὥστε τὸ κεφάλαιον τῶν κύβων τῶν μερῶν αὐτῶν νὰ δίδη 17199; Ποῖα εἶναι;

'Απ. 15 καὶ 24.

67) Ζητεῖται νὰ διαιρεθῆ ὁ ἀριθμὸς α εἰς 2, ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ἐπὶ γνωστοῦ ἀριθμοῦ 6 πολλαπλασιασμένον νὰ ἦναι $=$ μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου. Ποῖος εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός;

'Απ. $\pm\frac{\alpha\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}$.

68) Κτηματίας ἐρωτηθεὶς περὶ τῶν ὑπαρχόντων του; ἀπεκρίθη, ὡς ἕπεται: ἡ χρηματική μου κατάστασις εἶναι τόσον μεγάλη, ὥστε ἂν τὴν αὐξήσω κατὰ 1578 τάλ. ἢ ἂν τὴν σμικρύνω κατὰ 142 τάλ. καὶ ἐξάξω τὴν κυβικὴν ῥίζαν τῶν παραγομένων ἀριθμῶν, θέλουν διαφέρει αὗται αἱ ῥίζαι κατὰ 10. Πόση εἶναι ἡ κατάστασίς του;

'Απ. 150 τάλ.

69) Ἀπόμαχος ἐρωτηθεὶς πόσων χρόνων εἶναι, εἶπε: τὸ κεφάλαιον τοῦ κύβου καὶ τοῦ τετραγώνου τῶν ἐτῶν μου εἶναι ἴσον μὲ τὸ 2550πλάσιον τῆς ἡλικίας μου. Πόσον ἡλικιωμένος ἦτον λοιπόν;

'Απ. 50 χρόνων.

70) Ποῖος ἀριθμὸς ὑπερβαίνει τὴν τετραγωνικήν του ῥίζαν κατὰ $48\frac{3}{4}$;

Ἀπ. $56\frac{1}{4}$.

71) Ζητεῖται κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρωνομαστὴς εἶναι κατὰ 2 μικρότερος τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμητοῦ. Ἂν ὅμως ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν καὶ παρωνομαστὴν τοῦ κλάσματος ἀφαιρεθῶσι 3, γίνεται αὐτὸ κατὰ $\frac{1}{36}$ μικρότερον τοῦ ἀληθοῦς κλάσματος; Ποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον κλάσμα;

Ἀπ. $\frac{7}{12}$.

72) Δίδονται δύω ἀριθμοὶ α καὶ β· ἕκαστος αὐτῶν πρέπει νὰ μερισθῇ εἰς δύω μὲ τρόπον, ὥστε τὸ ἓν μέρος τοῦ α νὰ ἔχῃ πρὸς τὸ πρῶτον τοῦ β ὡς μ πρὸς ν, καὶ τὸ γινόμενον τῶν δύω ἄλλων μερῶν νὰ ἦναι $= \pi$. Πῶς πρέπει νὰ μερισθῶσιν;

Ἀπ. Ἂν τεθῇ $\frac{\nu\alpha + \mu\beta \pm [(\nu\alpha - \mu\beta)^2 + 4\mu\nu\pi]}{2\mu\nu} = \Lambda$,

θέλει εἶναι τὸ ἓν μέρος τοῦ $\alpha = \mu\Lambda$ καὶ τὸ τοῦ $\beta = \nu\Lambda$.

73) Ζητεῖται πάλιν, καθὼς καὶ εἰς τὸ προλαβὸν πρόβλημα οἱ δύω ἀριθμοὶ α, β νὰ μερισθῶσιν εἰς τρόπον ὥστε τὰ πρῶτα μέρη νὰ ἔχουν πρὸς ἄλληλα ὡς μ πρὸς ν· καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων τῶν δύω ἄλλων μερῶν νὰ ἦναι $= \kappa$. Πῶς πρέπει νὰ μερισθῶσιν αὐτά;

Ἀπ. Ἂν τεθῇ $\frac{\alpha\mu + \beta\nu \mp \sqrt{[(\mu^2 + \nu^2)\kappa - (\alpha\nu - \beta\mu)^2]}}{\mu^2 + \nu^2}$

$= \Lambda$, τότε τὸ ἓν μέρος τοῦ α θέλει εἶναι $= \mu\Lambda$ καὶ τοῦ $\beta = \nu\Lambda$.

74) Ζητοῦνται δύω ἀριθμοί, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ προστιθεμένη εἰς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶναι $= 150$ καὶ τὸ κεφάλαιόν των προστιθέμενον εἰς τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων των εἶναι $= 330$. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. 9 καὶ 15.

75) Ποῖοι εἶναι οἱ δύω ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον, γινόμενον καὶ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων των εἶναι ἴσα;

Ἀπ. $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

76) Ζητεῖται ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον εἶναι κατὰ 2 μικρότερον ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν αὐτόν. Ποῖος εἶναι; (1)

Ἀπ. $\frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2}$

77) Ποῖοι εἶναι οἱ δύω ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον, τὸ γινόμενον καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων των εἶναι ἴσα;

Ἀπ. $\frac{3 + \sqrt{-3}}{2}$ καὶ $\frac{3 - \sqrt{-3}}{2}$.

78) Τρεῖς ἀριθμοὶ εὑρίσκονται εἰς συνεχῆ ἀναλογίαν· τὸ κεφάλαιον αὐτῶν εἶναι $= 126$ καὶ τὸ γινόμενον $= 13824$: Ποῖοι εἶναι αὐτοί;

Ἀπ. 6, 24, 96.

79) Ζητεῖται ἀριθμός, ὅστις γράφεται μὲ τρεῖς χαρακτῆρας, τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων αὐτῶν τῶν χαρακτήρων, χωρὶς νὰ θεωρηθῇ ἡ τάξις των εἶναι $= 104$, τὸ τετράγωνον ὅμως τῶν μεσαίων χαρακτήρων εἶναι κατὰ 4 μεγαλήτερον ἀπὸ τὸ διπλοῦν γινόμενον τῶν δύω ἄλλων· ἐκτὸς τούτου ἂν ἀφαιρεθῶσι 594 ἀπὸ τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, παρίστανται οἱ τρεῖς χαρακτῆρες εἰς ἀντίστροφον τάξιν. Ποῖος εἶναι αὐτὸς ὁ ἀριθμός;

Ἀπ. 862.

. . . .

Δὲν πρέπει πάντοτε νὰ θεωρῶνται αἱ ζητούμεναι ποσότητες ὡς

---

(1) Ἐδῶ πρέπει νὰ παρατηρήσῃ τις, ὅτι ἡ $\sqrt{-7}$ εἶναι φανταστικὴ ποσότης, καθότι εἶναι ἀδύνατον νὰ ἐξαχθῇ ἡ ῥίζα τοῦ $\sqrt{-7}$ καὶ ἀπομένως ἡ λύσις τοῦ προβλήματος εἶναι ἀδύνατος· καθὼς καὶ εἰς τὸ ἀπόμενον πρόβλημα μὲ τὴν $\sqrt{-3}$.

ἀμέσως ἄγγωσαι εἰς τὸ πρόβλημα· ἄλλως ἤθελαν ἀπαντᾶσθαι συχνάκις ὑψηλαὶ ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι ἀφεύκτως ἀναγκαῖαι εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος καὶ τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἀποφεύγωμεν ὅσον τὸ δυνατόν. Συχνάκις εἶναι καλήτερον νὰ ζητῆται, κατὰ πρῶτον προσκαίρως, ὁποιοσδήποτε συνδυασμὸς αὐτῶν, οἷον: τὸ κεφάλαιον, ἡ διαφορά, τὸ γινόμενον, τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων, ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων, κ. τ. λ. καὶ ἐκ τούτων ἔπειτα νὰ προσδιορίζωνται αἱ ποσότητες. Καὶ ἐπειδὴ τοῦτο τὸ μέρος εἶναι πολλὰ σημαντικὸν εἰς τὴν ἄλγεβραν καὶ δὲν πρέπει νὰ παραμελῆται, ἀκολουθοῦν παρόμοια προβλήματα πρὸς ἄσκησιν· κατωτέρω ἀπαντῶνται καὶ ἄλλα καὶ εἰς τὰ πέντε προλαβόντα προβλήματα ὅμως ἠμπορεῖ νὰ εὐκολυνθῇ ἡ ἐργασία κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

. . . .

80) Ποῖοι εἶναι οἱ δύω ἀριθμοί, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ ἐπὶ τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων των πολλαπλασιασμένη εἶναι $=$ 160, καὶ τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τοῦ κεφαλαίου τῶν τετραγώνων των $= 580$;

Ἀπ. Τὸ κεφάλαιον τῶν δύω ἀριθμῶν εἶναι 10 καὶ τὸ γινόμενόν των 21, ἐπομένως οἱ ἀριθμοὶ 3 καὶ 7.

81) Ποῖοι εἶναι οἱ δύω ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον καὶ γινόμενον προστιθέμενα εἶναι $= 34$, τὸ κεφάλαιον ὅμως τῶν τετραγώνων των ὑπερβαίνει τὸ κεφάλαιον τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν κατὰ 42.

Ἀπ. Τὸ κεφάλαιον τῶν δύω ἀριθμῶν εἶναι 10, τὸ γινόμενον 24· ὅθεν αὐτοὶ οἱ ἀριθμοὶ 4 καὶ 6.

82) Ἂν τεθῇ α ἀντὶ 34, διὰ νὰ γίνῃ τὸ πρόβλημα γενικώτερον καὶ β ἀντὶ 42: διὰ ποίων τύπων ἠμποροῦν νὰ ἐκφρασθῶσιν οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί;

Ἀπ. Ἔστω $-1 \pm \sqrt{(4\beta + 8\alpha + 1)} = 2A$, καὶ $2\alpha + 1 \mp \sqrt{(4\beta + 8\alpha + 1)} = 2B$, τότε εἶναι οἱ δύω ζητούμενοι ἀριθμοὶ $\frac{A + \sqrt{(A^2 - 4B)}}{2}$ καὶ $\frac{A - \sqrt{(A^2 - 4B)}}{2}$.

83) Ποῖοι εἶναι οἱ δύω ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον $= \alpha$ καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν τετάρτων δυνάμεων αὐτῶν $= \beta$;

Ἀπ. Ἂν ὀνομασθῇ ἡ διαφορὰ τῶν δύω ζητουμένων ἀριθμῶν δ, τότε εἶναι $\delta = \sqrt{[-3\alpha^2 \pm \sqrt{(8\alpha^4 + 8\beta,]}}$ καὶ αὐτοὶ οἱ ἀριθμοὶ $\frac{\alpha + \delta}{2}$ καὶ $\frac{\alpha - \delta}{2}$.

84) Ποῖοι εἶναι οἱ δύω ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον $= \alpha$ καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν πέμπτων δυνάμεών των $= \beta$;

Ἀπ. Τὸ γινόμενον π τῶν δύω ἀριθμῶν εἶναι $= \frac{1}{2}\left[\alpha^2 \pm \sqrt{\frac{\alpha^5 + 4\beta}{5\alpha}}\right]$. Ἐπομένως οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εἶναι: $\frac{1}{2}[\alpha + \sqrt{(\alpha^2 - 4\pi)}]$ καὶ $\frac{1}{2}[\alpha \sqrt{(\alpha^2 - 4\pi)}]$.

85) Τὸ κεφάλαιον δύω ἀριθμῶν $= \alpha$, τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τοῦ κεφαλαίου τῶν τετραγώνων των $= \beta$. Ποῖοι εἶναι αὐτοί;

Ἂν ὑποτεθῇ τὸ γινόμενον τῶν δύω ἀριθμῶν $= \pi$, $\pi = \frac{1}{4}[\alpha^2 \pm \sqrt{(\alpha^4 - 8\beta)}]$, ὅθεν οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ $\frac{1}{2}[\alpha + \sqrt{(\alpha^2 - 4\pi)}]$ καὶ $\frac{1}{2}[\alpha - \sqrt{(\alpha^2 - 4\pi)}]$.

86) Τὸ κεφάλαιον δύω ἀριθμῶν προστιθέμενον εἰς τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων των $= \alpha$· τὸ μ $=$πλάσιον κεφάλαιον τῶν τετραγώνων των προστιθέμενον εἰς τὸ ν $=$πλάσιον γινόμενον τῶν δύω ἀριθμῶν $= \beta$: Ποῖοι εἶναι αὐτοὶ οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. Τὸ κεφάλαιον $\varkappa$ καὶ τὸ γινόμενον π δύω ἀριθμῶν εἶναι δεδομένα διὰ τῶν ἐξισώσεων $\nu\varkappa^2 + (\nu - 2\mu)\varkappa = 2\beta + (\nu - 2\mu)\alpha$ καὶ $2\pi = \varkappa^2 + \varkappa - \alpha$. Ἀφοῦ προσδιορισθῇ διὰ τούτων τὸ $\varkappa$ καὶ π εὑρίσκονται καὶ οἱ δύω αὐτοὶ ἀριθμοὶ διὰ τῆς λύσεως χ^{α}

$-x\chi + \pi = 0$. Ἑκάστη λοιπὸν αὐτῶν ἔχει τέσσαρας ἀξίας.

87) Εἰς γεωμετρικὴν ἀναλογίαν, εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν δύω μέσων ὅρων $= \alpha$, τὸ κεφάλαιον τῶν δύω ἄκρων $= \beta$ καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων καὶ τῶν τεσσάρων ὅρων μαζὴ $= \gamma$. Ποία εἶναι αὐτὴ ἡ ἀναλογία;

Ἀπ. Τὸ γινόμενον τῶν δύω μέσων, ἑπομένως καὶ τῶν δύω ἄκρων $= \frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma}{4}$, ὅθεν ἡ ζητουμένη ἀναλογία:

$$\tfrac{1}{2}[\beta - \sqrt{(\gamma-\alpha^2)}] : \tfrac{1}{2}[\alpha - \sqrt{(\gamma-\beta^2)}] = \tfrac{1}{2}[\alpha + \sqrt{(\gamma-\beta^2)}] : \tfrac{1}{2}[\beta + \sqrt{(\gamma-\alpha^2)}].$$

88) Ἡ διαφορὰ τῶν δύω μέσων ὅρων γεωμετρικῆς ἀναλογίας $= \alpha$, ἡ διαφορὰ τῶν δύω ἄκρων $= \beta$ καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων ὅρων $= \gamma$. Ποία εἶναι αὐτή;

Ἀπ. Τὸ γινόμενον τῶν δύω ἄκρων ἢ μέσων ὅρων εἶναι $= \frac{\gamma-\alpha^2-\beta^2}{4}$ · ὅθεν ἡ ἀναλογία:

$$\tfrac{1}{2}[-\beta + \sqrt{(\gamma-\alpha^2)}] : \tfrac{1}{2}[-\alpha + \sqrt{(\gamma-\beta^2)}] = \tfrac{1}{2}[+\alpha + \sqrt{(\gamma-\beta^2)}] : \tfrac{1}{2}[+\beta + \sqrt{(\gamma-\alpha^2)}].$$

89) Εἰς γεωμετρικὴν ἀναλογίαν εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δύω ἄκρων ἢ τῶν δύω μέσων $= \alpha$, τὸ κεφάλαιον τῶν τεσσάρων ὅρων $= \beta$ καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων των $= \gamma$. Ποία εἶναι αὐτή;

Ἀπ. Ἂν τεθῇ, διὰ τὴν συντομίαν, $\pm\sqrt{(8\alpha+2\gamma-\beta^2)} = \Lambda$, τότε εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν δύω μέσων $\frac{\beta-\Lambda}{2}$ καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν δύω ἄκρων ὅρων $\frac{\beta+\Lambda}{2}$ · ὅθεν ἡ ζητουμένη ἀναλογία:

$$\tfrac{1}{4}[\beta+\Lambda-\sqrt{(2\gamma-8\alpha+2\beta\Lambda)}] : \tfrac{1}{4}[\beta-\Lambda-\sqrt{(2\gamma-8\alpha-2\beta\Lambda)}]$$
$$= \tfrac{1}{4}[\beta-\Lambda+\sqrt{(2\gamma-8\alpha-2\beta\Lambda)}] : \tfrac{1}{4}[\beta+\Lambda+\sqrt{(2\gamma-8\alpha+2\beta\Lambda)}].$$

90) Τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ἢ μέσων ὅρων γεωμετρικῆς ἀναλογίας εἶναι $= \alpha$, ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ κεφαλαίου τῶν ἄκρων καὶ τοῦ κεφαλαίου τῶν μέσων $= \beta$. τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων ὅρων $= \gamma$: Ποία εἶναι αὐτή;

Ἀπ. Ἂν τεθῇ πάλιν $\pm\sqrt{(8\alpha+2\gamma-\beta^2)} = \Lambda$, τότε θέλει εἶναι $\frac{\Lambda-\beta}{2}$ τὸ κεφάλαιον τῶν μέσων, $\frac{\Lambda+\beta}{2}$ τὸ κεφάλαιον τῶν ἄκρων καὶ ἑπομένως ἡ ζητουμένη ἀναλογία:

$$\tfrac{1}{4}[(\Lambda+\beta-\sqrt{(2\gamma-8\alpha+2\beta\Lambda)}] : \tfrac{1}{4}[\Lambda-\beta-\sqrt{(2\gamma-8\alpha-2\beta\Lambda)}]$$
$$= \tfrac{1}{4}[(\Lambda-\beta+\sqrt{(2\gamma-8\alpha-2\beta\Lambda)}] : \tfrac{1}{4}[\Lambda+\beta+\sqrt{(2\gamma-8\alpha+2\beta\Lambda)}]$$

Διὰ τὸ $\alpha = 18$, $\beta = 2$, $\gamma = 130$ εἶναι $2 : 3 = 6 : 9$
» » » 270, $\beta = 20$, $\gamma = 3922$ » $5 : 9 = 30 : 54$.

91) Εἰς γεωμετρικὴν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν δύω μέσων ἢ ἄκρων εἶναι $= \alpha$, τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ὅρων $= \beta$ καὶ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ κεφαλαίου τῶν τετραγώνων τῶν ἄκρων καὶ τοῦ κεφαλαίου τῶν τετραγώνων τῶν μέσων $= \gamma$. Ποία εἶναι ἡ ἀναλογία;

Ἀπ. Τὸ κεφάλαιον τῶν δύω μέσων εἶναι $\frac{\beta^2-\gamma}{2\beta}$, ὅθεν τὸ κεφάλαιον τῶν δύω ἄκρων $\frac{\beta^2+\gamma}{2\beta}$ καὶ ἑπομένως ἡ ζητουμένη ἀναλογία:

$$\frac{\beta^2+\gamma-\sqrt{[(\beta^2+\gamma)^2-16\alpha\beta^2]}}{4\beta} : \frac{\beta^2-\gamma-\sqrt{[(\beta^2-\gamma)^2-16\alpha\beta^2]}}{4\beta}$$
$$= \frac{\beta^2-\gamma+\sqrt{[(\beta^2-\gamma)^2-16\alpha\beta^2]}}{4\beta} : \frac{\beta^2+\gamma+\sqrt{[(\beta^2+\gamma)^2-16\alpha\beta^2]}}{4\beta}$$

92) Ζητοῦνται δύω ἀριθμοὶ εἰς συνεχῆ ἀναλογίαν, τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον $= \alpha$, καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων $= \beta$. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί;

'Απ. Ὁ μέσος ὅρος τῆς ζητουμένης ἀναλογίας εἶναι $\frac{\alpha^2-\beta}{2\alpha}$.
Ὅθεν τὰ δύω ἄκρα εἶναι:
$\frac{\alpha^2+\beta-\sqrt{(3\beta-\alpha^2)(3\alpha^2-\beta)}}{4\alpha}$, $\frac{\alpha^2+\beta+\sqrt{(3\beta-\alpha^2)(3\alpha^2-\beta)}}{4\alpha}$

Μεταξὺ τίνων ὁρίων πρέπει νὰ συμπέσῃ ἡ ἀξία τοῦ β, ἂν πρέπῃ νὰ παράξῃ τὸ πρόβλημα δυνατὰ πορίσματα;

93) Εἰς συνεχῆ ἀναλογίαν εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν 3 ὅρων $=\alpha$ καὶ τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον μένει, ὅταν ἀπὸ τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων τῶν ἄκρων, ἀφαιρεθῇ τὸ τετράγωνον τῶν μέσων $=\beta$. Ποία εἶναι ἡ ἀναλογία;

'Απ. Ἂν ὀνομασθῇ ὁ μέσος ὅρος η, τότε εἶναι $\eta=\frac{-\alpha\pm\sqrt{(3\alpha^2-2\beta)}}{2}$

Ἐκ τούτου εὑρίσκονται τὰ ἄκρα:

$\frac{1}{2}[\alpha-\eta\pm\sqrt{(\alpha^2-2\alpha\eta-3\eta^2)}]$, $\frac{1}{2}[\alpha-\eta\mp\sqrt{(\alpha^2-2\alpha\eta-3\eta^2)}]$

94) Εἰς γεωμετρικὴν ἀναλογίαν τεσσάρων ὅρων εἶναι τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ὅρων $=\alpha$ καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων τῶν $=\beta$. Ποία εἶναι ἡ ἀναλογία;

'Απ. Ἂς φανερώνῃ τὸ $\varkappa$ τὸ ἥμισυ κεφάλαιον καὶ τὸ δ τὴν ἡμίσειαν διαφορὰν τῶν δύω μέσων ὅρων, τότε εἶναι $\varkappa=\frac{-\beta\pm\sqrt{\{\beta^2+2\alpha^2(\alpha^2-\beta)\}}}{4\alpha}$ καὶ $\delta=\varkappa\sqrt{\frac{\alpha-4\varkappa}{\alpha+4\varkappa}}$. Ὅθεν πηγάζουν οἱ δύω μέσοι ὅροι $\varkappa-\delta$, $\varkappa+\delta$ καὶ οἱ δύω ἄκροι $\frac{(\varkappa-\delta)^2}{\varkappa+\delta}$, $\frac{(\varkappa+\delta)^2}{\varkappa-\delta}$.

95) Εἰς γεωμετρικὴν ἀναλογίαν τεσσάρων ὅρων εἶναι δεδομένα: ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ κεφαλαίου τῶν δύω ἄκρων καὶ τοῦ κεφαλαίου τῶν δύω μέσων $=\alpha$, καὶ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ κεφαλαίου τῶν τετραγώνων τῶν δύω ἄκρων καὶ τοῦ κεφαλαίου τῶν τετραγώνων τῶν δύω μέσων $=\beta$: Ποία εἶναι ἡ ἀναλογία;

'Απ. Ἔστω $\varkappa$ τὸ ἥμισυ τοῦ κεφαλαίου τῶν δύω μέσων, δ ἡ

ἡμίσεια διαφορὰ τῶν αὐτῶν, τότε εἶναι $\varkappa=\frac{\beta-\alpha^2}{4\alpha}$, $\delta=\frac{\beta-\alpha^2}{4\sqrt{(2\beta-\alpha^2)}}$. Ἐκ τούτου εὑρίσκονται οἱ μέσοι ὅροι $\varkappa-\delta$, $\varkappa+\delta$ καὶ οἱ ἄκροι $\frac{(\varkappa-\delta)^2}{\varkappa+\delta}$, $\frac{(\varkappa+\delta)^2}{\varkappa-\delta}$.

96) Εἰς γεωμετρικὴν ἀναλογίαν τεσσάρων ὅρων εἶναι δεδομένα: ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ κεφαλαίου τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ὅρου καὶ τοῦ κεφαλαίου τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ὅρου $=\alpha$ καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων ὅρων $=\beta$: Ποία εἶναι ἡ ἀναλογία;

'Απ. Ἂν τεθῇ ἡ ἡμίσεια διαφορὰ τῶν μέσων ὅρων $=\delta$ καὶ τὸ ἥμισύ των κεφάλαιον $=\varkappa$, τότε εἶναι $\delta=\frac{\beta\pm\sqrt{\{\beta^2+2\alpha^2(\alpha^2-\beta)\}}}{4\alpha}$ $\varkappa=\delta\sqrt{\frac{\alpha+4\delta}{\alpha-4\delta}}$.

Ἐκ τούτων πηγάζουν, καθὼς καὶ εἰς τὰ προλαβόντα προβλήματα, οἱ ἄκροι καὶ μέσοι ὅροι.

97) Εἰς γεωμετρικὴν ἀναλογίαν τεσσάρων ὅρων εἶναι δεδομένα: τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ὅρων $=\alpha$, ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ κεφαλαίου τῶν τετραγώνων τῶν ἄκρων καὶ τοῦ κεφαλαίου τῶν τετραγώνων τῶν μέσων $=\beta$. Ποία εἶναι ἡ ἀναλογία;

'Απ. Τὸ ἥμισυ κεφάλαιον τῶν μέσων $\varkappa=\frac{\alpha^2-\beta}{4\alpha}$, ἡ ἡμίσεια διαφορὰ $\delta=\pm\varkappa\sqrt{\frac{\beta}{8\alpha\varkappa+\beta}}$, ὅθεν εὑρίσκονται τὰ λοιπά, καθὼς εἰς τὰ προλαβόντα τρία προβλήματα.

98) Εἰς γεωμετρικὴν ἀναλογίαν τεσσάρων ὅρων εἶναι δεδομένα: τὸ κεφάλαιον τῶν δύω ἄκρων $=\alpha$, τὸ κεφάλαιον τῶν δύω σων $=\beta$. Ποία εἶναι ἡ ἀναλογία;

'Απ. Ἂν ὀνομασθῇ ὁ ἐκθέτης τῆς ἀναλογίας ε, τότε θέλει εἶναι

$=\frac{\alpha+\beta\pm\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha+3\beta)}}{2\beta}$ καὶ ὁ πρῶτος ὅρος $=\frac{\alpha}{\varepsilon^3+1}$ $=\frac{\beta}{\varepsilon^3+\varepsilon}$.

99) Εἰς γεωμετρικὴν ἀναλογίαν εἶναι διδομένα: τὸ κεφάλαιον τῶν μέσων ὅρων $=\alpha$, τὸ κεφάλαιον τῶν ἄκρων $=\beta$, τὸ κεφάλαιον τῶν κύβων τῶν τεσσάρων ὅρων $=\gamma$. Ποία εἶναι ἡ ἀναλογία;

Ἀπ. Τὸ γινόμενον τῶν μέσων ἢ ἄκρων ἂς ὀνομασθῇ π, τότε εἶναι $\pi=\frac{\alpha^3+\beta^3-\gamma}{3(\alpha+\beta)}$ καὶ ἡ ζητουμένη ἀναλογία:

$$\tfrac{1}{2}[\beta-\sqrt{(\beta^2-4\pi)}]:\tfrac{1}{2}[\alpha-\sqrt{(\alpha^2-4\pi)}]$$
$$=\tfrac{1}{2}[\alpha+\sqrt{(\alpha^2-4\pi)}]:\tfrac{1}{2}[\beta+\sqrt{(\beta^2-4\pi)}].$$

100) Εἰς γεωμετρικὴν ἀναλογίαν εἶναι δεδομένα: τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ὅρων $=\alpha$, τὸ κεφάλαιον τῶν κύβων των $=\gamma$: Ποία εἶναι;

Ἀπ. Τὸ γινόμενον τῶν μέσων ἢ τῶν ἄκρων εἶναι $\pi=\frac{\alpha^3-3\alpha\beta+2\gamma}{6\alpha}$, ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ κεφαλαίου τῶν δύω ἄκρων καὶ τοῦ κεφαλαίου τῶν δύω μέσων εἶναι $\delta=\pm\sqrt{\frac{\alpha^3-6\alpha\beta+8\gamma}{3\alpha}}$. ὅθεν τὸ κεφάλαιον τῶν δύω ἄκρων $=\frac{\alpha+\delta}{2}$, τὸ κεφάλαιον τῶν δύω μέσων $=\frac{\alpha-\delta}{2}$, ἐπομένως ἡ ἀναλογία:

$$\tfrac{1}{4}[\alpha+\delta-\sqrt{[(\alpha+\delta)^2-16\pi]}]:\tfrac{1}{4}[\alpha-\delta-\sqrt{[(\alpha-\delta)^2-16\pi]}]$$
$$=\tfrac{1}{4}[\alpha-\delta+\sqrt{[(\alpha-\delta)^2-16\pi]}]:\tfrac{1}{4}[\alpha+\delta+\sqrt{[(\alpha+\delta)^2-16\pi]}].$$

101) Εἰς γεωμετρικὴν ἀναλογίαν εἶναι δεδομένα: ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ κεφαλαίου τῶν ἄκρων καὶ τοῦ κεφαλαίου τῶν μέσων ὅρων $=\alpha$, ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ κεφαλαίου τῶν τετραγώνων τῶν ἄκρων καὶ τοῦ κεφαλαίου τῶν τετραγώνων τῶν μέσων

ὅρων $=\beta$ καὶ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ κεφαλαίου τῶν κύβων τῶν μέσων καὶ τῶν ἄκρων $=\gamma$. Ποία εἶναι ἡ ἀναλογία;

Ἀπ. Τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ὅρων $=\frac{\alpha}{\beta}$. ὅθεν τὸ κεφάλαιον τῶν ἄκρων $x=\frac{\beta+\alpha^2}{2\alpha}$, τὸ κεφάλαιον τῶν μέσων $x'=\frac{\beta-\alpha^2}{2\alpha}$. Τὸ γινόμενον τῶν μέσων ἄκρων ἢ ὅρων εἶναι $\pi=\frac{\alpha^4+3\beta^2-4\alpha\gamma}{12\alpha^2}$. Ἂν τὸ x, x' καὶ π εὑρεθῇ, τότε εἶναι ἡ ἀναλογία:

$$\tfrac{1}{2}[x-\sqrt{(x^2-4\pi)}]:\tfrac{1}{2}[x'-\sqrt{(x'^2-4\pi)}]$$
$$=\tfrac{1}{2}[x'+\sqrt{(x'^2-4\pi)}]:\tfrac{1}{2}[x+\sqrt{(x^2-4\pi)}].$$

102) Εἰς γεωμετρικὴν ἀναλογίαν εἶναι δεδομένα: τὸ γινόμενον τῶν δύω ἄκρων ἢ δύω μέσων ὅρων $=\alpha$, τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ὅρων $=\beta$ καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν κύβων των $=\gamma$: ποία εἶναι ἡ ἀναλογία;

Ἀπ. Ἂν τεθῇ, διὰ τὴν συντομίαν $\pm\sqrt{\frac{4\gamma+12\alpha\beta-\beta^3}{3\beta}}=\Lambda$, τότε εἶναι $\frac{\beta+\Lambda}{2}$ τὸ κεφάλαιον τῶν ἄκρων· ἐπομένως καὶ $\frac{\beta-\Lambda}{2}$ τὸ κεφάλαιον τῶν μέσων· ἐκ τούτου εὑρίσκεται ἡ ζητουμένη ἀναλογία:

$$\tfrac{1}{4}[\beta+\Lambda-\sqrt{[(\beta+\Lambda)^2-16\alpha]}]:\tfrac{1}{4}[\beta-\Lambda-\sqrt{[(\beta-\Lambda)^2-16\alpha]}]$$
$$=\tfrac{1}{4}[\beta-\Lambda+\sqrt{[(\beta-\Lambda)^2-16\alpha]}]:\tfrac{1}{4}[\beta+\Lambda+\sqrt{[(\beta+\Lambda)^2-16\alpha]}].$$

103) Εἰς γεωμετρικὴν ἀναλογίαν εἶναι δεδομένα τὸ κεφάλαιον τῶν δύω ἄκρων $=\alpha$, τὸ κεφάλαιον τῶν δύω μέσων $=\beta$ καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν κύβων τῶν τεσσάρων ὅρων $=\gamma$: ποία εἶναι ἡ ἀναλογία;

Ἀπ. Ἂν τεθῇ διὰ τὴν συντομίαν: $\sqrt{\frac{4\gamma-\alpha^3-4\beta^3+3\alpha^2\beta}{3(\alpha+\beta)}}$

$= \mathrm{A}$ καὶ $\sqrt{\dfrac{4\gamma - 4\alpha^3 - \beta^3 + 3\alpha\beta^2}{3(\alpha+\beta)}} = \mathrm{B}$, τότε εἶναι $\dfrac{\alpha - \mathrm{A}}{2}$: $\dfrac{\beta - \mathrm{B}}{2} = \dfrac{\beta + \mathrm{B}}{2} : \dfrac{\alpha + \mathrm{A}}{2}$ ἡ ζητουμένη ἀναλογία.

104) Πῶς ἠμποροῦν νὰ λυθῶσιν αἱ ἑπόμεναι δύω ἐξισώσεις, ἐξ ὧν χ', χ'' εἶναι αἱ ζητούμεναι ποσότητες;

$$(\chi' + \chi'')(1 + \chi'\chi'' + \chi'^2\chi'' + \chi'\chi''^2 + \chi'^2\chi''^2) + \chi'\chi'' = \alpha$$

$$\chi'\chi''(\chi' + \chi'')(\chi' + \chi'' + \chi'\chi'')(\chi' + \chi'' + \chi'\chi'' + \chi'^2\chi'' + \chi'\chi''^2) = \beta.$$

Ἀπ. Ἂν γίνωσιν εἰς αὐτὰς τὰς ἐξισώσεις αἱ ἀναγκαῖαι ἀντικαταστάσεις: $\chi' + \chi'' = y'$, $\chi'\chi'' = y''$· $y' + y'' = \omega'$, $y'y'' = \omega''$· $\omega' + \omega'' = \varphi'$, $\omega'\omega' = \varphi''$. Τότε εὑρίσκεται εἰς τὸ τέλος $\varphi' + \varphi'' = \alpha$, $\varphi'\varphi'' = \beta$· ἑπομένως καὶ αἱ ζητούμεναι ποσότητες χ', χ'' ἀποδίδονται διὰ τῶν ἑπομένων τεσσάρων ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ:

$$\varphi^2 - \alpha\varphi + \beta = 0$$

$$\omega^2 - \varphi'\omega + \varphi'' = 0$$

$$y^2 - \omega' y + \omega'' = 0$$

$$\chi^2 - y'\chi + y'' = 0$$

Ἡ πρώτη δίδει φ', φ''· ἡ δευτέρα ω', ω''· ἡ τρίτη y', y''· καὶ τέλος ἡ τετάρτη χ', χ''· οὕτως εὑρίσκονται ὀλίγον κατ' ὀλίγον:

$$\varphi' = \frac{\alpha \pm \sqrt{(\alpha^2 - 4\beta)}}{2}, \quad \varphi'' = \frac{\alpha \mp \sqrt{(\alpha^2 - 4\beta)}}{2}$$

$$\omega' = \frac{\varphi' \pm \sqrt{(\varphi'^2 - 4\varphi'')}}{2}, \quad \omega'' = \frac{\varphi' \mp \sqrt{(\varphi'^2 - 4\varphi'')}}{2}$$

$$y' = \frac{\omega' \pm \sqrt{(\omega'^2 - 4\omega'')}}{2}, \quad y'' = \frac{\omega' \mp \sqrt{(\omega'^2 - 4\omega'')}}{2}$$

$$\chi' = \frac{y' \pm \sqrt{(y'^2 - 4y'')}}{2}, \quad \chi'' = \frac{y' \mp \sqrt{(y'^2 - 4y'')}}{2}$$

καὶ ἑπομένως ἐπίσης διὰ τὸ χ', καθὼς καὶ διὰ τὸ χ'', δεκαὲξ διάφοροι ἀξίαι.

Ἂν ἐπάσχιζέ τις νὰ λύσῃ τὰς ἄνω ἐξισώσεις κατὰ τὸν συνήθη τρόπον, ἤθελε καταντήσει μετὰ δυσκολωτάτην ἐργασίαν εἰς ἐξίσωσιν τοῦ δεκάτου ἕκτου βαθμοῦ.

ΙΘ.' *Προβλήματα τῶν ὑψηλῶν ἐξισώσεων.*

1) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὸ τρίτον μέρος ἐπὶ τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ εἶναι $= 1944$;

Ἀπ. 18.

2) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὸ ἥμισυ, τρίτον καὶ τέταρτον ἂν πολλαπλασιασθῶσι μεταξύ των καὶ αὐξηθῇ τὸ γινόμενον κατὰ 32 προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 4640.

Ἀπ. 48.

3) Ζητεῖται ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου ἡ τετάρτη δύναμις ἂν διαιρεθῇ διὰ τοῦ ὀγδόου αὐτοῦ καὶ σμικρυνθῇ τὸ πηλίκον κατὰ 167, δίδει ὑπόλοιπον 12000. Ποῖος εἶναι αὐτὸς ὁ ἀριθμός;

Ἀπ. $11\frac{1}{2}$.

4) Ζητεῖται ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου ἡ ἕκτη δύναμις ἂν διαιρεθῇ διὰ τοῦ διπλασίου κύβου του καὶ προσλάβῃ τὸν ἀριθμὸν 18, νὰ προκύπτῃ ὁ ἀριθμὸς 50. Ποῖος εἶναι ὁ ζητούμενος;

Ἀπ. 4.

5) Κάποιος ἠγόρασε μῆλα, τὰ ὁποῖα ἦσαν εἰς θήκας, ἐξ ὧν ἑκάστη περιεῖχε τόσα μῆλα, ὅσαι θῆκαι ἦσαν· δι' ἕκαστον μῆλον ἐπλήρωσε διπλάσια φένιγα τοῦ ἀριθμοῦ τῶν θηκῶν, καὶ δι' ὅλα μαζῇ 57 τάλ. καὶ 4 γρ. Πόσα μῆλα ἠγόρασεν αὐτός;

Ἀπ. 588.

6) Ἔμποροι ἐσυμφώνησαν νὰ ἐμπορευθῶσι καὶ ἕκαςος συνεισέφερεν εἰς τὴν συντροφίαν 1000 = πλάσια τάλ. τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐμπόρων. μετὰ τὸ τέλος τοῦ ἐμπορίου εὑρέθησαν κερδεμένοι καὶ μάλιστα τετραπλάσια τὰ ἑκατὸν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν συντρόφων. Τὸ κέρδος ἦτον 5000 τάλ. καὶ ζητεῖται πόσοι ἦσαν οἱ ἔμποροι;

Ἀπ. 5.

7) Ἔμποροι ἐσυμφώνησαν νὰ συνδέσωσι συντροφίαν ἐμπορίου· Ἕκαστος αὐτῶν ἔδωκε τόσας χιλιάδας τάλληρα, ὅσοι αὐτοὶ ἦσαν. Καὶ ἐκέρδισαν εἰς τὸ ἐμπόριον 2560 τάλ. ἢ κατὰ τὸν λογαριασμὸν, τὸν ὁποῖον ἔκαμαν $\frac{1}{2}$ τόσα τὰ ἑκατὸν, ὅσοι αὐτοὶ ἦσαν κατὰ τὸν ἀριθμόν. Πόσοι ἦσαν;

Ἀπ. 8.

8) Τοκιστὴς ἔδωκε 10000 τάλ. εἰς τόκους καὶ ἐπρόσθετεν ἐτησίως τοὺς τόκους εἰς τὸ κεφάλαιον. Εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου ἔτους ηὗρε τὸ κεφάλαιόν του ἕως 11576 $\frac{1}{4}$ τάλ. ηὐξημένον. Πόσα τὰ ἑκατὸν ἐλάμβανεν ἐτησίως;

Ἀπ. 5.

9) Ζητοῦνται τρεῖς ἀριθμοί: ἂν πολλαπλασιασθῇ τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου μὲ τὸν δεύτερον, τὸ γινόμενον νὰ ἦναι = 112. Πρὸς τούτοις τὸ γινόμενον τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ ἐπὶ τοῦ τρίτου = 588· καὶ τὸ γινόμενον τοῦ τετραγώνου τοῦ τρίτου ἐπὶ τοῦ πρώτου = 576. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. 4, 7, 12.

10) Ποῖοι εἶναι οἱ τρεῖς ἀριθμοί, εἰς τοὺς ὁποίους: τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ἐπὶ τοῦ δευτέρου = α, τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τοῦ τρίτου = β καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ τρίτου ἐπὶ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ = γ. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. $\sqrt[9]{\frac{\alpha^4\gamma}{\beta^2}}$, $\sqrt[9]{\frac{\beta^4\alpha}{\gamma^2}}$, $\sqrt[9]{\frac{\gamma^4\beta}{\alpha^2}}$.

11) Ζητοῦνται τέσσαρες ἀριθμοί, διὰ τῶν ὁποίων νὰ παραχθῶσι κατὰ σειρὰν τὰ γινόμενα α, β, γ, δ, ἂν τὸ τετράγωνον ἑκάςου πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀμέσως ἑπομένου ἀριθμοῦ καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ τελευταίου ἐπ' ἐκείνου τοῦ πρώτου: Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. $\sqrt[15]{\frac{\alpha^8\gamma^2}{\beta^4\delta}}$, $\sqrt[15]{\frac{\beta^8\delta^2}{\gamma^4\alpha}}$, $\sqrt[15]{\frac{\gamma^8\alpha^2}{\delta^4\beta}}$, $\sqrt[15]{\frac{\delta^8\beta^2}{\alpha^4\gamma}}$.

(Παρόμοιοι τύποι ἠμποροῦν νὰ εὑρεθῶσι καὶ διὰ πέντε, ἓξ καὶ περισσοτέρους ἀριθμούς· προσέτι ἠμπορεῖ νὰ παρασταθῇ τὸ πρόβλημα καὶ γενικώτερον, τὸ ὁποῖον ἀφίνεται ὅλως διόλου εἰς τὴν σκέψιν τοῦ ἀναγνώστου.)

12) Κάπηλος ἐξάγει ἀπὸ πλῆρες ἀγγεῖον, τὸ ὁποῖον περιέχει 81 τέταρτα οἴνου ἓν μέρος. Καὶ ἀφοῦ τὸ γεμίσει ἐκ νέου μὲ νερὸν ἐξάγει πάλιν ὅσον καὶ πρότερον. Τὸ αὐτὸ κάμνει τεσσαράκις, ὥστε τὴν τετάρτην φορὰν μένουν μόνον 16 τέταρτα καθαροῦ οἴνου εἰς τὸ ἀγγεῖον καὶ τὸ ἐπίλοιπον νερόν. Πόσα τέταρτα ἔπρεπε νὰ ἐξῆγεν ἑκάστην φοράν;

Ἀπ. 27.

13. Δύω ἀριθμοὶ διαφέρουν κατὰ 4, καὶ τὸ γινόμενον ἐπὶ τοῦ κεφαλαίου των πολλαπλασιασμένον εἶναι = 1386: Ποῖοι εἶναι;

Ἀπ. 7 καὶ 11.

14) Φαρμακοποιὸς ἠγόρασεν ἀργυροῦν δοχεῖον, τὸ ὁποῖον ἐβάρυνε τόσα μάρκα, ὅσα λότια καθαρὸν ἄργυρον περιεῖχεν ἕκαςον μάρκον. Δι' αὐτὸ τὸ ἀγγεῖον ἐπλήρωσεν 120 τάλ., δηλ: δι' ἕκαςον λότι τοῦ περιεχομένου καθαροῦ ἀργύρου 8 γρ. περισσότερα, παρὰ ὅ,τι ἤθελεν ἀξίσει τὸ δοχεῖον, ἂν ἕκαστον μάρκον τοῦ βάρους του ἐπληρόνετο πρὸς ἓν γρ. Πόσα ἐβάρυνεν αὐτό;

Ἀπ. 12 μάρκα.

15) Ἀξιωματικοὶ ἐςρατοπέδευσαν εἰς πεδίον μὲ μέρος ςρατεύματος συγκειμένου ἀπὸ πεζικὸν καὶ ἱππικόν. Ἕκαςος αὐτῶν εἶχεν

ὑπὸ τὴν ὁδηγίαν του τριπλασίους ἱππεῖς καὶ τετραπλασίους πεζοὺς ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀξιωματικῶν. Πᾶς ἕκαςος ἱππεὺς εἶχε δύω πυριτοβολὰς καὶ πᾶς ἕκαςος πεζὸς 22 πυριτοβολὰς περισσοτέρας τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀξιωματικῶν· ὅλοι μαζῆ εἶχαν 15360 πυριτοβολάς. Πόσοι ἀξιωματικοὶ ἦσαν παρόντες;

Απ. 8.

16) Κάποιος ἐρωτηθεὶς, πόσα ἐξώδευσε σήμερον, ἀπεκρίθη: «Σήμερον ἐξώδευσα 4 τάλ. περισσότερα καὶ χθὲς διπλάσια τῶν προχθεσινῶν· ἂν πολλαπλασιάσω ὅμως τὰς ποσότητας, |: εἰς τάλληρα ἐκφρασμένας : | τὰς ὁποίας ἐξώδευσα κατ' αὐτὰς τὰς ἡμέρας μεταξύ των καὶ προσθέσω εἰς τὸ γινόμενον 756, εὑρίσκω 134=πλάσια τῶν ὅσων σήμερον ἐξώδευσα.» Πόσα ἐξώδευσε λοιπόν;

Ἀπ. 6 ἢ 9 τάλ.

17) Ἔμποροι ἔκαμαν συνειτφορὰν καὶ μάλιστα ἕκαστος δεκαπλάσια τάλ. τοῦ ἀριθμοῦ τῶν συντρόφων καὶ ἐμπορευθέντες τὰ χρήματα ἐκέρδισαν κατὰ 8 τὰ ἑκατὸν, περισσότερα τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐμπόρων. Τὸ κέρδος ἦτον 288 τάλ. Πόσοι ἦσαν αὐτοί;

Ἀπ. 12.

18) Ἔμποροι συνεισέφεραν κεφάλαιον 8240 ταλ. καὶ μάλιστα ἕκαστος αὐτῶν κατέθεσε 40=πλάσια τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐμπόρων. Μόλον τοῦτο ἐκέρδισαν μόνον τόσα τὰ ἑκατὸν, ὅσοι αὐτοὶ ἦσαν. Τότε ἐμερίσθησαν τὸ κέρδος καὶ ἕκαστος ἔλαβε δεκαπλάσια τάλ. τοῦ ἀριθμοῦ τῶν συντρόφων· ἔμειναν ὅμως κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον 224 τάλ. ὑπόλοιπα. Πόσοι ἦσαν οἱ ἔμποροι;

Ἀπ. Ἢ 7, ἢ 8, ἢ 10.

19) Τέσσαρες ἔμποροι Α, Β, Γ, Δ, εἶχαν ἕκαστος ποσότητα ταλλήρων. ὁ Β εἶχεν ἓν τάλ. περισσότερον ἀπὸ τὸν Α, ὁ Γ ἓν περισσότερον ἀπὸ τὸν Β καὶ ὁ Δ ἓν περισσότερον ἀπὸ τὸν Γ.

Ἂν πολλαπλασιασθῶσι τὰ τέσσαρα κεφάλαια μεταξύ των καὶ θεωρηθῇ τὸ γινόμενον εἰς τάλ. τότε εὑρίσκονται 1168 τάλ. περισσότερα, παρὰ ἂν κυβισθῇ τὸ κεφάλαιον τοῦ Δ. Πόσα ἔχει ἕκαστος αὐτῶν;

Ἀπ. Ὁ Α 5, ὁ Β 6, ὁ Γ 7, ὁ Δ 8 τάλ.

20). Κάποιος εἶχεν ἀριθμὸν ἐργατῶν δηλ: τριπλασίους τοῦ ποσοῦ τοῦ ἡμερομισθίου ἑκάστου αὐτῶν. Αὐτοὶ ἠργάσθησαν 100 ἡμέρας ὀλιγώτερον, ἀπὸ ὅσα γρ. κάμνει ὁ μισθὸς ὅλων μαζῆ καὶ ἔλαβαν δι' αὐτὸν τὸν καιρὸν ὅλοι μαζῆ 2500 τάλ. Πόσοι ἦσαν οἱ ἐργάται; καὶ πόσας ἡμέρας ἠργάσθησαν;

Ἀπ. 30 ἐργάται καὶ 200 ἡμέρας.

21) Ἔχω δύω ἀριθμοὺς τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον=63. Ἂν διαιρεθῇ ὁ μεγαλήτερος διὰ τοῦ μικροτέρου καὶ προστεθῶσιν $20\frac{1}{4}$ εἰς τὸ γινόμενον, ἀποτελεῖται κυβικὸς ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου ἡ ῥίζα εἶναι κατὰ ἓν μικροτέρα ἀπὸ τὸ ἕβδομον τοῦ μεγαλητέρου ἀριθμοῦ. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. 35 καὶ 28.

22) Δεξαμενὴ δέχεται νερὸν ἀπὸ τέσσαρας σωλῆνας καὶ ἠμπορεῖ νὰ γεμισθῇ εἰς $115\frac{1}{5}$ λεπτά. Ἂν ὅμως γεμισθῇ ἀπὸ ἕκαστον αὐτῶν χωριστὰ, ὁ δεύτερος χρειάζεται 4 ὥρας, ὁ τρίτος 8 καὶ ὁ τέταρτος 12 περισσότερον τοῦ πρώτου. Εἰς πόσον καιρὸν ἠμπορεῖ λοιπὸν νὰ τὴν γεμίσῃ ὁ πρῶτος;

Ἀπ. Εἰς 4 ὥρας.

23) Τρεῖς ἀριθμοὶ εἶναι διὰ τῶν ἑξῆς διδομένων γνωστοί: τὸ κεφάλαιον τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου=α, τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου=б, καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν κύβων τοῦ πρώτου καὶ τρίτου=γ. Διὰ ποίας ἐξισώσεως ἠμπορεῖ νὰ προσδιορισθῶσιν αὐτοὶ οἱ ἀριθμοί;

'Απ. Ἂν τεθῇ χ ὡς ὁ πρῶτος τῶν 3 ζητουμένων ἀριθμῶν, τότε θέλει εἶναι:

$$[\beta - (\alpha - \chi)^2]^3 = (\gamma - \chi^3)^2$$

ἡ ἐξίσωσις, ἥτις πρέπει νὰ λυθῇ. Ἂν λοιπὸν προσδιορισθῇ τὸ χ, εὑρίσκονται εὐκολώτατα καὶ οἱ δύω ἄλλοι ἀριθμοί. Ἓν πρόβλημα ὅμως ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς λυμένον, ὅταν καταντήσῃ καθὼς ἐδῶ, εἰς τὴν ἁπλουστάτην δυνατὴν ἐξίσωσιν, ἂν καὶ δὲν ἦναι δυνατὸν νὰ λύωνται ὅλαι αἱ ἐξισώσεις ἐντελῶς.

24) Τὸ κεφάλαιον δύω ἀριθμῶν $= \alpha$, τὸ κεφάλαιον τῆς ἕκτης δυνάμεώς των $= \beta$. Πῶς εὑρίσκονται αὐτοὶ οἱ ἀριθμοί;

'Απ. Τὸ γινόμενον π τῶν δύω ἀριθμῶν εἶναι δεδομένον διὰ τῆς ἐξισώσεως $2\pi^3 - 9\alpha^2\pi^2 + 6\alpha^4\pi - \alpha^6 + \beta = 0$. (Εἰς τοῦτο τὸ πρόβλημα καὶ εἰς τὰ ἀκόλουθα πρέπει νὰ ἐνθυμηθῇ τις τὴν σημείωσιν. Σελ. 306 — 307.)

25) Τὸ κεφάλαιον δύω ἀριθμῶν εἶναι $= \alpha$, τὸ κεφάλαιον τῆς ἑβδόμης δυνάμεώς των $= \beta$. Πῶς εὑρίσκονται αὐτοὶ οἱ ἀριθμοί;

'Απ. Τὸ γινόμενον γ τῶν δύω ἀριθμῶν εἶναι δεδομένον διὰ τῆς ἐξισώσεως $7\alpha\gamma^3 - 14\alpha^3\gamma^2 + 7\alpha^5\gamma - \alpha^7 + \beta = 0$.

Ἐν γένει αἱ δύω ἐξισώσεις $\chi + \psi = \alpha$, $\chi^{2\nu} + \psi^{2\nu} = \beta$ ἢ $\chi^{2\nu+1} + \psi^{2\nu+1} = \beta$ φέρουν πάντοτε εἰς ἐξίσωσιν τοῦ $\nu^{ου}$ βαθμοῦ διὰ τὸ γ, τῆς ὁποίας ὁ νόμος ἠμπορεῖ νὰ δοθῇ.

26) Ἡ μ=πλασία διαφορὰ δύω ποσοτήτων προστιθεμένη εἰς τὸ ν=πλάσιον γινόμενόν των, δίδει α· πρὸς τούτοις ἡ διαφορὰ πολλαπλασιασμένη ἐπὶ τοῦ κεφαλαίου τῶν τετραγώνων των, δίδει β. Ποῖαι εἶναι αὐταί;

'Απ. Ἡ διαφορὰ $= \psi$ καὶ τὸ γινόμενον $= \omega$ τῶν δύω ποσοτήτων εἶναι δεδομένα διὰ τῶν ἐξισώσεων: $\nu\psi^3 - 2\mu\psi^2 + 2\alpha\psi - \nu\beta = 0$, $\nu\omega = \alpha - \mu\psi$. Ὅταν ἐκ τούτων προσδιορισθῇ τὸ ψ

καὶ ω, τότε εὑρίσκονται καὶ αὐταὶ αἱ ποσότητες διὰ τῆς λύσεως ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ. Αἱ δύω ποσότητες εἶναι δεδομέναι καθαυτὸ δι' ἐξισώσεων τοῦ ἕκτου βαθμοῦ, αἱ ὁποῖαι ὅμως, καθὼς φαίνεται, ἠμποροῦν νὰ ἐπαναχθῶσιν εἰς ἐξισώσεις τοῦ τρίτου καὶ δευτέρου βαθμοῦ.

27) Τὸ κεφάλαιον τριῶν ἀριθμῶν $= \alpha$, τὸ κεφάλαιον τῶν γινομένων των ἀνὰ δύω $= \beta$, τὸ γινόμενον ὅλων $= \gamma$. Διά τινος ἐξισώσεως ἠμποροῦν νὰ προσδιορισθῶσιν αὐτοὶ οἱ ἀριθμοί;

'Απ. Ἡ ἐξίσωσις $\chi^3 - \alpha\chi^2 + \beta\chi - \gamma = 0$ δίδει διὰ τῶν τριῶν της ῥιζῶν καὶ τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς ἐνταυτῷ.

28) Εἶναι τὰ ἑξῆς διδόμενα: Τὸ κεφάλαιον τριῶν ἀριθμῶν $= \alpha$, τὸ κεφάλαιον τῶν γινομένων τῶν δύω ἀνὰ δύω $= \beta$ καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν ἓξ γινομένων, τὰ ὁποῖα προκύπτουν, ὅταν ἕκαστος αὐτῶν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄλλου $= \gamma$. Πῶς εὑρίσκονται αὐτοὶ οἱ ἀριθμοί;

'Απ. Τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ζητουμένων ἀριθμῶν εἶναι $= \frac{\alpha\beta - \gamma}{3}$, ὅθεν $\chi^3 - \alpha\chi^2 + \beta\chi - \frac{\alpha\beta - \gamma}{3} = 0$ ἡ ἐξίσωσις, διὰ τῆς ὁποίας θέλουν προκύψει καὶ οἱ τρεῖς ἐνταυτῷ.

29) Εἶναι δεδομένα τὸ κεφάλαιον τριῶν ἀριθμῶν $= \alpha$, τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων των $= \beta$, καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν κύβων των $= \gamma$. Πῶς εὑρίσκονται αὐτοί;

'Απ. Τὸ κεφάλαιον τῶν γινομένων ἀνὰ δύω εἶναι $= \frac{\alpha^2 + \beta}{2}$ καὶ τὸ γινόμενον τῶν 3 $= \frac{2\gamma + \alpha^3 - 3\alpha\beta}{6}$, ὅθεν ἡ ἐξίσωσις

$$\chi^3 - \alpha\chi^2 + \frac{\alpha^2 - \beta}{2}\chi - \frac{2\gamma + \alpha^3 - 3\alpha\beta}{6} = 0$$

δίδει καὶ τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς ἐνταυτῷ.

30) Τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων δύω ἀριθμῶν εἶναι $= \alpha$,

τὸ κεφάλαιον τῶν κύβων των $= \beta$. Ποῖοι εἶναι αὐτοὶ οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. Ἔστω $\varkappa$ τὸ κεφάλαιον τῶν δύω ἀριθμῶν, τότε εἶναι $\varkappa^3 - 3\alpha\varkappa + 2\beta = 0$ ἡ ἐξίσωσις, διὰ τῆς ὁποίας θέλει προσδιορισθῆ ἐκεῖνο. Ὅταν εὑρεθῇ τὸ $\varkappa$, εὑρίσκονται καὶ αὐτοὶ οἱ ἀριθμοὶ εὐκόλως· αὐτοὶ δίδονται διὰ τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 - \varkappa\chi + \frac{\varkappa^2 - \alpha}{2} = 0$.

31) Τὸ κεφάλαιον τῶν γινομένων τριῶν ἀριθμῶν ἀνὰ δύω εἶναι $= \alpha$, τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων των $= \beta$, τὸ γινόμενον καὶ τῶν τριῶν $= \gamma$. Πῶς εὑρίσκονται αὐτοὶ οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. Τὸ κεφάλαιον τῶν τριῶν ἀριθμῶν εἶναι $= \pm \sqrt{(2\alpha + \beta)}$. ὅθεν ἡ ἐξίσωσις, διὰ τῆς ὁποίας προκύπτουν αὐτοὶ ἐνταυτῷ:

$$\chi^3 \mp \chi^2 \sqrt{(2\alpha + \beta)} + \alpha\chi - \gamma = 0$$

32) Τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων τριῶν ἀριθμῶν ἀνὰ δύω λαμβανομένων εἶναι $= \alpha$, τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων $= \beta$, τὸ κεφάλαιον τῶν κύβων $= \gamma$. Πῶς εὑρίσκονται αὐτοὶ οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. Τὸ κεφάλαιον τῶν τριῶν ἀριθμῶν $= \pm \sqrt{(2\alpha + \beta)}$, τὸ γινόμενον τῶν τριῶν

$= \frac{1}{3}[\gamma \pm (\alpha - \beta)\sqrt{(2\alpha + \beta)}]$. Ἐπομένως ἡ ἀκόλουθος ἐξίσωσις δίδει ἐνταυτῷ καὶ τοὺς τρεῖς ἀριθμούς:

$$\chi^3 \mp \chi^2 \sqrt{(2\alpha + \beta)} + \alpha\chi - \tfrac{1}{3}[\gamma \pm (\alpha - \beta)\sqrt{(2\alpha + \beta)}] = 0.$$

33) Τὸ κεφάλαιον τῶν γινομένων τριῶν ἀριθμῶν ἀνὰ δύω εἶναι $= \alpha$, τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων των $= \beta$, τὸ κεφάλαιον τῶν ἓξ γινομένων, τὰ ὁποῖα προκύπτουν, ὅταν ἕκαστος ἀριθμὸς πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τοῦ ἄλλου $= \gamma$. Πῶς εὑρίσκονται;

Ἀπ. Τὸ κεφάλαιον τῶν τριῶν ἀριθμῶν εἶναι $= \pm \sqrt{(2\alpha + \beta)}$ καὶ τὸ γινόμενον ὅλων

$= \frac{1}{3}[\pm \alpha \sqrt{(2\alpha + \beta)} - \gamma]$· ὅθεν δίδονται διὰ τῆς ἀκολούθου ἐξισώσεως:

$$\chi^3 \mp \chi^2 \sqrt{(2\alpha + \beta)}\, \alpha\chi - \tfrac{1}{3}[\pm \alpha \sqrt{(2\alpha + \beta)} - \gamma] = 0$$

34) Ζητοῦνται τρεῖς ἀριθμοὶ εἰς συνεχῆ ἀναλογίαν, τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον $= \alpha$, καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν κύβων των $= \beta$: Πῶς εὑρίσκονται αὐτοὶ οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. Ἂν διὰ τοῦ ψ ἐκφρασθῇ ὁ μέσος ὅρος τῆς ἀναλογίας, τότε εἶναι $3\psi^3 - 3\alpha^2\psi + \alpha^3 - \beta = 0$ ἡ ἐξίσωσις, διὰ τῆς ὁποίας θέλει προσδιορισθῇ αὐτό. Ἂν φ δεικνύῃ μίαν ῥίζαν αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως, τότε εἶναι:

$$\chi^2 - (\alpha - \varphi)\chi - \frac{\beta - \varphi^3}{3(\alpha - \varphi)} + \frac{(\alpha - \varphi)^2}{3} = 0$$

ἡ ἐξίσωσις, τῆς ὁποίας τὰς ῥίζας δίδουν οἱ δύω ἄκροι ὅροι.

Διὰ τὸ $\alpha = 21$, $\beta = 1971$, εἶναι $\psi^3 - 441\psi + 2430 = 0$· αἱ τρεῖς ῥίζαι αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως εἶναι 6, $-3 + \sqrt{414}$, $-3 - \sqrt{414}$. Ἂν ἐκληφθῇ τὸ $\varphi = 6$, τότε εἶναι $\chi^2 - 15\chi + 36 = 0$ ἡ ἐξίσωσις, τῆς ὁποίας αἱ ῥίζαι 3 καὶ 12 δίδουν τοὺς δύω ἄκρους ὅρους. Ἐπομένως ἡ συνεχὴς ἀναλογία εἶναι $3 : 6 : 12$.

35) Εἰς ἀναλογίαν τεσσάρων ὅρων εἶναι γνωστά: ἡ διαφορὰ τῶν δύω ἄκρων $= \alpha$ καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν δύω μέσων $= \beta$. Ποία εἶναι ἡ ἀναλογία;

Ἀπ. Ἂν ὁ ἐκθέτης τῆς ἀναλογίας σημειωθῇ μὲ ψ, τότε εἶναι $\beta\psi^3 - \alpha\psi^2 - \alpha\psi - \beta = 0$ ἡ ἐξίσωσις, διὰ τῆς ὁποίας θέλει προσδιορισθῇ ἐκεῖνος. Ὅταν αὐτὸς εὑρεθῇ, ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι

$$= \frac{\beta}{\psi^2 + \psi} = \frac{\alpha}{\psi^3 + 1}.$$

36) Εἰς ποίαν ἀναλογίαν εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν δύω μέσων $= \alpha$ καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων τῶν δύω ἄκρων $= \beta$;

Ἀπ. Ἡ διαφορὰ τῶν δύω μέσων $= \delta$ καὶ ἂν τεθῇ $\delta^2 = \psi$, τότε εἶναι $\psi^3 + (15\alpha^2 - 2\beta)\psi^2 + (15\alpha^4 + 4\alpha^2\beta)\psi + \alpha^4(\alpha^2 - 2\beta) = 0$ ἡ ἐξίσωσις, διὰ τῆς ὁποίας δίδεται τὸ ψ, ὅπομένως καὶ τὸ δ, τότε εὑρίσκεται ὁ ἐκθέτης τῆς ἀναλογίας $= \frac{\alpha+\delta}{\alpha-\delta}$ καὶ ὁ πρῶτος ὅρος $= \frac{(\alpha-\delta)^2}{2(\alpha+\delta)}$.

. . . .

Ἂν δὲ ἦναι γνωστὰ τινὰ περὶ τῶν ἀναλογιῶν τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως ταύτης προερχόμενα ἐκ τῆς φύσεως τοῦ προβλήματος, τὸ ὁποῖον ὁδηγεῖ εἰς δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, ἢ ἄλλως πως, τότε εἶναι δυνατὸν, ἐκτὸς μερικῶν περιπτώσεων νὰ ἐπαναχθῇ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἰς κατώτερον βαθμόν. Τὰ ἀκόλουθα προβλήματα σαφηνίζουν κατὰ μέρος τὸ ῥηθέν.

. . . .

37) Ἂς ἦναι 2μ ποσότητες διὰ τῆς ἐξισώσεως $\chi^{2\mu} + \alpha\chi^{2\mu-1} + \beta\chi^{2\mu-2} + \gamma\chi^{2\mu-3} + \ldots\ldots + \kappa\chi + \lambda = 0$ δεδομέναι. Εἶναι προεγνωσμένον, ὅτι τὸ κεφάλαιον αὐτῶν τῶν ποσοτήτων ἀνὰ δύω εἶναι τὸ αὐτό. Πῶς ἠμπορεῖ λοιπὸν νὰ λυθῇ αὐτὴ ἡ ἐξίσωσις δἰ ἄλλων κατωτέρων βαθμῶν;

Ἀπ. Τὸ κεφάλαιον τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἀνὰ δύω εἶναι $= -\frac{\alpha}{\mu}$. Ἂν καταταχθῇ αὐτὴ κατὰ δυνάμεις τοῦ $\chi^2 + \frac{\alpha\chi}{\mu}$ καὶ τεθῇ ψ δι' αὐτὴν τὴν ἔκφρασιν, τότε εὑρίσκεται ἐξίσωσις τοῦ μ^του βαθμοῦ διὰ τὸ ψ. Ἂν εὑρεθῇ ἐκ τούτων τὸ ψ, τότε εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν ἑξῆς ἐξίσωσιν καὶ τὸ χ, $\chi^2 + \frac{\alpha\chi}{\mu} = \psi$. Ἡ ἀπόδειξις τούτου θεμελιοῦται εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν ἐξισώσεων εἰς ἁπλοὺς παράγοντας, καὶ ἡ παραγωγὴ εἶναι εὔκολος. Τοῦτο ὅμως ἀφίνεται εἰς τὴν σκέψιν τοῦ ἀναγνώστου.

Εἰς αὐτὴν τὴν τάξιν ἀνήκει, π. χ. ἡ ἐξίσωσις $\chi^4 - 10\chi^3 + 18\chi + 35\chi - 12 = 0$. Ἂς τεθῇ $\chi^2 - 5\chi = \psi$ καὶ ἂς δοθῇ εἰς τὴν ἐξίσωσιν τὸ σχῆμα $(\chi^2 - 5\chi)^2 - 7(\chi^2 - 5\chi) - 12 = 0$.

Τότε δίδουν αἱ δύω ἐξισώσεις $\psi^2 - 7\psi - 12 = 0$, $\chi^2 - 5\chi + \psi = 0$ τὰς ζητουμένας τέσσαρας ἀξίας τοῦ χ, οἷον:

$$\chi = \frac{5 \pm \sqrt{(39 + 2\sqrt{97})}}{2},\ \chi = \frac{5 \pm \sqrt{(39 - 2\sqrt{97})}}{2}$$

Ἂν ὑποτεθῇ, ὅτι ἡ ἑξῆς ἐξίσωσις $\chi^6 - 12\chi^5 + 42\chi^4 - 16\chi^3 - 79\chi^2 - 68\chi - 18 = 0$ ἔχει τρία ζεύγη ῥιζῶν ἴσων κεφαλαίων· τότε τίθεται $\chi^2 - 4\chi = \psi$ καὶ δίδεται εἰς ἐκείνην τὴν ἐξίσωσιν τὸ σχῆμα $(\chi^2 - 4\chi)^3 - 6(\chi^2 - 4\chi)^2 + 17(\chi^2 - 4\chi) - 18 = 0$. Τότε δίδουν αἱ δύω ἐξισώσεις $\psi^3 - 6\psi^2 + 17\psi - 18 = 0$, $\chi^2 - 4\chi = \psi$, τὰς ἓξ ζητουμένας ῥίζας. Αἱ τρεῖς ἀξίαι τοῦ ψ εἶναι 2, $2 + \sqrt{-5}$, $2 - \sqrt{-5}$. Ἑπομένως τὸ χ ἔχει τὰς ἀκολούθους ἓξ ἀξίας:

$$2 \pm \sqrt{6},\ 2 \pm \sqrt{(6 + \sqrt{-5})},\ 2 \pm \sqrt{(6 - \sqrt{-5})}.$$

Διὰ τῆς βοηθείας τῶν ἀορίστων προσθετῶν εἶναι ἐκτὸς τούτου εὐκολώτατον νὰ δοθῇ εἰς τὴν ἐξίσωσιν τὸ ἀπαιτούμενον σχῆμα.

Κ. Ἀόριστα ἢ διοφαντικὰ προβλήματα.

Ἂν ἀπὸ τὰς συνθήκας προβλήματος δὲν πηγάζωσι τόσαι ἐξισώσεις, ὅσαι καὶ ἄγνωστοι ὑπάρχουν, τότε τὸ πρόβλημα εἶναι ἀόριστον. Ἂς ἦναι δεδομέναι μ ἐξισώσεις τοῦ σχήματος $\alpha\chi + \alpha'\chi' + \alpha''\chi'' + \alpha'''\chi''' + \kappa\tau\lambda = \kappa$, καὶ ἂς ἦναι $M > \mu$. Τότε εὑρίσκεται διὰ τῆς ἀναζητήσεως $\mu - 1$ ἀγνώστων ἐξίσωσις τοῦ αὐτοῦ σχήματος, εἰς τὴν ὁποίαν ὅμως ἀπαντῶνται μόνον $M - \mu + 1$ ἀπὸ αὐτὰς τὰς ἀγνώστους. Διὰ νὰ λυθῇ τοιαύτη ἐξίσωσις, χρειάζεται νὰ ἐκφρασθῇ μία μόνον τοιαύτη ἄγνωστος διὰ τῶν λοιπῶν καὶ ἔπειτα νὰ δοθῇ εἰς αὐτὴν τὴν τελευταίαν ὁποιαδήποτε ἀξία ἀριθμοῦ. Ἂν ἔχῃ τις π. χ. τὴν ἐξίσωσιν $3\chi +$

$5\chi' - 7\chi'' = 17$, τότε εὑρίσκει $\chi'' = \frac{3\chi + 5\chi' - 17}{7}$. Ἠμπορεῖ τὸ χ καὶ χ' νὰ ἐκληφθῇ κατὰ θέλησιν καὶ ἐκ τούτου νὰ προσδιορισθῇ τὸ χ''.

Συνήθως ὅμως παρεισδύουν καί τινες ἄλλαι συνθῆκαι, αἱ ὁποῖαι δὲν παριστῶνται τόσον εὐκόλως δι' ἐξισώσεων, διὸ γίνεται τὸ πρᾶγμα δυσκολώτερον. Καθὼς π. χ. ἂν ἀπαιτηθῇ χ, χ', χ'', κτλ. νὰ ἦναι ὁλοκληροι ἀριθμοὶ, καὶ ἐκτὸς τούτου νὰ ἦναι καὶ θετικοὶ, κ. ο. κ. Εἰς ταύτην τὴν περίπτωσιν ἠμπορεῖ τις νὰ ὑποθέσῃ, ὅτι οἱ προσθέται κ, α, α', α'', α''', κτλ. εἶναι ὁλόκληροι ἀριθμοὶ, καθότι εἰς τὴν ἐναντίαν περίπτωσιν ἠμπορεῖ τις νὰ τὰς ἀπαλλάξῃ ἀπὸ τὰ κλάσματα ἂν τὰς πολλαπλασιάσῃ διὰ παράγοντός τινος.

Ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi + \alpha'\chi' = 1$, ὅταν ἀπαιτῆται τὸ χ καὶ χ' νὰ ἦναι ὁλοκληροι ἀριθμοὶ, ἠμπορεῖ νὰ λυθῇ ἢ κατὰ τὸν συνήθη τρόπον, ἢ διὰ βοηθείας τῶν συνεχῶν κλασμάτων. Ἡ τελευταία ἐργασία θεμελιοῦται εἰς τὰ θεωρήματα VI. VII. Σελ. 115 καὶ εἶναι πολλὰ εὐκολωτέρα τῆς ἄλλης. Ἂν εὑρεθῇ καθ' ὁποιονδήποτε τρόπον τὸ $\chi = \pi$, $\chi' = \rho$, ὥστε $\alpha\pi + \alpha\rho$ νὰ ἦναι $= 1$, τότε ἠμπορεῖ νὰ τεθῇ ἐν γένει $\chi = \pi + \alpha'\nu$, $\chi' = \rho - \alpha\nu$ καὶ ἔπειτα νὰ ἐκληφθῇ διὰ τὸ ν ὁποιοσδήποτε ὁλόκληρος, θετικὸς, ἢ ἀποθετικὸς ἀριθμός.

Τότε ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi + \alpha'\chi' = \kappa$ δίδει $\chi = \kappa\pi + \alpha'\nu$, $\chi' = \kappa\rho - \alpha\nu$. Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi + \alpha'\chi' + \alpha''\chi'' + \alpha'''\chi''' +$ κτλ. $= \kappa$ διδει $\chi = (\kappa - \alpha''\chi'' - \alpha'''\chi''' -$ κτλ.$)\,\pi + \alpha'\nu$, $\chi' = (\kappa - \alpha''\chi'' - \alpha'''\chi''' -$ κτλ.$)\,\pi - \alpha\nu$, ὅπου διὰ τὸ ν, χ'', χ''', χ'''', κτλ. ἠμποροῦν νὰ ἐκληφθῶσιν ὅλοι οἱ δυνατοὶ ὁλόκληροι θετικοὶ ἢ ἀποθετικοὶ ἀριθμοί.

Ἑπομένως αἱ ἄνω μ ἐξισώσεις μὲ Μ ἀγνώστους ἐπανάγονται εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\alpha\chi + \alpha'\chi' = 1$, καὶ αὕτη εἶναι πάντοτε δυνατὴ, ἐνόσῳ τὸ α καὶ α' δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν διαιρέτην. Μεταξὺ τῶν προσθετῶν α, α', α'', α''', κτλ. Πρέπει νὰ εὑρεθῶσιν, ὅταν ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi + \alpha'\chi' + \alpha''\chi'' +$ κτλ. $= \kappa$ ἦναι δυνατὴ, τοὐλάχιστον δύω, οἱ ὁποῖοι νὰ μὴν ἔχωσι κανένα κοινὸν διαιρέτην.

. . . .

1) Ποῖοι ἀριθμοὶ διὰ 3 διαιρούμενοι ἀφίνουν 1 ὑπόλοιπον καὶ διὰ 5 2;

Ἀπ. 7, 22, 37, 52, 67, 82, κ. ο. κ. ἐν γένει ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ τοῦ σχήματος $15\nu + 7$.

2) Ποῖοι ἀριθμοὶ διὰ 8 διαιρούμενοι ἀφίνουν 5 ὑπόλοιπον καὶ διὰ 11, 4;

Ἀπ. 37, 125, 213, 301, 389, κ. ο. κ. ἐν γένει ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ τοῦ σχήματος $88\nu + 37$.

3) Ποῖοι ἀριθμοὶ διὰ 9 διαιρούμενοι δὲν ἀφίνουν κἀνὲν ὑπόλοιπον, διὰ 14 ὅμως ἀφίνουν 8;

Ἀπ. 36, 162, 288, 414, 540, κ. ο. κ. ἐν γένει ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ τοῦ σχήματος $126\nu + 36$.

4) Χωρικὴ ἔφερεν αὐγὰ εἰς τὴν ἀγορὰν, περισσότερα ἀπὸ 100 καὶ ὀλιγώτερα ἀπὸ 200. Δὲν ἤξευρεν ὅμως ἂν πρέπῃ νὰ τὰ πωλήσῃ κατὰ δεκαπεντάδας ἢ κατὰ δωδεκάδας, καθότι εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν τὴν ἔμεναν 4 καὶ εἰς τὴν δευτέραν 10. Πόσα αὐγὰ εἶχεν αὐτή;

Ἀπ. 154.

5) Νέος ἔπαιζε μὲ μῆλα, τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς συνέπιπτε μεταξὺ ἑκατὸν καὶ τετρακοσίων, θέτων αὐτὰ εἰς σωρούς. Ὅταν ἔθετε 13 εἰς ἕκαστον σωρὸν, τὸν ἔμεναν 9 καὶ ὅταν ἔθετε 17, τὸν ἔμεναν 14. Πόσα μῆλα εἶχεν;

Ἀπ. 269.

Ἀνήκουν τὰ δύω τελευταῖα προβλήματα καθαυτὸ εἰς τὰ ἀόριστα;

6) Ποῖοι ἀριθμοὶ διὰ 3, 7 καὶ 10 διαιρούμενοι δίδουν κατὰ σειρὰν τὰ ὑπόλοιπα 2, 3 καὶ 9;

Ἀπ. 59, 269, 479, 689, 899, κ. ο. κ. ἐν γένει ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ τοῦ σχήματος 210ν + 59.

7) Ποῖοι ἀριθμοὶ διὰ 6, 12 καὶ 15 διαιρούμενοι ἀφίνουν κατὰ σειρὰν τὰ ὑπόλοιπα 1, 1, 10;

Ἀπ. 25, 85, 145, 205, 265, κ. ο. κ. ἐνγένει ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ τοῦ σχήματος 60ν + 25.

8) Ποῖοι ἀριθμοὶ διὰ 5, 6, 7, 8 διαιρούμενοι δίδουν κατὰ σειρὰν τὰ ὑπόλοιπα 3, 1, 0, 5;

Ἀπ. 133, 973, 1813, 2653, 3493, κ. ο. κ. ἐν γένει ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ τοῦ σχήματος 840ν + 133.

9) Ποῖοι ἀριθμοὶ διὰ 4, 6, 9, 15 διαιρούμενοι ἀφίνουν διὰ τοὺς τρεῖς πρώτους ἀριθμοὺς τὸ ὑπόλοιπον 3 καὶ διὰ τὸν τέταρτον 12.

Ἀπ. 147, 327, 507, 687, 867, κ. ο. κ. ἐνγένει ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ τοῦ σχήματος 180ν + 147.

10) Συνταγματάρχης ἐρωτηθεὶς ποσάριθμον εἶναι τὸ σύνταγμά του, ἀπεκρίθη: «Τὸ σύνταγμά μου σύγκειται περίπου ἀπὸ 2000 στρατιώτας· ἂν τοὺς τάξω κατὰ 5, 6 καὶ 7 κατὰ βάθος, δὲν μένει κἀνεὶς ὑπόλοιπος· ἂν ὅμως τοὺς τάξω κατὰ 11 καὶ 13, τότε μὲ μένουν κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον 9 περισσότεροι καὶ κατὰ τὸν δεύτερον μὲ λείπουν 8.» Ποία ἦτον ἡ δύναμις τοῦ συντάγματος;

Ἀπ. 1890.

11) Λοχαγὸς ἤθελε νὰ ἐκτελέσῃ μὲ τὸν λόχον του, συνιστάμενον ἀπὸ 100 ἕως 200 στρατιώτας, ἐπιπορείαν. Ἂν αὐτοὶ ἐπεπορεύοντο ἀνὰ 2, 4, 8 καὶ 10 ἤθελε μένει ἑκάστοτε εἷς ὑπόλοιπος· ἂν ὅμως ἐπεπορεύοντο ἀνὰ 6 ἢ 12 ἤθελαν μείνει 5. Πόση ἦτον ἡ δύναμις τοῦ λόχου;

Ἀπ. 161 στρατιωτῶν.

12) Λοχαγὸς ἐρωτηθεὶς: πόσους στρατιώτας περιεῖχεν ὁ λόχος του, ἀπεκρίθη: «ὅταν ταχθῶσιν ἀνὰ 2 κατὰ βάθος, μένει εἷς ὑπόλοιπος εἰς τὸν τελευταῖον στοῖχον ἀνὰ 3, μένουν 2· ἀνὰ 4 μένουν 3· ἀνὰ 5 μένουν 4. ἀνὰ 6, 5. ὅταν ὅμως ταχθῶσιν ἀνὰ 7, μένουν διὰ τὸν τελευταῖον στοῖχον τόσοι στρατιῶται, ὅσοι καὶ δι' ἕκαστον τῶν λοιπῶν. Πόσοι στρατιῶται ἦσαν εἰς τὸν λόχον;

Ἀπ. 119.

Καὶ αὐτὰ τὰ τρία προβλήματα δὲν ἀνήκουν καθαυτὸ εἰς τὰ ἀόριστα, καθὼς καὶ ὅσα ἄλλα τοιαῦτα, εἶναι προσδιωρισμένα διὰ τῆς φύσεως τῶν συνθηκῶν τοῦ προβλήματος.

13) Χαρτοπαίκτης μετὰ τὸ παιγνίδιον ἐμέτρα τὰ ὅσα φλωρία εἶχε κερδίσει: τὴν πρώτην φορὰν, ἐπειδὴ τὰ ἐμέτρα ἀνὰ 3, τὸν ἔμειναν 2 ὑπόλοιπα· τὴν δευτέραν τὸν ἔμεινε μόνον 1, καθότι τὰ ἐμέτρα ἀνὰ 5· Ἔπειτα ἤρχισε πάλιν νὰ παίζῃ καὶ ἔχασεν 6 φλωρία. τότε ἐμέτρησε τὰ ὑπόλοιπα ἀνὰ 7 καὶ 11 καὶ τὸν ἔμειναν ἑκάστοτε 13. Πόσα φλωρία εἶχε κερδίσει εἰς τὸ πρῶτον παιγνίδιον;

Ἀπ. 86, ἢ 1241, ἢ 2396, κ. ο. κ.

14) Ζητοῦνται δύω τοιοῦτοι ἀριθμοὶ, ὥστε ὅταν ὁ πρῶτος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 17 καὶ ὁ δεύτερος ἐπὶ 26, τὸ πρῶτον γινόμενον νὰ ἦναι κατὰ 7 μεγαλήτερον τοῦ δευτέρου. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. 5 καὶ 3, ἢ 31 καὶ 20, ἢ 57 καὶ 37, κ. ο. κ.

15) Εἰς κανονουργεῖον χύνονται δύω εἰδῶν πυροβόλα. Ἀπὸ τὸ πρῶτον εἶδος βαρύνει ἕκαστον 16 κάντάρια καὶ ἀπὸ τὸ δεύ-

τερον 25. μόλον τοῦτο διὰ τὸ δεύτερον ἐξωδεύθη ἐν καντάρι ὀλιγώτερον παρὰ διά το πρῶτον. Πόσα πυροβόλα ἦσαν ἀπὸ ἕκαστον εἶδος;

Ἀπ. Ἀπὸ τὸ πρῶτον 11 καὶ ἀπὸ τὸ δεύτερον 7, ἢ ἀπὸ τὸ πρῶτον 36 καὶ ἀπὸ τὸ δεύτερον 23, κ. ο. κ.

16) Κάποιος ἤλλαξεν εἰς τὴν Βιέννην ἑπτάρια μὲ 17=ρια καὶ ἔλαβεν ἀκόμη 2 φιορίνια ἢ 120 κραϊτσάρια. Πόσα 7=ρια καὶ πόσα 17=ρια ἀντηλλάχθησαν;

Ἀπ. 22 μὲ 2, ἢ 39 μὲ 9, ἢ 56 μὲ 16, κ. ο. κ.

17) Ζητοῦνται τρεῖς ἀριθμοί, ὥστε ὅταν ὁ πρῶτος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 7, ὁ δεύτερος ἐπὶ 9 καὶ ὁ τρίτος ἐπὶ 11, τὸ πρῶτον γινόμενον νὰ ἦναι κατὰ 1 μικρότερον τοῦ δευτέρου καὶ κατὰ 2 μεγαλήτερον τοῦ τρίτου. Ποῖος εἶναι;

Ἀπ. 5, 4, 3· ἢ 104, 81, 66· ἢ 203, 158, 129· κ. ο. κ.

18) Ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παῖδες ἐμήθησαν εἰς ξενοδοχεῖον· ἕκαστος ἀνὴρ ἐξώδευσε 19 δρ. ἑκάστη γυνὴ 10 καὶ ἕκαστος παῖς 8. Οἱ ἄνδρες εἶχαν ἐξοδεύσει μαζῇ 7 δρ. περισσοτέρας ἀπὸ τὰς γυναῖκας καὶ 15 περισσοτέρας ἀπὸ τοὺς παιδας. Πόσοι ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παῖδες ἦσαν ἐκεῖ;

Ἀπ. 13 ἄνδρες, 24 γυναῖκες καὶ 29 παῖδες· ἢ 53 ἄνδρες, 100 γυναῖκες καὶ 124 παῖδες. κ. ο. κ.

19) Ὁ ἀριθμὸς 142 πρέπει νὰ μερισθῇ εἰς δύω τοιαῦτα μέρη, ὥστε ὁ ἓν νὰ ἠμπορῇ νὰ διαιρεθῇ διὰ 9 καὶ τὸ ἄλλο διὰ 14. Ποῖα εἶναι τὰ μέρη;

Ἀπ. 72 καὶ 70.

20) Ὁ ἀριθμὸς 1591 πρέπει νὰ χωρισθῇ εἰς δύω μέρη, ὥστε τὸ ἓν νὰ ἠμπορῇ νὰ διαιρεθῇ διὰ 23 καὶ τὸ ἄλλο διὰ 34. Ποῖα εἶναι τὰ μέρη του;

Ἀπ. 1081 καὶ 510, ἢ 299 καὶ 1292.

21) Ποῖα εἶναι τὰ δύω μέρη εἰς τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 4890, ὥστε τὸ πρῶτον διὰ 37 διαιρούμενον νὰ ἀφίνῃ τὸ ὑπόλοιπον 3 καὶ τὸ δεύτερον διὰ 54 τὸ ὑπόλοιπον 6;

Ἀπ. 780 καὶ 4110, ἢ 2778 καὶ 2112 ἢ 4776 καὶ 114.

22) Συντροφία ἀνδρῶν καὶ γυναικῶν ἐξώδευσε 36 τάλ. καὶ 12 γρ. Ἕκαστος ἀνὴρ 19 γρ. καὶ ἑκάστη γυνὴ 13. Πόσοι ἄνδρες καὶ πόσαι γυναῖκες ἦσαν;

Ἀπ. 3 καὶ 63, ἢ 16 καὶ 44, ἢ 29 καὶ 25, ἢ 42 καὶ 6.

23) Κάποιος ἠγόρασε χῆνας καὶ πετεινούς. ἑκάστης χηνὸς ἡ τιμὴ ἦτον 17 λεπτὰ καὶ τοῦ πετεινοῦ 29. Διὰ τοὺς πετεινοὺς ἐπλήρωσε 7 λεπ. περισσότερον παρὰ διὰ τὰς χῆνας. Πόσα ἠγόρασεν ἀπὸ ἕκαστον εἶδος;

Ἀπ. 3 καὶ 2, ἢ 32 καὶ 19, κτλ.

24) Ἔμπορος ἠγόρασεν ἵππους καὶ βόας μαζῇ διὰ 1770 τάλ. καὶ ἐπλήρωσε δι' ἕκαστον ἵππον 31 τάλ. καὶ δι' ἕκαστον βοῦν 21. Πόσους ἵππους καὶ βόας ἠγόρασεν;

Ἀπ. 9 καὶ 71, ἢ 30 καὶ 40, ἢ 51 καὶ 9.

25) Κάποιος ἠγόρασεν 124 ζῶα, δηλ. χοίρους, αἶγας καὶ πρόβατα διὰ 400 τάλ. Ἡ τιμὴ ἑνὸς χοίρου ἦτον $4\frac{1}{2}$ τάλ., τῆς αἰγὸς $3\frac{1}{8}$. καὶ τοῦ προβάτου $1\frac{1}{4}$. Πόσα ζῶα ἦσαν ἀπὸ ἕκαστον εἶδος;

Ἀπ. 17, 99, 8. ἢ 40, 60, 24 ἢ 63, 21, 40.

26) Ὁ ἀριθμὸς 30 πρέπει νὰ μερισθῇ εἰς τρία μέρη, ὥστε ἂν τὸ πρῶτον πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 17, τὸ δεύτερον ἐπὶ $11\frac{1}{3}$, τὸ τρίτον ἐπὶ 3 καὶ προστεθῶσι τὰ τρία γινόμενα, τὸ κεφάλαιον νὰ ἦναι 880. Ποῖα εἶναι αὐτὰ τὰ μέρη;

Ἀπ. 6, 11, 13.

27) Ὁ ἀριθμὸς 100 πρέπει νὰ διαιρεθῇ εἰς τρία μέρη, ὥστε ἂν τὸ πρῶτον πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 17, τὸ δεύτερον ἐπὶ 11, τὸ

τρίτον ἐπὶ 3 καὶ προστεθῶσι τὰ τρία γινόμενα, τὸ κεφάλαιον νὰ ἦναι 880. Ποῖα εἶναι αὐτὰ τὰ μέρη;

Ἀπ. 2, 69, 29· ἢ 6, 62, 32. ἢ 10, 55, 35· κ. ο. κ., ἐν ὅλοις 10 διάφοροι περιπτώσεις.

28) Ζητοῦνται 3 ἀριθμοί, ὥστε ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ πρῶτος ἐπὶ 5, ὁ δεύτερος ἐπὶ 13 καὶ ὁ τρίτος ἐπὶ 18 καὶ προστεθῶσι τὰ γινόμενα, νὰ προκύπτῃ ὁ ἀριθμὸς 997. Ἂν ὅμως ὁ πρῶτος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 11, ὁ δεύτερος ἐπὶ 20 καὶ ὁ τρίτος ἐπὶ 37, τὸ κεφάλαιον τῶν γινομένων νὰ ἦναι = 1866. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. 16, 29, 30.

29) Χωρικὴ ἐπώλησε χῆνας, ὄρνιθας, πετεινοὺς καὶ περιστεράς, ὅλα μαζῇ 76 μὲ τὴν ἑξῆς τιμήν: τὴν χῆνα πρὸς 20 γρ. τὴν ὄρνιθα πρὸς $10\frac{1}{2}$, τὸν πετεινὸν πρὸς 7 καὶ τὴν περιστερὰν πρὸς 4. Δι' ὅλα ἔλαβεν 29 τάλ. καὶ 11 γρ. Πόσα εἶχεν ἀπὸ ἕκαστον εἶδος;

Ἀπ. 2 χῆνας, 46 ὄρνιθας, 24 πετεινοὺς καὶ 4 περιστεράς· ἢ 10 χῆνας, 30 ὄρνιθας, 16 πετεινοὺς καὶ 20 περιστεράς. κ. ο. κ.

30) 30 ἄτομα ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παῖδες, ἐξώδευσαν μαζῇ 58 τάλ. ἕκαστος ἀνὴρ 3 τάλ. καὶ 12 γρ. ἑκάστη γυνὴ 1 τάλ. καὶ 9 γρ. καὶ ἕκαστος παῖς 6 γρ. Πόσοι ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παῖδες ἦσαν εἰς τὴν συντροφίαν;

Ἀπ. 10 ἄνδρες, 16 γυναῖκες καὶ 4 παῖδες.

31) Ζητοῦνται δύω ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ γινόμενον εἶναι ἴσα. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. Ἂν ἐκφράσωσι χ καὶ ψ τοὺς δύω ζητουμένους ἀριθμούς, τότε εἶναι τὸ χ κατὰ θέλησιν καὶ τὸ $\psi = \frac{\chi}{\chi - 1}$.

32) Ζητοῦνται δύω ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον ἔχει πρὸς τὸ γινόμενον ὡς μ πρὸς ν. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. Ἂν χ καὶ ψ δεικνύουν τοὺς δύω ζητουμένους ἀριθμούς, τότε εἶναι τὸ χ κατὰ θέλησιν καὶ τὸ $\psi = \frac{\nu\chi}{\mu\chi - \nu}$.

33) Ζητοῦνται δύω ὁλοσχερεῖς ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον καὶ γινόμενον προστιθέμενα δίδουν 139. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. 1 καὶ 69, 3 καὶ 34, 4 καὶ 27, 6 καὶ 19, 9 καὶ 13.

34) Ποῖοι εἶναι οἱ δύω ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον ὑπερέχει τὴν διπλασίαν διαφορὰν των κατὰ 100;

Ἀπ. 10 καὶ 10, 14 καὶ 8, 22 καὶ 6, 30 καὶ 5, 46 καὶ 4, 94 καὶ 3.

35) Πῶς μερίζεται τὸ κλάσμα $\frac{230}{77}$ εἰς δύω ἄλλα κλάσματα, τῶν ὁποίων οἱ παρωνομασταὶ νὰ ἦναι 7 καὶ 11.

Ἀπ. Εἰς $\frac{5}{7}$ καὶ $\frac{25}{11}$, ἢ $\frac{12}{7}$ καὶ $\frac{14}{11}$, ἢ $\frac{19}{7}$ καὶ $\frac{3}{11}$.

36) Ζητοῦνται δύω ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα προστιθέμενα δίδουν ἄλλον τετραγωνικὸν ἀριθμόν. Πῶς εὑρίσκονται αὐτοὶ οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. Ἂν π καὶ ρ δυκνύουν δύω ὁποιουσδήποτε ἀριθμούς, τότε εἶναι ὁ εἷς τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν $= \pi^2 - \rho^2$ καὶ ὁ ἄλλος $= 2\pi\rho$. π. χ. 3 καὶ 4, 6 καὶ 8, 5 καὶ 12. κ. ο. κ.

37) Ἂν τὸ α καὶ γ ἐκφράζωσι δύω ῥητοὺς ἀριθμούς: ποῖοι ῥητοὶ ἀριθμοὶ ἠμποροῦν νὰ ἐκληφθῶσι διὰ τὸ χ καὶ ψ, ἂν ὁ τύπος $\alpha^2\chi^2 + \gamma\psi^2$ πρέπῃ νὰ ἦναι ἐντελὲς τετράγωνον;

Ἀπ. $\chi = \gamma\nu^2 - \mu^2$, $\psi = 2\alpha\mu\nu$· καθότι εἶναι $\alpha^2(\gamma\nu^2 - \mu^2)^2 + \gamma(2\alpha\mu\nu)^2 = \alpha^2(\gamma\nu^2 + \mu^2)^2$; Διὰ τὸ μ καὶ ν ἠμποροῦν νὰ ἐκληφθῶσι θεληματικοὶ ῥητοὶ ἀριθμοί, ὅταν τὸ α καὶ γ προσδιορισθῶσι καὶ τότε πηγάζουν ἐκ τούτων αἱ ἀξίαι τοῦ χ καὶ ψ.

38) Ὁποία ἀξία ἠμπορεῖ νὰ δοθῇ εἰς τὴν ἀόριστον ποσότητα χ, ἂν πρέπῃ ὁ τύπος $α^2χ^2 + γ$ νὰ ἦναι ἐντελὲς τετράγωνον;

Ἀπ. $χ = \frac{γν^2 - μ^2}{2αμν}$· καθότι εἶναι: $α^2\left(\frac{γν^2 - μ^2}{2αμν}\right)^2 + γ$

$$= \left(\frac{γν^2 + μ^2}{2μν}\right)^2.$$

39) Ὅταν α, β, γ, δεικνύωσι τρεῖς ῥητοὺς ἀριθμούς: ὁποῖοι ῥητοὶ ἀριθμοὶ ἠμποροῦν νὰ ἐκληφθῶσι διὰ τὸ χ καὶ ψ, ὥστε νὰ γίνῃ ὁ τύπος $α^2χ^2 + βχψ + γψ^2$ ἐντελὲς τετράγωνον;

Ἀπ. $χ = μ^2 - γν^2$, $ψ = βν^2 - 2αμν$: καθότι εἶναι $(αμ^2 - βμν + αγν^2)^2 = α^2(μ^2 - γν^2)^2 + β(μ^2 - γν^2)(βν^2 - 2αμν) + γ(βν^2 - 2αμν)^2$.

40) Ὁποία ἀξία ἠμπορεῖ νὰ ἐκληφθῇ διὰ τὸ χ, ἂν ὁ τύπος $α^2χ^2 + βχ + γ$ πρέπῃ νὰ ἦναι τετράγωνον;

Ἀπ. $χ = \frac{μ^2 - γν^2}{βν^2 - 2αμν}$· καθότι εἶναι $α^2\left(\frac{μ^2 - γν^2}{βν^2 - 2αμν}\right)^2$

$$+ β\left(\frac{μ^2 - γν^2}{βν^2 - 2αμν}\right) + γ = \left(\frac{αμ^2 - βμν + αγν^2}{βν^2 - 2αμν}\right)^2.$$

41) Ὁποία ἀξία ἠμπορεῖ νὰ δοθῇ εἰς τὸ χ, διὰ νὰ γίνῃ ὁ τύπος $α^2χ^2 + βχ + γ^2$ ἐντελὲς τετράγωνον;

Ἀπ. $χ = \frac{βν^2 - 2γμν}{μ^2 - αν^2}$, καθότι εἶναι: $α\left(\frac{βν^2 - 2γμν}{μ^2 - αν^2}\right)^2$

$$+ β\left(\frac{βν^2 - 2γμν}{μ^2 - αν^2}\right) + γ^2 = \left(\frac{γμ^2 - βμν + αγν^2}{μ^2 - αν^2}\right)^2.$$

42) Ἂς ἦναι $χ = φ$, μία ἀξία τοῦ χ, διὰ τὴν ὁποίαν ὁ τύπος $αχ^2 + βχ + γ$ θέλει γίνει ἐντελὲς τετράγωνον: πῶς πρέπει νὰ ἀρχίσῃ τις, διὰ νὰ εὕρῃ περισσοτέρας τοιαύτας ἀξίας;

Ἀπ. Ἀντικαθίσταται τὸ $φ + πψ$ εἰς τὸ χ εἰς τὸν δοθέντα τύπον καὶ τότε μεταβάλλεται τὸ αὐτὸ εἰς ἄλλον τοῦ σχήματος $ζψ^2 + ηψ + θ^2$. Αὐτὸς ὁ τύπος γίνεται ἐντελὲς τετράγωνον, ἂν τεθῇ τὸ $ψ = \frac{ην^2 - 2θμν}{μ^2 - ζν^2}$, ἑπομένως καὶ ὁ δοθεὶς τύπος, ἂν τεθῇ τὸ $χ = φ + \frac{π(ην^2 - 2θμν)}{μ^2 - ζν^2}$.

43) Ἂν προϋποτεθῇ ὅτι ὁ τύπος $αχ^2 + βχψ + γψ^2$ ἠμπορεῖ νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο ῥητοὺς παράγοντας $μχ + νψ$, $μ'χ + ν'ψ$, ὥστε τὸ $β^2 - 4αγ$ νὰ γίνῃ ἐντελὲς τετράγωνον: Ὁποῖαι ἀξίαι πρέπει νὰ ἐκληφθῶσι διὰ τὸ χ, ψ ἂν ὁ τύπος $αχ^2 + βχψ + γψ^2$ πρέπῃ νὰ γίνῃ ἐντελὲς τετράγωνον;

Ἀπ. $χ = νπ^2 - ν'ρ^2$, $ψ = μ'ρ^2 - μπ^2$· καθότι τότε εἶναι $μχ + νψ = (μ'ν - μν')ρ^2$ καὶ $μ'χ + ν'ψ = (μ'ν - μν')π^2$, ἑπομένως $αχ^2 + βχψ + γψ^2 = (μχ + νψ)(μ'χ + ν'ψ) = (μ'ν - μν')^2π^2ρ^2$.

44. Πῶς λύεται ἡ ἐξίσωσις $χ^2 - αψ^2 = 1$, ἂν τὸ Α, ἐκτὸς τετραγωνικοῦ ἀριθμοῦ, παριστᾷ ὁποιονδήποτε ἄλλον θετικὸν ἀριθμόν, καὶ προσδιορισθῇ ὅτι τὸ χ καὶ ψ πρέπει νὰ ἦναι ὁλοσχερεῖς ἀριθμοί;

Ἀπ. Ἡ λύσις αὐτοῦ τοῦ προβλήματος περιλαμβάνεται εἰς τὰ θεωρήματα 3 καὶ 4 Σελ. 122. αἱ ἀξίαι τοῦ χ καὶ ψ δὲν εἶναι ἄλλο εἰμὴ ὁ ἀριθμητὴς καὶ παρωνομαστὴς τῆς δοθείσης ἐκεῖ ὡς ἔγγιστα ἀξίας, π. χ. διὰ τὸ $Α = 106$, εἶναι $χ = 4005$, $ψ = 389$. διὰ τὸ $Α = 124$, εἶναι $χ = 4620799$, $ψ = 414960$. διὰ τὸ $Α = 133$, εἶναι τὸ $χ = 2588599$, $ψ = 224460$. Οἱ ἐδῶ δεδομένοι ἀριθμοὶ εἶναι κατὰ τ' ἄλλα οἱ μικρότεροι ἀφ' ὅσους ἠμπορεῖ τις νὰ εὕρῃ. Οὗτος ὁ τρόπος τῆς ἐργασίας ἐδιδάχθη κατὰ πρῶτον ἀπὸ τὸν Λαγράνζην, ὁδηγεῖ πάντοτε μὲ βεβαιότητα εἰς τὸν σκοπὸν καὶ εἶναι πολλὰ εὐκολώτερος ἀπὸ τὸν τοῦ Πέλλ, τὸν ὁποῖον ἀναφέρει ὁ Αὔλερ.

45) Ἂν $χ = μ$, $ψ = ν$ ἦναι γνωσταὶ ἀξίαι τοῦ χ καὶ ψ εἰς ὁλοκλήρους ἀριθμούς, αἱ ὁποῖαι λύουν τὴν ἐξίσωσιν $χ^2 - Αψ^2$,

$= 1$, ὅπου τὸ Λ εἶναι ὁλόκληρος ἀριθμός: πῶς ἠμποροῦν νὰ εὑρεθῶσι καὶ ἄλλαι ἀξίαι τοῦ χ καὶ ψ εἰς ὁλοκλήρους ἀριθμούς, αἱ ὁποῖαι ἠμποροῦν νὰ λύσωσι τὴν ἐξίσωσιν;

Ἀπ. $\chi = \frac{(\mu + \nu\sqrt{\Lambda})^\pi - (\mu - \nu\sqrt{\Lambda})^\pi}{2}$

$$\psi = \frac{(\mu + \nu\sqrt{\Lambda})^\pi - (\mu - \nu\sqrt{\Lambda})^\pi}{2\sqrt{\Lambda}}$$

Τὸ ἄῤῥητον ἀποβάλλεται διὰ τῆς ἀναπτύξεως.

Διὰ τὸ $\pi = 0$ εἶναι $\chi = 1$, $\psi = 0$

Διὰ τὸ $\pi = 1$ εἶναι $\chi = \mu$, $\psi = \nu$, αἱ ἤδη γνωσταὶ ἀξίαι.

Διὰ τὸ $\pi = 2$ εἶναι $\chi = \mu^2 + \Lambda\nu^2$, $\psi = 2\mu\nu$.

Διὰ τὸ $\pi = 3$ εἶναι $\chi = \mu^3 + 3\Lambda\mu\nu^2$, $\psi = 3\mu^2\nu + \Lambda\nu^3$.

Διὰ τὸ $\pi = 4$ εἶναι $\chi = \mu^4 + 6\Lambda\mu^2\nu^2 + \Lambda^2\nu^4$, $\psi = 4\mu^3\nu + 4\Lambda\mu\nu^3$.

κ. ο. κ.

Πῶς ἠμπορεῖ τὸ πρόβλημα, τοῦ νὰ γίνῃ ὁ τύπος $\zeta\chi^2 + \eta\chi\psi + \theta\psi^2$ τετράγωνον (ἂν τοιοῦτόν τι ἐν γένει ἦναι δυνατὸν) νὰ ἐπαναχθῇ εἰς τὸ πρόβλημα, τοῦ νὰ ἀναλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\chi^2 - \Lambda\psi^2 = 1$ εἰς ὁλοκλήρους ἀριθμούς;

46) Ζητοῦνται τρεῖς τοιοῦτοι ἀριθμοί, ὥστε τὸ κεφάλαιον ὅλων, καθὼς καὶ τὸ κεφάλαιον αὐτῶν ἀνὰ δύω λαμβανομένων, νὰ ἦναι ἐντελὴς τετραγωνικὸς ἀριθμός· Ποῖοι εἶναι αὐτοὶ οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. 41, 80, 320: ἢ 22, 42, 68 ¼ καὶ ἄπειρον πλῆθος ἄλλων.

47) Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων των;

Ἀπ. $\frac{4}{7}$ καὶ $\frac{3}{7}$, $\frac{8}{13}$, καὶ $\frac{7}{13}$, $\frac{10}{19}$ καὶ $\frac{9}{19}$ καὶ ἄπειρον πλῆθος ἄλλων.

48) Ὁποῖα ὑπόλοιπα ἠμπορεῖ νὰ ἀφήσῃ εἰς τετραγωνικὸς ἀριθμὸς διαιρούμενος διὰ τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4, 5, 6. κ. ο. κ;

Ἀπ. Διὰ τὸ 2, 3 καὶ 4 τὰ ὑπόλοιπα 0, 1. διὰ τὸ 5 τὰ ὑπό-

λοιπα 0, 1, 4· διὰ τὸ 6 τὰ 0, 1, 3, 4. διὰ τὸ 7 τὰ 0, 1, 2, 4. διὰ τὸ 8 τὰ 0, 1, 4. διὰ τὸ 9 τὰ 0, 1, 4, 7. διὰ τὸ 10 τὰ 0, 1, 4, 5, 6, 9. κ. ο. κ.

Ἠμπορεῖ ὁ τύπος $3\chi^\nu + 2$ νὰ γίνῃ ποτὲ ἐντελὲς τετράγωνον, ἂν ἐκληφθῶσι διὰ τὸ χ ὁλόκληροι ἀριθμοί; Ἠμπορεῖ ὁ τύπος $14\chi + 3$ νὰ γίνῃ τοιοῦτος;

49) Ὁποῖα ὑπόλοιπα ἠμπορεῖ νὰ ἀφήσῃ εἰς κυβικὸς ἀριθμὸς διαιρούμενος διὰ τῶν ἀριθμῶν 7, 8, 9;

Ἀπ. Διὰ τὸ 7 τὰ ὑπόλοιπα 0, 1, 6. διὰ τὸ 8 τὰ 0, 1, 3, 5, 7. διὰ τὸ 9 τὰ 0, 1, 8.

Ἠμποροῦν οἱ τύποι $8\chi^\nu + 6$; $18\chi^\nu + 7$, νὰ γίνωσι ποτὲ ἐντελεῖς κύβοι, ἂν ἐκληφθῶσι διὰ τὸ χ ὁλόκληροι ἀριθμοί;

50) Πῶς ἠμποροῦν νὰ εὑρεθῶσι δύω ἀριθμοί, ὥστε τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων των νὰ ἦναι γινόμενον δύω παραγόντων, ἐξ ὧν πάλιν ἕκαςος νὰ ἦναι κεφάλαιον δύο τετραγώνων;

Ἀπ. Ἡ ἀναλυτικὴ ἐξίσωσις $(\mu\mu' + \nu\nu')^2 + (\mu\nu' - \nu\mu')^2 = (\mu^2 + \nu^2)(\mu'^2 + \nu'^2)$ λύει αὐτὸ τὸ πρόβλημα, ὅπου ἠμποροῦν νὰ ἐκληφθῶσι διὰ τὸ μ, ν, μ′ ν′, ὅλοι οἱ δυνατοὶ ὁλόκληροι ἢ κλασματικοὶ ἀριθμοί.

51) Πῶς εὑρίσκονται τέσσαρα τετράγωνα, τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον νὰ ἦναι γινόμενον δύω παραγόντων, ἐξ ὧν ὁ πρῶτος νὰ ἦναι τὸ κεφάλαιον τριῶν τετραγώνων καὶ ὁ δεύτερος δύω τετραγώνων;

Ἀπ· Ἡ ἀναλυτικὴ ἐξίσωσις

$$(\mu\mu' + \nu\nu')^2 + (\mu\nu' - \nu\mu')^2 + (\pi\mu')^2 + (\pi\nu')^2 = (\mu^2 + \nu^2 + \pi^2)(\mu'^2 + \nu'^2)$$

λύει τὸ ζητούμενον.

52) Πῶς ἠμποροῦν νὰ εὑρεθῶσι τέσσαρα τετράγωνα, τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον νὰ ἠμπορῇ νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύω παράγοντας, ἐξ ὧν ἕκαστος νὰ ἀποτελῇ τὸ κεφάλαιον 3 τετραγώνων;

'Απ. Ἡ ἀναλυτικὴ ἐξίσωσις

$$(\mu\mu'+\nu\nu'+\pi\pi')^2+(\mu\nu'-\nu\mu')^2+(\mu\pi'-\pi\mu')^2+(\nu\pi'-\pi\nu')^2$$
$$=(\mu^2+\nu^2+\pi^2)(\mu'^2+\nu'^2+\pi'^2)$$

λύει τὸ παρὸν πρόβλημα.

53) Πῶς εὑρίσκονται τέσσαρα τετράγωνα, τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον νὰ σύγκειται ἀπὸ τέσσαρας παράγοντας, ἐξ ὧν ἕκαςος νὰ σχηματίζῃ πάλιν τὸ κεφάλαιον τεσσάρων τετραγώνων;

'Απ. Ἡ ἀναλυτικὴ ἐξίσωσις

$$(\mu\mu'+\nu\nu'+\pi\pi'+\rho\rho')^2+(\mu\nu'-\nu\mu'+\pi\rho'-\rho\pi')^2$$
$$+(\mu\pi'-\pi\mu'+\rho\nu'-\nu\rho')^2+(\nu\pi'-\pi\nu'+\mu\rho'-\rho\mu')^2=$$
$$(\mu^2+\nu^2+\pi^2+\rho^2)(\mu'^2-\nu'^2+\pi'^2-\rho'^2)$$

λύει τὸ ζητούμενον.

54) Ὁποῖαι ἀξίαι ἠμποροῦν νὰ ἐκληφθῶσιν ἀντὶ τῶν ἀορίςων ποσοτήτων χ, ψ, ἂν ὁ τύπος, $\chi^2+\mathrm{A}\psi^2$ πρέπῃ νὰ ἦναι γινόμενον δύω παραγόντων τοῦ αὐτοῦ σχήματος;

'Απ. $\chi=\mu\mu'+\mathrm{A}\nu\nu'$, $\psi=\mu\nu'-\nu\mu'$. καθότι εἶναι $(\mu\mu'+\mathrm{A}\nu\nu')^2+\mathrm{A}(\mu\nu'-\nu\mu')^2=(\mu^2+\mathrm{A}\nu^2)(\mu'^2+\mathrm{A}\nu'^2)$.

55) Ἔστωσαν α, α', α'' κτλ. τα ὑπόλοιπα τῶν ἀριθμῶν A, A', A'', κτλ. διαιρουμένων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $\varkappa$, τότε ἠμποροῦν νὰ παρασταθῶσιν αὐτοὶ οἱ ἀριθμοὶ διὰ τοῦ τύπου $\nu\varkappa+\alpha$, $\nu'\varkappa+\alpha'$, $\nu''\varkappa+\alpha''$, κτλ. ἑπομένως καὶ τὸ ὑπόλοιπον τοῦ γινομένου $\mathrm{A}\mathrm{A}'\mathrm{A}''$ κτλ. εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τοῦ γινομένου $\alpha\alpha'\alpha''$ κτλ. Πῶς ἠμπορεῖ νὰ ἐκφρασθῇ ἐνσυντόμῳ τὸ ὑπόλοιπον ὑψηλῆς δυνάμεως, ὅταν διαιρεθῇ δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ;

'Απ. Ἐπανάγεται ἡ δοθεῖσα δύναμις εἰς μικροτέρας καὶ ζητοῦνται τὰ ὑπόλοιπα αὐτῶν· τὸ γινόμενον τῶν ὑπολοίπων τούτων διὰ $\varkappa$ διαιρούμενον, δίδει τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον. Οὕτως ἠμπορεῖ τις ἀρχίζων ἀπὸ τὴν δευτέραν δύναμιν νὰ προχωρήσῃ κατ' ὀλίγον εἰς τὴν τετάρτην, ὀγδόην, κ. ο. κ. π. χ. τὸ ὑπόλοιπον τοῦ

543^{113} διὰ 257 διαιρούμενον, ἤ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ, τὸ ὑπόλοιπον τοῦ 29^{113}, εἶναι $=57$,

. . . .

» Ἔςω π ὁποιοσδήποτε ἀρχικὸς ἀριθμὸς καὶ A ἄλλος ἀριθμὸς, μὴ διαιρούμενος διὰ τοῦ π: τότε ἡ δύναμις $\mathrm{A}^{\pi-1}$, διαιρουμένη διὰ τοῦ π θέλει ἀφίνει πάντοτε 1 διὰ ὑπόλοιπον. »

Πῶς ἀποδεικνύεται τοῦτο τὸ σημαντικώτατον θεώρημα τῆς ἀριθμητικῆς;

. . . .

56) Ὅταν τὸ π ἦναι ἀρχικὸς ἀριθμὸς καὶ τὸ μ ὁποιοσδήποτε μεγάλος ἀριθμὸς, πῶς ἠμπορεῖ τότε διὰ τῆς βοηθείας τοῦ θεωρήματος τούτου, νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον δυνάμεως A^{μ} συντομώτερα, παρὰ εἰς τὸ προλαβὸν πρόβλημα;

'Απ. Ἂν δώσῃ τὸ μ διὰ $\pi-1$ διαιρούμενον τὸ ὑπόλοιπον ρ, τότε εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τοῦ A^{μ} τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τοῦ A^{ρ}· καὶ $\rho<\pi-1$.

57) Εἰς φύλλον τῶν ἐφημερίδων τοῦ Βερολίνου εὑρέθησαν θέματα περὶ τοῦ ἀπείρου μεγέθους τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις προκύπτει ἀπὸ τὴν διπλῆν δύναμιν $9^{9^9}=9^{387420489}$. Περὶ τούτου ἐρρέθησάν τινα καὶ τῷ ὄντι τὸ μέγεθος αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ ὑπερβαίνει τὰ ὅρια τῆς φαντασίας· κατὰ τὸν ὑπολογισμόν μου μὲ τὴν βοήθειαν τῶν λογαρίθμων γράφεται μὲ 369693100 χαρακτῆρας. Ὁποῖα ὑπόλοιπα ἀφίνει αὐτὸς ὁ μέγιστος ἀριθμὸς διαιρούμενος διὰ τῶν ἀρχικῶν ἀριθμῶν 11, 13, 17, 19;

'Απ. Διὰ τοῦ 11 τὸ ὑπόλοιπον 5, διὰ τοῦ 13 τὸ 3, διὰ τοῦ 17 τὸ 9 καὶ διὰ τοῦ 19 τὸ 16.

58) Ὁποῖον ὑπόλοιπον ἀφίνει ἡ δύναμις $\mathrm{A}^{\frac{\pi-1}{2}}$ διαιρουμένη διὰ π, ὅταν τὸ π ἦναι ἀρχικὸς ἀριθμὸς καὶ τὸ A δὲν ἦναι διὰ τοῦ π διαιρετόν;

'Απ. ἢ $+1$ ἢ -1, ἐπομένως 1 ἢ $\pi-1$.

59) Ἂν τὸ π ἦναι ἀρχικὸς ἀριθμὸς καὶ τὸ $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots\ldots \tau, \upsilon$ ὁλόκληροι θετικοὶ ἢ ἀποθετικοὶ ἀριθμοί: πόσαι ὁλόκληροι ἀξίαι τοῦ χ ὑπάρχουν μεταξὺ τοῦ ο καὶ π, αἱ ὁποῖαι ἠμποροῦν νὰ κάμουν τὸν τύπον $\alpha\chi^{\mu} + \beta\chi^{\mu-1} + \gamma\chi^{\mu-2} + \delta\chi^{\mu-3} + \ldots\ldots \tau\chi + \upsilon$ διαιρετόν;

'Απ. Τὸ πολὺ μ ἀξίαι, ἂν καὶ δὲν ἦναι ὅλοι οἱ προσθέται $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots \upsilon$ ἐνταυτῷ διὰ τοῦ π διαιρετοί· περίπτωσις εἰς τὴν ὁποίαν ἑκάστη ἀξία τοῦ χ ἐπαρκεῖ εἰς τὸ ζητούμενον. Διατί;

Πῶς ἠμποροῦν νὰ παρασταθῶσι διὰ τῶν μεταξὺ ο καὶ π ἀξιῶν τοῦ χ, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν ἐκεῖνον τὸν τύπον διὰ τοῦ π διαιρετόν, ὅλαι αἱ ἄλλαι ἀξίαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἐπίσης τὰς ποιότητας ταύτας, ὅμως μὲ περιωρισμένον ἀριθμὸν σχημάτων.

60) Ἂν ἠμποροῦν διὰ τὸ χ, ψ νὰ ἐκληφθῶσι μόνον ῥητοὶ ἀριθμοί, τότε δὲν ἠμπορεῖ τὸ σχημάτιον $\alpha\chi^2 + \beta\chi\psi + \gamma\psi^2$, ὅπου α, β, γ εἶναι δεδομένοι ἀριθμοί, νὰ παριστᾷ ἀδιακρίτως ὁποιονδήποτε ὁλόκληρον ἀριθμόν, πλὴν μόνον μίαν τινα τάξιν ὁλοκλήρων ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι προσεγγίζουν εἰς τοῦτο τὸ σχῆμα. Πῶς ἠμπορεῖ ὅμως τοιοῦτος τύπος νὰ μεταβληθῇ εἰς ἄλλον $\alpha'\chi'^2 + \beta'\chi'\psi' + \gamma'\psi'^2$, ὁ ὁποῖος ἔχει τὴν ἰδιότητα νὰ παριστᾷ ὅλους τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ἠμποροῦν νὰ παρασταθῶσι δι' ἐκείνου, καὶ τὸ ἀνάπαλιν, ὅλοι οἱ ἀριθμοί, τοὺς ὁποίους αὐτὸς περιέχει, νὰ περιέχωνται καὶ ἀπὸ τὸν ἄλλον τύπον;

'Απ. Ἐκλαμβάνονται δύω ὁλόκληροι ἀριθμοὶ μ, ν, κατὰ θέλησιν, οἱ ὁποῖοι ὅμως δὲν πρέπει νὰ ἔχωσι κανένα κοινὸν διαιρέτην. Προσδιορίζονται μετὰ τοῦτο δύω ἄλλοι μ', ν', οἱ ὁποῖοι λύουν τὴν ἀόριστον ἐξίσωσιν $\mu\nu' - \nu\mu' = \pm 1$, καὶ παρόμοιαι εὑρίσκονται ἄπειροι· ἂν τεθῇ, ἔπειτα, τὸ $\chi = \mu\chi' + \nu\psi'$, $\psi = \mu'\chi' + \nu'\psi'$ καὶ ἀντικατασταθῶσιν αὗται αἱ ἀξίαι εἰς τὸν τύπον $\alpha\chi^2 + \beta\chi\psi + \gamma\psi^2$ τότε μεταβάλλεται οὗτος εἰς ἄλλον $\alpha'\chi'^2 + \beta'\chi'\xi' + \gamma'\psi'^2$, ὁ ὁποῖος ἔχει τὴν ἀπαιτουμένην ἰδιότητα.

'Αξιοπαρατήρητον εἶναι, ὅτι πάντοτε γίνεται τὸ $\beta^2 - 4\alpha\gamma = \beta'^2 - 4\alpha'\gamma'$. — Διατί; — Ἡ ποσότης $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ ὀνομάζεται ἡ ὁρίζουσα, καθότι ἀπὸ αὐτὴν κρέμαται ἡ φύσις τοῦ τύπου· αὕτη εἶναι ἐνταυτῷ ἡ ποσότης, ἥτις διὰ τῶν σημείων δεικνύει, ἂν τὸ σχημάτιον $\alpha\chi^2 + \beta\chi\psi + \gamma\psi^2$ ἀναλύεται, εἰς δύω πραγματικοὺς παράγοντας $\kappa\chi + \lambda\psi$, $\kappa'\chi + \lambda'\psi$, ἢ ὄχι.

. . . .

Τὰ ἀόριστα προβλήματα ἀνήκουν εἰς τὸ αὐτὸ ὡραῖον καὶ σημαντικώτατον μέρος τῆς καθαρᾶς ἀριθμητικῆς, ὅπου δὲν θεωροῦνται οἱ ἀριθμοὶ ὡς πρὸς τὰς γενικὰς αὐτῶν ἀναφοράς, αἱ ὁποῖαι ἀνήκουν εἰς αὐτοὺς ὡς δυνάμεις, ἀλλ' ὡς πρὸς τὰς μερικὰς αὐτῶν ἰδιότητας, κατὰ τὰς ὁποίας διαφέρουν ἀπ' ἀλλήλων. Ὅςις ἐπιθυμεῖ νὰ λάβῃ ἐντελεῖς ἰδέας περὶ τούτων, ἠμπορεῖ νὰ ἀναγνώσῃ τὰ τελευταῖα κεφάλαια τῆς ἀλγέβρης τοῦ Ἄϋλερ, τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν τοῦ Λεζάνδρου, καὶ τὰς ἀριθμητικὰς ἀμφισβητήσεις τοῦ Γκάους.

Εἰς τὴν ἀνάγνωσιν τῶν δύω εἰρημένων βιβλίων τοῦ Γκάους καὶ Λεζάνδρου πρέπει νὰ παρατηρήσῃ ὁ ἀναγνώστης πρὸ πάντων τὸ θεώρημα, τὸ ὑπὸ τὸ ὄνομα, θεώρημα τῆς ἀβεβαιότητος γνωστόν, τοῦ ὁποίου θεωρήματος ἔκαμεν ὁ Γκάους καὶ ἄλλην ἀπόδειξιν, ἐκτὸς ἐκείνης, ἡ ὁποία εὑρίσκεται εἰς τὸ σύγγραμμά του, τὴν δευτέραν παρεδέχθη καὶ ὁ Λεζάνδρος εἰς τὴν δευτέραν ἔκδοσιν τοῦ συγγράμματός του. Ἂν αὕτη ἡ ἀπόδειξις εὑρίσκεται καὶ ἀλλοῦ που δὲν ἠξεύρω. Ἐκφράζεται ὅμως ὡς ἕπεται:

Ἂν τὸ π καὶ ρ ἦναι ὁποιοιδήποτε δύω ἀρχικοὶ ἀριθμοί, τότε εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τοῦ $\rho^{\frac{\pi-1}{2}}$ διὰ π διαιρούμενον τὸ αὐτό, καθὼς καὶ τὸ τοῦ $\pi^{\frac{\rho-1}{2}}$ διὰ ρ διαιρούμενον, δηλ: καὶ τὰ δύω $+1$ ἢ καὶ τὰ δύω — 1, ἂν οἱ ἀρχικοὶ ἀριθμοὶ π, ρ δὲν ἦναι ἐνταυτῷ τοῦ σχήματος 4ν + 3. Ἂν ἐξεναντίας ἦναι αὐτὰ τοῦ σχήματος 4ν + 3, τότε εἶναι τὰ ὑπόλοιπα ἀντικείμενα μεταξύ των· τὸ ἓν εἶναι δηλ: + 1, ὅταν τὸ ἄλλο + 1 καὶ τὸ ἀνάπαλιν.

Τὸ 60ον πρόβλημα εἶναι ἡ βάσις πολλὰ ἐκτεταμένης θεωρίας τῶν τριωνύμων παραγόντων, περὶ τῶν ὁποίων εὑρίσκονται πολλὰ, καί τινα νέα εἰς τὰ δύω ἄνω συγγράμματα.

Κα'. Προβλήματα τῶν ἀναλογιῶν

1) Ἂν ἡ τιμὴ $3\frac{1}{2}$ πήχεων πανίου ἦναι 16 δρ. πόσους πήχεις ἠμπορεῖ τις νὰ ἀγοράσῃ ἀπὸ τὸ αὐτὸ πανὶ διὰ 100 δρ.

Ἀπ. $21\frac{7}{8}$.

2 Ξενοδόχος ἠρώτα: ἀπὸ πόσους ἀνθρώπους θέλω λάβει 400 δρ. ἂν ἀπὸ 100 λαμβάνῃ 160;

Ἀπ. Ἀπὸ 250.

3) Ῥητὴ ποσότης πυριτοβολῶν ἑτοιμάζεται εἰς 8 ἡμέρας ἀπὸ 150 ἀνθρώπους· ἀπεφασίσθη ὅμως νὰ ἑτοιμασθῶσιν αὐτὰ τὰ πολεμεφόδια εἰς 6 ἡμέρας; Πόσοι ἄνθρωποι χρειάζονται πρὸς τοῦτο;

Ἀπ. 200.

4) Πόση εἶναι ἡ τιμὴ 9 λιτρῶν καὶ 24 λοτίων πραγματείας τινος, ἂν 5 λίτραι πωλῶνται διὰ 1 φιορ. καὶ 30 κρ.; (1)

Ἀπ. 2 φιορ., 15 κρ. καὶ 2 φ

5) Ἂν 100 ἐργάται δύνανται νὰ τελειώσωσιν εἰς μίαν νύκτα ὀχύρωμα 160 ὀργειῶν, πόσοι πρέπει νὰ ἐργασθῶσι διὰ νὰ κατασκευάσωσιν εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ὀχύρωμα 400 ὀργειῶν;

Ἀπ. 250.

---

(1) Ἡ λίτρα περιέχει 32 λότια.

6) Ἂν ὁ ἐτήσιος μισθὸς ὑπηρέτου τινος ἦναι 36 φιορ. Πόσα θέλει λάβει αὐτὸς εἰς 8 μῆνας καὶ 12 ἡμέρας;

Ἀπ. 25 φιορ. καὶ 12 κρ.

7) Ἂν ὁ ἐτήσιος μισθὸς ἐργάτου τινος ἦναι 160 γρ. Πόσα ἠμπορεῖ νὰ λάβῃ εἰς 8 μῆνας;

Ἀπ. $106\frac{2}{3}$ γρ.

8) Ἂν ἑκατὸν δρ. δίδωσι $3\frac{1}{2}$ ἐτήσιον τόκον, πόσον μεγάλον πρέπει νὰ ἦναι τὸ κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον θέλει δίδει 1000 δρ. ἐτήσιον τόκον;

Ἀπ. $28571\frac{3}{7}$.

9) Μία βρύσις γεμίζει ἀγγεῖον 140 μέτρων εἰς μίαν ὥραν, εἰς πόσας ὥρας θέλει γεμίσει ἡ αὐτὴ βρύσις ὑδροδοχεῖον, τὸ ὁποῖον ἠμπορεῖ νὰ περιέχῃ 6000 μέτρα;

Ἀπ. $42\frac{6}{7}$ ὥρας.

10) Ἂν 16 ἄνθρωποι χρειάζωνται 7 λίτρας κρέατος, πόσον θέλουν χρειασθῆ 42;

Ἀπ. $18\frac{3}{8}$ λίτρας.

11) Ἂν 100 δρ. δίδωσι $7\frac{1}{2}$ γρ. ἐτήσιον τόκον, πόσα δίδουν τὰ 1000;

Ἀπ. 75.

12) Πόσον τόκον ἠμπορεῖ τις νὰ λάβῃ ἀπὸ 600 δρ. πρὸς 8 τὰ ἑκατόν;

Ἀπ. 480.

13) Πόσον τόκον δίδουν 3765 γρ. πρὸς $7\frac{1}{2}$ τὰ ἑκατόν;

Ἀπ. 282 γρ. καὶ 15 παρ.

14) Διὰ νὰ ἔχω ἐτήσιον εἰσόδημα 2000 γρ. πόσον κεφάλαιο χρειάζομαι, ἂν λογισθῶσιν οἱ τόκοι πρὸς 10 τὰ ἑκατόν;

Ἀπ. 20000 γρ.

15) Εἰς κανονοστάσιον ὀχυρώματος εὑρίσκονται τόσαι πυρι-

τοβολαί, ὥστε ἠμποροῦν νὰ διαρκέσωσιν 24 ὥρας, ἂν καίωνται ἀνὰ πᾶσαν ὥραν 20: ἐπειδὴ ὅμως ἐντὸς 32 ὡρῶν δὲν ἐλπίζεται ἀποστολὴ νέων πολεμεφοδίων, πρέπει νὰ διαμερισθῶσιν αἱ εὑρισκόμεναι πυριτοβόλαι δι' ὅλον τὸ διάστημα. Πόσαι βολαὶ ἀναλογοῦν ἀνὰ πᾶσαν ὥραν;

'Απ. 15.

16) Ἂν δι' ἀεροστατικὴν μηχανὴν χρειάζωνται 2360 πήχεις λινοῦ, τὸ ὁποῖον ἔχει ἑνὸς πήχεως πλάτος. Πόσον χρειάζεται δι' αὐτὴν ἂν τὸ λινὸν ἔχῃ $1\frac{1}{4}$ πήχεων πλάτος;

'Απ. 1888 πήχεις.

17) Εἰς φρούριον εὑρίσκονται 6000 στρατιῶται προμηθευμένοι μὲ ζωοτροφίας 2 μηνῶν· ὁ φρούραρχος λαμβάνει προσταγὴν νὰ διατηρηθῇ 3 μῆνας καὶ 10 ἡμέρας. Ζητεῖται λοιπὸν πόσους πρέπει νὰ ἀποπέμψῃ ἀπὸ τὸ φρούριον διὰ νὰ ἐπαρκέσωσιν αἱ εὑρισκόμεναι ζωοτροφίαι;

'Απ. 2400.

18) Ἂν ὑποτεθῇ ὅμως ὅτι πρέπει νὰ μένωσιν εἰς τὸ φρούριον καὶ ὅτι πρότερον ἐλάμβανεν ἕκαστος 2 λίτρας ἄρτου· πόσον πρέπει νὰ λαμβάνῃ εἰς τὸ διάστημα τοῦτο;

'Απ. 1 λίτραν καὶ $6\frac{2}{3}$ λότια.

19) Ἐξεδόθη διαταγὴ καθ' ἣν ἐχρεώστει πᾶς ἕκαστος πολίτης νὰ πληρόνῃ ἀπὸ τὸ ἐτήσιόν του εἰσόδημα 3 τὰ 20 ὡς φόρον. Πόσα πρέπει νὰ δίδῃ ὁ ἔχων κεφάλαιον 5000.

'Απ. $652\frac{4}{23}$.

Σύνθετοι ἀναλογίαι.

1) Ἂν ἑκατὸν δρ. εἰς 12 μῆνας δίδουν 10 δρ. τόκον, πόσον τόκον θέλουν δώσει 500 δρ. εἰς 5 μῆνας;

'Απ. $4\frac{4}{5}$.

2) Ἂν κερδίζῃ τις 30 δρ. πωλῶν 100 τμήματα ὑφάσματος πρὸς 20 δρ. τὸ ἕν. Τί θέλει κερδίσει, ἂν πωλήσῃ 800 τμήματα πρὸς 24 δρ. ἕκαστον;

'Απ. 288.

3) Ἂν πληρόνῃ τις 80 δρ. διὰ τὴν μετακόμισιν 50 κανταρίων εἰς 30 λεύγας, πόσα πρέπει νὰ πληρώσῃ διὰ νὰ μετακομισθῶσιν 60 καντάρια εἰς 45 λευγῶν ἀπόστασιν;

'Απ. 144 δραχμάς.

4) Διὰ νὰ κτισθῇ τεῖχος, 6 ὀργ. μήκους, 8 ποδῶν ὕψους καὶ $1\frac{1}{2}$ πλάτους, χρειάζονται 5184 πλίνθοι. Πόσοι θέλουν χρειασθῇ πρὸς οἰκοδομὴν τείχους, τὸ ὁποῖον ἔχει $8\frac{1}{2}$ ὀργ. μῆκος, 2 ποδῶν πλάτος καὶ 6 ὕψος;

'Απ. 7200.

5) Ἂν 100 ἐργάται σκάπτωσιν εἰς 3 ἡμέρας τάφρον 250 ὀργ. μήκους, 7 ποδῶν πλάτους καὶ 3 ποδῶν βάθους. εἰς πόσας ἡμέρας θέλουν ἐξορύξει 300 ἐργάται τάφρον, 600 ὀργ. μήκους, 8 ποδῶν πλάτους καὶ 4 βάθους;

'Απ. Εἰς $3\frac{23}{35}$.

6) Ἂν 20 ὑφανταὶ τελειόνωσιν εἰς 8 ἑβδομάδας 100 δέματα ὑφάσματος, ἐξ ὧν ἕκαστον ἔχει 30 ποδῶν μῆκος καὶ $1\frac{1}{4}$ πλάτος, ἐργαζόμενοι 5 ἡμέρας τὴν ἑβδομάδα καὶ 10 ὥρας τὴν ἡμέραν. Πόσα δέματα ὑφάσματος θέλουν κάμει 80 ὑφανταὶ εἰς 15 ἑβδομάδας ἐργαζόμενοι 6 ἡμέρας τὴν ἑβδομάδα καὶ 12 ὥρας τὴν ἡμέραν ἐπὶ ὑποθέσει, ὅτι τὸ δέμα πρέπει νὰ ἔχῃ 40 ποδῶν μῆκος καὶ ἑνὸς πλάτος;

'Απ. $1012\frac{1}{2}$.

7) Πυρίκονις περιέχει 16 μέρη νίτρου, 2 μέρη θείου καὶ 3 ἄνθρακος. Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῶσιν 600 καντάρια αὐτῆς. Πόση ὕλη πρέπει νὰ ληφθῇ ἀπὸ ἕκαστον τῶν τριῶν εἰδῶν;

'Απ. $457\frac{1}{7}$ νίτρου· $57\frac{1}{7}$ θείου καὶ $85\frac{5}{7}$ καντάρια ἄνθρακος.

8) Διὰ νὰ κατασκευασθῇ ἔμπλαστρον χρειάζονται 50 δράμ.

κηροῦ, 22 χοιρίνου ἀλείμματος, 100 ἐλαίου, 6 μηνίου καὶ 24 ὑδραγύρου. Πόσον πρέπει νὰ ληφθῇ ἀπὸ ἕκαστον εἶδος διὰ να παρασκευασθῇ 20 ὀκάδων ὕλη;

Ἀπ. 1980 $\frac{20}{101}$ κηροῦ, 871 $\frac{29}{101}$ χοιρίνου ἀλείμματος, 3960 $\frac{40}{101}$ ἐλαίου, 237 $\frac{63}{101}$ μηνίου, καὶ 950 $\frac{50}{101}$ ὑδραγύρου.

9) Τρεῖς ἔμποροι διὰ νὰ πραγματευθῶσι κατέθεσαν ποσότητά τινα: ὁ Α 4000 δρ. ὁ Β 6400 καὶ ὁ Γ 5600. Τὸ ὅλον κέρδος των ἦτον 12000. Πόσα ἀνήκουν εἰς ἕκαστον αὐτῶν;

Ἀπ. Εἰς τὸν Α 3000 φιορ., εἰς τὸν Β 4800 καὶ εἰς τὸν Γ 4200.

10) Πέντε ἔμποροι Α, Β, Γ, Δ, Ε ἐκέρδισαν 10000 δρ. ὁ Α ἔλαβε μίαν μερίδα· ὁ Β, $\frac{5}{6}$· ὁ Γ, $\frac{1}{3}$· ὁ Δ, $\frac{1}{4}$ καὶ ὁ Ε $\frac{2}{15}$· Πόσα εἶχε λάβει ἕκαστος αὐτῶν;

Ἀπ. Ὁ Α 3921 $\frac{87}{153}$· ὁ Β, 3267 $\frac{149}{153}$· ὁ Γ, 1307 $\frac{29}{153}$· ὁ Δ, 980 $\frac{60}{153}$ καὶ ὁ Ε, 522 $\frac{134}{153}$.

11) Ἑπτὰ ἔμποροι Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ϛ, Ζ ἀπεφάσισαν νὰ ἐμπορευθῶσιν ἐκ συμφώνου καὶ κατέβαλαν τὰς ἑξῆς ποσότητας: ὁ Α 20000 δρ., ὁ Β 5000, ὁ Γ. 30000, ὁ Δ. 10000, ὁ Ε 15000, ὁ Ϛ 16000 καὶ ὁ Ζ 4000. Τὸ ὅλον κέρδος ἦτον 60000 δρ. Πόσα ἔπεται νὰ λάβῃ ἕκαστος;

Ἀπ. ὁ Α 12000, ὁ Β 3000, ὁ Γ 18000, ὁ Δ 6000, ὁ Ε 9000, ὁ Ϛ 9600 καὶ ὁ Ζ 2400.

12) 5000 δρ. ἔπρεπε νὰ μερισθῶσιν εἰς τρία σώματα Α, Β, Γ, κατὰ λόγον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν στρατιωτῶν. Τὸ Α εἶχε 1500 στρατιώτας, τὸ Β 800, τὸ Γ 600. Πόσα πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστον;

Ἀπ. Τὸ Α 2586 $\frac{6}{29}$, τὸ Β 1379 $\frac{9}{29}$ καὶ τὸ Γ 1034 $\frac{14}{29}$.

13) Ὁμολογία 2700 δρ. ἐχαρίσθη εις τρεῖς ἀνθρώπους Α, Β, Γ· ὁ Α ἀπεφασίσθη νὰ λάβῃ 670 δρ. ὁ Β 1230 καὶ ὁ Γ 800· ὁ τόκος τῆς ὁμολογίας εἶναι 135 δρ. Πόσον τόκον πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος αὐτῶν;

Ἀπ. ὁ Α 33 $\frac{27}{54}$, ὁ Β 61 $\frac{27}{54}$, καὶ ὁ Γ 40.

ΚΒ. Προβλήματα τῶν σειρῶν καὶ εἰκονικῶν ἀριθμῶν.

1) Οἰκοδεσπότης ἔλαβεν ὑπηρέτην καὶ ὑπεσχέθη νὰ τὸν δώσῃ τὸ πρῶτον ἔτος μόνον 30 τάλ. πᾶν ἕκαστον ὅμως τῶν ἑπομένων ἐτῶν νὰ τὸν δίδῃ 4 $\frac{1}{2}$ περισσότερα τοῦ παρερχομένου. Πόσα θέλει λάβει ὁ ὑπηρέτης τὸ 17ον ἔτος ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τῆς ὑπηρεσίας του καὶ πόσα διὰ τὰ 17 ἔτη;

Ἀπ. 102 ταλ. καὶ 1122.

2) Ὁδοιπόρος ἐξοδεύει σήμερον 2 τάλ. καὶ αὐξάνουν τὰ ἔξοδά του καθημέραν κατὰ 4 $\frac{1}{2}$ γροσίκια. Πόσα θέλουν εἶσθαι ὅλα του τὰ ἔξοδα τὴν 17ην ἡμέραν; Καὶ πόσα θέλει ἐξοδεύσει ἐν γένει εἰς τὰς 16 ἡμέρας;

Ἀπ. 4 τάλ. καὶ 19 γρ, καὶ 54 ταλ. καὶ 12 γρ.

3) Διὰ νὰ σκαφῇ φρέαρ 30 ποδῶν βάθους πληρόνονται διὰ τὸν πρῶτον πόδα 16 γρ. καὶ δι' ἕκαστον ἑπόμενον 2 φένιγα περισσότερα. Πόσα δίδονται διὰ τὸν πρῶτον πόδα; Καὶ πόσα δι' ὅλον τὸ φρέαρ.

Ἀπ. 21 γρ. καὶ 10 φ., 24 τάλ. 6 γρ. καὶ 6 φ.

4) Ἂν δοθῶσι 3500 τάλ. πρὸς 4 τὰ ἑκατὸν εἰς τόκους καὶ καθ' ἕκαστον ἔτος προστίθενται 300 τάλ. εἰς κεφάλαια: εἰς πόσα θέλουν συμποσωθῆ οἱ τόκοι 24 ἐτῶν τοῦ ἀρχικοῦ κεφαλαίου καὶ τῶν προστιθεμένων 300 ταλ;

Ἀπ. 6672 τάλ.

5) Ὁ δοιπόρος ἐπιθυμῶν νὰ φθάσῃ εἰς 19 ἡμέρας εἰς τινα πόλιν ἐβίασε τόσον τὴν πορείαν του, ὥστε καθημερινῶς ἔκαμνεν ἓν τέταρτον λεύγας περισσότερον τῆς προηγουμένης ἡμέρας. Ἂν ἔκαμε τὴν τελευταίαν ἡμέραν 14 $\frac{1}{4}$ λεύγας, πόσας ἔκαμε τὴν πρώτην ἡμέραν; Καὶ πόσων λευγῶν ἦτον ἡ ὅλη ἀπόστασις;

Ἀπ. 10 καὶ 232 $\frac{3}{4}$

6) Πόση εἶναι ἡ διαφορὰ ἀριθμητικῆς σειρᾶς 22 ὅρων, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι 1 καὶ ὁ τελευταῖος 15;

Ἀπ. $\frac{2}{3}$

7) Ἀπὸ πόσους ὅρους σύγκειται ἀριθμητικὴ σειρά, τῆς ὁποίας ἡ διαφορὰ εἶναι 3, ὁ πρῶτος ὅρος 5 καὶ ὁ τελευταῖος 302;

Ἀπ. Ἀπὸ 100 ὅρους.

8) Κτηματίας ἐρωτηθεὶς περὶ τῶν ὑπαρχόντων του, ἀπεκρίθη: «Τώρα ἔχω 550 τάλ. ὅταν ἤρχισα τὴν ἐπιχείρησίν μου εἶχα μόνον 100, ἐκέρδιζα ὅμως καθ' ἕκαστον ἔτος 30 τάλ. Πόσα ἔτη ἐξηκολούθησε τὰς ἐργασίας του;

Ἀπ. 16.

9) Χρεώστης ἐσυμφώνησε μὲ τὸν δανειστήν του νὰ ἀποδώσῃ εἰς μηνιαίας προθεσμίας τὸ χρέος του συνιστάμενον εἰς 12950 τάλ. τὰ ὁποῖα δὲν ἐδύνατο νὰ πληρώσῃ διὰ μιᾶς καὶ μάλιστα τὸν πρῶτον μῆνα 600 τάλ., ἕκαστον ὅμως ἑπόμενον 50 τάλ. περισσότερα. Εἰς πόσους μῆνας θέλει πληρωθῆ αὐτὸ τὸ χρέος καὶ πόσα θέλουν μείνει τὸν τελευταῖον μῆνα;

Ἀπ. Εἰς 14 μῆνας καὶ 1250 τάλ.

10) Ζητεῖται νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 50 εἰς 10 μέρη, ὥστε ἕκαστον αὐτῶν νὰ ὑπερέχῃ τὸ προηγούμενον κατὰ 1. Ποῖον θέλει εἶναι τὸ πρῶτον καὶ ποῖον τὸ τελευταῖον;

Ἀπ. $\frac{1}{2}$ καὶ 9 $\frac{1}{2}$.

11) Κατὰ τὴν φυσικὴν πᾶν σῶμα, τὸ ὁποῖον πίπτει εἰς κενὸν διάστημα, διατρέχει εἰς τὸ πρῶτον δεύτερον λεπτὸν τῆς πτώσεώς του διάστημα περίπου 15 $\frac{5}{8}$ ποδῶν, εἰς ἕκαστον ὅμως ἑπόμενον 31 $\frac{1}{4}$ πόδας περισσοτέρους παρὰ εἰς τὸ προλαβόν. Ἂν λοιπὸν πίπτῃ κατὰ σειρὰν 20 δεύτερα λεπτά, πόσους πόδας θέλει διατρέξει εἰς τὸ τελευταῖον δεύτερον λεπτόν, καὶ πόσους καθ' ὅλον τὸ διάστημα;

Ἀπ. 609 $\frac{3}{8}$ πόδας καὶ 6250 πόδας.

12) Πόσον καιρὸν ὅμως πρέπει νὰ πίπτῃ ἓν σῶμα, κατὰ τὰς ἄνω συνθήκας, ἂν πρέπῃ νὰ διατρέξῃ διάστημα 4000 ποδῶν;

Ἀπ. 16 δεύτερα λεπτά.

13) Κάποιος ἔβαλε μίαν δρ. εἰς τὴν λοταρίαν καὶ ἐπειδὴ ἔχασε τὴν πρώτην φοράν, ἔβαλε τὴν δευτέραν 2, τὴν τρίτην 3. κ. ο. κ. πάντοτε μίαν δρ. περισσοτέραν. Ἡ λοταρία ἐπλήρωνε ἕκαστον κέρδος 14 = πλάσιον. Ζητεῖται ποσάκις πρέπει νὰ ἐπαναληφθῇ ἡ τοιαύτη κατάθεσις, ὥστε δι' ἑνὸς καὶ μόνου κέρδους νὰ κερδίσῃ ὅσα εἶχε χάσει ἕως τότε;

Ἀπ. 27 φοράς.

14) Εἰς συντροφίαν ἦτον λόγος περὶ οἰκονομίας καὶ κάποιος εἶπεν: «Φέτος οἰκονόμησα 78 τάλ. καὶ ἔχω ποσότητα 1350 τάλ., καθότι ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τῆς ἐργασίας μου ἕως τώρα οἰκονομῶ καθ' ἕκαστον ἔτος 2 τάλ. περισσότερα. Πρὸ πόσου καιροῦ ἤρχισε τὰς ἐργασίας του; Καὶ πόσα οἰκονόμησε τὸ πρῶτον ἔτος;

Ἀπ. 25 ἔτη καὶ 30 τάλ.

15) Κάποιος κατεδικάσθη ἀπὸ τοὺς κριτὰς εἰς χρηματικὴν ποινὴν 800 τάλ., τὰ ὁποῖα ἐχρεώστει νὰ πληρώσῃ εἰς προθεσμίας ὡς ἀκολούθως: εἰς τὴν πρώτην 20 τάλ., εἰς ἑκάστην ὅμως ἑπομένην κάτι τι περισσότερον ἀπὸ τὴν προηγουμένην, ὥστε εἰς τὴν τελευταίαν προθεσμίαν νὰ πληρώσῃ μόνον 80 τάλ. Εἰς πόσας προθεσμίας θέλει πληρωθῆ ὅλη ἡ χρηματικὴ ποινή; Καὶ πόση ἦτον ἡ ποσότης, καθ' ἣν ἐχρεώστει νὰ αὐξάνῃ τὴν πληρωμήν του;

Ἀπ. 16 προθεσμίας καὶ 4 τάλ.

16) Κάποιος εἶδεν εἰς ὁπλοθήκην 15 σειρὰς σφαιρῶν ἐπισωρευμένων καὶ ἠρώτησέ τινα τῶν παρευρισκομένων πυροβολιστῶν: «πόσαι σφαῖραι εἶναι εἰς τὴν κάτω σειράν»; ὁ πυροβολιστὴς ἀπεκρίθη. «εἰς ὅλας τὰς σειρὰς εὑρίσκονται 4200 σφαῖραι καὶ πᾶσα σειρὰ ἀπὸ τὴν πρώτην ἕως τὴν τελευταίαν περιέχει 20 σφαίρας

ὀλιγωτέρας, ἀπὸ ἐκείνην, ἥτις κεῖται ὑπ' αὐτήν. Πόσαι σφαῖραι εἶναι λοιπὸν εἰς τὴν κάτω σειράν;

'Απ. 420.

17) Παρετηρήθη, ὅτι ἀπὸ τὴν 8ην ἕως τὴν 19ην τοῦ Ἰουνίου ἔτους τινος, ηὔξανε τὸ θερμόμετρον καθημέραν κατὰ $\frac{1}{4}$ βαθμὸν καὶ ὅτι ὁ μέσος ἀριθμητικὸς ἀνάλογος αὐτῶν τῶν δώδεκα διαφόρων μεταβολῶν τοῦ θερμομέτρου ἦτον $18\frac{3}{4}$ βαθμῶν. Εἰς ποῖον βαθμὸν εὑρίσκετο τὴν ὀγδόην;

'Απ. Εἰς τὸν 16ον βαθμόν.

18) Πρὸς ἀνταμοιβὴν λόχου, ὅστις ἐκυρίευσε πόλιν ἐξ ἐφόδου, ἀπεφασίσθη νὰ δοθῇ εἰς τὸν πρῶτον ἀναβάντα τὸ τεῖχος χρηματικὴ ἀμοιβή, ἥτις ἦτον κατάτι μικροτέρα διὰ τὸν δεύτερον· ὡσαύτως, κατὰ τὸ αὐτό, μικροτέρα διὰ τὸν τρίτον κ. ο. κ. ἐνῷ διενέμοντο τὰ χρήματα δὲν ἦσαν παρόντες δύω ἐξ αὐτῶν ἐξ αἰτίας τῶν πληγῶν των, τὰ ἔλαβαν λοιπὸν δύω ἄλλοι διὰ νὰ τὰ φυλάξωσιν. Οἱ δύω αὐτοὶ ἔλαβαν τὴν μερίδα των, καθὼς καὶ ἐκείνην τῶν δύω συστρατιωτῶν των καὶ δὲν ἤξευραν πλέον τι ἀνῆκεν εἰς ἕκαστον αὐτῶν. Ὁ πρῶτος εἶχε λάβει, διὰ τὸν ἑαυτόν του καὶ διὰ τὸν συστρατιώτην του 92 τάλ. καὶ ἐνθυμεῖτο μόνον, ὅτι αὐτὸς ἦτον ὁ δεύτερος καὶ ὁ πληγωμένος συστρατιώτης του ὁ ἕβδομος· ὁ ἄλλος εἶχε λάβει διὰ τὸν ἑαυτόν του καὶ διὰ τὸν συστρατιώτην του 71 τάλ. καὶ ἤξευρεν, ὅτι αὐτὸς ἦτον ἑνδέκατος καὶ ὁ συστρατιώτης του τέταρτος. Πόσα ἀνῆκαν λοιπὸν εἰς ἕκαστον τῶν τεσσάρων στρατιωτῶν;

'Απ. Εἰς τὸν δεύτερον $54\frac{3}{4}$, εἰς τὸν τέταρτον $47\frac{3}{4}$, εἰς τὸν ἕβδομον $37\frac{1}{4}$ καὶ εἰς τὸν ἑνδέκατον $23\frac{1}{4}$.

19) Εὑρίσκονται δεκαοκτὼ ἀριθμοὶ εἰς ἀριθμητικὴν πρόοδον. Ἂν προστεθῶσιν οἱ δύω μέσοι, παράγεται $31\frac{1}{2}$. Ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ πρῶτος καὶ τελευταῖος τὸ γινόμενον εἶναι $= 85\frac{1}{2}$. Πόσον μεγάλος εἶναι ὁ πρῶτος ἀριθμὸς καὶ πόση ἡ διαφορά;

'Απ. 3 καὶ $1\frac{1}{2}$.

20) Δύω φίλοι ἐκίνησαν ἀπὸ δύω διαφόρους τόπους Α καὶ Β κατὰ τὸν αὐτὸν καιρὸν διὰ νὰ ἀνταμωθῶσιν, ἡ ἀπόστασις τῶν δύω τόπων ἦτον 170 λευγῶν· ὁ ἀπὸ τὸν Β μισεύσας ἔκαμνε καθημέραν τακτικῶς 4 λεύγας· ὁ ἄλλος ἔκαμε τὴν πρώτην ἡμέραν μόνον 2, ἑκάστην ὅμως ἑπομένην $\frac{1}{2}$ περισσότερον. Ποῦ θέλουν ἀπαντηθῇ αὐτοί;

'Απ. 102 λεύγας μακρὰν τοῦ Α.

21) Κάποιος ἔχει ἐτήσιον εἰσόδημα 500 ταλ. ἀπὸ αὐτὰ δὲν ἐξοδεύει τίποτε, ἐξ ἐναντίας τὰ δίδει εἰς τόκους πρὸς 5 τὰ ἑκατὸν καὶ δὲν λαμβάνει οὔτε τοὺς τόκους. Μετὰ πόσα ἔτη θέλει ἔχει κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, 6875 τάλληρα, χωρὶς νὰ λογισθῇ ὅμως ὁ ἀνατοκισμός;

'Απ. Μετὰ 10.

22) Εἰς τὰς ὁπλοθήκας σωρεύονται αἱ σφαῖραι κατὰ τριγωνικὰς πυραμίδας, δηλ. ἡ ἀνωτάτη σφαῖρα τίθεται εἰς τὴν κορυφὴν τριῶν ἄλλων, αὗται αἱ τρεῖς στηρίζονται ἀπὸ 6, αἱ 6 πάλιν ἀπὸ 10. κ. ο. κ. ἢ ἐν ἑνὶ λόγῳ ἡ ποσότης τῶν σφαιρῶν εἰς τὰς διαφόρους σειράς, ἀπὸ τὴν ἀνωτάτην, παρίσταται διὰ τῶν τριγωνικῶν ἀριθμῶν 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36. κ. ο. κ. Πόσαι σφαῖραι εὑρίσκονται λοιπὸν εἰς τὴν κατωτάτην σειράν, ἂν ἡ πλευρὰ αὐτῆς ἔχῃ ν σφαίρας; Καὶ πόσαι εὑρίσκονται εἰς ὅλην τὴν πυραμίδα;

'Απ. $\frac{\nu(\nu+1)}{1.2}$ εἰς τὴν κατωτάτην σειρὰν καὶ $\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{1.2.3}$ εἰς ὅλην τὴν πυραμίδα.

23) Ἂν ὅμως, εἰς τὸ προλαβὸν πρόβλημα, ἦναι ἡ πυραμὶς ἀτελὴς καὶ εἰς ἑκάστην πλευρὰν τῆς ἀνωτάτης σειρᾶς ἔχῃ μ σφαίρας: Πόσαι σφαῖραι θέλουν εἶναι εἰς τὸν σωρόν;

'Απ. $\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{1.2.3} - \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1.2.3}$.

24) Ἐνίοτε σωρεύονται αἱ σφαῖραι καὶ κατὰ τετραγωνικὰς πυραμίδας, ὥστε ὅλαι αἱ σειραὶ σχηματίζουν τετράγωνα καὶ αἱ σφαῖραι εἰς τὰς διαφόρους βαθμίδας ἠμποροῦν νὰ παρασταθῶσι διὰ τῶν τετραγωνικῶν ἀριθμῶν 1, 4, 9, 16, 25, 36 κτλ. κ. ο. κ. Ἂν λοιπὸν εἰς ἑκάστην πλευρὰν τῆς κατωτάτης σειρᾶς ἦναι ν καὶ ἑπομένως εἰς ὅλην τὴν βαθμίδα ν^2 σφαῖραι: Πόσαι σφαῖραι ἠμποροῦν νὰ σωρευθῶσιν εἰς τὴν ἐντελῆ πυραμίδα καὶ πόσαι εἰς τὴν ἀτελῆ, ἂν ἡ πλευρὰ τῆς ἄνω σειρᾶς ἔχῃ μ σφαίρας;

Ἀπ. $\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{1\cdot2\cdot3}$ εἰς τὴν ἐντελῆ καὶ $\frac{\nu(\nu-1)(2\nu+1)}{1\cdot2\cdot3} - \frac{\mu(\mu+1)(2\mu+1)}{1\cdot2\cdot3}$ εἰς τὴν ἀτελῆ.

25) Ὅταν πρέπῃ νὰ σωρευθῶσι πολλαὶ σφαῖραι τότε δίδουν εἰς αὐτὰς σχῆμα ὀρθογωνίων, καὶ εἰς τὴν ὑπερτάτην σειρὰν εὑρίσκονται μ σφαῖραι εἰς γραμμήν· αὐταὶ τίθενται ἐπὶ δύω σειρῶν, περιεχουσῶν μ + 1 σφαίρας· αὐταὶ ἐπὶ 3 ἐξ ὧν ἑκάστη περιέχει μ + 2 σφαίρας κ. ο. κ. δηλ. εἰς ἑκάστην ἑπομένην βαθμίδα καὶ σειρὰν μία σφαῖρα περισσοτέρα. Κατ' αὐτὴν τὴν τάξιν θέλει περιέχει ἑκάστη βαθμὶς τὴν ἀκόλουθον ποσότητα τῶν σφαιρῶν κατὰ τάξιν: μ, 2 (μ + 1), 3 (μ + 2), 4 (μ + 3), 5 (μ + 4), κ. ο. κ. ἑπομένως εἰς τὴν $\nu^{\eta\nu}$ βαθμίδα ν (μ + ν − 1). Πόσαι ἔπεται νὰ ἦναι λοιπὸν εἰς ὅλον τὸν σωρὸν ν βαθμίδων;

Ἀπ. $\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+3\mu-2)}{2\cdot2\cdot3}$. (1)

26) Ἐκτὸς τῶν εἰρημένων γίνεται καὶ κατ' ἄλλον τρόπον τὸ σώρευμα τῶν σφαιρῶν, ὅπου διὰ τὴν ἰσοσταθμίαν πρέπει νὰ ἐγγίζῃ ὁ σωρὸς μὲ τὰς δύω του πλευρὰς εἰς ἄλλους σωροὺς ἢ νὰ ὑποστηρίζεται κατ' ἄλλον τρόπον οἷον: εἰς μίαν σειρὰν κεῖνται μ

(1) Περὶ τῆς ὀρθότητος τούτου τοῦ τύπου καὶ τῶν ἀκολούθων ἠμπορεῖ τις νὰ καταπεισθῇ διὰ τοῦ ἐκτεθέντος τρόπου εἰς τὴν σημ. σελ. 107 ἢ ἠμπορεῖ καὶ νὰ τὸν εὕρῃ διὰ τῆς βοηθείας τῶν ἀορίστων προσθετῶν·

σφαῖραι, ὑποκάτω δύω ἄλλαι σειραὶ ἀπὸ μ − 1 σφαίρας: ὑποκάτω αὐτῶν τρεῖς ἄλλαι σειραὶ ἀπὸ μ − 2 σφαίρας κ. ο. κ. ὥστε ἠμποροῦν νὰ ἐκφρασθῶσιν αἱ εἰς τὰς διαφόρους βαθμίδας σφαῖραι διὰ τῶν ἀκολούθων ἀριθμῶν: μ, 2 (μ − 1), 3 (μ − 2), 4 (μ − 3), 5 (μ − 4), κ. ο. κ. καὶ ἑπομένως εἰς τὴν $\nu^{\eta\nu}$ βαθμίδα κεῖνται ν(μ − ν + 1) σφαῖραι· πόσαι σφαῖραι ἔπεται νὰ εὑρίσκωνται εἰς σωρὸν ν βαθμίδων;

Ἀπ. $\frac{\nu(\nu+1)(3\mu-2\nu+2)}{1\cdot2\cdot3}$.

27) Ἂν τοιοῦτος σωρὸς ἠμπορῇ μόνον ἀπὸ τὸ ἓν μέρος νὰ ὑποστηριχθῇ, τότε δίδεται συνήθως εἰς ἑκάστην ἀκόλουθον βαθμίδα 1 σειρὰ περισσοτέρα, πλὴν μένει ὁ ἀριθμὸς τῶν σφαιρῶν ἀμετάβλητος εἰς ὅλας τὰς σειράς. καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν σφαιρῶν εἰς τὰς διαφόρους βαθμίδας ἠμπορεῖ νὰ ἐκφρασθῇ κατὰ τάξιν διὰ τῶν ἀκολούθων ἀριθμῶν: μ, 2μ, 3μ, 4μ, 5μ. κ. ο. κ. ἑπομένως εἰς τὴν $\nu^{\eta\nu}$ βαθμίδα νμ σφαῖραι. Πόσαι σφαῖραι εἶναι λοιπὸν εἰς τοιοῦτον σωρόν;

Ἀπ. $\frac{\mu\nu(\nu+1)}{1\cdot2}$.

28) Ἂν εἰς μίαν ἐντελῆ τριγωνικὴν πυραμίδα εὑρίσκωνται κ σφαῖραι: ποία ἐξίσωσις πρέπει νὰ λυθῇ διὰ νὰ προσδιορισθῇ ἐκ ταύτης ὁ ἀριθμὸς τῶν βαθμίδων, ἢ ὁ ἀριθμὸς τῶν σφαιρῶν εἰς τὴν πλευρὰν τῆς κατωτάτης βαθμίδος;

Ἀπ. Ἡ ἐξίσωσις $\nu^3 + 3\nu^2 + 2\nu - 6\kappa = 0$.

29) Ποία ἐξίσωσις διὰ τετραγωνικὴν πυραμίδα;

Ἀπ. $2\nu^3 + 3\nu^2 + \nu - 6\kappa = 0$

30) Κάποιος ἔβαλεν 6 φ. εἰς τὴν λοταρίαν καὶ ἐπειδὴ δὲν ἐκέρδισε τὴν πρώτην φοράν, ἔβαλε τὴν δευτέραν φορὰν 1 γρ. καὶ 6 φ. καὶ ἐπειδὴ πάλιν ἔχασεν, ἔβαλε τὴν τρίτην φορὰν 4 γρ. καὶ 6 φ. ἐν ἑνὶ λόγῳ εἰς πᾶσαν κατάθεσιν τριπλάσια τῶν προηγου-

μένων. Πόσα θέλει καταθέσει τὴν δωδεκάτην φορὰν, ἂν τὸ
πρᾶγμα προχωρῇ τακτικῶς; Καὶ πόσα πρέπει νὰ κερδίσῃ διὰ
νὰ λάβῃ ὅλα τὰ χρήματα, ὅσα εἶχε καταθέσει μέχρι τοῦδε;

᾿Απ. 3690 ταλ. 13 γρ. καὶ 6 φ. καὶ 5535 τάλ. καὶ 20 γρ.

31) Ὁ βασιλεὺς τῶν Ἰνδιῶν Χεράν ἐπρόβαλε, κατὰ τὴν ἀνα-
φορὰν τοῦ ἄραβος συγγραφέως Ἀζεφὰδ, εἰς τὸν Κεσὰν, ἐφευρετὴν
τοῦ ζατρικίου, νὰ ἐκλέξῃ μόνος του ἀνταμοιβὴν δι' αὐτό· αὐτὸς
ἐζήτησε τὸ ἀντίτιμον τῶν κόκκων τοῦ σίτου, τὸ ὁποῖον προκύπτει,
ἂν δοθῇ εἰς αὐτὸν διὰ τὸ πρῶτον τετράγωνον τοῦ ζατρικίου 1,
διὰ τὸ δεύτερον 2, διὰ τὸ τρίτον 4 καὶ οὕτω καθεξῆς διὰ τὰ
64 τετράγωνα, δι' ἕκαστον ἑπόμενον τετράγωνον διπλασίους κόκ-
κους τοῦ προηγουμένου· ἐκ τούτου ἐπρόκυψε μέγιστος ἀριθμός.
— Ποῖος;

᾿Απ. 18446744073709551615. Ποσότης σίτου, ἡ ὁποία
μόλις εἰς διάστημα 70 ἐτῶν ἠμπορεῖ νὰ παραχθῇ, ἂν σπείρεται
ὅλη ἡ στερεὰ γῆ μὲ σῖτον.

32) Χωρικὸς ἔσπειρεν ἓν κοιλὸν σίτου καὶ μετεχειρίσθη ὅλον
τὸν ἐκ τούτου σπόρον διὰ τὸ ἐρχόμενον ἔτος, ἔπειτα τὸ γέννημα
τοῦ δευτέρου ἔτους διὰ τὸ τρίτον κ. ο. κ. Ἂν λοιπὸν ἐσύναξε τὸ
10ον ἔτος 1048576 κοιλὰ, πόσα ἕπεται νὰ ἦσαν τὰ προϊόντα
ἑκάστοτε ἂν ὑποτεθῇ, ὅτι ἡ αὔξησις ἔμενε πάντοτε ἡ αὐτή;

᾿Απ. Τετραπλάσια.

33) Εἰς ἥσυχον καὶ εἰρηνικὴν ἐπικράτειαν ηὔξανεν ὁ πληθυ-
σμὸς καθέκαστον ἔτος κατὰ τὴν αὐτὴν πρόοδον με τρόπον, ὥστε
εἰς διάστημα τεσσάρων ἐτῶν ἀπὸ 10000 ἔγιναν 14641 οἱ κά-
τοικοι. Κατὰ πόσον ηὔξανεν ὁ πληθυσμὸς ἐτησίως;

᾿Απ. Κατὰ τὸ δέκατον.

34) Μεταξὺ τοῦ 1 καὶ 3 πρέπει νὰ τεθῶσι 10 ὅροι, ὥστε
ἐκ τούτου νὰ προκύψῃ γεωμετρικὴ σειρὰ 12 ὅρων. Ποῖος θέλει
εἶναι ὁ δεύτερος ὅρος αὐτῆς τῆς σειρᾶς;

᾿Απ. $\sqrt[11]{5} = 1{,}105 \ldots\ldots$

35) Ὁποῖον ἐκθέτην ἔχει γεωμετρικὴ σειρὰ 32 ὅρων, τῆς
ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι 5 καὶ ὁ τελευταῖος 80; Πόσον εἶναι
τὸ κεφάλαιον αὐτῆς τῆς σειρᾶς; Καὶ πόσον μεγάλος ὁ εἰκοστὸς
ὅρος αὐτῆς;

᾿Απ. Ὁ ἐκθέτης εἶναι 1,0935........, τὸ κεφάλαιον
881,62........, καὶ ὁ 20ος ὅρος 27,351........

36) Ἑπτὰ ἀριθμοὶ σχηματίζουν γεωμετρικὴν σειράν· ἂν προ-
στεθῶσιν οἱ ἓξ πρῶτοι, προκύπτει ὁ ἀριθμὸς $157\frac{1}{2}$, ἂν ὅμως προσ-
τεθῶσιν οἱ ἓξ τελευταῖοι προκύπτει τὸ κεφάλαιον 315. Ποῖοι εἶ-
ναι αὐτοὶ οἱ ἀριθμοί;

᾿Απ. $2\frac{1}{2}$, 5, 10, 20, 40, 80, 160.

37) Εἰς γεωμετρικὴν σειρὰν 5 ὅρων εἶναι γνωστὸν τὸ κεφάλαιον
τῶν ἀρτίων ὅρων $= \alpha$, τὸ κεφάλαιον τῶν περιττῶν $= \beta$. Ποία
εἶναι ἡ σειρά;

᾿Απ. Ἂς ἦναι Α, Β, Γ, Δ, Ε οἱ 5 ὅροι τῆς ζητουμένης σειρᾶς,
τότε εἶναι ὁ μέσος ὅρος $\Gamma = \frac{-\beta \pm \sqrt{(\beta^2 + 4\alpha^2)}}{2}$. Ὅθεν Α

$$= \frac{[\alpha - \sqrt{(\alpha^2 - 4\Gamma^2)}]^2}{4\gamma},\ B = \frac{\alpha - \sqrt{(\alpha^2 - 4\Gamma^2)}}{2},$$

$$\Delta = \frac{\alpha + \sqrt{(\alpha^2 - 4\Gamma^2)}}{2},\ E = \frac{[\alpha + \sqrt{(\alpha^2 - 4\Gamma^2)}]^2}{4\Gamma}.$$

38) Τὸ κεφάλαιον τῶν ἀρτίων ὅρων γεωμετρικῆς σειρᾶς τεσ-
σάρων ὅρων εἶναι $= \alpha$, τὸ κεφάλαιον τῶν περιττῶν $= \beta$: Ποία
εἶναι ἡ σειρά;

᾿Απ. Ὁ ἐκθέτης τῆς σειρᾶς εἶναι $= \frac{\alpha}{\beta}$, ὁ πρῶτος ὅρος

$$= \frac{\beta^3}{\alpha^2 + \beta^2}.$$ Ὅθεν ἠμπορεῖ καὶ αὐτὴ νὰ εὑρεθῇ.

39) Τὸ κεφάλαιον τῶν ἀρτίων ὅρων γεωμ. σειρᾶς 2ν ὅρων εἶ-
ναι $= \alpha$, τὸ κεφάλαιον τῶν περιττῶν ὅρων $= \beta$: Ποία εἶναι ἡ σειρά;

Ἀπ. Ὁ ἐκθέτης εἶναι $= \frac{\alpha}{\beta}$, ὁ πρῶτος ὅρος

$$= \frac{\beta^{2\nu-1}}{\alpha^{2\nu-2} + \alpha^{2\nu-4}\beta + \alpha^{2\nu-6}\beta^4 + \ldots\ldots + \beta^{2\nu-2}} = \frac{\beta^{2\nu-1}(\alpha^2 - \beta^2)}{\alpha^{2\nu} - \beta^{2\nu}}.$$

40) Εἰς γεωμ. σειρὰν ἐξ ὅρων εἶναι γνωστὸν τὸ κεφάλαιον τῶν δύω μέσων $= \alpha$, τὸ κεφάλαιον τῶν δύω ἄκρων $= \beta$: Πῶς εὑρίσκεται αὐτή;

Ἀπ. Ἂν τεθῇ γ τὸ γινόμενον τῶν δύω μέσων ὅρων, τότε εἶναι γ $= \frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{5\alpha \pm \sqrt{(4\alpha\beta + 5\alpha^2)}}{5\alpha - \beta}$. Ἀπὸ τὸ γ καὶ α εὑρίσκονται οἱ δύω μέσοι ὅροι $\frac{1}{2}[\alpha - \sqrt{(\alpha^2 - 4\pi)}]$, $\frac{1}{2}[\alpha + \sqrt{(\alpha^2 - 4\pi)}]$ καὶ ἐκ τούτου ἡ ζητουμένη σειρά.

41) Ἡ διαφορὰ ἀριθμητικῆς σειρᾶς 4 ὅρων εἶναι $= \delta$· τὸ γινόμενον ὅλων της τῶν ὅρων $= \alpha$. Πῶς εὑρίσκεται ὁ πρῶτος ὅρος;

Ἀπ. Ἂν τεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος $= \chi$ καὶ τὸ γινόμενον τῶν δύω ἄκρων $= \psi$· τότε εἶναι $\chi^2 + 3\delta\chi = \psi$ καὶ ἡ ἄγνωστος ψ δεδομένη διὰ τῆς ἐξισώσεως $\psi^2 + 2\delta^2\psi = \alpha$· Ἐκ τούτων εὑρίσκονται αἱ ἀκόλουθοι τέσσαρες ἀξίαι τοῦ χ:

$$\chi = -\tfrac{3}{2}\delta \pm \sqrt{[\tfrac{5}{4}\delta^2 + \sqrt{(\alpha + \delta^4)}]},$$
$$\chi = -\tfrac{3}{2}\delta \pm \sqrt{[\tfrac{5}{4}\delta^2 - \sqrt{(\alpha + \delta^4)}]},$$

42) Εἰς γεωμ. σειρὰν τὸ κεφάλαιον τῶν ὅρων εἶναι $= \alpha$, τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων των $= \beta$ καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν κύβων των $= \gamma$ Πῶς εὑρίσκεται αὐτή;

Ἀπ. Ὁ ἐκθέτης ε τῆς σειρᾶς εἶναι $= \frac{\alpha^4 + 2\alpha\gamma - 3\beta^2 \pm \sqrt{12\alpha(\alpha\gamma - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma)}}{\alpha^4 + 3\beta^2 - 4\alpha\gamma}$, ὁ πρῶτος ὅρος $= \frac{\beta(1+\varepsilon) + \alpha(1-\varepsilon)}{2\alpha}$. Ἀπὸ τὸν ἐκθέτην, τὸ πρῶτον ὅρον καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν ὅρων ἠμπορεῖ νὰ εὑρεθῇ καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων καὶ αὐτὴ ἡ σειρά;

43) Εἰς γεωμ. σειρὰν εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν ὅρων $= \alpha$, τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων των $= \beta$ καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν τετάρτων δυνάμεων των $= \gamma$: Πῶς εὑρίσκεται ἡ σειρά;

Ἀπ. Ὁ ἐκθέτης ε τῆς σειρᾶς εἶναι $= \frac{\alpha^4\beta - \beta^3 \pm 2\alpha\sqrt{(\gamma - \alpha^2\beta)(\beta^3 - \alpha^2\gamma)}}{\beta^3 + \alpha^4\beta - 2\alpha^2\gamma}$ ὁ πρῶτος ὅρος $= \frac{\beta(1+\varepsilon) + \alpha^2(1-\varepsilon)}{2\alpha}$. Ἐκ τούτου ἠμπορεῖ νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων καὶ αὐτὴ ἡ σειρά·

44) Ἡ διαφορὰ ἀριθμητικῆς σειρᾶς ἓξ ὅρων εἶναι $= \delta$· τὸ γινόμενον ὅλων της τῶν ὅρων $= \alpha$. Πῶς εὑρίσκεται ὁ πρῶτος ὅρος;

Ἀπ. Ἂν τεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος $= \chi$, τὸ γινόμενον τῶν δύω ἄκρων $= \psi$, τότε εἶναι $\chi^2 + 5\delta\chi = \psi$ καὶ ἡ ἄγνωστος ψ δεδομένη διὰ τῆς ἐξισώσεως $\psi^3 + 10\delta^2\psi^2 + 24\delta^4\psi = \alpha$

Ἐν γένει, τὸ πρόβλημα: «τοῦ νὰ εὑρεθῇ ἀριθμητικὴ σειρὰ 2μ ὅρων μὲ τὴν δοθεῖσαν διαφορὰν δ, ὥστε τὸ γινόμενον ὅλων της τῶν ὅρων νὰ ἦναι ἴσον μὲ δοθεῖσαν ποσότητα α» ἠμπορεῖ νὰ ἐπαναχθῇ εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου καὶ μ$^{\text{του}}$ βαθμοῦ. Καθότι ἀρκεῖ νὰ τεθῇ τὸ $\chi^2 + (2\mu - 1)\delta\chi = \psi$, τότε εὑρίσκεται διὰ τὸ ψ ἐξίσωσις τοῦ μ$^{\text{του}}$ βαθμοῦ. (Παραβ. τὸ πρόβλημα 37. σελ. 334 μὲ τὸ παρόν.)

Κγ'. Προβλήματα τῶν ἀνατοκισμῶν καὶ τινα ἄλλα σύμφωνα. (1)

1) Κεφάλαιον α εὑρίσκεται εἰς ἀνατοκισμόν· οἱ τόκοι εἶναι $= \pi$. Πόσον θέλει γίνει αὐτὸ τὸ κεφάλαιον μετὰ ν χρόνους;

Ἀπ. $\alpha\pi^\nu$.

(1) Ἐδῶ ἀπαιτοῦνται μόνον προβλήματα διὰ τοὺς συνθέτους τόκους, δηλ. ὅπου οἱ τόκοι ἑνώνονται ἐτησίως μὲ τὸ κεφάλαιον καὶ φέρουν ἐκ νέου τόκους, καθότι ἡ γνῶσις τῶν ἁπλῶν τόκων προϋποτίθεται ἤδη. (Ἴδε τὴν σημ. Σελ. 180)

2) Κεφάλαιον 5000 τάλ. εἶναι εἰς ἀνατοκισμὸν πρὸς 4 τὰ ἑκατόν. Πόσον θέλει γίνει μετὰ 40 ἔτη;

Ἀπ. 24005,103 ..... ταλ. ἢ 24005 τάλ. 2 γρ. καὶ 6 φ. περίπου.

3) Πόσον θέλει γίνει κεφάλαιον 3200 τάλ. πρὸς 3 τὰ ἑκατὸν μετὰ 80 ἔτη;

Ἀπ. 34050,84 ..... τάλ.

4) Δάσος ἐξετιμήθη, ὅτι περιέχει 32500 ὀργυιὰς ξύλων, ἐκ πείρας εἶναι γνωστὸν, ὅτι 100 ὀργυιαὶ αὐξάνουν κατὰ 3 ἐτησίως. Πόσας ὀργυιὰς θέλει περιέχει αὐτὸ τὸ δάσος μετὰ 24 ἔτη;

Ἀπ. 66065,808.....

5) Εἰς ἐπαρχίαν εὑρίσκονται κατὰ τὸ παρὸν 200000 ἄνθρωποι. Ἂν λοιπὸν ὁ πληθυσμὸς αὐξάνῃ ἐτησίως κατὰ τὸ πεντηκοστὸν αὐτοῦ μέρος: Πόσος θέλει ἀπογίνει μετὰ 100 ἔτη;

Ἀπ. 1448927б περίπου.

6) Πόσον θέλει γίνει κεφάλαιον 12000 ταλ. μετὰ 10 ἔτη, ἂν ἦναι τοκισμένον πρὸς 6 τὰ ἑκατὸν καὶ οἱ τόκοι πληρόνωνται καθ' ἑξαμηνίαν;

Ἀπ. 21673 τάλ. καὶ 8 γρ. περίπου.

7) Πόσον καιρὸν πρέπει νὰ μείνωσι 3600 τάλ. πρὸς 5 τὰ ἑκατὸν εἰς ἀνατοκισμὸν, διὰ νὰ γίνωσιν, ὅσα καὶ 5000 τάλ. πρὸς 4 τὰ ἑκατὸν εἰς διάστημα 12 ἐτῶν;

Ἀπ. Περίπου 16 ἔτη.

8) Πόσον καιρὸν πρέπει νὰ σταθῇ ἓν κεφάλαιον α μὲ τόκους π, διὰ νὰ γίνῃ, ὅσον καὶ ἄλλο κεφάλαιον α' μὲ τόκους π, μετὰ ν ἔτη,

Ἀπ. $\frac{\lambda o\gamma\, \alpha' + \nu\, \lambda o\gamma\, \pi' - \lambda o\gamma\, \alpha}{\lambda o\gamma\, \pi}$ χρόνους.

9) Πόσον μεγάλον πρέπει νὰ ἦναι κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον εἶναι τοκισμένον πρὸς 4 τὰ ἑκατὸν, ἂν πρέπῃ νὰ γίνῃ μετὰ 15 ἔτη, ὅσον καὶ 4500 τάλ. πρὸς 6 τα ἑκατὸν εἰς 9 ἔτη;

Ἀπ. 4221 ταλ. περίπου.

10) Πόσον μεγάλον πρέπει νὰ ἦναι τὸ κεφάλαιον α, ἂν μὲ τόκους π, εἰς ν ἔτη γίνῃ ὅσον καὶ ἄλλο κεφάλαιον α' εἰς ν' ἔτη μὲ τόκους π';

Ἀπ. $\lambda o\gamma\, \alpha = \lambda o\gamma\, \alpha' + \nu'\, \lambda o\gamma\, \pi' - \nu\, \lambda o\gamma\, \pi$. Δι' αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως εὑρίσκεται πρῶτον ὁ λογ. α καὶ ἔπειτα τὸ κεφάλαιον α.

11) Πόσον μεγάλοι πρέπει ὅμως νὰ ἦναι οἱ τόκοι, ἂν τὸ κεφάλαιον α εἰς ν ἔτη πρέπῃ νὰ γίνῃ ὅσον καὶ ἄλλο κεφάλαιον α' εἰς ν' ἔτη μὲ τόκους π';

Ἀπ. $\lambda o\gamma\, \pi = \frac{\lambda o\gamma\, \alpha' + \nu\, \lambda o\gamma\, \pi' - \lambda o\gamma\, \alpha}{\nu}$

12) Χρέος 7963 τάλ. εἶναι τοκισμένον πρὸς 5 τὰ ἑκατόν. Ἂν μετὰ 5 ἔτη ἀφαιρεθῶσι 576 τάλ. καὶ μετὰ 8 498: πόσον θέλει εἶναι τὸ ὑπόλοιπον μετὰ δέκα ἔτη μὲ ἀνατοκισμόν;

Ἀπ. 11696 τάλ. περίπου.

13) Πόσα ἀποτελοῦν οἱ ἑξαμηνιαῖοι τόκοι κεφαλαίου, ἂν οἱ ἐτήσιοι λογαριασθῶσι πρὸς 5 τὰ ἑκατὸν καὶ ληφθῶσι πρὸς τούτοις οἱ ἀνατοκισμοί; Καὶ πόσοι εἶναι οἱ τριμηνιαῖοι τόκοι ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας;

Ἀπ. Οἱ ἑξαμηνιαῖοι 2,4695 καὶ οἱ τριμηνιαῖοι 1,2272 τὰ ἑκατὸν περίπου.

14) Πόσα κάμνουν μὲ τόκους π οἱ $\frac{1}{\nu}$ ἐτήσιοι τόκοι;

Ἀπ. $100\,(\sqrt[\nu]{\pi} - 1)$ τὰ ἑκατόν.

15) Πόσον πρέπει νὰ σταθῇ κεφάλαιον πρὸς 4 τὰ ἑκατὸν, ἂν πρέπῃ νὰ διπλασιασθῇ καὶ πόσον ἂν πρέπῃ νὰ τριπλασιασθῇ;

Ἀπ. 17 ἕως 18 ἔτη διὰ νὰ διπλασιασθῇ καὶ 28 ἕως 29 διὰ νὰ τριπλασιασθῇ.

16) Πόσον καιρὸν πρέπει νὰ σταθῇ τὸ αὐτὸ μὲ τόκους π, ἂν πρέπῃ νὰ γίνῃ $\mu =$ πλάσιον;

Ἀπ. $\frac{\lambda o\gamma\, \mu}{\lambda o\gamma\, \pi}$ ἔτη,

17) Τραπεζίτης ἐδάνεισεν 600 τάλ. καὶ ἔλαβεν ὁμολογίαν διὰ νὰ τὸν πληρωθῶσι μετὰ τρία ἔτη 800 τάλ. χωρὶς τόκους. Πόσους τόκους ἔλαβεν αὐτός, ἂν λογισθῇ καὶ ὁ ἀνατοκισμός ;

᾿Απ. Κάτι τι ὑπὲρ τὰ 10 τὰ ἑκατόν ;

18) Ἂν τὸ κεφάλαιον α πρέπῃ νὰ γίνῃ μετὰ ν ἔτη Λ : Πρὸς πόσα πρέπει νὰ τοκισθῇ ;

᾿Απ. $\lambda o\gamma\,\pi = \frac{\lambda o\gamma.\Lambda - \lambda o\gamma\,\alpha}{\nu}$ (π δεικνύει τὸν τόκον).

19) Κάποιος ἔχει νὰ πληρώσῃ μετὰ 6 ἔτη κεφάλαιον 3750 τάλ. Πόσα ἠμπορεῖ νὰ πληρώσῃ ἀμέσως, ἂν ἐκπεσθῶσι 4 τὰ ἑκατὸν καὶ συμπεριληφθῶσιν οἱ ἀνατοκισμοί ;

᾿Απ. 2963 τάλ. καὶ 16 γρ. περίπου.

20) Ποία εἶναι ἡ μετρητὴ ἀξία κεφαλαίου α, τὸ ὁποῖον θέλει πληρωθῇ μετὰ ν ἔτη πρὸς π τὰ ἑκατόν ;

᾿Απ. $\frac{\alpha}{\pi^\nu}$.

21) Πόσον πρέπει νὰ καταβάλῃ τις τώρα εἰς γῆν, ἥτις μετὰ τὸ εἰκοστὸν ἔτος δίδει 500 τάλ. ὥστε τὸ κατατεθὲν κεφάλαιον νὰ δώσῃ 4 τὸ ἑκατόν ;

᾿Απ. Κάτι τι ὑπὲρ 228 τάλ.

22) Εἰς πόλιν εὑρίσκονται 20000 ψυχαὶ καὶ εἶναι γνωστόν, ὅτι ὁ πληθυσμὸς ηὔξανε τακτικῶς κατὰ [illegible] ἐτησίως: πόσος ἦτον ὁ πληθυσμὸς πρὸ δέκα ἐτῶν.

᾿Απ. 14882.

23) Δάσος ἔχει 30000 ὀργυιὰς ξύλα καὶ ἠξεύρουν, ὅτι ηὔξανεν ἐτησίως κατὰ 2 τὰ ἑκατόν: Πόσας ὀργυιὰς ἔπεται νὰ εἶχε πρὸ 10 ἐτῶν ;

᾿Απ. 24610 ὀργυιάς.

24) Ἐπωλεῖτο ὑποστατικὸν καὶ παρευρέθησαν εἰς τὴν πώλησιν τρεῖς ζητηταί· Ὁ πρῶτος ἔδωκε 30000 τάλ. μετρητά, ὁ

δεύτερος ἐπρόβαλε νὰ πληρώσῃ 33500 τάλ. μετὰ τρία ἔτη χωρὶς τόκους· ὁ τρίτος τελευταῖον 40000 μετὰ 7 ἔτη ἐπίσης χωρὶς τόκους. Ποία ἀπὸ τὰς τρεῖς πληρωμὰς ἦτον μεγαλητέρα, ἂν οἱ τόκοι λογισθῶσι πρὸς 5 τὰ ἑκατὸν καὶ συμπεριληφθῶσι καὶ τόκοι τόκων; Καὶ κατὰ πόσα ὑπερέχει τὰ δύω ἄλλα εἰς μετρητά ;

᾿Απ. Τὸ πρῶτον εἶναι τὸ μεγαλήτερον καὶ ὑπερέχει τὸ δεύτερον κατὰ 1061 καὶ τὸ τρίτον κατὰ 1573 τάλ. περίπου.

25) Εἰς πόσα ἔτη ἠμπορεῖ ὁ πληθυσμὸς πόλεως νὰ δεκαπλασιασθῇ, ἂν ἐτησίως αὐξάνῃ κατὰ 3 τὰ ἑκατόν.

᾿Απ. Εἰς 78 ἔτη περίπου.

26) Κεφάλαιον 800 τάλ. ηὔξησεν εἰς διάστημα 6 ἐτῶν ἕως 3600 τάλ. Πρὸς πόσα τὰ ἑκατὸν κατετέθη ;

᾿Απ. Πρὸς 28$\frac{1}{2}$ περίπου τὰ ἑκατόν.

27) Κεφάλαιον α καταβάλλεται εἰς τόκους πρὸς π τὰ ἑκατόν· μετὰ τὸ τέλος τοῦ ἔτους οἱ τόκοι προστίθενται εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ ἐκτὸς τούτων προστίθεται ἀκόμη ἢ ἀφαιρεῖται καὶ ἄλλο κεφάλαιον β. Πόσον θέλει γίνει αὐτὸ μετὰ ν ἔτη ;

᾿Απ. Εἶναι $= \alpha\pi^\nu \pm \frac{\beta(\pi^\nu - 1)}{\pi - 1}$· ὅπου τὸ ἄνω σημεῖον εἶναι διὰ τὴν προσθήκην τοῦ β καὶ τὸ κάτω διὰ τὸ ἐναντίον.

28) Κεφάλαιον 6000 τάλ. εἶναι τοκισμένον πρὸς 5 τὰ ἑκατὸν καὶ προστίθενται εἰς αὐτὸ ἐτησίως 500 τάλ. ἐκτὸς τοῦ ἀνατοκισμοῦ. Πόσον θέλει γίνει τὸ κεφάλαιον εἰς δέκα ἔτη;

᾿Απ. 16062 τάλ. καὶ 7 γρ. περίπου.

29) Πόσον θέλει γίνει κεφάλαιον 3740 τάλ. μετὰ 8 ἔτη, ἂν καθ' ἕκαστον ἔτος προστίθενται 450 τάλ. καὶ ἦναι τὸ ὅλον πρὸς 4 τὰ ἑκατὸν τοκισμένον ;

᾿Απ. 9264 τάλ. καὶ 20 γρ. περίπου.

30) Χρέος συνιστάμενον ἀπὸ 15467 τάλ. εἶναι τοκισμένον

πρὸς 5 τὰ ἑκατόν. Εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους πληρόνονται 600 τάλ. Πόσον θέλει εἶναι λοιπὸν τὸ ὑπόλοιπον μετὰ παρέλευσιν δέκα ἐτῶν;

Ἀπ. 17647 τάλ. περίπου.

31) Χρεώστης θέλει νὰ ἐξοφλήσῃ εἰς 10 ἐτῶν διάστημα 20000 δρ. πληρόνων ἐνταυτῷ καὶ τὸν τόκον των κατ' ἔτος. Ζητεῖται πόσα πρέπει νὰ δίδῃ ἐτησίως, ἂν ὁ τόκος λογισθῇ προς 5 τὰ ἑκατόν;

Ἀπ. 2590,05 περίπου.

32) Ἀπὸ κεφάλαιον 5000 ταλ, πρὸς 5 τὰ ἑκατὸν τοκισμένον, ἀφαιροῦνται ἐτησίως 400 τάλ. Πόσον θέλει εἶναι τὸ ὑπόλοιπον μετὰ δέκα ἔτη;

Ἀπ. 3113 τάλ. περίπου.

33) Κάποιος ὑπεχρεώθη νὰ πληρόνῃ ἑπτὰ ἔτη κατὰ σειρὰν εἰς τὴν ἀρχὴν παντὸς ἔτους 4000 τάλ. δὲν ἐδυνήθη ὅμως νὰ τὸ ἐκτελέσῃ. Ζητεῖται λοιπὸν πόσων εἶναι χρεώστης εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἑβδόμου ἔτους, ἂν οἱ τόκοι λογισθῶσι πρὸς 4 τὰ ἑκατόν;

Ἀπ. 31593 τάλ. περίπου.

34) Ἔδωκέ τις εἰς ἀνατοκισμὸν 30000 τάλ. πρὸς 4 τὰ ἑκατόν, καὶ λαμβάνων ἐξ αὐτῶν ἐτησίως διέξοδά του 800, προσθέτει πάλιν τὸ ὑπόλοιπον εἰς τὸ κεφάλαιον. Ζητεῖται πόσα θέλει ἔχει μετὰ 15 ἔτη;

Ἀπ. 38009 ταλ. καὶ 10 γρ. περίπου.

35) Κάποιος ἔδωκεν εἰς ἀνατοκισμὸν ὅλην του τὴν περιουσίαν 100000 ταλ. πρὸς 5 τὰ ἑκατὸν, δὲν ἠμπόρει ὅμως νὰ ζήσῃ μὲ τοὺς τόκους τοῦ κεφαλαίου, καθότι ἐχρειάζετο ἐτησίως 6000 ταλ: δι' ἔξοδά του. Επομένως ἠναγκάσθη νὰ ἀφαιρῇ ἐτησίως μέρος τοῦ κεφαλαίου, ὥστε αὐτὸ καὶ οἱ τόκοι νὰ ἀποτελῶσιν 6000 τάλ. Μετὰ πόσα ἔτη θέλει καταναλωθῇ ὁλοτελῶς ἡ περιουσία;

Ἀπ. Μετὰ 36 ἕως 37 ἔτη.

36) Κεφάλαιον α τοκίζεται πρὸς π τὰ ἑκατόν: Εἰς πόσον καιρὸν θέλει γίνει α' τὸ κεφάλαιον, ἂν εἰς τὸ αὐξανόμενον κεφάλαιον διὰ τῶν τόκων καὶ ἀνατοκισμῶν προστίθεται ἢ ἀφαιρῆται ἐτησίως ῥητὴ ποσότης β;

Ἀπ. $\nu = \frac{\lambda o\gamma\,[(\pi - 1)\alpha' \pm \beta] - \lambda o\gamma\,[(\pi - 1)\,\alpha \pm \beta]}{\lambda o\gamma\,\pi}$.

(ν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐτῶν) τὸ ἄνω σημεῖον τοῦ ± εἶναι διὰ τὴν προσθήκην καὶ τὸ κάτω διὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ β.

37) Ἂν εἰς τὸ προλαβὸν πρόβλημα ἀφαιρεῖται ἐτησίως β, καὶ τὸ β ἦναι μεγαλήτερον ἀπὸ τοὺς τόκους τοῦ κεφαλαίου α: μετὰ πόσα ἔτη θέλει καταναλωθῇ ὅλον τὸ κεφάλαιον.;

Ἀπ. $\nu = \frac{\lambda o\gamma\beta - \lambda o\gamma\,[\beta - \pi\,(-1)\,\alpha]}{\lambda o\gamma.\,\pi}$ δίδει τὸν ἀριθμὸν τῶν ζητουμένων ἐτῶν.

38) Πόση εἶναι ἡ μετρητὴ ἀξία α ἐτησίου εἰσοδήματος ρ, διὰ ν ἔτη πρὸς π τὰ ἑκατόν;

Ἀπ. $\alpha = \frac{(\pi^{\nu} - 1)\,\rho}{(\pi - 1)\,\pi^{\nu}}$.

39) Κάποιος ἤθελε νὰ πωλήσῃ πρόσοδον 500 ταλ:, ἥτις τὸν ἀνῆκεν ἓξ ἔτη: Πόσα ἠμπορεῖ νὰ λάβῃ, ἂν οἱ τόκοι λογισθῶσι πρὸς $3\frac{1}{2}$ τὰ ἑκατόν;

Ἀπ. 2664 ταλ. καὶ 7 γρ. περίπου.

40) Πόση εἶναι ἡ μετρητὴ ἀξία προσόδου 350 ταλ. ἂν ἦναι 8 ἔτη εἰς ἐργασίαν πρὸς 4 τὰ ἑκατόν;

Ἀπ. Κάτι τι ὑπὲρ 2356 ταλ. καὶ 11 γρ.

41) Πόσον μεγάλη εἶναι πρόσοδος 400 τάλ. ἥτις μένει εἰς ἐργασίαν 12 ἔτη, πρὸς 3 τὰ ἑκατόν;

Ἀπ. Κάτι τι ὑπὲρ 3981 ταλ. καὶ 14 γρ.

42) Πόσον μεγάλη εἶναι πρόσοδος ρ, ἥτις μένει εἰς ἐργασίαν ν ἔτη καὶ τῆς ὁποίας ἡ μετρητὴ ἀξία εἶναι α;

'Απ. $\rho = \frac{(\pi - 1)\pi^{\nu}\alpha}{\pi^{\nu} - 1}$

43) Χρέος 1200 ταλ. πρέπει νὰ ἐξαλειφθῇ εἰς 7 ἐτησίους προθεσμίας εἰς ἴσας ποσότητας: πόσον μεγάλαι πρέπει νὰ ἦναι αὗται αἱ κατὰ προθεσμίαν πληρωμαί, ἂν οἱ τόκοι λογισθῶσι πρὸς 4 τὰ ἑκατόν;

'Απ. 200 τάλ. περίπου.

44) Πόσον μεγάλη πρέπει νὰ ἦναι πρόσοδος, ἥτις ἐργαζομένη 13 ἔτη ἠμπορεῖ νὰ ἐξισωθῇ μὲ κεφάλαιον μετρητὸν 20000 τάλ. τοκισμένον πρὸς 4 τὰ ἑκατόν;

'Απ. 2003 τάλ. περίπου.

45) Χωρίον ἐδανείσθη ἀπὸ τὴν πρωτεύουσάν του 20000 τάλ. καὶ ἔδωκεν ἀντὶ τούτου δάσος, τὸ ὁποῖον ἔδιδεν ἐτησίως 1500 ταλ. Πόσον καιρὸν ἠμπορεῖ ἡ πόλις νὰ ἐκκαρπωθῇ τὸ δάσος τοῦτο διὰ τὸ δοθὲν κεφάλαιον, ἂν οἱ τόκοι λογισθῶσι πρὸς 5 τὰ ἑκατόν;

'Απ. 22 ἔτη περίπου.

46) Πόσον καιρὸν ἠμπορεῖ τις νὰ ὠφεληθῇ ἐτήσιον πρόσοδον 200 τάλ. πρὸς 4 τὰ ἑκατόν, ἂν πληρώσῃ ἐπὶ τούτῳ 34580 τάλ;

'Απ. 30 ἔτη περίπου.

47) Πόσον καιρὸν πρέπει νὰ διαρκέσῃ ἐτησία πρόσοδος διὰ νὰ ἐξισωθῇ μὲ μετρητὸν κεφάλαιον φ πρὸς π τὰ ἑκατόν;

'Απ. $\lambda o\gamma\ \nu = \frac{\lambda o\gamma\rho - \lambda o\gamma\,[\rho\,(\pi - 1)\,\varphi]}{\lambda o\gamma\ \pi}$

48) Ζητεῖται ἐτησία πρόσοδος ρ', ἥτις διὰ γνωστὸν διάστημα ν' ἐτῶν ἐξισοῦται εἰς μετρητὰ μὲ ἄλλην πρόσοδον ρ εἰς ν ἔτη, ἂν οἱ τόκοι καὶ τῶν δύω λογισθῶσι πρὸς π τὰ ἑκατόν;

'Απ. $\rho' = \frac{(\pi^{\nu} - 1)\,\pi^{\nu' - \nu}}{\pi^{\nu'} - 1}\,\rho.$

49) Πόσον ὅμως μεγάλη πρέπει νὰ ἦναι ἡ ζητουμένη πρόσοδος ρ', ἂν πρέπῃ νὰ γίνῃ ἡ ἀρχὴ τῆς πληρωμῆς διὰ πρώτην φορὰν μετὰ μ ἔτη καὶ ἔπειτα νὰ ἀποδοθῇ ἐφεξῆς ὅλη μετὰ ν ἔτη;

'Απ. $\rho' = \frac{(\pi^{\nu} - 1)\,\pi^{\nu' - \nu + \mu}}{\pi^{\nu'} - 1}\,\rho.$

50) Πόση εἶναι ἡ μετρητὴ ἀξία ἐτησίου προσόδου ρ, ἥτις προχωρεῖ κατὰ γεωμετρικὴν ἀναλογίαν, τῆς ὁποίας ὁ ἐκθέτης εἶναι ε, ἂν διαρκέσῃ ν ἔτη καὶ οἱ τόκοι λογισθῶσι πρὸς π τὰ ἑκατόν;

'Απ. $\frac{\rho\,(\varepsilon^{\nu} - \pi^{\nu})}{(\varepsilon - \pi)\,\pi^{\nu}}$, ἢ $\frac{\rho\left(\frac{\varepsilon^{\nu}}{\pi^{\nu}} - 1\right)}{\varepsilon - \pi}$. Τὸ δεύτερον σχῆμα εἶναι διὰ τὴν ἀρίθμησιν μὲ λογαρίθμους εὐκολώτερον.

51) Πόση εἶναι ἡ μετρητὴ ἀξία ἐτησίου προσόδου διὰ ν ἔτη, ἂν γίνωσιν αἱ πληρωμαὶ κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν σειρὰν ρ, 2ρ, 3ρ, 4ρ, κ. ο. κ., ὥστε εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους νὰ πληρωθῶσι ρ, εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου 2ρ, κ. ο. κ. πρὸς π τὰ ἑκατόν;

'Απ. Ἔσω ἡ μετρητὴ ἀξία ἐτησίου προσόδου ρ διὰ ν ἔτη, ἥτις μένει πάντοτε ἡ αὐτή, $= \varphi$, τότε εἶναι ἡ μετρητὴ ἀξία τῆς προοδευούσης προσόδου κατὰ τὴν δοθεῖσαν ἀριθμητικὴν σειρὰν

$$= \frac{1}{\pi^{\nu} - 1}\left(\pi\varphi - \frac{\nu\rho}{\pi}\right).$$

. . . .

Ὅστις θέλει νὰ λάβῃ ἐντελεῖς γνώσεις περὶ τοῦ ἀντικειμένου τούτου, ἠμπορεῖ νὰ ὠφεληθῇ μεγάλως ἀπὸ τὰς « πραγματείας τοῦ Φλωρενκούρτου περὶ δικανικῶν καὶ πολιτικῶν ὑπολογισμῶν» (Florencourt's Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechenkunst), ἀπὸ τὴν «εἰσαγωγὴν τοῦ Τέτενς εἰς ὑπολογισμὸν τῶν διὰ βίου καὶ μετὰ θάνατον προσόδων» (Tetens Anleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften) καὶ ἀπὸ τὰς ἀρχὰς τοῦ Χριστιάνη περὶ χρηματικῆς» (Christiani's Anfangsgründe der Staatsrechenkunst). Μεταξὺ τῶν τριῶν τούτων συγγραμμάτων, τὸ ἐντελέστερον εἶναι τοῦ Τέτενς. Δι' ἀνθρώπους ὅμως, οἵτινες δὲν θέλουν πολλὰς βαθείας γνώσεις περὶ τοῦ πράγματος ἐξέδωκεν ὁ Λαγγσδόρφ μικρὸν σύγγραμμα, ἐπιγραφόμενον: ἀριθμητικαὶ πραγματεῖαι περὶ δικανικῶν, πολιτικῶν καὶ δασονομικῶν ζητημάτων, περὶ θνητότητος, πληθυσμοῦ κτλ. (Langsdorf's Arithmetische Abhandlungen über juristische, staats-und forstwissenschaftliche Fragen, Mortalitæt, Bevœlkerung etc.).

Ὁ διδάσκων ἠμπορεῖ νὰ παρατηρήσῃ τὸ ἑξῆς: Τὸ τελευταῖον πρόβλημα ἠμπορεῖ εὐκολώτερα νὰ λυθῇ διὰ τῆς βοηθείας τῶν γεωμετρικῶν σειρῶν καὶ περισσότερον δὲν ἀνήκει ἐδῶ· αὐτὸ ὅμως εἶναι μερικὴ περίπτωσις ἄλλου γενικωτέρου προβλήματος. Ἔστω $A + B\chi + \Gamma\chi^2 + \Delta\chi^3 +$ κτλ. ἡ ἀπολαβὴ τῶν προσόδων μετὰ τὸ ἀόριστον χ^{ov} ἔτος· τότε εἶναι ἡ μετρητὴ ἀξία τῆς μερικῆς αὐτῆς ἀπολαβῆς $= \pi^{-\chi}(A + B\chi + \Gamma\chi^2 + \Delta\chi^3 +$ κτλ$)$ καὶ ἑπομένως $K\pi^{-\chi}$ $(A + B\chi + \Gamma\chi^2 + \Delta\chi^3 +$ κτλ.$)$ ἡ μετρητὴ ἀξία τῆς προσόδου, ὅπου K σημαίνει τὸ κεφάλαιον. Κεφαλαιώσεις ὅμως τούτου τοῦ τρόπου εἶναι πάντοτε ἐκτελεσταί. (Ἰδὲ: Ttaité du calcul des différences et des séries, par Lacroix σελ. 90. §. 911 τῆς πρώτης ἐκδόσεως). Διὰ τὸ ἄνω πρόβλημα εἶναι $B = \rho$ καὶ A, B, Γ, Δ, κτλ. $= 0$·

Κδʹ. *Προβλήματα τῶν μεταθέσεων, συνδυασμῶν καὶ μεταβολῶν, ἔτι δὲ καὶ περὶ ὑπολογισμοῦ τῶν πιθανοτήτων.*

1) Ποσάκις ἠμποροῦν ὀκτὼ ἄνθρωποι, τεταγμένοι ὁ εἰς πλησίον τοῦ ἄλλου νὰ ἀλλάξωσι τὰς θέσεις των, δηλ: ἑκάστοτε νὰ φυλάττεται διάφορος τάξις;

Ἀπ. 40320 φοράς.

2) Ποσάκις ἠμποροῦν νὰ μεταλλαχθῶσι τὰ 24 γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου;

Ἀπ. 620448401733239439360000. Ὅλοι οἱ ἄνθρωποι ἐπὶ γῆς δὲν ἤθελαν δυνηθῇ εἰς διάστημα χιλίων ἑκατομυρίων ἐτῶν νὰ γράψωσιν ὅλας τὰς μεταλλαγὰς τῶν 24 γραμμάτων, ἂν καὶ ἡμερουσίως ἔγραφεν ἕκαστος 40 σελίδας, ἐξ ὧν ἑκάστη περιεῖχε 40 διαφόρους μεταλλαγάς.

3) Πόσαι συζεύξεις εὑρίσκονται μεταξὺ ὅλων τῶν μεταλλαγῶν τοῦ αβγδεζη, αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουν μὲ ἓν τῶν γραμμάτων α, β, γ, δ, ε, ζ, η.

Ἀπ. 720.

4) Πόσαι εὑρίσκονται, αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουν μὲ αβ; Πόσαι μὲ αβγ; Πόσαι μὲ αβγδ;

Ἀπ. 120 μὲ τὸ αβ, 24 μὲ αβγ καὶ 6 μὲ αβγδ.

5) Πόσαι εἶναι, ὅπου τὰ γράμματα α, β, γ, δ μένουν μαζῆ καὶ μάλιστα κατὰ τὴν τάξιν, τὴν ὁποίαν φυλάττουν ἐδῶ;

Ἀπ. 24.

6) Πόσαι εἶναι, ὅπου τὰ γράμματα α, β, γ, δ μένουν μαζῆ, χωρὶς νὰ θεωρηθῇ ὅμως ἡ μερικὴ αὐτῶν τάξις;

Ἀπ. 576.

7) Πόσαι συζεύξεις εἶναι μεταξὺ ὅλων τῶν μεταλλαγῶν $\alpha^3 \beta^5 \gamma^4$, αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουν μὲ γ^3;

Ἀπ. 504.

8) Πόσαι, αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουν μὲ $\alpha^2\beta^2\gamma^2$;

Ἀπ. 140.

9) Πόσαι, ὅπου τὸ α λαμβάνει σταθερὸν τόπον, π. χ. τὸν τέταρτον;

Ἀπ. 6930.

10) Πόσον εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν χαρακτήρων εἰς ὅλας τὰς μεταθέσεις τῆς συζεύξεως τῶν χαρακτήρων 12234;

Ἀπ. 720.

11) Πόσον εἶναι τὸ κεφάλαιον ἑκάστης καθέτου στήλης, ἂν γραφῶσιν αἱ συζεύξεις ἡ μία ὑπὸ τὴν ἄλλην;

Ἀπ. 144.

12) Πόσον εἶναι τὸ κεφάλαιον ἑκάστης καθέτου στήλης, ἂν ὅλαι αἱ μεταθέσεις τῆς συμπλοκῆς τῶν χαρακτήρων 2557789 γραφῶσιν ἡ μία ὑπὸ τὴν ἄλλην;

Ἀπ. 7740.

13) Πόσαι δυάδες, τριάδες, τετράδες πεντάδες, περιέχονται εἰς 90 ἀριθμούς;

Ἀπ. 4005 δυάδες, 117480 τριάδες, 2555190 τετράδες καὶ 43949268 πεντάδες.

14) Πόσαι εἶναι εἰς 60 ἀριθμούς;

Ἀπ. 1770 δυάδες, 34220 τριάδες, 487635 τετράδες καὶ 5461512 πεντάδες.

15) Εἰς πικέτον πρέπει νὰ ληφθῶσιν ἀπὸ 32 χαρτία ἀνακατωμένα 15 χωρὶς ἐκλογήν. Κατὰ πόσους δυνατοὺς τρόπους ἠμποροῦν τὰ ληφθέντα χαρτία νὰ συντεθῶσιν;

Ἀπ. Κατὰ 565722720 τρόπους.

16) Τὸ γινόμενον αβγδ ἠμπορεῖ νὰ ἀναλυθῇ κατὰ τρεῖς τρόπους εἰς μικρότερα γενόμενα, ἕκαστον ἀπὸ δύω παράγοντας, οἷον εἰς $\alpha\beta \times \gamma\delta$, $\alpha\gamma \times \beta\delta$, $\alpha\delta \times \beta\gamma$· τὸ γινόμενον αβγδεζ ἠμπορεῖ

νὰ ἀναλυθῇ εἰς 15 τοιαῦτα, οἷον $\alpha\beta \times \gamma\delta \times \epsilon\zeta$, $\alpha\beta \times \gamma\epsilon \times \delta\zeta$, $\alpha\beta \times \gamma\zeta \times \delta\epsilon$, κ. ο. κ. Κατὰ πόσους τρόπους ἠμπορεῖ νὰ ἀναλυθῇ λοιπὸν τὸ γινόμενον αβγδεζη κτλ., ἂν περιέχῃ τὸ αὐτὸ 2ν παράγοντας α, β, γ, δ, ε, ζ, η, κτλ. εἰς τοιαῦτα γινόμενα δύω παραγόντων;

Ἀπ. Κατὰ $\frac{(\nu+1)(\nu+2)\cdots\cdots(2\nu-1)2\nu}{(1\cdot 2)}$ τρόπους.

17) Κατὰ πόσους τρόπους ἠμπορεῖ τὸ ἀπὸ 3ν παράγοντας α, β, γ, δ, ε, ζ, η, κτλ. συγκείμενον γινόμενον αβγδεζη κτλ. νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενα τριῶν παραγόντων ἕκαστον;

Ἀπ. Κατὰ $\frac{(\nu+1)(\nu+2)\ldots\ldots(3\nu-1)3\nu}{(1\cdot 2\,.\,3)^\nu}$ τρόπ.

18) Κατὰ πόσους ἠμπορεῖ τὸ ἀπὸ μν παράγοντας α, β, γ, δ, ε, ζ, η, κτλ. συγκείμενον γινόμενον αβγδεζη κτλ. νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενα μ παραγόντων ἕκαστον;

Ἀπ. Κατὰ $\frac{(\nu+1)(\nu+2)\ldots\ldots(\mu\nu-1)\mu\nu}{(1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\mu)^\nu}$ τρόπους.

19) Πᾶς ἕκαστος ὁλόκληρος ἀριθμὸς Ν εἶναι ἀρχικὸς ἀριθμὸς, ἢ γινόμενον ἴσων καὶ διαφόρων ἀρχικῶν ἀριθμῶν· Ἑπομένως, ἂν α, β, γ κτλ. σημαίνωσι ἀρχικοὺς ἀριθμούς, τότε ἠμπορεῖ ἐν γένει νὰ τεθῇ $N = \alpha^\mu \beta^\nu \gamma^\pi$ κτλ. ἂν φαντασθῇ τις ὑπὸ μ, ν, π, κτλ· ὅλους τοὺς δυνατοὺς ὁλοκλήρους ἀριθμοὺς συμπεριλαμβανομένου καὶ τοῦ μηδενός. Πῶς ἠμποροῦν λοιπὸν νὰ εὑρεθῶσιν ὅλοι οἱ δυνατοὶ ἀριθμοὶ διὰ τῶν ὁποίων διαιρεῖται ὁ ἀριθμὸς Ν; Καὶ πόσα μέρη θέλει ἔχει ἐν γένει;

Ἀπ. Ἔστω, διὰ τὴν συντομίαν, $1+\alpha+\alpha^2\ldots\ldots+\alpha^\mu = A$, $1+\beta+\beta^2+\ldots\ldots+\beta^\nu = B$, $1+\gamma+\gamma^2+\ldots\ldots+\gamma^\pi = \Gamma$, κτλ. τότε δίδουν οἱ ὅροι τοῦ γινομένου ΑΒΓΔ κτλ. ὅλα τὰ μέρη τοῦ ἀριθμοῦ Ν καὶ ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν εἶναι $=(\mu+1)(\nu+1)(\pi+1)$ κτλ. Ἐπειδὴ π. χ. $360 = 2^3 . 3^2 5^1$, οὕτω δίδει τὸ γινόμενον 4.3.2 τὸν ἀριθμὸν τῶν μερῶν τοῦ 360, καὶ οἱ ὅροι τοῦ γινομένου $(1+2+4+8)(1+3+9)(1+5)$ δίδουν αὐτὰ τὰ μέρη, οἷον: 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72, 5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360.

20) Πῶς ἠμποροῦν νὰ εὑρεθῶσιν ἀριθμοί, ἔχοντες δοθεῖσαν ποσότητα ν μερῶν καὶ οὔτε περισσοτέρων οὔτε ὀλιγωτέρων;

Ἀπ. Ἔςωσαν α, β, γ, κτλ. κατὰ θέλησιν ἀρχικοὶ ἀριθμοί. Ἂν τὸ ν ἦναι ἀρχικὸς ἀριθμός, τότε εἶναι τὸ $\alpha^{\nu-1}$ ὁ ζητούμενος ἀριθμός. Ἂν τὸ ν ἦναι σύνθετος ἀριθμός, ἀναλύεται αὐτὸς εἰς τοὺς παράγοντάς του μ', μ'', μ''', κτλ. ἐπίσης ἂν ἦναι ἁπλοῦς ἢ ὄχι καὶ τότε θέλει εἶναι $\alpha^{\mu'-1}\beta^{\mu''-1}\gamma^{\mu'''-1}$ κτλ. ὁ ζητούμενος ἀριθμός.

21) Ἂν ὀνομασθῇ ἐντελὲς πολυώνυμον τῆς $N^{ης}$ διαςάσεως διὰ ν ποσότητας χ, ψ, κτλ. ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον περιέχει ὅλους τοὺς συνδυασμοὺς τῶν ν τούτων ποσοτήτων ἀπὸ τὴν $0^{ην}$ ἕως τὴν $\nu^{ην}$ τάξιν συμπεριλαμβανομένης καὶ αὐτῆς π. χ. ἓν πολυώνυμον τῆς τετάρτης διαςάσεως διὰ δύω ποσότητας εἶναι ὡς τὸ ἀκόλουθον: $\alpha+\beta\chi+\beta'\psi+\gamma\chi^2+\gamma'\chi\psi+\gamma''\psi^2+\delta\chi^3+\delta''\chi^2\psi+\delta''\chi\psi^2+\delta'''\psi^3+\varepsilon\chi^4+\varepsilon'\chi^3\psi+\varepsilon''\chi^2\psi^2+\varepsilon'''\chi\psi^3+\varepsilon''''\psi^4$. Ἀπὸ πόσους λοιπὸν ὅρους συνίςαται ἐντελὲς πολυώνυμον τῆς $N^{ης}$ διαστάσεως διὰ ν ποσότητας;

Ἀπ. Ἀπὸ $\frac{(N+1)(N+2)(N+3)\ldots\ldots(N+\nu)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\nu}$ ὅρους

22) Πόσοι ὅροι μένουν ἀπ' αὐτοὺς ὑπόλοιποι, ἂν ἐξαιρεθῶσιν ὅσοι ἐξ αὐτῶν εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ χ^π;

Ἀπ. $\frac{(N+1)(N+2)(N+3)\ldots\ldots(N+\nu)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\nu}$

$$-\frac{(N-\pi+1)(N-\pi+2)(N-\pi+3)\ldots\ldots(N-\pi+\nu)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\nu}$$

23) Πόσοι ὅροι ἀπὸ αὐτοὺς μένουν ὑπόλοιποι, ἂν ἀφαιρεθῶσιν ὅσοι εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ χ^π καὶ ψ^ρ;

Ἀπ. $\frac{(N+1)(N+2)(N+3)\ldots\ldots(N+\nu)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\nu}$

$$-\frac{(N-\pi+1)(N-\pi+2)(N-\pi+3)\ldots\ldots(N-\pi+\nu)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\nu}$$

$$-\frac{(N-\rho+1)(N-\rho+2)(N-\rho+3)\ldots\ldots(N-\rho+\nu)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\nu}$$

$$+\frac{(N-\pi-\rho+1)(N-\pi-\rho+2)\ldots\ldots(N-\pi-\rho+\nu)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\nu}$$

24) Ὑποτίθεται, ὅτι μεταξὺ ν δυνατῶν περιπτώσεων, καθὼς ἠμπορεῖ καὶ νὰ συμπέσῃ, εἶναι μ περιπτώσεις, αἱ ὁποῖαι ἠμποροῦν νὰ δώσωσιν ἐλπίδα ἢ προσδοκίαν, ἑπομένως $\nu-\mu$ περιπτώσεις, ὅπου ἠμπορεῖ τὸ ἐναντίον νὰ συμβῇ: ὁποία λοιπὸν πιθανότης εἶναι δι' ἁρμόδιον καὶ ὁποία δ' ἐναντίαν περίπτωσιν;

Ἀπ. $\frac{\mu}{\nu}$ διὰ τὴν ἁρμόδιον καὶ $\frac{\nu-\mu}{\nu}$ διὰ τὴν ἐναντίαν περίπτωσιν.

Πῶς πρέπει νὰ γραφῶσιν αἱ ἐκφράσεις αὗται, ὅταν ἦναι $\mu=0$; καὶ πῶς ὅταν $\mu=\nu$;

25) Εἰς λοταρίαν ἀριθμῶν ἐξάγονται 5 ἀριθμοὶ ἀπὸ 90 ὡς κερδίζοντες. Ἂν λάβῃ τις 12 ἀπὸ αὐτοὺς τοὺς 90 ἀριθμοὺς κατὰ θέλησιν καὶ ἐπιθέσῃ εἰς ὅλας τὰς περιεχομένας δυάδας, τριάδας, τετράδας καὶ πεντάδας: Πόσον μεγάλη θέλει εἶναι ἡ πιθανότης τοῦ νὰ κερδίσῃ αὐτὸς ἓν ἀπὸ αὐτά;

Ἀπ. Διὰ τὴν δυάδα εἶναι ἡ πιθανότης $=\frac{44}{267}$, διὰ τὴν τριάδα $=\frac{5}{267}$, διὰ τὴν τετράδα $=\frac{5}{5162}$, καὶ διὰ τὴν πεντάδα $=\frac{2}{110983}$.

26) Κάποιος ἤθελεν ἀπὸ τὴν αὐτὴν λοταρίαν νὰ λάβῃ τόσα χαρτία πρὸς 5 ἀριθμούς, ὥστε νὰ ἔχῃ βεβαίως τοὺς 5 κερδίζοντας ἐφ' ἑνὸς χαρτίου του. Πόσα χαρτία ἔπρεπε νὰ λάβῃ; Πόσα χαρτία ἦσαν μεταξὺ αὐτῶν, τὰ ὁποῖα περιεῖχαν μόνον τέσσαρας ἐπιτυγχάνοντας; Πόσα μὲ δύω καὶ τρεῖς; Πόσα μὲ ἕνα μόνον; καὶ πόσα μὲ κανένα ἐπιτυγχάνοντα;

Ἀπ. Ὁ ἀριθμὸς τῶν χαρτίων, τὰ ὁποῖα ἔπρεπε νὰ λάβῃ

43949268· ἐξ αὐτῶν ἦσαν 425 μὲ τετράδας, 35700 μὲ τριάδας, 987700 μὲ δυάδας, 10123925 μὲ μονάδας καὶ 32801517 μὲ τίποτε.

27) Ποῖον λόγον ἔχει ἡ πιθανότης τοῦ νὰ ἐξαχθῶσιν ἐξ προεγνωσμένοι ἀριθμοὶ ἀπὸ 13 διαφόρους εὑρισκομένους εἰς τροχὸν λοταρίας, πρὸς τὴν πιθανότητα τοῦ νὰ ἐξαχθῶσιν ὀκτὼ προεγνωσμένα χαρτία ἀπὸ πικέτον 32 χαρτίων· ἂν προϋποτεθῇ, ὅτι τὰ χαρτία καθὼς καὶ οἱ ἀριθμοὶ ἀνακατόνονται καλὰ καὶ ἡ ἐξαγωγὴ γίνεται κατὰ τύχην: Καὶ ἂν ἦναι τὰ κέρδη ἴσα, ὅταν τραβηχθῶσι τὰ χαρτία ἢ οἱ προσδιωρισμένοι ἀριθμοί: Πῶς πρέπει νὰ ἀναλογῶσιν αἱ καταθέσεις, ἂν, ὡς πρὸς τὴν πιθανότητα τοῦ κέρδους, θεωρηθῶσι καὶ τὰ δύω παιγνίδια ἴσα;

'Απ. Ἡ πιθανότης τοῦ κέρδους εἰς τὸ πρῶτον παιγνίδιον ἔχει πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου ὡς 11 πρὸς 67425 καὶ αἱ καταθέσεις ἐπίσης ὡς 11 πρὸς 67425.

28) Κατὰ πόσους τρόπους ἠμποροῦν νὰ μερισθοῦν 40 διάφοροι σφαῖραι εἰς δύω σωρούς, ὥστε ὁ πρῶτος νὰ περιέχῃ 33 καὶ ὁ ἄλλος 7 σφαίρας;

'Απ. Κατὰ 18643560 τρόπους.

29) Κατὰ πόσους τρόπους ἠμποροῦν νὰ μερισθῶσιν 21 διάφοροι σφαῖραι εἰς τρεῖς σωροὺς 3, 7 καὶ 11 σφαιρῶν;

'Απ. Κατὰ 42325920 τρόπους.

30) Κατὰ πόσους τρόπους ἠμποροῦν νὰ μερισθῶσι 19 διάφοροι σφαῖραι εἰς 4 σωροὺς 2, 4, 5 καὶ 8 σφαιρῶν;

'Απ. Κατὰ 523783260 τρόπους.

31) Κατὰ πόσους τρόπους ἠμποροῦν ἀπὸ πικέτον 32 χαρτίων νὰ ληφθῶσι πρῶτον 12, ἔπειτα, ἀπὸ τὰ ἐπίλοιπα 20, ἀκόμη 9 χαρτία; Ἢ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτό, κατὰ πόσους τρόπους ἠμποροῦν νὰ μερισθῶσι 32 χαρτία εἰς τρία μέρη, ὥστε τὸ πρῶτον νὰ συνίσταται ἀπὸ 12, τὸ δεύτερον ἀπὸ 9 καὶ τὸ τρίτον ἀπὸ 11;

'Απ. Κατὰ 3792416540640 τρόπους.

32) Εἰ, τὸ πικέτον λαμβάνει πᾶς ἕκαστος τῶν παικτῶν 12 χαρτία καὶ τὰ λοιπὰ 8 φυλάττονται ὡς χαρτία ἀγορᾶς: Πόσα διαφορὰ παιγνίδια εἶναι δυνατὰ εἰς τὴν διανομὴν τῶν χαρτίων;

'Απ. 2844312405580ο.

33) Κατὰ πόσους τρόπους ἠμποροῦν τὰ 52 χαρτία ὅλου τοῦ παιγνιδίου νὰ μερισθῶσιν εἰς τοὺς τέσσαρας παίκτας τοῦ Βίς; Ἤ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτό: κατὰ πόσους τρόπους ἠμποροῦν νὰ μερισθῶσι τὰ 52 ταῦτα χαρτία εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη, ἐξ ὧν ἕκαστος λαμβάνει 13;

'Απ. 856512619785115179786144οοοο τρόπους.

34) Πόση εἶναι ἡ πιθανότης εἰς μίαν τῶν ἄνω εἰρημένων λοταριῶν, ἂν ἀπὸ 30 ἀριθμοὺς ἐξαχθῇ μόνον εἷς καὶ ὄχι περισσότεροι;

'Απ. $\frac{28025}{84194}$ ἢ περίπου $\frac{1}{3}$.

35) Πόση ὅμως εἶναι ἡ πιθανότης, ἂν εἰς τὸ προλαβὸν πρόβλημα ἐξαχθῶσι μόνον δύω;

'Απ. $\frac{171100}{505164}$ ἢ κάτι τι ὑπὲρ $\frac{1}{3}$.

36) Πόση εἶναι ἡ πιθανότης, ἂν ἀπὸ 30 ἐξαχθῶσι μόνον 3;

'Απ. $\frac{82600}{505164}$ ἢ περίπου $\frac{8}{49}$.

37) Πόσον μεγάλη, ἂν καὶ οἱ πέντε ἐξαχθέντες ἀριθμοὶ ἦναι ἀπὸ τοὺς 30;

'Απ. $\frac{273}{84194}$ ἢ περίπου $\frac{1}{308}$.

38) Πρέπει νὰ ἐξαχθῶσιν εἰς πικέτον 9 χαρτία τυχηρῶς: Πόσον μεγάλη εἶναι ἡ πιθανότης τοῦ νὰ εὑρεθῶσι καὶ τὰ πέντε τοῦ αὐτοῦ χρώματος, ὡς σπαθί;

'Απ. $\frac{13107}{584350}$ ἢ περίπου $\frac{1}{47}$.

39) Πόση ἡ πιθανότης, ἂν ἀπὸ πέντε ἀριθμούς, ὡς εἰς τὴν ἄνω λοταρίαν, ἐξαχθῶσι μόνον πέντε, οὔτε περισσότεροι ὅμως, οὔτε ὀλιγώτεροι;

'Απ. $\frac{2975}{3062430}$ ἢ περίπου $\frac{1}{1231}$.

40) Πόση εἶναι ἡ πιθανότης, ἂν τύχωσιν δύω περιστάσεις, ἡ πρώτη μὲ τὴν πιθανότητα $\frac{\mu}{\nu}$, ἡ δευτέρα μὲ τὴν $\frac{\mu'}{\nu'}$;

'Απ. $\frac{\mu}{\nu} \cdot \frac{\mu'}{\nu'} = \frac{\mu\mu'}{\nu\nu'}$. Διατί;

41) Πόση εἶναι ἡ πιθανότης, ἂν τύχωσι καὶ αἱ τρεῖς περιστάσεις ἐνταυτῷ, ἔχουσαι τὰς τρεῖς πιθανότητας $\frac{\mu}{\nu}$, $\frac{\mu'}{\nu'}$, $\frac{\mu''}{\nu''}$.

'Απ. $\frac{\mu}{\nu} \cdot \frac{\mu'}{\nu'} \cdot \frac{\mu''}{\nu''} = \frac{\mu\mu'\mu''}{\nu\nu'\nu''}$.

42) Εἰς θήκην εὑρίσκονται 24 σφαῖραι, οἷον: 6 λευκαὶ, 8 μαῦραι καὶ 10 κόκκιναι· ἀπὸ αὐτὰς πρέπει πρῶτον νὰ ληφθῶσι τυχηρῶς 7 σφαῖραι καὶ ἔπειτα ἀπὸ τὰς ἐπιλοίπους 17 ἀκόμη 3. Ἐγὼ λέγω, ὅτι αἱ 7 πρῶται σφαῖραι θέλουν εἶναι κόκκιναι καὶ αἱ ἄλλαι τρεῖς λευκαί. Πόση εἶναι ἡ πιθανότης τοῦ νὰ ἀληθεύσῃ ὁ λόγος μου;

'Απ. $\frac{5}{490314}$ καὶ ἐπομένως ὀλίγη ἐλπίς.

43) Πόσα διάφορα ῥιψήματα ἠμποροῦν νὰ γίνωσι μὲ 2, 3, 4 καὶ ἐν γένει μὲ ν κύβους;

'Απ. Μὲ 2 κύβους 36, μὲ 3 216, μὲ 4 1296 καὶ ἐν γένει μὲ ν 6^{ν} ῥιψήματα.

44) Πόση εἶναι ἡ πιθανότης τοῦ νὰ ἐπιτύχῃ τις, μὲ 4 κύβους, τέσσαρας τετράδας ἐνταυτῷ;

'Απ. $\frac{1}{216}$.

45) Πόση ἡ πιθανότης τοῦ νὰ ἐπιτύχῃ τις τρεῖς τριάδας μὲ 3 κύβους ἐνταυτῷ;

'Απ. $\frac{5}{12}$.

46) Πόση εἶναι ἡ πιθανότης τοῦ νὰ ἐπιτύχῃ τις μὲ τέσσαρας κύβους, δύω δυάδας μὲ τοὺς δύω κύβους, καὶ μὲ τοὺς δύω ἄλλους ἀνίσους ἀριθμούς; Πόση εἶναι ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας μὲ 5, 6 καὶ 7 κύβους; Πόση τέλος μὲ 8;

'Απ. Μὲ 4 κύβους εἶναι ἡ πιθανότης $= \frac{5}{9}$, μὲ 5 $= \frac{25}{54}$, μὲ 6 $= \frac{25}{108}$, μὲ 7 $= \frac{35}{648}$ καὶ μὲ 8 $= 0$, ἢ ἡ περίπτωσις εἶναι ἀδυνατος.

47) Πόση εἶναι ἡ πιθανότης τοῦ νὰ ἐπιτύχῃ τις μὲ 4 κύβους τρεῖς τριάδας;

'Απ. $\frac{5}{54}$.

48) Πόση τοῦ νὰ ἐπιτύχῃ τις μὲ 5 κύβους 3 τριάδας καὶ τὰ λοιπὰ ἄνισα; Πόση ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας μὲ 6, 7, 8 καὶ τέλος 9 κύβους;

'Απ. Μὲ 5 κύβους εἶναι ἡ ζητουμένη πιθανότης $= \frac{25}{162}$· μὲ 6 ἐπίσης $= \frac{25}{162}$. μὲ 7 $= \frac{175}{1944}$· μὲ 8 $= \frac{35}{1458}$· μὲ 9 $= 0$, δηλ: αὕτη ἡ περίπτωσις εἶναι ἀδύνατος.

49) Ποῖον εἶναι πιθανότερον: νὰ ῥίψῃ τις δύω ἑξάδας μὲ 3 κύβους, ἢ ἀπὸ πικέτον νὰ τραβήξῃ τυχηρῶς τρία χαρτία τοῦ αὐτοῦ χρώματος;

'Απ. Τὸ πρῶτον εἶναι πιθανότερον καὶ μάλιστα ἡ πιθανότης τῆς πρώτης περιπτώσεως ἔχει πρὸς τὴν τῆς δευτέρας ὡς 755 πρὸς 504.

50) Εἶναι δύω παιγνίδια: Εἰς τὸ πρῶτον πρέπει νὰ ἐπιτύχῃ τις, ῥίπτων 12 κύβους, 8 ὅμοια, τὰ λοιπὰ ἀνόμοια. Εἰς τὸ δεύτερον πρέπει νὰ ληφθῶσιν, ἀπὸ 52 χαρτία, πέντε τοῦ αὐτοῦ χρώματος. Ποῖον παιγνίδιον πρέπει νὰ προκρίνῃ τις; Καὶ πῶς ἀναλογοῦν αἱ πιθανότητές των;

'Απ. Τὸ δεύτερον εἶναι ἐπικερδέστερον καὶ ἡ πιθανότης τοῦ κέρδους τοῦ δευτέρου ἔχει πρὸς τοῦ ἄλλου ὡς 1259712 πρὸς 104125 ἢ περίπου ὡς 12 $\frac{1}{10}$ πρὸς 1.

. . . .

Τινὰ περὶ πιθανοτήτων, πρὸ πάντων ὅμως ὡς πρὸς τὴν θνητότητα, ἀπαντῶνται εἰς τὰ ἄνω εἰρημένα συγγράμματα τοῦ Χριστιάνη, Φλωρενκούρτου καὶ Τέτενς· ἰδιαίτερον περὶ τούτων σύγγραμμα εἶναι τὸ ἑξῆς: «Πιθανοτήτων ὑπολογισμὸς τοῦ Βακιλλέη» εἰς τὸ Γαλλικόν. εἶναι καὶ εἰς τὸ Γερμανικὸν μεταγλωττισμένον ἀπὸ τὸν Ρύδιγερ (ἐν Λειψίᾳ 1788). (Die Rechnung der Wahrscheinlichkeiten aus dem französischen von Rüdiger) σαφέστατα γραμμένον καὶ δὲν προϋποθέτει ἄλλας προϋπαρχούσας περὶ τούτων γνώσεις.

Κε΄. Μικτὰ προβλήματα.

1) Ἀπὸ παιγνίδιον 32 χαρτίων ἐξάγονται τρία· ἐφ' ἑνὸς ἑκάστου αὐτῶν τίθενται τόσα χαρτία, ὅσα εἶναι ἀναγκαῖα διὰ νὰ ἀποτελέσωσι μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὀμμάτων τοῦ χαρτίου τὸν ἀριθμὸν 15· τότε ὅμως μένουν ἀκόμη 8 χαρτία: πόσον εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν ὀμμάτων εἰς τὰ τρία πρῶτα χαρτία;

Ἀπ. 24.

2) Εἰς οἰκοδομὴν ἦσαν πολλοὶ ἐργάται· τὸ ἥμισυ αὐτῶν μετεκόμιζε πέτρας, τὸ $\frac{1}{4}$ ἄμμον, τὸ $\frac{1}{8}$ ἔκτιζε καὶ 5 ἀνεπαύοντο. Πόσοι ἦσαν καθ' ἑκάστην αὐτῶν τῶν ἐργασιῶν, καὶ πόσοι ἦσαν ὅλοι;

Ἀπ. Ὅλοι ἦσαν 40, 20 μετακόμιζαν πέτρας 10 ἄμμον καὶ 5 ἔκτιζαν.

3) Ἀπὸ παιγνίδιον α χαρτίων ἐξάγονται ν χαρτία· ἐφ' ἑκάστου αὐτῶν τίθενται τόσα χαρτία, ὥστε ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὀμμάτων τοῦ ὑποκειμένου χαρτίου νὰ ἀποτελῶσι τὸ κεφάλαιον κ. Τότε ὅμως μένουν ρ χαρτία ὑπόλοιπα: Πόσον εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν ὀμμάτων εἰς τὰ ν πρῶτα χαρτία;

Ἀπ. $νκ + ν + ρ - α$

4) Ἔμπορος ἠγόρασεν ὕφασμα πρὸς 7 τάλ. τοὺς 5 πήχεις, καὶ πωλήσας πρὸς 18 τάλ. τοὺς 11 πήχεις ἐκέρδισεν 24 τάλ. Πόσων πήχεων ἦτον;

Ἀπ. 440.

5) Δύω ὁδοιπόροι κινοῦν ὁ Α μὲ 100 τάλ. ὁ Β μὲ 48. Καθ' ὁδὸν τοὺς ἔκλεψαν μέρος τῶν χρημάτων των· ὁ Α ἔχασε διπλάσια τοῦ Β καὶ μόλον τοῦτο τὸν ἔμειναν ἀκόμη τριπλάσια τοῦ ἄλλου. Πόσα ἔχασεν ἕκαστος αὐτῶν;

Ἀπ. Ὁ Α 88 τάλ. καὶ ὁ Β 44.

6) Ἠγόρασέ τις ἀπὸ βιβλιοδέτην δύω ἄγραφα βιβλία· τὸ πρῶτον, τὸ ὁποῖον περιεῖχε 48 φύλλα πρὸς 14 γρ. τὸ δεύτερον, περιέχον 78 διὰ 19 γρ. ἡ ποιότης τοῦ χαρτίου καὶ τοῦ δεσίματος ἦσαν καὶ εἰς τὰ δύω ὅμοια: Πρὸς πόσα ἐλογίσθη τὸ δέσιμον;

Ἀπ. Πρὸς 6 γρ.

7) Κεφάλαιον 156 τάλ. πρέπει νὰ μερισθῇ εἰς 16 πτωχὰ παιδία κατὰ λόγον τῆς ἡλικίας των, καὶ μάλιστα μὲ τρόπον, ὥστε ὁ ἀκολουθῶν νεώτερος νὰ λαμβάνῃ ὀλιγώτερα. Ἂν εἰς αὐτὴν τὴν διανομὴν ἔλαβεν ὁ νεώτερος ὅλων 6 τάλ. Πόσα ἔλαβεν ἕκαστος τῶν ἀκολούθων περισσότερα; Καὶ πόσα ὁ πρωτότοκος;

Ἀπ. $\frac{1}{2}$ τάλ. καὶ 13 $\frac{1}{2}$ τάλ.

8) Εἰς τραπεζίτην δίδονται δύω ὁμολογίαι, ἐξ ὧν ἡ πρώτη, 550 δραχμῶν, ἔχει προθεσμίαν νὰ πληρωθῇ μετὰ 7 μῆνας καὶ ἡ δευτέρα, 720 δρ., εἶναι πληρωτέα μετὰ 4 μῆνας· διὰ τὸ ὅλον ἔδωκεν αὐτὸς ἀμέσως 1200 δρ. Ζητεῖται πόσον ἐτήσιον τόκον ἐλογαρίασεν ὁ τραπεζίτης;

Ἀπ. 13,27 τὰ ἑκατόν.

9) Χρέος 2363 τάλ. πρέπει νὰ πληρωθῇ εἰς 34 προθεσμίας καὶ μάλιστα μὲ τρόπον, ὥστε εἰς πᾶσαν προθεσμίαν νὰ πληρόνωνται 3 τάλ. περισσότερα παρὰ εἰς τὴν ἀμέσως προηγουμένην; Πόσα θέλουν πληρωθῇ εἰς τὴν πρώτην προθεσμίαν;

'Απ. 20 τάλ.

10) Χωρικὸς εἶχε κῆπον 20 πλέθρων· καὶ ἐνταυτῷ ἦτον εἰς κρισολογίαν μὲ τὸν γείτονά του δι' ἓν μέρος τοῦ γειτονικοῦ κήπου. Ἂν ὁ πρῶτος κερδίσῃ τὴν κρίσιν θέλει ἔχει διπλάσια τοῦ γείτονος· ἂν τὴν κερδίσῃ ὅμως ὁ γείτων, θέλει ἔχει τριπλάσια τοῦ χωρικοῦ. Πόσων πλέθρων ἦτον ὁ κῆπος τοῦ γείτονος καὶ πόσον τὸ ἀμφισβητούμενον μέρος τοῦ κήπου;

'Απ. $26\frac{2}{3}$ καὶ $33\frac{1}{3}$.

11) Δεξαμενή, ἥτις διὰ δύο σωλήνων ἠμπορεῖ νὰ γεμίσῃ εἰς 12 λεπτά, γεμίζει διὰ τοῦ πρώτου μόνον εἰς 20· εἰς πόσον καιρὸν ἠμπορεῖ νὰ γεμίσῃ διὰ τοῦ ἄλλου σωλῆνος;

'Απ. Εἰς 30 λεπτά.

12) Ἠγόρασέ τις διὰ 18 δρ· ἀριθμόν τινα μήλων καὶ κίτρων, διὰ 4 μῆλα ἐπλήρωσε 1 δρ. καὶ διὰ 5 κίτρα ἐπίσης 1 δρ. Μετὰ τοῦτο ἔδωκεν εἰς τὸν γείτονά του διὰ 8 δρ. τὸ ἥμισυ μέρος τῶν μήλων καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν κίτρων, χωρὶς κέρδος. Πόσα μῆλα καὶ πόσα κίτρα ἠγόρασεν;

'Απ. 48 μῆλα καὶ 30 κίτρα.

13) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸ 15, 27 καὶ 45 δίδει τρεῖς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι εὑρίσκονται εἰς γεωμετρικὴν σειράν;

'Απ. 9

14) Υἱὸς παρεκάλεσε τὸν πατέρα του νὰ τὸν διπλασιάσῃ τὰς δραχμάς, ὅσας ἔχει εἰς τὸ βαλάντιόν του· ἀφοῦ ἀπήλαυσε τὸ ζητούμενον, ἔδωκεν εἰς τὴν ἀδελφήν του 4 δρ. Τὰς ἐπιλοίπους, ὅσας εἶχεν ὁ υἱὸς τὰς ἐδιπλασίασεν ἡ μήτηρ του, καὶ ἀφοῦ ἔδωκε 12 δρ. εἰς τὴν ἀδελφήν του ἔλαβε πάλιν 12. Πόσα εἶχεν ὁ υἱὸς κατ' ἀρχάς;

'Απ. 6.

15) Ἔχω ἀριθμητικὴν καὶ γεωμετρικὴν σειράν, αἱ ὁποῖαι σύγκεινται ἀπὸ τρεῖς ὅρους καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν 6 ὅρων εἶναι = 96. Ὁ πρῶτος ὅρος τῆς ἀριθμητικῆς σειρᾶς περιέχεται δὶς εἰς τὸν πρῶτον τῆς γεωμετρικῆς. Ὁ δεύτερος ὅρος τῆς ἀριθμητικῆς περιέχεται τρὶς εἰς τὸν δεύτερον τῆς γεωμετρικῆς καὶ ὁ τρίτος τῆς ἀριθμητικῆς τρὶς εἰς τὸν τρίτον τῆς γεωμετρικῆς. Ποῖαι εἶναι αὗται αἱ σειραί;

'Απ. 3, 6, 9 καὶ 6, 18, 54.

16) Ὁ Α, Β καὶ Γ ἐπεθύμουν νὰ ἀγοράσωσιν εἰκόνα, πλὴν κἀνεὶς δὲν εἶχε τὰ ἀναγκαῖα χρήματα. Ὁ Α ἐζήτησεν ἀπὸ τὸν Β καὶ Γ τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν χρημάτων του διὰ νὰ δυνηθῇ νὰ τὴν ἀγοράσῃ· ὁ Β ζητεῖ ἀπὸ τὸν Α καὶ Γ μόνον τὸ τρίτον τῶν χρημάτων του. Τότε εἶπεν ὁ Γ; ἐγὼ χρειάζομαι μόνον τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν χρημάτων σας διὰ νὰ τὴν ἀγοράσω. Πόσα ἔχει λοιπὸν ἕκαστος αὐτῶν καὶ πόση εἶναι ἡ ἀξία τῆς εἰκόνος, ἂν ἦναι γνωστόν, ὅτι καὶ οἱ τρεῖς αὐτοὶ ἔχουν μόνον ὁλόκληρα τάλ.;

'Απ. Ἡ ἀξία τῆς εἰκόνος εἶναι 17 τάλ. καὶ τότε ἔχει ὁ Α 5 τάλ. ὁ Β 11, ὁ Γ 13· ἢ ἡ ἀξία της εἶναι 34 τάλ. καὶ τότε ἔχει ὁ Α 10, ὁ Β 22 καὶ ὁ Γ 26· ἢ κ. ο. κ.

17) Πέντε φίλοι Α, Β, Γ, Δ, Ε ἐξώδευσαν εἰς ξενοδοχεῖον ποσότητα χρημάτων, τῶν ὁποίων τὴν πληρωμὴν ἀνέλαβεν εἷς ἐξ αὐτῶν. Ἐπειδὴ ὅμως τὰ χρήματα τοῦ ἑνὸς (εἰς τάλληρα ἐκπεφρασμένα) δὲν ἦσαν ἀρκετὰ διὰ τὴν πληρωμήν, ἀπεφάσισαν ὅλοι νὰ καταθέσωσι μέρος τῶν χρημάτων των. Ὁ Α τὸ τέταρτον, ὁ Β τὸ πέμπτον, ὁ Γ τὸ ἕκτον, ὁ Δ τὸ ἕβδομον καὶ ὁ Ε τὸ ὄγδοον μέρος. Πόσα ἐξωδεύθησαν καὶ πόσα εἶχεν ἕκαστος αὐτῶν;

'Απ. Ἐξωδεύθησαν τοὐλάχιστον 879 τάλ. καὶ τότε εἶχεν ὁ Α 319, ὁ Β 459, ὁ Γ 543, ὁ Δ 599 καὶ ὁ Ε 639, ἢ κ. ο. κ.

18) Ξένοι ἀπεφάσισαν νὰ ὁδοιπορήσωσι μὲ κοινὰ ἔξοδα καὶ συμφώνησαν διὰ τοῦτο ἓν ὄχημα πρὸς 342 τάλληρα. Καθ' ὁ-

θὸν ἐφυγαδεύθησαν 3 καὶ οὕτως ἠναγκάσθη ἕκαστος τῶν ἐπιλοίπων νὰ πληρώσῃ 19 γάλ. περισσότερα, ἀπὸ ὅσα τὸν ἀνῆκαν. Πόσοι ἦσαν κατ᾽ ἀρχάς;

᾽Απ. 9.

19) Χρυσῆ ἅλυσσος ἐπωλήθη μὲ ἐκπεσμένην τιμήν, διὰ 420 τάλ. ἂν ἐπωλεῖτο αὐτὴ διὰ 570 τάλ. τότε ἤθελεν εἶναι τὸ κέρδος τετραπλάσιον τῆς τωρινῆς ζημίας. Διὰ πόσα ἐπωλήθη;

᾽Απ. 450 τάλ.

20) Ὀκτὼ ἵπποι ἐβόσκησαν εἰς πεδιάδα 400 τετραγωνικῶν ὀργυιῶν 7 ἑβδομάδας κατὰ σειράν, ὥστε οὔτε τὸ εὑρισκόμενον χόρτον, ἔμεινε πλέον, οὔτε ὅσον ηὔξησεν εἰς τὸ διάστημα τοῦτο. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀπέφαγαν 9 ἵπποι εἰς 8 ἑβδομάδας τὴν βοσκὴν πεδιάδος 500 τετραγωνικῶν ὀργυιῶν. Πόσοι ἵπποι ἠμπόρουν κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον νὰ βοσκήσωσι 10 ἑβδομάδας εἰς πεδιάδα 600 τετραγωνικῶν ὀργυιῶν;

᾽Απ. 8.

21) Ἀνὴρ ἀποθνήσκων ἄφησε τὴν σύζυγόν του ἔγγυον καὶ ἐντυπῷ κεφάλαιον 9000 τάλ. Αὐτὸς ἀπεφάσισε κατὰ τὴν διαθήκην του, ὅτι: ἂν γεννηθῇ υἱὸς νὰ λάβῃ αὐτὸς τριπλάσια τῆς μητρός του· ἂν ὅμως γεννηθῇ θυγάτηρ, νὰ λάβῃ αὐτὴ τὸ ἥμισυ τῆς μητρός. Μετὰ τὸν θάνατον τοῦ πατρὸς ἐγεννήθησαν δίδυμα καὶ μάλιστα υἱὸς καὶ θυγάτηρ. Ζητεῖται πῶς πρέπει νὰ μερισθῇ τὸ κεφάλαιον;

᾽Απ. Ἡ μήτηρ λαμβάνει 2000 τάλ., ὁ υἱὸς 600 καὶ ἡ θυγάτηρ 1000.

22) Ὁδοιπόρος κινήσας ἀπὸ πόλιν διέτρεξε τὴν πρώτην ἡμέραν τῆς ὁδοιπορίας του μίαν λεύγαν, τὴν δευτέραν 2, τὴν τρίτην 3, τὴν τετάρτην 4. κ. ο. κ. κατὰ πρόοδον. Μετὰ 5 ἡμέρας μισεύει ἄλλος ὁδοιπόρος ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος διὰ τῆς αὐτῆς ὁδοῦ καὶ κάμνει ἡμερουσίως 12 λεύγας. Ποίαν ἡμέραν μετὰ τὸν μισευμὸν τοῦ πρώτου θέλουν ἀνταμωθῇ οἱ δύω;

᾽Απ. Τὴν ὀγδόην ἡμέραν καὶ ἂν ἐξακολουθήσωσι τὴν ὁδοιπορίαν των κατὰ τὸν περιγραφέντα τρόπον πάλιν τὴν 15ην ἡμέραν.

23) Ἂν κάμῃ ὁ πρῶτος ὁδοιπόρος, εἰς τὸ προλαβὸν πρόβλημα, α λεύγας, εἰς ἑκάστην ὅμως ἀκόλουθον ἡμέραν δ περισσοτέρας καὶ ὁ δεύτερος μισεύσῃ ν ἡμέρας ὑστερώτερα καὶ διατρέχῃ ἡμερουσίως β λεύγας. Μετὰ πόσον καιρὸν θέλουν ἀνταμωθῇ;

᾽Απ. Μετὰ $\frac{-(2\alpha-2\beta-\delta)\pm\sqrt{[(2\alpha-2\beta-\delta)^2-8\beta\delta\nu]}}{2\delta}$ ἡμέρας.

24) Ποῖοι εἶναι οἱ δύω ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εἶναι ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον καὶ τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον, ἂν προστεθῇ εἰς τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων προκύπτει ἐκ τούτου ὁ ἀριθμὸς $15\frac{3}{4}$;

᾽Απ. 3 καὶ $\frac{3}{2}$.

25) Εἶναι δύω εἴδη οἴνου: ἡ τιμὴ τοῦ τετάρτου τοῦ πρώτου εἶναι 16 δραχμαί, τοῦ δευτέρου 10. Οἰνοπώλης θέλει νὰ μίξῃ τὰ δύω αὐτὰ εἴδη μὲ τρόπον, ὥστε νὰ προκύψωσιν ἐκ τῆς μίξεως ἑκατὸν τέταρτα πρὸς 14 δραχμὰς ἕκαστον. Πόσα τέταρτα πρέπει νὰ ληφθῶσιν ἀπὸ ἕκαστον εἶδος;

᾽Απ. Ἀπὸ τὸ καλήτερον $66\frac{2}{3}$ καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο $33\frac{1}{3}$ τέταρτα·

26) Βοσκὸς ἐρωτηθεὶς περὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν προβάτων του, ἀπεκρίθη: Ὅταν τὰ μετρῶ κατὰ 4, 6 ἢ 9 μὲ μένουν πάντοτε 3 ὑπόλοιπα· ὅταν ὅμως τὰ μετρῶ κατὰ 11, τότε μὲ μένουν 7. Πόσα πρόβατα εἶχε λοιπόν;

᾽Απ. 183, ἢ 36219, ἢ κ. ο. κ.

27) Δύω πυροβολισταὶ ἐγέμισαν μαζῆ 1000 πυριτοβολὰς καὶ μετεχειρίσθησαν καὶ οἱ δύω ἴσην ποσότητα πυρικόνεως. Μετὰ τὴν ἐργασίαν εἶπεν ὁ εἷς πρὸς τὸν ἄλλον: « Ἂν ἐγέμιζον τόσας πυριτοβολάς, ὅσας καὶ σύ, ἤθελα μεταχειρισθῇ 18 καντάρια

πυρικόνεως.» Πρὸς τοῦτο ἀπεκρίθη ὁ ἄλλος: «Ἂν ἐγὼ ἐγέμιζα τόσας πυριτοβόλας, ὅσας καὶ σύ, τότε ἤθελα χρειασθῆ μόνον 8 καντάρια πυρικόνεως.» Ποσα ἐγέμισεν ἕκαστος; Καὶ μὲ πόσην πυρίκονιν;

'Απ. Ὁ πρῶτος ἐγέμισε 400 πυριτοβόλας, ὁ δεύτερος 600 καὶ ἕκαστος ἐχρειάσθη 12 καντάρια πυρικόνεως.

28) Πόσον καιρὸν πρέπει νὰ σαθῇ ἓν τάλληρον εἰς ἀνατοκισμόν, διὰ νὰ προκύψῃ ἡ ποσότης 1000 ταλλήρων;

'Απ. Μεταξὺ 141 καὶ 142 ἔτη.

29) Οἰνοπώλης ἔχει ἀγγεῖον οἴνου, τὸ ὁποῖον περιέχει 100 τέταρτα, ἐξ ὧν ἕκαστον τέταρτον πωλεῖται πρὸς 1 τάλ. καὶ 12 γρ. Ἀπὸ αὐτὸ τὸ ἀγγεῖον ἀφαιρεῖ ἓν τέταρτον καὶ τὸ γεμίζει μὲ νερόν. Μετὰ τοῦτο ἀφαιρεῖ πάλιν ἓν τέταρτον καὶ χύνει ἀντ' αὐτοῦ νερόν. Ποσάκις πρέπει νὰ ἐπαναληφθῇ τὸ αὐτό, ἂν εἰς τὸ τέλος πρέπῃ νὰ πωλῆται τὸ τέταρτον τῆς μίξεως πρὸς 1 τάλ.;

'Απ. 41 ἕως 40 φοράς.

30) Εἰς ποῖα τρία μέρη πρέπει νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 70, ὥστε τὸ κεφάλαιον τῶν γινομένων των, ὅταν τὸ πρῶτον πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 7, τὸ δεύτερον ἐπὶ 8 καὶ τὸ τρίτον ἐπὶ 9 νὰ ἦναι $=$ 591;

'Απ. 1, 67, 2. ἢ 2, 65, 3, ἢ 3; 63, 4. κ.ο. κ.

31) Διδάσκαλος ἔδωκεν εἰς τὸν μαθητήν του νὰ πολλαπλασιάσῃ δύω ἀριθμούς, ἐξ ὧν ὁ πρῶτος εἶναι κατα 75 μεγαλήτερος ἀπὸ τὸν δεύτερον. Μετὰ τὸν πολαπλασιασμὸν ἐχρειώσει ὁ μαθητής, διὰ νὰ κάμῃ τὴν δεῖξιν, νὰ διαιρέσῃ τὸ γινόμενον μὲ τὸν μικρότερον παράγοντα καὶ ἀφοῦ ἔκαμε πραγματικῶς τὴν διαίρεσιν ηὗρεν ὡς πηλίκον τὸν ἀριθμὸν 227 καὶ ὡς ὑπόλοιπον τὸν 113. Ὁ διδάσκαλος ὅμως εὑρὼν τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐσφαλμένον, τὸν εἶπε νὰ διορθώσῃ τὸ σφάλμα. Ὁ μαθητὴς τὸ ηὗρε καὶ εἶπεν, ὅτι ἐλάνθασε μόνον κατὰ 1· ὄχι ἀπεκρίθη ὁ διδάσκαλος κατὰ 1000. Ποῖοι ἦσαν οἱ δύω δοθέντες ἀριθμοί;

'Απ. 159 καὶ 234.

32) Εἰς ἀνάλυσιν ἅλατος εἶναι τὸ βάρος τοῦ γλυκοῦ νεροῦ $= \alpha$, τὸ βάρος τοῦ ἅλατος $= \beta$, ἐπομένως τὸ περιέχον του $= \frac{\beta}{\alpha+\beta}$. Πόσον νερὸν πρέπει ἀκόμη νὰ προστεθῇ, ἂν τὸ περιέχον αὐτοῦ πρέπῃ νὰ γίνῃ $= \eta$.

'Απ. $\frac{\beta}{\eta} - (\alpha+\beta)$. ἡ μονὰς τοῦ βάρους ἡ αὐτή, καθὼς καὶ ἐκείνη, ὅπου τὸ α καὶ β εἶναι δεδομένα.

Πῶς σημειοῦται αὐτὴ ἡ ἔκφρασις, ὅταν ἦναι $\frac{\beta}{\eta} < \alpha+\beta$, ἐπομένως $\frac{\beta}{\alpha+\beta} < \eta$;

33) Ὕλη τις Α εἶναι π=άκις βαρυτέρα τοῦ νεροῦ· ἄλλη τις μόνον π'=άκις βαρεῖα ὡς πρὸς τὸ νερόν: Πόσον μέρος τῆς δευτέρας ὕλης πρέπει νὰ ἑνωθῇ μὲ μέρος τῆς πρώτης, τῆς ὁποίας τὸ βάρος $= \eta$, ἂν πρέπῃ νὰ βαρύνῃ τὸ μίγμα π''=άκις περισσότερον τοῦ νεροῦ, ἂν προϋποτεθῇ ὅτι τὸ π'' ἔρχεται μεταξὺ τοῦ π καὶ π';

'Απ. $\frac{\eta\pi'(\pi-\pi'')}{\pi(\pi''-\pi')}$. Ἡ μονὰς εἶναι ἡ αὐτή, καθὼς καὶ ἐκείνη, ὅπου τὸ η εἶναι δεδομένον.

34) Ὁ μόλυβδος εἶναι 11,324=άκις βαρύτερος τοῦ νεροῦ, ὁ φελλὸς μόνον 0,24 βαρὺς ὡς πρὸς τὸ νερὸν καὶ ἡ ἔλατος 0,45. Πόσος φελλὸς πρέπει νὰ ἑνωθῇ μὲ τμῆμα μολύβδου 60 λιτρῶν, διὰ νὰ βαρύνῃ τὸ ὅλον ὅσον καὶ ἓν τμῆμα ἐλάτου, ἐπομένως νὰ πλέῃ;

'Απ. 63,846 .... λίτραι.

35) Ἔστωσαν φ καὶ χ δύω ποσότητες, αἱ ὁποῖαι κρέμανται οὕτως ἀπ' ἀλλήλων, ὥστε ὅταν προστεθῶσιν εἰς τὴν ποσότητα χ αἱ ν ῥηταὶ ἀξίαι $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ κτλ. νὰ περιέχῃ ἡ ποσότης φ κατὰ σειρὰν τὰς ν ἀντιστοιχούσας ἀξίας $\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi'''$ κτλ. Πῶς

ἠμπορεῖ λοιπὸν τὸ φ νὰ ἐκφρασθῇ διὰ πολυωνύμου τοῦ χ, ὥστε νὰ πληρωθῶσιν αἱ δεδομέναι συνθῆκαι;

Ἀπ. Ἂς τεθῇ $\varphi = A + B\chi + \Gamma\chi^2 + \Delta\chi^3 + E\chi^4 +$ κτλ. καὶ ἂς δοθῶσιν εἰς τὸ δεύτερον μέρος τῆς ἐξισώσεως ταύτης ν ὅροι· ἔπειτα ἂς ἀντικατασταθῶσι διὰ τὸ φ καὶ χ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι ἀξίαι φ, α. φ', α'. φ'', α''. φ''', α'''. κτλ. τότε εὑρίσκονται ν ἐξισώσεις, διὰ τῶν ὁποίων ἠμποροῦν νὰ προσδιορισθῶσιν οἱ προσθέται Α, Β, Γ, Δ, Ε, κτλ.

36) Ἂς ἦναι φ, χ, ψ τρεῖς ποσότητες, αἱ ὁποῖαι ἐξαρτῶνται ἀπ' ἀλλήλων, μὲ τρόπον ὥστε ἐνταυτῷ περιέχουν τὰς ἀξίας φ, α, β. $\varphi', \alpha', \beta'$· $\varphi'', \alpha'', \beta''$· $\varphi''', \alpha''', \beta'''$, κτλ. καὶ τρεῖς τρεῖς τοιαῦται ἀλληλανήκουν καὶ ἀλληλεξαρτῶνται. Πῶς ἠμπορεῖ λοιπὸν νὰ ἐκφρασθῇ τὸ φ διὰ πολυωνύμου τοῦ χ καὶ ψ; (ἰδ. σελ. 411).

Ἀπ. Ἂς τεθῇ $\varphi = A + B\chi + B'\psi + \Gamma\chi^2 + \Gamma'\chi\psi + \Gamma''\psi^2 + \Delta\chi^3 + \Delta'\chi^2\psi +$ κτλ. καὶ ἂς δοθῶσιν εἰς τὸ δεύτερον μέρος τόσοι ὅροι, ὅσαι ἀντιστοιχοῦσαι ἀξίαι· ἂς ἀντικατασταθῶσι μετὰ τοῦτο διὰ τὸ φ, χ, ψ, ἐνταυτῷ καὶ κατὰ σειρὰν, αἱ ἀξίαι φ, α, β· $\varphi', \alpha', \beta'$· $\varphi'', \alpha'', \beta''$· κτλ. τότε εὑρίσκονται τόσαι ἐξισώσεις, ὅσαι εἶναι ἀναγκαῖαι, εἰς προσδιορισμὸν τῶν προσθετῶν A, B, B', $\Gamma, \Gamma', \Gamma'', \Delta, \Delta'$ κτλ. καὶ ἐπομένως ἠμποροῦν νὰ προσδιορισθῶσιν αὐτοὶ οἱ προσθέται.

37) Ἂς ἦναι φ, χ, ψ, ω· τέσσαρες ποσότητες, αἱ ὁποῖαι ἐξαρτῶνται ἀπ' ἀλλήλων, μὲ τρόπον ὥστε περιέχουν ἐνταυτῷ τὰς ἀξίας $\varphi, \alpha, \beta, \gamma$· $\varphi', \alpha', \beta', \gamma'$· $\varphi'', \alpha'', \beta'', \gamma''$· κτλ. καὶ πάντοτε τέσσαρες τῶν ἀξιῶν τούτων ἀνήκουν μαζῆ. Πῶς ἠμπορεῖ τὸ φ νὰ ἐκφρασθῇ διὰ πολυωνύμου τοῦ χ, ψ, ω;

Ἀπ. Ἂς τεθῇ $\varphi = A + B\chi + B'\chi + B''\chi + \Gamma\chi^2 + \Gamma'\chi\psi + \Gamma''\chi\omega + \Gamma'''\psi^2 + \Gamma''''\psi\omega + \Gamma'''''\upsilon^2 + \Delta\chi^3 + \Delta'\chi^2\psi + \Delta''\chi^2\omega +$ κτλ. ἡ λοιπὴ ἐργασία γίνεται καθὼς καὶ εἰς τὰ δύω προλαβόντα προβλήματα.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἤθελε γίνει ἡ ἐργασία, ἂν ἦσαν δεδομέναι πολλαὶ ποσότητες καὶ πολλαὶ ἀντιστοιχοῦσαι ἀξίαι. Ἐκτὸς τούτων εἶναι αὐτὰ τὰ προβλήματα εἰς τὴν φυσικὴν, καθὼς καὶ εἰς ὅλα τὰ μέρη τῆς ἐφηρμοσμένης μαθηματικῆς, ἐν μεγίστῃ χρήσει. Εἶναι καὶ αἱ βάσεις πολλῶν ἀναλυτικῶν μεθόδων καὶ δευτεραίων τύπων.

38) Ἀριθμὸς ἀπὸ δύω χαρακτῆρας συγκείμενος δίδει κεφάλαιον 9, χωρὶς νὰ θεωρηθῇ ἡ τάξις τῶν χαρακτήρων. Ἂν προσεθῇ εἰς αὐτὸν ὁ ἀριθμὸς 27 προκύπτει ἄλλος ἀριθμὸς, ὅςις περιέχει τοὺς αὐτοὺς χαρακτῆρας, πλὴν εἰς ἀντίθετον τάξιν. Ποῖοι εἶναι οἱ χαρακτῆρες αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ;

Ἀπ. 3 καὶ 6.

39) Ζητεῖται ἀριθμὸς, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τοῦ τετραγώνου ἄλλου ἀριθμοῦ κατὰ 1 μικροτέρου, παράγεται τὸ γινόμενον 1. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός;

Ἀπ. Ὁ ἀριθμὸς εἶναι δεδομένος διὰ τῆς ἐξισώσεως $\chi^3 - 2\chi^2 + \chi - 1 = 0$: ἡ μόνη πραγματικὴ ῥίζα τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι 1,7548.....

40) Ὁποίαν ἀξίαν ἔχει τὸ ἀπείρως ἐκτεινόμενον συνεχὲς κλάσμα

$$\cfrac{1}{\pi + \cfrac{1}{\pi + \cfrac{1}{\pi + \text{κτλ.}}}}$$

ὅταν δὲν ἀπαντᾶται εἰς αὐτὸ ἄλλο πηλίκον ἐκτὸς τοῦ π;

Ἀπ. $\dfrac{-\pi + \sqrt{(\pi^2 + 4)}}{2}$

41) Ὁποίαν ἀξίαν ἔχει τὸ εἰς τὸ ἄπειρον προβαῖνον περιοδικὸν συνεχὲς κλάσμα

$$\cfrac{1}{\pi+\cfrac{1}{\rho+\cfrac{1}{\pi+\cfrac{1}{\rho+\text{κτλ.}}}}}$$

ὅπου τὰ πηλίκα π, ρ ἐξακολουθοῦν ἐπαναλαμβανόμενα;

Ἀπ. $-\frac{\rho}{2}+\sqrt{\left(\frac{\rho^2}{4}+\frac{\rho}{\pi}\right)}$.

42) Ὁποίαν ἀξίαν ἔχει συνεχὲς κλάσμα, ὡς τὸ προλαβὸν, ὅταν ἀντὶ δύω πηλίκων π, ρ ἀπαντῶνται τρία πηλίκα π, ρ, σ εἰς τὸ ἐπάπειρον ἐπαναλαμβανόμενα;

Ἀπ. Τὴν ἀξίαν

$$-\frac{\pi\rho\sigma+\pi+\sigma-\rho-\sqrt{[(\pi\rho\sigma+\pi+\sigma+\rho)^2+4]}}{2(\pi\rho+1)}.$$

43) Ὁποίαν ἀξίαν ὅμως θέλει ἔχει τοιοῦτον κλάσμα, ὅταν ἀπαντῶνται τέσσαρα πηλίκα, π, ρ, σ, τ εἰς τὸ ἐπάπειρον ἐπαναλαμβανόμενα;

Ἀπ. $$-\frac{\pi\rho\sigma\tau+\pi\rho+\pi\tau+\sigma\tau-\rho\sigma}{2(\pi\rho\sigma+\pi+\sigma)}+\frac{\sqrt{[(\pi\rho\sigma\tau+\pi\rho+\pi\tau+\sigma\tau+\rho\sigma+2)^2-4]}}{2(\pi\rho\sigma+\pi+\sigma)}$$

Πῶς ἠμπορεῖ νὰ δοθῇ ὁ νόμος τῆς ἀξίας ταύτης, ὅταν ἀπαντηθῶσι περισσότερα ἀπὸ τέσσαρα πηλίκα ἐπαναλαμβανόμενα;

44) Εἴς τινα γεωμετρικὴν ἀναλογίαν εἶναι δεδομένα: τὸ κεφάλαιον τῶν δύω μέσων ὅρων $=\alpha$, τὸ κεφάλαιον τῶν δύω ἄκρων $=\beta$ καὶ τὸ κεφάλαιον τῆς τετάρτης δυνάμεως ἑκάστου τῶν τεσσάρων ὅρων $=\gamma$. Ποία εἶναι ἡ ἀναλογία;

336

Ἀπ. Ἔστω δ ἡ διαφορὰ τῶν δύω μέσων, τότε εἶναι $\delta=\sqrt{[-\alpha^2-2\beta^2\pm2\sqrt{(\gamma+2\alpha^2\beta^2)}]}$ καὶ ἡ ζητουμένη ἀναλογία:

$$\tfrac{1}{2}[\beta-\sqrt{(\beta^2-\alpha^2+\delta^2)}]:\tfrac{1}{2}(\alpha-\delta)$$
$$=\tfrac{1}{2}(\alpha+\delta):\tfrac{1}{2}[\beta+\sqrt{(\beta^2-\alpha^2+\delta^2)}].$$

45) Εἰς γεωμετρικὴν ἀναλογίαν εἶναι δεδομένα: τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ὅρων $=\alpha$, τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων τῶν $=\beta$ καὶ τὸ κεφάλαιον τῆς τετάρτης δυνάμεως ἑκάστου αὐτῶν $=\gamma$. Ποία εἶναι ἡ ἀναλογία;

Ἀπ. Ἂς σημειοῖ τὸ π τὸ γινόμενον τῶν δύω ἄκρων, ἐπομένως καὶ τῶν δύω μέσων, καὶ δ τὴν διαφορὰν μεταξὺ τοῦ κεφαλαίου τῶν δύω ἄκρων καὶ τοῦ κεφαλαίου τῶν δύω μέσων: τότε εἶναι: $\pi=\frac{\alpha^2}{2}\pm\sqrt{\frac{\alpha^4+2\alpha^2\beta+\beta^2-2\gamma}{8}}$, καὶ $\delta=\sqrt{(2\beta+8\pi-\alpha^2)}$. Ἐπομένως οἱ τέσσαρες ὅροι τῆς ζητουμένης ἀναλογίας εἶναι:

$$\tfrac{1}{4}[\alpha-\delta-\sqrt{[(\alpha-\delta)^2-16\pi]}]$$
$$\tfrac{1}{4}[\alpha+\delta-\sqrt{[(\alpha+\delta)^2-16\pi]}]$$
$$\tfrac{1}{4}[\alpha+\delta+\sqrt{[(\alpha+\delta)^2-16\pi]}]$$
$$\tfrac{1}{4}[\alpha-\delta+\sqrt{[(\alpha-\delta)^2-16\pi]}].$$

46) Χρεώστης εἶναι ἠναγκασμένος νὰ πληρώσῃ τὰ κεφάλαια α, α', α'', α''', κτλ. εἰς τὰς προθεσμίας ν, ν', ν'', ν'''. θέλει ὅμως νὰ πληρώσῃ τὸ χρέος του $\alpha+\alpha'+\alpha''+\alpha'''+$ κτλ. διαμιᾶς: μετὰ πόσον καιρὸν πρέπει νὰ γίνῃ τοῦτο, ἂν λογισθῶσιν οἱ τόκοι πρὸς π τὰ ἑκατὸν καὶ πρὸς τούτοις καὶ τόκοι τόκων;

Ἀπ. Ἂς ἦναι φ, φ', φ'', φ''', κτλ. αἱ μετρηταὶ ἀξίαι τούτων τῶν κατὰ προθεσμίαν πληρωμῶν, ὥστε $\varphi=\frac{\alpha}{\pi^{\nu}}$, $\varphi'=\frac{\alpha'}{\pi^{\nu'}}$, $\varphi''=\frac{\alpha''}{\pi^{\nu''}}$, κτλ. τότε δίδει ἡ ἔκφρασις

$$\frac{\text{λογ}\,(\alpha+\alpha'+\alpha''+\alpha'''+\text{κτλ.})-\text{λογ}\,(\varphi+\varphi'+\varphi''+\varphi'''+\text{κτλ.})}{\text{λογ}\,\pi}$$

τὸν ζητούμενον καιρόν. (Μονὰς τοῦ χρόνου ἡ αὐτή, καθὼς καὶ ἡ διὰ τὸ ν, ν', ν'', ν''', κτλ.).

47) Ἐχρεώστει τις 40000 τάλ. Ἐπειδὴ ὅμως δὲν ἐδύνατο νὰ πληρώσῃ ὅλον του τὸ χρέος διαμιᾶς, ἐσυμφώνησε μὲ τὸν δανειστήν του νὰ τὸν δίδῃ εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους 2500 τάλ. καὶ νὰ τοκίσῃ τὸ χρέος του πρὸς 5 τὰ ἑκατόν. Λογαριάζων τότε τὸν καιρόν, εἰς τὸν ὁποῖον θέλει τελειώσει τὸ χρέος, εὗρεν ὅτι εἰς τὸ τέλος τοῦ τελευταίου ἔτους δὲν ἔχει πλέον νὰ πληρώσῃ σωστὰ 2500 τάλ. ἀλλ' ὀλιγώτερα: Κατὰ πόσα ὀλιγώτερα, ἂν λογισθῇ καὶ ὁ ἀνατοκισμός;

Ἀπ. Κατὰ 31,68 τάλ. ὀλιγώτερα.

48) Ζητοῦνται τέσσαρες ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον εἶναι $=\alpha$, τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων των $=\beta$, τὸ κεφάλαιον τῶν δώδεκα γινομένων, τὰ ὁποῖα προκύπτουν, ὅταν ἕκαστος αὐτῶν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τοῦ τετραγώνου ἑνὸς ἄλλου $=\gamma$ καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν ἓξ γινομένων, τὰ ὁποῖα προκύπτουν, ὅταν τὸ τετράγωνον ἑκάστου πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τοῦ τετραγώνου ἑνὸς ἄλλου $=\delta$. Πῶς εὑρίσκονται αὐτοὶ οἱ ἀριθμοί;

Ἀπ. Τὸ κεφάλαιον τῶν γινομένων τῶν τεσσάρων ζητουμένων ἀριθμῶν ἀνὰ δύω εἶναι $=\frac{1}{2}(\alpha^2-\beta)$, τὸ κεφάλαιον τῶν γινομένων των ἀνὰ τρεῖς $=\frac{1}{6}(\alpha^3-\alpha\beta-3\gamma)$, καὶ τὸ γινόμενον τῶν τεσσάρων $=\frac{1}{24}(\alpha^4+2\alpha^2\beta-3\beta^2-8\alpha\gamma+12\delta)$. Οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ εἶναι λοιπὸν διὰ τῆς ἑξῆς ἐξισώσεως δεδομένοι:

$$\chi^4-\alpha\chi^3+\tfrac{1}{2}(\alpha^2-\beta)\chi^2-\tfrac{1}{6}(\alpha^3-\alpha\beta-2\gamma)\chi$$
$$+\tfrac{1}{24}(\alpha^4+2\alpha^2\beta-3\beta^2-8\alpha\gamma+12\delta)=0$$

49) Τέσσαρες ἀριθμοὶ εἶναι διὰ τῶν ἀκολούθων δεδομένοι: τὸ κεφάλαιόν των $=\alpha$, τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων των $=\beta$, τὸ κεφάλαιον τῶν κύβων των $=\gamma$ καὶ τὸ κεφάλαιον τῆς τετάρτης δυνάμεως ἑκάστου $=\delta$. Πῶς εὑρίσκονται;

Ἀπ. Τὸ κεφάλαιον τῶν γινομένων τῶν τεσσάρων ζητουμένων ἀριθμῶν ἀνὰ δύω εἶναι $=\frac{1}{2}(\alpha^2-\beta)$, τὸ κεφάλαιον τῶν γινομένων των ἀνὰ τρεῖς εἶναι $=\frac{1}{6}(\alpha^3-3\alpha\beta+2\gamma)$, καὶ τὸ γινόμενον τῶν τεσσάρων εἶναι $=\frac{1}{24}(\alpha^4-6\alpha^2\beta+3\beta^2+8\alpha\gamma-6\delta)$. Οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ εἶναι λοιπὸν διὰ τῆς ἑξῆς ἐξισώσεως δεδομένοι:

$$\chi^4-\alpha\chi^3+\tfrac{1}{2}(\alpha^2-\beta)\chi^2-\tfrac{1}{6}(\alpha^3-3\alpha\beta+2\gamma)\chi$$
$$+\tfrac{1}{24}(\alpha^4-6\alpha^2\beta+3\beta^2+8\alpha\gamma-6\delta)=0.$$

50) Λέξις συνίσταται ἀπὸ πέντε γράμματα: ἂν γραφῇ τὸ ἀλφάβητον κατὰ τὴν συνήθη του τάξιν, καὶ κάτωθεν ἢ ἄνω τῶν γραμμάτων οἱ πρῶτοι 24 φυσικοὶ ἀριθμοὶ κατὰ τὴν συνήθη των τάξιν, ἕκαστος αὐτῶν θέλει ἀντιστοιχεῖ εἰς ἓν γράμμα, ὡς: τὸ 1 εἰς τὸ α, τὸ 2 εἰς τὸ β, κ. ο. κ. Κατ' αὐτὸ καὶ κατὰ τὰ ἑξῆς διδόμενα ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ λέξις: Τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ (ἢ ἐκείνου, ὅστις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ δεύτερον γράμμα τῆς λέξεως) ἐπὶ τοῦ τρίτου, εἶναι ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον τοῦ πρώτου, τετάρτου καὶ πέμπτου, προσθήκη 3. Τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τοῦ πέμπτου εἶναι $=$ μὲ τὸ 6 πλάσιον τοῦ τετάρτου· τὸ κεφάλαιον τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου $=$ μὲ τὸν τελευταῖον ἀφαιρέσει 2. Τὸ κεφάλαιον τοῦ πρώτου καὶ τρίτου $=$ μὲ τὸ 6 πλάσιον τοῦ δευτέρου· καὶ ὁ πρῶτος ἀριθμὸς $=$ μὲ τὸν τελευταῖον πλέον 1.

Ποία εἶναι ἡ ζητουμένη λέξις;

Ἀπ. ΤΕΛΟΣ.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ.

Διὰ τὰς ἐξισώσεις ὅλων τῶν βαθμῶν εἶναι ἐργασίαι τινὲς, αἳ ὁποῖαι φέρουν εἰς ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ. Διὰ τὰς ἐξισώσεις τοῦ πέμπτου βαθμοῦ ἰδίως εἶναι ἐργασίαι τοῦ σχήματος, τὸ ὁποῖον προκύπτει διὰ τῶν ἐξισώσεων τύπου $\zeta\,(\alpha\beta\gamma\delta\epsilon) = \zeta(\beta\gamma\delta\epsilon\alpha)$, $\zeta\,(\alpha\beta\gamma\delta\epsilon) = \zeta.(\beta\gamma\alpha\delta\epsilon)$, $\zeta\,(\alpha\beta\gamma\delta\epsilon) = \zeta\,(\alpha\gamma\delta\beta\epsilon)$, ὅταν α, β, γ, δ, ε σημειοῦν τὰς ῥίζας. Η τρίτη εἶναι ὅμως ἀναγκαία συνέπεια τῶν δύω πρώτων.

Διὰ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἁπλουστέρα ἐργασία τοῦ εἴδους τούτου, γίνεται τὸ γινόμενον $\alpha^0\beta^1\gamma^2\delta^3\epsilon^4$ καὶ μεταλλάττονται οἱ ἐκθέται κατ' ἐκείνους τοὺς τύπους. Ἐκ τούτων προκύπτει ἓν παραγόμενον 60 ὅρων, ἐξ ὧν ἐδῶ διὰ συντομίαν καὶ διὰ νὰ φαίνωνται σαφέστερον αἱ μεταβολαὶ ἀκολουθοῦν μόνον οἱ ἐκθέται:

01234	03124	02314	30214
20134	23014	21304	32104
12034	13204	10324	31024
40123	40312	40231	43021
42013	42301	42130	43210
41203	41321	41032	43102
34012	24031	14023	14302
34201	14230	04213	04321
34102	04132	24103	24310
23401	12403	31402	21430
13420	01423	30421	10432
03412	20413	32410	02431
12340	31240	23140	02143
01342	30142	13042	21043
20341	32041	03241	10243

Αὐτὴ ἡ ἐργασία δὲν περιέχει περισσοτέρας ἀπὸ δύω διαφόρους ἀξίας εἰς ὅλας τὰς μεταβολὰς τῶν ῥιζῶν α, β, γ, δ, ε: οἷον ἡ ἐδῶ δεδομένη καὶ ἐκείνη, ἥτις παράγεται ἀπὸ αὐτὴν διὰ τῆς μεταλλαγῆς τοῦ α μὲ τὸ β. Ἑπομένως εὑρίσκεται δι' ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ. Ἐπειδὴ ὅμως πρὸς εὕρεσιν τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἀνήκουν πολλὰ πλέον ἐκτεταμένοι πίνακες, παρὰ τοὺς εὑρισκομένους εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἐξισώσεων, καὶ πρὸς τούτοις, ἐπειδὴ καὶ αὐτὴ ἡ ἀρίθμησις ἀπαιτεῖ ἰδιαιτέρους τρόπους, ἃ δὲν πρέπῃ νὰ δυσκολευθῇ τὸ πρᾶγμα περισσότερον ἀφ' ὅ,τι ἤδη εἶναι· διὰ τοῦτο δίδεται ἐδῶ μόνον τὸ πόρισμα, τοῦ ὁποίου ἡ ὀρθότης εἶναι βεβαιοτάτη. Η ἐξίσωσις εἶναι: $\chi^2 - \pi\chi + \rho = 0$.

$$\pi = -3\Gamma^2\Delta + 4B\Delta^2 + 5B\Gamma E - 5E^2$$

$$\begin{aligned}\rho = {} & B^3\Gamma^2\Delta^2 - 4B^2\Gamma^3E - 4B^4\Delta^3 + 18B^4\Gamma\Delta E \\ & - 27B^5E^2 + 9\Gamma^4\Delta^2 - 27\Gamma^5E - 42B\Gamma^2\Delta^3 \\ & + 150B\Gamma^3\Delta E + 36B^2\Delta^4 - 130B^2\Gamma\Delta^2E \\ & - 200B^2\Gamma^2E^2 + 225B^3\Delta E^2 \quad 64\Delta^5 + \\ & 400\Gamma^2\Delta^3E - 555\Gamma^2\Delta E^2 - 510B\Delta^2E^2 \\ & + 925B\Gamma E^3 - 775E^4.\end{aligned}$$

ὅπου Β, Γ, Δ, Ε εἶναι οἱ προσθέται τῶν ὡς βάσιν θεμένων γενικῶν ἐξισώσεων

$$\chi^5 - 0\chi^4 + B\chi^3 - \Gamma\chi^2 + \Delta\chi - E = 0.$$

Οὕτω π. χ. εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $\chi^5 - 33\chi^3 + 44\chi^2 + 132\chi - 144 = 0$, τῆς ὁποίας αἱ ῥίζαι εἶναι $+1, -2, +3. -6, +4$, ἡ ἐξίσωσις:

$X^2 + 2124864X + 665817594624 = 0$ καὶ ἐκ ταύτης $X = -382032$, $X = -1742842$· τὰ ὁποῖα εἶναι τῷ ὄντι αἱ δύω ἀξίαι τῶν ἄνω ἐργασιῶν, ἂν ἀντικατασταθῶσι διὰ τὸ α, β, γ, δ, ε, κατὰ θέλησιν, οἱ ἀριθμοὶ $+1, -2 + 3 - 6 + 4$.

Ἐπίσης εὑρίσκεται διὰ τὴν ἐξίσωσιν $\chi^5 - 57\chi^3 + 612\chi -$

$2098 = 0$, τῆς ὁποίας αἱ ῥίζαι εἶναι $+2, -4, -7, +6, +3$, ἡ ἐξίσωσις:

$$x^2 + 80502336\,x + 1541918962324224 = 0$$ καὶ ἐκ τούτου $x = -31405968$, $x = -49096368$· τὰ ὁποῖα εἶναι ἐπίσης αἱ δύω ἀξίαι τῶν ἄνω ἐργασιῶν, ἂν ἀντικατασταθῶσι διὰ τὸ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ οἱ ἀριθμοὶ $+2, -4, -7, +6, +3$ κατ' αὐθαίρετον τάξιν.

Ἀπὸ τὴν εὑρεθεῖσαν ἀξίαν τῶν ἄνω ἐργασιῶν ἠμποροῦν νὰ παραχθῶσι ῥητῶς ὅλαι αἱ ἐργασίαι, εἰς τὰς ὁποίας ἀνήκουν οἱ αὐτοὶ τύποι τῶν ἐξισώσεων, κατὰ τὸ ἕβδομον κεφάλαιον τῆς θεωρίας τῶν ἐξισώσεων. Ἐπειδὴ ὅμως αὐτὴ εἶναι ἡ πρώτη ἀξία μὴ συμμετρικῆς ἐργασίας διὰ τὴν γενικὴν ἐξίσωσιν τοῦ πέμπτου βαθμοῦ, ἥτις ἐδόθη, θέλει εἶναι περίεργος καὶ σημαντικὴ διὰ τὸν μαθηματικόν, καὶ παρακαλοῦνται οἱ ἀναγνῶσται νὰ φανῶσι συγκαταβατικοὶ εἰς ὅσα λάθη παρεισέδυσαν εἰς αὐτὴν τὴν ἀθεμελίωτον ἀκόμη ἰδέαν, καθὼς καὶ εἰς τὰ λοιπά.