ὉΔῸΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ͂Σ
ἬΤΟΙ

Σειρὰ βαθμηδὸν προϊοῦσα, περιεκτικὴ τῶν κατ᾽ εἶδος κυριωτέρων τῆς μαθήσεως πραγματειῶν, οἷον

Τῶν στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Σφαιρικῶν κατὰ Θεοδόσιον. Γεωμετρίας θεωρητικῆς καὶ πρακτικῆς. Τριγωνομετρίας. Τοῦ περὶ Κρικωτῆς σφαίρας κατὰ Πρόκλον. Τοῦ περὶ χρήσεως σφαιρῶν. Ἀστρολαβίου. Γεωγραφίας, καὶ Ὀπτικῆς.

πρότερον μὲν παρὰ

ΤΟΥ͂ ΑἸΔΕΣΙΜΩΤΆΤΟΥ ΚΑῚ ἘΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΩΤΆΤΟΥ ΚΥΡΊΟΥ ΜΕΘΟΔΊΟΥ ἈΝΘΡΑΚΊΤΟΥ ἘΞ ἸΩΑΝΝΊΝΩΝ

Ἐκ τῆς Λατινίδος εἰς τὴν Ἑλληνίδα μετενεχθεῖσά τε φωνὴν καὶ ἑρμηνευθεῖσα λίαν μέντοι συνεπτυγμένως, καὶ ἀμυδρῶς. ὕστερον δὲ παρὰ

ΤΟΥ͂ ΑἸΔΕΣΙΜΩΤΆΤΟΥ ΚΑῚ ἘΛΛΟΓΙΜΩΤΆΤΟΥ ἈΡΧΙΠΡΕΣΒΥΤΈΡΟΥ ἸΩΑΝΝΊΝΩΝ, ΚΑῚ ΔΙΔΑΣΚΆΛΟΥ

Τοῦ ἐκεῖ νῦν σεμνυνομένου ἐπὶ Ταύτῃ πρὸς ταῖς ἄλλαις ἐπιστήμαις, Ἀρχιγυμνασίου,

ΚΥΡΊΟΥ ΜΠΑΛΆΝΟΥ ΒΑΣΙΛΟΠΟΎΛΟΥ,

Ἀναπτυχθεῖσά τε καὶ καλλυνθεῖσα τῇ τε φράσει τῆς λέξεως καὶ τῇ σαφηνείᾳ τῶν νοημάτων, πλατυνθεῖσά τε, καὶ πλουτισθεῖσα τῇ προσθέσει οὐκ ὀλίγων θεωρημάτων τε, καὶ προβλημάτων, πάνυ χρησίμων ὄντων ἀπανθισμάτων, τῶν μὲν συλλεχθέντων ἐκ διαφόρων ἐπισήμων Συγγραφέων παλαιοτέρων τε καὶ νεωτέρων, τῶν δὲ παρ᾽ αὐτοῦ εὑρεθέντων· καὶ οὕτως ἐς κρεῖττόν πως διαταχθεῖσά τε, καὶ ἀναπληρωθεῖσα χάριν τῶν παρ᾽ αὐτῷ μαθητιώντων, Προσφωνηθεῖσα μὲν

ΤΟΙ͂Σ ἘΚΛΑΜΠΡΟΤΆΤΟΙΣ ΚΑῚ ΕὐΓΕΝΕΣΤΆΤΟΙΣ ΥἹΟΙ͂Σ ΚΑΡΑΪΩΆΝΝΟΥ, ΚΑῚ ΜΑΡΟΎΤΖΗ, ΕὐΠΑΤΡΊΔΑΙΣ ἸΩΑΝΝΊΝΩΝ.

Τύποις δὲ νῦν πρῶτον ἐκδοθεῖσα, προτροπῇ μὲν καὶ συνδρομῇ τῶν φιλομαθῶν καὶ φιλολόγων· ἐπιμελείᾳ δὲ, ὡς οἷόν τε ἦν, καὶ διορθώσει

ΓΕΩΡΓΊΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΊΝΟΥ ΖΑΟΡΊΤΟΥ ἘΞ ἸΩΑΝΝΊΝΩΝ

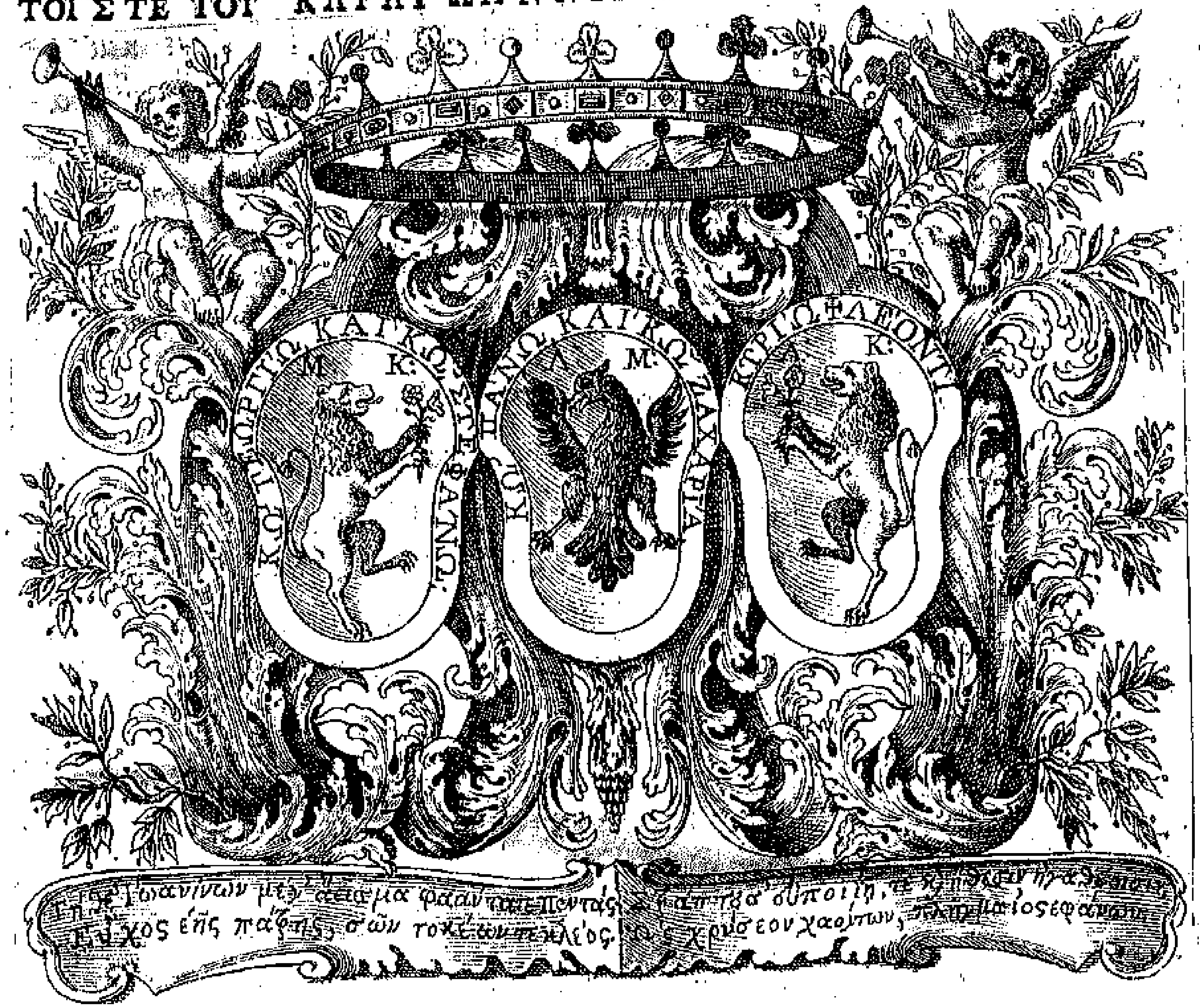
Διαιρεῖται δὲ εἰς τόμους τρεῖς· προστεθειμένου ἐπὶ τούτοις καὶ τετάρτου, τοῦ τῆς Ἀριθμητικῆς.

ΤΌΜΟΣ ΠΡΩ͂ΤΟΣ.

ἘΝΕΤΊΗΣΙΝ ἜΤΕΙ ΤΩ͂ ΣΩΤΗΡΊΩ, αψμθʹ.
Ἐν τῇ Τυπογραφίᾳ Ἀντωνίου τοῦ Βόρτολι.
CON LICENZA DE' SUPERIORI, E PRIVILEGIO.

Τοῖς Ἐκλαμπροτάτοις καὶ εὐγενεστάτοις, χρησιμωτάτοις τε
καὶ χρηστοηθεστάτοις,

ΤΟΙ͂Σ ΤΕ ΤΟΥ͂ ΚΑΡΑΪΩΆΝΝΟΥ ΚΑῚ ΜΑΡΟΥ͂ΤΖΗ ἈΠΟΓΌΝΟΙΣ



Τὴν προσήκουσαν ἑκάστῳ ἀπονέμω πρόσρησιν· δεόμενος ὑπὲρ
ὑμῶν ἐκτενῶς πρὸς Κύριον.

Μάχου ὑπὲρ πατρίδος εὐγενέστατοι ἀπόγονοι εὐγενεστάτων προγόνων, ἔφη τις τῶν πάλαι φιλοσόφων, τὸ πρὸς αὐτὴν ἑκάστου ἀπαραίτητον χρέος δεῖξαι βουλόμενος. ἄλλος δέ τις πάλιν πρὸς τὸ τῆς πατρίδος ἀφορῶν προτέρημα, τὸ πρῶτον τῶν ἐν τῷδε τῷ βίῳ ἐφετῶν, καὶ γλυκυτέραν παντὸς ἄλλου ταύτην εἶναι ἀπεφήνατο, ὥστε καὶ προαιρεῖσθαι πολλοὺς τὸν ἐν τῇ πατρίδι θάνατον;

καὶ μ

κἄν τις αὐτοῖς ἐν ἀλλοδαπῇ καὶ ἀθανασίαν που προεπηγγείλατο; ἀλλά γε καὶ τό, οὐκ ἔχομεν ὧδε μένουσαν πόλιν, ἀλλὰ τὴν μέλλουσαν ἐπιζητοῦμεν, οὐκ ἄλλο τι νοοῦντι βούλεται, ἢ ὅτι τοῖς ἀνθρώποις οὐδὲν οὕτως, ὡς ἡ πατρὶς ποθητόν. ἤκουσα δ' ἔγωγε καί τινος τῶν καθ' ἡμᾶς ἐν φιλοσοφίᾳ διαπρέψαντος, καὶ πολλὰ τῇ πατρίδι θερμῶς πονήσαντος, μέχρι καὶ βαθυτάτου γήρως τοῖς φιλομαθέσιν ἐπαρκοῦντος, ἐν τούτῳ καὶ μόνῳ καυχωμένου, ἐν τῷ τῇ ἐνεγκούσῃ χρηματίσαι διδάσκαλον, καὶ τὸ πρὸς αὐτὴν ὀφειλόμενον διὰ πολλῶν ἀποπληρῶσαι ἀγώνων; καίπερ ἄλλοις τε πολλοῖς κεκοσμημένου τοῖς προτερήμασι. Τοῦτο τοίνυν κἀγὼ πολλάκις κατ' ἐμαυτὸν διαλογιζόμενος, καὶ ὡς φιλοσοφικὴν παραίνεσιν τὰ παρὰ τοῦ ἀνδρὸς τούτου ἀποδεχόμενος, ὁρῶν δὲ καὶ τὴν φιλτάτην πατρίδα τῶν ἄλλων μὲν πλουτοῦσάν πως μαθημάτων, καὶ ταῦτα ἐν τοσαύτῃ τοῦ γένους ταπεινώσει, ἀμοιροῦσαν δ' ὅλως τῶν τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης πολυειδῶν τε ἅμα καὶ ἀΰλων, ἵν' οὕτως εἴπω, θησαυρῶν, τὴν πλείονά μου σπουδὴν καὶ τὸν κατὰ τὴν ἐμὴν δύναμιν ἀγῶνα εἰς ἀνάπτυξιν τῶν παρ' αὐτοῖς προβλημάτων τε καὶ θεωρημάτων κατέβαλον, πολλοὺς δὲ καὶ διὰ πολλοῦ τοὺς πόνους ὑπενεγκών, οὐκ ὀλίγους τε ἱδρῶτας ἐκχέας, καὶ μεγάλοις ὁσημέραι τοῦ βίου παλαίσας τοῖς δυστυχήμασιν, ὡς καὶ ὑμῖν τοῖς ἐρασμιωτάτοις γνωστόν, τὰς χρησιμωτέρας ταύτας, τῆς ὄντως Μαθηματικῆς ἐπιστήμης, πραγματείας, εἰς ἣν τηροῦσι τάξιν τὰ ἐν αὐταῖς καὶ εἱρμὸν μετὰ τῆς προσηκούσης, ὅσον οἷόν τε, σαφηνείας τε καὶ ἀποδείξεως ἤγαγον, τὰ πλείω μὲν τῶν ἐν ἑκάστῃ παρὰ τοῦ ἐμοῦ εἰς ταῦτα καθηγεμόνος ἔχων, ἄλλα δὲ παρ' ἄλλων ἀρχαιοτέρων ἐρανιζόμενος, ὧν καὶ τοῖς συγγράμασιν ἐνέτυχον, καί τινα πρὸς κρείττονα ἑκάστης πραγματείας ἀπαρτισμὸν κατὰ τὴν ἐνοῦσάν μοι προσθεὶς δύναμιν. ἤδη δὲ καὶ εἰς τύπον τὰ διὰ πολλῶν συλλεχθέντα πόνων, καὶ πολλοῖς ἀναπτυχθέντα τε καὶ καλλωπισθέντα ἱδρῶσιν ἐκδοθῆναι τοῦ Θεοῦ εὐδοκήσαντος, ἵνα ἐκ τούτων οἱ μεθ' ἡμᾶς λάβωσί τινας ἀφορμάς, καὶ ζῆλον ἔνθεον εἰς ἀνάμνησιν τῆς παρὰ τοῖς πάλαι Ἕλλησι θαυμασίας τε καὶ ἀκριβεστάτης

τῶν

τῶν μαθημάτων τούτων διδασκαλίας, οὐκ ἔδοξέ μοι ἄλλοις τισὶ προσκομίσαι ταῦτα, καὶ ἀναθεῖναι, οἰκειότερον δ' εἰπεῖν, ἐνορμίσαι ὡς εἰς λιμένα εὔδιον καὶ ἀκύμαντον, ἢ τοῖς λαμπρότητι γένους, ἀφθονίᾳ τε πλούτου, καὶ τοῖς ἄλλοις ἔτι προτερήμασι φυσικοῖς τε ἅμα καὶ ἐπικτήτοις, τῶν ἄλλων τῶν ἐκ τῆς αὐτῆς ὁρμωμένων πατρίδος προὔχουσιν, ὑμῖν λέγω τοῖς ἐκλαμπροτάτοις ἀπογόνοις ΚΑΡΑΙΩΑΝΝΟΥ ΤΕ καὶ ΜΑΡΟΥΤΖΗ, τοῖς εὐθαλεστάτοις βλαστοῖς τῶν εὐθαλῶν ὄντως δένδρων, προσθήσω δέ, εἰ καὶ διὰ πασῶν τῶν ἀκοῶν περιβόητα, καὶ διαθρυλλούμενα, τῇ τριμόρφῳ καὶ θεοεικέλῳ εἰκόνι τῶν Χαρίτων, τοῖς συμπαραστάτοις περὶ τοὺς δεομένους, τοῖς φιλοφρονουμένοις δαψιλεστάτῃ χειρὶ τοὺς κάμνοντας, τοῖς κηδεμόσι τῶν δυσπραγούντων, τοῖς περιβεβλημένοις τὸν ἀποστίλβοντα χιτῶνα, τῆς συνέσεως, τῆς εὐκοσμίας, τῆς ἀτυφίας, καὶ ταπεινοφροσύνης, τῆς πρὸς πᾶν ἀγαθὸν ἐπιρρεποῦς κλίσεως, καὶ συνελόντι φάναι πεποικιλμένον παντοίῳ εἴδει ὑψηλῶν, καὶ διαπρυσίων προτερημάτων, καὶ οἷς ὡς δῶρον ἀρετῆς, σύμπαροικος μὲν ἔφορος καὶ πρύτανις ἡ θεία χάρις, παρ' ἧς οἰκέτης τε καὶ ὀπαδὸς ἡ τύχη. εἰς ταῦτα ἀναβλέψας, τούτοις τε θαρρηκώς, ἐκλιπαρῶν, ἀνακαλοῦμαι τὸ ὑμέτερον προσηνές, καὶ εὐπρόσιτον, ἀποδέξασθαι φιλοφρόνως τὸ νεοτευχές μου τοῦτο ἀνάθημα, ὡς μικρόν τι τεκμήριον τῆς εὐγνώμονος, ἧς πρὸς ὑμᾶς ἔχω ὑπολήψεως, ὃ καὶ πέπεισμαι ἱκανῶς· οὔτε γὰρ ἄλλος τις οὑτωσὶ ἀσμένως, καὶ οὕτω φαιδρῶς δέξαιτ' ἂν καὶ ἐναγκαλίσαιτο τὸ πρὸς αὐτὸν προσφερόμενον, ὡς ὁ φιλόπατρις τὸ ἐκ τῆς πατρίδος· διὸ δὴ καὶ ὁ διὰ μακροῦ πλανώμενος χρόνου, κἂν γοῦν τὸν τῆς πατρίδος ἰδεῖν καπνόν, ἐφίεται. οὔτε μὴν δικαιότερον ἄλλο ἢ τοῖς οἰκείοις τὰ ἐκ τῶν οἰκείων ἀνατίθεσθαι. τί δὲ τοῖς φιλοπάτρισι τῶν ἐκ τῆς πατρίδος οἰκειότερον; ἀλλ' οὐδ' αὐτοῖς τοῖς προσφερομένοις ἄλλο πρὸς ἔπαινον προσφυέστερον. Δέξασθε τοίνυν ἀσμένως εὐγενέστατοί μοι καὶ προσφιλέστατοι τὰ νεοφανῆ πως ταῦτα μαθήματα, καίπερ τὴν γένεσιν ἐξ ἀρχαίων ἔχοντα ἐφευρετῶν, πρὸς ἔπαινον τῆς φιλτάτης πατρίδος, ἐπίδοσίν τε τῶν τοῦ γένους φιλομαθῶν, καὶ κλέος ὑμέτερον.

εὐελεὔελπις γάρ εἰμι τοῖς μὲν ἄλλοις, τοῖς φθόνου παντὸς καθαρεύουσι, λόγου τε φανῆναι καὶ ὑποδοχῆς ἄξια· τοῖς δὲ νέοις μὴ τὴν τυχοῦσαν προμνηστεῦσαι λυσιτέλειαν εἰς τὴν τῶν ἄλλων ἐπιστημῶν ἐπίτευξιν· ἀλλά γε κἀμοὶ τῷ ὑπ᾽ ἀγάπης ταῦτα προσκομίζοντι πρὸς ἔνδειξιν τῆς φιλαγάθου ὑμῶν καὶ χρηστοήθους διαθέσεως, τοῦτο καὶ μᾶλλον εἰς καύχησιν καὶ παραμυθίαν τῶν πολλῶν ἐν αὐτοῖς καταβαλομένων πόνων, πρὸς χάριν πάντως γε τῶν φιλομαθῶν, τὸ τοῖς φιλτάτοις τε καὶ εὐγενεστάτοις προσενεχθῆναι τῆς πατρίδος γεννήμασιν· ὑμῖν δὲ τοῖς ταῦτα φαιδρῶς ἀποδεξαμένοις ἐπιβραβεύσοι ὁ τῶν ὅλων Δεσπόζων καὶ Παροχεὺς τῶν ἀγαθῶν, ὑγίειαν, μακροημέρευσιν, καὶ τὴν κατ᾽ ἄμφω εὐδαιμονίαν πρὸς καύχησιν τῆς ἐνεγκούσης καὶ παραμυθίαν τῶν δεομένων.

Τῆς ὑμετέρας πανευκλεοῦς Ἐκλαμπρότητος.

Εὐθέρμος πρὸς Θεὸν εὐχέτης Μπαλάνος Βασιλόπουλος Ἀρχιπρεσβύτερος Ἰωαννίνων καὶ Διδάσκαλος.

ΠΡΟΟΙ-

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ.

ΤΩΝ ΥΠΟΓΡΑΨΑΝΤΩΝ ΧΑΡΙΝ ΣΥΝΔΡΟΜΗΣ ΤΙΝΟΣ

Καὶ βοηθείας, εἰς ἀνακούφισμὸν τοῦ Ἐκδότου διὰ τὸ δαπανηρὸν περὶ τὴν ἔκδοσιν τῶν Μαθηματικῶν τούτων πραγματειῶν.

ΕΞ οὗ δηλοῦται ὁ ἔνθεος αὐτῶν ζῆλος περὶ τὰ κρείττω τῶν ἐν τῷ
βίῳ, ἡ διάπυρος ἔφεσις τοῦ ἀνακαινισμοῦ τῆς παλαιωθείσης τοῦ γένους
δόξης, τὸ ἐλευθέριον τῆς εὐποιητικῆς προαιρέσεως, τὸ φιλογενές, τὸ
περὶ τὰς μαθήσεις φιλότιμον, τὸ πρόθυμον καὶ γενναῖον φρόνημα εἰς
ἐπίτευξιν, ὧν οὐδέν ἐστιν ἀντάλλαγμα τῶν ἐν τῷ βίῳ λαμπρῶν καὶ τιμίων,
θεῖον γὰρ κτῆμά ἐστιν ἡ Μάθησις, αὐταρκές τε καὶ ἀναφαίρετον· διὸ καὶ εὐ-
μοϊκῆς ἀποδοχῆς καὶ φιλοστοργίας παρ᾽ αὐτοῖς ἠξίωται, ὅτε μάλιστα λιπὰ
καὶ εὐτελῆ ὑπάρχει τὰ τῶν αὐτῆς ἐραστῶν. Ἐπαγγέλλεται δὲ ὑμῖν τοῖς
αἰτίοις γεγονόσι τοῦ τὴν νεότητα ἐνασχολῆσαι περὶ τὰς ἐπιστήμας, καὶ
ἐπιδεικνεῖσι δαψιλῆ τὴν χορηγίαν περὶ τὴν αὐτῆς ἀνακαίνισιν, δῆλα
καταστῆσαι τὰ χαριστήρια παρά τε τῷ αὐτῆς πατρὶ Διΐ, καὶ παρὰ πᾶσιν,
ἐπευχομένη πᾶσαν εὐδαιμονίαν παντὸς ἀγαθοῦ πλεονεκτήματος καθ᾽ ἑ-
κάτερον τὸν ἄνθρωπον, ὑμῶν φημι, ὧν τὰ ὀνόματα προσοίσει τῷ ἰδίῳ
πατρί, καὶ ἐγχαράξει εἰς τὴν παρ᾽ αὐτῷ βίβλον τῆς ἀντιμισθίας, λέγου-
σα αὐτῷ λαμπρᾷ τῇ φωνῇ, παρ᾽ οἷς ἔτυχον εὐνοίας, δεξιώσεως, ἀποδο-
χῆς τε καὶ φιλοφροσύνης, τούτων ἀμέλει τὰ ὀνόματα εἰσὶ ταῦτα βαθμη-
δὸν προϊόντα· καὶ ἐν πρώτοις.

Τοῦ Μακαριωτάτου καὶ λογιωτάτου Ἀρχιεπισκόπου τῆς νέας Ἰουστινιανῆς καὶ πάσης Κύπρου κυρίου Φιλοθέου.

Τοῦ πανοσιωτάτου καὶ λογιωτάτου Ἀρχιμανδρίτου τῆς Ἁγιωτάτης Ἐπισκοπῆς Κύπρου Κυρίου Παϊσίου.

Τοῦ ἐν ἱερεῦσιν Αἰδεσιμωτάτου, καὶ λογιωτάτου Κυρίου Γεωργίου Πατούσα τοῦ ἐξ Ἀθηνῶν, Διδασκάλου τε τοῦ ἐν Ἐνετίαις Φλαγγινιανοῦ Ἑλληνομουσείου.

Τοῦ Αἰδεσιμολογιωτάτου ἐν Ἱερομονάχοις Κυρίου Τρύφωνος ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ Αἰδεσιμολογιωτάτου ἐν ἱερεῦσι Κυρίου Παππαπέτρου Μανέσση τοῦ ἐκ Κερκύρας.

Τῶν

Τῶν ἐκλαμπροτάτων καὶ εὐγενεστάτων υἱῶν Καραϊωάννου Κυρίου Γεωργίου, καὶ Κυρίου Στεφάνου ἐξ Ἰωαννίνων.

Τῶν ἐκλαμπροτάτων καὶ εὐγενεστάτων υἱῶν Μαρούτζη Κυρίου Πάνου, καὶ Κυρίου Ζαχαρία ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐκλαμπροτάτου καὶ εὐγενεστάτου Κυρίου Λέοντος Καραϊωάννου ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐκλαμπροτάτου καὶ εὐγενεστάτου Κυ. Ἰωάννου Δέκα τοῦ ἐξ Ἀθηνῶν.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Κυρίου Δημητρίου Μπέρκου, τοῦ ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Κυρίου Ἰωάννου Μπέρκου, τοῦ ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Κυρίου Λάμπρου Σάρρου, τοῦ ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Κυρίου Στάμου Δημητρίου, ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Κυρίου Σκαρλάτου Δημητρίου, ἐκ Λαρίσης.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Κυρίου Ἀναστασίου Μπιτζίνου, ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμομουσικωτάτου Κυρίου Δημητρίου Παίκου Θεσσαλονικέως.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ εὐγενεστάτου Κυρίου Νικολάου Σελέκη ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Κυρίου Ἀναστασίου Βασιλείου ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐντιμολογιωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Κυρίου Ἀντωνίου Παππᾶ ἐκ Σερρῶν.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Θεοφυλάκτου Βούβου ἐξ Ἀθηνῶν.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Διονυσίου Ταρωνίτου ἐξ Ἀθηνῶν.

Τῆς χρησιμωτάτης ἑταιρείας Κυρίου Δημητρίου Παππᾶ καὶ Κυρίου Ἰωάννου Πάσχου, τῆς ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Κυρίου Πολυζώη Σπείρου, τοῦ ἐξ Ἀργυροκάστρου.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Κυρίου Νικολάου Τζουκαλᾶ, ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Κυρίου Πέτρου Κωνιάλη, τοῦ ἐκ Κύπρου.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Κυρίου Ζαχαρία Φραγκίσκου, τοῦ ἐκ Κύπρου.

Τοῦ

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Κυρίου Ἰωάννου Τζιγκιρλάρα Σμυρναίου.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Κυρίου Ἰωάννου Κομματᾶ ἐκ Πάτμου.

Τοῦ ἐντιμολογιωτάτου Κυρίου Ῥίζου Μπακάλη, ἐκ Τουρνόβου.

Τοῦ ἐντιμολογιωτάτου Κυρίου Παναγιώτου Ῥογκώτη ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐντιμολογιωτάτου Κυρίου Θεοφίλου Κατεργάρη ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Κυρίου Παναγιώτου Κονταξῆ, ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Κυρίου Πολυζώη Λαμπανιτζιώτη ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Κυρίου Ἀναστασίου Δημητρίου Καλλίστου, ἐκ Λαρίσσης.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Κυρίου Νικολάου Δαμβόλου, τοῦ ἐκ Κρήτης.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Κυρίου Θεοδώρου Σφάτη ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Κυρίου Ἰωάννου Παππακώστα ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Κυρίου Γεωργίου Κουφαριώτη, τοῦ ἐξ Ἄρτης.

ΠΡΟΟΙΜΙΟΝ

Πρὸς τοὺς Φιλομαθεῖς.

Ὀρθῶς τῷ ὄντι γε φθάσας, Φιλομαθέστατοι, Πτολεμαῖος ὁ Κλαύδιος, ἓν τῆς Ἐπιστήμης εἶναι τοῖς ἀνθρώποις ἀπεφήνατο γένος, τὴν Μαθηματικὴν καὶ μόνην, αὐτὸ τοῦτο ὑπάρχουσαν ἀποδεδειχώς, κἂν καὶ τὰ λοιπὰ δύο τοῦ θεωρητικοῦ μέρη, τὸ Φυσικόν φημι καὶ Θεολογικόν, ὃ καὶ Μεταφυσικὸν ἤκουσεν, ὑπὸ τὴν ἐπιστήμην, ὡς ὑπὸ γένος οἰκεῖον συνωνύμως οἱ πλείους, ἵνα μὴ πάντες εἴπω, ὑπάγεσθαι ἐθέλουσι. Φροιμιαζόμενος γὰρ πρὸς Σύρον ἐν τῷ περὶ μεγάλης αὐτοῦ Συντάξεως φιλοπονήματι, τήν τε ἀξίαν, καὶ τὸ χρήσιμον, ὅσον τῆς περὶ τὰ θεῖά τε καὶ οὐράνια καταγινομένης θεωρίας πρὸς αὐτὸν δεῖξαι βουλόμενος, παραβάλλων ἀλλήλοις Φυσικόν, Μαθηματικόν τε, καὶ Θεολογικόν, τὰ μὲν δύο, φυσικόν τε καὶ θεολογικόν, εἰκασίαν μᾶλλον, ἢ κατάληψιν ἐπιστημονικὴν καλεῖσθαι δεῖν οἴεται· ἐπάγει δὲ καὶ τὴν αἰτίαν προσεχῶς λέγων, τὸ μὲν Θεολογικόν, “διὰ τὸ ἀφανὲς αὐτοῦ καὶ ἀνεπίληπτον, τὸ δὲ Φυσικὸν διὰ τὸ τῆς ὕλης ἄστατον καὶ ἄδηλον. μόνον δὲ τὸ Μαθηματικὸν ἐπιστήμην εἶναι ἀποφαίνεται, καὶ τῷ τῆς ἐπιστήμης ὀνόματι καλεῖσθαι ἀξιοῖ, ἅτε δὴ βεβαίαν καὶ ἀμετάπτωτον, ὡς αὐτός φησι, τοῖς χρωμένοις τὴν εἴδησιν παρεχόμενον. “εἰ γὰρ ἐπιστήμην τινὸς ἔχειν λέγομεν, κατὰ τὸν Φιλόσοφον, ὅτε τὴν αἰτίαν αὐτοῦ γινώσκομεν, δι' ἣν τὸ πρᾶγμά ἐστι, καὶ ὅτι αὐτοῦ αἰτία ἐστί, καὶ οὐκ ἐνδέχεται ἄλλως ἔχειν· τὴν δὲ ἐπιστημονικὴν γνῶσιν ἀκριβῆ τε εἶναι προσήκει, καὶ ἀμετάπτωτον, πάντως γε ἐν μόνοις τοῖς Μαθήμασι ἐπιστήμην ποιεῖσθαι δυνάμεθα. τῶν μὲν γὰρ ἀσωμάτων καὶ τῆς ὕλης πάντῃ κεχωρισμένων, ἀκριβῆ γνῶσιν ἀνθρώποις ἐν τῷ μετὰ σώματος βίῳ λαβεῖν ἀμήχανον, ὅτι μὴ τοῖς τῷ ἀδύτῳ κατελλαμπομένοις φωτὶ τῆς ὑπερηλίου θεότητος, καὶ οἷς τὰ περί τε Θεοῦ, καὶ τῶν θείων μὴ ὑπὸ σαρκὸς καὶ αἵματος ἀποκαλύπτεται, ἀλλ' ὑπὸ τοῦ Οὐρανίου Πατρὸς, κατὰ τὸ γεγραμμένον. οὐδενὸς γὰρ τούτων φαντασίαν τινὰ ἔχομεν, οὔτε μὴν τὴν αἰτίαν αὐτοῦ γνῶναι δυνάμεθα, μὴ μᾶλλον τοῦ νοὸς πρὸς αὐτὰ ἀτενίζειν ἔχοντος, ἢ πρὸς τὸ τοῦ Ἡλίου φῶς αἱ νυκτερίδες. Ἐπὶ δὲ τῶν ἐνύλων καὶ συνθέτων οὐδέ ποτ' ἂν ἄπταιστον ἔχειν δυνάμεθα τὴν γνῶσιν, κἂν καὶ τὴν αἰτίαν αὐτῶν ἴδωμεν, διὰ τὸ τῆς ὕλης ἄστατον, καὶ παντοίᾳ ὑποκεῖσθαι ταῦτα ἐκ τούτου μεταβολῇ. εἰ δὲ καί τινα ἐν τοῖς καθόλου, γένεσί τε φημὶ καὶ εἴδεσι τῶν ἐνύλων, ἐπιστημονικὴν ἔχειν εἴδησιν δοκῶμεν, ἀλλ' οὐ κἂν τοῖς ἀτόμοις, οὐδ' οἵαν ἐν τοῖς μαθήμασι κοινῆς τε καὶ κατὰ μέρος. διὸ δὴ καὶ πάντας ἔδει τοὺς ἐπιστημονικῆς ἐφιεμένους γνώσεως, ἐν τοῖς μαθήμασι, πολλῷ μᾶλλον ἐνασχολεῖσθαι, ἐν οἷς οἱ αὐτοὶ παρὰ πᾶσι λόγοι τε καὶ ἀποδείξεις, καὶ οὐδεμία κατὰ τοῦτο τοῖς τε πάλαι καὶ νῦν διενέξις εὑρίσκεται καὶ διαφωνία. τίς γὰρ, εἰπέ μοι, τὸ τὰς τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι, δύναιτ' ἂν ἀνασκευάσαι, κἂν ὁ διαβατικώτατος εἴη νοῦς καὶ διαλεκτικώτατος; ἢ τίς μὴ δεχθείη πεπεισμένως τὰς ἐν ταῖς παραλλήλοις διὰ τῆς εἰς αὐτὰς ἐμπιπτούσης γραμμῆς συνισταμένας ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας εἶναι, καὶ ὅσ' ἄλλα γεωμετρικαῖς ἐμπεδοῦνται ἀποδείξεσι; τίς δὲ παρὰ τὸ ποσὸν συνεχές τε καὶ διωρισμένον, ἄλλο τι ἐπιστητὸν τῆς μαθηματικῆς ὑποθείη ὑποκείμενον; ἢ γοῦν ἄλλας ὑποθέσεις τε καὶ ἀρχὰς λαβεῖν, ὡς ἐν τῇ φυσικῇ θεωρίᾳ, ἐν ᾗ καὶ δόξαι τῶν φιλοσοφούντων διάφοροι ἀνεφύησαν. Ἐπεὶ δὲ ἕκαστον ἕνεκά του γίνεται, καὶ οὐδὲν μάτην, τῆς δὲ ἐπιστημονικῆς θεωρίας τέλος ἡ τῶν ζητουμένων, ἢ γοῦν προβαλλομένων ἐπίδειξις, ὥστε ἐφησυχάζειν τὸν νοῦν, καὶ μηκέτι πορρωτέρω προβαίνειν εἰς ζήτησιν τῶν θεωρηθέντων, τοῦτο δὲ μᾶλλον διὰ τῶν γεωμετρικῶν ἔχομεν δείξεων, ὡς δι' ἀναμφισβητήτων ὁδῶν, κατὰ Πτολεμαῖον, τῆς ἐν τοῖς Μαθήμασιν ἀποδείξεως γινομένης, δῆλον, ὅτι καὶ κατὰ τοῦτο ἀνθεκτέον τοῖς φιλεπιστήμοσι τῶν τὰ μαθηματικῶς προβαλλόμενά τε, καὶ ζητούμενα, περιεχουσῶν πραγματειῶν, καὶ περὶ τὴν τῶν [illegible], καὶ ὡσαύτως ἐχόντων τὴν σκέψιν ἀναστρεφομένων. Παρὰ ταῦτα ἐπεὶ κἂν ταῖς ἄλλαις θεωρητικαῖς ἕξεσι συνεργὸς οὖσα διατελεῖ θαυμάσιος, ἡ Μαθηματικὴ, πρός τε τὴν τῶν ἀΰλων γνῶσιν ἡμᾶς ποδηγετοῦσα, καὶ πρὸς τὴν τῶν ἐνύλων κατάληψιν τὰ μάλιστα συντελοῦσα, πῶς οὐ προληπτέα παντὶ φιλεπιστήμονι ἡ τῶν μαθηματικῶν προβλημάτων τε καὶ θεωρημάτων γνῶσις; τὰ γὰρ ὑπὸ τῆς μαθηματικῆς θεωρούμενα ἐπιστήμης κατὰ ἀφαίρεσιν ὑπάρχοντα, μέσην ἔχει τὴν τάξιν, καί τινα πρὸς ἑκάτερον τῶν ἄκρων τηρεῖ συγγένειαν, πρὸς μὲν τὰ τῆς ὕλης ἐκτὸς, ὡς τῇ ἐπινοίᾳ, καὶ ταῦτα τῆς ὕλης κεχωρισμένα, πρὸς δὲ τὰ μετὰ τῆς ὕλης καὶ σύνθετα, ὡς πολλὰ τῶν ἐν ἐκείνοις διεχόμενα παθῶν. τομὰς γὰρ καὶ ταῦτα προσθέσεις τε καὶ

ἀφαι-

ἀφαιρέσεις, καὶ παντοίας ἐπιδέχονται μεταμορφώσεις, ὁμοιότητάς γε πά-
λιν καὶ ἀνομοιότητας κατά τε τοὺς ἐν αὐτοῖς λόγους καὶ σχηματισμοὺς εὑρίσκο-
μεν. Ἀλλά γε καὶ ὅσα τῆς ἀναλογίας τὰ εἴδη καὶ ὁποῖα, ᾗ τὰ πάντα
συνέχεται ἅμα καὶ συντηρεῖται, ἡ Μαθηματικὴ ἀποδείκνυσιν. Ὁ γοῦν
ἐν τοῖς μαθηματικοῖς προβλήμασί τε καὶ θεωρήμασιν, ὡς δεῖ προγυμνα-
θεὶς, δυνήσεται δήπουθεν ἀπονώτερόν τε ἅμα καὶ εὐσχολώτερον εἰς τὴν τῶν
ἀΰλων κατὰ τὸ ἐφικτὸν ἀνθρώποις ἐλθεῖν κατάληψιν, καὶ τοῖς ἀπορρήτοις
τῶν κατὰ φύσιν ἐμβατεῦσαι. ὅσην δὲ καὶ τὴν ἡδονὴν τοῖς ἰδίοις ἐρασταῖς
ἡ Μαθηματικὴ χαρίζεται ἐπιστήμη, ἴσασιν οἱ τοῖς κάλλεσι ταύτης ἐντρυ-
φῶντες, τὰ ἀμάραντα ἄνθη τῶν ἐν τῷ ταύτης περιβόλῳ ἀποδρεπόμενοι φυ-
τῶν, καὶ τῶν ἡδυτάτων καρπῶν τούτων συνεχῶς ἀπογευόμενοι, οὐκ οἶδα δ'
ὅπως, ἡ τοσοῦτον εἰς γνῶσιν τοῖς ἀνθρώποις συντελοῦσα, καὶ οὕτω θαυμά-
σιος ἐπιστήμη τοῖς πλείοσιν ἤδη κατημέληται. καὶ φυσικὴν μὲν θεωρίαν καὶ
μεταφυσικὴν εὑρήσειεν αὖτις ἐν οὐκ ὀλίγοις. Ῥητορικὴν τ' αὖ, Διαλεκτι-
κήν τε, καὶ Ποιητικὴν οἱ πλείους διδάσκειν ἐπαγγέλλονται, Μαθηματικῆς
δὲ οἱ μὲν πρὸς τοὺς πόνους ἀποδειλιῶντες, ἄλλοι δὲ ὡς μικρόν τι συμβαλ-
λούσης τοῖς φιλομαθέσι, καὶ ἄλλοι ὡς τερατώδη τινὰ ἐπαγγελλομένης δι-
δάσκειν, οὐδένα πω λόγον ποιοῦνται, ἢ βραχύ τι καὶ ταύτης φροντίζουσιν,
ὡς ἂν μὴ τὰ ἐν τοῖς φυσικοῖς εἰς λόγον ὑποδειγμάτων λαμβανόμενα τῶν
μαθηματικῶν προβλημάτων ἀγνοῶσιν. Ἀλλὰ δεινόν γε καὶ πάνυ δεινὸν ἡ
αἰχμαλωσία, τῆς γὰρ μαθηματικῆς ἐπιστήμης πλεῖστοι τῶν Ἑλλήνων ποτὲ
ἐρασταὶ, ὡς εἴγε καὶ ἄλλοι τινὲς, γεγονότες, οὕτως ἐνηγκαλίσαντο, καὶ
οὕτω τοῖς συνεχέσι πόνοις τε καὶ ἱδρῶσιν ἀφθόνως ἀνεθρέψαντο, ὥστε πολ-
λὰ καὶ γενναῖα τὰ ἐξ αὐτῆς ἀναδεῖξαι γεννήματα, καὶ πατέρες πολλῷ μᾶλ-
λον, ἢ τροφοὶ τούτων λογίζεσθαι, ὧν καὶ τὰ μέχρι τοῦδε σωζόμενα συγ-
γράμματα παρὰ πᾶσι θαυμάζονται, ὡς Εὐκλείδου μὲν τὸ στοιχειῶδες,
Ἀρχιμήδους δὲ τὸ περὶ τὰς μηχανὰς, καὶ Πτολεμαίου τὸ περὶ μεγάλης
συντάξεως, καὶ ἄλλων ἄλλα, ὅσ' ἀκριβῆ, καὶ τελειοτέραν τὴν περὶ ἄλλων τι-
νῶν ὑποθέσεων ἔχουσι τὴν διδασκαλίαν. τανῦν δὲ ἐν τοσαύτῃ τῶν Ἑλλη-
νικῶν πραγμάτων καταπτώσει ὄντων, καὶ μηδενὸς ἄλλου ἐν τιμῇ ὑπάρχον-
τος, ὡς καὶ πρῶτον ἐν τῷ βίῳ τούτῳ λογίζεσθαι τῶν ἐφετῶν, καὶ οἱονεὶ πα-
ρὰ πάντων λατρεύεσθαι, τῶν παραχωρήσει θεοῦ τυραννικῶς ἤδη κρατούντων,
ὅτι μὴ χρυσός τε καὶ ἄργυρος, καὶ χρήματα παρ' αὐτῶν ὁσημέραι λῃστρι-
κῶς τῶν εὐσεβῶν ἀπαιτουμένων, ὥς ποτε καὶ ὁ Σωτὴρ δι' ἄκραν φιλανθρω-
πίαν τὸν κῆνσον. οὐδὲν ὄντως θαυμαστὸν, εἴγε τὸ Ἑλληνικὸν γένος, μετὰ
τῶν ἄλλων αὐτοῦ καλῶν, καὶ τοῦ παρὰ τῆς μαθηματικῆς γεγύμνωται κόσ-
μου. ἐν ἠρεμίᾳ γὰρ τῶν παθῶν, καὶ γαλήνῃ τῆς πολυταράχου ταύτης ζωῆς
τοὺς τῶν ἐπιστημῶν μαργαρίτας ὁ νοῦς συλλέγειν δύναται, καὶ τὸν ποικίλον

τῆς

τῆς μαθηματικῆς καὶ ἀμήχανον ὑφαίνειν ἱστόν. διὸ δὴ ἐν τοσαύτῃ ταραχῇ τῶν πραγμάτων καὶ ζάλῃ τῇ μετὰ τὴν δεινὴν ταύτην αἰχμαλωσίαν τῆς πολυκυμάντου ζωῆς, καὶ παντελεῖ ἔτι τῶν πάλαι ποτὲ ἐν Ἑλλάδι θαυμασίων Ἀκαδημιῶν τε καὶ κοινῶν μουσοτροφείων ἐρημώσει, τῶν μὲν ὑπὲρ τῶν πρὸς τὸ ζῆν ἀναγκαίων τὴν πᾶσαν αὐτῶν καταβαλλομένων φροντίδα, τῶν δ᾽ ὅπως τὰς τῶν ἐργοδιωκτῶν φύγωσιν ὠμότητας σπουδαζόντων, μηδενὸς ὄντος τοῦ συναντιλαμβανομένου, μᾶλλον δὲ πολλῶν, εἴγε δεῖ τἀληθὲς εἰπεῖν, τοῦ γένους τούτου, οὐκ οἶδα τίνος ἕνεκα κατατρεχόντων. Ποιητικῆς μὲν κάλλος, Ῥητορικῆς δεινότης, Φυσικῆς τε καὶ Μεταφυσικῆς ἀκριβὴς θεωρία, ἠμέληταί πως καὶ ἠλαττώνηται. Μαθηματικῆς δὲ χάρις εἰς τὸ παντελὲς ἐξέλιπεν, ὡς μηδὲ εἴγε ἦν, ἢ ὅλως ποτὲ ἤκμαζε τῷ Ἑλληνικῷ πιστεύεσθαι γένει, κἄν τινες ταύτης ἐγεύσαντο, καθ᾽ ὅσον ὁ καιρὸς αὐτοῖς συγκεχώρηκεν, ὡς ὅ, τε ἐν μακαρίᾳ τῇ λήξει γεγονὼς Χρύσανθος, ὁ Ἱεροσολύμων, Μελέτιος ὁ Ἀθηνῶν, Κωνσταντῖνος ὁ Γορδάτος, καὶ ἄλλοι τινὲς πρὸ αὐτῶν τε καὶ μετ᾽ αὐτούς. ἀλλ᾽ οὖν διὰ τὸ ἄλλην τινὰ τραπῆναι ἕκαστον ὁδόν, ὅσα μόνον γραφῇ παραδοῦναι ἠδυνήθησαν, ταῦτα τοῖς μεταγενεστέροις εἰς ἀναζωπύρησιν τοῦ πρὸς τὴν μαθηματικὴν κατέλιπον ἔρωτος. Μεθόδιος δὲ ὁ Ἀνθρακίτης, ὁ ἐμὸς εἰς ταύτην ὁδηγός τε καὶ ἡγεμών, ἐν τῇ αὐτῇ ταύτῃ πατρίδι, τὰ Ἰωάννινά φημι, Γραμματικὴν, Κυκλοπαιδείαν, Φυσικήν τε καὶ Μεταφυσικὴν παρὰ Γεωργίῳ προγυμνασθεὶς τῷ Σουγδουρῇ, δι᾽ ἔρωτα δὲ τῆς Λατινίδος τὰς Οὐενετίας καταλαβών, κἀκεῖ ἀνδράσιν ἐντυχὼν ἐς ἄκρον τῇ τῶν μαθηματικῶν ἐξησκημένοις θεωρίᾳ, καὶ παρ᾽ αὐτῶν Γεωμετρίαν, Τριγωνομετρίαν, Γεωγραφίαν, Ἀστρολάβιον, Ἀστρονομικὴν, Ὀπτικὴν, Διοπτρικήν τε καὶ Κατοπτρικὴν, τήν τε Μηχανικὴν, καὶ ὅσα διὰ τοῦ Ἀναλογικοῦ Διαβήτου πολυτρόπως ἅμα καὶ εὐμεθόδως θηρεύεται, διὰ μακροῦ ἐκδιδαχθεὶς χρόνου, πρὸς τούτοις δὲ καὶ ἄλλαις τισὶν ἐγγυμνασθεὶς μαθηματικαῖς πραγματείαις, ἵνα μὴ εἰς τὸν τοῦ ἀνδρὸς τούτου ἔπαινον τὸν λόγον ἐκτείνας, καθ᾽ ἕκαστον λέγων, ἀκούσω παρά τινος, τὸ, περὶ σεαυτοῦ μὴ φράζε ἐγκώμια. ἐπανελθὼν εἰς τὴν ἐνεγκοῦσαν, τὴν τοῦ ἐν Καστορίᾳ φροντιστηρίου δεχθεὶς ἐπιστασίαν, ἐκεῖ τὰ πλείω τῶν ῥηθέντων τοῖς γνησίοις ἀκροαταῖς, πολλαχόθεν εἰς αὐτὸν διαδραμοῦσιν ἐκδεδωκώς, πολλῶν κἀν τοῖς ἐσχάτοις καιροῖς τὸν εἰς τὴν μαθηματικὴν ἐξέκαυσεν ἔρωτα.

Ἐπεὶ δὲ διὰ τὸ κατεπεῖγον τοῦ καιροῦ, καὶ τὴν τῶν ἀκροατῶν ἄπληστον εἰς τὰ τοιαῦτα ἔφεσιν, καὶ ἄλλας τινὰς καιρικὰς περιστάσεις, βουλόμενος τὰ πλείω τῆς μαθηματικῆς ἐκθέσθαι εἴδη, πρὸς χρείαν καὶ τοῦτο τῶν φιλομαθῶν ἀπεξεργαζόμενος, συνεπτυγμένην πως, καὶ λίαν συντετμημένην τὴν περὶ τῶν μαθηματικῶν προβλημάτων τε καὶ θεωρημάτων πεποίηκεν ἑρμηνείαν, καὶ δι᾽ αὐτὸ τοῦτο ἑκάστη τῶν εἰρημένων πραγματειῶν τῆς προσηκού-

σης τῶν ἐν αὐτῇ ἀπελείπετο τάξεως, καὶ ῥυθμοῦ. καὶ ἀνεπιτήδεια ὄντα εἰς παράδοσιν, τὰ παρὰ τοῦ ἀνδρὸς τούτου ἐκδοθέντα, λύπης μᾶλλον, ἢ ἡδονῆς ἦσαν πρόξενα τοῖς φιλομαθέσιν. ἵνα μὴ ὁ πρότερον εἰς τὰ τοιαῦτα θερμότατος τῶν φιλομαθῶν ἔρως, εἰς τοιοῦτον μῖσος διὰ τὸ ἀσαφὲς καὶ δυσληπτον μεταπέσῃ, ὡς μηδὲ ἐπαΐειν τούτων τοῦ λοιποῦ ἐθέλειν, καὶ τὸ λίαν πρόθυμον τῶν νέων ἐς τὴν ἄκραν μεταστραπῇ ἀμέλειαν, ἵνα μὴ τοίνυν ταῦτα συμβῇ, καὶ τὸ διὰ πολλοῦ σεσιωπημένον, καὶ πάνυ ὀλίγοις γνωστόν, ἀρξάμενον ἤδη κατὰ μικρὸν κηρύττεσθαί πως, καὶ τοῖς ἄλλοις γνωρίζεσθαι, τῇ παρὰ θεοῦ ἀντιλήψει, ὡς καὶ τὸ πρότερον, ὑπὸ πάντων παρεωραθῇ, καὶ ὀλίγον ἀναπνεῦσαν εἰς τελείαν ἐπανέλθῃ νέκρωσιν, τούτου γε ἕνεκα τὰ πλείω τῶν ἐκείνου φιλοπονημάτων πολλοῖς τε πόνοις, καὶ ἱδρῶσιν οὐκ ὀλίγοις εἰς ἣν ἤδη ὁρᾶται κατεστρώθησαν τάξιν, καὶ τὴν προσήκουσαν, ὥς γ᾽ ἐμοὶ δοκεῖ αὐτοῖς ἑρμηνείαν τε καὶ διαίρεσιν ἐδέξαντο, τινῶν μὲν τῶν ἐν αὐτοῖς προβλημάτων τε καὶ θεωρημάτων, ἀκριβῶς ἀναπτυχθέντων, ἄλλων δὲ ἀναπληρωθέντων, καὶ πολλῶν εἰς μείζονα τῶν κειμένων σαφήνειαν προστεθέντων, τῶν ὅρων ἐφ᾽ ἑκάστου προεκτεθέντων. Γέγονε δὲ ἡ τούτων ἔκδοσις διεξοδικωτέρα πως τοῦ προσήκοντος, καὶ τοῦτο πρὸς χρείαν τῶν φιλομαθῶν. τὰ γὰρ ἀρχόμενα τῶν μαθημάτων, καὶ ὀλίγοις τισὶ γνωριζόμενα, ἀνεπτυγμένα μᾶλλον εἶναι ὀφείλει, ὥσπερ δὴ ἐξ ἐναντίας τὰ εἰς φῶς τῷ χρόνῳ ἐλθόντα, συντομίᾳ τε καὶ κομψότητι καλλωπίζεσθαι δεῖ. εἰ δὲ καί τι ἐν αὐτοῖς ἐλλειπὲς εἶναι δόξῃ, καὶ τοῦ λόγου παραδραμόντος, ἀπέτυχε τῆς πρεπούσης σαφηνείας, συγγνώμη ἔστω, ὡς τοῦ καιροῦ μὴ συγχωροῦντος τὴν ἑκάστης πραγματείας ἐπαναλαβεῖν θεωρίαν, καὶ δευτέραν γενέσθαι τὴν ἐν αὐταῖς ἀναπόλησιν. οἶμαι δὲ, ἂν μὴ, κατὰ τὸν εἰπόντα, δειναὶ αἱ εὔνοιαι δικάσαι τὰς ψήφους, τοῖς ἀσμένως ἀποδεξομένοις, τὰ νεοφανῆ ταῦτα, ὡς οὕτως εἰπεῖν μαθήματα, καὶ μεθ᾽ ὅσης τῆς προθυμίας τε καὶ προσοχῆς ταῦτα διδαχθησομένοις, οὐ τὴν τυχοῦσαν προμνηστεύσεται ἡδονήν. Ἐπαινῶ δὲ τὸ πρόθυμον, καὶ μεγίστην ἔχω τὴν χάριν τοῖς καὶ εἰς τύπον ταῦτα δοθῆναι συνεργήσασι πρὸς κοινὴν τῶν φιλομαθῶν ὠφέλειαν, ὧν τό, τε φιλότιμον, καὶ ὁ πρὸς τὰ καλὰ ἔνθεος ζῆλος ἐν τούτοις ἐδείχθη καιροῖς, ἐν οἷς ἀκμαζούσης τῆς κακίας ἡ ἀρετὴ παροράται. τῇ δὲ Τρισηλίῳ θεότητι, ἧς τῷ ἀδύτῳ φωτὶ, καὶ τὰ ἐν τῷ σκότει τῆς ἀγνοίας ἀνακαλύπτεται, καὶ τὰ δοκοῦντα τοῖς ἀνθρώποις ἀδύνατα, δυνατὰ ἀποκαθίσταται, δόξα καὶ αἶνος εἰς ἀπεράντους αἰῶνας. Ἀμήν.

ΠΡΟΟΙΜΙΑΚΗ'

Ἱστορία περὶ εὑρέσεως, ἀρχαιότητος, αὐξήσεως, καὶ τῆς κατὰ τὸ τέλειον ἐπιδόσεως τῆς Μαθηματικῆς.

Βουλομένῳ τὰς Μαθηματικὰς ταύτας ἐκδοῦναι πραγματείας, οὐκ ἀπηκὸς ἔδοξέ μοι προοιμιάσαι τινὰ, περὶ εὑρέσεως, ἀρχαιότητος, καὶ τῆς ἐπ' ἄκρον ἐξοχότητος τῆς Μαθήσεως, χάριν τῶν πρωτοπείρων μαθητιώντων. ὅπως γνώσωνται, ὁποία τις ἐπιστήμη πέφυκε, ἐν ᾗ καθιεροῦνται, καὶ ὁποίου τῶν ἐν τῷ βίῳ ἀγαθῶν κρείττονος στεροῦνται, οἱ καταμελοῦντες αὐτῆς, διὰ τὸ ἀφῃρῆσθαι τῆς γνώσεως, ἀφῄρηνται ἑπομένως καὶ τῆς ἕξεως, ἣν οἱ πασῶν τῶν ἡλικιῶν ἐπὶ σοφίᾳ μέγα κεκτημένοι ὄνομα, ἐνδελεχεῖ σπουδῇ ἑαυτοῖς ἐπορίσαντο, καὶ περὶ τοσούτου ἐποιοῦντο ταύτης, ὥστε προαιρεῖσθαι ὑπὸ λιτὸν τριβώνιον ἐκπνέειν μάθησιν μόνον, ἢ ὑπὸ τὴν χλαμύδα, πλοῦτον, δόξας, καὶ ὅσα τοῖς ἀφιλοσόφως τεθηπόσι περὶ πολλοῦ ἡγεῖται. Ἐν τῷ ἐκφωνῆσαι δὴ τὴν περὶ τοῦ προκειμένου διήγησιν, ἐχρησάμην διαφόροις ἐπισήμοις ἱστοροῦσι περὶ ἀρχαιότητος, καὶ ἀκριβέστερον πραγματευομένοις, εἰ καὶ σποράδην, περὶ τῶν ἀρχαίων σοφῶν, οἷον τοῖς Πρόκλου, Λαερτίου, Πολυβίου, Τέτζη, Πλουτάρχου, Βιτρουβίου, Γελλίου, καὶ τῶν παραπλησίων.

Πρώτη τοίνυν πασῶν τῶν ἐπιστημῶν εὕρηται ἡ Μάθησις, ὡς ἱστορεῖ Ἰώσηπος, ὁ Φλάβιος, βιβλίῳ πρώτῳ, κεφαλαίῳ τρίτῳ, ἀνὴρ ἐπίσημος τῇ τε ἀρχαιότητι, καὶ τῷ γένει τῆς γραφῆς. φησὶ γὰρ τοὺς ἀπογόνους τοῦ Σὴθ, πρώτους παρατηρῆσαι τὴν τάξιν τῶν οὐρανίων σφαιρῶν, τὴν θέσιν, καὶ δρόμον τῶν ἀστέρων. ἵνα δὲ τὰ εὑρεθέντα, καὶ συναχθέντα διὰ τῶν παρατηρήσεων, εἰς ἀμνημοσύνην μὴ ἐμπέσωσι τῇ γνώσει τῶν μεταγενεστέρων, προειρηκότος τοῦ Ἀδὰμ τὴν παγγενῆ φθορὰν τοῦ παντὸς, ἔσεσθαι μίαν μὲν τῷ κατακλυσμῷ, ἑτέραν δὲ τῷ ἐμπρησμῷ, ἀνέστησαν δύο στήλας, τὴν μὲν

πλίνθειον, τὴν δὲ λίθινον, καὶ ἐπέγραψαν ἐν ἑκατέρᾳ τὰ εὑρεθέντα. ὥστε εἰ τύχῃ τὴν πλίνθειον ἀπολεσθῆναι τῷ κατακλυσμῷ, σωζομένη ἡ λίθινος, ἐπαρκέσῃ τοῖς ἀνθρώποις εἰς εὕρεσιν τῆς ἐπιστήμης. ὡσαύτως καὶ ἡ πλίνθειος, ἐμπρησμῷ τῆς ἑτέρας ἀπολεσθείσης. λέγουσι δὲ τὴν λίθινον σώζεσθαι καὶ εἰσέτι ἐν τοῖς καθ' ἡμᾶς χρόνοις κατὰ τὴν Ἀσσυρίαν, ταῦτα μὲν δὴ ἐκεῖνος, ἐφ' οἷς πιστέον διά τε τὸ ἐπίσημον τοῦ ἀνδρὸς, καὶ ἀρχαῖον τῆς Ἱστορίας.

Μετὰ τὸν κατακλυσμὸν πρώτους τῶν ἀνθρώπων τοὺς Ἀσσυρίους, καὶ Χαλδαίους φασὶ σέβεσθαι τὰς Μαθήσεις, ὡς παραδίδωσιν ὁ αὐτὸς Ἰώσηπος, Διόδωρος, καὶ Πλίνιος, παρ' οἷς ἀναθαλπόμεναι, ἐξήνθησαν, καὶ ἐκπανθεῖσαι κατέλαβον τοὺς Αἰγυπτίους, μετὰ τὴν ἀπὸ Χαλδαίας, καὶ Ἀσσυρίας ἀποδημίαν, κατὰ τὸν Ἀβραάμ. οὗτος γὰρ, ἐπιτάττοντος τοῦ Θεοῦ, καταλιπεῖν τὴν πατρῴαν γῆν, ἀφίκετο εἰς Παλαιστίνην, καὶ ἐκεῖθεν εἰς Αἴγυπτον, ὁρῶν δὲ τοὺς ἐκεῖ σπουδάζοντας ἐνδελεχῶς περὶ τὰ κρείττω τῶν τεχνῶν, καὶ εὐφυεῖς πρὸς ἀντίληψιν καὶ ὑψηλοτέρων, ὡς ὁ αὐτὸς Ἰώσηπός φησι, βιβλίῳ α: κεφαλαίῳ θ': τῆς Ἀριθμητικῆς καὶ Ἀστρονομίας μετέδοτο αὐτοῖς, ὧν ἔδει προηγεῖσθαι τὴν Γεωμετρίαν. οὗτοι εἰς τοσοῦτον προήεσαν τῆς περὶ τὴν μάθησιν ἐπιδόσεως, ὥστε πιστεύεσθαι αὐτοὺς πατέρας μαθήσεως, οἷα δὴ Ἀριστοτέλης ἀποφαίνεται ἐν τῷ α: τῶν μετὰ τὰ φυσικὰ, κεφαλαίῳ α: τὰς μαθηματικὰς ἐπιστήμας πρῶτον ἐν τῇ Αἰγύπτῳ παρὰ τῶν ἱερέων εὑρεθῆναι.

Ἐκεῖθεν ἡ Μάθησις ποντοπορήσασα ἀφίκετο εἰς Ἑλλάδα, καὶ τοῖς ἐκεῖ φιλοσόφοις ἐσπείσατο. Θαλῆς γὰρ ὁ Μιλήσιος, ὃς ἤκμασε πρὸ Χριστοῦ ἔτει φπδ': πρῶτος τῶν Ἑλλήνων ~~ἀπελθὼν εἰς Αἴγυπτον~~, καὶ ἐκδιδαχθεὶς ἐκεῖθι τὴν μάθησιν ἱκανῶς, μετήγαγεν εἰς Ἑλλάδα, ἀρχόμενος δημοσιεύειν τὴν Γεωμετρίαν. οὗτος ἐφεῦρε τὰς τοῦ α: κατ' Εὐκλείδην προτάσεις ε: ιε: καὶ κϛ': τήν τε β': γ': δ': καὶ ε: τοῦ δ': ἐφ' οἷς εὑρήμασι μεγάλῃ διαχυθεὶς τῇ ἡδονῇ, βοῦν λέγεται θῦσαι. Αὐτὸς ἤρξατο παρατηρεῖν τὰς ἰσημερίας, ἡλιοστάσια, καὶ τροπὰς, μάρτυς ὁ Λαέρτιος, καὶ τὴν τοῦ Ἡλίου ἔκλειψιν αὐτὸς προείρηκεν, ὡς ἱστορεῖ Ἱππίας, καὶ Ἀριστοτέλης, ὡς δὲ Τέτζης, καὶ τὴν τῆς Σελήνης ἔκλειψιν προαναγγεῖλαι τῷ Βασιλεῖ Κύρῳ, τούτου χάριν πρῶτος ἐνομίσθη πατὴρ καὶ εὑρετὴς τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης παρὰ τοῖς Ἕλλησι.

Μετὰ τοῦτον Πυθαγόρας ὁ Σάμιος ἀρχαιότατος τῶν φιλοσόφων, ηὔξησε, καὶ κατεκόσμησεν ἱκανῶς τὰς μαθηματικὰς ἐπιστήμας, ὑπερβαλλόντως δὲ τὴν Ἀριθμητικὴν, οὕτω διετάξατο, καὶ ἐκαλλιεργήσατο, ὥστε καὶ πᾶς λόγος τοῦ φιλοσοφεῖν παρ' ἐκείνῳ, ἐκεῖθεν παρήγετο, ἐκ τῶν ἀριθμῶν ἀμέλει. Τὴν δὲ Γεωμετρίαν, ὥς φησιν ὁ Λαέρτιος, αὐτὸς πρῶτος ἐξῆρε τῆς ὕλης, αὐτὸς τῇ ἀγχινοίᾳ τοῦ νοὸς εὗρεν ἐν τοῖς στοιχείοις τὴν λβʹ: μδʹ: μζʹ: καὶ μηʹ: προτάσεις τοῦ αʹ: διὰ δὲ τὴν λβʹ: καὶ μζʹ: πανηγυρίζει ἑκατόμβην, ὥς φησιν Ἀπολλόδωρος παρὰ τῷ Λαερτίῳ, ἐπὶ τοσοῦτον διήπυθεν ἡγεῖτο τὴν εὕρεσιν τοιούτων θεωρημάτων. αὐτὸς τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη, καὶ τὰ πέντε κανονικὰ σώματα εἰς φῶς ἤγαγε τοῖς ἀνθρώποις, τήν τε Ἀστρολογίαν, καὶ Μουσικὴν ἀρκούντως καὶ ἐδίδαξε, καὶ μεγάλην κατέθετο περὶ αὐτὰς τὴν ἄσκησιν. οὕτως ὀξὺς καὶ ἀγχινοὺς ἐξέβη περὶ τὰς ἐπιστήμας, ὥστε καὶ Αἱρεσιάρχης, καὶ Γυμνασιάρχης ἐχρημάτισε, καὶ τοὺς ἰδίους ὀπαδοὺς κοσμίοις καὶ περιφανέσιν ἐκάλλυνεν ἐπιστήμαις. Τούτῳ κατηκολούθησαν Ἀναξαγόρας ὁ Κλαζομένιος, καὶ Οἰνοπίδης ὁ Χῖος, ὧν ποιεῖται μνήμην ὁ Πλάτων ἐν τῷ περὶ ἐραστῶν διαλόγῳ, ἔνθα εἰσάγει τοὺς νέους συναγωνιζομένους τῷ Ἀναξαγόρᾳ καὶ Οἰνοπίδῃ περὶ τὰς τῶν κύκλων διαγραφάς. ὁ δ' Ἀριστοτέλης ἀποφαίνεται, Γεωμετρίαν τινὰ συγγεγράφθαι παρὰ τοῦ Ἀναξαγόρου, παρὰ δὲ Λαερτίου παρειλάβομεν, ἀποδεῖξαι τὸν Ἥλιον μείζονα τῆς Πελοποννήσου. (σαφεῖς ἀρχαὶ τῆς Ἀστρονομίας) αὐτὸν διαλεχθῆναι καὶ περὶ τῶν ἐν Σελήνῃ κατοικιῶν. αὐτῷ ἀποδίδωσιν ὁ Πρόκλος τήν τε ιβʹ: καὶ κγʹ: τοῦ αʹ: τοῦ στοιχειωτοῦ, βιβλίου προτάσεις. Τούτους διεδέχθησαν ὁ Βρύσων, ὁ Ἀντιφῶν, καὶ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος. οὗτοι ἐπαινοῦνται, καὶ ἐλέγχονται παρὰ τοῦ Ἀριστοτέλους περὶ τοῦ δοκιμαθέντος παρ' αὐτῶν τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου. τούτων ὁ Ἱπποκράτης ὤφθη ἐπισημότατος, ἐξ ἐμπόρου γὰρ Φιλόσοφος, καὶ Γεωμέτρης. ὃς παρὰ τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου, καὶ τὴν διπλασίασιν ἔτι τοῦ Κύβου πρῶτος ἐρευνήσατο διὰ τῶν δύο μέσων ἀναλόγων. ἣν ὁδὸν, ὡς ἀρίστην καὶ μοναδικὴν πάντες οἱ μεταγενέστεροι περιεπτύξαντο, αὐτοῦ τε ἐστὶ τὸ μέγα ἐκεῖνο καὶ λαμπρὸν ἐγκώμιον, ὡς ἱστορεῖ ὁ Πρόκλος, ὅτι συνέγραψε πρῶτος στοιχεῖα, καὶ τὰ παρ' ἄλλοις εὑρεθέντα ῥυθμικῶς διέταξεν.

Ὁ δὲ Δημόκριτος ὁποῖος ἦν περὶ τὴν Μαθηματικὴν ἐκ τῆς φιλοσοφίας αὐτοῦ συνάγεται, θαυμάσιος γὰρ ἐπ' ἀμφοῖν. τούτου τὰ φυσικὰ ἀπομνημονεύματα, ἔτι ἴσως καὶ τὰ μαθηματικὰ, ἀπώλοντο, ὥς τινες λέγουσι, φθόνῳ τοῦ Ἀριστοτέλους, τὰ ἴδια μόνα ἐφιεμένου ἐν ταῖς χερσὶ τῶν ἀνθρώπων διατρίβειν.

Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος, καίπερ αὐτοῦ μαθηματικὰ συγγράμματα οὐ σώζονται, τοσούτου μέν τοι μεγάλου ἐκληρώσατο ὀνόματος, ὅσον καὶ τοῦ Πλάτωνος ἀπομνημονεύεται διδάσκαλος. Κατελάβομεν τοίνυν ποτὲ καὶ τὸν Πλάτωνα. οὗτινος οὐδεὶς ἕτερος εἰς μεῖζον φῶς ἤγαγε τὰς Μαθηματικὰς ἐπιστήμας. αὐτὸς μεγάλην κατατιθέμενος σπουδὴν περὶ τὴν Γεωμετρίαν, μεγίσταις καὶ προσθέσι κατεπλούτισεν, αὐτὸς πρῶτος ἐφευρετὴς τῆς Ἀναλύσεως, ἀληθεστάτης ὄντως ὁδοῦ τοῦ εὑρίσκειν καὶ συλλογίζεσθαι. τὰ ἴδια φιλοσοφικὰ συγγράμματα μαθηματικοῖς λόγοις διεκρίνισε καὶ ἀπέδειξε, καὶ πᾶν ὅ, τι ἐν

μαθηματικοῖς ἀξιάγαστον, ἥνωσε τῇ φιλοσοφίᾳ. Ἀκαδημίαν ἐν Ἀθήναις ἀνήγειρε, καὶ ἐπὶ τῆς πύλης ἐπέγραψε (οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω.) λαμπρὸν παντὶ τεκμήριον, ἐφ' ὅσον οὐκ ἀλλότριος, ἢ ἀνωφελὴς, ἢ ἄκοσμος, ἀλλ' οἰκεία, ἐπωφελὴς, καὶ ἐπιτηδεία ἡ μάθησις πρὸς τὸ ὀρθῶς φιλοσοφεῖν. ὅσον διήπυθεν ὁ Πλάτων ἐχρημάτισε θεατὴς καὶ σπουδαῖος περὶ τὴν μάθησιν, εἴσεται ὁ ἀναγνοὺς τὰ αὐτοῦ ἀπομνημονεύματα.

Ἡ Ἀκαδημία τοῦ Πλάτωνος Κέρας ἀνεδείχθη Ἀμαλθείας, κατεκόσμησε Μαθηματικοῖς τὴν Ἑλλάδα. τρεισκαίδεκα οἰκείους τοῦ Πλάτωνος μαθητὰς παραδίδωσιν ὁ Πρόκλος, παραχθέντας ἐν ταύτῃ, ὧν διαφερούσῃ σπουδῇ καὶ ἀσκήσει ἀπηρτίσθαι τὴν μαθηματικήν. ὧν ἦν Λεωδάμας ὁ Θάσιος. Ἀρχύτας ὁ Ταραντῖνος, Θεαίτητος ὁ Ἀθηναῖος. παρ' ὧν διαφερόντως ἐπλατύνθησαν τὰ μαθηματικά. ὁ μὲν Λεωδάμας ἀκριβῶς ἐκδιδαχθεὶς τὴν Ἀνάλυσιν παρὰ τοῦ Πλάτωνος, μεγάλην εἰς ἔπειτα καταβαλὼν τὴν σπουδὴν περὶ αὐτὴν, μεγίστην περιεποιήσατο καὶ τὴν ἐπίδοσιν, ᾗ τινι ὁδηγῷ χρησάμενος, πλεῖστα ἐφεῦρε μαθηματικὰ θεωρήματα, ὡς παρὰ Λαερτίῳ φαίνεται. τοῦ δὲ Θεαιτήτου διευφημίζονται συγγράμματα, καὶ στοιχεῖα Γεωμετρικὰ, καὶ ἡ τῶν κανονικῶν σωμάτων διαγραφή τε καὶ παραβολή. ὁ δὲ Εὐτόκιος παραδίδωσι συγγραφῆναι τῷ Ἀρχύτᾳ καὶ στοιχεῖα Γεωμετρικὰ, καὶ ἄλλον παρὰ τὸν ῥηθέντα, τρόπον περὶ διπλασιάσεως τοῦ Κύβου. αὐτὸν παραδοῦναι τὴν μαθηματικὴν χρήσιμον τοῖς χειροτέχνοις. ὅθεν καὶ παρὰ Γελλίῳ φαίνεται, περιστερὰν ξύλινον κατασκευασθῆναι παρ' αὐτοῦ, καὶ ἀφίπτασθαι. οὕτως ἐς ἄκρον ἀφίκετο σοφίας ὁ ἀνὴρ, ὥστε καὶ τοῖς φύσει ἀκινήτοις παρέχειν κινητικὴν ψυχὴν μηχανικῶς. ᾧ τινι ἑπόμενοι πολλοὶ τῶν μηχανικῶν τεχνουργῶν, θαυμάσια τῷ κόσμῳ ἐπέδειξαν διὰ τῆς τέχνης. Ἀρχύτας μὲν οὖν καὶ μαθηματικὸς ἐστρατήγει, καὶ ἐπὶ ταῖς πατρίαις μάχαις πεντάκις στρατοπεδάρχης, τοσάκις καὶ θριαμβεύσας ἐστεφανοῦτο.

Νεοκλείδης μέγας τῇ φήμῃ, λαμπρὸς τῷ ὀνόματι, καὶ τοῦ ἰδίου μαθητοῦ Λέοντος τάχα περιβλεπτότερος ὑπὲρ τῶν αὐτοῦ ἐφευρημάτων ἐν τῇ μαθήσει. ὁ γὰρ Λέων ὀπαδὸς αὐτοῦ συνέγραψε στοιχεῖα τῆς καθόλου μαθήσεως, καὶ τὰ εὑρεθέντα ηὔξησε, καὶ πρὸς χρῆσιν ἐπιτηδειότερα παρεσκεύασε. τούτου καὶ μόνου ἐπαξίως συναριθμητέος τοῖς ἀρχαίοις γεννήτορσι τῆς μαθήσεως.

Εὐδόξιος ὁ Κνίδιος παραπλήσιος τοῖς ἀνωτέρω, πολὺς γεγονὸς τῆς ἀριθμητικοῖς, καὶ ὡς ἱστορεῖ ὁ Σχολιαστὴς, ἅπαν τὸ στοιχειῶδες κατ' Εὐκλείδην πέμπτον βιβλίον συνέγραψεν, ὁμοίως τε καὶ ἄλλα στοιχεῖα, καὶ γενικώτερα ἀπετέλεσε. καὶ τὰς κωνικὰς τομὰς ἀρχὴν λαβὼν παρὰ τοῦ Πλάτωνος ἱκανῶς ηὔξησε. πρὸς τούτοις αὐτὸς πρῶτος πέφυκεν αὐτουργὸς τῶν Ἀστρονομικῶν ὑποθέσεων, καὶ τὰς ἐκ τῆς Γεωμετρίας πηγὰς, ὡς ἀνωτέρω ὁ Ἀρχύτας εἰς ὀργανικὴν καὶ μηχανικὴν προσήρμοσεν. Ἀμύκλας ὁ Ἡρακλειώτης, Μέναιχμος, καὶ Δημόστρατος ὁ τούτου ἀδελφὸς, Ἑλικὼν ὁ Κυζικινὸς, Θεύδιος, Ἑρμότιμος ὁ Κολοφώνιος, καὶ Φίλιππος ὁ Μηδμαῖος, πάντες οὗτοι Πλατωνικοὶ, τὴν Γεωμετρίαν πολλῷ τελεωτέραν ἀπεργάσαντο. ὁ μὲν Μέναιχμος ἐφευρετὴς τῶν κωνικῶν τομῶν ἀκούει, διὰ τὴν ἐπ' ἄκρον περὶ αὐτὰς σπουδὴν, ὧν τῇ δυνάμει εὗρε τὰς δύο μέσας ἀναλόγους. δι' ὃ καὶ προτιμεῖται τῶν ἄλλων παρὰ τοῦ Εὐτοκίου. ὁ δὲ Θεύδιος, καὶ Ἑρμότιμος οἰκεῖα συνέγραψαν στοιχεῖα γενικώτερα, καὶ πλατύτερα. πάντες οὗτοι τῆς Πλατωνικῆς Ἀκαδημίας γεννήματα, τήν τε μαθηματικὴν καὶ φιλοσοφίαν εἰς τελειότητα ἔφερον, ὥς φησι Πρόκλος. ὁ δὲ Ξενοκράτης ἀκροατὴς τοῦ Πλάτωνος, καὶ Διδάσκαλος πρὸς καιρὸν τοῦ Ἀριστοτέλους, περίβλεπτος περὶ τὴν μαθηματικὴν, ὅθεν ἐθέλοντί τινι αὐτοῦ ἀκροατῇ γενέσθαι, ἀπείρῳ Γεωμετρίας, ἄπελθε φησιν, οὐ γὰρ ἔχεις λαβὰς φιλοσοφίας.

Περὶ δὲ τοῦ Ἀριστοτέλους τί ἂν λέξω· πάντα τὰ αὐτοῦ συγγράμματα πλήρη μαθηματικῶν ἀποδείξεων. ἐξ ὧν συλλέξας, συντέθεικεν ὁλόκληρον ἓν βιβλίον ὁ Βλαγκάνος, εἷς τῶν νεωτέρων Λατίνων. Ἐκ τῆς τοῦ Ἀριστοτέλους σχολῆς δύο μόνοι διὰ φήμης ἄγονται, Εὔδημος, καὶ Θεόφραστος. οὗτος συντέθεικε δύο βιβλία περὶ ἀριθμῶν, περὶ Γεωμετρίας τέσσαρα, καὶ ἓν περὶ ἀτόμων γραμμῶν, αὐτὸς καὶ μαθηματικὴν ἱστορίαν συνέγραψεν. ἐξ ἧς ὅ, τε Πρόκλος, καὶ ἄλλοι τὰ οἰκεῖα ἐδανείσθησαν.

Τούτους διεδέχθησαν Ἀρισταῖος, Ἰσίδωρος, καὶ Ὑψικλῆς, Γεωμέτραι μεγάλου ὀνόματος καὶ ἀγχινοίας, ὧν εἰσι γεννήματα τὰ κατ' Εὐκλείδην πέντε περὶ στερεῶν βιβλία. ὁ γὰρ Εὐκλείδης μετ' αὐτοὺς ἐντυχὼν αὐτοῖς, καὶ ἄλλοις παρὰ ἀρχαιοτέρων φιλοπονηθεῖσι στοιχείοις, καὶ ἀκριβῶς θεωρήσας, τὸ μὲν ἐλλειπὲς ἀνεπλήρωσε, τὸ δὲ συνεπτυγμένον, καὶ ἀσαφὲς εἰς κρείττονα μετήγαγε σαφήνειαν, ηὔξησέ τε καὶ ἀσφαλέστερον ἀπέδειξε, διατάττων εἰς ὃν τανῦν τηροῦσι ῥυθμὸν, ἐδωρήσατο ἡμῖν καταλιπὼν ταῦτα τὰ Στοιχεῖα, ἅτινα ἤδη πανταχόθι τῆς Οἰκουμένης ἀνὰ χεῖράς εἰσι τῶν εἰς τὸν Λαβύρινθον τῆς Μαθηματικῆς ἀφιγμένων ἐνδιατρίψαι νέων. ὃς ἀπέτισε τὸ κοινὸν χρεὼν, τῷ σπδʹ: ἔτει πρὸ Χριστοῦ. Κατηκολούθησαν αὐτῷ μετὰ ἑκατὸν σχεδὸν ἔτη Ἐρατοσθένης τε καὶ Ἀρχιμήδης. Ἐρατοσθένης μὲν ἐπίσημος ὤφθη παρὰ τοῖς Μαθηματικοῖς διὰ τὰ αὐτοῦ συγγράμματα, ὧν πολλὰ μὲν ἠφάνισθαι τῷ χρόνῳ, σώζεται δὲ καί τινα. ὡσαύτως τε καὶ τῶν τοῦ Ἀρχιμήδου τὰ πλεῖστα ἀπώλοντο, ἐκ τῶν σωζομένων γὰρ συνάγεται τὰ ἀπολωλότα.

Ἀλλ' ὅταν τὸν Ἀρχιμήδην ὀνομάζω, τὸν κολοφῶνα τῆς ἀνθρωπίνης ἀγχινοίας εἰς νοῦν ἀντιλαμβάνομαι, καὶ τὴν λύσιν ἁπάσης ὑψηλοτέρας μαθηματικῆς διδασκαλίας. τὰ σωζόμενα αὐτοῦ ἀξιάγαστα συγγράμματα ἐξέδωκαν εἰς φῶς ὁ Πολύβιος, ὁ Πλούταρχος, ὁ Τζέτζης, καὶ ἄλλοι. Σύγχρονος τῷ Ἀρχιμήδῃ ἤκμασε Κόνων ὁ Γεωμέτρης καὶ Ἀστρονόμος, οὗ τὸν θάνατον πενθεῖ Ἀρχιμήδης ἐν τῷ περὶ τετραγωνισμοῦ Παραβολῆς βιβλίῳ. μετὰ τούτους ἀμέσως μικροῦ παραδραμόντος χρόνου, ἐξῆλθεν εἰς φῶς Ἀπολλώνιος ὁ Πηργαῖος, ἄλλος κοσμήτωρ τῆς Γεωμετρίας, τοὔνεκα καὶ τὴν κλῆσιν τετύχηκε Μέγας Γεωμέτρης. τούτου σώζονται ἑπτὰ βιβλία περὶ τῶν κωνικῶν. τούτῳ ὀφείλονται τὸ ιδʹ: καὶ ιεʹ: κατ' Εὐκλείδην, συντετμημένα παρὰ τοῦ Ὑψικλέους, μετὰ τὸν Ἀπολλώνιον ἤκμασαν Ἵππαρχός τε καὶ Μενέλαος, ὧν ὁ μὲν ἓξ, ὁ δὲ τέσσαρα συνέγραψαν βιβλία περὶ τῶν ὑποτεινουσῶν ἐν τῷ κύκλῳ, δι' ἃ οὐ τὴν τυχοῦσαν οἴδαμεν χάριν ἀμφοτέροις, ἐπωφελεστάτων οὐσῶν πραγματειῶν. ὁ δὲ Μενέλαος συνέγραψε καὶ τρία βιβλία περὶ σφαιρικῶν τριγώνων. Θεοδόσιος δὲ ὁ Τριπολίτης τρία περὶ σφαιρικῶν ἐπωφελέστατα βιβλία ἡμῖν κατέλιπεν, ἅτινα ὁσημέραι ἀνὰ χεῖρας πάντων διατρίβει.

Ἔτει τῷ οʹ: μετὰ Χριστὸν ἐξῆλθεν εἰς τὸ φῶς Πτολεμαῖος ὁ Κλαύδιος, ὁ Κορυφαῖος τῶν Ἀστρονόμων, ἀνὴρ ὄντως θαυμάσιος, καὶ ὥς φησι Πλίνιος ὑπὲρ τὴν φύσιν τῶν θνητῶν. οὗτος οὐ μόνον περὶ τὴν Ἀστρονομίαν μεγάλας ἐποιήσατο τὰς ἐπιδόσεις, ἀλλὰ καὶ Γεωμέτρης ἀνεφάνη ἄριστος, ὡς βεβαιοῖ τὰ τοσαῦτα ὑπ' αὐτοῦ γραφέντα Γεωμετρικῶς. καὶ μάλιστα τὰ περὶ τῶν ὑποτεινουσῶν ἓξ βιβλία τοῦ Μενελάου, τέσσαρα δὲ τοῦ Ἱππάρχου, συνεπτυχθέντα παρ' αὐτοῦ εἰς πέντε μόνα θεωρήματα, καὶ Πλούταρχος ὁ ἐπιστημότατος περὶ τὴν φιλοσοφίαν, καὶ τὰ φιλολογικὰ, οὐχ ἧττον καὶ περὶ τὴν Μαθηματικὴν ἦν, ὅπερ βεβαιοῖ τὰ παρ' αὐτοῦ συγγραφέντα μαθηματικὰ προβλήματα διαφόρων εἰδῶν. Τὰ δὲ τοῦ Εὐτοκίου Ἀσκαλωνίτου, καὶ Ἀπολλωνίου πολυμαθῆ σχόλια εἰς τὰ τοῦ Ἀρχιμήδου, τίς ἀγνοεῖ; παρὰ τοῦ αὐτοῦ Εὐτοκίου ἀπαριθμεῖται Γεωμετρικὰ συγγράμματα καὶ περὶ διπλασιάσεως κύβου, τὰ τοῦ Φίλωνος, τοῦ Διοκλέους, τοῦ Σπόρου, τοῦ Ἥρωνος, καὶ ἄλλων, οἷον ἐξοχωτέρων ἐν τοῖς Γεωμετρικοῖς, καὶ Μηχανικοῖς Διδασκάλων. καὶ ὁ μὲν Ἥρων ἀμφοτέροις εὐδοκίμει Μηχανικῇ τε καὶ Γεωμετρίᾳ, ἡ γὰρ παρ' αὐτοῦ παραδοθεῖσα διπλασίασις τοῦ κύβου, βιβλίῳ γʹ: προτάσει ζʹ: ἔλεγχός ἐστι τῆς μεγαλονοίας τοῦ ἀνδρὸς, καὶ παρὰ πᾶσι φέρει τὰ πρωτεῖα. οἱ δὲ ἕτεροι τῷ μὲν χρόνῳ ὕστεροι, τῇ δ' ἀγχινοίᾳ περὶ τὰ τοιαῦτα τοῖς ἀρχαίοις συναριθμητέοι. μετὰ τούτους ἤκμασε Κτησίβιος ὁ Ἀλεξανδρεὺς, οὗ τὰ ἀξιάγαστα μαθηματικὰ συγγράμματα κρείττονα ἔδοξαν παντὸς ἐγκωμίου παρὰ τῷ Βιτρουβίῳ, Πρόκλῳ, Πλινίῳ, καὶ Ἀθηναίῳ, τούτῳ ἐνάμιλλός τε καὶ σύγχρονος περίπου ὁ Δίδυμος, οὕτως εὐδόκιμος παρὰ τοῖς Μαθηματικοῖς, ὡς καὶ ἔν τισι προτιμεῖται τοῦ Εὐκλείδου παρὰ τῷ Πρόκλῳ, παρὰ τὰ αὐτοῦ ἀπομνημονεύματα.

Συγκαταλέγεται τῷ ἀνωτέρω ὅ, τε κλυτὸς Διόφαντος, Ἀλεξανδρείας καὶ αὐτὸς γόνος, μέγας περὶ τὴν Ἀριθμητικὴν, οἷος Ἀρχιμήδης, Ἀπολλώνιός τε καὶ Εὐκλείδης, περὶ τὴν Μηχανικὴν καὶ Γεωμετρίαν. τῆς τούτου ἀγχινοίας ἐφεύρημά ἐστιν ἡ θαυμάσιος ἐκείνη Ἀναλυτικὴ, καὶ συνθετικὴ μέθοδος, ἡ παρὰ τοῖς νεωτέροις Ἀραβικῷ ὀνόματι Ἄλγεβρα ἀποκαλεῖται. παρὰ τὰ ἄλλα αὐτοῦ γραφέντα, τοῦτο καὶ μόνον ἐπαρκεῖ πρὸς εὐφημίαν τῆς μεγαλονοίας τοῦ ἀνδρὸς, θεῖον γὰρ ὄντως ἐστὶν ἐφεύρημα, ἀνακαλύπτει γὰρ ἄδυτα τῆς φύσεως, καὶ ἃ ἀδύνατα δοκεῖ τοῖς καὶ διαβατικωτάτοις τῷ νοΐ, αὕτη ἡ μέθοδος ῥᾷστα καὶ τάχιστα ἀποδεικνύει τε, καὶ λύει. παρὰ τοῖς Ἀριθμητικοῖς ἐπαξίως εὐφημοῦνται, Μικόμαχος καὶ Σμυρναῖος, ἐπίσημοι ἄμφω, περὶ τὴν Γεωμετρίαν, Ἀριθμητικὴν, καὶ Μουσικὴν, οὓς τὰ περὶ τούτων μαρτυρεῖ οἰκεῖα ἀπομνημονεύματα, καὶ ταῦτα τὰ περὶ τομῆς κυλίνδρου καὶ κώνου δύο βιβλία τοῦ Σμυρναίου.

Τούτοις κατηκολούθησαν Πρόκλος ὁ Λύκιος, Θέων, Πρόκλος ἄλλος, (ὃς ἐνέπρησε τὸν τοῦ Βιταλιανοῦ στόλον πολιορκοῦντος τὴν Κωνσταντινούπολιν τῇ ὀπτικῇ μηχανῇ τῶν κατόπτρων, ἐπὶ βασιλείας Ἀναστασίου ἔτει τῷ σωτηρίῳ φιδʹ: ὡς παραδίδωσιν ὁ Ζωναρᾶς) καὶ Πάππος, ὃς περιορίζει τὸ πλῆθος τῶν Μαθηματικῶν, τῷ μὲν χρόνῳ ὕστατος πάντων σχεδὸν, ἐκτὸς τοῦ Πρόκλου τοῦ νέου, τῇ δὲ λαμπρότητι τοῦ ὀνόματος συγκαταλεκτέος τοῖς πάλαι. ὁποίας γὰρ ἐπιδόσεις ἔσχον περὶ τὴν Μαθηματικὴν οἱ τρεῖς οὗτοι, τὰ αὐτῶν ἐπίσημα συγγράμματα δηλοῖ. τοῦ μὲν τὰ εἰς τὰ τοῦ Εὐκλείδου σχόλια, καὶ Πτολεμαίου, τοῦ δὲ ὡσαύτως τὰ περὶ πάντα τοῦ Πτολεμαίου. ὥσπερ καὶ τὰ τοῦ Πάππου, εἴτε τοῖς τοῦ Πτολεμαίου πᾶσι σχόλια, καὶ ἡ παρ᾽ αὐτοῦ συγγραφεῖσα συλλογὴ τῶν μαθηματικῶν ἐν παντὶ εἴδει μαθήσεως, συμποσουμένη εἰς ὀκτὼ βιβλία, ὧν τὰ μὲν δύο, ἤτοι ἀπώλοντο, ἢ κρύπτονται ἐν βιβλιοθήκῃ τινὶ ἀδήλῳ, τὰ δὲ λοιπὰ ἓξ, τοσοῦτον ἀφθόνως πανταχόθι ὑπάρχει, καὶ παρεχόμενα παντοῖα μαθήματα, ὥστε ὑπὸ πάντων ἀνὰ τὰ πρῶτα τῶν πάλαι ἀπομνημονεύματα συναριθμεῖται. ἤκμαζον δὲ οὗτοι κατὰ τὸν τέταρτον αἰῶνα.

Ἔχετε τοίνυν, εὐμενεῖς Ἀναγνῶσται, βραχεῖαν ἱστορίαν περὶ ἀρχῆς καὶ προόδου τῆς Μαθήσεως, ἐξ ὧν δηλοῦται ἡ ἀρχαιότης, καὶ ἐξοχότης αὐτῆς, καὶ ὅτι οἱ αὐτοὶ ἡγεμόνες τῆς Φιλοσοφικῆς Ἀριστοκρατείας ἔτεκον ἐν τόκῳ δύο διδύμους ἀδελφὰς τὴν φιλοσοφίαν, καὶ τὴν Μαθηματικὴν, τοσοῦτον οἰκείας καὶ συγγενεῖς, ὥστε ἀδύνατον ἀπ᾽ ἀλλήλων χωρίζεσθαι, διὰ τὸν ἔμφυτον τῆς ὁμονοίας δεσμὸν, καὶ τὴν ἑτέραν ἀτελῆ εἶναι, ἐκλειπούσης τῆς ἑτέρας. τοῦτο γὰρ μάλιστα ἐκίνησέ με ἐκδοῦναι τύποις τὰς παρούσας πραγματείας, βουλόμενον εἶναι κοινὰς πᾶσι τοῖς φιλεπιστήμοσιν Ἑλλήνων παισὶν, εἰ καὶ πολλαῖς ἐνέτυχον δυσχερείαις, οὐχ ἥττονας ὑπήνεγκον καὶ τοὺς πόνους, πρὸς σύστασιν τοῦ πράγματος, προελόμενος τὸ κοινωφελὲς τοῦ ἰδίου,

καὶ

καὶ πάντα δεύτερα ποιῶν, τοῦτο καὶ μόνον ἡγούμενος φιλοτιμίαν, τὸ ἀναφανῆναι ταῦτα αὖθις τῷ Ἑλληνικῷ γένει. εἰ δὲ καί τι παρέδραμε περὶ τὴν ἐπανόρθωσιν, συγγνώμη τῷ αἰτοῦντι, οὔτε οἰκεῖον, οὔθ᾽ ὑπ᾽ ἀμελείας, ἀλλ᾽ ἐξωτερικὸν τὸ αἴτιον, πῶς γὰρ ὁ ὑπ᾽ ἀγάπης κινούμενος, τοιοῦτόν τι πάθῃ; Ἐῤῥωμένοι διαβιώσοιτε, καὶ εὐδαιμονοῖτε ἐν τοῖς κρείττοσι.

Εἴδησις περὶ τῆς Ἀριθμητικῆς.

Ἰστέον, ὅτι τὴν προστεθεῖσαν Ἀριθμητικὴν καὶ τέταρτον ἀποπληροῦσαν τόμον, μήτε μνείαν τινὰ ταύτης τοῦ ἐκδότου ποιουμένου ἐν τῇ προσφωνητικῇ εἰδήσει περὶ τῶν ἄλλων πραγματειῶν, μήτε συμπεριλειομένην ἐν τῇ τιμῇ τῶν ἄλλων, ἐπαγγελλόμενός τις ἐκδοῦναι τύποις ἄλλοθι, ἀπέτυχε τοῦ σκοποῦ. μαθὼν δ᾽ ἔγωγε τὸ συμβὰν, καὶ παρακαλούμενος ὑπὸ πολλῶν τῶν καθ᾽ ἡμᾶς, καὶ μάλιστα τοῦ ἐμοῦ καθηγεμόνος, καὶ μήθ᾽ ὑπενεγκὼν χηρεύειν τὰ καθ᾽ ἡμᾶς τοιαύτης ἐπωφελοῦς πραγματείας, καὶ κοινῆς ὑπηρέτιδος πάσαις ταῖς ἐπιστήμαις, καὶ μάλιστα τῷ ἐμπορικῷ βίῳ, συνηρίθμησα ταῖς ἄλλαις πραγματείαις, καὶ τοῖς βουλομένοις κτῆσαι, παρέχεται εἰς τιμὴν δέκα λιτρῶν τῶν Ἑνετιῶν, ὅσον ἀμέλει τιμεῖται ἐν τῷ τύπῳ, μετὰ τὸν τύπον γὰρ τιμηθήσεται πλείονος.

ἘΠΙ'.

ΕΠΙΓΡΑΜΜΑ.

Τοῦ Κυρίου Ἰγνατίου Μεταξοπούλου τοῦ Κρητὸς, πρὸς τὸν Μεθόδιον.

Ὡς ἐθέλοντα δύειν ἀπὸ Ἑσπερίης ἐφ' Ἑώαν
Καλὰ Μαθήματ' ἄγεις ὡς παλινυνεχέως.
Ὧν τε ὁδηγὸς ἔης ἐέασι Σοφῶν Γενετήρων,
Τοῖσιν ἔσηθ' ἑξῆς, ὥστε δίδωσι Θεός.
Τῷ θνητός περ ἐὼν, ὡς Τεξάκτυς, Μεθόδιε,
Εὗρες Ἀθανασίην Λείμμασι σῆς Σοφίης.

Πρὸς τὸν Αἰδεσιμολογιμώτατον Κύριον Μπαλάνον.

Νῆσον Ἰητορίη σοβέει, Δηώ τ' ἄπο Λιμὸν,
Καὶ Φαέθων ὄρφνην ἀντολίηθε φανάς.
Ἡ δὲ Σοφοῦ Μπαλάνοιο Μάθησις, ὅσην ἀποαιρεῖ
Πλεῖν κείνων, Δύμην Ἑλλάδος Ἀδμολίης.

Εἰς τὴν Μάθησιν.

Τίς ποτ' ἐγὼ τελέθω βούλει μαθέειν, φίλ' ἑταῖρε;
Ἴδμονά σε Στάθμη, καὶ Ζυγὸς ἐκτελέει.
Ταύτοισι Κτίσης Μέγας Αἶαν ἠδ' κτίσεν, εὐρὺν
Αἰθέρα, τῶν τ' ἄλλων πάνθ' ὅσα καλὰ λίην.
Κείνου, εἰ κατέχεις, καὶ ὅλως χρῶ, Εἰκόν' ἀστὴν
Ἄντικρυς ἐκτυπόοις, τοῦ Κτίσιν ἐκφανόω.

Εἰς τὴν Βίβλον τῆς Μαθήσεως.

Τίπτε με δέρκεις ἀγανὴ πρόσωπε; πόπελθέ με Κοῦρε.
Δείξω γὰρ Γαίης, κ' οὐρανίων Σοφίην.
Τῆς οὕνεχ' ὡς Μέγ' ἄραντο τεοὶ Κλεῖος Γενετῆρες.
Κληρονομεῖν βούλει; πείθεο, ἤ καλέω.

Πρὸς τὸν αὐτὸν Ἐπιστημονικώτατον Διδάσκαλον κύριον Μπαλάνον.

ΕΠΙΓΡΑΜΜΑ.

Τοῦ ἐν Ἱεροδιακόνοις κυρίου Παγκρατίου Δημάρου τοῦ ἐξ Ἰωαννίνων.

Ὄμματος ὀξέϊ Λυγκῆος νέρθεν χθονὸς ἤχθη
„ Πάντα μέταλλα βροτοῖς, κεύθεσιν ὄντα πάλαι
Δαιδαλέῳ δὲ νόῳ Μπαλάνοιο μαθήματα γνώθη
„ Σχεδὸν ἅπανθ' ἁπάσης γῆς ποτε ὠλολότα
Πρεσβυτέρου πρώτοιο ὑφηγητοῖο ὁμῶς τε
„ Ὄντος Ἰωαννίνων, φιλοσόφων θ' ὑπάτου.

Ἕτερα εἰς τὴν βίβλον Σαπφικὰ τοῦ αὐτοῦ.

Εἴποτ' αὖ θυμὸς κραδίῃ ἄρ' ἥκε
Πᾶσαν αὐτὴν γαῖαν, ἅπαν τε κέρμα
Τῆς δὲ, μεζῆσ' οὐ μεθόδως τ' ἄεισα,
Ἢ περιελθεῖν,

Οὐ πτέρυξ' ἐξ ἡλίου πυρῶν ῥὰ
Οὐδὲ θέρμης, ὡς Ἰκάρου τὸ πρῶτον
Κηρίναις ὡς φθειρομέναις τάχιστα,
Ἀλλ' ἀκαμάντοις;

Ἢ δὲ Κροίσου εὐρέα πάντα πλοῦτον
Καί τε θησαυροὺς βασιλῆος αὖθις
Φημὶ Περσῶν, καὶ Μίδα τοῦ Φρυγῶν τε
Εὐαριθμῆσαι

Ποικίλ' εὐώδη δὲ μαθημάτων καὶ
Ἄνθε' ἄῤῥητ' Ἀρχιμίδου τε γνῶναι
Ἀστέρων φύσεις ἀκινητέων τε
Ἠδὲ κινητῶν

Ἐμμελῶς ταυτηνὶ ἐρεύνα βίβλον
Κ' ὄμμασι χρῶ νοῦ καθόρ' οἶδ' ἅπαντα
Οὐρανῷ ὅσ' ἂν κέετ' ἄστρα λαμπρὰ
Καὶ μέζα γαίης.

ἘΠΙΓΡΆΜΜΑΤΑ

Εἰς τὸν πανιδεσιμώτατον καὶ Ἐπιστημονικώτατον Ἀρχιπρεσβύτερον Ἰωαννίνων, καὶ Διδάσκαλον τῆς πρώτης σχολῆς τῆς ἐκεῖ, τὸν συγγραφέα τῆς δε τῆς Μαθηματικῶν πραγματειῶν.

ἩΡΩΕΛΕΓΕΙ͂ΟΝ

Ἡμετέρης γενεῆς μέγ᾽ ὄνειαρ, παμμεγάτ᾽ εὖχος
 Ἠπείρου, ἰδὲ φῶς Ἑλλάδος ἀρτιφαές,
Ἰωαννίνων Ἀρχιπρεσβύτερε ἱρὲ
 Ἠδὲ καθηγῆτορ Μπαλλᾶνε πολυΐδρι,
Ὄλβιος ἐσσὶ πόνων σῶν ἱδρώτων τ᾽ ἀμετρήτων
 Ἔμπνους γὰρ βίβλους γράψες, ἰδ᾽ ἄρτι γράφεις
Τόσσας, ὅσσοι ἔασι διδασκαλίης σέο μοῦσαι
 Ἑλλάδι, σῆς σοφίης κήρυκες ὑψιβόαι.
Νῦν δ᾽ αὖ ἄπνους μὲν, πολυηχεῖς δ᾽ Ἑλλάδι βίβλους
 Τάσδε, μαθηματικῆς φῶς μέγα μουσοτρόφοις,
Μνημόσυνον σοφίης γράψες σῆς. οὔποτ᾽ ὀλεῖται
 Τοὔνεκα σεῖο κλέος ζῶσί τε καὶ φθιμένοις.

Ἕτερον.

Ἄρτι, πάλαι ποθέον γένος Ἑλλήνων, σοφὸν ἄνδρα
 Ἄξιον Αἰώνων ἔλλαχε τῶν προτέρων,
Μπαλλᾶνε ἰδμοσύνῃ σε μαθηματικῇ προφέροντα,
 Μάρτυρες αἵδε βίβλοι, Ἑλλάδα αἷς γανύεις.
Ζώοις, φῶς σοφίης τἀρχαῖον ἀν᾽ Ἑλλάδα φαίνων,
 Πολλὰς εὐδαίμων εἰς ἐτέων ἕλικας.

Ἕτερον.

Τὰς δὲ μαθηματικῆς ὡς εἶδον ἄφνω νεοτευχεῖς
 Πυκτίδας, ὥς ἔφασαν αἱ Ἑλικωνιάδες
Θάμβει συσχόμεναι μοῦσαι; ἦρ᾽ Εὐκλείδης τε,
 Ὃς στοιχειωτής ἐστι μαθηματικῆς,
Ἔκθορεν ἐκ νεκάδων νῦν; κἀριθμητικὸς ἠὲ ὅς
 Νικόμαχος; σὺν τοῖς μηχανικοῖς ἀνέβη,
Ἔξοχος ἆρ᾽ ἴδμων Ἀρχιμήδης; Πτολεμαῖος
 Πρὸς τοῖς Ἀστρονόμος ἐς βίον ἦλθε πάλιν;
Τὰς δ᾽ ἀπαμειβόμενος προσέφη μουσηγέτα Φοῖβος.
 Ὦ πότνιαι κοῦραι Αἰθερίοιο Διός,
Ἰωαννίνων γόνον εὖ ἴστ᾽ οὐκ ἀπορεῖτε,
 Ὑμμέτερόν φημι θρέμμα, τὸν ὀξύνοον,
Ἀρχικαθηγητὴν πατρίδος κεν ἑῆς πολυΐδριν,
 Ἀρχιπρεσβύτερον Μπαλλᾶνον ἱρόσοφον.
Κείνων ἀντὶ μόνος νυνὶ πάντων ἤρκεσεν οὗτος
 Ἑλλάδι, τὰς δὲ βίβλους φέρτατα συνθέμενος.
Αἱ δ᾽ ἄρ᾽ ἔφαν μοῦσαι πάλιν, οὐκοῦν στεπτέος ὅς δὴ
 Τοῖς πάντων κείνων μουσοδότοις στεφάνοις.

Ἕτερα δι᾽ ἰαμβικῶν στίχων εἰς ἑκάστην πραγματείαν

Εἰς τὴν εὐσύνοπτον Ἑρμηνείαν τοῦ Εὐκλείδου.

Εὔκλειαν ἔχει ἄρτι τὴν Εὐκλείδης
 Εὔληπτον αὐτὸν ἐκδεδωκὼς Μπαλλᾶνος.

Εἰς τὰ κατὰ Θεοδόσιον Σφαιρικά.

Κατὰ Μπαλλᾶνον, Θεοδόσιον μὴ λέγε.
 Σφαῖρα Μπαλλᾶνος ἔστι γὰρ Λατινικῶς.

Εἰς τὴν Γεωμετρίαν.

Γεωμετρίῃ γῆς μὲν ἂν μάθῃς μέτρα
 Οὐ μήν γε μέτρον τῶν πόνων τοῦ Μπαλλάνου.

Εἰς τὴν Τριγωνομετρίαν

Πρόσεξιν ἔχε ἐν Τριγωνομετρίῃ,
 Ὅσον γὰρ ὀξὺς ὧδε γνώσῃ Μπαλλᾶνος.

Εἰς τὸ Ἀστρολάβιον

Λαβὼν δὲ πεῖραν ἀστέρων Ἀστρολάβῳ
 Στίλβειν Μπαλλᾶνον ἀστέρων γνώσῃ δίκην.

Εἰς τὴν Γεωγραφίαν

Ὡς δ᾽ αὖ γῆς σφαίρας τε πίνακας γράφει
 Ἀτμῶν πέρι σφαίρας τε ὁ σφαιρώνυμος.

Εἰς τὰ Ὀπτικά.

Καὶ ὀπτικὴν δὲ μανθάνῃς χαίρων μάλα
 Ὁδηγὸν ὄμμα καὶ γὰρ ἔχεις Μπαλλᾶνον.

Εἰς τὴν Ἀριθμητικήν.

Πράξεις ἀριθμῶν καὶ λόγους ἐκμανθάνων,
 Θάμβει ἀριθμεῖ Μπαλλάνου σοφοῦ πόνους

Εἰς ἀΐδιον εὐγνωμοσύνης τεκμήριον

Ὁ τῶν σῶν μαθητῶν ἐλάχιστος μὲν, ἀλλ᾽ εὐγνώμων

Νικόλαος ὁ ἐκ Μετσόβου

Πρὸς τὸν Αἰδεσιμελλογιμώτατον καὶ Ἐπιστημονικώτατον κύριον Μπαλαῦον

ἘΠΙΓΡΑΜΜΑ.

Χαῖρε καθηγητὰ Μπαλαῦε, ὑπερτελὲς ὄντως
 Φιλομαθῶν εὖχος, πᾶσί τε νῦν ὄφελος
Καὶ γὰρ Ἐπιστήμας, ἃς κρύψε χρόνος γε πονήσας
 Σοῖς τ' Ἠπειρώταις, καλλοδαποῖσι φαύες
Ἀφειδῶς δ' αὖ τοῖσιν σῶν γε πόνων μετέδωκας
 Τίσει οὖν σε Θεὸς Γῆς ἔπι ἐν δὲ Πόλῳ.

Ἕτερον πρὸς τὸν αὐτόν.

Σφαῖρα μὲν εἴρηται ψυχὴ τοῖς φιλοσοφοῦσι
 Σφαῖρα δὲ καὶ Γαῖα, σφαῖρα τε καί γε Πόλος
Ἄστρα τε τῇ σφαίρᾳ τῷ σχήματι εἴκελα, Σφαῖρα
 Καί μοι Μπαλαῦος Λατινικῶς λέγεται.
Γῆς γὰρ σχήματος, ἠδ' ἄστρων τε, πόλοιό τε πέρι,
 Καὶ ψυχῆς ἤδη φιλοσόφησε μόνος.

Ἕτερον τετράστιχον πρὸς τὸν αὐτὸν καὶ τὴν αὐτοῦ
θαυμάσιον μαθηματικὴν βίβλον.

Χαῖρ' Εὐκλείδη, ὅς γε μαθηματικῆς κατέχεις κλεῖν,
 Χαῖρε Γεωμετρῶν Ἀστρονόμων τε κλέος
Παισὶ γὰρ Ἑλλήνων ἤγειρε μαθηματικήν γε,
 Μπαλαῦος κάμνων πρίν γε πεσοῦσαν ὅλην

Ἕτερον διὰ στίχων Ἰαμβικῶν

Σεμνοί τε καὶ πάντιμοι Ἑλλήνων γόνοι.
 Ὅσοις μάλιστα τῶν μαθημάτων μέλει
 Ψυχὴν φρένας τε ἐκτρέφειν καὶ καρδίην
Καρποῖς ἀθανάτοις γε Μπαλαύου πόνοις
 Πρὸς αὐτὸν ἤδη συνδραμόντες εὐτόνως
 Λάβητε καὐτοῦ τοῦ ποθουμένου πλέον.

Ἕτερον εἰς τὴν αὐτοῦ πάνσοφον βίβλον.

Τὴν βίβλον ἰδὼν Μπαλαύου Σοφωτάτου
 Ἑρμῆς λόγου ἄριστος ὢν ὑπηρέτης
 Χ' ὁ Τρισμέγιστος καὶ σοφὸς Ἑρμῆς πάλιν
 Θεοῦ ἔφασαν οὐ βροτοῦ αὕτη βίβλος.

Εἰς Ἀΐδιον εὐνοίας καὶ θερμοτάτης εὐλαβείας τεκμήριον,
Καμπίτης παππα-Φιλίππου ὁ φιλόπονος, ὁ ἐκ Ναούσης τῆς ἐν Μακεδονίᾳ ὁ
τῶν σπουδαίων Ἐλάχιστος.

Πρὸς

Πρὸς τὸν αὐτὸν Κὺρ Δημητρίου Παππαντωνιάδου.

ἘΠΙΓΡΑΜΜΑ.

Ἥλιος αὐτολίηθε σελασφόρος ἧκεν ἐπ' αἶαν
 Φωτί τε πάντα φαίνων κρυπτὰ τεῶν βολάων
Ἄλλος Γωαννίηθε δ' ἑωσφόρος ἔκθορεν αὐτὴν
 Δεῖξε τε οἷ σοφίῃ πᾶσι πύλας ἀδύτους
Ἀριθμητικῆς τε, Γεωμετρίης ἰδὲ τ' αὖθις
 Ἀστρονομίης, χ' αἵπερ ποσότητα ὅλως
Ἔσχον, συνεχέ' ἠδὲ θ' ὁριστὴν, πάντεσι δ' αἶψα
 Ὄργι' ἄρρητα σαφῆ θῆκεν ἱμειρομένοις.

Ἕτερον.

Ὀλβιόδαιμον χαῖρε κάρηαρ Μπαλαῦε μοῦσα.
 Κλεινὸν καὶ σεπτὸν, εὖχος Γωαννίνων.

Πρὸς τοὺς φιλομαθεῖς.

Εἴ τῳ ἐν στήθεσφιν Ἐπιστήμης ἔρον ἴδμεν,
 Τάνδ' ἐχέτω χέρεσιν τοῦσι βίβλον ζαθέην
Ἣν Μπαλάνοιο πόνος πολυΐδμονος ἐς φάος ἧξε.
 Οὖν σιγέων κεῖν τις ἤνεσεν ἢ λαλέων,

Ἰαμβικὸν εἰς τὴν μαθηματικὴν

Μοῦσαι καλοῦσι τοὺς ἐραστὰς τῶν λόγων
 Λαμπρᾷ γεν φωνῇ πάντας εἰς εὐωχίαν
 Δραμόντες ὦκα δεῦτε τῶν ἡδυπνόων
 Καρπῶν μεταχοίητε τῶν μαθημάτων.

ἘΠΙ-

ΕʼΠΙʼΓΓΡΑΜΜΑ.

Ἡρωελεγεῖον εἰς τὴν αὐτὴν Κυρ. Κοσμᾶ Υἱοῦ τοῦ Συγγραφέως.

Γῆς ὕπο ἠελίοιο φαεσφόρου καταδύντος,
Αἶσχος τοῖς πᾶσιν σκίδναται αἶψα μέγα,
Αὐτὰρ στίλβει πάντα φανέντος τοῦδε ὑπὲρ γῆν·
Ὡς οὖν καὶ βίβλου, ἥν γε λαβὼν κατέχεις
Ἀγνώστου οὔσης, μέγα μούσαις ἔπλετο ἄχθος,
Νῦν δ' αὖ τέρπονται, ὅττι τύποις ἐδόθη.

Ἕτερον.

Εἴσω λάβῃ ποτ' ἔρως δρέψασθαι ἄνθεα μουσῶν
Νοῦν τε Ἐπιστημῶν κάλλεσιν ὡραΐσαι
Δέχνυσο τάσδε βίβλους τετρακτύϊ σχῆμα φερούσας
Ἥδ' ἀόκνως πάσας, ὥσγε δεδυνῇ μελέτα.

Ἀνωνύμου εἰς τὴν αὐτὴν

ΕʼΠΙʼΓΓΡΑΜΜΑ.

Ῥεῖ κρήνη χρύσεια ῥέεθρα μαθηματικόρρους
Ἧς φιλεπιστήμον ἐς κόρον ἐξαρύει.
Μιχαλλάνος ἣν πολυΐδρεις ἔτευξε μυελόχρυνον.
Ὄμματι Λυγκείῳ, κυδαλίμῳ τε πόνῳ.

ΠΙʼΝΑΞ ΤΩ͂Ν ὉΡΩΝ·
ΚΑΙʼ ΠΡΟΤΑʼΣΕΩΝ ἙΚΑʼΣΤΟΥ ΒΙΒΛΙʼΟΥ

Τῶν περιεχομένων ἐν τῷ παρόντι πρώτῳ τόμῳ,

Οἱ ὅροι τοῦ πρώτου βιβλίου τοῦ Στοιχειωτοῦ.

ιαʹ. Καὶ

ιγʹ. Ὡς

ΠΙΝΑΞ.

Τοῦ Δευτέρου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ΠΙ΄ΝΑΞ.

Τοῦ Τρίτου Εὐκλειδείου Στοιχείου.

γ΄. Κύ-

ΠΡΟΤΑ΄ΣΕΙΣ.

δ΄. Ἐὰν

ιϛʹ. Ἡ

κθʹ.

ΠΙ'ΝΑΞ.

Τοῦ Τετάρτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

ΠΡΟΤΑ'ΣΕΙΣ.

ΠΙΝΑΞ.

Τοῦ Πέμπτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

ΠΡΟΤΑ΄ΣΕΙΣ.

ΠΙΝΑΞ.

Τοῦ Ἕκτου βιβλίου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ΠΙΝΑΞ:

Τοῦ Ἑβδόμου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ζ'. Ἐὰν

Π Ι' Ν Α Ξ.

λγ'.

Π Ι' Ν Α Ξ.

Π Ι' Ν Α Ξ.

Τοῦ Ὀγδόου Εὐκλειδείου Στοιχείου.

Π Ρ Ο Τ Α' Σ Ε Ι Σ.

τε ἐν

Π Ι Ν Α Ξ.

Τοῦ Ἐννάτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

ιδ'.

Π Ι΄ Ν Α Ξ.

Τοῦ Ἑνδεκάτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

Π Ρ Ο Τ Α΄ Σ Ε Ι Σ.

κβ'.

εὐθεῖαι

ΠΙΝΑΞ.

Τοῦ Δωδεκάτου Εὐκλειδείου Στοιχείου.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ΠΙΝΑΞ.

Τοῦ Τρισκαιδεκάτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ΠΙΝΑΞ.

ΠΙΝΑΞ.

Τοῦ Τεσσαρεσκαιδεκάτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ΠΙΝΑΞ.

Τοῦ Πεντεκαιδεκάτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ΠΙΝΑΞ.

Τοῦ Πρώτου τῶν Σφαιρικῶν.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ε Ι Σ.

ΠΙΝΑΞ.

Τοῦ Δευτέρου τῶν Σφαιρικῶν.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ΠΙ'ΝΑΞ.

Τοῦ Τρίτου τῶν τοῦ Θεοδοσίου Σφαιρικῶν.

ΠΡΟΤΑ'ΣΕΙΣ.

ἘΚΘΕΣΙΣ ἈΚΡΙΒΕΣΤΕΡΑ ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥ̓ΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

ΠΡΟΟΙΜΙΟΝ.

ὯΣΠΕΡ τῷ βουλομένῳ εἰσελθεῖν εἰς πολυανθῆ τινα λειμῶνα, καὶ λαβυρινθώδη ταῖς πρασιαῖς, καὶ τὰ ἐν αὐτῷ ποικίλα τῶν ἀνθῶν εἴδη αὐτοψεὶ ἐφιεμένῳ θεάσασθαι, καὶ ἑκάστου τούτων τὸ κάλλος, τὸ μέγεθος, τὴν χροιάν, τὴν ποικιλίαν, τὴν ὀσμήν, καὶ τἄλλα, ὅσα τοῖς ἄνθεσι συμφύεται δὴ καὶ ἐπιφύεται, διαγνῶναι ζητοῦντι, προσήκει πρῶτον εἰδέναι τὴν εἰς τὸν αὐτὸν φέρουσαν λειμῶνα, καὶ τὴν ἐν τῷ περιβόλῳ τούτου θύραν μαθεῖν, καὶ ἀφειδῶς ταύτην κόψασθαι. τῆς δὲ ἀνοιχθείσης, εἰσελθόντι ὁδηγῷ τῷ κηπουρῷ χρήσασθαι, καὶ οὐδὲ μικρὸν ἔνδον ἐνδιατρίψαι. Οὕτω τοι καὶ τῷ ποθοῦντι τῆς μαθηματικῆς ἤδη ἐπιστήμης μέχρι μυχῶν γενέσθαι, καὶ τὰ ἄδυτα ταύτης ὁδεῦσαι, καὶ τὰ ὄργια μυηθῆναι, καὶ συνελόντι φάναι, ὡς εἰκὸς τῶν μαθηματικῶν λόγων ἐγκρατεῖ γενέσθαι, ἀμήχανον αὐτῷ μὴ πρότερον ἐν τῷ ταύτης προπυλαίῳ ἀκριβῶς ἀσκηθέντι, καὶ τῷ εἰδήμονι τῶν μαθηματικῶν ἀρχῶν τε καὶ ἀποδείξεων ποδηγετουμένῳ, καὶ βαθμηδόν πως ἀφ' ἑνὸς πρὸς ἕτερον τῶν ἐκείνης εἰδῶν μεταβαίνοντι καὶ σκοπὸν βάλλειν. Πολυανθὴς μὲν γὰρ ἡ Μαθηματι- Προοίμιον.

καὶ Ἐπιστήμη πέφυκεν οὐχ ἧττον, ἡ πολυειδής, ἅτε δὴ περὶ πολλῶν καὶ παντοδαπῶν θεωρημάτων τε καὶ προβλημάτων, ναὶ μὴν καὶ μηχανῶν ἑρμηνεύουσα, καὶ ἐπιστημονικάς γε καὶ ἐξηκριβωμένας ἀπὸ γνωριμωτέρων τε καὶ πιστοτέρων τὰς ἀποδείξεις ποιοῦσα· διὸ καὶ ἀμαθὴς ἀκοῦσαι, οὐχ ὅλως ταύτῃ ἀνήκειον. Λαβυρινθώδης δὲ τῇ πολυπλέκτῳ σειρᾷ τῶν εἰδῶν, καὶ τῷ τὰ πρότερα τῶν ἐγγύς, προόδους τινάς, ἢ μᾶλλον εἰσόδους εἶναι· καὶ μὴ δύνασθαι τὸν ταύτης ἐραστὴν ἐντελῶς γε τοῦ ποθουμένου τυχεῖν, ἢ ὅλως ἀπροσκόπτως ἐπὶ τὰ πρόσω χωρῆσαι, εἰ μή γε πρότερον ἐν ἄλλοις προπαιδευθῇ.

Ἀμέλει τοι τὸν ἀδόλοις ποσὶν ἀπροσκόπτοις τε, καὶ ἀπλανέσι τὴν μαθηματικὴν ἐπιστήμην περιπολεῦσαι ἐθέλοντα, καὶ ἰθυπόροις πτέρυξι καὶ ἀκμήτοις εἰς τὸν κολοφῶνα ταύτης ἀναδραμεῖν, χρεών, δίκην Θησέως τῇ Ἀριάδνῃ, διὰ τῆς τοῦ νοὸς γενναιότητος τῇ πρώτῃ καὶ περικαλλεῖ ταύτης θυγατρὶ γνωσθῆναι, καὶ δι᾽ αὐτῆς ὡς Δαιδαλέου τινὸς ὑφηγήσεως δυνήσεται εἰσιέναι, οὐ μόνον εἰς τὰ ἐνδότατα τῆς Μαθηματικῆς, καὶ τοῖς πολλοῖς ἤδη ἀθέατα, ἀλλά γε τῷ ὄντι καὶ τὰς κορυφὰς τῶν μαθηματικῶν εἰδῶν ἐφίπτασθαι, οὐ χαλεπὸν αὐτῷ ἔσεται. ὃ δὲ μέγιστον, ὅτι καὶ τοῖς ἤτοι δι᾽ ἀσθένειαν νοός, ἢ ἀποτυχίαν ὁδηγοῦ, ἢ ἄλλην τινὰ αἰτίαν εἰσελθεῖν μὴ δυνηθεῖσι, τῆς ὁδοῦ οἷός τε ἡγήσασθαι.

Τὸ χρήσιμον τῶν τοῦ Εὐκλ. στοιχείων. Προπύλαιον ἤδη τῆς Μαθηματικῆς ἁπάσης ἐπιστήμης ἐστὶ τὸ κυριώτατον καὶ χρειωδέστατον πέφυκεν· ὅπερ Εὐκλείδης, ὁ Δαιδάλου εὐμηχανώτερος, τὰς τοῖς πάλαι στοιχειώδεις εὑρεθείσας προτάσεις, καὶ ἀκριβῶς ἀναπτυχθείσας, ἀνθ᾽ ὕλης συλλέξας, οὐκ ὀλίγας δὲ καὶ ἐξ αὑτοῦ προσθείς, τὰς μαθηματικὰς ἀρχὰς προτάξας, οὕτως ἐξύφανατο, οὕτω κατερρυθμίσατο· ὥστε μιᾶς μόνης ἀφαιρουμένης, ἢ γοῦν παρεωραμένης, ἅπαν τὸ ὕφασμα ἀτελὲς εἶναί τε καὶ γινώσκεσθαι. διὸ καὶ στοιχεῖα Εὐκλείδου παρονομάζονται, οἱονεί τινες ἀρχαὶ καὶ βάσεις τῆς Μαθηματικῆς σχεδὸν ἁπάσης ἐπιστήμης καὶ προπύλαιον. Ταῦτα καὶ θυγάτηρ πρώτη, καὶ περικαλλὴς τῆς αὐτῆς καθέστηκε. Ταῦτα Δαιδάλειον μηχανὴν εἰπὼν οὐκ ἂν ἁμάρτῃς. Εἰ δέ σοι καὶ κλεῖν ἀριστὸν μαθηματικῆς ἁπάσης ταῦτα ὀνομάσαι, πρόσθες καὶ τοῦτο τοῖς λοιποῖς αὐτῶν ὀνόμασι. Κἂν ἕτερόν τι τούτου ἁρμοδιώτερον αὐτῆς εὕρῃς ὄνομα, μὴ φθονήσειας εἰπεῖν. Καὶ γὰρ μὴ μόνον ταῖς περὶ τὰ εὐθύγραμμα τῶν σχημάτων ἀσχολουμέναις πραγματείαις, ἀλλὰ καὶ ταῖς περὶ τοὺς ἀριθμούς, καὶ τὰ στερεὰ τῶν σωμάτων στοιχειώδη καθέστηκε.

Διαίρεσις τῶν αὐτῶν. Τοσοῦτον μὲν τὸ χρειῶδες τῶν τοῦ Εὐκλείδου στοιχείων. Διῄρηται δὲ ταῦτα εἰς πεντεκαίδεκα τὰ πάντα βιβλία. ὧν ἓξ μὲν περὶ τῶν ἐν ἐπιπέδῳ καταγραφομένων σχημάτων διαλαμβάνει. Τούτων δὲ τὸ πέμπτον καὶ μόνον τὰς τῶν μεγεθῶν πρὸς ἄλληλα σχέσεις καὶ λόγους ἀναπτύσσει. Τὰ δὲ λοιπὰ

πὰ

τὰ περὶ τῶν τριπλεύρων, τετραπλεύρων τε, καὶ ἄλλων τινῶν σχημάτων, καὶ ἔτι περὶ κύκλων ἑρμηνεύει. Μετὰ δὲ τὰ ἓξ ταῦτα, τρία τῶν λοιπῶν βιβλία τὰς τῶν ἀριθμῶν σχέσεις ἀποθησαυρίζει. Τὸ δέ γε δέκατον περὶ τῶν σχέσεων τῶν περιεχουσῶν τὰ σχήματα πλευρῶν, καὶ μή, καὶ τῶν ἐκ τόπων χωρίων, καὶ ἄλλων τινῶν πολυπραγμονεῖ. διὸ καὶ περιεργωδέστερον μᾶλλον, καὶ ὑψηλοτέρου νοὸς δεόμενον. Τὰ λοιπὰ δὲ πέντε Στοιχεῖα στερεῶν σωμάτων ἐπιγράφεται, ἅτε δὴ τὰ ἀνήκοντα τοῖς στερεοῖς ἀνιχνεύοντα σώμασιν.

Σύγκειται δὲ ταῦτα ὡς ἐκ μερῶν, ἐξ Ὅρων, Ἀξιωμάτων, Αἰτημάτων τε καὶ Προτάσεων. Τίνα καὶ πόσα τὰ μέρη τῶν αὐτῶν. Καὶ τούτων δὲ τῶν μερῶν τὰ μέν εἰσιν ἀρχαὶ ἀναπόδεικτοι, τὰ δὲ ἀποδείξεως δεόμενα. καὶ ἀναπόδεικτοι μὲν οὖν εἰσιν οἱ Ὅροι, τὰ Αἰτήματα, καὶ Ἀξιώματα. ἀποδείξεως δὲ αἱ Προτάσεις δέονται· Ἀλλ᾽ ἵνα ὁ λόγος καθ᾽ ὁδὸν βαδίζῃ, ἐκ τῶν ἀναποδείκτων πρῶτον τῆς ἑρμηνείας ἀρξώμεθα. Ὅσα γοῦν τῶν τοιούτων τὸ πιστὸν οἴκοθεν ἔχουσιν, ὡς γνώριμα μὴ μόνον τῷ διδάσκοντι, ἀλλ᾽ οὐδὲν ἧττον καὶ τῷ μανθάνοντι, καὶ εἰς ἀρχῆς τάξιν λαμβάνονται, ταῦτα ἐστὶ τὰ Ἀξιώματα, οἷον τό, “τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα. ὅσα δ᾽ οὐκ ἔχει ἐξ αὑτῶν τὸ πιστόν, ὡς μὴ καθ᾽ αὑτὰ γνώριμα τῷ μανθάνοντι, συγχωρεῖται δὲ τῷ λαμβάνοντι, “Ὑποθέσεις τὰ τοιαῦτα καλεῖται. οἷον “Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἣ καλεῖται περιφέρεια· καὶ τὰ ὅμοια. Καὶ οὗτοί εἰσιν οἱ ὅροι. Ἃ δὲ οὔτε γνωστὰ καθ᾽ ἑαυτὰ ὑπάρχουσιν, οὔτε μὴν συγχωρεῖται παρὰ τοῦ μανθάνοντος, λαμβάνεται δ᾽ ὅμως εἰς κατασκευήν τισι προσήκοντα, καλεῖται Αἰτήματα. Καὶ ταῦτα μὲν κατὰ Πρόκλον. Δυνάμεθα δὲ καὶ ἡμεῖς ἐκ τῶν εἰρημένων οὑτωσὶ ταῦτα ὁρίσασθαι, ἀπὸ τοῦ ὅρου ἀρχόμενοι.

Ὅρος μὲν οὖν ἐστὶ γνῶσις ἀναπόδεικτος καθ᾽ ὑπόθεσιν, μὴ καθ᾽ αὑτὴν γνώριμος, εἰς ἀρχὴν λαμβανομένη.

Αἴτημα δέ, γνῶσις ἀναπόδεικτος, οὔτε καθ᾽ αὑτὴν γνώριμος, οὔτε μὴν παρὰ τοῦ μανθάνοντος δεχομένη, λαμβανομένη δὲ εἰς κατασκευήν τινος καὶ ἀρχήν.

Ἀξίωμα δέ, γνῶσις ἀναπόδεικτος, γνώριμος, καὶ καθ᾽ ἑαυτὴν τὸ πιστὸν ἔχουσα, εἰς ἀρχὴν λαμβανομένη. καὶ ταῦτα μὲν ἱκανὰ περὶ τῶν Ἀναποδείκτων.

Τί Πρόβλημα καὶ τί Θεώρημα. Τῶν δὲ Προτάσεων τῶν ἀποδείξεως δεομένων, ὅσαι μὲν ἂν τὰς γενέσεις τῶν σχημάτων, τὰς τομάς, τὰς ἀφαιρέσεις, ἢ προσθέσεις, καὶ ὅλως τὰ τούτων παθήματα περιέχωσι, Προβλήματα λέγονται· ὡς ταῖς ποιητικαῖς ἀναλογοῦσαι ἕξεσιν. οἷόν ἐστι τὸ πρῶτον, καὶ δεύτερον πρόβλημα τοῦ α. βιβλίου. καὶ τὰ παραπλήσια.

Ὅσαι δὲ τὰ ἐν τοῖς σχήμασι συμβαίνοντα ἐπιστημονικῶς ἀποδεικνύουσι,

Θεω-

θεωρήματα καλεῖται, ὡς οἰκειότεραι ταῖς θεωρητικαῖς ἐπιστήμαις. οἷόν ἐστι τὸ τέταρτον, πέμπτον καὶ ἕκτον τοῦ πρώτου βιβλίου, καὶ τὰ ὅμοια. ὥστε οὑτωσὶ ταῦτα ὁρίσασθαι, ἢ ὑπογράψαι δυνάμεθα.

Πρόβλημά ἐστι γνῶσις, δι᾽ ἀποδείξεως τὰ τῶν σχημάτων παθήματα ἐρευνῶσα, καὶ τὸ προσταττόμενον ποιοῦσα.

Θεώρημα δὲ γνῶσις, δι᾽ ἀποδείξεως τὰ ἐν τοῖς σχήμασι συμβαίνοντα ἐπιστημονικῶς ἀποδεικνύουσα, καὶ τοὺς πρὸς ἄλληλα τούτων λόγους ζητοῦσα.

Τοιαύτη μὲν οὖν ἡμῖν ἡ τῶν προτάσεων ἁπλουστέρα τε καὶ συντομωτέρα διαίρεσις.

Τινὲς δὲ τῶν πάλαι θεωρήματα πάντα καλεῖν ἠξίωσαν, ὡς περὶ τῶν ἀϊδίων καὶ ἀΰλων τὰς θεωρίας ποιούμενα. τὰς γὰρ τῶν σχημάτων γενέσεις καὶ τ᾽ ἄλλα, οὐ ποιητικῶς, ἀλλὰ γνωστικῶς καθορῶμεν, καὶ ἐπιστημονικῶς ἀποδεικνύομεν.

Ἕτεροι δὲ τὰ πάντα προβλήματα τῇ αὐτῇ προσηγορίᾳ ἐκάλουν. Τὴν δὲ προβολὴν διττὴν εἶναι ἔλεγον. ὁτὲ μὲν δηλονότι τὸ ζητούμενον πορίσασθαι σπουδάζειν, ὁτὲ δὲ ὡρισμένον λαβόντας ζητεῖν εἰδέναι, εἰ τί ἐστιν, ἢ ποῖόν τί ἐστιν, ἢ πόθεν ἐστίν, ἢ τίνας ἔχει πρὸς ἄλλο τὰς σχέσεις. ἀλλ᾽ εἰ καὶ ἑκατέρας τῆς μερίδος οἱ προϊστάμενοι ὀρθῶς λέγειν δοκοῦσιν, ἡμεῖς μέντοι διὰ τὸ ἀσύγχυτον καὶ σαφέστερον τούτους χαίρειν ἐῶντες, τὴν προτέραν φέρε ἀσπασώμεθα διαίρεσιν.

Τίνα καὶ πόσα τὰ μέρη τοῦ τε προβλήματος, καὶ θεωρήματος.

Τούτων οὖν οὕτω διαιρεθέντων τε καὶ ὁρισθέντων. Ἰστέον ὅτι ἕκαστον τῶν προβλημάτων τε καὶ θεωρημάτων πάντα ταυτὶ ἐν ἑαυτῷ χρεὼν ἔχειν, Πρότασιν, Ἔκθεσιν, Διορισμόν, Κατασκευήν, Ἀπόδειξιν, καὶ Συμπέρασμα. ὧν ἡ μὲν πρότασις τί τὸ ζητούμενον τοῦ διδομένου λέγει, ἢ τί τὸ ἐκ τῆς τοιᾶσδε, ἢ τοιᾶσδε ὑποθέσεως συμπερανθησόμενον.

Ἡ Ἔκθεσις δὲ αὐτὸ καθ᾽ αὑτὸ τὸ διδόμενον, καὶ ὑποτιθέμενον τῇ ζητήσει προευτρεπίζει, καὶ τί τὸ συμπερανθησόμενον προαγγέλλει.

Ὁ δὲ Διορισμὸς τὸ ζητούμενον, ἢ συμπερανθησόμενον χωρὶς ὁρίζει, καὶ οἱονεὶ ἐπιτάττει γενέσθαι.

Ἡ δὲ Κατασκευὴ τὰ εἰς ἀπόδειξιν τοῦ δεδομένου συμβάλλοντα προστάττει ποιεῖν, καὶ οἷά τις προπαρασκευὴ ἀποδείξεώς ἐστι.

Ἡ Ἀπόδειξις δὲ ἐπιστημονικῶς, καὶ ἐξηκριβωμένως ἀπὸ τῶν ὁμολογηθέντων καὶ γνωρίμων συνάγει τὸ ζητούμενον, ἢ τὸ προκείμενον.

Τὸ δὲ Συμπέρασμα ὡς ἔσχατον, ἤτοι ἐπὶ τὴν πρότασιν ἐπαναστρέφον, ἢ τὸ διορισθὲν ἀναμιμνῆσκον, βεβαιοῖ τὸ συναχθέν.

Καὶ ταῦτα μὲν ἁπλῶς ἑκάστης προτάσεως μέρη. Ἀναγκαιότερα δέ, Πρότασις, Ἀπόδειξις, καὶ Συμπέρασμα. Διὸ συντομίας χάριν τῇ μὲν ἡ Ἔκθεσις τῷ διορισμῷ ἑνοῦται, τῇ δὲ ἡ Κατασκευή, ὡς μὴ συμβάλλουσα παρορᾶ-

ρορᾶ-

ρορᾶται. διὰ δὲ τὸ εὐληπτότερον, φέρε δὴ καὶ ἐπὶ παραδείγματος τὰ ῥηθέντα ἀναπτύξωμεν.

Τίς ἡ Πρότασις.

Τοῦ μὲν οὖν α. προβλήματος τοῦ ἐν τῷ α. τοῦ Εὐκλειδ. Βιβλίῳ Πρότασις λέγεται, ἡ πρώτη ἐν αὐτῷ περίοδος, οὑτωσὶ λέγουσα, ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Ἔκθεσις δέ, τὸ λέγον, ἔστω ἡ δοθεῖσα πεπερασμένη εὐθεῖα, ἡ αβ. Διορισμὸς δέ, τό, δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς αβ, εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι. τὸ δὲ ἀπὸ τοῦ, κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ β. μέχρι τοῦ, ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ γα, γβ, Κατασκευὴ λέγεται. τὸ δὲ ἀπὸ τούτου, μέχρι τοῦ, αἱ τρεῖς ἄρα γα, αβ, βγ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἀπόδειξις. καὶ τὸ λοιπόν, Συμπέρασμα. Ἐπεὶ δὲ τούτων ἐμνήσθημεν, οὐκ ἀπο σκοποῦ πάντως γε καὶ περί τινων ἄλλων τούτοις συνηρτημένων βραχέα διελθεῖν. καὶ πρῶτον μέν, τί Λῆμμα, τί Πτῶσις, τί Πόρισμα, τί Ἔνστασις, τί Ἐπαγωγή, εἴπωμεν. τέλος δὲ καὶ τί ἡ Ἐπαγωγή, τῆς εἰς ἀδύνατον Ἐπαγωγῆς διενήνοχε, καὶ οὕτω πέρας τῷ λόγῳ δώσομεν.

Τί λῆμμα.

Λῆμμα μὲν οὖν ἐστι πρότασις προαποδεδειγμένη, ἢ μή, ἀποδείξεως δὲ καὶ λόγου δεομένη, εἰς κατασκευήν, ἢ ἀπόδειξιν ἄλλης τινὸς προτάσεως λαμβανομένη. διενήνοχε δὲ τοῦ Ἀξιώματος, ὅτι ἐκεῖνο μὲν ἀναπόδεικτον, Αὕτη δέ, ἀποδείξεως καὶ λόγου δεομένη.

Τί Πτῶσις.

Πτῶσις δέ ἐστι διάφορος κατασκευῆς τρόπος, καὶ ἐξαλλαγὴ θέσεως, ἢ τῶν σημείων, ἢ τῶν γραμμῶν, ἢ τῶν ἐπιπέδων, ἢ τῶν στερεῶν, διὸ καὶ πτῶσις καλεῖται, οἷα μετάθεσις τῆς κατασκευῆς.

Τί Πόρισμα.

Πόρισμα δέ ἐστι θεώρημα ἐκ προβλήματός τινος, ἢ θεωρήματος ἀναφαινόμενον, ἢ καὶ συναγόμενον, καλεῖται δὲ πόρισμα, ὥς τι κέρδος ὂν τῆς ἐπιστημονικῆς ἀποδείξεως πάρεργον.

Τί Ἔνστασις.

Ἔνστασις δὲ διακοπή ἐστι τοῦ λόγου, καὶ ἐπὶ τοὐναντίον μετάβασις, ἢ πρὸς τὴν κατασκευήν, ἢ πρὸς τὴν ἀπόδειξιν ἀπαντῶσα. δεῖ δὲ τὸν προθέμενον, ἀνελεῖν μὲν τὴν ἔνστασιν, δεῖξαι δὲ τὸν χρώμενον αὐτῇ ψευδόμενον.

Τί Ἐπαγωγή.

Ἐπαγωγὴ δέ ἐστι μετάβασις ἀπ᾽ ἄλλου προβλήματος, ἢ θεωρήματος ἐπ᾽ ἄλλο ὁμοίως πρόβλημα, ἢ θεώρημα. οὗ γνωσθέντος, ἢ πορισθέντος, καὶ τὸ προκείμενόν ἐστι καταφανές.

Τί ἡ εἰς ἀδύνατον ἐπαγωγή.

Ἡ δὲ εἰς ἀδύνατον Ἐπαγωγὴ λῆψίς ἐστι τοῦ μαχομένου τῷ ζητουμένῳ. καταντῶσα δὲ εἰς ἄτοπον ὁμολογούμενον, διαβεβαιοῖ τὸ ζητούμενον.

Ταῦτα μὲν οὖν ἐπὶ τοῦ παρόντος συντόμως ἤδη ἀποσεσημείωται τῶν βουλομένων χάριν τῆς μαθηματικῆς ἠδύτητος γεύσασθαι. ὅπως ὁδῷ καὶ τάξει χρησάμενοι, ἐπὶ τὰ πρόσω ἀπροσκόπτως χωρήσωσι, καὶ τοῦ ποθουμένου εὐστόχως τύχωσι. Διῄρηται δὲ τὰ τοῦ Εὐκλείδου Στοιχεῖα, καὶ αἱ

Προ-

Προτάσεις. καὶ τὸν προσήκοντα ὁρισμὸν αἱ ἀρχαί, αἱ προτάσεις, καὶ τὰ ἑπόμενα ταύταις ἐδέξαντο. ἵνα μή τις ἀκούων τὰς διαφόρους τῶν μερῶν τῶν προτάσεων προσηγορίας, ἢ τῶν ταύταις ἀπηρτημένων ξενίζηται. ἢ περὶ τούτων ἐρωτώμενος ἐρυθριᾷ, μὴ εἰδὼς ἀκριβῶς τί τοῖς ἐρωτῶσι δέον ἀποκριθῆναι. ὥρα δὲ τῆς τῶν ὅρων ἑρμηνείας κατὰ Πρόκλον ἄρξασθαι.

ΣΥΝ-

ΣΥΝΤΟΜΩΤΕΡΑ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΟΡΩΝ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ.

Ὅρος Πρῶτος. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

ΤΟ μὲν Σημεῖον παρὰ τοῖς Γεωμέτραις ποσότητος ὅλως ἀνεπίδεκτον ὑποτίθεται καὶ ἀμέτοχον· διὸ καὶ ἀμερὲς παρ' Εὐκλείδῃ ὑπογραφόμενον εἶναι λέγεται, καὶ τὴν πρώτην τῶν ὅρων ἔλαχε τάξιν. τίνος δὲ χάριν τοιοῦτον λαμβάνεται; ἢ ὅτι ἐστὶν ἀρχὴ πρωτίστη. τὴν δὲ τοιαύτην ἀρχὴν ἁπλουστάτην δεῖ εἶναι, καὶ παντὸς πάθους ἐκτός· ὡς πάντων μὲν εἰς αὐτὴν διαλυομένων, ἐξ ἧς καὶ συνίστανται· αὐτὴ δὲ εἰς οὐδὲν ἕτερον. Ἐπεὶ οὖν ἡ Μαθηματικὴ ἐπιστήμη, μᾶλλον δὲ ἡ Γεωμετρία ἐπιστητὸν ἔχει ὑποκείμενον τὸ συνεχὲς ποσόν, τοῦτο δὲ δεκτικόν ἐστι πάντων τῶν ὑπ' αὐτῆς θεωρουμένων παθῶν, αὐξήσεώς φημι, τομῆς τῆς ἐπ' ἄπειρον, μεταμορφώσεώς τε τῆς εἰς ἄλληλα τῶν σχημάτων, καὶ τῶν λοιπῶν. δεῖ ἄρα πάντως καὶ τὴν ἀρχὴν ταύτης ἀνεπίδεκτον εἶναι τῶν τοιούτων παθῶν, τούτου ἕνεκα καὶ ἀμερὴς ὑποτίθεται. Ἔτι ἐφ' ἑκάστης ἐπιστήμης τὰ μὲν πάθη πάντα καὶ ἰδιώματα, περὶ ἃ καταγίνεται, ἐκ τῆς ἰδίας ἀρχῆς τὴν γένεσιν ἔχει· ἡ δὲ ταύτης ἀρχὴ οὐδέν ἐστι τῶν παθῶν. Εἰ οὖν καὶ τῆς Γεωμετρίας τὰ πάθη καὶ ἰδιώματα ἄνευ ποσότητος οὐχ ὑφίστανται, καὶ πρώτη τούτων ἀρχὴ τὸ Σημεῖον· τὸ Σημεῖον ἄρα ἀμερὲς δεῖ εἶναι ὅλως καὶ ἄποσον. εἰ γὰρ καὶ τὸ Σημεῖον ἐν ποσότητι τὴν ὕπαρξιν εἶχε, πάθος, οὐ μὴν δὲ ἀρχὴ τῆς Γεωμετρίας ἂν εἴη, αὐτὸ δέ, τούτων οὐδέν ἐστιν, ὡς ἤδη εἴρηται, καὶ πᾶσιν ὁμολογεῖται. ὅθεν καὶ Εὐκλείδης ἀποφατικῶς αὐτὸ ὑπέγραψεν, αὐτὸ τοῦτο δηλῶσαι βουλόμενος, τὸ πάντων μέν, περὶ ἃ ἡ Γεωμετρία καταγίνεται, ἀρχὴν εἶναι, μηδενὸς δὲ τούτων μετέχειν. ὁ δ' Ἀριστοτέλης ἐν τῷ γ'. τοῦ περὶ ψυχῆς ἀδιαίρετον δι' ἔλλειψιν

ὀνο-

ὀνομάζει. Ἀνάλογον δὲ τὸ παρὰ τοῖς Γεωμέτραις Σημεῖον τῇ μονάδι, τῇ παρὰ τοῖς Ἀριθμητικοῖς, ὡς ἀρχῇ λαμβανομένῃ. ὥσπερ οὖν ἐκ τῆς μονάδος πάντες οἱ ἀριθμοὶ παράγονται, αὐτὴ δὲ οὐδείς ἐστιν ἀριθμός· οὕτω κἀκ τοῦ Σημείου ἡ γραμμή, καὶ διὰ τῶν γραμμῶν τὰ παντοῖα εἴδη τῶν σχημάτων ἀποτελεῖται. αὐτὸ δὲ καθ' αὑτὸ οὔτε σχῆμά ἐστιν, οὔτε μῆκος μόνον, ἀλλ' ὅρος καὶ ἀρχή. παραστατικὸν δὲ τούτου, ἢ κρεῖττον εἰπεῖν εἰκών, τὸ ἐνταῦθα αἰσθητὸν Σημεῖον α.

Δεύτ. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.

Ἡ δὲ Γραμμὴ τὰ δευτερεῖα τοῦ σημείου ἔχουσα παρὰ τοῖς Μαθηματικοῖς, ὡς ἀρχὴ καὶ αὕτη λαμβάνεται. Τριῶν δὲ ὄντων τῶν τῆς διαστάσεως εἰδῶν, μήκους δηλαδή, πλάτους, καὶ βάθους, τοῦ μήκους μόνον δεκτική ἐστιν, ἀνεπίδεκτος δ' ὅλως πλάτους, καὶ πολλῷ μᾶλλον βάθους. διὸ καί τινες οὑτωσὶ ταύτην ὡρίσαντο· Γραμμή ἐστι μέγεθος ἐφ' ἓν διαστατόν. Εὐκλείδης δὲ μῆκος ἀπλατὲς ὑπέγραψε, προσεπινοῶν καὶ τὸ ἀβαθές· ἀνάλογος δ' ἐστὶ τῇ δυάδι. ὅθεν δή, ὥσπερ ἡ δυὰς παρὰ τῆς μονάδος τὴν γένεσιν ἔχει, οὕτω καὶ Γραμμὴ παρὰ τοῦ σημείου. Σημείου γὰρ ῥυέντος, καὶ ἴχνος ἐγκαταλιμπάνοντος, * κατὰ τὸν εἰπόντα, Γραμμὴ ἀποτελεῖται. Λαμβάνεται δὲ τοιαύτη, ὅτι παρ' αὐτῆς μὲν πάντα συνίσταται τὰ σχήματα· αὐτὴ δὲ πάντων τούτων καθαρεύουσά ἐστι. καὶ ἀρχῆς μὲν λόγον ἔχει πρὸς πάντα τὰ σχῆμα, οὐδὲν δὲ αὕτη σχῆμά ἐστιν. ὥσπερ καὶ ἡ δυάς, ἀρχὴ μὲν πάντων τῶν ἀριθμῶν ὑπάρχει, αὐτὴ δὲ καθ' αὑτὴν οὐδείς ἐστιν ἀριθμός. εἰκονίζει δὲ ταύτην ἡ β γ, αἰσθητὴ Γραμμή.

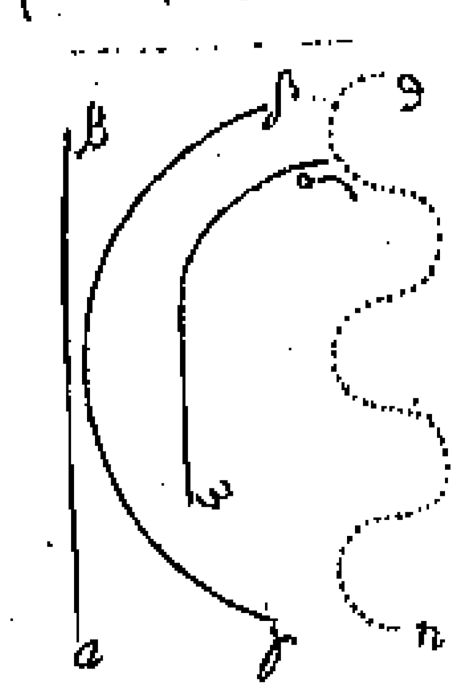
β ———————— γ

Τρίτ. Γραμμῆς δὲ πέρατα Σημεῖα.

Ἐπεὶ δὲ ἡ Γραμμὴ μῆκός ἐστιν ἀπλατές, δῆλον, ὅτι καθ' ἑαυτὴν μὲν ἄπειρός ἐστιν καὶ ἀόριστος, περατοῦται δὲ καὶ ὁρίζεται παρὰ τοῦ σημείου. διὸ καὶ Εὐκλείδης πέρατα Γραμμῆς τὰ σημεῖα λέγει, καὶ τοῦτο εἰκότως. τῶν γὰρ συνθέτων τὰ ἁπλᾶ εἰσιν ὅροι, καὶ τῶν μεριστῶν τὰ ἀμερῆ. Ἐπεὶ τοίνυν σύνθετόν τί ἐστι καὶ ἡ Γραμμή, ὡς μήκους μετέχουσα, καὶ ἐπ' ἄπειρον διαιρεῖσθαι δυναμένη· τὸ δὲ σημεῖον ἁπλοῦν τε καὶ ἀμερές, πάντως γε τὸ σημεῖον πέρας ἐστὶ τῆς γραμμῆς καὶ ὅρος, ὥσπερ καὶ τῆς δυάδος ἡ μονάς. Ἔτι τῶν γεννητῶν, ἐξ οὗ τὴν γένεσιν ταῦτα ἔχει, ἐκεῖνο καὶ ἀρχὴ καὶ πέρας ἐστίν· ἀλλ' ἡ Γραμμὴ ἐκ τοῦ σημείου γεννᾶται, ὡς ἤδη εἴρηται. ἄρα τὸ σημεῖόν ἐστιν ἀρχὴ καὶ πέρας τῆς Γραμμῆς.

Τέτ. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

Lib. 1. Fig. 1.

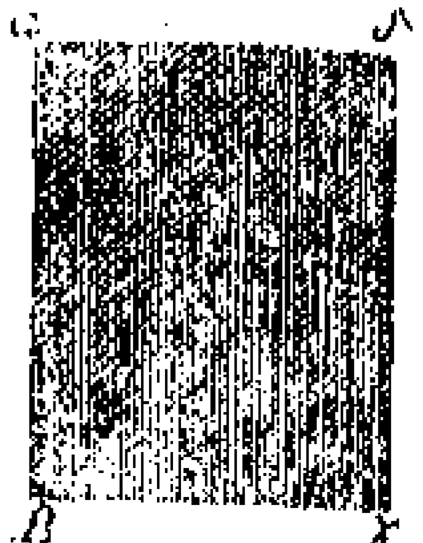


Δοκεῖ μὲν διὰ τούτου Εὐκλείδης πολλὰ εἶναι τὰ εἴδη τῆς Γραμμῆς ὑπαινίττεσθαι. ἵνα δὲ τοῦτο σαφέστερον γένηται, φέρε δὴ πρότερον περὶ τῆς διαιρέσεως τῆς Γραμμῆς εἴπωμεν. διαιρεῖται μὲν οὖν πρῶτον ἡ γραμμὴ εἰς εὐθεῖαν καὶ περιφερῆ, ἥτις καὶ καμπύλη καὶ κυρτὴ λέγεται. διαιρεῖται δὲ δεύτερον εἰς ἁπλῆν καὶ μικτήν. καὶ ἁπλῆ μὲν λέγεται ἢ ἡ εὐθεῖα μόνη, οἷα ἡ α β, ἢ ἡ κυρτὴ μόνη, οἷα ἡ γ δ. μικτὴ δέ, ἡ ἔκ τε εὐθείας καὶ κυρτῆς συγκειμένη, οἷαί εἰσιν αἱ ε ζ, η θ, καὶ ἄλλαι. τούτων μὲν δὴ τῶν διαιρέσεων μέμνηται ὁ Πρόκλος τῷ τε Πλάτωνι καὶ Ἀριστοτέλει ἑπόμενος. Ἕτεροι δὲ τριχῶς τὴν γραμμὴν διαιροῦσιν εἰς εὐθεῖαν, κυρτήν, καὶ ἑλικοειδῆ, ἀλλ' αὕτη ἡ διαίρεσις οὐκ ἔστιν ὑγιής, οὐδὲ τοῖς πᾶσιν ἀρέσκει. ἡ γὰρ ἑλικοειδὴς μικτή ἐστιν, διὰ τὸ ἐκ δύο γεννᾶσθαι κινήσεων· καὶ γὰρ τῆς εὐθείας κύκλῳ κινουμένης περὶ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου παραλλήλως τούτῳ κειμένης, καὶ τοῦ σημείου ἐπὶ τῆς εὐθείας φερομένου, ἡ κυλινδρικὴ ἕλιξ ἀποτελεῖται. καὶ ταῦτα μὲν περὶ τῆς διαιρέσεως τῆς γραμμῆς. ἐπεὶ δὲ οὐ περὶ πάντων εἰπεῖν τῶν ταύτης εἰδῶν τοῦ παρόντος ἐστὶ σκοποῦ, φέρε δὴ περὶ μόνης τῆς εὐθείας βραχέα διέλθωμεν.

Εὐθεῖα τοίνυν κατὰ τὸν Εὐκλείδην ἐστίν, ἡ ἴσον κατέχουσα διάστημα, τὸ μεταξὺ τῶν ὁριζομένων αὐτὴν σημείων, τουτέστιν, ὅτε τις γραμμὴ τοσοῦτον μέγεθος ἔχει, ὅσον ἐστὶ τὸ διάστημα τῶν ἄκρων αὐτῆς σημείων, εὐθεῖα λέγεται. καὶ τοῦτό ἐστι τὸ ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖσθαι. ὥστε τὴν κυρτὴν οὐ δυνάμεθα εὐθεῖαν λέγειν. δύναται γὰρ μείζων εἶναι, ἢ ὅσον τὰ ὁρίζοντα αὐτὴν σημεῖα ἀλλήλων ἀφίστανται. ἡ γὰρ γ δ, μείζων ἐστίν, ἢ ὅσον τὸ γ, τοῦ δ, ἀφίσταται. καὶ τοιοῦτος μὲν ὁ παρὰ τοῦ Εὐκλείδου τῆς εὐθείας Ὁρισμός. Οἱ δὲ πάλαι ποικίλους πως ταύτῃ ὁρισμοὺς ἀποδεδώκασιν, οἵτινες οἱ αὐτοὶ τῷ παρὰ τοῦ Εὐκλείδου εἰσίν. ὁ γὰρ Ἀρχιμήδης οὑτωσὶ τὴν εὐθεῖαν ὡρίσατο. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν ἡ ἐλαχίστη τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν. ὁπηνίκα γὰρ δύο γραμμαὶ ὑποτεθῶσιν, ἡ μὲν εὐθεῖα, ἡ δὲ κυρτή, ὥστε τὰ αὐτῶν πέρατα ἴσον ἀλλήλων ἀφίστασθαι, ὡς ἡ α β, καὶ γ δ, ἡ εὐθεῖά ἐστιν ἐλάττων, ἡ ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς κειμένη σημείοις. Ἄλλοι δὲ εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, λέγουσιν, ἡ ἐπ' ἄκρον τεταμένη. καὶ ἄλλοι εὐθεῖά ἐστιν, ἧς μέρος μὲν οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δὲ ἐν τῷ μετεώρῳ, καὶ ἧς τὰ μέρη πάντα πᾶσιν ὁμοίως ἐφαρμόζει. καὶ ἄλλοι ἄλλως, οὓς διὰ τὸ σύντομον παρατρέχομεν.

Πέμπ. Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

Lib. 1. Fig. 2.



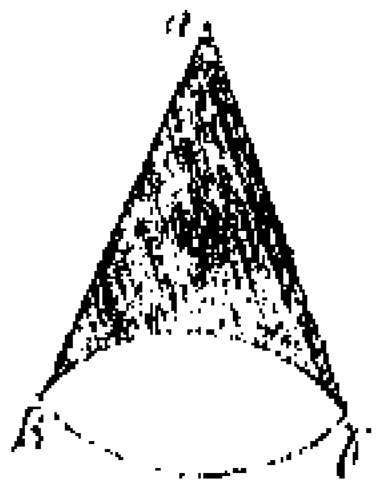
Καὶ ἡ Ἐπιφάνεια δὲ ἐστὶ ὥσπερ ἀρχή, οὐ πάσας τὰς διαστάσεις ἔχει, ἀλλὰ δύο μόνας, τὸ μῆκος δηλ. καὶ πλάτος. ἔχει δὲ τὴν αὐτῆς γένεσιν ἐκ τῆς γραμμῆς, ὥσπερ γραμμὴ ἐκ τοῦ σημείου. γραμμῆς τοίνυν ῥυείσης, Ἐπιφάνεια ἀποτελεῖται. Ἀναλογεῖ δὲ, κατὰ τοὺς Πυθαγορείους, τὸν Τριαδικὸν ἀριθμόν. ὥσπερ γὰρ ὁ Τριαδικὸς ἀριθμὸς πρῶτός ἐστι τῶν ἄλλων ἀριθμῶν, οὕτω κἀν ταῖς Ἐπιφανείαις πρῶτον παρίσταται τὰ διάφορα σχήματα. δυνάμεθα δὲ αἴσθησίν τινα τῆς Ἐπιφανείας ἔχειν εἰς τὰς σκιὰς ἀποβλέποντες, αἳ βάθος οὐκ ἔχουσιν, ἀλλὰ μῆκος μόνον μετὰ πλάτους. Τινὲς δὲ ταύτην ὡρίσαντο μέγεθος διχῇ διαστατόν, ἕτεροι δὲ καὶ πέρας σώματος, καὶ ἄλλοι ἄλλως, ἀλλ᾽ ἅπαντες διαφόροις λέξεσι τὸ αὐτὸ παριστάνειν σπουδάζουσι. παραστατικόν πως ταύτης ἐστὶ τὸ α β γ δ, σχῆμα.

Ἑκτ. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα Γραμμαί.

Ὥσπερ ἐπὶ τῆς γραμμῆς φθάσαντες ἔφημεν, ὅτι τὰ ἁπλᾶ τῶν μικτῶν, καὶ τὰ ἀμερῆ τῶν μεριστῶν ἀρχαὶ καὶ ὅροι, καθέστηκε· τοῦτ᾽ αὐτὸ καὶ ἐπὶ τῆς Ἐπιφανείας εἰπεῖν δέον. ἐπεὶ γὰρ ἡ γραμμὴ ἁπλουστέρα ταύτης ἐστίν, γραμμὴ γὰρ μέγεθος ἐφ᾽ ἓν διαστατόν, Ἐπιφάνεια δὲ μέγεθος διχῇ διαστατόν· διὰ τοῦτο αἱ γραμμαὶ τῆς Ἐπιφανείας πέρατα λέγονται· μᾶλλον δὲ αἱ γραμμαὶ πέρατα Ἐπιφανείας εἰσί, διὰ τὸ, τὴν Ἐπιφάνειαν ἐκ τῶν γραμμῶν τὴν γένεσιν ἔχειν.

Ἑβδ. Ἐπίπεδος Ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

Lib. 1. Fig. 3.



Καθάπερ ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἡ πρώτη καὶ ὑγιὴς γέγονε διαίρεσις εἰς εὐθεῖαν καὶ περιφερῆ· οὕτω καὶ ἐπὶ τῆς Ἐπιφανείας, εἰς ἐπίπεδον καὶ σφαιρικὴν τὴν ὑγιῆ διαίρεσιν ποιητέον. Αὖθις ὥσπερ ἐκείνην ἐπιδιαιροῦντες, τὴν μὲν ἁπλῆν, τὴν δὲ μικτὴν ἔφημεν· οὕτω καὶ τὴν Ἐπιφάνειαν εἰς τὰ αὐτὰ ἐπιδιαιρετέον· καὶ ἁπλῆ μέν ἐστιν, ἢ ἡ μόνη ἐπίπεδος, ἢ ἡ μόνη σφαιρική· μικτὴ δὲ, ἡ ἔκ τε ἐπιπέδου καὶ σφαιρικῆς συνισταμένη· ὥσπερ ἡ τοῦ α β γ, κώνου, ἧς ἡ μὲν βάσις ἐπίπεδος, τὸ δὲ ἐπὶ τῆς βάσεως, κυρτόν. Τῆς Ἐπιφανείας τοίνυν οὕτω διαιρεθείσης, καὶ ἐπιδιαιρεθείσης, τὴν ἐπίπεδον, ὡς καὶ τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν ὁριστέον. Ἐπίπεδος τοίνυν Ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἴσον διάστημα κατέχει, τὸ μετα-

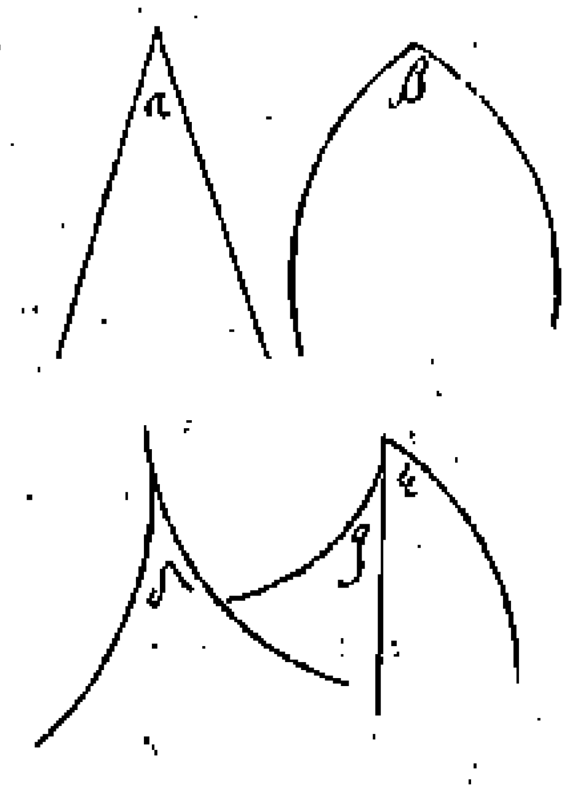
ξὺ

ξὺ τῶν περιεχουσῶν αὐτὴν γραμμῶν. ἤγουν ἡ Ἐπιφάνεια καὶ μῆκος τοσοῦτον διάστημα, καὶ πλάτος ἔχει· ὅσον ἀφίστανται ἀλλήλων αἱ περιέχουσαι αὐτὴν γραμμαὶ κατά τε μῆκος, καὶ πλάτος, ἐπίπεδος λέγεται· καὶ τοῦτό ἐστι τὸ ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς κεῖσθαι γραμμαῖς. ἢ οὕτως ἐπίπεδος Ἐπιφάνειά ἐστιν, ἡ ἐπ᾽ ἄκρως τεταμένη, ἢ ἧς τὰ μέρη πάντα πᾶσιν ἐφαρμόζει, καὶ τὰ ὅμοια.

Η΄. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν, ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ᾽ εὐθείας κειμένων, πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

Τῶν γωνιῶν αἱ μὲν ἐπίπεδοί εἰσιν, αἱ δὲ στερεαί· καὶ ἐπίπεδοι μὲν, αἱ ἐν ἐπιφανείαις συνιστάμεναι, καὶ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμεναι· στερεαὶ δὲ, αἱ ἐν τοῖς στερεοῖς σώμασι, καὶ ὑπὸ ἐπιφανειῶν περιεχόμεναι. αὖθις τῶν γωνιῶν τῶν τε ἐπιπέδων καὶ στερεῶν, αἱ μέν εἰσιν ἁπλαῖ, αἱ δὲ μικταί· καὶ ἁπλαῖ μὲν, αἱ ὑπὸ ὁμοειδῶν γραμμῶν περιεχόμεναι· αἱ μὲν γὰρ ἁπλαῖ ἐπίπεδοι γωνίαι, ἢ ὑπὸ δύο γραμμῶν εὐθειῶν, ὡς ἡ α, ἢ ὑπὸ δύο κυρτῶν, περιέχονται, ὡς ἡ β. αἱ δὲ ἁπλαῖ στερεαί, ἢ ὑπὸ τριῶν γραμμῶν εὐθειῶν περιέχονται, ἢ ὑπὸ τριῶν κυρτῶν. μικταὶ δὲ, αἱ ὑπὸ ἀνομοειδῶν γραμμῶν, τῆς μὲν εὐθείας, τῆς δὲ κυρτῆς, περιεχόμεναι. τῶν δὲ ἐπιπέδων ἁπλῶν γωνιῶν, ὅσαι ὑπὸ εὐθειῶν γραμμῶν περιέχονται, μονοειδεῖς τέ εἰσι, καὶ εὐθύγραμμοι καλοῦνται. τῶν δὲ ὑπὸ κυρτῶν καὶ περιφερῶν, δύο τὰ εἴδη· αἱ μὲν γὰρ καλοῦνται ἀμφίκυρτοι, αἱ δὲ ἀμφίκοιλοι· ἀμφίκυρτοι μὲν, ὅτε αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν περιφερεῖς γραμμαί, ἐκτὸς τὸ κυρτὸν ἔχουσιν, ὡς ἡ β. ἀμφίκοιλοι δὲ, ὅτε τὸ κοῖλον ἐκτὸς ἔχουσιν, ὡς ἡ δ. ὡσαύτως δὲ καὶ τῶν μικτῶν δύο τὰ εἴδη, ἢ γὰρ σύγκειται ἡ γωνία ἐξ εὐθείας γραμμῆς καὶ περιφεροῦς, ἐκτὸς τὸ κυρτὸν ἐχούσης, ὡς ἡ ε, ὥστε δύνασθαι καλεῖσθαι εὐθύκυρτος· ἢ ἐξ εὐθείας καὶ περιφεροῦς, ἐκτὸς τὸ κοῖλον ἐχούσης, ὡς ἡ ζ, καὶ καλεῖται εὐθύκοιλος. Τοσούτων δ᾽ ὄντων τῶν τῆς γωνίας εἰδῶν, περὶ τίνος ὁ Εὐκλ. τὸν λόγον ποιεῖται, ἐν τῷ ἑξῆς ἀφορισθήσεται ὅρῳ. Ἔφη δὲ τὰς εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων, μὴ ἐπ᾽ εὐθείας κεῖσθαι, ὅτι αἱ ἁπτόμεναι ἀλλήλων καὶ ἐπ᾽ εὐθείας κείμεναι, οὐχὶ μόνον γωνίαν οὐ ποιοῦσιν, ἀλλὰ καὶ εἰς εὐθεῖαν μίαν καταντῶσι. κλίσιν δ᾽ εἰπὼν τὸ γένος ταύτης ἐδήλωσε.

Lib. 1. Fig. 4.



Θ'. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

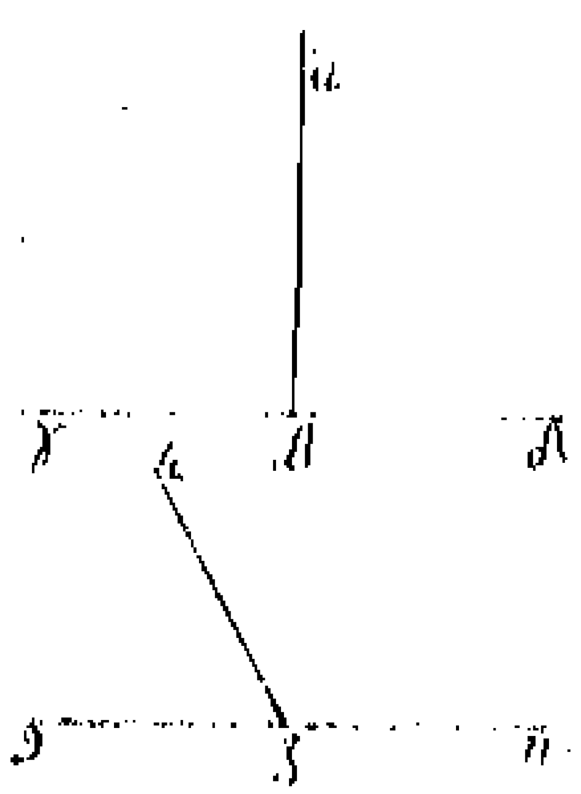
Ἐκ τοῦ παρόντος τοίνυν δῆλον, ὅτι καὶ Εὐκλ. εὐθύγραμμον γωνίαν λέγει, τὴν ὑπὸ δύο εὐθειῶν περιεχομένην, περὶ ἧς καὶ τὸν λόγον ποιεῖται.

Ι'. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

ΙΑ'. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν, ἡ μείζων ὀρθῆς.

ΙΒ'. Ὀξεῖα δὲ, ἡ ἐλάττων ὀρθῆς.

Lib. 1. Fig. 5.



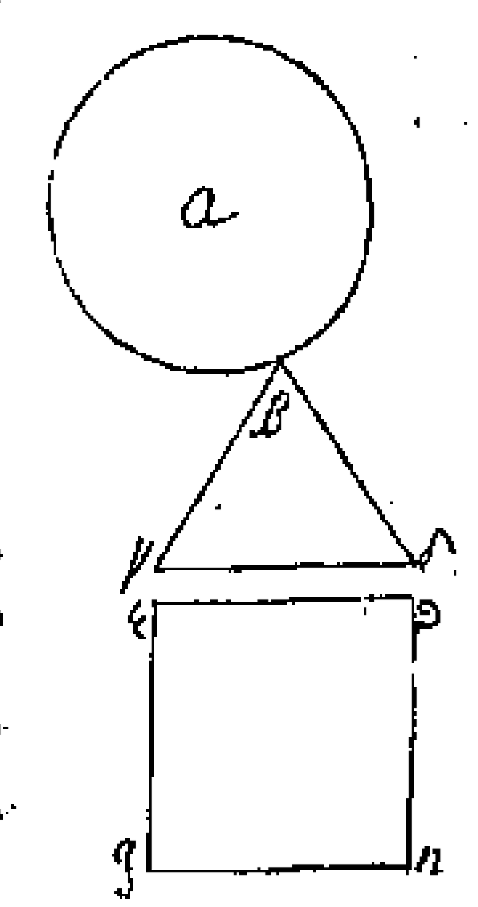
Τρία τῆς εὐθυγράμμου γωνίας τὰ εἴδη, ἡ μὲν γὰρ ὀρθὴ λέγεται, ἡ δὲ ἀμβλεῖα, ἡ δὲ ὀξεῖα. καὶ τῆς μὲν ὀρθῆς γνῶσιν ἔχομεν, ὁπηνίκα τις εὐθεῖα, ὡς ἡ α β, ἐπ' εὐθείας τινὸς, δὸς εἰπεῖν, τῆς γ δ, σταθεῖσα, τὰς ἐφεξῆς γωνίας, τήν τε ὑπὸ α β γ, καὶ α β δ, ἴσας ποιῇ· ἑκατέρα γὰρ τούτων ὀρθή ἐστιν, ὡς τὸ ἴσον τηροῦσα. ἡ δὲ α β, κάθετος λέγεται ἐπὶ τῆς γ δ. ἀμβλεῖα δὲ, ἡ μείζων ὀρθῆς, οἷα ἡ ὑπὸ ε ζ η. ὀξεῖα δὲ, ἡ ἐλάττων ὀρθῆς, ὡς ἡ ὑπὸ ε ζ θ. ταύτην ἤδη τὴν διαίρεσιν πάντες οἱ γεωμέτραι ἀποδέχονται· πολλοὶ δὲ τὸν λόγον τοῖς ἐρωτῶσιν οὐκ ἔχουσιν ἀποδιδόναι. οἱ δέ γε μέντοι τοιόνδε τινὰ λόγον τῆς διαιρέσεως ταύτης ἀποδιδοῦσιν. Ἐπεί φασι, τῶν ἀρχῶν ἡ μὲν κατὰ πέρας, ἤτοι ἁπλουστάτη, καὶ ἀνεπίδεκτος ὅλως αὐξήσεως, ἢ μειώσεώς ἐστιν, ὡς ἡ μονὰς, καὶ αἰτία πᾶσι τοῖς ἀποτελέσμασι τοῦ ὅρου, ταυτότητός τε καὶ ἰσότητος· ἡ δὲ ἄπειρος, ὡς ἡ δυαδικὴ, καὶ αἰτία τῆς ἐπ' ἄπειρον προόδου, αὐξήσεώς τε καὶ μειώσεως, ἔτι δὲ καὶ ἀνισότητος, καὶ παντοίας ἑτερότητος τοῖς γινομένοις ὑπ' αὐτῆς. διὰ ταῦτα καὶ τῶν γωνιῶν ἡ μὲν ὀρθὴ, ὡς πρώτη ἀρχὴ, τῶν γωνιωδῶν σχημάτων τὸ ἴσον τηρεῖ, καὶ ἀνεπίδεκτός ἐστιν ὅλως αὐξήσεως ἢ μειώσεως. αἱ δὲ λοιπαὶ δύο, ὡς ἀόριστοι, καὶ τῇ δυάδι ἀνάλογοι, ἡ μὲν κατὰ τὸ μεῖζον, ἡ δὲ κατὰ τὸ ἔλαττον τῆς ὀρθῆς διενηνόχασιν. ὅθεν δὴ κυρίως καὶ ὡρισμένως γωνία ἐστὶν ἡ ὀρθὴ, αἱ δὲ λοιπαὶ ἀόριστοι. ὁ λόγος δὲ ἐνταῦθα περὶ τῶν εὐθυγράμμων μόνον.

ΙΓ'. Ὅρος ἐστὶν, ὅ τινός ἐστι πέρας.

Ὅρος κυρίως καὶ τοῖς γεωμέτραις τὰ τῶν χωρίων λέγονται πέρατα, καθὸ ταῦτα περιορίζουσι, καὶ ἀσύγχυτα φυλάττουσιν, ἡ λέξις αὕτη οἰκεία Γεωμετρίᾳ. ὅθεν δὴ καὶ Εὐκλ. ἐνταῦθα ὅρον λέγει, οὐχ ἁπλῶς ἅπαν πέρας, ἀλλὰ μόνον τὸ τῶν χωρίων καὶ ἐμβαδῶν, τὸ περιορίζον ἅμα καὶ περατοῦν. τὰ γὰρ ἄκρα τῆς γραμμῆς σημεῖα, πέρατα μὲν λέγονται, οὐμὴν δὲ καὶ ὅροι, ὅτι οὐ περιορίζουσί τι χωρίον, περατοῦσι δὲ μόνον τὴν γραμμήν.

ΙΔ'. Σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό τινος ἢ τινῶν ὅρων περιεχόμενον.

Lib. 1. Fig. 6.



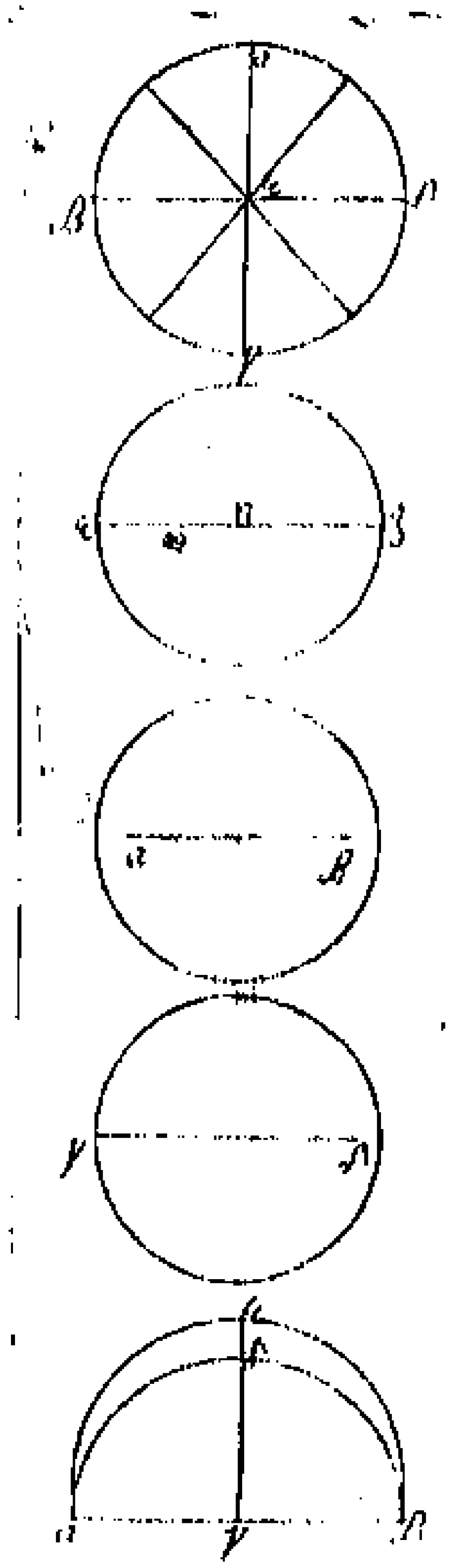
Πολλαχῶς τοῦ σχήματος λαμβανομένου, καὶ γὰρ τῶν τε φυσικῶν ἁπάντων αἱ μορφαὶ σχήματα λέγονται, καὶ τῶν παρὰ τῆς τέχνης γινομένων, φέρ' εἰπεῖν, ἀνδριαντοποιητικῆς καὶ ἄλλης, αἱ μορφαὶ ὡσαύτως σχήματα ἤκουσαν. δίδονται δ' ἔτι καὶ ψυχῇ σχήματα, ἐνταῦθα μόνον περὶ τῶν παρὰ τοῖς γεωμέτραις σχημάτων ὁ λόγος, ἰδίως δὲ περὶ τῶν ἐν ἐπιπέδῳ. Ἔστι τοίνυν σχῆμα χωρίον τι ὑπὸ μιᾶς, ἢ πολλῶν γραμμῶν περιεχόμενον καὶ ὁριζόμενον. ὑπὸ μιᾶς μὲν, ὡς ὁ α, κύκλος, πλειόνων δὲ, ὡς τὰ τριγωνοειδῆ, τετραγωνοειδῆ, οἷα τὰ β γ δ, ε ζ η θ, καὶ λοιπά. ἐμβαδὸν τὸ μὲν περιέχον ὅρος λέγεται, τὸ δὲ περιεχόμενον ἐμβαδὸν, τὸ σύνθετον δὲ ἔκ τε τοῦ ὅρου καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ σχῆμα. Ἰστέον δὲ, ὅτι εἰ καὶ ὁ Γεωμέτρης ἐν τοῖς αἰσθητοῖς ἐνασχολεῖται σχήμασιν, ἀλλ' οὖν τὴν ἀκριβῆ θεωρίαν περὶ τῶν ἀΰλων καὶ νοερῶν, καὶ εἰκόνων τῶν αἰσθητῶν ποιεῖται σχημάτων, καὶ περὶ ἐκείνων τὰς ἀποδείξεις μηχανᾶται, καὶ τοὺς λόγους ἀποδίδωσι. τίς γὰρ μηχανὴ εὑρεῖν σχῆμα οὕτως ἐντελὲς, ὥστε τοὺς νοερούς δέχεσθαι λόγους, καὶ τὴν θεωρίαν περὶ αὐτὸ ἄπταιστον γίνεσθαι;

ΙΕ'. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἣ καλεῖται περιφέρεια. πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.

Τῶν σχημάτων ἁπάντων τὸ πρώτιστον καὶ ἁπλούστατον, ἅμα δὲ καὶ τελειότατον, ὁ κύκλος ἐστί. καὶ γὰρ τῶν μὲν στερεῶν πάντων ὑπερφέρει, τῷ ἐν ἁπλουστέρᾳ τάξει τὴν ὕπαρξιν ἔχειν. μέγεθος γάρ ἐστι διχῇ διαστατὸν, ἐκείνων ἐν τρισὶ συνισταμένων διαστάσεσι. τῶν δὲ ἐν ἐπιπέδοις ὑφισταμένων τῇ τε ὁμοιότητι καὶ τῇ ταυτότητι ὑπερέπεριέχει, καὶ ἔστιν ἀνάλογον τῷ πέρατι καὶ τῇ μονάδι. λέγεται μὲν οὖν σχῆμα, διὰ τὸ πεπεράσθαι· ἐπίπεδον δὲ, εἰς διαφορὰν τῶν στερεῶν σχημάτων· ὑπὸ μιᾶς δὲ γραμμῆς περιεχόμενον, ἅτε μὴ τὴν ποικιλίαν τῶν ἔξω δεχόμενον ὅρων, ὡς τὰ λοιπὰ σχήματα. καλεῖται δὲ ὁ τούτου ὅρος περιφέρεια, εἰς διαφορὰν τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων. οὐδὲν γὰρ τῶν εὐθυγράμμων ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιορίζεται. εἴρηται δὲ, ὅτι πρὸς τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι, ἀφ' ἑνὸς σημείου, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὅτι γε καὶ αἱ ἐλλείψεις ὑπὸ μιᾶς πως περιφερείας ὁρίζονται, οὐ μὴν δὲ αἱ πρὸς αὐτὴν προσπίπτουσαι εὐθεῖαι, εἰσὶν ἴσαι. τὸ δὲ τῶν ἐντὸς κειμένων προσετέθη, ὅτι κἀν τῇ σφαίρᾳ τοῦ περιγραφομένου κύκλου, ἔστι τι κέντρον ὁ πόλος, ἀλλ' οὐκ ἐντὸς τοῦ κύκλου ἐστὶν, μᾶλλον δ' ἐκτός. τὸ δὲ ἀφ' ἑνὸς, ὅτι ἓν εἶναι τὸ κέντρον ὀφείλει. εἰκὼν τούτου τὸ α β γ δ, σχῆμα, οὗ κέντρον τὸ ε.

Ιϛ'. Διάμετρος δὲ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

Lib. 1. Fig. 7.



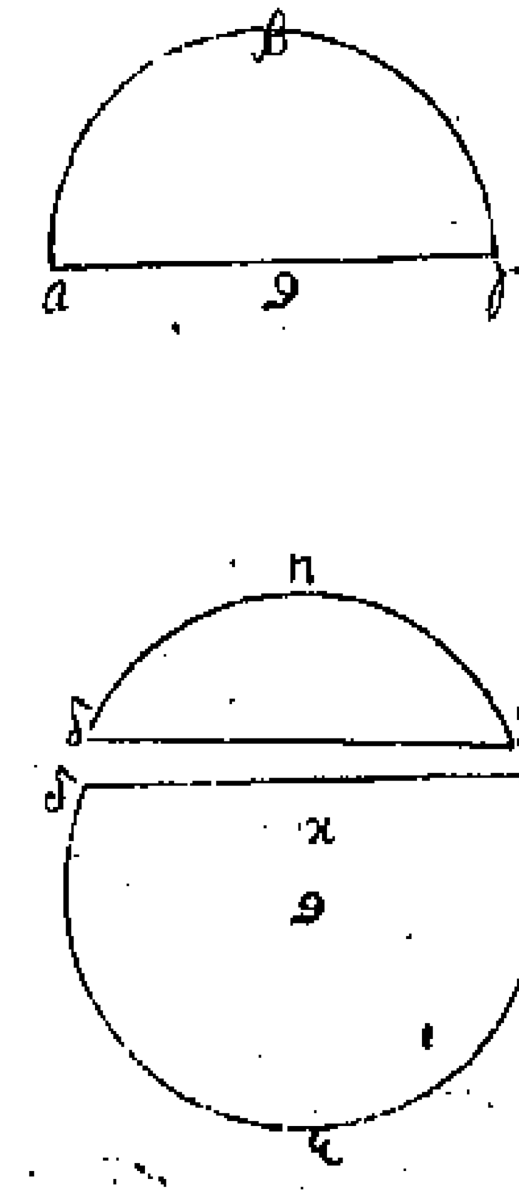
Τῆς φωνῆς ταύτης διαμέτρου ἐν πολλοῖς σχήμασι λαμβανομένης, καὶ γὰρ κἀν τοῖς παραλληλογράμμοις, κἂν ταῖς ἐλλείψεσι καὶ σφαίραις, διάμετρός ἐστιν· ἰδίως διάμετρον τὴν ἐν κύκλῳ δέον καλεῖν· ἡ μὲν γὰρ τῶν παραλληλογράμμων διάμετρος, διαγώνιος μετὰ προσθήκης ὀνομάζεται· ἡ δὲ τῶν ἐλλείψεων καὶ σφαιρῶν, ἄξων λέγεται. μόνη δὲ τῶν κύκλων διάμετρος ἄνευ προσθήκης καλεῖσθαι κεκλήρωται. Τὸ μὲν οὖν εὐθεῖα γένους χώραν ἐπέχει. ἐπεὶ δὲ πολλαὶ εὐθεῖαι δύνανται ἐντὸς τοῦ κύκλου ἄγεσθαι, μόνη ἐκείνη διάμετρος λέγεται, ἡ διὰ τοῦ κέντρου. ὥσπερ καὶ πολλῶν σημείων ἐντὸς τοῦ κύκλου ὄντων, ἓν καὶ μόνον κέντρον λέγεται, τὸ μεσαίτατον. Ἐπεὶ δὲ πάλιν καὶ διὰ τοῦ κέντρου δύναταί τις εὐθεῖα ἄγεσθαι, οὐ μὴν δὲ καὶ περατοῦσθαι, ὡς ἡ α β, ἢ καθ' ἓν μόνον περατοῦσθαι μέρος, ὡς ἡ γ δ, οὐχὶ δὲ καὶ κατὰ τὸ ἕτερον, καὶ διάμετρος οὐκ ἔστι· διὰ τοῦτο προσέθηκε καὶ τὸ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ὡς ἡ ε η ζ, καὶ ταῦτα μὲν διαφορῶν ἀναπληροῦσι τόπον. Τὸ δὲ δίχα τὸν κύκλον τέμνειν τὴν διάμετρον, πρῶτόν φασι τὸν Θαλῆν ἀποδεῖξαι, διὰ τὸ εὐθεῖαν εἶναι, καὶ διὰ τοῦ κέντρου διέρχεσθαι, καὶ περατοῦσθαι. Δείκνυται δὲ καὶ διὰ μαθηματικῆς ἀποδείξεως. εἰ γὰρ τοῦ κύκλου εἰς δύο διαιρουμένου ὑπὸ τῆς διαμέτρου, θάτερον τῶν μερῶν ἐπὶ τοῦ λοιποῦ ἐφαρμοσθῇ, πάντως γε εἰ ἐστὶν ἴσα,

σα, ἐφαρμοσθήσεται θάτερον θατέρῳ, ὥστε μηδ' ἕτερον ἐλλείπειν τοῦ λοιποῦ, ἢ ὑπερέχειν. εἰ δ' ἄνισα, τὸ μὲν ἐντὸς, τὸ δὲ ἐκτὸς πεσεῖται. τούτου δὲ γενομένου ἄτοπόν τι ἔσται. καὶ γὰρ ἐπεὶ αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι εἰσιν, μὴ ἐφαρμοττομένων τῶν αὐτῶν τοῦ κύκλου μερῶν, ἔσται ἡ ἐλάττων ἴση τῇ μείζονι, ἡ γ δ, τῇ γ ε, ὅπερ οὐχ ἄτοπον μόνον, ἀλλὰ καὶ ἀδύνατον.

ΙΖ'. Ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

ΙΗ'. Τμῆμα κύκλου ἐστὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

Lib. 1. Fig. 8.



Εἶναι τὸ ἡμικύκλιον καὶ τμῆμα κύκλου κοινωνεῖν ἀλλήλοις δοκεῖ, καθ' ὃ ἕκαστον αὐτῶν ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας περιέχεται, διενήνοχεν ἔμπης· ὅτι τὸ μὲν ἡμικύκλιον ὑπὸ ὡρισμένης περιέχεται εὐθείας, τῆς διαμέτρου. τὸ δὲ τμῆμα ὑπὸ τῆς τυχούσης, ἥτις καὶ χορδὴ λέγεται. καὶ τὸ μὲν τμῆμα καθολικώτερόν ἐστι, τὸ δὲ ἡμικύκλιον μερικώτερον. διὸ καὶ λέγεται μὲν τὸ ἡμικύκλιον καὶ τμῆμα, οὐ μὴν δὲ καὶ ἀνάπαλιν, τὸ τμῆμα καὶ ἡμικύκλιον. Ἔτι τὸ μὲν ἡμικύκλιον ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἔχει τὸ κέντρον, οἷον τὸ θ, τοῦ α β γ, ἡμικυκλίου. τὸ δὲ τμῆμα, εἰ μὲν μεῖζον ἐντὸς, ὡς τὸ θ, ἐντὸς ὂν τῆς περιμέτρου τοῦ δ ε ζ. εἰ δὲ ἔλαττον ἐκτὸς, οἷον τὸ δ η θ, ἔχον τὸ κέντρον κ, ἐν τῷ ἐμβαδῷ τοῦ μείζονος. ὥστε τρεῖς ἐκ τούτου δυνάμεθα συναγαγεῖν τοῦ κέντρου τοὺς τόπους· ἢ γὰρ ἐπὶ τῆς περιμέτρου ἔσται τοῦ σχήματος, ἢ ἐντὸς ταύτης, ἢ γοῦν ἐκτὸς, ὡς εἴρηται. διὸ καὶ τρία τοῦ τμήματος τοῦ κύκλου εἴδη, ἡμικύκλιον, μεῖζον τμῆμα, καὶ ἔλαττον. ἑκάτερον δὲ τό, τε ἡμικύκλιον καὶ τμῆμα κύκλου δυοειδές ἐστι· καὶ γὰρ ἕκαστον τῶν σχημάτων, ἢ μονοειδές ἐστιν, ὡς ὁ κύκλος ἐν τοῖς ἐπιπέδοις, καὶ ἡ σφαῖρα ἐν τοῖς στερεοῖς· ἢ δυοειδὲς, ὡς τὸ ἡμικύκλιον καὶ τὰ τοῦ κύκλου τμήματα ἐν τοῖς ἐπιπέδοις, ἐν δὲ τοῖς στερεοῖς τὸ ἡμισφαίριον, καὶ τὰ τῆς σφαίρας τμήματα. ἢ γοῦν πολυειδὲς, ὡς τὰ τρίγωνα, τετράγωνα, καὶ λοιπὰ ἐπίπεδά τε καὶ στερεά. εἰ δὲ ἀδύνατον σχῆμα ὑπὸ δύο εὐθειῶν περιέχεσθαι, τοῦτο ἐπὶ τῶν εὐθυγράμμων ἀληθεύει, δύο γὰρ εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσι. τὸ δὲ ἡμικύκλιον καὶ κύκλου τμῆμα ὑπό τε εὐθείας καὶ περιφερείας περιέχεται, διὸ καὶ δυοειδὲς λέγεται.

ΙΘ'. Εὐθύγραμμα σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα.

Κ'. Τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν.

ΚΑ'. Τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων.

ΚΒ'. Πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων, ἢ τεσσάρων πλευρῶν περιεχόμενα.

Καθάπερ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς ἡ μονὰς πρώτη οὖσα ἀρχὴ ἀμερὴς ὑποτίθεται, ἡ δὲ δυὰς μέσον μονάδος τε καὶ ἀριθμῶν, ὡς δευτέρα· ἀπὸ δὲ τοῦ τριαδικοῦ ἡ ἐπ' ἄπειρον τῶν ἀριθμῶν ἄρχεται αὔξησις. οὕτω κἀν τοῖς σχήμασιν, ὁ μὲν κύκλος, ὡς ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενος, μονάδος τόπον ἐπέχει· τὸ ἡμικύκλιον δὲ δυάδος, ὡς ὑπὸ δύο περιεχόμενον. τὸ δὲ τρίγωνον ἀρχὴν λαμβάνει τῆς ἐπ' ἄπειρον τῶν σχημάτων προόδου. Τίνος δὲ χάριν οἱ ἀριθμητικοὶ τοιαύτην τάξιν ὡρίσαντο; ἢ ὅτι ἡ μὲν μονὰς ἐφ' ἑαυτὴν, ἢ καὶ πρὸς ἄλλον πολλαπλασιαζομένη ἀριθμὸν, οὐδὲν αὔξει, προστιθεμένη δὲ αὔξει· ὁ ἀριθμὸς δὲ τοὐναντίον, πολλαπλασιαζόμενος μᾶλλον αὔξει ἢ προστιθέμενος· ἐπεὶ δὲ ἡ δυὰς πολλαπλασιαζομένη καθ' ἑαυτὴν τὸ αὐτὸ ποιεῖ, ὅπερ καὶ προστιθεμένη, τούτου ἕνεκα τὴν μέσην χώραν ἔχει. ταύτης οὖν τῆς τάξεως κἀν τοῖς σχήμασι τηρουμένης, πρῶτον μὲν ὁ Στοιχειωτὴς περὶ τοῦ κύκλου διαλαβὼν, μετὰ δὲ τὸν κύκλον περὶ τοῦ ἡμικυκλίου, ἐπὶ τοῦ παρόντος, ἤδη ὅπως ἕκαστον τῶν σχημάτων δέον καλεῖσθαι διὰ τριῶν διδάσκει ὅρων, καὶ τοῦτ' αὖθις ἐκ τῶν ἀριθμῶν ἐρανιζόμενος. Ὅσα τοίνυν τῶν ἐπιπέδων σχημάτων τρισὶ περιέχονται ὅροις, τρίπλευρα καλεῖ· ὅσα δὲ τέσσαρσι, τετράπλευρα· ὅσα δὲ πλείοσι τῶν τεσσάρων πολύπλευρα. τοῦ δ' ἕνεκα τῶν τριπλεύρων μόνων καὶ τετραπλεύρων τὴν ἰδίαν εἰπὼν προσηγορίαν, τῶν δὲ λοιπῶν τῆς κοινῆς ἐμνήσθη, τὴν ἰδίαν ἑκάστῳ ἀποσιωπήσας; ὅτι κἀν τοῖς ἀριθμοῖς ὁ τριαδικὸς ἀριθμὸς καὶ τετραδικὸς πρώτιστοι, ὁ μὲν ἐν τοῖς περιττοῖς, ὁ δὲ ἐν τοῖς ἀρτίοις. διὸ καὶ Εὐκλείδης τὰ δύο πρώτιστα τῶν σχημάτων τρίγωνόν φημι καὶ τετράγωνον εἰς μνήμην λαβὼν, τὰ λοιπὰ πάντα τῇ κοινῇ περιέλαβε προσηγορίᾳ. Ἰστέον δὲ, ὅτι ἐνταυθὶ περὶ τῶν εὐθυγράμμων μόνον τὸν λόγον ποιεῖται. Ἐπιστάσεως δὲ καὶ τοῦτο ἄξιον, ὅτι ὥσπερ τῶν γραμμῶν αἱ μέν εἰσιν ἁπλαῖ, αἱ δὲ μικταί· οὕτω καὶ τῶν σχημάτων, τὰ μὲν ἁπλᾶ λέγονται, τὰ δὲ μικτά. καὶ ἁπλᾶ μὲν τὰ ὑπὸ ἁπλῶν περιεχόμενα γραμμῶν· τούτων δὲ τὰ μὲν ὑπὸ ὁμοειδῶν περιέχεται, τὰ δὲ ὑπ' ἀνομοειδῶν· τῶν δὲ ὑπὸ τῶν ὁμοειδῶν αὖθις, τὰ μὲν ὑπὸ εὐθειῶν γραμμῶν περιέχεται, τὰ δὲ ὑπὸ περιφερῶν. μικτὰ δὲ τὰ ὑπὸ μικτῶν γραμμῶν περιεχόμενα, ὡς τὰ ἑλικοειδῆ, ἢ κισσοειδῆ καὶ ἄλλα.

ΚΓ'. Τῶν

ΚΓ'. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς.

ΚΔ'. Ἰσοσκελὲς δὲ, τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς.

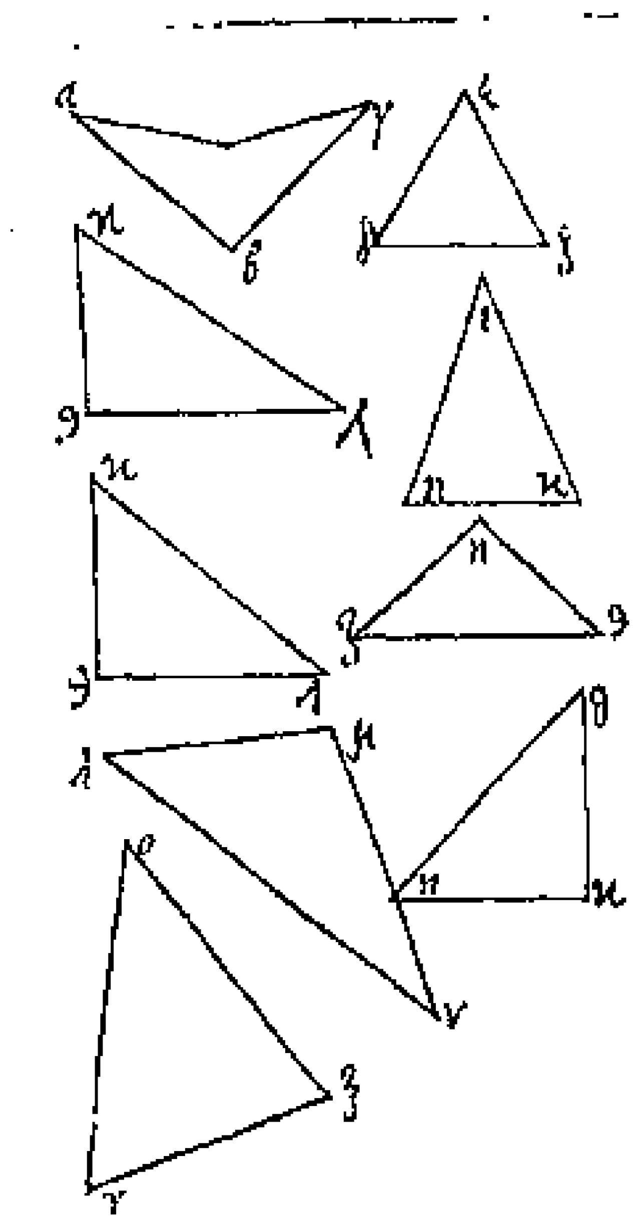
ΚΕ'. Σκαληνὸν δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

Κϛ'. Ἔτι δὲ τῶν τριπλεύρων σχημάτων, ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ μίαν ἔχον ὀρθὴν γωνίαν.

ΚΖ'. Ἀμβλυγώνιον δὲ, τὸ μίαν ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν.

ΚΗ'. Ὀξυγώνιον δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

Eucl. Lib. 1. Fig. 9.



Ἄρχεται δὴ καὶ τῆς τῶν σχημάτων διαιρέσεως Εὐκλ. ἀπὸ τῶν τριπλεύρων· ὅτι τὸ τρίγωνον τὴν πρώτην ἐν τοῖς εὐθυγράμμοις ἐπέχει τάξιν, ὡς εἴρηται. λαμβάνεται δὲ ἡ τῶν τριπλεύρων διαίρεσις, ὁτὲ μὲν ἀπὸ τῶν πλευρῶν, ὁτὲ δ' ἀπὸ τῶν γωνιῶν. καὶ τοῦτο οὐκ ἀλόγως. πᾶν γὰρ τὸ τρίπλευρον, ἔστι καὶ τρίγωνον, οὐ μὴν δὲ καὶ ἀντιστρόφως, πᾶν τὸ τρεῖς γωνίας ἔχον, ἔχει καὶ τρεῖς τὰς πλευράς. τὸ γὰρ α β γ, φέρ' εἰπεῖν, σχῆμα ἔχει μὲν τρεῖς γωνίας, πλευρὰς δὲ τέσσαρας. Ἀπὸ τῶν πλευρῶν μὲν οὖν διαιρεῖται τὰ τρίγωνα, εἰς ἰσόπλευρα, ἰσοσκελῆ, καὶ σκαληνά. καὶ ἰσόπλευρα μέν ἐστιν, ἅπερ τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας ἔχει, ὡς τὸ δ ε ζ. ἰσοσκελῆ δὲ, ἃ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχει, ὡς τὸ η θ κ, καὶ σκαληνὰ, ἅπερ καὶ τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἀνίσους ἔχει, ὡς τὸ λ μ ν. Ἀπὸ δὲ τῶν γωνιῶν διαιρεῖται αὖθις εἰς ὀρθογώνια, ἀμβλυγώνια, καὶ ὀξυγώνια. Ὀρθογώνια μὲν οὖν ἐστι, τὰ ἔχοντα μίαν τῶν αὐτῶν γωνιῶν ὀρθήν· οὐ γὰρ δύναται τρίγωνον δύο ὀρθὰς πώποτ' ἔχειν γωνίας, ὡς δειχθήσεται. Ἀμβλυγώνια δὲ, ἃ τὴν μίαν ἀμβλεῖαν ἔχει· καὶ ὀξυγώνια, ἅπερ καὶ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχει. ὥστε ἐκ τούτων συνάγεται ἑπτὰ τὰ εἴδη τῶν τριγώνων εἶναι. τοῦ γὰρ ἰσοπλεύρου μονοειδοῦς ὄντος κατὰ τὰς γωνίας, τουτέστιν ὀξυγωνίου· τῶν δὲ λοιπῶν δύο, τοῦ ἰσοσκελοῦς, φημὶ, καὶ σκαληνοῦ τριχῶς ἑκάστου λαμβανομένου κατὰ τὰς γωνίας, ἑπτὰ τὰ πάντα τῶν τριγώνων ἀποτελεῖται εἴδη. Πρῶτον τὸ ἰσόπλευρον ἰσογώνιον δ ε ζ. δεύτερον τὸ ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον η θ κ. τρίτον τὸ ἰσοσκελὲς ἀμβλυγώνιον ζ η θ. τέταρτον τὸ ἰσοσκελὲς ὀξυγώνιον η ι κ. πέμπτον τὸ σκαληνὸν ὀρθογώνιον θ κ λ. ἕκτον τὸ σκαληνὸν ἀμβλυγώνιον λ μ ν. καὶ ἕβδομον τὸ σκαληνὸν ὀξυγώνιον ν ο ξ. καὶ περὶ μὲν τῆς τῶν τριπλεύρων διαιρέσεως ἅλις. ἑπόμενον δέ ἐστιν εἰπεῖν καὶ περὶ τῆς τῶν τετραπλεύρων.

C

ΚΘ'. Τῶν

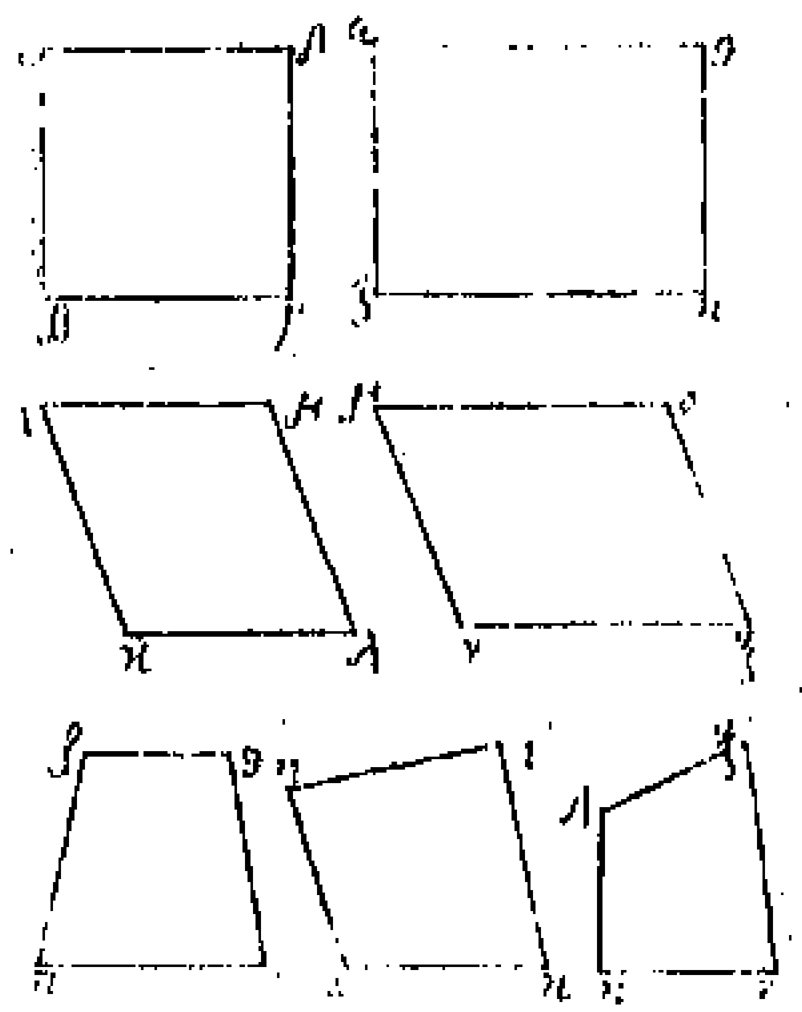
ΚΘʹ. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τε καὶ ὀρθογώνιον.

Λʹ. Ἑτερόμηκες δέ, ὃ ὀρθογώνιον μέν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ.

ΛΑʹ. Ῥόμβος δέ, ὃ ἰσόπλευρον μέν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ.

ΛΒʹ. Ῥομβοειδὲς δέ, τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν, οὔτε ὀρθογώνιον. τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα, τραπέζια καλείσθω.

Eucl. Lib. 1. Fig. 10.



Πενταχῶς τοῦ Στοιχειωτοῦ τὸ τετράπλευρον ἤδη διαιροῦντος, ἔνεστιν ἡμῖν καὶ τὴν παρ' ἄλλοις ταύτην διαίρεσιν λαβοῦσιν, ἑπταχῶς καὶ τὰ τετράπλευρα, ὡς καὶ τὰ τρίγωνα διαιρεῖν. τῶν γὰρ τετραπλεύρων τὰ μέν, παραλληλόγραμμά ἐστι, τὰ δ' οὔ. καὶ τῶν παραλληλογράμμων αὖθις τὰ μέν, ἰσόπλευρα ἅμα τε καὶ ὀρθογώνια, ὡς τὰ τετράγωνα. τὰ δέ, οὐδέτερα τούτων, ὡς τὰ ῥομβοειδῆ. τὰ δὲ ἰσόπλευρα μέν, οὐκ ὀρθογώνια δέ, ὡς οἱ ῥόμβοι. τὰ δέ, ὀρθογώνια μέν, οὐκ ἰσόπλευρα δέ, ὡς τὰ ἑτερομήκη. τῶν δὲ μὴ παραλληλογράμμων τὰ μέν, τὰς δύο μόνας τῶν πλευρῶν ἔχει παραλλήλους, οὐμὴν δὲ καὶ τὰς λοιπάς, καὶ καλεῖται τραπέζια. τὰ δέ, οὐδ' ὅλως ἔχει τῶν πλευρῶν τινας παραλλήλους, καὶ καλεῖται τραπεζοειδῆ. τῶν δὲ τραπεζίων τὰ μέν, ἴσας ἔχει τὰς συναπτούσας τὰς δύο παραλλήλους, καὶ καλεῖται τραπέζια ἰσοσκελῆ. τὰ δέ, ἀνίσους, καὶ καλεῖται τραπέζια σκαληνά. ὥστε ἑπτὰ εἰσὶ τὰ εἴδη καὶ τῶν τετραπλεύρων σχημάτων. Τετράγωνον, ὡς τὸ α β γ δ. Ἑτερόμηκες, ὡς τὸ ε ζ η θ. Ῥόμβος, ὡς τὸ ι κ λ μ. Ῥομβοειδές, ὡς τὸ μ ν ξ ο. Τραπέζιον ἰσοσκελές, ὡς τὸ ζ η ι θ. Τραπέζιον σκαληνόν, ὡς τὸ η θ κ ι. καὶ τραπεζοειδὲς ὡς τὸ λ μ ν ξ.

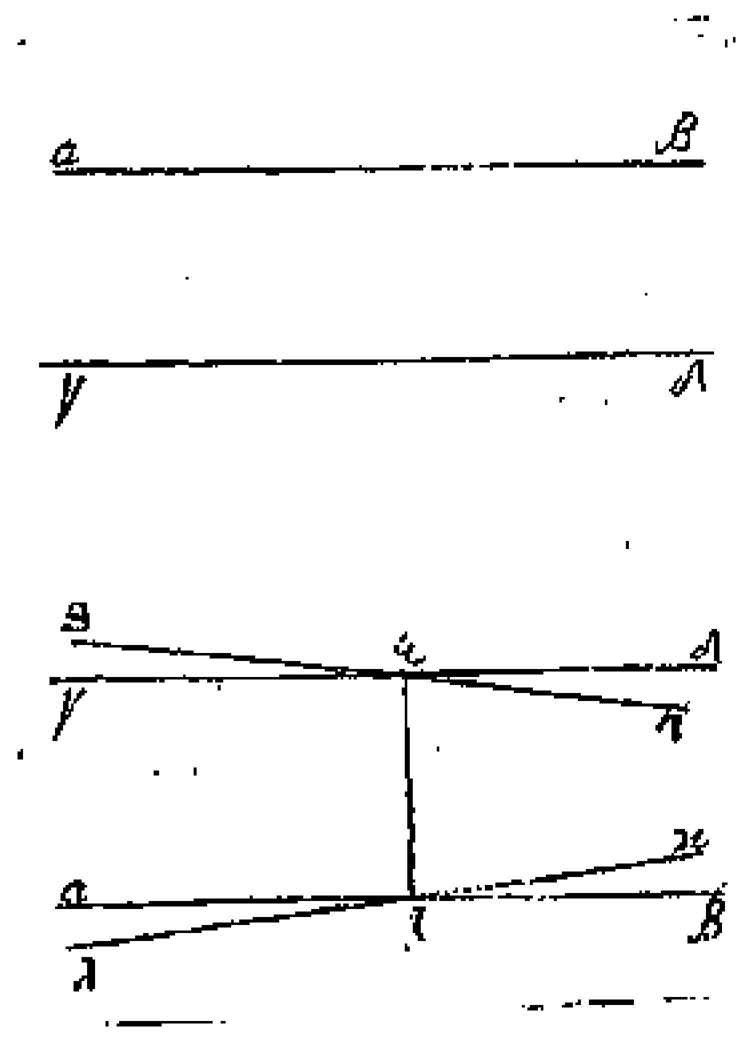
ΛΓʹ. Παράλληλοι εὐθεῖαί εἰσιν, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

Πληρώσας τὴν τῶν τριπλεύρων τε καὶ τετραπλεύρων σχημάτων ἑρμηνείαν, καθ' ὅσον εἰς λόγον ὅρων συμβάλλεται, προτάξας τὴν τοῦ μονοειδοῦς καὶ τῶν τούτου μερῶν, προστίθησι νῦν καὶ τὴν τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ὁριστικὴν διδασκαλίαν. ὅπως δ' ἂν ἀκριβῶς εὐθεῖαί τινες παράλληλοι εἶεν, τὰ τρία πάντῃ, φησί, δεῖ φυλάττειν, τὸ ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι ἐπιπέδῳ, τὸ ἐκβάλλεσθαι ἐπ' ἄπειρον, καὶ τὸ

ἐφ'

ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη μὴ συμπίπτειν, ὡς αἱ α β, γ δ. ἑνὸς γὰρ ἐλλείποντος, τὸ παραλλήλους εἶναι οὐχ ἕξουσι. καὶ περὶ μὲν τῆς τῶν ὅρων ἑρμηνείας κατὰ Πρόκλον τὸν διάδοχον ἀρκείσθω ἡμῖν. Τὰ Αἰτήματα δὲ καὶ Ἀξιώματα ἐκκείσθωσαν ἐπὶ τοῦ παρόντος, ὡς καὶ παρὰ τῷ Εὐκλείδῃ διάκεινται. τὰ μὲν γὰρ καθ' αὑτὰ τὸ γνωστὸν ἔχει, τὰ δὲ λαμβάνονται μόνον, ὡς εἰς κατασκευήν τινων συμβάλλοντα, ὡς προείρηται. μετὰ δὲ τὰ Αἰτήματα, καὶ Ἀξιώματα, ἡ τῶν προτάσεων ἑρμηνεία ἀμέσως ταχθήσεται. συνοπτικωτέρα μέντοι τῆς παρὰ τῷ Εὐκλείδῃ, σεσημειωμένων ἐν ἑκάστῃ προτάσει, τῶν τε ὅρων, ἀξιωμάτων, καὶ προτάσεων, δι' ὧν δείκνυται. καὶ τοῦτο εἰς ῥᾳοτέραν τῶν ἀρχομένων κατάληψιν.

Eucl. Lib. 1. Fig. 11.



ΑΙΤΗΜΑΤΑ.

Αʹ. Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Βʹ. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβάλλειν.

Γʹ. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

Κοιναὶ ἔννοιαι, ἤτοι Ἀξιώματα.

Αʹ. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

Βʹ. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

Γʹ. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.

Δʹ. Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.

Εʹ. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπά ἐστιν ἄνισα.

Ϛʹ. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Ζʹ. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Ηʹ. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Θʹ. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστι.

Ιʹ. Καὶ πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

ΙΑʹ. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας (οἷον τὰς κ θ, κ λ,) εὐθεῖα ἐμπίπτουσα (ἡ ε ζ.) τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ὡς τὰς ὑπὸ η ε ζ, κ ζ ε. ἐκβαλλόμεναι αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἐπ' ἄπειρον, συμπεσοῦνται ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι.

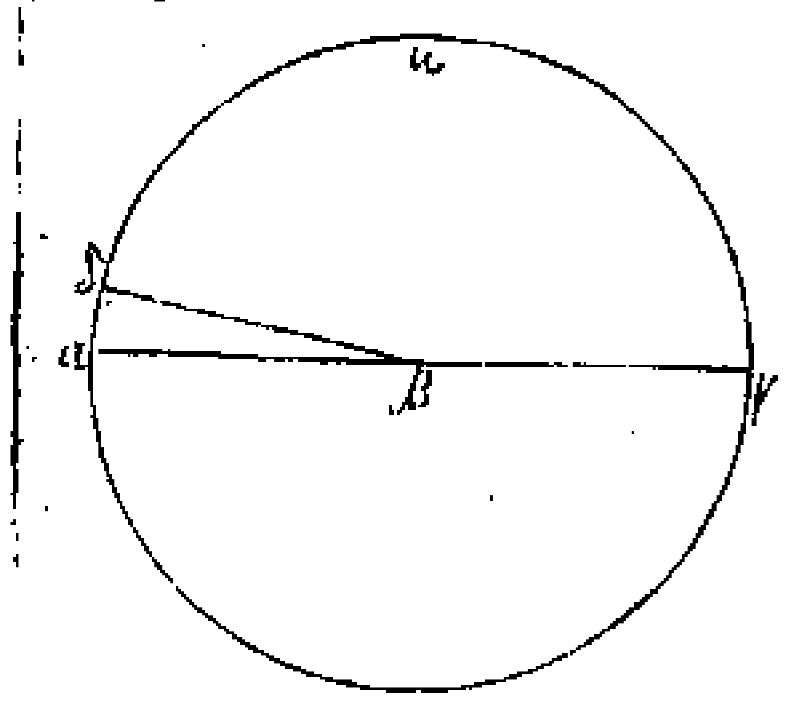
ΙΒʹ. Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσι.

ΙΓʹ. Καὶ δύο εὐθεῖαι κοινὸν τμῆμα οὐκ ἔχουσιν.

Παρὰ

Παρὰ τὰ ιβʹ. ἐν τῶν Εὐκλ. εὑρισκόμενα Α'ξιώματα, τάτε Αἰτήματα καὶ τοὺς Ο'ρους, τίθεται Α'ρχὴ μαθηματικὴ καὶ ἡ λέγουσα, Καὶ δύο εὐθεῖαι κοινὸν τμῆμα οὐκ ἔχουσιν, ἣν φησι Πρόκλος ἐν τοῖς αἰτήμασι τακτέον. ὁ δὲ νοῦς αὐτῆς τοιοῦτός ἐστιν, ὅτι ἐὰν εὐθεῖά τις καθ' ἓν μέρος μόνον ἐφαρμοσθῇ ἑτέρᾳ τινὶ εὐθείᾳ, ἅπασα ἐφαρμοσθήσεται. διὰ τὸ ἐξ ἴσου τὴν εὐθεῖαν τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖσθαι, οὐ μὴν δὲ μέρος μὲν ταύτης ἐφαρμοσθήσεται, ἡ δὲ λοιπὴ οὔ. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐφαρμοσθήτω ἡ $\delta\beta\gamma$, εὐθεῖα ἐπὶ τῆς $\alpha\beta\gamma$, καὶ τοῦ μὲν $\beta\gamma$, αὐτῆς μέρους ἐφαρμοττομένου, τὸ λοιπὸν $\beta\delta$, ἀφάρμοστον μενέτω. ὥστε εἶναι τῶν $\alpha\beta\gamma$, καὶ $\delta\beta\gamma$, εὐθειῶν κοινὸν τμῆμα τὸ $\beta\gamma$. κέντρῳ μὲν δὴ τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ $\beta\alpha$, κύκλος γεγράφθω ὁ $\alpha\delta\epsilon\gamma$. καὶ ἐπεὶ ἡ $\delta\beta\gamma$, εὐθεῖα διὰ τοῦ κέντρου διέρχεται, διάμετρός ἐστι κατὰ τὸν ιςʹ. ὅρον, καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον. ὥστε τὸ $\delta\epsilon\gamma$, τόξον ἡμικύκλιόν ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἔσται καὶ τὸ $\alpha\epsilon\gamma$, ἡμικύκλιον, ὅτι καὶ ἡ $\alpha\beta\gamma$, διὰ τοῦ κέντρου διέρχεται, ὥστε τὸ $\delta\epsilon\gamma$, ἴσον ἐστὶ τῷ $\alpha\epsilon\gamma$, ὅπερ ἀδύνατον. ὑπερέχει γὰρ τὸ $\alpha\epsilon\gamma$, τοῦ $\delta\epsilon\gamma$, τῷ $\alpha\delta$, τόξῳ.

Eucl. Lib. 1. Fig. 12.



ΙΔʹ. Καὶ τὸ ὅλον ἴσον τοῖς ἰδίοις μέρεσι.

Περίληψις τοῦ Πρώτου Βιβλίου Εὐκλείδ.

Ε'πὶ τοῦ παρόντος Πρώτου Βιβλίου ὁ Εὐκλείδης ἐν τῇ ἐκθέσει τῶν ὅρων, πραγματεύεται περὶ τῶν γραμμῶν, καὶ τῶν ἐκ τούτων ποικίλως πως ἀλλήλαις συντρεχουσῶν ἀναφυομένων γωνιωδῶν, καὶ μὴ, σχημάτων. τούτοις ἐπιφέρει τὰ Αἰτήματα, καὶ Α'ξιώματα. οἷς οἷον κλεισὶ κεχρημένος ἐπὶ τὴν ἀπόδειξιν χωρεῖ τῶν προτάσεων. ὧν ἐπὶ μὲν τῶν ὀκτὼ πρώτων περὶ τῶν ἐπιπέδων πραγματεύεται τριγώνων, τὴν φύσιν αὐτῶν ἀναπτύσσων. μετὰ ταύτας δὲ περὶ τοῦ διχοτομεῖν γωνίας τε καὶ γραμμὰς, καὶ καθέτους ἀνορθοῦν, ἢ καθιέναι τὴν μέθοδον παραδίδωσιν. ἐπὶ τούτοις τὰ λοιπὰ τῶν τριγώνων πάθη καὶ παραλλήλων, μεθ' ἃ καὶ τὰς τῶν τετραπλεύρων καὶ παραλληλογράμμων ἰδιότητας, θεωρεῖ, ἀποδεικνύων τίνι λόγῳ τὰ πολύγωνα, καὶ μὴ κανονικὰ σχήματα δύναται ἀνάγεσθαι εἰς ὀρθογώνια, ἤτοι παραλληλόγραμμα, ἢ τρίγωνα, σαφέστερα ἀμέλει καὶ κανονικά. καὶ τέλος ἐπιτίθησι τῷ λόγῳ, τῷ πολυθρυλλήτῳ Πυθαγορείῳ θεωρήματι τῆς ἑκατόμβης ἀκηκοίας προτάσεως, παρὰ τὸ ἑκατὸν θῦσαι βόας ἐπὶ τῇ ταύτης εὑρέσει.

Αἱ χρησιμώτεραι δὲ ταῖς ἐπιστήμαις προτάσεις, ὑπὲρ ὧν ὁ ἅπας γίνεται λόγος, εἰσὶν αὗται, ἡ λβʹ. λεʹ. λζʹ. μαʹ. μδʹ. μεʹ. καὶ μζʹ.

Ε'ΡΜΗ.

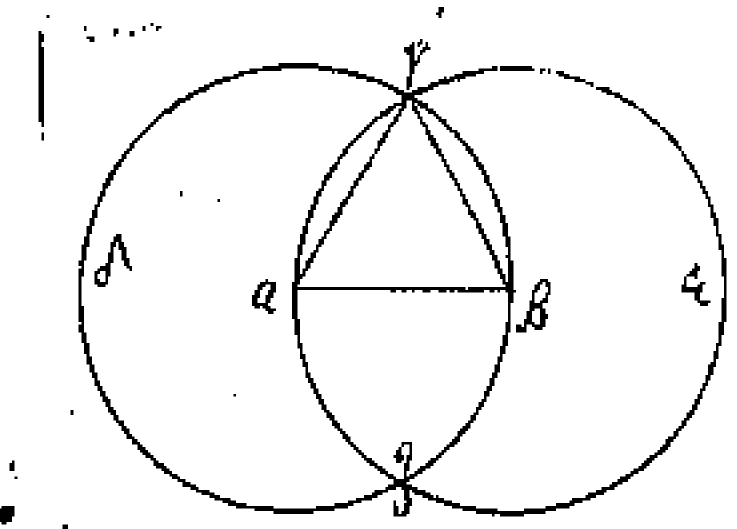
Ε'ΡΜΗΝΕΙ'Α ΣΥΝΤΟΜΩΤΕ'ΡΑ ΤΩ'Ν ΤΟΥ' ΠΡΩ'ΤΟΥ ΒΙΒΛΙ'ΟΥ ΤΟΥ' ΕΥ'ΚΛΕΙ'ΔΟΥ ΠΡΟΤΑ'ΣΕΩΝ.

Πρότασις Πρώτη. Πρόβλημα.

Ε'πὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

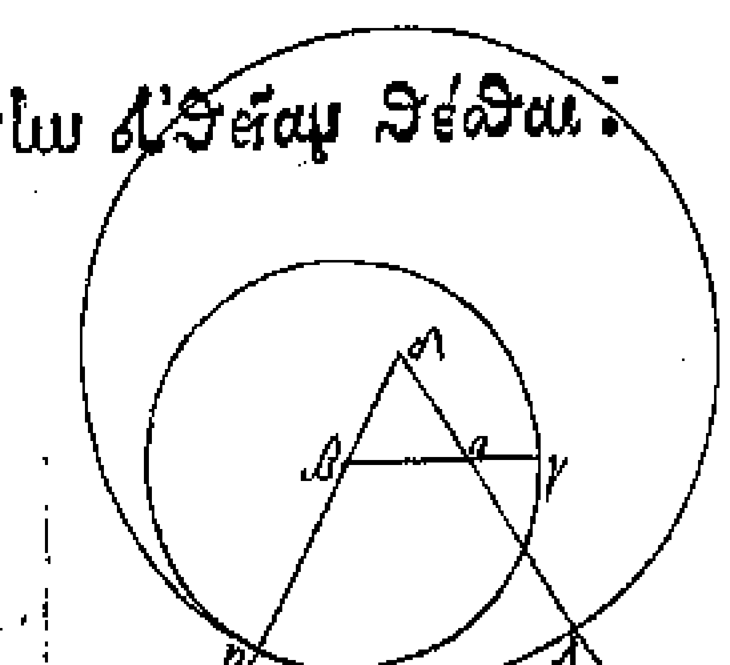
Ε'Πὶ τῆς $\alpha\beta$, ἤδη εὐθείας ἔσω τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι. κέντροις μὲν οὖν τοῖς $\alpha\beta$, διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ $\alpha\beta$, κύκλοι γραφήτωσαν οἱ $\gamma\delta\zeta$, $\gamma\epsilon\zeta$, τεμνόμενοι κατὰ τὰ γ, καὶ ζ, σημεῖα. καὶ παρὰ τοῦ γ, εὐθειῶν ἀγομένων τῶν $\gamma\alpha$, $\gamma\beta$, ἔσται σοι τὸ ἐπιταχθέν. καὶ γὰρ αἱ $\gamma\alpha$, $\gamma\beta$, ἴσαι οὖσαι ἑκατέρα τῇ $\alpha\beta$, κατὰ τὸν ιεʹ. ὅρον, ἴσαι καὶ ἀλλήλαις ἔσονται, κατὰ τὸ αʹ. ἀξίωμα. τὸ $\alpha\beta\gamma$, ἄρα τρίγωνον ἰσόπλευρόν ἐστιν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 1. Fig. 13.

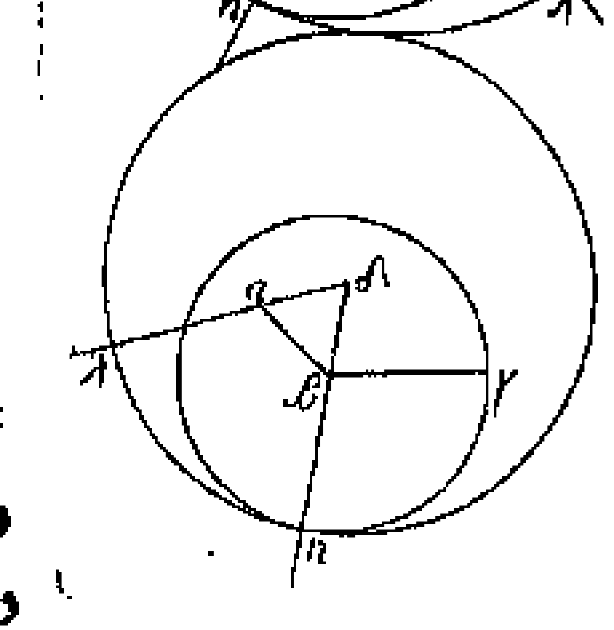


Πρότασις Δευτέρα. Πρόβλημα.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.



Δοθείσης ἤδη εὐθείας μὲν τῆς $\beta\gamma$, σημείου δὲ τοῦ α, εἴτ' ἐπ' αὐτῆς, εἴτ' ἐκτὸς ταύτης, ἔσω πρὸς τῷ α, σημείῳ τῇ $\beta\gamma$, εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι. ἐπὶ τῆς $\alpha\beta$, τοίνυν εὐθείας, κειμένης, ἢ γοῦν ἀγομένης, συνεστάθω διὰ τῆς αὐωτέρω τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ $\alpha\beta\delta$. αἱ δὲ τούτου πλευραὶ $\delta\beta$, $\delta\alpha$, ἐπ' ἄπειρον ἐξαχθήτωσαν. δύο δὲ κύκλων, κέντροις μὲν τοῖς β, καὶ δ, διαστήμασι δὲ τοῖς $\beta\gamma$, καὶ $\delta\eta$, περιγραφομένων, ἔσται ἡ $\alpha\lambda$, ἴση τῇ $\beta\gamma$. ἡ γὰρ $\delta\lambda$, ἴση ἐστὶ τῇ $\delta\eta$, κατὰ τὸν ιεʹ, ὅρον. καὶ τῶν $\delta\beta$, $\delta\alpha$, ἴσων εὐθειῶν ἀφαιρεθεισῶν, ἐγκαταλείπεται ἡ $\alpha\lambda$, ἴση τῇ $\beta\eta$, κατὰ τὸ γʹ. ἀξίωμα. ἐπεὶ δὲ τῇ $\beta\eta$, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ $\beta\gamma$, ὡς ἀπὸ τοῦ κέντρου. ἄρα καὶ ἡ $\alpha\lambda$, ἴση ἐστὶ τῇ $\beta\gamma$, κατὰ τὸ αʹ. ἀξίωμα. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

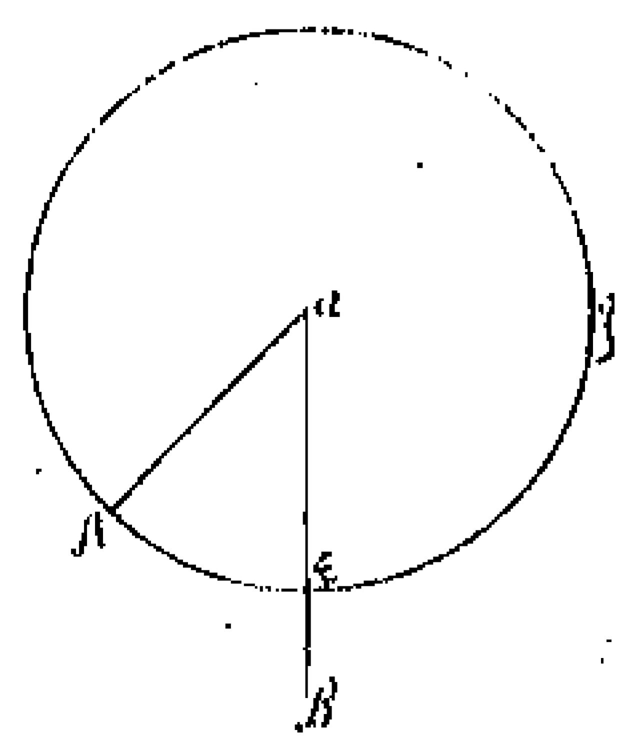


Πρό-

Πρότασις Τρίτη. Πρόβλημα.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

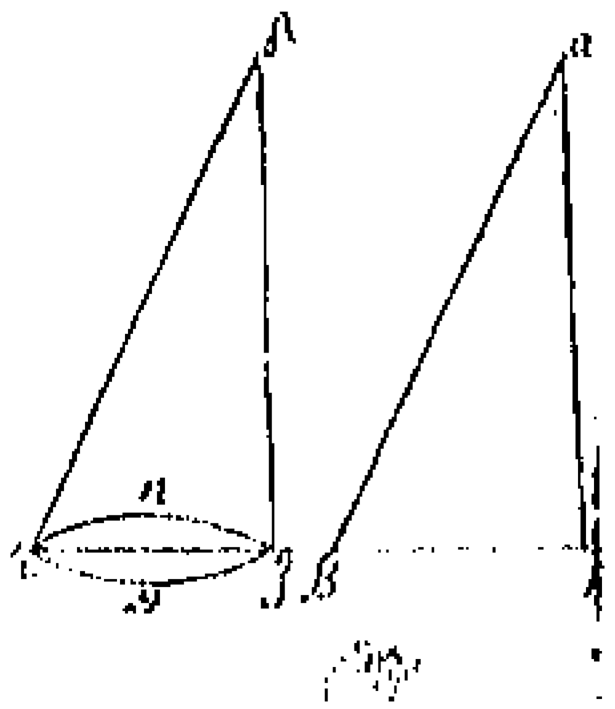
Eucl. Lib. 1. Fig. 14.



Ἔστω δὴ ἀπὸ μείζονος τῆς αβ, ἴσην εὐθεῖαν τῇ ἐλάττονι γ, ἀφελεῖν. εἰλήφθω τοίνυν ἡ αδ, ἴση τῇ γ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αδ, κύκλος γεγράφθω, ὁ δεζ, τέμνων τὴν αβ, κατὰ τὸ ε. τούτου γὰρ γενομένου, ἔσται ἡ αε, ἴση τῇ δοθείσῃ γ. ἐπεὶ γὰρ αἱ αε, καὶ γ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα τῇ αδ, ἡ μὲν ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ δὲ ὡς ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ ἀλλήλαις ἄρα εἰσὶν ἴσαι κατὰ τὸ α. ἀξίωμα, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις Τετάρτη. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσι.



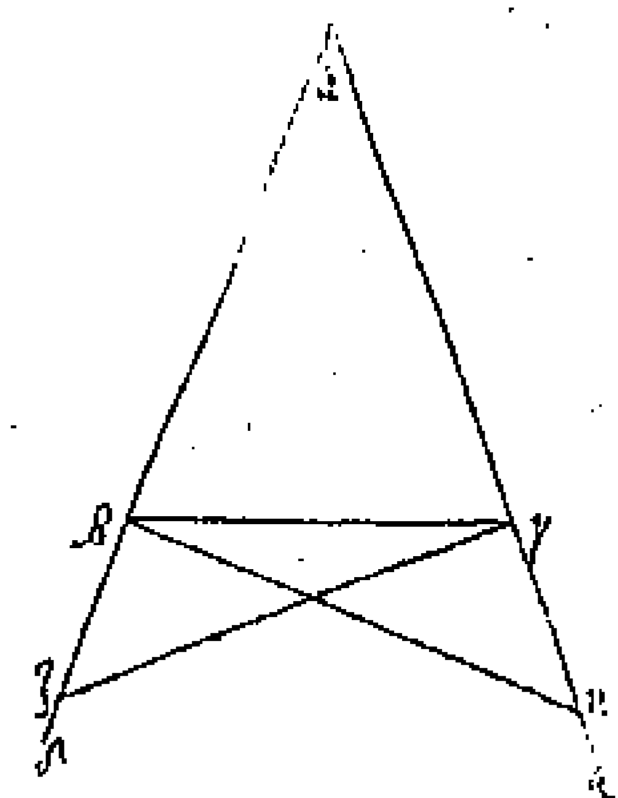
Τριγώνων ἤδη τῶν αβγ, δεζ, ἐχόντων τὴν μὲν αβ, πλευρὰν τῇ δε, τὴν δὲ αγ, τῇ δζ, ἴσην, καὶ τὴν πρὸς τῷ α, γωνίαν τῇ πρὸς τῷ δ, ὁμοίως ἴσην. ἔσται δείκνυθεν καὶ ἡ βγ, βάσις ἴση, τῇ εζ, καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον αβγ, ὅλῳ τῷ δεζ, τριγώνῳ. καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ β, γωνία τῇ πρὸς τῷ ε, ἡ δὲ πρὸς τῷ γ, τῇ πρὸς τῷ ζ, ἴση. τοῦ γὰρ αβγ, τριγώνου ἐφαρμοττομένου τῷ δεζ, ἐφαρμοσθήσεται καὶ ἡ πρὸς τῷ α, γωνία τῇ πρὸς τῷ δ, ὥστε καὶ ἡ αβ, πλευρὰ ἐφαρμοσθήσεται τῇ δε, πλευρᾷ, καὶ ἡ αγ, τῇ δζ, κατὰ τὸ ιγ΄. ἀξίωμα. τούτων δ᾽ οὕτω ἐκκειμένων, ἀνάγκη ἐφαρμοσθῆναι καὶ τὴν βγ, τῇ εζ. εἰ γὰρ μὴ, ἢ ἐντὸς ὡς ἡ εηζ, πεσεῖται, ἢ ἐκτὸς ὡς ἡ εθζ. καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ ἄτοπον κατὰ τὸ ιβ΄. ἀξίωμα. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς καὶ τὰ ἑξῆς, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Πέμπτη. Θεώρημα.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

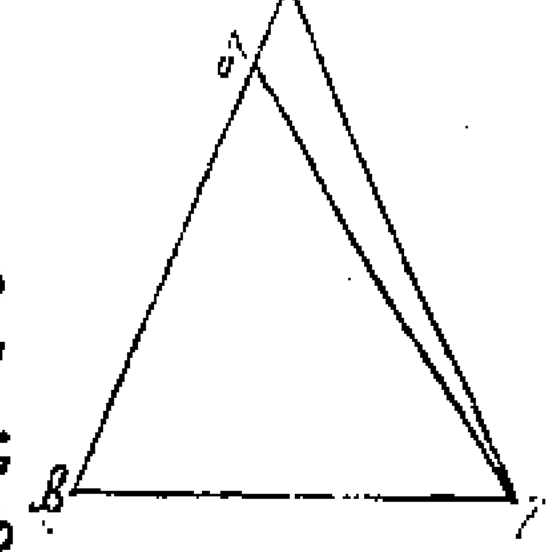
Τριγώνου ἤδη τοῦ αβγ, ἰσοσκελοῦς, λέγω, ὅτι αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι, αἱ ὑπὸ αβγ, αγβ. ἴσαι εἰσί. καὶ ἐξαγομένων τῶν αβ, αγ, πλευρῶν πρὸς τὰ δ, καὶ ε, ἔσονται πάντως ἴσαι καὶ αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν, αἱ ὑπὸ βγε, γβδ. εἰλημμένων γὰρ τῶν βζ, γη, ἴσων, καὶ τῶν βη, γζ, ἠγμένων εὐχερῶς ἄμφω δειχθήσεται. Ἐπεὶ γὰρ τῶν αβη, αγζ, τριγώνων αἱ δύο πλευραὶ αβ, αη, ἴσαι εἰσί, δυσὶ ταῖς αγ, αζ, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ ἡ πρὸς τῷ α, γωνία κοινὴ, ἄρα καὶ αἱ βη, γζ, βάσεις ἴσαι ἔσονται κατὰ τὴν ἀνωτέρω. καὶ ἡ μὲν ὑπὸ αβη, γωνία τῇ ὑπὸ αγζ, ὁμοίως ἴση. ἡ δὲ ὑπὸ βηα, τῇ ὑπὸ γζα. αὖθις ἐπεὶ τῶν βγη, γβζ, τριγώνων αἱ δύο πλευραὶ βζ, ζγ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς γη, ηβ, καὶ ἡ πρὸς τῷ ζ, γωνία τῇ πρὸς τῷ η, ὡσαύτως ἴση· ἔστι δ᾽ ἔτι καὶ ἡ βγ, βάσις κοινὴ, ἄρα καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον ὅλῳ τῷ τριγώνῳ ἰσόν ἐστι κατὰ τὴν ἀνωτέρω. καὶ ἡ μὲν ὑπὸ γβζ, γωνία τῇ ὑπὸ βγη, ἴση, αἵτινές εἰσιν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν, ἡ δὲ ὑπὸ βγζ, τῇ ὑπὸ γβη. προδέδεικται δὲ εἶναι καὶ ἡ ὑπὸ αβη, ἴση τῇ ὑπὸ αγζ. ἀφαιρεθείσης ἄρα ἀπὸ μὲν τῆς αβη, τῆς γβη, ἀπὸ δὲ τῆς αγζ, τῆς βγζ, ἐγκαταλειφθήσονται κατὰ τὸ η. ἀξίωμα, καὶ αἱ ὑπὸ αβγ, καὶ αγβ, γωνίαι ἴσαι, καὶ αὗταί εἰσιν αἱ πρὸς τῇ βάσει. τῶν ἰσοσκελῶν ἄρα τριγώνων καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 1. Fig. 15.



Πρότασις Ἕκτη. Θεώρημα.

Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.



Ἔστωσαν δὴ τριγώνου τοῦ αβγ, αἱ δύο γωνίαι, ἥτε ὑπὸ αβγ, καὶ ἡ ὑπὸ αγβ, ἴσαι. λέγω, ὅτι καὶ αἱ τούτων ὑποτείνουσαι αἱ αβ, αγ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. εἰ γὰρ μὴ, ἡ ἑτέρα αὐτῶν μείζων ἔσται. ἔστω παραδείγματος χάριν, ἡ αβ, μείζων τῆς αγ. καὶ κατὰ τὴν γ΄. τοῦ παρόντος ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς αβ, ἡ δβ, ἴση τῇ αγ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δγ. τὰ δύο ἄρα τρίγωνα δβγ, αγβ, ἐπείπερ ἔχουσι τὰς δύο πλευρὰς δβ, βγ, ἴσας δυσὶ ταῖς αγ, γβ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ δβγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ αγβ, ἴσην, ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται κατὰ τὴν δ΄. τοῦ αὐτοῦ. ὅπερ ἄτοπον κατὰ τὸ θ΄. ἀξίωμα. ἐὰν ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι καὶ τ'ξ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

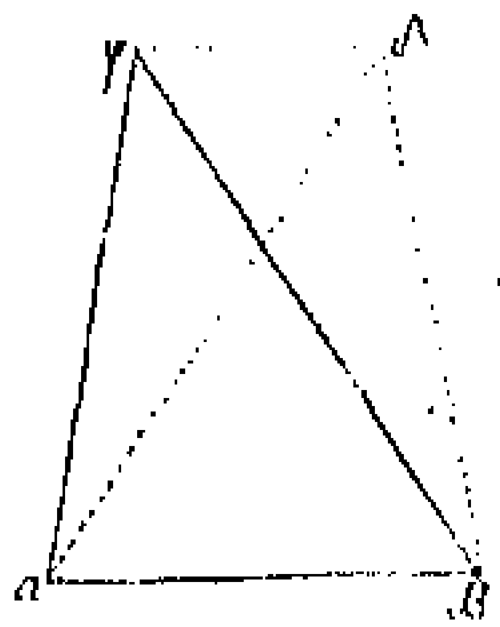
Ἐκ τούτου δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι πᾶν τρίγωνον ἰσόπλευρον, καὶ ἰσογώνιόν ἐστι, καὶ τὸ ἰσογώνιον, ἰσόπλευρον.

Πρότασις Ἑβδόμη. Θεώρημα.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις, ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, οὐ συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.

Ἐπὶ τῆς αβ, τοίνυν εὐθείας, ἐφ' ἧς συνεστήκασιν αἱ γα, γβ. ἀδύνατον συσταθῆναι ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς γα, γβ, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, πρὸς ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ἐκείναις. εἰ γὰρ δυνατὸν συνεστάθωσαν αἱ δα, δβ. πρὸς ἄλλῳ σημείῳ τῷ δ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐφ' ἃ καὶ αἱ γα, γβ, εἰσί, τὰ αὐτὰ ἔχουσαι ἐκείναις πέρατα τὰ α, καὶ β. καὶ ἔστω ἡ μὲν δα, ἴση τῇ γα, ἡ δὲ δβ, τῇ βγ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γδ. καὶ ἐπεὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ἡ μὲν δα, ἴση ἐστὶ τῇ γα, ἡ δὲ δβ, τῇ γβ. πάντως γε τὰ γαδ, γβδ, τρίγωνα ἰσοσκελῆ εἰσι, καὶ κατὰ τὴν ε΄. τοῦ παρόντος, καὶ ἡ μὲν ὑπὸ αγδ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αδγ, ἡ δὲ ὑπὸ βδγ, τῇ ὑπὸ βγδ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ βδγ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ αδγ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ βγδ, ἡ ἴση τῇ ὑπὸ βδγ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ αδγ. ἴση δὲ τῇ ὑπὸ αδγ, δέδεικται ἡ ὑπὸ αγδ. ἄρα ἡ ὑπὸ βγδ, μείζων ἐστὶ καὶ τῆς ὑπὸ αγδ, τὸ μέρος τοῦ ὅλου, ὅπερ ἄτοπον κατὰ τὸ θ΄. ἀξίωμα. ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἄρα εὐθείαις δυσὶ καὶ τ'ξ.

Eucl. Lib. 1. Fig. 16.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

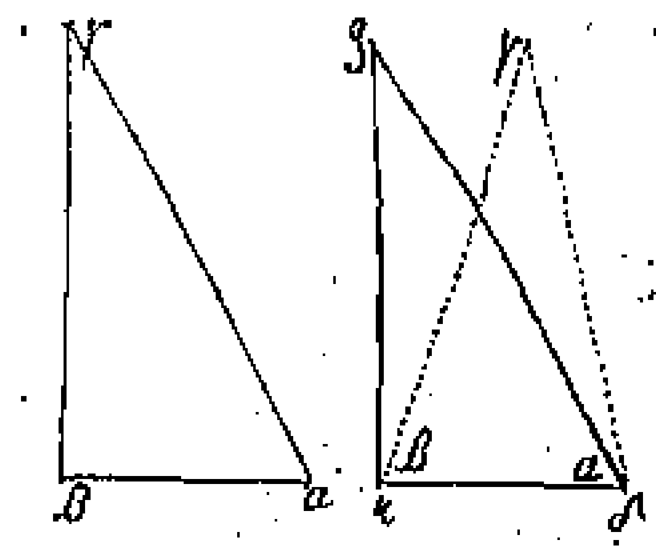
Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι δύο τρίγωνα ἴσα, ἰσόπλευρα, ἢ ἰσοσκελῆ οὐ δυνατὸν συσταθῆναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως, καὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Πρότασις Η΄. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Τρίγωνα ἤδη τὰ αβγ. δεζ, ἐχέτωσαν τὴν μὲν γα, πλευρὰν ἴσην τῇ ζδ. τὴν δὲ γβ, τῇ ζε, καὶ τὴν αβ, βάσιν τῇ δε, βάσει. λέγω, ὅτι τὰ αὐτὰ τρίγωνα ἔχουσι καὶ τὴν πρὸς τῷ γ, γωνίαν, ἴσην τῇ πρὸς τῷ ζ. καὶ ὅλον τὸ αβγ, τρίγωνον, ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ δεζ. τριγώνῳ. ἐφαρμοττομένης γὰρ τῆς αβ, βάσεως τοῦ αβγ, τριγώνου ἐπὶ τῆς δε, πεσεῖται τὸ μὲν α, πέρας ἐπὶ τῷ δ, τὸ δὲ β, ἐπὶ τῷ ε, καὶ ἑπομένως ἡ αγ, ἐφαρμοσθήσεται ἐπὶ τῆς δζ, ἴσης αὐτῇ, καὶ ἡ γβ, πλευρὰ ἐπὶ τῆς εζ. ὥστε καὶ ἡ πρὸς τῷ γ, γωνία ἐφαρμοσθήσεται τῇ πρὸς τῷ ζ. εἰ γὰρ μή, ἀλλ' ἡ μὲν πρὸς τῷ γ, πρὸς ἄλλῳ ἔσται σημείῳ, ἡ δὲ πρὸς τῷ ζ, πρὸς ἄλλῳ, συσταθήσονται πάντως ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας αβ, ἢ δε, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις, δὸς εἰπεῖν, δζ, εζ, ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι αἱ αγ, βγ, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. ὅπερ ἄτοπον κατὰ τὴν ἀνωτέρω. ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς καὶ τὰ ἑξῆς.

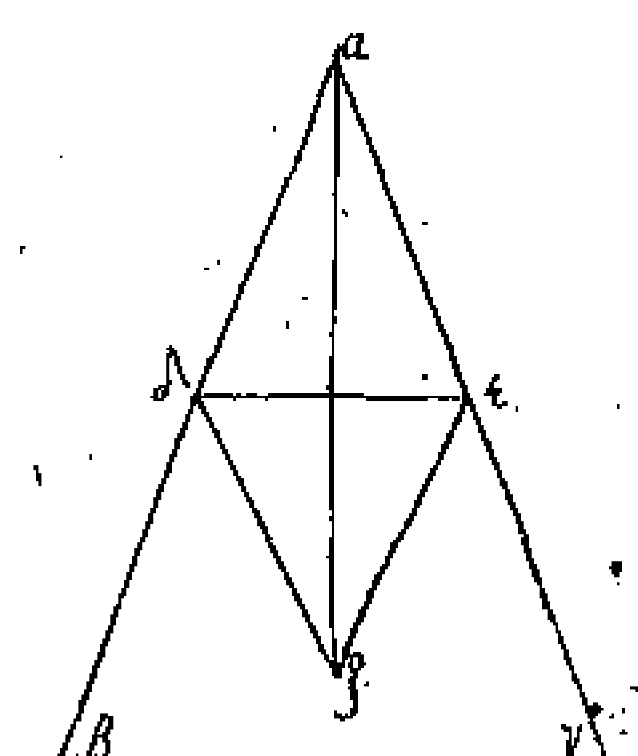
Eucl. Lib. 1. Fig. 17.



Πρότασις Θ΄. Πρόβλημα.

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν.

Ἔστω οὖν δίχα τεμεῖν τὴν ὑπὸ βαγ, γωνίαν, καὶ ληφθήτωσαν ἴσα διαστήματα τὰ αδ, αε. ἐπιζευγνυμένης δὲ τῆς δε, εὐθείας, συνεστάθω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ δζε, κατὰ τὴν α. εἶτα ἐπεζεύχθω ἡ αζ, καὶ διαιρεθήσεται δίχα ἡ ὑπὸ βαγ, δοθεῖσα γωνία. τὰ γὰρ δαζ, καὶ εαζ, τρίγωνα ἴσα εἰσὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω, καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν ὑποτεινομένας γωνίας ἴσας ἔχουσιν. ὥστε ἡ ὑπὸ δαζ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εαζ, διὰ τὸ καὶ τὴν δζ, ἴσην εἶναι τῇ εζ. ἡ δοθεῖσα ἄρα γωνία δίχα τέτμηται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

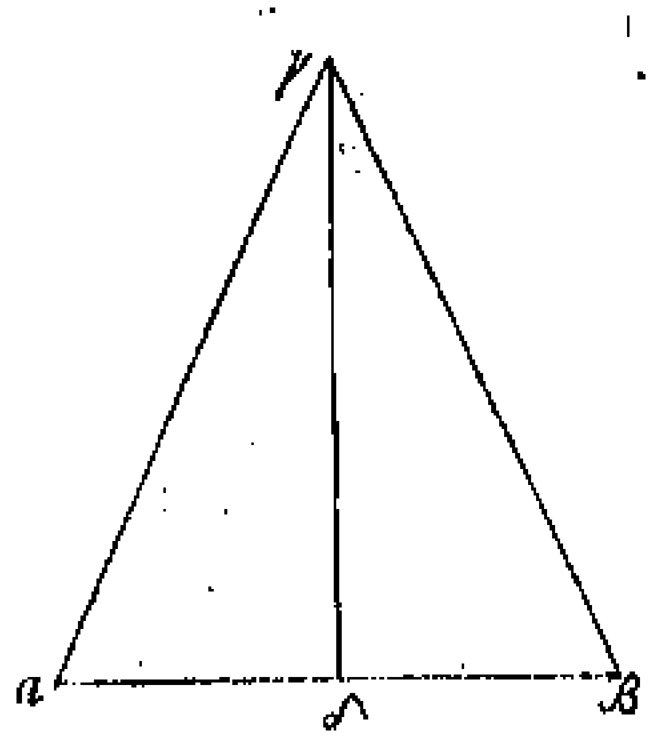


Πρότασις Ι′. Πρόβλημα.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

Ἔστω δὴ δίχα τεμεῖν τὴν αβ, πεπερασμένην εὐθεῖαν, καὶ συνεστάθω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον, διὰ τῆς α′. τὸ αγβ. εἶτα διαιρεθήτω ἡ πρὸς τῷ γ, γωνία δίχα, διὰ τῆς ἀνωτέρω, τῇ γδ, εὐθείᾳ, καὶ τμηθήσεται πάντως δίχα καὶ ἡ αβ. ἐπεὶ γὰρ τὰ αγδ βγδ, τρίγωνα ἔχουσι τὰς δύο πλευρὰς αγ, γδ, ἴσας δυσὶ ταῖς βγ, γδ, καὶ τὴν ὑπὸ αγδ, γωνίαν, ἴσην τῇ ὑπὸ βγδ, ἔσται δήπουθεν ἴση καὶ βάσις ἡ αδ, βάσει τῇ βδ, κατὰ τὴν δ′. ἡ δοθεῖσα ἄρα αβ, εὐθεῖα δίχα τέτμηται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

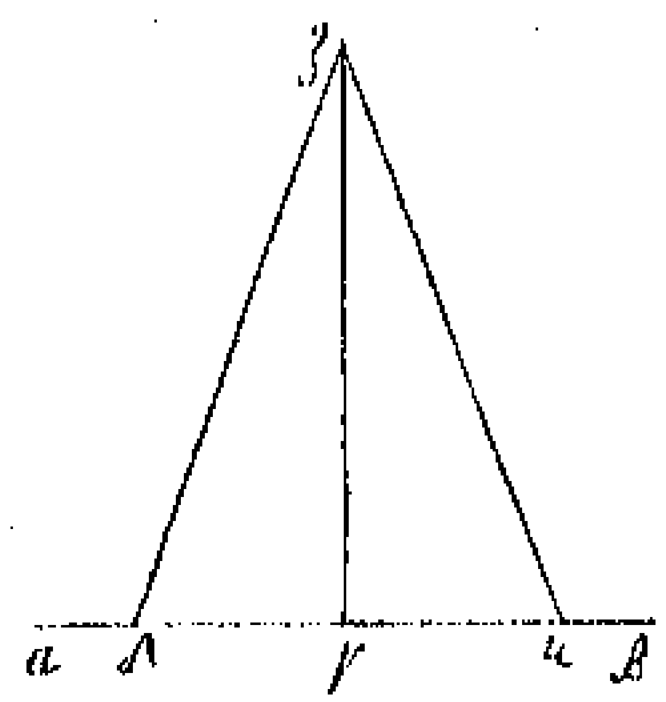
Eucl. Lib. 1. Fig. 18.



Πρότασις ΙΑ′. Πρόβλημα.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς γωνίας, εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω δὴ ἡ αβ, εὐθεῖα, καὶ σημεῖον πρὸς αὐτῇ τὸ γ, ἀφ' οὗ τὴν κάθετον δέον ἀνεστάθαι. ληφθήτωσαν ἐπὶ τῆς αβ, τὰ γδ, γε, διαστήματι ἴσα, καὶ συνεστάθω διὰ τῆς α′. τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐπὶ τῆς δε, τὸ δζε. εἶτα ἐπεζεύχθω ἡ ζγ, ἣν δὴ λέγω κάθετον εἶναι. τῶν γὰρ δζγ, εζγ, τριγώνων τὰς δγ, γζ, πλευρὰς ἴσας ἐχόντων ταῖς εγ, γζ, καὶ τὴν ζδ, βάσιν τῇ ζε, ἔσται καὶ ἡ ὑπὸ δγζ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ εγζ, κατὰ τὴν η′. ἄρα κατὰ τὸν ι′. ὅρον, ἡ ζγ, κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς αβ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Πρότασις ΙΒ′. Πρόβλημα.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἢ ἄπειρον, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω δὴ ἐπὶ τὴν αβ, δοθεῖσαν εὐθεῖαν κάθετον ἀγαγεῖν ἀπὸ τοῦ γ, σημείου, τοῦ μὴ ἐπ' αὐτῆς. εἰλήφθω ἐπὶ τῆς αβ, εὐθείας τυχὸν σημεῖον τὸ ε. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ γ, διαστήματι δὲ τῷ γε, γεγράφθω κύκλος ὁ εζδη, δίχα δὲ τῆς δε, τμηθείσης κατὰ τὸ θ, διὰ τῆς ι′. ἐπεζεύχθω ἡ γθ, καὶ αὕτη κάθετος ἔσται ἐπὶ τῆς αβ. τῶν γὰρ

γδ,

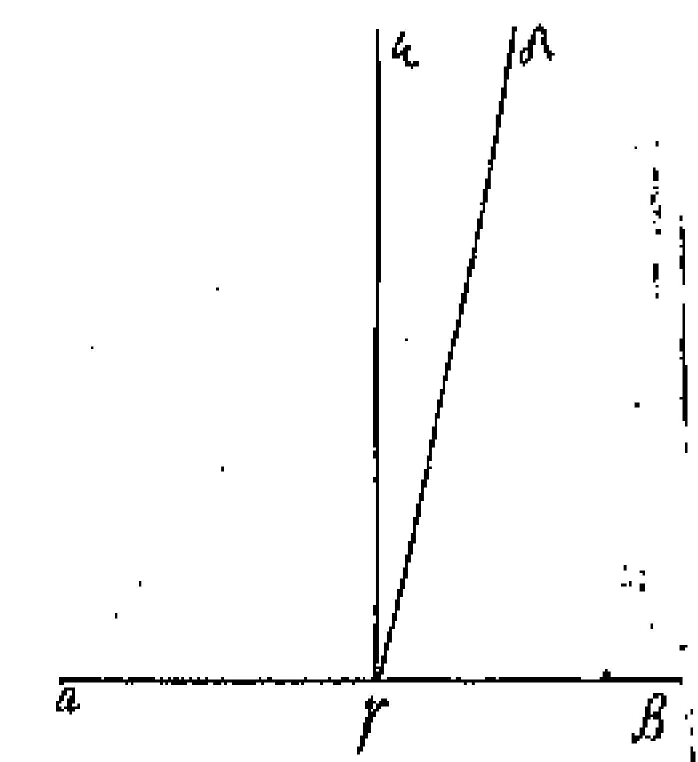
γδ, γε, εὐθειῶν ἐπιζευγνυμένων, ἐπεὶ ἡ δθ, ἴση ἐστὶ τῇ θε, ἡ δὲ θγ, κοινή, καὶ ἡ γδ, ἴση τῇ γε, κατὰ τὸν ιε′. ὅρον, πάντως γε τὰ δθγ, εθγ, τρίγωνα ἴσα ἐστὶ κατὰ τὴν η′. καὶ ἡ ὑπὸ δθγ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ εθγ. ὥστε ἡ γθ, κάθετός ἐστι κατὰ τὸν ι′. ὅρον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ΙΓ′. Θεώρημα.

Ὡς ἂν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθάς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.

Eucl. Lib. 1. Fig. 19.

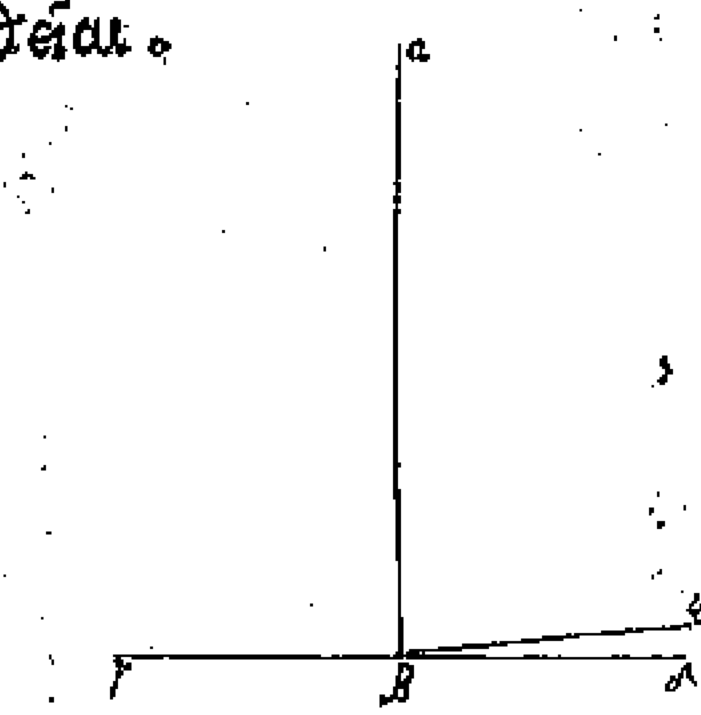
Ἐπὶ τῆς αβ, ἤδη εὐθείας σταθεῖσα ἡ γδ, εἰ μὲν τὰς ὑπὸ δγα, δγβ, γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιήσῃ, κάθετος δήπουθεν ἔσται ἐπὶ τῆς αβ, κατὰ τὸν ι′. ὅρον, καὶ αἱ ὑπὸ δγα, δγβ, γωνίαι ὀρθαί. εἰ δὲ ἀνίσους, ἀχθήτω κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, ἡ γε, ἀπὸ τοῦ γ, σημείου κατὰ τὴν ια′. καὶ δειχθήσονται αἱ ὑπὸ δγα, δγβ, γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. ἐπεὶ γὰρ αἱ ὑπὸ βγδ, καὶ δγα, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ ταῖς τρισὶ γωνίαις τῇ ὑπὸ βγδ, δγε, εγα, ὡς περιεκτικαὶ αὐτῶν, ταῖς δὲ τρισὶ ταύταις γωνίαις ἴσαι εἰσὶν διὰ τὰ αὐτά, καὶ αἱ ὑπὸ βγε, εγα, δύο ὀρθαί. πάντως γε κατὰ τὸ α′. ἀξίωμα αἱ ὑπὸ βγδ, δγα, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ βγε, εγα, δυσὶν ὀρθαῖς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Πρότασις ΙΔ′. Θεώρημα.

Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ περὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Πρὸς τῇ αβ, ἤδη εὐθείᾳ μὴ περὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι αἱ γβ, δβ, συντρεχέτωσαν πρὸς τῷ β, σημείῳ, ὥστε ποιεῖν τὰς ὑπὸ αβγ, αβδ, γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, καὶ ἔσονται αὗται ἐπ' εὐθείας. εἰ γὰρ μή, ἔστω ἡ εβ, ἐπ' εὐθείας τῇ γβ. καὶ ἐπεὶ ἐπὶ τῆς γβε, εὐθείας πέπτωκεν ἡ αβ, πάντως γε αἱ ὑπὸ γβα, αβε, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς κατὰ τὴν ἀνωτέρω. ἦσαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ δβα, αβγ, ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα κατὰ τὸ α′. ἀξίωμα αἱ ὑπὸ γβα, αβε, ἴσαι εἰσὶ



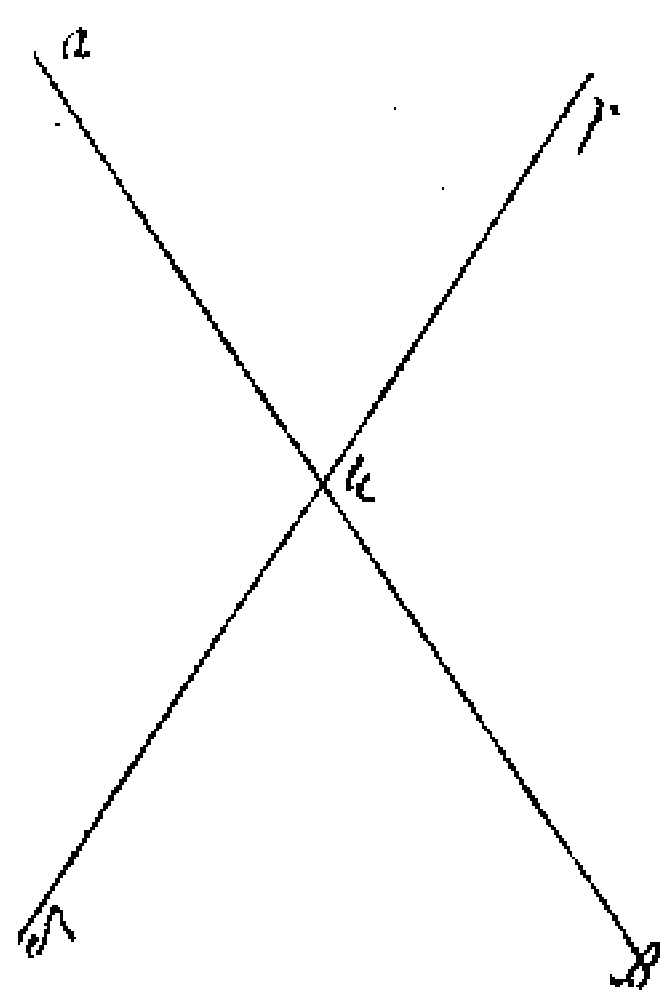
 ταῖς

ταῖς ὑπὸ γβα, αβδ· κοινῆς δὲ ἀφαιρουμένης τῆς ὑπὸ γβα, ἐγκαταλείπεται καὶ ἡ ὑπὸ αβε, ἴση τῇ ὑπὸ αβδ· ὅπερ ἄτοπον κατὰ τὸ θ'. ἀξίωμα. ἄρα αἱ γβ, βδ, εὐθεῖαι ἐπ' εὐθείας ἀλλήλαις εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΕ'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιήσουσι.

Eucl. Lib. 1. Fig. 20.



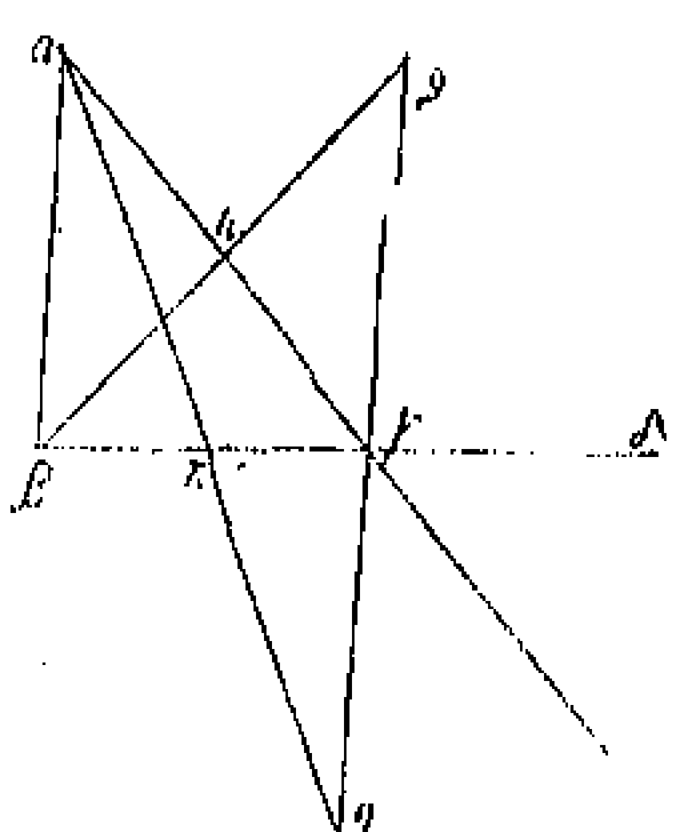
Τεμνέτωσαν ἤδη ἀλλήλας αἱ αβ, γδ, εὐθεῖαι κατὰ τὸ ε. λέγω, ὅτι αἱ κατὰ κορυφὴν αὐτῶν γωνίαι, αἵτε ὑπὸ αεδ, γεβ, καὶ αἱ ὑπὸ δεβ, αεγ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐπεὶ γὰρ αἱ αεδ, δεβ, γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν ιγ'. εἰσὶ δὲ διὰ τῆς αὐτῆς καὶ αἱ δεβ, βεγ, ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς, πάντως γε αἱ ὑπὸ αεδ, δεβ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ δεβ, βεγ, κατὰ τὸ α'. ἀξίωμα. κοινῆς δὲ ἀφαιρουμένης τῆς ὑπὸ δεβ, ἐγκαταλείπονται ἴσαι ἀλλήλαις αἱ ὑπὸ αεδ, βεγ, κατὰ τὸ γ'. ἀξίωμα. τὸν αὐτὸν ἔτι τρόπον δειχθήσονται καὶ αἱ ὑπὸ δεβ, αεγ, ἴσαι. ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωσι καὶ τὰ ἑξῆς.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ὁσαιδηποτοῦν εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς πρὸς τῇ τομῇ γωνίας τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσι.

Πρότασις Ιϛ'. Θεώρημα.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν ἐκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστί.



Τῆς βγ, ἤδη πλευρᾶς τοῦ αβγ, τριγώνου ἐκβληθείσης ἐπὶ τὸ δ, ἡ ὑπὸ αγδ, ἐκτὸς αὐτοῦ γωνία μείζων ἔσται ἑκατέρας τῶν ὑπὸ γαβ, αβγ, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον. τῆς γὰρ αγ, δίχα διαιρεθείσης κατὰ τὸ ε, διὰ τῆς ι. ἐξαχθήτω ἡ βε, ἐπὶ τὸ θ. ὥστε τὴν βε, ἴσην εἶναι τῇ εθ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ θγ. καὶ ἐπεὶ τῶν εαβ, εγθ, τριγώνων αἱ δύο πλευραὶ αε, εβ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς γε, εθ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αεβ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ γεθ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, πάντως γε καὶ ἡ αβ, βάσις ἴση ἐστὶ τῇ θγ, βάσει κατὰ τὴν δ'. καὶ αἱ λοιπαὶ αὐ-

τῶν γωνίαι ταῖς λοιπαῖς ἴσαι εἰσιν. ἔστιν ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ εβα, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ εθγ, ἡ δὲ ὑπὸ εαβ, τῇ ὑπὸ εγθ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ αγδ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ εγθ, ἄρα ἡ ὑπὸ αγδ, μείζων ἐστὶ καὶ τῆς ὑπὸ εαβ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται ἡ ὑπὸ αγδ, μείζων καὶ τῆς ὑπὸ αβγ, δίχα τῆς βγ, διαιρεθείσης κατὰ τὸ η, καὶ τῆς αη, ἐπὶ τὸ ζ, ἐξαχθείσης, τῆς δὲ κατασκευῆς ὡς καὶ ἀνωτέρω γενομένης. παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν καὶ τὰ ἑξῆς.

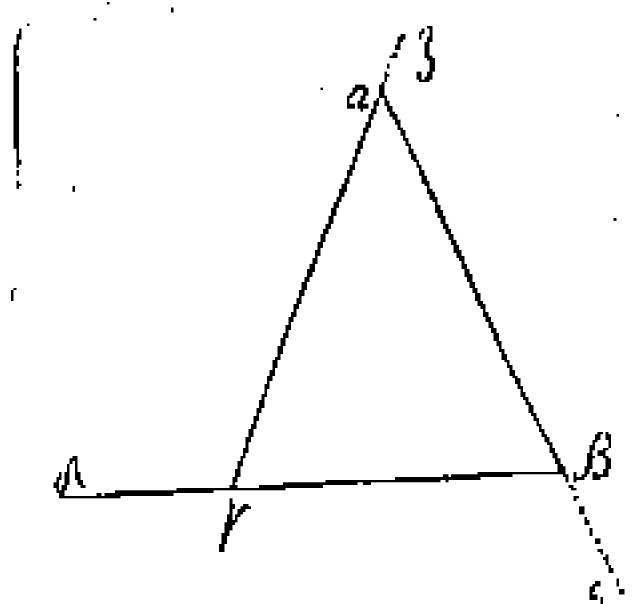
Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐπὶ τῆς εὐθείας μὴ δύνασθαι πλείονας εὐθείας ἴσας ἄγεσθαι, ἢ δύο μόνας.

Πρότασις ΙΖ'. Θεώρημα.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Eucl. Lib. 1. Fig. 21.



Τριγώνου ἤδη τοῦ αβγ, λέγω τὰς δύο γωνίας πάντῃ μεταλαμβανομένας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι. εἰ γὰρ ἡ βγ, πρὸς τὸ δ, ἀχθῇ, ἔσονται αἱ ὑπὸ αγβ, αβγ, ἐλάσσονες τῶν ὑπὸ αγδ, αγβ, διὰ τὸ τὴν μὲν ὑπὸ αγδ, μείζονα εἶναι τῆς ὑπὸ αβγ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, τὴν δὲ ὑπὸ αγβ, κοινήν. αἱ δὲ ὑπὸ αγδ, αγβ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν ιγ'. ἄρα αἱ ὑπὸ αγβ, αβγ, ἐλάσσονές εἰσι δύο ὀρθῶν. εἰ δὲ ἡ βα, ἀχθῇ κατὰ τὸ ε, δειχθήσεται τὸν αὐτὸν τρόπον, τὰς ὑπὸ γαβ, γβα, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι. ὡσαύτως δὲ καὶ τῆς γα, κατὰ τὸ ζ, ἀχθείσης, δειχθήσεται καὶ τὰς βαγ, βγα, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι. παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι καὶ τὰ ἑξῆς.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Α'. Ἐκ τούτου δῆλον, μὴ δύνασθαι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου δύο καθέτους πίπτειν.

Β'. Ἔτι παντὸς τριγώνου, εἴπερ αὖ ἡ μία τῶν γωνιῶν ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα τύχῃ, τὰς λοιπὰς ὀξείας εἶναι.

Γ'. Ἔτι ἐὰν ἐπί τινος εὐθείας εὐθεῖα σταθεῖσα γωνίας ἀνίσους ποιῇ, τὴν παρά τινος σημείου τῆς ἐφεστηκυίας εὐθείας πίπτουσαν κάθετον ἐπὶ τῆς ὑποκειμένης, πρὸς τὰ τῆς ὀξείας γωνίας πίπτειν μέρη.

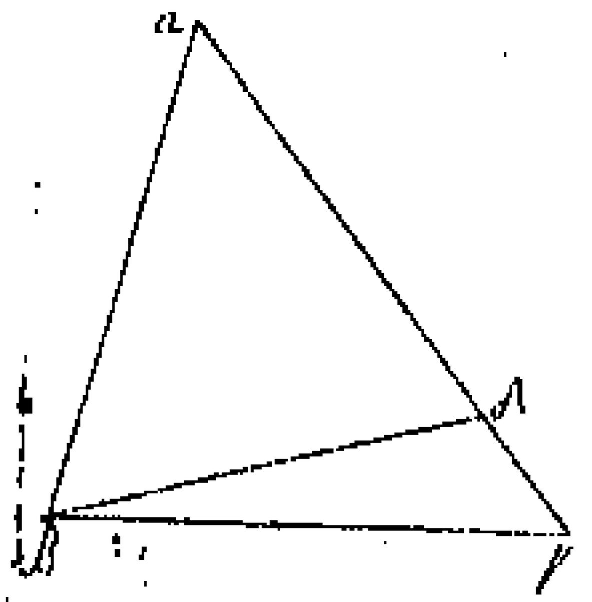
Δ'. Ἔτι τοῦ μὲν ἰσοπλεύρου τριγώνου πάσας τὰς γωνίας ὀξείας εἶναι, τοῦ δὲ ἰσοσκελοῦς τὰς δύο πρὸς τὴν βάσιν.

Πρότασις ΙΗ'. Θεώρημα.

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

Ἔστω δὴ τοῦ αβγ, τριγώνου ἡ αγ, πλευρὰ μείζων τῆς αβ, λέγω τὴν ὑπὸ αβγ, γωνίαν μείζονα εἶναι τῆς ὑπὸ αγβ. ἀφῃρήσθω γὰρ ἀπὸ τῆς αγ, ἴση τῇ αβ, ἡ αδ, κατὰ τὴν γ'. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ αβδ, αδβ, ἴσαι εἰσι κατὰ τὴν ε'. ἡ δὲ ὑπὸ αβγ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ αβδ, κατὰ τὸ θ'. ἀξίωμα. πάντως γε ἡ αὐτὴ ὑπὸ αβγ, μείζων ἐστὶν ἔτι καὶ τῆς ὑπὸ αδβ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ αδβ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ αγβ, κατὰ τὴν ις'. ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, πολλῷ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ αγβ. ὅπερ ἦν τὸ προτεθέν.

Eucl. Lib. 1. Fig. 22.



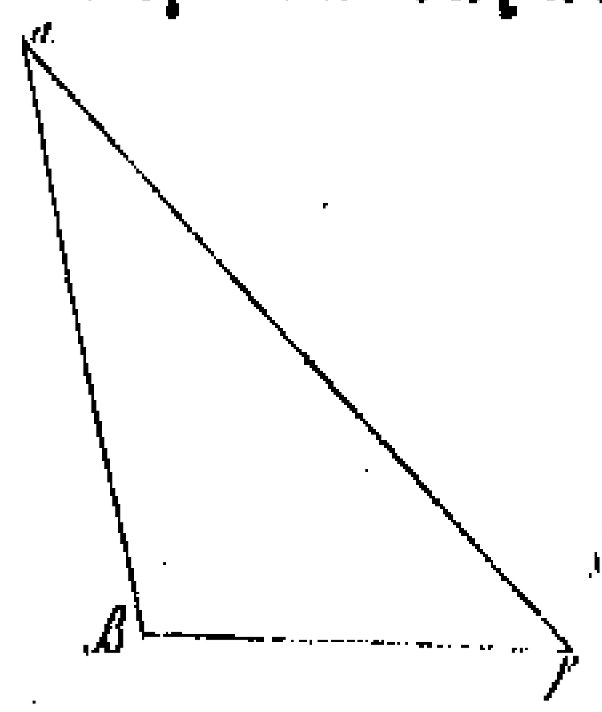
ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, τοῦ μὲν σκαληνοῦ τριγώνου πάσας τὰς γωνίας ἀνίσους εἶναι, τοῦ δὲ ἰσοπλεύρου ἴσας.

Πρότασις ΙΘ'. Θεώρημα.

Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

Ἔστω δὴ τοῦ αβγ, τριγώνου ἡ ὑπὸ αβγ, γωνία μείζων τῆς ὑπὸ βγα. λέγω, ὅτι καὶ ἡ αγ, μείζων ἐστὶ τῆς αβ. εἰ γὰρ μή, ἢ ἴση ἔσται, ἢ ἐλάττων. εἰ μὲν οὖν ἴση, ἔσται ἴση καὶ ἡ ὑπὸ αβγ, γωνία τῇ ὑπὸ αγβ, κατὰ τὴν ε'. ὑπετέθη δὲ μείζων, ἄτοπον ἄρα. εἰ δὲ ἡ αγ, ἐλάττων εἴη τῆς αβ, ἐλάττων ἔσται καὶ ἡ ὑπὸ αβγ, τῆς ὑπὸ αγβ, διὰ τῆς ἀνωτέρω, ὅπερ πολλῷ μᾶλλον ἄτοπον, ὑπετέθη γὰρ ἴση. παντὸς ἄρα τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα καὶ τὰ ἑξῆς.



ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

Α'. Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι τῶν ἀφ' ἑνὸς σημείου προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐπί τινος εὐθείας, ἡ μὲν κάθετος ἐλαχίστη ἐστίν, ἀεὶ δὲ ἡ ἀπώτερον τῆς ἐγγύτερον μείζων.

Β'. Ἔτι ἐν μὲν τοῖς ὀρθογωνίοις ἡ τὴν ὀρθὴν ὑποτείνουσα γωνίαν μείζων ἐστὶ τῶν λοιπῶν, ἐν δὲ τοῖς ἀμβλυγωνίοις ἡ τὴν ἀμβλεῖαν.

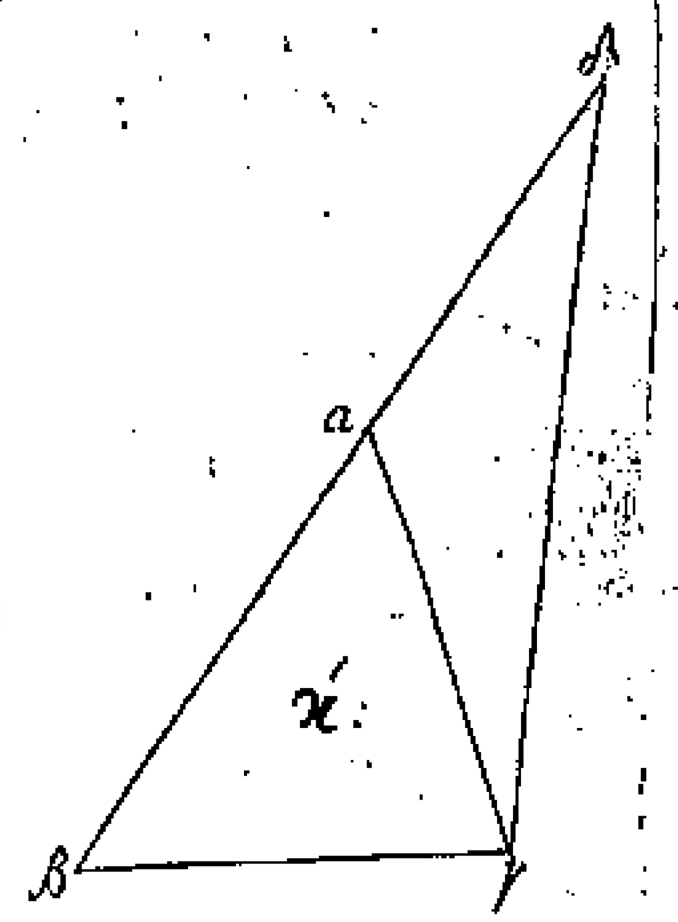
Πρότασις Κ'. Θεώρημα.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἔστω δὴ τρίγωνον τὸ αβγ, λέγω, τούτου τὰς αβ, αγ, πλευρὰς μείζονας εἶναι τῆς βγ. ἤχθω γὰρ ἡ βα, ἐπὶ τὸ δ, ὥστε εἶναι τὴν αδ, ἴσην, τῇ αγ, καὶ ἐπεζεύχ-

ζεύχθω ἡ δγ. Ἐπεὶ οὖν ἡ αδ, ἴση ἐστὶ τῇ αγ, πάντως γε αἱ ὑπὸ αγδ, αδγ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν ε'. τοῦ παρόντος. τῆς δὲ ὑπὸ αγδ, μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ βγδ, ἄρα ἡ αὐτὴ βγδ, μείζων ἐστὶ καὶ τῆς αδγ. ὥστε κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἡ βδ, πλευρά, μείζων ἐστὶ τῆς βγ. ἀλλὰ τῇ βδ, ἴσαι εἰσὶ συναμφότεραι αἱ βα, αγ, ἄρα καὶ αἱ βα, αγ, μείζονές εἰσι τῆς βγ. ὅπερ ἦν τὸ προτεθέν. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται, καὶ τὰς βγ, γα, μείζους εἶναι τῆς αβ, τὰς δὲ αβ, βγ, τῆς αγ. τῆς κατασκευῆς ὡς δεῖ γενομένης, κατὰ τὸν προειρημένον τρόπον.

Eucl. Lib. 1. Fig. 23.



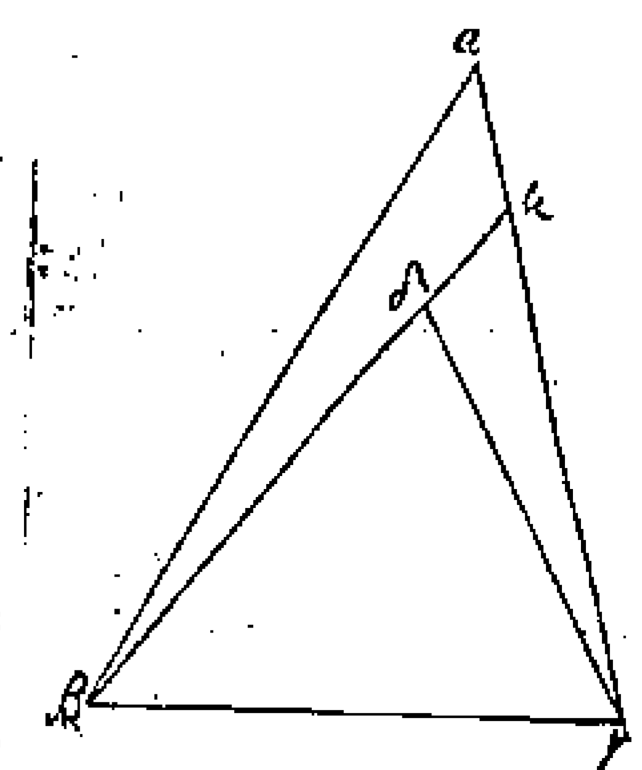
ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι παντὸς τετραπλεύρου ἡ διαγώνιος διάμετρος, ἐλάττων ἐστὶ τῶν ἑκατέρωθεν δύο πλευρῶν.

Πρότασις ΚΑ'. Θεώρημα.

Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσιν.

Τοῦ αβγ, ἤδη τριγώνου, ἐπὶ τῆς βγ, πλευρᾶς, ἀπὸ τῶν περάτων βγ, συνεστάθωσαν δύο εὐθεῖαι ἐντὸς αἱ βδ, γδ. λέγω, ταύτας ἐλάττονας μὲν εἶναι τῶν βα, αγ, μείζονα δὲ γωνίαν τὴν ὑπὸ βδγ, περιέχειν, τῆς ὑπὸ βαγ. διήχθω γὰρ ἡ βδ, ἐπὶ τὸ ε, καὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω δήπουθεν αἱ βα, αε, πλευραὶ τοῦ αβε, τριγώνου μείζονές εἰσι τῆς βε, κοινῆς δὲ τῆς εγ, προσκειμένης, αἱ βα, αγ, μείζονές εἰσι τῶν βε, εγ. ἐπεὶ δὲ καὶ τοῦ δεγ, τριγώνου αἱ δε, εγ, πλευραὶ μείζονές εἰσι τῆς δγ. κοινῆς δὲ προσκειμένης τῆς βδ, πάντως γε αἱ γε, εβ, μείζονές εἰσι τῶν γδ, δβ. ἀλλὰ τῶν γε, εβ, μείζονες ἐδείχθησαν αἱ βα, αγ, ἄρα αἱ βα, αγ, πολλῷ μείζονές εἰσι τῶν βδ, δγ. ὅπερ ἐστὶ τὸ α'. Αὖθις τοῦ γεδ, τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία, ἡ ὑπὸ βδγ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ δεγ, κατὰ τὴν ις'. τοῦ παρόντος, ἡ δὲ ὑπὸ δεγ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαγ, κατὰ τὴν αὐτήν, ἡ βδγ, ἄρα γωνία πολλῷ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαγ. ὅπερ ἐστὶ τὸ β'. Ἐὰν τριγώνου ἄρα ἐπὶ μιᾶς καὶ τὰ ἑξῆς.



ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου συνάγεται μὴ δύνασθαι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἀπὸ τῶν αὐτῶν περάτων, πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη δύο τρίγωνα ὅμοια συνίστασθαι.

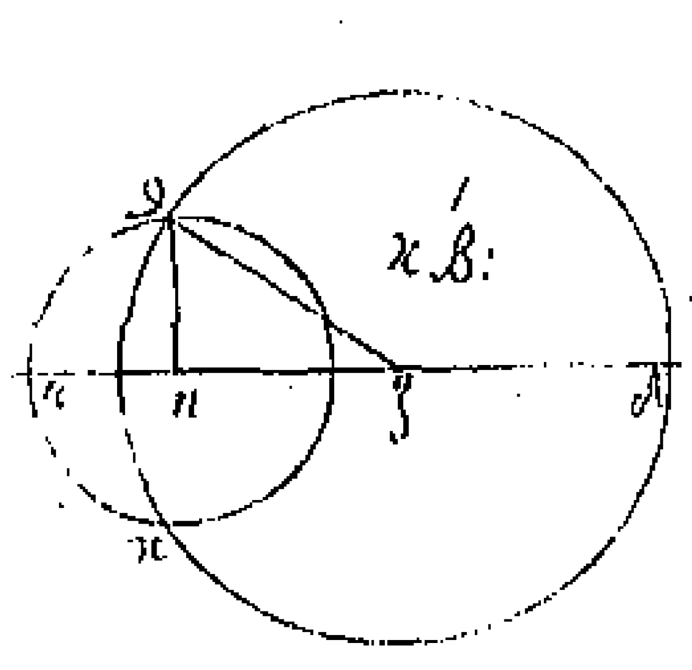
Πρό-

Πρότασις ΚΒ'. Πρόβλημα.

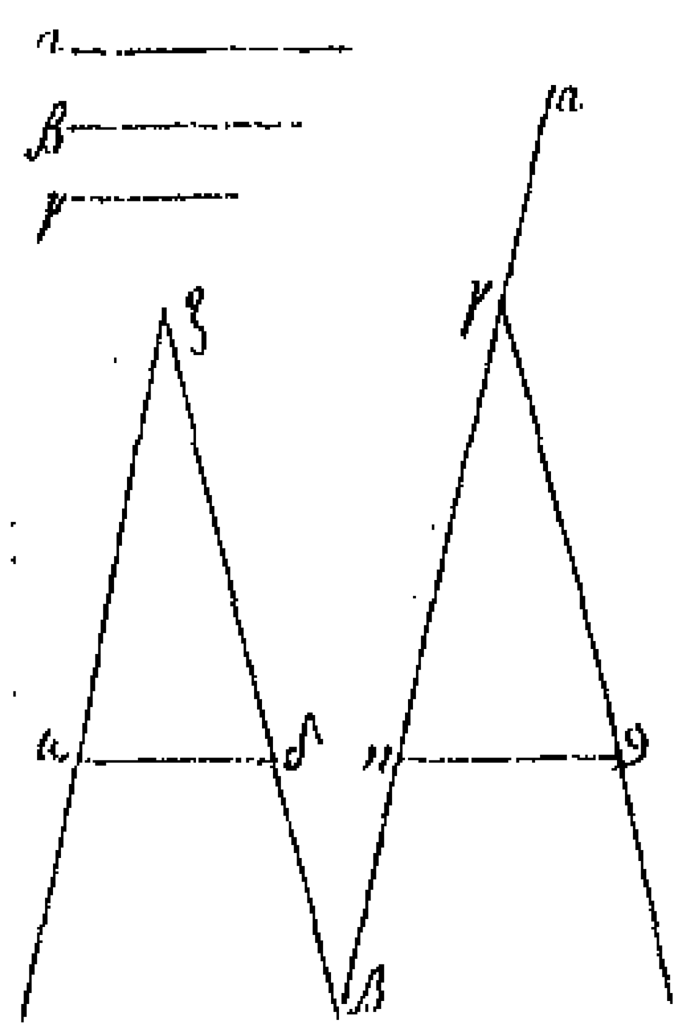
Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις, τρίγωνον συστήσασθαι. δεῖ δὴ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας, διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένας.

Ἐκ τριῶν ἤδη εὐθειῶν ἴσων ταῖς α, β, γ, ἔστω τρίγωνον συστήσασθαι. ἐκκείσθω τοίνυν ἡ δε, καὶ ἐξ αὐτῆς τμηθήτω τῇ μὲν α, ἴση ἡ δζ, τῇ δὲ β, ἡ ζη, καὶ τῇ γ, ἡ ηε. καὶ κέντροις μὲν τοῖς ζ, η, διαστήμασι δὲ τοῖς ζδ, ηε, κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ δθκ, εθκ, τεμνόμενοι κατὰ τὰ θ, καὶ κ, σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θζ, θη. λέγω δὴ τοῦ ζθη, τριγώνου τὰς πλευρὰς εἶναι ἴσας ταῖς α, β, γ, δοθείσαις. ἡ γὰρ ζθ, ἴση ἐστὶ τῇ ζδ, κατὰ τὸν ιε'. ὅρον. κατὰ δὲ τὸ α'. ἀξίωμα καὶ τῇ α. ὡσαύτως ἡ ηθ, ἴση ἐστὶ τῇ ηε, κατὰ τὸν αὐτὸν ὅρον. ἡ δὲ ηε, εἴληπται ἴση τῇ γ, ἄρα κατὰ τὸ ῥηθὲν ἀξίωμα, ἡ ηθ, ἴση ἐστὶ τῇ γ. γέγονε δὲ καὶ ἡ ζη, ἴση τῇ β, ἄρα τοῦ ζθη, τριγώνου αἱ πλευραὶ ἴσαι εἰσὶ ταῖς α, β, γ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 1. Fig. 24.



Πρότασις ΚΓ'. Πρόβλημα.



Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ, ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

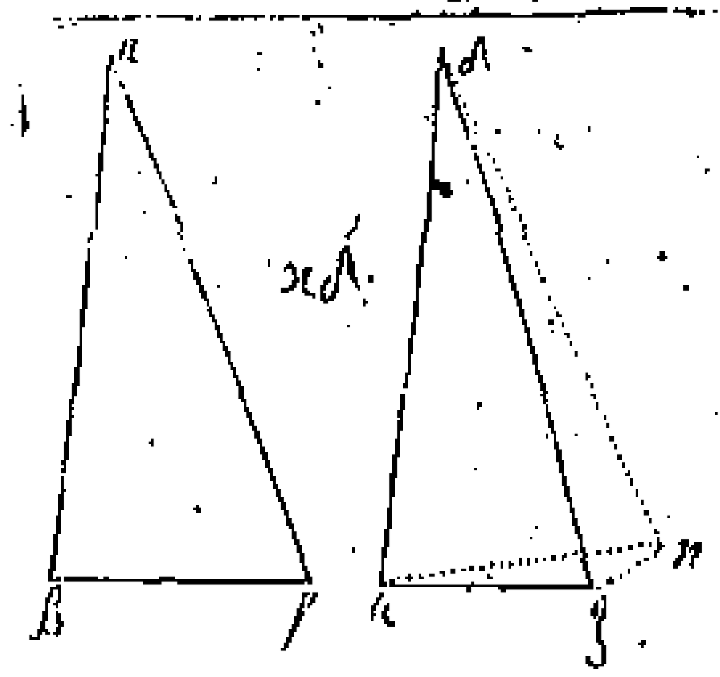
Ἔστω δὴ πρὸς τῇ αβ, δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ γ, πρὸς αὐτῇ σημείῳ, γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι, ἴσην τῇ ὑπὸ εζδ, δοθείσῃ. ληφθήτωσαν τοίνυν τὰ ζε, ζδ, διαστήματα, ὡς ἔτυχε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εδ. εἶτα συνεστάτω διὰ τῆς ἀνωτέρω ἐπὶ τῆς αβ, εὐθείας πρὸς τῷ γ, σημείῳ τρίγωνον, ἐκ τριῶν πλευρῶν ἴσων ταῖς δε, εζ, ζδ, τὸ γηθ. ὥστε τὴν μὲν γη, ἴσην εἶναι τῇ ζε, τὴν δὲ γθ, τῇ ζδ, καὶ τὴν ηθ, τῇ εδ. Ἐπεὶ οὖν τὰ εζδ, καὶ ηγθ, τρίγωνα ἔχουσι τὰς δύο πλευρὰς εζ, ζδ, ἴσας, δυσὶ ταῖς ηγ, γθ, καὶ τὴν εδ, βάσιν, βάσει τῇ ηθ, ἴσην, ἕξουσι πάντως γε κατὰ τὴν η'. καὶ τὴν ὑπὸ εζδ, γωνίαν, ἴσην τῇ ὑπὸ ηγθ. ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Πρότασις ΚΔ'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.

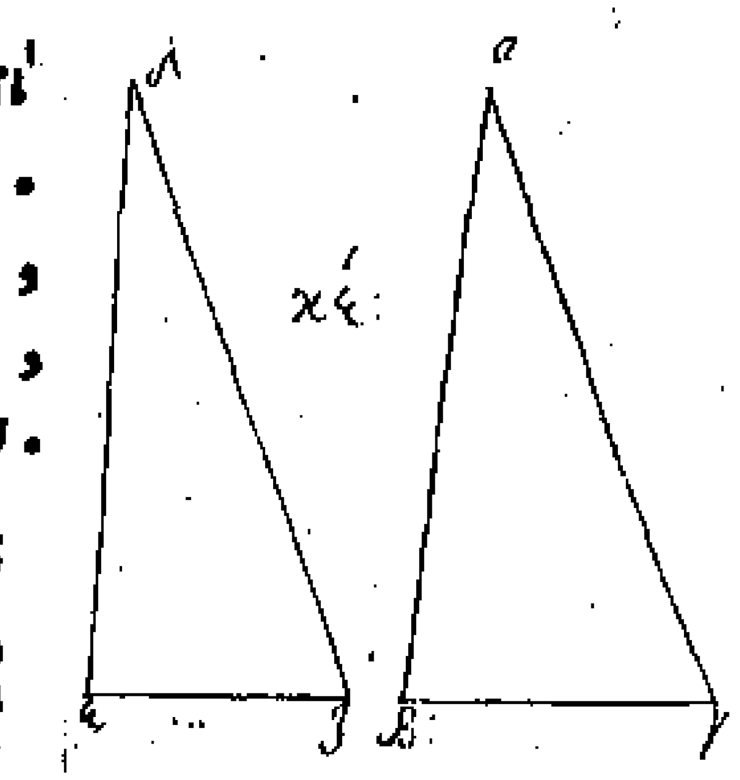
Τριγώνων ἤδη τῶν αβγ, δεζ, ἐχόντων τὰς δύο πλευρὰς αβ, αγ, ἴσας ταῖς δυσὶ πλευραῖς δε, δζ, τὴν μὲν αβ, τῇ δε, τὴν δὲ αγ, τῇ δζ, καὶ τῆς ὑπὸ βαγ, γωνίας μείζονος οὔσης, τῆς ὑπὸ εδζ. λέγω καὶ τὴν βγ, βάσιν, μείζονα εἶναι τῆς εζ, βάσεως. κατασκευασθήτω τοίνυν τὸ εδη, τρίγωνον ἴσον τῷ βαγ, κατὰ τὴν κβ'. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζη. καὶ ἐπεὶ ἡ δη, ἴση γέγονε τῇ αγ, ἦν δὲ καὶ ἡ δζ, ἴση τῇ αὐτῇ αγ. πάντως γε αἱ δη, δζ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸ α'. ἀξίωμα. καὶ ἡ ὑπὸ δηζ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ δζη, κατὰ τὴν ε'. ἡ δὲ ὑπὸ δηζ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ζηε, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ δζη, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ζηε. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ δζη, μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ εζη, ἄρα ἡ ὑπὸ εζη, πολλῷ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ζηε. ὥστε κατὰ τὴν ιθ'. ἡ εη, ὑποτείνουσα, μείζων ἐστὶ τῆς εζ, ἡ δὲ εη, ἴση ἐστὶ τῇ βγ, ἄρα καὶ ἡ βγ, μείζων ἐστὶ τῆς εζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 1. Fig. 25.



Πρότασις ΚΕ'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.



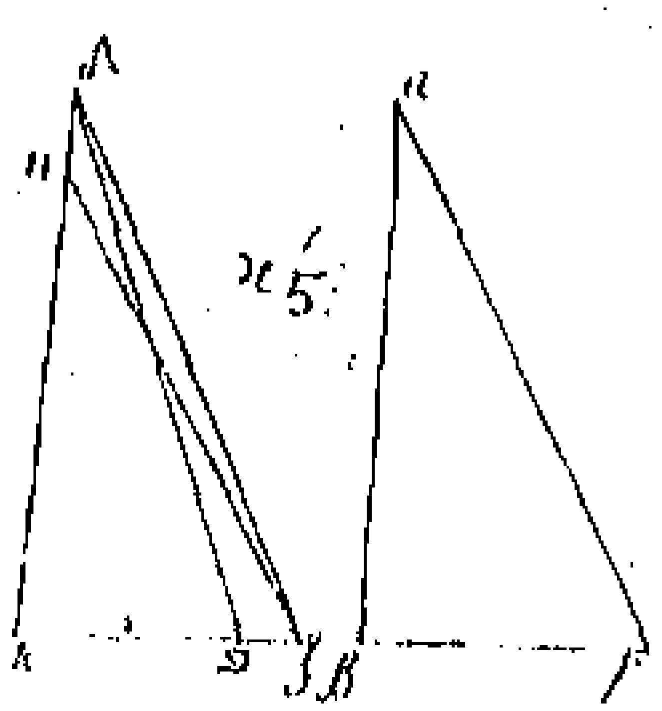
Ἐχέτωσαν ἤδη τὰ αβγ, εδζ, τρίγωνα πλευρὰς τὰς αβ, αγ, ἴσας, πλευραῖς ταῖς δε, εζ, ἡ δὲ βγ, βάσις μείζων ἔστω τῆς εζ, βάσεως. λέγω καὶ τὴν ὑπὸ βαγ, γωνίαν μείζονα εἶναι τῆς ὑπὸ εδζ. εἰ γὰρ μή, ἢ ἴση ἔσται, ἤγουν ἐλάττων. εἰ μὲν οὖν ἴση ὑποτεθῇ ἡ ὑπὸ βαγ, τῇ ὑπὸ εδζ, ἴση ἔσται καὶ ἡ βγ, βάσις τῇ εζ, βάσει, κατὰ τὴν δ'. ὅπερ ἄτοπον, ὑπετέθη γὰρ καὶ μείζων. εἰ δὲ ἡ ὑπὸ βαγ, ὑποτεθῇ ἐλάττων τῆς ὑπὸ εδζ. ἐλάττων ἔσται καὶ ἡ βγ, βάσις τῆς εζ, βάσεως, κατὰ τὴν ἀνωτέρω. ὃ πολλῷ μᾶλλον ἄτοπον. ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Κϛ΄. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

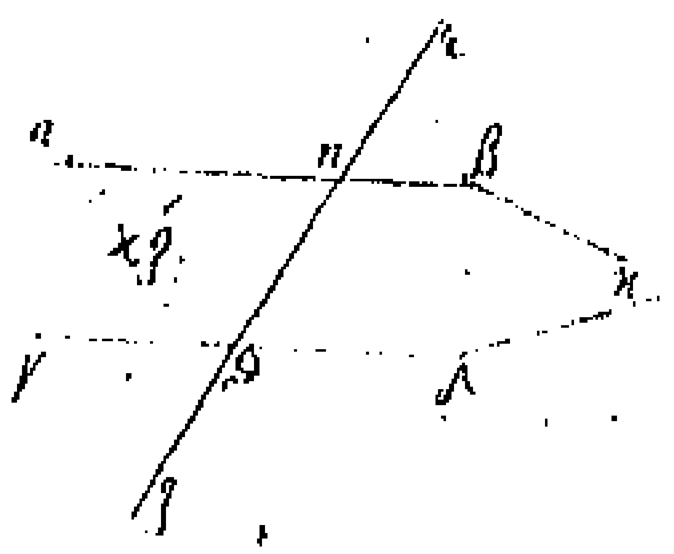
Ἔςωσαν δὴ τῶν αβγ, δεζ, τριγώνων αἱ ὑπὸ αβγ, αγβ, γωνίαι ἴσαι ταῖς ὑπὸ δεζ, δζε, καὶ ἡ πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις πλευρὰ, ἡ βγ, ἴση τῇ εζ. λέγω ἴσην εἶναι, καὶ τὴν μὲν αβ, τῇ δε, τὴν δὲ αγ, τῇ δζ. εἰ γὰρ μὴ, ἔςαι πάντως ἡ μία τῆς ἑτέρας μείζων. Ἔςω τοίνυν ἡ δε, μείζων τῆς αβ. καὶ γενέσθω ἡ ηε, ἴση τῇ αβ, κατὰ τὴν γ΄. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ηζ. καὶ ἐπεὶ τῶν ηεζ, αβγ, τριγώνων ἡ ηε, ἴση γέγονε τῇ αβ, καὶ ἡ εζ, ἴση ὑπετέθη τῇ βγ, καὶ ἡ πρὸς τῷ ε, γωνία τῇ πρὸς τῷ β, ὁμοίως ἴση. ἄρα κατὰ τὴν δ΄. ἴση ἔςαι καὶ ἡ ηζ, τῇ αγ. καὶ ὅλον τὸ ηεζ, τρίγωνον, ὅλῳ τῷ αβγ, τριγώνῳ. καὶ ἡ ὑπὸ ηζε, γωνία τῇ ὑπὸ αγβ, γωνίᾳ. ὑπετέθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δζε, ἴση τῇ ὑπὸ αγβ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ δζε, ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ ηζε, ἀλλὰ καὶ περιέχει αὐτὴν, ἄτοπον ἄρα, ὥςε οὐδὲ μείζων ἡ δε, τῆς αβ, ἀλλ᾽ ἴση. Ἔςω αὖθις ἡ αβ, ἴση τῇ δε, λέγω καὶ τὴν αγ, ἴσην εἶναι τῇ δζ, καὶ τὴν βγ, τῇ εζ. εἰ γὰρ μὴ, ἔςω ἡ εζ, μείζων τῆς βγ, τῆς δὲ εθ, ἴσης γενομένης τῇ βγ, ἐπεζεύχθω ἡ δθ. ἐπεὶ οὖν τῶν δεθ, αβγ, τριγώνων, ἡ μὲν δε, ἴση ἐςὶ τῇ αβ, ἡ δὲ εθ, τῇ βγ, καὶ ἡ πρὸς τῷ ε, γωνία τῇ πρὸς τῷ β, πάντως γε, κατὰ τὴν δ΄. καὶ ἡ δθ, ἴση ἐςὶ τῇ αγ, καὶ ἡ ὑπὸ δθε, γωνία τῇ ὑπὸ αγβ, ἴση. ὑπετέθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δζε, ἴση τῇ ὑπὸ αγβ, ἄρα ἡ ὑπὸ δθε, ἴση ἔςαι τῇ ὑπὸ δζε, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς. ὅπερ ἄτοπον κατὰ τὴν ιϛ΄. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 1. Fig. 26.



Πρότασις ΚΖ΄. Θεώρημα.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.



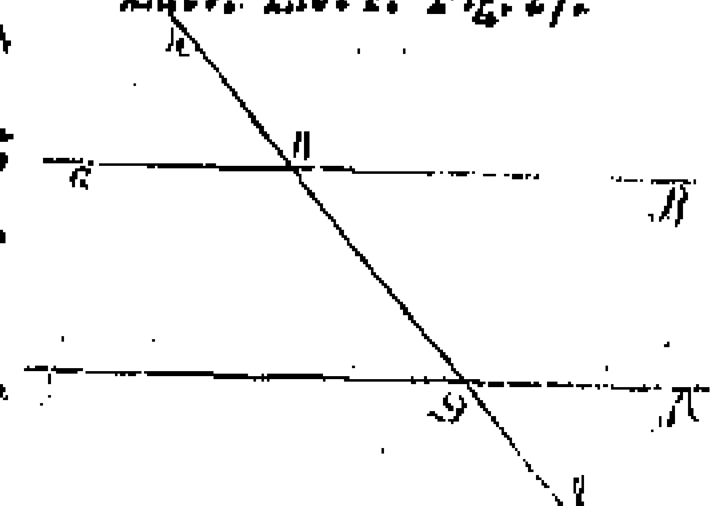
Εἰς δύο ἤδη εὐθείας τὰς αβ, γδ, ἐμπίπτουσα ἡ εζ, ποιείτω τὰς ἐναλλὰξ γωνίας, ἤτοι τὰς ὑπὸ βηθ, ηθγ, ἴσας ἀλλήλαις. λέγω, τὰς αβ, γδ, εὐθείας παραλλήλους εἶναι, καὶ ἐκβαλλομένας ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη μὴ συμπίπτειν. εἰ γὰρ μὴ, ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ β, δ, μέρη συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ κ. καὶ ἐπεὶ τοῦ ηκθ, τριγώνου ἡ κθ, πλευρὰ ἐκβέβληται ἐπὶ τὸ γ, πάντως γε ἡ ὑπὸ γθη, γωνία μείζων ἐςὶ τῆς ὑπὸ βηθ, κατὰ τὴν ιϛ΄. ὑπετέθη δὲ καὶ ἴση, ἄτοπον ἄρα. ὥςε αἱ αβ, γδ, παράλληλοί εἰσι, καὶ ἐκβαλλόμεναι ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη οὐ συμπίπτουσιν. ὅπερ καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΚΗ΄. Θεώρημα.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς δύο ἤδη εὐθείας τὰς αβ, γδ, πίπτουσα ἡ εζ, ποιείτω τὴν ὑπὸ εηβ, ἐκτὸς γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ ηθδ, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. λέγω τὰς αβ, γδ, εὐθείας παραλλήλους εἶναι. ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ εηβ, γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ ηθδ, τῇ δὲ ὑπὸ εηβ, ἴση ἐςὶν ἡ ὑπὸ αηθ, κατὰ τὴν ιε΄. πάντως γε αἱ ὑπὸ αηθ, ηθδ, εἰσὶν ἴσαι, ἀλλὰ καὶ ἐναλλάξ. ἄρα κατὰ τὴν ἀνωτέρω αἱ αβ, γδ, παράλληλοί εἰσι.

Eucl. Lib. 1. Fig. 27.



Ποιείτω ἔτι ἡ εζ, τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, τὰς ὑπὸ βηθ, ηθδ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. λέγω τὰς αβ, γδ, εὐθείας παραλλήλους εἶναι. ἐπεὶ γὰρ αἱ ὑπὸ βηθ, ηθδ, δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, εἰσὶ δὲ ὁμοίως καὶ αἱ βηθ, θηα, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι κατὰ τὴν ιγ΄. πάντως γε αἱ βηθ, ηθδ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς βηθ, θηα. κοινῆς δὲ ἀφαιρουμένης τῆς βηθ, ἐγκαταλείπονται ἴσαι αἱ ηθδ, θηα, καὶ εἰσιν ἐναλλάξ. αἱ αβ, γδ, ἄρα εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσιν κατὰ τὴν ἀνωτέρω. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

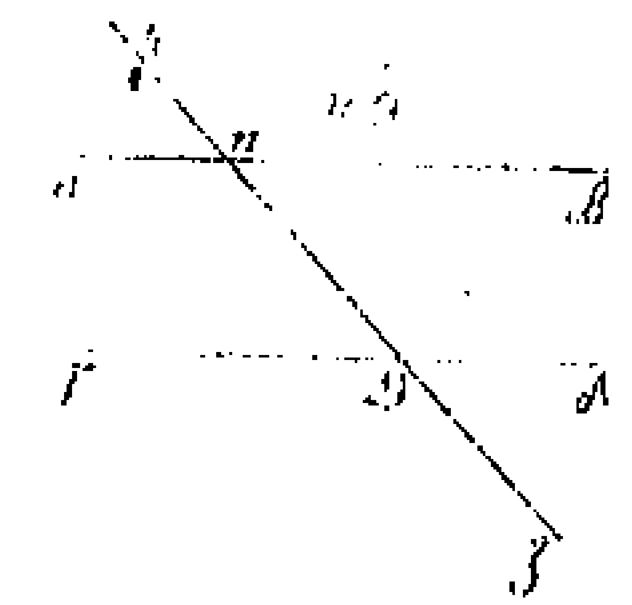
Πρότασις ΚΘ΄. Θεώρημα.

Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιεῖ, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ.

Εἰς παραλλήλους ἤδη τὰς αβ, γδ, εὐθεῖα πιπτέτω ἡ εζ. λέγω, πρῶτον τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ αηθ, ηθδ, ἴσας εἶναι. εἰ γὰρ μὴ, ἔςω ἡ ὑπὸ ηθδ, ἐλάττων τῆς ὑπὸ αηθ, καὶ κοινὴ ληφθήτω ἡ ὑπὸ βηθ. καὶ ἔσονται πάντως αἱ ὑπὸ αηθ, βηθ, μείζονες τῶν ὑπὸ βηθ, ηθδ. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ βηθ, αηθ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς κατὰ τὴν ιγ΄. ἄρα αἱ ὑπὸ βηθ, ηθδ, ἐλάσσονές εἰσι δύο ὀρθῶν,

ὀρθῶν· καὶ ἐπομένως ἐκβαλλόμεναι κατὰ τὰ β, καὶ δ, μέρη, συμπεσοῦνται, κατὰ τὸ ια΄. ἀξίωμα. ὅπερ ἄτοπον. ὑποτίθενται γὰρ καὶ παράλληλοι. ἄρα αἱ ὑπὸ α η θ, η θ δ, γωνίαι ἴσαι εἰσί. λέγω δεύτερον, καὶ τὴν ἐκτὸς, τὴν ὑπὸ ε η β, ἴσην εἶναι τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῇ η θ δ. ἡ γὰρ ὑπὸ ε η β, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ α η θ, κατὰ τὴν ιε΄. τῇ δὲ α η θ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ η θ δ, ὥστε κατὰ τὸ α΄, ἀξίωμα, ἡ ὑπὸ ε η β, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ η θ δ. λέγω τρίτον, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ β η θ, η θ δ, ἴσας εἶναι δυσὶν ὀρθαῖς. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ ε η β, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ η θ δ, κοινῆς προσκειμένης τῆς ὑπὸ β η θ, ἔσονται πάντως κατὰ τὸ β΄. ἀξίωμα, αἱ ὑπὸ ε η β, β η θ, ἴσαι ταῖς ὑπὸ β η θ, η θ δ, ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ ε η β, β η θ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς. ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ β η θ, η θ δ, δυσὶν ὀρθαῖς ὁμοίως ἴσαι εἰσίν. ἡ εἰς τὰς παραλλήλους ἄρα εὐθείας καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 1. Fig. 28.

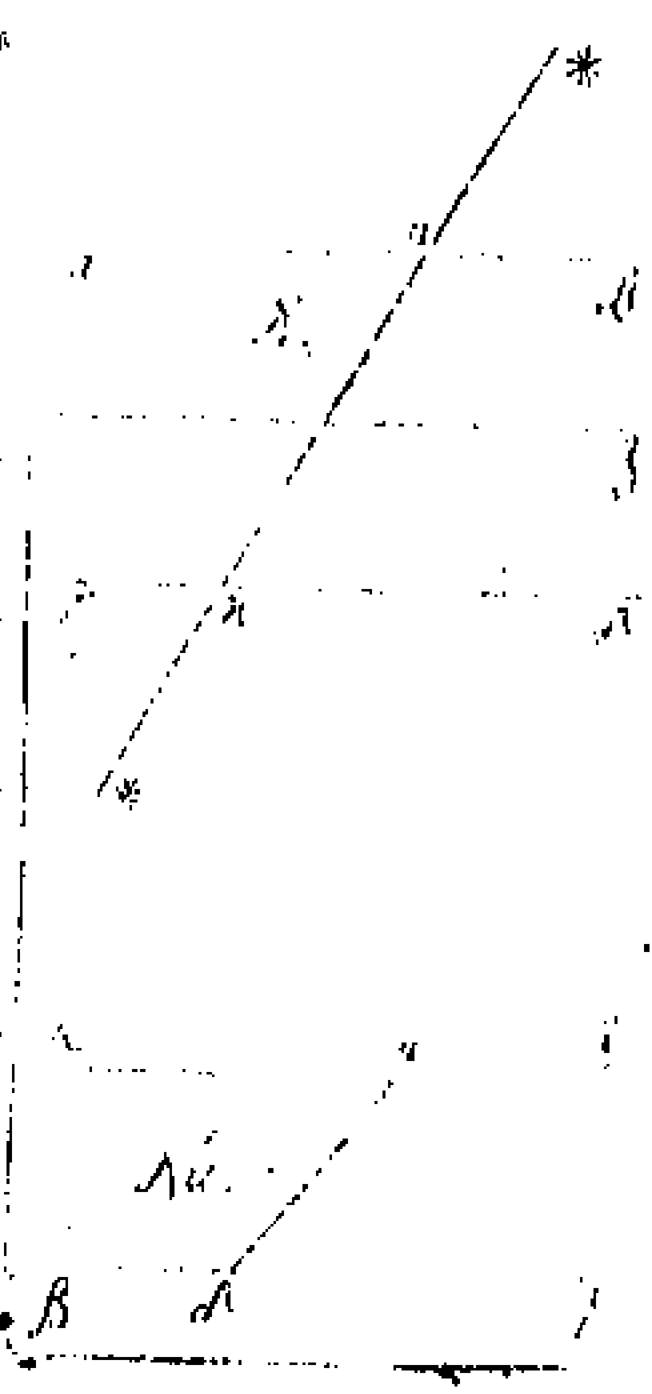


ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, παντὸς παραλληλογράμμου τὰς δύο γωνίας, τὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι, πάντη μεταλαμβανομένας, καὶ τὰς τέσσαρας τέσσαρσιν ἴσας.

Πρότασις Λ΄. Θεώρημα.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.



Εὐθείᾳ ἤδη τῇ ε ζ, ἔστωσαν παράλληλοι αἱ α β, γ δ, λέγω ταύτας καὶ ἀλλήλαις παραλλήλους εἶναι. πιπτούσης γὰρ ἐπ᾽ αὐτὰς τῆς η θ κ, ἔσονται αἱ ὑπὸ α η θ, η θ ζ, γωνίαι, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἴσαι. ὡσαύτως καὶ ἡ ἐκτὸς ὑπὸ η θ ζ, ἴση τῇ ἐντὸς ὑπὸ θ κ δ. ὥστε κατὰ τὸ α. ἀξίωμα καὶ αἱ ὑπὸ α η θ, η κ δ, ἴσαι εἰσὶν, ἀλλὰ καὶ ἐναλλὰξ, ἄρα κατὰ τὴν κζ΄. αἱ α β, γ δ, παράλληλοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐπὶ παντὸς παραλληλογράμμου ἡ τῇ μιᾷ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἀχθεῖσα παράλληλος καὶ τῇ ἑτέρᾳ παράλληλος ἔσται.

Πρότασις ΛΑ΄. Πρόβλημα.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἀπὸ σημείου ἤδη τοῦ α, εὐθείᾳ τῇ β γ, ἔστω εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. Ἀχθήτω τοίνυν ὡς ἔτυχεν ἡ α δ, καὶ γενέσθω, κατὰ τὴν κγ΄. τῇ ὑπὸ α δ γ, γωνίᾳ

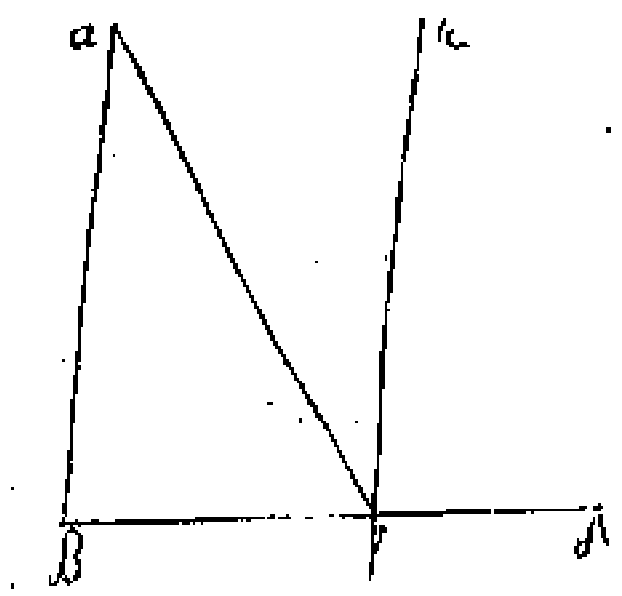
ἴση

ἴση ἡ ὑπὸ δ α ε. καὶ διὰ τῶν α, καὶ ε, σημείων διήχθω ἡ ε ζ, λέγω ταύτην παράλληλον εἶναι τῇ β γ. ἐπεὶ γὰρ ἐπὶ τῶν ε ζ, β γ, εὐθειῶν πεσοῦσα ἡ α δ, πεποίηκε τὰς ἐναλλὰξ ἴσας κατὰ τὴν κζ΄. πάντως γε αἱ ε ζ, β γ, παράλληλοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΛΒ΄. Θεώρημα.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστί, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί.

Eucl. Lib. 1. Fig. 29.



Τριγώνου ἤδη τοῦ α β γ, ἐκβληθήτω ἡ β γ, πλευρὰ ἐπὶ τὸ δ. λέγω τὴν ὑπὸ α γ δ, ἐκτὸς γωνίαν ἴσην εἶναι δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τουτέστι ταῖς ὑπὸ β α γ, α β γ. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ γ, παράλληλος τῇ α β, ἡ γ ε. καὶ ἐπεὶ εἰς τὰς α β, γ ε, πέπτωκεν ἡ α γ. πάντως γε αἱ ὑπὸ α γ ε, γ α β, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν κθ΄. Ἐπεὶ δ᾽ αὖθις εἰς τὰς αὐτὰς πέπτωκε καὶ ἡ β γ. δῆλον, ὅτι αἱ ὑπὸ ε γ δ, α β γ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν αὐτήν. αἱ δύο ἄρα γωνίαι, αἱ ὑπὸ α γ ε, ε γ δ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ γ α β, α β γ. ἀλλ᾽ αἱ α γ ε, ε γ δ, ἴσαι εἰσὶ τῇ ὑπὸ α γ δ, ἐκτός. ἄρα ἡ ὑπὸ α γ δ, ἐκτὸς ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ γ α β, α β γ. ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον. Λέγω δ᾽ ἔτι, τὰς τρεῖς τοῦ τριγώνου πλευρὰς δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι. Ἐπεὶ γὰρ ἡ α γ δ, ἴση δέδεικται ταῖς ὑπὸ γ α β, α β γ, κοινῆς προσκειμένης τῆς ὑπὸ α γ β, ἔσονται αἱ ὑπὸ α γ δ, α γ β, ἴσαι ταῖς τρισὶ τοῦ τριγώνου τούτου γωνίαις, ταῖς ὑπὸ γ α β, α β γ, β γ α. ἀλλ᾽ αἱ α γ δ, α γ β, ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς, κατὰ τὴν ιγ΄. ἄρα κατὰ τὸ α. ἀξίωμα, καὶ αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὅπερ ἦν τὸ δεύτερον.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ.

Α΄. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων, τῶν μὲν ὀρθογωνίων ἑκατέρα τῶν λοιπῶν ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, τῶν δὲ ἀμβλυγωνίων, ἐλάττων ἡμισείας ὀρθῆς, καὶ τῶν ὀξυγωνίων μείζων.

Β΄. Ἔτι τῶν ἰσοπλεύρων ἑκάστη τῶν γωνιῶν δύο τρίτα μέρη περιέχει τῆς ὀρθῆς.

Γ΄. Ἔτι παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι ὁμοῦ ἴσαι εἰσὶ ταῖς οἱουδήποτε τριγώνου τρισὶ γωνίαις ὁμοῦ λαμβανομέναις.

Δ΄. Ἔτι παντὸς τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

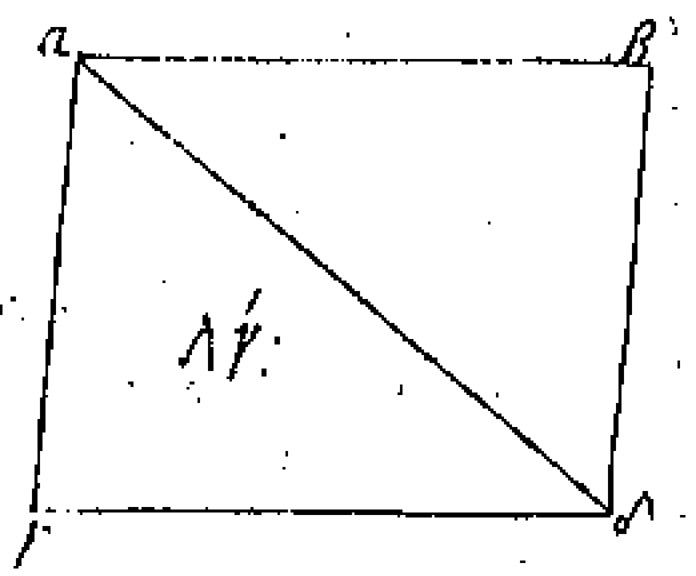
Πρό-

Πρότασις ΛΓ΄. Θεώρημα.

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Αἱ αγ, βδ, ἤδη εὐθεῖαι ἐπιζευγνύτωσαν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς αβ, γδ, ἴσας τε καὶ παραλλήλους εὐθείας. λέγω καὶ τὰς αγ, βδ, ἴσας τε καὶ παραλλήλους εἶναι. ἤχθω γὰρ ἡ αδ, διαγώνιος. καὶ ἐπεὶ τῶν αβδ, δγα, τριγώνων αἱ βα, αδ, πλευραὶ ἴσαι εἰσὶ ταῖς γδ, δα, καὶ ἡ ὑπὸ βαδ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ γδα, πάντως γε κατὰ τὴν κθ΄. καὶ βάσις ἡ αγ, ἴση ἐστὶ βάσει τῇ βδ. ὅπερ ἦν τὸ α. Αὖθις ἐπεὶ τῶν αβδ, αγδ, αἱ δύο πλευραὶ αβ, βδ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς δγ, γα, καὶ βάσις ἡ αδ, κοινή. πάντως γε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβδ, ἴση ἐστὶ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ αγδ. καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον αβδ, ὅλῳ τῷ τριγώνῳ αγδ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς. τουτέστιν ἡ ὑπὸ βδα, τῇ ὑπὸ γαδ, καὶ εἰσὶν ἐναλλάξ. ἄρα αἱ αγ, βδ, εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσι, κατὰ τὴν κζ΄. ὅπερ ἐστὶ τὸ δεύτερον.

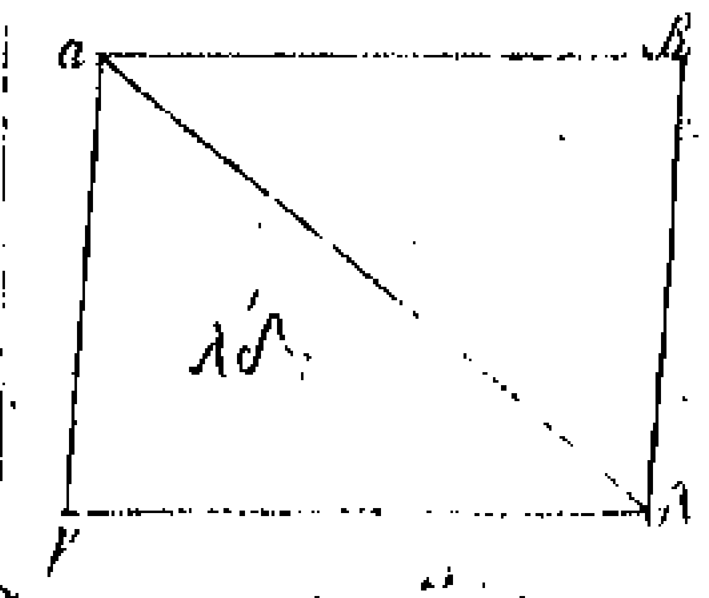
Eucl. Lib. 1. Fig. 30.



Πρότασις ΛΔ΄. Θεώρημα

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

Ἔστω δὴ παραλληλόγραμμον τὸ αβγδ, λέγω τούτου τάς τε ἀπεναντίον πλευρὰς, τὰς αβ, γδ, αγ, βδ, ἴσας εἶναι, καὶ τὰς γωνίας ἔτι τὰς ὑπὸ αβδ, αγδ, καὶ τὰς ὑπὸ γαβ, βδγ, ἴσας ὁμοίως ἀλλήλαις εἶναι. τὴν δὲ αδ, διάμετρον δίχα αὐτὸ τέμνειν, τουτέστι τὰ αβδ, αγδ, τρίγωνα ἴσα εἶναι. ἐπεὶ γὰρ αἱ αβ, γδ, παράλληλοί εἰσι, καὶ εἰς αὐτὰς πέπτωκεν ἡ αδ, πάντως γε κατὰ τὴν κθ΄. αἱ ὑπὸ βαδ, καὶ γδα, γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὡσαύτως κατὰ τὴν αὐτὴν καὶ αἱ ὑπὸ βδα, γαδ, γωνίαι ἴσαι εἰσιν, ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰ κοινὴ, ἄρα κατὰ τὴν κς΄. καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι εἰσὶ, τουτέστιν ἡ αβ, τῇ γδ, καὶ ἡ αγ, τῇ βδ, καὶ τοῦτό ἐστι τὸ α. Ἔστι δ᾽ ἔτι καὶ ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ αβδ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ αγδ, ἴση, ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ βαδ, γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γδα, ἡ δὲ ὑπὸ βδα, τῇ ὑπὸ γαδ, ἄρα καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ βδγ, ἴση ἐστὶν ὅλῃ τῇ ὑπὸ βαγ, καὶ τοῦτό ἐστι τὸ β΄. Ἐπεὶ δὲ τῶν αβδ, αγδ, τριγώνων αἱ δύο πλευραὶ αβ, βδ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς αγ, γδ, καὶ βάσις ἡ αδ, κοινὴ, πάντως γε καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον αβδ, ἴσόν ἐστιν ὅλῳ τῷ τριγώνῳ αγδ. κατὰ τὴν η. καὶ τοῦτό ἐστι τὸ γ΄.



Πρό-

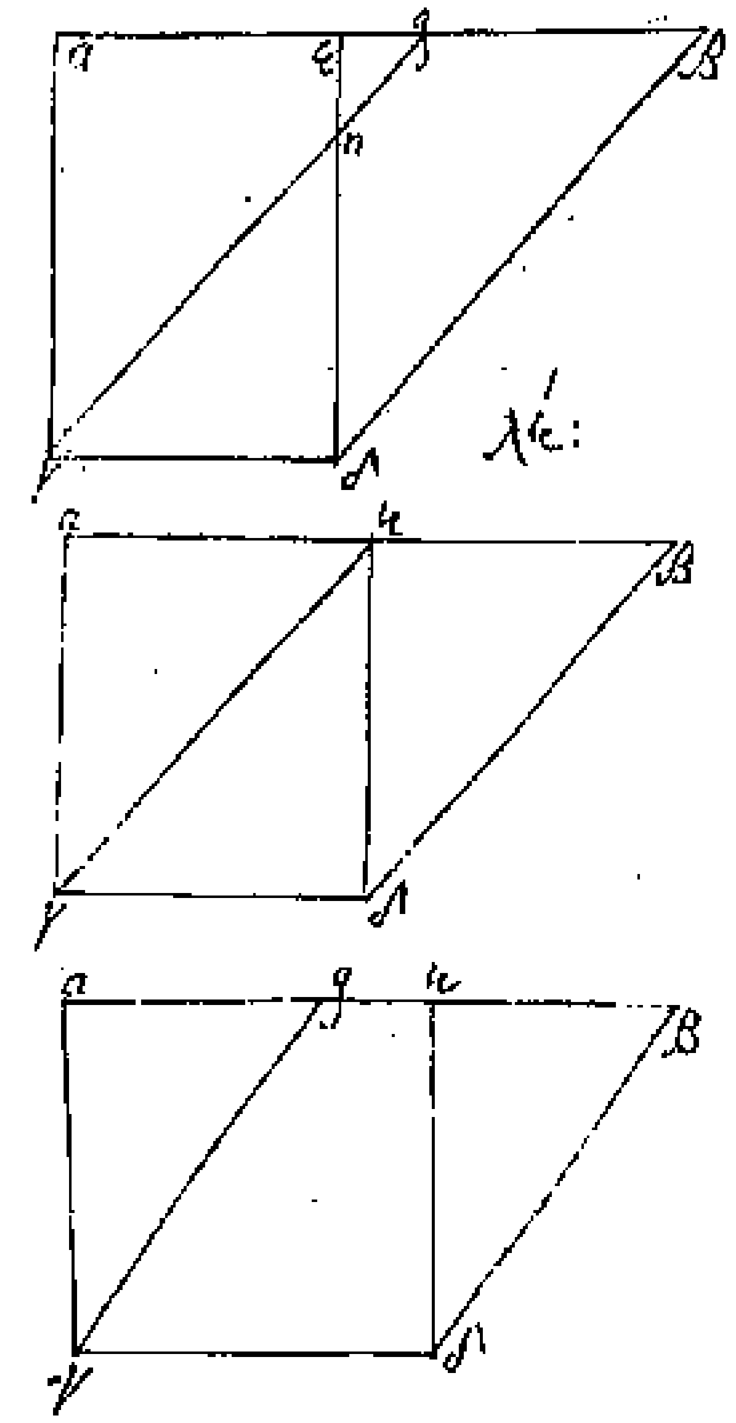
Πρότασις ΛΕ΄. Θεώρημα.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

Ἔστωσαν ἤδη ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς γδ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς αβ, γδ, τὰ αδ, ζδ, παραλληλόγραμμα. λέγω ταῦτα ἴσα εἶναι. ἐπεὶ δὲ τοῦτο τριχῶς συμβῆναι δύναται. Πιπτέτω πρῶτον ἡ γζ, ἐκτὸς τοῦ ε. ἐπεὶ οὖν αἱ αε, ζβ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι ἑκατέραν τῇ γδ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω. κοινῆς προσκειμένης τῆς εζ, ἔσται πάντως ἡ αζ, ἴση τῇ εβ, κατὰ τὸ β΄. ἀξίωμα. ἀλλὰ καὶ ἡ μὲν αγ, εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ εδ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἡ δὲ ὑπὸ εαγ, γωνία τῇ ὑπὸ βεδ, κατὰ τὴν κθ΄. ἄρα καὶ βάσις ἡ γζ, βάσει τῇ δβ, ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ αγζ, τρίγωνον τῷ εδβ. κοινοῦ δὲ ἀφαιρουμένου τοῦ εηζ, τριγώνου, ἐγκαταλείπεται τὸ αγηε, τραπέζιον, ἴσον τῷ ζηδβ, τραπεζίῳ κατὰ τὸ γ΄. ἀξίωμα. προστιθεμένου δὲ κοινοῦ τοῦ γδη, τριγώνου, ἔσται τὸ αδ, παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ζδ.

Ὑποκείσθω β΄. τὴν γε, εὐθεῖαν ἐπὶ τοῦ ε. πίπτειν τῶν γοῦν εαγ, βεδ, τριγώνων ἴσων δειχθέντων, ὡς καὶ πρότερον, καὶ τοῦ γεδ, κοινοῦ προσκειμένου. ἔσται τὸ αδ, παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ γβ. Ὑποκείσθω τρίτον τὴν γζ, μεταξὺ τῶν α, καὶ ε, πεσεῖν σημείων. τῶν οὖν ζαγ, βεδ, τριγώνων ἴσων ὁμοίως δειχθέντων, καὶ τοῦ εζγδ, τραπεζίου κοινοῦ προσκειμένου, ἔσται τὸ αδ, παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ζδ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

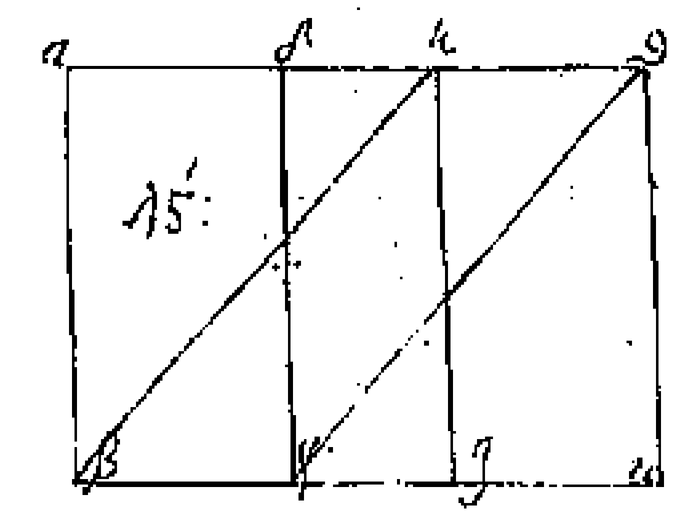
Eucl. Lib. 1. Fig. 31.



Πρότασις Λς΄. Θεώρημα.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστωσαν δὴ παραλληλόγραμμα τὰ αγ, εη, ἐπὶ ἴσων μὲν βάσεων τῶν βγ, ζη, ἐν ταῖς αὐταῖς δὲ παραλλήλοις ταῖς αθ, βη. λέγω, ὅτι ταῦτα ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. Ἀχθήτωσαν γὰρ αἱ βε, γθ, καὶ ἐπεὶ ἡ βγ, ἴση ὑπετέθη τῇ δὲ ζη, τῇ δὲ ζη, ἴση ἐστὶν ἡ εθ, κατὰ τὴν λδ΄. πάντως γε κατὰ τὸ α, ἀξίωμα ἡ βγ, ἴση ἐστὶ τῇ εθ, ἔστι δὲ καὶ παράλληλος, ἄρα καὶ αἱ βε, γθ, εὐθεῖαι ἴσαι τέ εἰσι καὶ παράλληλοι, κατὰ τὴν λγ΄. ὥστε τὸ βθ, παραλληλόγραμμόν ἐστιν. Ἐπεὶ δὲ διὰ τῆς ἀνωτέρω ἑκάτερον τῶν αγ, εη, ἴσον δείκνυται τῷ εβγθ, παραλληλογράμμῳ, πάντως γε



κατὰ

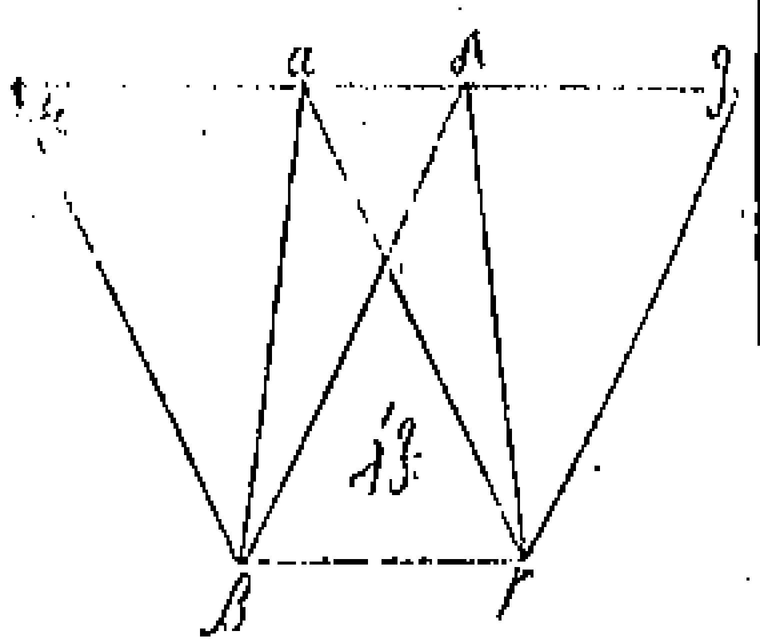
καὶ τὸ α'. ἀξίωμα τὰ αγ, εη, παραλληλόγραμμα ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΛΖ' Θεώρημα.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

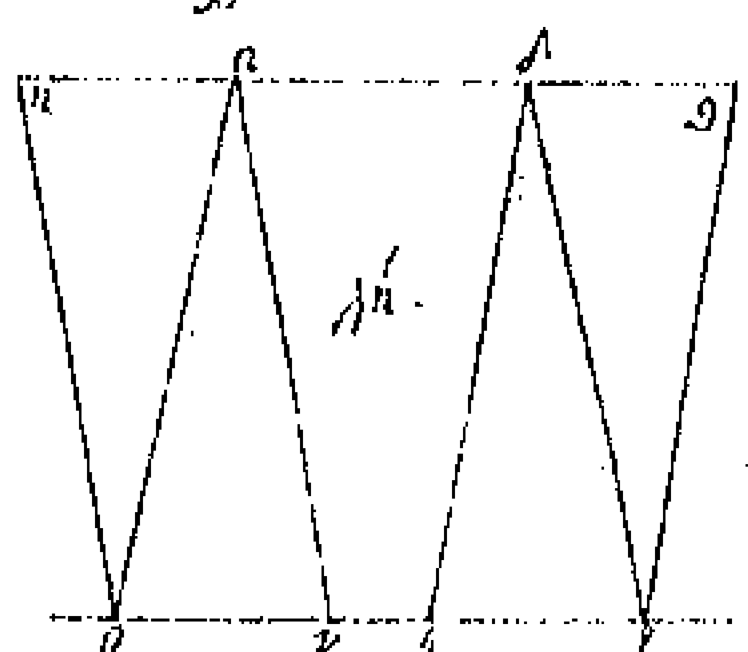
Ἔστωσαν ἤδη τρίγωνα τὰ αβγ, δβγ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς εζ, βγ. λέγω ταῦτα, ἴσα ἀλλήλοις εἶναι. Ἀχθείσης γὰρ τῆς βε, παραλλήλως τῇ αγ, καὶ τῆς γζ, τῇ βδ, ἔσονται τὰ εγ, βζ, παραλληλόγραμμα, καὶ ἴσα ἀλλήλοις κατὰ τὴν λε'. τὰ ἡμίση δὲ τούτων ἐστὶ τὰ αβγ, δβγ, τρίγωνα, κατὰ τὴν λδ'. ἄρα κατὰ τὸ ζ'. ἀξίωμα τὰ αβγ, δβγ, τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Eucl. Lib. 1. Fig. 32.

Πρότασις ΛΗ'. Θεώρημα.



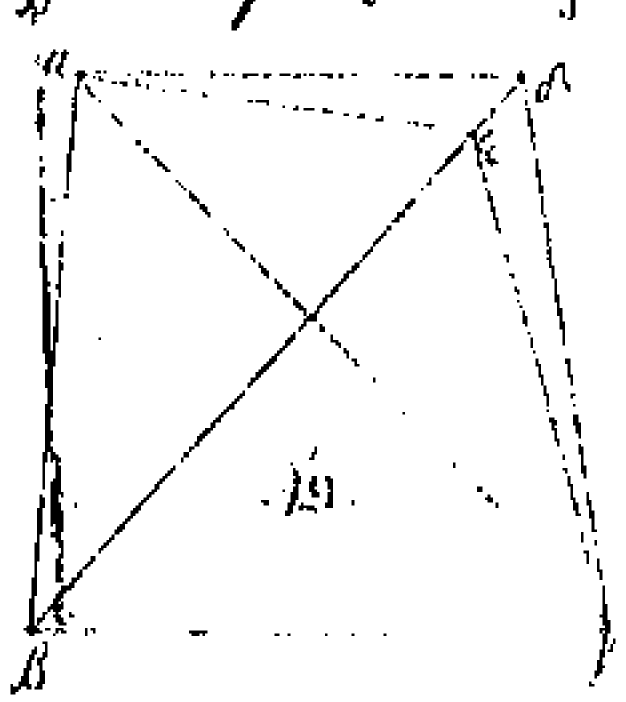
Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστωσαν ἤδη ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν βγ, εζ, καὶ ἐν παραλλήλοις ταῖς ηθ, βζ, τρίγωνα τὰ αβγ, δεζ. λέγω ταῦτα ἴσα ἀλλήλοις εἶναι. Ἀχθείσης γὰρ παραλλήλως τῇ μὲν αγ, τῆς βη, τῇ δὲ εδ, τῆς ζθ. ἔσονται πάντως τὰ ηγ, εθ, χωρία παραλληλόγραμμα, καὶ ἀλλήλοις ἴσα κατὰ τὴν λε'. τούτων δὲ τὰ ἡμίση ἐστὶ τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα κατὰ τὴν λδ'. ἄρα καὶ τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Πρότασις ΛΘ'. Θεώρημα.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.



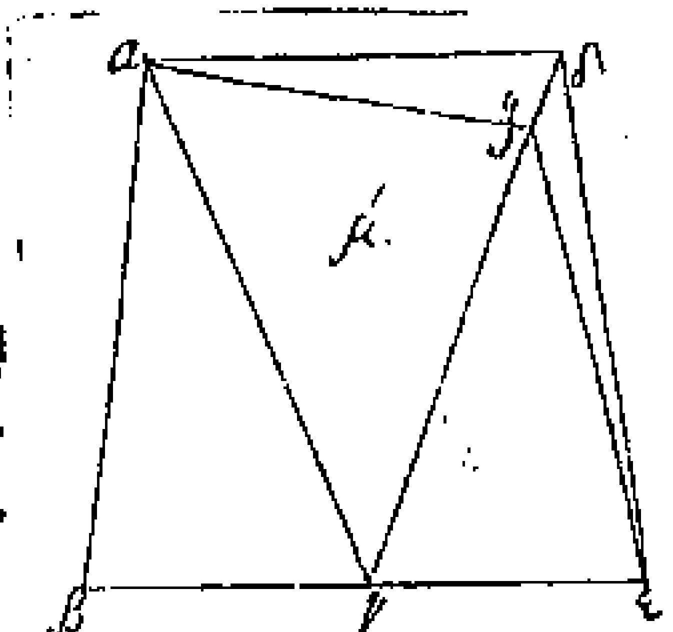
Ἔστωσαν δὴ ἴσα τρίγωνα τὰ αβγ, δβγ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βγ, βάσεως, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, δὸς εἰπεῖν, τὰ ἄνω. λέγω ταῦτα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἶναι παραλλήλοις. εἰ γὰρ μή, ἐπεζεύχθω ἡ αδ, καὶ ἐπεὶ αἱ αδ, βγ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν οὐκ εἰσὶ παράλληλοι, ἔστω παράλληλος τῇ βγ, ἡ αε. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εγ. Ἐπεὶ οὖν τὰ αβγ, εβγ, τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εἰσι βάσεως τῆς βγ, καὶ παραλλήλοις ταῖς αε, βγ. πάντως γε κατὰ τὴν λζ'. ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. ὑπετέθη δὲ καὶ τὸ δβγ, τρίγωνον ἴσον τῷ αβγ. ἄρα κατὰ τὸ α'. ἀξίωμα, τὸ δβγ, ἴσον ἐστὶ

τῷ εβγ, ἀλλὰ καὶ περιέχει αὐτό, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ αε, παράλληλός ἐστι τῇ βγ, ἀλλ' ἡ αδ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Μ'. Θεώρημα.

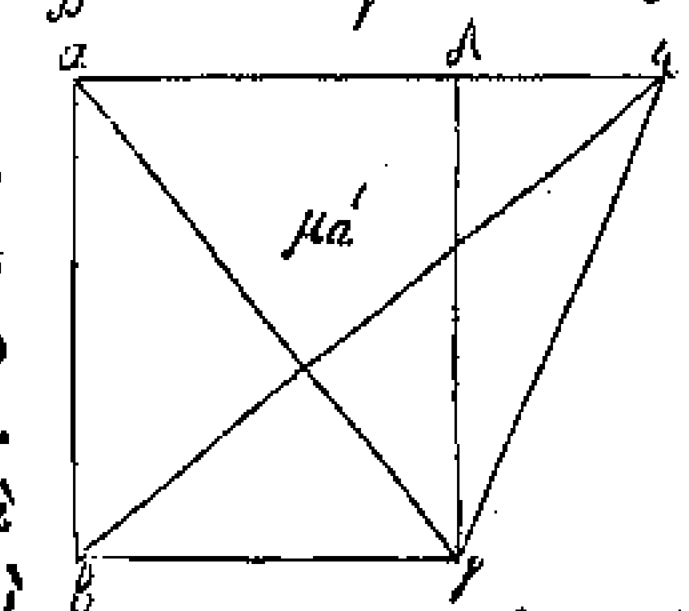
Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἔστωσαν δὴ τρίγωνα τὰ αβγ, δγε, ἴσα, ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν βγ, γε. Λέγω ταῦτα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἶναι παραλλήλοις ταῖς βε, αδ. εἰ γὰρ μή, ἔστω παράλληλος τῇ βε, ἡ αζ, καὶ ἐπεὶ τὰ αβγ, ζγε, τρίγωνα ἐπὶ ἴσων βάσεών εἰσι, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς βε, αζ, πάντως γε κατὰ τὴν λη'. ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὑπετέθη δὲ καὶ τὸ δγε, ἴσον τῷ αβγ, ἄρα κατὰ τὸ α. ἀξίωμα, τὸ δγε, ἴσον ἐστὶ τῷ ζγε, ἀλλὰ καὶ ὑπερέχει, ἄτοπον ἄρα τὴν αζ, παράλληλον εἶναι τῇ βε. ὥστε ἡ αδ, παράλληλός ἐστι τῇ βε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Eucl. Lib. 1. Fig. 33.

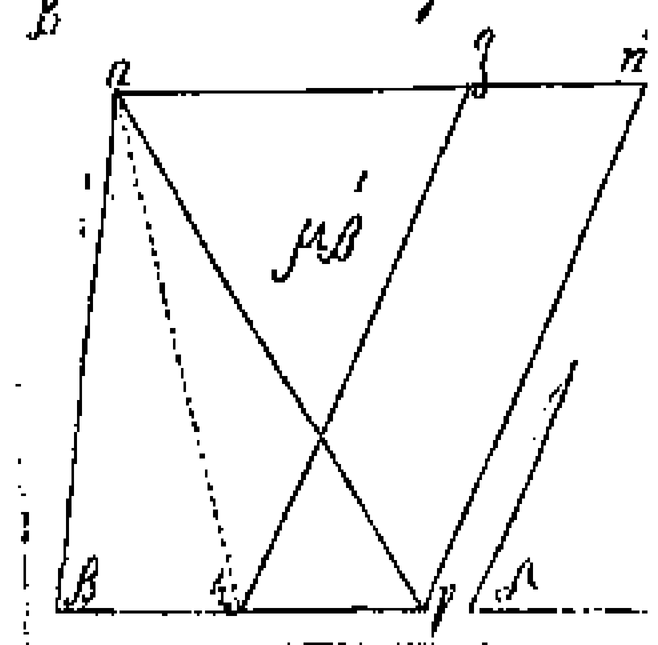


Πρότασις ΜΑ'. Θεώρημα.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτήν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιον ἔσται τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.



Ἐχέτω δὴ παραλληλόγραμμον τὸ αγ, τὴν αὐτὴν βάσιν τῷ βγε, τριγώνῳ τὴν βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἔστω παραλλήλοις ταῖς βγ, αε. Λέγω τὸ αγ, παραλληλόγραμμον διπλάσιον εἶναι τοῦ βγε, τριγώνου. τῆς γὰρ αγ, ἀχθείσης, ἔσται πάντως τὸ αγ, παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ αβγ, τριγώνου κατὰ τὴν λδ'. ἀλλὰ τῷ αβγ, τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ τὸ βγε, τρίγωνον κατὰ τὴν λζ'. ἄρα τὸ αγ, παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι καὶ τοῦ βγε, τριγώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

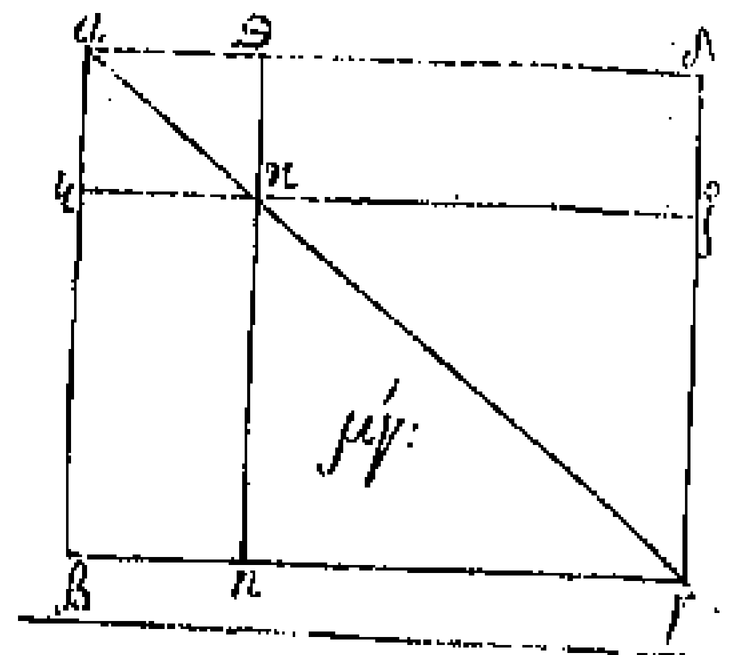


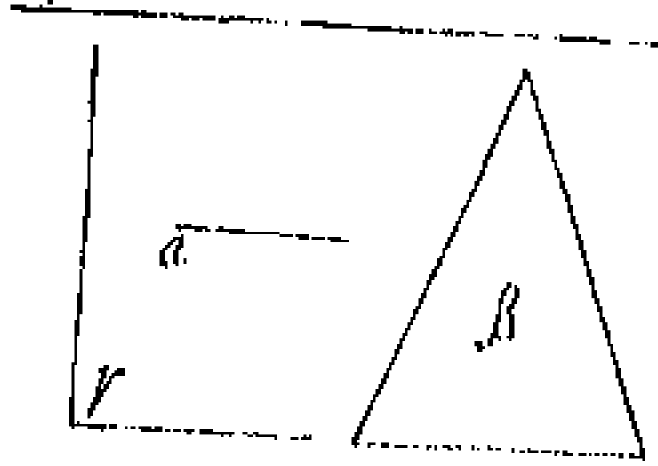
Πρότασις ΜΒ'. Θεώρημα.

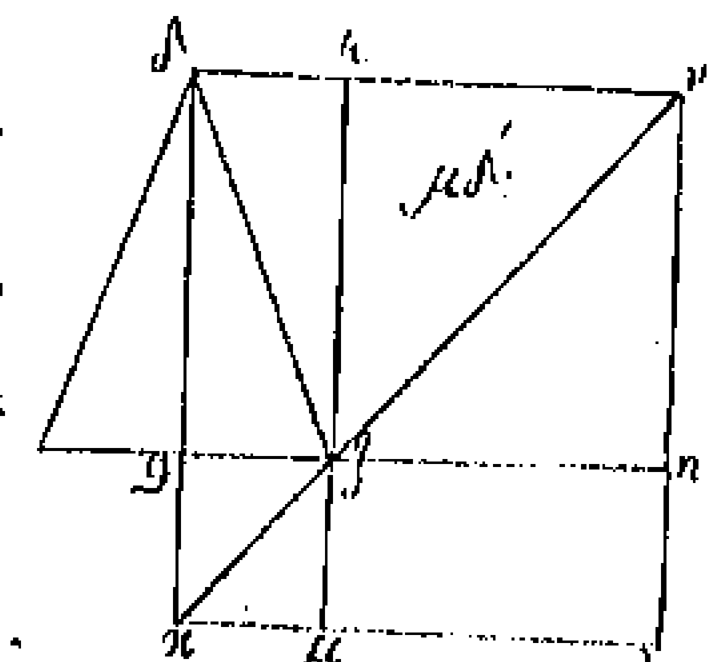
Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

Ἔστω δὴ τρίγωνον τὸ αβγ. ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἡ πρὸς τῷ δ. καὶ ζητήθητα συστῆσαι παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ δοθέντι αβγ, τριγώνῳ, ἔχον τὴν πρὸς τῷ δ, γωνίαν. Τμηθήτω τοίνυν ἡ βγ, βάσις τοῦ αβγ, τριγώνου δίχα κατὰ τὸ ε, διὰ τῆς ι΄. καὶ πρὸς τῷ ε, σημείῳ συνεστάθω ἡ ὑπὸ γεζ, γωνία ἴση τῇ πρὸς τῷ δ, κατὰ τὴν κγ΄. καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ α, σημείου ἤχθω παράλληλος τῇ βγ, ἡ αη. ἀπὸ δὲ τοῦ γ, ἤχθω ὁμοίως παράλληλος τῇ εζ, ἡ γη. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αε. Λέγω δὴ τὸ εζηγ, παραλληλόγραμμον ἴσον εἶναι τῷ αβγ, τριγώνῳ ἐν τῇ δ, δοθείσῃ γωνίᾳ. τὰ γὰρ αβε, αεγ, τρίγωνα ἴσα εἰσὶ κατὰ τὴν λη΄. ὥστε τὰ δύο ὁμοῦ, ἤτοι τὸ ὅλον αβγ, τοῦ ἑνὸς αεγ, διπλάσιόν ἐστιν. ἀλλὰ καὶ τὸ εζηγ, παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ αὐτοῦ αεγ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἄρα τὸ εζηγ, παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ αβγ, τριγώνῳ κατὰ τὸ ς΄. ἀξίωμα. ἔχει δὲ τὸ εζηγ, παραλληλόγραμμον καὶ τὴν ὑπὸ ζεγ, γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ δ, δοθείσῃ. τῷ δοθέντι ἄρα αβγ, τριγώνῳ συνέστη ἴσον τὸ εζηγ, παραλληλόγραμμον ἐν τῇ πρὸς τῷ δ, δοθείσῃ γωνίᾳ. ὅπερ καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 1. Fig. 44.







Πρότασις ΜΓ΄. Θεώρημα.

Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστωσαν δὴ τοῦ βδ, παραλληλογράμμου περὶ τὴν αγ, διάμετρον παραλληλόγραμμα τὰ ζη, θε, λέγω τὰ τούτων παραπληρώματα βκ, κδ, ἴσα εἶναι. Ἐπεὶ γὰρ τὸ βδ, παραλληλόγραμμόν ἐστι, πάντως γε κατὰ τὴν λδ΄. τὰ αβγ, αδγ, τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. ὡσαύτως δὲ καὶ τὰ κηγ, κζγ, καὶ ἔτι τὰ αεκ, αθκ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ἐὰν οὖν πρῶτον ἀπὸ τῶν αβγ, αδγ, ἴσων ἀφαιρεθῇ τὰ κηγ, κζγ, ἴσα, ἐγκαταλειφθήσεται κατὰ τὸ ε΄. ἀξίωμα τὰ αβηκ, αδζκ, τραπέζια ἴσα. ἐὰν δ᾽ αὖθις ἀπὸ τῶν αβηκ, αδζκ, ἴσων, ἀφαιρεθῇ τὰ αεκ, αθκ, τρίγωνα ἴσα, ἐγκαταλειφθήσεται τὰ βκ, κδ, ἴσα ἀλλήλοις. ὅπερ καὶ τὰ ἑξῆς.

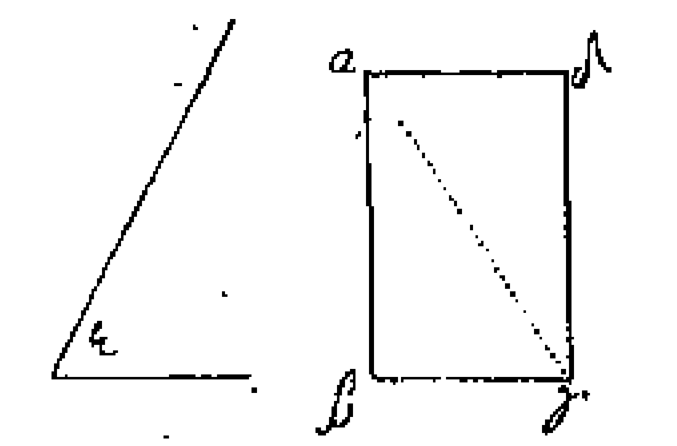
Πρότασις ΜΔ΄. Πρόβλημα.

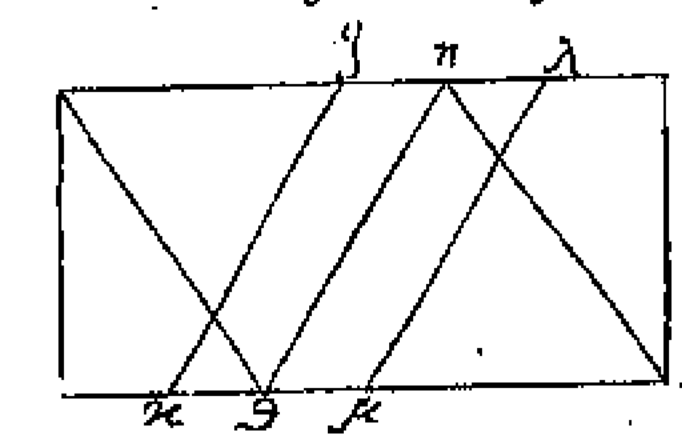
Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

Ἔστω ἤδη παραβαλεῖν ἐπὶ τῆς α, δοθείσης εὐθείας παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ δοθέντι β, τριγώνῳ, ἔχον τὴν πρὸς τῷ γ, γωνίαν. συνεστάθω διὰ τῆς μβ΄, τὸ δεζθ, παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ β΄, τριγώνῳ, ἔχον τὴν ὑπὸ εζθ, γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ γ΄. τῇ δὲ εζ, κείσθω ἐπ᾽ εὐθείας ἡ ζμ, ἴση τῇ α. καὶ ἐξήχθω ἡ δθ, κατὰ τὸ συνεχὲς ἀπὸ τοῦ θ, ἀορίστως. εἶτα διὰ τοῦ μ, παράλληλος τῇ θζ. ἤχθω

ἤχθω ἡ κλ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ κζ. ἐπεὶ δὲ αἱ κμ, δε, παράλληλοί εἰσι κατὰ τὸ πόρισμα τῆς λ΄. καὶ εἰς αὐτὰς πέπτωκεν ἡ δκ, πάντως γε αἱ ὑπὸ μκδ, εδκ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς, κατὰ τὴν κθ΄. αἱ δὲ ὑπὸ ζκδ, εδκ, ἐλάσσονες δύο ὀρθῶν, ὥστε ἐκβαλλόμεναι αἱ δε, κζ, συμπεσοῦνται, συμπιπτέτωσαν δὴ κατὰ τὸ ν. καὶ διὰ τοῦ ν, παράλληλος τῇ εμ, ἤχθω ἡ νλ, καὶ περατούσθω ἡ θζ, κατὰ τὸ η. τοῦ δλ, τοίνυν παραλληλογράμμου τὰ δζ, ζλ, παραπληρώματα τῶν περὶ τὴν κν, διάμετρον παραλληλογράμμων ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἀλλὰ τὸ δζ, γέγονεν ἴσον τῷ β, τριγώνῳ, καὶ ἡ ὑπὸ εζθ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ηζμ, κατὰ τὴν ιε΄. ἄρα καὶ τὸ ζλ, ἴσον ἐστὶ τῷ β, τριγώνῳ, ἔχον τὴν ὑπὸ ηζμ, γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ εζθ. ἐστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ εζθ, γωνία ἴση τῇ πρὸς τῷ γ, δοθείσῃ, ἡ δὲ ζμ, εὐθεῖα ἴση τῇ α. ἄρα ἐπὶ τῆς ζμ, εὐθείας ἴσης τῇ α, παραβέβληται τὸ ζλ, παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ β, τριγώνῳ, ἔχον τὴν ὑπὸ ηζμ, γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ γ, δοθείσῃ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 1. Fig. 35.





Πρότασις ΜΕ΄. Πρόβλημα.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

Ἔστω δὴ συστήσασθαι παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ δοθέντι αβγδ, εὐθυγράμμῳ, ἔχον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ ε. Ἐπεζεύχθω ἡ αγ, καὶ συνεστάθω διὰ τῆς μβ΄. τὸ ζθ, παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ αβγ, τριγώνῳ, ἔχον τὴν ὑπὸ ζκθ, γωνίαν ἴσην τῇ ε. καὶ διὰ τῆς ἀνωτέρω παρὰ τὴν ηθ, εὐθεῖαν παραβεβλήσθω τὸ ημ, παραλληλόγραμμον ἴσον τὸ αδγ, τριγώνῳ, ἔχον τὴν ὑπὸ ηθμ, γωνίαν ἴσην τῇ ε. Ἐπεὶ οὖν αἱ ὑπὸ ζκθ, ηθμ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα τῇ ε, γωνίᾳ, πάντως γε κατὰ τὸ α΄. ἀξίωμα ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. κοινῆς δὲ προσκειμένης τῆς ὑπὸ κθη, ἔσονται αἱ ὑπὸ κθη, ηθμ, ἴσαι ταῖς ὑπὸ ζκθ, κθη, ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ ζκθ, κθη, ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσι κατὰ τὸ πόρισμα τῆς κθ΄. ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ κθη, ηθμ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς, καὶ κατὰ τὴν ιδ΄. αἱ κθ, θμ, ἐπ᾽ εὐθείας εἰσίν. ὁμοίως δειχθήσεται, καὶ τὰς ζη, ηλ, ἐπ᾽ εὐθείας εἶναι. ὥστε ἐπεὶ αἱ ζλ, κμ, ἐπιζευγνύουσι τὰς ζκ, λμ, παραλλήλους, παράλληλοι καὶ αὐταί εἰσι κατὰ τὴν λγ΄. τὸ ζμ, ἄρα παραλληλόγραμμόν ἐστιν. Ἐπεὶ δὲ πάλιν τὸ ζθ, ἴσον γέγονε τῷ αβγ, τριγώνῳ, τὸ δὲ ημ, τῷ αδγ. τὸ ὅλον δηπᾶθεν ζμ, ἴσον ἐστὶ τῷ αβγδ, εὐθυγράμμῳ. ἔχει δὲ καὶ τὴν ὑπὸ ζκθ, γωνίαν ἴσην τῇ ε, καὶ δέδεικται εἶναι παραλληλόγραμμον. τῷ δοθέντι ἄρα εὐθυγράμμῳ καὶ τ᾽ ἑξ.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

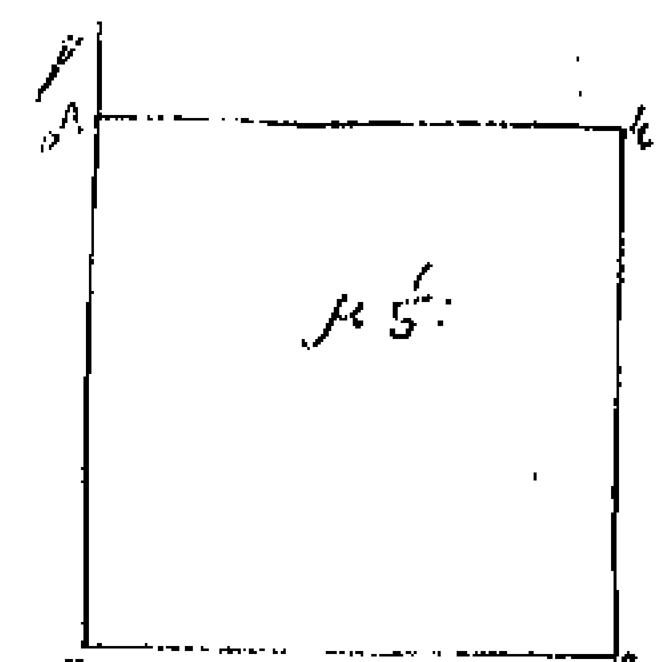
Ἐκ τούτου δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι κἂν δύο ὦσι τὰ δοθέντα εὐθύγραμμα, καὶ ζητηθῇ συστῆσαι παραλληλόγραμμον ἴσον συναμφοτέροις τοῖς δοθεῖσιν, ἔξεστι διὰ τῆς αὐτῆς ἐφόδου τὸ προστασσόμενον ποιεῖν, διαιροῦσι δ. τὰ δοθέντα εἰς τρίγωνα, εἰς ὅσα ἂν διαιρῆται. ὁμοίως κἂν πλείω ᾖ.

Πρότασις Μϛ'. Πρόβλημα.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

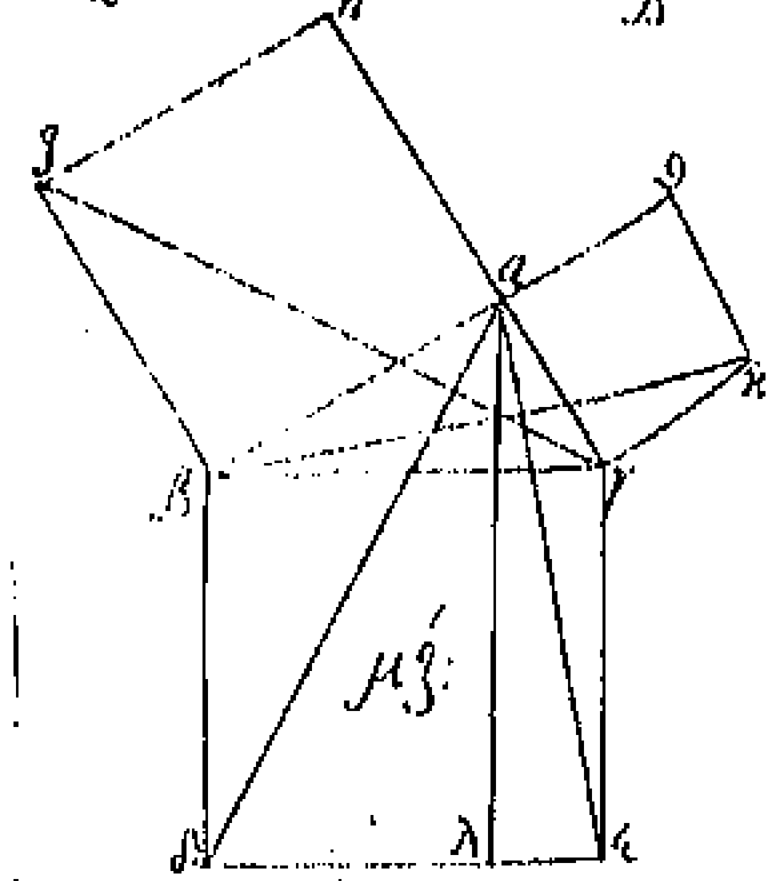
Ἔστω ἀναγράψαι τετράγωνον ἀπὸ τῆς αβ, δοθείσης εὐθείας. Ἀνεστάθω δὴ ἀπὸ τοῦ α, σημείου κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, ἡ αγ, εὐθεῖα κατὰ τὴν ια'. καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς αγ, ἡ αδ, ἴση τῇ αβ, κατὰ τὴν γ'. εἶτα ἀπὸ τοῦ δ, παράλληλος τῇ αβ, ἤχθω ἡ δε. ἀπὸ δὲ τοῦ β, ὁμοίως παράλληλος τῇ αδ, ἤχθω ἡ βε, καὶ τὸ αε, ἔσται τετράγωνον. κατὰ γὰρ τὴν κατασκευὴν παραλληλόγραμμόν ἐστιν. ὥστε αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ πλευραὶ καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ κατὰ τὴν λδ'. ἀλλὰ τῶν μὲν πρὸς τοῖς α, καὶ δ, γωνιῶν ἑκατέρα ὀρθή ἐστι κατὰ τὴν κθ'. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ αβ, αδ, πλευραὶ ἴσαι, ἄρα καὶ αἱ πρὸς τοῖς ε, καὶ β, αὐτοῦ γωνίαι ὀρθαί εἰσι, καὶ αἱ δε, εβ, λοιπαὶ πλευραὶ ἴσαι ταῖς δα, αβ, καὶ ἀλλήλαις. τὸ αε, ἄρα ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον. τὸ δὲ τοιοῦτον τετράγωνον. τὸ αε, ἄρα τετράγωνόν ἐστιν. ὅπερ καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. I. Fig. 36.



Πρότασις ΜΖ'. Θεώρημα.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.



Τοῦ αβγ, ἤδη τριγώνου τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας ὀρθῆς οὔσης, καὶ ἀπὸ τῶν αὐτοῦ πλευρῶν τετραγώνων γραφομένων τῶν βη, βε, γθ. Λέγω τὸ βε, ἴσον εἶναι τοῖς δυσὶ βη, γθ. Ἀπὸ γὰρ τοῦ α, σημείου, τῆς αλ, παραλλήλως τῇ βδ, ἢ γε, ἀχθείσης, καὶ ἐπιζευχθεισῶν τῶν αδ, αε, γζ, βκ. ἐπεὶ αἱ ὑπὸ βαγ, βαη, εἰσὶν ὀρθαί, πάντως γε ἡ αη, ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ αγ, κατὰ τὴν ιδ'. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ θα, ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ αβ. ὥστε ἡ μὲν ηγ, παράλληλός ἐστι τῇ ζβ, ἡ δὲ βθ, τῇ γκ. ἀλλ' ἐπεὶ αἱ ζβα, δβγ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ διὰ τὸ ἑκατέραν ὀρθὴν εἶναι. κοινῆς προσκειμένης τῆς αβγ, ἔσονται αἱ ὑπὸ ζβγ, δβα, ἴσαι. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ γβ, βζ, ἴσαι δυσὶ ταῖς δβ, βα, ἄρα κατὰ τὴν δ'. καὶ ἡ ζγ, βάσις τοῦ ζβγ, τριγώνου ἴση ἐστὶ τῇ αδ, βάσει τοῦ αβδ, τριγώ-

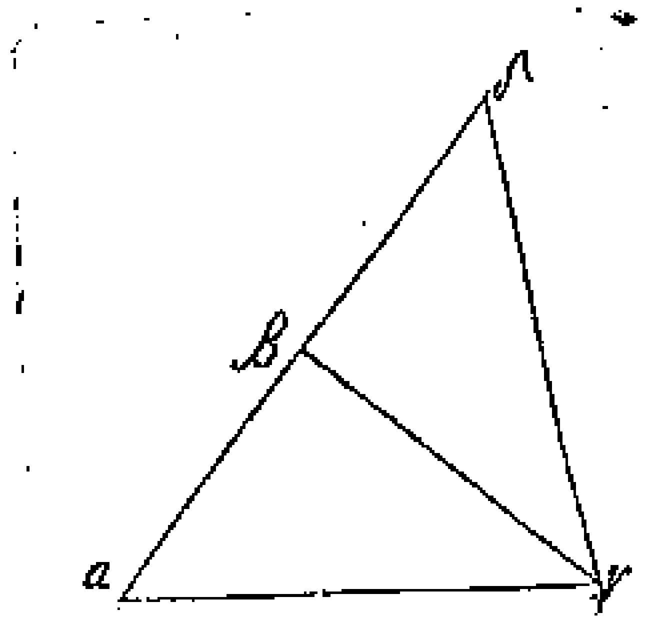
τριγώνου, καὶ ὅλον τὸ ζβγ, τρίγωνον, ὅλῳ τῷ αβδ. Αὖθις ἐπεὶ τὸ ζα, παραλληλόγραμμον τὴν αὐτὴν ζβ, βάσιν ἔχει τῷ ζβγ, τριγώνῳ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστι παραλλήλοις ταῖς ζβ, ηγ, πάντως γε κατὰ τὴν μα'. διπλάσιόν ἐστι τὸ ζα, παραλληλόγρ. τοῦ ζβγ, τριγώνου. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ βλ, παραλληλόγραμμον διπλάσιον εἶναι τοῦ αβδ, τριγώνου, ἐπεὶ τὴν αὐτὴν βδ, βάσιν ἀμφω ἔχουσι, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς βδ, αλ. ἀλλὰ τὸ ζβγ, τρίγωνον ἴσον δέδεικται τῷ αβδ, ἄρα τὰ βη, βλ, παραλληλόγραμμα διπλάσιά ἐστιν ἑκάτερον τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἑπομένως ἴσα κατὰ τὸ ϛ'. ἀξίωμα. τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται, καὶ τὸ γθ, ἴσον εἶναι τῷ γλ, ὥστε ὅλον τὸ βε, ἴσον ἐστὶ τοῖς βη, γθ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΜΗ'. Θεώρημα.

Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν, ὀρθή ἐστιν.

Ἔστω δὴ τὸ ἀπὸ τῆς αγ, πλευρᾶς τετράγωνον τοῦ αβγ, τριγώνου, ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, βγ, τετραγώνοις. Λέγω τὴν ὑπὸ αβγ, γωνίαν ὀρθὴν εἶναι. εἰ γὰρ ἡ βδ, πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς βγ, σταθεῖσα, ἴση τῇ αβ, ληφθῇ, καὶ ἡ δγ, ἐπιζευχθῇ, πάντως γε τὸ ἀπὸ τῆς δγ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω τοῖς ἀπὸ τῶν δβ, βγ, τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς αὐτοῖς τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τετράγωνον κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς δγ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, καὶ ἑπομένως ἡ δγ, ἴση ἐστὶ τῇ αγ. ἐπεὶ οὖν τὰ αβγ, γβδ, τρίγωνα ἔχουσι τὰς δύο πλευρὰς αβ, βγ, ἴσας δυσὶ ταῖς δβ, βγ, καὶ βάσιν τὴν αγ, βάσει τῇ γδ, ἴσην, ἕξουσι πάντως, καὶ τὴν ὑπὸ αβγ, γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ γβδ, κατὰ τὴν η'. ἀλλ' ἡ ὑπὸ γβδ, ὀρθή ἐστιν, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αβγ, ὀρθή ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. I. Fig. 37.



Τέλος τοῦ Πρώτου Βιβλίου τοῦ Εὐκλείδου.

Προοιμιακὴ περίληψις τοῦ Δευτέρου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

✠ Τὸ ἀνὰ χεῖρας τοῦτο Βιβλίον τῷ μὲν μεγέθει μικρὸν δοκεῖ, τῇ δ' ἐξοχότητι καὶ λυσιτελείᾳ τῶν αὐτοῦ θεωρημάτων, καὶ ἱκανῶς μέγα. καὶ τοῖς νέοις, οἶδα ὃ λέγω, δυσκατάληπτον μυστήρια διδάσκειν δοκοῦσιν. ἀλλ' οὖν ἐπὶ τὸ πρόσω προβεβηκότες, καὶ ἐπιμελῶς ἀναπολοῦντες, ῥᾷστα κατανοήσονται. Αἱ γὰρ παραλαμβανόμεναι ἐν αὐτῷ ἀποδείξεις, σχεδὸν πᾶσαι ἐπερείδονται τῷ σαφεστάτῳ ἀξιώματι, Τὸ ὅλον δηλ. ἴσον τοῖς ἰδίοις μέρεσιν. ὅθεν μὴ ἀπογινώσκωνται, εἰ κατὰ πρώτην βολὴν ἐντελῶς καταλαμβάνειν αὐτοῖς δυσχερές. ἡ γὰρ περὶ τὰ ταῦτα ἐπανάληψις σφόδρα ἐκπλαγῆναι αὐτοὺς ποιήσει, πῶς τὰ οὕτω σαφῆ, πάλαι δυσκατάληπτα ἐδόκει;

Πραγματεύεται δὴ ἐπὶ τοῦ παρόντος Δευτέρου Βιβλίου ὁ Στοιχειωτὴς περὶ δυνάμεως τῶν εὐθειῶν γραμμῶν, τουτέστι τῶν τετραγώνων. παραβάλλει τὰ ἐκ τῶν μερῶν τῶν γραμμῶν, ἢ διχοτομουμένων, ἢ ἄλλως πως διαιρουμένων, ἀναφαινόμενα ὀρθογώνια, τοῖς ὀρθογωνίοις καὶ τετραγώνοις τῶν ὁλικῶν γραμμῶν. Τὸ μέρος τοῦτο τῶν Στοιχείων λυσιτελέστατον πάντως γε, μάλιστα δ' ὄντως θεμέλιον τῶν χρειωδεστέρων Ἀλγεβραϊκῶν πράξεων. Αἱ μὲν τρεῖς πρῶται προτάσεις ἀποδεικτέαι κατὰ πολλαπλασιασμόν. Ἡ δὲ τετάρτη τῇ ἐξαγωγῇ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τὰς ἀρχὰς παρέχει, ὥσπερ καὶ αἱ ἑπόμεναι, πέμπτη, ἕκτη, ἑβδόμη, καὶ ὀγδόη, ταῖς τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου πράξεσι. Τὰ δὲ λοιπὰ θεωρήματα Τριγωνομετρικοῖς μᾶλλον λυσιτελῆ.

ΕΡΜΗΝΕΙ'Α ΤΩ'Ν Ο'ΡΩΝ
ΤΟΥ ΔΕΥΤΕ'ΡΟΥ ΒΙΒΛΙ'ΟΥ
ΤΩ'Ν ΤΟΥ ΕΥ'ΚΛΕΙ'ΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙ'ΩΝ.

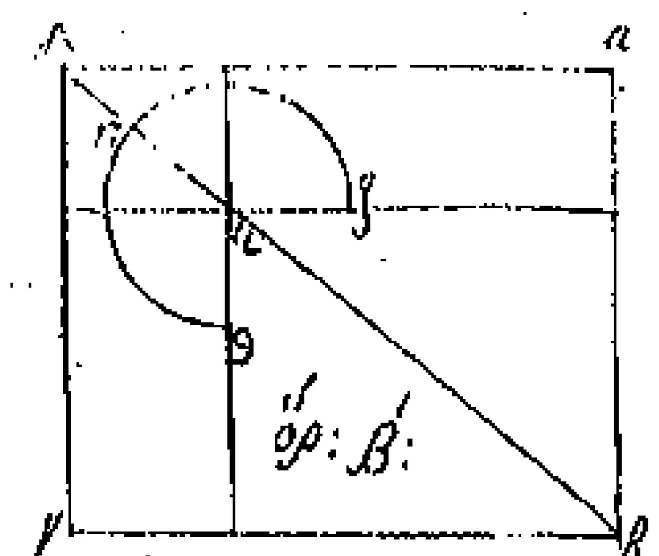
Ὅρος Α'. Πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν.

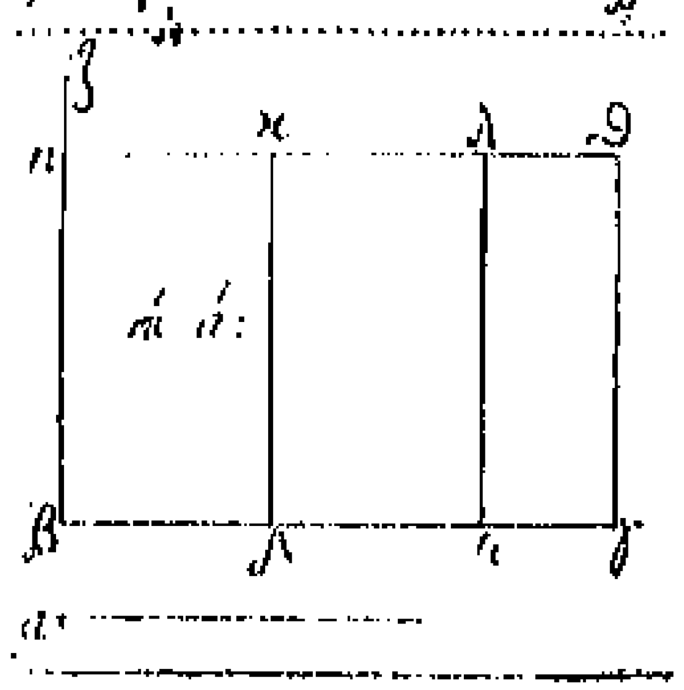
Εἴρηται ἐν τοῖς ἔμπροσθεν, ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα εἰς δύο διαιρεῖται εἴ-
δη τὰ καθολικώτερα, εἰς ὀρθογώνια καὶ μὴ ὀρθογώνια. καὶ τούτων αὖθις
ἑκάτερον ὑποδιαιρεῖται εἰς ἰσόπλευρα καὶ ἀνισόπλευρα. καὶ τῶν μὲν ὀρθο-
γωνίων, ὅσα εἰσὶν ἰσόπλευρα, καλεῖται τετράγωνα, ὅσα δὲ ἀνισόπλευρα, λέ-
γονται ἰδίως παραλληλόγραμμα ὀρθογώνια, καὶ ἔχουσι τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε
καὶ γωνίας ἴσας, ὡς δέδεικται, προτάσει λδ', τοῦ α'. τῶν δὲ μὴ ὀρθογωνίων, ὅσα
εἰσὶν ἰσόπλευρα, καλεῖται ῥόμβοι, ὅσα δὲ ἀνισόπλευρα ῥομβοειδῆ. Ἐνταῦθα
ἤδη ὁ λόγος περὶ τῶν ὀρθογωνίων, ἰσοπλεύρων τε καὶ ἀνισοπλεύρων, τετραγώνων
φημὶ καὶ ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων. ἐπεὶ δὲ τῇ μὲν τοῦ τετραγώνου προσηγο-
ρίᾳ, οὐ περικλείεται καὶ τὰ παραλληλόγραμμα ὀρθογώνια, τῇ δὲ τῶν παραλληλο-
γράμμων ὀρθογωνίων συμπεριλαμβάνεται καὶ τὰ τετράγωνα. τούτου χάριν περὶ μό-
νων τῶν παραλληλογράμμων ὀρθογωνίων εἰπὼν, καὶ περὶ τῶν τετραγώνων ἡρμή-
νευσε. Τὸ οὖν παραλληλόγραμμον γένους χώραν ἐπέχει, τὸ δὲ ὀρθογώνιον καὶ τὰ
λοιπὰ διαφορῶν. ἔφη δὲ, ὅτι ἐκ δύο πλευρῶν λέγεται περιέχεσθαι, ἐπεὶ πᾶν
παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον, πολλαπλασιαζομένων τῶν δύο αὐτοῦ πλευρῶν, τῶν
μίαν τῶν αὐτοῦ περιεχουσῶν γωνιῶν, συμπληροῦται. μᾶλλον δὲ, ὅτι αἱ ἀπεναντίον
αὐτοῦ πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὡς προείρηται. ὅθεν ἐπεὶ τοῦ τετραγώνου πᾶ-
σαι αἱ πλευραὶ ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸν λ'. ὅρον, οὐκ ἄλογον, ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς πε-
ριέχεσθαι λέγεσθαι. τῶν γὰρ δύο αὐτοῦ πλευρῶν πρὸς ἀλλήλας πολλαπλασιαζομέ-
νων, τὸ αὐτὸ γεννήσεται, ὅπερ καὶ τῆς μιᾶς πρὸς ἑαυτὴν πολλαπλασιαζομένης γί-
νεται. διὸ δὴ τοῖς μὲν παραλληλογράμμοις ἡ, ὑπὸ, προστίθεται πρόθεσις ὑποσὶ,
τὸ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον ὑπὸ δύο εὐθειῶν περιέχεται. τοῖς δὲ τετραγώ-
νοις ἡ, ἀπὸ, οἷον τὸ τετράγωνον ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς περιέχεται.

Β'. Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ ἓν παραλληλόγραμμον ὁποιονοῦν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι, γνώμων καλείσθω.

Τίνα μὲν τῶν τετραπλεύρων σχημάτων παραλληλόγραμμα ἤκουσεν, εἴρηται ἀνωτέρω, κἀν τοῖς ἔμπροσθεν ἔτι τισὶ σεσημείωται. Διάμετρος δὲ παραλληλογράμμου λέγεται εὐθεῖά τις, ἡ τὰς δύο ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίας τέμνουσα, ἥτις καὶ διάμετρος διαγώνιος προσαγορεύεται, καὶ δίχα τὸ παραλληλόγραμμον τέμνει, κατὰ τὴν λδ', τοῦ α. Ὅταν οὖν ταῖς δυσὶ πλευραῖς, ὑφ' ὧν περιέχεται τὸ παραλληλόγραμμον δύο ἐντὸς εὐθεῖαι παράλληλοι ἀχθῶσιν, ἔχουσαι κοινὴν τομὴν μετὰ τῆς διαμέτρου, τῶν τεσσάρων γενομένων παραλληλογράμμων τὰ μὲν δύο, τὰ ὑπὸ τῆς διαμέτρου τεμνόμενα, παραλληλόγραμμα περὶ τὴν διάμετρον ὀνομάζεται. τὰ δὲ λοιπὰ παραπληρώματα. Ληφθέντος τοίνυν ἑνὸς τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων, καὶ τῶν δύο παραπληρωμάτων ἐπὶ παντὸς παραλληλογράμμου, τὰ τρία ὁμοῦ Γνώμων καλεῖται. φέρει γάρ σοι τὸ σχῆμα, ὅπερ, καὶ τὸ παρὰ τοῖς μαθηματικοῖς ὄργανον, τὸ καλούμενον γνώμων, ὡς ἐπὶ τοῦδε τοῦ σχήματος καθορᾶται. ἐν ᾧ διάμετρος μέν ἐστιν ἡ βδ, εὐθεῖα, παραλληλόγραμμα δὲ περὶ τὴν διάμετρον τὰ βε, εδ, καὶ παραπληρώματα τὰ αε, εγ. τὸ δὲ ζηθ, ὅλον σχῆμα, Γνώμων καλεῖται.

Eucl. Lib. 2. Fig. 1.





Πρότασις Α'. Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὁσαδηποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου, καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ α, βγ, καὶ τμηθήτω ἡ βγ, κατὰ τὰ δ, καὶ ε, σημεῖα· Λέγω δή, τὸ ὑπὸ τῶν α, βγ, εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τοῖς ὑπό τε τῆς α, ἀτμήτου εὐθείας, καὶ τῶν βδ, δε, εγ, τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις. Ἀνεστάθω γὰρ ἀπὸ τοῦ β, σημείου πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς βγ, ἡ βζ. διὰ τῆς ια, τοῦ α. ἀπὸ δὲ τῆς βζ, ἀφῃρήσθω ἡ βη, ἴση τῇ α, διὰ τῆς γ'. τοῦ αὐτοῦ. καὶ τῇ μὲν βγ, ἤχθω παράλληλος ἡ ηθ, τῇ δὲ βη, αἱ δκ, ελ, γθ, διὰ τῆς λα, τοῦ αὐτοῦ. καὶ ἐπεὶ τὸ ηγ, σύγκειται ἐκ μερῶν τῶν βκ, δλ, εθ, ὀρθογωνίων. πάντως γε κατὰ τὸ ιδ'. ἀξίωμα, ἴσον ἐστὶ τοῖς βκ, δλ, εθ, ὀρθογωνίοις. ἀλλὰ τὸ μὲν ηγ, ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν α, καὶ βγ, εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον, περιέχεται γὰρ ὑπό τε τῆς βγ, καὶ βη, ἴσης τῇ α, καὶ πρὸς ὀρθὴν συσταθείσης γωνίαν. τὰ δὲ βκ, δλ, εθ, εἰσὶ τὰ ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια, τὸ μὲν γὰρ βκ, περιέχεται ὑπὸ τῆς βη, τῆς ἴσης τῇ α, ἀτμήτῳ, καὶ τοῦ βδ, τμήματος, τὸ δὲ δλ, ὑπό τε τῆς δκ, ἴσης καὶ αὐτῆς οὔσης τῇ α, καὶ τοῦ δε, τμήματος, καὶ τὸ εθ, ὑπό τε τῆς ελ, ταυτὸν δ' ἐστὶν εἰπεῖν τῆς α, καὶ τοῦ εγ, τμήματος. ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν α, καὶ βγ, εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς

α, ἀτ-

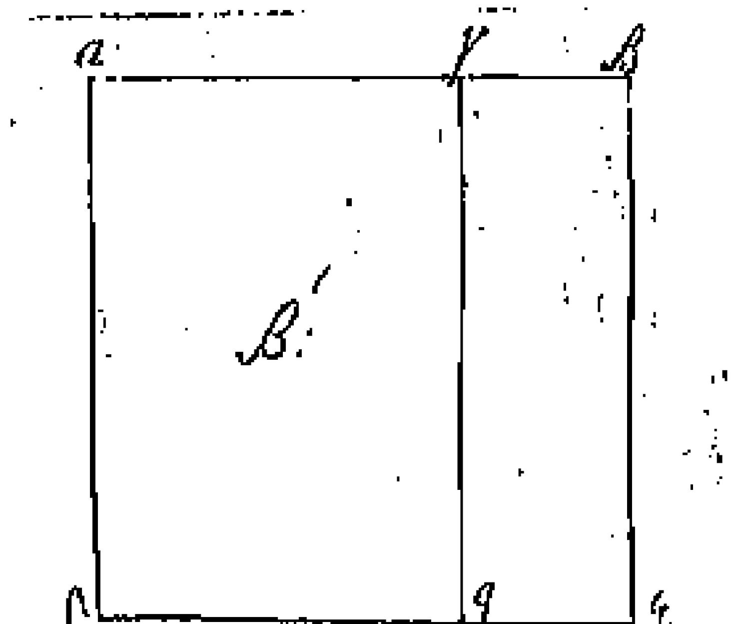
α, ἀτμήτου εὐθείας, καὶ τῶν βδ, δε, εγ, τμημάτων, ὅπερ ἦν τὸ ὑποτεθέν. Ὅτι δὲ ἑκατέρα τῶν δκ, ελ, ἴση ἐστὶ τῇ α, δῆλον. τὰ γὰρ βκ, δλ, εθ, παραλληλόγραμμά εἰσι, τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ κατὰ τὴν λδ', τοῦ α. ὥστε ἑκατέρα τῶν δκ, ελ, ἴση ἐστὶ τῇ βη, ἤτοι τῇ α, ἴση γὰρ εἴληπται ἡ βη, τῇ α.

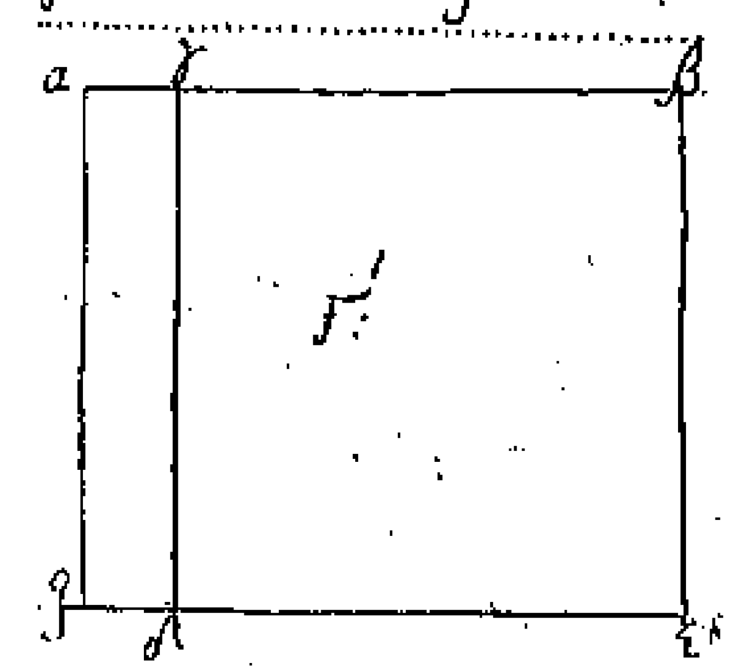
Πρότασις Β'. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχε, τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.

Τμηθήτω δὴ ἡ αβ, δοθεῖσα εὐθεῖα, ὡς ἔτυχε, κατὰ τὸ γ. λέγω, ὅτι τὰ ὑπό τε τῆς αβ, καὶ τῶν αγ, γβ, μερῶν αὐτῆς περιεχόμενα ὀρθογώνια, ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αβ, τετραγώνῳ. Γραφήτω γὰρ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον τὸ αε, διὰ τῆς μϛ', τοῦ α. καὶ ἀπὸ τοῦ γ, σημείου ἤχθω παράλληλος τῇ αδ, ἢ βε, ἡ γζ, κατὰ τὴν λα, τοῦ αὐτοῦ. καὶ ἐπεὶ τὰ αζ, γε, ἴσα ἐστὶ τῷ αε, κατὰ τὸ ιδ'. ἀξίωμα, τὰ δὲ αζ, γε, ἐστὶ τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης αβ, καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων αγ, γβ, περιεχόμενα ὀρθογώνια. τὸ μὲν γὰρ αζ, περιέχεται ὑπὸ τῆς αδ, ἥτις ἐστὶν ἴση τῇ αβ, κατὰ τὸν λ'. ὅρον, καὶ τοῦ ἑνὸς τμήματος αγ. τὸ δὲ γε, περιέχεται ὑπὸ τῆς γζ, ἴσης καὶ αὐτῆς οὔσης τῇ αδ, κατὰ τὴν λδ'. τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἑπομένως τῇ αβ, κατὰ τὸ α'. ἀξίωμα, καὶ τοῦ ἑτέρου τμήματος γβ. καὶ τὸ αε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης αβ, τετράγωνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 2. Fig. 2.





Πρότασις Γ'. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμή, ὡς ἔτυχε, τμηθῇ, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ.

Τμηθήτω δὴ ἡ αβ, δοθεῖσα εὐθεῖα, ὡς ἔτυχε, κατὰ τὸ γ, καὶ συνεστάθω ὀρθογώνιον τὸ αε, ἔχον τὴν βε, ἴσην τῷ γβ, τμήματι. Λέγω τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης αβ, καὶ τοῦ γβ, τμήματος περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον εἶναι τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ αγ, γβ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ γβ, τμήματος τετραγώνῳ. Ἀχθείσης γὰρ τῆς γδ, παραλλήλως τῇ αζ, ἢ βε, τὸ αε, πάντως ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τοῖς αδ, γε, ὀρθογωνίοις κατὰ τὸ ιδ'. ἀξίωμα, ὡς εἰς αὐτὰ διαιρούμενον, καὶ ἐξ αὐτῶν συγκείμενον. ἀλλὰ τὸ μὲν αδ, ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον,

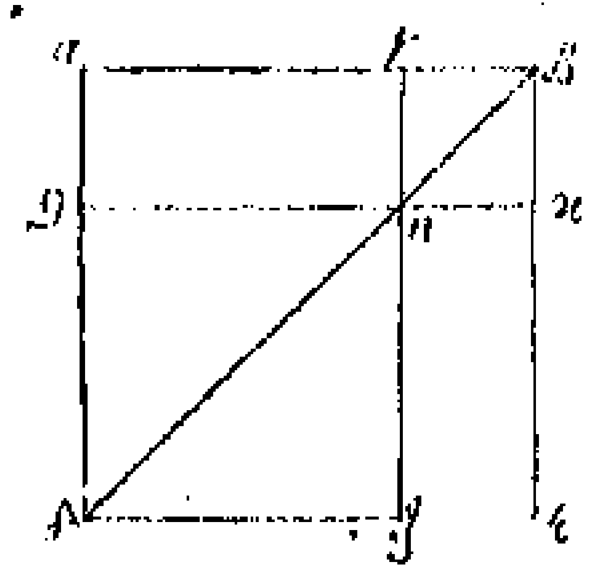
γώνιον, περιέχεται γὰρ ὑπό τε τοῦ αγ, ἑνὸς τμήματος, καὶ τῆς γδ, ἥτις ἐστὶν ἴση τῷ ἑτέρῳ γβ, τμήματι. τὸ δὲ γε, ἐστὶ τὸ ἀπὸ τοῦ γβ, τμήματος τετράγωνον, ἴση γὰρ ἡ γβ, τῇ βε. ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης αβ, καὶ τοῦ γβ, τμήματος περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων αγ, γβ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ γβ, τμήματος τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει τὸ ὑποχεθέν.

Πρότασις Δ΄. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον, ἴσον ἔσται τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Τμηθήτω ἤδη ἡ αβ, δοθεῖσα εὐθεῖα, ὡς ἔτυχε, κατὰ τὸ γ. Λέγω τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον ἴσον εἶναι τοῖς τε ἀπὸ τῶν αγ, γβ, τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αγ, γβ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἀναγραφήτω ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον τὸ αε, κατὰ τὴν μς΄, τοῦ α. καὶ ἤχθω ἡ βδ, διάμετρος. ἀπὸ δὲ τοῦ γ, παράλληλος τῇ αδ, ἢ βε, ἤχθω ἡ γζ, κατὰ τὴν λα΄. τοῦ αὐτοῦ, τέμνουσα τὴν βδ, διάμετρον κατὰ τὸ η. καὶ διὰ τοῦ η, ἤχθω παράλληλος τῇ αβ, ἢ δε, ἡ θκ. τὸ τοίνυν αε, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ζθ, γκ, καὶ τοῖς αη, ηε, παραλληλογράμμοις κατὰ τὸ ιδ΄, ἀξίωμα. ἀλλὰ τὸ μὲν αε, ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, δοθείσης τετράγωνον, τὰ δὲ θζ, γκ, τὰ ἀπὸ τῶν αγ, γβ, τμημάτων τετράγωνα, καὶ τὰ αη, ηε, τὸ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ὡς δειχθήσεται. ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν αγ, γβ, τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αγ, γβ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ὅπερ ἔδει τὸ ὑποχεθέν. Λείπεται δὲ δεῖξαι τὰ ἤδη ὁμολογηθέντα. ὅτι μὲν οὖν τὸ αε, ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον ἐκ τῆς κατασκευῆς δῆλον. ὅτι δὲ τὰ μὲν θζ, γκ, ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν αγ, γβ, τετράγωνα, τὰ δὲ αη, ηε, τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αγ, γβ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, δείκνυται κατὰ τὸν Εὐκλείδην οὕτως.

Eucl. Lib. 2. Fig. 3.



Ἐπεὶ τοῦ δαβ, τριγώνου αἱ δα, αβ, πλευραί, εἰσὶν ἴσαι, πάντως γε καὶ αἱ ὑπὸ αδβ, αβδ, γωνίαι τοῦ αὐτοῦ ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν ε΄, τοῦ α. ἐπεὶ δὲ καὶ εἰς παραλλήλους τὰς αδ, γζ, πέπτωκεν ἡ βδ. δῆλον, ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ βηγ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αδβ, ἐντὸς κατὰ τὴν κθ΄, τοῦ αὐτοῦ. ἀλλὰ τῇ ὑπὸ αδβ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ αβδ, ὡς δέδεικται, ἄρα ἡ ὑπὸ βηγ, ἴση ἐστί, κατὰ τὸ α΄. ἀξίωμα, τῇ ὑπὸ γβη, καὶ κατὰ τὴν ϛ΄, τοῦ α. αἱ γβ, γη, ἴσαι εἰσί. τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων, ἐπεὶ αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ καὶ γωνίαι ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν λδ΄. τοῦ αὐτοῦ, πάντως γε τὸ γκ, ἰσόπλευρόν ἐστιν. Αὖθις ἐπεὶ αἱ γζ, βε, παράλληλοί εἰσι, δῆλον, ὅτι αἱ ὑπὸ γβκ, βγη, γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν κθ΄, τοῦ αὐτοῦ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ γβκ, ὀρθή ἐστιν, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ὑπὸ βγη, καὶ ἑπομένως

νως κατὰ τὴν λδ΄, τοῦ αὐτοῦ. καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ γκ, παραλληλογράμμου ὀρθαί εἰσιν. ὥστε τὸ γκ, ὀρθογώνιόν ἐστιν, ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, τετράγωνον ἄρα. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ θζ, τετράγωνον εἶναι. Ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ αθ, ἴση ἐστὶ τῇ γη, ἡ δὲ γη, τῷ γβ, τμήματι κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν λδ΄. τὸ αη, δηλονότι περιέχεται ὑπὸ τῶν αγ, γβ, τμημάτων. ὡσαύτως ἐπεὶ αἱ βα, βε, ἴσαι εἰσί, καὶ ἀφῃρέθησαν ἀπ' αὐτῶν ἴσαι αἱ γβ, βκ, ἡ κε, πάντως ἴση ἐστὶ τῷ αγ, τμήματι. ἔστι δὲ καὶ ἡ ηκ, ἴση τῷ ἑτέρῳ γβ, τμήματι. ἄρα καὶ τὸ ηε, περιέχεται ὑπὸ τῶν αγ, γβ, τμημάτων. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

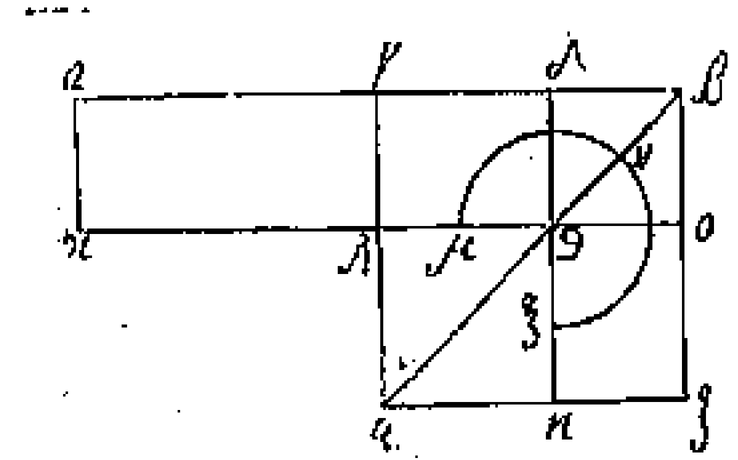
Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐν παντὶ τετραγώνῳ τὰ περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλόγραμμα τετράγωνά ἐστι.

Πρότασις Ε΄. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

Τμηθήτω δὴ ἡ αβ, εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ γ, ἄνισα δὲ κατὰ τὸ δ. Λέγω τὸ ὑπὸ τῶν αδ, δβ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γδ, τετραγώνου ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς γβ, τετραγώνῳ. Ἀναγεγράφθω γὰρ τὸ γζ, τετράγωνον ἀπὸ τῆς γβ. τῆς δὲ βε, ἐπιζευχθείσης, ἀχθήτω ἡ δη, παράλληλος τῇ γε, ἢ βζ, τέμνουσα τὴν βε, κατὰ τὸ θ, καὶ διὰ τοῦ θ, παράλληλος τῇ αβ, ἤχθω ἡ κο. ἀπὸ δὲ τοῦ α, παράλληλος τῇ γε, ἡ ακ. καὶ ἐπεὶ τὸ γθ, ἴσον ἐστὶ τῷ θζ, κατὰ τὴν μγ΄, τοῦ α. κοινοῦ λαμβανομένου τοῦ δο, πάντως γε κατὰ τὸ β΄. ἀξίωμα τὰ γο, δζ, ἴσα ἐστιν, ἀλλὰ τῷ γο, ἴσον ἐστὶ τὸ κγ. κατὰ τὸ α, ἄρα ἀξίωμα τὸ κγ, ἴσον ἐστὶ καὶ τῷ δζ. κοινοῦ δὲ προσκειμένου τοῦ γθ, τὸ αθ, πάντως ἴσον ἐστὶ τῷ μνξ, γνώμονι. ἐὰν δὲ καὶ τὸ λη, κοινὸν ληφθῇ, τὸ αθ, ἄρα μετὰ τοῦ λη, ἴσον ἐστὶ τῷ μνξ, γνώμονι καὶ λη. ἀλλ' ὁ μνξ, γνώμων μετὰ τοῦ λη, ἴσος ἐστὶ τῷ γζ. τὸ αθ, ἄρα μετὰ τοῦ λη, ἴσον ἐστὶ τῷ γζ. ἔστι δὲ τὸ μὲν αθ, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τμημάτων αδ, δβ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον. (περιέχεται γὰρ ὑπὸ τοῦ αδ, ἑνὸς τμήματος, καὶ τῆς δθ, ἥτις ἐστὶν ἴση τῷ δβ, ἑτέρῳ τμήματι κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω,) τὸ δὲ λη, τὸ ἀπὸ τῆς γδ, τετράγωνον, γέγονε γὰρ ἀπὸ τῆς λθ, ἥτις ἐστὶν ἴση τῇ γδ. καὶ τὸ γζ, τὸ ἀπὸ τῆς γβ, ἡμισείας τετράγωνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 2. Fig. 4.

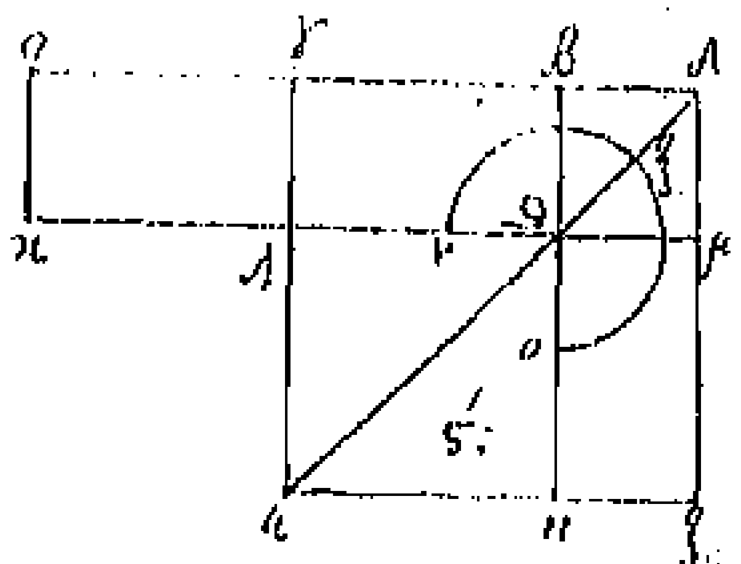


Πρότασις ς'. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ, καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

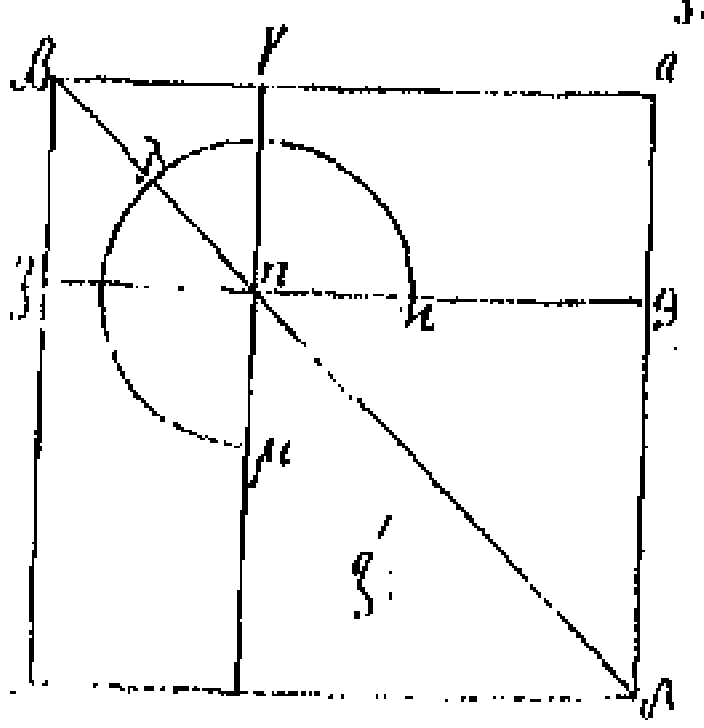
Τμηθήτω δὴ ἡ αβ, γραμμὴ δίχα κατὰ τὸ γ, καὶ προστεθήτω ἡ βδ. Λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν αδ, δβ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γβ, τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς γδ, τετραγώνῳ. τῆς γὰρ αὐτῆς κατασκευῆς τῇ τοῦ προτέρου γεγονυίας. ἐπεὶ τὸ θζ, ἴσον ἐστὶ τῷ γθ, κατὰ τὴν λδ', τοῦ α. τῷ δὲ γθ, ἴσον ἐστὶ τὸ αλ, κατὰ τὴν λς'. τοῦ αὐτοῦ, ἄρα κατὰ τὸ α. ἀξίωμα τὸ θζ, ἴσον ἐστὶ τῷ αλ. κοινοῦ δὲ προσκειμένου τοῦ γμ, ὅλον τὸ αμ, ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ νξο, γνώμονι. κοινοῦ δ' αὖθις προσκειμένου τοῦ λη, πάντως γε τὸ αμ, μετὰ τοῦ λη, ἴσον ἐστὶ τῷ νξο, γνώμονι, καὶ λη, παραλληλογρ. ἀλλ' ὁ νξο, γνώμων μετὰ τοῦ λη, ἴσος ἐστὶ τῷ γζ, τετραγώνῳ κατὰ τὸ ιδ'. ἀξίωμα, ἄρα τὸ αμ, μετὰ τοῦ λη, ἴσον ἐστὶ τῷ γζ, τετραγώνῳ. τὸ δὲ αμ, ἐστὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς αδ, καὶ δβ, ἡ γὰρ δμ, ἴση ἐστὶ τῇ δβ, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς δ'. καὶ τὸ λη, τὸ ἀπὸ τῆς γβ, τετράγωνον, ἡ γὰρ λθ, αὐτοῦ πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ γβ, κατὰ τὴν λδ'. ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν αδ, δβ, περιεχόμενον, ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γβ, τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς γδ, τετραγώνῳ. ὅπερ καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 2. Fig. 5.



Πρότασις Ζ'. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.



Τμηθήτω δὴ ἡ αβ, εὐθεῖα, ὡς ἔτυχε, κατὰ τὸ γ. Λέγω τὰ ἀπὸ τῶν αβ, βγ, τετράγωνα ἴσα εἶναι τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος αγ, τετραγώνῳ. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς αβ, τὸ αε, τετράγωνον διὰ τῆς μς', τοῦ α. καὶ ἀναπεπληρώσθω τὸ σχῆμα κατὰ τὰ προειρημένα, καὶ ἔσται πάντως τὰ βη, ηδ, παραλληλόγραμμα, τετράγωνα, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς δ'. τοῦ παρόντος. Ἐπεὶ δὲ ἡ ηθ, ἴση ἐστὶ τῇ γα, δῆλον, ὅτι τὸ μὲν βη, ἐστὶ τὸ ἀπὸ τοῦ γβ, τμήματος τε-

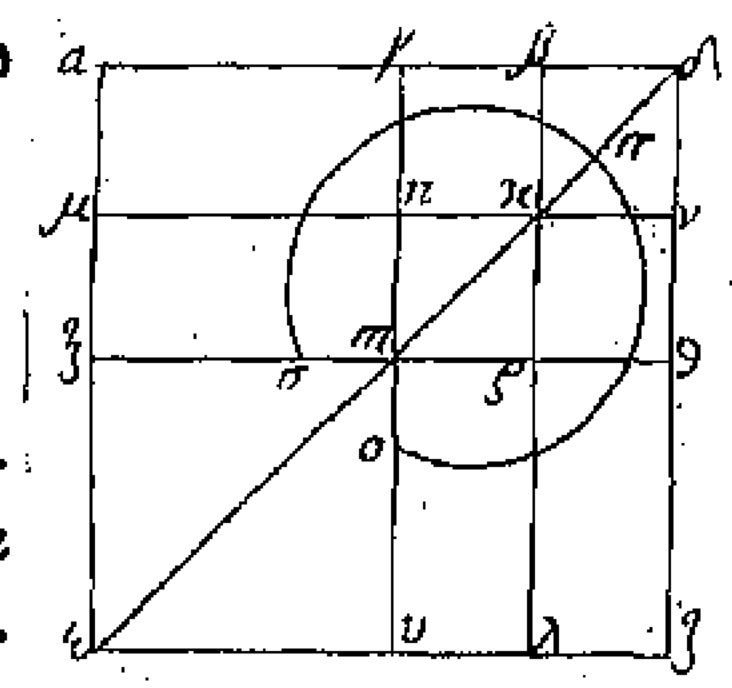
τράγω-

τράγωνον, τὸ δὲ ηδ, τὸ ἀπὸ τοῦ αγ. Αὖθις ἐπεὶ τὰ αη, ηε, ἴσα ἐστὶ κατὰ τὴν μγ'. τοῦ α. κοινοῦ λαμβανομένου τοῦ βη, πάντως γε τὰ αζ, γε, ἴσα ἐστίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ αβ, βε, καὶ γβ, βζ, ἴσαι κατὰ τὸν λ'. ὅρον τοῦ α. τὰ αζ, ἄρα γε, ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον. ἀλλὰ τὰ αζ, γε, ὁ κλμ, ἐστὶ γνώμων μετὰ τοῦ βη, τετραγώνου, ἄρα ὁ κλμ, γνώμων μετὰ τοῦ βη, ἴσος ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. κοινοῦ δὲ προσκειμένου τοῦ ηδ, πάντως γε ὁ κλμ, γνώμων μετὰ τῶν βη, ηδ, τετραγώνων ἴσος ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος αγ, τετραγώνῳ, τῷ ηδ. ἀλλ' ὁ κλμ, γνώμων, καὶ τὰ βη, ηδ, τετράγωνα, ἐστὶ τὸ ὅλον αε, τετράγωνον καὶ βη. ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον δηλ. τὸ αε, μετὰ τοῦ βη, τοῦ ἀπὸ τοῦ βγ, τμήματος τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης αβ, καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος βγ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ηδ, τετραγώνῳ, τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ δηλ. τμήματος αγ. ὅπερ ἦν τὸ ὑποτεθέν.

Πρότασις Η'. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχε, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Eucl. Lib. 2. Fig. 6.



Εὐθεῖα ἤδη ἡ αβ, τμηθήτω, ὡς ἔτυχε, κατὰ τὸ γ, καὶ προστεθήτω αὐτῇ ἡ βδ, ἴση τῇ βγ. Λέγω τὸ ἀπὸ τῆς αβ, ὅλης καὶ τοῦ γβ, τμήματος περιεχόμενον ὀρθογώνιον τετράκις, μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ αγ, τμήματος τετραγώνου ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς αδ, τετραγώνῳ. Ἀναγεγράφθω τοίνυν ἀπὸ τῆς αδ, τετράγωνον τὸ αζ. καὶ κατασκευασθήτω τὸ σχῆμα διπλοῦν. καὶ ἐπεὶ τὸ αζ, τετράγωνόν ἐστι, πάντως γε καὶ τὰ περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλόγραμμα τὰ βν, ηρ, ξυ, τετράγωνά εἰσι κατὰ τὸ πόρισμα τῆς δ'. τοῦ παρόντος. αὖθις ἐπεὶ ἡ βδ, ἴση γέγονε τῇ γβ, δῆλον, ὅτι τὰ γκ, βν, ἴσα ἐστὶ κατὰ τὴν λς', τοῦ α. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ηκ, κν, ταῖς γβ, βδ, ἴσαι κατὰ τὴν λδ', τοῦ α. καὶ ἑπομένως ἀλλήλαις, ἄρα καὶ τὰ ηρ, κθ, ἴσα ἐστίν. ἀλλὰ καὶ τὰ ηρ, βν, ἴσα ἐστίν, ἡ γὰρ ηκ, ἴση ἐστὶ τῇ γβ, ἤτοι τῇ βδ. Τὰ τέσσαρα ἄρα παραλληλόγραμμα γκ, βν, ηρ, κθ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Πάλιν ἐπεὶ τὰ γκ, ηρ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν, ἄρα καὶ αἱ τούτων βάσεις γη, ηπ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ κατὰ τὴν λς'. τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἑπομένως κατὰ τὴν αὐτὴν ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ καὶ τὰ αη, μπ. τοῖς δὲ αη, μπ, ἴσα ἐστὶ τὰ πλ, ρζ, κατὰ τὴν μγ'. τοῦ α. ἄρα τὰ τέσσαρα παραλληλόγραμμα αη, μπ, πλ, ρζ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. προστεθέντος δὲ τῷ μὲν αη, τοῦ γκ, τῷ δὲ μπ, τοῦ ηρ, τῷ δὲ πλ, τοῦ βν,

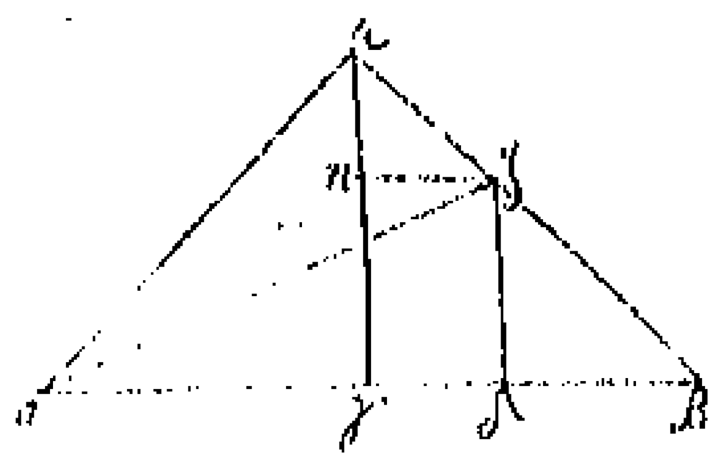
καὶ τῷ

καὶ τῷ ρζ, τοῦ κθ. πάντως γε κατὰ τὸ β΄. ἀξίωμα τὰ ακ, μρ, κζ, καὶ πλ, κατὰ τοῦ βν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἀλλὰ τὸ ακ, ἐστὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἴση γὰρ ἡ βκ, τῇ γβ, ἄρα τὰ τέσσαρα παραλληλόγραμμα ακ, μρ, κζ, καὶ πλ, κατὰ τοῦ βν, ἐστὶ τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχόμενον. ἔστι δὲ καὶ τὸ ξυ, τὸ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος ἀναγραφόμενον τετράγωνον, ἴση γὰρ ἡ ξπ, τῇ αγ, καὶ τὰ τέσσαρα παραλληλόγραμμα, ακ, μρ, κζ, πλ, κατὰ τοῦ βν, σὺν τῷ ξυ, ὅλον ἐστὶ τὸ αζ, τετράγωνον, τὸ ἀπὸ τῆς αδ, ἀναγραφόμενον. ἄρα τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς αβ, ὅλης καὶ τοῦ γβ, τμήματος περιεχόμενον ὀρθογώνιον κατὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ αγ, τμήματος τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αδ, τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Θ΄. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου.

Eucl. Lib. 2. Fig. 7.



Εὐθείας ἤδη τῆς αβ, εἰς ἴσα μὲν τμηθείσης κατὰ τὸ γ, ἄνισα δὲ κατὰ τὸ δ, λέγω τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων αὐτῆς τμημάτων αδ, δβ, τετράγωνα, διπλάσια εἶναι τῶν ἀπό τε τῆς ἡμισείας αγ, καὶ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν γδ, τετραγώνων. Ἀνεστάθω γὰρ ἐπὶ τῆς αβ, κάθετος ἡ εγ΄, ἴση τῇ αγ, καὶ τῶν αε, εβ, ἐπιζευγνυμένων, ἤχθω παράλληλος τῇ γε, ἡ δζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αζ. ἀπὸ δὲ τοῦ ζ, παράλληλος τῇ αβ, ἤχθω ἡ ζη. καὶ ἐπεὶ αἱ αγ, γε, ἴσαι εἰσὶ· πάντως γε αἱ ὑπὸ γαε, γεα, γωνίαι ἴσαι εἰσίν, ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ αγε, ὀρθή ἐστιν, ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ γαε, γεα, ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ γβε, γεβ, ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς. ὥστε ἐπεὶ δέδεικται ἑκατέρα τῶν ὑπὸ γεα, γεβ, ἡμίσεια ὀρθῆς, ὅλη πάντως γε ἡ ὑπὸ αεβ, ὀρθή ἐστιν. Ἐπεὶ δὲ πάλιν, αἱ ηζ, αβ, παράλληλοί εἰσι, καὶ εἰς αὐτὰς πέπτωκεν ἡ εγ. δῆλον, ὅτι αἱ ὑπὸ εηζ, εγβ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν κθ΄, τοῦ α΄. ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ εγβ, ὀρθή ἐστιν, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ εηζ, ὁμοίως ὀρθή ἐστι. δέδεικται δὲ ἡ ὑπὸ ηεζ, ἡμίσεια ὀρθῆς, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ηζε, ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς. ὥστε αἱ ηε, ηζ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν ε΄, τοῦ αὐτοῦ. ὁμοίως δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ δβ, δζ, ἴσαι εἰσίν. Ἐπεὶ οὖν τὸ αγε, τρίγωνον ὀρθογώνιόν ἐστι κατὰ τὸ γ, πάντως γε τὸ ἀπὸ τῆς αε, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αγ, γε, τετραγώνοις κατὰ τὴν μζ΄, τοῦ α΄. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν αγ, γε, τετράγωνα ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι καὶ τὰς αγ, γε· τοῦ ἑνὸς ἄρα, δηλ. τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, διπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αε. ὡσαύτως δειχθήσεται καὶ τὸ ἀπὸ τῆς εζ, διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ηζ, ἤτοι τοῦ ἀπὸ τῆς γδ, ἴσαι γὰρ αἱ ηζ, γδ, κατὰ τὴν λδ΄, τοῦ α΄. ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν αε, εζ, τετρά-

γωνα

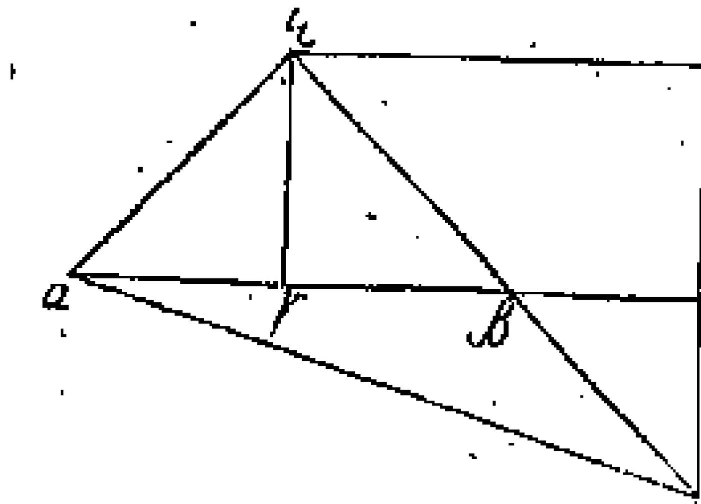
γωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν αγ, γδ, συναμφότερα συναμφοτέρων. ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν αε, εζ, τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αζ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν μζ΄. ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αζ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῶν αγ, γδ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς αζ, τετραγώνῳ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν αδ, δζ, κατὰ τὴν αὐτὴν, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αδ, δζ, τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν αγ, γδ. ἀλλ᾽ ἡ δζ, ἴση δέδεικται τῇ δβ. ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν αδ, δβ, τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν αγ, γδ. ὅπερ ἦν τὸ ὑποτεθέν.

Πρότασις Ι΄. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης, τὰ συναμφότερα τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς, ἀναγραφέντος τετραγώνου.

Τῆς αβ, ἤδη εὐθείας δίχα κατὰ τὸ γ, τμηθείσης, καὶ τῆς βδ, ἐπ᾽ εὐθείας αὐτῇ προσκειμένης, λέγω, ὅτι τό, τε ἀπὸ τῆς ὅλης αδ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης βδ, τὰ συναμφότερα ταῦτα τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς αγ, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς γδ, τετραγώνου. Ἀπὸ γὰρ τοῦ γ, κάθετος ἀνεστάθω κατὰ τὴν ια΄, τοῦ α΄. ἡ γε, ἴση τῇ αγ, καὶ τῶν αε, εβ, ἐπιζευγνυμένων, ἤχθω ἀπὸ τοῦ δ, σημείου παράλληλος τῇ γε, καὶ ἴση ἡ δζ. ἐκβαλλομένη δὲ ἡ εβ, ἀπὸ τοῦ β, σημείου συμπιπτέτω τῇ δζ, καὶ αὐτῇ ἐκβαλλομένῃ κατὰ τὸ η. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αη. καὶ ἐπεὶ κατὰ τὸ δ΄. πόρισμα τῆς λβ΄, τοῦ α΄. ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αεγ, βεγ, ἡμίσεια ὀρθῆς ἐστι, πάντως γε ὅλη ἡ ὑπὸ αεβ, ὀρθή ἐστι. κατὰ δὲ τὴν λδ΄. τοῦ αὐτοῦ ὀρθή ἐστιν ἔτι καὶ ἡ ὑπὸ εζη, ὅτι τὸ γζ, παραλληλόγραμμόν ἐστιν ἐκ τῆς κατασκευῆς. αὖθις ἐπεὶ ἡ εζ, παράλληλός ἐστι τῇ γδ, κατὰ τὴν λγ΄, τοῦ α΄. δῆλον, ὅτι ἡ ὑπὸ ηδβ, ὀρθή ἐστι κατὰ τὴν κθ΄, τοῦ αὐτοῦ. ὥστε ἐπεὶ ἡ ὑπὸ δβη, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γβε, κατὰ τὴν ιε΄, τοῦ α΄. ἡ δὲ ὑπὸ γβε, ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς κατὰ τὸ δ΄. πόρισμα τῆς λβ΄. τοῦ αὐτοῦ. πάντως γε καὶ ἡ ὑπὸ δβη, ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ δηβ, ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς. ὥστε ἡ δβ, ἴση ἐστὶ τῇ δη, κατὰ τὴν ς΄, τοῦ α΄. δέδεικται δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ ζ, ὀρθή. ἄρα καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ ζεη, ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς. ὥστε καὶ ἡ εζ, ἴση ἐστὶ τῇ ζη, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ς΄. τούτων δ᾽ οὕτω προαποδεδειγμένων, οὕτωσὶ συνακτέον. Ἐπεὶ τὸ αγε, ὀρθογώνιόν ἐστι, πάντως γε τὸ ἀπὸ τῆς αε, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αγ, γε, τετραγώνοις. ἴση δὲ ἡ αγ, τῇ γε, τοῦ ἑνὸς ἄρα, ἤτοι τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, διπλάσιόν

Eucl. Lib. 2. Fig. 8.

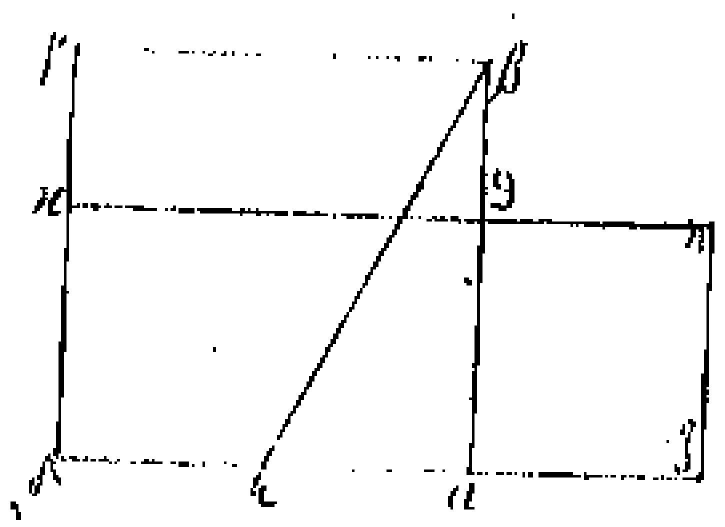


σιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αε. Διὰ τὰ αὐτὰ δείκνυται καὶ τὸ ἀπὸ τῆς εη, διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς εζ, ἤτοι τῷ ἀπὸ τῆς γδ, ἴσαι γὰρ αἱ εζ, γδ, ὡς δέδεικται. ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῆς αε, εη, τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αη, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς αη, ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν αδ, δη, τετράγωνα, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αδ, δη, τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν αγ, γδ, τετραγώνων, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς δη, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βδ, ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν αδ, δβ, διπλάσιά ἐστι τῶν αὐτῶν. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΑ'. Πρόβλημα.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης, καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

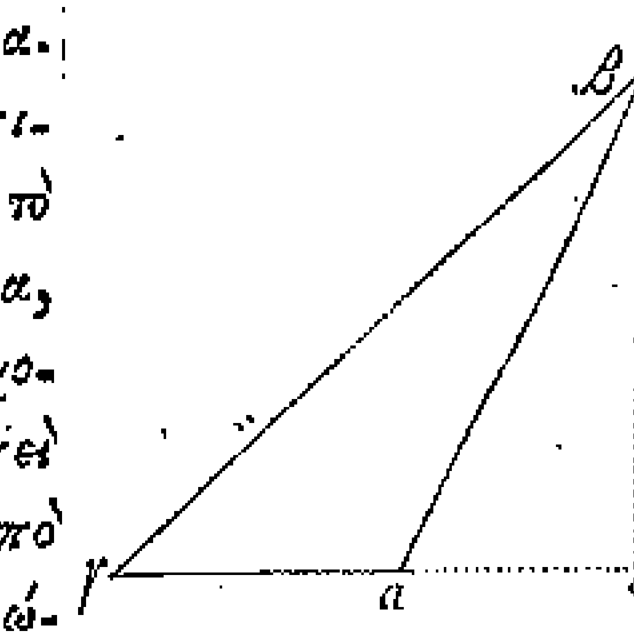
Ἔστω δὴ τεμεῖν τὴν αβ, δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς δύο μέρη, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης αβ, καὶ ἑνὸς τῶν αὐτῆς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον τὸ αβγδ, τῆς δὲ αδ, δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ ε, ἐπεζεύχθω ἡ εβ, καὶ ἐξαχθήτω ἡ εα, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπὶ τὸ ζ, ὥστε τὴν εζ, *Eucl. Lib. 2. Fig. 9.*



ἴσην εἶναι τῇ βε. ἀπὸ δὲ τῆς αζ, ἀναγραφομένου τοῦ αη, τετραγώνου, παρεκτανθήτω ἡ ηθ, ἐπὶ τὸ κ. καὶ ἐπεὶ ἡ αδ, τέτμηται δίχα κατὰ τὸ ε, καὶ προσετέθη αὐτῇ ἡ αζ, πάντως γε κατὰ τὴν ϛ'. τοῦ παρόντος, τὸ ὑπὸ τῆς δζ, καὶ ζα, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἤτοι τὸ ζκ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αε, τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς εζ, τετραγώνῳ, ἢ τῷ ἀπὸ τῆς εβ, ἴσης ταύτῃ. ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τῆς εβ, τετραγώνῳ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν αβ, αε, κατὰ τὴν μζ', τοῦ α. ἄρα τὸ ζκ, ὀρθογ. μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αε, τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, αε, τετραγώνοις. κοινοῦ δὲ ἀφαιρουμένου τοῦ ἀπὸ τῆς αε, ἐγκαταλείπεται τὸ ζκ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς αβ, τετραγώνῳ, ἤτοι τῷ αγ. ἀφαιρουμένου δ' ἔτι κοινοῦ τοῦ ακ, ἐγκαταλείπεται ἴσον τὸ ζθ, τῷ θγ. ἀλλὰ τὸ μὲν θγ, ἐστὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ὅλης αβ, ἴση γὰρ ἡ αβ, τῇ βγ, καὶ τοῦ ἑτέρου θβ, τμήματος. τὸ δὲ ζθ, τὸ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ αθ, τμήματος τετράγωνον. ἡ δοθεῖσα ἄρα εὐθεῖα τέτμηται κατὰ τὸ προσαχθέν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ΙΒ'. Θεώρημα.

Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἐκβληθεῖσαν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ. *Eucl. Lib. 2. Fig. 10.*



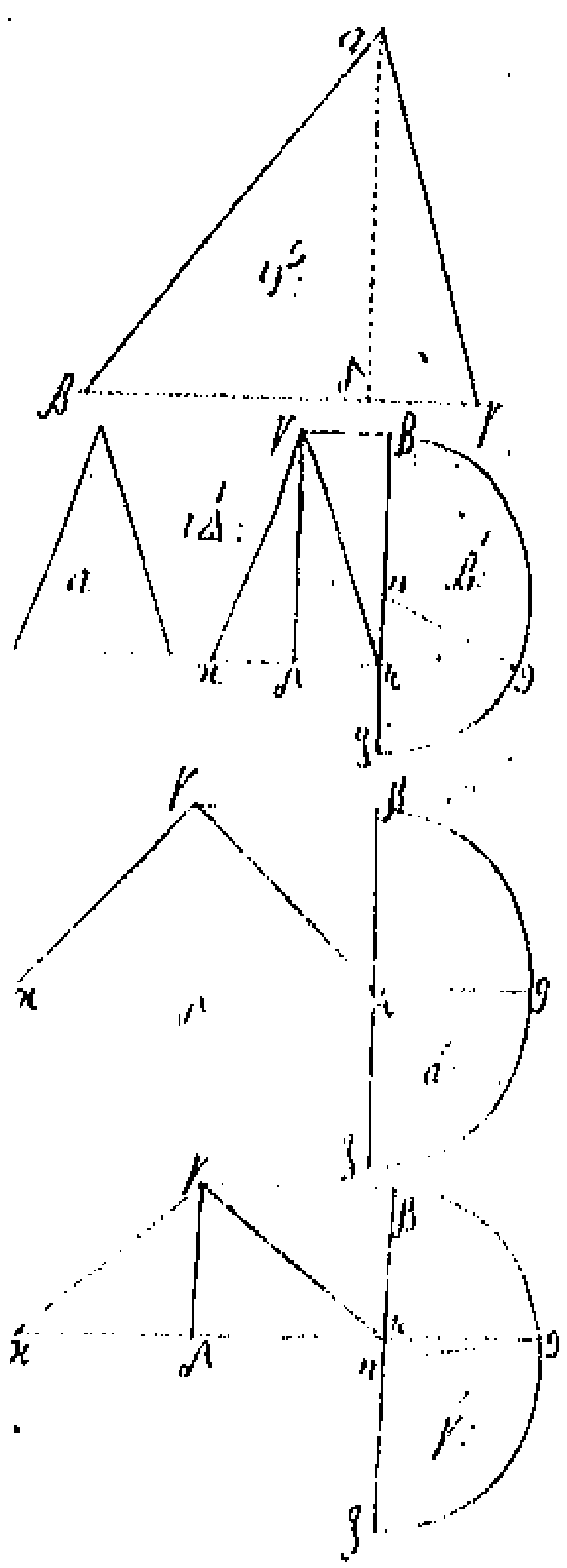
Ἔστω δὴ τρίγωνον τὸ αβγ, ἀμβλυγώνιον κατὰ τὸ α. καὶ τῆς γα, ἐξαχθείσης κατὰ τὸ συνεχὲς ἀπὸ τοῦ α, πιπτέτω κάθετος ἐπ' αὐτῆς ἀπὸ τοῦ β, ἡ βδ. Λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν γα, αβ, τετραγώνων, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν γα, αδ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. κατὰ γὰρ τὴν δ'. τοῦ παρόντος, ἐπεὶ ἡ γδ, τέτμηται, ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ α, πάντως γε τὸ ἀπὸ τῆς γδ, ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν γα, αδ, τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν γα, αδ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. κοινοῦ δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς δβ, λαμβανομένου ἔσονται τὰ ἀπὸ τῶν γδ, δβ, τετράγωνα, ἴσα τοῖς τε ἀπὸ τῶν γα, αδ, δβ, τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν γα, αδ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν γδ, δβ, τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς γβ, κατὰ τὴν μζ, τοῦ παρόντος, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν αδ, δβ, ἴσον ἐστὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τὸ ἀπὸ τῆς αβ, ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς γβ, ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν γα, αβ, τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν γα, αδ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς γβ, μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν γα, αβ, τετραγώνων τῷ δὶς ὑπὸ τῶν γα, αδ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις ἄρα τριγώνοις καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΓ'. Θεώρημα.

Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

Ἔστω δὴ τρίγωνον ὀξυγώνιον τὸ αβγ. καὶ πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς βγ, αὐτοῦ πλευρᾶς ἡ αδ. Λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τετράγωνον, ὑποτεινούσης τὴν πρὸς τῷ β, ὀξεῖαν γωνίαν, ἔλαττον εἶναι τῶν ἀπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχουσῶν τὴν αὐτὴν γωνίαν τετραγώνων, τῷ δὶς ὑπό τε τῆς βγ, καὶ βδ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. τῆς γὰρ βγ, κατὰ τὸ δ, ὡς ἔτυχε, τμηθείσης, ἔσται τὰ ἀπὸ τῶν γβ, β δ, τετράγωνα ἴσα, τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν γ β, β δ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς δ γ, τετραγώνῳ κατὰ τὴν ζ΄. τοῦ παρόντος. κοινοῦ δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς α δ, τετραγώνου εἰλημμένου, ἔσται τὰ ἀπὸ τῶν γ β, β δ, δ α, τετράγωνα ἴσα τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν γ β, β δ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν α δ, δ γ, τετραγώνοις, κατὰ τὸ β΄. ἀξίωμα. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν α δ, δ β, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς α β, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν α δ, δ γ, τετραγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς α γ, κατὰ τὴν μ ζ΄. τοῦ α. ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν γ β, β α, ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν γ β, β δ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς α γ, τετραγώνῳ. ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς α γ, τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν γ β, β α, τετραγώνων τῷ δὶς ὑπὸ τῶν γ β, β δ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ὡσαύτως δὲ δείξομεν, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς α β, τετράγωνον ἔλαττον εἶναι τῶν ἀπὸ τῶν β γ, γ α, τετραγώνων τῷ δὶς ὑπὸ τῶν β γ, γ δ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις ἄρα τριγώνοις, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 2. Fig. 11.



Πρότασις ΙΔ΄. Πρόβλημα.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

Ἔστω δὴ συστήσασθαι τετράγωνον ἴσον τῷ α, δοθέντι εὐθυγράμμῳ. Συνεστάθω διὰ τῆς μ ε΄. τοῦ α΄. τῷ α, εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ β δ. εἰ οὖν ἡ β ε, ἴση ἐστὶ τῇ ε δ, γέγονε τὸ ἐπιταχθέν, τετράγωνον γὰρ ἔσται τὸ β δ, ὅπερ ἴσον γέγονε τῷ α. εἰ δὲ μή, ἔστω ἡ β ε, τῆς ε δ, μείζων. καὶ ἐξήχθω ἐπὶ τὸ ζ. ὥστε τὴν ε ζ, ἴσην εἶναι τῇ ε δ. τῆς δ᾽ ὅλης β ζ, δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ η, κέντρῳ μὲν τῷ η, διαστήματι δὲ τῷ η β, ἢ η ζ, γραφήτω ἡμικύκλιον τὸ β θ ζ. καὶ ἐκβληθήτω ἡ δ ε, κατὰ τὸ συνεχές. εἶτα ἐπεζεύχθω ἡ η θ. καὶ ἐπεὶ ἡ β ζ, τέτμηται εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ η, ἄνισα δὲ κατὰ τὸ ε, ἔσται κατὰ τὴν ε΄. τοῦ παρόντος, τὸ ὑπὸ τῶν β ε, ε ζ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ε η, τετραγώνου ἴσον, τῷ ἀπὸ τῆς η ζ, τετραγώνῳ, ἤτοι τῷ ἀπὸ τῆς η θ. ἴσαι γὰρ αἱ η ζ, η θ. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς η θ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν θ ε, ε η, τετραγώνοις κατὰ τὴν μ ζ΄. τοῦ α. ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν β ε, ε ζ, ὀρθογώνιον δηλ. τὸ β δ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ε η, τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν θ ε, ε η, τετραγώνοις. τοῦ δὲ ἀπὸ τῆς ε η, τετραγώνου κοινοῦ ἀφαιρεθέντος, ἐγκαταλειφθήσεται τὸ β δ, παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς

ε θ, τετραγώνῳ. ἀλλὰ τὸ β δ, παραλ. ἴσον γέγονε τῷ α, ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ε θ, τετράγ. ἴσον ἐστὶ τῷ α. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται τὸν αὐτὸν τρόπον γίνεσθαι τὸ προσαχθέν, κἂν ἡ δ ε, μείζων εἴη τῆς ε β, καὶ ἡ β ζ, τμηθῇ δίχα ἐκτὸς τοῦ ε, ὡς ἐπὶ τοῦ γ΄, καθορᾶται σχήματος. τῷ δοθέντι ἄρα εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συνέστη.

Τέλος τοῦ Δευτέρου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

Προοιμιακὴ περίληψις τοῦ Τρίτου Εὐκλειδείου Στοιχείου.

✣ Ἐπὶ τοῦ παρόντος Τρίτου Βιβλίου ὁ Στοιχειωτὴς τὰ πλεῖστα περὶ κύκλου πραγματεύεται, τὰς ἀρκτικὰς αὐτοῦ ἀποδεικνὺς ἰδιότητας, αὐτῷ τούτῳ ἀνηκούσας, οἷον ἐντελεστάτῳ ἐν τοῖς ἐπιπέδοις σχήματι. συμβάλλει ἀλλήλαις τὰς γραμμὰς ἤτοι ἐντὸς τῆς αὐτῆς περιφερείας, ἢ ἐκτὸς ἀγομένας. τὰ πάθη τούτων, καὶ τῶν κύκλων ἁπτομένων ἢ τεμνομένων ἀλλήλοις ἐκτίθησιν. καὶ ἐπὶ τούτοις τὰς γωνίας ἤτοι πρὸς τῷ κέντρῳ, ἢ πρὸς τῇ περιφερείᾳ κειμένας πρὸς ἀλλήλας παραβάλλει. καὶ τέλος τὰ τῆς πρακτικῆς Γεωμετρίας Στοιχεῖα, ὅσα τῇ δυνάμει μάλιστα τοῦ κύκλου ἐπερείδονται, διὰ βραχέων παραδίδωσιν. Ὅσης τοίνυν λυσιτελείας παρεκτικόν ἐστι τὸ Βιβλίον, τοῦτο μόνον ἀρκεῖ πρὸς ἔνδειξιν, ὅτι περὶ κύκλου, πηγῆς ὄντως θαυμασίων πραγμάτων ἐφ᾽ ὅλην τὴν μάθησιν, καὶ τῶν ῥηθέντων πραγματεύεται.

Τὰ χρησιμώτερα δὴ ταῖς ἐπιστήμαις θεωρήματα καθέστηκε ταῦτα. τὸ ι ϛ΄. ἀμέλει, τὸ κ΄. κ α΄. κ β΄. λ α΄. λ β΄. λ ε΄. καὶ λ ϛ΄.

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΟΡΩΝ

ΤΟΥ ΤΡΙΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

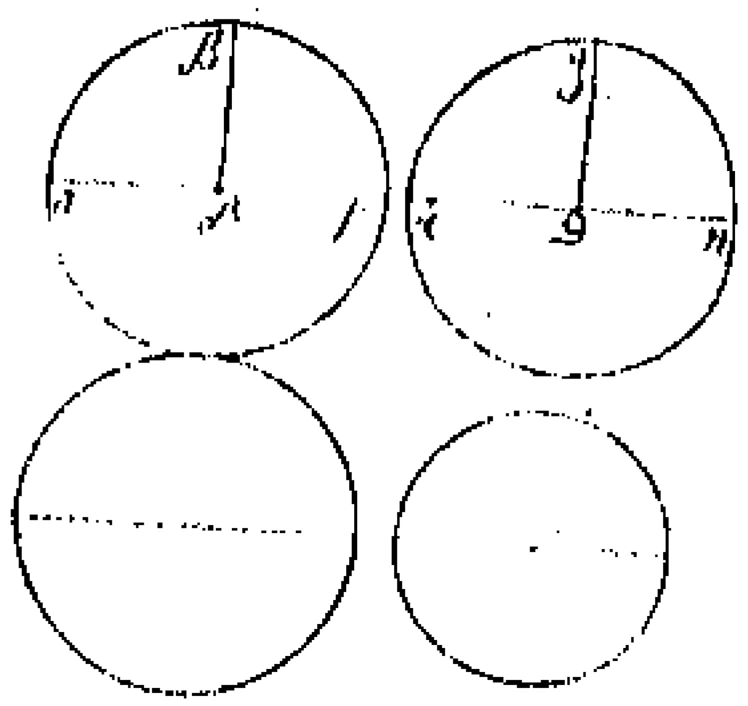
ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

Ὅρος Πρῶτος.

Ἴσοι κύκλοι εἰσίν, ὧν αἱ διάμετροι εἰσὶν ἴσαι, ἢ ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσί.

Διαλαβὼν ἐν τοῖς πρότερον δυσὶ βιβλίοις Εὐκλείδης, ὁ τὰς κλεῖς τῆς Μαθηματικῆς ἁπάσης εὐμεθόδως παραδοὺς, περὶ τῶν τριπλεύρων, τετραπλεύρων σχημάτων, καὶ τῶν πρὸς ἄλληλα τούτων σχέσεων· ἐνταῦθα ἤδη, ὡς περὶ τῶν ἐν κύκλῳ θεωρουμένων διαληψόμενος, ὅσαγε τοῦ κύκλου ὑποθετέα, οἱονεὶ ὅρους καὶ προγνώσεις εὐμαρείας χάριν προτάττει. Ἐπεὶ δὲ τὸν τοῦ κύκλου ὁρισμὸν ἐν τῷ πρώτῳ ἐκδέδωκε βιβλίῳ, ἐπὶ τοῦ παρόντος γε τὰς σχέσεις τῶν κύκλων, καὶ τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν τε καὶ γωνιῶν, καὶ τῶν τοῦ κύκλου ἔτι μερῶν ὁριστικῶς διερμηνεύει. Ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ ἰσότης πρώτη ἐστὶ τῶν σχέσεων, τούτου χάριν καὶ τίνες ἴσοι κύκλοι πρῶτον ὁρίζεται. τοῦ δὲ κύκλου τό, τε μῆκος καὶ πλάτος ἴσον ἔχοντος, καὶ τούτων

Eucl. Lib. 3. Fig. 1.



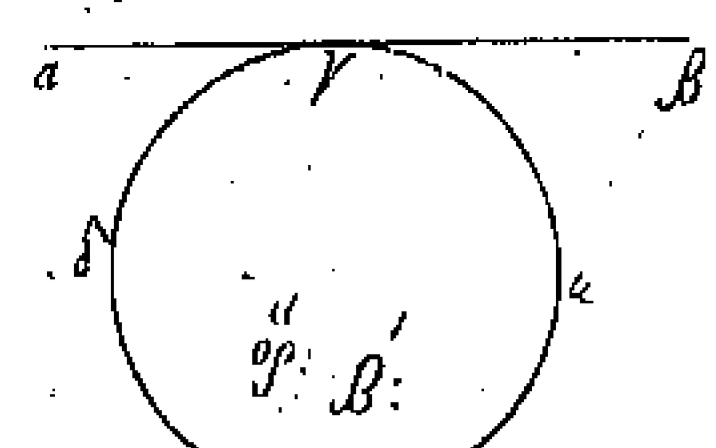
ἑκάτερον ἀδιόριστον, καὶ τῇ διαμέτρῳ μόνῃ παριστανόμενον, τὴν τῶν διαμέτρων ἰσότητα γνώρισμα τῆς τῶν κύκλων ἰσότητος τίθησι, λέγων, ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ὧν αἱ διάμετροι, ἢ αἱ ἐκ τῶν κέντρων, ἤτοι αἱ ἡμιδιάμετροι ἴσαι εἰσί, ὡς οἱ α β γ, ε ζ η, κύκλοι· ὧν αἵτε α γ, ε η, διάμετροι ἴσαι εἰσί, καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων δ, καὶ θ, δηλονότι αἱ δ α, δ β, δ γ, καὶ θ ε, θ ζ, θ η, ὁμοίως ἴσαι εἰσίν· ὥστε τοὐναντίον, ὧν αἱ διάμετροι, ἢ ἡμιδιάμετροι ἄνισοι, καὶ αὐτοὶ ἄνισοί εἰσιν· οὗ δὲ μείζων ἡ διάμετρος ἢ ἡμιδιάμετρος, κἀκεῖνος μείζων. τίνος δὲ χάριν τῶν ἀνίσων οὐκ ἐμνήσθη; ἢ ὅτι τῶν ἐναντίων ἡ αὐτή ἐστιν ἐπιστήμη.

Β'. Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἁπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον.

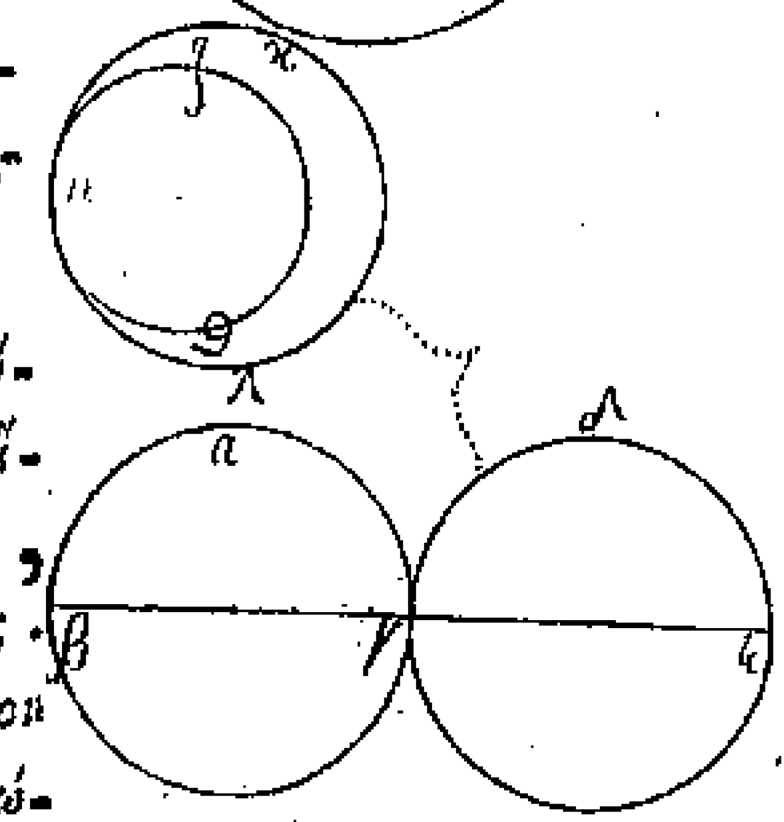
Τῆς σχέσεως δὲ δεκαχῶς θεωρουμένης, κατ' οὐσίαν δηλονότι, ὡς ἐν τοῖς σωματικοῖς ἢ ἀσωμάτοις· κατὰ ποσὸν, ὡς ἐν τοῖς μεγέθεσι καὶ ἀριθμοῖς· κατὰ ποιόν,

ποιόν, ὡς ἐν ταῖς ποιότησι χρώμασί τε καὶ τοῖς ὁμοίοις· κατὰ τὰ πρός τι, ὡς
ἐν τοῖς αἰτίοις καὶ αἰτιατοῖς· κατὰ τὸ ποῦ, ὡς ἐν τοῖς κατὰ τὸν αὐτὸν ἢ διαφό-
ρους κειμένοις τόπους· κατὰ τὸ ποτὲ, ὡς ἐν τοῖς κατὰ τὸν αὐτὸν ἢ διαφόρους
γενομένοις χρόνους· κατὰ τὸ κεῖσθαι, ὡς ἐν τοῖς κοινωνοῦσι καὶ διαφέρουσι τὴν θέ-
σιν· κατὰ τὸ ποιεῖν, ὡς ἐν τοῖς ἐνεργοῦσι· κατὰ τὸ πάσχειν, ὡς ἐν τοῖς πάσ-
χουσι· καὶ κατὰ τὸ ἔχειν, ὡς ἐν τοῖς περικειμένοις τε καὶ περιτιθεμένοις. Ἐπεὶ
κατ' οὐδὲν ἄλλο, ἢ τὸ ποσὸν μόνον οἱ κύκλοι διαφέρουσιν ἀλλήλων, καὶ ἡ κατὰ
τοῦτο μόνον ἐν αὐτοῖς διαφορὰ ἐπιστάσεως ἀξία, κατ' ἄλλον δέ τινα τῆς σχέσεως
τρόπον οὐκ ἀναγκαῖον γινώσκειν, εἴτε διαφέρουσιν οἱ κύκλοι, εἴτε καὶ μή· τούτου
χάριν περὶ τῆς ἰσότητος τῶν κύκλων μόνον εἰπὼν, εὐθὺς εἰς τὰς σχέσεις μετα-
βαίνει, τὰς μεταξὺ εὐθειῶν καὶ κύκλων θεωρουμένας, καὶ μετὰ ταῦτα τὸ τοῦ κύκλου
ὁρίζων τμῆμα, τὴν διαφορὰν, ἣν ἔχουσιν αἱ τῶν τμημάτων γωνίαι, καὶ αἱ ἐν
τοῖς τμήμασι, διασαφεῖ· καὶ τοῦτο εἰκότως, τό, τε γὰρ τμῆμα καὶ αἱ γωνίαι ἐκ
γραμμῶν ὁμοίων ἢ ἀνομοίων συνίστανται. Ἐπεὶ δ' αὖθις ἡ σχέσις μεταξὺ κύκλων
καὶ εὐθειῶν κατὰ τὸ ποιεῖν καὶ ἔχειν, ἢ πάσχειν μόνον θεωρεῖται· καὶ γὰρ τὸν κύ-
κλον ἔχειν τὴν εὐθεῖαν φαμὲν ἐντὸς ἢ ἐκτὸς, καὶ τὴν εὐθεῖαν τέμνειν τὸν κύ-
κλον, ἢ τούτου ἅπτεσθαι, τὸ δὲ τέμνειν εὐκρινέστερον τοῦ ἅπτεσθαι, διά τοι τοῦτο τὸ
ἅπτεσθαι διὰ τοῦ μὴ τέμνειν διασαφεῖ. Ἡνίκα τοίνυν εὐ-
θεῖά τις κύκλου τινὸς ἐφάπτηται, καὶ ἐκβαλλομένη ἐφ'
ἑκάτερα τὰ μέρη οὐ τέμνει τὸν κύκλον, τηνικαῦτα τοῦ κύ-
κλου ἐφάπτεσθαι λέγεται ἡ εὐθεῖα, ὡς ἡ α β, τοῦ γ δ ε,
κύκλου ἁπτομένη κατὰ τὸ γ, καὶ ἐκβαλλομένη κατὰ τὰ
α β, οὐ τέμνει τὸν γ δ ε, κύκλον.

Eucl. Lib. 3. Fig. 2.



Γ'. Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, οἵτινες ἁπτόμενοι ἀλλήλων οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους.



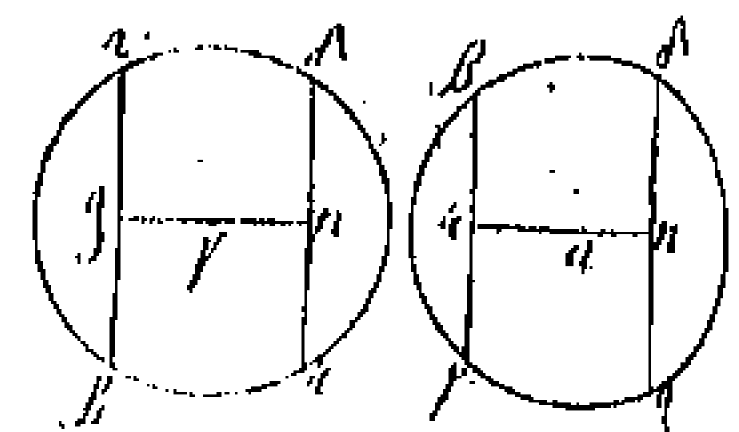
Ὥσπερ ἡ γραμμὴ διττήν πως κέκτηται πρὸς τὸν κύ-
κλον σχέσιν, ἢ γὰρ ἅπτεται τούτου, ἢ τέμνει αὐτόν· οὕ-
τω γε καὶ κύκλος πρὸς κύκλον διττὴν ἔχει τὴν σχέσιν,
ἢ γὰρ ἀλλήλων ἅπτονται οἱ κύκλοι, ἢ τέμνουσιν ἀλλήλους·
ὥσπερ δὲ πάλιν ἐν τῇ τῆς γραμμῆς πρὸς τὸν κύκλον
σχέσει, τὸ μὴ τέμνειν τὴν γραμμὴν τὸν κύκλον γνώ-
ρισμα τοῦ ἅπτεσθαι αὐτοῦ ταύτην πεποίηκεν, οὕτω κἀν-
ταῦθα διὰ τοῦ μὴ τέμνειν ἀλλήλους τοὺς κύκλους, ὡς γνωριμωτέρου, τὸ ἅπτεσθαι ἀλ-
λήλων δεδήλωκεν. Ἐπεὶ δὲ τοῦτο διχῶς συμβῆναι ἐνδέχεται, ἢ γὰρ ἐντὸς κύ-
κλος κύκλου ἅπτεται, ἢ γοῦν ἐκτός· ὡς ὁ α β γ, τοῦ δ γ ε, ἐκτός· καὶ ὁ ζ η θ,
τοῦ κ η λ, ἐντὸς, καθ' ἑκάτερον τὸν τρόπον ὁ αὐτὸς ἔσται λόγος. ὅσοι μὲν οὖν τῶν
κύ-

κύκλων ἐγγίζοντες ἀλλήλοις οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους, ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, ἢ ἐκτὸς μέντοι, ἢ ἐντός.

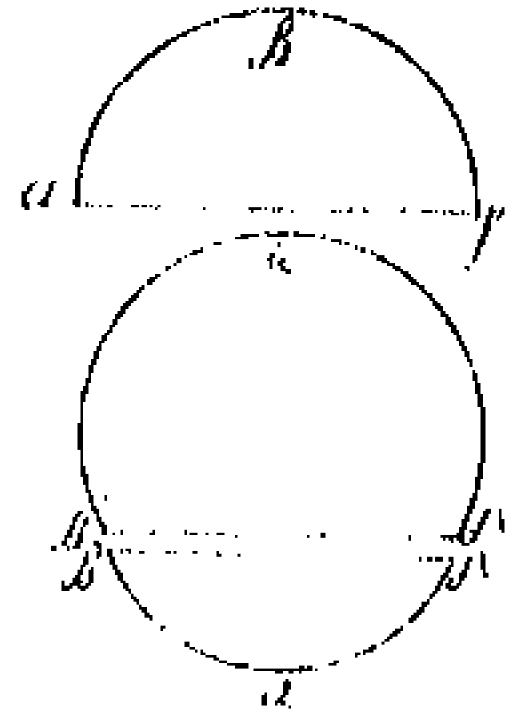
Δʹ. Ἐν κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσι, μεῖζον δ' ἀπέχειν λέγεται, ἐφ' ἣν ἡ μείζων κάθετος πίπτει.

Τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν αἱ μὲν διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου διέρχονται, αἱ δὲ ἐκτὸς τούτου, διὸ καὶ ἀπέχειν τοῦ κέντρου λέγονται. ἀλλ' ἐκεῖναι μὲν πᾶσαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὁπωσδηποτοῦν διὰ τοῦ κέντρου ἀγόμεναι. αὗται δὲ ὁτὲ μὲν ἴσαι, ὁτὲ δὲ ἄνισοι. καὶ τοῦτο, ἐκ τοῦ μὴ τὴν αὐτὴν ἀεὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου τηρεῖν ἀπόστασιν. Ἔστι δὲ μέτρον τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν ἀποστάσεως αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὰς εὐθείας ἀγόμεναι κάθετοι. ὅθεν δὴ ἡνίκα αὖ αἱ τοιαῦται κάθετοι ἴσαι ὦσιν, ἴσον καὶ αἱ εὐθεῖαι, ἐφ' ἃς αἱ κάθετοι πίπτουσιν, ἀπέχειν τοῦ κέντρου λέγονται, ὡς αἱ α β, δ ε, ἐφ' ἃς ἴσαι πεπτώκασι κάθετοι αἱ γ ζ, γ η. ὅτε δὲ ἡ κάθετος μείζων, μεῖζον ἀπέχειν λέγεται καὶ ἡ εὐθεῖα τοῦ κέντρου, ὥσπερ καὶ τοὐναντίον. ἡ μὲν γὰρ β γ, μεῖζον ἀπέχειν λέγεται τοῦ α, κέντρου, ἐφ' ἣν ἡ α ε, κάθετος πίπτει, ἔλαττον δὲ ἡ δ ζ, ἐφ' ἣν ἡ α η, ὅτι ἡ α ε, μείζων ἐστὶ τῆς α η.

Eucl. Lib. 3. Fig. 3.



Εʹ. Τμῆμα κύκλου ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.



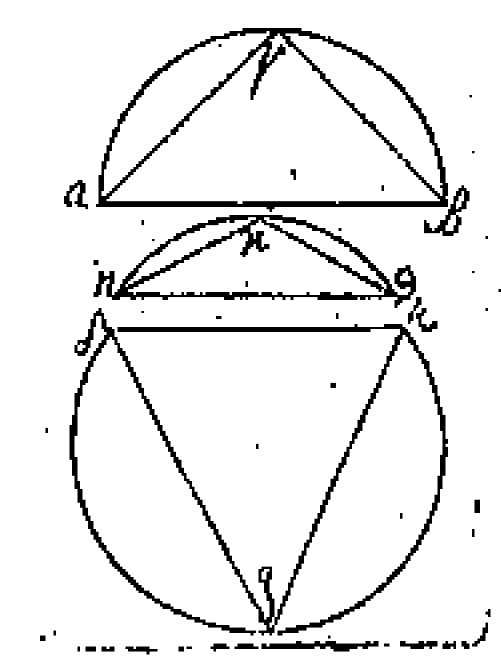
Ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ κύκλος, ὡς τῶν δύο μετέχων διαστάσεων, διαιρεῖσθαι δύναται εἰς μέρη ἴδια. ἡ δὲ τοῦ κύκλου διαίρεσις διχῶς ἐνδέχεται γενέσθαι, ἢ κατὰ τὴν αὐτοῦ περιφέρειαν, ἢ κατὰ τὸ ἐμβαδόν. καὶ κατὰ μὲν τὴν πρώτην, εἰς μοίρας λέγεται διαιρεῖσθαι, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν εἰς μέρη. διότι τοῦτο ἐδέησεν αὐτῷ καὶ τὸ τοῦ κύκλου ὁρίσασθαι μέρος. Τμῆμα δὴ κύκλου λέγεται, οὐ τὸ τυχὸν, ἀλλὰ τὸ ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας περιεχόμενον, ὡς τὸ β α δ, περιέχεται γὰρ ὑπό τε τῆς β δ, εὐθείας, καὶ τῆς β α δ, περιφερείας. ἐπεὶ δὲ ἡ ἐν κύκλῳ εὐθεῖα, ἢ διὰ τοῦ κέντρου, ἢ μὴ, διέρχεται. τρία πάντως ἐστὶ τὰ τοῦ κύκλου τμήματα, ἡμικύκλιον, μεῖζον τμῆμα, καὶ ἔλαττον. Καὶ ἡμικύκλιον μὲν ἐστι τὸ ἐπὶ τῆς περιεχούσης αὐτὸ εὐθείας τὸ κέντρον ἔχον, ὡς τὸ α β γ. μεῖζον δὲ τμῆμα τὸ ἐντὸς τῆς τε εὐθείας καὶ περιφερείας, ὡς τὸ β ε δ. καὶ ἔλαττον τὸ ἐκτὸς αὐτοῦ τὸ κέντρον ἔχον, ὡς τὸ β α δ. περὶ ὧν εὐκρινέστερον εἴρηται, ἐν τῷ ιζʹ. καὶ ιηʹ. ὅρῳ τοῦ αʹ.

ςʹ. Τμη-

ςʹ. Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

Ὑπογράψας ἤδη τὸ τοῦ κύκλου τμῆμα, καὶ ἔνι τὰ τρία τούτου εἴδη ἐμπεριλαβὼν ὅρῳ, βούλεται ἐπί τε τοῦ παρόντος καὶ τοῦ ἑξῆς δεῖξαι, καὶ πόσα τὰ εἴδη τῆς ἐπὶ τοῦ τμήματος τοῦ κύκλου περιεχομένης γωνίας. Δύο δὲ ταῦτα, ἡ μὲν γὰρ λέγεται τμήματος γωνία, ἡ δὲ ἐν τμήματι. Τίς μὲν οὖν ἡ τοῦ τμήματος γωνία, ἐνταῦθα δείκνυσι, λέγων. Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας. ὥστε ἡ τοῦ τμήματος γωνία τοῦ μικτοῦ ἐστιν εἴδους. περιέχεται γὰρ ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας, τοιαύτη δὲ ἡ πρὸς τῷ α, καὶ β. Ἐπεὶ δὲ ὁ κύκλος τριχῇ δύναται διαιρεῖσθαι, εἰς ἡμικύκλιον, εἰς μεῖζον τμῆμα, καὶ ἔλαττον. τρεῖς πάντως γε καὶ τὰς τῶν τμημάτων δυνάμεθα ἐννοεῖν τὰς γωνίας. καὶ τὴν μὲν ἡμικυκλίου γωνίαν καλεῖν χρεών. τὴν δὲ τοῦ μείζονος τμήματος. καὶ τὴν λοιπὴν ἐλάττονος. Ἡμικυκλίου μὲν οὖν γωνία ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ α, ἡ πρὸς τῷ β, ἥτις ὑπό τε τοῦ α γ β, ἡμικυκλίου περιέχεται, καὶ τῆς α β, διαμέτρου. μείζονος δὲ τμήματος ἡ πρὸς τῷ δ, ἡ ε, ἡ ὑπό τε τῆς δ ε, περιεχομένη χορδῆς, καὶ τῆς δ ζ ε, περιφερείας μείζονος τοῦ ἡμικυκλίου. τοῦ δὲ ἐλάττονος τμήματος ἡ πρὸς τῷ η, ἡ θ, ὑπό τε τῆς η θ, χορδῆς περιεχομένη καὶ τῆς η κ θ, περιφερείας ἐλάττονος ἡμικυκλίου.

Eucl. Lib. 3. Fig. 4.



Ζʹ. Ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστὶν, ὅταν ὑπὸ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας, ἥτις ἐστὶ βάσις τοῦ τμήματος, ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν.

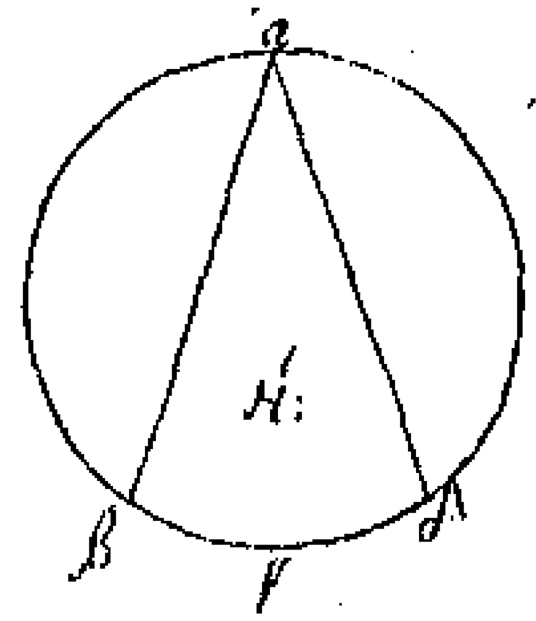
Δεδειχὼς ἐν τῷ ἀνωτέρῳ τίς ἡ τοῦ τμήματος γωνία, ἐπὶ τοῦ παρόντος, καὶ τίς ἡ ἐν τμήματι, διασαφεῖ, γωνία. Ἔστι δὲ ἡ ἐν τμήματι γωνία τοῦ ἁπλοῦ εἴδους, ὑπὸ εὐθειῶν μόνον περιεχομένη γραμμῶν, οἷα ἐστὶν ἡ ὑπὸ α γ β, ἡ η κ θ, ἡ δ ζ ε. ἡ μὲν ὑπὸ τῶν α γ, γ β, εὐθειῶν περιεχομένη, ἡ δὲ ὑπὸ τῶν η κ, κ θ, ἡ δὲ ὑπὸ τῶν δ ζ, ζ ε. Ἄγονται δὲ αἱ τὴν ἐν τμήματι γωνίαν περιέχουσαι γραμμαὶ ἀπὸ τοῦ τυχόντος ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος σημείου, ὡς αἱ α γ, γ β, ἀπὸ τοῦ γ. περατοῦνται δὲ τοῖς πέρασι τῆς βάσεως τοῦ αὐτοῦ τμήματος, ὡς αἱ α γ, γ β, αἵγε ἀρχὴν μὲν ἔχουσι τὸ γ, τυχὸν σημεῖον τῆς α γ β, περιφερείας, πέρατα δὲ τὰ α, καὶ β, σημεῖα, πέρατα ὄντα καὶ τῆς α β, βάσεως τοῦ α γ β, τμήματος. ἀλλ' ἐπεὶ κἀνταῦθα τρία δυνάμεθα ἐννοεῖν τὰ τοῦ κύκλου τμήματα, ὡς εἴρηται ἐν τῷ εʹ. ὅρῳ, τρεῖς δηπουθέν εἰσι καὶ αἱ ἐν τμήματι γωνίαι, ἡ ἐν ἡμικυκλίῳ, οἷα ἡ ὑπὸ α γ β. ἡ ἐν ἐλάττονι τμήματι, οἷα ἡ ὑπὸ η κ θ, καὶ ἡ ἐν μείζονι, οἷα ἡ ὑ-

πὸ

τὸ δζε. καὶ ἡ μὲν ἐν ἡμικυκλίῳ ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν ἐλάττονι τμήματι μείζων ὀρθῆς, καὶ ἡ ἐν μείζονι τμήματι, ἐλάττων, ὡς δειχθήσεται προτάσει λα. τοῦ παρόντος.

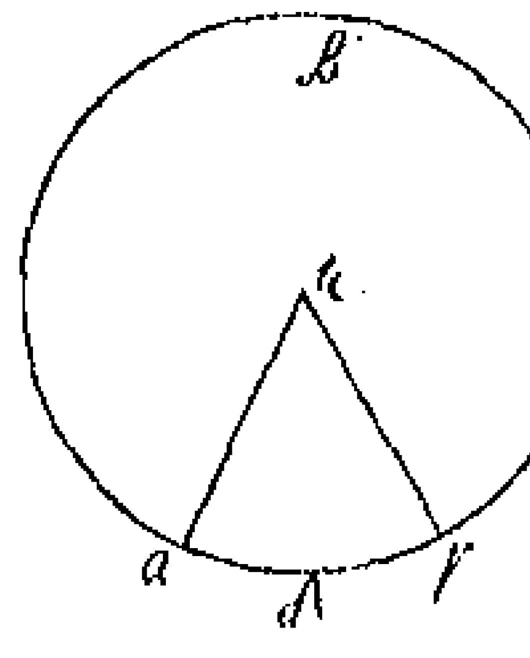
Η'. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ἀπολαμβάνωσί τινα περιφέρειαν, ἐπ' ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία.

Ἐπεὶ τῆς ἐν κύκλῳ γωνίας παρὰ τὰς περιεχούσας αὐτὴν εὐθείας, καὶ βάσιν τῆς αὐτῆς θεωρεῖν δέον τῷ τῶν μαθηματικῶν γευσομένῳ ἡδυσμάτων, διά τοι τοῦτο ἐπὶ τοῦ παρόντος διδάσκει, καὶ τίς ἡ τῆς ἐν κύκλῳ γωνίας βάσις. Ἔστι δὴ βάσις τῆς ἐν κύκλῳ γωνίας ἡ ἀπολαμβανομένη τοῦ κύκλου περιφέρεια ὑπὸ τῶν περιεχουσῶν τὴν γωνίαν εὐθειῶν, οἷον ἐπὶ τοῦ αβδ, κύκλου, βάσις τῆς ὑπὸ δαβ, γωνίας ἐστὶν ἡ δγβ, περιφέρεια, ἐφ' ἧς καὶ βεβηκέναι λέγεται ἡ αὐτὴ γωνία. διὰ τὸ τὰς αδ, αβ, περιεχούσας αὐτὴν εὐθείας ἀπολαμβάνειν τὴν δγβ, περιφέρειαν. Eucl. Lib.3. Fig.5.

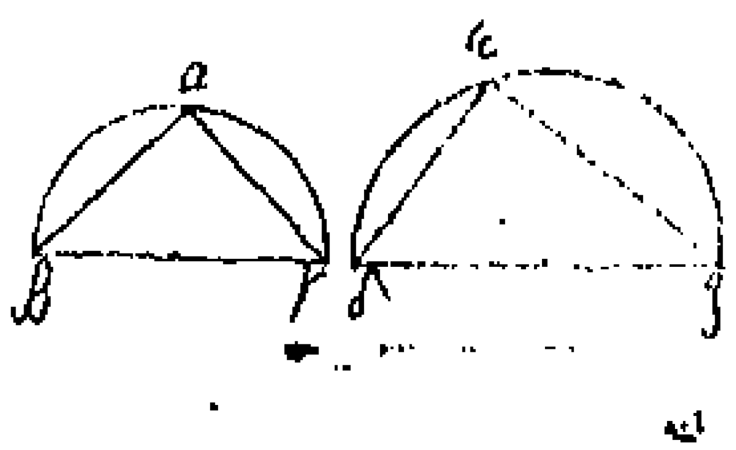


Θ'. Τομεὺς δὲ κύκλου ἐστίν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ αὐτοῦ τοῦ κύκλου σταθῇ ἡ γωνία, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν περιφερείας.

Καὶ ὁ τομεὺς μέρος κύκλου ἐστὶν, διενήνοχε δὲ τοῦ τμήματος τοῦ κύκλου· ὅτι τὸ μὲν τμῆμα ὑπό τε μιᾶς εὐθείας, καὶ περιφερείας κύκλου περιέχεται, ὁ δὲ τομεὺς περιέχεται ὑπό τε δύο εὐθειῶν, καὶ κύκλου περιφερείας, οἷον τὸ αδγε, σχῆμα. δεῖ δὲ ἀεὶ τὰς δύο τοῦ τομέως εὐθείας ἐν μὲν τῷ τοῦ κύκλου κέντρῳ ἀλλήλαις συνάπτεσθαι, περατοῦσθαι δὲ ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.



Ι'. Ὅμοια τμήματα κύκλου ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, ἢ ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.



Ἐπειδήπερ δύο ἄνισοι κύκλοι εἰς τμήματα ἄνισα μὲν, ὅμοια δὲ διαιρεθῆναι δύνανται, τούτου ἕνεκα διδάσκει ἡμᾶς ἐπὶ τοῦ παρόντος, καὶ ὅπως ἔχωμεν διαγινώσκειν καὶ τίνα τῶν τοῦ κύκλου τμημάτων ὅμοια, τίνα δ' ἀνόμοια. Ὅμοια τοίνυν τμήματα κύκλου ἐστὶν, ὅσα δέχεται γωνίας ἴσας, ἢ τὰ ἐν οἷς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, οἷα τὰ αβγ, εδζ. εἴρηκε δὲ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, οὐχὶ δὲ ὧν αἱ γωνίαι ἴσαι, ὅτι ἄλλο μέν ἐστι γωνία τμήματος, καὶ

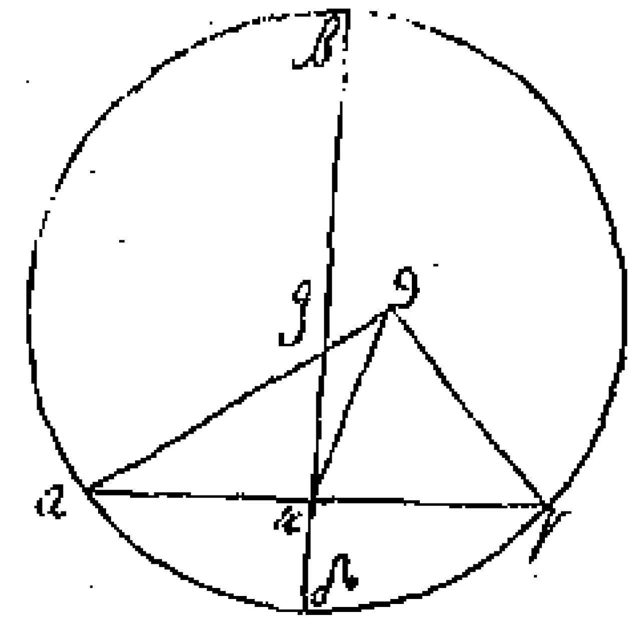
ἄλλο

ἄλλο δὲ γωνία ἐν τμήματι, διὸ προσέθηκε καὶ τὸ, ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

Πρότασις Α'. Πρόβλημα.

Τοῦ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν.

Ἔστω κύκλος ὁ αβγδ, καὶ ζητηθήτω τὸ κέντρον αὐτοῦ. Ἀχθήτω δὴ ἡ αγ, εὐθεῖα, ὡς ἔτυχεν, ἐντὸς τοῦ κύκλου, καὶ τμηθείσης δίχα τῆς αγ, κατὰ τὸ ε, ἀνεστάθω ἐπ' αὐτῆς κάθετος ἡ εβ, ἀπὸ τοῦ ε, σημείου, περατωμένη ἑκατέρωθεν ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. τῆς ὅλης δὲ βδ, δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ ζ, τὸ ζ, λέγω κέντρον εἶναι τοῦ δοθέντος κύκλου. εἰ γὰρ μὴ, ἔστω κέντρον τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θα, θε, θγ. Ἐπεὶ οὖν αἱ αε, εγ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. κατὰ τὴν κατασκευήν· τῆς θε, κοινῆς λαμβανομένης, αἱ δύο αε, εθ, ἴσαι εἰσὶ πάντως δυσὶ ταῖς θε, εγ, ἔστι δὲ καὶ ἡ αθ, βάσις ἴση τῇ θγ, κατὰ τὸν ιε. ὅρον τοῦ α. ἄρα κατὰ τὴν η. τοῦ αὐτοῦ τὰ αεθ, θεγ, τρίγωνα ἴσα ἐστι, καὶ ἡ ὑπὸ αεθ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ θεγ, καὶ ἑκατέρα ὀρθὴ κατὰ τὸν ι. ὅρον τοῦ αὐτοῦ. ὥστε ἡ ὑπὸ θεγ, ὀρθή ἐστιν, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ζεγ, ὀρθή, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ζεγ, τῇ ὑπὸ θεγ, ἡ μείζων τῇ ἐλάσσονι, ὅπερ ἄτοπον, οὐκ ἄρα τὸ θ, ἀλλὰ τὸ ζ, κέντρον ἐστὶ τοῦ αβγδ, δοθέντος κύκλου· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. Eucl. Lib.3. Fig.6.

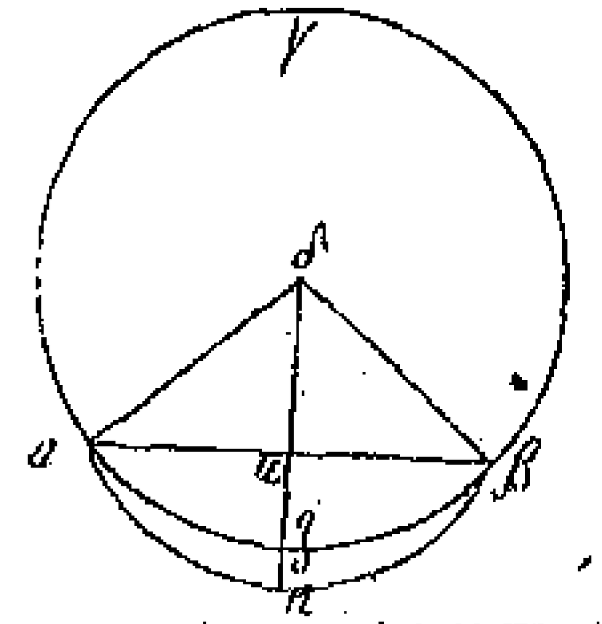


ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις εὐθεῖαν τινα δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπ' αὐτῆς ἔσται τὸ κέντρον. κἂν δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλας τέμνωσιν, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ ἔσται τὸ κέντρον.

Πρότασις Β'. Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.



Ἐπὶ τῆς περιφερείας ἤδη τοῦ αγβ, κύκλου ληφθήτωσαν, ὡς ἔτυχε, τὰ α, καὶ β, σημεῖα. Λέγω, ὅτι ἡ ἐπὶ τὰ αβ, ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς τοῦ κύκλου πίπτει. εἰ γὰρ δυνατὸν πιπτέτω ἐκτὸς, ὡς ἡ αηβ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δα, δβ. τῆς δὲ αηβ, δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ η, ἐπεζεύχθω ἡ δη. καὶ ἐπεὶ αἱ δα, δβ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸν ιε. ὅρον τοῦ α. πάντως γε κατὰ τὴν ε. τοῦ αὐτοῦ αἱ ὑπὸ δαβ, δβα, γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ἰσοσκελὲς γὰρ τὸ αδβ, τρίγωνον. ἀλλ' ἐπεὶ κατὰ τὴν ιϛ'. τοῦ αὐτοῦ ἡ ὑπὸ δηα, γωνία μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ δβη, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ αὐτὴ δηα, γωνία καὶ τῆς ὑπὸ δαη, ὥστε κατὰ τὴν ιθ'. τοῦ α.

Ι ἡ δα,

ἡ δα, ἡ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνουσα μείζων ἐστὶ τῆς δη, ἴση δὲ τῇ δα, ἡ δζ, ὡς ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ κέντρου, ἄρα καὶ ἡ δζ, μείζων ἐστὶ τῆς δη, τὸ μέρος τοῦ ὅλου, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου ἡ αβ. Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

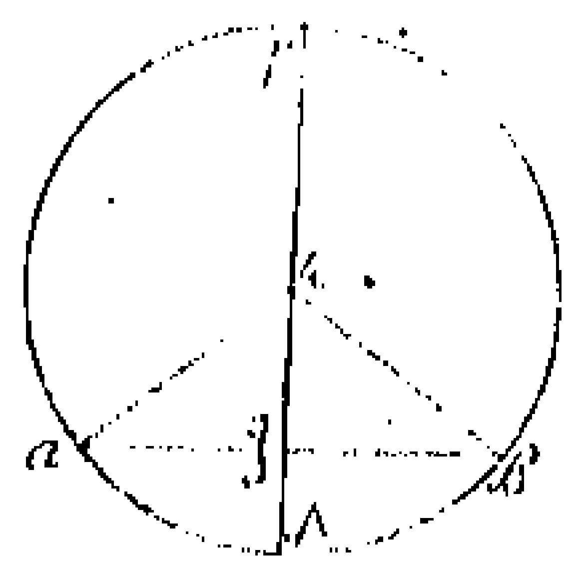
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἡ κατὰ πλείονα σημεῖα, ἡ ἐν ἀπτομένη τοῦ κύκλου εὐθεῖα τέμνει τὸν κύκλον, καὶ οὐχ ἅπτεται αὐτοῦ.

Πρότασις Γ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ. καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ.

Ἐν κύκλῳ ἤδη τῷ αγβδ, εὐθεῖα ἡ γδ, διὰ τοῦ ε, κέντρου ἠγμένη τεμνέτω τὴν αβ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου, τὸ πρῶτον δίχα κατὰ τὸ ζ, σημεῖον. Λέγω, ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει. ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ ε, κέντρου αἱ αε, εβ, καὶ ἐπεὶ αἱ αε, εβ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸν ιε'. ὅρον τοῦ α'. κοινὴ δὲ ἡ εζ, πάντως γε αἱ δύο αε, εζ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς βε, εζ. ἔστι δὲ καὶ ἡ αζ, βάσις τῇ βζ, βάσει ἴση, ἄρα καὶ ὅλον τὸ αεζ, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ βεζ, τριγώνῳ κατὰ τὴν η'. τοῦ α'. καὶ ἑπομένως ἡ ὑπὸ εζα, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εζβ. κατὰ τὸν ι'. ἄρα ὅρον τοῦ α'. ἑκατέρα τῶν ὑπὸ εζα, εζβ, ὀρθή ἐστι, καὶ ἡ γδ, κάθετος ἐπὶ τῆς αβ. ὅπερ ἦν τὸ α'.

Eucl. Lib.3. Fig.7.



Τεμνέτω δὴ β'. ἡ γδ, τὴν αβ, πρὸς ὀρθάς. Λέγω, ὅτι καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ αἱ αε, εβ, εὐθεῖαι ἴσαι εἰσίν, ἔσονται πάντως ἴσαι καὶ αἱ ὑπὸ εαζ, εβζ, γωνίαι. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ εζα, εζβ, ἴσαι ἀλλήλαις, ἄρα τῶν αεζ, ζεβ, τριγώνων αἱ δύο γωνίαι ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσαι εἰσίν, ἔστι δὲ καὶ ἡ εα, ἴση τῇ εβ, ἄρα καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς εἰσὶν ἴσαι κατὰ τὴν κς'. τοῦ α'. ὥστε ἡ αζ, ἴση ἐστὶ τῇ ζβ, ὅπερ ἦν τὸ β'. Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖαν, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

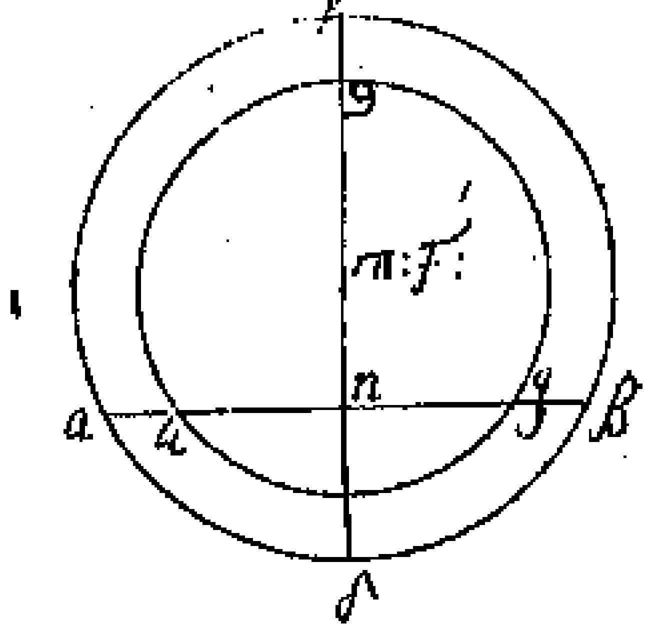
Α'. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐν παντὶ ἰσοσκελεῖ τριγώνῳ ἡ τὴν βάσιν δίχα τέμνουσα κάθετός ἐστιν ἐπ' αὐτῆς. καὶ τοὔμπαλιν, καὶ ἡ κατὰ κορυφὴν αὐτοῦ γωνία δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς καθέτου.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

Β'. Ἔτι συνάγεται, ὅτι ἐν τοῖς ὁμοκέντροις κύκλοις τὰ μεταξὺ τῶν περιφερειῶν τμήματα τῆς τεμνούσης αὐτοὺς εὐθείας ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν, ἐπὶ γὰρ τῶν αγβδ,

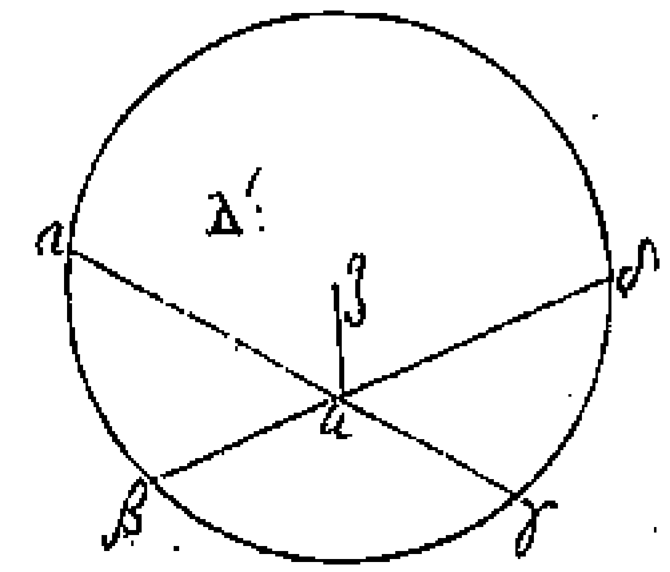
αγβδ, καὶ εθζ, ὁμοκέντρων κύκλων, ἐπεὶ τῆς αβ, τεμνούσης τὰ αη, ηβ, μέρη ἴσα ἀλλήλοις εἰσί, κατὰ τὴν ἀνωτέρω. ὡσαύτως καὶ τὰ εη, ηζ, ἐὰν τὰ ἴσα εη, ηζ, παρὰ τῶν ἴσων αη, ηβ, ἀφαιρεθῶσιν, ἐναπολειφθήσονται τὰ αε, ζβ, τμήματα, τὰ μεταξὺ τῶν περιφερειῶν τῶν ὁμοκέντρων κύκλων ἴσα, κατὰ τὸ γ'. ἀξίωμα.

Eucl. Lib. 3. Fig.8.



Πρότασις Δ'. Θεώρημα.

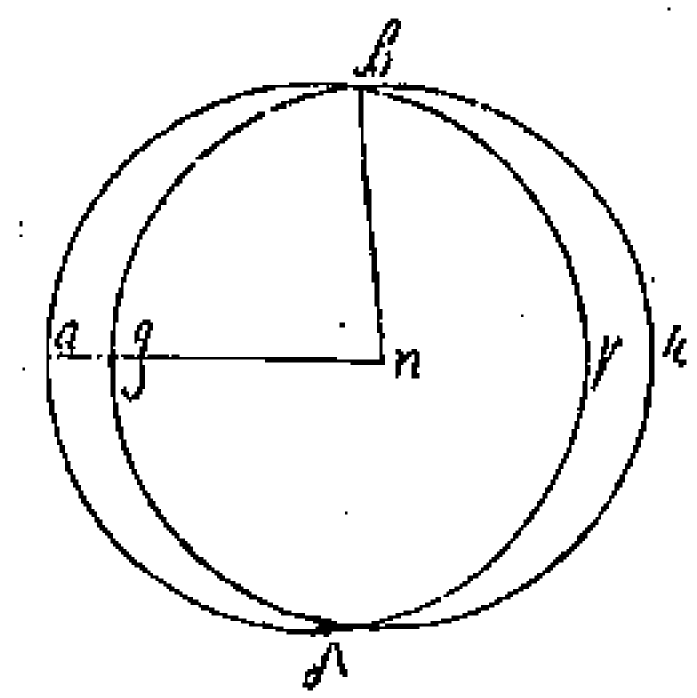
Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.



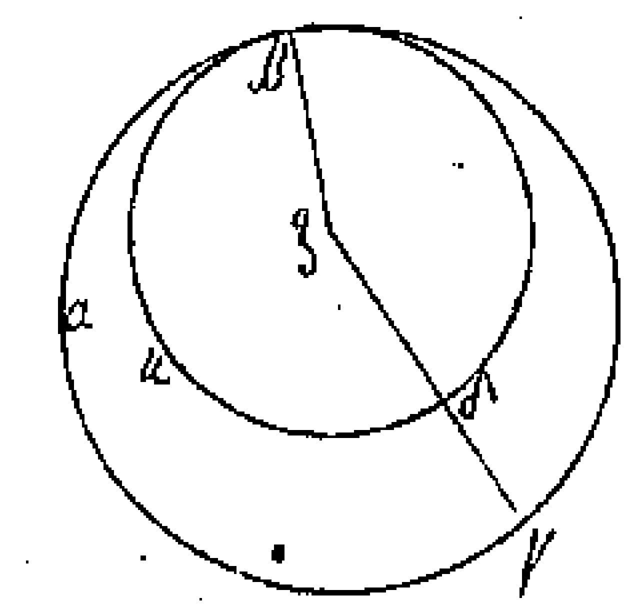
Ἐν κύκλῳ ἤδη τῷ αβγδ, τεμνέτωσαν ἀλλήλας αἱ αγ, δβ, εὐθεῖαι κατὰ τὸ ε, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι. Λέγω ταύτας μὴ τέμνειν ἀλλήλας δίχα. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἡ μὲν βε, ἴση τῇ εδ, ἡ δὲ αε, τῇ εγ. καὶ ἀχθήτω διὰ τοῦ κέντρου ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἡ ζε. κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἄρα ἔσται ἥτε ὑπὸ ζεγ, γωνία, καὶ ἡ ὑπὸ ζεδ, ὀρθαί, καὶ ἑπομένως ἴσαι, τὸ ὅλον δηλονότι τῷ μέρει, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Ε'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.



Δύο ἤδη κύκλοι οἱ αβγδ, καὶ βεδζ, τεμνέτωσαν ἀλλήλους κατὰ τὰ β, καὶ δ, σημεῖα. Λέγω τούτων μὴ εἶναι τὸ αὐτὸ κέντρον. εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω ἑκατέρου τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ η. καὶ ἤχθωσαν αἱ βη, ηζα, εὐθεῖαι. Ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν αη, ζη, εὐθειῶν ἴση ἐστὶ τῇ βη, κατὰ τὸν ιε'. ὅρον τοῦ α'. πάντως γε καὶ ἀλλήλαις ἴσαι εἰσίν, ἴση ἄρα ἡ αη, τῇ ζη, ἡ μείζων τῇ ἐλάσσονι, ὅπερ ἄτοπον. Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Πρότασις ϛ'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντός, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

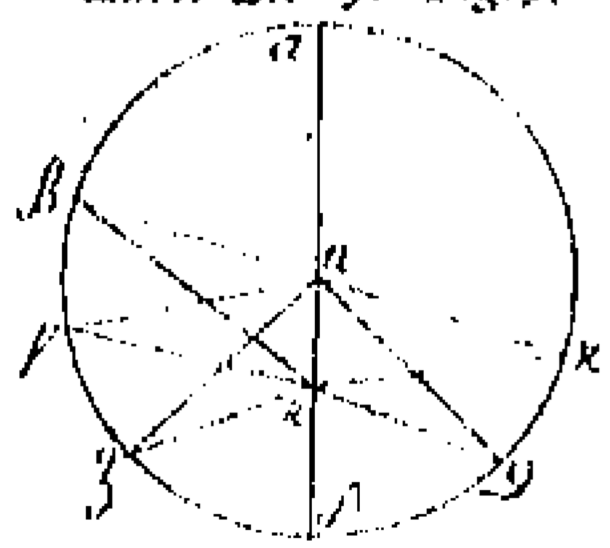
Δύο ἤδη κύκλοι οἱ αβγ, βδε, ἀπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐντὸς κατὰ τὸ β. Λέγω μὴ εἶναι τὸ αὐτὸ ἀμφοῖν κέντρον. εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω ἑκατέρου τῶν κύκλων τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ ζ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βζ, αἱ βζ, ζδγ. ἐπεὶ οὖν κατὰ τὸν ιέ. ὅρον τοῦ ά. ἑκατέρα τῶν ζδ, καὶ ζγ, ἴση ἐστὶ τῇ βζ. πάντως γε κατὰ τὸ ά. ἀξίωμα ἡ ζδ, ἴση ἐστὶ τῇ ζγ, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα τὸ αὐτὸ κέντρον ἀμφοῖν ἐστιν. Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Ζ'. Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ τι σημεῖον, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου προσπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες πρὸς τὸν κύκλον, μεγίστη μὲν ἔσται, ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπή, τῶν δ' ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν, δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἤδη τοῦ αβγ, κύκλου, τῆς αδ, ληφθήτω τυχὸν σημεῖον τὸ ε, καὶ προσπιπτέτωσαν ἀπὸ τοῦ ε, σημείου αἱ εβ, εγ, εζ, εὐθεῖαι. Λέγω, ὅτι ἡ μὲν εα, ἡ διὰ τοῦ η, κέντρου μεγίστη ἐστίν, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπὴ εδ, τῶν δ' ἄλλων ἡ μὲν εβ, μείζων τῆς εγ, ἡ δὲ εγ, τῆς εζ. ἐπιζευχθεισῶν γὰρ τῶν βη, γη, ζη, ἐπεὶ αἱ εη, ηβ, μείζονές εἰσι τῆς εβ, κατὰ τὴν κ'. τοῦ ά. ταῖς δὲ εη, ηβ, ἴση ἐστὶν ἡ εα, ἡ γὰρ ηα, ἴση ἐστὶ τῇ ηβ, κατὰ τὸν ιέ. ὅρον τοῦ ά. καὶ κοινὴ ἡ ηε, μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ εα, τῆς εβ. Αὖθις τῶν εηβ, καὶ εηγ, τριγώνων αἱ δύο μὲν πλευραὶ εη, ηβ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς εη, ηγ, ἴση γὰρ ἡ ηβ, τῇ ηγ, κατὰ τὸν αὐτὸν ὅρον, καὶ κοινὴ ἡ εη, ἡ δὲ ὑπὸ εηβ, γωνία μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ εηγ, ὥστε καὶ βάσις ἡ εβ, βάσεως τῆς εγ, μείζων ἐστὶ κατὰ τὴν κδ'. τοῦ ά. τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται καὶ ἡ εγ, μείζων τῆς εζ. ἐπεὶ δὲ αἱ ζε, εη, μείζονές εἰσι τῆς ζη, τῇ δὲ ζη ἴση ἐστὶν ἡ ηδ, μείζονες ἄρα εἰσὶν αἱ ζε, εη, καὶ τῆς ηδ, κοινῆς δὲ ἀφαιρουμένης τῆς ηε, ἐναπολειφθήσεται ἡ εζ, μείζων τῆς εδ. Εἰ οὖν ἡ μὲν εα, μείζων δέδεικται τῆς εβ, αὕτη δὲ τῆς εγ, ἡ δὲ εγ, μείζων ἐστὶν ὁμοίως τῆς εζ, δέδεικται δὲ καὶ ἡ εζ, μείζων τῆς εδ, ἄρα ἡ μὲν εα, μεγίστη ἐστίν, ἡ δὲ εδ, ἐλαχίστη, τῶν δ' ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν· ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον.

Eucl. Lib. 3. Fig. 9.



Λέγω δ' ἔτι καὶ ἐφ' ἑκάτερα τῆς εδ, δύο μόνας εὐθείας ἴσας προσπίπτειν. γενέσθω δὴ τῇ ὑπὸ ζηδ, γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ δηθ, κατὰ τὴν κγ. τοῦ ά. καὶ ἐπιζεύχθω ἡ εθ. καὶ ἐπεὶ ἡ ζη, ἴση ἐστὶ τῇ ηθ, ὡς ἐκ τοῦ κέντρου ἄμφω, κοινὴ δὲ ἡ ηε, πάντως γε αἱ δύο ζη, ηε, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς θη, ηε, γέγονε δὲ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ζηε, ἴση τῇ ὑπὸ θηε, καὶ βάσις ἄρα ἡ ζε, βάσει τῇ εθ, ἴση ἐστὶ κατὰ τὴν δ'. τοῦ αὐτοῦ. ὅτι δὲ οὐδεμία ἄλλη εὐθεῖα δύναται προσπεσεῖν ἴση τῇ εζ,

πλὴν

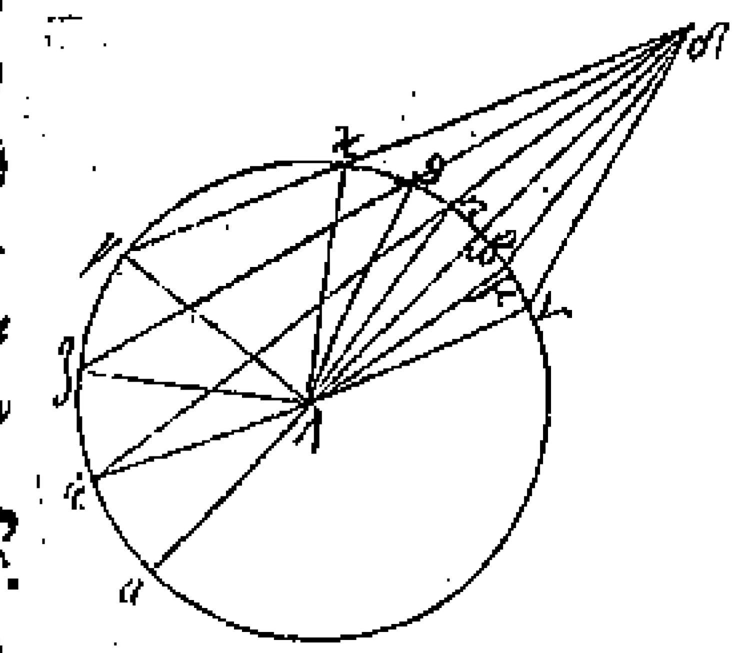
πλὴν τῆς εθ, δῆλον. προσπιπτέτω γάρ, εἴγε δυνατόν, ἡ εκ, καὶ ἐπιζεύχ-
θω ἡ ηκ. καὶ ἐπεὶ αἱ ζη, ηε, ἴσαι εἰσὶ ταῖς κη, ηε, ἡ γὰρ ζη, ἴση ἐστὶ τῇ ηκ,
κατὰ τὸν ιε, ὅρον τοῦ ά. καὶ κοινὴ ἡ ηε, ἔστι δὲ καὶ ἡ ζε, ἴση τῇ εκ, κατὰ τὴν ὑπό-
θεσιν, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ζηε, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ κηε, κατὰ τὴν η'. τοῦ αὐτοῦ,
ἀλλὰ τῇ ὑπὸ ζηε, ἴση γέγονεν ἡ ὑπὸ θηε, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ θηε, τῇ
ὑπὸ κηε, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἄτοπον. Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐπὶ τῆς δια-
μέτρου ληφθῇ τι σημεῖον, ὃ μή ἐστι καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Η'. Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαί, ὡς ἔτυχε, τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν, μεγίστη μὲν ἡ διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἔσται, τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων, δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι προσπεσοῦνται ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Ἐκτὸς ἤδη τοῦ αβγ, κύκλου, ληφθήτω σημεῖον τὸ δ, ἀφ' οὗ διαχθήτωσαν εὐθεῖαι πρὸς τὸν κύκλον, αἱ δα, δε, δζ, δγ, ὧν ἡ μὲν δα, ἔσω διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ ἄλλαι, ὡς ἔτυχε. Λέγω δὴ ά. ὅτι τῶν πρὸς τὴν αεζγ, κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν μεγίστη μὲν ἐστιν ἡ αδ, τῶν δὲ ἄλλων ἡ δε, μείζων τῆς δζ, καὶ ἡ δζ, μείζων τῆς δγ. Ἀχθήτωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ λ, κέντρου αἱ λγ, λζ, λε, καὶ ἐπεὶ αἱ ελ, λδ, μείζονές εἰσι τῆς εδ, κατὰ τὴν κ'. τοῦ ά. ταῖς δὲ ελ, λδ, ἴση ἐστὶν ἡ αδ, ἴση γὰρ ἡ αλ, τῇ ελ, κατὰ τὸν ιέ. ὅρον τοῦ αὐτοῦ, καὶ κοινὴ ἡ λδ, πάντως γε καὶ ἡ αδ, μείζων ἐστὶ τῆς εδ. αὖθις ἐπεὶ αἱ ελ, λδ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ζλ, λδ, ἴση γὰρ ἡ ελ, τῇ ζλ, καὶ κοινὴ ἡ λδ, ἡ δὲ ὑπὸ ελδ, γωνία μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ζλδ, δῆλον, ὅτι καὶ βάσις ἡ εδ, μείζων ἐστὶ τῆς ζδ, κατὰ τὴν κδ'. τοῦ αὐτοῦ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ ζδ, μείζων τῆς γδ, ἐπεὶ οὖν ἡ αδ, μείζων δέδεικται τῆς εδ, αὕτη δὲ τῆς ζδ, ἡ δὲ ζδ, τῆς γδ, ἄρα ἡ μὲν αδ, μεγίστη ἐστὶν ἡ διὰ τοῦ κέντρου, τῶν ἄλλων δὲ ἡ ἔγγιον ταύτης τῆς ἀπώτερον μείζων. ὅπερ ἐστὶ τὸ ά.

Eucl. Lib. 3. Fig. 10.



Λέγω δ' ἔτι, ὅτι τῶν πρὸς τὴν βηθκ, κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μὲν ἐστιν ἡ δβ, ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου δ, καὶ τῆς διαμέτρου βα,

τῶν

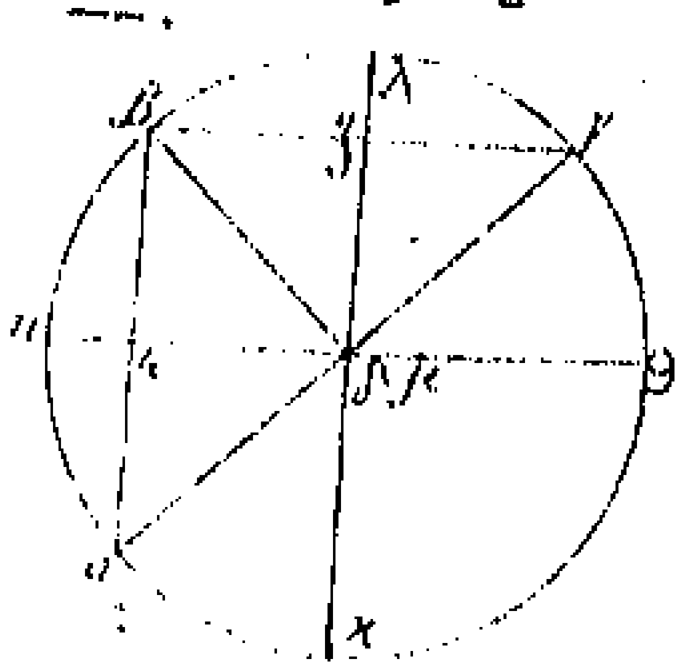
τῶν δ' ἄλλων ἡ δη, ἐλάττων τῆς δθ, καὶ ἡ δθ, τῆς δκ. Ἀχθήτωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ λ, κέντρου αἱ λη, λθ, λκ, καὶ ἐπεὶ αἱ λη, ηδ, μείζονές εἰσι τῆς λδ, κατὰ τὴν κ'. τοῦ α'. ἡ δὲ λη, ἴση ἐστὶ τῇ λβ, κατὰ τὸν ιε'. ὅρον τοῦ αὐτοῦ, ἐγκαταλείπεται πάντως ἡ ηδ, μείζων τῆς βδ. Πάλιν ἐπεὶ ἐντὸς τοῦ λθδ, τριγώνου ἐπὶ τῆς λδ, πλευρᾶς δύο εὐθεῖαι συνεστάθησαν αἱ λη, ηδ, πάντως γε κατὰ τὴν κα'. τοῦ αὐτοῦ, αἱ δύο αὗται συσταθεῖσαι εὐθεῖαι, ἐλάττονές εἰσι τῶν λθ, θδ, ἀλλ' ἡ λη, ἴση ἐστὶ τῇ λθ, κατὰ τὸν ιε'. ὅρον τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ἀφαιρεθεισῶν τῶν λη, λθ, ἐγκαταλείπεται ἡ ηδ, ἐλάττων τῆς θδ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ θδ, ἐλάττων τῆς κδ, ὥστε ἐπεὶ ἡ βδ, ἐλάττων δέδεικται τῆς ηδ, ἡ δὲ ηδ, τῆς θδ, καὶ αὕτη τῆς κδ. ἡ βδ, δήπουθεν ἐλαχίστη ἐστὶν, καὶ ἡ ἔγγιον ταύτης τῆς ἀπώτερον μείζων, ὅπερ ἦν τὸ β'.

Λέγω γ'. ὅτι ἐφ' ἑκάτερα τῆς βδ, δύο μόναι εὐθεῖαι ἴσαι πίπτουσι. γενέσθω δὴ τῇ ὑπὸ ηλβ, γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ βλμ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δμ, καὶ ἐπεὶ ἡ λη, ἴση ἐστὶ τῇ λμ, κοινὴ δὲ ἡ λδ, πάντως γε αἱ δύο ηλ, λδ, δυσὶ ταῖς μλ, λδ, ἴσαι εἰσὶ, γέγονε δὲ καὶ τῇ ὑπὸ ηλβ, γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ μλβ, ἄρα καὶ βάσις ἡ δβ, βάσει τῇ δμ, ἴση ἐστὶ κατὰ τὴν δ'. τοῦ α'. Ὅτι δὲ οὐδὲ δυνατὸν ἑτέραν τινὰ προσπίπτειν ἴσην τῇ δη, πλὴν τῆς δμ, δῆλον. Πιπτέτω γὰρ ἡ δν, εἴγε δυνατόν. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ λν, καὶ ἐπεὶ ἡ δν, ἴση ἐστὶ τῇ δη, πάντως γε ἴση ἐστὶ καὶ τῇ δμ, κατὰ τὸ α'. ἀξίωμα. ἔστι δὲ καὶ ἡ λμ, ἴση τῇ λν, καὶ βάσις ἡ αὐτὴ δλ, ἄρα καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δμλ, ἴση ἐστὶ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δνλ, κατὰ τὴν η'. τοῦ α'. ἡ ἐντὸς τῇ ἐκτὸς, ὅπερ ἄτοπον κατὰ τὴν κα'. τοῦ αὐτοῦ. Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Θ'. Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι πλείους, ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου.

Eucl. Lib. 3. Fig. 11.



Τοῦ αβγ, ἤδη κύκλου ἐντὸς ληφθήτω σημεῖον τὸ δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθήτωσαν ἴσαι εὐθεῖαι αἱ δα, δβ, δγ. Λέγω, ὅτι τὸ δ, κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αβ, βγ, καὶ τμηθήτωσαν δίχα κατὰ τὰ ε, καὶ ζ, σημεῖα, καὶ ἀχθήτωσαν αἱ εδ, ζδ, περατούμεναι κατὰ τὰ ηθ, καὶ κλ, σημεῖα. καὶ ἐπεὶ αἱ αε, εβ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ κοινὴ ἡ εδ, δύο δὴ, αἱ αε, εδ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς βε, εδ, ἔστι δὲ καὶ βάσις ἡ αδ, βάσει τῇ βδ, ἴση, ἄρα καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αεδ, ἴση ἐστὶ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βεδ, κατὰ τὴν η'. τοῦ α'. κάθετος ἄρα ἡ ηθ, ἐπὶ τῆς βα. Ἐπεὶ δ' αὖθις ἡ βα, τέμνεται ὑπὸ τῆς ηθ, δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς, πάντως γε κατὰ τὴν γ'. τοῦ παρόντος ἐπὶ τῆς ηθ, ἐστὶ τὸ κέντρον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐπὶ τῆς κλ, ὁμοίως ἐστὶ τὸ κέντρον. ἀλλὰ τῶν ηθ, κλ, κοινὴ τομή ἐστι τὸ δ, σημεῖον, τὸ δ, ἄρα σημεῖόν ἐστι τὸ κέντρον τοῦ αβγ, κύκλου. Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον καὶ τὰ ἑξῆς.

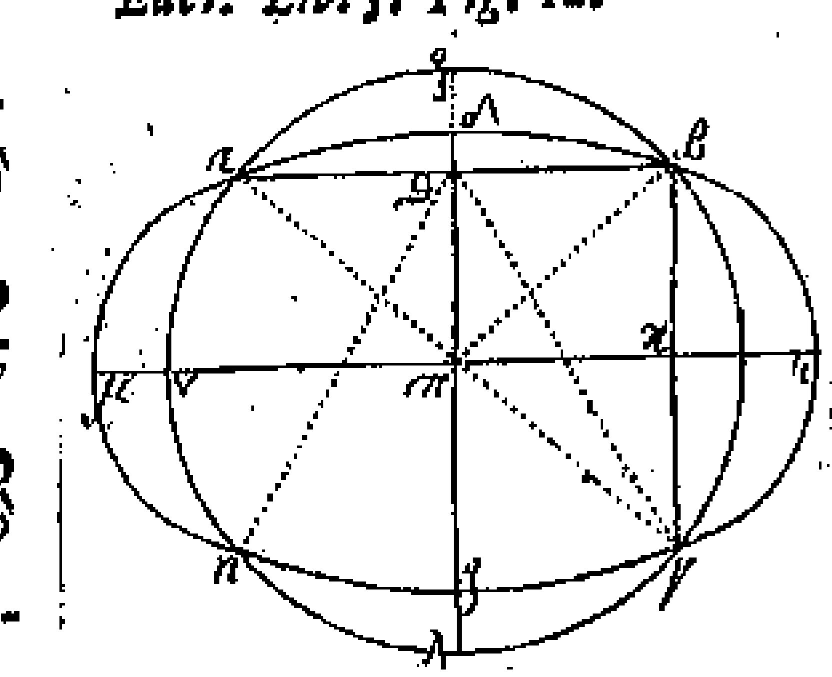
Ἄλλως. Ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σχήματος τῶν αὐτῶν ὑποτιθεμένων, λέγω, ὅτι τὸ δ, σημεῖον, ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ αβγ, κύκλου. εἰ γὰρ μὴ, ἔστω τὸ μ. καὶ διήχθω διὰ τοῦ δ, καὶ μ, ἡ ηθ. καὶ ἐπεὶ ἡ θη, διάμετρός ἐστι, καὶ ἐπ' αὐτῆς εἴληπται τυχὸν σημεῖον τὸ δ, ἀφ' οὗ αἱ δθ, δγ, δβ, πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου προσπίπτουσι, πάντως γε ἡ δθ, ἐφ' ἧς τὸ κέντρον μεγίστη ἐστὶ κατὰ τὴν ζ'. τοῦ παρόντος, ἡ δὲ γδ, μείζων ἐστὶ τῆς δβ, ἀλλ' ὑπετέθη καὶ ἴση, ἄτοπον ἄρα. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλο τι σημεῖον κέντρον ἐστὶ παρὰ τὸ δ. τὸ δ, ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Ι'. Θεώρημα.

Κύκλος οὐ τέμνει κύκλον κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ δύο.

Εἰ γὰρ δυνατὸν τεμνέτω ὁ αβγ, κύκλος τὸν δεζ, κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ δύο, τὰ α, β, γ, η. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αβ, βγ, ὧν δίχα τεμνομένων κατὰ τὰ θ, καὶ κ, διὰ τῆς ι. τοῦ α. ἤχθωσαν πρὸς ὀρθὰς ἀπὸ τοῦ θ, καὶ κ, τῇ μὲν αβ, ἡ θλ, τῇ δὲ βγ, ἡ κν, περατούμεναι κατὰ τὰ ξ, καὶ ο. καὶ ἐπεὶ τὰς αβ, βγ, εὐθείας μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνουσιν αἱ ξλ, ον, εὐθεῖαι, πάντως γε κατὰ τὴν γ'. τοῦ παρόντος ἐφ' ἑκατέρας τῶν ξλ, ον, ἐστὶ τὸ τοῦ αβγ, κύκλου κέντρον. αἱ δὲ ξλ, ον, κατ' οὐδὲν ἄλλο ξυμβάλλουσιν ἀλλήλαις, ἢ τὸ π, τὸ π, ἄρα κέντρον ἐστὶ τοῦ αβγ, κύκλου. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται τὸ αὐτὸ π, σημεῖον κέντρον εἶναι καὶ τοῦ δεζ, ἄρα

Eucl. Lib. 3. Fig. 12.



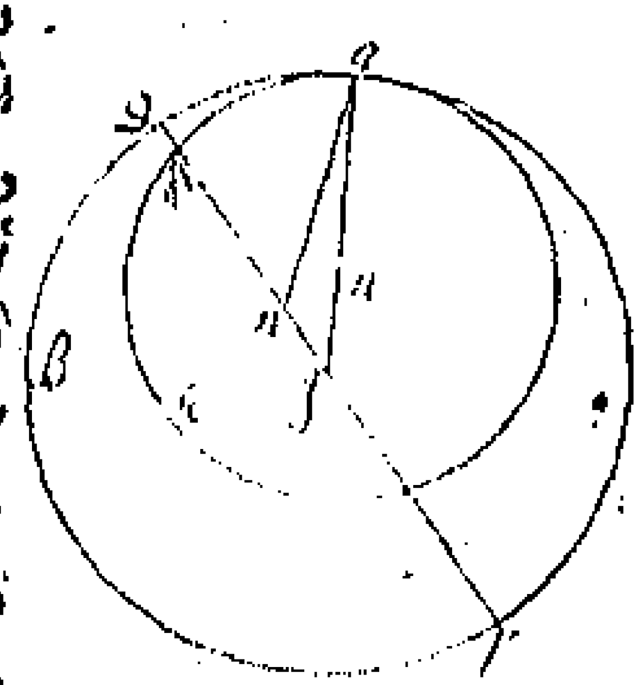
δύο κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους τὸ αὐτό ἐστι κέντρον, ὅπερ ἄτοπον, κατὰ τὴν ε'. τοῦ παρόντος. οὐ τέμνει ἄρα κύκλος κύκλον κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ δύο. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ἢ καὶ οὕτως. Εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ αβγ, κύκλου, καὶ ἔστω τὸ π, ἀφ' οὗ ἀγόμεναι εὐθεῖαι πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ αὐτοῦ κύκλου αἱ πα, πβ, πγ, ἴσαι ἔσονται κατὰ τὸν ιε'. ὅρον τοῦ α. ἀλλ' ἐπεὶ ἐντὸς τοῦ δεζ, κύκλου εἴληπται τὸ αὐτὸ π, σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὴν τοῦ δεζ, κύκλου περιφέρειαν ἤχθησαν πλείονες, ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι αἱ πα, πβ, πγ, τὸ π, ἄρα κατὰ τὴν ἀνωτέρω κέντρον ἐστὶ καὶ τοῦ δεζ, κύκλου. δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους τὸ αὐτό ἐστι κέντρον, ὅπερ ἀδύνατον κατὰ τὴν ε', τοῦ παρόντος. κύκλος ἄρα κύκλον οὐ τέμνει καὶ τὰ ἑξῆς.

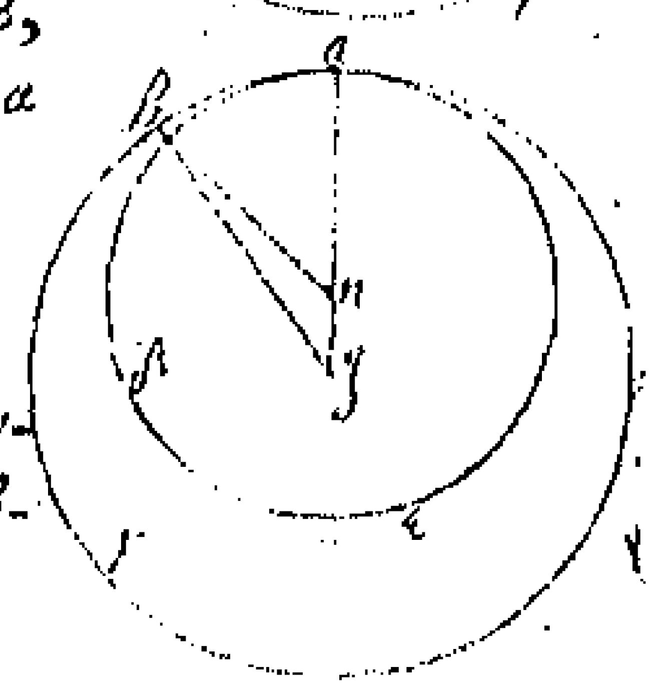
Πρότασις ΙΑ'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα καὶ ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ αβγ, αδε, ἐφαπτέσθωσαν ἐντὸς ἀλλήλων κατὰ τὸ α, τοῦ μὲν αβγ, ἔστω κέντρον τὸ ζ, τοῦ δὲ αδε, τὸ η. Λέγω, ὅτι ἡ ἐπὶ τὰ η, ζ, ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐπὶ τὸ α, πεσεῖται ἐκβαλλομένη. εἰ γὰρ δυνατὸν, πιπτέτω ἐπί τινος ἄλλου σημείου, φὲρ εἰπεῖν τοῦ θ, ὡς ἡ ζηθ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αη, αζ, καὶ ἐπεὶ αἱ ζη, ηα, τῆς αζ, μείζονές εἰσι, κατὰ τὴν κ'. τοῦ α. τῇ δὲ ζα, ἴση ἐστὶν ἡ ζθ, κατὰ τὸν ιε, ὅρον, ἄρα καὶ αἱ ζη, ηα, μείζονές εἰσι καὶ τῆς ζθ'. κοινῆς δὲ ἀφαιρεμένης τῆς ζη, ἐγκαταλείπεται ἡ ηα, μείζων τῆς ηθ, τῇ δὲ ηα, ἴση ἐστὶν ἡ ηδ, τὸ γὰρ η, κέντρον ἐστὶ τοῦ αδε, κύκλου κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα καὶ ἡ ηδ, μείζων ἐστὶ τῆς ηθ, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἄτοπον. ἢ καὶ οὕτω. Τοῦ ζ, ὄντος κέντρου τοῦ αβγ, κύκλου, καὶ τοῦ η, τοῦ αδε, λέγω τὴν ἐπὶ τὰ ζη, ἐπιζευγνυμένην εὐθεῖαν ἐπὶ τὸ α, πίπτειν. εἰ γὰρ μὴ, πιπτέτω ἐπὶ τὸ β, ὡς ἡ ζηβ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζβ, καὶ ἐπεὶ τὸ ζ, κέντρον ἐστὶ τοῦ αβγ, κύκλου, ἡ ζα, ἴση ἐστὶ τῇ ζηβ, τῇ δὲ ζα, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ζβ, ἄρα ἡ βζ, ἴση τῇ ζηβ, ὅπερ ἀδύνατον, κατὰ τὴν κ'. τοῦ α. Ἔτι ἐὰν τὴν ζηβ, κατὰ τὸν ἐναντίον, εὐθεῖαν εἶναι ὑποθῶμεν, καὶ ἡ βζ, ἐπιζευχθῇ, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ πολλῷ μᾶλλον ἄτοπον κατὰ τὸ ιβ; ἀξίωμα. ἢ δύο εὐθεῖαι κοινὸν ἕξουσι τμῆμα αἱ ζηβ, ζηα, ὅπερ ἀδύνατον, κατὰ τὸ ιγ'. ἀξίωμα. Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 3. Fig. 13.





ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι δύο κύκλων ἀλλήλων ἁπτομένων ἐντὸς ἡ ἀπὸ τῆς ἀφῆς ἐπὶ τὸ τοῦ ἑνὸς κέντρον ἀγομένη εὐθεῖα διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἑτέρου κύκλου.

Πρότασις ΙΒ'. Θεώρημα.

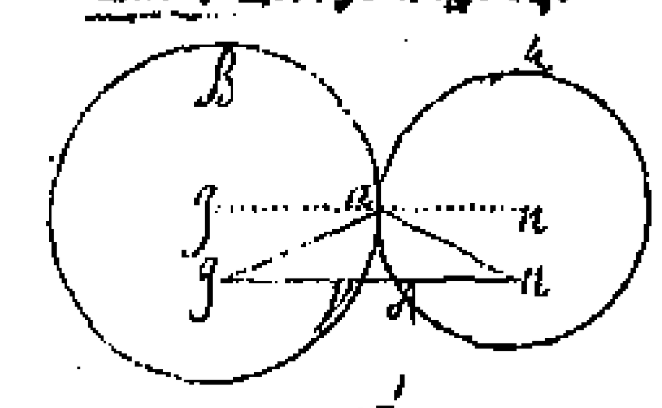
Ἐὰν δύο κύκλοι ἅπτωνται ἀλλήλων ἐκτὸς, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

Δύο γὰρ κύκλοι ὁ αβγ, οὗ κέντρον τὸ ζ, καὶ αδε, οὗ κέντρον τὸ η, ἁπτέσθωσαν ἀλλήλων κατὰ τὸ α. Λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ ζ, ἐπὶ τὸ η, ἐπιζευγνυμένη εὐ-

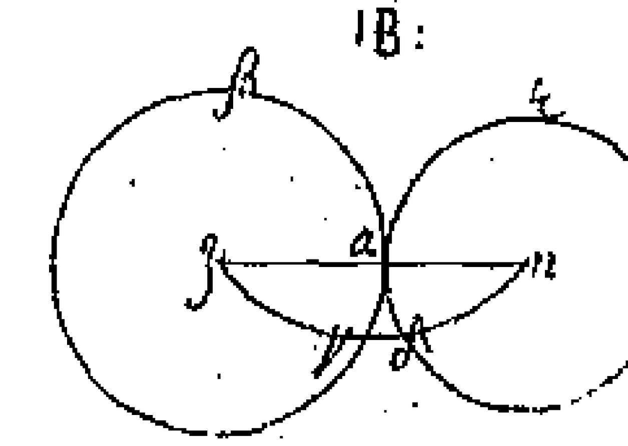
θεῖα

θεῖα διὰ τοῦ α, διελεύσεται. εἰ γὰρ δυνατὸν, διελθέτω ὡς ἡ ζγδη, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζα, ηα. καὶ ἐπεὶ τὸ ζ, κέντρον ἐστὶ τοῦ αβγ, κύκλου, ἡ ζα, πάντως ἴση ἐστὶ τῇ ζγ. ὡσαύτως καὶ ἡ ηα, ἴση ἐστὶ τῇ ηδ, ὥστε αἱ ζα, αη, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ζγ, δη· κοινῆς δὲ προσκειμένης τῆς γδ, ἔσται ἅπασα ἡ ζγδη, μείζων τῶν ζα, αη, ὅπερ ἀδύνατον κατὰ τὴν κ'. τοῦ α'. ἢ καὶ οὕτω. Διελθέτω, εἰ δυνατὸν, ἡ ἀπὸ τοῦ η, ἐπὶ τὸ ζ, μὴ διὰ τοῦ α, ἀλλὰ διὰ τῶν γ, καὶ δ, ὡς ἡ ζγδη, ἐπὶ τοῦ β'. σχήματος, ἥτις εὐθεῖα ὑποκείσθω. καὶ ἀπὸ τῶν ζ, η, κέντρων ἀχθήτωσαν αἱ ζα, αη. εἰ οὖν καὶ ἡ ζαη, εὐθεῖά ἐστιν, ἐπεὶ εὐθεῖα ὑπόκειται καὶ ἡ ζγδη, πάντως γε δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέχουσιν, ὅπερ ἄτοπον. εἰ δὲ ἡ ζαη, οὐκ ἔστιν εὐθεῖα, τὸ ζαη, σχῆμα τρίγωνον ἔσται, οὗ βάσις ἡ ζγδη, πλευραὶ δὲ αἱ ζα, αη, καὶ δειχθήσεται ὡς ἀμφοτέρω ἡ ζγδη, βάσις, μείζων τῶν ζα, αη, πλευρῶν, ὅπερ ἀδύνατον κατὰ τὴν κ'. τοῦ α'. Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἅπτωνται ἀλλήλων ἐκτὸς, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 3. Fig. 14.

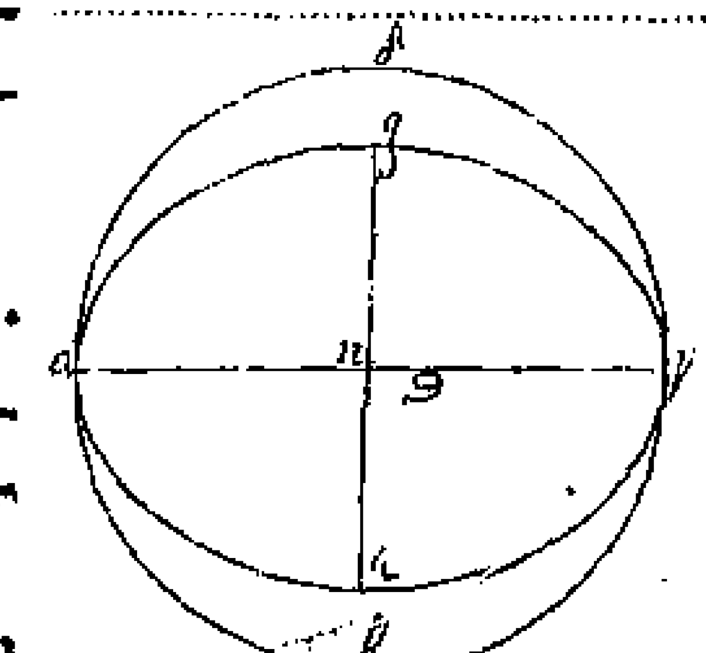


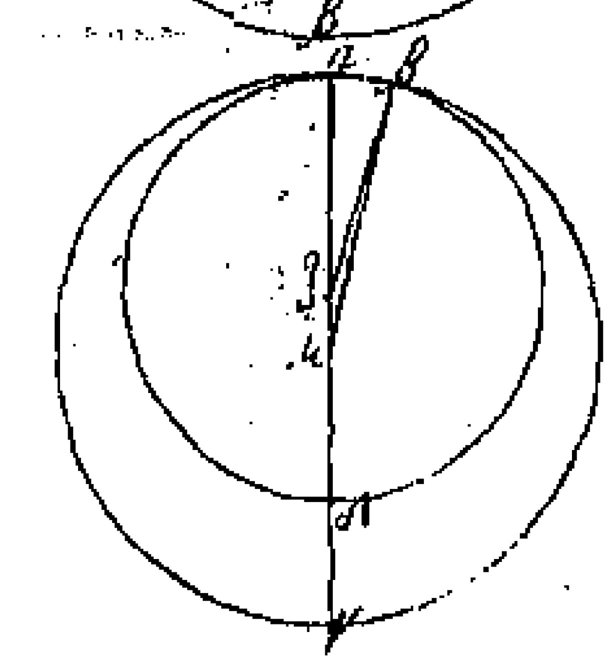
ΙΒ'.



Πρότασις ΙΓ'. Θεώρημα.

Κύκλος κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ καθ' ἓν, ἐάν τε ἐντὸς, ἐάν τε ἐκτὸς ἐφάπτηται.



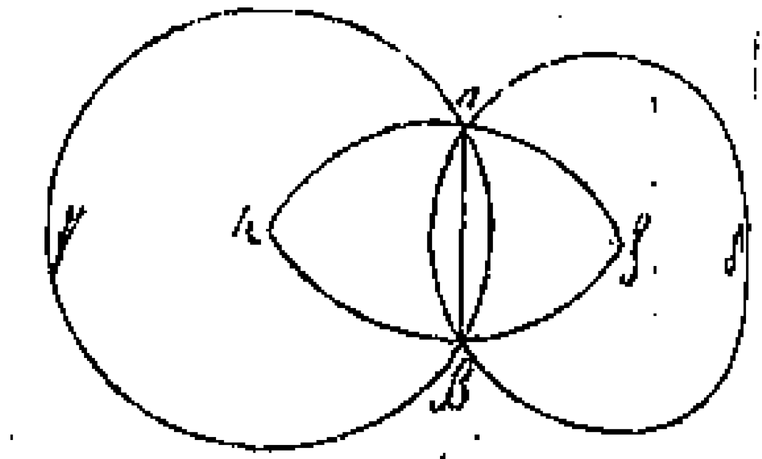


Κύκλος γὰρ ὁ αβγδ, οὗ κέντρον τὸ η, ἁπτέσθω, εἰ δυνατὸν, τοῦ αεγζ, κύκλου, οὗ κέντρον τὸ θ, ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ ἓν, τὰ α, γ. ἡ διὰ τῶν ηθ, ἄρα διερχομένη, ἐπὶ τὰς ἐπαφὰς πεσεῖται τῶν κύκλων, κατὰ τὴν ια. τοῦ παρόντος, ὡς ἡ αγ, καὶ ἐπεὶ τὸ η, κέντρον ἐστὶ τοῦ αβγδ, κύκλου, πάντως γε ἡ ηα, ἴση ἐστὶ τῇ ηγ, ἡ δὲ ηγ, μείζων ἐστὶ τῆς θγ· ἄρα καὶ ἡ αη, μείζων ἐστὶ τῆς θγ, ἡ δὲ αθ, πολλῷ μείζων τῆς αὐτῆς θγ. Ἐπεὶ δ' αὖθις τὸ θ, κέντρον ἐστὶ τοῦ αεγζ, κύκλου, πάντως γε ἡ θα, ἴση ἐστὶ τῇ γθ· δέδεικται δὲ καὶ πολλῷ μείζων ταύτης, ὅπερ ἄτοπον. Εἰ δέ τις εἴποι τὰ τῶν ἀφῶν σημεῖα ἐγγὺς ἀλλήλων εἶναι, καὶ μὴ κατὰ διάμετρον· ἁπτέσθω οὕτως ὁ αβγ, τοῦ αβδ, κατὰ τὰ α, καὶ β. καὶ τοῦ μὲν αβγ, ἔστω κέντρον τὸ ε, τοῦ δὲ αβδ, τὸ ζ· πάντως γε ἡ διὰ τῶν ε, ζ, διαβαίνουσα, ἐπὶ μίαν τῶν ἀφῶν, εἰ μὴ καὶ ἐπὶ τῶν δύο, πεσεῖται, κατὰ τὴν ια. τοῦ παρόντος· πιπτέτω δὴ ἐπὶ τὸ α, ὡς ἡ αγ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βζ, βε. ἄρα αἱ εζ, ζβ, μείζους εἰσὶ τῆς εβ,

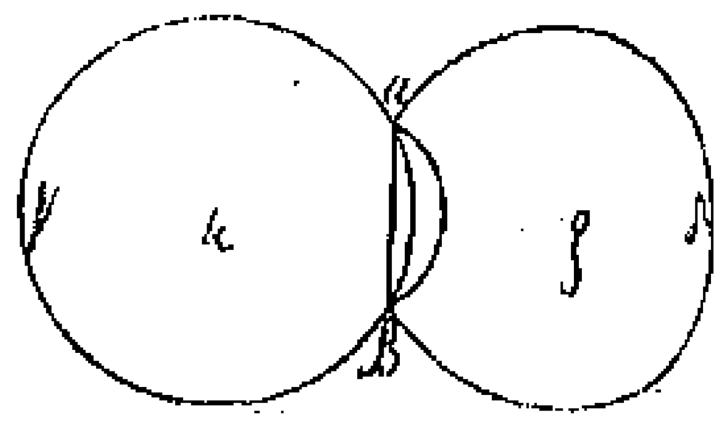
κατὰ

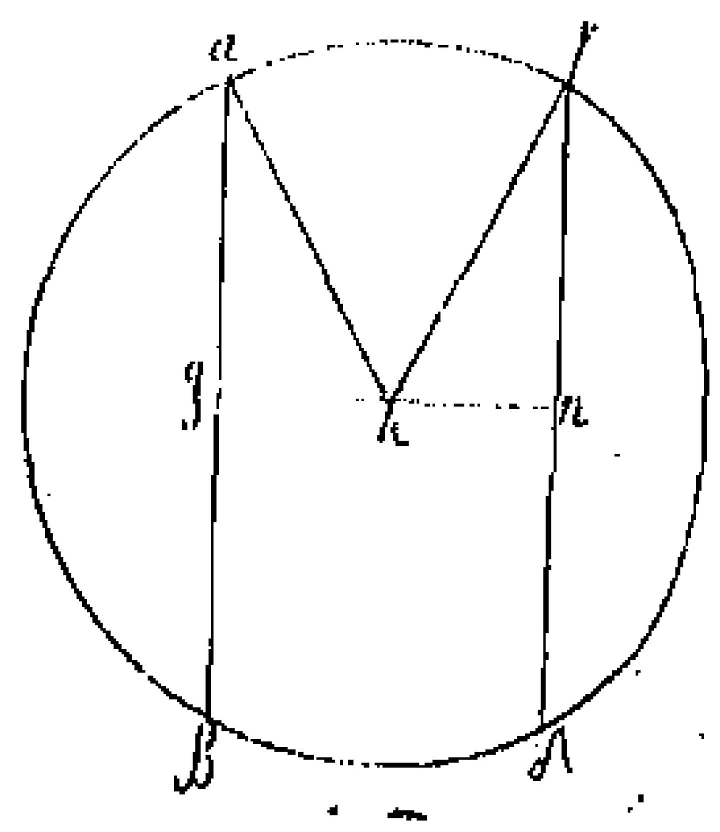
κατὰ τὴν κ'. τοῦ α. ἤτοι τῆς αε, ἴση γὰρ ἡ αε, τῇ εβ. κοινῆς δὲ ἀφαιρουμένης τῆς εζ, ἐναπολειφθήσεται ἡ ζβ, μείζων τῆς ζα, ὅπερ ἀδύνατον. ἡ γὰρ ζα, ἴση ἐστὶ τῇ ζβ, ὅτι τὸ ζ, κέντρον ἐστὶ τοῦ αβδ, κύκλου. *Eucl. Lib. 3. Fig. 15.*

Ἀπτέσθω ἔτι ὁ αβδ, κύκλος, οὗ κέντρον τὸ ζ, τοῦ αβγ, οὗ κέντρον τὸ ε, ἐντὸς κατὰ τὰ α, καὶ β. κατὰ τὴν ιβ'. ἄρα τοῦ παρόντος ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς ἁφῆς διελεύσεται. Διελθέτω οὖν διὰ μὲν τοῦ α, ὡς ἐπὶ τοῦ α. σχήματος, ἡ εαζ, διὰ δὲ τοῦ β, ἡ εβζ, δύο ἄρα εὐθεῖαι εαζ, εβζ, χωρίον περιέχουσιν, ὅπερ ἀδύνατον, κατὰ τὸ ιβ'. ἀξίωμα, ἢ καὶ οὕτως. Ἐπεὶ ἐφ' ἑκατέρου τῶν κύκλων εἴληπται δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπιζευγνυμένη ἐπ' αὐτὰ εὐθεῖα, ἢ ἐντὸς πεσεῖται ἑκατέρου τῶν κύκλων, ὡς ἡ αβ, ἐπὶ τοῦ α. σχήματος, ἢ τοῦ μὲν ἐντὸς, τοῦ δὲ ἐκτὸς, ὡς ἐπὶ τοῦ β'. σχήματος· ἀλλὰ καθ' ἑκάτερον ἀδύνατον. εἰ γὰρ ἐντὸς ἑκατέρου τέμνουσιν οἱ κύκλοι ἀλλήλους, καὶ οὐχ ἅπτονται. εἰ δὲ τοῦ μὲν ἐντὸς τοῦ δὲ ἐκτὸς, ὡς μὲν ἀληθὴς, ὡς δὲ ψευδὴς ἔσται ἡ β'. τοῦ παρόντος, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐκτὸς κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ ἕν, κύκλος κύκλου ἐφάπτεται. δέδεικται δὲ μηδὲ ἐντός. Κύκλος ἄρα κύκλου οὐκ ἐφάπτεται καὶ τὰ ἑξῆς.



ιε'.





Πρότασις ΙΔ'. Θεώρημα.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἐν κύκλῳ ἤδη τῷ αβδγ, οὗ κέντρον τὸ ε, ἔστωσαν ἴσαι εὐθεῖαι αἱ αβ, γδ. Λέγω ταύτας ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ ε, κέντρου. Πιπτέτωσαν γὰρ ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀπὸ τοῦ ε, αἱ εζ, εη, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ αε, εγ. κατὰ τὴν γ'. ἄρα τοῦ παρόντος αἱ αβ, γδ, δίχα τέμνονται ὑπὸ τῶν εζ, εη, ὥστε ἥτε αβ, διπλασία ἐστὶ τῆς αζ, καὶ ἡ γδ, τῆς γη. ἀλλ' αἱ αβ, γδ, ἴσαι εἰσὶ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα καὶ αἱ αζ, γη, ὁμοίως ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸ ζ'. ἀξίωμα. ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς αζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αη, ἀλλὰ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς γε. ἴση γὰρ ἡ αε, τῇ εγ, κατὰ τὸν ιε'. ὅρον τοῦ α. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς αε, ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν αζ, ζε, κατὰ τὴν μζ'. τοῦ αὐτοῦ. καὶ τῷ ἀπὸ τῆς εγ, τὰ ἀπὸ τῶν γη, ηε, ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν αζ, ζε, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν γη, ηε. ἀφαιρουμένων οὖν τῶν ἀπὸ τῶν αζ, γη, ἴσων, ἐγκαταλείπονται ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ζε, ηε, ὥστε

καὶ ἡ

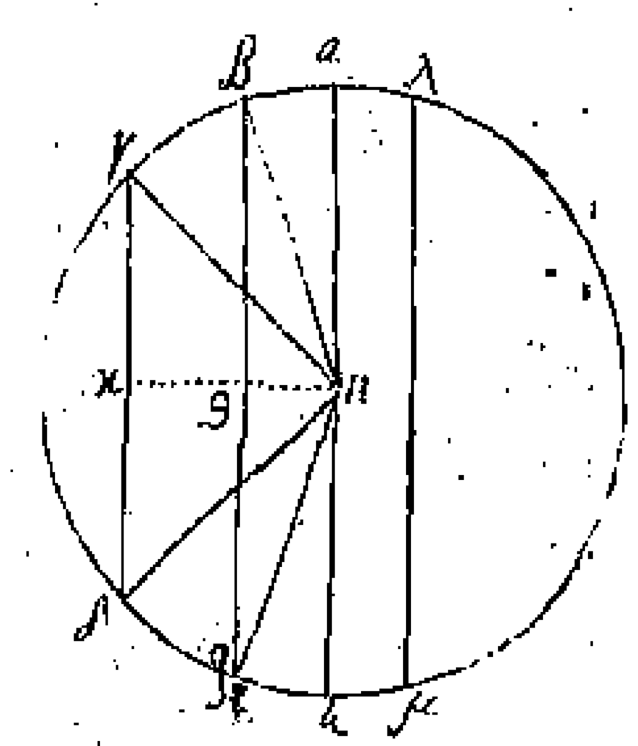
καὶ ἡ ζε. ἴση ἐστὶ τῇ ηε, ἀλλ' αἱ ζε, ηε, κάθετοί εἰσιν ἐπὶ τῶν αβ, γδ, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου· αἱ αβ, ἄρα γδ, ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, κατὰ τὸν δ'. ὅρον τοῦ παρόντος. Ἀλλὰ δὴ ἀπεχέτωσαν αἱ αβ, γδ, ἴσον ἀπὸ τοῦ ε, κέντρου, λέγω ταύτας ἴσας εἶναι. τῶν αὐτῶν γὰρ κατασκευασθέντων, δειχθήσεται, ὡς καὶ ἀνωτέρω, ἑκατέρα τῶν αβ, γδ, δίχα τέμνεσθαι παρὰ τῶν εζ, εη, κατὰ τὴν γ'. τοῦ παρόντος· καὶ ἑπομένως τὴν μὲν αβ, συναχθήσεται διπλασίαν εἶναι τῆς αζ, τὴν δὲ γδ, τῆς γη. ἐπεὶ δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς γε, διὰ τὸ ἴσας εἶναι ἀλλήλαις τὰς αε, γε, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς αη, ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν αζ, ζε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς γε, τὰ ἀπὸ τῶν γη, ηε. δειχθήσεται πάντως καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αζ, ζε, ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν γη, ηε. ἀφαιρουμένων δὲ τῶν ἀπὸ τῶν ζε, ηε, ἴσων, ἐγκαταλειφθήσεται τὰ ἀπὸ τῶν αζ, γη, ἴσα, καὶ ἑπομένως αἱ αζ, γη, ὁμοίως ἴσαι. ὥστε καὶ αἱ τούτων διπλάσιαι, αἱ αβ, γδ, ἴσαι ἔσονται κατὰ τὸ ς'. ἀξίωμα. Ἐν κύκλῳ ἄρα αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΕ'. Θεώρημα.

Ἐν κύκλῳ μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διάμετρος, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν.

Ἐν κύκλῳ ἤδη τῷ αβγδ, οὗ κέντρον τὸ η, ἔστω διάμετρος μὲν ἡ αε, ἔγγιον δὲ ταύτης ἡ βζ, ἀπώτερον δὲ ἡ γδ. Λέγω, ὅτι ἡ μὲν αε, μεγίστη ἐστὶν, ἡ δὲ βζ, μείζων τῆς γδ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ηβ, ἴση ἐστὶ τῇ ηα, καὶ ἡ ζη, τῇ ηε, κατὰ τὸν ιε', ὅρον τοῦ α. πάντως γε αἱ βη, ηζ, ἴσαι εἰσὶ τῇ αε, αἱ δὲ βη, ηζ, μείζονές εἰσι τῆς βζ, κατὰ τὴν κ'. τοῦ α. καὶ ἡ αε, ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς βζ. Αὖθις ἐπεὶ αἱ βη, ηζ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς γη, ηδ, ὡς ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ κέντρου, ἡ δὲ ὑπὸ βηζ, γωνία, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ γηδ, καὶ βάσις ἄρα ἡ βζ, μείζων ἐστὶ τῆς γδ, βάσεως, κατὰ τὴν κδ'. τοῦ α. ὁμοίως δὴ δείξομεν. κἂν ἄλλη τις εὐθεῖα ἀπώτερον εἴη τῆς γδ, ἐλάττονα εἶναι τῆς αὐτῆς γδ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 3. Fig. 16.



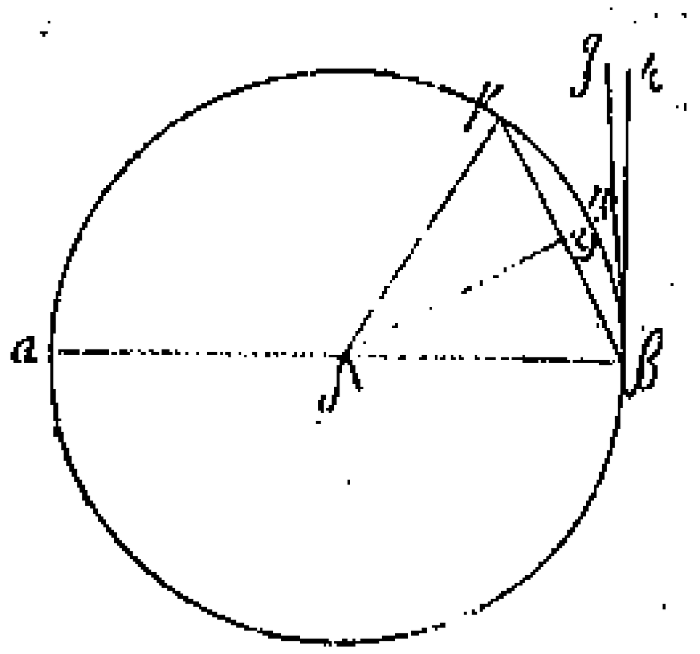
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου ἕπεται, ἐφ' ἑκάτερα τῆς αε, δύο μόνας ἴσας συνίστασθαι εὐθείας, εἰ γὰρ μὴ, ἔσονται αἱ ἀπώτερον τῆς ἔγγιον ἴσαι· ὅπερ ἀδύνατον.

Πρό-

Πρότασις Ις'. Θεώρημα.

Η' τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται, καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἁπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν, ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων. *Eucl. Lib. 3. Fig. 17.*



Ε'πὶ τῆς αβ, ἤδη διαμέτρου τοῦ αγβ, κύκλου, οὗ κέντρον τὸ δ, κάθετος ἀπὸ τοῦ β, σημείου ἀγομένη ἡ βε, λέγω, ὅτι ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. εἰ γὰρ δυνατὸν πιπτέτω ἐντός, ὡς ἡ βγ. καὶ ἀχθήτω ἡ δγ, ἐπεὶ οὖν ἡ δβ, ἴση ἐστὶ τῇ δγ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ δβγ, γωνία, τῇ ὑπὸ δγβ, κατὰ τὴν ε΄. τοῦ α. ἀλλ' ἡ ὑπὸ δβγ, ὀρθή ἐστι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ δγβ. αἱ δύο ἄρα γωνίαι τοῦ δγβ, τριγώνου δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὅπερ ἀδύνατον, κατὰ τὴν ιζ, τοῦ α. Ο'μοίως δειχθήσεται μηδὲ ἐπὶ τῆς περιφερείας πίπτειν, ἐκτὸς ἄρα, ὡς ἡ βε. Λέγω ὅτι μεταξὺ τῆς βε, εὐθείας, καὶ βθγ, περιφερείας μὴ δυνατὸν εὐθεῖαν ἑτέραν ἐμπίπτειν. εἰ γὰρ δυνατόν, ἐμπιπτέτω, ὡς ἡ βζ, καὶ ἐπ' αὐτῆς ἤχθω κάθετος ἡ δη, ἡ γὰρ δβ, οὐκ ἐπ' αὐτῆς, ἀλλ' ἐπὶ τῆς βε, κάθετός ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ δηβ, γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ὑπὸ δβη, ἐλάττων ὀρθῆς, ἡ δβ, ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς δη, κατὰ τὴν ιθ΄. τοῦ α. τῇ δὲ δβ, ἴση ἐστὶν ἡ δθ, κατὰ τὸν ιε΄. ὅρον τοῦ α. καὶ ἡ δθ, ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς δη, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα δυνατὸν ἐμπεσεῖν. Λέγω δὲ καὶ γ΄. ὅτι ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς αβ, διαμέτρου, καὶ τῆς βθγ, κοίλης περιφερείας, ἁπάσης ὀξείας γωνίας μείζων ἐστίν, ἡ δὲ λοιπὴ ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς βε, εὐθείας, καὶ τῆς βθγ, κυρτῆς περιφερείας, ἐλάττων ἐστίν. εἰ γὰρ αὖ εἴη ἄλλη τις γωνία μείζων μὲν τῆς τοῦ ἡμικυκλίου, ἐλάττων δὲ τῆς λοιπῆς, ἐμπεσεῖται πάντως εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς βε, εὐθείας, καὶ βθγ, περιφερείας εὐθεῖά τις ἄλλη, ὡς ἡ βζ, ὅπερ τῶν ἀδυνάτων εἶναι δέδεικται. πάσης ἄρα ὀξείας γωνίας μεγίστη μὲν ἡ τοῦ ἡμικυκλίου, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπή. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Η' τῇ διαμέτρῳ ἄρα τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς καὶ τὰ ἑξῆς.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

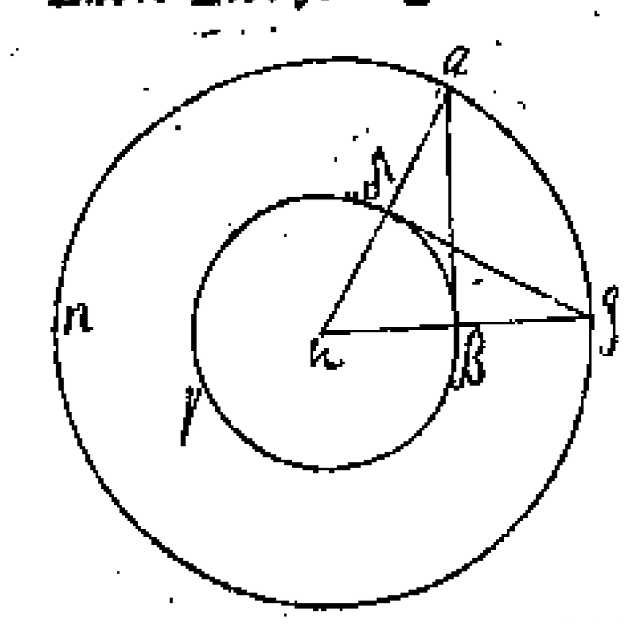
Ε'κ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἡ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη ἐπὶ τοῦ πέρατος τῆς διὰ τοῦ κέντρου, ἅπτεται τοῦ κύκλου, εἰ γὰρ μή, ἐντὸς πεσεῖται, ὅπερ ἀδύνατον. καὶ τοὔμπαλιν, ἡ ἁπτομένη τοῦ κύκλου, πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ διαμέτρῳ.

Πρό-

Πρότασις ΙΖ'. Πρόβλημα.

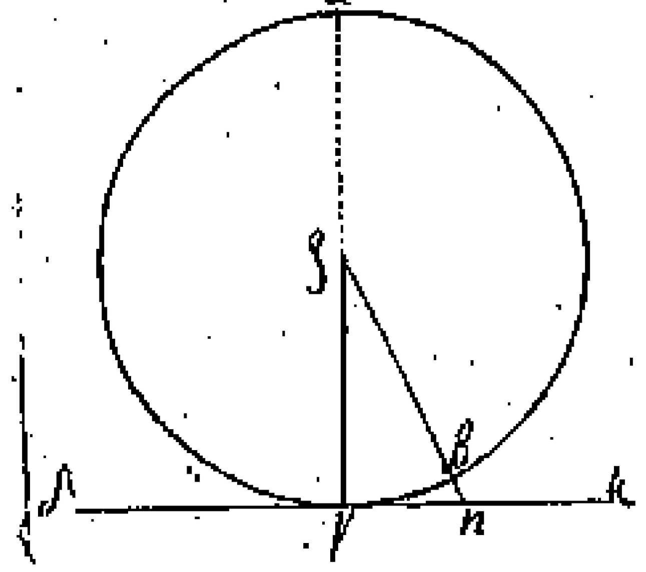
Α'πὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Α'πὸ τοῦ δοθέντος ἤδη σημείου τοῦ α, τοῦ δοθέντος βγδ, κύκλου ἐφαπτομένην γραμμὴν δεῖ ἀγαγεῖν. Εἰλήφθω τοίνυν τὸ ε, κέντρον τοῦ βγδ, κύκλου κατὰ τὴν α΄. τοῦ παρόντος. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αε, τέμνουσα τὸν βγδ, κύκλον κατὰ τὸ δ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ εα, κύκλος γραφήτω ὁ αζη, καὶ ἀπὸ τοῦ δ. κάθετος ἀχθήτω ἡ δζ, ἐπὶ τῆς εδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εβζ, καὶ ζδ. καὶ ἐπεὶ τὸ ε, κέντρον ἐστὶν ἑκατέρου τῶν κύκλων, πάντως γε ἡ εα, ἴση ἐστὶ τῇ εζ, ἡ δὲ εδ, τῇ εβ. *Eucl. Lib. 3. Fig. 18.* ὥστε αἱ αε, εβ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ζε, εδ, περιέχουσι δὲ καὶ γωνίαν κοινὴν τὴν πρὸς τῷ ε, καὶ βάσις ἄρα ἡ αβ, βάσει τῇ δζ, ἴση ἐστί, κατὰ τὴν δ΄. τοῦ α. καὶ τὸ αεβ, τρίγωνον, ἴσον τῷ δεζ, τριγώνῳ, καὶ ἡ ὑπὸ αβε, γωνία τῇ ὑπὸ ζδε, ἴση, ἀλλ' ἡ ὑπὸ ζδε, ὀρθή ἐστιν, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αβε. ἡ αβ, ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς εβ, τῆς διὰ τοῦ κέντρου, ὥστε κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω, ἅπτεται ἡ αβ, τοῦ βγδ, κύκλου. ὅπερ ἦν τὸ προσταχθέν.



Πρότασις ΙΗ'. Θεώρημα.

Ε'ὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα, κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἁπτομένην.



Κύκλου ἤδη τοῦ αβγ, οὗ κέντρον τὸ ζ, ἁπτέσθω ἡ δε, κατὰ τὸ γ, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ, κέντρου ἐπὶ τὸ γ, ἀχθήτω ἡ ζγ. Λέγω ταύτην κάθετον εἶναι ἐπὶ τῆς δε. εἰ γὰρ μή, πάντως γε ἔστω ἡ ζη, κάθετος ἐπὶ τῆς δε. ὥστε ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ζηγ, ὀρθή ἐστι, ἡ ὑπὸ ζγη, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, καὶ κατὰ τὴν ιη΄. τοῦ α. ἡ ζγ, μείζων ἐστὶ τῆς ζη, ἀλλ' ἡ ζγ, ἴση ἐστὶ τῇ ζβ, κατὰ τὸν ιε΄, ὅρον, ἄρα καὶ ἡ ζβ, μείζων ἐστὶ τῆς ζη, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄλλη τις ἔσται κάθετος ἐπὶ τῆς δε, ἢ ἡ ζγ. Ε'ὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηται καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΘ'. Θεώρημα.

Ε'ὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

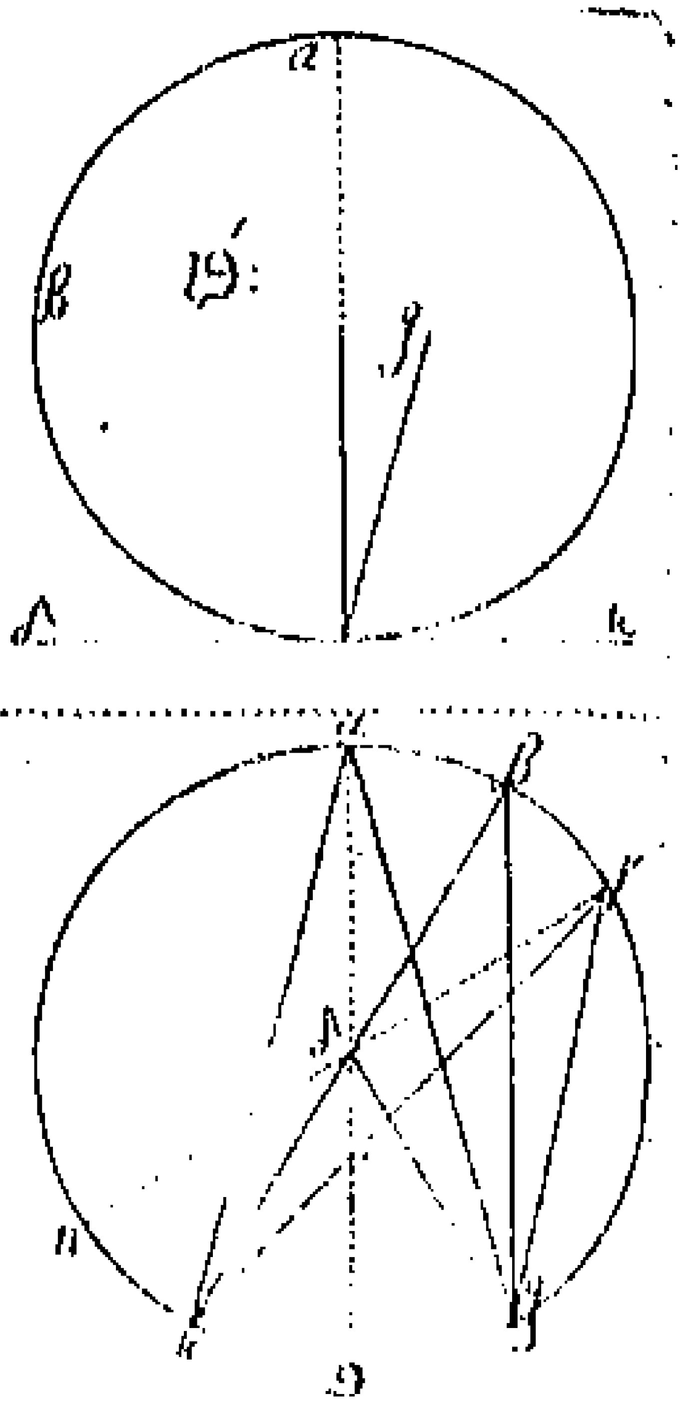
Κύκλου ἤδη τοῦ αβγ, ἁπτέσθω ἡ δε, κατὰ τὸ γ. καὶ ἀπὸ τοῦ γ, πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ

ἐπὶ τῆς δε, ἤχθω ἡ γα. Λέγω ἐπὶ τῆς γα, εἶναι τὸ κέντρον τοῦ αβγ, κύκλου· εἰ γὰρ μή, ἔστω τὸ ζ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζγ, ἡ ζγ, ἄρα κατὰ τὴν ἀνωτέρω κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς δε, ἔστι δὲ καὶ ἡ γα, ὁμοίως κάθετος ἐπὶ τῆς δε, κατὰ τὴν κατασκευήν, ἄρα ἡ ὑπὸ ζγε, γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αγε, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 3. Fig. 19.

Πρότασις Κ'. Θεώρημα.

Ἐν κύκλῳ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν.



Ἐν κύκλῳ ἤδη τῷ αβγ, οὗ κέντρον τὸ δ, ἔστω γωνία πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ ἡ ὑπὸ εδζ, πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ ἡ ὑπὸ εαζ, ἑκατέρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βεβηκυῖα βάσεως, τῆς εθζ, περιφερείας. Λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ εδζ, διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ εαζ. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ αδ, καὶ ἤχθω ἐπὶ τὸ θ, καὶ ἐπεὶ αἱ δα, δε, ἴσαι εἰσίν, ὡς ἀπὸ τοῦ κέντρου, πάντως γε ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ δαε, δεα, γωνίαι κατὰ τὴν ε'. τοῦ α. ταῖς δὲ ὑπὸ δαε, δεα, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ εδθ, κατὰ τὴν λβ'. τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ἡ ὑπὸ εδθ, διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ δαε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ζδθ, διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ δεζ, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ εδζ, ὅλης τῆς ὑπὸ εαζ, διπλασίων ἐστίν.

Ἔστω ἔτι ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας πλαγίως κειμένη ἡ ὑπὸ εβζ. Λέγω καὶ ταύτης τὴν ὑπὸ εδζ, διπλασίαν εἶναι. Ἐπεὶ γὰρ αἱ δβ, δζ, ἴσαι εἰσίν, ἴσαι πάντως εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ δβζ, δζβ, γωνίαι κατὰ τὴν ε'. τοῦ α. ταῖς δὲ ὑπὸ δβζ, δζβ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ εδζ, κατὰ τὴν λβ'. τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ἡ ὑπὸ εδζ, τῆς μιᾶς αὐτῶν, ἤτοι τῆς ὑπὸ δβζ, διπλασίων ἐστίν.

Ἔστω καὶ γ'. πλαγιώτερον πρὸς τῇ περιφερείᾳ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ἡ ὑπὸ εγζ. ὅτι δὲ καὶ ταύτης διπλασίων ἐστὶν ἡ ὑπὸ εδζ, δῆλον. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ δγ, ἀγομένη ἐπὶ τὸ η. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ δγζ, δζγ, ἴσαι εἰσί, διὰ τὰ εἰρημένα, καὶ ταύταις ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ηδζ, ἐκτός, πάντως γε τῆς μιᾶς, ἤτοι τῆς ὑπὸ δγζ, διπλασίων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ηδζ. ἀλλὰ καὶ τῆς ὑπὸ δγε, διπλασίων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ηδε, διὰ τὰ αὐτά. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ εδζ, διπλασίων ἐστὶ λοιπῆς τῆς ὑπὸ εγζ. Ἐν κύκλῳ ἄρα ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ καὶ τὰ ἑξῆς.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Α'. Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐν κύκλῳ πᾶσαι αἱ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίαι

Ἴσαι

ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, κατὰ τὸ ζ'. ἀξίωμα, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν.

Β'. Ἔτι αἱ πρὸς τῇ περιφερείᾳ τοῦ κύκλου συνιστάμεναι γωνίαι ἐπὶ διπλασίων βεβήκασι περιφερειῶν, ἢ αἱ πρὸς τῷ κέντρῳ ἴσαι ταῖς πρὸς τῇ περιφερείᾳ συνιστάμεναι.

Πρότασις ΚΑ'. Θεώρημα.

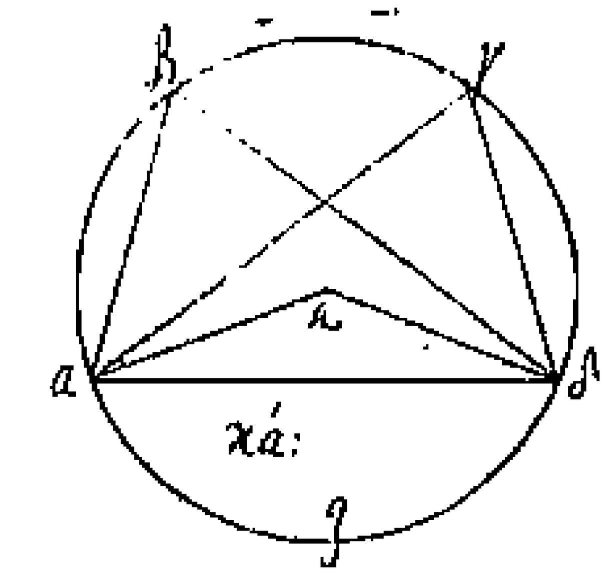
Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἐν κύκλῳ ἤδη τῷ αβγδζ, ἔστωσαν γωνίαι ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῷ αβγδ, αἱ ὑπὸ αβδ, καὶ αγδ. Λέγω ταύτας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι. Ἐπεὶ γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αβδ, αγδ, τὴν αὐτὴν περιφέρειαν αζβ, βάσιν ἔχουσι, πάντως γε κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις. Ἐν κύκλῳ ἄρα αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι καὶ τὰ ἑξῆς.

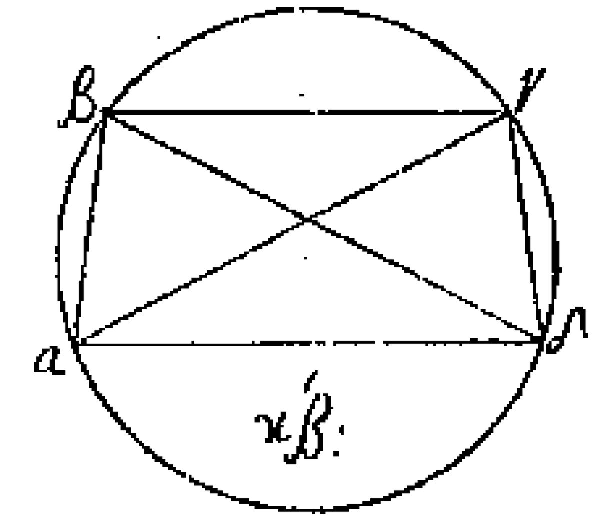
Eucl. Lib. 3. Fig. 20.

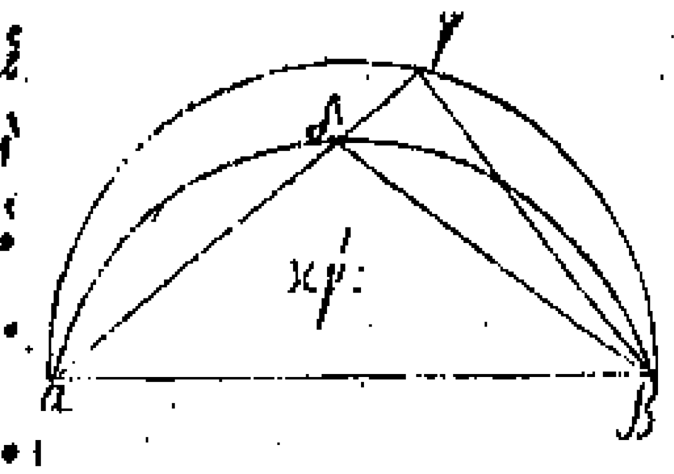
Πρότασις ΚΒ'. Θεώρημα.

Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.



Ἐν κύκλῳ ἤδη τῷ αβγδ, ἔστω τετράπλευρον τὸ αβγδ, Λέγω τούτου τὰς ἀπεναντίον γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αγ, βδ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ γαδ, τῇ ὑπὸ δβγ, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς κ'. τοῦ παρόντος, τὴν αὐτὴν γὰρ γδ, περιφέρειαν βάσιν ἔχουσιν, ἡ δὲ ὑπὸ αβδ, ἴση ἐστὶ διὰ τὰ αὐτὰ τῇ ὑπὸ δγα, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ δαγ, δγα, κοινῆς δὲ προσκειμένης τῆς τε ὑπὸ αβγ, καὶ ταῖς ὑπὸ δαγ, δγα, τῆς ὑπὸ αδγ, ἔσονται πάντως αἱ ὑπὸ αβγ, αδγ, ἴσαι ταῖς ὑπὸ δαγ, αγδ, γδα, τρισὶ τοῦ αγδ, τριγώνου γωνίαις. ἀλλ' αἱ τρεῖς τοῦ αγδ, τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί, κατὰ τὴν λβ'. τοῦ α. ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ αβγ, αδγ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν καὶ τὰς ὑπὸ βαδ, δγβ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι. Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις ἄρα τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον καὶ τ' ἑξ.





Πρότασις ΚΓ'. Θεώρημα.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα οὐ συσταθήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αβ, εὐθείας συνεστάθωσαν τὰ αγβ, αδβ, ὅμοια καὶ ἄνισα τμήματα κύκλων. καὶ τῆς αδγ, ἠγμένης, ἐπεζεύχθωσαν αἱ δβ, γβ.

καὶ

καὶ ἐπεὶ τὰ α δ β, α γ β, τμήματα, ὅμοιά εἰσι, πάντως γε ἴσας γωνίας δέχονται, κατὰ τὸν ι. ὅρον τοῦ παρόντος. ἄρα ἡ ὑπὸ α δ β, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ α γ β, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς, ὅπερ ἀδύνατον, κατὰ τὴν λβ′. τοῦ α. οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλου ὅμοια καὶ ἄνισα συσταθήσονται.

Πρότασις ΚΔ′. Θεώρημα.

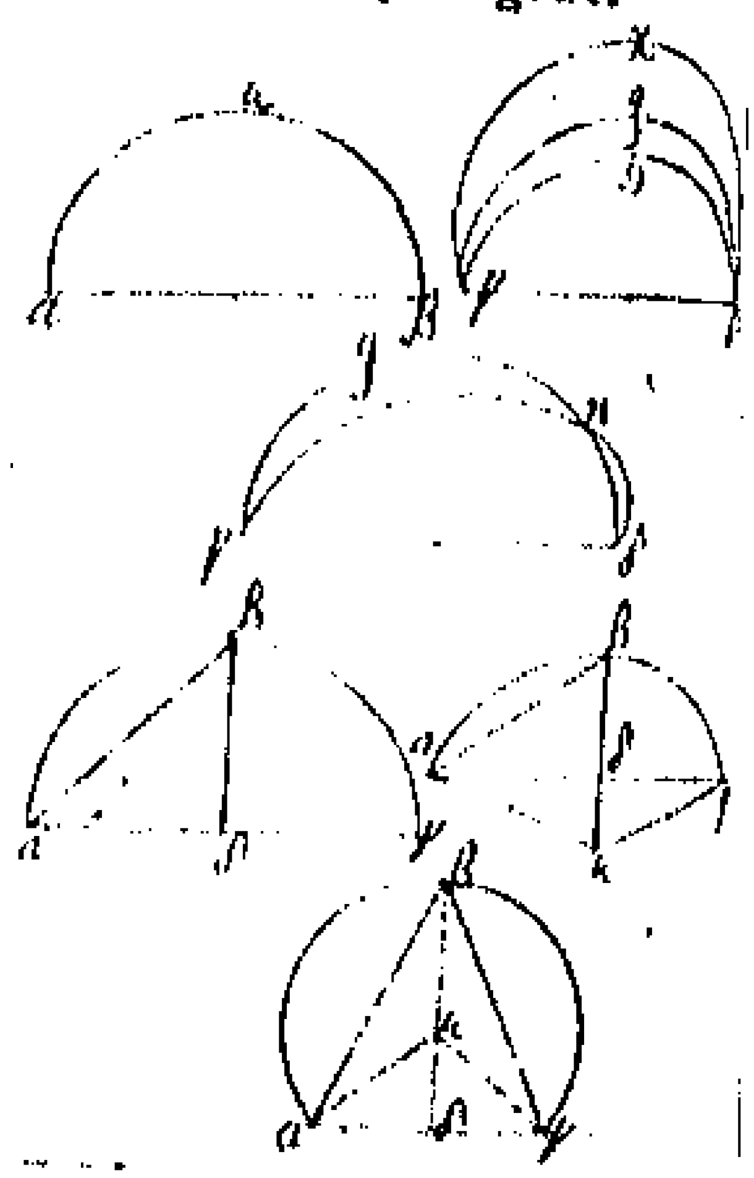
Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

Ἐπὶ ἴσων ἤδη εὐθειῶν τῶν α β, γ δ, συνεστάθωσαν ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ α ε β, γ ζ δ. Λέγω ταῦτα ἴσα εἶναι. εἰ γὰρ μὴ, ἐφαρμοζομένης τῆς α β, ἐπὶ τῆς γ δ, ἢ ἐκτὸς τοῦ γ ζ δ, πεσεῖται τὸ α ε β, τμῆμα, ὡς τὸ γ κ δ, ἢ ἐντὸς τούτου, ὡς τὸ γ θ δ. καὶ ἔσται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα ὅμοια καὶ ἄνισα, ὅπερ ἄτοπον, κατὰ τὴν ἀνωτέρω. ἢ γοῦν μέρος μὲν τούτου ἐντὸς, μέρος δὲ ἐκτὸς πεσεῖται, ὡς τὸ γ η δ, καὶ κύκλος κύκλον τεμεῖ κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ δύο, ὅπερ ἀδύνατον, κατὰ τὴν ι. τοῦ παρόντος. Τὰ ἐπὶ ἴσων ἄρα εὐθειῶν ὅμοια τμήματα καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib.3. Fig.21.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσα τε καὶ ὅμοια τμήματα κύκλου ἀφαιροῦσιν, ὁπωσδηποτοῦν ἐναρμοζόμεναι.



Πρότασις ΚΕ′. Θεώρημα.

Κύκλου τμήματος δοθέντος, προσαναγράψαι τὸν κύκλον, οὗπέρ ἐστι τμῆμα.

Ἔστω δὴ κύκλον προσαναγράψαι, δοθέντος τοῦ α β γ, τμήματος. Ἐπεζεύχθω ἡ α γ, καὶ τμηθείσης δίχα τῆς αὐτῆς α γ, κατὰ τὸ δ, ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἐπ᾽ αὐτῆς ἡ δ β, κατὰ τὴν ια. τοῦ α. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ α β. ἡ οὖν ὑπὸ δ β α, γωνία ἢ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ β α δ, ἢ ἴση, ἢ ἐλάττων. Ἔστω δὴ α. μείζων, καὶ γενέσθω ταύτῃ ἴση ἡ ὑπὸ β α ε. καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ β δ, συμπίπτουσα τῇ α ε, κατὰ τὸ ε. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ε γ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ α β ε, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ β α ε, ἴση πάντως ἐστὶ καὶ ἡ β ε, τῇ ε α, κατὰ τὴν ϛ. τοῦ α. ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ α δ, ἴση ἐστὶ τῇ δ γ, κοινὴ δὲ ἡ δ ε, καὶ ἡ ὑπὸ α δ ε, γωνία τῇ ὑπὸ γ δ ε, ἴση, καὶ βάσις ἄρα ἡ α ε, βάσει τῇ ε γ, ἴση ἐστὶ, κατὰ τὴν δ′. τοῦ α. ἴση δὲ τῇ α ε, ἐστὶ καὶ ἡ ε β, ἄρα ἡ ε γ, ἴση ἐστὶ καὶ τῇ ε β. ὥστε αἱ τρεῖς ε α, ε β, ε γ, ἴσαι εἰσί. κέντρῳ ἄρα τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ α, κύκλος γραφόμενος διελεύσεται καὶ διὰ τῶν λοιπῶν β, καὶ γ, σημείων. καὶ δῆλον, ὅτι τὸ α β γ, ἔλαττον τμῆμά ἐστι κύκλου, διὰ τὸ ἐκτὸς εἶναι τὸ κέντρον.

Ἔστω δὲ ἡ ὑπὸ δ β α, ἴση τῇ ὑπὸ β α δ, ἄρα καὶ ἡ α δ, ἴση ἐστὶ τῇ δ β, ἔστι δὲ

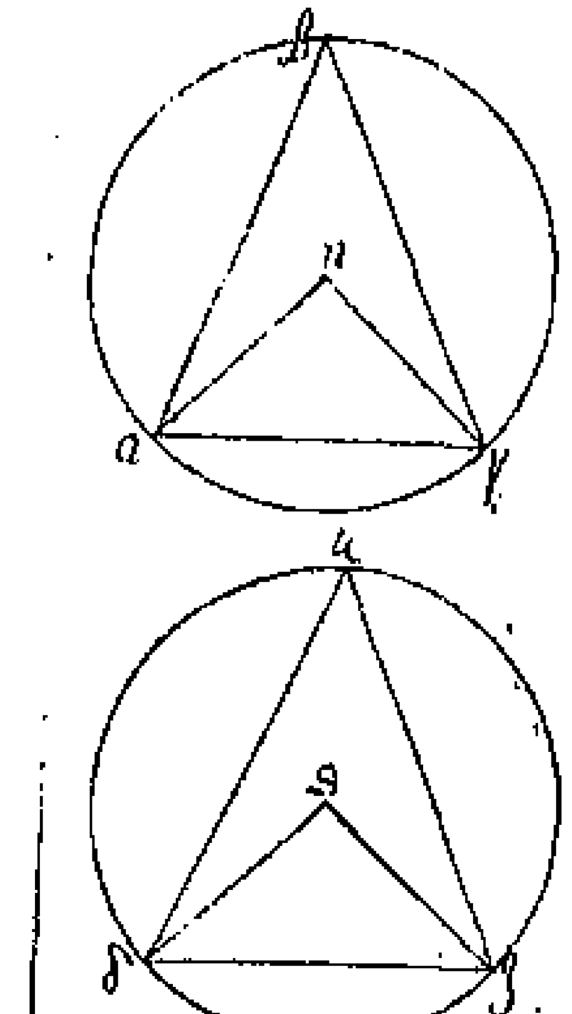
καὶ ἡ

καὶ ἡ δ γ, ἴση τῇ α δ. αἱ τρεῖς ἄρα α δ, δ β, δ γ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ α, προσαναγραφήσεται ὁ κύκλος. καὶ δῆλον, ὅτι τὸ α β γ, ἡμικύκλιόν ἐστιν, ὅτι ἐπὶ τῆς α γ, ἐστὶ τὸ κέντρον.

Ἔστω ἔτι ἡ ὑπὸ δ β α, ἐλάττων τῆς ὑπὸ β α δ. γενέσθω ἡ ὑπὸ β α ε, ἴση τῇ ὑπὸ ε β α, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ε γ. αἱ τοίνυν α ε, ε β, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, διὰ τὸ ἴσας γωνίας ὑποτείνειν. ἔστι δὲ καὶ ἡ α ε, τῇ ε γ, ἴση κατὰ τὴν δ′. τοῦ α. αἱ τρεῖς ἄρα α ε, ε β, ε γ, ἴσαι εἰσί. καὶ κέντρῳ τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ ε α, προσαναγράφεται ὁ κύκλος, καὶ τὸ α β γ, μεῖζον τμῆμα κύκλου ἐστὶ, διὰ τὸ ἐντὸς ἔχειν τὸ κέντρον. Κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος, προσαναγέγραπται ὁ κύκλος. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib.3. Fig.22.

Πρότασις Κϛ′. Θεώρημα.



Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐάντε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάντε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

Ἐν ἴσοις κύκλοις ἤδη τοῖς α β γ, δ ε ζ, ἴσαι γωνίαι συνεστάθωσαν πρὸς μὲν τοῖς κέντροις αἱ ὑπὸ α η γ, δ θ ζ, πρὸς τῇ περιφερείᾳ δὲ αἱ ὑπὸ α β γ, δ ε ζ. Λέγω, ὅτι αἱ α γ, δ ζ, περιφέρειαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐπεὶ γὰρ οἱ α β γ, δ ε ζ, κύκλοι ἴσοι εἰσὶν, ἴσαι πάντως γέ εἰσι καὶ αἱ α η, η γ, ταῖς δ θ, θ ζ. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ α η γ, δ θ ζ, γωνίαι, ἴσαι. καὶ βάσις ἄρα ἡ α γ, βάσει τῇ δ ζ, ἴση ἐστίν. Ἐπεὶ δὲ πάλιν αἱ πρὸς τῷ β, καὶ ε, γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, πάντως γε τὰ α β γ, δ ε ζ, τμήματα ὅμοιά ἐστι, κατὰ τὸν ι. ὅρον τοῦ παρόντος, εἰσὶ δὲ καὶ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν α γ, δ ζ, ἄρα καὶ ἴσα, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς κδ′. τοῦ αὐτοῦ. ἀλλὰ καὶ οἱ α β γ, δ ε ζ, κύκλοι ἴσοι εἰσὶ, καὶ ἀπ᾽ αὐτῶν ἀφῄρηται τὰ α β γ, δ ε ζ, τμήματα ἴσα, ἄρα καὶ τὰ α γ, δ ζ, τμήματα, ἴσα ἐστι, κατὰ τὸ γ. ἀξίωμα. δῆλον ἄρα, ὅτι ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐάντε καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΚΖ′. Θεώρημα.

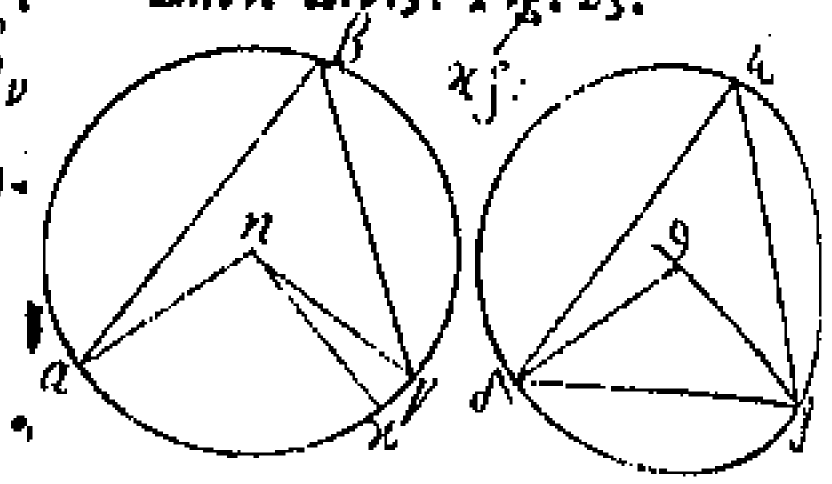
Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἐάντε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάντε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

Ἐν ἴσοις ἤδη κύκλοις τοῖς α β γ, δ ε ζ, ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν τῶν α γ, δ ζ, βεβηκέτωσαν γωνίαι, πρὸς μὲν τοῖς κέντροις, αἱ ὑπὸ α η γ, δ θ ζ. πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ αἱ ὑπὸ α β γ, δ ε ζ. Λέγω τὴν ὑπὸ α η γ, ἴσην εἶναι τῇ ὑπὸ

 δ θ ζ.

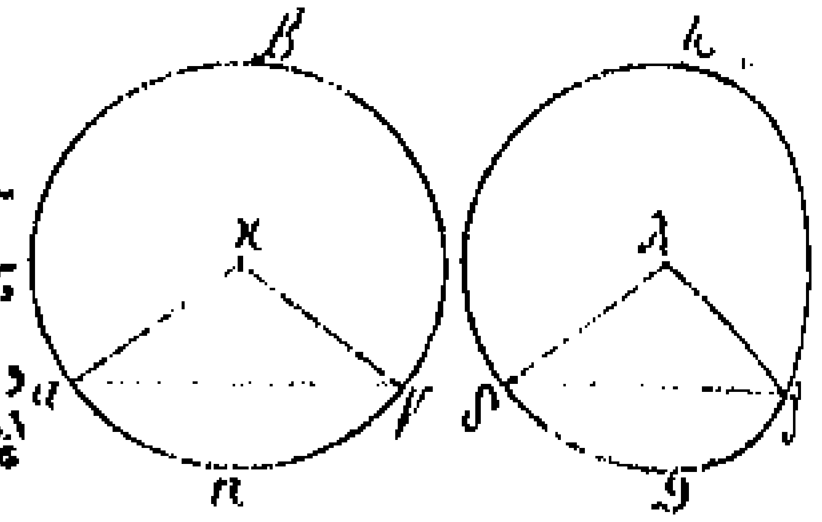
δθζ, καὶ τὴν ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ δεζ. εἰ γὰρ μὴ, ἔστω ἡ ὑπὸ αηγ, μείζων, καὶ γενέσθω ἴση τῇ ὑπὸ δθζ, ἡ ὑπὸ αηκ. ἡ ακ, ἄρα περιφέρεια, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἴση ἐστὶ τῇ δζ, περιφερείᾳ. ἔστι δὲ τῇ δζ, ἴση καὶ ἡ αγ, ἄρα ἡ ακ, περιφέρεια, ἴση ἐστὶ τῇ αγ, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ αηγ, τῆς ὑπὸ δθζ, ἀλλ' ἴση. ἀλλὰ τῆς μὲν ὑπὸ αηγ, ἡμίσειά ἐστιν ἡ ὑπὸ αβγ, τῆς δὲ ὑπὸ δθζ, ἡ ὑπὸ δεζ. ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἐν τοῖς ἴσοις ἄρα κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib.3. Fig.23.



Πρότασις ΚΗ'. Θεώρημα.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσιν.



Ἔστωσαν ἤδη κύκλοι ἴσοι οἱ αβγ, δεζ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι εὐθεῖαι αἱ αγ, δζ, αἳ τεμνέτωσαν μείζους μὲν περιφερείας τὰς αβγ, δεζ, ἐλάττους δὲ τὰς αηγ, δθζ. Λέγω, ὅτι ἡ μὲν αβγ, ἴση ἐστὶ τῇ δεζ, ἡ δὲ αηγ, τῇ δθζ. εἰλήφθωσαν γὰρ ἀμφοτέρων τὰ κέντρα, διὰ τῆς α. τοῦ παρόντος, καὶ ἔστωσαν ταῦτα τὰ κ, λ. εἶτα ἐπεζεύχθωσαν αἱ κα, κγ, λδ, λζ. καὶ ἐπεὶ αἱ ακ, κγ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς δλ, λζ, ὡς ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ ἡ αγ, ὁμοίως ἴση τῇ δζ, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ακγ, ἴση ἐστὶ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δλζ, κατὰ τὴν η. τοῦ α. εἰσὶ δὲ καὶ πρὸς τὰ κέντρα ἀμφότεραι, ἄρα κατὰ τὴν κϛ'. τοῦ παρόντος, ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἴσαι ἄρα αἱ αηγ, δθζ, περιφέρειαι. ἀλλὰ καὶ οἱ κύκλοι εἰσὶν ἴσοι, ἄρα καὶ αἱ λοιπαὶ αβγ, δεζ, περιφέρειαι ἴσαι εἰσὶ, κατὰ τὸ γ'. ἀξίωμα. Ἐν τοῖς ἴσοις ἄρα κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΚΘ'. Θεώρημα.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις ὑπὸ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν.

Ἐν ἴσοις ἤδη τοῖς αὐτοῖς κύκλοις ἔστωσαν ἴσαι περιφέρειαι αἱ αηγ, δθζ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, δζ, λέγω ταύτας ἴσας εἶναι. τῆς αὐτῆς γὰρ γενομένης κατασκευῆς, ἐπεὶ αἱ ακ, κγ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς δλ, λζ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ακγ, γωνία τῇ ὑπὸ δλζ, ἴση, κατὰ τὴν κϛ'. τοῦ παρόντος, πρὸς τοῖς κέντροις γὰρ ἀμφότεραι, καὶ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν. ἄρα καὶ βάσις ἡ αγ, ἴση ἐστὶ τῇ δζ, κατὰ τὴν δ'. τοῦ α. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

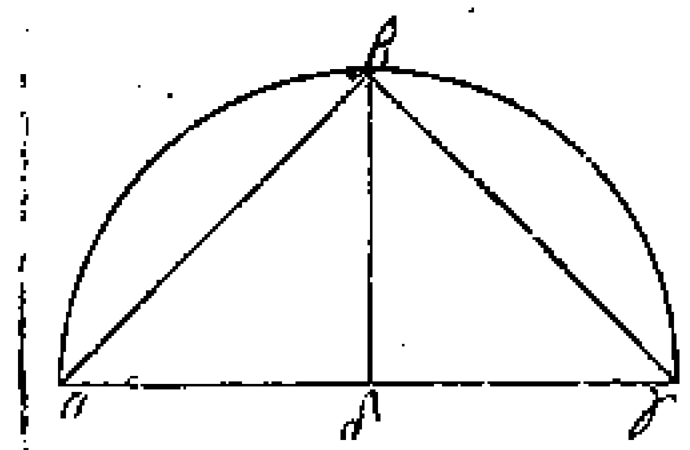
Πρό-

Πρότασις Λ'. Πρόβλημα.

Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν δίχα τεμεῖν.

Τὴν δοθεῖσαν ἤδη αβγ, περιφέρειαν ἔστω τεμεῖν δίχα. ἐπεζεύχθω γοῦν ἡ αγ, καὶ τμηθήτω δίχα κατὰ τὸ δ, διὰ τῆς ι. τοῦ α. καὶ ἐπ' αὐτῆς ἀνεστάθω κάθετος ἡ δβ, κατὰ τὴν ια. τοῦ αὐτοῦ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αβ, βγ. καὶ ἐπεὶ αἱ αδ, δγ, ἴσαι εἰσὶ, κοινῆς λαμβανομένης τῆς δβ, πάντως γε αἱ αδ, δβ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς γδ, δβ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αδβ, γωνία, ἴση τῇ ὑπὸ γδβ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, ἄρα καὶ βάσις ἡ αβ, βάσει τῇ βγ, ἴση ἐστὶ, κατὰ τὴν δ'. τοῦ α. ἄρα κατὰ τὴν κη'. τοῦ παρόντος ἡ αβ, περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ βγ, περιφερείᾳ, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 3. Fig.24.

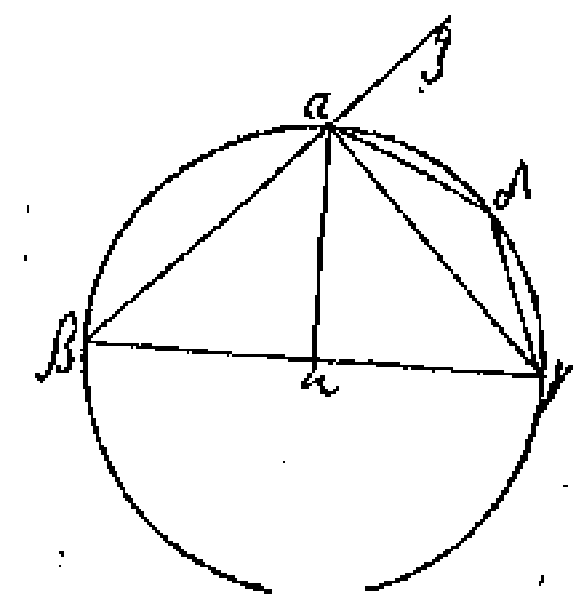


Πρότασις ΛΑ'. Θεώρημα.

Ἐν κύκλῳ ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι μείζων ὀρθῆς. καὶ ἔτι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς.

Ἐν κύκλῳ ἤδη τῷ αβγ, ἔστω ἡμικύκλιον μὲν τὸ βαγ, μεῖζον δὲ τμῆμα, τὸ αβγ, καὶ ἔλαττον, τὸ αδγ. Ἔστω δὲ ἐν μὲν τῷ βαγ, ἡμικυκλίῳ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ, ἐν δὲ τῷ μείζονι τμήματι, ἡ ὑπὸ αβγ, καὶ ἐν τῷ ἐλάττονι, ἡ ὑπὸ αδγ, καὶ ἔτι τοῦ μὲν αβγ, μείζονος τμήματος γωνία ἔστω ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς αβγ, περιφερείας καὶ αγ, εὐθείας, τοῦ δὲ αδγ, ἐλάττονος ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς αδγ, περιφερείας, καὶ αγ, εὐθείας. Λέγω δὴ, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ βαγ, ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ὑπὸ αβγ, ἐλάττων ὀρθῆς, καὶ ἡ ὑπὸ αδγ, μείζων ὀρθῆς. καὶ ἔτι ἡ μὲν ὑπὸ τῆς αβγ, περιφερείας, καὶ αγ, εὐθείας περιεχομένη, μείζων ὀρθῆς, ἡ δὲ ὑπὸ τῆς αδγ, περιφερείας, καὶ αγ, εὐθείας ἐλάττων ὀρθῆς. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ αε, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ βα, ἐπὶ τὸ ζ. καὶ ἐπεὶ αἱ βε, εα, ἴσαι εἰσὶν, ἴση πάντως ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ αβε, τῇ ὑπὸ βαε, κατὰ τὴν ε. τοῦ α. διὰ τὰ αὐτὰ ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ αγε, τῇ ὑπὸ γαε, ὥστε ὅλη ἡ ὑπὸ βαγ, ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ αβγ, αγβ, ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ζαγ, ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ αβγ, αγβ, κατὰ τὴν λβ'. τοῦ α. ἄρα αἱ ὑπὸ βαγ, ζαγ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα, κατὰ τὸν ι. ὅρον τοῦ α. ἡ ὑπὸ βαγ, ἄρα ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν, ὅπερ ἦν τὸ α. Ἡ δὲ ὑπὸ αβγ, ἐλάττων οὖσα τῆς ὑπὸ βαγ, ἐλάττων πάντως γε ἐστὶν ὀρθῆς, ὅπερ ἦν τὸ β'. Ἐπεὶ δὲ τοῦ αβγδ,

Eucl. Lib.3. Fig.25.



ἐν

ἐν κύκλῳ τετραπλεύρου αἱ ὑπὸ αβγ, αδγ, ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ, κατὰ τὴν κβ΄. τοῦ παρόντος, ἡ δὲ ὑπὸ αβγ, ἐλάττων ὀρθῆς δέδεικται, πάντως γε ἡ ὑπὸ αδγ, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ὅπερ ἐστὶ τὸ γ΄. Αὖθις ἐπεὶ ἡ ὑπὸ τῶν βα, αγ, περιεχομένη γωνία δέδεικται ὀρθή. δῆλον, ὅτι ἡ ὑπό τε τῆς αβγ, περιφερείας καὶ αγ, εὐθείας περιεχομένη, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. ὅπερ ἐστὶ τὸ δ΄. Ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ ὑπὸ ζαγ, ὀρθή ἐστιν, πάντως γε ἡ ὑπό τε τῆς αδγ, περιφερείας, καὶ αγ, εὐθείας περιεχομένη ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, ὅπερ ἦν τὸ ε΄.

Δυνατὸν δὲ καὶ ἄλλως δεῖξαι τὴν ὑπὸ βαγ, ὀρθήν. Ἐπεὶ γὰρ κατὰ τὴν λβ΄. τοῦ α. ἡ μὲν ὑπὸ αεβ, διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ γαε, ἡ δὲ ὑπὸ αεγ, τῆς ὑπὸ βαε. δῆλον, ὅτι αἱ ὑπὸ αεβ, αεγ, διπλάσιαί εἰσι τῆς ὅλης ὑπὸ βαγ. ἀλλ' αἱ ὑπὸ αεβ, αεγ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί, κατὰ τὴν ιγ΄. τοῦ α. ἡ ὑπὸ βαγ, ἄρα ὀρθή ἐστιν. Ἐν κύκλῳ ἄρα, ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία, καὶ τὰ ἑξῆς.

Π Ό Ρ Ι Σ Μ Α.

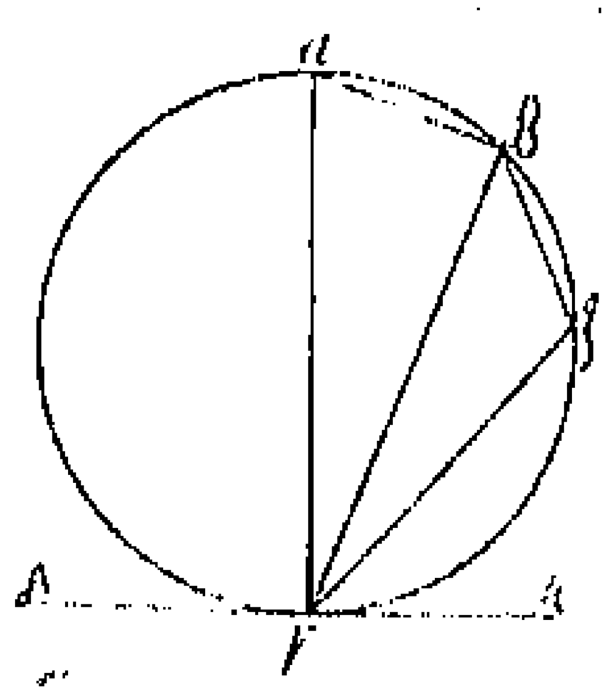
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν τριγώνου ἡ μία τῶν γωνιῶν ταῖς λοιπαῖς δυσὶν ἴση ᾖ, ὀρθή ἐστιν. ὅτι καὶ ἡ ἐφ' ἑξῆς ἐκείνης ταῖς δυσὶν ἴση ἐστί.

Πρότασις ΛΒ΄. Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις.

Κύκλου ἤδη τοῦ αβγ, ἁπτέσθω ἡ δε, εὐθεῖα, κατὰ τὸ γ. ἀπὸ δὲ τοῦ γ, ἐπὶ τὸν κύκλον ἀχθήτω εὐθεῖα ἡ γβ, ποιοῦσα γωνίας μετὰ τῆς δε, τὰς ὑπὸ βγε, βγδ. Λέγω, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ βγε, ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ βαγ, τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ βγδ, τῇ ἐν τῷ βζγ, ὁμοίως ἐναλλὰξ τμήματι. Συνεστάθω γὰρ ἐπὶ τῆς δε, κατὰ τὸ γ, πρὸς ὀρθὰς ἡ γα, κατὰ τὴν ια. τοῦ α. καὶ ληφθέντος ὡς ἔτυχε τοῦ ζ, σημείου, ἐπεζεύχθωσαν αἱ αβ, βζ, ζγ. καὶ ἐπεὶ ἡ δε, ἅπτεται τοῦ κύκλου, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς κάθετος συνέστη ἐπ' αὐτῆς ἡ αγ, πάντως γε κατὰ τὴν ιθ΄. τοῦ παρόντος ἐπὶ τῆς αγ, ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, τὸ αβζγ, ἄρα ἡμικύκλιόν ἐστιν, ἡ δὲ ὑπὸ αβγ, γωνία ὀρθή, κατὰ τὴν ἀνωτέρω. ὥστε καὶ αἱ λοιπαὶ δύο τοῦ αβγ, τριγώνου γωνίαι, αἱ ὑπὸ βαγ, βγα, μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσί, κατὰ τὴν λβ΄. τοῦ α. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ αγε, ὀρθή ἐστιν, αἱ ἄρα ὑπὸ βαγ, βγα, ἴσαι εἰσὶ τῇ ὑπὸ αγε, κοινῆς δὲ ἀφαιρουμένης τῆς ὑπὸ βγα, ἐγκαταλείπεται πάντως ἡ ὑπὸ βγε, ἴση τῇ ὑπὸ βαγ· ὅπερ ἦν τὸ α΄. Αὖθις ἐπεὶ τοῦ αβζγ, τετραπλεύρου αἱ ὑπὸ βαγ, βζγ, ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί, κατὰ τὴν κβ΄. τοῦ παρόν-

Eucl. Lib. 3. Fig. 26.



τος,

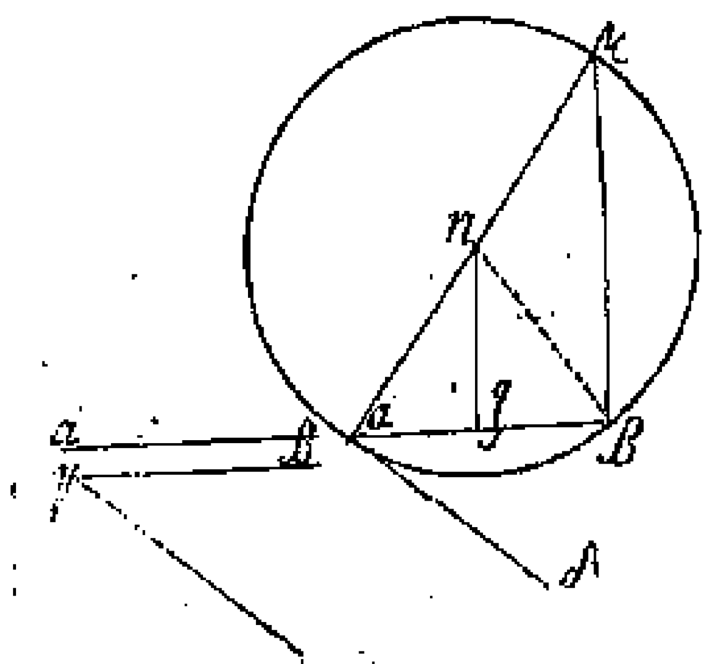
τος, εἰσὶ δὲ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς καὶ αἱ ὑπὸ βγε, βγδ, κατὰ τὴν ιγ΄. τοῦ α. πάντως γε αἱ ὑπὸ βαγ, βζγ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ βγε, βγδ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ βγε, ἴση δέδεικται τῇ ὑπὸ βαγ, ἐγκαταλείπεται ἄρα ἡ ὑπὸ βγδ, ἴση τῇ ὑπὸ βζγ. ὅπερ ἦν τὸ β΄. Ἐὰν κύκλου ἄρα ἅπτηταί τις εὐθεῖα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΛΓ΄. Θεώρημα.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

Ἐπὶ τῆς αβ, ἤδη δοθείσης εὐθείας ἔσω γράψαι τμῆμα κύκλου, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γ. Ἀλλ' ἐπεὶ τὰ εἴδη τῶν γωνιῶν τρία, ἢ γὰρ ὀξεῖά ἐστιν, ἢ ὀρθή, ἢ ἀμβλεῖα. Ἔστω α. ἡ δοθεῖσα ὀξεῖα, καὶ ταύτῃ γενέσθω ἴση ἡ ὑπὸ βαδ, κατὰ τὴν κγ΄. τοῦ α. καὶ ἐπὶ τῆς αδ, ἤχθω κάθετος ἀπὸ τοῦ α, σημείου ἡ αε, διὰ τῆς ια. τοῦ αὐτοῦ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ αβ, κατὰ τὸ ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ ζ, ἤχθω κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, ἡ ζη. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ηβ. Ἐπεὶ οὖν ἡ αζ. ἴση ἐστὶ τῇ ζβ, κοινὴ δὲ ἡ ζη, καὶ ἡ ὑπὸ αζη, γωνία, ἴση τῇ ὑπὸ βζη, πάντως γε, κατὰ τὴν δ΄. τοῦ α. καὶ ἡ αη, ἴση ἐστὶ τῇ ηβ. ὥστε κέντρῳ μὲν τῷ η, διαστήματι δὲ τῷ ηα, κύκλος γραφόμενος διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ β. ἔστω δὴ οὗτος ὁ αβε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εβ. καὶ ἐπεὶ ἡ αδ, πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ αε, διαμέτρῳ πρὸς τῷ α, αὐτῆς ἄκρῳ, δῆλον, ὅτι ἐφάπτεται τοῦ κύκλου κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιϛ΄. ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς α, διήχθη ἡ αβ, εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, καὶ γωνίαν ποιοῦσα μετὰ τῆς αδ, τὴν ὑπὸ βαδ. ἄρα ἡ ὑπὸ βαδ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αεβ, ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι γωνίᾳ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω. ἀλλὰ τῇ ὑπὸ βαδ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ πρὸς τῷ γ, δοθεῖσα, ἄρα ἡ ὑπὸ αεβ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ γ, δοθείσῃ. Ἐπὶ τῆς αβ, ἄρα γέγραπται τὸ αεβ, τμῆμα δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ.

Eucl. Lib. 3. Fig. 27.

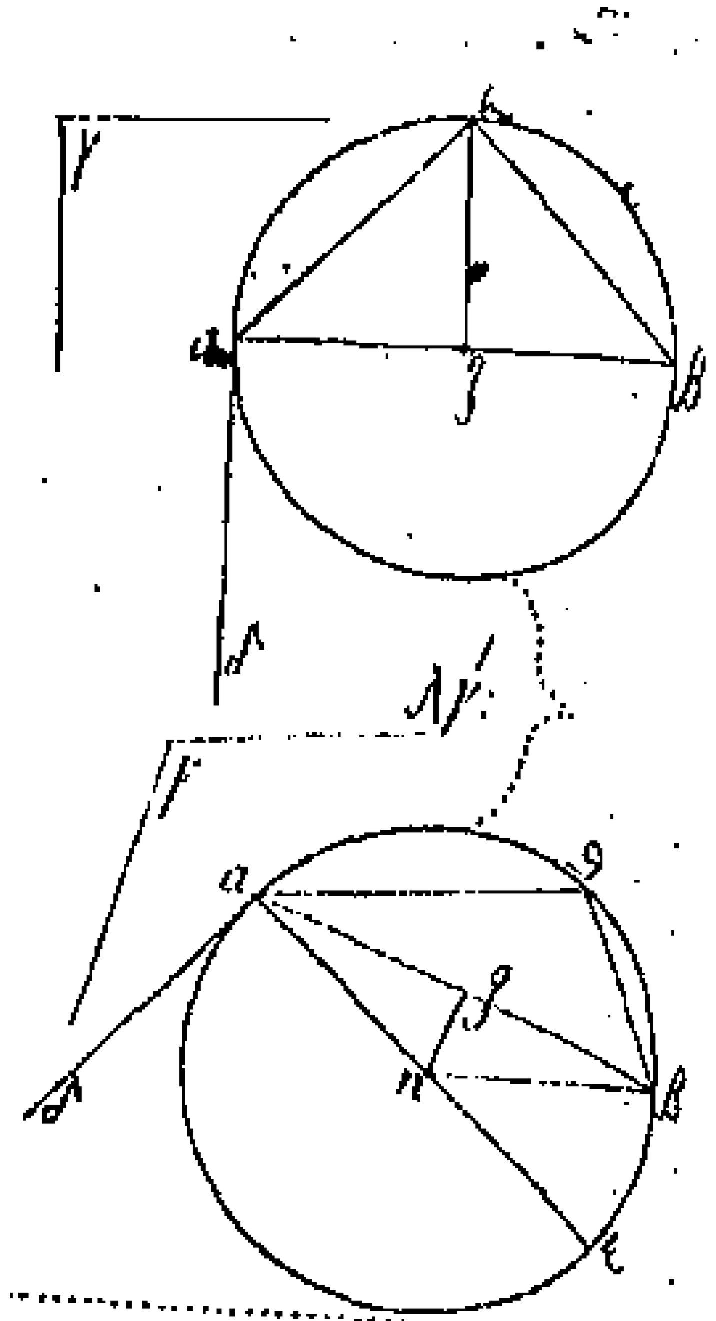


Ἔστω δὲ ἡ πρὸς τῷ γ, γωνία ὀρθή. καὶ γενέσθω ταύτῃ ἴση ἡ ὑπὸ δαβ, κατὰ τὴν κγ΄. τοῦ α. καὶ τῆς αβ, δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ ζ. κέντρῳ μὲν τῷ ζ, διαστήματι δὲ τῷ ζα, γραφήτω κύκλος ὁ αβε. τῆς δὲ ζε, καθέτου ἀγομένης ἐπὶ τῆς αβ, ἐπεζεύχθωσαν αἱ αε, εβ. καὶ ἐπεὶ ἡ δα, κάθετός ἐστι ἐπὶ τῆς αβ, ἅπτεται πάντως τοῦ κύκλου, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιϛ΄. τοῦ παρόντος. ὥστε ἡ ὑπὸ δαβ, γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αεβ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἢ κατὰ τὴν λα. τοῦ παρόντος. ἀλλ' ἡ ὑπὸ δαβ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ γ. ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αεβ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ γ. δῆλον ἄρα, ὅτι ἐπὶ τῆς αβ, γέγραπται τὸ αεβ, τμῆμα δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γ΄.

Ἔστω

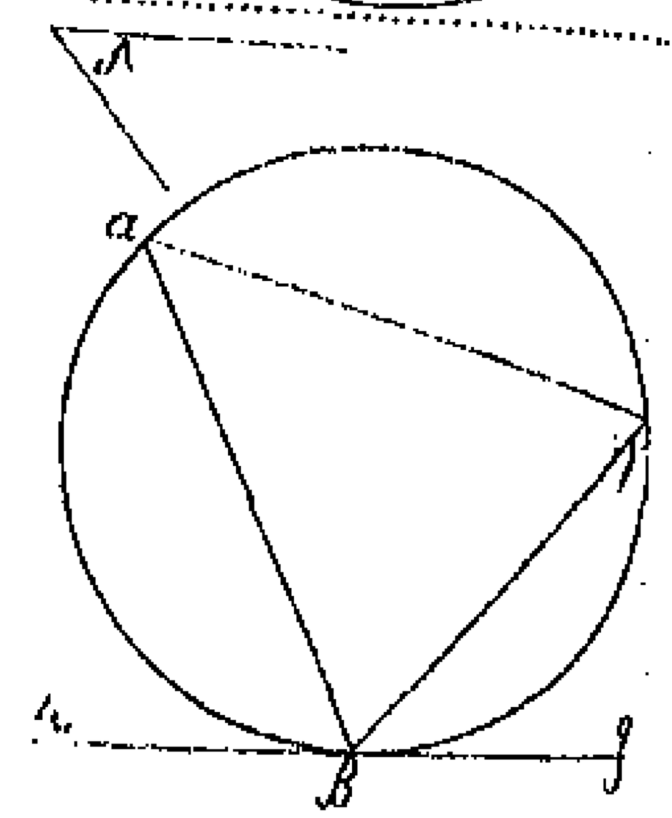
Ἔστω τελευταῖον ἡ πρὸς τῷ γ, γωνία ἀμβλεῖα, καὶ γενέσθω ταύτῃ ἴση ἡ ὑπὸ δαβ, ὡς προηρμήνευται. τῆς δὲ κατασκευῆς γενομένης, ὡς καὶ ἐπὶ τῆς α. καταγραφῆς, ἐπεὶ ἡ αβ, δίχα τέτμηται, πάντως γε αἱ αζ, ζη, ἴσαι εἰσὶ ταῖς βζ, ζη, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αζη, γωνία, ἴση τῇ ὑπὸ βζη, ἄρα καὶ βάσις ἡ αη, βάσει τῇ βη, ἴση ἐστίν. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ η, διαστήματι δὲ τῷ ηα, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ β, ὡς ὁ αβε. Εἰλήφθω δὲ τυχὸν σημεῖον τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αθ, θβ. καὶ ἐπεὶ ἡ δα, κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς αε, ἅπτεται πάντως τοῦ κύκλου, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιϛ'. τοῦ παρόντος. κατὰ δὲ τὴν ἀνωτέρω, ἡ ὑπὸ δαβ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ αθβ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ δαβ, ἴση γέγονε τῇ πρὸς τῷ γ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αθβ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ γ. ἐπὶ τῆς αβ, ἄρα γέγραπται τὸ αθβ, τμῆμα δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 3. Fig. 28.



Πρότασις ΛΔ'. Πρόβλημα.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.



Ἔστω δὴ ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ αβγ, κύκλου τμῆμα δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ δ, δοθείσῃ. Ἀπὸ τοῦ ζ, τοίνυν τυχόντος σημείου ἤχθω ἁπτομένη τοῦ αβγ, κύκλου κατὰ τὸ β, ἡ ζε, διὰ τῆς ιζ'. τοῦ παρόντος, καὶ κατὰ τὸ β, σημεῖον πρὸς τῇ εζ, εὐθείᾳ γενέσθω ἴση τῇ πρὸς τῷ δ, γωνίᾳ ἡ ὑπὸ ζβγ, διὰ τῆς κγ'. τοῦ α. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βα, αγ. Ἐπεὶ οὖν ἡ εζ, ἅπτεται τοῦ κύκλου, πάντως γε ἡ ὑπὸ ζβγ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βαγ, ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι γωνίᾳ, ἀλλ' ἡ ὑπὸ ζβγ, ἴση γέγονε τῇ πρὸς τῷ δ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ δ. τέτμηται ἄρα τὸ βαγ, τμῆμα, ὡς ἐζητήθη, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ΛΕ'. Θεώρημα.

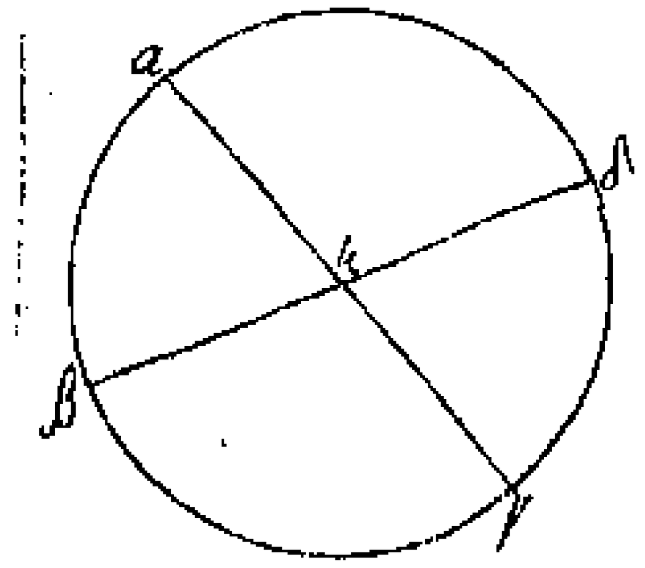
Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

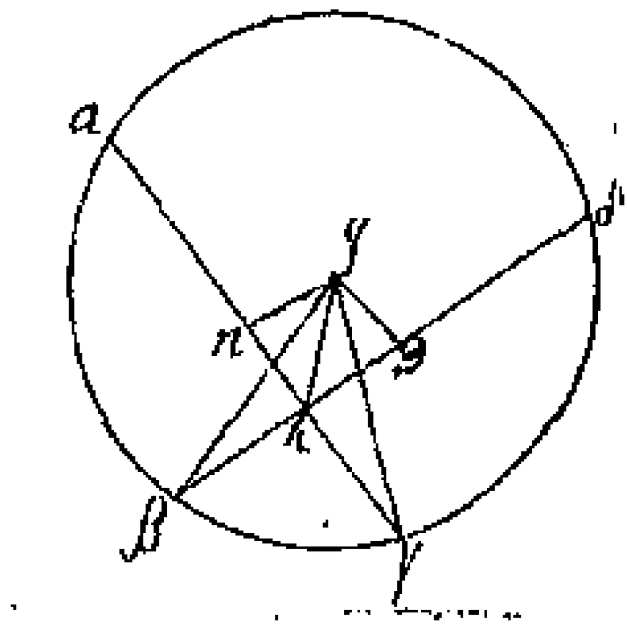
Ἐν κύκλῳ ἤδη τῷ αβγδ, τεμνέτωσαν ἀλλήλας αἱ αγ, βδ, κατὰ τὸ ε. Λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν αε, εγ, ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν βε, εδ, ὀρθογωνίῳ.

εἰ οὖν

εἰ οὖν αἱ αγ, βδ, διὰ τοῦ κέντρου διέρχονται, ἐπεὶ δίχα ἑκατέρα τέμνεται, δῆλον τὸ ὑποτεθέν. εἰ δὲ μὴ διὰ τοῦ κέντρου εἰσίν, ὡς ἐπὶ τοῦ β'. διαγράμματος, εὑρεθήτω τὸ τοῦ κύκλου κέντρον, διὰ τῆς α. τοῦ παρόντος, καὶ ἔστω τοῦτο τὸ ζ. ἀπὸ δὲ τοῦ ζ, ἐφ' ἑκατέρας τῶν αγ, βδ, πιπτέτωσαν κάθετοι, αἱ ζη, ζθ, διὰ τῆς ιβ'. τοῦ α. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζβ, ζγ, ζε. ἑκατέρα γοῦν τῶν αγ, βδ, δίχα τέτμηται ὑπὸ τῶν ζη, ζθ, κατὰ τὴν γ'. τοῦ παρόντος. κατὰ δὲ τὴν ε'. τοῦ β'. ἐπεὶ ἡ αγ, εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ η, ἄνισα δὲ κατὰ τὸ ε, τέτμηται, πάντως γε τὸ ὑπὸ τῶν αε, εγ, ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ηε, τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ηγ, τετραγώνῳ, κοινοῦ δὲ προσκειμένου τοῦ ἀπὸ τῆς ηζ, ἔσται τὸ ὑπὸ τῶν αε, εγ, ὀρθογ. μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν εη, ηζ, τετραγώνων ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ηγ, ηζ, τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν εη, ηζ, τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ζε. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν γη, ηζ, τὸ ἀπὸ τῆς ζγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αε, εγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ζε, τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ζγ, ἤτοι τῷ ἀπὸ τῆς ζβ. ἴσαι γὰρ αἱ ζγ, ζβ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ ὑπὸ τῶν δε, εβ, ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ζε, τετραγώνου ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ζβ, τετραγώνῳ. ὥστε κατὰ τὸ α. ἀξίωμα, τὸ ὑπὸ τῶν αε, εγ, ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ζε, τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν δε, εβ, ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ζε, τετραγώνου, κοινοῦ δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς ζε, τετραγώνου ἀφαιρουμένου, ἐγκαταλείπεται τὸ ὑπὸ τῶν αε, εγ, ὀρθογώνιον, ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν δε, εβ, ὀρθογωνίῳ, ὅπερ ἦν τὸ ὑποτεθέν. Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 3. Fig. 29.





Πρότασις Λϛ'. Θεώρημα.

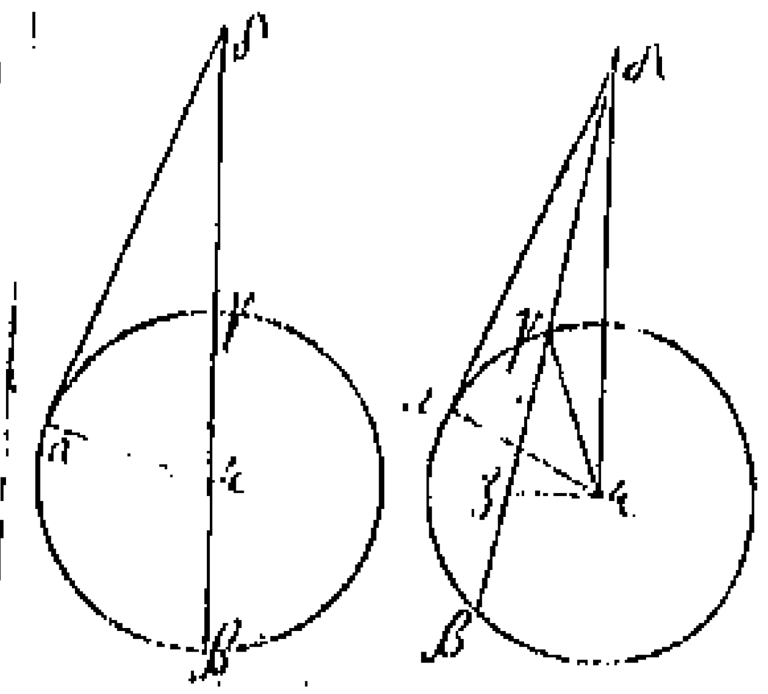
Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται, ἔσται τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.

Κύκλου ἤδη τοῦ αβγ, οὗ κέντρον τὸ ε, ληφθήτω σημεῖον ἐκτός, τὸ δ. ἀφ' οὗ πρὸς τὸν κύκλον πιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ δβ, δα, ἡ μὲν δβ, τέμνουσα, ἡ δὲ ἁπτομένη τοῦ κύκλου. ἀλλ' ἐπεὶ ἡ τέμνουσα δύναται καὶ διὰ τοῦ κέντρου καὶ μή, διέρχεσθαι, ὑποκείσθω πρῶτον διὰ τοῦ κέντρου. ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὸ α, ἐπεζεύχθω ἡ εα, ἐφ' ἧς ὀρθή ἐστιν ἡ δα, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιϛ'. ἐπεὶ οὖν ἡ βγ, δίχα

τέτ-

τέτμηται κατὰ τὸ ε, κέντρον, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ γδ, πάντως γε κατὰ τὴν ϛ'. τοῦ β'. τὸ ὑπὸ τῶν βδ, δγ, ὀρθογ. μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γε, τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δε, τετραγώνῳ. ἀλλ' ἡ γε, ἴση ἐστὶ τῇ εα, ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βδ, δγ, ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αε, τετραγ. ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δε, τετραγώνῳ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς δε, τετραγώνῳ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν δα, αε, τετράγωνα, ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βδ, δγ, ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αε, τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν δα, αε, τετραγώνοις. κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ ἀπὸ τῆς αε, ἐγκαταλείπεται τὸ ὑπὸ τῶν βδ, δγ, ὀρθογ. ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς δα, τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 3. Fig. 30.



Ἔστω δὲ ἡ δβ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἀπὸ τοῦ ε, κέντρου ἤχθω πρὸς ὀρθὰς τῇ δβ, ἡ εζ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αε, εγ. Ἐπεὶ οὖν ἡ βγ, δίχα τέτμηται κατὰ τὸ ζ, κατὰ τὴν γ'. τοῦ παρόντος, καὶ πρόσκειται αὐτῇ ἡ γδ, πάντως γε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης βδ, καὶ τῆς προσκειμένης γδ, ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γζ, τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δζ, τετραγώνῳ κατὰ τὴν ϛ'. τοῦ β'. κοινοῦ προσκειμένου τοῦ ἀπὸ τῆς εζ, τετραγώνου, τὸ ὑπὸ τῶν βδ, γδ, ὀρθογώνιον μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν εζ, ζγ, τετραγώνων ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν δζ, ζε, τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν εζ, ζγ, τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς γε, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν δζ, ζε, τὸ ἀπὸ τῆς δε, κατὰ τὴν μζ'. τοῦ α'. ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βδ, γδ, ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γε, τετραγώνου, ἤτοι τῆς αε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δε, τετραγώνῳ. τούτῳ δὲ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν δα, αε, τετράγωνα κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν μζ'. τοῦ α'. ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βδ, γδ, ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αε, τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν δα, αε, τετραγώνοις. κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ ἀπὸ τῆς αε, ἐγκαταλείπεται τὸ ὑπὸ τῶν βδ, γδ, ὀρθογώνιον, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς δα, τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἀφ' ἑνὸς σημείου ἐκτὸς ὄντος τοῦ κύκλου ἑκατέρωθεν ἁπτόμεναι εὐθεῖαι ἀχθῶσιν, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. τὸ γὰρ ἀφ' ἑκατέρας τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐναπολαμβανομένης μεταξὺ τῆς κυρτῆς περιφερείας καὶ τοῦ σημείου, ὡς δέδεικται.

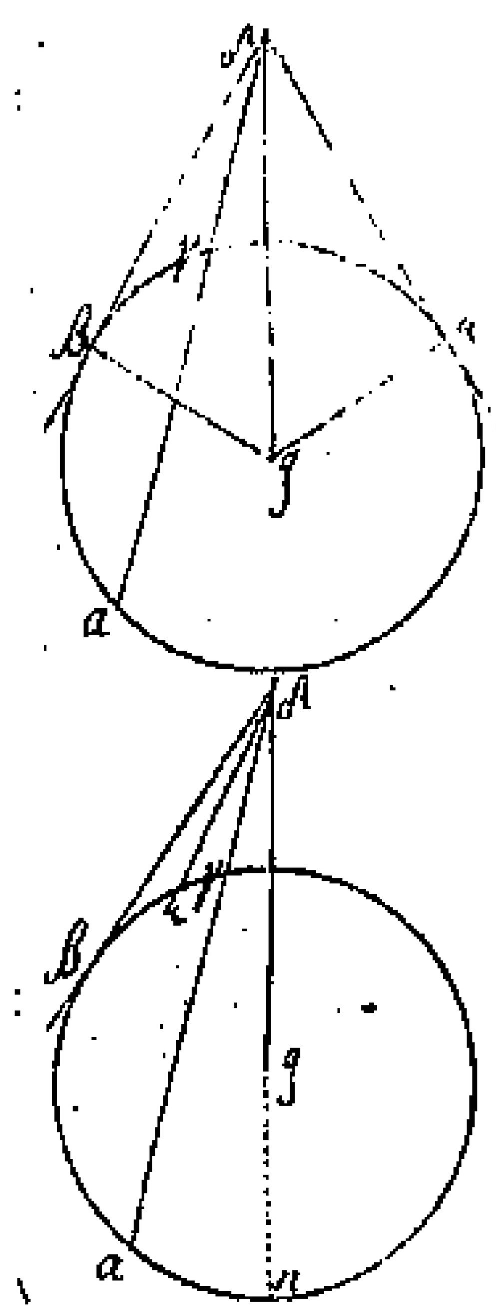
Πρότασις ΛΖ'. Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, ἦ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τεμνούσης, καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης, ἡ προσπίπτουσα ἐφάψεται τοῦ κύκλου.

Τοῦ αβγ, ἤδη κύκλου εἰλήφθω σημεῖον ἐκτὸς τὸ δ, ἀφ' οὗ ἀχθήτωσαν αἱ δγα, δβ,

δβ, ἡ μὲν δγα, τέμνουσα, ἡ δὲ δβ, προσπίπτουσα τῷ κύκλῳ. ἔστω δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν αδ, δγ, ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς δβ, τετραγώνῳ. Λέγω, ὅτι ἡ δβ, ἅπτεται τοῦ κύκλου. Ἀχθήτω γὰρ ἀπὸ τοῦ δ, ληφθέντος σημείου καθ' ἕτερον μέρος ἁπτομένη τοῦ κύκλου ἡ δε, διὰ τῆς ιζ'. τοῦ παρόντος. καὶ εὑρεθέντος τοῦ ζ, κέντρου κατὰ τὴν α'. τοῦ παρόντος, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζβ, ζε. καὶ ἐπεὶ ἡ ζε, κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς δε, κατὰ τὴν ιη'. τοῦ αὐτοῦ, πάντως γε ἡ ὑπὸ ζεδ, γωνία ὀρθή ἐστιν, ἀλλ' ἡ μὲν δε, ἅπτεται, ἡ δὲ δγα, τέμνει τὸν κύκλον, ἄρα κατὰ τὴν ἀνωτέρω, τὸ ὑπὸ τῶν αδ, δγ, περιεχόμενον ὀρθογ. ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δε, τετραγώνῳ. ὑπόκειται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν αδ, δγ, ἴσον καὶ τῷ ἀπὸ τῆς δβ, ἡ δε, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ δβ. ἀλλὰ καὶ ἡ ζε, ἴση ἐστὶ τῇ ζβ, ὡς ἀπὸ τοῦ ζ, κέντρου ἐξαγομένη, ἄρα αἱ δε, εζ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς δβ, βζ, ἔστι δὲ καὶ ἡ δζ, κοινὴ, πάντως γε καὶ ἡ ὑπὸ ζεδ, γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζβδ, κατὰ τὴν η'. τοῦ α'. ἀλλ' ἡ ζβ, διὰ τοῦ κέντρου ἐστὶ, καὶ ἀπὸ τοῦ β, σημείου ἐπ' αὐτῆς πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ βδ, ἅπτεται ἄρα ἡ βδ, τοῦ κύκλου κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιϛ'. τοῦ παρόντος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 3. Fig. 31.



Ἄλλως. Τῶν αὐτῶν γὰρ κειμένων, μὴ ἔστω ἁπτομένη, εἰ δυνατὸν, ἡ δβ, τοῦ αβγ, κύκλου, ἀλλ' ἑτέρα τις ἡ δε. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν δε, ἅπτεται, ἡ δὲ δγα, τέμνει τὸν κύκλον, πάντως γε τὸ ὑπὸ τῶν αδ, δγ, ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δε, τετραγώνῳ. ἀλλὰ τῷ ὑπὸ τῶν αδ, δγ, ἴσον ὑπετέθη καὶ τὸ ἀπὸ τῆς δβ. ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς δε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δβ. καὶ ἑπομένως ἡ δε, ἴση ἐστὶ τῇ δβ, ὅπερ ἀδύνατον κατὰ τὴν η'. τοῦ παρόντος. ἡ γὰρ δε, ὡς ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου, δηλ. τῆς δη, ἐλάττων ἐστὶ τῆς δβ, τῆς ἀπώτερον. Ὁμοίως δὴ δείξομεν καὶ περὶ οἱασδήποτ' ἄλλης. οὐκ ἄρα ἄλλη τις εὐθεῖα ἅπτεται τοῦ κύκλου, ἢ ἡ δβ. Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ τὰ ἑξῆς.

Τέλος τοῦ Τρίτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

Προοιμιακὴ περίληψις τοῦ Τετάρτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

✠ Τὸ ἀνὰ χεῖρας Βιβλ. προβληματικὸν ὂν ἅπαν, διδάσκει τίνι μεθόδῳ ἐγγραπτέα τῷ κύκλῳ, ἢ περιγραπτέα τὰ πολύγωνα, καὶ τακτικὰ σχήματα. Ἐκ τούτου μόνου παρήχθη ἡ μέθοδος τῆς κατασκευῆς, καὶ χρήσεως τῶν κανονίων τῶν ἡμιτόνων, ἀπτομένων τε καὶ τεμνουσῶν. Ὅθεν καὶ τῇ Τριγωνομετρίᾳ τὰ μάλιστα χρήσιμον. διὰ γὰρ τοῦ ἐγγράφειν τῷ κύκλῳ καὶ περιγράφειν πολύγωνα, τὰ τῶν ὑποτεινουσῶν, ἀπτομένων, τεμνουσῶν τε, καὶ ἡμιτόνων Κανόνια κατασκευάζειν μανθάνομεν. ὧν τῇ δυνάμει τὰ μεγέθη τῶν οἱωνδηποτοῦν σωμάτων ἐσχηματισμένων, καὶ ἐπιπέδων σχημάτων δυνάμεθα εὑρεῖν, καὶ ἔτι τοὺς πρὸς ἄλληλα λόγους. Διὰ τούτων τὰς τῶν Ἀστέρων φάσεις, ὀρθῶς γινώσκομεν, καθ' ἃς πλανῶνται, τὴν τριγωνικὴν ἀμέλει, τετραγωνικὴν, καὶ ἑξαγωνικὴν, συνόδους τε καὶ πανσελήνους. αἵτινες τῆς τῶν πολυγώνων ὅλως ἐν κύκλῳ ἐγγραφῆς ἐξήρτηνται. Ἐκ τούτων συνάγεται ὁ πολυθρύλλητος Τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου. διὰ γὰρ τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν ἐγγραφομένων τῷ κύκλῳ καὶ περιγραφομένων πολυγώνων, γινώσκεται τὸ τοῦ κύκλου ἐμβαδόν. οἵ, τε τῶν κύκλων πρὸς ἀλλήλους λόγοι, διπλάσιος, τριπλάσιος, καὶ οἱ ἑξῆς, ἐκ τοῦ διπλασίου, τριπλασίου, καὶ τῶν ἑξῆς, τῶν ἐγγραφομένων, καὶ περιγραφομένων πολυγώνων, πρὸς ἄλληλα λόγων, γινώσκονται. χρησιμεύει τοῦτο λίαν τῇ πρὸς τὰ στρατιωτικὰ ὀχυρώματα Ἀρχιτεκτονικῇ, κεχρημένη μάλιστα τοῖς ἐγγεγραμμένοις πολυγώνοις τῷ κύκλῳ.

ἙΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ὉΡΩΝ ΤΟΥ ΤΕΤΑΡΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

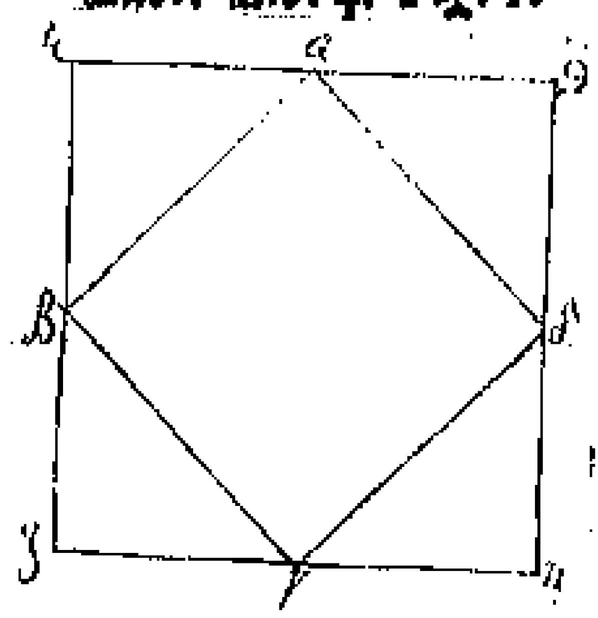
Ὅρος Πρῶτος.

Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη τῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ, εἰς ὃ ἐγγράφεται, ἅπτηται.

Β'. Σχῆμα δὲ ὁμοίως περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἑκάστης γωνίας τοῦ, περὶ ὃ γράφεται, ἅπτηται.

Ἐπεὶ τρόπος ἐπιστημονικῆς θεωρίας ἐστὶν ἀπὸ τῶν ἁπλουστέρων ἀρχομένους ἐπὶ τὰ τελεώτερα μεταβαίνειν, καὶ συνθετώτερα, τοῦτό γε χρεὼν καὶ Εὐκλ. διδάξας ἐπὶ τοῦ προτέρου Βιβλίου, τοῦ τρίτου λαχόντος τάξιν, περὶ τῶν εὐθειῶν τε καὶ γωνιῶν τῶν ἐν τοῖς κύκλοις καὶ τοῖς τῶν κύκλων τμήμασιν, ἄρχεται ἐπὶ τοῦ παρόντος ἑρμηνεῦσαι περὶ τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων, τῶν ἔντε τοῖς εὐθυγράμμοις, καὶ τοῖς κύκλοις ἐγγραφομένων τε καὶ περιγραφομένων. διὸ καὶ τὰ προσήκοντα τινὰ τῷ Βιβλίῳ ἀποταμιεύσας, ὡς ὅρους τε καὶ ἀρχὰς τῶν ἄλλων προτίθησιν. ἄρχεται δὲ τῆς ἐγγραφῆς τε καὶ περιγραφῆς τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων, τῆς ἐν ἀλλήλοις, αὐτοῦ τούτου ἴσως ἕνεκα. τῶν ὁμοειδῶν γὰρ ἡ σχέσις εὐληπτοτέρα τῆς τῶν ἀνομοειδῶν καθέστηκε. φησὶ γοῦν, τηνικαῦτα σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι μὲν λέγεται, ὁπηνίκα ἑκάστη τῶν γωνιῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος ἅπτηται ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ, εἰς ὃ ἐγγράφεται, σχήματος. περιγράφεσθαι δὲ περὶ σχῆμα λέγεται, ἡνίκα ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου σχήματος ἅπτηται ἑκάστης γωνίας τοῦ, περὶ ὃ περιγράφεται, σχήματος. οἷον τὸ μὲν α β γ δ, σχῆμα ἐγγράφεσθαι λέγεται εἰς τὸ ε ζ η θ, ὅτι ἑκάστη τῶν αὐτοῦ γωνιῶν ἅπτεται ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ ε ζ η θ. τὸ δὲ ε ζ η θ, περιγράφεσθαι λέγεται περὶ τὸ α β γ δ, σχῆμα, ὅτι ἑκάστη τῶν αὐτοῦ πλευρῶν ἅπτεται ἑκάστης γωνίας τοῦ α β γ δ, σχήματος.

Eucl. Lib. 4. Fig. 1.

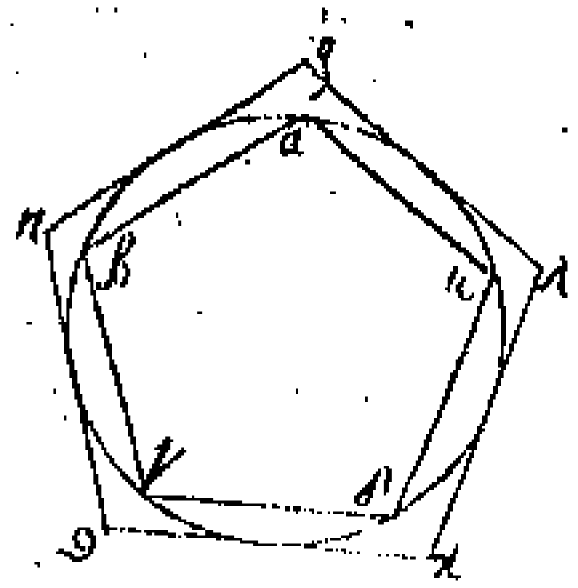


Γ'. Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἅπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

Δ'. Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἅπτηται.

Δηλώσας ἐν τοῖς ἀνωτέρω δυσὶν ὅροις, τίνα τὰ συστατικὰ τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων, τῶν τε εἰς ἄλληλα ἐγγραφομένων, καὶ τῶν περὶ ἄλληλα περιγραφομένων, ἅπτεται ἐπὶ τοῦ παρόντος ἐν δυσὶν αὖθις ὅροις, τῶν συστατικῶν τῆς ἐγγραφῆς τε καὶ περιγραφῆς τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων, τοῖς κύκλοις παραβαλλομένων. καὶ δή φησι, Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς κύκλον τηνικαῦτα ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος, ἅπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. Περιγράφεσθαι δὲ τηνικαῦτα, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου σχήματος τῆς τοῦ κύκλου ἅπτηται περιφερείας. οἷον τὸ μὲν α β γ δ ε, σχῆμα εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένον λέγεται, ὅτι ἑκάστη τῶν αὐτοῦ γωνιῶν τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ἅπτεται. τὸ δὲ ζ η θ κ λ, περιγεγραμμένον, ὅτι ἑκάστη τῶν αὐτοῦ πλευρῶν ἅπτεται τοῦ κύκλου.

Eucl. Lib. 4. Fig. 2.



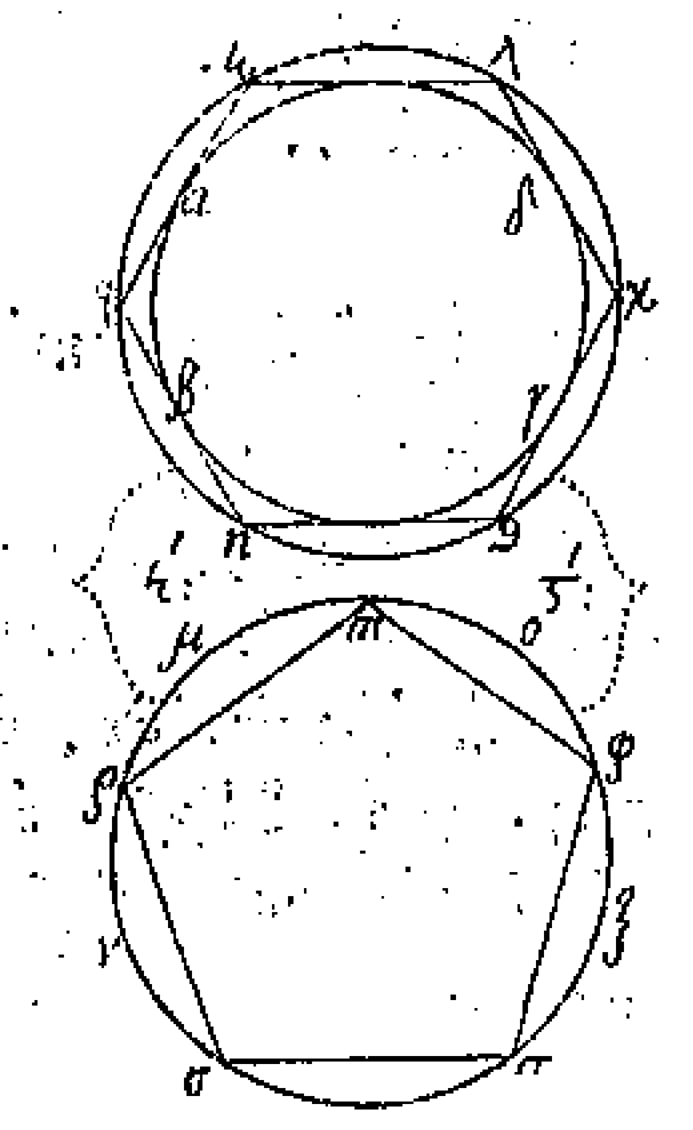
Ε'. Κύκλος δὲ ὁμοίως εἰς σχῆμα λέγεται ἐγγράφεσθαι, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ, εἰς ὃ ἐγγράφεται, ἅπτηται.

ϛ'. Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης γωνίας τοῦ, περὶ ὃ περιγράφεται, ἅπτηται.

Διδάξας ἐν τοῖς δυσὶ προτέροις ὅροις, πότε τῶν εὐθυγράμμων ἕκαστον σχημάτων εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, καὶ πότε περὶ κύκλον περιγράφεσθαι· ἐπεὶ ἄμφω ταῦτα δύναται καὶ ὁ κύκλος παθεῖν, βούλεται ἐν τοῖς δυσὶ τούτοις ὅροις διασαφῆσαι, καὶ πότε μὲν εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον κύκλος ἐγγράφεσθαι λέγεται, πότε δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι. δύο μὲν οὖν ἐπὶ τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων θεωρουμένων, τῶν γωνιῶν, φημὶ, καὶ πλευρῶν, ἑνὸς δὲ ἐπὶ τοῦ κύκλου, ὡς ἁπλουστέρου, τῆς αὐτοῦ δηλονότι περιφερείας· ἐν ἐκείνοις μὲν, ὧν αἱ γωνίαι τοῦ κύκλου ἥπτοντο, ἐγγεγραμμένα ἐλέγετο, ὧν δὲ αἱ πλευραὶ, περιγεγραμμένα. ἐπὶ δὲ τοῦ κύκλου, ὅταν μὲν ἡ περιφέρεια αὐτοῦ τῶν πλευρῶν ἅπτηται τοῦ εὐθυγράμμου σχήματος, τότε ὁ κύκλος ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ σχῆμα λέγεται, ὅτε δὲ ἡ περιφέρεια ἅπτηται τῶν γωνιῶν, τηνικαῦτα ὁ κύκλος περιγεγραμμένος λέγεται περὶ τὸ σχῆμα. οἷον ὁ μὲν α β γ δ, κύκλος ἐγγράφεσθαι λέγεται εἰς τὸ ε ζ η θ κ λ, σχῆμα, ὅτι ἡ τούτου περιφέρεια ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ σχήματος ἅπτεται.

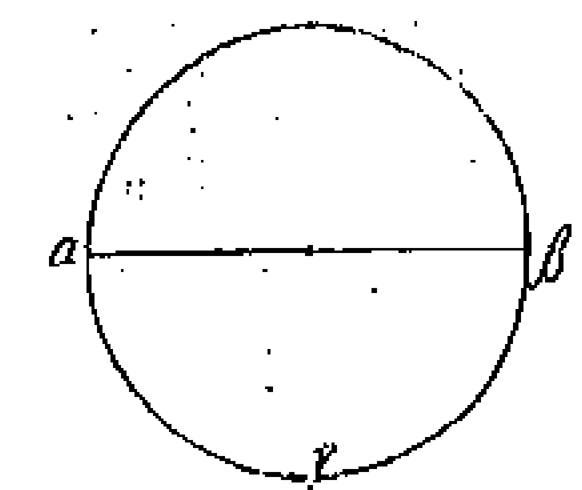
ὁ δὲ μ ν ξ ο, κύκλος περιγράφεσθαι περὶ τὸ π ρ σ τ φ, σχῆμα, ὅτι ἡ τούτου περιφέρεια ἑκάστης γωνίας τοῦ σχήματος ἅπτεται. ὥστε ἡνίκα τὸ σχῆμα ἐγγεγραμμένον ἐστὶν εἰς κύκλον, τηνικαῦτα ὁ κύκλος περιγεγραμμένος ἐστὶ περὶ τὸ σχῆμα· καὶ ἀνάπαλιν, ὅτε τὸ σχῆμα περιγεγραμμένον ἐστὶ περὶ τὸν κύκλον, τότε ὁ κύκλος ἐγγεγραμμένος ἐστὶν εἰς τὸ σχῆμα.

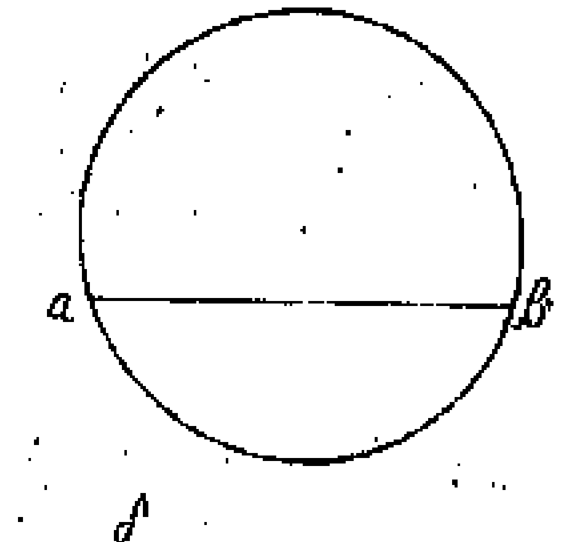
Eucl. Lib. 4. Fig. 3.



Ζ'. Εὐθεῖα εἰς κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας ᾖ τοῦ κύκλου.

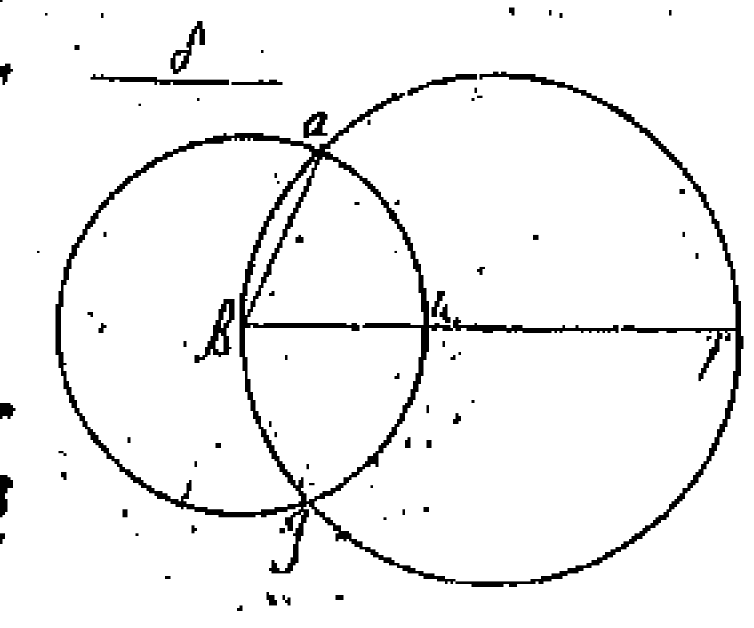
Ἐπεὶ τῶν μαθηματικῶν προβλημάτων τε καὶ θεωρημάτων τοῖς πλείοσιν οὐ μόνον ἡ δεῖξις ἀναγκαία, ἀλλ' οὐχ ἧττον καὶ ἡ κατασκευή, ἐν δὲ τῷ κύκλῳ τριχῶς ἐνδέχεται θεωρεῖσθαι τὴν εὐθεῖαν. ἢ γὰρ ἅπτεται τοῦ κύκλου, ἢ τέμνει αὐτόν, ἢ ἐναρμόζεται εἰς τὸν κύκλον· καὶ ἡ μὲν ἀπτομένη εἰς κατασκευὴν τῶν περὶ κύκλον περιγραφομένων σχημάτων συμβάλλει, περὶ ἧς ἐν τῷ προτέρῳ ἡρμήνευσε βιβλίῳ. ἡ δὲ ἐναρμοσμένη εἰς κατασκευὴν τῶν ἐγγραφομένων εἰς κύκλον ἀναγκαία, ἧς ἐν οὐδενὶ τῶν προτέρων βιβλίων, ὡς μὴ χρειώδους τότε, μνήμην ἐποιήσατο· τούτου ἕνεκα ἐπὶ τοῦ παρόντος, ὡς ἀναγκαίας οὔσης καὶ τῆς ταύτης γνώσεως, ἑρμηνεύει περὶ αὐτῆς. Ἐναρμόζεσθαι τοίνυν εὐθεῖα εἰς κύκλον, φησὶ, λέγεται, ὅταν τὰ τῆς ἐναρμοσμένης πέρατα ἐπὶ τῆς περιφερείας ᾖ τοῦ κύκλου, ὡς ἡ α β, ἧς τὰ α, καὶ β, πέρατα ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ α β γ, κύκλου ἐστίν. ὥστε ἐπεὶ ἐν κύκλῳ εὐθεῖα, ἢ διὰ τοῦ κέντρου, ἢ ἐκτὸς τούτου γράφεται, πάντως γε δύο καὶ τῆς ἐναρμοσμένης εἰς κύκλον εὐθείας τὰ εἴδη, ἤτε διάμετρος καὶ ἡ χορδή. τίς δὲ ὁ τρόπος τοῦ ἑκάστην εὐθεῖαν, εἰς ἕκαστον κύκλον ἐναρμόζεσθαι, ἑξῆς ἐρεῖ.





Πρότασις Α'. Πρόβλημα.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.



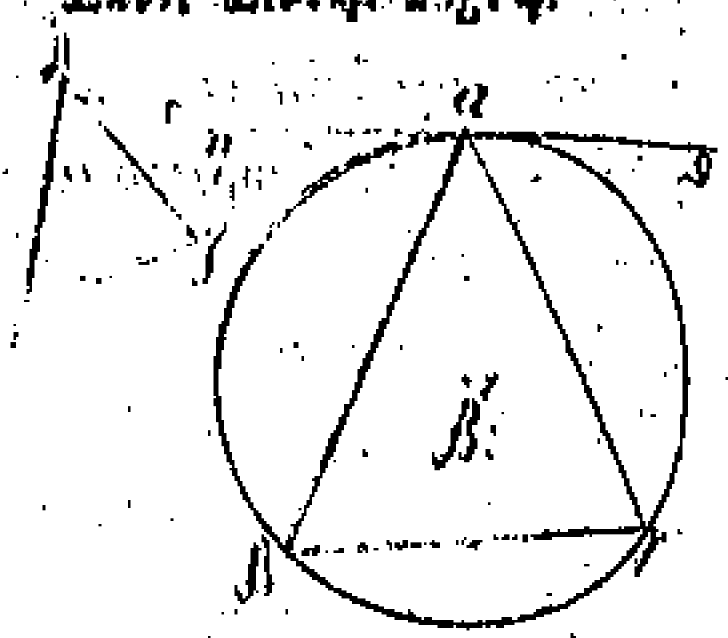
Ἔστω δὴ ἐναρμόσαι εἰς κύκλον τὸν α β γ, εὐθεῖαν ἴσην τῇ δοθείσῃ δ. Ἤχθω ἡ β γ, διάμετρος τοῦ κύκλου· κἂν ἴση ᾖ ἡ β γ, τῇ δ, γέγονε τὸ προσαχθέν. εἰ δὲ μείζων, ἀφῃρήσθω ἴση τῇ δ, ἡ β ε, ἡ β ε, κατὰ τὴν γ΄. τοῦ α΄. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ β ε, κύκλος γεγράφθω ὁ α ε ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ β α. Ἐπεὶ οὖν τὸ β, κέντρον ἐστὶ τοῦ α ε ζ, κύκλου, πάντως γε ἡ β α, ἴση ἐστὶ τῇ β ε. ἀλλ᾽ ἡ β ε, ἴση εἴληπται τῇ δ, καὶ ἡ α β, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ δ. Εἰς τὸν α β γ, ἄρα κύκλον ἐνήρμοσται ἡ β α, ἴση τῇ δ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις Β΄. Πρόβλημα.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

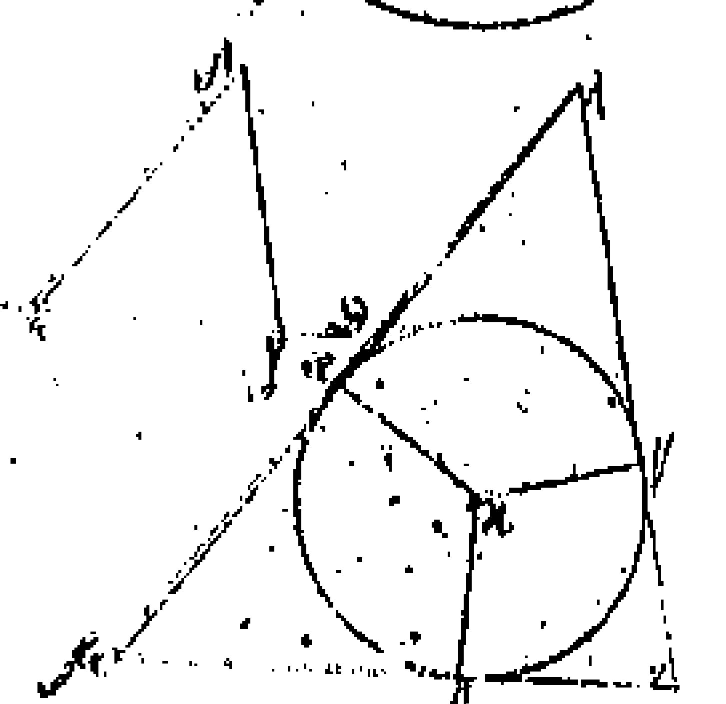
Εἰς τὸν α β γ, ἤδη κύκλον ἔστω ἐγγράψαι τρίγωνον ἰσογώνιον τῷ δοθέντι δ ε ζ. ἤχθω ἀπτομένη τοῦ κύκλου κατὰ τὸ α, ἡ η θ. καὶ γενέσθω τῇ μὲν πρὸς τῷ ζ, γωνίᾳ τοῦ δ ε ζ, τριγώνου ἴση, ἡ ὑπὸ η α β, κατὰ τὴν κγ΄. τοῦ α΄. τῇ δὲ πρὸς τῷ ε, ἡ ὑπὸ θ α γ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ β γ. Ἐπεὶ οὖν ἡ η θ, ἅπτεται τοῦ κύκλου, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς εἰς τὸν κύκλον ἤχθη τέμνουσα ἡ α γ, ἄρα ἡ ὑπὸ θ α γ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ α β γ, τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι, κατὰ τὴν λβ΄. τοῦ γ΄. ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ θ α γ, ἴση γέγονε τῇ πρὸς τῷ ε, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ α β γ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ ε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ πρὸς τῷ γ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ η α β, καὶ ἑπομένως τῇ πρὸς τῷ ζ. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ β α γ, ἴση ἔσται τῇ πρὸς τῷ δ. τὸ α β γ, ἄρα τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ δ ε ζ, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν δοθέντα α β γ, κύκλον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 4. Fig. 4.



Πρότασις Γ΄. Πρόβλημα.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.



Περὶ τὸν δοθέντα ἤδη α β γ, κύκλον ἔστω περιγράψαι τρίγωνον ἰσογώνιον τῷ δ ε ζ. Ἐξαχθήτω ἡ ε ζ, ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη κατὰ τὰ η, καὶ θ, σημεῖα. καὶ εἰλήφθω τὸ κ, κέντρον τοῦ κύκλου, κατὰ τὴν α΄. τοῦ γ΄. καὶ τῇ μὲν ὑπὸ δ ε η, γωνίᾳ, ἴση γενέσθω ἡ ὑπὸ β κ α. τῇ δὲ ὑπὸ δ ζ θ, ἡ ὑπὸ β κ γ, κατὰ τὴν κγ΄. τοῦ α΄. καὶ διὰ τῶν α, β, γ, σημείων ἀχθήτωσαν ἀπτόμεναι τοῦ κύκλου, κατὰ τὴν ιζ΄. τοῦ γ΄. αἱ λ μ, μ ν, ν λ, αἵτινες ὀρθαί εἰσι, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιϛ΄. τοῦ αὐτοῦ, ὥστε ἑκάστη τῶν ὑπὸ κ α μ, κ β μ, κ γ ν, ὀρθή ἐστιν. Ἐπεὶ δὲ παντὸς τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί, διὰ τὸ εἰς δύο διαιρεῖσθαι τρίγωνα, καὶ τὰς τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι, κατὰ τὴν λβ΄. τοῦ α΄. ἄρα καὶ τοῦ α κ β μ, τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, αἱ δὲ ὑπὸ κ α μ, κ β μ, δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι, ἑκατέρα γὰρ ὀρθή,

ὡς

ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ α κ β, α μ β, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ δ ε η, δ ε ζ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, κατὰ τὴν ιγ΄. τοῦ α΄. ἄρα αἱ ὑπὸ α κ β, α μ β, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ δ ε η, δ ε ζ. γέγονε δὲ ἡ ὑπὸ α κ β, ἴση τῇ ὑπὸ δ ε η, ἐγκαταλείπεται ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ α μ β, ἴση τῇ ὑπὸ δ ε ζ. Διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ ὑπὸ β ν γ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ δ ζ ε. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ α λ γ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ε δ ζ. τὸ λ μ ν, ἄρα τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ δ ε ζ. καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν δοθέντα α β γ, κύκλον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

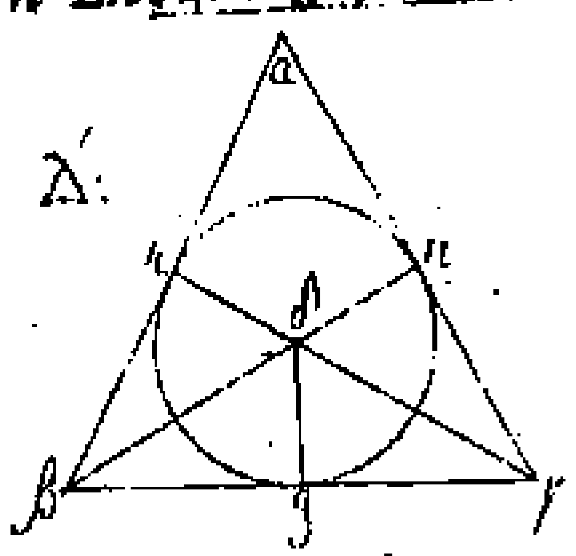
Πρότασις Δ΄. Πρόβλημα.

Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Ἔστω δὴ ἐγγράψαι κύκλον εἰς τὸ α β γ, τρίγωνον. Τμηθήτω ἑκατέρα τῶν ὑπὸ α β γ, α γ β, γωνιῶν δίχα, κατὰ τὴν θ΄. τοῦ α΄. ταῖς β δ, γ δ, εὐθείαις, συμβαλλούσαις ἀλλήλαις κατὰ τὸ δ. καὶ ἀπὸ τοῦ δ, ἀχθήτωσαν κάθετοι ἐπὶ τὰς α β, β γ, γ α, αἱ δ ε, δ ζ, δ η. Ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν ὑπὸ ε β δ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζ β δ, δίχα γὰρ ἡ ὑπὸ ε β ζ, τέτμηται. ἡ δὲ ὑπὸ β ε δ, τῇ ὑπὸ β ζ δ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα. ἄρα τῶν δ ε β, δ ζ β, τριγώνων δύο γωνίαι δυσὶ γωνίαις ἴσαι εἰσίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ β δ, ὑποτείνουσα ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, κοινή, ἄρα καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ τοῦ δ ε β, τριγώνου, ἴσαι εἰσὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς τοῦ δ ζ β, κατὰ τὴν κϛ΄. τοῦ α΄. ἡ δ ε, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ δ ζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ δ η, ἴση τῇ δ ζ. ὥστε αἱ δ ε, δ ζ, δ η, ἴσαι εἰσί. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δ ε, γραφόμενός τις κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῶν ζ, καὶ η, καὶ ἅψεται τῶν α β, β γ, γ α, πλευρῶν τοῦ α β γ, τριγώνου, διὰ τὸ καθέτους εἶναι ἐπὶ τῶν ε δ, δ ζ, δ η, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιϛ΄. τοῦ γ΄. ὅπερ ἦν τὸ προσαχθέν.

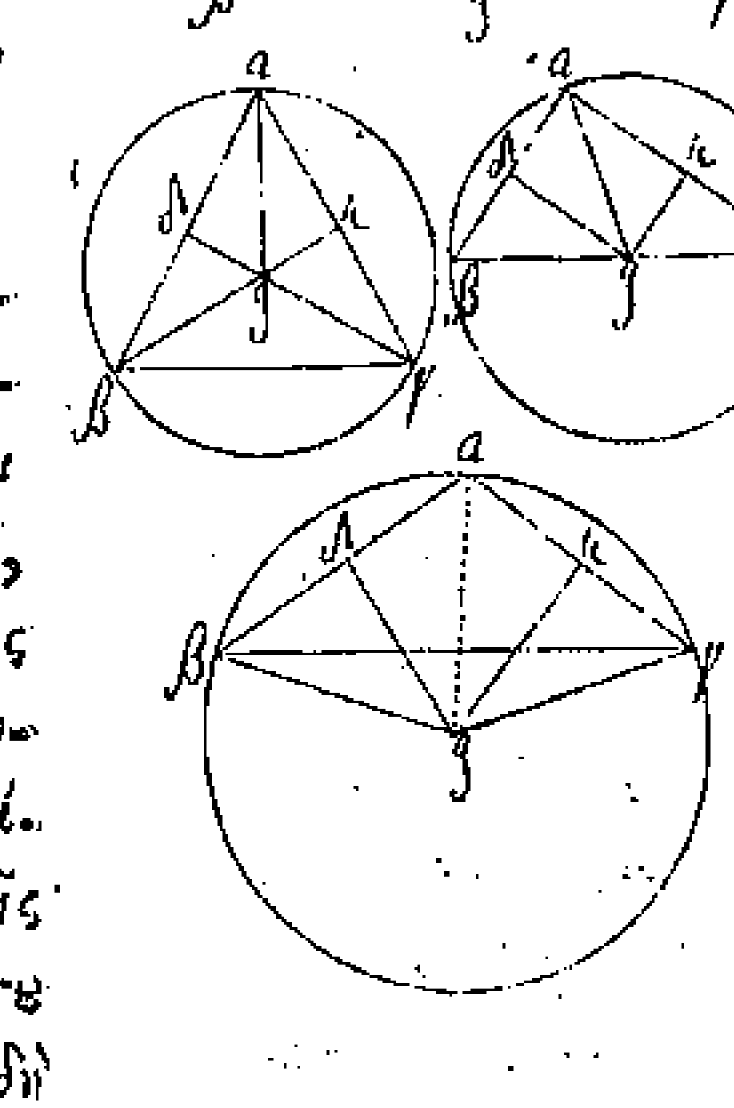
Eucl. Lib. 4. Fig. 5.

Δ.



Πρότασις Ε΄. Πρόβλημα.

Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι.



Ἔστω δὴ περιγράψαι κύκλον περὶ τὸ α β γ, τρίγωνον. Τμηθήτω ἥτε α β, καὶ α γ, πλευρὰ τοῦ τριγώνου δίχα. κατὰ τὰ δ, καὶ ε, σημεῖα, ἀφ᾽ ὧν ἀχθήτωσαν κάθετοι ἐπὶ τῶν α β, α γ, αἱ δ ζ, ε ζ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζ β, ζ γ, ζ α. Ἐπεὶ δὲ τῶν δ ζ, ε ζ, συμβαλλουσῶν ἀλλήλαις κατὰ τὸ ζ, τριχῶς ἐνδέχεται συμβῆναι τὴν τούτων συνδρομήν, ἢ γὰρ ἐντὸς τοῦ τριγώνου ἔσται τὸ ζ, ὡς ἐπὶ τῆς α. καταγραφῆς τοῦ σχήματος, ἢ ἐπὶ τῆς β γ, ὡς ἐπὶ τῆς β΄. ἢ γοῦν ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, ὡς ἐπὶ τῆς γ΄. ἐφ᾽ ἑκάστου δὲ τῆς καταγραφῆς τρόπου ἡ αὐτή ἐστι δεῖξις. φέρε δὴ

ἐπὶ

ἐπὶ τοῦ α. μόνη τὴν ἀπόδειξιν ποιήσωμεν. Αἱ μὲν οὖν δα, δβ, ἴσαι εἰσί, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν ἑκατέρᾳ ἡ δζ. ἄρα καὶ βάσις ἡ βζ, βάσει τῇ ζα, ἴση ἐστὶ κατὰ τὴν δ. τοῦ α. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ γζ, ἴση τῇ αζ. ὥστε αἱ τρεῖς ζα, ζβ, ζγ, ἴσαι εἰσί. καὶ ὁ κέντρῳ μὲν ζ, διαστήματι δὲ τῇ ζα, γραφόμενος κύκλος, διελεύσεται καὶ διὰ τῶν β, καὶ γ, σημείων, καὶ περιγεγραμμένος ἔσται περὶ τὸ αβγ, τρίγωνον, κατὰ τὸν ε΄. ὅρον τοῦ παρόντος. Ὁμοίως δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῆς β΄. καὶ γ΄. καταγραφῆς τὸ ζ, κέντρον εἶναι τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον περιγραφομένου κύκλου. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

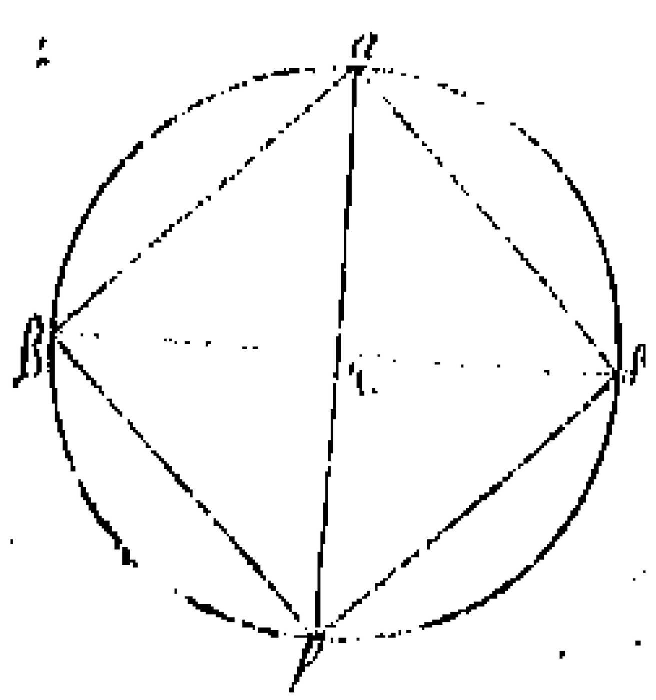
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ὅταν τῶν δύο τοῦ τριγώνου πλευρῶν δίχα τεμνομένων, αἱ ἐπ' αὐτῶν ἀγόμεναι κάθετοι ἐντὸς τοῦ τριγώνου συμπέσωσιν, ἡ ὑπὸ τῆς ἀτμήτου ὑποτεινομένη γωνία, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, καὶ * τοὔμπαλιν, ἐν μείζονι γὰρ ἐστὶ τμήματι. ὅταν δὲ ἐπὶ τῆς ἀτμήτου, ὀρθή, καὶ * τοὔμπαλιν, ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ. ὅταν δὲ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, μείζων ὀρθῆς, ἐν ἐλάττονι γάρ ἐστι τμήματι κύκλου.

Πρότασις ϛ΄. Πρόβλημα.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

Ἔστω ἐγγράψαι τετράγ. εἰς τὸν αβγδ, κύκλον, οὗ κέντρον τὸ ε. Ἀχθήτωσαν δὴ αἱ αγ, βδ, τοῦ κύκλου διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις τεμνόμεναι. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αβ, βγ, γδ, δα. καὶ τὸ αβγδ, ἐγγεγραμμένον σχῆμα εἰς τὸν κύκλον, τετράγωνον ἔσται. Ἐπεὶ γὰρ αἱ βε, εδ, ἴσαι εἰσίν, ὡς ἡμιδιάμετροι, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ εα. ἄρα κατὰ τὴν δ. τοῦ α. καὶ ἡ βα, ἴση ἐστὶ τῇ αδ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ μὲν αβ. ἴση τῇ βγ, ἡ δὲ αδ, τῇ δγ. ὥστε τὸ αβγδ, τετράπλευρον, ἰσόπλευρόν ἐστιν. ἐπεὶ δὲ καὶ ὀρθογώνιον, κατὰ τὴν λα΄. τοῦ γ΄. ἑκάστη γὰρ τῶν αὐτοῦ γωνιῶν ἐν ἡμικυκλίῳ ἐστίν, ἄρα τετράγωνον ἐστίν. ὅπερ καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 4. Fig. 6.

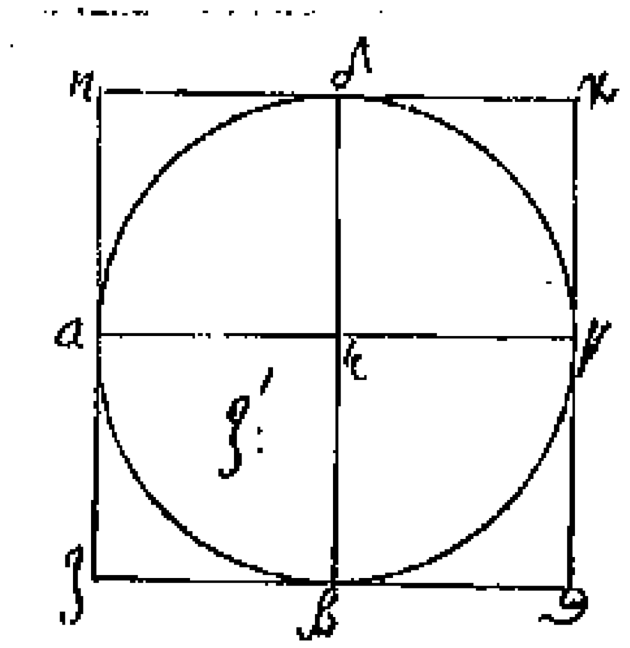


Πρότασις Ζ΄. Πρόβλημα.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

Ἔστω περιγράψαι τετράγωνον περὶ τὸν αβγδ, κύκλον. Ἀχθήτωσαν δὴ αἱ αγ, βδ, διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις τεμνόμεναι, καὶ διὰ τῶν αβγδ, σημείων διήχθωσαν ἁπτόμεναι τοῦ κύκλου αἱ ζη, ζθ, θκ, κη. καὶ τὸ ζθκη, τετράπλευρον, τὸ περὶ τὸν αβγδ, περιγραφὲν κύκλον, τετράγωνον ἔσται. κατὰ γὰρ τὸ πόρισμα τῆς ιϛ΄. τοῦ γ΄. ἤτε ζη, καὶ θκ, πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἐπὶ τῆς αγ, διαμέτρου. ὥστε αἱ ὑπὸ ζαγ, θγα, γωνίαι, ὀρθαί εἰσι, καὶ ἑπομένως αἱ ζη, θκ, παράλληλοί εἰσι κατὰ τὴν κη. τοῦ α. Διὰ τὰ αὐτὰ τοίνυν καὶ αἱ ζθ, ηκ, παράλληλοί εἰσι. τὸ ζθκη, ἄρα παραλληλόγραμμόν ἐστιν. ἀλλὰ ταῖς μὲν ζη, θκ, ἴσητε καὶ παράλληλός ἐστιν ἡ βδ, ταῖς δὲ ζθ, ηκ, ἡ αγ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν κη. τοῦ α. αἱ δὲ βδ, αγ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ὡς διάμετροι, ἄρα αἱ ζη, ζθ, θκ, κη, ἴσαι εἰσίν, καὶ τὸ ζθκη, ἰσόπλευρόν ἐστι. Λέγω δ' ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ αἱ ὑπὸ ζαγ, θγα, ὀρθαί εἰσι, καὶ τὸ ζγ, παραλληλόγραμμον, ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ αζθ, γθζ, ἀπεναντίον ὀρθαί εἰσι κατὰ τὴν λδ΄. τοῦ α. κατὰ δὲ τὴν αὐτὴν ἔτι καὶ αἱ ὑπὸ ζηκ, θκη, ὀρθαί εἰσιν, ἄρα τὸ ζθκη, ὀρθογώνιόν ἐστιν, ἀλλὰ δὴ καὶ ἰσόπλευρον, ὡς δέδεικται, τετράγωνον ἄρα. ὅπερ ἦν τὸ προσαχθέν.

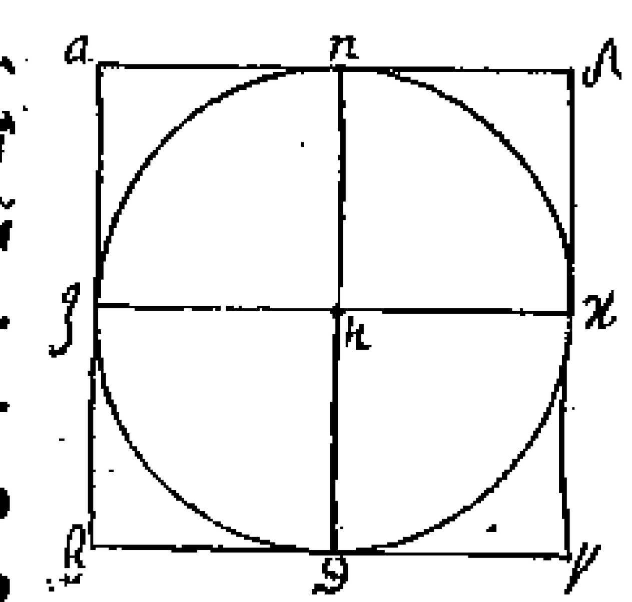
Eucl. Lib. 4. Fig. 7.



Πρότασις Η΄. Πρόβλημα.

Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Ἔστω ἐγγράψαι κύκλον εἰς τὸ αβγδ, τετράγωνον. Τμηθήτωσαν δὴ αἱ αβ, αδ, δίχα κατὰ τὰ ζ, καὶ η, σημεῖα. καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ ζ, ἤχθω παράλληλος τῇ αδ, ἢ βγ, ἡ ζκ, ἀπὸ δὲ τοῦ η, ὁμοίως ἤχθω παράλληλος τῇ αβ, ἢ δγ, ἡ ηθ, τέμνουσα τὴν ζκ, κατὰ τὸ ε. Λέγω τοίνυν ὅτι ὁ κέντρῳ μὲν τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ εζ, γραφόμενος κύκλος διέρχεται καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων η, κ, θ. Τὰ γὰρ ακ, κβ, αθ, θδ, παραλληλόγραμμά ἐστι, καὶ αἱ ἀπεναντίον αὐτῶν πλευραὶ ἴσαι, κατὰ τὴν λδ΄. τοῦ α. ὥστε αἱ ζκ, αδ, ἴσαι εἰσίν, ἑπομένως δὲ καὶ αἱ ἡμίσειαι αὐτῶν· ἡ αη, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ζε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν αζ, ἴση ἐστὶ τῇ ηε. ἡ δὲ ηδ, τῇ εκ. καὶ ἡ ζβ, τῇ εθ. ἐπεὶ δὲ αἱ αη, ηδ, καὶ αζ, ζβ, ἴσαι εἰσί, κατὰ τὴν κατασκευήν, πάντως γε καὶ αἱ ηε, ζε, θε, κε, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ εζ, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῶν η, κ, θ, σημείων, ἁπτόμενος τῶν αδ, αβ, βγ, γδ, εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς η, ζ, θ, κ, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιϛ΄. τοῦ γ΄. εἰς τὸ δοθὲν ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.

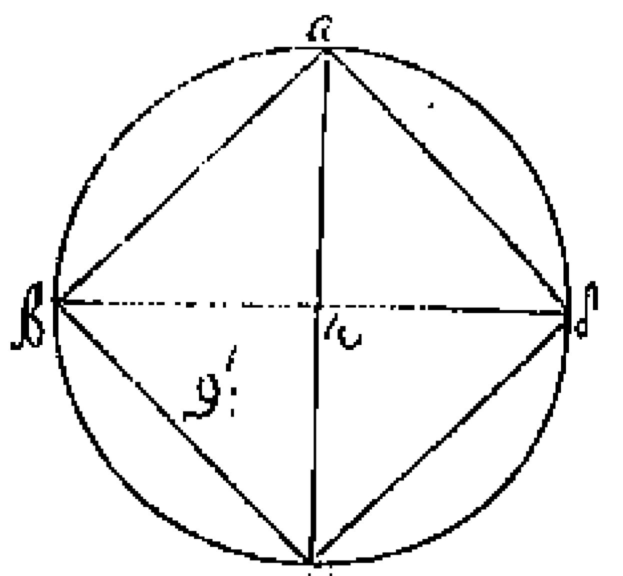


Πρότασις Θ΄. Πρόβλημα.

Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἔστω δὴ περιγράψαι κύκλον περὶ τὸ αβγδ, τετράγωνον. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, βδ, τοῦ τετραγώνου διάμετροι, τεμνόμεναι ἀλλήλαις κατὰ τὸ ε, καὶ τὸ ε, κέντρον ἔσται τοῦ κύκλου. Ἐπεὶ γὰρ ἡ αδ, ἴση ἐστὶ τῇ αβ, κοινὴ δὲ ἡ αγ, καὶ βάσις ἡ γδ, βάσει τῇ γβ, ἴση, πάντως γε, κατὰ τὴν η. τοῦ α. ἡ ὑπὸ δαγ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βαγ, ὥστε ἡ πρὸς τῷ α, γωνία τοῦ τετραγώνου δίχα τέτμηται. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ πρὸς τοῖς β, γ, δ, σημείοις γωνίαι δίχα τέμνονται. ἔστι δὲ ἡ πρὸς τῷ α, ἴση τῇ πρὸς τῷ β. καὶ ἡ μὲν ὑπὸ εαβ, ἡμίσεια ἐστὶ τῆς πρὸς τῷ α. ἡ δὲ ὑπὸ εβα, τῆς πρὸς τῷ β. ἄρα καὶ πλευρὰ ἡ εα, ἴση ἐστὶ τῇ εβ, κατὰ τὴν ϛ΄. τοῦ α΄. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴση ἐστὶ καὶ ἡ εβ, τῇ εγ, καὶ ἡ εγ, τῇ εδ, καὶ ἡ εδ, τῇ εα, ὥστε αἱ εα, εβ, εγ, εδ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἄρα ὁ κέντρῳ μὲν τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ εα, περιγραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῶν β, γ, δ, σημείων. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 4. Fig. 8.

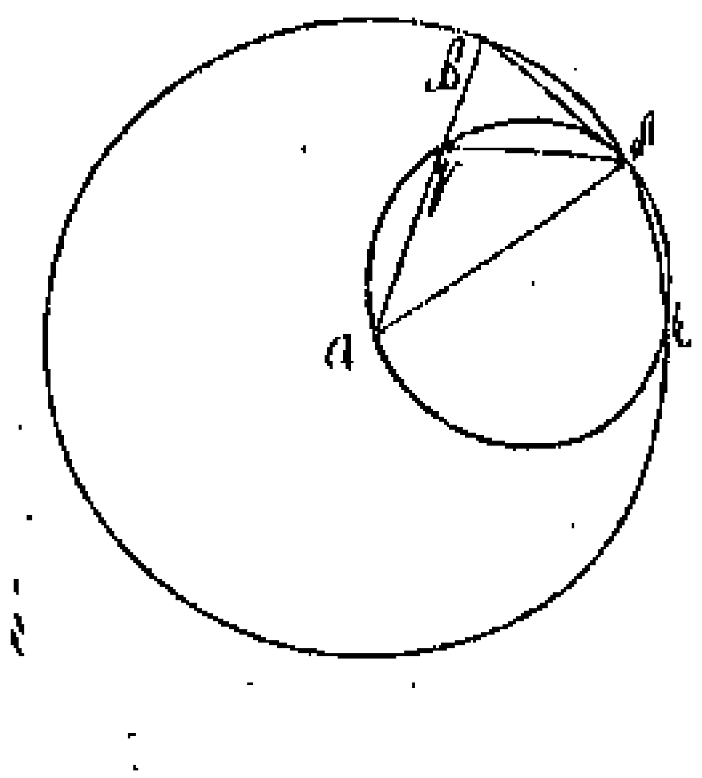


Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι παντὸς τετραγώνου αἱ διάμετροι δίχα τέμνονται.

Πρότασις Ι΄. Πρόβλημα.

Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς.



Κείσθω δή εὐθεῖά τις ἡ αβ. καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ γ, διὰ τῆς ια΄. τοῦ β΄. ὥστε τὸ ὑπό τε τῆς ὅλης αβ, καὶ βγ, ἐλάττονος τμήματος περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ αγ, μείζονος τμήματος τετραγώνῳ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αβ, γραφήτω κύκλος ὁ βδε, καὶ ἐνηρμόσθω, κατὰ τὴν α΄. τοῦ παρόντος, εἰς τὸν βδε, κύκλον εὐθεῖα ἴση τῇ αγ, ἡ βδ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δα, δγ, καὶ ἔσται τὸ προσαχθέν. Περὶ γὰρ τὸ αγδ, τρίγωνον περιγεγράφθω ὁ αγδε, κύκλος, κατὰ τὴν ε΄. τοῦ παρόντος. καὶ ἐπεὶ αἱ αβ, αδ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ὡς ἡμιδιάμετροι, πάντως γε τὸ αβδ, τρίγωνον ἰσοσκελές ἐστιν. ὅτι δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αβδ, αδβ, πρὸς τῇ βάσει αὐτοῦ γωνιῶν διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαδ, πρὸς τῇ κορυφῇ, δῆλον. ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, τετραγώνῳ, κατὰ τὴν κατασκευὴν, εἴληπται δὲ ἡ βδ, ἴση τῇ αγ, πάντως τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ὀρθογ. ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βδ, τετραγώνῳ. ὥστε κατὰ τὴν λζ΄. τοῦ γ΄. ἡ βδ, ἅπτεται τοῦ αγδε, κύκλου. Ἐπεὶ δὲ πάλιν ἀπὸ τῆς ἁφῆς, δηλ. τοῦ δ, σημείου ἤχθη ἡ δγ, τέμνουσα τὸν κύκλον. πάντως γε ἡ ὑπὸ βδγ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ τμήματος γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ γαδ, κατὰ τὴν λβ΄. τοῦ γ΄. κοινῆς δὲ προσκειμένης τῆς ὑπὸ γδα, ἅπασα ἄρα ἡ ὑπὸ βδα, ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ γδα, γαδ. ἀλλὰ ταῖς ὑπὸ γδα, γαδ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ἐκτὸς ὑπὸ βγδ, κατὰ τὴν λβ΄. τοῦ α΄. ἄρα ἡ ὑπὸ βδα, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βγδ, τῇ δὲ ὑπὸ βδα, ἴση ἐστὶν, ὡς δέδεικται, ἡ ὑπὸ αβδ, κατὰ τὴν ε΄.
τοῦ α΄.

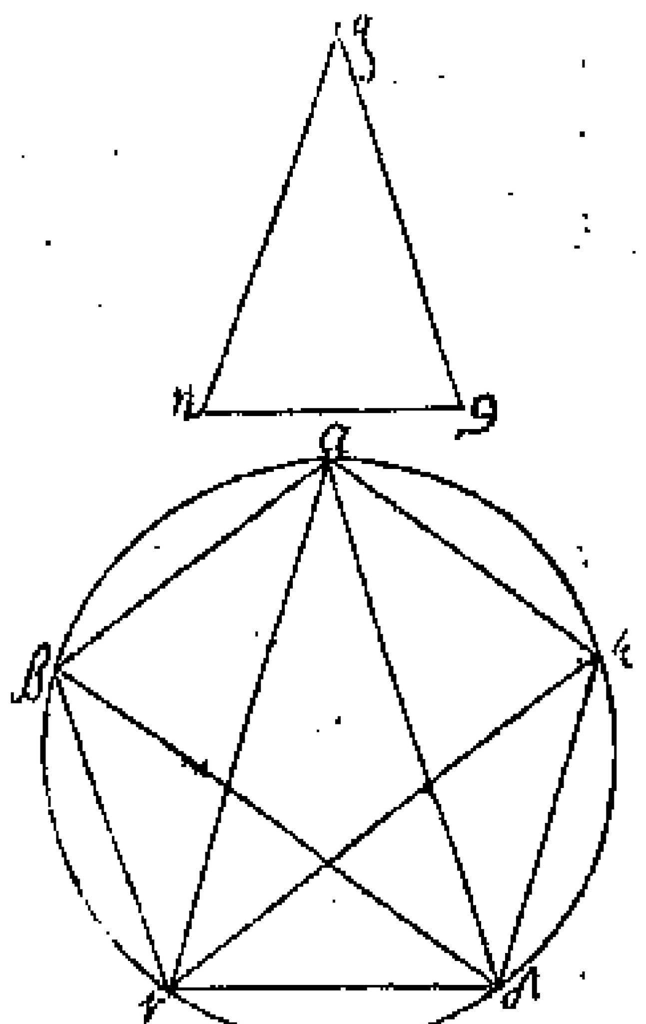
τοῦ α΄. ἄρα ἡ ὑπὸ βγδ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αβδ, ὥστε ἡ δβ, ἴση ἐστὶ τῇ δγ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ϛ΄. ἀλλὰ τῇ δβ, ἴση ἐστὶν ἡ γα, ἄρα ἡ γδ, ἴση ἐστὶ τῇ γα, καὶ ἑπομένως αἱ ὑπὸ γδα, γαδ, γωνίαι ἴσαι εἰσι, καὶ αἱ δύο ὁμοῦ τῆς μιᾶς ὑπὸ γαδ, διπλάσιαι. ταῖς δὲ ὑπὸ γδα, γαδ, ἴση ἐστὶ καὶ ὑπὸ βδα, καὶ ἡ ταύτῃ ἴση ἡ ὑπὸ δβα, ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αβδ, αδβ, πρὸς τῇ βάσει τοῦ τριγωνιῶν διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαδ. γέγραπται ἄρα τὸ αβδ, ἰσοσκελὲς τρίγωνον, διπλασίονα ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν τῆς λοιπῆς. ὅπερ καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΑ΄. Πρόβλημα.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔστω δὴ ἐγγράψαι εἰς τὸν αβγδε, κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Κείσθω, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, τὸ ζηθ, τρίγωνον ἰσοσκελὲς, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς. καὶ τούτῳ ὅμοιον ἐγγεγράφθω, κατὰ τὴν β΄. τοῦ παρόντος, εἰς τὸν αβγδε, κύκλον τὸ αγδ. ὥστε ἑκατέραν τῶν ὑπὸ αγδ, αδγ, διπλασίονα εἶναι τῆς ὑπὸ γαδ. καὶ τμηθήτω δίχα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αγδ, αδγ, διὰ τῶν γε, δβ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ γβ, βα, αε, εδ, καὶ τὸ αβγδε, πεντάγωνον, ἰσόπλευρόν τε ἔσται καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αγδ, αδγ, διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ γαδ, καὶ δίχα τέτμηται, αἱ γεγονυῖαι ἄρα πέντε γωνίαι, γαδ, αγε, εγδ, αδβ, βδγ, ἴσαι εἰσι, καὶ κατὰ τὴν κϛ΄. τοῦ γ΄. ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, αἱ ἄρα αβ, βγ, γδ, δε, εα, περιφέρειαι ἴσαι εἰσι, κατὰ τὴν κθ΄. τοῦ γ΄. τὸ ἄρα αβγδε, πεντάγωνον, ἰσόπλευρόν ἐστιν. Ὅτι δὲ καὶ ἰσογώνιον δῆλον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ αβ, περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ δε, κοινῆς προσκειμένης τῆς βγδ, πάντως γε ὅλη ἡ αβγδ, περιφέρεια, ἴση ἐστὶν ὅλῃ τῇ βγδε. κατὰ τὴν κϛ΄. ἄρα τοῦ γ΄. καὶ αἱ ἐπ' αὐτῶν βεβηκυῖαι γωνίαι, αἱ ὑπὸ αεδ, βαε, ἴσαι εἰσι. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ αβγ, βγδ, γδε, ἴση ἐστὶν, ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ βαε, αεδ. ἰσογώνιον ἄρα τὸ αβγδε. δέδεικται δὲ καὶ ἰσόπλευρον. ἄρα εἰς τὸν αβγδε, κύκλον ἐγγέγραπται πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 4. Fig. 9.

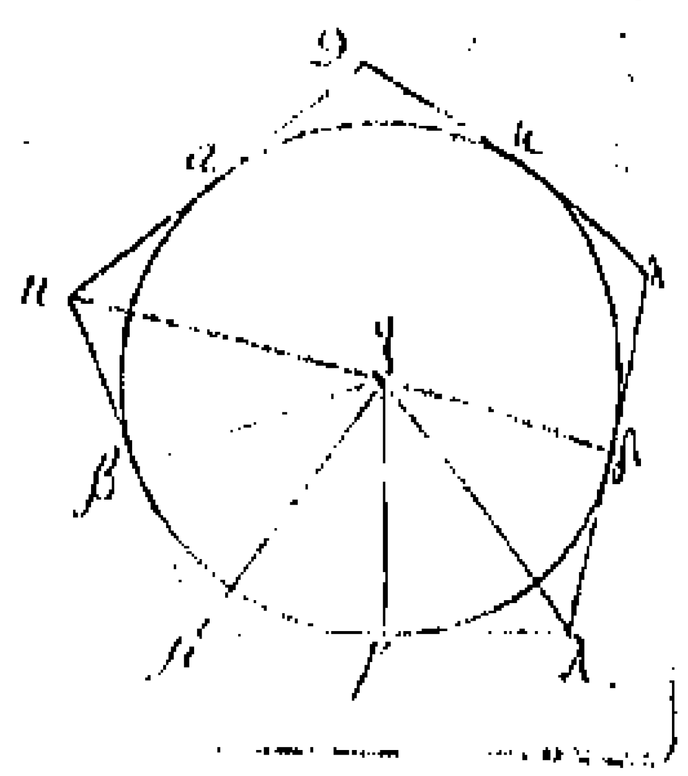


Πρότασις ΙΒʹ. Πρόβλημα.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Φέρε δὴ περὶ τὸν α β γ δ ε, κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψωμεν. Νενοήσθωσαν ἐπὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου σημεῖα τὰ α β γ δ ε, ὥστε τὰς α β, β γ, γ δ, δ ε, ε α, ἴσας εἶναι. καὶ εἰλήφθω διὰ τῆς αʹ. τοῦ γʹ. τὸ ζ, κέντρον τοῦ κύκλου. καὶ διὰ τῶν α, β, γ, δ, ε, σημείων ἤχθωσαν ἁπτόμεναι τοῦ κύκλου αἱ η θ, θ κ, κ λ, λ μ, μ η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζ η, ζ β, ζ μ, ζ γ, ζ λ, ζ δ. Ἐπεὶ οὖν ἡ μ λ, ἅπτεται τοῦ κύκλου, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τῆς ἁφῆς προσέπεσεν ἡ ζ γ, πάντως γε αἱ πρὸς τὴν γ, γωνίαι ὀρθαί εἰσι, κατὰ τὸ πόρισμα, τῆς ιϛʹ. τοῦ γʹ. ὡσαύτως καὶ αἱ πρὸς τὴν β, καὶ δ, ὀρθαί εἰσιν. ἀμέλειτοι, κατὰ τὴν μζʹ. τοῦ αʹ. τὸ ἀπὸ τῆς ζ μ, ἴσον ἐστὶ

Eucl. Lib. 4. Fig. 10.



τοῖς τε ἀπὸ τῶν ζ γ, γ μ, καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ζ β, β μ, ὥστε, κατὰ τὸ αʹ. ἀξίωμα, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ζ γ, γ μ, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ζ β, β μ. ἀλλ᾽ ἡ ζ γ, ἴση ἐστὶ τῇ ζ β, ἄρα καὶ ἡ γ μ, ἴση ἐστὶ τῇ β μ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ζ γ, ἴση τῇ ζ β, καὶ βάσις ἡ αὐτὴ ζ μ. κατὰ τὴν ηʹ. ἄρα τοῦ αʹ. καὶ ὅλον τὸ ζ β μ, τρίγωνον, ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ ζ γ μ, τριγώνῳ, καὶ ἡ μὲν ὑπὸ β ζ μ, γωνία τῇ ὑπὸ γ ζ μ, ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ζ μ β, τῇ ὑπὸ ζ μ γ. καὶ ἑπομένως ἡ μὲν ὑπὸ β ζ γ, τῆς ὑπὸ γ ζ μ, διπλῆ ἐστιν, ἡ δὲ ὑπὸ β μ γ, τῆς ὑπὸ γ μ ζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ μὲν ὑπὸ γ ζ δ, διπλῆ τῆς ὑπὸ γ ζ λ, ἡ δὲ ὑπὸ γ λ δ, τῆς ὑπὸ γ λ ζ. ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ β ζ γ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γ ζ δ, κατὰ τὴν κζʹ. τοῦ γʹ. διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς β γ, γ δ, περιφερείας, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ γ ζ μ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γ ζ λ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ζ γ μ, τῇ ὑπὸ ζ γ λ, ὁμοίως ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, ὡς δέδεικται, ἄρα τὰ ζ γ μ, ζ γ λ, τρίγωνα ἔχουσι τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας, καὶ τὴν ζ γ, τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις κοινήν, ὥστε καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξουσι, κατὰ τὴν κϛʹ. τοῦ αʹ. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ζ μ γ, τῇ ὑπὸ ζ λ γ, καὶ εὐθεῖα ἡ μ γ, εὐθείᾳ τῇ γ λ, ὁμοίως ἴση, ἡ δὲ ὅλη μ λ. διπλασία τῆς μ γ. Διὰ τὰ αὐτὰ δείκνυται καὶ ἡ η μ, διπλασία τῆς β μ, ἀλλ᾽ ἡ β μ, ἴση ἐστὶ τῇ μ γ, ἄρα καὶ ἡ η μ, ἴση ἐστὶ τῇ μ λ, κατὰ τὸ ϛʹ. ἀξίωμα. Τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται, καὶ ἑκάστη τῶν η θ, θ κ, κ λ, ἴση ἑκατέρᾳ τῶν η μ, μ λ. ἄρα τὸ η θ κ λ μ, ἰσόπλευρόν ἐστι. Λέγω δή, ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ ζ μ γ, ἴση δέδεικται τῇ ὑπὸ ζ λ γ, καὶ τῆς μὲν ζ μ γ, διπλασία ἐστὶν ἡ ὑπὸ β μ γ, ἤτοι ἡ ὑπὸ η μ λ, τῆς δὲ ὑπὸ ζ λ γ, ἡ ὑπὸ κ λ μ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ η μ λ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ κ λ μ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν πρὸς τοῖς η, θ, κ, γωνιῶν ἴση ἐστὶν ἑκατέρᾳ τῶν πρὸς

τοῖς

τοῖς μ, καὶ λ. τὸ ἄρα η θ κ λ μ, ἰσογώνιόν ἐστι, δέδεικται δὲ καὶ ἰσόπλευρον. περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον περιγέγραπται.

ΠΌΡΙΣΜΑ.

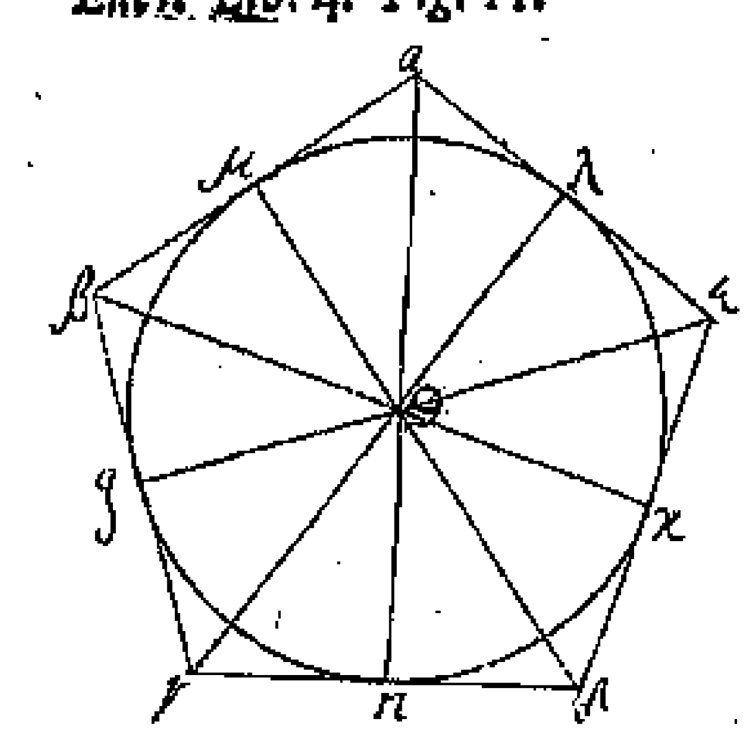
Ἐκ δὴ τούτων φανερόν, ὅτι ἐν τοῖς ἰσογωνίοις καὶ ἰσοπλεύροις πενταγώνοις τῶν πλευρῶν δίχα τμηθεισῶν, καὶ ἐπ᾽ αὐτῶν καθέτων ἀγομένων, αἱ ἀπὸ τῆς συνδρομῆς τῶν καθέτων ἐπὶ τὰς γωνίας ἀγόμεναι εὐθεῖαι, δίχα τὰς γωνίας τέμνουσι.

Πρότασις ΙΓʹ. Πρόβλημα.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιόν ἐστι, κύκλον ἐγγράψαι.

Φέρε δὴ εἰς τὸ α β γ δ ε, ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον πεντάγωνον, κύκλον ἐγγράψωμεν. Τμηθήτωσαν αἱ β γ, γ δ, δίχα κατὰ τὰ ζ, η, σημεῖα, καὶ ἀπ᾽ αὐτῶν ἐπὶ τῶν β γ, γ δ, κάθετοι ἀχθήτωσαν, αἱ ζ θ, η θ, προσπίπτουσαι ἀλλήλαις, κατὰ τὸ θ. καὶ ἀπὸ τοῦ θ, σημείου, τῆς συνδρομῆς δηλονότι τῶν ζ θ, η θ, καθέτων, ἤχθω ἐπὶ τὴν πρὸς τὴν γ, γωνίαν, ἡ θ γ. Κατὰ δὴ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω, ἡ ὑπὸ β γ δ, γωνία

Eucl. Lib. 4. Fig. 11.



δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς θ γ, ὥστε ἡ ὑπὸ θ γ ζ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ θ γ η. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ θ ζ γ, τῇ ὑπὸ θ η γ, ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα. τὰ δύο ἄρα τρίγωνα θ ζ γ, θ η γ, ἔχουσι τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ θ ζ γ, ζ γ θ, ἴσας δυσὶ ταῖς ὑπὸ θ η γ, η γ θ, ἔχουσι δ᾽ ἔτι καὶ τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις πλευράν, τὴν ζ γ, ἴσην τῇ γ η, ἄρα καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔχουσι, κατὰ τὴν κϛʹ. τοῦ αʹ. ὥστε ἡ θ ζ, ἴση ἐστὶ τῇ θ η. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἑκάστη, τῶν θ κ, θ λ, θ μ, ἴση ἑκατέρᾳ τῶν θ ζ, θ η, ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θ ζ, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῶν η, κ, λ, μ, σημείων, ἁπτόμενος κατὰ ταῦτα τῶν α β, β γ, γ δ, δ ε, ε α, πλευρῶν τοῦ πενταγώνου, διὰ τὸ πρὸς ὀρθὰς εἶναι τὰς α β, β γ, γ δ, δ ε, ταῖς διὰ τοῦ κέντρου ἐπ᾽ ἄκρας, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιϛʹ. τοῦ γʹ. Εἰς τὸ δοθὲν ἄρα πεντάγωνον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΔʹ. Πρόβλημα.

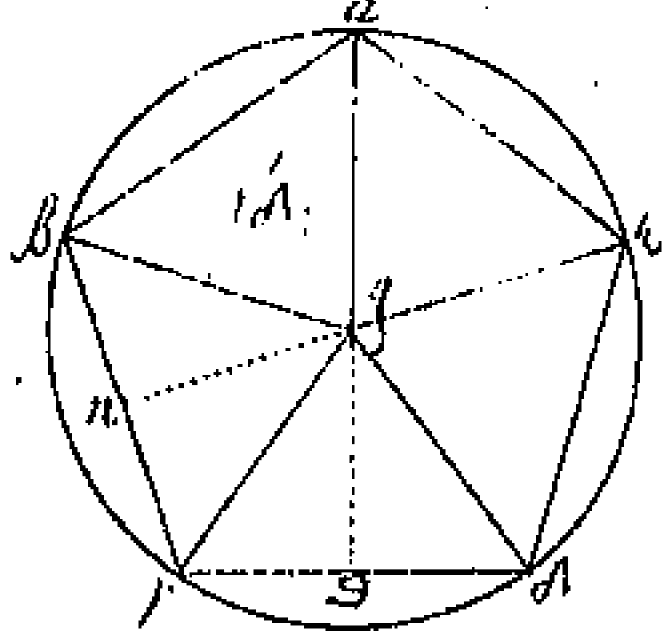
Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον περιγράψαι.

Φέρε δὴ περὶ τὸ α β γ δ ε, ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον πεντάγωνον, κύκλον περιγράψωμεν. Τμηθήτω ἑκατέρα τῶν β γ, γ δ, δίχα κατὰ τὰ η, θ, σημεῖα, καὶ ἀπὸ τῶν η, θ, σημείων κάθετοι ἀχθήτωσαν ἐπ᾽ αὐτῶν αἱ ζ η, ζ θ, συμβάλλουσαι

ἀλλή-

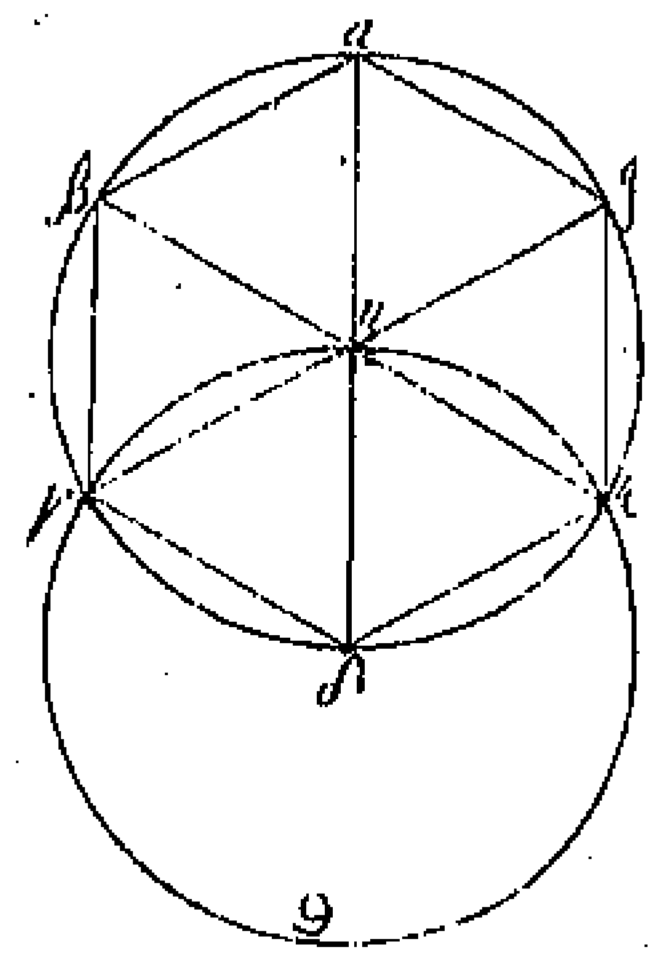
ἀλλήλαις κατὰ τὸ ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ ζ, ἐφ' ἑκάστην τοῦ πενταγώνου γωνίαν ἤχθωσαν αἱ ζα, ζβ, ζγ, ζδ, ζε. κατὰ τὸ πόρισμα ἄρα τῆς ιβ'. τοῦ παρόντος, αἱ ζα, ζβ, ζγ, ζδ, ζε, εὐθεῖαι δίχα τέμνουσι τὰς τοῦ πενταγώνου γωνίας. ὥστε ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ α, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ β. καὶ τῆς μὲν πρὸς τῷ α, ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ζαβ, τῆς δὲ πρὸς τῷ β, ἡ ὑπὸ ζβα, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ζαβ, τῇ ὑπὸ ζβα, κατὰ τὸ ζ'. ἀξίωμα. καὶ ἑπομένως ἡ ζα, εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ ζβ, κατὰ τὴν ε'. τοῦ α'. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ζγ, ζδ, ζε, ἴση ἐστὶν ἑκατέρᾳ τῶν ζα, ζβ. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ ζ, διαστήματι δὲ τῷ ζα, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῶν β, γ, δ, ε, σημείων. Τοῦ αβγδ, ἄρα κύκλου ἡ περιφέρεια ἅπτεται ἑκάστης γωνίας τοῦ αβγδε, πενταγώνου, καὶ ἑπομένως περιγέγραπται περὶ αὐτὸ κατὰ τὸν ς'. ὅρον τοῦ παρόντος. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 4. Fig. 12.



Πρότασις ΙΕ'. Πρόβλημα.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.



Φέρε δὴ εἰς τὸν αβγδεζ, κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψωμεν. Ἤχθω τοῦ κύκλου ἡ αδ, διάμετρος, καὶ εἰλήφθω τὸ η, κέντρον. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δη, κύκλος γεγράφθω ὁ γηεθ. καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ γη, εη, ἐξαχθήτωσαν κατὰ τὰ β, καὶ ζ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αβ, βγ, γδ, δε, εζ, ζα, καὶ τὸ αβγδεζ, ἑξάγωνον, ἰσόπλευρόν τε ἔσται καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ τὸ δ, κέντρον ἐστὶ τοῦ γηεθ, κύκλου, πάντως γε ἡ δγ, ἴση ἐστὶ τῇ δε. ἔστι δὲ καὶ τὸ η, κέντρον τοῦ αβγδεζ, ἄρα καὶ ἡ ηγ, ἴση ἐστὶ τῇ ηε. κοινῆς δὲ προσκειμένης τῆς ηδ, αἱ δύο πάντως γε γη, ηδ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς εη, ηδ, ἀλλὰ καὶ βάσις ἡ γδ, βάσει τῇ δε, ἴση ἐστίν, ἄρα καὶ γωνία ἡ ὑπὸ γηδ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εηδ, κατὰ τὴν η'. τοῦ α'. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ εηζ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ δηε, ὥστε αἱ τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ γηδ, δηε, εηζ, ἴσαι εἰσί, καὶ κατὰ τὴν ιε'. τοῦ α'. ἴσαι ἔτι εἰσὶν καὶ αἱ τούτων κατὰ κορυφήν, αἱ ὑπὸ γηβ, βηα, αηζ. αἱ ἓξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ αηβ, βηγ, γηδ, δηε, εηζ, ζηα, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἑπομένως αἱ αβ, βγ, γδ, δε, εζ, ζα, περιφέρειαι ἐφ' ὧν αἱ ῥηθεῖσαι βεβήκασι γωνίαι, ἴσαι ὁμοίως εἰσί, κατὰ τὴν κς'. τοῦ γ'. κατὰ δὲ τὴν κθ'. τοῦ αὐτοῦ, καὶ αἱ αβ, βγ, γδ, δε, εζ, ζα, εὐθεῖαι ἔτι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἰσόπλευρον ἄρα τὸ αβγδεζ, ἑξάγωνον. ὅτι δὲ καὶ ἰσογώνιον, δῆλον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ αβ, περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ γδ, κοινὴ προσκείσθω ἡ αζεδ, ὅλη ἄρα ἡ βαζεδ,

ἡ βαζεδ, ἴση ἐστὶ τῇ γδεζα, περιφερείᾳ. ἀλλ' ἐπὶ μὲν τῆς βαζεδ, βέβηκεν ἡ ὑπὸ βγδ, γωνία, ἐπὶ δὲ τῆς γδεζα, ἡ ὑπὸ γβα, ἄρα ἡ ὑπὸ βγδ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γβα, κατὰ τὴν κζ'. τοῦ γ'. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν πρὸς τοῖς α, ζ, ε, δ, γωνιῶν ἴση ἑκατέρᾳ τῶν πρὸς τοῖς β, γ. ὥστε τὸ αβγδεζ, ἑξάγωνον, ἰσογώνιόν ἐστι. δέδεικται δὲ καὶ ἰσόπλευρον. Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον ἑξάγωνον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Π Ό Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

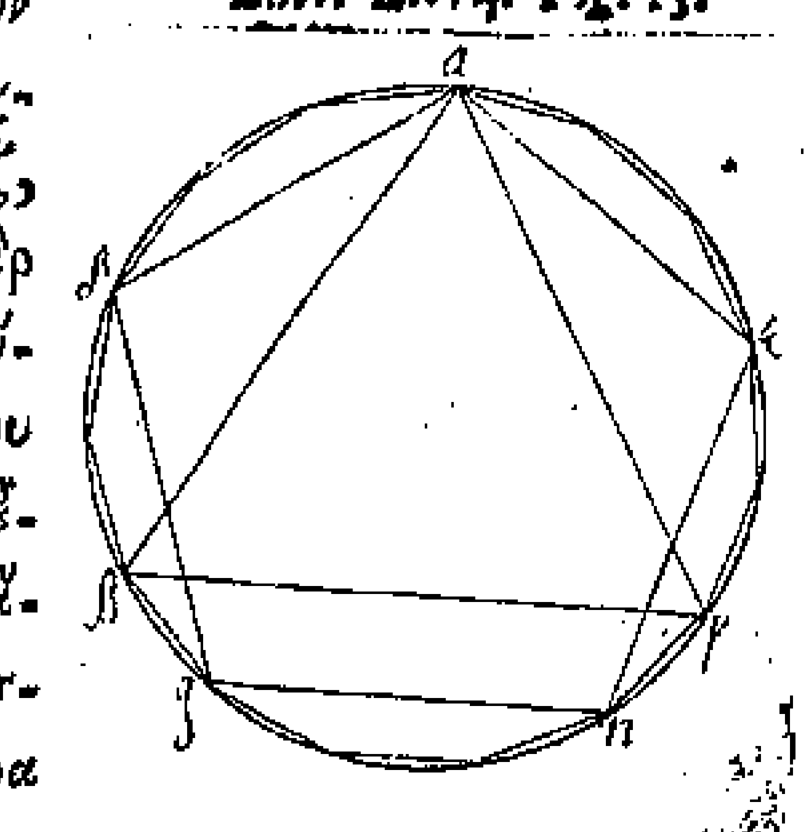
Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δυνατὸν εἰς οἱονδήποτε κύκλον ἑξάγωνον ἐγγράφειν. εἰδέ σοι βουλητὸν καὶ περὶ τὸν κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι, ἀχθήτωσαν διὰ τῶν α, β, γ, δ, ε, ζ, σημείων ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου, ὥσπερ δὴ καὶ ἐπὶ τοῦ πενταγώνου, καὶ ἔσται τὸ ζητούμενον. δυνατὸν δ' ἔτι, κατὰ τὰ περὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένα, εἰς τὸ δοθὲν ἑξάγωνον κύκλον ἐγγράφειν, ἢ περὶ τὸ δοθὲν ἑξάγωνον κύκλον περιγράφειν.

Πρότασις Ις'. Πρόβλημα.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Φέρε δὴ εἰς τὸν αβγ, κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψωμεν. Ἐγγραφήτω α. τὸ αβγ, ἰσόπλευρον τρίγωνον. εἶτα τὸ αδζηε, πεντάγωνον. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βζ, ηγ. Λέγω τοίνυν ἑκατέραν τῶν βζ, γη, πλευρὰν εἶναι τοῦ πεντεκαιδεκαγώνου. εἰς μὲν γὰρ τὴν αδβ, περιφέρειαν τρίτον οὖσαν ὅλης τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, πέντε πλευραὶ τοῦ πεντεκαιδεκαγώνου ἐφαρμοσθῆναι δυνατόν. εἰς δὲ τὴν αδ, πέμπτον οὖσαν μέρος, τρεῖς ἐφαρμοσθήσονται, εἰς τὴν λοιπὴν ἄρα δβ, δύο. ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν δβζ, τρεῖς ἐφαρμόττονται, ὡς πέμπτον τοῦ κύκλου καὶ αὐτὴν οὖσαν, ἄρα εἰς τὴν βζ, μία τοῦ πεντεκαιδεκαγώνου πλευρὰ ἐφαρμοσθήσεται, ὡσαύτως καὶ εἰς τὴν γη. ἐὰν ἄρα κατὰ τὸ ἐφεξῆς εὐθείας ἴσας τῇ βζ, ἢ γη, εἰς τὸν κύκλον ἐναρμόσωμεν, ἐγγραφήσεται πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. ὅπερ ἔδει τὸ προσαχθέν.

Eucl. Lib. 4. Fig. 13.



Τέλος τοῦ Τετάρτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

Προοί-

Προοίμιον τοῦ Πέμπτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

Τίς ὁ τοῦ Βιβλίου εὑρετὴς, ὁ σκοπὸς, τὸ χρήσιμόν τε καὶ τάξις.

Τὸ Πέμπτον τουτὶ Βιβλίον, ὡς καὶ τὰ πρὸ αὐτοῦ, Στοιχεῖον Εὐκλ. ἐπιγράφεται. οἱ δέ τινες εὑρετὴν τούτου εἶναι, Εὔδοξόν τινα τοῦ Πλάτωνος διδάσκαλον. τοῦ δὲ χάριν τὸ τοῦ Εὐδόξου ὄνομα ἀπολιπὸν, τὸ τοῦ Εὐκλείδου ἐκληρώσατο; ἢ ὅτι ἐκείνου μὲν ἡ εὕρεσις, τούτου δὲ ἡ τάξις τῶν ὅρων τε καὶ προτάσεων. καὶ παρ' Εὐδόξου τὰς ἀφορμὰς λαβὼν Εὐκλείδης εὐμεθοδέστερον ἐκείνου κατέστρωσέ τε αὐτὸ καὶ ἐρρυθμίσατο. δίδου γὰρ σοφῷ ἀφορμὴν καὶ σοφώτερος ἔσται.

Σκοπὸς δὲ τοῦ ὅλου Βιβλίου περὶ Ἀναλογιῶν διαλαβεῖν. Ἔστι δὲ Ἀναλογία σύγκρισις, ἤτοι σχέσις, λόγων τινῶν καθ' ὁμοιότητα, ἐν τρισὶν ὅροις τοὐλάχιστον θεωρουμένη. Λόγος δὲ δύο μεγεθῶν, ἢ ἀριθμῶν ἐστι σύγκρισις, λέγεται δὲ ὁ Λόγος καὶ σχέσις. ὅταν οὖν, φέρ' εἰπεῖν, δύο μεγέθη ἢ ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους συγκρίνωνται, τὰ μεγέθη μὲν ἢ οἱ ἀριθμοὶ, ὅροι καλοῦνται, ἡ δὲ τούτων σύγκρισις Λόγος, ἤτοι σχέσις, ὡς εἴρηται. ὅταν δὲ ὁ Λόγος οὗτος πρὸς ἕτερον ὅμοιον συγκρίνηται, ὡς ὁ τοῦ γ, καὶ ϛ, πρὸς τὸν τοῦ ϛ, καὶ ιβ, ἡ σύγκρισις αὕτη Ἀναλογία ἤκουσε. Διχῶς δὲ ἡ Ἀναλογία γενέσθαι δύναται. ἡ μὲν γὰρ Συνεχὴς, ἡ δὲ Διεζευγμένη. καὶ Συνεχὴς μὲν Ἀναλογία ἐστὶν, ἡ τοὺς ὅρους κατὰ τὴν σύγκρισιν συνεχεῖς ἔχουσα, ὡς ἡ τοῦ β, δ, η, ιϛ. καὶ λοιπῶν. Διεζευγμένη δὲ ἡ τοὺς ὅρους κατὰ τὴν σύγκρισιν ἀνὰ δύο λαμβάνουσα, ὡς ἡ τοῦ β, δ, ϛ, ιβ. Εἴδη δὲ τοῦ Λόγου πέντε. τρία μὲν ἁπλᾶ, τὰ δύο δὲ σύνθετα. καὶ ἁπλᾶ μὲν τὸ Πολλαπλάσιον, τὸ Ἐπιμόριον, καὶ τὸ Ἐπιμερές. καὶ Πολλαπλάσιον μὲν λέγεται μέγεθος μεγέθους τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν ὑπερέχει τὸ ἔλασσον ἅπαξ, ἢ δὶς, ἢ τρὶς, ἢ πλεονάκις. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν, ὡς ὁ δ, τοῦ β, καὶ ὁ θ, τοῦ γ. Ἐπιμόριον δὲ, ὅταν τὸ μεῖζον μέγεθος, ἢ ὁ ἀριθμὸς περιέχει τὸν ἐλάσσονα ἅπαξ, καὶ ἓν αὐτοῦ ἔτι ὁποιονδήποτε μέρος, ὡς ὁ δ, τοῦ γ, καὶ ὁ ε, τοῦ δ. Ἐπιμερὲς δὲ, ὅταν τὸ μεῖζον μέγεθος, ἢ ὁ ἀριθμὸς, περιέχει τὸν ἐλάττονα ἅπαξ, καί τινα αὐτοῦ μέρη, ὡς ὁ ε, τοῦ γ, καὶ ὁ ζ, τοῦ δ, καὶ οἱ ὅμοιοι. καὶ ταῦτα μὲν τὰ ἁπλᾶ. Σύνθετα δὲ τὸ Πολλαπλασιεπιμόριον, καὶ τὸ Πολλαπλασιεπιμερές. καὶ Πολλαπλασιεπιμόριον μὲν, ὅταν τὸ μεῖζον μέγεθος, ἢ ὁ ἀριθμὸς περιέχει τὸν ἐλάττονα πλεονάκις, καί τι μέρος αὐτοῦ, ὡς ὁ ζ, τοῦ γ, καὶ ὁ θ, τοῦ δ, καὶ λοιποί. Πολλαπλασιεπιμερὲς δὲ, ὅταν ὁ μείζων περιέχει τὸν ἐλάττονα πλεονάκις, καί τινα αὐτοῦ μέρη, ὡς ὁ η, τοῦ γ, ὁ ια, τοῦ δ, καὶ λοιποί.

Τοιαύτας μὲν οὖν τὰς προσηγορίας τὰ μείζω μεγέθη, ἢ οἱ μείζονες ἀριθμοὶ ἔλαχον. Τὰ ἐλάττονα δὲ μεγέθη, ἢ οἱ ἀριθμοὶ μετὰ τῆς, ὑπὸ, προφέρονται, πέν-

τε καὶ αὐτῶν ὄντων τῶν εἰδῶν, τὸ μὲν γὰρ Ὑποπολλαπλάσιον, τὸ δὲ Ὑπεπιμόριον, τὸ δὲ Ὑπεπιμερὲς, τὸ δὲ Ὑποπολλαπλασιεπιμόριον, καὶ τὸ ἔσχατον Ὑποπολλαπλασιεπιμερὲς λέγεται. Ἀρκτικαὶ δὲ Ἀναλογίαι τρεῖς, Γεωμετρικὴ, Ἀριθμητικὴ, καὶ Ἁρμονική.

Ἐπεὶ οὖν τουτὶ τὸ Βιβλίον περὶ Ἀναλογιῶν διαλαμβάνει, χρησιμεύει πάντως οὐ μόνον τῇ Γεωμετρίᾳ, ἀλλὰ καὶ Ἀριθμητικῇ τε καὶ Μουσικῇ, καὶ ταῖς τούτων ὑποβεβηκυίαις Ἐπιστήμαις. ἁπλῶς δ' εἰπεῖν πάσῃ Μαθηματικῇ Ἐπιστήμῃ ἐπωφελές πως ὑπάρχει.

Τάξιν δὲ καὶ εἱρμὸν, ὃν καὶ τὰ πρὸ αὐτοῦ τηρεῖ. προτεταγμένων γὰρ τῶν Ὅρων ἕπονται αἱ Προτάσεις. ἀλλά γε καὶ ἐπὶ τῶν ὅρων τε καὶ προτάσεων διδασκαλικὸν ἔχει τὸν τρόπον. ἀπὸ γὰρ τῶν ἁπλουστέρων ἀρχόμενον, ἐπὶ τὰ καθολικώτερα μεταβαίνει. Ὅροι δέ εἰσι τούτου οἱ πάντες εἴκοσι. Προτάσεις δὲ πέντε πρὸς ταῖς εἴκοσιν. ἀλλ' ἵνα μὴ περιττολογεῖν δόξωμεν, φέρε δὴ τῆς τῶν Ὅρων Ἑρμηνείας ἁψώμεθα.

ἈΠΟΣΗΜΕΙΏΣΗΣ.

* Σημείωσαι, ὅτι ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω σελίδος, ἀμέλει 104: στίχῳ ιϛ': ἔνθα φησὶν, ὡς ὁ τοῦ γ, καὶ ϛ, πρὸς τὸν τοῦ ϛ, καὶ ιβ, ληπτέον οὕτως, ἀντὶ τῆς σημασίας τοῦ, ὡς ὁ τοῦ 3, καὶ 6, πρὸς τὸν τοῦ 6, καὶ 12. ὡσαύτως καὶ στίχῳ ιθ': ὡς ἡ τοῦ 2, 4, 8, 16. Ὁμοίως καὶ τοὺς ἑξῆς τοιούσδε ἀριθμοὺς, τοὺς Ἀναλογίας παριστῶντας ἐπὶ τῆς αὐτῆς σελίδος.

Ποδηγετήσει ὑμᾶς ἡ Ἀποσημείωσις αὕτη ἐπὶ τὸ διαγινώσκειν τοὺς τοιούσδε ἀριθμοὺς, πανταχοῦ τῶν ἑπομένων Βιβλίων, καὶ Πραγματειῶν. ἐν οἷς συνεχῶς ὁ Συγγραφεὺς ἐχρήσατο τοῖς τοιούτοις Ἑλληνικοῖς Ἀριθμοῖς κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν σημασίαν, καὶ μάλιστα ἔνθα ἂν αὐτῷ λόγος γένηται περὶ Ἀναλογιῶν.

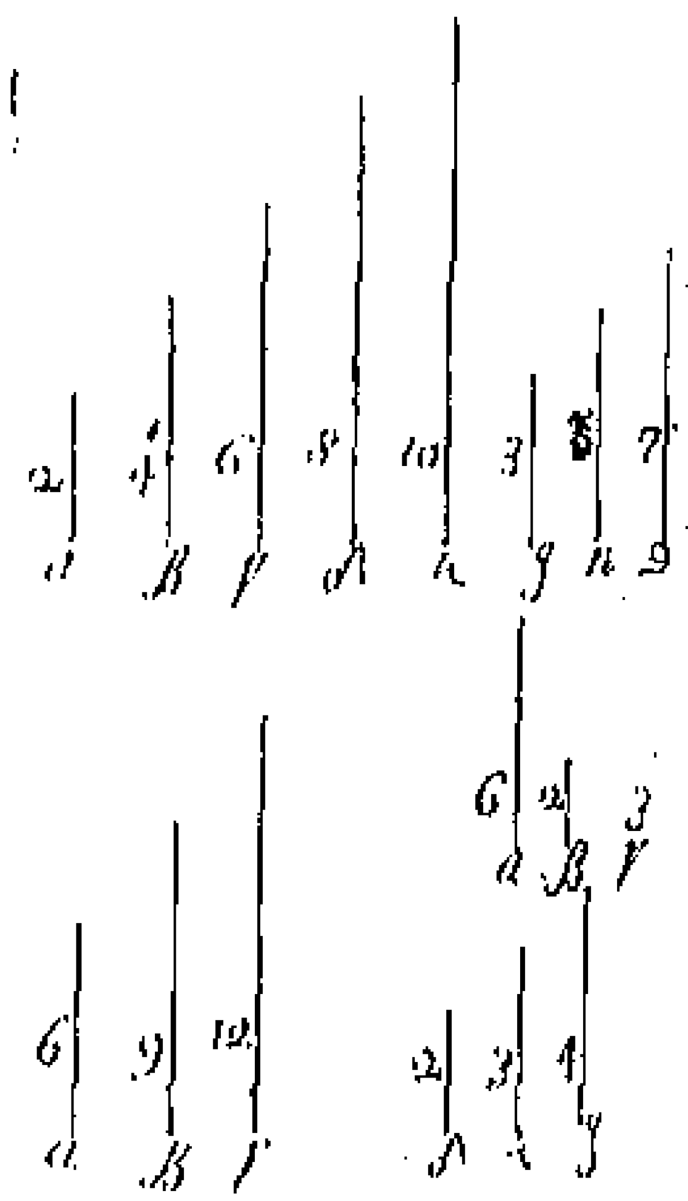
ΕʼΡΜΗΝΕΙʼΑ ΤΩʼΝ ΟʼΡΩΝ
ΤΟΥ̃ ΠΕʼΜΠΤΟΥ ΒΙΒΛΙʼΟΥ
ΤΩʼΝ ΤΟΥ̃ ΕΥʼΚΛΕΙʼΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙʼΩΝ.

Οʼρος Πρῶτος.

Μέρος ἐςὶ μέγεθος μεγέθους, τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον.

Ἐπειδὴ περὶ Ἀναλογιῶν ὁ τοῦ βιβλίου σκοπὸς, ὡς προείρηται, ἔδει πάντως ἐπὶ τῶν ὅρων καὶ τὸν τῆς Ἀναλογίας ἀποδοῦναι ὁρισμόν. Ἐκ Λόγων δὲ τῆς Ἀναλογίας συγκειμένης, δεῖ πρῶτον τὸν Λόγον ὁρίσασθαι. τοῦ Λόγου δὲ ἐν Μεγέθεσι θεωρημένου, περὶ τῆς τῶν Μεγεθῶν προσηγορίας οἰκειότερον διαλαβεῖν. διὸ δὴ καὶ Εὐκλείδης ἐπὶ τοῦ α: ὅρου τὸ Μέρος ὑπογράφει λέγων, Μέρος ἐςὶ Μέγεθος Μεγέθους καὶ τὰ ἑξῆς: τῶν γὰρ Μεγεθῶν, ὅσα λόγον πρὸς ἄλληλα ἔχουσι, τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ἢ μέρος, ἢ μέρη ἐςί. καὶ μέρος μὲν ἐπὶ τοῦ Πολλαπλασίου, μέρη δὲ ἐπὶ τῶν λοιπῶν εἰδῶν. τὸ γὰρ Πολλαπλάσιον μόνον μέγεθος ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος ὁλοκλήρως καταμετρεῖται. οἷον τὸ α, μέγεθος, μέρος μὲν λέγεται τῶν β γ δ ε, ὅτι καθʼ ἕνα ἕκαςον τούτων κατά τινα ὁλόκληρον καταμετρεῖ ἀριθμόν. τῶν δὲ ζ η θ, οὐκ ἔςι μέρος, ἀλλὰ μέρη τούτων τινὲς αὐτὸ ἀποκαλοῦσιν, οὐδὲν γὰρ αὐτῶν κατά τινα ὁλόκληρον καταμετρεῖ ἀριθμόν. τοῦδε χάριν μόνον τοῦ λόγον μέρους ἔχοντος Μεγέθους ἐμνήσθη, οὐ μὴν δὲ καὶ τοῦ λόγον ἔχοντος μερῶν; ἢ ὅτι τοῦ Πολλαπλασίου μόνου ἔμελλε τὸν ὁρισμὸν ἀποδοῦναι, ὡς ἁπλουςέρου τε, καὶ ταῖς ἀποδείξεσι χρησιμωτέρου, οὐχὶ δὲ καὶ τῶν λοιπῶν εἰδῶν.

Eucl. Lib. 5. Fig. 1.



Βʹ: Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος.

Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὅτι τῶν Μεγεθῶν, ὅσα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα, εἰ μὲν τὸ ἔλασσον καταμετρῇ τὸ μεῖζον, καταμετρεῖται πάντως καὶ τὸ μεῖζον ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος, καὶ τὸ μὲν ἔλασσον μέρος καλεῖται, ὡς ἤδη εἴρηται, τὸ μεῖζον δὲ πολλαπλάσιον. ὡς ἐπὶ τῶν [illegible] φαίνεται. οἷον τῶν α β, Μεγεθῶν, τὸ μὲν β, Μέρος, τὸ α, δὲ

δὲ Πολλαπλάσιον λέγεται. τὸ μὲν γὰρ καταμετρεῖ, τὸ δὲ καταμετρεῖται κατὰ τὸν γ, ἀριθμόν. Ἐὰν δὲ ὦσι πλείονα μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τῷ πλήθει, μείζονα δὲ τῷ μεγέθει, ἕκαςον δὲ τῶν μειζόνων ἰσάκις μετρεῖται ὑπὸ τοῦ ἰδίου μέρους, τὰ μείζονα μεγέθη ἰσάκις πολλαπλάσια λέγονται. οἷον ἐπεὶ τὰ α β γ, ἰσάκις μετρεῖται ὑπὸ τῶν δ ε ζ, ἰσάκις Πολλαπλάσια λέγονται.

Γʹ: Λόγος ἐςὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν, ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις.

Τῶν Μεγεθῶν τὸ μὲν κατὰ μῆκος μόνον θεωρεῖται, ὡς γραμμὴ, ἥτις καὶ ὑφʼ ἓν διαςατὸν λέγεται, τὸ δὲ κατά τε μῆκος, καὶ πλάτος, ὡς ἐπιφάνεια, ἥτις καὶ διχῆ διαςατὸν λέγεται, καὶ ἄλλα κατὰ μῆκος, πλάτος τε, καὶ βάθος, ὡς τὰ σώματα, ἃ καὶ τριχῆ διαςατὰ λέγεται. Τοῦ αὐτοῦ δὲ γένους Μεγέθη εἰσὶν, ὅσα ἢ κατὰ τὸ ὑφʼ ἓν διαςατὸν θεωρεῖται, ἢ κατὰ τὸ διχῆ διαςατὸν, ἢ κατὰ τὸ τριχῆ. Πηλικότης δὲ λέγεται ἡ τῶν μεγεθῶν ποσότης, ἥτις καὶ συνεχὴς ποσότης προσαγορεύεται, εἰς ἀντιδιαςολὴν τῆς τῶν ἀριθμῶν ποσότητος, ἥτις καὶ διωρισμένη παρὰ τοῖς πάλαι φιλοσόφοις λέγεται Ποσότης. ὥςε δῆλον ἐκ τούτων, ὅτι τῆς μὲν γραμμῆς πηλικότης, τὸ μῆκος μόνον λέγεται, ἐπιφανείας δὲ τὸ μῆκος ἅμα καὶ πλάτος, καὶ τοῦ σώματος τὸ μῆκος πλάτος τε, καὶ βάθος. Ὅταν οὖν συγκρίνηται γραμμὴ ἑτέρᾳ γραμμῇ, ἢ ἐπιφάνεια ἐπιφανείᾳ, ἢ σῶμα σώματι. τὰ μὲν συγκρινόμενα, Ὁμογενῆ μεγέθη λέγεται, ἡ δὲ τούτων σύγκρισις, Σχέσις κατὰ πηλικότητα. αὕτη δὲ ἡ Σχέσις, Λόγος μεγεθῶν προσαγορεύεται. Ἐπεὶ δὲ ἡ σύγκρισις τῶν μεγεθῶν πολυειδής ἐςι, κατὰ τὰ διάφορα τοῦ Λόγου εἴδη. ἐν γὰρ τοῖς πολλαπλασίοις, πολλαπλασιότης, ἢ ὑποπολλαπλασιότης δύναται λέγεσθαι. ἐν δὲ τοῖς ἐπιμορίοις, ὑπεροχὴ, ἢ ἔλλειψις καθʼ ἕν τι μέρος. καὶ ἐν τοῖς ἐπιμερέσιν, ὑπεροχὴ, ἢ ἔλλειψις κατὰ πλείονα μέρη, τούτου γε χάριν τὸ ποιὰ, προσέθηκεν, ὥςε πληροῦσθαι τὸν ὁρισμὸν τοῦ Λόγου τὸν τρόπον τοῦτον. Λόγος ἐςὶν ἡ τοιάδε τῶν μεγεθῶν σχέσις κατὰ πηλικότητα. Παρατηρητέον δὲ τὰ Μεγέθη ὁμογενῆ εἶναι. ἐν γὰρ τοῖς ἄλλου γένους μεγέθεσιν, οὔτε σύγκρισις ἀκριβὴς γενέσθαι δύναται. πῶς γὰρ γραμμὴ, ἐπιφάνεια, καὶ σῶμα ἀλλήλοις συγκριθῶσιν, ὅπου γε τὸ μὲν ὑφʼ ἓν διαςατὸν, τὸ δὲ διχῆ, καὶ τὸ ἄλλο τριχῆ διαςατόν ἐςι; οὔτε μὴν ἡ ὁποιασδήποτε αὐτοῖς γενομένη σύγκρισις Λόγος ὀνομασθῆναι δύναται.

Ἐκ τούτου δυνάμεθα καὶ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς Λόγου λαβεῖν. ὥσπερ γὰρ ὁ τῶν μεγεθῶν Λόγος, ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλά ἐςι ποιὰ σχέσις, οὕτω καὶ τῶν ἀριθμῶν, Λόγος ἐςὶν, ἡ κατὰ ποσότητα πρὸς ἀλλήλους ποιὰ σχέσις.

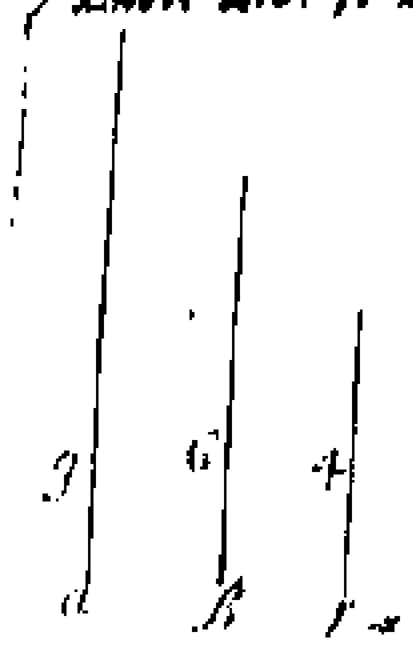
Δ'. Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

Ἀποδοὺς ἐν τῷ ἀνωτέρω ὅρῳ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἐν Μεγέθεσι Λόγου, βούλεται ἐπὶ τοῦ παρόντος δηλῶσαι, καὶ τίνα τὰ λόγον ἔχοντα Μεγέθη. ὥσπερ οὖν λόγος ἐστὶ τῶν ὁμογενῶν Μεγεθῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις, οὕτω καὶ Μεγέθη λόγον ἔχειν λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν. τίνα δὲ ταῦτα; ἢ τὰ ὁμογενῆ. γραμμὴ γὰρ γραμμῆς διὰ πολλαπλασιασμοῦ δύναται ὑπερέχειν, ὡσαύτως καὶ ἐπιφάνεια ἐπιφανείας, καὶ σῶμα σώματος. ὥστε γραμμὴ καὶ ἐπιφάνεια, ἢ ἐπιφάνεια καὶ σῶμα, ἢ σῶμα καὶ γραμμὴ λόγον ἔχειν οὐ δύνανται. οὔτε γὰρ ἡ γραμμὴ ἐπιφανείας, ἢ σώματος διὰ πολλαπλασιασμοῦ ὑπερέχειν δύναται, οὔτε ἡ ἐπιφάνεια γραμμῆς, καὶ σώματος, οὔτε μὴν τὸ σῶμα γραμμῆς καὶ ἐπιφανείας. τὰ ὁμογενῆ ἄρα μόνα Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα λέγεται.

Ε'. Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου, ἢ ἅμα ἐλλείπῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ, ληφθέντα κατάλληλα.

Δηλώσας ἐν τῷ ἀνωτέρω τίνα τὰ λόγον ἔχοντα μεγέθη, βούλεται ἐπὶ τοῦ παρόντος διασαφῆσαι, καὶ τίνα τῶν Μεγεθῶν ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι λόγῳ λέγεται. ὥσπερ δὴ ὁ λόγος ἐν δύο μεγέθεσι θεωρεῖται, οὕτω καὶ ἡ τῶν λόγων Ὁμοιότης ἐν δυσὶ τοὐλάχιστον λόγοις εὑρίσκεται, ἡ γὰρ Ὁμοιότης σχέσις ἐστίν, ἡ δὲ σχέσις ἀναφορά τινος πρὸς ἕτερον. δύο δὲ λόγοι ἐν τέσσαρσι περιέχονται μεγέθεσι. διὸ καὶ ἔφη, πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον. εἰ δὲ καὶ ἐν τρισὶ μεγέθεσι δύο λόγοι ἐνίοτε περιληφθῆναι δύνανται, ἀλλά γε καὶ οὕτω ὡς τέσσαρα ἐννοεῖται, δὶς γὰρ τὸ δεύτερον λαμβάνεται. οἷον ἐν τοῖς α β γ, μεγέθεσι δύο λόγοι θεωροῦνται, ὡς γὰρ τὸ α, πρὸς τὸ β, οὕτω τὸ β, πρὸς τὸ γ. ἰδοὺ δὴ τὸ β, δὶς λαμβανόμενον. ὥστε τὰ α β γ, ἐνεργείᾳ μὲν τρία ἐστὶ μεγέθη, δυνάμει δὲ τέσσαρα. Ὅταν οὖν ἐν τέσσαρσι μεγέθεσι, τοῦ πρώτου πρὸς τὸ δεύτερον παραβαλλομένου, καὶ τοῦ τρίτου πρὸς τὸ τέταρτον, ἡ αὐτὴ σχέσις εὑρεθῇ, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν λέγεται. Ἵνα δὲ τοῦτο εὐχερῶς ἔχωμεν θηρεύειν. ἐπεὶ τὸν ἐν μεγέθεσι λόγον οὐκ ἀεὶ γινώσκομεν, ὥσπερ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς, διὰ τὸ ἀσαφὲς εἶναι ὁποῖον μέρος τὸ ἔλαττον τοῦ μείζονός ἐστι μεγέθους, τούτου ἕνεκα δεῖ ἑκάστου τῶν τεσ-

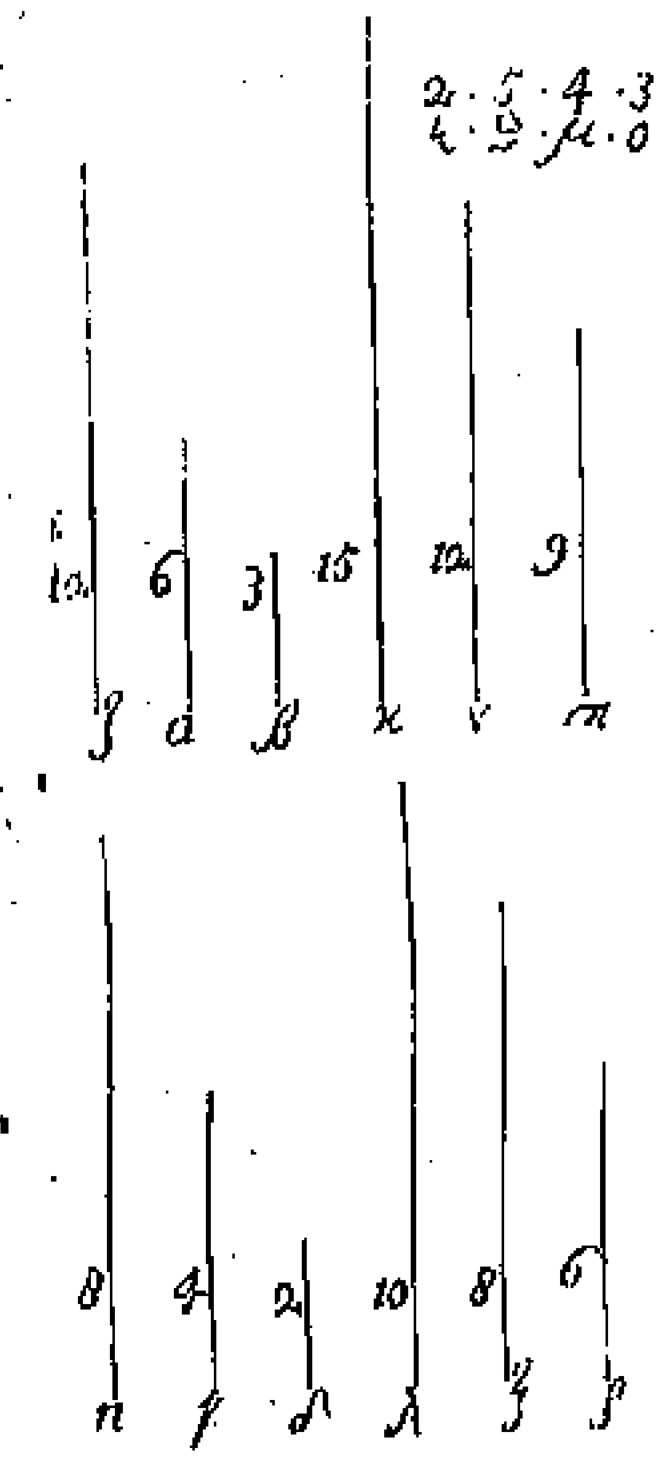
Eucl. Lib. 5. Fig. 1.



σάρων

σάρων μεγεθῶν πολλαπλάσιόν τι λαμβάνειν, ὥστε τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις εἶναι πολλαπλάσια, ὥσπερ καὶ τὰ τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου. εἶτα παραβάλλειν τὸ τοῦ πρώτου ἰσάκις πολλαπλάσιον τῷ τοῦ δευτέρου, καὶ τὸ τοῦ τρίτου τῷ τοῦ τετάρτου, κἂν μὲν ἅμα τὸ τοῦ πρώτου ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ἰσάκις πολλαπλασίου τοῦ δευτέρου, καὶ ἅμα τὸ τοῦ πρώτου ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ἰσάκις πολλαπλασίου τοῦ τετάρτου ἐλλείπω- τὸ τοῦ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ἰσάκις πολλαπλασίου τοῦ σιν, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχωσι, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν λέγεται, καὶ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον. οἷον ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη τὰ α β, γ δ, καὶ τὰ μὲν α, καὶ γ, πρῶτον δηλ: καὶ τρίτον πολλαπλασιαθήτωσαν ἐπὶ τὸν ε, ἀριθμόν, καὶ ἔστωσαν τούτων ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ζ, η. τὰ δὲ β, δ, δεύτερον καὶ τέταρτον ἐπὶ τὸν θ, καὶ ἔστωσαν τούτων ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ κ λ. Αὖθις πολλαπλασιαθήτωσαν τὰ αὐτὰ β, δ, ἐπὶ τὸν μ, καὶ ἔστωσαν τούτων ἕτερα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ν, ξ. καὶ τελευταῖον πολλαπλασιαθήτωσαν τὰ αὐτὰ ἐπὶ τὸν ο, καὶ ἔστωσαν τῶν αὐτῶν καὶ ἕτερα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ π, ρ. εἶτα παραβληθήτωσαν χωρὶς τὰ ζ η, τοῖς κ λ, ν ξ, π ρ. καὶ ἐπεὶ ἐν τῷ πρώτῳ πολλαπλασιασμῷ τό, τε ζ, τοῦ κ, καὶ τὸ η, τοῦ λ, ἅμα ἐλλείπουσιν, ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ ἅμα ἰσάζει τό, τε ζ, τῷ ν, καὶ τὸ η, τῷ ξ, καὶ ἐν τῷ τρίτῳ πολλαπλασιασμῷ τό, τε ζ, τοῦ π, καὶ τὸ η, τοῦ ρ, ἅμα ὑπερέχουσιν, ἔστι πάντως ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς τὸ πρῶτον α, πρὸς τὸ δεύτερον β. οὕτω τὸ γ, τρίτον πρὸς τέταρτον τὸ δ.

Eucl. Lib. 5. Fig. 3.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ὥστε δυνάμεθα ἐκ τούτου συναγαγεῖν καὶ ἀνάπαλιν, ὅτι ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου, τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου, ἢ ἅμα ἐλλείπει, ἢ ἅμα ὑπερέχει, ἢ ἅμα ἰσάζει ληφθέντα κατάλληλα.

ς'. Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα μεγέθη λόγον, ἀνάλογα καλείσθω.

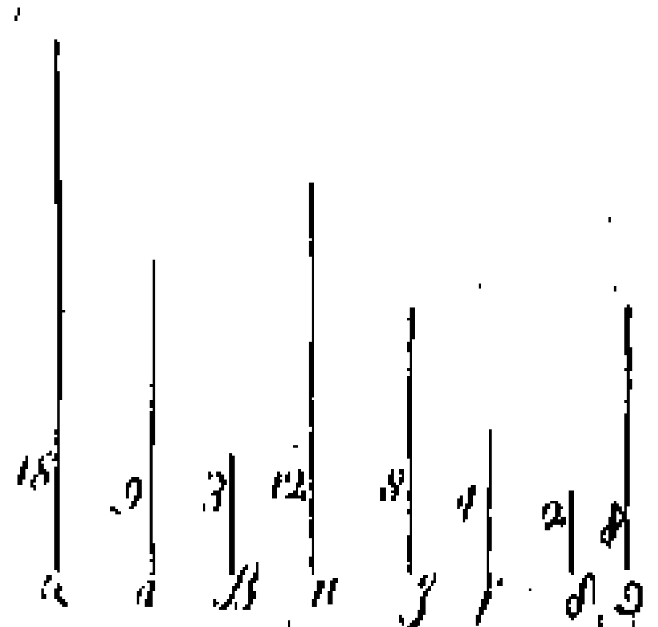
Διδάξας τὸν τρόπον, καθ' ὃν τὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα μεγέθη εὑρίσκειν ἔχομεν, καὶ πῶς δεῖ ταῦτα καλεῖν ἤδη κελεύει. τὰ γοῦν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα Ἀνάλογα καλεῖν ἐθέλει. ὥστε ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος τὰ α β, γ δ, Ἀνάλογά εἰσι, τὸν αὐτὸν γὰρ ταῦτα ἔχει λόγον.

Ζ'. Ὅταν

Z': Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων, τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ γ': πρὸς τὸ δ'.

Καθάπερ τὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα μεγέθη διὰ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων γινώσκομεν, οὕτωγε διὰ τῶν αὐτῶν, καὶ τῶν μὴ τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων μεγεθῶν τὸ μείζονα λόγον ἔχον θηρεῦσαι ἔχομεν. Κείσθωσαν οὖν τέσσαρα μεγέθη τὰ α β, γ δ. καὶ εἰλήφθωσαν, ὡς καὶ πρότερον, τὰ τε τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ ε, καὶ ζ. καὶ τὰ τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου τὰ η, θ. καὶ παραβεβλήσθωσαν τὰ ε, καὶ ζ, τοῖς η, καὶ θ. καὶ ἐπεὶ τὸ ε, ὑπερέχει τοῦ η, καὶ τὸ ζ, οὐχ ὑπερέχει τοῦ θ, διάτοι τοῦτο τὸ α, πρὸς τὸ β, μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ γ, πρὸς τὸ δ. Ἰστέον δ' ὅτι καὶ ἐπὶ τῶν μείζονα λόγον ἐχόντων μεγεθῶν ἐνίοτε εὑρίσκεται τό, τε τοῦ πρώτου ἰσάκις πολλαπλάσιον ὑπερέχον τοῦ ἰσάκις πολλαπλασίου τοῦ δευτέρου, καὶ τὸ τοῦ τρίτου, τοῦ ἰσάκις πολλαπλασίου τοῦ τετάρτου, ἀλλ' οὐκ ἰσάκις. ἐὰν δὲ καὶ ἐφ' ἕτερον ἀριθμὸν πολλαπλασιασθῶσι, καὶ τοῦτο γένηται δὶς καὶ τρὶς, οὐ πάντως ἀεὶ ὑπερέξει τὸ τοῦ πρώτου ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ἰσάκις πολλαπλασίου τοῦ δευτέρου, καὶ τὸ τοῦ τρίτου τοῦ ἰσάκις πολλαπλασίου τοῦ τετάρτου. ἀλλ' ὅταν τὸ τοῦ πρώτου ἴσον ᾖ τῷ τοῦ δευτέρου, τὸ τοῦ τρίτου, ἔλαττον ἔσται τοῦ τετάρτου, ὅταν δὲ τὸ τοῦ τρίτου ἴσον ᾖ τῷ τοῦ τετάρτου, τὸ τοῦ πρώτου μεῖζον ἔσται τοῦ δευτέρου. διὸ δὴ ἵνα τὸ μείζονα λόγον ἔχον μέγεθος εὑρεθῇ, ἐπί τε μείζονας ἀριθμοὺς καὶ ἐλάττονας δεῖ τὰ μεγέθη πολλαπλασιάζεσθαι.

Eucl. Lib. 5. Fig. 4.



H': Ἀναλογία δέ ἐστιν, ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης.

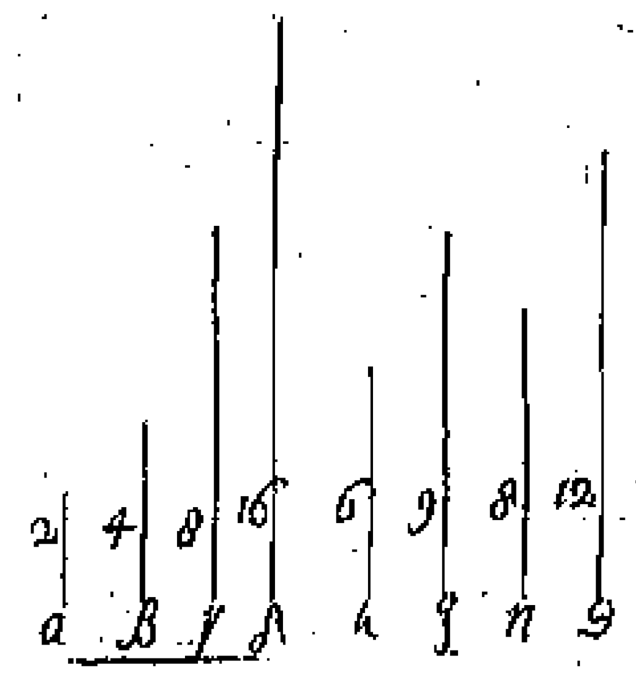
Ὁρίσας ἀνωτέρω τὸν ἐν τοῖς μεγέθεσι λόγον, καὶ τίνα μὲν τὰ λόγον ἔχοντα μεγέθη, τίνα δὲ τὰ ἐν τῷ αὐτῷ ὄντα λόγῳ δεδειχὼς, καὶ πῶς τὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα καλεῖται, διδάξας μέχρι τοῦ ς': ὅρου, ἐπὶ τοῦ παρόντος καὶ τὸν τῆς Ἀναλογίας συνάγει ὁρισμόν. καί φησιν, Ἀναλογία ἐστὶν, ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης. ὥσπερ γὰρ τὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα μεγέθη Ἀνάλογα καλεῖσθαι προσέταττεν, οὕτω τοι καὶ Ἀναλογίαν τὴν τῶν λόγων ὁμοιότητα καλεῖν ἐθέλει. ὅταν οὖν ἐν πλείοσιν, ἢ δυσὶ μεγέθεσιν, ὡς ἐν τοῖς α β γ, ἢ δ ε ζ, ὁ αὐτὸς λόγος εὑρίσκηται. τὰ μὲν μεγέθη ἐκεῖνα, ὡς εἴρηται, Ἀνάλογα καλεῖται. ἡ δὲ τῶν ἐν αὐτοῖς λόγων ὁμοιότης Ἀναλογία. ὥστε δῆλον ἐκ τούτου, ὅτι ἡνίκα ἐν πλείοσι μεγέθεσιν ὁ αὐτὸς λόγος οὐ θεωρεῖται, ἀλλ' ἐν μὲν τοῖς, ἕτερός τις εὑρίσκηται, ἐν δὲ τοῖς, ἄλλος. οὔτε τὰ μεγέθη ἐκεῖνα Ἀνάλογα καλεῖσθαι δύναται, οὔτε μὴν ἡ τῶν ἐν αὐτοῖς λόγων σύγκρισις Ἀνα-

Ἀνα-

λογία, ἀλλ' ὡς οὕτως εἰπεῖν, Ἑτερολογία τις, καὶ τὰ μεγέθη ἐκεῖνα Ἑτερόλογα. ὡς ἐπὶ τοῦ ὑποδείγματος τοῦ ζ': ὅρου δῆλον καθίσταται.

Ἰστέον δὲ, ὅτι τῆς Ἀναλογίας εἰς δύο διαιρουμένης εἴδη, ἡ μὲν Συνεχὴς, ἡ δὲ Διεζευγμένη, ἢ καὶ Διηχὴς λέγεται. καὶ Συνεχὴς μὲν, ἡνίκα ὁ αὐτὸς λόγος ἐν πλείοσιν, ἢ δυσὶ μεγέθεσι κατὰ συνέχειαν θεωρεῖται, ὡς ἐν τοῖς α β γ δ, ὡς γὰρ ἔχει τὸ α, πρὸς τὸ β, οὕτως καὶ τὸ β, πρὸς τὸ γ, καὶ τὸ γ, πρὸς τὸ δ. διὸ καὶ τὰ τοιαῦτα μεγέθη, Ἀνάλογα Συνεχῆ καλείσθωσαν. Διεζευγμένη δὲ, ὁπηνίκα ἐν πλείοσιν, ἢ δυσὶ μεγέθεσιν ὁ αὐτὸς μὲν λόγος θεωρεῖται, οὐ μὴν δὲ κατὰ συνέχειαν, ὡς ἐν τοῖς ε ζ, η θ. ὡς γὰρ ἔχει τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, οὐκ ἔτι φαμὲν καὶ τὸ ζ, πρὸς τὸ η, ἀλλά γε οὕτως ἔχει καὶ τὸ η, πρὸς τὸ θ. ὅθεν τὰ τοιαῦτα Ἀνάλογα Διεζευγμένα καλείσθωσαν.

Eucl. Lib. 5. Fig. 5.



Θ': Ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστοις ἐστίν.

Ἐπεὶ ἡ Ἀναλογία λόγων ἐστὶν ὁμοιότης, κατὰ τὰ ἀνωτέρω. ἡ δὲ τῶν λόγων ὁμοιότης ἐν πλείοσιν, ἢ δυσὶ μεγέθεσι πέφυκε γίνεσθαι, ἀδύνατον γὰρ ἐν δυσὶ μόνοις μεγέθεσι δύο λόγους θεωρεῖσθαι, ἀναγκαῖον πάντως εἰδέναι καὶ μέχρι πόσων συστελλομένη μεγεθῶν ἡ Ἀναλογία δύναται σώζεσθαι. διὸ δὴ καὶ τοῦτο διασαφῆσαι ἡμῖν βουλόμενος Εὐκλείδης ἐπ' ἐλάττονας τῶν τριῶν ὅρων, φησὶ, μὴ καταλήγειν. Ὅρους δὲ τὰ μεγέθη, ἐν οἷς ἡ Ἀναλογία, καλεῖ. δείξεται γάρ πως ἐν αὐτοῖς ἡ Ἀναλογία. Ἵνα δὲ ὁ λόγος πληρέστερος γένηται, ἰστέον, ὅτι ἡ μὲν Συνεχὴς Ἀναλογία, περὶ ἧς καὶ Εὐκλ: τὸν λόγον πεποίηκεν, ἐν τρισὶν, ὡς εἴρηται, ἐλαχίστοις ὅροις ἐστὶν, ἡ δὲ Διεζευγμένη ἐν τέσσαρσιν.

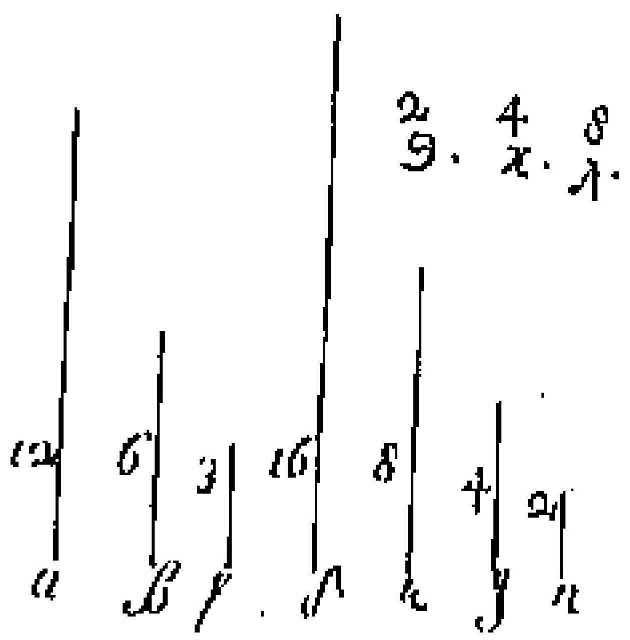
Ι': Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον.

ΙΑ': Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἐν πλείον, ἕως ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ.

Εἰ καὶ τοῖς κατὰ συνέχειαν λόγον ἔχουσι μεγέθεσιν, ἕκαστον τῶν μεγεθῶν τῷ πλησίον παραβάλλεται, καθ' ὃ καὶ ἡ συνεχὴς Ἀναλογία συνίσταται. δύναται ἔμπης καὶ πρὸς τὰ ἀπώτερον παραβληθῆναι. Ἐπεὶ δὲ ὅσῳ μᾶλλον ἀπώτερόν ἐστι, πρὸς ὃ ἡ παραβολὴ, τοῦ παραβαλλομένου, τοσούτῳ καὶ τὸ παραβαλλόμενον μείζονα πρὸς ἐκεῖνο ἔχει τὸν λόγον. διὰ τοῦτο καὶ Εὐκλείδης τὴν τῶν πρὸς τὰ ἀπώτερον λόγων ὑπεροχὴν δηλῶσαι βουλόμενος, δυσὶν ἐχρήσατο παραδείγμασιν, εἰπὼν, ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον καὶ τὰ ἑξῆς. Ἵνα δὲ τοῦτο δῆ-

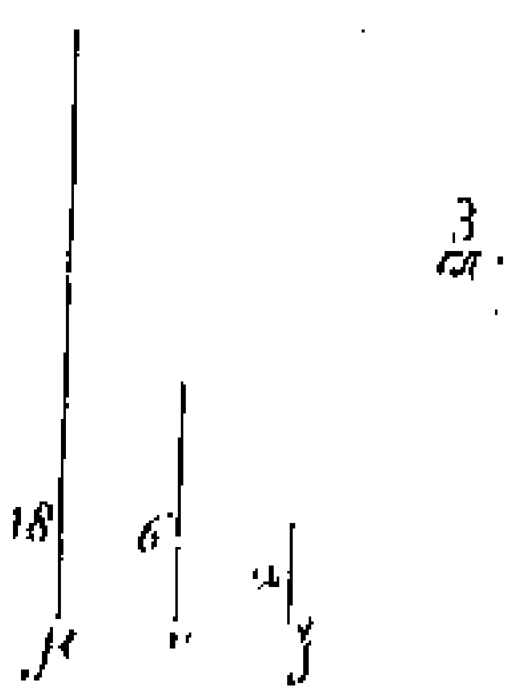
τοῦτο δῆτὸ δῆλον γένηται, ἔςωσαν ἐπὶ παραδείγματος τρία μὲν μεγέθη ἀνάλογα συνεχῆ τὰ α β γ, τέσσαρα δὲ τὰ δ ε ζ η. τὸ οὖν α, πρὸς τὸ γ, παραβαλλόμενον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ β. τὸ δὲ δ, πρὸς τὸ η, παραβαλλόμενον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ ε. σαφὲς δὲ τὸ λεγόμενον. μεταξὺ γὰρ τοῦ α, καὶ γ, δύο λόγοι θεωροῦνται, ὅ, τε τοῦ α, πρὸς τὸ β, καὶ ὁ τοῦ β, πρὸς τὸ γ. διὸ καὶ ὁ τοῦ α, πρὸς τὸ γ, λόγος, διπλασίων λέγεται τοῦ λόγου τοῦ αὐτοῦ α, πρὸς τὸ β. μεταξὺ δὲ τοῦ δ, καὶ η, τρεῖς λόγοι εἰσί. διὸ καὶ ὁ τοῦ δ, πρὸς τὸ η, λόγος, τριπλασίων λέγεται τοῦ λόγου τοῦ αὐτοῦ δ, πρὸς τὸ ε. Ἐὰν δὲ τὰ μεγέθη πέντε ὦσι, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ πέμπτον τετραπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον. εἰ δὲ ἕξ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἕκτον πενταπλασίονα, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον. καὶ ἐπὶ τῶν ἑξῆς ὡσαύτως, αὐξανομένου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μεγεθῶν, αὔξηται καὶ ὁ λόγος τῶν ἄκρων.

Eucl. Lib. 5. Fig. 6.



Εἰς σαφεστέραν δὲ κατάληψιν τῶν εἰρημένων, ἰστέον, ὅτι ὁ τοῦ πρώτου μεγέθους λόγος πρὸς τὸ ἔσχατον, σύγκειται ἐκ τῆς πηλικότητος τῶν μεταξὺ μεγεθῶν. οἷον ἡ πηλικότης τοῦ α, πρὸς τὸ β, καὶ τοῦ β, πρὸς τὸ γ, ἐστὶν ὁ θ. τοῦ δὲ θ, πρὸς ἑαυτὸν ἅπαξ πολλαπλασιαζομένου, γίνεται ὁ κ, ὁ γοῦν κ, ἐστὶν ὁ λόγος, ὃν ὁ α, πρὸς τὸ γ, ἔχει. Ἐπεὶ δὲ καὶ τῶν δ ε ζ η, ἡ κατὰ συνέχειαν πρὸς ἄλληλα πηλικότης ἐστὶν ὁ αὐτὸς θ, τοῦ δὲ θ, δὶς πρὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιαζομένου, γίνεται ὁ λ, τὰ γὰρ δύο δὶς λαμβανόμενα τέσσαρα ποιοῦσι, τὰ τέσσαρα δ' αὖθις δὶς λαμβανόμενα ὀκτώ, ὁ λ, πάντως ἐστὶν ὁ λόγος, ὃν ὁ δ, πρὸς τὸ η, ἔχει. καὶ τοῦτο δὲ νοητέον τὸ τοῦ λόγου ἐν τοῖς τοιούτοις διπλάσιον, τριπλάσιον, τετραπλάσιον, καὶ πᾶσαν τὴν ἐπὶ τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ αὔξησιν. εἰ γὰρ ἐννοήσῃ τις τὸν τοῦ πρώτου πρὸς τὸ τρίτον λόγον, διπλάσιον εἶναι κατὰ πηλικότητα, ἀπατηθήσεται. Ἔςωσαν γὰρ ἕτερα μεγέθη συνεχῆ ἀνάλογα κατὰ τὸν τριπλάσιον λόγον τὰ μ ν ξ, ὧν πηλικότης ἐστὶν ὁ π. τούτου δὲ πρὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιαζομένου ἅπαξ, γενέσθω ὁ ρ. τὸ μ, ἄρα πρὸς τὸ ξ, ἔχει τὸν ρ, λόγον, τουτέστι τὸ μ, ἐννεαπλάσιόν ἐστι τοῦ ξ, ἐπεὶ δὲ ὁ μ, τοῦ ν, τριπλάσιός ἐστιν, εἴγε ὁ τοῦ μ, λόγος πρὸς τὸ ξ, διπλάσιος ἦν κατὰ πηλικότητα τοῦ λόγου τοῦ αὐτοῦ μ, πρὸς τὸ ν, ἔδει πάντως τὸ μ, τοῦ ξ, ἑξαπλάσιον εἶναι, δὶς γὰρ ὁ τρία λαμβανόμενος τὸν ἓξ ποιεῖ, ἀλλὰ τοῦτο οὐκ ἔστιν, ἐννεαπλάσιον γάρ, ὡς εἴρηται, εὑρίσκεται τὸ μ, τοῦ ξ. δεῖ ἄρα τὸ διπλάσιον τοῦ λόγου τῶν ἄκρων, ἢ τριπλάσιον, ἢ ἄλλως πως πολλαπλάσιον μὴ κατὰ πηλικότητα ἐννοεῖν, ἀλλὰ καθ' ὃ ἐκ δύο, ἢ τριῶν σύγκειται λόγων, ταὐτὸν δ' ἐστὶν εἰπεῖν, μὴ κατὰ διπλασίασιν, ἢ τριπλασίασιν τῆς προσθήκης τῆς τοῦ λόγου πηλικό-

Eucl. Lib. 5. Fig. 7.



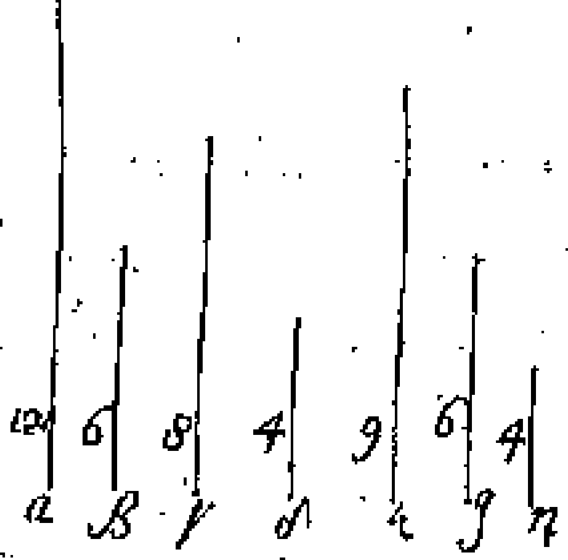
τητος,

τητος, ἀλλά γε κατὰ διπλασίασιν, ἢ τριπλασίασιν τῆς πολλαπλασιάσεως τῆς αὐτῆς πηλικότητος.

ΙΒ': Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται εἶναι, τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις, τὰ δὲ ἑπόμενα τοῖς ἑπομένοις.

Ἐπεὶ εἰς λόγον ἀρχῆς οὐχ ἧττον καὶ τὰ Ὁμόλογα λαμβάνεται, ἢ τὰ ἀνάλογα, διά τοι τοῦτο ἐπὶ τοῦ παρόντος διδάσκει, καὶ τίνα χρὴ Ὁμόλογα καλεῖν, λέγων, Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται εἶναι, τὰ μὲν ἡγούμενα καὶ τὰ ἑξῆς. ἵνα δὲ καὶ τοῦτο σαφέστερον γένηται, ἀναγκαῖον εἰδέναι τίνα τῶν μεγεθῶν ἡγούμενα, καὶ τίνα ἑπόμενα λέγεται. τούτων γὰρ ἀγνοουμένων, οὐδὲ τὰ Ὁμόλογα γνωσθήσεται. τῶν ἐν τῷ αὐτῷ ὄντων λόγῳ μεγεθῶν, τὰ μὲν προλαμβανόμενα, ἢ γοῦν ἀναφερόμενα, ὁποῖα ἂν ὦσιν, Ἡγούμενα λέγεται, τὰ δὲ προσλαμβανόμενα, ἢ πρὸς ἃ ἡ ἀναφορά, Ἑπόμενα καλεῖται. οἷον ἔςωσαν τέσσαρα μεγέθη τὰ α β, γ δ, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, τουτέστιν ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ γ, πρὸς τὸ δ. τὰ γοῦν α γ, κἄν τε ὑπερέχωσι τῶν β δ, κἄν τε ἐλλείπωσιν, Ἡγούμενα καλεῖται, ὡς προταττόμενα ἅμα καὶ προλαμβανόμενα. τὰ δὲ β, καὶ δ, Ἑπόμενα, ὡς ὑποταττόμενα. Ἐπεὶ δὲ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τὰ α β, τοῖς γ δ. ἐὰν μὲν τὰ δύο ὁμοῦ α β, τοῖς δυσὶ γ δ, παραβάλλωνται, ἀνάλογα καλεῖται, κατὰ τὸν ϛ': τοῦ παρόντος ὅρον, ὡς ἀναλογίαν τινὰ πρὸς ἄλληλα ἔχοντα. ἐὰν δὲ τὸ α, χωρὶς τῷ γ, παραβάλληται, καὶ τὸ β, τῷ δ, Ὁμόλογα καλεῖται. ὃν γὰρ τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸν αὐτὸν καὶ τὸ γ, πρὸς τὸ δ, λόγον ἔχει. καὶ ἀνάπαλιν, ὃν λόγον ἔχει τὸ β, πρὸς τὸ α, τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ τὸ δ, πρὸς τὸ γ. ἐὰν δὲ συνεχὴς ἡ ἀναλογία ᾖ, ὡς ἐπὶ τῶν ε ζ η. ἐπεὶ τὸ ζ, δὶς λαμβάνεται, ὡς γὰρ τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, οὕτως ἔχει καὶ τὸ αὐτὸ ζ, πρὸς τὸ η, τὸ ζ, ἑπόμενόν τε ἐστι, καὶ ἡγούμενον, ἑπόμενον μὲν πρὸς τὸ ε, ἡγούμενον δὲ πρὸς τὸ η. ὥστε τὰ μὲν ε ζ, ὡς ἡγούμενα, τὰ δὲ ζ η, ὡς ἑπόμενα, Ὁμόλογά ἐστι.

Eucl. Lib. 5. Fig. 8.



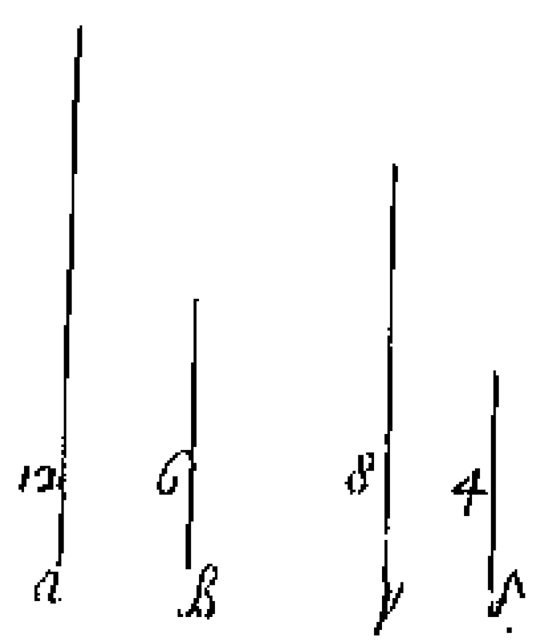
ΙΓ': Ἐναλλὰξ λόγος ἐστὶ, λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον, καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον.

Δεδειχὼς μέχρι τοῦδε, τίς τε ὁ λόγος τῶν μεγεθῶν, καὶ τίνα μεγέθη λόγον πρὸς ἄλληλα ἔχειν δύναται, τίνα δὲ ἐν τῷ αὐτῷ εἰσι λόγῳ, καὶ πῶς τὰ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον καλεῖται, τίνα τε τὰ ἡγούμενα, καὶ τίνα τὰ ἑπόμενα, καὶ ἄλλα, ὅσα εἰς ἀκριβῆ τῆς ἀναλογίας συντείνουσι γνῶσιν, ἄρχεται ἐντεῦθεν δεικνύναι, καὶ πόσα τὰ τοῦ λόγου εἴδη. Ὁ Λόγος μὲν οὖν τῶν ὁμογενῶν μεγεθῶν, ἡ κατὰ πηλικότητα δῆλον: πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις, ὡς γένος λαμβάνεται. εἴδη δὲ τούτου ἕξ, τὸ Ἐναλλάξ, τὸ Ἀνάπαλιν, ἡ Σύνθεσις, ἡ Διαίρεσις, ἡ Ἀναστροφή, καὶ

P τὸ Δι'

τὸ Δι᾽ ἴσου. τινὲς δὲ τὰ ἓξ ταῦτα τοῦ λόγου εἴδη, καὶ ἐπιχειρήματα καλεῖν γεωμετρικὰ εἰώθασιν, ὡς χρησιμεύοντα εἰς δεῖξιν τῶν γεωμετρικῶν προβλημάτων. Ἐναλλὰξ οὖν λόγος τότε λέγεται, ὅταν ἡ σύγκρισις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον, καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον γένηται, οἷον τεσσάρων ὄντων μεγεθῶν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, τῶν α β γ δ, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ α, ἡγούμενον πρὸς τὸ β, ἑπόμενον, οὕτω τὸ γ, ἡγούμενον πρὸς τὸ δ, ἑπόμενον. ἐὰν εἴπωμεν καὶ ὡς τὸ α, ἡγούμενον πρὸς τὸ γ, ἡγούμενον, οὕτως ἔχει καὶ τὸ β, ἑπόμενον πρὸς τὸ δ, ἑπόμενον, ὁ λόγος οὗτος Ἐναλλὰξ λέγεται. ἀλλάττεται γὰρ ἡ τῶν ὅρων θέσις. ὅτι δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ὄντα, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσονται, δειχθήσεται ἐν τῇ ιϛ΄: τοῦ παρόντος προτάσει.

Eucl. Lib. 5. Fig. 9.



ΙΔ΄: Ἀνάπαλιν λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἑπομένου, ὡς ἡγουμένου, πρὸς τὸ ἡγούμενον, ὡς ἑπόμενον.

Ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὑποδείγματος καὶ τουτὶ τὸ δεύτερον τοῦ λόγου εἶδος ἀναπτύσσεται. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ γ, πρὸς δ, κατὰ τὴν εὔτακτον αὐτῶν πρὸς ἄλληλα ἀναφοράν, ἐὰν εἴπωμεν, καὶ ὡς τὸ δ, πρὸς τὸ γ, τὸ β, πρὸς τὸ α, Ἀνάπαλιν λόγος λέγεται. ἀναποδίζει γάρ πως ἡ ἀναλογία. ὅτι δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ὄντα, καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογον ἔσονται, δηλωθήσεται ἐν τῷ πορίσματι τῆς δ΄: τοῦ παρόντος.

ΙΕ΄: Σύνθεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου, ὡς ἑνός, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

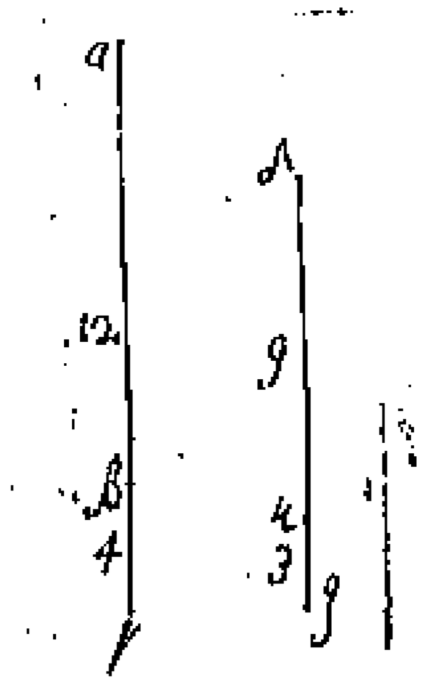
Τρίτον τουτὶ τοῦ λόγου εἶδος, οὗ εἰς ἀνάπτυξιν ἔστωσαν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τέσσαρα μεγέθη τὰ αβ, βγ, καὶ δε, εζ. καὶ ἐπεί, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἔστιν ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ βγ, οὕτω τὸ δε, πρὸς τὸ εζ. ἐὰν οὖν συνάπτοντες τὸ αβ, τῷ βγ, καὶ τὸ δε, τῷ εζ, εἴπωμεν, ὡς τὸ ὅλον αγ, ἡγούμενον δηλαδὴ καὶ ἑπόμενον ὡς ἕν, πρὸς τὸ βγ, ἑπόμενον, οὕτω καὶ ὅλον τὸ δζ, ἡγούμενον καὶ ἑπόμενον ὡς ἕν, πρὸς τὸ εζ, ἑπόμενον, ὁ λόγος οὗτος Σύνθεσις λέγεται, συντίθεται γὰρ ἀλλήλοις τὰ μεγέθη. ὅτι δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ὄντα, καὶ συνθέσει ἀνάλογον ἔσονται, δειχθήσεται προτάσει ιη΄: τοῦ παρόντος.

Eucl. Lib. 5. Fig. 10.

Ιϛ΄: Διαίρεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

Ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὑποδείγματος, καὶ τὸ τέταρτον τουτὶ τοῦ λόγου εἶδος ἀναπτύσσεται. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ αγ, ἡγούμενον πρὸς τὸ βγ, ἑπόμενον, οὕτω τὸ δζ, ἡγούμενον πρὸς τὸ εζ, ἑπόμενον, ἔστι πάντως τοῦ μὲν αγ, ἡγουμένου ὑπεροχή, ᾗ ὑπερέχει τοῦ βγ, ἑπομένου, τὸ αβ, μέγεθος. τοῦ δὲ δζ, ἡγουμένου, ἔστιν ὁμοίως ὑπεροχή, ᾗ ὑπερέχει τοῦ εζ, ἑπομένου, τὸ δε, μέγεθος. ἐὰν οὖν διαιροῦντες εἴπωμεν, καὶ ὡς τὸ αβ, ὑπεροχή, πρὸς τὸ βγ, ἑπόμενον, οὕτω τὸ δε, ὑπεροχή πρὸς τὸ εζ, ἑπόμενον, ὁ λόγος οὗτος Διαίρεσις λέγεται. διαιρεῖται γὰρ τὰ μεγέθη. ὅτι δὲ τέσσαρα μεγέθη ἐν συνθέσει ἀνάλογον ὄντα, καὶ διαιρέσει ἀνάλογον ἔσονται, εὑρήσομεν προτάσει ιζ΄:

Eucl. Lib. 5. Fig. 11.



ΙΖ΄: Ἀντιστροφὴ λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχήν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου.

Ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὑποδείγματος, ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ αγ, ἡγούμενον πρὸς τὸ βγ, ἑπόμενον, οὕτω τὸ δζ, ἡγούμενον πρὸς τὸ εζ, ἑπόμενον. ἐὰν εἴπωμεν, καὶ ὡς τὸ αγ, ἡγούμενον πρὸς τὸ αβ, ὑπεροχήν, οὕτω τὸ δζ, ἡγούμενον πρὸς τὸ δε, ὑπεροχήν, ἡ λῆψις αὕτη, Ἀντιστροφὴ λόγου λέγεται. ἀντιστρέφει γάρ πως τὸ ἡγούμενον πρὸς ἑαυτό. ὅτι δὲ συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ὄντα, καὶ ἀντιστροφῇ ἀνάλογον ἔσονται, ὀψόμεθα ἐν τῷ πορίσματι τῆς ιθ΄: τοῦ παρόντος.

ΙΗ΄: Δι᾽ ἴσου λόγος ἐστί, πλειόνων ὄντων μεγεθῶν, καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανομένων, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὅταν ᾖ, ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον. καὶ ἄλλως. λῆψις τῶν ἄκρων καθ᾽ ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.

Eucl. Lib. 5. Fig. 12.

Ἵνα δὲ καὶ τὸ ἔσχατον τουτὶ εἶδος, τὸ Δι᾽ ἴσου, φημί, διὰ παραδειγμάτων, ὡς καὶ τὰ πρὸ αὐτοῦ ἀναπτυχθῇ, ἔστωσαν πλείω, ἢ δύο μεγέθη τὰ αβγ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ δεζ, σὺν δύο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, τουτέστιν ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ δ, πρὸς τὸ ε, καὶ ὡς τὸ β, πρὸς τὸ γ, τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. τούτων οὖν οὕτω κειμένων, ἐὰν εἴπωμεν, καὶ ὡς τὸ α, πρῶτον πρὸς τὸ γ, ἔσχατον, οὕτω τὸ δ, πρῶτον πρὸς τὸ ζ, ἔσχατον, ὑπεξαιροῦντες τὰ μέσα, ἡ λῆψις αὕτη, Δι᾽ ἴσου λόγος λέγεται. τοῦτ᾽ αὐτὸ ἔσται, κἂν πλείονα ὦσι τὰ μεγέθη. ὅτι δὲ πλείονα μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι' ἴσου ἀνάλογον ἔσονται, δειχθήσεται προτάσει κβ': τοῦ παρόντος.

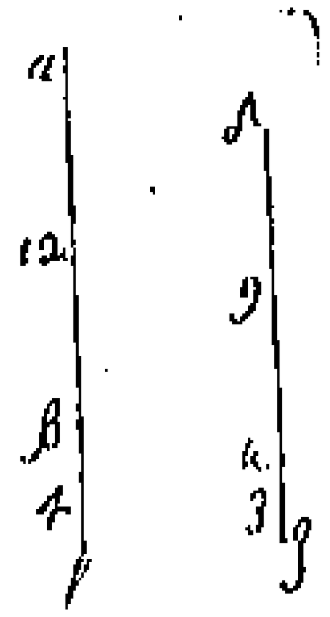
Τίνα τὰ ἴδια ἑκάστου εἴδους τοῦ ἐν μεγέθεσι λόγου.

Ὥσπερ ἐντελὴς γνῶσίς ἐστι τὸν ὁρισμὸν ἑκάστου οἰδέναι, οὕτω γε καὶ τὰ ἑκάστου ἴδια καὶ πάθη ἐρευνᾶν ἀκριβὴς διδασκαλία καθέστηκε. Μαθόντες οὖν καὶ ἡμεῖς τὸν ὁρισμὸν ἑκάστου Εἴδους τοῦ ἐν τοῖς μεγέθεσι Λόγου, φέρε δὴ καὶ τὰ πάθη τούτων καὶ ἴδια διὰ βραχέων ἐκδηλώσωμεν. Τοῦ μὲν οὖν α': Εἴδους, δηλ: τοῦ Ἐναλλὰξ λόγου, ἴδιον, τὸ τὰ τέσσαρα μεγέθη, τὰ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον τοῦ αὐτοῦ γένους εἶναι. εἰ γὰρ ἑτέρου ὦσι γένους, ὡς εἰπεῖν, τὰ δύο μὲν γραμμαὶ, τὰ δὲ λοιπὰ δύο, ἐπιφάνειαι, κἂν ᾖ, ὡς γραμμὴ πρὸς γραμμὴν, οὕτως ἐπιφάνεια πρὸς ἐπιφάνειαν, ἐναλλὰξ μέντοι οὐκ ἔσται, ὡς γραμμὴ πρὸς ἐπιφάνειαν, οὕτω γραμμὴ πρὸς ἐπιφάνειαν. γραμμὴ γὰρ καὶ ἐπιφάνεια ἑτερογενῆ εἰσι, τῶν δὲ ἑτερογενῶν λόγος οὐκ ἔστι, κατὰ τὸν γ': Ὅρον.

Τοῦ δὲ δευτέρου, τουτέστι τοῦ Ἀνάπαλιν λόγου, τὸ τὰ τέσσαρα μεγέθη καὶ ὁμογενῆ εἶναι, καὶ ἑτερογενῆ, κἂν γὰρ τὰ μὲν δύο α β, πρῶτα, γραμμαὶ ὦσι, τὰ δὲ δύο γ δ, δεύτερα ἐπιφάνειαι, ἢ ὅ,τι οὖν ἄλλο μέγεθος. ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ α, γραμμὴ πρὸς γραμμὴν τὴν β. οὕτως ἡ γ, ἐπιφάνεια πρὸς ἐπιφάνειαν τὴν δ, ἢ ὅ,τι οὖν ἄλλο μέγεθος πρὸς ὅ,τι οὖν ἄλλο, ὑγιῶς πάντως συναχθήσεται καὶ Ἀνάπαλιν, ὡς ἡ β, γραμμὴ, ἡ ἑπομένου πρότερον λόγον ἔχουσα, πρὸς γραμμὴν τὴν α, ἀντὶ ἡγουμένου πρότερον λαμβανομένην, οὕτως ἡ δ, ἐπιφάνεια, ἡ ὡς ἑπόμενον πρότερον λαμβανομένη, πρὸς τὴν γ, ἐπιφάνειαν, τὴν ὡς ἡγούμενον πρότερον λαμβανομένην.

Τοῦ τρίτου δὲ, τοῦ κατὰ Σύνθεσιν δηλον: λόγου ἴδιον, τὸ καὶ τὰ τέσσαρα μεγέθη ὁμογενῆ τε εἶναι καὶ ἑτερογενῆ, ὅπερ καὶ τοῦ δευτέρου, καὶ τὸ τὴν σύγκρισιν καὶ ἄλλως πως δέχεσθαι. ὅτι μὲν γὰρ καὶ ἐν τοῖς ἑτερογενέσιν ὁ κατὰ Σύνθεσιν εὑρίσκεται Λόγος, δῆλον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ σύνθεσις ἐν τοῖς πρώτοις δύο μεγέθεσι, καὶ ἐν τοῖς δευτέροις χωρὶς γίγνεται, οὐδ' ἔχει τινὰ σύγκρισιν, διὰ τῆς συνθέσεως, τὰ πρῶτα μεγέθη πρὸς τὰ δεύτερα, ἀλλ' ὥσπερ πρὸ τῆς συνθέσεως πρὸς ἄλληλα χωρὶς παρεβάλλοντο, τάτε πρῶτα καὶ δεύτερα μεγέθη, οὕτω γε καὶ μετὰ τὴν σύνθεσιν οὐδὲν κωλύσει, τὰ μὲν πρότερα ἑνὸς εἶναι γένους, φέρ' εἰπεῖν, γραμμὰς, τὰ δὲ δεύτερα ἑτέρου, ὡς εἰπεῖν ἐπιφανείας. ὅτι δὲ καὶ ἄλλως πως τὴν σύγκρισιν δέχεται, οὐ χαλεπὸν συναγαγεῖν. ἢ γὰρ δυνάμεθα λαβεῖν τὸ ἡγούμενον μετὰ τοῦ ἑπομένου πρὸς αὐτὸ τὸ ἡγούμενον. οἷον ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ α β, ἡγούμενον πρὸς τὸ β γ, ἑπόμενον, οὕτω τὸ δ ε, ἡγούμενον πρὸς τὸ ε ζ, ἑπόμενον, οὐδὲν κωλύει εἰπεῖν,

Eucl. Lib. 5. Fig. 13.



καὶ

καὶ ὡς τὸ α γ, ἡγούμενον καὶ ἑπόμενον, ὡς ἕν, πρὸς τὸ α β, ἡγούμενον, οὕτω τὸ δ ζ, ἡγούμενον καὶ ἑπόμενον πρὸς τὸ δ ε, ἡγούμενον. ἢ δυνάμεθα λαβεῖν τὸ ἑπόμενον πρὸς τὸ ἡγούμενον μετὰ τοῦ ἑπομένου, οἷον ὡς τὸ β γ, ἑπόμενον τῶν πρώτων ὅρων πρὸς τὸ α γ, ἡγούμενον ἅμα καὶ ἑπόμενον τῶν αὐτῶν, οὕτω τὸ ε ζ, ἑπόμενον τῶν δευτέρων ὅρων πρὸς τὸ δ ζ, ἡγούμενον ὁμοῦ καὶ ἑπόμενον τῶν αὐτῶν. ἢ τελευταῖον ἔξεστι λαβεῖν τὸ ἡγούμενον πρὸς τὸ ἡγούμενον μετὰ τοῦ ἑπομένου. οἷον ὡς τὸ α β, ἡγούμενον τῶν πρώτων ὅρων πρὸς τὸ α γ, ἡγούμενον ὁμοῦ καὶ ἑπόμενον τῶν αὐτῶν, οὕτω τὸ δ ε, ἡγούμενον τῶν δευτέρων ὅρων πρὸς τὸ δ ζ, ἐξ ἡγουμένου τε καὶ ἑπομένου τῶν αὐτῶν συγκείμενον.

Τοῦ δὲ τετάρτου, δηλον: τοῦ κατὰ Διαίρεσιν λόγου, καὶ τοῦ αὐτοῦ καὶ ἑτέρου γένους ἄμφω τὰς συζυγίας εἶναι, δι' οὓς ἀνωτέρω ἔφημεν λόγους. καὶ τὸ τὴν σύγκρισιν καὶ ἄλλως πως δέχεσθαι, ὅπερ καὶ τοῦ πρὸ αὐτοῦ. Ἔστω γὰρ ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω παραδείγ: συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον τὰ α β γ, δ ε ζ, τουτέστιν ὡς τὸ α γ, πρὸς τὸ α β, τὸ δ ζ, πρὸς τὸ δ ε. καὶ ἐπεί ἐστι, διαιρέσει, ὡς τὸ β γ, ὑπεροχὴ πρὸς τὸ α β, ἑπόμενον, οὕτω τὸ ε ζ, ὑπεροχὴ πρὸς τὸ δ ε, ἑπόμενον. δυνάμεθα εἰπεῖν καὶ ἀνάπαλιν, ὡς τὸ α β, ἑπόμενον πρὸς τὸ β γ, ὑπεροχὴν, οὕτω τὸ δ ε, ἑπόμενον πρὸς τὸ ε ζ, ὑπεροχήν. ὅπερ δὲ ἔφημεν γίγνεσθαι, ἡνίκα τὸ ἡγούμενον ὑπερέχει τοῦ ἑπομένου, τὸ αὐτὸ γενέσθαι δυνατὸν, καὶ ὅτε τὸ ἑπόμενον ὑπερέχει τοῦ ἡγουμένου. ὥσπερ γὰρ ἐν ἐκείνοις, πρῶτον μὲν ἐλαμβάνετο ἡ τοῦ ἡγουμένου ὑπεροχὴ πρὸς τὸ ἑπόμενον, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν ἀναλογίαν, τὸ ἑπόμενον πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, οὕτω κἂν τούτοις, πρῶτον μὲν ἔξεστι λαβεῖν τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἡγούμενον, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ ἀναλογίᾳ, τὸ ἡγούμενον πρὸς τὴν ὑπεροχήν.

Τοῦ δὲ πέμπτου, τοῦ κατὰ Ἀντιστροφὴν δηλον: λόγου, ὁμοίως τοῦ αὐτοῦ καὶ ἑτέρου γένους εἶναι ἄμφω τὰς συζυγίας τῶν μεγεθῶν. ἐπὰν δὲ τὸ ἑπόμενον ὑπερέχῃ τοῦ ἡγουμένου, δυνάμεθα λαβεῖν τὸ ἑπόμενον πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, ᾗ ὑπερέχει τοῦ ἡγουμένου, ὥστε εἶναι τὴν τοιαύτην ἀντιστροφὴν, λῆψιν τοῦ ἑπομένου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, ᾗ ὑπερέχει τοῦ ἡγουμένου.

Τοῦ ἕκτου δὲ καὶ τελευταίου, δηλον: τοῦ Δι' ἴσου λόγου, τὰ πρότερα καὶ ὕστερα μεγέθη τοῦ αὐτοῦ καὶ ἑτέρου εἶναι γένους. ἐπεὶ δὲ ὁ δι' ἴσου λόγος, λῆψίς ἐστι τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων, ὥσπερ λαμβάνομεν τὸ ἡγούμενον πρὸς τὸ ἑπόμενον, οὕτω δυνατὸν λαβεῖν καὶ τὸ ἑπόμενον πρὸς τὸ ἡγούμενον, κατὰ τὸν Ἀνάπαλιν λόγον.

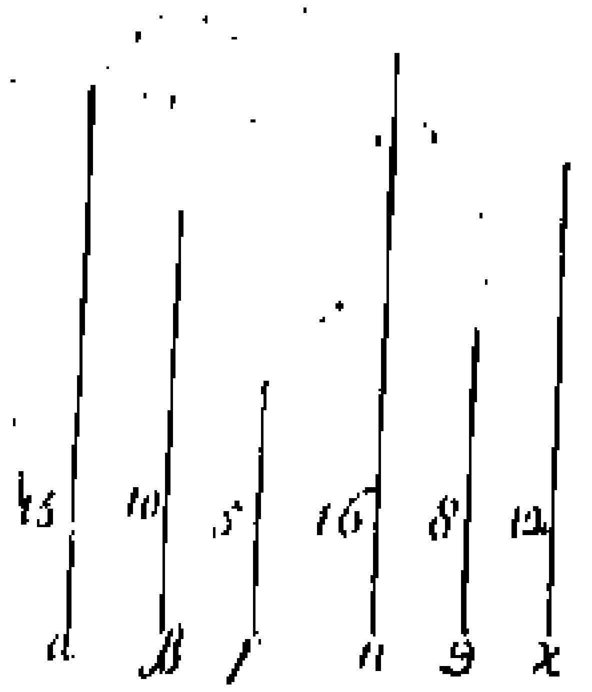
ΙΘ'. Τι-

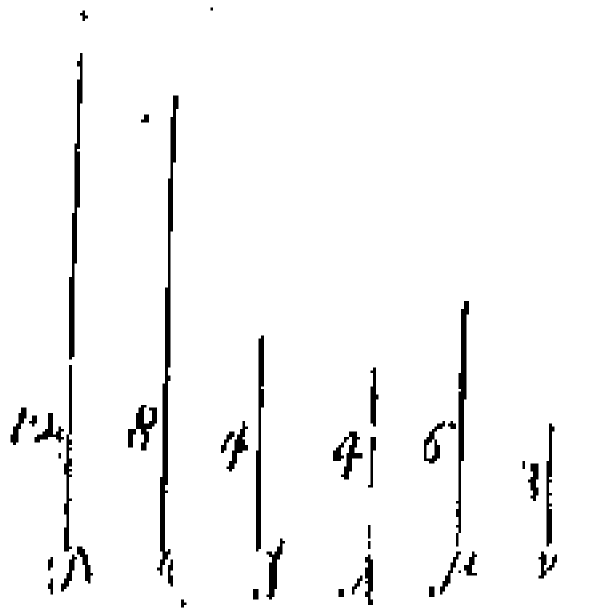
ΙΘ': Τεταγμένη ἀναλογία ἐςὶν, ὅταν ᾖ, ὡς ἡγέμενον πρὸς ἑπόμενον, ὕτως ἡγέμενον πρὸς ἑπόμενον, ᾖ δὲ καὶ ὡς ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι, ὕτως ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι.

Κ': Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐςὶν, ὅταν τριῶν ὄντων μεγεθῶν, καὶ ἄλλων ἴσων αὐτοῖς τὸ πλῆθος, γίνηται, ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγέμενον πρὸς ἑπόμενον, ὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγέμενον πρὸς ἑπόμενον, ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον πρὸς ἄλλα τι, ὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγέμενον πρὸς ἄλλα τι.

Ὥσπερ ἐν τοῖς ἀνωτέρω προὔταξε τὸν λόγον τῆς Ἀναλογίας, ὡς μέρος ὅλου, ὕτω κἀνταῦθα προτάττει τὰ τοῦ λόγου εἴδη τῶν τῆς Ἀναλογίας εἰδῶν. δύο δὲ τὰ τῆς Ἀναλογίας εἴδη, ἡ Τεταγμένη δηλ: Ἀναλογία καὶ ἡ Τεταραγμένη. ἔςι δὲ Τεταγμένη μὲν, ὅταν ἡ τάξις, ἣν τὰ α': μεγέθη πρὸς ἄλληλα ἔχει, τὴν αὐτὴν ταύτην καὶ τὰ β': φυλάττωσι. Τεταραγμένη δὲ, ὅταν τὴν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι τάξιν, τὰ β': μεταλλάττει. Ἔςωσαν γὰρ τάτε α β γ, δ ε ζ, καὶ η θ κ, λ μ ν, εἰ μὲν οὖν ἐςὶν ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ δ, πρὸς τὸ ε, καὶ ὡς τὸ β, πρὸς τὸ γ, τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, ἡ Ἀναλογία αὕτη Τεταγμένη ἐςίν. εἰ δὲ ἐςὶν ὡς τὸ η, πρὸς τὸ θ, τὸ μ, πρὸς τὸ ν, καὶ ὡς τὸ θ, πρὸς τὸ κ, τὸ λ, πρὸς τὸ μ, ἡ Ἀναλογία αὕτη Τεταραγμένη ἐςίν. ἴδιον δὲ ἀμφοῖν τάτε πρότερα, καὶ ὕςερα μεγέθη, καὶ ὁμογενῆ εἶναι, καὶ ἑτερογενῆ. εἰ γὰρ τὰ πρῶτα γραμμαὶ, φέρ' εἰπεῖν, ὦσι, τὰ δὲ δεύτερα ἐπιφάνειαι, ὐδὲν κωλύσει τὴν ἀναλογίαν γενέσθαι. ἔτι δὲ καὶ τὸν Δι' ἴσου λόγον ἑκατέρα δέχεται. ὅτι δὲ τοῦθ' ὕτως ἔχει, δειχθήσεται προτάσει κ.β': κ γ': καὶ ἄλλως. καὶ περὶ μὲν τῆς τῶν ὅρων διασαφήσεως ἅλις καὶ ταῦτα. ἑπόμενον δ' ἐςὶν ἅψασθαι καὶ τῆς τῶν προτάσεων θεωρίας.

Eucl. Lib. 5. Fig. 14.





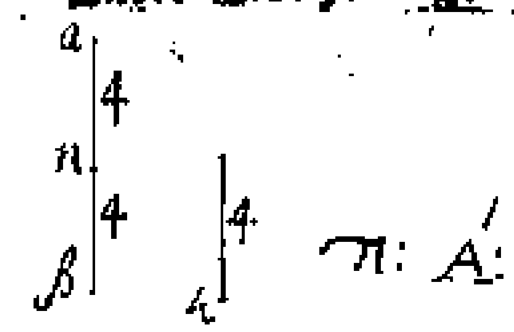
Πρότασις Α': Θεώρημα.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαςον ἑκάςου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐςιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνὸς, τοσαυταπλάσια ἔςαι τὰ πάντα τῶν πάντων.

Ἔςωσαν ἤδη ὁποσαοῦν μεγέθη τὰ α β, γ δ, ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, τῶν ε, ζ, ἕκαςον ἑκάςου ἰσάκις πολλαπλάσιον, τουτέςιν ὡς τὸ α β, πρὸς τὸ ε, τὸ γ δ, πρὸς τὸ ζ. Λέγω, ὅτι ἐςὶν ὡς τὸ α β, πρὸς τὸ ε, ὕτω τὰ α β, γ δ,

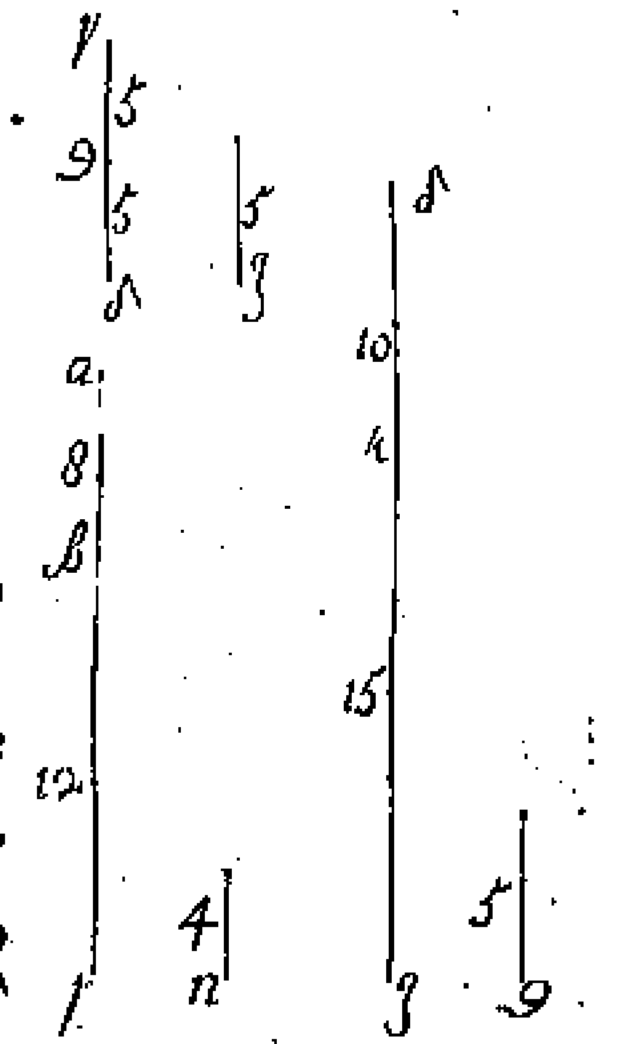
πρὸς τὰ ε, ζ. ἐπεὶ γὰρ ὁσαπλάσιόν ἐςι τὸ α β, τοῦ ε, τοσαυταπλάσιόν ἐςι καὶ τὸ γ δ, τοῦ ζ. διῃρημένου τοῦ μὲν α β, εἰς τὰ ἴσα τῷ ε, κατὰ τὸ η. τοῦ δὲ γ δ, εἰς τὰ ἴσα τῷ ζ, κατὰ τὸ θ, πάντως γε τὸ πλῆθος τῶν α η, η β, ἴσον ἐςὶ τῷ πλήθει τῶν γ θ, θ δ. ἀλλὰ τὸ μὲν α η, ἴσον γέγονε τῷ ε, τὸ δὲ γ θ, τῷ ζ, ἄρα ἴσα ἐςὶν καὶ συναμφότερα τὰ α η, γ θ, συναμφοτέροις τοῖς ε, ζ. διὰ τὰ αὐτὰ ἔτι καὶ τὰ η β, θ δ, ἴσα ἐςὶ τοῖς αὐτοῖς ε, ζ. ὅσα ἄρα ἐςὶν ἐν τῷ α β, ἴσα τῷ ε, τοσαῦτά ἐςι καὶ ἐν τοῖς α β, γ δ, ἴσα τοῖς ε, ζ. καὶ ἑπομένως ὁσαπλάσιόν ἐςι τὸ α β, τοῦ ε, τοσαυταπλάσιόν ἐςι καὶ τὰ α β, γ δ, τῶν ε, ζ. ὡς τὸ α β, ἄρα πρὸς τὸ ε, ὕτω καὶ τὰ α β, γ δ, πρὸς τὰ ε, ζ, ὅπερ ἔδει τὸ ὑποκείμενον. ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 5. Fig. 15.



Πρότασις Β': Θεώρημα.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον, καὶ ἕκτον τετάρτου, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις ἔςαι πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου.



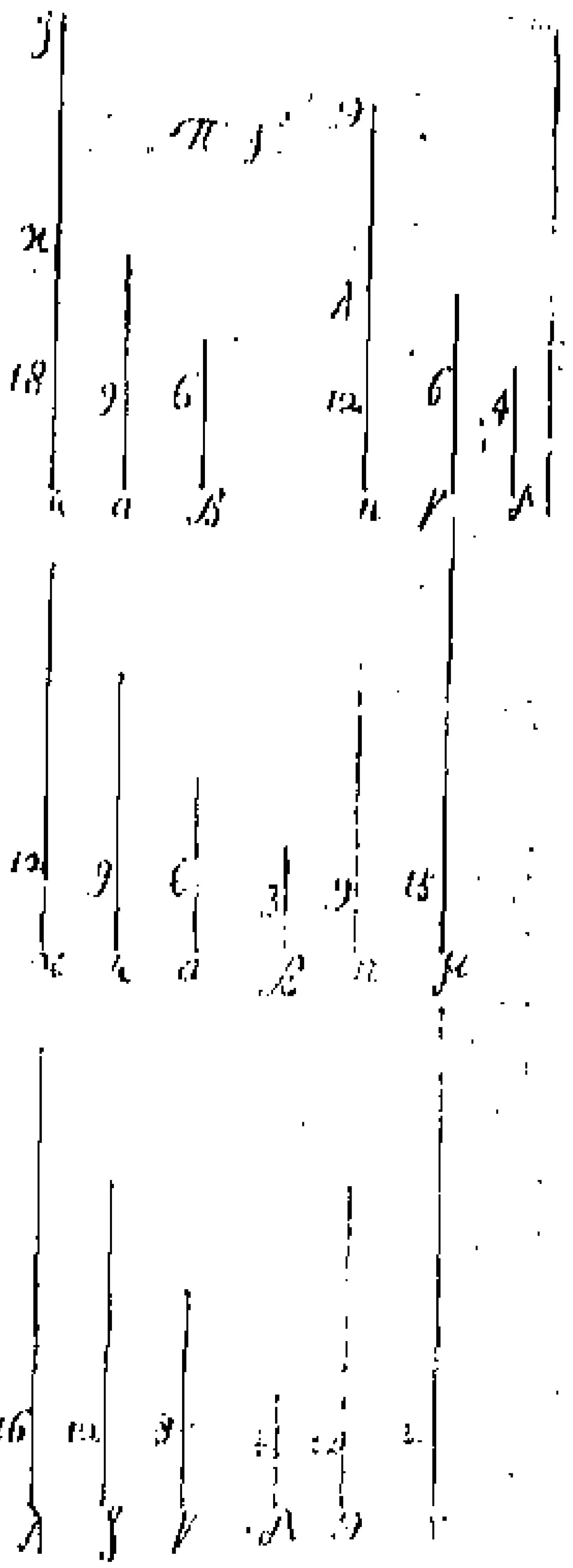
Πρῶτον ἤδη τὸ α β, δευτέρου τοῦ η, καὶ τρίτον τὸ δ ε, τετάρτου τοῦ θ, ἰσάκις ἔςωσαν πολλαπλάσια, ἔτι δὲ καὶ πέμπτον τὸ β γ, δευτέρου τοῦ η, καὶ ἕκτον τὸ ε ζ, τετάρτου τοῦ θ. Λέγω, ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δηλον: τὸ α γ, ἰσάκις ἔςαι πολλαπλάσιον τοῦ η, δευτέρου, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον, ἤτοι τὸ δ ζ, τοῦ θ, τετάρτου. Ἐπεὶ γὰρ τὸ α β, ἰσάκις ἐςὶ πολλαπλάσιον τοῦ η, καὶ τὸ δ ε, τοῦ θ, πάντως γε ὅσα ἐςὶν ἐν τῷ α β, ἴσα τῷ η, τοσαῦτά ἐςι καὶ ἐν τῷ δ ε, ἴσα τῷ θ. ὡσαύτως καὶ ὅσα ἐςὶν ἐν τῷ β γ, ἴσα τῷ η, τοσαῦτά ἐςι καὶ ἐν τῷ ε ζ, ἴσα τῷ θ. ὅσα ἄρα ἐςὶν ἐν ὅλῳ τῷ α γ, ἴσα τῷ η, τοσαῦτά ἐςι καὶ ἐν ὅλῳ τῷ δ ζ, ἴσα τῷ θ. ὁσαπλάσιον ἄρα, τὸ α γ, τοῦ η, τοσαυταπλάσιόν ἐςι καὶ τὸ δ ζ, τοῦ θ. ἐὰν ἄρα πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τετάρτου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Γ': Θεώρημα.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου, καὶ δι' ἴσου τῶν ληφθέντων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔςαι πολλαπλάσιον, τὸ μὲν τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.

Πρῶτον ἤδη τὸ α, δευτέρου τοῦ β, καὶ τρίτον τὸ γ, τετάρτου τοῦ δ, ἰσάκις ἔςω πολλαπλάσιον. ληφθήτωσαν δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ μὲν α, τὸ εζ, τοῦ δὲ γ, τὸ ηθ. Λέγω, ὅτι καὶ δι' ἴσου, τὸ μὲν εζ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τοῦ β, τὸ δὲ ηθ, τοῦ δ. Ἐπεὶ γὰρ τοῦ μὲν α, ἰσάκις εἴληπται πολλαπλάσιον τὸ εζ, τοῦ δὲ γ, τὸ ηθ, πάντως γε διαιρεθέντος τοῦ μὲν εζ, εἰς τὰ ἴσα τῷ α, τὰ εκ, κζ. τοῦ δὲ ηθ, εἰς τὰ ἴσα τῷ γ, τὰ ηλ, λθ, ἴσος ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς τῶν εκ, κζ, τῷ ἀριθμῷ τῶν ηλ, λθ. ἀλλὰ τὸ μὲν εκ, ἴσον ἐστὶ τῷ α, ἐκ τῆς κατασκευῆς, τὸ δὲ ηλ, τῷ γ. ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν α, τοῦ β, τὸ δὲ γ, τοῦ δ, ἰσάκις πολλαπλάσιον, ἄρα καὶ τὸ εκ, ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον τοῦ β, καὶ τὸ ηλ, τοῦ δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τὸ κζ, τοῦ β, καὶ τὸ λθ, τοῦ δ. Ἔστω δὴ πρῶτον τὸ εκ, δευτέρου τοῦ β, ἰσάκις πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τὸ ηλ, τετάρτου τοῦ δ. πέμπτον δὲ τὸ κζ, καὶ ἕκτον τὸ λθ, ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν αὐτῶν β, καὶ δ. καὶ συντεθὲν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ εζ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον δευτέρου τοῦ β, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ηθ, τετάρτου τοῦ δ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω. Ἐὰν ἄρα πρῶτον δευτέρου καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 5. Fig. 12.



Πρότασις Δ′: Θεώρημα.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου, πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ληφθέντα κατάλληλα.

Πρῶτον ἤδη τὸ α, πρὸς δεύτερον τὸ β, τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον, καὶ τρίτον τὸ γ, πρὸς τέταρτον τὸ δ. Ἔστωσαν δὲ τῶν μὲν α, γ, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ε, ζ, τῶν δὲ β, δ, τὰ η θ. Λέγω, ὅτι καὶ ὡς τὸ ε, πρὸς τὸ η, οὕτως ἐστὶ τὸ ζ, πρὸς τὸ θ. εἰλήφθωσαν γὰρ τῶν μὲν ε ζ, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ κ λ, τῶν δὲ η θ, τὰ μ ν, καὶ ἐπεὶ τὰ ε ζ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τῶν α γ, εἴληπται δὲ τῶν ε ζ, πρώτου δὸς εἰπεῖν καὶ τρίτου, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ κ λ, πάντως γε καὶ τὸ κ, τοῦ α, δευτέρου ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον, καὶ τὸ λ, τοῦ γ, τετάρτου, κατὰ τὴν ἀνωτέρω. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τοῦ β. καὶ τὸ ν, τοῦ δ. ἀλλ' ὡς τὸ α, πρῶτον, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, πρὸς τὸ β, δεύτερον, ἔστι καὶ τὸ γ, τρίτον πρὸς τὸ δ, τέταρτον, καὶ τῶν μὲν α γ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τὰ κ λ, τῶν δὲ β δ, τὰ μ ν, εἰ ἄρα τὸ κ, ὑπερέχῃ τοῦ μ, ὑπερέχει

πάν-

πάντως καὶ τὸ λ, τοῦ ν, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλασσον, ἔλασσον, κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ ε: ὅρου. εἴληπται δὲ τὰ μὲν κ λ, ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν ε ζ, τὰ δὲ μ ν, τῶν η θ. ἄρα, κατὰ τὸν αὐτὸν ὅρον, ὡς τὸ ε, πρῶτον πρὸς τὸ η, δεύτερον, οὕτω καὶ τὸ ζ, τρίτον πρὸς τὸ θ, τέταρτον. ὅπερ ἦν τὸ ὑποσχεθέν.

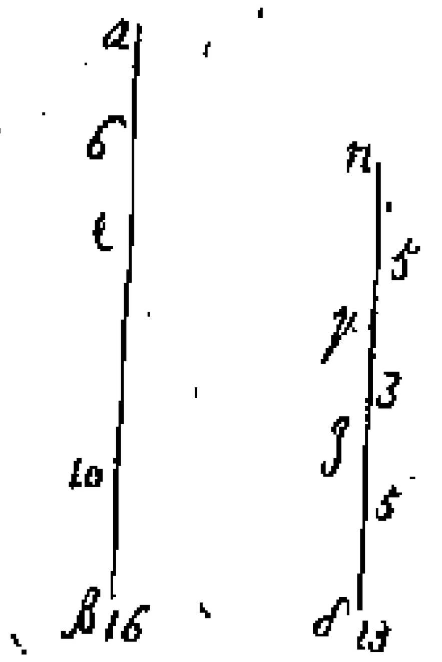
Π Ό Ρ Ι Σ Μ Α.

Ὅτι δὲ καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ η, πρὸς τὸ ε, τὸ θ, πρὸς τὸ ζ, φανερόν. ὥσπερ γάρ, εἰ τὸ κ, ὑπερέχῃ τοῦ μ, ὑπερέχει καὶ τὸ λ, τοῦ ν, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλασσον, ἔλασσον, ἀληθές. οὕτως ἔσται ἀληθὲς εἰπεῖν καὶ ἀνάπαλιν. εἰ δηλονότι τὸ μ, ὑπερέχῃ τοῦ κ, ὑπερέχει καὶ τὸ ν, τοῦ λ, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

Πρότασις Ε′: Θεώρημα.

Ἐὰν μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος, καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὅπερ τὸ ὅλον τοῦ ὅλου.

Μέγεθος ἤδη τὸ α β, μεγέθους τοῦ γ δ, ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν τὸ α ε, ἀφαιρεθέντος τοῦ γ ζ. Λέγω, ὅτι καὶ τὸ λοιπὸν ε β, τοῦ λοιποῦ ζ δ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον, ὅπερ ὅλον τὸ α β, ὅλου τοῦ γ δ. ὁσαπλάσιον γάρ ἐστι τὸ α ε, τοῦ γ ζ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ ε β, τοῦ γ η. *Eucl. Lib. 5. Fig. 17.* κατὰ τὴν πρώτην ἄρα τοῦ παρόντος, ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ α ε, τοῦ γ ζ, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ α β, τοῦ η ζ. ἀλλὰ καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ α ε, τοῦ γ ζ, τοσαυταπλάσιον ὑπέκειτο καὶ τὸ α β, τοῦ γ δ. ἄρα τὸ α β, ἰσάκις πολλαπλάσιόν ἐστιν ἑκατέρου τῶν η ζ, γ δ. ὥστε τὰ η ζ, γ δ, ἴσα ἐστί. κοινοῦ δὲ τοῦ γ ζ, ἀφαιρεθέντος, ἐγκαταλείπεται τὸ γ η, ἴσον τῷ ζ δ. ἀλλὰ τοῦ γ η, ἰσάκις πολλαπλάσιον γέγονε τὸ ε β, ὅπερ τὸ α ε, τοῦ γ ζ. ἄρα τὸ αὐτὸ ε β, ἰσάκις πολλαπλάσιόν ἐστι καὶ τοῦ ζ δ, ὅπερ τὸ α ε, τοῦ γ ζ. ὑπέκειτο δὲ τὸ α ε, τοῦ γ ζ, ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὅπερ τὸ α β, ὅλον, τοῦ γ δ, ὅλου· ἄρα καὶ τὸ ε β, τοῦ ζ δ, ἰσάκις πολλαπλάσιόν ἐστιν, ὅπερ τὸ ὅλον α β, τοῦ ὅλου γ δ. ὅπερ ἦν τὸ ὑποσχεθέν.



Πρότασις ϛ′: Θεώρημα.

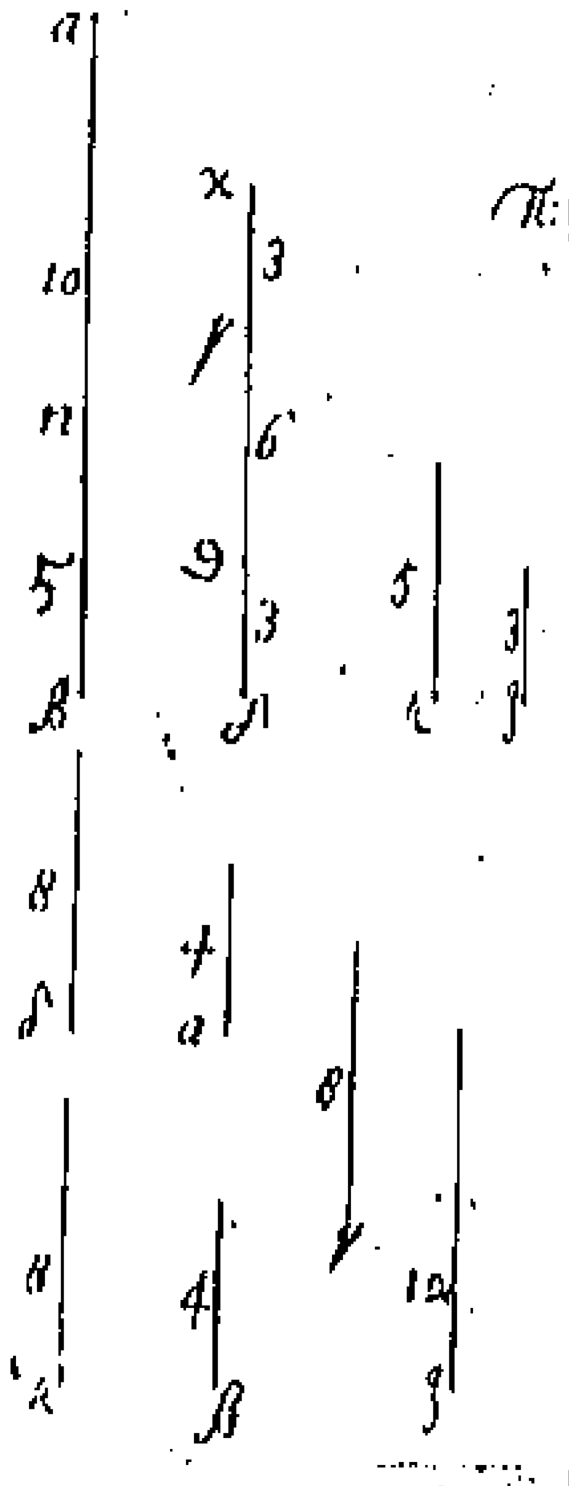
Ἐὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς, ἤτοι ἴσα ἐστίν, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.

Δύο ἤδη μεγέθη τὰ α β, γ δ, ἰσάκις ἔστωσαν πολλαπλάσια τῶν ε, ζ. καὶ ἀφαιρεθέντα τὰ α η, γ θ, ἰσάκις ἔστωσαν καὶ αὐτὰ πολλαπλάσια τῶν ε, ζ. Λέγω,

Q ὅτι

ὅτι τὰ ἀναπολειφθέντα η β, θ δ, ἤτοι ἴσα ἐστὶ τοῖς ε, ζ, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια. Ἔστω δὴ τὸ η β, ἴσον τῷ ε· δείκνυμι, ὅτι καὶ τὸ θ δ, ἴσον ἐστὶ τῷ ζ. γενέσθω γὰρ τῷ ζ, ἴσον τὸ γ κ. καὶ ἐπεὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ α η, τοῦ ε, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ γ θ, τοῦ ζ. ἴσον δὲ τὸ η β, τῷ ε, καὶ τὸ γ κ, τῷ ζ, ὁσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ α β, ὅλον τοῦ ε, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ κ θ, ὅλον τοῦ ζ. ὁσαπλάσιον δέ ἐστι τὸ α β, τοῦ ε, τοσαυταπλάσιον ὑπέκειτο καὶ τὸ γ δ, τοῦ ζ. ἑκάτερον ἄρα τῶν κ θ, γ δ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τοῦ ζ. καὶ ἑπομένως τὸ κ θ, ἴσον ἐστὶ τῷ γ δ. κοινοῦ δὲ ἀφαιρουμένου τοῦ γ θ, ἐγκαταλείπεται τὸ κ γ, ἴσον τῷ θ δ. τὸ δὲ κ γ, ἴσον γέγονε τῷ ζ, ἄρα καὶ τὸ θ δ, ἴσον ἐστὶ τῷ αὐτῷ ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν πολλαπλάσιον ᾖ τὸ η β, τοῦ ε, τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ θ δ, τοῦ ζ. Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 5. Fig. 18.



Πρότασις Ζ΄: Θεώρημα.

Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

Ἔστωσαν δὴ ἴσα μεγέθη τὰ α β· καὶ ἄλλο, ὃ ἔτυχε τὸ γ. Λέγω, ὅτι ἑκάτερον τῶν α β, πρὸς τὸ γ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ γ, πρὸς ἑκάτερον τῶν α β. Εἰλήφθωσαν γὰρ τῶν α β, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ δ ε, τοῦ δὲ γ, ἄλλο, ὃ ἔτυχε πολλαπλάσιον τὸ ζ. καὶ ἐπεὶ τὰ α β, ἴσα ἐστὶ, πάντως γε καὶ τὰ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια τὰ δ ε, ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶν, ἔστι δὲ καὶ τὸ ζ, πολλαπλάσιον τοῦ γ. εἰ ἄρα τὸ δ, ὑπερέχῃ τοῦ ζ, ὑπερέχει καὶ τὸ ε, τοῦ αὐτοῦ ζ, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. ὥστε, κατὰ τὸν ε΄: ὅρον, ὡς τὸ α, πρὸς τὸ γ, ἔχει καὶ τὸ β, πρὸς τὸ αὐτὸ γ. Τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ γ, πρὸς ἑκάτερον τῶν α β, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. εἰ γὰρ τὸ ζ, ὑπερέχῃ τοῦ δ, ὑπερέξει πάντως καὶ τοῦ ε, κἂν ἴσον, κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. Τὰ ἴσα ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Η΄: Θεώρημα.

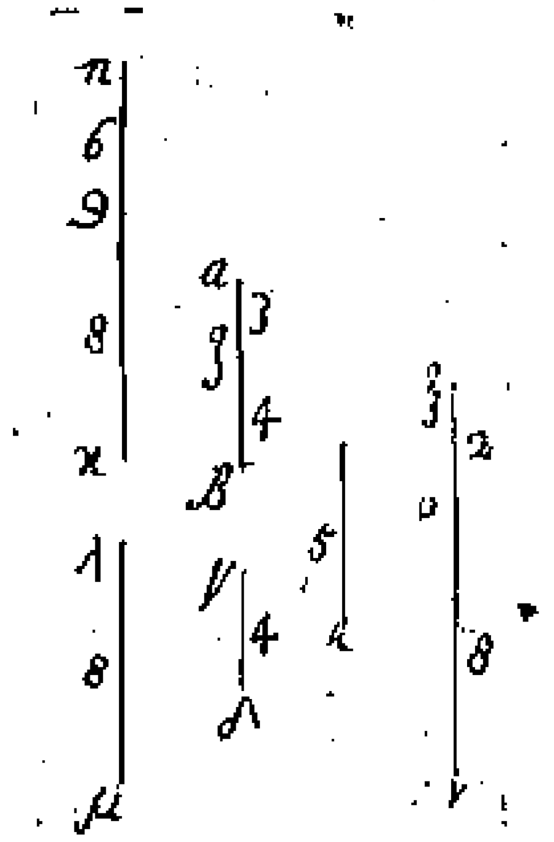
Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλαττον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον.

Ἔστωσαν δὴ ἄνισα μεγέθη τὰ α β, γ δ, ἄλλο δὲ, ὃ ἔτυχε τὸ ε. Λέγω, ὅτι τὸ μεῖζον α β, πρὸς τὸ ε, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλασσον γ δ, πρὸς τὸ αὐτὸ ε. Ἀφῃρήσθω γὰρ παρὰ τοῦ α β, μείζονος τὸ ζ β, ἴσον τῷ γ δ, ἐλάττονι.

καὶ ἐπεὶ

καὶ ἐπεὶ τὰ α β, ε, ὁμογενῆ εἰσι, πάντως γε κατὰ τὸν τέταρτον ὅρον τοῦ παρόντος, τὸ ἔλαττον τῶν α ζ, ζ β, δύναται πολλαπλασιαζόμενον τοῦ ε, ὑπερέχειν. Ἔστω πρότερον τὸ α ζ, ἔλαττον τοῦ ζ β. καὶ πολλαπλασιασθήτω ἄχρις οὗ τὸ γενόμενον, μεῖζον γένηται τοῦ ε, καὶ ἔστω τὸ η θ. ὁσαπλάσιον δὲ τὸ η θ, τοῦ α ζ, τοσαυταπλάσιον γενέσθω καὶ τὸ θ κ, τοῦ ζ β, καὶ τὸ λ μ, τοῦ γ δ. πολλαπλασιασθήτω δὲ καὶ τὸ ε, ἄχρις οὗ γένηται τὸ ν ξ, πρώτως ὑπερέχον τοῦ λ μ, (λέγεται δὲ τὸ ν ξ, πρώτως ὑπερέχειν τοῦ λ μ, ὅταν μὴ ὑπερέχῃ τοῦ αὐτοῦ λ μ, μείζονι τοῦ ε, ὥστε τὸ ο ξ, μὴ εἶναι μεῖζον τοῦ ε.) εἶτα ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ν ξ, τὸ ν ο, ἴσον τῷ λ μ. Ἐπεὶ τοίνυν ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ η θ, τοῦ α ζ, καὶ τὸ θ κ, τοῦ ζ β. ἄρα ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τὸ η θ, τοῦ α ζ, καὶ τὸ η κ, τοῦ α β, κατὰ τὴν α΄: τοῦ παρόντος. ὁσαπλάσιον δέ ἐστι τὸ η θ, τοῦ α ζ, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ λ μ, τοῦ γ δ, ἄρα ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τὸ η κ, τοῦ α β, καὶ τὸ λ μ, τοῦ γ δ. Πάλιν ἐπεὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ θ κ, τοῦ ζ β, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ λ μ, τοῦ γ δ, τὸ δὲ ζ β, ἴσον ἐστὶ τῷ γ δ, πάντως γε καὶ τὸ θ κ, ἴσον ἐστὶ τῷ λ μ· ἀλλὰ τὸ λ μ, ἴσον ἐστὶ τῷ ν ο, ἄρα καὶ τὸ θ κ, ἴσον ἐστὶ τῷ ν ο. γέγονε δὲ τὸ μὲν η θ, μεῖζον τοῦ ε, τὸ δὲ ξ ο, οὐκ ἔστι μεῖζον τοῦ αὐτοῦ ε. προστιθεμένων ἄρα τοῖς θ κ, ο ν, ἴσοις μεγέθεσι τῶν η θ, ξ ο, τὸ η κ, ἐν ᾧ τὸ η θ, μεῖζον προστίθεται, μεῖζόν ἐστι τοῦ ν ξ, ἐν ᾧ τὸ ξ ο, ἔλαττον προστίθεται. τὸ δὲ λ μ, οὐ μόνον οὐχ ὑπερέχει τοῦ ν ξ. ἀλλὰ δὴ καὶ ἔλαττον αὐτοῦ ἐστιν. ἀλλὰ τὸ μὲν η κ, ἰσάκις πολλαπλάσιόν ἐστι τοῦ α β, τὸ δὲ λ μ, τοῦ γ δ, καὶ τὸ ν ξ, πολλαπλάσιον τοῦ ε. τὸ α β, ἄρα μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὸ ε, ἤπερ τὸ γ δ, πρὸς τὸ αὐτὸ ε, κατὰ τὸν ζ΄: ὅρον τοῦ παρόντος.

Eucl. Lib. 5. Fig. 19.



Λέγω δὲ, ὅτι καὶ τὸ ε, πρὸς τὸ γ δ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ α β. τῶν αὐτῶν γὰρ κατασκευασθέντων δειχθήσεται, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, τὸ ξ ν, πολλαπλάσιον ὂν τοῦ ε, ὑπερέχειν τοῦ λ μ, καὶ μὴ ὑπερέχειν τοῦ η κ, ὧν τὸ μὲν λ μ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τοῦ γ δ. τὸ δὲ η κ, τοῦ α β.

Εἰ δὲ τὸ ζ β, ἔλαττον ᾖ τοῦ α ζ. Ἐπεὶ τοῦ αὐτοῦ γένους ἐστὶ τὰ ζ β, ε, πολλαπλασιασθήτω τὸ ζ β, χωρὶς, ἄχρις οὗ γένηται μεῖζον τοῦ ε, καὶ ἔστω τοῦτο, φέρ' εἰπεῖν, τὸ θ κ. ὁσαπλάσιον δ' αὖ γένηται τὸ θ κ, τοῦ ε, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ η θ, τοῦ α ζ, καὶ τὸ λ μ, τοῦ γ δ. καὶ εἰλήφθω τὸ ν ξ, πολλαπλάσιον τοῦ ε, καὶ πρώτως ὑπερέχον τοῦ λ μ· καὶ κατὰ τὰ ἀνωτέρω, δειχθήσεται τὸ μὲν η κ, ὑπερέχειν τοῦ ξ ν. τὸ δὲ λ μ, μὴ ὑπερέχειν τοῦ αὐτοῦ ξ ν, καὶ ἑπομένως τὸ α β, μείζονα λόγον ἔχειν πρὸς τὸ ε, ἤπερ τὸ γ δ, πρὸς τὸ αὐτὸ ε. ὅπερ ἦν τὸ ὑποχεθέν.

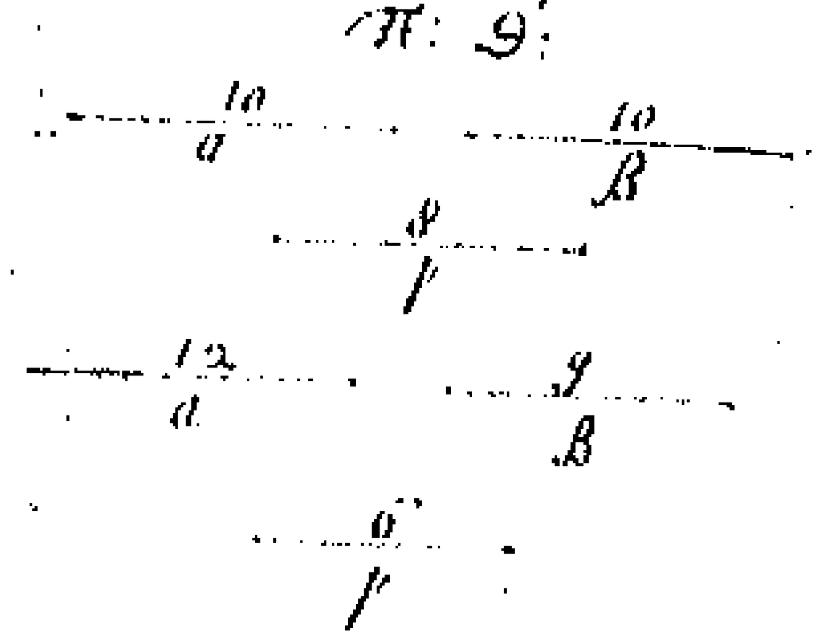
Πρό-

Πρότασις Θ': Θεώρημα.

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶ, καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, κἀκεῖνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐχέτωσαν τὰ α, β, τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὸ γ, μέγεθος, καὶ τὸ γ, πρὸς ἑκάτερον τῶν α, β, ὁμοίως τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον. Λέγω, ὅτι κατά τε τὴν πρώτην ὑπόθεσιν, καὶ κατὰ τὴν δευτέραν τὰ α, β, ἴσα ἀλλήλοις ἐσίν. εἰ γὰρ μὴ, ἔσαι τὸ ἓν μεῖζον. καὶ κατὰ τὴν αὐωτέρω, ὔτε τὰ α, β, πρὸς τὸ γ, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὔτε τὸ γ, πρὸς ἑκάτερον τῶν α β. ὅπερ ἀντίκειται τῇ ὑποθέσει. ἴσα ἄρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 5. Fig. 20.



Πρότασις Ι': Θεώρημα.

Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον, ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι, πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν.

Τῶν α, β, ἤδη μεγεθῶν, τὸ μὲν α, ἐχέτω μείζονα λόγον πρὸς τὸ γ, τὸ δὲ β, ἐλάττονα. Λέγω τὸ α, μεῖζον εἶναι τῦ β. εἰγὰρ μὴ, ἢ ἴσον ἔσαι τὸ α, τῷ β, ἢ ἔλαττον. ὅτι δὲ ὐδέτερον, δῆλον. εἰγὰρ ἴσον ἦν τὸ α, τῷ β, τὸν αὐτὸν ἂν εἶχε λόγον ἑκάτερον τῶν α, β, πρὸς τὸ γ, κατὰ τὴν αὐωτέρω. εἰδὲ ἔλαττον, ἐλάττονα λόγον εἶχε τὸ α, πρὸς τὸ γ, ἤπερ τὸ β, πρὸς τὸ αὐτὸ γ, ἔχει δὲ μείζονα, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα τὸ α, μεῖζόν ἐστι τῦ β. Ἐχέτω δὲ καὶ τὸ γ, μείζονα λόγον πρὸς τὸ β, ἤπερ πρὸς τὸ α. Λέγω καὶ ὕτω τὸ β, ἔλασσον εἶναι τῦ α. εἰγὰρ μὴ, ἢ ἴσον ἔσαι τὸ β, τῷ α, ἢ ἔλαττον. ὅτι δὲ ὐδέτερον δῆλον καὶ τῦτο. εἰ μὲν γὰρ ἴσον, τὸν αὐτὸν ἂν εἶχε λόγον τὸ γ, πρὸς ἑκάτερον τῶν α, β, κατὰ τὴν αὐωτέρω, εἰ δὲ μεῖζον ἦν τὸ β, τῦ α. τὸ γ, πρὸς τὸ α, μείζονα λόγον εἶχε, ἤπερ πρὸς τὸ β, κατὰ τὴν η: τῦ παρόντος. ἔχει δὲ μείζονα μὲν λόγον πρὸς τὸ β, ἐλάττονα δὲ πρὸς τὸ γ. τὸ β, ἄρα ἔλαττόν ἐστι τῦ α. ὅπερ ἦν τὸ ὑποκειθέν.

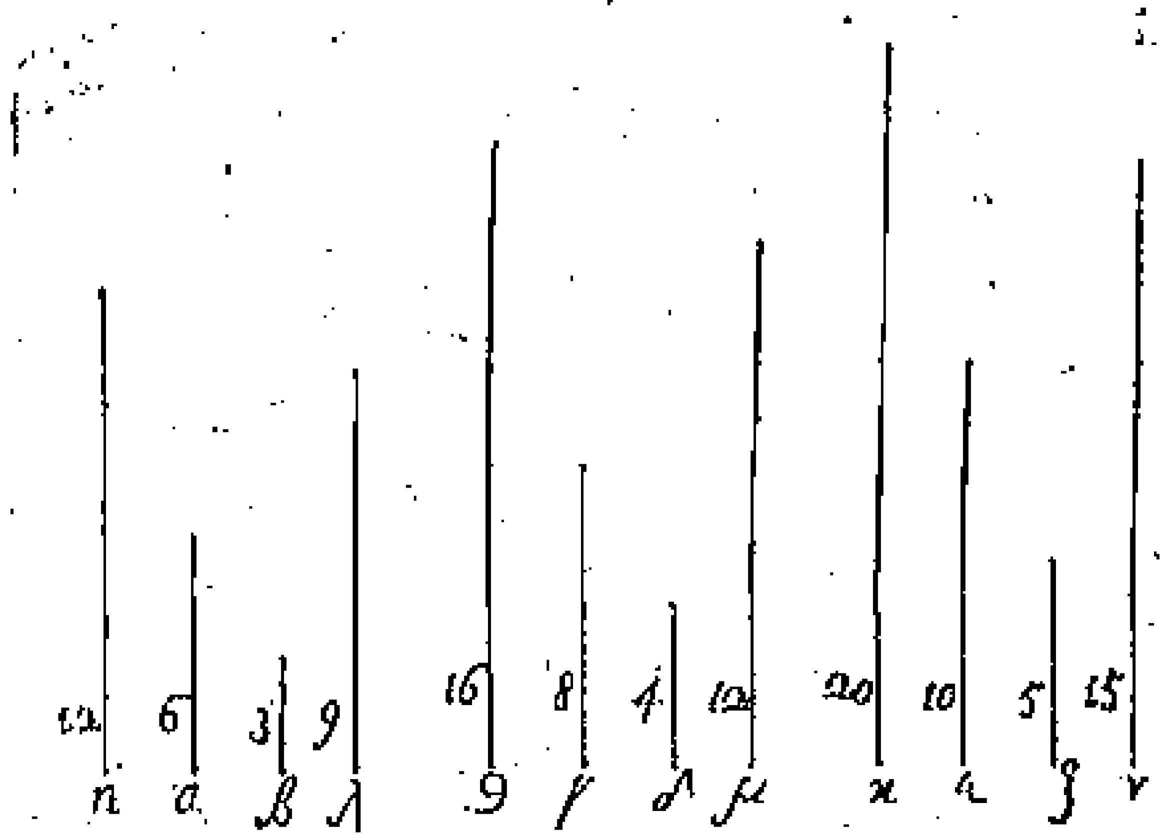
Πρότασις ΙΑ': Θεώρημα.

Οἱ τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοὶ, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί.

Ἔστω δὴ ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ γ, πρὸς τὸ δ, καὶ ὡς τὸ γ, πρὸς τὸ δ, τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. Λέγω, ὅτι ἐστὶν καὶ ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. Εἰλήφθωσαν γὰρ τῶν μὲν α, γ, ε, ἡγυμένων ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ η, θ, κ. τῶν δὲ β, δ, ζ, ἑπομένων ἄλλα, ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ λ, μ, ν. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, ὕτω τὸ γ, πρὸς τὸ δ, πάντως γε, κατὰ τὸν ε: ὅρον

ὅρον τῦ παρόντος, εἰ τὸ τῦ α, πρώτυ ἰσάκις πολλαπλάσιον, δῆλον: τὸ η, ὑπερέχῃ τῦ λ, ὅπερ ἐστὶ τοῦ β, δευτέρυ ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὑπερέξει καὶ τὸ τῦ γ': δηλ: τὸ θ, τῦ μ, ὅπερ ἐστὶ τοῦ δ': ἰσάκις πολλαπλ: κἂν ἴσον, ἴσον. κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. Διὰ τὰ αὐτὰ ἐὰν τὸ θ, ὑπερέχῃ τοῦ μ, ὑπερέξει καὶ τὸ κ, τῦ ν, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. Ἀλλ' εἰ τὸ θ, ὑπερέχῃ τῦ μ, ὑπερέξει, ὡς δέδεικται, καὶ τὸ η, τοῦ λ, κἂν ἴσον, ἴσον, καὶ τὰ ἑξῆς. ἄρα ἐὰν τὸ η, ὑπερέχῃ τοῦ λ, ὑπερέχει καὶ τὸ κ, τῦ ν, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. τὰ δὲ η, καὶ κ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τῶν α, ε, καὶ τὰ λ, ν, τῶν β, ζ. ἄρα ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, ὕτω τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. ὅπερ ἦν τὸ ὑποκειθέν.

Eucl. Lib. 5. Fig. 21.

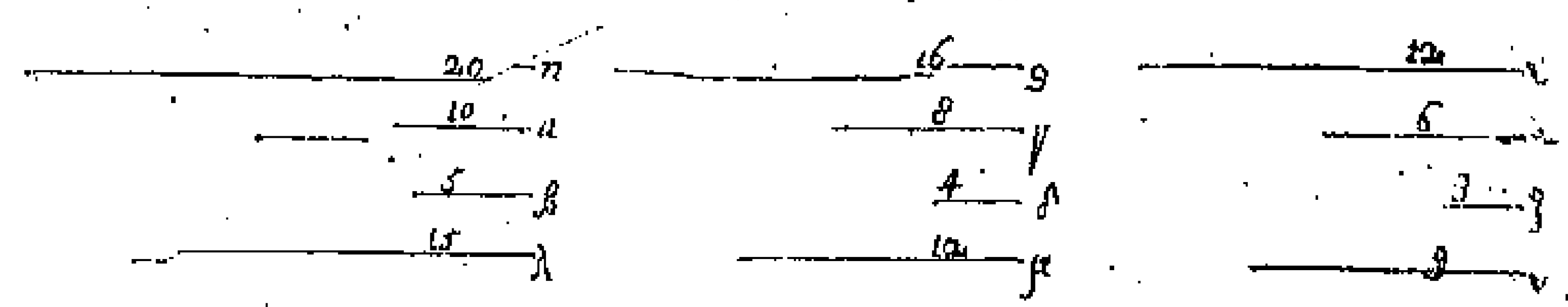


Πρότασις ΙΒ': Θεώρημα.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, ἔσαι ὡς ἓν τῶν ἡγυμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα.

Ἔστωσαν ἤδη τὰ α β, γ δ, ε ζ, μεγέθη ἀνάλογον, ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ γ, πρὸς τὸ δ, καὶ τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. Λέγω, ὅτι ἐστὶν καὶ ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, ὕτω τὰ α, γ, ε, πρὸς τὰ β, δ, ζ. εἰλήφθωσαν γὰρ τῶν μὲν α, γ, ε, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ η, θ, κ. τῶν δὲ β, δ, ζ, ἄλλα, ἃ ἔτυχε τὰ λ, μ, ν. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, ὕτω τὸ γ, πρὸς τὸ δ, καὶ τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. ἄρα κατὰ τὸν ε: ὅρον, εἰ τὸ η, ὑπερέχῃ τῦ λ, ὑπερέξει καὶ τὸ θ, τῦ μ, καὶ τὸ κ, τῦ ν, κἂν ἴσον ἴσον, κἂν ἔλασσον ἔλασσον. ὥστε εἰ ὑπερέχῃ τὸ η, τῦ λ, ὑπερέξυσι καὶ τὰ η θ κ, ὁμῦ τῶν λ μ ν, ὁμῦ, κἂν ἴσον, ἴσα. κἂν ἔλασσον, ἐλάσσονα. ἀλλὰ τὰ η, καὶ λ, πολλαπλάσιά ἐστι τῶν α β, πρώτυ δῆλον: καὶ δευτέρυ, τὰ δὲ η, θ, κ, καὶ λ, μ, ν, τῶν α γ ε, καὶ β δ ζ, τρίτυ δηλ: καὶ τετάρτυ, ἄρα κατὰ τὴν ά: τῦ παρόντος, ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, ἐστὶ καὶ τὰ α γ ε, πρὸς τὰ β δ ζ, κατὰ τὸν ε: ὅρον. Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 5. Fig. 22.



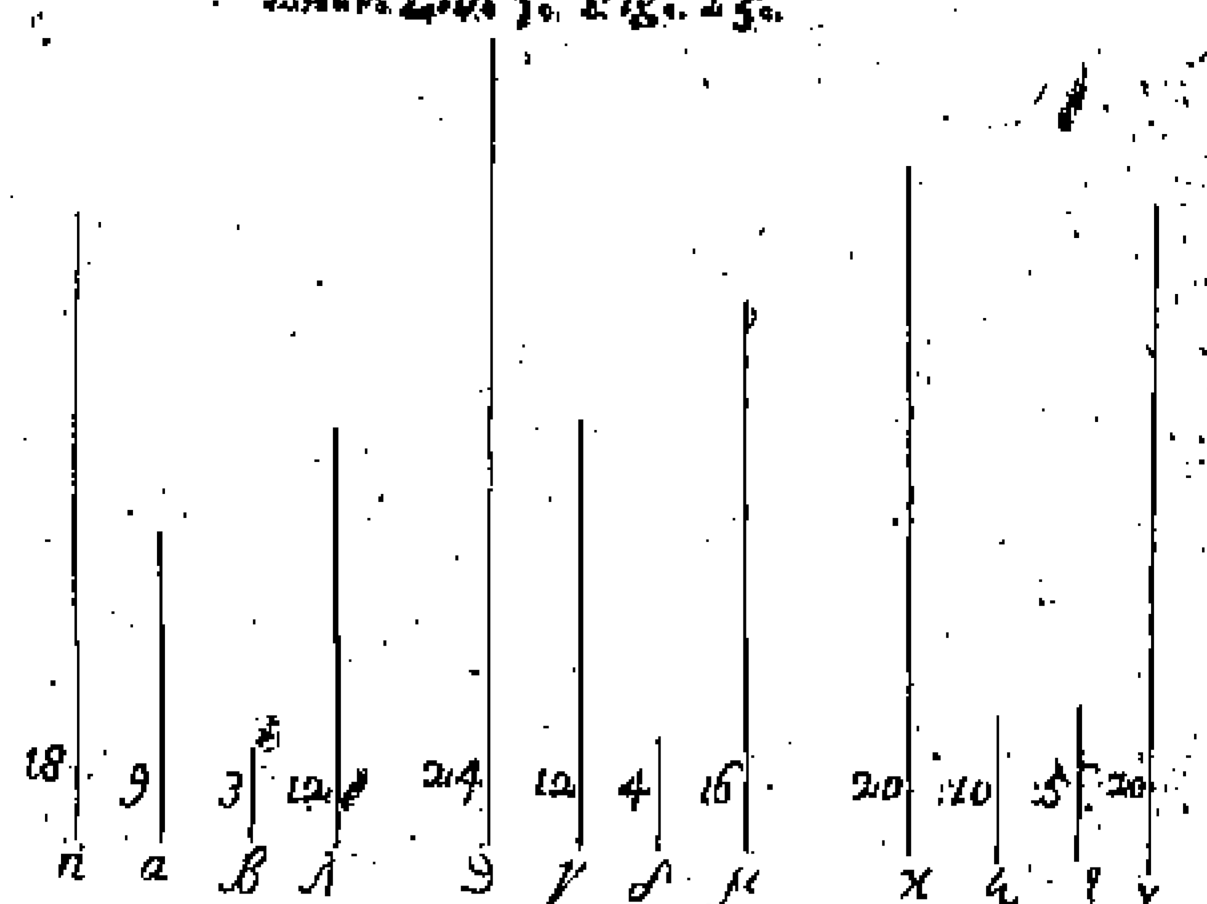
Πρό-

Πρότασις ΙΓ'. Θεώρημα.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον. τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ, ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον, καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει, ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον.

Ἔστω ἤδη ὡς πρῶτον τὸ α, πρὸς δεύτερον τὸ β, οὕτω τρίτον τὸ γ, πρὸς τέταρτον τὸ δ. τὸ δὲ τρίτον γ, πρὸς τέταρτον τὸ δ, μείζονα ἐχέτω λόγον, ἤπερ πέμπτον τὸ ε, πρὸς ἕκτον τὸ ζ. Λέγω, ὅτι καὶ πρῶτον τὸ α, πρὸς δεύτερον τὸ β, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πέμπτον τὸ ε, πρὸς ἕκτον τὸ ζ. Εἰλήφθωσαν γὰρ τῶν μὲν α, γ, ε, ἡγουμένων ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ η, θ, κ, τῶν δὲ ἑπομένων ἄλλα, ἃ ἔτυχε τὰ λ, μ, ν. καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ α, πρῶτον πρὸς τὸ β, δεύτερον, οὕτως ἐστὶ τὸ γ, τρίτον πρὸς τὸ δ, τέταρτον. καὶ τῶν μὲν α, γ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ η, θ.

Eucl. Lib. 5. Fig. 23.



τῶν δὲ β, δ, τὰ λ, μ. πάντως γε εἰ τὸ η, ὑπερέχῃ τοῦ θ, ὑπερέχει καὶ τὸ λ, τοῦ μ, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλασσον, ἔλασσον, κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ δ'. ὅρου τοῦ παρόντος. Ἐπεὶ δὲ πάλιν τὸ γ, πρὸς τὸ δ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. τῶν δὲ γ δ, ὡς εἴρηται, ἰσάκις εἴληπται πολλαπλάσια τὰ θ μ. τῶν δὲ ε ζ, τὰ κ ν. εἰ ἄρα τὸ θ, ὑπερέχῃ τοῦ μ, τὸ κ, οὐχ ὑπερέχει τοῦ ν, κατὰ τὸν ζ'. ὅρον, ἀλλ' εἰ ὑπερέχῃ τὸ θ, τοῦ μ, ὑπερέχει καὶ τὸ η, τοῦ λ, ὡς δέδεικται. ἄρα εἰ ὑπερέχῃ καὶ τὸ η, τοῦ λ, τὸ κ, οὐχ ὑπερέχει τοῦ ν. κατὰ τὸν αὐτὸν ἄρα ζ'. ὅρον, τὸ α, πρὸς τὸ β, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. ὅπερ ἦν τὸ ὑποτεθέν.

Πρότασις ΙΔ'. Θεώρημα.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον. κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

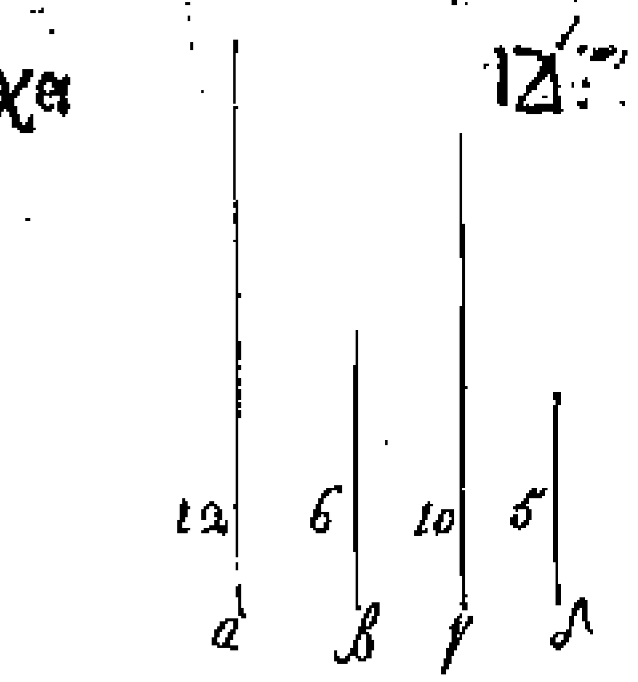
Πρῶτον ἤδη τὸ α, πρὸς δεύτερον τὸ β, τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον, καὶ τρίτον τὸ γ, πρὸς τέταρτον τὸ δ. τὸ δὲ α, τοῦ γ, μεῖζον ἔστω. Λέγω, ὅτι καὶ τὸ β, τοῦ δ, μεῖζον ἔσται. Ἐπεὶ γὰρ τὸ α, τοῦ γ, μεῖζόν ἐστιν, ἔστω δὲ ἄλλο, ὃ ἔτυχε τὸ β. πάντως γε τὸ α, πρὸς τὸ β, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ γ, πρὸς τὸ αὐτὸ β, κατὰ τὴν η'. τοῦ παρόντος. ἀλλ' ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, ὑπόκειται τὸ γ, πρὸς τὸ δ, ἄρα τὸ αὐ-

τὸ γ, πρὸς τὸ δ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ β. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστι, κατὰ τὴν ι'. τοῦ παρ: ἄρα τὸ δ, ἔλαττόν ἐστι τοῦ β, καὶ ἀνάπαλιν τὸ β, μεῖζον τοῦ δ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν τὸ α, ἴσον ᾖ τῷ γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ β, τῷ δ, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 5. Fig. 24.

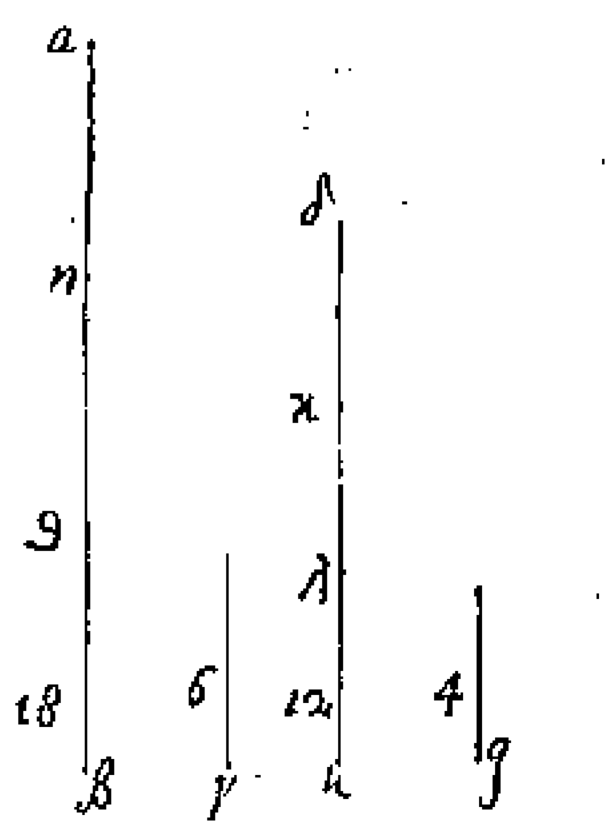
Πρότασις ΙΕ'. Θεώρημα.

ΙΔ.



Τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ληφθέντα καταλλήλως.

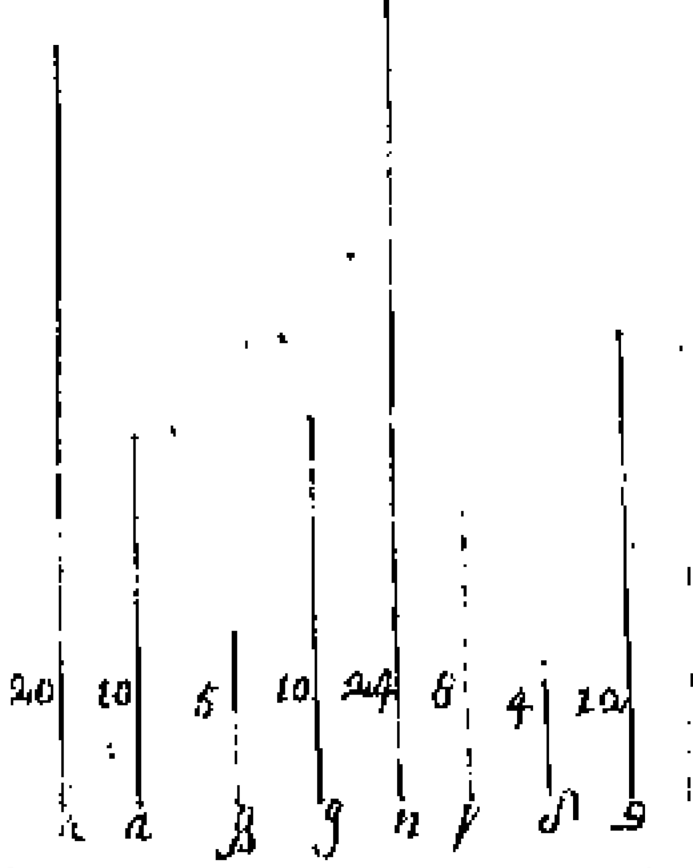
Ἔστωσαν ἤδη ἰσάκις πολλαπλάσια τὸ αβ, τοῦ γ, καὶ τὸ δε, τοῦ ζ. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ γ, πρὸς τὸ ζ, τὸ αβ, πρὸς τὸ δε. Ἐπεὶ γὰρ τὸ αβ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τοῦ γ, καὶ τὸ δε, τοῦ ζ, διῃρημένα ἄρα τοῦ αβ, εἰς τὰ ἴσα τῷ γ, τὰ αη, ηθ, θβ. καὶ τοῦ δε, εἰς τὰ ἴσα τῷ ζ, τὰ δκ, κλ, λε, ἴσον ἐστὶ τὸ πλῆθος τῶν αη, ηθ, θβ, τῷ πλήθει τῶν δκ, κλ, λε. ἀλλὰ τὰ αη, ηθ, θβ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν, ὥσπερ καὶ τὰ δκ, κλ, λε, ἄρα ὡς τὸ αη, πρὸς τὸ δκ, οὕτως ἐστὶ τὸ ηθ, πρὸς τὸ κλ, καὶ τὸ θβ, πρὸς τὸ λε. καὶ ἔτι ὡς τὸ αη, πρὸς τὸ δκ, οὕτω τὰ αη, ηθ, θβ, πρὸς τὰ δκ, κλ, λε, κατὰ τὴν πρώτην τοῦ παρόντος. τὸ δὲ αη, ἴσον ἐστὶ τῷ γ, καὶ τὸ δκ, τῷ ζ. ἄρα καὶ ὡς τὸ γ, πρὸς τὸ ζ, οὕτω τὰ αη, ηθ, θβ, ἤτοι τὸ αβ, πρὸς τὰ δκ, κλ, λε, δηλ: τὸ δε. τὰ μέρη ἄρα τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις, καὶ τὰ ἑξῆς.



Πρότασις Ις'. Θεώρημα.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται.

Ἔστωσαν ἤδη τέσσαρα μεγέθη τὰ α, β, γ, δ, ἀνάλογον, ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ γ, πρὸς τὸ δ. Λέγω, ὅτι ἐστὶ καὶ ὡς τὸ α, πρὸς τὸ γ, τὸ β, πρὸς τὸ δ. εἰλείφθωσαν γὰρ τῶν μὲν α β, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ε ζ, τῶν δὲ γ δ, ἄλλα, ἃ ἔτυχε τὰ η θ. καὶ ἐπεὶ τὰ ε ζ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τῶν α β, ἄρα κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, οὕτως ἐστὶ τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, ὡ-



σαύ-

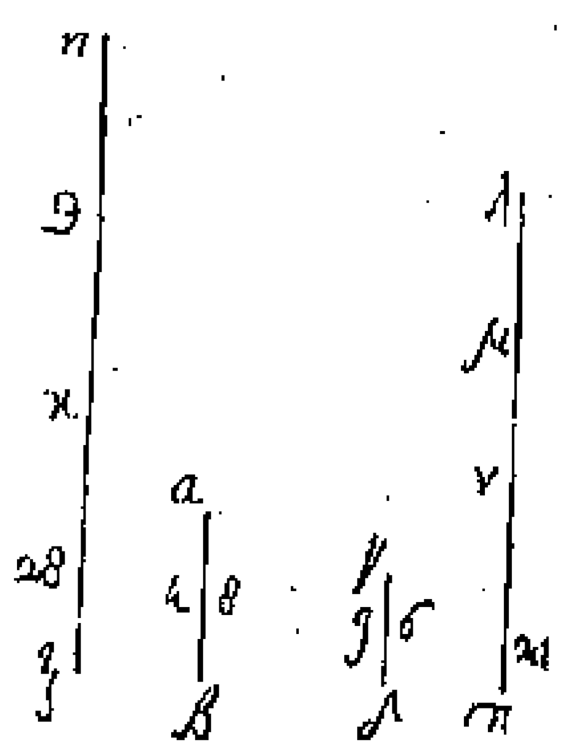
σαύτως καὶ ὡς τὸ γ, πρὸς τὸ δ, τὸ η, πρὸς τὸ θ, ὡς δὲ τὸ α, πρὸς τὸ β, ἐστὶ καὶ τὸ γ, πρὸς τὸ δ· ἄρα καὶ ὡς τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, τὸ η, πρὸς τὸ θ, κατὰ τὴν ιά: τοῦ παρόντος, ὥστε κατὰ τὴν ιδ': τοῦ αὐτοῦ, εἰ τὸ ε, πρῶτον ὑπερέχῃ τοῦ η, τρίτου, ὑπερέχει καὶ τὸ ζ, δεύτερον τοῦ θ, τετάρτου, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλασσον, ἔλασσον· τὰ δὲ ε, καὶ ζ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τῶν α β, καὶ τὰ η θ, τῶν γ δ· ἄρα κατὰ τὸν έ: ὅρον τοῦ παρ: ὡς τὸ α, πρὸς τὸ γ, οὕτως ἐστὶ τὸ β, πρὸς τὸ δ, ὅπερ ἦν τὸ ὑποτεθέν.

Πρότασις ΙΖ': Θεώρημα.

Ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσαι.

Ἔσωσαν ἤδη συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον τὰ α β, β ε, γ δ, δ ζ, τουτέστιν ὡς τὸ α β, πρὸς τὸ β ε, τὸ γ δ, πρὸς τὸ δ ζ. Λέγω, ὅτι καὶ διαιρεθέντα ἔσαι, ὡς τὸ α ε, πρὸς τὸ ε β, οὕτω τὸ γ ζ, πρὸς τὸ ζ δ. εἰλήφθωσαν γὰρ τῶν μὲν α ε, ε β, γ ζ, ζ δ, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ η θ, θ κ, λ μ, μ ν, τῶν δὲ ε β, ζ δ, ἄλλα, ἃ ἔτυχε τὰ κ ξ, ν π· ἐπεὶ οὖν τὸ η θ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τοῦ α ε, καὶ τὸ θ κ, τοῦ ε β· πάντως γε, κατὰ τὴν ά: τοῦ παρ: ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον, καὶ τὸ η θ, τοῦ α ε, καὶ τὸ η κ, τοῦ α β. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τὸ λ μ, τοῦ γ ζ, καὶ τὸ λ ν, τοῦ γ δ· τὸ δὲ η θ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τοῦ α ε, καὶ τὸ λ μ, τοῦ γ ζ, ἄρα καὶ τὸ η κ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τοῦ α β, καὶ τὸ λ ν, τοῦ γ δ· Πάλιν ἐπεὶ τὸ θ κ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τοῦ ε β, καὶ τὸ μ ν, τοῦ ζ δ, εἴληπται δὲ καὶ τὸ κ ξ, τοῦ ε β, καὶ τὸ ν π, τοῦ ζ δ, ἰσάκις πολλαπλάσια, καὶ συντεθέντα ἄρα ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια, τὸ θ ξ, τοῦ ε β, καὶ τὸ μ π, τοῦ ζ δ· ἀλλ' ὡς τὸ α β, πρὸς τὸ β ε, οὕτως ἐστὶ καὶ τὸ γ δ, πρὸς τὸ δ ζ, τῶν δὲ α β, γ δ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τὰ η κ, λ ν, καὶ τῶν ε β, ζ δ, τὰ θ ξ, μ π, εἰ ἄρα ὑπερέχῃ τὸ η κ, τοῦ θ ξ, ὑπερέχει καὶ τὸ λ ν, τοῦ μ π, κατὰ τὸν έ: ὅρον, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. Ὑπερεχέτω δὴ τὸ η κ, τοῦ θ ξ. κοινοῦ δὲ ἀφαιρουμένου τοῦ θ κ, ὑπερέχει καὶ τὸ η θ, τοῦ κ ξ, ἀλλὰ δὴ εἰ ὑπερέχῃ τὸ η κ, τοῦ θ ξ, ὑπερέχει καὶ τὸ λ ν, τοῦ μ π, κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ μ ν, ἐναπολείπεται πάντως τὸ λ μ, μεῖζον τοῦ ν π. Ὁμοίως δειχθήσεται, ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ η θ, τῷ κ ξ, ἴσον ἔσαι καὶ τὸ λ μ, τῷ ν π, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. ἀλλὰ τὰ η θ, λ μ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τῶν α ε, γ ζ, τὰ δὲ κ ξ, ν π, τῶν ε β, ζ δ· ἄρα κατὰ τὸν έ: ὅρον, ὡς τὸ α ε, πρὸς τὸ ε β, οὕτως ἐστὶ τὸ γ ζ, πρὸς τὸ ζ δ. Ἐὰν ἄρα συγκείμενα μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 5. Fig. 25.



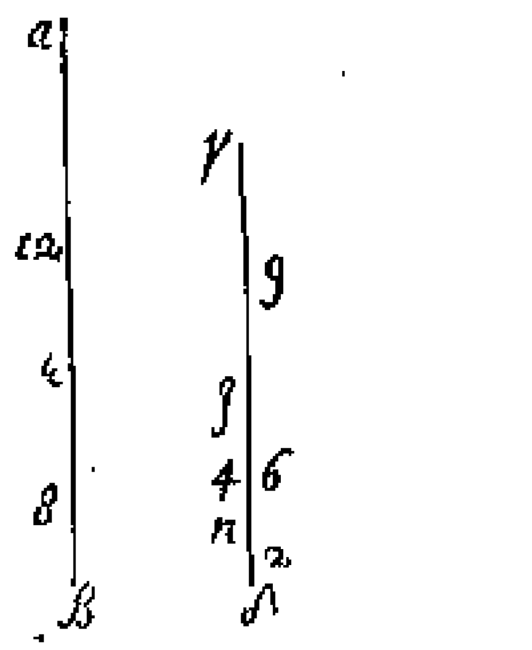
Πρό-

Πρότασις ΙΗ': Θεώρημα.

Ἐὰν διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσαι.

Ἔσωσαν ἤδη διῃρημένα μεγέθη τὰ α ε, ε β, καὶ γ ζ, ζ δ, ἀνάλογον, ὡς τὸ α ε, πρὸς τὸ ε β, τὸ γ ζ, πρὸς τὸ ζ δ. Λέγω, ὅτι καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσαι, ὡς τὸ α β, πρὸς τὸ ε β, τὸ γ δ, πρὸ τὸ ζ δ. εἰ γὰρ μὴ, ἔσαι πάντως ὡς τὸ α β, πρὸς τὸ ε β, οὕτω τὸ γ δ, πρὸς ἔλαττον τοῦ ζ δ, ἢ γοῦν πρὸς μεῖζον. Ἔσω δὴ πρὸς ἔλαττον τὸ η δ· καὶ ἐπεὶ συγκείμενα μεγέθη τὰ α β, ε β, γ δ, η δ, ἀνάλογόν ἐστι, πάντως γε καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογόν ἐστι, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἄρα ὡς τὸ α ε, πρὸς τὸ ε β, οὕτως ἐστὶ τὸ γ η, πρὸς τὸ η δ, ὡς δὲ τὸ α ε, πρὸς τὸ ε β, ἦν καὶ τὸ γ ζ, πρὸς τὸ ζ δ· ἄρα κατὰ τὴν ιά: τοῦ παρ: ὡς τὸ γ η, πρὸς τὸ η δ, τὸ γ ζ, πρὸς τὸ ζ δ· ἀλλὰ τὸ γ η, πρῶτον, μεῖζόν ἐστι τοῦ γ ζ, τρίτου, ἄρα καὶ τὸ η δ, δεύτερον, μεῖζόν ἐστι τοῦ ζ δ, τετάρτου, κατὰ τὴν τὴν ιδ': τοῦ αὐτοῦ. ὑπετέθη δὲ καὶ ἔλαττον, ἄτοπον ἄρα· ἄρα καὶ τὸ ἐξ οὐκ ἕπεται. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεῖζον τοῦ ζ δ· ἄρα ὡς τὸ α ε, πρὸς τὸ ε β, ἐστὶ καὶ τὸ γ ζ, πρὸς τὸ ζ δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 5. Fig. 26.

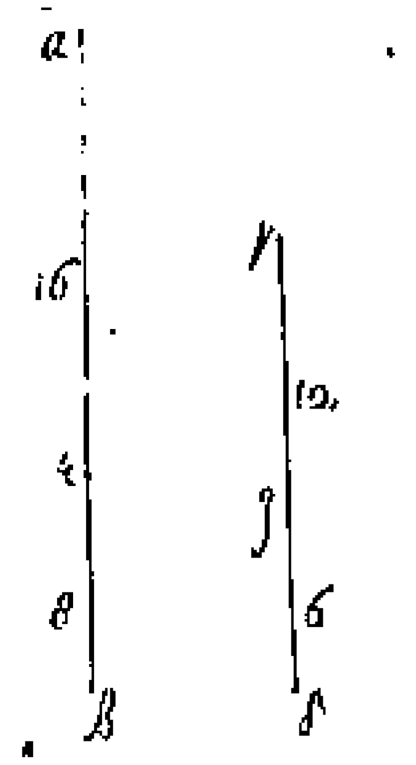


Πρότασις ΙΘ': Θεώρημα.

Ἐὰν ᾖ, ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθὲν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσαι, ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

Ἔσω δὴ ὡς ὅλον τὸ α β, πρὸς ὅλον τὸ γ δ, οὕτω τὸ α ε, ἀφαιρεθὲν πρὸς τὸ γ ζ, ἀφαιρεθέν. Λέγω, ὅτι καὶ τὸ λοιπὸν ε β, πρὸς τὸ λοιπὸν ζ δ, ἐστιν, ὡς ὅλον τὸ α β, πρὸς ὅλον τὸ γ δ. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ α β, πρὸς τὸ γ δ, οὕτω τὸ α ε, πρὸς τὸ γ ζ, πάντως γε καὶ ἐναλλὰξ, ὡς τὸ α β, πρὸς τὸ α ε, οὕτω τὸ γ δ, πρὸς τὸ γ ζ, κατὰ τὴν ις': τοῦ παρόντος. Ἐπεὶ δὲ πάλιν συγκείμενα μεγέθη τὰ α β, α ε, γ δ, γ ζ, ἀνάλογόν ἐστι· δῆλον, ὅτι καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογόν ἐστι, κατὰ τὴν ιζ': τοῦ αὐτοῦ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ α ε, πρὸς τὸ ε β, οὕτω τὸ γ ζ, πρὸς τὸ ζ δ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ α ε, πρὸς τὸ γ ζ, τὸ ε β, πρὸς τὸ ζ δ. ἀλλ' ὡς τὸ α ε, πρὸς τὸ γ ζ, ὑπετέθη καὶ τὸ α β, πρὸς τὸ γ δ· ἄρα, κατὰ τὴν ιά: τοῦ αὐτοῦ, ὡς τὸ α β, πρὸς τὸ γ δ, οὕτω τὸ ε β, πρὸς τὸ ζ δ· ὅπερ ἦν τὸ ὑποτεθέν.

Eucl. Lib. 5. Fig. 27.



ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀντιστροφῇ ἀνάλογον ἔσαι. κειμένων γὰρ τῶν α β, α ε, γ δ, γ ζ, ἀνάλογον, ὥστε εἶναι ὡς

R τὸ

τὸ αβ, πρὸς τὸ αε, τὸ γδ, πρὸς τὸ γζ. ἔσαι πάντως, καὶ τὴν ιϛ': τοῦ παρόντος καὶ ἐναλλὰξ, ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ γδ, τὸ αε, πρὸς τὸ γζ, τουτέστιν, ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν. καὶ διὰ τὴν παροῦσαν, ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ γδ, οὕτω τὸ εβ, πρὸς τὸ ζδ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ εβ, τὸ γδ, πρὸς τὸ ζδ, ἤτοι ἡγούμενον πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, καθ' ἣν ὑπερέχει τοῦ ἑπομένου. τοῦτο δὲ, Ἀντιστροφὴ λόγου ἐστὶ, καὶ τὸν ιζ': ὅρον τοῦ παρόντος. Ἰστέον δὲ, ὅτι οὐκ ἀεὶ ἐστὶν ὁ αὐτὸς λόγος τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, ὃν εἶχε τὸ αὐτὸ ἡγούμενον πρὸς τὸ ἑπόμενον, κἂν γὰρ ὁ τοῦ ἡγουμένου λόγος πρὸς τὸ ἑπόμενον πολλαπλάσιος ᾖ, ὁ τοῦ αὐτοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν δύναται εἶναι ἑτέρου εἴδους, ἐπιμορίου φέρ' εἰπεῖν, ἢ ἐπιμεροῦς.

Πρότασις Κ': Θεώρημα.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσαι, κἂν ἴσον, ἴσον. κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

Ἔστωσαν ἤδη τρία μεγέθη τὰ αβγ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ δεζ, σὺν δύο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, τουτέστιν ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ δ, πρὸς τὸ ε. καὶ ὡς τὸ β, πρὸς τὸ γ, τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. ἔστω δὲ τὸ α, τοῦ γ, μεῖζον. Λέγω, ὅτι καὶ τὸ δ, τοῦ ζ, μεῖζόν ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ τὸ α, τοῦ γ, μεῖζόν ἐστι, πάντως γε καὶ τὴν η': τοῦ παρόντος, τὸ α, πρὸς τὸ β, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ γ, πρὸς τὸ αὐτὸ β. ὡς δὲ τὸ α, πρὸς τὸ β, οὕτω τὸ δ, πρὸς τὸ ε, καὶ ὡς τὸ γ, πρὸς τὸ β, οὕτω τὸ ζ, πρὸς τὸ ε, ἀνάπαλιν, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς δ': ἄρα, καὶ τὸ δ, πρὸς τὸ ε, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ζ, πρὸς αὐτὸ τὸ ε. τὸ δ, ἄρα, καὶ τὴν ι': μεῖζόν ἐστι τοῦ ζ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ἐὰν τὸ α, ἴσον ᾖ τῷ γ, ἴσον ἔσαι καὶ τὸ δ, τῷ ζ. κἂν ἔλασσον ἔλασσον. Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία μεγέθη καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 5. Fig. 28.

Πρότασις ΚΑ': Θεώρημα.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σὺν δύο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσαι. κἂν ἴσον, ἴσον. κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

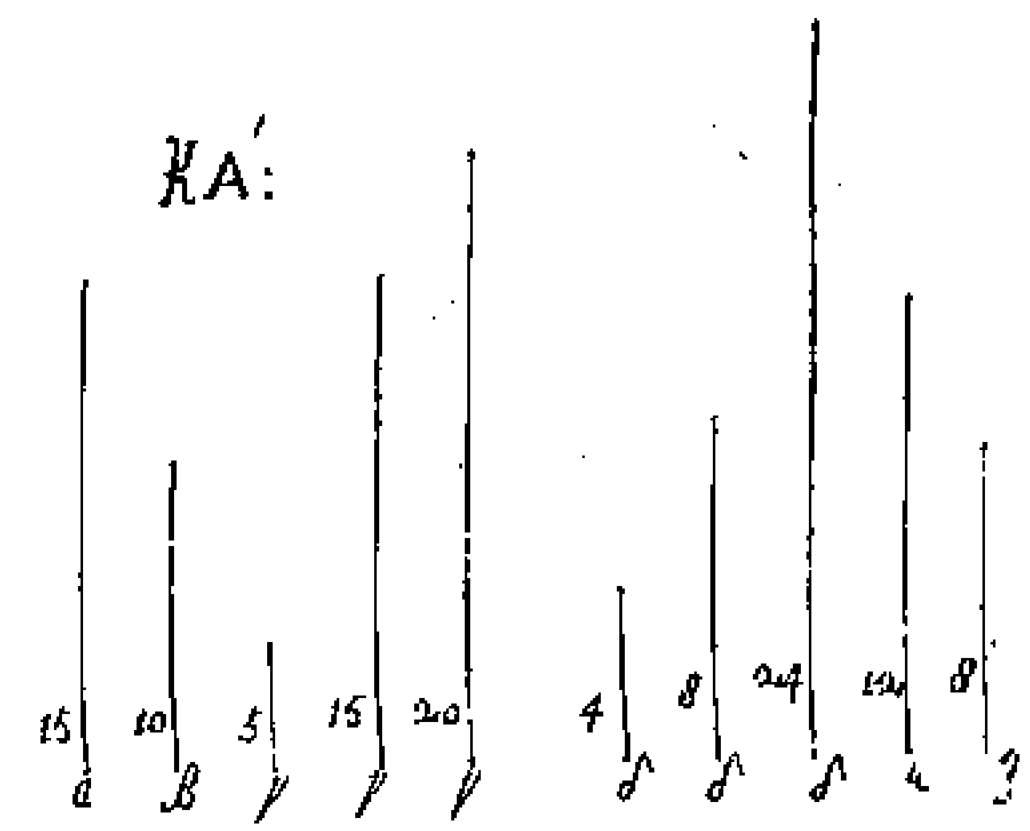
Ἔστωσαν ἤδη μεγέθη τρία τὰ αβγ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ δεζ, σὺν δύο καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ λαμβανόμενα. ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλο-

γία,

γία, τουτέστιν ὡς μὲν τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. ὡς δὲ τὸ β, πρὸς τὸ γ, τὸ δ, πρὸς τὸ ε. ἔστω δ' ἔτι καὶ τὸ α, τοῦ γ, μεῖζον. Λέγω, ὅτι καὶ τὸ δ, τοῦ ζ, μεῖζον ἔσαι. Ἐπεὶ γὰρ τὸ α, τοῦ γ, μεῖζόν ἐστι, πάντως γε τὸ α, πρὸς τὸ β, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ γ, πρὸς τὸ αὐτὸ β. ἀλλ' ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, ἐστὶ καὶ τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, ὡς δὲ τὸ γ, πρὸς τὸ β, τὸ ε, πρὸς τὸ δ, ἀνάπαλιν, καὶ τὸ πόρισμα τῆς δ': ἄρα τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ δ, καὶ τὴν η': τοῦ παρόντος, τὸ ζ, ἄρα ἔλαττόν ἐστι τοῦ δ, καὶ τὴν ι': τοῦ αὐτοῦ, ὥστε τὸ δ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ζ. ὅπερ ἦν τὸ ὑποτεθέν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν τὸ α, ἴσον ᾖ τῷ γ, ἴσον ἔσαι καὶ τὸ δ, τῷ ζ. κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

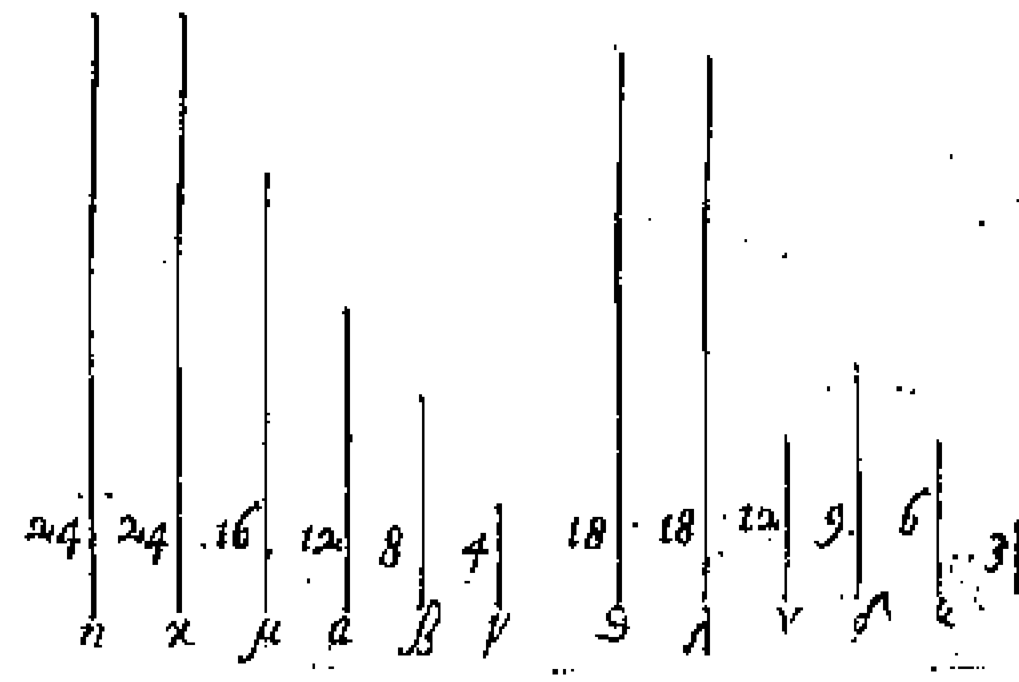
Eucl. Lib. 5. Fig. 29.

ΚΑ:



Πρότασις ΚΒ': Θεώρημα.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσαι.



Ἔστωσαν ἤδη μεγέθη τὰ αβγ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ δεζ, σὺν δύο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, τουτέστιν ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ δ, πρὸς τὸ ε, καὶ ὡς τὸ β, πρὸς τὸ γ, τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. Λέγω, ὅτι καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσαι, ὡς τὸ α, πρὸς τὸ γ, τὸ δ, πρὸς τὸ ζ. Εἰλήφθωσαν γὰρ τῶν μὲν αδ, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ηθ, τῶν δὲ βε, τὰ κλ, καὶ τῶν γζ, τὰ μν. καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, ἐστὶ καὶ τὸ δ, πρὸς τὸ ε, καὶ εἴληπται τῶν μὲν αδ, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ηθ, τῶν δὲ βε, τὰ κλ. πάντως γε κατὰ τὴν ιε': τοῦ παρόντος, ὡς τὸ η, πρὸς τὸ κ, τὸ θ, πρὸς τὸ λ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὡς τὸ κ, πρὸς τὸ μ, τὸ λ, πρὸς τὸ ν. ὥστε τὰ ηκμ, θλν, σὺν δύο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. ἄρα καὶ τὴν κ': τοῦ αὐτοῦ ἐὰν δι' ἴσου τὸ η, τοῦ μ, μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ θ, τοῦ ν, μεῖζον ἔσαι, κἂν ἴσον, ἴσον. κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. τὰ δὲ ηθ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τῶν αδ, καὶ τὰ μν, τῶν γζ. ἄρα, καὶ τὸν ε': ὅρον τοῦ παρ: ὡς τὸ α, πρῶτον πρὸς τὸ γ, δεύτερον, οὕτω τὸ δ, τρίτον πρὸς τὸ ζ, τέταρτον. ὅπερ ἦν τὸ ὑποτεθέν.

 Πρό-

Πρότασις ΚΓʹ: Θεώρημα.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, καὶ δι᾽ ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Ἔστωσαν ἤδη τρία μεγέθη τὰ α β γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ δ ε ζ, σὺν δύο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. Ἔστω δὲ ἡ αὐτῶν ἀναλογία τεταραγμένη, δηλ: ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, ὡς δὲ τὸ β, πρὸς τὸ γ, τὸ δ, πρὸς τὸ ε. Λέγω, ὅτι καὶ δι᾽ ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται, τουτέστιν ὡς τὸ α, πρὸς τὸ γ, τὸ δ, πρὸς τὸ ζ. εἰλήφθωσαν γὰρ τῶν μὲν α β δ, ἰσάκις, πολλαπλάσια τὰ η θ κ, τῶν δὲ γ ε ζ, τὰ λ μ ν. καὶ ἐπεὶ τῶν μὲν α β, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ η θ, τῶν δὲ ε ζ, τὰ μ ν, πάντως γε κατὰ τὴν ιεʹ: τοῦ παρόντος, ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ η, πρὸς τὸ θ. καὶ ὡς τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, τὸ μ, πρὸς τὸ ν. ὡς δὲ τὸ α, πρὸς τὸ β, ὑπόκειται καὶ τὸ ε, πρὸς τὸ ζ· ἄρα, κατὰ τὴν ιαʹ: τοῦ αὐτοῦ, καὶ ὡς τὸ η, πρὸς τὸ θ, τὸ μ, πρὸς τὸ ν. Πάλιν ἐπεὶ ἐστιν, ὡς τὸ β, πρὸς τὸ γ, τὸ δ, πρὸς τὸ ε, πάντως γε καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ β, πρὸς τὸ δ, τὸ γ, πρὸς τὸ ε, κατὰ τὴν ιϛʹ: τοῦ παρόντος. ἀλλὰ τῶν β δ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ θ κ, καὶ τῶν γ ε, τὰ λ μ, ἄρα κατὰ τὴν ιεʹ: ὡς τὸ β, πρὸς τὸ δ, τὸ θ, πρὸς τὸ κ, καὶ ὡς τὸ γ, πρὸς τὸ ε, τὸ λ, πρὸς τὸ μ. ὡς δὲ τὸ β, πρὸς τὸ δ, δέδεικται εἶναι καὶ τὸ γ, πρὸς τὸ ε. ἄρα κατὰ τὴν ιαʹ: τοῦ αὐτοῦ, καὶ ὡς τὸ θ, πρὸς τὸ κ, τὸ λ, πρὸς τὸ μ, ὥστε καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ θ, πρὸς τὸ λ, τὸ κ, πρὸς τὸ μ. ὡς δὲ τὸ η, πρὸς τὸ θ, δέδεικται καὶ τὸ μ, πρὸς τὸ ν, ἄρα τρία μεγέθη τὰ η θ λ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ κ μ ν, ἐν τῷ αὐτῷ εἰσι λόγῳ σὺν δύο λαμβανόμενα, ἔστι δὲ ἡ αὐτῶν ἀναλογία τεταραγμένη· κατὰ τὴν καʹ: ἄρα τοῦ παρόντος, εἰ τὸ η, ὑπερέχει τοῦ λ, ὑπερέξει καὶ τὸ κ, τοῦ ν, κἂν ἴσον, ἴσον. κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. ἀλλὰ τὰ μὲν η κ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τῶν α δ, τὰ δὲ λ ν, τῶν γ ζ. ἄρα, κατὰ τὸν εʹ: ὅρον τοῦ αὐτοῦ, ὡς τὸ α, πρὸς τὸ γ, τὸ δ, πρὸς τὸ ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

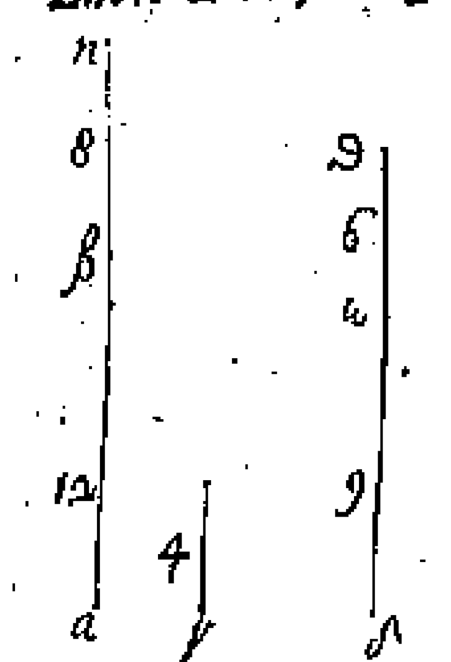
Eucl. Lib. 5. Fig. 30.

Πρότασις ΚΔʹ: Θεώρημα.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

Ἔστω ἤδη πρῶτον τὸ α β, πρὸς δεύτερον τὸ γ, ὡς τὸ δ ε, τρίτον πρὸς τέταρτον τὸ ζ. Ἔστω ἔτι καὶ πέμπτον τὸ β η, πρὸς δεύτερον τὸ γ, ὡς τὸ ε θ, ἕκτον πρὸς τέταρτον τὸ ζ. Λέγω, ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον, ἤτοι τὸ α η, πρὸς δεύτερον τὸ γ, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ δ θ, πρὸς τέταρτον τὸ ζ. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ β η, πρὸς τὸ γ, τὸ ε θ, πρὸς τὸ ζ. πάντως γε καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ γ, πρὸς τὸ β η, τὸ ζ, πρὸς τὸ ε θ, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς δʹ: τοῦ παρόντος. ὡς δὲ τὸ α β, πρὸς τὸ γ, ἐστι καὶ τὸ δ ε, πρὸς τὸ ζ. ἄρα καὶ δι᾽ ἴσου ὡς τὸ α β, πρὸς τὸ β η, τὸ δ ε, πρὸς τὸ ε θ, κατὰ τὴν κβʹ: τοῦ αὐτοῦ. ὥστε καὶ συντεθέντα, ὡς τὸ α η, πρὸς τὸ β η, οὕτως ἐστὶ τὸ δ θ, πρὸς τὸ ε θ, κατὰ τὴν ιηʹ: ἀλλ᾽ ὡς τὸ β η, πρὸς τὸ γ, ἐστι καὶ τὸ ε θ, πρὸς τὸ ζ, ἄρα καὶ δι᾽ ἴσου, κατὰ τὴν κβʹ: ὡς τὸ α η, πρὸς τὸ γ, τὸ δ θ, πρὸς τὸ ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 5. Fig. 31.

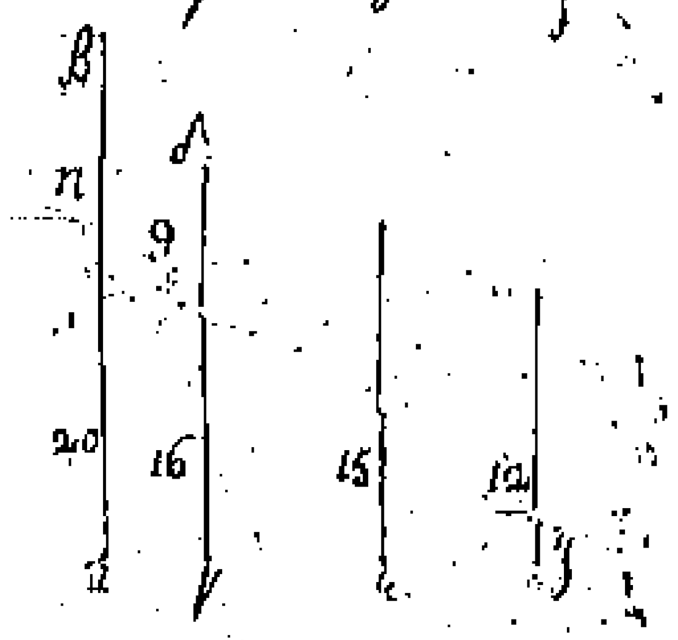


ΚΔʹ.

Πρότασις ΚΕʹ: Θεώρημα.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον τῶν λοιπῶν δύο, μείζονά ἐστι.

Τέσσαρα ἤδη μεγέθη τὰ α β, γ δ, ε, ζ, ἔστωσαν ἀνάλογον, ὡς τὸ α β, πρὸς τὸ γ δ, οὕτω τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. καὶ τούτων μέγιστον μὲν ἔστω τὸ α β, ἐλάχιστον δὲ τὸ ζ. Λέγω τὰ α β, ζ, μείζονα εἶναι τῶν γ δ, ε. γενέσθω γὰρ ἴσον τῷ ε, τὸ α η, καὶ τῷ ζ, τὸ γ θ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ α β, πρὸς τὸ γ δ, οὕτω τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, καὶ τοῖς ε, ζ, ἴσα εἴληπται τὰ α η, γ θ, πάντως γε καὶ ὡς τὸ α β, πρὸς τὸ γ δ, οὕτως ἐστὶ καὶ τὸ α η, πρὸς τὸ γ θ. καὶ ἑπομένως, κατὰ τὴν ιθʹ: τοῦ παρόντος, ὡς τὸ α β, πρὸς τὸ γ δ, τὸ η β, πρὸς τὸ θ δ. τὸ δὲ α β, μεῖζόν ἐστι τοῦ γ δ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ η β, τοῦ θ δ. ἀλλὰ τὸ μὲν α η, ἴσον ἐστι τῷ ε, τὸ δὲ γ θ, τῷ ζ. ἄρα τὰ α η, ζ, ἴσα ἐστι τοῖς γ θ, ε. ἐὰν δὲ ἴσοις ἄνισα προστεθῇ τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα, προστιθεμένου ἄρα τοῖς μὲν α η, ζ, τοῦ η β, τοῖς δὲ γ θ, ε, τοῦ θ δ. δῆλον, ὅτι τὰ α β, ζ, μείζονά ἐστι τῶν γ δ, ε. Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Τέλος τοῦ Πέμπτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

ἙΡΜΗΝΕΙ͗Α ΤΩ͂Ν ὉΡΩΝ

ΤΟΥ͂ ἝΚΤΟΥ ΒΙΒΛΙ͗ΟΥ

ΤΩ͂Ν ΤΟΥ͂ ΕΥ͗ΚΛΕΙ͗ΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙ͗ΩΝ.

ΠΑραβαλὼν Εὐκλ: ἐν τῷ προτέρῳ αὐτοῦ βιβλίῳ, πέμπτῳ ὄντι τῇ τάξει, πρὸς ἄλληλα τὰ μεγέθη, καὶ τὰς ἐν αὐτοῖς σχέσεις τε καὶ ἀναλογίας ἀναπτύξας, καθ᾽ ὅσον εἰς Στοιχείων λόγον, καὶ τὰ ἐν ἐκείνῳ συμβάλλουσι προβλήματά τε καὶ θεωρήματα, ἐπὶ τοῦ παρόντος Ἕκτου τὰ διάφορα τῶν σχημάτων εἴδη πρὸς ἑαυτὰ νῦν παραβάλλει, ἐκ τῆς τῶν σχημάτων σχέσεως τὸν λόγον συνάγων, ὃν αἱ αὐτῶν πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας ἔχουσι παραβαλλόμεναι, καὶ ἀνάπαλιν. τὴν φυσικήν τε ἅμα καὶ διδασκαλικὴν κἀνταῦθα τηρῶν τάξιν. τοὺς Ὅρους τῶν ἐν αὐτῷ προτάττει Προτάσεων. ἁπλούστεροι γὰρ οἱ ὅροι, καὶ δι᾽ αὐτῶν ῥᾷον μανθάνει ὁ διδασκόμενος. Τούτου Ὅροι μέν εἰσι πέντε. Προτάσεις δὲ τριάκοντα πρὸς ταῖς τρισίν.

Ὅρος Πρῶτος.

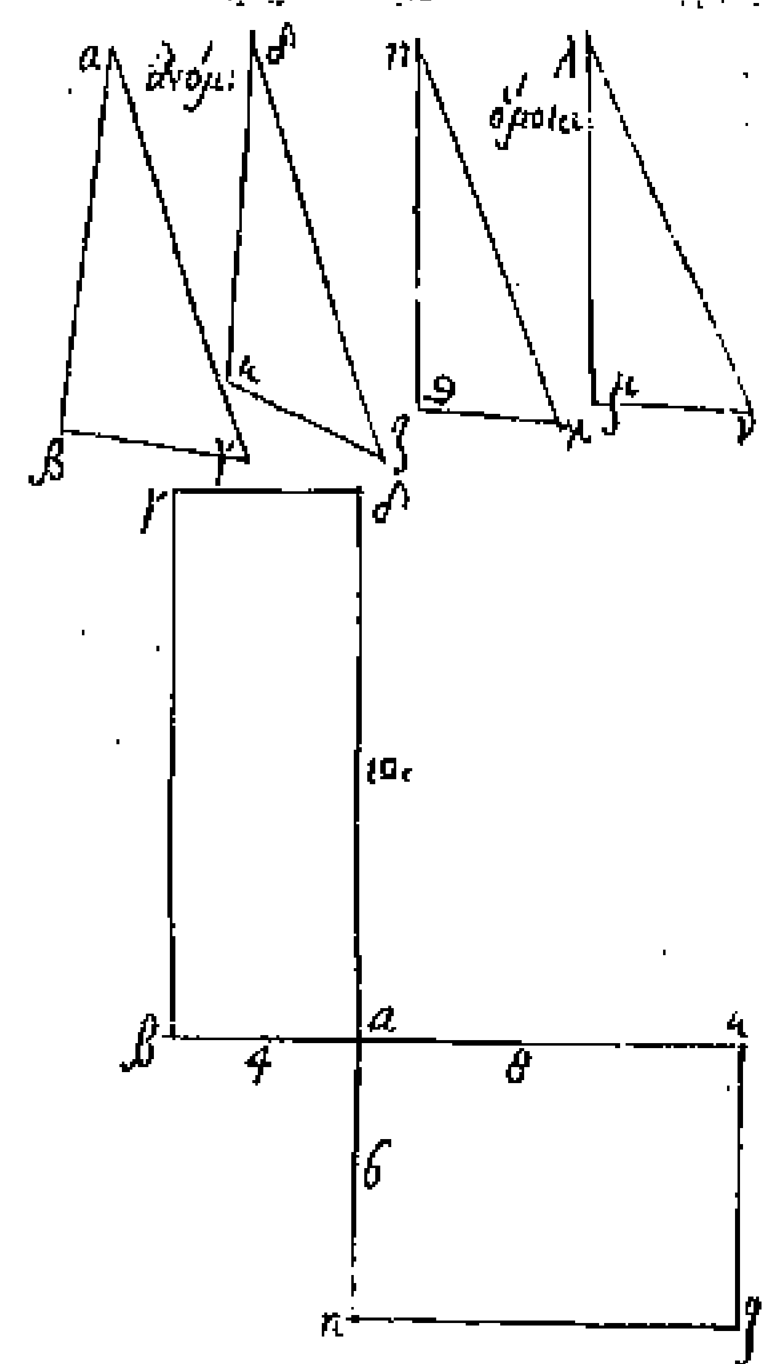
Ὅμοια σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τάς τε γωνίας ἔχει κατὰ μίαν ἴσας, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον.

Καθάπερ δὴ τοῦ Ποσοῦ δύο αἱ γενικώταται διαιρέσεις, ὡς ἐν τοῖς περὶ τοῦ θεωρητικοῦ μέρους τῆς Ἀριθμητικῆς εἴρηται, Ἰσότης δηλ: καὶ Ἀνισότης, οὕτω δὴ καὶ τῆς γε Ποιότητος δύο εἰσὶν αἱ γενικώταται διαφοραί, Ὁμοιότης καὶ Ἀνομοιότης. καὶ ὥσπερ ἐκείνων ἡ μὲν, ὡρισμένη, ἡ Ἰσότης φημί, καὶ μονοειδὴς ἐν ἀδιαιρέτῳ συνεστηκυῖα, ἡ δὲ, ἀόριστός τε καὶ πολυειδὴς, ὡς εἰς πολλὰ καὶ ποικίλα τεμνομένη εἴδη. οὕτω καὶ τούτων, ἡ Ὁμοιότης μὲν ὡρισμένη τέ ἐστι καὶ μονοειδὴς, ἡ δ᾽ ἐναντία ταύτῃ ἀόριστός τε καὶ πολυειδής. διὸ δὴ καὶ Εὐκλ: τίνα τὰ Ὅμοια μόνον ἐπὶ τοῦ παρόντος παραδίδωσι σχήματα. τούτων γὰρ ἔξεστι καὶ κοινόν τινα ἀποδοῦναι λόγον, ἤγουν ὑπογραφήν. Τὸ μὲν οὖν, Σχήματα, γένους χώραν ἀναπληροῖ, τὰ δὲ λοιπὰ, διαφορῶν. καὶ τὸ μὲν, Εὐθύγραμμα, εἰς διαφορὰν τῶν Λογικῶν καὶ Ῥητορικῶν εἴληπται σχημάτων, καὶ πολλῷ μᾶλλον τῶν στερεῶν. τὸ δὲ τὰς γωνίας καὶ τὰ λοιπὰ, εἰς ἀντιδιαστολὴν τῶν ἀγωνίων σχημάτων, κύκλου, ἐλλείψεως, καὶ τῶν ὁμοίων. ὅσα τοίνυν τῶν γωνιωδῶν εὐθυγράμμων σχημάτων τάς τε γωνίας ἴσας ἔχει, καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἐκεῖνα Ὅμοιά εἰσί τε καὶ λέγεται.

εἴρηκε

εἴρηκε δὲ καὶ μίαν γωνίαν, ἵνα μή τις νομίσῃ πάσας ὁμοῦ τὰς τοῦ ἑνὸς σχήματος γωνίας πάσαις ὁμοῦ ταῖς τοῦ ἑτέρου παραβάλλειν. οὕτω γὰρ αἱ παντὸς εἴδους σχήματος αἱ γωνίαι, ἴσαι εἰσὶ ταῖς τοῦ αὐτοῦ εἴδους, αἱ τοῦ τριπλεύρου, φέρ᾽ εἰπεῖν, ταῖς τοῦ τριπλεύρου, καὶ αἱ τοῦ τετραπλεύρου ταῖς τοῦ τετραπλεύρου, καὶ αἱ ἄλλου τινὸς εἴδους τῶν πολυγώνων ταῖς τοῦ αὐτοῦ. Τὸ δὲ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας προσετέθη, ὅτι γε ἐπὶ τῶν ὁμοίων σχημάτων ταῖς τοῦ ἑνὸς πάσαις πλευραῖς πρὸς ἀλλήλας παραβαλλομέναις, οἱ αὐτοὶ ἐνυπάρχουσι λόγοι, οἵγε καὶ ταῖς τοῦ ἑτέρου, ὡς ἐν τῇ δ᾽: τοῦ παρόντος προτάσει δειχθήσεται. ἐπὶ δὲ τῶν ἀνομοίων δύο μέν τινάς ἐστιν εὑρεῖν τῶν τοῦ ἑνὸς σχήματος πλευρῶν τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον δυσὶ ταῖς τοῦ ἑτέρου, οὐμὴν δὲ καὶ τὰς λοιπάς. τῶν γὰρ α β γ, δ ε ζ, ἀνομοίων σχημάτων αἱ α β, β γ, καὶ δ ε, ε ζ, ἀνάλογόν εἰσι, διπλῆ γὰρ ἥτε α β, τῆς β γ, καὶ ἡ δ ε, τῆς ε ζ, οὐχὶ δὲ καὶ αἱ λοιπαί.

Eucl. Lib. 6. Fig. 1.



Β᾽: Ἀντιπεπονθότα δὲ σχήματά ἐστιν, ὅταν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἑπόμενοι λόγοι ὦσιν.

Ὑπογράψας ἐν τῷ ἀνωτέρω τὰ Ὅμοια τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων, ἐπεὶ καί τισι τῶν ἀνομοίων εὑρίσκονται πως οἱ αὐτοὶ λόγοι, βουλόμενος καὶ ταῦτα κοινῷ περιλαβεῖν ὀνόματι, Ἀντιπεπονθότα τὰ τοιαῦτα καλεῖ σχήματα, ἐκ τῆς ἀντιπαθείας τῆς τῶν πλευρῶν τῶν αὐτῶν σχημάτων σχέσεως, τὴν παρωνυμίαν ἐρανιζόμενος. Ἔστι δὲ Ἀντιπάθεια τῆς τῶν πλευρῶν τῶν σχημάτων σχέσεως, ὅτε τῆς μιᾶς τῶν περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν πλευρῶν τοῦ ἑνὸς σχήματος πρὸς τὴν τοῦ ἑτέρου ἀντὶ ἡγουμένου εἰλημμένης, ἡ ἑτέρα τοῦ αὐτοῦ, ἐν τῇ πρὸς ἀλλήλας αὐτῶν παραβολῇ, ἀντὶ ἑπομένου λαμβάνεται. ὡς δῆλον ἐπὶ τῶν α β γ δ, α ε ζ η, σχημάτων γίνεται. ὡς γὰρ ἡ β α, πρὸς τὴν α ε, ἔστι καὶ ἡ η α, πρὸς τὴν α δ, ἰδοὺ δὴ, ἐπὶ μὲν τοῦ α γ, σχήματος τῆς β α, πλευρᾶς, πρὸς τὴν τοῦ ἑτέρου α ε, πλευρὰν ἀντὶ ἡγουμένου ληφθείσης, ἡ ἑτέρα τοῦ αὐτοῦ πλευρὰ, ἤτοι ἡ α δ, πρὸς τὴν α η, πλευρὰν τοῦ α ζ, σχήματος παραβαλλομένη, ὡς ἑπόμενον λαμβάνεται. Ἐπὶ δὲ τοῦ α ζ, εἰλημμένης τῆς η α, αὐτοῦ πλευρᾶς πρὸς τὴν α δ, τοῦ ἑτέρου σχήματος πλευρὰν ἀντὶ ἡγουμένου, ἡ ἑτέρα τοῦ αὐτοῦ πλευρὰ α ε, ὡς ἑπόμενον πρὸς τὴν τοῦ ἑτέρου σχήματος πλευρὰν α β, λαμβάνεται. καὶ τοῦτό ἐστιν, ὅπερ Εὐκλείδης φησὶν, ὅταν δηλ: ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἑπόμενοι λόγοι ὦσιν. ὡσανεὶ ἔλεγεν, Ἀντιπεπονθότα δὲ σχήματά

τά

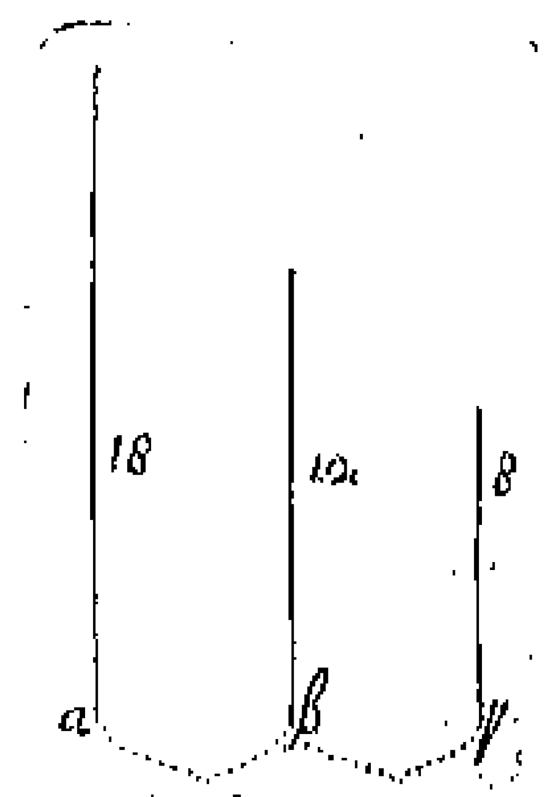
τί ἐστιν, ὅταν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων, ἡ μὲν τῶν περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν πλευρῶν πρὸς τὴν τοῦ ἑτέρου, ὡς ἡγούμενον λαμβάνηται, ἡ δὲ, ὡς ἑπόμενον.

Ἐπιστάσεως μέντοι ἄξιον, ὅτι ἐπὶ τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων, ὥσπερ καὶ τῶν στερεῶν, μὴ μόνον ὁμοιότης, ἢ ἀνομοιότης κατηγορεῖσθαι δύναται, ὡς ὑπὸ τὸ τέταρτον τῆς Ποιότητος ὑπαγομένων εἶδος, ἀλλ' ἔτι καὶ ἰσότης, ἢ ἀνισότης, ὡς διαστατῶν. Ὁρίσας οὖν Εὐκλείδης ἐν τῷ α': ὅρῳ τὰ Ὅμοια, ἐν τῷ β': καὶ τὰ Ἴσα περιείληφε. τὰ γὰρ Ἀντιπεπονθότα σχήματα, ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶν, ὡς δειχθήσεται προτάσει ιδ': τοῦ παρόντος.

Γ': Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν ᾖ, ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, οὕτω τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλασσον.

Ἐπεὶ ἡ σχέσις μεταξὺ δύο θεωρουμένη ὅρων ἀδιαίρετος μὲν τῷ ὑποκειμένῳ ἐστὶ, διαιρετὴ δὲ τῷ λόγῳ, παρὰ τῶν ὅρων λαμβάνουσα καὶ τὰς διαφοράς, (ἡ γὰρ μεταξὺ τοῦ πατρὸς καὶ υἱοῦ σχέσις, μία οὖσα, πατρότης μὲν παρὰ τοῦ πατρὸς λέγεται, υἱότης δὲ παρὰ τοῦ υἱοῦ,) διατοι τοῦτο καὶ ὁ λόγος, ὡς ποιά τις σχέσις κατὰ τὸν Εὐκλ: εἷς ὢν τῷ ὑποκειμένῳ, διαιρεῖται τῷ λόγῳ εἰς εἴδη διάφορα· ὥσπερ δὲ ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω ὅρου, παρὰ μὲν τοῦ ἡγουμένου, ἡγούμενος ἐλέγετο καὶ ὁ λόγος, ἑπόμενος δὲ παρὰ τοῦ ἑπομένου, οὕτω κἀνταῦθα, παρὰ μὲν τῶν ἄκρων ὅρων λαμβανόμενος ὁ λόγος, ἄκρος λέγεται, παρὰ δὲ τοῦ μέσου μέσος. οἷον κείσθωσαν ὅροι τρεῖς οἱ α β γ, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες, ἢ μή. ὁ μὲν οὖν τοῦ α, πρὸς τὸν β, λόγος, καὶ ἀνάπαλιν ὁ τοῦ β, πρὸς τὸν α, τοῦ γ, παρεωραμένου· ἢ ὁ τοῦ α, πρὸς τὸν γ, τοῦ β, παρεωραμένου· ἢ τελευταῖον, ὁ τοῦ α, καὶ γ, πρὸς τὸν β, ἄκρος λέγεται, ἢ ὡς μεταξὺ τῶν ἄκρων θεωρούμενος, ἢ ὡς ἀπὸ τῶν ἄκρων παραλαμβανόμενος. ὁ δὲ τοῦ β, πρὸς ἑκάτερον τῶν α, γ, μέσος, ὡς τοῦ μέσου ἐπὶ τὰ ἄκρα ἀναφερομένου. παρονομάζεται δὲ ἡ σχέσις, ἀφ' οὗ καὶ παραλαμβάνεται ὅρου. καὶ γὰρ ἡ πατρότης ἀπὸ τοῦ πατρὸς τήν τε παραγωγὴν, καὶ παρονομασίαν ἔλαχεν. ὅταν οὖν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ οὕτως, ὥστε ὃν ἔχει λόγον ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα, ἔχειν καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον, ἡ εὐθεῖα αὕτη ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμῆσθαι λέγεται. ἡ ὅλη γὰρ καὶ τὸ ἔλαττον αὐτῆς τμῆμα, ἐν τῇ ἀναλογίᾳ ἄκρων χώραν ἀναπληροῦσι, μέσον δὲ τὸ μεῖζον. ὁ τοίνυν τῆς ὅλης λόγος πρὸς τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα, ἄκρος λέγεται, κατὰ τὰ εἰρημένα, ὁ δὲ τοῦ μείζονος πρὸ τὸ ἔλαττον, μέσος. τίς δὲ ὁ τρόπος τῆς τοιαύτης διαιρέσεως, εὑρήσομεν ἐν τῇ λ': τοῦ παρόντος.

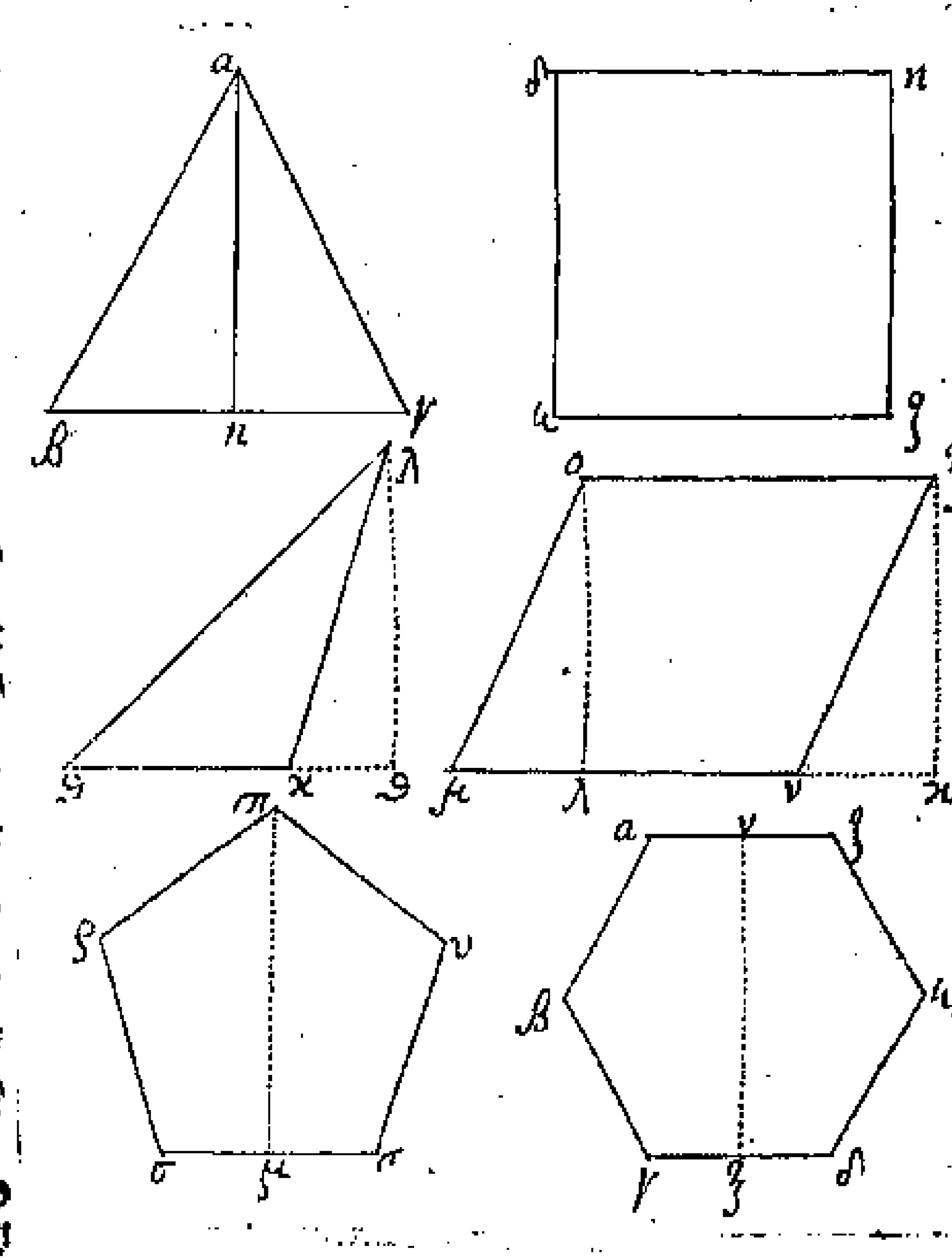
Eucl. Lib. 6. Fig. 2.



Δ': Ὕψος ἐστὶ παντὸς σχήματος ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη.

Τριῶν οὐσῶν τῶν διαστάσεων, μήκους δηλ: πλάτους, καὶ βάθους, ὃ καὶ ὕψος λέγεται, τὰ μὲν στερεὰ τῶν σχημάτων καὶ τῶν τριῶν τούτων εὐμοιρεῖ διαστάσεων, τὰ δὲ ἐπίπεδα τὰς δύο μόνας κεκλήρωται, μῆκός φημι καὶ πλάτος. κατὰ τὴν θέσιν μέντοι δίδοταί πως καὶ τοῖς ἐπιπέδοις ὕψος· ἐπεὶ καὶ βάσεις αὐτῶν, καὶ κορυφὰς ὀνομάζομεν. τοῦ μὲν γὰρ α β γ, τριγώνου, ἡ μὲν β γ, πλευρὰ, βάσις λέγεται, ἡ δὲ πρὸς τὸ α, γωνία, κορυφή. τοῦ δὲ δ ε ζ η, τετραπλεύρου, ἐπεὶ ἡ ε ζ, πλευρὰ βάσις καλεῖται, ἡ δ η, πάντως γε, κορυφὴ λέγεται. ἐπεὶ δὲ καὶ τῶν ἐπιπέδων σχημάτων, τὰ μὲν ὄρθιά ἐστι τὴν θέσιν, ὡς τὰ α β γ, δ ε ζ η· τὰ δὲ πλάγια, ὡς τὰ θ κ λ, μ ν ξ ο· ὅθεν ἐκεῖνα μὲν ὀρθὰ, ταῦτα δὲ πλάγια λέγεται· ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς παντοίου σχήματος κάθετος ἀχθῇ ἐπὶ τῆς βάσεως, ἡ κάθετος αὕτη ὕψος τοῦ σχήματος λέγεται. Ἔστι δὲ τῶν μὲν τριγώνων ὀρθὰ, τά τε ἰσόπλευρα καὶ ἰσοσκελῆ, ἔτι δὲ καὶ τὰ ὀρθογώνια. τῶν δὲ τετραπλεύρων, ὅσα ἑκατέραν τῶν πλευρῶν, τῶν κατὰ τὰ πλάγια αὐτῶν μέρη πρὸς ὀρθὰς κειμένην ἐπὶ τῆς βάσεως ἔχουσι, ταὐτὸν δ' ἐστὶν εἰπεῖν, τὰ ὀρθογώνια. τῶν δὲ πολυπλεύρων, ὅσα κανονικὰ, τὰ ἰσόπλευρά τέ φημι καὶ ἰσογώνια. τούτων δὲ τὰ μὲν περιττόπλευρα τὴν ἀπεναντίον τῆς βάσεως αὐτῶν γωνίαν κορυφὴν ἔχουσι, τὰ δὲ ἀρτιόπλευρα τὴν ἀπεναντίον τῆς βάσεως πλευράν. οἷον τοῦ μὲν π ρ σ τ υ, κορυφή ἐστιν ἡ πρὸς τῷ π. ἐπεὶ ἡ σ τ, βάσις τοῦ αὐτοῦ ἐστι, τοῦ δὲ α β γ δ ε ζ, κορυφὴ ἡ α ζ, πλευρά. ἐπεὶ ἡ γ δ, ἀντὶ βάσεως λαμβάνεται. ὅταν οὖν ἀπὸ τῆς κατὰ κορυφὴν γωνίας, ἢ πλευρᾶς ἐπὶ τῆς βάσεως τοῦ σχήματος κάθετος ἀχθῇ, ὡς αἱ π μ, ν ξ, ἐπὶ τῶν π ρ σ τ υ, α β γ δ ε ζ, σχημάτων, ἡ κάθετος αὕτη ὕψος τοῦ σχήματος λέγεται. τοῦ μὲν α β γ, τριγώνου ὕψος ἐστὶν ἡ α η. τοῦ δὲ δ ε ζ η, ἑκατέρα τῶν δ ε, η ζ. τοῦ δὲ θ κ λ, ἡ λ θ. τοῦ δὲ μ ν ξ ο, ἥ τε ξ π, καὶ ο λ. τοῦ δὲ π ρ σ τ υ, ἡ π μ. καὶ τοῦ α β γ δ ε ζ, ἡ ν ξ. ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων.

Eucl. lib. 6. Fig. 3.



Ἰστέον δ᾽ ὅτι ἐπὶ παντὸς μὲν σχήματος ὀρθοῦ ἡ κάθετος ἀεὶ ἐντὸς πίπτει, ἐπὶ δὲ τῶν πλαγίων ἐκτὸς, ἐκβαλλομένης τῆς αὐτῶν βάσεως κατὰ τὸ συνεχές. τοῦ μὲν γὰρ αβγ, ὀρθοῦ ὄντος, ἐντὸς ἡ αη, κάθετος πίπτει, τοῦ θκλ, δὲ πλαγίου ὄντος, ἐκτὸς, ὡς ἡ λθ, τῆς θκ, βάσεως ἐπὶ τὸ θ, ἐκβαλλομένης.

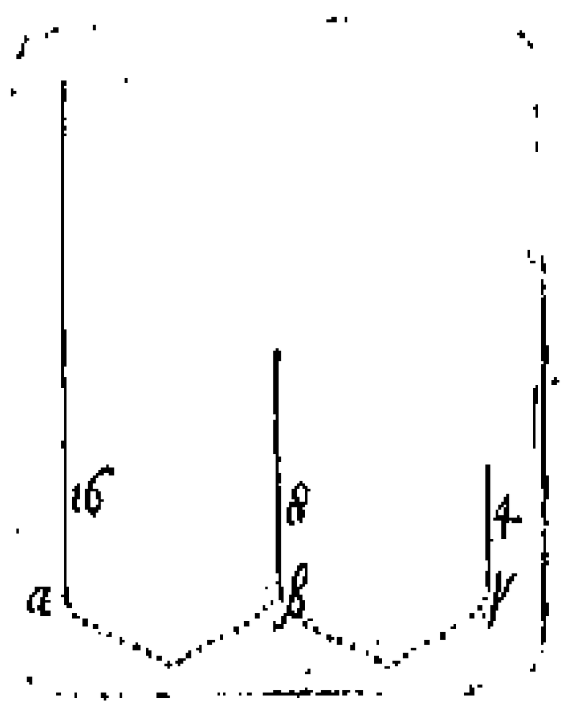
ἈΠΟΣΗΜΕΙ῞ΩΣΙΣ.

* Σημείωσαι, ὅτι πάντες οἱ παραλαμβανόμενοι ἐπὶ τοῦ ἑπομένου πέμπτου ὅρου χαρακτῆρες τοῦ Ἀλφαβήτου, ὡς παραστατικοὶ τῶν ἐν αὐτῷ Ἀναλογιῶν, ἐκλαμβάνονται κατὰ σημασίαν ἀριθμῶν, κατὰ τὴν Ἀποσημείωσιν, τὴν ἐν τῷ τέλει τοῦ προοιμίου τοῦ προηγουμένου πέμπτου Βιβλίου. καθ᾽ ἣν καί τινες ἐνταυθὶ παρασημειοῦνται τοῖς κοινοῖς Ἰνδικοῖς Ἀριθμοῖς, χάριν πληρεστέρας γνώσεως.

Ε΄: Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ᾽ ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα.

Ὁ λόγος σχέσις ἐστὶν, ὡς εἴρηται, ἐν δυσὶν ὅροις θεωρουμένη· κἂν μὲν οἱ ὅροι ἐκεῖνοι μεγέθη εἰσὶ, τὸ κατὰ πηλικότητα ἐν τῇ τούτου ὑπογραφῇ ἀντὶ διαφορᾶς προσλαμβάνεται. εἰ δὲ γ᾽ ἀριθμοὶ, τὸ κατὰ ποσότητα· ὡς ἐν ἄλλοις εἴρηται. διὸ καὶ Εὐκλείδης ἐν τῷ γ΄: τοῦ προτέρου βιβλίου ὅρῳ ὑπογράφων τὸν λόγον, φησὶ, Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν, ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις. ὅταν δὲ πλείονες ὅροι ὦσιν ἐφεξῆς κείμενοι, δὸς εἰπεῖν τρεῖς, ἢ τέσσαρες, ἢ καὶ πλείους, ὁ τοῦ α΄: ὅρου πρὸς τὸν β΄: λόγος, καὶ τοῦ β΄: πρὸς τὸν γ΄: καὶ τοῦ γ΄: πρὸς τὸν δ΄: καὶ ἑκάστου τῶν ἄλλων πρὸς τὸν ἐφεξῆς, ἁπλοῦς λέγεται. παρ᾽ ἕνα δὲ, ἢ καὶ πλείω τῶν ὅρων παραβαλλομένων, ὁ λόγος τηνικαῦτα σύνθετος λέγεται· τοιοῦτος δ᾽ ἐστὶν ὁ τοῦ α΄: ὅρου λόγος πρὸς τὸν γ΄: ἢ δ΄: ἢ ἄλλον τινὰ τῶν ἐφεξῆς. σύγκειται γὰρ ἐκ τῶν μεταξὺ λόγων. οἷον κείσθωσαν μεγέθη τρία τὰ α, β, γ, ἑξῆς ὄντα ἀνάλογα ἐν λόγῳ διπλασίονι. ὁ τοίνυν λόγος τοῦ α, πρὸς μὲν τὸ β, ἁπλοῦς λέγεται, πρὸς δὲ τὸ γ, σύνθετος, ὅτι σύγκειται ἐκ τοῦ λόγου τοῦ τε α, πρὸς τὸ β, καὶ τοῦ β, πρὸς τὸ γ· διὸ δὴ καὶ Εὐκλείδης ὑπογράψαι τοῦτον βουλόμενος, φησὶ, Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ᾽ ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα. Ἵνα δὲ τοῦτο σαφέστερον γένηται, ῥητέον ἡμῖν, τίνες αἱ τῶν λόγων πηλικότητες, καὶ ὅπως ἐφ᾽ ἑαυτὰς πολλαπλασιάζεσθαι δύνανται.

Eucl. Lib. 6. Fig. 4.



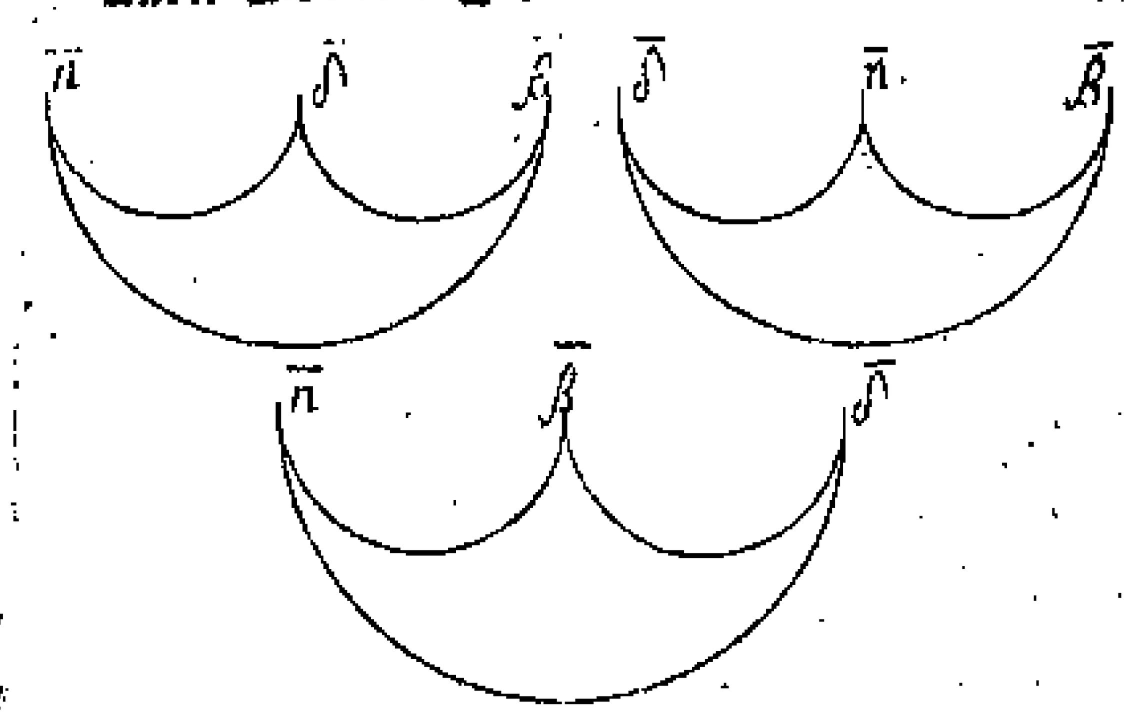
Λόγων τοίνυν πηλικότητές εἰσιν, οἱ παρωνυμοῦντες ἀριθμοὶ, ἀφ᾽ ὧν οἱ λόγοι παρονομάζονται. Ἐπεὶ δὲ τὰ τοῦ Λόγου εἴδη πολλά τέ εἰσι, καὶ διάφορα, ὡς ἐν τῷ β΄: τῆς Ἀριθμητικῆς μέρει τῷ βουλομένῳ ἔξεστιν ἰδεῖν· διατοι τοῦτο καὶ ἕκαστον Λόγου εἶδος ἰδίῳ τινὶ παρονομάζεται ἀριθμῷ. ὁ μὲν γὰρ τοῦ διπλασίου λόγος τὸν β (2) μόνον ἔχει παρωνυμοῦντα αὐτὸν, ὁ δὲ τοῦ τριπλασίου τὸν γ (3)

ὁ δὲ

ὁ δὲ τοῦ τετραπλασίου τὸν δ(4)· καὶ τῶν ἄλλων τοῦ πολλαπλασίου εἰδῶν ἕκαστον ἀφ᾽ ἑνός τινος τοῦ ἀναλογοῦντος αὐτῷ παρωνυμεῖται ἀριθμοῦ. τῶν δ᾽ ἄλλων εἰδῶν ἕκαστον ἀπό τε ἀριθμοῦ ὁλοκλήρου, καὶ μέρους τινὸς πηλίκου δέχεται τὴν παρονομασίαν. ὁ μὲν γὰρ τοῦ ἡμιολίου λόγος ἀπὸ τοῦ ἑνὸς καὶ ἡμίσεως παρονομάζεται, ὁ δὲ τοῦ ἐπιτρίτου ἀπὸ τοῦ ἑνὸς καὶ γ΄: μέρους, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων τοῦ ἐπιμορίου εἰδῶν ἀναλόγως. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιμεροῦς, πολλαπλασιεπιμορίου, καὶ πολλαπλασιεπιμεροῦς.

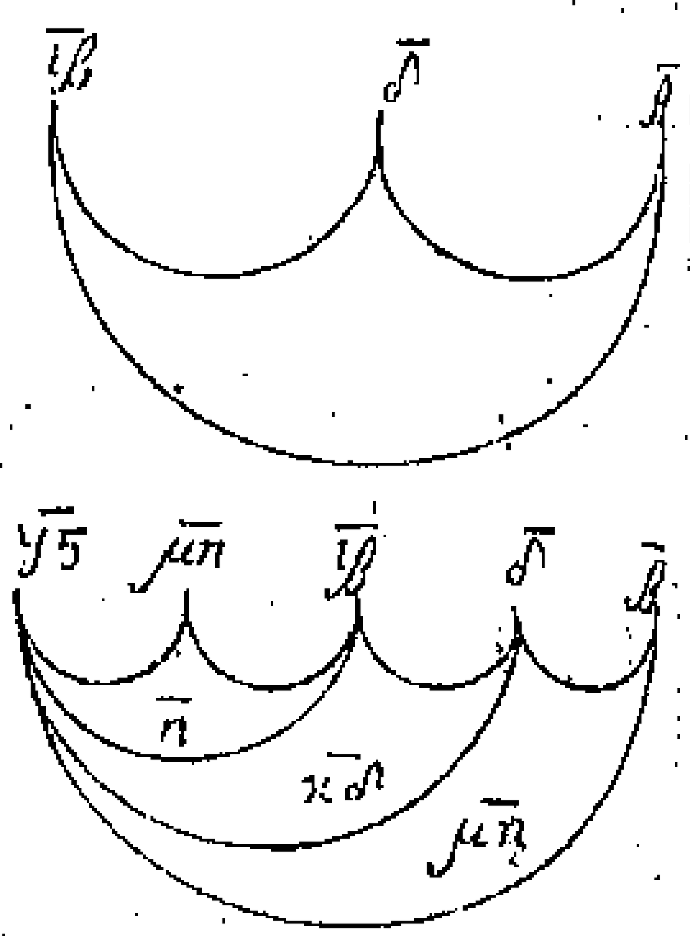
Ἔστι δὲ Λόγος, ὡς ἐν ἄλλοις εἴρηται, πολλαπλάσιος μὲν, ὅτε ὁ μείζων ὅρος ἔχει ἐν ἑαυτῷ τὸν ἐλάττονα πλεονάκις, ἢ ἅπαξ. ὡς ὁ τοῦ δ (4) πρὸς τὸν β (2) καὶ ὁ τοῦ θ (9) πρὸς τὸν γ (3) καὶ οἱ ἄλλοι. ἐπιμόριος δὲ, ὅτε ὁ μείζων περιέχει τὸν ἐλάττονα ἐν ἑαυτῷ ἅπαξ, καὶ ἔτι μέρος αὐτοῦ, δύοσον δῆλον: τρίτον, τέταρτον, ἢ ἄλλο τι πηλίκον, ὡς ὁ γ (3) τὸν β (2) καὶ ὁ δ (4) τὸν γ (3) καὶ οἱ ὅμοιοι. ἐπιμερὴς δὲ, ὅτε ὁ μείζων ἅπαξ τὸν ἐλάττω ἐν ἑαυτῷ ἔχει καὶ μέρη ἔτι τοῦ αὐτοῦ τινα, ὡς ὁ τοῦ ε (5) πρὸς τὸν γ (3) καὶ τοῦ ζ (7) πρὸς τὸν δ (4). πολλαπλασιεπιμόριος δὲ, ὅτε ὁ μείζων ὅρος ἔχει ἐν ἑαυτῷ τὸν ἐλάττω πλεονάκις, ἢ ἅπαξ, καί τι μέρος αὐτοῦ πηλίκον, ὡς ὁ τοῦ ε (5) πρὸς τὸν β (2) τοῦ ζ, (7) πρὸς τὸν γ, (3). πολλαπλασιεπιμερὴς δὲ, ἐπειδὰν ὁ μείζων ὅρος πλεονάκις, ἢ ἅπαξ ἐν ἑαυτῷ τὸν ἐλάττω ἔχει, καὶ μέρη αὐτοῦ τινα, ὡς ὁ τοῦ η, (8) πρὸς τὸν γ (3) καὶ ὁ τοῦ ια, (11) πρὸς τὸν δ, (4). περὶ ὧν πλατύτερον ἐν τῷ ῥηθέντι διηρμήνευται βιβλίῳ τῆς Ἀριθμητικῆς. ὅθεν δὴ ὁ μὲν β, (2) πηλικότης λέγεται τοῦ διπλασίου, ὁ δὲ γ, (3) τοῦ τριπλασίου. ὁ δὲ δ, (4) τοῦ τετραπλασίου, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὁ ἀναλόγως. ἡ δὲ μονὰς μετὰ τοῦ ἡμίσεως πηλικότης λέγεται τοῦ ἡμιολίου. ὁ γὰρ ἡμιόλιος ἔχει ἐν ἑαυτῷ ὅλον τὸν ἐλάττονα, καὶ ἥμισυ αὐτοῦ μέρος, ὡς εἴρηται· μετὰ δὲ τοῦ ἑνὸς τρίτου ἡ μονὰς, πηλικότης λέγεται τοῦ ἐπιτρίτου. μετὰ δὲ τῶν δύο τρίτων, τοῦ ἐπιδιμεροῦς, ὥσπερ καὶ μετὰ τριῶν τρίτων, τοῦ ἐπιτριμεροῦς. ὁ β, (2) δὲ πάλιν μετὰ ἡμίσεως μὲν, πηλικότης λέγεται τοῦ διπλασιεφημίσεως, οἷος ὁ τοῦ ε, (5) πρὸς τὸν β, (2) μετὰ δὲ δύο τρίτων τοῦ διπλασιεπιδιμεροῦς, οἷος ὁ τοῦ η, (8) πρὸς τὸν γ, (3)· καὶ τοσαῦτα μὲν ἱκανὰ ἐπὶ τοῦ παρόντος εἰς ἀνάπτυξιν τοῦ, τίνες εἰσὶν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες. Πολλαπλασιάζονται δὲ αὗται ἐφ᾽ ἑαυτὰς, κατὰ τὴν τῶν ὅρων τάξιν. τριχῶς γὰρ οἱ ὅροι ποικίλλεσθαι δύνανται. ἢ γὰρ ἀτάκτως κεῖνται, ἢ ὁ μείζων ἔσται μέσος, ἢ γοῦν ὁ ἐλάττων, ὡς ἐπὶ τῶν τριῶν ὁρᾷς τῶνδε διαγραμμάτων. κἂν μὲν οἱ ὅροι ἄτακτοι ὦσι, λάβε τοὺς ἀριθμοὺς, ἀφ᾽ ὧν οἱ ὅροι τῶν λόγων πα-

Eucl. Lib. 6. Fig. 5.



παρονομάζονται, ὁ τοῦ α: δηλον: ὅρου πρὸς τὸν μέσον, καὶ ὁ τοῦ μέσου πρὸς τὸν γ': καὶ πολλαπλασίασον τούτους ἐφ' ἑαυτοὺς, καὶ ὁ γενόμενος παραστήσει σοι τὸν λόγον, ὃν ὁ α: ὅρος πρὸς τὸν γ': ἔχει. οἷον κείσθωσαν ἐφεξῆς ἀτάκτως ὁ η, δ, καὶ β, ὡς ἐπὶ τοῦ α: διαγράμματος. καὶ ἐπεὶ ὁ η, τοῦ δ, διπλάσιός ἐστιν, τοῦ δὲ διπλασίου πηλικότης ὁ β, ὡς ἤδη εἴρηται. εἰλήφθω ὁ β, ἐπεί δὲ καὶ ὁ δ, τοῦ β, ὁμοίως διπλάσιός ἐστιν, εἰλήφθω αὖθις ὁ αὐτὸς β, καὶ πολλαπλασιασθήτω ἐφ' ἑαυτὸν, καὶ γενήσεται πάντως ὁ δ, ὅς τις πηλικότης ἐστὶ τοῦ λόγου, ὃν ὁ η, ἔχει πρὸς τὸν β. δῆλον ἄρα ὅτι ὁ η, τετραπλάσιος ἐστι τοῦ β. κείσθωσαν ἔτι ὁ ιβ, δ, καὶ β. καὶ ἐπεὶ ὁ ιβ, τριπλάσιός ἐστι τοῦ δ, ὁ δὲ δ, τοῦ β, διπλάσιος. εἰλήφθω ἀντὶ τοῦ τριπλασίου μὲν ὁ γ, ἀντὶ δὲ τοῦ διπλασίου ὁ

Eucl. Lib. 6. Fig. 6.



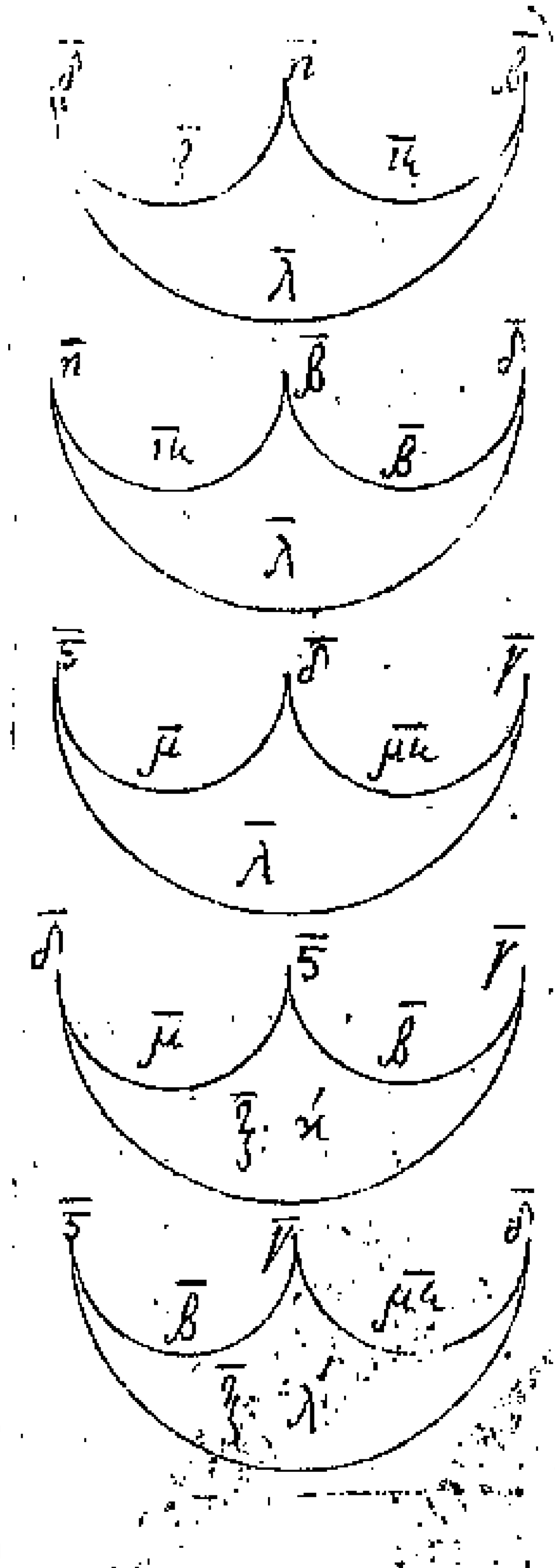
β, καὶ πολλαπλασιασθήτωσαν ἐφ' ἑαυτοὺς, καὶ ὁ γενόμενος ς, παραστατικὸς ἔσται τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ὁ ιβ, πρὸς τὸν β. ὥστε ὁ ιβ, τοῦ β, ἑξαπλάσιός ἐστι. τοῦτ' αὐτὸ γενέσθω καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων τοῦ πολλαπλασίου εἰδῶν, τετραπλασίου φημὶ, πενταπλασίου, ἑξαπλασίου καὶ λοιπῶν. ἐὰν δὲ πλείονες ὦσιν οἱ ὅροι τῶν τριῶν, εὑρεθήτω α: ὁ τοῦ α: λόγος πρὸς τὸν γ': ἐφ' ὃν πολλαπλασιασθήτω ὁ παραστατικὸς τῆς πηλικότητος τοῦ λόγου, ὃν ὁ γ': ἔχει πρὸς τὸν δ': καὶ ἀνάπαλιν, καὶ ὁ γενόμενος παραστατικὸς ἔσται τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ὁ α: ὅρος πρὸς τὸν τέταρτον. Εἰ δέ γε ζητηθῇ ὁ λόγος, ὃν ὁ α: τῶν ὅρων ἔχει πρὸς τὸν ε': εἰλήφθω ἡ πηλικότης τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ὁ δ': πρὸς τὸν ε': καὶ πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸν ἤδη γεγονότα διὰ τοῦ προτέρου πολλαπλασιασμοῦ, ἢ καὶ ἀνάπαλιν. οἷον ἔστωσαν ἀτάκτως κείμενοι ὁ γς, μη, ιβ, δ, καὶ β. ἐπεὶ τοίνυν ὁ τοῦ γς, πρὸς τὸν μη, λόγος διπλάσιός ἐστιν, ὁ δὲ τοῦ μη, πρὸς τὸν ιβ, τετραπλάσιος, ὁ τοῦ γς, πρὸς τὸν ιβ, εὑρεθήσεται, κατὰ τὰ ἤδη εἰρημένα. ἐὰν ὁ β, ἐπὶ τὸν δ, πολλαπλασιασθῇ, ἢ καὶ ἀνάπαλιν ὁ δ, ἐπὶ τὸν β, καὶ ἔσται τούτου πηλικότης ὁ η. ὥστε ὁ γς, τοῦ ιβ, ὀκταπλάσιός ἐστιν. ἐὰν δὲ ζητηθῇ ὁ τοῦ γς, λόγος πρὸς τὸν δ, ἐπεὶ ὁ ιβ, τριπλάσιός ἐστι τοῦ δ, εἰλήφθω ὁ γ, ἡ τοῦ αὐτοῦ λόγου δηλον: πηλικότης, καὶ πολλαπλασιασθήτω ἐπ' αὐτὸν ὁ η, ὅς ἐστι πηλικότης τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ὁ γς, πρὸς τὸν ιβ, καὶ ὁ γενόμενος κδ, πηλικότης ἔσται τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ὁ γς, πρὸς τὸν δ. Εἰ δέ γε πάλιν ζητηθῇ ὁ τοῦ γς, λόγος πρὸς τὸν β, πέμπτον ὄντα τῇ τάξει. ἐπεὶ ὁ δ, διπλάσιός ἐστι τοῦ β, εἰλήφθω ἡ τούτου πηλικότης, δηλον: ὁ β, καὶ πολλαπλασιασθήτω ἐπ' αὐτὸν ὁ κδ, ὅς ἐστι πηλικότης τοῦ λόγου, ὃν ὁ γς, πρὸς τὸν δ, ἔχει, καὶ ὁ γενόμενος μη, πηλικότης ἔσται τοῦ λόγου, ὃν ὁ γς, α: ἔχει πρὸς τὸν β, ε:

ὥστε

ὥστε ὁ γς, τεσσαρακοντοκταπλάσιός ἐστι τοῦ β. τοῦτον τὸν τρόπον εὑρεθήσεται καὶ ὁ τοῦ α: ὅρου λόγος πρὸς τὸν ς': ζ': η': καὶ λοιποὺς ἐν τῇ ἀτάκτῳ τῶν ὅρων τάξει.

Οὕτω δὲ οἱ ὅροι μὴ ἀτάκτως ὦσι κείμενοι, εἰ μὲν ὁ μείζων μέσος ᾖ, ὡς ὁ η, τοῦ δ, καὶ β. εἰλήφθω ἀντὶ τοῦ μείζονος λόγου, ὃν ὁ μέσος πρὸς τὸν ἐλάττονα τῶν ὅρων ἔχει, τὸ ἀνάλογον τῆς * μονάδος μέρος, δηλ: ὁ ιε, ὥσπερ γὰρ ὁ η, τετραπλάσιός ἐστι τοῦ β, οὕτω καὶ ὁ ξ, τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ιε, ἀντὶ δὲ τοῦ ἐλάττονος, ὃν ὁ μέσος ἔχει πρὸς τὸν μείζονα τῶν ὅρων, ἤτοι τὸν δ, εἰλήφθω ἡ αὐτοῦ πηλικότης, ὁ β. ἐπεὶ καὶ ὁ η, τοῦ δ, διπλάσιός ἐστι. καὶ πολλαπλασιασθήτω ὁ ιε, ἐπὶ τὸν β, καὶ ἐπεὶ ὁ γενόμενος λ, ἥμισύς ἐστι τῆς μονάδος δηλ: τοῦ ξ, φανερὸν, ὅτι καὶ ὁ β, τοῦ δ, ἥμισύς ἐστιν, ὁ δὲ δ, τοῦ β, διπλάσιος.

Eucl. Lib. 6. Fig. 7.



Τοῦτ' αὐτὸ γινέσθω, κἂν ὁ ἐλάχιστος τῶν ὅρων εἴη μέσος. ἔστω γὰρ ὁ β, μέσος τοῦ η, καὶ δ. καὶ ἐπεὶ ὁ η, τοῦ β, τετραπλάσιός ἐστιν, εἰλήφθω τὸ δ': τοῦ ξ, δηλ: ὁ ιε: ἐπεὶ δὲ ὁ δ, τοῦ β, διπλάσιός ἐστι, λάβε τὴν τούτου πηλικότητα, ἤτοι τὸν β, καὶ πολλαπλασίασον ἐπ' αὐτὸν τὸν ιε, καὶ ὁ γενόμενος λ, πηλικότης ἐστὶ τοῦ η, πρὸς τὸν δ. ὥστε ὁ η, διπλάσιός ἐστι τοῦ δ.

Εἰ δὲ ἐν λόγῳ ἐπιμορίου τύχωσιν ὄντες οἱ ὅροι, τριχῶς δύνανται καὶ οὗτοι ποικίλεσθαι, ὡς καὶ οἱ τοῦ πολλαπλασίου. Ἔστωσαν δὴ α: ἀτάκτως κείμενοι, ὡς ὁ ς, δ, καὶ γ. καὶ ἐπεὶ ὁ ς, τοῦ δ, ἡμιόλιός ἐστιν, ὁ δὲ δ, τοῦ γ, ἐπίτριτος, εἰλήφθω ὁ μ, καὶ με, ὁ γὰρ ξ, τοῦ μὲν μ, ἡμιόλιός ἐστιν, ἐπίτριτος δὲ τοῦ με. καὶ πολλαπλασιασθήτωσαν ἀλλήλοις, καὶ ὁ γενόμενος ἐξ αὐτῶν ϡω, μεριθήτω ἐπὶ τὸν ξ. καὶ ἐπεὶ παρέχεται πηλίκον ὁ λ, τοῦ δὲ λ, διπλάσιός ἐστιν ὁ ξ, δῆλον, ὅτι ὁ ς, τοῦ γ, διπλάσιός ἐστιν.

Ἔστω δὲ ὁ μέσος μείζων τῶν ἄκρων, ὡς ὁ ς, τοῦ δ, καὶ γ. καὶ ἐπεὶ ὁ ς, τοῦ μὲν δ, ἡμιόλιός ἐστι, τοῦ δὲ γ, διπλάσιος. εἰλήφθω ἀντὶ μὲν τοῦ ἡμιολίου ὁ μ, ἀντὶ δὲ τοῦ διπλασίου ὁ β, καὶ πολλαπλασιασθήτωσαν ἀλλήλοις, καὶ ὁ γινόμενος π, μεριθήτω ἐπὶ τὸν ξ. ἐπεὶ δὲ παρέχεται πηλίκον μονὰς μετὰ ἑξηκοστῶν κ, φανερὸν, ὅτι ὁ δ, περιέχει ἐν ἑαυτῷ ὅλον τὸν γ, ἅπαξ, καὶ τὸ αὐτοῦ γ': μέρος.

Ἔστω δ' ἔτι ὁ μέσος ἐλάττων ἑκατέρου τῶν ἄκρων, ὡς ὁ γ, τοῦ ς, καὶ δ. καὶ ἐπεὶ τοῦ γ, ὁ μὲν ς, διπλάσιός ἐστιν, ὁ δὲ δ, ἐπίτριτος, εἰλήφθω ἀντὶ μὲν τοῦ διπλασίου ὁ β, ἀντὶ δὲ τοῦ ἐπιτρίτου ὁ με, ὅτι καὶ ὁ ξ, τοῦ με, ἐπίτριτός ἐστι.

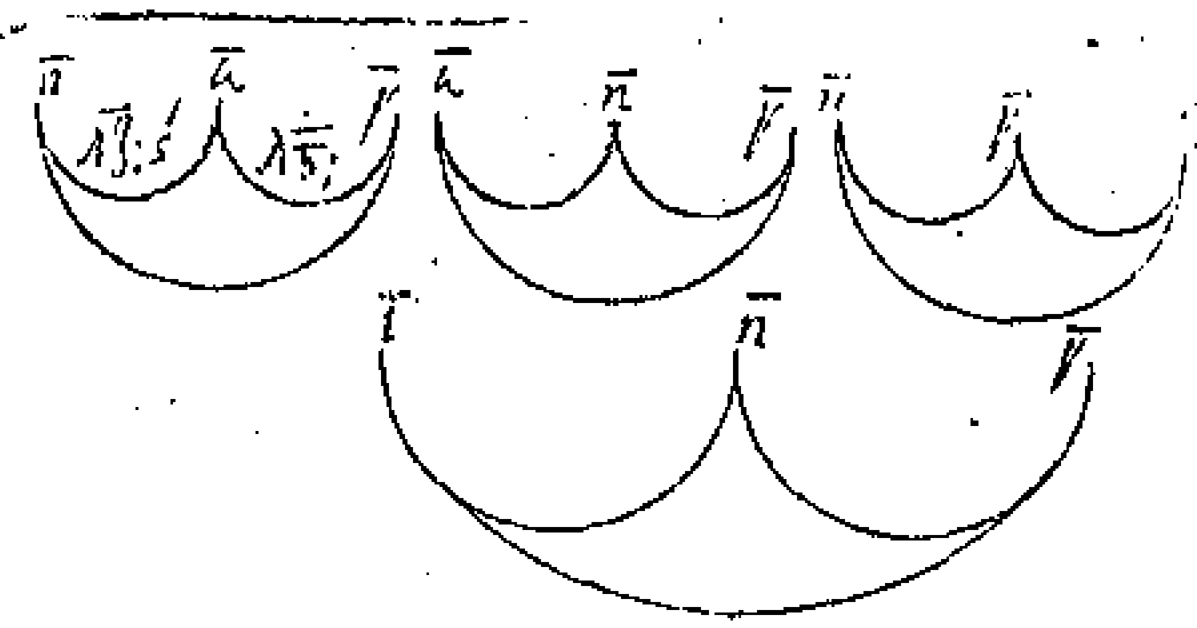
τὰ δὲ

* Ἐννοητέον τὴν μονάδα διαιρεῖσθαι εἰς τὸν ἑξήκοντα.

τὰ δὲ λοιπὰ γενέσθω ὡς προηρμήνευται, καὶ εὑρεθήσεται ὁ ς, τοῦ δ, ἡμιόλιος, παρέχεται γὰρ διὰ τῆς πράξεως πηλίκον ἡ μονὰς μετὰ ἑξηκοστῶν λ.

Τὰ αὐτὰ γινέσθω καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιμεροῦς. Διὰ δὲ τὸ σαφέστερον, κείσθωσαν καὶ ἐπὶ τούτου εἰς ὑπόδειγμα οἱ η, ε, γ, ἀτάκτως κείμενοι. καὶ ἐπεὶ ὁ μὲν η, τοῦ ε, ἐπιτριμερής ἐστιν, ὁ δὲ ε, τοῦ γ, ἐπιδιμερής, εἰλήφθω ἀντὶ μὲν τοῦ ἐπιτριμεροῦς ὁ λζ μετὰ ἡμισέως, ἀντὶ δὲ τοῦ ἐπιδιμεροῦς ὁ λς, ὁ γὰρ ξ, τοῦ μὲν λζ μετὰ ἡμισέως * ἐπιτριμερής ἐστι, τοῦ δὲ λς, ἐπιδιμερής. εἶτα πολλαπλασιασθήτω ὁ λζ μετὰ ἡμισέως ἐπὶ τὸν λς, καὶ ὁ γενόμενος, ἤτοι τὰ ἑπτακόσια πρὸς τοῖς δισχιλίοις, μερισθήτωσαν ἐπὶ τὸν ξ, καὶ ἕξεις πηλίκον τὸν με. ἐπεὶ δὲ ταῦτα * δεύτερά εἰσι, μερισθήτω ὁ με, ἐπὶ τὸν β, καὶ δώσει σοι πηλίκον τὸν κβ μετὰ ἡμισέως, οὗ ὁ ἑξήκοντα διπλασιεπιμερής ἐστιν. ἔχει γὰρ ἐν ἑαυτῷ τοῦτον δίς, καὶ δύο αὐτοῦ μέρη εἰς τρία διῃρημένου.

Eucl. Lib. 6. Fig. 8.



Τοῦτον οὖν τὸν τρόπον εὑρεθήσεται ὁ λόγος, ὁ ἐκ λόγων συγκείμενος, κἂν ὁ μέσος ὅρος μείζων εἴη τῶν ἄκρων, ἢ γοῦν ἐλάττων. (✠) Δυνάμεθα δὲ θηρεύειν τὰς τῶν λόγων πηλικότητας, ἐὰν τὸν ξ, ἐπὶ τὸν μείζονα διαιροῦντες ὅρον, τοσαῦτα λαμβάνωμεν, ὅσαι αἱ τοῦ ἐλάττονος, πρὸς ὃν ὁ μείζων ἀναφέρεται ὅρος, εἰσὶν αἱ μονάδες, ὡς ἐπὶ τοῦ συνέγγυς δῆλον καθίσταται ὑποδείγματος. ζητοῦντες γὰρ τὸν λόγον τοῦ η, πρὸς τὸν ε, διαιροῦμεν τὸν ξ, ἐπὶ τὸν η, καὶ ἐπεὶ παρέχεται ὄγδοον αὐτοῦ μέρος ὁ ζ μετὰ ἡμισέως, πολλαπλασιάζομεν τὸν ζ μετὰ ἡμισέως ἐπὶ τὸν ε, καὶ τὸν γενόμενον λζ μετὰ ἡμισέως λαμβάνομεν ἀντὶ πηλικότητος τοῦ λόγου, ὃν ὁ η, πρὸς τὸν ε, ἔχει. ὥσπερ γὰρ ὁ η, τοῦ ε, ἐπιτριμερής ἐστιν, οὕτω καὶ ὁ ξ, τοῦ λζ μετὰ ἡμισέως, ἐπιτριμερής ἐστι. ζητοῦντες δ' αὖθις τὴν πηλικότητα τοῦ ε, πρὸς τὸν γ, διαιροῦμεν τὸν ξ, ἐπὶ τὸν ε, καὶ παρέχεται ἡμῖν πηλίκον ὁ ιβ. εἶτα τριπλασιάζομεν τὸν ιβ, καὶ τὸν γενόμενον λς, λαμβάνομεν ἀντὶ πηλικότητος τοῦ λόγου, ὃν ὁ ε, ἔχει πρὸς τὸν γ. ὥσπερ γὰρ ὁ ε, τοῦ γ, ἐπιδιμερής ἐστιν, οὕτω καὶ ὁ ξ, τοῦ λς, ἐπιδιμερὴς ὁμοίως ἐστί. Τὰ δὲ λοιπὰ ποιοῦμεν, ὡς προηρμήνευται. καλῶς ἄρα εἴρηται, ὅτι λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα.

* Ὅρα κατωτέρω, ἔνθα τὸ παρὸν σημεῖον (✠) καὶ εὑρήσεις τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ, καθ' ὃν, τρόπου ὁ ἑξήκοντα τοῦ λζ μετὰ ἡμισέως, ἐστὶν ἐπίτριτος.

* Ἐννοητέον ἑκάστην μονάδα τοῦ λζ, εἰς δύο διῃρημένην, ἵνα τοῦ αὐτοῦ εἴδους γένωνται μετὰ τοῦ προσόντος ἡμισέως, ὥστε τὰ πάντα γίνεσθαι ἑβδομήκοντα καὶ πέντε ἡμίση, ἅτινα πολλαπλασιαστέα ἐπὶ τὸν λς, ποιεῖ ταῦτα, 2700.

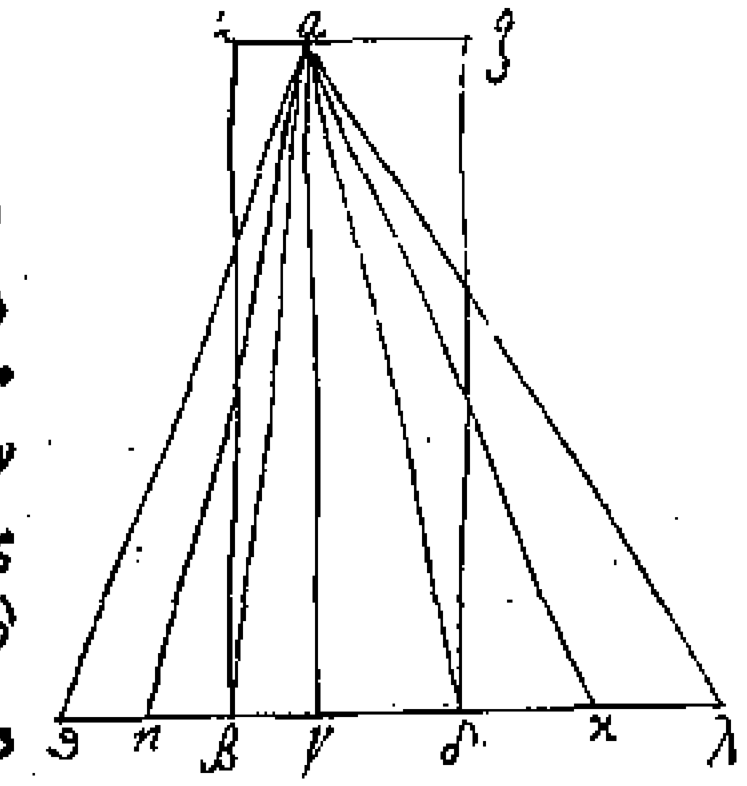
Πρό-

Πρότασις Α': Θεώρημα.

Τὰ τρίγωνα, καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν, ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν δὴ τρίγωνα μὲν τὰ αβγ, αγδ. παραλληλόγραμμα δὲ τὰ γε, γζ, ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. Λέγω, ὅτι ὡς ἡ βγ, βάσις πρὸς τὴν γδ, ἐστὶ τό, τε αβγ, τρίγωνον πρὸς τὸ αγδ, καὶ τὸ γε, παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ γζ. Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ βδ, ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη κατὰ τὸ συνεχές. καὶ εἰλήφθω τῇ μὲν βγ, ἴσα τὰ βη, ηθ, διαστήματα, τῇ δὲ γδ, τὰ δκ, κλ, ὥστε ἰσοπληθῆ εἶναι τὰ τῆς γλ, μέρη τοῖς μέρεσι τῆς γθ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αη, αθ, ακ, αλ, εὐθεῖαι. καὶ ἐπεὶ τὰ αβγ, αηβ, αθη, τρίγωνα ἐπὶ ἴσων βάσεών εἰσι, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, δῆλον, ὅτι ἴσα ἀλλήλοις ἐστί, κατὰ τὴν λη': τοῦ α': ὁμοίως δὲ, κατὰ τὴν αὐτὴν καὶ τὰ αγδ, αδκ, ακλ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὥστε ὁσαπλασίων μέν ἐστιν ἡ θγ, βάσις τῆς βγ, βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ αθγ, τρίγωνον τοῦ αβγ, τριγώνου. ὁσαπλασίων δὲ ἡ γλ, βάσις τῆς γδ, βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ αγλ, τρίγωνον τοῦ αγδ, τριγώνου. καὶ ἑπομένως, εἴγε ἡ θγ, βάσις μείζων ἐστὶ τῆς γλ, βάσεως, μεῖζον ἔσται καὶ τὸ αθγ, τρίγωνον τοῦ αγλ, τριγώνου, κἂν ἴση, ἴσον, κἂν ἐλάσσων, ἔλασσον. Ἐπεὶ οὖν τεσσάρων μεγεθῶν τῶν βγ, γδ, βάσεων, καὶ αβγ, αγδ, τριγώνων εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν μὲν βγ, αβγ, α': δῆλον: καὶ γ': τὰ θγ, αθγ. τῶν δὲ γδ, αγδ, β': δηλ: καὶ δ': τὰ γλ, αγλ, πάντως γε, κατὰ τὸν ε': ὅρον τοῦ ε': ὡς ἡ βγ, α': πρὸς τὴν γδ, β': ἐστὶ καὶ τὸ αβγ, γ': πρὸς τὸ αγδ. δ': ἀλλὰ τοῦ μὲν αβγ, διπλάσιόν ἐστι τὸ γε, τοῦ δὲ αγδ, τὸ γζ, ἄρα κατὰ τὴν ιε': τοῦ αὐτοῦ, ὡς τὸ αβγ, τρίγωνον πρὸς τὸ αγδ, οὕτω καὶ τὸ γε, παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ γζ. ὡς δὲ τὸ αβγ, πρὸς τὸ αγδ, ἐστὶ καὶ ἡ βγ, βάσις πρὸς τὴν γδ, βάσιν. ἄρα, κατὰ τὴν ια': τοῦ αὐτοῦ, ὡς ἡ βγ, βάσις πρὸς τὴν γδ, ἐστὶ καὶ τὸ γε, παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ γζ. Τὰ τρίγωνα ἄρα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 6. Fig. 9.



ΠΌΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐν τοῖς τριγώνοις ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀγομένη, ὡς ἔτυχεν, εὐθεῖα, ἀναλόγως τέμνει τὸ τρίγωνον τῇ αὐτῇ βάσει.

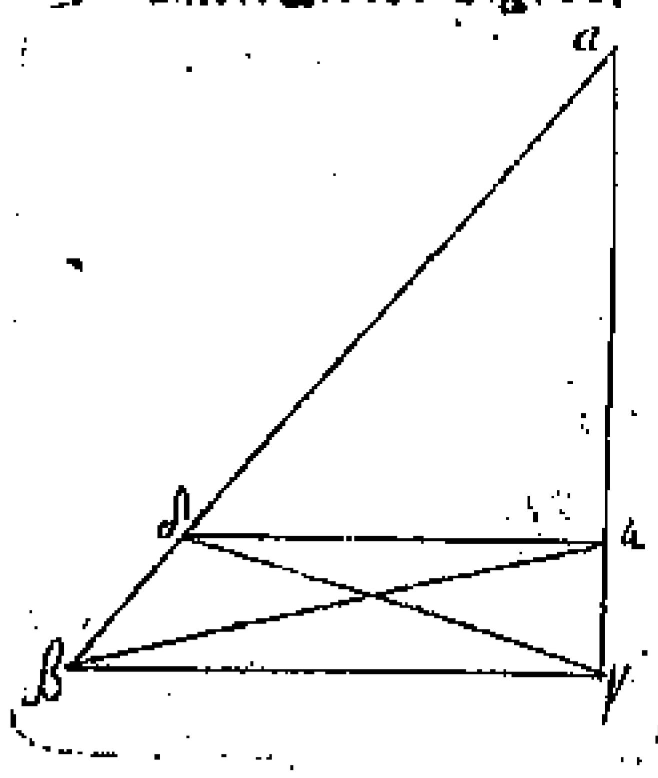
Πρό-

Πρότασις Β': Θεώρημα.

Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν τοῦ τριγώνου πλευρὰν ἔσται παράλληλος.

Τριγώνου δὴ τοῦ α β γ, ἤχθω παρὰ μίαν τῶν αὐτοῦ πλευρῶν τὴν β γ, παράλληλος ἡ δ ε. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ β δ, πρὸς τὴν δ α, ἡ γ ε, πρὸς τὴν ε α. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ β ε, γ δ. καὶ ἐπεὶ τὰ β δ ε, γ ε δ, τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἐστὶ βάσεως τῆς δ ε, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς β γ, δ ε, πάντως γε, κατὰ τὴν λ ζ': τοῦ α': ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. καὶ κατὰ τὴν ζ': τοῦ ε': τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον πρὸς τὸ α δ ε, τρίγωνον. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ β δ ε, πρὸς τὸ α δ ε, οὕτω καὶ τὸ γ δ ε, πρὸς τὸ αὐτὸ α δ ε. ἀλλ' ὡς ἔχει τὸ β δ ε, πρὸς τὸ α δ ε, ἔχει καὶ ἡ β δ, πρὸς τὴν δ α, ὡς δὲ τὸ γ ε δ, πρὸς τὸ α ε δ, ἡ γ ε, πρὸς τὴν ε α, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἄρα κατὰ τὴν ι α': τοῦ ε': ὡς ἡ β δ, πρὸς τὴν δ α, ἐστὶ καὶ ἡ γ ε, πρὸς τὴν ε α. ὅπερ ἦν τὸ α'.

Eucl. Lib. 6. Fig. 10.



Ἔστω δὴ ὡς ἡ β δ, πρὸς τὴν δ α, ἡ γ ε, πρὸς τὴν γ α, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ε δ. Λέγω, ὅτι ἡ ε δ, παράλληλός ἐστι τῇ β γ. τῶν αὐτῶν γὰρ κατασκευασθέντων, ἐστὶ πάντως, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ὡς μὲν ἡ β δ, πρὸς τὴν δ α, τὸ β δ ε, τρίγωνον πρὸς τὸ α δ ε. ὡς δὲ ἡ γ ε, πρὸς τὴν ε α, τὸ γ ε δ, τρίγωνον πρὸς τὸ α ε δ. ἀλλ' ὡς ἡ β δ, πρὸς τὴν δ α, ὑπετέθη καὶ ἡ γ ε, πρὸς τὴν ε α. ἄρα, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ι α': ἑκάτερον τῶν β ε δ, γ δ ε, τριγώνων τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὸ α δ ε. καὶ κατὰ τὴν θ': τοῦ αὐτοῦ ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν, ἔχουσι δὲ καὶ τὴν αὐτὴν βάσιν τὴν ε δ, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτά ἐστι μέρη, ἄρα κατὰ τὴν λ θ': τοῦ α': καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις. ἡ δ ε, ἄρα παράλληλός ἐστι τῇ β γ. ὅπερ ἦν τὸ δεύτερον.

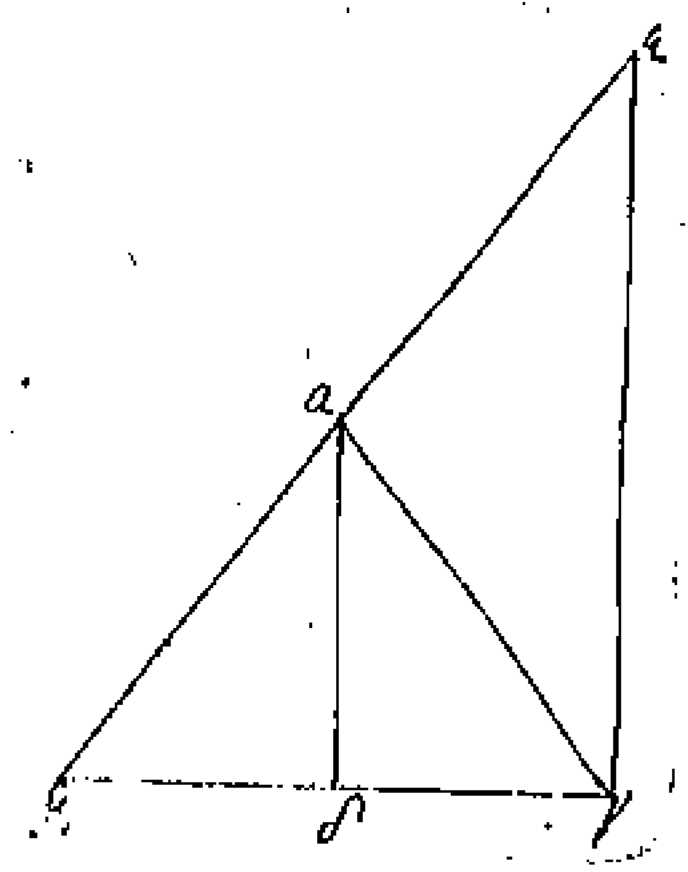
Πρότασις Γ': Θεώρημα.

Ἐὰν τριγώνου γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνει καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς. καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τέμνει τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν.

Ἔστω δὴ τρίγωνον τὸ α β γ, καὶ τμηθήτω τούτου ἡ ὑπὸ β α γ, γωνία δίχα ὑπὸ τῆς α δ, εὐθείας, κατὰ τὴν θ': τοῦ α': Λέγω, ὅτι ὡς ἡ β δ, πρὸς τὴν δ γ, ἐ-

στι καὶ ἡ β α, πρὸς τὴν α γ, ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ γ, παράλληλος τῇ α δ, ἡ γ ε, καὶ συμπιπτέτω τῇ γ ε, ἡ β α, ἐκβαλλομένη κατὰ τὸ ε. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς α δ, ε γ, πέπτωκεν ἥτε α γ, καὶ β ε, πάντως γε κατὰ τὴν κ θ': τοῦ α': ἡ μὲν ὑπὸ α γ ε, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γ α δ, ἐναλλάξ, ἡ δὲ ὑπὸ β α δ, ἐκτὸς τῇ ὑπὸ α ε γ, ἐντός. ἀλλ' αἱ ὑπὸ γ α δ, β α δ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ α γ ε, α ε γ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ κατὰ τὴν ε': τοῦ αὐτοῦ, ἡ α γ, ἴση ἐστὶ τῇ α ε. ἀλλὰ κατὰ τὴν β': τοῦ παρόντος, ὡς ἡ β δ, πρὸς τὴν δ γ, ἐστὶ καὶ ἡ β α πρὸς τὴν α ε, τῇ δὲ α ε, δέδεικται ἴση α γ. ἄρα ὡς ἡ β δ, πρὸς τὴν δ γ, ἐστὶ καὶ ἡ α β, πρὸς τὴν α γ, ὅπερ ἦν τὸ Πρῶτον.

Eucl. Lib. 6. Fig. 11.



Ἔστω δ' ἔτι ὡς ἡ β δ, πρὸς τὴν δ γ, ἡ β α, πρὸς τὴν α γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ α δ. Λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ β α γ, γωνία δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς α δ. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἡ γ ε, ἤχθη παράλληλος τῇ α δ, πάντως γε κατὰ τὴν β': τοῦ παρόντος, ὡς ἡ β δ, πρὸς τὴν δ γ, ἔχει ἡ β α, πρὸς τὴν α ε. ὑπετέθη δὲ καὶ ὡς ἡ β δ, πρὸς τὴν δ γ, ἡ β α, πρὸς τὴν α γ, ἄρα ἡ β α, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς ἑκατέραν τῶν α ε, α γ. καὶ κατὰ τὴν θ': τοῦ ε': αἱ α ε, α γ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ὥστε καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ α γ ε, α ε γ, ὁμοίως ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, κατὰ τὴν ε': τοῦ πρώτου. ἀλλὰ δὴ κατὰ τὴν κ θ': τοῦ αὐτοῦ ἡ μὲν ὑπὸ α ε γ, ἐντὸς ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ β α δ, ἐκτός, ἡ δὲ ὑπὸ α γ ε τῇ ὑπὸ γ α δ, ἐναλλάξ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ β α δ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γ α δ, καὶ ἑπομένως ἡ ὑπὸ β α γ, γωνία δίχα ὑπὸ τῆς α δ, τέτμηται, ὅπερ ἦν τὸ δεύτερον.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

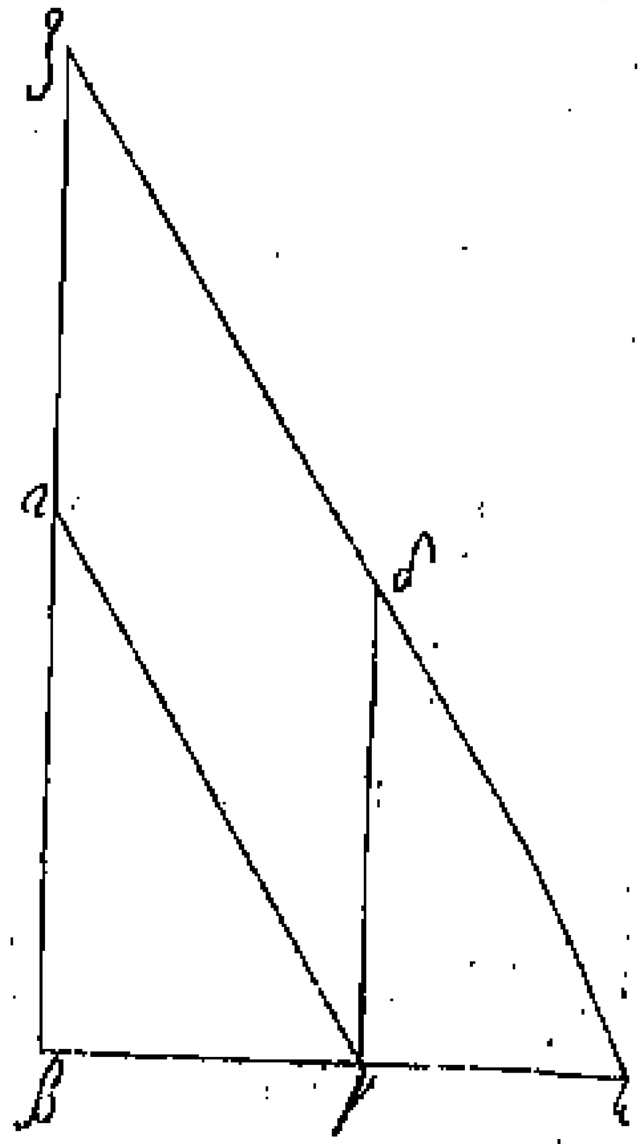
Ἐκ τούτων δῆλον, ὅτι ἐν τοῖς ἰσοσκελέσι τριγώνοις μιᾶς τῶν ἴσων αὐτοῦ πλευρῶν ἐκβληθείσης, ἐὰν ἀπὸ τῆς ἐκτὸς γωνίας παράλληλος τῇ βάσει εὐθεῖα ἀχθῇ, δίχα ἡ αὐτὴ τμηθήσεται γωνία, τοῦ γὰρ α γ ε, ἰσοσκελοῦς τριγ: τῆς α ε, ἐκβληθείσης πλευρᾶς, ἐπεὶ ἡ α δ, παράλληλός ἐστι τῇ γ ε, βάσει, δῆλον, ὅτι ἡ ὑπὸ β α γ, ἐκτὸς γωνία δίχα τέτμηται, ὡς ἤδη δέδεικται.

Πρότασις Δ': Θεώρημα.

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί.

Ἔστωσαν δὴ τρίγωνα ἰσογώνια τὰ α β γ, δ γ ε, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ αβγ, γωνίαν τῇ ὑπὸ δγε, τὴν δὲ ὑπὸ βγα, τῇ πρὸς τῷ ε, καὶ τὴν λοιπὴν τῇ λοιπῇ. Λέγω, ὅτι τῶν αὐτῶν τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας. Κείσθω γὰρ ἡ βγ, ἐπ' εὐθείας τῇ γε. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ αβγ, βγα, ἐλάττονές εἰσι δύο ὀρθῶν, κατὰ τὴν ιζ': τοῦ α: τῇ δὲ ὑπὸ βγα, ἴση ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ ε· πάντως γε καὶ αἱ ὑπὸ αβγ, βεδ, γωνίαι ἐλάσσονές εἰσι δύο ὀρθῶν, καὶ αἱ βα, εδ, ἐκβαλλόμεναι κατὰ τὸ συνεχὲς συμπεσοῦνται. συμπιπτέτωσαν δὴ κατὰ τὸ ζ. ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ πρὸς τῷ β, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ δγε, πάντως γε κατὰ τὴν κη': τοῦ αὐτοῦ, αἱ βζ, γδ, παράλληλοί εἰσιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βγα, τῇ πρὸς τῷ ε, ἴση, ἄρα κατὰ τὴν αὐτὴν παράλληλοί εἰσι, καὶ αἱ γα, εζ. ὥστε τὸ αγδζ, παραλληλόγραμμόν ἐστι. καὶ κατὰ τὴν δ': τοῦ αὐτοῦ, ἡ μὲν αζ, ἴση ἐστὶ τῇ γδ, ἡ δὲ ζδ, τῇ αγ. καὶ κατὰ τὴν β': τοῦ παρόντος, ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αζ, ἔστι καὶ ἡ βγ, πρὸς τὴν γε, ἴση δὲ ἡ αζ, τῇ γδ, ἄρα ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν δγ, ἡ βγ, πρὸς τὴν γε, ὥστε καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, ἡ δγ, πρὸς τὴν γε. πάλιν ἐπεὶ ἡ γδ, παράλληλός ἐστι τῇ ζβ, ἔστι πάντως γε κατὰ τὴν αὐτὴν, καὶ ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν γε, ἡ ζδ, πρὸς τὴν δε, ἴση δὲ ἡ ζδ, τῇ αγ, ἄρα ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν γε, ἡ αγ, πρὸς τὴν δε, ὥστε καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν γα, ἡ γε, πρὸς τὴν εδ. δέδεικται δὲ, ὅτι καὶ ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτως ἡ δγ, πρὸς τὴν γε, ἄρα καὶ δι' ἴσου, ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, ἡ γδ, πρὸς τὴν δε, κατὰ τὴν κβ': τοῦ ε: τῶν ἰσογωνίων ἄρα τριγώνων ἀνάλογον, καὶ τὰ ἑξῆς.

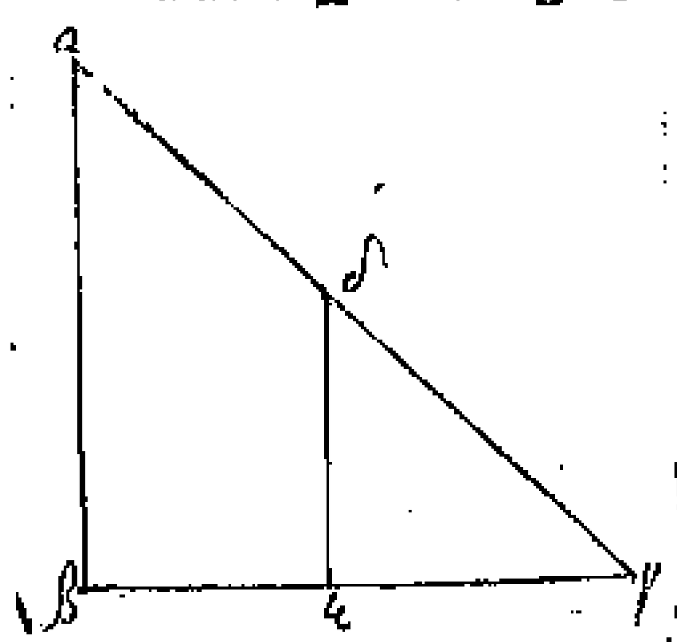
Eucl. Lib. 6. Fig. 12.



Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ τούτων δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος, τὸν αὐτὸν αὕτη ἕξει λόγον πρὸς ἣν ὤν παραλλήλως ἀχθείη, ὃν καὶ ἑκατέρα τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν ἔχει πρὸς τὰ μέρη αὐτῆς. τοῦ γὰρ αβγ, τριγώνου παρὰ τὴν αβ, πλευρὰν ἀχθήτω παράλληλος ἡ δε, καὶ ἐπεὶ τὰ αβγ, δεγ, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσι, κατὰ τὴν κη': τοῦ α: πάντως γε κατὰ τὴν παροῦσαν, ἔστιν ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, ἡ δε, πρὸς τὴν εγ, ὥστε καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν δε, ἡ βγ, πρὸς τὴν εγ. καὶ ἀνάπαλιν ὡς ἡ δε, πρὸς τὴν αβ, ἡ γε, πρὸς τὴν γβ.

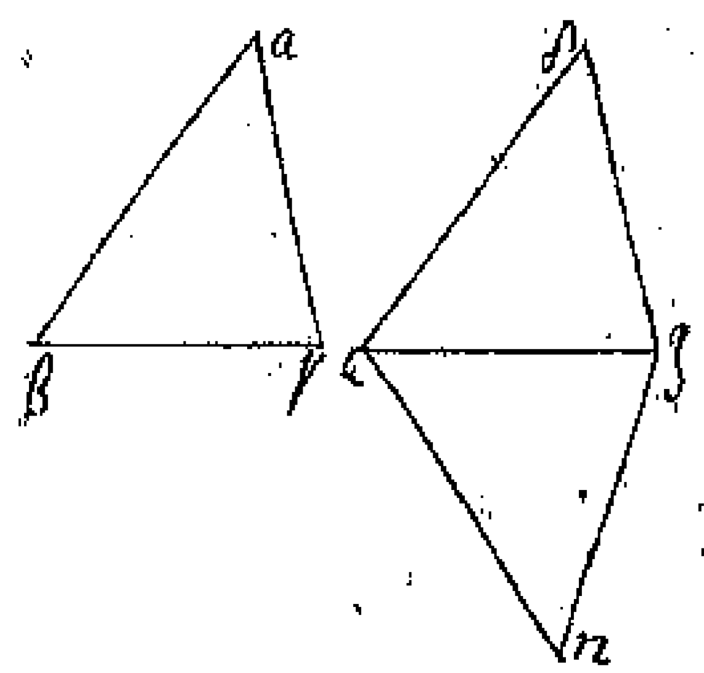
Eucl. Lib. 6. Fig. 13.



Πρότασις Ε': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Eucl. Lib. 6. Fig. 14.



Ἐχέτωσαν δὴ τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀνάλογον. καὶ ἔστω ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν γα, ἡ εζ, πρὸς τὴν ζδ, ὡς δὲ ἡ γα, πρὸς τὴν αβ, ἡ ζδ, πρὸς τὴν δε. Λέγω, ὅτι τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσι, καὶ ἴσας ἔχουσι τὰς γωνίας, τὴν μὲν πρὸς τῷ β, τῇ ὑπὸ δεζ, τὴν δὲ πρὸς τῷ γ, τῇ ὑπὸ δζε, καὶ τὴν λοιπὴν τῇ λοιπῇ. Συνεστάθω γὰρ πρὸς τῇ εζ, εὐθείᾳ ἡ μὲν ὑπὸ ζεη, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ γβα, ἡ δὲ ὑπὸ εζη, τῇ ὑπὸ βγα, καὶ ἔσται πάντως καὶ ἡ λοιπὴ, ἡ πρὸς τῷ η, λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ α, ἴση· ὥστε κατὰ τὴν ἀνωτέρω τὰ αβγ, ηεζ, τρίγωνα ἀνάλογον ἔχουσι τὰς πλευράς. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, ἡ ηε, πρὸς τὴν εζ, ἀλλ' ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, ὑπετέθη καὶ ἡ δε, πρὸς τὴν εζ, ἄρα αἱ δε, ηε, τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον πρὸς τὴν εζ, κατὰ τὴν ια: τοῦ ε: καὶ κατὰ τὴν θ: τοῦ αὐτοῦ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ δζ, τῇ ηζ, ἴση, κοινῆς δὲ λαμβανομένης τῆς εζ, δειχθήσεται πάντως καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δεζ, ἴση τῇ ὑπὸ ηεζ, κατὰ τὴν η: τοῦ α: καὶ ὅλον τὸ δεζ, τρίγωνον ὅλῳ τῷ ηεζ, τριγώνῳ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς, ἡ μὲν ὑπὸ εζδ, τῇ ὑπὸ εζη, ἡ δὲ πρὸς τῷ δ, τῇ πρὸς τῷ η, ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ηεζ, ἴση γέγονε τῇ ὑπὸ αβγ, ἡ δὲ ὑπὸ εζη, τῇ ὑπὸ βγα, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ δεζ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αβγ, ἡ δὲ ὑπὸ εζδ, τῇ ὑπὸ βγα, καὶ λοιπὴ ἡ πρὸς τῷ δ, λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ α. Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ, τρίγωνον τῷ δεζ, τριγώνῳ, ὅπερ ἔδει τὸ ὑποχεθέν.

Πρότασις ς': Θεώρημα.

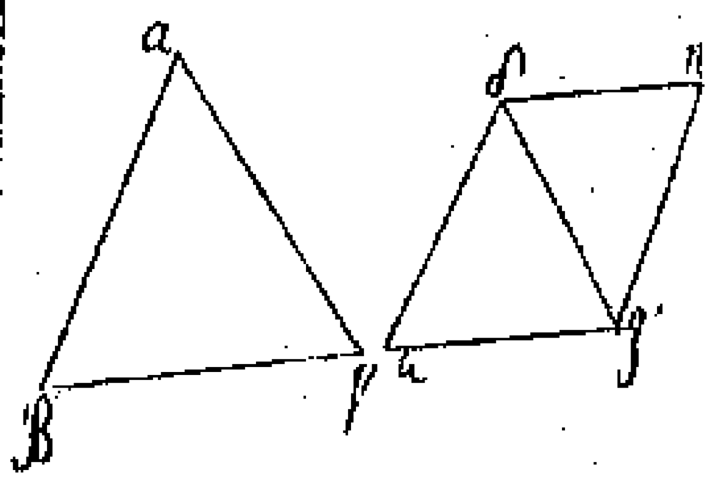
Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἐχέτωσαν δὴ τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα γωνίαν τὴν ὑπὸ βαγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδζ, ἴσην, καὶ τὰς βα, αγ, πλευρὰς ἀνάλογον ταῖς εδ, δζ. Λέγω, ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ αβγ, τρίγωνον τῷ δεζ, τριγώνῳ. Συνεστάθω γὰρ πρὸς τῇ δζ, εὐθείᾳ, πρὸς μὲν τῷ δ, σημείῳ ἡ ὑπὸ ζδη, γωνία ἴση ὁποτέρᾳ τῶν ὑπὸ βαγ, εδζ, πρὸς δὲ τῷ ζ, ἡ ὑπὸ δζη, τῇ ὑπὸ αγβ, κατὰ τὴν κγ': τοῦ α:

καὶ ἔσαι πάντως καὶ λοιπὴ ἡ πρὸς τῷ η, λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ β, ἴση. Ἰσογώνια ἄρα τὰ δηζ, αγβ, τρίγωνα, ὥστε καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσι, κατὰ τὴν δ': τοῦ παρόντος, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν αγ, ἡ ηδ, πρὸς τὴν δζ, ὡς δὲ ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, ὑπετέθη καὶ ἡ εδ, πρὸς τὴν δζ, ἄρα, κατὰ τὴν θ': τοῦ ε': αἱ εδ, ηδ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. κοινῆς δὲ λαμβανομένης τῆς δζ, ἔστι καὶ βάσις ἡ εζ, βάσει τῇ ζη, ἴση, καὶ ὅλον τὸ εδζ, τρίγωνον, ὅλῳ τῷ ηδζ, τριγώνῳ ἴσον, καὶ γωνία ἡ μὲν ὑπὸ δεζ, γωνία τῇ ὑπὸ δηζ, ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ δζε, τῇ ὑπὸ δζη, κατὰ τὴν δ': τοῦ α: ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ δζη, ἴση γέγονε τῇ ὑπὸ αγβ, ἡ δὲ πρὸς τῷ η ἴση δέδεικται τῇ πρὸς τῷ β, ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ δζε, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αγβ, ἡ δὲ πρὸς τῷ ε, τῇ πρὸς τῷ β. Ἰσογώνιον ἄρα τὸ αβγ, τρίγωνον τῷ δεζ, τριγώνῳ. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ, καὶ τὰ ἑξῆς.

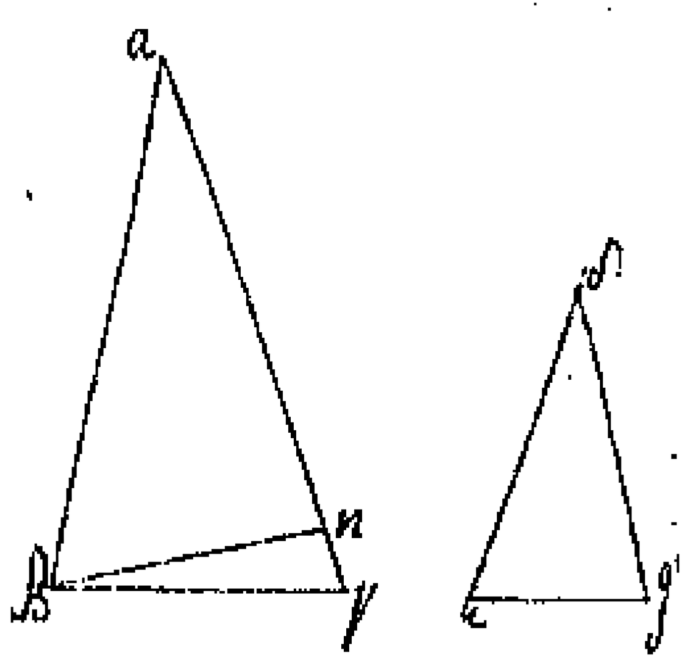
Eucl. Lib. 6. Fig. 15.

π. 5':



Πρότασις Ζ': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα, ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς, ἰσογώνια ἔσαι τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί.



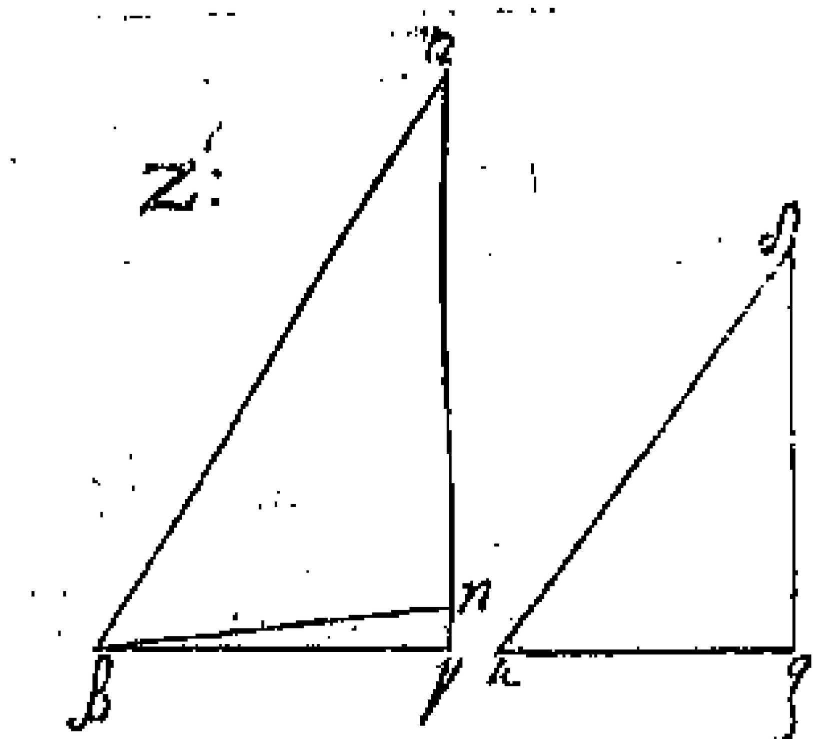
Ἐχέτωσαν δὴ τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα γωνίαν μὲν τὴν πρὸς τῷ α, γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ δ, ἴσην, πλευρὰς δὲ τὰς αβ, βγ, ἀνάλογον ταῖς δε, εζ, καὶ ἔσω ἑκατέρα τῶν πρὸς τοῖς γ, καὶ ζ, γωνιῶν ἐλάττων ὀρθῆς. Λέγω, ὅτι τὸ αβγ, τριγ: ἰσογώνιόν ἐστι τῷ δεζ, καὶ ἔχει τὴν πρὸς τῷ β, ἴσην τῇ πρὸς τῷ ε, εἰ γὰρ μὴ, ἡ μία πάντως αὐτῶν ἔσαι μείζων, ἔσω δὴ αὕτη ἡ πρὸς τῷ β. καὶ συνεστάθω ἡ ὑπὸ αβη, ἴση τῇ πρὸς τῷ ε, ὑπετέθη δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ α, ἴση τῇ πρὸς τῷ δ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αηβ, λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ ζ, ἴση ἐστὶν, ἰσογώνιον ἄρα τὸ αβη, τρίγωνον τῷ δεζ. ὥστε ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βη, οὕτως ἡ δε πρὸς τὴν εζ, κατὰ τὴν δ': τοῦ παρόντος. ἀλλ' ὡς ἡ δε, πρὸς τὴν εζ, ὑπετέθη καὶ ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, ἡ αβ, ἄρα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς ἑκατέραν τῶν βη, βγ, καὶ κατὰ τὴν θ': τοῦ ε: αἱ βη, βγ, ἴσαι εἰσὶν, ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ γ, τῇ ὑπὸ βηγ, κατὰ τὴν ε': τοῦ α: ἡ δὲ πρὸς τῷ γ, ὑπετέθη ἐλάττων ὀρθῆς, ἄρα ἐλάττων ὀρθῆς ἐστι καὶ ἡ ὑπὸ βηγ, ἡ δὲ ὑπὸ βηα, μείζων ὀρθῆς, τῇ δὲ ὑπὸ βηα ἴση δέδεικται ἡ πρὸς τῷ ζ, ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ ζ, μείζων ὀρθῆς, ἀλλὰ καὶ ἐλάττων; ἄτο-

ἄτοπον ἄρα. ὥστε ἡ ὑπὸ αβγ, οὐκ ἔστι μείζων τῆς πρὸς τῷ ε, ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ α, τῇ πρὸς τῷ δ, ἴση, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ γ, λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ ζ, ἴση ἐστὶ, καὶ ἑπομένως τὸ αβγ, τρίγωνον, ἰσογώνιόν ἐστι τῷ δεζ.

Ἀλλὰ δὴ ἔσω ἑκατέρα τῶν πρὸς τοῖς γ, καὶ ζ, μὴ ἐλάττων ὀρθῆς. ὅτι δὲ καὶ οὕτω τὸ αβγ, τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ δεζ, δῆλον. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δειχθήσεται ἡ μὲν ὑπὸ βηα, γωνία, ἴση τῇ πρὸς τῷ ζ, αἱ δὲ βη, βγ, εὐθεῖαι, ἴσαι ἀλλήλαις, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ βηγ, ἴση ἔσαι τῇ πρὸς τῷ γ. ἀλλ' ἡ πρὸς τῷ γ, μὴ ἐλάττων ὑπετέθη ὀρθῆς, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ βηγ, μὴ ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. τοῦ βγη, ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι μὴ ἐλάσσονές εἰσι δύο ὀρθῶν, ὅπερ ἄτοπον, κατὰ τὴν ιζ': τοῦ α: οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ αβγ, τῇ πρὸς τῷ ε. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ πρὸς τῷ γ, λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ ζ, ἴση ἐστίν. ἰσογώνιον ἄρα τὸ αβγ, τρίγωνον τῷ δεζ. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας, καὶ τὰ ἑξῆς.

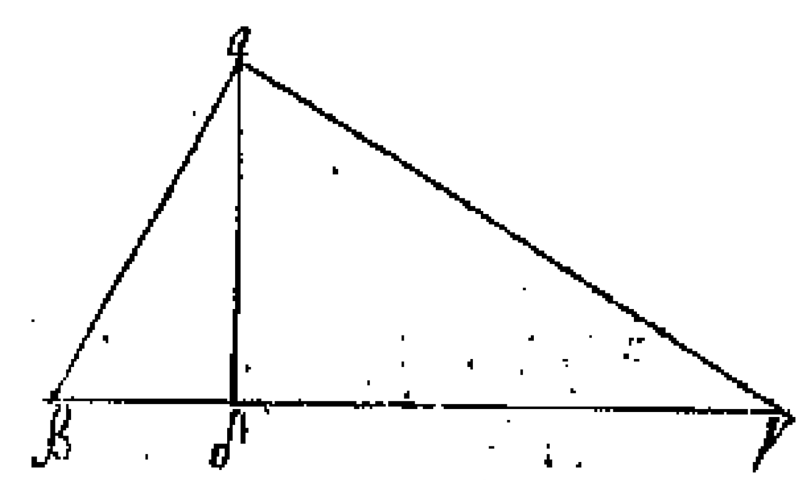
Eucl. Lib. 6. Fig. 16.

Ζ':



Πρότασις Η': Θεώρημα.

Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα, ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.



Ἔσω δὴ ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ αβγ. ἀπὸ δὲ τῆς ὑπὸ βαγ, ὀρθῆς αὐτοῦ γωνίας πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς βγ, βάσεως ἡ αδ. Λέγω, ὅτι ἑκάτερον τῶν αβδ, αδγ, τριγώνων ὅμοιόν ἐστι τῷ τε αβγ, ὅλῳ, καὶ ἀλλήλοις. Ἐπεὶ γὰρ τῶν αβγ, αβδ, τριγώνων αἱ ὑπὸ βαγ, βδα, γωνίαι, ἴσαι εἰσὶν, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, κοινὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ β, πάντως γε καὶ λοιπὴ ἡ πρὸς τῷ γ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ βαδ, ἴση ἐστὶν, ἰσογώνια ἄρα τὰ αβγ, αβδ, τρίγωνα. καὶ κατὰ τὴν δ': τοῦ παρόντος, ἀνάλογον ἔχουσι τὰς πλευρὰς, τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γβ, πρὸς τὴν βα, ἡ βα, πρὸς τὴν βδ. ὡς δὲ ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, ἡ βδ, πρὸς τὴν δα. τὰ ἄρα αβγ, αβδ, τρίγωνα, ὅμοιά εἰσι, κατὰ τὸν α: ὅρον τοῦ παρόντος. Ὁμοίως δειχθήσεται καὶ τὸ αδγ, ὅμοιον τῷ αβγ. ἔχουσι γὰρ ἴσας τὰς ὑπὸ βαγ, αδγ, γωνίας, καὶ κοινὴν τὴν πρὸς τῷ γ, ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ δαγ, λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ β, ἴση ἐστὶν, ἰσογώνια ἄρα τὰ αβγ, αδγ, καὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν δ': ἀνάλογον ἔχουσι τὰς πλευρὰς, τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας. καὶ ἑπομένως ὅμοιόν ἐστι καὶ τὸ αδγ, τῷ αβγ. ἑκάτερον ἄρα τῶν αβδ, αδγ, τριγώνων ὅμοιόν ἐστι τῷ ὅλῳ αβγ.

αβγ. ὅτι δὲ καὶ ἀλλήλοις ὅμοιά εἰσι τὰ αὐτὰ δῆλον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ βδα, γωνία τοῦ αβδ, τριγώνου ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γδα, τοῦ αδγ, τριγώνου, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, δέδεικται δὲ καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ β, ἴση τῇ ὑπὸ δαγ, ἡ δὲ ὑπὸ βαδ, τῇ πρὸς τῷ γ. πάντως γε τὸ αβδ, τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ αδγ, τριγώνῳ, καὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν δ': ἀνάλογον ἔχουσι τὰς πλευρὰς, τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δα, ἡ αὐτὴ δα, πρὸς τὴν δγ, ὡς δὲ ἡ δα, πρὸς τὴν αβ, ἡ δγ, πρὸς τὴν γα, καὶ ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βδ, ἡ γα, πρὸς τὴν αδ. τὰ ἄρα αβδ, αδγ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσι, δέδεικται δὲ ὅμοιον ἑκάτερον καὶ τῷ ὅλῳ. Ἐὰν ἄρα ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ. Α':

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἡ ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τῆς βάσεως πίπτουσα κάθετος, μέση ἀνάλογός ἐστιν τῶν τῆς βάσεως τμημάτων.

ΠΟΡΙ'ΣΜΑ. Β':

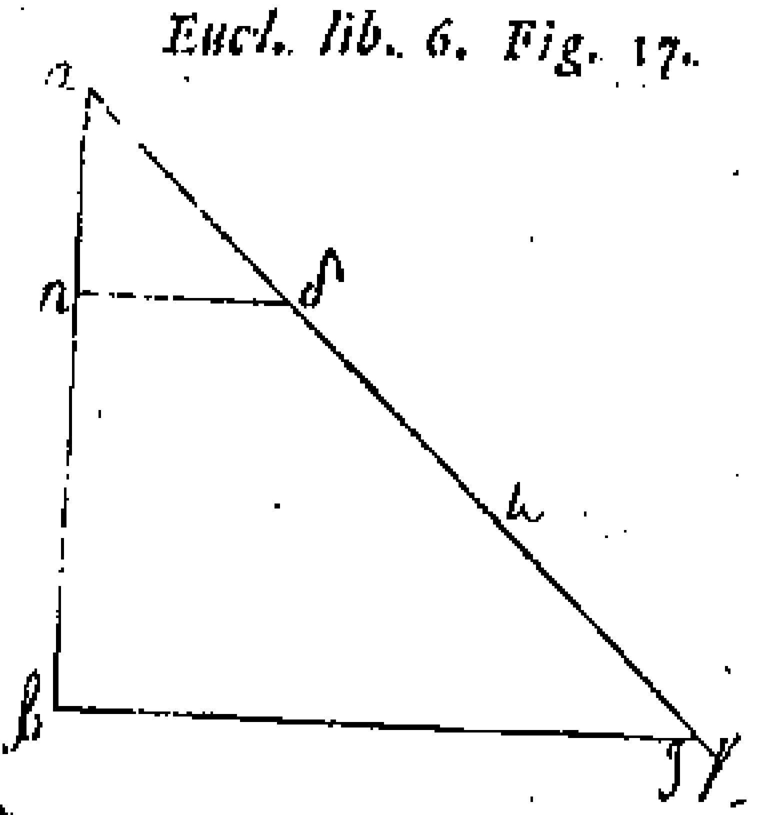
Ἔτι τῆς τε βάσεως καὶ ὁποτερουοῦν τῶν τμημάτων ἡ πρὸς τῷ τμήματι πλευρὰ, μέση ἐστὶν ἀνάλογος. ἡ μὲν γὰρ αβ, μέση δέδεικται ἀνάλογος τῆς βγ, βάσεως καὶ βδ, τμήματος. ἡ δὲ αγ, τῆς βγ, βάσεως καὶ γδ, τμήματος.

Πρότασις Θ': Πρόβλημα.

Τῆς δοθείσης εὐθείας τὸ προσαχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

Ἔστω δὴ ἀφελεῖν τῆς αβ, δοθείσης εὐθείας μέρος, δὸς εἰπεῖν, τρίτον. Ἤχθω ἀπὸ τοῦ α, σημείου ἡ αγ, εὐθεῖα, γωνίαν ποιοῦσα μετὰ τῆς αβ, τὴν τυχοῦσαν. καὶ εἰλήφθω ἀπὸ τῆς αγ, τὸ τυχὸν μέρος αδ, καὶ τούτῳ ἴσον γενέσθω τὸ, τε δε, καὶ εζ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζβ. ἀπὸ δὲ τοῦ δ, ἤχθω παράλληλος τῇ βζ, ἡ δη, καὶ τὸ αη, μέρος γ': ἔσται τῆς αβ. κατὰ γὰρ τὴν β': τοῦ παρόντος, ὡς ἡ αδ, πρὸς τὴν αζ, ἐστὶ καὶ ἡ αη, πρὸς τὴν αβ. ἀλλ' ἡ αδ, τρίτον μέρος εἴληπται τῆς αζ, ἄρα καὶ ἡ αη, γ': μέρος ἐστὶ τῆς αβ. ὅπερ ἔδει τὸ προσαχθέν:

Eucl. lib. 6. Fig. 17.



Πρότασις Ι': Πρόβλημα.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄτμητον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ ὁμοίως τεμεῖν.

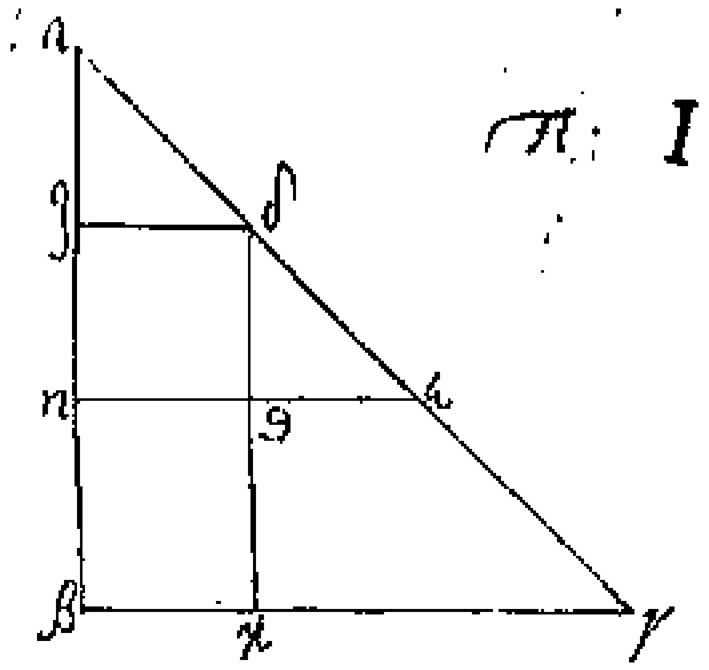
Ἔστω δὴ τεμεῖν τὴν αβ, ἄτμητον εὐθεῖαν ὁμοίως τῇ αγ, τετμημένῃ κατὰ τὰ δ καὶ ε, σημεῖα. Κείσθωσαν τοίνυν αἱ αβ, αγ, εὐθεῖαι πρὸς ἀλλήλας, ὥστε γωνίαν

ποιεῖν

ποιεῖν πρὸς τῷ α, τὴν τυχοῦσαν. ἐπιζευχθείσης δὲ τῆς βγ, διήχθωσαν ἀπὸ τοῦ ε, καὶ δ, σημείου παραλλήλως τῇ αὐτῇ βγ, αἱ δζ, εη. ἀπὸ δὲ τοῦ δ, παραλλήλως τῇ αβ, ἤχθω ἡ δκ, τέμνουσα τὴν εη, κατὰ τὸ θ, καὶ ἔσται τὸ προσαχθέν. Ἐπεὶ γὰρ τὰ ζθ, θβ, παραλληλόγραμμά εἰσι κατὰ τὴν κατασκευὴν, πάντως γε, κατὰ τὴν δ': ἡ μὲν δθ, ἴση ἐστὶ τῇ ζη, ἡ δὲ θκ, τῇ ηβ. ἀλλὰ τριγώνου τοῦ δκγ, παράλληλος ἦκται ἡ εθ, τῇ κγ, πλευρᾷ, ἄρα, κατὰ τὴν β': τοῦ παρόντος, ὡς ἡ γε, πρὸς τὴν εδ, οὕτως ἡ κθ, πρὸς τὴν θδ, ἤτοι ἡ βη, πρὸς τὴν ηζ. Ἐπεὶ δὲ καὶ τριγώνου τοῦ αηε, παρὰ τὴν ηε, πλευρὰν ἦκται παράλληλος ἡ δζ, πάντως γε, κατὰ τὴν αὐτὴν, ὡς ἡ εδ, πρὸς τὴν δα, ἡ ηζ, πρὸς τὴν ζα, δέδεικται δὲ καὶ ὡς ἡ γε, πρὸς τὴν εδ, ἡ βη, πρὸς τὴν ηζ. ἄρα ἡ αβ, ὁμοίως τέτμηται τῇ αγ, κατὰ τὸ προσαχθέν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 6. Fig. 18.

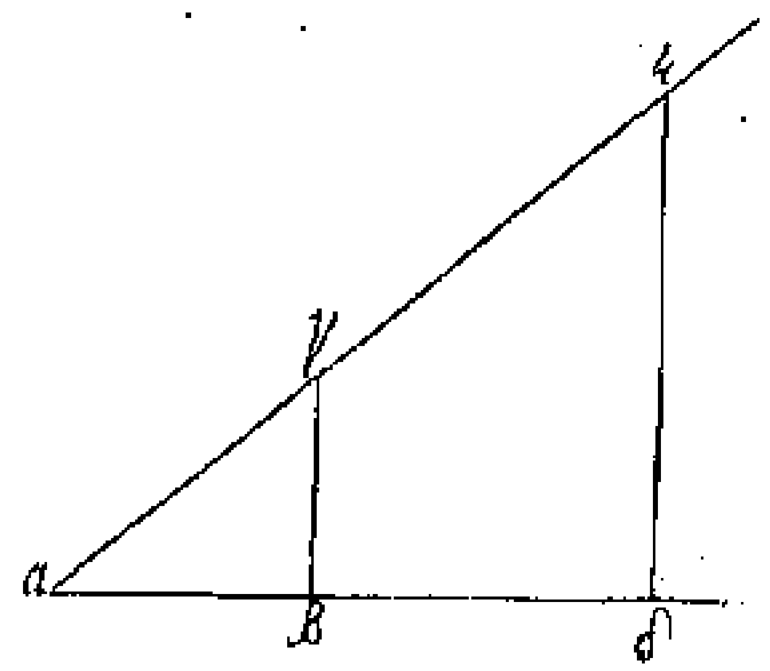
Π: Ι'

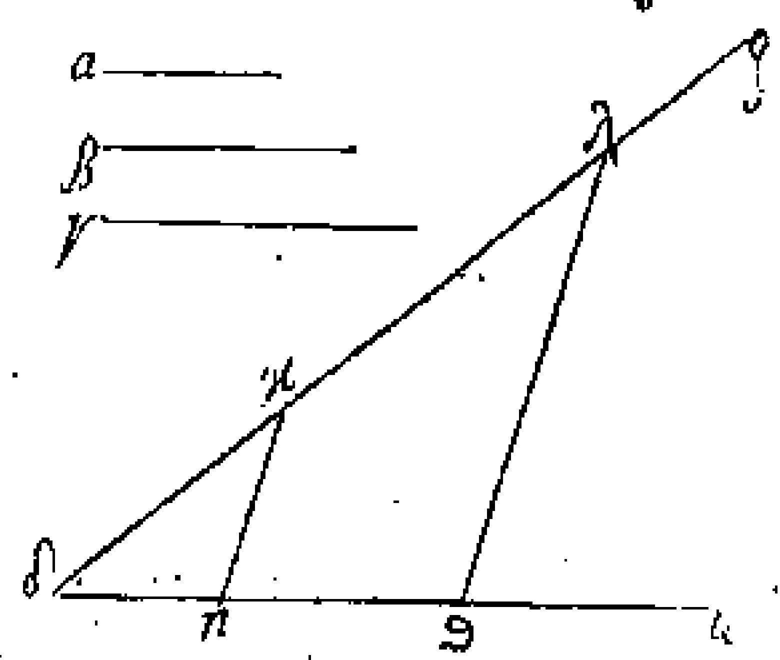


Πρότασις ΙΑ': Πρόβλημα.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἔστω δὴ εὑρεῖν τρίτην ἀνάλογον τῶν αβ, αγ, εὐθειῶν. Κείσθωσαν αἱ δοθεῖσαι αβ, αγ, εὐθεῖαι πρὸς ἀλλήλας, ὥστε τὴν τυχοῦσαν ποιεῖν γωνίαν, τὴν πρὸς τῷ α. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γβ, ἐκβαλλομένων δὲ τῶν αβ, αγ, κατὰ τὸ συνεχὲς, ἔστω ἡ βδ, ἴση τῇ αγ. καὶ ἀπὸ τοῦ δ, ἤχθω παράλληλος τῇ βγ, ἡ δε, καὶ ἡ γε, ἔσται ἡ ζητουμένη. κατὰ γὰρ τὴν β': τοῦ παρόντος ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βδ, οὕτως ἡ αγ, πρὸς τὴν γε, ἀλλ' ἡ βδ, εἴληπται ἴση τῇ αγ, ἄρα ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν αγ, οὕτως ἡ αγ, πρὸς τὴν γε. ἡ γε, ἄρα τρίτη ἐστὶν ἀνάλογος τῶν αβ, αγ, δοθεισῶν εὐθειῶν. ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.





Πρότασις ΙΒ': Πρόβλημα.

Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ζητείσθω δὴ τετάρτη ἀνάλογος τῶν α, β, γ, δοθεισῶν εὐθειῶν. Κείσθωσαν αἱ τυχοῦσαι δε, δζ, εὐθεῖαι τυχοῦσαν ποιοῦσαι γωνίαν τὴν πρὸς τῷ δ, καὶ εἰλήφθω τῇ μὲν α, ἴση ἡ δη, τῇ δὲ β, ἡ ηθ, καὶ τῇ γ, ἡ δκ. καὶ τῇ ηκ, ἐπιζευχθείσῃ, παράλληλος ἤχθω ἀπὸ τοῦ θ, ἡ θλ. καὶ ἡ κλ, ἔσται ἡ ζητουμένη. κατὰ γὰρ τὴν β': τοῦ παρόντος, ὡς ἡ δη, πρὸς τὴν ηθ, οὕτως ἡ δκ, πρὸς τὴν

κλ,

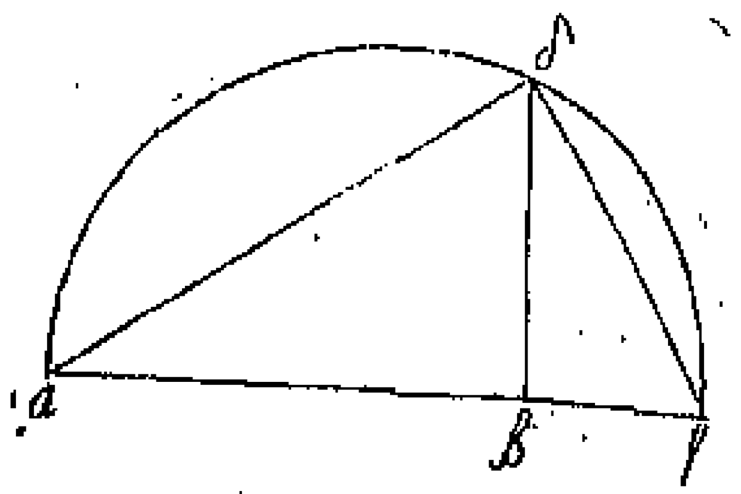
κ λ, ἀλλ' ἡ μὲν δὴ, εἴληπται ἴση τῇ α, ἡ δὲ η θ, τῇ β, καὶ ἡ δ κ, τῇ γ. ἄρα ὡς ἡ α, πρὸς τὴν β, ἡ γ, πρὸς τὴν κ λ. ἡ κ λ, ἄρα τετάρτη ἐστὶν ἀνάλογος τῶν α, β, γ, δοθεισῶν εὐθειῶν, ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Πρότασις ΙΓ': Πρόβλημα.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

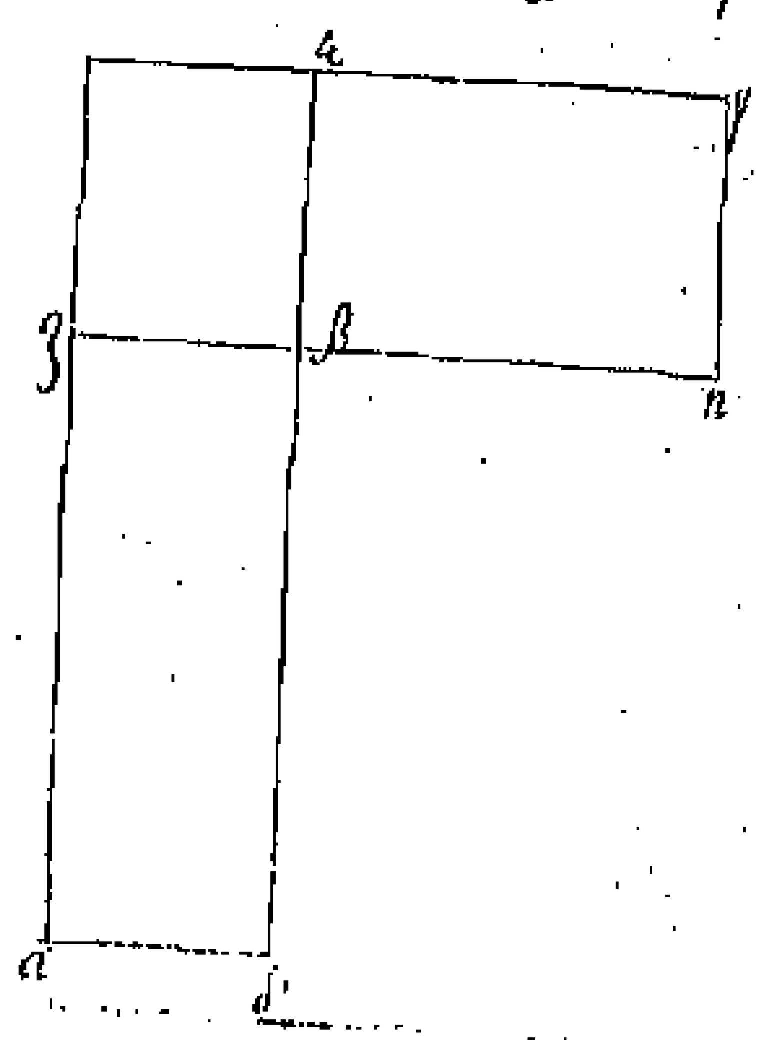
Ἔστωσαν δὴ αἱ α β, β γ, εὐθεῖαι, καὶ ζητείσθω ἡ μέση αὐτῶν ἀνάλογος. Κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας αἱ α β, β γ, δοθεῖσαι εὐθεῖαι, καὶ γραφήτω περὶ τὴν ὅλην α γ, ἡμικύκλιον τὸ α δ γ. καὶ ἀπὸ τοῦ β, ἀνεστάθω κάθετος ἡ β δ, καὶ αὕτη ἔσται ἡ ζητουμένη. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ α δ, δ γ. καὶ ἐπεὶ τὸ α δ γ, τρίγωνον ὀρθογώνιόν ἐστι, κατὰ τὴν λ α': τοῦ γ': ἀπὸ δὲ τῆς πρὸς τῷ δ, αὐτοῦ ὀρθῆς γωνίας πέπτωκε κάθετος ἐπὶ τῆς α γ, βάσεως ἡ δ β. ἄρα, κατὰ τὸ α': πόρισμα τῆς η': τοῦ παρόντος ἡ β δ, μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν α β, β γ, δοθεισῶν εὐθειῶν. ὅπερ ἦν τὸ προσαχθέν.

Eucl. Lib. 6. Fig. 19.



Πρότασις ΙΔ': Πρόβλημα.

Τῶν ἴσων τε καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. καὶ ὧν παραλληλογράμμων μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.



Ἔστωσαν ἴσα τὰ α β, β γ, παραλληλόγραμμα, ἔχοντα ἴσας τὰς πρὸς τῷ β, γωνίας. Λέγω δὴ, ὅτι αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ἀντιπεπόνθασι. καὶ ἔστιν ὡς ἡ η β, πρὸς τὴν β ζ, ἡ δ β, πρὸς τὴν β ε. Κείσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας ἡ δ β, τῇ β ε, καὶ ἔσονται πάντως ἐπ' εὐθείας καὶ αἱ η β, β ζ, κατὰ τὴν ι δ': τοῦ α': καὶ ἀποπεπληρώσθω τὸ ε ζ, παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν τὰ α β, β γ, ἴσα εἰσὶ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, πάντως γε κατὰ τὴν ζ': τοῦ ε': τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἑκάτερον πρὸς τὸ ε ζ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ α β, πρὸς τὸ ζ ε, τὸ η ε, πρὸς τὸ αὐτὸ ζ ε. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ α β, πρὸς τὸ ζ ε, ἔστι καὶ ἡ δ β, πρὸς τὴν β ε, κατὰ τὴν α': τοῦ παρόντος. ὡς δὲ τὸ η ε, πρὸς τὸ ζ ε, ἡ η β, πρὸς τὴν ζ β, ἄρα καὶ ὡς ἡ η β, πρὸς τὴν β ζ, ἡ δ β, πρὸς τὴν β ε. ἀντιπεπόνθασιν ἄρα αἱ πλευραὶ τῶν α β, β γ, παραλληλογράμμων αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς ἡ η β, πρὸς τὴν β ζ, ἡ δ β, πρὸς τὴν β ε. Λέγω, ὅτι τὰ α β, β γ, πα-

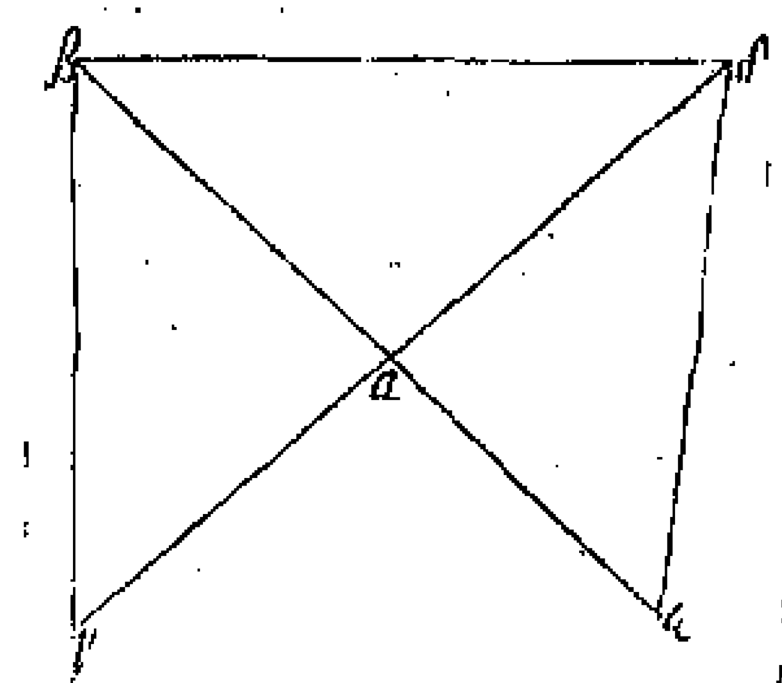
ραλληλόγραμμα ἴσα ἐστί. κατὰ γὰρ τὴν ῥηθεῖσαν α': ὡς μὲν ἡ η β, πρὸς τὴν β ζ, ἔστι καὶ τὸ η ε, πρὸς τὸ ε ζ, ὡς δὲ ἡ δ β, πρὸς τὴν β ε, τὸ δ ζ, πρὸς τὸ ε ζ. ἀλλ' ὡς ἡ η β, πρὸς τὴν β ζ, ὑπετέθη καὶ ἡ δ β, πρὸς τὴν β ε, ἄρα τὰ α β, β γ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὸ ε ζ, καὶ κατὰ τὴν θ': τοῦ ε': ἴσα ἀλλήλοις εἰσί. τῶν ἴσων τε ἄρα, καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΕ': Θεώρημα.

Τῶν ἴσων, καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. καὶ ὧν μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Ἔστωσαν δὴ ἴσα τρίγωνα τὰ α β γ, α δ ε, ἔχοντα τὴν ὑπὸ β α γ, γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ δ α ε. Λέγω, ὅτι τῶν αὐτῶν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ἔσται ἡ γ α, πρὸς τὴν α δ, ὡς ἡ ε α, πρὸς τὴν α β. Κείσθω γὰρ ἡ γ α, ἐπ' εὐθείας τῇ α δ, καὶ ἔσται πάντως, κατὰ τὴν ι δ': τοῦ α': καὶ ἡ β α, ἐπ' εὐθείας τῇ α ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ β δ.

Eucl. Lib. 6. Fig. 20.



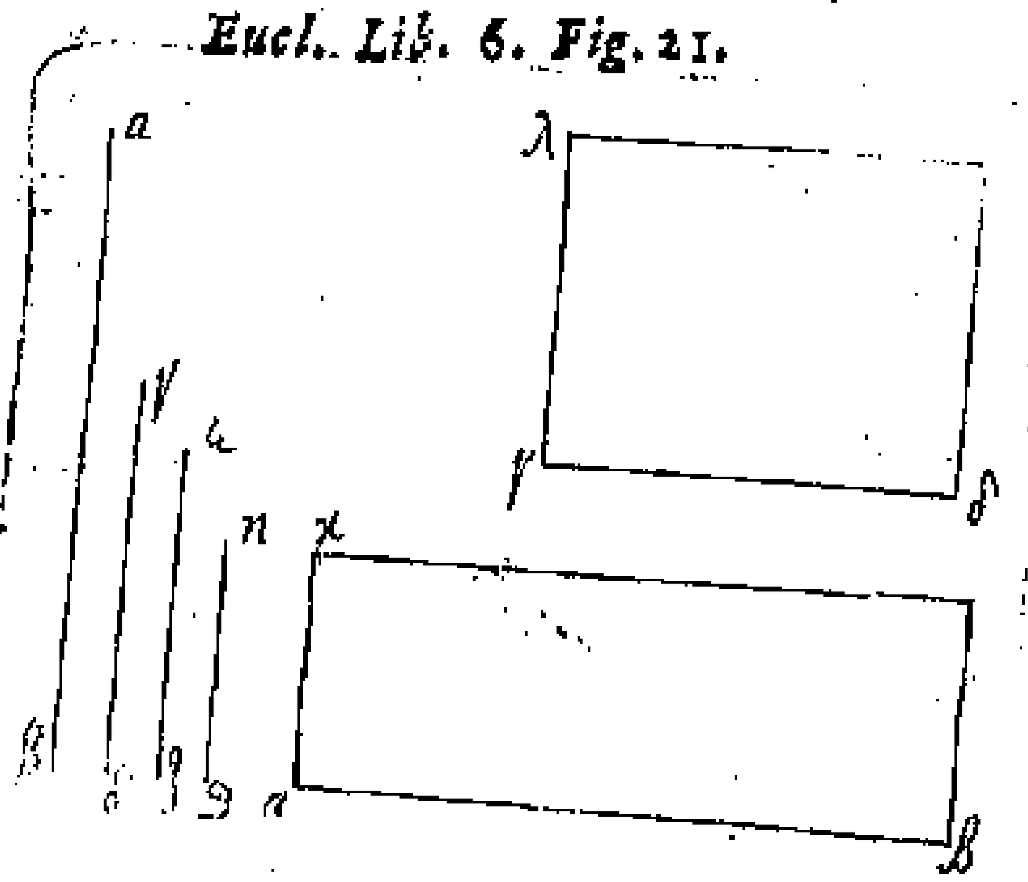
καὶ ἐπεὶ τὰ α β γ, α δ ε, τρίγωνα ἴσα ἐστί, πάντως γε, κατὰ τὴν ζ': τοῦ ε': ὡς τὸ α β γ, τρίγωνον πρὸς τὸ β α δ, οὕτω καὶ τὸ α δ ε, πρὸς τὸ αὐτὸ β α δ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ α β γ, πρὸς τὸ β α δ, ἔχει, καὶ ἡ γ α, πρὸς τὴν α δ, ὡς δὲ τὸ α δ ε, πρὸς τὸ αὐτὸ β α δ, ἔχει καὶ ἡ ε α, πρὸς τὴν α β, κατὰ τὴν α': τοῦ παρόντος, ἄρα, κατὰ τὴν ι α': τοῦ ε': ὡς ἡ γ α, πρὸς τὴν α δ, οὕτως ἡ ε α, πρὸς τὴν α β, ὅπερ ἔδει τὸ α': Ἀλλὰ δὴ ἔστω καὶ ὡς ἡ γ α, πρὸς τὴν α δ, ἡ ε α, πρὸς τὴν α β. Λέγω, ὅτι τὸ α β γ, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ α δ ε. Ἐπεὶ γὰρ ὡς ἡ γ α, πρὸς τὴν α δ, ἔστι καὶ ἡ ε α, πρὸς τὴν α β, καὶ ὡς μὲν ἡ γ α, πρὸς τὴν α δ, ἔστι καὶ τὸ α β γ, τρίγωνον πρὸς τὸ β α δ, ὡς δὲ ἡ ε α, πρὸς τὴν α β, τὸ α δ ε, πρὸς αὐτὸ τὸ β α δ, κατὰ τὴν α': τοῦ παρόντος, πάντως γε τὰ α β γ, α δ ε, τρίγωνα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἑκάτερον πρὸς τὸ β α δ, κατὰ τὴν ι α': τοῦ ε': καὶ κατὰ τὴν θ': τοῦ αὐτοῦ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσί. Τῶν ἴσων τε ἄρα καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Ιϛʹ: Θεώρημα.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ εἰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν δὴ ἀνάλογον αἱ αβ, γδ, εζ, ηθ, εὐθεῖαι, τουτέστιν ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν γδ, ἡ εζ, πρὸς τὴν ηθ. Λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν αβ, ηθ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν γδ, εζ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Συνεστάθωσαν γὰρ ἐπὶ τῶν αβ, γδ, κάθετοι αἱ ακ, γλ, καὶ ἔστω ἡ μὲν ακ, ἴση τῇ ηθ, ἡ δὲ γλ, τῇ εζ, καὶ συμπεπληρώσθωσαν τὰ βκ, δλ, παραλληλόγραμμα ὀρθογώνια. καὶ ἐπεὶ ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν γδ, ἐστὶ καὶ ἡ εζ, πρὸς τὴν ηθ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, καὶ τῇ μὲν εζ, ἴση εἴληπται ἡ γλ, τῇ δὲ ηθ, ἡ ακ, πάντως γε ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν γδ, ἐστὶ καὶ ἡ γλ, πρὸς τὴν ακ, τῶν ἄρα βκ, δλ, ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί. εἰσὶ δὲ καὶ ἰσογώνια, ἄρα κατὰ τὴν ἀνωτέρω τὰ βκ, δλ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. ἀλλὰ τὸ μὲν βκ, ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν αβ, ηθ, ἄκρων, ἴση γὰρ ἡ ακ, τῇ ηθ, τὸ δὲ δλ, τὸ ὑπὸ τῶν γδ, εζ, μέσων, ἴση γὰρ ἡ γλ, τῇ εζ, ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν αβ, ηθ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν γδ, εζ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, ὅπερ ἔδει δ:

Eucl. Lib. 6. Fig. 21.



Ἔστω δ' ἔτι τὸ ὑπὸ τῶν αβ, ηθ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν γδ, εζ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Λέγω, ὅτι αἱ αβ, γδ, εζ, ηθ, εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσι. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ μὲν βκ, ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν αβ, ηθ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴση γὰρ ἡ ακ, τῇ ηθ, τὸ δὲ δλ, τὸ ὑπὸ τῶν γδ, εζ, ἴση γὰρ ἡ γλ, τῇ εζ. πάντως γε τὰ βκ, δλ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. ἀλλὰ δὴ καὶ ἰσογώνια, ἄρα κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἀντιπεπόνθασιν αὐτῶν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν γδ, ἡ γλ, ἤτοι ἡ εζ, πρὸς τὴν ακ, δηλ: τὴν ηθ. Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων, καὶ τὰ ἑξῆς.

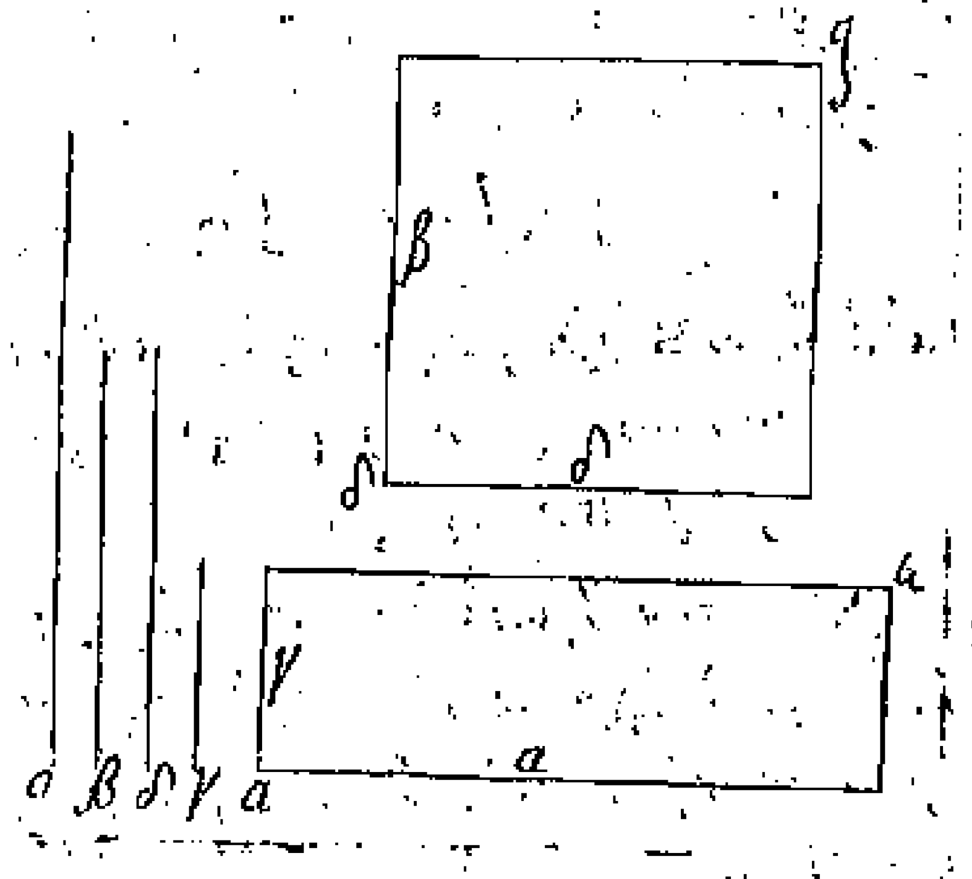
Πρό-

Πρότασις ΙΖʹ: Θεώρημα.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ. καὶ εἰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν αἱ α, β, γ, εὐθεῖαι ἀνάλογον, ὡς ἡ α, δηλον: πρὸς τὴν β, ἡ β, πρὸς τὴν γ. Λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν αγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β. εἰλήφθω γὰρ ἡ δ, ἴση τῇ β, καὶ ἔσονται τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ α, β, δ, γ, ἀνάλογον. ὥστε κατὰ τὴν ἀνωτέρω, τὸ ὑπὸ τῶν αγ, ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν βδ, μέσων. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν βδ, ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς β, ἴση γὰρ ἡ δ, τῇ β. ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν αγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β, τετραγώνῳ. Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν αγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς β, τετραγώνῳ. Λέγω, ὅτι αἱ α, β, γ, εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσι. Ληφθείσης γὰρ τῆς δ, ἴσης τῇ β, συνεστάθωσαν ἀπὸ μὲν τῶν αγ, τὸ αε, παραλληλόγραμμον, ἀπὸ δὲ τῶν βδ, τὸ δζ. καὶ ἐπεὶ τὸ αε, ἴσον ἐστὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τῷ ἀπὸ τῆς β, τετραγώνῳ, τοῦτο δ' ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν βδ, ἴση γὰρ ἡ δ, τῇ β, ἄρα τὸ αε, ἴσον ἐστὶ τῷ δζ. εἰσὶ δὲ καὶ ἰσογώνια τὰ αε, δζ. ἄρα αἱ πλευραὶ αὐτῶν ἀντιπεπόνθασι, κατὰ τὴν ἀνωτέρω. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ α, πρὸς τὴν β, ἡ δ, πρὸς τὴν γ. ἀλλ' ἡ δ, ἴση εἴληπται τῇ β, ἄρα ὡς ἡ α, πρὸς τὴν β, ἡ β, πρὸς τὴν γ. Ἐὰν ἄρα τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 6. Fig. 22.



Πρότασις ΙΗʹ: Πρόβλημα.

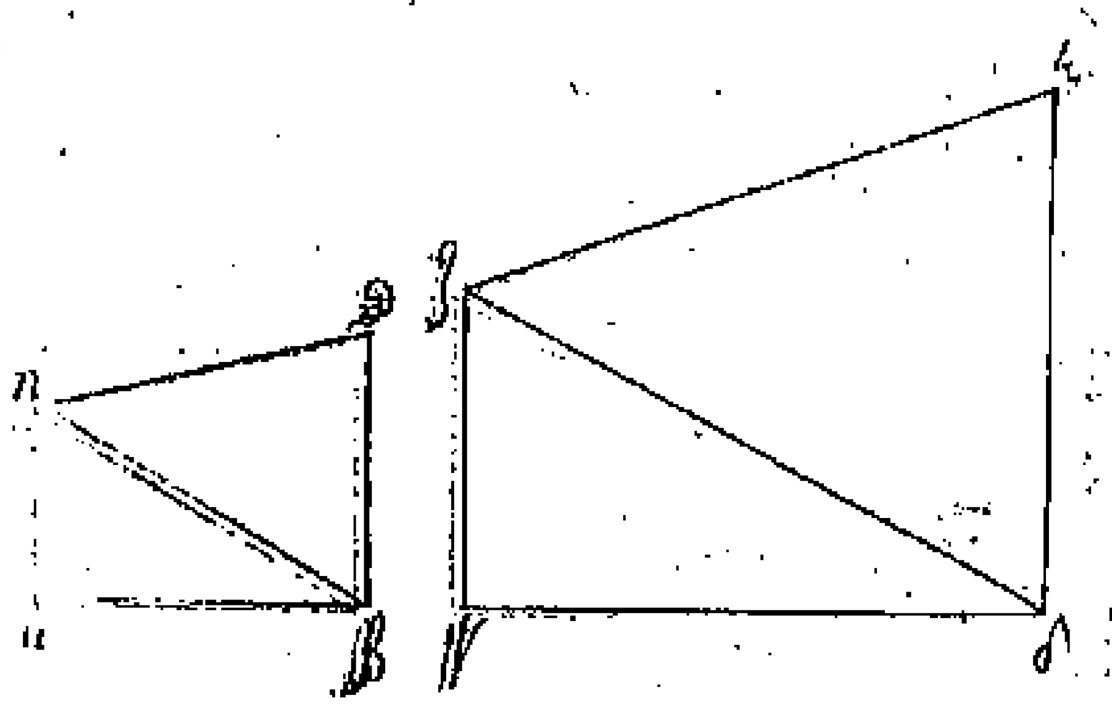
Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

Ἔστω ἀναγράψαι ἀπὸ τῆς αβ, δοθείσης εὐθείας, ὅμοιόν τι καὶ ὁμοίως κείμενον τῷ δοθέντι γε, εὐθυγράμμῳ. Ἐπεζεύχθω δὴ ἡ ζδ. καὶ συνεστάθωσαν ἐπὶ μὲν τῆς αβ, εὐθείας, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις α, καὶ β, ἡ μὲν ὑπὸ αβη, γωνία, ἴση τῇ ὑπὸ γδζ, ἡ δὲ ὑπὸ βαη, τῇ ὑπὸ δγζ. πρὸς δὲ τῇ ηβ, εὐθείᾳ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς η, καὶ β, ἡ μὲν ὑπὸ ηβθ, γωνία συνεστάθω ἴση τῇ ὑπὸ ζδε. Λέγω, ὅτι τὸ αθ, ὅμοιόν ἐστι τῷ γε. Ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν ὑπὸ αβη, γωνία, ἴση γέγονε τῇ ὑπὸ γδζ, ἡ δὲ πρὸς τῷ α, τῇ

V 2 πρὸς

πρὸς τῇ γ, ἄρα καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ α η β, ἴση ἐςὶ λοιπῇ τῇ ὑπὸ γ ζ δ. ἰσογώνιον ἄρα τὸ α β η, τρίγωνον τῷ γ δ ζ. ἔςιν ἄρα ὡς ἡ δ ζ, πρὸς τὴν β η, ἡ ζ γ, πρὸς τὴν η α, καὶ ἔτι ἡ γ δ, πρὸς τὴν α β. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ η β θ, τρίγωνον, ἰσογώνιον τῷ ζ δ ε, καὶ ἔσαι ὡς ἡ δ ζ, πρὸς τὴν β η, ἡ ζ ε, πρὸς τὴν η θ, καὶ ἔτι ἡ ε δ, πρὸς τὴν θ β. ἀλλ' ὡς ἡ δ ζ, πρὸς τὴν β η, δέδεικται ἡ ζ γ, πρὸς τὴν η α, καὶ ἔτι ἡ γ δ, πρὸς τὴν α β, ἄρα κατὰ τὴν ια: τοῦ ε: ὡς ἡ ζ γ, πρὸς τὴν η α, οὕτως ἡ ζ ε, πρὸς τὴν η θ, καὶ ἡ ε δ, πρὸς τὴν θ β, καὶ ἔτι ἡ γ δ, πρὸς τὴν α β. ἐπεὶ δὲ ἡ ὑπὸ α η β, γωνία ἴση δέδεικται τῇ ὑπὸ γ ζ δ, ἡ δὲ ὑπὸ β η θ, τῇ ὑπὸ δ ζ ε, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ α η θ, ἴση ἐςὶν ὅλῃ τῇ ὑπὸ γ ζ ε. Διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ α β θ, ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ γ δ ε.

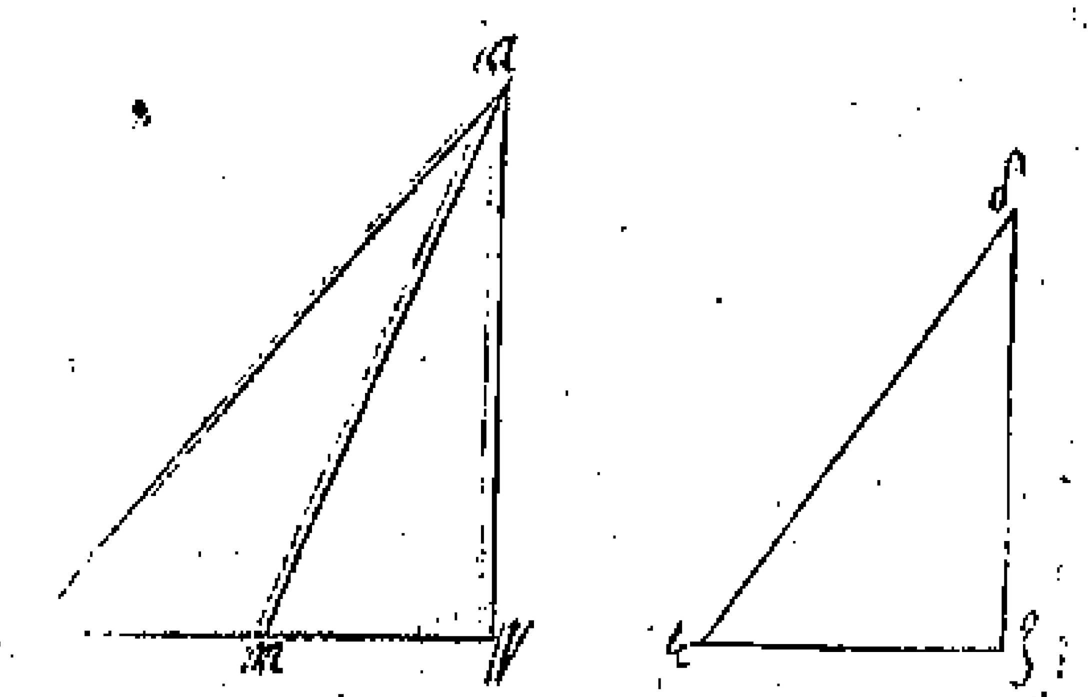
Eucl. Lib. 6. Fig. 23.



ἔςι δὲ καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ α, ἴση τῇ πρὸς τῷ γ, ἡ δὲ πρὸς τῷ θ, τῇ πρὸς τῷ ε. ἰσογώνιον ἄρα τὸ α θ, τῷ γ ε. ἔχει δὲ καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, πάντως γε κατὰ τὸν α: ὅρον τοῦ παρόντος, ὅμοιόν ἐςιν. Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΘ': Θεώρημα.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐςὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.



Ἔςωσαν ὅμοια τρίγωνα τὰ α β γ, δ ε ζ, ἴσην μὲν ἔχοντα τὴν πρὸς τῷ β, γωνίαν τῇ πρὸς τῷ ε, τὰς δὲ β γ, ε ζ, ὑποτεινούσας ὁμολόγους. Λέγω, ὅτι τὸ α β γ, τρίγωνον πρὸς τὸ δ ε ζ, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐςὶν, ἤπερ ἡ β γ, ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ε ζ, ὁμόλογον πλευράν. Εὑρέθητω γὰρ τρίτη ἀνάλογος τῶν β γ, ε ζ, ἡ β η, κατὰ τὴν ια: τοῦ παρόντος. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ α η. καὶ ἐπεὶ τῶν ὁμοίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, κατὰ τὴν δ': τοῦ παρόντος, πάντως γε ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν β γ, ἔσαι καὶ ἡ δ ε, πρὸς τὴν ε ζ. ὥςε καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν δ ε, ἡ β γ, πρὸς τὴν ε ζ. ὡς δὲ ἡ β γ, πρὸς τὴν ε ζ, γέγονε καὶ ἡ ε ζ, πρὸς τὴν β η, ἄρα ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν δ ε, ἔςι καὶ ἡ ε ζ, πρὸς τὴν β η, ὥςε τῶν α β η, δ ε ζ, τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἄρα κατὰ τὴν ιε: τοῦ παρόντος, τὰ α β η, δ ε ζ, τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. ἀλλ' ὡς ἡ β γ, πρὸς τὴν β η, ἔςι καὶ τὸ α β γ, τρίγωνον πρὸς τὸ α β η, κατὰ τὴν α: τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ὡς ἡ β γ, πρὸς τὴν β η, ἔχει καὶ τὸ α β γ, τρίγ: πρὸς τὸ δ ε ζ,

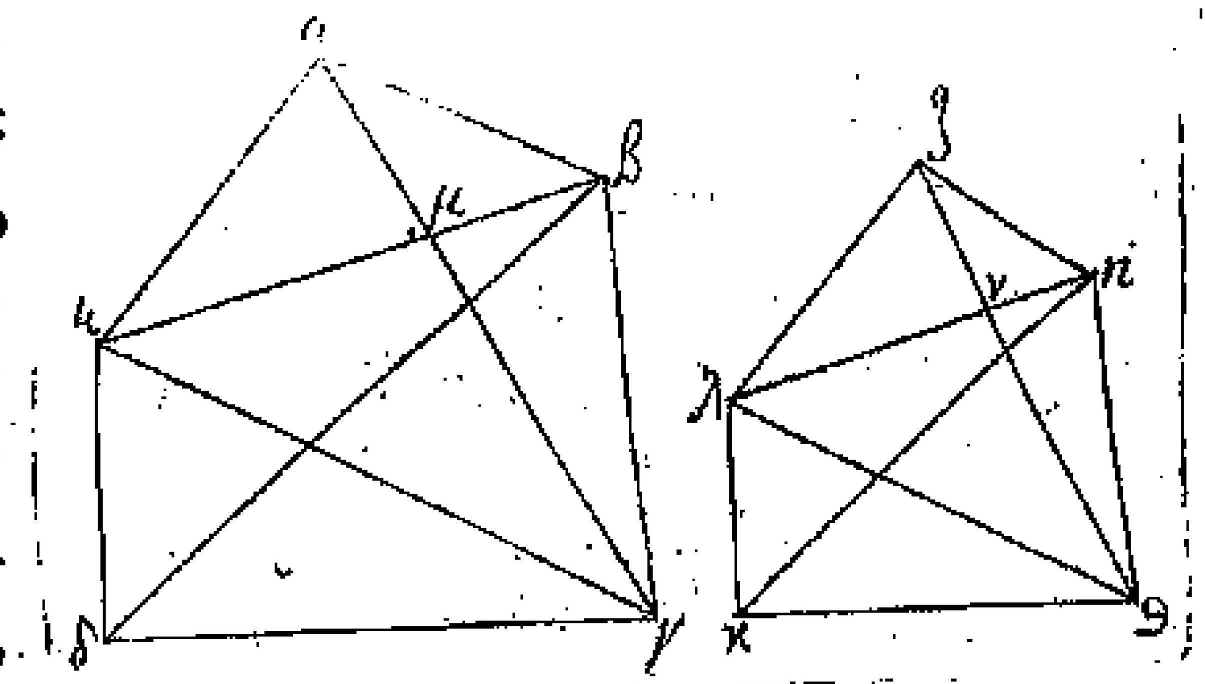
δ ε ζ, ἡ δὲ β γ, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐςὶ πρὸς τὴν β η, ἤπερ πρὸς τὴν ε ζ, κατὰ τὸν ι: ὅρον τοῦ ε: ἄρα καὶ τὸ α β γ, τρίγωνον πρὸς τὸ δ ε ζ, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐςὶν, ἤπερ ἡ β γ, ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ε ζ, ὁμόλογον. Τὰ ὅμοια ἄρα τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Κ': Θεώρημα.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται, καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος, καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις. καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἔςωσαν ὅμοια πολύγωνα τὰ α β γ δ ε, ζ η θ κ λ, ἔχοντα ὁμολόγους πλευρὰς τὰς α β, ζ η. Λέγω δὴ, ὅτι τὰ α β γ δ ε, ζ η θ κ λ, ὅμοια πολύγωνα εἰς ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται, καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος, καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ β ε, ε γ, η λ, λ θ. καὶ ἐπεὶ τὰ α β γ δ ε, ζ η θ κ λ, πολύγωνα, ὅμοιά εἰσι, πάντως γε, κατὰ τὸν α: ὅρον τοῦ παρόντος, ἔχουσι καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ἔςιν ἄρα ὡς ἡ β α, πρὸς τὴν α ε, ἡ η ζ, πρὸς τὴν ζ λ. Ἔςι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ β α ε, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ η ζ λ, διὰ τὴν τῶν πολυγώνων ὁμοιότητα, ἄρα τὰ α β ε, ζ η λ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσιν. ὥςε ἡ ὑπὸ α β ε, γωνία, ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ ζ η λ. ἀλλὰ καὶ

Eucl. lib. 6. Fig. 24.



ὅλη ἡ ὑπὸ α β γ, ἴση ἐςὶν ὅλῃ τῇ ὑπὸ ζ η θ, ἄρα καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ ε β γ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ λ η θ, ἴση ἐςίν. Αὖθις ἐπεὶ τὰ α β ε, ζ η λ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσι, πάντως γε, κατὰ τὴν δ': τοῦ παρόντος, ὡς ἡ ε β, πρὸς τὴν β α, ἔςι καὶ ἡ λ η, πρὸς τὴν η ζ. ἀλλ' ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν β γ, οὕτως η ζ η, πρὸς τὴν η θ, δι' ἴσου ἄρα, ὡς ἡ ε β, πρὸς τὴν β γ, ἡ λ η, πρὸς τὴν η θ. δέδεικται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ε β γ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ λ η θ, ὅμοια ἄρα τὰ ε β γ, λ η θ, τρίγωνα. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅμοια καὶ τὰ ε γ δ, λ θ κ. ὥςε τὰ α β γ δ ε, ζ η θ κ λ, πολύγωνα εἰς ἴσα διῄρηται τρίγωνα, καὶ ἰσοπληθῆ. ὅτι δὲ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, δῆλον. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ α γ, ζ θ. καὶ ἐπεὶ ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν β γ, οὕτως ἐςὶν ἡ ζ η, πρὸς τὴν η θ, διὰ τὴν τῶν σχημάτων ὁμοιότητα, ἔςι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ α β γ, γωνία, ἴση τῇ ὑπὸ ζ η θ. ἄρα τὰ α β γ, ζ η θ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσιν, ὥςε καὶ ἰσογώνια. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ β α μ, τῇ ὑπὸ η ζ ν, δέδεικται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ α β μ, ἴση τῇ ὑπὸ ζ η ν, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ α μ β, ἴση ἐςὶ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ζ ν η, ἰσογώνιον ἄρα τὸ α μ β, τρίγωνον τῷ ζ ν η.

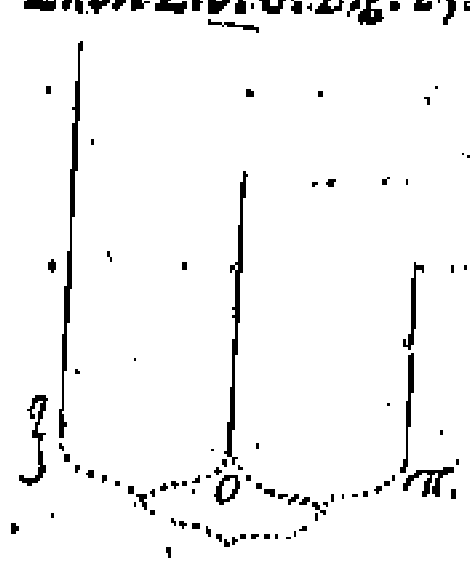
ζ ν η. ὥστε καὶ ὅμοια. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν μ β, ἡ ζ η, πρὸς τὴν ν η. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ὡς ἡ β μ, πρὸς τὴν μ γ, ἡ η ν, πρὸς τὴν ν θ. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ α μ, πρὸς τὴν μ γ, ἡ ζ ν, πρὸς τὴν ν θ. ἀλλ' ὡς ἡ α μ, πρὸς τὴν μ γ, ἔχει τὸ, τε α μ β, τριγ: πρὸς τὸ β μ γ, καὶ τὸ α μ ε, πρὸς τὸ ε μ γ, ἄρα κατὰ τὴν ι α: τοῦ ε: ὡς τὸ α μ β, πρὸς τὸ β μ γ, οὕτω τὸ α μ ε, πρὸς τὸ ε μ γ. καὶ κατὰ τὴν ι β': τοῦ αὐτοῦ, ὡς τὸ α μ β, ἡγούμενον πρὸς τὸ β μ γ, ἑπόμενον, οὕτω πάντα τὰ ἡγούμενα, ἤτοι τὸ β α ε, τρίγωνον πρὸς πάντα τὰ ἑπόμενα τὸ β ε γ, δηλ: τρίγωνον. ὁμοίως δειχθήσεται καὶ ὡς τὸ ζ ν η, πρὸς τὸ η ν θ, τὸ η ζ λ, πρὸς τὸ λ η θ. ἀλλ' ὡς τὸ α μ β, πρὸς τὸ β μ γ, δέδεικται καὶ τὸ ζ ν η, πρὸς τὸ η ν θ, ἄρα, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ι α: ὡς τὸ β α ε, πρὸς τὸ ε β γ, οὕτω καὶ τὸ η ζ λ, πρὸς τὸ λ η θ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ α β ε, πρὸς τὸ ζ η λ, οὕτω τὸ ε β γ, πρὸς τὸ λ η θ. Ἐὰν δὲ ἐπιζευχθῶσι καὶ αἱ γ ε, θ λ, δειχθήσεται τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ ὡς τὸ ε β γ, πρὸς τὸ ε γ δ, τὸ λ η θ, πρὸς τὸ λ θ κ. καὶ ἐναλλὰξ, τρία ἄρα μεγέθη τὰ ε α β, β ε γ, γ δ ε, τρίγωνα ἀνάλογόν εἰσι τρισὶ μεγέθεσι τοῖς λ ζ η, η λ θ, θ κ λ, τριγώνοις, ὥστε κατὰ τὴν ι β': τοῦ ε: ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων τὸ ε α β, πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων τὸ λ ζ η, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα, τὸ α β γ δ ε, πολύγωνον, πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα, τὸ ζ η θ κ λ, δηλ: πολύγωνον. ἄρα τὰ α β γ δ ε, ζ η θ κ λ, πολύγωνα διῄρηται εἰς ὅμοια τρίγωνα, καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις. Λέγω δ' ὅτι καὶ τὸ α β γ δ ε, πολύγωνον πρὸς τὸ ζ η θ κ λ, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῆς α β, ὁμολόγου πλευρᾶς πρὸς τὴν ζ η, ὁμόλογον. ἐπεὶ γὰρ τὸ α β γ δ ε, πολύγωνον πρὸς τὸ ζ η θ κ λ, πολύγωνον δέδεικται ἔχειν, ὡς τὸ α β ε, τρίγωνον πρὸς τὸ ζ η λ, τρίγωνον, τὸ δὲ α β ε, τριγ: πρὸς τὸ ζ η λ, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἤπερ ἡ α β, ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ζ η, ὁμόλογον πλευρὰν κατὰ τὴν ἀνωτέρω, τὸ ἄρα α β γ δ ε, πολύγων: πρὸς τὸ ζ η θ κ λ, πολύγωνον ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἤπερ ἡ α β, ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ζ η, ὁμόλογον πλευράν. Τὰ ὅμοια ἄρα πολύγωνα εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Α': Τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται, καὶ τὰ ὅμοια τετράπλευρα σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἶναι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, ὡς δέδεικται καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων. ὥστε ἐκ τούτων ἔχομεν συναγαγεῖν καθόλου, ὅτι τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Β': Ἐπεὶ δὲ ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογον ληφθῶσιν, ὡς αἱ ξ ο π, ἡ ξ, πρώτη πρὸς τὴν π, τρίτην ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἤπερ πρὸς τὴν ο, δευτέραν. δῆλον, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογον ὦσι, τὸ ἀπὸ τῆς α: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β': ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον εὐθύγραμμον, ἔχει ὡς ἡ α: πρὸς τὴν γ':

Eucl. Lib. 6. Fig. 25.



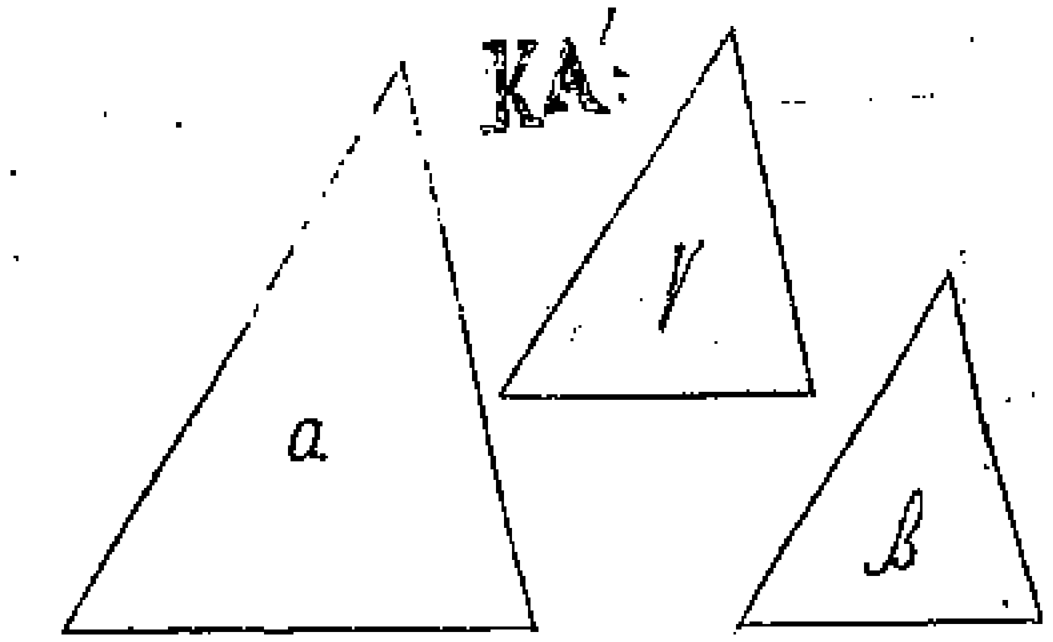
Πρό-

Πρότασις ΚΑ': Θεώρημα.

Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια.

Ἔστω δὴ ἑκάτερον τῶν α, καὶ β, εὐθυγράμμων ὅμοιον τῷ γ. Λέγω, ὅτι τὰ α, β, εὐθύγρ: καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια. Ἐπεὶ γὰρ τὸ α, ὅμοιόν ἐστι τῷ γ· δῆλον, ὅτι καὶ ἰσογώνιον, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει, κατὰ τὴν δ': τοῦ παρόντος. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ β, ἰσογώνιόν ἐστι τῷ γ, καὶ τὰς πλευρὰς τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας ἔχει ἀνάλογον, ὥστε, κατὰ τὴν ι α: τοῦ πέμπτου, ἰσογώνιά εἰσι καὶ ἀλλήλοις, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. κατὰ τὸν α: ἄρα ὅρον τοῦ παρόντος, τὰ α β, εὐθύγραμμα, ὅμοιά εἰσι.

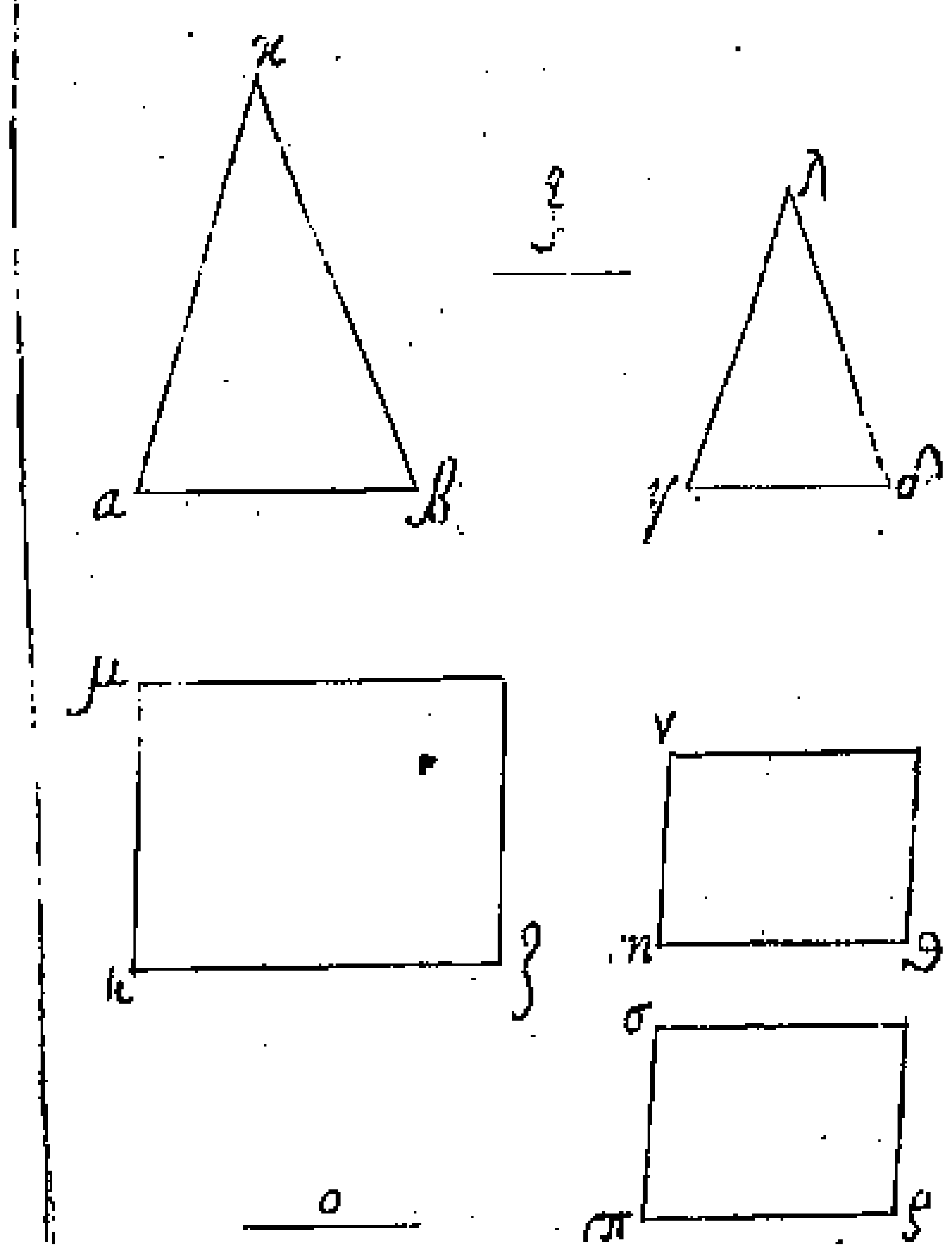
Eucl. Lib. 6. Fig. 26.



Πρότασις ΚΒ': Θεώρημα.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἔσται, κἂν τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν ἤδη εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ α β, γ δ, ε ζ, η θ. καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀναγεγράφθωσαν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα, ἀπὸ μὲν τῶν α β, γ δ, τὰ κ α β, λ γ δ, ἀπὸ δὲ τῶν ε ζ, η θ, τὰ μ ζ, ν θ. Λέγω, ὅτι τὰ κ α β, λ γ δ, ἀνάλογά εἰσι τοῖς μ ζ, ν θ. καὶ ἔστιν ὡς τὸ κ α β, πρὸς τὸ λ γ δ, οὕτω τὸ μ ζ, πρὸς τὸ ν θ. εὑρέθητω γὰρ τῶν μὲν α β, γ δ, τρίτη ἀνάλογος ἡ ξ. τῶν δὲ ε ζ, η θ, ἡ ο. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ, οὕτως ἡ ε ζ, πρὸς τὴν η θ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ὡς δὲ ἡ γ δ, πρὸς τὴν ξ, ἡ η θ, πρὸς τὴν ο, κατὰ τὴν κατασκευὴν, ἄρα καὶ δι' ἴσου, ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν ξ. οὕτως ἡ ε ζ, πρὸς τὴν ο, κατὰ τὴν κ β': τοῦ ε: ἀλλ' ὡς μὲν ἡ α β, α: πρὸς τὴν ξ, γ'. ἔχει καὶ τὸ ἀπὸ τῆς α β, α: τὸ κ α β, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γ δ, β': τὸ λ γ δ.



ὡς δὲ

ὡς δὲ ἡ ε ζ, ὁμοίως α': πρὸς τὴν ο, γ': οὕτω καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ε ζ, α': τὸ μ ζ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς η θ, β': τὸ ν θ. ἄρα κατὰ τὴν ια': τοῦ αὐτοῦ, καὶ ὡς τὸ κ α β, πρὸς τὸ γ λ δ, οὕτω τὸ μ ζ, πρὸς τὸ ν θ. ὅπερ ἦν τὸ α':

Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὰ κ α β, λ γ δ, ἀνάλογον τοῖς μ ζ, ν θ. Λέγω, ὅτι καὶ αἱ α β, γ δ, εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσι ταῖς ε ζ, η θ. Γενέσθω γὰρ ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ, ἡ ε ζ, πρὸς ἄλλην τινὰ τὴν π ρ, κατὰ τὴν ιβ': τοῦ παρόντος· καὶ ἀναγεγράφθω ὁποτέρῳ τῶν μ ζ, ν θ, ἀπὸ τῆς π ρ, τὸ σ ρ, ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον. καὶ ἐπεὶ αἱ α β, γ δ, ἀνάλογόν εἰσι ταῖς ε ζ, π ρ, καὶ ἀπὸ μὲν τῶν α β, γ δ, ἀναγέγραπται εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ κ α β, λ γ δ, ἀπὸ δὲ τῶν ε ζ, π ρ, τὰ μ ζ, σ ρ, ἄρα κατὰ τὰ ἤδη εἰρημένα, ἔσται ὡς τὸ κ α β, πρὸς τὸ λ γ δ, τὸ μ ζ, πρὸς τὸ σ ρ. ἀλλ' ὡς τὸ κ α β, πρὸς τὸ λ γ δ, ὑπετέθη καὶ τὸ μ ζ, πρὸς τὸ ν θ, τὸ μ ζ, ἄρα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρός τε τὸ ν θ, καὶ σ ρ. ὥστε κατὰ τὴν θ': τοῦ ε': τὸ ν θ, ἴσον ἐστὶ τῷ σ ρ, ἔστι δὲ καὶ ὅμοιον, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον, ἄρα καὶ ἡ η θ, ὁμόλογος πλευρὰ, ἴση ἐστὶ τῇ π ρ, ὁμολόγῳ πλευρᾷ. Ἐπεὶ δὲ ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ, γέγονεν ἡ ε ζ, πρὸς τὴν π ρ, πάντως γε ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ, ἔχει καὶ ἡ ε ζ, πρὸς τὴν η θ. ὅπερ ἦν τὸ β': Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, καὶ τὰ ἑξῆς.

Ὅτι δὲ ἡ η θ, ἴση ἐστὶ τῇ π ρ, δῆλον. Ἐπεὶ γὰρ τὰ ν θ, σ ρ, ἴσα τε καὶ ὅμοιά εἰσι, καὶ ὁμοίως ἔτι κείμενα, πάντως γε, κατὰ τὸν α': τοῦ παρόντος ὅρον, ὡς ἡ θ η, πρὸς τὴν η ν, ἡ ρ π, πρὸς τὴν π σ. Λέγω δ' ὅτι ἡ π ρ, ἴση ἐστὶ τῇ η θ. εἰ γὰρ μὴ, ἔστω ἡ π ρ, μείζων τῆς η θ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ π ρ, πρὸς τὴν π σ, ἡ θ η, πρὸς τὴν η ν, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα, ὡς ἡ ρ π, πρὸς τὴν η θ, ἡ π σ, πρὸς τὴν η ν. μείζων δὲ ἡ ρ π, τῆς η θ, μείζων ἄρα καὶ ἡ π σ, τῆς η ν. τὸ σ ρ, ἄρα μείζων τοῦ ν θ, ἀλλὰ καὶ ἴσον, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ π ρ, τῆς η θ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων, ἴση ἄρα.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι τῶν ἴσων τε καὶ ὁμοίων εὐθυγράμμων αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ, ἴσαι εἰσι.

Πρότασις ΚΓ': Θεώρημα.

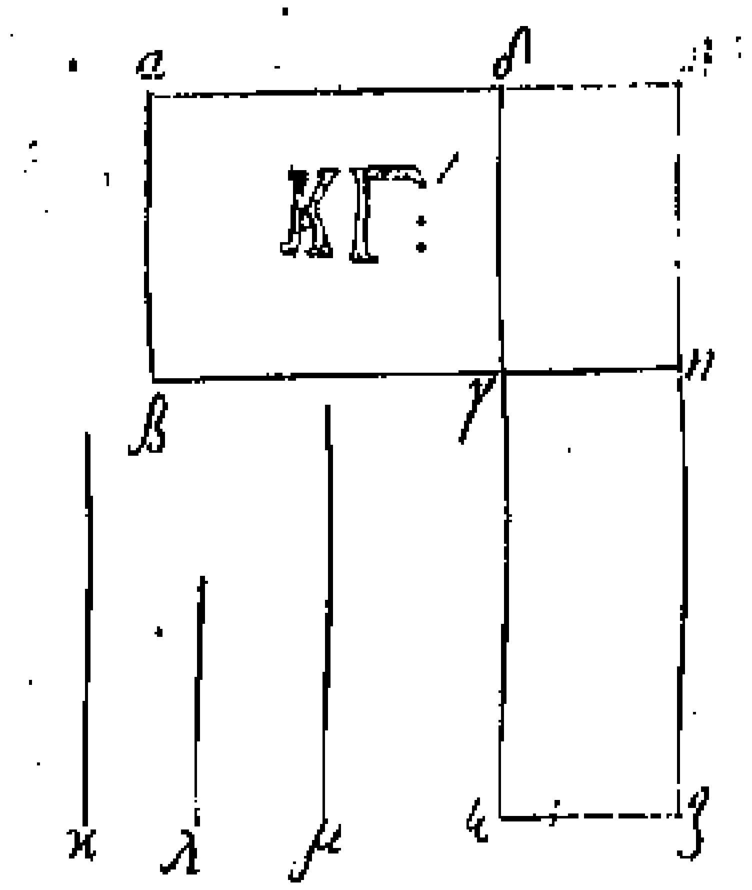
Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Ἐχέτωσαν δὴ τὰ α γ, γ ζ, ἰσογώνια παραλληλόγραμμα γωνίαν τὴν ὑπὸ β γ δ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ε γ η, ἴσην. Λέγω, ὅτι τὸ α γ, πρὸς τὸ γ ζ, ἔχει λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν, τὸν ἔκ τε τοῦ τῆς β γ, λόγου πρὸς τὴν γ η, καὶ τοῦ τῆς ε γ, πρὸς τὴν γ δ. Κείσθω γὰρ ἡ β γ, ἐπ' εὐθείας τῇ γ η, καὶ ἔσται πάντως γε κατὰ τὴν ιε': τοῦ α': ἐπ' εὐθείας καὶ ἡ γ δ, τῇ γ ε, καὶ ἀποπεπληρώσθω τὸ γ θ, παραλληλόγραμμον. εἶτα εἰλήφθω τυχοῦσα εὐθεῖα ἡ κ, καὶ γενέσθω ὡς ἡ β γ, πρὸς τὴν

γ η,

γ η, ἡ κ, πρὸς τὴν λ, ὡς δὲ ἡ δ γ, πρὸς τὴν γ ε, ἡ λ, πρὸς τὴν μ, κατὰ τὴν ιβ': τοῦ παρόντος. ἡ κ, ἄρα πρὸς τὴν μ, λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν τῶν α γ, γ ζ, παραλληλογράμμων, κατὰ τὸν ε': ὅρον τοῦ παρόντος. Ἐπεὶ δὲ ὡς ἡ β γ, πρὸς τὴν γ η, ἐστὶ τὸ α γ, παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ γ θ. ὡς δὲ ἡ β γ, πρὸς τὴν γ η, γέγονε καὶ ἡ κ, πρὸς τὴν λ, ἄρα ὡς ἡ κ, πρὸς τὴν λ, τὸ α γ, παραλληλόγρ: πρὸς τὸ γ θ. αὖθις ἐπεὶ ὡς ἡ δ γ, πρὸς τὴν γ ε, ἐστὶ καὶ τὸ γ θ, πρὸς τὸ γ ζ, κατὰ τὴν α': τοῦ αὐτοῦ: ὡς δὲ ἡ δ γ, πρὸς τὴν γ ε, γέγονε καὶ ἡ λ, πρὸς τὴν μ, ἄρα καὶ ὡς ἡ λ, πρὸς τὴν μ, οὕτω τὸ γ θ, πρὸς τὸ γ ζ. τρία ἄρα μεγέθη τὰ α γ, γ θ, γ ζ, τρισὶ μεγέθεσι ταῖς κ, λ, μ, ἐν τῷ αὐτῷ εἰσι λόγῳ σὺν δύο λαμβανόμενα, ὥστε καὶ δι' ἴσου, ὡς τὸ α γ, πρὸς τὸ γ ζ, ἡ κ, πρὸς τὴν μ, κατὰ τὴν κβ': τοῦ ε': ἀλλ' ἡ κ, πρὸς τὴν μ, ἔχει λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ τὸ α γ, πρὸς τὸ γ ζ, ἔχει λόγον ὁμοίως τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. Τὰ ἰσογώνια ἄρα παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα, καὶ τὰ ἑξῆς.

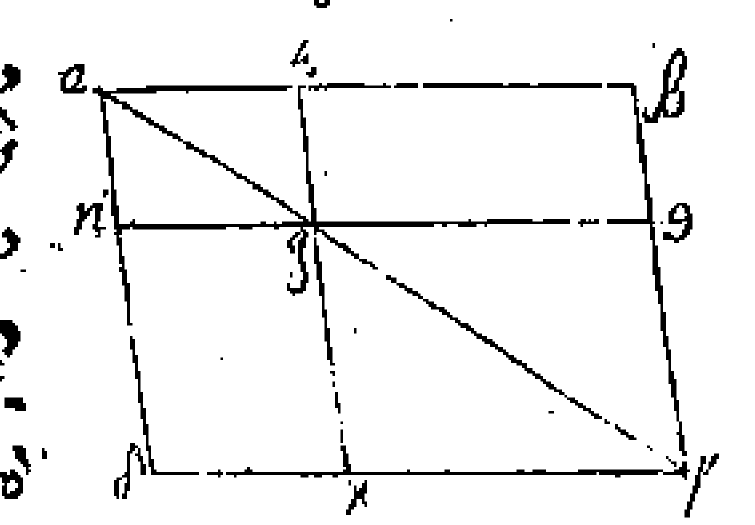
Eucl. lib. 6. Fig. 27.



Πρότασις ΚΔ': Θεώρημα.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα, ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Ἔστωσαν δὴ περὶ τὴν διάμετρον α γ, τοῦ α β γ δ, παραλληλογράμμου, παραλληλόγραμμα τὰ α ε ζ η, ζ θ γ κ. Λέγω ταῦτα, ὅμοια εἶναι τῷ τε ὅλῳ α γ, καὶ ἀλλήλοις. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ε ζ, παράλληλός ἐστι τῇ β γ, πάντως γε, κατὰ τὴν κθ': τοῦ α': ἡ μὲν ὑπὸ α ε ζ, γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ α β γ, ἡ δὲ ὑπὸ ε ζ α, τῇ ὑπὸ β γ α. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ε α ζ, κοινὴ, ἄρα τὸ α ε ζ, τρίγωνον, ἰσογώνιόν ἐστι τῷ α β γ, τριγώνῳ. ὥστε καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει, κατὰ τὴν δ': τοῦ



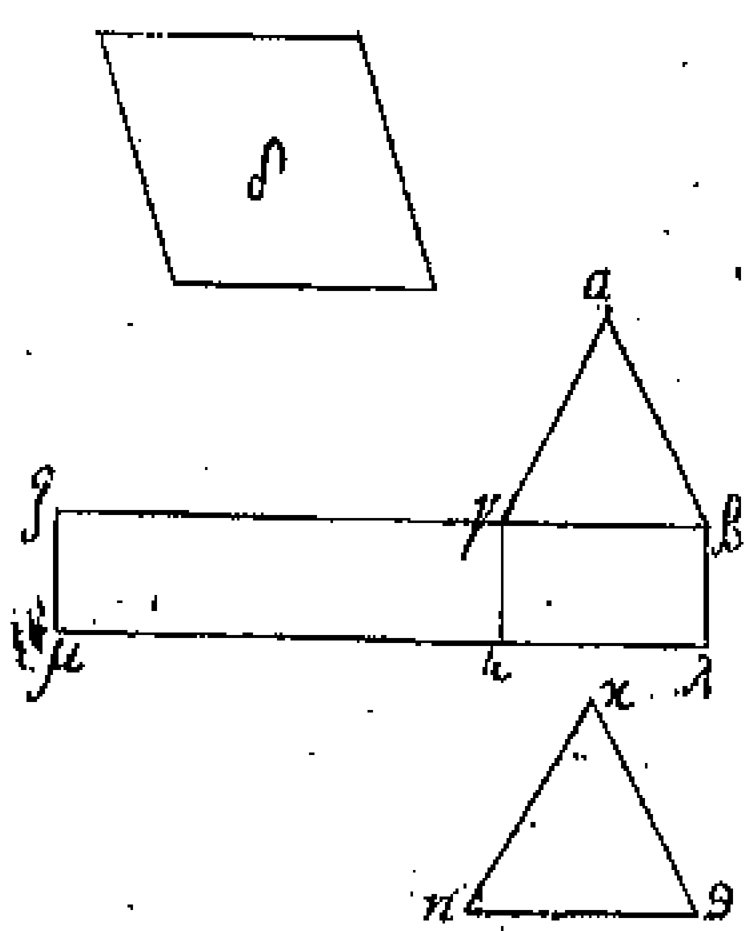
παρόντος. ἔστιν ἄρα ὡς μὲν ἡ α ε, πρὸς τὴν ε ζ, ἡ α β, πρὸς τὴν β γ, ὡς δὲ ἡ ε ζ, πρὸς τὴν ζ α, ἡ β γ, πρὸς τὴν γ α, καὶ ὡς ἡ ζ α, πρὸς τὴν α ε, ἡ γ α, πρὸς τὴν α β. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται, καὶ τὸ α ζ η, ἰσογώνιον τῷ α γ δ. ὥστε ὡς ἡ α ζ, πρὸς τὴν ζ η, ἡ α γ, πρὸς τὴν γ δ. ὡς δὲ ἡ ζ η, πρὸς τὴν η α, ἡ γ δ, πρὸς τὴν δ α, καὶ ὡς ἡ α η, πρὸς τὴν α ζ, ἡ δ α, πρὸς τὴν α γ. Ἐπεὶ οὖν δέδεικται ὡς μὲν ἡ ε ζ, πρὸς τὴν ζ α, ἡ β γ, πρὸς τὴν γ α, ὡς δὲ ἡ α ζ, πρὸς τὴν ζ η, ἡ α γ, πρὸς τὴν γ δ, καὶ δι' ἴσου ἄρα, κατὰ τὴν κβ': τοῦ ε': ὡς ἡ ε ζ, πρὸς τὴν ζ η, ἡ β γ, πρὸς τὴν γ δ. Πάλιν ἐπεὶ δέδεικται ὡς μὲν ἡ η α, πρὸς τὴν α ζ, ἡ δ α, πρὸς τὴν α γ, ὡς δὲ ἡ ζ α, πρὸς τὴν α ε, ἡ γ α, πρὸς τὴν α β, καὶ δι' ἴσου ἄρα, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν κβ΄: ὡς ἡ η α, πρὸς τὴν α ε, ἡ δ α, πρὸς τὴν α β. δέδεικται δὲ καὶ ὡς ἡ α ε, πρὸς τὴν ε ζ, ἡ α β, πρὸς τὴν β γ, ὡς δὲ ἡ ζ η, πρὸς τὴν η α, ἡ γ δ, πρὸς τὴν δ α, ἄρα τῶν α ε ζ η, α β γ δ, παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί, ὅτι δὲ καὶ αἱ γωνίαι αὐτῶν ἴσαι, δῆλον. δέδεικται γὰρ ἡ μὲν ὑπὸ α ε ζ, ἴση τῇ ὑπὸ α β γ, ἡ δὲ ὑπὸ α η ζ, τῇ ὑπὸ α δ γ. ἀλλὰ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ε α ζ, δέδεικται ἴση τῇ ὑπὸ β γ α, ἡ δὲ ὑπὸ α ζ η, τῇ ὑπὸ α γ δ, ἄρα καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ε ζ η, ἴση ἐστὶν ὅλῃ τῇ ὑπὸ β γ δ. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ ε α η, λοιπῇ τῇ ὑπὸ β α δ, ἴση ἐστὶν, ἰσογώνιον ἄρα τὸ α ε ζ η, παραλληλόγρ: τῷ α β γ δ. ἔχει δὲ καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς ἤδη δέδεικται. ἄρα, κατὰ τὸν α΄: ὅρον, ὅμοιόν ἐστι τὸ αὐτὸ α ε ζ η, παραλληλ: τῷ α β γ δ. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ τὸ ζ θ γ κ, ὅμοιον τῷ αὐτῷ α β γ δ: ὥστε, κατὰ τὴν κα΄: τοῦ παρόντος, τὰ α ζ, ζ γ, ὅμοιά ἐστι. δέδεικται δὲ καὶ τῷ ὅλῳ α γ, ἑκάτερον ὅμοιον, Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΚΕ΄: Πρόβλημα.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

Ἔστωσαν δοθέντα εὐθύγραμμα τό, τε α β γ, καὶ δ. καὶ ζητηθήτω συσταθῆναι εὐθύγραμμον ὅμοιον μὲν τῷ α β γ, ἴσον δὲ τῷ δ. Παραβληθήτω δὴ παρὰ μὲν τὴν β γ, εὐθεῖαν, κατὰ τὴν μδ΄: καὶ με΄: τοῦ α΄: παραλληλόγραμμον τὸ β ε, ἴσον τῷ α β γ, δοθέντι. παρὰ δὲ τὴν γ ε, τὸ ε ζ, ἴσον τῷ δ, ἔχον γωνίαν τὴν ὑπὸ ε γ ζ, ἴσην τῇ ὑπὸ γ β λ, καὶ ἔσται πάντως ἐπ᾽ εὐθείας ἡ β γ, τῇ γ ζ, κατὰ τὴν ιδ΄: τοῦ αὐτοῦ. εἶτα εὑρεθήτω μέση ἀνάλογος τῶν β γ, γ ζ, ἡ η θ, διὰ τῆς ιγ΄: τοῦ παρόντος. καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς η θ, εὐθύγραμμον τὸ η θ κ, ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον τῷ α β γ, διὰ τῆς ιη΄. τοῦ αὐτοῦ, καὶ τοῦτο ἔσται τὸ ζητούμενον. Ἐπεὶ γὰρ αἱ β γ, η θ, γ ζ, ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, πάντως γε, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς κ΄. τοῦ παρόντος, ἔστιν ὡς ἡ β γ, πρώτη πρὸς τὴν γ ζ, τρίτην, τὸ ἀπὸ τῆς α΄. α β γ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β΄. η θ κ. ὡς δὲ ἡ

Eucl. Lib. 6. Fig. 28.



β γ, πρὸς τὴν γ ζ, ἐστὶ καὶ τὸ β ε, πρὸς τὸ ε ζ, κατὰ τὴν α΄. τοῦ αὐτοῦ, ἄρα, κατὰ τὴν ια΄. τοῦ ε΄. ὡς τὸ β ε, πρὸς τὸ ε ζ, τὸ α β γ, πρὸς τὸ η θ κ, καὶ ἐναλλὰξ, ὡς τὸ β ε, πρὸς τὸ α β γ, τὸ ε ζ, πρὸς τὸ η θ κ, ἴσον δὲ τὸ β ε, τῷ α β γ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ε ζ, τῷ η θ κ. ἀλλὰ τὸ ε ζ, ἴσον γέγονε τῷ δ. ἄρα καὶ τὸ η θ κ, ἴσον ἐστὶ τῷ δ. γέγονε δὲ τὸ αὐτὸ καὶ ὅμοιον τῷ α β γ, τῷ δοθέντι ἄρα εὐθυγράμμῳ ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον συνέστη τὸ αὐτό.

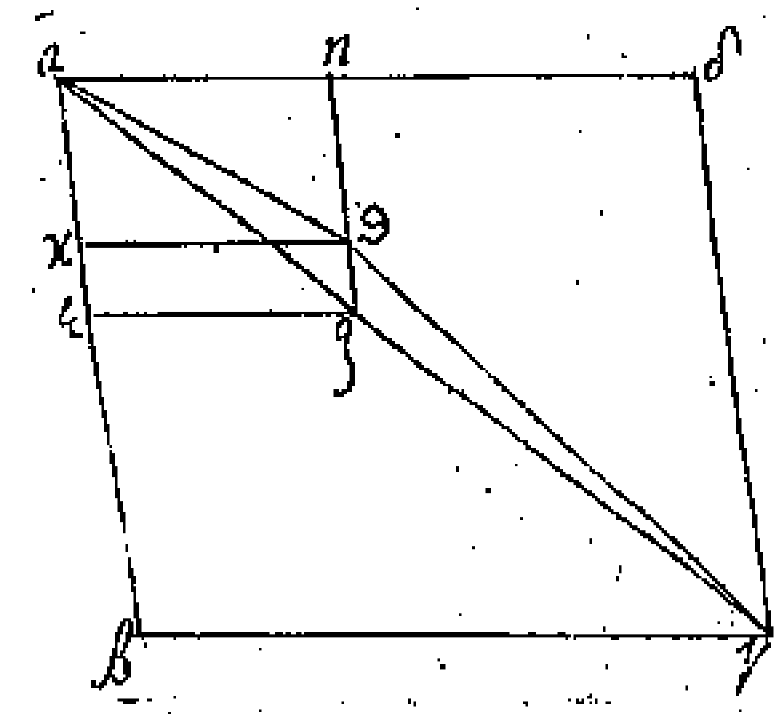
Πρό-

Πρότασις Κϛ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ, ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ, καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ.

Ἀφῃρήσθω δὴ ἀπὸ τοῦ α β γ δ, παραλληλογράμμου ὅμοιον παραλληλόγραμμον τὸ α ε ζ η, καὶ ὁμοίως κείμενον τῷ α β γ δ, ἔχον καὶ γωνίαν κοινὴν τὴν ὑπὸ β α δ. Λέγω, ὅτι τὸ α ε ζ η, παραλληλόγραμμον περὶ τὴν αὐτὴν α ζ γ, διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ α β γ δ. εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ α θ γ. καὶ διὰ τοῦ θ, διήχθω παράλληλος ὁποτέρᾳ τῶν α δ, β γ, ἡ θ κ. καὶ ἐπεὶ τὸ η κ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον, τὴν α θ γ, ἐστὶ τῷ ὅλῳ α β γ δ, πάντως γε, κατὰ τὴν κδ΄: τοῦ παρόντος, ὅμοιόν ἐστι τὸ η κ, τῷ β δ. ὥστε καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει, κατὰ τὸν α΄: ὅρον τοῦ παρόντος, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δ α, πρὸς τὴν α β, ἡ η α, πρὸς τὴν α κ, ἀλλ᾽ ὡς ἡ δ α, πρὸς τὴν α β, ἐστὶ καὶ ἡ η α, πρὸς τὴν α ε, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ε η, β δ, ἄρα, κατὰ τὴν ια: τοῦ ε΄: ἡ η α, πρὸς ἑκατέραν τῶν α κ, α ε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ κατὰ τὴν θ΄: τοῦ αὐτοῦ, ἡ α κ, ἴση ἐστὶ τῇ α ε, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ α θ γ, διάμετρός ἐστι τοῦ α γ, ἀλλ᾽ ἡ α ζ γ, τοῦ τε α β γ δ, καὶ α ε ζ η, διάμετρός ἐστιν. Ἐὰν ἄρα ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 6. Fig. 29.



Πρότασις ΚΖ΄: Θεώρημα.

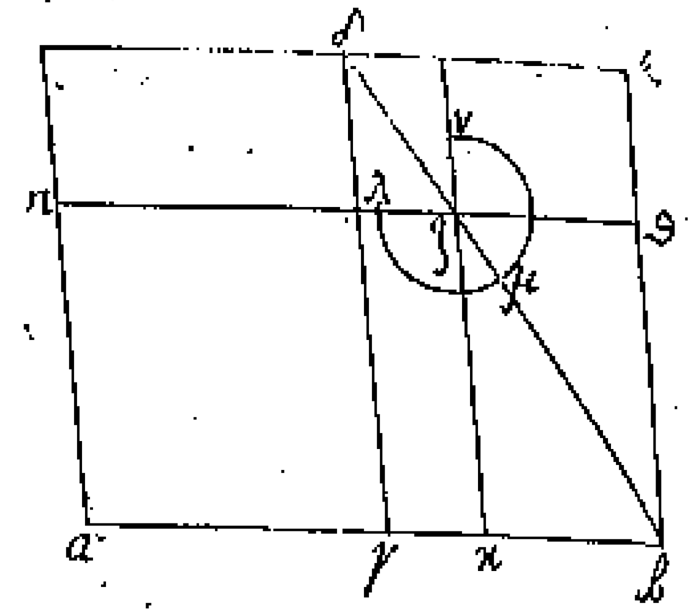
Πάντων τῶν περὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ, μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον, ὅμοιον ὂν τῷ ἐλλείμματι.

Ἔστω δὴ εὐθεῖα ἡ α β, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ γ. εἶτα παραβληθήτωσαν παρὰ τὴν α β, τὰ α δ, α ζ, παραλληλόγραμμα, ἐλλείποντα εἴδεσι παραλληλογράμμοις τοῖς γ ε, κ θ, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας γ β, παραλληλογράμμῳ, δηλ: τῷ ἤτοι τῷ γ ε. Λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας α γ, παραλληλόγραμμον, τὸ α δ, μεῖζόν ἐστι τοῦ α ζ. κατὰ γὰρ τὴν ὑπόθεσιν τὸ κ θ, ὅμοιόν ἐστι τῷ γ ε, ὥστε, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, τὰ κ θ, γ ε, περὶ τὴν αὐτήν εἰσι διάμετρον. ἤχθω τοίνυν διάμετρος αὐτῶν ἡ δ β, καὶ ἀναπεπληρώσθω τὸ σχῆμα. καὶ ἐπεὶ τὸ γ ζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ζ ε, κατὰ τὴν μγ΄: τοῦ α΄: κοινοῦ λαμβανομένου τοῦ κ θ. ἔσται πάντως ὅλον τὸ γ θ,

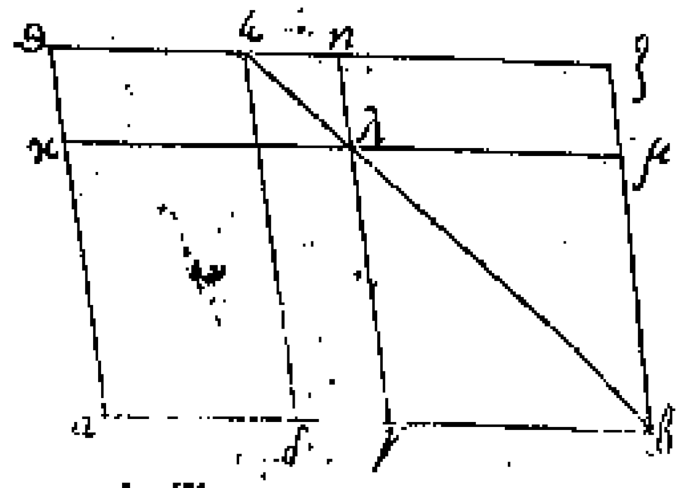
X 2 ἴσον

ἴσον ὅλῳ τῷ κε. ἀλλὰ τὸ γθ, ἴσον ἐστὶ τῷ γη, κατὰ τὴν λϛʹ: τοῦ αὐτοῦ, ἄρα καὶ τὸ κε, ἴσον ἐστὶ τῷ γη. κοινοῦ δὲ λαμβανομένου τοῦ γζ, ὅλον τὸ αζ, ἴσον ἐστὶ τῷ λμν, γνώμονι, τοῦ δὲ λμν, γνώμονος μεῖζόν ἐστι τὸ γε, ὅλον, ἄρα τὸ γε, μεῖζόν ἐστι καὶ τοῦ αζ. ἀλλὰ τῷ γε, ἴσον ἐστὶ τὸ αδ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν λϛʹ: τοῦ αʹ: τὸ αδ, ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ αζ.

Eucl. Lib. 6. Fig. 30.



Παραβεβλήσθωσαν δὲ πάλιν παρὰ τὴν αβ, τετμημένην δίχα, κατὰ τὸ γ, τὰ αλ, αε, παραλληλόγραμμα, τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ἡμισείας αγ, τὸ δὲ ἀπὸ ἐλάττονος τῆς ἡμισείας αδ, ἐλλείποντα εἴδεσι παραλληλογράμμοις, τοῖς γμ, δζ, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας αγ. Λέγω δὴ, τὸ αλ, μεῖζον εἶναι τοῦ αε. κατὰ γὰρ τὴν κδʹ: τοῦ παρόντος, ἐπεὶ τὰ γμ, δζ, ὅμοιά εἰσι, περὶ τὴν αὐτὴν πάντως εἰσὶ διάμετρον. Ἔστω δὲ διάμετρος αὐτῶν ἡ εβ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. καὶ ἐπεὶ τὸ ζλ, ἴσον ἐστὶ τῷ λθ, κατὰ τὴν λϛʹ: τοῦ αʹ: τὸ δὲ λζ, ἴσον ἐστὶ τῷ δλ, κατὰ τὴν μγʹ: τοῦ αὐτοῦ, πάντως γε καὶ τὸ δλ, ἴσον ἐστὶ τῷ λθ. ἀλλὰ τὸ λθ, μεῖζόν ἐστι τοῦ κε, ἄρα καὶ τὸ δλ, μεῖζόν ἐστι τοῦ κε. κοινοῦ δὲ εἰλημμένου τοῦ δκ, ὅλον ἄρα τὸ αλ, ὅλου τοῦ αε, μεῖζόν ἐστι. πάντων ἄρα τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων, καὶ τὰ ἑξῆς.



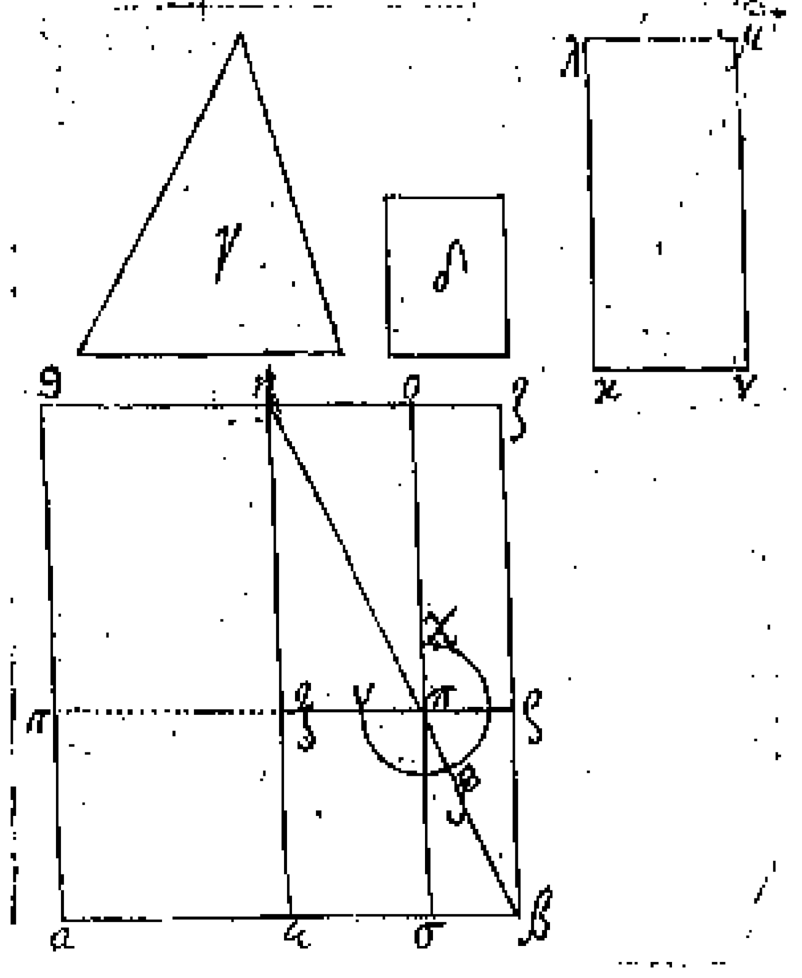
Πρότασις ΚΗʹ: Πρόβλημα.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι. δεῖ δὴ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν, μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλομένου, ὁμοίων ὄντων τοῦ τε ἐλλείμματος, τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τοῦ, ᾧ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν, παραλληλογράμμου.

Δοθήτω εὐθεῖα μὲν ἡ αβ, εὐθύγραμμον δὲ τὸ γ, παραλληλόγραμμον δὲ τὸ δ. καὶ ἐπιτετάχθω παραβληθῆναι παρὰ τὴν αβ, εὐθεῖαν παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ γ, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δ. τὸ δὲ γ, ἔστω μὴ μεῖζον τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς αβ, ὁμοίων ὄντων τῶν ἐλλειμμάτων, τοῦ τε παραβληθησομένου παραλληλογράμμου, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας.

Τμηθήτω δὴ, κατὰ τὴν ιʹ: τοῦ αʹ: ἡ αβ, δίχα κατὰ τὸ ε, καὶ ἀπὸ τῆς αε, ἀναγεγράφθω ὅμοιον τῷ δοθέντι δ, παραλληλογρ: τὸ αη, παραλληλόγρ: διὰ τῆς ιηʹ: τοῦ παρόντος, καὶ ἀναπεπληρώσθω τὸ σχῆμα. εἰ οὖν τὸ αη, ἴσον ἐστὶ τῷ δοθέντι γ, γέγονε τὸ ἐπιταχθέν. ἐλλείπει γὰρ τῷ εζ, παραλληλογράμ: ὁμοίῳ ὄντι τῷ δ, δοθέντι. Εἰ δὲ μὴ ἴσον, ἔσται πάντως μεῖζον. οὐ γὰρ ἔλαττον, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν. ἀλλὰ δὴ τὸ αη, ἴσον ἐστὶ τῷ εζ, κατὰ τὴν λϛʹ: τοῦ αʹ: ἄρα τὸ εζ, μεῖζόν ἐστι τοῦ γ. Συνεστάσθω δὴ, κατὰ τὴν κεʹ: τοῦ παρόντος, τὸ λκνμ, παραλληλόγραμμον ἴσον μὲν τῇ ὑπεροχῇ, ᾗ ὑπερέχει τὸ εζ, τοῦ γ, ὅμοιον δὲ τῷ δοθέντι δ. καὶ ἔσται πάντως ὅμοιον καὶ τῷ εζ, κατὰ τὴν καʹ: τοῦ παρόντος. ἔστω δὲ ὁμόλογος, ἡ μὲν λκ, τῇ κε, ἡ δὲ λμ, τῇ ηζ. καὶ ἐπεὶ τὸ εζ, ἴσον ἐστὶ συναμφοτέροις τοῖς γ, κμ, πάντως γε τὸ εζ, μεῖζόν ἐστι τοῦ κμ, ὥστε καὶ αἱ ὁμόλογοι αὐτοῦ πλευραὶ, μείζονές εἰσι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τοῦ κμ. εἰλήφθω δὴ ἡ μὲν ηξ, ἴση τῇ λκ, ἡ δὲ ηο, τῇ λμ, κατὰ τὴν γʹ: τοῦ αʹ: καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ξο, παραλληλόγραμμον, κατὰ τὴν λαʹ: τοῦ αὐτοῦ. καὶ ἔσται ἴσον τῷ κμ, καὶ ὅμοιον. ἀλλὰ τὸ κμ, ὅμοιόν ἐστι τῷ εζ, ἄρα καὶ τὸ ξο, ὅμοιόν ἐστι τῷ αὐτῷ εζ, κατὰ τὴν καʹ: τοῦ παρόντος, καὶ περὶ τὴν αὐτὴν πάντως διάμετρον, κατὰ τὴν κϛʹ: τοῦ αὐτοῦ. Ἔστω δὲ διάμετρος αὐτῶν ἡ ηβ. καὶ καταγραφήτω τὸ σχῆμα, καὶ ἔσται τὸ σρ, ὅμοιον τῷ δ, διὰ τὸ εἶναι ὅμοιον τῷ ξο. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν εζ, ἴσον ἐστὶ τοῖς γ, κμ, τῷ δὲ κμ, ἴσον ἐστὶ τὸ ξο, ἄρα ὁ υφχ, γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ γ. Αὖθις ἐπεὶ τὸ ορ, ἴσον ἐστὶ τῷ επ, κατὰ τὴν μγʹ: τοῦ αʹ: κοινοῦ λαμβανομένου τοῦ σρ, ἔσται ὅλον τὸ οβ, ἴσον ὅλῳ τῷ ερ. ἀλλὰ τὸ ερ, ἴσον ἐστὶ τῷ αξ, κατὰ τὴν λϛʹ: τοῦ αὐτοῦ, ἄρα καὶ τὸ οβ, ἴσον ἐστὶ τῷ αξ. κοινοῦ δὲ αὖθις λαμβανομένου τοῦ επ, ἔσται ὅλον τὸ απ, ἴσον τῷ υφχ, γνώμονι, ἀλλ' ὁ υφχ, γνώμων, ἴσος δέδεικται τῷ γ, ἄρα καὶ τὸ απ, ἴσον ἐστὶ τῷ γ, ἐλλείπει δὲ τῷ σρ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δ. παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. lib. 6. Fig. 31.



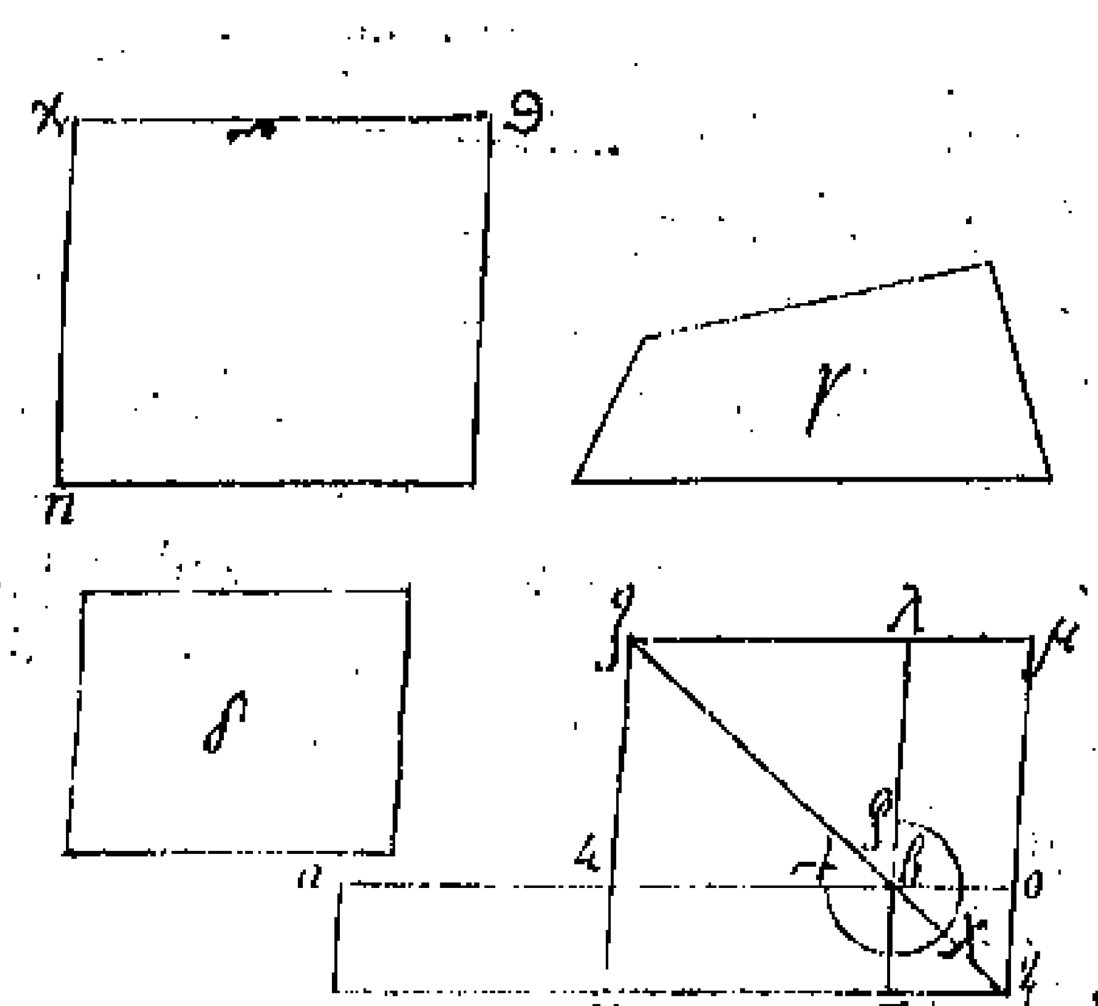
Πρό-

Πρότασις ΚΘ'. Πρόβλημα.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.

Ἔστω παραβαλεῖν παρὰ τὴν α β, δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ δοθέντι γ, ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι δ. Τετμήσθω δὴ ἡ δοθεῖσα α β, εὐθεῖα δίχα κατὰ τὸ ε, διὰ τῆς ι': τοῦ α': καὶ ἀναγεγράφθω ἐπὶ τῆς ε β, διὰ τῆς ιη': τοῦ παρόντος παραλληλόγραμμον τὸ ε λ, ὁμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον τῷ δ. εἶτα συναμφοτέροις μὲν τοῖς ε λ, καὶ γ, ἴσον, τῷ δὲ δ, ὅμοιον, συνεστάθω παραλληλόγραμμον τὸ η θ, ὅπερ πάντως ὅμοιόν ἐστι καὶ τῷ ε λ. ἔστω δὴ ὁμόλογος ἡ μὲν κ θ, τῇ ζ λ, ἡ δὲ κ η, τῇ ζ ε. καὶ ἐπεὶ τὸ η θ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ε λ, μεῖζον δήπουθεν ἐστὶ καὶ ἡ μὲν κ θ, τῆς ζ λ, ἡ δὲ κ η, τῆς ζ ε. ἐκβεβλήσθωσαν τοίνυν κατὰ τὸ συνεχὲς αἱ ζ λ, ζ ε. καὶ ἔστω ἡ μὲν ζ λ μ, ἴση τῇ κ θ, ἡ δὲ ζ ε ν τῇ κ η, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ μ ν, καὶ ἔσται πάντως ἴσον τῷ η θ. ἀλλὰ τῷ η θ, ὅμοιόν ἐστι τὸ ε λ, ἄρα καὶ τὸ μ ν, ὅμοιόν ἐστι τῷ ε λ. ὥστε τὰ ε λ, μ ν, περὶ τὴν αὐτὴν εἰσὶ διάμετρον, κατὰ τὴν κϛ': τοῦ παρόντος. Ἔστω δὴ διάμετρος αὐτῶν ἡ ζ ξ. καὶ ἐπεὶ τὸ η θ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ε λ, γ, πάντως γε καὶ τὸ μ ν, ἴσον ἐστὶ τοῖς ε λ, γ. κοινοῦ δὲ ἀφαιρουμένου τοῦ ε λ, ἐναπολείπεται ὁ φ χ ψ γνώμων, ἴσος τῷ γ. Αὖθις ἐπεὶ τὸ μ β, ἴσον ἐστὶ τῷ β ν, κατὰ τὴν μγ': τοῦ α': ἔστι δὲ καὶ τὸ α ν, ἴσον τῷ β ν, κατὰ τὴν λϛ': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα τὸ α ν, ἴσον ἐστὶ τῷ μ β, κατὰ τὸ α: ἀξίωμα. κοινὸν εἰλήφθω τὸ ο ν, ὅλον ἄρα τὸ α ξ, ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ φ χ ψ, γνώμονι, ἀλλ' ὁ φ χ ψ, γνώμων, ἴσος ἐστὶ τῷ γ. ἄρα καὶ τὸ α ξ, ἴσον ἐστὶ τῷ γ. ἔστι δὲ τὸ π ο, ὅμοιον τῷ δ, διὰ τὸ εἶναι ὅμοιον τῷ ε λ, κατὰ τὴν κα': τοῦ παρόντος. παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα α β, εὐθεῖαν παραβέβληται παραλληλόγραμμον τὸ α ξ, ἴσον τῷ δοθέντι γ, ὑπερβάλλον τῷ π ο, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι δ.

Eucl. Lib. 6. Fig. 32.



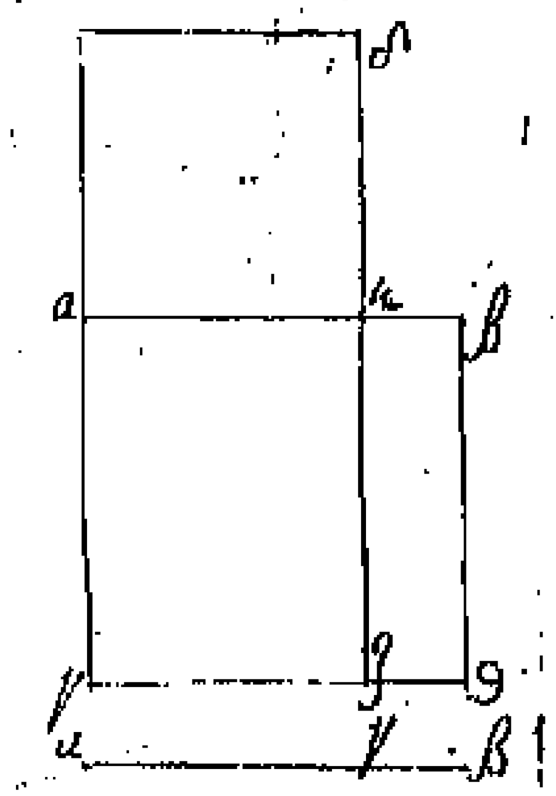
Πρό-

Πρότασις Λ'. Πρόβλημα.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἄκρον, καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Ἔστω δὴ τεμεῖν τὴν α β, δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄκρον καὶ μέσον λόγον. Ἀναγεγράφθω μὲν οὖν ἀπὸ τῆς α β, τετράγωνον τὸ β γ, κατὰ τὴν μϛ': τοῦ α': καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν α γ, παραλληλόγραμμον τὸ γ δ, ἴσον τῷ β γ, τετραγώνῳ, ὑπερβάλλον εἴδει τῷ α δ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ αὐτῷ β γ, τετραγ: κατὰ τὴν ἀνωτέρω, καὶ ἔσται πάντως καὶ τὸ α δ, τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ τὸ γ δ, ἴσον ἐστὶ τῷ γ β, κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ α ζ, ἐναπολείπεται τὸ α δ, ἴσον τῷ ε θ. ἔστι δὲ τῷ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον. ἄρα, κατὰ τὴν ιδ': τοῦ παρόντος, ἀντιπεπόνθασιν αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ τῶν α δ, ε θ. ὥστε ὡς ἡ ζ ε, πρὸς τὴν ε δ, οὕτως ἡ α ε, πρὸς τὴν ε β, ἀλλ' ἡ μὲν ζ ε, ἴση ἐστὶ τῇ α γ, κατὰ τὴν λδ': τοῦ α': ἤτοι τῇ α β, ἡ δὲ ε δ, τῇ α ε, ἄρα ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν α ε, οὕτως ἡ α ε, πρὸς τὴν ε β. μείζων δὲ ἡ α β, τῆς α ε, μείζων ἄρα καὶ ἡ α ε, τῆς ε β. ὅτε δὲ ἐστιν, ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλαττον, ἄκρον, καὶ μέσον λέγεται τετμῆσθαι λόγον, κατὰ τὸν γ': ὅρον τοῦ παρόντος. ἡ α β, ἄρα ἄκρον καὶ μέσον τέτμηται λόγον, κατὰ τὸ προσαχθέν.

Eucl. lib. 6. Fig. 33.



Ἄλλως. Τετμήσθω ἡ α β, δοθεῖσα εὐθεῖα κατὰ τὸ γ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν α β, β γ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς α γ, τετραγώνῳ, κατὰ τὴν ια: τοῦ β': καὶ ἔσονται πάντως αἱ α β, α γ, γ β, ἑξῆς ἀνάλογον. τουτέστιν ὡς ἡ ὅλη α β, πρὸς τὸ α γ, μεῖζον τμῆμα, τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλαττον, ὥστε καὶ οὕτω μέσον, καὶ ἄκρον τέτμηται λόγον.

Πρότασις ΛΑ'. Θεώρημα.

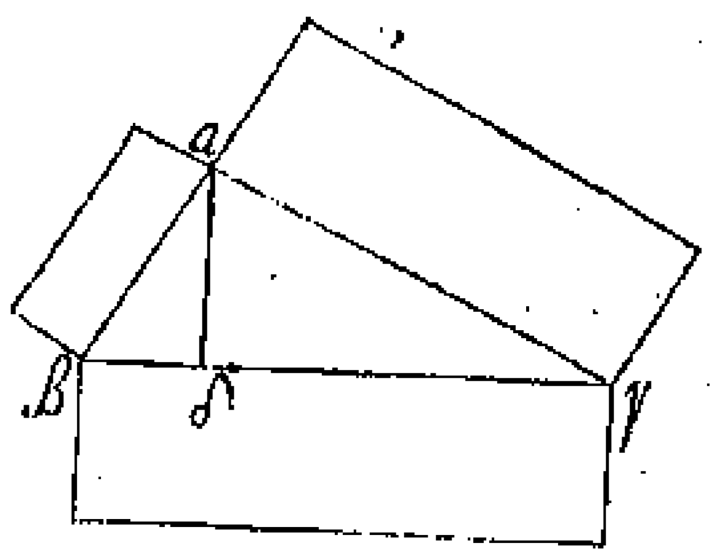
Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ α β γ, ὀρθὴν ἔχον γωνίαν τὴν ὑπὸ β α γ. Λέγω δὴ, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς β γ, εἶδος, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν α β, α γ, εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ α, κάθετος ἐπὶ τῆς β γ, ἡ α δ. καὶ πάντως γε κατὰ τὴν η': τοῦ παρόντος τὰ α β δ, α γ δ, τρίγωνα, ὅμοιά εἰσι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. ἔστιν ἄρα κατὰ τὸν α': ὅρον τοῦ παρόντος,

τος,

πος, ὡς ἡ γβ, πρὸς τὴν βα, ἡ αβ, πρὸς τὴν βδ, καὶ ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν γα, ἡ γα, πρὸς τὴν γδ. ὥστε καὶ τὸ β': πόρισμα τῆς κ': τοῦ παρόντος, ὡς ἡ γβ, α': πρὸς τὴν βδ, γ': οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς γβ, α': πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αβ, β': ὡς δὲ ἡ βγ, πρώτη πρὸς τὴν γδ, γ': οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς βγ, α': πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αγ, β': ἄρα ὡς ἡ βγ, πρὸς τὰς βδ, δγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς βγ, εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν αβ, αγ, εἴδη, τὰ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα. ἀλλ' ἡ βγ, ἴση ἐστὶ ταῖς βδ, δγ, ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βγ, εἶδος, ἰσόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, αγ, εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Eucl. Lib. 6. Fig. 34.



Ἄλλως. Ἐπεὶ τὰ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, καὶ τὸ α': πόρισμα τῆς κ': τοῦ παρόντος, πάντως γε τὸ ἀπὸ τῆς βγ, εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αβ, εἶδος, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τοῦ τῆς βγ, πρὸς τὴν αβ. ἀλλὰ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγ: ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τοῦ τῆς βγ, πρὸς τὴν αβ, καὶ τὸ αὐτὸ πόρισμα, ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τετράγ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετρ: οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς βγ, εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τετράγ. πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τετράγ. οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς βγ, εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τὸ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τετράγ. πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν αβ, αγ, τετράγωνα, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς βγ, εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν αβ, αγ, εἴδη, τὰ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τετράγωνον, ἰσόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, αγ, τετραγώνοις, καὶ τὴν μζ': τοῦ α': ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βγ, εἶδος, ἰσόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, αγ, εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις ἄρα τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος, ἰσόν ἐστι, καὶ τὰ ἑξῆς.

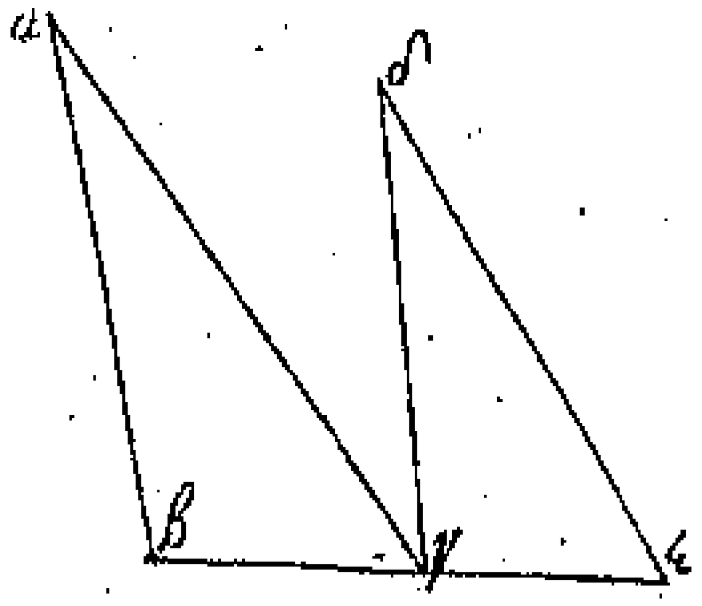
Πρότασις ΛΒ': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσονται.

Τρίγωνα ἤδη τὰ αβγ, δγε, ἔχοντα τὰς βα, αγ, καὶ γδ, δε, πλευρὰς αὐτῶν ἀνάλογον, ὡς τὴν βα, πρὸς τὴν αγ, οὕτω τὴν γδ, πρὸς τὴν δε. Συντεθή-

τωσαν καὶ μίαν γωνίαν, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς παραλλήλους εἶναι, τὴν μὲν βα, τῇ γδ, τὴν δὲ αγ, τῇ δε. Λέγω, ὅτι αἱ λοιπαὶ αὐτῶν πλευραὶ βγ, γε, ἐπ' εὐθείας εἰσίν. Ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς αβ, δγ, πέπτωκεν ἡ αγ, πάντως γε, καὶ τὴν κθ': τοῦ α': ἡ ὑπὸ βαγ, γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αγδ, ἐναλλάξ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ γδε, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αγδ, ὥστε ἡ πρὸς τῷ α, γωνία τοῦ αβγ, τριγώνου ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ δ, τοῦ δγε, καὶ τὸ α: ἀξίωμα. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ βα, αγ, ἀνάλογοι ταῖς γδ, δε, ἄρα καὶ τὴν ς': τοῦ παρόντος, τὰ αβγ, δγε, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ δγε. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, τῇ ὑπὸ αγδ, ἴση, ὡς δέδεικται, ἄρα κοινῆς λαμβανομένης τῆς ὑπὸ βγα, πάντως γε αἱ ὑπὸ αβγ, βγα, γαβ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ βγα, αγδ, δγε, ἀλλ' αἱ ὑπὸ αβγ, βγα, γαβ, τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ, καὶ τὴν λβ': τοῦ α': ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ βγα, αγε, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί, καὶ καὶ τὴν ιγ': τοῦ αὐτοῦ αἱ βγ, γε, εὐθεῖαι ἐπ' εὐθείας εἰσίν. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα συντεθῇ καὶ μίαν γωνίαν, τὰς δύο πλευρὰς, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 6. Fig. 35.

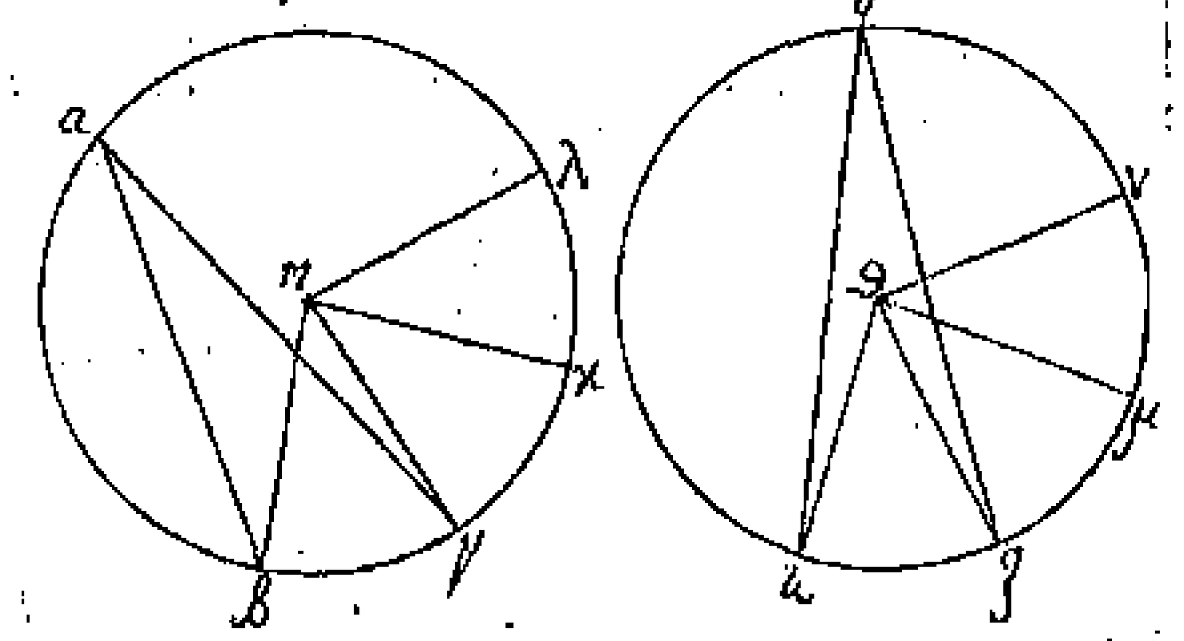


Πρότασις ΛΓ': Θεώρημα.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι ταῖς περιφερείαις, ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι, ἔτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς, ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις συνιστάμενοι.

Ἐν τοῖς αβγ, δεζ, ἴσοις κύκλοις ἔστωσαν γωνίαι πρὸς μὲν τοῖς η, θ, κέντροις αἱ ὑπὸ βηγ, εθζ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις, αἱ ὑπὸ βαγ, εδζ. Λέγω, ὅτι ὡς ἡ βγ, περιφέρεια πρὸς τὴν εζ, οὕτως ἥτε ὑπὸ βηγ, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ εθζ, καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, πρὸς τὴν ὑπὸ εδζ. εἰλήφθωσαν γὰρ περιφέρειαι ὁσαιδηποτοῦν ἴσαι τῇ μὲν βγ, αἱ γκ, κλ, τῇ δὲ εζ, αἱ ζμ, μν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ηκ, ηλ, θμ, θν. καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν γκ, κλ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα τῇ βγ, αἱ δὲ ζμ, μν, τῇ εζ, πάντως γε καὶ γωνίαι αἱ μὲν ὑπὸ γηκ, κηλ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα τῇ ὑπὸ βηγ, αἱ δὲ ὑπὸ ζθμ, μθν, τῇ ὑπὸ εθζ. ὥστε ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ βλ, περιφέρεια τῆς βγ, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ βηλ, γωνία τῆς

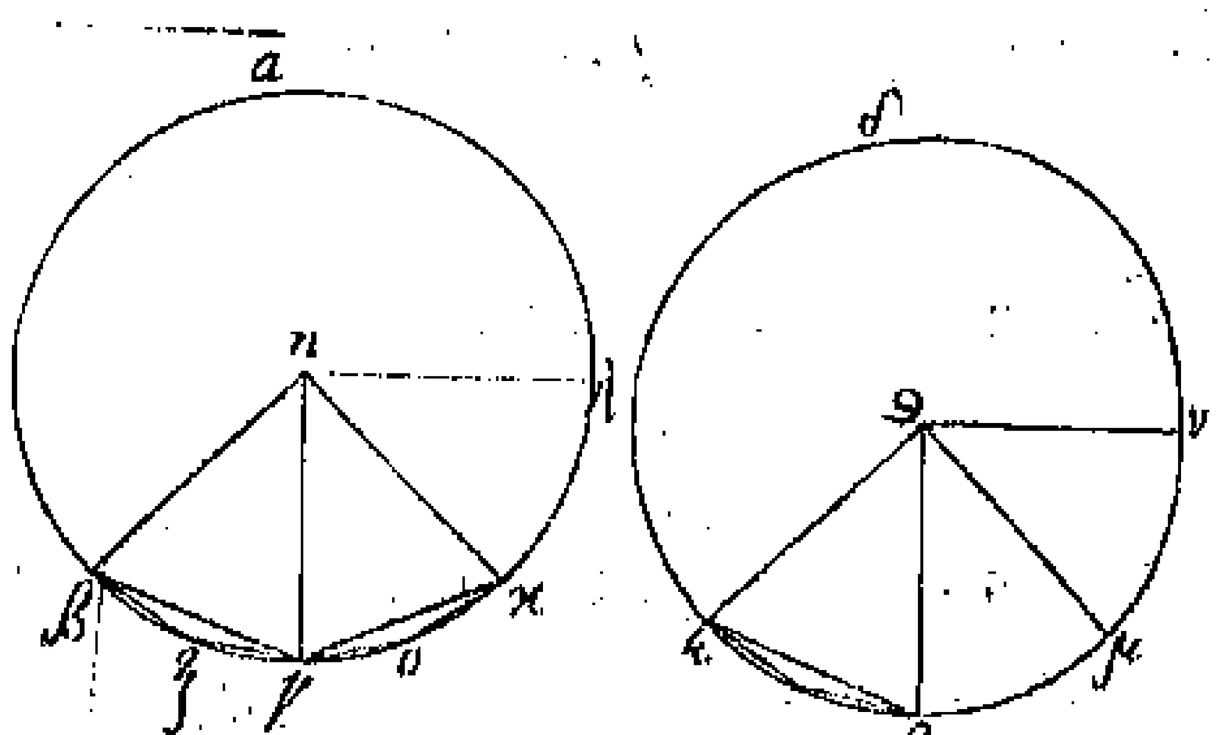
Eucl. Lib. 6. Fig. 36.



ὑπὸ β η γ. ὁσαπλασίων δὲ ἡ ε ν περιφέρεια τῆς ε ζ, τοσαυταπλασίων καὶ ἡ ὑπὸ ε θ ν, γωνία, τῆς ὑπὸ ε θ ζ. ὥστε εἰ ἡ β λ, περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ ε ν, πάντως γε καὶ ἡ ὑπὸ β η λ, γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ε θ ν, διὰ τὴν τῶν κύκλων ἰσότητα, κἂν μείζων ᾖ ἡ περιφέρεια τῆς περιφερείας, μείζων ἐστὶ καὶ ἡ γωνία τῆς γωνίας, κἂν ἐλάσσων, ἐλάσσων. τεσσάρων ἄρα μεγεθῶν τῶν β γ, ε ζ, περιφερειῶν, καὶ τῶν ὑπὸ β η γ, ε θ ζ, γωνιῶν; ἐπεὶ εἴληπται τῶν μὲν β γ, ε ζ, ἰσάκις πολλαπλάσια αἱ β λ, ε ν, περιφέρειαι, τῶν δὲ ὑπὸ β η γ, ε θ ζ, αἱ ὑπὸ β η λ, ε θ ν, γωνίαι, ἄρα, κατὰ τὸν ε': ὅρον τοῦ ε': ὡς ἡ β γ, πρὸς τὴν ε ζ, οὕτως ἡ ὑπὸ β η γ, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ε θ ζ, ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ β η γ, διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ β α γ, κατὰ τὴν κ': τοῦ γ': ἡ δὲ ὑπὸ ε θ ζ, τῆς ὑπὸ ε δ ζ. ἄρα καὶ ὡς ἡ β γ, πρὸς τὴν ε ζ, οὕτως ἡ ὑπὸ β α γ, πρὸς τὴν ὑπὸ ε δ ζ, ὅπερ ἔδει τὸ πρῶτον.

Λέγω δ' ὅτι καὶ ὁ η β γ, τομεὺς πρὸς τὸν θ ε ζ, τομέα ἔχει, ὡς ἡ β γ, περιφέρεια, πρὸς τὴν ε ζ, περιφέρειαν. εἰλήφθωσαν γὰρ τυχόντα σημεῖα ἐπὶ τῶν β γ, γ κ, περιφερειῶν τὰ ξ, ο. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ β γ, γ κ, β ξ, ξ γ, γ ο, ο κ. καὶ ἐπεὶ αἱ β η, η γ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς γ η, η κ, κατὰ τὸν ιε': ὅρον τοῦ α': ἔστι δὲ καὶ βάσις ἡ β γ, βάσει τῇ γ κ, ἴση, κατὰ τὴν κθ': τοῦ γ': πάντως γε; κατὰ τὴν η': τοῦ α': τὸ β η γ, τρίγωνον, ἴσον ἐστὶ τῷ ε θ ζ; τριγ: Αὖθις ἐπεὶ ἡ β γ, περιφέρεια, ἴση ἐστὶ τῇ γ κ, δῆλον, ὅτι καὶ λοιπὴ ἡ β λ γ, ἴση ἐστὶ λοιπῇ τῇ γ β λ κ, ὥστε κατὰ τὴν κζ': τοῦ γ': καὶ γωνία ἡ ὑπὸ β ξ γ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γ ο κ. ἄρα τὰ β γ ξ, γ κ ο, τμήματα, ὅμοιά εἰσι, κατὰ τὸν ι': ὅρον τοῦ γ': κατὰ δὲ τὴν κδ': τοῦ αὐτοῦ καὶ ἴσα. ἀλλὰ καὶ τὰ β η γ, γ η κ, τρίγωνα ἴσα ἐστὶν, ὡς δέδεικται, ἄρα ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ η β γ, τομεὺς τῷ η γ κ, τομεῖ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ η κ λ, ἴσος ἐστὶν ἑκατέρῳ τῶν η β γ, η γ κ. οἱ τρεῖς ἄρα τομεῖς η β γ, η γ κ η κ λ, ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ οἱ θ ε ζ, θ ζ μ, θ μ ν, τομεῖς, ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν. Ἴσαι δὲ ἀλλήλαις εἰσὶν, αἵ τε β γ, γ κ, κ λ, καὶ ε ζ, ζ μ, μ ν, περιφέρειαι, ἄρα ὁσαπλασίων ἐστὶν η β λ, τῆς β γ, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ η β λ, τομεὺς τοῦ η β γ, ὁσαπλασίων δὲ ἡ ε ν, περιφέρεια τῆς ε ζ, τοσαυταπλασίων καὶ ὁ θ ε ν, τομεὺς τοῦ θ ε ζ, τομέως. ὥστε ἐὰν ἡ β λ, περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ ε ν, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ η β λ, τομεὺς τῷ θ ε ν, τομεῖ, κἂν μείζων ἡ περιφέρεια τῆς περιφερείας, μείζων καὶ ὁ τομεὺς τοῦ τομέως, κἂν ἐλάσσων, ἐλάσσων.

Eucl. lib. 6. Fig. 37.



τεσ-

τεσσάρων ἄρα μεγεθῶν τῶν β γ, ε ζ, περιφερειῶν, καὶ η β γ, θ ε ζ, τομέων; ἐπεὶ εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν μὲν β γ, ε ζ, περιφερειῶν αἱ β λ, ε ν, περιφέρειαι, τῶν δὲ η β γ, θ ε ζ, τομέων οἱ η β λ, θ ε ν, τομεῖς, ἄρα κατὰ τὸν ε': ὅρον τοῦ ε': ὡς ἡ β γ, περιφέρεια πρὸς τὴν ε ζ, οὕτως ὁ η β γ, τομεὺς πρὸς τὸν θ ε ζ, τομέα. ὅπερ ἦν τὸ β'. Ἐν τοῖς ἴσοις ἄρα κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς περιφερείαις, ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι. ἔτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς, ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις συνιστάμενοι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι καὶ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸν τομέα, οὕτω καὶ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν.

Τέλος τοῦ Ἕκτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΟΡΩΝ

ΤΟΥ ΕΒΔΟΜΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

Ὅρος Πρῶτος.

Μονάς ἐστι, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται.

Τοῦτ' ἔστι μονάς ἐστι τὸ ἀμερὲς καὶ ἁπλοῦν, καθ' ὃ καὶ πᾶν ὅλον, ὡς ἀδιαίρετον ἐννοούμενον, ἓν λέγεται· καὶ τοῦτο, ὃ μέρος μὲν ἑτέρου γίνεσθαι δύναται, αὐτὸ δὲ τοῦτο ἐκ μερῶν οὐ συνίσταται, ὡς ἐπὶ τῶν Γεωμετρικῶν, παραδείγματος χάριν μέτρων, μονὰς λέγεται ὁ δάκτυλος, ὅτι ὁ δάκτυλος μέτρον μὲν τοῦ Ποδὸς, τοῦ Βήματος, τῶν Σταδίων, καὶ τῶν λοιπῶν Γεωμετρικῶν μέτρων γίνεται. τούτου δὲ οὐδέν τι μέτρον ὑποτίθεται. κατὰ μίμησιν δὲ τούτου, καὶ ὁ Ποῦς, εἷς λέγεται, καὶ τὸ Βῆμα ἕν, καὶ πᾶν ἕτερον. ἀλλά γε καὶ οὗτος τὴν μονάδα ἀκριβῶς οὐ παρίστησι. ὁ μὲν γὰρ Ποῦς δύναται διαιρεθῆναι ἐπ' ἄπειρον, καὶ αἰσθήσει ὑποπίπτει, ἡ δὲ μονὰς ἀδιαίρετος ὅλως, καὶ νῷ μόνῳ καταληπτὴ, ὡς καὶ τὸ σημεῖον, ἀρχὴ γὰρ πρώτη παρὰ τοῖς Ἀριθμητικοῖς ὑποτίθεται.

Β'. Ἀριθμός ἐστι, τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.

Τουτέστιν Ἀριθμός ἐστιν ἡ πολλῶν μονάδων σύναψις. ὡς ὁ α, β, γ, καὶ οἱ λοιποὶ ἀριθμοί. ὥστε ἐκ τούτου συνάγεται, ἐπεὶ ὁ 2 πλῆθος μονάδων οὐ παρεμφαίνει, (τὸ γὰρ πλῆθος ἀπὸ τοῦ 3 ἄρχεται) κυρίως ἀριθμὸς οὐ λέγεται. ἔτι τε οὐδὲν τῶν σχημάτων διὰ τοῦ 2 παρίσταται, ἄρα ἀριθμὸς κυρίως οὐκ ὀνομάζεσθαι δεῖ, ἀλλὰ καταχρηστικῶς.

3	4	5
α	β	γ

Γ'. Μέρος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ, ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸν μείζονα.

Ὡς ὁ δ, μέρος ἐστὶ τῶν ε, ζ, η, καὶ τῶν λοιπῶν ἀριθμῶν, ὅσας καταμετρεῖ. Ἐπεὶ δὲ ὁ δ, τὸν μὲν ε, κατὰ τὰς ἐν τῷ θ, μονάδας μετρεῖ, ὁ θ, λέγεται τοῦ ε, μέρος ὁμώνυμον τῷ δ. ἐπεὶ δὲ καὶ τὸν ζ, μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ κ, καὶ τὸν η, κατὰ τὰς ἐν τῷ λ, λέγεται ὁ κ, μέρος τοῦ ζ, καὶ ὁ λ, τοῦ η, ὁμώνυμον τῷ δ. καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὡσαύτως. ἑκάστῳ τοίνυν ἀριθμῷ μέρει ὄντι ἑτέρου, ὁμώνυμος λέγεται αὐτῷ ὁ τοσαύτας μονάδας ἔχων, ὁσάκις οὗτος τὸν, οὗ μέρος ἐστὶ, μετρεῖ.

3	6	9	12
δ	ε	ζ	η
	2	3	4
	θ	κ	λ

Δ'. Μέρη δὲ, ὅταν οὐ καταμετρῇ.

Τουτέστιν ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν πολλαπλασιαζόμενος, ἢ ἐλλείπει, ἢ ὑπερέχει τοῦ μείζονος, οὐδέποτε δὲ ἀποπληροῖ ὡς ὁ α, τοῦ β, γ, καὶ λοιπῶν.

4	6	10
α	β	γ

Ε'. Πολλαπλάσιος δὲ ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος.

Ὡς ὁ δ, τοῦ ε, ὁ ζ, τοῦ η, καὶ ὅσοι ἄλλοι ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος δὶς, ἢ τρὶς, ἢ τετράκις, ἢ πλεονάκις καταμετροῦνται.

6	3	12	4
δ	ε	ζ	η

ς'. Ἄρτιος δὲ ἀριθμός ἐστιν, ὁ δίχα διαιρούμενος.

Τοιοῦτοί εἰσιν ὁ θ, ι, κ, λ, καὶ ὅσοι ἄλλοι δίχα διαιρεῖσθαι δύνανται.

4	6	8	10
θ	ι	κ	λ

Ζ'. Περισσὸς δὲ, ὁ μὴ διαιρούμενος δίχα, ἢ ὁ μονάδι διαφέρων ἀρτίου.

Τοιοῦτοί εἰσιν, ὁ μ, ν, ξ, ο, καὶ ὅσοι δίχα διαιρεθῆναι οὐ δύνανται. ὧν ὁ μὲν μ, τοῦ θ, ὁ δὲ ν, τοῦ ι, ὁ δὲ ξ, τοῦ κ, καὶ ὁ ο, τοῦ λ, μονάδι ὑπερέχει.

5	7	9	11
μ	ν	ξ	ο

Η'. Ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν, ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος, κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν.

Τοιοῦτοί εἰσιν ὁ π, ρ, σ, ὧν ὁ μὲν π, μετρεῖται ὑπὸ τοῦ τ, ὁ δὲ ρ, ὑπὸ τοῦ υ, καὶ ὁ σ, ὑπὸ τοῦ φ, καὶ πάντες κατὰ τὸν χ. εἰσὶ δὲ πάντες ἄρτιοι, ὑφ' ὧν μετροῦνται, καὶ καθ' ὃν μετροῦνται.

8	16	32
π	ρ	σ
4	8	16
τ	υ	φ
	2	
	χ	

Θ': Ἀρτιάκις δὲ περισσός ἐστιν, ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος, κατὰ περισσὸν ἀριθμόν.

Τοιοῦτοί εἰσιν, οἱ α, β, γ, ὧν ἕκαστος μετρεῖται ὑπὸ τοῦ δ, ὅστις ἐστὶν ἄρτιος, καὶ ὁ μὲν α, μετρεῖται, κατὰ τὸν ε, ὁ δὲ β, κατὰ τὸν ζ, καὶ ὁ γ, κατὰ τὸν η. οἵτινες πάντες εἰσὶ περισσοί.

	12	20	28
	α	β	γ
4	3	5	7
δ	ε	ζ	η

Ι': Περισσάκις δὲ περισσός ἐστιν ἀριθμός, ὁ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν ἀριθμόν.

Τοιοῦτοί εἰσιν, οἱ θ, ι, κ, ὧν ἕκαστος μετρεῖται ὑπὸ τοῦ λ, περισσοῦ ἀριθμοῦ. καὶ ὁ μὲν θ, κατὰ τὸν μ, ὁ δὲ ι, κατὰ τὸν ν, ὁ δὲ κ, κατὰ τὸν ξ, οἵτινές εἰσι πάντες περισσοί.

	9	15	21
	θ	ι	κ
3	3	5	7
λ	μ	ν	ξ

ΙΑ': Πρῶτος ἀριθμός ἐστιν, ὁ μονάδι μόνῃ μετρούμενος.

Τοιοῦτοί εἰσι πάντες οἱ περισσοί, ὡς ὁ ο, π, ρ, σ, καὶ τ. καὶ ὅσοι οὐδενὶ ἀριθμῷ μετρηθῆναι δύνανται ἢ μονάδι, ὡς εἶπον.

3	5	7	11	13
ο	π	ρ	σ	τ

ΙΒ': Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν, οἱ μονάδι μόνῃ μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

Τοιοῦτοί εἰσιν, οἱ φ, χ, καὶ ψ, ω, καὶ ὅσοι κοινὸν μέτρον οὐκ ἔχουσιν, ἢ τὴν μονάδα.

4	5	8	9
φ	χ	ψ	ω

ΙΓ': Σύνθετος ἀριθμός ἐστιν, ὁ ἀριθμῷ τινι μετρούμενος.

Τοιοῦτοί εἰσιν οἱ ἄρτιοι ἀριθμοί, καὶ πάντα τὰ τοῦ ἀρτίου εἴδη, δηλ: οἱ ἀρτιάκις ἄρτιοι, οἱ ἀρτιάκις περισσοί, καὶ οἱ περισσάκις ἄρτιοι, ἔτι δὲ καὶ οἱ περισσάκις περισσοί: ὡς οἱ α, β, γ, δ,

8	10	12	9
α	β	γ	δ

ΙΔ': Σύνθετοι δὲ πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν, οἱ ἀριθμῷ τινι μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

Τοιοῦτοί εἰσιν, οἱ δ, ε, ζ, η, ὧν οἱ μὲν δ, ε, κοινὸν μέτρον ἔχουσι τοὺς θ, καὶ κ, οἱ δὲ ε, ζ, η, τοὺς λ, μ, καὶ ζ,

4	8	6	12	
δ	ε	ζ	η	
2	4	2	3	6
θ	κ	λ	μ	ζ

ΙΕ': Ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάζειν λέγεται, ὅταν ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ αὐτῷ μονάδες, τοσαυτάκις συντεθῇ ὁ πολλαπλασιαζόμενος, καὶ γένηταί τις.

Παραδ: χάρ: ὁ π, τότε λέγεται πολλαπλασιάζειν τὸν ρ, ὅτε ὁ ρ, τοσαυτάκις λαμβανόμενος, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ π, μονάδες ποιῇ τὸν σ. ὥστε εἶναι, ὡς ὁ σ, πρὸς τὸν ρ, ὁ π, πολλαπλασιάζων πρὸς τὴν τ, μονάδα.

1	3	4	12
τ	π	ρ	σ

Ις': Ὅταν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος ἐπίπεδος καλεῖται. πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.

Παραδ: χάρ: ὁ π, τὸν ρ, πολλαπλασιάσας τὸν σ, ποιείτω, ὁ σ, ἄρα ἐπίπεδος καλεῖται. πλευραὶ δὲ αὐτοῦ ὁ π, καὶ ρ,

3	4	12
π	ρ	σ

ΙΖ': Ὅταν τρεῖς ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος στερεὸς καλεῖται. πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.

Παραδ: χάρ: οἱ α, β, γ, πολλαπλασιασάτωσαν ἀλλήλους. καὶ ὁ μὲν β, τὸν γ, πολλαπλασιάσας τὸν δ, ποιείτω, ὁ δὲ α, τὸν δ, πολλαπλασιάσας τὸν ε, ποιείτω, ὁ ε, ἄρα στερεὸς καλεῖται. πλευραὶ δὲ τοῦ ε, οἱ α, β, γ.

3	4	5	20	60
α	β	γ	δ	ε

ΙΗ': Τετράγωνος ἀριθμός ἐστιν, ὁ ἰσάκις ἴσος, ἢ ὁ ὑπὸ δύο ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.

Τοιοῦτοί εἰσιν, οἱ ζ, η, θ, καὶ οἱ ὅμοιοι. ἑκάστου γὰρ τῶν ζ, η, θ, αἱ πλευραὶ πᾶσαι ἴσαι, καὶ ἕκαστος ὑπὸ δύο ἀριθμῶν ἴσων περιέχεται. ὁ γὰρ ζ, ὑπὸ τῶν ι, κ, περιέχεται. ὁ δὲ η, ὑπὸ τῶν λ μ, καὶ ὁ θ, ὑπὸ τῶν ν ξ, ὥστε ἀρκεῖ μόνον τὸν ἀριθμὸν ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθῆναι, καὶ γενήσεται ὁ τετράγωνος.

9		16		25	
ζ		η		θ	
3	3	4	4	5	5
ι	κ	λ	μ	ν	ξ

ΙΘ': **Κύβος δὲ, ὁ ἰσάκις ἴσος ἰσάκις, ἢ ὁ ὑπὸ τριῶν ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.**

27	64	125
π	ρ	σ
9	16	25
333	444	555
αβγ	δεζ	ηθι

Τοιοῦτοί εἰσιν, οἱ π, ρ, σ, καὶ οἱ ὅμοιοι. ἕκαστος γὰρ τῶν π, ρ, σ, ὑπὸ τριῶν ἴσων ἀριθμῶν περιέχεται. ὁ μὲν γὰρ π, ὑπὸ τῶν α, β, γ, ὁ δὲ ρ, ὑπὸ τῶν δ, ε, ζ, καὶ ὁ σ, ὑπὸ τῶν η, θ, ι, περιέχεται.

Κ': **Ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ α: τοῦ β': καὶ ὁ γ': τοῦ δ': ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιος, ἢ τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ὦσι.**

4	2	6	3
κ	λ	μ	ν
9	6	4	
ξ	π	ρ	

Παραδ: χάρ: ὅταν ᾖ ὡς ὁ κ, πρὸς τὸν λ, οὕτως ὁ μ, πρὸς τὸν ν, οἱ κ λ, μ ν, ἀριθμοὶ, εἰσὶν ἀνάλογον. ὅτι ὁσαπλάσιός ἐστιν ὁ κ, τοῦ λ, τοσαυταπλάσιος ὁ μ, τοῦ ν· καὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ λ, τοῦ κ, τοῦτο αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὁ ν, τοῦ μ, ὡσαύτως καὶ οἱ ξ, π, ρ, ἀνάλογόν εἰσιν. ὅτι ἃ μέρη ἐστὶν ὁ π, τοῦ ξ, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ ρ, τοῦ π,

ΚΑ': **Ὅμοιοι ἐπίπεδοι καὶ στερεοὶ ἀριθμοί εἰσιν, οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς.**

8	32	24		48	
α	β	γ	δ	ε	ζ
48		162			
η		θ			
2	4	6	3	6	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ

Παραδ: χάρ: τῶν μὲν ἐπιπέδων ὅμοιοι ἀριθμοί εἰσιν, οἱ α, β, ὅτι τοῦ μὲν α, πλευραί εἰσιν, οἱ γ, δ. τοῦ δὲ β, οἱ ε, ζ, καὶ ἔστιν ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ε, πρὸς τὸν ζ. τῶν δὲ στερεῶν ὅμοιοί εἰσιν, οἱ η, θ. ὅτι τοῦ μὲν η, πλευραί εἰσιν, οἱ ι, κ, λ, τοῦ δὲ θ, οἱ μ, ν, ξ. καὶ ἔστιν ὡς ὁ ι, πρὸς τὸν κ, οὕτως ὁ μ, πρὸς τὸν ν, καὶ ὡς ὁ κ, πρὸς τὸν λ, ὁ ν, πρὸς τὸν ξ.

ΚΒ': **Τέλειος ἀριθμός ἐστιν, ὁ τοῖς αὐτοῦ μέρεσιν ἴσος ὤν.**

6	28	3	2	1
π	ρ	σ	τ	α
14	7	4	2	1
β	γ	δ	ε	ζ

Τοιοῦτοί εἰσιν, οἱ π, ρ, ὅτι τοῦ μὲν π, μέρη εἰσὶν, οἱ σ, τ, καὶ α, μονὰς, ἅτινα συναπτόμενα συμπληροῦσι τὸν π· τοῦ δὲ ρ, μέρη εἰσὶν, οἱ β, γ, δ, ε, καὶ ἡ ζ, μονὰς, ὧν συναπτομένων ἀποπληροῦται ὁ ρ, ἀριθμός.

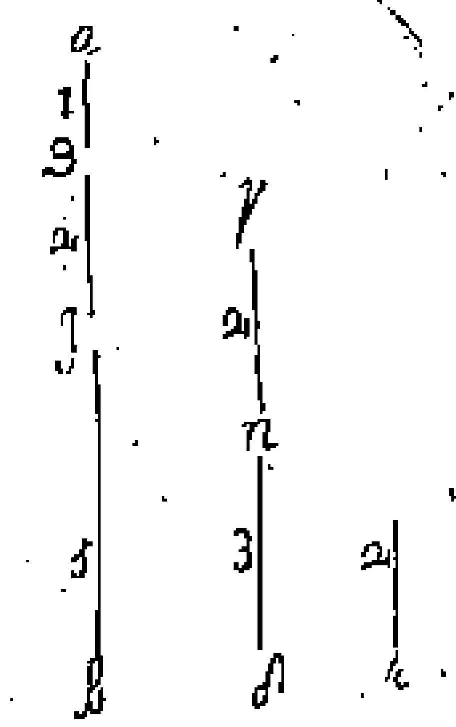
Πρό-

Πρότασις Α': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ὑπὸ τοῦ μείζονος, ὁ ἐλλειπόμενος μηδέποτε καταμετρῇ τὸν πρὸ αὐτοῦ, ἕως οὗ ληφθῇ μονὰς, οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Δύο ἤδη ἀριθμῶν τῶν α β, γ δ, ἐκκειμένων, καὶ ἀφαιρουμένου τοῦ ἐλάσσονος γ δ, παρὰ τοῦ μείζονος α β, ὁ λειπόμενος α ζ, μὴ καταμετρείτω τὸν πρὸ αὐτοῦ ζ β, τοῦ δὲ α ζ, παρὰ τοῦ γ δ, ἀφαιρουμένου, ὁ λειπόμενος γ η, μὴ καταμετρείτω τὸν η δ. τοῦ δὲ γ η, παρὰ τοῦ α ζ, ἀφαιρουμένου, λειφθήτω ἡ α θ, μονάς. Λέγω τοὺς α β, γ δ, πρώτους πρὸς ἀλλήλους εἶναι, καὶ τὴν α θ, μονάδα μόνην τούτους μετρεῖν, εἰ γὰρ μὴ, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμὸς, καὶ ἔστω οὗτος ὁ ε.

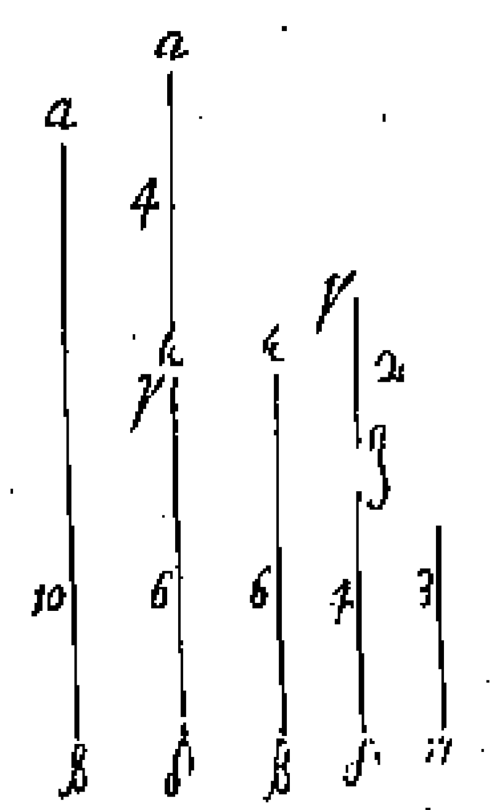
Eucl. Lib. 7. Fig. 1.



Ἐπεὶ τοίνυν ὁ ε, τὸν γ δ, μετρεῖ, μετρήσει πάντως καὶ τὸν β ζ, τὸν ἴσον τῷ γ δ, μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν α β, μετρήσει ἄρα καὶ τὸν α ζ, ἔτι δὲ καὶ τὸν δ η, τὸν ἴσον τῷ α ζ, μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν γ δ, μετρήσει ἄρα καὶ τὸν γ η, ἔτι δὲ καὶ τὸν θ ζ, ἴσον τῷ γ η, μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν α ζ, μετρήσει ἄρα καὶ τὴν α θ, μονάδα, καὶ ἔστιν ἀριθμὸς ὁ ε, ὅπερ ἄτοπον. Οἱ α β, γ δ, ἄρα ἀριθμοὶ μόνῃ τῇ α θ, μονάδι μετροῦνται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Β': Πρόβλημα.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.



Δύο ἤδη ἀριθμῶν μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους τῶν α β, γ δ, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον δέον εὑρεῖν. εἰ μὲν οὖν ὁ ἐλάττων γ δ, μετρεῖ τὸν μείζονα α β, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν, ὁ γ δ, ἄρα τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον ἔσται. οὐδεὶς γὰρ μείζων τοῦ δ γ, αὐτὸν μετρήσει. εἰ δὲ μὴ μετρεῖ ὁ γ δ, τὸν α β, ἀφαιρείσθω ὁ γ δ, παρὰ τοῦ α β, καὶ ἐναπολειφθήτω ὁ α ε. τοῦ δὲ α ε, παρὰ τοῦ γ δ, ἀφαιρουμένου, ἐναπολειφθήτω ὁ γ ζ, ὁ δὲ γ ζ, τὸν α ε, μετρείτω. Λέγω τὸν γ ζ, κοινὸν μέτρον εἶναι τοῦ α β, γ δ. ἐπεὶ γὰρ ὁ γ ζ, μετρεῖ τὸν α ε, μετρήσει πάντως καὶ τὸν δ ζ, τὸν ἴσον τῷ α ε, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν. μετρεῖ ἄρα καὶ ὅλον τὸν γ δ, ἔτι δὲ καὶ τὸν ε β, τὸν ἴσον τῷ γ δ, μετρεῖ δὲ καὶ τὸν α ε, μετρήσει ἄρα καὶ ὅλον τὸν α β. ἐπεὶ δὲ μετρεῖ καὶ τὸν γ δ, ἄρα κοινὸν μέτρον ἐστί. λέγω, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μὴ, μετρήσει τις ἀριθμὸς τοὺς α β, γ δ, μείζων τοῦ γ ζ, καὶ ἔστω ὁ η. ἐπεὶ οὖν ὁ η, μετρεῖ τὸν γ δ, μετρεῖ ἄρα καὶ τὸν ε β, μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν α β, μετρήσει ἄρα

καὶ

καὶ τὸν δ ζ, τὸν ἴσον τῷ α ε, μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν γ δ, μετρήσει πάντως καὶ τὸν γ ζ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἀδύνατον, ὁ γ ζ, ἄρα ἐστὶ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν α β, γ δ, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

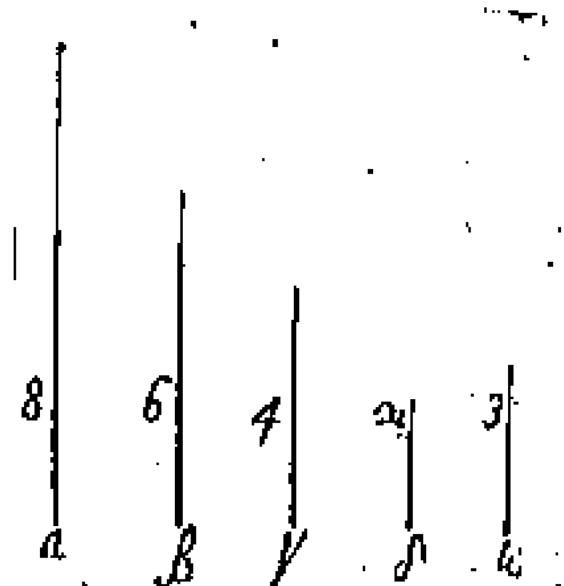
Π Ο Ρ Ι' Σ Μ Α.

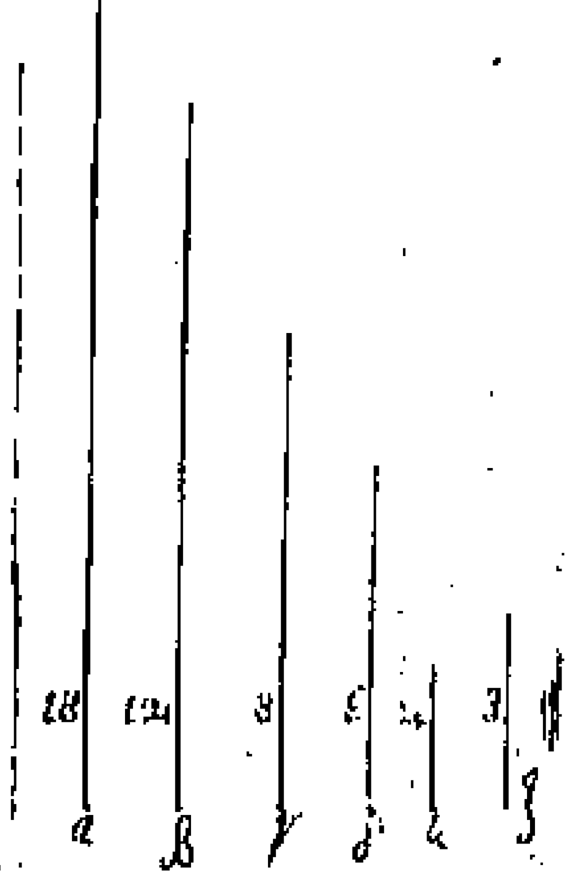
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρεῖ.

Πρότασις Γ': Πρόβλημα.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων, μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Eucl. Lib. 7. Fig. 2.





Τριῶν ἤδη ἀριθμῶν τῶν α β γ, μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους δοθέντων, ὅπως ἂν εὑρεθῇ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον, εὑρεθήτω πρῶτον διὰ τῆς ἀνωτέρω, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν α, β, καὶ ἔστω ὁ δ. εἰ οὖν ὁ δ, καὶ τὸν γ, μετρεῖ, ὁ δ, ἔσται τὸ κοινὸν μέτρον τῶν α, β, γ. λέγω δὴ, ὅτι καὶ μέγιστον, εἰ γὰρ μὴ, ἔστω μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν α β γ, ὁ ε, μείζων τοῦ δ. καὶ ἐπεὶ ὁ ε, μετρεῖ τοὺς α β, μετρήσει πάντως καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω, τοῦτο δ' ἐστὶν ὁ δ, ἄρα ὁ ε, μετρήσει τὸν δ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσω, ὅπερ ἀδύνατον.

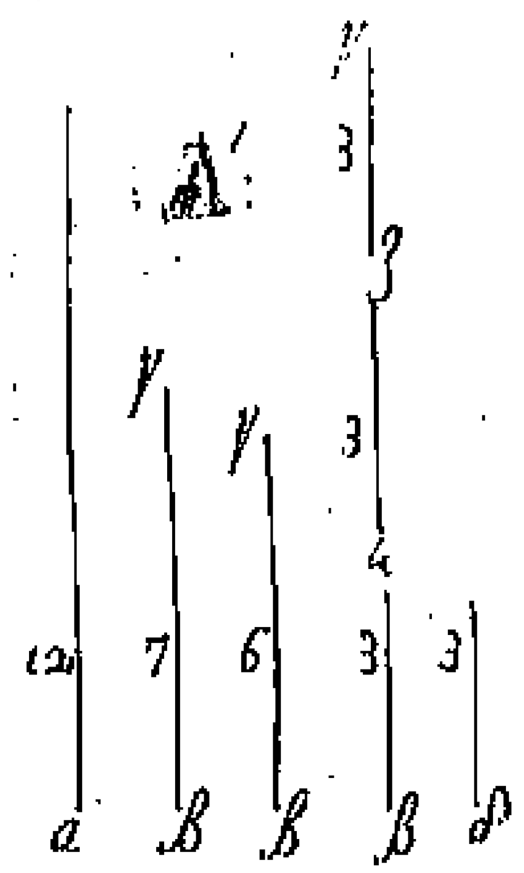
Εἰ δὲ ὁ δ, τὸν γ, οὐ μετρεῖ, δειχθήσεται πρῶτον τοὺς γ δ, μὴ πρώτους πρὸς ἀλλήλους εἶναι. ἐπεὶ γὰρ οἱ α β, οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὁ μετρῶν αὐτοὺς ἀριθμὸς, μετρήσει καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω, τουτέστι τὸν δ, μετρεῖ δὲ καὶ τὸν γ, ἄρα οἱ γ δ, οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. εὑρεθήτω τοίνυν τῶν γ δ, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω ὁ ε, ὁ ε, τοίνυν μετρῶν τὸν δ, τὸ μέγιστον δηλ: κοινὸν μέτρον τῶν α β, μετρήσει πάντως καὶ τοὺς α β, μετρεῖ δὲ καὶ τὸν γ, ὁ ε, ἄρα ἐστὶ τὸ κοινὸν μέτρον τῶν α, β, γ. Λέγω δὴ, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μὴ, ἔστω τούτου μείζων, μετρῶν τοὺς α, β, γ, ὁ ζ. καὶ ἐπεὶ ὁ ζ, μετρεῖ τοὺς α β, μετρήσει καὶ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον αὐτῶν τὸν δ, μετρεῖ δὲ καὶ τὸν γ, μετρήσει ἔτι καὶ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον αὐτῶν τὸν ε, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσω, ὅπερ ἀδύνατον. ὁ ε, ἄρα ἐστὶ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν α, β, γ. ὅπερ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Δ': Θεώρημα.

Πᾶς ἀριθμὸς παντὸς ἀριθμοῦ, ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ἤτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρη.

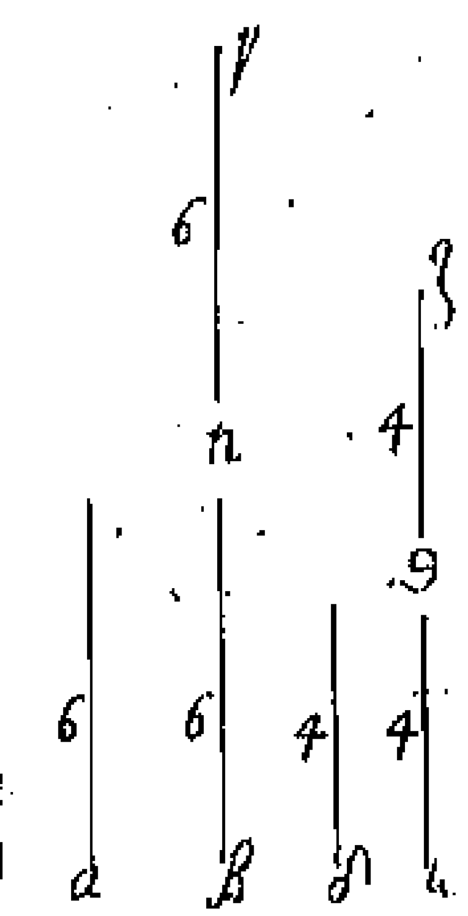
Τῶν δύο ἤδη ἀριθμῶν α, β γ, λέγω τὸν β γ, ἐλάσσονα ἢ μέρος εἶναι ἢ μέ-
ρη τοῦ μείζονος α. πρῶτον μὲν γὰρ ὑποτιθεμένων τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν πρώτων
πρὸς ἀλλήλους, ἐπείπερ ἑκάστη μονὰς τοῦ γ β, μετρεῖ τὸν α. ὁ γ β, ἄρα μέρη
ἐστὶ τοῦ α. δεύτερον δὲ μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους ὑποτιθεμένων, εἰ μὲν ὁ γ δ,
τὸν α, μετρεῖ, μέρος ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ α, εἰ δὲ οὐ μετρεῖ, τοῦ μεγίστου καὶ κοινοῦ μέτρου
εὑρεθέντος, τούτου α, καὶ β γ, ἔστω ὁ δ. ἐπεὶ τοίνυν ὁ δ,
τὸν γ β, μετρεῖ, κατὰ τὰ β ε, ε ζ, ζ γ, μέρη, πολλαπλάσιος
ἄρα ἐστὶν ὁ γ β, τοῦ δ. Αὖθις ἐπεὶ ὁ αὐτὸς δ, μετρεῖ καὶ τὸν
α, καὶ ἕκαστον ἄρα μέρος τοῦ β γ, τουτέστιν ἕκαστον τῶν β ε,
ε ζ, ζ γ, τὸν α, μετρήσει. ἄρα ὁ γ β, μέρη ἐστὶ τοῦ α, ὅ-
περ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. lib. 7. Fig. 3.



Πρότασις Ε': Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ᾖ, καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ εἷς τοῦ ἑνός.



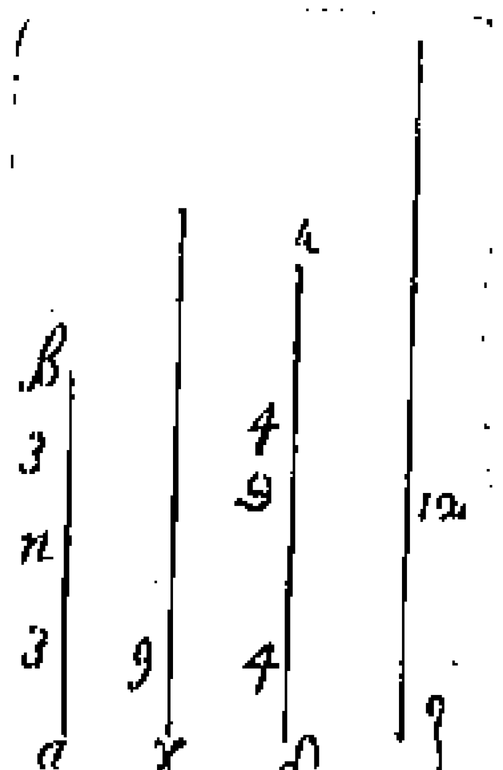
Τοῦ α ἤδη ἀριθμοῦ μέρους ὄντος τοῦ γ β, ὅπερ ὁ δ, τοῦ
ζ ε. Λέγω καὶ συναφοτέρους τοὺς α, δ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι.
συναμφοτέρων τῶν γ β, ε ζ, ὅπερ ὁ α, τοῦ γ β. Ἐπεὶ γὰρ
ὃ μέρος ἐστὶν ὁ α, τοῦ γ β, τὸ αὐτὸ καὶ ὁ δ, τοῦ ε ζ, ὅσα ἄ-
ρα μέρη ἐστὶν ἐν τῷ γ β, ἴσα τῷ α, τοσαῦτα μέρη ἐστὶ καὶ
ἐν τῷ ε ζ, ἴσα τῷ δ. συντεθέντων δὲ τῶν μερῶν τοῦ γ β, τοῖς
μέρεσι τοῦ ε ζ, τοσαῦτα μέρη σύνθετα ἔσονται ἐν τοῖς γ δ,
ε ζ, ἴσα τοῖς α, δ, ὁμοῦ, ὅσα μέρη ἁπλᾶ ἐστὶν ἐν τῷ γ β,
ἴσα τῷ α. ἄρα ὁσαπλάσιός ἐστιν ὁ γ δ, τοῦ α, τοσαυτα-
πλάσιοι ἔσονται καὶ οἱ γ β, ε ζ, τῶν α δ, καὶ ἑπομένως, ὃ
μέρος ἐστὶν ὁ α, τοῦ β γ, τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, καὶ συναμ-
φότεροι οἱ α δ, συναμφοτέρων τῶν γ β, ε ζ. ὅπερ ἔδει
δεῖξαι.

Πρότασις ς′: Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ᾖ, καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ εἷς τοῦ ἑνός.

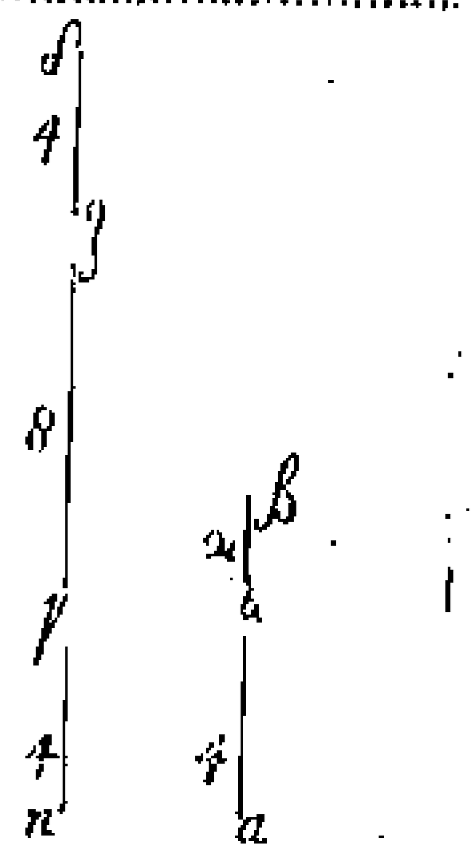
Ἀριθμὸς ἤδη ὁ αβ, ἀριθμοῦ τοῦ γ, τὰ αὐτὰ μέρη ἔστω, ἅπερ ἐστὶν ὁ εδ, τοῦ ζ. Λέγω καὶ ἀμφοτέρους τοὺς αβ, εδ, τὰ αὐτὰ μέρη εἶναι ἀμφοτέρων τῶν γ, ζ, ἅπερ ἐστὶν ὁ αβ, τοῦ γ. Ἐπεὶ γὰρ ἃ μέρη ἐστὶν ὁ αβ, τοῦ γ, τὰ αὐτὰ ἐστὶ καὶ ὁ εδ, τοῦ ζ, διαιρεθέντος ἤδη τοῦ αβ, εἰς τὰ τοῦ γ, μέρη, καὶ τοῦ εδ, εἰς τὰ τοῦ ζ, ὅσα μέρη τοῦ γ, ἐστὶν ἐν τῷ αβ. τοσαῦτα μέρη ἐστὶ καὶ τοῦ ζ, ἐν τῷ εδ. Ἔστω τοίνυν ἐν μὲν τῷ αβ, μέρη τοῦ γ, τὰ αη, ηβ, ἐν δὲ τῷ εδ, μέρη τοῦ ζ, τὰ εθ, θδ. Ἐπεὶ τοίνυν ὃ μέρος ἐστὶν ὁ αη, τοῦ γ, τὸ αὐτὸ ἐστι καὶ ὁ εθ, τοῦ ζ, ἔσονται διὰ τῆς ἀνωτέρω, καὶ οἱ αη, εθ, ὁμοῦ τῶν γζ, ὁμοῦ τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ἐστὶν ὁ αη, τοῦ γ. ὡσαύτως, καὶ οἱ ηβ, θδ, ὁμοῦ τῶν γζ, ὁμοῦ τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ἐστὶν ὁ ηβ, τοῦ γ. ὥστε ἃ μέρη εἰσὶν οἱ αη, ηβ, τουτέστιν ὁ αβ, τοῦ γ, τὰ αὐτὰ μέρη ἔσονται καὶ οἱ αβ, εδ, τῶν γζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 7. Fig. 4.



Πρότασις Ζ′: Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, ὅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος, καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ὅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.



Ἀριθμὸς ἤδη ὁ αβ, ἀριθμοῦ τοῦ γδ, ἔστω μέρος, ὅπερ ὁ ἀφαιρεθεὶς αε, τοῦ ἀφαιρεθέντος γζ. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ λοιπὸς εβ, τοῦ λοιποῦ ζδ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν, ὅπερ καὶ ὅλος ὁ αβ, ὅλου τοῦ γδ. Γενέσθω ὁ εβ, τοῦ γη, τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ἐστὶ καὶ ὁ αε, τοῦ γζ, διὰ τῆς ε′: ἄρα τοῦ παρόντος, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ αε, τοῦ γζ, τὸ αὐτὸ ἔσται καὶ ὅλος ὁ αβ, ὅλου τοῦ ζη, ὃ δὲ μέρος ἐστὶν ὁ αε, τοῦ γζ, τὸ αὐτό ἐστι καὶ ὁ αβ, τοῦ γδ, ἄρα ὁ αβ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὸν ζη, καὶ πρὸς τὸν γδ. καὶ διὰ τῆς Θ′: τοῦ ε′: ὁ ζη, καὶ γδ, ἴσοι ἀλλήλοις εἰσί. κοινοῦ δὲ ἀφαιρουμένου τοῦ γζ, ἐγκαταλειφθήσονται καὶ οἱ γη, ζδ, ἴσοι. Ἐπεὶ δὲ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ αε, τοῦ γζ, τὸ αὐτό ἐστι καὶ ὁ εβ, τοῦ γη. ἄρα ὁ εβ, τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται καὶ τοῦ δζ, ὅπερ ὁ αε, τοῦ γζ. ὃ δὲ μέρος ἐστὶν ὁ αε, τοῦ γζ, τοῦτο καὶ ὁ αβ, τοῦ γδ, ἄρα καὶ ὁ εβ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ τοῦ δζ, ὅπερ ὅλος ὁ αβ, ὅλου τοῦ γδ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρό-

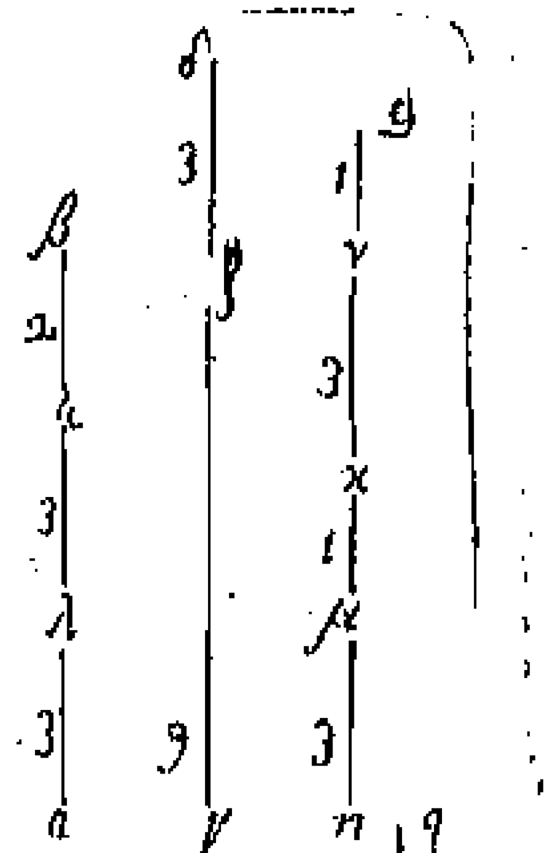
Πρότασις Η′: Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ, μέρη ᾖ, ἅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος, καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

Ἀριθμὸς ἤδη ὁ αβ, ἀριθμοῦ τοῦ γδ, μέρη ἔστω, ἅπερ ὁ ἀφαιρεθεὶς αε, τοῦ ἀφαιρεθέντος γζ. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ λοιπὸς εβ, τοῦ λοιποῦ ζδ, τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ ὅλος αβ, τοῦ ὅλου γδ.

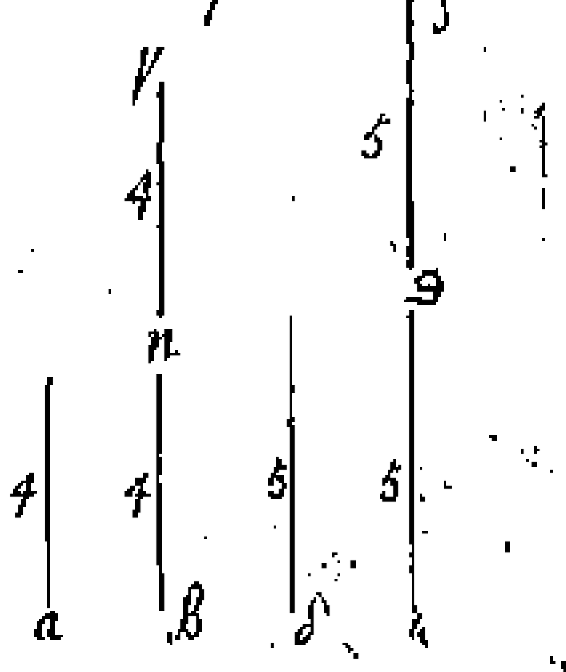
Ἐλήφθω ἕτερος ἀριθμὸς ἴσος τῷ αβ, ὁ ηθ, ἃ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ ηθ, τοῦ γδ, τὰ αὐτὰ καὶ ὁ αε, τοῦ γζ. διαιρεθέντος δὲ τοῦ μὲν ηθ, εἰς τὰ τοῦ γδ, μέρη, τὰ ηκ, κθ, τοῦ δὲ αε, εἰς τὰ τοῦ γζ, τὰ αλ, λε, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ηκ, τοῦ γδ, τὸ αὐτὸ ἔσται καὶ ὁ αλ, τοῦ γζ, ὃ δὲ μέρος ἐστὶν ὁ κθ, τοῦ γδ, τὸ αὐτὸ καὶ ὁ λε, τοῦ γζ, μείζων δὲ ὁ γδ, τοῦ γζ, μείζων ἄρα καὶ ὁ ηκ, τοῦ αλ, καὶ ὁ κθ, τοῦ λε. ἀφαιρεθέντος δὲ τοῦ μὲν ημ, ἴσου τῷ αλ, τοῦ δὲ κν, ἴσου τῷ λε, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ηκ, τοῦ γδ, τὸ αὐτὸ καὶ ὁ ημ, τοῦ γζ, καὶ ἑπομένως κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ηκ, τοῦ γδ, τὸ αὐτὸ ἔσται καὶ ὁ μκ, τοῦ ζδ. ὡσαύτως καὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ηκ, τοῦ γδ, τὸ αὐτὸ ἔσται καὶ ὁ νθ, τοῦ ζδ. καὶ συντεθέμενοι ἄρα οἱ μκ, νθ, τὰ αὐτὰ μέρη ἔσονται τοῦ ζδ, ἅπερ οἱ ηκ, κθ, ὁμοῦ, τουτέστιν ὁ αβ, τοῦ γδ. ἐπεὶ δὲ οἱ ημ, κν, ἴσοι εἰσὶ τοῖς αλ, λε, καὶ ὁ ηθ, τῷ αβ, ἄρα κατὰ τὸ γ′: ἀξίωμα καὶ οἱ μκ, νθ, ὁμοῦ ἴσοι εἰσὶ τῷ εβ, καὶ ἑπομένως ἃ μέρη ἐστὶν ὁ αβ, τοῦ γδ, τὰ αὐτὰ καὶ ὁ εβ, τοῦ ζδ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 7. Fig. 5.



Πρότασις Θ′: Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος, καὶ ἐναλλὰξ ὃ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη ὁ α′: τοῦ γ′: τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη ἔσται καὶ ὁ β′: τοῦ δ′:



Ἀριθμὸς ἤδη ὁ α, ἀριθμοῦ τοῦ βγ, ἔστω ὁποιονδήποτε μέρος, καὶ ὁ δ, τοῦ εζ, τὸ αὐτό, ὅπερ ὁ α, τοῦ βγ. Λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ, ὃ μέρος ἢ μέρη ἐστὶν ὁ α, τοῦ δ, τὸ αὐτό ἐστι μέρος ἢ μέρη καὶ ὁ βγ, τοῦ εζ. κατὰ γὰρ τὴν ὑπόθεσιν, ὅσοι ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ α, εἰσὶν ἐν τῷ βγ, τοσοῦτοι ἴσοι τῷ δ, εἰσὶν ἐν τῷ εζ. Διαιρεθέντων δὲ τοῦ μὲν βγ, εἰς τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς τῷ α, τοὺς βη, ηγ, τοῦ δὲ εζ, εἰς τοὺς ἴσους τῷ δ, τοὺς εθ, θζ, ὃ μέρος ἢ μέρη ἐστὶν ὁ βη, τοῦ εθ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ ηγ, τοῦ θζ, καὶ κατὰ

τὴν

τὸν ε': τοῦ παρόντος, ὃ μέρος ἢ μέρη ἐστὶν ὁ β η, (τουτέστιν ὁ α, ἴσοι γὰρ) τοῦ ε θ. (τουτέστι τοῦ δ,) τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη ἔσται καὶ ὁ β γ, τοῦ ε ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

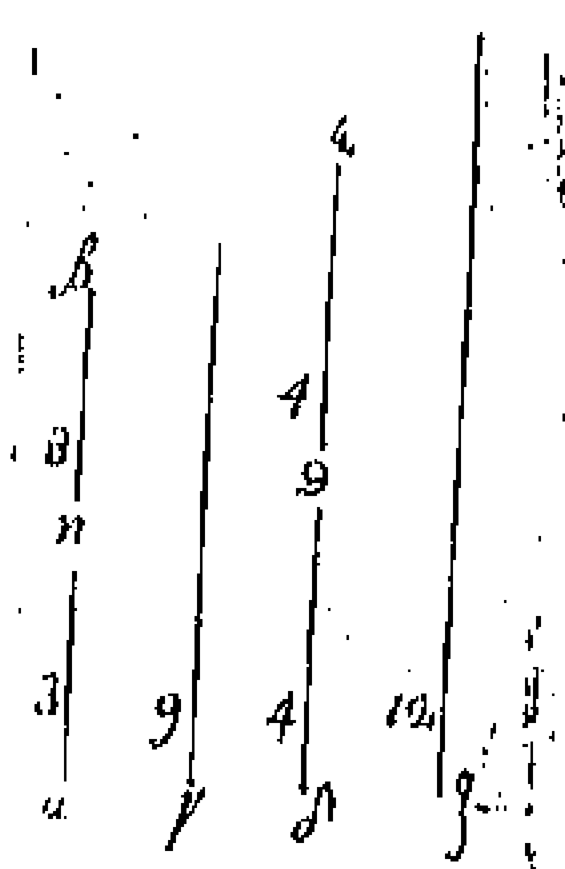
Ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι ἐὰν ἀριθμοὶ ἀριθμῶν ἴσων τὸ πλῆθος τὸ αὐτὸ μέρος ὦσιν, ἑκάτερος χωρὶς ἑκατέρου, ὅπερ ἐστὶ πρός τις ἀριθμὸς ἑτέρου τινὸς ἀριθμοῦ, καὶ πάντες ὁμοῦ οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πάντων τῶν λοιπῶν ἀριθμῶν ἔσονται τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ὁ ῥηθεὶς τοῦ ῥηθέντος.

Πρότασις Ι': Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐναλλὰξ, ἃ μέρη ἐστὶν ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου, ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου, ἢ μέρος.

Ἀριθμὸς ἤδη ὁ α β, ἀριθμοῦ τοῦ γ, ἔστω μέρη ὁποιαδηποτοῦν. καὶ ἕτερος ὁ δ ε, ἑτέρου τοῦ ζ, τὰ αὐτὰ, ἃ ὁ α β, τοῦ γ. Λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ, ἃ μέρη ἢ μέρος ἐστὶν ὁ α β, τοῦ δ ε, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ γ, τοῦ ζ. καὶ γὰρ τὴν ὑπόθεσιν, ὅσα μέρη ἐστὶν ἐν τῷ α β, τοῦ γ, τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ δ ε, τοῦ ζ. διῃρημένων δὲ, τοῦ μὲν α β, εἰς τὰ τοῦ γ, μέρη τὰ α η, η β, τοῦ δὲ ε δ, εἰς τὰ τοῦ ζ, τὰ δ θ, θ ε. ὃ πάντως γε μέρος ἐστὶν ὁ α η, τοῦ γ, τὸ αὐτὸ ἔσται καὶ ὁ δ θ, τοῦ ζ, καὶ διὰ τῆς ἀνωτέρω, ὃ μέρος ἢ μέρη ἐστὶν ὁ α η, τοῦ δ θ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη ἔσται καὶ ὁ γ, τοῦ ζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὃ μέρος ἢ μέρη ἐστὶν, ὁ η β, τοῦ θ ε, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη ἔσται καὶ ὁ αὐτὸς γ, τοῦ ζ, καὶ διὰ τοῦ πορίσματος τῆς ἀνωτέρω, ὃ μέρος ἢ μέρη ἐστὶν ὁ γ, τοῦ ζ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη ἔσται, καὶ ὁ α β, τοῦ δ ε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

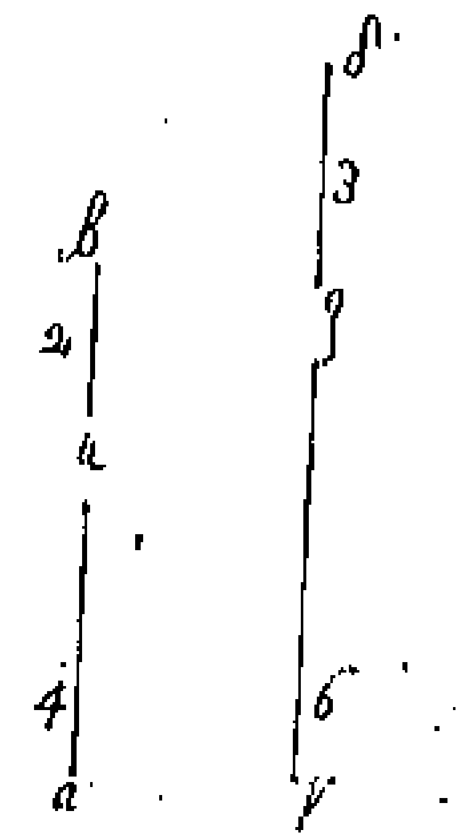
Eucl. lib. 7. Fig. 6.



Πρότασις ΙΑ': Θεώρημα.

Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλος πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθεὶς πρὸς ἀφαιρεθέντα, καὶ ὁ λοιπὸς πρὸς τὸν λοιπὸν ἔσται, ὡς ὅλος πρὸς ὅλον.

Ὅλος ἤδη ὁ α β, πρὸς ὅλον τὸν γ δ, ἔστω ὡς ὁ α ε, ἀφαιρεθεὶς πρὸς τὸν γ ζ, ἀφαιρεθέντα. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ λοιπὸς ε β, πρὸς τὸν λοιπὸν ζ δ, ἔσται ὡς ὅλος ὁ α β, πρὸς ὅλον τὸν γ δ. καὶ γὰρ τὴν η': τοῦ παρ: ὃ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη ὁ α β, τοῦ γ δ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ α ε, τοῦ γ ζ, καὶ διὰ τῆς ζ': τοῦ αὐτοῦ, καὶ ὁ ε β, τοῦ ζ δ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη, ὅπερ μέρος ἢ μέρη ἐστὶν ὁ α β, τοῦ γ δ.



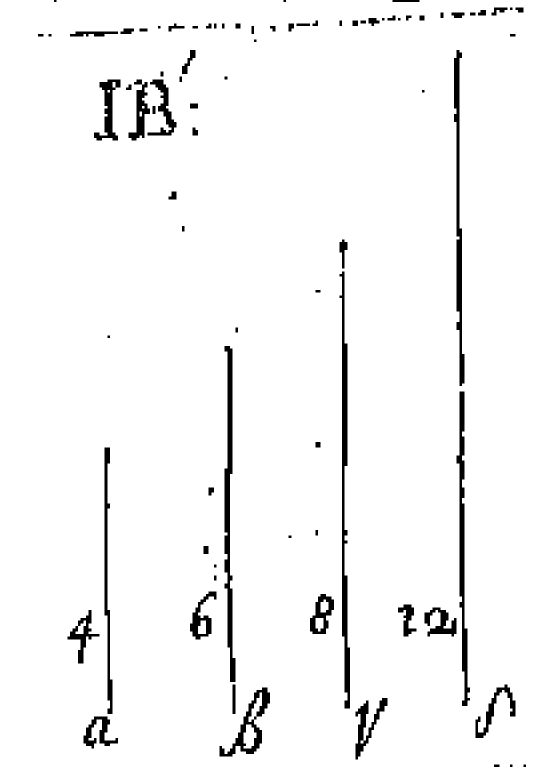
Πρότασις ΙΒ': Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον, ἔσται ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους.

Τῶν ἤδη α β, γ δ, ἀριθμῶν ἀνάλογον ὄντων, τουτέστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν δ. Λέγω, ὅτι καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως εἰσὶν οἱ α γ, πρὸς τοὺς β δ. καὶ μὲν γὰρ τὴν ὑπόθεσιν, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ α, τοῦ β, τὸ αὐτὸ καὶ ὁ γ, ἐστὶ τοῦ δ. καὶ διὰ τὴν ε': τοῦ παρόντος, καὶ συναμφότεροι οἱ α γ, τὸ αὐτὸ μέρος εἰσὶ τῶν β δ, ὅπερ ὁ α, τοῦ β. καὶ ἑπομένως ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως οἱ α γ, πρὸς τοὺς β δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 7. Fig. 7.

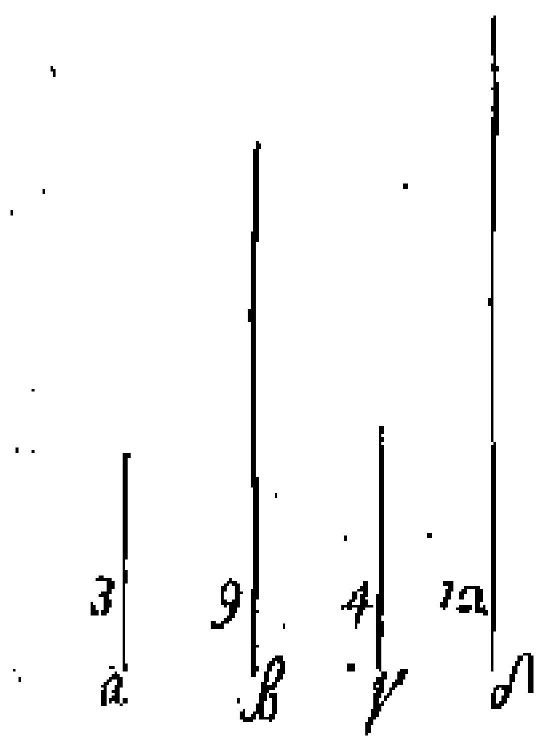
ΙΒ':



Πρότασις ΙΓ': Θεώρημα.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσι, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσονται.

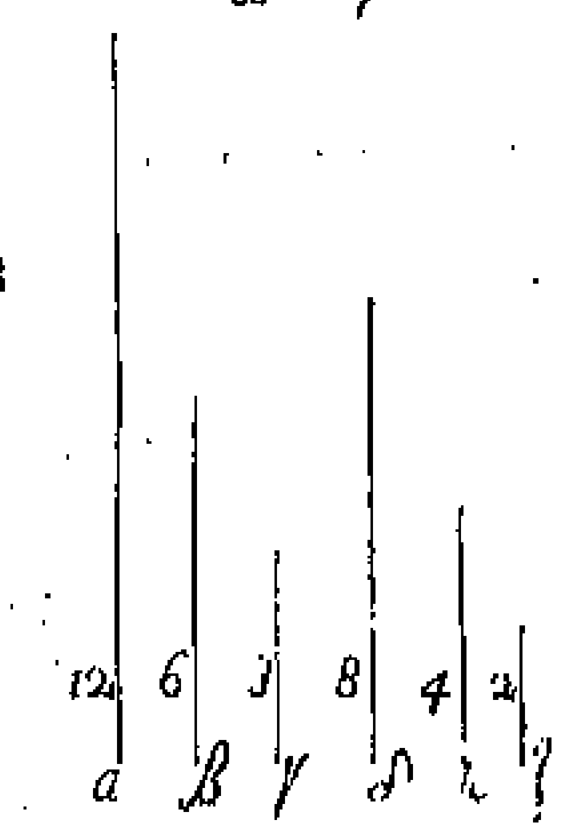
Τεσσάρων ἤδη ἀριθμῶν τῶν α β, γ δ, ἀνάλογον ὄντων, ἤτοι ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν δ. Λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἔσται, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν γ, οὕτως ὁ β, πρὸς τὸν δ. κατὰ γὰρ τὴν ὑπόθεσιν, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ α, τοῦ β, τὸ αὐτὸ ἐστὶ καὶ ὁ γ, τοῦ δ, καὶ κατὰ τὴν θ': τοῦ παρόντος, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ α, τοῦ γ, τὸ αὐτὸ καὶ ὁ β, τοῦ δ. καὶ ἑπομένως, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν γ, ὁ β, πρὸς τὸν δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Πρότασις ΙΔ': Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανόμενοι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι' ἴσου, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται.

Ἀριθμῶν ἤδη τῶν α, β, γ, καὶ δ, ε, ζ, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντων, καὶ σὺν δύο λαμβανομένων, τουτέστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ δ, πρὸς τὸν ε, καὶ ὡς ὁ β, πρὸς τὸν γ, ὁ ε, πρὸς τὸν ζ. Λέγω, ὅτι καὶ δι' ἴσου ἔσται, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν γ, ὁ δ, πρὸς τὸν ζ. διὰ γὰρ τῆς ἀνωτέρω, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ δ, πρὸς τὸν ε, ἔσται καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν δ, ὁ β, πρὸς τὸν ε. Αὖθις ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ β, πρὸς τὸν γ, ὁ ε, πρὸς τὸν ζ. ἔσται διὰ τῆς αὐτῆς, καὶ ὡς ὁ β, πρὸς τὸν ε, ὁ γ, πρὸς τὸν ζ. ὡς δὲ ὁ β, πρὸς τὸν ε,



ὧν καὶ ὁ α, πρὸς τὸν δ, ἄρα καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν δ, ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν γ, ὁ δ, πρὸς τὸν ζ. ὅπερ καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι καὶ τοὐναντίον, ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τῷ πλήθει δι' ἴσου λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ σὺν δύο λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται. εἰ γὰρ μή, οὔτε δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται.

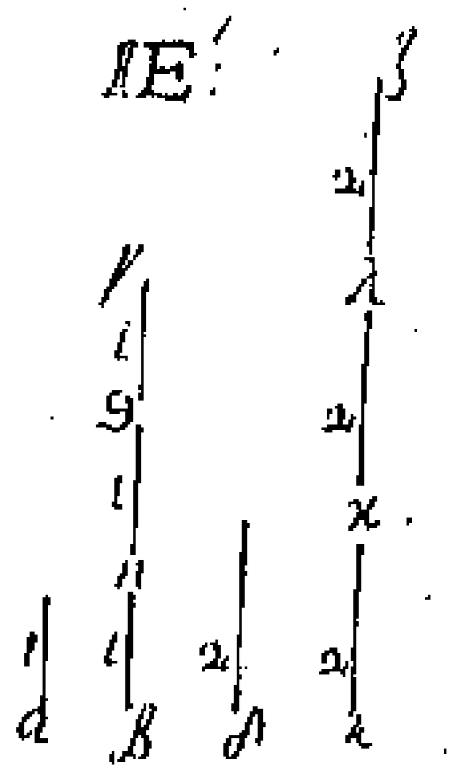
Πρότασις ΙΕ': Θεώρημα.

Ἐὰν μονὰς ἀριθμόν τινα μετρῇ, ἰσάκις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ ἐναλλὰξ ἰσάκις ἡ μονὰς τὸν τρίτον ἀριθμὸν μετρήσει, καὶ ὁ β': τὸν δ':

Μονὰς ἤδη ἡ α, μετρείτω τὸν βγ, καὶ ὁ δ, ἀριθμὸς τὸν εζ, ἰσάκις. Λέγω, ὅτι μετρήσει ἰσάκις καὶ ἡ α, μονὰς τὸν δ, καὶ ὁ βγ, τὸν εζ. καὶ μὲν γὰρ τὴν ὑπόθεσιν, ὅσαι μονάδες εἰσὶν ἐν τῷ βγ, ἴσαι τῇ α, τοσοῦτοι ἀριθμοί εἰσιν ἐν τῷ εζ, ἴσοι τῷ δ. Διαιρείσθω τοίνυν ὁ μὲν βγ, εἰς τὰς ἴσας μονάδας τῇ α, δῆλον: τὰς βη, ηθ, θγ, ὁ δὲ εζ, εἰς τοὺς τῷ δ, ἴσους ἀριθμούς, τοὺς εκ, κλ, λζ, ἔσαι ἄρα κατὰ τὴν θ': ὡς ἡ βη, μονὰς πρὸς τὸν εκ, οὕτως ἡ ηθ, πρὸς τὸν κλ, καὶ ἡ θγ, πρὸς τὸν λζ, καὶ δὲ τὴν ιβ': τοῦ παρόντος, ἔσαι ὡς ἡ βη, μονάς, πρὸς τὸν εκ, ἀριθμόν, οὕτως ὅλος ὁ βγ, πρὸς ὅλον τὸν εζ, ἡ δὲ βη, μονὰς ἴση ἐστὶ τῇ α, καὶ ὁ εκ, ἀριθμὸς ἴσος τῷ δ. ἄρα καὶ ὡς ἡ α, μονὰς πρὸς τὸν δ, γ': ἀριθμόν, οὕτως ἐστὶν ὁ βγ, β': πρὸς τὸν εζ, δ': ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

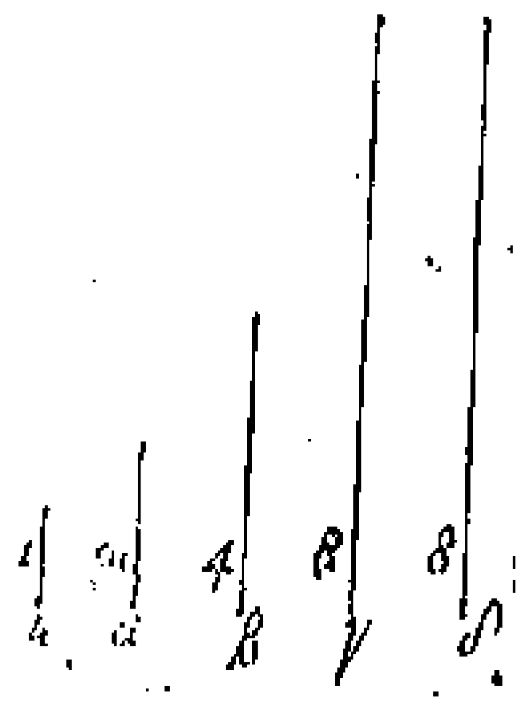
Eucl. Lib. 7. Fig. 8.

ΙΕ'



Πρότασις Ις': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινας, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν ἴσοι ἀλλήλοις ἔσονται.



Τῶν δύο ἤδη ἀριθμῶν α, β, τοῦ μὲν α, τὸν β, πολλαπλασιάσαντος, γενέσθω ὁ γ, τοῦ δὲ β, τὸν α, πολλαπλασ: γενέσθω ὁ δ. Λέγω δὴ τὸν γ, καὶ δ, ἴσους εἶναι. Ἐπεὶ γὰρ ὁ α, τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν γ, πεποίηκεν, ὁ β, ἄρα τὸν γ, μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ α, μονάδας, διὰ τὸν ιε': ὅρον. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ ε, μονὰς τὸν α, κατὰ τὰς ἐν τῷ αὐτῷ μονάδας, ἰσάκις ἄρα ἡ ε, μονὰς μετρεῖ τὸν α, καὶ ὁ β, τὸν γ, καὶ διὰ τῆς ἀνωτέρω, ἰσάκις ἡ μονὰς ἔτι μετρεῖ τὸν β,

καὶ ὁ

καὶ ὁ α, τὸν γ. δειχθήσεται ἰσάκις ἔτι μετρεῖν ἡ ε, μονὰς τὸν β, καὶ ὁ α, τὸν δ. ἄρα ὁ αὐτὸς α, ἰσάκις μετρεῖ τόν τε γ, καὶ δ. καὶ ἑπομένως οἱ γ, δ, ἴσοι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

Α': Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ μὲν πολλαπλασιάζων μετρεῖ τὸν γενόμενον κατὰ τὰς ἐν τῷ πολλαπλασιαζομένῳ μονάδας, ὁ δὲ πολλαπλασιαζόμενος τὸν αὐτόν, κατὰ τὰς ἐν τῷ πολλαπλασιάζοντι.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

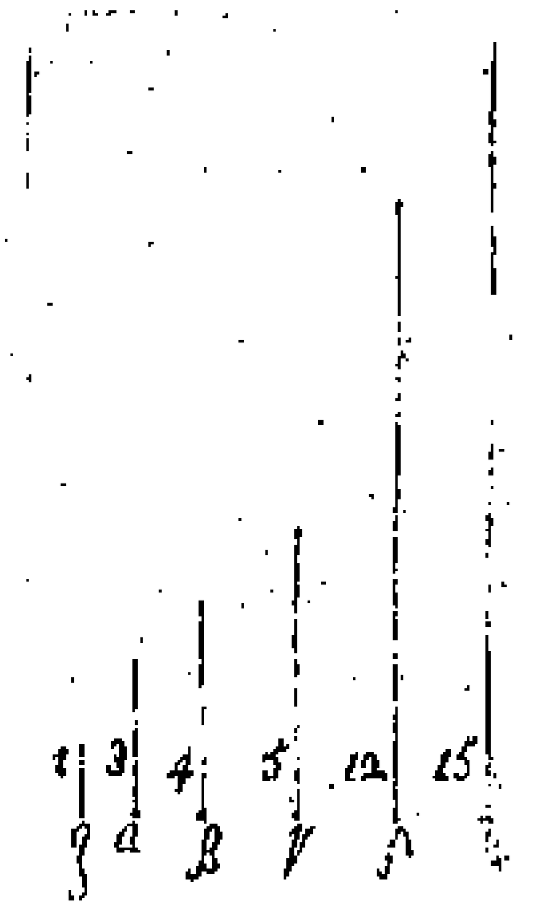
Β': Ἔτι ἡνίκα ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ἔσαι ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν πολλαπλασιάζοντα, ὁ πολλαπλασιαζόμενος πρὸς τὸν γενόμενον. ὥστε ἐὰν ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσῃ, ἔσαι ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, οὕτως ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν γενόμενον.

Πρότασις ΙΖ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσας ποιῇ τινας, οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἕξουσι τοῖς πολλαπλασιασθεῖσιν.

Ἀριθμὸς ἤδη ὁ α, τοὺς βγ, πολλαπλασιάσας τοὺς δε, ποιείτω. Λέγω δή, ὅτι ἐστίν, ὡς ὁ β, πρὸς τὸν γ, ὁ δ, πρὸς τὸν ε. ἐπεὶ γὰρ ὁ α, τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν δ, πεποίηκε. διὰ τοῦ β': πορίσματος τῆς ἀνωτέρω, ἔσαι ὡς ἡ ζ, μονὰς πρὸς τὸν α, ὁ β, πρὸς τὸν δ. ὡσαύτως ἐπεὶ ὁ α, αὖθις τὸν γ, πολλαπλασιάσας τὸν ε, πεποίηκεν. ἔσαι διὰ τοῦ αὐτοῦ, ὡς ἡ ζ, μονὰς πρὸς τὸν α, ὁ γ, πρὸς τὸν ε. καὶ διὰ τῆς ιδ': τοῦ ἐξ: ὡς ὁ β, πρὸς τὸν δ, ὁ γ, πρὸς τὸν ε. ἄρα διὰ τῆς ιγ': τοῦ παρόντος, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ὁ β, πρὸς τὸν γ, ὁ δ, πρὸς τὸν ε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

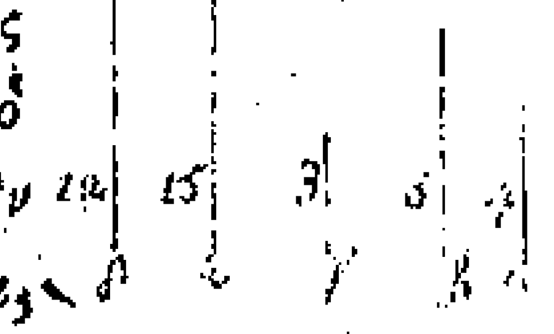
Eucl. lib. 7. Fig. 9.



Πρότασις ΙΗ': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον τοῖς πολλαπλασιάσασι.

Δύο ἤδη ἀριθμοὶ οἱ α, β, τὸν γ, πολλαπλασιάσαντες τοὺς δ, ε, ποιείτωσαν. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ δ, πρὸς τὸν ε. Ἐπεὶ γὰρ ὁ α, τὸν γ, πολλαπλασιάσας τὸν δ, πεποίηκε, καὶ ὁ γ, ἄρα διὰ τῆς ις': τοῦ παρόντος, τὸν α, πολλαπλασιάσας τὸν αὐτὸν δ, ποιεῖ. πολλαπλασιάσας δὲ καὶ τὸν β, τὸν ε, ποιεῖ. ἄρα διὰ τῆς ἀνωτέρω, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ δ, πρὸς τὸν ε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



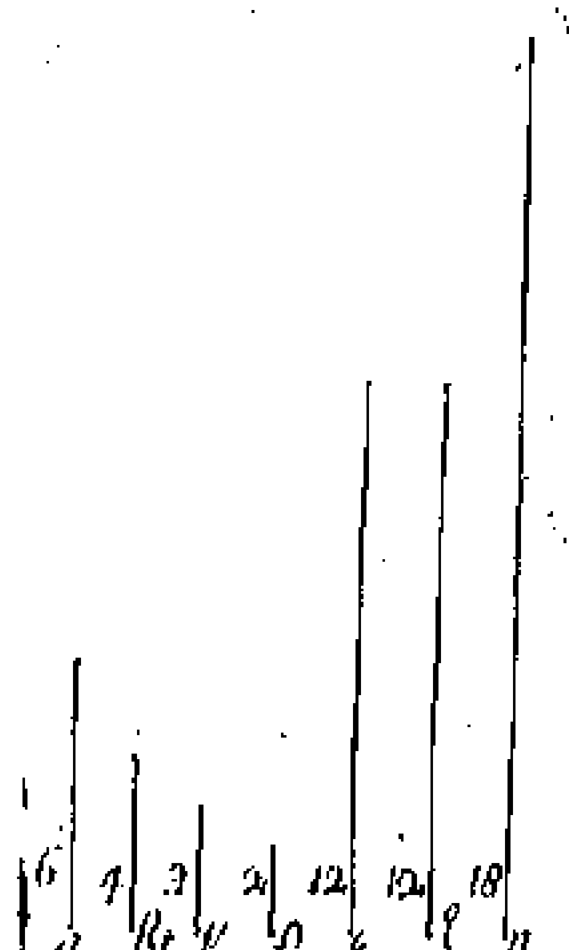
Πρό-

Πρότασις ΙΘ': Θεώρημα.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐκ τοῦ α': καὶ δ': γινόμενος ἀριθμὸς, ἴσος ἔσται τῷ ἐκ τοῦ β': καὶ γ': γινομένῳ ἀριθμῷ, καὶ ἐὰν ὁ ἐκ τοῦ α': καὶ δ': γινόμενος ἀριθμὸς, ἴσος ᾖ τῷ ἐκ τοῦ β': καὶ γ': οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται.

Τέσσαρες ἤδη ἀριθμοὶ οἱ α β, γ δ, ἔστωσαν ἀνάλογον ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν δ. καὶ ὁ μὲν α, τὸν δ, πολλαπλασιάσας τὸν ε, ποιείτω. ὁ δὲ β, τὸν γ, πολλαπλασ: τὸν ζ, ποιείτω. Λέγω δὴ τοὺς ε ζ, ἴσους εἶναι. πολλαπλασιασάτω ἔτι ὁ α, τὸν γ, καὶ τὸν η, ποιείτω. δείκνυται. Ἐπεὶ ὁ α, τοὺς δ γ, πολλαπλασιάσας τοὺς η ε, πεποίηκεν. ἔσται ἄρα διὰ τῆς ιζ'ι τοῦ παρόντος, ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ η, πρὸς τὸν ε, ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς β. ἄρα καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ η, πρὸς τὸν ε. Αὖθις ἐπεὶ οἱ α, β, τὸν γ, πολλαπλασιάσαντες τοὺς η, ζ, πεποιήκασιν. ἔσται ἄρα διὰ τῆς ἀνωτέρω, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ η, πρὸς τὸν ζ, ὡς δὲ ὁ α, πρὸς τὸν β, ἐδείχθη καὶ ὁ η, πρὸς τὸν ε. ἄρα οἱ ε ζ, πρὸς τὸν αὐτὸν η, τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον, καὶ ἑπομένως διὰ τῆς θ': τοῦ ε': οἱ ε ζ, ἴσοι εἰσὶν, ὅπερ ἐστὶ τὸ α': Λέγω δὴ ἔτι, ἐπεὶ ὁ ε, ἐκ τοῦ α': καὶ δ': γινόμενος, ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τοῦ β': καὶ γ': δῆλον: τῷ ζ, ἔσται ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν δ. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ὁ α, τοὺς γ, δ, πολλαπλασιάσας τοὺς η, ε, πεποίηκεν. ἄρα διὰ τῆς ιζ': ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, οὕτως ἔσται ὁ η, πρὸς τὸν ε, τουτέστι τὸν ζ. (Ἴσοι γὰρ οἱ ε, ζ.) Αὖθις ἐπεὶ οἱ α, β, τὸν γ, πολλαπλασιάσαντες τοὺς η, ζ, πεποιήκασιν. ἄρα διὰ τῆς ἀνωτέρω ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ η, πρὸς τὸν ζ. ὡς δὲ ὁ η, πρὸς τὸν ζ, δέδεικται καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ. ἄρα καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἔσται. ὅπερ ἐστὶ τὸ β': Ἐὰν ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 7. Fig. 10.



Πρότασις Κ': Θεώρημα.

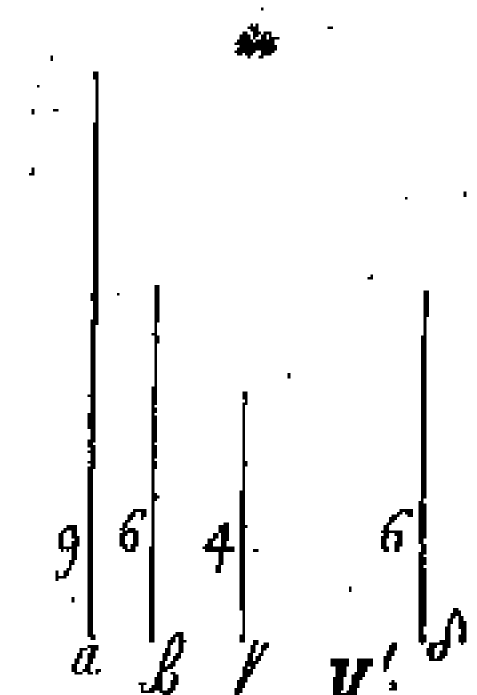
Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων, ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου. ἐὰν δὲ ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ᾖ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου, οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται.

Τρεῖς ἤδη ἀριθμοὶ οἱ α, β, γ, ἀνάλογον ἔστωσαν, δηλ: ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ β, πρὸς τὸν γ. Λέγω, ὅτι ὁ ὑπὸ τῶν α γ, ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ β. Τοῦ γὰρ δ, ἴσου τῷ β, γενομένου, ἔσται ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ δ, πρὸς τὸν γ, καὶ διὰ τῆς ἀνωτέρω, ὁ ὑπὸ τῶν α γ, ἴσος ἔσται τῷ ὑπὸ τῶν β δ, ὁ δὲ ὑπὸ τῶν β δ,

β δ, ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ β, μόνου. ἄρα ὁ ὑπὸ τῶν α γ, ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ β, ὅπερ ἐστὶ τὸ α':

Eucl. Lib. 7. Fig. 11.

Ἔστω δὴ ἔτι ὁ ὑπὸ τῶν α γ, ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ β. Λέγω, ὅτι ἔσται ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ β, πρὸς τὸν γ. Τοῦ γὰρ δ, αὖθις ἴσου τῷ β, ὑποκειμένου, ἐπεὶ ὁ ὑπὸ τῶν α γ, ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν β δ. ἔσται διὰ τῆς ἀνωτέρω, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ δ, πρὸς τὸν γ, ἔστι δὲ ὁ δ, ἴσος τῷ β, ἄρα καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ἔσται ὁ β, πρὸς τὸν γ, καὶ ἔστι τὸ β': ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

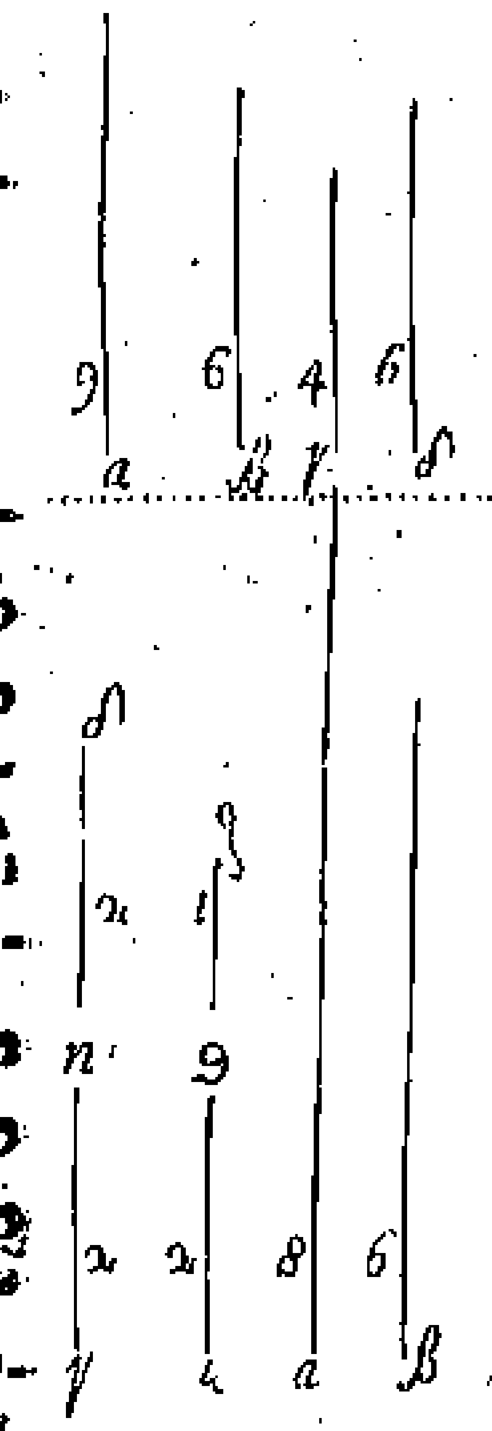


K'

Πρότασις ΚΑ': Θεώρημα.

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὥστε ὁ μείζων τὸν μείζονα, καὶ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα.

Ἔστωσαν ἤδη ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ γ δ, ε ζ. ἔστω δὲ καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ δ, πρὸς τὸν ε ζ. Λέγω, ὅτι ὁ γ δ, μετρήσει τὸν α, καὶ ὁ ε ζ, τὸν β, ἰσάκις, τουτέστιν ἑκάτερος ἑκατέρου μέρος ἐστὶ καὶ οὐ μέρη. εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστωσαν μέρη, α ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ γ δ, τοῦ α, τὰ αὐτά ἐστι καὶ ὁ ε ζ, τοῦ β, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν. διαιρεθέντων δὲ τοῦ μὲν γ δ, εἰς τὰ τοῦ α, μέρη, τὰ γ η, η δ, τοῦ δὲ ε ζ, εἰς τὰ τοῦ β, τὰ ε θ, θ ζ, ἔσονται ἴσα τὰ γ η, η δ, τοῖς ε θ, θ ζ, τῷ πλήθει. καὶ ἑπομένως ἔσται ὡς ὁ γ η, πρὸς τὸν ε θ, οὕτως ὁ γ δ, πρὸς τὸν ε ζ, ἄρα οἱ γ δ, ε ζ, ἐλάχιστοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς γ η, ε θ, ἐλάττοσιν αὐτῶν, ὅπερ ἄτοπον, οὐκ ἄρα μέρη, ἀλλ' ἑκάτερος μέρος ἐστὶν ἑκατέρου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



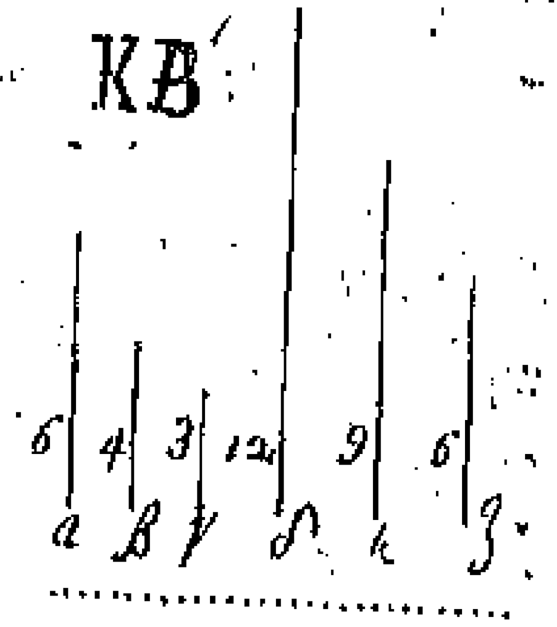
Πρότασις ΚΒ': Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσι τρεῖς ἀριθμοὶ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη ἡ ἀναλογία, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ ἔσονται λόγῳ.

Τριῶν ἤδη ἀριθμῶν τῶν α, β, γ, καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος τῶν δ ε ζ, ἔστω ἡ ἀναλογία τεταραγμένη, τουτέστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, ὡς δὲ ὁ β, πρὸς τὸν γ, ὁ δ, πρὸς τὸν ε. Λέγω, ὅτι ἐστὶ καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν γ, ὁ δ, πρὸς τὸν ζ. Ἐπεὶ γὰρ οἱ α β ε ζ, εἰσὶν ἀνάλογον, ὁ ὑπὸ τῶν α ζ, ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν β ε, κατὰ τὴν ιθʹ: διὰ τῆς αὐτῆς ἔτι καὶ ὁ ὑπὸ τῶν γ δ, ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν β ε, ἄρα ὁ ὑπὸ τῶν α ζ, ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν γ δ, κατὰ τὸ αʹ: ἀξίωμα. καὶ διὰ τῆς προειρημένης προτάσεως, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν γ, ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 7. Fig. 12.

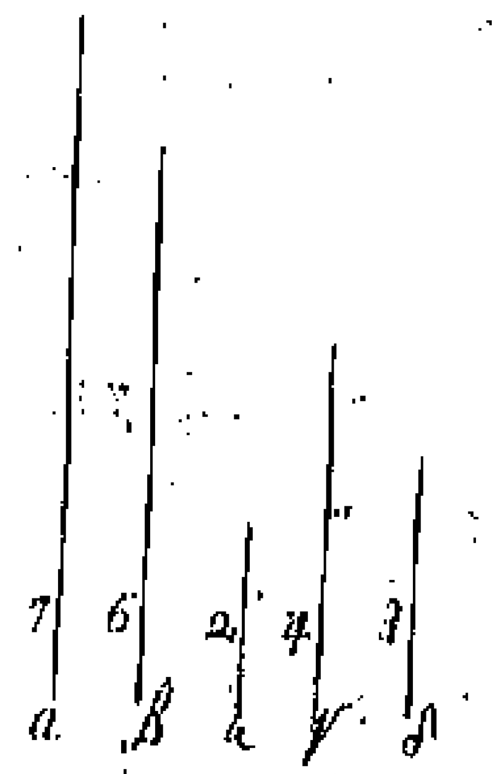
ΚΒʹ



Πρότασις ΚΓʹ: Θεώρημα.

Οἱ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Ἀριθμοὶ ἤδη οἱ α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν. Λέγω, ὅτι καὶ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, εἰ γὰρ μή, ἔσονταί τινες ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τοῖς α β. ἔστωσαν τοίνυν οὗτοι οἱ γ δ. καὶ ἐχέτω ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν δ, διὰ τῆς καʹ: ἄρα ὁ γ, τὸν α, καὶ ὁ δ, τὸν β, ἰσάκις μετροῦσι, μετρήτωσαν κατὰ τὰς ἐν τῷ ε, μονάδας οἱ γ δ, τοὺς α β. καὶ ὁ ε, ἄρα τοὺς α β, μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ γ, καὶ δ, μονάδας. ἄρα οἱ α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὄντες, κοινὸν μέτρον ἔχουσι τὸν ε, ὅπερ ἄτοπον. ἄρα οἱ α β, ἐλάχιστοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Πρότασις ΚΔʹ: Θεώρημα.

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

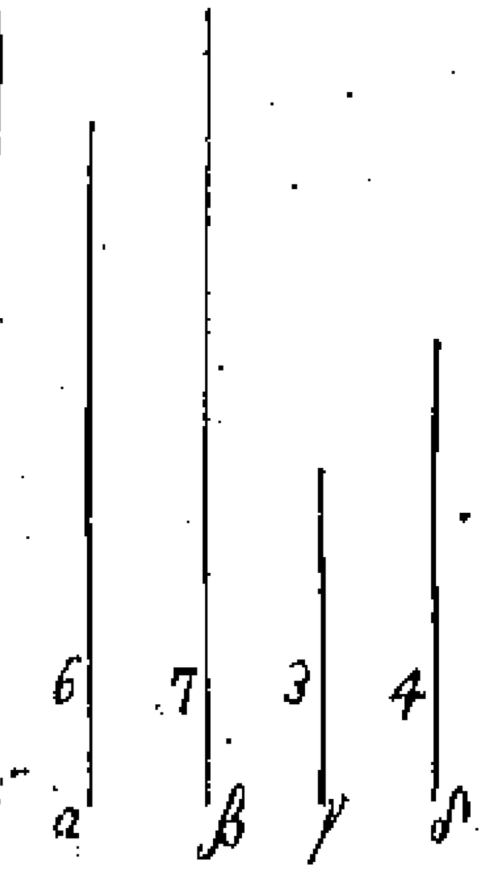
Οἱ α β, ἤδη ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ὄντες, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται. εἰ γὰρ μή, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός, καὶ ἔστω οὗτος ὁ γ. καὶ ὁσάκις μὲν ὁ αὐτὸς γ, τὸν α, μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ δ, ὁσάκις δὲ τὸν β, τοσαῦται ἔστωσαν ἐν τῷ ε. ὁ γ, τοίνυν τοὺς δ ε, πολλαπλασιάσας τοὺς α β, πεποίηκε. διὰ τῆς ιζʹ: ἄρα τοῦ παρόντος, ἔσται ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ δ, πρὸς τὸν ε, ἄρα οἱ δ ε, ἐλάσσονες τῶν α β, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν αὐτοῖς, ὅπερ ἄτοπον. οἱ ἐλάχιστοι ἄρα ἀριθμοὶ καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΚΕʹ: Θεώρημα.

Eucl. lib. 7. Fig. 13.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ τὸν ἕνα αὐτῶν μετρῶν ἀριθμὸς πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται.

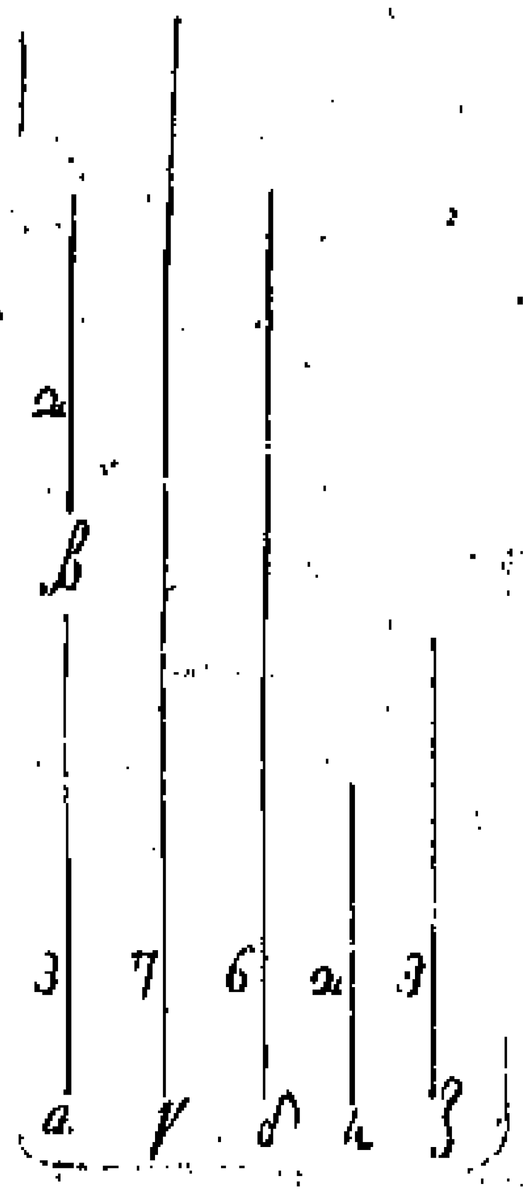
Τῶν α β, ἤδη ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους ὄντων, ὁ γ, τὸν α, μετρῶν πρὸς τὸν β, πρῶτος ἔσται. εἰ γὰρ μή, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός, καὶ ἔστω οὗτος ὁ δ. ἐπεὶ τοίνυν ὁ δ, τὸν γ, μετρεῖ, ὁ δὲ γ, τὸν α, ὁ δ, ἄρα καὶ τὸν α, μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν β, ἄρα οἱ α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὄντες, κοινὸν μέτρον ἔχουσι τὸν δ, ἀριθμόν. ὅπερ ἄτοπον. Ἐὰν ἄρα δύο ἀριθμοί, καὶ τὰ ἑξῆς.



Πρότασις Κϛʹ: Θεώρημα.

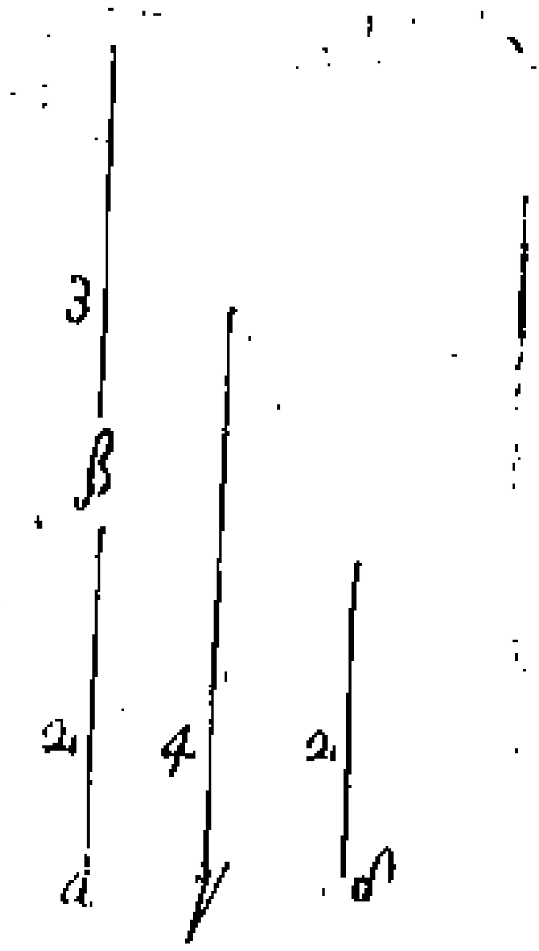
Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτοι ὦσι, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γινόμενος πρὸς τὸν αὐτὸν πρῶτος ἔσται.

Ἀριθμοὶ ἤδη οἱ α β, πρὸς τὸν γ, πρῶτοι ἔστωσαν, καὶ ὁ γινόμενος δὲ ἐξ αὐτῶν δ. Τὸν δ, λέγω πρῶτον εἶναι, πρὸς τὸν γ. εἰ γὰρ μή, μετρήσει τις ἀριθμὸς αὐτούς, καὶ ἔστω οὗτος ὁ ε. ὁ ε, ἄρα τὸν γ, μετρῶν πρὸς τὸν α, πρῶτός ἐστι διὰ τῆς ἀνωτέρω, ὁσάκις δὲ ὁ ε, τὸν δ, μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἐν τῷ ζ, ἔστωσαν. ἄρα καὶ ὁ ζ, τὸν δ, μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ ε, μονάδας. καὶ διὰ τοῦ πορίσματος τῆς ιϛʹ: ὁ ε, τὸν ζ, πολλαπλασιάσας τὸν δ, πεποίηκεν. ἀλλά γε καὶ ὁ α, τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν αὐτὸν δ, πεποίηκεν. ἄρα κατὰ τὴν ιθʹ: τοῦ παρόντος, ἔσται ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν α, ὁ β, πρὸς τὸν ζ, οἱ δὲ ε, καὶ α, πρῶτοί εἰσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς προδέδεικται. ἄρα διὰ τῆς καʹ: ὁ ε, τὸν β, μετρεῖ, καὶ ὁ α, τὸν ζ, ὁ δὲ ε, καὶ τὸν γ, μετρεῖ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν. οἱ β γ, ἄρα πρῶτοι ὄντες πρὸς ἀλλήλους, κοινὸν μέτρον ἔχουσι τὸν ε, ἀριθμόν. ὅπερ ἄτοπον. ὁ δ, ἄρα πρῶτός ἐστι πρὸς τὸν γ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Πρότασις ΚΖʹ: Θεώρημα.

Eucl. Lib. 7. Fig. 14.



Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ ἐκ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν γινόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται.

Δύο ἤδη ἀριθμῶν τῶν α, β, πρώτων πρὸς ἀλλήλους ὄντων, ὁ ἐκ τοῦ α, γινόμενος ἀριθμὸς, τουτέστιν ὁ γ, πρὸς τὸν β, πρῶτος ἔσται. Ἔστω γὰρ ἴσος τῷ α, ὁ δ. Ἐπεὶ τοίνυν ὁ α, πρῶτός ἐστι πρὸς τὸν β, ἄρα καὶ ὁ δ, πρῶτός ἐστι πρὸς τὸν αὐτὸν β· καὶ διὰ τῆς ἀνωτέρω, ὁ ὑπὸ τῶν α δ, γενόμενος ἀριθμὸς, πρῶτός ἐστι πρὸς τὸν β, ὁ δὲ γ, ὁ ἐκ τοῦ α, γινόμενος, ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν α δ, γινομένῳ, κατὰ τὸν ιηʹ. ὅρον. ὁ γ, ἄρα πρὸς τὸν β, πρῶτός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΗʹ: Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς δύο ἀριθμοὺς ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον πρῶτοι ὦσι, καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν γινόμενοι, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Δύο ἤδη ἀριθμοὶ οἱ α, β, πρὸς ἑκάτερον τὸν γ, δ, πρῶτοι ἔστωσαν, καὶ ἐκ μὲν τοῦ α, πρὸς τὸν β, ὁ ε, γενέσθω, ἐκ δὲ τοῦ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ζ. Λέγω τοὺς ε ζ, πρώτους πρὸς ἀλλήλους εἶναι. Ἐπεὶ γὰρ οἱ α β, πρὸς ἑκάτερον τῶν γ δ, πρῶτοί εἰσιν, ἄρα διὰ τῆς κϛʹ: καὶ ὁ γινόμενος ὑπὸ τῶν α β, τουτέστιν ὁ ε, πρῶτός ἐστι πρὸς ἑκάτερον τῶν γ δ. Αὖθις ἐπεὶ οἱ γ δ, πρῶτοί εἰσι πρὸς τὸν ε, διὰ τῆς αὐτῆς κϛʹ: καὶ ὁ ὑπὸ τῶν γ δ, γινόμενος, ἤτοι ὁ ζ, πρῶτός ἐστι πρὸς τὸν ε, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

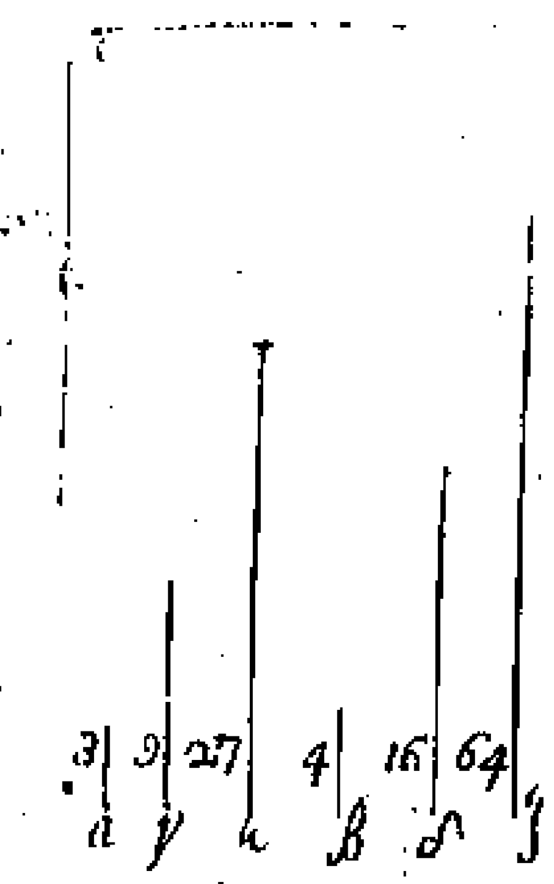
Πρότασις ΚΘʹ: Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ πολλαπλασιάσας ἑκάτερος ἑαυτὸν ποιῇ τινα, οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται, κἂν οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γινομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, κἀκεῖνοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται, καὶ ἀεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει.

Δύο ἤδη ἀριθμοὶ οἱ α, β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν, καὶ ὁ μὲν α, πρὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιαζόμενος τὸν γ, ποιείτω. πρὸς δὲ τὸν γ, τὸν ε, ποιείτω. ὁ δὲ β, πρὸς ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιαζόμενος τὸν δ, ποιείτω, πρὸς δὲ τὸν δ, τὸν

δ, τὸν ζ. Λέγω τοὺς γ δ, ε ζ, πρώτους πρὸς ἀλλήλους εἶναι. Ἐπεὶ γὰρ οἱ α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἐκ δὲ τοῦ α, γέγονεν ὁ γ, ὁ γ, ἄρα πρὸς τὸν β, διὰ τῆς κζʹ: πρῶτός ἐστιν. Αὖθις ἐπεὶ οἱ γ β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἐκ δὲ τοῦ β, γέγονεν ὁ δ, διὰ τῆς αὐτῆς ἄρα κζʹ: καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, πρῶτός ἐστιν, ὅπερ ἐστὶ τὸ α: εἶτα ἐπεὶ οἱ α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ ὁ δ, ἐκ τοῦ β, γέγονεν, ὁ δ, πρὸς τὸν α, πρῶτός ἐστιν, ὥστε ἀμφότεροι οἱ α, γ, πρὸς ἑκάτερον τῶν β δ, πρῶτοί εἰσι, καὶ διὰ τῆς κηʹ: ὁ ὑπὸ τῶν α γ, γινόμενος, τουτέστιν ὁ ε, πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν β δ, τουτέστι τὸν ζ, πρῶτός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

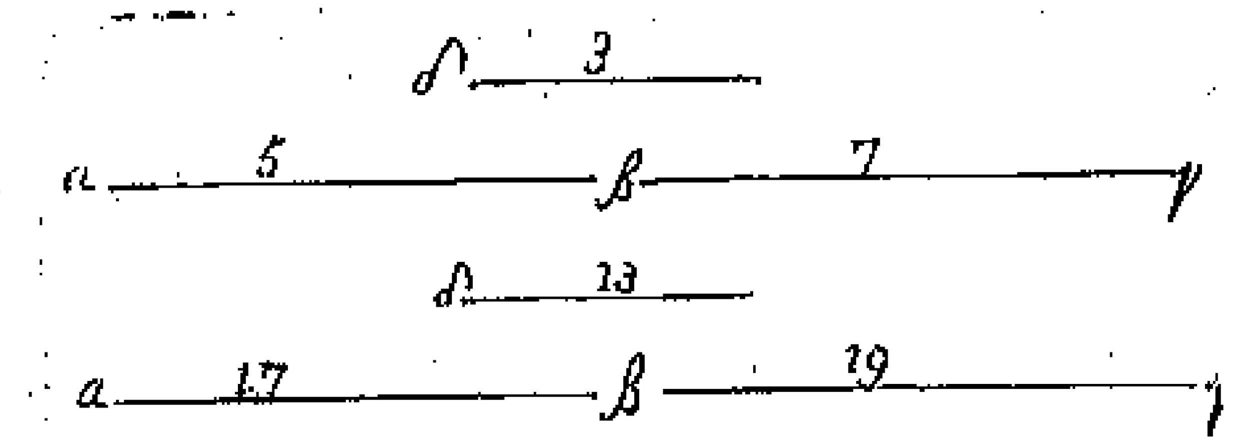
Eucl. lib. 7. Fig. 15.



Πρότασις Λʹ: Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ συναμφότερος πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν πρῶτος ἔσται, καὶ ἐὰν συναμφότερος πρὸς ἕνα τινὰ αὐτῶν, καὶ οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Eucl. Lib. 7. Fig. 16.



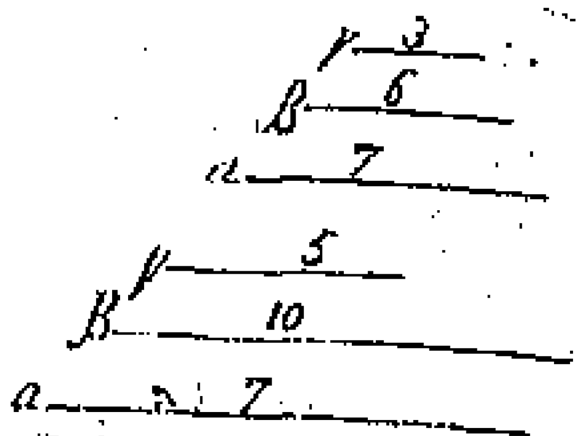
Δύο ἤδη ἀριθμοὶ οἱ α β, β γ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν τὸ πρῶτον. Λέγω, ὅτι καὶ συναμφότερος αὐτῶν δηλ: ὁ α γ, πρὸς τὸν α β, πρῶτός ἐστιν. εἰ γὰρ μὴ, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμὸς, καὶ ἔστω οὗτος ὁ δ, εἰ οὖν ὁ δ, τὸν α γ, καὶ α β, μετρεῖ, μετρεῖ πάντως γε καὶ τὸν β γ, μετρεῖ καὶ τὸν α β, οἱ α β, ἄρα β γ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὄντες, κοινὸν μέτρον ἔχουσι τὸν δ, ὅπερ ἄτοπον. οἱ α β, ἄρα, α γ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Ἔστωσαν δεύτερον οἱ α γ, α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Λέγω καὶ τοὺς α β, β γ, πρώτους εἶναι. εἰ γὰρ μὴ, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμὸς, καὶ ἔστω ὁ δ. ἄρα ὁ δ, τοὺς α β, β γ, μετρῶν, μετρήσει πάντως καὶ τὸν α γ, μετρεῖ δὲ καὶ τὸν α β, οἱ α γ, ἄρα α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὄντες, κοινὸν μέτρον ἔχουσι τὸν δ, ὅπερ ἄτοπον. οἱ α β, ἄρα β γ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΛΑ′: Θεώρημα.

Ἅπας πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμὸν, ὃν μὴ μετρεῖ, πρῶτός ἐστι.

Eucl. Lib. 7. Fig. 17.



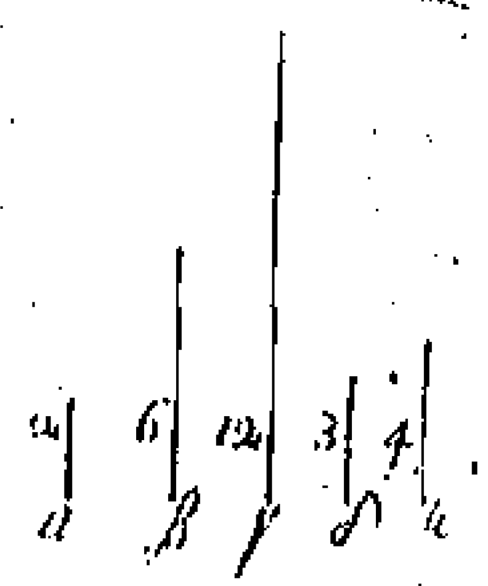
Πρῶτος ἤδη ἀριθμὸς ὁ α, τὸν β, μὴ μετρείτω. Λέγω τοὺς α β, πρώτους πρὸς ἀλλήλους εἶναι. εἰ γὰρ μὴ, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμὸς, καὶ ἔστω οὗτος ὁ γ· ὁ γ, τοίνυν ἀριθμὸς οὐκ ἔστιν ὁ αὐτὸς τῷ α. οὐ γὰρ μετρεῖ τὸν β, ὁ α, ὁ δὲ γ, μετρεῖ. ἐπεὶ οὖν ὁ γ, τοὺς β α, μετρεῖ, ὁ α, ἄρα πρῶτος ὢν ὑπ᾽ ἀριθμοῦ μετρεῖται, ὅπερ ἄτοπον. οἱ α, β, ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΛΒ′: Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, τὸν δὲ γενόμενον ἐξ αὐτῶν μετρῇ τις πρῶτος ἀριθμὸς, καὶ ἕνα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει.

Δύο ἤδη ἀριθμοὶ οἱ α, β, πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους, τὸν γ, ποιείτωσαν. μετρείτω δὲ τὸν γ, ἀριθμὸν ὁ δ, πρῶτος. Λέγω, ὅτι ὁ δ, καὶ ἕνα τῶν α β, μετρήσει, μὴ μετρείτω τοίνυν ὁ δ, τὸν α, μετρήσει πάντως τὸν β. ὁσάκις γὰρ ὁ δ, τὸν γ, μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ε, οἱ δ, ε, ἄρα ἑαυτοὺς πολλαπλασιάσαντες, τὸν γ, πεποιήκασιν, ἀλλὰ καὶ οἱ α, β, πολλαπλασιασθέντες ἀλλήλοις τὸν αὐτὸν γ, πεποιήκασι· κατὰ τὴν ιθ′: ἄρα, ἔσται ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν α, οὕτως ὁ β, πρὸς τὸν ε, οἱ δὲ α, δ, εἰσὶ πρῶτοι, ἄρα κατὰ τὴν κά: ὁ δ, τὸν β, μετρεῖ, καὶ ὁ α, τὸν ε. διὰ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται, ὅτι ἐὰν ὁ δ, τὸν β, οὐ μετρεῖ, τὸν α, μετρήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

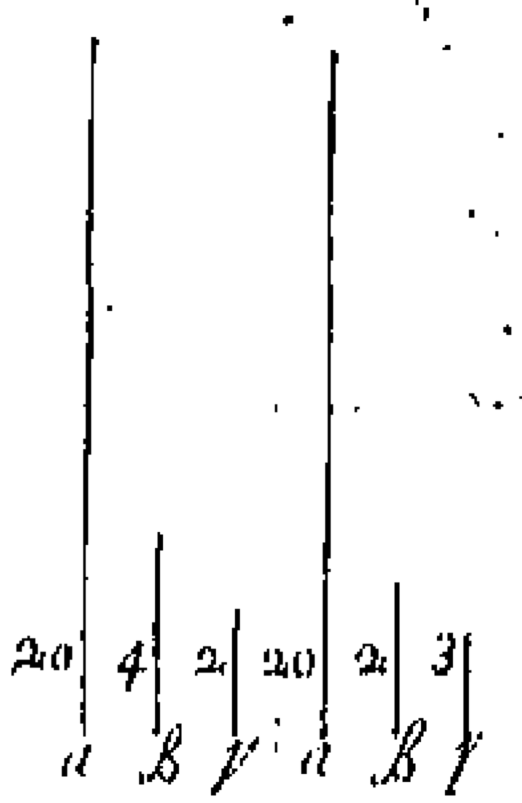
Eucl. Lib. 7. Fig. 18.



Πρότασις ΛΓ′: Θεώρημα.

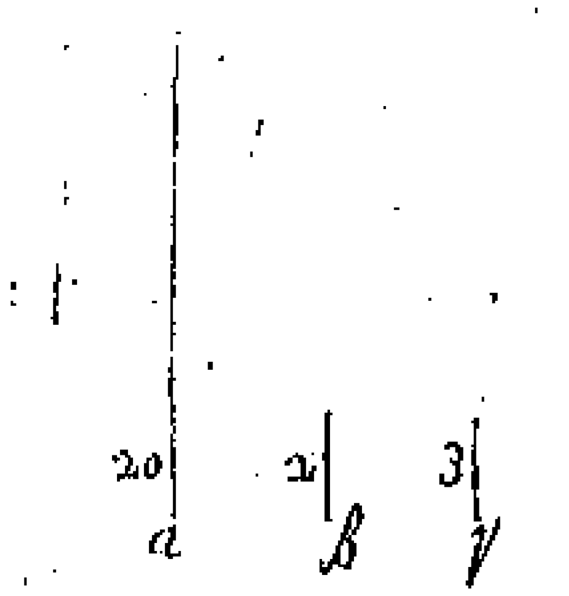
Ἅπας σύνθετος ἀριθμὸς, ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Σύνθετος ἤδη ἀριθμὸς ἔστω ὁ α. Λέγω, ὅτι ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. μετρείτω γὰρ αὐτὸν ὁ β, εἰ οὖν ὁ β, πρῶτός ἐστιν, εἴη ἂν τὸ ζητούμενον, εἰ δὲ μὴ, μετρείτω τὸν β, ὁ γ, ὃς καὶ τὸν α, μετρήσει. εἰ οὖν αὖθις ὁ γ, πρῶτός ἐστι, καὶ τὸν α, σύνθετον μετρεῖ, δέδεικται τὸ



προτεθέν. εἰ δὲ μὴ, μετρείτω καὶ τὸν γ, ἕτερος, ὃς μετρήσει καὶ τὸν α. καὶ τούτου ἐφ᾽ ἑξῆς γινομένου, εὑρεθήσεταί τις ἀριθμὸς τὸν α, μετρῶν. εἰ γὰρ μὴ, μετρήσουσι τὸν α, ἄπειροι ἀριθμοὶ, ὅπερ ἐν ἀριθμοῖς ἀδύνατον, ὡρισμένοι γάρ. καὶ ἄλλως.

Eucl. Lib. 7. Fig. 19.

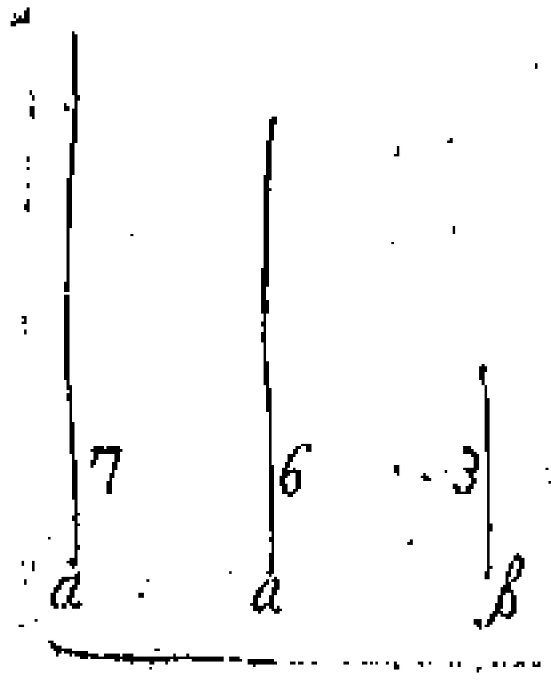


Εὑρεθήτω τοῦ α, συνθέτου ἀριθμοῦ ὁ ἐλάχιστος τῶν μετρούντων αὐτὸν, καὶ ἔστω ὁ β. Λέγω τὸν β, πρῶτον εἶναι, εἰ γὰρ μὴ, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμὸς, καὶ ἔστω οὗτος ὁ γ. ὁ γ, ἄρα ἐπεὶ τὸν β, μετρεῖ, μετρεῖ πάντως καὶ τὸν α, καὶ ἔστιν ἐλάττων τοῦ β, ὁ δὲ β, ἐστὶν, ὁ ἐλάχιστος τῶν τὸν α, μετρούντων, ὅπερ ἄτοπον, ἄρα ὁ β, πρῶτός ἐστι.

Πρότασις ΛΔ′: Θεώρημα.

Ἅπας ἀριθμὸς ἤτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Ὁ γὰρ α, ἀριθμὸς, εἰ μὲν πρῶτός ἐστι, δῆλον τὸ ζητούμενον. εἰ δὲ σύνθετος, διὰ τῆς ἀνωτέρω μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

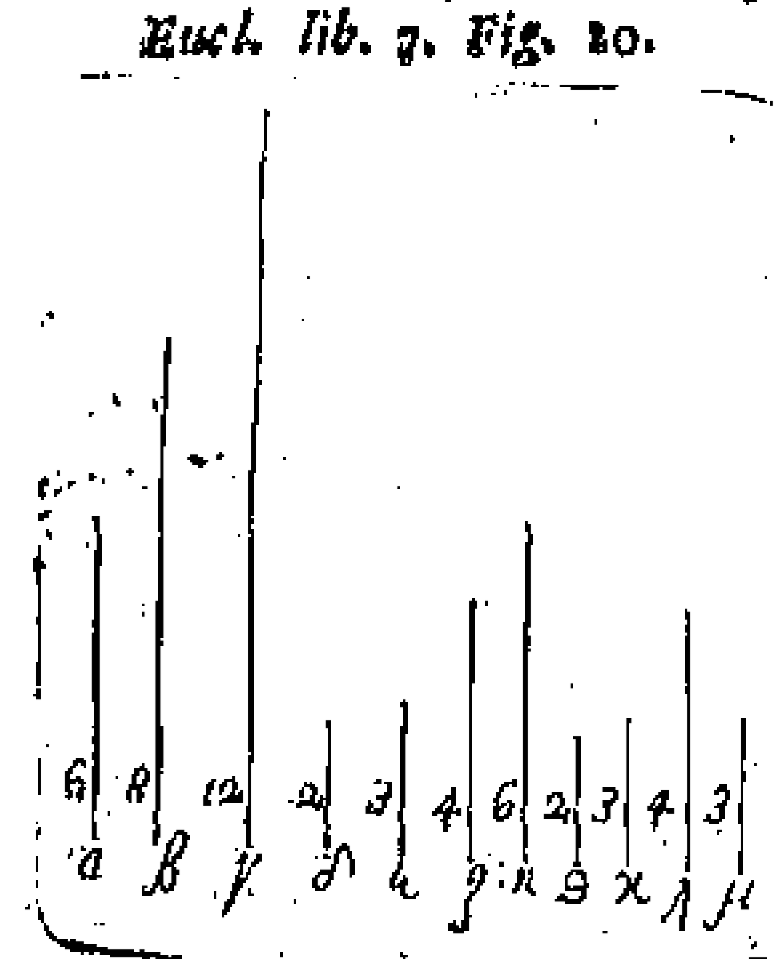


Πρότασις ΛΕ′: Πρόβλημα.

Ἀριθμῶν δοθέντων ὁποσωνοῦν εὑρεῖν τοὺς ἐλαχίστους τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Ἀριθμῶν ἤδη τῶν α β γ, δοθέντων, τοὺς ἐλαχίστους τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς δεῖ εὑρεῖν. Εὑρεθήτω διὰ τῆς γ′: τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν α β γ, καὶ ἔστω ὁ δ. καὶ ὁσάκις ὁ δ, ἕκαστον τῶν α β γ, μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τοῖς ε, ζ, η· ἕκαστος τοίνυν τῶν ε ζ η, μετρεῖ ἕκαστον τῶν α β γ, κατὰ τὰς ἐν τῷ δ, μονάδας. ἄρα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν οἱ ε ζ η, τοῖς α β γ. Λέγω δὲ, ὅτι καὶ ἐλάχιστοι, εἰ γὰρ μὴ, ἔστωσαν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τοῖς α β γ, οἱ θ κ λ, ἐλάσσονες τῶν ε ζ η· καὶ ἐπεὶ ἕκαστος τῶν θ κ λ, ἕκαστον τῶν α β γ, ἰσάκις μετρεῖ, ὁσάκις ὁ θ, τὸν α, μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ μ, ὁ μ, ἄρα τὸν θ, πολλαπλασιάσας τὸν α, πεποίηκεν. ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ δ, τὸν ε, πολλαπλασιάσας τὸν α, πεποίηκεν. ἄρα κατὰ τὴν ιθ′: ἔσται ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν θ, οὕτως ὁ μ, πρὸς τὸν δ. ἀλλ᾽ ὁ ε, μείζων ἐστὶ τοῦ θ, καὶ ὁ μ, ἄρα μείζων τοῦ δ. μετρεῖ δὲ ὁ μ, τοὺς α β γ, ἄρα ὁ μ, μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον τῶν α β γ, ὑπετέθη δὲ ὁ δ, τὸ μέγιστον αὐ-

Eucl. lib. 7. Fig. 20.



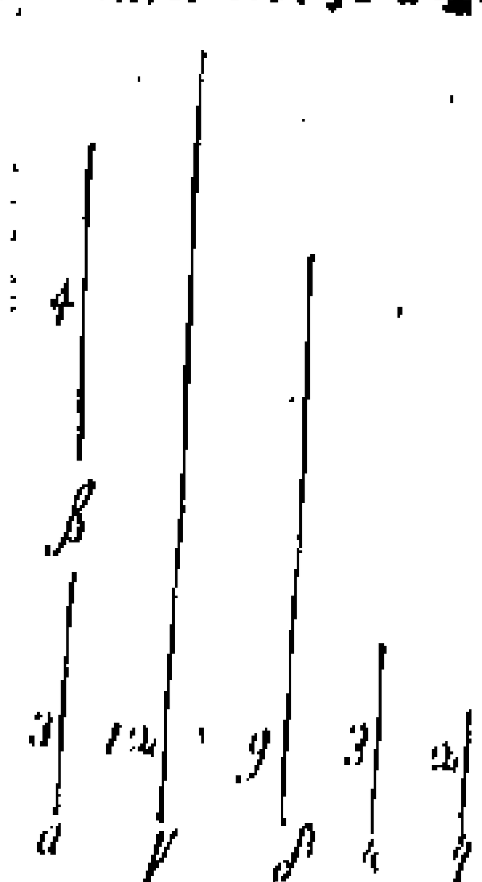
τῶν κοινὸν μέτρον, ὁ μ, ἄρα ἴσος τῷ δ. ἔστι δὲ καὶ μείζων, ὅπερ ἀδύνατον. οἱ ε ζ η, ἄρα ἐλάχιστοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Λϛʹ: Πρόβλημα.

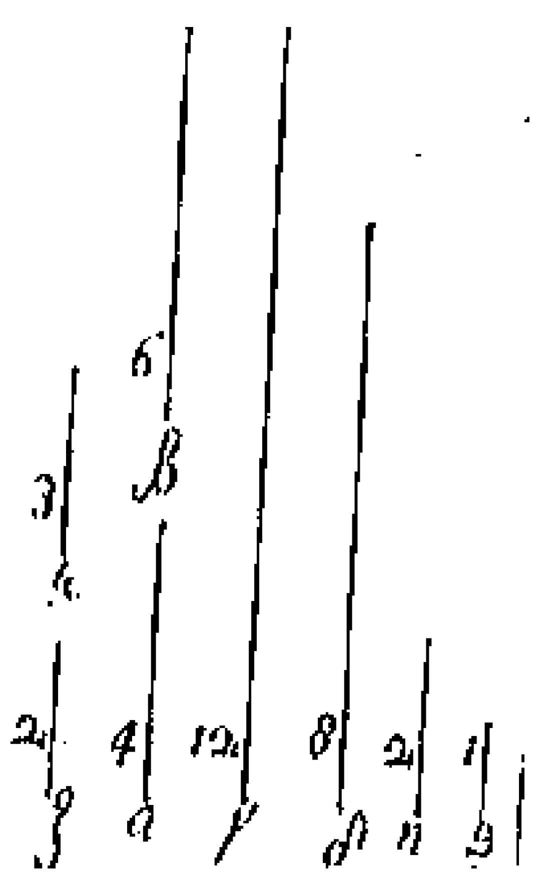
Δύο ἀριθμῶν δοθέντων, εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.

Δύο ἤδη ἀριθμῶν δοθέντων τῶν α, β, ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμὸν, δεῖ εὑρεῖν. Οἱ οὖν α β, ἢ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὔ. Ἔστωσαν πρότερον πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. πολλαπλασιάσαντες τοίνυν οἱ α β, ἀλλήλους τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ποιήσουσι κατὰ τὴν ιϛʹ: καὶ ἔστω οὗτος ὁ γ. ὃν κατὰ τὸ πόρισμα τῆς αὐτῆς ιϛʹ: ἑκάτερος τῶν α β, μετρεῖ. Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἐλάχιστος. εἰ γὰρ μὴ, μετρείτωσαν οἱ α, β, ἐλάττονα τοῦ γ, τὸν δ. καὶ ὁσάκις ὁ α, τὸν δ, μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ε, ὁσάκις δὲ ὁ β, τὸν αὐτὸν δ, μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ζ. ἐπεὶ τοίνυν ὁ α, τὸν γ, μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ β, μονάδας, τὸν δὲ δ, κατὰ τὰς ἐν τῷ ε, ὁ ε, ἄρα ἐλάττων ἐστὶ τοῦ β, ὅτι καὶ ὁ δ, ἐλάττων ὑπετέθη τοῦ γ. ὡσαύτως καὶ ὁ ζ, ἐλάττων ἐστὶ τοῦ α. Ἐπεὶ οὖν ὁ α, τοὺς β, ε, πολλαπλασιάσας τοὺς γ, δ, πεποίηκεν, ἔσται διὰ τῆς ιζʹ: ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ β, πρὸς τὸν ε. ὡσαύτως, ἐπεὶ ὁ β, τοὺς α, ζ, πολλαπλασιάσας τοὺς γ, δ, πεποίηκεν. ἔσται διὰ τῆς αὐτῆς ιζʹ: ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ α, πρὸς τὸν ζ. ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, οὕτω καὶ ὁ β, πρὸς τὸν ε, ἵνα ὡς ὁ β, πρὸς τὸν ε, ὁ α, πρὸς τὸν ζ, καὶ διὰ τῆς ιγʹ: ὡς ὁ β, πρὸς τὸν α, ὁ ε, πρὸς τὸν ζ. ἄρα οἱ β, α, πρῶτοι ὄντες ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς ε ζ, ἐλάττοσιν αὐτῶν, ὅπερ ἄτοπον, κατὰ τὴν κγʹ: ὁ γ, ἄρα ἐλάχιστός ἐστι, καὶ μετρεῖται ὑπὸ τῶν α, β. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. lib. 7. Fig. 21.



Μὴ ἔστωσαν δὴ οἱ α, β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. καὶ εἰλήφθωσαν οἱ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ ζ ε. ἄρα κατὰ τὴν ιθʹ: ὁ ὑπὸ τῶν α ε, καὶ ὁ ζ β. ἴσος ἐστὶν, ἔστω οὗτος ὁ γ· οἱ α β, ἄρα κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιϛʹ: μετροῦσι τὸν γ. Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἐλάχιστος. εἰ γὰρ μὴ, μετρείτωσαν οἱ α β, ἐλάττονα τοῦ γ, τὸν δ. καὶ ὁσάκις ὁ α, τὸν δ, μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ η, ὁσάκις δὲ τὸν αὐτὸν δ, ὁ β, μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ θ. ἐπεὶ τοίνυν ὁ α, τοὺς ε, η, πολλαπλασιάσας τοὺς γ δ, πεποίηκεν. ἔσται ἄρα διὰ τῆς ιζʹ: ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ε, πρὸς τὸν η, ὁ δὲ γ, μεί-



μεί-

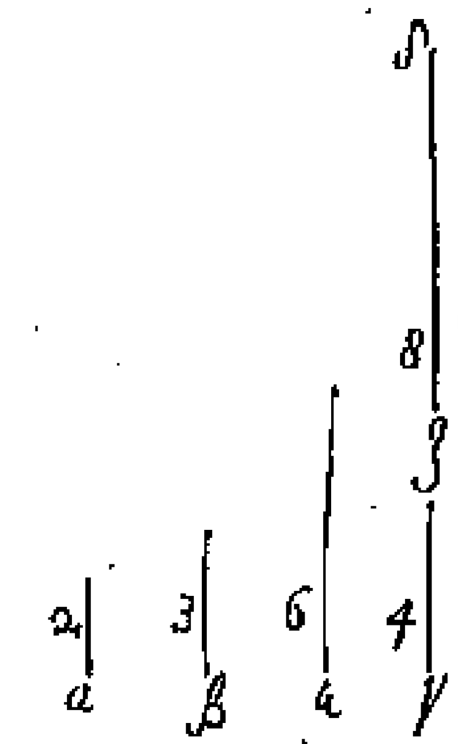
μείζων ἐστὶ τοῦ δ, καὶ ὁ ε, ἄρα μείζων ἐστὶ τοῦ η. Αὖθις ἐπεὶ ὁ β, τοὺς ζ, θ, πολλαπλασιάσας τοὺς γ, δ, πεποίηκε, διὰ τῆς αὐτῆς ἄρα ιζʹ: ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, οὕτως ἔσται ὁ ζ, πρὸς τὸν θ, καὶ ἐπομένως ὁ θ, ἐλάττων τοῦ ζ. ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, οὕτω καὶ ὁ ε, πρὸς τὸν η, ἄρα καὶ ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν η, ὁ ζ, πρὸς τὸν θ. καὶ διὰ τῆς ιγʹ: ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, ὁ η, πρὸς τὸν θ. ἄρα οἱ ε ζ, ἐλάχιστοι ὄντες τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι τοῖς η θ, ἐλάττοσιν αὐτῶν, ὅπερ ἄτοπον. ἄρα ὁ γ, ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν α, β, μετρεῖται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ΛΖʹ: Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμόν τινα μετρῶσι, καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπ' αὐτῶν μετρούμενος, τὸν αὐτὸν μετρήσει.

Οἱ α β, ἤδη ἀριθμοὶ μετρείτωσαν τὸν οἱονδήποτε ἀριθμὸν γ δ, ἐλάχιστον δὲ τὸν ε. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ ε, τὸν γ δ, μετρήσει, εἰ γὰρ μὴ, μετρείτω ὁ ε, ἐκ τοῦ γ δ, τὸν δ ζ, καὶ λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάττονα τὸν γ ζ. Ἐπεὶ οὖν οἱ α, β, τὸν ε, μετροῦσι, καὶ ὁ ε, τὸν δ ζ, οἱ α, β, ἄρα τὸν δ ζ, μετροῦσι, μετροῦσι δὲ ἔτι καὶ τὸν γ δ, μετρήσουσι πάντως καὶ τὸν γ ζ, ἐλάττονα τοῦ ε. ὅπερ ἄτοπον, ὁ ε, ἄρα τὸν γ δ, μετρεῖ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

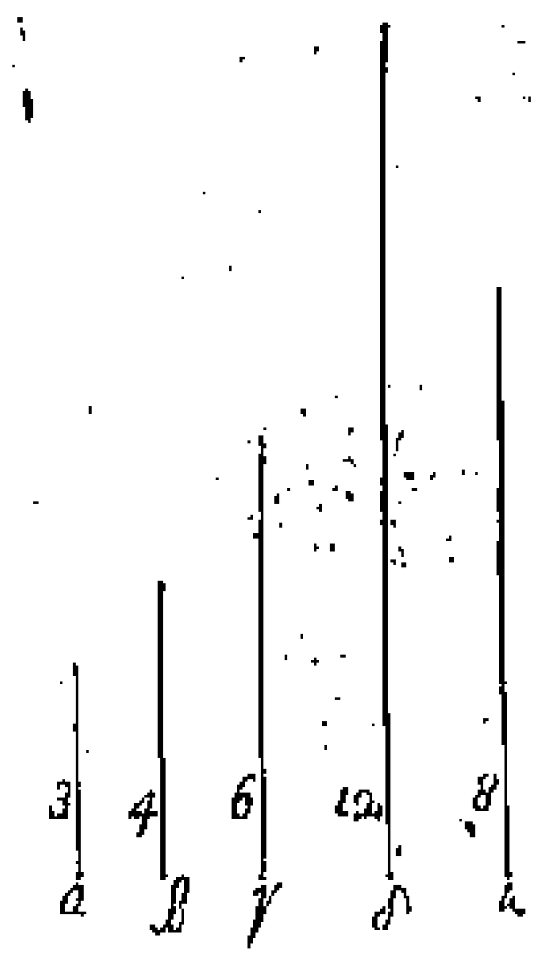
Eucl. lib. 7. Fig. 22.



Πρότασις ΛΗʹ: Πρόβλημα.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων εὑρεῖν, ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.

Ἔστωσαν ἤδη τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ α β γ, δεῖ δὲ ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμὸν εὑρεῖν. Εὑρεθήτω διὰ τῆς λϛʹ: ὁ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς παρὰ τῶν α β, καὶ ἔστω ὁ δ. τὸν δ, ἄρα ἤτοι μετρεῖ ὁ γ, ἢ οὔ. μετρείτω πρότερον, οἱ α, β, γ, ἄρα μετροῦσι τὸν δ. Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἐλάχιστος. εἰ γὰρ δυνατὸν μετρείτωσαν οἱ α, β, γ, ἐλάττονα τοῦ δ, ἀριθμὸν τὸν ε. Ἐπεὶ οὖν οἱ α, β, μετροῦσι τὸν ε, καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπ' αὐτῶν μετρούμενος, τουτέστιν ὁ δ, μετρήσει τὸν αὐτὸν ε, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ὁ δὲ δ, μείζων ἐστὶ τοῦ ε, ὅπερ ἄτοπον. ἄρα ὁ δ, ἐστὶν ὁ ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν α, β, γ, μετρούμενος. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

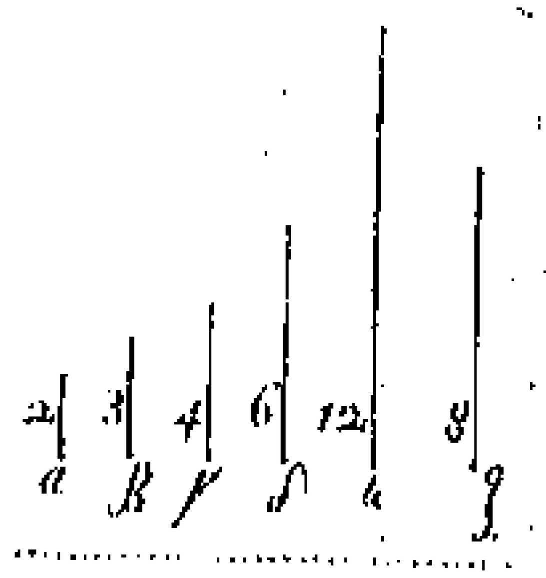


Μὴ μετρείτω δὴ ὁ γ, τὸν δ. καὶ εἰλήφθω διὰ τῆς λϛʹ: ὁ ὑπὸ τῶν β γ, ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς, καὶ ἔστω ὁ ε. Ἐπεὶ τοίνυν οἱ α, β, τὸν δ, μετροῦσι,

 καὶ

καὶ ὁ δ, τὸν ε, μετρεῖ κατὰ τὴν ἀνωτέρω. οἱ α β, ἄρα μετροῦσι καὶ τὸν ε, μετρεῖ δὲ αὐτὸν καὶ ὁ γ, οἱ α, β, γ, ἄρα τὸν ε, μετροῦσι. Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἐλάχιστος. εἰ γὰρ δυνατὸν μετρείτωσαν οἱ α β γ, ἐλάττονα τοῦ ε, ἀριθμὸν τὸν ζ. Ἐπεὶ οὖν οἱ α β, τὸν ζ, μετροῦσι, καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν ἄρα ἐλάχιστος μετρούμενος, τουτέστιν ὁ δ, τὸν αὐτὸν ζ, μετρήσει, κατὰ τὴν ἀνωτέρω. ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ γ, τὸν αὐτὸν ζ, μετρεῖ, μετρήσει πάντως τὸν ζ, καὶ ὁ ὑπὸ τῶν β γ, ἐλάχιστος μετρούμενος, τουτέστιν ὁ ε, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἀδύνατον. ὁ ε, ἄρα ἐλάχιστος ὢν, ὑπὸ τῶν α β γ, μετρεῖται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

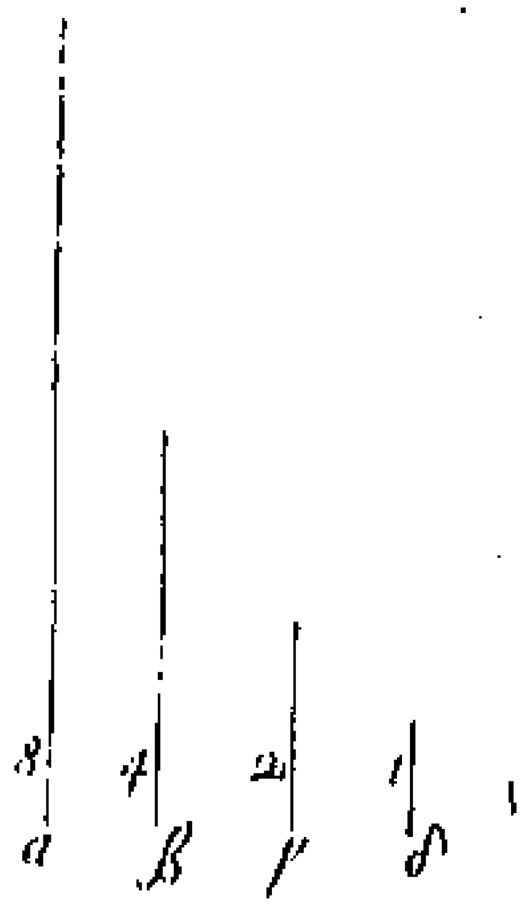
Eucl. Lib. 7. Fig. 23.



Πρότασις ΛΘ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς ὑπό τινος ἀριθμοῦ μετρῆται, ὁ μετρούμενος, ὁμώνυμον μέρος ἕξει τῷ μετροῦντι.

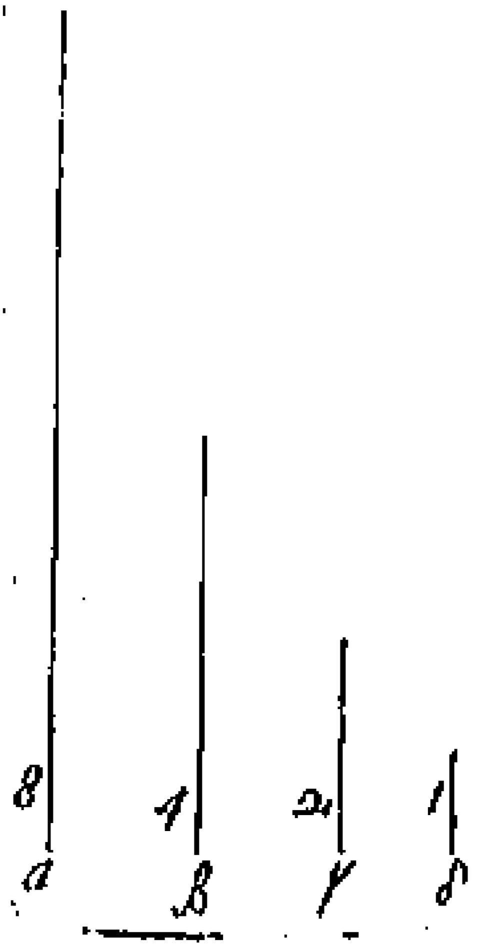
Ὁ α, ἤδη ἀριθμὸς ὑπὸ τοῦ β, ἀριθμοῦ μετρείσθω κατὰ τὰς ἐν τῷ γ, μονάδας. Λέγω τὸν γ, μέρος εἶναι τοῦ α, ὁμώνυμον τῷ β. ὁσάκις γὰρ ὁ β, τὸν α, μετρεῖ, τοσαυτάκις μετρεῖ καὶ ἡ δ, μονὰς τὸν γ, κατὰ τὸ β': πόρισμα τῆς ις': ἄρα ὡς ἡ δ, μονὰς πρὸς τὸν γ, ὁ β, πρὸς τὸν α, καὶ κατὰ τὴν ιγ': ὡς ἡ δ, μονὰς πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν α, ὃ οὖν μέρος ἐστὶν ἡ δ, μονὰς τοῦ β, τὸ αὐτὸ ἔσται, καὶ ὁ γ, τοῦ α. ἀλλ' ἡ δ, μονὰς, ὁμώνυμον μέρος ἐστὶ τοῦ β, καὶ ὁ γ, ἄρα τοῦ α, ὁμώνυμον μέρος ἐστὶ τῷ β, κατὰ τὸν γ': ὅρον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Πρότασις Μ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς μέρος ἔχῃ ὁτιοῦν, ὑπὸ ὁμωνύμου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται τῷ μέρει.

Ἀριθμὸς ἤδη ὁ α, μέρος ὁτιοῦν ἐχέτω τὸν β, ὁμώνυμος δὲ ἀριθμὸς τῷ β, ἔστω ὁ γ. Λέγω δὲ τὸν γ, μετρεῖν τὸν α. Ἐπεὶ γὰρ ὁ β, μέρος ἐστὶ τοῦ α, καὶ ὁ γ, ὁμώνυμος τῷ β, ἄρα ὃ μέρος ἐστὶν ὁ β, τοῦ α, τὸ αὐτὸ ἔσται καὶ ἡ δ, μονὰς τοῦ γ. ἔσται οὖν ὡς ἡ δ, πρὸς τὸν γ, ὁ β, πρὸς τὸν α, καὶ κατὰ τὴν ιγ': ὡς ἡ δ, μονὰς πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν α, ὁ γ, ἄρα μετρεῖ τὸν α. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

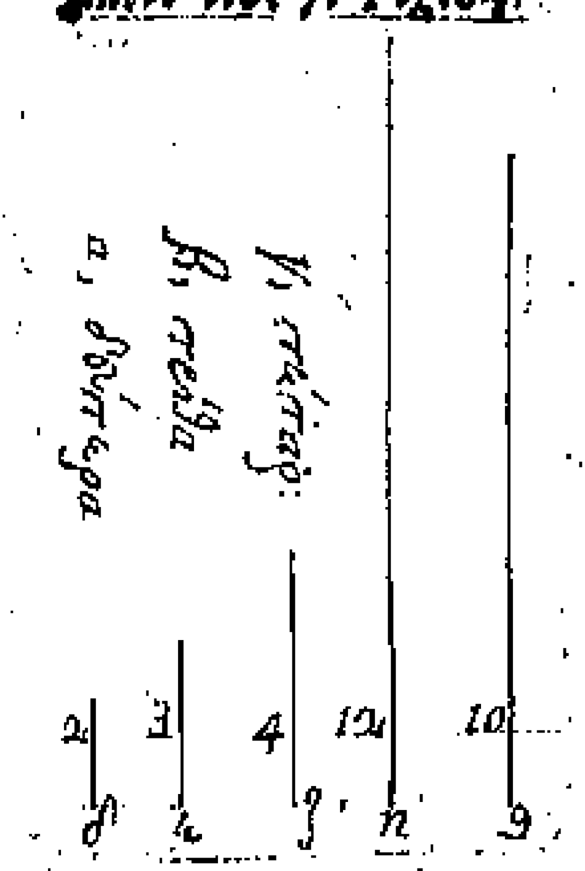


Πρότασις ΜΑ': Πρόβλημα.

Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὃς ἐλάχιστος ὢν, ἕξει τὰ δοθέντα μέρη.

Eucl. lib. 7. Fig. 24.

Ἔστωσαν ἤδη δοθέντα μέρη τὰ α β γ, καὶ τούτοις ὁμώνυμοι ἀριθμοὶ οἱ δ ε ζ. Εὑρέθητω κατὰ τὴν λη': ὁ ἐλάχιστος μετρούμενος ὑπὸ τῶν δ ε ζ, καὶ ἔστω ὁ η, ὁ η ἄρα μετρούμενος ὑπὸ τῶν δ ε ζ, οἷστισιν ὁμώνυμα μέρη ἐστὶ τὰ α β γ, ἔχει πάντως τὰ δοθέντα μέρη. Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἐλάχιστος, εἰ γὰρ μή. ἔστι τις ἐλάττων τοῦ η, ἔχων τὰ δοθέντα α β γ, μέρη, καὶ ἔστω ὁ θ. Ἐπεὶ τοίνυν ὁ θ, τὰ α β γ, μέρη ἔχει, τοῖς δὲ α β γ, ὁμώνυμοι ἀριθμοί εἰσιν οἱ δ ε ζ. ἄρα ὁ θ, ὑπὸ τῶν δ ε ζ, μετρηθήσεται, ἐλάσσων δὲ τοῦ η, ὅπερ ἄτοπον, ὁ η, ἄρα ἐστὶν ἐλάχιστος, ἔχων τὰ δοθέντα μέρη. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Τέλος τοῦ Ἑβδόμου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ

ΤΟΥ ΟΓΔΟΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

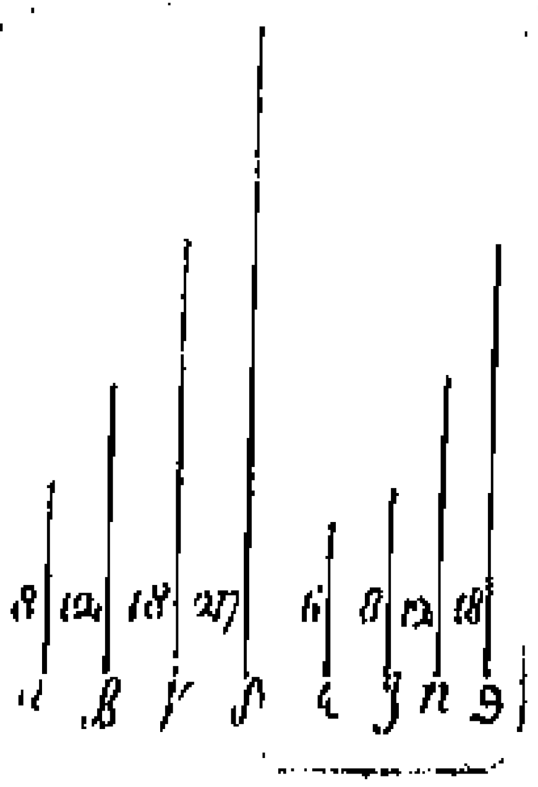
ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

Πρότασις Α΄: Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Ἀριθμοὶ ἤδη οἱ α β γ δ, ἔστωσαν ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν α δ, ἔστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Λέγω τοὺς α β γ δ, ἐλαχίστους εἶναι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. εἰ γὰρ μὴ, ἔστωσαν οἱ ε ζ η θ, ἐλάσσονες τῶν α β γ δ, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ αὐτοῖς. καὶ διὰ τῆς ιδ΄: ἄρα τοῦ ζ΄: ἐστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ ε, πρὸς τὸν θ. καὶ διὰ τῆς κα΄: τοῦ αὐτοῦ, μετρήσει ὁ α, * τὸν ε, καὶ ὁ δ, τὸν θ, οἱ μείζονες τοὺς ἐλάσσονας, ὅπερ ἄτοπον. Ἐὰν ἄρα ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 8. Fig. 1.



Πρότασις Β΄: Πρόβλημα.

Ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους, ὅσους ἐπιτάξῃ τις, ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ.

Ἔστω ἤδη δοθεὶς λόγος ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς ὁ τοῦ α, πρὸς τὸν β, καθ' ὃν δεῖ εὑρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους ἀριθμοὺς, ὅσους αὖ τις ἐπιτάξῃ. Ἐπιτάχθωσαν δὴ πρῶτον τρεῖς. καὶ ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν γ, ποιείτω, τὸν δὲ β, πολλαπλασιάσας τὸν δ, ποιείτω. ὡσαύτως, καὶ ὁ β, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν ε, ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ α, τοὺς α β, πολλαπλασιάσας τοὺς γ δ, πεποίηκε, κατὰ τὴν ιζ΄: τοῦ ζ΄: ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ἐστὶν ὁ γ, πρὸς τὸν δ. Αὖθις ἐπεὶ οἱ α β, τὸν β, πολλαπλασιάσαντες τοὺς δ ε, πεποιήκασιν, ἄρα ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ α, πρὸς τὸν β, κατὰ τὴν ιη΄: τοῦ ζ΄: ὡς δὲ, ὁ α,

ὁ α, πρὸς τὸν β, ἐστὶ καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἄρα κατὰ τὴν ια΄: τοῦ ε΄: ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ δ, πρὸς τὸν ε, οἱ τρεῖς ἄρα ἀριθμοὶ γ δ ε, ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ α, λόγῳ πρὸς τὸν β. Λέγω, ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. οἱ γὰρ α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὄντες, καὶ ἑαυτοὺς πολλαπλασιάσαντες τοὺς γ ε, πεποιήκασιν, ἄρα κατὰ τὴν κθ΄: τοῦ ζ΄: οἱ γ ε, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ἐὰν δὲ τέσσαρες ἐπιταχθῶσι, πολλαπλασιάσας ὁ α, τοὺς γ δ ε, ποιείτω τοὺς ζ η θ, ὁ δὲ β, τὸν ε, πολλαπλασιάσας τὸν κ, ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ α, τοὺς γ δ, πολλαπλασιάσας τοὺς ζ η, πεποίηκε, κατὰ τὴν ιζ΄: ἄρα τοῦ ζ΄: ἐστιν ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ ζ, πρὸς τὸν η, ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἐστὶ καὶ ὁ α, πρὸς β, ἄρα καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ἐστὶ καὶ ὁ ζ, πρὸς τὸν η. Αὖθις ἐπεὶ ὁ α, τοὺς δ ε, πολλαπλασιάσας τοὺς η θ, πεποίηκεν, ἐστὶ διὰ τῆς αὐτῆς, ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ η, πρὸς τὸν θ, ὡς δὲ ὁ δ, πρὸς τὸν ε, ἐστὶ καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ἐστὶ καὶ ὁ η, πρὸς τὸν θ. ὡς δὲ ὁ α, πρὸς τὸν β, δέδεικται καὶ ὁ ζ, πρὸς τὸν η, ἄρα καὶ ὡς ὁ ζ, πρὸς τὸν η, οὕτως ὁ η, πρὸς τὸν θ. ἐπεὶ δὲ καὶ οἱ α β, τὸν ε, πολλαπλασιάσαντες τοὺς θ κ, πεποιήκασιν. ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ἐστὶ καὶ ὁ θ, πρὸς τὸν κ, κατὰ τὴν ιη΄: τοῦ ζ΄: οἱ ζ, η, θ κ, ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ α, πρὸς τὸν β, λόγῳ. ὅτι δὲ καὶ πρῶτοι, δείκνυται, διὰ τῆς κθ΄: τοῦ ζ΄: οἱ γὰρ α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τοὺς γ ε, πρώτους πρὸς ἀλλήλους πολλαπλασιάσαντες, τοὺς ζ κ, πεποιήκασιν. Ἐὰν δὲ πέντε ἐπιταχθῶσι, πολλαπλασιασθήτωσαν οἱ εὑρεθέντες τέσσαρες ἐπὶ τὸν α, ὁ δὲ τέταρτος καὶ ἐπὶ τὸν β, καὶ οὕτως ἐφεξῆς ἀεὶ τοῦ ἐσχάτου ἐφ' ἑκάτερον πολλαπλασιαζομένου ἔσται τὸ ἐπιταχθέν.

Eucl. Lib. 8. Fig. 2.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Α΄: Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς ὦσιν, οἱ ἄκροι αὐτῶν τετράγωνοί εἰσιν. ἐὰν δὲ τέσσαρες, κύβοι.

Β΄: Ἔτι ἐὰν ἀριθμὸς ὁσουσδηποτοῦν ἑξῆς ἀνάλογον ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσας ποιῇ τινας, οἱ γινόμενοι ἑξῆς ἀνάλογον ἔσονται, καθ' ὃν, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν οἱ πολλαπλασιασθέντες, λόγον.

Γ΄. Ἔτι ἐὰν ὦσι δύο ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. πολλαπλασιάσας ἑκάτερος ἑαυτὸν χωρὶς, καὶ ἔτι ἀλλήλους, ποιήσουσι τρεῖς ἐλαχίστους ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ.

Πρό-

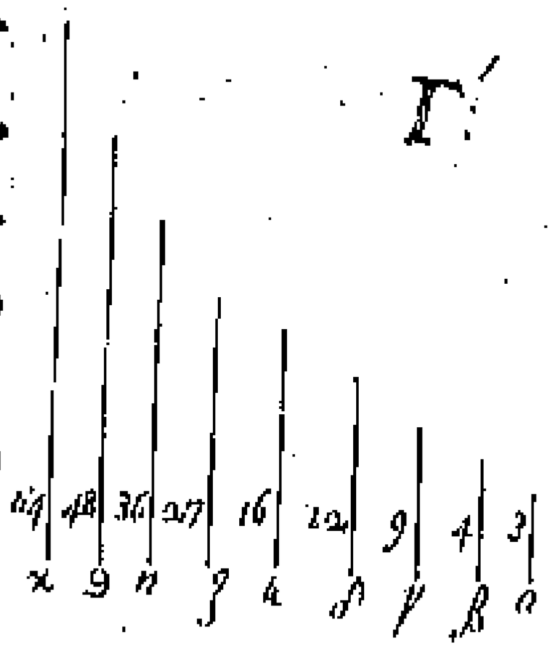
Πρότασις Γ': Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Ἔστωσαν ἤδη πρῶτον ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ α β, κατὰ τὴν κ δ': ἄρα τοῦ ζ': οἱ α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ἔστωσαν β': τρεῖς ἐν τῷ τοῦ α, λόγῳ πρὸς τὸν β, ὡς οἱ γ δ ε. Λέγω τοὺς ἄκρους αὐτῶν γ ε, πρώτους πρὸς ἀλλήλους εἶναι. Ἐπεὶ γὰρ οἱ α β, ἑαυτοὺς πολλαπλασιάσαντες, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, τοὺς γ ε, πεποιήκασιν, οἱ γ ε, ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ κατὰ τὴν κ θ': τοῦ ζ': ἔστωσαν δὴ καὶ τέσσαρες ὡς οἱ ζ η θ κ. ἐπεὶ οὖν κατὰ τὴν ἀνωτέρω οἱ α β, τοὺς γ ε, πολλαπλασιάσαντες τοὺς ζ κ, πεποιήκασιν, οἱ ζ κ, κατὰ τὴν κ θ': πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. Τῷ αὐτῷ λόγῳ δείκνυται, κἂν πέντε ὦσιν, ἢ καὶ πλείονες, τοὺς ἄκρους αὐτῶν πρώτους πρὸς ἀλλήλους εἶναι, ἀεὶ γὰρ οἱ τῶν προκειμένων ἄκροι ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἄκρων τῶν προηγουμένων ἐπὶ τοὺς δύο πρώτους γίνονται.

Eucl. Lib. 8. Fig. 3.

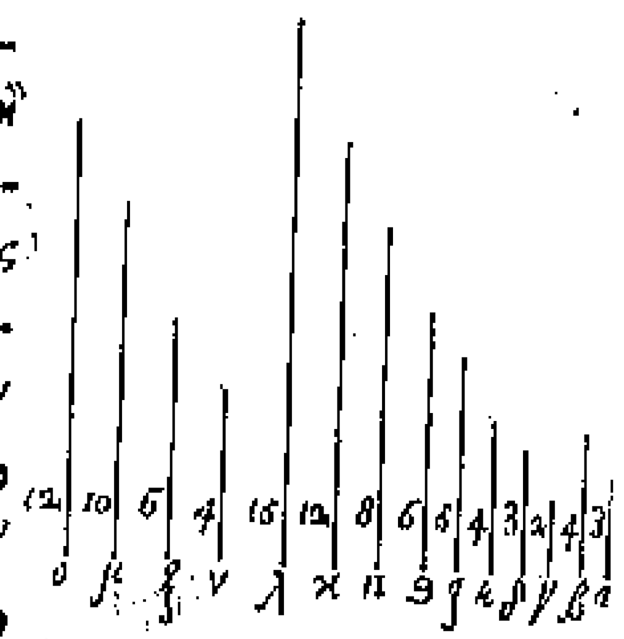
Γ'



Πρότασις Δ': Πρόβλημα.

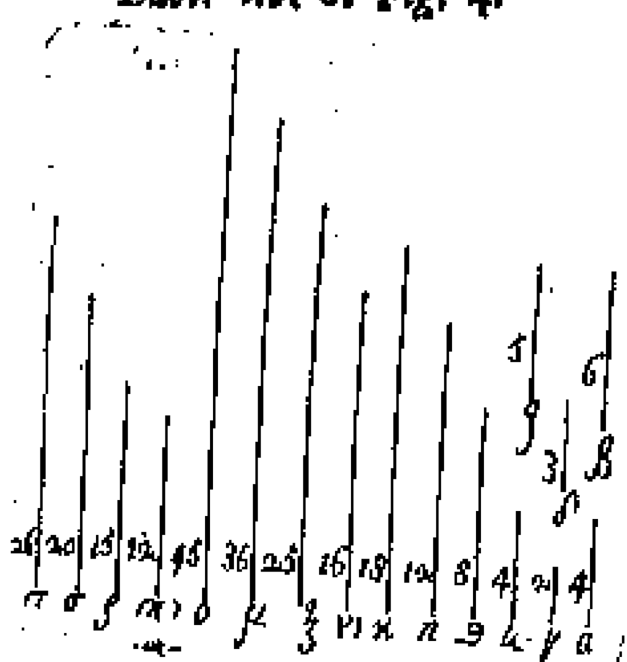
Λόγων δοθέντων ὁποσωνοῦν ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς, ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἐλαχίστους, ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις.

Ἔστωσαν ἤδη ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς λόγοι ὁ τοῦ α, πρὸς τὸν β, ὁ τοῦ γ, πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ τοῦ ε, πρὸς τὸν ζ. Εὑρεθήτω δὴ κατὰ τὴν λ ς': τοῦ ζ': ὁ ὑπὸ τῶν β γ, ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμός, καὶ ἔστω ὁ η. καὶ ὁσάκις μὲν ὁ β, τὸν η, μετρεῖ, τοσαυτάκις μετρείτω καὶ ὁ α, τὸν θ, ὁσάκις δὲ ὁ γ, τὸν η, μετρεῖ, τοσαυτάκις μετρείτω καὶ ὁ δ, τὸν κ. τὸν δὲ κ, ἤτοι μετρεῖ ὁ ε, ἢ οὔ. μετρείτω πρότερον. καὶ ὁσάκις ὁ ε, τὸν κ, μετρεῖ, τοσαυτάκις μετρείτω καὶ ὁ ζ, τὸν λ. Λέγω τοὺς θ η, κ λ, ἑξῆς ἀνάλογον εἶναι ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις. Ἐπεὶ γὰρ οἱ α β, ἰσάκις μετροῦσι τοὺς θ η, κατὰ τὴν ιε': ἄρα τοῦ ε': ἔστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ θ, πρὸς τὸν η. διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ η, πρὸς τὸν κ, καὶ ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, ὁ κ, πρὸς τὸν λ. Λέγω, ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. εἰ γὰρ μή, ἔστωσαν ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις ἑξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν θ η κ λ, οἱ ν ξ μ ο. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ ν, πρὸς ξ, οἱ δὲ α β, ἐλάχιστοί εἰσιν, ἄρα κατὰ τὴν κ α':



κ α': τοῦ ζ': ὁ μὲν α, τὸν ν, μετρεῖ, ὁ δὲ β, τὸν ξ. διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ ὁ γ, τὸν ξ, μετρεῖ, ἐπεὶ ὑποτίθεται ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ξ, πρὸς τὸν μ. κατὰ τὴν λ ζ': ἄρα τοῦ ζ': καὶ ὁ ὑπὸ τῶν β γ, μετρούμενος, δηλονότι ὁ η, μετρήσει τὸν ξ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἀδύνατον. οἱ θ η κ λ, ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι.

Eucl. lib. 8. Fig. 4.



Μὴ μετρείτω δὴ ὁ ε, τὸν κ. εἰλήφθω διὰ τῆς λ ς': τοῦ ζ': ὁ ὑπὸ τῶν ε κ, ἐλάχιστος μετρούμενος, καὶ ἔστω ὁ μ. καὶ ὁσάκις μὲν ὁ κ, τὸν αὐτὸν μ, μετρεῖ, τοσαυτάκις μετρείτω καὶ ἑκάτερος τῶν θ η, ἑκάτερον τῶν ν ξ, ὁσάκις δὲ ὁ ε, τὸν μ, μετρεῖ, μετρείτω καὶ ὁ ζ, τὸν ο, οἱ θ η, τοὺς ν ξ, μετροῦσιν ἰσάκις, ἔστιν ὡς ὁ θ, πρὸς τὸν η, ὁ ν, πρὸς τὸν ξ, ὡς δὲ ὁ θ, πρὸς τὸν η, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, ἄρα καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ ν, πρὸς τὸν ξ. διὰ τὰ αὐτὰ ἔσται καὶ ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ξ, πρὸς τὸν μ. Αὖθις ἐπεὶ ὁ ε, τὸν μ, καὶ ὁ ζ, τὸν ο, ἰσάκις μετρεῖ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, ὁ μ, πρὸς τὸν ο, οἱ ν ξ μ ο, ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. εἰ γὰρ μή, ἔστωσαν ἑξῆς ἀνάλογον ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν ν ξ μ ο, οἱ π ρ σ τ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ π, πρὸς τὸν ρ, οἱ δὲ α β, ἐλάχιστοί εἰσιν, ἄρα κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν κ α': ὁ β, τὸν ρ, μετρεῖ, διὰ τῆς αὐτῆς δὲ καὶ ὁ γ, τὸν ρ, μετρεῖ. καὶ ἑπομένως κατὰ τὴν λ ζ': τοῦ ζ': μετρεῖ τὸν ρ, καὶ ὁ ὑπὸ τῶν β γ, ἐλάχιστος μετρούμενος, τουτέστιν ὁ η. ἔστι δὲ ὡς ὁ η, πρὸς τὸν κ, οὕτως ὁ ρ, πρὸς τὸν σ, καὶ κατὰ τὴν ι γ': τοῦ ζ': καὶ ὡς ὁ η, πρὸς τὸν ρ, ὁ κ, πρὸς τὸν σ, ὁ δὲ η, τὸν ρ, μετρεῖ, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ κ, τὸν σ, μετρεῖ δὲ καὶ ὁ ε, τὸν σ, οἱ ε κ, ἄρα τὸν σ, μετροῦσι. καὶ ἑπομένως διὰ τῆς λ ζ': τοῦ ζ': καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν ε κ, μετρούμενος, μετρεῖ τὸν σ, οὗτος δέ ἐστιν ὁ μ, ὁ μ, ἄρα μετρεῖ τὸν σ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἀδύνατον. οἱ ν ξ μ ο, ἄρα ἐλάχιστοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Λῆμμα εἰς ἀπόδειξιν τῆς ἑπομένης ε': προτάσεως.

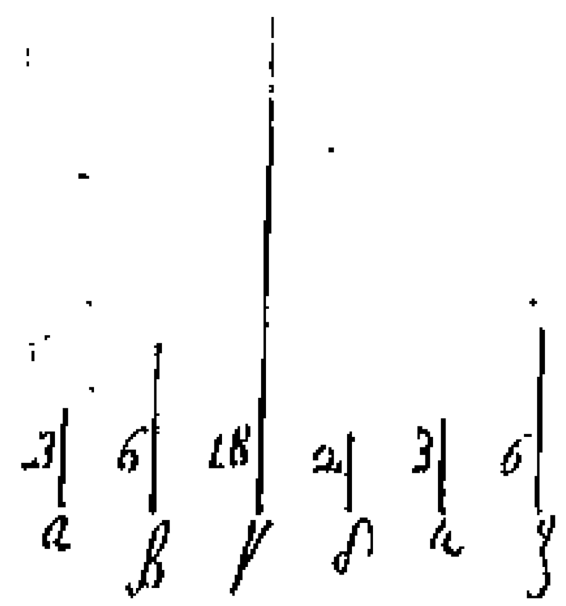
Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, εἴτε ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, εἴτε ἐν διαφόροις, ὁ πρῶτος πρὸς τὸν ἔσχατον, λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν ἐν αὐτοῖς λόγων.

Ἔστωσαν ἤδη πρῶτον τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ α, β, γ, ἑξῆς ἀνάλογον ἐν λόγοις ἀνομοίοις. Λέγω τὸν α, πρὸς τὸν γ, λόγον ἔχειν τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν ἐν αὐτοῖς λόγων, τουτέστι τοῦ α, πρὸς τὸν β, καὶ τοῦ β, πρὸς τὸν γ. Ἔστω οὖν τοῦ μὲν α, πρὸς τὸν β, λόγου πηλικότης ὁ δ, τοῦ δὲ β, πρὸς τὸν γ, ὁ ε. καὶ ὁ δ, τὸν ε, πολλα-

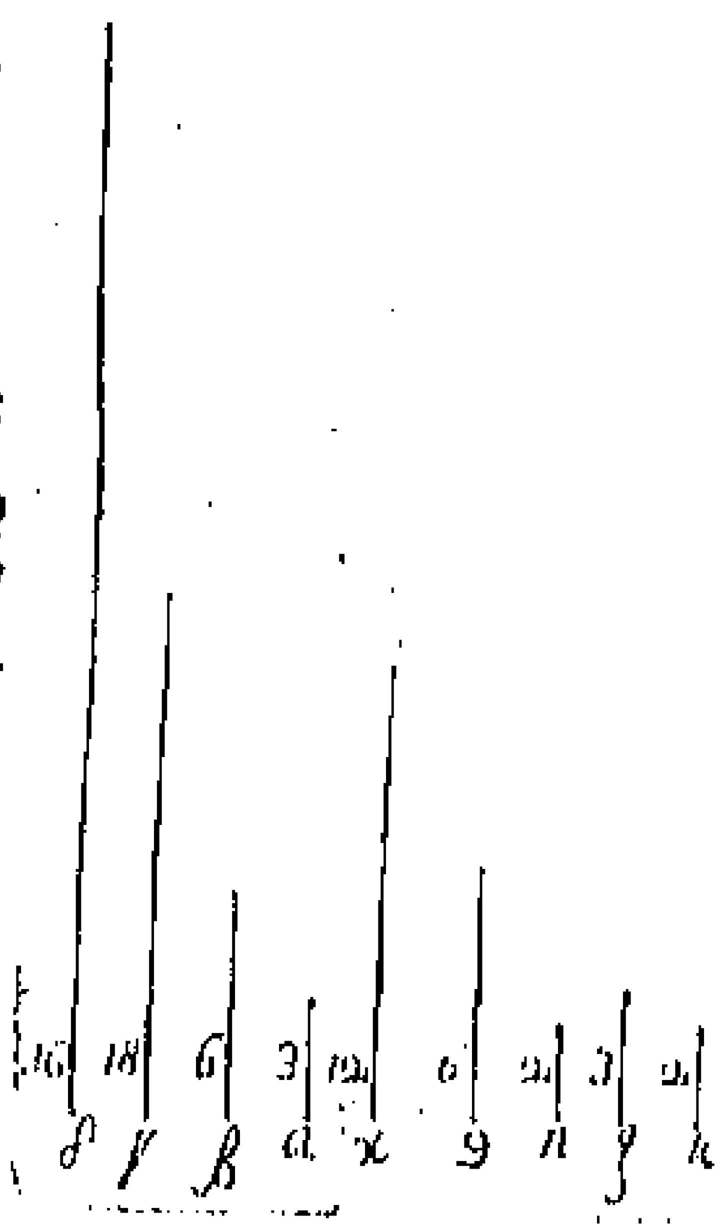
πλα-

πλασιάσας τὸν ζ, ποιείτω. καὶ τὸν ε΄: ἄρα ὅρον τοῦ ς΄: ὁ ζ, ἐστὶν ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν λόγων, τῶν ἐν τοῖς α β γ. Ἐπεὶ δὲ ὁ δ, τὸν μὲν α, πολλαπλασιάσας τὸν β, πεποίηκεν, (πηλικότης γὰρ ὁ δ, τοῦ α, πρὸς τὸν β,) τὸν δὲ ε, τὸν ζ, ἄρα καὶ τὴν ιζ΄: τοῦ ζ΄: ἐστὶν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ β, πρὸς τὸν ζ, καὶ καὶ τὴν ιθ΄: τοῦ αὐτοῦ, ὁ ἐκ τοῦ α, καὶ ζ, γινόμενος ἀριθμός, ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν ε, καὶ β, γινομένῳ. ἐπεὶ δὲ ὁ ἐκ τοῦ ε, καὶ β, ἐστὶν ὁ γ, (πηλικότης γὰρ ὁ ε, τοῦ β, πρὸς τὸν γ,) ἄρα ὁ ἐκ τῶν α ζ, ἴσος ἐστὶ τῷ γ, μεταξὺ ἄρα τοῦ α, καὶ γ, πηλικότης ἐστὶν ὁ ζ, ὁ δὲ ζ, ἐστὶν ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἐν τοῖς α β γ, λόγων, ὁ α, ἄρα πρὸς τὸν γ, ἔχει λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν ἐν αὐτοῖς λόγων.

Eucl. lib. 8. Fig. 5.



Ἔστωσαν ἤδη τέσσαρες οἱ α β γ δ, ὧν πηλικότης τῶν λόγων ἔστωσαν οἱ ε ζ η, καὶ ὁ ε, τὸν ζ, πολλαπλασιάσας, τὸν θ, ποιείτω, ὁ δὲ η, τὸν θ, ὡσαύτως πολλαπλασιάσας τὸν κ, ποιείτω. Λέγω τὸν α, πρὸς τὸν δ, ἔχειν λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων, τῶν ἐν τοῖς α β γ δ, ὅστις ἐστὶν ὁ κ, καὶ τὸν ε΄: ὅρον τοῦ ς΄: τοῦ γὰρ β, παρεωραμένου, ἔσονται τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ α γ δ, ἐν λόγοις ἀνομοίοις, πηλικότητες δὲ τῶν ἐν αὐτοῖς λόγων οἱ η θ, ὁ δὲ συγκείμενος ἐκ τῶν ἐν αὐτοῖς λόγων ὁ κ, καὶ τὴν ἀνωτέρω ἀπόδειξιν, ὁ α, πρὸς τὸν δ, ἔχει τὸν συγκείμενον λόγον ἐκ τῶν ἐν τοῖς α β γ δ, λόγων. ὡσαύτως δειχθήσεται, κἂν πέντε ὑποτεθῶσι, τοῦ β΄: καὶ γ΄: παρεωραμένου. καὶ ἐπὶ τῶν ἑξῆς ὡσαύτως.



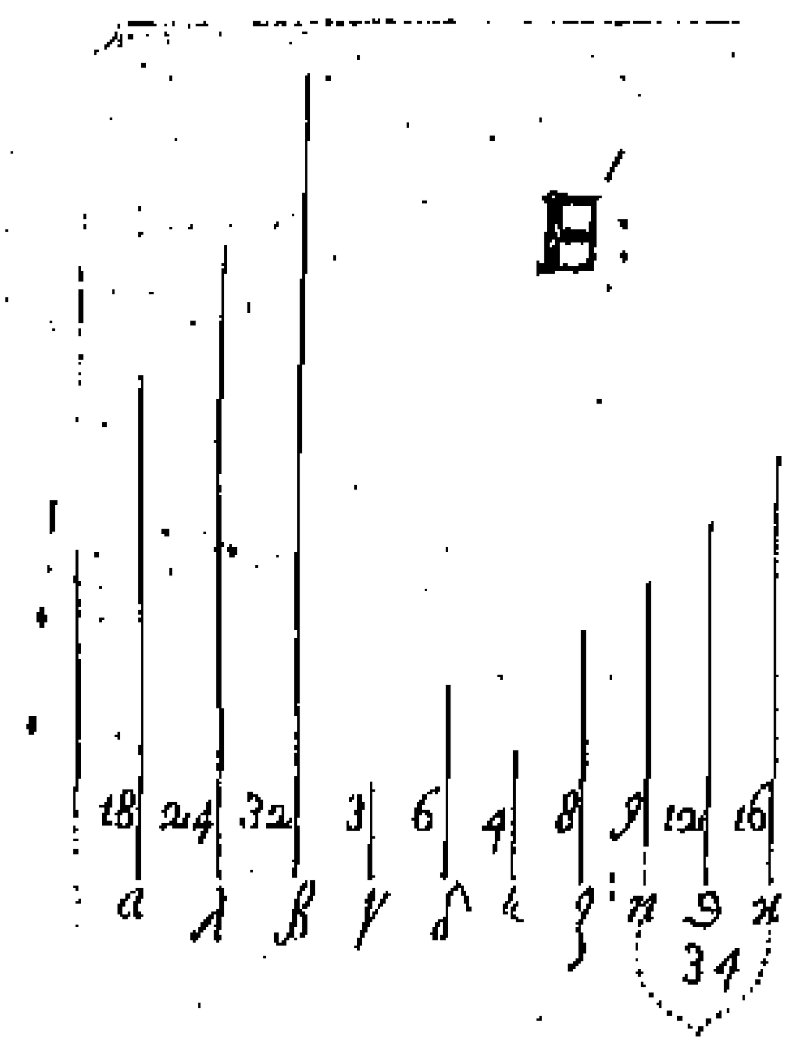
Πρότασις Ε΄: Θεώρημα.

Οἱ ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσι, τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Ἔστωσαν ἤδη ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ α β, πλευραὶ δὲ τοῦ μὲν α, οἱ γ δ, τοῦ δὲ β, οἱ ε ζ. Λέγω τὸν α, πρὸς τὸν β, ἔχειν λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων τῶν πλευρῶν. οἵτινές εἰσιν ὁ τοῦ γ, πρὸς τὸν ε, καὶ ὁ τοῦ δ, πρὸς τὸν ζ. Γενέσθω δὴ ὁ λ, ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ ε, ἐπὶ τὸν δ. Ἐπεὶ οὖν ὁ δ, τοὺς γ ε, πολλαπλασιάσας τοὺς α λ, πεποίηκεν. ἄρα ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν ε, οὕτως ἐστὶν ὁ α, πρὸς τὸν λ, καὶ τὴν ιζ΄: τοῦ ζ΄: Αὖθις διὰ τῆς αὐτῆς, ἐπεὶ ὁ ε, τοὺς δ ζ, πολλαπλασιάσας τοὺς λ β, πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, οὕτως ὁ λ, πρὸς τὸν β, οἱ

β, οἱ α λ β, ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τοῖς τῶν πλευρῶν λόγοις, τουτέστι τοῦ γ, πρὸς τὸν ε, καὶ τοῦ δ, πρὸς τὸν ζ. καὶ καὶ τὸ ἀνωτέρω λῆμμα, ὁ α, πρὸς τὸν β, ἔχει λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν ἐν τοῖς α λ β, λόγων, οὗτοι δέ εἰσιν, οἱ τῶν πλευρῶν λόγοι, ὁ τοῦ α, λόγος ἄρα πρὸς τὸν β, σύγκειται ἐκ τῶν λόγων τῶν πλευρῶν. Οἱ ἐπίπεδοι ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

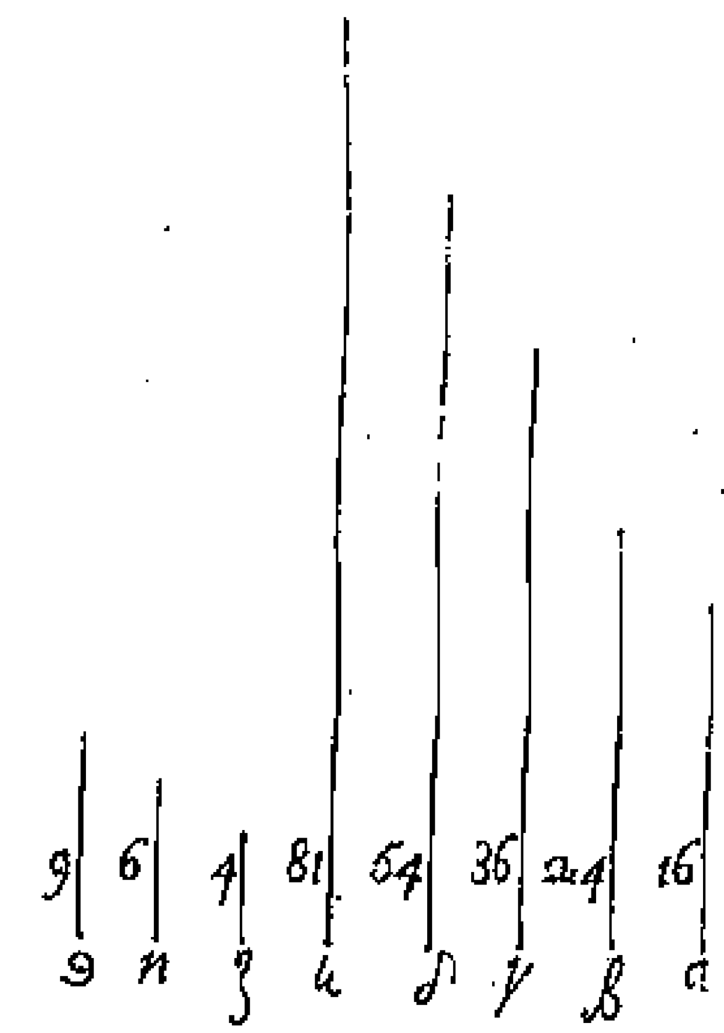
Eucl. lib. 8. Fig. 6.

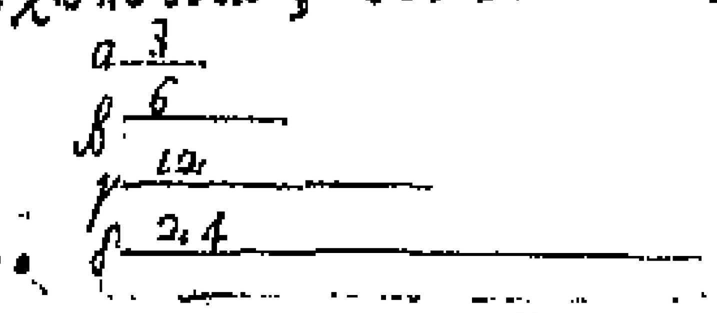


Πρότασις ς΄: Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν δεύτερον μὴ μετρεῖ, οὐδ᾽ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει.

Οἱ α, β, γ, δ, ε, ἀριθμοὶ ἔστωσαν ἑξῆς ἀνάλογον, καὶ ὁ α, τὸν β, μὴ μετρείτω. Λέγω δή, ὅτι οὐδ᾽ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει. Ἐπεὶ γὰρ ὁ α, τὸν β, οὐ μετρεῖ, οὐδεὶς τῶν α β γ δ ε, τὸν ἑξῆς μετρήσει, ἐν τῷ αὐτῷ γάρ εἰσι λόγῳ. ὅτι δὲ οὐδείς γε οὐδένα μετρεῖ, δείκνυμι, παρ: χαρ: ὅτι ὁ α, οὐδὲ τὸν γ, μετρεῖ. Εὑρεθήτωσαν ἤδη διὰ τῆς λε΄: τοῦ ζ΄: οἱ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς α β γ, καὶ ἔστωσαν οἱ ζ η θ. Ἐπεὶ οὖν ὁ α, τὸν β, οὐ μετρεῖ, οὐδὲ ὁ ζ, τὸν η, (ἐν τῷ αὐτῷ γὰρ λόγῳ εἰσί) ὥστε ὁ ζ, μονὰς οὐκ ἔστιν, ἡ γὰρ μονὰς πάντας μετρεῖ. ἐπεὶ δὲ οἱ α β γ, ἴσοι τῷ πλήθει εἰσί, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τοῖς ζ η θ, ἄρα καὶ τὴν ιδ΄: τοῦ ζ΄: καὶ δι᾽ ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί, τουτέστιν ὡς ὁ ζ, πρὸς τὸν θ, ὁ α, πρὸς τὸν γ, ὁ δὲ ζ, τὸν θ, οὐ μετρεῖ, καὶ τὴν κδ΄: τοῦ ζ΄: οὐδὲ ὁ α, ἄρα τὸν γ, μετρεῖ. ὡσαύτως δειχθήσεται, ὅτι οὐδ᾽ ἄλλος τις ἄλλον τινὰ μετρήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.





Πρότασις Ζ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν ἔσχατον μετρεῖ, καὶ τὸν δεύτερον μετρήσει.

Ἔστωσαν ἤδη ἑξῆς ἀνάλογον οἱ α β γ δ, ὁ δὲ α, τὸν δ, μετρείτω. Λέγω, ὅτι καὶ τὸν β, μετρεῖ. εἰ γὰρ μὴ ὁ α, τὸν β, μετρεῖ, οὐδ᾽ ἄλλος τις οὐδένα μετρήσει, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἀλλὰ μὴν τοῦτο ἀδύνατον, ἐπειδὴ γὰρ ὁ α, τὸν δ, μετρεῖν, ἄρα ὁ α, καὶ τὸν β, μετρεῖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

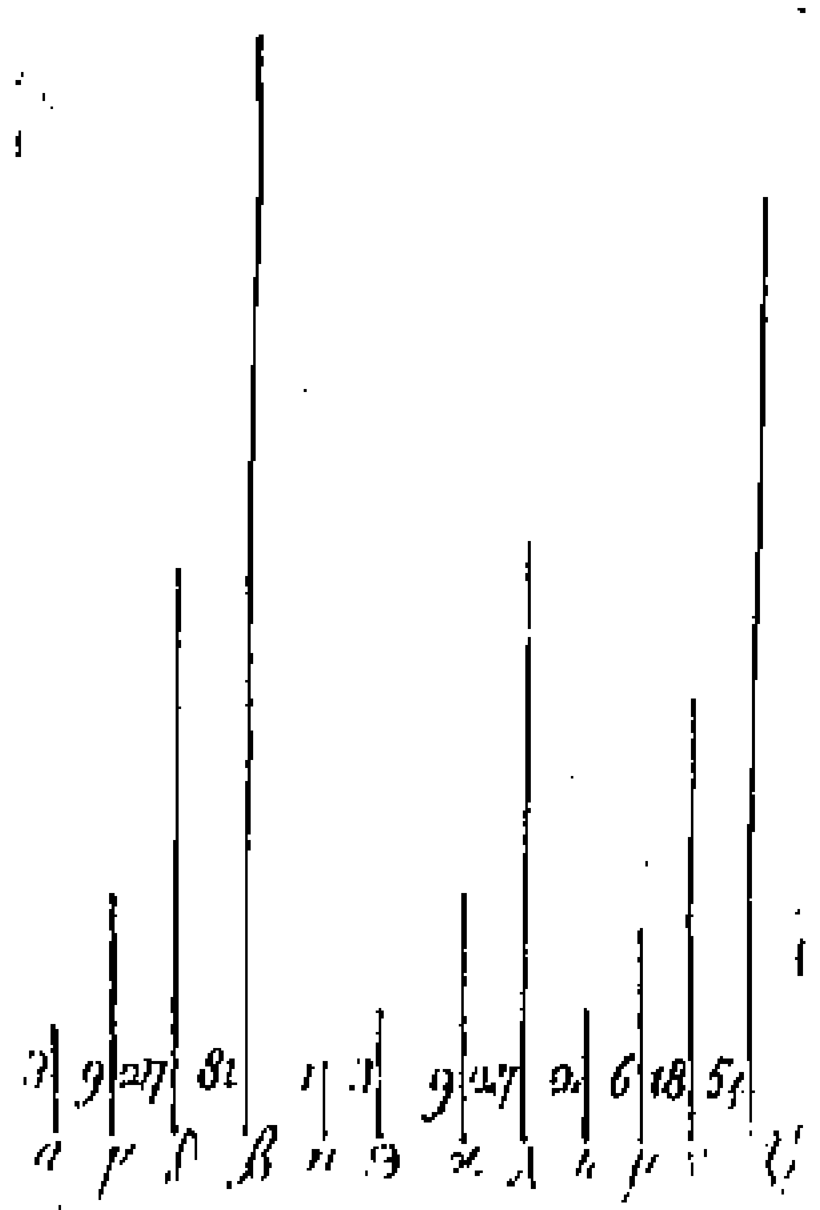
 Πρό-

Πρότασις Η': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἐμπεσοῦνται.

Μεταξὺ τῶν α β, ἀριθμῶν πιπτέτωσαν οἱ γ δ, καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ἔστω, καὶ ὁ ε, πρὸς τὸν ζ. Λέγω δὴ μεταξὺ τῶν ε ζ, τοσοῦτοι ἀριθμοὶ ἐμπεσοῦνται, ὅσοι κἀν τοῖς α β, πεπτώκασιν. εἰ μὲν οὖν οἱ α γ δ β, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, ἐπεὶ κατὰ τὴν κα': τοῦ ζ': οἱ α β, ἰσάκις μετροῦσι τοὺς ε ζ, μετρείτωσαν ἰσάκις, ἔτι καὶ οἱ γ δ, τοὺς μ ν, καὶ ἔσται τὸ ζητούμενον. εἰ δὲ μή εἰσιν ἐλάχιστοι, εὑρεθήτωσαν διὰ τῆς λε': τοῦ ζ': οἱ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς α γ δ β, καὶ ἔστωσαν οἱ η θ κ λ. εἰ οὖν οἱ η λ, ἴσοι εἰσὶ τοῖς ε ζ, δέδεικται τὸ προτεθέν. εἰ δὲ ἐλάσσονες, ἐπεὶ οἱ α γ δ β, καὶ η θ κ λ, ἴσοι τῷ πλήθει, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, κατὰ τὴν ιδ': τοῦ ζ': καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ η, πρὸς τὸν λ, ὡς δὲ ὁ α, πρὸς τὸν β, ἔστι καὶ ὁ ε, πρὸς τὸν ζ· κατὰ τὴν ια: ἄρα τοῦ ε': ἔστιν ὡς ὁ η, πρὸς τὸν λ, οὕτως ὁ ε, πρὸς τὸν ζ. ἐπεὶ δὲ οἱ η λ, ἐλάχιστοί εἰσι, κατὰ τὴν κα': τοῦ ζ': ἰσάκις μετρεῖ ὁ η, τὸν ε, καὶ ὁ λ, τὸν ζ, ὁσάκις δὲ ὁ η, τὸν ε, μετρεῖ, τοσαυτάκις μετρείτωσαν καὶ οἱ θ κ, τοὺς μ ν, ὥστε οἱ ε μ ν ζ, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς η θ κ λ, καὶ ἴσοι τῷ πλήθει. ἀλλὰ καὶ οἱ α γ δ β, ἴσοι τῷ πλήθει εἰσὶν καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τοῖς η θ κ λ, ἄρα καὶ οἱ ε μ ν ζ, ἴσοι τῷ πλήθει εἰσὶ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τοῖς α γ δ β, ὅσοι ἄρα μεταξὺ τῶν α β, πεπτώκασιν ἑξῆς ἀνάλογον, τοσοῦτοι καὶ μεταξὺ τῶν ε ζ, πεπτώκασιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 8. Fig. 7.



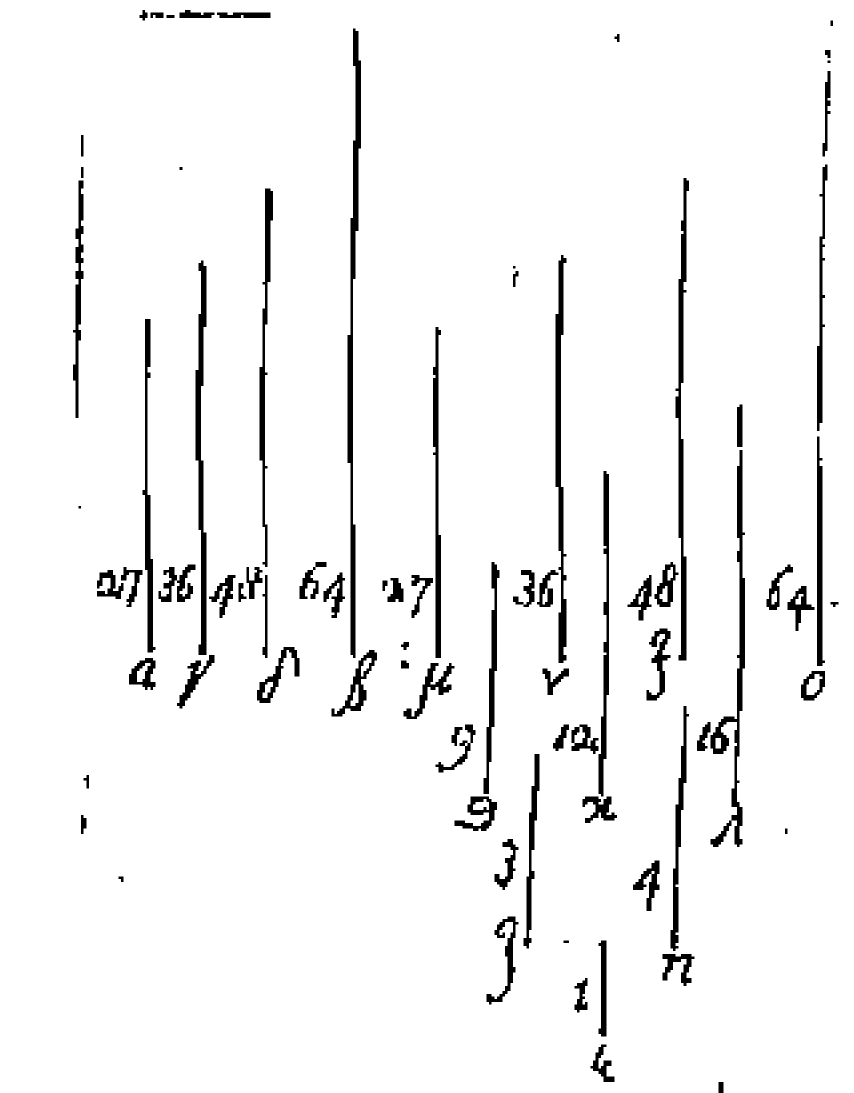
Πρότασις Θ': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος ἑξῆς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Μεταξὺ ἤδη τῶν α β, πιπτέτωσαν οἱ γ δ, ἑξῆς ἀνάλογον. Λέγω ὅτι καὶ μεταξὺ τοῦ τε α, καὶ τῆς μονάδος, καὶ τοῦ β, καὶ τῆς μονάδος, τοσοῦτοι πεσοῦνται, ὅσοι μεταξὺ

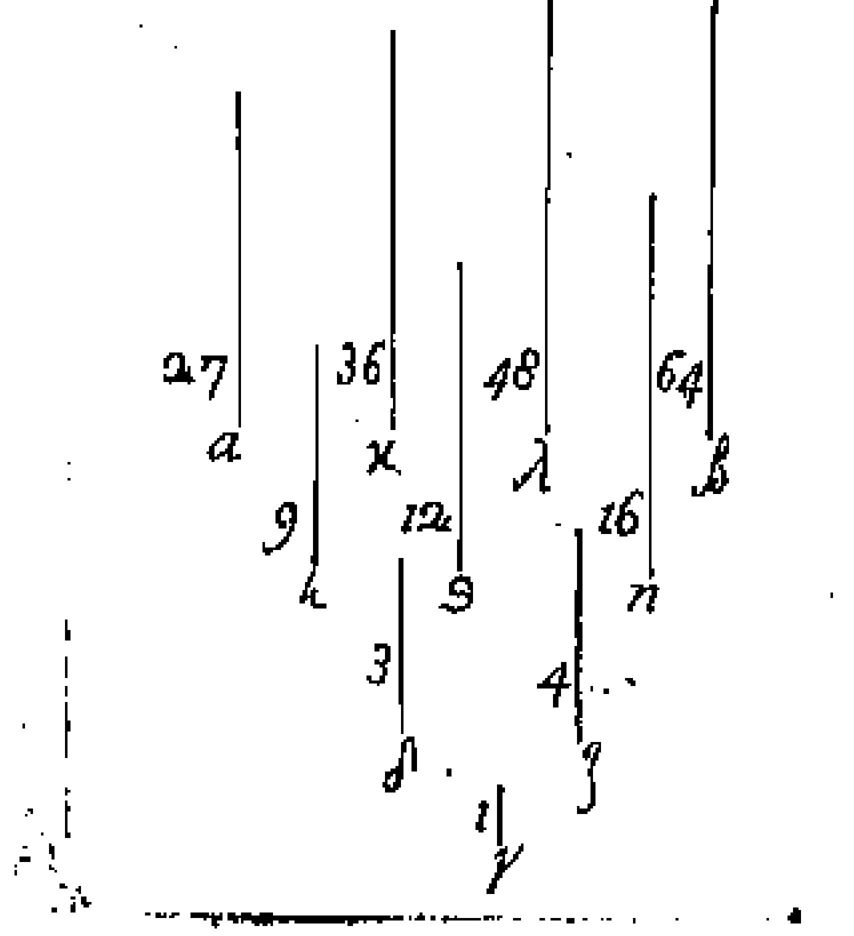
μεταξὺ τῶν α β, πίπτουσιν. Ἔστω γὰρ ἡ ε, μονάς. καὶ πρῶτον μὲν διὰ τῆς λε': τοῦ ζ': εὑρεθήτωσαν δύο ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς α γ δ β, καὶ ἔστωσαν οὗτοι οἱ ζ η. δεύτερον δὲ, τρεῖς διὰ τῆς β': τοῦ παρόντος, ὡς οἱ θ κ λ. καὶ οὕτως ἐφεξῆς, μέχρις οὗ ἴσοι τῷ ἀριθμῷ γένωνται τοῖς α γ δ β, καὶ ἔστωσαν οὗτοι οἱ μ ν ξ ο. Ἐπεὶ οὖν οἱ α γ δ β, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς κατὰ τὴν κγ': τοῦ ζ': τούτοις δὲ ἴσοι τῷ πλήθει εἰσὶν οἱ μ ν ξ ο, ἄρα ἕκαστος τῶν μ ν ξ ο, ἴσος ἐστὶν ἑκάστῳ τῶν α γ δ β, οἱ μ ο, ἄρα ἴσοι εἰσὶ τοῖς α β. Ἐπεὶ δὲ ὁ ζ, κατὰ τὴν β': τοῦ παρόντος ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν θ, πεποίηκε, τὸν δὲ θ, ὡσαύτως πολλαπλασιάσας τὸν μ, πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα κατὰ τὴν ιζ': τοῦ ζ': ὡς ὁ ζ, πρὸς τὸν θ, οὕτως ὁ θ, πρὸς τὸν μ, ἔστι δὲ διὰ τοῦ β': πορίσμ: τῆς ιε': τοῦ αὐτοῦ ζ': καὶ ἡ ε, μονὰς πρὸς τὸν ζ, ὡς ὁ ζ, πρὸς τὸν θ, ἄρα μεταξὺ τῆς ε, μονάδος, καὶ τοῦ μ, ἀριθμοῦ, τοσοῦτοι ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον πεπτώκασιν, ὅσοι μεταξὺ τῶν α β. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται, ὅτι τοσοῦτοι πίπτουσι καὶ μεταξὺ τῆς ε, μονάδος καὶ ο. οἱ δὲ μ, καὶ ο, ἴσοι εἰσὶ τοῖς α β. Ἐὰν ἄρα δύο ἀριθμοί, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. lib. 8. Fig. 8.



Πρότασις Ι': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν καὶ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος ἑξῆς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχές, ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.



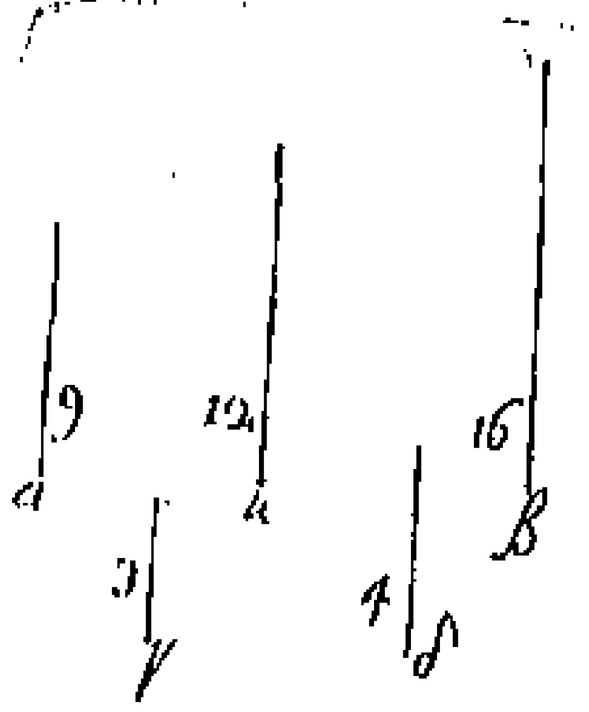
Ἔστωσαν ἤδη δύο ἀριθμοὶ οἱ α β, καὶ μεταξὺ μὲν τοῦ α, καὶ μονάδος γ, πιπτέτωσαν ἑξῆς ἀνάλογον οἱ δ ε, μεταξὺ δὲ τοῦ β, καὶ γ, μονάδος, οἱ ζ η. Λέγω δὴ, ὅτι καὶ μεταξὺ τῶν α β, τοσοῦτοι πεσοῦνται, ὅσοι μεταξὺ ἑκατέρου τῶν α β, καὶ μονάδος πεπτώκασιν. ὁ δ, τοίνυν τὸν ζ, πολλαπλασιάσας τὸν θ, ποιείτω, τὸν δὲ θ, ὡσαύτως πολλαπλασ: τὸν κ, ποιείτω. ἔτι ὁ ζ, τὸν αὐτὸν θ, πολλαπλασιάσας τὸν λ, ποιείτω. δείκνυται, τοὺς μεταξὺ τῶν α β, ἐμπεσόντας ἀριθμοὺς, τουτέστι τοὺς κ λ, ἑξῆς ἀνάλογον εἶναι τοῖς α β. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ γ, μονὰς πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ δ, πρὸς τὸν ε, ὁ δ, ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσιάσας τὸν ε, πεποίηκε, κατὰ τὸ β': πόρισμα τῆς ις': τοῦ ζ'. διὰ τοῦ αὐτοῦ ἔτι, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ γ, μονὰς πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ ε, πρὸς τὸν α, ὁ δ, ἄρα τὸν ε, πολλαπλασιάσας τὸν α, πεποίηκε. διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα δείκνυται, ὅτι καὶ ὁ ζ, ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν η, πεποίηκε, τὸν δὲ η, ὡσαύτως πολλαπλασ: τὸν β, πεποίηκεν. ἐπεὶ δὲ ὁ δ, ἑαυτόν τε καὶ τὸν ζ, πολλαπλασιάσας τοὺς ε θ, πεποίηκεν. ἔσται ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, οὕτως ὁ ε, πρὸς τὸν θ, κατὰ τὴν ιζ': τοῦ ζ': διὰ τῆς αὐτῆς ἔτι, ἐπεὶ καὶ ὁ ζ, ἑαυτόν τε καὶ τὸν δ, πολλαπλασιάσας τοὺς θ η, πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, οὕτως ὁ θ, πρὸς τὸν η, ὡς δὲ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, οὕτω καὶ ὁ ε, πρὸς τὸν θ, ἄρα ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν θ, οὕτως ἐστὶν ὁ θ, πρὸς τὸν η. Αὖθις ἐπεὶ ὁ δ, τοὺς ε θ, πολλαπλασιάσας τοὺς α κ, πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα διὰ τῆς ῥηθείσης ιζ': ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν θ, οὕτως ὁ α, πρὸς τὸν κ, ὡς δὲ ὁ ε, πρὸς τὸν θ, ἔστι καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ἄρα ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, οὕτως ἐστὶν ὁ α, πρὸς τὸν κ. ἐπεὶ δὲ πάλιν οἱ δ ζ, τὸν θ, πολλαπλασιάσαντες τοὺς κ λ, πεποιήκασιν ἔστιν ἄρα ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, οὕτως ὁ κ, πρὸς τὸν λ, κατὰ τὴν ιη': τοῦ ζ': ὡς δὲ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν κ, ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν κ, οὕτως ἐστὶν ὁ κ, πρὸς τὸν λ. Ἐπεὶ δὲ τελευταῖον ὁ ζ, τοὺς θ η, πολλαπλασιάσας τοὺς λ β, πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ θ, πρὸς τὸν η, ὁ λ, πρὸς τὸν β, ὡς δὲ ὁ θ, πρὸς τὸν η, ἔστι καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ἄρα καὶ ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ὁ λ, πρὸς τὸν β, ὡς δὲ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν κ, καὶ ὁ κ, πρὸς τὸν λ, ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν κ, καὶ ὁ κ, πρὸς τὸν λ, οὕτως καὶ ὁ λ, πρὸς τὸν β, οἱ α, κ, λ, β, ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον. Ἐὰν ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΑ': Θεώρημα.

Δύο τετραγώνων ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστιν ἀριθμὸς, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

Ἔστωσαν ἤδη τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ α β, πλευραὶ δὲ αὐτῶν οἱ γ δ. Λέγω ὅτι μεταξὺ τῶν α β, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστιν, ὁ δὲ α, πρὸς τὸν β, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ γ, πρὸς τὸν δ. ὁ γ, τὸν δ, πολλαπλασιάσας τὸν ε, ποιείτω. Ἐπεὶ οὖν ὁ γ, ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν α, πεποίηκεν, ὡς πλευρὰ τοῦ α, τὸν δὲ δ, ὡσαύτως πολλαπλασιάσας τὸν ε, πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ γ, πρὸς τὸν δ, κατὰ τὴν ιζ': τοῦ ζ': ἐπεὶ δ' αὖθις οἱ γ δ, τὸν δ, πολλαπλασιάσαντες τοὺς ε β, πεποιήκασιν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ ε, πρὸς τὸν β, ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἐδείχθη καὶ ὁ α, πρὸς τὸν ε, ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς

Eucl. Lib. 8. Fig. 9.



τὸν ε,

τὸν ε, οὕτως ὁ ε, πρὸς τὸν β. ὁ ε, ἄρα μέσος ἀνάλογός ἐστι τῶν α β· ἐπεὶ δὲ ὁ α, πρὸς τὸν β, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἤπερ ὁ α, πρὸς τὸν ε, κατὰ τὸν ιθ': ὅρον τοῦ ε': ὡς δὲ ὁ α, πρὸς τὸν ε, ἔστι καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἄρα ὁ α, πρὸς τὸν β, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ, πρὸς τὸν δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

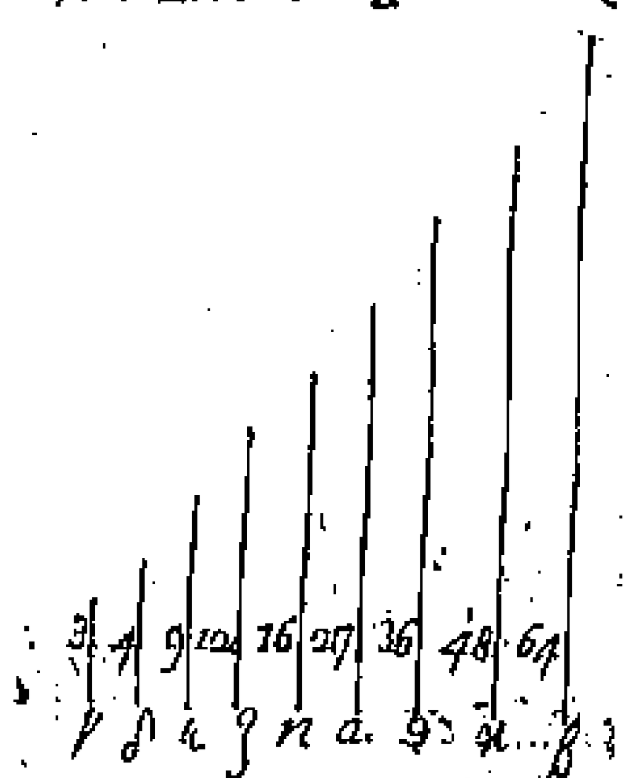
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ὃν λόγον ἔχει ἡ πλευρὰ τοῦ ἑνὸς τετραγώνου πρὸς τὴν τοῦ ἑτέρου, τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ ὁ πρῶτος τετράγωνος πρὸς τὸν μέσον ἀνάλογον, καὶ ὁ μέσος ἀνάλογος πρὸς τὸν β': τετράγωνον.

Πρότασις ΙΒ': Θεώρημα.

Δύο κύβων ἀριθμῶν, δύο μέσοι ἀνάλογοί εἰσιν ἀριθμοὶ, καὶ ὁ κύβος πρὸς τὸν κύβον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

Μεταξὺ ἤδη τῶν δύο κύβων α β, δύο λέγω ἑξῆς ἀναλόγους ἀριθμοὺς ἐμπίπτειν. Ἔστω πλευρὰ τοῦ μὲν α, ὁ γ, τοῦ δὲ β, ὁ δ. καὶ ὁ γ, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν ε, ποιείτω, τὸν δὲ δ, ὡσαύτως πολλαπλ: τὸν ζ, ποιείτω. καὶ ὁ δ, ἔτι ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν η, ποιείτω. Αὖθις ἑκάτερος τῶν γ δ, τὸν ζ, πολλαπλασιάσας τοὺς θ κ, ποιείτωσαν. ἐπεὶ οὖν ὁ γ, ἑαυτόν τε καὶ τὸν δ, πολλαπλασιάσας τοὺς ε ζ, πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα κατὰ τὴν ιζ': τοῦ ζ': ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ε, πρὸς τὸν ζ. Διὰ τῆς αὐτῆς δείκνυται, ὅτι ἐστὶ καὶ ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, οὕτως ὁ α, πρὸς τὸν θ, τοὺς γὰρ ε ζ, ὁ γ, πολλαπλασιάσας τοὺς α θ, πεποίηκεν. ὡς δὲ ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, ἐδείχθη καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἄρα ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, οὕτως ἐστὶν ὁ α, πρὸς τὸν θ. Αὖθις ἐπεὶ οἱ γ δ, τὸν ζ, πολλαπλασιάσαντες τοὺς θ κ, πεποιήκασιν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ θ, πρὸς τὸν κ, κατὰ τὴν ιη': τοῦ ζ': ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, δέδεικται καὶ ὁ α, πρὸς τὸν θ. κατὰ τὴν ια': ἄρα τοῦ ε': ὡς ὁ α, πρὸς τὸν θ, οὕτως ὁ θ, πρὸς τὸν κ. Πάλιν ἐπεὶ ὁ δ, τοὺς ζ η, πολλαπλασιάσας τοὺς κ β, πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ζ, πρὸς τὸν η, ὁ κ, πρὸς τὸν β, ὡς δὲ ὁ ζ, πρὸς τὸν η, ἔστι καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ γὰρ δ, τὸν γ, καὶ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τοὺς ζ η, πεποίηκεν. ἄρα κατὰ ια: τοῦ ε': ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ κ, πρὸς τὸν β. ἐδείχθησαν δὲ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἶναι καὶ οἱ α θ κ, ἄρα μεταξὺ τῶν δύο κύβων α β, δύο ἑξῆς ἀνάλογον ἀριθμοί εἰσιν, ὅπερ ἦν τὸ α: Ἐπεὶ δὲ ὁ α, πρὸς τὸν β, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸν θ, κατὰ τὸν ια': ὅρον τοῦ ε': ὡς δὲ ὁ α, πρὸς τὸν θ, ἔστι καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, πλευρὰ

Eucl. Lib. 8. Fig. 10.



πρὸς

πρὸς πλευρὰν, ἄρα ὁ α, πρὸς τὸν β, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ, πρὸς τὸν δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

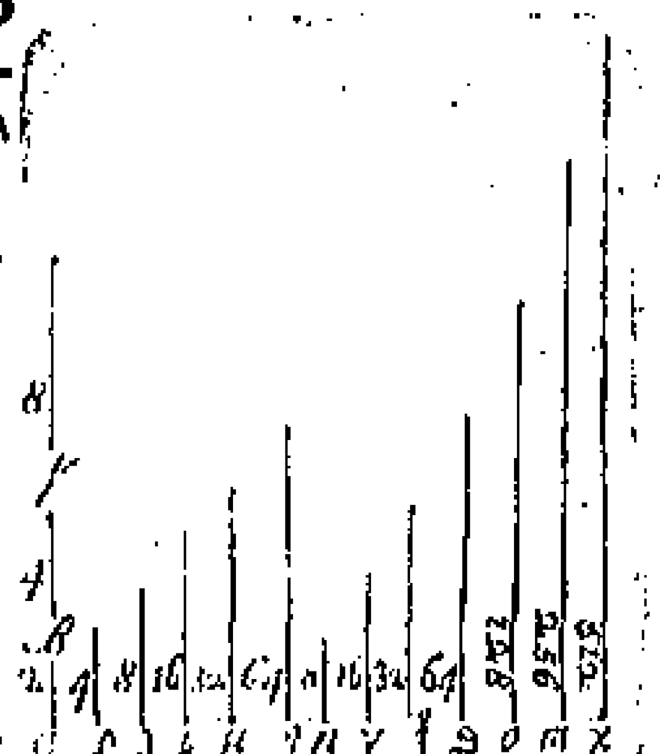
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι μεταξὺ δύο κύβων δύο, μέσων ἀναλόγων πιπτόντων, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ λόγῳ τῶν πλευρῶν.

Πρότασις ΙΓ': Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, καὶ πολλαπλασιάσας ἕκαστος ἑαυτὸν ποιῇ τινας, οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν, ἀνάλογον ἔσονται, καὶ ἐὰν οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γινομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, καὶ αὐτοὶ ἀνάλογον ἔσονται. καὶ ἀεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει.

Τῶν ἤδη α β γ, ἑξῆς ἀνάλογον ἀριθμῶν πολλαπλασιάσας ἕκαστος ἑαυτὸν, ποιείτω τοὺς δ ε ζ, πολλαπλασιάσαντες δὲ καὶ τοὺς δ ε ζ, ποιείτωσαν τοὺς η θ κ. Λέγω τοὺς τε δ ε ζ, καὶ τοὺς η θ κ, ἑξῆς ἀνάλογον εἶναι. Ἐπεὶ οὖν ἕκαστος τῶν α β γ, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τοὺς, δ ε ζ, πεποίηκεν. οἱ δὲ δ ε ζ, τετράγωνοί εἰσι, καὶ μεταξὺ τῶν τε δ ε, καὶ ε ζ, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστι κατὰ τὴν ια': τοῦ παρόντος, ἔστωσαν δὲ οὗτοι οἱ λ μ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν λ, οὕτως ὁ λ, πρὸς τὸν ε, καὶ ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν μ, ὁ μ, πρὸς τὸν ζ. ἐπεὶ δὲ οἱ δ λ ε, πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν ἔχει ὁ α, πρὸς τὸν β, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ια', τοῦ παρόντος, καὶ οἱ ε μ ζ, ὃν ἔχει ὁ β, πρὸς τὸν γ, ὁ δὲ τοῦ α, πρὸς τὸν β, καὶ τοῦ β, πρὸς τὸν γ, ὁ αὐτός ἐστιν. ἄρα οἱ δ λ ε, ε μ ζ, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ, καὶ ἴσοι τὸ πλῆθος. ὥστε καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται, τουτέστιν ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, κατὰ τὴν ιδ': τοῦ ζ': διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται, ὅτι καὶ οἱ η θ κ, ἑξῆς ἀνάλογον ἔσονται. ἐπεὶ κύβοι εἰσὶ, καὶ μεταξὺ αὐτῶν δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσι, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἔχοντες τὸν λόγον τῶν πλευρῶν, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω.

Eucl. Lib. 8. Fig. 11.



Πρότασις ΙΔ': Θεώρημα.

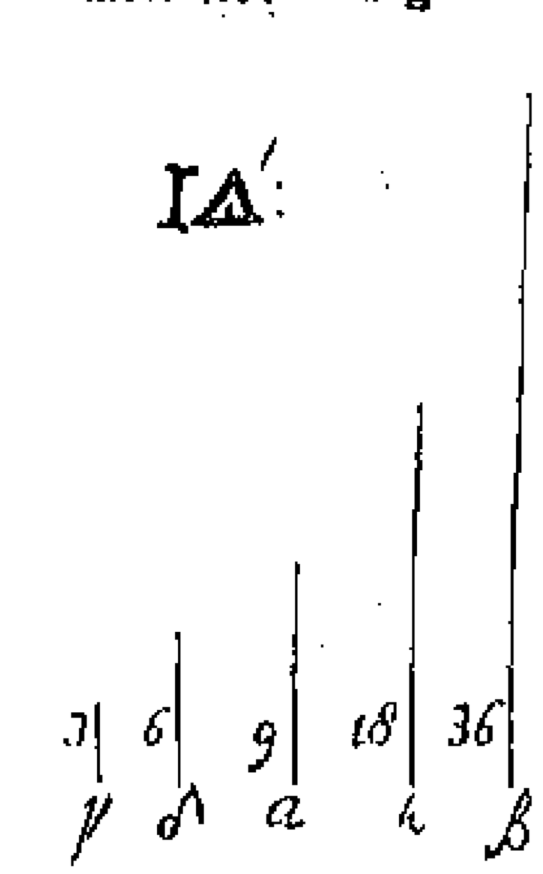
Ἐὰν τετράγωνος τετράγωνον μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν αὐτὴν πλευρὰν μετρήσει, καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει.

Τετράγωνος ἤδη ἀριθμὸς ὁ α, μετρείτω τὸν β, τετράγωνον. Λέγω, ὅτι καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ α, δηλ: ὁ γ, μετρήσει τὴν πλευρὰν τοῦ β, δηλ: τὸν δ, κατὰ γὰρ τὴν

τὴν ια': τοῦ παρόντος, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστι μεταξὺ τῶν α, β. ἔστω οὗτος ὁ ε, οἱ α ε β, ἄρα κατὰ τὸ πόρισμα τῆς αὐτῆς, ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους τὸν λόγον τῶν πλευρῶν. ἐπεὶ δὲ ὁ α, τὸν β, μετρεῖ, μετρήσει πάντως καὶ τὸν ε, κατὰ τὴν ζ': τοῦ παρόντος. ὡς δὲ ὁ α, πρὸς τὸν ε, οὕτως ἐστὶ καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ γ, ἄρα τὸν δ, μετρεῖ. ἐπεὶ καὶ ὁ α, τὸν ε, μετρεῖ. μετρείτω δὴ ὁ γ, τὸν δ. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ α, τὸν β, μετρεῖ. ἐπεὶ γὰρ κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ια': οἱ α ε β, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ λόγῳ τοῦ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ δὲ γ, τὸν δ, μετρεῖ, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ α, τὸν ε, καὶ κατὰ τὴν ζ': τοῦ παρόντος, μετρεῖ ἔτι καὶ τὸν β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. lib. 8. Fig. 12.

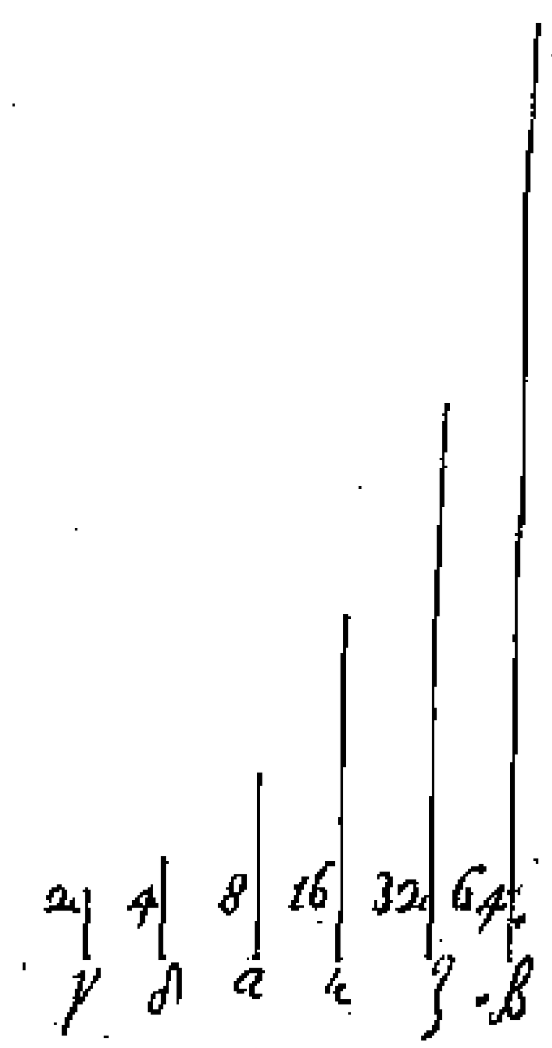
ΙΔ':



Πρότασις ΙΕ': Θεώρημα.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει, καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσει.

Ὁ α, κύβος ἀριθμὸς, οὗ πλευρὰ ὁ γ, μετρείτω τὸν β, κύβον ἀριθμὸν, οὗ πλευρὰ ὁ δ. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ γ, τὸν δ, μετρεῖ. εἰλήφθωσαν κατὰ τὴν ιβ': τοῦ παρόντος οἱ δύο μέσοι ἀνάλογον ὄντες ἀριθμοὶ μεταξὺ τῶν α β, καὶ ἔστωσαν οὗτοι οἱ ε ζ. δῆλον οὖν κατὰ τὸ πόρισμ: τῆς αὐτῆς ιβ': ὅτι οἱ α ε ζ β, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ λόγῳ τοῦ γ, πρὸς τὸν δ. Ἐπεὶ δὲ ὁ α, τὸν β, μετρεῖ, μετρήσει πάντως καὶ τὸν ε, κατὰ τὴν ζ': τοῦ παρόντος, ὡς δὲ ὁ α, πρὸς τὸν ε, οὕτως ἐστὶν ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ δὲ α, τὸν ε, μετρεῖ, μετρήσει πάντως καὶ ὁ γ, τὸν δ. ὅπερ ἐστὶ τὸ πρῶτον. Μετρείτω δὴ ὁ γ, τὸν δ. Λέγω καὶ τὸν α, μετρεῖν τὸν β. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἐπεὶ οἱ α ε ζ β, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ γ, πρὸς τὸν δ, λόγῳ, ἄρα ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, οὕτως ἐστὶν ὁ α, πρὸς τὸν ε, ὁ δὲ γ, τὸν δ, μετρεῖ, μετρήσει πάντως καὶ ὁ α, τὸν ε, μετρῶν δὲ ὁ α, τὸν ε, μετρήσει ἔτι καὶ τὸν β, κατὰ τὴν ζ': τοῦ παρόντος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Πρότασις Ις': Θεώρημα.

Ἐὰν τετράγωνος ἀριθμὸς τετράγωνον ἀριθμὸν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει. κἂν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει.

Δείκνυται τοῦτο ῥᾳδίως, εἰ γὰρ τετραγώνου ἀριθμοῦ τετράγωνον μὴ μετροῦντος, ὑποτεθῇ δὲ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρεῖν, συμβήσεται διὰ τῆς ιδ': τοῦ παρόντος, πος, καὶ τὸν τετράγωνον ἀριθμὸν μετρεῖν, τὸν τετράγωνον ἀριθμὸν, ὃν οὐκ ἐμέτρει. καὶ τὔμπαλιν, εἰ τῆς πλευρᾶς τὴν πλευρὰν μὴ μετρούσης, δῶμεν τὸν τετράγωνον μετρεῖν τὸν τετράγωνον, συμβήσεται διὰ τῆς αὐτῆς, καὶ τὴν πλευρὰν μετρεῖν τὴν πλευρὰν, ἣν οὐκ ἐμέτρει. ὅπερ ἀδύνατον.

Πρότασις ΙΖ': Θεώρημα.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει. κἂν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρῇ, οὐδ' ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσει.

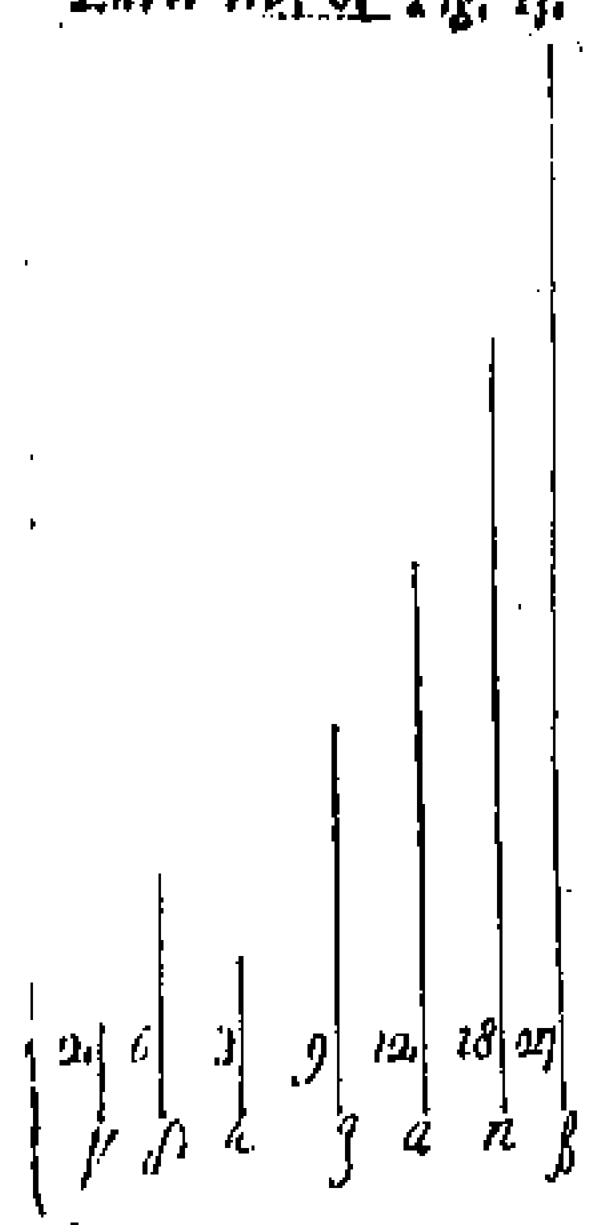
Καὶ τοῦτο, ὡς καὶ τὸ ἀνώτερον, δείκνυται διὰ τῆς ιε': οὗ χάριν τὸν λόγον περὶ τούτου οὐκ ἐκτείνομεν, ἵνα μὴ ταυτολογεῖν δόξωμεν.

Πρότασις ΙΗ': Θεώρημα.

Δύο ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ ἐπίπεδος πρὸς τὸν ἐπίπεδον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἔστωσαν ἤδη ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ α β, καὶ τοῦ μὲν α, πλευραὶ οἱ γ δ, ἀριθμοὶ, τοῦ δὲ β, οἱ ε ζ. Λέγω, ὅτι μεταξὺ τῶν α β, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστιν. ὁ δ, τὸν ε, πολλαπλασιάσας τὸν η, ποιείτω. Ἐπεὶ οὖν κατὰ τὸν κα': ὅρον τοῦ ζ': ἐστὶν ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα κατὰ τὴν ιγ': τοῦ ζ': ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν ε, οὕτως ἐστὶν ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ὁ δὲ δ, τοὺς γ ε, πολλαπλασιάσας τοὺς α η, πεποίηκεν, ἄρα κατὰ τὴν ιζ': τοῦ ζ': ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν ε, ὁ α, πρὸς τὸν η, ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν ε, οὕτως ἐστὶ καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ἄρα κατὰ τὴν ια': τοῦ ε': καὶ ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, οὕτως ἐστὶν ὁ α, πρὸς τὸν η. Αὖθις ἐπεὶ ὁ ε, τοὺς δ ζ, πολλαπλασιάσας τοὺς η β, πεποίηκεν, ἄρα ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, οὕτως ἐστὶν ὁ η, πρὸς τὸν β. ὡς δὲ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ἐδείχθη καὶ ὁ α, πρὸς τὸν η. ἄρα καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν η, οὕτως ἐστὶν ὁ η, πρὸς τὸν β, κατὰ τὴν ια': τοῦ ε': ἄρα μεταξὺ τῶν α β, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστιν ὁ η. Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ, δηλ: ὁ γ, πρὸς τὴν ὁμόλογον, δηλ: τὸν ε, ἢ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ. κατὰ γὰρ τὸν ι': ὅρον τοῦ ε': ὁ α, πρὸς τὸν β, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἤπερ πρὸς τὸν η, ὡς δὲ ὁ α, πρὸς τὸν η, οὕτως ἐστὶν ὁ γ, πρὸς τὸν ε, καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ἄρα ὁ α, πρὸς τὸν β, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ, πρὸς τὸν ε, ἢ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ. Δύο ἄρα ὁμοίων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. lib. 8. Fig. 13.



ΠΟ'-

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

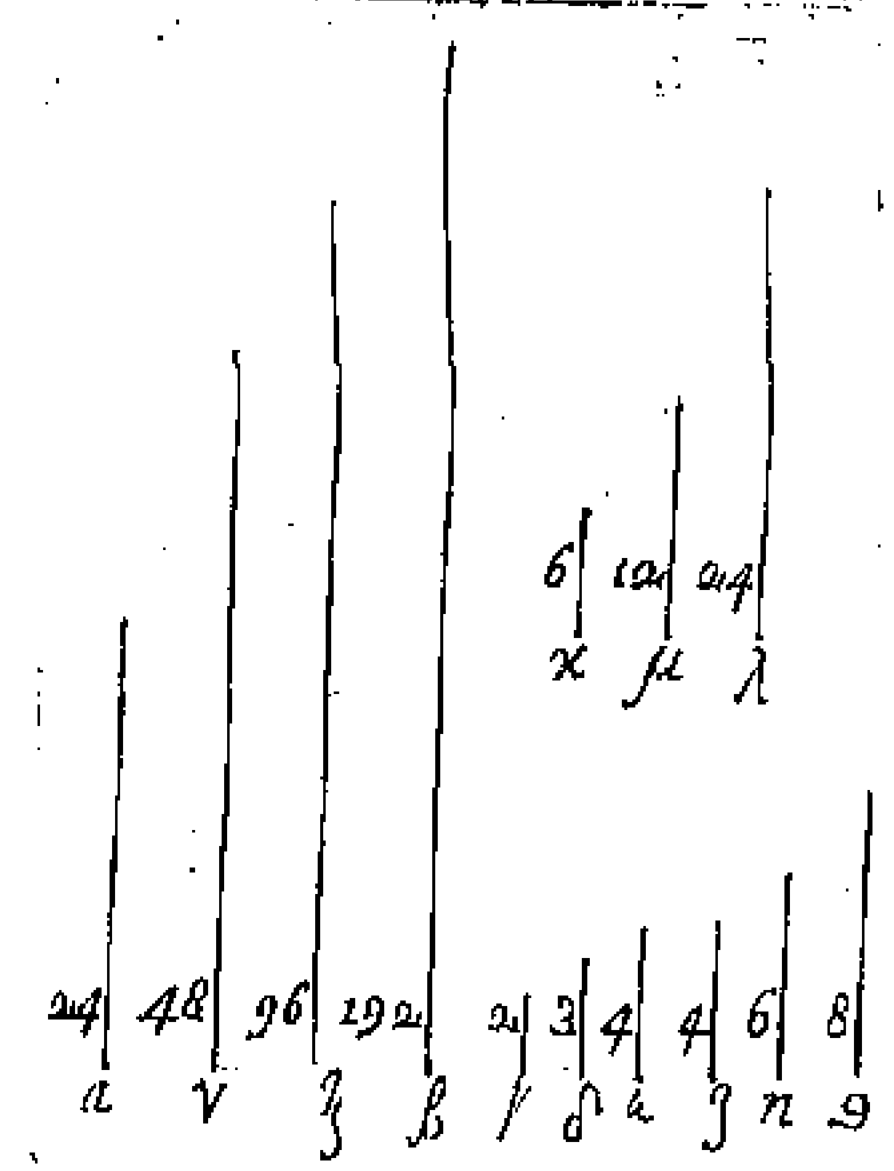
Ἐκ δὲ τούτου φανερὸν, ὅτι δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ μετὰ τοῦ μέσου αὐτῶν ἀναλόγου ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, ἐν τῷ λόγῳ τῶν ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν.

Πρότασις ΙΘ': Θεώρημα.

Δύο ὁμοίων στερεῶν, δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ, καὶ ὁ στερεὸς πρὸς τὸν ὅμοιον στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἔστωσαν ἤδη ὅμοιοι στερεοὶ οἱ α β, καὶ τοῦ μὲν α, πλευραὶ οἱ γ δ ε, ἀριθμοὶ, τοῦ δὲ β, οἱ ζ η θ. Λέγω δὴ, ὅτι μεταξὺ τῶν α β, δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί. καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τουτέστιν ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν η, καὶ ὁ ε, πρὸς τὸν θ. ὁ γ, γὰρ τὸν δ, πολλαπλασιάσας τὸν κ, ποιείτω, ὁ δὲ ζ, τὸν η, ὡσαύτως πολλαπλασιάσας τὸν λ, ποιείτω. Ἐπεὶ οὖν οἱ α β, ὅμοιοί εἰσιν, ἄρα κατὰ τὸν κα': ὅρον τοῦ ζ': ἐστὶν ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ζ, πρὸς τὸν η, καὶ ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ε, ὁ η, πρὸς τὸν θ, καὶ ἑπομένως διὰ τοῦ αὐτοῦ, οἱ κ λ, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι. καὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστιν ἐν αὐτοῖς. ἔστω δὴ οὗτος ὁ μ, ὃν οἱ ε θ, πολλαπλασιάσαντες τοὺς ν ξ, ποιείτωσαν. οἱ κ μ λ, ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ λόγῳ τοῦ γ, πρὸς τὸν ζ, καὶ τοῦ δ, πρὸς τὸν η. κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω. ἐπεὶ δὲ ἐστὶν ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ζ, πρὸς τὸν η. ἄρα καὶ ἐναλλὰξ κατὰ τὴν ιγ': τοῦ ζ': ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, ὁ δ, πρὸς τὸν η. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἔσται καὶ ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν η, ὁ ε, πρὸς τὸν θ, ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, ἐδείχθη καὶ ὁ κ, πρὸς τὸν μ, καὶ ὁ μ, πρὸς τὸν λ. ἄρα οἱ κ μ λ, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ λόγῳ τοῦ γ, πρὸς τὸν ζ, καὶ δ, πρὸς τὸν η, καὶ ε, πρὸς τὸν θ. ἐπεὶ δὲ ὁ ε, τὸν ὑπὸ τῶν γ δ, πολλαπλασιάσας τὸν α, πεποίηκεν, ὑπὸ δὲ τῶν γ δ, ὁ κ, γέγονεν, ὁ ε, ἄρα τὸν κ, πολλαπλασιάσας τὸν α, πεποίηκεν. Ἐπεὶ δὲ καὶ τὸν μ, πολλαπλασιάσας τὸν ν, πεποίηκεν, ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ κ, πρὸς τὸν μ, ὁ α, πρὸς τὸν ν, κατὰ τὴν ιζ': τοῦ ζ': ὡς δὲ ὁ κ, πρὸς τὸν μ, ἐστὶ καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν ζ. ἄρα καὶ ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, ὁ α, πρὸς τὸν ν. κατὰ δὲ τὴν ιη': τοῦ αὐτοῦ, ἐπεὶ οἱ ε, θ, τὸν μ, πολλαπλασιάσαντες τοὺς ν ξ, πεποιήκασιν. ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν θ, ὁ ν, πρὸς τὸν ξ, ὡς δὲ ὁ ε, πρὸς

Eucl. Lib. 8. Fig. 14.



τὸν θ,

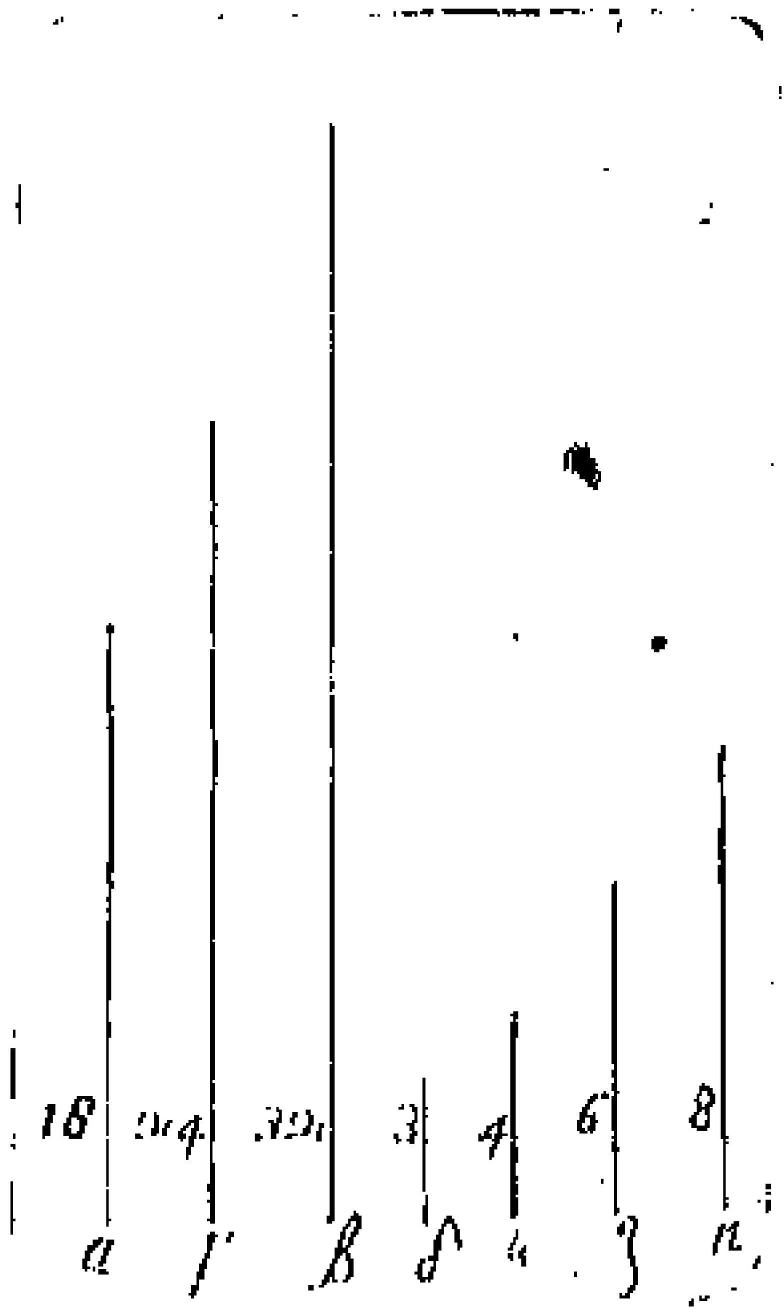
τὸν θ, δέδεικται καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, καὶ ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, ὁ α, πρὸς τὸν ν, ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν ν, ὁ ν, πρὸς τὸν ξ. ἔτι ἐπεὶ ὁ θ, τοὺς μ λ, πολλαπλασιάσας τοὺς ξ β, πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ μ, πρὸς τὸν λ, ὁ ξ, πρὸς τὸν β, ὡς δὲ ὁ μ, πρὸς τὸν λ, ἔστι καὶ ὁ κ, πρὸς τὸν μ, καὶ ὡς ὁ κ, πρὸς τὸν μ, ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, ἐδείχθη καὶ ὁ α, πρὸς τὸν ν, καὶ ὁ ν, πρὸς τὸν ξ, ἄρα οἱ α ν ξ β, ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον. ἐπεὶ δὲ ὁ α, πρὸς τὸν β, ἔχει τριπλασίονα λόγον, ἤπερ πρὸς τὸν ν, κατὰ τὸν ι α΄: ὅρον τοῦ ε΄: ὡς δὲ ὁ α, πρὸς τὸν ν, ἐδείχθη καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν η, καὶ ὁ ε, πρὸς τὸν θ. ἄρα ὁ α, πρὸς τὸν β, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν η, καὶ ὁ ε, πρὸς τὸν θ. Δύο ὁμοίων ἄρα στερεῶν, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Κ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογος ἐμπίπτῃ ἀριθμός, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται οἱ ἀριθμοί.

Ἀριθμῶν ἤδη τῶν α β, εἷς μέσος ἀνάλογος ἐμπιπτέτω ὁ γ, λέγω τοὺς α β, ὁμοίους ἐπιπέδους ἀριθμοὺς εἶναι. Εὑρεθήτωσαν διὰ τῆς λε΄: τοῦ ζ΄: οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς α γ β, καὶ ἔστωσαν οἱ δ ε, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ δ, πρὸς ε, ὁ α, πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν β, οἱ δὲ δ ε, ἄρα κατὰ τὴν κα΄: τοῦ ζ΄: ἰσάκις μετροῦσι τοὺς α γ, ὁσάκις οὖν ὁ δ, τὸν α, μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ζ. ὥστε ὁ δ, τὸν ζ, πολλαπλασιάζων τὸν α, ποιεῖ, οἱ δ ζ, ἄρα πλευραί εἰσι τοῦ α, καὶ οἱ ε ζ, τοῦ γ. διὰ τὰ αὐτὰ πάλιν ἐπεὶ οἱ δ ε, ἰσάκις μετροῦσι τοὺς γ β, ὁσάκις μετρεῖ ὁ ε, τὸν β, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ η, ὁ ε, ἄρα τὸν η, πολλαπλασιάζων, τὸν β, ποιεῖ, ὥστε οἱ ε η, πλευραί εἰσι τοῦ β, ἐδείχθησαν δὲ καὶ οἱ δ ζ, τοῦ α, οἱ α β, ἄρα ἐπίπεδοί εἰσι. Λέγω δή, ὅτι καὶ ὅμοιοι. ἐπεὶ οὖν οἱ ζ η, τὸν ε, πολλαπλασιάσαντες τοὺς γ β, πεποιήκασιν, ἄρα κατὰ τὴν ιη΄: τοῦ ζ΄: ὡς ὁ ζ, πρὸς τὸν η, ὁ γ, πρὸς τὸν β, ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν β, ἔστι καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν ε, ἄρα καὶ ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ε, ὁ ζ, πρὸς τὸν η. καὶ ἐναλλάξ, κατὰ τὴν ιγ΄: τοῦ ζ΄: ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ὁ ε, πρὸς τὸν η, κατὰ τὸν κα΄: ὅρον ἄρα τοῦ αὐτοῦ ζ΄: οἱ α β, εἰσὶν ὅμοιοι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 8. Fig. 15.

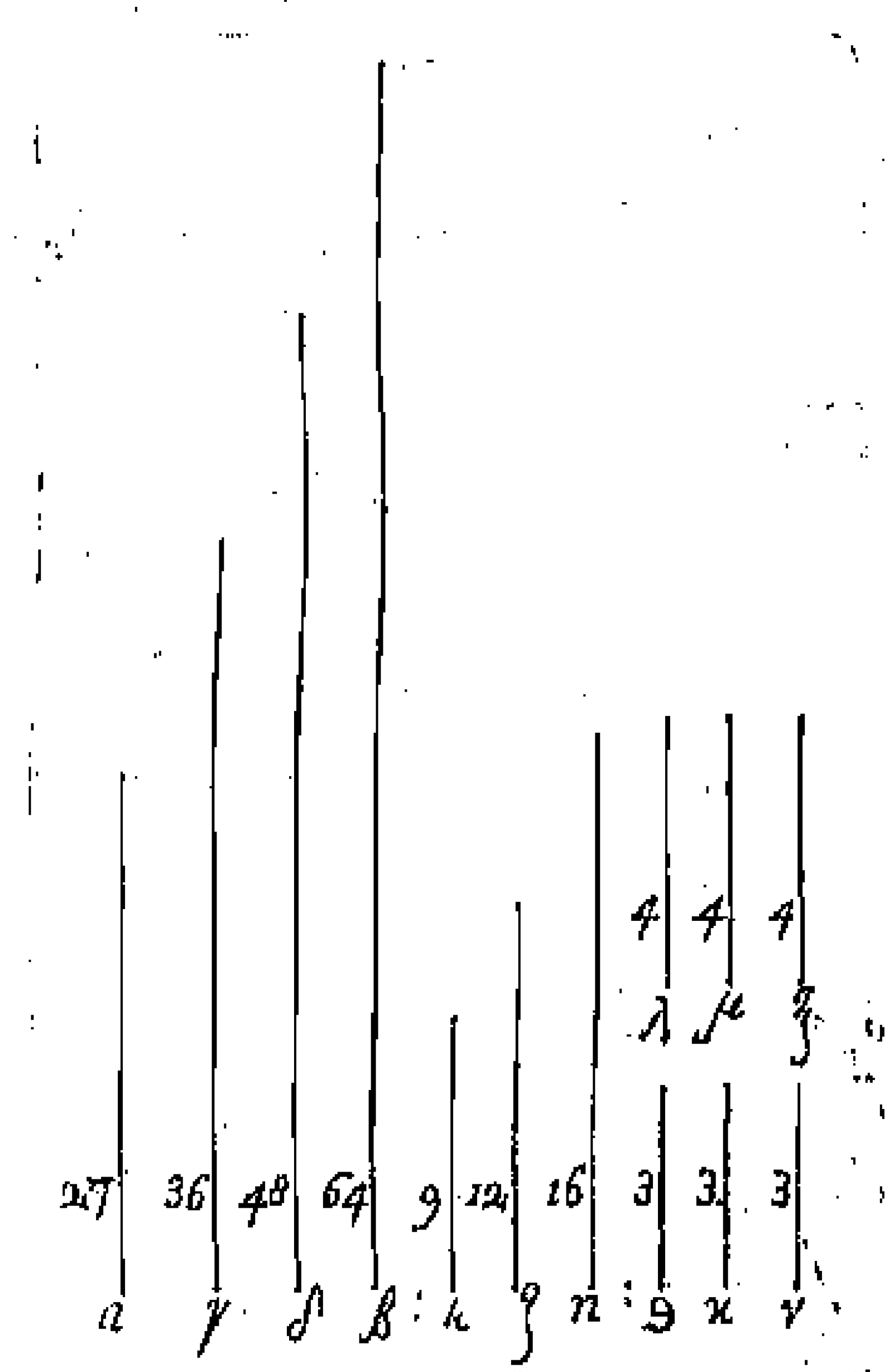


Πρότασις ΚΑ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅμοιοι στερεοί εἰσιν οἱ ἀριθμοί.

Δύο ἤδη ἀριθμῶν τῶν α β, δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν ἀριθμοί, οἱ γ δ. Λέγω τοὺς α β, ὁμοίους στερεοὺς εἶναι. εἰλήφθωσαν γὰρ διὰ τῆς λε΄: τοῦ ζ΄: τρεῖς ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς α γ δ β, οἱ ε ζ η, ὥστε διὰ τῆς ἀνωτέρω οἱ ε ζ η, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν. ἔστωσαν οὖν τοῦ μὲν ε, πλευραὶ αἱ θ κ, τοῦ δὲ η, οἱ λ μ. ἐπεὶ δὲ οἱ α γ δ, καὶ ε ζ η, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον. ἄρα καὶ δι᾽ ἴσου ὡς ὁ α, πρὸς τὸν δ, ὁ ε, πρὸς τὸν η, κατὰ τὴν ιδ΄: τοῦ ζ΄: οἱ δὲ ε η, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ κατὰ τὴν κδ΄: τοῦ αὐτοῦ, καὶ διὰ τῆς κγ΄: τοῦ ζ΄: ἐλάχιστοι, ἄρα οἱ ε η, ἰσάκις μετροῦσι τοὺς α δ, κατὰ τὴν κα΄: τοῦ ζ΄: ὁσάκις δὲ ὁ ε, τὸν α, μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ν, ὁ ν, ἄρα τὸν ε, πολλαπλασιάζων τὸν α, ποιεῖ. ὁ δὲ ε, ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν θ κ, ὁ ν, ἄρα τὸν ἐκ τῶν θ κ, πολλαπλασιάζων τὸν α, ποιεῖ. ὥστε τοῦ α, πλευραί εἰσιν οἱ θ κ ν, ὁ α, ἄρα στερεός ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ πάλιν, ἐπεὶ οἱ ε η, ἰσάκις μετροῦσι τοὺς γ β, ὁσάκις ὁ η, τὸν β, μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ξ. ὥστε ὁ ξ, τὸν η, πολλαπλασιάζων τὸν β, ποιεῖ. ὁ δὲ η, ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν λ μ, ἄρα οἱ λ μ ξ, εἰσὶ πλευραὶ τοῦ β, καὶ ὁ β, τοίνυν στερεός ἐστι. Λέγω δή, ὅτι οἱ α β, καὶ ὅμοιοί εἰσιν. ἐπεὶ οὖν ὁ ε, μετρεῖ τὸν μὲν α, κατὰ τὰς ἐν τῷ ν, μονάδας, τὸν δὲ γ, κατὰ τὰς ἐν τῷ ξ, οἱ ν ξ, ἄρα τὸν ε, πολλαπλασιάσαντες τοὺς α γ, πεποιήκασιν. ὥστε ὡς ὁ ν, πρὸς τὸν ξ, οὕτως ἐστὶν ὁ α, πρὸς τὸν γ, κατὰ τὴν ιη΄: τοῦ ζ΄. τουτέστιν ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, ὡς δὲ ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, οὕτως ἐστὶ καὶ ὁ θ, πρὸς τὸν λ, καὶ ὁ κ, πρὸς τὸν μ, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ια. τοῦ παρόντος. ἄρα οἱ θ κ ν, πλευραὶ τοῦ α, ἀνάλογοί εἰσιν τοῖς λ μ ξ, πλευραῖς τοῦ β, οἱ α β, ἄρα κατὰ τὸν κα. ὅρον τοῦ ζ΄. ὅμοιοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. lib. 8. Fig. 16.



Πρότασις ΚΒ': Θεώρημα.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾖ, καὶ ὁ τρίτος, τετράγωνος ἔσται.

Ἐπὶ τῆς κ': προτάσεως τοῦ παρόντος, ἐπεὶ οἱ α γ β, ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, οἱ α β, ἀριθμοὶ, ὅμοιοι ἐδείχθησαν εἶναι, εἰ οὖν ὁ α, τετράγωνος ὑποτεθῇ, καὶ ὁ β, πάντως τετράγωνος ἔσται. εἰ γὰρ μὴ, οὐκ ἔσονται ὅμοιοι.

Πρότασις ΚΓ': Θεώρημα.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ, καὶ ὁ τέταρτος κύβος ἔσται.

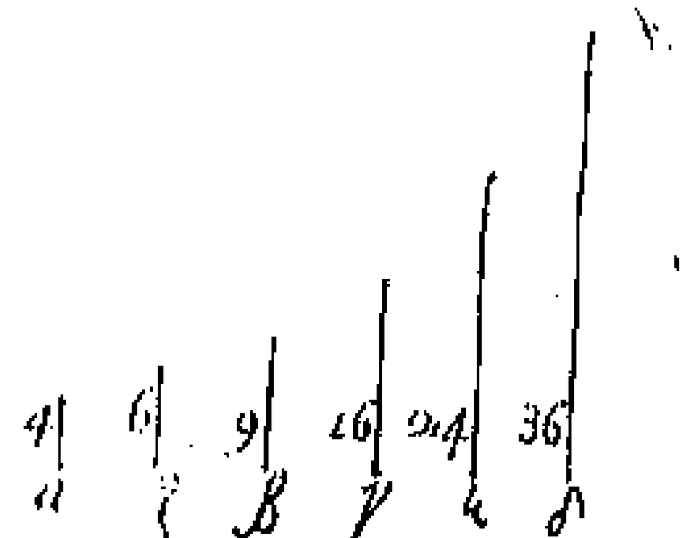
Ἐπὶ τῆς κα': δέδεικται, ὅτι μεταξὺ τῶν α β, ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσι δηλ: οἱ γ δ, τοὺς α β, ὁμοίους εἶναι, εἰ οὖν ὁ α, κύβος ὑποτεθῇ, καὶ ὁ β, ὡσαύτως κύβος ἔσται. τοὐναντίον δὲ οὐκ ἔσονται ὅμοιοι.

Πρότασις ΚΔ': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾖ, καὶ ὁ δεύτερος τετράγωνος ἔσται.

Ἀριθμὸς ἤδη ὁ α, ἐχέτω λόγον πρὸς τὸν β, ὃν ὁ γ, τετράγωνος πρὸς τὸν δ, τετράγωνον. ἔστω δὲ καὶ ὁ α, τετράγωνος. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ β, τετράγωνός ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ οἱ γ δ, τετράγωνοί εἰσιν, ἄρα καὶ ὅμοιοι, καὶ κατὰ τὴν ιη': τοῦ παρόντος, μεταξὺ αὐτῶν εἷς μέσος ἀνάλογος ἐμπίπτει, καθάπερ ὁ ε, ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἐστὶ καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, ἄρα καὶ μεταξὺ τῶν α β, εἷς μέσος ἀνάλογος ἐμπίπτει, ὥσπερ ὁ ζ, ὥστε οἱ α ζ β, ἀνάλογόν εἰσιν. καὶ ἐπεὶ ὁ α, τετράγωνός ἐστιν, ἄρα καὶ ὁ β, τετράγωνός ἐστι, κατὰ τὴν κ': τοῦ παρόντος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

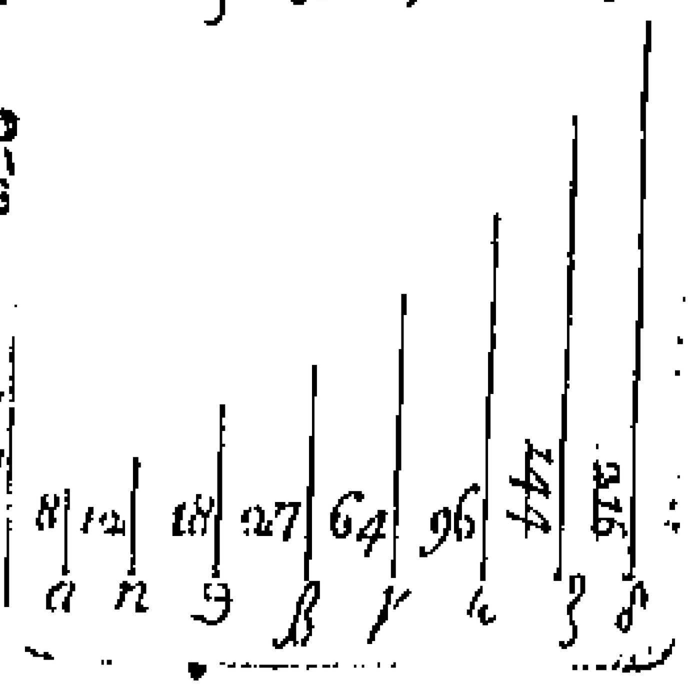
Eucl. Lib. 8. Fig. 17.



Πρότασις ΚΕ': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμὸν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ, καὶ ὁ δεύτερος κύβος ἔσται.

Ὁ α, ἤδη ἀριθμὸς ἐχέτω πρὸς τὸν β, ἀριθμὸν λόγον, ὃν ἔχει ὁ γ, κύβος, πρὸς τὸν δ, κύβον. ἔστω δὲ καὶ ὁ α, κύβος. Λέγω καὶ τὸν β, κύβον εἶναι, οἱ γ δ, γὰρ κύβοι ἀριθμοὶ ὅμοιοι, στερεοί εἰσι, καὶ μεταξὺ αὐτῶν



δύο

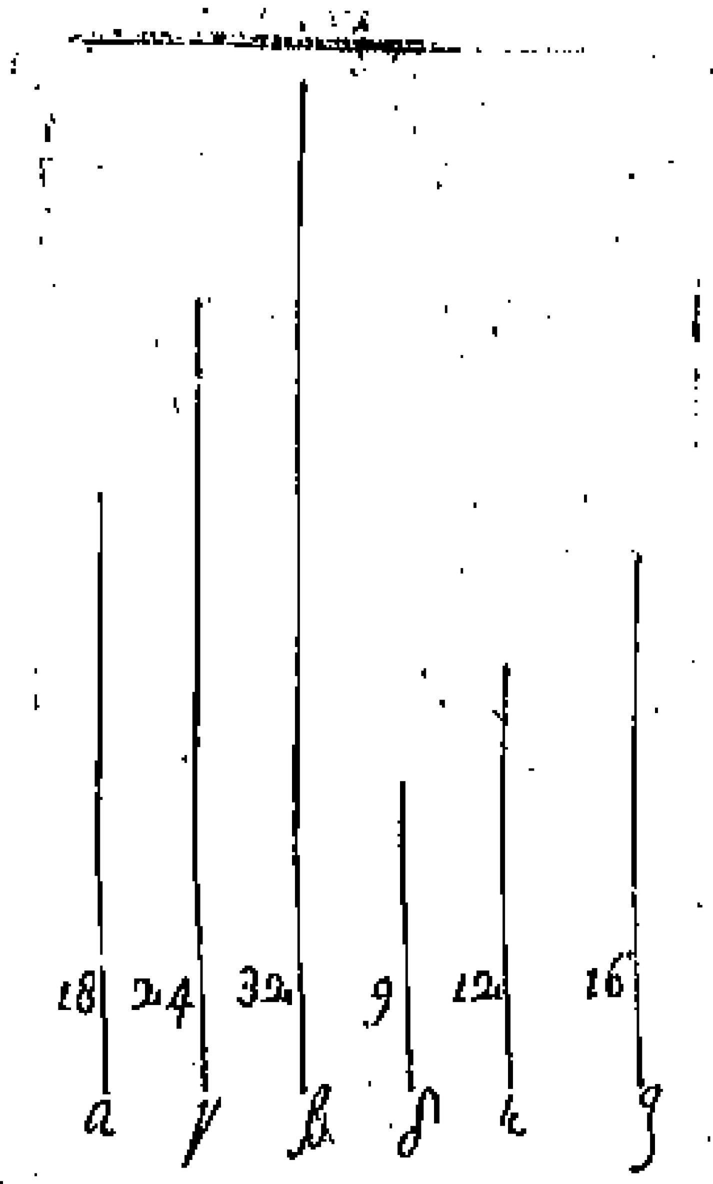
δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσι, κατὰ τὴν ιθ': τοῦ παρόντος, ὥσπερ οἱ ε ζ. ἐπεὶ δὲ ἐστιν ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ α, πρὸς τὸν β, μεταξὺ ἄρα καὶ τῶν α β, δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν, ὡς οἱ η θ, ἄρα οἱ α η θ β, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν. ὁ δὲ α, κύβος ἐστὶν, ἄρα καὶ ὁ β, κατὰ τὴν κγ': τοῦ παρόντος, κύβος ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. lib. 8. Fig. 18.

Πρότασις Κς': Θεώρημα.

Οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

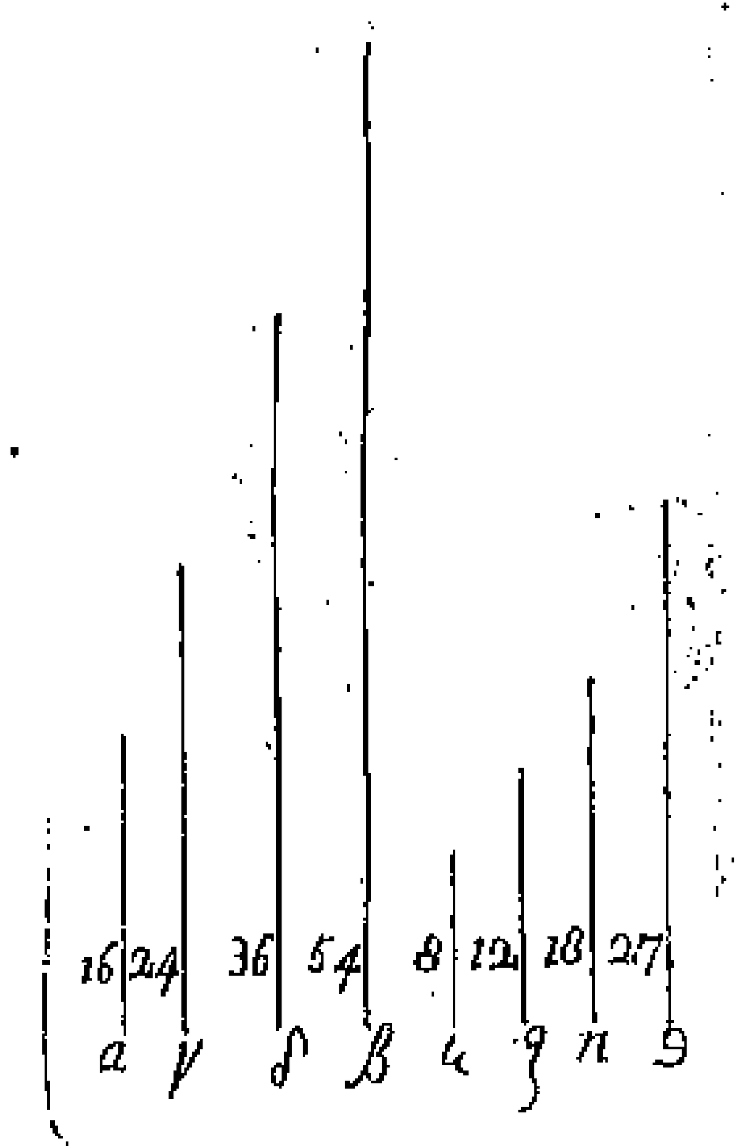
Τοὺς α, β, ἤδη ὁμοίους ἀριθμοὺς, λέγω, λόγον ἔχειν πρὸς ἀλλήλους, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, μεταξὺ γὰρ τῶν α β, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστιν ἀριθμὸς, κατὰ τὴν ιη': τοῦ παρόντος, ἔστω οὗτος ὁ γ. καὶ εὑρεθήτωσαν διὰ τῆς λε': τοῦ ζ': οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς α γ β, καὶ ἔστωσαν οὗτοι οἱ δ ε ζ, οἱ δ ζ, ἄρα κατὰ τὸ α': πόρισμα τῆς β': τοῦ παρόντος, εἰσὶ τετράγωνοι, ὡς δὲ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, κατὰ τὴν ιζ': τοῦ ζ': ἄρα οἱ α β, λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Πρότασις ΚΖ': Θεώρημα.

Οἱ ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν.

Τοὺς α β, ἤδη ὁμοίους στερεοὺς λέγω, καὶ τὰ ἑξῆς. κατὰ γὰρ τὴν ιθ': τοῦ παρόντος μεταξὺ αὐτῶν δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, ὡς οἱ γ δ. διὰ δὲ τῆς λε': τοῦ ζ': εὑρεθέντων τῶν ἐλαχίστων ἀριθμῶν τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς α γ δ β, (οἵτινες ἔστωσαν οἱ ε ζ η θ,) οἱ ε θ, κύβοι εἰσὶ κατὰ τὸ α': πόρισμα τῆς β': τοῦ παρόντος. ὡς δὲ ὁ ε, πρὸς τὸν θ, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, κατὰ τὴν ιβ': τοῦ ζ': ἄρα οἱ α β, λόγον ἔχουσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς, πρὸς κύβον ἀριθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Τέλος τοῦ Ὀγδόου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ

ΤΟΥ ΕΝΝΑΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

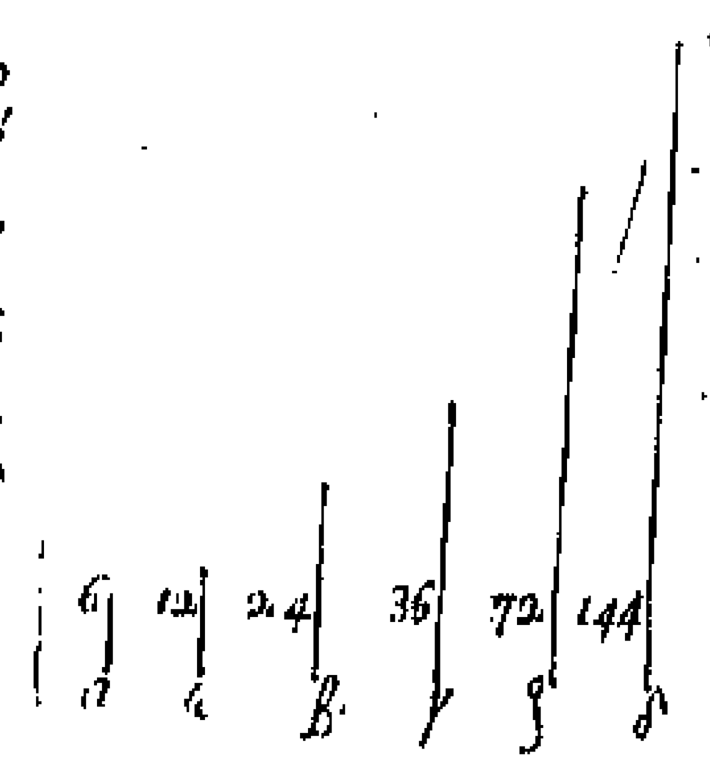
ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

Πρότασις Α': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος τετράγωνος ἔσται.

Ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἤδη ἀριθμοὶ οἱ α β, πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους τὸν δ, ποιείτωσαν, ὃν λέγω τετράγωνον εἶναι. ὁ γὰρ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν γ, ποιείτω, ὁ γ, τοίνυν τετράγωνός ἐστι κατὰ τὸν ιη': ὅρον τοῦ ζ': καὶ ἐπεὶ ὁ α, ἑαυτὸν καὶ τὸν β, πολλαπλασιάσας τοὺς γ δ, πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν δ, κατὰ τὴν ιζ': τοῦ ζ': ἐπεὶ δὲ οἱ α β, ὅμοιοί εἰσι, κατὰ τὴν ιη': ἄρα τοῦ η': εἷς μέσος ἀνάλογος τούτων ἐστίν. Ἐπεὶ δὲ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ἔστι καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἄρα καὶ μεταξὺ τῶν γ δ, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστιν. ἔστω δὲ ὁ ζ, οἱ γ ζ δ, ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν. ἐπεὶ δὲ ὁ γ, τετράγωνός ἐστιν, ἄρα καὶ ὁ δ, τετράγωνος ἔσται. κατὰ τὴν κβ': τοῦ η': ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 9. Fig. 1.



Πρότασις Β': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσι τετράγωνον: ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν.

Ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος οἱ α β, ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους τὸν δ, ποιείτωσαν τετράγωνον ἀριθμόν. Λέγω τοὺς α, β, ὁμοίους εἶναι ἐπιπέδους. ὁ γὰρ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν γ, ποιείτω. καὶ ὁ γ, ἄρα τετράγωνός ἐστι, κατὰ τὸν ιη': ὅρον τοῦ ζ': ἐπεὶ δὲ ὁ αὐτὸς α, καὶ τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν δ, πεποίηκεν. ἄρα κατὰ τὴν ιζ': τοῦ ζ': ἔστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν δ.

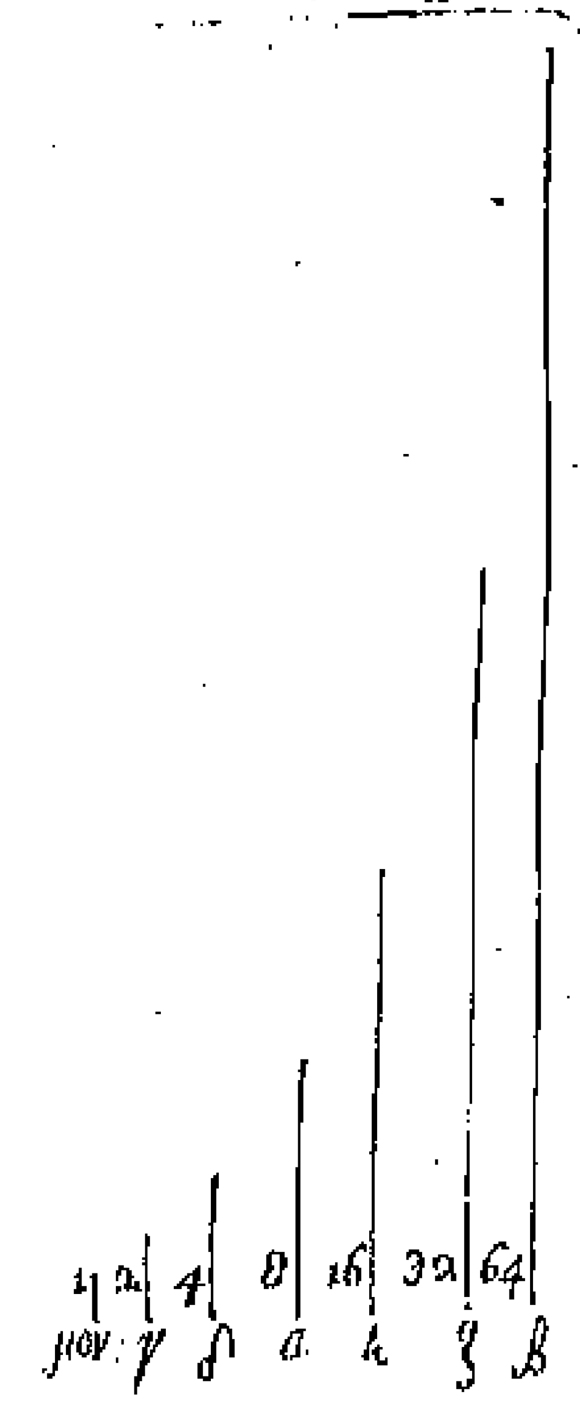
τὸν δ. ἐπεὶ δὲ οἱ γ, καὶ δ, τετράγωνοί εἰσιν, ἄρα καὶ ὅμοιοι. κατὰ τὴν ιη': τοῦ η': εἷς μέσος ἀνάλογος τούτων ἐστίν, ὥσπερ ὁ ζ. ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, ἄρα καὶ μεταξὺ τῶν α β, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστιν, ἔστω δὲ ὁ ε. κατὰ τὴν κ': ἄρα τοῦ η': οἱ α β, ὅμοιοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Γ': Θεώρημα.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται.

Κύβος ἤδη ἀριθμὸς ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν β, ποιείτω. Λέγω δὴ τὸν β, κύβον εἶναι. Ἔστω γὰρ ὁ γ, ἡ τοῦ α, πλευρὰ, καὶ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν δ, ποιείτω. δῆλον τοίνυν ὡς ὁ γ, τὸν δ, πολλαπλασιάσας τὸν α, πεποίηκεν. ἐπεὶ δὲ ὁ γ, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν δ, πεποίηκε, κατὰ τὸ β': ἄρα πόρισμα τῆς ιϛ': τοῦ ζ': ἔστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν γ, οὕτως ὁ αὐτὸς γ, πρὸς τὸν δ. Αὖθις ἐπεὶ ὁ γ, τὸν δ, πολλαπλασιάσας τὸν α, πεποίηκε, διὰ τοῦ αὐτοῦ ἄρα πορίσματος, ἔστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν γ, ὁ δ, πρὸς τὸν α, ὡς δὲ ἡ μονὰς πρὸς τὸν γ, δέδεικται καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἄρα κατὰ τὴν ια': τοῦ ε': ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν γ, ὁ γ, πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν α, μεταξὺ ἄρα μονάδος καὶ α, δύο μέσοι ἑξῆς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ, οἱ γ δ. Πάλιν ἐπεὶ ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν β, πεποίηκεν, ἄρα κατὰ τὸ προῤῥηθὲν πόρισμα, ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν α, οὕτως ἐστὶν ὁ α, πρὸς τὸν β, μεταξὺ δὲ μονάδος καὶ α, δύο ἑξῆς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ, ἄρα καὶ μεταξὺ τοῦ α, καὶ β, δύο ἐμπεσοῦνται ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἐμπιπτέτωσαν οἱ ε ζ. ἐπεὶ δὲ ὁ α, κύβος ἐστὶν, ἄρα καὶ ὁ β, κύβος ἐστὶ, κατὰ τὴν κγ': τοῦ η': ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

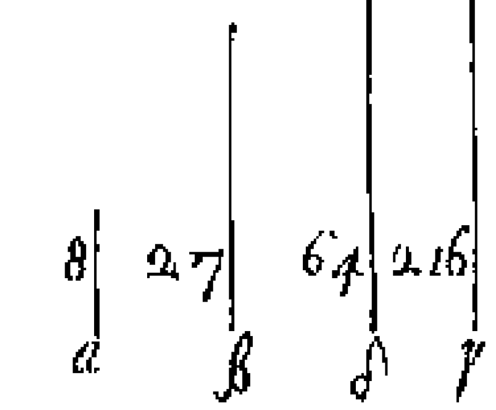
Eucl. Lib. 9. Fig. 2.



Πρότασις Δ': Θεώρημα.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται.

Κύβος ἤδη ἀριθμὸς ὁ α, κύβον ἀριθμὸν τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν γ, ποιείτω. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ γ, κύβος ἐστίν. ὁ γὰρ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν δ, ποιείτω, ὁ δ, ἄρα κύβος ἐστὶ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω. ἐπεὶ δὲ ὁ α, ἑαυτὸν καὶ τὸν β, πολλαπλασιάσας, τοὺς δ γ, πεποίηκεν. ἔστιν



ἄρα κατὰ τὴν ιζ′: τοῦ ζ′: ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ δ, πρὸς τὸν γ, τῶν δὲ α β, δύο μέσοι ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, κατὰ τὴν ιθ′: τοῦ η′: ἄρα καὶ μεταξὺ τῶν δ γ, δύο μέσοι ἑξῆς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν. οἱ δ γ, ἄρα ὅμοιοι στερεοί εἰσι κατὰ τὴν κα: τοῦ η′: ἐπεὶ δὲ ὁ δ, κύβος ἐστὶν, ἄρα καὶ ὁ γ, κύβος ὁμοίως ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

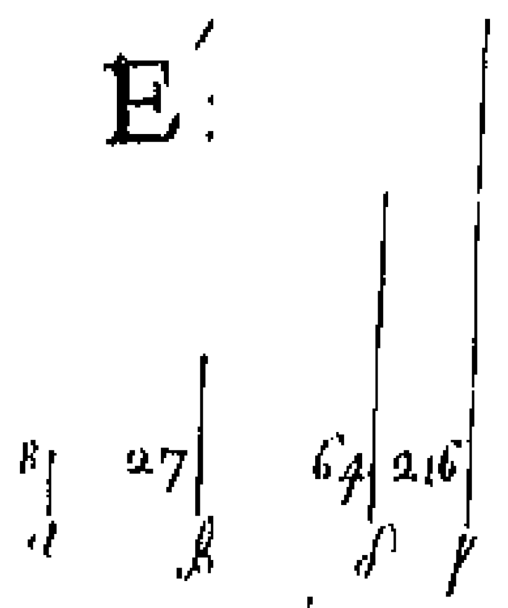
Πρότασις Ε′: Θεώρημα.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς, ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ ὁ πολλαπλασιασθεὶς κύβος ἔσται.

Ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω σχήματος ὁ α, κύβος ἀριθμὸς τὸν β, ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας, τὸν γ, κύβον ποιείτω. Λέγω καὶ τὸν β, κύβον εἶναι. ὁ γὰρ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν δ, ποιείτω. ὃς κύβος ἐστὶ κατὰ τὴν γ′: τοῦ παρόντος. ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ γ, κύβος ἐστὶν, ἄρα οἱ δ γ, ὅμοιοι στερεοί εἰσι. καὶ κατὰ τὴν ιθ′: τοῦ η′: δύο μέσοι ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν αὐτοῖς. ὡς δὲ ὁ δ, πρὸς τὸν γ, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, κατὰ τὴν ιζ′: τοῦ ζ′: (ὁ γὰρ α, ἑαυτὸν καὶ τὸν β, πολλαπλασιάσας τοὺς δ γ, πεποίηκεν.) ἄρα καὶ μεταξὺ τῶν α β, δύο μέσοι ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ α, κύβος ἐστὶ, καὶ ὁ β, ἄρα κύβος ἔσται, κατὰ τὴν κγ′: τοῦ η′: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 9. Fig. 3.

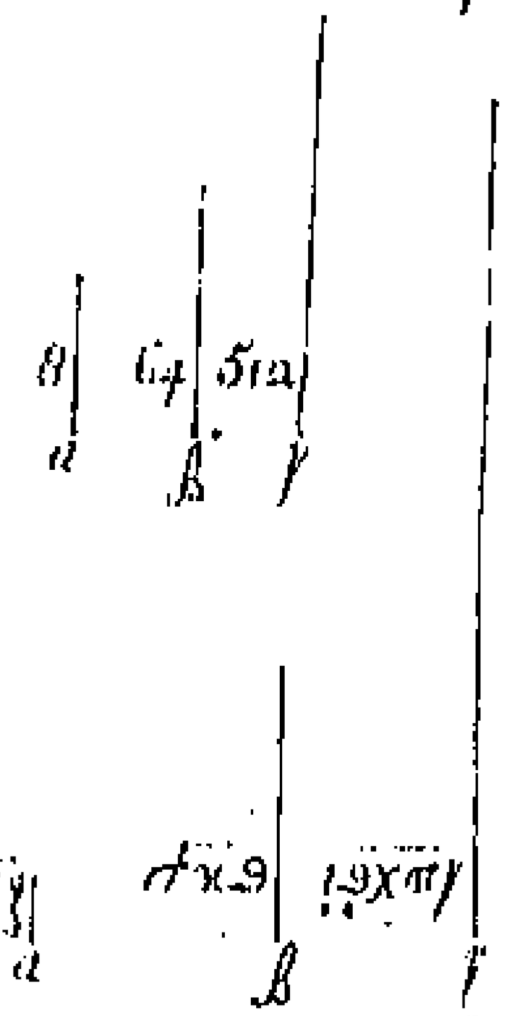
Ε′:



Πρότασις ς′: Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὸς κύβος ἔσται.

Ἀριθμὸς ἤδη ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν β, κύβον ποιείτω. Λέγω δὴ καὶ τὸν α, κύβον εἶναι. ὁ γὰρ α, τὸν β, πολλαπλασ: τὸν γ, ποιείτω. ἐπεὶ τοίνυν ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλασ: τὸν β, πεποίηκε, τὸν δὲ β, ὡσαύτως πολλαπλασ: τὸν γ, πεποίηκεν, ὁ γ, πάντως κύβος ἐστὶ, κατὰ τὸν ιθ′: ὅρον τοῦ ζ′: ἔστι δὲ καὶ ὁ β, κύβος, ὅμοιοι ἄρα εἰσὶ στερεοὶ οἱ β γ, καὶ δύο αὐτῶν μέσοι ἀνάλογόν εἰσι, κατὰ τὴν ιθ′: τοῦ η′: ὡς δὲ ὁ β, πρὸς τὸν γ, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, κατὰ τὴν ιζ′: τοῦ ζ′: ὁ γὰρ α, ἑαυτόν τε καὶ τὸν β, πολλαπλασ: τοὺς β, γ, πεποίηκεν, ἄρα καὶ τῶν α β, δύο μέσοι ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, ὁ δὲ β, κύβος, ἄρα καὶ ὁ α, ὡσαύτως κύβος ἐστὶ, κατὰ τὴν κγ′: τοῦ η′: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

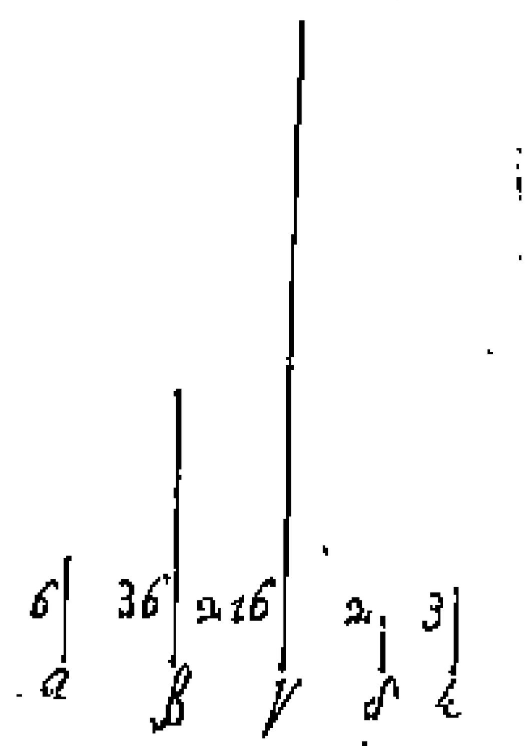


Πρότασις Ζ′: Θεώρημα.

Ἐὰν σύνθετος ἀριθμὸς ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος στερεὸς ἔσται.

Eucl. Lib. 9. Fig. 4.

Σύνθετος ἤδη ἀριθμὸς ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν β, ποιείτω, ὃν λέγω στερεὸν εἶναι. ὁ γὰρ β, τὸν α, πολλαπλασ: τὸν γ, ποιείτω. καὶ ἐπεὶ ὁ α, σύνθετός ἐστιν, ἄρα ὑπό τινος ἀριθμοῦ μετρεῖται, κατὰ τὸν ιγ′: ὅρον τοῦ ζ′: μετρείσθω ὑπὸ τοῦ δ, καὶ ὁσάκις ὁ δ, τὸν αὐτὸν α, μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ε, ὁ δ, ἄρα τὸν ε, πολλαπλ: τὸν α, πεποίηκεν. ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ β, τὸν α, πολλαπλασ: τὸν γ, πεποίηκεν, ὁ γ, ἄρα ὑπὸ τριῶν ἀριθμῶν, τῶν δ ε β, ἀλλήλοις πολλαπλασιασθέντων, γέγονε. κατὰ τὸν ιζ′: τοίνυν ὅρον τοῦ ζ′: στερεός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

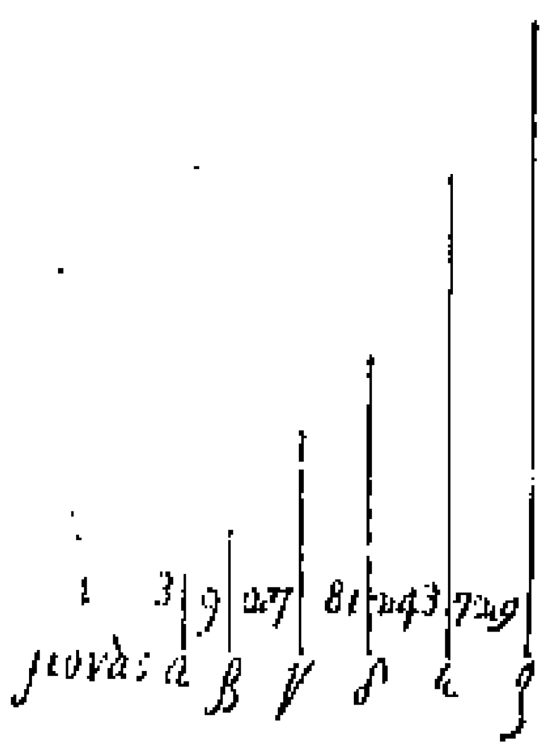


Πρότασις Η′: Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος τετράγωνός ἐστι, καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ τέταρτος κύβος, καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ ἕβδομος κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος, καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες

Ἀριθμῶν ἤδη τῶν α β γ δ ε ζ, ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀνάλογον ὄντων. Λέγω τὸν μὲν β, τρίτον ἀπὸ μονάδος τετράγωνον εἶναι, καὶ πάντας τοὺς ἕνα διαλείποντας, ὥσπερ οἱ δ, ζ. τὸν δὲ γ, κύβον, καὶ πάντας τοὺς δύο διαλείποντας, ὥσπερ ὁ ζ, καὶ οἱ ὅμοιοι, τὸν ζ′: δὲ ζ, κύβον ἅμα καὶ τετράγωνον εἶναι, καὶ πάντας ἔτι τοὺς πέντε διαλείποντας. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν α, ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ α, ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν β, πεποίηκε, κατὰ τὸ β′: πόρισμα τῆς ιϛ′: τοῦ ζ′: ὁ β, ἄρα τετράγωνός ἐστιν, οἱ δὲ β γ δ, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ὁ β, τετράγωνός ἐστιν, ἄρα καὶ ὁ δ, τετράγωνός ἐστι, κατὰ τὴν κβ′: τοῦ η′: διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ὁ ζ, τετράγωνός ἐστι, καὶ οἱ ἑξῆς ἕνα διαλείποντες. Αὖθις ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν α, οὕτως ὁ β, πρὸς τὸν γ, κατὰ τὸ εἰρημένον πόρισμα, ὁ α, τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν γ, πεποίηκεν, ὁ δὲ β, τετράγωνος δέδεικται, καὶ πλευρὰ αὐτοῦ ὁ α, ὁ γ, ἄρα κύβος ἐστίν. ἐπεὶ δὲ οἱ γ δ ε ζ, ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ γ, κύβος ἐστὶν, ἄρα κατὰ τὴν κγ′: τοῦ η′: καὶ ὁ ζ, κύβος ἐστίν. ἐδείχθη δὲ

Eucl. Lib. 9. Fig. 5.



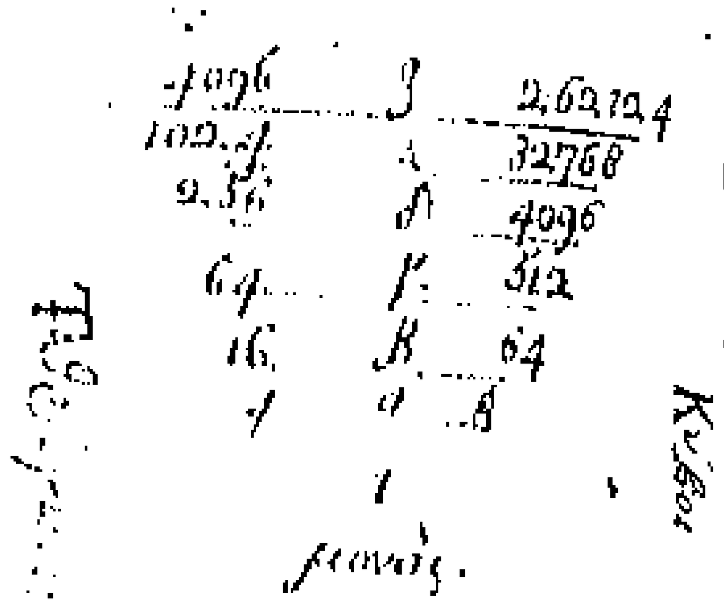
καὶ τετράγωνος. καὶ ἔστιν ἕβδομος ἀπὸ μονάδος, ὁ ζ, ἄρα κύβος ἅμα καὶ τετράγωνός ἐστιν. ὁμοίως δείξομεν καὶ τοὺς ἑξῆς δύο διαλείποντας, κύβους εἶναι πάντας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Θ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα τετράγωνος ᾖ, καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται, καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος ᾖ, καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι ἔσονται.

Ἔστωσαν ἤδη ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ α β γ δ ε ζ, ὧν ὁ α, πρῶτος, τετράγωνος. Λέγω καὶ τοὺς λοιποὺς τετραγώνους εἶναι. ὅτι μὲν οὖν ὁ β, καὶ πάντες οἱ ἕνα διαλείποντες τετράγωνοί εἰσι, δέδεικται διὰ τῆς ἀνωτέρω. ἐπεὶ δὲ οἱ α β γ, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ α, τετράγωνος, καὶ ὁ γ, ἄρα τετράγωνός ἐστι, κατὰ τὴν κβ': τοῦ η': ὡσαύτως διὰ τῆς αὐτῆς, ἐπεὶ οἱ β γ δ, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ὁ β, τετράγωνος, ἄρα καὶ ὁ δ, τετράγωνός ἐστιν, οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν. Ἔστω δὴ ὁ α, κύβος. Λέγω καὶ τοὺς ἑξῆς πάντας κύβους εἶναι. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν α, ὁ αὐτὸς α, πρὸς τὸν β, ὁ α, ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν β, πεποίηκε, κατὰ τὸ β': πόρισμα τῆς ις': τοῦ ζ': καὶ ἐπεὶ ὁ α, κύβος ἐστὶ, καὶ ὁ β, πάντως ὡσαύτως κύβος ἐστὶ, κατὰ τὴν γ': τοῦ παρόντος. ὅτι δὲ καὶ ὁ γ, καὶ πάντες οἱ δύο διαλείποντες κύβοι εἰσὶ, δέδεικται διὰ τῆς ἀνωτέρω, ἄρα οἱ α β γ, ἑξῆς ἀριθμοὶ, κύβοι εἰσίν. ὧν προαποδεδειγμένων, ἤπουν τῆς ἀποδείξεως ἐπὶ τῶν ἐφεξῆς ἀρχόμεθα. ἐπεὶ δὲ οἱ α β γ δ, ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ α, κύβος, καὶ ὁ δ, πάντως κύβος ἐστὶ κατὰ τὴν κγ': τοῦ η': ὁμοίως δείξομεν καὶ τὸν ε, κύβον εἶναι, ἀπὸ τοῦ β, ἀρχόμενοι, οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. lib. 9. Fig. 6.



Πρότασις Ι': Θεώρημα.

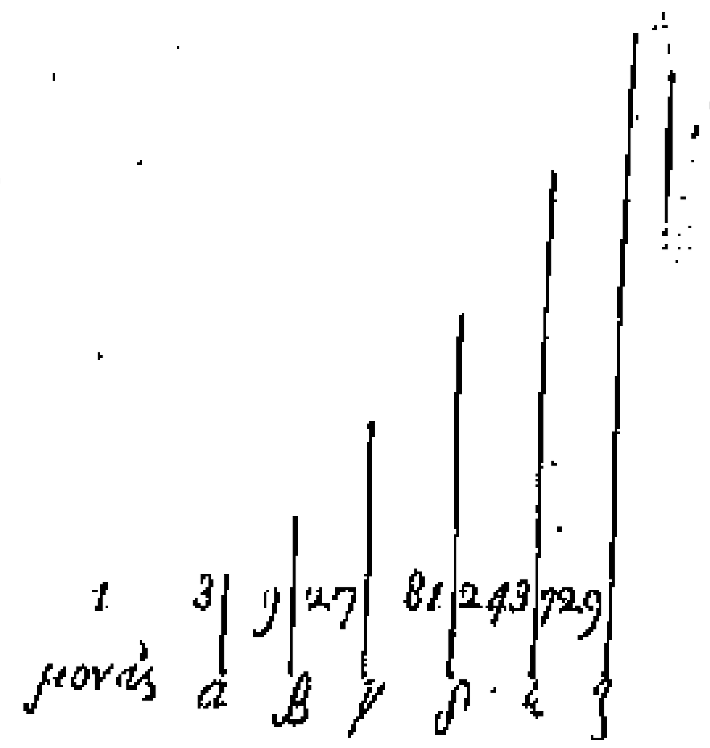
Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα μὴ ᾖ τετράγωνος, οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος ἔσται, χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος, καὶ τῶν ἓν διαλειπόντων πάντων, καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος μὴ ᾖ, οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται, χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος, καὶ τῶν δύο διαλειπόντων πάντων.

Ἔστωσαν ἤδη ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ α β γ δ ε ζ, καὶ ὁ μετὰ τὴν

μο-

μονάδα α, μὴ ἔστω τετράγωνος. Λέγω οὐδένα ἄλλον τετράγωνον εἶναι, χωρὶς τοῦ τρίτου, καὶ τῶν ἑξῆς. εἰ γὰρ μὴ, ἔστω ὁ γ, τετράγωνος, ἔστι δὲ καὶ ὁ β, τετράγ: κατὰ τὴν η': τοῦ παρόντος, οἱ β γ, ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν, ὡς δὲ ὁ β, πρὸς τὸν γ, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, καὶ οἱ α β, ἄρα ὅμοιοί εἰσιν, ὁ δὲ β, τετράγωνός ἐστιν, ἄρα καὶ ὁ α, τετράγωνος, ὅπερ ἄτοπον. ὑπετέθη γὰρ μὴ τοιοῦτος, οὐθ' ὁ γ, ἄρα τετράγωνός ἐστιν. Αὖθις ἐπεὶ μεταξὺ τῶν γ ε, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστιν ὁ δ, οἱ γ ε, ἄρα ὅμοιοί εἰσι, κατὰ τὴν κ': τοῦ η': ὁ δὲ γ, οὐκ ἔστι τετράγωνος, ἄρα οὐθ' ὁ ε, τετράγωνός ἐστιν. ὁμοίως δείξομεν καὶ περὶ τῶν λοιπῶν. Μὴ ἔστω δὴ οὐδὲ κύβος ὁ α. Λέγω μὴ δὲ ἄλλον τινὰ κύβον εἶναι, χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ μονάδος, καὶ τῶν δύο διαλειπόντων. εἰ γὰρ μὴ, ἔστω ὁ β, κύβος. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν α, ὁ αὐτὸς α, πρὸς τὸν β, ἄρα ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν β, πεποίηκε, κατὰ τὸ β': πόρισμα τῆς ις': τοῦ ζ': ὁ δὲ β, κύβος ἐστὶν, ἄρα καὶ ὁ α, κατὰ τὴν ς': τοῦ παρόντος, κύβος ἐστὶν, ὅπερ οὐχ ὑποτίθεται, ἄρα οὐθ' ὁ β, κύβος ἐστίν. ἐπεὶ δὲ μεταξὺ τῶν α δ, δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν οἱ β γ, ἄρα κατὰ τὴν κα': τοῦ η': οἱ α δ, ὅμοιοί εἰσιν, ὁ δὲ α, μὴ κύβος ἐστὶν, ἄρα καὶ ὁ δ, μὴ κύβος ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 9. Fig. 7.



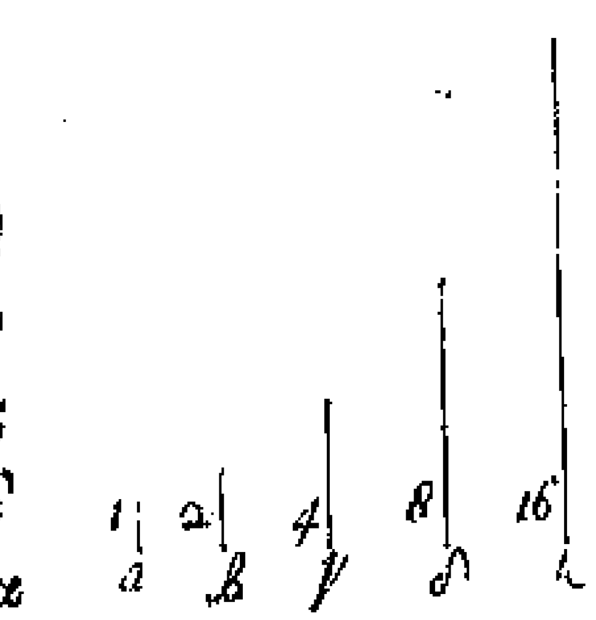
Πρότασις ΙΑ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐλάττων τὸν μείζονα μετρεῖ κατά τινα τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

Ἔστωσαν ἤδη ἀπὸ μονάδος τῆς α, ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ β γ δ ε. Λέγω τὸν ἐλάττονα β, μετρεῖν τὸν μείζονα αὐτοῦ γ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ α, μονὰς πρὸ τὸν β, ὁ β, πρὸς τὸν γ, ἄρα ἰσάκις ἡ α, μονὰς τὸν β, μετρεῖ, καὶ ὁ β, τὸν γ, ἡ δὲ μονὰς τὸν β, μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ β, μονάδας, καὶ ὁ β, ἄρα τὸν γ, μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸν γ, τὸν δ, μετρεῖν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν β, μετρεῖ, καὶ ὁ γ, τὸν δ. ἡ δὲ μονὰς τὸν β, μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἄρα καὶ ὁ γ, τὸν δ, μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ β, μονάδας. οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν ἐφεξῆς. ὥστε πάντες οἱ μετὰ τὸν β, ἀριθμὸν, μετροῦσιν ἕκαστος τὸν μεθ' ἑαυτὸν κατὰ τὰς ἐν τῷ β, μονάδας. ὁ β, ἄρα τῶν μετρουμένων πάντων ἀριθμῶν ὁμώνυ-

μον

Eucl. lib. 9. Fig. 8.



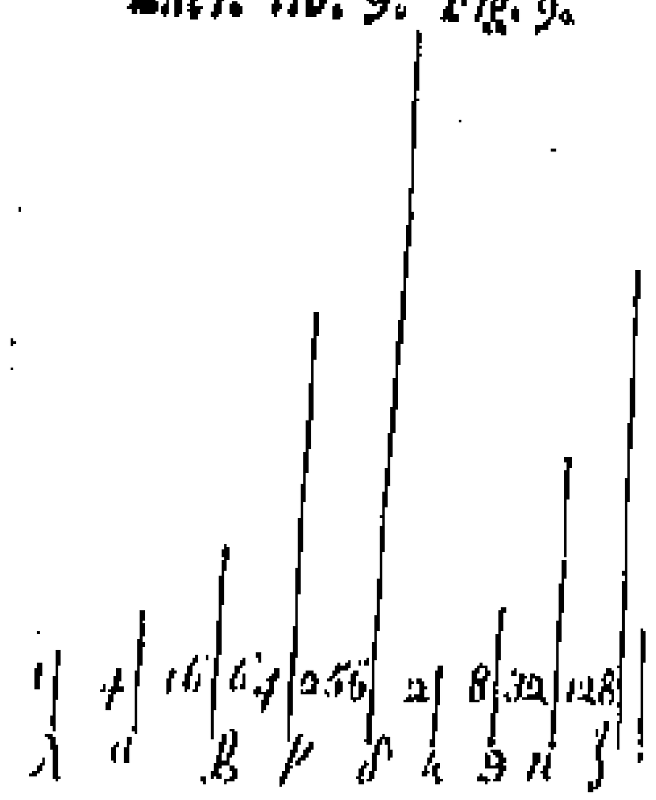
μον μέρος ἐστὶ τοῖς μετροῦσι καὶ τὸν γ': ὅρον τοῦ ζ': καὶ δὲ τὴν λθ': τοῦ αὐτοῦ, ὁ β, ἀριθμὸς πάντας τοὺς μεθ' ἑαυτὸν μετρεῖ, καὶ τὸν ὁμώνυμον αὐτοῦ ἀριθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΒ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὑφ' ὅσων ἂν ὁ ἔσχατος πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ παρὰ τὴν μονάδα μετρηθήσεται.

Ἔστωσαν ἤδη ἑξῆς ἀνάλογον ἀριθμοὶ ἀπὸ τῆς λ, μονάδος οἱ α β γ δ, καὶ ὁ ἔσχατος δ, ἀριθμὸς μετρείσθω ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ, παρ: χάρ: τοῦ ε. Λέγω δὴ καὶ τὸν παρὰ τὴν λ, μονάδα α, ὑπὸ τοῦ ε μετρεῖσθαι. εἰ γὰρ μή, οἱ α ε, ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται, καὶ τὸν ιβ': ὅρον τοῦ ζ': ἐπεὶ δὲ ὁ ε, τὸν δ, μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν ζ, ὥστε ὁ ε, τὸν ζ, πολλαπλασιάσας τὸν δ, πεποίηκεν. ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ α, μετρεῖ τὸν δ, κατὰ τὸν ὁμώνυμον αὐτοῦ ἀριθμόν, ὡς διὰ τῆς ἀνωτέρω δῆλον. ὁμώνυμος δὲ τοῦ β, ἐστὶν ὁ γ, κατὰ τὴν αὐτήν. ἄρα καὶ ὁ α, τὸν γ, πολλαπλασ: τὸν δ, πεποίηκε. καὶ τὴν ιθ': ἄρα τοῦ ζ': ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν α, οὕτως ἐστὶ καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν ζ. κατὰ δὲ τὴν κα': ἐπεὶ οἱ α ε, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί, μετρεῖ ὁ ε, τὸν γ, μετρείτω δὴ κατὰ τὸν η, ὥστε ὁ ε, τὸν η, πολλαπλασ: τὸν γ, πεποίηκεν. ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ α, τὸν β, πολλαπλασ: τὸν αὐτὸν γ, πεποίηκε, (μετρείτω γὰρ ὁ α, τὸν γ, κατὰ τὸν β, ὁμώνυμον αὐτοῦ ἀριθμόν, ὡς δέδεικται διὰ τῆς ἀνωτέρω.) ἄρα κατὰ τὴν ιθ': τοῦ ζ': ἐστὶν ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν α, ὁ β, πρὸς τὸν η, κατὰ δὲ τὴν κα': τοῦ αὐτοῦ, ὁ ε, τὸν β, μετρεῖ, μετρείτω δὴ κατὰ τὸν θ, ὥστε ὁ ε, τὸν θ, πολλαπλασ: τὸν β, πεποίηκεν. ἀλλὰ καὶ ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλ: β, πεποίηκε, κατὰ τὸ β': πόρισμ: τῆς ις': τοῦ ζ': ἄρα κατὰ τὴν κ': τοῦ αὐτοῦ ζ': ἐστὶν ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν α, ὁ α, πρὸς τὸν β, κατὰ δὲ τὴν κα': τοῦ αὐτοῦ, μετρεῖ ὁ ε, τὸν α, καὶ ὁ α, τὸν β, οἱ δὲ α ε, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, οἱ δὲ πρῶτοι μονάδι μόνῃ μετροῦνται, ἄτοπον ἄρα μετρεῖσθαι ὑπὸ τοῦ ε, τὸν α, οἱ ε α, ἄρα οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἀλλὰ σύνθετοι. κατὰ τὴν λγ': ἄρα τοῦ ζ': ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετροῦνται, ἐπεὶ δὲ ὁ ε, πρῶτός ἐστι, καὶ παρ' οὐδενὸς μετρεῖται, ἢ ἑαυτοῦ, ἄρα ὁ ε, τοὺς ε α, μετρεῖ, μετρεῖ δὲ ὁ ε, καὶ τὸν δ, ὑφ' οὗτινος ἄρα ἀριθμοῦ ὁ ἔσχατος δ, μετρεῖται, ὑπ' αὐτοῦ καὶ ὁ παρὰ τὴν λ, μονάδα α, μετρηθήσεται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. καὶ ταῦτα μὲν κατὰ τὸν Εὐκλείδην. δείκνυται δὲ καὶ οὕτω.

Eucl. lib. 9. Fig. 9.

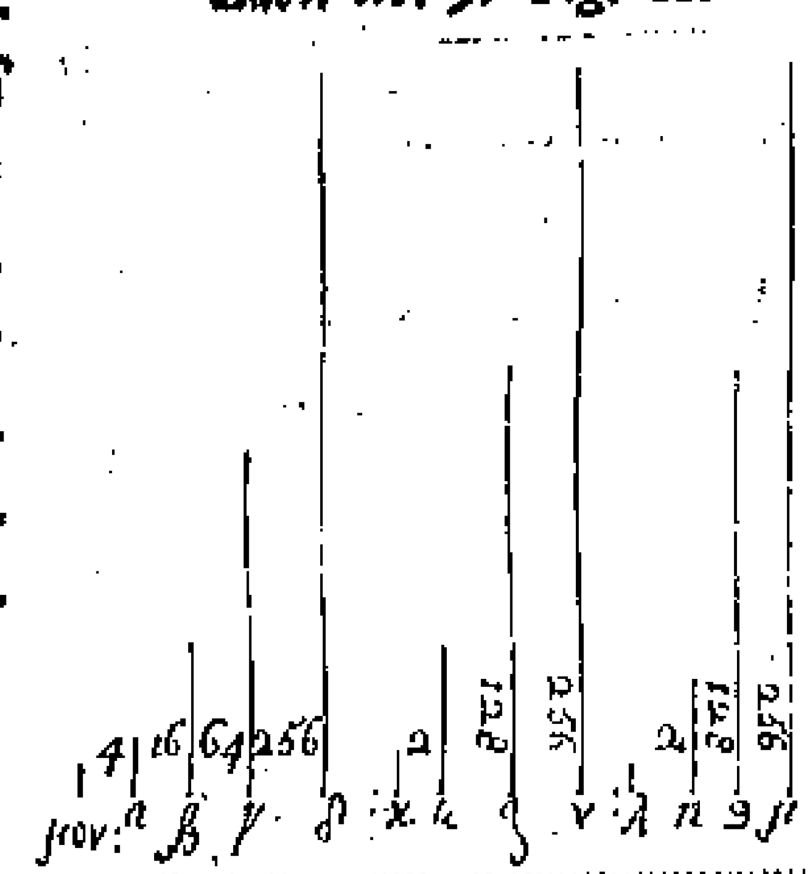


Μετρείτω δὴ τὸν δ, ἀριθμὸν πρῶτος ἀριθμὸς ὁ ε, κατὰ τὸν ζ. Λέγω, ὅτι

μετρεῖ

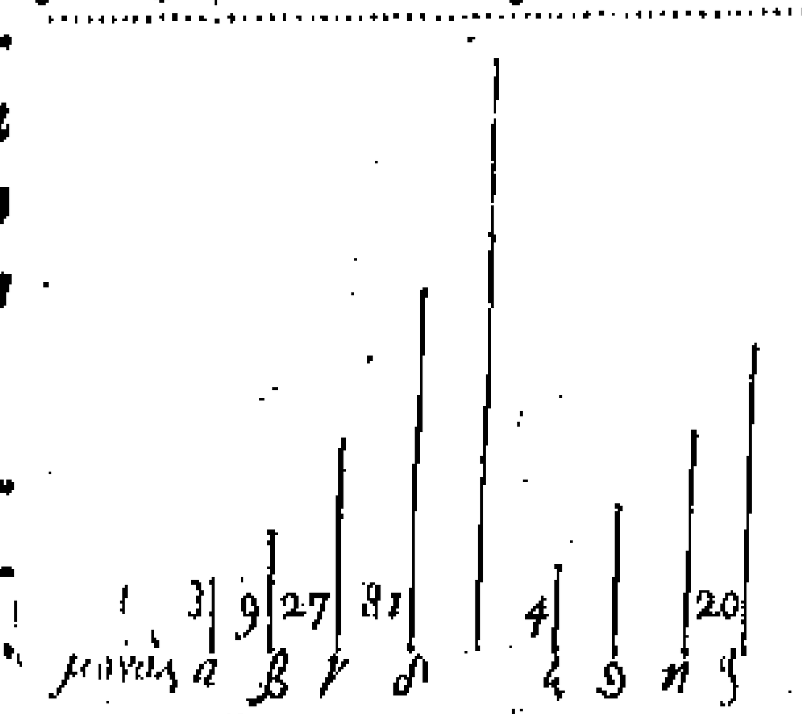
μετρεῖ ἔτι ὁ ε, καὶ τὸν α. εἰ γὰρ μή, ἐπεὶ ὁ δ, σύνθετός ἐστι, μετρήσει αὐτόν τις ά: ἀριθμός, κατὰ τὴν λγ': τοῦ ζ: καὶ ἔστω οὗτος ὁ η. μετρῶν δὲ ὁ η, τὸν α, μετρήσει πάντως καὶ τὸν δ, τὸν μετρούμενον ὑπὸ τοῦ α, κατὰ τὴν ιά: τοῦ παρόντος. μετρείτω δὴ ὁ η, τὸν δ, κατὰ τὸν θ, ἀριθμόν. ὥστε ὁ η, τὸν θ, πολλαπλασιάζων, τὸν μ, ἴσον ἄρα τῷ δ, ποιεῖ, ἔσται ἄρα ὡς ἡ μονὰς λ, πρὸς τὸν η, ὁ θ, πρὸς τὸν μ, ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ ε, τὸν ζ, πολλαπλασ: τὸν ν, πεποίηκεν, ἴσον τῷ δ, ἔσται διὰ τοῦ αὐτοῦ πορίσ: τῆς ις': τοῦ ζ': ὡς ἡ μονὰς κ, πρὸς τὸν ε, ὁ ζ, πρὸς τὸν ν, ἐπεὶ δὲ ἐστὶν ὡς ἡ κ, μονὰς πρὸς τὸν ν, οὕτως ἡ λ, μονὰς πρὸς τὸν μ, ἄρα εἰσὶ τέσσαρες ἀριθμοί, οἱ κ ε ζ ν, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος, οἱ λ η θ μ, δι' ἴσου λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. διὰ τοῦ πορίσματος γοῦν τῆς ιδ': τοῦ ζ': καὶ σὺν δύο λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ κ, μονὰς πρὸς τὸν ε, οὕτως ἡ λ, μονὰς πρὸς τὸν η, ὅσας ἄρα μονάδας περιέχει ὁ ε, τοσαύτας καὶ ὁ η, ἴσος ἄρα ὁ ε, τῷ η, ὁ δὲ η, τὸν α, μετρεῖ, μετρεῖ πάντως καὶ ὁ ε, τὸν αὐτὸν α. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. lib. 9. Fig. 10.



Πρότασις ΙΓ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα πρῶτος ᾖ, ὁ μέγιστος ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, παρὲξ τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.



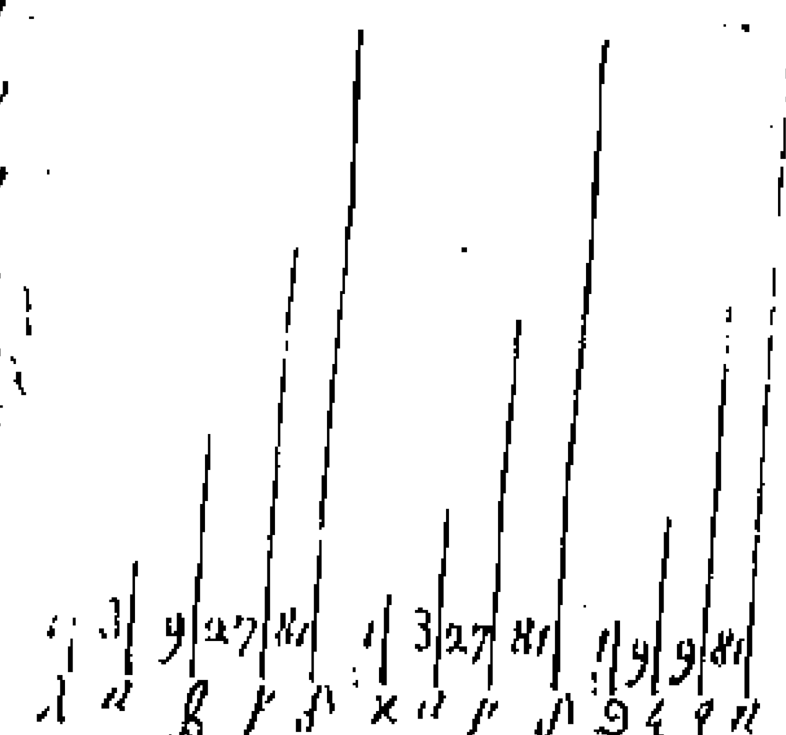
Ἔστωσαν ἤδη ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀνάλογον ἀριθμοί, οἱ α β γ δ, ὧν ὁ α, πρῶτος. Λέγω τὸν δ, ἔσχατον ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρεῖσθαι, ἢ τῶν α β γ. εἰ γὰρ μή, μετρείσθω ὑπὸ τοῦ ε, κατὰ τὸν ζ. δείκνυται δ': τὸν μὲν ε, μὴ ά: εἶναι, καὶ ὑπὸ μόνου τοῦ α, μετρεῖσθαι. τὸν δὲ ζ, μήτε πρῶτον, μήτε τινὰ τῶν α β γ. εἰ γὰρ ὁ ε, πρῶτός ἐστι, μετρήσει πάντως κατὰ τὴν ἀνωτέρω τὸν α, πρῶτον ὄντα, ὅπερ ἄτοπον. ἄρα σύνθετος, καὶ ὑπὸ μόνου τοῦ α, πρώτου μετρηθήσεται. εἰ γὰρ ὑφ' ἑτέρου μετρηθήσεται, πάντως ὑπ' ἐκείνου καὶ ὁ δ, ἔτι δὲ καὶ ὁ α, πρῶτος ὤν, ὅπερ ἄτοπον. ὡσαύτως καὶ ὁ ζ, σύνθετός ἐστι. Λέγω δέ, ὅτι ὁ ζ, οὐδέτις τῶν α β γ, ἐστίν. εἰ γὰρ ὁ ζ, εἷς τῶν α β γ, μετρεῖ τὸν δ, κατὰ τὸν ε, ἀλλὰ διὰ τῆς ιά: τοῦ παρόντος, δέδεικται, ὅτι ἐν τῇ τοιαύτῃ ἀναλογίᾳ ὁ ἐλάττων μετρεῖ τὸν μείζονα, κατά τινα τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς. ἄρα ὁ ζ, οὐκ ἔστι τις τῶν α β γ. ἐπεὶ δὲ ὁ ε, τὸν δ, μετρεῖ κατὰ τὸν ζ, ὁ ε, ἄρα τὸν ζ, πολλαπλασ: τὸν δ, πεποίηκεν. ἀλλὰ καὶ ὁ α, τὸν γ,

πολ-

πολλαπλασ: τὸν δ, πεποίηκεν, ἄρα κατὰ τὴν ιθ': τοῦ ζ': ἔστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν ε, ὁ ζ, πρὸς τὸν γ, * ὁ δὲ α, τὸν ε, μετρεῖ, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ ζ, τὸν γ. μετρείτω δὴ ὁ ζ, τὸν γ, κατὰ τὸν η, ὁ δὲ η, δειχθήσεται (ὡς καὶ οἱ ε ζ,) μήτε πρῶτος εἶναι, μήτε τις τῶν α β, καὶ ὑπὸ μόνου τοῦ α, πρώτου μετρεῖσθαι. ἐπεὶ οὖν ὁ ζ, μετρεῖ τὸν γ, κατὰ τὸν η, ὁ ζ, ἄρα τὸν η, πολλαπλ. τὸν γ, πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα κατὰ τὴν ιθ': τοῦ εἰρημένου βιβλίου, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν ζ, ὁ η, πρὸς τὸν β, ὁ δὲ α, τὸν ζ, μετρεῖ, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ η, τὸν β. μετρείτω δὴ αὐτὸν κατὰ τὸν θ. ὡς ἀνωτέρω δὴ δείξομεν, ὅτι ὁ θ, οὐκ ἔστιν ὁ αὐτὸς τῷ α, ἐπεὶ δὲ ὁ η, τὸν β, μετρεῖ κατὰ τὸν θ, ὁ η, ἄρα τὸν θ, πολλαπλασ: τὸν β, πεποίηκεν. ἀλλὰ καὶ ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλασ. κατὰ τὸ β'. πόρισμα τῆς ιϛ'. τοῦ ζ'. τὸν β, πεποίηκεν. ἄρα κατὰ τὴν κ'. τοῦ ζ'. ἔσται ὡς ὁ θ, πρὸς τὸν α, ὁ α, πρὸς τὸν η, μετρεῖ δὲ ὁ α, τὸν η, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ θ, τὸν α, πρῶτον ὄντα, ὅπερ ἄτοπον. ὁ δ, ἄρα ὑπ' ἄλλου τινὸς οὐ μετρεῖται, πάρεξ τῶν α β γ, καὶ ταῦτα μὲν κατὰ τὸν Εὐκλείδην. δείκνυται δὲ καὶ οὕτω.

Eucl. Lib. 9. Fig. 11.

Μετρείτω δὴ παρὰ τοὺς α β γ, ἀριθμοὺς ὁ ε, τὸν δ, ἀριθμὸν, κατὰ τὸν ζ. Λέγω τὸν ε, μὴ πρῶτον εἶναι, εἰ γὰρ ἔσται μετρῶν τὸν δ, μετρήσει καὶ τὸν α, πρῶτον ὄντα, ὅπερ ἄτοπον. σύνθετος ἄρα ἐστὶν ὁ ε, * μετρεῖται δὲ ὑπὸ μόνου τοῦ α, πρώτου ἀριθμοῦ. εἰ γὰρ ὑφ' ἑτέρου μετρηθῇ, μετρηθήσεται πάντως καὶ ὁ δ, ὑπ' ἐκείνου, καὶ ἑπομένως καὶ ὁ α, κατὰ τὴν ιβ'. τοῦ παρόντος, πρῶτος ὢν, ὅπερ ἄτοπον. ἐπεὶ δὲ ὁ ε, οὐκ ἔστιν ὁ αὐτὸς οὐδενὶ τῶν α γ, μετρεῖται δὲ παρὰ τοῦ α, μείζων ἄρα ἐστὶ τοῦ α. Ἐπεὶ δ' αὖθις ὁ ε, τὸν δ, μετρεῖ κατὰ τὸν ζ, τὸν ζ, ἄρα πολλαπλασιάζων ὁ ε, τὸν δ, ποιήσει, ποιείτω γοῦν τὸν η, ἴσον τῷ δ. κατὰ τὸ β'. πόρισμα, ἄρα τῆς ιϛ': τοῦ ζ'. ἔστιν ὡς ἡ θ, μονὰς πρὸς τὸν ε, ὁ ζ, πρὸς τὸν η, ἤτοι τὸν δ. διὰ τοῦ αὐτοῦ ἔτι, ἐπεὶ ὁ α, τὸν γ, πολλαπλασιάσας, κατὰ τὴν ια. τοῦ παρόντος, τὸν δ, πεποίηκεν. ἔστι πάντως ὡς ἡ κ, μονὰς πρὸς τὸν α, ὁ γ, πρὸς τὸν δ. ἐπεὶ δὲ ὁ η, ἴσος ἐστὶ τῷ δ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ κ, μονὰς πρὸς τὸν α, οὕτως ἡ θ, μονὰς πρὸς τὸν η, κατὰ τὸ πόρισμα ἄρα τῆς ιδ'. τοῦ ζ'. οἱ κ α γ δ, καὶ θ ε ζ η, ἀριθμοὶ σὺν δύο λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται, ἄρα ὡς ἡ κ, μονὰς πρὸς τὸν α, οὕτως ἐστὶ καὶ ἡ θ, μονὰς πρὸς τὸν ε, ὅσας ἄρα μονάδας ὁ α, περιέχει, τοσαύτας καὶ ὁ ε, οἱ α ε, ἄρα ἴσοι, δέδεικται δὲ ὁ ε, καὶ μείζων τοῦ α, ἄτοπον ἄρα. οὐ μετρεῖται ἄρα ὁ δ, ὑπ' ἄλλου τινὸς, πάρεξ τῶν α β γ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



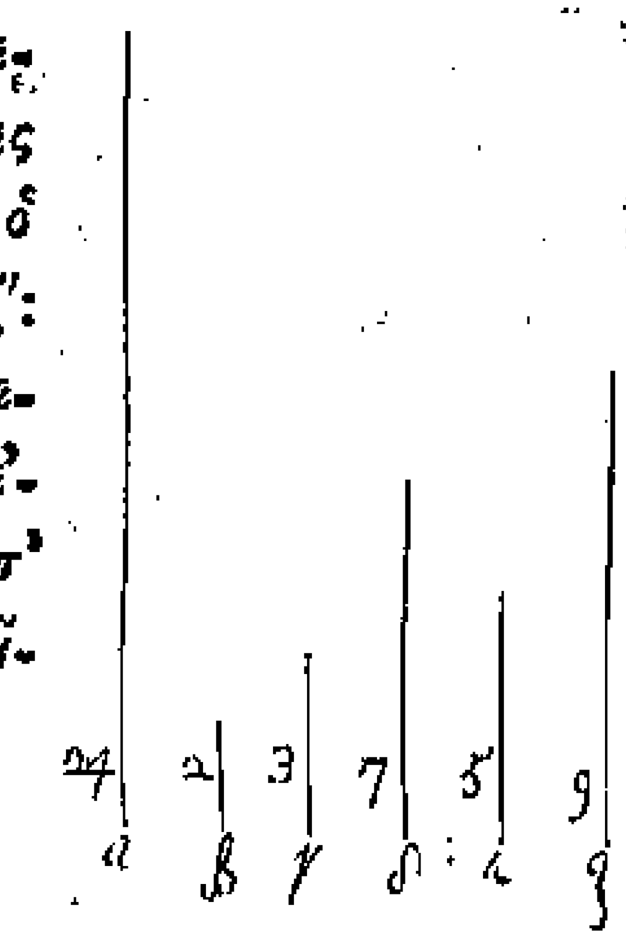
Πρό-

Πρότασις ΙΔ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἐλάχιστος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, πάρεξ τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρούντων.

Ἔστω ἤδη ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς ὑπὸ τῶν β γ δ, πρώτων, ὁ α, ὃν ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου λέγω, πάρεξ τῶν β γ δ, μετρεῖσθαι. Μετρείσθω γὰρ εἰ δυνατὸν, ὑπὸ τοῦ ε, πρώτου, μὴ ὄντος τοῦ αὐτοῦ οὐδενὶ, τῶν β γ δ. ὁσάκις ὁ ε, τὸν α, μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ζ, ὁ ε, ἄρα τὸν ζ, πολλαπλασ: τὸν α, ποιήσει, ὁ δὲ α, μετρεῖται ὑπὸ τῶν β γ δ, πρώτων, ἄρα κατὰ τὴν λβ': τοῦ ζ': οἱ β γ δ, καὶ ἕνα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσουσι, τὸν δὴ ε, οὐ μετρήσουσι, πρῶτος γὰρ, ἄρα τὸν ζ, μετρήσουσιν οἱ β γ δ, ἐλάττονα ὄντα τοῦ α, ὅπερ ἄτοπον. ὁ γὰρ α, ὁ ἐλάχιστος ὑπ' αὐτῶν μετρούμενός ἐστιν, ἄρα ὁ α, ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρεῖται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

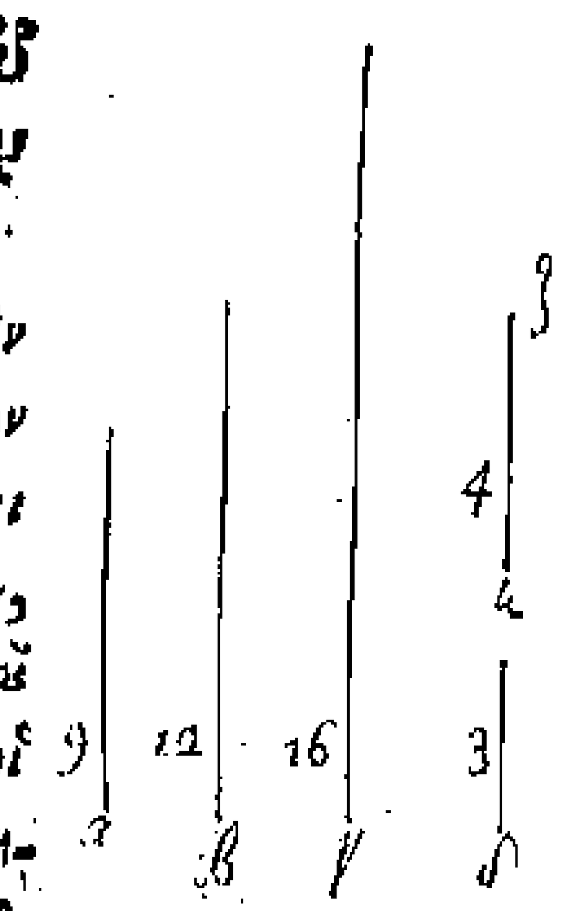
Eucl. lib. 9. Fig. 12.



Πρότασις ΙΕ': Θεώρημα.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, δύο ὁποσοιοῦν συντεθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσιν.

Ἔστωσαν ἤδη ἑξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ α β γ. Λέγω, ὅτι δύο τούτων ὁποσοιοῦν συντεθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσι, δηλονότι οἱ μὲν α β, πρὸς τὸν γ, οἱ δὲ β γ, πρὸς τὸν α, καὶ οἱ α γ, πρὸς τὸν β. Εὑρεθήτωσαν γὰρ διὰ τῆς λε': τοῦ ζ': ἢ β': τοῦ η': δύο ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς α β γ, οἱ δε, εζ. ἐπεὶ ὁ δε, ἑαυτὸν πολλαπλασ: τὸν α, πεποίηκεν. ὁ δὲ εζ, τὸν γ, καὶ ὁ δε, τὸν εζ, πολλαπλασ: τὸν β, πεποίηκε, κατὰ τὸ γ': πόρισμα τῆς β': τοῦ η': οἱ οὖν δε, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἄρα κατὰ τὴν λ': τοῦ ζ': καὶ συναμφότερος πρὸς ἑκάτερον πρῶτός ἐστιν, ἄρα ὁ δζ, πρῶτός ἐστι πρὸς τὸν εζ, ἔστι δὲ καὶ ὁ δε, πρὸς τὸν εζ, πρῶτος. ἄρα δύο ἀριθμοὶ οἱ δζ, δε, πρὸς τὸν εζ, πρῶτοί εἰσι. κατὰ τὴν κϛ': ἄρα τοῦ ζ': καὶ ὁ ἐκ τῶν δζ, δε, πρὸς τὸν εζ, πρῶτός ἐστι, καὶ ἑπομένως ὁ ἐκ τῶν δζ, δε, πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ εζ, πρῶτός ἐστι κατὰ τὴν κζ': τοῦ ζ': ὁ δὲ ἐκ τῶν δζ, δε, ὁ ἀπὸ τοῦ δε, μετὰ τοῦ ἐκ τῶν δε, εζ. (τὸ αὐτὸ γὰρ γίγνεται πολλαπλασιασθῆναι τὸν δε, πρὸς ἑαυτὸν χωρὶς, καὶ τὸν εζ, πρὸς τὸν δε, εἶτα συναφθῆναι, ἢ συναφθῆναι πρῶτον τὸν δε, τῷ εζ, εἶτα τὸ συμποσούμενον πρὸς τὸν δε, πολλαπλασιασθῆναι) ἄρα ὁ



ἐκ τοῦ δε, μετὰ τοῦ ἐκ τῶν δε, εζ, πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ εζ, πρῶτός ἐστιν, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ δε, ἐστὶν ὁ α, καὶ ὁ ἐκ τῶν δε, εζ, ὁ β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ εζ, ὁ γ, οἱ αβ, ἄρα ὁμοῦ πρὸς τὸν γ, πρῶτοί εἰσι. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται, καὶ τοὺς βγ, πρώτους εἶναι, πρὸς τὸν α. λείπεται δὴ δεῖξαι καὶ τοὺς αγ, πρὸς τὸν β, πρώτους εἶναι.

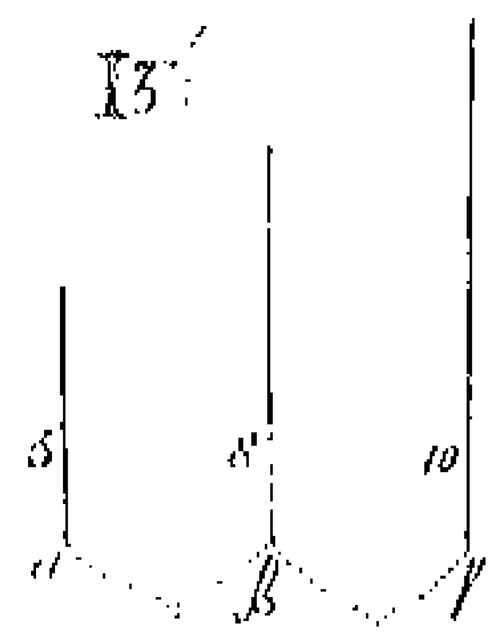
Πρότασις Ιϛ': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ δεύτερος πρὸς ἄλλον τινά.

Ἔστωσαν ἤδη δύο πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ, οἱ αβ. Λέγω, ὅτι οὐκ ἔστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ β, πρὸς ἄλλον τινά. Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω πρὸς τὸν γ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ β, πρὸς τὸν γ, οἱ δὲ αβ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἄρα κατὰ τὴν κα': τοῦ ζ': μετρεῖ ὁ α, τὸν β, καὶ εἰσὶ πρῶτοι, ὅπερ ἄτοπον. ἐὰν ἄρα δύο ἀριθμοὶ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. lib. 9. Fig. 13.

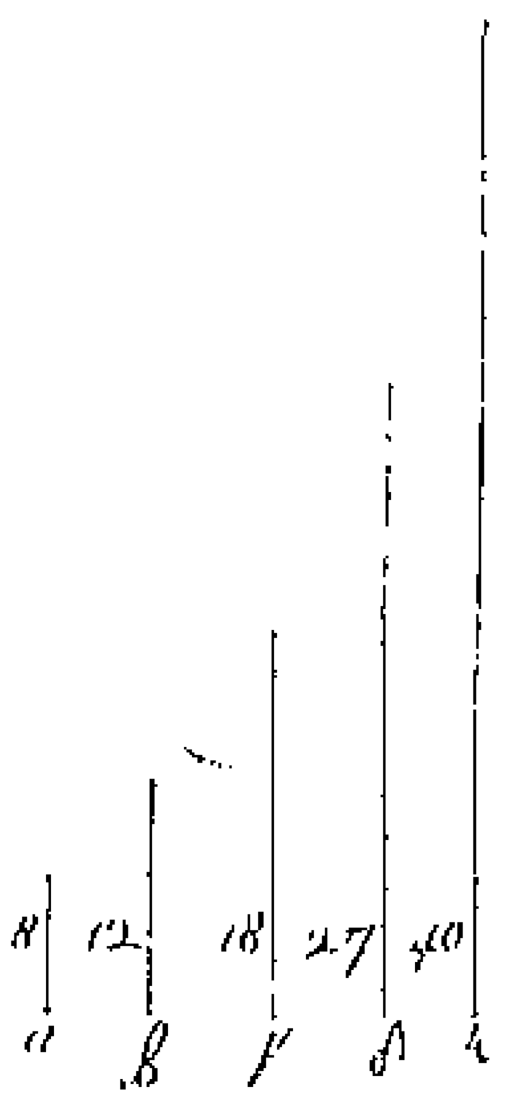
ΙΓ'



Πρότασις ΙΖ': Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ ἔσχατος πρὸς ἄλλον τινά.

Τῶν ἤδη αβγδ, ἀριθμῶν ἑξῆς ἀνάλογον ὄντων, ἔστωσαν οἱ ἄκροι αὐτῶν αδ, πρῶτοι. Λέγω, ὅτι οὐκ ἔστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ δ, πρὸς ἄλλον τινά, εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω πρὸς τὸν ε. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ δ, πρὸς τὸν ε, κατὰ τὴν ιγ': ἄρα τοῦ ζ': ἔσται καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ β, πρὸς τὸν ε. καὶ ἐπεὶ οἱ αδ, πρῶτοι εἰσι, κατὰ τὴν κα': τοῦ αὐτοῦ, ὁ α, μετρεῖ τὸν β, ὡς δὲ ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ἐστὶ, καὶ ὁ β, πρὸς τὸν γ, μετρεῖ δὲ ὁ α τὸν β, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ β, τὸν γ. καὶ ἑπομένως μετρεῖ καὶ ὁ α, τὸν γ. ἐπεὶ δὲ διὰ τὸ ἀνάλογον εἶναι, μετρεῖ ὁ γ, τὸν δ, τὸν δὲ γ, μετρεῖ ὁ α, μετρεῖ ἄρα ὁ α, τὸν δ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν ὁ α, οἱ αδ, ἄρα πρῶτοι ὄντες ὑπὸ τοῦ α, μετροῦνται. ὅπερ ἄτοπον. ἐὰν ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.

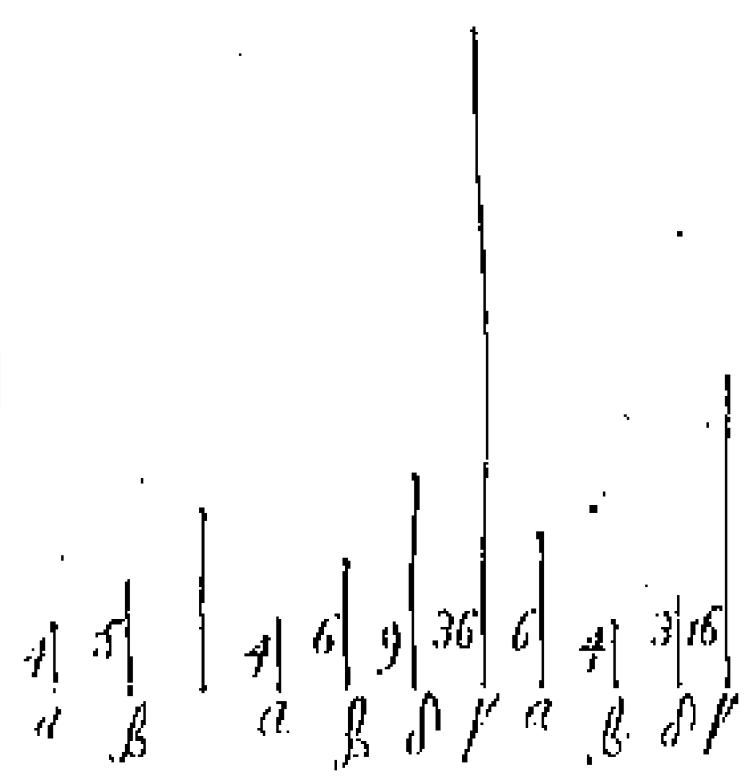


Πρότασις ΙΗ': Πρόβλημα.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων, ἐπισκέψασθαι εἰ δυνατόν ἐστιν, αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Τῶν αβ, ἤδη ἀριθμῶν δοθέντων, δέον ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατὸν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν. εἰ μὲν οὖν οἱ αβ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, κατὰ τὴν ιϛ': τοῦ παρόντος, οὐκ ἔσται αὐτοῖς τρίτος ἀνάλογος ἀριθμός. εἰ δὲ μὴ, πολλαπλασιάσας ὁ β, ἑαυτὸν τὸν γ, ποιείτω, ὁ α, ἄρα ἤτοι μετρεῖ τὸν γ, ἢ οὔ. μετρείτω δὴ πρῶτον κατὰ τὸν δ. ὥστε ὁ α, τὸν δ, πολλαπλασιάσας τὸν γ, πεποίηκεν. ἀλλὰ καὶ ὁ β, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν αὐτὸν γ, πεποίηκεν, ἄρα κατὰ τὴν κ': τοῦ ζ': ἔστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ β, πρὸς τὸν δ, ὁ δ, ἄρα τρίτος ἀνάλογός ἐστι τοῖς αβ. ἀλλὰ μὴ μετρείτω ὁ α, τὸν γ. λέγω ὅτι ἀδύνατον τρίτον ἀνάλογον τοῖς αβ, εὑρεθῆναι. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω οὗτος ὁ δ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ β, πρὸς τὸν δ, ἄρα κατὰ τὴν κ': τοῦ ζ': τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων αδ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ β, μέσου. ἀλλ' ὁ γ, ἐστὶν ἀπὸ τοῦ β, ἄρα καὶ ὁ α, τὸν δ, πολλαπλασ: τὸν γ, ποιεῖ. ὁ α, ἄρα τὸν γ, μετρεῖ κατὰ τὸν δ, ἀλλὰ δὴ ὑπόκειται καὶ μὴ μετρεῖν, ὅπερ ἄτοπον, ἄρα ὁ δ, οὐκ ἔστι τρίτος ἀνάλογος τοῖς αβ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

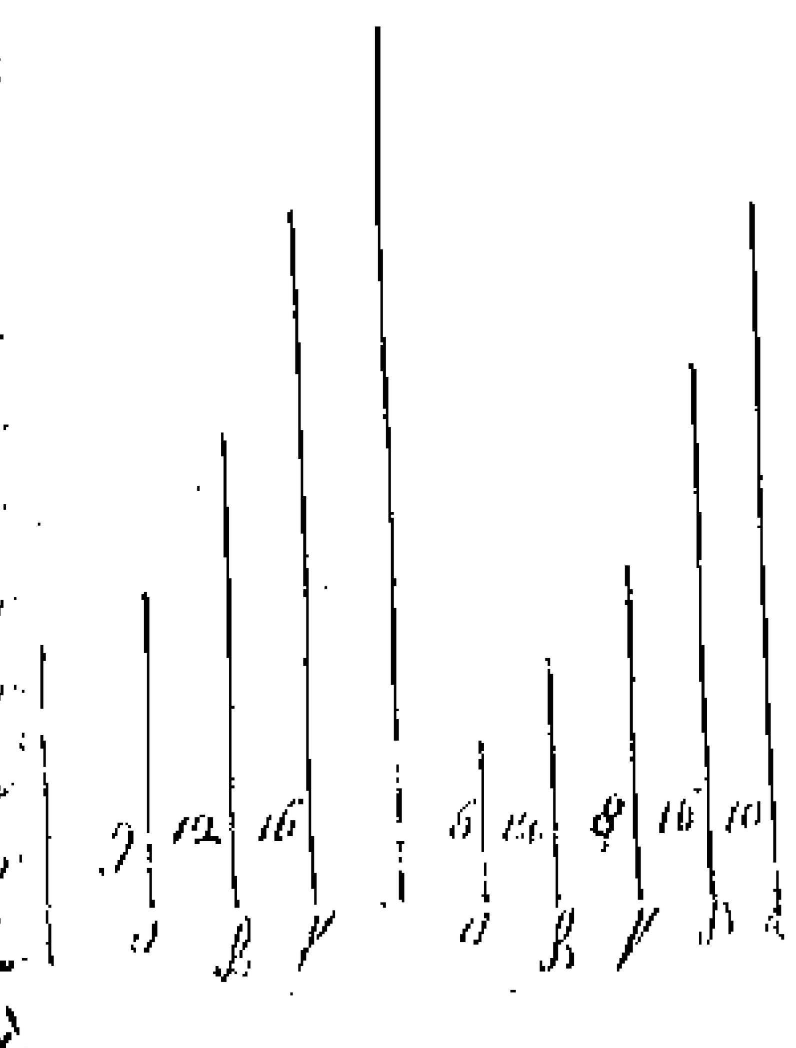
Eucl. Lib. 9. Fig. 14.



Πρότασις ΙΘ': Πρόβλημα.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων, ἐπισκέψασθαι εἰ δυνατόν ἐστιν, αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

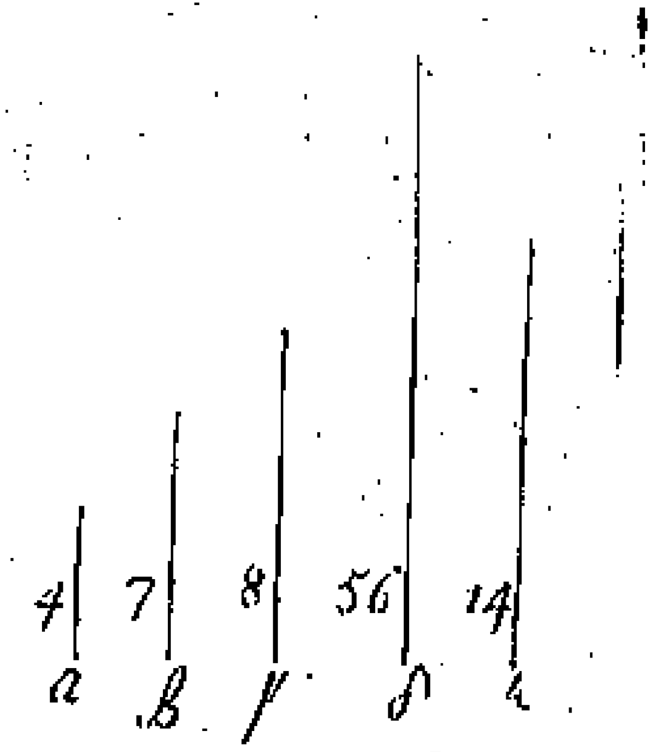
Τῶν ἤδη αβγ, ἀριθμῶν δοθέντων, ἐπισκεπτέον, εἰ δυνατὸν, τέταρτον ἀνάλογον αὐτοῖς εὑρεθῆναι. οἱ δὴ αβγ, ἢ καὶ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἢ οὐκ ἀνάλογον μὲν ἑξῆς, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι, ἢ ἀνάλογον μὲν ἑξῆς, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν οὐ πρῶτοι, ἢ οὔτε ἀνάλογον ἑξῆς, οὔτε οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι. ὅτι μὲν οὖν τῶν ἑξῆς ἀναλόγων, ἐὰν οἱ ἄκροι πρῶτοί εἰσιν, ἀδύνατον τέταρτον ἀνάλογον εὑρεθῆναι, δέδεικται διὰ τῆς ἀνωτέρω. εἰ δὲ μὴ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι, δεικνυται, ὅτι καὶ τούτοις ἀδύνατον τέταρτον ἀνάλογον εὑρεθῆναι, εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω ὁ δ. ἔστιν ἄρα ὡς α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ γ, πρὸς τὸν δ. γενέσθω δὲ καὶ ὡς ὁ β,



πρὸς τὸν γ, ὁ δ, πρὸς τὸν ε. ἐπεὶ οὖν οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ α β γ, καὶ γ δ ε, σὺν δύο λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν, ἄρα κατὰ τὴν ιδ': τοῦ ζ': καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν γ, ὁ γ, πρὸς τὸν ε, οἱ δὲ α γ, πρῶτοί εἰσιν. ἄρα κατὰ τὴν κα': τοῦ ζ': ὁ α, μετρεῖ τὸν γ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν, οἱ α γ, ἄρα πρῶτοι ὄντες, ὑπὸ τοῦ α, ἀριθμοῦ μετροῦνται. ὅπερ ἄτοπον.

Ἀλλά γε δὴ ἔστωσαν οἱ α β γ, ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν α γ, μὴ πρῶτοι, καὶ πολλαπλασιάσας ὁ β, τὸν γ, τὸν δ, ποιείτω. Λέγω, ὅτι εἰ μὲν ὁ α, τὸν δ, μετρεῖ, δυνατόν ἐστι τέταρτον ἀνάλογον αὐτοῖς εὑρεθῆναι. μετρείτω γὰρ ὁ α, τὸν δ, κατὰ τὸν ε, ὥστε ὁ α, τὸν ε, πολλαπλασ: τὸν δ, πεποίηκεν. ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ β, τὸν γ, πολλαπλασ: τὸν δ, πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα κατὰ τὴν ιθ': τοῦ ζ': ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν ε, ὁ ε, ἄρα τέταρτός ἐστιν ἀνάλογος. εἰ δὲ ὁ α, τὸν δ, οὐ μετρεῖ, ἀδύνατον τέταρτον ἀνάλογον εὑρεθῆναι, εἰ γὰρ μὴ, ἔστω ὁ ε. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν ε, ἄρα κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν προτ: ὁ ὑπὸ τῶν α ε, ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν β γ, ὁ δὲ ὑπὸ τῶν β γ, ἐστὶν ὁ δ, ὁ α, ἄρα τὸν ε, πολλαπλασιάσας τὸν δ, πεποίηκεν. ὥστε ὁ α, μετρεῖ τὸν δ, κατὰ τὸν ε, ἀλλὰ δὴ καὶ οὐ μετρεῖ, ὅπερ ἄτοπον. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται, ὑποτιθεμένων τῶν α β γ, μὴ ἑξῆς ἀνάλογον, καὶ τῶν α γ, μὴ πρώτων, ὅτι εἰ μὲν ὁ α, μετρεῖ τὸν δ, δυνατὸν τέταρτον ἀνάλογον εὑρεθῆναι, εἰ δὲ μὴ, ἀδύνατον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

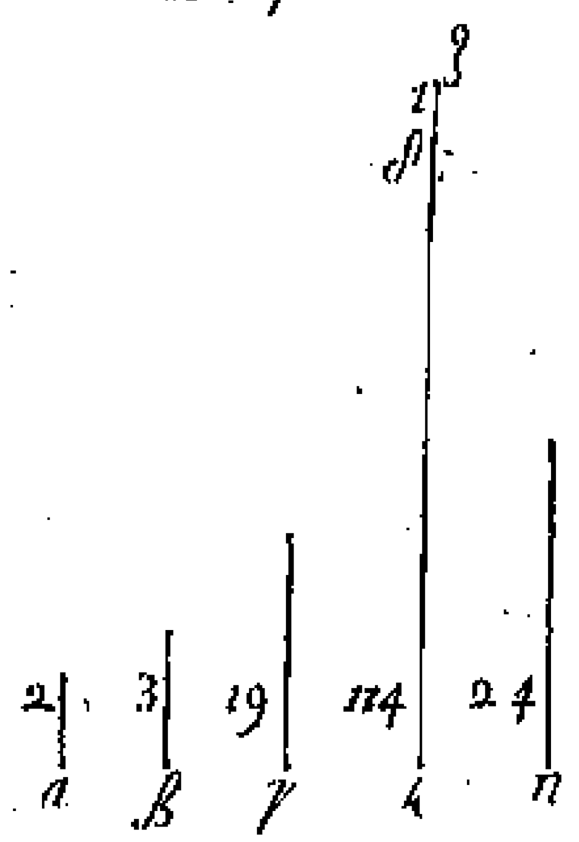
Eucl. Lib. 9. Fig. 15.



Πρότασις Κ': Θεώρημα.

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν.

Προτεθήτωσαν ἤδη πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ α β γ. Λέγω ὅτι τούτων πλείους εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοί. Εἰλήφθω γὰρ διὰ τῆς λη': τοῦ ζ': ὁ ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν α β γ, μετρούμενος, καὶ ἔστω οὗτος ὁ δ ε, προκείσθω δὲ τῷ δ ε, καὶ μονὰς ἡ δ ζ, ὁ οὖν ε ζ, ἤτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ σύνθετος, εἰ μὲν οὖν πρῶτος, ἄρα εὕρηνται οἱ α β γ, καὶ ε ζ, πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείονες τῶν α β γ, προτεθέντων. εἰ δὲ ὁ ε ζ, σύνθετός ἐστι, μετρεῖται πάντως ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ, κατὰ τὴν λδ': τοῦ ζ': μετρείσθω δὴ ὑπὸ τοῦ η, λέγω δὴ τὸν η, μηδενὶ τῶν α β γ, τὸν αὐτὸν εἶναι. εἰ γὰρ μὴ, ἐπεὶ οἱ α β γ, μετροῦσι τὸν ε δ, ἄρα καὶ ὁ η, μετρεῖ τὸν ε δ, μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ε ζ, ἄρα μετρεῖ καὶ τὴν δ ζ, μονάδα, ἀριθμὸς ὢν ὁ η, ὅπερ ἄτοπον.



τοπον. οὐκ ἔστιν ἄρα ὁ η, ὁ αὐτὸς τινὶ τῶν α β γ, καὶ ἐπομένως εὕρηνται οἱ α β γ η, πρῶτοι ἀριθμοὶ, πλείονες τῶν προτεθέντων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΑ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, ὁ ὅλος ἄρτιός ἐστι.

Συντεθήτωσαν ἤδη ἄρτιοι ἀριθμοὶ, οἱ α β, β γ, γ δ, δ ε. Λέγω τὸν α ε, ἄρτιον εἶναι. ἕκαστος γὰρ τῶν α β, β γ, γ δ, δ ε, ἥμισυ μέρος ἔχει κατὰ τὸν ς': ὅρον τοῦ ζ': ἄρα καὶ ὁ α ε, ἀριθμὸς ἥμισυ μέρος ἔχει, καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν ὅρον, ἄρτιός ἐστι.

Πρότασις ΚΒ': Θεώρημα.

Ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν ἄρτιον ᾖ, ὅλος ἄρτιος ἔσται.

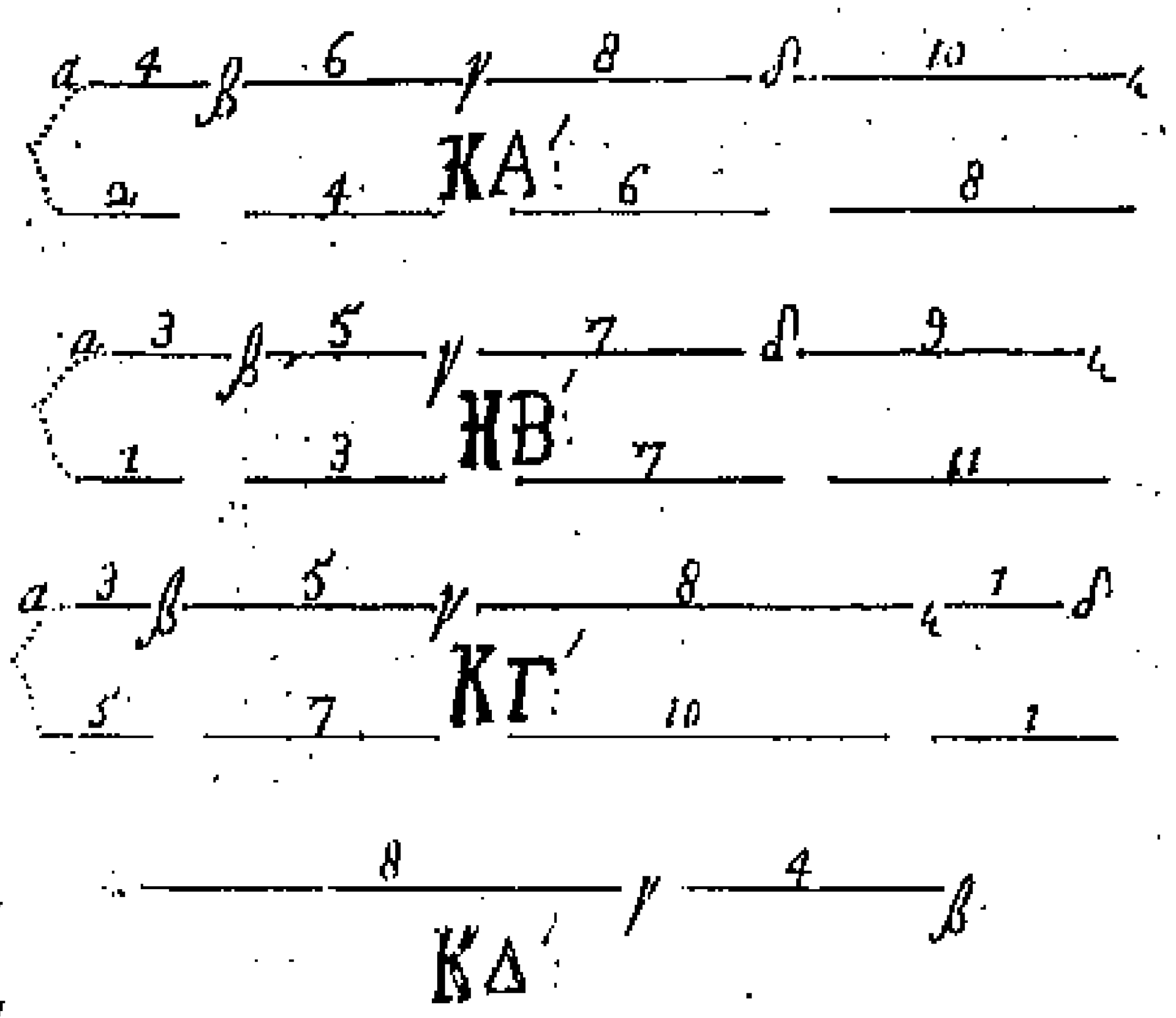
Συγκείσθωσαν ἤδη περισσοὶ ἀριθμοὶ, ὧν τὸ πλῆθος ἄρτιον, οἱ α β, β γ, γ δ, δ ε. Λέγω, ὅτι ὁ α ε, σύνθετός ἐστιν. Ἐὰν γὰρ ἀφ' ἑκάστου τῶν εἰρημένων ἀριθμῶν μονὰς ἀφαιρεθῇ, οἱ πάντες ἄρτιοι ἐγκαταλειφθήσονται. ἔστι δὲ καὶ τὸ πλῆθος τῶν ἀφαιρεθεισῶν μονάδων ἄρτιον. ἄρα ὁ α ε, ὑπ' ἀρτίων ἀριθμῶν σύγκειται, καὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἄρτιός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 9. Fig. 16.

Πρότασις ΚΓ': Θεώρημα.

Ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ᾖ, καὶ ὅλος περισσός ἔσται.

Συγκείσθωσαν ἤδη περισσοὶ ἀριθμοὶ οἱ α β, β γ, γ δ, ὧν τὸ πλῆθος περισσόν. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ α δ, περισσός ἐστιν. ἀπὸ γὰρ τοῦ γ δ, μονάδος ἀφαιρεθείσης, ἐγκαταλείπεται ὁ γ ε, ἄρτιος, ἔστι δὲ καὶ ὁ α γ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἄρτιος, ὅλος ἄρα ὁ α ε, ἄρτιός ἐστι κατὰ τὴν κα': τοῦ παρόντος, προστιθεμένης δὲ τῆς ε δ, μονάδος, γενήσεται ὁ α δ, περισσός. ὅπερ καὶ τξ'.



Πρότασις ΚΔ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, καὶ ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται.

Ἀπὸ τοῦ α β, ἤδη ἀρτίου ἀριθμοῦ, ἀφαιρείσθω ὁ γ β, ἄρτιος. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ α γ, ἄρτιός ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ ὁ γ β, ἄρτιός ἐστιν, ἔχει πάντως ἥμισυ, ἔχει δὲ ἥμισυ καὶ ὁ α β, ὡς ἄρτιος, ἄρα καὶ ὁ α γ, ἔχει ἥμισυ, τὸ γὰρ τοῦ γ β, μετὰ τοῦ ἡμίσεως τοῦ α γ, ἥμισύ ἐστι τοῦ α β, ὅλος ἄρα ὁ α γ, ἄρτιός ἐστι, κατὰ τὸν ς': ὅρον τοῦ ζ': ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

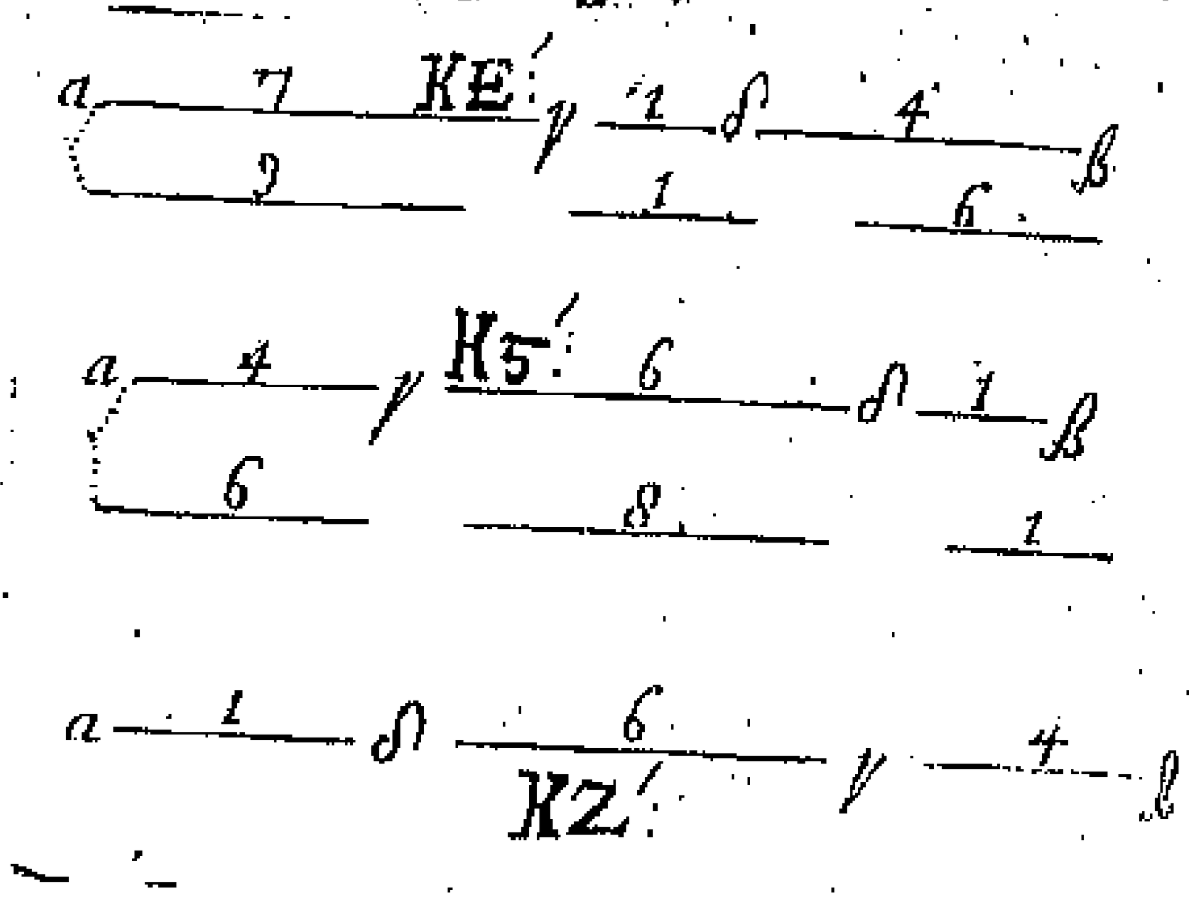
Πρό-

Πρότασις ΚΕ΄. Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου περισσὸς ἀφαιρεθῇ, καὶ ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται.

Ἀπὸ ἀρτίου ἤδη ἀριθμοῦ τοῦ αβ, ἀφαιρείσθω ὁ γβ, περισσός. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ αγ, περισσός ἐστιν. ἀπὸ γὰρ τοῦ γβ, μονάδος τῆς γδ, ἀφαιρεθείσης, ἐγκαταλείπεται, ὁ δβ, ἄρτιος, καὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω, καὶ ὁ αδ, ἄρτιός ἐστιν. ἀφαιρουμένης δὲ τῆς γδ, μονάδος ἀπὸ τοῦ αδ, ἀρτίου, ἐγκαταλείπεται ὁ αγ, περισσός. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. lib. 9. Fig. 17.



Πρότασις ΚϚ΄. Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ περισσὸς ἀφαιρεθῇ, ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται.

Ἀπὸ περισσοῦ ἤδη ἀριθμοῦ τοῦ αβ, ἀφαιρείσθω περισσὸς ὁ γβ. Λέγω, ὅτι ὁ αγ, ἄρτιός ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ὁ αβ, καὶ γβ, περισσοί εἰσιν, ἀφαιρουμένης τῆς δβ, μον. ἐγκαταλείπεται ὅ, τε αδ, καὶ ὁ γδ, ἄρτιος. καὶ ἑπομένως κατὰ τὴν κδ΄. ἄρα τοῦ παρόντος, καὶ ὁ αγ, ἄρτιός ἐστιν, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΖ΄. Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται.

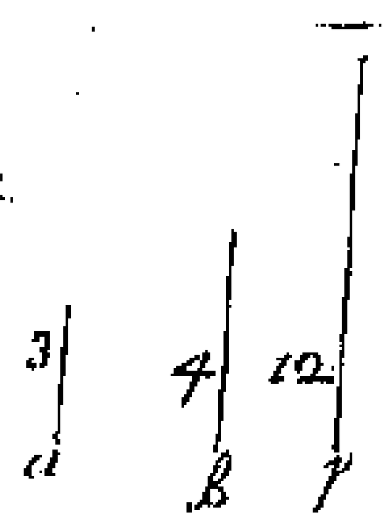
Ἀπὸ περισσοῦ ἤδη ἀριθμοῦ τοῦ αβ, ἀφαιρείσθω ὁ γβ, ἄρτιος. Λέγω, ὅτι ὁ αγ, περισσός ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ὁ αβ, περισσός ἐστιν, ἀφαιρουμένης τῆς αδ, μονάδος, ἐγκαταλείπεται ὁ δβ, ἄρτιος ἀριθμός. Αὖθις ἐπεὶ παρὰ τοῦ δβ, ἀρτίου, ἀφῄρηται ὁ γβ, ἄρτιος, κατὰ τὴν κδ΄. τοῦ παρόντος, καὶ ὁ δγ, ἄρτιός ἐστι, προστιθεμένης δὲ τῆς αδ, μονάδος, ὁ αγ, ἀριθμὸς, περισσὸς γίνεται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΗ΄. Θεώρημα.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος ἄρτιος ἔσται.

Περισσὸς ἤδη ἀριθμὸς ὁ α, τὸν β, ἄρτιον πολλαπλασ. ποιείτω τὸν γ. Λέγω, ὅτι ὁ γ, ἄρτιός ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ ὁ α, τὸν β, πολλαπλασ. τὸν γ, πεποίηκεν, ὁ γ, ἄρα ἐκ τοσούτων ἀριθμῶν ἴσων τῷ β, σύγκειται, ὅσαι μονάδες εἰσὶν ἐν τῷ α, ὁ δὲ β, ἄρτιός ἐστι, καὶ ὁ ὑπὸ ἀρτίων συγκείμενος, ὡσαύτως ἄρτιός ἐστι, κατὰ τὴν κα΄. ὁ γ, ἄρα ἄρτιός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 9. Fig. 18.



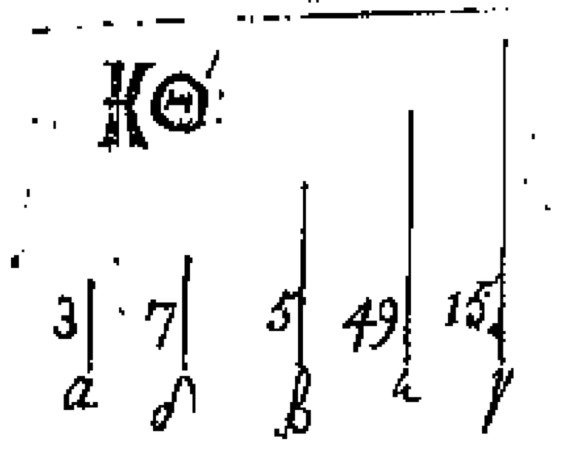
Πρό-

Πρότασις ΚΘ΄. Θεώρημα.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς περισσὸν ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος περισσὸς ἔσται.

Περισσὸς ἤδη ἀριθμὸς ὁ α, περισσὸν τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν γ, ποιείτω. Λέγω, ὅτι ὁ γ, περισσός ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ ὁ α, τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν γ, πεποίηκεν. ὁ γ, ἄρα ἐκ τοσούτων ἀριθμῶν ἴσων τῷ β, σύγκειται, ὅσαι μονάδες εἰσὶν ἐν τῷ α, οἱ δὲ αβ, ἀριθμοὶ περισσοί εἰσιν, ἄρα ὁ γ, σύγκειται ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσόν, ὁ δὲ τοιοῦτος περισσός ἐστι, κατὰ τὴν κγ΄. τοῦ παρόντος, ἄρα ὁ γ, ἀριθμὸς περισσός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

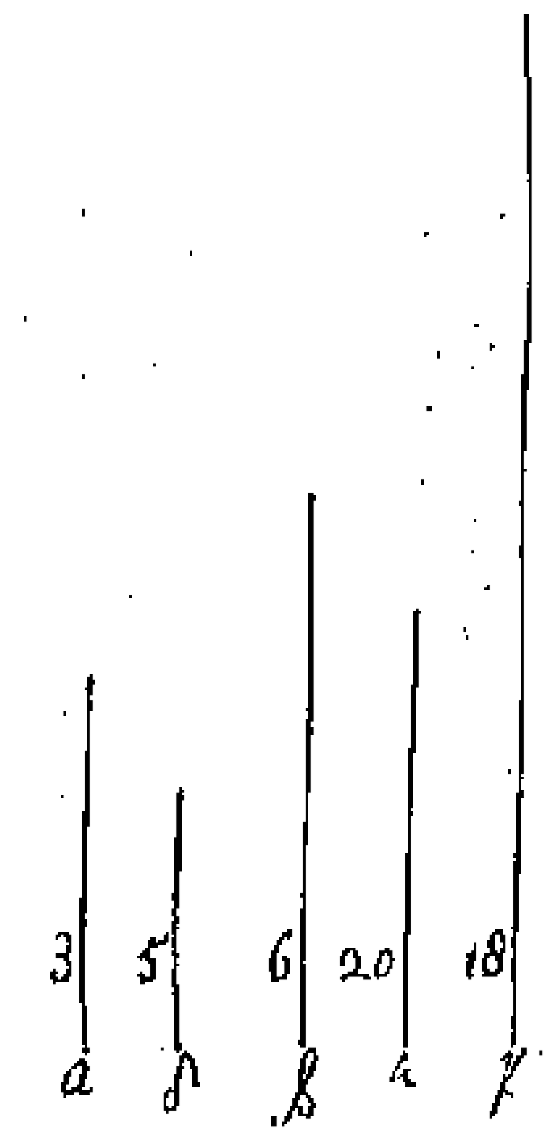
Eucl. Lib. 9. Fig. 19.



Πρότασις Λ΄. Θεώρημα.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει.

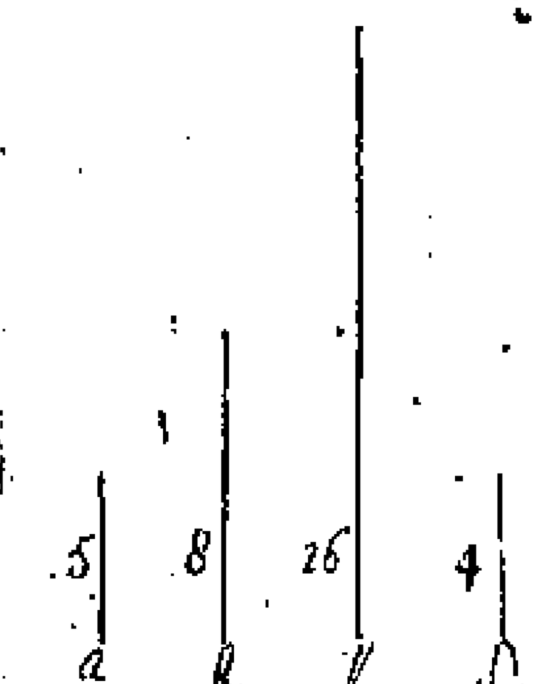
Περισσὸς ἤδη ἀριθμὸς ὁ α, τὸν ἄρτιον β, ἀριθμὸν μετρείτω. Λέγω, ὅτι ὁ α, καὶ τὸν ἥμισυν τοῦ β, μετρήσει. μετρείτω γὰρ ὁ α, τὸν β, κατὰ τὸν γ, ὁ δὴ γ, ἄρτιός ἐστιν. εἰ γὰρ μή, ἔστω περισσός. ἐπεὶ οὖν ὁ α, τὸν β, μετρεῖ κατὰ τὸν γ, ὁ α, πάντως τὸν γ, πολλαπλασ. τὸν β, πεποίηκεν. ὁ β, ἄρα σύγκειται ἐκ τοσούτων ἀριθμῶν ἴσων τῷ γ, ὅσαι μονάδες εἰσὶν ἐν τῷ α, οἱ δὲ αγ, περισσοί εἰσιν. ἄρα σύγκειται ὁ β, ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσόν. ὥστε κατὰ τὴν κγ΄. τοῦ παρόντος, ὁ β, περισσός ἐστιν, ἀλλ᾽ ἄρτιος. ἐπεὶ δὲ ὁ α, τὸν β, μετρεῖ κατὰ τὸν ἄρτιον ἀριθμόν. μετρεῖ ἄρα καὶ τὸν ἥμισυν τοῦ β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Πρότασις ΛΑ΄. Θεώρημα.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτος ᾖ, καὶ πρὸς τὸν διπλάσιον αὐτοῦ πρῶτος ἔσται.

Περισσὸς ἤδη ἀριθμὸς ὁ α, πρός τινα ἀριθμὸν τὸν β, πρῶτος ἔστω. Λέγω, ὅτι καὶ πρὸς τὸν διπλάσιον τοῦ β, τουτέστι τὸν γ, πρῶτός ἐστιν ὁ α. εἰ γὰρ μή, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός, μετρείτω δὲ τοὺς αγ, ὁ δ. ἐπεὶ δὲ ὁ α, πρῶτός ἐστιν, ὁ δὲ πρῶτος ὑπ᾽ οὐδενὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται, ἢ ἑαυ-



τῷ,

τοῦ. ὁ δ, ἄρα ὁ αὐτός ἐστι τῷ α, ὥστε ὁ γ, σύνθετος ὑπὸ πρώτου ἀριθμοῦ τοῦ δ, μετρεῖται, ἄρα κατὰ τὴν ἀνωτέρω, καὶ ὁ τοῦ γ, ἥμισυς, δηλ: ὁ β, ὑπὸ τοῦ δ, μετρεῖται, ὁ δὲ δ, μετρεῖ καὶ τὸν α, οἱ α β, ἄρα εἰσὶ σύνθετοι. ὅπερ ἄτοπον, ὑπετέθησαν γὰρ πρῶτοι. Ἐὰν ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς. *Eucl. lib. 9. Fig. 20.*

Πρότασις ΛΒ′: Θεώρημα.

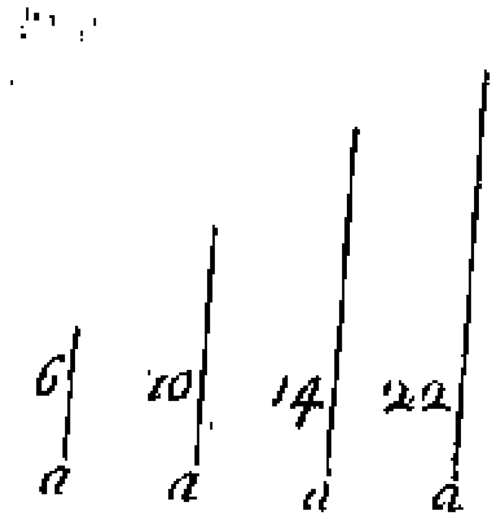
Τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων ἀριθμῶν ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον.

Ἀπὸ δυάδος ἤδη τῆς α, διπλασιασθήτωσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ οἱ β γ δ. Λέγω, ὅτι οἱ β γ δ, ἀριθμοὶ ἀρτιάκις ἄρτιοί εἰσι μόνον. ὅτι μὲν οὖν οἱ β γ δ, ἄρτιοί εἰσι, δῆλον. δίχα γὰρ διαιρεῖται ἕκαστος αὐτῶν, ὡς ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων. ὅτι δὲ καὶ ἀρτιάκις ἄρτιοι, δείκνυται. Κείσθω μονὰς ἡ ε, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ε, μονὰς πρὸς τὸν α, οὕτως ὁ α, πρὸς τὸν β, καὶ κατὰ τὸ β′: πόρισμα τῆς ις′: τοῦ ζ′: ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν β, πεποίηκεν. ὥστε ὁ β, μετρεῖται ὑπὸ τοῦ α, ἀρτίου κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, τουτέστι κατὰ τὸν ἄρτιον ἀριθμόν, ὁ δὲ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ κατὰ ἄρτιον μετρούμενος ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστιν, ἄρα ὁ β, ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστιν. Αὖθις ἐπεὶ ὁ β, διπλασιασθεὶς τὸν γ, πεποίηκεν, ὁ α, τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν γ, πεποίηκεν. ὥστε ὁ γ, μετρεῖται ὑπὸ τοῦ α, κατὰ τὸν β, οἱ δὲ α β, ἄρτιοί εἰσι. μετρεῖται ἄρα ὁ γ, ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ κατὰ ἄρτιον, καὶ ἔστιν ἀρτιάκις ἄρτιος, κατὰ τὸν η′: ὅρον τοῦ ζ′: οὕτως καὶ ἐπὶ τῶν ἑξῆς συλλογιστέον. ὅτι δὲ καὶ μόνος δῆλον. εἰ γὰρ ἀφ᾽ ἑτέρου ἀριθμοῦ, τοῦ μὴ ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένου, διπλασιασθῶσιν, οἱ τὴν μέχρι μονάδος διαίρεσιν δεχθήσονται, ἄρα οὔτε ἀρτιάκις ἄρτιοι ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΛΓ′: Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς τὸν ἥμισυν ἔχῃ περισσόν, ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνος.

Ἀριθμὸς ἤδη ὁ α, τὸν ἥμισυν αὐτοῦ ἐχέτω περισσόν. Λέγω, ὅτι ἀρτιάκις περισσός ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ ὁ τοῦ α, ἥμισυς περισσός ἐστιν, ἄρα ὁ α, μετρεῖται ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ κατὰ περισσόν. καὶ κατὰ τὸν θ′: ὅρον τοῦ ζ′: ἀρτιάκις περισσός ἐστι. Λέγω δέ, ὅτι καὶ μόνον. εἰ γὰρ καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος ὑποτεθῇ, ἄρα ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται κατὰ ἄρτιον. ὥστε καὶ ὁ ἥμισυς αὐτοῦ, ἄρτιος ἔσται, καὶ δίχα διαιρεθήσεται, κατὰ τὸν ς′: τοῦ ζ′: ὁ δὲ τοῦ α, ἥμισυς περισσὸς ὑπετέθη, ἄρα περισσὸς ὢν δίχα διαιρεθήσεται, ὅπερ ἄτοπον. ἐὰν ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς. *Eucl. Lib. 9. Fig. 21.*

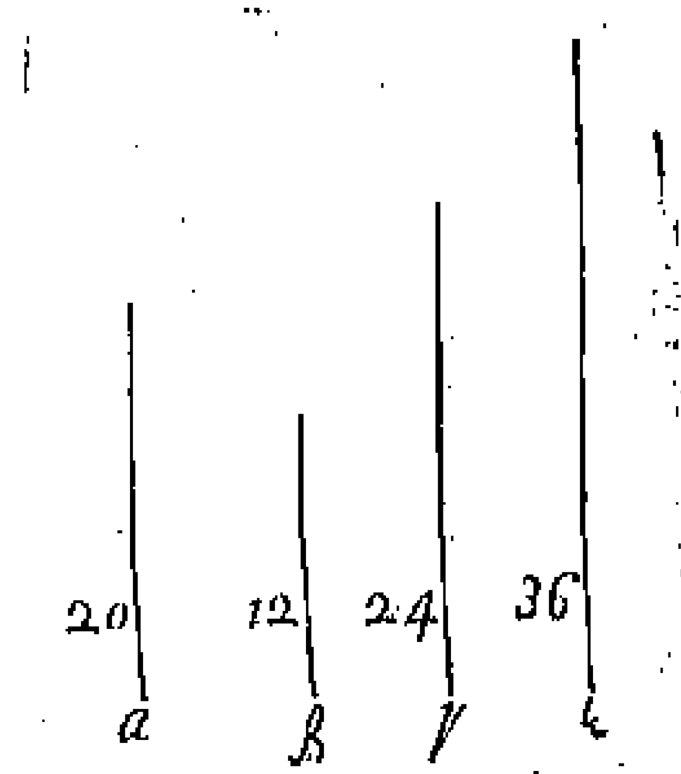


Πρό-

Πρότασις ΛΔ′: Θεώρημα.

Ἐὰν ἄρτιος ἀριθμός, μήτε τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων ᾖ, μήτε τὸν ἥμισυν ἔχῃ περισσόν, ἀρτιάκις τε ἄρτιός ἐστι, καὶ ἀρτιάκις περισσός.

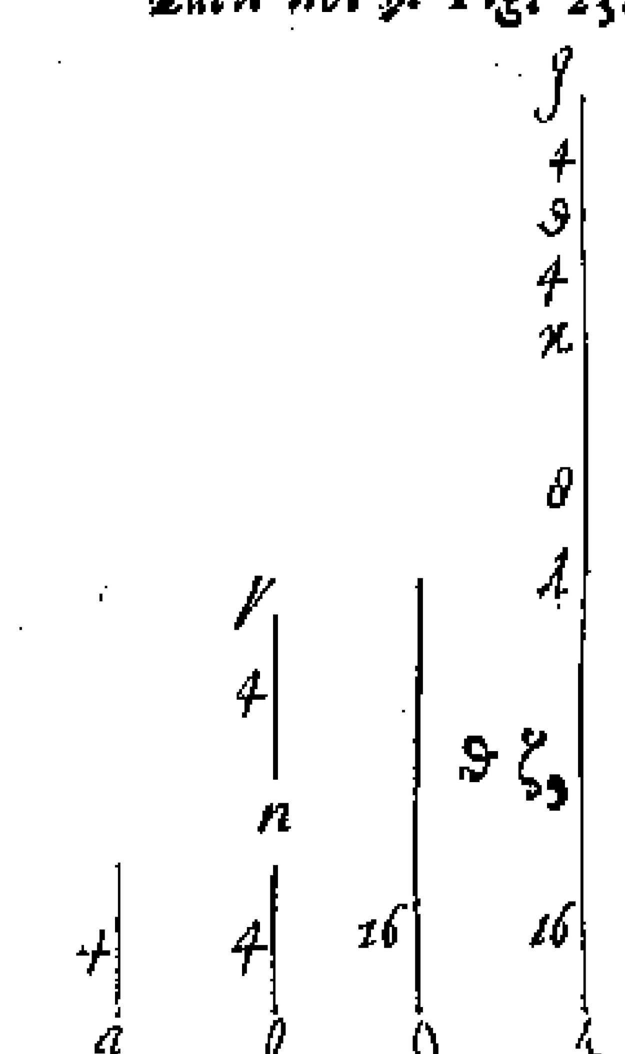
Ἔστω ἤδη τοιοῦτος ὁ α. Λέγω, ὅτι ὁ α, ἀρτιάκις τε ἄρτιός ἐστι, καὶ ἀρτιάκις περισσός. ὅτι μὲν οὖν ἀρτιάκις ἄρτιος, δῆλον, κατὰ τὸν η′: ὅρον τοῦ ζ′: ὁ γὰρ τούτου ἥμισυς οὐκ ἔστι περισσός, ὥστε ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρεῖται κατὰ ἄρτιον. Λέγω δέ, ὅτι καὶ ἀρτιάκις περισσός ἐστιν. εἰ γὰρ τὸν α, δίχα διέλωμεν, καὶ τούτου τὸν ἥμισυν δίχα, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιῶμεν, καταντήσομεν πάντως ἐπί τινα περισσὸν ἀριθμὸν μετροῦντα τὸν α, κατὰ ἄρτιον. εἰ γὰρ μή, καταντήσομεν εἰς δυάδα, καὶ ἔσται ὁ α, τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων, τοῦτο δὲ οὐχ ὑπόκειται. ὁ α, ἄρα καὶ ἀρτιάκις περισσός ἐστιν ὁμοίως δείκνυνται οἵτε β γ ε, τοιοῦτοι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Eucl. Lib. 9. Fig. 22.*



Πρότασις ΛΕ′: Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἀφαιρεθῇ δὲ ἀπό τε τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ ἐσχάτου ἴσος τῷ πρώτῳ· ἔσται ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ αὐτοῦ ἅπαντας.

Ἀριθμοὶ ἤδη ὁσοιδηποτοῦν ἑξῆς ἀνάλογον ἔστωσαν οἱ α, β γ, δ, ε ζ, καὶ ἀφαιρείσθω ἀπό τε τοῦ β γ, δευτέρου καὶ ἀπὸ τοῦ ε ζ, ἐσχάτου, ἴσος τῷ α, ἑκάτερος τῶν γ η, ζ θ. Λέγω, ὅτι ὡς ἡ β η, ὑπεροχὴ πρὸς τὸν α, οὕτως ἐστὶ καὶ ἡ ε θ, πρὸς τοὺς α, β γ, δ Κείσθω γὰρ τῷ μὲν β γ, ἴσος ὁ ζ κ, τῷ δὲ δ, ὁ ζ λ. ἐπεὶ οὖν ὁ ζ κ, ἴσος ἐστὶ τῷ β γ, ἀφῃρέθησαν δὲ ἐκ τούτων ἴσοι οἱ ζ θ, γ η, ἄρα κατὰ τὸ γ′: ἀξίωμα ὁ κ θ, ἴσος ἐστὶ τῷ β η. ἐπεὶ δὲ οἱ προσκείμενοι ἀριθμοὶ ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ε ζ, πρὸς τὸν λ ζ, οὕτως ὁ λ ζ, πρὸς τὸν κ ζ, καὶ ὁ κ ζ, πρὸς τὸν θ ζ. κατὰ τὴν ιζ′: ἄρα τοῦ ε: ἔσται καὶ διαιρέσει, ὡς ὁ ε λ, πρὸς τὸν λ ζ, οὕτως ὁ κ λ, πρὸς τὸν κ ζ, καὶ ὁ κ θ, πρὸς τὸν θ ζ. καὶ κατὰ τὴν ιβ′: τοῦ αὐτοῦ, ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἔσονται ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους. ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ κ θ, πρὸς τὸν θ ζ, οὕτως οἱ ε λ, λ κ, κ θ, πρὸς τοὺς λ ζ, κ ζ, θ ζ, οἱ δὲ ε λ, λ κ, κ θ, ἡ τοῦ ε ζ, εἰσὶν ὑπεροχή, καὶ οἱ λ ζ, κ ζ, *Eucl. lib. 9. Fig. 23.*



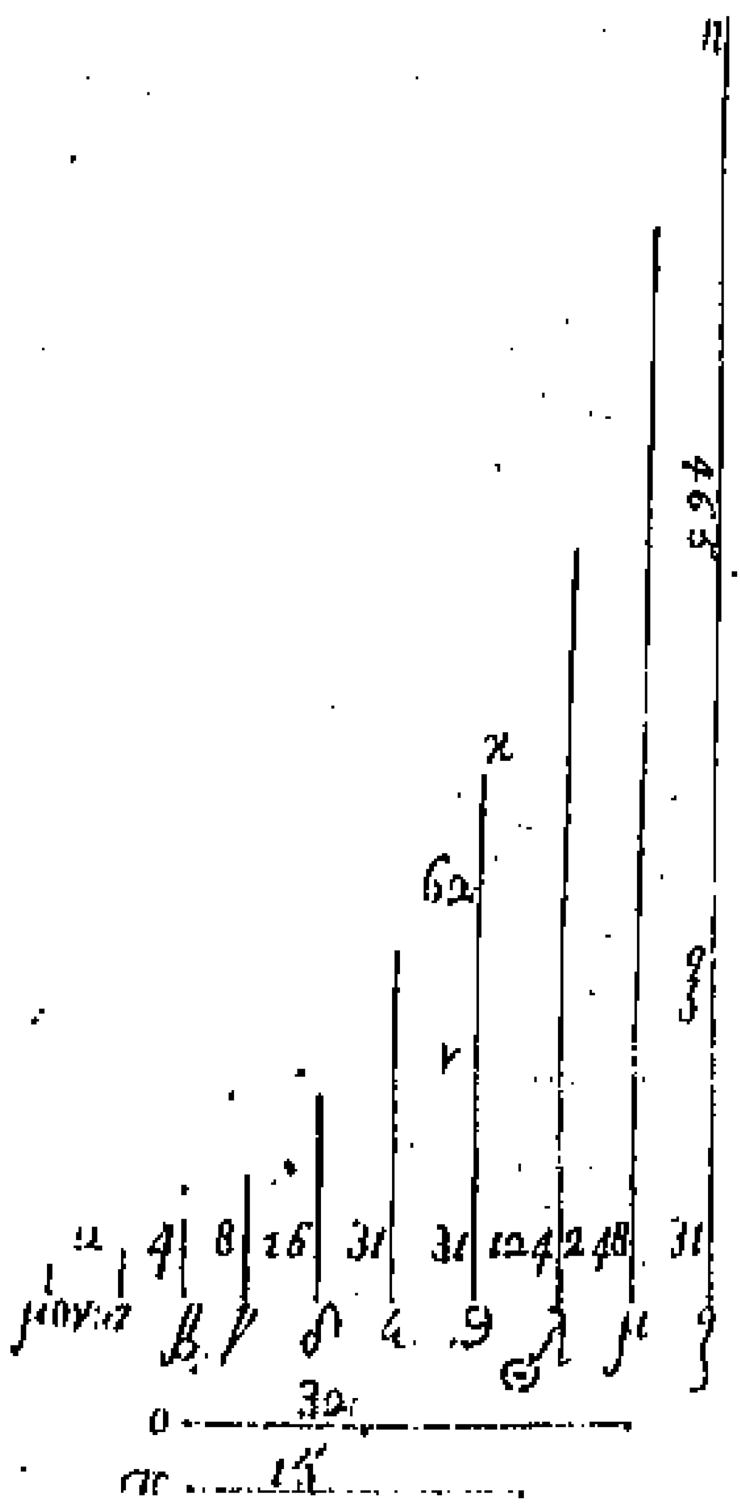
θζ, ἴσοι τοῖς δ, βγ, α, ἔστι δὲ καὶ ὁ κθ, τῷ βη, ὁ δὲ θζ, τῷ α, ἄρα ὡς ὁ βη, πρὸς τὸν α, οὕτως ἐστὶν ὁ εθ, πρὸς τοὺς δ, βγ, α, ἅπαντας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λς': Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐκτεθῶσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπας συντεθεὶς πρῶτος γένηται, καὶ ὁ σύμπας ἐπὶ τὸν ἔσχατον πολλαπλασιασθεὶς ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος, τέλειος ἔσται.

Ἐκκείσθωσαν ἤδη ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐν διπλασίονι ἀναλογίᾳ, οἱ αβγδ, καὶ ὁ ἐκ τούτων συντεθεὶς ἔστω ὁ ε, πρῶτος. ὁ δὲ ε, ἐπὶ τὸν δ, ἔσχατον πολλαπλασιασθεὶς τὸν ζ, ποιείτω. Λέγω τοῦτον τέλειον εἶναι. ὅσοι γάρ εἰσιν οἱ αβγδ, τοσοῦτοι ἔστωσαν ἀπὸ τοῦ ε, ἐν διπλασίονι λόγῳ οἱ ε, κθ, λ, μ. κατὰ τὴν ιδ': ἄρα τοῦ ζ': καὶ δι' ἴσου ἔσται ὡς ὁ α, πρὸς τὸν δ, ὁ ε, πρὸς τὸν μ, καὶ κατὰ τὴν ιθ': τοῦ αὐτοῦ, ὁ ὑπὸ τῶν δε, γινόμενος, ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αμ, ὁ δὲ ὑπὸ τῶν δε, ἐστὶν ὁ ζ, ἄρα καὶ ὁ α, τὸν μ, πολλαπλ: τὸν ζ, πεποίηκεν. ὁ μ, ἄρα μετρεῖ τὸν ζ, κατὰ τὰς ἐν τῷ α, μονάδας. ὁ δὲ α, ἐστὶ δυάς, ὁ ζ, ἄρα διπλάσιός ἐστι τοῦ μ, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ μ, λ, κθ, ε, ἀλλήλων διπλασίους, ἄρα οἱ ε, κθ, λ, μ, ζ, ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν διπλασίονι ἀναλογίᾳ. ἀφῃρείσθω δὴ ἀπό τε τοῦ κθ, καὶ ηζ, ἑκάτερος τῶν θν, ζξ, ἴσοι τῷ ε. διὰ τῆς ἀνωτέρω, ἄρα ὡς ὁ νκ, ὑπεροχὴ τοῦ δευτέρου πρὸς τὸν ε, οὕτως ἐστὶ καὶ ὁ ξη, ὑπεροχὴ τοῦ ἐσχάτου πρὸς ἅπαντας τοὺς ε, κθ, λ, μ, ὁ δὲ νκ, ἴσος ἐστὶ τῷ ε, ἄρα καὶ ὁ ξη, ἴσος ἐστὶ τοῖς ε, κθ, λ, μ, ἔστι δὲ ὁ ζξ, ἴσος τῷ ε, καὶ ὁ ε, τοῖς α, β, γ, δ, καὶ μονάδι, ὅλος ἄρα ὁ ζη, ἴσος ἐστὶ τοῖς μ, λ, κθ, ε, δ, γ, β, α, καὶ μονάδι, καὶ μετρεῖται ὑπ' αὐτῶν. Λέγω δή, ὅτι ὁ ζη, ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, πάρεξ τῶν προκειμένων καὶ τῆς μονάδος. εἰ γὰρ δυνατόν, μετρείτω τὸν ζη, ὁ ο, μηδενὶ τῶν εἰρημένων ὁ αὐτὸς ὤν, κατὰ τὰς ἐν τῷ π, μονάδας, ὁ ο, ἄρα τὸν π, πολλαπλασιάσας τὸν ζ, πεποίηκεν. ἀλλὰ καὶ ὁ δ, τὸν ε, πολλαπλ: τὸν αὐτὸν ζ, πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν π, ὁ ο, πρὸς τὸν δ, κατὰ τὴν ιθ': τοῦ ζ': ἐπεὶ δὲ οἱ αβγδ, ἀπὸ μονάδος εἰσὶν ἑξῆς ἀνάλογον, καὶ ὁ μετὰ τὴν μονάδα α, πρῶτος, ἄρα κατὰ τὴν ιγ': τοῦ παρόντος, ὁ δ, ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου με-

Eucl. Lib. 9. Fig. 24.



με-

μετρηθήσεται πάρεξ τῶν α, β, γ, ὁ δὲ ο, οὐκ ἔστιν ὁ αὐτὸς οὐδενὶ τῶν αβγ, οὐ δὲ ὁ ο, ἄρα τὸν δ, μετρήσει, ὡς δὲ ὁ ο, πρὸς τὸν δ, οὕτως ἐστὶν ὁ ε, πρὸς τὸν π, οὐδὲ ὁ ε, ἄρα τὸν π, μετρήσει, καὶ ὁ ε, ἐστὶ πρῶτος, ἄρα οἱ επ, πρῶτοί εἰσι κατὰ τὴν λα': τοῦ ζ': καὶ ἐπομένως ἐλάχιστοι κατὰ τὴν κγ': τοῦ αὐτοῦ. ἔστι δὲ ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν π, ὁ ο, πρὸς τὸν δ, ἄρα κατὰ τὴν κα': τοῦ αὐτοῦ ζ': ὁσάκις ὁ ε, τὸν ο, μετρεῖ, τοσάκις καὶ ὁ π, τὸν δ, ὁ δὲ δ, ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρεῖται πάρεξ τῶν αβγ, ὁ π, ἄρα ὁ αὐτός ἐστιν ἑνὶ τῶν αβγ· ἔστω δὴ τῷ β, καὶ ὅσοι εἰσὶν οἱ βγδ, τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἀπὸ τοῦ ε, οἱ ε, κθ, λ, εἰσὶ δὲ οἱ βγδ, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τοῖς ε, κθ, λ, ἄρα καὶ δι' ἴσου, ὡς ὁ β, πρὸς τὸν δ, ὁ ε, πρὸς τὸν λ, κατὰ τὴν ιδ': τοῦ ζ': ὁ ἐκ τῶν βλ, ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν δε, ὁ δὲ ἐκ τῶν δε, ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν πο, ἄρα καὶ ὁ ἐκ τῶν βλ, ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν πο, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ π, πρὸς τὸν β, ὁ λ, πρὸς τὸν ο. ὁ δὲ π, ὁ αὐτός ἐστι τῷ β, καὶ ὁ λ, ἄρα τῷ ο, ὁ αὐτός ἐστιν, ὅπερ ἀδύνατον. οὐδενὶ γὰρ τῶν α, β, γ, δ, ε, κθ, λμ, ὁ ο, ὑπόκειται, ἄρα ὁ ζ, ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρεῖται, πάρεξ τῶν α, β, γ, δ, ε, κθ, λ, μ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τοῦ ἐννάτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

Gg 2 Ε'Ρ-

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΟΡΩΝ
ΤΟΥ ΕΝΔΕΚΑΤΟΥ, ΤΟΥ
ΚΑΙ ΠΡΩΤΟΥ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ
ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

Ὅρος Πρῶτος.

Στερεόν ἐστι τὸ μῆκος, πλάτος, καὶ βάθος ἔχον.

Διαλαβὼν ἐν τοῖς πρότερον βιβλίοις περί τε τῶν ἐν ἐπιπέδῳ ἀρχοειδῶν σχημάτων, καὶ περὶ ἀριθμῶν. καὶ τοὺς ἀνήκοντας ἑκάστῳ ὅρους εὐμεθόδως πρὸς τὴν τῶν προτάσεων θέσεως, οὐχ ἧττον δὲ καὶ ἑρμηνείας προέταξε. τὴν αὐτὴν δὲ ταύτην τηρῆσαι τάξιν ἐθέλων κἀνταῦθα, ὡς ἀναγκαίαν, πρὸ τοῦ ἅψασθαι τῶν προτάσεων, τῶν ὅρων ἤδη αὐτῶν ἄρχεται. καὶ πρῶτον μὲν τί Στερεὸν ἀποδίδωσιν, ὡς περὶ τῶν ἐν τούτῳ σχημάτων τὸν λόγον ποιούμενος. Ἐπεὶ δὲ ἐν ἑκάστῳ τῶν βιβλίων, οὐ περὶ ἑνὸς μόνου εἴδους τῶν σχημάτων, ἀλλὰ περὶ πολλῶν ἡ σκέψις ἐστι. τούτου γε χάριν πρὸ πάντων τῶν βιβλίων τοὺς πᾶσιν ἀνήκοντας ὅρους ἐπιρυθμίζει. τίνος δὲ χάριν τὸ στερεὸν νῦν ὁρίζεται, οὐ μὴν δὲ τὸ σῶμα, καίτοι πᾶν στερεόν, σῶμα καθέστηκεν; ἢ ὅτι τοῦ σώματος καθολικωτέρως λαμβανομένου, ὁ τοῦτο ὁρίσας, οὐ μόνον τὰ στερεά, ἀλλὰ καὶ τὰ ῥοώδη, καὶ αὐτὰ τὰ οὐράνια καλούμενα σώματα, ὧν τὰ μὲν καθ' αὐτὰ ἀνεπίδεκτα ὅλως φαίνεται σχημάτων, τὰ δὲ ἑτέρας φύσεως τῶν ὑπὸ σελήνην πέφυκε, τῷ λόγῳ περικλύειν δόξειεν. Ἐπεὶ δὲ σκοπὸς αὐτῷ περὶ τῶν δεκτικῶν καθ' αὐτὰ τῶν οἱωνδήποτε σχημάτων διαλαβεῖν, τούτου ἕνεκα, οὐ σῶμα, ἀλλά γε στερεὸν ὡρίσατο. ἔφη τοίνυν τὸ στερεὸν μῆκος ἔχειν, ἵνα μὴ ἀμερὲς ὑποληφθῇ. προσέθηκε δὲ καὶ τὸ πλάτος, ὅπως ἂν τῶν γραμμῶν ἐξάρῃ. τὸ δὲ βάθος, ἵνα καὶ τῶν ἐπιφανειῶν διάφορον ἀποδείξῃ, μῆκος οὖν ἐστι τὸ ἐπὶ τὰ ἔμπροσθεν, ἢ ὄπισθεν προχωροῦν, πλάτος δὲ τὸ ἐπὶ τὰ δεξιά, ἢ ἀριστερὰ ἐκτεινόμενον, καὶ βάθος τὸ ἀπὸ τῶν ἄνω ἐπὶ τὰ κάτω φερόμενον, οὗτινος ἐναντίον τὸ ὕψος ἐστί, τὸ ἀπὸ τῶν κάτω ἐπὶ τὰ ἄνω ἀνιστάμενον.

Βʹ: Στερεοῦ δὲ πέρατα, ἐπιφάνεια.

Ὥσπερ ἐπιφανείας πέρατα γραμμαὶ λέγονται, οὐ μὴν δὲ σημεῖον. οὕτω καὶ στε-
ρεοῦ ἐπιφάνεια, καὶ οὐ γραμμαί, πολλῷ δ' οὐ μᾶλλον σημεῖα. καθάπερ γὰρ
σημείου ῥυέντος γραμμὴν ἀποτελεῖσθαι ἔφημεν, γραμμῆς δὲ ῥυείσης ἐπιφάνειαν,
οὕτω τοι εἰπεῖν οὐκ ἀπεικός, καὶ ἐπιφανείας κινηθείσης, σῶμα ἀποτελεῖσθαι. δεῖ δὲ
τὴν κίνησιν μὴ ἀφ' ἑνὸς καὶ πρὸς ἓν μέρος γίγνεσθαι ἐννοεῖν. ἀλλ' ἐξ οἱουδήποτε
πρὸς οἱονδήποτε γενομένην, τὸ αὐτὸ ἀποτελεῖσθαι.

Γʹ: Εὐθεῖα πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιῇ γωνίας.

Οὐ μόνον εὐθεῖα πρὸς εὐθεῖαν ὀρθὴ λέγεται, ἀλλὰ καὶ πρὸς ἐπίπεδον, ἡ-
νίκα τὸ ἴσον τῶν γωνιῶν πανταχόθεν τηρῇ. ὥσπερ οὖν τῆς πρὸς εὐθεῖαν ὀρθῆς
γνώρισμα τὸ τὰς ἑκατέρωθεν γωνίας ἴσας ποιεῖν. οὕτω καὶ τῆς πρὸς ἐπίπεδον, τὸ
πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας τοῦτο τηρεῖν. εἴρηται δὲ τὸ πρὸς πά-
σας, ἵνα ἐξ οἱουδήποτε μέρους τοῦ ἐπιπέδου ἐξαγόμεναι εὐθεῖαι εἰς ἓν σημεῖον
συνέρχεσθαι ἐννοηθῶσι. τὸ δὲ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ὅτι καὶ ἐπὶ τῆς ἐγκλινομέ-
νης ἐν ἐπιπέδῳ εὐθείας δυνατὸν πλείους εὐθείας ἀχθῆναι πρὸς ὀρθάς, μὴ οὔ-
σας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.

Δʹ: Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων, τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν.

Ἔστι πάντως γε καὶ ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν, ὥσπερ καὶ γραμμὴ πρὸς
γραμμήν. Ἐπεὶ καὶ ὑπὸ ἐπιπέδου γωνία στερεὰ περιέχεσθαι λέγεται. ὅπου δὲ
γωνία ἀποτελεῖται, ἐκεῖ καὶ ὀρθότης ἐστί, καὶ ἔγκλισις. γνώρισμα δὲ τοῦ ὀρθοῦ
ἐπιπέδου πρὸς ἐπίπεδον, ἡ τῶν γραμμῶν ὀρθότης. ἐὰν γὰρ ἐν τῷ ἑνὶ τῶν ἐπι-
πέδων γραμμαὶ ἀγόμεναι ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς, ὀρθαὶ πρὸς τὸ λοιπὸν ἐπίπεδον
ὦσι, καὶ τὸ ἐπίπεδον πρὸς τὸ ἐπίπεδον ὀρθὸν λέγεται.

Εʹ: Εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστίν, ὅταν ἀπὸ τοῦ μετεώρου πέρατος τῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου, ἐπὶ τὸ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πέρατος τῆς εὐθείας, εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῆς ἀχθείσης καὶ τῆς ἐφεστώσης.

Ἐπεὶ τῆς ὀρθότητος ἡ κλίσις ἐναντία. διαζωγραφήσας ἐν τοῖς δυσὶν ἀνωτέρω ὅ-
ροις, πότε γραμμὴ καὶ ἐπίπεδον πρὸς ἑτέραν γραμμήν, καὶ ἐπίπεδον ὀρθὰ λέγον-
ται,

ται, ἐν τῷ παρόντι περὶ ἐγκλινομένης γραμμῆς τὸν λόγον ποιεῖται. τίνος δὲ χάριν οὐ τὴν ἐγκλινομένην γραμμὴν ὁρίζεται, ἀλλὰ τὴν κλίσιν ταύτης δηλῶσαι σπεύδει; ἢ ὅτι τῶν ἐναντίων αἱ αὐταί εἰσιν ἐπιστῆμαι. καὶ δύναται γὰρ ὁ τὴν ὀρθὴν γνοὺς, καὶ τὴν ἐγκλινομένην ἐπιγνῶναι. ἡ δὲ κλίσις ἀόριστός ἐστι, καὶ ἡ αὐτὴ γραμμὴ πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον μᾶλλον, ἢ ἧττον ἐγκλίνειν λέγεται. διὸ καὶ τίς ἡ κλίσις ὁρίζεται. Ἔστι δὲ κλίσις γραμμῆς πρὸς ἐπίπεδον, γωνία τις περιεχομένη ὑπό τε τῆς ἐφεστώσης, καὶ τῆς ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἐξαγομένης. δεῖ δὲ τὴν ἐξαγομένην ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς ἐφεστώσης, μὴ ὡς ἔτυχεν ἐννοεῖν. ἀλλ᾽ ἐφ᾽ ἃ μέρη ἡ ἀπὸ τοῦ μετεώρου πέρατος τῆς ἐφεστώσης κάθετος πίπτει, ἐξάγεσθαι, καὶ τὰ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ γενόμενα σημεῖα τῆς τε καθέτου καὶ τῆς ἐφεστώσης, ἐπιζευγνύειν.

ϛ′: Ἐπιπέδου πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστὶν, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῶν πρὸς ὀρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ ἀγομένων, πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ, ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων.

Κἀνταῦθα οὐ περὶ τοῦ ἐγκλινομένου ἐπιπέδου διαλαμβάνει. ἀλλά γε τίς ἡ τούτου κλίσις διασαφεῖ, καὶ τοῦτο δι᾽ ὃν ἔφημεν λόγον ἐν τῷ ἀνωτέρῳ ὅρῳ ποιεῖται. Ἔστι τοίνυν κλίσις τοῦ ἐγκλινομένου ἐπιπέδου πρὸς ἕτερον ἐπίπεδον, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῶν εὐθειῶν, τῶν ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων οὐσῶν, καὶ πρὸς ὀρθὰς κειμένων τῇ κοινῇ τομῇ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων, πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ. καλεῖται δὲ ἡ τοιαύτη γωνία, κλίσεως γωνία. ὥστε ὁ ἐρευνήσας, καὶ μαθὼν τὴν τοιαύτην γωνίαν πόσων μοιρῶν ἐστιν, οἶδε πάντως τὴν κλίσιν τοῦ ἐπιπέδου.

Ζ′: Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κεκλίσθαι λέγεται, καὶ ἕτερον πρὸς ἕτερον, ὅταν αἱ εἰρημέναι τῶν κλίσεων γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν.

Ὁπηνίκα, φησὶν, ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ἐγκλίνεται, καὶ ἕτερον πρὸς ἕτερον, ἐὰν αἱ τῶν κλίσεων ἑκατέρου τῶν ἐπιπέδων γωνίαι ἐρευνηθεῖσαι, ἴσαι εὑρεθῶσι, τὰ ἐγκλινόμενα ἐπίπεδα ὁμοίως κεκλίσθαι λέγονται. ἐπεὶ γὰρ ἑκατέρου ἡ τοιαύτη γωνία παραστατικὴ τῆς κλίσεώς ἐστι. καὶ ὡς ἔφθην εἰπὼν, αὕτη ἡ κλίσις, ἐὰν αἱ γωνίαι τὸ ἴσον τηρῶσι πρὸς ἀλλήλας, καὶ αἱ κλίσεις ὡσαύτως τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Η′: Παράλληλα ἐπίπεδά ἐστι, τὰ ἀσύμπτωτα.

Ὥσπερ παράλληλοι γραμμαί εἰσιν, αἱ ἐκβαλλόμεναι ἐπ᾽ ἄπειρον ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη, καὶ μὴ συμπίπτουσαι. οὕτω καὶ παράλληλα ἐπίπεδα, φησὶν, εἶναι, ὅσα παραλλήλως κείμενα, κἂν ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ἐκβάλλεσθαι ἐννοηθῶσι, μηδέποτε συμπίπτειν, ἅπερ καὶ ἀσύμπτωτα καλεῖ.

Θ′: Ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι, τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα, ἴσων τὸ πλῆθος.

Εἰς δήλωσιν τούτου ζητητέον ἡμῖν πρῶτον, τίνα τῶν ἐπιπέδων ὅμοια λέγεται. Ἐπεὶ δὲ τῶν ἐπιπέδων τὰ μὲν ὡρισμένα εἰσὶν, ὅσα ὑπὸ γραμμῶν, ἢ γραμμῆς περιέχεται, ἃ καὶ σχήματα ἤκουσε. τὰ δὲ ἐπ᾽ ἄπειρον ἐκτεινόμενα, καὶ ἀόριστα. ὅσα δὲ ἀόριστα οὔτε ἰσότητα δέχεται, οὔτε μὴν ὁμοιότητα, ἀδύνατον γὰρ παραβάλλεσθαι, οὔτε τι κοινὸν ἔχουσι, πλὴν τῆς ἀπειρίας· ἄρα τὰ ὡρισμένα μόνα λεχθῆναι δυνατὸν ὅμοια. τίνα δὲ ταῦτα διὰ τοῦ α′: ὅρου τοῦ ϛ′: τῶν ἐπιπέδων βιβλίων δεδήλωκεν Εὐκλείδης. ὅσα τοίνυν τῶν σχημάτων ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχεται, ὅμοια λέγεται. Ἐπεὶ δὲ δυνατὸν καὶ Πρίσμα, καὶ Κύβος, καὶ ἕκαστον τῶν στερεῶν σχημάτων, τῶν μὴ σφαιρικῶν ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχεσθαι, καὶ ὅμοια λεχθῆναι οὐκ ἔξεστι, διὰ τὸ ἑτεροειδῆ εἶναι, τούτου γε χάριν καὶ τῶν ἴσων τὸ πλῆθος προσέθηκεν. εἰ δέ τις ἀπορήσειε, τίνος γε χάριν τὰ σχήματα, ἅπερ τῇ ποσότητι ἀνάγεται, τὴν ὁμοιότητα ἐπιδέχεται, ἥτις παρεπόμενόν ἐστι τῆς ποιότητος; καὶ τὸν Ἀριστοτέλην ῥητέον, ὅτι τὸ σχῆμα τέταρτον εἶδος τῆς ποιότητος ἀποπληροῖ.

Ι′: Ἴσα δὲ καὶ ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι, τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα, ἴσων τῷ πλήθει, καὶ τῷ μεγέθει.

Εἴρηται, ὅτι τῶν στερεῶν σχημάτων, ὅσα ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων καὶ ἴσων τῷ πλήθει περιέχονται, ὅμοιά εἰσιν. ἐὰν οὖν καὶ τῷ μεγέθει ἴσα ὦσι τὰ ἐπίπεδα ὑφ᾽ ὧν περιέχονται, στερεὰ ἐκεῖνα σχήματα, καὶ ἴσα, καὶ ὅμοιά ἐστιν.

ΙΑ′: Στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων, ἢ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ οὐσῶν πρὸς πάσαις ταῖς γραμμαῖς κλίσις. ἢ καὶ οὕτω, στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο ἐπιπέδων γωνιῶν περιεχομένη, μὴ οὐσῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνισταμένων.

Τὰ τῶν γωνιῶν εἴδη δύο, ὥσπερ καὶ τῶν σχημάτων, ἐπίπεδον καὶ στερεόν. καὶ αἱ μὲν τοῦ ἐπιπέδου εἴδους γωνίαι ὑπὸ δύο μόνων γραμμῶν περιέχονται, αἱ δὲ τοῦ στερεοῦ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο. ἀορίστως δὲ εἴρηται ὑπὸ πλειόνων, ὅτι ἡ στερεὰ γωνία ἐν μὲν ταῖς τρίγωνον ἐχούσαις βάσιν πυραμίσιν ὑπὸ τριῶν εὐθειῶν περιέχεται, ἐν δὲ ταῖς τετράγωνον ὑπὸ τεσσάρων, καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὁμοίως. αὐξανομένων τῶν γωνιῶν τῆς βάσεως, αὔξονται καὶ αἱ περιέχουσαι τὴν πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς πυραμίδος γωνίαν. εἴρηται δὲ τὰς γραμμὰς μὴ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ εἶναι. ὁπηνίκα γὰρ πλείονες εὐθεῖαι ἀλλήλων ἅπτονται, καὶ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ ὦσιν, οὐ στερεὰν γωνίαν ἀποτελοῦσιν, ἀλλὰ πλείους ἐπιπέδους.

ΙΒʹ: Πυραμίς ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον ἀπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνεστώς.

Τοὐντεῦθεν ἄρχεται περὶ τῶν εἰδῶν τῶν στερεῶν σχημάτων διαλαβεῖν, ὧν ποικίλων ὄντων, ὥσπερ καὶ τῶν ἐπιπέδων, πρῶτον καὶ ἁπλούστερόν ἐστιν ἡ Πυραμίς. δύναται γὰρ αὕτη ἐλάχιστον ὑπὸ τεσσάρων μόνον ἐπιπέδων περιέχεσθαι, μηδενὸς τῶν λοιπῶν εἰδῶν τῶν στερεῶν σχημάτων τοῦτο δυναμένου. ἔστι δ' αὕτη ἡ τρίγωνον βάσιν ἔχουσα. τὸ οὖν πυραμίς ἐστι σχῆμα στερεὸν, εἴρηται εἰς διαφορὰν τῶν ἐπιπέδων σχημάτων. ἐπιπέδοις δὲ περιεχόμενον, ἵνα μὴ σφαιρικὸν νομισθῇ, καὶ τοῦ κώνου διοίσει. τὸ δὲ ἀφ' ἑνὸς ἐπιπέδου καὶ τὰ λοιπὰ, εἰς διαφορὰν τῶν λοιπῶν στερεῶν σχημάτων, ἐπιπέδοις περιεχομένων.

ΙΓʹ: Πρίσμα ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ὧν δύο τὰ ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστι, καὶ παράλληλα, τὰ δὲ λοιπὰ, παραλληλόγραμμα.

Δευτέραν τάξιν τῶν στερεῶν σχημάτων τὸ πρίσμα ἔχει. τοῦτο γὰρ μόνον μετὰ τὴν πυραμίδα ὑπὸ πέντε τῷ πλήθει ἐπιπέδων δύναται περιέχεσθαι, τῶν δύο τῶν ἀπεναντίον τριγωνοειδῶν, ἴσων τε καὶ παραλλήλων, τῶν δὲ λοιπῶν τριῶν, παραλληλογράμμων.

ΙΔʹ: Σφαῖρά ἐστιν, ὅταν ἡμικυκλίου μενούσης τῆς διαμέτρου, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιενεχθὲν σχῆμα.

Εἰκότως αὖτις ἀπορήσειε, τοῦ χάριν περὶ τῶν λοιπῶν σχημάτων διαλαβὼν ἐκ τῶν ὅρων ἑκάστου τὸν ὁρισμὸν ἐθηρᾶτο αὐτῶν, περὶ δὲ τῆς Σφαίρας ἐκ τῆς κατασκευῆς; πρὸς ὃν ἀπαντητέον, ὅτι τὰ μὲν λοιπὰ τῶν σχημάτων ὑπὸ πλειόνων ἐπιφανειῶν περιεχόμενα, δύναται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὑφ' ὧν περιέχεται ἐπιφανειῶν, ὡς συστατικῆς διαφορᾶς λαμβανομένου τοῦ σχήματος, γένους ὄντος, παρίστασθαι, ἡ δέ γε σφαῖρα ὑπὸ μιᾶς μόνης περιεχομένη, ὥσπερ καὶ ὁ κύκλος ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς, διὰ τοῦτο ἐκ τῆς κατασκευῆς ὁρίζεται. Ἔστι δὲ Σφαῖρα σχῆμα στερεὸν ὑπὸ κυρτῆς ἐπιφανείας περιεχόμενον. γίνεται δὲ ἡνίκα τῆς διαμέτρου τοῦ ἡμικυκλίου μενούσης, περιφερόμενον τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι.

ΙΕʹ: Ἄξων δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν, ἡ μένουσα εὐθεῖα, περὶ ἣν τὸ ἡμικύκλιον στρέφεται.

Ιϛʹ: Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶ, τὸ αὐτὸ, ὃ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου.

ΙΖʹ: Διά-

ΙΖʹ: Διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν, εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

ΙΗʹ: Κῶνός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου τριγώνου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, περιενεχθὲν τὸ τρίγωνον, εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα. κἂν ἡ μένουσα εὐθεῖα ἴση ᾖ τῇ λοιπῇ, τῇ περὶ τὴν ὀρθὴν περιφερομένῃ, ὀρθογώνιος ἔσται ὁ κῶνος. ἐὰν δὲ ἐλάττων, ἀμβλυγώνιος, ἐὰν δὲ μείζων, ὀξυγώνιος.

ΙΘʹ: Ἄξων δὲ τοῦ κώνου ἐστὶν, ἡ μένουσα, περὶ ἣν τὸ τρίγωνον στρέφεται.

Κʹ: Βάσις δὲ, ὁ κύκλος ὁ ὑπὸ τῆς περιφερομένης γραφόμενος.

ΚΑʹ: Κύλινδρος δὲ, ὅταν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, περιενεχθὲν τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα.

ΚΒʹ: Ἄξων δὲ τοῦ κυλίνδρου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα, περὶ ἣν τὸ παραλληλόγραμμον στρέφεται.

ΚΓʹ: Βάσεις δὲ, οἱ κύκλοι, οἱ ἀπὸ τῶν ἀπεναντίον περιαγομένων δύο πλευρῶν γραφόμενοι.

ΚΔʹ: Ὅμοιοι κῶνοι, καὶ κύλινδροι εἰσὶν, ὧν οἵ τε ἄξονες, καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων ἀνάλογόν εἰσιν.

ΚΕʹ: Κύβος, ἐστὶ σχῆμα στερεὸν, ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενον.

Κϛʹ: Ὀκτάεδρον, ἐστὶ σχῆμα στερεὸν, ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

ΚΖʹ: Δωδεκάεδρον, ἐστὶ σχῆμα στερεὸν, ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων, καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον.

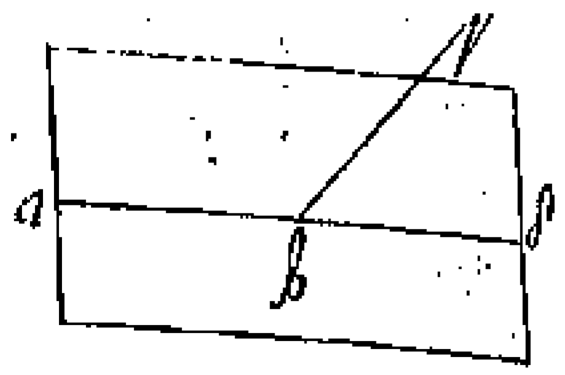
ΚΗʹ: Εἰκοσάεδρον, ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων, ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

Hh Πρό-

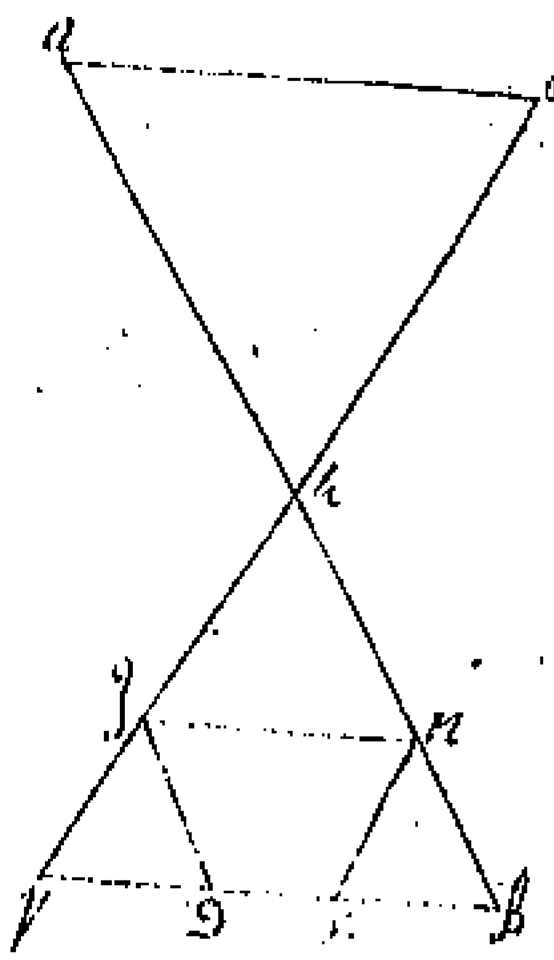
Πρότασις Α': Θεώρημα.

Εὐθείας γραμμῆς μέρος μέν τι οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν τῷ μετεώρῳ.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω τῆς α γ, εὐθείας μέρος μὲν τὸ α β, ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δὲ τὸ β γ, ἐν τῷ μετεώρῳ. Ἐξαγομένης οὖν τῆς α β, ἐπὶ τὸ δ, ἔσται ἡ α δ, συνεχὴς εὐθεῖα, ὑπετέθη δὲ καὶ ἡ α γ, εὐθεῖα εἶναι. δύο ἄρα εὐθεῖαι α γ, α δ, κοινὸν τμῆμα τὸ α β, ἔχουσιν, ὅπερ ἄτοπον, κατὰ τὸ ιγ': ἀξίωμα. Εὐθείας ἄρα γραμμῆς καὶ τὰ ἑξῆς. *Eucl. lib. 11. Fig. 1.*



Πρότασις Β': Θεώρημα.



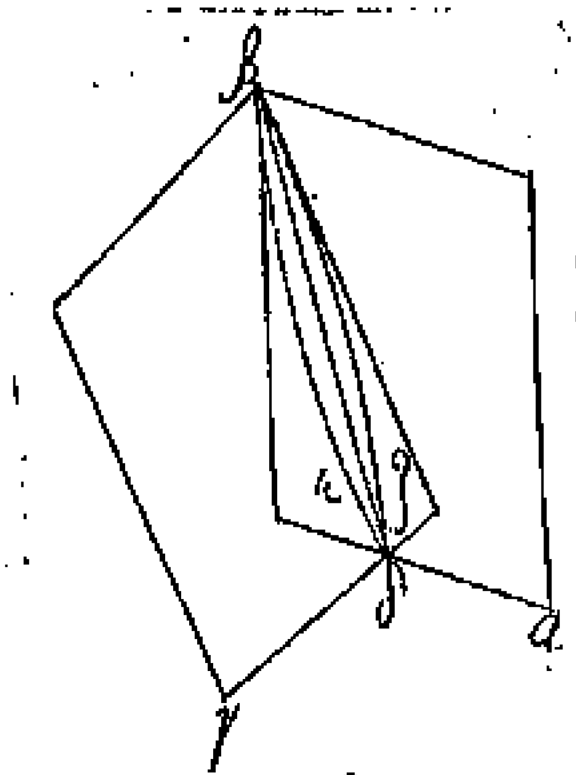
Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ.

Δύο ἤδη εὐθείας τὰς α β, γ δ, τεμνομένας κατὰ τὸ ε, ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι λέγω ἐπιπέδῳ. εἰ γὰρ ἡ μὲν α β, ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ᾖ ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ γ δ, ἐν μετεώρῳ, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας. εἰ δὲ ἥ τε α β, καὶ τὸ τῆς γ δ, μέρος τὸ γ ε, ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ὦσιν ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ε δ, ἐν μετεώρῳ, ἔσται εὐθείας τῆς γ δ, μέρος μὲν ἐν τῷ μετεώρῳ, μέρος δὲ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπ: ὅπερ ἄτοπον, κατὰ τὴν ἀνωτέρω. Λέγω ἔτι καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι ἐπιπέδῳ. Ληφθήτωσαν γὰρ ἐπὶ τῶν α β, γ δ, τυχόντα σημεῖα τὰ ζ η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζ η, γ β, ζ θ, η κ. εἰ οὖν τοῦ ε γ β, τριγώνου μέρος μὲν τὸ γ ζ θ, ἢ β η κ, ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ᾖ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ λοιπὸν ἐν μετεώρῳ, ἔσται ἑκατέρας τῶν γ ε, γ β, εὐθειῶν μέρος μὲν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δὲ ἐν τῷ μετεώρῳ. ὡσαύτως κἂν τὸ ε ζ η, μέρος τοῦ ε γ β, ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ᾖ, τὸ δὲ λοιπὸν ἐν μετεώρῳ. ἔσται καὶ ἑκατέρας τῶν ε γ, ε β, μέρος μὲν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δὲ ἐν τῷ μετεώρῳ, ὅπερ ἄτοπον. Ἐὰν ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.

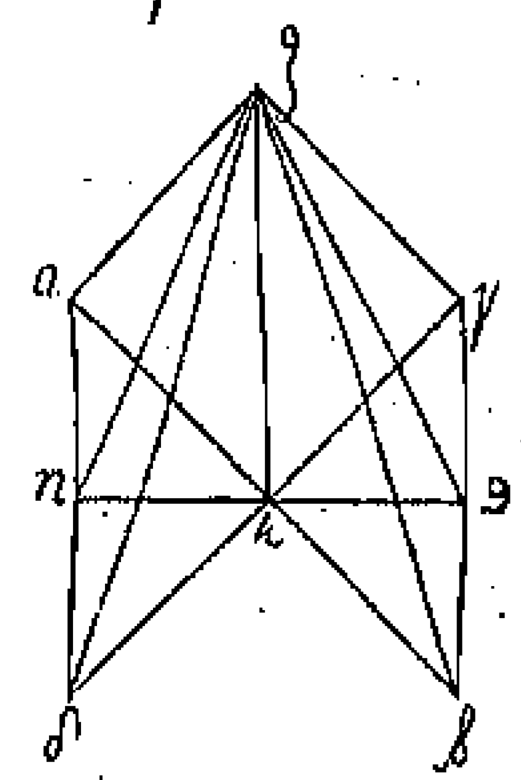
Πρότασις Γ': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνῃ ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εὐθεῖά ἐστι. *Eucl. Lib. 11. Fig. 2.*

Τῶν ἤδη α β, β γ, ἐπιπέδων τεμνόντων ἄλληλα, λέγω τὴν β δ, βάσιν κοινὴν τομὴν, εὐθεῖαν εἶναι. εἰ γὰρ μὴ ἐπεζεύχθωσαν ἀπὸ τοῦ δ, ἐπὶ τὸ β, ἐν μὲν τῷ α β, ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ἡ δ ε β, ἐν δὲ τῷ γ β, ἡ δ ζ β, αἱ τοίνυν β ε δ, β ζ δ, εὐθεῖαι τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσι, τὰ β δ, καὶ χωρίον περιέξουσι, ὅπερ ἄτοπον, κατὰ τὸ ιβ': ἀξίωμα. ὡσαύτως δειχθήσεται, κἂν ἄλλη τις εὐθεῖα ἐπὶ τῶν β δ, ἐπιζευχθῇ. Ἐὰν ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.



Πρότασις Δ': Θεώρημα.



Ἐὰν εὐθεῖα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

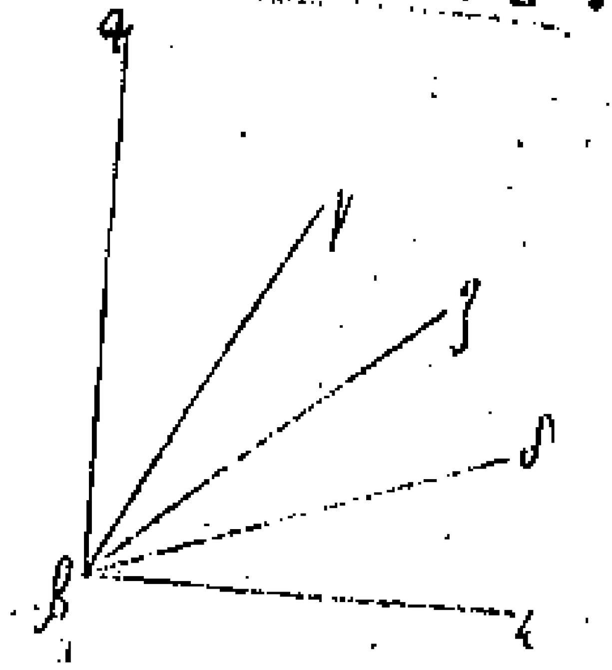
Δύο ἤδη εὐθείαις ταῖς α β, γ δ, τεμνούσαις ἀλλήλας κατὰ τὸ ε, ἔστω πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς τοῦ ε, εὐθεῖα ἡ ε ζ. Λέγω, ὅτι ἡ ε ζ, καὶ τῷ διὰ τῶν α β, γ δ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. τῶν γὰρ ε α, ε δ, ε γ, ε β, ἴσων γινομένων, ἐπεζεύχθωσαν αἱ α δ, γ β, εὐθεῖαι, καὶ διὰ τοῦ ε, διήχθω τις εὐθεῖα, ὡς ἔτυχεν, ἡ θ η. ἀπὸ δὲ τοῦ ζ, σημείου ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζ α, ζ η, ζ δ, ζ γ, ζ θ. ζ β. ἐπεὶ τοίνυν αἱ δύο α ε, ε δ, εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς γ ε, ε β, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ α ε δ, τῇ ἀπὸ γ ε β, ἴση, καὶ βάσις ἄρα ἡ α δ, βάσις τῇ γ β, ἴση ἐστὶ, κατὰ τὴν δ': τοῦ α: τῶν ἐπιπέδων. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ε α η, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ε β θ. πάλιν ἐπεὶ τῶν ε α η, β ε θ, τριγώνων αἱ δύο γωνίαι, αἱ ὑπὸ α ε η, ε α η, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ θ ε β, ε β θ, καὶ ἔτι ἡ πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις εὐθεῖα ἡ α ε, τῇ ε β, ἴση, καὶ αἱ λοιπαὶ ἄρα πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς εἰσιν ἴσαι, κατὰ τὴν κς': τοῦ α: ἴση ἄρα ἡ μὲν α η, τῇ β θ, ἡ δὲ η ε, τῇ ε θ. καὶ ἐπεὶ αἱ α ε, ε β, ἴσαι εἰσὶ, κοινὴ δὲ ἡ ζ ε, καὶ αἱ ὑπὸ ζ ε α, ζ ε β, γωνίαι ὡσαύτως ἴσαι (ὀρθαὶ γὰρ) ἄρα καὶ ἡ ζ α, ἴση ἐστὶ τῇ ζ β. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται, ὅτι, αἱ ζ γ, ζ δ, ἴσαι εἰσίν. Αὖθις ἐπεὶ ἡ ζ α, ἴση δέδεικται τῇ ζ β, ἡ δὲ α δ, τῇ β γ, καὶ ἡ ζ γ, τῇ ζ δ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ζ α δ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζ β γ, κατὰ τὴν η': τοῦ α: ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ α η, ἴση τῇ β θ, δύο δὴ αἱ ζ α, α η, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς ζ β, β θ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ζ α η, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ζ β θ, καὶ ἡ ζ η, ἄρα βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ζ θ. καὶ ἐπεὶ πάλιν δέδεικται ἡ η ε, ἴση τῇ ε θ, ἡ δὲ ε ζ, κοινὴ, καὶ ἡ ζ η, ἴση τῇ ζ θ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ τὸ ζ ε η, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζ ε θ, (ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα τῶν ζ ε η, ζ ε θ,) ὡσαύτως δειχθήσεται ἡ ζ ε, ὀρθὴ εἶναι, καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. ὥστε κατὰ τὸν γ': ὅρον τοῦ παρόντος ἡ ζ ε, εὐθεῖα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, τοῦτο τὸ δέ ἐστι τὸ διὰ τῶν α β, γ δ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Ε': Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

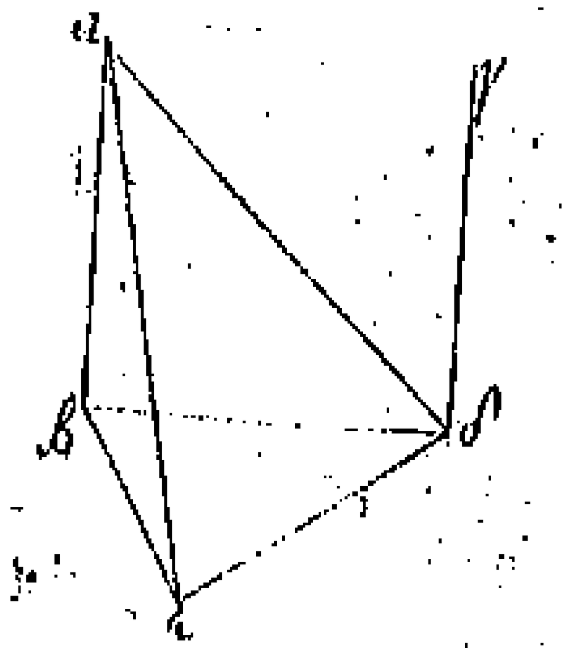
Τρισὶν ἤδη εὐθείαις ταῖς β γ, β δ, β ε, ἁπτομέναις ἀλλήλων κατὰ τὸ β, ἐφαπτέσθω ἡ α β, ἐπὶ τῆς κατὰ τὸ β, ἀφῆς. Λέγω τὰς β γ, β δ, β ε, ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι ἐπιπέδῳ. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστωσαν αἱ μὲν β δ, β ε, ἐν τῷ ὑποκειμένῳ· ἡ δὲ β γ, ἐν τῷ μετεώρῳ· καὶ ἐκβεβλήσθω τὸ διὰ τῶν α β, β γ, ἐπίπεδον, ὅπερ μετὰ τοῦ ὑποκειμένου κοινὴν τομὴν ποιήσει. ποιείτω τὴν β ζ, αἱ ἤδη β ε, β δ, β ζ, εὐθεῖαι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ εἰσὶν ἐπιπέδῳ, ἁπτόμεναι ἀλλήλων κατὰ τὸ β. ἐπεὶ δὲ ἡ α β, ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν β ε, β δ, ὀρθὴ πάντως ἔσται καὶ τῷ διὰ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδῳ, τουτέστι τῷ ὑποκειμένῳ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, καὶ ἔτι πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, κατὰ τὸν γ': ὅρον τοῦ παρόντος. ἐν δὲ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἐστὶν ἡ β ζ, καὶ ἅπτεται τῆς α β, ἄρα ἡ α β, πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ πρὸς τὴν β ζ, ἦν δὲ πρὸς ὀρθὰς καὶ πρὸς τὴν β γ, ἡ ὑπὸ α β γ, ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ α β ζ, ὅπερ ἄτοπον. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. lib. 11. Fig. 3.



Πρότασις ς': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι.



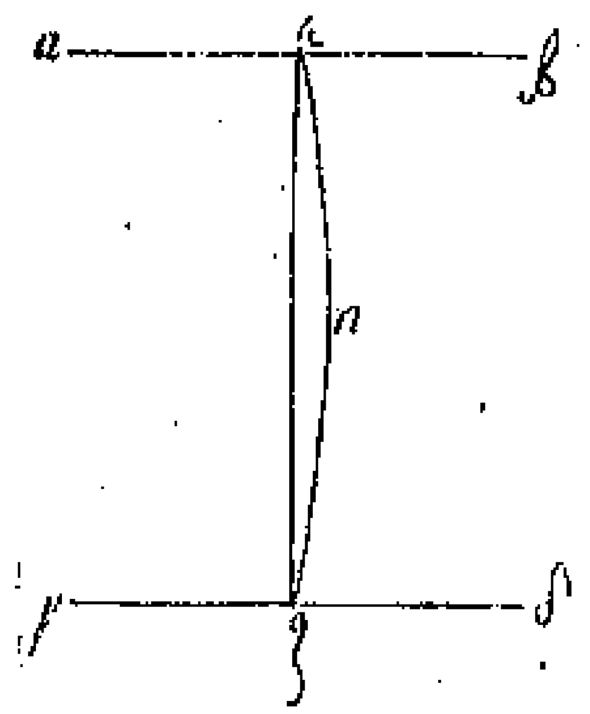
Εὐθεῖαι ἤδη αἱ α β, γ δ, πρὸς ὀρθὰς ἔστωσαν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. Λέγω, ὅτι καὶ παράλληλοί εἰσι. Συμβαλλέτωσαν γὰρ τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ β, καὶ δ, σημεῖα, καὶ ἐξαχθήτω τὸ διὰ τῶν α β, γ δ, ἐπίπεδον, ὅπερ μετὰ τοῦ ὑποκειμένου κοινὴν τομὴν ποιήσει εὐθεῖαν, ποιείτω δὴ τὴν β δ. ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν α β, γ δ, πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, πρὸς ὀρθὰς ἔτι ἔσται καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. ἅπτεται δὲ ἑκατέρας τούτων ἡ β δ, οὖσα ἐν τῷ ὑπο-

κειμένῳ ἐπιπέδῳ, ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ α β δ, γ δ β, γωνιῶν ὀρθή ἐστιν.
ὅταν δὲ εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη
γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι. αἱ α β, γ δ,
ἄρα παράλληλοί εἰσι, κατὰ τὴν κη: τοῦ α: Ἐὰν ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.

Α'ΛΛΩΣ ΚΑΤ' ΕΥ'ΚΛΕΙ'ΔΗΝ.

Τῶν δὴ α β, γ δ, εὐθειῶν συμβαλλουσῶν κατὰ τὰ β δ, σημεῖα, ἐπεζεύχθω
ἡ β δ, καὶ ἐπὶ τῆς β δ, πρὸς ὀρθὰς ἀπὸ τοῦ δ, σημείου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπί-
πεδον ἤχθω ἡ δ ε, καὶ γενομένης τῆς δ ε, ἴσης τῇ α β, ἐπεζεύχθωσαν αἱ β ε, α ε,
α δ. ἐπεὶ τοίνυν ἡ α β, πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, πρὸς ὀρθάς ἐστιν
ἔτι καὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν β δ, β ε, εὐθειῶν, κατὰ τὸν γ': ὅρον τοῦ παρόντος. ὡ-
σαύτως καὶ ἡ γ δ, πρὸς ἑκατέραν τῶν δ β, δ ε. ἀλλ' ἐπεὶ ἡ δ ε, ἴση ἐστὶ τῇ α β, κοι-
νὴ δὲ ἡ β δ, καὶ ἡ ὑπὸ α β δ, γωνία τῇ ὑπὸ β δ ε, ἴση, (ὀρθὴ γὰρ ἑκα-
τέρα) καὶ βάσις ἄρα ἡ α δ, βάσει τῇ β ε, ἴση ἐστὶ, κατὰ τὴν δ': τοῦ α: τῶν ἐπι-
πέδων. Αὖθις ἐπεὶ ἡ μὲν α β, ἴση ἐστὶ τῇ δ ε, ἡ δὲ β ε, τῇ α δ, καὶ βάσις ἡ α ε,
κοινὴ, αἱ ἄρα ὑπὸ α β ε, ε δ α, γωνίαι ἴσαι εἰσιν, ἡ δὲ ὑπὸ α β ε, ὀρθὴ ἐ-
δείχθη, καὶ ἡ ὑπὸ α δ ε, ἄρα ὀρθή ἐστιν. ἡ δ ε, ἄρα πρὸς τὴν δ α, ὀρθή ἐστιν,
ἔστι δὲ καὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν δ β, δ γ, ἡ ε δ, ἄρα ταῖς τρισὶν δ β, δ α, δ γ,
ὀρθή ἐστι, καὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω, αὗται αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν τῷ αὐτῷ εἰσιν ἐπιπέ-
δῳ. ὥστε καὶ ἡ α β, ἐν τῷ αὐτῷ ἐστιν ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ καὶ αἱ δ β, δ α, κατὰ τὴν
β': τοῦ παρόντος. αἱ α β, β δ, δ γ, ἐν τῷ αὐτῷ εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ ἔστιν ἑκατέρα
τῶν ὑπὸ α β δ, γ δ β, ὀρθὴ, αἱ α β, γ δ, ἄρα παράλληλοί εἰσι, κατὰ τὴν κη:
τοῦ α: τῶν ἐπιπέδων. ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 11. Fig. 4.



Πρότασις Ζ': Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ληφθῇ δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις.

Ἐπὶ δύο ἤδη εὐθειῶν παραλλήλων τῶν α β, γ δ, ληφθήτωσαν τυχόντα σημεῖα τὰ ε, ζ. Λέγω τὴν διὰ τῶν ε, ζ, εὐθεῖαν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ εἶναι. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω ἐν μετεώρῳ, ὡς ἡ ε η ζ· καὶ διήχθω τὸ διὰ τῆς ε η ζ, ἐπίπεδον, ὅπερ μετὰ τοῦ διὰ τῶν α β, γ δ, ἐπιπέδου κοινὴν τομὴν ποιήσει. ποιείτω δὴ τὴν ε ζ, ἡ ε ζ, ἄρα καὶ ἡ ε η ζ, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέχουσιν, ὅπερ ἀδύνατον, κατὰ τὸ ιβ': ἀξίωμα. Ἐὰν ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.

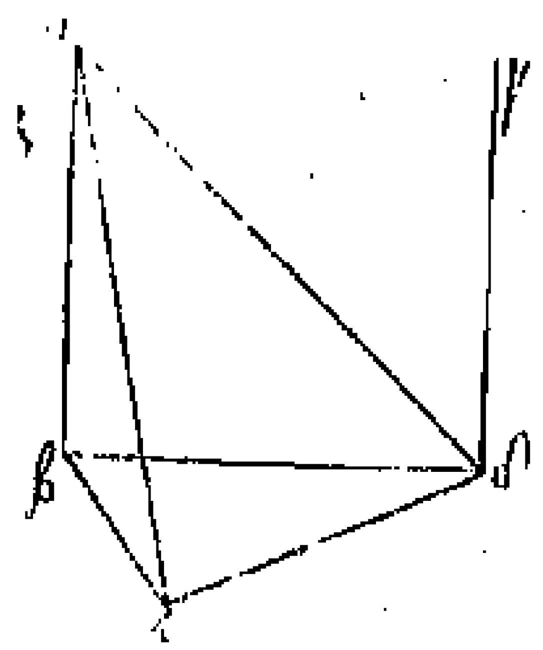
Πρό-

Πρότασις Η': Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι.

Δύο ἤδη εὐθειῶν παραλλήλων τῶν αβ, γδ, ἡ ἑτέρα αὐτῶν αβ, πρὸς ὀρθὰς ἔστω τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. Λέγω καὶ τὴν λοιπὴν γδ, ὀρθὴν εἶναι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. Συμβαλλέτωσαν γὰρ τῶν αὐτῶν αβ, γδ, εὐθειῶν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ β, καὶ δ, σημεῖα. Ἐπεζεύχθω ἡ βδ, καὶ συμπληρούσθω τὸ σχῆμα, κατὰ τὴν κατασκευὴν τῆς ς': τοῦ παρόντος. αἱ τρεῖς ἤδη εὐθεῖαι αβ, βδ, γδ, ἐν τῷ αὐτῷ εἰσιν ἐπιπέδῳ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω. ἤχθω τῇ βδ, πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ δε. καὶ κείσθω τῇ αβ, ἴση ἡ δε. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βε, αε, αδ. καὶ ἐπεὶ ἡ αβ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ αβ, καὶ κατὰ τὴν κθ': τοῦ α': ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αβδ, αβε, γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς αβ, γδ, εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ βδ, αἱ ἄρα ὑπὸ αβδ, γδβ, γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ αβδ. ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ γδβ, ἡ γδ, ἄρα πρὸς τὴν βδ, ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αβ, τῇ δε, κοινὴ δὲ ἡ βδ, δύο δὴ

Eucl. Lib. 11. Fig. 5.



αἱ αβ, βδ, δυσὶ ταῖς εδ, δβ, ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβδ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδβ, ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, καὶ βάσις ἄρα ἡ αδ, βάσει τῇ βε, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αβ, τῇ δε, ἡ δὲ βε, τῇ αδ, δύο δὴ αἱ αβ, βε, δυσὶ ταῖς εδ, δα, ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ αε, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ αβε, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδα, ἐστὶν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ αβε, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ εδα, καὶ ἡ εδ, ἄρα πρὸς τὴν αδ, ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ πρὸς τὴν βδ, ὀρθή, ἡ δε, ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν βδ, δα, ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστι. καὶ τὸν γ': ὅρον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν αδ, δβ, ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ἡ εδ, ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν βδ, δα, ἐπιπέδῳ, ἐστὶν ἡ δγ, ἐπειδήπερ ἐν τῷ διὰ τῶν βδ, δα, ἐπιπέδῳ εἰσὶ καὶ αἱ αβ, βδ, ἐν ᾧ δὲ ἡ αβ, βδ, ἐν τούτῳ ἐστὶ καὶ ἡ δγ, ἡ εδ, ἄρα τῇ δγ, πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ὥστε ἡ γδ, τῇ δε, πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἔστι δὲ ἡ γδ, καὶ τῇ βδ, ἄρα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας ταῖς δε, δβ, ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ δ, τομῆς, πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν. ὥστε ἡ γδ, καὶ τῷ διὰ τῶν δε, δβ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, τὸ δὲ διὰ τῶν δε, δβ, ἐπίπεδον, τὸ ὑποκείμενόν ἐστιν, ἡ γδ, ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

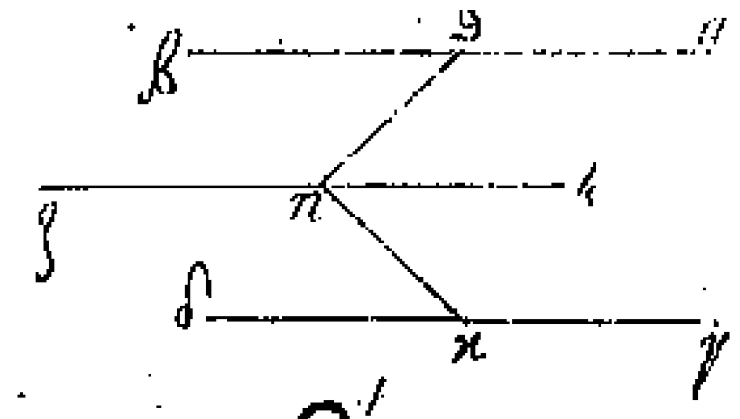
Πρό-

Πρότασις Θ': Θεώρημα.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Ἔστω γὰρ ἑκατέρα τῶν αβ, γδ, παράλληλος τῇ εζ, μὴ οὖσα αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. Λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ αβ, τῇ γδ. Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς εζ, σημεῖον τυχὸν τὸ η, καὶ ἀπ' αὐτοῦ τῇ εζ, ἐν μὲν τῷ διὰ τῶν εζ, αβ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ θη, ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν ζε, γδ, τῇ εζ, πάλιν πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ηκ. καὶ ἐπεὶ ἡ εζ, πρὸς ἑκατέραν τῶν ηθ, ηκ, ὀρθή ἐστιν, ἡ εζ, ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ηθ, ηκ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. καὶ ἔστιν ἡ εζ, τῇ αβ, παράλληλος, καὶ ἡ αβ, ἄρα τῷ διὰ τῶν θ, η, κ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἑκατέρα ἄρα τῶν αβ, γδ, τῷ διὰ τῶν θ, η, κ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι κατὰ τὴν ς': παράλληλοί εἰσιν αἱ εὐθεῖαι. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αβ, τῇ γδ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

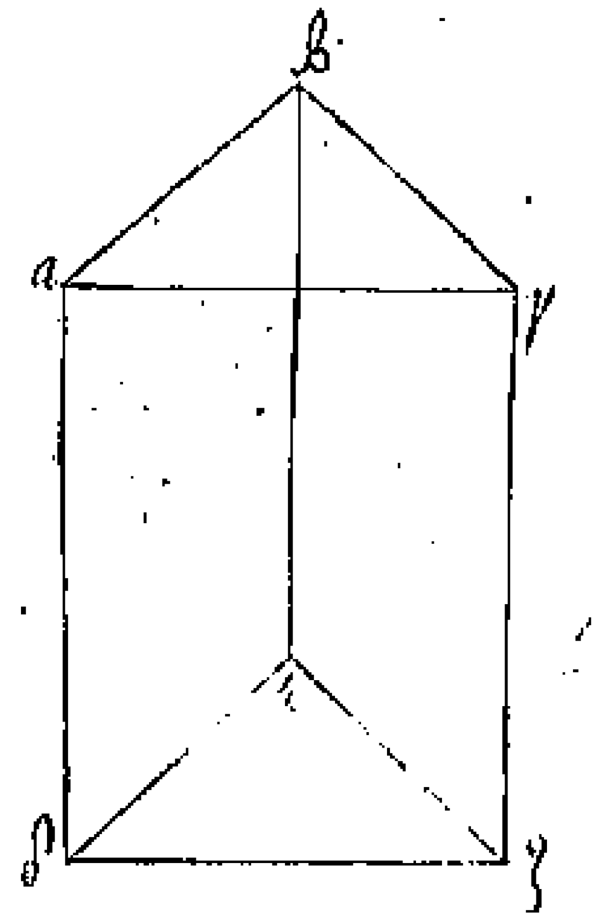
Eucl. Lib. 11. Fig. 6.



Θ'.

Πρότασις Ι': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσι.



Δύο γὰρ εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ αβ, βγ, παρὰ δύο εὐθείας τὰς δε, εζ, ἁπτομένας ἀλλήλων ἔστωσαν, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. Λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ αβγ, γωνία τῇ ὑπὸ δεζ. Ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ βα, βγ, εδ, εζ, ἴσαι ἀλλήλαις. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, γζ, βε, αγ, δζ. καὶ ἐπεὶ ἡ βα, τῇ εδ, ἴση ἐστί, καὶ παράλληλος, καὶ ἡ αδ, ἄρα τῇ βε, ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ γζ, τῇ βε, ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, ἑκατέρα ἄρα τῶν αδ, γζ, τῇ βε, ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, αἱ δὲ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αδ, τῇ γζ, καὶ ἴση, καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ αγ, δζ, καὶ ἡ αγ, ἄρα τῇ δζ, ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ αβ, βγ, δυσὶ ταῖς δε, εζ, ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις αγ, βάσει τῇ δζ, ἴση, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δεζ, ἐστὶν ἴση. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

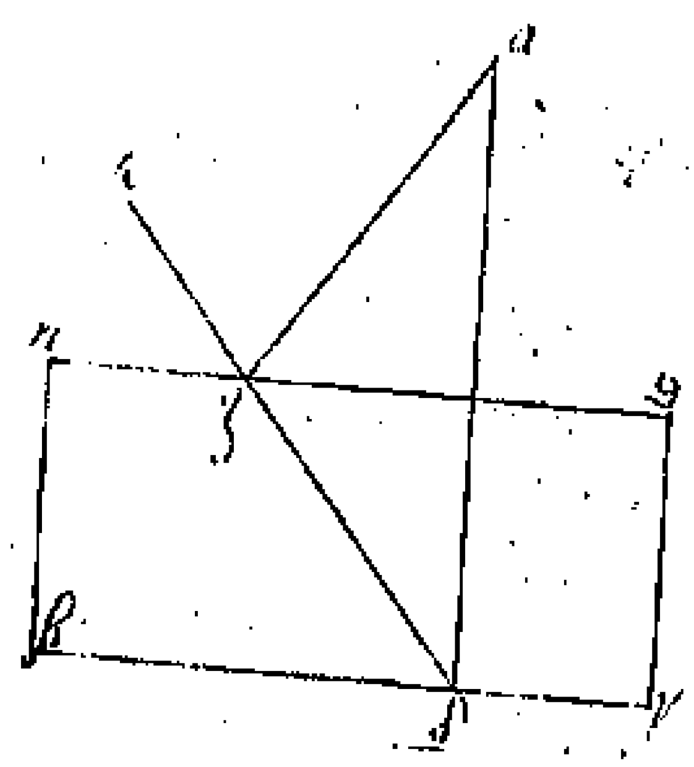
Πρό-

Πρότασις ΙΑ': Πρόβλημα.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου μετεώρου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον μετέωρον τὸ α, τὸ δὲ δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον. Δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ α, σημείου, ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. Διήχθω γάρ τις ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα, ὡς ἔτυχεν, ἡ βγ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ α, σημείου ἐπὶ τὴν βγ, κάθετος ἡ αδ. εἰ μὲν οὖν ἡ αδ, κάθετός ἐστι καὶ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. εἰ δὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ δ, σημείου τῇ βγ, ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ δε. καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ α, ἐπὶ τὴν δε, κάθετος ἡ αζ, καὶ διὰ τοῦ ζ, σημείου, τῇ βγ, παράλληλος ἤχθω ἡ ηθ. καὶ ἐπεὶ ἡ βγ, ἑκατέρᾳ τῶν δα, δε, πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἡ βγ, ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν αδ, δε, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. καὶ ἔστιν αὐτῇ παράλληλος ἡ ηθ. ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ,

Eucl. Lib. 11. Fig. 7.



καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται, κατὰ τὴν η: τοῦ παρ: καὶ ἡ ηθ, ἄρα τῷ διὰ τῶν αδ, δε, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν εδ, δα, ἐπιπέδῳ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ηθ. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ αζ, οὖσα ἐν τῷ διὰ τῶν εδ, δα, ἐπιπέδῳ, ἡ ηθ, ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν ζα, ὥστε καὶ ἡ ζα, ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν ηθ, ἔστι δὲ ἡ αζ, καὶ πρὸς τὴν δε, ὀρθή. ἡ αζ, ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ηθ, δε, ὀρθή ἐστι, κατὰ τὴν ς': ἐὰν δὲ εὐθεῖα δυσὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων ἐπὶ τῆς τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται, ἡ ζα, ἄρα τῷ διὰ τῶν εδ, ηθ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. τὸ δὲ διὰ τῶν εδ, ηθ, ἐπίπεδον ἐστὶ τὸ ὑποκείμενον, ἡ αζ, ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ΙΒ': Πρόβλημα.

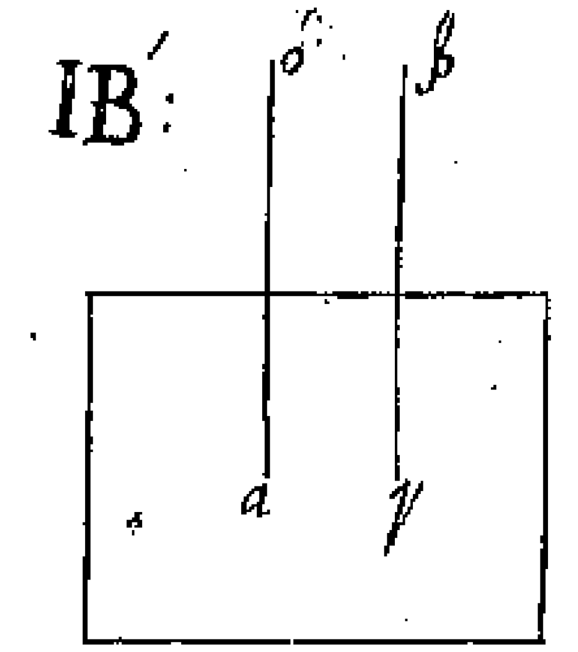
Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον, τὸ δὲ πρὸς αὐτῷ σημεῖον τὸ α. Δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ α, σημείου τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι. Νενοήσθω τὸ σημεῖον μετέωρον τὸ β, καὶ ἀπὸ τοῦ β, ἐπὶ τὸ ὑποκεί-

κείμε-

κείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω ἡ βγ, καὶ διὰ τοῦ α, σημείου τῇ βγ, παράλληλος ἤχθω ἡ αδ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσιν, αἱ αδ, γβ, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἡ βγ, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ αδ, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, τῷ ἄρα δοθέντι ἐπιπέδῳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα γραμμὴ ἀνέσταται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

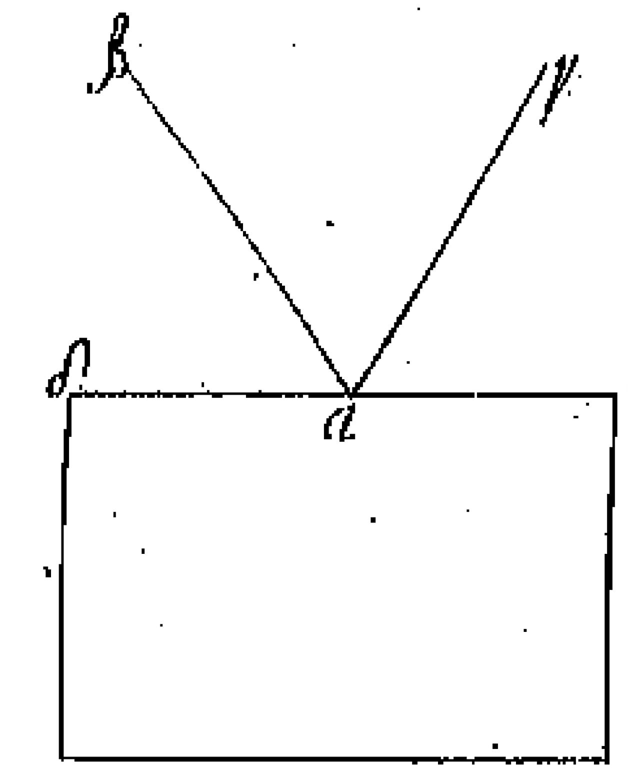
Eucl. Lib. 11. Fig. 8.



Πρότασις ΙΓ': Πρόβλημα.

Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου, δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς οὐκ ἀναστήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ δύο μέρη.

Εἰ γὰρ δυνατὸν τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου τοῦ α, δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, αγ, πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάθωσαν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. καὶ διήχθω τὸ διὰ τῶν αβ, αγ, ἐπίπεδον, τομὴν δὲ δὴ ποιήσει διὰ τοῦ α, ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιείτω τὴν δαε, αἱ ἄρα αβ, αγ, δαε, εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ αγ, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ δαε, οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ἡ ἄρα ὑπὸ γαε, γωνία ὀρθή ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ βαε, ὀρθή ἐστιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ



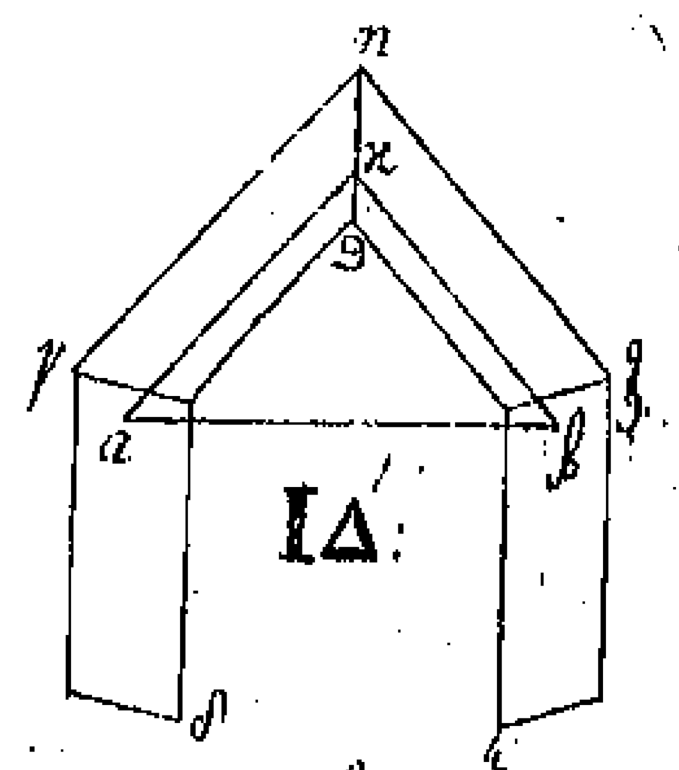
γαε, τῇ ὑπὸ βαε, καί εἰσιν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀναστήσονται, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΔ': Θεώρημα.

Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστι, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ, πρὸς ἑκάτερον τῶν γδ, εζ, ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἔστω. Λέγω, ὅτι παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα. εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. συμπιπτέτωσαν. ποιήσουσι δὴ κοινὴν τομὴν εὐθεῖαν, ποιείτωσαν τὴν ηθ. καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ηθ, τυχὸν σημεῖον τὸ κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ακ, βκ. καὶ ἐπεὶ ἡ αβ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ εζ, ἐπίπεδον, καὶ πρὸς τὴν βκ, ἄρα εὐθεῖαν, οὖσαν ἐν τῷ εζ, ἐκβληθέντι ἐπιπέδῳ, ὀρθή ἐστιν ἡ αβ, ἡ ἄρα ὑπὸ αβκ, γωνία ὀρθή ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ ὑπὸ βακ, ὀρθή ἐστι, τριγώνου δὲ τοῦ αβκ, αἱ δύο γωνίαι, αἱ ὑπὸ αβκ, βακ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ γδ, εζ, ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται, παράλληλα ἄρα ἐστὶ τὰ γδ, εζ, ἐπίπεδα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

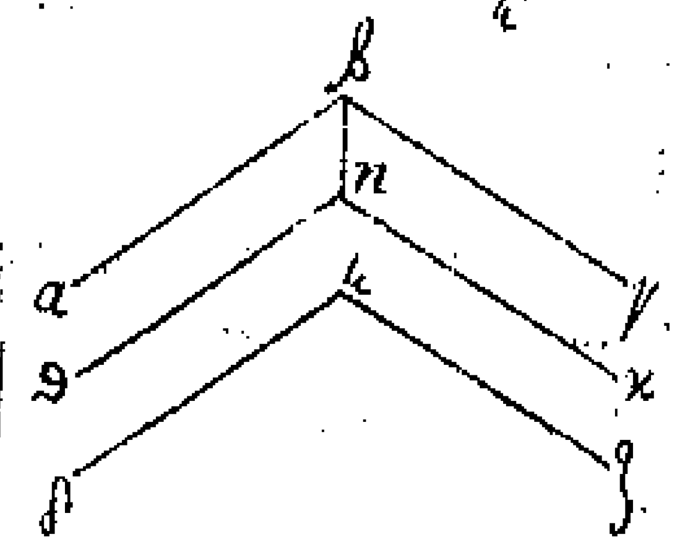
Eucl. Lib. 11. Fig. 9.



ΙΔ:

Πρότασις ΙΕ': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων παράλληλοι ὦσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, παράλληλά ἐστι τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα.



Δύο γὰρ εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ αβ, βγ, παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων, τὰς δε, εζ, ἔστωσαν μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι. Λέγω, ὅτι ἐκβαλλόμενα τὰ διὰ τῶν αβ, βγ, δε, εζ, ἐπίπεδα, οὐ συμπεσεῖται ἀλλήλοις. Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ β, σημείου ἐπὶ τὸ διὰ τῶν δε, εζ, ἐπίπεδον κάθετος ἡ βη, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ η, σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ η, τῇ μὲν εδ, παράλληλος ἤχθω ἡ ηθ, τῇ δὲ εζ, ἡ ηκ. καὶ ἐπεὶ ἡ βη, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ διὰ τῶν δε, εζ, ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν δε, εζ, ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκατέρα τῶν ηθ, ηκ, οὖσα ἐν τῷ διὰ τῶν δε, εζ, ἐπιπέδῳ. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ βηκ, βηθ, γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ βα, τῇ ηθ, αἱ ἄρα ὑπὸ ηβα, βηθ, γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ βηθ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ηβα, ἡ ηβ, ἄρα τῇ βα, πρὸς ὀρθάς ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ βη, καὶ τῇ βγ, ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ βη, δυσὶν εὐθείαις ταῖς βα, βγ, τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν, ἡ βη, ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν βα, βγ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ βη, καὶ τῷ διὰ τῶν ηθ, ηκ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. τὸ δὲ διὰ τῶν ηθ, ηκ, ἐπίπεδόν ἐστι τὸ διὰ τῶν δε, εζ, ἡ βη, ἄρα τῷ διὰ τῶν δε, εζ, ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. ἐδείχθη δὲ ἡ βη, καὶ τῷ διὰ τῶν αβ, βγ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς, ἔστι δὲ καὶ τῷ διὰ τῶν δε, εζ, ἐπιπέδῳ ὀρθή. ἡ βη, ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν διὰ τῶν αβ, βγ, δε, εζ, ἐπιπέδων ὀρθή ἐστι, καὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω παράλληλον ἄρα ἐστὶ τὸ διὰ τῶν αβ, βγ, ἐπίπεδον τῷ διὰ τῶν δε, εζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρό-

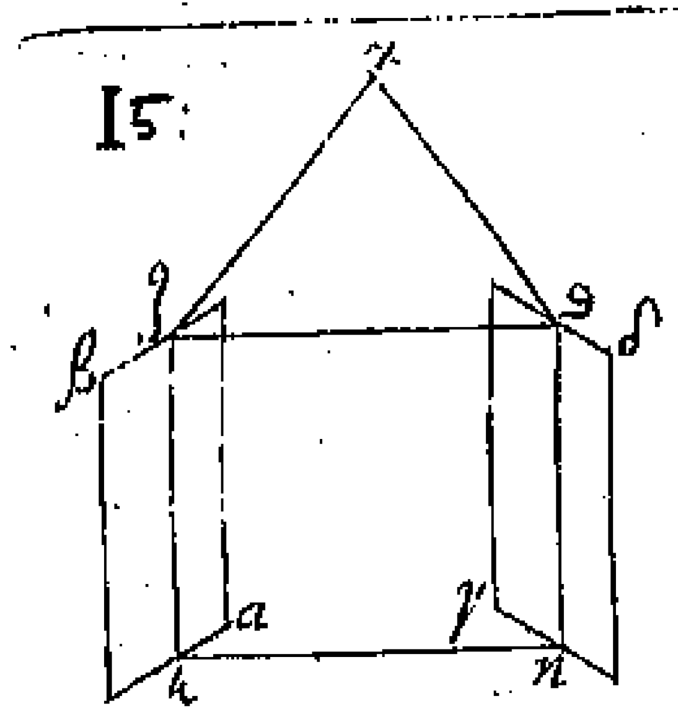
Πρότασις Ιϛ': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς τέμνηται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα παράλληλα, τὰ αβ, γδ, ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ εζηθ, τετμήσθω, κοιναὶ δὲ αὐτῶν τομαὶ ἔστωσαν αἱ εζ, ηθ. Λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ εζ, τῇ ηθ, εἰ γὰρ μὴ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται αἱ εζ, ηθ, ἤτοι ἐπὶ τὰ ζ, θ, μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ ε, η. Ἐκβεβλήσθω πρότερον, ὡς ἐπὶ τὰ ζ, θ, μέρη, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ κ. καὶ ἐπεὶ ἡ εζκ, ἐν τῷ αβ, ἐστὶν ἐπιπέδῳ, καὶ πάντα ἄρα τὰ ἐπὶ τῆς εζκ, σημεῖα ἐν τῷ αβ, ἐπιπέδῳ ἐστίν, ἓν δὲ τῶν ἐπὶ τῆς εζκ, εὐθείας σημείων, ἐστὶ τὸ κ, τὸ κ, ἄρα ἐν τῷ αβ, ἐστὶν ἐπιπέδῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ κ, καὶ ἐν τῷ γδ, ἐστὶν ἐπιπέδῳ, τὰ αβ, γδ, ἄρα ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. οὐ συμπίπτουσι δὲ, διὰ τὸ παράλληλα ὑποκεῖσθαι, οὐκ ἄρα αἱ εζ, ηθ, εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ ζ, θ, μέρη. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι αἱ εζ, ηθ, εὐθεῖαι οὐδὲ ἐπὶ τὰ ε, η, μέρη συμπεσοῦνται ἐκβαλλόμεναι. αἱ δὲ ἐπὶ τὰ μηδέτερα μέρη συμπίπτουσαι, παράλληλοί εἰσι. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ εζ, τῇ ηθ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

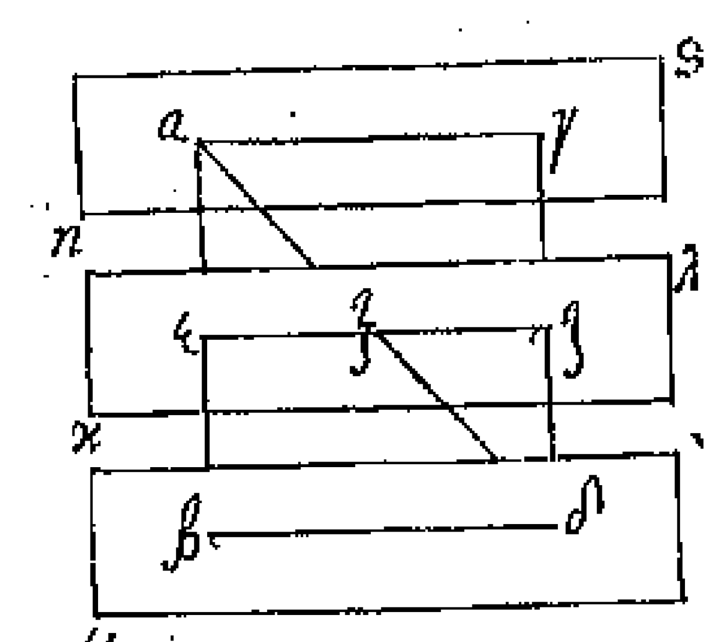
Eucl. Lib. 11. Fig. 10.

Ιϛ:



Πρότασις ΙΖ': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωνται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται.



Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ αβ, γδ, ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ηθ, κλ, μν, τμηθήτωσαν κατὰ τὰ α, ε, β, δ, ζ, γ, σημεῖα. Λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ αε, εὐθεῖα πρὸς τὴν εβ, οὕτως ἡ γζ, πρὸς τὴν ζδ. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αγ, βδ, αδ, καὶ συμβαλλέτω ἡ αδ, τῷ κλ, ἐπιπέδῳ, κατὰ τὸ ξ, σημεῖον. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εξ, ξζ. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ κλ, μν, ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ εβδζ, τέμνεται, παράλληλοί εἰσι αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ εζ, βδ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ πάλιν κατὰ τὴν αὐτήν, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ αγ, ζξ, παράλληλοί εἰσι. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ αβδ, παρὰ μίαν τῶν αὐτοῦ πλευρῶν ἦκται ἡ εξ, παράλληλος, ἀνάλογον ἄρα κατὰ τὴν β': τοῦ ϛ': τέμνει τὰς αὐτοῦ πλευράς: ὥστε ὡς ἡ αε, πρὸς τὴν εβ, οὕτως ἡ αξ, πρὸς τὴν ξδ. καὶ αὖθις κατὰ τὴν αὐτήν ὥστε τοῦ

αδγ,

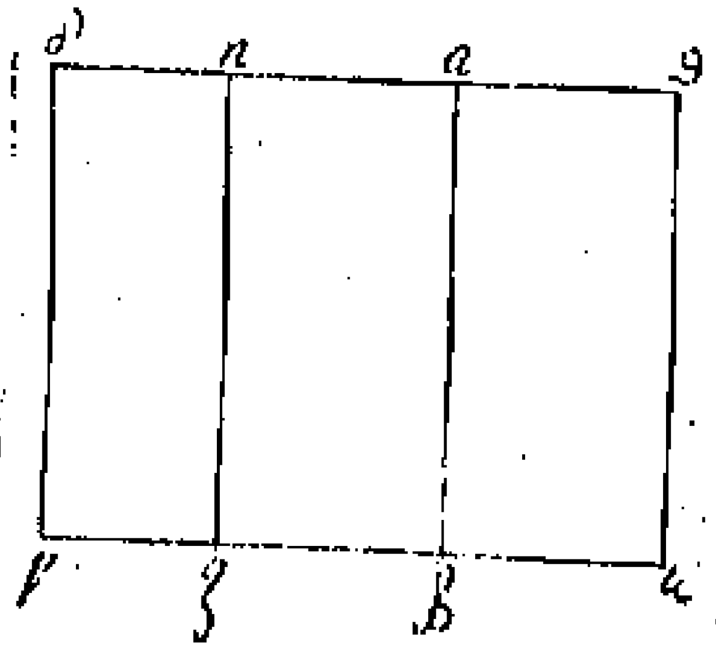
αδγ, τριγώνου ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί, (παρὰ μίαν γὰρ τῶν αὐτοῦ πλευρῶν ἦκται ἡ ξζ, παράλληλος) ἄρα ὡς ἡ αξ, πρὸς τὴν ξδ, οὕτως ἡ γζ, πρὸς τὴν ζδ, ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ αξ, πρὸς τὴν ξδ, οὕτως ἡ αε, πρὸς τὴν εβ, καὶ ὡς ἄρα ἡ αε, πρὸς τὴν εβ, οὕτως ἡ γζ, πρὸς τὴν ζδ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΗ': Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω. Λέγω, ὅτι καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς αβ, ἐπίπεδα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. Ἐκβεβλήσθω γὰρ διὰ τῆς αβ, ἐπίπεδον τὸ δε, καὶ ἔστω τούτου κοινὴ τομὴ καὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου ἡ γε. καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς εγ, τυχὸν σημεῖον τὸ ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ, τῇ γε, πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἐν τῷ δε, ἐπιπέδῳ ἡ ζη. καὶ ἐπεὶ ἡ αβ, πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀρθή ἐστι, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ αβ, ὥστε καὶ πρὸς τὴν γε, ὀρθή ἐστιν, ἡ ἄρα ὑπὸ αβζ, γωνία ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ηζβ, ὀρθή, παράλληλος ἄρα ἡ αβ, τῇ ζη, ἡ δὲ αβ, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ ἡ ζη, ἄρα τῷ αὐτῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. καὶ κατὰ τὸν δ': ὅρον, ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων, τῷ λοιπῷ πρὸς ὀρθὰς ὦσι, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων τῇ γε, πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ ζη, ἐδείχθη τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς, τὸ ἄρα δε, ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς αβ, ἐπίπεδα ὀρθὰ τυγχάνοντα πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. lib. 11. Fig. 11.



Πρότασις ΙΘ': Θεώρημα.

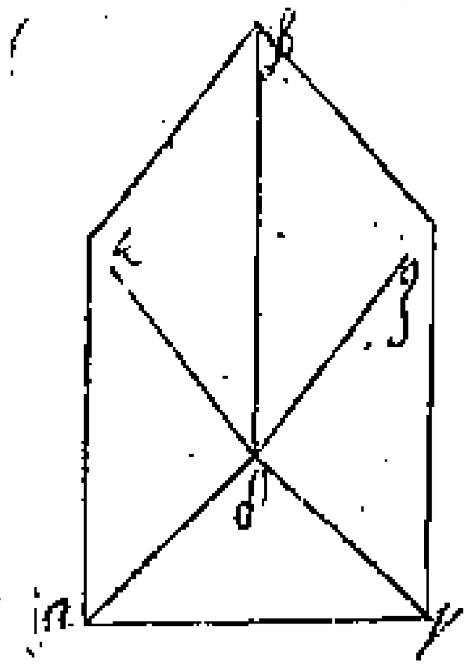
Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ αβ, βγ, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω. κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ βδ. Λέγω, ὅτι ἡ βδ, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπ: πρὸς ὀρθάς ἐστι. μὴ γάρ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ δ, σημείου ἐν μὲν τῷ αβ, ἐπιπέδῳ, τῇ αδ,

εὐθεία

εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς ἡ δε, ἐν δὲ τῷ βγ, ἐπιπέδῳ, τῇ γδ, πρὸς ὀρθὰς ἡ δζ, καὶ ἐπεὶ τὸ αβ, ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον, καὶ τῇ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ αδ, πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ αβ, ἐπιπέδῳ ἦκται ἡ δε, ἡ δε, ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ δζ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἄρα σημείου τοῦ δ, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀνεσταμέναι εἰσὶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ὅπερ ἀδύνατον, κατὰ τὴν ιγ': τοῦ παρόντος. οὐκ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ δ, σημείου πρὸς ὀρθὰς ἀνασταθήσεται, πλὴν τῆς δβ, κοινῆς τομῆς τῶν αβ, βγ, ἐπιπέδων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 11. Fig. 12.

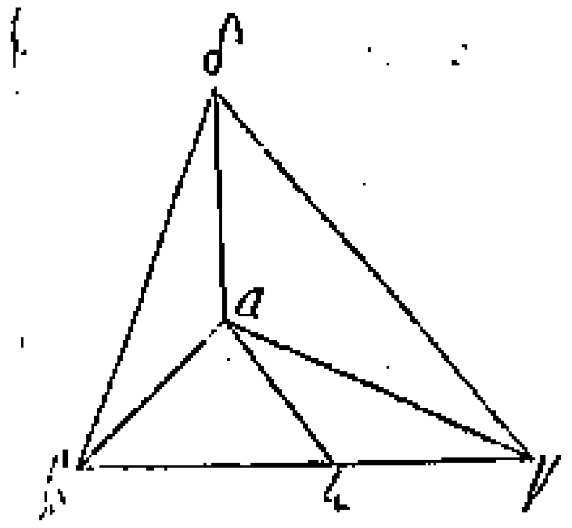


Πρότασις Κ': Θεώρημα.

Ἐὰν στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχηται, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Στερεὰ γὰρ γωνία ἡ πρὸς τῷ α, ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ βαγ, γαδ, δαβ, περιεχέσθω. Λέγω, ὅτι τῶν ὑπὸ βαγ, γαδ, δαβ, γωνιῶν δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. εἰ μὲν οὖν ἡ ὑπὸ βαγ, γαδ, δαβ, γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. φανερόν, ὅτι δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. εἰ δὲ οὔ. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ βαγ. καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ αβ, εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῷ α, τῇ ὑπὸ δαβ, γωνίᾳ ἐν τῷ διὰ τῶν βαγ, ἐπιπέδῳ ἴση ἡ ὑπὸ βαε. καὶ κείσθω τῇ αδ, ἴση ἡ αε, καὶ διὰ τοῦ ε, σημείου διαχθεῖσα ἡ βεγ, τεμνέτω τὰς αβ, αγ, εὐθείας κατὰ τὰ β, γ, σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βδ, δγ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ δα, τῇ αε, κοινὴ δὲ ἡ αβ, δύο δὴ αἱ δα, αβ, ἴσαι δυσὶ ταῖς αε, αβ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δαβ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βαε, ἴση. βάσις ἄρα ἡ δβ, βάσει τῇ βε, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ δβ, δγ, τῆς βγ, μείζονές εἰσιν, ὧν ἡ δβ, τῇ βε, ἐδείχθη ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ δγ, λοιπῆς τῆς εγ, μείζων ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ δα, τῇ αε, κοινὴ δὲ ἡ αγ, καὶ βάσις ἡ δγ, βάσεως τῆς εγ, μείζων ἐστί. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ δαγ, γωνίας τῆς ὑπὸ εαγ, μείζων ἐστίν, ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δαβ, τῇ ἀπὸ βαε, ἴση, αἱ ἄρα ὑπὸ δαβ, δαγ, τῆς ὑπὸ βαγ, μείζονές εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ σὺν δύο λαμβανόμεναι τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 11. Fig. 13.



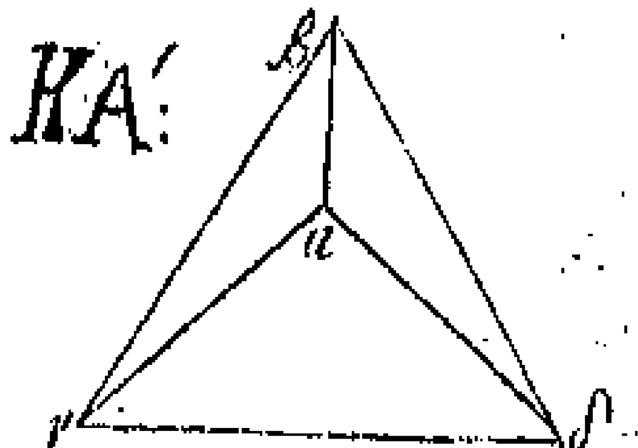
Πρό-

Πρότασις ΚΑʹ. Θεώρημα.

Ἅπασα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων, ἢ τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται.

Ἔστω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ α, περιεχομένη ὑπὸ ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν ὑπὸ β α γ, γ α δ, δ α β. Λέγω, ὅτι αἱ ὑπὸ β α γ, γ α δ, δ α β, τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. Εἰλήφθω γὰρ ἐφ' ἑκάστης τῶν α β, α γ, α δ, τυχόντα σημεῖα τὰ β, γ, δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ β γ, γ δ, δ β, καὶ ἐπεὶ στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ β, ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται τῶν ὑπὸ γ β α, α β δ, γ β δ, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, αἱ ἄρα ὑπὸ γ β α, α β δ, τῆς ὑπὸ γ β δ, μείζονές εἰσι, κατὰ τὰ ἀνωτέρω. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ αἱ μὲν ὑπὸ β γ α, α γ δ, τῆς ὑπὸ β γ δ, μείζονές εἰσι, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ γ δ α, α δ β, τῆς ὑπὸ γ δ β, μείζονές εἰσιν, ἓξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ γ β α, α β δ, β γ α, α γ δ, α δ γ, α δ β, τριῶν τῶν ὑπὸ γ β δ, β γ δ, γ δ β, μείζονές εἰσιν. ἀλλ' αἱ τρεῖς, αἱ ὑπὸ γ β δ, β γ δ, γ δ β, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν, αἱ ἓξ ἄρα, αἱ ὑπὸ γ β α, α β δ, β γ α, α γ δ, α δ γ, α δ β, δύο ὀρθῶν μείζονές εἰσι· καὶ ἐπεὶ ἑκάστου τῶν α β γ, α γ δ, α δ β, τριγώνων αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν, αἱ ἄρα τῶν τριῶν τριγώνων ἐννέα γωνίαι, αἱ ὑπὸ γ β α, α γ β, β α γ, α γ δ, δ α γ, γ δ α, α δ β, δ β α, β α δ, ἓξ ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν· ὧν αἱ ὑπὸ α β γ, β γ α, α γ δ, γ δ α, α δ β, δ β α, ἓξ γωνίαι δύο ὀρθῶν μείζονές εἰσι, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ β α γ, γ α δ, δ α β, τρεῖς γωνίαι, περιέχουσαι τὴν στερεὰν γωνίαν τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

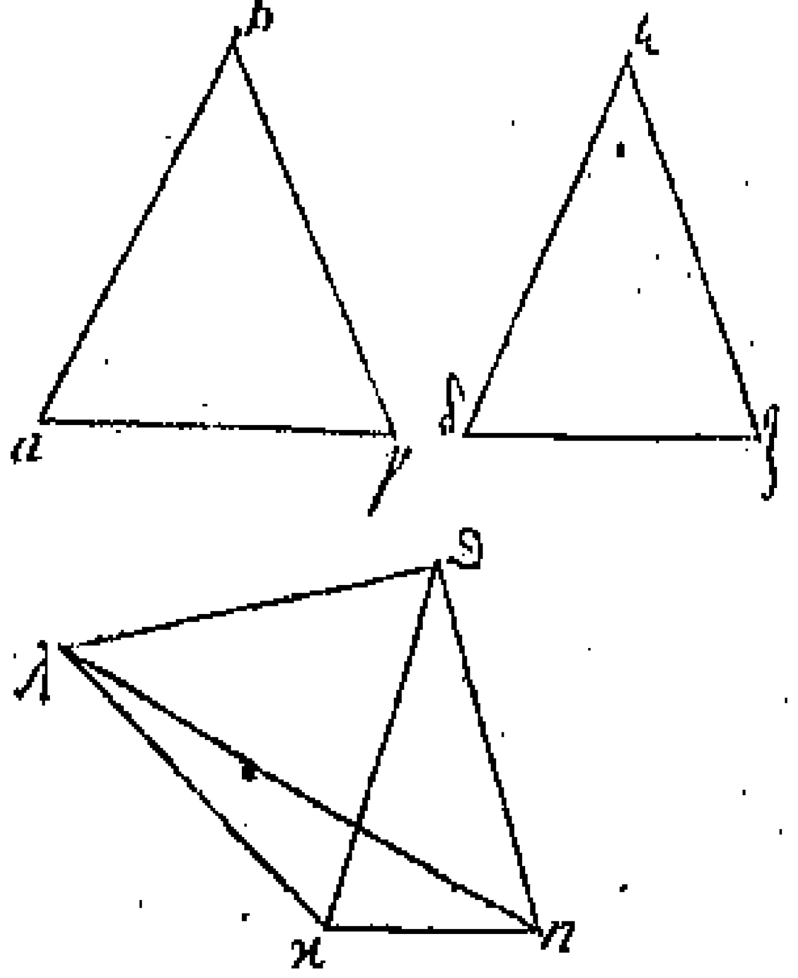
Eucl. Lib. 11. Fig. 24.



Πρότασις ΚΒʹ. Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι, δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς ἴσας εὐθείας, τρίγωνον συστήσασθαι.

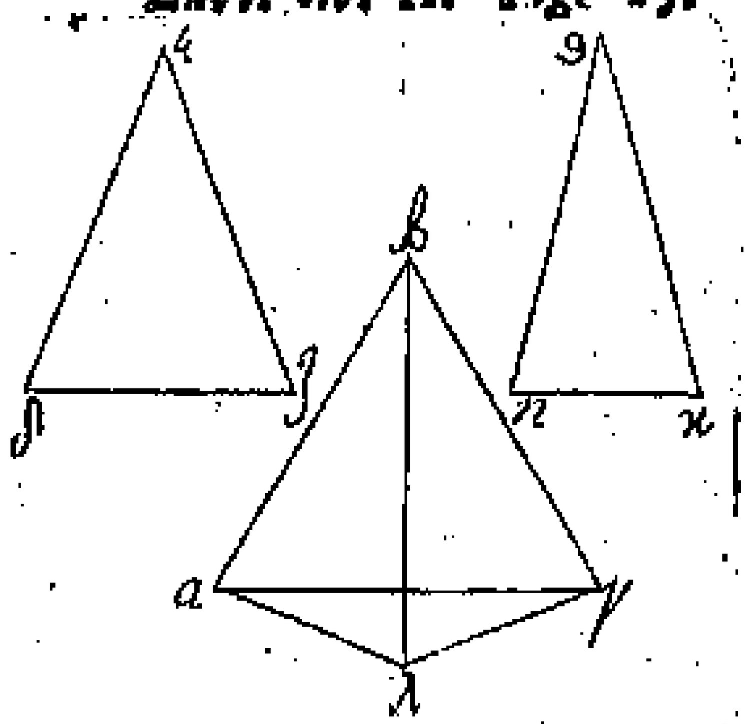
Ἔστωσαν τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ α β γ, δ ε ζ, η θ κ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ α β γ, δ ε ζ, τῆς ὑπὸ η θ κ, αἱ δὲ ὑπὸ δ ε ζ, η θ κ, τῆς ὑπὸ α β γ, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ η θ κ, α β γ, τῆς ὑπὸ δ ε ζ. καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ α β, β γ, δ ε, ε ζ, η θ, θ κ, εὐθεῖαι. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α γ, δ ζ, η κ. Λέγω,



ὅτι

ὅτι δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς α γ, δ ζ, η κ, τρίγωνον συστήσασθαι, τουτέστιν, ὅτι τῶν α γ, δ ζ, η κ, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ α β γ, δ ε ζ, η θ κ, γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, φανερὸν, ὅτι καὶ τῶν α γ, δ ζ, η κ, ἴσων γινομένων, δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων α γ, δ ζ, η κ, τρίγωνον συστήσασθαι. εἰ δὲ οὔ. ἔστωσαν ἄνισοι. καὶ συνεστάσθω πρὸς τῇ θ κ, εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ θ, τῇ ὑπὸ α β γ, γωνίᾳ, ἴση ἡ ὑπὸ κ θ λ, καὶ κείσθω μιᾷ τῶν α β, β γ, δ ε, ε ζ, η θ, θ κ, ἴση ἡ θ λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ η λ, κ λ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ α β, β γ, δυσὶ ταῖς κ θ, θ λ, ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ β, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ κ θ λ, ἴση, βάσις ἄρα ἡ α γ, βάσει τῇ κ λ, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ α β γ, η θ κ, τῆς ὑπὸ δ ε ζ, μείζονές εἰσι, ἴση δὲ καὶ ἡ ὑπὸ α β γ, τῇ ὑπὸ κ θ λ, ἡ ἄρα ὑπὸ η θ λ, τῆς ὑπὸ δ ε ζ, μείζων ἐστὶ, καὶ ἐπεὶ αἱ η θ, θ λ, δυσὶ ταῖς δ ε, ε ζ, ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ η θ λ, γωνίας τῆς πρὸς τῷ ε, μείζων, βάσις ἄρα ἡ η λ, βάσεως τῆς δ ζ, μείζων ἐστὶν, ἀλλ' αἱ η κ, κ λ, τῆς η λ, μείζονές εἰσι, πολλῷ ἄρα αἱ η κ, κ λ, τῆς δ ζ, μείζονές εἰσιν, ἡ δὲ κ λ, ἴση τῇ α γ, αἱ α γ, η κ, ἄρα τῆς λοιπῆς δ ζ, μείζονές εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ μὲν α γ, δ ζ, τῆς η κ, μείζονές εἰσιν. αἱ δὲ η κ, δ ζ, τῆς α γ. δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς α γ, δ ζ, η κ, τρίγωνον συστήσασθαι.

Eucl. lib. 11. Fig. 15.



Ἄλλως. Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ α β γ, δ ε ζ, η θ κ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. περιεχέτωσαν δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι αἱ α β, β γ, δ ε, ε ζ, η θ, θ κ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α γ, δ ζ, η κ. Λέγω ὅτι δυνατόν ἐστι τρίγωνον συστήσασθαι ἐκ τῶν ἴσων ταῖς α γ, δ ζ, η κ, τουτέστι πάλιν, ὅτι αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. εἰ μὲν οὖν πάλιν αἱ πρὸς τοῖς β, ε, θ, σημείοις γωνίαι ἴσαι εἰσιν. ἔσονται δὲ καὶ αἱ α γ, δ ζ, η κ, ἴσαι, καὶ ἔσονται αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες. εἰ δὲ οὔ, ἔστωσαν ἄνισοι αἱ πρὸς τοῖς β, ε, θ, σημείοις γωνίαι, καὶ μείζων ἡ πρὸς τῷ β, ἑκατέρας τῶν πρὸς τοῖς ε, θ. μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ α γ, εὐθεῖα ἑκατέρας τῶν δ ζ, η κ. καὶ φανερὸν, ὅτι αἱ α γ, μεθ' ἑκατέρας τῶν δ ζ, η κ, τῆς λοιπῆς μείζων ἐστί, Λέγω, ὅτι καὶ αἱ δ ζ, η κ, τῆς α γ, μείζονές εἰσι. συνεστάσθω πρὸς τῇ α β, εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ β, τῇ ὑπὸ η θ κ, γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ α β λ. καὶ κείσθω μιᾷ τῶν α β, β γ, δ ε, ε ζ, η θ, θ κ, ἴση ἡ β λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α λ, λ γ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ α β, β λ, δυσὶ ταῖς η θ, θ κ, ἴσαι εἰσιν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ α λ, βάσει τῇ η κ, ἐστὶν ἴση, καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τοῖς ε, θ, σημείοις γωνίαι τῆς ὑπὸ α β γ, μείζονές εἰσιν, ὧν ἡ ὑπὸ η θ κ, τῇ ὑπὸ α β λ, ἐστὶν ἴση. λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ ε, γωνία

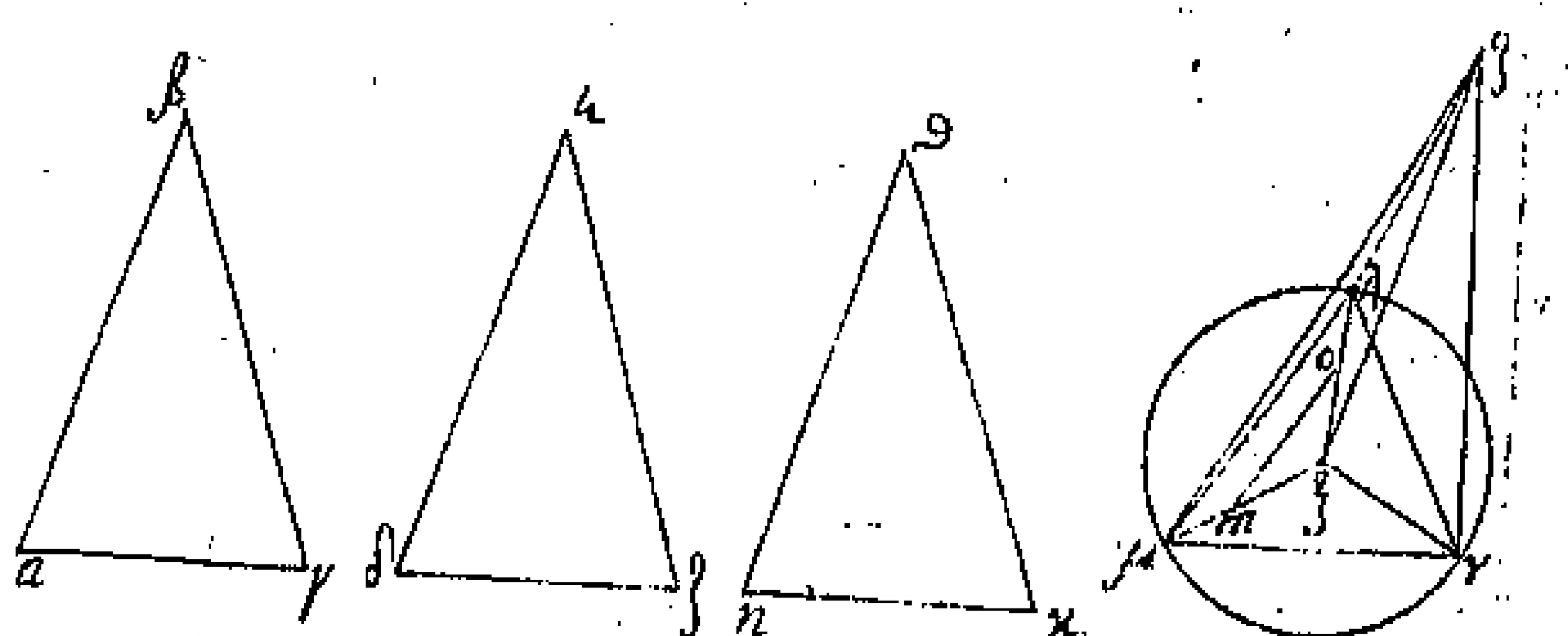
γωνία τῆς ὑπὸ λβγ, μείζων ἐστί. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ λβ, βγ, δυσὶ ταῖς δε, εζ, ἴσαι εἰσιν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δεζ, γωνίας τῆς ὑπὸ λβγ, μείζων ἐστὶ, βάσις ἄρα ἡ δζ, βάσεως τῆς λγ, μείζων ἐστὶν, ἴση δὲ ἐδείχθη ἡ ηκ, τῇ αλ, αἱ ἄρα δζ, ηκ, τῶν αλ, λγ, μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ καὶ αἱ αλ, λγ, τῆς αγ, μείζονές εἰσι, πολλῷ ἄρα αἱ δζ, ηκ, μείζονές εἰσι τῆς αγ. τῶν αγ, δζ, ηκ, ἄρα εὐθειῶν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. δυνατὸν ἄρα ἐκ τῶν ἴσων ταῖς αγ, δζ, ηκ, τρίγωνον συστήσασθαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΓ': Πρόβλημα.

Ἐκ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι: δεῖ δὴ τὰς τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ, ηθκ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. ἔτι δὲ αἱ τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες. Δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ὑπὸ αβγ, δεζ, ηθκ, στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι. Ἀπειλήφθωσαν ἴσαι αἱ αβ, βγ, δε, εζ, ηθ, θκ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, δζ, ηκ. δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς αγ, δζ, ηκ, τρίγωνον συστήσασθαι. συνεστάθω τὸ λμν, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν αγ, τῇ λμ, τὴν δὲ δζ, τῇ μν, καὶ ἔτι τὴν ηκ, τῇ λν. καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ λμν, τριγ: κύκλος, ὁ λμν, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον, ἔσται δὲ ἤτοι ἐντὸς τοῦ λμν, τριγ: ἢ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, ἢ ἐκτός. Ἔστω πρότερον ἐντὸς, καὶ ἔστω τὸ ξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ λξ, μξ, νξ. Λέγω, ὅτι ἡ αβ, μείζων ἐστὶ τῆς λξ. εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴση ἐστὶν, ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ἴση, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αβ, τῇ λξ. ἀλλ' ἡ μὲν αβ, τῇ βγ, ἐστὶν ἴση, ἡ λξ, ἄρα τῇ βγ, ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ λξ, τῇ ξμ, δύο δὴ αἱ αβ, βγ, δυσὶ ταῖς λξ, ξμ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ αγ, βάσει τῇ λμ, ὑπόκειται ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ λξμ, ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ δεζ, τῇ ὑπὸ μξν, ἴση ἐστίν. καὶ ἔτι ἡ ὑπὸ ηθκ, τῇ ὑπὸ νξλ, τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ, ηθκ, γωνίαι τρισὶ ταῖς ὑπὸ λξμ, μξν, νξλ, ἴσαι εἰσιν. ἀλλ' αἱ τρεῖς αἱ ὑπὸ λξμ, μξν, νξλ, τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσι. καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ,

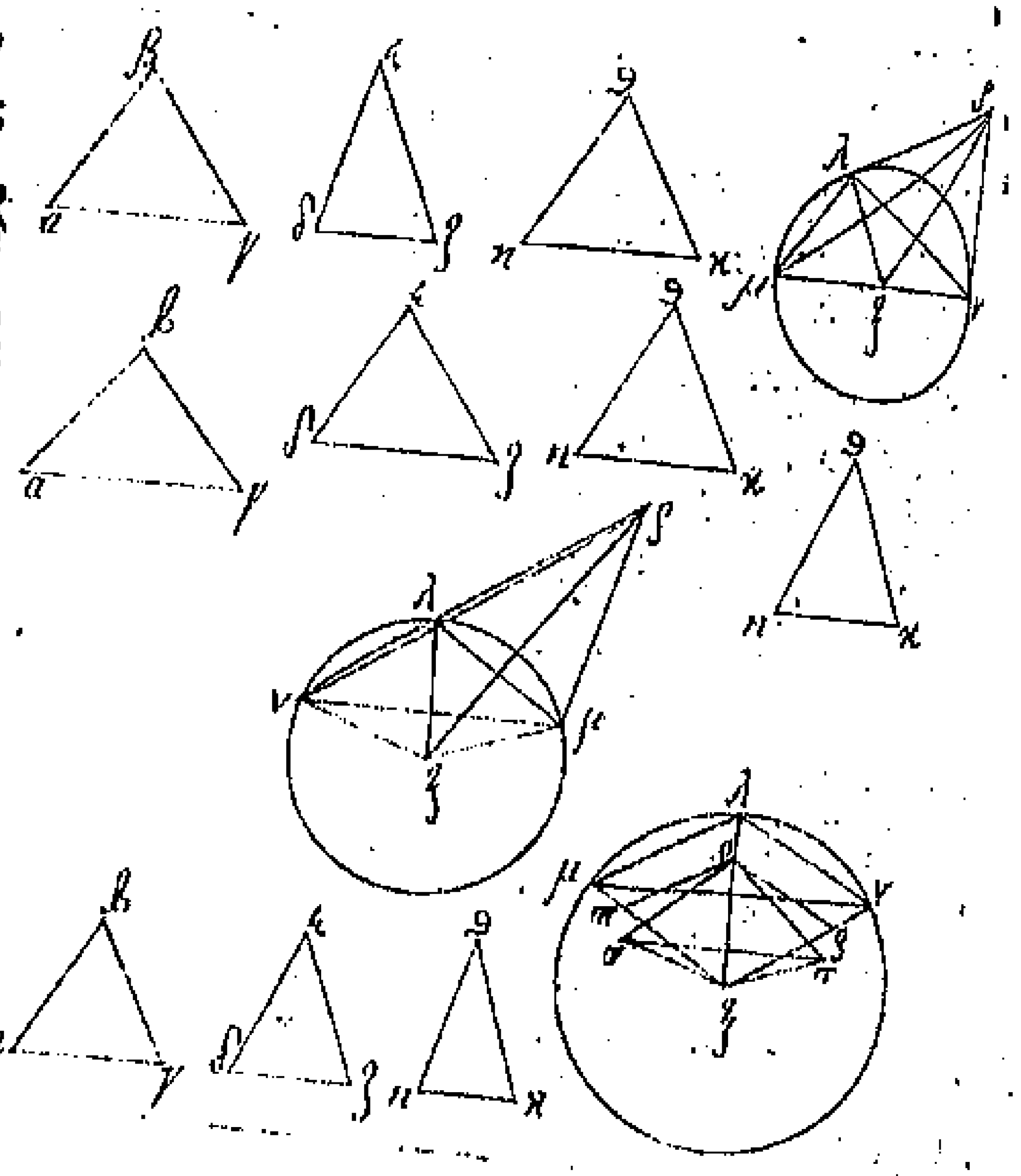
Eucl. Lib. 11. Fig. 16.



δεζ, ηθκ, τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν, ὑπόκεινται δὲ καὶ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες, ὅπερ ἀδύνατον, οὐκ ἄρα ἡ αβ, τῇ λξ, ἐστὶν ἴση. Λέγω, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ αβ, τῆς λξ, εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω. καὶ κείσθω τῇ μὲν αβ, ἴση ἡ ξο, τῇ δὲ βγ, ἡ ξπ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ οπ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν αἱ αβ, τῇ βγ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ξο, τῇ ξπ. ὥστε καὶ ἡ ολ, λοιπὴ, λοιπῇ τῇ πμ, ἐστὶν ἴση, παράλληλος ἄρα ἡ λμ, τῇ οπ, καὶ ἰσογώνιον τὸ λξμ, τῷ οπξ. ἔστιν ἄρα καὶ τὸν δ: τοῦ ς': ὡς ἡ λξ, πρὸς τὴν λμ, οὕτως ἡ ξο, πρὸς τὴν οπ, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ λξ, πρὸς τὴν οξ, οὕτως ἡ λμ, πρὸς τὴν οπ, μείζων δὲ ἡ ξλ, τῆς ξο, μείζων ἄρα καὶ ἡ λμ, τῆς οπ, ἀλλ' ἡ λμ, κεῖται τῇ αγ, ἴση, καὶ ἡ αγ, ἄρα τῆς οπ, μείζων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, δυσὶ ταῖς ξο, ξπ, ἴσαι εἰσι, καὶ βάσις ἡ αγ, βάσεως τῆς οπ, μείζων ἐστὶ, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, γωνίας τῆς ὑπὸ οξπ, μείζων ἐστίν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ μὲν ὑπὸ δεζ, τῆς ὑπὸ μξν, μείζων ἐστὶν, ἡ δὲ ὑπὸ ηθκ, τῆς ὑπὸ νξλ. αἱ ἄρα τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ, ηθκ, τριῶν τῶν ὑπὸ λξμ, μξν, νξλ, μείζονές εἰσιν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ, ηθκ, τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες ὑπόκεινται, πολλῷ ἄρα αἱ ὑπὸ λξμ, μξν, νξλ, τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν; ἀλλὰ καὶ ἴσαι, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ αβ, ἐλάσσων τῆς λξ, ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδ' ἴση, ἄρα μείζων. Ἀνεστάθω δὴ κατὰ τὴν ιβ': τοῦ παρ: ἀπὸ τοῦ ξ, σημείου, τῷ τοῦ λμν, κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ξρ, καὶ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τῆς λξ, ἐκείνῳ ἔστω ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ξρ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ρλ, ρμ, ρν. καὶ ἐπεὶ ἡ ξρ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ λμν, κύκλου ἐπίπεδον, κατὰ τὸν γ': ὅρον. καὶ πρὸς ἑκάστην ἄρα τῶν λξ, μξ, νξ, ὀρθή ἐστιν ἡ ρξ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ λξ, τῇ ξμ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ξρ, βάσις ἄρα ἡ λρ, βάσει τῇ ρμ, ἴση ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ρν, ἑκατέρᾳ τῶν ρλ, ρμ, ἴση ἐστὶν, αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ρλ, ρμ, ρν, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ ἐπεὶ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς λξ, ἐκείνῳ ἴσον ὑπόκειται τὸ ἀπὸ τῆς ξρ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αβ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν λξ, ξρ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν λξ, ξρ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ρλ, διὰ τῆς ἑκατόμβης, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ λξρ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αβ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ρλ, ἴση ἄρα ἡ αβ, τῇ ρλ. ἀλλὰ τῇ μὲν αβ, ἴση ἐστὶν ἑκάστη τῶν βγ, δε, εζ, ηθ, θκ, τῇ δὲ ρλ, ἴση ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ρμ, ρν, ἑκάστη ἄρα τῶν αβ, βγ, δε, εζ, ηθ, θκ, ἑκάστῃ τῶν ρλ, ρμ, ρν, ἴση ἐστίν. ἐπεὶ δὲ δύο αἱ ρλ, ρμ, δυσὶ ταῖς αβ, βγ, ἴσαι εἰσι. καὶ βάσις ἡ λμ, βάσει τῇ αγ, ὑπόκειται ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ λρμ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ αβγ, ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ἡ μὲν ὑπὸ μρν, γωνία τῇ ὑπὸ δεζ, ἐστὶν ἴση. ἡ δὲ λρν, τῇ ὑπὸ ηθκ. ἐκ τριῶν ἄρα γωνιῶν ἐπιπέδων, τῶν ὑπὸ λρμ, μρν, λρν, αἳ ἴσαι εἰσὶ τρισὶ ταῖς δοθείσαις, ταῖς ὑπὸ αβγ, δεζ, ηθκ, στερεὰ γωνία συνίσταται ἡ πρὸς τῷ ρ, περιεχομένη ὑπὸ τῶν λρμ, μρν, λρν, γωνιῶν. ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐπὶ μιᾶς τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν τῆς μν.

ἔστω τὸ ξ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ξλ. Λέγω πάλιν, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ αβ, τῆς λξ. εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ αβ, τῇ λξ, ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ἴση, δύο δὴ αἱ αβ, βγ, τουτέστιν αἱ δε, εζ, δυσὶ ταῖς ξμ, ξλ, τουτέστι τῇ μν, ἴσαι εἰσιν, ἀλλ' ἡ μν, τῇ δζ, κεῖται ἴση, καὶ αἱ δε, εζ, ἄρα τῇ δζ, ἴσαι εἰσιν, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ αβ, ἴση τῇ λξ, ὁμοίως δὲ οὐδὲ ἐλάττων, πολλῷ γὰρ τὸ ἀδύνατον μείζων. ἡ ἄρα αβ, μείζων ἐστὶ τῆς λξ, καὶ ἐὰν ὁμοίως, ᾧ μεῖζον τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς λξ, ἐκείνῳ ἴσον πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἀναστήσωμεν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ρξ, συσταθήσεται τὸ πρόβλημα. Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τοῦ λμν, τριγώνου, καὶ ἔστω τὸ ξ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ λξ, μξ, νξ. Λέγω δὴ καὶ οὕτως, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ αβ, τῆς λξ, εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴση ἐστὶν, ἢ ἐλάττων, ἔστω πρότερον ἴση. δύο οὖν αἱ αβ, βγ, δυσὶ ταῖς μξ ξλ, ἴσαι εἰσιν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ αγ, βάσει τῇ μλ, ἐστὶν ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ μξλ, ἴση ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ηθκ, τῇ ὑπὸ λξν, ἐστὶν ἴση, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ μξν, δυσὶ ταῖς ὑπὸ αβγ, ηθκ, ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ αβγ, ηθκ, τῆς ὑπὸ δεζ, μείζονές εἰσι, καὶ ἡ ὑπὸ μξν, ἄρα τῆς ὑπὸ δεζ, μείζων ἐστί. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ δε, εζ, δυσὶ ταῖς μξ, νξ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ δζ, βάσει τῇ μν, ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ μξν, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δεζ, ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ μείζων, ὅπερ ἄτοπον, οὐκ ἄρα ἴση ἡ αβ, τῇ λξ. Ἑξῆς δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων, μείζων ἄρα. καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πάλιν ἀναστήσωμεν τὸ ξρ, καὶ ἴσην αὐτὴν ὑποθώμεθα, ᾧ μεῖζον δύναται τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς λξ, συσταθήσεται τὸ πρόβλημα. Λέγω δὲ, ὅτι οὐδ' ἐλάττων ἐστὶν ἡ αβ, τῆς λξ, εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω. καὶ κείσθω τῇ μὲν αβ, ἴση ἡ ξο, τῇ δὲ βγ, ἴση ἡ ξπ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ οπ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αβ, τῇ βγ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ξο, τῇ ξπ, ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ολ, λοιπῇ τῇ πμ, ἐστὶν ἴση, παράλληλος ἄρα ἡ μλ, τῇ πο, καὶ ἰσογώνιον τὸ λμξ, τριγ: τῷ πξο, τριγ: ἔστιν ἄρα ὡς ἡ λξ, πρὸς τὴν λμ, οὕτως ἡ ξο, πρὸς τὴν οπ, καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ λξ, πρὸς τὴν ξο, οὕτως ἡ λμ, πρὸς τὴν οπ, μείζων δὲ ἡ λξ, τῆς ξο, μείζων ἄρα καὶ ἡ λμ, τῆς οπ. ἀλλ' ἡ λμ, τῇ αγ, ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ

Eucl. Lib. 11. Fig. 17.



αγ,

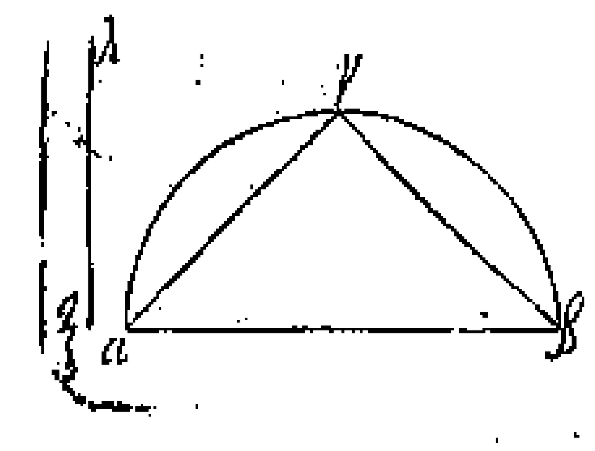
ἄρα τῆς οπ, μείζων. ἐπεὶ οὖν αἱ αβ, βγ, δύο δυσὶ ταῖς οξ, ξπ, ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ αγ, βάσεως τῆς οπ, μείζων ἐστὶ, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, γωνίας τῆς ὑπὸ οξπ, μείζων ἐστίν. Ὁμοίως δὴ κἂν τὴν ξρ, ἴσην ἑκατέρᾳ τῶν ξο, ξπ, ὑπολάβωμεν, καὶ ἐπεζεύξωμεν τὴν ορ, δείξομεν, ὅτι ἡ ὑπὸ ηθκ, γωνία τῆς ὑπὸ οξρ, μείζων ἐστί. Συνεστάσθω δὴ πρὸς τῇ λξ, εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῷ ξ, τῇ μὲν ὑπὸ αβγ, γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ λξσ, τῇ δὲ ὑπὸ ηθκ, ἡ ὑπὸ λξτ, καὶ κείσθω ἑκατέρα τῶν ξσ, ξτ, τῇ οξ, ἴση. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ οσ, οτ, στ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ αβ, βγ, δυσὶ ταῖς οξ, ξσ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ οξσ, ἴση, βάσις ἄρα ἡ αγ, τουτέστιν ἡ λμ, βάσει τῇ οσ, ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ λν, τῇ οτ, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ μλ, λν, εἰσὶν ἴσαι δυσὶ ταῖς οσ, οτ, καὶ γωνία ὑπὸ μλν, γωνίας τῆς ὑπὸ σοτ, μείζων, βάσις ἄρα ἡ μν, βάσεως τῆς στ, μείζων ἐστίν. ἀλλ' ἡ μν, τῇ δζ, ἐστὶν ἴση. καὶ ἡ δζ, ἄρα τῆς στ, μείζων. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ δε, εζ, δυσὶ ταῖς σξ, ξτ, ἴσαι εἰσι, καὶ βάσις ἡ δζ, βάσεως τῆς στ, μείζων, ἄρα γωνία ὑπὸ δεζ, γωνίας τῆς ὑπὸ σξτ, μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ σξτ, ταῖς ὑπὸ αβγ, ηθκ, ἡ ἄρα ὑπὸ δεζ, τῶν ὑπὸ αβγ, ηθκ, μείζων ἐστὶν, ἀλλὰ καὶ ἐλάττων, ὅπερ ἀδύνατον.

ΛΗ'ΜΜΑ.

Ὃν δὲ τρόπον ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς λξ, ἐκείνῳ ἴσον λαβεῖν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ξρ, δείξομεν οὕτως.

Ἐκκείσθωσαν αἱ αβ, λξ, εὐθεῖαι, καὶ ἔστω μείζων ἡ αβ. καὶ γεγράφθω ἐπ' αὐτῆς ἡμικύκλιον τὸ αβγ, καὶ εἰς τὸ αβγ, ἐνηρμόσθω τῇ λξ, εὐθείᾳ ἴση ἡ αγ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βγ. Ἐπεὶ οὖν ἐν ἡμικυκλίῳ τῷ αβγ, γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ αγβ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν αὕτη, κατὰ τὴν λα: τοῦ γ': τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αβ, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς αγ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς βγ, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς βγ, ἴση δὲ ἡ αγ, τῇ λξ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς λξ, μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς βγ. Ἐὰν οὖν τὴν βγ, ἴσην τῇ ξρ, ὑπολάβωμεν, ἔσται τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς λξ, μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς ξρ, ὅπερ προέκειτο ποιῆσαι.

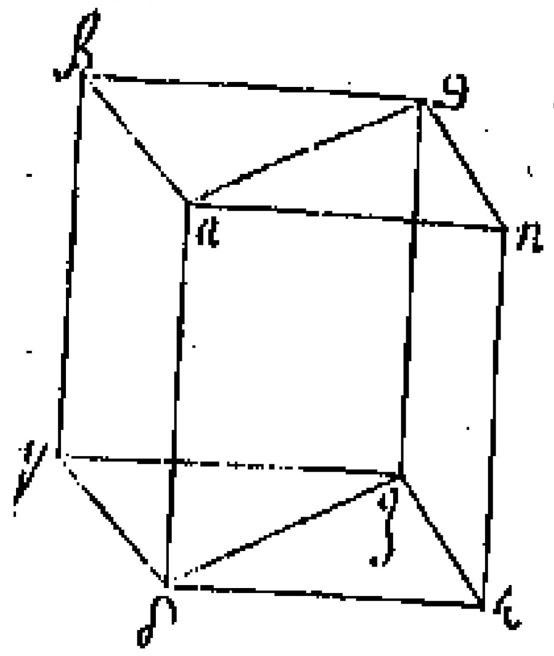
Eucl. Lib. 11. Fig. 18.



Πρότασις ΚΔ': Θεώρημα.

Ἐὰν στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχηται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε, καὶ παραλληλόγραμμά ἐστι.

Eucl. Lib. 11. Fig. 19.



Στερεὸν γὰρ τὸ γδηθ, ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων ἐμπεριεχέσθω, τῶν αγ, ηζ, εθ, δζ, ζβ, αε. Λέγω, ὅτι τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα, ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ βη, γε, ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ αγ, τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι, καὶ τὴν ιϛ': τοῦ παρόντος, παράλληλος ἄρα ἡ αβ, τῇ γδ. Πάλιν ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ βζ, αε, ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ αγ, τέμνηται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι, καὶ τὴν αὐτήν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αδ, τῇ βγ, ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ αβ, τῇ δγ, παράλληλος, παραλληλόγραμμον ἄρα τὸ αγ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν δζ, ζη, βζ, αε, παραλληλόγραμμόν ἐστιν. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ αθ, δζ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν, ἡ μὲν αβ, τῇ δγ, ἡ δὲ βθ, τῇ γζ, δύο δὴ αἱ αβ, βθ, ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας τὰς δγ, γζ, ἁπτομένας ἀλλήλων παράλληλοί εἰσι, καὶ τὴν ιε': τοῦ παρ: οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας ἄρα γωνίας περιέχουσιν. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αβθ, γωνία τῇ ὑπὸ δγζ, καὶ ἐπεὶ δύο αἱ αβ, βθ, δυσὶ ταῖς δγ, γζ, ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβθ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δγζ, ἴση, βάσις ἄρα ἡ αθ, βάσει τῇ δζ, ἴση ἐστί, καὶ τὸ αβθ, τρίγωνον τῷ δγζ, τριγ: ἴσον ἐστί, καὶ ἔστι τοῦ μὲν αβθ, τριγ: διπλάσιον τὸ βη, παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ δγζ, τὸ γε, παραλληλόγ: ἴσον ἄρα τὸ βη, παραλληλόγ: τῷ γε, παραλληλογ: ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τὸ αγ, τῷ ηζ, ἴσον ἐστί, καὶ τὸ αε, τῷ βζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

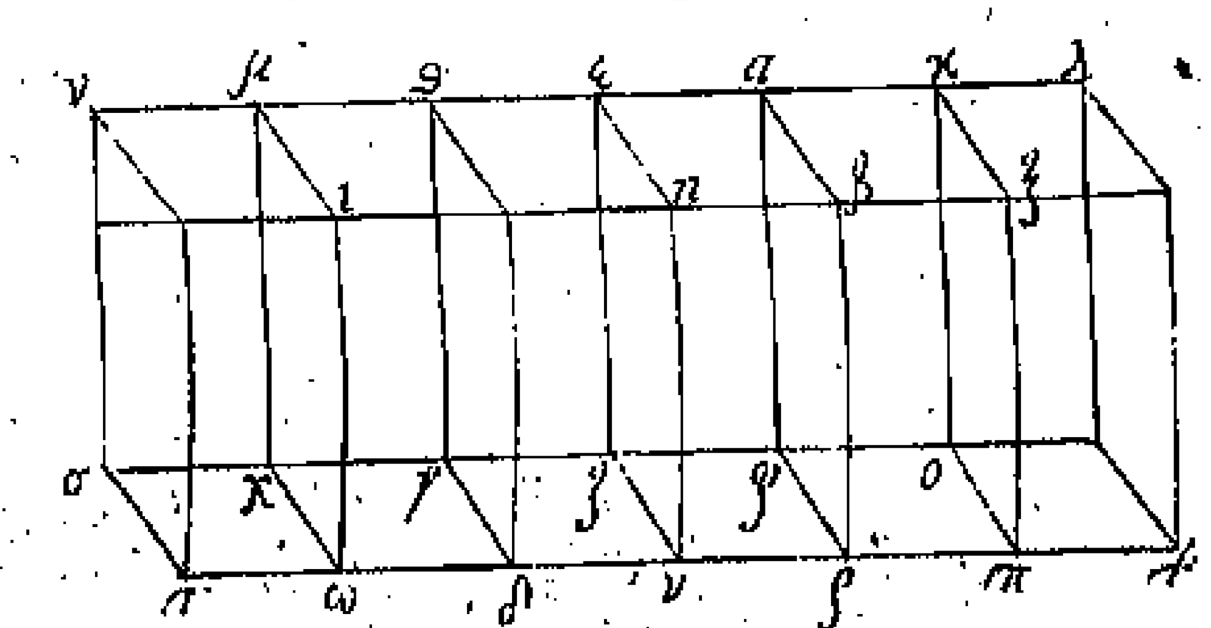
Πρότασις ΚΕ': Θεώρημα.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν, οὕτω τὸ στερεὸν πρὸς τὸ στερεόν.

Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ αβγδ, ἐπιπέδῳ τῷ υε, τετμήσθω, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς ρα, δθ. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ αεζφ, βάσις πρὸς τὴν εθγζ, βάσιν, οὕτω τὸ αβζυ, στερεὸν πρὸς τὸ εηγδ, στερεόν. Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ αε, εθ, ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη· καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν εθ, ἴσαι, ὁσαιδηποτοῦν αἱ θμ, μν, τῇ δὲ αε, ἴσαι, αἱ ακ, κλ· καὶ συμ-

συμπεπληρώσθωσαν τὰ λο, κφ, θχ, μσ, παραλληλόγραμμα, καὶ τὰ λπ, κρ, δμ, μτ, στερεά. Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ λκ, κα, αε, εὐθεῖαι ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ μὲν λο, κφ, αζ, παραλληλόγραμμα ἀλλήλοις. τὰ δὲ λξ, κβ, αη, ἀλλήλοις. καὶ ἔτι τὰ λψ, κπ, αρ, ἀλλήλοις, ἀπεναντίον γάρ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ εγ, θχ, μσ, παραλληλόγ: ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, τὰ δὲ θη, θι, ιν, ἴσα εἰσὶν ἀλλήλοις. καὶ ἔτι τὰ δθ, μω, ντ. τρία ἄρα ἐπίπεδα τῶν λπ, κρ, αυ, στερεῶν τρισὶν ἐπιπέδοις ἴσα ἐστίν, ἀλλὰ καὶ τὰ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἐστὶν ἴσα. τὰ ἄρα τρία στερεὰ τὰ λπ, κρ, αυ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ τρία στερεὰ τὰ εδ, δμ, μτ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὁσαπλασίων ἄρα ἡ λζ, βάσις τῆς αζ, βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ λυ, στερεὸν τοῦ αυ, στερεοῦ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ νζ, βάσις τῆς ζθ, βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ νυ, στερεὸν τοῦ θυ, στερεοῦ. καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ λζ, βάσις τῇ νζ, βάσει, ἴσον καὶ τὸ λυ, στερεόν, τῷ νυ, στερεῷ. καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ λζ, τῆς νζ, βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ λυ, στερεὸν τοῦ νυ, στερεοῦ, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. τεσσάρων δὲ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων, τῶν αζ, ζθ, δύο δὲ στερεῶν τῶν αυ, υθ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια, τῆς μὲν αζ, βάσεως, καὶ τοῦ αυ, στερεοῦ, ἥτε λζ, βάσις, καὶ τὸ λυ, στερεόν. τῆς δὲ θζ, βάσεως, καὶ τοῦ θυ, στερεοῦ, ἥτε νζ, βάσις, καὶ τὸ νυ, στερεόν, καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ λζ, βάσις τῆς νζ, βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ λυ, στερεὸν, τοῦ νυ, στερεοῦ. καὶ εἰ ἴση, ἴσον. καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αζ, βάσις πρὸς τὴν ζθ, βάσιν, οὕτω τὸ αυ, στερεὸν, πρὸς τὸ υθ, στερεὸν καὶ τὸν ε': ὅρον τοῦ ε': ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 11. Fig. 20.



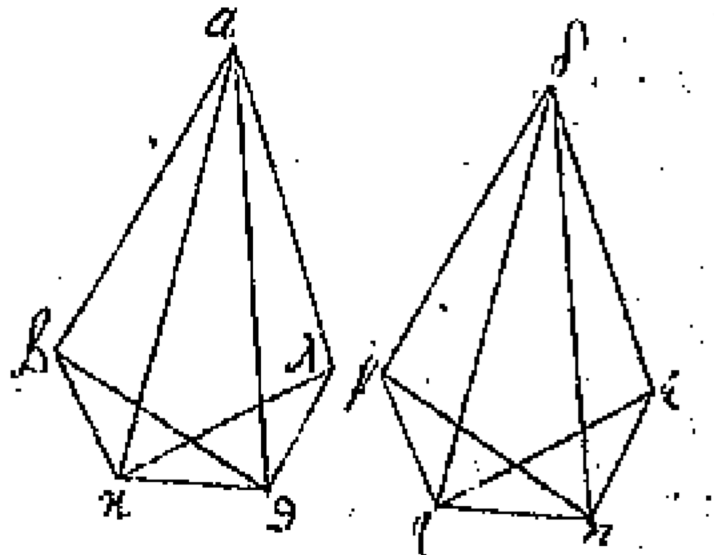
Πρότασις Κϛ': Πρόβλημα.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα ἡ αβ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ α, ἡ δὲ δοθεῖσα στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ δ, περιεχομένη ὑπὸ τῶν εδγ, εδζ, ζδγ, γωνιῶν ἐπιπέδων. Δεῖ δὴ πρὸς τῇ αβ, εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, τῇ πρὸς τῷ δ, στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι. Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς δζ, τυχὸν σημεῖον τὸ ζ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ ζ, ἐπὶ τὸ διὰ τῶν εδ, δγ, ἐπίπεδον κάθετος ἡ ζη, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δη. καὶ συνε-

συνεστάσθω πρὸς τῇ αβ, εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, τῇ μὲν ὑπὸ εδγ, γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ βαλ, τῇ δὲ ὑπὸ εδη, ἴση ἡ ὑπὸ βακ. καὶ κείσθω τῇ δη, ἴση ἡ ακ, καὶ ἀνεστάσθω ἀπὸ τοῦ κ, σημείου τῷ διὰ τῶν βαλ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ κθ, καὶ κείσθω ἴση τῇ ηζ, ἡ κθ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ θα. Λέγω, ὅτι ἡ πρὸς τῷ α, στερεὰ γωνία ὑπὸ τῶν βαλ, βαθ, θαλ, γωνιῶν ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ δ, στερεᾷ γωνίᾳ, τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν εδγ, εδζ, ζδγ, γωνιῶν.

Eucl. Lib. 11. Fig. 21.



Ἀπειλήφθωσαν γὰρ ἴσαι αἱ αβ, δε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θβ, κβ, ζε, ηε. καὶ ἐπεὶ ἡ ζη, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ηζε, ηζδ, γωνιῶν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ θκβ, γωνιῶν ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ αἱ κα, αβ, δυσὶ ταῖς ηδ, δε, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ βκ, βάσει τῇ εη, ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ κθ, τῇ ζη, ἴση, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν. ἴση ἄρα καὶ ἡ βθ, τῇ ζε. Πάλιν ἐπεὶ δύο αἱ ακ, κθ, δυσὶ ταῖς δη, ηζ, ἴσαι εἰσί, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ αθ, βάσει τῇ δζ, ἴση ἐστίν, ἔστι δὲ ἡ αβ, τῇ δε, ἴση. δύο δὴ αἱ αθ, αβ, δυσὶ ταῖς ζδ, δε, ἴσαι εἰσί. καὶ βάσις ἡ θβ, βάσει τῇ ζε, ἴση. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ βαθ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδζ, ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ θαλ, τῇ ὑπὸ ζδγ, ἴση ἐστίν. ἐπειδήπερ ἐὰν ἀπολάβωμεν ἴσας τὰς αλ, δγ, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὰς κλ, θλ, ηγ, ζγ, ἐπεὶ ὅλη ἡ ὑπὸ βαλ, ὅλῃ τῇ ὑπὸ εδγ, ἐστὶν ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ βακ, τῇ ὑπὸ εδη, ὑπόκειται ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ καλ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ ηδγ, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ κα, αλ, δυσὶ ταῖς ηδ, δγ, ἴσαι εἰσί, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ κλ, βάσει τῇ ηγ, ἴση ἐστίν. ἴση δὲ καὶ ἡ κθ, τῇ ηζ, ἐστί. δύο δὴ αἱ λκ, κθ, δυσὶ ταῖς γη, ηζ, εἰσὶν ἴσαι, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι. βάσις ἄρα ἡ θλ, βάσει τῇ ζγ, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ θα, αλ, δυσὶ ταῖς ζδ, δγ, ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ θλ, βάσει τῇ ζγ, ἐστὶν ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ θαλ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζδγ, ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βαλ, τῇ ὑπὸ εδγ, ἴση. πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ, ἴση στερεὰ γωνία συνίσταται.

Πρό-

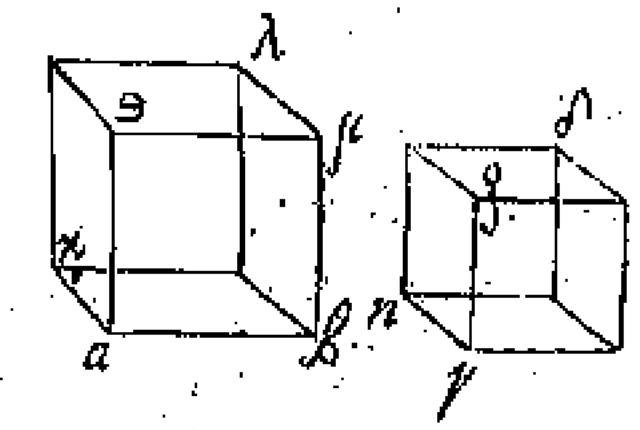
Πρότασις ΚΖ': Πρόβλημα.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ αβ, τὸ δὲ δοθὲν στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ δγ. Δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς αβ, τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ τῷ δγ, ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον, καὶ τὰ ἑξῆς. Συνεστάσθω γὰρ πρὸς τῇ αβ, εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, τῇ πρὸς τῷ γ, στερεᾷ γωνίᾳ ἴση, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν βαθ, θακ, καβ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ βαθ, γωνίαν τῇ ὑπὸ εγζ, τὴν δὲ ὑπὸ βακ, τῇ ὑπὸ εγη, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ καθ, τῇ ὑπὸ ηγζ. καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ εγ, πρὸς τὴν γη, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν ακ, ὡς δὲ ἡ ηγ, πρὸς τὴν γζ, οὕτως ἡ ακ, πρὸς τὴν αθ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ εγ, πρὸς τὴν γζ, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν αθ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ βθ, παραλληλόγραμμον, καὶ τὸ αλ, στερεόν. Καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ εγ, πρὸς τὴν γη, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν ακ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ εγη, βακ, αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα τὸ ηε, παραλληλόγραμμον τῷ κβ, παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν κθ, παραλληλόγραμμον τῷ ηζ, παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστι, καὶ ἔτι τὸ ζε, τῷ θβ, τρία ἄρα παραλληλόγρ: τοῦ γδ, στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμ: τοῦ αλ, στερεοῦ ὅμοιά εἰσιν. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια, ὅλον ἄρα τὸ γδ, στερεὸν ὅλῳ τῷ αλ, στερεῷ ὅμοιόν ἐστιν. Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς αβ, καὶ τὰ ἑξῆς.

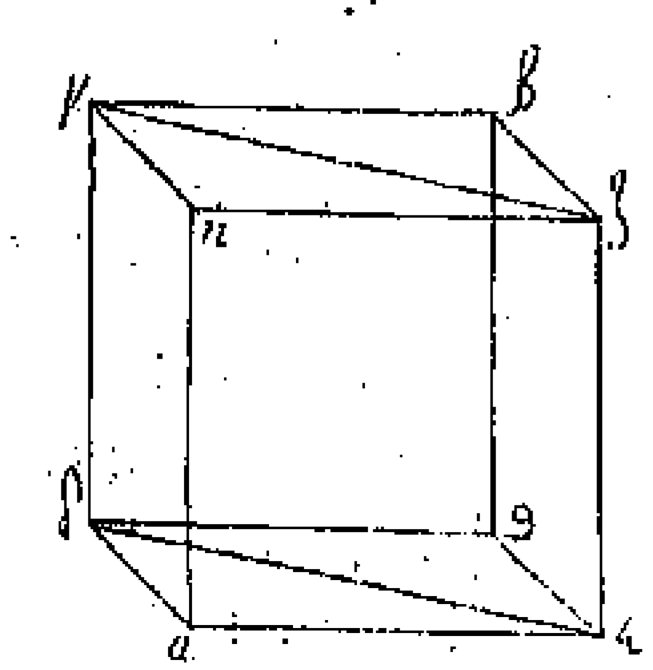
Eucl. Lib. 11. Fig. 22.

ΚΖ'



Πρότασις ΚΗ': Θεώρημα.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων, δίχα τμηθήσεται τὸ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου.



Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ αβ, ἐπιπέδῳ τῷ γδεζ, τετμήσθω κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων, τὰς γζ, δε. Λέγω, ὅτι δίχα τμηθήσεται τὸ αβ, στερεὸν ὑπὸ τοῦ γδεζ, ἐπιπέδου. Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν γηζ, τρίγωνον τῷ γβζ, τριγώνῳ, τὸ δὲ αδε, τῷ δεθ, ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν γα, παραλληλόγρ: τῷ βε, ἴσον, ἀπεναντίον γάρ, τὸ δὲ ηε, τῷ γθ, καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο

μὲν

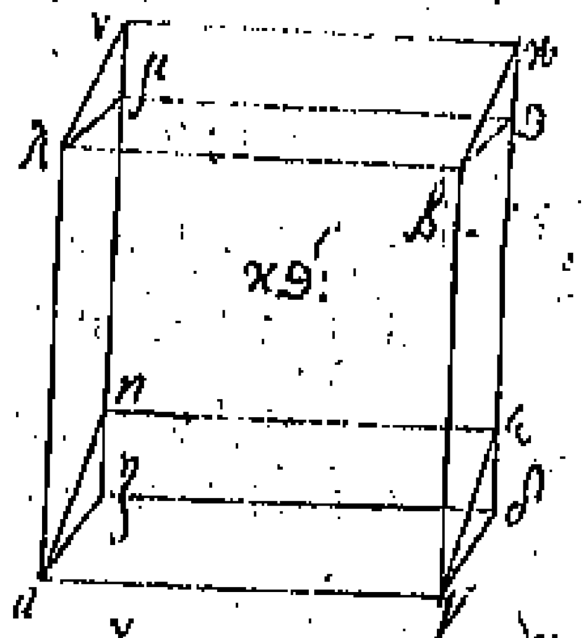
μὲν τριγώνων τῶν γ η ζ, α δ ε, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν η ε, α γ, γ ε, ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων, τῶν γ ζ β, δ ε θ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων γ θ, β ε, γ ε, ὑπὸ γὰρ ἴσων ἐπιπέδων περιέχονται τῷ πλήθει, καὶ τῷ μεγέθει. ὥστε ὅλον τὸ α β, στερεὸν δίχα τέμνεται, ὑπὸ τοῦ γ δ ε ζ, ἐπιπέδου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

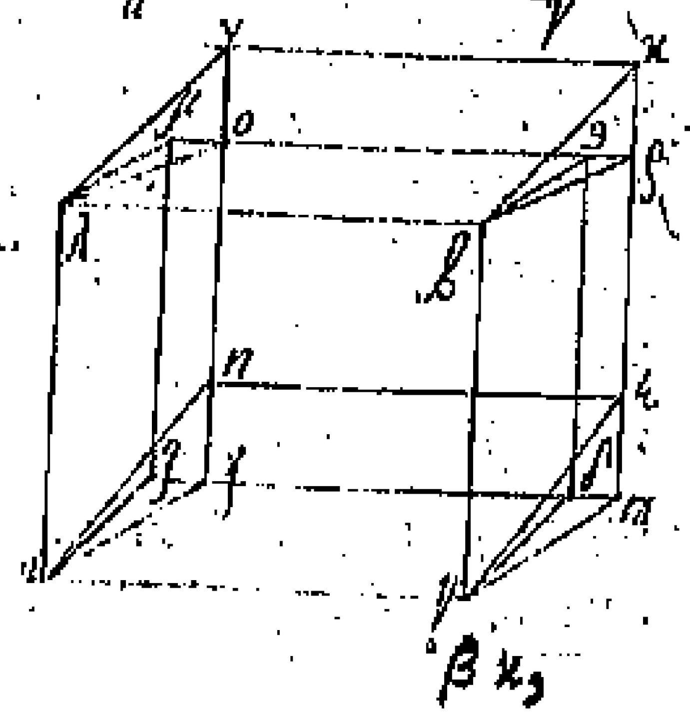
Πρότασις ΚΘ': Θεώρημα.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσὶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

Ἔστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς α β, στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ γ μ, γ ν, ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι, αἱ α ζ, α η, λ μ, λ ν, γ δ, γ ε, β θ, β κ, ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν ἔστωσαν τῶν ζ ν, δ κ. Λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ γ μ, στερεὸν τῷ γ ν, στερεῷ. Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν γ θ, γ κ, ἴση ἐστὶν ἡ γ β, ἑκατέρᾳ τῶν δ θ, ε κ, ὥστε καὶ ἡ δ θ, τῇ ε κ, ἐστὶν ἴση. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ε θ, λοιπὴ ἄρα ἡ δ ε, λοιπῇ τῇ θ κ, ἴση ἐστίν. ὥστε καὶ τὸ δ ε γ, τρίγωνον τῷ θ κ β, τριγώνῳ ἴσον ἐστί, τὸ δὲ δ η, παραλληλόγραμμον τῷ θ ν, παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ α ζ η, τρίγωνον τῷ λ μ ν, τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν γ ζ, παραλληλόγραμ: τῷ β μ, παραλληλογράμμῳ ἴσον, τὸ δὲ γ η, τῷ β ν, ἀπεναντίον γάρ, καὶ τὸ πρίσμα ἄρα, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν α ζ η, δ ε γ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν α δ, δ η, η γ, ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι, τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν λ μ ν, θ β κ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν β μ, ν θ, β ν, κοινὸν προσκείσθω τὸ στερεόν, οὗ βάσις μὲν τὸ α β, παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ η ε θ μ, ὅλον ἄρα τὸ γ μ, στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλῳ τῷ γ ν, στερῷ παραλληλεπιπ: ἴσον ἐστί. τὰ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 11. Fig. 23.





Πρότασις Λ': Θεώρημα.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ὑφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

Ἔστω γὰρ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς α β, στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ γ μ, γ ν, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ὑφεστῶσαι, αἱ α ζ, α η, λ μ, λ ν, γ δ, γ ε, β θ, β κ,

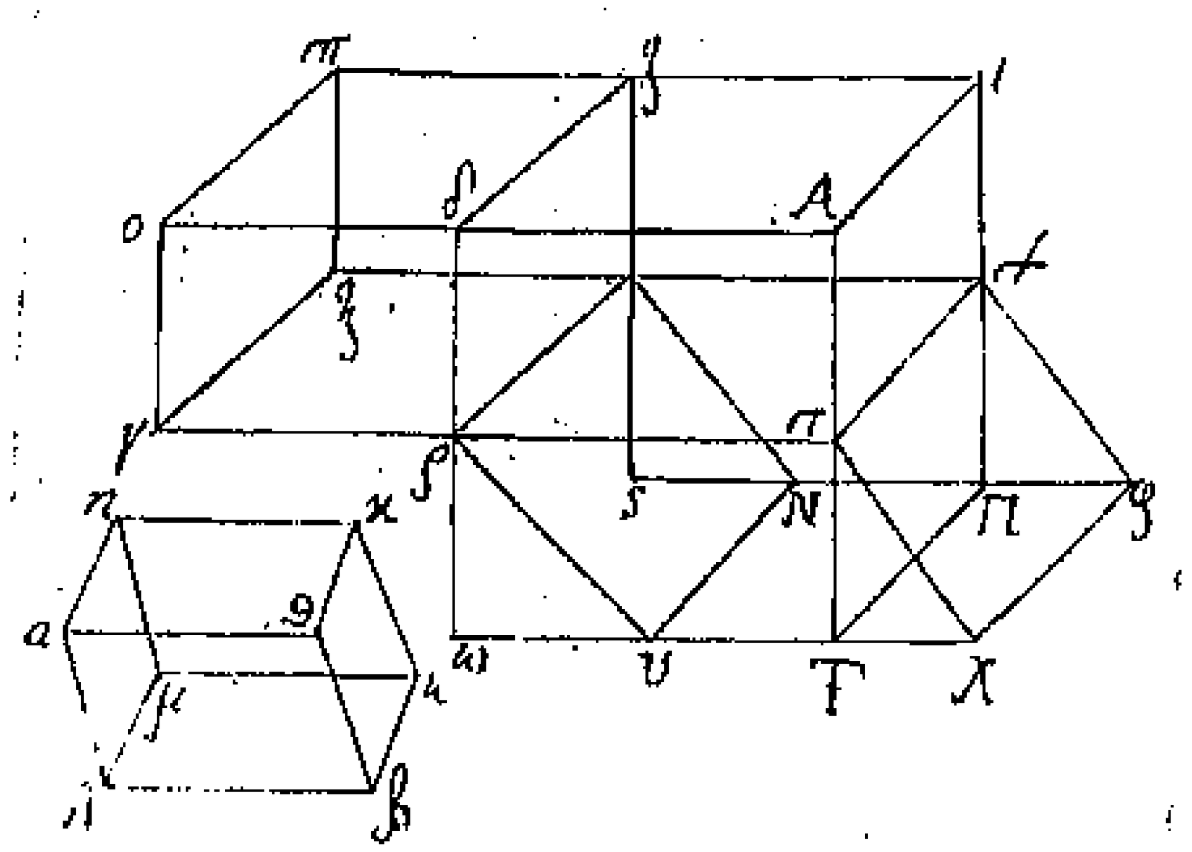
β κ, μὴ ἔστωσαν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν. Λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ γ μ, στερεὸν τῷ γ ν, στερεῷ. Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ αἱ ν κ, δ θ, καὶ ἔτι αἱ η ε, ζ μ, καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὰ ο, ρ, π, ξ, σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α ξ, λ ο, γ π, β ρ, ἴσον δή ἐστι τὸ γ μ, στερεόν, οὗ βάσις μὲν τὸ α γ β λ, παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ζ δ θ μ, τῷ γ ο, στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ α γ β λ, παραλληλόγραμ: ἀπεναντίον δὲ τὸ ζ π ρ ο, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς α γ β λ, καὶ αὐτῶν αἱ ὑφεστῶσαι αἱ α ζ, α ξ, λ μ, λ ο, γ δ, γ π, β θ, β ρ, ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν ζ π, μ ρ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἀλλὰ τὸ γ ο, στερεόν, οὗ βάσις μὲν τὸ α γ β λ, παραλληλόγρ: ἀπεναντίον δὲ τὸ ξ π ρ ο, κατὰ τὴν αὐτήν, ἴσον ἐστὶ τῷ γ ν, στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ α γ β λ, παραλληλόγραμ: ἀπεναντίον δὲ τὸ κ ε η ν, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς α γ β λ, καὶ αὐτῶν αἱ ὑφεστῶσαι, αἱ α η, α ξ, γ ε, γ π, λ ν, λ ο, β κ, β ρ, ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν, τῶν κ π, ν ξ, ὥστε καὶ τὸ γ μ, στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γ ν, στερεῷ. Τὰ ἄρα ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΛΑ': Θεώρημα.

Τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

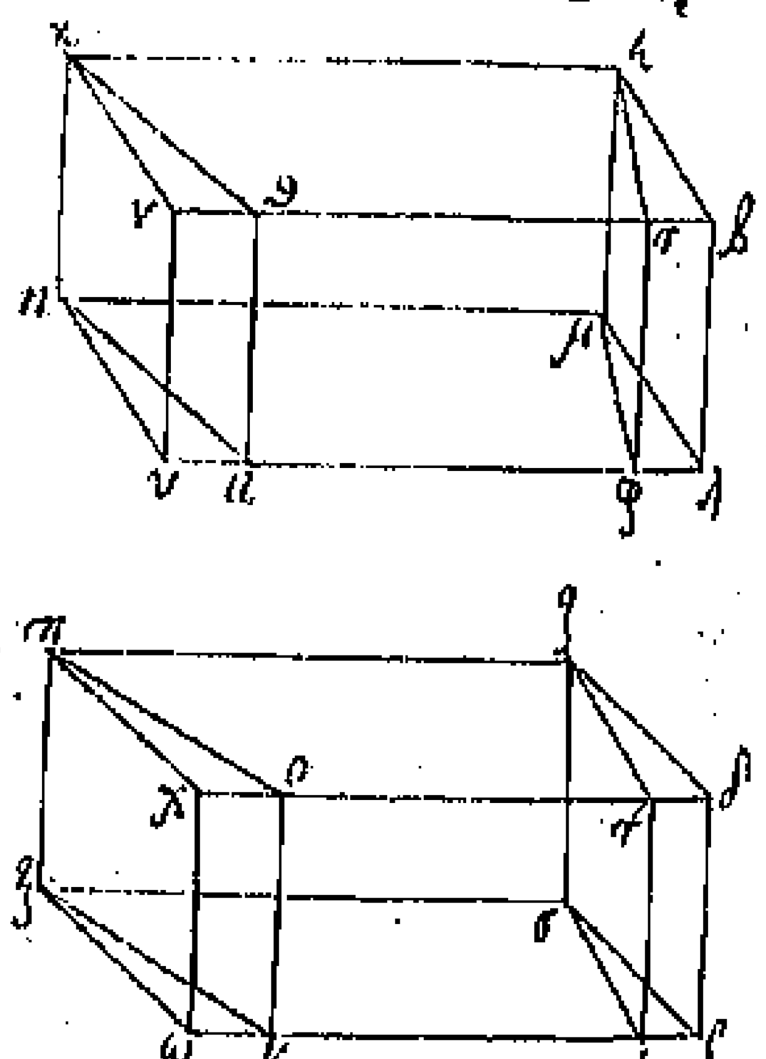
Ἔστω ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν α β, γ δ, στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ α ε, γ ζ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. Λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ α ε, στερεὸν τῷ γ ζ, στερεῷ. Ἔστωσαν δὴ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ θ κ, β ε, α η, λ μ, ο π, δ ζ, γ ξ, ρ σ, πρὸς ὀρθὰς ταῖς α β, γ δ, βάσεσιν, ἡ δὲ ὑπὸ α λ β, τῇ ὑπὸ γ ρ δ, ἀνίσος. καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ γ ρ, εὐθεῖα ἡ ρ τ. καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ρ τ, εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ ρ, τῇ ὑπὸ α λ β, γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ τ ρ υ, καὶ κείσθω τῇ μὲν α λ, ἴση ἡ ρ τ, τῇ δὲ λ β, ἴση ἡ ρ υ, καὶ πρὸς τῷ υ, σημείῳ τῇ ρ τ, παράλληλος ἀνεστάσθω ἡ υ χ, καὶ συμπεπληρώσθω ἥτε ρ χ, βάσις, καὶ τὸ ψ υ, στερεόν, καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ρ τ, ρ υ, δυσὶ ταῖς α λ, λ β, ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον τὸ ρ χ, παραλληλόγραμ: τῷ θ λ, παραλληλογράμμῳ. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν α λ, τῇ ρ τ, ἡ δὲ λ μ, τῇ ρ σ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν, ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ρ ψ, παραλληλόγραμ: τῷ α μ, παραλληλογράμ: διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ λ ε, τῷ σ υ, ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον. τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ α ε, στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμ: τοῦ ψ υ,

Eucl. Lib. 11. Fig. 24.



στερεοῦ ἴσα ἐστὶ, καὶ ὅμοια. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε ἐστὶ καὶ ὅμοια, καὶ ὅλον ἄρα τὸ α ε, στερεὸν παραλληλεπίπ: ὅλῳ τῷ ψ υ, παραλληλεπιπ: ἴσον ἐστι. διήχθωσαν αἱ δ ρ, χ υ, καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ ω, καὶ διὰ τοῦ τ, τῇ δ ω, παράλληλος ἡ τ Τ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἡ Τ τ, καὶ ο δ, καὶ συμβαλλέσθωσαν κατὰ τὸ Λ. καὶ συμπεπληρώσθωσαν τὰ ω ψ, ρ ι, στερεὰ, ἴσον δή ἐστι τὸ ψ ω, στερεὸν, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ρ ψ, παραλληλόγραμμ: ἀπεναντίον δὲ τὸ ω Π, τῷ ψ υ, στερεῷ, οὗ βάσις ἐστὶ τὸ ρ ψ, παραλληλόγραμ: ἀπεναντίον δὲ τὸ υ φ, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ρ ψ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ αὐτῶν αἱ ὑφεστῶσαι αἱ ρ ω, ρ υ, Τ τ, τ χ, σ ς, σ Ν, ψ Π, ψ φ, ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσι εὐθειῶν τῶν ω χ, ς φ, ἀλλὰ τὸ ψ υ, στερεὸν τῷ α ε, ἴσον ἐστι, καὶ τὸ ψ ω, ἄρα στερεὸν τῷ α ε, στερεῷ, ἴσον ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστι τὸ ρ υ χ τ, παραλληλόγραμ: τῷ ω τ, παραλληλογράμ: ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ρ τ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ρ τ, ω χ, ἀλλὰ τὸ ρ υ χ τ, τῷ γ δ, ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ τῷ α β. καὶ τὸ ω τ, ἄρα παραλληλόγραμ: τῷ γ δ, ἐστὶ ἴσον. ἄλλο δὲ τὸ δ τ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γ δ, βάσις πρὸς τὴν δ τ, οὕτως ἡ ω τ, πρὸς τὴν δ τ, καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ γ ι, ἐπιπέδῳ τῷ ρ ζ, τέτμηται, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις. ἔστιν ὡς ἡ γ δ, βάσις πρὸς τὴν δ τ, βάσιν, οὕτως τὸ γ ζ, στερεὸν πρὸς τὸ ρ ι, στερεόν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ω ι, ἐπιπέδῳ τῷ ρ ψ, τέτμηται, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ὡς ἡ ω τ, βάσις πρὸς τὴν δ τ, βάσιν, οὕτω τὸ ω ψ, στερεὸν πρὸς τὸ ρ ι, στερεὸν, ἀλλ' ὡς ἡ γ δ, βάσις πρὸς τὴν δ τ, οὕτως ἡ ω τ, πρὸς τὴν τ δ, καὶ ὡς ἄρα τὸ γ ζ, στερεὸν πρὸς τὸ ρ ι, στερεὸν, οὕτω τὸ ω ψ, στερεὸν πρὸς τὸ ρ ι, στερεὸν, ἑκάτερον ἄρα τῶν γ ζ, ψ ω, στερεῶν πρὸς τὸ ρ ι, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἴσον ἄρα τὸ γ ζ, στερεὸν τῷ ω ψ, στερεῷ, ἀλλὰ τὸ ω ψ, τῷ α ε, ἐδείχθη ἴσον, καὶ τὸ α ε, ἄρα ἴσον ἐστι τῷ γ ζ. Μὴ ἔστωσαν δὲ αἱ ἐφεστηκυῖαι, αἱ α η, θ κ, β ε, λ μ, γ ξ, ο π, δ ζ, ρ σ, πρὸς ὀρθὰς ταῖς α β, γ δ, βάσεσιν. Α'λλ' αὖθις λέγω, ὅτι ἴσον ἐστι τὸ α ε, στερεὸν τῷ γ ζ, στερεῷ. ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν κ, ε, η, μ, π, ζ, ξ, σ, σημείων ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον κάθετοι αἱ κ ν, ε τ, η υ, μ φ, π χ, ζ ψ, ξ ω, σ ι, καὶ συμβαλλέσθωσαν τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ ν, τ, υ, φ, χ, ψ, ω, ι, σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ν τ, υ φ, ν υ, τ φ, χ ψ, χ ω, ω ι, ψ ι. ἴσον δή ἐστι τὸ κ φ, στερεὸν τῷ π ι, στερεῷ, ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν κ μ, π σ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. ὧν αἱ ἐφεστῶσαι πρὸς ὀρθάς εἰσι ταῖς βάσεσιν, ἀλλὰ τὸ μὲν κ φ, τῷ α ε, στερεῷ ἴσον ἐστι, τὸ δὲ π ι, τῷ γ ζ, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. ὧν αἱ ἐ-

Eucl. Lib. 11. Fig. 25.



φεστῶ-

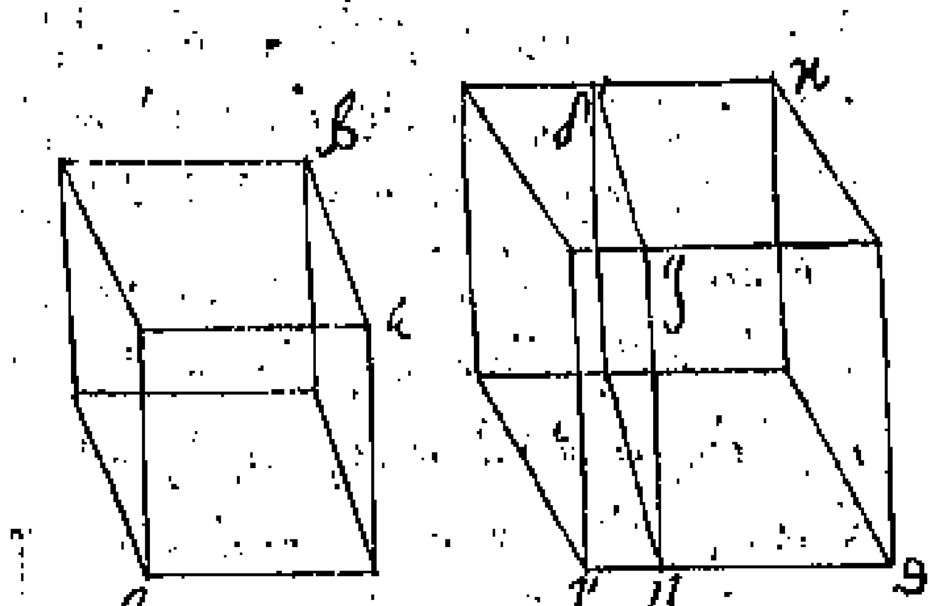
φεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, καὶ τὸ α ε, ἄρα στερεὸν τῷ γ ζ, στερεῷ ἐστιν ἴσον, τὰ ἄρα ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΛΒ: Θεώρημα.

Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν, ὡς αἱ βάσεις.

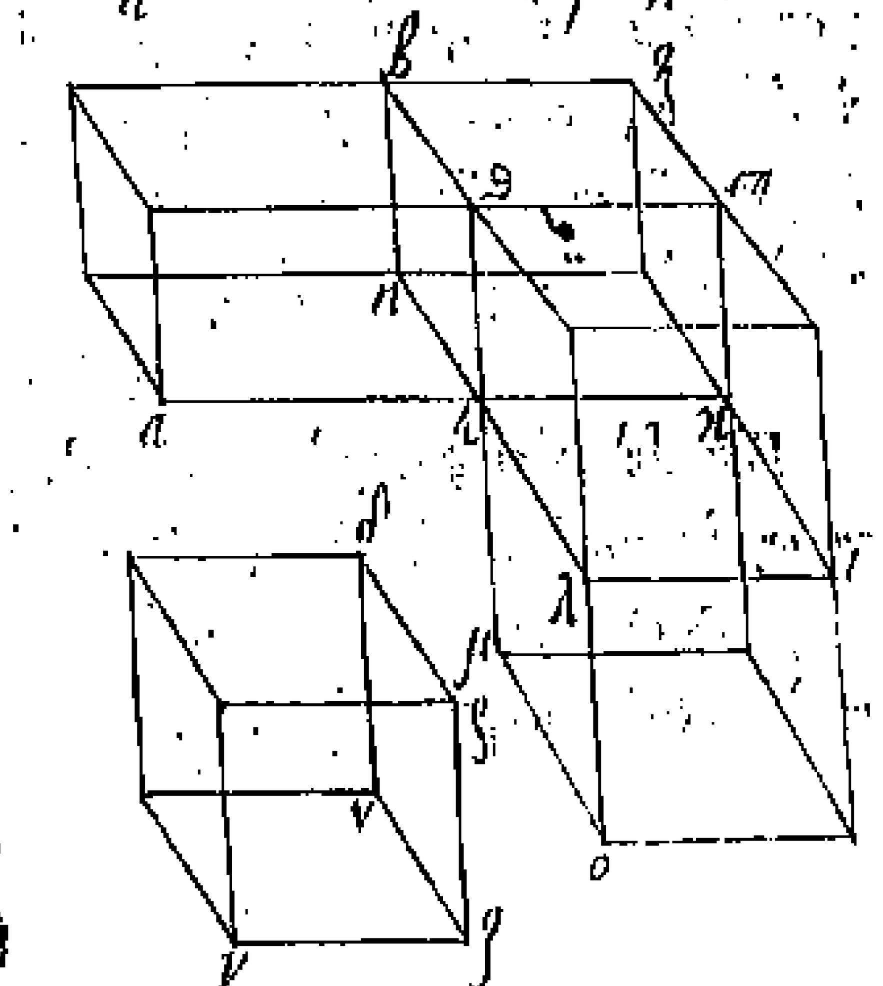
Ε'στωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ α β, γ δ. Λέγω, ὅτι ταῦτα ἔχουσιν ὡς αἱ βάσεις (τουτέστιν, πρὸς ἄλληλα) ὡς ἡ α ε, βάσις πρὸς τὴν γ ζ, βάσιν, οὕτως τὸ α β, στερεὸν, πρὸς τὸ γ δ, στερεόν. Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ζ η, τῷ α ε, ἴσον τὸ ζ θ, παραλληλόγρ: καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς ζ θ, ὕψους τοῦ αὐτοῦ τῷ γ δ, στερεὸν παραλληλεπίπεδον συμπεπληρώσθω τὸ η κ, ἴσον δή ἐστι τὸ α β, στερεὸν τῷ η κ, στερεῷ, ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν α ε, ζ θ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, κατὰ τὴν ἀνωτέρω. καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ γ κ, ἐπιπέδῳ τῷ δ η, τέμνεται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ἄρα κατὰ τὴν κε: τοῦ παρόντος, ὡς ἡ θ ζ, βάσις πρὸς τὴν γ ζ, βάσιν, οὕτω τὸ θ δ, στερεὸν, πρὸς τὸ δ γ, στερεὸν, ἴση δὲ ἡ μὲν ζ θ, βάσις τῇ α ε, βάσει, τῷ δὲ η κ, στερεὸν τῷ α β, στερεῷ. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ α ε, βάσις πρὸς τὴν γ ζ, βάσιν, οὕτω τὸ α β, στερεὸν, πρὸς τὸ γ δ, στερεὸν, τὰ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα. καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 11. Fig. 26.



Πρότασις ΛΓ: Θεώρημα.

Τὰ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.



Ε'στω ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ α β, γ δ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ α ε, τῇ γ ζ. Λέγω, ὅτι τὸ α β, στερεὸν πρὸς τὸ γ δ, στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ ἡ α ε, πρὸς τὴν γ ζ. Ε'κβεβλήσθωσαν γὰρ ἐπ' εὐθείας ταῖς α ε, η ε, θ ε, αἱ ε κ, ε λ, ε μ. καὶ κείσθω τῇ μὲν γ ζ, ἴση ἡ ε κ, τῇ δὲ ζ ν, ἴση ἡ ε λ, καὶ ἔτι τῇ ζ ρ, ἴση ἡ ε μ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ κ λ, παραλληλόγραμμον, καὶ τὸ κ ο, στερεόν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ε κ, ε λ, δυσὶ ταῖς γ ζ, ζ ν, ἴσαι εἰσὶν, ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ κ ε λ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ γ ζ ν, ἐστὶν ἴση, ἐπειδήπερ καὶ ἡ ὑπὸ α ε η, τῇ ὑπὸ γ ζ ν, ἐστὶν ἴση, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν α β, γ δ, στερεῶν, ἴσον ἄρα ἐστὶ

καὶ

καὶ ὅμοιον τὸ κ λ, παραλληλόγραμμον τῷ γ ν, παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν κ μ, παραλληλόγρ: καὶ ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον τῷ γ ρ, παραλληλογρ: καὶ ἔτι τὸ ο ε, τῷ δ ζ, ἓξ ἴα ἄρα παραλληλόγραμμ: τοῦ κ ο, στερεοῦ, ἓξ ἰσὶ παραλληλογράμ: τοῦ γ δ, στερεοῦ ἐστιν ἴσα τε καὶ ὅμοια. ἀλλὰ τὰ μὲν ἓξ ἴα ἓξ ἰσὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια. ὅλον ἄρα τὸ κ ο, στερεὸν ὅλῳ τῷ γ δ, στερεῷ ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον. συμπεπληρώσθω τὸ η κ, παραλληλόγραμ: καὶ ἀπὸ βάσεων μὲν τῶν η κ, κ λ, παραλληλογράμμων, ὕψους δὲ τοῦ αὐτοῦ τῷ α β, στερεὰ συμπεπληρώσθω τὰ ε ξ, λ π. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν α β, γ δ, στερεῶν, ἔστιν ὡς ἡ α ε, πρὸς τὴν γ ζ, οὕτως ἡ ε η, πρὸς τὴν ζ ν, καὶ ἡ ε θ, πρὸς τὴν ζ ρ, ἴση δὲ ἡ μὲν ζ γ, τῇ ε κ, ἡ δὲ ζ ν, τῇ ε λ, ἡ δὲ ζ ρ, τῇ ε μ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ α ε, πρὸς τὴν ε κ, οὕτως ἡ η ε, πρὸς τὴν ε λ, καὶ ἡ θ ε, πρὸς τὴν ε μ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ α ε, πρὸς τὴν ε κ, οὕτω τὸ α η, παραλληλόγρ: πρὸς τὸ η κ, παραλληλόγρ: καὶ τὴν α: τοῦ ς: ὡς δὲ ἡ η ε, πρὸς τὴν ε λ, οὕτω τὸ η κ, πρὸς τὸ κ λ, ὡς δὲ ἡ θ ε, πρὸς τὴν ε μ, οὕτω τὸ π ε, πρὸς τὸ κ μ, καὶ ὡς ἄρα τὸ α η, παραλληλόγρ: πρὸς τὸ η κ, οὕτω τὸ η κ, πρὸς τὸ κ λ, καὶ π ε, πρὸς τὸ κ μ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ α η, πρὸς τὸ η κ, οὕτω τὸ α β, στερεὸν, πρὸς τὸ ε ζ, στερεὸν, ὡς δὲ τὸ η κ, πρὸς τὸ κ λ, οὕτω τὸ ξ ε, στερεὸν πρὸς τὸ π λ, στερεὸν, ὡς δὲ τὸ π ε, πρὸς τὸ κ μ, οὕτω τὸ π λ, στερεὸν πρὸς τὸ κ ο, στερεὸν, καὶ ὡς ἄρα τὸ α β, στερεὸν πρὸς τὸ ε ξ, οὕτω τὸ ε ξ, πρὸς τὸ π λ, καὶ τὸ π λ, πρὸς τὸ κ ο. ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον καὶ τὸ συνεχὲς ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δ': τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ β': καὶ τὸν ι α: ὅρον τοῦ ε: καὶ τὸ α β, ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ κ ο, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ ε ξ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ α β, πρὸς τὸ ε ξ, οὕτω καὶ τὸ α η, παραλληλόγρ: πρὸς τὸ η κ, καὶ ἡ α ε, εὐθεῖα πρὸς τὴν ε κ, ὥστε καὶ τὸ α β, στερεὸν πρὸς τὸ κ ο, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ α ε, πρὸς τὴν ε κ, ἴσον δὲ τὸ μὲν κ ο, στερεὸν τῷ γ δ, στερεῷ, ἡ δὲ ε κ, εὐθεῖα τῇ γ ζ, καὶ τὸ α β, ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ γ δ, στερ: τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος αὐτοῦ πλευρὰ ἡ α ε, πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν γ ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν. ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας στερεὸν παραλληλεπίπεδον, ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ἐπειδήπερ καὶ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὴν δευτέραν.

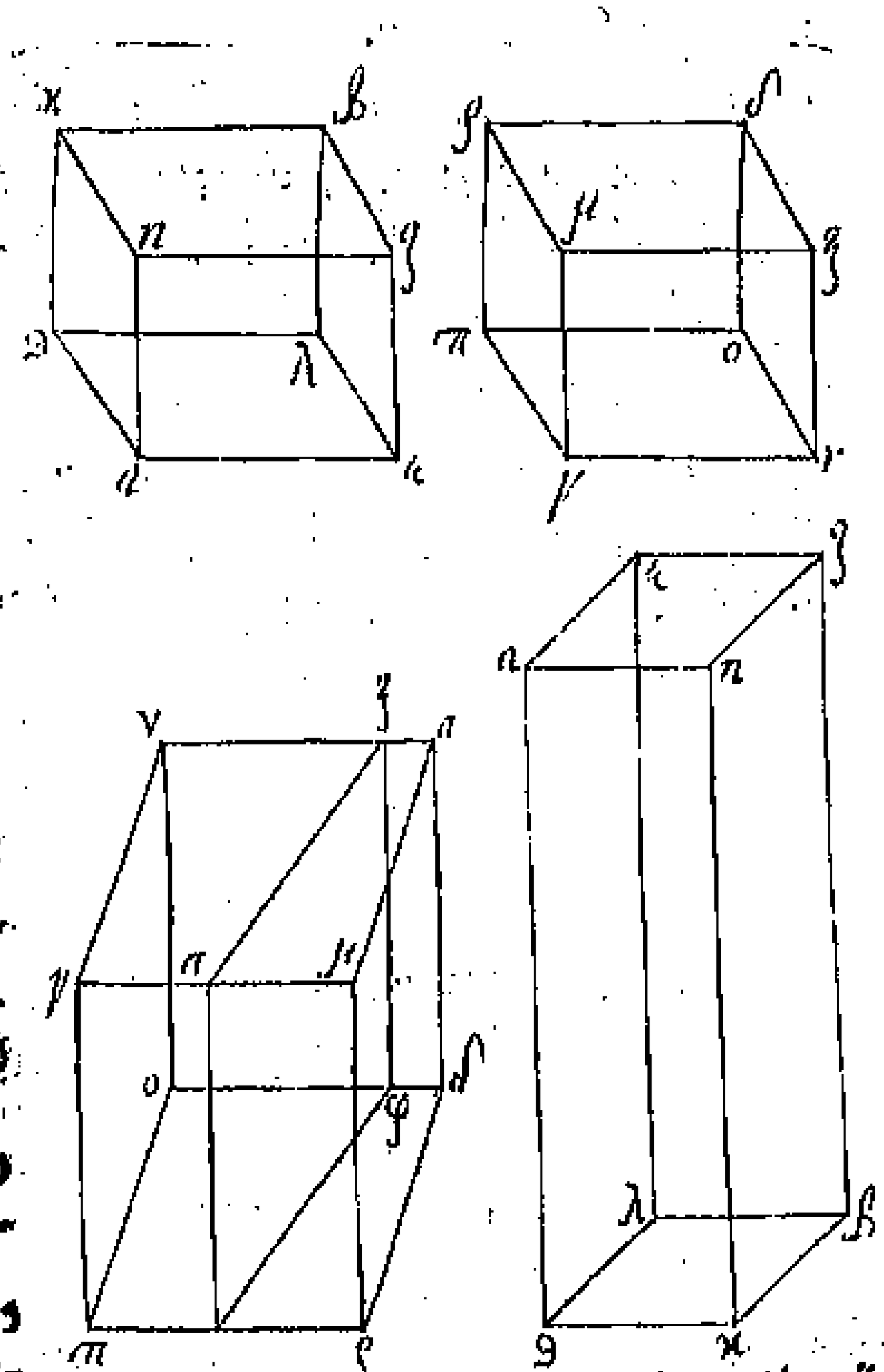
Πρό-

Πρότασις ΛΔ': Θεώρημα.

Τῶν ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Ἔστω ἴσα στερεὰ παραλληλεπίπ: τὰ α β, γ δ. Λέγω, ὅτι τῶν α β, γ δ, στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ε θ, βάσις πρὸς τὴν ν π, βάσιν, οὕτω τὸ τοῦ γ δ, στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ α β, στερεοῦ ὕψος. Ἔστω γὰρ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ α η, ε ζ, λ β, θ κ, γ μ, ν ξ, ο δ, π ρ, πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν. Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ε θ, βάσις πρὸς τὴν ν π, βάσιν, οὕτως ἡ γ μ, πρὸς τὴν α η. εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ε θ, βάσις τῇ ν π, βάσει, ἔστι καὶ τὸ α β, στερ: τῷ γ δ, στερ: ἔσται καὶ ἡ γ μ, τῇ α η, ἴση. εἰ γὰρ τῶν ε θ, ν π, βάσεων ἴσων οὐσῶν, μὴ εἴη τὰ α η, γ μ, ὕψη ἴσα, οὐδ' ἄρα τὸ α β, στερ: τῷ γ δ, στερεὸν ἴσον ἔσται.

Eucl. Lib. 11. Fig. 27.



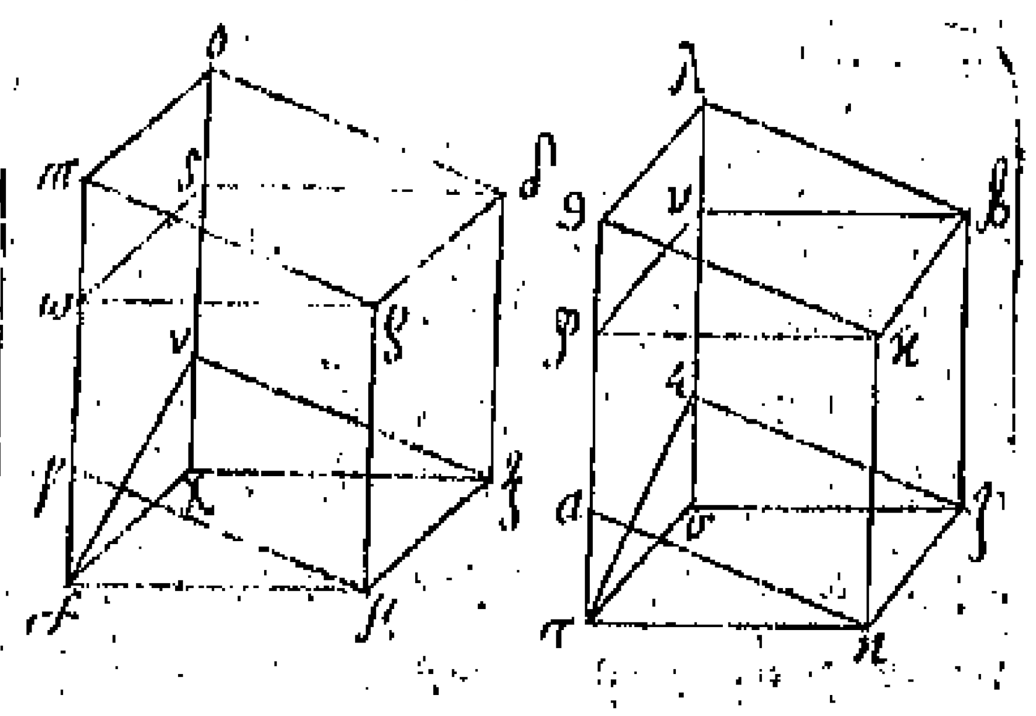
ὑπόκειται δὲ ἴσον, οὐκ ἄρα ἄνισον, τὸ γ μ, ὕψος τῷ α η, ὕψει, ἴσον ἄρα, καὶ ἔσται ὡς ἡ ε θ, βάσις πρὸς τὴν ν π, οὕτως ἡ γ μ, πρὸς τὴν α η, καὶ φανερὸν, ὅτι τῶν α β, γ δ, στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. Μὴ ἔστω δὲ ἴση ἡ ε θ, βάσις τῇ ν π, βάσει, ἀλλὰ μείζων. ἔστι δὲ καὶ τὸ α β, στερεὸν τῷ γ δ, στερεῷ ἴσον, μείζων ἄρα καὶ ἡ γ μ, τῆς α η. εἰ γὰρ μὴ, οὐδ' ἄρα πάλιν τὰ α β, γ δ, στερεὰ, ἴσα ἔσται, ὑπόκειται δὲ ἴσα. κείσθω οὖν τῇ α η, ἴση ἡ γ τ, καὶ συμπεπληρώσθω ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς ν π, ὕψους δὲ τοῦ γ τ, στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ φ γ, καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ α β, στερεὸν τῷ γ δ, στερεῷ, ἄλλο δέ τι τὸ φ γ, τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὡς ἄρα τὸ α β, στερεὸν πρὸς τὸ γ φ, στερεὸν οὕτω τὸ γ δ, στερεὸν πρὸς τὸ αὐτὸ γ φ, στερεὸν, ἀλλ' ὡς μὲν τὸ α β, στερεὸν πρὸς τὸ γ φ, στερεὸν, οὕτως ἡ ε θ, βάσις πρὸς τὴν ν π, βάσιν, ἰσοϋψῆ γάρ, καὶ τὴν λ β: τοῦ παρόντος τὰ α β, γ φ, στερεά, ὡς δὲ τὸ γ δ, στερ: πρὸς τὸ γ φ, στερ: οὕτως ἡ μ π, βάσις πρὸς τὴν π τ, βάσιν, καὶ ἡ μ γ, πρὸς τὴν γ τ, ὡς ἄρα ἡ ε θ, βάσις πρὸς τὴν ν π, βάσιν, οὕτως ἡ μ γ, πρὸς τὴν γ τ, ἴση δὲ ἡ γ τ, τῇ α η, καὶ

ὡς

ὡς ἄρα ἡ ε θ, βάσις πρὸς τὴν ν π, βάσιν, οὕτως ἡ μ γ, πρὸς τὴν α η. τῶν α β, ἄρα γ δ, στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. Πάλιν δὴ τῶν α β, γ δ, στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ ε θ, βάσις πρὸς τὴν ν π, βάσιν, οὕτω τὸ τοῦ γ δ, στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ α β, λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ α β, στερ: τῷ γ δ, στερεῷ. Ἔστωσαν γὰρ πάλιν αἱ ἐφεστηκυῖαι πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσι, καὶ εἰ μὲν ἴση ἐστὶν ἡ ε θ, βάσις τῇ ν π, βάσει, ἔστιν ὡς ἡ ε θ, βάσις πρὸς τὴν ν π, βάσιν, οὕτω τὸ τοῦ γ δ, στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ α β, στερ: ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ τοῦ γ δ, ὕψος τῷ τοῦ α β, στερ: ὕψει. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν, ἴσον ἄρα τὸ α β, στερεὸν τῷ γ δ, στερεῷ. Μὴ ἔστω δὴ ἡ ε θ, βάσις τῇ ν π, ἴση, ἀλλὰ μείζων, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ τοῦ γ δ, στερεοῦ ὕψος τοῦ α β, στερεοῦ ὕψος, τουτέστιν ἡ μ γ, τῆς α η. κείσθω τῇ α η, ἴση πάλιν ἡ γ τ, καὶ συμπεπληρώσθω ὁμοίως τὸ γ φ, στερεόν. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ε θ, βάσις πρὸς τὴν ν π, βάσιν, οὕτως ἡ γ μ, πρὸς τὴν α η, ἴση δὲ ἡ α η, τῇ γ τ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ε θ, βάσις πρὸς τὴν ν π, βάσιν, οὕτως ἡ γ μ, πρὸς τὴν γ τ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ε θ, βάσις πρὸς τὴν ν π, βάσιν, οὕτως τὸ α β, στερεὸν πρὸς τὸ γ φ, στερεὸν, ἰσοϋψῆ γὰρ τὰ α β, γ φ, στερεὰ, ὡς δὲ ἡ μ γ, πρὸς τὴν γ τ, οὕτως ἥ τε μ π, βάσις πρὸς τὴν π τ, βάσιν, καὶ τὸ γ δ, στερεὸν πρὸς τὸ γ φ, καὶ ὡς ἄρα τὸ α β, στερ: πρὸς τὸ γ φ, οὕτω τὸ γ δ, στερεὸν πρὸς τὸ γ φ, ἑκάτερον ἄρα τῶν α β, γ δ, πρὸς τὸ γ φ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἴσον ἄρα τὸ α η, στερ: τῷ γ δ, στερ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ἐφεστηκυῖαι ζ ε, β λ, η α, κ θ, ξ ν, δ ο, μ γ, ρ π, πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν ζ, η, β, κ, ξ, μ, δ, ρ, σημείων, ἐπὶ τὰ τῶν ε θ, ν π, βάσεων, ἐπίπεδα κάθετοι, καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ τὰ σ, τ, υ, φ, χ, ψ, ς, ω, σημεῖα, καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ζ φ, ξ ω, στερεά. Λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἴσων ὄντων τῶν α β, γ δ, στερεῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ε θ, βάσις πρὸς τὴν ν π, βάσιν, οὕτω τὸ τοῦ γ δ, στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ α β, ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ α β, στερεὸν τῷ γ δ, στερεῷ, ἀλλὰ τὸ μὲν α β, τῷ β τ, ἐστὶν ἴσον, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ζ κ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν. τὸ δὲ γ δ, στερεὸν τῷ δ ψ, ἴσον, ἐπί τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ξ ρ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, καὶ τὸ β τ, ἄρα στερεὸν τῷ δ ψ, στερεῷ ἴσον ἐστί. τῶν δ᾽ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων, ὧν τὰ ὕψη πρὸς ὀρθάς ἐστι ταῖς βάσεσιν αὐτῶν,

Eucl. Lib. 11, Fig. 28.



αὐτῶν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζ κ, βάσις πρὸς τὴν ξ ρ, βάσιν, (ἴση δὲ ἡ μὲν ζ κ, βάσις τῇ ε θ, βάσει, ἡ δὲ ξ ρ, βάσις τῇ ν π,) οὕτω τὸ τοῦ δ ψ, στερεοῦ ὕψος, πρὸς τὸ τοῦ β τ, ὕψος, τὰ δ᾽ αὐτὰ ὕψη ἐστὶν τῶν δ ψ, β τ, στερεῶν, καὶ τῶν α β, δ γ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ε θ, βάσις πρὸς τὴν ν π, βάσιν, οὕτω τὸ τοῦ γ δ, στερ: ὕψος πρὸς τὸ τοῦ α β, στερεοῦ. τῶν α β, γ δ, ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. Πάλιν δὴ τῶν α β, γ δ, στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ ε θ, βάσις πρὸς τὴν ν π, βάσιν οὕτω τὸ τοῦ γ δ, στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ α β, στερεοῦ. Λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ α β, στερ: τῷ γ δ, στερεῷ. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ε θ, βάσις πρὸς τὴν ν π, βάσιν, οὕτω τὸ τοῦ γ δ, στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ α β, στερεοῦ, ἴση δὲ ἡ μὲν ε θ, βάσις τῇ ζ κ, βάσει, ἡ δὲ ν π, τῇ ξ ρ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζ κ, βάσις πρὸς τὴν ξ ρ, βάσιν, οὕτω τὸ τοῦ γ δ, στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ α β, στερεοῦ τὰ δ᾽ αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν α β, γ δ, στερεῶν, καὶ τῶν β τ, δ ψ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζ κ, βάσις πρὸς τὴν ξ ρ, βάσιν, οὕτω τὸ τοῦ δ ψ, στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ β τ, στερεοῦ ὕψος, τῶν β τ, δ ψ, ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων τὰ ὕψη πρὸς ὀρθάς εἰσι ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα, ἴσον ἄρα τὸ β τ, στερεὸν τῷ δ ψ, στερεῷ, ἀλλὰ τῷ μὲν β τ, τὸ α β, ἐστὶν ἴσον. ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ζ κ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, τὸ δὲ δ ψ, στερεὸν τῷ γ δ, στερεῷ ἴσον ἐστὶν, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ξ ρ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ οὐκ ἐν ταῖς αὐταῖς εὐθείαις, τὸ α β, ἄρα στερεὸν τῷ γ δ, στερεῷ ἐστιν ἴσον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

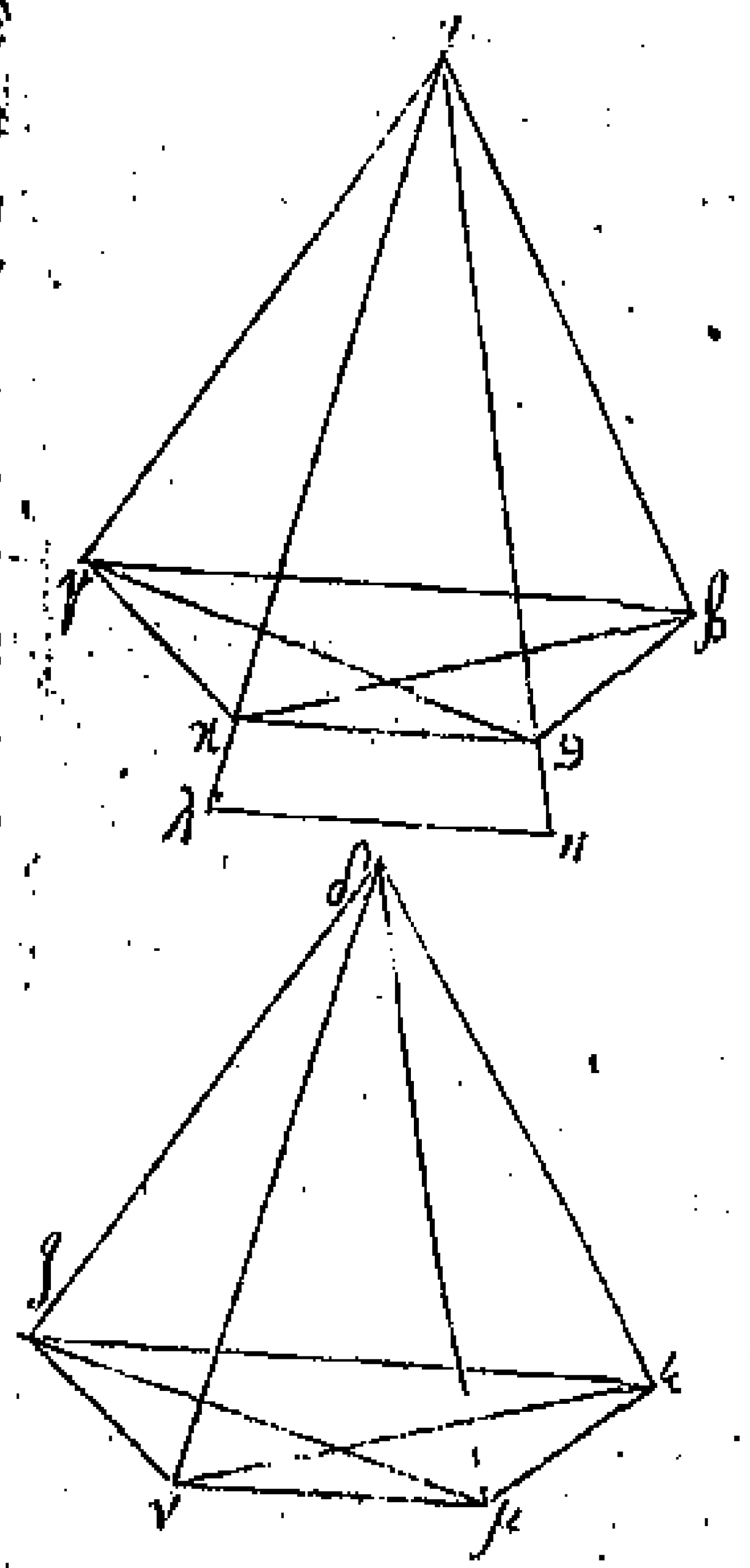
Πρότασις ΛΕ: Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπὶ δὲ τῶν κορυφῶν αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐπισταθῶσιν ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἐπὶ δὲ τῶν μετεώρων ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, καὶ ἀπ᾽ αὐτῶν ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, κάθετοι ἀχθῶσιν, ἀπὸ δὲ τῶν γενομένων σημείων ὑπὸ τῶν καθέτων ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἐπὶ τὰς ἐξ ἀρχῆς γωνίας ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἴσας γωνίας περιέξουσι μετὰ τῶν μετεώρων.

Ἔστωσαν δύο γωνίαι εὐθύγραμμοι ἴσαι αἱ ὑπὸ β α γ, ε δ ζ. ἀπὸ δὲ τῶν α, δ, σημείων μετέωροι εὐθεῖαι ἐφεστάθωσαν αἱ α η, δ μ, ἴσας περιέχουσαι γωνίας μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ὑπὸ μ δ ε, τῇ ὑπὸ η α β, τὴν δὲ ὑπὸ μ δ ζ, τῇ ὑπὸ η α γ, καὶ εἰλήφθωσαν ἐπὶ τῶν α η, δ μ, τυχόντα σημεῖα τὰ η, μ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν η, μ, σημείων, ἐπὶ τὰ διὰ τῶν β α γ, ε δ ζ, ἐπί-

ἐπίπεδα κάθετοι, αἱ κλ, μν. Λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ καλ, γωνία τῇ ὑπὸ μδν, γωνίᾳ. Κείσθω τῇ δμ, ἴση ἡ αθ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ θ, τῇ κλ, παράλληλος, ἡ κθ, ἡ δὲ κλ, καθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν βαγ, ἐπίπεδον, καὶ ἡ θκ, ἄρα καθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν βαγ, ἐπίπεδον. ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν κ, ν, σημείων ἐπὶ τὰς αβ, αγ, δζ, δε, εὐθείας κάθετοι αἱ κβ, κγ, νζ, νε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θγ, γβ, μζ, ζε. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς θα, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν θκ, κα, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς κα, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν κγ, γα, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς θα, ἄρα ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ θκ, κγ, γα, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν θκ, κγ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς θγ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς θα, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν θγ, γα, ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ θγα, γωνία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ δζμ, γωνία ὀρθή ἐστιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αγθ, γωνία τῇ ὑπὸ δζμ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ θαγ, τῇ ὑπὸ μδζ, ἴση, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ μδζ, θγα, τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, τὴν αθ, τῇ δμ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἴση ἄρα ἡ αγ, τῇ δζ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ αβ, τῇ δε, ἴση ἐστίν. ἐπεζεύχθωσαν αἱ θβ, με, καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς αθ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ακ, κθ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ακ, ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν αβ, βκ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αβ, βκ, κθ, ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αθ, ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν βκ, κθ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς βθ. ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ θκβ, γωνία. διὰ τὸ καὶ τὴν θκ, κάθετον εἶναι ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αθ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, βθ, ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αβθ, γωνία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὑπὸ δεμ, γωνία ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βαθ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ εδμ, ὑπόκειται γὰρ, καὶ ἔστιν ἡ αθ, τῇ δμ, ἴση ἄρα καὶ ἡ αβ, τῇ δε. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αγ, τῇ δζ, ἡ δὲ αβ, τῇ δε, δύο δὴ αἱ αγ, αβ, δυσὶ ταῖς ζδ, δε, ἴσαι εἰσιν. ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ γαβ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζδε, ἐστὶν ἴση, βάσις ἄρα ἡ βγ, βάσει τῇ εζ, ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αγβ, γωνία τῇ ὑπὸ δζε, ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ αγκ, ὀρθῇ τῇ ὑπὸ δζν, ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ βγκ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ εζν, ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ ὑπὸ γβκ, γωνία τῇ ὑπὸ ζεν, ἴση. δύο δὲ τρίγωνά ἐστι τὰ γβκ, ζεν, τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας

Eucl. Lib. XI. Fig. 29.



ἔχον-

ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν βγ, τῇ εζ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν, ἴση ἄρα ἡ γκ, τῇ ζν, ἔστι δὲ καὶ ἡ αγ, τῇ δζ, ἴση, δύο δὴ αἱ αγ, γκ, δυσὶ ταῖς δζ, ζν, ἴσαι εἰσὶ, καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ακ, βάσει τῇ δν, ἴση ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αθ, τῇ δμ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αθ, τῷ ἀπὸ τῆς δμ, ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αθ, ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ακ, κθ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ακθ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς δμ, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν δν, νμ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ δνμ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ακ, κθ, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν δν, νμ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ακ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δν. λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς κθ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς νμ, ἴση ἄρα ἡ θκ, τῇ νμ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ θα, ακ, δυσὶ ταῖς μδ, δν, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ θκ, βάσει τῇ νμ, ἐδείχθη ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ θακ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ μδν, ἐστὶν ἴση. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι εὐθύγραμμοι ἴσαι, ἐπισταθῶσι δὲ ἐπ' αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἴσαι, ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, αἱ ἀπ' αὐτῶν κάθετοι, ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

Πρότασις Λϛ΄: Θεώρημα.

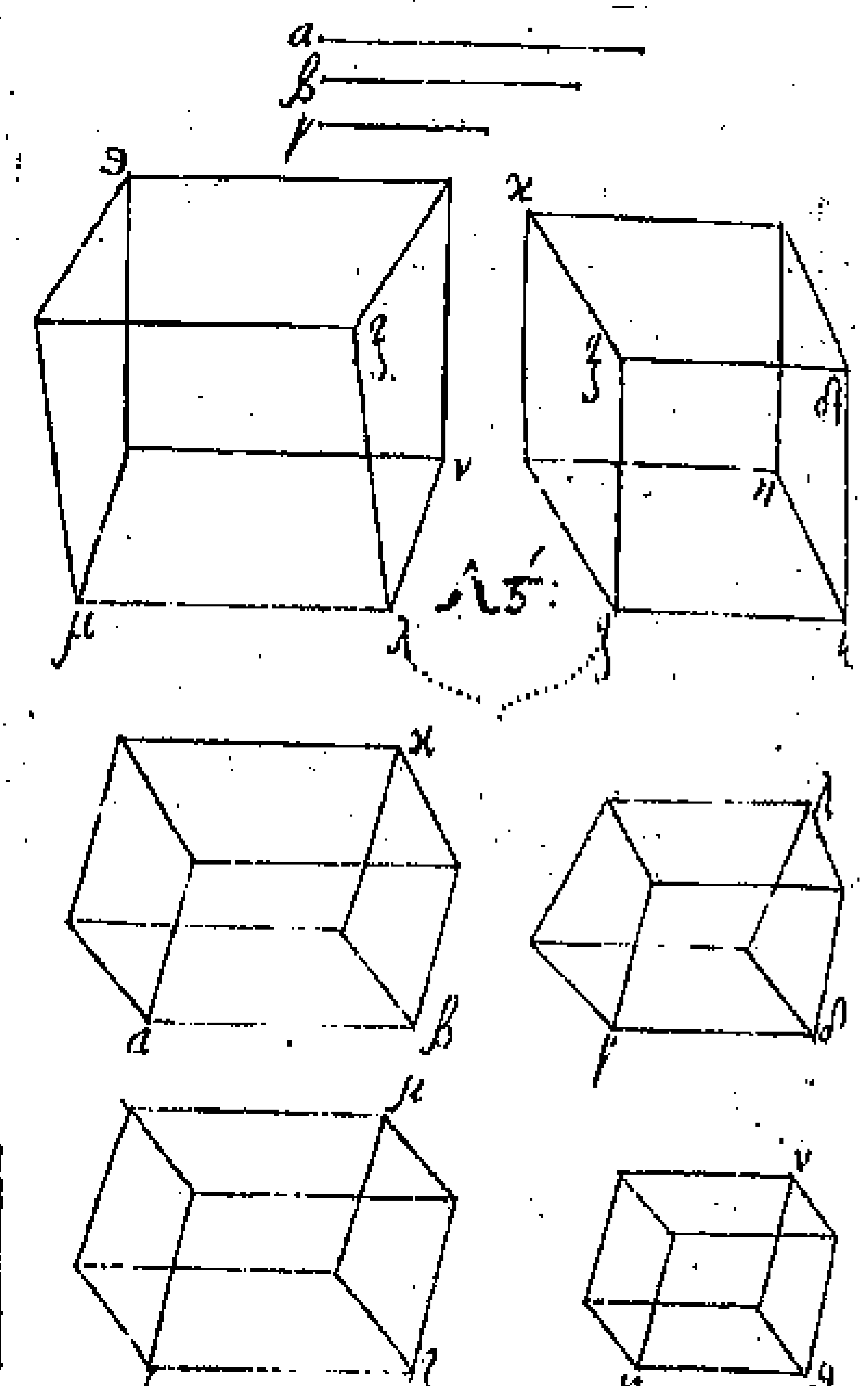
Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ἐκ τῶν τριῶν εὐθειῶν στερεὸν παραλληλεπίπεδον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον, αἱ α, β, γ, ὡς ἡ α, πρὸς τὴν β, οὕτως ἡ β, πρὸς τὴν γ. Λέγω, ὅτι τὸ ἐκ τῶν αβγ, στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β, στερεῷ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ. Ἐκκείσθω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ ε, περιεχομένη ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, τῶν ὑπὸ δεη, ηεζ, ζεδ, καὶ κείσθω τῇ μὲν β, ἴση ἑκάστη τῶν δε, ηε, εζ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ εκ, στερεὸν παραλληλεπ: τῇ δὲ α, κείσθω ἴση ἡ λμ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ λμ, εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῷ λ, τῇ πρὸς τῷ ε, στερεᾷ γωνίᾳ ἴση, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν νλξ, ξλμ, μλν, καὶ κείσθω τῇ μὲν β, ἴση ἡ λξ, τῇ δὲ γ, ἴση ἡ λν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ α, πρὸς τὴν β, οὕτως ἡ β, πρὸς τὴν γ, ἴση δὲ ἡ μὲν α, τῇ λμ, ἡ δὲ β, ἑκάστη τῶν λξ, εζ, εη, εδ, ἡ δὲ γ, τῇ λν, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ λμ, πρὸς τὴν εζ, οὕτως ἡ δε, πρὸς τὴν λν, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ μλν, δεζ, αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν. ἴσον ἄρα τὸ μν, παραλληλόγραμ: τῷ δζ, παραλληλογράμ: καὶ ἐπεὶ δύο γωνίαι ἐπίπεδοι εὐθύγραμμοι, εἰσὶν ἴσαι, αἱ ὑπὸ δεζ, νλμ, καὶ ἐπ' αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐφεστήκασιν αἱ λξ, εη, ἴσαι τε ἀλλήλαις, καὶ ἴσας γωνίας

περιέ-

περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. αἱ ἄρα ἀπὸ τῶν η ξ, σημείων κάθετοι ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ διὰ τῶν ν λ μ, δ ε ζ, ἐπίπεδα, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ὥστε τὰ λ θ, ε κ, στερεὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἐστί. καὶ ἐπὶ τὴν λ α: ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν, ἴσον ἄρα τὸ θ λ, στερεὸν τῷ ε κ, στερεῷ, καὶ ἔστι τὸ μὲν θ λ, τὸ ἐκ τῶν α, β, γ, στερεόν, τὸ δὲ ε κ, τὸ ἀπὸ τῆς β, στερεόν, τὸ ἄρα ἐκ τῶν α, β, γ, στερεόν, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β, στερεῷ, ἰσοπλεύρῳ μέν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ. Ἐὰν ἄρα τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν παραλληλεπ: ἴσον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 11. Fig. 30.



Πρότασις ΛΖ': Θεώρημα.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν παραλληλεπίπεδα, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ἔσται, καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ α β, γ δ, ε ζ, η θ, ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ, οὕτως ἡ ε ζ, πρὸς τὴν η θ. καὶ ἀναγεγράφθωσαν ἀπὸ τῶν α β, γ δ, ε ζ, η θ, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα παραλληλεπίπεδα τὰ κ α, λ γ, μ ε, ν η. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ κ α, πρὸς τὸ λ γ, οὕτως τὸ μ ε, πρὸς τὸ ν η. Ἐπεὶ γάρ ἐστι τὸ κ α, στερεὸν παραλληλεπίπ: τῷ λ γ, ὅμοιον, τὸ κ α, ἄρα πρὸς τὸ λ γ, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μ ε, πρὸς τὸ ν η, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ε ζ, πρὸς τὴν η θ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ, οὕτως ἡ ε ζ, πρὸς τὴν η θ, ὡς ἄρα τὸ α κ, πρὸς τὸ λ γ, οὕτω τὸ μ ε, πρὸς τὸ ν η. ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ α κ, στερεὸν πρὸς τὸ λ γ, στερεόν, οὕτω τὸ μ ε, στερεὸν πρὸς τὸ ν η, στερεόν. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ α β, εὐθεῖα πρὸς τὴν γ δ, οὕτως ἡ ε ζ, πρὸς τὴν η θ. ἐπεὶ γὰρ πάλιν τὸ α κ, πρὸς τὸ λ γ, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ, ἔχει δὲ καὶ τὸ μ ε, πρὸς τὸ ν η, τριπλασίονα λόγον, ἤπερ ἡ ε ζ, πρὸς τὴν η θ, καὶ ἔστιν ὡς τὸ α κ, πρὸς τὸ λ γ, οὕτω τὸ μ ε, πρὸς τὸ ν η, καὶ ὡς ἄρα ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ, οὕτως ἡ ε ζ, πρὸς τὴν η θ. Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι, καὶ τὰ ἑξῆς.

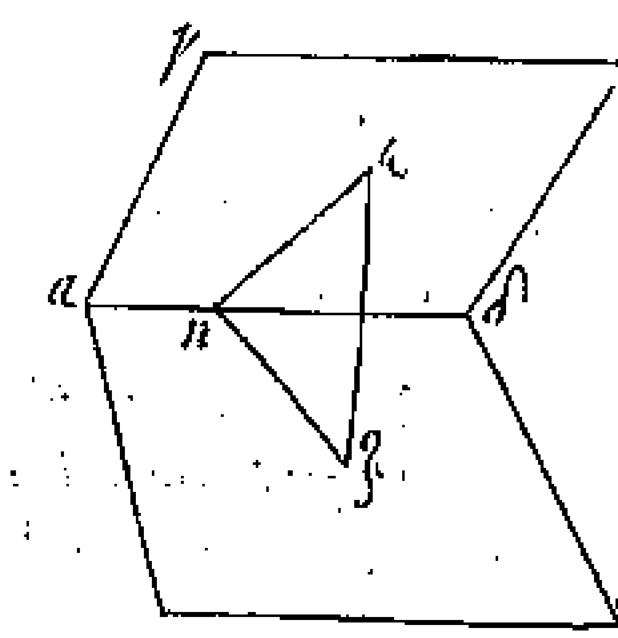
Πρό-

Πρότασις ΛΗ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν ᾖ, καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς κοινῆς πεσεῖται τομῆς τῶν ἐπιπέδων ἡ ἀγομένη κάθετος.

Ἐπίπεδον γὰρ τὸ γ δ, ἐπιπέδῳ τῷ α β, πρὸς ὀρθὰς ἔστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ α δ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τοῦ γ δ, ἐπιπέδου τυχὸν σημεῖον τὸ ε. Λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ ε, ἐπὶ τὸ α β, ἐπίπεδον ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τῆς δ α, πεσεῖται. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐκτός, ὡς ἡ ε ζ, καὶ συμβαλλέτω τῷ α β, ἐπιπέδῳ, κατὰ τὸ ζ, σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ, ἐπὶ τὴν δ α, τῷ α β, ἐπιπέδῳ κάθετος ἤχθω ἡ ζ η, ἥτις καὶ τῷ γ δ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ε η. Ἐπεὶ οὖν ἡ ζ η, τῷ γ δ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ε η, οὖσα ἐν τῷ γ δ, ἐπιπέδῳ, ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ζ η ε, γωνία. ἀλλὰ δὴ καὶ ἡ ε ζ, τῷ α β, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἡ ἄρα ὑπὸ ε ζ η, ὀρθή ἐστι. τριγώνου δὴ τοῦ ε ζ η, αἱ δύο γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὅπερ ἄτοπον κατὰ τὴν ιζ': τοῦ α: οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ ε, ἐπὶ τὸ α β, ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τῆς δ α, ἐπὶ τὴν δ α, ἄρα πεσεῖται. Ἐὰν ἄρα ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν ᾖ, καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς πεσεῖται τῶν ἐπιπέδων, ἡ ἀγομένη κάθετος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 11. Fig. 31.

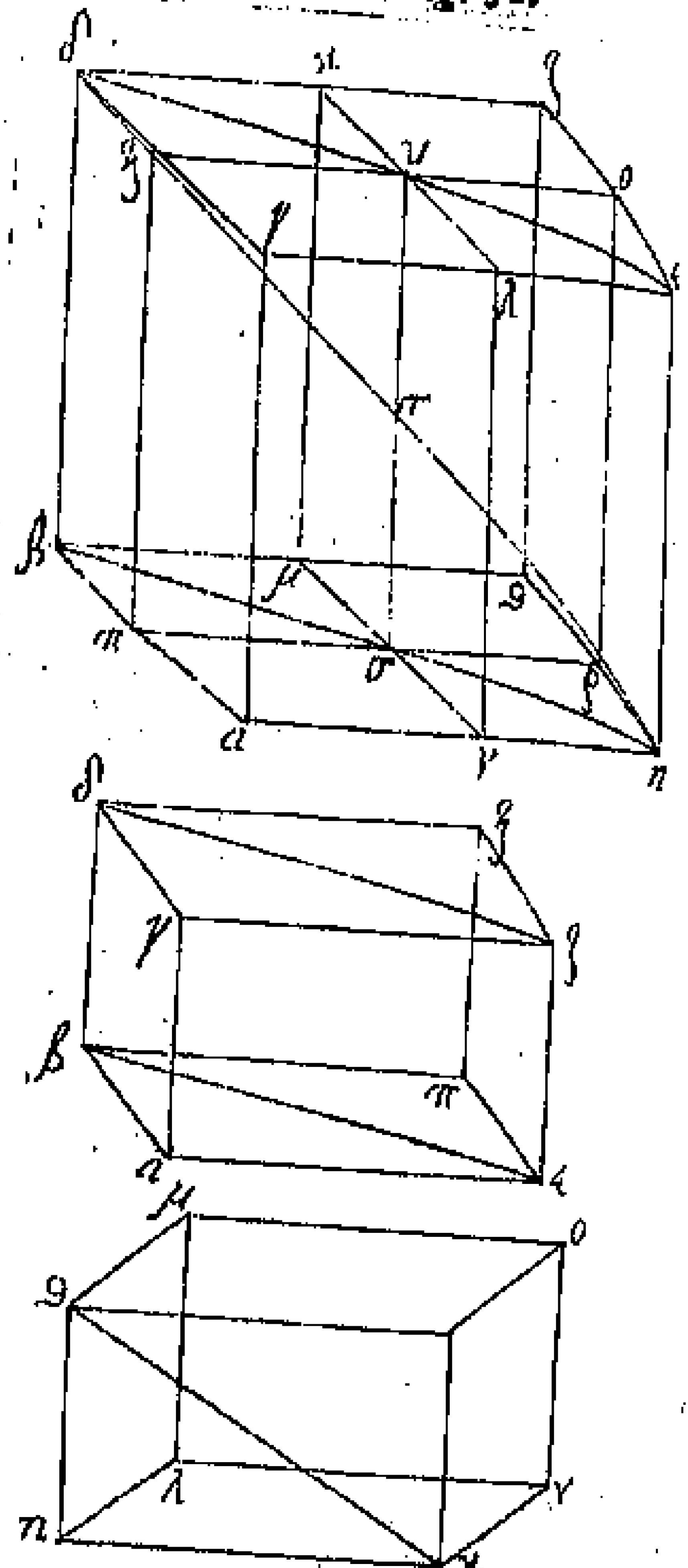


Πρότασις ΛΘ': Θεώρημα.

Ἐὰν στερεοῦ παραλληλεπιπέδου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσι, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ, ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων, καὶ ἡ τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου διάμετρος δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας.

Στερεοῦ γὰρ παραλληλεπιπέδου τοῦ α ζ, τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τῶν γ ζ, α θ, αἱ πλευραὶ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ κ, λ, μ, ν, ξ, π, ο, ρ, σημεῖα. διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθωσαν τὰ κ ν, ξ ρ, κοινὴ δὲ τῶν ἐπιπέδων τομὴ ἔστω ἡ υ σ, τοῦ δὲ α β, στερεοῦ παραλληλεπιπ: διαγώνιος ἡ δ η. Λέγω, ὅτι αἱ υ σ, δ η, δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας, τουτέστιν, ὅτι ἡ μὲν υ τ, τῇ τ σ, ἴση ἐστίν, ἡ δὲ ἡ δὲ δτ, τῇ τη. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ δυ, υε, βσ, ση, καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ δξ, τῇ οε, αἱ ἐναλλὰξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ δξυ, υοε, ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν δξ, τῇ εο, ἡ δὲ ξυ, τῇ υο, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι. βάσις ἄρα ἡ δυ, βάσει τῇ υε, ἴση ἐστί. τὸ δὲ δξυ, τρίγωνον τῷ υοε, τριγώνῳ ἴσον ἐστι. καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ξυδ, γωνία τῇ ὑπὸ ουε. διὰ τοῦτο εὐθεῖά ἐστιν ἡ δυε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ βση, εὐθεῖά ἐστι, καὶ ἴση ἡ βσ, τῇ ση, καὶ ἐπεὶ ἡ γα, τῇ δβ, ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. ἀλλ' ἡ γα, καὶ τῇ εη, ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ δε, ηβ, παράλληλος ἄρα ἡ δε, τῇ ηβ, καὶ εἴληπται ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ δ, υ, η, σ, καὶ ἐπεζεύχθησαν αἱ δη, υσ, καὶ κατὰ τὴν ζ': τοῦ παρόντος, ἐν ἑνὶ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ αἱ δη, υσ, καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ δε, τῇ βη, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ εδτ, γωνία τῇ ὑπὸ βητ, ἐναλλὰξ γάρ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δτυ, τῇ ὑπὸ ητσ, ἴση, κατὰ κορυφὴν γάρ, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ δτυ, ητσ, τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, τὴν δυ, τῇ ησ, ἡμίσειαι γάρ εἰσι τῶν δε, ηβ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρ: ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξει. ἴση ἄρα ἡ μὲν δτ, τῇ τη, ἡ δὲ υτ, τῇ στ. Ἐὰν ἄρα στερεοῦ παραλληλεπ: καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 11. Fig. 32.



Πρότασις Μ': Θεώρημα.

Ἐὰν ᾖ δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἐστὶ τὰ πρίσματα.

Ἔστω πρίσματα ἰσοϋψῆ τὰ αβγδεζ, ηθκλμν, καὶ τὸ μὲν ἐχέτω βάσιν τὸ αζ, παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ, τὸ ηθκ, τρίγωνον. διπλάσιον ἔστω τὸ αζ, παραλλ: τοῦ ηθκ, τριγώνου. Λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ αβγδεζ, πρίσμα τῷ ηθκλμν, πρίσματι. Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ αξ, ηο, στερεά. καὶ ἐπεὶ διπλάσιόν ἐστι τὸ αζ, παραλληλόγρ: τοῦ ηθκ, τριγώνου, ἔστι δὲ καὶ τὸ θκ, παραλληλόγρ: διπλάσιον τοῦ ηθκ, τριγ: ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ αζ, παραλληλόγραμ: τῷ θκ, παραλληλογρ: τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ κατὰ τὴν λα: ἴσα ἀλλήλοις εἰσί. ἴσον ἄρα τὸ αξ, στερεὸν τῷ ηο, στερεῷ, καὶ ἔστι τοῦ αξ, στερεοῦ ἥμισυ τὸ αβγδεζ, πρίσμα, τοῦ δὲ ηο, στερεοῦ ἥμισυ τὸ ηθκλμν, πρίσμα, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγδεζ, πρίσμα τῷ ηθκλμν, πρίσματι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τοῦ Ἑνδεκάτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

ΕʼΡΜΗΝΕΙʼΑ ΤΩʼΝ ΠΡΟΤΑʼΣΕΩΝ ΤΟΥ͂ ΔΩΔΕΚΑʼΤΟΥ ΒΙΒΛΙʼΟΥ

ΤΟΥ͂ ΚΑΙʼ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ͂

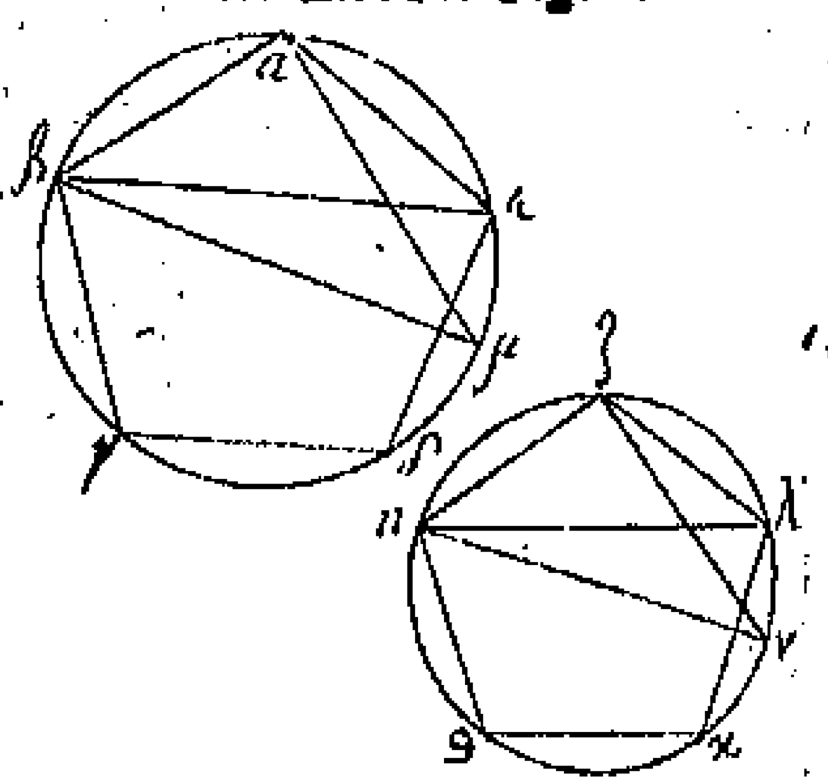
ΤΩ͂Ν ΤΟΥ͂ ΕΥʼΚΛΕΙʼΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙʼΩΝ.

Πρότασις Α′: Θεώρημα.

Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

Ἔστωσαν κύκλοι οἱ α β γ δ ε, ζ η θ κ λ, καὶ ἐν αὐτοῖς ὅμοια πολύγωνα ἔστω τὰ α β γ δ ε, ζ η θ κ λ, διάμετροι δὲ τῶν κύκλων ἔστωσαν αἱ β μ, η ν. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς β μ, τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς η ν, τετράγωνον, οὕτω τὸ α β γ δ ε, πολύγωνον πρὸς τὸ ζ η θ κ λ, πολύγων: Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ β ε, α μ, η λ, ζ ν, καὶ ἐπεὶ κατὰ τὸν α′: τοῦ ϛ′: ὅρον, ὅμοιόν ἐστι τὸ α β γ δ ε, πολύγ: τῷ ζ η θ κ λ, πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ β α ε, γωνία τῇ ὑπὸ η ζ λ, καὶ κατὰ τὴν ϛ′: τοῦ αὐτοῦ, ἔστιν ὡς ἡ β α, πρὸς τὴν α ε, οὕτως ἡ ζ η, πρὸς τὴν λ ζ, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ β α ε, η ζ λ, μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, τὴν ὑπὸ β α ε, τῇ ὑπὸ η ζ λ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ α β ε, τρίγων: τῷ ζ η λ, τριγ: ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ α ε β, γωνία τῇ ὑπὸ ζ λ η, ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ α ε β, τῇ ὑπὸ α μ β, ἴση ἐστὶ κατὰ τὴν κα′: τοῦ γ′: (ἐπὶ τῆς αὐτῆς γὰρ περιφερείας βεβήκασιν), ἡ δὲ ὑπὸ ζ λ η, τῇ ὑπὸ ζ ν η, καὶ ἡ ὑπὸ α μ β, ἄρα τῇ ὑπὸ ζ ν η, ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ β α μ, ὀρθῇ τῇ ὑπὸ η ζ ν, κατὰ τὴν λα′: τοῦ αὐτοῦ, ἴση, καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἐστιν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα τὸ α μ β, τρίγων: τῷ ζ η ν, τριγ: καὶ κατὰ τὴν δ′: τοῦ ϛ′: ἀνάλογον, ἄρα ὡς ἡ β μ, πρὸς τὴν η ν, οὕτως ἡ β α, πρὸς τὴν η ζ, ἀλλὰ τοῦ μὲν τῆς β μ, πρὸς τὴν η ν, λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς β μ, τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς η ν, τετράγων: κατὰ τὴν ιθ′: τοῦ ϛ′: τοῦ δὲ ἀπὸ τῆς β α, πρὸς τὴν η ζ, διπλασίων ἐστὶν, ὁ τοῦ α β γ δ ε, πολυγ: πρὸς τὸ ζ η θ κ λ, πολύγων: κατὰ τὴν κ′: τοῦ

Eucl. Lib. 12. Fig. 1.



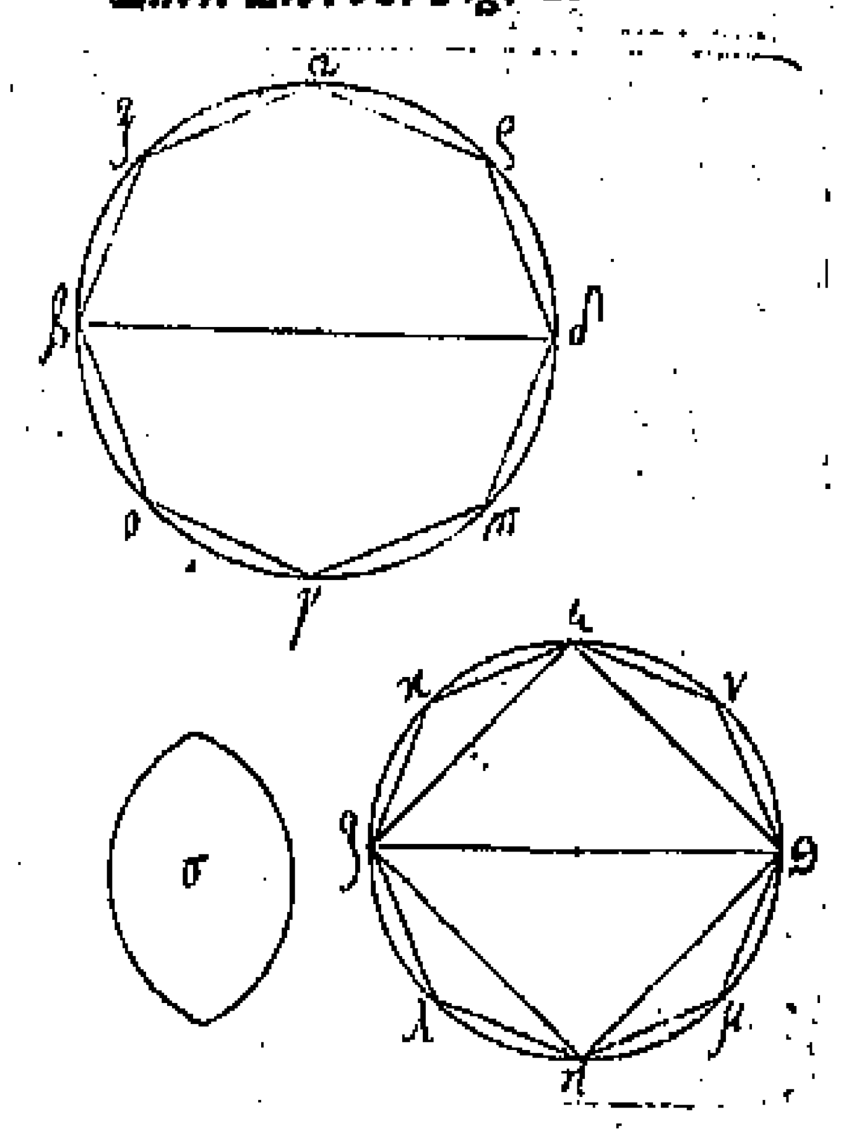
τοῦ αὐτοῦ, καὶ κατὰ τὴν ια′: τοῦ ε′: ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς β μ, τετράγων: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς η ν, οὕτω τὸ α β γ δ ε, πολύγ: πρὸς τὸ ζ η θ κ λ, πολύγωνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Β′: Θεώρημα.

Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

Ἔστωσαν κύκλοι οἱ α β γ δ, ε ζ η θ, διάμετροι δὲ αὐτῶν ἔστωσαν αἱ β δ, ζ θ. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς β δ, τετράγ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζ θ, οὕτως ὁ α β γ δ, κύκλος πρὸς τὸν ε ζ η θ, κύκλον. εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς β δ, τετρ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζ θ, οὕτως ὁ α β γ δ, κύκλος πρὸς τὸν ε ζ η θ, κύκλον, ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ τῆς β δ, τετράγ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζ θ, οὕτως ὁ α β γ δ, κύκλ: ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ε ζ η θ, κύκλου χωρίον, ἢ πρὸς μεῖζον. Ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ σ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ε ζ η θ, κύκλον τετράγωνον τὸ ε ζ η θ, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον τετράγ: ἢ μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ε ζ η θ, κύκλου. ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν ε ζ η θ, σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου διαγάγωμεν, τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου ἥμισύ ἐστι τὸ ε ζ η θ, τετράγ: τοῦ δὲ περιγραφέντος τετραγώνου ἐλάσσων ἐστὶ ὁ κύκλος, ὥστε τὸ ε ζ η θ, ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ ε ζ η θ, κύκλου. Τετμήσθωσαν δίχα αἱ ε ζ, ζ η, η θ, θ ε, περιφέρειαι κατὰ τὰ κ, λ, μ, ν, σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ε κ, κ ζ, ζ λ, λ η, η μ, μ θ, θ ν, ν ε, καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ε κ ζ, ζ η λ, η μ θ, καὶ θ ν ε, τριγώνων μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. Ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν κ, λ, μ, ν, σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, καὶ κατὰ τὴν μα′: τοῦ α′: ἀναπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν ε ζ, ζ η, η θ, θ ε, εὐθειῶν παραλληλόγραμμα, ἕκαστον τῶν ε κ ζ, ζ λ η, η μ θ, θ ν ε, τριγώνων ἥμισυ ἔσται τοῦ καθ' ἑαυτὸ παραλληλογράμμου· ἀλλὰ τὸ καθ' αὑτὸ τμῆμα, ἔλαττόν ἐστι τοῦ παραλληλογράμμου. ὥστε ἕκαστον τῶν ε κ ζ, ζ λ η, η μ θ, θ ν ε, τριγών: μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ καθ' αὑτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνῦντες εὐθείας, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα τμήματα τοῦ κύκλου, ἅπερ ἔσται ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ ε ζ η θ, κύκλος τοῦ σ, χωρίου. ἐδείχθη γὰρ ἐν τῷ α′: θεωρήματι τοῦ δεκάτου, ὅτι δύο ἀνίσων μεγεθῶν ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος μεῖζον ἀφαιρεθῇ, ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον, ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔ-

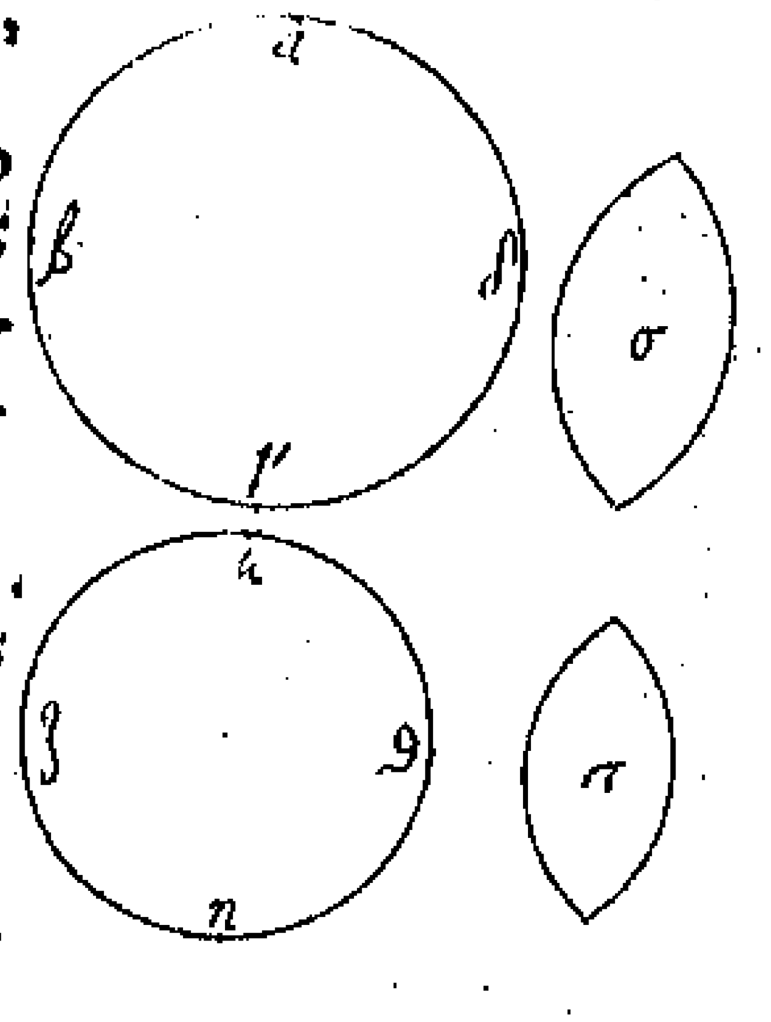
Eucl. Lib. 12. Fig. 2.



λασσον

λασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους. λελείφθω οὖν, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν εκ, κζ, ζλ, λη, ημ, μθ, θν, νε, τμήματα τοῦ εζηθ, κύκλου, ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ εζηθ, κύκλος τοῦ σ, χωρίου, λοιπὸν ἄρα τὸ εκζλημθν, πολύγων: μεῖζόν ἐστι τοῦ σ, χωρίου. Ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν αβγδ, κύκλον τῷ εκζλημθν, πολυγώνῳ, ὅμοιον πολύγωνον τὸ αξβογπδρ, καὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τετράγων: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, τετράγωνον, οὕτω τὸ αξβογπδρ, πολύγ: πρὸς τὸ εκζλημθν, πολυγ: καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τετράγ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, οὕτως ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸ σ, χωρίον. καὶ ὡς ἄρα ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸ σ, χωρίον, οὕτω τὸ αξβογπδρ, πολύγ: πρὸς τὸ εκζλημθν, πολύγ: καὶ ἐναλλὰξ ἄρα κατὰ τὴν ιϛ': τοῦ ε': ὡς ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον, οὕτω τὸ σ, χωρίον, πρὸς τὸ εκζλημθν, πολυγ: μείζων δὲ ὁ αβγδ, κύκλος τοῦ ἐν αὐτῷ πολυγ: μεῖζον ἄρα καὶ τὸ σ, χωρίον τοῦ εκζλημθν, πολυγ: ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τετρ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, τετρ: οὕτως ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ εζηθ, κύκλου χωρίον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, οὕτως ὁ εζηθ, κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αβγδ, κύκλου χωρίον. Λέγω ὅτι οὐδ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, οὕτως ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ εζηθ, κύκλου χωρίον. εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω πρὸς τὸ σ, ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶ, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, τετρ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, οὕτω τὸ σ, χωρίον πρὸς τὸν αβγδ, κύκλον. ἀλλ' ὡς τὸ σ, χωρίον πρὸς τὸν αβγδ, κύκλον, οὕτως ὁ εζηθ, κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αβγδ, κύκλου χωρίον. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, τετράγ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, οὕτως ὁ εζηθ, κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αβγδ, κύκλου χωρίον, ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον, οὐκ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τετρ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, οὕτως ὁ αβγδ, κύκλ: πρὸς μεῖζόν τι τοῦ εζηθ, κύκλου χωρίον. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδ' ὡς πρὸς ἔλασσόν τι. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τετρ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, οὕτως ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν εζηθ, κύκλον. Οἱ ἄρα κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 12. Fig. 3.



ΛΗΜΜΑ.

Λέγω δὴ, ὅτι τοῦ σ, χωρίου μείζονος ὄντος τοῦ εζηθ, κύκλου, ἔστιν ὡς τὸ σ, χωρίον πρὸς τὸν αβγδ, κύκλον, οὕτως ὁ εζηθ, κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ αβγδ, κύκλου χωρίον. γεγονέτω γὰρ ὡς τὸ σ, χωρίον πρὸς τὸν αβγδ, κύκλ: οὕτως ὁ εζηθ, κύκλος πρὸς τὸ τ, χωρίον. Λέγω ὅτι ἔλασσόν ἐστι τὸ τ, χω-

χω-

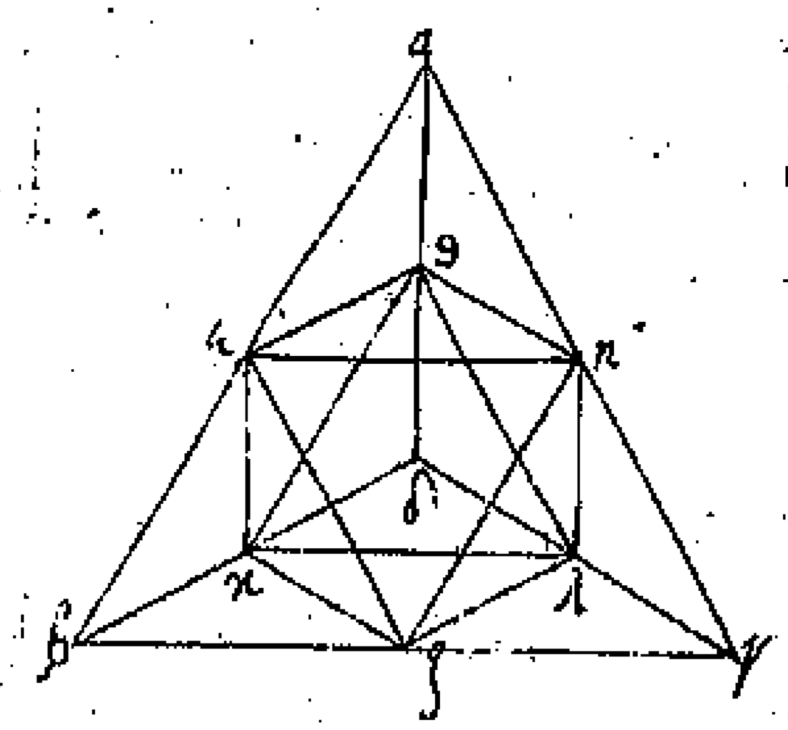
ρίον τοῦ αβγδ, κύκλου, ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ σ, χωρίον πρὸς τὸν αβγδ, κύκλον, οὕτως ὁ εζηθ, κύκλ: πρὸς τὸ τ, χωρίον, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα, κατὰ τὴν ιϛ': τοῦ ε': ὡς τὸ σ, χωρίον πρὸς τὸν εζηθ, κύκλον. οὕτως ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸ τ, χωρίον, μεῖζον δὲ τὸ σ, τοῦ εζηθ, κύκλου, μείζων ἄρα καὶ ὁ αβγδ, κύκλος τοῦ τ, χωρίου. ὥστε ὡς τὸ σ, χωρίον πρὸς τὸν αβγδ, κύκλον, οὕτως ὁ εζηθ, κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αβγδ, κύκλου χωρίον.

Πρότασις Γ': Θεώρημα.

Πᾶσα πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας, καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.

Ἔστω πυραμὶς μὲν, ἧς βάσις μὲν τὸ αβγ, τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον. Λέγω, ὅτι ἡ αβγδ, πυραμὶς διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας, καὶ τὰ ἑξῆς. Τετμήσθωσαν γὰρ αἱ αβ, βγ, γα, αδ, δβ, δγ, δίχα κατὰ τὰ ε, ζ, η, θ, κ, λ, σημεῖα· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εθ, εη, ηθ, θκ, κλ, λθ, εκ, κζ, ζη, ζλ, λη, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αε, τῇ εβ, ἡ δὲ αθ, τῇ θδ, κατὰ τὴν β': ἄρα τοῦ ϛ': παράλληλός ἐστιν ἡ εθ, τῇ βδ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ θκ, τῇ αβ, παράλληλός ἐστιν, παραλληλόγραμμον ἄρα τὸ θεβκ, καὶ κατὰ τὴν λδ': ἄρα τοῦ α': ἴση ἐστὶν ἡ θκ, τῇ εβ, ἀλλ' ἡ εβ, τῇ αε, ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ αε, ἄρα τῇ θκ, ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ αθ, τῇ θδ, ἴση. δύο δὴ αἱ αε, αθ, δυσὶ ταῖς κθ, θδ, ἴσαι εἰσιν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ κατὰ τὴν κθ': τοῦ α': καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αεθ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ θκδ, ἴση, καὶ βάσις ἄρα ἡ εθ, βάσει τῇ κδ, ἴση. ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον τὸ αεθ, τρίγ: τῷ θκδ, τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ αθη, τρίγ: τῷ θλδ, τριγ: ἴσον τε ἐστὶ καὶ ὅμοιον. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων περὶ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων, τουτέστιν αἱ εθ, θη, περὶ τὰς κδ, δλ, εἰσὶν, οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, ἴσας γωνίας περιέχουσιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ εθη, γωνία τῇ ὑπὸ κδλ, γωνίᾳ· καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ εθ, θη, δυσὶ ταῖς κδ, δλ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ εθη, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ κδλ, ἴση ἐστὶ, κατὰ τὴν ι': ἄρα τοῦ ια': τῶν ἐπιπέδων, καὶ βάσις τοῦ εθη, τριγ: ἡ εη, βάσει τοῦ κδλ, τριγ: τῇ κλ, ἴση, καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον ὅλῳ τῷ τριγώνῳ ἴσον τε καὶ ὅμοιον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ αεη, τρίγ: τῷ θκλ, τριγ: ἴσον τε καὶ ὅμοιόν ἐστιν. ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ αεη, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ θ, σημεῖον, ἴση καὶ ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ θκλ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, καὶ κατὰ τὸ πόρισμα τῆς δ': τοῦ ϛ': ἐπεὶ τρίγωνα τοῦ αδβ,

Eucl. Lib. 12. Fig. 4.



αδβ,

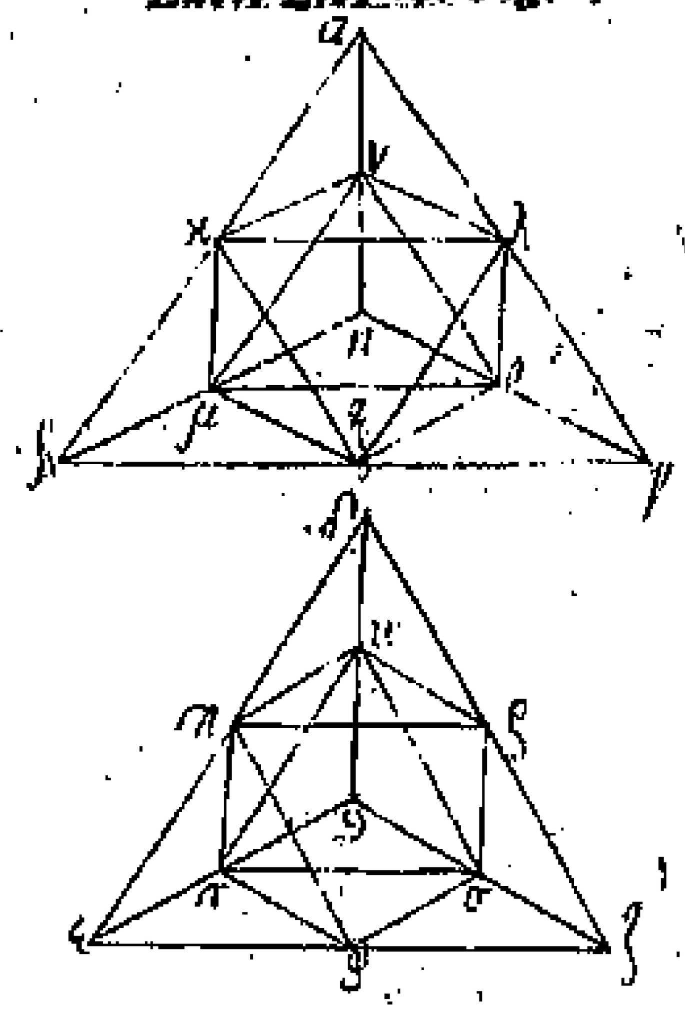
αδβ, παρὰ μίαν τῶν αὐτοῦ πλευρῶν τὴν αβ, ἦκται ἡ θκ, ἰσογώνιόν ἐστι τῷ αδβ, τριγ: τῷ δθκ, τριγ: καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. ὅμοιον ἄρα τὸ αδβ, τρίγ: τῷ δθκ, τριγ: διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν δβγ, τρίγ: τῷ δκλ, τριγ: ὅμοιόν ἐστι. τὸ δὲ αδγ, τῷ δθλ, τριγ: καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ αβ, αγ, παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς κθ, θλ, εἰσὶν, κατὰ τὴν ιέ: τοῦ ιά: τῶν στερ: ἴσας γωνίας περιέχουσιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ βαγ, τῇ ὑπὸ κθλ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, οὕτως ἡ κθ, πρὸς τὴν θλ, ὅμοιον ἄρα τὸ αβγ, τρίγων: τῷ θκλ, τριγ: καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν ἐστι τὸ αβγ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν ἐστι τὸ θκλ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, ἀλλ' αὕτη ἐδείχθη ὁμοία πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν ἐστι τὸ αεη, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ θ, σημεῖον. ὥστε καὶ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν ἐστι τὸ αβγ, κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν ἐστι τὸ αεη, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ θ, σημεῖον. ἑκατέρα ἄρα τῶν αεηθ, θκλδ, πυραμίδων ὁμοία ἐστὶ τῇ ὅλῃ αβγδ, πυραμίδι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βζ, τῇ ζγ, διπλάσιόν ἐστι κατὰ τὴν μα: τοῦ α: τὸ εβζη, παραλληλόγραμμον τοῦ ηζγ, τριγ: καὶ κατὰ τὴν μ: τοῦ παρελθόντος, ἄρα ἴσον ἐστι τὸ περιεχόμενον πρίσμα ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν βκζ, εθη, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων, τῶν εβζη, εβκθ, ηθκζ, τῷ περιεχομένῳ πρίσματι ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ηζγ, θκλ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν κζγλ, λγηθ, θκζη. καὶ φανερὸν, ὅτι ἑκάτερον τῶν πρισμάτων, οὗ τε βάσις τὸ εβηζ, παραλληλόγραμ: ἀπεναντίον δὲ ἡ θκ, εὐθεῖα, καὶ οὗ βάσις τὸ ηζγ, τρίγ: ἀπεναντίον δὲ τὸ κλθ, τρίγωνον, μεῖζόν ἐστιν ἑκατέρας τῶν πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ αεη, θκλ, τριγ: κορυφαὶ δὲ τὰ θ, δ, σημεῖα. ἐπειδήπερ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὰς εζ, εκ, εὐθείας, τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις τὸ εβζη, παραλληλόγραμ: ἀπεναντίον δὲ ἡ θκ, εὐθεῖα, μεῖζόν ἐστι τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν τὸ εζβ, τρίγων: κορυφὴ δὲ τὸ κ, σημεῖον. ἀλλ' ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ εβζ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ κ, σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ αεη, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ θ, σημεῖον, ὑπὸ γὰρ ἴσων, καὶ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται. ὥστε καὶ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ εβζη, παραλληλόγραμ: ἀπεναντίον δὲ ἡ θκ, εὐθεῖα, μεῖζόν ἐστι πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν τὸ αεη, τρίγων: κορυφὴ δὲ τὸ θ, σημ: ἴσον δὲ τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ εβζη, παραλληλόγρ: ἀπεναντίον δὲ ἡ θκ, τῷ πρίσματι, οὗ βάσις μὲν τὸ ηζγ, τρίγ: ἀπεναντίον δὲ τὸ θκλ, τρίγ: ἡ δὲ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ αεη, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ θ, σημ: ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ θκλ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημ: τὰ ἄρα εἰρημένα δύο πρίσματα, μείζονά ἐστι τῶν εἰρημένων δύο πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ αεη, θκλ, τρίγ: κορυφαὶ δὲ τὰ θ, δ, σημ: ἡ ἄρα ὅλη πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ αβγ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημ: διῄρηται εἰς δύο πυραμίδας, ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις, καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρό-

Πρότασις Δʹ. Θεώρημα.

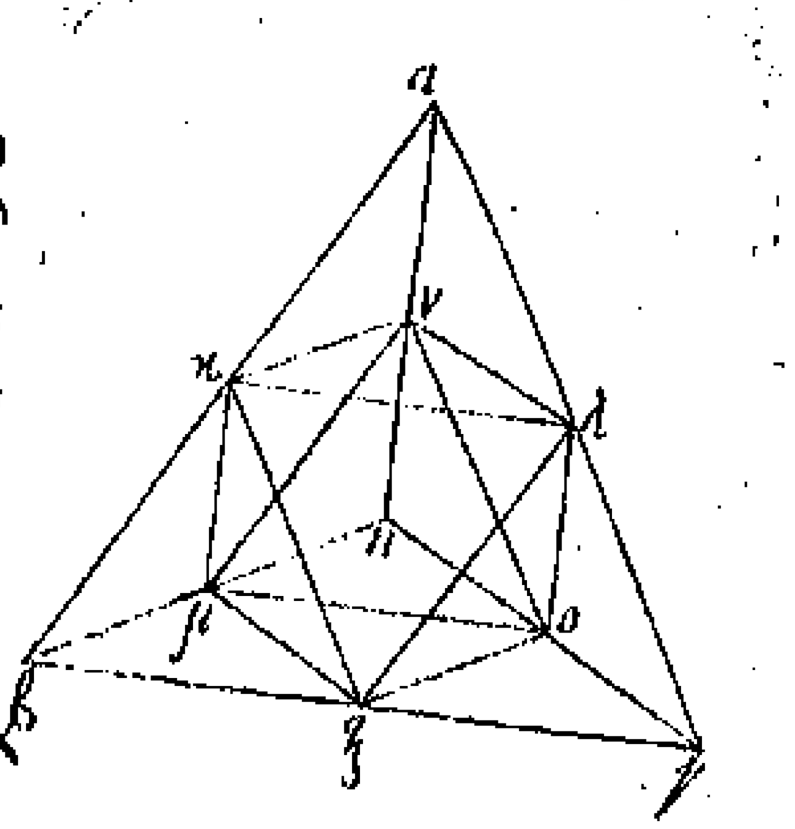
Ἐὰν ὦσι δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, διαιρεθῇ δὲ ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τῶν γενομένων πυραμίδων ἑκατέρα τὸν αὐτὸν τρόπον μένοιτο διῃρημένη, καὶ τοῦτο ἀεὶ γένηται, ἔστιν ὡς ἡ τῆς μιᾶς πυραμίδος βάσις πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας πυραμίδος βάσιν, οὕτω καὶ τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι πρίσματα πάντα, πρὸς τὰ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

Ἔστωσαν δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τριγώνους βάσεις ἔχουσαι τὰς αβγ, δεζ, κορυφὰς δὲ τὰ η, θ, σημεῖα, καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ τὰ ἑξῆς, καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, οὕτω τὰ ἐν τῇ αβγη, πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ δεζθ, πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν βξ, τῇ ξγ, ἡ δὲ αλ, τῇ λγ, παράλληλος ἄρα ἡ ξλ, τῇ αβ, κατὰ τὴν βʹ: τοῦ ϛʹ: καὶ ὅμοιον τὸ αβγ, τρίγωνον τῷ λξγ, τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ κατὰ τὸ πόρισμα τῆς δʹ: τοῦ αὐτοῦ, καὶ τὸ δεζ, τρίγωνον, ὅμοιόν ἐστι τῷ ρφζ, τριγώνῳ, καὶ ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ μὲν βγ, τῆς γξ, ἡ δὲ εζ, τῆς ζφ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν γξ, οὕτως ἡ εζ, πρὸς τὴν ζφ, κατὰ τὴν ιβʹ: τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῶν βγ, γξ, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ αβγ, λξγ, ἀπὸ δὲ τῶν



εζ, ζφ, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ δεζ, ρφζ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ αβγ, τρίγωνον πρὸς τὸ λξγ, τρίγωνον, οὕτω τὸ δεζ, πρὸς ρφζ, τρίγ: καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ αβγ, πρὸς τὸ δεζ, οὕτω τὸ λξγ, πρὸς τὸ ρφζ, τρίγ: ἀλλ' ὡς τὸ λξγ, τρίγ: πρὸς τὸ ρφζ, οὕτω τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν ἐστι τὸ λξγ, τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ομν, ὡς ἐφεξῆς δειχθήσεται, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ρφζ, τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ στυ, καὶ ὡς ἄρα τὸ αβγ, τρίγωνον πρὸς τὸ δεζ, τρίγ: οὕτω τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ λξγ, τρίγων: ἀπεναντίον δὲ τὸ ομν, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ρφζ, τρίγ: ἀπεναντίον δὲ τὸ στυ. καὶ ἐπεὶ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, τὰ ἐν τῇ αβγη, πυραμίδι δύο πρίσματα, ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, ἀλλὰ μὴν καὶ τὰ ἐν τῇ δεζθ, πυραμίδι πρίσματα, ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶν, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ κλξβ, παραλληλόγρ: ἀπεναντίον δὲ ἡ μο, εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ λξγ, τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ δὲ τὸ ο μ ν, οὕτω τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ε π ρ φ, παραλληλόγρ: ἀπεναντίον δὲ ἡ σ τ, εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ρ φ ζ, τρίγ: ἀπεναντίον δὲ τὸ σ τ υ, συντεθέντα ἄρα, ὡς τὰ κ β ξ λ μ ο, λ ξ γ μ ν ο, πρίσματα πρὸς τὸ λ ξ γ μ ν ο, πρίσμα, οὕτω τὰ π ε φ ρ σ τ, ρ φ ζ σ τ υ, πρίσματα πρὸς τὸ ρ φ ζ σ τ υ, πρίσμα, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὰ κ β ξ λ μ ο, λ ξ γ ο μ ν, πρὸς τὰ π ε φ ρ σ τ, ρ φ ζ σ τ υ, πρίσματα, οὕτω τὸ λ ξ γ μ ν ο, πρίσμα πρὸς τὸ ρ φ ζ σ τ υ, πρίσμα. ὡς δὲ τὸ λ ξ γ μ ν ο, πρίσμα, πρὸς τὸ ρ φ ζ σ τ υ, πρίσμα, οὕτως ἐδείχθη ἡ λ ξ γ, βάσις πρὸς τὴν ρ φ ζ, βάσιν, καὶ ἡ α β γ, βάσις πρὸς τὴν δ ε ζ, βάσιν, καὶ ὡς ἄρα τὸ α θ γ, τρίγ: πρὸς τὸ δ ε ζ, τρίγ: οὕτω τὰ ἐν τῇ α β γ η, πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ δ ε ζ θ, πυραμίδι δύο πρίσματα. ὁμοίως δὴ κἂν τὰς γενομένας πυραμίδας διέλωμεν, τὸν αὐτὸν τρόπον, οἷον τὰς ο μ ν η, σ τ υ θ, ἔσται ὡς ἡ ο μ ν, βάσις πρὸς τὴν σ τ υ, βάσιν, οὕτω τὰ ἐν τῇ ο μ ν η, πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ σ τ υ θ, πυραμίδι δύο πρίσματα. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ο μ ν, βάσις πρὸς τὴν σ τ υ, βάσιν, οὕτως ἡ α β γ, βάσις πρὸς τὴν δ ε ζ, βάσιν, καὶ ὡς ἄρα ἡ α β γ, βάσις πρὸς τὴν δ ε ζ, βάσιν, οὕτω καὶ τὰ ἐν τῇ α β γ η, πυραμίδι δύο πρίσματα, πρὸς τὰ ἐν τῇ δ ε ζ θ, πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ τὰ ἐν τῇ ο μ ν η, δύο πρίσμα, πρὸς τὰ ἐν τῇ σ τ υ θ, πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ τέσσαρα πρὸς τέσσαρα. Τὰ αὐτὰ δὲ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν γενομένων πρισμάτων ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν α κ λ θ, κ δ π ρ υ, πυραμίδων, καὶ πάντων ἁπλῶς τῶν ἰσοπληθῶν.

Eucl. Lib. 12. Fig. 6.



ΛΗ̃ΜΜΑ.

Ὅτι δέ ἐστιν ὡς τὸ λ ξ γ, τρίγ: πρὸς τὸ ρ φ ζ, τρίγ: οὕτω τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ λ ξ γ, τρίγ: ἀπεναντίον δὲ τὸ ο μ ν, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ρ φ ζ, τρίγ: ἀπεναντίον δὲ τὸ σ τ υ, οὕτω δεικτέον. Ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς νενοήσθω ἀπὸ τῶν η, θ, κάθετοι ἐπὶ τὰ α β γ, δ ε ζ, τρίγ: ἐπίπεδα, ἴσαι δηλ: (διὰ τὸ ἰσοϋψεῖς ὑποκεῖσθαι τὰς πυραμίδας) τυγχάνουσαι. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἥτε η γ, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ η, κάθετος ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν α β γ, ο μ ν, τέμνονται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους, κατὰ τὴν ιζ′: τοῦ παρελθόντος, τμηθήσονται, καὶ τέτμηται ἡ η γ, δίχα ὑπὸ τοῦ ο μ ν, ἐπιπέδου κατὰ τὸ ο, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ η, ἄρα κάθετος ἐπὶ τὸ α β γ, ἐπίπεδον, δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ο μ ν, ἐπιπέδου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ θ, κάθετος ἐπὶ τὸ δ ε ζ, ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ σ τ υ, ἐπιπέδου, καί εἰσιν ἴσαι αἱ ἀπὸ τῶν η, θ, κάθετοι ἐπὶ τὰ α β γ, δ ε ζ, ἐπίπεδα, ἴσαι ἄρα καὶ αἱ ἀπὸ τῶν ο μ ν, σ τ υ, τριγ: ἐπὶ τὰ α β γ, δ ε ζ, κάθετοι, ἰσοϋψῆ ἄρα ἐστὶ τὰ πρίσματα, ὧν βάσεις μέν εἰσι τὰ λ ξ γ, ρ φ ζ, τριγων: ἀπεναντίον δὲ τὰ ο μ ν, σ τ υ, ὥστε καὶ τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ἀπὸ τῶν εἰρημέ-

νων

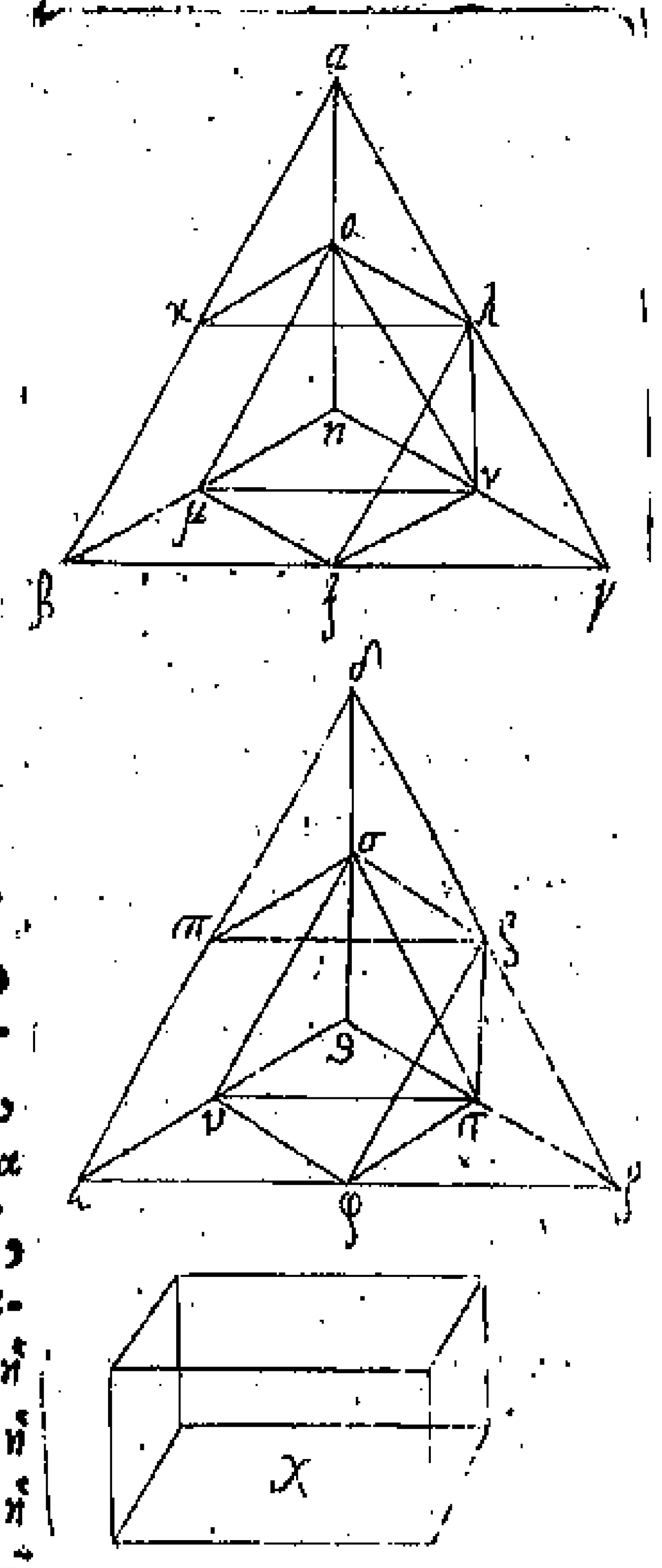
νων πρισμάτων ἀναγραφόμενα, ἰσοϋψῆ τυγχάνοντα, κατὰ τὴν λβ′: τοῦ αὐτοῦ, πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις, καὶ τὰ ἥμισυ ἄρα ἔσται, ὡς ἡ λ ξ γ, βάσις πρὸς τὴν ρ φ ζ, βάσιν, οὕτως τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἄλληλα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Ε′: Θεώρημα.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες, καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν, ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν βάσεις μὲν τὰ α β γ, δ ε ζ, τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ η, θ, σημεῖα. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ α β γ, βάσις πρὸς τὴν δ ε ζ, βάσιν, οὕτως ἡ α β γ η, πυραμὶς πρὸς τὴν δ ε ζ θ, πυραμίδα. εἰ γὰρ μὴ, ἔσται οὕτως, ὥστε ὡς ἡ α β γ, βάσις πρὸς τὴν δ ε ζ, βάσιν, οὕτως ἡ α β γ η, πυραμὶς, ἤτοι πρὸς ἔλαττόν τι τῆς δ ε ζ θ, πυραμίδος στερεὸν, ἢ πρὸς μεῖζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλαττον τὸ χ. καὶ διῃρήσθω ἡ δ ε ζ θ, πυραμὶς, κατὰ τὴν γ′: τοῦ παρόντος εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα. τὰ δὴ δύο πρίσματα μείζονά τε, ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος. καὶ πάλιν αἱ ἐκ τῆς διαιρέσεως γιγνόμεναι πυραμίδες διῃρήσθωσαν ὁμοίως, καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω, ἕως οὗ λειφθῶσί τινες πυραμίδες, ἀπὸ τῆς δ ε ζ θ, πυραμίδος, αἵ εἰσιν ἐλάσσους τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ἡ δ ε ζ θ, πυραμὶς τοῦ χ, στερεοῦ. λελείφθωσαν καὶ ἔστωσαν, λόγου χάριν, αἱ δ π ρ σ, σ τ υ θ, λοιπὰ ἄρα τὰ ἐν τῇ δ ε ζ θ, πυραμίδι πρίσματα μείζονά ἐστι τοῦ στερεοῦ χ. διῃρήσθω καὶ ἡ α β γ η, ὁμοίως καὶ ἰσοπληθῶς τῇ δ ε ζ θ, πυραμίδι: ἔστιν ἄρα κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ὡς ἡ α β γ, βάσις πρὸς τὴν δ ε ζ, βάσιν, οὕτω τὰ ἐν τῇ α β γ η, πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ δ ε ζ θ, πυραμίδι, ἀλλ᾽ ὡς ἡ α β γ, βάσις πρὸς τὴν δ ε ζ, βάσιν, οὕτως ἡ α β γ η, πυραμὶς πρὸς τὸ χ, στερεὸν, καὶ ὡς ἄρα ἡ α β γ η, πυραμὶς πρὸς τὸ χ, στερεὸν, οὕτω τὰ ἐν τῇ α β γ η, πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ δ ε ζ θ, πυραμίδι πρίσματα, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ α β γ η, πυραμὶς πρὸς τὰ ἐν αὐτῇ πρίσματα, οὕτω τὸ χ, στερεὸν πρὸς τὰ ἐν τῇ δ ε ζ θ, πυραμίδι πρίσματα, μείζων δὲ ἡ α β γ η, πυραμὶς τῶν ἐν αὐτῇ πρισμάτων,

Eucl. Lib. 12. Fig. 7.



μεῖ-

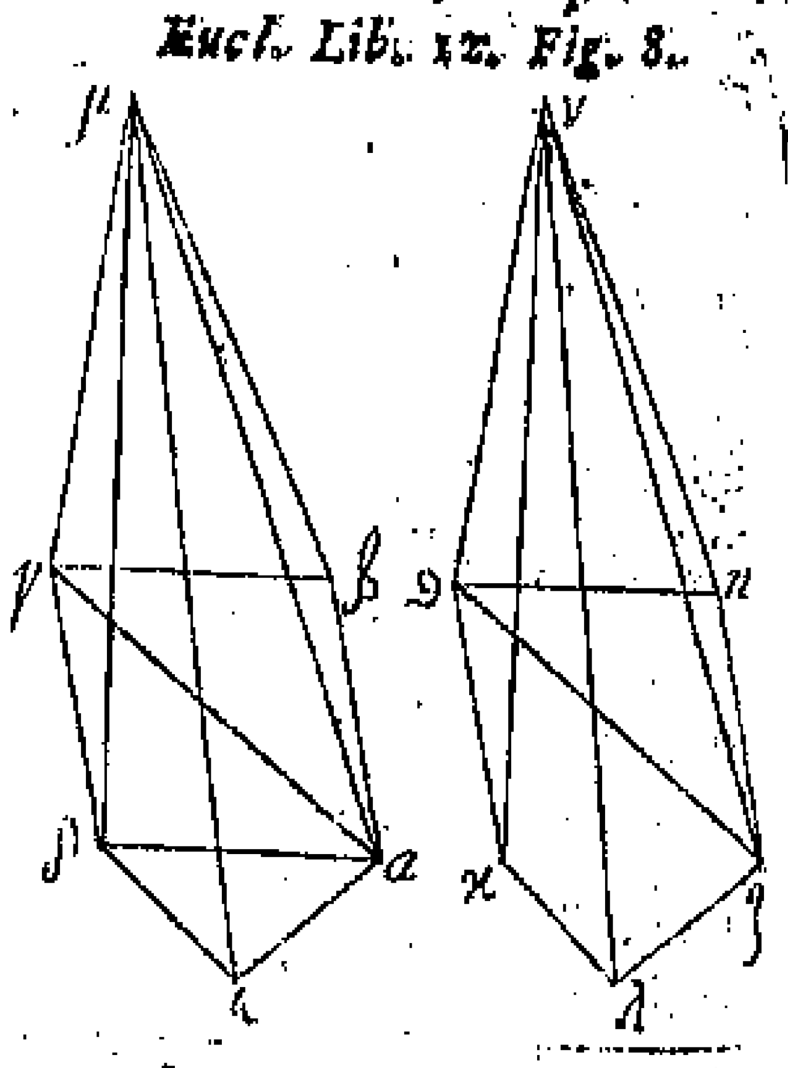
μεῖζον ἄρα καὶ τὸ χ, στερ: τῶν ἐν τῇ δεζθ, πυραμίδι πρισμάτων, ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, οὕτως ἡ αβγη, πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς δεζθ, πυραμίδος στερεόν. Ὁμοίως δειχθήσεται, ὅτι οὐδ' ὡς ἡ δεζ, βάσις πρὸς τὴν αβγ, βάσιν, οὕτως ἡ δεζθ, πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς αβγη, πυραμίδος στερεόν. Λέγω δή, ὅτι οὐκ ἔστιν οὐδ' ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, οὕτως ἡ αβγη, πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τῆς δεζθ, πυραμίδος στερεόν, εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ χ, ἀνάπαλιν ἄρα, ὡς ἡ δεζ, βάσις πρὸς τὴν αβγ, βάσιν, οὕτω τὸ χ, στερεὸν πρὸς τὴν αβγη, πυραμίδα, ὡς δὲ τὸ χ, στερεὸν πρὸς τὴν αβγη, πυραμίδα οὕτως ἡ δεζθ, πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς αβγη, πυραμίδος, ὡς ἔμπροσθεν ἐν τῷ β': τοῦ παρόντος ἐδείχθη, καὶ ὡς ἄρα ἡ δεζ, βάσις πρὸς τὴν αβγ, βάσιν, οὕτως ἡ δεζθ, πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς αβγη, πυραμίδος, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν, οὕτως ἡ πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τῆς πυραμίδος. ἀλλ' ἐδείχθη οὐδὲ πρὸς ἔλαττον, ἄρα ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, οὕτως αβγη, πυραμὶς πρὸς τὴν δεζθ, πυραμίδα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ς': Θεώρημα.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες, καὶ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς αβγδε, ζηθκλ. κορυφὰς δὲ τὰ μ ν, σημεῖα. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ αβγδε, βάσις πρὸς τὴν ζηθκλ, βάσιν, οὕτως ἡ αβγδεμ, πυραμὶς πρὸς τὴν ζηθκλν, πυραμίδα. Διῃρήσθω γὰρ ἡ αβγδε, βάσις εἰς τὰ αβγ, αγδ, αδε, τρίγωνα, ἡ δὲ ζηθκλ, εἰς τὰ ζηθ, ζθκ, ζκλ, τρίγ: καὶ νενοήσθωσαν ἐφ' ἑκάστου τριγώνου πυραμίδες ἰσοϋψεῖς ταῖς ἐξ ἀρχῆς πυραμίσι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ αβγ, τρίγων: πρὸς τὸ αγδ, τρίγ: οὕτως ἡ αβγμ, πυραμὶς, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, πρὸς τὴν αγδμ, πυραμίδα, καὶ συντεθέντα, ὡς τὸ αβγδ, τραπέζιον πρὸς τὸ αγδ, τρίγ: οὕτως ἡ αβγδμ, πυραμὶς πρὸς τὴν αγδμ, πυραμίδα, κατὰ τὴν ιη: τοῦ ε: ἀλλ' ὡς τὸ αγδ, τρίγων: πρὸς τὸ αδε, τρίγ: οὕτως ἡ αγδμ, πυραμὶς πρὸς τὴν αδεμ, πυραμίδα, καὶ δι' ἴσου ἄρα κατὰ τὴν κβ': τοῦ αὐτοῦ, ὡς ἡ αβγδ, βάσις πρὸς τὴν αδε, βάσιν, οὕτως ἡ αβγδμ, πυραμὶς πρὸς τὴν αδεμ, πυραμίδα, καὶ συντεθέντα πάλιν, ὡς ἡ αβγδε, βάσις πρὸς τὴν αδε.

Eucl. Lib. 12. Fig. 8.



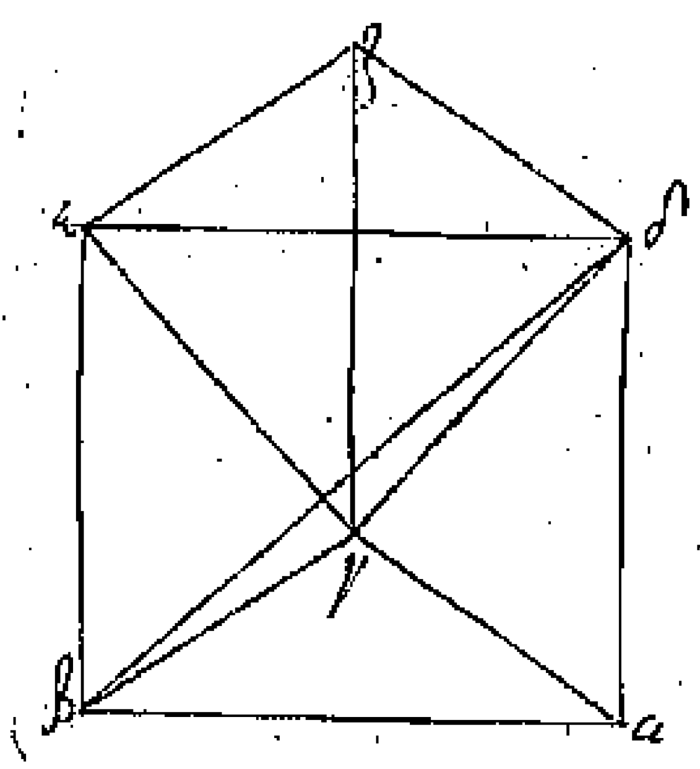
αδε, οὕτως ἡ αβγδεμ, πυραμὶς πρὸς τὴν αδεμ, πυραμίδα. Διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ ὡς ἡ ζηθκλ, βάσις πρὸς τὴν ζκλ, βάσιν, οὕτω καὶ ἡ ζηθκλν, πυραμὶς πρὸς τὴν ζκλν, πυραμίδα, καὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ὡς ἡ αδε, βάσις τῆς αδεμ, πυραμίδος πρὸς τὴν ζκλ, βάσιν τῆς ζκλν, πυραμίδος, οὕτως ἡ πυραμὶς πρὸς τὴν πυραμίδα. ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ αβγδε, βάσις πρὸς τὴν αδε, βάσιν, οὕτως ἡ αβγδεμ, πυρ: πρὸς τὴν αδεμ, πυρ: ὡς δὲ ἡ αδε, βάσις πρὸς τὴν ζκλ, βάσιν, οὕτως ἡ αδεμ, πυρ: πρὸς τὴν ζκλν, πυρ: καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ αβγδε, βάσις πρὸς τὴν ζκλ, βάσιν, οὕτως ἡ αβγδεμ, πυραμὶς πρὸς τὴν ζκλν, πυραμ: ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ἡ ζκλ, βάσις πρὸς τὴν ζηθκλ, βάσιν, οὕτως ἦν καὶ ἡ ζκλν, πυρ: πρὸς τὴν ζηθκλν, πυρ: καὶ δι' ἴσου πάλιν, ὡς ἡ αβγδε, βάσις πρὸς τὴν ζηθκλ, βάσιν. οὕτως ἡ αβγδεμ, πυρ: πρὸς τὴν ζηθκλν, πυραμίδα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Ζ': Θεώρημα.

Πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας.

Ἔστω πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ αβγ, τρίγ: ἀπεναντίον δὲ δεζ. Λέγω, ὅτι τὸ αβγδεζ, πρίσμα διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βδ, εγ, γδ. καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ αβεδ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ βδ, καὶ κατὰ τὴν λδ': τοῦ πρώτου, ἴσον ἐστὶ τὸ αβδ, τρίγ: τῷ εδβ, τριγώνῳ, καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ αβδ, τριγ: κορυφὴ δὲ τὸ γ, σημεῖον, ἴση ἐστὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ εδβ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ γ, σημεῖον. ἀλλ' αὕτη ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ εδβ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ γ, σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ εβγ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον. ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχεται. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ αβδ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ γ, σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ εβγ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον. πάλιν ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ζγβε, διάμετρος δ' αὐτοῦ ἡ γε, ἴσον ἐστὶ κατὰ τὴν λδ': τοῦ α: τὸ εγζ, τρίγωνον τῷ γβε, τριγώνῳ. καὶ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ βεγ, τρίγ: κορυφὴ τὸ δ, σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυρ: ἧς βάσις μὲν τὸ εγζ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, ἡ δὲ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ βγε, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ αβδ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ γ, σημεῖον. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ γεζ, τρίγ: κορυφὴ

Eucl. Lib. 12. Fig. 9.



ρυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, ἴση πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ α β δ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ γ, σημεῖον. διῄρηται ἄρα τὸ α β γ δ ε ζ, πρίσμα, εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχούσας. καὶ ἐπεὶ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ α β δ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ γ, σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ α β γ, κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, τρίτον ἐδείχθη τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις μὲν τὸ α β γ, τρίγ: ἀπεναντίον δὲ τὸ δ ε ζ, καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ α β γ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, τρίτον ἐστὶ τοῦ πρίσματος, τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν, τὸ α β γ, τρίγ: ἀπεναντίον δὲ τὸ δ ε ζ.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

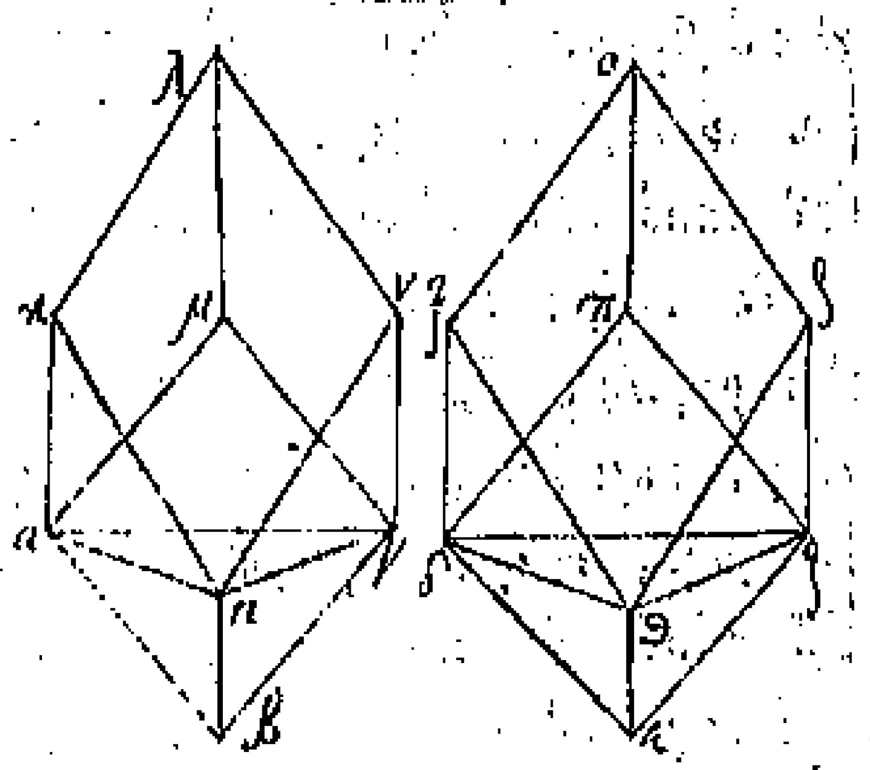
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος, τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῇ, καὶ ὕψος ἴσον. ἐπειδήπερ κἂν ἕτερόν τι σχῆμα ἔχῃ ἡ βάσις τοῦ πρίσματος, καὶ τὸ αὐτὸ ἀπεναντίον, διαιρεῖται εἰς πρίσματα τριγώνους ἔχοντα βάσεις καὶ τὰς ἀπεναντίον.

Πρότασις Η': Θεώρημα.

Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες, καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστωσαν ὅμοιαι, καὶ ὁμοίως κείμεναι πυραμίδες, ὧν βάσεις μὲν εἰσὶ τὰ α β γ, δ ε ζ, τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ η, θ, σημεῖα. Λέγω ὅτι ἡ α β γ η, πυραμὶς πρὸς τὴν δ ε ζ θ, πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ β γ, πρὸς τὴν ε ζ. Συμπεπληρώσθωσαν γὰρ τὰ β η μ λ, ε θ π ο, στερεὰ παραλληλεπίπεδα. καὶ ἐπεὶ ὁμοία ἐστὶν ἡ πυραμὶς ἡ α β γ η, πυραμίδι τῇ δ ε ζ θ, ἴση ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ α β γ, γωνία τῇ ὑπὸ δ ε ζ, ἡ δὲ ὑπὸ η β γ, τῇ ὑπὸ θ ε ζ, ἡ δὲ ὑπὸ α β η, τῇ ὑπὸ δ ε θ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν δ ε, οὕτως ἡ β γ, πρὸς τὴν ε ζ, καὶ ἡ β η, πρὸς τὴν ε θ· καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν δ ε, οὕτως ἡ β γ, πρὸς τὴν ε ζ, καὶ περὶ ἴσας

Eucl. Lib. 12. Fig. 10.



γωνίας, αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα τὸ β μ, παραλληλόγρ: τῷ ε π, παραλληλογρ: διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν β ν, τῷ ε ρ, ὅμοιόν ἐστι, τὸ δὲ β κ, τῷ ε ξ, τρία ἄρα παραλληλόγρ: τὰ β μ, κ β, β ν, τρισὶ τοῖς ε π, ε ξ, ε ρ, ὅμοιά ἐστιν. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία ταῦτα κατὰ τὴν κ δ': τοῦ α: στερ: τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ὅμοιά τε καὶ ἴσα ἐστί. τὰ δὲ τρία ε π, ε ξ, ε ρ, τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε ἐστὶ καὶ ὅμοια. τὰ β η μ λ, ε θ π ο, ἄρα στερ: ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων καὶ ἴσων τὸ πλῆθος περιέχονται. ὅμοιον ἄρα τὸ β η μ λ, στερ: τῷ ε θ π ο, στερ: τὰ δὲ ὅμοια στερ: παραλ-

ραλληλεπίπ: κατὰ τὴν λ γ': τοῦ παρελθόντος, ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. τὸ β η μ λ, ἄρα στερ: πρὸς τὸ ε θ ο π, στερ: τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος β γ, πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον ε ζ, πλευράν, ὡς δὲ τὸ β η μ λ, στερ: πρὸς τὸ ε θ ο π, στερ: οὕτως ἡ α β γ η, πυραμὶς πρὸς τὴν δ ε ζ θ, πυραμίδα. ἐπειδήπερ ἡ πυραμὶς ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ στερεοῦ, κατὰ τὴν γ': τοῦ παρόντος. διὰ τὸ καὶ τὸ πρίσμα ἥμισυ ὂν τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπ: τριπλάσιον εἶναι τῆς πυραμίδος, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, καὶ ἡ α β γ η, ἄρα πυραμὶς πρὸς τὴν δ ε ζ θ, πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ β γ, πρὸς τὴν ε ζ.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

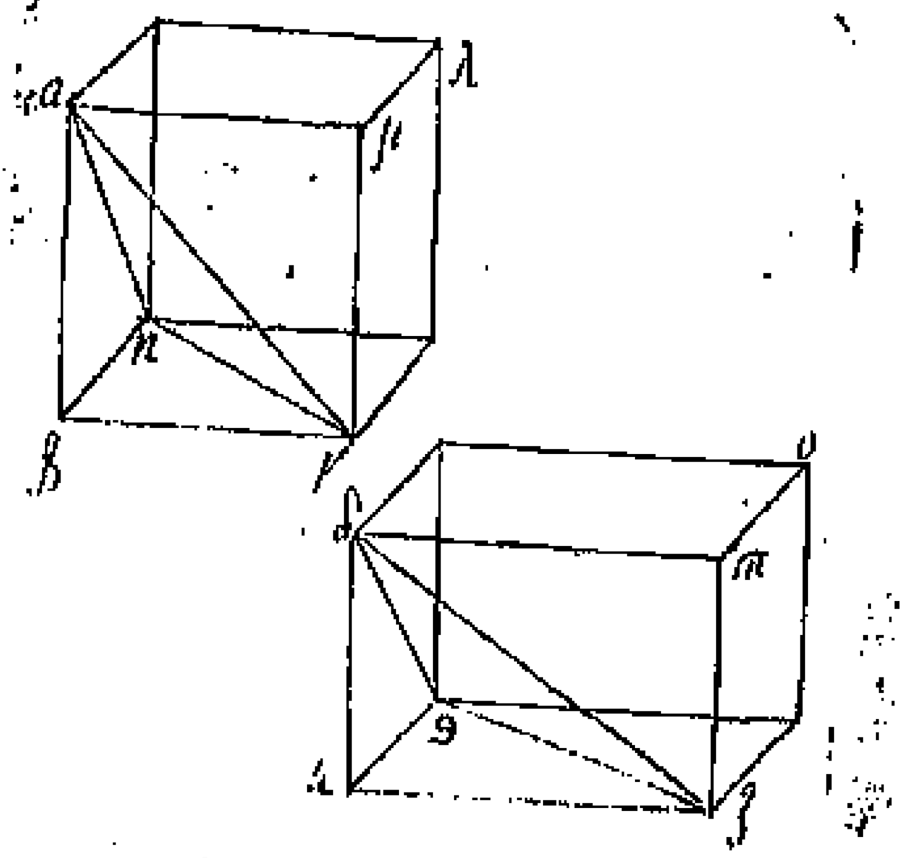
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι καὶ αἱ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, διαιρεθεισῶν γὰρ αὐτῶν εἰς τὰς ἐν αὐταῖς πυραμίδας, τριγώνους βάσεις ἐχούσας, τῷ καὶ τὰ ὅμοια πολύγωνα τῶν βάσεων εἰς ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖσθαι, κατὰ τὴν κ': τοῦ ς': καὶ εἰς ἴσα τῷ πλήθει, καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, ἔσται ὡς ἐν ἑτέρᾳ μία πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν πρὸς τὴν ἐν ἑτέρᾳ μίαν πυραμίδα τρίγωνον ἔχουσαν βάσιν, οὕτω καὶ ἅπασαι αἱ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδες, τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, πρὸς τὰς ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας, τουτέστιν αὐτὴ ἡ πολύγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν πολύγωνον βάσιν ἔχουσαν πυραμίδα, ἡ δὲ τρίγωνον βάσιν ἔχουσα πρὸς τὴν τρίγ: βάσιν ἔχουσαν ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, καὶ ἡ πολύγωνον ἄρα βάσιν ἔχουσα πρὸς τὴν ὁμοίας βάσεις ἔχουσαν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Πρότασις Θ': Θεώρημα.

Τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι.

Eucl. Lib. 12. Fig. 11.

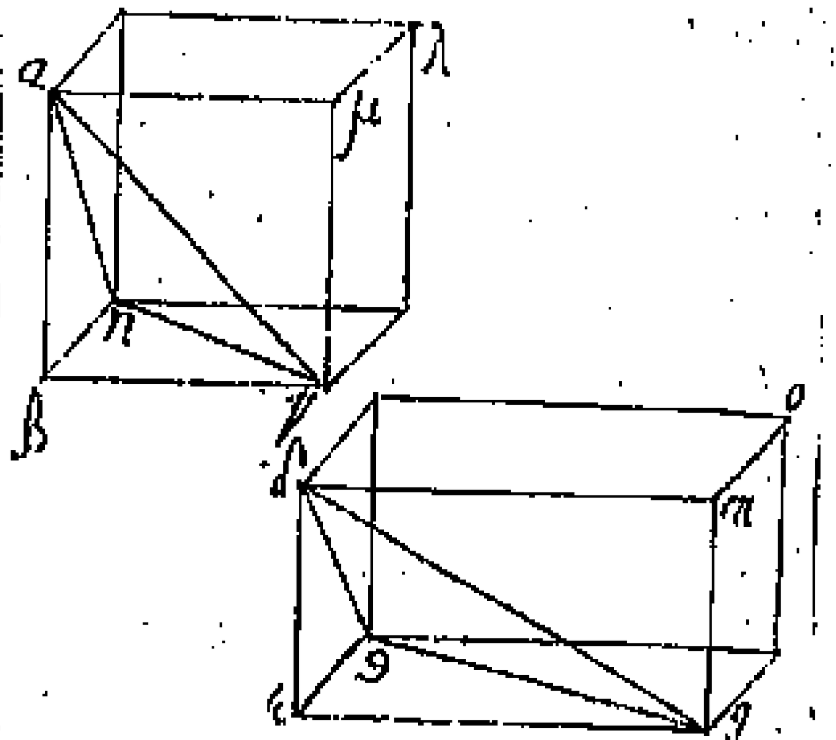
Ἔστωσαν γὰρ πυραμίδες ἴσαι τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς α β γ, δ ε ζ, κορυφαὶ δὲ τὰ η, θ, σημεῖα. Λέγω, ὅτι τῶν α β γ η, δ ε ζ θ, πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ α β γ, βάσις πρὸς τὴν δ ε ζ, βάσιν, οὕτω τὸ τῆς δ ε ζ θ, πυραμ: ὕψος, πρὸς τὸ τῆς α β γ η, πυρ: ὕψος. Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ β η μ λ, ε θ π ο, στερεὰ παραλληλεπ: καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ α β γ η, πυρ: τῇ δ ε ζ θ, πυρ: καὶ ἐστι τῆς μὲν α β γ η, πυραμ: ἑξαπλάσιον τὸ β η μ λ, στερεὸν, τῆς δὲ δ ε ζ θ,



τὸ

τὸ ε π θ ο, στερεὸν κατὰ τὴν γ΄: καὶ ζ΄: τοῦ παρόντος, ἴσον ἄρα τὸ β η μ λ, στερεὸν τῷ ε θ π ο, στερεῷ, κατὰ γὰρ τὴν λδ΄: τοῦ ια΄: τῶν ἴσων στερεῶν παραλληλεπ: ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ β μ, βάσις πρὸς τὴν ε π, βάσιν, οὕτω τὸ τοῦ ε θ π ο, ὕψος, πρὸς τὸ τοῦ β η μ λ, στερ: ὕψος. ἀλλ' ὡς ἡ β μ, βάσις πρὸς τὴν ε π, βάσιν, οὕτω τὸ α β γ, τρίγωνον πρὸς τὸ δ ε ζ, τρίγωνον. καὶ ὡς ἄρα τὸ α β γ, τρίγων: πρὸς τὸ δ ε ζ, τρίγ: οὕτω τὸ τοῦ ε θ π ο, στερ: ὕψος πρὸς τὸ τοῦ β η μ λ, στερ: ὕψος. ἀλλὰ τὸ μὲν τοῦ ε θ π ο, στερ: ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τῆς δ ε ζ θ, πυραμίδος ὕψει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ α β γ, βάσις πρὸς τὴν δ ε ζ, βάσιν, οὕτω τὸ

Eucl. Lib. 12. Fig. 12.



τῆς δ ε ζ θ, πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς α β γ η, πυραμίδος ὕψος, τῶν α β γ η, δ ε ζ θ, πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἀλλὰ δὴ τῶν α β γ η, δ ε ζ θ, πυραμ: ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ α β γ, βάσις πρὸς τὴν δ ε ζ, βάσιν, οὕτω τὸ τῆς δ ε ζ θ, πυραμ: ὕψος πρὸς τὸ τῆς α β γ η, πυρ: ὕψος. Λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ α β γ η, πυραμὶς τῇ δ ε ζ θ, πυρ: τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ α β γ, βάσις πρὸς τὴν δ ε ζ, βάσιν, οὕτω τὸ τῆς δ ε ζ θ, πυρ: ὕψος πρὸς τὸ τῆς α β γ η, πυρ: ὕψος. ἀλλ' ὡς ἡ α β γ, βάσις πρὸς τὴν δ ε ζ, βάσιν, οὕτω τὸ β μ, παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ε π, παραλληλόγραμμον, καὶ ὡς ἄρα τὸ β μ, παραλληλόγρ: πρὸς τὸ ε π, οὕτω τὸ τῆς δ ε ζ θ, πυρ: ὕψος πρὸς τὸ τῆς α β γ η, πυραμ: ὕψος, ἀλλὰ τὸ μὲν τῆς δ ε ζ θ, πυραμ: ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τοῦ ε θ π ο, παραλληλεπιπέδου ὕψει, τὸ δὲ τῆς α β γ η, πυρ: ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τοῦ β η μ λ, παραλληλεπιπέδου ὕψει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ β μ, βάσις πρὸς τὴν ε π, βάσιν, οὕτω τὸ τοῦ ε θ π ο, παραλληλεπιπέδου ὕψος πρὸς τὸ τοῦ β η μ λ, ὧν δὲ στερ: παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν. ἴσον ἄρα τὸ β η μ λ, στερ: παραλληλεπ: τῷ ε θ π ο, στερ: παραλληλεπ: καὶ ἔστι τοῦ μὲν β η μ λ, ἕκτον μέρος ἡ α β γ η, πυραμὶς, τοῦ δὲ ε θ π ο, στερεοῦ ὁμοίως ἕκτον μέρος ἡ δ ε ζ θ, πυραμίς. ἡ ἄρα α β γ η, πυραμὶς τῇ δ ε ζ θ, πυραμίδι ἴση ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Ι΄: Θεώρημα.

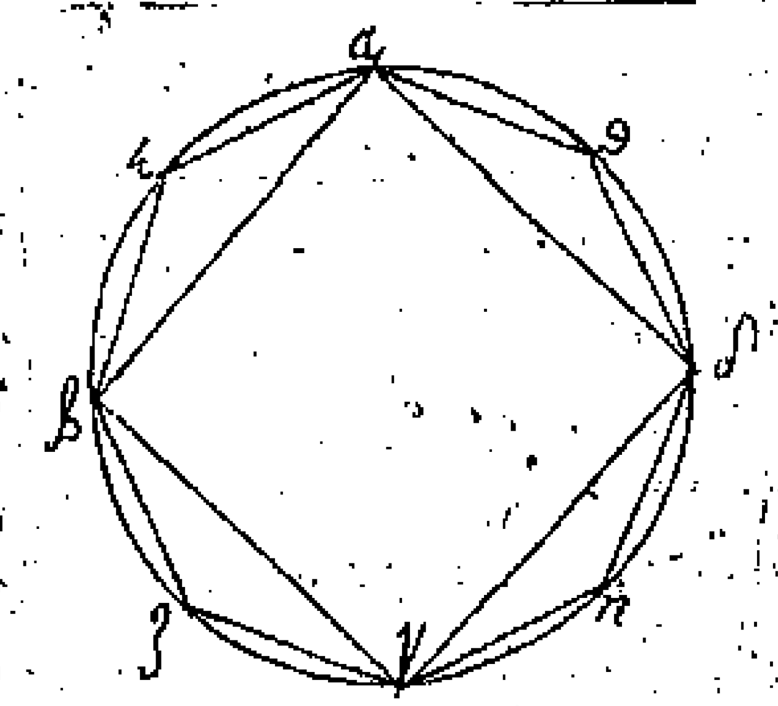
Πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ, τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ, καὶ ὕψος ἴσον.

Ἐχέτω γὰρ κῶνος κυλίνδρῳ βάσιν τε τὴν αὐτὴν τὸν α β γ δ, κύκλον, καὶ ὕψος ἴσον. Λέγω, ὅτι ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου τρίτον ἐστὶ μέρος, τουτέστιν ὁ κύλινδρος

τοῦ

τοῦ κώνου τριπλασίων ἔσται. εἰ γὰρ μὴ, ἔσται ἤτοι μείζων, ἢ τριπλασίων, ἢ ἐλάττων, ἔστω πρότερον μείζων, ἢ τριπλασίων. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν α β γ δ, τετράγωνον τὸ α β γ δ, καὶ τοῦτο δὴ μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ α β γ, κύκλου, κατὰ τὴν δεῖξιν τῆς β΄: τοῦ παρ: καὶ ἀνεστάσθω ἀπὸ τοῦ α β γ δ, τετραγ: πρίσμα ἰσοϋψὲς τῷ κυλίνδρῳ. τὸ δὴ ἀνιστάμενον, μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κυλίνδρου. ἐπειδήπερ κἂν περὶ τὸν α β γ δ, κύκλον τετράγωνον περιγράψωμεν, τὸ ἐγγεγραμμένον τετράγων: ἥμισύ ἐστι τοῦ περιγραφομένου. καὶ ἔστι τὰ ἀπ' αὐτῶν ἀνιστάμενα ἰσοϋψῆ στερεὰ παραλληλεπίπ: πρίσματα. τὰ ἄρα πρίσματα, ἐστὶν, ὡς αἱ βάσεις. καὶ τὸ ἐπὶ τοῦ α β γ δ, ἀνασταθὲν ἄρα τετραγώνου πρίσμα, ἥμισύ ἐστι τοῦ ἀνασταθέντος πρίσματος ἀπὸ τοῦ περιγραφέντος τετραγώνου, καὶ ἔστιν ὁ κύλινδρος ἐλάττων τοῦ πρίσματος, τοῦ ἀνασταθέντος ἀπὸ τοῦ περιγραφέντος τετραγ: τὸ ἄρα πρίσμα τὸ ἀνασταθὲν ἀπὸ τοῦ α β γ δ, τετραγ: ἰσοϋψὲς τῷ κυλίνδρῳ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ κυλίνδρου. Τετμήσθωσαν αἱ

Eucl. Lib. 12. Fig. 13.



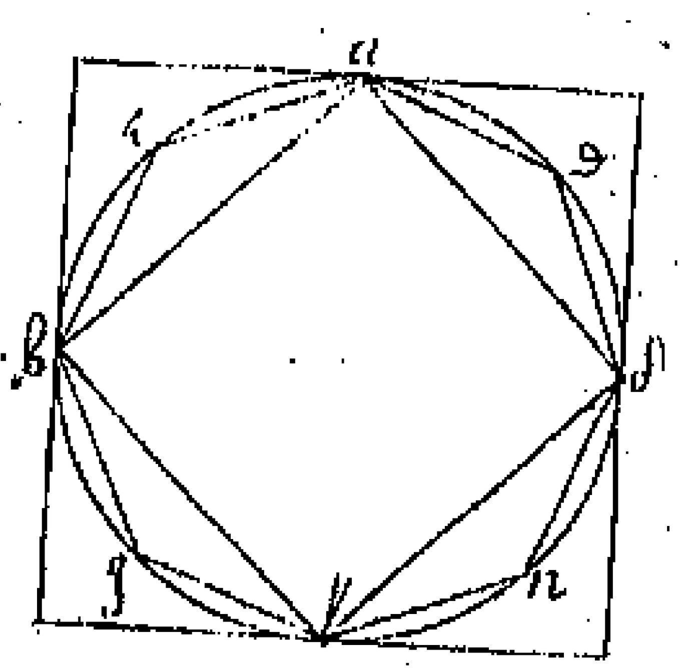
α β, β γ, γ δ, δ α, περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ ε, ζ, η, θ, σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α ε, ε β, β ζ, ζ γ, γ η, η δ, δ θ, θ α, καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν α ε β, β ζ γ, γ η δ, δ θ α, τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' αὑτὸ τμήματος τοῦ α β γ δ, κύκλου, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν κατὰ τὴν β΄: τοῦ παρόντος. ἀνεστάσθω ἐφ' ἑκάστου τῶν α ε β, β ζ γ, γ η δ, δ θ α, τριγ: πρίσματα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ. καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ἀνασταθέντων πρισμάτων μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' αὑτὸ τμήματος τοῦ κυλίνδρου. ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν ε, ζ, η, θ, σημείων, παραλλήλους ἀγάγωμεν ταῖς α β, β γ, γ δ, δ α, καὶ συμπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν α β, β γ, γ δ, δ α, παραλληλόγραμμα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀναστήσωμεν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ, ἑκάστου τῶν ἀνασταθέντων ἥμισύ ἐστι τὰ πρίσματα, τὰ ἐπὶ τῶν α ε β, β ζ γ, γ η δ, δ θ α, τριγώνων. καὶ ἔστι τὰ τοῦ κυλίνδρου ἀποτμήματα ἐλάττονα τῶν ἀνασταθέντων στερεῶν παραλληλεπιπέδων, ὥστε καὶ τὰ ἐπὶ τῶν α ε β, β ζ γ, γ η δ, δ θ α, τριγώνων, πρίσματα μείζω ἐστὶν, ἢ τὸ ἥμισυ τῶν καθ' ἑαυτὰ τοῦ κυλίνδρου τμημάτων. τέμνοντες τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πρίσματα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κυλίνδρου, ἃ ἔσται ἐλάττω τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύλινδρος τοῦ τριπλασίου κώνου. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ α ε, ε β, β ζ, ζ γ, γ η, η δ, δ θ, θ α, λοιπὸν ἄρα τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ α ε β ζ γ η δ θ, πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ μεῖζόν ἐστιν, ἢ τριπλάσιον τοῦ κώνου. ἀλλὰ τοῦτο τὸ πρίσμα, κατὰ τὴν ζ΄: τοῦ παρ: τριπλάσιόν ἐστι τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν ἐστι τὸ α ε β ζ γ η δ θ, πολύγ: κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα

αὕτη

αὕτη καὶ τὸ πρίσμα τῆς ζ΄: τοῦ παρ: μείζων ἐστὶ τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν αβγδ, κύκλον. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων. ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἔσται ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου μείζων, ἢ τριπλασίων.

Λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἢ τριπλασίων. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἐλάττων, ἀνάπαλιν ἄρα ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος. Ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸν αβγδ, κύκλον τετράγ: τὸ αβγδ, καὶ τοῦτο μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ αβγδ, κύκλου. καὶ ἀνεστάσθω ἀπὸ τοῦ αβγδ, τετραγ: πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ. ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστίν, ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου. ἐπειδήπερ ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν, ὅτι ἐὰν περὶ τὸν κύλινδρον περιγράψωμεν τετράγωνον, ἔσται τὸ αβγδ, τετραγ: ἥμισυ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου, καὶ ἐὰν ἀπὸ τῶν τετραγώνων στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀναστήσωμεν ἰσοϋψῆ τῷ κώνῳ, ἃ καὶ καλεῖται πρίσματα. ἔσται τὸ ἀνασταθὲν ἀπὸ τοῦ αβγδ, τετραγώνου, ἥμισυ τοῦ ἀνασταθέντος ἀπὸ τοῦ περιγραφέντος τετραγώνου, πρὸς ἄλληλα γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις, κατὰ τὴν λβ΄: τοῦ παρελθ: ὥστε καὶ τὰ τρίτα, καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις τὸ αβγδ, τετράγ: ἥμισύ ἐστι τῆς πυραμίδος τῆς ἀνασταθείσης ἀπὸ τοῦ περιγραφέντος τετραγ: καὶ αὕτη ἡ πυραμὶς μείζων ἐστὶ τοῦ κώνου, ἐμπεριέχει γὰρ αὐτόν. ἡ ἄρα πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ αβγδ, τετράγ: κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. Τετμήσθωσαν αἱ αβ, βγ, γδ, δα, περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ ε, ζ, η, θ, σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αε, εβ, βζ, ζγ, γη, ηδ, δθ, θα, καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν αεβ, βζγ, γηδ, δθα, τριγώνων μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' αὑτὸ τμήματος τοῦ αβγδ, κύκλου. καὶ ἀνεστάσθωσαν ἐφ' ἑκάστου τῶν αεβ, βζγ, γηδ, δθα, τριγ: πυραμίδες τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαι τῷ κώνῳ, καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, μείζων ἐστίν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. Τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνῦντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδα τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαν τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα τμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κῶνος τοῦ τρίτου μέρους τοῦ κλίνδρου. Λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν αε, εβ, βζ, ζγ, γη, ηδ, δθ, θα, λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ αεβζγηδθ, πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστίν, ἢ τὸ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου, ἀλλ' αὕτη ἡ πυραμίς, τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ αεβζγηδθ, πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, ὥστε καὶ τὸ πρίσμα ὅλον, μεῖζόν ἐστι τοῦ κυλίνδρου, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ αβγδ, κύκλος, ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ἐμπε-

Eucl. Lib. 12. Fig. 14.



ριέχε-

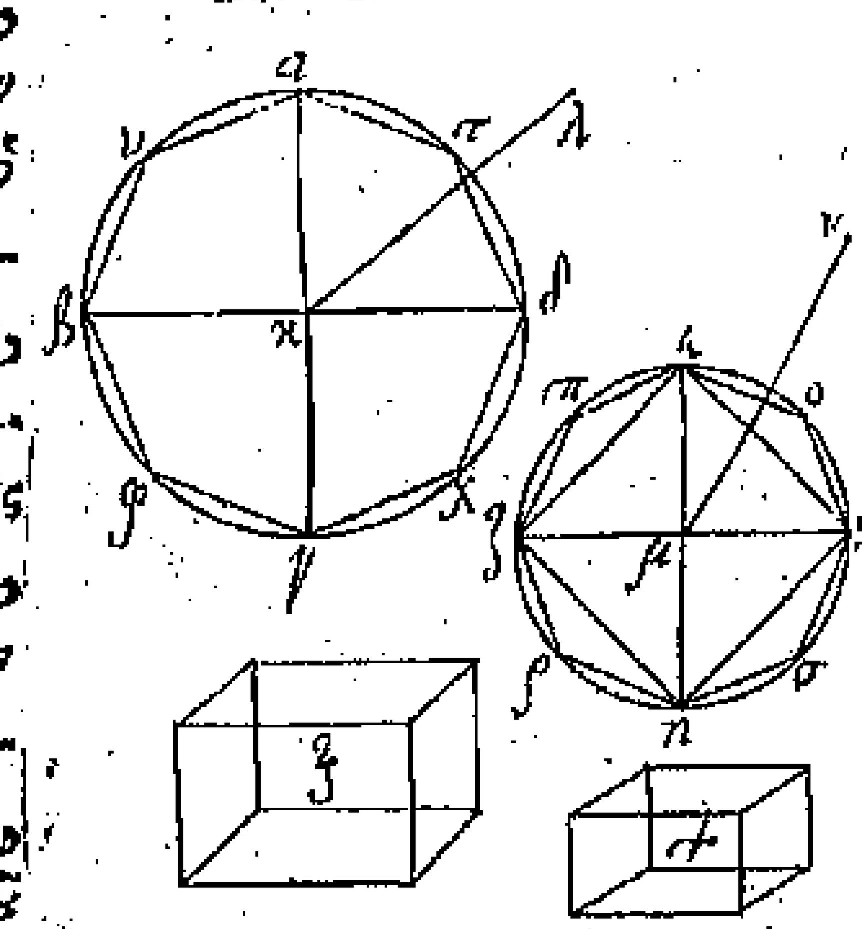
ριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἐλάττων, οὔτε μείζων, ἀλλὰ τριπλάσιος, ὡς ἐδείχθη, ὥστε ὁ κῶνος, τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΑ΄: Θεώρημα.

Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι, καὶ κύλινδροι, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

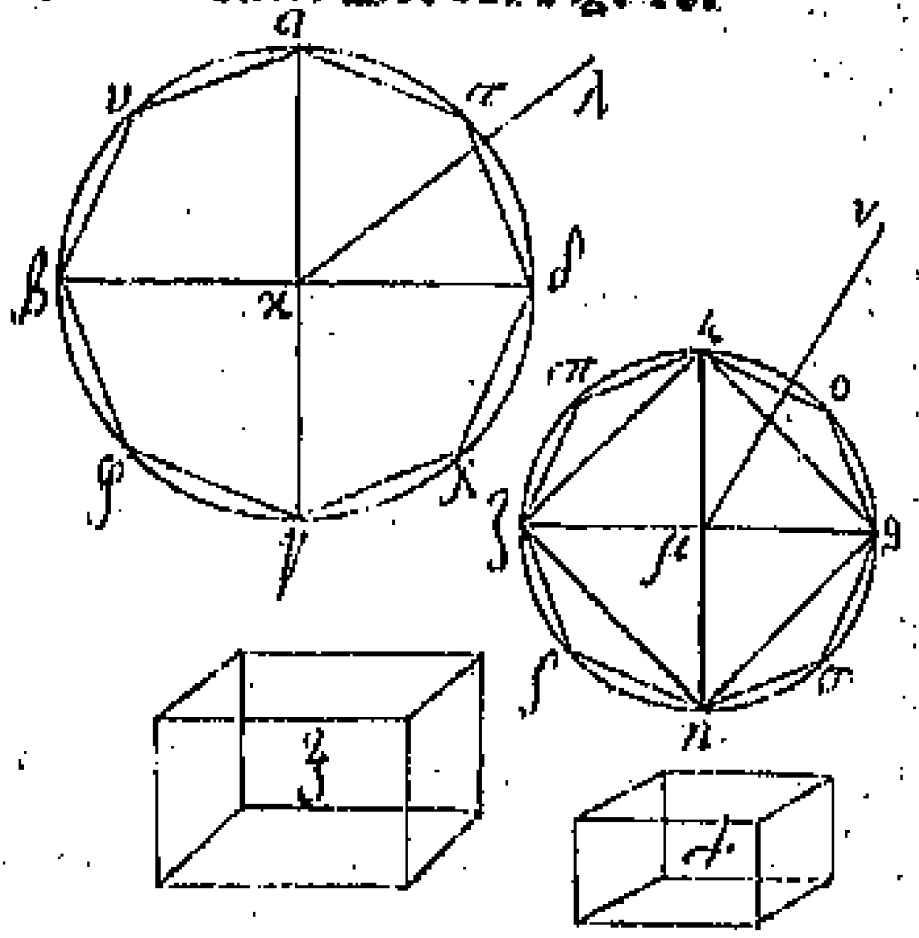
Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μέν εἰσιν οἱ αβγδ, εζηθ, κύκλοι. ἄξονες δὲ οἱ κλ, μν, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ αγ, εη. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν εζηθ, κύκλον, οὕτως ὁ αλ, κῶνος πρὸς τὸν εν. εἰ γὰρ μή, ἔστω ὡς ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν εζηθ, κύκλον, οὕτως ὁ αλ, κῶνος πρὸς ἔλαττον τοῦ εν, κώνου στερεόν, ἢ πρὸς μεῖζον, ἔστω πρὸς ἔλαττον τὸ ξ. καὶ ᾧ ἔλασσον τὸ ξ, στερ: τοῦ εν, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ ψ, στερεόν, ὁ εν, κῶνος ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς ξ, ψ, στερεοῖς. Ἐγγεγράφθω εἰς τὸν εζηθ, κύκλον τετράγ: τὸ εζηθ, τὸ ἄρα τετράγ: μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κύκλου. Ἀνεστάσθω ἀπὸ τοῦ εζηθ, τετράγ: πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ, ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστίν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. ἐπειδήπερ ἐὰν περιγράψωμεν περὶ τὸν κύκλον τετράγ: καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀναστήσωμεν πυραμίδα ἰσοϋψῆ τῷ κώνῳ, ἡ ἐγγραφεῖσα πυραμὶς ἥμισύ ἐστι τῆς περιγραφείσης, κατὰ γὰρ τὴν ς΄: τοῦ παρόντος, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις, ἐλάττων δ' ὁ κῶνος τῆς περιγραφείσης πυραμ: ἡ ἄρα πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ εζηθ, τετράγ: κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστίν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. Τετμήσθωσαν αἱ εζ, ζη, ηθ, θε, περιφέρειαι, κατὰ τὰ ο, π, ρ, σ, σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θο, οε, επ, πζ, ζρ, ρη, ησ, σθ, ἕκαστον ἄρα τῶν θοε, επζ, ζρη, ησθ, τριγώνων, μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. Ἀνεστάσθω ἐφ' ἑκάστου τῶν θοε, επζ, ζρη, ησθ, τριγώνων πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ. καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων μείζων ἐστίν, ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. Τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνῦντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες, ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας ἰσοϋψεῖς τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, κατὰ τὴν α: τοῦ ι: ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ ψ, στερεοῦ. Λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν θοε, επζ, ζρη, ησθ. λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ θοεπζρησ, πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ ξ, στερεοῦ. Ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν

Eucl. Lib. 12. Fig. 15.



αβγδ,

α β γ δ, κύκλον τῷ θ ο ε π ζ ρ η σ, πολυγώνῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολύγ: τὸ δ τ α υ β φ γ χ, πολύγ: καὶ ἀνεστάθω ἐπ' αὐτῷ πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ α λ, κώνῳ. ἐπεὶ οὖν (1) ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς α γ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ε η, οὕτω τὸ δ τ α υ β φ γ χ, πολύγ: πρὸς τὸ θ ο ε π ζ ρ η σ, πολύγ: ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς α γ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ε η, οὕτως ὁ α β γ δ, κύκλος (2) πρὸς τὸν ε ζ η θ, κύκλ: καὶ ὡς ἄρα, ὁ α β γ δ, κύκλος πρὸς τὸν ε ζ η θ, κύκλον, οὕτω τὸ δ τ α υ β φ γ χ, πολύγ: κατὰ τὴν αὐτὴν, πρὸς τὸ θ ο ε π ζ ρ η σ, πολύγ: ὡς δὲ ὁ α β γ δ, κύκλος πρὸς τὸν ε ζ η θ, κύκλ: οὕτως ὁ α λ, κῶνος πρὸς τὸ ξ, στερ: καὶ δὲ τὴν ια: τοῦ ε: ὡς τὸ δ τ α υ β φ γ χ, πολύγωνον πρὸς τὸ θ ο ε π ζ ρ η σ, πολύγων:



Eucl. Lib. 12. Fig. 16.

οὕτως ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ δ τ α υ β φ γ χ, πολύγ: κορυφὴ δὲ τὸ χ, σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ θ ο ε π ζ ρ η σ, κορυφὴ δὲ τὸ ν, σημεῖον. καὶ ὡς ἄρα ὁ α λ, κῶνος πρὸς τὸ ξ, στερεὸν, οὕτως ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ δ τ α υ β φ γ χ, πολύγ: κορυφὴ δὲ τὸ λ, σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ θ ο ε π ζ ρ η σ, πολύγ: κορυφὴ δὲ τὸ ν, σημεῖον. καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν, ὡς ὁ α λ, κῶνος πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πυραμίδα, οὕτω τὸ ξ, στερεὸν πρὸς τὴν ἐν τῷ ε ν, κώνῳ πυραμίδα. μείζων ὁ α λ, κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ξ, στερεὸν τῆς ἐν τῷ ε ν, κώνῳ πυραμίδος, ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὡς ὁ α β γ δ, κύκλος πρὸς τὸν ε ζ η θ, κύκλον, οὕτως ὁ α λ, κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ε ν, κώνου στερεόν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ὡς ὁ ε ζ η θ, κύκλος πρὸς τὸν α β γ δ, κύκλον, οὕτως ὁ ε ν, κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ α λ, κώνου στερεόν. Λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἐστὶν ὡς ὁ α β γ δ, κύκλος πρὸς τὸν ε ζ η θ, κύκλον, οὕτως ὁ α λ, κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ε ν, κώνου στερεόν. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ ξ, ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν, ὡς ὁ ε ζ η θ, κύκλος πρὸς τὸν α β γ δ, οὕτω τὸ ξ, στερεὸν πρὸς τὸν α λ, κῶνον. ἀλλ' ὡς τὸ ξ, στερ: πρὸς τὸν α λ, κῶνον, οὕτως ὁ ε ν, κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ α λ, κώνου στερεὸν, καὶ ὡς ἄρα ὁ ε ζ η θ, κύκλος πρὸς τὸν α β γ δ, οὕτως ὁ ε ν, πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ α λ, κώνου, ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον, οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ α β γ δ, κύκλος πρὸς τὸν ε ζ η θ, κύκλον, οὕτως ὁ α λ, κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ε ν, κώνου στερεοῦ. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ, πρὸς ἔλασσον, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α β γ δ, κύκλος πρὸς τὸν ε ζ η θ, κύκλον, οὕτως ὁ α λ, κῶνος πρὸς τὸν ε ν, κῶνον. ἀλλ' ὡς ὁ κῶνος πρὸς

---

(1) Κατὰ καὶ τὴν α: τοῦ παρόντος.
(2) Κατὰ τὴν β: τοῦ αὐτοῦ.

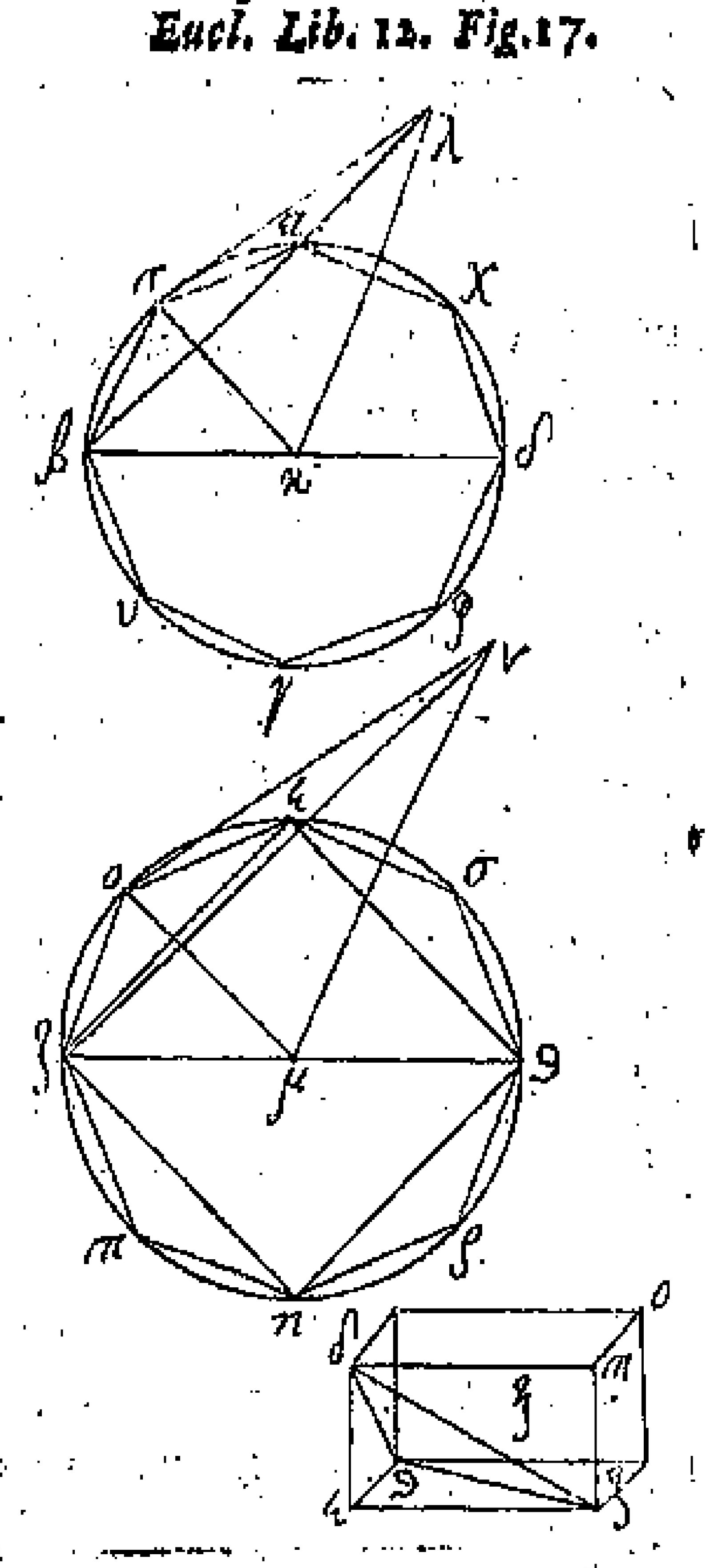
πρὸς τὸν κῶνον, ἔστι καὶ ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, τριπλασίων γὰρ ἑκάτερος ἑκατέρου, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, καὶ ὡς ἄρα ὁ α β γ δ, κύκλος πρὸς τὸν ε ζ η θ, κύκλον, οὕτως οἱ ἐπ' αὐτῶν ἰσοϋψεῖς τοῖς κώνοις κύλινδροι. οἱ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΒ'. Θεώρημα.

Οἱ ὅμοιοι κῶνοι, καὶ κύλινδροι ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.

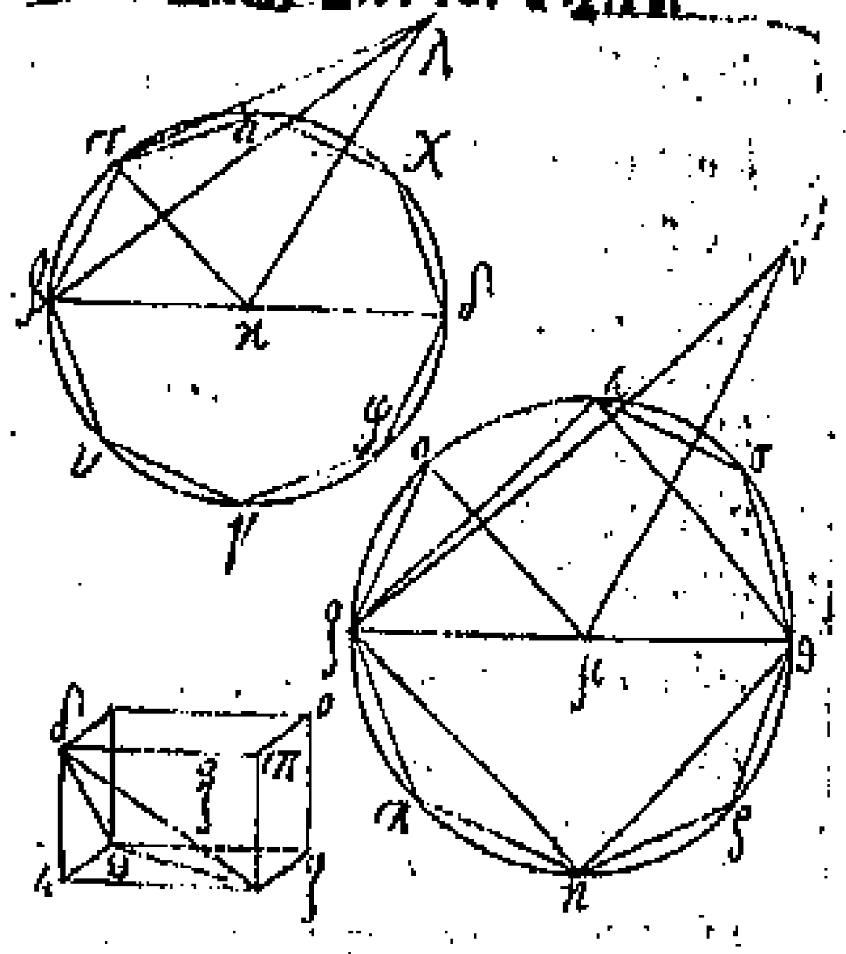
Ἔστωσαν ὅμοιοι κῶνοι, καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ α β γ δ, ε ζ η θ, κύκλοι, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων, αἱ β δ, ζ θ, ἄξονες δὲ τῶν κώνων, ἢ κυλίνδρων οἱ κ λ, μ ν. Λέγω, ὅτι ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ α β γ δ, κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ λ, σημεῖον, πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσεις μὲν ὁ ε ζ η θ, κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ ν, σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ β δ, πρὸς τὴν ζ θ. εἰ γὰρ μὴ, ἕξει πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ε ζ η θ ν, κώνου στερεὸν, ἢ τριπλασίονα, ἢ πρὸς μεῖζον. Ἐχέτω πρότερον πρὸς ἔλαττον τὸ ξ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ε ζ η θ, κύκλον τετράγωνον τὸ ε ζ η θ, καὶ τοῦτο μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ε ζ η θ, κύκλου. καὶ ἀνεστάθω ἀπὸ τοῦ ε ζ η θ, τετραγώνου πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ, καὶ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου. Τετμήσθωσαν δὴ αἱ ε ζ, ζ η, η θ, θ ε, περιφέρειαι δίχα, κατὰ τὰ ο, π, ρ, σ, σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ε ο, ο ζ, ζ π, π η, η ρ, ρ θ, θ σ, σ ε, καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ε ο ζ, ζ π η, η ρ θ, π σ ε, μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ε ζ η θ, κύκλου. καὶ ἀνεστάθω ἐφ' ἑκάστου τῶν ε ο ζ, ζ π η, η ρ θ, θ σ ε, τριγώνων πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ, καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων, μείζων ἐστὶν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. Τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνῦντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἐχούσας τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ ε ζ η θ ν, κῶνος τοῦ ξ, στερεοῦ. Λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ε ο, ο ζ, ζ π, π η, η ρ, ρ θ, θ σ, σ ε, λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ε ο ζ π η ρ θ σ, πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ ν, σημεῖον, μείζων ἐστὶ τοῦ ξ, στερεοῦ. Ἐγγεγράφθω εἰς τὸν α β γ δ, τῷ ε ο ζ π η ρ θ σ, πολυγ: ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως

Eucl. Lib. 12. Fig. 17.



ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ ατβυγφδχ. καὶ ἀνεστάθω ἀπ' αὐτοῦ πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ. καὶ τῶν μὲν περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ατβυγφδχ, πολύγων: κορυφὴ δὲ τὸ λ, σημεῖον, ἓν τρίγωνον ἔστω τὸ λβτ, τῶν δὲ περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ εοζπρηθσ, πολύγ: κορυφὴ δὲ τὸ ν, σημεῖον, ἓν τρίγωνον ἔστω τὸ νζο, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κτ, μο. καὶ ἐπεὶ ὅμοιός ἐστιν ὁ αβγδλ, κῶνος τῷ εζηθν, κώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν ζθ, οὕτως ὁ κλ, ἄξων πρὸς τὸν μν, ἄξονα, ὡς δὲ ἡ βδ, πρὸς τὴν ζθ, οὕτως ἡ βκ, πρὸς τὴν ζμ, καὶ ὡς ἄρα ἡ βκ, πρὸς τὴν ζμ, οὕτως ἡ κλ, πρὸς τὴν μν, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ βκ, πρὸς τὴν κλ, οὕτως ἡ ζμ, πρὸς τὴν μν, καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ βκλ, ζμν, ἴσαι, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ βκλ, ζμν, αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν. ὅμοιον ἄρα τὸ βκλ, τρίγων: τῷ ζμν, τριγών: πάλιν ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ βκ, πρὸς τὴν κτ, οὕτως ἡ ζμ, πρὸς τὴν μο, καὶ περὶ ἴσας γωνίας, τὰς ὑπὸ βκτ, ζμο. ἐπειδήπερ ὃ μέρος ἐστὶν ἡ ὑπὸ βκτ, τῶν πρὸς τῷ κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ζμο, γωνία τῶν πρὸς τῷ μ, κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν. ἐπεὶ οὖν περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν. ὅμοιον ἄρα τὸ βκτ, τρίγων: τῷ ζμο, τριγ: πάλιν ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς ἡ βκ, πρὸς τὴν κλ, οὕτως ἡ ζμ, πρὸς τὴν μν, ἴση δὲ ἡ μὲν βκ, τῇ κτ, ἡ δὲ ζμ, τῇ μο, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ κτ, πρὸς τὴν κλ, οὕτως ἡ μο, πρὸς τὴν μν, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τκλ, ομν, (ὀρθαὶ γὰρ) αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν. ὅμοιον ἄρα τὸ λκτ, τρίγ: τῷ νμο, τριγ: καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν βκλ, ζμν, τριγώνων, ἔστιν ὡς ἡ λβ, πρὸς τὴν βκ, οὕτως ἡ νζ, πρὸς τὴν ζμ. διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν βκτ, ζμο, ἔστιν ὡς ἡ κβ, πρὸς τὴν βτ, οὕτως ἡ μζ, πρὸς τὴν ζο, δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ βλ, πρὸς τὴν βτ, οὕτως ἡ νζ, πρὸς τὴν ζο. πάλιν ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν λτκ, νομ, τριγ: ἔστιν ὡς ἡ λτ, πρὸς τὴν τκ, ἡ νο, πρὸς τὴν ομ. διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν κβτ, ομζ, τριγ: ἔστιν ὡς ἡ κτ, πρὸς τὴν τβ, οὕτως ἡ μο, πρὸς τὴν οζ, δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ λτ, πρὸς τὴν τβ, οὕτως ἡ νο, πρὸς τὴν οζ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ λβ, πρὸς τὴν βτ, οὕτως ἡ νζ, πρὸς τὴν ζο. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ τλ, πρὸς τὴν βτ, οὕτως ἡ νο, πρὸς τὴν οζ, τῶν λτβ, νοζ, ἄρα τριγών: ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί, ἰσογώνια ἄρα ἐστὶ τὰ λτβ, νοζ, τρίγ: ὥστε καὶ ὅμοια, καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ βκτ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ λ, σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ζμο, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ ν, σημεῖον, ὑπὸ γὰρ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται, ἴσων τὸ πλῆθος. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες, καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, ἡ

Eucl. Lib. 12. Fig. 18.



ἄρα

ἄρα βκτλ, πυραμὶς, πρὸς τὴν ζμον, πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βκ, πρὸς τὴν ζμ. ὁμοίως δὴ ἐπιζευγνύντες ἀπὸ τῶν α, χ, δ, φ, γ, υ, εὐθείας ἐπὶ τὸ κ, καὶ ἀπὸ τῶν ε, σ, θ, ρ, η, π, ἐπὶ τὸ μ, καὶ ἀνιστάντες ἐπὶ τῶν τριγώνων πυραμίδας τὰς αὐτὰς κορυφὰς ἐχούσας τοῖς κώνοις. δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὁμοταγῶν πυραμίδων πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἕξει, ἤπερ ἡ βκ, ὁμόλογος πλευρά, πρὸς τὴν ζμ, ὁμόλογον πλευρ: τουτέστιν ἤπερ ἡ βδ, πρὸς τὴν ζθ. ἀλλ' ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βκτλ, πυραμὶς πρὸς τὴν ζμον, πυραμ: οὕτως ἡ ὅλη πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ ατβυγφδχ, πολύγ: κορυφὴ δὲ τὸ λ, σημεῖον, πρὸς τὴν ὅλην πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ εοζπηρθσ, κορυφὴ δὲ τὸ ν, σημεῖον. ὥστε καὶ ἡ ὅλη πυραμὶς πρὸς τὴν ὅλην πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βδ, πρὸς τὴν ζθ. ὑπόκειται δὲ ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ αβγδ, κύκλος κορυφὴ δὲ τὸ λ, σημεῖον, πρὸς τὸ ξ, στερ: τριπλασίονα λόγον ἔχων, ἤπερ ἡ βδ, πρὸς τὴν ζθ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ αβγδλ, κῶνος, πρὸς τὸ ξ, στερ: οὕτως ἡ ὅλη πυραμὶς ατβυγφδχλ, πρὸς τὴν ὅλην πυραμίδα εοζπηρθσν, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ αβγδλ, κῶνος, πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ ατβυγφδχλ, πυραμίδα, οὕτως τὸ ξ, στερεὸν πρὸς τὴν εοζπηρθσν, πυραμίδα, μείζων δὲ ὁ εἰρημένος κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος, ἐμπεριέχει γὰρ αὐτήν, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ξ, στερ: τῆς εοζπηρθσν, πυραμίδος, ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἀδύνατον, οὐκ ἄρα ὁ αβγδλ, κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ εζηθν, κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βδ, πρὸς τὴν ζθ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὁ εζηθν, κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αβγδλ, κώνου στερεὸν, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ζθ, πρὸς τὴν βδ. Λέγω, ὅτι ὁ αβγδλ, κῶνος οὐδὲ πρὸς μεῖζόν τι τοῦ εζθην, κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βδ, πρὸς τὴν ζθ. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω, ἐχέτω δηλονότι πρότερον ὁ αβγδλ, κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ εζηθν, κώνου, τὸ ξ, τριπλασίονα λόγον, ἀνάπαλιν ἄρα τὸ ξ, στερεὸν πρὸς τὸν αβγδλ, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ζθ, πρὸς τὴν βδ, ὥστε ὡς τὸ ξ, στερεὸν πρὸς τὸν αβγδλ, κῶνον, οὕτως ὁ εζηθν, κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αβγδλ, κώνου στερεὸν, καὶ ὁ εζηθν, κῶνος ἄρα πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αβγδλ, κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ζθ, πρὸς τὴν βδ, ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ αβγδλ, κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ εζηθν, κώνου, ἤπερ ἡ ζθ, πρὸς τὴν βδ, τριπλασίονα λόγον ἔχει. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττόν τι. ὁ αβγδλ, ἄρα κῶνος πρὸς τὸν εζηθν, κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βδ, πρὸς τὴν ζθ. ὡς δὲ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον· τριπλ: γὰρ ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου, ὁ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῷ κώνῳ, καὶ ἰσοϋψὴς αὐτῷ. ἐδείχθη γάρ, ἐν τῇ ι: τοῦ παρόντος, πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ, καὶ ὕψος ἴσον, καὶ ὁ κύλινδρος ἄρα πρὸς τὸν κύλινδρον τριπλασίονα

λόγον

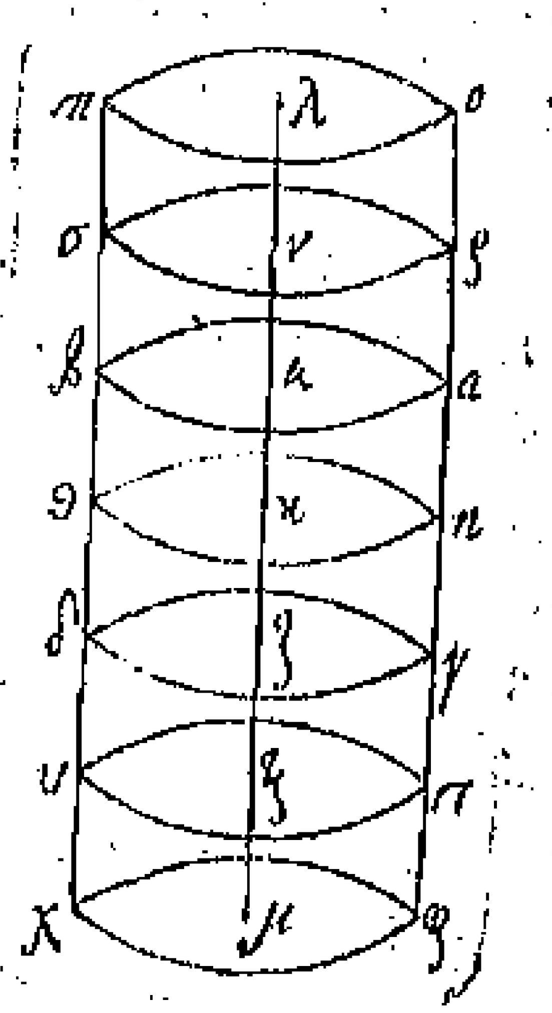
λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ β δ, πρὸς τὴν ζ θ. Οἱ ἄρα ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΓ': Θεώρημα.

Ε'ὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα.

Κύλινδρος γὰρ ὁ α δ, ἐπιπέδῳ τῷ η θ, τετμήσθω, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς α β, γ δ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ε ζ, ἄξονι κατὰ τὸ κ, σημεῖον. Λέγω, ὅτι ὡς ὁ β η, κύλινδρος πρὸς τὸν η δ, κύλιν: οὕτως ὁ ε κ, ἄξων πρὸς τὸν κ ζ, ἄξονα. Ε'κβεβλήσθω ὁ ε ζ, ἄξων ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ τὰ λ, μ, σημεῖα, καὶ ἐκκείσθωσαν τῷ μὲν ε κ, ἄξονι ἴσοι ὁσοιδηποτοῦν οἱ ε ν, ν λ, τῷ δὲ κ ζ, ἴσοι ὁσοιδηποτοῦν οἱ ζ ξ, ξ μ. καὶ διήχθωσαν διὰ τῶν λ, ν, ξ, μ, σημείων, ἐπίπεδα παράλληλα τοῖς α β, γ δ. καὶ νενοήσθωσαν ἐν τοῖς διὰ τῶν λ, ν, ξ, μ, ἐπιπέδοις περὶ τὰ κέντρα τὰ λ, ν, ξ, μ, κύκλοι, οἱ ο π, ρ σ, τ υ, φ χ, ἴσοι τοῖς α β, γ δ. καὶ νενοήσθωσαν κύλινδροι οἱ π ρ, ρ β, δ τ, τ χ. καὶ ἐπεὶ οἱ λ ν, ν ε, ε κ, ἄξονες, ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, καὶ κατὰ τὴν ια: ἄρα τοῦ παρόντ: οἱ π ρ, ρ β, β η, κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ὡς αἱ βάσεις, ἴσαι δέ εἰσιν αἱ βάσεις, ἴσοι ἄρα καὶ οἱ π ρ, ρ β, β η, κύλινδροι. ἐπεὶ οὖν οἱ λ ν, ν ε, ε κ, ἄξονες ἴσοι ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ π ρ, ρ β, β η, κύλινδροι ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ν λ, ν ε, ε κ, τῷ πλήθει τῶν π ρ, ρ β, β η, ὁσαπλασίων ἄρα ὁ κ λ, ἄξων τοῦ ε κ, ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἔσται καὶ ὁ π η, κύλινδρος τοῦ β η, κυλίνδρου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ὁ μ κ, ἄξων τοῦ κ ζ, ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἐστὶν καὶ ὁ χ η, κύλινδρος τοῦ η δ, κυλιν: καὶ εἰ μὲν ἴσος ἐστὶν ὁ κ λ, ἄξων τῷ κ μ, ἄξονι, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ π η, κυλιν: τῷ χ η, κυλιν: εἰ δὲ μείζων ὁ ἄξων τοῦ ἄξονος, καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ κυλίνδρου. καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, ἀξόνων μὲν τῶν ε κ, κ ζ, κυλίνδρων δὲ τῶν β η, η δ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια, τοῦ μὲν ε κ, ἄξονος, καὶ τοῦ β η, κυλίνδρου, ὅ, τε κ λ, ἄξων καὶ ὁ π η, κύλινδρος, τοῦ δὲ κ ζ, ἄξονος καὶ η δ, κυλίνδρου, ὅ, τε κ μ, ἄξων, καὶ ὁ η χ, κυλιν: καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ὁ κ λ, ἄξων τοῦ κ μ, ἄξονος, ὑπερέχει καὶ ὁ π η, κυλιν: τοῦ η χ, κυλινδρ: καὶ εἰ ἴσος, ἴσος, καὶ εἰ ἐλάττων, ἐλάττων. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ε κ, ἄξων πρὸς τὸν κ ζ, ἄξονα, οὕτως ὁ β η, κυλιν: πρὸς τὸν η δ, κυλινδ: κατὰ τὸν ε: ὅρον τοῦ ε: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 12. Fig. 19.



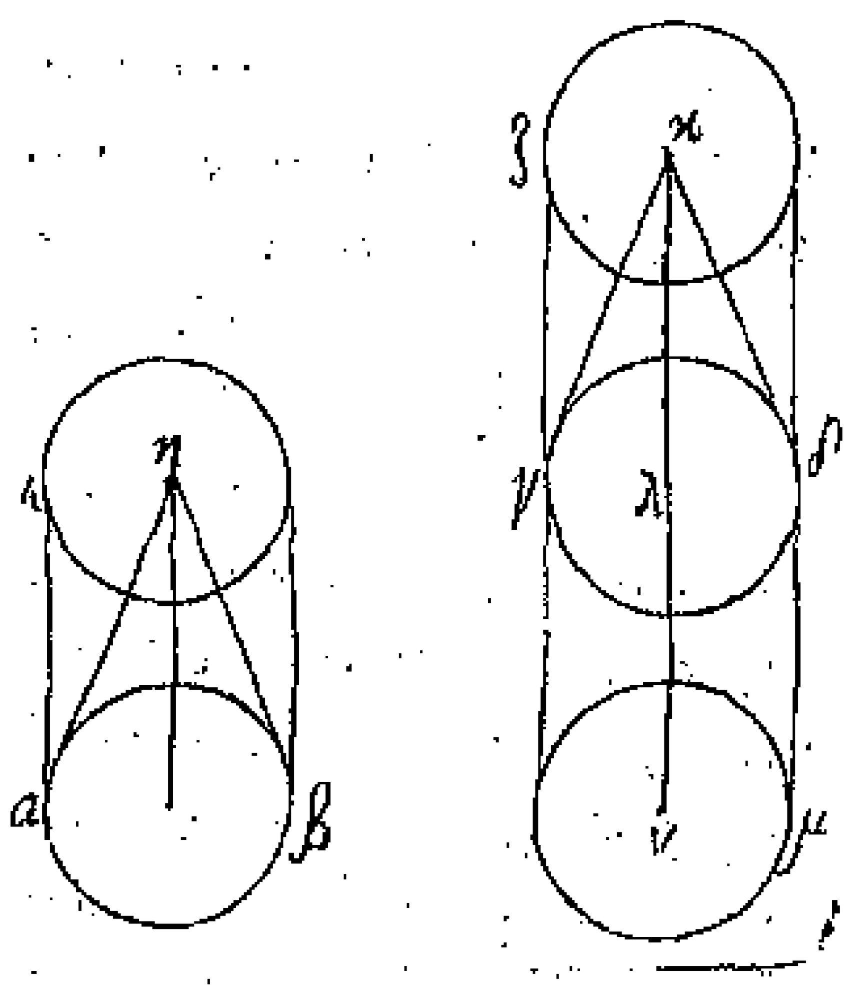
Πρό-

Πρότασις ΙΔ': Θεώρημα.

Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.

Ε'στωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν α β, γ δ, κύλινδροι οἱ ζ δ, ε β. Λέγω, ὅτι ὡς ὁ ε β, κυλινδ: πρὸς τὸν ζ δ, κυλιν: οὕτως ὁ η θ, ἄξων πρὸς τὸν κ λ, ἄξονα. Ε'κβεβλήσθω γὰρ ὁ κ λ, ἄξων ἐπὶ τὸ ν, σημεῖον, καὶ κείσθω τῷ η θ, ἄξονι ἴσος ὁ λ ν, ἄξων. καὶ περὶ ἄξονα τὸν λ ν, κύλινδρος νενοήσθω ὁ γ μ. Ε'πεὶ οὖν οἱ ε β, γ μ, κύλινδροι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶ, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις, ἴσαι δέ εἰσιν αἱ βάσεις ἀλλήλαις, ἴσοι ἄρα καὶ οἱ ε β, γ μ, κυλιν: ἀλλήλοις. καὶ ἐπεὶ κύλινδρος ὁ ζ μ, ἐπιπ: τέτμηται τῷ γ δ, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδ: ἔστιν ἄρα, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ὡς ὁ γ μ, κυλινδ: πρὸς τὸν ζ δ, κύλινδρον, οὕτως ὁ λ ν, ἄξων, πρὸς τὸν κ λ, ἄξονα. ἴσος δέ ἐστιν ὁ μὲν γ μ, κυλιν: τῷ ε β, κυλιν: ὁ δὲ λ ν, ἄξων τῷ η θ, ἄξονι. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ε β, κυλιν: πρὸς τὸν ζ δ, κυλιν: οὕτως ὁ η θ, ἄξων πρὸς τὸν κ λ, ἄξονα. ὡς δὲ ὁ ε β, κυλινδ: πρὸς τὸν ζ δ, κυλιν: οὕτως ὁ α β η, κῶνος πρὸς τὸν γ δ κ, κῶνον, τριπλάσιοι γὰρ οἱ κυλιν: τῶν κώνων, κατὰ τὴν ι: τοῦ παρόντ: καὶ ὡς ἄρα ὁ η θ, ἄξων πρὸς τὸν κ λ, ἄξονα, οὕτως ὁ α β η, κῶνος πρὸς τὸν γ δ κ, κῶνον, καὶ ὁ ε β, κυλιν: πρὸς τὸν δ ζ, κυλιν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 12. Fig. 20.



Πρότασις ΙΕ': Θεώρημα.

Τῶν ἴσων κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσὶν ἐκεῖνοι.

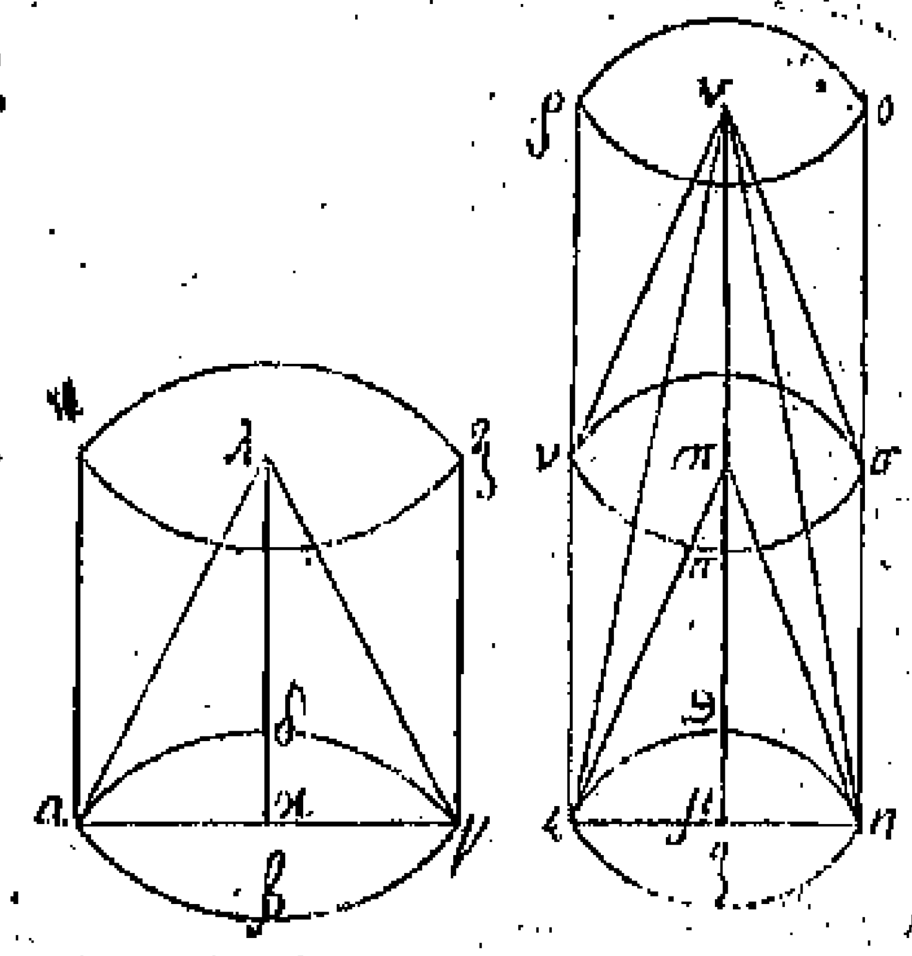
Ε'στωσαν ἴσοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ α β γ δ, ε ζ η θ, κύκλοι, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ α γ, ε η, ἄξονες δὲ οἱ κ λ, μ ν, οἵτινες καὶ ὕψη εἰσὶ τῶν κώνων, ἢ κυλίνδρων. καὶ συμπεπληρώσθωσαν οἱ α ξ, ε ο, κύλινδροι. Λέγω, ὅτι τῶν α ξ, ε ο, κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, τουτέστιν ὡς ἡ α β γ δ, βάσις πρὸς τὴν ε ζ η θ, βάσιν, οὕτως τὸ μ ν, ὕψος πρὸς τὸ λ κ, ὕψος. τὸ γὰρ λ κ, ὕψος τῷ μ ν, ὕψει, ἤτοι ἴσον ἐστὶν, ἢ οὔ. ἔστω πρότερον ἴσον. ἔστιν ἄρα καὶ ὁ α ξ, κυλιν: τῷ ε ο, κυλιν: ἴσος, καὶ κατὰ τὴν

ια:

ιά: τοῦ παρ: οἱ κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις, ἴση ἄρα ἡ αβγδ, βάσις τῇ εζηθ, βάσει, ὥστε καὶ ἀντιπεπόνθασιν. ὡς ἡ αβγδ, βάσις πρὸς τὴν εζηθ, βάσιν, οὕτω τὸ μν, ὕψος πρὸς τὸ κλ, ὕψος.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω τὸ κλ, ὕψος τῷ μν, ἴσον, ἀλλὰ μεῖζον. Ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ μν, ὕψους τῷ κλ, ἴσον τὸ πμ. καὶ κείσθω τῷ κλ, ἴσον τὸ πμ. καὶ διὰ τοῦ π, σημείου, τεμνέσθω ὁ εο, κύλινδρος τῷ τυσ, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τῶν εζηθ, ρο, κύκλων. καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τοῦ εζηθ, κύκλου, ὕψους δὲ τοῦ πμ, κυλίν: νενοήσθω ὁ εσ. καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ αξ, κύλιν: τῷ εο, κυλίν: ἄλλος δέ τις ὁ εσ, κύλιν: ἔστιν ἄρα ὡς ὁ αξ, κύλιν: πρὸς τὸν εσ, κύλιν: οὕτως ὁ εο, κύλιν: πρὸς τὸν εσ, κύλιν: ἀλλ᾽ ὡς μὲν ὁ αξ, κύλιν: πρὸς τὸν εσ, οὕτως ἡ αβγδ, βάσις πρὸς τὴν εζηθ, βάσιν, ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν οἱ αξ, εσ, κύλιν: ὡς δὲ εο, κύλιν: πρὸς τὸν εσ, οὕτω τὸ μν, ὕψος πρὸς τὸ πμ, ὕψος, ὁ γὰρ εο, κύλινδρος ἐπιπέδῳ τέτμηται τῷ υτσ, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβγδ, βάσις πρὸς τὴν εζηθ, βάσιν, οὕτω τὸ μν, ὕψος πρὸς τὸ πμ, ὕψος, ἴσον δὲ τὸ πμ, ὕψος τῷ κλ, ὕψει, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβγδ, βάσις πρὸς τὴν εζηθ, βάσιν, οὕτω τὸ μν, ὕψος πρὸς τὸ κλ, ὕψος. τῶν ἄρα αξ, εο, κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. Ἀλλὰ δὴ τῶν αξ, εο, κυλίνδρων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ αβγδ, βάσις πρὸς τὴν εζηθ, βάσιν, οὕτω τὸ μν, ὕψος πρὸς τὸ κλ, ὕψος. Λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ αξ, κύλινδρος τῷ εο, κυλίν: τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ αβγδ, βάσις πρὸς τὴν εζηθ, βάσιν, οὕτω τὸ μν, ὕψος πρὸς τὸ κλ, ὕψος, ἴσον δὲ τὸ κλ, τῷ μπ, ὕψει, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν, οὕτω τὸ μν, ὕψος πρὸς τὸ μπ, ὕψος. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ῥηθεῖσα βάσις πρὸς ῥηθεῖσαν βάσιν, οὕτω καὶ ὁ αξ, κύλινδρος πρὸς τὸν εσ, κύλινδρον. ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν, ὡς δὲ τὸ μν, ὕψος πρὸς τὸ μπ, οὕτως ὁ εο, κύλιν: πρὸς τὸν εσ, κύλιν: ἔστιν ἄρα ὡς ὁ αξ, κύλιν: πρὸς τὸν εσ, κύλιν: οὕτως ὁ εο, πρὸς τὸν αὐτὸν εσ, ἴσος ἄρα ὁ αξ, κύλιν: τῷ εσ, κυλίνδρῳ. ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν κώνων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 12. Fig. 21.

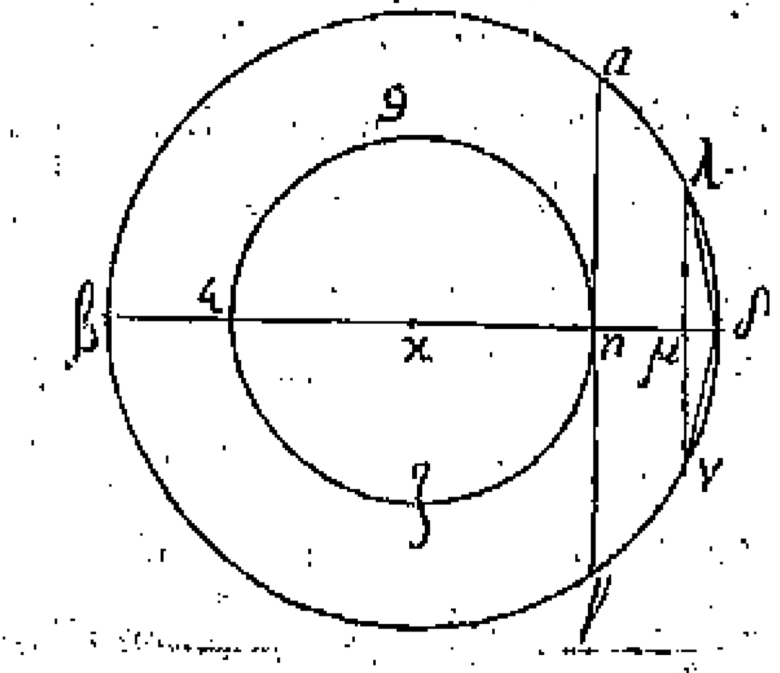


Πρότασις Ις΄: Πρόβλημα.

Δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων, εἰς τὸν μείζονα κύκλον, πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο κύκλοι, οἱ αβγδ, εζηθ, περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ κ. Δεῖ δὴ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν αβγδ, πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τοῦ εζηθ, κύκλου. Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ κ, κέντρου εὐθεῖα ἡ βδ, καὶ ἀπὸ τοῦ η, σημείου τῇ βδ, πρὸς ὀρθὰς ἡ αη, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ γ. ἡ αγ, ἄρα ἐφάπτεται τοῦ εζηθ, κύκλου. Τέμνοντες δὴ τὴν βαδ, περιφέρειαν δίχα, καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομεν περιφέρειαν ἐλάττονα τῆς αδ. Λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ λδ. καὶ ἀπὸ τοῦ λ, ἐπὶ τὴν βδ, κάθετος ἤχθω ἡ λμ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ ν. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ λδ, δν, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ λδ, τῇ δν. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ λν, τῇ αγ, ἡ δὲ αγ, ἐφάπτεται τοῦ εζηθ, κύκλου, ἡ λν, ἄρα οὐκ ἐφάπτεται τοῦ αὐτοῦ κύκλου, πολλῷ ἄρα αἱ δλ, δν, οὐκ ἐφάπτονται τοῦ εζηθ, κύκλου. ἐὰν τῇ λδ, εὐθείᾳ ἴσας κατὰ τὸ συνεχὲς ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν αβγδ, κύκλον, ἐγγραφήσεται εἰς αὐτὸν πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον, μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάττονος κύκλου, τοῦ εζηθ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 12. Fig. 22.

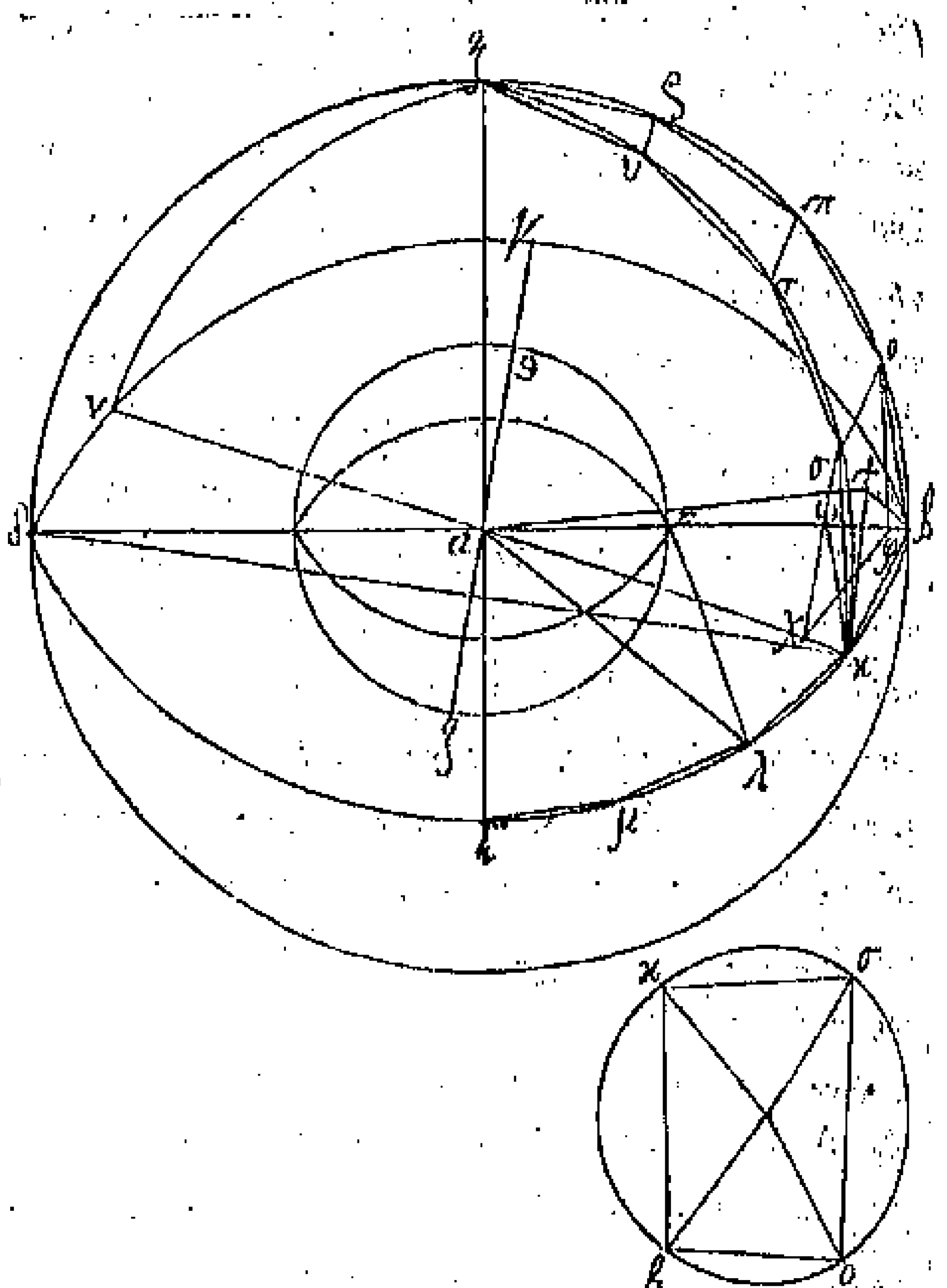


Πρότασις ΙΖ΄: Πρόβλημα.

Δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν, εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύγωνον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Νενοήσθωσαν δύο σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ α. δεῖ δὴ εἰς τὴν μείζονα στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάττονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν. Τετμήσθωσαν αἱ σφαῖραι ἐπιπέδῳ τινὶ διὰ τοῦ κέντρου. καὶ κατὰ τὸν ιδ΄: ὅρον τοῦ παρελθ: αἱ δὴ τομαὶ αὐτῶν κύκλοι ἔσονται, ἐπειδήπερ μενούσης τῆς διαμέτρου, καὶ περιφερομένου τοῦ ἡμικυκλίου ἐγένετο ἡ στερεὰ σφαῖρα. ὥστε καθ᾽ οἵας ἂν θέσεως ἐπινοήσωμεν τὸ ἡμικύκλιον, τὸ δι᾽ αὐτοῦ ἐκβαλλόμενον ἐπίπεδον, ποιήσει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας κύκλον, καὶ φανερὸν, ὅτι καὶ μέγιστον. ἐπειδήπερ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας, ἥτις ἐστὶ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου διάμετρος, δηλαδὴ καὶ τοῦ κύκλου, κατὰ τὴν ιε΄: τοῦ γ΄: μείζων ἐστὶ πασῶν τῶν εἰς τὸν κύκλον ἢ τὴν σφαῖραν διαγομένων εὐθειῶν. ἔστω δὴ ἐν μὲν τῇ μείζονι σφαίρᾳ κύκλος ὁ

Eucl. Lib. 12. Fig. 23.



β γ δ ε, ἐν δὲ τῇ ἐλάσσονι ὁ ζ η θ ι, καὶ ἤχθωσαν αὐτῶν δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ β δ, γ ε· καὶ δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων τῶν β γ δ ε, ζ η θ ι, εἰς τὸν μείζονα τὸν β γ δ ε, πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγεγράφθω, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου, τοῦ ζ η θ ι, οὗ πλευραὶ ἔστωσαν ἐν τῷ β ε, τεταρτημορίῳ αἱ β κ, κ λ, λ μ, μ ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ κ α, διήχθω ἐπὶ τὸ ν· καὶ ἀνεστάθω ἀπὸ τοῦ α, σημείου τῷ τοῦ β γ δ ε, κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ α ξ, καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὸ ξ· καὶ διὰ τῆς α ξ, καὶ ἑκατέρας τῶν β δ, κ ν, ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω, ποιήσουσι δὲ διὰ τὰ εἰρημένα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας μεγίστους κύκλους· ποιείτωσαν, ὧν τὰ ἡμικύκλια ἔστωσαν ἐπὶ τῶν β δ, κ ν, διαμέτρων, τὰ β ξ δ, κ ξ ν. καὶ ἐπεὶ ἡ ξ α, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ β γ δ ε, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πάντα ἄρα κατὰ τὴν ιη΄: τοῦ παρελθ: τὰ διὰ τῆς α ξ, ἐπίπεδα, ὀρθά εἰσι πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπ: ὥστε καὶ τὰ β ξ δ, κ ξ ν, ἡμικύκλια ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ β γ δ ε, κύκλου ἐπίπεδον. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ ξ δ ε, κ ξ ν, ἡμικύκλια, ἐπὶ ἴσων γάρ εἰσι διαμέτρων τῶν β δ, κ ν, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ β ε, β ξ, τεταρτημόρια ἀλλήλοις, ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ β ε, τεταρτημορίῳ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου, τοσαῦταί εἰσι καὶ ἐν τοῖς β ξ, κ ξ, τεταρτημορίοις, ἴσαι ταῖς β κ, κ λ, λ μ, μ ε, εὐθείαις. ἐγγεγράφθωσαν καὶ ἔστωσαν αἱ β ο, ο π, π ρ, ρ ξ, κ σ, σ τ, τ υ, υ ξ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ σ ο, τ π, υ ρ, καὶ ἀπὸ τῶν ο, σ, ἐπὶ τὸ τοῦ β γ δ ε, κύκλου ἐπίπεδον κάθετοι ἤχθωσαν· πεσοῦνται δὴ κατὰ τὴν λη΄: τοῦ παρελθ: ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων, τὰς β δ, κ ν, ἐπειδήπερ καὶ τὰ β ξ δ, κ ξ ν, ἐπίπεδα, ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ β γ δ ε, κύκλου ἐπίπεδον. πιπτέτωσαν, καὶ ἔστωσαν αἱ ο φ, σ χ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ φ χ. καὶ ἐπεὶ ἐν ἴσοις ἡμικυ-

κλίοις

κλίοις τοῖς β ξ δ, κ ξ ν, ἴσαι ἀπειλημμέναι εἰσὶν, αἱ β ο, κ σ, καὶ κάθετοι ἠγμέναι εἰσὶν αἱ ο φ, σ χ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ο φ, τῇ σ χ, ἡ δὲ β φ, τῇ κ χ, ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ β α, ὅλῃ τῇ κ α, ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ φ α, λοιπῇ τῇ χ α, ἐστὶν ἴση. ἄρα καὶ ὡς ἡ β φ, πρὸς τὴν φ α, οὕτως ἡ κ χ, πρὸς τὴν χ α, καὶ κατὰ τὴν β΄: ἄρα τοῦ ϛ΄: παράλληλός ἐστιν ἡ φ χ, τῇ κ β. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ο φ, σ χ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ β γ δ ε, κύκλου ἐπίπεδον, παράλληλος ἄρα ἐστὶ, κατὰ τὴν ϛ΄: τοῦ ια: στερεοῦ ἡ ο φ, τῇ σ χ, ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση, αἱ φ χ, σ ο, ἄρα ἴσαι εἰσὶ καὶ παράλληλοι· καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ χ φ, τῇ σ ο, ἀλλ᾽ ἡ χ φ, τῇ κ β, καὶ κατὰ τὴν θ΄: τοῦ παρελ: ἄρα καὶ ἡ σ ο, τῇ κ β, παράλληλός ἐστι. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ β ο, κ σ, τὸ κ β σ ο, ἄρα τετράπλευρον· καὶ κατὰ τὴν ζ΄: τοῦ αὐτοῦ ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἐπειδήπερ ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, καὶ ἐφ᾽ ἑκατέρας αὐτῶν ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ἑκατέρα τῶν σ ο π τ, τ π ρ υ, τετραπλεύρων ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἔστι δὲ κατὰ τὴν β΄: τοῦ αὐτοῦ, καὶ τὸ υ ρ ξ, τρίγωνον ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ. ἐὰν δὴ νοήσωμεν ἀπὸ τῶν ο, σ, π, τ, ρ, υ, σημείων ἐπὶ τὸ α, ἐπιζευγνυμένας εὐθείας, συσταθήσεταί τι σχῆμα στερεὸν πολύεδρον, μεταξὺ τῶν β ξ, κ ξ, περιφερειῶν, ἐκ πυραμίδων συγκείμενον, ὧν βάσεις μὲν τὰ κ β ο σ, σ ο π τ, τ π ρ υ, τετράπλευρα, καὶ τὸ υ ρ ξ, τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ α, σημεῖον. ἐὰν δὴ καὶ ἐφ᾽ ἑκάστης τῶν κ λ, λ μ, μ ε, πλευρῶν, καθάπερ ἐπὶ τῆς κ β, τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, καὶ ἔτι ἐπὶ τῶν λοιπῶν τριῶν τεταρτημορίων, καὶ ἐπὶ τοῦ λοιποῦ ἡμισφαιρίου, συσταθήσεταί τι σχῆμα πολύεδρον, ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν, ἐκ πυραμίδων συγκείμενον, ὧν βάσεις τὰ εἰρημένα τετράπλευρα, καὶ τὸ υ ρ ξ, τρίγωνον, καὶ τὰ ὁμοταγῆ αὐτοῖς, κορυφὴ δὲ τὸ α, σημεῖον. Λέγω, ὅτι τὸ εἰρημένον πολύεδρον οὐκ ἐφάπτεται τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐφ᾽ ἧς ἐστιν ὁ ζ η θ ι, κύκλος. καὶ κατὰ τὴν ια΄: τοῦ αὐτοῦ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ α, σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ κ β ο σ, τετραπλεύρου ἐπίπεδον κάθετος ἡ α ψ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ ψ, σημεῖον. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ β ψ, ψ κ. καὶ ἐπεὶ ἡ α ψ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ κ β ο σ, τετραπλεύρου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα, κατὰ τὸν γ΄: ὅρον τοῦ ια: τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ τετραπλεύρου ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ α ψ, καὶ πρὸς ἑκατέραν ἄρα τῶν β ψ, ψ κ, ὀρθή ἐστιν ἡ αὐτή. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ α β, τῇ α κ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς α β, τῷ ἀπὸ τῆς α κ, καὶ κατὰ τὴν μζ΄: τοῦ α: τῷ μὲν ἀπὸ τῆς α β, ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν α ψ, ψ β, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ ψ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς α κ, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν α ψ, ψ κ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν α ψ, ψ β, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν α ψ, ψ κ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς α ψ, λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ψ β, λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ψ κ, ἴσον ἐστιν, ἴση ἡ ψ β, τῇ ψ κ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ ψ, ἐπὶ τὰ ο σ, ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν β ψ, ψ κ, ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ ψ, καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν ψ β, ψ κ, γραφόμενος κύκλος, ἥξει καὶ διὰ τῶν ο, σ, καὶ ἔσται ἐν κύκλῳ τὸ κ β ο σ, τετράπλευρον, καὶ

ἐπεὶ

ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ κβ, τῆς χφ, ἴση δὲ ἡ χφ, τῇ σο, μείζων ἄρα ἡ βκ, καὶ τῆς σο, ἴση δὲ ἡ κβ, ἑκατέρᾳ τῶν κσ, βο, καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν κσ, βο, τῆς σο, μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ κβοσ, καὶ ἴσαι αἱ κβ, βο, κσ, καὶ ἐλάσσων ἡ οσ, καὶ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐστὶν ἡ βψ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς κβ, τοῦ ἀπὸ τῆς βψ, μείζων ἐστίν, ἢ διπλάσιον. καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ κ, σημείου ἐπὶ τὴν βφδ, κάθετος ἡ κω. καὶ ἐπεὶ ἡ βδ, τῆς δω, ἐλάττων ἐστὶν ἢ διπλῆ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δω, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν δβ, βω, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν δω, ωβ, κατὰ τὴν α': τοῦ ς': ἀναγραφομένου δὴ ἀπὸ τῆς βω, τετραγώνου, καὶ συμπεπληρωμένου τοῦ ἐπὶ τῆς ωδ, παραλληλογράμμου, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν δβ, βω, τοῦ ὑπὸ τῶν δω, ωβ, ἔλαττόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. καὶ ἔτι τῆς κδ, ἐπιζευγνυμένης, τὸ μὲν ὑπὸ τῶν δβ, βω, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βκ, κατὰ τὴν ιζ': τοῦ ς': καὶ γὰρ τὸ β': πόρισμ: τῆς η: τοῦ αὐτοῦ, ἔστιν ὡς ἡ δβ, πρὸς τὴν βκ, οὕτως ἡ κβ, πρὸς τὴν βω, ἡ γὰρ πρὸς τῷ κ, γωνία ἐν ἡμικυκλ: οὖσα, ὀρθή ἐστι, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν δω, ωβ, ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς κω, κατὰ τὸ α: πόρισμ: τῆς αὐτῆς, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς κβ, τοῦ ἀπὸ τῆς κω, ἔλαττόν ἐστιν ἢ διπλάσ: ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς κβ, τοῦ ἀπὸ τῆς βψ, μεῖζόν ἐστιν, ἢ διπλάσ: μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς κω, τοῦ ἀπὸ τῆς βψ, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βα, τῇ κα, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βα, τῷ ἀπὸ τῆς κα, καὶ ἔστι κατὰ τὴν μζ': τοῦ α: τῷ μὲν ἀπὸ τῆς βα, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν βψ, ψα, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς κα, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν κω, ωα, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν βψ, ψα, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν κω, ωα, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς κω, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς βψ, λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ωα, ἔλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ψα, μείζων ἄρα ἡ αψ, τῆς αω, πολλῷ ἄρα ἡ αψ, μείζων ἐστὶ τῆς αη, καὶ ἔστιν ἡ μὲν αψ, ἐπὶ μίαν τοῦ πολυέδρου βάσιν, ἡ δὲ αη, ἐπὶ τὴν τῆς ἐλάττονος σφαίρας ἐπιφάνειαν. ὥστε τὸ πολύεδρον οὐ ψαύσει τῆς ἐλάττονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Ἄλλως.

Δεικτέον δὲ καὶ ἑτέρως προχειρότερον, ὅτι μείζων ἡ αψ, τῆς αη. Ἤχθω ἀπὸ τοῦ η, τῇ αη, πρὸς ὀρθὰς ἡ ηλ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αλ. τέμνοντες δὴ τὴν εβ, περιφέρειαν δίχα, καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομεν τινα περιφέρειαν, ἥτις, ἐστὶν ἐλάσσων τῆς ὑποτεινομένης τοῦ βγδε, κύκλου περιφερείας ὑπὸ τῆς ἴσης τῇ ηλ. λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ κβ, περιφέρεια, ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ κβ, εὐθεῖα τῆς ηλ. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ ἐστὶ τὸ βκσο, τετράπλευρον, καὶ εἰσιν ἴσαι αἱ βο, βκ, κσ, καὶ ἐλάσσων ἡ οσ, ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ βψκ, γωνία, μείζων ἄρα ἡ βκ, τῆς βψ. ἀλλὰ τῆς βκ, ἡ ηλ, πολλῷ ἄρα ἡ ηλ, μείζων τῆς βψ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ηλ, τοῦ ἀπὸ τῆς βψ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αλ, τῇ αβ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αλ, τὸ ἀπὸ τῆς αβ, ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αλ, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν αη, ηλ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς αβ, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν βψ, ψα, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αη, ηλ, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν βψ, ψα, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς βψ, ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ηλ, λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ψα, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αη, μείζων ἄρα ἡ αψ, τῆς αη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟ'.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

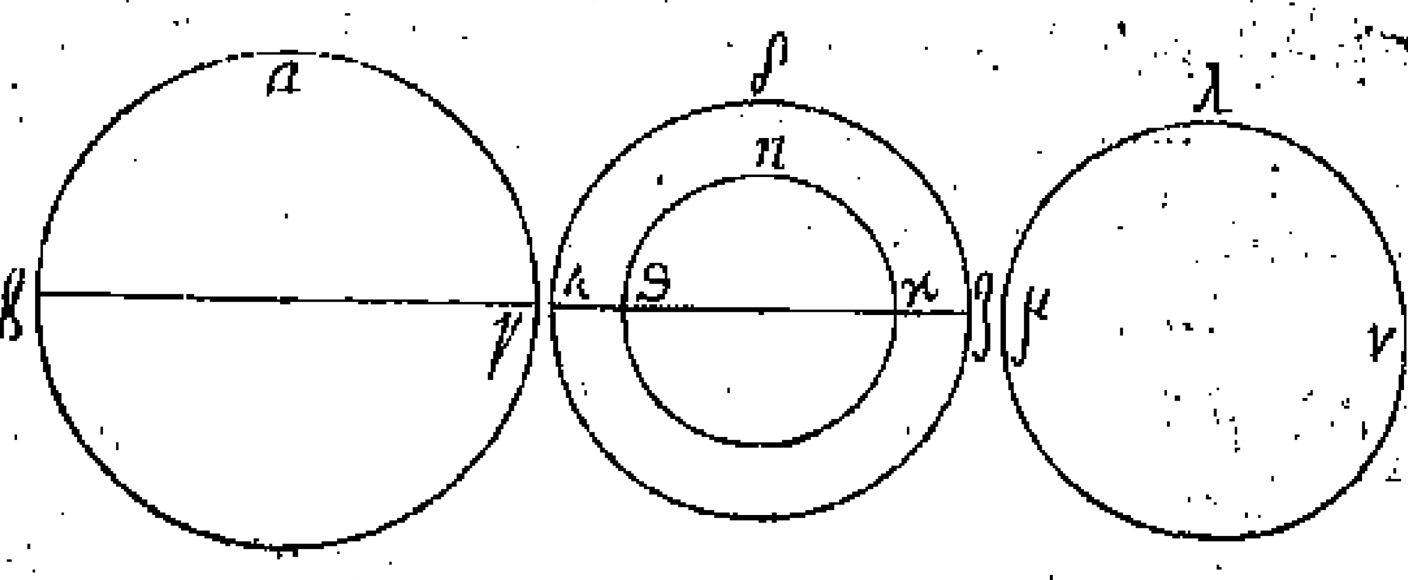
Ἐὰν δὲ καὶ εἰς ἑτέραν σφαῖραν τῷ ἐν τῇ βγδε, σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον ἐγγραφῇ, τὸ ἐν τῇ βγδε, σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τῆς βγδε, σφαίρας διάμετρος, πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον. διαιρεθέντων γὰρ τῶν στερεῶν εἰς τὰς ὁμοπληθεῖς, καὶ ὁμοταγεῖς πυραμίδας, ἔσονται αἱ πυραμίδες ὅμοιαι. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν ἐστι τὸ κβοσ, τετράπλευρον, κορυφὴ δὲ τὸ α, σημεῖον, πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ ὁμοταγῆ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἤπερ ἡ αβ, ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, τῆς περὶ τὸ κέντρον τὸ α, πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κύκλου τῆς ἑτέρας σφαίρας. ὁμοίως δὴ καὶ ἑκάστη πυραμὶς τῶν ἐν τῇ περὶ τὸ κέντρον α, σφαίρᾳ πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα τῶν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ, τριπλασίονα λόγον ἕξει, ἤπερ ἡ αβ, πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας, καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ὥστε ὅλον τὸ ἐν τῇ περὶ τὸ κέντρον τὸ α, στερεὸν πολύεδρον, πρὸς ὅλον τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αβ, πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας, τουτέστιν ἤπερ ἡ βδ, διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον.

Πρότασις ΙΑ': Θεώρημα.

Αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων.

Νενοήσθωσαν σφαῖραι αἱ αβγ, δεζ, διάμετροι δὲ αἱ βγ, εζ. Λέγω, ὅτι ἡ αβγ, σφαῖρα πρὸς τὴν δεζ, σφαῖραν, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ. εἰ γὰρ μή, ἕξει ἄρα ἡ αβγ, σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς δεζ, σφαίρας, τριπλασ: λόγον, ἢ πρὸς μείζονα, ἤπερ ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ. Ἐχέτω δὴ πρότερον πρὸς ἐλάσσονα τὴν ηθκ, καὶ νενοήσθω ἡ δεζ, σφαῖρα τῇ ηθκ, περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν τὴν δεζ, στερεὸν πολύεδρον, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάττονος σφαίρας τῆς ηθκ, κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν. Ἐγγεγράφθω δὲ καὶ εἰς τὴν αβγ, τῷ ἐν τῇ δεζ, σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον, τὸ ἄρα ἐν τῇ αβγ, στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ δεζ, στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ, ἔχει δὲ καὶ ἡ αβγ, σφαῖρα πρὸς τὴν ηθκ, σφαῖραν τριπλασίονα λόγον, ἤπερ ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβγ, σφαῖρα πρὸς τὴν ηθκ, οὕτω τὸ ἐν τῇ αβγ, σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ δεζ, σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον, ἐναλλὰξ ἄρα, ὡς ἡ αβγ, σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν αὐτῇ πολύεδρον, οὕτως ἡ ηθκ, σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν τῇ δεζ, σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον, μείζων δὲ ἡ αβγ, τοῦ ἐν αὐτῇ πολυέδρου, μείζων ἄρα καὶ ἡ θηκ, σφαῖρα τοῦ ἐν τῇ δεζ, σφαίρᾳ πολυέδρου, ἀλλὰ καὶ ἐλάσσων, ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ. οὐκ ἄρα ἡ αβγ, σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς δεζ, σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ βγ, διάμετρος πρὸς τὴν εζ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἡ δεζ, σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς αβγ, τριπλασ: λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ εζ, πρὸς τὴν βγ. λέγω, ὅτι οὐδὲ ἡ αβγ, σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς δεζ, σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐχέτω πρὸς μείζονα τὴν λμν, ἀνάπαλιν ἄρα ἡ λμν, σφαῖρα πρὸς τὴν αβγ, σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ εζ, διάμετρος πρὸς τὴν βγ, διάμετρον, ὡς δὲ ἡ λμν, σφαῖρα πρὸς τὴν αβγ, σφαῖραν, οὕτως ἡ δεζ, σφαῖρα πρὸς ἐλάττονά τινα τῆς αβγ, σφαίρας, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη. ἐπειδήπερ μείζων ἐστὶν ἡ λμν, τῆς δεζ, καὶ ἡ δεζ, ἄρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς αβγ, σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ εζ, πρὸς τὴν βγ. ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ἡ αβγ, σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα, ἀλλ' οὐδὲ πρὸς ἐλάττονα, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ. ἡ αβγ, ἄρα σφαῖρα πρὸς τὴν δεζ, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. lib. 12. Fig. 24.



Τέλος τοῦ Δωδεκάτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

Ἑρ.

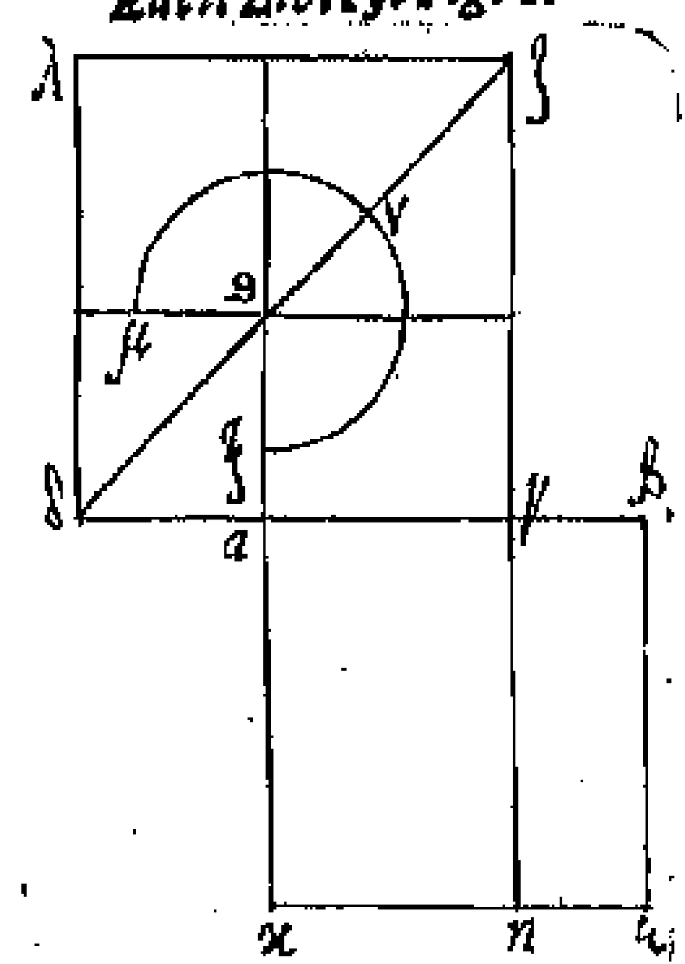
ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ ΤΟΥ ΔΕΚΑΤΟΥ ΤΡΙΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ, ΤΟΥ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΟΥ ΤΡΙΤΟΥ, ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

Πρότασις Α': Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον, καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης, πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ γ, σημεῖον, καὶ ἔσω μεῖζον τμῆμα τὸ αγ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ αγ, εὐθεῖα ἡ αδ, καὶ κείσθω τῆς αβ, ἡμίσεια ἡ αδ. Λέγω, ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς γδ, τοῦ ἀπὸ τῆς αδ. Ἀναγεγράφθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν αβ, γδ, τετράγωνα, τὰ αε, δζ, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ δζ, τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ ζγ, ἐπὶ τὸ η. καὶ ἐπεὶ ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ, σημεῖον. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν αβ, βγ, τὸ γε, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς αγ, τὸ ζθ, ἴσον ἄρα τὸ γε, τῷ ζθ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αβ, τῆς αδ, ἴση δὲ ἡ μὲν βα, τῇ κα, ἡ δὲ αδ, τῇ αθ, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ κα, τῆς αθ, ὡς δὲ ἡ κα, πρὸς τὴν αθ, οὕτω τὸ γκ, πρὸς τὸ γθ, διπλάσιον ἄρα τὸ κγ, τοῦ γθ, εἰσὶ δὲ καὶ τὰ λθ, θγ, διπλάσια τοῦ γθ. ἴσον ἄρα τὸ κγ, τοῖς λθ, γθ, ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ γε, τῷ ζθ, ἴσον, ὅλον ἄρα τὸ αε, τετράγ: ἴσον ἐστὶ τῷ μνξ, γνώμονι. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ βα, τῆς αδ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βα, τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, τουτέστι τὸ αε, τοῦ δθ, ἴσον δὲ τὸ αε, τῷ μνξ, γνώμονι, καὶ ὁ μνξ, γνώμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ δθ, ὅλον ἄρα τὸ δζ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ δθ, καὶ ἔστι τὸ μὲν δζ, τὸ ἀπὸ

Eucl. Lib. 13. Fig. 1.



τῆς

τῆς γδ, τὸ δὲ δθ, τὸ ἀπὸ δα, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς γδ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Σχόλιον, Ἀνάλυσις καὶ Σύνθεσις τί;

Ἀνάλυσις, ἐστὶ λῆψις τοῦ ζητουμένου διὰ τῶν ἀκολούθων, ὡς ὁμολογουμένου, ἐπί τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον.

Σύνθεσις, ἐστὶ λῆψις τοῦ ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολούθων, ἐπὶ τὴν τοῦ ζητουμένου κατάληψιν.

Τοῦ εἰρημένου θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ αγ, καὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς αβ, κείσθω ἴση ἡ αδ. Λέγω, ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς γδ, τοῦ ἀπὸ δα. ἐπεὶ γὰρ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς γδ, τοῦ ἀπὸ τῆς δα, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς γδ, ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν γα, αδ, κατὰ τὴν δ': τοῦ β': μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ τῶν γα, αδ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν γα, αδ, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν γα, αδ, πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δα, διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ τοῦ γα, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν γα, αδ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, ἀλλὰ τὸ μὲν δὶς ὑπὸ τῶν γα, αδ, κατὰ τὴν α': τοῦ ς': ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν βα, αγ, διπλῆ γὰρ ἡ βα, τῆς αδ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς αγ, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, κατὰ τὴν ιζ': τοῦ ς': ἡ γὰρ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, αγ, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, κατὰ τὴν β': τοῦ β': ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν βα, αγ, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, τὸ ἀπὸ τῆς αβ, ἐστί, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αβ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, κατὰ τὴν α': τοῦ ς': διπλῆ γὰρ ἡ αβ, τῆς αδ.

Σύνθεσις, τοῦ αὐτοῦ.

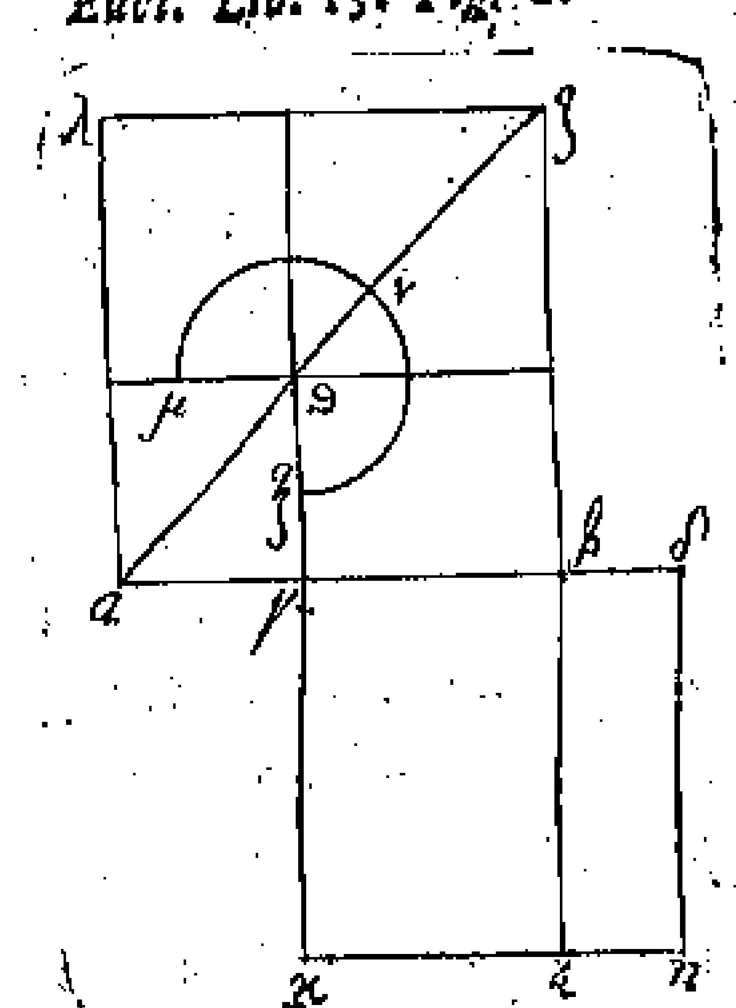
Ἐπεὶ οὖν τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, κατὰ τὴν θ': τοῦ β': ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τὸ ὑπὸ τῶν βα, αγ, ἐστί, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, αγ, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αδ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν βα, αγ, ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αγ, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δα. ὥστε κατὰ τὴν δ': τοῦ β': τὸ ἀπὸ τῶν δα, αγ, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δα, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν δα, αγ, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, τὸ ἀπὸ τῆς γδ, ἐστί, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς γδ, ἐστὶ πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς δα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Β': Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύναται, τῆς διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ αβ, τμήματος ἑαυτῆς τοῦ αγ, πενταπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ αγ, διπλῆ ἔστω ἡ γδ. Λέγω, ὅτι τῆς γδ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ γβ. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀφ' ἑκατέρας τῶν αβ, γδ, τετράγωνα τὰ αζ, γη, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ αζ, τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ ζβ, ἐπὶ τὸ ε. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ αζ, τοῦ αθ, τετραπλάσιος ἄρα ὁ μνξ, γνώμων τοῦ αθ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ δγ, τῆς γα, τετραπλ: ἄρα κατὰ τὸ α': πόρισμ: τῆς κ': τοῦ ς': τὸ ἀπὸ τῆς δγ, τοῦ ἀπὸ τῆς γα, τουτέστι τὸ γη, τοῦ αθ, ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ μνξ, γνώμων τετραπλάσιος τοῦ αθ, ἴσος ἄρα ὁ μνξ, γνώμων τῷ γη, καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ δγ, τῆς αγ, ἴση δὲ ἡ μὲν δγ, τῇ γκ, ἡ δὲ αγ, τῇ γθ, διπλῆ ἄρα ἡ κγ, τῆς γθ, διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ κβ, τοῦ βθ, εἰσὶ δὲ καὶ τὰ λθ, θβ, διπλάσια τοῦ βθ, ἴσα γὰρ ἀλλήλοις εἰσὶ κατὰ τὴν μγ': τοῦ α': ἴσον ἄρα τὸ κβ, τοῖς λθ, θβ, ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλος ὁ μνξ, γνώμων ὅλῳ τῷ γη, ἴσος, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ζθ, τῷ βη, ἐστὶν ἴσον, καὶ ἔστι τὸ μὲν βη, τὸ ὑπὸ τῶν γδ, βδ, ἴση γὰρ ἡ γδ, τῇ δη, τὸ δὲ θζ, τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν γδ, δβ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς γβ, καὶ κατὰ τὴν ιζ': ἄρα τοῦ ς': ἔστιν ὡς ἡ γδ, πρὸς τὴν γβ, οὕτως ἡ γβ, πρὸς τὴν βδ, μείζων δὲ ἡ δγ, τῆς γβ, μείζων ἄρα καὶ ἡ γβ, τῆς βδ. τῆς γδ, ἄρα εὐθείας ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ γβ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύνηται, τῆς διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 13. Fig. 2.



ΛΗΜΜΑ.

Ὅτι δὲ ἡ διπλῆ τῆς αγ, μείζων ἐστὶ τῆς βγ, οὕτω δεικτέον. εἰ γὰρ μή, ἔστω, εἰ δυνατόν, ἡ βγ, τῆς γα, διπλῆ, τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τοῦ ἀπὸ τῆς γα, πενταπλάσιον ἄρα ἑκάτερον τῶν ἀπὸ τῶν βγ, γα, τοῦ ἀπὸ τῆς γα, ὑπόκειται δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βα, πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς γα, κατὰ τὴν δ': ἄρα τοῦ β': τὸ ἀπὸ τῆς βα, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν βγ, γα, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ βγ, διπλασία τῆς αγ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἡ ἐλάττων τῆς βγ, (διπλασίων ἐστὶ τῆς γα,) πολλῷ γὰρ μεῖζον τὸ ἄτοπον, ἡ ἄρα τῆς αγ, διπλῆ, μείζων ἐστὶ τῆς βγ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τοῦ Εἰρημένου Θεωρήματος ἀνάλυσις.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ γδ, τμήματος ἑαυτῆς τοῦ δα, πενταπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ δα, διπλῆ κείσθω ἡ αβ. Λέγω, ὅτι ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, κατὰ τὸ γ, σημεῖον, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ αγ, ἥτις ἐστὶ τὸ λοιπὸν μέρος τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας. ἐπεὶ γὰρ ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ αγ, κατὰ τὴν ιζ΄: ἄρα τοῦ ς΄: τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν βα, αγ, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, ἴσον, διπλῆ γάρ ἐστιν ἡ βα, τῆς αδ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, βγ, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν βα, αγ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς βα, ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ. τετραπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς δα, τετραπλάσιον ἄρα, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ δα, αγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, τοῦ ἀπὸ τῆς αδ. ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν δα, αγ, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αγ, δα, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς γδ, πενταπλάσιον δ' ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς δα, ἔστι δὲ διὰ τὴν ὑπόθεσιν.

Σύνθεσις τοῦ αὐτοῦ.

Ἐπεὶ οὖν πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς γδ, τοῦ ἀπὸ τῆς δα, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς γδ, τὰ ἀπὸ τῶν δα, αγ, ἐστὶ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν δα, αγ, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δα. διελόντι ἄρα τὰ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετραπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἅπαξ ὑπὸ τῶν βα, αγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αβ, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἐστὶ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν αβ, αγ, ὅπερ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν βα, αγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γα, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ἀπὸ τῶν βα, αγ, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βα, βγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, οὕτως ἡ αγ, πρὸς τὴν γβ, μείζων δὲ ἡ βα, τῆς αγ, μείζων ἄρα καὶ ἡ αγ, τῆς γβ, ἡ αβ, ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ αγ.

Πρότασις Γ΄. Θεώρημα.

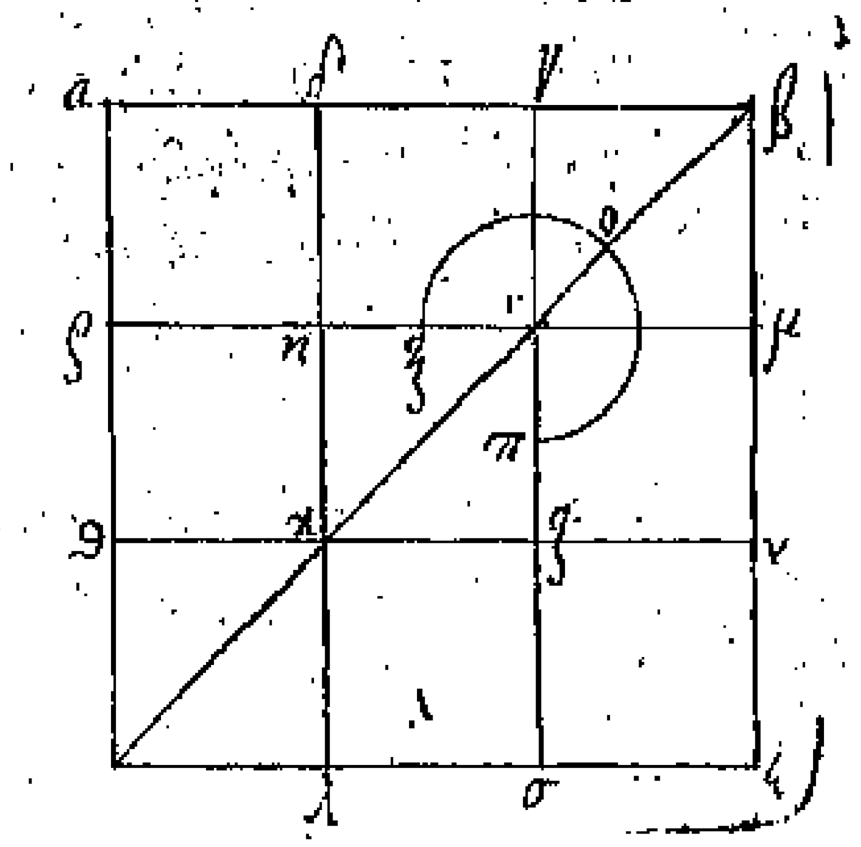
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἔλασσον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος, πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ γ, σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ αγ, καὶ τετμήσθω ἡ αγ, δίχα κατὰ τὸ δ. Λέγω, ὅτι πενταπλά-

πλά-

πλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τοῦ ἀπὸ τῆς δγ. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον τὸ αε, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αγ, τῆς γδ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τοῦ ἀπὸ τῆς γδ, τουτέστι τὸ ρσ, τοῦ ζη. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν αβ, βγ, τὸ γε, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς αγ, τὸ ρσ, τὸ ἄρα γε, ἴσον ἐστὶ τῷ ρσ, τετραπλάσιον δὲ τὸ ρσ, τοῦ ζη, τετραπλάσιον ἄρα καὶ τὸ γε, τοῦ ζη. καὶ πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αδ, τῇ δγ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ θκ, τῇ κζ, ὥστε καὶ τὸ ηζ, τετράγ: ἴσον ἐστὶ τῷ θλ, τετραγώνῳ, ἴση ἄρα ἡ ηκ, τῇ κλ, τουτέστιν ἡ μν, τῇ νε, ὥστε καὶ τὸ μζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ζε. ἀλλὰ τὸ μζ, ἔστι καὶ τῷ γη, καὶ τὸ γη, ἄρα τῷ ζε, ἴσον, κοινὸν προσκείσθω τὸ γν, ὁ ἄρα ξοπ, γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ γε, ἀλλὰ τὸ γε, τετραπλάσιον ἐδείχθη τοῦ ηζ, ἄρα καὶ ὁ ξοπ, γνώμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ζη, τὸ ἄρα δν, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ηζ, τετραγ: καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν δν, τὸ ἀπὸ τῆς δβ, τὸ δὲ ηζ, τὸ ἀπὸ τῆς δγ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς δβ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δγ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 13. Fig. 3.



Τοῦ εἰρημένου Θεωρήματος ἀνάλυσις.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ γ, σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ αγ, καὶ τῆς αγ, ἡμίσεια ἡ γδ. Λέγω, ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τοῦ ἀπὸ τῆς δγ. ἐπεὶ γὰρ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τοῦ ἀπὸ τῆς δγ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς βδ, τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς δγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, βγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς δγ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δγ, διελόντι ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς αβ, βγ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δγ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αγ, ἡ γὰρ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αγ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δγ, ἔστι γὰρ διπλῆ ἡ αγ, τῆς γδ,

Σύνθεσις τοῦ αὐτοῦ.

Ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αγ, τῆς γδ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τοῦ ἀπὸ τῆς γδ, ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, βγ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δγ, συνθέντι ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς δγ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς δβ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δγ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

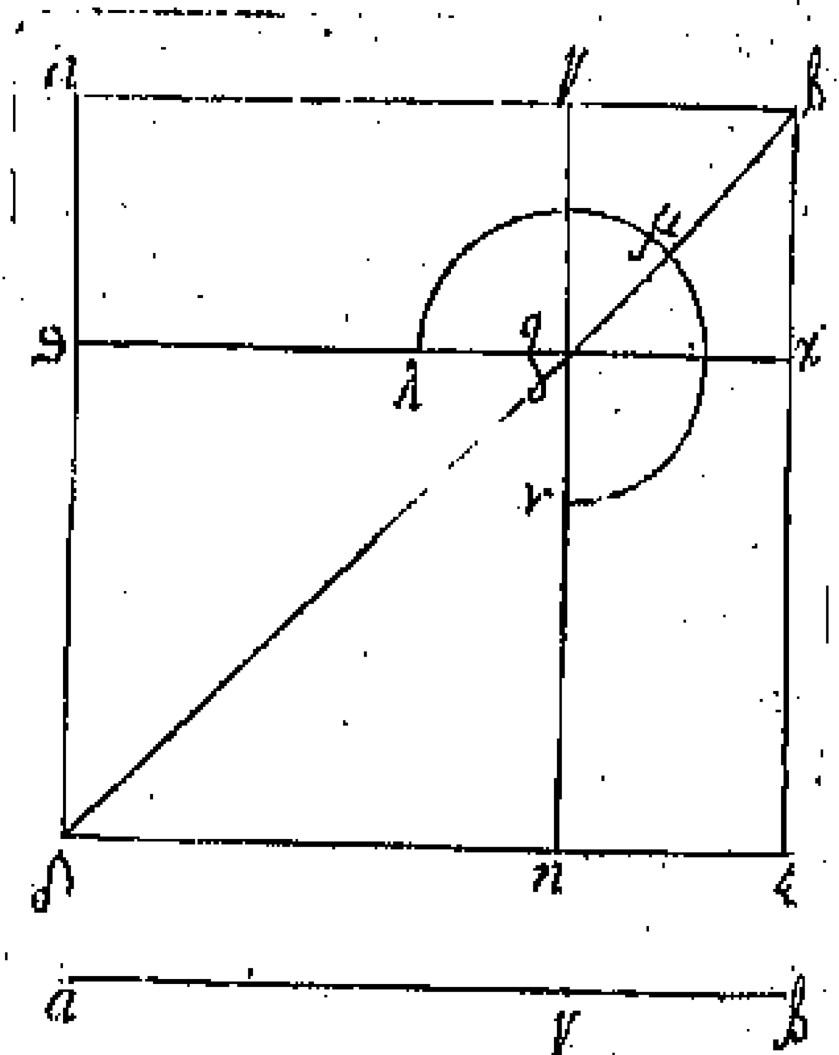
Πρό-

Πρότασις Δ': Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον, καὶ τοῦ ἐλάττονος τμήματος τὰ συναμφότερα τετράγωνα, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ α β, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ α γ. Λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν α β, β γ, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς α γ. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς α β, τετράγωνον τὸ α δ ε β, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν ἡ α β, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ, καὶ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ α γ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν α β, β γ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς α γ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν α β, β γ, τὸ α κ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς α γ, τὸ θ η, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ α κ, τῷ θ η, καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ α ζ, τῷ ζ ε, κοινὸν προσκείσθω τὸ γ κ, ὅλον ἄρα τὸ α κ, ὅλῳ τῷ γ ε, ἐστὶν ἴσον, τὰ ἄρα α κ, γ ε, τοῦ α κ, ἐστὶ διπλάσια. ἀλλὰ τὰ α κ, γ ε, ὁ λ μ ν, γνώμων ἐστὶ, καὶ τὸ γ κ, τετράγωνον. ἄρα ὁ λ μ ν, γνώμων καὶ τὸ γ κ, τετράγωνον διπλάσιά ἐστι τοῦ α κ, ἀλλὰ μὴν τὸ α κ, τῷ θ η, ἐδείχθη ἴσον, ὁ ἄρα λ μ ν, γνώμων, καὶ τὸ γ κ, τετράγωνον, διπλάσιά ἐστι τοῦ θ η. ὥστε καὶ ὁ λ μ ν, γνώμων, καὶ τὰ γ κ, θ η, τετράγωνα, τριπλάσιά εἰσι τοῦ η θ, τετραγώνου, καὶ ἔστιν ὁ μὲν λ μ ν, γνώμων, καὶ τὰ γ κ, θ η, τετράγωνα, ὅλον τὸ α ε, καὶ γ κ. ἅπερ ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν α β, β γ, τετράγ: τὸ δὲ η θ, τὸ ἀπὸ τῆς α γ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν α β, β γ, τετράγ: τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς α γ, τετραγώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 13. Fig. 4.



Τοῦ εἰρημένου θεωρήματος ἡ αἰτία

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ α β, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ α γ. Λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν α β, β γ, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς α γ. ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν α β, β γ, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς α γ, ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν α β, β γ, τὸ δὶς ὑπὸ τῶν α β, β γ, ἐστὶ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς α γ, τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν α β, β γ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς α γ, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς α γ, διελόντι ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν α β, β γ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς α γ. ὥστε τὸ ἅπαξ ὑπὸ τῶν α β, β γ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς α γ, ἔστι δὲ, ἡ γὰρ α β, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ.

Σύνθεσις τοῦ αὐτοῦ.

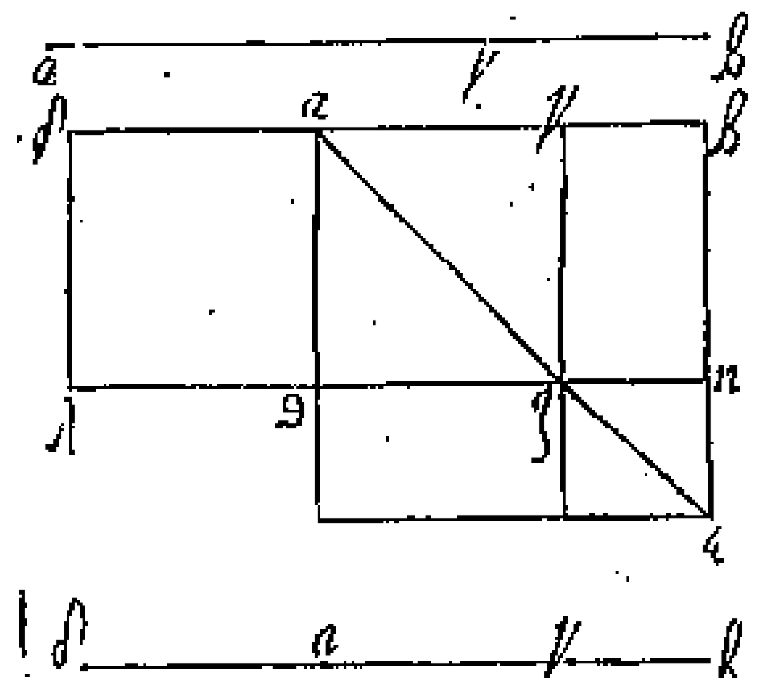
Ἐπεὶ οὖν ἡ α β, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ, καὶ ἔστι μεῖζον τμῆμα ἡ α γ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν α β, β γ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς α γ, τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν α β, β γ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς α γ. συνθέντι, τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν α β, β γ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς α γ, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς α γ, ἀλλὰ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν α β, β γ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς α γ, τὰ ἀπὸ τῶν α β, β γ, ἐστὶ τετράγωνα, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν α β, β γ, τετράγωνα, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς α γ.

Πρότασις Ε': Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, καὶ προστεθῇ ἴση τῷ μείζονι τμήματι, ὅλη ἡ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ α β, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ α γ, καὶ τῇ α γ, ἴση κείσθω ἡ α δ. Λέγω, ὅτι ἡ δ β, εὐθεῖα, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα ἡ α β. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς α β, τετράγωνον τὸ α ε, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἡ α β, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, κατὰ τὸ γ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν α β, β γ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς α γ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν α β, β γ, τὸ γ ε, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς α γ, τὸ γ θ. ἀλλὰ τὸ μὲν γ ε, ἴσον ἐστὶ τῷ θ ε, τὸ δὲ γ θ, ἴσον τῷ δ θ, καὶ τὸ δ θ, ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ θ ε, κοινὸν προκείσθω τὸ θ β, ὅλον ἄρα τὸ δ η, ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ α ε, καὶ ἔστι τὸ μὲν δ η, τὸ ὑπὸ τῶν β δ, δ α, ἴση γὰρ ἡ δ α, τῇ δ λ, τὸ δὲ α ε, τῷ ἀπὸ τῆς α β, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν β δ, δ α, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς α β, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ β δ, πρὸς τὴν β α, οὕτως ἡ β α, πρὸς τὴν α δ, μείζων δὲ ἡ δ β, τῆς β α, μείζων ἄρα καὶ ἡ β α, τῆς α δ. ἡ ἄρα β δ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ α, καὶ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ α β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 13. Fig. 5.



Ἀνάλυσις τοῦ εἰρημένου θεωρήματος.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ α β, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ α γ, καὶ τῇ α γ, ἴση κείσθω ἡ α δ. Λέγω, ὅτι ἡ δ β, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ β α. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δ β, πρὸς τὴν β α, οὕτως ἡ β α, πρὸς τὴν α δ. ἀλλ' ἡ α δ, ἐστὶν ἴση τῇ α γ, ἄρα ὡς ἡ δ β, πρὸς τὴν β α, οὕτως ἡ β α, πρὸς τὴν α γ, ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ἡ β δ, βδ, πρὸς τὴν δα, οὕτως ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, διελόντι ἄρα ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αδ, οὕτως ἡ αγ, πρὸς τὴν γβ, ἴση δὲ ἡ αδ, τῇ αγ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, οὕτως ἡ αγ, πρὸς τὴν γβ. ἔστι δὲ, ἡ γὰρ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ.

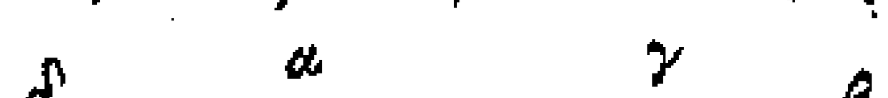
Σύνθεσις τοῦ αὐτοῦ.

Ἐπεὶ οὖν ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, οὕτως ἡ αγ, πρὸς τὴν γβ, ἴση δὲ ἡ αγ, τῇ αδ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αδ, οὕτως ἡ αγ, πρὸς τὴν γβ, συνθέντι ἄρα ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δα, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν βγ. ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν βα, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, ἴση δὲ ἡ αγ, τῇ αδ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν βα, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν αδ, ἡ ἄρα δβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ αβ.

Πρότασις ϛ': Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἔστω εὐθεῖα ῥητὴ ἡ αβ, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ αγ. Λέγω, ὅτι ἑκατέρα τῶν αγ, γβ, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή. Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ βα, ἐπὶ τὸ δ, καὶ κείσθω τῆς βα, ἡμίσεια ἡ αδ. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ αβ, τέτμηται ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ γ, καὶ τῇ μείζονι αγ, πρόσκειται ἡ αδ, ἡμίσεια οὖσα τῆς αβ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς γδ, τοῦ ἀπὸ τῆς δα, πενταπλάσιόν ἐστι, κατὰ τὴν α': τοῦ παρόντος, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς γδ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δα, λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς γδ, τῷ ἀπὸ τῆς δα, κατὰ τὴν ϛ': τοῦ ι: ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς δα, ῥητὴ γάρ ἐστιν ἡ δα, ἡμίσεια οὖσα τῆς αβ, ῥητῆς οὔσης. ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς γδ, ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ γδ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς γδ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δα, λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, σύμμετρος ἄρα μήκει ἡ γδ, τῇ δα, αἱ γδ, δα, ἄρα ῥηταὶ, εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ αγ. πάλιν ἐπεὶ ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ αγ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αγ, ἀποτομῆς, παρὰ τὴν αβ, ῥητὴν παραβληθὲν, πλάτος ποιεῖ τὴν βγ, τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς, κατὰ τὴν ϟζ': τοῦ ι: παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον, πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην, ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἡ γβ, ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ αγ, ἀποτομή. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



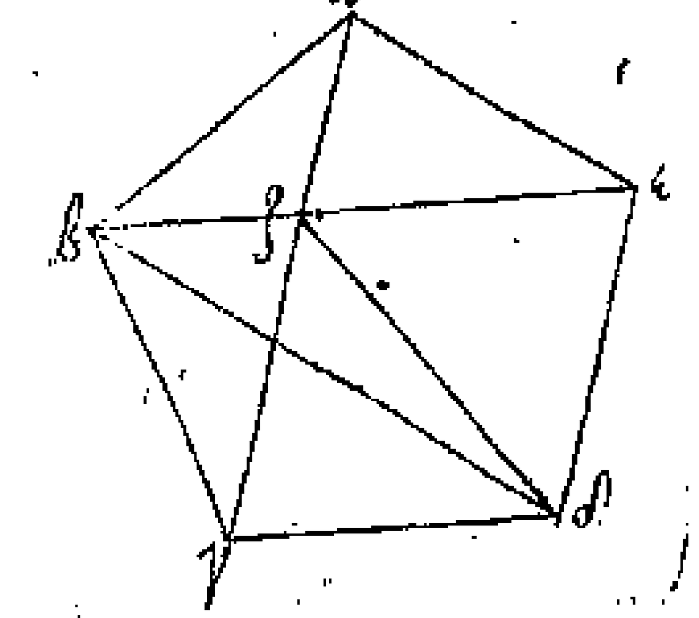
Πρό-

Πρότασις Ζ': Θεώρημα.

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι, ἤτοι αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς, ἢ αἱ μὴ κατὰ τὸ ἑξῆς ἴσαι ὦσιν, ἰσογώνιον ἔσται τὸ πεντάγωνον.

Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου τοῦ αβγδε, αἱ τρεῖς γωνίαι πρότερον αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς, αἱ πρὸς τοῖς α, β, γ, δηλονότι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσωσαν. Λέγω, ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ αβγδε, πεντάγωνον. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αγ, βε, ζδ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ γβ, βα, δυσὶ ταῖς βα, αε, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ γβα, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βαε, βάσις ἄρα ἡ αγ, βάσει τῇ βε, ἐστὶν ἴση, κατὰ τὴν δ': τοῦ α: καὶ τὸ αβγ, τρίγωνον τῷ αβε, τριγ: ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι

Eucl. lib. 13. Fig. 6.



ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ βγα, τῇ ὑπὸ βεα, ἡ δὲ ὑπὸ αβε, τῇ ὑπὸ γαβ, ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ αζ, πλευρᾷ τῇ βζ, ἐστὶν ἴση, ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλη ἡ αγ, ὅλῃ τῇ βε, ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ζγ, λοιπῇ τῇ ζε, ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ γδ, τῇ δε, ἴση. δύο δὴ αἱ ζγ, γδ, δυσὶ ταῖς ζε, εδ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ζδ, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ζγδ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζεδ, ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ ἡ ὑπὸ βγα, γωνία τῇ ὑπὸ αεβ, ἴση, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ βγδ, ὅλῃ τῇ ὑπὸ αεδ, ἐστὶν ἴση. ἀλλ' ἡ ὑπὸ βγδ, ἴση ὑπόκειται ταῖς πρὸς τοῖς α, β, καὶ ἡ ὑπὸ αεδ, ἄρα ταῖς πρὸς τοῖς α, β, γωνίαις, ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ γδε, ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς α, β, ἰσογώνιον ἄρα τὸ αβγδε, πεντάγωνον.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔσωσαν ἴσαι αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς γωνίαι. ἀλλ' ἔσωσαν ἴσαι, αἱ πρὸς τοῖς α, γ, δ, σημείοις. Λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἰσογώνιόν ἐστι τὸ πεντάγωνον. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ βδ, καὶ ἐπεὶ δύο αἱ βα, αε, δυσὶ ταῖς βγ, γδ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ βε, βάσει τῇ βδ, ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ αβε, τρίγωνον, τῷ βγδ, τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αεβ, τῇ ὑπὸ γδβ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βεδ, γωνία τῇ ὑπὸ βδε, ἴση, ἐπεὶ πλευρὰ ἡ βε, πλευρᾷ τῇ βδ, ἐστὶν ἴση, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ αεδ, γωνία ὅλῃ τῇ ὑπὸ γδε, ἐστὶν ἴση. ἀλλ' ἡ ὑπὸ γδε, ταῖς πρὸς τοῖς α, γ, γωνίαις ὑπόκειται ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ αεδ, ἄρα γωνία ταῖς πρὸς τοῖς α, γ, ἴση ἐστὶ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ αβγ, ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς α, γ, γωνίαις, ἰσογώνιον ἄρα τὸ αβγδε, πεντάγωνον.

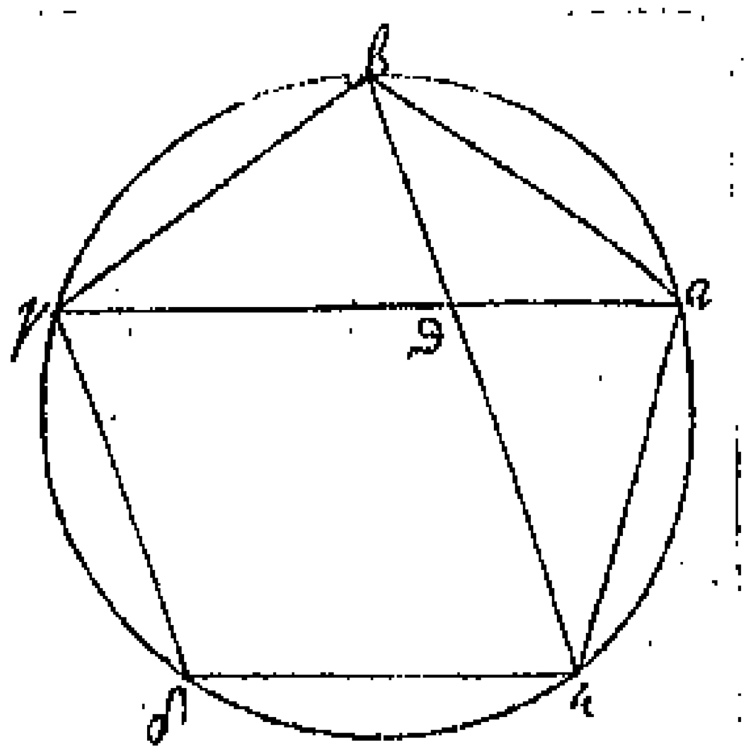
Πρό-

Πρότασις Η': Θεώρημα.

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τὰς κατὰ τὸ ἑξῆς δύο γωνίας ὑποτείνωσιν εὐθεῖαι, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνουσιν ἀλλήλας, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.

Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τοῦ αβγδε, δύο γωνίας τὰς κατὰ τὸ ἑξῆς πρὸς τοῖς α, β, ὑποτεινέτωσαν εὐθεῖαι, αἱ αγ, βε, τέμνουσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ θ, σημεῖον. Λέγω, ὅτι ἑκατέρα αὐτῶν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνεται κατὰ τὸ θ, σημεῖον, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα, ἴσα εἰσὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. Περιγεγράφθω γὰρ περὶ τὸ αβγδε, πεντάγωνον, κύκλος ὁ αβγδε, καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ αε, αβ, δυσὶ ταῖς αβ, βγ, ἴσαι εἰσί, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ βε, βάσει τῇ αγ, ἴση ἐστί, καὶ τὸ αβε, τρίγωνον τῷ αβγ, τριγ: ἴσον ἐστι, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ βαγ, γωνία τῇ ὑπὸ αβε. διπλῆ ἄρα ἡ ὑπὸ αθε, τῆς ὑπὸ βαθ, γωνίας, ἐκτὸς γάρ ἐστι τοῦ αβθ, τριγώνου, κατὰ τὴν λβ': τοῦ α: ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ εαγ, τῆς ὑπὸ βαγ, διπλῆ. ἐπειδὴ καὶ περιφέρεια ἡ εδγ, περιφερείας τῆς γβ, διπλῆ ἐστιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ θαε, γωνία τῇ ὑπὸ αθε, ὥστε καὶ ἡ θε, εὐθεῖα τῇ εα, τουτέστι τῇ αβ, ἐστὶν ἴση, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βα, τῇ αε, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβε, τῇ ὑπὸ βεα. ἀλλ' ἡ ὑπὸ αβε, τῇ ὑπὸ βαθ, ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ βεα, ἄρα τῇ ὑπὸ βαθ, ἐστὶν ἴση, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦτε αβε, καὶ τοῦ αβθ, ἐστὶν ἡ ὑπὸ αβε, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ βαε, γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ αθβ, ἐστὶν ἴση, ἰσογώνιον ἄρα τὸ αβε, τρίγ: τῷ αβθ, τριγ: ἀνάλογον ἄρα ἐστίν, ὡς ἡ εβ, πρὸς τὴν βα, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν βθ, ἴση δὲ ἡ βα, τῇ εθ. ὡς ἄρα ἡ βε, πρὸς τὴν εθ, οὕτως ἡ εθ, πρὸς τὴν θβ, μείζων δὲ ἡ βε, τῆς βα, μείζων ἄρα καὶ ἡ εθ, τῆς θβ, ἡ βε, ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνεται κατὰ τὸ θ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ αγ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνεται κατὰ τὸ θ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα τὸ γθ, ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 13. Fig. 7.



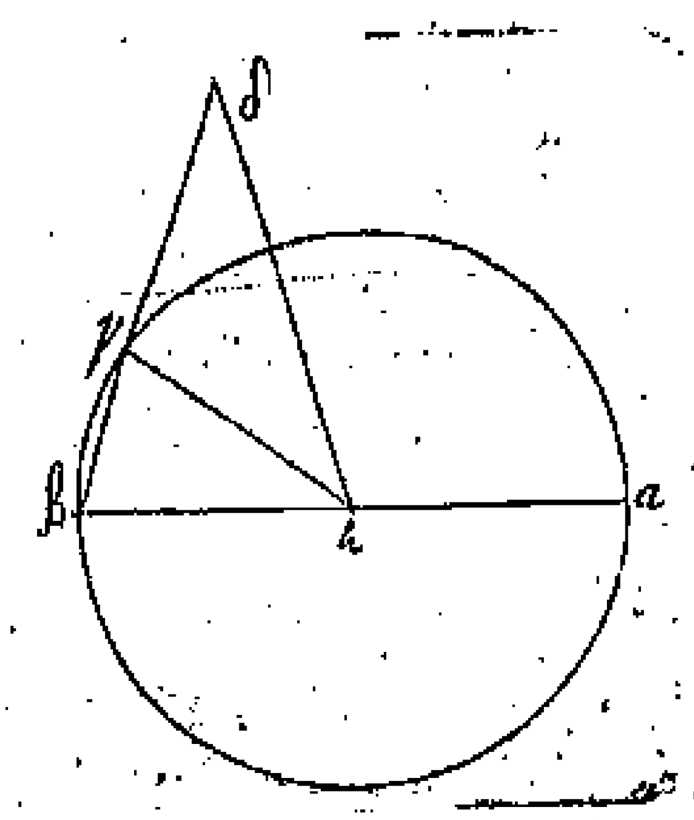
Πρό-

Πρότασις Θ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρά, καὶ ἡ τοῦ δεκαγώνου, εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων συντεθῶσιν, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα, ἐστὶν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρά.

Ἔστω κύκλος ὁ αβγ, καὶ τῶν εἰς τὸν αβγ, κύκλον ἐγγραφομένων σχημάτων, δεκαγώνου μὲν ἔστω πλευρὰ ἡ βγ, ἑξαγώνου δὲ ἡ γδ, καὶ ἔστωσαν ἐπ' εὐθείας. Λέγω, ὅτι ἡ ὅλη εὐθεῖα ἡ βδ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα, ἐστὶν ἡ γδ. Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ ε, σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εβ, εγ, εδ, καὶ διήχθω ἡ βε, ἐπὶ τὸ α, καὶ ἐπεὶ δεκαγώνου ἰσοπλεύρου πλευρά, ἐστὶν ἡ βγ, πενταπλασίων ἄρα ἡ αγβ, περιφέρεια τῆς γβ, περιφερείας, τετραπλασίων ἄρα ἡ αγ, περιφέρεια τῆς γβ, ὡς δὲ ἡ αγ, περιφέρεια πρὸς τὴν γβ, οὕτως ἡ ὑπὸ αεγ, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ γεβ, τετραπλασίων ἄρα ἡ ὑπὸ αεγ, τῆς ὑπὸ γεβ, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ εβγ, γωνία τῇ ὑπὸ εγβ, ἡ ἄρα ὑπὸ αεγ, γωνία διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ εγβ, κατὰ τὴν λβ': τοῦ α: καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ εγ, εὐθεῖα τῇ γδ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ἑξαγώνου πλευρᾷ, τοῦ εἰς τὸν αβγ, κύκλον ἐγγραφομένου, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ γεδ, γωνία τῇ ὑπὸ γδε, διπλασία ἄρα ἡ ὑπὸ εγβ, τῆς ὑπὸ εδγ. ἀλλὰ τῆς μὲν ὑπὸ εγβ, διπλασία ἐδείχθη ἡ ὑπὸ αεγ, τετραπλασία ἄρα τῆς ὑπὸ εδγ, ἐδείχθη δὲ καὶ τῆς ὑπὸ βεγ, τετραπλασία ἡ ὑπὸ αεγ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ εδγ, τῇ ὑπὸ βεγ, κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων τοῦτε βεγ, καὶ τοῦ βεδ, ἡ ὑπὸ εβδ, γωνία, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ βεδ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ εγβ, ἐστὶν ἴση, ἰσογώνιον ἄρα τὸ εβδ, τρίγωνον τῷ εβγ, τριγ: ἀνάλογον ἄρα ἐστίν, ὡς ἡ δβ, πρὸς τὴν βε, οὕτως ἡ εβ, πρὸς τὴν βγ, ἴση δὲ ἡ εβ, τῇ γδ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δγ, οὕτως ἡ δγ, πρὸς τὴν γβ, μείζων δὲ ἡ βδ, τῆς δγ, μείζων ἄρα καὶ ἡ δγ, τῆς γβ, ἡ βδ, ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα αὐτῆς, ἐστὶν ἡ δγ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 13. Fig. 8.



Πρότασις Ι': Πρόβλημα.

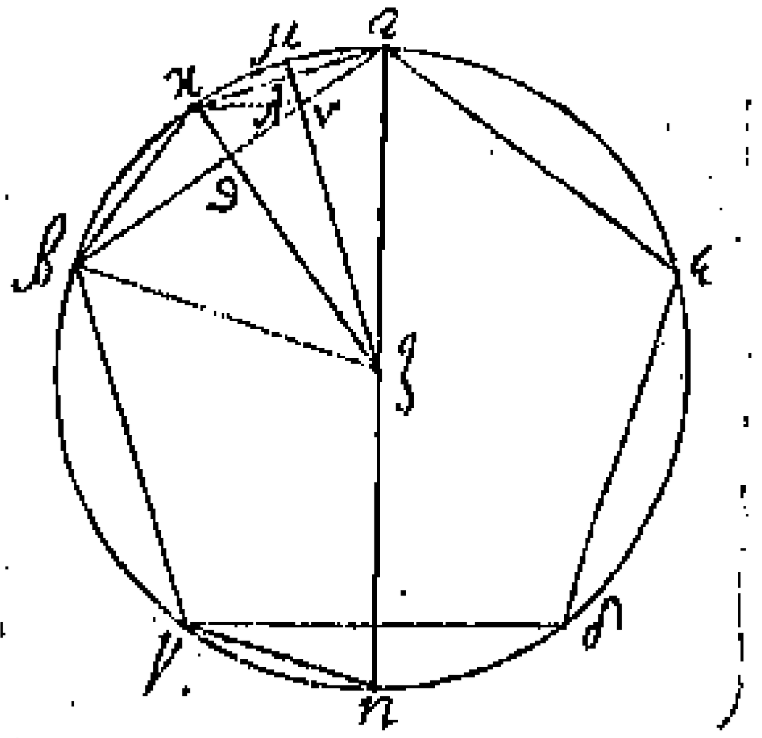
Ἐὰν εἰς κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου, καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένων.

Ἔστω κύκλος ὁ αβγδε, καὶ εἰς αὐτὸν πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ αβγδε. Λέγω, ὅτι τοῦ αβγ, δε, πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου,

γώνου,

γώνου, καὶ τὴν τοῦ πενταγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν ἐγγραφομένων. εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ ζ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ αζ, διήχθω ἐπὶ τὸ η, σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζβ, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ, ἐπὶ τὴν αβ, κάθετος ἐχθήτω ἡ ζθ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ακ, κβ. καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ ζ, ἐπὶ τὴν ακ, κάθετος ἤχθω ἡ ζλ. καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ μ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ κν, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αβγη, περιφέρεια τῇ αεδη, περιφερείᾳ, ὧν ἡ αβγ, τῇ αεδ, ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ γη, περιφέρεια λοιπῇ τῇ δη, ἐστὶν ἴση, πενταγώνου γὰρ ἡ γδ, δεκαγώνου ἄρα ἡ γη, καὶ ἐπεὶ ἴση ἡ ζα, τῇ ζβ, καὶ κάθετος ἡ ζθ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αζκ, γωνία τῇ ὑπὸ κζβ, ὥστε καὶ περιφέρεια ἡ ακ, τῇ κβ, ἐστὶν ἴση, διπλῆ ἄρα ἡ αβ, περιφέρεια τῆς βκ, περιφερείας, δεκαγώνου ἄρα πλευρὰ, ἐστὶν ἡ ακ, εὐθεῖα. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ακ, τῆς κμ, ἐστὶ διπλῆ, καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αβ, περιφέρεια τῆς βκ, περιφερ: ἴση δὲ ἡ γδ, περιφέρεια τῇ αβ, περιφερείᾳ, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ γδ, περιφέρεια τῆς βκ, περιφερ: ἔστι δὲ ἡ γδ, περιφέρεια τῆς γη, διπλῆ, ἴση ἄρα ἡ γη, περιφέρ: τῇ βκ, περιφερείᾳ. ἀλλ' ἡ βκ, τῆς κμ, ἐστὶ διπλῆ, ἐπεὶ καὶ ἡ ακ, καὶ ἡ γη, ἄρα τῆς κμ, διπλῆ ἐστιν, ἴση γὰρ ἡ γβ, περιφέρεια, τῇ βα, περιφερ: καὶ ὅλη ἄρα ἡ ηβ, περιφέρεια τῆς βμ, ἐστὶ διπλῆ, ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ηζβ, γωνίας τῆς ὑπὸ βζμ, διπλῆ ἐστι κατὰ τὴν λγ': τοῦ ς': ἐστι δὲ ἡ ὑπὸ ηζβ, καὶ τῆς ὑπὸ ζαβ, διπλῆ, ἴση γὰρ ἡ ὑπὸ ζαβ, τῇ ὑπὸ αβζ, καὶ ἡ ὑπὸ βζν, ἄρα τῇ ὑπὸ ζαβ, ἐστὶν ἴση, κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦτε

Eucl. Lib. 13. Fig. 9.



αβζ, καὶ τοῦ βζν, ἡ ὑπὸ αβζ, γωνία ἐστί. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αζβ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ βνζ, ἐστὶν ἴση, ἰσογώνιον ἄρα καὶ τὸ αβζ, τρίγωνον, τῷ βζν, τριγ: ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ αβ, εὐθεῖα πρὸς τὴν βζ, οὕτως ἡ ζβ, πρὸς τὴν βν, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, βν, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ζβ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αλ, τῇ λκ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ λν, βάσις ἄρα ἡ κν, βάσει τῇ αν, ἐστὶν ἴση, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ λκν, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ λαν, ἐστὶν ἴση. ἀλλ' ἡ ὑπὸ λαν, τῇ ὑπὸ κβν, ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ λκν, ἄρα τῇ ὑπὸ κβν, ἐστὶν ἴση, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων, τοῦτε ακβ, καὶ τοῦ ακν, ἡ ὑπὸ νακ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ακβ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ κνα, ἐστὶν ἴση, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ κβα, τρίγ: τῷ κνα, τρίγ: ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ βα, εὐθεῖα πρὸς τὴν ακ, οὕτως ἡ κα, πρὸς τὴν αν, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν βα, αν, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ακ, ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῶν αβ, βν, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς αζ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, βν, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν βα, αν, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βζ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ακ, καὶ ἔστιν ἡ μὲν βα, πενταγώνου πλευρὰ, ἡ δὲ βζ, ἑξαγώνου, ἡ δὲ ακ, δεκαγώνου, ἡ ἄρα τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου, καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

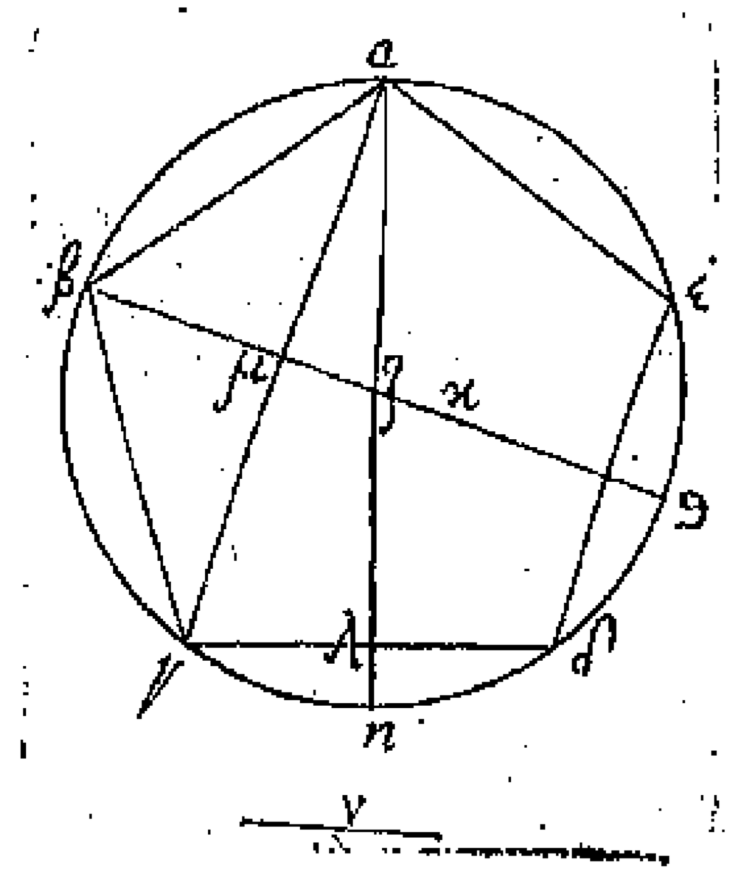
Πρό-

Πρότασις ΙΑ': Θεώρημα.

Ἐὰν εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Εἰς γὰρ κύκλον τὸν αβγδε, ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον, πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ αβγδε. Λέγω, ὅτι ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἡ αβ, ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐλάσσων. Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ ζ, σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αζ, ζβ, καὶ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ η, θ, σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αγ, καὶ κείσθω τῆς αζ, τέταρτον μέρος ἡ ζκ, ῥητὴ δὲ ἡ αζ, ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ζκ, ἔστι δὲ καὶ ἡ βζ, ῥητὴ, ὅλη ἄρα ἡ βκ, ῥητή ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αγη, περιφέρεια τῇ αδη, περιφερείᾳ, ὧν ἡ αβγ, τῇ αεδ, ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ γη, λοιπῇ τῇ ηδ, ἐστὶν ἴση, καὶ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν αδ, συνάγονται ὀρθαὶ,

Eucl. Lib. 13. Fig. 10.



καὶ τὸ α: πόρισμ: τῆς γ': τοῦ γ': αἱ πρὸς τῷ λ, γωνίαι, καὶ διπλῆ ἡ γδ, τῆς γλ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τῷ μ, ὀρθαί εἰσι, καὶ διπλῆ ἡ αγ, τῆς γμ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ αλγ, γωνία τῇ ὑπὸ αμζ, κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων τοῦτε αλγ, καὶ τοῦ αμζ, ἡ ὑπὸ λαγ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αγλ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ μζα, ἐστὶν ἴση, ἰσογώνιον ἄρα τὸ αγλ, τρίγων: τῷ αμζ, τριγώνῳ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ λγ, πρὸς τὴν αγ, οὕτως ἡ μζ, πρὸς τὴν ζα, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια, ὡς ἄρα ἡ τῆς λγ, διπλῆ πρὸς τὴν γα, οὕτως ἡ τῆς μζ, διπλῆ πρὸς τὴν ζα, ἀλλ' ὡς ἡ τῆς μζ, διπλῆ πρὸς τὴν ζα, οὕτως ἡ μζ, πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ζα, καὶ ὡς ἄρα ἡ τῆς λγ, διπλῆ πρὸς τὴν γα, οὕτως ἡ μζ, πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ζα, καὶ τῶν ἑπομένων τὰ ἡμίση, ὡς ἄρα ἡ τῆς γλ, διπλῆ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς γα, οὕτως ἡ μζ, πρὸς τὸ τέταρτον τῆς ζα, καὶ ἔστι τῆς μὲν λγ, διπλῆ ἡ δγ, τῆς δὲ γα, ἡμίσεια ἡ γμ, τῆς δὲ ζα, τέταρτον μέρος ἡ ζκ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δγ, πρὸς τὴν γμ, οὕτως ἡ μζ, πρὸς τὴν ζκ. συνθέντι, ἄρα καὶ ὡς συναμφότερος ἡ δγμ, πρὸς τὴν γμ, οὕτως ἡ μκ, πρὸς τὴν ζκ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου δγμ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γμ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς μκ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κζ. καὶ ἐπεὶ τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πενταγώνου ὑποτεινούσης, οἷον τῆς αγ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ, τουτέστι τῇ δγ, τὸ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης, κατὰ τὴν α: τοῦ παρόντος, πενταπλάσιον δύναται, τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης, καὶ ἔστιν ὅλης τῆς αγ, ἡμίσεια ἡ γμ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς

δγμ,

δγμ, ὡς μιᾶς πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς γμ, ὡς δὴ τὸ ἀπὸ τῆς δγμ, ὡς μιᾶς, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γμ· οὕτως ἐδείχθη τὸ ἀπὸ τῆς μκ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κζ, πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς μκ, τοῦ ἀπὸ τῆς κζ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς κζ, ῥητὴ γὰρ ἡ διάμετρος, ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς μκ, ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ μκ, λόγον γὰρ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, τὸ ἀπὸ τῆς μκ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κζ. καὶ ἐπεὶ τετραπλασία ἐστὶν ἡ βζ, τῆς ζκ, πενταπλασία ἄρα ἡ βκ, τῆς κζ, εἰκοσιπενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βκ, τοῦ ἀπὸ τῆς ζκ, πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς μκ, τοῦ ἀπὸ τῆς κζ, πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βκ, τοῦ ἀπὸ τῆς κμ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς βκ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κμ, λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀσύμμετρος ἄρα ἡ βκ, τῇ κμ, μήκει, καὶ ἐστι ῥητὴ ἑκατέρα αὐτῶν, αἱ βκ, κμ, ἄρα ῥηταί εἰσι, δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐὰν δὲ ἀπὸ ῥητῆς ῥητὴ ἀφαιρεθῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν, ἀποτομὴ ἄρα ἡ βμ. προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ μκ. λέγω δή, ὅτι καὶ τετάρτη, ᾧ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βκ, τοῦ ἀπὸ τῆς κμ, ἐκείνῳ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ν, ἡ βκ, ἄρα τῆς κμ, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ν. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ κζ, τῇ ζβ, καὶ συνθέντι σύμμετρός ἐστιν ἡ κβ, τῇ ζβ. ἀλλ' ἡ βζ, τῇ βθ, σύμμετρός ἐστι μήκει, καὶ ἡ βκ, ἄρα τῇ βθ, σύμμετρός ἐστι. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βκ, τοῦ ἀπὸ τῆς κμ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς βκ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κμ, λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς ἕν, ἀναστρέψαντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βκ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ν, λόγον ἔχει, ὃν ὁ πέντε πρὸς τὸν τέσσαρα, οὐχ ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ βκ, τῇ ν. ἡ βκ, ἄρα τῆς κμ, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ βκ, τῆς προσαρμοζούσης μκ, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ὅλη ἡ βκ, ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ βθ. ἀποτομὴ ἄρα τετάρτη ἐστὶν ἡ μβ, τὸ δὲ ἀπὸ ῥητῆς, καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καλεῖται δὲ ἐλάττων, δύναται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν θβ, βμ, ἡ αβ, διὰ τό, ἐπιζευγνυμένης τῆς αθ, ἰσογώνιον γίγνεσθαι τὸ αβθ, τρίγωνον τῷ αβμ, καὶ εἶναι ὡς τὴν θβ, πρὸς τὴν βα, οὕτω τὴν αβ, πρὸς τὴν βμ, ἡ ἄρα αβ, τοῦ πενταγώνου πλευρά, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΒʹ. Θεώρημα.

Ἐὰν εἰς κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

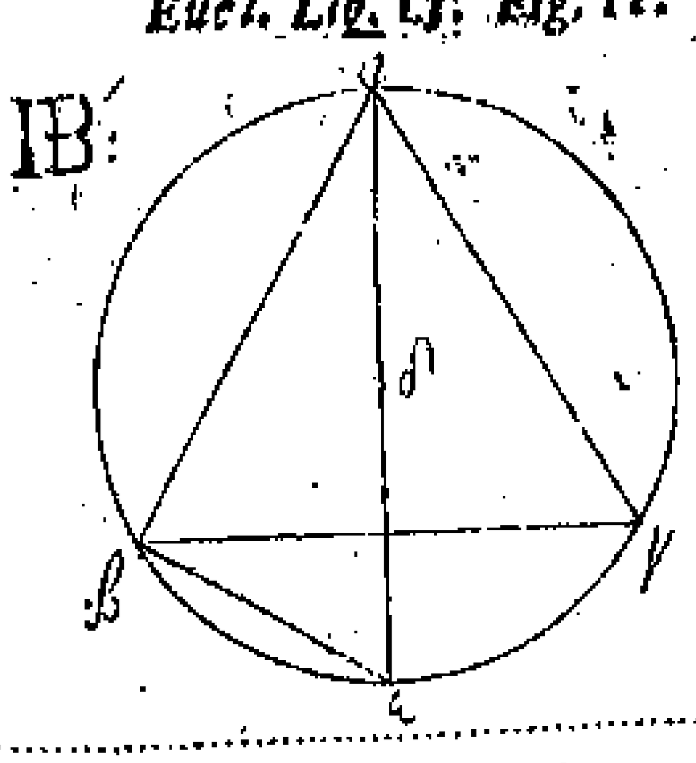
Ἔστω κύκλος ὁ αβγ, καὶ εἰς αὐτὸν τρίγωνον ἐγγεγράφθω ἰσόπλευρον, τὸ αβγ. λέγω, ὅτι ἡ τοῦ αβγ, τριγ: μία πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων καὶ τὰ ἑξῆς. Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ δ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ αδ, διήχθω ἐπὶ

τὸ ε,

τὸ ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βε, καὶ ἐπεὶ ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ αβγ, τρίγωνον· ἡ βεγ, ἄρα περιφέρεια τρίτον μέρος ἐστὶ τῆς τοῦ αβγ, κύκλου περιφερείας, ἡ ἄρα βε, περιφέρεια ἕκτον μέρος ἐστὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἑξάγωνος ἄρα πλευρά ἐστιν ἡ βε, εὐθεῖα, ἴση ἄρα ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῇ δε. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αε, τῆς δε, τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αε, τοῦ ἀπὸ τῆς δε, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς βε, ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αε, τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, βε, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αβ, βε, τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς βε, διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς βε, ἴση δὲ ἡ βε, τῇ δε, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αβ, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δε, ἡ ἄρα τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

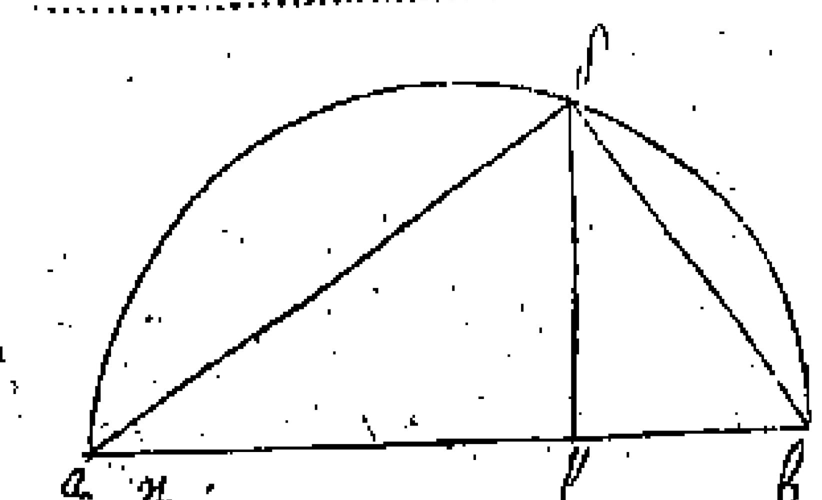
Eucl. Lib. 13. Fig. 12.

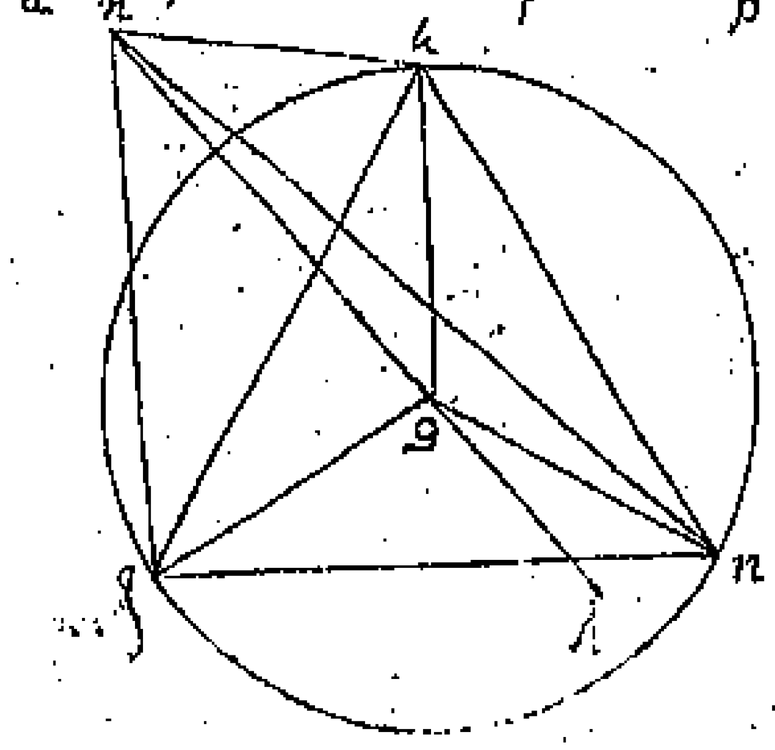
ΙΒ:



Πρότασις ΙΓʹ. Πρόβλημα.

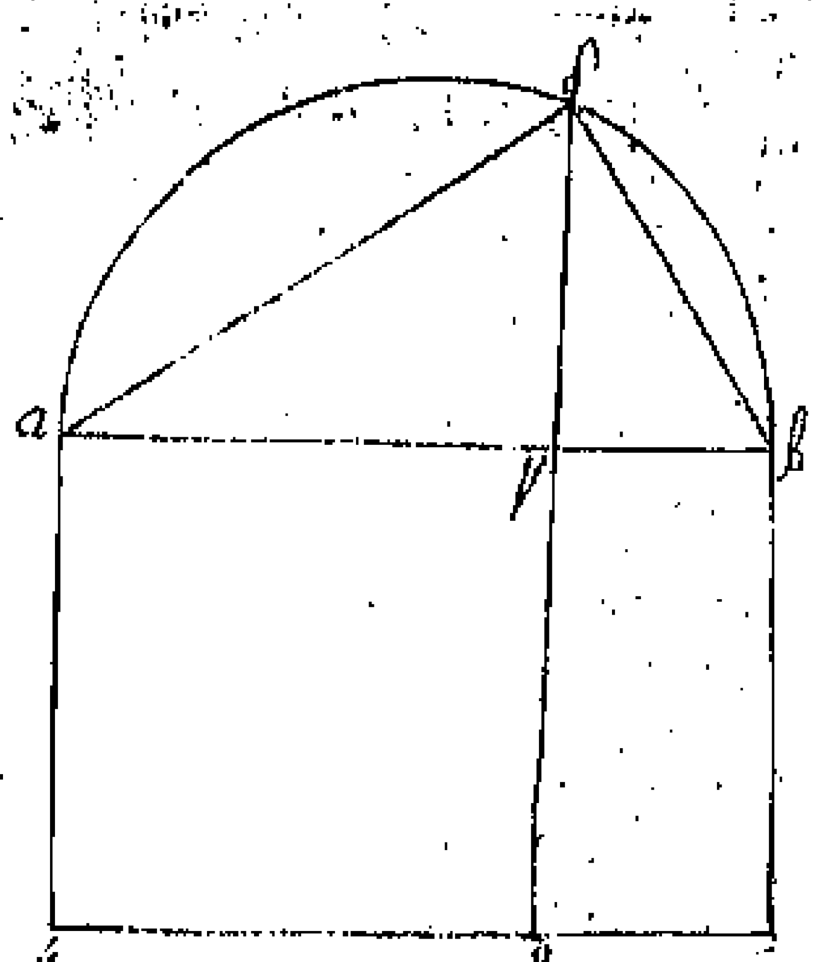
Πυραμίδα συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.





Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ γ, σημεῖον, ὥστε διπλασίαν εἶναι τὴν αγ, τῆς βγ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς αβ, ἡμικύκλιον τὸ αδβ. καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ γ, σημείου τῇ αβ, πρὸς ὀρθὰς ἡ γδ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δα, καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ εηζ, ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ δγ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν εηζ, κύκλον τριγ: ἰσόπλευρον τὸ εηζ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εθ, θζ, θη, καὶ ἀνεστάθω ἀπὸ τοῦ θ, σημείου τῷ τοῦ εζη, κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ θκ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς θκ, τῇ αγ, εὐθείᾳ ἴση ἡ θκ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κε, κζ, κη, καὶ ἐπεὶ ἡ κθ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ εζη, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ εζη, κύκλ: ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας, ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκάστη τῶν θε, θζ, θη, ἡ θκ, ἄρα πρὸς ἑκάστην τῶν θε, θζ, θη, ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αγ, τῇ θκ, ἡ δὲ γδ, τῇ θε, καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ δα, βάσει τῇ κε, ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν κζ, κη, τῇ δα, ἐστὶν ἴση, αἱ τρεῖς ἄρα αἱ κε, κζ, κη, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αγ, τῆς γβ, τριπλῆ ἄρα ἡ αβ, τῆς βγ, ὡς δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αδ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δγ, ὡς ἑξῆς δειχθήσεται, ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δγ, ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αδ, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιθ': τοῦ ϛ': πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γδ, ὡς ἑξῆς δειχθήσεται, τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αδ, τοῦ ἀπὸ τῆς δγ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ζε, τοῦ ἀπὸ τῆς εθ, τριπλάσιον, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, καί ἐστιν ἴση ἡ δγ, τῇ εθ, ἴση ἄρα καὶ ἡ δα, τῇ εζ. ἀλλ' ἡ δα, ἑκάστῃ τῶν κε, κζ, κη, ἐδείχθη ἴση, καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν εζ, ζη, ηε, ἑκάστῃ τῶν κε, κζ, κη, ἐστὶν ἴση, πυραμὶς ἄρα συνίσταται ἐκ τεσσάρων τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ εζη, τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ κ, σημεῖον. Δεῖ δὴ αὐτὴν καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῇ θκ, εὐθεῖα ἡ θλ, καὶ κείσθω τῇ βγ, ἴση ἡ θλ, καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ αγ, πρὸς τὴν γδ, οὕτως ἡ γδ, πρὸς τὴν γβ. ἴση δὲ ἡ μὲν αγ, τῇ κθ, ἡ δὲ γδ, τῇ θε, ἡ δὲ γβ, τῇ θλ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ κθ, πρὸς τὴν θε, οὕτως ἡ εθ, πρὸς τὴν θλ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν κθ, θλ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς θε, καί ἐστιν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ κθε, εθλ, γωνιῶν,

Eucl. Lib. 13. Fig. 12.



τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς κλ, γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ ε. ἐπειδήπερ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ελ, ὀρθὴ γίνεται ἡ ὑπὸ λεκ, γωνία, διὰ τὸ ἰσογώνιον γίγνεσθαι τὸ ελκ, τρίγ: ἑκατέρῳ τῶν ελθ, εθκ, τριγ: ἐὰν δὲ μενούσης τῆς κλ, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τῶν ζ, η, σημείων, ἐπιζευγνυμένων τῶν ζλ, λη, καὶ ὀρθῶν ὁμοίως γινομένων τῶν πρὸς τοῖς ζ, η, γωνιῶν, καὶ ἔσται ἡ πυραμὶς σφαίρᾳ περιειλημμένη τῇ δοθείσῃ, ἡ γὰρ κλ, τῆς σφαίρας διάμετρος, ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ τῇ αβ, ἐπειδήπερ τῇ μὲν αγ, ἴση κεῖται ἡ κθ, τῇ δὲ γβ, ἡ θλ. Λέγω δή, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ δυνάμει τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. Ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ αγ, τῆς γβ, τριπλῆ ἄρα ἡ αβ, τῆς βγ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἡμιολία ἐστὶν ἡ αβ, τῆς αγ. ὡς δὲ ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς βα, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αδ. ἐπειδήπερ ἐπιζευγνυμένης τῆς βδ, ἔστιν ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αδ, οὕτως ἡ δα, πρὸς τὴν αγ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν δαβ, δαγ, τριγώνων, καὶ εἶναι ὡς τὴν α: πρὸς τὴν γ': οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β': ἡμιόλιον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βα, τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, καί ἐστιν ἡ μὲν βα, ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, ἡ δὲ αδ, ἴση τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος, ἡ ἄρα τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΛΗΜ-

ΛΗΜΜΑ.

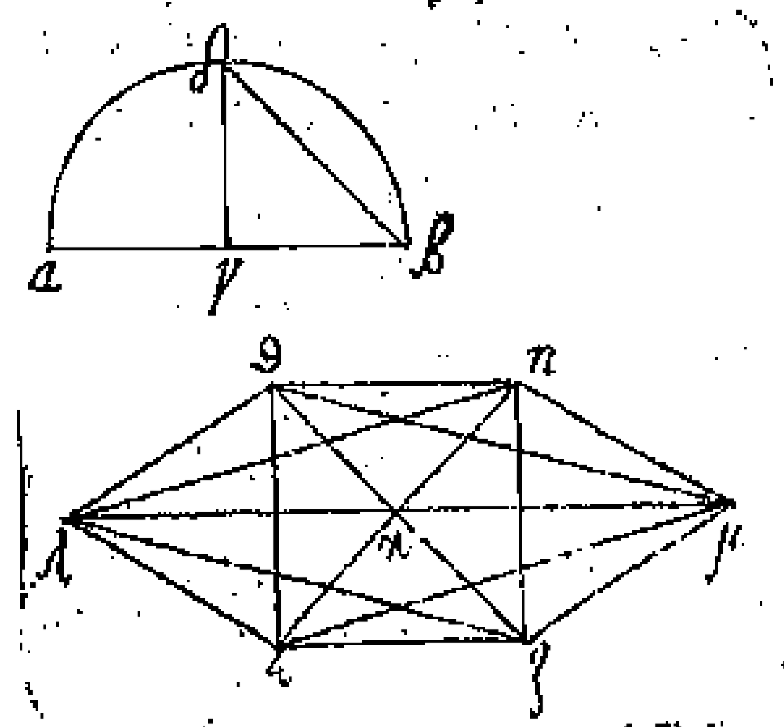
Δεικτέον δή, ὅτι ἐστὶν, ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αδ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δγ, ἐκκείσθω γὰρ ἡ τοῦ ἡμικυκλίου καταγραφή, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δβ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς αγ, τετράγωνον τὸ εγ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ζβ, παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ δαβ, τρίγωνον τῷ δαγ, τριγώνῳ, ἔστιν ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αδ, οὕτως ἡ δα, πρὸς τὴν αγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν βα, αγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αδ, καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ εβ, πρὸς τὸ ζβ, καὶ ἔστι τὸ μὲν εβ, τὸ ὑπὸ τῶν βα, αγ, ἴση γὰρ ἡ εα, τῇ αγ, τὸ δὲ βζ, τῷ ὑπὸ τῶν αγ, γβ, ὡς ἄρα ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν βα, αγ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αγ, βγ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν βα, αγ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς αδ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν αγ, γβ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς δγ, ἡ γὰρ δγ, κάθετος τῶν τῆς βάσεως τμημάτων, τῶν αγ, γβ, μέση ἀνάλογόν ἐστιν. διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ αδβ, ὡς ἄρα ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αδ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δγ.

Πρότασις ΙΔ': Πρόβλημα.

Ὀκτάεδρον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὴν πυραμίδα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ γ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς αβ, ἡμικύκλιον τὸ αδβ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ γ, τῇ αβ, πρὸς ὀρθὰς ἡ γδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δβ. καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ εζηθ, ἴσην ἔχον ἑκάστην τῶν πλευρῶν τῇ βδ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θζ, εη. καὶ ἀνεστάθω ἀπὸ τοῦ κ, σημείου τῷ τοῦ εζηθ, τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα ἡ κλ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τοῦ ἐπιπέδου, ὡς ἡ κμ, καὶ ἀφῃρήσθω ἐφ' ἑκατέρας τῶν κλ, κμ, μιᾷ τῶν κε, κζ, κη, κθ, ἴση ἑκατέρα τῶν κλ, κμ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ λε, λζ, λη, λθ, με, μζ, μη, μθ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ κε, τῇ κθ, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ εκθ, γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς θε, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς εκ.

Eucl. Lib. 13. Fig. 13.

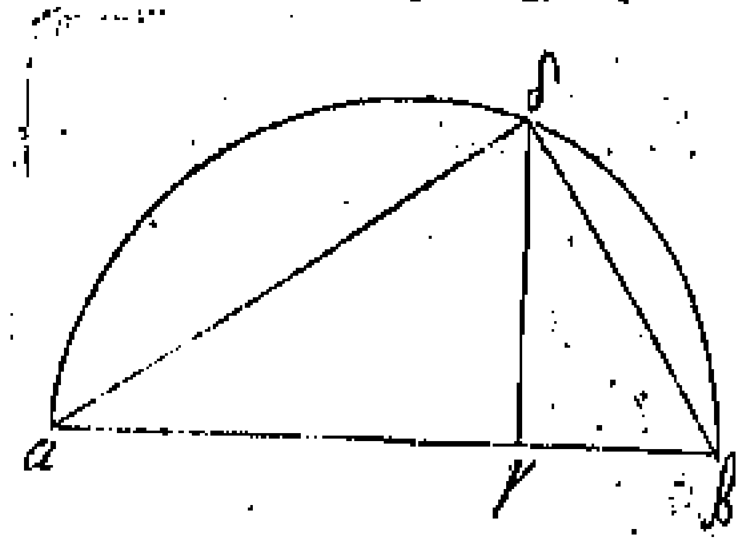


Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ λκ, τῇ κε, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ λκε, γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ελ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς κε, ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς θε, διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς εκ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς λε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς εθ, ἴση ἄρα ἡ λε, τῇ εθ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ λθ, τῇ θε, ἐστὶν ἴση, ἰσόπλευρον ἄρα τὸ λεθ, τρίγωνον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μὲν εἰσὶν αἱ τοῦ εζηθ, τετραγώνου πλευραί, κορυφαὶ δὲ τὰ λ, μ, σημεῖα, ἰσόπλευρόν ἐστιν, ὀκτάεδρον ἄρα συνίσταται

Ss 2 ὑπὸ

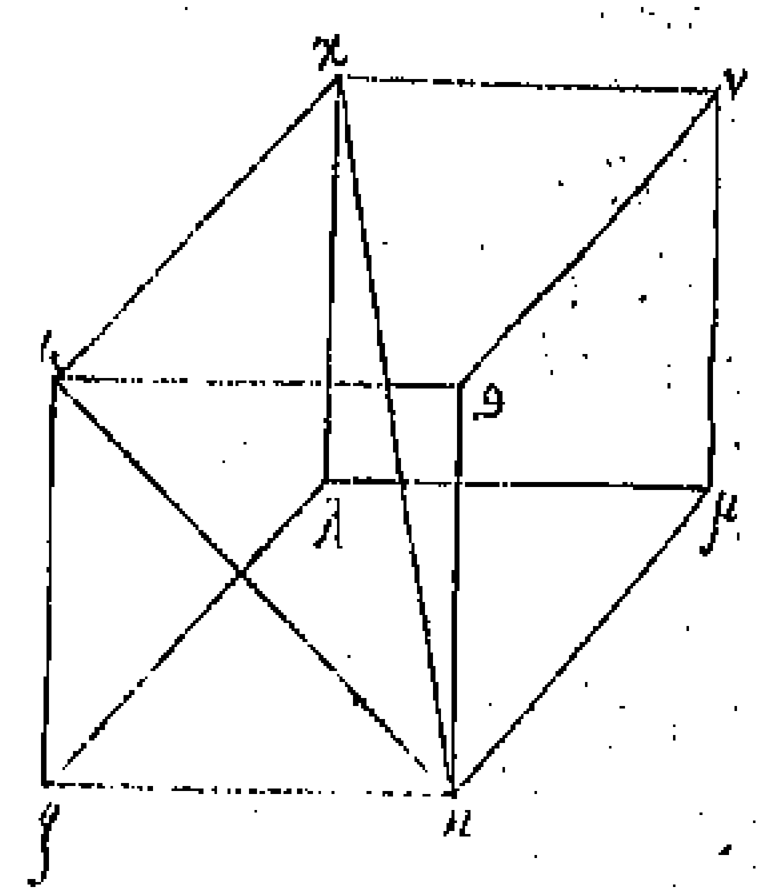
ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον. Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ στερεᾷ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς. ἐπεὶ γὰρ αἱ τρεῖς αἱ λκ, κμ, κε, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς λμ, γραφόμενον ἡμικύκλιον, ἥξει καὶ διὰ τοῦ ε. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ, ἐὰν μενούσης τῆς λμ, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τῶν ζ, η, θ, σημείων, καὶ ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένον τὸ ὀκτάεδρον. Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ, ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ λκ, τῇ κμ, κοινὴ δὲ ἡ κε, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ λε, βάσει τῇ εμ, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ λεμ, γωνία, ἐν ἡμικυκλίῳ γὰρ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς λμ, διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς λε. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αγ, τῇ γβ, διπλασία ἐστὶν ἡ αβ, τῆς βγ, ὡς δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δβ, διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς βδ, ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς λμ, διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς λε, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τῷ ἀπὸ τῆς λε, ἴση γὰρ κεῖται ἡ εθ, τῇ δβ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τῷ ἀπὸ τῆς λμ, ἴση ἄρα ἡ αβ, τῇ λμ, καὶ ἔστιν ἡ αβ, ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, ἡ λμ, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ, περιείληπται τὸ ὀκτάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ, καὶ συναποδέδεικται, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς.

Eucl. lib. 13. Fig. 14.



Πρότασις ΙΕ′: Πρόβλημα.

Κύβον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ πρότερα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, δυνάμει τριπλῆ ἐστι τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς.

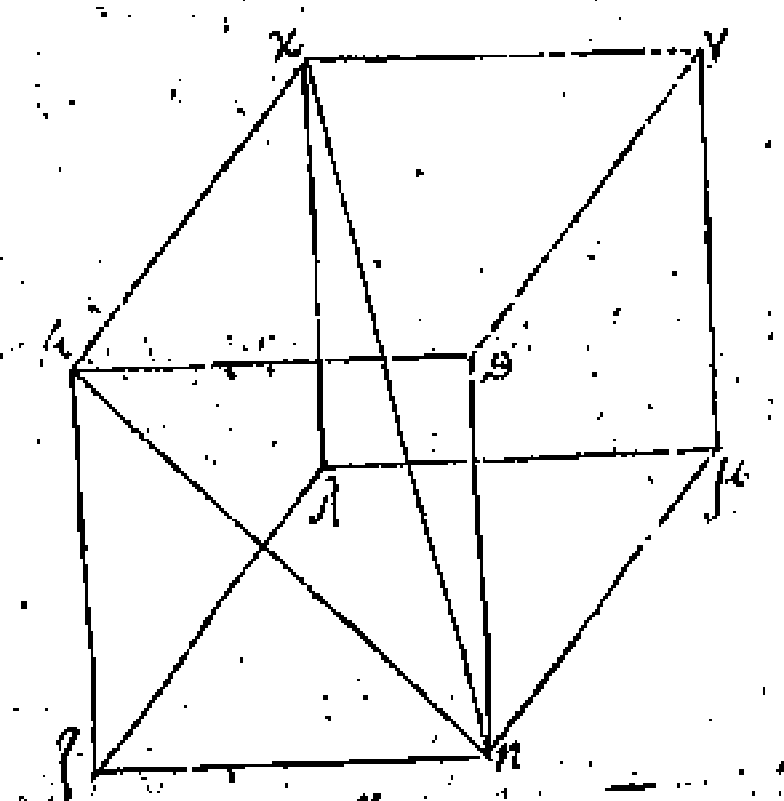


Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ γ, ὥστε διπλῆν εἶναι τὴν αγ, τῆς γβ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς αβ, ἡμικύκλιον τὸ αδβ, καὶ ἀπὸ τοῦ γ, τῇ αβ, πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ γδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δβ, καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ εζηθ, ἴσην ἔχον ἑκάστην πλευρὰν τῇ δβ, καὶ ἀπὸ τῶν ε, ζ, η, θ, τῷ τοῦ εζηθ, τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ κε, ζλ, ημ, θν, καὶ ἀφῃρήσθωσαν ἀφ᾽ ἑκάστης τῶν εκ, ζλ, ημ, θν, μιᾷ τῶν εζ, ζη, ηθ, θε, ἴση ἑκάστη τῶν εκ, ζλ, ημ, θν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κλ, λμ, μν, νκ, κύβος ἄρα συνίσταται ὁ ζν, ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενος.

Δεῖ

Δεῖ δὴ αὐτὸν καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ κη, ηε, καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ κεη, γωνία, διὰ τὸ καὶ τὴν κε, ὀρθὴν εἶναι πρὸς τὸ εη, ἐπίπεδον, δηλ: καὶ πρὸς τὴν εη, εὐθεῖαν, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς κη, γραφόμενον ἡμικύκλιον, ἥξει καὶ διὰ τῶν ε, η, σημείων. Πάλιν ἐπεὶ ἡ ζη, ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν ζλ, ζε, καὶ πρὸς τὸ κζ, ἄρα ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν ἡ ζη, ὥστε κἂν ἐπιζεύξωμεν τὴν ζκ, ἡ ζη, ὀρθὴ ἔσται καὶ πρὸς τὴν ζκ. καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τὸ ἐπὶ τῆς κη, γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ ζ. ὁμοίως δὲ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν τοῦ κύβου σημείων ἥξει. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς κη, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένος ὁ κύβος. Λέγω δὴ καὶ τῇ δοθείσῃ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ζη, τῇ ζε, καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ πρὸς τῷ ζ, γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς εη, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς εζ, ἴση δὲ ἡ εζ, τῇ εκ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς εη, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς εκ. ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ηε, εκ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ηκ, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς εκ. καὶ ἐπεὶ τριπλασίων ἐστὶν ἡ αβ, τῆς βγ, ὡς δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς βδ, ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ηκ, τοῦ ἀπὸ τῆς κε, τριπλάσιον, καὶ κεῖται ἴση τῇ βδ, ἡ κε, ἴση ἄρα καὶ ἡ κη, τῇ αβ, καὶ ἔστιν ἡ αβ, τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, καὶ ἡ κη, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ. Τῇ δοθείσῃ ἄρα σφαίρᾳ περιείληπται ὁ κύβος, καὶ συναποδέδεικται, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 13. Fig. 15.



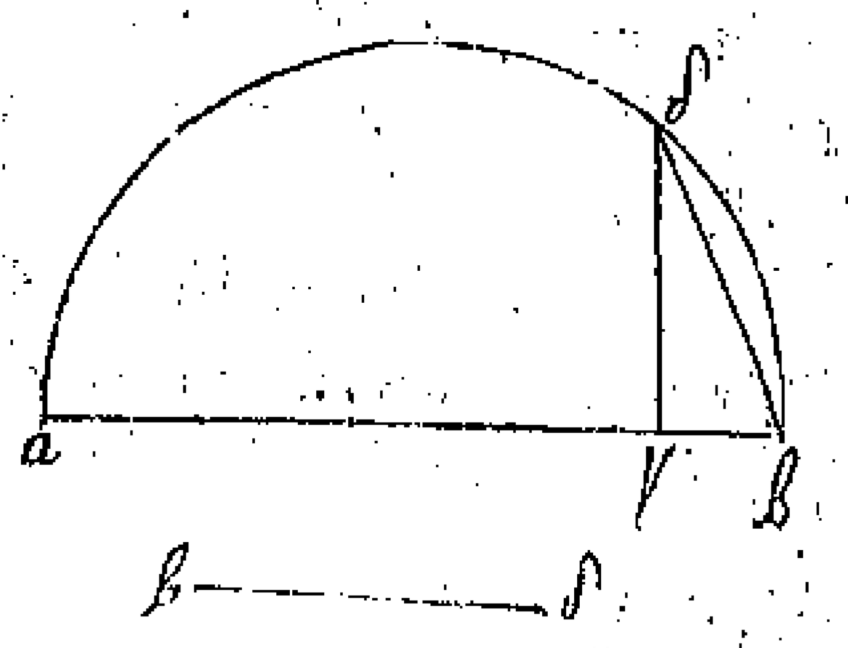
Πρότασις Ιϛ′: Πρόβλημα.

Εἰκοσάεδρον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ εἰρημένα σχήματα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ, ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐλάττων.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ γ. ὥστε τετραπλῆν εἶναι τὴν αγ, τῆς γβ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς αβ, ἡμικύκλιον τὸ αδβ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ γ, σημείου τῇ αβ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἡ γδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δβ. καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ εζηθκ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ δβ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν εζηθ, κύκλον, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ εζηθκ, καὶ τετμήσθωσαν αἱ εζ, ζη, ηθ, θκ, κε, περιφέρειαι

δίχα

δίχα κατὰ τὰ λ, μ, ν, ξ, ο, σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ε λ, λ ζ, ζ μ, μ η, η ν, ν θ, θ ξ, ξ κ, κ ο, ο ε. ὁμοίως καὶ αἱ λ μ, μ ν, ν ξ, ξ ο, ο λ, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ λ μ ν ξ ο, πεντάγωνον, καὶ δεκαγώνου ἡ ε ο, εὐθεῖα. καὶ ἀνεστάθωσαν ἀπὸ τῶν ε, ζ, η, θ, κ, σημείων τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαι αἱ ε π, ζ ρ, η σ, θ τ, κ υ, ἴσαι οὖσαι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ε ζ η θ κ, κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ π ρ, ρ σ, σ τ, τ υ, υ π, π λ, λ ρ, ρ μ, μ σ, σ ν, ν τ, τ ξ, ξ υ, υ ο, ο π. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ε π, κ υ, τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ε π, τῇ κ υ, ἔστι δὲ αὐτῇ καὶ ἴση, καὶ κατὰ τὴν λ γ': τοῦ α: αἱ τὰς ἴσας καὶ παραλλήλους ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι, ἡ π υ, ἄρα τῇ ε κ, ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἡ ε κ, πενταγώνου ἄρα ἰσοπλεύρου καὶ ἡ π υ, τοῦ εἰς τὸν ε ζ η θ κ, κύκλου ἐγγραφομένου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν π ρ, ρ σ, σ τ, τ υ, πενταγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς τὸν ε ζ η θ, κύκλον ἐγγραφομένου, ἰσόπλευρον ἄρα καὶ τὸ π ρ σ τ υ, πεντάγωνον. καὶ ἐπεὶ κατὰ τὴν ι: τοῦ παρόντος, ἑξαγώνου μέν ἐστιν ἡ π ε, δεκαγώνου δὲ ἡ ε ο, καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ π ε ο, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ π ο, ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ, δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ο υ, πενταγώνου ἐστὶ πλευρὰ, ἔστι δὲ καὶ ἡ π υ, πενταγώνου, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ π ο υ, τρίγωνον. διὰ

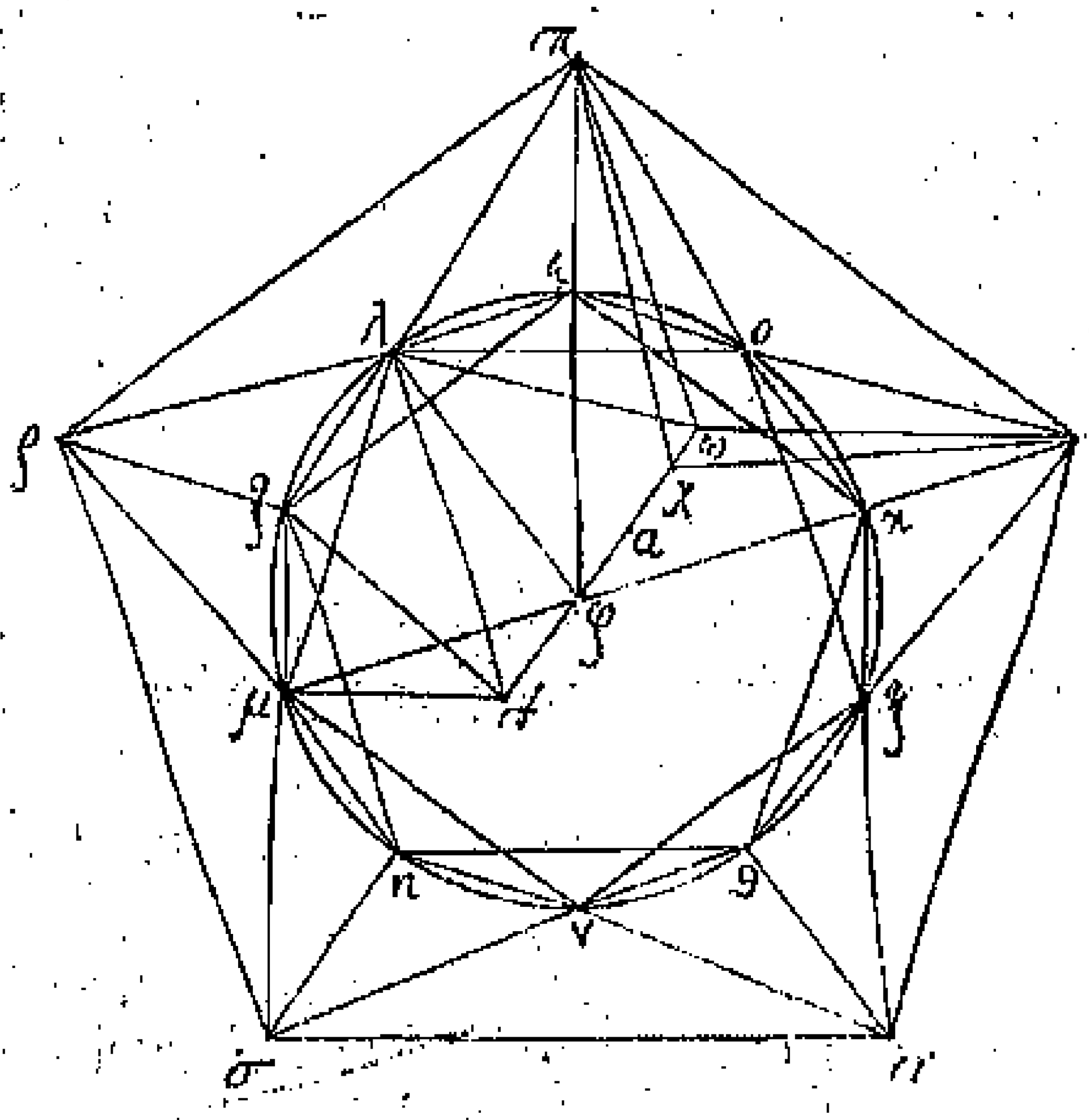


Eucl. lib. 13. Fig. 16.

τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν π λ ρ, ρ μ σ, σ ν τ, τ ξ υ, τριγώνων ἰσόπλευρόν ἐστι. καὶ ἐπεὶ πενταγώνου ἐδείχθη ἑκατέρα τῶν π λ, π ο, ἔστι δὲ καὶ ἡ λ ο, πενταγώνου, ἰσόπλευρον ἄρα τὸ π λ ο. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν λ ρ μ, μ σ ν, ν τ ξ, ξ υ ο, τριγώνων ἰσόπλευρόν ἐστιν. Εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, τοῦ ε ζ η θ κ, τὸ φ, σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ φ, τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάθω ἡ φ ω, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη, ὡς ἡ φ ψ, καὶ ἀφῃρήσθω ἑξαγώνου μὲν ἡ φ χ, δεκαγώνου δὲ ἑκατέρα τῶν φ ψ, χ ω. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ π ω, π χ, υ χ, υ ω, ε φ, λ φ, λ ψ, ψ μ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν φ χ, π ε, τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ φ χ, τῇ π ε, εἰσὶ δὲ καὶ ἴσαι, καὶ αἱ ε φ, π χ, ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν, ἑξαγώνου δὲ ἡ ε φ, ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ π χ, καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου μέν ἐστιν ἡ π χ, δεκαγώνου δὲ ἡ χ ω, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ π χ ω, γωνία, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ π ω. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ υ ω, πενταγώνου ἐστίν. Ἐπειδήπερ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὰς φ κ, χ υ, ἴσαι καὶ ἀπεναντίον ἔσονται, καὶ ἔστιν ἡ φ κ, ἐκ τοῦ κέντρου οὖσα, ἑξαγώνου, ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ χ υ, δεκαγώνου δὲ ἡ χ ω, καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ υ χ ω, πενταγώνου ἄρα ἡ υ ω, ἔστι δὲ καὶ ἡ π υ, πενταγώνου, ἰσόπλευρον ἄρα τὸ π υ ω, τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων,

ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ π ρ, ρ σ, σ τ, τ υ, εὐθεῖαι, κορυφὴ δὲ τὸ ω, σημεῖον ἰσόπλευρόν ἐστι. Πάλιν ἐπεὶ ἑξαγώνου μὲν ἡ φ χ, δεκαγώνου δὲ ἡ φ ψ, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ λ φ ψ, γωνία, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ λ ψ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν μ φ, οὖσαν ἑξαγώνου, συνάγεται καὶ ἡ μ ψ, πενταγώνου, ἔστι δὲ καὶ ἡ λ μ, πενταγώνου, ἰσόπλευρον ἄρα τὸ λ μ ψ, τρίγωνον. ὁμοίως δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ μ ν, ν ξ, ξ ο, ο λ, κορυφὴ δὲ τὸ ψ, σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστι. συνίσταται ἄρα εἰκοσάεδρον ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων περιεχόμενον. Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων. Ἐπειδὴ γὰρ ἑξαγώνου μὲν ἡ φ χ, δεκαγώνου δὲ ἡ χ ω, ἡ φ ω, ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ χ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα, ἐστὶν ἡ φ χ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ω φ, πρὸς τὴν φ χ, οὕτως ἡ φ χ, πρὸς τὴν χ ω, ἴση δὲ ἡ μὲν φ χ, τῇ φ λ, ἡ δὲ χ ω, τῇ φ ψ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ω φ, πρὸς τὴν φ λ, οὕτως ἡ φ λ, πρὸς τὴν φ ψ, καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ ω φ λ, λ φ ψ, γωνίαι. ἐὰν ἄρα ἐπιζεύξωμεν τὴν λ ω, εὐθεῖαν, ὀρθὴ ἔσται ἡ ὑπὸ ψ λ ω, γωνία, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ψ λ φ, φ λ ω, τριγώνων. τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ψ ω, γραφόμενον ἡμικύκλιον, ἥξει καὶ διὰ τοῦ λ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ω φ, πρὸς τὴν

Eucl. Lib. 13. Fig. 17.



φ χ, οὕτως ἡ φ χ, πρὸς τὴν χ ω, ἴση δὲ ἡ μὲν ω φ, τῇ ψ χ, ἡ δὲ φ χ, τῇ χ π, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ψ χ, πρὸς τὴν χ ω, οὕτως ἡ π χ, πρὸς τὴν χ ω. καὶ διὰ τοῦτο πάλιν, ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν π ψ, ὀρθὴ ἔσται ἡ πρὸς τῷ π, γωνία, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ψ ω, γραφόμενον ἡμικύκλιον, ἥξει καὶ διὰ τοῦ π. καὶ ἐὰν μενούσης τῆς ψ ω, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τοῦ π, καὶ τῶν λοιπῶν σημείων τοῦ εἰκοσαέδρου, καὶ ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένον τὸ εἰκοσάεδρον. Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. Τετμήσθω γὰρ ἡ φ χ, δίχα κατὰ τὸ α, καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ φ ω, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ χ, καὶ τὸ ἔλαττον αὐτῆς τμῆμα, ἐστὶν ἡ ω χ, ἡ ἄρα ω χ, προσλαβοῦσα τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος τὴν χ α, πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος. πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ω α, τοῦ ἀπὸ τῆς α χ, καὶ ἔστι τῆς μὲν α ω, διπλῆ ἡ ω ψ, τῆς δὲ α χ, διπλῆ ἡ χ φ, πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ω ψ, τοῦ ἀπὸ τῆς χ φ, καὶ ἐπεὶ τετραπλασίων

ἐστὶν

ἐστὶν ἡ αγ, τῆς βγ, πενταπλασίων ἄρα ἡ αβ, τῆς βγ, ἐστὶν, ὡς δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βδ. πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς βδ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ωψ, πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς φχ, καὶ ἔστιν ἡ δβ, ἴση τῇ φχ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, τοῦ εζηθκ. ἴση ἄρα καὶ ἡ αβ, τῇ ψω, καὶ ἔστιν ἡ αβ, ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, καὶ ἡ ψω, ἄρα τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ ἴση ἐστί. Τῇ ἄρα δοθείσῃ σφαίρᾳ περιείληπται τὸ εἰκοσάεδρον. Λέγω, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐλάσσων. Ἐπεὶ γὰρ ῥητή ἐστιν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, καὶ ἐστι δυνάμει πενταπλασίων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ εζηθκ, κύκλου, ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ εζηθκ, κύκλου, ὥστε καὶ ἡ διάμετρος αὐτοῦ ῥητή ἐστιν. ἐὰν δὲ εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. ἡ δὲ τοῦ εζηθκ, πενταγώνου πλευρὰ ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐστίν, ἡ ἄρα τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. καὶ ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος σύγκειται ἔκ τε τῆς τοῦ ἑξαγώνου, καὶ τῶν δύο τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

Πρότασις ΙΖ'. Πρόβλημα.

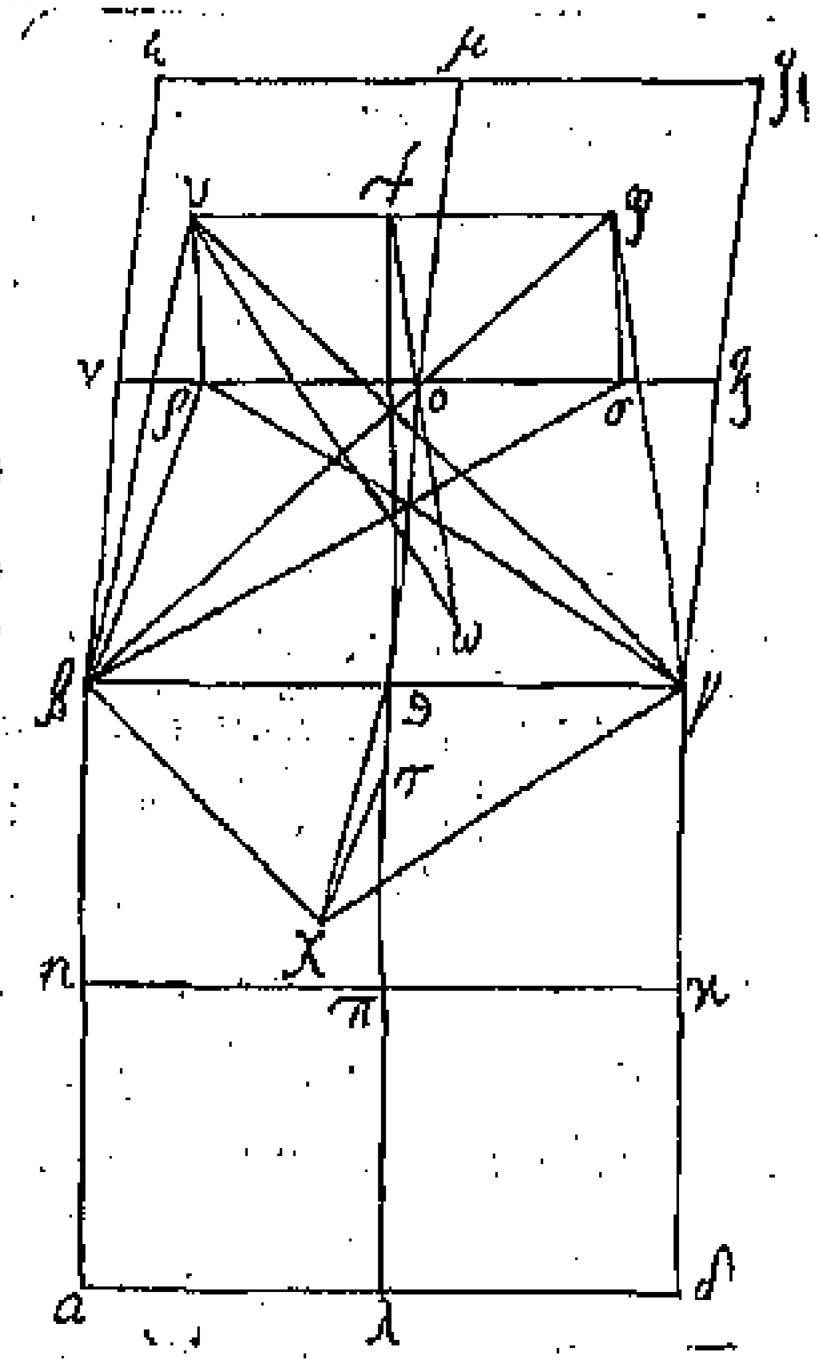
Δωδεκάεδρον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Κείσθωσαν τοῦ προειρημένου κύβου δύο ἐπίπεδα πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις, τὰ αβγδ, γβεζ. καὶ τετμήσθω ἑκάστη τῶν αβ, βγ, γδ, δα, εζ, εβ, ζγ, πλευρῶν, δίχα κατὰ τὰ η, θ, κ, λ, μ, ν, ξ, σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ηκ, θλ, μθ, νξ. καὶ τετμήσθωσαν αἱ νο, οξ, θπ, εὐθεῖαι ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὰ ρ, σ, τ, σημεῖα, καὶ ἔστω αὐτῶν μείζονα τμήματα τὰ ρο, οσ, τπ. καὶ ἀνεστάσθωσαν ἀπὸ τῶν ρ, σ, τ, σημείων τοῖς τοῦ κύβου ἐπιπέδοις πρὸς ὀρθὰς, ἐπὶ τὰ ἐκτὸς μέρη τοῦ κύβου αἱ ρυ, σφ, τχ, καὶ κείσθωσαν ἴσαι ταῖς ρο, οσ, τπ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ υβ, βχ, χγ, γφ, φυ. Λέγω, ὅτι τὸ υβχγφ, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, καὶ ἔτι ἰσογώνιόν ἐστιν. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ρβ, σβ, φβ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ νο, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ ρ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα, ἐστὶν ἡ ορ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ον, νρ, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ορ, κατὰ τὴν δ'. τοῦ παρόντος, ἴση ἡ μὲν ον, τῇ νβ, ἡ δὲ ορ, τῇ ρυ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν βν, νρ, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ρυ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν βν,

νρ,

νρ, τὸ ἀπὸ τῆς βρ, ἐστὶν ἴσον, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς βρ, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ρυ. ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν βρ, ρυ, τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ρυ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν βρ, ρυ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς βυ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς βυ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς υρ, διπλῆ ἄρα ἡ βυ, τῆς υρ, ἔστι δὲ καὶ ἡ φυ, τῆς ρυ, διπλῆ, ἐπειδήπερ ἡ ρσ, τῆς ρο, τουτέστι τῆς ρυ, ἐστὶ διπλῆ, ἴση ἄρα ἡ βυ, τῇ υφ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν βχ, χγ, γφ, ἑκατέρᾳ τῶν βυ, υφ, ἐστὶν ἴση, ἰσόπλευρον ἄρα τὸ βυφγχ, πεντάγωνον. Λέγω, ὅτι καὶ ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ, ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ ο, ἑκατέρᾳ τῶν ρυ, σφ, παράλληλος ἐπὶ τὰ ἐκτὸς μέρη τοῦ κύβου ἡ οψ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ψθ, θχ. Λέγω, ὅτι ἡ ψθχ, εὐθεῖά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ἡ θπ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ τ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα ἐστὶν ἡ πτ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ θπ, πρὸς τὴν πτ, οὕτως ἡ πτ, πρὸς τὴν τθ, ἴση δὲ ἡ μὲν θπ, τῇ θο, ἡ δὲ πτ, ἑκατέρᾳ τῶν τχ, οψ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ θο, πρὸς τὴν οψ, οὕτως ἡ χτ, πρὸς τὴν τθ, καὶ ἐστι παράλληλος ἡ μὲν θο, τῇ τχ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῷ βδ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἡ δὲ τθ, τῇ οψ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῷ βζ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἐὰν δὲ δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν, ὡς τὰ ψοθ, θτχ, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ εὐθεῖαι ἐπ' εὐθείας ἔσονται, ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ψθ, τῇ θχ, πᾶσα δὲ εὐθεῖα ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ, ἐν ἑνὶ ἄρα ἐπιπέδῳ ἐστὶ τὸ υβχγφ, πεντάγωνον. Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἰσογώνιόν ἐστιν, ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ νο, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ ρ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ ορ. ἔστιν ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ νο, ορ, πρὸς τὴν ον, οὕτως ἡ νο, πρὸς τὴν οσ, ἴση δὲ ἡ ορ, τῇ οσ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ σν, πρὸς τὴν νο, οὕτως ἡ νο, πρὸς τὴν οσ, ἡ νσ, ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ ο, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα ἡ νο. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν νσ, σο, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ον, ἴση δὲ ἡ μὲν ον, τῇ νβ, ἡ δὲ οσ, τῇ σφ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν νσ, σφ, τετράγωνα, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς νβ, ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν φσ, σν, νβ, τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς νβ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν σν, νβ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς βσ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν βσ, σφ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς φβ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ φσβ, γωνία, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς νβ, διπλῆ ἄρα ἡ φβ, τῆς βν, ἔστι δὲ καὶ ἡ βγ, τῆς βν, διπλῆ, ἴση ἄρα ἡ φβ, τῇ βγ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ βυ, υφ, δυσὶ ταῖς βχ, χγ, ἴσαι εἰσι,

Eucl. Lib. 13. Fig. 28.



καὶ βα-καὶ βάσις ἡ φβ, βάσει τῇ βχ, ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ βυφ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βχγ, ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ υφγ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βχγ· αἱ ἄρα ὑπὸ βχγ, βυφ, υφγ, τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐὰν δὲ πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, ἰσογώνιόν ἐστι τὸ πεντάγωνον, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ βυφγχ, πεντάγ: ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, ἄρα ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ἰσογώνιον, καὶ ἐστὶν ἐπὶ μιᾶς τοῦ κύβου πλευρᾶς τῆς βγ, ἐὰν ἄρα ἐφ' ἑκάστης τῶν τοῦ κύβου δώδεκα πλευρῶν τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, συσταθήσεταί τι σχῆμα στερεὸν, ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον.

Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι, ὅτι καὶ τὰ ἑξῆς. Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ψο, καὶ ἔστω ἡ ψω, συμβάλλει ἄρα ἡ ψω, τῇ τοῦ κύβου διαμέτρῳ, καὶ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας. τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ παρατελευταίῳ θεωρήματι τοῦ ια: βιβλίου, τεμνέτωσαν κατὰ τὸ ω, τὸ ω, ἄρα κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας, τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον, καὶ ἡ ψω, ἡμίσεια τοῦ κύβου πλευρᾶς. Ἐπεζεύχθω δὴ ἡ υω, καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ νσ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ ο, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα, ἐστὶν ἡ ον, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν νσ, σο, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς νο, ἴση δὲ ἡ μὲν νσ, τῇ ψο. ἐπειδήπερ καὶ ἡ μὲν νο, τῇ οω, ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ψο, τῇ οσ, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ οσ, τῇ ψυ. ἐπεὶ καὶ τῇ ρο, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ωψ, ψυ, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς νο, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ωψ, ψυ, ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς υω, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς υω, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς νο, ἔστι δὲ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον, δυνάμει τριπλασίων τῆς ἡμισείας τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς, προδέδεικται γὰρ κύβον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. εἰ δὲ ὅλη τῆς ὅλης, καὶ ἡ ἡμίσεια τῆς ἡμισείας, καὶ ἔστιν ἡ νο, ἡμίσεια τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. ἡ ἄρα υω, ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον, καὶ ἔστι τὸ ω, κέντρον τῆς περιλαμβανούσης σφαίρας τὸν κύβον, τὸ υ, ἄρα σημεῖον πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν λοιπῶν γωνιῶν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας. περιείληπται ἄρα τὸ δωδεκάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ. Λέγω δὴ, ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή. Ἐπεὶ γὰρ τῆς νο, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ ορ, ὅλης ἄρα τῆς νξ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ ρσ, οἷον ἐπεὶ ὡς ἡ νο, πρὸς τὴν ορ, ἡ ορ, πρὸς τὴν ρν, καὶ τὰ διπλάσια, τὰ γὰρ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὡς ἄρα ἡ νξ, πρὸς τὴν ρσ, οὕτως ἡ ρσ, πρὸς συναμφότερον τὴν νρ, σξ, μείζων δὲ ἡ νξ, τῆς ρσ, μείζων ἄρα καὶ ἡ ρσ, συναμφοτέρου τῆς νρ, σξ, ἡ νξ, ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα, ἐστὶν ἡ ρσ, ἴση δὲ ἡ ρσ, τῇ υφ, τῆς ἄρα νξ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης,

τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ υφ. καὶ ἐπεὶ ῥητή ἐστιν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, καὶ ἔστι δυνάμει τριπλασίων τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ νξ, πλευρὰ οὖσα τοῦ κύβου. ἐὰν δὲ ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή, ἡ υφ, ἄρα πλευρὰ οὖσα τοῦ δωδεκαέδρου, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

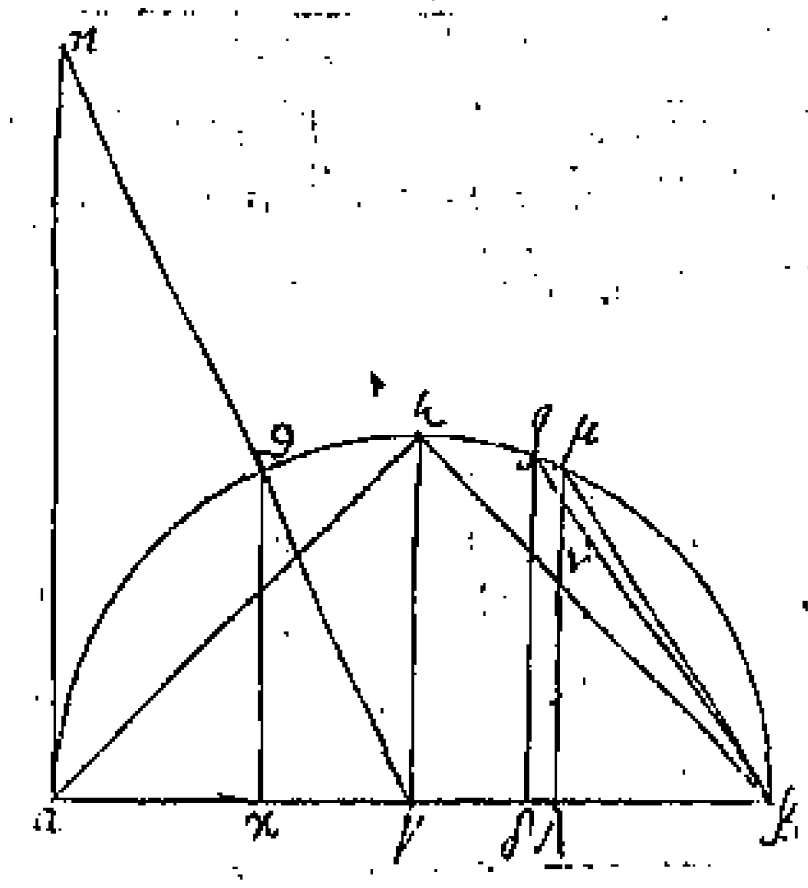
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρά.

Πρότασις ΙΗ'. Θεώρημα.

Τὰς πλευρὰς τῶν πέντε σχημάτων ἐκθέσθαι, καὶ συγκρῖναι πρὸς ἀλλήλας.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ γ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν αγ, τῇ γβ, κατὰ δὲ τὸ δ, ὥστε διπλασίονα εἶναι τὴν αδ, τῆς δβ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς αβ, ἡμικύκλιον τὸ αεβ. καὶ ἀπὸ τῶν γ, δ, τῇ αβ, πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ γε, δζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αε, αζ, ζβ, εβ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ αδ, τῆς δβ, τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ αβ, τῆς βδ. ἀναστρέψαντι, ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ βα, τῆς αδ, ὡς δὲ ἡ βα, πρὸς τὴν αδ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς βα, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αζ, ἰσογώνιον γὰρ ἐστὶ τὸ αζβ, τρίγων: τῷ αζδ, τριγών: ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς βα, τοῦ ἀπὸ τῆς αζ, ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος, καὶ ἔστιν ἡ αβ, ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, ἡ αζ, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς πυραμίδος πλευρᾷ. Πάλιν ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ δα, τῆς δβ, τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ αβ, τῆς βδ, ὡς δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν βδ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζβ, τριπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς βζ, ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, δυνάμει τριπλασίων τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς, καὶ ἔστιν ἡ αβ, ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος. ἡ βζ, ἄρα τοῦ κύβου ἐστὶ πλευρά. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αγ, τῇ γβ, διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ αβ, τῆς βγ, ὡς δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βε, διπλάσ: ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς βε, ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρ: διάμετρος δυνάμει διπλασίων τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς, καὶ ἔστιν ἡ αβ, ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος. ἡ βε, ἄρα τοῦ ὀκταέδρου ἐστὶ πλευρά. Ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ α, σημείου, τῇ αβ, εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς ἡ αη, καὶ κείσθω ἡ αη, τῇ αβ, ἴση,

Eucl. Lib. 13. Fig. 19.



καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ηγ, καὶ ἀπὸ τοῦ θ, ἐπὶ τὴν αβ, κάθετος ἤχθω ἡ θκ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αη, τῆς αγ, ἴση γὰρ ἡ ηα, τῇ αβ, ὡς δὲ ἡ ηα, πρὸς τὴν αγ, καὶ τὴν δ': τοῦ ϛ': οὕτως ἡ θκ, πρὸς τὴν κγ, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ θκ, τῆς κγ, τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς θκ, τοῦ ἀπὸ τῆς κγ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν θκ, κγ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς θγ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς κγ, ἡ δὲ θγ, ἴση ἐστὶ τῇ γβ, πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τοῦ ἀπὸ τῆς γκ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αβ, τῆς βγ, ὧν ἡ αδ, τῆς δβ, ἐστὶ διπλῆ. λοιπὴ ἄρα ἡ βδ, λοιπῆς τῆς δγ, ἐστὶ διπλῆ, τριπλῆ ἄρα ἡ βγ, τῆς γδ, ἐννεαπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τοῦ ἀπὸ τῆς γδ. πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τοῦ ἀπὸ γκ, μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς γκ, τοῦ ἀπὸ τῆς γδ, μείζων ἄρα ἡ γκ, τῆς γδ. Κείσθω τῇ γκ, ἴση ἡ γλ, καὶ ἀπὸ τοῦ λ, τῇ αβ, πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ λμ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ μβ: καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τοῦ ἀπὸ τῆς γκ, καὶ ἔστι τῆς μὲν βγ, διπλῆ ἡ αβ, τῆς δὲ γκ, ἡ κλ, πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς κλ, ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασίων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται, καὶ ἔστιν ἡ αβ, ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, ἡ κλ, ἄρα ἑξαγώνου ἐστὶ πλευρὰ, τοῦ εἰρημένου κύκλου. καὶ ἐπεὶ τῆς σφαίρας ἡ διάμετρος σύγκειται, ἔκ τε τῆς ἑξαγώνου, καὶ δύο τῶν τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν εἰρημένον κύκλον ἐγγραφομένων, καὶ ἔστιν ἡ μὲν αβ, ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, ἡ δὲ κλ, ἑξαγώνου πλευρὰ, καὶ ἴση ἡ ακ, τῇ λβ, ἑκατέρα τῶν ακ, λβ, τοῦ δεκαγώνου ἐστὶ πλευρὰ, τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. καὶ ἐπεὶ δεκαγώνου μὲν ἡ λβ, ἑξαγώνου δὲ ἡ μλ, ἴση γάρ ἐστι τῇ κλ, ἐπεὶ καὶ τῇ θκ, ἴσον γὰρ ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου. καὶ ἔστιν ἑκατέρα τῶν θκ, κλ, διπλασίων τῆς κγ, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ μβ, ἡ δὲ τοῦ πενταγώνου ἐστὶν, ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου, εἰκοσαέδρου ἄρα ἐστὶν ἡ μβ. καὶ ἐπεὶ ἡ ζβ, κύβου ἐστὶ πλευρὰ, τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ ν, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ νβ, ἡ νβ, ἄρα δωδεκαέδρου ἐστὶ πλευρά. καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἐδείχθη τῆς μὲν αζ, πλευρᾶς τῆς πυραμίδος δυνάμει ἡμιολία, τῆς δὲ τοῦ ὀκταέδρου τῆς βε, δυνάμει διπλασίων, τῆς δὲ τοῦ κύβου τῆς ζβ, δυνάμει τριπλασίων, οἵων ἄρα ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἕξ, τοιούτων ἡ μὲν τῆς πυραμίδος τεσσάρων, ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τριῶν, ἡ δὲ τοῦ κύβου δύο, ἡ ἄρα τῆς πυραμίδος πλευρὰ, τῆς μὲν τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς δυνάμει ἐστὶν ἐπίτριτος, τῆς δὲ τοῦ κύβου δυνάμει διπλῆ. ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τῆς τοῦ κύβου δυνάμει ἡμιολία. αἱ μὲν οὖν εἰρημέναι τῶν τριῶν σχημάτων πλευραὶ, λέγω δὴ πυραμίδος καὶ ὀκταέδρου, καὶ κύβου πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ἐν λόγοις ῥητοῖς, αἱ δὲ λοιπαὶ δύο, λέγω δὴ, ἥ τε τοῦ εἰκοσαέδρου, καὶ ἡ τοῦ δωδεκαέδρου, οὔτε πρὸς ἀλλήλας, οὔτε πρὸς τὰς εἰρημένας εἰσὶν ἐν λόγοις ῥητοῖς, ἡ μὲν ἐλάττων, ἡ δὲ ἀποτομή. Ὅτι δὲ μείζων ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἡ μβ, τῆς τοῦ δωδεκαέδρου τῆς νβ, δείξομεν οὕτως. ἐπεὶ γὰρ ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ζδβ, τρίγωνον τῷ ζαβ, τριγώνῳ, ἀνάλο-

γόν

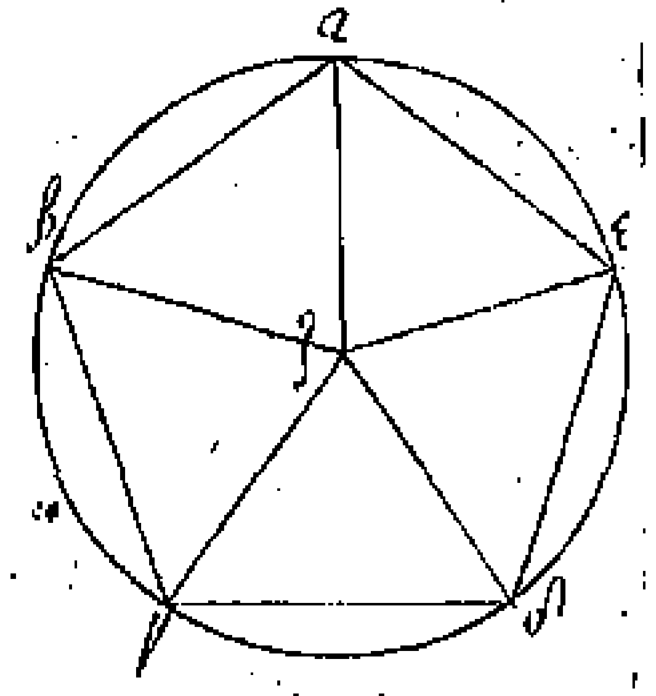
γόν εἰσιν, ὡς ἡ δβ, πρὸς τὴν βζ, οὕτως ἡ βζ, πρὸς τὴν βα, καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἔστιν ὡς ἡ α': πρὸς τὴν γ': οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β': ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δβ, πρὸς τὴν βα, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς δβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βζ. ἀνάπαλιν ἄρα ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βδ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς ζβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τριπλῆ δὲ ἡ αβ, τῆς βδ, τριπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ζβ, τοῦ ἀπὸ τῆς δβ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αδ, τοῦ ἀπὸ τῆς δβ, τετραπλάσιον, διπλῆ γὰρ ἡ αδ, τῆς δβ, μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αδ, τοῦ ἀπὸ τῆς ζβ, μείζων ἄρα καὶ ἡ αδ, τῆς βζ, πολλῷ ἄρα ἡ αλ, τῆς ζβ, μείζων ἐστὶ, καὶ ἡ μὲν αλ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ κ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα ἡ κλ, ἐπειδήπερ ἡ μὲν λκ, ἑξαγώνου ἐστὶν, ἡ δὲ κα, δεκαγώνου. τῆς δὲ ζβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ νβ, μείζων ἄρα ἡ κλ, τῆς νβ, ἴση δὲ ἡ κλ, τῇ λμ, μείζων ἄρα καὶ ἡ λμ, τῆς νβ, τῆς δὲ λμ, μείζων ἐστὶν ἡ μβ, πλευρὰ, πολλῷ ἄρα ἡ μβ, πλευρὰ οὖσα τοῦ εἰκοσαέδρου μείζων ἐστὶ τῆς νβ, πλευρᾶς οὔσης τοῦ δωδεκαέδρου.

Ἄλλως δὴ, ὅτι μείζων ἡ μβ, τῆς νβ. ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ αδ, τῆς δβ, τριπλῆ ἄρα ἡ αβ, τῆς βδ, ὡς δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν δβ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βζ, διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ ζαβ, τρίγωνον τῷ ζβδ, τριγ: τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς βζ, ἐδείχθη δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς κλ, πενταπλάσιον, πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς κλ, τρισὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ζβ, ἴσα ἐστίν. ἀλλὰ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ζβ, ἓξ τῶν ἀπὸ τῆς νβ, μείζονά ἐστιν, ὥστε καὶ ἓν τὸ ἀπὸ τῆς κλ, ἑνὸς τοῦ ἀπὸ τῆς νβ, μεῖζόν ἐστι, μείζων ἄρα ἡ κλ, τῆς νβ, ἴση δὲ ἡ κλ, τῇ λμ, μείζων ἄρα ἡ κλ, τῆς νβ, πολλῷ ἡ μβ, τῆς νβ, μείζων ἐστὶν, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ὅτι δὲ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ζβ, ἓξ τῶν ἀπὸ τῆς νβ, μείζονά ἐστι, δείξομεν οὕτως. Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ νβ, τῆς νζ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ζβ, νβ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν βζ, ζν, ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν βζ, βν, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν βζ, ζν, μεῖζόν ἐστιν, ἢ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ τῶν βζ, ζν, ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν βζ, ζν, ἴσόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῆς νβ, ἄκρον γὰρ καὶ μέσον λόγον τέτμηται ἡ βζ, κατὰ τὸ ν, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς μέσης, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ζβ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς βν, ἢ διπλάσιον. ἓν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ζβ, δύο τῶν ἀπὸ τῶν βν, μεῖζόν ἐστι. Λέγω, ὅτι παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε σχήματα, οὐ συσταθήσεται ἕτερον σχῆμα, περιεχόμενον ὑπὸ ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων ἴσων ἀλλήλοις, ὑπὸ μὲν γὰρ δύο τριγώνων, ἀλλ' οὐδὲ ἄλλων δύο ἐπιπέδων στερεὰ γωνία οὐ συσταθήσεται, ὑπὸ δὲ τριῶν τριγώνων ἡ τῆς πυραμίδος, ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἡ τοῦ ὀκταέδρου, ὑπὸ δὲ πέντε ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου, ὑπὸ δὲ ἓξ τριγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνισταμένων οὐκ ἔσται στερεὰ γωνία, οὔσης γὰρ τῆς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου γωνίας διμοίρου ὀρθῆς, ἔσονται αἱ ἓξ τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι, ὅπερ ἀδύνατον, πᾶσα γὰρ στερεὰ γωνία ὑπ' ἐλασσόνων, ἢ τεσσάρων ὀρθῶν περιέχεται. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ οὐδὲ ὑπὸ πλειόνων, ἢ ἓξ γωνιῶν ἐπιπέδων στερεὰ

γωνία

γωνία συνίσταται. ὑπὸ δὲ τετραγώνων τριῶν ἡ τοῦ κύβου γωνία περιέχεται, ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον, ἔσονται γὰρ πάλιν τέσσαρες ὀρθαί, ὑπὸ δὲ πενταγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων, ὑπὸ μὲν τριῶν, ἡ τοῦ δωδεκαέδρου, ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον, οὔσης γὰρ τῆς τοῦ ἰσοπλεύρου πενταγώνου γωνίας ὀρθῆς, καὶ πέμπτου ἔσονται αἱ τέσσαρες γωνίαι, τεσσάρων ὀρθῶν μείζους, ὅπερ ἀδύνατον. οὐδὲ μὴν ὑπὸ πολυγώνων ἑτέρων σχημάτων περιεχθήσεται στερεὰ γωνία, διὰ τὸ ἄτοπον. οὐκ ἄρα παρὰ τὰ εἰρημένα σχήματα ἕτερον στερεὸν συσταθήσεται ὑπὸ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl.Lib.13.Fig.20.



ΛΗ͂ΜΜΑ.

Ὅτι δὲ ἡ τοῦ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου γωνία ὀρθή ἐστι καὶ πέμπτον, οὕτω δεικτέον. Ἔστω γὰρ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ αβγδε, καὶ περιγραφθήτω περὶ αὐτὸ κύκλος ὁ αβγδε, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον, καὶ ἔστω τὸ ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζα, ζβ, ζγ, ζδ, ζε, δίχα ἄρα τέμνουσι τὰς πρὸς τοῖς α, β, γ, δ, ε, πενταγώνου γωνίας. καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τῷ ζ, πέντε γωνίαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι, μία ἄρα αὐτῶν, ὡς ἡ ὑπὸ αζβ, μιᾶς ὀρθῆς ἐστι παρὰ πέμπτον, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ζαβ, αβζ, μιᾶς εἰσιν ὀρθῆς καὶ πέμπτης, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ζαβ, τῇ ὑπὸ ζβγ, καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, τοῦ πενταγώνου γωνία μιᾶς ὀρθῆς ἐστι καὶ πέμπτης. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τοῦ Δεκάτου τρίτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

ΕΡΜΗΝΕΙ'Α ΤΩ͂Ν ΠΡΟΤΑ'ΣΕΩΝ

ΤΟΥ͂ ΔΕΚΑ'ΤΟΥ ΤΕΤΑ'ΡΤΟΥ ΒΙΒΛΙ'ΟΥ

ΤΟΥ͂ ΚΑΙ' ΣΤΕΡΕΟΥ͂ ΤΕΤΑ'ΡΤΟΥ,

ΤΩ͂Ν ΤΟΥ͂ ΕΥ'ΚΛΕΙ'ΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙ'ΩΝ,

Ὥς τισι δοκεῖ, ὡς ἄλλοις δὲ, Ὑψικλέους Ἀλεξανδρέως περὶ τῶν πέντε σωμάτων πρῶτον.

ΠΡΟΟΙ'ΜΙΟΝ.

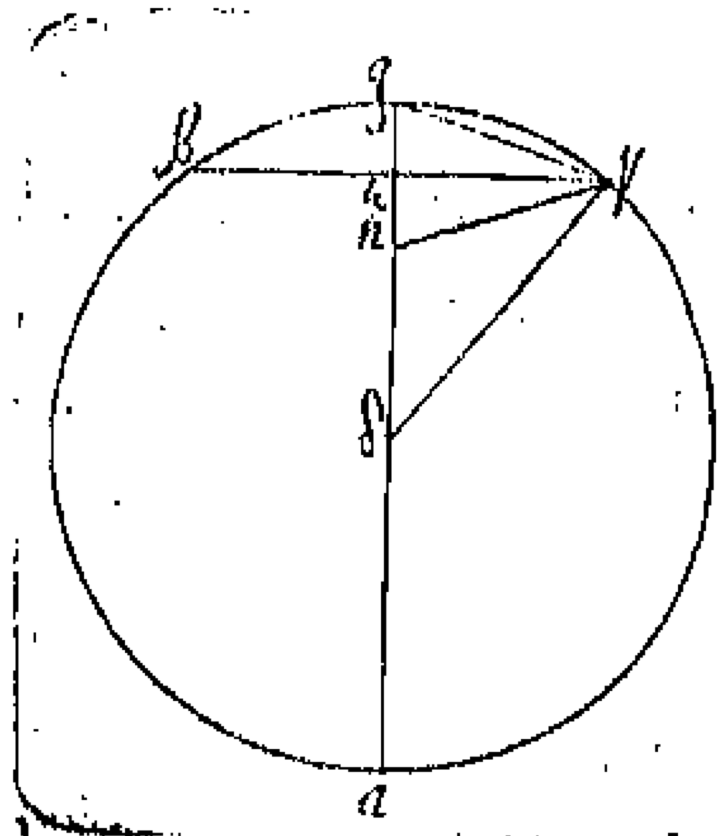
Βασιλείδης ὁ Τύριος, ὦ Πρώταρχε, παραγενηθεὶς εἰς Ἀλεξάνδρειαν, καὶ συσταθεὶς τῷ πατρὶ ἡμῶν διὰ τὴν ἀπὸ τοῦ μαθήματος συγγένειαν συνδιέτριψεν αὐτῷ τὸν πλεῖστον τῆς ἐπιδημίας χρόνον. καί ποτε διαπλοῦντες τὸ ὑπὸ Ἀπολλωνίου γραφὲν περὶ τῆς συγκρίσεως τοῦ δωδεκαέδρου, καὶ εἰκοσαέδρου, τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, τίνα λόγον ἔχει ταῦτα πρὸς ἄλληλα, ἔδοξαν ταῦτα μὴ ὀρθῶς γεγραφέναι τὸν Ἀπολλώνιον. αὐτοὶ δὲ ταῦτα διακαθάραντες ἔγραψαν, ὡς ἦν ἀκούειν τοῦ πατρός. ἐγὼ δ' ὕστερον περιέπεσον ἑτέρῳ βιβλίῳ ὑπὸ Ἀπολλωνίου ἐκδεδομένῳ, καὶ περιέχοντι ἀπόδειξιν ὑγιῶς περὶ τοῦ ὑποκειμένου, καὶ μεγάλως ἐψυχαγωγήθην τῇ τοῦ προβλήματος ζητήσει. τὸ μὲν ὑπὸ Ἀπολλωνίου ἐκδοθὲν ἔοικε κοινῇ σκοπεῖν, καὶ γὰρ περιφέρεται, τὸ δ' ὑφ' ἡμῶν δοκοῦν ὕστερον γεγραφέναι φιλοπόνως, ὅσα δοκεῖν ὑπομνηματισάμενος ἐκεῖνα προσφωνῆσαί σοι διὰ τὴν ἐν ἅπασι Μαθήμασι, μάλιστα ἐν Γεωμετρίᾳ προκοπὴν, ἐμπείρως κρίνοντι τὰ ῥηθησόμενα. διὰ τὴν πρὸς τὸν πατέρα συνήθειαν, καὶ τὴν πρὸς ἡμᾶς εὔνοιαν εὐμενῶς ἀκουσομένῳ τῆς πραγματείας. καιρὸς δ' ἂν εἴη προοιμίου μὲν παύσασθαι, τῆς δὲ συντάξεως ἄρξασθαι.

Πρότασις Α΄: Θεώρημα.

Η' ἀπὸ κέντρου κύκλου τινὸς, ἐπὶ τὴν τοῦ πενταγώνου πλευρὰν, τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου, κάθετος ἀγομένη, ἡμίσειά ἐστι συναμφοτέρου, τῆς τε ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ τῆς τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

Ἔστω κύκλος ὁ αβγ, καὶ ἐν αὐτῷ πενταγώνου ἰσοπλεύρου πλευρὰ ἡ βγ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ δ, καὶ ἐπὶ τὴν βα, κάθετος ἤχθω ἡ δε, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῆς δε, εὐθεῖα ἡ αεζ. Λέγω, ὅτι ἡ δε, ἡμίσειά ἐστι τῆς τοῦ ἑξαγώνου καὶ δεκαγώνου πλευρᾶς τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. ἐπεζεύχθωσαν αἱ δγ, δζ, καὶ κείσθω τῇ εζ, ἴση ἡ ηε, καὶ ἀπὸ τοῦ η, ἐπὶ τὸ γ, ἐπεζεύχθω ἡ ηγ. Ἐπεὶ πενταπλασία ἐστὶν ὅλου τοῦ κύκλου ἡ περιφέρεια τῆς βζγ, περιφερείας, καὶ ἔστι τῆς μὲν ὅλης τοῦ κύκλου περιφερείας ἡμίσεια ἡ αγζ, τῆς δὲ βζγ, ἡμίσεια ἡ ζγ, καὶ ἡ αγζ, ἄρα περιφέρεια πενταπλασία ἐστὶ τῆς ζγ, περιφερείας, τετραπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ αγ, τῆς ζγ, ὡς δὲ ἡ αγ, πρὸς τὴν ζγ, οὕτως ἡ ὑπὸ αδγ, πρὸς τὴν ὑπὸ ζδγ, γωνία, τετραπλῆ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ αδγ, τῆς ὑπὸ ζδγ, διπλῆ δὲ ἡ ὑπὸ αδγ, τῆς ὑπὸ εζγ, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ εζγ, τῆς ὑπὸ ηδγ. ἔστι δὲ ἡ ὑπὸ εζγ, ἴση τῇ ὑπὸ εηγ, διπλῆ ἄρα ἡ ὑπὸ εηγ, τῆς ὑπὸ ηδγ, ἴση ἄρα ἡ δη, τῇ ηγ. ἀλλ' ἡ ηγ, τῇ ζγ, ἴση, ἄρα καὶ ἡ δη, τῇ ζγ, ἴση, ἔστι δὲ καὶ ἡ ηε, τῇ εζ, ἴση, ἴση ἄρα καὶ ἡ δε, συναμφοτέρῳ τῇ εζ, ζγ, κοινὴ προσκείσθω ἡ δε, συναμφότερος ἄρα ἡ δζ, ζγ, διπλῆ ἐστι τῆς δε. καὶ ἔστιν ἡ μὲν δζ, ἴση τῇ τοῦ ἑξαγώνου, ἡ δὲ ζγ, ἴση τῇ τοῦ δεκαγώνου, ἡ δε, ἄρα ἡμίσειά ἐστι τῆς τοῦ ἑξαγώνου, καὶ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. φανερὸν δὲ ἐκ τῶν ἐν τῷ τρισκαιδεκάτῳ βιβλίῳ θεωρημάτων, (τουτέστι ιβ΄: θεωρήματι) ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ τριγώνου τοῦ ἰσοπλεύρου κάθετος ἀγομένη, ἡμίσειά ἐστι τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Eucl. Lib.14. Fig. 1.



Πρότασις Β΄: Θεώρημα.

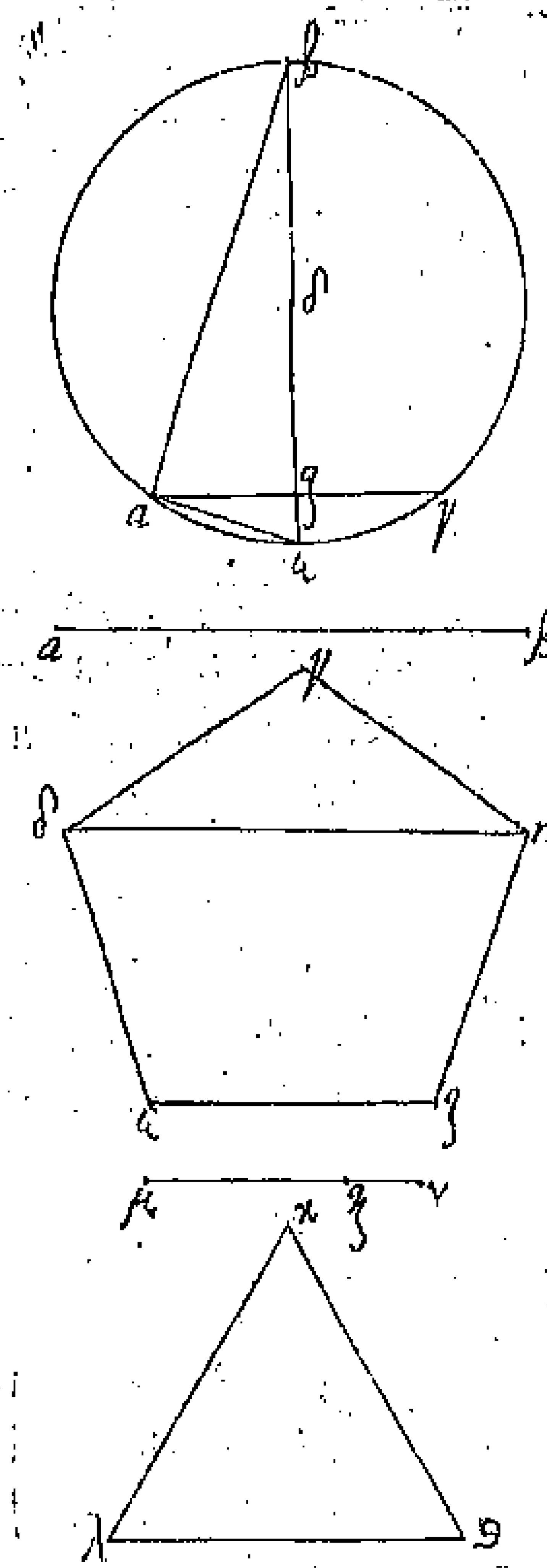
Ο' αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον, καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων.

Τοῦτο δὲ γράφεται ὑπὸ μὲν Ἀρισταίου, ἐν τῷ ἐπιγραφομένῳ, πέντε σχημάτων σύγκρισις, ὑπὸ δὲ Ἀπολλωνίου ἐκ τῆς β΄: ἐκδόσει τῆς συγκρίσεως τοῦ δωδεκαέ-

δρου

δρου πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτω καὶ αὐτὸ τὸ δωδεκάεδρον, πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον. διὰ δὲ τὴν αὐτὴν εἶναι κάθετον ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον, καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον. Γραπτέον δὲ καὶ ἡμῖν αὐτοῖς, ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον, καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον, τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων. Προγραφέντος τοῦδε. ἐὰν εἰς κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, τὸ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ὑπὸ δύο πλευρῶν τοῦ πενταγώνου ὑποτεινούσης εὐθείας, πενταπλάσιον ἔσται τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Eucl. lib. 14. Fig. 2.



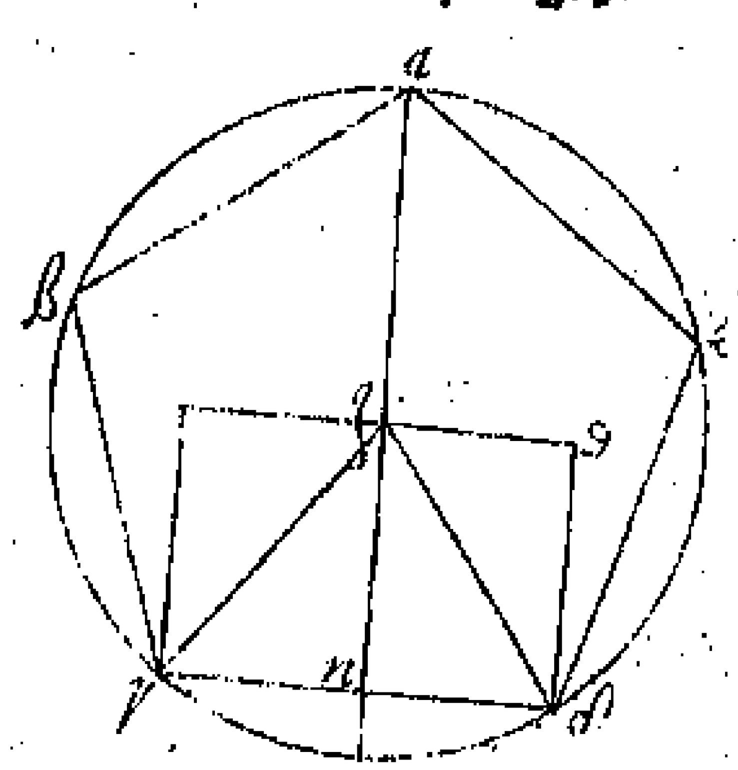
Ἔστω κύκλος ὁ αβγ, καὶ ἐν τούτῳ πενταγώνου πλευρὰ ἔστω ἡ αγ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ δ, καὶ ἐπὶ τῆς αγ, κάθετος ἡ δζ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ β, καὶ ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αβ. Λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῆς βα, αγ, τετράγωνα πενταπλάσια εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς δε, τετραγώνου. ἐπεζεύχθω ἡ αε, πλευρὰ δεκαγώνου ἄρα ἡ αε. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ βε, τῆς δε, τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βε, τοῦ ἀπὸ τῆς δε, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς βε, ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν βα, αε, τετραπλάσια ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν βα, αε, τοῦ ἀπὸ τῆς δε, πενταπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν αβ, αε, καὶ δε, τοῦ ἀπὸ τῆς δε, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν δε, αε, ἴσα τῷ ἀπὸ τῆς αγ, τῷ ι: τοῦ ιγ΄: πενταπλ: ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν βα, αγ, τοῦ ἀπὸ τῆς δε. Τούτου δεδειγμένου, δεικτέον, ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος λαμβάνει τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον, καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων. Κείσθω ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡ αβ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν δωδεκάεδρόν τε καὶ εἰκοσάεδρον, καὶ ἔστω μὲν τὸ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον τὸ γδεζη. εἰκοσαέδρου δὲ τρίγωνον τὸ κλθ. Λέγω, ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό, τε γδεζη, πεντάγ: καὶ τὸ κλθ, τρίγ: Ἐπεζεύχθω ἡ δη, κύβου ἄρα πλευρὰ ἡ δη. ἐκκείσθω δή τις εὐθεῖα ἡ μν, ὥστε πενταπλάσιον εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς μν, ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασία τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. τμηθήτω ἡ μν, κατὰ τὸ ξ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ μξ, δεκαγώνου ἄρα ἡ μξ. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιον τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς μν, τριπλάσιον δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς δη, τῷ ι΄: τοῦ ιγ΄: τρία ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς δη, ἴσα πέντε τοῖς ἀπὸ τῆς μν, ὡς δὲ τρία τὰ ἀπὸ τῆς δη, πρὸς πέντε τὰ ἀπὸ τῆς μν, οὕτως τρία τὰ ἀπὸ τῆς γη, πρὸς πέντε τὰ ἀπὸ τῆς μξ. τρία τοι γάρ τοι τὰ ἀπὸ τῆς γη, πέντε τοῖς ἀπὸ τῆς μξ, ἴσα ἐστί, πέντε δὲ τὰ ἀπὸ τῆς κλ, πέντε τοῖς ἀπὸ τῆς μν, καὶ πέντε τοῖς ἀπὸ τῆς μξ, ἐστὶν ἴσα, πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς κλ, ἴσα ἐστὶ τρισὶ τοῖς ἀπὸ τῆς δη, καὶ τρισὶ τοῖς ἀπὸ τῆς γη, τρία δὲ ἀπὸ τῆς δη, καὶ τρία ἀπὸ τῆς γη, ἴσα ἐστὶ δέκα καὶ πέντε τοῖς ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου κύκλου περὶ τὸ γδεζη, προσεδείχθη γὰρ τὸ ἀπὸ τῆς δη, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γη, πενταπλάσια τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸ πεντάγωνον τὸ γδεζη. ἀλλὰ πέντε μὲν τὰ ἀπὸ τῆς κλ, ἴσα ἐστὶ δέκα καὶ πέντε τοῖς ἀπὸ τῶν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸ κλθ, τρίγωνον κύκλου. ἐδείχθη δὲ τὸ ἀπὸ τῆς κλ, τριπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸ κλθ, τριγ: κύκλου, δεκαπέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου. ἴσα ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου. ἡ ἄρα διάμετρος, ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ, ὁ αὐτὸς ἄρα κύκλος περιλαμβάνει τότε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον, καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Γ': Θεώρημα.

Ἐὰν ᾖ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, καὶ περὶ τοῦτο κύκλος, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετος ἐπὶ μίαν πλευρὰν ἀχθῇ, τὸ τριακοντάκις ὑπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν καὶ τῆς καθέτου, ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφανείᾳ.

Ἔστω πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ αβγδε, καὶ περὶ τὸ πεντάγωνον κύκλος, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τούτου τὸ ζ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὴν γδ, κάθετος ἤχθω ἡ ζη. Λέγω, ὅτι τὸ τριακοντάκις ὑπὸ τῶν γδ, ηζ, ἴσον δώδεκα πενταγώνοις τοῖς αβγδε. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ γζ, ζδ. ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν γδ, ηζ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ γδζ, (1) τριγώνου, τὸ ἄρα πεντάκις ὑπὸ τῶν γδ, ηζ, δέκα τριγώνοις ἐστὶν ἴσα, τὰ δὲ δέκα τρίγωνα, δύο ἐστὶ πεντάγωνα, * καὶ πέντε ἑξάκις, τὸ ἄρα τριακοντάκις ὑπὸ τῶν γδ, ηζ, ἴσον ἐστὶ δώδεκα πενταγώνοις, δώδεκα δὲ πεντάγωνα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνειά ἐστι, τὸ ἄρα τριακοντάκις ὑπὸ τῶν γδ, ηζ, ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφανείᾳ.

Eucl. Lib. 14. Fig. 3.



Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἐὰν ᾖ τρίγωνον ἰσόπλευρον, ὡς τὸ αβγ, καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος, καὶ τὸ κέντρον τούτου τὸ δ, κάθετος ἡ δε, τὸ τριακοντάκις ὑπὸ τῶν

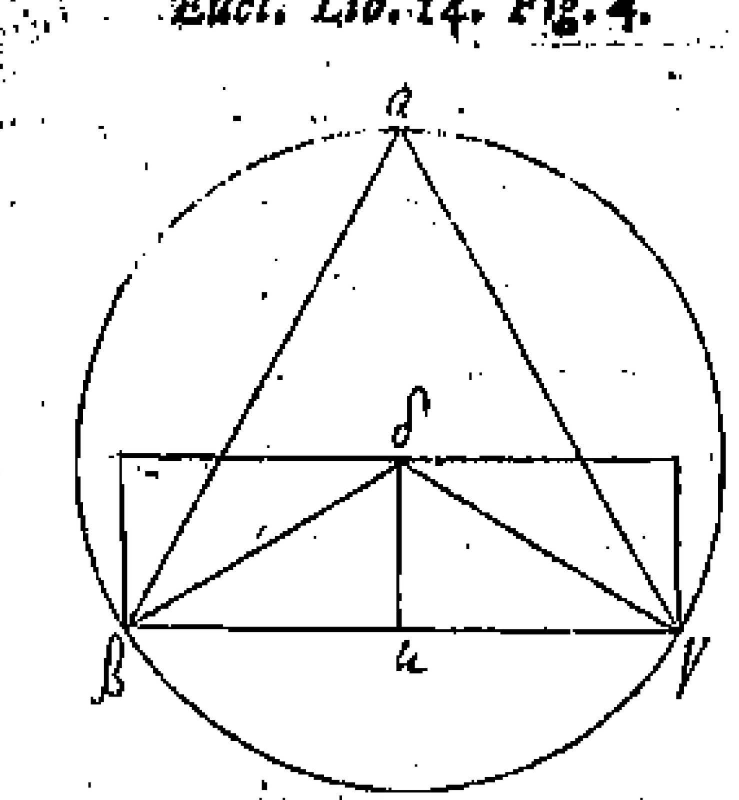
βγ,

(1) Οἷον τὸ γθ, καὶ τὴν μα: τοῦ α:

βγ, δε, ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφανείᾳ. ἐπεὶ γὰρ πάλιν τὸ ὑπὸ τῶν δε, βγ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ δβγ, τῇ αὐτῇ δύο ἄρα τριγ: ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν δε, βγ, δεκαπέντε τρίς. ἓξ ἄρα τρίγωνα τὰ δβε, ἴσα ἐστὶ τρισὶ τοῖς ὑπὸ τῶν δε, βγ, ἓξ δὲ τρίγωνα, ὡς τὰ δεβ, ἴσα ἐστὶ δύο τοῖς αβγ, καὶ πεντεδεκάκις, τὸ ἄρα τριακοντάκις ὑπὸ τῶν δε, βγ, ἴσον ἐστὶν εἴκοσι τοῖς αβγ, τριγώνοις, τουτέστι τῇ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφανείᾳ. ὥστε ἔσται ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν γδ, ζη, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν βγ, δε,

ΠΟΡΙΣΜΑ.

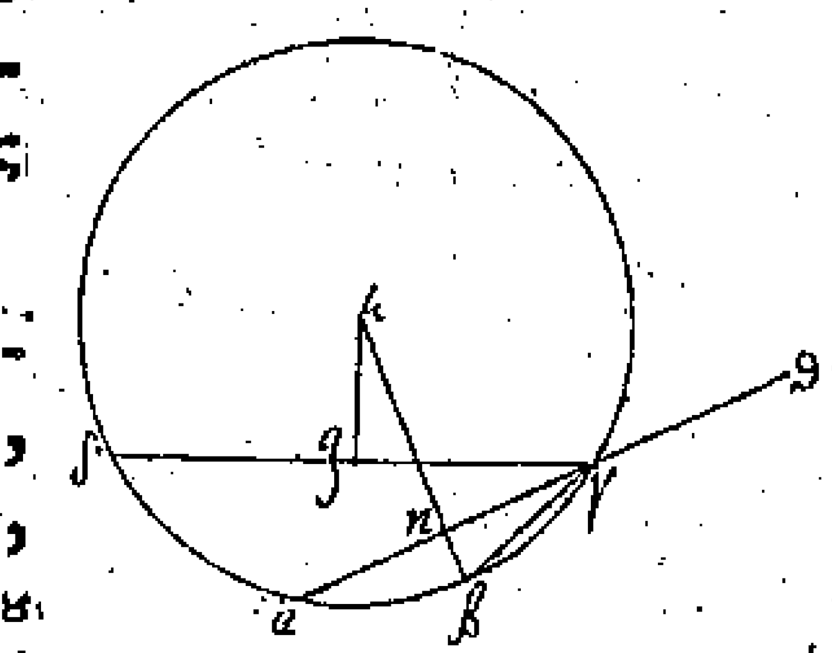
Eucl. Lib. 14. Fig. 4.



Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτω τὸ ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ πεντάγωνον κύκλου ἐπ' αὐτὴν καθέτου ἀγομένης, πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον κύκλου, ἐπ' αὐτὴν καθέτου ἀγομένης, τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, εἰκοσαέδρου, καὶ δωδεκαέδρου.

Πρότασις Δ': Θεώρημα.

Τούτου δήλου ὄντος, δεικτέον, ὅτι ἔσται, ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου, οὕτως ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν.

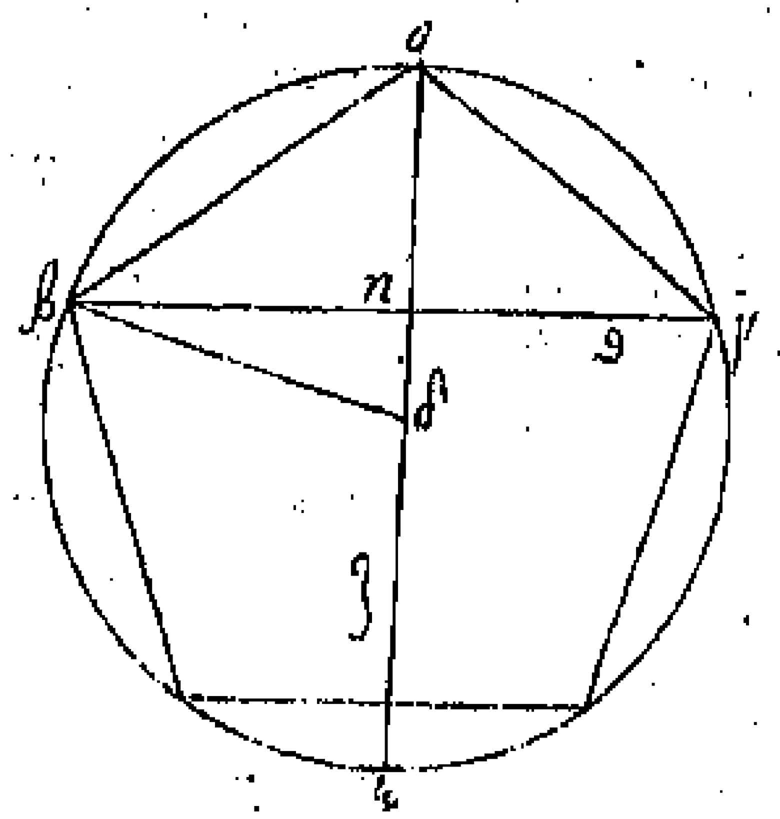


Ἐκκείσθω κύκλος περιλαμβάνων τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον, καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον, τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, ὁ δαβγ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸν τριγώνου μὲν ἰσοπλεύρου πλευρὰ ἡ γδ, πενταγώνου δὲ ἡ αγ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ ε, καὶ ἀπὸ τοῦ ε, ἐπὶ τὰς γδ, γα, κάθετοι ἤχθωσαν αἱ εζ, ηε, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῆς εη, εὐθεῖα ἡ ηβ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βγ, καὶ ἐκκείσθω κύβου πλευρὰ ἡ αθ. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου, οὕτως ἡ αθ, πρὸς τὴν γδ. ἐπεὶ γὰρ συναμφοτέρου τῆς εβγ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ βε, καὶ ἔτι συναμφοτέρου μὲν τῆς εβγ, ἡμίσεια ἡ εη, τῆς δὲ βε, ἡμίσεια ἡ εζ, καὶ τῆς εη, ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ εζ, ἔτι δὲ καὶ τῆς θγα, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμα ἡ γα, ὡς ἐν τῷ δωδεκαέδρῳ ἐδείχθη, ὡς ἄρα ἡ θα, πρὸς πρὸς τὴν γα, οὕτως ἡ εη, πρὸς τὴν εζ, ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς θα, ζε, τῷ ὑπὸ τῆς γα, εη, καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ θα, πρὸς τὴν γδ, οὕτω τὸ ὑπὸ τῆς θα, εζ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν

γδ, ζε,

γ δ, ζ ε, τῷ δὲ ὑπὸ θ α, ε ζ, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν γ α, η ε, ὡς ἄρα ἡ θ α, πρὸς τὴν γ δ, οὕτω τὸ ὑπὸ τῆς γ α, η ε, πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς γ δ, ζ ε, τουτέστιν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτως ἡ θ α, πρὸς τὴν γ δ.

Ἄλλως. Δεῖξαι, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτως ἡ τοῦ κύβου πλευρά, πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν. Προγραφέντος τοῦδε. Ἔστω κύκλος ὁ α β γ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸν πενταγώνου ἰσοπλεύρου πλευραὶ αἱ α β, α γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ β γ. καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ δ. καὶ ἀπὸ τοῦ α, ἐπὶ τὸ δ, ἐπεζεύχθω εὐθεῖα ἡ α δ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ᾽ εὐθείας τῆς α δ, εὐθεῖα ἡ δ ε. καὶ κείσθω τῆς μὲν α δ, εὐθείας ἡμίσεια ἡ δ ζ. ἡ δὲ η γ, τῆς γ θ, τριπλῆ ἔστω. Λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῆς α ζ, β θ, ἴσον εἶναι τῷ πενταγώνῳ, ἀπὸ γὰρ τοῦ β, ἐπὶ τὸ δ, ἐπεζεύχθω ἡ β δ. ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ α δ, τῆς δ ζ, ἡμιολία ἄρα ἐστὶ τῆς α δ, ἡ α ζ. πάλιν ἐπεὶ τριπλῆ ἐστιν ἡ η γ, τῆς γ θ, διπλῆ δὲ ἡ η θ, τῆς θ γ, ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ η γ, τῆς θ η. κατὰ τὴν ιϛʹ: ἄρα τοῦ ϛʹ: ὡς ἡ ζ α, πρὸς τὴν α δ, οὕτως ἡ γ η, πρὸς τὴν η θ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῆς α ζ, θ η, τῷ ὑπὸ τῆς δ α, γ η, ἡ δὲ γ η, ἴση ἐστὶ τῇ β η, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν α δ, β η, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν α ζ, θ η, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν α δ, β η, δύο ἐστὶ τρίγων: ὡς τὰ α β δ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν α ζ, η θ, ἄρα δύο ἐστὶν, ὡς τὰ α β δ. πέντε ἄρα τὰ ὑπὸ τῶν α ζ, η θ, δέκα τρίγωνά ἐστι, δέκα δὲ τρίγωνα δύο ἐστὶ πεντάγωνα, πέντε ἄρα τὰ ὑπὸ τῶν α ζ, η θ, δύο πενταγώνοις ἴσα ἐστι. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ η θ, τῆς θ γ, τὸ ὑπὸ τῶν α ζ, η θ, διπλοῦν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν α ζ, θ γ, δύο ἄρα τὰ ὑπὸ τῶν α ζ, θ γ, ἴσα ἐστὶν ἑνὶ τῷ ὑπὸ τῶν α ζ, θ η, πέντε τοῖς ὑπὸ τῶν α ζ, η θ, τουτέστι δύο πεντάγωνα.



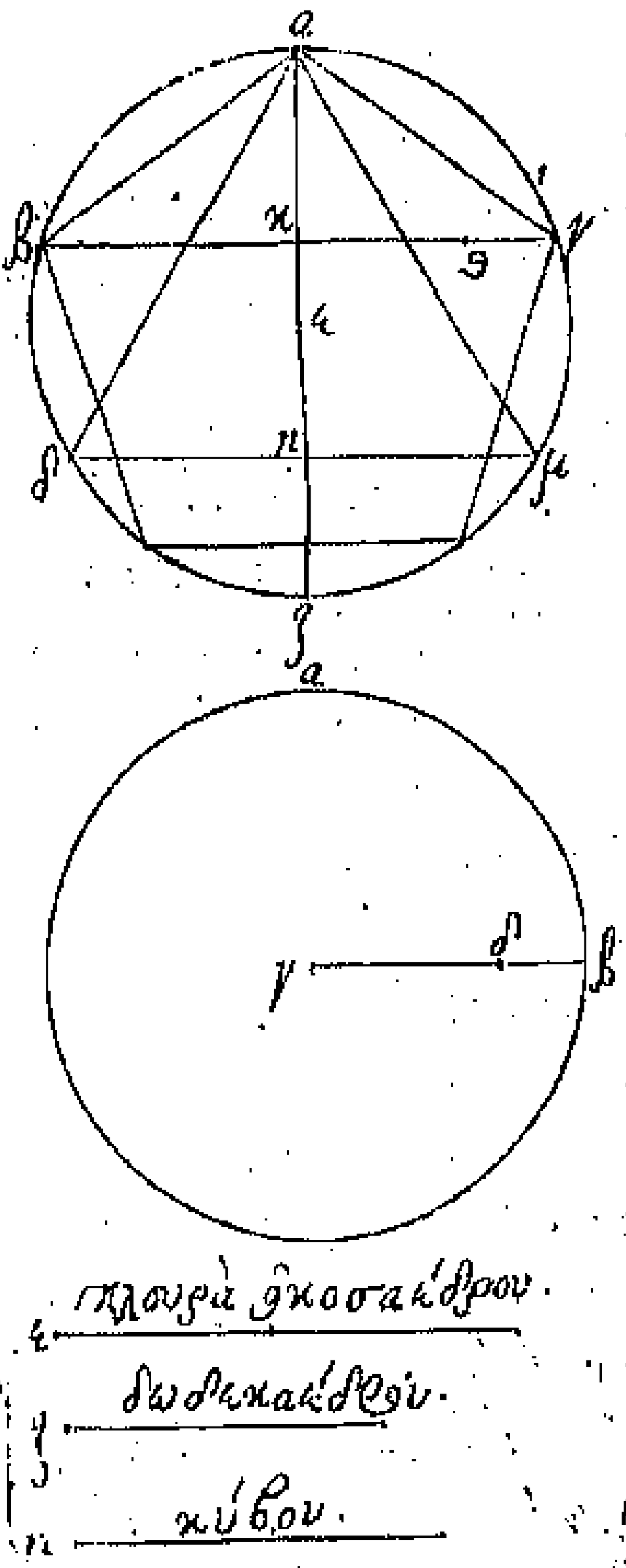
Eucl. Lib. 14. Fig. 5.

ὥστε πέντε τὰ ὑπὸ τῶν α ζ, θ γ, ἴσα ἐστὶν ἑνὶ πενταγώνῳ, πεντάκις δὲ τὰ ὑπὸ τῶν α ζ, θ γ, ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς α ζ, θ β. ἐπειδὴ πενταπλῆ ἐστιν ἡ θ β, τῆς θ γ, καὶ κοινὸν ὕψος ἐστὶν ἡ α ζ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν α ζ, β θ, ἴσον ἐστὶν ἑνὶ πενταγώνῳ. Τούτου δήλου ὄντος, νῦν ἐκκείσθω κύκλος, ὁ περιλαμβάνων τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον, καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, καὶ ἐγγεγράφθωσαν εἰς τὸν α β γ, κύκλον πενταγώνου ἰσοπλεύρου πλευραὶ αἱ β α, α γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ β γ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ ε, καὶ ἀπὸ τοῦ α, ἐπὶ τὸ ε, ἐπεζεύχθω ἡ α ε, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ α ε, ἐπὶ τὸ ζ. καὶ ἔσται ἡ α ε, τῆς ε η, διπλῆ, τριπλῆ δὲ ἡ κ γ, τῆς γ θ, καὶ ἀπὸ τοῦ η, τῇ α ζ, πρὸς ὀρθὰς ἡ δ μ, τριγώνου ἄρα ἐστὶν ἰσοπλεύρου ἡ δ μ, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ α δ μ, τρίγωνον. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν α η, θ β, ἴσον ἐστὶ τῷ πενταγ: τὸ δὲ ὑπὸ τῶν α η, η δ, τῷ α δ μ, τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν α η, θ β, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν δ η, η α, οὕτω τὸ πενταγ: πρὸς τὸ τρίγων: ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν β θ, α η, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν δ η, η α, ἡ β θ.

πρὸς

πρὸς τὴν δ η, καὶ ὡς ἄρα δώδεκα αἱ θ β, πρὸς εἴκοσι γ δ, οὕτω δώδεκα πεντάγωνα, πρὸς εἴκοσι τρίγωνα, τουτέστιν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου. καὶ ἐστὶ δώδεκα μὲν αἱ β θ, δέκα δὲ αἱ β γ, ἡ μὲν γὰρ β θ, τῆς θ γ, ἐστὶ πενταπλῆ, ἡ δὲ β γ, τῆς θ γ, ἑξαπλῆ, δώδεκα ἄρα αἱ β θ, ἴσαι εἰσὶ δέκα ταῖς β γ, εἴκοσι δὲ αἱ δ η, δέκα εἰσὶν αἱ δ μ, διπλῆ γὰρ ἡ δ μ, τῆς δ η. ὡς ἄρα δέκα αἱ β γ, πρὸς δέκα τὰς δ μ, τουτέστιν ὡς ἡ β γ, πρὸς τὴν δ μ, οὕτως ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν. καὶ ἔστιν ἡ μὲν β γ, ἡ τοῦ κύβου πλευρά, ἡ δὲ δ μ, ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρά, καὶ ὡς ἄρα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτως ἡ β γ, πρὸς τὴν δ μ, τουτέστιν ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν. Δεικτέον δή, ὅτι καὶ εὐθείας, οἱασδηποτοῦν τμηθείσης ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ὃν λόγον ἔχει ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος, πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν. Ἔστω κύκλος ὁ α β, περιλαμβάνων τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον, καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τριγ: τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ γ, καὶ προσεκβεβλήσθω τις εὐθεῖα, ὡς ἔτυχε, ἀπὸ τοῦ γ, ἡ β γ, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ δ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα ἐστὶν ἡ γ δ, δεκαγώνου ἄρα ἐστὶ πλευρὰ ἡ γ δ, τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου. Ἐκβεβλήσθω δὴ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἡ ε, δωδεκαέδρου δὲ ἡ ζ, κύβου δὲ ἡ η. ἡ μὲν ἄρα ε, τριγώνου ἰσοπλεύρου ἐστὶ πλευρά, ἡ δὲ ζ, πενταγώνου, τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου. ἡ δὲ ζ, τῆς η, μεῖζόν ἐστι τμῆμα, καὶ ἐπεὶ ἡ ε, ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγ: πλευρᾷ, ἡ δὲ τοῦ τριγώνου τοῦ ἰσοπλεύρου πλευρὰ δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς β γ, τριπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ε, τοῦ ἀπὸ τῆς β γ, ἐστὶ δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῆς β γ, β δ, τριπλάσια τοῦ ἀπὸ γ δ, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ε, πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν γ β, β δ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς γ β, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γ δ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς γ β, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γ δ, οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς η, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζ, μεῖζον γάρ ἐστι τμῆμα ἡ ζ, τῆς η, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ε, πρὸς τὸ ἀπὸ τῶν γ β, β δ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς η, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζ, καὶ ἐναλλὰξ καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἄρα τὸ

Eucl. Lib. 14. Fig. 6.



ἀπὸ

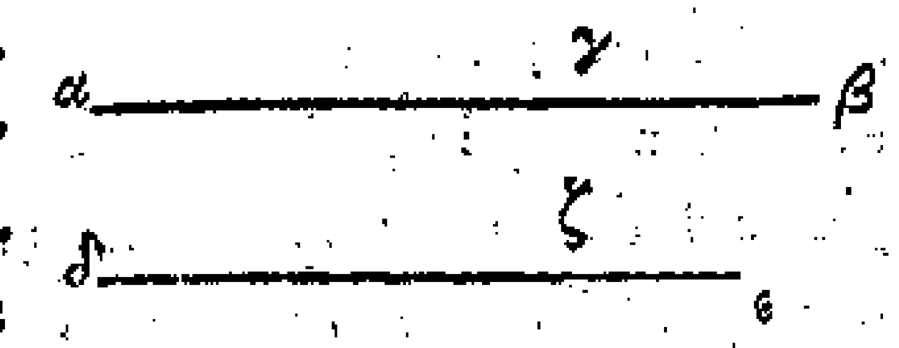
ἀπὸ τῆς η, πρὸς τὰ ἀπὸ τῆς ε, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς ζ, πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν γβ, βδ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ζ, ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ βγ, γδ, ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰν, καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου, ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς η, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ε, οὕτω τὰ ἀπὸ τῶν βγ, γδ, πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν γδ, δβ, ὡς δὲ τὰ ἀπὸ τῶν βγ, γδ, πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν γδ, δβ, οὕτως εὐθείας, οἱασδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος, πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἐλάττονος τμήματος, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς η, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ε, οὕτως εὐθείας οἱασδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος, πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ τοῦ ἐλάττονος τμήματος, καὶ ἐστιν ἡ μὲν η, κύβου πλευρὰ, ἡ δὲ ε, εἰκοσαέδρου. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἔσται ὡς ἡ δυναμένη τὴν ὅλην καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὴν δυναμένην τὴν ὅλην καὶ τὸ ἔλασσον τμῆμα, οὕτως ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου, τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων. Δεικτέον δὴ, ὅτι ὡς ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου, οὕτω τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου. Ἐπεὶ γὰρ ἴσοι κύκλοι περιλαμβάνουσι τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, ἐν δὲ ταῖς σφαίραις οἱ ἴσοι κύκλοι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου. αἱ γὰρ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὰ τῶν κύκλων ἐπίπεδα κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι τε εἰσὶ, καὶ ἐπὶ τὰ κέντρα τῶν κύκλων πίπτουσιν. ὥστε αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ περιλαμβάνοντος τό, τε τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον καὶ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον, ἴσαι εἰσὶ, τουτέστιν αἱ κάθετοι, ἰσοϋψεῖς ἄρα εἰσὶν αἱ πυραμίδες, αἱ βάσεις ἔχουσαι τὰ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνα, καὶ αἱ βάσεις ἔχουσαι τὰ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνα. αἱ δὲ ἰσοϋψεῖς πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις, ὡς ἄρα τὸ πεντάγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον, οὕτως ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας πρὸς τὴν πυραμίδα ἧς βάσις μὲν τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ὡς ἄρα δώδεκα πεντάγωνα πρὸς εἴκοσι τρίγωνα, οὕτω δώδεκα πυραμίδες πενταγώνους βάσεις ἔχουσαι πρὸς εἴκοσι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας. καὶ δώδεκα πεντάγωνα, ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνειά ἐστιν, εἴκοσι δὲ τρίγωνα ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνεια, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου, οὕτω δώδεκα πυραμίδες πενταγώνους βάσεις ἔχουσαι πρὸς εἴκοσι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας, καὶ εἰσὶ δώδεκα μὲν πυραμίδες πενταγώνους βάσεις ἔχουσαι τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου. εἴκοσι δὲ πυραμίδες τριγώνους βάσεις ἔχουσαι τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου, καὶ ὡς ἄρα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου, οὕτω τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου, ὡς δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ εἰκοσαέδρου, οὕτως ἐδείχθη καὶ ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκο-

σαέ-

σαέδρου, καὶ ὡς ἄρα ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου, οὕτω τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου.

Λ Η' Μ Μ Α.

Ὅτι δὲ, ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῶσιν, ἐν ἀναλογίᾳ εἰσὶ τῇ ὑποκειμένῃ, δείξομεν οὕτω. Τετμήσθω γὰρ ἡ μὲν αβ, εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ γ, μεῖζον δὲ τμῆμα αὐτῆς ἔστω ἡ αγ. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ δε, ἄκρον καὶ μέσον τετμήσθω λόγον κατὰ τὸ ζ, τὸ δὲ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα ἔστω ἡ δζ. Λέγω, ὅτι ὡς ἡ ὅλη αβ, πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα



τὴν αγ, οὕτως ἡ ὅλη δε, πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα τὴν δζ. ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, τὸ δὲ ὑπὸ τῆς δε, εζ, τῷ ἀπὸ τῆς δζ, ἔστι δ' ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ αβ, βγ, πρὸς τὸ ἀπὸ αγ, οὕτω τὸ ὑπὸ δε, εζ, πρὸς τὸ ἀπὸ δζ, καὶ ὡς τὸ τετράκις ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, βγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αγ, οὕτω τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς δε, εζ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δζ. καὶ συνθέντι, ἔστιν, ὡς τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς αβ, βγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αγ, οὕτω τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς δε, εζ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς δζ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δζ. ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς δε, εζ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δζ, οὕτω τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς αβ, βγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αγ. καὶ μήκει ὡς συναμφότερος ἡ αβ, βγ, πρὸς τὴν αγ, οὕτω συναμφότερος ἡ δε, εζ, πρὸς τὴν δζ. συνθέντι, ὡς συναμφότεροι αἱ αβ, βγ, μετὰ τῆς αγ, πρὸς τὴν αβ, οὕτω συναμφότεροι αἱ δε, εζ, μετὰ τῆς δζ, πρὸς τὴν δζ, τουτέστι δύο αἱ αβ, δε, πρὸς τὴν αγ, δζ, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἥμισυ, τουτέστιν ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν αγ, οὕτως ἡ δε, πρὸς τὴν δζ. Δεδειγμένου, ὅτι εὐθείας οἱασδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον τμηθείσης λόγον, ὃν ἔχει λόγον ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, τοῦτον ἔχει ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν. Δεδειγμένου δὴ τοῦδε, ὅτι ὡς ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰν, οὕτως ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων. Προσενηνεγμένου δὲ καὶ τοῦδε, ὅτι ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν καὶ αὐτὸ τὸ δωδεκάεδρον πρὸς αὐτὸ τὸ εἰκοσάεδρον, διὰ τὸ ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ κύκλου περιλαμβάνεσθαι τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγ: καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Α': Δῆλον, ὅτι ἐὰν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφῇ δωδεκάεδρόν τε καὶ εἰκοσάεδρον, λόγον ἕξουσιν εὐθείας οἱασδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθείσης, ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Τούτων δὴ πάντων γνωρίμων ἡμῖν γενομένων, δῆλον, ὅτι ἐὰν εἰς τὴν αὐτὴν

σφαῖ-

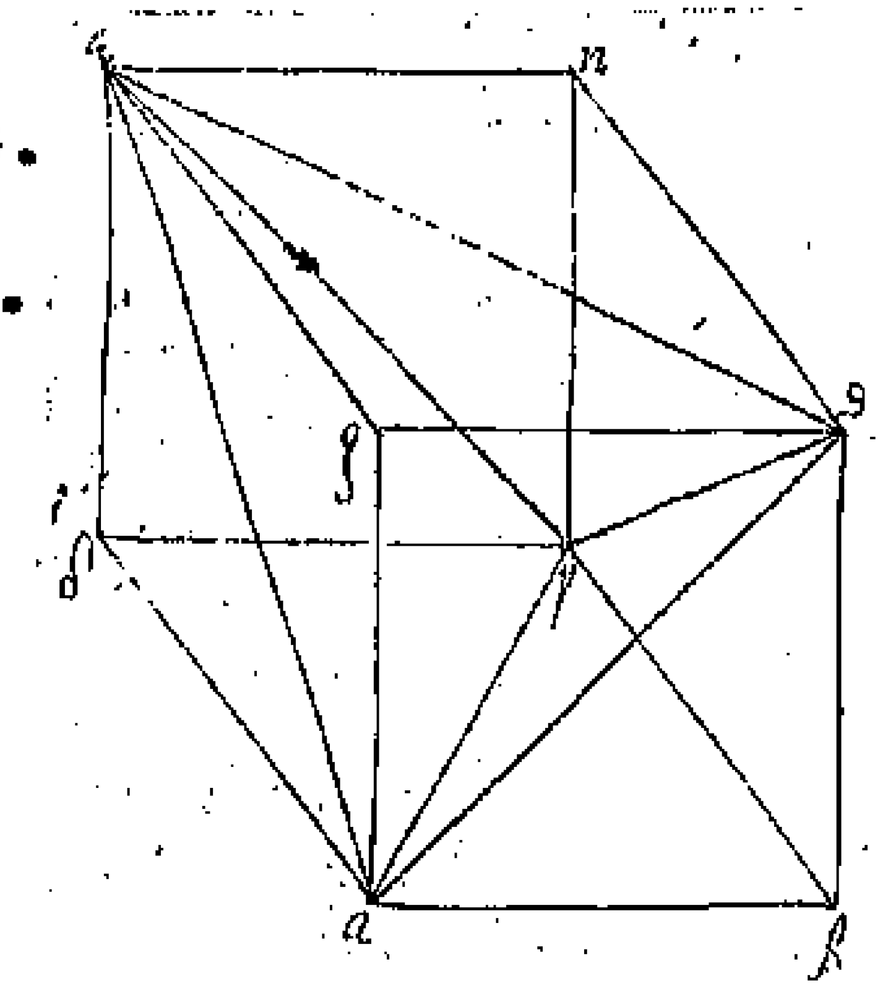
σφαῖραν ἐγγραφῇ δωδεκάεδρον καὶ εἰκοσάεδρον, τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον λόγον ἕξει, ὃν εὐθείας οἱασδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθείσης ἡ δυναμένη τὴν ὅλην καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὴν δυναμένην τὴν ὅλην καὶ τὸ ἔλαττον τμῆμα. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον, οὕτως ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου, τουτέστιν ὡς ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν, ὡς δὲ ἡ τοῦ κύβου πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν, οὕτως ἐστὶν εὐθείας οἱασδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης ἡ δυναμένη τὴν ὅλην καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, πρὸς τὴν δυναμένην τὴν ὅλην καὶ τὸ ἔλαττον τμῆμα, ὡς ἄρα τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον, τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, οὕτως εὐθείας οἱασδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης ἡ δυναμένη τὴν ὅλην καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, πρὸς τὴν δυναμένην τὴν ὅλην καὶ τὸ ἔλαττον τμῆμα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τοῦ Δεκάτου τετάρτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

ΕΡΜΗΝΕΙ'Α ΤΩ'Ν ΠΡΟΤΑ'ΣΕΩΝ
ΤΟΥ͂ ΔΕΚΑ'ΤΟΥ ΠΕ'ΜΠΤΟΥ ΒΙΒΛΙ'ΟΥ
ΤΟΥ͂ ΚΑΙ' ΣΤΕΡΕΟΥ͂ ΠΕ'ΜΠΤΟΥ,
ΤΩ'Ν ΤΟΥ͂ ΕΥ'ΚΛΕΙ'ΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙ'ΩΝ,

Ὥς τισι δοκεῖ, ὡς δ' ἄλλοις, Ὑψικλέους Ἀλεξανδρέως περὶ τῶν πέντε σωμάτων δεύτερον.

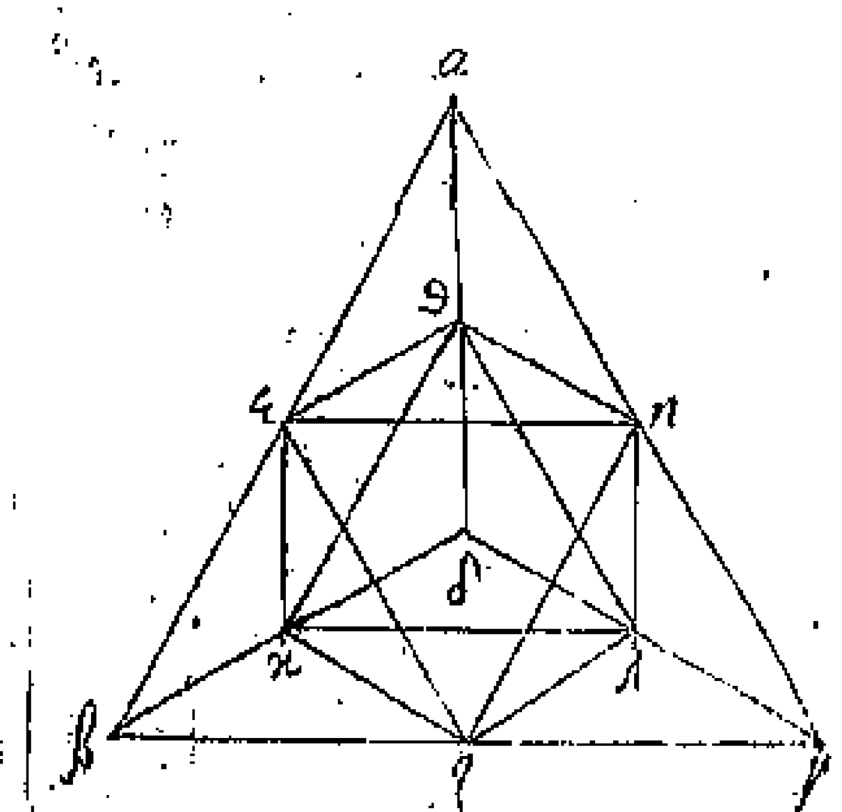
Eucl. lib. 15. Fig. 1.



Πρότασις Α': Πρόβλημα.

Εἰς τὸν δοθέντα κύβον πυραμίδα ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύβος ὁ αβγδεζηθ, εἰς ὃν δεῖ πυραμίδα ἐγγράψαι. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, γε, αθ, εθ, θγ, φανερὸν δή, ὅτι τὰ αεγ, αθε, αθγ, γθε, τρίγωνα ἰσόπλευρά ἐστι, τετραγώνων γάρ εἰσι διάμετροι αἱ πλευραί, πυραμὶς ἄρα ἐστὶν ἡ αεγθ, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν δοθέντα κύβον.



Πρότασις Β': Πρόβλημα.

Εἰς τὴν δοθεῖσαν πυραμίδα ὀκτάεδρον ἐγγράψαι.

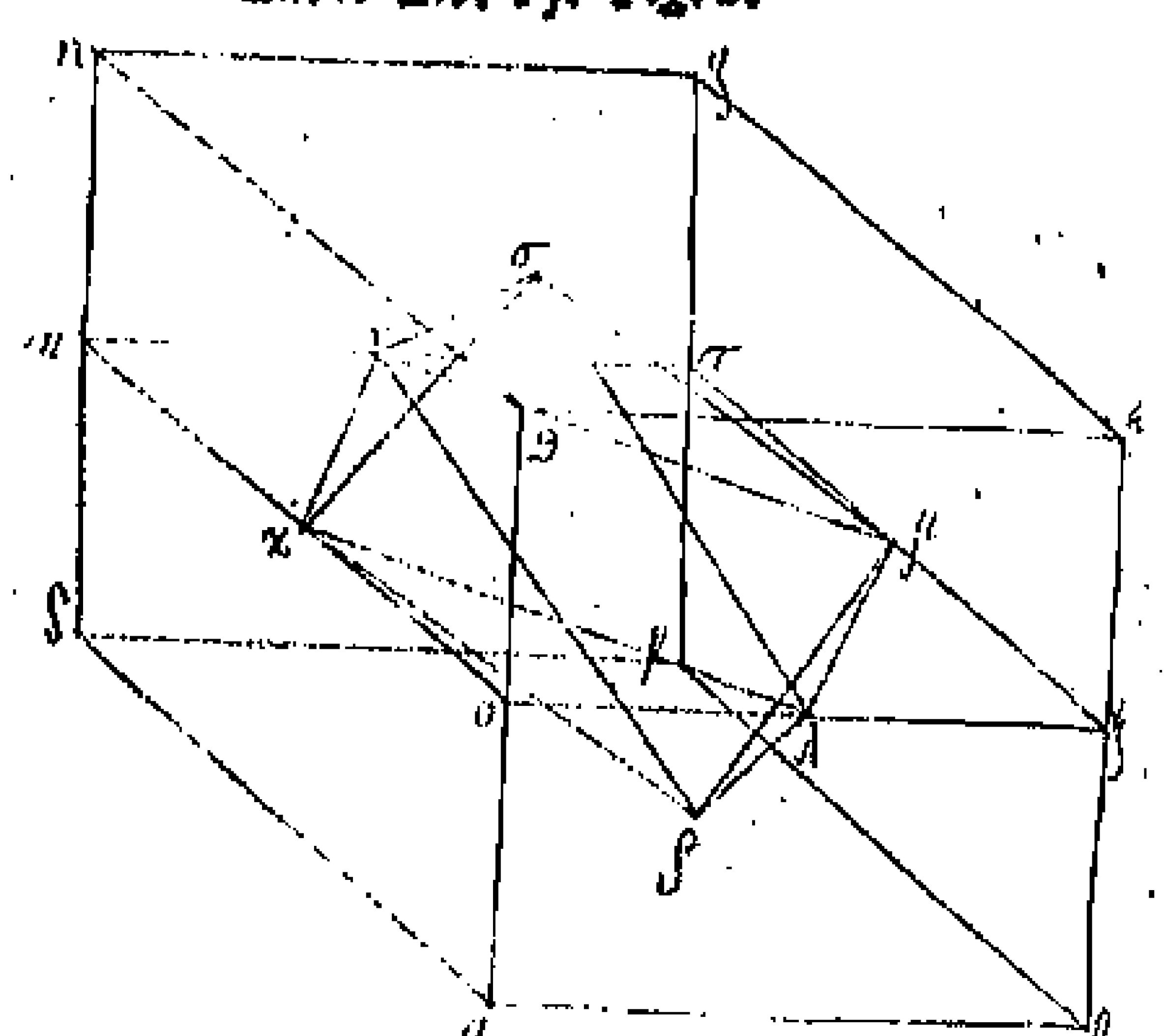
Ἔστω ἡ δοθεῖσα πυραμὶς ἡ αβγδ, καὶ τετμήσθω δίχα ἑκάστη τῶν αὐτῆς πλευρῶν τοῖς ε, ζ, η, θ, κ, λ, σημείοις, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θκ, θλ, εζ, ζη, καὶ αἱ λοιπαί, καὶ ἐπεὶ ἡ αβ, διπλῆ ἐστιν ἑκατέρας τῶν θκ, ηζ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ θκ, τῇ ηζ, καὶ παράλληλος. ὁμοίως καὶ ἡ θη, τῇ ζκ, ἴση τε ἐστὶ καὶ παράλληλος, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ θκζη. Λέγω, καὶ ὀρθογώνιον, ἐὰν γὰρ ἀπὸ τῆς κλ, κάθετοι ἀχθῶσιν ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τὰ εβζη, ζγεη, εζαη, θκζη. ὁμοίως δείξομεν καὶ τὰ παρὰ τὸ θκζη, τετράγωνα ἰσόπλευρα εἶναι, καὶ ὀρθογώνια.

Πρότασις Γ': Πρόβλημα.

Εἰς τὸν δοθέντα κύβον ὀκτάεδρον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύβος ὁ αβγδεζηθ, καὶ εἰλήφθω τὰ κέντρα τῶν ἐφεστώτων τετραγώνων τὰ κ, λ, μ, ν. Λέγω, ὅτι τὸ κλμν, τετράγωνόν ἐστιν. Ἤχθω διὰ τῶν κ, λ, μ, ν, παραλληλόγραμμον τὸ ξοπτ. ἐπεὶ οὖν διπλῆ ἐστιν, ἡ μὲν πο, τῆς κο, ἡ δὲ ξο, τῆς ολ, ἴση ἐστὶν ἡ οπ, τῇ ξο, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ οκ, τῇ ολ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς κλ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ολ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς μλ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς λξ, ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς κλ, τῷ ἀπὸ τῆς μλ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ κν, νμ, τῆς πν, ντ, διπλάσιαι, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ κλμν, καὶ φανερὸν ὅτι καὶ ὀρθογώνιον, εἰλήφθω τῶν βδ, εη, δύο τετραγώνων τὰ κέντρα, τὰ ρ, σ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ρλ, ρμ, ρκ, ρν, σκ, σλ, σμ, σν, καὶ φανερὸν, ὅτι ἰσόπλευρά ἐστι τὰ ποιοῦντα τὸ ὀκτάεδρον τρίγωνα, τῷ γὰρ αὐτῷ λόγῳ ἀποδείξομεν καὶ ταῦτα.

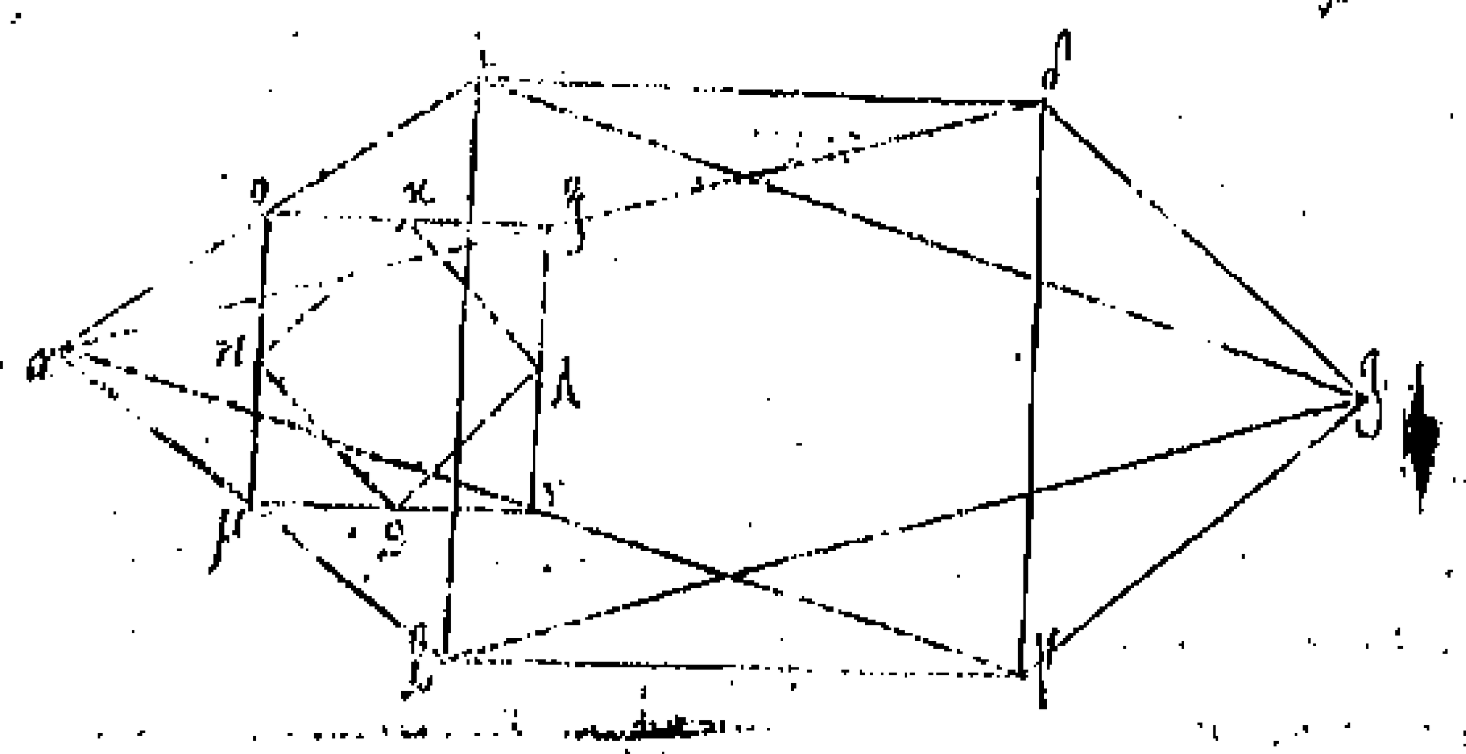
Eucl. Lib. 15. Fig. 2.



Πρότ: Δ': Πρόβ:

Εἰς τὸ δοθὲν ὀκτάεδρον κύβον ἐγγράψαι.

Εἰλήφθω τῶν περὶ τὰ αβγ, αγδ, αβε, αδε, τρίγωνα κύκλων τὰ κέντρα τὰ η, θ, κ, λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ηθ, ηκ, λκ, λθ. Λέγω, ὅτι τὸ ηθκλ, τετράγωνόν ἐστιν. Ἤχθωσαν διὰ τῶν η, θ, κ, λ, ταῖς βγ, βε, γδ, δε, παράλληλοι αἱ μν, νξ, ξο, ομ. ἐπεὶ οὖν ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ αβγ, τρίγωνον, ἡ ἀπὸ τοῦ α, ἐπὶ τὸ θ, κέντρον τοῦ περὶ τὸ αβγ, τρίγωνον κύκλου, δίχα τέμνει τὴν πρὸς τῷ α, τοῦ αβγ, τριγώνου, ἴση ἄρα ἡ θν, τῇ μθ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴση ἐστὶ καὶ ἡ



μη,

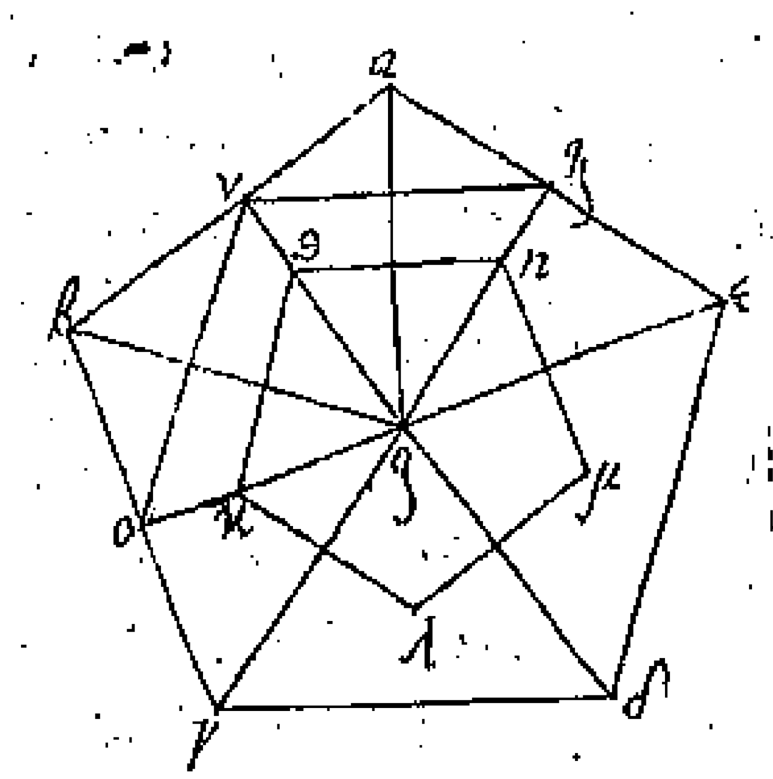
μη, τῇ ηο, ἐπειδὴ δὲ ἡ μν, τῇ μο, καὶ τῇ οξ, ἐστιν ἴση. ἴση ἄρα καὶ ἡ νθ, τῇ μη, καὶ ἡ θμ, τῇ ηο, καὶ ἡ μη, τῇ οκ, αἱ δὲ ὑπὸ θμη, καὶ ηοκ, ὀρθαὶ, ἐξ οὗ φανερὸν, ὅτι ἡ ηθ, ἴση ἐστὶ τῇ ηκ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ λοιπαί. Ἐπεὶ οὖν παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ηθκλ, ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ ἐστὶ, καὶ ἐπεὶ ἡμισύ ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ μηθ, οηκ, ὀρθῆς, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ θηκ, ὀρθή ἐστιν. ὁμοίως καὶ αἱ λοιπαὶ, τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ηθκλ, δυνατὸν δὲ τῷ ἐξ ἀρχῆς λαμβάνοντι τὰ ηθκλ, κέντρα, καὶ παραλλήλους ἀγαγόντι τὰς μν, νξ, ξο, ομ, ἐπιζεῦξαι τὰς ηθ, θλ, λκ, κη, καὶ εἰπεῖν τὸ ηθκλ, τετράγωνον. ἐὰν δὴ λάβωμεν καὶ τῶν λοιπῶν τριγώνων τὰ κέντρα, καὶ ἐπιζεύξωμεν καὶ αὐτὰ, δείξομεν τὰ λοιπὰ τετράγωνα, καὶ ἕξομεν εἰς τὸ δοθὲν ὀκτάεδρον κύβον ἐγγεγραμμένον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις Ε': Πρόβλημα.

Εἰς τὸ δοθὲν εἰκοσάεδρον δωδεκάεδρον ἐγγράψαι.

Ἐκκείσθω πεντάγωνον τοῦ εἰκοσαέδρου τὸ αβγδε, καὶ τὰ κέντρα τῶν κύκλων τῶν περὶ τὰ αζε, αζβ, βζγ, ζγδ, δζε, τρίγωνα, τὰ η, θ, κ, λ, μ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ηθ, θκ, κλ, λμ, μη, καὶ πάλιν ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ζη, ζθ, ζκ, ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ ξ, ν, ο, δίχα δὴ τμηθήσονται αἱ εα, αβ, βγ, τοῖς ξ, ν, ο, σημείοις, καὶ ὡς ἡ νξ, πρὸς τὴν νο, οὕτως ἡ ηθ, πρὸς τὴν θκ, ἴση ἄρα ἡ θν, κο. ὁμοίως δὲ καὶ αἱ λοιπαὶ τοῦ ηθκλμ, πενταγώνου πλευραὶ ἴσαι δειχθήσονται. Λέγω, ὅτι καὶ ἰσογώνια. ἐπεὶ γὰρ δύο αἱ νξ, νο, περὶ δύο τὰς ηθ, θκ. ἴσας γωνίας περιέχουσι, καὶ τὰ λοιπὰ φανερόν. Νενοήσθω ἀπὸ τοῦ ζ, ἐπὶ τὸ τοῦ αβγδεζ, πενταγώνου ἐπίπεδον κάθετος ἠγμένη, ἥτις πεσεῖται ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ περὶ τὸ πεντάγωνον κύκλου. ἐὰν δὴ ἀπὸ τοῦ ν, σημείου, καθ' ὃ συμβάλλει ἡ ἀπὸ τοῦ ζ, κάθετον ἐπιζεύξωμεν, καὶ διὰ τοῦ θ, παράλληλον αὐτῇ ἀγάγωμεν, φανερὸν ὅτι συμβάλλει τῇ ἀπὸ τοῦ ζ, καθέτῳ, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ ε, παράλληλος ὀρθὴν γωνίαν περιέξει, μετὰ τῆς ἀπὸ τοῦ ζ, καθέτου. Πάλιν ἐὰν ἐπιζεύξωμεν ἀπὸ τῶν ζη, ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ περὶ τὸ αβγδε, πεντάγωνον κύκλου, καὶ ἐπὶ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ συμβάλλει ἡ ἀπὸ τοῦ θ, τῇ ἀπὸ τοῦ η, ἐπιζευγνυμένη ὀρθὴ, ὃ περιέξει μετὰ τῆς αὐτῆς, ἐξ οὗ φανερὸν, ὅτι ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ ἐστὶ τὸ ηθκλμ, πεντάγωνον. Δεῖ εἰδέναι ἡμᾶς, ὅτι ἐάν τις ἐρῇ ἡμῖν, πόσας πλευρὰς ἔχει τὸ εἰκοσάεδρον, φήσομεν οὕτως, φανερὸν, ὅτι ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων περιέχεται, καὶ ὅτι ἕκαστον τρίγωνον ὑπὸ τριῶν εὐθειῶν περιέχεται. δεῖ οὖν ἡμᾶς πολλαπλασιάσαι τὰ εἴκοσι τρίγωνα ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τρι-

Eucl. Lib. 15. Fig. 3.

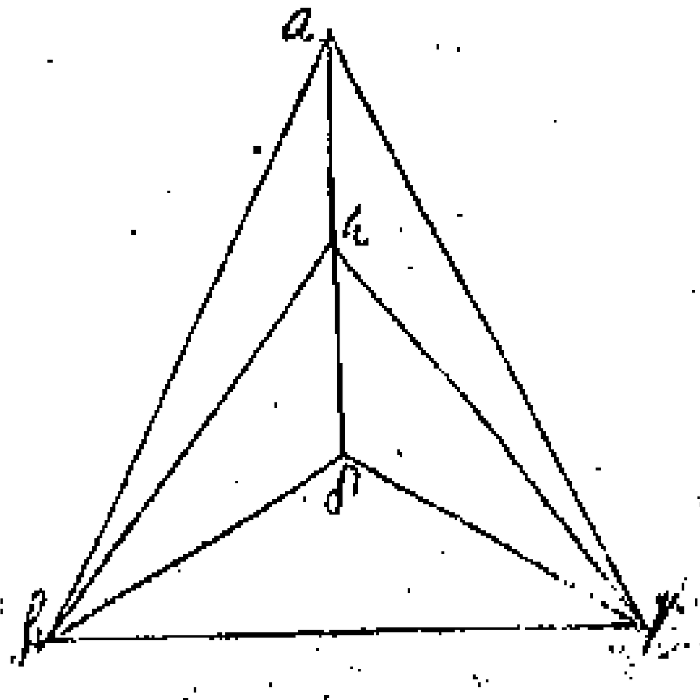


Xx 2 γώ-

γώνου, γίνεται δὲ ἑξήκοντα, ὧν ἥμισυ γίγνεται τριάκοντα. ὁμοίως δὴ καὶ ἐπὶ τοῦ δωδεκαέδρου. Πάλιν ἐπεὶ δώδεκα πεντάγωνα περιέχουσι τὸ δωδεκάεδρον, πάλιν δὲ ἕκαστον πεντάγωνον ἔχει πέντε εὐθείας, ποιοῦμεν δωδεκάκις πέντε, γίνονται ἑξήκοντα. πάλιν τὸ ἥμισυ γίνεται τριάκοντα, διὰ τί δὲ τὸ ἥμισυ ποιοῦμεν; ἐπεὶ ἑκάστη πλευρὰ, κἄν τε ᾖ τρίγωνον, ἢ πεντάγωνον, ἢ τετράγωνον (ὡς ἐπὶ κύβου ἐκ δευτέρου λαμβάνεται.) ὁμοίως δὲ τῇ αὐτῇ μεθόδῳ καὶ ἐπὶ κύβου, καὶ πυραμίδος, καὶ ὀκταέδρου τὰ αὐτὰ ποιήσας εὑρήσεις τὰς πλευράς. Εἰ δὲ βουληθείης πάλιν ἑκάστου τῶν πέντε σχημάτων εὑρεῖν τὰς γωνίας, πάλιν τὰ αὐτὰ ποιήσας, μέριζε παρὰ τὰ ἐπίπεδα τὰ περιέχοντα μίαν γωνίαν τοῦ στερεοῦ. οἷον ἐπεὶ τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου γωνίαν περιέχουσι πέντε τρίγωνα, μέριζε παρὰ τὰ πέντε· γίνονται δώδεκα γωνίαι τοῦ εἰκοσαέδρου, ἐπὶ δὲ τοῦ δωδεκαέδρου τρία πεντάγωνα περιέχουσι τὴν γωνίαν, μέρισον παρὰ τὰ τρία, καὶ ἕξεις εἴκοσι γωνίας οὔσας τοῦ δωδεκαέδρου. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν εὑρήσεις τὰς γωνίας. Ἐζητήθη πως ἑκάστου τῶν πέντε στερεῶν σχημάτων ἑνὸς ἐπιπέδου τῶν περιεχόντων ὁποιουοῦν δοθέντος, εὑρητέα καὶ ἡ κλίσις, ἐν ᾗ κέκλιται πρὸς ἄλληλα τὰ περιέχοντα ἐπίπεδα ἕκαστον τῶν σχημάτων. Ἡ δὲ εὕρεσις ὡς Ἰσίδωρος ὁ ἡμέτερος ὑφηγήσατο μέγας διδάσκαλος, ἔχει τὸν τρόπον τοῦτον. Ὅτι μὲν ἐπὶ τοῦ κύβου κατ' ὀρθὴν τέμνουσι γωνίαν τὰ περιέχοντα αὐτὸν ἐπίπεδα ἄλληλα, φανερόν. ἐπὶ δὲ τῆς πυραμίδος ἐκτεθέντος ἑνὸς τριγώνου, κέντροις τοῖς πέρασι τῆς μιᾶς πλευρᾶς, διαστήματι δὲ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν καθέτῳ ἀγομένῃ, περιφέρειαι γραφεῖσαι, τεμνέτωσαν ἀλλήλας, καὶ αἱ ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι, περιέξουσι τὴν κλίσιν τῶν περιεχόντων τὴν πυραμίδα ἐπιπέδων, ἐπὶ δὲ τοῦ ὀκταέδρου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ἀναγραφέντος τετραγώνου, κέντροις τοῖς πέρασι τῆς διαγωνίου, διαστήματι δ' ὁμοίως τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ, γεγράφθωσαν περιφέρειαι, καὶ πάλιν αἱ ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσι τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς ἐπιζητουμένης κλίσεως, ἐπὶ δὲ τοῦ εἰκοσαέδρου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ἀναγραφέντος πενταγώνου, ἐπιζευχθήτω ἡ ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτείνουσα εὐθεῖα, καὶ κέντροις τοῖς πέρασιν αὐτῆς, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ, γραφεισῶν περιφερειῶν, αἱ ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι περιέξουσι τὴν λείπουσαν, ὁμοίως εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῶν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιπέδων. Ἐπὶ δὲ τοῦ δωδεκαέδρου, ἐκτεθέντος ἑνὸς πενταγώνου ἐπιζευχθείσης, ὁμοίως τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσης εὐθείας, κέντροις τοῖς πέρασιν αὐτῆς, διαστήματι δὲ τῇ ἀγομένῃ καθέτῳ ἀπὸ τῆς διχοτομίας αὐτῆς ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ πλευρὰν τοῦ πενταγώνου γεγράφθωσαν περιφέρειαι, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι, ὁμοίως περιέξουσι τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῶν ἐπιπέδων τοῦ δωδεκαέδρου. Οὕτω μὲν οὖν ὁ εἰρημένος εὐκλεέστατος ἀνὴρ τὸν περὶ τῶν εἰρημένων ἀποδέδωκε λόγον, σαφῶς ἐφ' ἑκάστῳ φαι-

νομένης αὐτῷ τῆς ἀποδείξεως, ἐπὶ δὲ τὸ πρόδηλον γενέσθαι τὴν ἐν αὐτοῖς ἀποδεικτικὴν θεωρίαν, τὸν λόγον ἐφ' ἑκάστου σαφηνιστέον, καὶ πρότερον ἐπὶ τῆς πυραμίδος. Νενοήσθω πυραμὶς ὑπὸ τεσσάρων ἰσοπλεύρων τριγώνων περιεχομένη, ἡ α β γ δ, τοῦ α β γ, βάσεως νοουμένου, κορυφῆς δὲ τοῦ δ. καὶ τμηθείσης τῆς α δ, πλευρᾶς δίχα κατὰ τὸ ε, ἐπεζεύχθωσαν αἱ β ε, ε γ. καὶ ἐπεὶ ἰσόπλευρά ἐστι τὰ α δ β, α δ γ, τρίγωνα, καὶ δίχα τέτμηται ἡ α δ, αἱ β ε, γ ε, ἄρα κάθετοί εἰσιν ἐπὶ τὴν α δ. Λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ β ε γ, γωνία ὀξεῖά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ α γ, τῆς α ε, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς α γ, τοῦ ἀπὸ τῆς α ε, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς α γ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν α ε, ε γ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς α γ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δ ε, λόγον ἔχει, ὃν τέσσαρα πρὸς τρία, καὶ ἔστιν ἴση ἡ γ ε, τῇ ε β, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς β γ, ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν β ε, ε γ, ὀξεῖα ἄρα ἡ ὑπὸ β ε γ. Ἐπεὶ οὖν δύο ἐπιπέδων τῶν α β δ, α δ γ, κοινὴ τομή ἐστιν ἡ α δ,

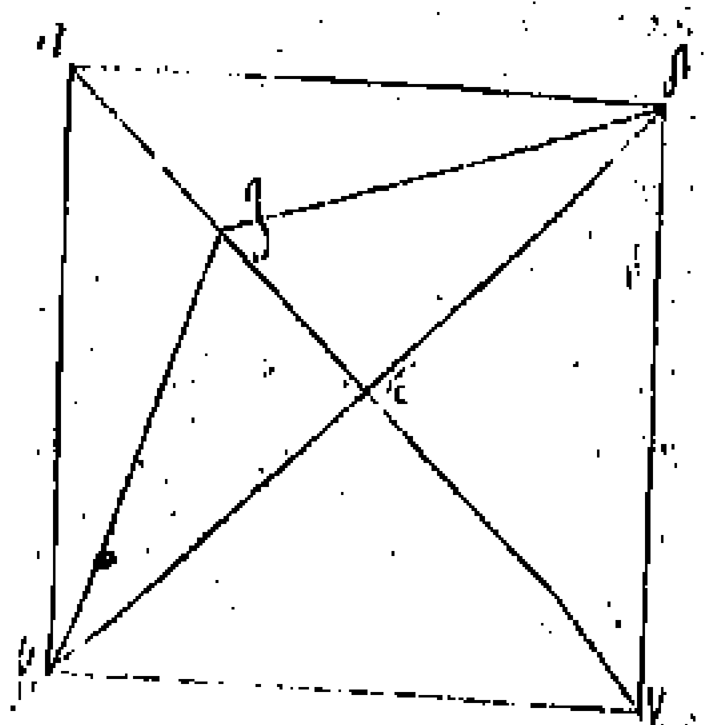
Eucl. Lib. 15. Fig. 4.



καὶ ταύτῃ εἰσὶ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαι ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων ἠγμέναι αἱ β ε, ε γ, καὶ ὀξεῖαν γωνίαν περιέχουσιν, ἡ ὑπὸ β ε γ, ἄρα γωνία ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ἐστὶ, καὶ ἔστι δεδομένη, δέδοται γὰρ ἡ β γ, πλευρὰ οὖσα τοῦ τριγώνου, καὶ ἑκατέρα τῶν ε β, ε γ, κάθετος οὖσα τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, κέντροις τοίνυν τοῖς β γ, τουτέστι τοῖς πέρασι τῆς μιᾶς πλευρᾶς, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ, γραφόμεναι περιφέρειαι τέμνουσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ ε, σημεῖον, καὶ αἱ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ β γ, ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσι τὴν κλίσιν τῶν ἐπιπέδων. τοῦτο δ' ἦν τὸ εἰρημένον. καὶ ὅτι μὲν κέντροις τοῖς β γ, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ γραφόμενοι κύκλοι τέμνουσιν ἀλλήλους, φανερὸν, ἑκατέρα γὰρ τῶν β ε, ε γ, μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς β γ, οἱ δὲ κέντροις τοῖς β γ, διαστήματι δὲ τῇ ἡμισείᾳ τῆς β γ, γραφόμενοι κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων, εἰ δὲ ἐλάττων ᾖ, οὐδὲ ἐφάπτονται, οὐδὲ τέμνουσιν, εἰ δὲ μείζων πάντως τέμνουσι, καὶ οὕτως ὁ περὶ τῆς πυραμίδος σαφής τε καὶ ἀκόλουθος ταῖς ἀποδείξεσι φαίνεται λόγος.

Συνεστάθω πάλιν ἐπὶ τετραγώνου τοῦ α β γ δ, πυραμὶς κορυφὴν ἔχουσα τὸ ε, καὶ τὰ περιέχοντα αὐτὴν δίχα τῆς βάσεως τρίγωνα ἰσόπλευρα. ἔσται δὲ ἡ α β γ δ ε, πυραμὶς ἥμισυ ὀκταέδρου. Τετμήσθω μία πλευρὰ ἑνὸς τριγώνου ἡ α ε, δίχα κατὰ τὸ ζ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ β ζ, δ ζ, ἴσαι ἄρα εἰσὶν αἱ β ζ, δ ζ, καὶ κάθετοι ἐπὶ τὴν α ε. Λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ β ζ δ, γωνία ἀμβλεῖά ἐστιν. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ β δ, καὶ ἐπεὶ τετράγωνόν ἐστι τὸ α γ, διάμετρος δὲ ἡ β δ, τὸ ἀπὸ τῆς β δ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δ α, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς δ α, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δ ζ, λόγον ἔχει, ὡς ἐν τοῖς πρὸ τούτου εἴρηται, ὃν τέσσαρα πρὸς τρία, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς β δ, ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δ ζ, λόγον ἔχει, ὃν ὀκτὼ πρὸς τρία, ἴση δὲ ἡ δ ζ, τῇ ζ β, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς δ β, τῶν ἀπὸ τῶν β ζ, ζ δ, μεῖζόν ἐστιν, ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ βζδ. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπιπέδων τῶν αβε, αδε, τεμνόντων ἄλληλα, κοινὴ τομή ἐστιν ἡ αε, πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων ἠγμέναι εἰσὶν, αἱ δὲ βζ, ζδ, περιέχουσαι ἀμβλεῖαν, ἡ ὑπὸ βζδ, ἄρα γωνία λείπουσά ἐστιν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῶν αβε, αδε, ἐπιπέδων. ἐὰν ἄρα δοθῇ ἡ ὑπὸ βζδ, δέδοται καὶ ἡ εἰρημένη κλίσις. Ἐπεὶ οὖν δέδοται τὸ τρίγωνον τοῦ ὀκταέδρου, καὶ μία πλευρά ἐστι τοῦ ὀκταέδρου ἡ αδ, καὶ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον ἀναγέγραπται τὸ αγ, δέδοται καὶ ἡ βδ, διάμετρος οὖσα τοῦ τετραγώνου, ἀλλὰ μὴν καὶ αἱ βζ, ζδ, κάθετος τοῦ τριγώνου. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ βζε, γωνία δέδοται. ἀναγραφέντος ἄρα τοῦ τετραγώνου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου, ὡς τοῦ αγ, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς διαμέτρου, ὡς τῆς βδ, ἐὰν κέντροις τοῖς βδ, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ κύκλους ἐγγράψωμεν, τέμνουσιν ἀλλήλους κατὰ τὸ ζ, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ ζ, ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέχουσι τὴν κλίσιν τὴν ὑπὸ βζδ, ἥτις ἐστὶν ἡ λείπουσα, ὡς εἴρηται, εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς τῶν ἐπιπέδων κλίσεως. καὶ ἐνταῦθα δὲ σαφὲς μὲν, ὡς ἑκατέρα τῶν βζ, ζδ, ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς βδ, μείζων, καὶ διὰ τοῦτο ἐπὶ τῆς ὀργανικῆς κατασκευῆς ἀνάγκη τέμνειν τοὺς κύκλους ἀλλήλους. καὶ ἐκ τῆς ἀποδείξεως δὲ δῆλον γέγονεν, ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δζ, δυνάμει λόγον ἔχει, ὃν ὀκτὼ πρὸς τρία, τῆς δὲ ἡμισείας τῆς βδ, δυνάμει τετραπλασία ἐστὶν, ὥστε διὰ τοῦτο μείζονα γίνεσθαι ἑκατέραν τῶν βζ, ζδ, τῆς ἡμισείας τῆς βδ, καὶ ταῦτα μὲν ἐπὶ τοῦ ὀκταέδρου.

Eucl. Lib. 15. Fig. 5.

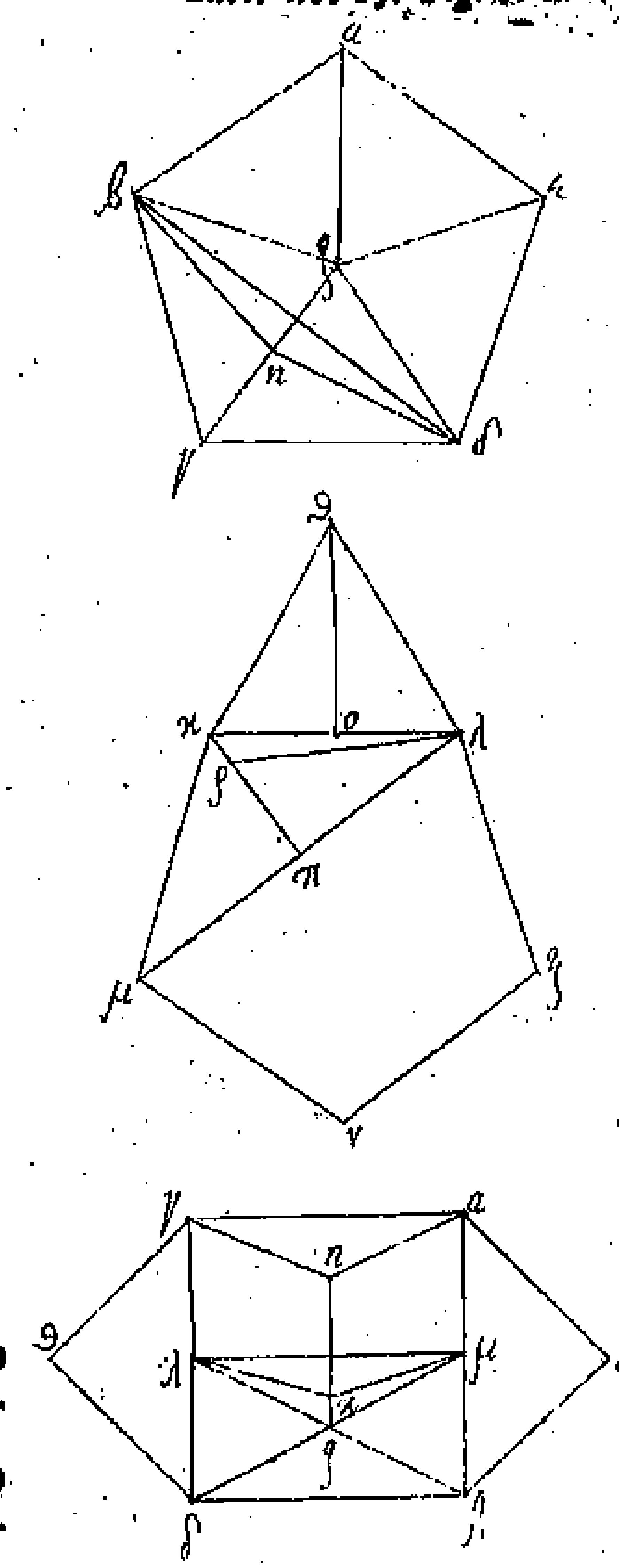


Ἐπὶ δὲ τοῦ εἰκοσαέδρου νενοήσθω πεντάγωνον ἰσόπλευρον τὸ αβγδε, ἐπὶ δὲ τούτου πυραμὶς κορυφὴν ἔχουσα τὸ ζ, ὥστε τὰ περιέχοντα αὐτὴν τρίγωνα ἰσόπλευρα εἶναι. ἔστω δὴ ἡ αβγδεζ, πυραμὶς μὲν εἰκοσαέδρου σχήματος, τετμήσθω δὲ μία πλευρὰ ἑνὸς τριγώνου ἡ ζγ, δίχα κατὰ τὸ η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βη, ηδ, ἴσαι τε οὖσαι καὶ κάθετοι γινόμεναι ἐπὶ τὴν ζγ. Λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ βηδ, γωνία ἀμβλεῖά ἐστι, καὶ ἔστιν αὐτόθι φανερόν. Ἐπιζευχθεῖσα γὰρ ἡ βδ, ἀμβλεῖαν μὲν ὑποτείνει τὴν ὑπὸ βγδ, τοῦ πενταγώνου γωνίαν, ταύτης δὲ μείζων ἡ ὑπὸ βηδ, ἐλάττονες γὰρ αἱ βη, δη, τῶν βγ, γδ. ὁμοίως δὴ τοῖς πρὸ τούτου, ὅτι ἡ ὑπὸ βηδ, γωνία ἡ λείπουσά ἐστιν εἰς τὰς δύο τῆς κλίσεως τῶν βζγ, γζδ, τριγώνων, ταύτης δοθείσης δεδομένη ἔσται καὶ ἡ κλίσις τῶν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιπέδων. ἀπὸ γὰρ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου τοῦ εἰκοσαέδρου ἀναγραφέντος πενταγώνου, ἐπιζευχθείσης τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσης τοῦ πενταγώνου, ὡς ἐπὶ τῆς καταγραφῆς τῆς βδ, δεδομένης. ὁμοίως δὲ καὶ τῶν βη, ηδ, καθέτων, τῶν τριγώνων, δέδοται καὶ ἡ ὑπὸ βηδ. εἰ γὰρ κέντροις τοῖς πέρασι τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσης τοῦ πενταγώνου, ὡς τῆς βδ, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ, κύκλοι γραφῶσι, τέμνουσιν ἀλλήλους, ὡς κατὰ τὸ η, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ η, ἐπὶ

τὰ

τὰ βδ, ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσι τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς τῶν ἐπιπέδων κλίσεως, καὶ ἐνταῦθα δὲ ἐκ μὲν τῆς καταγραφῆς δῆλόν ἐστιν, ὅτι ἑκατέρα τῶν βη, ηδ, μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς βδ, εἶναι δὲ, καὶ ἐπὶ τῆς ὀργανικῆς κατασκευῆς ἀποδειχθήσεται. Νενοήσθω χωρὶς ἰσόπλευρον τρίγωνον μὲν τὸ θκλ, ἀπὸ δὲ τῆς κλ, πεντάγωνον ἀναγεγράφθω τὸ κμνξλ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ μλ, καὶ ἤχθω κάθετος τοῦ θκλ, τριγώνου ἡ θο. Λέγω, ὅτι ἡ θο, μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς μλ, ὑποτεινούσης τὴν κλίσιν τῶν ἐπιπέδων. Ἀχθείσης ἀπὸ τοῦ κ, ἐπὶ τὴν μλ, καθέτου τῆς κπ. Ἐπεὶ ἡ ὑπὸ κλπ, μείζων ἐστὶ τρίτου ὀρθῆς, τουτέστι τῆς ὑπὸ κθο. Συνεστάθω τῇ ὑπὸ κθο, ἴση ἡ ὑπὸ πλρ, ἡ ἄρα πλ, κάθετός ἐστιν ἰσοπλεύρου τριγώνου, οὗ πλευρὰ ἡ ρλ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ρλ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς λπ, λόγον ἔχει, ὃν τέσσαρα πρὸς τρία, μείζων δὲ ἡ κλ, τῆς λρ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς κλ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς λπ, μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃ τέσσαρα πρὸς τὸν τρία, ἔχει δὲ καὶ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς θο, ὃν ὃ τέσσαρα πρὸς τὸν τρία, ἡ ἄρα κλ, πρὸς τὴν λπ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὴν θο, μείζων ἄρα ἡ θο, τῆς λπ.

Eucl. lib. 15. Fig. 6.



Ἐπὶ δὲ τοῦ δωδεκαέδρου οὕτω. Νενοήσθω τὸ τετράγωνον τοῦ κύβου, ἀφ' οὗ τὸ δωδεκάεδρον ἀναγράφεται, τὸ αβγδ, καὶ δύο ἐπίπεδα τοῦ δωδεκαέδρου, τὰ αεβζη, ηγθδζ. Λέγω δὴ ἐνταῦθα δεδομένην εἶναι τὴν κλίσιν τῶν δύο πενταγώνων. Τετμήσθω ἡ ζη, δίχα κατὰ τὸ κ, καὶ ἀπὸ τοῦ κ, τῇ ζη, πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων αἱ κλ, κμ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ μλ. Λέγω δὴ πρῶτον, ὅτι ἡ ὑπὸ μκλ, γωνία ἀμβλεῖά ἐστι, δέδεικται γὰρ ἐν τῷ ιγʹ βιβλίῳ τῶν στοιχείων, ἤτοι τῆς στάσεως τοῦ δωδεκαέδρου, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ κ, κάθετος ἀγομένη, ἐπὶ τὸ αβγδ, τετράγωνον ἡμίσειά ἐστι τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου. ὥστε ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς μλ, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ὑπὸ μκλ, γωνία ἀμβλεῖά ἐστι. συναποδέδεικται δὲ ἐν τῷ αὐτῷ θεωρήματι, ὅτι καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς κλ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας

τῆς

τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου, καὶ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου· ὥστε τὴν αὐτὴν κλ, καὶ τὴν κμ, ἴσας οὔσας, μείζονας εἶναι τῆς ἡμισείας τῆς μλ, τῆς ἄρα ὑπὸ μκλ, γωνίας δοθείσης ἡ λείπουσα εἰς τὰς δύο ὀρθὰς ἔκκλισις ἔσται τῶν ἐπιπέδων, δηλονότι δεδομένη. Ἐπεὶ οὖν ἡ πλευρὰ τοῦ αβγδ, τετραγ: ὑποτείνουσά ἐστι τὰς δύο πλευρὰς τοῦ πενταγώνου. δέδοται δὲ τὸ πεντάγωνον, δέδοται ἄρα ἡ μλ, δέδοται δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν μκ, κλ, κάθετοι γὰρ εἰσὶν ἀπὸ τῆς διχοτομίας τῆς αβ, ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσης, ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ πλευρὰν τοῦ πενταγώνου, ὡς τὴν ζη, δέδοται ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ λκμ, ἡ λείπουσα, ὡς εἴρηται, εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς ἐπιζητουμένης κλίσεως· καλῶς ἄρα ἐπὶ τῆς ὀργανικῆς κατασκευῆς εἶπον, ὡς χρὴ δοθέντος τοῦ πενταγώνου, ἐπιζεῦξαι τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ δύο πλευράς, ἥτις ἴση γίνεται τῇ πλευρᾷ τοῦ κύβου, καὶ κέντροις τοῖς πέρασιν αὐτοῖς, διαστήματι δὲ τῇ ἀπὸ τῆς διχοτομίας ἀγομένῃ καθέτῳ, ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ πενταγώνου πλευράν, ὡς ἐπὶ τῆς καταγραφῆς, αἱ κλ, κμ, γραφεῖσαι περιφέρειαι, καὶ ἀπὸ τοῦ τῆς συμβολῆς τῶν περιφερειῶν σημείου, ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζεῦξαι εὐθείας περιεχούσας τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῶν ἐπιπέδων, ὅτι γὰρ ἡ κλ, κάθετος μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς μλ, εἴρηται, ὡς ἐν τοῖς στοιχείοις συναποδέδεικται τοῦτο.

Τέλος τοῦ Δεκάτου πέμπτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

ΣΥΝΤΟΜΟΣ ἙΡΜΗΝΕΙΑ

ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΖΗΤΗΜΑΤΩΝ

ΚΑΤΑ ΘΕΟΔΟΣΙΟΝ ΤΟΝ ΤΡΙΠΟΛΙΤΗΝ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΠΡΟΟΙΜΙΟΝ.

Ἐπείπερ δύο τῆς Ἐπιφανείας τὰ εἴδη, ἐπίπεδός φημι καὶ σφαιρική, ὡς ἐν τῇ τῶν ὅρων Ἑρμηνείᾳ τοῦ α': τῶν τοῦ στοιχειωτοῦ εἴρηται βιβλίων, καὶ ἡ μὲν ἐπίπεδος βάσις ἐστὶ καὶ ὑποκείμενον τῶν ἐπιπέδων πάντων σχημάτων, ἧς ἄνευ οὐδὲν τῶν τοιούτων ὑφίστασθαι δύναται, καὶ τῇ αἰσθήσει ὑποπίπτειν, ἡ δὲ σφαιρικὴ τῶν σφαιρικῶν. πρὸς γνῶσιν μὲν τῶν ἐν ἐπιπέδοις προβλημάτων τε καὶ θεωρημάτων ἱκανά εἰσι τὰ τοῦ Εὐκλ: ἓξ βιβλία, ὡς εἰς λόγον στοιχείων τούτοις ὅτι μάλιστα συμβάλλοντα, καὶ τὰ ἐν τῷ α': τμήματι τῆς Γεωμετρίας· πρὸς δὲ τὴν τῶν σφαιρικῶν κατάληψιν, εἰ καὶ πολλοὶ τῶν πάλαι Ἑλλήνων εὐμεθόδως στοιχειώδη τινὰ θεωρήματα καὶ προβλήματα ἐξέθεντο, καὶ πληρεστάτην περὶ αὐτῶν πεποιήκασιν Ἑρμηνείαν, ὧν εἷς καὶ Θεοδόσιος ὁ φιλόσοφος. Ὁ μακρὸς μέντοι χρόνος, καὶ αἱ τῶν πραγμάτων μέγισται μεταβολαί, καὶ αὐτὴ ἡ τοῦ γένους τοιαύτη κατάπτωσις, καὶ ταῦτα πάντα σὺν τοῖς ἄλλοις, κατηναλώσαντό τε καὶ ἐξηφάνισαν, ὡς μηδ' εἰ ὅλως ποτὲ γεγόνασι πιστεύεσθαι. Ἀνὴρ δέ τις τῶν ἐλλογίμων, καὶ τοῦ ἱεροῦ τῶν καθ' ἡμᾶς καταλόγου ἐκ τῆς αὐτῆς ὁρμώμενος, ἐν ᾗ καὶ τὴν Ἑλλάδα φωνὴν ἐξέμαθεν, εἰς Ἐνετίας παρεγένετο, κἀκεῖ διὰ τῆς λατινίδος ἀκριβῶς τὴν μαθηματικὴν ἐκδιδαχθεὶς ἐπιστήμην, καὶ πολλὴν περὶ αὐτὴν τὴν σπουδὴν καταβαλλόμενος, πρὸς τοῖς ἄλλοις αὐτοῦ φιλοπονήμασι, καὶ τὰ παρὰ Θεοδοσίου περὶ σφαιρικῶν προβλημάτων τε καὶ θεωρημάτων τρία βιβλία ἐκ τῆς Λατινίδος εἰς τὴν Ἑλλάδα μετήνεγκεν, ἐξ ἀλλοτρίων τὰ οἰκεῖα ἐρανισάμενος. Ἐπεὶ δὲ μεγίστης ἔχεται δυσχερείας καὶ ἀσαφείᾳ πολλῇ ἐπισκιάζεται, ἔδοξέ μοι καὶ ταῦτα ἀνακαλύψαι τε καὶ εἰς φῶς ἀγαγεῖν, ὥσπερ δὴ καὶ τ' ἄλλα τῶν αὐτοῦ φιλοπονημάτων, καὶ τοῦτο γέ τοι πρὸς χάριν τῶν φιλομαθῶν, καὶ γνησίων τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης ἐραστῶν. Τῇ γὰρ Ἀστρονομίᾳ, καὶ ἄλλοις τισί, περί τε τῆς οὐρανίου καὶ ἐπιγείου καταγινομένοις σφαίρας, ἡ τούτων προθεωρία οὐχ ἧττον ἀναγκαία, ἢ τοῖς ἄλλοις τὰ τοῦ Εὐκλ: στοιχεῖα,

χεῖα. ἡμεῖς οὖν καὶ περὶ τούτων τὸν δυνατὸν προβαλλόμεθα πόνον πρὸς ἀκριβῆ ἑκάστου τῶν ἐν αὐτοῖς προβλημάτων τε καὶ θεωρημάτων ἀνάπτυξιν, τὴν ὑπεροχὴν ἑκατέρου, τοῦ τε γρυφώδους τρόπου, καὶ οἱονεὶ συνεσφιγμένου, καὶ αἰνιγματώδους συντομίας ἔχειν, καὶ τοῦ λίαν ἀνειμένου τε καὶ ἐφαπλωμένου ἀποφεύγοντες, καὶ μέσην τινὰ τὴν ὁδὸν βαδίζοντες. ὅσοι δὲ τούτων ἐρασταὶ ἀσμένως καὶ ταῦτα ὀφείλουσιν ἀποδέχεσθαι, καὶ τὴν δυνατὴν περὶ αὐτῶν καταβάλλεσθαι σπουδήν, ὁ γὰρ ἐν αὐτοῖς ἀκριβῶς προγυμνασθεὶς, εὐχερέστερον δυνήσεται τῶν ἄλλων ἀντιλαμβάνεσθαι, ὅσα τῶν ἐν σφαίρᾳ ἁπλῶς θεωρουμένων προβάλλονται.

Οἱ Ὅροι.

Α'. Σφαῖρα ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ μιᾶς ἐπιφανείας περιεχόμενον, πρὸς ἣν ἅπασαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τῆς σφαίρας κειμένων ἴσαι εἰσί.

Β'. Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας, τὸ αὐτὸ σημεῖον καλεῖται.

Γ'. Ἄξων δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν εὐθεῖα γραμμὴ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἠγμένη, καὶ περατουμένη, ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, περὶ ἣν ἠρεμοῦσαν ἡ σφαῖρα περιφέρεσθαι δύναται.

Δ'. Πόλοι δὲ τῆς σφαίρας εἰσὶ τὰ τοῦ ἄξονος πέρατα.

Ε'. Πόλοι δὲ κύκλου ἐν σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένου ἐστὶ σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας κείμενον τῆς σφαίρας, ἀφ' οὗ πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

ς'. Κύκλοι ἐν σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένοι ἐξ ἴσου τοῦ κέντρου ἀφίστανται, ὅτε αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὰ τῶν κύκλων ἐπίπεδα πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι.

Ζ'. Κύκλοι μέγιστοί εἰσιν ἐν σφαίρᾳ, οἱ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διερχόμενοι καὶ δίχα τὴν σφαῖραν τέμνοντες.

Η'. Κύκλοι ἐλάσσονές εἰσιν, οἱ μὴ διὰ τοῦ κέντρου διερχόμενοι τῆς σφαίρας, καὶ εἰς δύο ἄνισα τὴν σφαῖραν τέμνοντες.

Θ'. Κύκλοι ἐν σφαίρᾳ ἴσοι εἰσὶν οἱ ἐξ ἴσου τῶν οἰκείων ἀφιστάμενοι πόλων, καὶ ὧν ἐπὶ τῆς περιφερείας αἱ ἀπὸ τοῦ πόλου ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἴσαι εἰσί, μείζων δὲ ὁ μᾶλλον τοῦ οἰκείου ἀφιστάμενος πόλου.

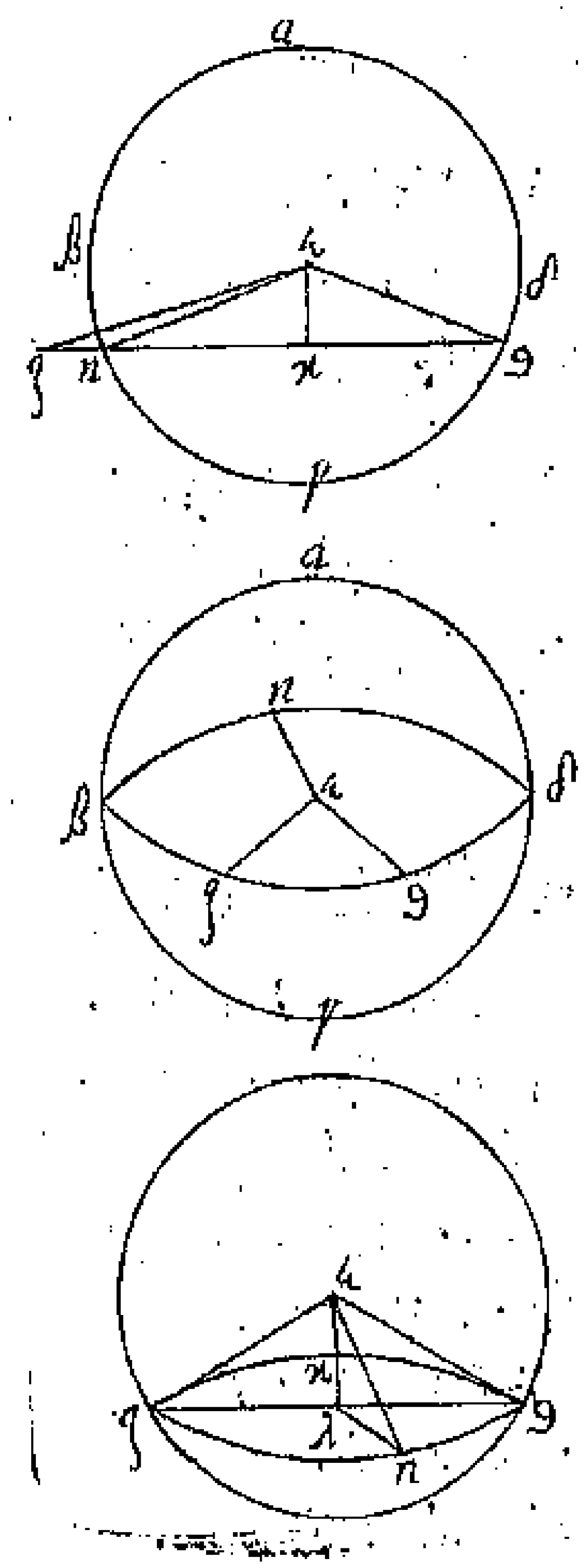
Πρό-

Πρότασις Α'. Θεώρημα.

Ἐὰν σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμηθῇ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου διερχομένῳ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἀχθῇ, ἐντὸς πεσεῖται τῆς σφαίρας.

Τμηθήτω σφαῖρα ἡ αβγδ, ἧς κέντρον τὸ ε, τῷ τυχόντι ἐπιπέδῳ. Λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ ε, κέντρου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἀγομένη κάθετος ἐντὸς πίπτει τῆς σφαίρας. εἰ γὰρ μὴ, πιπτέτω ἐκτὸς, ὡς ἡ εζ, συμβάλλουσα τῷ τέμνοντι τὴν σφαῖραν ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ ζ. διήχθω γὰρ διὰ τοῦ ζ, ἡ ζηθ, εὐθεῖα τέμνουσα τὴν σφαῖραν κατὰ τὰ η, καὶ θ. καὶ τῆς ηθ, δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ κ, ἐπεζεύχθω ἡ ηε, καὶ ἐπεὶ κατὰ τὸν α: ὅρον τοῦ παρ: αἱ εη, εθ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ηκ, τῇ κθ, ἴση κατὰ τὴν κατασκευὴν, τῶν ἄρα εηκ, εθκ, τριγώνων αἱ εη, ηκ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς εθ, θκ, κοινὴ δὲ ἡ εκ, πάντως γε καὶ αἱ γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσι κατὰ τὴν η: τοῦ α: τοῦ στοιχείου, ὥστε ἡ ὑπὸ εκη, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εκθ, ἔστι δὲ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν καὶ ἡ ὑπὸ εζκ, ὀρθὴ, ἄρα αἱ δύο τοῦ εζκ, τριγ: γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἄτοπον κατὰ τὴν ιζ: τοῦ αὐτοῦ, οὐκ ἄρα ἐκτὸς πεσεῖται, ἀλλ' ἐντὸς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 1.



Πρότασις Β'. Θεώρημα.

Ἐὰν σφαῖρα οἱῳδήποτε τμηθῇ ἐπιπέδῳ, ἡ κοινὴ τομὴ τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ἐπιπέδου κύκλος ἐστί.

Τμηθήτω σφαῖρα ἡ αβγδ, ἧς κέντρον τὸ ε, ἐπιπέδῳ τῷ τυχόντι, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τῆς τε αβγδ, σφαίρας καὶ τοῦ τέμνοντος αὐτὴν ἐπιπέδου τὸ βζδη, σχῆμα. Λέγω δὴ τὸ βζδη, κύκλον εἶναι. ἐπεὶ δὲ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, ἢ διὰ τοῦ κέντρου διέρχεται τῆς σφαίρας, ἢ ἐκτὸς τοῦ κέντρου, κείσθω α: διὰ τοῦ κέντρου διέρχεσθαι, ὡς τὸ βζδη. ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ε, ἀχθήτωσαν εὐθεῖαι ἐπὶ τῆς βζδη, κοινῆς τομῆς, αἱ εζ, εθ, εη, κατὰ γοῦν τὸν α: ὅρον τοῦ παρόντος αἱ εζ, εη, εθ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὥστε κατὰ τὸν ιε: ὅρον τοῦ α: τοῦ στοιχ: καὶ τὴν θ': τοῦ γ': τοῦ αὐτοῦ ἡ βζδη, κοινὴ τομὴ, κύκλος ἐστί.

Κείσθω β': διέρχεσθαι τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἐκτὸς τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω κοινὴ αὐ-

αὐτῷ τε καὶ τῆς σφαίρας τομὴ τὸ ζ η θ κ, σχῆμα, λέγω, τοῦτο, κύκλον εἶναι. πιπτέτω γὰρ ἀπὸ τοῦ ε, κέντρου κάθετος ἐπὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, ἥτις κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἐντὸς πίπτει τῆς σφαίρας, ἔσω δὴ αὕτη ἡ ε λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν, αἱ ε ζ, ε η, ε θ, λ ζ, λ η, λ θ. καὶ ἐπεὶ ἡ ε λ, κάθετός ἐστι πρὸς τὸ τέμνον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας κατὰ τὸν γ': ὅρον τοῦ ι α': τῶν στοιχ: ἅπτονται δὲ αὐτῆς, αἱ λ ζ, λ η, λ θ, ἄρα ἑκάστη τῶν ὑπὸ ε λ ζ, ε λ η, ε λ θ, γωνιῶν ὀρθή ἐστι, καὶ κατὰ τὴν μζ': τοῦ α': τοῦ αὐτοῦ, τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ε λ, λ ζ, τετράγ: ἴσα εἰσὶ τῷ ἀπὸ τῆς ε ζ, τετραγ: τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ε λ, λ η, τῷ ἀπὸ τῆς ε η, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ε λ, λ θ, τῷ ἀπὸ τῆς ε θ. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ε ζ, ε η, ε θ, τετράγωνα ἴσα ἀλλήλοις εἰσί, διὰ τὸ καὶ τὰς ε ζ, ε η, ε θ, ἴσας εἶναι κατὰ τὸν α': ὅρον τοῦ παρόντος, ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ε λ, λ ζ, ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ε λ, λ η, καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ε λ, λ θ, χωρὶς, κοινοῦ ἄρα ἀφαιρουμένου τοῦ ἀπὸ τῆς ε λ, ἐναπολείπονται τὰ ἀπὸ τῶν λ ζ, λ η, λ θ, ἴσα, ὥστε καὶ αἱ λ ζ, λ η, λ θ, ἴσαι εἰσί, καὶ κατὰ τὸν ῥηθέντα ιε': ὅρον ἡ ζ η θ κ, κοινὴ τομὴ τῆς τε α β γ δ, σφαίρας, καὶ τοῦ τέμνοντος αὐτὴν ἐπιπέδου κύκλος ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Α': Ἐκ τούτου δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι τὸ αὐτό ἐστι κέντρον τῆς τε σφαίρας καὶ τοῦ κύκλου, τοῦ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διερχομένου, ὡς ἐπὶ τοῦ α': δέδεικται σχήματος.

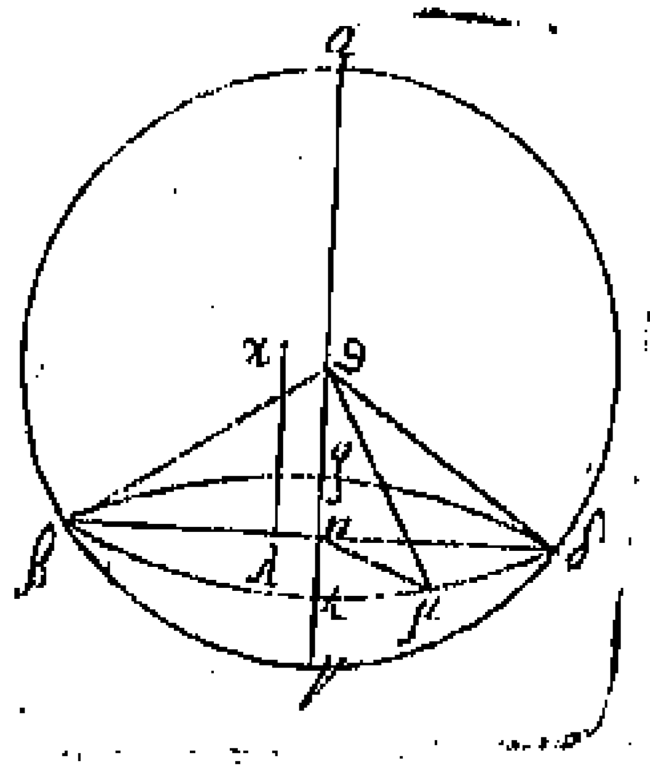
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Β': Ἔτι ἐὰν ἀχθῇ κάθετος ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου, τοῦ μὴ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διερχομένου, ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ αὐτοῦ κύκλου πίπτει, ὡς ἐπὶ τοῦ β': σχήματος.

Πρότασις Γ': Πρόβλημα.

Τῆς δοθείσης σφαίρας τὸ κέντρον εὑρεῖν.

Theod. Sf. Lib. I. Fig. 2.



Ζητείσθω τὸ κέντρον τῆς α β γ δ, δοθείσης σφαίρας, εἰς εὕρεσιν δὲ τούτου τμηθήτω ἡ α β γ δ, σφαῖρα ἐπιπέδῳ τινί. καὶ ἐπεὶ ἡ κοινὴ τομὴ τῆς τε σφαίρας καὶ τοῦ τέμνοντος αὐτὴν ἐπιπέδου, κύκλος ἐστί, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, πάντως γε κατὰ τὴν αὐτήν, καὶ ἡ β ε δ ζ, κοινὴ τομὴ τῆς τε α β γ δ, δοθείσης σφαίρας, καὶ τοῦ τέμνοντος αὐτὴν ἐπιπέδου κύκλος ἐστίν. Εὑρέσθω δὴ κατὰ τὴν α': τοῦ γ': τῶν στοιχ: τὸ κέντρον τοῦ β ε ζ δ, κύκλου, καὶ ἔσω τοῦτο τὸ η, ἀφ' οὗ ἀνεστάσθω κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ β ε δ ζ, κύκλου ἡ η α, περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ α, καὶ γ. εἶτα τμηθήτω ἡ α γ, δίχα κατὰ τὸ θ, καὶ τὸ θ, ση-

σημεῖον, ἔσται κέντρον τῆς α β γ δ, σφαίρας. οὐ γὰρ ἐκτός ἐστι τῆς α γ. εἰ δὲ δυνατόν, ἔσω τὸ κ, καὶ ἀπὸ τοῦ κ, πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἡ κ λ, καὶ κατὰ τὸ β': πόρισμα τῆς ἀνωτέρω, τὸ λ, ἐστὶ κέντρον τοῦ β ε δ ζ, κύκλου, ὅπερ ἄτοπον, εὕρηται γὰρ τὸ η, οὐκ ἄρα ἐκτὸς τῆς α γ, τὸ κέντρον ἐστὶ τῆς α β γ δ, σφαίρας, ὅτι δὲ τὸ θ, δῆλον. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ θ β, θ δ, θ μ, η μ. καὶ ἐπεὶ ἡ θ η, κάθετός ἐστι πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ β ε δ ζ, κύκλου, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας, κατὰ τὸν γ': ὅρον τοῦ ι α': τοῦ στοιχειωτοῦ, αἱ ἄρα ὑπὸ θ η β, θ η δ, θ η μ, ὀρθαί εἰσιν, εἰσὶ δὲ καὶ ἡ η β, η δ, η μ, ἴσαι, ἄρα τῶν θ η β, θ η δ, θ η μ, τριγώνων αἱ θ η, η β, θ η, η δ, θ η, η μ, ἴσαι εἰσί, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν. ἄρα κατὰ τὴν δ': τοῦ α': τοῦ στοιχειωτοῦ αἱ θ β, θ δ, θ μ, ἴσαι εἰσί, καὶ κατὰ τὸν α': ὅρον τοῦ παρόντος, τὸ θ, κέντρον ἐστὶ τῆς α β γ δ, σφαίρας. ὅπερ ἦν τὸ προσαχθέν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Α': Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι τὸ τῆς σφαίρας κέντρον ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος ἐν αὐτῇ κύκλου ἀγομένης καθέτου ἐστί.

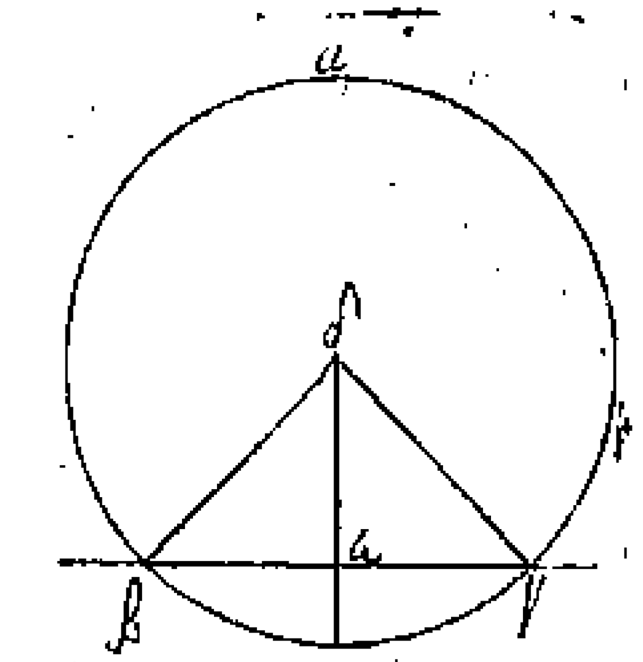
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Β': Ἐὰν ἡ τομὴ τῆς διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, δὸς εἰπεῖν τῆς α γ, συμπέσῃ τῷ κέντρῳ τοῦ κύκλου, τὸ αὐτὸ ἔσται κέντρον τῆς τε σφαίρας καὶ τοῦ κύκλου.

Πρότασις Δ': Θεώρημα.

Ἡ σφαῖρα οὐχ ἅπτεται τοῦ ἐπιπέδου κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ ἕν.

Theod. Sf. Lib. I. Fig. 3.



Σφαῖρα ἡ α β γ, ἁπτέσθω τοῦ τυχόντος ἐπιπέδου. Λέγω, ὅτι ἅπτεται τούτου καθ' ἓν μόνον σημεῖον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἁπτέσθω κατὰ δύο τὰ β, καὶ γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ β γ, καὶ ἀπὸ τοῦ δ, κέντρου τῆς σφαίρας πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τὴν β γ, ἡ δ ε. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δ β, δ γ, καὶ ἐπεὶ ἑκάτερον τῶν δ ε β, δ ε γ, τριγώνων ὀρθογώνιόν ἐστι κατὰ τὸ ε, πάντως γε ἡ ε δ, ἐλάττων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν δ β, δ γ, κατὰ γὰρ τὴν ι θ': τοῦ α': τοῦ στοιχειωτοῦ παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ μείζονα γωνίαν ὑποτείνει. ὥστε ἡ δ ε, ἐντὸς πίπτει τῆς σφαίρας, ἀλλ' ἡ β γ, ἐν τῷ ἁπτομένῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ κατὰ τὴν α': τοῦ ι α': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα καὶ τὸ ἁπτόμενον ἐπίπεδον ἐντὸς τῆς σφαίρας πίπτει, ὥστε τέμνει τὴν σφαῖραν, καὶ οὐχ ἅπτεται, ὑπετέθη δὲ ἅπτεσθαι ταύτης, ἄτοπον ἄρα. ὥστε δῆλον, ὅτι οὐ κατὰ πλείονα, ἢ ἓν σημεῖον ἡ σφαῖρα τοῦ ἐπιπέδου ἅπτεται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

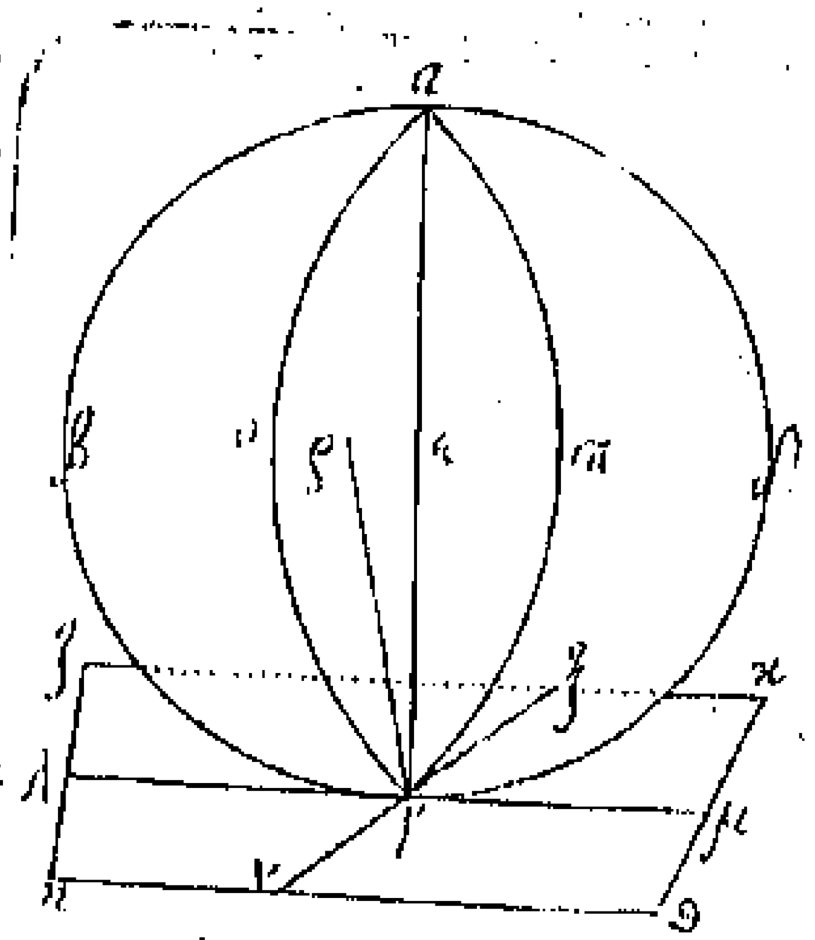
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Δῆλον ἐκ τούτου, ὅτι ἡ δύο τινὰ σημεῖα τῆς σφαίρας ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα, ἔνδον ὅλη τῆς σφαίρας πίπτει.

Πρότασις Ε'. Θεώρημα.

Ἐὰν σφαῖρα ἅπτηται ἐπιπέδου, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὴν ἁφὴν εὐθεῖα ἀχθῇ, κάθετος ἔσται ἡ ἀχθεῖσα πρὸς τὸ ἁπτόμενον ἐπίπεδον.

Ἁπτέσθω ἡ αβγδ, σφαῖρα, ἧς κέντρον τὸ ε, τοῦ ζηθκ, ἐπιπέδου κατὰ τὸ γ, σημεῖον, ἀπὸ δὲ τοῦ ε, κέντρου ἀχθήτω ἐπὶ τὸ γ, ἡ εγ. Λέγω, ὅτι ἡ εγ, κάθετός ἐστι πρὸς τὸ ηκ, ἐπίπεδον. Τμηθήτω ἡ σφαῖρα δυσὶν ἐπιπέδοις διὰ τῆς εγ, διερχομένοις, ὥστε τὴν αγ, κοινὴν αὐτῶν εἶναι τομήν, μετὰ δὲ τοῦ ἁπτομένου ἐπιπέδου κοινὰς εἶναι τομὰς τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων τὰς λμ, νξ. καὶ ἐπεὶ κατὰ τὴν β': τοῦ παρόντος ἡ κοινὴ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου τὴν σφαῖραν, καὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας κύκλος ἐστὶ, πάντως γε τὸ, τε αβγδ, καὶ αογπ, σχῆμα κύκλος ἐστίν. ἐπεὶ δὲ πάλιν ἑκάτερος τῶν αβγδ, αογπ, κύκλων διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται, δῆλον, ὅτι τὸ ε, κέντρον τῆς σφαίρας, κέντρον ἐστὶ τούτων αβγδ, καὶ αογπ, κύκλων κατὰ τὸ α: πόρισμα τῆς β': τοῦ παρόντος, καὶ ἡ εγ, ἡμιδιάμετρός ἐστιν ἑκατέρου, ἅπτεται δὲ ἡ σφαῖρα τοῦ ηκ, ἐπιπέδου κατὰ τὸ γ, καὶ διὰ τοῦ γ, διέρχονται αἱ λμ, νξ, κοιναὶ τομαὶ τοῦ ἁπτομένου ἐπιπέδου τῆς σφαίρας, καὶ τῶν τεμνόντων αὐτὴν, ἄρα ἡ μὲν λμ, ἅπτεται τοῦ αβγδ, κύκλου, ἡ δὲ νξ, τοῦ αογπ. εἰ γὰρ μὴ ἅπτονται, ἀλλὰ τέμνουσι τοὺς κύκλους, ἐντὸς πίπτουσι τῆς σφαίρας κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω, καὶ ἑπομένως οὐδὲ τὸ ηκ, ἐπίπεδον ἅπτεται τοῦ κύκλου, ὅπερ ἐναντίον ἐστὶ τῆς ὑποθέσεως. ἅπτονται ἄρα ἡ μὲν λμ, τοῦ αβγδ, κύκλου, ἡ δὲ νξ, τοῦ αογπ. καὶ κατὰ τὴν ιη': τοῦ γ': τῶν στοιχείων, ἡ εγ, κάθετός ἐστιν ἐφ' ἑκατέρας τῶν λμ, νξ. ὥστε κατὰ τὴν δ': τοῦ ια: τῶν αὐτῶν ἡ εγ, κάθετός ἐστι καὶ ἐπὶ τὸ ζηθκ, ἁπτόμενον ἐπίπεδον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 4.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι καὶ ἀνάπαλιν, ἐὰν δηλονότι ἀπὸ τῆς ἁφῆς τοῦ ἁπτομένου ἐπιπέδου τῆς σφαίρας κάθετος πρὸς τὸ αὐτὸ ἀνασταθῇ ἐπίπεδον ἔνδον τῆς σφαίρας ὡς ἡ γα, τὸ τῆς σφαίρας κέντρον ἐπὶ τῆς ἀνασταθείσης ἔσται καθέτου. εἰ γὰρ μὴ, ἀλλ' ἐκτὸς εἴη ταύτης, ὥσπερ τὸ ρ, ἐπιζευχθεῖσα ἡ ργ, κάθετος

θετος

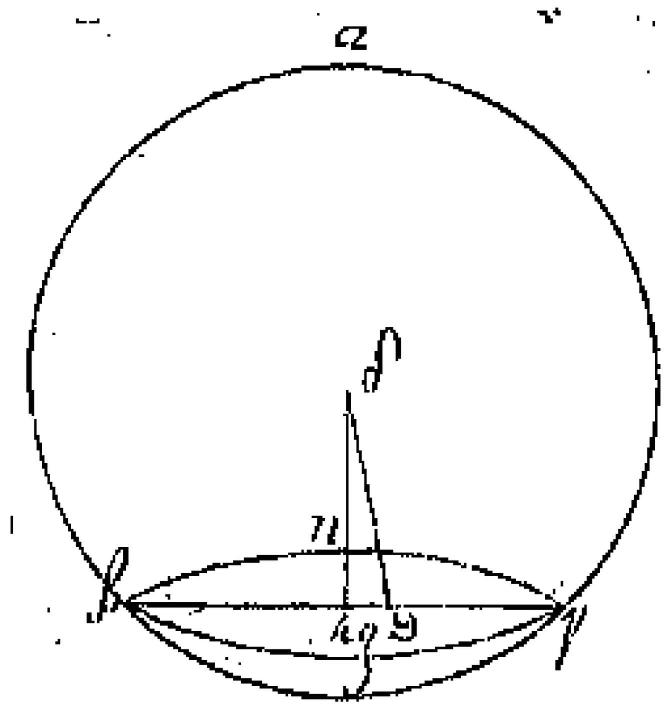
θετος ἔσται, καὶ τὰ ἤδη εἰρημένα, ἐπὶ τὸ ηκ, ἐπίπεδον, ὑπετέθη δὲ καὶ ἡ εγ, ἄτοπον ἄρα κατὰ τὴν ιγ': τοῦ ια:

Πρότασις ς'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ ἐλάσσονος τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλων γραμμὴ ἀχθῇ, ὀρθὴ ἔσται ἡ ἀχθεῖσα πρὸς τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον.

Ἀχθήτω ἀπὸ τοῦ δ, κέντρου τῆς αβγ, σφαίρας ἐπὶ τὸ ε, κέντρον τοῦ βζγη κύκλου ἐλάσσονος ἡ δε. Λέγω τὴν δε, κάθετον εἶναι πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ βζγη, κύκλου, εἰ γὰρ μὴ, πιπτέτω ἡ δθ. καὶ ἐπεὶ ἡ δθ, κάθετός ἐστι πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ βζγη, κύκλου ἀπὸ τοῦ δ, κέντρου τῆς σφαίρας ἠγμένη, δῆλον, ὅτι τὸ θ, κέντρον ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ βζγη, κύκλου, κατὰ τὸ β': πόρισμα τῆς β': τοῦ παρόντος, ἀλλ' ὑπετέθη τὸ ε, κέντρον εἶναι τοῦ βζθη, κύκλου, ἄτοπον ἄρα. ὥστε ἡ δθ, οὐκ ἔστι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ βζγη, κύκλου ἐλάσσονος. ὁμοίως δὲ οὐδ' ἄλλη τις, ἡ δε, ἄρα ἡ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύουσα τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κύκλου κάθετός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βζγη, κύκλου ἐπίπεδον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 5.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου ἀχθῇ, διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ διέρχεται.

Πρότασις Ζ'. Θεώρημα.

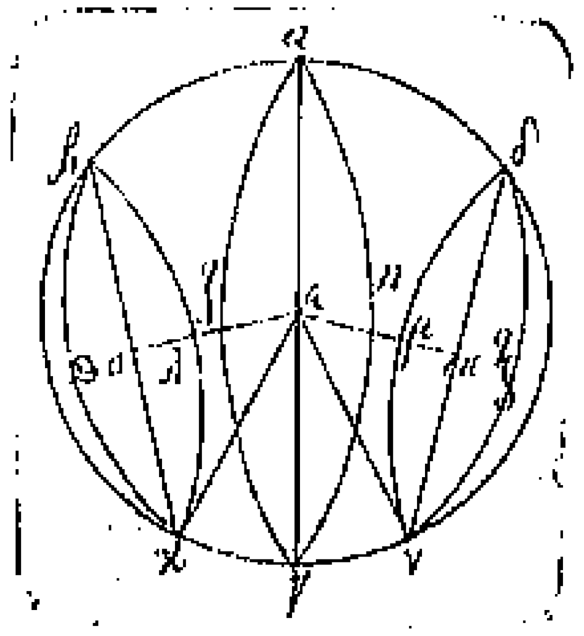
Τῶν ἐν σφαίρᾳ κύκλων οἱ μὲν διὰ τοῦ κέντρου διερχόμενοι τῆς σφαίρας μέγιστοί εἰσι, καὶ ἀνάπαλιν, οἱ μέγιστοι διὰ τοῦ κέντρου διέρχονται τῆς σφαίρας, οἱ δὲ ἐξ ἴσου ἀφιστάμενοι τοῦ κέντρου ἴσοι εἰσὶ, καὶ ἀνάπαλιν, οἱ ἴσοι ἐξ ἴσου τοῦ κέντρου ἀφίστανται, καὶ ἔτι οἱ ἀπώτερον τοῦ κέντρου τῶν ἐγγύτερον ἐλάσσονές εἰσι.

Ἔστωσαν ἐν σφαίρᾳ τῇ αβγδ, ἧς κέντρον τὸ ε, κύκλοι οἱ αζγη, βθκλ, δμνξ, ὧν ὁ μὲν αζγη, διὰ τοῦ ε, κέντρου διερχέσθω τῆς σφαίρας, οἱ δὲ βθκλ, δμνξ, ἐκτὸς τοῦ κέντρου ἔστωσαν. Λέγω, ὅτι ὁ αζγη, κύκλος μέγιστός ἐστιν. Ἔστωσαν γὰρ κέντρα τῶν βθκλ, δμνξ, κύκλων τὰ ο, π, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εο, επ, εκ, εν, εγ. καὶ ἐπεὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἑκατέρα τῶν εο, επ, κάθετός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον, πάντως γε αἱ ὑπὸ εοκ, επν, γωνίαι ὀρθαί εἰσιν, ὥστε ἡ μὲν εκ, μείζων ἐστὶ τῆς κο, ἡ δὲ εν, τῆς νπ, κατὰ τὴν ιθ': τοῦ α: τοῦ

στοι-

στοιχειωτοῦ. ἀλλ' ἑκατέρα τῶν εκ, εν, ἴση ἐστὶ τῇ εγ, κατὰ τὸ α: ὅρον, ἄρα καὶ ἡ εγ, μείζων ἐστὶ τῆς τε κο, καὶ νπ. ἔστι δὲ ἡ μὲν εγ, ἡμιδιάμετρος τοῦ αζγη, κύκλου, ἡ δὲ κο, τοῦ βθκλ, καὶ ἡ νπ, τοῦ δμνξ, ἄρα ὁ αζγη, κύκλος ὁ διὰ τοῦ ε, κέντρου διερχόμενος μείζων ἐστὶν ἑκατέρου τῶν βθκλ, δμνξ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὁ αὐτὸς αζγη, μείζων καὶ παντὸς ἄλλου, μέγιστος ἄρα ὁ διὰ τοῦ κέντρου. ἀλλὰ δὴ ἔστω ὁ αζγη, κύκλος μέγιστος, λέγω ὅτι διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται. εἰ γὰρ μή, ὁ διὰ τοῦ κέντρου διερχόμενος μείζων ἔσται τοῦ αζγη, κατὰ τὰ ἤδη εἰρημένα, ἀλλ' ὑπετέθη καὶ μέγιστος, ἄτοπον ἄρα, οἱ μέγιστοι ἄρα κύκλοι διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχονται.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 6.



Ἔστωσαν δὲ αἱ εο, επ, ἴσαι, ὥστε τοὺς βθκλ, δμνξ, κύκλους ἐξ ἴσου τοῦ κέντρου ἀφίστασθαι. Λέγω ὅτι οἱ βθκλ, δμνζ, κύκλοι ἴσοι εἰσί, κατὰ γὰρ τὴν μζ': τοῦ α: τοῦ στοιχειωτοῦ τὰ μὲν ἀπὸ τῶν κο, οε, τετράγωνα ἴσα εἰσὶ τῷ ἀπὸ τῆς εκ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν νπ, πε, τῷ ἀπὸ τῆς εν, ἀλλ' αἱ εκ, εν, ἴσαι εἰσίν, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν κο, οε, ἴσα εἰσὶ τοῖς ἀπὸ τῶν νπ, πε, ἀφαιρουμένων δὲ τῶν ἀπὸ τῶν οε, πε, ἴσων τετραγώνων, ἐναπολείπονται ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν κο, νπ, καὶ ἑπομένως ἡ κο, τῇ νπ, ὁμοίως ἴση ἐστίν, ἀλλ' ἡ μὲν κο, ἡμιδιάμετρός ἐστι τοῦ βθκλ, κύκλου, ἡ δὲ νπ, τοῦ δμνξ, ἄρα οἱ βθκλ, δμνξ, κύκλοι ἴσοι εἰσίν. ὅτι δὲ καὶ ἀνάπαλιν, δῆλον, ἔστωσαν γὰρ ἴσοι οἱ βθκλ, δμνξ, κύκλοι. Λέγω, ὅτι ἑκάτερος ἐξ ἴσου τοῦ ε, κέντρου ἀφίσταται, τῶν αὐτῶν γὰρ κατασκευασθέντων, ἐπεὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν μζ': τὰ ἀπὸ τῶν κο, οε, τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς εκ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν νπ, πε, τῷ ἀπὸ τῆς εν, αἱ δὲ εκ, εν, ἴσαι εἰσί, πάντως γε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν κο, οε, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν νπ, πε. ἀφαιρουμένων δὲ τῶν ἀπὸ τῶν κο, νπ, ἴσων, ἡμιδιάμετροι γὰρ ἴσων κύκλων, ἐναπολείπονται τὰ ἀπὸ τῶν οε, πε, τετράγωνα ἴσα, καὶ ἑπομένως αἱ οε, πε, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἄρα κατὰ τὸν ς': ὅρον τοῦ παρόντος οἱ βθκλ, δμνξ, κύκλοι ἐξ ἴσου τοῦ ε, κέντρου ἀφίστανται.

Ἔστω τελευταῖον ὁ μὲν βηγθ, ἀπώτερον τοῦ ζ, κέντρου τῆς αβγδε, σφαίρας, ὁ δὲ ελδμ, ἐγγύτερον, ἤτοι ἔστω ἡ ζκ, μείζων τῆς ζν. Λέγω, ὅτι ὁ βηγθ, ἐλάττων ἐστὶ τοῦ ελδμ, κατὰ γὰρ τὴν ῥηθεῖσαν μζ': τὰ ἀπὸ τῶν γκ, κζ, τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς γζ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν δν, νζ, τῷ ἀπὸ τῆς ζδ, ἴσαι δὲ αἱ ζγ, ζδ, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν γκ, κζ, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν δν, νζ. ἀφαιρουμένων δὲ τῶν ἀπὸ τῶν ζκ, ζν, ἀνίσων, ἐναπολείπεται καὶ τὰ ἀπὸ τῶν γκ, δν, ἄνισα, μείζων δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ἡ ζκ, τοῦ ἀπὸ τῆς ζν, μεί-

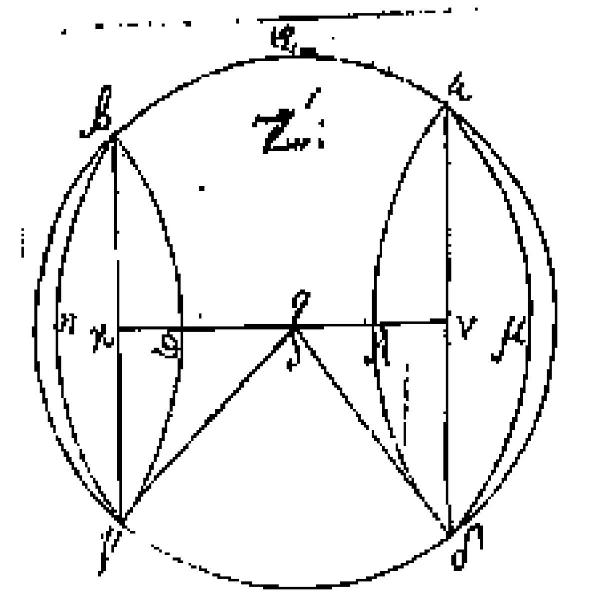
ζων

ζων ἄρα ἀντιπεπονθότως καὶ τὸ ἀπὸ τῆς δν, τοῦ ἀπὸ τῆς γκ, καὶ ἑπομένως ἡ δν, τῆς γκ, μείζων ἐστίν. ἀλλ' ἡ μὲν δν, ἡμιδιάμετρός ἐστι τοῦ ελδμ, ἡ δὲ γκ, βηγθ, ἄρα ὁ ελδμ, κύκλος μείζων ἐστὶ τοῦ βηγθ, τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἄρα κύκλων οἱ μὲν διὰ τοῦ κέντρου διερχόμενοι τῆς σφαίρας μέγιστοι κεῖνται, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Α': Ἐκ τούτου ῥᾶστα συνάγεται, ὅτι πάντες οἱ ἐν τῇ σφαίρᾳ μέγιστοι κύκλοι ἴσοι εἰσίν, ἡ γὰρ τοῦ μεγίστου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλου ἡμιδιάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ὡς δέδεικται.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 7.

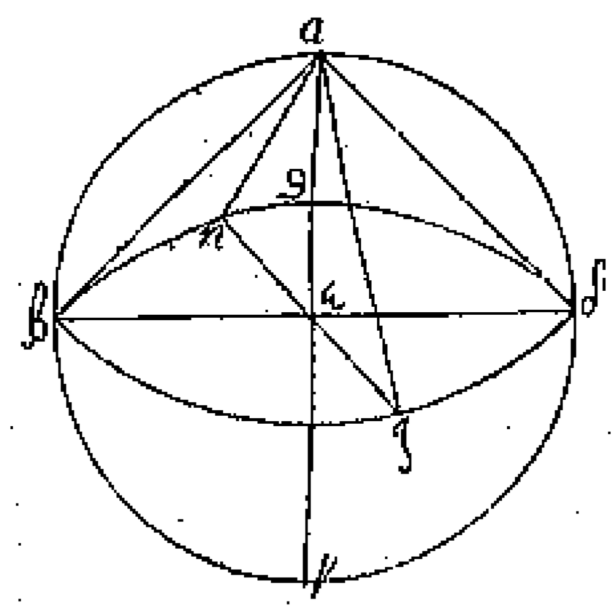


ΠΟΡΙΣΜΑ.

Β': Ἔτι ἑκατέρωθεν τοῦ οἱουδήποτε ἐν σφαίρᾳ μεγίστου κύκλου οὐ πλείους, ἢ δύο μόνους ἴσους εἶναι τῶν ἐλαττόνων ἐν αὐτῇ κύκλων.

Πρότασις Η': Θεώρημα.

Ἐὰν παρὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἐν αὐτῇ κύκλου κάθετος ἀχθῇ, διὰ τῶν πόλων τοῦ κύκλου διελεύσεται, καὶ ἀνάπαλιν, ἐὰν ἀπὸ τοῦ πόλου τοῦ ἐν σφαίρᾳ κύκλου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ κάθετος ἀχθῇ, διά τε τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διελεύσεται, καὶ τοῦ ἀπεναντίον πόλου τοῦ κύκλου.

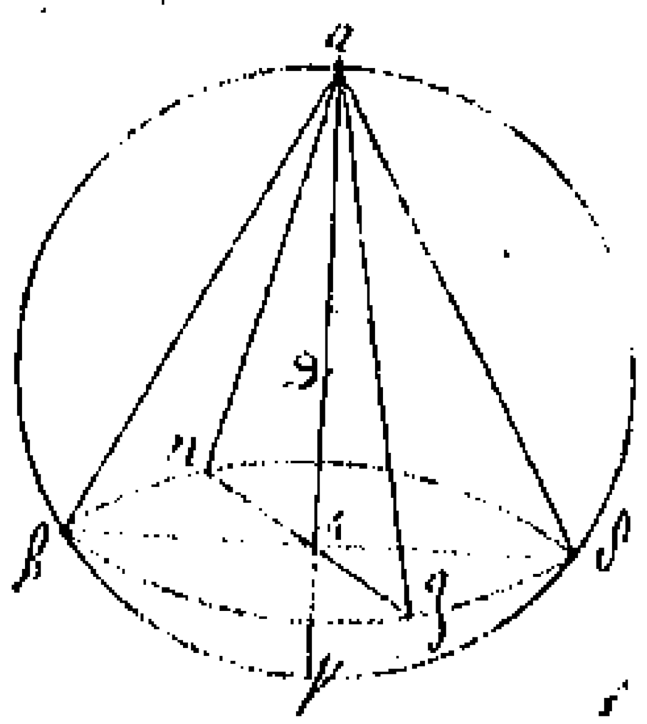


Ἔστω σφαῖρα ἡ αβγδ, ἧς κέντρον τὸ ε, κύκλος δὲ ἐν αὐτῇ ὁ βζδη. ἐπεὶ δὲ οἱ κύκλοι ἐν τῇ σφαίρᾳ ἢ μέγιστοί εἰσιν, ἢ ἐλάττονες, ἔστω α: ὁ βζδη, μέγιστος, ὃς καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται κατὰ τὴν ἀνωτέρω, καὶ ἀνεστάθω κάθετος πρὸς τὸ αὐτοῦ ἐπίπεδον ἡ εθ, Λέγω ὅτι ἡ εθ, ἑκατέρωθεν ἐκτεινομένη διὰ τῶν πόλων τοῦ βζδη, διελεύσεται κύκλου. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βδ, ηζ, διάμετροι τοῦ κύκλου, καὶ ἀπὸ τοῦ α, πόλου ἀχθήτωσαν αἱ αβ, αη, αδ, αζ, καὶ ἐπεὶ ἡ αε, κάθετός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βζδη, κύκλου ἐπίπεδον, πάντως γε κατὰ τὸν γ': ὅρον τοῦ ια: τοῦ στοιχειωτοῦ, καὶ πρὸς τὰς βδ, ηζ, ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ βζδη, κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ εβ, εζ, εδ, εη, ἴσαι, ἡμιδιάμετροι γὰρ τοῦ κύκλου εἰσί, καὶ κοινὴ ἡ αε, ἄρα τῶν αεβ, αεη, αεδ, αεζ, τριγώνων κατὰ τὴν δ': τοῦ α: τοῦ στοιχειωτοῦ αἱ αβ, αη, αδ, αζ, ὑποτείνουσαι τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσαι εἰσί, καὶ κατὰ τὸν ε': ὅρον τοῦ παρόντος τὸ

α, πόα, πόλος ἐστὶ τοῦ βζδη, κύκλου, τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται καὶ τὸ γ, πόλος τοῦ αὐτοῦ εἶναι κύκλου.

Εἰδὲ ὁ κύκλος ἐλάσσων εἴη, ἀχθήτω ἀπὸ τοῦ θ, κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ βζδη, κύκλου κάθετος ἡ θε. Λέγω ὅτι ἡ θε, ἐκβαλλομένη ἑκατέρωθεν, διὰ τῶν πόλων τοῦ κύκλου διέρχεται. τῶν αὐτῶν γὰρ κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἡ αθε, διὰ τοῦ κέντρου τοῦ βζδη, κύκλου διέρχεται κατὰ τὸ β′: πόρισμα τῆς β′: τοῦ παρόντος, εὐχερῶς δειχθήσεται κατὰ τὰ ἀνωτέρω, αἱ αβ, αη, αδ, αζ, ἴσαι. ὥστε τὸ α, πόλος ἐστὶ τοῦ βζδη, κύκλου.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 8.



Ἀλλὰ δὴ ἀχθήτω ἀπὸ τοῦ α, πόλου τοῦ βζδη, κύκλου κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτοῦ ἐπίπεδον ἡ αε. Λέγω ὅτι ἡ αε, διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται, καὶ τοῦ ἀπεναντίον πόλου τοῦ αὐτοῦ κύκλου, τῶν γὰρ αβ, αη, αδ, αζ, ἀγομένων, καὶ τῶν βδ, εζ, ἐπιζευγνυμένων, ἐπεὶ ἡ αε, κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῶν βε, ηε, δε, ζε, κατὰ τὸν ῥηθέντα γ′: ὅρον τοῦ ια: τοῦ στοιχειωτοῦ. πάντως γε κατὰ τὴν μζ′: τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ, τὸ μὲν ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν βε, εα. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς αη, τοῖς ἀπὸ τῶν ηε, εα. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς αδ, τοῖς ἀπὸ τῶν δε, εα, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αζ, τοῖς ἀπὸ τῶν ζε, εα. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν αβ, αη, αδ, αζ, ἴσα εἰσι, διὰ τὸ καὶ τὰς αβ, αη, αδ, αζ, ἴσας εἶναι κατὰ τὸν ε′: ὅρον τοῦ παρόντος, ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν βε, εα, καὶ ηε, εα, καὶ δε, εα, καὶ ζε, εα, ἴσα εἰσι, κοινοῦ δὲ ἀφαιρουμένου τοῦ ἀπὸ τῆς αε, λοιπὰ τὰ ἀπὸ τῶν βε, ηε, δε, ζε, ἴσα ἐστιν, ὥστε καὶ αἱ βε, ηε, δε, ζε, εὐθεῖαι ἴσαι εἰσι, καὶ τὸ ε, κέντρον ἐστὶ τοῦ βζδη, κύκλου κατὰ τὸν ιε′: ὅρον τοῦ α: τοῦ στοιχειωτοῦ. ἡ αὐτὴ δεῖξις ἐφαρμόζει ἐφ᾽ ἑκατέρου τῶν σχημάτων. ἐπὶ μὲν γὰρ τοῦ α: ἐπεὶ τὸ ε, κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου, ὁ δὲ κύκλος μέγιστός ἐστι, δῆλον, ὅτι τὸ ε, κέντρον ἐστὶ καὶ τῆς σφαίρας κατὰ τὴν ἀνωτέρω. ἐπὶ δὲ τοῦ β′: ἐπεὶ ἡ αε, διὰ τοῦ κέντρου τοῦ βζδη, κύκλου διέρχεται, καὶ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ αὐτοῦ ἐπίπεδον, πάντως γε τὸ τῆς σφαίρας κέντρον ἐπὶ τῆς αε, ἐστὶ κατὰ τὸ α: πόρισμα τῆς γ′: τοῦ παρόντος. Ὅτι δὲ ἡ αε, καὶ διὰ τοῦ γ, ἑτέρου διέρχεται πόλου, δέδεικται μικρὸν πρόσθεν. Ἐὰν ἄρα παρὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἐν αὐτῇ κύκλου κάθετος ἀχθῇ διὰ τῶν πόλων, καὶ τὰ ἑξῆς.

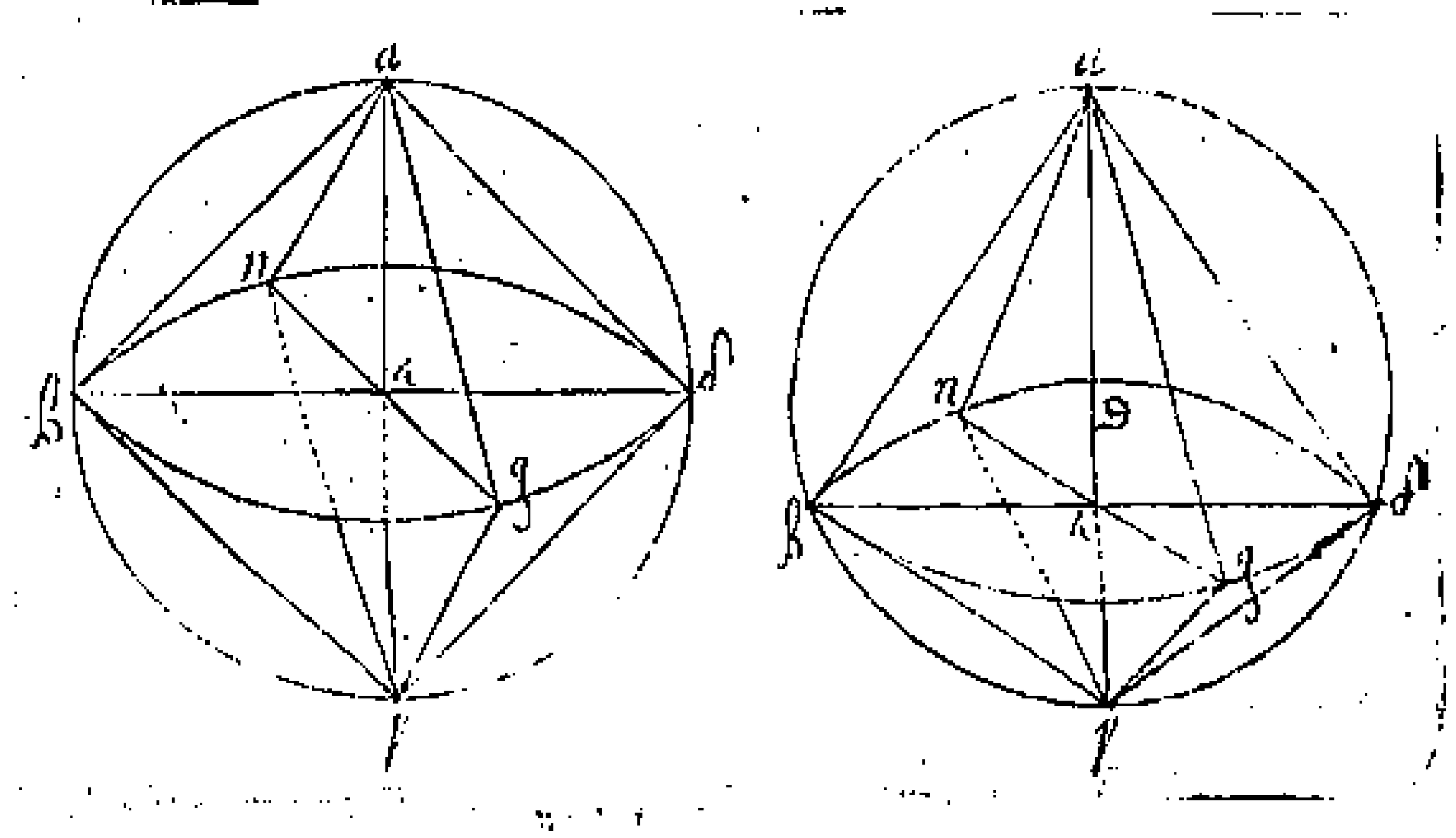
Πρό-

Πρότασις Θ′: Θεώρημα.

Ἐὰν διὰ τῶν πόλων τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλων εὐθεῖα ἀχθῇ, κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται.

Ἔστω ἐν σφαίρᾳ τῇ αβγδ, κύκλος ὁ βζδη, οὗ πόλοι τὰ α, καὶ γ, σημεῖα, καὶ διήχθω διὰ τῶν α, καὶ γ, σημείων ἡ αγ. Λέγω ὅτι ἡ αγ, κάθετός ἐστι, καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς αβγδ, σφαίρας διέρχεται. Συμβαλλέτω γὰρ ἡ αγ, τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ βζδη, κύκλου κατὰ τὸ ε, καὶ διὰ τοῦ ε, διήχθωσαν αἱ βδ, ηζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ὡς πρότερον αἱ αβ, αη, αδ, αζ, καὶ ἔτι αἱ γβ, γζ, γδ, γη. καὶ ἐπεὶ αἱ αβ, αη, αδ, αζ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸν ε′: ὅρον τοῦ παρόντος, εἰσὶ δὲ ἴσαι κατὰ τὸν αὐτὸν, καὶ αἱ

Theod: Sf: Lib: 1. Fig. 9.



γβ, γζ, γδ, γη, καὶ κοινὴ αἱ αγ. ἄρα κατὰ τὴν η′: τοῦ α: τοῦ στοιχειωτοῦ, τὰ αβγ, αηγ, αζγ, καὶ αδγ, τρίγωνα ἴσα εἰσι, καὶ τὰς γωνίας, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἴσας ἔχουσιν, ὥστε αἱ ὑπὸ βαε, ηαε, δαε, καὶ ζαε, γωνίαι ἴσαι εἰσιν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ αβ, αη, αδ, καὶ αζ, ἴσαι, ὡς δέδεικται, καὶ κοινὴ ἡ αε, ἄρα κατὰ τὴν δ′: τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ, αἱ βε, ηε, δε, ζε, ἴσαι εἰσι, καὶ τὸ ε, κέντρον ἐστὶ τοῦ βζδη, κύκλου, κατὰ τὸν ιε′: ὅρον τοῦ αὐτοῦ. ἄρα κατὰ τὴν ἀνωτέρω κάθετός ἐστιν ἡ αε, πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ βζδη, κύκλου, καὶ κατὰ τὸ πόρισμα τῆς γ′: τοῦ παρόντος, τὸ τῆς σφαίρας κέντρου ἐπὶ τῆς αγ, ἐστὶν, κἂν μὲν ὁ βζδη, μέγιστός ἐστι, τὸ ε, κέντρον ἐστὶ καὶ τῆς σφαίρας κατὰ τὸ α: πόρισμα τῆς β′: τοῦ παρόντος, εἰδὲ ἐλάσσων εἴη, ἔσται δὸς εἰπεῖν, τὸ θ. ὡς ἐπὶ τοῦ β′: σχήματος. Ἐὰν ἄρα διὰ τοῦ πόλου τινὸς τῶν ἐν σφαίρᾳ κύκλων εὐθεῖα ἀχθῇ, κάθετος, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ πόλου τινὸς κύκλου κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ ἀχθῇ, ἐπὶ τοῦ κέντρου πεσεῖται τοῦ κύκλου, καὶ ἀνάπαλιν.

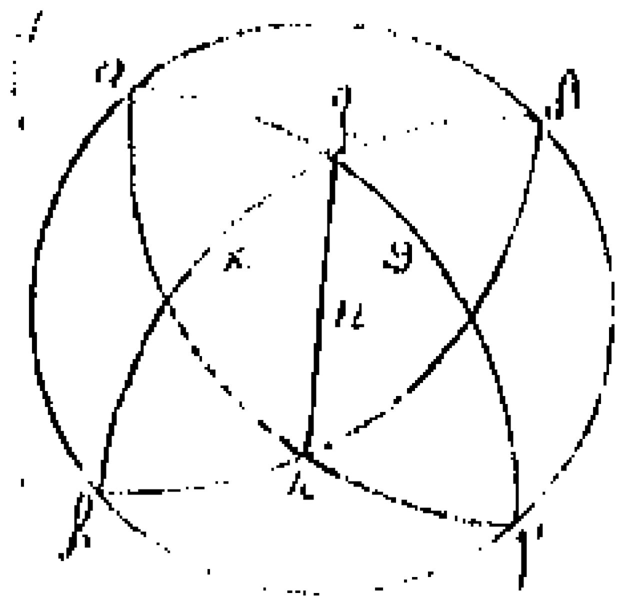
 Πρό-

Πρότασις Ι΄: Θεώρημα.

Οἱ μέγιστοι ἐν σφαίρᾳ κύκλοι δίχα ἀλλήλους τέμνονται, καὶ ἀνάπαλιν, οἱ δίχα ἐν σφαίρᾳ ἀλλήλους τεμνόμενοι κύκλοι, μέγιστοί εἰσιν.

Ἔστωσαν ἐν σφαίρᾳ τῇ α β γ δ, μέγιστοι κύκλοι οἱ α ε γ ζ, β ε δ ζ. Λέγω ὅτι οἱ α ε γ ζ, β ε δ ζ, μέγιστοι κύκλοι τέμνονται ἀλλήλους, ἑκάτερος γὰρ κατὰ τὴν ζ΄: τοῦ παρόντος διὰ τοῦ κέντρου τῆς α β γ δ, διέρχεται σφαίρας, ἀδύνατον ἄρα παράλληλον πρὸς ἀλλήλους τηρεῖν θέσιν, καὶ μὴ τέμνεσθαι. Ὅτι δὲ καὶ δίχα, δῆλον. διήχθω γὰρ διὰ τῶν ε, καὶ ζ, κοινῶν τομῶν ἡ ε ζ, ἥτις κατὰ τὴν γ΄: τοῦ ια΄: τοῦ στοιχειωτοῦ εὐθεῖα ἐστιν, καὶ ἐπεὶ ἡ ε ζ, κοινή ἐστι τομὴ τῶν α ε γ ζ, β ε δ ζ, κύκλων, πάντως γε τὸ κέντρον ἑκατέρου τῶν κύκλων ἐπ' αὐτῆς ἐστιν. εἰ γὰρ μή, ἀλλ' ἐκτὸς εἴη τῆς ε ζ, ἐπεὶ οἱ α ε γ ζ, β ε δ ζ, οὐδὲν ἄλλο κοινὸν ἔχουσιν, ἢ τὴν ε ζ, κοινὴν αὐτῶν τομήν. δῆλον, ὅτι οὐδὲ τὸ αὐτὸ ἔσται κέντρον ἑκατέρου τῶν αὐτῶν κύκλων, καὶ ἑπομένως οὐδὲ διὰ τοῦ κέντρου τῆς α β γ δ, σφαίρας διέρχονται, ὅπερ ἀντίκειται τῇ ζ΄: τοῦ παρόντος. οὐκ ἄρα τὰ κέντρα τῶν α ε γ ζ, β ε δ ζ, ἐκτός εἰσι τῆς ε β, κοινῆς τομῆς, ἀλλ' ἐπ' αὐτῆς, καὶ κοινὸν ἑκατέρῳ. Ἔστω δὴ τοῦτο τὸ η, τὸ η, ἄρα ἔσται κέντρον τῆς σφαίρας, καὶ τῶν α ε γ ζ, β ε δ ζ, μεγίστων κύκλων, καὶ ἡ ε ζ, διάμετρός ἐστιν ἑκατέρου, ὥστε δίχα ἀλλήλους τέμνονται, ὅπερ ἔδει τὸ α΄:

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 10.



Ἀλλὰ δὴ τεμνέσθωσαν ἀλλήλους δίχα οἱ α ε γ ζ, β ε δ ζ, κύκλοι. Λέγω, ὅτι μέγιστοί εἰσιν, ἤτοι διὰ τοῦ κέντρου τῆς α β γ δ, σφαίρας διέρχονται. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ε ζ, κοινὴ τομὴ αὐτῶν, καὶ τμηθήτω δίχα κατὰ τὸ η. καὶ ἐπεὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν δίχα ἀλλήλους οἱ κύκλοι τέμνονται, πάντως γε ἡ ε ζ, διάμετρός ἐστι, καὶ διὰ τοῦ κέντρου ἑκατέρου τῶν κύκλων διέρχεται. ὥστε τὸ η, κέντρον ἐστὶ τοῦ τε α ε γ ζ, καὶ β ε δ ζ, κύκλου, ἡμιδιάμετρος γὰρ ἑκατέρου ἐστὶ ἥ τε η ε, καὶ η ζ, ὡς δίχα τῆς ε ζ, διαμέτρου διῃρημένης. Λέγω, ὅτι τὸ η, κέντρον ἐστὶ καὶ τῆς α β γ δ, σφαίρας. εἰ γὰρ μή, ἀνεστάθω ἡ μὲν η θ, πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ α ε γ ζ, κύκλου, ἡ δὲ η κ, ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ β ε δ ζ, καὶ κατὰ τὸ β΄: πόρισμα τῆς β΄: τοῦ παρόντος ἑκατέρα τῶν η θ, η κ, διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται, τῆς ἄρα α β γ δ, σφαίρας τὸ κέντρον ἐπί τε τῆς η θ, καὶ η κ, ἐστὶν, ὅπερ ἄτοπον, τὸ η, ἄρα κέντρον ἐστὶ καὶ τῆς α β γ δ, σφαίρας, καὶ κατὰ τὴν ζ΄: τοῦ παρόντος οἱ α ε γ ζ, β ε δ ζ, κύκλοι μέγιστοί εἰσιν, ὅπερ ἔδει τὸ β΄:

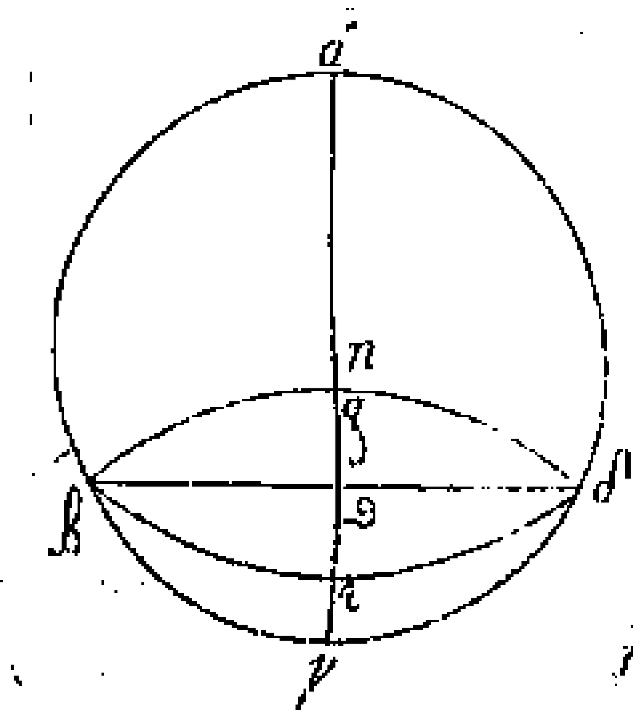
Πρό-

Πρότασις ΙΑ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλος μέγιστος ἐν σφαίρᾳ κύκλον ἐλάσσονα πρὸς ὀρθὰς γωνίας τέμνῃ, δίχα αὐτὸν τέμνει, καὶ διὰ τῶν πόλων αὐτοῦ διέρχεται, καὶ ἀνάπαλιν, ἐὰν δίχα αὐτὸν τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς γωνίας τέμνει.

Τεμνέτω δὴ ὁ α β γ δ, μέγιστος κύκλος τὸν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ ἐλάττονα, τὸν β ε δ ζ, πρὸς ὀρθάς, τουτέστιν ἔστω τὸ τοῦ α β γ δ, κύκλου ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὸ τοῦ β ε δ ζ, ἐπίπεδον. Λέγω ὅτι καὶ δίχα αὐτὸν τέμνει. Ἔστω δὴ κοινὴ τομὴ ἀμφοτέρων τῶν κύκλων ἡ β δ, διὰ δὲ τοῦ η, κέντρου τῆς σφαίρας διήχθω κάθετος ἐπὶ τῆς β δ, ἡ η θ, περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς περιφερείας τῆς σφαίρας, καὶ ἐπεὶ τὸ η, σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας, πάντως γε κατὰ τὴν ζ΄: τοῦ παρόντος τὸ αὐτὸ σημεῖόν ἐστι κέντρον καὶ τοῦ α β γ δ, κύκλου. ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ η θ, πρὸς ὀρθὰς πέπτωκεν ἐπὶ τῆς β δ, καὶ τὸ α β γ δ, ἐπίπεδον πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ β ε δ ζ. δῆλον, ὅτι ἡ η θ, πρὸς ὀρθάς ἐστι καὶ εἰς τὸ τοῦ β ε δ ζ, ἐπίπεδον κατὰ τὸν δ΄: ὅρον τοῦ ια΄: τοῦ στοιχειωτοῦ, καὶ κατὰ τὸ β΄: πορ: τῆς β΄: τοῦ παρόντος, τὸ θ, κέντρον ἐστὶ τοῦ β ε δ ζ, κύκλου, ὥστε ἡ β δ, διάμετρός ἐστι. φανερὸν οὖν ὅτι ὁ α β γ δ, κύκλος δίχα τέμνει τὸν β ε δ ζ. ὅπερ ἔδει τὸ α΄: Ὅτι δὲ καὶ διὰ τῶν πόλων αὐτοῦ διέρχεται, δῆλον, κατὰ γὰρ τὴν η΄: τοῦ παρόντος ἡ α η θ, διὰ τῶν πόλων τοῦ β ε δ ζ, κύκλου διέρχεται. ὥστε τὰ α, καὶ γ, σημεῖα πόλοι εἰσὶ τοῦ αὐτοῦ β ε δ ζ, κύκλου, ἀλλ' ὅλη ἡ α γ, ἐν τῷ τοῦ α β γ δ, κύκλου ἐπιπέδῳ ἐστὶ κατὰ τὴν α΄: τοῦ ια΄: τοῦ στοιχειωτοῦ, ἄρα ὁ α β γ δ, κύκλος διὰ τῶν πόλων τοῦ β ε δ ζ, κύκλου διέρχεται, ὅπερ ἔδει τὸ β΄:

Theod: Sf: Lib. 1. Fig. 11.



Ἀλλὰ δὴ τεμνέτω ὁ α β γ δ, κύκλος τὸν β ε δ ζ, δίχα κατὰ τὰ β, καὶ δ, σημεῖα. Λέγω, ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνει. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ β δ, ἥτις διάμετρός ἐστι τοῦ β ε δ ζ, κύκλου κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ διέρχεται. ἔστω δὴ κέντρον τοῦ μὲν β ε δ ζ, κύκλου τὸ θ, τῆς δὲ σφαίρας τὸ η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ η θ, περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη. καὶ ἐπεὶ ὁ α β γ δ, μέγιστός ἐστι, δῆλον, ὅτι τὸ η, σημεῖον κέντρον ὂν τῆς σφαίρας, κέντρον ἐστὶ καὶ αὐτοῦ τοῦ α β γ δ, κύκλου, κατὰ τὴν ζ΄: τοῦ παρόντος, ἔστι δὲ καὶ τὸ θ, σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ αὐτοῦ α β γ δ, κύκλου, ὅτι ἐπὶ τῆς κοινῆς ἐστι τομῆς, ἄρα ὅλη ἡ η θ, ἐν τῷ τοῦ α β γ δ, ἐστὶν ἐπιπέδῳ. κατὰ δὲ τὴν ς΄: τοῦ παρόντος ἡ η θ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ β ε δ ζ, κύκλου ἐπίπεδον. ἄρα κατὰ τὴν ιη΄: τοῦ ια΄: τοῦ στοιχ: καὶ τὰ δι' αὐτῆς πάντα ἐπίπεδα ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ β ε δ ζ, ἐπίπεδον, ὥστε ὁ α β γ δ,

ὡς

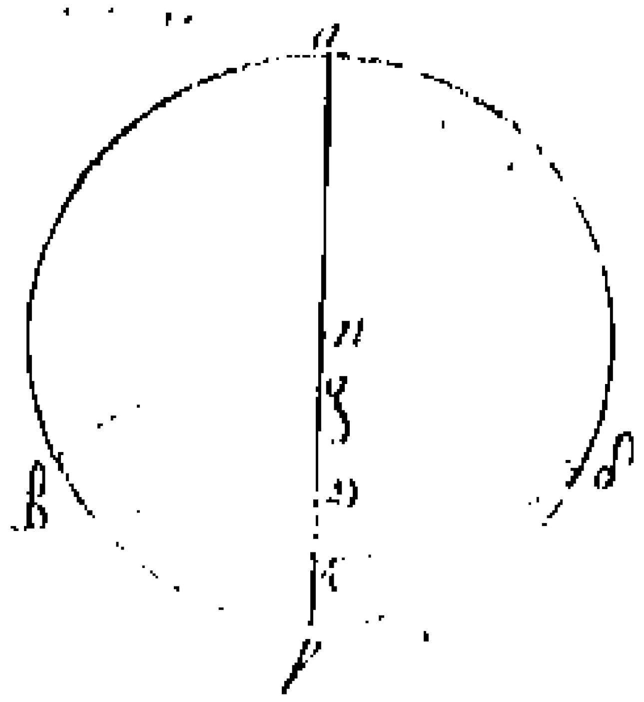
ὡς δι' αὐτῆς διερχόμενος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βεδζ, ἐπίπεδον. ὅπερ ἔδει τὸ ἑκάτως ὑποχεθέν.

Πρότασις ΙΒ': Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλος μέγιστος ἐν σφαίρᾳ διὰ τῶν πόλων ἑτέρου κύκλου διέρχεται, δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνει.

Διελθέτω ὁ αβγδ, μέγιστος κύκλος διὰ τῶν α, καὶ γ, πόλων τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ βεδζ, κύκλου. Λέγω, ὅτι δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνει. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ τε αγ, ἡ τοὺς πόλους συνδέουσα, συμβάλλουσα τῷ τοῦ βεδζ, κύκλου ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ θ, σημεῖον, καὶ ἔτι ἡ βδ, κοινὴ αὐτῶν τομή. καὶ ἐπεὶ ἡ αγ, διὰ τῶν πόλων τοῦ βεδζ, διέρχεται κύκλου, πάντως γε κατὰ τὴν θ': τοῦ παρόντος κάθετός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βεδζ, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ διὰ τοῦ η, κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται. ὥστε κατὰ τὴν ιη: τοῦ ια: τοῦ στοιχείων, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βεδζ, κύκλου ἐπίπεδον. ὀρθὸς ἄρα ἐστὶν ὁ αβγδ, κύκλος, πρὸς τὸν βεδζ, κατὰ τὴν αὐτήν. ἐπεὶ δὲ πάλιν κατὰ τὸ β': πόρισμα τῆς β': τοῦ παρόντος ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ μὴ διὰ τοῦ κέντρου κύκλου, διὰ τοῦ κέντρου τοῦ αὐτοῦ κύκλου διέρχεται, δῆλον, ὅτι τὸ θ, κέντρον ἐστὶ τοῦ βεδζ. καὶ ἑπομένως ἡ βδ, διάμετρος τοῦ αὐτοῦ, ἡ γὰρ αγ, κατὰ τὸν δ': ὅρον τοῦ ια: τοῦ στοιχ: ἐπὶ τῆς κοινῆς πίπτει τομῆς, ὥστε ὁ βεδζ, δίχα τέμνεται παρὰ τοῦ αβγδ, δέδεικται δὲ καὶ πρὸς ὀρθάς. ἄρα ἐὰν κύκλος μέγιστος ἐν σφαίρᾳ διὰ τῶν πόλων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 12.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Α': Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν μέγιστος ἐν σφαίρᾳ κύκλος διὰ τῶν πόλων μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ διέρχεται, κἀκεῖνος διὰ τῶν πόλων αὐτοῦ διέρχεται, καὶ ἑκάτερος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ἕτερον.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

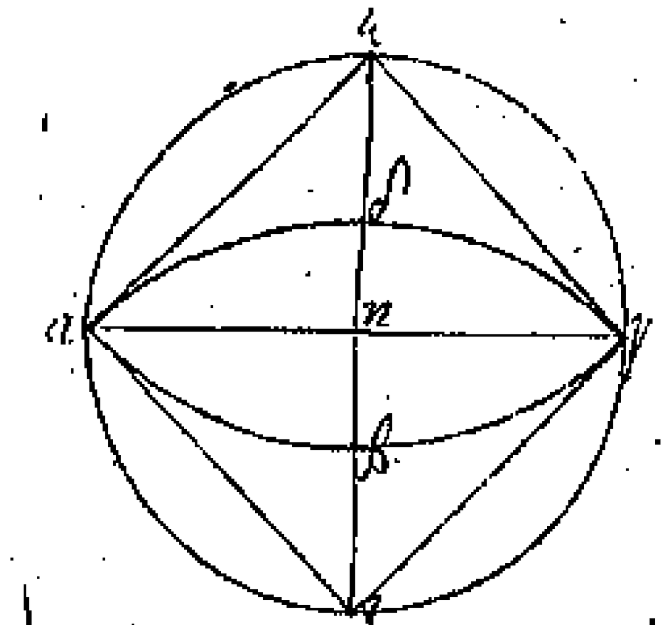
Β': Ἔτι κύκλος ἐν σφαίρᾳ δι' ἑκατέρου τῶν πόλων ἑτέρου κύκλου διερχόμενος μέγιστός ἐστιν, ὅτι δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνων, διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται.

Πρότασις ΙΓ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ τοῦ πόλου μεγίστου τινὸς ἐν σφαίρᾳ κύκλου ἐπὶ τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ εὐθεῖα ἀχθῇ, ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ἐν μεγίστῳ κύκλῳ τετραγώνου πλευρᾷ τῶν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ, κἂν ἡ ἀπὸ τοῦ πόλου τινὸς ἐν σφαίρᾳ κύκλου ἐπὶ τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ ἀγομένη εὐθεῖα ἴση ᾖ τῇ τοῦ ἐν μεγίστῳ κύκλῳ τετραγώνου πλευρᾷ, μέγιστός ἐστιν ἐκεῖνος.

Ἔστω κύκλος μέγιστος ἐν σφαίρᾳ ὁ αβγδ, οὗ πόλοι οἱ ε, ζ. καὶ ἀχθήτω ἀπὸ τοῦ ε, πόλου ἐπὶ τὴν αὐτοῦ περιφέρειαν εὐθεῖα ἡ εα. Λέγω, ὅτι ἡ εα, ἴση ἐστὶ πλευρᾷ τοῦ ἐν μεγίστῳ κύκλῳ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ ἐγγραφομένου τετραγώνου. Κείσθω γὰρ διέρχεσθαι διὰ τῶν ε, καὶ ζ, πόλων τοῦ αβγδ, μεγίστου κύκλου τὸν αζγε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εγ, αζ, γζ, εζ, αγ. καὶ ἐπεὶ ἡ εζ, διὰ τῶν πόλων τοῦ αβγδ, κύκλου διέρχεται, πάντως γε κατὰ τὴν θ': τοῦ παρόντος ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ αβγδ, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται. ἀλλὰ καὶ ὁ μέγιστος ἐν σφαίρᾳ κύκλος διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται, κατὰ τὴν ζ': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα τὸ η, σημεῖον, καθ' ὃ συμβάλλει ἡ εζ, τῷ τοῦ αβγδ, κύκλου ἐπιπέδῳ, κέντρον ἐστὶ καὶ τοῦ αβγδ, κύκλου, καὶ ἑπομένως ἡ αγ, διάμετρός ἐστιν αὐτοῦ. ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ εζ, ὀρθή ἐστιν, ὡς δέδεικται, πρὸς τὸ τοῦ αβγδ, κύκλου ἐπίπεδον. δῆλον, ὅτι καὶ πρὸς τὴν αγ, ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας κατὰ τὸν γ': ὅρον τοῦ ια: τοῦ στοιχ: ὀρθὴ ἄρα ἥ τε ὑπὸ αηε, γηε, καὶ αἱ τούτων κατὰ κορυφήν, αἱ ἄρα αγ, εζ, δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις τέμνονται, καὶ αἱ αε, εγ, γζ, ζα, περιφέρειαι τεταρτημόριά εἰσι, καὶ ἑπομένως αἱ αε, εγ, γζ, ζα, ὑποτείνουσαι ἴσαι, καὶ τὸ αεγζ, τετράγωνόν ἐστιν ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν αεγζ, κύκλον, καὶ αἱ ηα, ηε, ηγ, ηζ, ἴσαι εἰσιν, ὡς δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τεμνομένων ἀλλήλαις τῶν αγ, εζ. ὥστε τὸ η, κέντρον ἐστὶ καὶ τοῦ αεγζ, κύκλου, μέγιστος ἄρα ἐστὶν ὁ αεγζ, κύκλος, καὶ ἴσος τῷ αβγδ, κατὰ τὸ α: πόρ: τῆς ζ': τοῦ παρόντος, ἄρα ἡ αε, πλευρά ἐστι τετραγώνου ἐγγραφομένου εἰς μέγιστον κύκλον τὸν ἐν ᾗ καὶ ὁ αβγδ, κύκλος σφαίρᾳ. ὅπερ ἔδει τὸ α:

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 13.



Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἡ αε, ἴση τῇ τοῦ ἐν μεγίστῳ κύκλῳ ἐγγραφομένου τετραγώνου πλευρᾷ. Λέγω ὅτι ὁ αβγδ, κύκλος μέγιστός ἐστι. τῶν αὐτῶν γὰρ κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ὁ αζγε, κύκλος διὰ τῶν πόλων τοῦ αβγδ, διέρχεται, πάντως γε δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνει κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἡ αγ, ἄρα κοινὴ τομὴ διάμετρός ἐστι τοῦ α β γ δ, κύκλου, ἀλλ' ἡ α ε, ἴση ἐστὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τοῦ ἐν μεγίστῳ ἐγγραφομένου κύκλῳ, καὶ ταύτῃ ἴση ἐστὶν ἡ ε γ, κατὰ τὸν ι': ὅρον τοῦ παρόντος, ἄρα τὸ α ε γ, ἡμικύκλιόν ἐστι, καὶ ἡ α γ, διάμετρος τοῦ α β γ δ, κύκλου, διάμετρος ἔτι ἐστὶ καὶ τοῦ α ε γ ζ. οἱ ἄρα α β γ δ, α ε γ ζ, κύκλοι ἐν τῇ αὐτῇ ὄντες σφαίρᾳ δίχα ἀλλήλους τέμνονται, καὶ κατὰ τὴν ι: τοῦ παρόντος μέγιστοί εἰσι, μέγιστος ἄρα ὁ α β γ δ, κύκλος. ὅπερ ἔδει τὸ β':

ΠΟΡΙΣΜΑ.

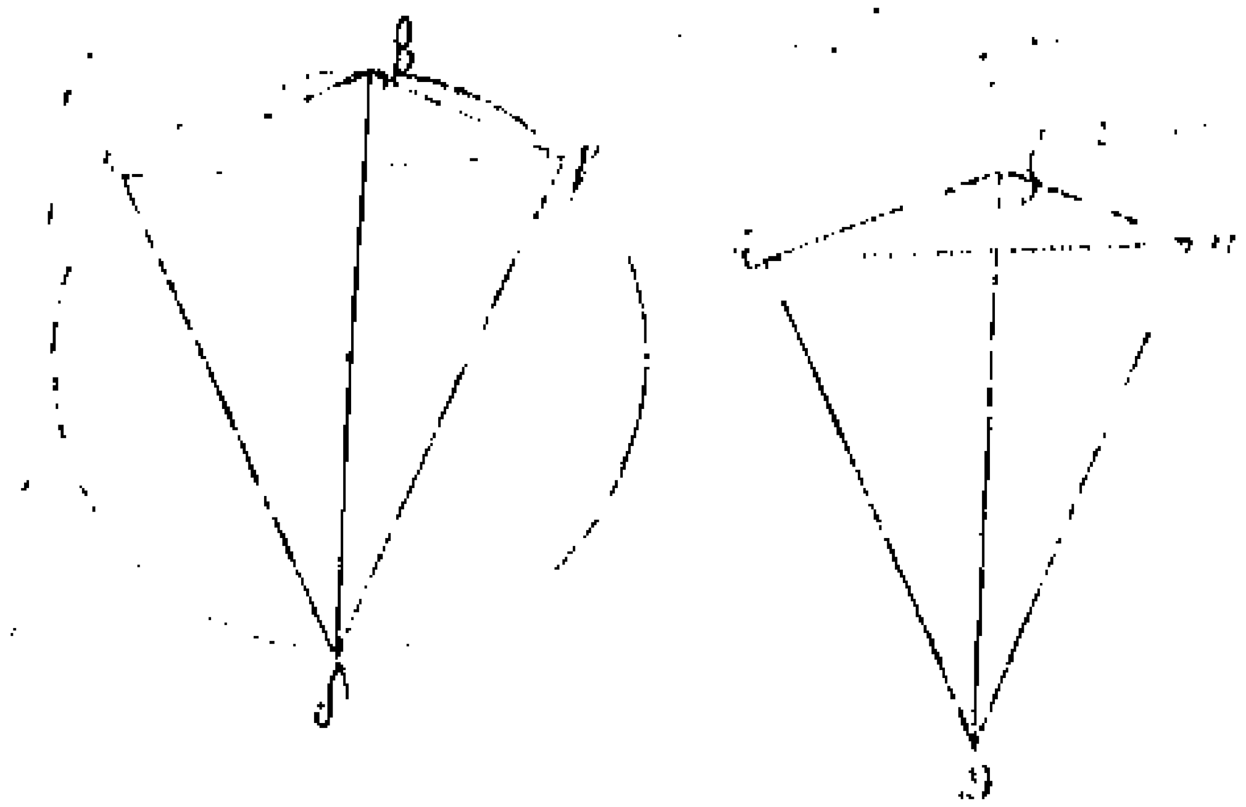
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι οἱ μέγιστοι κύκλοι τεταρτημορίῳ ἀφίστανται τῶν ἰδίων πόλων, καὶ οἱ τεταρτημορίῳ ἀφιστάμενοι τῶν ἰδίων πόλων, μέγιστοί εἰσι.

Πρότασις ΙΔ': Πρόβλημα.

Τῇ διαμέτρῳ παντὸς ἐν σφαίρᾳ κύκλου ἴσην εὐθεῖαν εὑρεῖν.

Ἔστω ἐν σφαίρᾳ κύκλος τυχὼν ὁ α β γ δ. καὶ ζητηθήτω εὐθεῖα ἴση τῇ αὐτοῦ διαμέτρῳ. Ληφθήτωσαν ἐπὶ τῆς τοῦ α β γ δ, κύκλου περιφερείας σημεῖα, ὡς ἔτυχε, τὰ α, β, γ, καὶ συνεστάσθω ἐκ τριῶν εὐθειῶν,

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 14.



αἳ εἰσὶν ἴσαι τοῖς τρισὶν διαστήμασιν α β, β γ, γ α, τρίγωνον τὸ ε ζ η. καὶ πρὸς μὲν τῷ ε, σημείῳ συνεστάθω κάθετος ἐπὶ τῆς ε ζ, ἡ ε θ, πρὸς δὲ τῷ η, συνεστάθω ὁμοίως κάθετος ἐπὶ τῆς ζ η, ἡ η θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζ θ, καὶ αὕτη ἔσται ἡ ζητουμένη. Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ β, σημείου ἡ β δ, διάμετρος τοῦ α β γ δ, κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α δ, γ δ, α γ. καὶ ἐπεὶ τῶν α β γ, ε ζ η, τριγώνων αἱ πλευραὶ ἴσαι εἰσι, πάντως γε καὶ αἱ γωνίαι ὁμοίως ἴσαι εἰσι κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ϛ': τοῦ α': τοῦ στοιχειωτοῦ, ὥστε ἡ ὑπὸ ζ ε η, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ β α γ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ζ ε θ, ἴση τῇ ὑπὸ β α δ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα ἡ μὲν κατὰ τὴν κατασκευὴν, ἡ δὲ κατὰ τὴν λ α': τοῦ γ': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ η ε θ, λοιπῇ τῇ γ α δ, ἴση ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ε η θ, τῇ ὑπὸ α γ δ, ἴση, ἔστι δὲ καὶ ἡ ε η, πλευρὰ τῇ α γ, ἴση, ἄρα κατὰ τὴν κ ϛ': τοῦ α': τοῦ αὐτοῦ καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ε θ, θ η, ἴσαι εἰσὶ ταῖς λοιπαῖς α δ, δ γ. ὥστε ὅλον τὸ ε θ η, τρίγωνον ὅλῳ τῷ α δ γ, τριγώνῳ ἰσόν ἐστιν, ἔστι δὲ καὶ τὸ ε ζ η, ἴσον τῷ α β γ, τριγώνῳ, ὡς δέδεικται, ἄρα τὸ ε ζ η θ, τραπέζιον ἰσόν ἐστι τῷ α β γ δ, τραπεζίῳ, ἐφαρμοττομένης οὖν τῆς ε θ, ἐπὶ τῆς α δ, ἐφαρμοσθήσεται

παν-

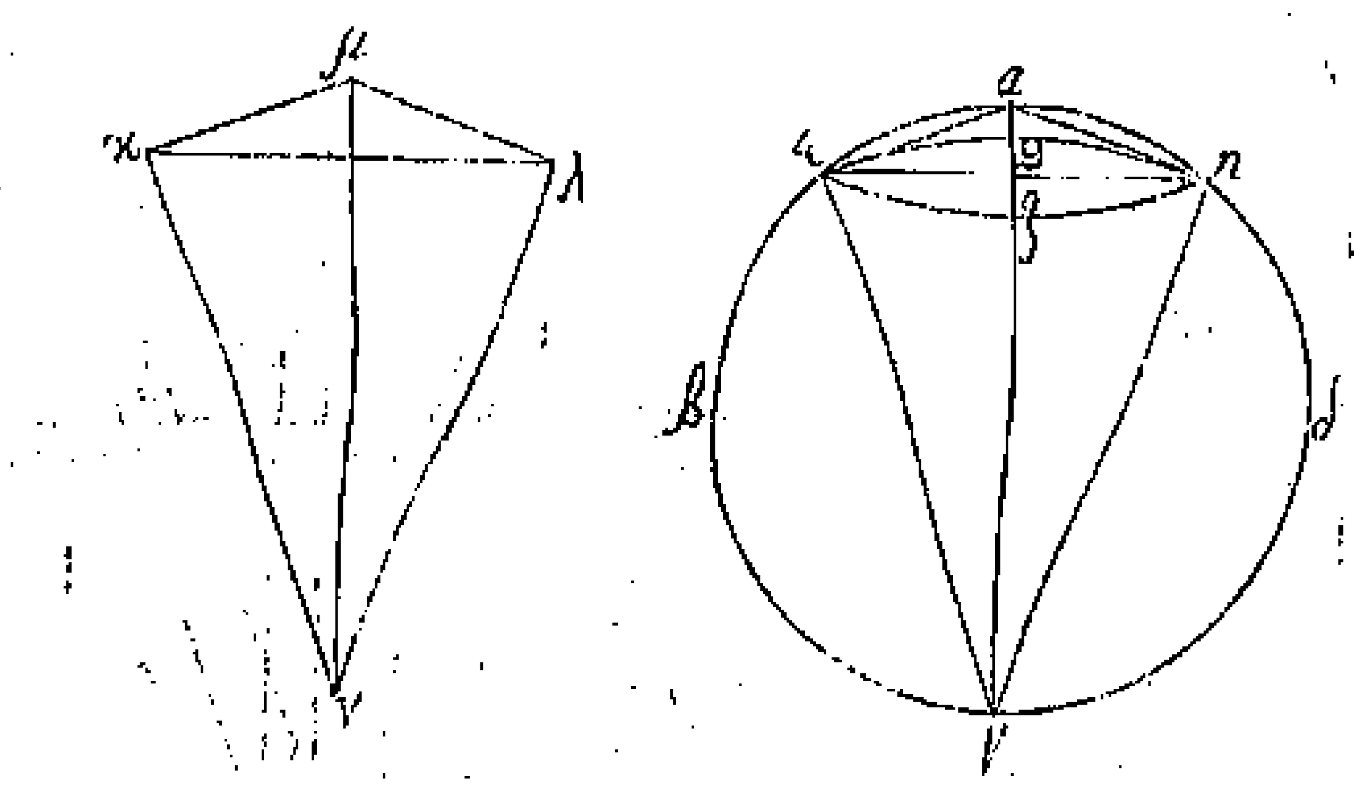
πάντως καὶ ἡ ε ζ, τῇ α β, καὶ ἡ ζ η, τῇ β γ, καὶ ἡ η θ, τῇ γ δ, ἴσα γὰρ, καὶ τὰς πλευρὰς κατὰ μίαν ἴσας ἔχουσιν, ὡς δέδεικται, ὥστε ἐφαρμοττομένων τῶν ζ, η, θ, σημείων τοῖς β, γ, δ, ἐφαρμοσθήσεται καὶ ἡ ζ θ, τῇ β δ, ἡ ζ θ, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ α β γ δ, κύκλου διαμέτρῳ. ὅπερ ἔδει τὸ ζητούμενον.

Πρότασις ΙΕ': Πρόβλημα.

Τῇ διαμέτρῳ τῆς δοθείσης σφαίρας ἴσην εὐθεῖαν εὑρεῖν.

Ἔστω σφαῖρα ἡ α β γ δ, καὶ ζητηθήτω ἡ ταύτης διάμετρος. Ληφθήτω δὴ τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, δὸς εἰπεῖν τὸ α, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ τυχόντι γραφήτω κύκλος ὁ ε ζ η θ. οὗ τινος εὑρεθήτω διὰ τῆς ἀνωτέρω ἡ διάμετρος, καὶ ἔστω αὕτη ἡ κ λ. ληφθέντων δὲ δύο τυχόντων σημείων, ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ε ζ η θ, κύκλου φέρ' εἰπεῖν, τὰ ζ, καὶ θ, διαιρεθήτω ἑκάτερον τῶν ζ ε θ, ζ η θ, τόξων δίχα κατὰ τὰ ε, καὶ η, σημεῖα, καὶ διαιρεθήσεται ὁ ε ζ η θ, δίχα. ὥστε τὴν τὰ ε, η, ἐπιζευγνύουσαν σημεῖα διάμετρον εἶναι. εἶτα συνεστάσθω ἐπὶ τῆς κ λ, τρίγωνον τὸ κ μ λ. ὥστε τὴν μὲν κ μ, ἴσην εἶναι τῷ ε α, διαστήματι, τὴν δὲ μ λ, τῷ α η, καὶ πρὸς μὲν τῷ κ, συνεστάσθω κάθετος ἐπὶ τῆς κ μ, ἡ κ ν, πρὸς δὲ τῷ λ, ὁμοίως συνεστάσθω κάθετος ἐπὶ τῆς μ λ, ἡ λ ν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ μ ν, καὶ αὕτη ἔσται ἡ ζητουμένη. Κείσθω γὰρ τὸν α β γ δ, κύκλον, εἶναι τὸν διὰ τῶν ε, α, η, διερχόμενον σημείων τῆς δοθείσης σφαίρας, καὶ διήχθω διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἡ α γ. εἶτα ἐπεζεύχθωσαν αἱ α η, ε η, ε γ, η γ. καὶ ἐπεὶ τὸ κ μ λ ν, τραπέζιον ἰσόν ἐστι καὶ ὅμοιον τῷ ε α η γ, τραπεζίῳ κατὰ τὴν ἀνωτέρω, συνέστη γὰρ τό, τε κ μ λ, τρίγωνον ἴσον καὶ ὅμοιον τῷ ε α η, καὶ τὸ κ λ ν, τῷ ε η γ, πάντως γε ἡ μ ν, διάμετρός ἐστι τοῦ α β γ δ, κύκλου, κατὰ τὴν αὐτὴν, ἀλλ' ὁ α β γ δ, κύκλος μέγιστός ἐστι κατὰ τὸ β': πόρισμα τῆς ι β': τοῦ παρόντος, ὅτι δίχα τέμνων τὸν ε ζ η θ, κύκλον κατὰ τὰ ε, καὶ η, σημεῖα διὰ τῶν πόλων αὐτοῦ διέρχεται, ἡ δὲ τοῦ μεγίστου κύκλου διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ τῆς σφαίρας διαμέτρῳ, ἄρα ἡ μ ν, ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ. ὅπερ ἔδει τὸ προσταχθέν.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 15.

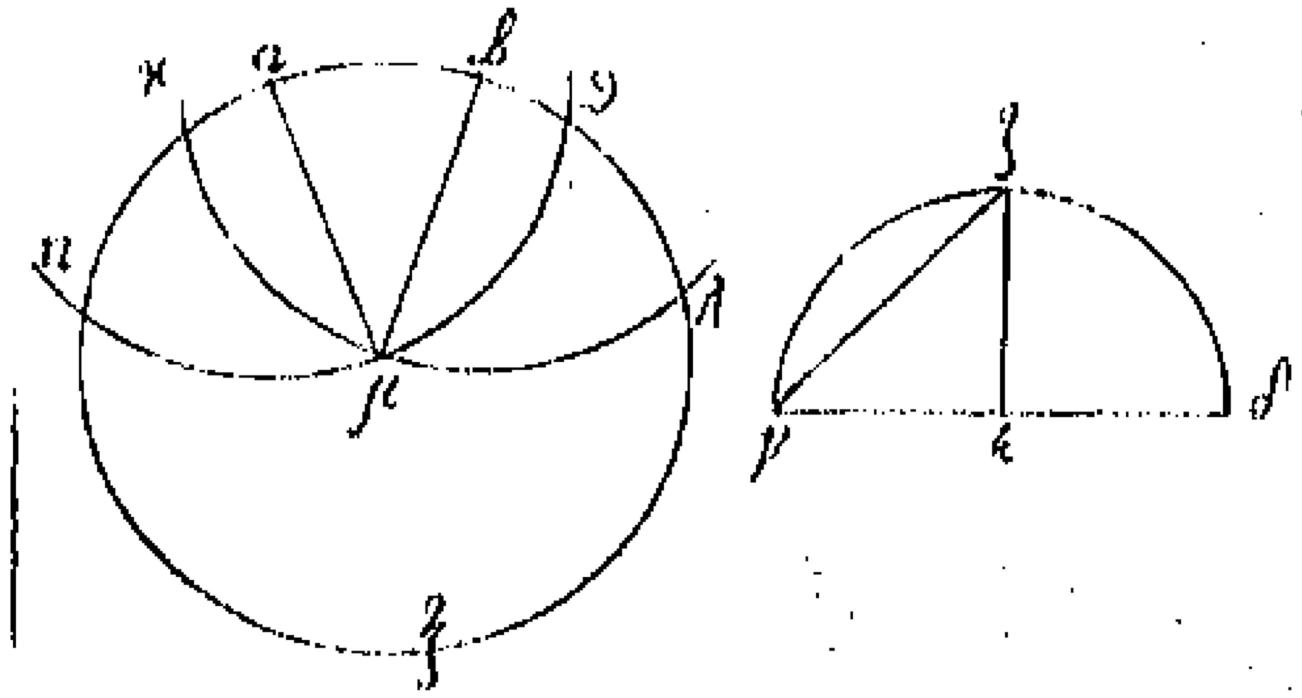


Πρότασις Ιϛʹ. Πρόβλημα.

Δύο, ὡς ἔτυχε, σημείων δοθέντων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸν δι' αὐτῶν διερχόμενον μέγιστον κύκλον εὑρεῖν.

Ἔστωσαν ἐπὶ τῆς δοθείσης σφαίρας τυχόντα σημεῖα τὰ α, β, καὶ ζητείσθω ὁ δι' αὐτῶν διερχόμενος μέγιστος κύκλος. Εὑρέσθω δὴ κατὰ τὸ ἀνωτέρω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, καὶ ἔσω αὕτη ἡ γ δ. διαιρεθείσης δὲ τῆς γ δ, δίχα κατὰ τὸ ε, σημεῖον, ἀνεστάσθω ἐπ' αὐτῆς κάθετος ἡ ε ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γ ζ. εἶτα κέντροις τοῖς α, καὶ β, δοθεῖσι σημείοις, καὶ διαστήματι τῷ γ ζ, γραφήτωσαν τόξα τὰ η θ, κ λ, τεμνόμενα ἀλλήλοις κατὰ τὸ μ, ἀπὸ δὲ τοῦ μ, ὡς ἀπὸ κέντρου διαστήματι τῷ μ α, ἢ μ β, γραφήτω κύκλος, κἀκεῖνος ἔσται ὁ ζητούμενος. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ α μ, β μ, καὶ ἐπεὶ τὰ η θ, κ λ, τόξα ἴσῳ κατεγράφησαν διαστήματι, πάντως γε αἱ α μ, β μ, ἴσαι εἰσίν. ὥστε ὁ κέντρῳ μὲν τῷ μ, διαστήματι δὲ τῷ μ α, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ β. ἐπεὶ δὲ ἑκατέρα τῶν α μ, β μ, ἴση ἐστὶ τῇ γ ζ, ἡ δὲ γ ζ, ἴση τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τοῦ ἐν μεγίστῳ ἐγγραφομένου κύκλῳ. ὁ ἄρα α β ξ, κύκλος ἀφίσταται τοῦ μ, αὐτοῦ πόλου διαστήματι ἴσῳ τῇ πλευρᾷ τοῦ ἐν μεγίστῳ κύκλῳ ἐγγραφομένου τετραγώνου, καὶ ἑπομένως μέγιστός ἐστι κατὰ τὴν ιγʹ. τοῦ παρόντος. δύο ἄρα, ὡς ἔτυχε, δοθέντων σημείων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, εὕρηται ὁ δι' αὐτῶν διερχόμενος μέγιστος κύκλος.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 16.

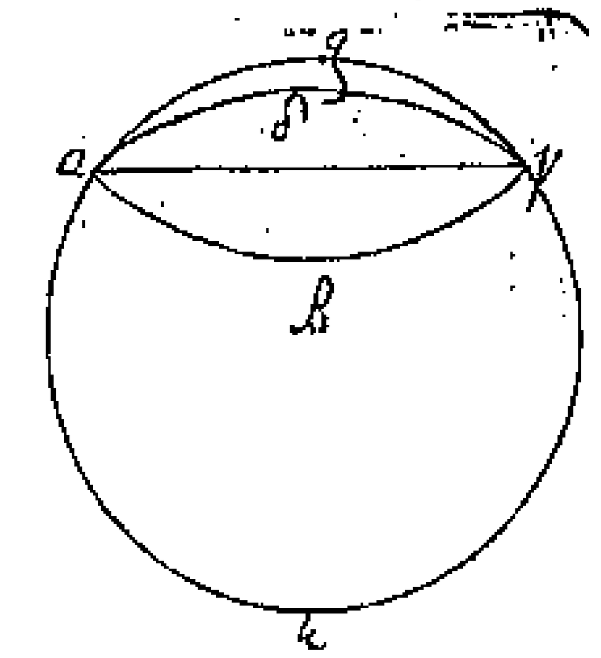


Πρότασις ΙΖʹ. Πρόβλημα.

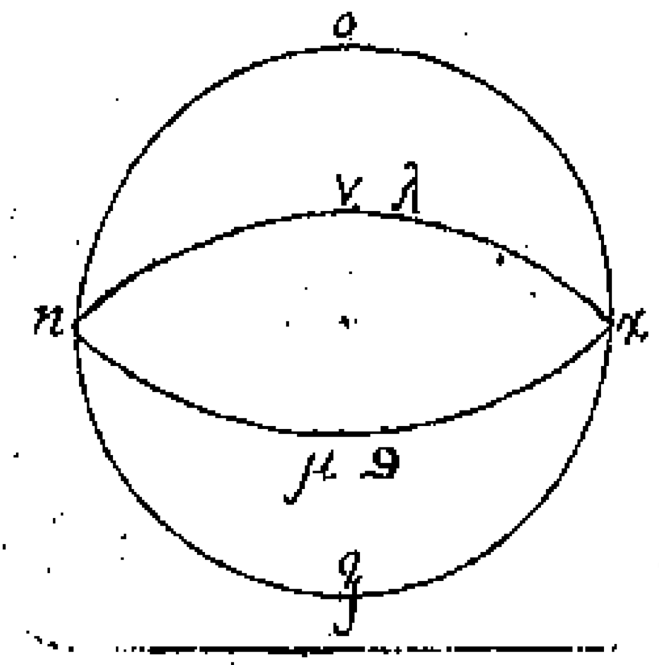
Παντὸς ἐν σφαίρᾳ κύκλου τοὺς πόλους εὑρεῖν.

Ἔστω αʹ. κύκλος ἐν τῇ τυχούσῃ σφαίρᾳ ὁ α β γ δ, ἐλάσσων, καὶ ζητείσθωσαν οἱ τούτου πόλοι. Λαμβανέσθωσαν δὴ τυχόντα σημεῖα ἐπὶ τῆς τοῦ α β γ δ, δοθέντος κύκλου περιφερείας τὰ β, δ, ὡς εἰπεῖν, καὶ δ. τῶν δὲ β α δ, β γ δ, τόξων δίχα διαιρουμένων κατὰ τὰ α, καὶ γ, σημεῖα, εὑρέσθω διὰ τῆς ἀνωτέρω ὁ διὰ τῶν α, καὶ γ, διερχόμενος κύκλος, καὶ ἔστω οὗτος ὁ α ε γ ζ, τῶν δὲ α ε γ, α ζ γ, τόξων διαιρουμένων δίχα κατὰ τὰ ε, καὶ ζ, τὰ αὐτὰ σημεῖα ε, καὶ ζ, πόλοι ἔσονται τοῦ α β γ δ, κύκλου. ἐπεὶ γὰρ τὰ α β, α δ, τόξα ἴσα ἐστίν, ὥσπερ καὶ τὰ γ β, γ δ, πάντως γε κατὰ τὸ βʹ. ἀξίωμα, τὰ α δ γ, α β γ, ἴσα ἐστίν, καὶ ὁ α ε γ ζ, κύκλος δίχα τὸν α β γ δ, τέμνει κύκλον. ὥστε κατὰ τὴν ιβʹ. τοῦ παρόντος ὁ α ε γ ζ, διὰ τῶν πόλων τοῦ α β γ δ, διέρχεται κύκλου. ἀλλὰ τὰ ζ, καὶ ε, ἐξ ἴσου τῶν α, καὶ γ, ἀφίστανται, τουτέστι τὰ α ζ, ζ γ, διαστήματα ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν, ὥσπερ καὶ τὰ α ε, ε γ. τὰ ζ, ἄρα καὶ ε, πόλοι εἰσὶ τοῦ α β γ δ, κύκλου, κατὰ τὸν εʹ. ὅρον τοῦ παρόντος.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 17.



Ἔστω βʹ. κύκλος ἐν σφαίρᾳ μέγιστος ὁ η θ κ λ, καὶ ζητείσθωσαν οἱ τούτου πόλοι. Λαμβανέσθωσαν, ὡς καὶ πρότερον, ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ η θ κ λ, κύκλου δύο τυχόντα σημεῖα, φέρ' εἰπεῖν, τὰ θ, καὶ λ, τῶν δὲ θ η λ, θ κ λ, δίχα τεμνομένων, τοῦ μὲν κατὰ τὸ η, τοῦ δὲ κατὰ τὸ κ. δῆλον, ὅτι τὰ η θ κ, η λ κ, ἡμικύκλιά ἐστιν, ὧν ἑκάτερον δίχα τμηθήτω τὸ μὲν κατὰ τὸ μ, τὸ δὲ κατὰ τὸ ν. εἶτα κέντρῳ τῷ μ, ἢ τῷ ν, καὶ διαστήματι τῷ μ η, ἢ μ κ, ἴσα γάρ, γραφήτω ὁ η ξ κ ο, οὗτινος ἑκάτερον τῶν η ξ κ, η ο κ, τόξων δίχα τμηθήτω κατὰ τὰ ξ, καὶ ο, σημεῖα, καὶ τὰ ξ, ο, σημεῖα, πόλοι ἔσονται τοῦ η θ κ λ, κύκλου. ἐπεὶ γὰρ ὁ η ξ κ ο, κύκλος, ὡς ἀπὸ κέντρου τοῦ μ, γέγραπται, πάντως γε τὸ μ, πόλος αὐτοῦ ἐστιν. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ο, διὰ τὰ αὐτὰ πόλος ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ. ἀλλὰ τὸ μ η, τεταρτημόριόν ἐστιν, ὥσπερ καὶ τὸ μ κ, ἄρα ὁ η ξ κ ο, κύκλος τεταρτημορίῳ ἀφίσταται τοῦ ἰδίου πόλου, καὶ κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιγʹ. τοῦ παρόντος, μέγιστός ἐστιν. ἀλλ' ὁ η θ κ λ, κύκλος διὰ τῶν μ, καὶ ν, πόλων τοῦ η ξ κ ο, κύκλου διέρχεται, ὡς δέδεικται, ἄρα κατὰ τὴν ιβʹ. τοῦ παρόντος, καὶ ὁ η ξ κ ο, διὰ τῶν πόλων τοῦ η θ κ λ, διέρχεται. ἑκάτερον δὲ τῶν ξ, καὶ ο, ἐξ ἴσου τῶν η, καὶ κ, ἀφίσταται, ἄρα τὰ ξ, καὶ ο, σημεῖα πόλοι εἰσὶ τοῦ η θ κ λ, μεγίστου κύκλου, τοῦ δοθέντος ἄρα ἐν σφαίρᾳ κύκλου οἱ πόλοι εὕρηνται.

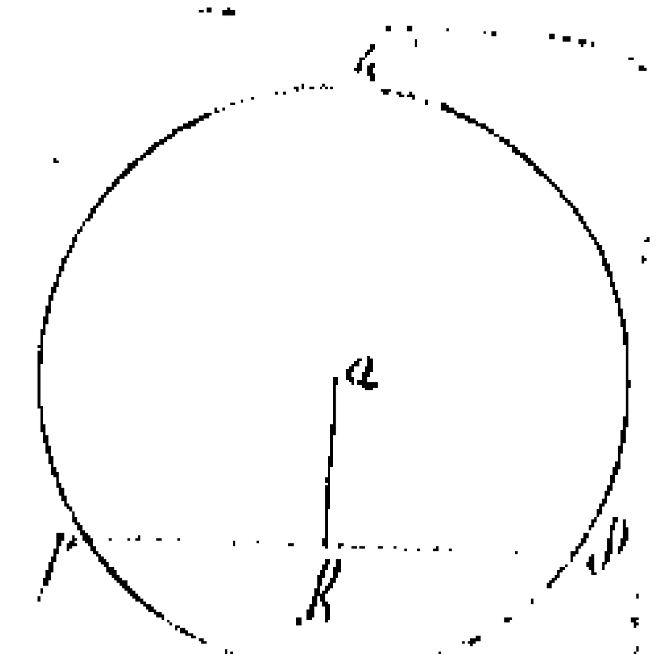


Πρότασις ΙΗʹ. Θεώρημα.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει, καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει.

Ἔστω ἐν σφαίρᾳ τῇ τυχούσῃ, ἧς κέντρον τὸ α, εὐθεῖα διὰ μὲν τοῦ κέντρου ἡ α β, μὴ διὰ τοῦ κέντρου δὲ ἡ γ δ. καὶ τεμνέτω ἡ α β, τὴν γ δ, δίχα κατὰ τὸ β. Λέγω, γω, ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει. Ἐκβεβλήσθω γὰρ τὸ διὰ τῶν αβ, γδ, ἐπίπεδον, καὶ κοινὴν ποιήσει τομὴν μετὰ τῆς σφαίρας τὸν γδε, κύκλον κατὰ τὴν β': τοῦ παρόντος, καὶ ἐπεὶ ὁ γδε, κύκλος διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται, μέγιστός ἐστι, καὶ τὸ α, κέντρον ἐστὶ καὶ τοῦ γδε, κύκλου. Αὖθις ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν αβ, γδ, εὐθειῶν ἐν τῷ τοῦ γδε, κύκλου ἐπιπέδῳ ἐστί, καὶ ἡ μὲν αβ, διὰ τοῦ α, κέντρου τοῦ γδε, κύκλου διερχομένη τέμνει δίχα τὴν μὴ διὰ τοῦ κέντρου, ἤτοι τὴν γδ, δῆλον, ὅτι ἡ αβ, καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει τὴν αὐτὴν γδ. καὶ ἀνάπαλιν, κατὰ τὴν γ': τοῦ γ': τοῦ στοιχειωτοῦ. Ἐὰν ἄρα ἐν σφαίρᾳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου, εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει, καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. I. Fig. 18.



Τέλος τοῦ Πρώτου τῶν κατὰ Θεοδόσιον Σφαιρικῶν.

ΣΥΝ.

ΣΥΝΤΟΜΟΣ ἙΡΜΗΝΕΙΑ

ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΖΗΤΗΜΑΤΩΝ

ΚΑΤΑ ΘΕΟΔΟΣΙΟΝ ΤΟΝ ΤΡΙΠΟΛΙΤΗΝ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

Οἱ Ὅροι.

Α': Κύκλοι ἐν σφαίρᾳ παράλληλοί εἰσιν, ὧν τὰ ἐπίπεδα ἀσύμπτωτα.

Β': Κύκλοι ἐν σφαίρᾳ ἀλλήλων ἐφάπτεσθαι λέγονται, ὅτε ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων τῶν κύκλων ἐφάπτεται ἑκατέρου τῶν κύκλων κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον, καθ' ὃ καὶ οἱ κύκλοι ἐφάπτονται.

Γ': Κύκλος πρὸς κύκλον ἐγκλίνειν λέγεται, ὅταν ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν πρὸς ὀρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ ἀγομένων εὐθειῶν πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἑκατέρου τῶν κύκλων ὀξεῖα ᾖ, ἥτις ἐστὶ κλίσις τῶν αὐτῶν κύκλων πρὸς ἀλλήλους λέγεται.

Δ': Κύκλος πρὸς κύκλον ὁμοίως κεκλίσθαι λέγεται, καὶ ἕτερος πρὸς ἕτερον, ὅταν αἱ τῶν κλίσεων γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

Ε': Κλίσεως δύο κύκλων πρὸς ἀλλήλους μέτρον ἐστὶ τόξον μεγίστου κύκλου διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου τῶν κύκλων διερχομένου, τὸ μεταξὺ τῶν κύκλων ἐναπολαμβανόμενον.

Πρότασις Α': Θεώρημα.

Οἱ παράλληλοι ἐν σφαίρᾳ κύκλοι τοὺς αὐτοὺς ἔχουσι πόλους, καὶ οἱ τοὺς αὐτοὺς ἐν σφαίρᾳ πόλους ἔχοντες κύκλοι, παράλληλοί εἰσιν.

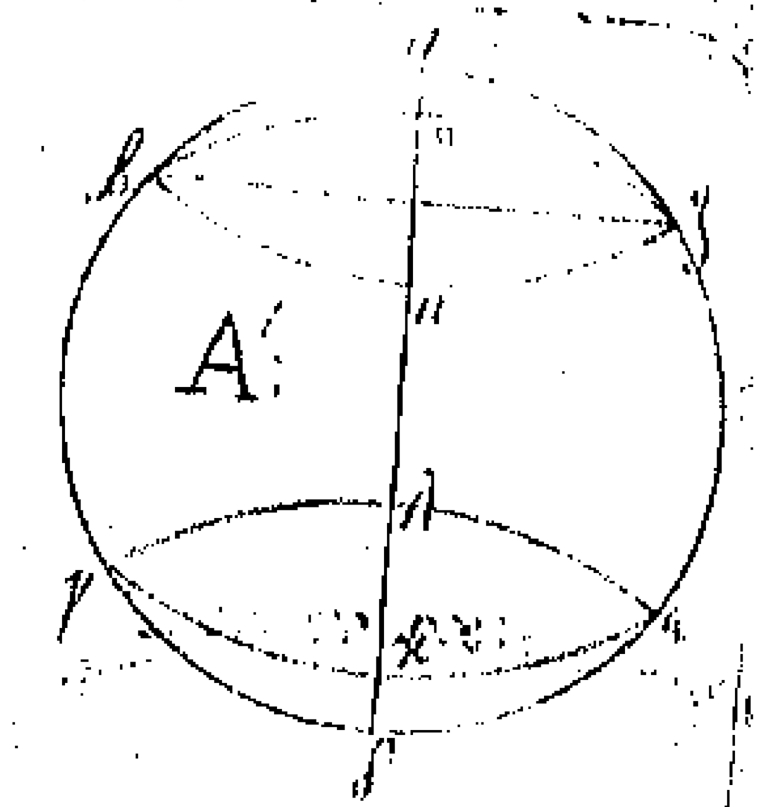
Ἔστωσαν ἐν σφαίρᾳ τῇ αβγδεζ, κύκλοι παράλληλοι οἱ βηζθ, γκελ. Λέγω, ὅτι οἱ βηζθ, γκελ, τοὺς αὐτοὺς ἔχουσι πόλους. Ἔστωσαν γὰρ πόλοι τοῦ βηζθ, οἱ α, δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αδ. καὶ ἐπεὶ ἡ αδ, διὰ τῶν πόλων τοῦ βηζθ, διέρχεται κύκλου, πάντως γε κατὰ τὴν θ': τοῦ α': τοῦ παρόντος κάθετός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βηζθ, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ διέρχεται. ὥστε κατὰ τὸ πόρισμα τῆς γ': τοῦ αὐτοῦ ἡ αδ, καὶ διὰ τοῦ τῆς σφαίρας κέντρου διέρχεται. Αὖθις

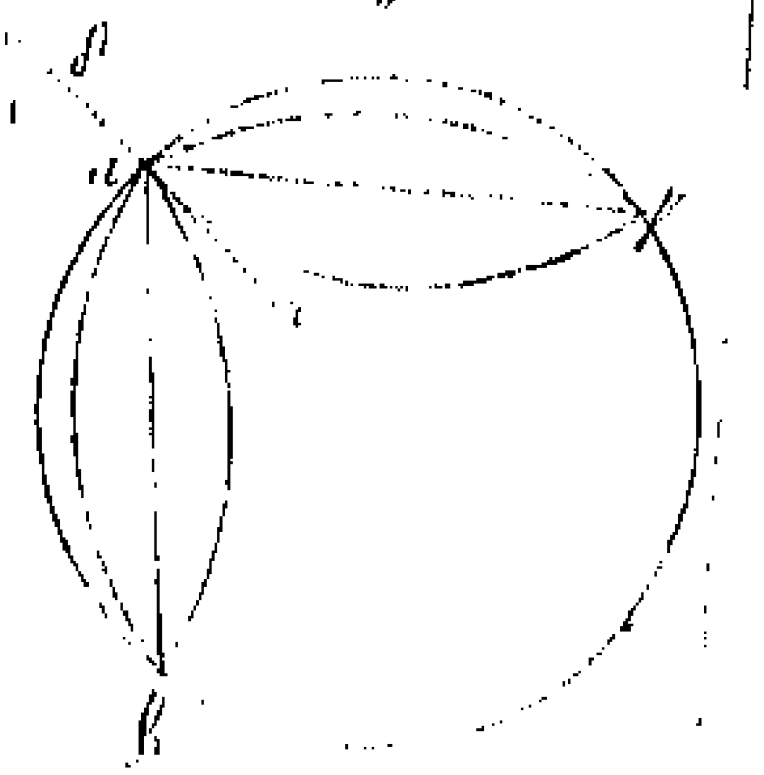
ἐπεὶ

ἐπεὶ οἱ β η ζ θ, γ κ ε λ, κύκλοι παράλληλοί εἰσι, πάντως γε ἡ α δ, ὀρθὴ οὖσα πρὸς τὸ τοῦ β η ζ θ, κύκλου ἐπίπεδον, ὀρθή ἐστι καὶ πρὸς τὸ τοῦ γ κ ε λ, κατὰ τὴν ιδ′: τοῦ ια: τῶν στοιχ: ἀλλ᾽ ἡ α δ, διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται, ὡς δέδεικται, ἄρα κατὰ τὴν η: τοῦ α: τοῦ παρόντος διὰ τῶν πόλων τοῦ γ κ ε λ, διέρχεται. ὥστε τὰ α, καὶ δ, σημεῖα πόλοι εἰσὶ τοῦ γ κ ε λ. ἀλλὰ τὰ α, καὶ δ, σημεῖα πόλοι εἰσὶ καὶ τοῦ β η ζ θ, κύκλου κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, οἱ ἄρα β η ζ θ, γ κ ε λ, παράλληλοι κύκλοι τοὺς αὐτοὺς ἔχουσι πόλους.

Ἀλλὰ δὴ ἐχέτωσαν οἱ β η ζ θ, γ κ ε λ, κύκλοι τοὺς αὐτοὺς πόλους α, καὶ δ, λέγω ὅτι παράλληλοί εἰσιν. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ α δ, καὶ ἐπεὶ ἡ α δ, διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου τῶν β η ζ θ, γ κ ε λ, διέρχεται, πάντως γε κατὰ τὴν θ′: τοῦ α: τοῦ παρόντος ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκάτερον τῶν β η ζ θ, γ κ ε λ, κύκλων, καὶ κατὰ τὴν ιδ′: τοῦ ια: τῶν στοιχ: οἱ β η ζ θ, γ κ ε λ, κύκλοι παράλληλοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 1.





Πρότασις Β′: Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἐν σφαίρᾳ κύκλοι τῷ αὐτῷ συμπέσωσι σημείῳ, μεγίστου τινὸς κύκλου διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου αὐτῶν διερχομένου, οἱ κύκλοι ἅπτονται ἀλλήλων.

Ἔστω κύκλος μέγιστος ὁ α β γ, καὶ συμπιπτέτωσαν οἱ α β, α γ, κύκλοι τῷ α, σημείῳ, τοῦ α β γ, κύκλου, διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου αὐτῶν διερχομένου. Λέγω ὅτι οἱ α β, α γ, κύκλοι ἅπτονται ἀλλήλων κατὰ τὸ α, σημεῖον. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ α β, α γ, εὐθεῖαι, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων τῶν α β, α γ, κύκλων ἡ δ α ε, εὐθεῖα. καὶ ἐπεὶ ὁ α β γ, κύκλος διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου τῶν α β, α γ, διέρχεται κύκλων, πάντως γε κατὰ τὴν ιβ′: τοῦ α: τοῦ παρόντος δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτοὺς τέμνει, καὶ αἱ α β, α γ, εὐθεῖαι διάμετροί εἰσι τῶν α β, α γ, κύκλων. ὥστε καὶ ἀνάπαλιν οἱ α β, α γ, κύκλοι ὀρθοί εἰσι πρὸς τὸν α β γ, μέγιστον κύκλον. ἔστι δὲ κοινὴ τομὴ τῶν α β, α γ, κύκλων κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ἡ δ α ε, εὐθεῖα, ἄρα κατὰ τὴν ιθ′: τοῦ ια: τῶν στοιχ: ἡ δ α ε, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ α β γ, κύκλου ἐπίπεδον. ὥστε καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστι, κατὰ τὸν γ′: ὅρον τοῦ αὐτοῦ, ἅπτονται δὲ τῆς δ α ε, αἱ α β, α γ, εὐθεῖαι, καὶ τούτων ἑκατέρα ἐν τῷ τοῦ α β γ, ἐπιπέδῳ ἐστὶ διὰ τὸ κοινὰς τομὰς εἶναι αὐτοῦ τε καὶ τῶν ἐπιπέδων τῶν

τῶν α β, α γ, κύκλων, ἄρα ἡ δ α ε, ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν α β, α γ, εὐθειῶν, καὶ κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιϛ′: τοῦ γ′: τοῦ στοιχειωτοῦ ἅπτεται ἑκατέρου τῶν α β, α γ, κύκλων ἡ δ α ε. ὥστε κατὰ τὸν β′: ὅρον τοῦ παρόντος, οἱ α β, α γ, κύκλοι ἅπτονται ἀλλήλων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

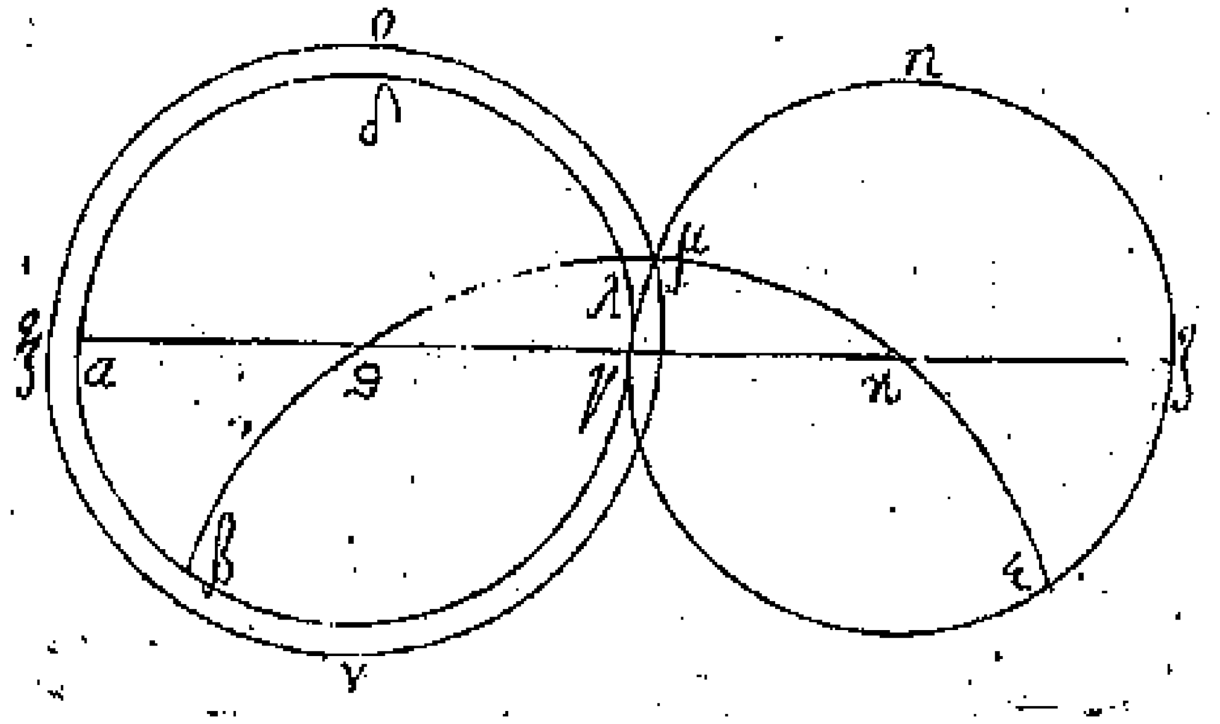
Πρότασις Γ′: Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἐν σφαίρᾳ κύκλοι ἅπτωνται ἀλλήλων, ὁ διὰ τῶν πόλων αὐτῶν διερχόμενος μέγιστος κύκλος, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς αὐτῶν διέρχεται.

Ἁπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐν σφαίρᾳ κύκλοι οἱ α β γ δ, γ ε ζ η, κατὰ τὸ γ, σημεῖον, καὶ ἔστω τοῦ μὲν α β γ δ, πόλος τὸ θ, σημεῖον, τοῦ δὲ γ ε ζ η, τὸ κ. Λέγω, ὅτι ὁ διὰ τῶν θ, καὶ κ, πόλων διερχόμενος μέγιστος κύκλος, διέρχεται καὶ διὰ τῆς γ, αὐτῶν ἁφῆς, ὡς ὁ α θ γ κ ζ.

Theod: Sf: Lib. 2. Fig. 2.

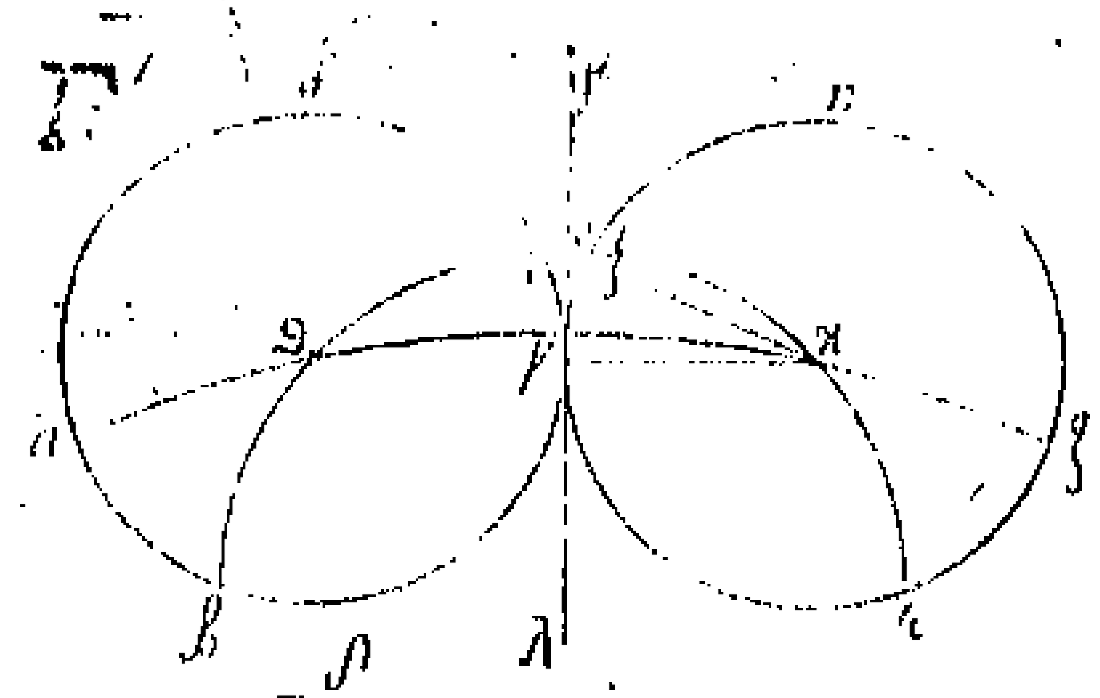
εἰ γὰρ μή, διελθέτω εἰ δυνατόν, ἐκτὸς τοῦ γ, ὡς ὁ β θ κ ε, τέμνων τὸν μὲν α β γ δ, κατὰ τὸ λ, τὸν δὲ γ ε ζ η, κατὰ τὸ μ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θ μ, γραφήτω κύκλος ὁ μ ν ξ ο. καὶ ἐπεὶ ὁ α β γ δ, ἅπτεται τοῦ γ ε ζ η, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ὁ μ ν ξ ο, πάντως γε τέμνει αὐτόν, ὡς μείζονι γραφόμενος διαστήματι. ἀλλ᾽ ἐπεὶ

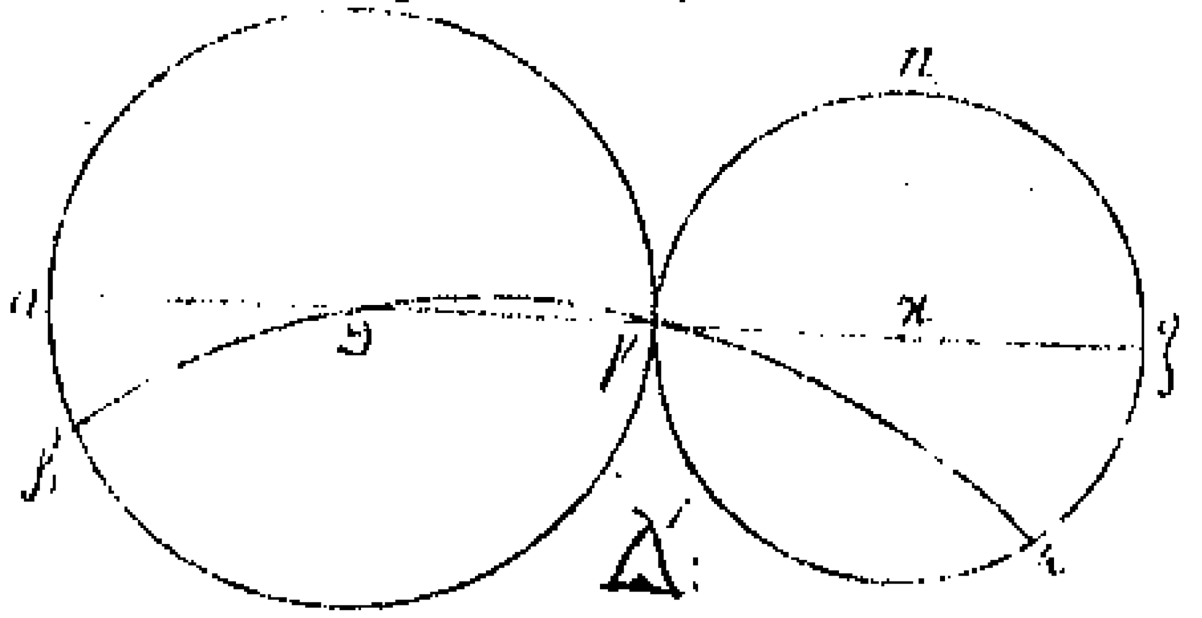


πάλιν οἱ μ ν ξ ο, γ ε ζ η, κύκλοι συνέπεσον τῷ μ, σημείῳ, τοῦ β θ κ ε, μεγίστου κύκλου διὰ τῶν πόλων αὐτῶν θ, καὶ κ, διερχομένου κατὰ τὴν ἐναντίαν ὑπόθεσιν, ἄρα κατὰ τὴν ἀνωτέρω οἱ μ ν ξ ο, γ ε ζ η, κύκλοι ἅπτονται ἀλλήλων, ἀλλὰ καὶ τέμνονται, ὡς δέδεικται, ἄρα ἄτοπον, ὥστε καὶ τὸ ἐξ οὗ ἕπεται. ἄρα ὁ διὰ τῶν πόλων διερχόμενος μέγιστος κύκλος ἁπτομένων δύο ἐν σφαίρᾳ κύκλων καὶ διὰ τῆς ἁφῆς αὐτῶν διέρχεται, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἄλλως. Ἁπτέσθωσαν οἱ α β γ δ, γ ε ζ η, κύκλοι ἀλλήλων κατὰ τὸ γ. Λέγω, ὅτι ὁ διὰ τῶν θ, καὶ κ, πόλων αὐτῶν διερχόμενος μέγιστος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῆς γ, ἁφῆς, ὡς ὁ α γ ζ. εἰ γὰρ μή, διελθέτω ἐκτὸς τῆς ἁφῆς, ὡς ὁ β θ κ ε, τέμνων τὸν μὲν α β γ δ, κατὰ τὸ ν, τὸν δὲ γ ε ζ η, κατὰ τὸ ξ. καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων τοῦτε α β γ δ, καὶ γ ε ζ η, ἡ λ γ μ, εὐθεῖα, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ κ, κέντρου τοῦ γ ε ζ η, κύκλου ἡ κ ο, συμβάλλουσα τῇ λ γ μ, κοινῇ τομῇ κατὰ τὸ ο, (δύναται γὰρ τὸ κ, σημεῖον καὶ ἀντὶ πόλου, καὶ ἀντὶ κέντρου τοῦ αὐτοῦ γ ε ζ η, κύκλου ληφθῆναι, συμπίπτουσι γὰρ οἱ πόλοι τῷ κέντρῳ ἐπὶ τῆς ἐν ἐπιπέδῳ ὁλοκλήκλήρου καταγραφῆς τῶν ἐν σφαίρᾳ κύκλων.) ἐπεζεύχθω δ' ἔτι καὶ ἡ κγ, καὶ ἐπεὶ ὁ βθκε, μέγιστός ἐστι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, καὶ διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου τῶν αβγδ, γεζη, κύκλων διέρχεται, πάντως γε κατὰ τὴν ιβ': τοῦ α': τοῦ παρόντος δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτοὺς τέμνει. ὥστε καὶ ἀνάπαλιν, ἑκάτερος τῶν αβγδ, γεζη, ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βθκε, μεγίστου κύκλου ἐπίπεδον, καὶ κατὰ τὴν ιθ': τοῦ ια': τοῦ στοιχειωτοῦ ἡ λγμ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βθκε, ἐπίπεδον, ὡς κοινὴ τομὴ τῶν αβγδ, γεζη, κύκλων, καὶ ἔτι πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας ἡ αὐτὴ λγμ, κατὰ τὸν γ': ὅρον τοῦ αὐτοῦ. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ κο, καὶ ἔστιν ἐν τῷ τοῦ βθκε, ἐπιπέδῳ, ὡς ἐπιζευγνύουσα τὰ κ, καὶ ο, σημεῖα τοῦ αὐτοῦ βθκε, κύκλου, καὶ οὖσα κοινὴ τομὴ τοῦ τε βθκε, καὶ γεζη, κύκλου. ἄρα ἡ λγμ, κατὰ τὸν ῥηθέντα γ': ὅρον ὀρθή ἐστιν ἐπὶ τῆς κο, ἡ ἄρα ὑπὸ κογ, γωνία ὀρθή ἐστιν, ἀλλ' ἡ λγμ, ὀρθή ἐστι καὶ πρὸς τὴν γκ, κατὰ τὸ πόρ: τῆς ις': τοῦ γ': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα τοῦ γκο, τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ διὰ τῶν θ, καὶ κ, διερχόμενος μέγιστος κύκλος ἐκτὸς τῆς γ, διέρχεται ἀφῆς. Ἐὰν ἄρα δύο ἐν σφαίρᾳ κύκλοι ἅπτονται ἀλλήλων, ὁ διὰ τῶν πόλων αὐτῶν διερχόμενος μέγιστος κύκλος, καὶ διὰ τῆς ἀφῆς αὐτῶν διέρχεται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod: Sf: Lib. 2. Fig. 3.





Δ'

Πρότ: Δ': Θεώρ:

Ἐὰν ὦσιν ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι ἁπτόμενοι ἀλλήλων, καὶ διὰ τῶν πόλων τοῦ ἑνὸς καὶ κοινῆς αὐτῶν ἀφῆς μέγιστος διέλθῃ κύκλος, διελεύσεται καὶ διὰ τῶν πόλων τοῦ ἑτέρου.

Ἁπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐν σφαίρᾳ οἱ αβγδ, γεζη, κύκλοι. Λέγω, ὅτι ἐὰν μέγιστος κύκλος διὰ τῶν πόλων τοῦ ἑνός, δὸς εἰπεῖν τοῦ αβγδ, καὶ τῆς γ, κοι-

νῆς

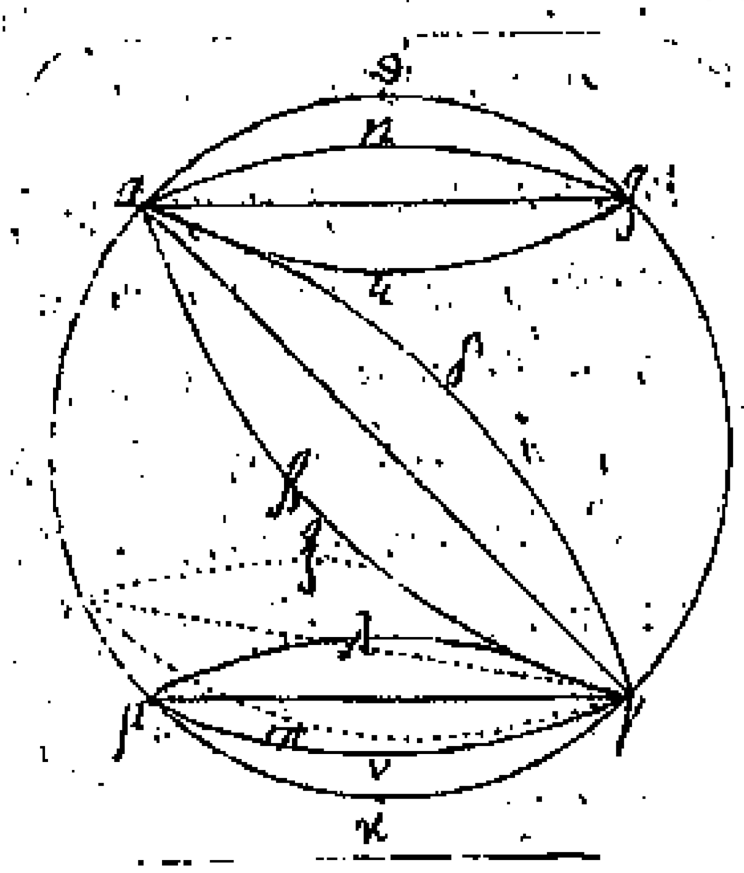
νῆς ἀφῆς διέλθῃ, διελεύσεται καὶ διὰ τῶν πόλων τοῦ γεζη. εἰ γὰρ μόνον διὰ τοῦ θ, πόλου τοῦ αβγδ, καὶ τῆς γ, ἀφῆς διέλθῃ, ὡς ὁ βθγε, γραφήτω ἕτερος κύκλος μέγιστος διὰ τῶν θ, καὶ κ, πόλων τῶν αβγδ, γεζη, κύκλων κατὰ τὴν ις': τοῦ α': τοῦ παρόντος, ὡς ὁ αθκζ. καὶ ἐπεὶ ὁ αὐτὸς αθκζ, μέγιστός ἐστι, καὶ διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου τῶν αβγδ, γεζη, διέρχεται κύκλων, πάντως γε κατὰ τὴν ἀνωτέρω καὶ διὰ τῆς γ, ἀφῆς αὐτῶν διέρχεται, ἀλλὰ καὶ ὁ βθγε, μέγιστος ὢν διὰ τῶν θ, καὶ γ, διέρχεται κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα οἱ αθγκζ, καὶ βθγε, μέγιστοι κύκλοι τέμνονται ἀλλήλοις κατὰ τὰ θ, καὶ γ, σημεῖα. ὥστε καὶ δίχα κατὰ τὴν ι': τοῦ α': τοῦ παρόντος, τὸ θγ, ἄρα ἡμικύκλιόν ἐστιν, ὅπερ ἄτοπον, τὸ γὰρ θγ, διάστημα ἔλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίου, παντὸς γὰρ κύκλου οἱ πόλοι ἡμικυκλίῳ ἀφίστανται, τὸ δὲ ἀφ' ἑκατέρου τῶν πόλων μέχρι τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ἔλαττόν ἐστι τεταρτημορίου. ἐὰν ἄρα ὦσιν ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι ἁπτόμενοι ἀλλήλων, καὶ διὰ τῶν πόλων τοῦ ἑνὸς καὶ τῆς κοινῆς ἀφῆς μέγιστος διέλθῃ κύκλος, διελεύσεται καὶ διὰ τῶν πόλων τοῦ ἑτέρου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Ε': Θεώρημα.

Ἐὰν μέγιστος ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἅπτηται ἐλάσσονος ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλου, δύναται ὁ αὐτὸς καὶ ἑτέρου ἅπτεσθαι κύκλου ἴσου τε καὶ παραλλήλου τῷ προτέρῳ.

Ἁπτέσθω ὁ αβγδ, μέγιστος κύκλος, τοῦ αεζη, ἐλάσσονος κατὰ τὸ α. Λέγω, ὅτι ὁ αβγδ, μέγιστος δύναται καὶ ἑτέρου ἅπτεσθαι κύκλου ἴσου τε καὶ παραλλήλου τῷ αεζη. Ἔστωσαν γὰρ πόλοι τοῦ αεζη, κύκλου τὰ θ, καὶ κ, σημεῖα, καὶ ἀπὸ τοῦ κ, πόλου διαστήματι τῷ κγ, γραφήτω κύκλος ὁ γλμν, διὰ δὲ τῶν πόλων ἑκατέρου τῶν αβγδ, αεζη, διελθέτω ὁ θαμκγζ, μέγιστος κύκλος. καὶ ἐπεὶ ὁ γλμν, ἀπὸ τοῦ κ, σημείου, ὡς ἀπὸ πόλου καταγέγραπται, δῆλον, ὅτι τὰ κ, καὶ θ, σημεῖα πόλοι αὐτοῦ εἰσιν, ἀλλὰ τὰ θ, καὶ κ, πόλοι εἰσὶ καὶ τοῦ αεζη, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα κατὰ τὴν α': τοῦ παρόντος οἱ αεζη, γλμν, παράλληλοί εἰσιν. Διέρχεται δὲ ὁ αμγζ, μέγιστος κύκλος διὰ τῶν πόλων τῶν αὐτῶν, ἄρα κατὰ τὴν ιβ': τοῦ α': τοῦ παρόντος, δίχα αὐτοὺς τέμνει, εἰσὶ δὲ κοιναὶ τομαὶ αἱ αζ, γμ, ἄρα ἡ μὲν αζ, διάμετρός ἐστι τοῦ αεζη, ἡ δὲ γμ, τοῦ γλμν. Αὖθις ἐπεὶ οἱ αβγδ, αμγζ, μέγιστοι κύκλοι ἐν τῇ αὐτῇ εἰσι σφαίρᾳ, δῆλον, ὅτι δίχα ἀλλήλοις τέμνονται κατὰ τὴν ι': τοῦ α': τοῦ παρόντος. οἱ ἄρα τὸ αζγ, τόξον ἡμικύκλιόν ἐστιν, ἀλλὰ καὶ τὸ θζγκ, ἡμικύκλιόν ἐστιν,

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 4.



γὰρ πόλοι παντὸς κύκλου κατὰ διάμετρον ἀλλήλων ἀφίστανται, ἄρα τὰ αζγ, θζγκ, τόξα ἴσα ἀλλήλοις εἰσί. κοινοῦ δὲ ἀφαιρουμένου τοῦ θζγ, ἐναπολείπονται ἴσα τὰ αθ, γκ. ὥστε καὶ τὰ τούτων διπλάσια αθζ, γκμ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσί. καὶ ἑπομένως καὶ αἱ αζ, γμ, ὑποτείνουσαι ὁμοίως ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ κατὰ τὴν κθ΄: τοῦ γ΄: τοῦ στοιχειωτοῦ. ἀλλ' ἡ μὲν αζ, διάμετρός ἐστι τοῦ αεζη, ἡ δὲ γμ, τοῦ γλμν, ἄρα οἱ αεζη, γλμν, κύκλοι ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν. ἐπεὶ δὲ πάλιν οἱ αβγδ, γλμν, κύκλοι τῷ γ, συμπίπτουσι σημείῳ τοῦ αμγζ, κύκλου μεγίστου διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου διερχομένου, δῆλον, ὅτι ὁ αβγδ, κύκλος ἅπτεται τοῦ γλμν, κύκλου κατὰ τὴν β΄: τοῦ παρόντος, ἀλλ' ὁ γλμν, ἴσος ἐστὶ καὶ παράλληλος τῷ αεζη, ἄρα ὁ αβγδ, μέγιστος κύκλος ἁπτόμενος τοῦ αεζη, ἅπτεται καὶ τοῦ γλμν, ἴσου τε καὶ παραλλήλου ὄντος τῷ αεζη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὅτι δὲ ὁ αμγζ, μέγιστος κύκλος διὰ τῶν πόλων τοῦ τε αβγδ, καὶ γλμν, διέρχεται, δῆλον, κατὰ γὰρ τὴν ὑπόθεσιν διέρχεται διὰ τῶν πόλων τοῦ αεζη, καὶ αβγδ. ἀλλ' οἱ πόλοι τοῦ αεζη, εἰσὶν ἔτι πόλοι καὶ τοῦ γλμν, ὡς δέδεικται, ἄρα ὁ αμγζ, διὰ τῶν πόλων τοῦ τε αβγδ, καὶ γλμν, διέρχεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Α΄: Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν μέγιστος ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἅπτεται ἑκατέρωθεν δύο ἐλαττόνων κύκλων ἴσων τε καὶ παραλλήλων, τὰ τῆς ἁφῆς σημεῖα κατὰ διάμετρον ἀντίκεινται.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Β΄: Ἔτι ἐὰν μέγιστος ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἐλασσόνων δύο ἅπτηται κύκλων, οἱ ἐλάττονες κύκλοι ἴσοι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Πρότασις ϛ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ δύο κύκλοι ἐλάσσονες ἴσοι τε καὶ παράλληλοι, ὁ τοῦ ἑνὸς ἁπτόμενος μέγιστος κύκλος καὶ τοῦ ἑτέρου ἅπτεται.

Ἔστωσαν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλοι ἐλάσσονες οἱ αεζη, γλμν, ἴσοι τε καὶ παράλληλοι, καὶ ἁπτέσθω τοῦ αεζη, ὁ αβγδ, κατὰ τὸ α. Λέγω, ὅτι ὁ αβγδ, μέγιστος κύκλος ἅπτεται καὶ τοῦ γλμν, εἰ γὰρ μή, ἅψεται πάντως ἑτέρου τινὸς μείζονος, ἢ ἐλάσσονος τοῦ γλμν. ἁπτέσθω δὴ τοῦ γξοπ, μείζονος, καὶ ἐπεὶ ὁ αβγδ, μέγιστος κύκλος ἅπτεται τῶν αεζη, γξοπ, ἐλασσόνων, πάντως γε κατὰ τὸ β΄: πόρισμα τῆς ἀνωτέρω οἱ αεζη, γξοπ, ἴσοι εἰσίν, ὑπετέθη δὲ καὶ ὁ γλμν, ἴσος τῷ αεζη, ἄρα ὁ γξοπ, ἴσος ἐστὶ τῷ γλμν, ἀλλὰ καὶ μείζων κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄτοπον ἄρα, ὁ αβγδ, ἄρα οὐχ ἅπτεται μείζονος τοῦ γλμν. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται μὴ ἅπτεσθαι μηδὲ ἐλάσσονος, τὸ αὐτὸ γὰρ ἄτοπον ἕψεται, ὁ ἄρα αβγδ, μέγιστος κύκλος ἁπτόμενος τοῦ αεζη, ἅπτεται πάντως καὶ τοῦ γλμν, ἴσου τε καὶ παραλλήλου ἐκείνῳ ὄντος.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

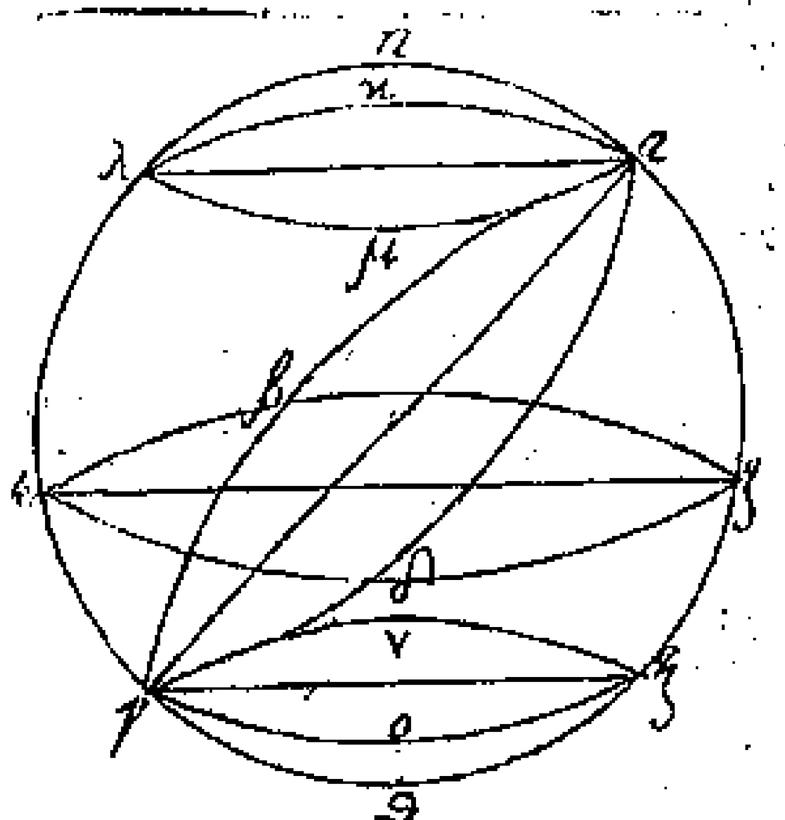
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι οὐ δύνανται ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ πλείονες, ἢ δύο ἐλάσσονες κύκλοι ἴσοι τε καὶ παράλληλοι εἶναι.

Πρότασις Ζ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλος μέγιστος κύκλον τινὰ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ πλαγίως τέμνῃ, δύναται ὁ αὐτὸς δύο κύκλων ἅπτεσθαι ἴσων τε ἀλλήλοις καὶ παραλλήλων τῷ εἰρημένῳ κύκλῳ.

Κύκλος μέγιστος ὁ αβγδ, τεμνέτω κύκλον τὸν εβζδ, πλαγίως. Λέγω, ὅτι ὁ αβγδ, κύκλος δύναται δύο τινῶν ἅπτεσθαι κύκλων, ἴσων μὲν ἀλλήλοις, παραλλήλων δὲ τῷ εβζδ, κύκλῳ. Ἔστωσαν γὰρ πόλοι τοῦ εβζδ, τὰ η, καὶ θ, σημεῖα, καὶ διὰ τῶν η, καὶ θ, σημείων γραφήτω κύκλος ὁ ηεθζ. ἀπὸ δὲ

Theod: Sf: Lib. 2. Fig. 5ta



τῶν η, καὶ θ, σημείων ὡς ἀπὸ κέντρων, διαστήματι τῷ ηα, ἢ θγ, γραφήτωσαν οἱ ακλμ, γνξο, κύκλοι. καὶ ἐπεὶ οἱ αβγδ, ηεθζ, μέγιστοί εἰσι, πάντως γε κατὰ τὴν ι΄: τοῦ α΄: τοῦ παρόντος, δίχα ἀλλήλους τέμνονται. ὥστε τὸ αζγ, τόξον ἡμικύκλιόν ἐστιν, ἀλλὰ καὶ τὸ ηζθ, ἡμικύκλιόν ἐστι, διὰ τὸ τοὺς πόλους παντὸς κύκλου ἐν σφαίρᾳ ἡμικυκλίῳ ἀφίστασθαι ἀλλήλων, ἄρα τὰ αζγ, ηζθ, τόξα ἴσα ἀλλήλοις εἰσί, κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ αζθ, ἐναπολείπονται τὰ ηα, θγ, τόξα ἴσα, ἄρα οἱ ακλμ, γνξο, κύκλοι ἴσοι ἀλλήλοις εἰσί. ἔχουσι δὲ καὶ τοὺς αὐτοὺς πόλους η, θ, οὓς καὶ ὁ εβζδ, κατὰ τὴν κατασκευήν, ἄρα κατὰ τὴν α΄: τοῦ παρόντος, παράλληλοί εἰσι τῷ εβζδ. ἀλλ' ἑκάτερος τῶν ακλμ, γνξο, συμπίπτει μετὰ τοῦ αβγδ, μεγίστου κύκλου τῷ ... σημείῳ, τοῦ ηεθζ, μεγίστου ὄντος καὶ αὐτοῦ, καὶ διὰ τῶν πόλων τῶν αβ δ, ακλμ, γνξο, διερχομένου, ἄρα κατὰ τὴν β΄: τοῦ παρόντος, ὁ αβγδ, ἑκατέρου τῶν ακλμ, γνξο, κύκλων ἅπτεται. οἱ δὲ ακλμ, γνξο, κύκλοι ἴσοι τε ἀλλήλοις εἰσὶ καὶ παράλληλοι τῷ εβζδ, ὡς δέδεικται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

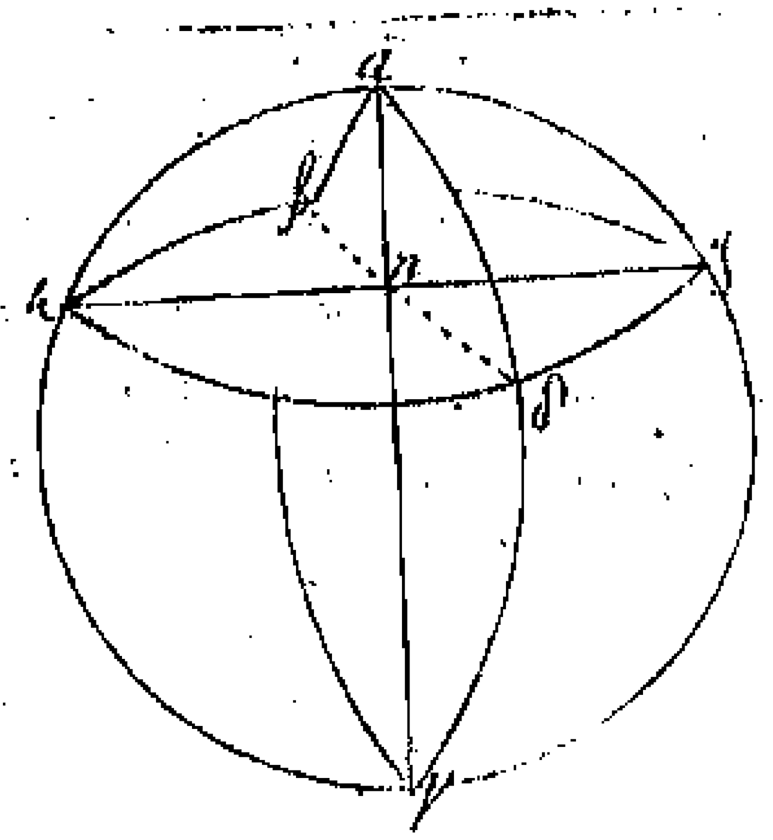
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ οἱ τῷ αὐτῷ κύκλῳ παράλληλοι, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶ παράλληλοι, οἱ γὰρ ακλμ, γνξο, παράλληλοι ὄντες τῷ εβζδ, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶ παράλληλοι, ὅτι γε τοὺς αὐτοὺς ἔχουσι πόλους.

Πρότασις Η΄. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἐν σφαίρᾳ κύκλων ἀλλήλους τεμνομένων διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου κύκλος μέγιστος διέλθῃ, δίχα τὰ τμήματα ἑκατέρου τῶν αὐτῶν κύκλων τέμνει.

Τεμνέτωσαν ἀλλήλους ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ οἱ α β γ δ, ε β ζ δ, κύκλοι, κατὰ τὰ β, καὶ δ, σημεῖα, καὶ διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου διερχέσθω ὁ α ε γ ζ, μέγιστος κύκλος. Λέγω, ὅτι ὁ α ε γ ζ, μέγιστος κύκλος δίχα τέμνει τὰ β α δ, β γ δ, β ε δ, β ζ δ, τμήματα ἑκατέρου τῶν α β γ δ, ε β ζ δ, κύκλων. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ κοιναὶ τομαὶ α γ, ε ζ, β δ. καὶ ἐπεὶ κύκλος ὁ α ε γ ζ, διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου τῶν α β γ δ, ε β ζ δ, διέρχεται, πάντως γε κατὰ τὴν ιβ΄: τοῦ α: τοῦ παρόντος δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτοὺς τέμνει, ὥστε καὶ ἀνάπαλιν ἑκάτερος δηλαδὴ τῶν α β γ δ, ε β ζ δ, κύκλων ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ α ε γ ζ, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ κατὰ τὴν ιθ΄: τοῦ ια: τοῦ στοιχειωτοῦ, καὶ ἡ β δ, κοινὴ αὐτῶν τομὴ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ α ε γ ζ, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ α ε γ ζ, κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας, κατὰ τὸν γ΄: ὅρον τοῦ αὐτοῦ. ἅπτεται δὲ τῆς β δ, ἡ α γ, ὡς δειξόμεθα, ἡ β δ, ἄρα ὀρθή ἐστιν ἐπὶ τῆς α γ, καὶ ἀνάπαλιν, αἱ ἄρα β η α, δ η α, γωνίαι ὀρθαί εἰσι, καὶ ἑπομένως ἴσαι, ἀλλ᾽ ἡ α γ, διάμετρός ἐστι τοῦ α β γ δ, κύκλου διὰ τὸ δίχα τέμνεσθαι τοὺς α β γ δ, α ε γ ζ, μεγίστους κύκλους, κατὰ τὴν ι: τοῦ α: τοῦ παρόντος, καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει τὴν β δ, ὡς δέδεικται, ἄρα κατὰ τὴν γ΄: τοῦ γ΄: τοῦ στοιχειωτοῦ, καὶ δίχα τέμνει ἡ α γ, τὴν β δ, ἴση ἄρα ἡ β η, τῇ η δ, κοινὴ δὲ ἡ α η, δύο δὴ αἱ β η, η α, δυσὶ ταῖς δ η, η α, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ἔστι δὲ ἡ β η α, τῇ δ η α, γωνίᾳ ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, ἄρα καὶ βάσις ἡ α β, βάσει τῇ α δ, ἴση ἐστίν, καὶ ἑπομένως τὰ α β, α δ, τόξα ἴσα ἐστὶ κατὰ τὴν κη΄: τοῦ γ΄: τοῦ στοιχειωτοῦ. Τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται καὶ τὸ μὲν β γ, τόξον τῷ γ δ, ἴσον, τὸ δὲ β ε, τῷ ε δ, καὶ τὸ β ζ, τῷ ζ δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod: Sf: Lib. 2. Fig. 6.



Ὅτι δὲ ἡ α γ, ἅπτεται τῆς β δ, δῆλον. ἐπεὶ γὰρ ἡ α γ, κοινή ἐστι τομὴ τῶν α β γ δ, α ε γ ζ, κύκλων, πάντως γε ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ τοῦ α ε γ ζ, ἔστι δὲ ὁ α β γ δ, κύκλος ὀρθὸς πρὸς τὸ τοῦ α ε γ ζ, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ ἡ β δ, ἄρα οὖσα ἐν τῷ τοῦ α β γ δ, κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ α ε γ ζ, ἐπίπεδον, ὥστε κατὰ τὸν δ΄: ὅρον τοῦ ια: τοῦ στοιχ: ἡ β δ, ἐπὶ τῆς α γ, πίπτει, ἅπτεται ἄρα ἡ α γ, τῆς β δ.

Ἄλ-

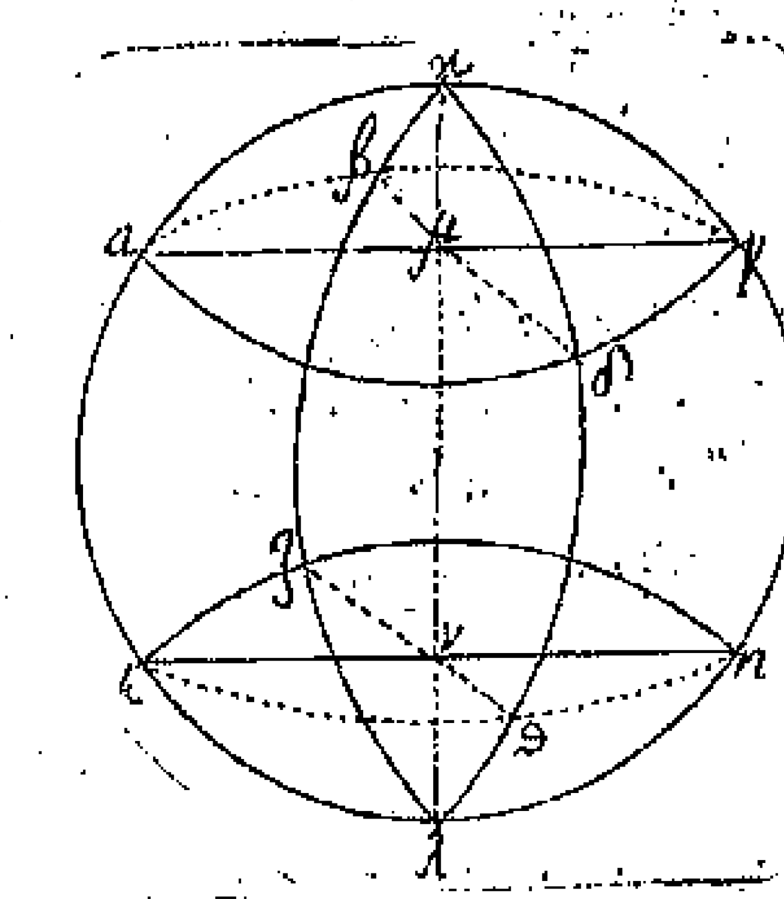
Ἄλλως. Ἐπεὶ ὁ ε β ζ δ, κύκλος δίχα τέμνεται ὑφ᾽ ἑκατέρου τῶν α β γ δ, α ε γ ζ, μεγίστων κύκλων κατὰ τὴν ιβ΄: τοῦ α: τοῦ παρόντος, πάντως γε αἱ β δ, ε ζ, διάμετροι αὐτοῦ εἰσιν, ὥστε τὸ η, σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ε β ζ δ, κύκλου. ἀλλ᾽ ὁ α β γ δ, κύκλος κατὰ τὴν αὐτὴν ιβ΄: δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει τὸν ε β ζ δ, κύκλον, ἄρα καὶ ἡ α γ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ε β ζ δ, κύκλου ἐπίπεδον, κατὰ τὸν γ΄: ὅρον τοῦ ια: τοῦ στοιχ: ἔστι δὲ ἡ α γ, διάμετρος, διὰ τὸ κοινὴν εἶναι τομὴν τῶν α β γ δ, α ε γ ζ, μεγίστων κύκλων, ἄρα διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται, καὶ κατὰ τὸ πόρ: τῆς ς΄: τοῦ α: τοῦ παρ: διέρχεται ἔτι καὶ διὰ τοῦ η, κέντρου τοῦ α β ζ δ: ἀλλὰ καὶ ἡ β δ, διὰ τοῦ η, διέρχεται, ἅπτονται ἄρα ἀλλήλων κατὰ τὸ η.

Πρότασις Θ΄. Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλοι μέγιστοι ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ διὰ τῶν πόλων παραλλήλων κύκλων διέλθωσι, τὰ μὲν τῶν παραλλήλων τόξα τὰ ὑπὸ τῶν μεγίστων περιλαμβανόμενα κύκλων, ὅμοιά εἰσι, τὰ δὲ τῶν μεγίστων τόξα τὰ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἴσα εἰσί.

Ἔστωσαν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλοι παράλληλοι οἱ α β γ δ, ε ζ η θ, πόλοι δὲ τῶν αὐτῶν τὰ κ, καὶ λ, σημεῖα. διὰ δὲ τῶν κ, καὶ λ, σημείων διερχέσθωσαν οἱ κ ζ λ δ, κ ε λ γ, μέγιστοι κύκλοι. Λέγω, ὅτι τὰ μὲν α β, ε ζ, καὶ α δ, ε θ, τόξα τῶν α β γ δ, ε ζ η θ, παραλλήλων ὅμοιά εἰσι, τὰ δὲ α ε, β ζ, ἴσα. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ α γ, β δ, ε η, ζ θ, καὶ ἐπεὶ οἱ κ ε λ γ, κ ζ λ δ, μέγιστοι κύκλοι διὰ τῶν πόλων διέρχονται τῶν α β γ δ, ε ζ η θ, παραλλήλων κύκλων, πάντως γε κατὰ τὴν ιβ΄: τοῦ α: τοῦ παρόντος, οἱ α β γ δ, ε ζ η θ, δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς ὑπ᾽ αὐτῶν τέμνονται, διάμετροι ἄρα εἰσὶν αἱ α γ, β δ, ε η, ζ θ, κοιναὶ τομαί, καὶ τὰ μ, ν, σημεῖα κέντρα τῶν κύκλων. Αὖθις ἐπεὶ οἱ α β γ δ, ε ζ η θ, κύκλοι παράλληλοί εἰσι, καὶ ὑπὸ τῶν κ ε λ γ, κ ζ λ δ, μεγίστων κύκλων τέμνονται, πάντως γε καὶ αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι κατὰ τὴν ις΄: τοῦ ια: τοῦ στοιχειωτοῦ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν α μ, τῇ ε ν, ἡ δὲ β μ, τῇ ζ ν, καὶ κατὰ τὴν ι: τοῦ αὐτοῦ, αἱ ὑπὸ α μ β, ε ν ζ, γωνίαι ἴσαι εἰσίν, εἰσὶ δὲ πρὸς τοῖς κέντροις, καὶ αἱ πρὸς τοῖς κέντροις ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ὁμοίων βεβήκασι περιφερειῶν, ὡς δειξόμεθα, ἄρα τὰ α β, ε ζ, τόξα ὅμοιά εἰσι, τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται ὅμοια καὶ τὰ α δ, ε θ, καὶ β γ, ζ η, καὶ γ δ, η θ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ὅτι δὲ καὶ τὰ α ε, β ζ, ἴσα εἰσί, δῆλον. ἐπεὶ γὰρ πόλος ἐστὶ τῶν α β γ δ, ε ζ η θ, τὸ κ, σημεῖον, πάντως γε κατὰ τὸν ε΄: ὅρον τοῦ α: τοῦ παρόντος αἱ κ α, κ β,

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 7.

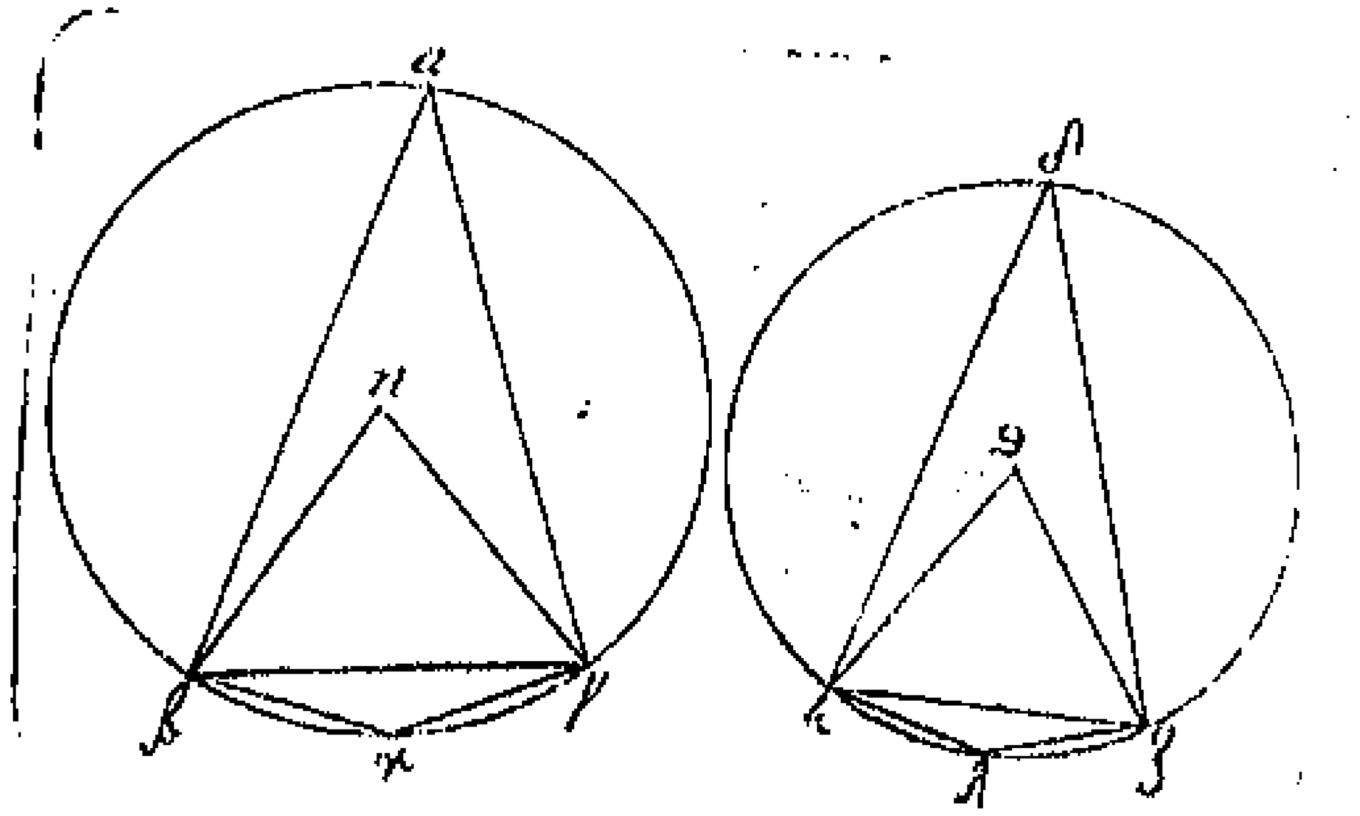


καὶ

καὶ κε, κζ, διαστάσεις ἴσαι εἰσὶν, ὥστε καὶ αἱ κα, κβ, καὶ κε, κζ, περιφέρειαι ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν κη: τοῦ γ': τοῦ στοιχειωτοῦ, ἀφαιρουμένων ἄρα τῶν κα, κβ, ἴσων ἀπὸ τῶν κε, κζ, ἴσων καὶ αὐτῶν οὐσῶν, ὡς δέδεικται, ἐγκαταλείπονται δήπουθεν ἴσαι αἱ αε, βζ. ὅπερ ἔδει τὸ β':

Ὁμοίως δειχθήσεται ἴσα καὶ τὰ δθ, γη. Ὅτι δὲ αἱ πρὸς τοῖς κέντροις ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ὁμοίων βεβήκασι περιφερειῶν, δῆλον. Ἔστωσαν γὰρ κύκλοι ἄνισοι οἱ αβγ, δεζ, καὶ συνεστάθωσαν πρὸς τοῖς η, καὶ θ, κέντροις αὐτῶν ἴσαι γωνίαι αἱ ὑπὸ βηγ, εθζ. Λέγω, ὅτι αἱ βκγ, ελζ, περιφέρειαι, ἐφ' ὧν βεβήκασιν αἱ ῥηθεῖσαι γωνίαι ὅμοιαί εἰσιν.

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 8.



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βγ, εζ, καὶ πρὸς μὲν τοῖς α, καὶ δ, συνεστάθησαν αἱ ὑπὸ βαγ, εδζ, γωνίαι, πρὸς δὲ τοῖς κ, καὶ λ, αἱ ὑπὸ βκγ, ελζ, καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ βηγ, εθζ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ἔστι δὲ ἡ μὲν ὑπὸ βηγ, διπλασία τῆς ὑπὸ βαγ, ἡ δὲ ὑπὸ εθζ, τῆς ὑπὸ εδζ, κατὰ τὴν κ': τοῦ γ': τοῦ στοιχειωτοῦ, πάντως γε αἱ ὑπὸ βαγ, εδζ, ἴσαι εἰσίν. Αὖθις ἐπεὶ ἑκατέρου τῶν αβκγ, δελζ, τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι αἱ ὑπὸ βαγ, βκγ, καὶ εδζ, ελζ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν κβ': τοῦ αὐτοῦ, πάντως γε αἱ ὑπὸ βαγ, βκγ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ εδζ, ελζ, ἔστι δὲ ἡ μὲν ὑπὸ βαγ, ἴση τῇ ὑπὸ εδζ, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ βκγ, ελζ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ κατὰ τὸν ι': ὅρον τοῦ αὐτοῦ, τὰ βκγ, ελζ, τμήματα ὅμοιά εἰσι, αἱ ἄρα βκγ, ελζ, περιφέρειαι ὅμοιαί εἰσιν, ὅπερ ἔδει τὸ ὑποχεθέν.

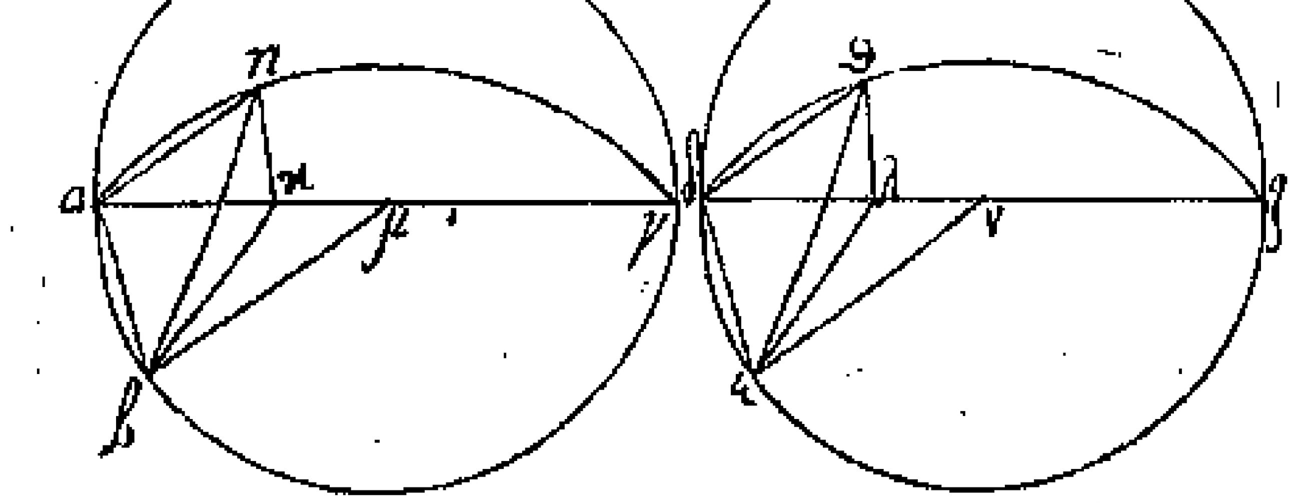
Πρότασις Ι': Θεώρημα.

Ἐὰν ἐπὶ τῶν διαμέτρων τῶν ἴσων κύκλων ἴσα τε καὶ ὅμοια τμήματα κύκλων ἐπισταθῶσιν, ὥστε ὀρθὰ εἶναι πρὸς τὰ τῶν κύκλων ἐπίπεδα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀφαιρεθῇ τόξα ἴσα ἀλλήλοις ὑπερέχοντα, ἢ ἐλλείποντα τοῦ ἡμίσεως τῶν τμημάτων, ἀπὸ δὲ τῶν τομῶν εὐθεῖαι ἴσαι ἐπὶ τὰς τῶν κύκλων περιφερείας ἀχθῶσι, τὰ ἐναπολαμβανόμενα τῶν κύκλων τόξα μεταξὺ τῶν διαμέτρων, καὶ τῶν ἀγομένων εὐθειῶν ἴσα ἔσονται.

Ἔστωσαν κύκλοι ἴσοι οἱ αβγ, δεζ, καὶ συνεστάθησαν ἐπὶ τῶν αγ, δζ, διαμέτρων τῶν αὐτῶν κύκλων, τμήματα κύκλων ἴσα τε καὶ ὅμοια τὰ αηγ, δθζ. ἔστω-

σαν δὲ ἔτι καὶ ὀρθὰ πρὸς τὰ τῶν αβγ, δεζ, κύκλων ἐπίπεδα, καὶ ἀφαιρεθήτωσαν ἀπὸ τῶν αηγ, δθζ, τμημάτων ἴσα τόξα τὰ αη, δθ, ἐλλείποντα τοῦ ἡμίσεως τῶν αηγ, δθζ, τόξων, ἀπὸ δὲ τῶν τομῶν η, καὶ θ, ἀχθήτωσαν ἐπὶ τὰς τῶν αβγ, δεζ, κύκλων περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι αἱ ηβ, θε. Λέγω, ὅτι τὰ αβ, δε, ἐναπολαμβανόμενα τόξα μεταξὺ τῶν αγ, δζ, διαμέτρων, καὶ ηβ, θε, ἀγομένων εὐθειῶν ἴσα ἐστι. Πιπτέτωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν η, καὶ θ, κάθετοι πρὸς τὰ τῶν αβγ, δεζ, κύκλων ἐπίπεδα αἱ ηκ, θλ, αἵγε κατὰ τὸν δ': ὅρον τοῦ ια: τοῦ στοιχειωτοῦ ἐπὶ τῶν αγ, δζ, πεσοῦνται. ἐπεὶ δὲ αἱ ἀπὸ τῶν τομῶν η, καὶ θ, κάθετοι ἢ ἐντὸς πίπτουσι τῆς περιφερείας, ἢ ἐκτὸς, ἢ γοῦν ἐπ' αὐτῆς, πιπτέτωσαν α: ἐντὸς, καὶ συμβαλλέτωσαν ταῖς αγ, δζ, διαμέτροις κατὰ τὰ κ, καὶ λ, σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αη, ηβ, βκ, βα, βμ, καὶ δθ, θε, δε, ελ, εν. καὶ ἐπεὶ τὰ αηγ, δθζ, ἴσα εἰσὶ, καὶ τούτων ἀφῄρηται ἴσα τὰ αη, δθ, πάντως γε καὶ τὰ ἐναπολειπόμενα ηγ, θζ, ἴσα εἰσὶν, ὥστε αἱ ὑπὸ ηαγ, θδζ, γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασι, καὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ κατὰ τὴν κζ': τοῦ γ': στοιχειωτοῦ. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ακη, δλθ, ἴσαι, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, τὰ ἄρα ακη, δλθ, τρίγωνα ἔχουσι τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ηακ, ακη, δυσὶ ταῖς ὑπὸ θδλ, δλθ, ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχουσι δ' ἔτι καὶ μίαν πλευρὰν τὴν αη, μιᾷ πλευρᾷ τῇ δθ, ἴσην κατὰ τὴν κθ': τοῦ γ': τοῦ στοιχειωτοῦ, τὴν ὑποτείνουσαν δηλ: ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν. ἄρα κατὰ τὴν κς': τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔχουσιν, ἴση ἄρα ἡ μὲν ακ, τῇ δλ, ἡ δὲ ηκ, τῇ θλ. ἀλλ' ἐπεὶ τὰ ηκβ, θλε, τρίγωνα ὀρθὰς ἔχουσι τὰς ὑπὸ ηκβ, θλε, γωνίας κατὰ τὸν γ': ὅρον τοῦ ια: τοῦ στοιχειωτοῦ, πάντως γε κατὰ τὴν μζ': τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ, τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ηβ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ηκ, κβ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς θε, τοῖς ἀπὸ τῶν θλ, λε. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ηβ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς θε, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς ηβ, θε, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ηκ, κβ, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν θλ, λε, ὥστε ἀφαιρουμένων τῶν ἀπὸ τῶν ηκ, θλ, ἴσων ἐναπολείπονται τὰ ἀπὸ τῶν κβ, λε, ἴσα, καὶ ἑπομένως αἱ κβ, λε, ἴσαι εἰσίν. Αὖθις ἐπεὶ αἱ αμ, δν, ἡμιδιάμετροι τῶν ἴσων κύκλων, ἴσαι εἰσὶν, ἀφαιρουμένων τῶν ακ, δλ, ἴσων, ἐναπολείπονται πάντως καὶ αἱ κμ, λν, ἴσαι, εἰσὶ δὲ ἴσαι καὶ αἱ βμ, εν, ἡμιδιάμετροι, ἄρα τὰ βκμ, ελν, ἰσόπλευρά ἐστιν, ὥστε καὶ ἰσογώνια, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αμβ, γωνία τῇ ὑπὸ δνε, καὶ ἔστιν ἑκατέρα

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 9.

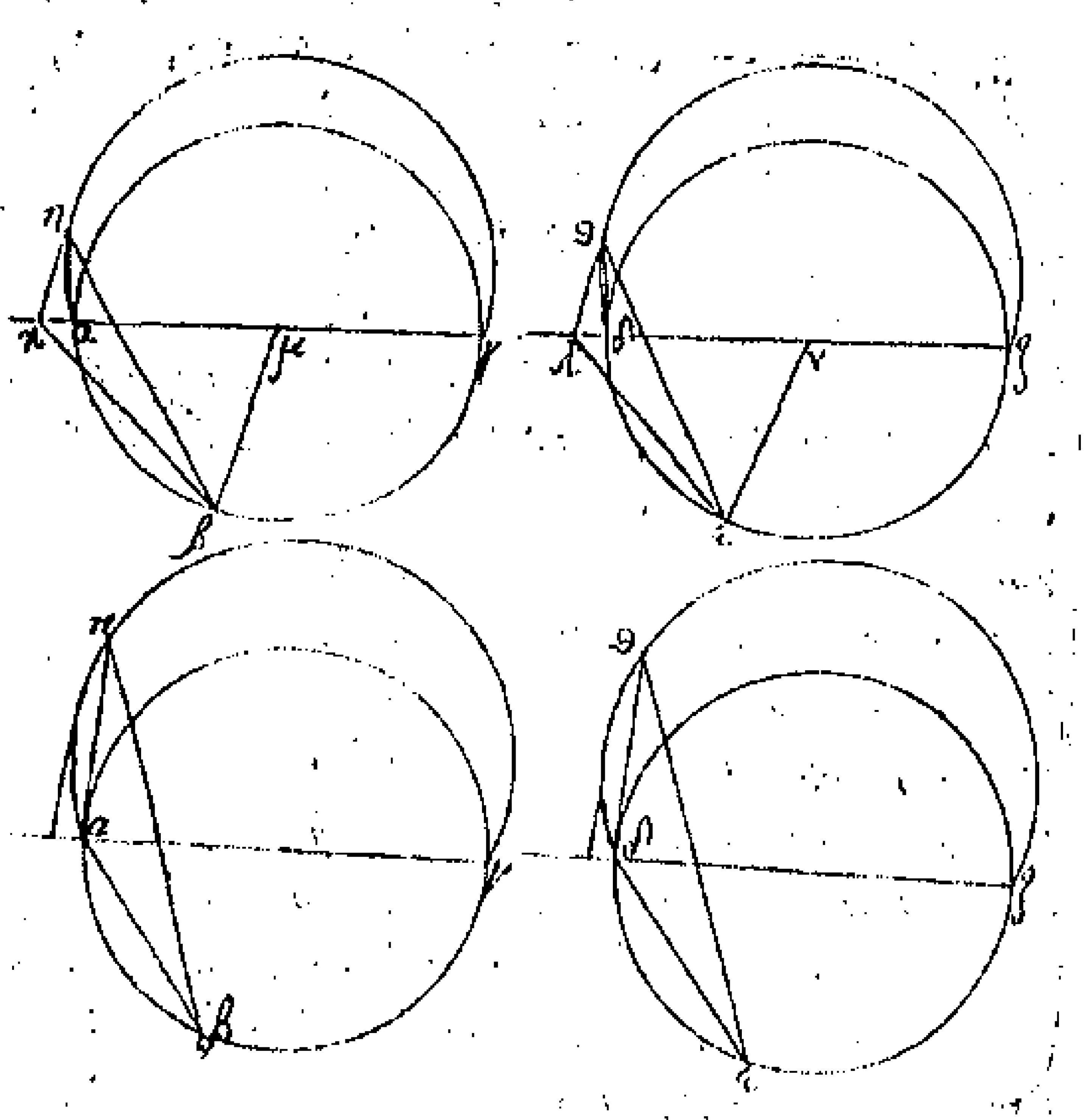


πρὸς

πρὸς τῷ κέντρῳ, ἄρα καὶ κατὰ τὴν κς′: τοῦ γ′: τῶν στοιχειωτῶν αἱ αβ, δε, περιφέρειαι ἴσαι εἰσί.

Πιπτέτωσαν β′: αἱ ηκ, λθ, κάθετοι ἐκτὸς τῆς περιφερείας, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ηα, κβ, βμ, καὶ θδ, λε, εν, καὶ ἐπεὶ τὰ αηγ, δθζ, τμήματα ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστι, καὶ ἀφῃρέθησαν τὰ αη, δθ, τόξα ἴσα, πάντως γε καὶ τὰ ἐναπολειπόμενα ηγ, θζ, ἴσα ἐστίν. αἱ ἄρα ὑπὸ γαη, ζδθ, γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ κατὰ τὴν κζ′: τοῦ γ′: τῶν στοιχειωτῶν. ὥστε καὶ λοιπαὶ αἱ ὑπὸ ηακ, θδλ, ὡς παραπληρώματα τῶν ὑπὸ γαη, ζδθ, ἴσαι ὁμοίως εἰσίν. ἔστι δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν ηκα, θλδ, ὀρθή, ἄρα τῶν αηκ, δθλ, τριγώνων αἱ δύο γωνίαι ταῖς δυσὶν ἴσαι εἰσίν, ἀλλὰ καὶ αἱ ηα, θδ, πλευραὶ εἰσὶν ἴσαι κατὰ τὴν κθ′: τοῦ αὐτοῦ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι καὶ τὰς ηα, θδ, περιφερείας, ἄρα καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς ἴσαι ἔσονται, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ηκ, τῇ θλ, ἡ δὲ κα, τῇ λδ, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ αμ, δν, ἡμιδιάμετροι ἴσαι, προστιθεμένων ἄρα τῶν κα, λδ, ἴσων ταῖς αμ, δν, ἴσαις, ἴσαι ἔσονται αἱ κμ, λν. Αὖθις ἐπεὶ αἱ ηκ, θλ, ὀρθαί εἰσι πρὸς τὰς κβ, λε, κατὰ τὸν γ′: ὅρον τοῦ ια′: τοῦ αὐτοῦ, πάντως γε τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ηβ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ηκ, κβ, τετραγώνοις, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς θε, τοῖς ἀπὸ τῶν θλ, λε. ἀλλ' αἱ ηβ, θε, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ηκ, κβ, ἴσα εἰσὶ τοῖς ἀπὸ τῶν θλ, λε. ἀφαιρουμένων ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ηκ, θλ, ἴσων, ἴση γὰρ ἡ ηκ, τῇ θλ, ὡς δέδεικται, ἐναπολείπονται καὶ τὰ ἀπὸ τῶν κβ, λε, ἴσα, ὥστε καὶ αἱ κβ, λε, ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ ἴσαι καὶ αἱ κμ, λν, ὡς δέδεικται, ἔτι δὲ καὶ αἱ μβ, νε, ἡμιδιάμετροι, ἄρα τῶν κμβ, λνε, τριγώνων αἱ ὑπὸ κμβ, λνε, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν η′: τοῦ α′: τῶν στοιχειωτῶν, ὥστε καὶ αἱ αβ, δε, περιφέρειαι, ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν κς′: τοῦ γ′: τοῦ αὐτοῦ.

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 10.



Πιπτέτωσαν τελευταῖον αἱ ηα, θδ, κάθετοι ἐπὶ τῆς περιφερείας, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αβ, δε, καὶ ἐπεὶ αἱ ηα, θδ, ὀρθαί εἰσιν ἐπὶ τῶν αβ, δε, κατὰ τὸν γ′: ὅρον τοῦ ια′: τοῦ στοιχειωτοῦ, πάντως γε τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ηβ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ

ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ηα, αβ, τετραγώνοις, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς θε, τοῖς ἀπὸ τῶν θδ, δε, ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ηβ, θε, ἴσα ἐστί, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς ηβ, θε, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ηα, αβ, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν θδ, δε, συναμφότερα συναμφοτέροις, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ηα, θδ, ἴσα ἐστίν, ἴσαι γὰρ αἱ ηα, θδ, κατὰ τὴν κθ′: τοῦ γ′: τοῦ αὐτοῦ. ἄρα ἀφαιρουμένων τῶν ἀπὸ τῶν ηα, θδ, ἐναπολείπονται ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν αβ, δε. ὥστε καὶ αἱ αβ, δε, ἴσαι εἰσί, καὶ κατὰ κη′: τοῦ αὐτοῦ αἱ αβ, δε, περιφέρειαι ἴσαι εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

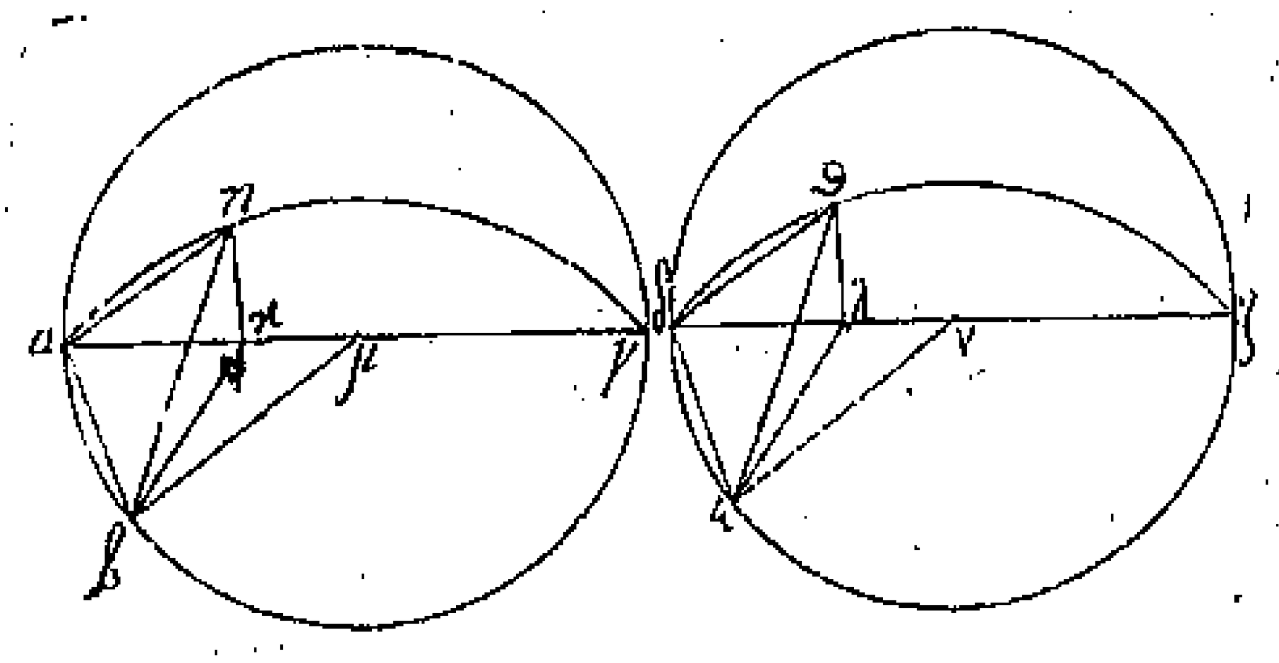
Τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται ἴσα εἶναι τὰ αβ, δε, τόξα, κἂν τὰ ἀφαιρεθέντα αη, δθ, ὑπερέχωσι τοῦ ἡμίσεως τῶν αηγ, δθζ, τόξων.

Πρότασις ΙΑ′: Θεώρημα.

Ἐὰν ἐπὶ τῶν διαμέτρων τῶν ἴσων κύκλων ἴσα τε καὶ ὅμοια τμήματα κύκλων ἐπισταθῶσιν, ὥστε ὀρθὰ εἶναι πρὸς τὰ τῶν κύκλων ἐπίπεδα· ἀπὸ δὲ τῶν τμημάτων τε καὶ κύκλων ἴσα τόξα ἀφαιρεθῇ, αἱ τὰς τομὰς τῶν τόξων ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ αβγ, δεζ, καὶ συνεστάθησαν ἐπὶ τῶν αγ, δζ, διαμέτρων ἴσα τε καὶ ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ αηγ, δθζ. καὶ ἀπὸ μὲν τῶν αηγ, δθζ, τμημάτων ἀφαιρεθήτωσαν ἴσα τόξα τὰ αη, δθ, ἀπὸ δὲ τῶν κύκλων αβγ, δεζ, τὰ αβ, δε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ηβ, θε. Λέγω τὰς ηβ, θε, ἴσας εἶναι, τῶν αὐτῶν γὰρ κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὰ αβ, δε, τόξα ἐπὶ τῶν σχημάτων δῆλον:

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 11.



τῆς α: δείξεως τῆς ἀνωτέρω προτάσεως, ἴσα ἐστί, πάντως γε αἱ αβ, δε, ὑποτείνουσαι ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν κθ′: τοῦ γ′: τῶν στοιχειωτῶν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ακ, δλ, ἴσαι, ὡς δέδεικται ἀνωτέρω, ἄρα τῶν βακ, εδλ, τριγώνων αἱ δύο πλευραὶ βα, ακ, εδ, δλ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, εἰσὶ δὲ καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ βακ, εδλ, ἴσαι, ὡς ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν τῶν βγ, εζ, βεβηκυῖαι, κατὰ τὴν κζ′: τοῦ αὐτοῦ, ἄρα καὶ βάσεις αἱ ὑπὸ βκ, ελ, ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δ' ἔτι ἴσαι καὶ αἱ ηκ, θλ, κάθετοι, ὥσπερ καὶ αἱ ὑπὸ βκη, ελθ, γωνίαι, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, ὡς ἐν τῇ ἀνωτέρω δέδεικται, ἄρα κατὰ τὴν δ′: τοῦ α′: τοῦ αὐτοῦ αἱ βη, εθ, ἴσαι εἰσίν. ὅπερ ἦν τὸ ὑποσχεθέν.

Ἐπὶ δὲ τῶν σχημάτων τῆς β′: δείξεως, ἐπεὶ αἱ κμ, μβ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς λν, νε, ὡς δέδεικται ἐν τῷ ἀνωτέρῳ, εἰσὶ δ' ἔτι καὶ αἱ ὑπὸ κμβ, λνε, γωνίαι ἴσαι, διὰ τὸ ἴσας ὑποτίθεσθαι τὰς αβ, δε, περιφερείας, ἐφ' ὧν αὗται βεβήκασιν, ἄρα κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν δ'. αἱ κβ, λε, ἴσαι εἰσί. δέδεικται δὲ καὶ ἡ μὲν ηκ, κάθετος τῇ θλ, ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ηκβ, γωνία τῇ ὑπὸ θλε, ἄρα κατὰ τὴν αὐτὴν καὶ ἡ ηβ, τῇ θε, ἴση ἐστίν.

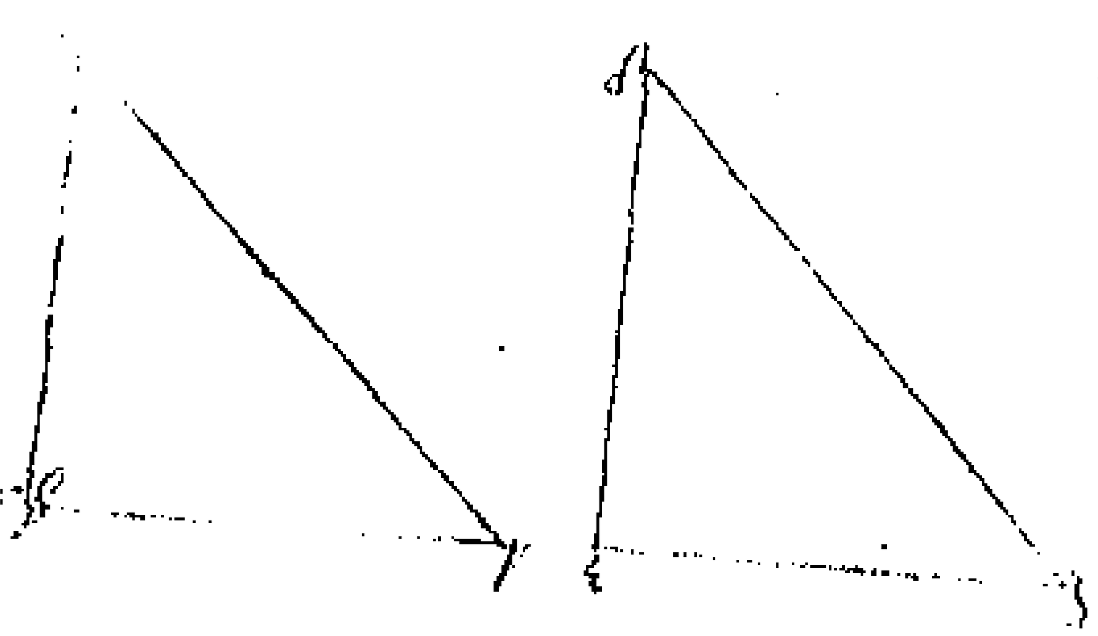
Ἐπὶ δὲ τῶν σχημάτων τῆς γ'. δείξεως ὁμοίως, ἐπεὶ αἱ ηα, θδ, καὶ αβ, δε, ἴσαι εἰσί, δέδεικται δὲ ἐν τῷ ἀνωτέρῳ καὶ ἡ ὑπὸ ηαβ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ θδε, ἄρα κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν δ'. καὶ αἱ ηβ, θε, ἴσαι εἰσίν. ἐὰν ἄρα ἐπὶ τῶν διαμέτρων τῶν ἴσων κύκλων ἴσα τε καὶ ὅμοια τμήματα. καὶ τὰ ἑξῆς.

ΛΗΜΜΑ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίαν ὁποιανδήποτε γωνίᾳ ὁποιᾳδήποτε ἴσην, καὶ ἡ λοιπὴ πλευρὰ τῇ λοιπῇ ἴση ἔσται, καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον ὅλῳ τῷ τριγώνῳ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἐχέτωσαν τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς αγ, γβ, δυσὶ ταῖς δζ, ζε, ἴσας, τὴν μὲν αγ, τῇ δζ, τὴν δὲ γβ, τῇ ζε, καὶ τὴν πρὸς τῷ β, γωνίαν τῇ πρὸς τῷ ε, ἴσην. Λέγω, ὅτι

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 12.



καὶ τὴν αβ, τῇ δε, ἴσην ἔχει, καὶ ὅλον τὸ αβγ, τρίγωνον ὅλῳ τῷ δεζ, τριγώνῳ ἴσον ἐστι, καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ γ, γωνία τῇ πρὸς τῷ ζ, ἡ δὲ πρὸς τῷ α, τῇ πρὸς τῷ δ, ὁμοίως ἴση ἐστίν. Ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν αγ, τῇ δζ, ἡ δὲ γβ, τῇ ζε, ἴση ἐστὶν, πάντως γε ὡς ἡ αγ, πρὸς τὴν δζ, ἔστι καὶ ἡ γβ, πρὸς τὴν ζε, καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ αγ, πρὸς τὴν γβ, ἡ δζ, πρὸς τὴν ζε, κατὰ τὴν ις'. τοῦ ε'. τῶν στοιχειώσεων, ἔχουσι δὲ καὶ τὴν πρὸς τῷ β, γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ ε, ἄρα κατὰ τὴν ζ'. τοῦ ς'. τῶν αὐτῶν, τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσιν. ἄρα ἡ πρὸς τῷ γ, γωνία τῇ πρὸς τῷ ζ, ἴση ἐστίν. ὥστε κατὰ τὴν δ'. τοῦ α'. τῶν αὐτῶν καὶ βάσις ἡ αβ, βάσει τῇ δε, ἴση ἐστὶ, καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον ὅλῳ τῷ τριγώνῳ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ὅπερ ἦν τὸ ὑποσχεθέν.

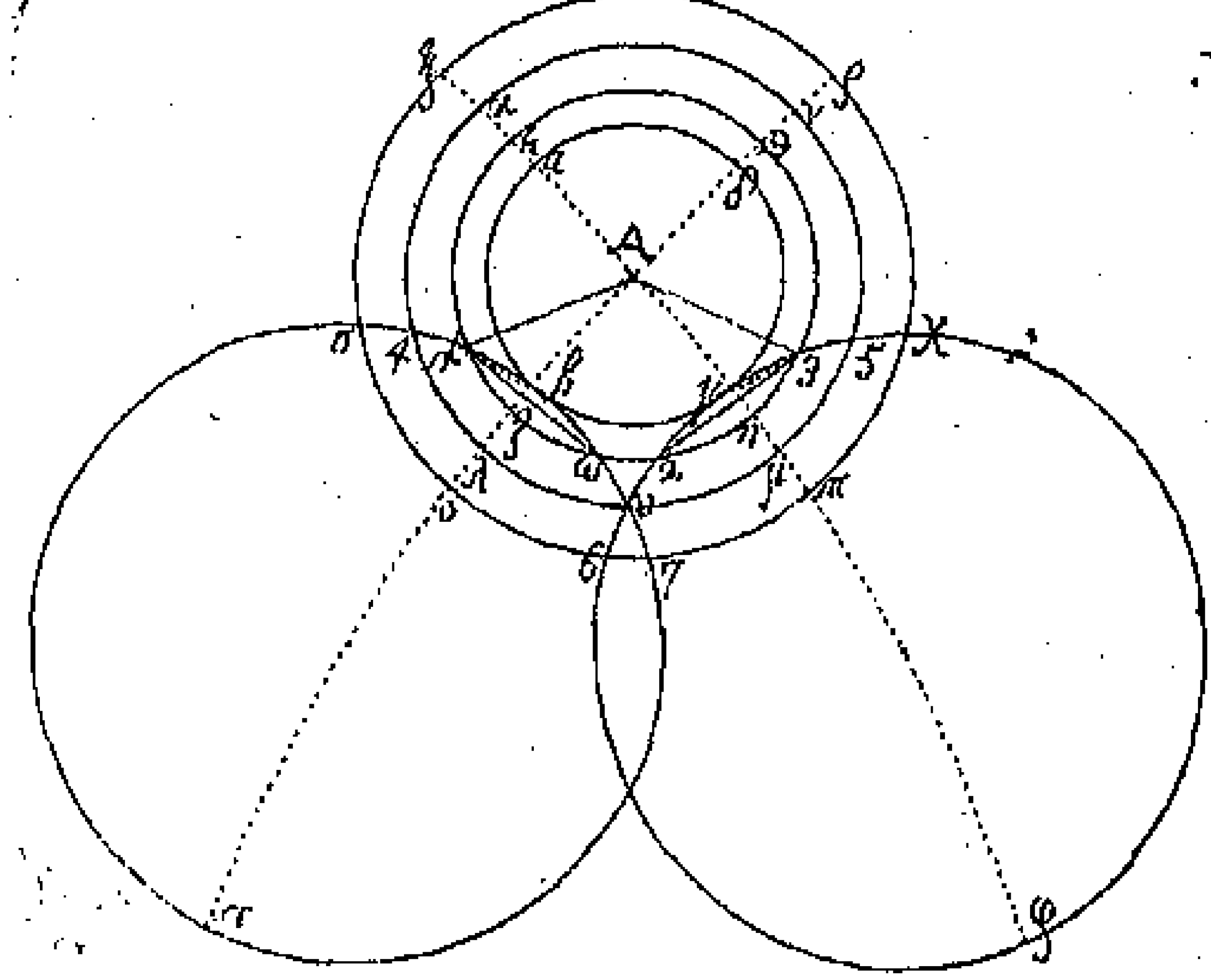
Πρό-

Πρότασις ΙΒ'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο μέγιστοι κύκλοι, πολλῶν ὄντων παραλλήλων ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ τοῦ μὲν ἐλάσσονος ἅπτωνται, τοὺς δὲ λοιποὺς τέμνωσι, τὰ τῶν μεγίστων τόξα, τά τε ὑφ' ἑκάστου τῶν παραλλήλων περιεχόμενα, καὶ τὰ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐναπολαμβανόμενα, ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶν, ὡσαύτως δὲ καὶ τὰ τῶν παραλλήλων τὰ ὑπὸ τῶν μεγίστων περιεχόμενα ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ, καὶ τούτων αὖθις ὅσα μὲν διὰ τῆς τομῆς τῶν μεγίστων διέρχεται κύκλων ἄνευ τινὸς προσθήκης, ἢ ἀφαιρέσεως ὅμοιά ἐστι τῷ μεταξὺ τῶν ἁφῶν τόξῳ, τοῦ ὅπερ οἱ μέγιστοι παραλλήλου ἅπτονται, ὅσα δὲ διὰ τῶν καθ' ἃ οἱ κύκλοι τέμνονται μερῶν διέρχεται μετὰ ἀφαιρέσεως, ὅσα δὲ διὰ τῶν πρὸς ἃ οὐ τέμνονται οἱ κύκλοι διαβαίνουσι μετὰ προσθήκης ἐκείνῳ ὅμοιά εἰσιν.

Ἔστωσαν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι οἱ αβγδ, εζηθ, κλμν, ξοπρ, καὶ τοῦ μὲν αβγδ, ἐλάσσονος ἁπτέσθωσαν οἱ βστυ, γυφχ, κατὰ τὰ β, καὶ γ, σημεῖα, τοὺς δὲ λοιποὺς τεμνέτωσαν οἱ αὐτοὶ κατὰ τὰ ψ, ω. 2, 3. 4, υ. υ, 5. σ, 6. 7, χ. Λέγω, ὅτι τὰ μὲν ψβω, 2γ3, 4βυ, υγ5, σβ7, 6γχ, τόξα τῶν μεγίστων κύκλων βστυ, γυφχ, τὰ ὑπὸ τῶν παραλλήλων περιεχόμενα, ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ, καὶ τὰ 4ψ, ωυ, υ2, 35, σ4, υ6, 7υ, 5χ, τὰ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐναπολαμβανόμενα ὁμοίως ἴσα ἐστιν. ἔτι δὲ καὶ τὰ ψζω, 2η3, 4λυ, υμ5, σο7,

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 13.



6πχ, τόξα τῶν παραλλήλων ἴσα καὶ αὐτὰ ἀλλήλοις εἰσὶ, καὶ τούτων αὖθις τὰ μὲν 4λυ, υμ5, ὅμοιά εἰσι τῷ βγ, ἄνευ τινὸς προσθήκης, ἢ ἀφαιρέσεως, τὰ δὲ σο7, 6πχ, μετὰ ἀφαιρέσεως τοῦ 6, 7, καὶ τὰ ψζω, 2η3, μετὰ προσθήκης τοῦ ω2,

ὅμοιά

ὅμοιά εἰσι τῷ αὐτῷ βγ, τόξῳ, τῷ μεταξὺ τῶν β, καὶ γ, ἁφῶν. Διήχθωσαν γὰρ διὰ τοῦ Λ, πόλου τῶν ῥηθέντων παραλλήλων, καὶ β, γ, ἁφῶν μέγιστοι κύκλοι οἱ ρΛτ, ξΛφ. καὶ ἐπεὶ οἱ αβγδ, βστ7, κύκλοι ἅπτονται ἀλλήλων κατὰ τὸ β, καὶ ὁ ρΛτ, μέγιστος διὰ τοῦ Λ, πόλου τοῦ αβγδ, διέρχεται κύκλου, καὶ τῆς β, ἁφῆς, πάντως γε κατὰ τὴν δ': τοῦ παρόντος ὁ ρΛτ, διέρχεται καὶ διὰ τοῦ πόλου τοῦ βστ7, ὥστε κατὰ τὴν ιβ': τοῦ α': τοῦ παρόντος δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνει, τὸ ἄρα βτ, τμῆμα ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βστ7, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ τῶν Λβ, β↓, ὑποτεινουσῶν ἐπιζευχθεισῶν, ἔτι δὲ καὶ τῆς Λ↓, ἡ ὑπὸ Λβ↓, γωνία ὀρθή ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ Λγ3, ὀρθή. εἰσὶ δὲ κατὰ τὸν ϛ': ὅρον τοῦ αὐτοῦ καὶ αἱ βΛ, Λ↓, ἴσαι ταῖς γΛ, Λ3, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ἄρα κατὰ τὸ προσκείμενον λῆμμα ἡ β↓, ὑποτείνουσα ἴση ἐστὶ τῇ γ3, ὥστε καὶ αἱ β↓, γ3, περιφέρειαι ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν κθ': τοῦ γ': τοῦ στοιχειωτοῦ, ἀλλ' ἑκάτερον τῶν ↓βω, 2γ3, τμημάτων δίχα τέμνεται, ἄρα καὶ τὰ ↓βω, 2γ3, ὡς διπλάσια τῶν β↓, γ3, ἴσα ἐστὶ κατὰ τὸ β': ἀξίωμα τοῦ στοιχ: τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται ἴσα καὶ τὰ 4βυ, υγ5, καὶ σβ7, 6γχ. ἐπεὶ οὖν δέδεικται τά τε ↓β, βω, καὶ 4β, βυ, ἴσα, πάντως γε ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῶν ἴσων 4β, βυ, τὰ ἴσα ↓β, βω, ἐναπολειφθήσεται τὰ 4↓, ωυ, ἴσα κατὰ τὸ γ': ἀξίωμα. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται ἔτι ἴσα καὶ τὰ σ4, υ7, καὶ υ2, 35, καὶ 6υ, 5χ. Αὖθις ἐπεὶ τὰ ↓βω, 2γ3, ἴσα εἰσιν, ὡς δέδεικται, πάντως γε κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν κθ': τοῦ γ': τοῦ στοιχειωτοῦ αἱ ↓ω, 23, ὑποτείνουσαι ἴσαι εἰσιν, ὥστε κατὰ τὴν κη': τοῦ αὐτοῦ, καὶ αἱ ↓ζω, 2η3, περιφέρειαι ἴσαι εἰσί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ 4λυ, υμ5, καὶ σο7, 6πχ, ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἦν τὸ δ': Τελευταῖον ἐπεὶ τὰ 4λυ, υμ5, ἴσα ἐστί, καὶ τοῦ μὲν 4λυ, ἥμισύ ἐστι τὸ 4λ, τοῦ δὲ υμ5, τὸ υμ, κατὰ τὴν η': τοῦ παρόντος, ἄρα τὸ 4λ, ἴσον ἐστὶ τῷ υμ. κοινοῦ προσκειμένου τοῦ λυ, δῆλον, ὅτι τὸ 4λυ, ἴσον ἐστὶ τῷ λυμ, ἀλλὰ τὸ λυμ, ὅμοιόν ἐστι τῷ αὐτῷ βγ, ἄνευ τινὸς προσθήκης, ἢ ἀφαιρέσεως. ὁμοίως δὲ πάλιν, ἐπεὶ τὸ σο7, ἴσον ἐστὶ τῷ 6πχ, ὡς δέδεικται, καὶ τοῦ μὲν ἥμισύ ἐστι τὸ σο, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν η': τοῦ δὲ τὸ 6π, κοινοῦ προσκειμένου τοῦ ο6, πάντως γε τὰ σο6, ο6π, ἴσα ἐστιν, ἀλλὰ τὸ ο6π, ὅμοιόν ἐστι τῷ βγ, ἄρα καὶ τὸ σο6, ὅμοιόν ἐστι τῷ βγ. ὁμοίως δειχθήσεται καὶ τὸ 7πχ, ὅμοιον τῷ βγ. ἄρα τὰ σο7, 6πχ, τόξα τὰ διὰ τῶν, καθ' ἃ τέμνονται οἱ μέγιστοι κύκλοι, μερῶν διερχόμενα τόξα ὅμοιά ἐστι τῷ μεταξὺ τῶν τομῶν μετὰ ἀφαιρέσεως τοῦ 67. Τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται καὶ τὰ ↓ζω, 2η3, ὅμοια εἶναι τῷ βγ, μετὰ προσθήκης τοῦ ω2. δειχθήσεται γὰρ ὡς πρότερον τὸ ↓ζ, ἴσον τῷ 2η. κοινοῦ δὲ λαμβανομένου τοῦ ζω, ἔσται τὸ ↓ζ2, ἴσον τῷ ζ2η, ἀλλὰ τὸ ζ2η, ὅμοιόν ἐστι τῷ βγ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν θ': τοῦ παρόντος. ἄρα καὶ τὸ ↓ζ2, ἢ τὸ ↓ζω, μετὰ προσθήκης τοῦ ω2, ὅμοιόν ἐστι τῷ βγ, τῷ μεταξὺ τῶν ἁφῶν. ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ ωη3. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρό-

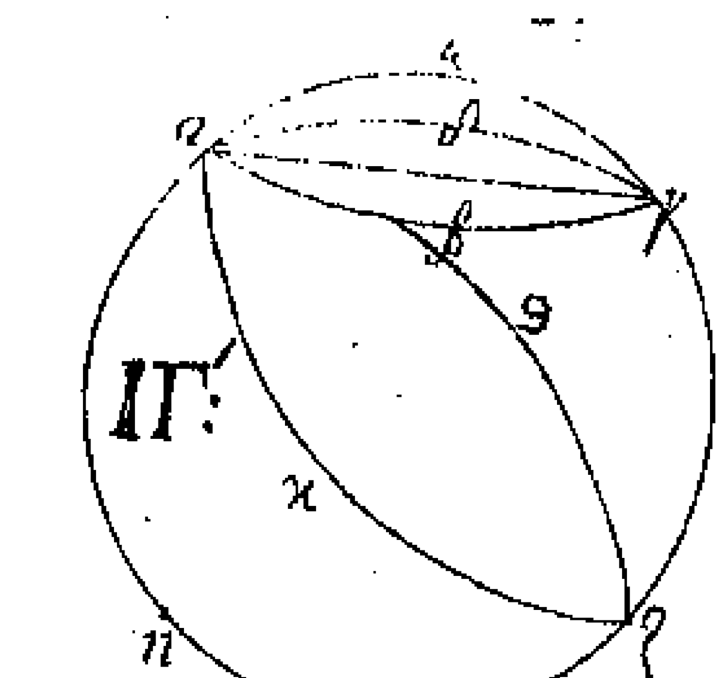
Πρότασις ΙΓ': Πρόβλημα.

Κύκλου ἐλάσσονος ἐν σφαίρᾳ δοθέντος κύκλον μέγιστον καταγράψαι ἁπτόμενον τοῦ ἐλάσσονος κατὰ τὸ δοθὲν σημεῖον.

Δοθήτω ἐλάσσων κύκλος ὁ αβγδ, καὶ ζητείσθω καταγραφῆναι μέγιστος κύκλος ἁπτόμενος τοῦ αβγδ, κατὰ τὸ α, σημεῖον. Εὑρεθήτω δὴ κατὰ τὴν ιζ': τοῦ παρόντος ὁ πόλος τοῦ δοθέντος αβγδ, ἐλάσσονος κύκλου, καὶ ἔστω οὗτος ὁ ε, καὶ διὰ τῶν ε, καὶ α, σημείων γραφήτω μέγιστος κύκλος ὁ εαζγ, κατὰ τὴν ιϛ': τοῦ αὐτοῦ. εἶτα ἀφαιρεθήτω τὸ αη, τεταρτημόριον τοῦ αζγε, μεγίστου κύκλου, καὶ ἀπὸ τοῦ η, ὡς ἀπὸ πόλου διαστήματι τῷ ηα, γραφήτω ὁ αθζκ, κύκλος, καὶ οὗτος ἔσται ὁ ζητούμενος. Ἐπεὶ γὰρ οἱ αβγδ, αθζκ, κύκλοι συμπίπτουσι τῷ αὐτῷ α, σημείῳ τοῦ αηζγ, μεγίστου κύκλου διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου διερχομένου, πάντως γε κατὰ τὴν β': τοῦ παρόντος οἱ αβγδ, αθζκ, ἅπτονται ἀλλήλων κατὰ τὸ α, σημεῖον. ἀλλ' ὁ αθζκ, κύκλος ἀφίσταται τοῦ η, πόλου τεταρτημορίῳ, ἄρα κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιγ': τοῦ παρόντος μέγιστός ἐστι. κύκλου ἄρα ἐλάσσονος τοῦ αβγδ, δοθέντος ἐν σφαίρᾳ, κύκλος μέγιστος καταγέγραπται ἁπτόμενος αὐτοῦ κατὰ τὸ δοθὲν α, σημεῖον ὁ αθζκ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

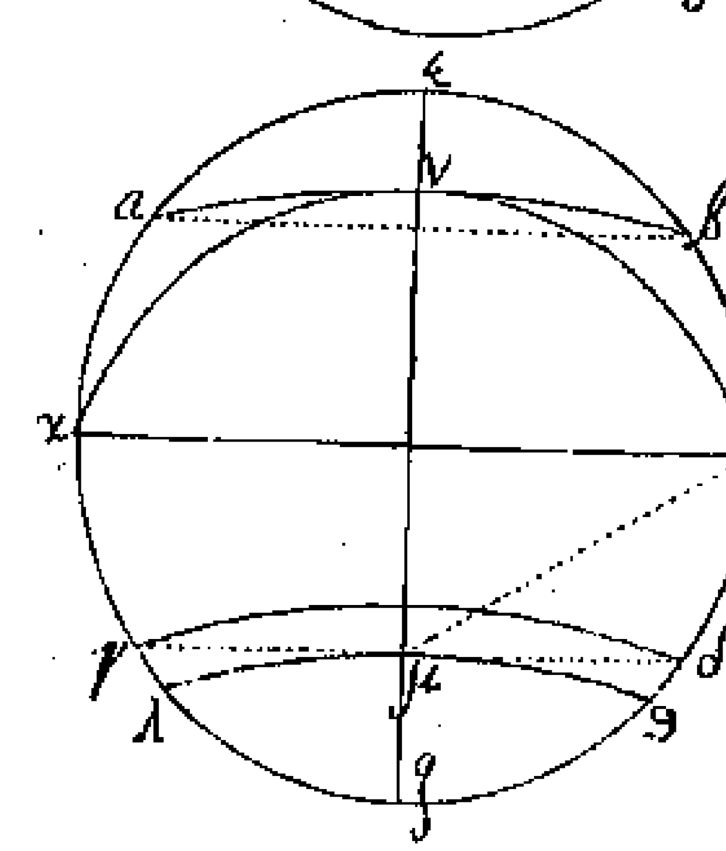
Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 14.

ΙΓ'



Πρότασις ΙΔ': Πρόβλημα.

Δοθέντος σημείου ἐν σφαίρᾳ μεταξὺ δύο κύκλων παραλλήλων τε καὶ ἴσων, κύκλον μέγιστον διὰ τοῦ δοθέντος γράψαι σημείου ἁπτόμενον ἑκατέρου τῶν παραλλήλων.



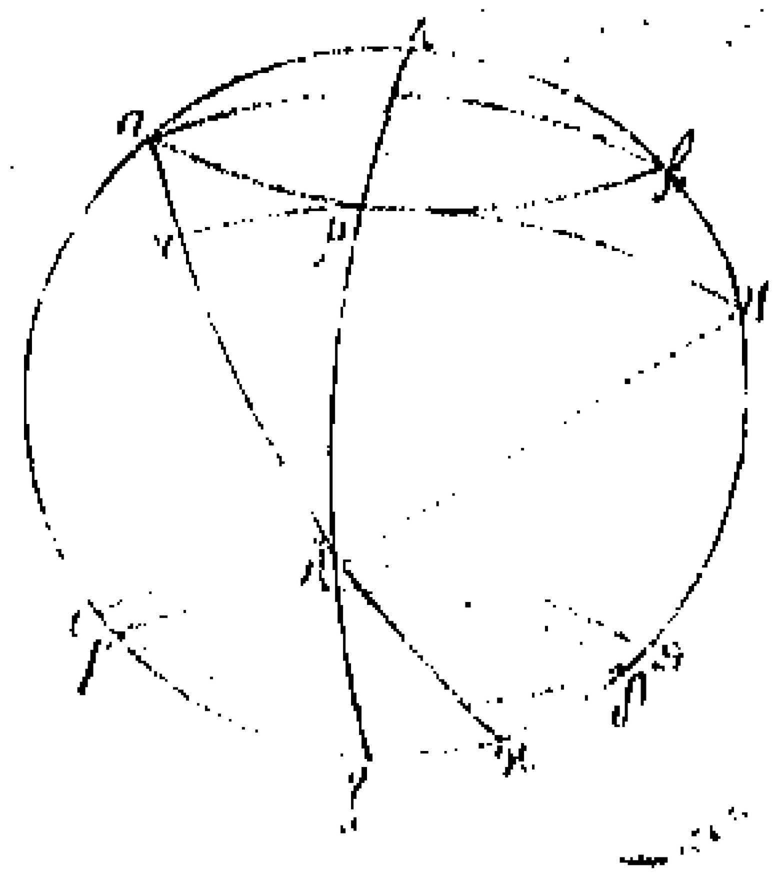
Ἔστωσαν ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι ἴσοι τε καὶ παράλληλοι οἱ αβ, γδ, ὧν πόλοι τὰ ε, καὶ ζ, σημεῖα, καὶ δοθήτω μεταξὺ αὐτῶν σημεῖον τὸ η, καὶ ζητείσθω καταγραφῆναι κύκλος μέγιστος διὰ τοῦ η, σημείου ἁπτόμενος ἑκατέρου τῶν αβ, γδ, κύκλων. Ἐπεὶ δὲ τὸ δοθὲν σημεῖον ἤτοι ἐξ ἴσου ἀφίσταται τῶν παραλλήλων κύκλων, ἢ τοῦ μὲν πλησιέστερον, τοῦ δὲ ἀπώτερόν ἐστι. Κείσθω α': ἐξ ἴσου ἀφίστασθαι τὸ η, σημεῖον τοῦ τε β, καὶ δ. διὰ τοῦ ε, τοίνυν πόλου καὶ η, δοθέντος σημείου γραφήτω ὁ εκζη, μέγιστος κύκλος κατὰ τὴν ιϛ': τοῦ παρόντος, τέμνων τὸν μὲν αβ, παράλληλον κατὰ τὰ α, καὶ β, τὸν δὲ γδ, κατὰ τὰ γ, καὶ δ. καὶ ἔστωσαν τὰ βθ, ηζ, τόξα ἴσα τῷ τοῦ εκζη, κύκλου τεταρτημορίῳ, καὶ

ἀπὸ

ἀπὸ μὲν τοῦ ζ, σημείου διαστήματι τῷ ζ θ, γραφήτω παράλληλος ὁ λ θ, ἀπὸ δὲ τοῦ η, διαστήματι τῷ η ζ, γραφήτω μέγιστος ὁ ζ ε, τέμνων τὸν μὲν λ θ, κατὰ τὸ μ, τὸν δὲ α β, κατὰ τὸ ν· εἶτα ἀπὸ τοῦ μ, ὡς ἀπὸ πόλου, διαστήματι τῷ μ ν, γραφήτω ὁ κ ν η, καὶ οὗτος ἔσται ὁ ζητούμενος. Ἐπεὶ γὰρ τὸ β θ, τεταρτημόριόν ἐστι, τῷ δὲ β θ, ἴσον ἐστὶ τὸ μ ν, κατὰ τὴν θ΄: τοῦ παρόντος, ἄρα καὶ τὸ μ ν, τεταρτημόριόν ἐστιν. ἀλλὰ καὶ τὸ η ζ, ὁμοίως τεταρτημόριόν ἐστι, τῷ δὲ η ζ, ἴσον ἐστὶ τῷ η μ, κατὰ τὸν ε΄: ὅρον τοῦ α΄: τοῦ παρόντος, ἄρα τὸ μ ν, διάστημα ἴσον ἐστὶ τῷ μ η. ὁ ἄρα γραφόμενος κύκλος τῷ μ ν, διαστήματι διέρχεται καὶ διὰ τοῦ η, οἷος ὁ κ ν η, ἅπτεται δὲ ὁ κ ν η, κύκλος τοῦ α β, παραλλήλου, ἅπτεται ἄρα ὁ αὐτὸς καὶ τοῦ γ δ, κατὰ τὴν ς΄: τοῦ παρόντος, διέρχεται δὲ καὶ διὰ τοῦ δοθέντος η, σημείου, ὡς δέδεικται, δοθέντος ἄρα σημείου ἐν σφαίρᾳ μεταξὺ δύο κύκλων παραλλήλων τε καὶ ἴσων, κύκλος μέγιστος διὰ τοῦ δοθέντος γέγραπται σημείου, ἐπτόμενος ἑκατέρου τῶν παραλλήλων.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω τὸ δοθὲν η, σημεῖον ἐξ ἴσου ἀφεστάμενον τῶν β, δ. τούτου δὲ κειμένου, γραφήτω διὰ τοῦ ε, πόλου, καὶ η, σημείου μέγιστος κύκλος ὁ ε α γ δ β, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ις΄: τοῦ παρόντος, καὶ ἔστωσαν τὰ β θ, η κ, τόξα ἴσα τεταρτημορίῳ ἑκάτερον, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ ζ, πόλου διαστήματι τῷ ζ θ, γραφήτω ὁ θ λ ι, παράλληλος, ἀπὸ δὲ τοῦ η, διαστήματι τῷ η κ, γραφήτω ὁ κ λ α, κύκλος τέμνων τὸν θ ι, παράλληλον κατὰ τὸ λ. διὰ δὲ τῶν ζ, καὶ λ, διήχθω ὁ ζ λ ε, μέγιστος, τέμνων τὸν α β, παράλληλον κατὰ τὸ μ. εἶτα ἀπὸ τοῦ λ, διαστήματι τῷ λ μ, γραφήτω ὁ ν μ η, καὶ οὗτος ἔσται ὁ ζητούμενος. ἐπεὶ γὰρ τὸ β θ, τεταρτημόριόν ἐστι, πάντως γε καὶ τὸ μ λ, ὁμοίως τεταρτημόριόν ἐστιν, ἴσα γὰρ κατὰ τὴν θ΄: τοῦ παρόντος, ὥσπερ καὶ τὸ α ι, ἀλλὰ καὶ τὸ η λ, τεταρτημόριόν ἐστι, γέγραπται γὰρ ὁ κ λ ν, τῷ η κ, διαστήματι τεταρτημορίῳ ὄντι κατὰ τὴν κατασκευὴν, ἄρα ὁ κέντρῳ μὲν τῷ λ, διαστήματι δὲ τῷ λ ν, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ η, οὗτος δ' ἐστιν ὁ ν μ, ἄρα ὁ ν μ, διέρχεται καὶ διὰ τοῦ η, δοθέντος σημείου. ἀλλ' ὁ ν μ η, ἅπτεται τοῦ α β, κατὰ τὴν κατασκευὴν, ἅπτεται ἄρα ὁ αὐτὸς καὶ τοῦ γ δ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ς΄: τοῦ παρόντος, διέρχεται δὲ καὶ διὰ τοῦ η, ὡς δέδεικται, γέγονεν ἄρα τὸ προσταχθέν.

Theod: Sf: Lib. 2. Fig. 15.



Ὅτι δὲ ὁ κ λ ν, μέγιστος κύκλος τέμνει τὸν θ ι, δῆλον. τὸ γὰρ β θ, τεταρτημόριόν ἐστιν, ὥστε τὸ β κ, μεῖζόν ἐστι τεταρτημορίου, ἀπώτερον ἄρα ἐστὶ τὸ κ, τοῦ θ, διέρχεται δὲ ὁ μὲν θ ι, διὰ τοῦ θ, ὁ δὲ κ λ ν, διὰ τοῦ κ, καὶ τοῦ μὲν θ ι, πόλος ἐστὶ τὸ ε, σημεῖον, ὅπερ καὶ τοῦ α β, καὶ γ δ, τοῦ δὲ κ λ ν, τὸ η, ὁ κ λ ν, ἄρα οὔτε παράλληλός ἐστι τῷ θ ι, ὡς μὴ ἔχων τὸν αὐτὸν πόλον, οὔ-

τε μὴν ἅπτεται αὐτοῦ, ὡς ἀφισταμένων τῶν θ, καὶ κ, σημείων ἀλλήλων, τέμνει ἄρα αὐτόν.

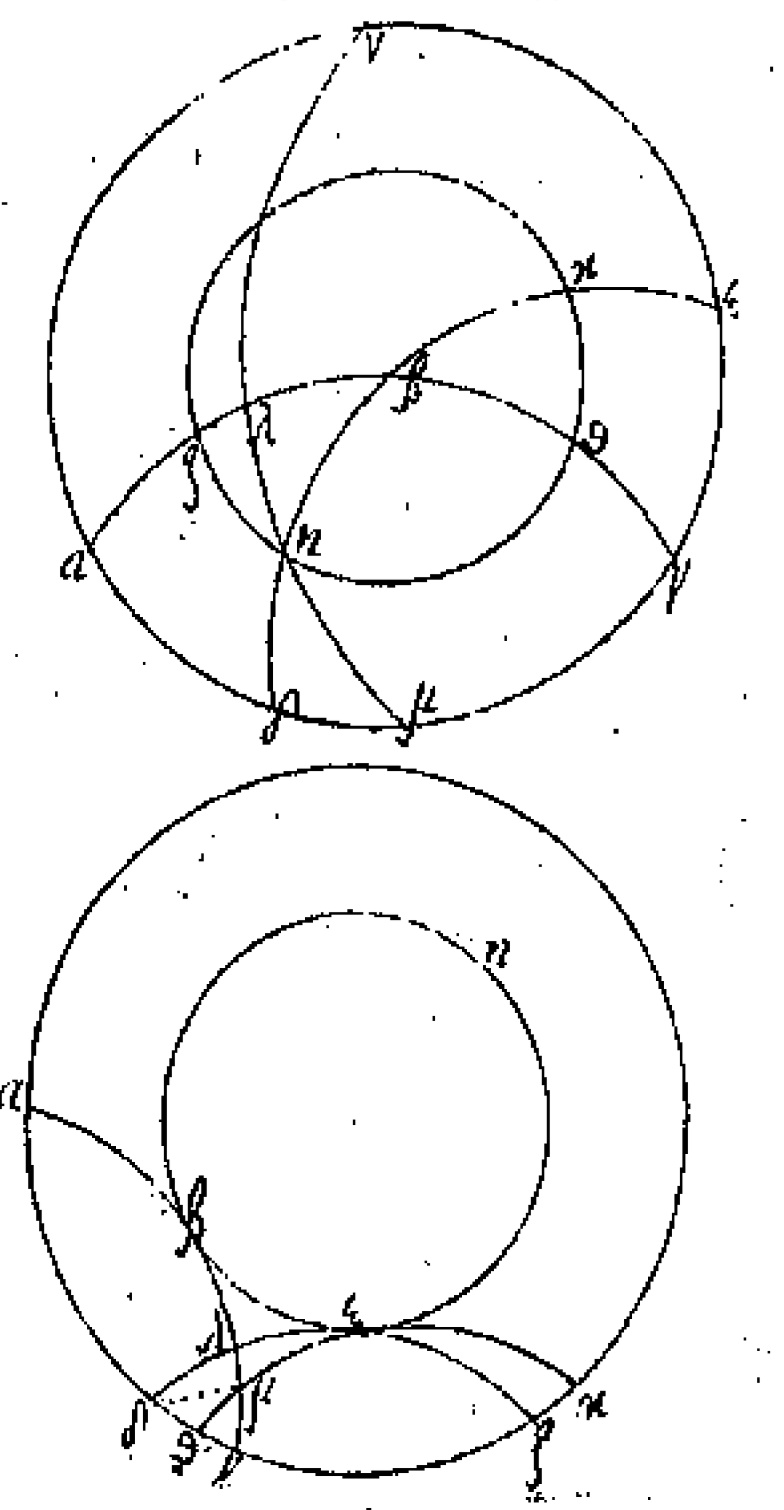
Πρότασις ΙΕ΄: Θεώρημα.

Δύο μέγιστοι ἐν σφαίρᾳ κύκλοι, ἐὰν ὅμοια τόξα παραλλήλων κύκλων ἐναπολαμβάνωσιν, ἢ ἄμφω διὰ τῶν πόλων διέρχονται τῶν παραλλήλων, ἢ τοῦ αὐτοῦ ἑκάτερος ἅπτεται, ἢ γοῦν τοὺς παραλλήλους ἑκάτερος τέμνει.

Κύκλοι μέγιστοι οἱ α β γ, δ β ε, ἀπολαμβανέτωσαν ὅμοια τόξα τῶν α δ γ ε, ζ η θ κ, παραλλήλων τὰ α δ, ζ η. καὶ κείσθω τὸν α β γ, κύκλον διὰ τῶν πόλων τῶν α δ γ ε, ζ η θ κ, διέρχεσθαι παραλλήλων. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ δ β ε, διὰ τῶν πόλων τῶν αὐτῶν διέρχεται, τουτέστι τὸ β, σημεῖον, καθ' ὃ οἱ α β γ, δ β ε, τέμνονται κύκλοι, πόλος ἐστὶ τῶν α δ γ ε, ζ η θ κ, παραλλήλων. εἰ γὰρ μὴ, ἔστω πόλος τῶν αὐτῶν τὸ λ, σημεῖον, καὶ διὰ τῶν η, καὶ λ, γραφήτω κύκλος ὁ μ η λ ν, κατὰ τὴν ις΄: τοῦ α΄: τοῦ παρόντος, καὶ ἐπεὶ οἱ α β γ, μ λ ν, μέγιστοι κύκλοι διὰ τῶν πόλων τῶν α δ γ ε, ζ η θ κ, παραλλήλων διέρχονται, πάντως γε κατὰ τὴν θ΄: τοῦ παρόντος ὅμοια τόξα ἐναπολαμβάνουσιν, ἄρα τὰ α μ, ζ η, ὅμοιά εἰσι, κατὰ τὴν αὐτήν. ἀλλὰ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ὅμοιά εἰσι καὶ τὰ α δ, ζ η, ἄρα καὶ τὰ α μ, α δ, ὅμοιά εἰσιν, ὅπερ ἄτοπον, οὐκ ἄρα τὸ λ, σημεῖον πόλος ἐστὶ τῶν ῥηθέντων παραλλήλων, ἀλλ' οὐδὲ ἄλλο τι, τὸ αὐτὸ γὰρ ἕψεται ἄτοπον. τὸ β, ἄρα πόλος ἐστὶ τῶν αὐτῶν. ὅπερ ἦν τὸ α΄:

Ἀπολαμβανέτωσαν αὖθις οἱ α β γ, δ ε ζ, μέγιστοι κύκλοι ὅμοια τόξα τῶν α γ ζ, β ε η, παραλλήλων τὰ α δ, β ε. καὶ κείσθω τὸν α β γ, ἅπτεσθαι τοῦ β ε η, κατὰ τὸ β, σημεῖον. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ δ ε ζ, ἅπτεται τοῦ αὐτοῦ κατὰ τὸ ε, εἰ γὰρ μὴ, ἁπτέσθω τοῦ β ε η, κατὰ τὸ ε, ὁ θ ε κ, καὶ ἐπεὶ οἱ ζ ε δ, θ ε κ, μέγιστοί εἰσι, καὶ τέμνονται ἀλλήλοις κατὰ τὸ ε, πάντως γε ὁ θ ε κ, οὐ διέρχεται διὰ τοῦ δ. εἰ γὰρ δυνατὸν, διελθέτω, ὡς ὁ δ μ ε κ. κατὰ τὴν ι΄: ἄρα τοῦ παρόντος τὰ δ λ ε, δ μ ε, τόξα ἡμικύκλια ἂν εἴησαν. ἀλλὰ τὸ δ ε, ἴσον ἐστὶ τῷ α β, διὰ τὸ ἴσα εἶναι τὰ α β γ, δ ε ζ, τόξα κατὰ τὴν ιβ΄: τοῦ παρόντος, ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν α β, β γ, ἡμικύκλιόν ἐστι, καὶ τὸ α β γ, τόξον κύκλος, ὅπερ ἀδύνατον, ἄρα θ ε κ, οὐ διέρχεται διὰ

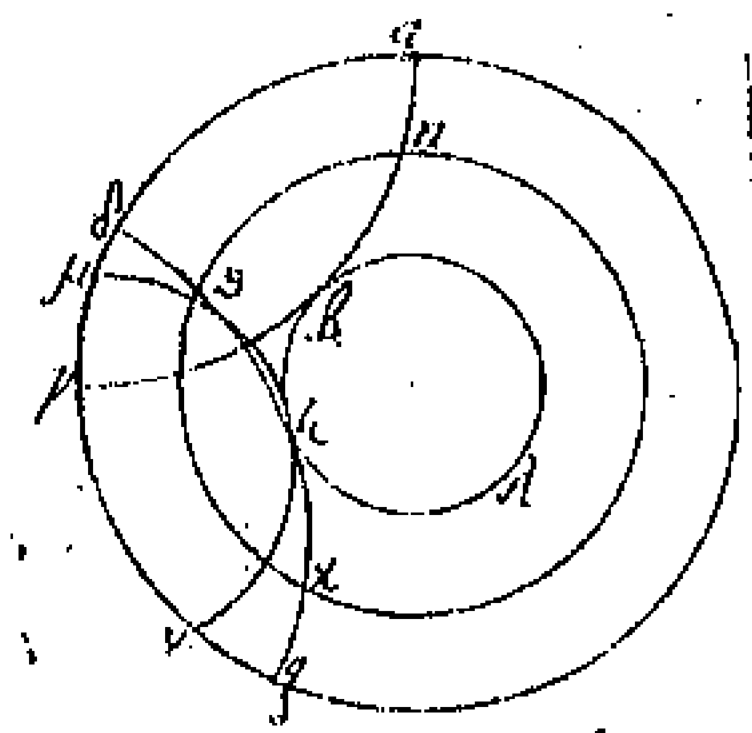
Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 16.



τῇ δ. ἐπεὶ δὲ ἅπτεται τοῦ β ε η, κατὰ τὸ ε, ἅπτεται δὲ τοῦ αὐτοῦ καὶ ὁ α β γ, κατὰ τὸ β, ἄρα κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ιβ′: τὰ α θ, β ε, τόξα ὅμοιά εἰσιν, ἀλλὰ καὶ τὰ α δ, β ε, ὅμοιά εἰσι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα τὰ α δ, α θ, ὅμοιά εἰσιν, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ θ ε κ, ἅπτεται τοῦ β ε η, οὐδ' ἄλλος τις παρὰ τὸν δ ε ζ. ἄρα ὁ δ ε ζ, ἅπτεται τοῦ β ε η, κατὰ τὸ ε, ὅπερ ἔδει τὸ β′:

Ἀπολαμβανέτωσαν τελευταῖον οἱ α β γ, δ ε ζ, μέγιστοι κύκλοι ὅμοια τόξα τῶν α γ ζ, η θ κ, παραλλήλων τὰ α δ, η θ. καὶ κείσθω τὸν α β γ, τέμνειν τὸν η θ κ. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ δ ε ζ, τέμνει τὸν αὐτὸν η θ κ. Ἐπεὶ γὰρ ὁ α β γ, πλαγίως τέμνει τὸν η θ κ, οὐ γὰρ διὰ τῶν πόλων αὐτοῦ διέρχεται, πάντως γε κατὰ τὴν ζ′: τοῦ παρόντος, ἅπτεται δύο κύκλων ἴσων τε ἀλλήλοις καὶ παραλλήλων τῷ τεμνομένῳ, ἀπτέσθω δὴ τοῦ β ε λ, κατὰ τὸ β, διὰ δὲ τοῦ θ, σημείου γραφήτω κύκλος μέγιστος ἁπτόμενος τοῦ β ε λ, κατὰ τὴν ιδ′: τοῦ παρόντος, καὶ πάντως γε συμπεσεῖται τῷ δ ε ζ. εἰ γὰρ μή, ἔστω οὗτος ὁ μ θ ε ν. καὶ ἐπεὶ οἱ α β γ, μ θ ε ν, μέγιστοι κύκλοι ἅπτονται τοῦ β ε λ, παραλλήλου, τοὺς δὲ λοιποὺς η θ κ, α γ ζ, τέμνουσι, πάντως γε κατὰ τὴν ιβ′: τοῦ παρόντος τὰ α μ, η θ, τόξα ὅμοιά εἰσιν, ἀλλὰ καὶ τὰ α δ, η θ, ὅμοιά εἰσι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα τὰ α δ, α μ, ὅμοιά ἐστι τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἄτοπον, ὁ ἁπτόμενος ἄρα τοῦ β ε λ, παραλλήλου μέγιστος κύκλος, καὶ διὰ τοῦ θ, διερχόμενος συμπίπτει τῷ δ ε ζ. ὥστε ὁ δ ε ζ, ἅπτεται τοῦ β ε λ, κύκλου. καὶ ἐπεὶ ἅπτεται τοῦ ἐλάσσονος τῶν παραλλήλων κύκλων, πάντως γε τέμνει τοὺς λοιπούς, τέμνει ἄρα τὸν η θ κ, ὅπερ ἔδει τὸ γ′:

Theod: Sf: Lib. 2. Fig.17.



Πρότασις Ις′: Θεώρημα.

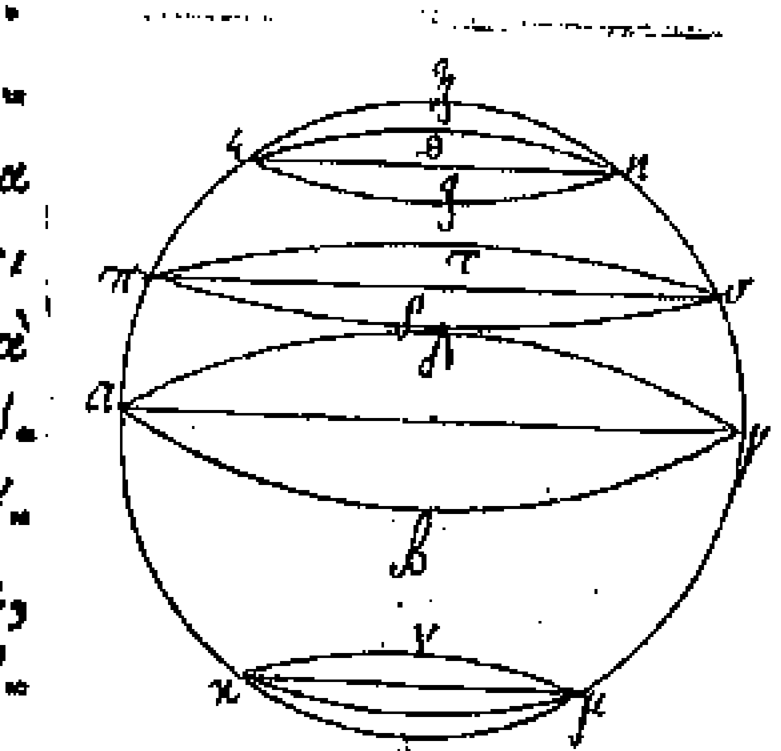
Τῶν ἐν σφαίρᾳ παραλλήλως κειμένων κύκλων μεγίστῳ τινὶ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλῳ, οἱ μὲν ἐξ ἴσου τοῦ μεγίστου ἀφιστάμενοι κύκλου, καὶ ὧν μεταξὺ καὶ τοῦ μεγίστου τὰ τόξα ἴσα ἐστίν, ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν, ὁ δὲ ἔλαττον ἀφιστάμενος, καὶ οὗ μεταξὺ καὶ τοῦ μεγίστου ἔλαττον ἐμπεριλαμβάνεται τόξον, μείζων ἐστίν, οὗ δὲ μεταξὺ μεῖζον ἐμπεριλαμβάνεται τόξον, ἐλάττων ἐστίν.

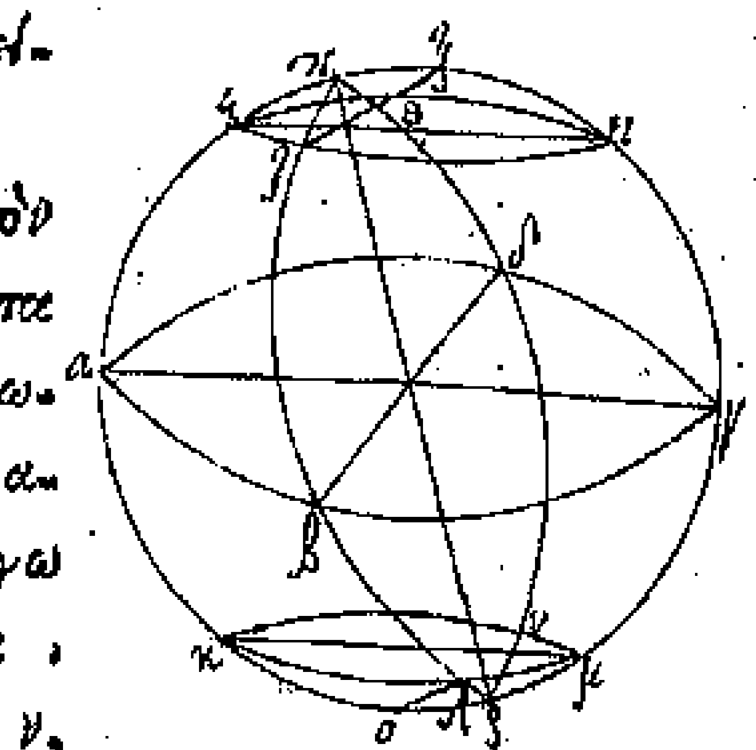
Ἔστω ἐν σφαίρᾳ κύκλος μέγιστος ὁ α β γ δ, καὶ τούτῳ παράλληλοι οἱ ε ζ η θ, κ λ μ ν, ἐξ ἴσου ἑκάτερος τοῦ α β γ δ, ἀφιστάμενος, ἤτοι ἔστωσαν τὰ α ε, α κ, τόξα, καὶ γ η, γ μ, ἴσα. Λέγω τοὺς ε ζ η θ, κ λ μ ν, παραλλήλους κύκλους, ἴσους ἀλλήλοις εἶναι. Γραφήτω κύκλος μέγιστος τέμνων τοὺς α β γ δ, ε ζ η θ, κ λ μ ν, κύκλους. καὶ ἐπεὶ ὁ αὐτὸς κύκλος ἤτοι διὰ τῶν πόλων τῶν αὐτῶν παραλλήλων διελεύσεται

σεται κύκλων, ἢ μὴ διὰ τῶν πόλων. Κείσθω α′: διέρχεσθαι διὰ τῶν ξ, καὶ ο, πόλων, ὡς ὁ ξ α ο γ. καὶ ἐπεὶ μέγιστος κύκλος ὁ ξ α ο γ, διὰ τῶν πόλων διέρχεται τῶν ε ζ η θ, α β γ δ, κ λ μ ν, πάντως γε κατὰ τὴν ιβ′: τοῦ α′: τοῦ παρόντος δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτοὺς τέμνει, αἱ ἄρα ε η, α γ, κ μ, κοιναὶ τομαὶ τῶν παραλλήλων καὶ μεγίστου τοῦ ξ α ο γ, κύκλου διάμετροί εἰσι τῶν ε ζ η θ, α β γ δ, κ λ μ ν, παραλλήλων κύκλων. Αὖθις ἐπεὶ οἱ α γ β δ, ξ α ο γ, κύκλοι μέγιστοί εἰσι, πάντως γε κατὰ τὴν ι: τοῦ α′: τοῦ παρόντος δίχα ἀλλήλους τέμνονται. ἴσον ἄρα τὸ α ξ γ, τῷ α ο γ, ἀλλὰ καὶ τὸ α ε, τῷ α κ, ἴσον ἐστιν, ὥσπερ καὶ τὸ γ η, τῷ γ μ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα καὶ τὰ ε ξ η, κ ο μ, τόξα ἴσα ἐστιν, ὥστε κατὰ τὴν κθ′: τοῦ γ′: τοῦ στοιχειωτοῦ, αἱ ε η, κ μ, ἴσαι εἰσιν, ἀλλ' αἱ ε η, κ μ, διάμετροί εἰσι τῶν ε ζ η θ, κ λ μ ν, ὡς δέδεικται, κύκλων, ἄρα οἱ ε ζ η θ, κ λ μ ν, κύκλοι ἴσοι εἰσιν.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ α π, τόξον ἔλαττον τοῦ α κ. Λέγω, ὅτι ὁ π ρ σ τ, κύκλος μείζων ἐστὶ τοῦ κ λ μ ν. τοῦ γὰρ ξ α ο γ, μεγίστου κύκλου, ὡς εἴρηται, γεγραμμένου, οἱ π ρ σ τ, α β γ δ, κ λ μ ν, κύκλοι δίχα τμηθήσονται, ὥστε αἱ π σ, α γ, κ μ, διάμετροί εἰσι τῶν π ρ σ τ, α β γ δ, κ λ μ ν, κύκλων. καὶ ἐπεὶ τὰ α ξ γ, α ο γ, τόξα ἴσα εἰσιν, ὡς δέδεικται, πάντως γε ἀφαιρουμένων τῶν α π, α κ, καὶ γ σ, γ μ, ἀνίσων τόξων, ἐναπολείπεται τὸ π ξ σ, μεῖζον τοῦ κ ο μ, καὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν κθ′: τοῦ γ′: ἡ π σ, μείζων ἐστὶ τῆς κ μ. ἀλλ' ἡ μὲν π σ, διάμετρός ἐστι τοῦ π ρ σ τ, ἡ δὲ κ μ, τοῦ κ λ μ ν, κύκλου, ἄρα ὁ π ρ σ τ, μείζων ἐστὶ τοῦ κ λ μ ν, ὅπερ ἔδει τὸ β′:

Theod. Sf. Lib. 2. Fig.18.





Κείσθω δ' ἔτι τὸν π β ρ δ, γραφόμενον κύκλον, τὸν τοὺς α β γ δ, ε ζ η θ, κ λ μ ν, παραλλήλους τέμνοντα μὴ διὰ τῶν πόλων ξ, ο, αὐτῶν διέρχεσθαι. καὶ ἔστωσαν τὰ β ζ, β λ, δ θ, δ ν, τόξα τὰ μεταξὺ τῶν παραλλήλων καὶ τοῦ μεγίστου α β γ δ, κύκλου ἴσα. Λέγω καὶ οὕτω τοὺς ε ζ η θ, κ λ μ ν, παραλλήλους ἴσους εἶναι. Γραφήτω γὰρ διὰ τῶν πόλων τῶν τε ε ζ η θ, κ λ μ ν, παραλλήλων, καὶ τοῦ β π δ ρ, ὁ ξ α ο γ, κατὰ τὴν ιϛ′: τοῦ α′: τοῦ παρόντος, καὶ ἐπεὶ ὁ ξ α ο γ, διὰ τῶν πόλων τῶν τε παραλλήλων καὶ τοῦ π β ρ δ, διέρχεται, πάντως γε δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτοὺς τέμνει, ἄρα ὁ ξ α ο γ, ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν β π δ ρ, καὶ τὰ π α ρ, π γ ρ, τόξα ὅμοια ἐπὶ τῆς π ρ, ἐφίσταται διαμέτρου, κατὰ δὲ τὸ α′: πόρισμα τῆς ιβ′: τοῦ α′: τοῦ παρόντος, καὶ οἱ π β ρ δ, α β γ δ, διὰ τῶν πόλων τοῦ ξ α ο γ, διέρχονται. ἔστι δὲ τὸ β, σημεῖον κοινόν, καθ' ὃ τέμνονται οἱ β γ δ ε, π β ρ δ, μέγιστοι κύκλοι, ἄρα τὸ β,

 πόλος

πόλος ἐστὶ τοῦ ξ α ο γ, ὥστε τὰ β π, β ρ, τόξα ἴσα ἐστὶν, ἀφαιρουμένων δὲ τῶν β ζ, β λ, ἴσων, ἐναπολείπονται δήπουθεν τὰ ζ π, λ ρ, ἴσα. Αὖθις ἐπεὶ οἱ μέγιστοι κύκλοι δίχα τέμνονται κατὰ τὴν ι΄: τοῦ α΄: τοῦ παρόντος, τὸ π γ ρ, ἡμικύκλιόν ἐστιν. ἀλλὰ καὶ τὸ ξ γ ο, ἡμικύκλιόν ἐστιν, ἄρα τὰ π γ ρ, ξ γ ο, ἴσα ἐστὶν, κοινοῦ γοῦν ἀφαιρουμένου τοῦ ξ γ ρ, ἐναπολείπονται ἴσα τὰ ξ π, ο ρ. δέδεικται δὲ ὅτι ἐπὶ τῆς π ρ, διαμέτρου ἐφίσταται ὅμοια τόξα τὰ π α ρ, π γ ρ, ὀρθὰ ὄντα πρὸς τὸ τοῦ π β ρ δ, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ ἀφῃρέθησαν ἴσα τόξα ἀπὸ μὲν τοῦ π β ρ δ, κύκλου τὰ ζ π, λ ρ, ἀπὸ δὲ τῶν π α ρ, π γ ρ, τόξων τὰ π ξ, ο ρ, ἄρα κατὰ τὴν ι΄: τοῦ παρόντος, τὰ ξ ζ, ο λ, διαστήματα ἴσα ἐστὶν, ἀλλὰ τὰ ξ, καὶ ο, σημεῖα πόλοι εἰσὶ τῶν ε ζ η θ, κ λ μ ν, παραλλήλων κύκλων, ἄρα κατὰ τὸν ε΄: ὅρον τοῦ α΄: τοῦ παρόντος οἱ ε ζ η θ, κ λ μ ν, κύκλοι ἴσοι εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἐὰν δὲ τὸ β ζ, ἔλαττον εἴη τοῦ β λ, πάντως γε τὸ ζ π, μεῖζον ἔσται τοῦ λ ρ, καὶ ἔτι τὸ ζ ξ, διάστημα τοῦ ο λ, ὁ δὲ μεῖζον ἀφιστάμενος τοῦ πόλου μείζων ἐστὶ, μείζων ἄρα καὶ ὁ ε ζ η θ, τοῦ κ λ μ ν.

Πρότασις ΙΖ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσι ἴσοι κύκλοι παράλληλοι μεγίστῳ τινὶ ἐν σφαίρᾳ κύκλῳ, τὰ τοῦ μεγίστου κύκλου τόξα τὰ μεταξὺ αὐτῶν τε καὶ τοῦ, πρὸς ὃν παραλλήλως ἔχουσι, μεγίστου κύκλου ἐναπολαμβανόμενα ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

Ἔστωσαν δὴ ἐπὶ τῶν αὐτῶν σχημάτων παράλληλοι οἱ ε ζ η θ, κ λ μ ν, κύκλοι τῷ α β γ δ, μεγίστῳ κύκλῳ, καὶ κείσθω τὸν ξ α ο γ, μέγιστον κύκλον τέμνειν τοὺς ε ζ η θ, κ λ μ ν, παραλλήλους. Λέγω τὰ α ε, α κ, καὶ γ η, γ μ, ἐναπολαμβανόμενα τόξα μεταξὺ αὐτῶν τε καὶ τοῦ α β γ δ, μεγίστου κύκλου ἴσα εἶναι. εἰ γὰρ μὴ, ἔσται τὸ α ε, φέρ᾽ εἰπεῖν ἔλαττον τοῦ α κ, καὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ὁ ε ζ η θ, κύκλος μείζων ἂν εἴη τοῦ κ λ μ ν, ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

Πρότασις ΙΗ΄: Θεώρημα.

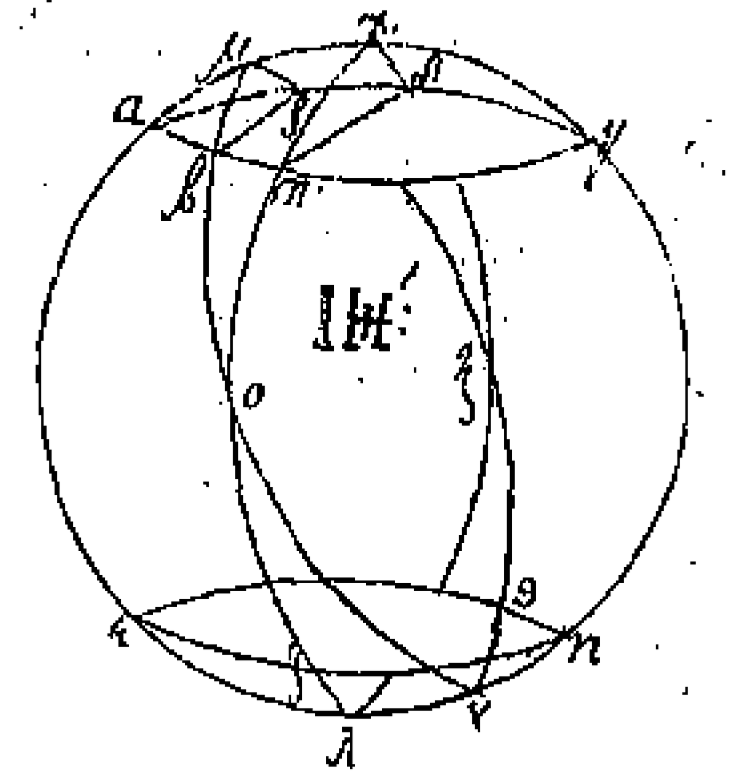
Ἐὰν κύκλος μέγιστος ἐν σφαίρᾳ ἐλάσσονάς τε καὶ παραλλήλους τέμνῃ κύκλους μὴ διὰ τῶν πόλων αὐτῶν διερχόμενος, οὐ τέμνει αὐτοὺς δίχα, καὶ τὰ τῶν παραλλήλων μείζονα τμήματα πρὸς τὸν ἐγγύτερον ἀφορῶσι πόλον.

Ἔστωσαν κύκλοι παράλληλοι οἱ α β γ δ, ε ζ η θ, ὧν πόλοι τὰ κ, καὶ λ, σημεῖα, καὶ τεμνέτω αὐτοὺς ὁ μ β ν ξ, μὴ διερχόμενος διὰ τῶν κ, καὶ λ, πόλων. Λέγω τὸν μ β ν ξ, μὴ δίχα τέμνειν τοὺς α β γ δ, ε ζ η θ, παραλλήλους. Γραφήτω γὰρ διὰ τῶν κ, καὶ λ, πόλων ὁ κ ο λ ξ, μέγιστος, καὶ ἐπεὶ ὁ κ ο λ ξ, διὰ τῶν πόλων τῶν α β γ δ, ε ζ η θ, διέρχεται κύκλων, πάντως γε κατὰ τὴν ιβ΄: τοῦ α΄: τοῦ παρόντος

δίχα

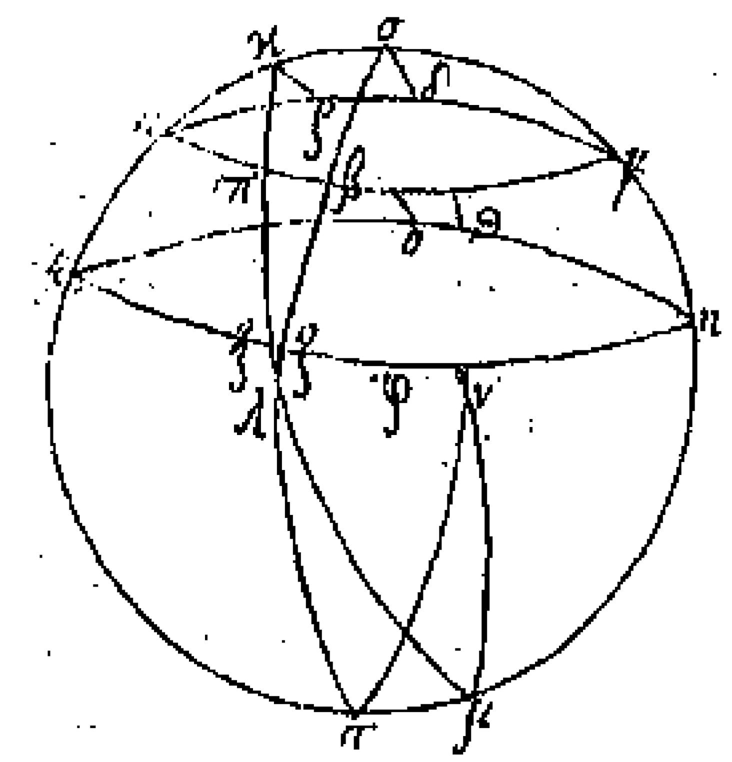
δίχα αὐτοὺς τέμνει, ὥστε τὸ π γ δ, τόξον ἡμικύκλιόν ἐστιν, ἄρα τὸ β γ ρ, μεῖζόν ἐστιν ἡμικυκλίου, τὸ δὲ β α ρ, ἔλαττον, ἀλλ᾽ ὁ α β γ δ, τέμνεται ὑπὸ τοῦ μ β ν ξ, μεγίστου κύκλου κατὰ τὰ β, καὶ ρ, ἄρα ὁ μ β ν ξ, μέγιστος κύκλος μὴ διερχόμενος διὰ τῶν πόλων τοῦ α β γ δ, οὐ τέμνει αὐτὸν δίχα. ὅπερ ἦν τὸ α΄: Ὅτι δὲ καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸν ἐγγύτερον ἀφορᾷ πόλον, δῆλον, τὸ γὰρ β γ ρ, τμῆμα μεῖζον ὂν πρὸς τὸν κ, ἀφορᾷ πόλον. τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται μηδὲ τὸν ε ζ η θ, δίχα τέμνειν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 19.

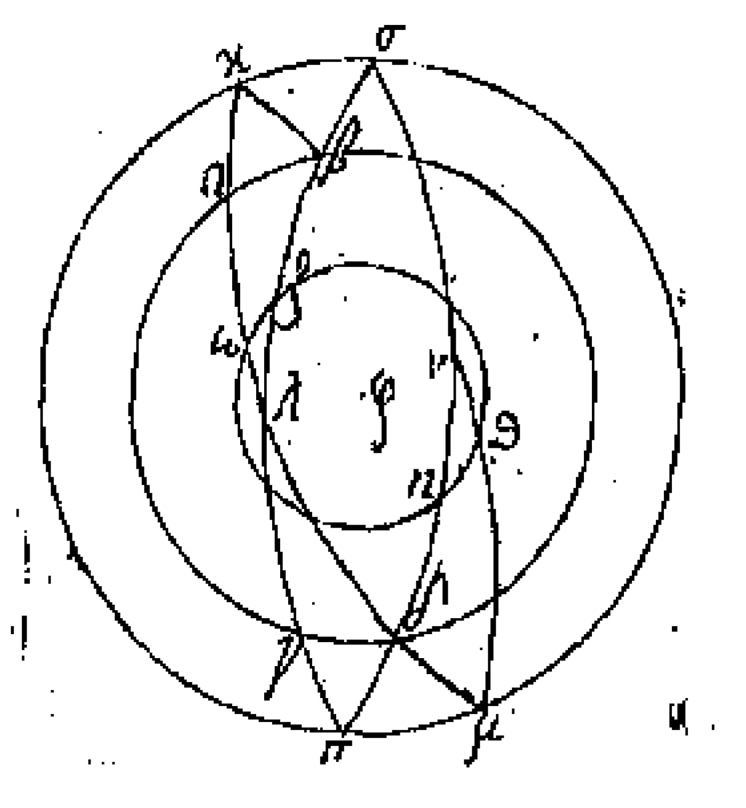


Πρότασις ΙΘ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλοι παράλληλοί τε καὶ ἐλάσσονες ἐν σφαίρᾳ ὑπὸ μεγίστου τέμνωνται κύκλου, μὴ διὰ τῶν πόλων αὐτῶν διερχομένου, ὁ ἐγγύτερος τοῦ πόλου μᾶλλον ἀνίσως τέμνεται.



Ἔστωσαν κύκλοι παράλληλοί τε καὶ ἐλάσσονες οἱ α β γ δ, ε ζ η θ, καὶ τεμνέτω ἑκάτερον αὐτῶν ὁ κ λ μ ν, μέγιστος κύκλος κατὰ τὰ ξ ο, π ρ, μὴ διερχόμενος διὰ τῶν σ, τ, πόλων τῶν αὐτῶν. Λέγω, ὅτι ὁ α β γ δ, ἐγγύτερος ὢν τοῦ σ, πόλου μᾶλλον ἀνίσως ὑπὸ τοῦ κ λ μ ν, τέμνεται κύκλου, ἢ ὁ ε ζ η θ. Ὑποκείσθω γὰρ τὸν σ λ τ ν, μέγιστον κύκλον διὰ τῶν σ, καὶ τ, διέρχεσθαι πόλων. καὶ ἐπεὶ ὁ σ λ τ ν, μέγιστος κύκλος διὰ τῶν πόλων τῶν α β γ δ, ε ζ η θ, παραλλήλων διέρχεται, δῆλον, ὅτι τὸ μὲν ζ η, τόξον ὅμοιόν ἐστι τῷ β γ, καὶ τὸ η θ, τῷ γ δ, κατὰ τὴν θ΄: τοῦ παρόντος. ὥστε ὅλον τὸ ζ η θ, ὅλῳ τῷ β γ δ, ὅμοιόν ἐστι, τὸ δὲ ξ η ο, οὐκ ἔστιν ὅμοιον τῷ π γ ρ, ἄλλως γὰρ ὁ κ λ μ ν, διὰ τῶν πόλων τῶν α β γ δ, ε ζ η θ, παραλλήλων διήρχετο, ὅπερ ἀντίκειται τῇ ὑποθέσει. ἀλλὰ τό, τε ξ, τοῦ ζ, καὶ τὸ ο, τοῦ θ, ἔλαττον ἀφίστανται, ἤπερ τὸ π, τοῦ β, καὶ τὸ ρ, τοῦ δ, ὡς δειχθήσεται, ἄρα τὸ ξ η ο, ἐλάττονα λόγον ἔχει πρὸς τὸ ξ ε ο, ὡς ἔλαττον αὐτοῦ προσλαμβάνον μέρος, ἤπερ τὸ π γ ρ, πρὸς τὸ π α ρ, τὸ ἄρα π γ ρ, ὡς μείζονα λόγον ἔχον πρὸς τὸ π α ρ, μείζονι αὐτοῦ ὑπεροχῇ ὑπερέχει, ἢ τὸ ξ η ο, τοῦ ξ ε ο, καὶ ἑπομένως μᾶλλον ἀνίσως τέμνεται ὑπὸ τοῦ κ λ μ ν, μεγίστου κύκλου, ὅπερ ἦν τὸ ὑποτεθέν. Ὅτι δὲ τὸ ξ,



τοῦ ζ,

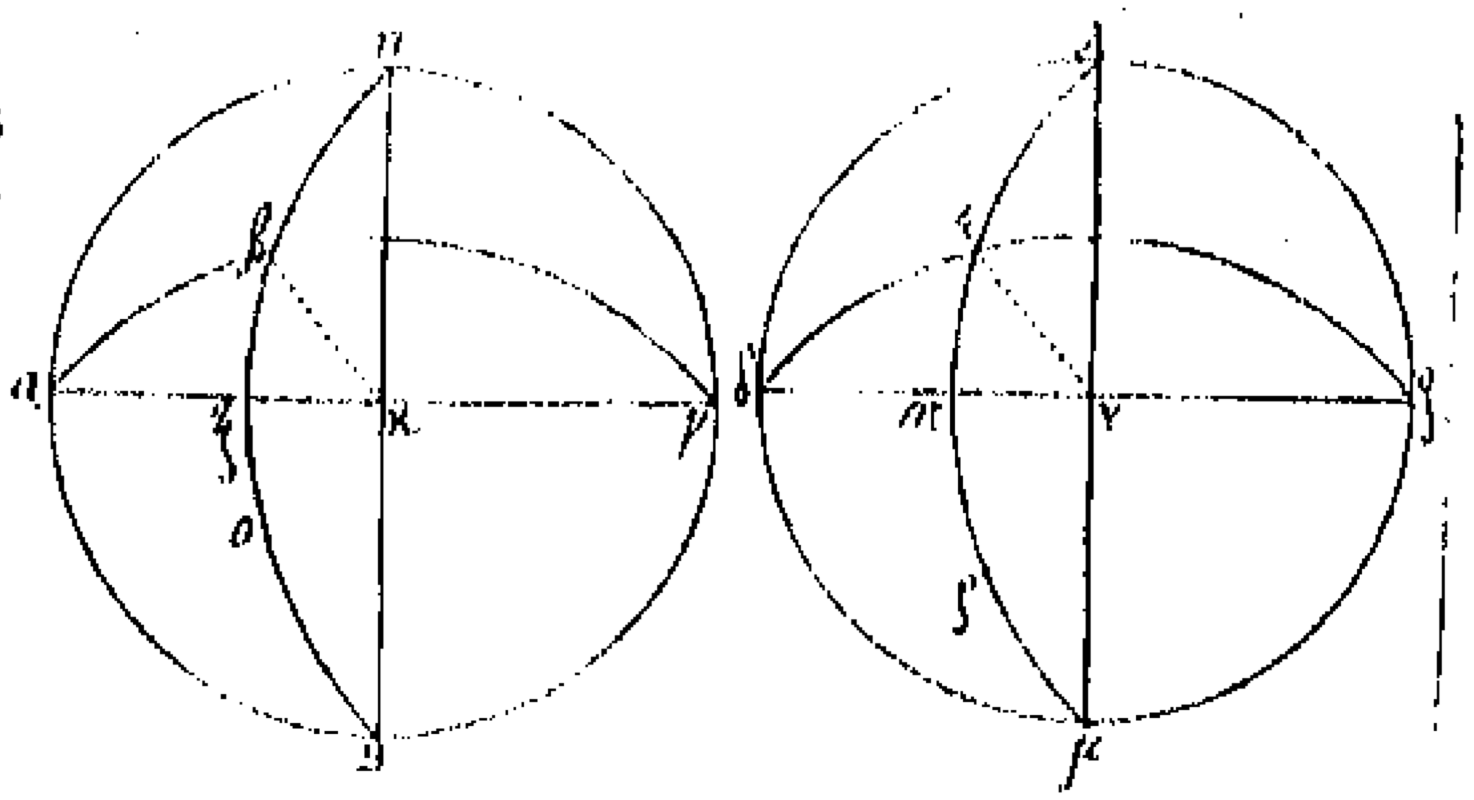
τοῦ ζ, ἔλαττον ἀφίσταται, ἤπερ τὸ π, τοῦ β, δῆλον. Γραφήτωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ φ, πόλου τοῦ σ κ τ μ, μεγίστου κύκλου οἱ α γ δ β, ε η θ ζ, παράλληλοι κύκλοι, καὶ ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν κ λ μ ν, σ λ τ ν, διὰ τῶν πόλων τῶν σ κ τ μ, α γ δ β, ε η θ ζ, διέρχεται, πάντως γε κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν θ': τοῦ παρόντος τὰ ε ζ, α β, κ σ, τόξα ὅμοιά εἰσιν, ὥστε ὃ μέρος τὸ ε ζ, τοῦ ε η θ ζ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ τὸ α β, τοῦ α γ δ β, καὶ τὸ κ σ, τοῦ κ τ μ σ, μείζων δὲ ὁ κ τ μ σ, τοῦ α γ δ β, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ κ σ, ὁμολόγον μέρος τοῦ α β, καὶ τὸ α β, ὁμοίως τοῦ ε ζ, μεῖζόν ἐστιν. ὥστε τῶν πλαγίως τεμνομένων κύκλων τὰ μὲν προσεγγίζοντα τῇ τομῇ μέρη, ἔλαττον ἀφίσταται, τὰ δὲ ἀπώτερον ὄντα, μεῖζον, καὶ μέγιστον μὲν ἐστὶ τὸ τεταρτημορίῳ ἀφιστάμενον, ὡς τὸ κ σ. τεταρτημορίῳ γὰρ τὰ κ, σ, τῶν λ, καὶ ν, ἀφίστανται, καθ' ἃ οἱ κύκλοι τέμνονται, μεῖζον δὲ τὸ μᾶλλον ἀφιστάμενον. ἀλλὰ τό, τε ξ, καὶ ζ, ἔλαττον τοῦ λ, ἀφίστανται, ἤπερ τὸ π, καὶ β, μεῖζον ἄρα τὸ π, τοῦ β, ἤπερ τὸ ξ, τοῦ ζ, ἀφίσταται. ὅπερ ἦν τὸ λειπόμενον.

Πρότασις Κ'. Θεώρημα.

Ἐπὶ τῶν ἴσων σφαιρῶν κύκλος κύκλῳ μᾶλλον ἐγκλινόμενός ἐστιν, οὗ ὁ πόλος ἔλαττον ἀφίσταται τοῦ πόλου τοῦ, ᾧ ἐγκλίνεται, κύκλου, ὧν δὲ οἱ πόλοι ἐξ ἴσου ἀφίστανται ἴσας καὶ τὰς ἐγκλίσεις ἔχουσιν.

Ἔστωσαν ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν ἐγκλινόμενοι κύκλοι οἱ α β γ, δ ε ζ, ὁ μὲν τῷ α θ γ η, μεγίστῳ κύκλῳ, οὗ κέντρον τὸ κ, ὁ δὲ τῷ δ μ ζ λ, οὗ κέντρον τὸ ν, καὶ κείσθω τὸν πόλον τοῦ α β γ, ἔλαττον ἀφίστασθαι τοῦ πόλου τοῦ α θ γ η, ἤπερ ὁ πόλος τοῦ δ ε ζ, τοῦ πόλου τοῦ δ μ ζ λ. Λέγω, ὅτι ὁ α β γ, κύκλος μᾶλλον ἐγκλίνεται τῷ α θ γ η. ἤπερ ὁ δ ε ζ, τῷ δ μ ζ λ. ἐπεὶ δὲ οἱ ἐγκλινόμενοι κύκλοι ἤτοι μέγιστοί εἰσιν, ἢ ἐλάσσονες. Ἔστωσαν α': μέγιστοι, καὶ ἀπὸ τῶν α, καὶ δ, σημείων, τῶν κοινῶν τομῶν τῶν α β γ, α θ γ η, καὶ δ ε ζ, δ μ ζ λ,

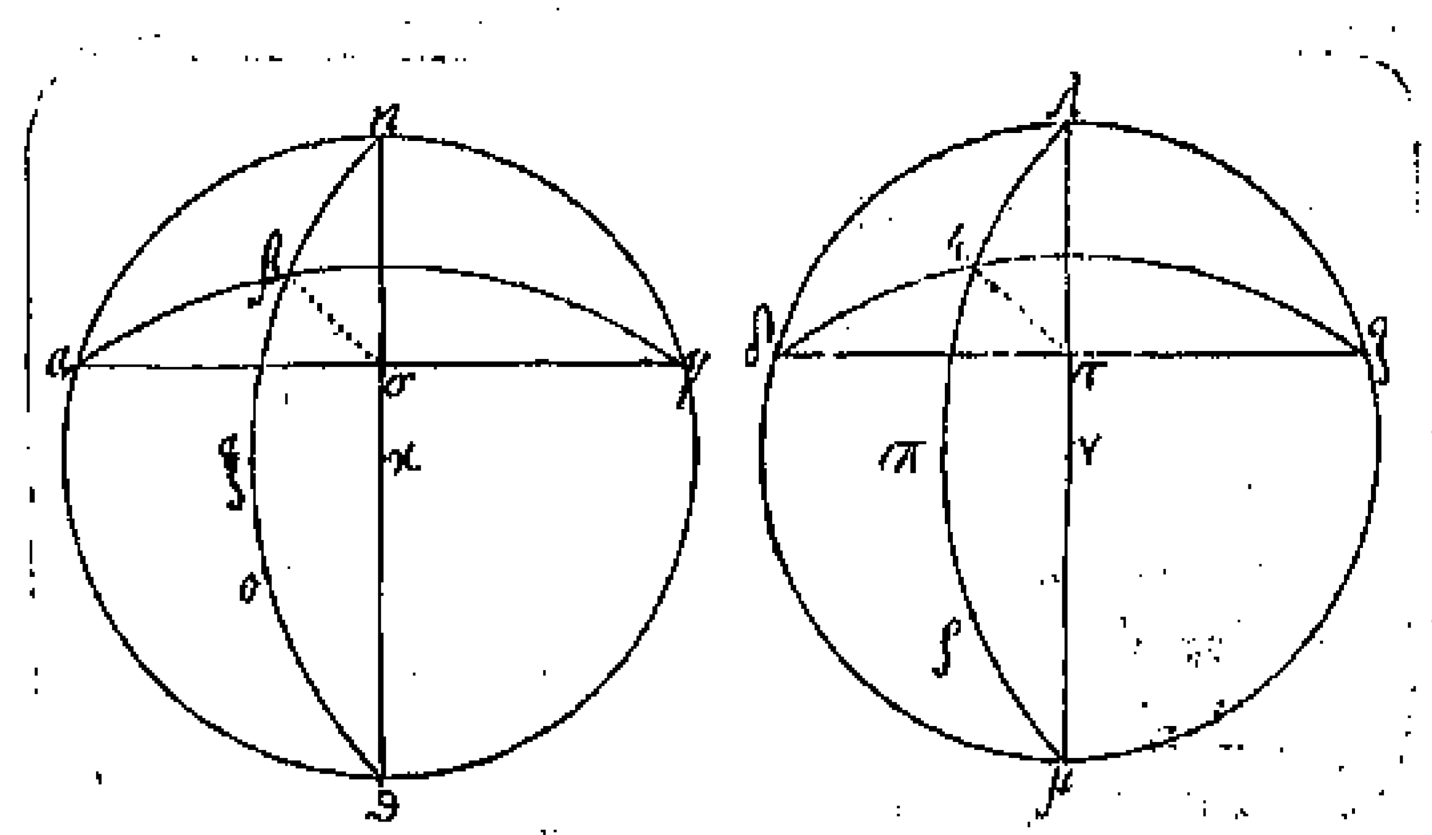
Theod: Sf: Lib. 2. Fig. 20.



ὡς ἀπὸ πόλων διαστήματι τεταρτημορίῳ γραφήτωσαν οἱ η β θ, λ ε μ, κύκλοι, οἳ καὶ μέγιστοί εἰσι κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιγ': τοῦ α': τοῦ παρόντος· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κ β, ν ε. καὶ ἐπεὶ οἱ α β γ, α θ γ η, μέγιστοι κύκλοι διὰ τῶν πόλων τοῦ η β θ, διέρχονται, πάντως γε καὶ ὁ η β θ, διὰ τῶν πόλων τῶν αὐτῶν διέρχεται κατὰ τὸ α': πόρισμα τῆς ιβ': τοῦ α': τοῦ παρόντος, καὶ ἑκάτερον δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει

κατὰ τὴν αὐτὴν πρότασιν. ὥστε οἱ πόλοι τούτου α β γ, καὶ α θ γ η, ἐπὶ τῆς περιφερείας ἐστὶ τοῦ η β θ, κύκλου. Ἔστω τοίνυν πόλος τοῦ μὲν α θ γ η, τὸ ξ, σημεῖον, τοῦ δὲ α β γ, τὸ ο. ἐπεὶ δὲ κατὰ τὸν δ': ὅρον τοῦ ια': τῶν στοιχ: τότε λέγεται ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν εἶναι, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν, πάντως γε ἡ γ κ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ η β θ, κύκλου ἐπίπεδον, διὰ τὸ ὀρθὸν εἶναι καὶ τὸν α θ γ η, κύκλον πρὸς τὸν η β θ. ὥστε κατὰ τὸν γ': ὅρον τοῦ αὐτοῦ, ἡ γ κ, ὀρθή ἐστι καὶ πρὸς τὴν κ η, καὶ κ β. ὁμοίως δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἡ ζ ν, ὀρθή ἐστι πρός τε τὴν ν λ, καὶ ν ε. ἄρα κατὰ τὸν ς': ὅρον τοῦ αὐτοῦ, ἡ ὑπὸ β κ η, γωνία κλίσις ἐστὶ τοῦ α β γ, κύκλου πρὸς τὸν α θ γ η, ἡ δὲ ὑπὸ ε ν λ, ὁμοίως κλίσις ἐστὶ τοῦ δ ε ζ, πρὸς τὸν δ μ ζ λ, ἀλλὰ τὸ ο β, ἴσον ἐστὶ τῷ ξ η, τεταρτημόριον γὰρ ἑκάτερον ἴσων κύκλων, κοινοῦ ἄρα ἀφαιρεμένου τοῦ ξ β, ἐναπολείπεται τὸ ο ξ, ἴσον τῷ β η. ὡσαύτως ἀφαιρεμένου καὶ τοῦ π ε, ἐναπολείπεται τὸ ρ π, ἴσον τῷ ε λ, ἀλλὰ τὸ ο ξ, ἔλαττόν ἐστι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τοῦ ρ π, ἔλαττον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ β η, τοῦ ε λ. ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ β κ η, ἐλάττων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ε ν λ, καί εἰσι τῶν κλίσεων γωνίαι, ὡς δέδεικται, ὁ ἄρα α β γ, κύκλος, οὗ ὁ πόλος ἔλαττον ἀφίσταται τοῦ πόλου τοῦ α θ γ η, κύκλου, μᾶλλον πρὸς τὸν αὐτὸν ἐγκέκλιται κύκλον.

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 21.



Ἔστωσαν δ' ἔτι οἱ α β γ, δ ε ζ, ἐλάσσονες κύκλοι ἐγκλινόμενοι πρὸς τοὺς α θ γ η, δ μ ζ λ, καὶ τοῦ μὲν α β γ, ὁ πόλος ἀφεστάθω ἧττον τοῦ πόλου τοῦ α θ γ η, κύκλου, ἤπερ ὁ τοῦ δ ε ζ, πόλος τοῦ πόλου τοῦ δ μ ζ λ. Λέγω τὸν α β γ, κύκλον μᾶλλον ἐγκλινόμενον εἶναι τῷ α θ γ η, κύκλῳ, ἢ τὸν δ ε ζ, τῷ δ μ ζ λ. Τῶν αὐτῶν γὰρ κατασκευασθέντων, καὶ τῶν σ β, τ ε, εὐθειῶν ἀχθεισῶν, εὐχερῶς δειχθήσεται, ὡς ἀνωτέρω, τὸν η ξ θ, εἶναι ὀρθὸν πρός τε τὸν α β γ, καὶ α θ γ η. ὁμοίως καὶ τὸν λ π μ, πρός τε τὸν δ ε ζ, καὶ δ μ ζ λ. ὥστε καὶ τοὺς πόλους τῶν μὲν α β γ, α θ γ η, ἐπὶ τῆς περιφερείας εἶναι τοῦ η ξ θ, τοὺς δὲ πόλους τούτου δ ε ζ, καὶ δ μ ζ λ, ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ λ π μ. εἶτα δειχθήσεται τὴν μὲν β η, περιφέρειαν ἴσην εἶναι τῇ ξ ο, τὴν δὲ λ ε, τῇ π ρ. ἀλλ' ἡ ξ ο, ὑπετέθη ἐλάττων τῆς π ρ, τὸ γὰρ ξ, πόλος ἐστὶ τοῦ α θ γ η, ὡς καὶ ἀνωτέρω ὑπετέθη, τὸ δὲ ο, τοῦ α β γ. καὶ τὸ μὲν π, τοῦ δ μ ζ λ, τὸ δὲ ρ, τοῦ δ ε ζ. δῆλον ἄρα ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ β σ η, γωνία ἐλάττων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ε τ λ, καὶ ἔστιν ἑκατέρα γωνία ἐγκλίσεως. ἄρα ὁ α β γ, οὗ ὁ πόλος ἔλαττον ἀφίσταται, μᾶλλον ἐγκλινόμενός ἐστιν, ἡ δ ε ζ, οὗ ὁ πόλος μᾶλλον ἀφίσταται. ὥστε ἐὰν αἱ ξ ο, π ρ, περιφέρειαι ἴσαι ὦσιν, ἴσαι δειχθήσονται καὶ αἱ β η, ε λ. καὶ ἑπομένως γωνία ἡ ὑπὸ β σ η, ἴση ἔσται τῇ ὑπὸ ε τ λ. ἄρα καὶ κύκλοι οἱ α β γ, δ ε ζ, ἐξ ἴσου ἐγκλινόμενοί εἰσιν, ὁ μὲν πρὸς τὸν α θ γ η, ὁ δὲ πρὸς τὸν δ μ ζ λ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι,

ΠΟΡΙΣΜΑ.

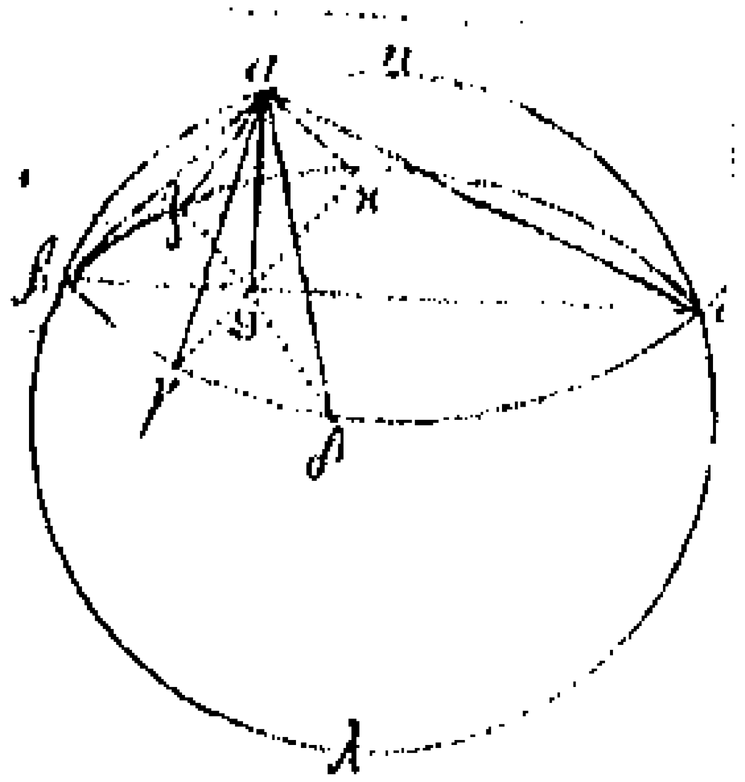
Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὅτι ἐὰν διὰ τῶν πόλων τοῦ τε ἐγκλινομένου, καὶ τοῦ, ᾧ ἐγκέκλιται ὁ αὐτὸς, μέγιστος διέλθῃ κύκλος, τὸ ἐναπολαμβανόμενον τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου ὑπό τε τοῦ ἐγκλινομένου, καὶ ᾧ ἐγκέκλιται, μεῖζόν ἐστι τῆς τοῦ κύκλου κλίσεως.

Πρότασις ΚΑ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ληφθῇ τι σημεῖον μὴ ὂν πόλος κύκλου τινὸς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ εὐθεῖαί τινες ἀχθῶσιν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου μεγίστη μὲν ἐστιν ἡ ὑπὸ τὸν πόλον τοῦ κύκλου, ὡς δι' αὐτοῦ ἀγομένη, ἐλαχίστη δὲ ἡ κατὰ διάμετρον ταύτῃ ἀντικειμένη, τῶν δ' ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ὑπὸ τὸν πόλον τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστὶ, δύο δὲ μόναι ἴσαι προσπεσοῦνται ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐφ' ἑκάτερα τῆς τε μεγίστης καὶ ἐλαχίστης.

Ἀπὸ τοῦ α, σημείου μὴ ὄντος πόλου τοῦ β γ δ ε ζ, κύκλου πιπτέτωσαν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ αὐτοῦ κύκλου εὐθεῖαί τινες αἱ α β, α γ, α δ, α ε, α ζ, καὶ ἔστω ἡ μὲν α ε, ὑπὸ τὸν κ, πόλον τοῦ β γ δ ε ζ, ὡς δι' αὐτοῦ ἠγμένη, ἀντικείσθω δὲ ταύτῃ κατὰ διάμετρον ἡ α β, ὥστε τὴν β ε, διὰ τοῦ κέντρου τοῦ αὐτοῦ διέρχεσθαι κύκλου. Λέγω, ὅτι ἡ μὲν α ε, μεγίστη ἐστὶν, ἡ δὲ α β, ἐλαχίστη, ἡ δὲ α δ, μείζων τῆς α γ. Πιπτέτω γὰρ κάθετος ἀπὸ τοῦ α, σημείου πρὸς τὸ τοῦ β γ δ ε ζ, κύκλου ἐπίπεδον ἡ α θ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ θ γ, θ δ. καὶ ἐπεὶ τὸ α, σημεῖον οὐκ ἔστι πόλος τοῦ β γ δ ε ζ, κύκλου, δῆλον, ὅτι καὶ τὸ θ, οὐκ ἔστι κέντρον τοῦ αὐτοῦ, εἰ γὰρ ἦν, καὶ τὸ α, πάντως γε πόλος ἦν κατὰ τὸ πόρισμα τῆς θ': τοῦ α': τοῦ παρόντος. ἀλλ' ἡ α θ, ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου πίπτει, ὡς ὀψόμεθα, ἄρα τὸ κέντρον τοῦ β γ δ ε ζ, κύκλου ἐπὶ τῆς θ ε, ἐστὶ, πρὸς ἣν καὶ ὁ πόλος ἀφορᾷ, καὶ κατὰ τὴν ζ': τοῦ γ': τοῦ στοιχειωτοῦ, ἡ μὲν θ ε, μεγίστη ἐστὶν, ἡ δὲ θ β, ἐλαχίστη, καὶ ἡ θ δ, μείζων τῆς θ γ. ὥστε καὶ τὸ τετράγωνον τῆς θ ε, μέγιστόν ἐστι, τὸ δὲ τῆς θ β, ἐλάχιστον, καὶ τὸ τῆς θ δ, μεῖζον τοῦ τῆς θ γ. ἔστι δὲ ἡ α θ, πρὸς ὀρθὰς ἐφ' ἑκάστης τῶν θ β, θ γ, θ δ, θ ε, κατὰ τὸν γ': ὅρον τοῦ ια': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα κοινοῦ λαμβανομένου

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 22.



μένου τοῦ ἀπὸ τῆς α θ, τετραγώνου, πάντως γε τὰ ἀπὸ τῶν α θ, θ ε, τετράγωνα μέγιστά εἰσιν, ἐλάχιστα δὲ τὰ ἀπὸ τῶν α θ, θ β, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν α θ, θ δ, μείζονα τῶν ἀπὸ τῶν α θ, θ γ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν α θ, θ ε, ἴσον ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς α ε, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν α θ, θ β, τὸ ἀπὸ τῆς α β, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν α θ, θ δ, τὸ ἀπὸ τῆς α δ, καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν α θ, θ γ, τὸ ἀπὸ τῆς α γ, ἄρα ἡ μὲν α ε, μεγίστη ἐστὶ, καὶ διέρχεται ὑπὸ τὸν πόλον, ἡ δὲ α β, ἐλαχίστη, καὶ ἡ α δ, μείζων τῆς α γ. ὅπερ ἦν τοῦ ὑποτεθέντος τὸ α':

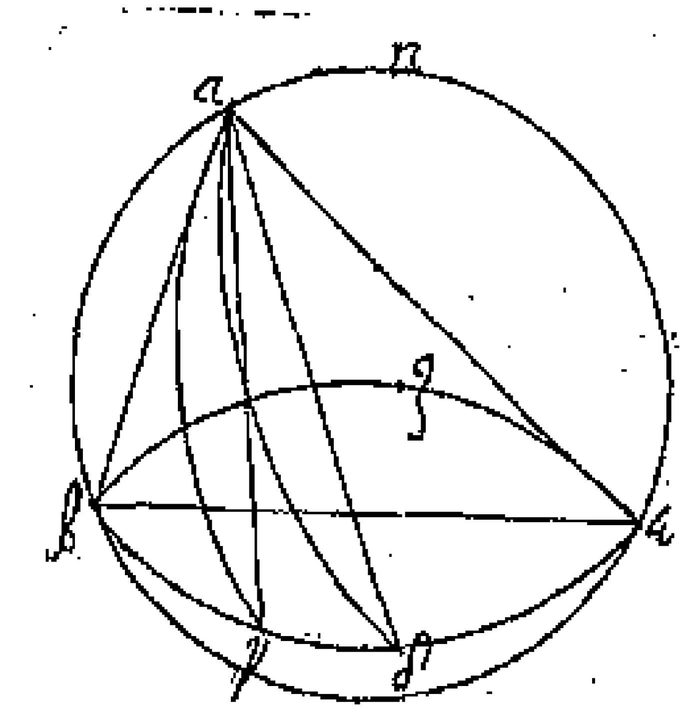
Ὅτι δὲ δύο ἐφ' ἑκάτερα τῆς θ ε, ἢ θ β, μόνον εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ α, προσπίπτουσι σημείου ἐπὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, δῆλον, κατὰ γὰρ τὴν ῥηθεῖσαν ζ': τοῦ γ': τοῦ στοιχειωτοῦ δύο ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης θ β, ἀπὸ τοῦ θ, σημείου μόνον προσπίπτουσιν εὐθεῖαι, ὡς αἱ θ γ, θ ζ, ὥστε κοινοῦ λαμβανομένου τοῦ ἀπὸ τῆς α θ, τὰ ἀπὸ τῶν α θ, θ γ, τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν α θ, θ ζ, καὶ κατὰ τὰ ἤδη εἰρημένα ἴσα εἰσὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν α γ, α ζ, ἄρα καὶ ἡ α γ, ἴση ἐστὶ τῇ α ζ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ α δ, τῇ α κ, ἴση. ὅπερ ἦν τὸ β': Λείπεται οὖν δεῖξαι ὅτι καὶ ἡ α θ, ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου πίπτει.

Γραφήτω δὴ διὰ τῶν α, καὶ η, σημείων κύκλος μέγιστος ὁ α β λ ε, κατὰ τὴν ιϛ': τοῦ α': τοῦ παρόντος, καὶ ἔσται κοινὴ τομὴ αὐτοῦ τε καὶ τοῦ β γ δ ε ζ, κύκλου ἡ β θ ε, ἀλλ' ὁ α β λ ε, κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ β γ δ ε ζ, κύκλου ἐπίπεδον κατὰ τὴν ιβ': τοῦ αὐτοῦ, καὶ διὰ τῆς α θ, διέρχεται. ὀρθὴ γὰρ καὶ αὐτὴ πρὸς τὸ τοῦ β γ δ ε ζ, κύκλου ἐπίπεδον, ἄρα κατὰ τὸν δ': ὅρον τοῦ ια': τοῦ στοιχειωτοῦ ἡ α θ, ὀρθή ἐστι καὶ πρὸς τὴν β ε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΒ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ληφθῇ τι σημεῖον μὴ ὂν κύκλου τινὸς πόλος, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τόξα μεγίστων κύκλων ἀχθῶσι, μέγιστον μὲν ἐστι τὸ διὰ τοῦ πόλου τοῦ κύκλου, ἐλάχιστον δὲ τὸ λοιπὸν, τῶν δ' ἄλλων ἀεὶ τὸ ἔγγιον τοῦ διὰ τοῦ πόλου τοῦ ἀπώτερον μεῖζόν ἐστι. δύο δὲ μόνα ἴσα ἀχθήσονται ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐφ' ἑκάτερα τοῦ τε μεγίστου καὶ ἐλαχίστου.

Theod: Sf: Lib. 2. Fig. 23.



Ληφθήτω τὸ α, τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, καὶ ἀχθήτωσαν ἀπ' αὐτοῦ τόξα μεγίστων κύκλων ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ β γ δ ε ζ, κύκλου, οὗ πόλος τὸ η, σημεῖον, τὰ α β, α γ, α δ, α ε. Λέγω τὸ α ε, τὸ διὰ τοῦ η, πόλου διερχόμενον μέγιστον εἶναι, τὸ δὲ α β, ἐλάχιστον, καὶ τὸ α δ, τοῦ α γ, μεῖζον. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ α β, α γ, α δ, α ε, ὑποτείνουσαι. καὶ ἐπεὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἡ μὲν α ε, μεγίστη ἐστὶν, ἡ

δὲ

δὲ αβ, ἐλαχίστη, καὶ ἡ αδ, μείζων τῆς αγ, κατὰ δὲ τὴν κη: τοῦ γ': τοῦ στοιχειωτοῦ, ἐπὶ τῶν ἴσων κύκλων αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ὑποτείνουσι, πάντως γε τὸ αηε, τόξον μέγιστόν ἐστιν, ὅτι καὶ ἡ αε, ὑποτείνουσα μεγίστη, ὡς δέδεικται, τὸ δὲ αβ, ἐλάχιστον, ὅτι γε καὶ ἡ αβ, ἐλαχίστη, καὶ τὸ αδ, μεῖζον τοῦ αγ. καὶ ἐπεὶ ἡ αδ, μείζων ἐστὶ τῆς αγ. ὁμοίως δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἐφ' ἑκάτερα τοῦ τε αηε, μεγίστου τόξου, καὶ αβ, ἐλαχίστου δύο ἴσα τόξα μόνα ἀπὸ τοῦ α, σημείου ἄγονται, ὅτι καὶ ἐφ' ἑκάτερα τῆς αε, ἡ αβ, ὑποτεινούσης δύο μόναι εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ α, προσπίπτουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

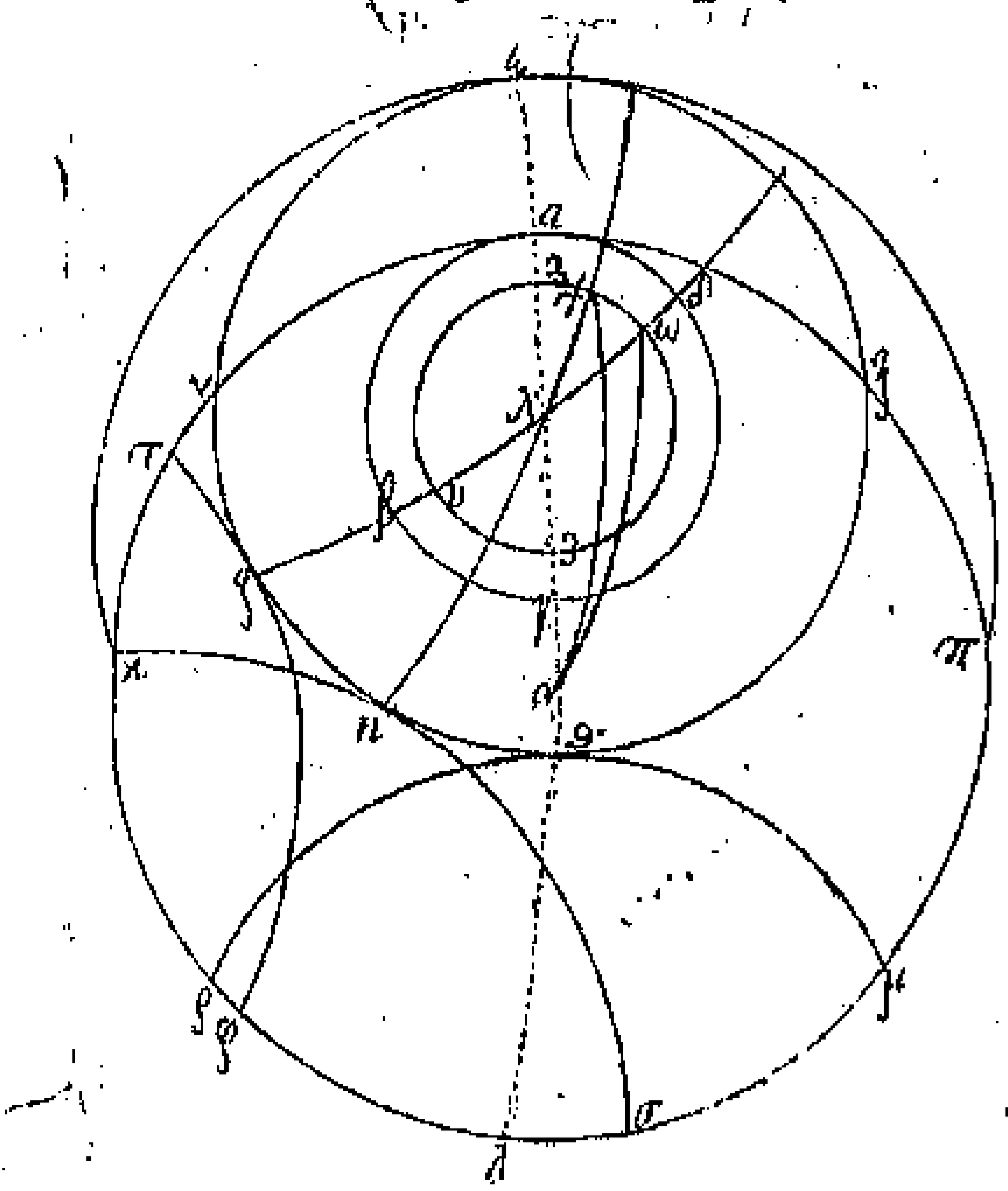
Πρότασις ΚΓ': Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλος μέγιστος ἅπτηται μὲν τοῦ ἐλάσσονος τῶν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ παραλλήλων, τέμνῃ δὲ τὸν μείζονα, ὥστε τὸν πόλον αὐτοῦ μεταξὺ εἶναι τῶν αὐτῶν παραλλήλων, ἅπτωνται δὲ καὶ τοῦ μείζονος τῶν παραλλήλων κύκλοι μέγιστοι ὁσοιδηποτοῦν, οἱ πόλοι τῶν ἁπτομένων τοῦ μείζονος τῶν παραλλήλων ἐν τῇ περιφερείᾳ τοῦ αὐτοῦ εἰσι κύκλου, παραλλήλου ὄντος καὶ αὐτοῦ τοῖς ἐξ ἀρχῆς παραλλήλοις, ἐλάττονος δὲ ἑκατέρου, καὶ πρὸς τὸν ἁπτόμενον τοῦ ἐλάττονος τῶν ἐξ ἀρχῆς παραλλήλων, ὁ μὲν τοῦ μείζονος ἁπτόμενος, καθ' ὃ τὸ ἔλαττον αὐτοῦ τμῆμα δίχα τέμνεται, μεγίστην ἔχει τὴν κλίσιν, ὁ δὲ, καθ' ὃ τὸ μεῖζον αὐτοῦ τμῆμα δίχα τέμνεται ἁπτόμενος, ἐλαχίστην ἔχει τὴν κλίσιν πρὸς τὸν αὐτὸν, τῶν δ' ἄλλων ὁ ἐγγύτερον τοῦ τὴν μεγίστην ἔχοντος κλίσιν τοῦ ἀπώτερον μᾶλλον ἐγκλινόμενός ἐστιν.

Ἔστωσαν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι οἱ αβγδ, εζηθ, καὶ τοῦ μὲν ἐλάττονος αβγδ, ἁπτέσθω ὁ ακλμ, μέγιστος κύκλος κατὰ τὸ α, τὸν δὲ μείζονα εζηθ, τεμνέτω κατὰ τὰ ν, καὶ ξ, σημεῖα, καὶ ἔστω ὁ τοῦ ακλμ, κύκλου πόλος μεταξὺ τοῦ αβγδ, εζηθ, δὸς εἰπεῖν, εὐθὰ τὸ ο, σημεῖον, ἁπτέσθωσαν δὲ καὶ τοῦ εζηθ, μείζονος παραλλήλου οἱ κεπ, μθρ, κησ, τζφ, μέγιστοι κύκλοι. Λέγω τοὺς πόλους τῶν κεπ, μθρ, κησ, τζφ, μεγίστων κύκλων ἐπὶ τῆς περιφερείας εἶναι τοῦ αὐτοῦ κύκλου, παραλλήλου μὲν τοῖς αβγδ, καὶ εζηθ, ἐλάττονος δὲ ἑκατέρου, καὶ τὸν μὲν κεπ, μεγίστην ἔχειν τὴν κλίσιν πρὸς τὸν ακλμ, τὸν δὲ μθρ, ἐλαχίστην, καὶ τὸν τζφ, μᾶλλον ἐγκλινόμενον εἶναι πρὸς τὸν αὐτὸν ακλμ, ἢ τὸν κησ. Εὑρέσθω δὴ ὁ πόλος τῶν αβγδ, εζηθ, παραλλήλων κατὰ τὴν ιζ': τοῦ α': τοῦ παρόντος, καὶ ἔστω οὗτος ὁ χ, καὶ διὰ τῶν α, καὶ θ, σημείων γραφέσθω μέγιστος κύκλος κατὰ τὴν ιϛ': τοῦ αὐτοῦ ὁ εαθλ, ὅστις καὶ διὰ τοῦ χ, ἐλεύσεται κατὰ τὴν γ': καὶ ε': τοῦ παρόντος, γραφήτωσαν δ' ἔτι κατὰ τὴν ῥηθεῖ-

σαν ιϛ': οἱ ηχψ, ζχω, μέγιστοι κύκλοι. καὶ ἐπεὶ τὸ οα, τόξον τεταρτημόριόν ἐστι κατὰ τὸ πόρ: τῆς ιγ': τοῦ α': τοῦ παρόντος, ληφθήτωσαν ἴσα τῷ οα, τὰ θ2, ηψ, ζω, καὶ ε3, τόξα. ὅτι μὲν οὖν οἱ κεπ, μθρ, κησ, τζφ, μέγιστοι κύκλοι ἐγκλινόμενοί εἰσι τῷ ακλμ, δῆλον. οὐδεὶς γὰρ διὰ τοῦ ο, πόλου διέρχεται. ἐπεὶ τὰ θ2, ηψ, ζω, καὶ ε3, τόξα τεταρτημόριά εἰσι κατὰ τὴν κατασκευὴν, πάντως γε τὸ μὲν 2, σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ μθρ, κατὰ τὸ αὐτὸ πόρ: τὸ δὲ ψ, τοῦ κησ, τὸ δὲ ω, τοῦ τζφ, καὶ τὸ 3, τοῦ κεπ. ἀλλὰ τὰ θχ, ηχ, ζχ, εχ, ἴσα εἰσὶ κατὰ τὸν ε': ὅρον τοῦ α': τοῦ παρ: ἄρα κατὰ τὸ γ': ἀξίωμα τοῦ στοιχ: ἀφαιρουμένων τῶν θχ, ηχ, ζχ, εχ, ἀπὸ τῶν θ2, ηψ, ζω, ε3, ἐναπολειφθήσονται τὰ χ2, χψ, χω, καὶ χ3, ἴσα. ὥστε ὁ κέντρῳ μὲν τῷ χ, διαστήματι δὲ τῷ χ2, γραφόμενος κύκλος ἐλεύσεται καὶ διὰ τῶν λοιπῶν ψ, ω, 3, σημείων. ἔστι δὲ τὸ μὲν 2, πόλος τοῦ μθρ, τὸ δὲ ψ, τοῦ κησ, τὸ δὲ ω, τοῦ τζφ, καὶ τῷ 3, τοῦ κεπ, κατὰ τὸ πόρ: τῆς ῥηθείσης ιγ': τοῦ παρόντος, ἄρα οἱ πόλοι τῶν κεπ, μθρ, κησ, τζφ, ἐν τῇ περιφερείᾳ εἰσὶ τοῦ αὐτοῦ 2υ3ω, ὃς παράλληλός τε ἐστὶ τοῖς αβγδ, εζηθ, διὰ τὸ ἔχειν τὸν αὐτὸν πόλον αὐτοῖς, καὶ ἐλάττων ἑκατέρου, διὰ τὸ ἔλαττον εἶναι τὸ τόξον χ2, τοῦ τε χα, καὶ χε. ὅπερ ἦν τὸ α':

Theod. Sf. Lib.2. Fig.24.



Αὖθις ἐπεὶ τὸ θ2, τεταρτημόριόν ἐστι, πάντως γε τὸ οχ, ἔλαττόν ἐστι τεταρτημορίου. ὥστε τὸ ο, οὐκ ἔστιν ὁ ἕτερος πόλος τοῦ 2υ3ω. οἱ γὰρ πόλοι παντὸς ἐν σφαίρᾳ κύκλου ἡμικυκλίῳ ἀφίστανται, καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν πρὸ τὸ ο2, τόξον μέγιστόν ἐστιν, ἐλάχιστον δὲ τὸ ο3, καὶ τὸ οψ, μεῖζον τοῦ οω. ἀλλὰ τὸ ο, πόλος ἐστὶ τοῦ ακλμ, μεγίστου κύκλου, τοῦ ἁπτομένου μὲν τοῦ αβγδ, τέμνοντος δὲ τὸν εζθξ, τὸ δὲ 2, ὁμοίως πόλος ἐστὶν τοῦ μθρ, ἁπτομένου τοῦ εζθξ, μείζονος παραλλήλου κατὰ τὸ θ, τὸ δὲ 3, τοῦ κεπ, ἁπτομένου τοῦ αὐτοῦ κατὰ τὸ ε, τὸ δὲ ψ, τοῦ κησ, καὶ τὸ ω, τοῦ τζφ. ἄρα ὁ πόλος τοῦ κεπ, ἐλαχίστην ἔχει τὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ο, πόλου τοῦ ακλμ, ὁ δὲ πόλος τοῦ μθρ, μεγίστην, ὁ δὲ τοῦ κησ, μείζονα, ἢ ὁ τοῦ τζφ, πόλος. ἀλλ' ὁ μὲν κεπ, ἅπτεται τοῦ αζθξ, μείζονος παραλλήλου κατὰ τὸ ε, καθ' ὃ δίχα τέμνεται τὸ νεξ, ἔλαττον αὐτοῦ τμῆμα, ὁ δὲ μθρ, ἅπτεται τοῦ αὐτοῦ κατὰ τὸ θ, καθ' ὃ δίχα τέμνεται τὸ νθξ, μεῖζον τοῦ αὐτοῦ τμῆμα, καὶ ὁ τζφ, ἐγγυτερός ἐστι τοῦ κησ.

 Ὅτι

Ὅτι δὲ τὸ ν ε ξ, ἔλαττόν ἐστι τοῦ ν θ ξ, τόξου δῆλον. ὁ γὰρ τοῦ ε ζ θ ξ, πόλος ἐντός ἐστι τοῦ α κ λ μ. ὥστε καὶ κατὰ τὴν ἑρμηνείαν τοῦ ι η: τὸ ὅρου τοῦ α: τοῦ στοιχειωτοῦ, τὸ μὲν ν ε ξ, τόξον ἔλαττόν ἐστι, τὸ δὲ ν θ ξ, μεῖζον. Ὅτι δὲ καὶ δίχα ἑκάτερον τέμνεται, δείκνυται διὰ τῆς η: τοῦ α: τοῦ παρόντος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

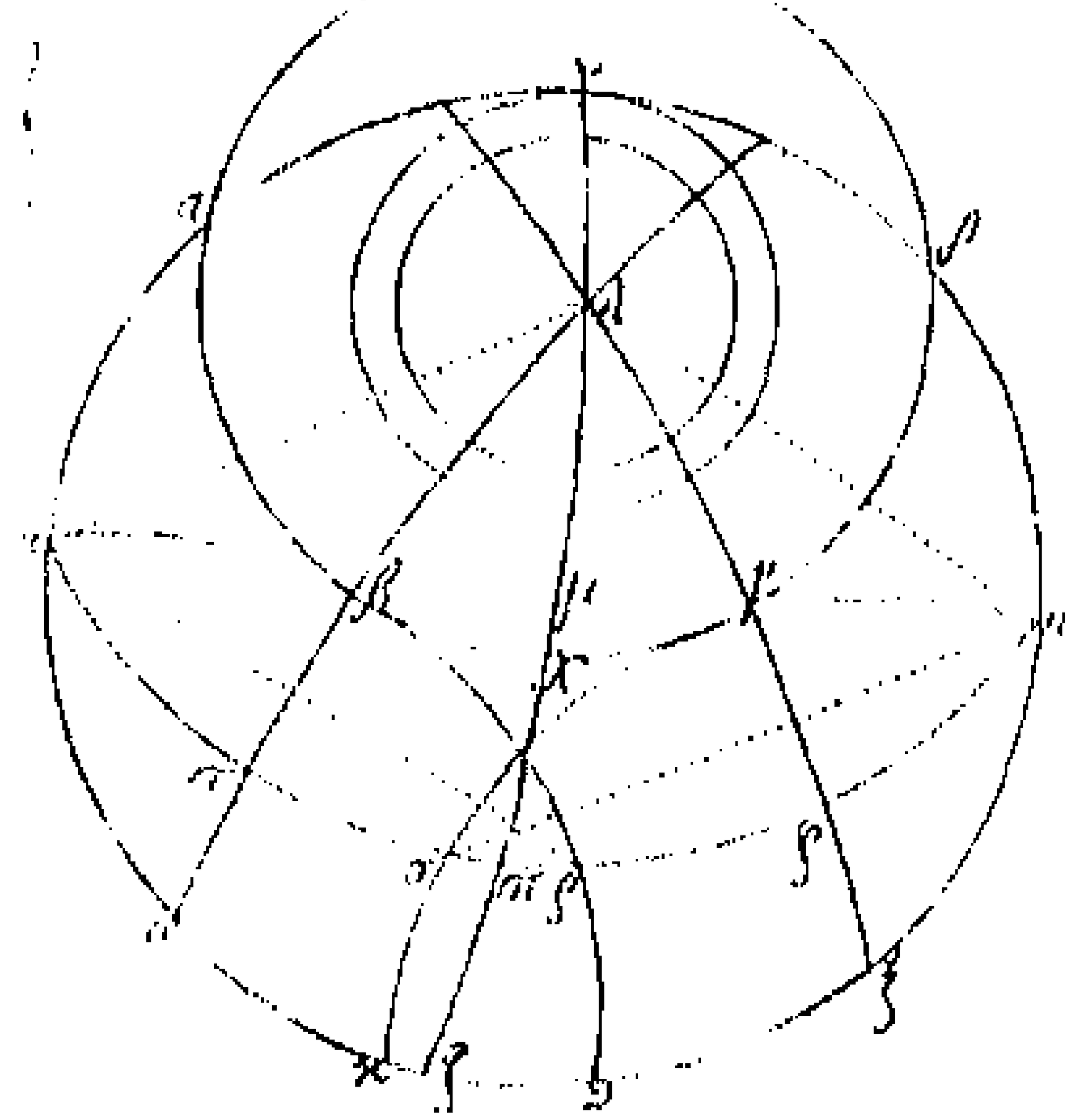
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι οἱ ἐξ ἴσου ἀφιστάμενοι τοῦ τὴν μεγίστην ἔχοντος κλίσιν, ἐξ ἴσου ἐγκλινόμενοί εἰσι.

Πρότασις ΚΔ': Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλου ἐλάσσονος ἐν σφαίρᾳ ὑπὸ μεγίστου τεμνομένου κύκλου κύκλοι μέγιστοι ἅπτωνται, καὶ τὰ τῶν ἀπτομένων τόξα τὰ μεταξὺ τῶν ἁφῶν καὶ κοινῶν τομῶν αὐτῶν τε καὶ τοῦ τέμνοντος ἐμπεριλαμβανόμενα ἴσα ὦσιν, οἱ μέγιστοι ἐκεῖνοι κύκλοι ἐξ ἴσου εἰσὶν ἐγκλινόμενοι τῷ τέμνοντι κύκλῳ.

Ἁπτέσθωσαν τοῦ α β γ δ, ἐλάσσονος κύκλου, ὑπὸ τοῦ α ε ζ η δ, μεγίστου τεμνομένου, οἱ ε β θ, η γ κ, κατὰ τὰ β, καὶ γ. καὶ ἔστωσαν τὰ ε β, γ η, τόξα τὰ μεταξὺ τῶν τε β, καὶ γ, ἁφῶν, καὶ τῶν ε, καὶ η, κοινῶν τομῶν, τῶν τε ε β θ, η γ κ, καὶ α ζ δ, κύκλων ἴσα. Λέγω τοὺς ε β θ, η γ κ, ἐξ ἴσου εἶναι ἐγκλινομένους τῷ α ζ δ, τέμνοντι. Εὑρέθησαν δὴ οἱ πόλοι τοῦ τε α β γ δ, καὶ α ζ δ, κύκλου κατὰ τὴν ιζ: τοῦ α: τοῦ παρόντος. καὶ ἔστω τοῦ μὲν α β γ δ, πόλος τὸ λ, σημεῖον, τοῦ δὲ α ζ δ, τὸ μ, καὶ γραφήτω διὰ τῶν λ, καὶ μ, κύκλος μέγιστος ὁ ζ μ λ ν, κατὰ τὴν ις': τοῦ αὐτοῦ. γραφήτωσαν δ' ἔτι κατὰ τὴν αὐτὴν, καὶ οἱ λ γ ξ, λ β ο, μέγιστοι κύκλοι διὰ τῶν πόλων τοῦ τε α β γ δ, καὶ κ γ η, ε β θ, ἀπτομένων διερχόμενοι. οἵγε καὶ διὰ τῶν β, καὶ γ, ἁφῶν διελεύσονται κατὰ τὴν γ': τοῦ παρόντος. Δείκνυται.

Theod. Sf. Lib.2. Fig. 25.



Ἐπεὶ οὖν οἱ λ β ο, ε β θ, μέγιστοι κύκλοι δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλους τέμνουσι, κατὰ τὸ πόρ: τῆς ιβ': τοῦ παρόντος, πάντως γε τὸ τοῦ λ β ο, ἡμικύκλιον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸν ε β θ, κύκλον. ὡσαύτως καὶ τὸ τοῦ λ γ ξ, ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸν η γ κ, κύκλον, εἰσὶ δὲ καὶ τὰ λ β, λ γ, τόξα ἴσα κατὰ τὸν ε: ὅρον τοῦ α: τοῦ παρόντος, ἄρα

ἄρα ἐπὶ τῶν διαμέτρων τῶν ε β θ, η γ κ, μεγίστων κύκλων ἐφίστανται ὅμοια τόξα πρὸς ὀρθὰς, καὶ εἴληπται ἀπ' αὐτῶν τόξα ἴσα τὰ β λ, γ λ, εἴληπται δὲ καὶ ἀπὸ τῶν ε β θ, η γ κ, κύκλων ἴσα τόξα κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τὰ ε β, γ η, ἄρα κατὰ τὴν ια: τοῦ παρόντος, αἱ λ ε, λ η, εὐθεῖαι ἐπιζευχθεῖσαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὥστε ὁ ἀπὸ τοῦ λ, ὡς ἀπὸ κέντρου διαστήματι τῷ λ ε, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ η, καὶ παράλληλος ἔσται τῷ α β γ δ. Αὖθις ἐπεὶ ὁ λ β ο, μέγιστος κύκλος διὰ τῶν πόλων διέρχεται τῶν ε β θ, ε π η, τεμνομένων ἀλλήλων, πάντως γε κατὰ τὴν η: τοῦ παρόντος τὰ ε β ρ, ε σ ρ, τμήματα δίχα τέμνει, ἴσα ἄρα ἐστὶ τὰ ε β, β ρ, καὶ ε τ, τ ρ. διὰ τὰ αὐτὰ ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ η γ, γ σ, η φ, φ σ. ἀλλὰ τὰ ε β, η γ, ἴσα ἐστὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα καὶ τὸ ὅλον ε β ρ, ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ η γ σ, καὶ ἐπομένως αἱ ε ρ, η σ, ὑποτείνουσαι ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν κθ': τοῦ γ': τοῦ στοιχειωτοῦ, αἱ δὲ ε ρ, η σ, ὑποτείνουσι καὶ τὰς ε π ρ, η φ σ, περιφερείας, ἄρα κατὰ τὴν κη: τοῦ αὐτοῦ, καὶ αἱ ε τ ρ, η φ σ, περιφέρειαι ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ε τ, η φ, ἴσαι εἰσίν, ὡς δέδεικται, ἄρα αἱ τ ρ, φ σ, ἴσαι εἰσί, κοινῆς οὖν ἀφαιρουμένης τῆς σ ρ, περιφερείας, ἐναπολείπεται τὰ τ σ, ρ φ, τόξα ἴσα, εἰσὶ δὲ καὶ τὰ ε τ, η φ, ἴσα, ὡς ἤδη εἴρηται, ὅλον ἄρα τὸ ε τ σ, ὅλῳ τῷ η φ ρ, ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν η: τοῦ παρόντος καὶ τὰ ε π, π η, ἴσα ἐστίν, ὁ γὰρ ν μ ζ, μέγιστος κύκλος διὰ τῶν πόλων διέρχεται τῶν α ζ δ, ε π η, τεμνομένων κύκλων. ἄρα ἀφαιρουμένων τῶν ε τ σ, η φ ρ, ἴσων, ἐναπολείπονται ἴσα τὰ σ π, π ρ, εἰσὶ δὲ ὡς δέδεικται καὶ τὰ σ τ, ρ φ, ἴσα, ὅλον ἄρα τὸ τ π, ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ π φ, ἀλλὰ τὰ β χ, χ γ, ὅμοιά εἰσι τοῖς τ π, π φ, τόξοις, διὰ τὸ ὁμοκέντρους εἶναι τοὺς α β γ δ, ε π η, κύκλους, ἄρα καὶ τὰ β χ, χ γ, ἴσα εἰσί, καὶ κατὰ τὸ πόρ: τῆς ἀνωτέρω οἱ ε β θ, η γ κ, ἐξ ἴσου ἐγκλινόμενοί εἰσι τῷ α β γ δ. Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐλάσσονος ἐν σφαίρᾳ ὑπὸ μεγίστου τεμνομένου κύκλου, κύκλοι μέγιστοι ἅπτωνται, καὶ τὰ τῶν ἀπτομένων τόξα τὰ μεταξὺ τῶν ἁφῶν καὶ κοινῶν τομῶν αὐτῶν τε καὶ τοῦ τέμνοντος ἐμπεριλαμβανόμενα ἴσα ὦσιν, οἱ μέγιστοι ἐκεῖνοι κύκλοι ἐξ ἴσου εἰσὶν ἐγκλινόμενοι τῷ τέμνοντι κύκλῳ.

Τέλος τοῦ Δευτέρου τῶν κατὰ Θεοδόσιον Σφαιρικῶν.

ΣΥΝΤΟΜΟΣ ΕΡΜΗΝΕΙΑ

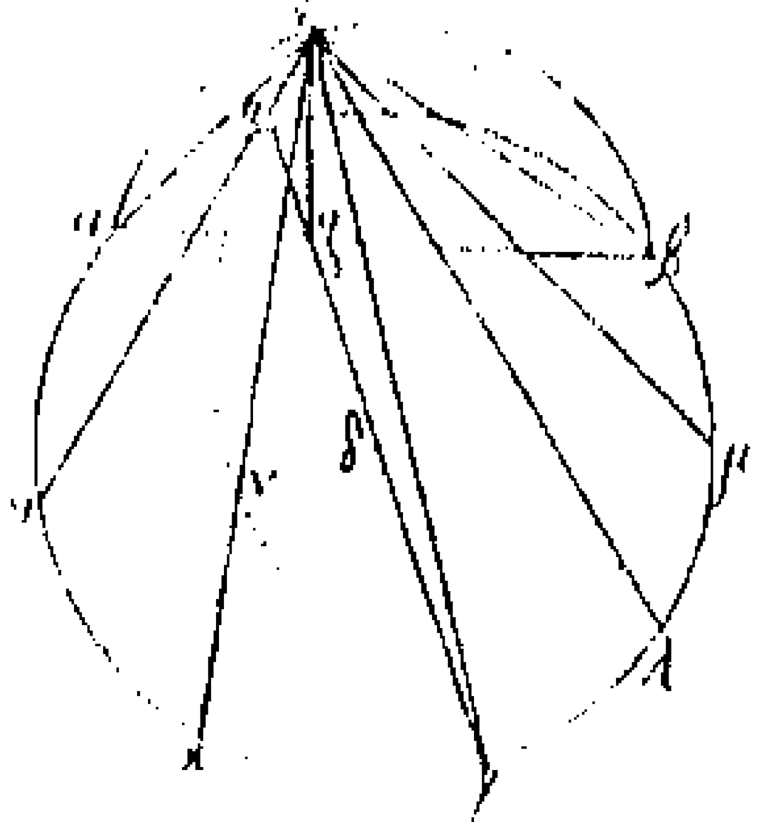
ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΖΗΤΗΜΑΤΩΝ

ΚΑΤΑ ΘΕΟΔΟΣΙΟΝ ΤΟΝ ΤΡΙΠΟΛΙΤΗΝ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

Πρότασις Α': Θεώρημα.

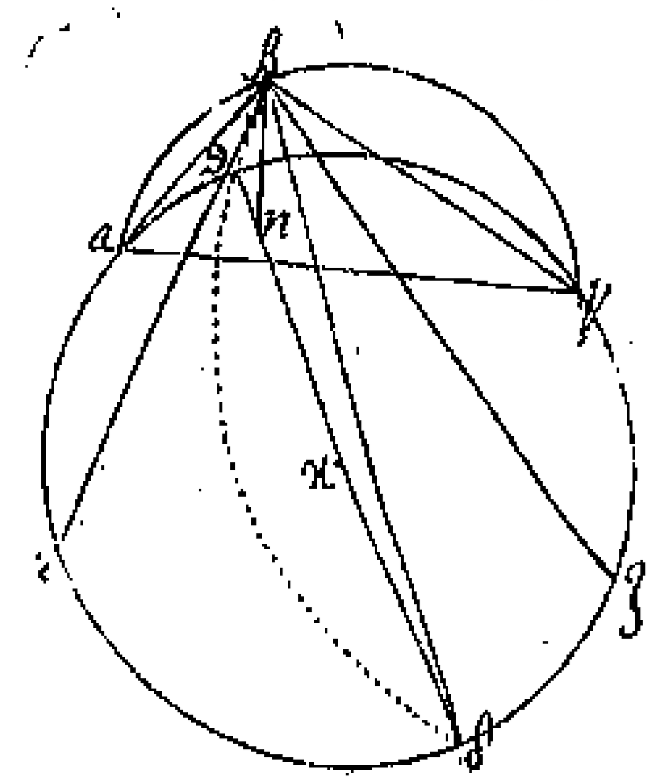
Ἐὰν τμῆμα κύκλου ὀρθὸν ἢ ἐγκλινόμενον ᾖ πρὸς τὸ ἐπίπεδον ἑτέρου τινὸς κύκλου, τέμνον τὸν αὐτὸν κύκλον εἰς δύο ἄνισα, ληφθῇ δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τοῦ τμήματος περιφερείας, ὥστε τὸ τμῆμα εἰς δύο κατ' αὐτὸ ἄνισα τέμνεσθαι, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὴν τοῦ κύκλου μείζονα περιφέρειαν εὐθεῖαι ἀχθῶσιν, ἐλαχίστη ἐστὶν ἡ τὸ ἔλαττον τοῦ τμήματος ὑποτείνουσα τόξον, ἀφ' ἧς αὔξονται μὲν ἄχρι τῆς διαμέτρου τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου, καθ' ὃ ἡ ἀπὸ τοῦ ληφθέντος σημείου κάθετος πίπτει, ἐλαττοῦνται δὲ ἕως ἂν πρὸς τὴν αὐτὴν ἀποκατασταχθῶσι. *Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 1.*



Ἔστω ἄ: πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ α β γ, κύκλου, οὗ κέντρον τὸ δ, τμῆμα κύκλου ὀρθὸν τὸ α ε β, καὶ ἀπὸ τοῦ ε, σημείου, καθ' ὃ τὸ α ε β, τμῆμα εἰς δύο ἄνισα τέμνεται τὰ α ε, ε β, πρὸς μὲν τὸ ἐπίπεδον τοῦ α β γ, κύκλου πιπτέτω κάθετος ἡ ε ζ, πρὸς δὲ τὴν α γ β, μείζονα τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἀχθήτωσαν αἱ ε θ, ε κ, ε γ, ε λ, ε μ, ε ν, ε β καὶ διὰ τοῦ ζ, ἤχθω ἡ γ ζ η. Λέγω τὴν μὲν ε α, ἐλαχίστην εἶναι, τὰς δὲ λοιπὰς αὔξεσθαι μὲν ἀπὸ τοῦ α, μέχρι τοῦ γ, ἀπὸ δὲ τοῦ γ, μέχρι τοῦ β, ἐλαττοῦσθαι. Γραφήτω δὴ μεγίστου κύκλου τόξον διὰ τῶν ε η γ, σημείων τὸ γ ν η ε, κατὰ τὴν ις': τοῦ ά: τοῦ παρόντος, καὶ ἐπεὶ ἡ ε ζ, κάθετός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ α β γ, κύκλου ἐπί-

πεδον, κατὰ τὴν κατασκευὴν, πάντως γε καὶ ὁ γ ν η ε, κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ α β γ, κύκλου ἐπίπεδον, ὥστε καὶ διὰ τοῦ πόλου αὐτοῦ διέρχεται, τεμνομένου δὲ τοῦ γ ν η, δίχα κατὰ τὸ ν, δῆλον, ὅτι τὸ ν, πόλος ἐστὶ τοῦ α β γ, κύκλου, τὸ ε, ἄρα οὐκ ἔστι πόλος τοῦ αὐτοῦ, καὶ κατὰ τὴν κβ': τοῦ β': τοῦ παρόντος, ἡ μὲν ε η, ἐλαχίστη ἐστὶ, μεγίστη δὲ ἡ ε γ, ἡ δὲ ε κ, ἡ ἔγγιον τῆς ε γ, μείζων ἐστὶ τῆς ε θ, καὶ ἡ ε θ, τῆς ε α. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ μὲν ε λ, μείζων ἐστὶ τῆς ε μ, ἡ δὲ ε μ, τῆς ε β, αἱ ἄρα ἀπὸ τοῦ ε, σημείου ἐπὶ τὴν α γ, περιφέρειαν ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἀπὸ μὲν τοῦ α, μέχρι τοῦ γ, αὔξονται, ἀπὸ δὲ τοῦ γ, μέχρι τοῦ β, ἐλαττοῦνται.

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 2.



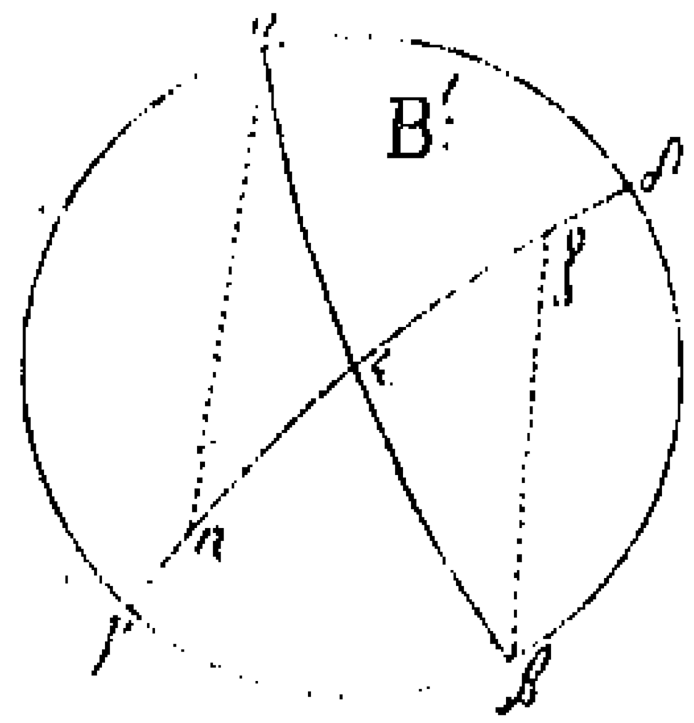
Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ α β γ, τμῆμα ἐγκλινόμενον πρὸς τὸ τοῦ α γ δ, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ ἀπὸ τοῦ β, σημείου, καθ' ὃ τὸ α β γ, τμῆμα εἰς ἄνισα τέμνεται, ἀχθήτωσαν ἐπὶ τὴν α δ γ, περιφέρειαν αἱ β α, β ε, β δ, β ζ, β γ. Λέγω, ὅτι ἡ μὲν β α, ἐλαχίστη ἐστὶ, μεγίστη δὲ ἡ β δ, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ α, μέχρι τοῦ δ, αὔξονται αἱ ἀπὸ τοῦ β, ἐπὶ τὴν α δ, περιφέρειαν ἀγόμεναι εὐθεῖαι, ἀπὸ δὲ τοῦ δ, ἄχρι τοῦ γ, ἐλαττοῦνται. ἡ γὰρ τούτου κατασκευὴ τὰ μὲν ἄλλα ἡ αὐτή ἐστι τῇ τοῦ ἀνωτέρω, διενήνοχε δὲ, ὅτι ἐπ' ἐκείνου μὲν ἡ ἀπὸ τοῦ ε, ληφθέντος σημείου κάθετος ἐπὶ τῆς α β, πίπτει, ὡς ἡ ε ζ. ἐπὶ τούτου δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ β, ἐκτὸς πίπτει τῆς α γ, ἐφ' ἣν τὸ α β γ, ἐφίσταται τμῆμα, ὡς ἡ β η. ὥστε, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν κ β': δείκνυνται ὁμοίως καὶ ἐπὶ τοῦ παρόντος ἀπὸ μὲν τοῦ α, σημείου μέχρι τοῦ δ, αὔξεσθαι τὰς ἀπὸ τοῦ β, ληφθέντος σημείου ἀγομένας εὐθείας ἐπὶ τὴν α δ γ, περιφέρειαν, ἀπὸ δὲ τοῦ δ, ἄχρι τοῦ γ, ἐλαττοῦσθαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Β': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο μέγιστοι κύκλοι ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ ὦσι, καὶ ἀπὸ τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς ἴσα ἐν ἑκατέρῳ τόξα ληφθῶσιν, αἱ τὰ τόξα αὐτῶν ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἔσονται.

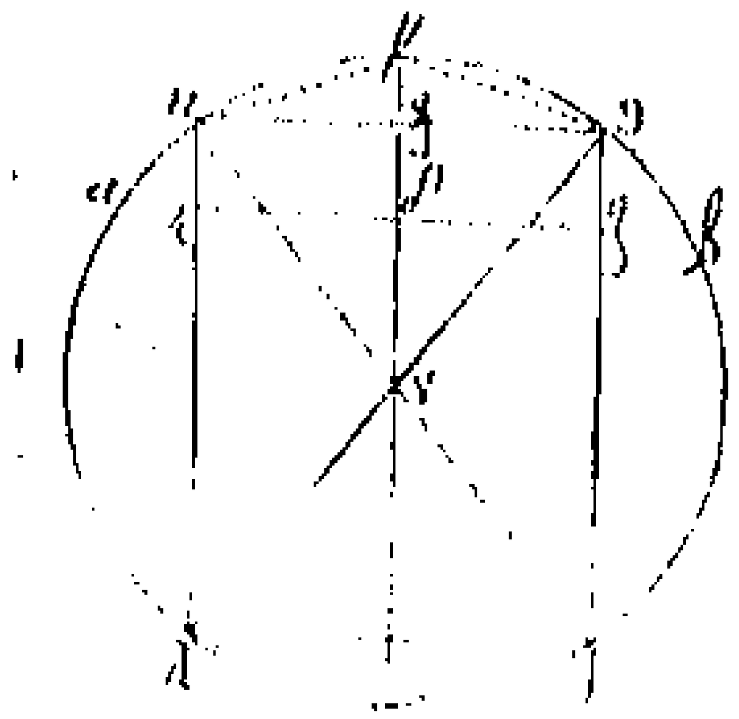
Ἔστωσαν κύκλοι μέγιστοι οἱ α β, γ δ, τεμνόμενοι ἀλλήλοις κατὰ τὸ ε, καὶ ἀπὸ τοῦ ε, σημείου ληφθήτωσαν ἴσα τόξα ἐν μὲν τῷ α β, τὰ ε α, ε β, ἐν δὲ τῷ γ δ, τὰ ε ζ, ε η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α η, ζ β. Λέγω δὴ τὰς α η, ζ β, εὐθείας, τὰς ἐπιζευγνυούσας τὰ α ε, ε η, καὶ β ε, ε ζ, τόξα, ἴσας εἶναι. Ἀπὸ γὰρ τοῦ ε, ὡς ἀπὸ πόλου, διαστήματι τῷ ε α, ἢ ε β, μείζονι τοῦ ε η, καὶ ε ζ, γραφήτω κύκλος ὁ α γ β δ. καὶ ἐπεὶ οἱ α β, γ δ, διὰ τοῦ ε, πόλου τοῦ α γ β δ, κύκλου διέρχονται, πάντως γε κατὰ τὴν ι β': τοῦ ά: τοῦ παρόντος δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν ἑκάτερος τέμνουσιν, ὥστε τὰ μὲν αδβ, δβγ, τόξα τοῦ αγβδ, κύκλου ἡμικύκλιά ἐστι, καὶ ἴσα ἀλλήλοις, κοινοῦ δὲ ἀφαιρουμένου τοῦ δβ, ἐναπολείπονται τὰ αδ, γβ, τόξα ἴσα, ἀλλὰ καὶ τὰ εγ, εδ, ἴσα εἰσί, κατὰ τὴν ε: ὅρου τοῦ παρόντος, ἀφῄρηται ἀπ' αὐτῶν τὰ εη, εζ, ἴσα, καὶ τὸ γεδ, τμῆμα ὀρθὸν ἐφίσταται ἐπὶ τῆς διαμέτρου τοῦ αγβδ, κύκλου, κατὰ τὴν ιβ': τοῦ α': τοῦ παρόντος, ἄρα κατὰ τὴν ια: τοῦ β': τοῦ αὐτοῦ αἱ ηα, ζβ, αἱ τὰς τομὰς ἐπιζευγνύουσαι, ἴσαι εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 3.



ΛΗ̃ΜΜΑ, Α'.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης τοῦ τυχόντος τόξου δίχα τμηθείσης δύο ἑκατέρωθεν ληφθῶσι σημεῖα, ἐξ ἴσου τοῦ μέσου ἀφιστάμενα, καὶ ἀπὸ τῶν σημείων κάθετοι ἐπ' αὐτῆς ἀναςαθῶσι τὰ ἐναπολαμβανόμενα μεταξὺ τῶν καθέτων τόξα ἴσα ἀλλήλοις εἰσί.



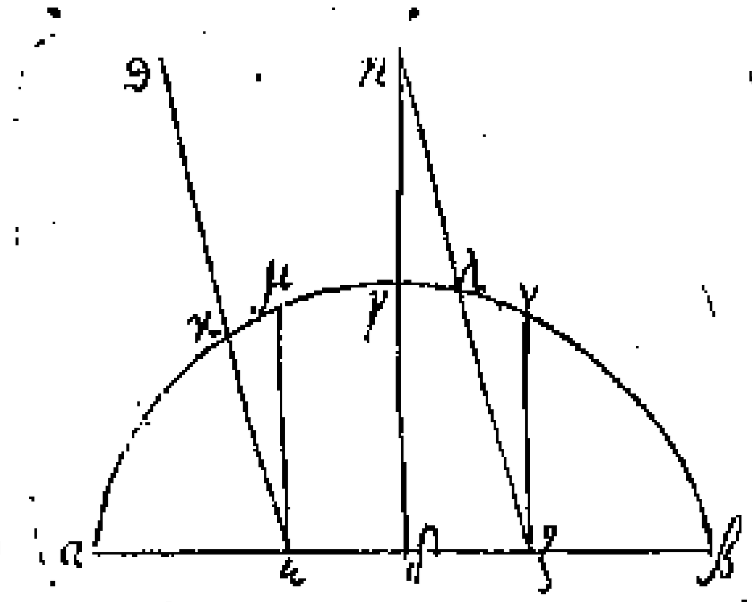
Τμηθήτω ἡ αβ, ὑποτείνουσα τοῦ αγβ, τόξου δίχα κατὰ τὸ δ, καὶ ληφθήτωσαν τὰ ε, καὶ ζ, σημεῖα, ὥστε τὰ δε, δζ, διαστήματα ἴσα εἶναι, ἀπὸ δὲ τῶν ε, δ, ζ, σημείων ἀνεστάθωσαν κάθετοι ἐπὶ τῆς αβ, αἱ δγ, εη, ζθ. Λέγω τὰ γη, γθ, τόξα ἴσα εἶναι. Ἀναπεπληρώσθω δὴ ὁ αγβκ, κύκλος, οὗ κέντρον τὸ ν, καὶ ἐξεχθήτωσαν αἱ δγ, εη, ζθ, εὐθεῖαι κατὰ τὸ συνεχὲς ἀπὸ τῶν δ, ε, ζ, σημείων ἐπὶ τὰ κ λ μ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ημ, θλ. καὶ ἐπεὶ αἱ δγ, εη, ὀρθαί εἰσιν ἐπὶ τῆς αβ, πάντως γε αἱ ὑπὸ ηεδ, γδε, γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί, καὶ κατὰ τὴν κη: τοῦ α: τοῦ στοιχειωτοῦ, αἱ γδ, ηε, παράλληλοί εἰσι. διὰ τὰ αὐτὰ ἔτι παράλληλοί εἰσι καὶ αἱ γδ, θζ. ὥστε κατὰ τὴν κζ': τοῦ α': καὶ κζ': τοῦ γ': τοῦ στοιχ: τὰ γη, λκ, τόξα ἴσα εἰσίν, ὡσαύτως δὲ καὶ τὰ γθ, κμ. (διὰ τὸ ὑποτείνεσθαι ἴσαις εὐθείαις, καὶ ὑποκεῖσθαι ἴσαις ταῖς πρὸς τῷ κέντρῳ ν, γωνίαις.) ἀλλ' αἱ ὑπὸ γνθ, κνλ, γωνίαι ἴσαι εἰσί, κατὰ κορυφὴν γάρ, καί εἰσι πρὸς τῷ κέντρῳ, ἄρα κατὰ τὴν κζ': τοῦ γ': τοῦ στοιχειωτοῦ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἡ γθ, ἄρα περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ κλ, ἀλλὰ καὶ ἡ γη, ἴση δέδεικται τῇ κλ, ἡ γη, ἄρα ἴση ἐστὶ γθ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΛΗ̃ΜΜΑ. Β'.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης τινὸς τόξου δίχα τμηθείσης κάθετος ἀπὸ τῆς τομῆς ἀναςαθῇ, ληφθῇ δὲ ἑκατέρωθεν δύο σημεῖα ἐξ ἴσου τοῦ μέσου ἀφιστάμενα, καὶ ἀπ' αὐτῶν παράλληλοι ἀχθῶσιν εὐθεῖαι, ὧν τούτων ἡ μὲν συμπέσῃ τῇ καθέτῳ ἐκβαλλομένῃ, ἡ δὲ μὴ συμπέσῃ, ἡ συμπίπτουσα ἔλαττον ἀφαιρεῖται τόξον.

Τμηθήτω ἡ αβ, ὑποτείνουσα τοῦ αγβ, τόξου δίχα κατὰ τὸ δ, καὶ ἀνεστάθω κάθετος ἡ δγ. ληφθήτωσαν δὲ καὶ τὰ ε, καὶ ζ, σημεῖα, ὥστε τὰ δε, δζ, διαστήματα ἴσα εἶναι. καὶ ἀπὸ τῶν ε, καὶ ζ, ἀχθήτωσαν παράλληλοι αἱ ζη, εθ, ὧν ἡ μὲν ζη, συμπιπτέτω τῇ δγ, καθέτῳ ἐκβαλλομένῃ, κατὰ τὸ η, ἡ δὲ εθ, μὴ συμπιπτέτω. Λέγω τὸ γλ, τόξον ἔλαττον εἶναι τοῦ γκ. Ἀνεστάθωσαν γὰρ ἐπὶ τῆς αβ, κάθετοι αἱ εμ, ζν, καὶ πάντως γε, κατὰ τὸ ἀνωτέρω λῆμμα, τὰ γν, γμ, τόξα ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. ἀλλὰ τὸ γλ, ἔλαττόν ἐστι τοῦ γν, ἄρα τὸ αὐτὸ γλ, ἔλαττόν ἐστι καὶ τοῦ γμ, ἔστι δὲ καὶ τὸ γμ, ἔλαττον τοῦ γκ, τὸ γλ, ἄρα πολλῷ ἔλαττόν ἐστι τοῦ γκ. ὅπερ ἦν δεικτέον.

Theod: Sf. Lib. 3. Fig. 4.



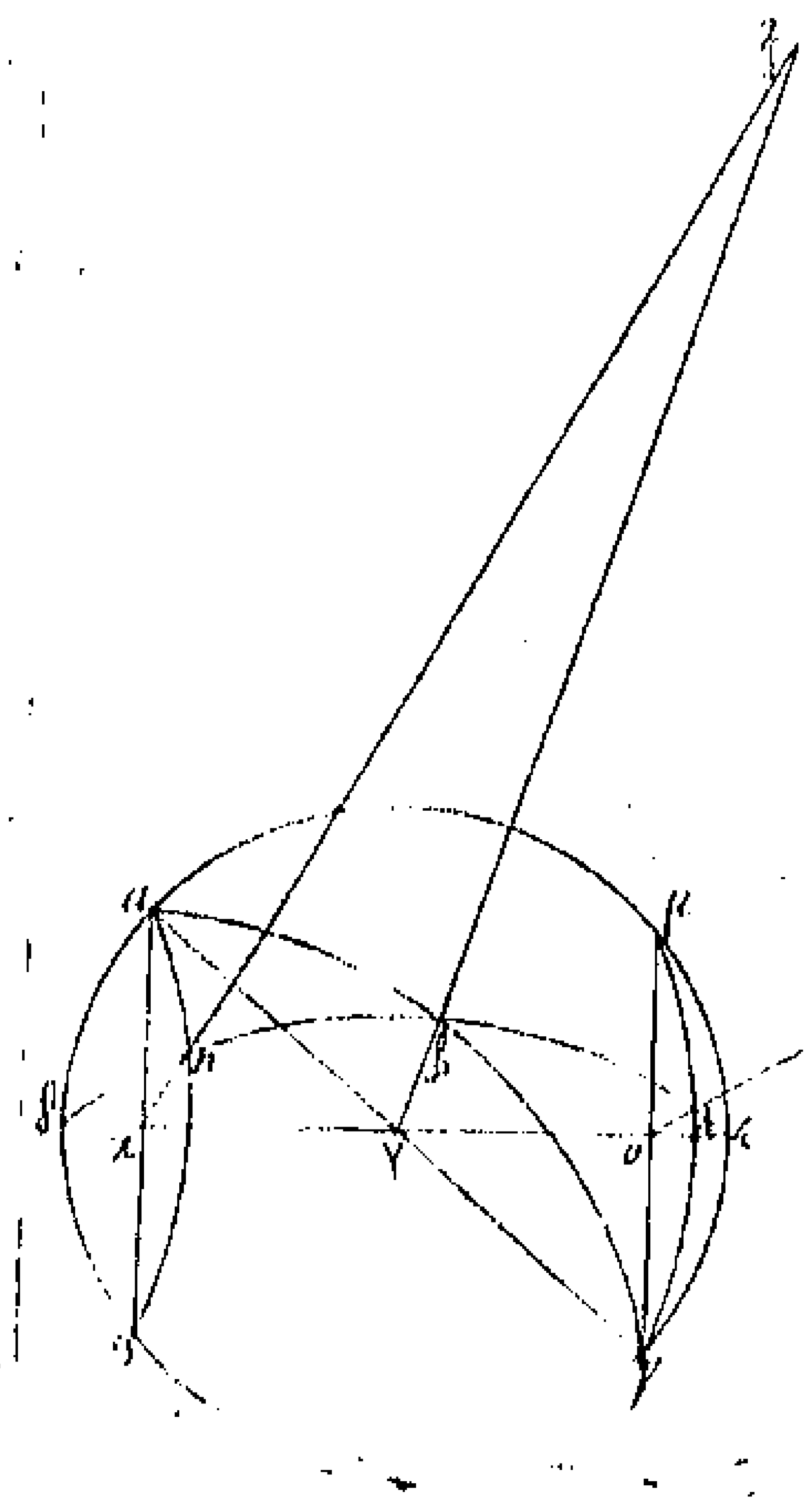
Πρότασις Γ': Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας δύο κύκλοι μέγιστοι, καὶ ἐπὶ τοῦ ἑνὸς δύο σημεῖα ληφθῶσιν, ἐξ ἴσου τῆς κοινῆς αὐτῶν ἀφιστάμενα τομῆς, διὰ δὲ τῶν ληφθέντων σημείων ἐπίπεδα παράλληλα διέλθωσι τέμνοντα τὸν ἕτερον τῶν μεγίστων κύκλων, καὶ τούτων τὸ μὲν ἐκβαλλόμενον συμπέσῃ τῇ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ κοινῆς τομῆς τῶν μεγίστων κύκλων ἐκβαλλομένῃ εὐθείᾳ, τὸ δὲ μή, τὸ συμπίπτον ἔλαττον ἀφαιρεῖται τόξον ἀπὸ τοῦ τεμνομένου μεγίστου κύκλου.

Ἔστωσαν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλοι μέγιστοι οἱ αβγ, δβε, τεμνόμενοι κατὰ τὸ β. καὶ ληφθήτωσαν ἐπὶ τοῦ αβγ, τὰ α, καὶ γ, σημεῖα, ὥστε τὰ βα, βγ, διαστήματα ἴσα εἶναι, διὰ δὲ τῶν α, καὶ γ, διελθέτωσαν ἐπίπεδα παράλληλα τέμνοντα τὸν δβε, κύκλον. καὶ ἐπεὶ αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ μετὰ τῆς σφαίρας κύκλοι εἰσί, κατὰ τὴν β': τοῦ α': τοῦ παρόντος, ἔστωσαν οὗτοι οἱ αηθ, γλμ. διὰ δὲ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν αβγ, δβε, μεγίστων κύκλων, καὶ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διήχθω ἡ νβξ, καὶ κείσθω τὸ μὲν διὰ τοῦ α, σημείου διερχόμενον ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον συμπίπτειν τῇ νβξ, κατὰ τὸ ξ, σημεῖον, τὸ δὲ διὰ τοῦ γ, μὴ συμπίπτειν.

Λέγω τὸ διὰ τοῦ α, ἔλαττον τοῦ δβε, ἀφαιρεῖν τόξον, τὸ δὲ διὰ τοῦ γ, μεῖζον, τουτέστι τὸ βη, ἔλαττον εἶναι τοῦ βλ. Γραφήτω γὰρ ὡς ἀπὸ πόλου τοῦ β, διὰ τῶν α, καὶ γ, σημείων ὁ αδγε, κύκλος, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, εδ, κη, ολ. καὶ ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν αβγ, δβε, μεγίστων κύκλων διὰ τοῦ β, πόλου τοῦ αδγε, διέρχεται, πάντως γε δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνει, κατὰ τὴν ιβ΄: τοῦ α΄: τοῦ παρόντος, ὥστε αἱ αγ, εδ. διάμετροί εἰσι τοῦ αδγε, κύκλου. ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ νβξ, διὰ τῶν πόλων τοῦ αὐτοῦ αδγε, διέρχεται, δῆλον, ὅτι κάθετός ἐστι ἐπὶ τοῦ αδγε, κατὰ τὴν θ΄: τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἑπομένως διὰ τοῦ κέντρου τοῦ αὐτοῦ διέρχεται κύκλου, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς αὐτῆς, τὸ ν, ἄρα κέντρον ἐστὶ τοῦ αδγε. Αὖθις ἐπεὶ οἱ αηθ, γλμ, κύκλοι παράλληλοί εἰσι, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, καὶ τέμνονται ὑπὸ τοῦ αδγε, πάντως γε αἱ αθ, γμ, κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι. πέπτωκε δὲ εἰς αὐτὰς ἡ αγ, ἄρα κατὰ τὴν κθ΄: τοῦ α΄: τῶν στοιχείων αἱ ὑπὸ καν, ογν, ἐναλλὰξ γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ ανκ, γνο, κατὰ κορυφὴν ὁμοίως ἴσαι εἰσιν, καὶ ἡ αν, ἡμιδιάμετρος ἴση τῇ γν, ἡμιδιαμέτρῳ, ἄρα κατὰ τὴν κς΄: τοῦ α΄: τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἡ νκ, ἴση ἐστὶ τῇ νο. ὥστε αἱ κηξ, ολ, ἐξ ἴσου ἀφίστανται τοῦ ν. Τελευταῖον, ἐπεὶ τὸ τοῦ αηθ, κύκλου ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον συμπίπτει, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τῇ νβξ, καθέτῳ, τὸ δὲ τοῦ γλμ, οὐ συμπίπτει, ἄρα τὸ ξ, σημεῖον ἐπὶ τῆς κη, κοινῆς ἐστι τομῆς τῶν αηθ, καὶ δβε, κύκλων, ἑκατέρα γὰρ τῶν κη, ολ, ἐν τῷ τοῦ δβε, ἐπιπέδῳ ἐστὶν, ἀλλ' ἡ κη, καὶ ἐν τῷ τοῦ αηθ, ἐπιπέδῳ ἐστὶν, ὥσπερ καὶ ἡ ολ, ἐν τῷ τοῦ γλμ, ἄρα ἡ κη, ἐκβαλλομένη τοῦ ἐπιπέδου τοῦ αηθ, συμπίπτει τῇ νβ, ἐκβαλλομένῃ καὶ αὐτῇ, κατὰ τὸ ξ, ἡ δὲ ολ, οὐ συμπίπτει ἀφίσταται δὲ ἑκατέρα ἐξ ἴσου τοῦ ν, ὡς δέδεικται, ἄρα κατὰ τὸ β΄: λῆμμα, ἡ μὲν κη, ἔλαττον ἀφαιρεῖται τόξον τοῦ δβε, ἢ ἡ ολ. ἀφαιρεῖται δὲ ἡ μὲν κη, τὸ βη, ἡ δὲ ολ, τὸ βλ, τὸ βη, ἄρα ἔλαττόν ἐστι τοῦ βλ. ὅπερ ἔδει τὸ ὑποχεθέν. Δεῖ δὲ τὰ βη, βλ, διαστήματα ἐλάττονα εἶναι τῶν βα, βγ, ἑκάτερον ἑκατέρου.

Theod: Sf: Lib. 3. Fig. 5.



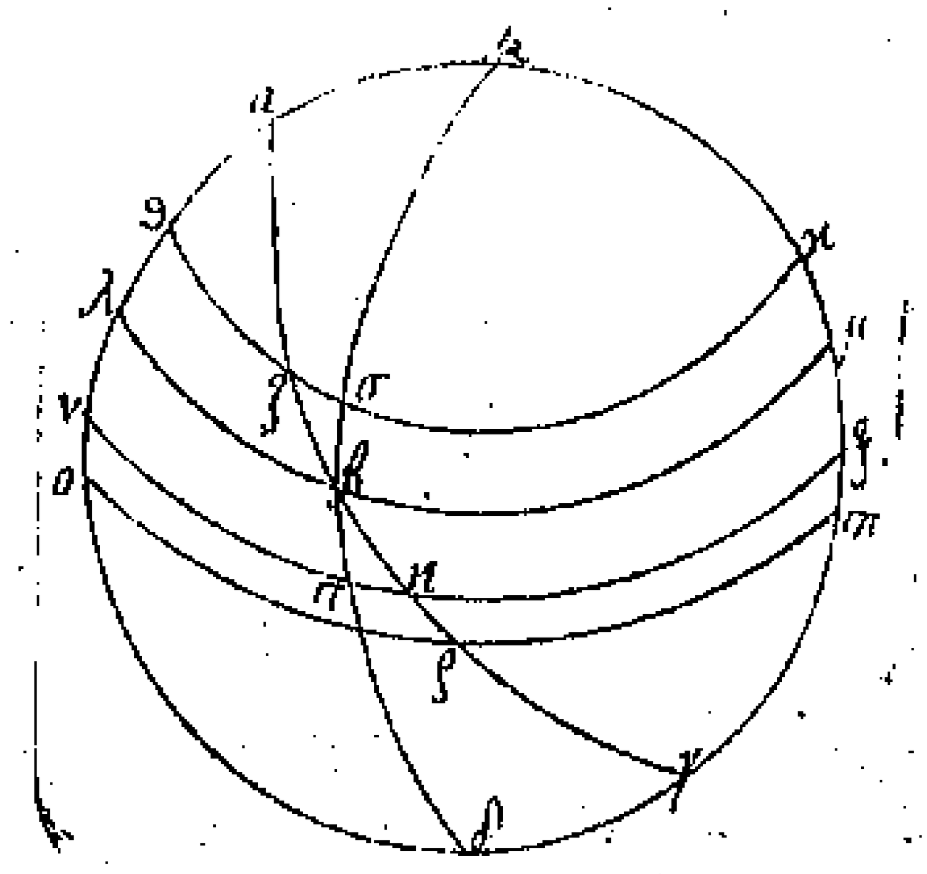
Πρό-

Πρότασις Δ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ δύο κύκλοι μέγιστοι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις τεμνόμενοι, καὶ ἐπὶ μὲν τῆς τοῦ ἑνὸς περιφερείας τόξα ἴσα ληφθῶσιν, ἐπὶ δὲ τῆς τοῦ ἑτέρου σημεῖον, ὃ μή ἐστι πόλος τοῦ ὑπ' αὐτοῦ τεμνομένου, καὶ ἀπὸ τοῦ ληφθέντος σημείου κύκλοι παράλληλοι διὰ τῶν περάτων τῶν ληφθέντων τόξων ἐπὶ τῆς τοῦ ἑτέρου περιφερείας γραφῶσιν, οἱ κύκλοι οὗτοι τόξα ἄνισα ἀφαιρέσουσιν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ἐφ' ἧς τὸ σημεῖον εἴληπται, καὶ ὁ μείζονι γραφόμενος διαστήματι, μεῖζον καὶ τὸ τόξον ἀφαιρέσει.

Ἔστωσαν κύκλοι μέγιστοι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις τεμνόμενοι οἱ αβγ, αδγε, κατὰ τὰ α, καὶ γ. καὶ ἐπὶ μὲν τῆς τοῦ αβγ, περιφερείας ληφθήτωσαν τόξα ἴσα τὰ βζ, βη, ἐπὶ δὲ τῆς τοῦ αδγε, ληφθήτω σημεῖον τὸ ε, μὴ ὂν πόλος τοῦ αβγ. καὶ ἀπὸ τοῦ ε, ληφθέντος σημείου, ὡς ἀπὸ πόλου γραφήτωσαν διὰ τῶν ζβη, σημείων κύκλοι παράλληλοι, ὥστε ἐν τῷ αὐτῷ σεπ, εἶναι ἡμισφαιρίῳ, οἱ θζκ, λβμ, νηξ. Λέγω τὰς αὐτοὺς παραλλήλους ἄνισα ἀφαιρεῖν τόξα ἀπὸ τῆς τοῦ αδγε, περιφερείας, τὰ θλ, λν. καὶ τὸ λν, μεῖζον εἶναι τοῦ θλ. Γραφήτω γὰρ διὰ τῶν ε, καὶ β, σημείων κύκλος μέγιστος ὁ εβδ. καὶ ἐπεὶ ὁ αδγε, διὰ τῶν πόλων τῶν αὐτῶν διέρχεται παραλλήλων, ἄρα, κατὰ τὴν ιβ΄: τοῦ α΄: τοῦ παρ: δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτοὺς τέμνει, καὶ ἑπομένως οἱ θζκ, λβμ, νηξ, ὀρθοί εἰσι πρὸς τὸ τοῦ αδγε, ἐπίπεδον. μέγιστος δὲ τῶν παραλλήλων ἐστὶν ὁ ορπ, ὡς δίχα τὴν σφαῖραν τέμνων, ἄρα, κατὰ τὸ α΄: πόρισμα τῆς αὐτῆς διὰ τοῦ πόλου τοῦ αδγε, διέρχεται. τὸ β, ἄρα οὐκ ἔστι πόλος τοῦ αδγε, καὶ τὸ αβ, τόξον ἔλαττόν ἐστι τοῦ βγ, ὥστε ἐὰν ἐννοηθῇ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ β, σημείου καὶ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεσθαι, πάντως γε οὐκ ἔστιν ὀρθὴ πρὸς τὸ τοῦ αδγε, ἐπίπεδον, ἄλλως γὰρ ἂν τὸ β, πόλος ἦν τοῦ αδγε, κατὰ τὴν η΄: τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἐγκλίνει μᾶλλον πρὸς τὴν σεπ, περιφέρειαν, ὥστε ἐκβαλλόμενα τὰ ἐπίπεδα τῶν θζκ, νηξ, παραλλήλων κύκλων, τὸ μὲν τοῦ θζκ, ἐπίπεδον συμπεσεῖται τῇ διὰ τοῦ β, σημείου, καὶ κέντρου τῆς σφαίρας διερχομένῃ εὐθείᾳ, τὸ δὲ τοῦ νηξ, οὐ συμπεσεῖται. ἀλλὰ τῶν αβγ, εβδ, μεγίστων κύκλων ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ ὄντων ἐπὶ μὲν τῆς τοῦ αβγ, περιφερείας εἴληπται δύο σημεῖα τὰ ζ, καὶ η, ἐξ ἴσου

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 6.



τῆς

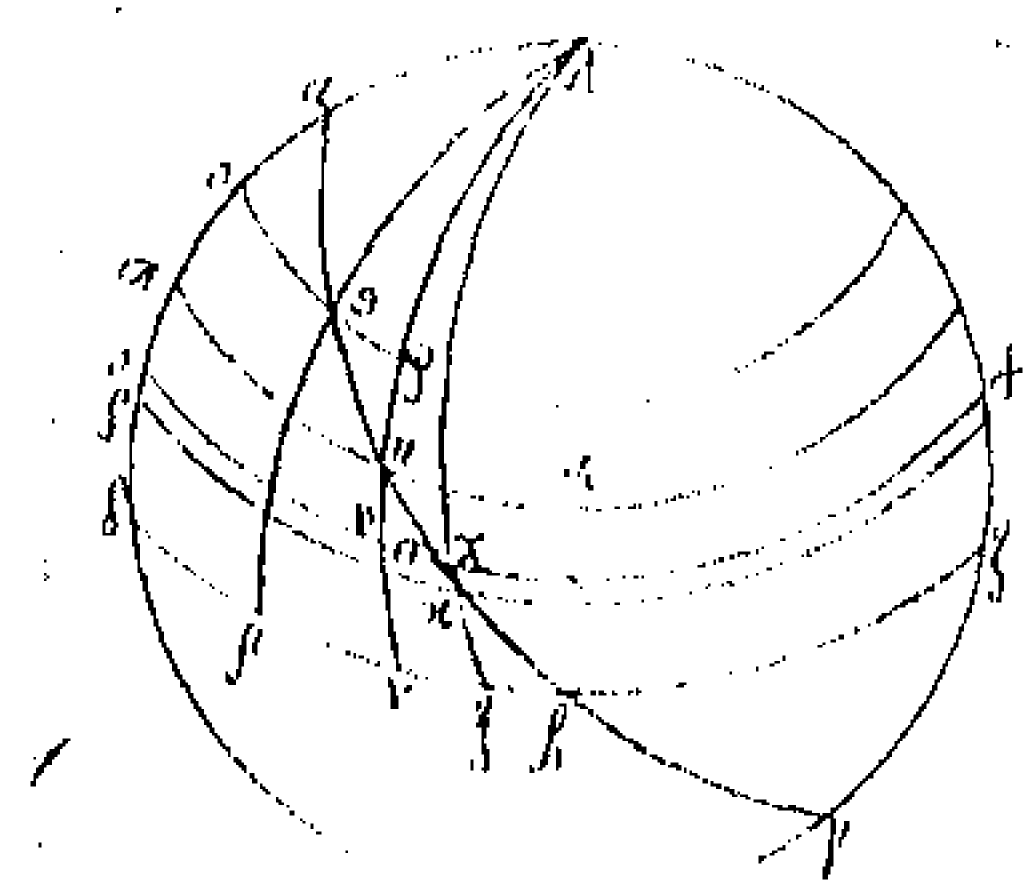
τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς, τοῦ β, δηλ: σημείου, ἀφιστάμενα, καὶ διὰ τῶν αὐτῶν σημείων ἐπίπεδα παράλληλα διέρχονται, τὰ τῶν θ ζ κ, καὶ ν η ξ, παραλλήλων, καὶ πίπτον τὸ μὲν συμπίπτει τῇ διὰ τοῦ β, κοινῆς τομῆς τῶν αὐτῶν μεγίστων κύκλων, καὶ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἄρα τὰ αὐτὰ ἐπίπεδα ἄνισα ἀφαιρεῖται τόξα ἀπὸ τῆς τοῦ ε β δ, κύκλου περιφερείας, ὥστε τὰ β σ, β τ, τόξα κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἄνισά εἰσι, καὶ μεῖζον τὸ β τ, τοῦ β σ. ἀλλὰ τὸ μὲν β τ, ἴσον ἐστὶ τῷ λ ν, τὸ δὲ β σ, τῷ θ λ, κατὰ τὴν θ': τοῦ β': τοῦ παρ: ἄρα τὸ λ ν, μεῖζόν ἐστι τοῦ θ λ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Ε': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο κύκλοι μέγιστοι πλαγίως ἀλλήλοις τέμνωνται, καὶ ἐπὶ μὲν τῆς τοῦ ἑνὸς περιφερείας τόξα ἴσα ληφθῶσι, διὰ δὲ τοῦ πόλου τοῦ ἑτέρου κύκλου καὶ τῶν περάτων τῶν εἰλημμένων τόξων κύκλοι μέγιστοι γραφῶσιν, οἱ κύκλοι οὗτοι ἄνισα τόξα ἀφαιρέσουσιν ἀπὸ τῆς περιφερείας, οὗ πόλος ἐστὶ τὸ εἰλημμένον σημεῖον, καὶ τὸ ἐναπολαμβανόμενον μεταξὺ τῶν διὰ τῶν περάτων τοῦ ἐγγυτέρου τοῦ πόλου τμήματος ἀγομένων μεγίστων κύκλων μεῖζόν ἐστιν.

Ἔστωσαν κύκλοι ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ οἱ α β γ, δ β ζ, πλαγίως ἀλλήλοις τεμνόμενοι· καὶ εἰλήφθω ἐπὶ μὲν τῆς τοῦ α β γ, περιφερείας τόξα ἴσα τὰ η θ, η κ. ἔστω δὲ πόλος τοῦ δ β ζ, τὸ λ, σημεῖον· ἀφ' οὗ

Theod: Sf: Lib. 3. Fig. 7.



γραφήτωσαν κύκλοι μέγιστοι διὰ τῶν θ, η, κ, σημείων οἱ λ θ μ, λ η ν, λ κ ξ. Λέγω τὰ μ ν, ν ξ, τόξα ἄνισα εἶναι, καὶ μεῖζον τὸ μ ν, τοῦ ν ξ, ὡς ἐναπολαμβανόμενον μεταξὺ τῶν λ θ μ, λ η ν, τῶν διὰ τῶν περάτων τοῦ η θ, τμήματος διερχομένων, τοῦ ἐγγυτέρου ὄντος τῷ λ, πόλῳ. Γραφήτωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ λ, πόλου διὰ τῶν θ, η, κ, σημείων παράλληλοι οἱ θ ο, η π, κ ρ. καὶ ἐπεὶ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω τὸ π ρ, τόξον μεῖζόν ἐστι τοῦ π ο, ἀφαιρεθήτω τὸ π σ, ἴσον τῷ π ο, καὶ διὰ τοῦ σ, σημείου, ὡς ἀπὸ πόλου τοῦ λ, γραφήτω παράλληλος ὁ σ τ, τέμνων τὸν λ η ν, κατὰ τὸ υ. Δείκνυται, ὅτι τὰ η φ, ο π, καὶ η υ, π σ, ἴσα εἰσὶ, κατὰ τὴν θ': τοῦ β': τοῦ παρόντος, ἀλλὰ καὶ τὰ ο π, π σ, ἴσα εἰσὶ, κατὰ τὴν κατασκευὴν, ἄρα καὶ τὰ η φ, η υ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. εἴληπται δὲ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν καὶ τὰ η θ, η κ, ἴσα, ἄρα κατὰ τὴν β': τοῦ παρόντος αἱ θ φ, υ κ, εὐθεῖαι, αἱ τὰ ἴσα ἐπιζευγνῦσαι τόξα ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Αὖθις ἐπεὶ ὁ λ κ ξ, μέγιστος κύκλος διὰ τοῦ πόλου τοῦ σ τ, παραλλήλου διέρχεται, οἱ γὰρ ἐν τῇ αὐτῇ

σφαίρᾳ παράλληλοι τὸν αὐτὸν ἔχουσι πόλον, κατὰ τὴν α': τοῦ β': τοῦ παρόντος, πάντως γε κατὰ τὴν ιβ': τοῦ α': τοῦ αὐτοῦ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνει, ὥστε καὶ ὁ σ τ, ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν λ κ ξ. ἀλλὰ καὶ εἰς δύο ἄνισα αὐτὸν τέμνει (ἐὰν γὰρ ἑκάτερος τῶν λ κ ξ, σ τ, ὁλοκλήρως εἶναι γεγραμμένος ἐννοηθῇ, πάντως γε ὁ σ τ, εἰς δύο ἄνισα μέρη τὸν λ κ ξ, τέμνει κύκλον, κατὰ τὸ χ, καὶ τὸ τούτῳ κατὰ διάμετρον ἀντικείμενον. καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τοῦ χ, ἐπὶ τὸ λ, χωροῦν, καὶ περατούμενον ὑπὸ τοῦ κατὰ διάμετρον ἀντικειμένου τῷ χ, ἔλαττόν ἐστι, τὸ δὲ λοιπὸν τὸ ἀπὸ τοῦ χ, ἐπὶ τὸ ξ, μεῖζον, ὅτι γε καὶ τὸ σ λ ψ, τμῆμα τῆς σφαίρας ἔλαττόν ἐστι τοῦ σ γ ψ, μέγιστος ὁ δ β ζ, ὑποτίθεται, καὶ εἰς δύο ἴσα τὴν σφαῖραν τέμνει, τὰ δ λ ζ, δ γ ζ.) εἴληπται δὲ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ χ σ, τμήματος τοῦ ψ χ σ, ὁλοκλήρου κύκλου, καθ' ὃ τὸ αὐτὸ τμῆμα, ὅπερ ἀπὸ τοῦ χ, ἀρχόμενον σημείου καὶ χωροῦν ἐπὶ τὸ σ, περατοῦται ὑπὸ τοῦ κατὰ διάμετρον ἀντικειμένου τῷ χ, εἰς ἄνισα τέμνεται. ἄρα, κατὰ τὴν α': τοῦ παρόντος ἡ υ χ, ὑποτείνουσα ἐλάττων ἐστὶ τῆς υ κ, ἐννενοημένης, ἴση δὲ τῇ υ κ, δέδεικται ἡ θ φ, ἄρα ἡ υ χ, ἐλάττων ἐστὶ καὶ τῆς θ φ. ἀλλ' ὁ φ θ ο, παράλληλος, ἐλάττων ἐστὶ τοῦ σ τ ψ, κατὰ τὴν ιϛ': τοῦ β': τοῦ παρόντος, δῆλον ἄρα, ὅτι τὸ φ θ, τόξον τὸ ὑπὸ τῆς φ θ, μείζονος ὑποτεινόμενον, μεῖζόν ἐστι τῷ λόγῳ τοῦ υ χ, τόξου, τοῦ ὑπὸ τῆς ἐλάττονος υ χ, ὑποτεινομένου, οὐ μὴν δὲ ὅμοιον, ταὐτὸν δ' ἐστιν εἰπεῖν, ὅτι τὸ φ θ, τόξον πλειόνων ἐστὶ μοιρῶν, καθ' ἃς ὁ φ θ ο, ὁλόκληρος κύκλος εἰς 360 διαιρεῖται, τὸ δὲ υ χ, ἐλαττόνων, καθ' ἃς ὁ χ υ σ, ὁλόκληρος κύκλος εἰς τοσαύτας διαιρεῖται. ἔστι δὲ τῷ μὲν θ φ, ὅμοιον τὸ μ ν, κατὰ τὴν θ'· τοῦ β': τοῦ παρόντος, τῷ δὲ υ χ, τὸ ν ξ, ἄρα τὸ μ ν, μεῖζόν ἐστι τοῦ ν ξ, ὅπερ ἦν τὸ ὑποτεθέν. Δεῖ δὲ τὰ λαμβανόμενα σημεῖα ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι ἡμισφαιρίῳ, ὡς τὰ θ, η, κ.

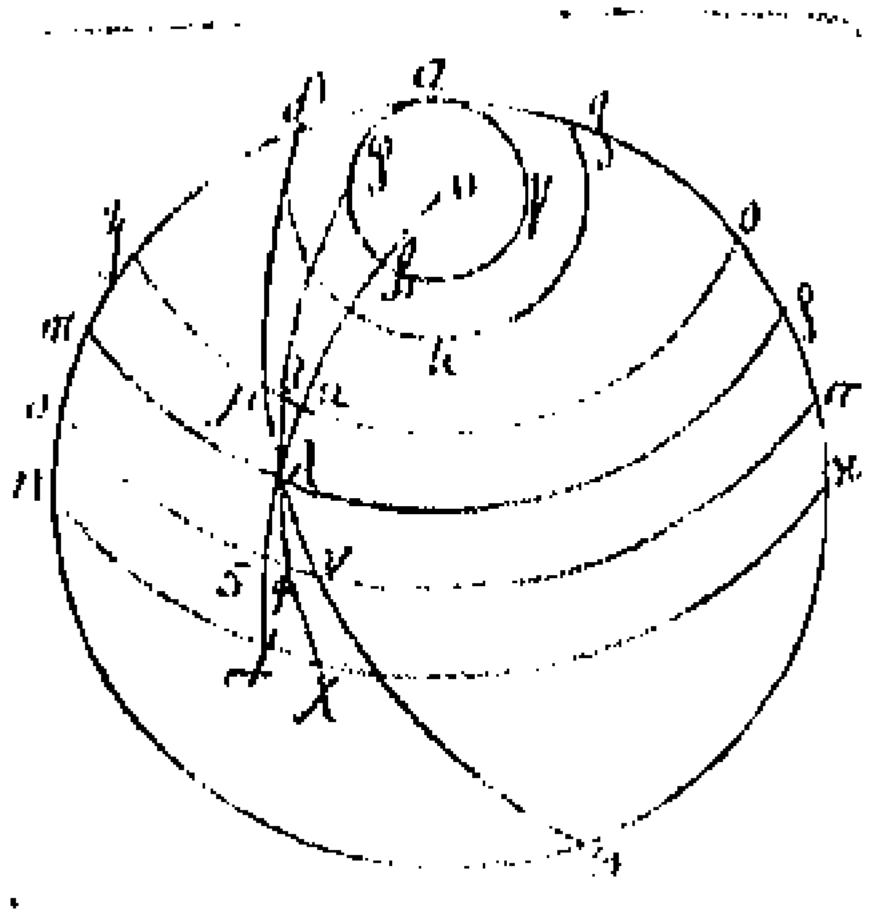
Πρότασις ϛ': Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλοι παράλληλοι δύο, καὶ τοῦ μὲν ἐλάττονος κύκλος μέγιστος ἅπτηται, τὸν δὲ μείζονα τέμνῃ, καὶ τοῦ τεμνομένου αὖθις ἕτερος κύκλος μέγιστος ἅπτηται, καθ' ὃ τέμνεται σημεῖον, ληφθῇ δὲ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ἁπτομένου τοῦ μείζονος τῶν παραλλήλων τόξα ἴσα, ὥστε ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι ἡμισφαιρίῳ, καὶ διὰ τῶν σημείων τῶν ληφθέντων τόξων παράλληλοι κύκλοι τοῖς ἐξ ἀρχῆς ἀχθῶσιν, οἱ κύκλοι οὗτοι ἄνισα τόξα ἀφαιρέσουσιν ἀπὸ τῆς περιφερείας τοῦ ἁπτομένου τοῦ ἐλάττονος τῶν ἐξ ἀρχῆς παραλλήλων, καὶ τὸ ἐγγύτερον τοῦ πόλου τῶν παραλλήλων ἔλαττον ἔσται.

Ἔστωσαν κύκλοι παράλληλοι ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ οἱ α β γ, δ ε ζ, καὶ τοῦ μὲν ἐλάττονος α β γ, ἁπτέσθω ὁ α η θ κ, μέγιστος κύκλος κατὰ τὸ α. τὸν δὲ μείζονα δ ε ζ, τεμνέτω κατὰ τὸ δ, καθ' ὃ ἁπτέσθω τοῦ αὐτοῦ ὁ δ λ θ, οὗ ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθήτωσαν ἴσα τόξα τὰ λ μ, λ ν, καὶ διὰ τῶν μ, λ, ν, σημείων ἀχθήτωσαν πα-

παράλληλοι οἱ ξ μ ο, π λ ρ, σ ν χ, τέμνοντες τὸν α η θ κ, κατὰ τὰ ξ π σ, σημεῖα. Λέγω δὴ τὰ π ξ, π σ, τόξα ἄνισα εἶναι, καὶ τούτων τὸ π ξ, ἔλαττον εἶναι τοῦ π σ, ὡς ἐγγύτερον τοῦ υ, πόλου. Διὰ τοῦ λ, τοίνυν σημείου, τῆς κοινῆς τῶν ληφθέντων τόξων ἁφῆς γραφήτωσαν δύο κύκλοι μέγιστοι, ὁ μὲν ἁπτόμενος τοῦ α β γ, ἐλάττονος τῶν παραλλήλων, κατὰ τὸ φ, ὁ δὲ διὰ τοῦ υ, πόλου τῶν αὐτῶν διερχόμενος, οἷοι οἱ φ λ χ, υ λ ψ. καὶ ἐπεὶ ὁ υ λ ψ, διὰ τοῦ πόλου τῶν παραλλήλων διέρχεται, πάντως γε κατὰ τὴν ιβ': τοῦ α': τοῦ παρόντος δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτοὺς τέμνει. εἴληπται δὲ ἐπὶ τῆς αὐτοῦ περιφερείας τὸ λ, σημεῖον, καὶ τοῦτο οὐκ ἔστιν ὁ ἕτερος πόλος τῶν αὐτῶν παραλλήλων, διὰ τὸ ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι ἡμισφαιρίῳ μετὰ τοῦ υ, πόλου, καὶ μὴ κατὰ διάμετρον ἀλλήλοις ἀντικεῖσθαι, ἀπὸ δὲ τοῦ ληφθέντος λ, ἤχθησαν τόξα μεγίστων κύκλων ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τε ξ μ ο, καὶ σ ν τ, παραλλήλου τὰ λ 2, λ 3, λ μ, λ ν, λ 4, λ 5, ἄρα κατὰ τὴν κβ': τοῦ β': τοῦ παρόντος τὸ λ 2, ὡς διὰ τοῦ πόλου υ, διερχόμενον ἐλάχιστόν ἐστι, τὸ δὲ λ 3, ἔλαττον τοῦ λ μ. ὡσαύτως κἀπὶ τοῦ ἑτέρου τὸ μὲν λ ν, μέγιστόν ἐστιν, ὡς διὰ τοῦ ἑτέρου πόλου τῶν αὐτῶν παραλλήλων διερχόμενον, τὸ δὲ λ 4, ἔλαττον τοῦ λ 5. Αὖθις ἐπεὶ ἐν τῇ αὐτῇ

Theod: Sf: Lib. 3. Fig. 8.



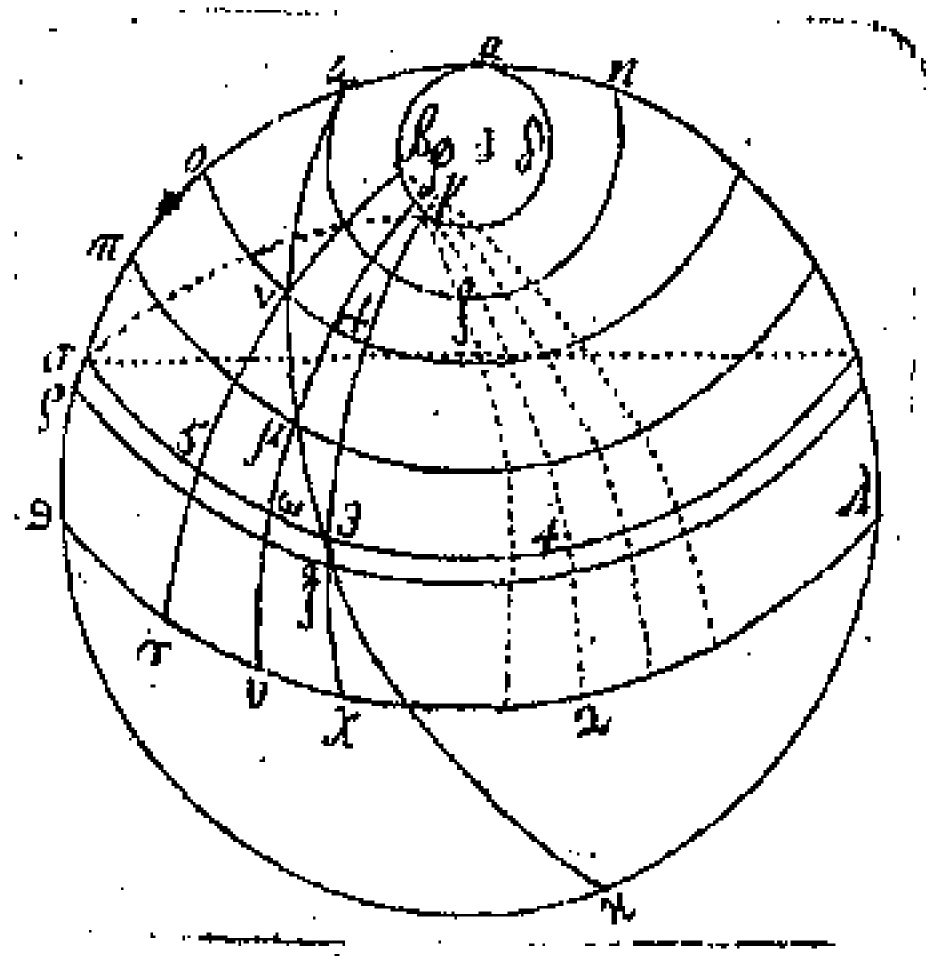
σφαίρᾳ δύο εἰσὶ κύκλοι μέγιστοι οἱ δ λ θ, φ λ χ, τεμνόμενοι, κατὰ τὸ λ, καὶ ἐπὶ μὲν τῆς τοῦ δ λ θ, περιφερείας εἴληπται τόξα ἴσα τὰ λ μ, λ ν, καὶ διὰ τῶν μ, ν, παράλληλοι ἤχθησαν κύκλοι οἱ ξ μ ο, σ ν τ, πάντως γε κατὰ τὴν γ': τοῦ παρόντος οἱ αὐτοὶ παράλληλοι κύκλοι ἀφαιροῦσιν ἀπὸ τοῦ φ λ χ, τόξα ἄνισα τὰ λ 3, λ 4, καὶ τὸ λ 3. ἔλαττόν ἐστι, τοῦ λ 4. (ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας εὐθεῖά τις διὰ τοῦ λ, σημείου ἐννοηθῇ ἠγμένη, δῆλον, ὅτι τῷ υ, προσεγγίζει τῷ πόλῳ, καὶ τὸ τοῦ ξ μ ο, ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον συμπεσεῖται τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ,) ἀλλὰ τὸ μὲν λ 3, ἴσον ἐστὶ τῷ π ξ, τὸ δὲ λ 4, τῷ π σ, κατὰ τὴν ιβ': τοῦ β': τοῦ παρόντος, ἄρα τὸ π ξ, ἔλαττόν ἐστι τοῦ π σ, ὅπερ ἦν τὸ ὑποτεθέν.

Πρότασις Ζ': Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλοι παράλληλοι δύο, καὶ τοῦ μὲν ἐλάττονος κύκλος μέγιστος ἅπτηται, τὸν δὲ μείζονα τέμνῃ, καὶ τοῦ τεμνομένου αὖθις ἕτερος κύκλος μέγιστος ἅπτηται, καθ' ὃ τέμνεται σημεῖον. ληφθῇ δὲ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ἁπτομένου τοῦ μείζονος τῶν παραλλήλων τόξα ἴσα, ὥστε ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι ἡμισφαιρίῳ, καὶ διὰ τῶν σημείων τῶν ληφθέντων τόξων κύκλοι μέγιστοι ἀχθῶσιν ἁπτόμενοι τοῦ ἐλάττονος τῶν παραλλήλων, οἱ κύκλοι οὗτοι ἄνισα τόξα ἐναπολήψονται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, τῶν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ, καὶ τὸ ἐναπολαμβανόμενον ὑπὸ τῶν διερχομένων κύκλων διὰ τῶν περάτων τοῦ ἐγγύτερον τοῦ πόλου ὄντος τόξον μεῖζον ἔσται.

Ἔστωσαν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλοι παράλληλοι οἱ α β γ δ, ε ζ η. καὶ τοῦ μὲν α β γ, ἐλάττονος ἁπτέσθω ὁ α θ κ λ, μέγιστος κύκλος, τὸν δὲ μείζονα ε ζ η, τεμνέτω ὁ αὐτὸς κατὰ τὸ ε, καθ' ὃ ἁπτέσθω τοῦ αὐτοῦ ε ζ η, ὁ ε μ κ, μέγιστος, οὗ ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθήτωσαν ἴσα τόξα τὰ μ ν, μ ξ, ὥστε εἶναι ἄμφω τὰ ληφθέντα ταῦτα τόξα ἐν τῷ αὐτῷ θ α λ, ἡμισφαιρίῳ, καὶ διὰ τῶν ν, μ, ξ, σημείων ἀχθήτωσαν κύκλοι μέγιστοι οἱ τ ν β, υ μ φ, χ ξ γ, ἁπτόμενοι τοῦ α β γ δ, ἐλάττονος τῶν παραλλήλων, κατὰ τὰ β, φ, γ, σημεῖα. ἔστω δὲ καὶ μέγιστος τῶν παραλλήλων ὁ θ χ λ. Λέγω τοὺς τ ν β, υ μ φ, χ ξ γ, μεγίστους κύκλους ἄνισα ἐναπολαμβάνειν τόξα ἐπὶ τῆς τοῦ θ χ λ, παραλλήλου τὰ τ υ, υ χ, καὶ τὸ τ υ, τὸ ἐναπολαμβανόμενον ὑπὸ τῶν τ ν β, υ μ φ,

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 9.



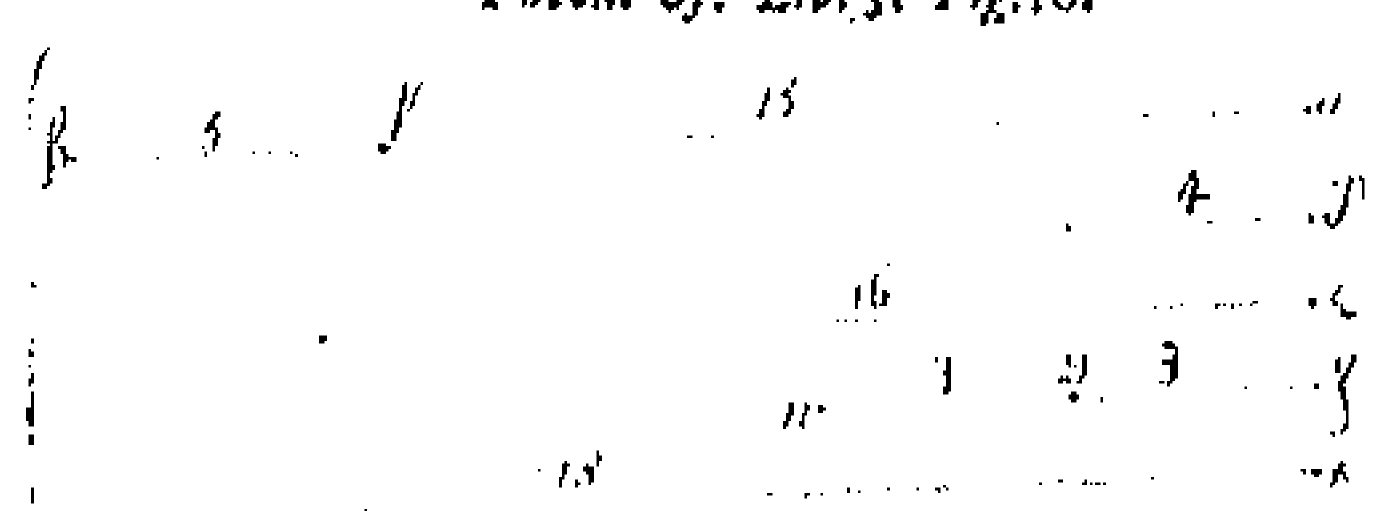
μεγίστων κύκλων τῶν διὰ τῶν μ, ν, σημείων διερχομένων τοῦ μ ν, τόξου, τοῦ ἐγγύτερον ὄντος τοῦ ι, πόλου μεῖζον εἶναι. Γραφήτωσαν γὰρ διὰ τῶν ν μ ξ, ληφθέντων σημείων κύκλοι παράλληλοι τοῖς ἐξ ἀρχῆς, οἱ ν ο, μ π, ξ ρ. καὶ ἐπεὶ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, τὸ ρ π, μεῖζόν ἐστι τοῦ π ο, ἀφαιρεθήτω τὸ σ π, ἴσον τῷ π ο, καὶ γραφήτω ὁ 3 σ. Δείκνυται. Ἐπεὶ τὸ μὲν μ ψ, ἴσον ἐστὶ τῷ π ο, τὸ δὲ μ ω, τῷ π σ, κατὰ τὴν ιβ': τοῦ β': τοῦ παρόντος, τὰ δὲ π ο, π σ, ἴσα ἐστὶ, κατὰ τὴν κατασκευήν, ἄρα καὶ τὰ μ ψ, μ ω, ἴσα ἐστίν, εἴληπται δὲ καὶ τὰ μ ν, μ ξ, ἴσα, ἄρα κατὰ τὴν β': τοῦ παρ: αἱ ν ψ, ω ξ, ὑποτείνουσαι ἴσαι εἰσίν. Αὖθις ἐπεὶ ὁ χ γ 2, μέγιστος κύκλος ἁπτόμενος τοῦ α β γ δ, παραλλήλου κατὰ τὸ γ, οὐ διέρχεται διὰ τοῦ ι, πόλῳ τοῦ αὐτοῦ παραλλήλου, δῆλον, ὅτι τὸν 3 σ γ, παράλληλον πλαγίως τέμνει, ὥστε ὁ 3 σ γ, παράλληλος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ χ γ 2, μεγίστου κύκλου ἐγκλινόμενός ἐστι πρὸς τὸ γ, σημεῖον. μέγιστος δὲ τῶν παραλλήλων ἐστὶν ὁ θ χ λ, ἄρα ὁ χ γ 2, μέγιστος κύκλος δίχα ὑπ' αὐτοῦ τέμνεται κατὰ τὰ χ 2, σημεῖα, ὡς δέδεικται προτ: ί: τοῦ α: τοῦ παρόντος, καὶ τὸ χ γ 2, τόξον ἡμικύκλιόν ἐστιν, ὥστε 3 γ 4. ἔλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίου, καὶ ἑπομένως ὁ 3 σ γ, παράλληλος εἰς δύο ἄνισα τὸν χ γ 2, τέμνει κύκλον. εἴληπται δὲ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ 3 σ γ, τόξου τὸ ω, σημεῖον, καθ' ὃ τὸ αὐτὸ 3 σ γ, τόξον εἰς ἄνισα τέμνεται, ἄρα κατὰ τὴν α: τοῦ παρόντος, ἡ ω 3, ὑποτείνουσα ἐλάττων ἐστὶ τῆς ω ξ. ἀλλὰ τῇ ω ξ, ἴση ἐστὶν ἡ ψ ν, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ ἡ ψ ν, μείζων ἐστὶ τῆς ω 3. ἐπεὶ δὲ ὁ ψ ν ο, παράλληλος ἐλάττων ἐστὶ τοῦ 3 σ γ, πάντως γε ἡ ν ψ, ὑποτείνουσα, μεῖζον τῷ λόγῳ τόξον ὑποτείνει τοῦ ψ ν ο, παραλλήλου, ἤπερ ἡ ω 3, τοῦ 3 σ γ, παραλλήλου. οὐκοῦν ἄρα ὅμοιά εἰσι τὰ ν ψ, ω 3, τόξα, ἀλλὰ μᾶλλον τὸ ν ψ, μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὸν ψ ν ο, κύκλον, ἢ τὸ ω 3, πρὸς τὸν 3 σ γ. ἀλλὰ τὸ μὲν ν ψ, ὅμοιόν ἐστι τῷ τ υ, τὸ δὲ ω 3, τῷ υ χ, κατὰ τὴν ι β': τῆς β': τοῦ παρ: ἄρα καὶ τὸ τ υ, μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὸν θ χ, κύκλον, ἢ τὸ υ χ, τῶν δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστιν, ἄρα τὸ τ υ, μεῖζόν ἐστι τοῦ υ χ, ὅπερ ἔδει τὸ ὑποτεθέν.

Λ Η Μ Μ Α.

Δύο ἀνίσων μεγεθῶν δοθέντων, μέσον τούτων εὑρεῖν, σύμμετρον ἑτέρῳ τινὶ, μὴ ἴσῳ ὄντι τῇ τοῦ μείζονος τῶν δοθέντων πρὸς τὸ ἔλαττον διαφορᾷ.

Ἔστωσαν ἄνισα μεγέθη τὰ α β, α γ. καὶ ζητείσθω μέγεθος, ὥστε εἶναι μέσον μὲν τῶν α β, α γ, σύμμετρον δὲ τῷ δοθέντι δ. Ἐπεὶ δὴ τοῦτο διχῶς ἐνδέχεται ὑποκεῖσθαι. ἢ γὰρ τὸ δοθὲν μέγεθος, ᾧ δεῖ σύμμετρον εἶναι τὸ ζητούμενον, ἔλαττόν ἐστι τῆς β γ, διαφορᾶς, ἢ γοῦν μεῖζον. Κείσθω πρῶτον ἔλαττον, οἷον τὸ δ. Διπλασιασθήτω δὴ τὸ δ, τριπλασιασθήτω, ἢ κατ' ἄλλον τινὰ πολλαπλασιασθήτω ἀριθμὸν, ὥστε γενέσθαι τὸ ε, μέγεθος πρώτως μεῖζον τοῦ α γ, καὶ τοῦτο ἔσται τὸ ζητούμενον. Ὅτι μὲν γὰρ μέσον ἐστὶ τῶν α β, α γ, δῆλον. εἰ γὰρ μὴ, ἔσται πάντως μεῖζον καὶ τοῦ α β. ἀφαιρεθέντος δὲ ἀπ' αὐτοῦ τοῦ δ, ἅπαξ, τὸ ἐναπολειπόμενον μεῖζον ἔσται τοῦ α γ, διὰ τὸ ἔλαττον εἶναι τὸ δ, τῆς β γ, διαφορᾶς, καὶ ἑπομένως οὐκ ἔσται πρώτως μεῖζον τοῦ α γ, τὸ εὑρεθὲν ε, ἀλλὰ μᾶλλον τὸ ἐναπολειπόμενον,

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 10.



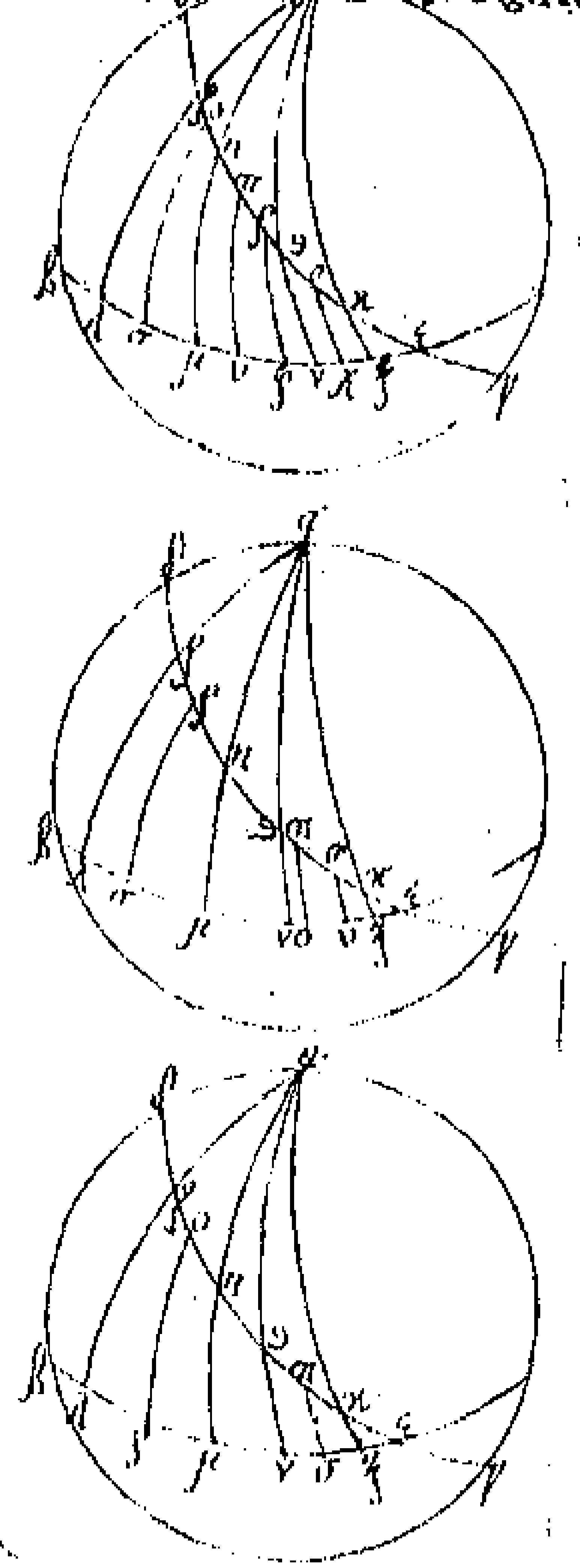
μενον, ὑπετέθη δὲ τὸ ε, καὶ πρώτως μεῖζον, κατὰ τὴν κατασκευὴν, ὅπερ ἄτοπον, οὐκ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ α β, ἀλλ' ἔλαττον τὸ αὐτὸ ε, γέγονε δὲ καὶ μεῖζον τοῦ α γ, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ε, τῶν α β, α γ, δοθέντων, ὅπερ ἔδει τὸ α: Ὅτι δὲ καὶ σύμμετρόν ἐστι τῷ δ, οὐδεμία ἐστὶν ἀμφιβολία, τὸ γὰρ ε, πολλαπλασιαζομένου τοῦ δ, γέγονεν, ὥστε τὸ αὐτὸ ἄμφω μετρεῖται μέτρῳ, καὶ τοῦτό ἐστι τὸ συστατικὸν τῶν συμμέτρων μεγεθῶν, κατὰ τὸν β': ὅρον τοῦ ί: τοῦ στοιχειωτοῦ. ἀλλὰ δὴ κείσθω τὸ δοθὲν μέγεθος, ᾧ τινι δέον τὸ ζητούμενον σύμμετρον εἶναι, μεῖζον τῆς β γ, διαφορᾶς, οἷον τὸ ζ η. καὶ διαιρεθήτω εἰς δύο, ἢ εἰς τέσσαρα, ἢ εἰς ὀκτὼ, ἢ εἰς ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν, τῆς τομῆς ἀεὶ ἐν μέσῳ γινομένης, ἕως οὗ τὸ ἐναπολειφθὲν ἔλαττον ἀναφανῇ τῆς β γ, διαφορᾶς. εἶτα διπλασιασθήτω, τριπλασιασθήτω τὸ αὐτὸ, ἢ ἄλλως πως αὐξηθήτω, ὥστε τὸ γενόμενον πρώτως μεῖζον εἶναι τοῦ α γ, ὡς τὸ κ. καὶ τοῦτο ἔσται τὸ ζητούμενον κατὰ τὰ εἴδη εἰρημένα. ἔσται γὰρ πάντως καὶ μέσον, τῶν α β, α γ, εἰ γὰρ μὴ, τὸ αὐτὸ ἕψεται ἄτοπον, ὃ καὶ πρότερον, καὶ πρὸς τούτῳ σύμμετρον τῷ ζ η. κατὰ γὰρ τὰ ἤδη εἰρημένα, σύμμετρόν ἐστι πηλίκῳ τινὶ μέρει τοῦ ζ η, ᾧ τινι σύμμετρόν ἐστι, καὶ τὸ ζ η. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Η': Θεώρημα.

Ἐὰν ἐπὶ μεγίστου κύκλου περιφερείας ὁ πόλος ᾖ τῶν παραλλήλων, καὶ τούτων τέμνωσι δύο μέγιστοι κύκλοι πρὸς ὀρθὰς, ὧν ὁ μὲν εἷς τῶν παραλλήλων, ὁ δ' ἕτερος λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους, ἀπὸ δὲ τοῦ λοξοῦ ἴσαι περιφέρειαι ἀποληφθῶσι, μὴ οὖσαι ἑξῆς, ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὲ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων κύκλου. διὰ δὲ τῶν γενομένων σημείων, καὶ τοῦ πόλου μέγιστοι κύκλοι γραφῶσιν, ἀνίσους ἀπολήψονται περιφερείας τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων τὰς μεταξὺ αὐτῶν, καὶ μείζονα ἀεὶ τὴν ἔγγιον τοῦ ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου τῆς πορρώτερον.

Ἐπὶ γὰρ μεγίστου κύκλου περιφερείας τοῦ α β γ, ὁ πόλος ἔσω τῶν παραλλήλων, τὸ α, σημεῖον, καὶ τὸν α β γ, κύκλον δύο μέγιστοι κύκλοι τεμνέτωσαν οἱ δ ε γ, β ε, πρὸς ὀρθάς. ὧν ὁ μὲν β ε, εἷς ἔσω τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ δ ε γ, λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους. ἀπὸ δὲ τοῦ δ ε γ, λοξοῦ, ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν, μὴ οὖσαι ἑξῆς, ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὲ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων β ε, αἱ ζ η, θ κ, καὶ διὰ τῶν ζ, η, θ, κ, σημείων, καὶ τοῦ α, πόλου μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ α ζ λ, α η μ, α θ ν, α κ ξ. Λέγω, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ λ μ, περιφέρεια τῆς ν ξ, περιφερείας. Ἡ γὰρ η θ, ἤτοι σύμμετρός ἐστι ταῖς ζ η, θ κ, ἢ οὔ. Ἔστω πρότερον σύμμετρος, καὶ διῃρήσθωσαν αἱ ζ η, η θ, θ κ, εἰς μέρη ἴσα τῷ κοινῷ αὐτῶν μέτρῳ, κατὰ τὰ ο, π, ρ, σ, σημεῖα, καὶ δι' ἑκάστου τούτων, καὶ τοῦ α, πόλου γεγράφθωσαν κύκλοι μέγιστοι, οἱ ο τ, π υ, ρ φ, σ χ. Ἐπεὶ οὖν αἱ ζ ο, ο η, η π, π ρ, πρ, ρθ, θσ, σκ, περιφέρειαι ἑξῆς ἀλλήλαις ἴσαι εἰσί, κατὰ τὴν ε΄: τοῦ παρ: πάντως γε αἱ λτ, τμ, μυ, υφ, φν, νχ, χξ, ἑξῆς μείζονες ἀλλήλων εἰσίν, ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίστης τῆς λτ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ μὲν λτ, τῆς νχ, ἡ δὲ τμ, τῆς χξ, ἡ ὅλη ἄρα μλ, ὅλης τῆς νξ, μείζων ἐστίν. Μὴ ἔστω δὴ ἡ ηθ, ταῖς ζη, θκ, σύμμετρος. Λέγω ὁμοίως μείζονα εἶναι τὴν λμ, τῆς νξ. Εἰ γὰρ μή, ἔσται ἤτοι ἐλάσσων, ἢ ἴση. Ἔστω, εἰ δυνατόν, πρότερον ἐλάσσων ἡ λμ, νξ. Καὶ κείσθω τῇ λμ, ἴση ἡ νο. καὶ διὰ τοῦ α, πόλου καὶ τοῦ ο, γεγράφθω μέγιστος ὁ πο. δύο δὴ οὐσῶν περιφερειῶν ὁμοιογενῶν ἀνίσων, τῶν ηθ, θπ, ηθ, εἰλήφθω τις περιφέρεια ἡ θρ, διὰ τοῦ ἀνωτέρω λήμματος, μείζων μὲν οὖσα τῆς θπ, ἐλάσσων δὲ τῆς θκ, σύμμετρος δὲ τῇ ηθ. καὶ κείσθω τῇ θρ, ἴση ἡ ση, καὶ διὰ τῶν ρ, σ, σημείων, καὶ α, πόλου γεγράφθωσαν μέγιστοι κύκλοι οἱ συ, ρτ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ση, τῇ θρ, κατὰ τὴν δεῖξιν τοῦ α΄: μέρους, καὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ηθ, ἑκατέρᾳ τῶν ση, θρ, ἡ τμ, ἄρα τῆς νυ, μείζων ἐστίν, ὥσπερ καὶ τῆς νο, ἡ νυ, πολλῷ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ λμ, τῆς νο, ἀλλὰ καὶ ἴση, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἡ λμ, τῆς νξ. Λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἴση. Εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω ἴση, καὶ τετμήσθωσαν αἱ ζη, θκ, δίχα κατὰ τὰ ο, π, σημεῖα. καὶ διὰ τῶν ο, π, σημείων, καὶ τοῦ α, πόλου, μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ορ, πσ. ἐπεὶ οὖν αἱ ζο, οη, ἑξῆς ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, αἱ ἄρα λρ, ρμ, ἑξῆς ἀλλήλων μείζονές εἰσι, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, καὶ τὴν ε΄: τοῦ παρόντος, ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίστης τῆς λρ, μείζων ἄρα ἡ λρ, τῆς ρμ. ἡ ἄρα λμ, τῆς μρ, μείζων ἐστίν, ἢ διπλῆ. Πάλιν ἐπεὶ αἱ θπ, πκ, ἑξῆς ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, αἱ νσ, σξ, ἄρα ἑξῆς ἀλλήλων μείζονές εἰσιν, ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίστης τῆς νσ, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ νσ, τῆς σξ. ὥστε ἡ νξ, τῆς νσ, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλῆ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ λμ, τῇ νξ, ὧν ἡ λμ, τῆς μρ, μείζων ἐστὶν ἢ διπλῆ, ἡ δὲ νξ, τῆς νσ, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλῆ, ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ρμ, τῆς νσ, ἴσων ὑποκειμένων τῶν οη, θπ, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἴση ἡ λμ, τῇ νξ. ἐδείχθη δὲ οὐδ᾽ ἐλάσσων, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ λμ, περιφέρεια τῆς νξ, περιφερείας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 11.

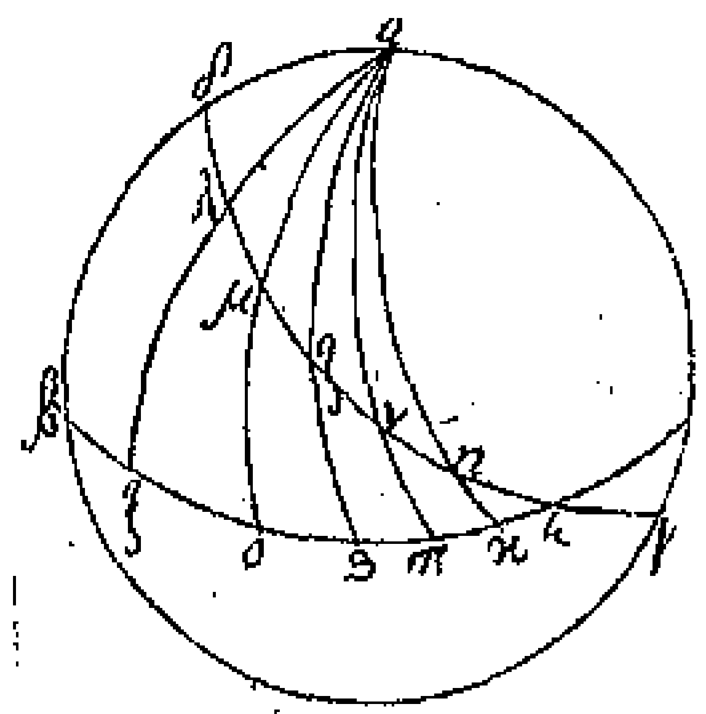


Πρότασις Θ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν ἐπὶ μεγίστου κύκλου περιφερείας ὁ πόλος ᾖ τῶν παραλλήλων, καὶ τοῦτον τέμνωσι δύο κύκλοι πρὸς ὀρθάς, ὧν ὁ μὲν εἷς τῶν παραλλήλων, ὁ δ᾽ ἕτερος λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους, ἀπὸ δὲ τοῦ λοξοῦ ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, διὰ δὲ τῶν σημείων καὶ τοῦ πόλου τῶν παραλλήλων μέγιστοι κύκλοι γραφῶσιν, ἔσται ὡς ἡ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων περιφέρεια, ἡ μεταξὺ τοῦ ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου, καὶ τοῦ ἑξῆς διὰ τοῦ πόλου, πρὸς τὴν τοῦ λοξοῦ κύκλου περιφέρειαν, τὴν μεταξὺ τῶν αὐτῶν κύκλων, οὕτως ἡ ἑξῆς τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, ἡ μεταξὺ τῶν διὰ τοῦ πόλου καὶ τῶν ληφθέντων σημείων, μεγίστων κύκλων, πρὸς ἐλάττονά τινα περιφέρειαν τῆς τοῦ λοξοῦ κύκλου περιφερείας, τῆς μεταξὺ τῶν ληφθέντων σημείων.

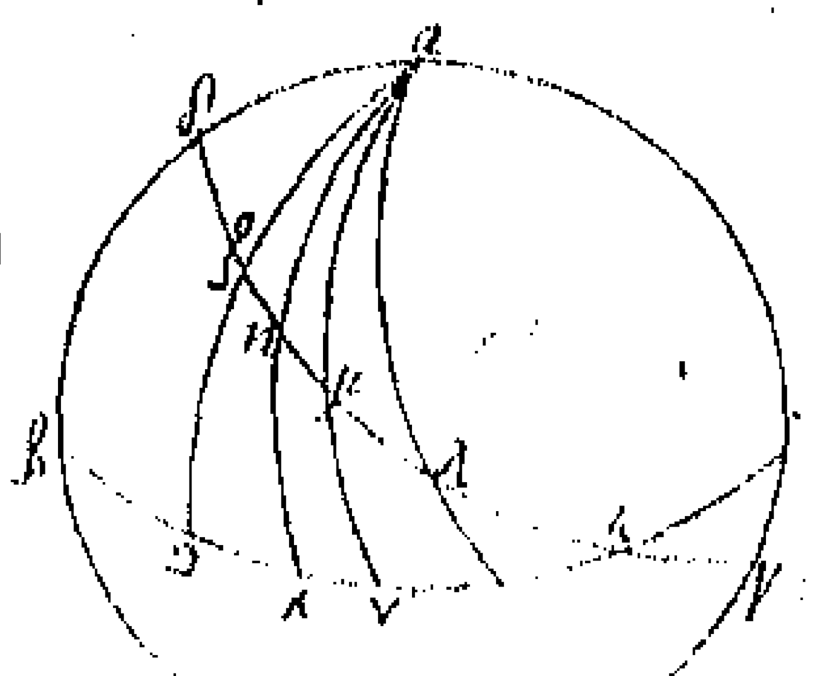
Ἐπὶ γὰρ μεγίστου κύκλου περιφερείας τοῦ αβγ, ὁ πόλος ἔστω τῶν παραλλήλων τὸ α, σημεῖον, καὶ τὸν αβγ, δύο κύκλοι τεμνέτωσαν πρὸς ὀρθὰς μέγιστοι οἱ δεγ, βε. ὧν ὁ μὲν βε, εἷς ἔστω τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ δεγ, λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους. ἐπὶ δὲ τοῦ λοξοῦ κύκλου δεγ, εἰλήφθωσαν δύο τυχόντα σημεῖα τὰ ζ, η, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων βε, καὶ διὰ τῶν ζ, η, καὶ α, πόλου γεγράφθωσαν μέγιστοι κύκλοι οἱ αζθ, αηκ. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ βθ, περιφέρεια πρὸς τὴν δζ, περιφέρειαν, οὕτως ἡ θκ, περιφέρεια πρὸς ἐλάσσονά τινα περιφέρειαν τῆς ζη, περιφερείας. ἤτοι γὰρ ἡ ζη, τῇ δζ, σύμμετρός ἐστιν, ἢ οὔ. Ἔστω πρότερον σύμμετρος, καὶ διῃρήσθωσαν εἰς τὰ μέρη τὰ μετροῦντα αἱ δζ, ζη, κατὰ τὰ λ, μ, ν, σημεῖα, καὶ δι᾽ ἑκάστου τούτων καὶ τοῦ α, πόλου γεγράφθωσαν μέγιστοι κύκλοι οἱ λξ, μο, νπ. Ἐπεὶ οὖν αἱ δλ, λμ, μζ, ζν, νη, ἑξῆς ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, αἱ ἄρα βξ, ξο, οθ, θπ, πκ, ἑξῆς μείζους ἀλλήλων εἰσί, κατὰ τὴν ε΄: τοῦ παρόντος, ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίστης τῆς βξ. καὶ ἔστι τὸ μὲν πλῆθος τῶν βξ, ξο, οθ, ἴσον τῷ πλήθει τῶν δλ, λμ, μζ, τὸ δὲ πλῆθος τῶν θπ, πκ, ἴσον τῷ πλήθει τῶν ζν, νη. ἡ βθ, ἄρα πρὸς τὴν δζ, μείζονα λόγον ἔχει, κατὰ τὸν ζ΄: ὅρον τοῦ ε΄: τοῦ στοιχ: ἤπερ ἡ θκ, πρὸς τὴν ζη. ἐὰν ἄρα ποιῶμεν ὡς τὴν βθ, πρὸς τὴν δζ, οὕτω τὴν θκ, πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται πρὸς ἐλάσσονα τῆς ζη. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βθ, περιφέρεια πρὸς τὴν δζ, περιφέρειαν, οὕτως ἡ θκ, πρὸς ἐλάσσονά τινα περιφέρειαν τῆς ζη.

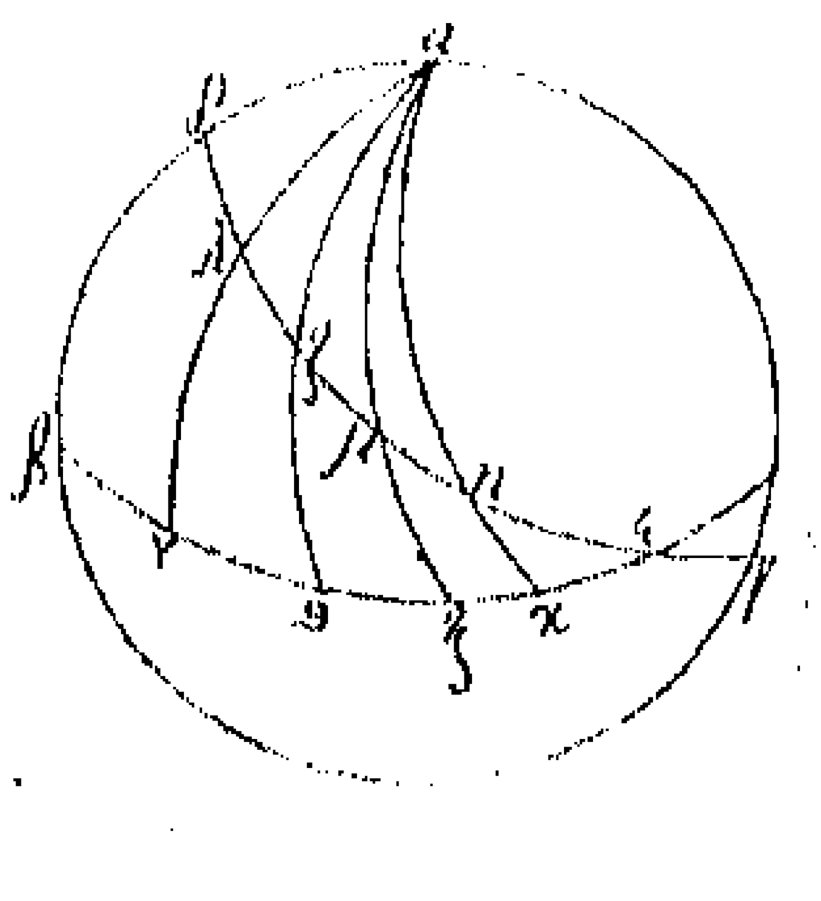
Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 12.



Μὴ ἔςω δὴ ἡ ζη, τῇ δζ, σύμμετρος. Λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἐςὶν ὡς ἡ βθ, περιφέρεια πρὸς τὴν δζ, περιφέρειαν, οὕτως ἡ θκ, περιφέρεια πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ζη, περιφερείας. εἰ γὰρ μὴ, ἔςαι ἤτοι πρὸς μείζονα τῆς ζη, ἢ πρὸς αὐτήν. Ἔςω πρότερον, εἰ δυνατὸν, πρὸς μείζονα τῆς ζη, τὴν λζ. καὶ τριῶν οὐσῶν ἀνίσων περιφερειῶν τῶν λζ, ζη, ζδ, εἰλήφθω τις περιφέρεια ἡ ζμ, τῆς μὲν ζλ, οὖσα ἐλάσσων, τῆς δὲ ζη, μείζων, καὶ τῇ ζδ, σύμμετρος κατὰ τὸ λῆμμα τῆς ἀνωτέρω. καὶ διὰ τοῦ μ, καὶ τοῦ α, πόλου γεγράφθω μέγιστος κύκλος ὁ μν. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐςιν ἡ ζμ, τῇ ζδ, ἔςιν ἄρα ὡς ἡ βθ, πρὸς τὴν δζ, οὕτως ἡ θν, πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ζμ, κατὰ τὸν ῥηθέντα ὅρον. ὡς δὲ ἡ βθ, πρὸς τὴν δζ, οὕτως ἐςὶν ἡ θκ, πρὸς τὴν ζλ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, καὶ ὡς ἄρα ἡ θκ, πρὸς τὴν ζλ, οὕτως ἐςὶν ἡ θν, πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ζμ, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ θκ, πρὸς τὴν θν, οὕτως ἡ ζλ, πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ζμ, ἐλάσσων δὲ ἡ θκ, τῆς θν, ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ λζ, τῆς ἐλάσσονος τῆς ζμ, ἀλλὰ καὶ μείζων, ὅπερ ἀδύνατον. οὐ γάρ ἐςιν ὡς ἡ βθ, πρὸς τὴν δζ, οὕτως ἡ θκ, πρὸς μείζονά τινα περιφέρειαν τῆς ζη, περιφερείας. Λέγω δὲ, ὅτι οὐδὲ πρὸς αὐτήν. εἰ γὰρ δυνατὸν ἔςω ὡς ἡ βθ, πρὸς τὴν δζ, οὕτως ἡ θκ, πρὸς τὴν ζη.

Theod: Sf: Lib. 3. Fig. 13.





Τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν δζ, ζη, δίχα κατὰ τὰ λ, μ, σημεῖα, καὶ δι' ἑκατέρου τούτων καὶ τοῦ α, πόλου γεγράφθωσαν μέγιστοι κύκλοι, οἱ αλν, αμξ. Ἐπεὶ οὖν αἱ δλ, λζ, ἑξῆς ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, αἱ βν, ἄρα νθ, κατὰ τὴν ε: τοῦ παρόντος, ἑξῆς μείζους εἰσὶν ἀλλήλων, ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίςης τῆς βν. ἡ βθ, ἄρα τῆς θν, μείζων ἐςὶν ἢ διπλῆ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ κθ, τῆς θξ, ἐλάσσων ἐςὶν, ἢ διπλῆ. Ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν βθ, τῆς θν, μείζων ἐςὶν ἢ διπλῆ, ἡ δὲ θκ, τῆς θξ, ἐλάσσων ἢ διπλῆ, ἡ βθ, ἄρα πρὸς τὴν θν, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κθ, πρὸς τὴν θξ, κατὰ τὸν ζ': ὅρον τοῦ ε: σοιχειωτοῦ, καὶ ἐναλλὰξ ἡ βθ, ἄρα πρὸς τὴν θκ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ νθ, πρὸς τὴν θξ. ὡς δὲ ἡ βθ, πρὸς τὴν θν, οὕτως ἐςὶν ἡ δζ, πρὸς τὴν ζη, ἡ νθ, ἄρα πρὸς τὴν θξ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ δζ, πρὸς τὴν ζη. ὡς δὲ ἡ δζ, πρὸς τὴν ζη, οὕτως ἐςὶν ἡ λζ, πρὸς τὴν ζμ, ἡ νθ, ἄρα πρὸς τὴν θξ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ λζ, πρὸς τὴν ζμ. καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἡ θν, πρὸς τὴν λζ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ θξ,

πρὸς

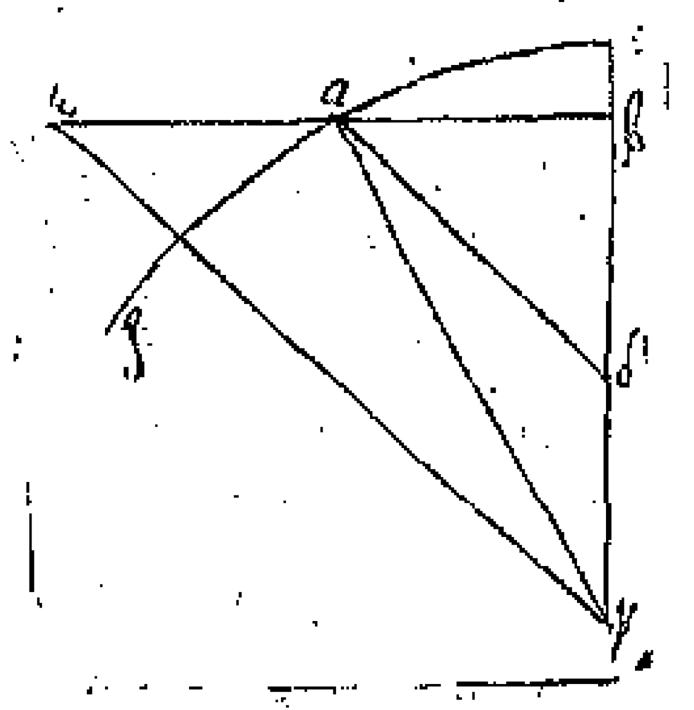
πρὸς τὴν ζμ. ἐὰν ἄρα ποιῶμεν, ὡς τὴν νθ, πρὸς τὴν λζ, οὕτω τὴν θξ, πρὸς ἄλλην τινὰ, ἔςαι πρὸς μείζονα τῆς ζμ, περιφερείας, ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον. ἐςὶν ἄρα ὡς ἡ βθ, πρὸς τὴν δζ, οὕτως ἡ θκ, πρὸς ἐλάσσονα τῆς ζη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα τῆς ἑπομένης Ι': Προτάσεως.

Ἐὰν ἀπὸ ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου εὐθεῖα ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ἀπεναντίον αὐτῆς πλευρὰν, ὅλη αὐτὴ πλευρὰ, ἐφ' ἣν πίπτει ἡ ἀχθεῖσα εὐθεῖα, μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὸ κατὰ τὴν ὀρθὴν γωνίαν μέρος, ἤπερ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν.

Ἔςω δὴ τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ αβγ, καὶ ἀπὸ τῆς πρὸς τῷ α, τουτέ γωνίας ἤχθω εὐθεῖα ἡ αδ, ἐπὶ τὴν ἀπεναντίον πλευρὰν βγ. Λέγω τὴν βγ, ὅλην πλευρὰν τοῦ τριγώνου πρὸς τὴν βδ, μέρος ἑαυτῆς, μείζονα λόγον ἔχειν, ἤπερ τὴν ὑπὸ αδβ, γωνίαν πρὸς τὴν ὑπὸ αγβ. Ἤχθω ἡ γε, παράλληλος τῇ αδ, καὶ ἀπὸ τοῦ γ, ὡς ἀπὸ κέντρου, διαστήματι τῷ αγ, ἀναγεγράφθω κύκλος ὁ ζαθ, ὃς τεμεῖ τὴν μὲν βγ, πλευρὰν, ἐκβληθεῖσαν ἐκτὸς τοῦ β, δηλονότι κατὰ τὸ θ, διὰ τὸ μείζονα εἶναι τὴν αγ, ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν γωνίαν, τῆς βγ, ὑποτεινούσης τὴν ὀξεῖαν. τὴν δὲ γε, ὡς ὑποτείνουσαν τὴν ἀμβλεῖαν ὑπὸ εαγ, καὶ μείζονα τῆς γα, τεμεῖ ὁ αὐτὸς μεταξὺ τοῦ ε, καὶ γ, τουτέςι κατὰ τὸ ζ. Δείκνυται, κατὰ γὰρ τὴν ἐσχάτην τοῦ ς': τοῦ σοιχειωτοῦ, ὡς ἡ ὑπὸ ζγα, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ αγθ, οὕτως ὁ ζαγ, τομεὺς πρὸς τὸν αγθ, τομέα, ἀλλ' ἐπεὶ τὸ εγα, τρίγωνον μεῖζόν ἐςι τοῦ ζαγ, τομέως, ἄρα κατὰ τὴν η: τοῦ ε: τοῦ αὐτοῦ, μείζονα λόγον ἔχει τὸ εγα, τρίγωνον πρὸς τὸν αγθ, τομέα, καὶ πολλῷ μείζονα πρὸς τὸ αγβ, τρίγωνον, ἤπερ ἡ ὑπὸ εγα, πρὸς τὴν ὑπὸ αγβ, γωνίαν, καὶ συνθέσει ἄρα τὸ ὅλον εγβ, τρίγωνον πρὸς τὸ αγβ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὑπὸ εγβ, γωνία, ἤτοι ἡ ὑπὸ αδβ, (ἴσαι γὰρ κατὰ τὴν κθ: τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ,) πρὸς τὴν ὑπὸ αγβ. ἀλλ' ὡς τὸ τρίγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον, κατὰ τὴν α: τοῦ ς': τοῦ αὐτοῦ, ἡ βε, βάσις πρὸς τὴν αβ, βάσιν. καὶ ἐπεὶ ἡ αδ, παράλληλός ἐςι τῇ εγ, ἔςαι ὡς ἡ εβ, πρὸς τὴν αβ, κατὰ τὴν β': τοῦ ῥηθέντος, οὕτως ἡ βγ, πρὸς τὴν βδ, ἡ βγ, ἄρα πρὸς τὴν βδ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὑπὸ αδβ, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ αγδ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 14.



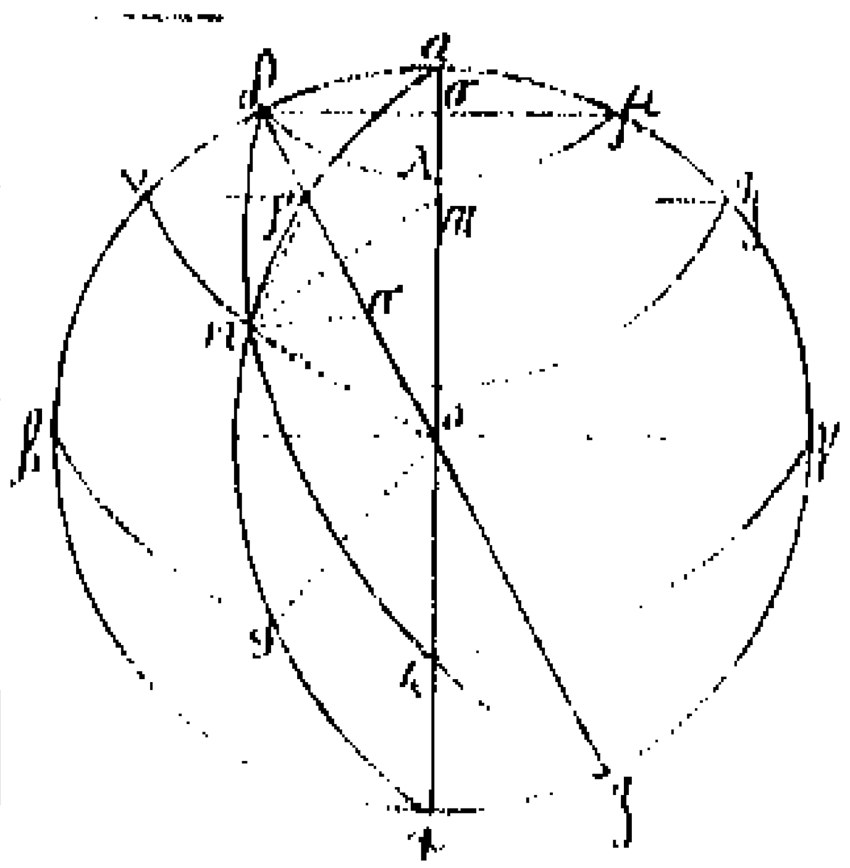
Πρό-

Πρότασις Ι΄. Θεώρημα.

Ἐὰν ἐπὶ μεγίστου κύκλου ὁ πόλος ᾖ τῶν παραλλήλων, καὶ τοῦτον τέμνωσι δύο κύκλοι μέγιστοι πρὸς ὀρθάς, ὧν ὁ μὲν εἷς τῶν παραλλήλων, ὁ δ' ἕτερος λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους, ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος διὰ τῶν πόλων τῶν παραλλήλων διερχόμενος, τέμνῃ τὸν λοξὸν μεταξὺ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, καὶ οὗ ὁ λοξὸς ἅπτεται, ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον, οὗ ἐφάπτεται ὁ λοξός, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων περιφέρεια, ἡ μεταξὺ τοῦ τε ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου, καὶ τοῦ ἑξῆς διὰ τῶν πόλων, πρὸς τὴν τοῦ λοξοῦ κύκλου περιφέρειαν, τὴν μεταξὺ τῶν αὐτῶν κύκλων.

Ἐπὶ γὰρ μεγίστου κύκλου περιφερείας τοῦ αβγ, ὁ πόλος ἔστω τῶν παραλλήλων τὸ α, σημεῖον, καὶ τὸν αβγ, τεμνέτωσαν δύο μέγιστοι κύκλοι πρὸς ὀρθὰς οἱ βεγ, δεζ, ὧν ὁ μὲν βεγ, μέγιστος τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ δεζ, λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους. ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος ὁ αηκ, διὰ τῶν πόλων τῶν παραλλήλων, τεμνέτω τὸν δεζ, μεταξὺ τοῦ τε βεγ, καὶ οὗ ἐφάπτεται ὁ δεζ, οὗ δὲ ἐφάπτεται ὁ δεζ, ἔστω ὁ δλμ. Λέγω, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος βγ, πρὸς τὴν τοῦ δλμ, κύκλου διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βθ, περιφέρεια πρὸς τὴν δη, περιφέρειαν. Γεγράφθω γὰρ διὰ τοῦ η, παράλληλος κύκλος ὁ νηξ, καὶ ἔστωσαν κοιναὶ τῶν ἐπιπέδων τομαὶ αἱ ακ, δζ, βγ, νξ, δμ, θο, ηπ, οη, ηρ. Ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ αβγ,

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 15.



κύκλους τινὰς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοὺς δλμ, νηξ, βεγ, διὰ τῶν πόλων τέμνει δίχα τε τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς κατὰ τὴν ιβ΄: τοῦ α΄: τοῦ παρόντος, αἱ δμ, νξ, βγ, ἄρα διάμετροί εἰσι τῶν δλμ, νηξ, βεγ, κύκλων, καὶ ὁ αβγ, ἄρα κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς ἕκαστον τῶν δλμ, νηξ, βεγ, κύκλων. Ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι εἰσὶν οἱ δλμ, νηξ, βεγ, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν εὐθεῖά τις διῆκται ἡ ακ, ἡ ακ, ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς ἕκαστον τῶν δλμ, νηξ, βεγ, κύκλων, καὶ διὰ τῶν κέντρων αὐτῶν τε καὶ τῆς σφαίρας ἐστὶ κατὰ τὴν θ΄: τοῦ αὐτοῦ: Τὰ σ, π, ο, ἄρα σημεῖα, κέντρα ἐστὶ τῶν δλμ, νηξ, βεγ. καὶ ἐπεὶ ἐπίπεδα παράλληλα τὰ δλμ, νηξ, βεγ, ὑπό τινος ἐπιπέδου τοῦ αβγ, τέμνεται, αἱ κοιναὶ τομαὶ ἄρα αὐτῶν παράλληλοί εἰσιν, αἱ ἄρα δμ, νξ, βγ, παράλληλοί εἰσιν ἀλλήλαις, κατὰ τὴν ιϛ΄: τοῦ ια΄: τοῦ στοιχειωτοῦ. Πάλιν ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ νηξ, βεγ,

ὑπὸ

ὑπό τινος ἐπιπέδου τοῦ αηκ, τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ηπ, τῇ θο. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ νπ, πη, παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων, τὰς βο, οθ, εἰσί, μὴ οὖσαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἴσας γωνίας περιέξουσιν, κατὰ τὴν ι΄: τοῦ αὐτοῦ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ νπη, γωνία τῇ ὑπὸ βοθ. καὶ ἐπεὶ οἱ νηξ, δεζ, ὀρθοί εἰσι πρὸς τὸν αβγ, κύκλον, καὶ ἡ τῶν νηξ, δεζ, κοινὴ τομὴ πάντως ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν αβγ, κύκλον, κατὰ τὴν ιθ΄: τοῦ αὐτοῦ, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομή ἐστιν ἡ ηρ. αὕτη ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν αβγ, κύκλον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ αβγ, κύκλου ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας, κατὰ τὸν γ΄: τοῦ αὐτοῦ ὅρον, ἅπτεται δὲ τῆς ηρ, ἑκατέρα τῶν πρ, ρο, οὖσαι ἐν τῷ τοῦ αβγ, κύκλου ἐπιπέδῳ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ηρπ, ηρο, γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ ἡ ακ, τῇ νξ, ὀρθή ἐστιν, ἡ ἄρα ὑπὸ ρπο, γωνία ὀρθή ἐστι, πάντως γε ἡ ὑπὸ πορ, ὀξεῖά ἐστι. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ορ, τῆς ρπ. Κείσθω οὖν τῇ πρ, ἴση ἡ ρτ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ητ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ πρ, τῇ ρτ, κοινὴ δὲ ἡ ηρ, δύο δὴ αἱ πρ, ρη, δυσὶ ταῖς τρ, ρη, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ πρη, ὀρθῇ τῇ ὑπὸ τρη, ἐστὶν ἴση, βάσις ἄρα ἡ ηπ, βάσει τῇ ητ, ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ πρη, τρίγωνον τῷ τρη, τριγώνῳ ἴσον ἐστί, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ηπρ, γωνία τῇ ὑπὸ ητρ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ηπρ, τῇ ὑπὸ θοβ, ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ητρ, τῇ ὑπὸ θοβ, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ τρίγωνον τὸ ηορ, ὀρθογώνιόν ἐστι κατὰ τὸ ρ, καὶ διῆκταί τις ἡ ητ, ἡ ορ, ἄρα κατὰ τὸ ἀνωτέρω λῆμμα, πρὸς τὴν ρτ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὑπὸ ρτη, πρὸς τὴν ὑπὸ ροη, γωνίαν, ἴση δὲ ἡ μὲν ρτ, τῇ ρπ, ἡ δὲ ὑπὸ ρτη, γωνία τῇ ὑπὸ θοβ, καὶ ἡ ορ, ἄρα πρὸς τὴν ρπ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὑπὸ βοθ, πρὸς τὴν ὑπὸ ροη. ἀλλὰ κατὰ τὴν δ΄: τοῦ ϛ΄: τοῦ στοιχειωτοῦ, ὡς μὲν ἡ ορ, πρὸς τὴν οπ, οὕτως ἐστὶν ἡ οδ, πρὸς τὴν δσ, τουτέστιν ἡ δζ, πρὸς τὴν δμ, ὡς δὲ ἡ ὑπὸ βοθ, πρὸς τὴν ὑπὸ ροη, γωνίαν, οὕτως ἐστὶν ἡ βθ, περιφέρεια πρὸς τὴν δη, περιφέρειαν, κατὰ τὴν λγ΄: τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἡ ζδ, ἄρα πρὸς τὴν δμ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βθ, περιφέρεια πρὸς τὴν δη, περιφέρειαν, καὶ ἔστιν ἡ μὲν δζ, διάμετρος τῆς σφαίρας, ἡ δὲ δμ, διάμετρος τοῦ δλμ, κύκλου, ἡ ἄρα τῆς σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ δλμ, κύκλου διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βθ, περιφέρεια πρὸς τὴν δμ, περιφέρειαν.

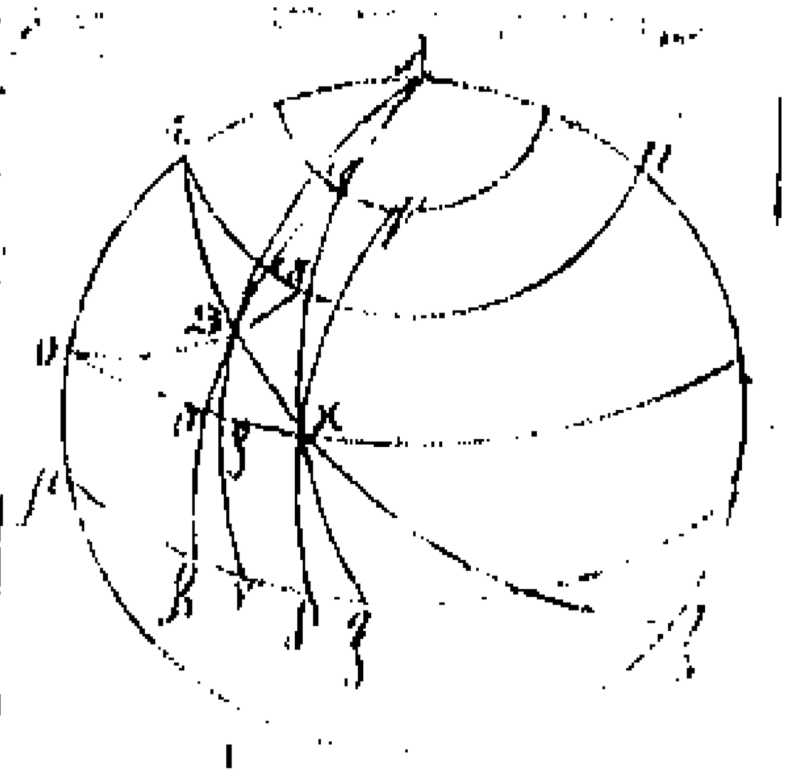
Πρό-

Πρότασις ΙΑ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστοι κύκλοι τοῦ αὐτοῦ τῶν παραλλήλων ἐφάπτωνται, ὁμοίας ἀφαιροῦντες περιφερείας τῶν παραλλήλων κύκλων μεταξὺ αὐτῶν. ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους, μειζόνων ἐφάπτηται, ἢ ὧν οἱ ἐξ ἀρχῆς ἐφήπτοντο, καὶ τέμνῃ τοὺς αὐτοὺς ἐφαπτομένους μεταξὺ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, καὶ οὗ οἱ ἐξ ἀρχῆς ἐφήπτοντο, ἡ διπλασίων τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον, οὗ ἐφάπτεται ὁ λοξὸς, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων κύκλου περιφέρεια, ἡ μεταξὺ τῶν τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἐφαπτομένων, πρὸς τὴν τοῦ λοξοῦ κύκλου περιφέρειαν, τὴν μεταξὺ τῶν αὐτῶν κύκλων.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστοι κύκλοι οἱ αβ, γδ, τοῦ αὐτοῦ τῶν παραλλήλων ἐφαπτέσθωσαν τοῦ αγ. κατὰ τὰ α, γ, σημεῖα, ὁμοίας ἀφαιροῦντες περιφερείας τῶν παραλλήλων κύκλων, τὰς μεταξὺ αὐτῶν. ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους, ὁ εζ, μειζόνων ἐφαπτέσθω, ἢ ὧν οἱ αβ, γδ, ἐφάπτονται. καὶ τεμνέτω τὰς αβ, γδ, μεταξὺ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, καὶ οὗ οἱ αβ, γδ, ἐφάπτονται, τοῦ αγ, κύκλου. Ἔστω δὲ μέγιστος μὲν τῶν παραλλήλων κύκλων ὁ μβξ. οὗ δὲ ἐφάπτεται ὁ εζ, ἔστω ὁ εη. Λέγω, ὅτι ἡ διπλασίων τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν τοῦ εη, κύκλου διάμετρον, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βδ, περιφέρεια πρὸς τὴν θκ, περιφέρειαν. Ἔστω γὰρ ὁ πόλος τῶν παραλλήλων, τὸ λ, σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ λ, καὶ ἑκάστου τῶν ε, θ, κ, σημείων, μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ λεμ, λθν, λκξ. διὰ δὲ τοῦ κ, παράλληλος κύκλος γεγράφθω ὁ οκ, διὰ δὲ τοῦ θ, μέγιστος ὁ θπο, ἐφαπτόμενος τοῦ εη, κατὰ τὸ π. Ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ δύο παράλληλοί εἰσι κύκλοι οἱ οκ, επη. καὶ γεγραμμένοι εἰσὶ δύο μέγιστοι κύκλοι οἱ εθκζ, οθπ, ἐφαπτόμενοι τοῦ επη, κατὰ τὰ ε, π. διὰ δὲ τοῦ θ, σημείου καὶ τοῦ λ, πόλου γέγραπται μέγιστος κύκλος ὁ λθρ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ορ, τῇ ρκ, κατὰ τὴν ιβ': τοῦ β': τοῦ παρ: καὶ ἡ ρσ, ἄρα τῆς ρκ, ἐλάττων ἐστὶν, ἡ σκ, ἄρα τῆς κρ, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλῆ. ἀλλ' ἡ μὲν σκ, τῇ βδ, ἐστὶν ὁμοία, κατὰ τὴν θ': τοῦ αὐτοῦ. ἡ δὲ κρ, τῇ νξ, κατὰ τὴν αὐτὴν, καὶ ἡ βδ, ἄρα τῆς νξ, ἐλάττων ἐστὶν ἢ διπλῆ. καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ εη, κύκλου διάμετρον, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μν, περιφέρεια πρὸς τὴν εθ, περιφέρειαν κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἔχει δὲ ἡ μν, περιφέρεια πρὸς τὴν εθ, περιφέρειαν μείζονα λόγον, ἤπερ ἡ νξ,

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 16.



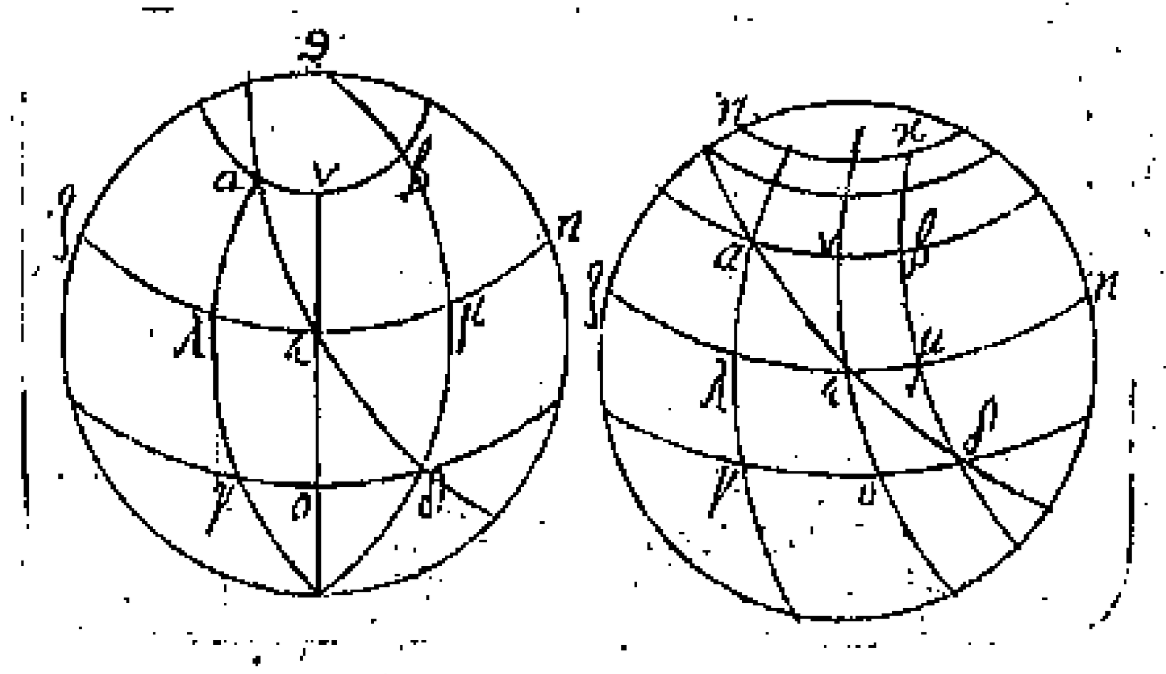
ἡ νξ, περιφέρεια πρὸς τὴν θκ, περιφέρειαν, κατὰ τὴν θ': τοῦ παρ: καὶ ἡ τῆς σφαίρας ἄρα διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ επη, κύκλου διάμετρον, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ νξ, περιφέρεια πρὸς τὴν θκ, περιφέρειαν. καὶ τὰ διπλάσια τῶν ἡγουμένων, ἡ ἄρα διπλασία τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν τοῦ επη, κύκλου διάμετρον, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τῆς νξ, περιφερείας διπλῆ πρὸς τὴν θκ, περιφέρειαν, ἡ δὲ τῆς νξ, περιφερείας διπλῆ πρὸς τὴν θκ, περιφέρειαν μείζω λόγον ἔχει ἤπερ ἡ βδ, περιφέρεια πρὸς τὴν θκ. ἡ γὰρ τῆς νξ, διπλῆ, μείζων ἐστὶ τῆς βδ. πολλῷ ἄρα ἡ διπλασίων τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν τοῦ επη, κύκλου διάμετρον, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βδ, περιφέρεια πρὸς τὴν θκ, περιφέρειαν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΒ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι ἴσας περιφερείας ἀφαιρῶσι μεγίστου τινὸς κύκλου πρὸς τὸν μέγιστον τῶν παραλλήλων, διὰ δὲ τῶν γινομένων σημείων γραφῶσι μέγιστοι κύκλοι, ἢ διὰ τῶν πόλων τῶν παραλλήλων διερχόμενοι, ἢ τοῦ αὐτοῦ τῶν παραλλήλων ἐφαπτόμενοι, ἴσας ἀπολήψονται περιφερείας ἀπὸ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων τὰς μεταξὺ αὐτῶν.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι, οἱ αβ, γδ, μεγίστου τινὸς κύκλου τοῦ αδ, περιφερείας τὰς αε, εδ, ἀφαιρείτωσαν ἴσας, πρὸς τὸν μέγιστον τῶν παραλλήλων τὸν ζεη. καὶ διὰ τῶν α, ε, δ, μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν, οἳ ἤτοι διὰ τοῦ θ, πόλου διαβαίνουσιν, ἢ ἅπτονται τοῦ ηκ, παραλλήλου. καὶ τεμνέτωσαν τὸν μέγιστον παράλληλον ζεη, κατὰ τὰ λ, ε, μ, σημεῖα. Λέγω, ὅτι τὰ λε, εμ, τόξα ἴσα εἰσίν. Ἐπεὶ οὖν τὰ αε, εδ, τόξα ἴσα ἐστὶ, πάντως γε κατὰ τὴν ιε': τοῦ β': τοῦ παρόντος, οἱ αβ, γδ, παράλληλοι, ἴσοι εἰσὶ, καὶ κατὰ τὴν ιζ': τοῦ αὐτοῦ, τὰ λα, βμ, δμ, λγ, εν, εο, τόξα, ἴσα ἐστὶ, καὶ κατὰ τὴν β': τοῦ παρόντ: αἱ αν, οδ, ἐπιζευγνύουσαι τὰ εα, εν, εδ, εο, τόξα ἴσα, ἴσαι εἰσὶ, καὶ ἑπομένως κατὰ τὴν κη': τοῦ γ': στοιχ: τὰ οδ, αν, τόξα ἴσα ἐστί. ἀλλ' ἐπὶ μὲν τοῦ α': σχήματος, τὰ οδ, εμ, ὥσπερ καὶ τὰ αν, λε, κατὰ τὴν θ': τοῦ β': τοῦ παρόντος, ὅμοιά εἰσιν, ἄρα καὶ τὰ λε, εμ, ὅμοιά εἰσι, καὶ ἐπεὶ εἰσι τμήματα τοῦ αὐτοῦ κύκλου, πάντως γέ εἰσι καὶ ἴσα. ἐπὶ δὲ τοῦ β': σχήματος, τὰ αν, λε, καὶ ἔτι τὰ οδ, εμ, τόξα ὅμοιά εἰσι κατὰ τὴν ιβ': τοῦ αὐτοῦ. ἄρα τὰ λε, εμ, τόξα ἴσα εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 17.

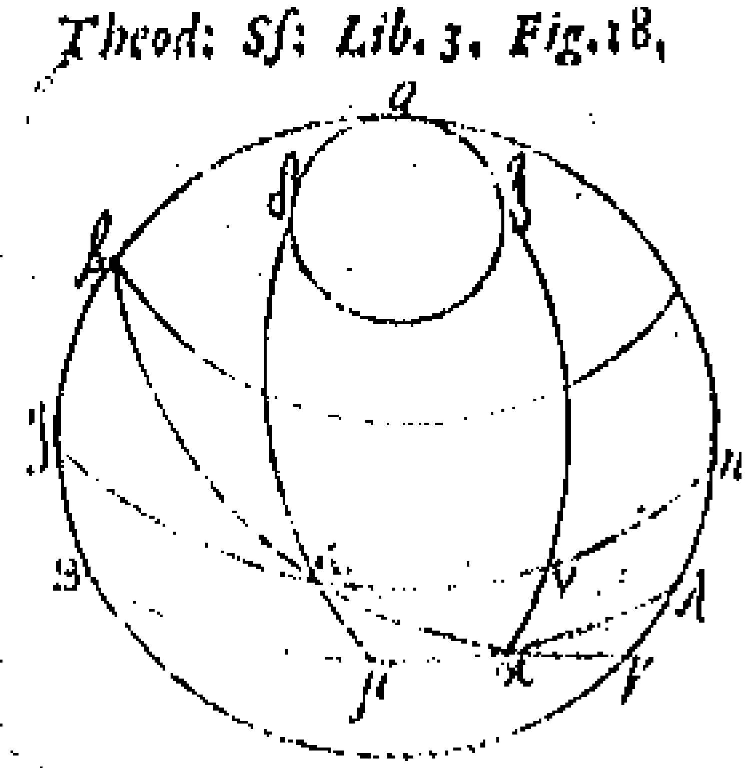


Πρότασις ΙΓ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐφάπτηται, ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος, λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους, μειζόνων ἐφάπτηται, ἢ ὧν ὁ ἐξ ἀρχῆς ἐφήπτετο, ἀνομοίας ἀπολήψονται περιφερείας τῶν παραλλήλων κύκλων, τὰς μεταξὺ αὐτῶν, καὶ μείζονες, ἢ ὅμοιαι ἔσονται ἀεί, αἱ ἔγγιον ὁποτέρου τῶν πόλων τῆς πορρώτερον.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ αβγ, κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοῦ αδξ, ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ α, σημεῖον. ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος ὁ βεγ, λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους μειζόνων ἐφαπτέσθω, ἢ ὧν ὁ αβγ, ἐφάπτεται. Λέγω, ὅτι ἀνομοίας ἀπολήψονται περιφερείας τῶν παραλλήλων τὰς μεταξὺ αὐτῶν, καὶ μείζονες, ἢ ὅμοιαι ἔσονται ἀεὶ αἱ ἔγγιον ὁποτέρου τῶν πόλων τῆς πορρώτερον. Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τοῦ βγ, λοξοῦ κύκλου δύο σημεῖα τυχόντα τὰ ε, κ, καὶ διὰ τῶν ε, κ, σημείων, γεγράφθωσαν κύκλοι παράλληλοι τῷ αδξ, οἱ ζεη, θκλ. Λέγω, ὅτι ἡ μὲν εη, περιφέρεια τῆς κλ, περιφερείας μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία, ἡ δὲ θκ, περιφέρεια τῆς ζε, περιφερείας μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία. Γεγράφθωσαν γὰρ διὰ τῶν ε, κ, σημείων μέγιστοι κύκλοι, οἱ δεμ, ξνκ, ἐφαπτόμενοι τοῦ αδξ. ὥστε ἀσύμπτωτα εἶναι, τὸ μὲν ἀπὸ τοῦ δ, ἡμικύκλιον ὡς ἐπὶ τὰ μ, μέρη, τῷ ἀπὸ τοῦ α, ἡμικυκλίῳ, ὡς ἐπὶ τὰ θ, μέρη, τὸ δὲ ἀπὸ τοῦ ξ, ἡμικύκλιον ὡς ἐπὶ τὰ κ, μέρη, τῷ ἀπὸ τοῦ α, ἡμικυκλίῳ, ὡς ἐπὶ τὰ λ, μέρη. Ἐπεὶ οὖν ἀσύμπτωτά ἐστι τὰ αλ, ξκ, ἡμικύκλια, καὶ μεταξὺ αὐτῶν, κύκλων περιφέρειαί εἰσιν αἱ νη, κλ, ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ νη, περιφέρεια τῇ κλ, περιφερείᾳ κατὰ τὴν ιβ'. τοῦ β'. τοῦ παρόντος, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ζε, τῇ θμ, ἐστὶν ὁμοία, καὶ ἐπεὶ ὁμοία ἐστὶν ἡ νη, περιφέρεια τῇ κλ, περιφερείᾳ, ἡ ἄρα εη, περιφέρεια, μείζων ἐστὶ τῆς κλ, περιφερείας, ἢ ὁμοία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ θκ, τῆς ζε, μείζων ἐστὶν, ἢ ὁμοία. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod: Sf: Lib. 3. Fig. 18.



Τέλος τοῦ Τρίτου τῶν κατὰ Θεοδόσιον Σφαιρικῶν.

ΚΑΙ ΠΡΩΤΟΥ ΤΟΜΟΥ.

ΕΥΜΕΝΗΣ ΑΝΑΓΝΩΣΤΑ.

ΟΡΑ, ΑΝΑΠΟΛΗΣΟΝ, ΚΑΙ ΣΥΓΓΝΩΘΙ.

Πέρας τοῦ τυποῦσθαι τὸν παρόντα τόμον ἰδών, ἐπανέλαβον, καὶ ὡς οἷόν τε ἐπιμελῶς διεξιών, ἐνέτυχόν τισι παραδραμοῦσι περὶ τὴν διόρθωσιν, ἅτινα, ὡς ὁρᾷς ἐνταυθοῖ τοῖς ἐπανωρθωμένοις παρακείμενα, ἀντίκρυς τῆς σελίδος καὶ στίχου παρασεσημειωμένων, σπουδαιότερον φέρει σύμβολον ἐπιμελείας εὐκαίρου, ἢ ῥαθυμίας ἀκαίρου, οὔτε μιᾶς γραφίδος ἢ παρόψεως αἴτιον, ἀλλὰ κατὰ τὸν εἰπόντα, μᾶλλον Μήνην ἔρδα.

Σελ.	στίχ.	Ἐσφαλμ.	Ἐπανωρθωμ.
XXXIII	κη.	μωνίαν	γωνίαν,
1	12	κηπορῷ	κηπουρῷ.
2	4	εὐθαλῆς	εὐθαλῆ,
2	30	κλεὶν,	κλεῖν.
10	9	ἐπιφανειας	ἐπιφανείας.
10	21	Ἐπίπεδος	ἐπίπεδος
11	12	ἐπίπεδων	ἐπιπέδων.
11	12	εἴσιν	εἰσίν,
11	15	ὑπο	ὑπὸ,
11	24	περιφαροῦς	περιφεροῦς.
13	3	οἰκεῖα	οἰκεία.
13	16	πλειόντων	πλειόνων.
14	15	λαμβαμένης.	λαμβανομένης.
14	32	πρῶτόν φασὶ	πρῶτόν φασι,
15	7	τὴς	τῆς
15	20	μεῖξον	μεῖζον,
15	28	σφαίρα	σφαῖρα
15	33	ὑπό τε	ὑπό τε
16	11	προόδον	προόδου
16	12	ὠρίσαντυ	ὠρίσαντο
16	22	τετραπλευρῶν	τετραπλεύρων,
16	23	κἀντοῖς	κἂν τοῖς
16	31	ὑπ'	ὑπ'
20	22	πραγματεύται	πραγματεύεται.
21	5	πεπρασμένης	πεπερασμένης
22	28	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
22	31	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
23	21	ἀξιώμα	ἀξίωμα,
24	3	ἀξιώμα	ἀξίωμα.

Σελ.	στίχ.	Ἐσφαλμ.	Ἐπανωρθωμ.
24	12	ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι	ἄλλας δύο εὐθείας ἴσας,
24	12	ἑκατέρα	ἑκατέρᾳ,
24	13	ἔχουσαι	ἐχούσας,
24	25	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
24	26	εὐθείαις	εὐθείας.
25	18	ἀνωτέρῳ	ἀνωτέρω.
27	18	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
27	33	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
28	2	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
28	13	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
30	7	ἀξιώμα	ἀξίωμα,
32	15	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
32	26	ἀνωτέρῳ	ἀνωτέρω
33	11	ἀξιώμα	ἀξίωμα,
35	6	μωνίαν τῇ	γωνίαν τῇ
35	21	εἶσαι	ἶσαι
35	21	ἴσαι εἰσι	ἶσαί εἰσι
35	24	δεῖζαι	δεῖξαι.
36	9	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
36	11	εἶσαί	ἶσαί
36	25	ἀξιώμα	ἀξίωμα
37	24	ἀξιώμα	ἀξίωμα
39	9	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
39	13	ἀξιώμα	ἀξίωμα
41	30	δοθείσει	δοθείσῃ
57	20	τὴν μζ, τοῦ παρόντος,	τὴν μζ'. παρελθόντος.
60	15	ὁρισκῶς	ὁριστικῶς

Σελ.	ςίχ.	Ε'σφαλμ.	Ε'πανωρθωμ.
71	3	λεφθῇ	ληφθῇ
71	28	δεῖξαις	δεῖξαι
71	34	περόντος	παρόντος
72	22	μάλλον	μᾶλλον
104	4	σὶ	φασὶ
113	31	ἐντῷ	ἐν τῷ
125	35	ὑποσαῦν	ὁποσαῦν.
126	29	δεύτερον	δεύτερον
130	28	τὸ γ.	τῷ γ,
164	26	περαλληλό-γραμμον.	παραλληλό-γραμμον.
165	27	γνόμων	γνώμων·
165	31	γνόμονι	γνώμονι,
166	29	γνόμονι	γνώμονι.
179	16	ἀριθὸς ἀριθ-μῶ μέρη,	ἀριθμὸς ἀριθ-μῷ μέρος
179	17	τὰ αὐτὰ μέρη	τὸ αὐτὸ μέρος,
179	18	τὰ αὐτὰ μέρη ἔσαι, ἅπερ	τὸ αὐτὸ μέρος ἔσαι, ὅπερ
205	8	τὸν παρόντος	τοῦ παρόντος.
240	2	συνιςώς.	συνιςός.
244	4	τῦτο τὸ δὲ	τῦτο δὲ
250	7	ἀπτομενάι	ἀπτόμεναι
250	7	πειὶ	παρὰ
250	8	ἀπτόμενας	ἀπτομένας
250	12	πειὶ	παρὰ
251	2	τέτμηται	τέμνηται,
257	4	αἱ αβ,	ἡ α β,
267	22	παραλληλεπί-δα.	παραλληλεπί-πεδα.
270	22	ἔςωταν	ἔςωσαν,
279	30	τμήμητα	τμήματα.
282	5	ἀπτομανάς	ἀπτομένας;
288	1	πυραμήδι	πυραμίδι,
291	26	ἥμισή ἐςι	ἡμίση ἐςὶ
335	20	τὸν παρὰ	τὸν πατέρα
336	7	τῇ β α,	τῇ β γ,
336	10	αἱ δγ, δζ,	αἱ δγ, γζ.
336	27	ζισκαδεκάτῳ,	ζισκαιδεκάτῳ;
339	25	ἐγγαγράφθω.	ἐγγεγράφθω,
354	25	τῶ κεύζον	τῶ κεύζων.
363	28	κεύζυ.	κεύζον.
383	12	ἐναπολειπόμε-να.	ἐναπολειπόμε-να.
387	11	μέρων	μερῶν.
398	28	πόειμα	πόεισμα.
415	18	τύπων	τῦτον

MDCCCXXXIV