ΑΝΤΙΠΕΛΑΡΓΗΣΙΣ

Η῎

ΣΥΛΛΟΓΗ

ΤΩΝ

ΣΩΖΟΜΕΝΩΝ ΕΚ ΤΩΝ ΑΡΧΑΙΟΤΕΡΩΝ ῾ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΩΝ ΕΚΠΕΠΟΝΗΚΟΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΣ ΠΕΡΙ ΤΟ ΔΗΛΙΟΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΙΣ ΕΥΡΕΣΙΝ ΔΥΩ ΜΕΣΩΝ ΑΝΑΛΟΓΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ ΕΝ ΣΥΝΕΧΕΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΟΓΙΑ

καὶ

ἐκ τῶν Νεωτέρων ὑπὸ τοῦ ἐν μακαρίᾳ τῇ λήξει γενομένου

κυρίου

ΜΠΑΛΑΝΟΥ ΒΑΣΙΛΟΠΟΥΛΟΥ,

τοῦ Ἀρχιπρεσβυτέρου, καὶ Διδασκάλου τῶν Ἐπιςημῶν ἐν τῷ ἐν Ἰωαννίνοις Ἀρχιγυμνασίῳ, εὐφυῶς γεωμετρηθέντων, εἰς τὴν τούτων εὕρεσιν, διὰ μόνου τοῦ Κανόνος καὶ Διαβήτου γεωμετρικῶς.

ΕΝ ΒΙΕΝΝΗ ΤΗΣ ΑΥΣΤΡΙΑΣ,

ΕΚ ΤΗΣ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΑΣ ΙΩΑΝ. ΒΑΡΘΟΛΟΜΑΙΟΥ ΖΒΕΚΙΟΥ.

1816.

Οὐ μωμεῖσθαι, ἀλλὰ μιμεῖσθαι προσήκει ὅσα μιμήσεως ἄξια·
Τὸ μὲν γὰρ ἐπιεικῶν ἀνδρῶν, τὸ δὲ ἀντιζήλων, ϗ βασκανίας μεστῶν οἵτινες: ϗ τὸ ἀναίτιον αἰτιόωνται.

Ὁμήρου Ἰλ. λ'.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ.

Τοῖς ἐντευξομένοις τὸν προσήκοντα ἑκάςῳ ἀσπασμόν.

Κοσμᾶς ὁ τȣ̃ Μπαλάνȣ.

Τύποις ἐκδȣ̃ναι ἐπιθεμένῳ μοι, ἢ τόγε οἰκειότερον εἰπεῖν ἀναγκαζομένῳ· ἐντεῦθεν γὰρ τὸ ἄλγος ἀνέγρετο δεύτερον αὖθις, ὅσα περὶ τȣ̃ δηλίȣ Προβλήματος, τοῖς τε πάλαι, ϗ νῦν τῶν τῆς μαθήσεως τροφίμων γεγεωμέτρηται πάρεργȣ ἂν εἴη εἰπεῖν. Τίς ὁ τὰς ἀφορμὰς παρασχὼν, τίς τε ὁ τὸν περὶ τȣ́τȣ ἀγῶνα τοῖς Γεωμέτραις προθέμενος, ϗ τί περὶ αὐτȣ̃ ἑκάςῳ ἔδοξεν· ἵνα, οἱ μὲν εἰδότες ἀνάμνησιν τȣ́των σχοῖεν, οἱ δ᾽ ἀγνοȣ̃ντες εἴδησιν τῶν ὧν ȣ̓κ ἴσασιν. Ἀλλ᾽ ἐπεὶ περὶ αὐτῶν ἱςόρησε κάλλιςα Ἰωάννης γραμματικὸς ὁ Φιλόπονος, ἐν τοῖς εἰς τὸ πρῶτον τῶν ὑςέρων ἀναλυτικῶν τȣ̃ Ἀριςοτέλȣς ὑπομνήμασιν, ἐκθήσομαι τὰ ὑπ᾽ αὐτȣ̃ ἱςορέμενα, ὡς ἔχει ἐπὶ λέξεως.

Ὁ αὐτὸς Κοσμᾶς ὁ τȣ̃ Μπαλάνȣ.

Τὰ τοίνυν τῶν ἀρχαίων τοσαῦτα ϗ τοιαῦτα· ἐπεχείρησαν δὲ ϗ τῶν νεωτέρων πολλοὶ εἰς λύσιν τȣ̃ Προβλήματος γεωμετρικῶς, ὡς ἔςιν ἰδεῖν παρά τε Κλαυδίῳ Φραγκίσκῳ Milliet de Chales ϗ Βολφίῳ, ϗ ἄλλοις, ὧν εἷς ϗ ὁ ἀείμνηςος Μπαλάνος· ὃς μετριοφρονῶν, ϗ τῇ μετριοφροσύνῃ χαίρων, ϗ διὰ αὐτὴν ȣ̓κ ἔχων ἑαυτῷ θαῤῥεῖν, ἀλλὰ κοινώσασθαι τὴν εὕρεσιν τȣ́τȣ ϗ ἄλλοις τισὶ τῶν ἐπιςημόνων, ϗ συμβȣ́λοις χρήσασθαι ἀξιῶν, ϗ ταῦτα ἐπὶ προβλήματος, ὅπερ ὑπὸ πολλῶν, ȣ̓ μόνον δύσλυτον· ἀλλὰ ϗ ἀδύνατον κρίνεται, δεῖν ἔγνω τοῖς ἐν Ἰταλίᾳ γεωμέτραις χρήσασθαι συμβȣ́λοις ἐκ τῶν οἰκείων αὐτȣ̃ μαθητῶν· διέτριβον δὲ ἐν ταύτῃ τρεῖς· ἐν μὲν Βονωνίᾳ Τρύφων, ϗ Νικόλαος Καρζιώτης οἱ Μεσοβίται, ἐν δὲ Βενετίᾳ Γεώργιος Ζαπελαβίτης, οἵ γε ἔδοξαν μὲν ἐκπληρῶσαι τὴν ἀξίωσιν τȣ̃ διδασκάλȣ αὐτῶν, ἔπεισαν δὲ κἀυτὸν ϗ ἐγκύκλιον γράψαι ἐπιςολὴν πρὸς τὰς ἐν Πετρȣπόλει ϗ Παρισίοις ϗ Βρεττανίᾳ Ἀκαδημίας· ἀλλ᾽ ἐπείπερ οἱ μὲν πλεῖςαι ἀλγεβραϊκῶς ἐβασάνιζον τὸ Πρόβλημα, ὁ δὲ ἀπήτει γεωμετρικῶς, ὡς εἰκὸς, βασανίζεσθαι τὰ ὑπ᾽ αὐτȣ̃ γεωμετρικῶς κατασκευαζόμενα ϗ ἀποδεικνύμενα, ϗ λογομαχίαι συνέπεσον ἀκερδεῖς τε ϗ ἀλυσιτελεῖς, ἔγνω τύποις δȣ̃ναι τὰ ἅπαξ γραφέντα, ϗ ἐάσαι τῇ κρίσει τῶν κρινόντων τὰ τοιαῦτα ἀπαθῶς, ϗ δίχα προλήψεως οἵασȣ̃ν· ἃ δὴ ϗ ἐτυπώθησαν Ἐνετίῃσι κατὰ τὸ αψνς΄. ἔτος τὸ σωτήριον. Καὶ τί χρὴ μηκύνειν, ὅπȣγε ἔνεςι παντὶ τῷ βȣλομένῳ μαθεῖν ἔκ τε τῶν ἀμοιβαίων ἐπιςολῶν, ϗ τῶν ὑπ᾽ ἐκείνȣ γραφέντων, ἅπερ ἐκθήσομαι ἐφεξῆς, ὅσα συνέκυρσε τῷ προβλήματι. Λείπεται μόνον εἰπεῖν ϗ ὅσα συνέβη ἐς ὕςερον. Εὐγένιος γὰρ ὁ Βȣ́λγαρις ἐν τῷ σχολείῳ τῷ ἐν τῷ Ἄθωνι σχολαρχῶν σφοδρᾷ τῇ ῥύμῃ ἠνέχθη κατὰ τȣ̃ προβλήματος, ἐρανισάμενος ἐνςάσεις τινὰς γενομένας ἐν Ἰταλίᾳ παρὰ τȣ̃ Τρύφωνος, ϗ ἄδδην γεωμετρήσας, ϗ σχηματογραφήσας ὁ τέως ἀγεωμέτρητος· τὸ γὰρ ὁπωσȣ̃ν γεωμετρεῖν ἐδιδάχθη ἐσύςερον μετὰ τὴν ἐκεῖθεν φυγὴν, ἐν Λειψίᾳ φοιτήσας τῷ Σεγνέρῳ, ϗ μαθητὴς γενόμενος αὐτȣ̃, ὁ ȣ̓ πρὸ πολλȣ̃ ἀκȣ́ων ὑπὸ τῶν θαυμαζόντων τὰ τȣ́τȣ, οἰκȣμενικὸς διδάσκαλος· ϗ ἀντίγραφα ποιήσας ἱκανὰ διέσπειρε πολλαχόσε, τὸν Μπαλάνον πρὸς ὃν ὁ ἀγὼν, ϗ τὰ σκέμματα μόνον ἀφεὶς τȣ́των ἄμοιρον.

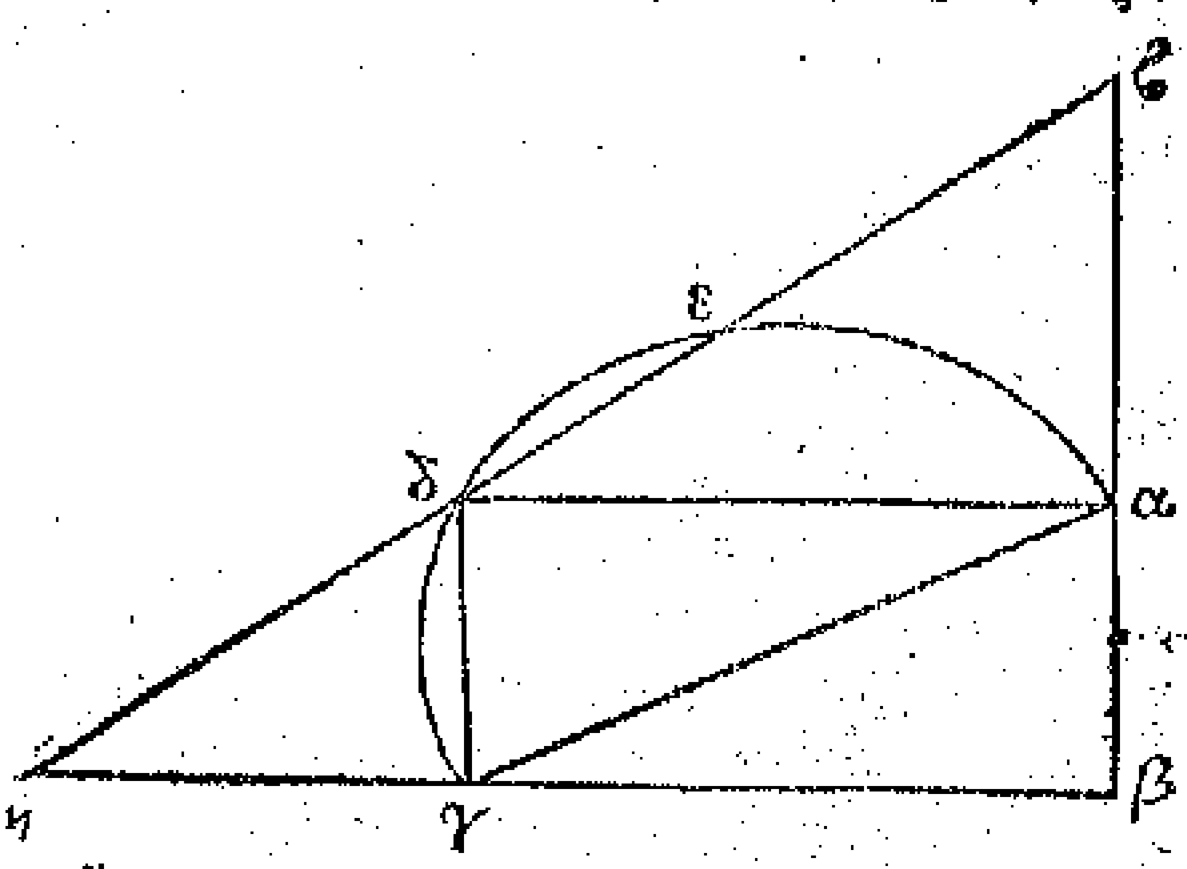
Ἐπεὶ δὲ τὸ πρὸς τὸν Τρύφωνα ἀντίγραφον, πρὸς ὃν ϗ ἡ θαυμασία ἐκείνη ἐπιςολὴ, μόλις συνέβη κἀμὲ ἰδεῖν· ȣ̓δὲν πρὸς ἔπος λέγεται, φάναι ταῦτα πρὸς τὰ ἡμέτερα. ȣ̓ γὰρ γεωμετρȣ̃ντος, ἀλλὰ λοιδορȣμένȣ ϗ χλευάζοντος τὰ ἐμά· ȣ̓δ᾽ ἂν εἴποι τις τὴν συγγραφὴν ταύτην ἀνασκευὴν τῆς ἐμῆς Προτάσεως, μᾶλλον δὲ ἄλλο τί, ἢ κωμῳδίαν ὑποκρινομένην γεωμετρίαν. Βαβαὶ δὲ τῆς ἀγνοίας! ϗ τίς ἡ χρεία τῶν πολλῶν τȣ́των σχημάτων, ϗ προτάσεων, ϗ ἀλληλεπαλλήλων λημμάτων, ϗ ἱστοριῶν, ϗ χρήσεων, ϗ μεταφορῶν, ϗ τῆς πολλῆς ταύτης τερθρείας, ϗ πολυπλόκου πολυλογίας, ϗ ἀπεράντου ἐρεσχελίας; ὅπου γε ἐπὶ Προβλήματος γεωμετρικοῦ, ἡ μὲν ἔκθεσις ἁπλῆ, ἡ δὲ φράσις ἀκόρητος, ἡ δὲ λέξις ἀφελής, ὡς αὐτός φησιν, ἐν τῇ πρὸς Τρύφωνα ἐπιστολῇ ὑπὸ τῆς ἀληθείας ἀναγκαζόμενος, κατὰ τοὺς ἐχθροὺς τῆς ἀληθείας δαίμονας, ϗ ἄκοντας ὁμολογοῦντας τὴν ἀλήθειαν. καὶ ἀλλαχόσε δὲ ὁ αὐτὸς (χρήσομαι γὰρ τοῖς ἐκείνου) ἐν τῇ θαυμασίᾳ συγγραφῇ, ἢ ἀνασκευῇ (φίλον γὰρ τοῖς μαθήμασι τὸ τοῦ λόγου ἁπλοῦν ϗ ἀπέριττον· τὸ γὰρ δι' ὀλίγων γινόμενον διὰ πολλῶν φιλοτιμεῖσθαι ἐν τοῖς τοιούτοις ποιεῖν, οὐχ ὅπως μάταιον, ἀλλὰ ϗ ἀπειροκαλίας, ἢ ἀμουσίας γραφὴν διαφεύγῃ). Εἰ τοῖς μαθήμασι φίλον τὸ ἁπλοῦν ϗ ἀπέριττον· Ἡράκλεις! τοῦ χάριν ἡ τοσαύτη περιττολογία, ἢ ἀπεραντολογία, ϗ βαττολογία, ϗ ἐρεσχελία; ἢ ἵνα δόξῃ ἐκ περιουσίας γεωμετρῶν, ὡς τὰ αὐτὰ πολλάκις ἀνακυκλῶν, καίτοι οὕτω πάνυ σαφέσι ϗ λαμπραῖς ἐμπίπτων ταῖς ἀντιφάσεσιν ὁ παραλόγιστος. Εἰ γὰρ ὑπῆρχεν ἐν τῇ ἐμῇ κατασκευῇ ϗ δείξει τοῦ Προβλήματος παραλογισμός, ὃν αὐτὸς σκορπίον ὑπὸ τὸν λίθον εὕδοντα καλεῖ, ὄντε ἐτεκμηριώσας ὁ Λυγγέως ὀξυδερκέστερος, ϗ ὀλάσωμον τῆς ὀπῆς προκύψαι εἰργάσατο, καὶ μὴν ϗ ἀπέκτεινεν ὁ γεννάδας, ἵνα μή τινα βλάβην τοῖς ἄλλοις ἐπάγῃ, ἐξήρκει αὐτὸς ὁ παραλογισμὸς εἰς ἀνατροπὴν πάντων, ϗ κεῖσθω οὗτος ἆθλος τοῦ Ἡρακλέους δέκατος τέταρτος. Ἀλλὰ πρὸς τοὺς τηλικούτους ἱκανὴ ἀπάντησις ἡ σιωπή, ϗ ῥίψας τὴν συγγραφὴν ἀφῆκε τὸν χλευασμὸν χαίρειν τε ϗ ληρεῖν. ϗ εἰ μὴ προὔλαβεν ἐκεῖνον τὸ χρεών, τάχα μεταγνοὺς ἀπήντησεν ἂν γεωμετρικώτερον, ϗ ἐγεγόνει πᾶσι κατάδηλα, τίνα μὲν ἀνθρώπων κινήματα, τίνα δὲ πιθήκων μιμήματα. Ποῦ γὰρ γεωμετροῦντος; ἢ τἀληθὲς ἀνιχνεύοντος τό, ἐπαινέσαντα τὸ ἁπλοῦν τῆς ἐκθέσεως, τὸ ἀκόρητον τῆς φράσεως, τὸ ἀφελὲς τῆς λέξεως, κἆτα τῶν μικρῷ πρόσθεν εἰρημένων ἐπιλαθόμενον, ϗ ἄντικρυς παλινῳδίαν ᾄσαντα, αἱρεῖσθαι τὸ ἀλληγορικὸν τοῦ λόγου, ϗ ὅλως τὸ τροπολογικόν, ϗ ὀγκηρόν, ϗ παρένθυρσον; τί δὲ πρὸς γεωμετρικὴν βεβουσίαν βούλεται ἡ τοῦ Αὐγεία βουσασία; ἥτινι οὐκ οἶδ' ὅπως χαίρων ἐπὶ γλώττης ταύτην φορεῖ λαρυγγίζων, ϗ θαμὰ φθέγγεται. Τί ἡ τοῦ Λουκιανοῦ Λυχνόπολις, ὃν οὐδὲ ἄξιοῖ τοῦ ὀνόματος, ἀλλ' ἀντὶ Λουκιανοῦ [illegible]θησι, τοῦ τὰς ἀληθεῖς ἱστορίας ἡμῖν συγγράψαντος; τί ἡ τοῦ Μακεδόνος Ἄορνος; ϗ ὁ Γορδίου [illegible]μός; τί δὲ ὁ Πινδαρικὸς Καινεύς; ϗ ὁ τραγῳδούμενος Πενθεύς; ϗ οἱ Ἑλλανοδίκαι; ϗ τὸ Ὀλυμπιάσι χρυσοῦς σταθῆναι δίκαιος; ϗ τὰ παραπλήσια; οὐ σκώπτοντος, πρὸς Διός, ϗ χλευάζοντος, εἴποι ἄν τις προσφυῶς παροιμιαζόμενος: Τί κοινὸν κυνὶ ϗ βαλανείῳ; Ἐπεὶ δ' ὡς ἔδειξεν αὐτῷ, ἐκθέμενος τὰ ὑπὸ τοῦ Μπαλάνου δῆθεν γραφέντα εἰς λύσιν τοῦ προβλήματος ϗ κακίσας ταῦτα, καὶ ἐλέγξας, καὶ τὰ συνήθη ταῦτα ἐξ ἁμάξης λοιδορησάμενος ὁ φιλοσκώμμων οὗτος ϗ φιλολοίδορος, οὐκ ἠρκέσθη τούτοις, ἀλλὰ χρῄζειν αὐτῷ ἔδοξε καί τινος ἐπανορθώσεως. Σκεπτέον ἡμῖν ἤδη μετὰ τὴν θαυμασίαν ἀνασκευὴν ἢ χλεύην ὁποία ἡ ἐπανόρθωσις. Φησὶ γὰρ ἄλογον καλῶν τὴν τῆς μ'ξ' διαίρεσιν, κατὰ τὸν λόγον τῆς ζ'μ' πρὸς τὴν ξ'θ'. (Ἀλλὰ γὰρ μὴ δίχα, τρίχα δὲ ἢ τέτραχα)· θαυμάζω δέ, πῶς οὐκ εἶπε ϗ πένταχα, ϗ δέκαχα, ἢ χιλίαχα, ἢ μυρίαχα, ὁ κομψὸς οὗτος ὀνοματοποιὸς κατὰ τὸ σύνηθες, ϗ ὀνοματοθέτης· ἀλλ' ὡς ἔοικεν ἠρκέσθαι τῷ ὁπωσοῦν ἄλλως, ϗ βραχέα εἰπών, (Τὰ αὐτὰ κατασκευάζω καὶ ταυτὰ δείκνυμι, καὶ καθ' οἵαν δήποτε τομήν, τὸ ζητούμενον εὑρίσκω οὐδὲν χεῖρον ἢ πρότερον γεωμετρικευόμενος) ἐτράπη αὖθις ἐπὶ τὰ σκώμματα· (Ἆρ' οὖν, ἢ ὅσοι δοκεῖ γράμμασι τριπηχαίοις εἶναι τὸ συμπέρασμα τότε γράφεσθαι ἄξιον)· οὐκ ἔχων συνορᾶν ὁ δείλαιος, ὁ καθορᾶν καυχώμενος τὰ ἑνικὰ δυϊκά, ϗ τὰ ἁπλᾶ διπλᾶ· ὅτι τῆς μ'ξ' τεμνομένης κατὰ τὸν λόγον τῆς ζ'μ' πρὸς τὴν ξ'θ' ϗ δίχα τμηθήσεται, ἐὰν ἡ ζ'μ' ἴση τύχῃ τῇ ξ'θ' ϗ τρίχα, ἢ ἐν λόγῳ ἐπιτρίτῳ, ϗ τέτραχα, ἢ ἐν λόγῳ ἐπιτετάρτῳ, ϗ ἁπλῶς καθ' οἷον δήποτε λόγον, τοῦ συνεχοῦς ὄντος διαιρετοῦ εἰς ἀεὶ διαιρετά, ϗ οὐδὲν λυμανεῖται ἡ τομή, ὅπως ποτ' ἂν γένηται, τὴν ἀπόδειξιν· οὐδ' ἀντιστήσεται πρὸς τὰ ἑξῆς, εἰ μόνον ἐκεῖνα ἐπαληθεύουσιν. Σκοπεῖτε γὰρ ὅσοι τῆς ἀληθείας ἐρασταί, τὸν οὕτω ῥᾳστα, οὕτω θαυμασίως, οὕτω γεωμετρικῶς γεωμετρικευόμενον, τὸν ἄλογον καλοῦντα τὴν ἐν λόγῳ ϗ μετὰ λόγου γινομένην τῆς μ'ξ' διαίρεσιν· (Ὅπερ ἂν ῥᾳδίως συνείδῃ ϗ ἀρτιμαθὴς τις, οὗ τὰ τοιαῦτα, ὃς ἀκμὴν ἐνέφυσεν, ὡς φησὶν ὀδόντας)· καίτοι περὶ ἄλλου λέγοντα, ἅπερ δίκαιον περὶ αὐτοῦ λέγεσθαι.

τὸν ὡς ἔγκλημα τοῦτο φέροντα, ϗ κατασκευάζοντα μᾶλλον, ἢ ἀνασκευάζοντα, ἃ ἀνασκευάζειν ἐπιποθεῖ. Τὸ δὲ δύο μὲν ἡλίους, δισσὰς δὲ Θήβας ὁρᾶν κατὰ τὸν Πενθέα, εἴτινος ἔχεται λόγου, καὶ πρὸς τὴν κατασκευὴν ἀφορᾷ τοῦ σχήματος, ἢ τὴν ἀπόδειξιν, οὐ ξένον οὐδ' ἀπεικός· πάθος γὰρ τοῦτο τῶν διάστροφα ἐχόντων τὰ ὄμματα, διπλᾶ τὰ ἁπλᾶ αὐτοῖς πιριςώσης τῆς κατασκευῆς τῶν ὀφθαλμῶν, ϗ τῆς τούτων θέσεως, οὓς παραβλῶπας καλεῖν οἶδεν ἡ τῶν Ἑλλήνων φωνή. Ἀλλ' ἔλαθον ἐμαυτὸν συναπαχθεὶς τῷ γεωμετρικευσαμένῳ συγγεωμετρικευόμενος περὶ τῆς κατὰ τὸ ὁ τῆς μξ διαιρέσεως· ὅπερ οὐ προὔκειτό μοι ἐξ ἀρχῆς, ἀλλ' ἢ ὅσον νύξασθαι τοὺς γλιχομένους τὰ τοιαῦτα μαθεῖν. Ταῦτ' ἄρα ἐπανιτέον ἐπὶ τὸ σκοπέμενον ϗ βραχέα ἐπειπόντι πέρας τῷ λόγῳ θετέον· τὸ γὰρ σκώπτειν ϗ χλευάζειν ϗ διασύρειν οὐκ ἔςι φιλοσοφούντων ἀνδρῶν, ἀλλ' ἐξεςηκότων ϗ μαινομένων, ϗ οὐδ' ὅλως ἀνδρῶν. Οὕτω τοίνυν ὁ γεωμετρικευσάμενος ἀνασκευάσας καὶ κατασκευάσας, ὅσα κατασκευῆς, ϗ ὅσα ἀνασκευῆς ἔχρῃζε, ϗ διάτορον ἐγκραγὼν, ϗ διακωδωνήσας τὸ, Οὐχ εὕρηται· ἔτι δὲ καὶ τοῦ θείου Πλάτωνος καθαψάμενος, τοῦ πολλοῦ ἔν τε φιλοσοφίᾳ ϗ μαθήματι, τέλος ἐπέθηκε τοῖς λεγομένοις τοῦτο δὴ τὸ θυννῶδες ϗ ἁλιευτικὸν ϗ προγονικὸν ϗ Κεφαλλήνιον ϗ ἅλμης ϗ πικρίας ἔμπλεον, (ὡς διὰ μακροῦ χρόνου τῇδε τῇ ἄγρᾳ ἐμματαιάσαντι αὕτη αὐτῷ ἡ μήρινθος οὐδὲν ἔσπασεν)· ὢ τῆς ἀνοίας! ὢ τῆς ἀπονοίας! ἀλλ' οὐδὲν θαυμαςόν· ὁ γὰρ μὴ ἀφειδήσας τοῦ Πλάτωνος, ἀλλ' οὕτως ἀγεννῶς διασύρας, ἅτε δὴ περὶ τὸ πρόβλημα μάτην πονήσαντα, Πλάτωνος λέγω, τοῦ ἐν πολλοῖς ἀριςεύσαντος ϗ ἀνατραφέντος ἐν τοῖς μαθήμασι, ϗ διαπρέψαντος, ϗ τοὺς ἀγεωμετρήτους οὐδὲ προσιεμένου, πῶς φείσεται τοῦ Μπαλάνου, ϗ οὐ καλέσει ψευδόμενον, ἀπατώμενον, παραλογιζόμενον, ϗ τὸ παμμέγεθες δὴ τοῦτο ϗ μέγιςον ἀφραίνοντα; Ἀλλ' ἔσω φησὶν ἡ Παροιμία Κλαζομενίοις ἀσχημονεῖν. Τῷ γὰρ Μπαλάνῳ οὐδενὸς τούτων ἐμέλησεν αἱρουμένῳ μᾶλλον, συμματαιοπονεῖν τῷ Πλάτωνι ϗ τοῖς ἀρχαίοις τῶν Μαθηματικῶν, ἢ τῷ Εὐγενίῳ συγκωμῳδεῖν καὶ συμψευδογεωμετρικεύεσθαι, καὶ συμψευδαληθεύεσθαι ϗ τύποις ἐκδοῦναι προθυμουμένῳ μετὰ πεντηκονταετηρίδα, ὅσα αὐτὸς ἔπαιξεν ἢ ἐνέπαιξεν· ἵνα ἐν τῷ χρόνῳ συμπαραρρυῇ ϗ ἐξίτηλα γενόμενα τοὺς μὴ ἐντυχόντας τούτοις ζημιώσῃ· ἅπερ μᾶλλον ἐχρῆν τῷ πυρὶ παραδίδοσθαι, ἢ ἐν παραβύςῳ που κεῖσθαι, ἵνα μὴ ἐπὶ πολὺ ἡ δυσοσμία ἐκτανθεῖσα, ϗ ἐκ τῶν ὑπερβορέων ἀηδίαν τοῖς Ἕλλησι τοῖς τε νῦν ϗ τοῖς εἰς ἔπειτα γενησομένοις προμνηςεύσηται.

ΙΩΑΝΝΟΥ
Γραμματικοῦ τοῦ Φιλοπόνου.

Ἐν τοῖς ὑστέροις ἀναλυτικοῖς τοῦ Ἀριστοτέλους.

Δηλίοις γὰρ λοιμώξασιν, ἔχρησεν ὁ Ἀπόλλων, ἀπαλλαγήσεσθαι τοῦ λοιμοῦ, εἰ τὸν βωμὸν διπλασιάσουσι, κυβικὸν ἔχοντα σχῆμα· οἱ δ' ἐπῳκοδόμησαν προσθέντες τῷ προτέρῳ βωμῷ ἕτερον κύβον ἴσον· ἀλλ' ἡ τῶν δύο κύβων συνθήκη, τὸ τοῦ κύβου σχῆμα ἠλλοίωσε· γέγονε γὰρ ἀντὶ κύβου, δοκίς. Τοῦ λοιμοῦ δὲ μὴ παυσαμένου, ἔχρησεν ὁ Θεὸς μὴ πεποιηκέναι αὐτοὺς τὸ προσαχθέν. Ὁ μὲν γὰρ, προσέταξε διπλασιάσαι τὸν κύβον· τουτέστι, βωμὸν κατασκευάσαι κυβικὸν τοῦ προτέρου διπλάσιον· οἱ δὲ, κύβον ἐπὶ κύβῳ ἐπέθηκαν· Ἦλθον οὖν πρὸς Πλάτωνα ζητοῦντες μέθοδον, πῶς ἂν τὸν κύβον διπλασιάσαιεν· ὁ δὲ πρὸς αὐτούς φησιν, ἔοικεν ὑμῖν ὀνειδίζειν ὁ Θεὸς ὡς ἀμελοῦσι γεωμετρίας· ὁ δὲ τοῦ κύβου διπλασιασμὸς, εὑρεθήσεταί φησιν, εἰ δύο εὐθειῶν δύο μέσαι ἀνάλογον εὑρεθείεν. Καὶ τοῦτο τὸ πρόβλημα, τοῖς μαθηταῖς προεβάλλετο· οἵτινες καὶ περὶ τούτου γεγράφασιν, ὡς ἐδύνηται ἕκαστος· ὧν οὐδέν τι περισώζεται μέχρι τοῦ νῦν, ἀλλ' οὐδ' ὁ γεωμέτρης περὶ τούτου ἐπεσημήνατο. Δύο μὲν γὰρ δοθεισῶν εὐθειῶν, μέσην ἀνάλογον εὑρεῖν, ἐξέθετο τὴν ἀπόδειξιν. Ὁμοίως δὲ, καὶ ἐν τῷ πορίσματι τοῦ λγ τοῦ πρώτου τῶν στερεῶν, ὡς ἐὰν ὦσι τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἐφεξῆς, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης στερεὸν παραλληλεπίπεδον πρὸς τὸ αὐτὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τοῦ ὁμοίου τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένου. Τοῦ μέντοι Ἀπολλωνίου τοῦ Περγαίου ἐστὶν εἰς τοῦτο ἀπόδειξις, ὡς Παρμενίων φησὶν, ἣν καὶ ἐκθήσομεν ἔχουσαν οὕτως. Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, δύο μέσας ἀναλόγους εὑρεῖν. Ἔστωσαν δὲ αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, αἱ αβ. βγ. καὶ κείσθωσαν, ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν ὑπὸ αβγ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ βδ παραλληλόγραμμον, καὶ διάμετρος αὐτοῦ ἤχθω, ἡ αγ. καὶ περὶ τὸ αγδ τρίγωνον γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ αδεγ. καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ βα, καὶ βγ ἐπ' εὐθείας, κατὰ τὰ ζη. καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ζη διὰ τοῦ δ σημείου οὕτως, ὥστε τὴν ζδ ἴσην εἶναι τῇ εη. τοῦτο δὲ, ὡς αἴτημα λαμβάνεται ἀναπόδεικτον. φανερὸν δὴ, ὅτι καὶ ἡ ζε, τῇ δη ἴση ἐστίν. Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ αδγ εἴληπται σημεῖον ἐκτὸς τὸ ζ, ἀπὸ δὲ τοῦ ζ δύο εὐθεῖαι αἱ ζβ. ζη προσπίπτουσαι τέμνουσι τὸν κύκλον κατὰ τὰ αδ σημεῖα. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν βζ. ζα, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν εζ. ζδ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν βη. ηγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν δη. ηε. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν δη. ηε, τῷ ὑπὸ τῶν εζ, ζδ. ἴσαι γάρ εἰσιν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. ἡ μὲν ζε, τῇ δη. ἡ δὲ ζδ, τῇ εη. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν βζ, ζα ἄρα, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν βη, ηγ. Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζβ, πρὸς τὴν βη, ἡ ηγ, πρὸς τὴν ζα. ἀλλ' ὡς ἡ ζβ, πρὸς τὴν βη, οὕτως, ἥ,τε ζα, πρὸς τὴν αδ, καὶ ἡ δγ, πρὸς τὴν γη, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων· ἴση δὲ ἡ μὲν δγ, τῇ αβ. ἡ δὲ αδ, τῇ βγ. καὶ ὡς ἄρα ἡ αβ, πρὸς τὴν γη, οὕτως ἡ ζα, πρὸς τὴν αδ. ἣν δὲ καὶ ὡς ἡ ζβ, πρὸς τὴν βη, τουτέστιν ἡ αβ, πρὸς τὴν ηγ, ἡ ηγ, πρὸς τὴν ζα. καὶ ὡς ἄρα ἡ αβ πρὸς τὴν ηγ, οὕτως ἥτε ηγ, πρὸς τὴν ζα· καὶ ἡ ζα, πρὸς τὴν βγ. αἱ τέσσαρες ἄρα εὐθεῖαι αβ, ηγ, ζα, βγ, ἐφεξῆς ἀνάλογόν εἰσι· καὶ διὰ τοῦτο ἔσται ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς αβ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ηγ. εἰ οὖν διπλασίων ὑποτεθείη ἡ αβ τῆς βγ, ἔσται καὶ ὁ ἀπὸ τῆς αβ κύβος, διπλασίων τοῦ ἀπὸ τῆς ηγ. Καὶ ταῦτα μὲν ὁ Φιλόπονος ἐπὶ τοσοῦτον· σώζεται δὲ παρ' Εὐτοκίῳ τῷ Ἀσκαλωνίτῃ, ἐξηγουμένῳ τὰ σωζόμενα τοῦ Ἀρχιμήδους, καὶ ἄλλων τινῶν ἀρχαιοτέρων συγγράμματα, εἰς λύσιν τοῦ πολυθρυλλήτου τοῦδε προβλήματος, ἅπερ ἐκθετέον ἐφεξῆς· τούτῳ γὰρ τῷ τρόπῳ πληρέστερος ὁ λόγος ἔσται.



Ὡς Πλάτων· ὅρα σχῆμα 1.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ αβγ, πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις· ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν· ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ᾽ εὐθείας ἐπὶ τὰ δ, ε, καὶ κατεσκευάσθω ὀρθὴ γωνία ἡ ὑπὸ ζηθ. καὶ ἐν ἑνὶ σκέλει, οἷον τῷ ζη· κινείσθω κανὼν ὁ κλ. ἐν σωλῆνί τινι ὄντι ἐν τῷ ζη, οὕτως ὥστε παράλληλον αὐτὸν διαμένειν τῷ ηθ. ἔσται δὲ τοῦτο, ἐὰν καὶ ἕτερον κανόνιον νοηθῇ συμφυὲς τῷ θη. παράλληλον δὲ τῷ ζη, ὡς τὸ θμ σωλῆνι. Τεθεισῶν γὰρ τῶν ἄνωθεν ἐπιφανειῶν τῶν ζη, θμ, σωλῆσι πελεκινοειδέσι, καὶ τυχὸν συμφυῶν γενομένων τῷ κλ, εἰς τοὺς εἰρημένους σωλῆνας, ἔσται ἡ κίνησις τοῦ κλ. παράλληλος ἀεὶ τῷ ηθ. τούτων οὖν κατασκευασμένων, κείσθω τὸ ἓν σκέλος τῆς γωνίας τυχὸν τὸ ηθ, ψαῦον τοῦ γ, καὶ μεταφερέσθω ἥτε γωνία καὶ ὁ κλ. κανὼν ἐπὶ τοσοῦτον, ἄχρις ἂν οὗ τὸ μὲν η σημεῖον ἐπὶ τῆς βδ εὐθείας ᾖ, τοῦ ηθ σκέλους ψαύοντος τοῦ γ, ὁ δὲ κλ κανὼν κατὰ μὲν τὸ κ ψαύῃ τῆς βε εὐθείας, κατὰ δὲ τὸ λοιπὸν μέρος τοῦ α, ὥστε εἶναι ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς καταγραφῆς, τὴν μὲν ὀρθὴν γωνίαν θέσιν ἔχουσαν, ὡς τὴν ὑπὸ γδε, τὸν δὲ κλ κανόνα θέσιν ἔχειν, οἵαν ἔχει ἡ εα. τούτων γὰρ γενομένων ἔσται τὸ προκείμενον. Ὀρθῶν γὰρ οὐσῶν τῶν πρὸς τοῖς δ, ε, ἔστιν ὡς ἡ γβ, πρὸς βδ. ἡ δβ, πρὸς βε, καὶ ἡ εβ. πρὸς βα.

Ὡς Ἥρων ἐν μηχανικαῖς εἰσαγωγαῖς, καὶ ἐν τοῖς βελοποιικοῖς· σχῆμα 2.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν· κείσθωσαν ὥστε τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν πρὸς τῷ β, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ βδ παραλληλόγραμμον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, βδ: φανερὸν δὴ, ὅτι ἴσαι οὖσαι δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας. Ὁ γὰρ περὶ μίαν αὐτῶν γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν περάτων τῆς ἑτέρας, διὰ τὸ ὀρθογώνιον εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ δγ, δα, ἐπὶ τὰ ζ, η, καὶ νοείσθω κανόνιον ὡς τὸ ζβη, κινούμενον περί τινα τύλον, μένοντα πρὸς τῷ β, καὶ κινείσθω ἕως ἀποτέμοι ἴσας τὰς ἀπὸ τοῦ ε, τουτέστι τὰς εη, εζ· καὶ νοείσθω ἀποτεμὸν, καὶ θέσιν ἔχον τὴν ζβη, ἴσων ὡς εἴρηται γινομένων τῶν εη, εζ· ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὴν γδ κάθετος ἡ εθ, δίχα δὴ τέμνει δῆλον ὅτι τὴν γδ· ἐπεὶ οὖν δίχα τέμνεται ἡ γδ κατὰ τὸ θ, καὶ πρόσκειται ἡ γζ, τὸ ὑπὸ δζγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γθ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ θζ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ εθ. τὸ ἄρα ὑπὸ δζγ, μετὰ τῶν ἀπὸ γθ, θε, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ζθ, θε· καὶ ἔστι τοῖς μὲν ἀπὸ γθ, θε, ἴσον τὸ ἀπὸ γε· τοῖς δὲ ἀπὸ ζθ, θε, ἴσον τὸ ἀπὸ εζ· τὸ ἄρα ὑπὸ δζγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γε, ἴσον τῷ ἀπὸ εζ. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ δηα, μετὰ τοῦ ἀπὸ αε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εη· καὶ ἔστιν ἴση ἡ μὲν αε, τῇ εγ, ἡ δὲ ηε τῇ εζ· καὶ τὸ ὑπὸ δζγ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ δηα· ἐὰν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν. Ἔστιν ἄρα ὡς ζδ, πρὸς δη, οὕτως ἡ αη, πρὸς γζ· ἀλλ᾽ ὡς ἡ ζδ πρὸς δη, οὕτως ἡ ζγ, πρὸς γβ, καὶ ἡ βα πρὸς αη· τριγώνου γὰρ τοῦ ζδη, παρὰ μίαν μὲν τὴν δη, ἦκται ἡ γβ, παρὰ δὲ τὴν δζ, ἡ αβ· ὡς ἄρα ἡ βα, πρὸς αη, οὕτως ἡ αη, πρὸς γζ, καὶ ἡ γζ πρὸς γβ. Τῶν ἄρα αβ, βγ δύο μέσαι ἀνάλογον εἰσὶν αἱ αη, γζ· ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

Ὡς Φίλων ὁ Βυζάντιος· σχῆμα 3.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν, κείσθωσαν ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν πρὸς τὸ β· καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς αγ, γεγράφθω περὶ αὐτὴν ἡμικύκλιον τὸ αβεγ, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν, τῇ μὲν βα, ἡ κδ· τῇ δὲ βγ, ἡ γζ· καὶ παρακείσθω κανὼν κινούμενος πρὸς τῷ β, τέμνων τὰς αδ, γζ· καὶ κεκινήσθω περὶ μὲν τὸ β, ἄχρις ἂν ἡ ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὸ δ, ἴση γένηται τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὸ ζ, τουτέστι τῇ μεταξὺ τῆς τε περιφερείας τοῦ κύκλου καὶ τῆς γζ· νενοήσθω οὖν ἔχον τὸ κανόνιον θέσιν, οἵαν ἔχει ἡ δβ, εζ, ἴσης οὔσης ὡς εἴρηται τῆς δβ τῇ εζ· λέγω ὅτι αἱ αδ, γζ, μέσαι ἀνάλογον εἰσὶ τῶν αβ, βγ. Νενοήσθωσαν γὰρ ἐκβεβλημέναι αἱ δα, ζγ, καὶ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ θ· φανερὸν δὴ ὅτι παραλλήλων οὐσῶν τῶν βα, ζθ, ἡ πρὸς τὸ θ γωνία ὀρθή ἐστι· καὶ ὁ αεγ κύκλος ἀναπληρούμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ θ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ δβ, τῇ εζ, καὶ τὸ ὑπὸ εδβ, ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ βζε· ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ εδβ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ θδα· ἑκάτερον γὰρ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἀπὸ τοῦ δ· τὸ δὲ ὑπὸ βζε, ἴσον τῷ ὑπὸ θζγ· ἑκάτερον γὰρ ὁμοίως ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἀπὸ τοῦ ζ· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ θδα, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ θζγ· καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ δθ, πρὸς θζ, οὕτως ἡ γζ πρὸς δα· ἀλλ᾽ ὡς ἡ θδ πρὸς θζ, οὕτως ἥτε βγ πρὸς γζ, καὶ ἡ δα πρὸς αβ· τριγώνου γὰρ τοῦ δθζ, παρὰ μὲν τὴν δθ, ἦκται ἡ βγ, παρὰ δὲ τὴν θζ ἡ βα, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βγ, πρὸς ζγ, ἡ γζ, πρὸς δα, ἡ δα, πρὸς αβ, ὅπερ προέκειτο δεῖξαι. Ῥᾳδίον δὲ, ὅτι ἡ τοιαύτη κατασκευὴ σχεδὸν ἡ αὐτή ἐστι τῇ ὑπὸ Ἥρωνος κατασκευῇ, καὶ αἱ προσεκβαλλόμεναι πλευραὶ αἱ θα, θγ, ϗ ὁ πρὸς τῷ β, κινούμενος κανών· ταύτῃ δὲ μόνον διαφέρει, ὅτι ἐκεῖ μὲν μέχρι τοσούτου ἐκινοῦμεν περὶ τὸ β τὸν κανόνα, ἄχρις ἂν αἱ ἀπὸ τῆς διχοτομίας τῆς αγ, τουτέστι τοῦ κ ἴσαι ὑπ᾽ αὐτοῦ ἀπετέμνοντο πρὸς ταῖς θδ, θζ προσπιπτούσαις, ὡς αἱ κδ, κζ, ἐνταῦθα δὲ ἄχρις ἂν ἡ δβ, ἴση γένηται τῇ εζ· ἐφ᾽ ἑκατέρας δὲ κατασκευῆς τὸ αὐτὸ ἀκολουθεῖ· τὸ δὲ νῦν εἰρημένον πρὸς χρῆσιν εὐθετώτερον· τὰς γὰρ δβ, εζ ἴσας τηρεῖν ἐνδέχεται διῃρημένου τοῦ δζ κανόνος εἰς ἴσα ϗ συνεχῆ· πολὺ γὰρ εὐκολώτερον τοῦ καρκίνου διαπειράζειν τὰς ἀπὸ τοῦ κ, ἴσας πρὸς τὰ δ, ζ.

Ὡς Ἀπολλώνιος· σχῆμα 4.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν, αἱ αβγ, ὀρθὴν περιέχουσαι γωνίαν τὴν πρὸς τῷ α, κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ αγ, κύκλου περιφέρεια γεγράφθω ἡ κθλ· ϗ πάλιν κέντρῳ τῷ γ, ϗ διαστήματι τῷ αβ κύκλου περιφέρεια γεγράφθω ἡ μθν· ϗ τεμνέτω τὴν κθλ· κατὰ τὸ θ, ϗ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θα, θβ, θγ, παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ αγ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ θα· τετμήσθω δίχα ἡ θα, τῷ ξ, καὶ κέντρῳ τῷ ξ, γεγράφθω κύκλος τέμνων τὰς αβ, αγ ἐκβληθείσας κατὰ τὰ δ, ε· ὥστε μέντοι τὰ δ, ε, ἐπ᾽ εὐθείας εἶναι τῷ θ, ὅπερ ἂν γένοιτο κανονίου κινουμένου περὶ τὸ θ, τέμνοντος τὰς αδ, αε· ϗ παραγομένου ἐπὶ τοσοῦτον ἄχρις ἂν αἱ ἀπὸ τοῦ ξ ἐπὶ τὰ δ, ε, ἴσαι γένωνται. Τούτου γὰρ γενομένου ἔσται τὸ ζητούμενον· ἡ γὰρ αὐτὴ κατασκευή ἐστι τῇ τε ὑπὸ Ἥρωνος, καὶ Φίλωνος γεγραμμένῃ καὶ δῆλον ὅτι καὶ ἡ ἀπόδειξις ἡ αὐτὴ ἁρμόσει.

Ὡς Διοκλῆς ἐν τῷ περὶ Πυρίων· σχῆμα 5.

Ἐν κύκλῳ ἤχθωσαν δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς αἱ αβ, γδ, ϗ δύο περιφέρειαι ἴσαι ἀπειλήφθωσαν ἐφ᾽ ἑκάτερα τοῦ β, αἱ εβ, βζ· ϗ διὰ τοῦ ζ παράλληλος τῇ αβ, ἤχθω ἡ ζη· ϗ ἐπεζεύχθω ἡ δε· λέγω ὅτι τῶν γη, ηθ, δύο μέσαι ἀνάλογοί εἰσιν αἱ ζη, ηδ. Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ ε, τῇ αβ παράλληλος ἡ εκ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν εκ, τῇ ζη, ἡ δὲ κγ, τῇ ηδ· ἔσται γὰρ τοῦτο δῆλον ἀπὸ τοῦ λ, ἐπὶ τὰ ε, ζ, ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν· ἴσαι γὰρ γίνονται αἱ ὑπὸ γλε, ζλδ· ϗ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς κ, η· ϗ πάντα ἄρα πᾶσιν διὰ τὴν λε, τῇ λζ, ἴσην εἶναι, ϗ λοιπὴ ἄρα ἡ γκ, τῇ ηδ, ἴση ἐστίν· ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ δκ, πρὸς κε, ἡ δη πρὸς ηθ, ἀλλ᾽ ὡς ἡ δκ, πρὸς κε, ἡ εκ, πρὸς κγ· μέση γὰρ ἀνάλογον ἡ εκ, τῶν δκ, κγ. ὡς ἄρα ἡ δκ, πρὸς κε, ϗ ἡ εκ, πρὸς κγ, οὕτως ἡ δη, πρὸς ηθ· ϗ ἐστὶν ἴση ἡ μὲν δκ, τῇ γη, ἡ δὲ κε, τῇ ζη· ἡ δὲ κγ, τῇ ηδ· ὡς ἄρα ἡ γη, πρὸς ηζ, ἡ ζη, πρὸς ηδ, ϗ ἡ δη, πρὸς ηθ· ἐὰν δὴ παρ᾽ ἑκάτερα τοῦ β, ληφθῶσι περιφέρειαι ἴσαι μβ, βν· ϗ διὰ μὲν τοῦ ν παράλληλος ἀχθῇ τῇ αβ, ἡ νξ· ἐπιζευχθῇ δὲ ἡ δμ· ἔσονται πάλιν τῶν γξ, ξο, μέσαι ἀνάλογον αἱ νξ, ξδ· πλειόνων οὖν οὕτως ϗ συνεχῶν παραλλήλων ἐκβληθεισῶν μεταξὺ τῶν β, δ· ϗ ταῖς ἀπολαμβανομέναις ὑπ᾽ αὐτῶν περιφερείαις πρὸς τῷ β, ἴσων τεθεισῶν ἀπὸ τοῦ β, ὡς ἐπὶ τὸ γ, ϗ ἐπιτεταγμένα σημεῖα ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν ἀπὸ τοῦ δ, ὡς τῶν ὁμοίων ταῖς δε, δμ, τμηθήσονται αἱ παράλληλοι αἱ μεταξὺ τῶν β, δ, κατά τινα σημεῖα, ὡς ἐπὶ τῆς προκειμένης καταγραφῆς τὰ ο, θ· ἐφ᾽ ἃ κανόνος παραθέσει ἐπιζεύξαντες εὐθείας, ἕξομεν καταγεγραμμένην ἐν τῷ κύκλῳ τινὰ γραμμήν, ἐφ᾽ ἧς ἐὰν ληφθῇ τυχὸν σημεῖον, ϗ δι᾽ αὐτοῦ παράλληλος ἀχθῇ τῇ λ, β· ϗ ἡ ἀχθεῖσα, ϗ ἡ ἀπολαμβανομένη ὑπ᾽ αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῷ δ· μέσαι ἀνάλογον τῆς τε ἀπολαμβανομένης ὑπ᾽ αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῷ γ σημείῳ, ϗ τοῦ μέρους αὐτῆς τοῦ ἀπὸ τοῦ ἐν τῇ γραμμῇ σημείου ἐπὶ τὴν γδ, διάμετρον.

Τούτων προκατεσκευασμένων, ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν αἱ α, β· ϗ ἔστω κύκλος ἐν ᾧ δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ γδ, εζ· ϗ γεγράφθω ἐν αὐτῷ ἡ διὰ τῶν συνεχῶν σημείων γραμμὴ ὡς προείρηται, ἡ δθζ ϗ γεγονέτω ὡς ἡ α, πρὸς τὴν β, ἡ γη, πρὸς ηκ· ϗ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γκ, ϗ ἐκβληθεῖσα τεμνέτω τὴν γραμμὴν κατὰ τὸ θ, ϗ διὰ τοῦ θ, τῇ εζ, παράλληλος ἤχθω ἡ λμ. Διὰ ἄρα τὰ προγεγραμμένα τῶν γλ, λθ, μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ μλ, λδ· ϗ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ γλ, πρὸς λθ, οὕτως ἡ γη, πρὸς ηκ· ὡς δὲ ἡ γη, πρὸς ηκ, οὕτως ἡ α, πρὸς τὴν β· ἐὰν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ταῖς γλ, λμ, λδ, λθ, παρεμβάλωμεν μέσας τῶν α, β, ὡς τὰς ν, ξ, ἔσονται εἰλημμέναι τῶν α, β, μέσαι ἀνάλογον αἱ ν, ξ· ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

Ὡς Πάππος ἐν μηχανικαῖς εἰσαγωγαῖς. σχῆμα 6.

Προέθετο μὲν ὁ Πάππος κύβον εὑρεῖν πρὸς τὸν δοθέντα κύβον, λόγον ἔχοντα δεδομένον· καὶ ὡς πρὸς τὴν τοιαύτην πρότασιν καὶ τὰ ἀπὸ τῆς ἀποδείξεως αὐτῷ προέρχεται· δῆλον δὲ ὅτι τούτου εὑρισκομένου, καὶ τὸ προκείμενον εὑρίσκεται. Δύο γὰρ δοθεισῶν εὐθειῶν, ἐὰν ὀφειλουσῶν μέσων εὑρεθῆναι, ἡ δευτέρα εὑρέθη, καὶ ἡ τρίτη αὐτόθεν δοθήσεται· γεγράφθω γάρ, ὡς φησὶν αὐτὸς κατὰ λέξιν, ἡμικύκλιον τὸ αβγ, καὶ ἀπὸ τοῦ δ κέντρου πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ δβ, καὶ κινείσθω κανόνιον περὶ τὸ α σημεῖον· ὥστε τὸ μὲν ἓν πέρας αὐτοῦ περικεῖσθαι τυλίῳ τινὶ κατὰ τὸ α σημεῖον, τὸ δὲ λοιπὸν μέρος ὡς περὶ κέντρον τὸ τυλάριον κινείσθω μεταξὺ τῶν β, γ· τούτων δὲ κατασκευασμένων ἐπιτετάχθω δύο κύβους εὑρεῖν, λόγον ἔχοντας πρὸς ἀλλήλους τὸν ἐπιταχθέντα, καὶ τῷ λόγῳ ὁ αὐτὸς πεποιήσθω ὁ τῆς βδ, πρὸς δε· καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γε, ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ζ· παραγέσθω δὴ τὸ κανόνιον μεταξὺ τῶν β, γ, ἕως οὗ τὸ ἀπολαμβανόμενον αὐτοῦ μέρος μεταξὺ τῶν ζε, εβ, εὐθειῶν, ἴσον γένηται τῷ μεταξὺ τῆς βε, εὐθείας, καὶ τῆς βκγ περιφερείας. Τοῦτο γὰρ πειράζοντες, καὶ μετάγοντες τὸ κανόνιον, ῥᾳδίως ποιήσωμεν· γεγονέτω δὴ καὶ ἐχέτω θέσιν τὴν ακ, ὥστε ἴσας εἶναι τὰς κθ, θη· λέγω ὅτι ὁ ἀπὸ τῆς βδ κύβος, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς δθ, κύβον, λόγον ἔχει τὸν ἐπιταχθέντα, τουτέστι τὸν τῆς βδ, πρὸς δε· νενοείσθω γὰρ ὁ κύκλος ἀναπεπληρωμένος, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ κδ, ἐκβεβλήσθω ἔτι τὸ λ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ λη· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ βδ, τῇ λη, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν μὲν κθ, τῇ ηθ, τὴν δὲ κδ, τῇ δλ· ἐπεζεύχθω δὴ ἥτε αλ καὶ ἡ λγ· ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ αλγ, ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ, καὶ κάθετος ἡ λμ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ λμ, πρὸς τὸ ἀπὸ μα, τουτέστιν ἡ γμ, πρὸς μα, οὕτω τὸ ἀπὸ αμ, πρὸς τὸ ἀπὸ μη· κοινὸς προσκείσθω ὁ τῆς αμ πρὸς μη λόγος· ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος, ἔκ τε τοῦ τῆς γμ, πρὸς μα, καὶ τοῦ τῆς αμ, πρὸς μη, τουτέστιν ὁ τῆς λγ, πρὸς μη λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἔκ τε τοῦ ἀπὸ τῆς αμ, πρὸς τὸ ἀπὸ μη, καὶ τοῦ τῆς αμ πρὸς μη· ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ἀπὸ τῆς αμ πρὸς τὸ ἀπὸ μη, καὶ τοῦ τῆς αμ πρὸς μη, ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ, ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ τῆς αμ κύβος, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς μη· καὶ ὁ τῆς γμ ἄρα πρὸς μη λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ, ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ τῆς αμ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς μη· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ γμ πρὸς μη, οὕτως ἡ γδ πρὸς δε· ὡς δὲ ἡ αμ πρὸς μη, ἡ αδ, πρὸς δθ· καὶ ὡς ἄρα ἡ βδ πρὸς δε, τουτέστιν ὡς ὁ δοθεὶς λόγος, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς βδ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς δθ κύβον· τῶν ἄρα ὀφειλουσῶν εὑρεθῆναι δύο μέσων ἀνάλογον τῶν βδ, δε, δευτέρα ἐστὶν ἡ δθ· καὶ ἐὰν ποιήσωμεν ὡς τὴν βδ πρὸς δθ, τὴν θδ πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται καὶ ἡ τρίτη ηὑρημένη. Προσέχειν δὲ χρὴ ὡς καὶ ἡ τοιαύτη κατασκευὴ ἡ αὐτή ἐστι τῇ ὑπὸ Διοκλέους εἰρημένῃ, τούτῳ μόνον διαφέρουσα τῷ ἐκεῖνον μὲν γραμμήν τινα καταγράφειν διὰ συνεχῶν σημείων μεταξὺ τῶν α, β, ἐφ' ἧς ἐλαμβάνετο τὸ η, ἐκβαλλομένης τῆς γε, καὶ τεμνούσης τὴν εἰρημένην γραμμήν· ἐνταῦθα δὲ τὸ η πορίζεται, διὰ τοῦ ακ, κανόνος κινουμένου περὶ τὸ α. ὅτι γὰρ τὸ η, τὸ αὐτό ἐστιν, εἴτε ὡς ἐνταῦθα διὰ τοῦ κανόνος ληφθῇ, εἴτε ὡς ἔφη Διοκλῆς, μάθοιμεν ἂν οὕτως· ἐκβληθείσης τῆς μη κατὰ τὸ ν, ἐπεζεύχθω ἡ κν· ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ κθ, τῇ θη, καὶ παράλληλος ἡ κν, τῇ θβ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ κξ, τῇ ξν, καὶ κοινὴ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ξβ· ἡ γὰρ κν δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνεται ὑπὸ τῆς διὰ τοῦ κέντρου, καὶ βάσις ἄρα βάσει ἴση, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ κβ, περιφέρεια τῇ βν· τὸ ἄρα η ἐστὶ τὸ ἐπὶ τῆς γραμμῆς τῆς Διοκλέους, καὶ ἡ ἀπόδειξις δὲ αὐτή ἐστιν. Ἔφασκε γὰρ ὁ Διοκλῆς, ὅτι ἐστὶν ὡς γμ, πρὸς μν, οὕτως ἡ μν πρὸς μα· καὶ ἡ αμ πρὸς μη· ἴση δὲ ἐστὶν ἡ νμ τῇ μλ· ἡ γὰρ διάμετρος πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γμ πρὸς μλ, οὕτως ἡ λμ πρὸς μα, καὶ ἡ αμ πρὸς μη· τῶν ἄρα γμ, μη, μέσαι ἀνάλογον εἰσὶν αἱ λμ, μα. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ γμ πρὸς μη, ἡ γδ, πρὸς δε· ὡς δὲ ἡ γμ πρὸς μλ, ἡ αμ πρὸς μη, τουτέστιν ἡ γδ πρὸς δθ· καὶ τῶν δύο μέσων ἄρα τῶν γδ, δε, δευτέρα ἐστὶν ἡ δθ, ἥντινα ἐπορίσατο καὶ ὁ Πάππος.

Ὡς Σπόρος. σχῆμα 7.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ αβ, βγ· δεῖ δὴ τῶν αβ, βγ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. Ἤχθω ἀπὸ τοῦ β, τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἡ δβε, καὶ κέντρῳ τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ βα ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ δαε· καὶ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὸ γ εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα διήχθω ἐπὶ τὸ ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ δ διήχθω τις εὐθεῖα οὕτως, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ηθ τῇ θκ· τοῦτο γὰρ δυνατόν· καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν η, κ ἐπὶ τὴν δε κάθετοι αἱ ηλ, κμ· ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ κθ πρὸς θη, ἡ μβ πρὸς βλ· ἴση δὲ ἡ κθ τῇ θη, ἴση ἄρα καὶ ἡ μβ τῇ βλ, ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ με τῇ λδ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ δμ τῇ λε ἐστὶν ἴση· καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ μδ πρὸς δλ, ἡ λε πρὸς εμ· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ μδ πρὸς δλ, ἡ κμ πρὸς ηλ, ὡς δὲ ἡ λε πρὸς εμ, ἡ ηλ πρὸς νμ· πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ δμ πρὸς μκ, ἡ κμ πρὸς με, ὡς ἄρα ἡ δμ πρὸς με, οὕτω τὸ ἀπὸ δμ πρὸς τὸ ἀπὸ μκ, τουτέστι τὸ ἀπὸ δβ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ· τουτέστι τὸ ἀπὸ αβ, πρὸς τὸ ἀπὸ βθ· ἴση γὰρ ἡ δβ, τῇ βα· πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μδ πρὸς δβ, ἡ λε πρὸς εβ· ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ μδ πρὸς δβ, ἡ κμ πρὸς θβ· ὡς δὲ ἡ λε πρὸς εβ, ἡ κλ πρὸς γβ· ϗ ὡς ἄρα ἡ κμ πρὸς θβ, ἡ κλ πρὸς γβ· ϗ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ κμ πρὸς κλ, ἡ θβ πρὸς γβ· ἀλλ᾽ ὡς ἡ κμ πρὸς κλ, ἡ μδ πρὸς δλ, τουτέστιν ἡ δμ πρὸς με, τουτέστι τὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ· ϗ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, ἡ βθ πρὸς βγ· εἰλήφθω τῶν θβ, βγ μέση ἀνάλογον ἡ ξ· ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ, ἡ θβ πρὸς βγ, ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αβ πρὸς βθ· ἡ δὲ θβ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ θβ πρὸς ξ· ϗ ὡς ἄρα ἡ αβ πρὸς βθ, ἡ βθ πρὸς ξ· ἀλλ᾽ ὡς ἡ θβ πρὸς ξ, ἡ ξ πρὸς βγ· ϗ ὡς ἄρα ἡ αβ πρὸς βθ, ἡ θβ πρὸς ξ· ϗ ἡ ξ πρὸς βγ· φανερὸν δὲ ὅτι ϗ αὐτὴ ἡ αὐτή ἐστι τῇ τε ὑπὸ Πάππου ϗ Διοκλέους γραμμῇ.

Ὡς Μένεχμος· σχῆμα δ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ δ, ε· δεῖ δὴ τῶν δ, ε δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν· γεγονέτω ϗ ἔστωσαν αἱ β, γ· ϗ ἐκκείσθω θέσει εὐθεῖα ἡ αη, πεπερασμένη κατὰ τὸ α· ϗ πρὸς τῷ α τῇ γ ἴση κείσθω ἡ αζ· ϗ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ ζθ· ϗ τῇ β ἴση κείσθω ἡ ζθ· ἐπεὶ οὖν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ δ, β, γ· τὸ ὑπὸ τῶν δ, γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β· τὸ ἄρα ὑπὸ δοθείσης τῆς δ ϗ τῆς γ, τουτέστι τῆς αζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ζθ· ἐπὶ παραβολῆς ἄρα τῆς θ, διὰ τοῦ α γεγραμμένης, ἤχθωσαν παράλληλοι αἱ θκ, ακ· ϗ ἐπεὶ δοθὲν τὸ ὑπὸ β, γ· ἴσον γάρ ἐστι τῷ ὑπὸ δ, ε· δοθὲν ἄρα ϗ τὸ ὑπὸ κθζ· ἐπὶ ὑπερβολῆς ἄρα τὸ θ ἐν ἀσυμπτώτοις ταῖς κα, αζ· δοθὲν ἄρα τὸ θ, ὥστε ϗ τὸ ζ· συντεθήσεται δὲ οὕτως· ἔστωσαν αἱ μὲν δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ δ, ε· ἡ δὲ τῇ θέσει ἡ αη, πεπερασμένη κατὰ τὸ α, ϗ γεγράφθω διὰ τοῦ α παραβολή· ἧς ἄξων μὲν ἡ αη, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ δ· αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν αη ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ δυνάσθωσαν τὰ παρὰ τὴν δ παρακείμενα χωρία, πλάτη ἔχοντα τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ᾽ αὐτῶν πρὸς τῷ α σημείῳ· γεγράφθω, ϗ ἔστω ἡ αθ· ϗ ὀρθὴ ἡ ακ, ϗ ἐν ἀσυμπτώτοις ταῖς κα, αζ γεγράφθω ὑπερβολή, ἀφ᾽ ἧς αἱ παρὰ τὰς κα, αζ ἀχθεῖσαι ποιήσουσι τὸ χωρίον ἴσον τῷ ὑπὸ δε, τέμνει δὴ τὴν παραβολήν· τεμνέτω κατὰ τὸ θ, ϗ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ θκ, θζ· ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ ζθ, ἴσον τῷ ὑπὸ δγ, ἔστιν ὡς ἡ δ πρὸς τὴν ζθ, ἡ ζθ πρὸς ζα· πάλιν ἐπεὶ τὸ ὑπὸ δε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ θζα, ἔστιν ὡς ἡ δ πρὸς τὴν ζθ, ἡ ζα πρὸς τὴν ε· ἀλλ᾽ ὡς ἡ δ πρὸς τὴν ζθ, ἡ ζθ πρὸς ζα, ϗ ἡ ζα πρὸς ε· κείσθω τῇ μὲν θζ ἴση ἡ β, τῇ δὲ αζ ἴση ἡ γ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δ πρὸς τὴν β, ἡ β πρὸς τὴν γ· καὶ ἡ γ πρὸς ε· αἱ δ, β, γ, ε, ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

Ἄλλως.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ αβ, βγ· ϗ γεγονέτωσαν αὐτῶν μέσαι αἱ δβ, βε· ὥστε εἶναι, ὡς τὴν γβ πρὸς βδ, οὕτως τὴν βδ πρὸς βε, ϗ τὴν βε πρὸς βα· ϗ ἤχθωσαν πρὸς ὀρθὰς αἱ δζ, εζ· ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ δβ πρὸς βε· τὸ ἄρα ὑπὸ γβε, τουτέστι τὸ ὑπὸ δοθείσης ϗ τῆς βε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βδ, τουτέστι τῆς εζ· ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ δοθείσης ϗ τῆς βε· ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εζ, τὸ ζ ἄρα ἅπτεται παραβολῆς τῆς περὶ ἄξονα τὴν βε· πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ αβ πρὸς βε, ἡ βε πρὸς βδ· τὸ ἄρα ὑπὸ αβδ, τουτέστι τὸ ὑπὸ δοθείσης ϗ τῆς βδ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εβ, τουτέστι τῆς δζ· τὸ ζ ἄρα ἅπτεται παραβολῆς τῆς περὶ ἄξονα τὴν βδ· ἧπται δὲ ϗ ἑτέρας δοθείσης τῆς περὶ τὴν θζ· δοθὲν ἄρα τὸ ζ, καὶ κάθετοι αἱ ζδ, ζε· καὶ δοθέντα τὰ δ, ε· συντεθήσεται δὲ οὕτως· ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ αβ, βγ· ϗ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ᾽ ἄπειρον ἀπὸ τοῦ β, βδ, βε· ϗ γεγράφθω περὶ ἄξονα τὴν βε παραβολή· ὥστε τὰς καταγομένας ἐπὶ τὴν βε, δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν βγ· πάλιν γεγράφθω περὶ ἄξονα τὴν δβ παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν αβ· τέμνουσι δὴ ἀλλήλας αἱ παραβολαί, τεμνέτωσαν κατὰ τὸ ζ· ϗ ἀπὸ τοῦ ζ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ζδ, ζε. Ἐπεὶ οὖν ἐν παραβολῇ κατῆκται ἡ ζε, τουτέστιν ἡ δβ, τὸ ἄρα ὑπὸ γβε ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ βδ· ἔστιν ἄρα ὡς γβ πρὸς βδ, ἡ δβ πρὸς βε· πάλιν ἐπεὶ ἐν παραβολῇ κατῆκται ἡ ζδ, τουτέστιν ἡ εβ, τὸ ἄρα ὑπὸ δβα ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εβ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δβ πρὸς βε, ἡ βε πρὸς βα· ἀλλ᾽ ὡς ἡ δβ πρὸς βε οὕτως ἡ γβ πρὸς βδ· ϗ ὡς ἄρα ἡ γβ πρὸς βδ, ἡ βδ πρὸς βε, ϗ ἡ εβ πρὸς βα· ὅπερ ἔδει εὑρεῖν· Γράφεται δὲ ἡ παραβολὴ διὰ τοῦ εὑρεθέντος διαβήτου τῷ Μιλησίῳ μηχανικῷ Ἰσιδώρῳ τῷ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ, γραφέντος δὲ ὑπ' αὐτοῦ εἰς τὸ γενόμενον αὐτῷ ὑπόμνημα τῶν Ἥρωνος Καμαρικῶν.

Ἡ Ἀρχύτου εὕρεσις, ὡς Εὔδημος ἱστορεῖ· σχῆμα 9.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ αδ, γ· δεῖ δὴ τῶν αδ, γ, δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν· γεγράφθω περὶ τὴν μείζονα τὴν αδ κύκλος ὁ αβδζ· καὶ τῇ γ ἴση ἐνηρμόσθω ἡ αβ· καὶ ἐκβληθεῖσα συμπιπτέτω τῇ ἀπὸ τοῦ δ, ἐφαπτομένῃ τοῦ κύκλου κατὰ τὸ π· παρὰ δὲ τὴν πδο ἤχθω ἡ βεζ· καὶ νενοήσθω ἡμικυλίνδριον ὀρθὸν ἐπὶ τοῦ αβδ ἡμικυκλίου· ἐπὶ δὲ τὴν αδ ἡμικύκλιον ὀρθὸν, ἐν τῷ τοῦ ἡμικυλινδρίου παραλληλογράμμῳ κείμενον· τοῦτο δὴ τὸ ἡμικύκλιον περιαγόμενον ὡς ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὸ β μένοντος τοῦ α πέρατος τῆς διαμέτρου τέμνει τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν ἐν τῇ περιαγωγῇ, καὶ γράψει ἐν αὐτῇ γραμμήν τινα· πάλιν δὲ ἐὰν τῆς αδ μενούσης τὸ απδ τρίγωνον περιενεχθῇ τὴν ἐναντίαν τῷ ἡμικυκλίῳ κίνησιν, κωνικὴν ποιήσει ἐπιφάνειαν τῇ α π εὐθείᾳ, ἣ δὴ περιαγομένη συμβάλλει τῇ κυλινδρικῇ γραμμῇ κατά τι σημεῖον· ἅμα δὲ καὶ τὸ β περιγράψει ἡμικύκλιον ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ· ἐχέτω δὴ θέσιν κατὰ τὸν τόπον τῆς συμπτώσεως τῶν γραμμῶν τὸ κινούμενον ἡμικύκλιον, ὡς τὴν τοῦ δκα· τὸ δὲ ἀντιπεριαγόμενον τρίγωνον τὴν τοῦ δλα· τὸ δὲ τῆς εἰρημένης συμπτώσεως σημεῖον ἔστω τὸ κ· ἔστω δὲ καὶ τὸ διὰ τοῦ β γραφόμενον ἡμικύκλιον τὸ β μζ, κοινὴ αὐτοῦ τομὴ καὶ τοῦ β δζα κύκλου ἔστω ἡ βζ· καὶ ἀπὸ τοῦ κ ἐπὶ τὸ τοῦ βδα ἡμικυκλίου ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω· πεσεῖται δὴ ἐπὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, διὰ τὸ ὀρθὸν ἑστάναι τὸν κύλινδρον· πιπτέτω, καὶ ἔστω ἡ κι· καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ ι ἐπὶ τὸ α ἐπιζευχθεῖσα συμβαλλέτω τῇ βζ καὶ τὸ θ· ἡ δὲ αλ τῷ βμζ ἡμικυκλίῳ κατὰ τὸ μ· ἐπεζεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ κδ, μι, μθ· ἐπεὶ οὖν ἑκάτερον τῶν δκα, βμζ ἡμικυκλίου ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· καὶ ἡ κοινὴ ἄρα αὐτῶν τομὴ ἡ μθ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ὥστε καὶ πρὸς τὴν βζ ὀρθή ἐστιν ἡ μθ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν θβ, θζ, τουτέστι τὸ ὑπὸ θα, θι, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ θμ· ὅμοιον ἐστὶν ἄρα τὸ αμι τρίγωνον ἑκατέρῳ τῶν μιθ, μαθ· καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ιμα· ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δκα ὀρθὴ, παράλληλοι ἄρα εἰσὶν αἱ κδ, μι· καὶ ἔσται ἀνάλογον ὡς ἡ δα πρὸς ακ, τουτέστιν ἡ κα πρὸς αι, οὕτως ἡ ια πρὸς αμ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων· τέσσαρες ἄρα αἱ δα, ακ, αι, αμ, ἑξῆς ἀνάλογον εἰσί· καὶ ἔστιν ἡ αμ ἴση τῇ γ· ἐπεὶ καὶ τῇ αβ· δύο ἄρα δοθεισῶν τῶν αδ, γ· δύο μέσαι ἀνάλογον ηὕρηνται αἱ ακ, κι.

Ὡς Ἐρατοσθένης.

Βασιλεῖ Πτολεμαίῳ Ἐρατοσθένης χαίρειν· σχῆμα 10.

Τῶν ἀρχαίων τινὰ τραγῳδοποιῶν φασὶν εἰσαγαγεῖν τὸν Μίνω τῷ Γλαύκῳ κατασκευάζοντα τάφον· πυθόμενον δὲ ὅτι πανταχοῦ ἑκατόμπεδος εἴη, εἰπεῖν, μικρόν γ' ἔλεξας βασιλικοῦ σηκὸν τάφου, διπλάσιος ἔστω· τοῦ δὲ τοῦ κύβου μὴ σφαλῇς, διπλασιάζων ἕκαστον κῶλον ἐν πάχει τάφου, ἐδόκει δὴ ἡμαρτηκέναι· τῶν γὰρ πλευρῶν διπλασιασθεισῶν, τὸ μὲν ἐπίπεδον γίνεται τετραπλάσιον, τὸ δὲ στερεὸν ὀκταπλάσιον· ἐζητεῖτο δὴ καὶ παρὰ τοῖς Γεωμέτραις, τίνα ἄν τις τρόπον τὸ δοθὲν στερεὸν διαμένον ἐν τῷ αὐτῷ σχήματι διπλασιάσειεν· καὶ ἐκαλεῖτο τὸ τοιοῦτον πρόβλημα, Κύβου διπλασιασμός· ὑποθέμενοι γὰρ κύβον, ἐζήτουν τοῦτον διπλασιάσαι· πάντων δὲ διαπορούντων ἐπὶ πολὺν χρόνον, πρῶτον Ἱπποκράτης ὁ Χῖος ἐπενόησεν, ὅτι ἐὰν εὑρεθῇ δύο εὐθειῶν γραμμῶν, ὧν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος ἐστὶ διπλασία, δύο μέσας ἀνάλογον λαβεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, διπλασιασθήσεται ὁ κύβος, ὥστε τὸ ἀπόρημα αὐτοῦ εἰς ἕτερον οὐκ ἔλασσον ἀπόρημα κατέστρεφεν· μετὰ χρόνον δέ τινα φασὶν Δηλίους ἐπιβαλλομένους νόσου κατὰ χρησμὸν διπλασιάσαι τινὰ τῶν βωμῶν ἐπιταχθέντας, ἐμπεσεῖν εἰς τὸ αὐτὸ ἀπόρημα, διαπεμψαμένους δὲ τοὺς παρὰ τῷ Πλάτωνι ἐν ἀκαδημίᾳ Γεωμέτρας ἀξιοῦν αὐτοῖς εὑρεῖν τὸ ζητούμενον· τῶν δὲ φιλοπόνων ἐπιδιδόντων ἑαυτοῖς, καὶ ζητούντων, δύο δοθεισῶν δύο μέσας λαβεῖν, Ἀρχύτας μὲν ὁ Ταραντῖνος λέγεται διὰ τῶν ἡμικυλίνδρων εὑρηκέναι, Εὔδοξος δὲ διὰ τῶν καλουμένων καμπύλων γραμμῶν· συμβέβηκε δὲ πᾶσιν αὐτοῖς ἀποδεικτικῶς γεγραφέναι· χειρουργῆσαι δὲ καὶ εἰς χρείαν πεσεῖν μὴ δύνασθαι, πλὴν ἐπὶ βραχύ τι τοῦ Μενέχμου, καὶ ταῦτα δυσχερῶς· ἐπινενόηται δέ τις ὑφ' ἡμῶν ὀργανικὴ ῥᾳδία, δι' ἧς εὑρήσομεν, δύο τῶν δοθεισῶν οὐ μόνον δύο μέσας, ἀλλ' ὅσας ἄν τις ἐπιτάξῃ· τούτου δὲ εὑρισκομένου δυνησόμεθα καθόλου τὸ δοθὲν στερεὸν παραλληλογράμμοις περιεχόμενον εἰς κύβον καθιστάναι, ἢ ἐξ ἑτέρου εἰς ἕτερον σχηματίζειν, καὶ ὅμοιον ποιεῖν καὶ ἐπαύξειν διατηροῦντας τὴν ὁμοιότητα· ὥστε καὶ βωμοὺς, καὶ ναούς. δυνησόμεθα δὲ καὶ τὰ τῶν ὑγρῶν μέτρα, καὶ ξηρῶν, λέγω δὲ οἷον μετρητὴν μεδίμνων εἰς κύβον καθιστάναι, ϗ διὰ τῆς τούτου πλευρᾶς ἀναμετρεῖν τὰ τούτων δεκτικὰ ἀγγεῖα πόσον χωρεῖ· χρήσιμον δὲ ἔσαι τὸ ἐπινόημα, ϗ τοῖς βουλομένοις ἐπαύξειν καταπαλτικὰ ϗ λιθοβόλα ὄργανα. Δεῖ γὰρ ἀνάλογον ἅπαντα αὐξηνθῆναι, ϗ τὰ πάχη ϗ τὰ μεγέθη, καὶ τὰς κατατρήσεις, ϗ τὰς χοινικίδας, ϗ τὰ ἐμβαλλόμενα νευρὰ, εἰ μέλλει ϗ ἡ βολὴ ἀνάλογον ἐπαυξηνθῆναι· ταῦτα δὲ οὐ δυνατὰ γενέσθαι ἄνευ τῆς τῶν μέσων εὑρέσεως· τὴν δὲ ἀπόδειξιν ϗ τὴν κατασκευὴν τοῦ λεχθέντος ὀργάνου ὑπογέγραφά σοι. Δεδόσθωσαν δύο ἄνισοι εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, αἱ αε, δθ· ϗ κείσθω ἐπί τινος εὐθείας τῆς εθ πρὸς ὀρθὰς ἡ αε, ϗ ἐπὶ τῆς εθ τρία συνεστάτω παραλληλόγραμμα ἐφεξῆς, τὰ αζ, ζι, ιθ· ϗ ἤχθωσαν διάμετροι ἐν αὐτοῖς, αἱ αζ, λη, ιθ· ἔσονται δὴ αὗται παράλληλοι, μένοντος δὴ τοῦ μέσου παραλληλογράμμου τοῦ ζ, συνωσθήτω, τὸ μὲν αζ ἐπάνω τοῦ μέσου, τὸ δὲ ιθ ὑπὸ κάτω, καθάπερ ἐπὶ τοῦ δευτέρου σχήματος· ἕως οὗ γένηται τὰ αβ γδ κατ' εὐθείαν· ϗ διήχθω διὰ τῶν α, β, γ, δ σημείων εὐθεῖα· ϗ συμπιπτέτω τῇ εθ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ κ· ἔσαι δὴ ὡς ἡ ακ πρὸς κβ, ἐν μὲν ταῖς αε, ζβ παραλλήλοις, ἡ εκ πρὸς κζ· ἐν δὲ ταῖς αζ, βη παραλλήλοις ἡ ζκ πρὸς κη· ὡς ἄρα ἡ ακ πρὸς κβ, ἡ εκ πρὸς κζ, ϗ ἡ κζ πρὸς κη· πάλιν ἐπεί ἐσὶν ὡς ἡ βκ πρὸς κγ, ἐν μὲν ταῖς βζ, γη παραλλήλοις ἡ ζκ πρὸς κη· ἐν δὲ ταῖς βη, γδ παραλλήλοις ἡ ηκ πρὸς κθ· ὡς ἄρα ἡ βκ πρὸς κγ, ἡ ζκ πρὸς κη, ϗ ἡ ηκ πρὸς κθ ἀλλ' ὡς ἡ ζκ πρὸς κη, ἡ εκ πρὸς κζ· ϗ ὡς ἄρα ἡ εκ πρὸς κζ, ἡ ζκ πρὸς κη, ϗ ἡ ηκ πρὸς κθ· ἀλλ' ὡς ἡ εκ πρὸς κζ, ἡ αε πρὸς βζ· ὡς δὲ ἡ ζκ πρὸς κη, ἡ βζ πρὸς γη· ὡς δὲ ἡ ηκ πρὸς κθ, ἡ γη πρὸς δθ· ϗ ὡς ἄρα ἡ αε πρὸς βζ, ἡ βζ πρὸς γη, ϗ ἡ γη πρὸς δθ· εὕρηνται ἄρα τῶν αε, δθ δύο μέσαι, ἥτε βζ ϗ ἡ γη.

Ταῦτα οὖν ἐπὶ τῶν γεωμετρουμένων ἐπιφανειῶν ἀποδέδεικται ἵνα δὲ ϗ ὀργανικῶς δυνώμεθα τὰς δύο μέσας λαμβάνειν, διαπήγνυται πλινθίον ξύλινον, ἢ ἐλεφάντινον, ἢ χαλκοῦν ἔχον τρεῖς πινακίσκους ἴσους ὡς λεπτοτάτους· ὧν ὁ μὲν μέσος ἐνήρμοσαι, οἱ δὲ δύο ἐπωσοί εἰσιν ἐν χολέδραις, τοῖς δὲ μεγέθεσι ϗ ταῖς συμμετρίαις ὡς ἕκασοι ἑαυτοὺς πείθουσι· τὰ μὲν γὰρ τῆς ἀποδείξεως ὡσαύτως συντελεῖται, πρὸς δὲ τὸ ἀκριβέσερον λαμβάνεσθαι τὰς γραμμὰς φιλοτεχνητέον, ἵνα ἐν τῷ συνάγεσθαι τοὺς πινακίσκους παράλληλα διαμένῃ πάντα ϗ ἄχασα, ϗ ὁμαλῶς συναπτόμενα ἀλλήλοις. ἐν δὲ τῷ ἀναθήματι, τὸ μὲν ὀργανικὸν χαλκοῦν ἐσι, ϗ καθήρμοσαι ὑπ' αὐτὴν τὴν σεφάνην τῆς σήλης προσμεμολυβδοχυμένων, ὑπ' αὐτοῦ δὲ ἡ ἀπόδειξις συντομώτερον φραζομένη ϗ τὸ σχῆμα, μετ' αὐτὸ δὲ ἐπίγραμμα· ὑπογεγράφθω οὖν σοι ϗ ταῦτα, ἵνα ἔχῃς ϗ ὡς ἐν τῷ ἀναθήματι· τῶν δὲ δύο σχημάτων τὸ δεύτερον γέγραπται ἐν τῇ σήλῃ.

Δύο τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ· δεδόσθωσαν αἱ αε, δθ· συνάγω δὲ τοὺς ἐν τῷ ὀργάνῳ πίνακας, ἕως ἂν κατ' εὐθείαν γένηται τὰ α, β, γ, δ, σημεῖα· νοείσθω δὴ ὡς ἔχει μὲν ἐπὶ τοῦ δευτέρου σχήματος· ἔσιν ἄρα ὡς ἡ ακ πρὸς κβ, ἐν μὲν ταῖς αε βζ παραλλήλοις ἡ εκ πρὸς κζ· ἐν δὲ ταῖς αζ, βη, ἡ ζκ πρὸς κη· ὡς ἄρα ἡ εκ πρὸς κζ, ἡ κζ πρὸς κη· ὡς δὲ αὗται πρὸς ἀλλήλας, ἥτε αε πρὸς βζ, ϗ ἡ βζ πρὸς γη· ὡσαύτως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ὡς ἡ ζβ πρὸς γη, ἡ γη πρὸς δθ· ἀνάλογον ἄρα αἱ αε, βζ, γη, δθ· εὕρηνται ἄρα δύο τῶν δοθεισῶν δύο μέσαι· ἐὰν δὲ αἱ δοθεῖσαι μὴ ἴσαι ὦσι ταῖς αε, δθ, ποιήσαντες αὐταῖς ἀνάλογον τὰς αε, δθ, τούτων ληψόμεθα τὰς μέσας, ϗ ἐπανοίσομεν ἐπ' ἐκείνας, ϗ ἐσόμεθα πεποιηκότες τὸ ἐπιταχθέν· ἐὰν δὲ πλείους μέσας ἐπιταχθῇ εὑρεῖν, εἰ ἐνὶ πλείους πινακίσκους κατασησόμεθα ἐν τῷ ὀργάνῳ τῶν ληφθησομένων μέσων· ἡ δὲ ἀπόδειξις ἡ αὐτή.

Εἰ κύβον ἐξ ὀλίγου διπλάσιον, ὠγαθὲ, τεύχειν
φράζεαι, τὴν σερεὴν πᾶσαν ἐς ἄλλο φύσιν
εὖ μεταμορφῶσαι, τόδε τοι πάρα κἂν σύγε μάνδρην
ἢ σειρὸν, ἢ κοίλου φρείατος εὐρὺ κύτος·
τῇ δ' ἀναμετρήσαιο μέσας ὅτε τέρμασιν ἄκροις
συνδρομάδας δισσῶν ἐντὸς ἕλῃς κανόνων·
μὴ δὲ σύγ' Ἀρχύτεω δισμήχανα ἔργα κυλίνδρων,
μὴ δὲ Μενεχμείους κωνοτομεῖν τριάδας
δίζηαι· μὴ δ' εἴ τι θεοῦ δίοι Εὐδόξοιο,
καμπύλον ἐγγραμμαῖς εἶδος ἀναγράφεται·
ταῖς δὲ γὰρ ἐν πινάκεσσι μεσόγραφα μυρία τεύχοις,
ῥεῖα κεν ἐκ παύρου πυθμένος ἀρχόμενος·
εὐαίων Πτολεμαῖε πατὴρ ὅτι παιδὶ συνηβῶν
πάνθ' ὅσα ϗ μούσαις, ϗ βασιλεῦσι φίλα.

αὐτὸς ἐδωρήσω τὰ δ' ἐς ὕστερον ὀλβίζε Ζεῦ·
καὶ σκήπτρων ἐκ σῆς ἀντιάσειε χερός.
Καὶ τὰ μὲν ὡς τελέοιτο, λέγοι δέ τις ἄνθεμα λεύσσων
τοῦ Κυρηναίου τοῦτ' Ἐρατοσθένεος.

Ὡς Νικομήδης ἐν τῷ περὶ κογχοειδῶν γραμμῶν· σχῆμα ΙΙ.

Γράφει δὲ καὶ Νικομήδης ἐν τῷ ἐπιγεγραμμένῳ πρὸς αὐτοῦ περὶ κογχοειδῶν συγγράμματι ὀργάνου κατασκευὴν τὴν αὐτὴν ἀποπληροῦντος· ἐφ' ᾧ καὶ μεγάλα μὲν σεμνυνόμενος φαίνεται ὁ ἀνήρ, πολλὰ δὲ τοῖς Ἐρατοσθένους ἐπιγελῶν εὑρήμασιν, ὡς ἀμηχάνοις τε ἅμα καὶ γεωμετρικῆς ἕξεως ἐστερημένοις, τοῦτ' ἐὰν ἐλλείπῃ· τῶν τοίνυν περὶ τὸ πρόβλημα πεπονηκότων τῆς τε πρὸς Ἐρατοσθένη συγκρίσεως ἕνεκα, καὶ αὐτὸν τοῖς ἤδη γεγραμμένοις, συνάπτομεν δυνάμει γράφοντα οὕτως· Νοεῖν χρὴ κανόνας δύο πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις συμβεβλημένους οὕτως, ὥστε μίαν ἀποσώζειν αὐτοὺς ἐπιφάνειαν· καθάπερ εἰσὶν οἱ αβ, γδ· ἐν δὲ τῷ αβ σωλῆνα πελεκινοειδῆ, εἰς ὃν χελώνιον διατρέχειν δυνήσεται· ἐν δὲ τῷ γδ κατὰ τὸ μέρος τὸ πρὸς τὸ δ, καὶ μέσην τὴν διαιροῦσαν εὐθεῖαν τὸ πλάτος αὐτοῦ κυλίνδριον συμφυὲς τῷ κανόνι, καὶ βραχὺ ὑπερέχον τῆς ἄνωθεν ἐπιφανείας αὐτοῦ τοῦ κανόνος· ἄλλον δὲ κανόνα ὡς τὸν εζ μετὰ βραχύ τι διάστημα τοῦ πρὸς τὸ ζ πέρατος ἀνατομὴν ἔχοντα, ὡς τὴν ηθ, δυναμένην περιβαίνειν τῷ πρὸς τῷ δ κυλινδρίῳ· πρὸς δὲ τῷ ε ὀπὴν στρογγύλην, ἥτις ἐγκλεισθήσεται εἰς τὸν ἀξόνιον, συμφυὲς τῷ διατρέχοντι χελωναρίῳ ἐν τῷ πελεκινοειδεῖ σωλῆνι, τῷ ὄντι ἐν τῷ αβ κανόνι· ἐναρμοσθέντος τοίνυν τοῦ εζ κανόνος, κατὰ μὲν τὴν ηθ ἀνατομὴν, ἐν τῷ πρὸς τὸ ζ κυλινδρίῳ, κατὰ δὲ τὴν ε ὀπὴν ἐν τῷ ἀξονίῳ τῷ συμφυεῖ τῷ χελωναρίῳ, ἐάν τις ἐπιλαβόμενος τοῦ κ ἄκρου τοῦ κανόνος κινῇ αὐτὸν ἐπὶ τὰ πρὸς τὸ α μέρη, ἔπειτα πρὸς τὰ β, τὸ μὲν ε σημεῖον ἀεὶ ἐπὶ τοῦ αβ κανόνος ἐνεχθήσεται· ἡ δὲ ηθ ἀνατομὴ ἐπὶ τῷ πρὸς τὸ δ κυλινδρίῳ κινηθήσεται, ἀεὶ τῆς μέσης τοῦ εζ κανόνος εὐθείας ἐν τῇ κινήσει διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ πρὸς τῷ δ κυλίνδρῳ νοουμένης· τῆς δὲ εκ ὑπεροχῆς τοῦ κανόνος ἀεὶ τῆς αὐτῆς μενούσης· ἐὰν τοίνυν πρὸς τὸ κ ἐπινοήσωμεν τὶ γραφεῖον ἐφαπτόμενον τοῦ ἐδάφους, γραφήσεταί τις γραμμὴ, οἵα ἐστὶν ἡ λμν, ἥντινα καλεῖ Νικομήδης κογχοειδῆ πρώτην γραμμὴν, καὶ διάστημα μὲν τῆς γραμμῆς τὸ εκ μέγεθος τοῦ κανόνος, πόλον δὲ τὸ δ.

Ταύτῃ δὴ τῇ γραμμῇ συμβαίνοι δείκνυσι τὸ ἀεὶ ἐπ' ἔλαττον μὲν συμπορεύεσθαι τῷ αβ κανόνι· καὶ ἐάν τις εὐθεῖα διαχθῇ μεταξὺ τῆς τε γραμμῆς καὶ τοῦ αβ κανόνος, ὅτι πάντως τέμνει τὴν γραμμὴν, καὶ τὸ μὲν πρότερον τῶν συμβαινόντων ἐστὶν εὐκατανόητον, ἐφ' ἑτέρας καταγραφῆς, κανόνος τε νοουμένου τοῦ αβ· πόλου δὲ τοῦ γ, διαστήματος δὲ τοῦ δε, γραμμῆς δὲ κογχοειδοῦς τῆς ζεη· προσπιπτέτωσαν ἀπὸ τοῦ γ δύο αἱ γθ, γζ ἴσων, δῆλον ὅτι γινομένων τῶν κθ, λζ· λέγω ὅτι ἡ ζμ κάθετος ἐλάττων τῆς θν καθέτου· μείζονος γὰρ οὔσης τῆς ὑπὸ μλγ γωνίας τῆς ὑπὸ νκγ, λοιπὴ ἡ λοιποῦσα εἰς τὰς δύο ὀρθὰς ἡ ὑπὸ μλζ λοιπῆς τῆς ὑπὸ νκθ ἐστὶν ἐλάσσων, καὶ διὰ τοῦτο ὀρθῶν οὐσῶν τῶν πρὸς τοῖς μ, ν, μείζων ἐστὶ καὶ ἡ πρὸς τὸ ζ τῆς πρὸς τῷ θ· καὶ ἐὰν τῇ πρὸς τὸ θ ἴσην συστησόμεθα τὴν ὑπὸ μζξ, ἡ κθ, τουτέστιν ἡ λζ πρὸς θν τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν ἡ ξζ, πρὸς ζμ· ὥστε ἡ ζλ πρὸς τὴν θν ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὴν ζμ· καὶ διὰ τοῦτο μείζων ἡ θν τῆς ζμ.

Τὸ δὲ δεύτερον ἦν τὸ τὴν διαγομένην εὐθεῖαν μεταξὺ τῆς τε αβ καὶ τῆς γραμμῆς τέμνειν τὴν γραμμὴν, καὶ τοῦτο δὲ οὕτω γίνεται γνώριμον· ἡ γὰρ διαγομένη, ἤτοι παράλληλός ἐστι τῇ αβ ἢ οὔ. Ἔστω πρότερον παράλληλος ὡς ἡ ζηθ· καὶ γεγονέτω ὡς ἡ δη πρὸς ηγ, οὕτως ἡ δε πρὸς ἄλλην τινὰ τὴν κ· καὶ κέντρῳ τῷ γ, διαστήματι δὲ τῇ κ περιφέρεια γραφεῖσα τεμνέτω τὴν ζη κατὰ τὸ ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γζ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δη πρὸς ηγ, οὕτως ἡ λζ πρὸς ζγ· ἀλλ' ὡς ἡ δη πρὸς ηγ, οὕτως ἦν ἡ δε πρὸς τὴν κ, τουτέστι τὴν γζ· ἴση ἄρα ἡ δε τῇ λζ ἀδύνατον· δεῖ γὰρ εἶναι τὸ ζ πρὸς τῇ γραμμῇ· ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ἡ διαγομένη παράλληλος· καὶ ἔστω ὡς ἡ μην· καὶ ἤχθω διὰ τοῦ κ παράλληλος τῇ αβ, ἡ ζη· ἡ ἄρα ζη συμπεσεῖται τῇ γραμμῇ, ὥστε πολλῷ μᾶλλον ἡ μν· τούτων δὲ ὄντων τῶν παρακολουθημάτων διὰ τοῦ ὀργάνου τὸ χρήσιμον εἰς τὸ προκείμενον δείκνυται οὕτως.

Πάλιν γωνίας δοθείσης τῆς α, καὶ σημείου ἐκτὸς τοῦ γ, διάγειν τὴν γη, καὶ ποιεῖν τὴν κη ἴσην τῇ δοθείσῃ· ἤχθω κάθετος ἀπὸ τοῦ γ σημείου ἐπὶ τὴν αβ, ἡ γθ· καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ τῇ δοθείσῃ ἴση ἔστω ἡ δθ, καὶ πόλῳ μὲν τῷ γ, διαστήματι δὲ τῷ δοθέντι τῷ δθ, κανόνι δὲ τῷ αβ, γεγράφθω κογχοειδὴς γραμμὴ πρώτη ἡ εδζ· συμβάλλει ἄρα τῇ αη, διὰ τὸ προδειχθὲν, συμβαλλέτω κατὰ τὸ η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γη· ἴση ἄρα ἡ κη τῇ δοθείσῃ.

Τούτων δειχθέντων, δεδόσθωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ γλ, λα πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον κατὰ τὸ συνεχὲς εὑρεῖν· καὶ συμπεπληρώσθω τὸ αβγλ παραλληλόγραμμον, καὶ τετ-

μήσθω δίχα ἑκατέρα τῶν αβ, βγ, τοῖς δ, ε σημείοις, καὶ ἐπιζευχθεῖσα μὲν ἡ δλ ἐκβεβλήσθω, συμπιπτέτω τῇ γβ ἐκβληθείσῃ, κατὰ τὸ η, τῇ δὲ βγ πρὸς ὀρθὰς ἡ εζ, καὶ προσβεβλήσθω ἡ η ἴση οὖσα τῇ αδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζκ· καὶ αὐτῇ παράλληλος ἡ γθ· καὶ γωνίας οὔσης τῆς ὑπὸ τῶν κγζ ἀποδοθέντος τοῦ ζ, διήχθω ἡ ζθκ, ποιοῦσα ἴσην τὴν θκ τῇ αδ, ἢ τῇ γζ· τοῦτο γὰρ ὡς δυνατὸν ἐδείχθη διὰ τῆς κογχοειδοῦς· καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ κλ ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ αβ, ἐκβληθεῖσ κατὰ τὸ μγ, λέγω ὅτι ἐστὶν, ὡς ἡ φλ πρὸς κγ, ἡ κγ πρὸς μα, καὶ ἡ μα πρὸς τὴν αλ. Ἐπεὶ ἡ β τέτμηται δίχα τῷ ε· καὶ πρόσκειται αὐτῇ ἡ κγ· τὸ ἄρα ὑπὸ βκγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ γε, ἴσον ἐστὶ τ ἀπὸ εκ· κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ εζ· τὸ ἄρα ὑπὸ βκγ μετὰ τῶν ἀπὸ γεζ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ γζ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ κεζ, τουτέστι τῷ ἀπὸ κζ· καὶ ἐπεὶ ὡς ἡ μα πρὸς αβ, ἡ μλ πρὸς λκ· ὡς δὲ ἡ μ πρὸς λκ, οὕτως ἡ βγ πρὸς γκ· καὶ ὡς ἄρα ἡ μα πρὸς αβ, οὕτως ἡ βγ πρὸς γκ· καὶ ἔστι τῆς μὲν α ἡμίσεια ἡ αδ, τῆς δὲ βγ διπλῆ ἡ γη· ἐπεὶ καὶ ἡ λγ τῆς αδ· ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἡ μα πρὸς αδ οὕτως ἡ ηγ πρὸς γκ· ἀλλ' ὡς ἡ ηγ πρὸς γκ, οὕτως ἡ ζθ πρὸς θκ, διὰ τὰς παραλλήλους τὰς ηι γθ· καὶ συνθέντι ἄρα ὡς ἡ μδ πρὸς δα, ἡ ζκ πρὸς κθ· ἴση δὲ ὑπόκειται καὶ ἡ αδ τῇ θη, ἐπ καὶ τῇ γζ ἴση ἐστὶν ἡ αδ· ἴση ἄρα καὶ ἡ μδ τῇ ζκ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ μδ, τὸ ἀπὸ ζκ. Καὶ ἔστι τ μὲν ἀπὸ μδ, ἴσον τὸ ὑπὸ βμα μετὰ τοῦ ἀπὸ δα· τῷ δὲ ἀπὸ ζκ, ἴσον ἐδείχθη τὸ ὑπὸ βκγ μετ τοῦ ἀπὸ γζ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ βμα μετὰ τοῦ ἀπὸ λδ, τὸ ὑπὸ βκγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γζ, ὧν τὸ ἀπ αδ ἴσον τῷ ἀπὸ γζ· ἴση γὰρ ὑπόκειται ἡ αδ τῇ γζ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ βμα τῷ ὑπὸ βκγ, ὡ ἄρα ἡ μβ πρὸς βκ, ἡ κγ πρὸς αμ· ἀλλ' ὡς ἡ βμ πρὸς βκ, ἡ κλ πρὸς γκ· καὶ ὡς ἄρα ἡ γλ πρ γκ, οὕτως ἡ γκ πρὸς αμ· ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ λγ πρὸς γκ, ἡ μα πρὸς αλ· καὶ ὡς ἄρα ἡ λγ πρὸς γκ ἡ γκ πρὸς αμ, καὶ ἡ αμ πρὸς αλ.

Εἰς τὸ β'. θεώρημα.

Καὶ συνθέντι, ὡς ἡ δθ πρὸς θγ, ἡ γα πρὸς αε· τουτέστι τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε· ὡ γὰρ ἐπὶ αὐτῆς τῆς ἐν τῷ ῥητῷ καταγραφῆς· ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ γβα, ἀπὸ τῆς ὀρθῆ ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ βε, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοια ἐστὶ τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ γα πρὸς αβ, ἡ βα πρὸς αε, καὶ ἡ γβ πρὸς βε· ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ γα πρὸ τὸ ἀπὸ αβ, οὕτω τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε· ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ γα πρὸς τὸ ἀπὸ αβ, οὕτως ἡ γ πρὸς αε. Ὡς γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ὡς ἄρα ἡ γα πρὸς αε, οὕτω τὸ ἀπὸ γβ, πρὸς τὸ ἀπὸ βε· διὰ δὲ τῶν αὐτῶν δείκνυται, ὅτι ἐστὶ ὡς ἡ γα πρὸς γε, οὕτω τὸ ἀπὸ αβ, πρὸς τὸ βε· διὰ γὰρ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ἐστὶ πάλιν ὡς ἡ μὲν αγ πρὸς γβ, οὕτως ἡ βγ πρὸς γε· τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ἀπὸ γβ, οὕτως ἡ α πρὸς γε, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ἀπὸ γβ, οὕτω τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ βε· καὶ ὡς ἄρα ἡ αγ πρὸ γε, τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε· Εἶτα ἐφεξῆς δεικνύναι πειρώμενος τῷ βαζ τμήματι τῆς σφαίρας ἴσον τὸν βκζ κῶνον· ἐκθέμενος κῶνον τὸν ν, βάσιν μὲν ἔχοντα ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ βαζ τμήματος ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας· φησὶν ὅτι ὁ ν κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ζαβθ στερεῷ τομεῖ, ὡ δέδεικται ἐν τῷ α'. βιβλίῳ. Ἰστέον δὲ ὅτι ἐν τῷ α'. βιβλίῳ οὐ τὸν τοιοῦτον τομέα ἀπεδείκνυεν ἴσον ὄντι τῷ οὕτω λαμβανομένῳ, ἀλλὰ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας, καὶ σφαιρικῆς ἐπιφανεία ἐλάττονος ἡμισφαιρίου, ὅν τινα καὶ κυρίως ἐν τοῖς ὅροις τομέα στερεὸν καλεῖν ἐφαίνετο· ἔφασκε γὰρ τομέα δὲ στερεὸν καλέω· ἐπειδ' ἂν σφαίραν κῶνος τέμνει τὰν κορυφὰν ἔχων ποτὶ τῷ κέντρῳ τᾶς σφαίρας τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας τᾶς ἐντὸς τοῦ κώνου· τὸ δὲ νῦν προκείμενον σχῆμ περιέχεται μὲν ὑπὸ κωνικῆς ἐπιφανείας, τὴν κορυφὴν ἐχούσης πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας, καὶ σφαιρ κῆς ἐπιφανείας, ἀλλ' οὐ τῆς ἐντὸς ἀπολαμβανομένης τοῦ κώνου· ὅτι δὲ οὖν τὸ τοιοῦτον σχῆμα ἴσον γίνετα τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ σφαιρικῇ τῇ περιεχούσῃ τὸ τμῆμα, ὕψος δὲ ἴσο τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, δειχθήσεται οὕτω διὰ τῶν ἐν τῷ α'. βιβλίῳ δεδειγμένων.

Νενοήσθω χωρὶς σφαῖρα, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ τινὶ μὴ διὰ τοῦ κέντρου τῷ περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλῳ· κέντρον δὲ τῆς σφαίρας τὸ α· καὶ νενοήσθω κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ α σημεῖον· ἐκκείσθω δὲ κῶνος ὁ ε, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἔσω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. Ὁ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τῇ σφαίρᾳ· τετραπλάσιος γάρ ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ, ὅπερ ἡ σφαῖρα ἐδείχθη τετραπλασία. Ἐκκείσθωσαν δὲ καὶ ἄλλοι δύο κῶνοι οἱ ζ, η, ὧν ὁ μὲν ζ βάσιν ἐχέτω ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κατὰ τὴν βγδ τμήματος, ὕψος δὲ τὴν τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας· ὁ δὲ η βάσιν μὲν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κατὰ τὴν βθδ τμήματος, ὕψος δὲ τὸ αὐτό. Ὁ ζ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ τομεῖ, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ α, ἐπιφάνεια δὲ σφαιρικῷ ἡ κατὰ τὴν βγδ· Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ τοῦ ε κώνου βάσις ταῖς τῶν ζ, η κώνων βάσεσι, καὶ εἰσὶν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ε κῶνος, τουτέστι ἡ σφαῖρα τοῖς ζ, η κώνοις· ἀλλ' ὁ ζ ἴσος ἐδείχθη τῷ κατὰ τὴν βγδ στερεῷ τομεῖ, κορυφὴν ἔχοντι τὸ α· λοιπὸς ἄρα ὁ η κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ λοιπῷ τμήματι, βάσιν ἔχων τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κατὰ τὴν βθδ τμήματος, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου.

Εἶτα πάλιν φησίν, ἴσος ἄρα ὁ ν κῶνος, τουτέστιν ὁ βθ, ζα τομεύς, τῷ βθζκ σχήματι. Ἐπεὶ γὰρ συνήχθη ὁ ν κῶνος, ἴσος ὢν κώνῳ οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ θκ· ὁ δὲ κῶνος οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ἡ αὐτή, ὕψος δὲ ἡ εκ, ἴσος τῷ τε εἰρημένῳ κώνῳ, καὶ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν εθ· πρὸς ἀλλήλους γὰρ εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη· κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν εθ· λοιπὸν τὸ βθ ζκ σχῆμα ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν θκ· τουτέστι τῷ ν κώνῳ, τουτέστι βαθζ τομεῖ.

Ἐπαγαγὼν δὴ τὸ ἐκ τῶν συναχθέντων πόρισμα ἐπὶ τέλει τοῦ θεωρήματος, ἑξῆς δι' ἑτέρας ἀποδείξεως συνάγει τὸ τελευταῖον μέρος τοῦ θεωρήματος, τουτέστιν ὅτι τὸ βαζ τμῆμα σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ βκζ κώνῳ· καὶ προϊὼν φησὶν ὡς ἄρα ἡ κθ πρὸς θγ, ἡ θδ πρὸς δγ· καὶ ὅλη ἡ κδ πρὸς δθ ἐστὶν ὡς ἡ δθ πρὸς δγ· Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ κθ πρὸς θγ, ἡ θδ πρὸς δγ· καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, ἡ θγ πρὸς γδ· καὶ συνθέντι, ὡς ἡ κδ πρὸς δθ, ἡ θδ πρὸς δγ· τουτέστιν ἡ κθ πρὸς θα· ἦν γὰρ ὡς ἡ κθ πρὸς θγ, ἡ θδ πρὸς δγ· ἴση δὲ ἡ θγ τῇ θα· καὶ μετ' ὀλίγον, ὡς ἄρα ἡ κθ πρὸς δθ, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κδ πρὸς τὸ ἀπὸ τῶν κθδ, οὕτω τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν α εγ. Νοείσθωσαν γὰρ χωρὶς κείμεναι αἱ κδ, αγ· καὶ ἔστω ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ· λέγω ὅτι ἐστὶ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ κδ, πρὸς τὸ ὑπὸ κθδ, οὕτω τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ὑπὸ αεγ· Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ· καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς ἡ κδ πρὸς δθ, οὕτως ἡ αγ πρὸς γε, ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ κδ πρὸς τὸ ἀπὸ θδ, ὡς τὸ ἀπὸ αγ, πρὸς τὸ ἀπὸ εγ· πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ· ἀλλ' ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, οὕτω τὸ ὑπὸ κθδ πρὸς τὸ ἀπὸ θδ, κοινοῦ ὕψους τῆς θδ λαμβανομένης· ὡς δὲ ἡ αε πρὸς εγ, οὕτω τὸ ὑπὸ αεγ πρὸς τὸ ἀπὸ εγ, κοινοῦ, πάλιν ὕψους λαμβανομένης τῆς εγ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ κθδ πρὸς τὸ ἀπὸ θδ, οὕτω τὸ ὑπὸ αεγ πρὸς τὸ ἀπὸ εγ· ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ ἀπὸ θδ, πρὸς τὸ ἀπὸ δκ, οὕτω τὸ εγ πρὸς τὸ ἀπὸ γα· καὶ δι' ἴσου ὡς τὸ ὑπὸ κθδ πρὸς τὸ ἀπὸ κδ, οὕτω τὸ ὑπὸ αεγ πρὸς τὸ ἀπὸ αγ· καὶ ἀνάπαλιν, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Εἰς τὸ γ.

Ὡς δὲ οἱ εἰρημένοι κύκλοι πρὸς ἀλλήλους τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὸ ἀπὸ δβ, τουτέστιν ἡ αγ πρὸς γβ· ὡς γὰρ ἐν αὐτῇ τῇ τοῦ ῥητοῦ καταγραφῇ, ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ αδβ κάθετος ἦκται, καὶ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς ἡ δγ μέση, ἀνάλογον ἐστὶ τῶν τῆς βάσεως τμημάτων· καὶ τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοια ἐστὶ τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις· ὥστε ἐστὶν ὡς ἡ βγ πρὸς γδ, ἡ βδ πρὸς δα· καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ἄρα· ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ βγ πρὸς τὸ ἀπὸ γδ, οὕτως ἡ πρώτη ἡ βγ πρὸς τρίτην τὴν γα· καὶ ὡς ἄρα ἡ βγ πρὸς γα, οὕτω τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δα· δοθεὶς δὲ λόγος τῆς αγ πρὸς γβ, ὥστε δοθὲν ἐστὶ τὸ γ σημεῖον· ἐπεὶ γὰρ ἡ σφαῖρα ὑπόκειται δεδομένη, δέδοται ἄρα καὶ ἡ διάμετρος αὐτῆς ἡ δγ· καὶ δέδοται ὁ λόγος τῆς αγ πρὸς γβ· ἐὰν δεδομένον μέγεθος εἰς δεδομένον λόγον διαιρεθῇ, δέδοται ἑκάτερον τῶν τμημάτων, ὥστε δοθεῖσα ἐστὶν ἡ αγ, καὶ δοθὲν τὸ α· ἐπὶ γὰρ τῆς κοινῆς τομῆς ἐστὶ θέσει δεδομένων γραμμῶν, δέδοται ἄρα καὶ τὸ γ.

Εἰς τὸ δ.

Καὶ διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον διὰ τῆς κατασκευῆς, ὡς ἡ λδ πρὸς δκ ἡ κβ πρὸς βρ· καὶ ἡ δχ πρὸς χβ· ἐν γὰρ τῷ πρὸ τούτου συνήγετο οὕτως. Ἐπεὶ ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ κδ, δχ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ρχ πρὸς χβ· διελόντι ὡς ἡ κδ πρὸς δχ, ἡ ρβ πρὸς βχ· ἐναλλὰξ, ὡς ἡ κδ, τουτέστιν ἡ κβ πρὸς βρ, ἡ δχ πρὸς χβ· πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ λχ πρὸς χδ, οὕτως συναμφότερος ἡ κβ, βχ πρὸς χβ· διελόντι καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ λδ πρὸς δκ, ἡ δχ πρὸς χβ· ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ δχ πρὸς χβ, ἡ κβ πρὸς βρ· ὡς ἄρα ἡ λδ πρὸς δκ, ἡ δχ πρὸς χβ, καὶ ἡ κβ πρὸς βρ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ρλ πρὸς ὅλην κλ, ἐστὶν ὡς ἡ κλ πρὸς λδ· ὡς γὰρ ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὡς ἄρα ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ κλ πρὸς τὸ ἀπὸ κδ· ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ ρλ πρὸς λκ, ἡ κλ πρὸς λδ.

Καὶ ὡς ἄρα ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, οὕτω τὸ ἀπὸ ρλ πρὸς τὸ ἀπὸ λχ, οὕτω τὸ ἀπὸ λχ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ· ἀνάλογον γάρ εἰσιν, ὡς ἄρα ἡ ρλ πρὸς λδ, οὕτω τὸ ἀπὸ λχ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ· κείσθω τῇ κβ ἴση ἡ βζ· ὅτι γὰρ ἐκτὸς τοῦ ρ πεσεῖται δῆλον· ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ χδ πρὸς χβ, οὕτως ἡ κβ πρὸς βρ· μείζων δὲ ἡ δχ τῆς βχ, μείζων ἄρα καὶ ἡ κβ τῆς βρ· ἐκτὸς ἄρα τοῦ ρ πίπτει τὸ ζ.

Ἐπεὶ δὲ λόγος ἐστὶ τῆς δλ πρὸς λχ δοθείς, καὶ τῆς ρλ πρὸς λχ, καὶ τῆς ρλ ἄρα πρὸς λδ λόγος ἐστὶ δοθείς. Ἐπεὶ γὰρ ὡς συναμφότερος ἡ κβχ, πρὸς βχ, τουτέστιν ἡ ζχ πρὸς χβ, οὕτως ἡ λχ πρὸς χδ· ἀναστρέψαντι ὡς ἡ χζ πρὸς ζβ, οὕτως ἡ χλ πρὸς λδ· καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἡ βζ πρὸς ζχ, ἡ λδ πρὸς λχ· δέδοται δὲ καὶ ὁ τῆς βζ πρὸς ζχ λόγος· ἐπειδὴ ἡ μὲν ζβ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς δεδομένης σφαίρας· ἡ δὲ βχ τῶν β, χ περάτων αὐτῆς δεδομένων, καθ' ὑπόθεσιν τετμημένης τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ διὰ τῆς αγ ἐπιπέδου· καὶ τῆς δβ πρὸς ὀρθὰς οὔσης τῇ αγ δέδοται· καὶ διὰ τοῦτο καὶ ὅλη ἡ χζ, καὶ ὁ τῆς χζ πρὸς ζβ· ὥστε καὶ ὁ τῆς λχ πρὸς λδ λόγος ἐστὶ δοθείς· πάλιν ἐπειδὴ δέδοται ὁ λόγος τῶν τμημάτων, καὶ ὁ τοῦ λαγ κώνου πρὸς αργ κῶνον λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ ὁ τῆς λχ πρὸς χρ· πρὸς ἀλλήλους γάρ εἰσιν ὡς τὰ ὕψη, καὶ ὅλης ἄρα τῆς ρλ πρὸς τὴν λχ λόγος ἐστὶ δοθείς· ἐπεὶ οὖν ἑκατέρας τῶν ρλ, λδ πρὸς τὴν λχ λόγος ἐστὶ δοθείς, καὶ τῆς ρλ ἄρα πρὸς λδ λόγος ἐστὶ δοθείς· τὰ γὰρ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχοντα δεδομένον, καὶ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει δεδομένον. Ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς ρλ πρὸς λχ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ρλ πρὸς λδ, καὶ ἡ λδ πρὸς λχ.

Περὶ συνθέσεως λόγων.

Ὅτι μὲν ἡ σύνθεσις τῶν λόγων λαμβάνεται τῆς λδ μέσης λαμβανομένης, ὡς κἀν τῇ στοιχειώσει ἐλαμβάνετο φανερόν· ἐπεὶ δὲ τὸ λεγόμενον ἀδιαρθρώτως, καὶ οὐχ οὕτως ὥστε τὴν ἔννοιαν ἀναπληρῶσαι λέλεκται, ὡς ἐστὶν εὑρεῖν ἐντυγχάνοντας Πάππῳ τε καὶ Θέωνι, ἐν πολλοῖς συντάγμασιν οὐκ ἀποδεικτικῆς, ἀλλ' ἐπαγωγῇ τὸ λεγόμενον παριστῶσιν, οὐδένα τόπον πρὸς βραχὺ διατρίψαντας τῷ λόγῳ, τὸ σαφέστερον παραστῆσαι· φημὶ τοίνυν, ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμῶν, ἤτοι μεγεθῶν μέσος τὶς ὅρος ληφθῇ, ὁ τῶν ἐξ ἀρχῆς ληφθέντων ἀριθμῶν λόγος, σύγκειται ἐκ τοῦ λόγου ὃν ἔχει ὁ πρῶτος πρὸς τὸν μέσον, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ μέσος πρὸς τὸν τρίτον, ὑπομνηστέον δὴ πρότερον πῶς ἐλέγετο λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι· ὡς γὰρ ἐν τῇ στοιχειώσει, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσι τινά, πηλικότητος δῆλον ὅτι λεγομένης τοῦ ἀριθμοῦ, οὗ παρώνυμος ἐστὶν ὁ διδόμενος λόγος, ὡς φασὶν ἄλλοι τε καὶ Νικόμαχος ἐν τῷ πρώτῳ τῷ περὶ Μουσικῆς, καὶ Ἥρων ἐν τῷ ὑπομνήματι τῷ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν εἰσαγωγήν. Ταυτὸν δὲ εἰπεῖν καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὸν ἑπόμενον ὅρον τοῦ λόγου, καὶ ποιοῦντος τὸν ἡγούμενον· καὶ κυριώτερον μὲν ἐπὶ τῶν πολλαπλασίων ἡ πηλικότης ἂν λαμβάνοιτο· ἐπὶ δὲ τῶν ἐπιμορίων, ἢ ἐπιμερῶν, οὐκ ἔτι τὴν πηλικότητα δυνατὸν λαμβάνεσθαι, ἀδιαιρέτου μενούσης τῆς μονάδος, ὥστ' ἐπ' ἐκείνων διαιρετέον τὴν μονάδα· εἰ καὶ μὴ κατὰ τὸ προσῆκον τῇ ἀριθμητικῇ, ἀλλὰ τῇ λογιστικῇ τυγχάνει· διαιρεῖται δὲ ἡ μονὰς κατὰ τὸ μέρος, ἢ τὰ μέρη ἀφ' ὧν ὠνόμασται ὁ λόγος, ὥστε εἶναι ὡς ἐν σαφεστέρῳ τῷ λέγειν, τοῦ μὲν ἡμιολίου λόγου πηλικότητα πρὸς τῇ μονάδι, καὶ τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος, τοῦ δὲ ἐπιτρίτου πρὸς τῇ μονάδι, τὸ τρίτον, ὥστε καθὰ καὶ ἀνωτέρω εἴρηται τὴν πηλικότητα τοῦ λόγου ἐπὶ τὸν ἑπόμενον ὅρον, πολλαπλασιαζομένην ποιεῖν τὸν ἡγούμενον· τοῦ γὰρ ἐννέα πρὸς τὰ ἓξ ἡμιολίου πηλικότης, οὗ ἡ μονὰς καὶ τὸ ἥμισυ πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τὸν ϛʹ ποιεῖ τὸν θʹ, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων δὲ τὸ αὐτὸ ἔξεστι κατανοεῖν· τούτων δὴ προσαφηνισθέντων ἐπανακτέον ἐπὶ τὸ προτεθέν· ἔστωσαν γὰρ οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ α, β· μέσος δὲ αὐτῶν εἰλήφθω τὶς ὁ γ· δεικτέον δή, ὅτι ὁ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος συνῆπται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν β· εἰλήφθω μὲν γὰρ τοῦ μὲν αγ λόγου πηλικότης ὁ δ, τοῦ δὲ γβ, ὁ ε· ὁ ἄρα ε τὸν δ πολλαπλασιάσας, τὸν ζ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ ζ πηλικότης ἐστὶ τοῦ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγου, τουτέστιν ὅτι ὁ ζ τὸν β πολλαπλασιάσας τὸν α ποιεῖ· ὁ γὰρ β τὸν ζ πολλαπλασιάσας, τὸν η ποιείτω· ἐπεὶ οὖν ὁ β τὸν μὲν ζ πολλαπλασιάσας τὸν η πεποίηκεν· τὸν δὲ ε πολλαπλασιάσας τὸν γ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ζ πρὸς τὸν ε, ὁ η πρὸς τὸν γ· πάλιν ἐπεὶ ὁ δ τὸν μὲν ε πολλαπλασιάσας τὸν ζ πεποίηκε, τὸν δὲ γ πολλαπλασιάσας τὸν α πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ε πρὸς τὸν γ, ὁ ζ πρὸς τὸν α· ἐναλλάξ, ὡς ὁ ε πρὸς τὸν ζ, ὁ γ πρὸς τὸν α· καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ὁ ζ πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ α πρὸς τὸν γ· ἀλλ' ὡς ὁ ζ πρὸς τὸν ε, ἐδείχθη πρὸς τὸν γ· καὶ ὡς ἄρα η πρὸς τὸν γ, ὁ α πρὸς τὸν γ· ἴσος ἄρα ὁ α τῷ η· ἀλλ' ὁ β τὸν ζ πολλαπλασιάσας, τὸν η πεποίηκε· καὶ ὁ β ἄρα τὸν ζ πολλαπλασιάσας τὸν α ποιεῖ· ὁ ζ ἄρα πηλικότης ἐστὶ τοῦ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγου· καὶ ἔστιν ὁ ζ τοῦ δ ἐπὶ τὸν ε πολλαπλασιασθέντος, τουτέστι τῆς πηλικότητος τοῦ αγ λόγου ἐπὶ τὴν πηλικότητα τοῦ γβ λόγου· ὁ ἄρα τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος, σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν β, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἵνα δὲ ϗ ἐπὶ ὑποδείγματος φανερὸν γένηται τὸ εἰρημένον, παρεμπιπτέτω τοῦ ιβ, ϗ τοῦ β, μέσος τὶς ἀριθμὸς ὁ δ. λέγω ὁ τοῦ ιβ πρὸς τὸν β λόγος, τουτέστιν ὁ ἑξαπλάσιος, σύγκειται ἔκ τε τοῦ τριπλασίου τοῦ ιβ πρὸς τὰ δ, ϗ τοῦ διπλασίου τοῦ δ πρὸς τὰ β· ἐὰν γὰρ τὰς πηλικότητας τῶν λόγων πολλαπλασιάσωμεν ἐπ' ἀλλήλας, τουτέστι τὸν γ ἐπὶ τὸν β, γίνεται ὁ ς πηλικότης ὢν τοῦ ιβ πρὸς τὰ β λόγου· ϗ ἔστιν ἑξαπλάσιος, ὅνπερ ϗ προέκειτο ὑποδεῖξαι· εἰ δὲ ϗ ὁ μέσος παρεμπίπτων μὴ ὑπάρχῃ τοῦ μὲν μείζονος ἐλάττων, τοῦ δὲ ἐλάττονος μείζων, ἀλλ' ἢ τὸ ἀνάπαλιν, ἢ ἀμφοτέρων μείζων ἢ ἀμφοτέρων ἐλάττων. Καὶ οὕτως ἡ σύνθεσις, ἡ προειρημένη ἀκολουθήσει, τοῦ θ ϗ τοῦ ς μέσος τὶς παρεμπιπτέτω ἀμφοτέρων μείζων ὁ ιβ· λέγω ὅτι ἔκ τε τοῦ ὑπ' ἐπιτρίτου τοῦ θ πρὸς τὸν ιβ λόγου, ϗ τοῦ διπλασίου τοῦ ιβ πρὸς τὸν ς, σύγκειται ὁ ἡμιόλιος τοῦ θ πρὸς τὰ ς· ἡ γὰρ πηλικότης τοῦ θ πρὸς τὸν ιβ λόγου ἐστὶ τρία τέταρτα, τουτέστιν ἥμισυ ϗ τέταρτον. Ἡ δὲ πηλικότης τοῦ ιβ πρὸς τὸν ς ἐστὶν ὁ β· ἐὰν οὖν πολλαπλασιάσωμεν τὸ β ἐπὶ τὸν ἥμισυ ϗ τέταρτον, γίνεται μονὰς α ϗ ἥμισυ, ἥτις πηλικότης ἐστὶ τοῦ ἡμιολίου λόγου, ὃν ἔχει ϗ ὁ θ πρὸς τὸν ς· ὁμοίως δὲ κἂν τοῦ θ ϗ τοῦ ς μέσος ἐμπέσῃ ὁ δ, ἐκ τοῦ θ πρὸς δ διπλασιασυεπιτετάρτου, ϗ τοῦ δ πρὸς ς ὑφημιολίου, σύγκειται ὁ ἡμιόλιος λόγος. Πάλιν γὰρ τὴν πηλικότητα τοῦ διπλασιεπιτετάρτου, τὰ βδ ἐπὶ τὴν πηλικότητα τοῦ ὑφημιολίου, τουτέστι τὰ δύο τρίτα, πολλαπλασιάσαντες ἕξομεν τὸ ἓν ἥμισυ, πηλικότητα τοῦ ἡμιολίου ὡς εἴρηται λόγου, ϗ ἐπὶ πάντων ὁμοίως ὁ αὐτὸς ἁρμόσει λόγος· συμφανὲς δὲ ἐκ τῶν εἰρημένων· ὡς ἐὰν δύο δοθέντων ἀριθμῶν, ἤτοι μεγέθεων, κἂν μὴ εἷς μέσος, πλείους δὲ παρεμπίπτωσιν ὅροι, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ πάντων τῶν λόγων, ὧν ἔχουσιν οἱ κατὰ τὸ ἑξῆς κείμενοι, ἀρχόμενοι ἀπὸ πρώτου, ϗ λήγοντες εἰς τὸν ἔσχατον τῇ κατὰ τοὺς ἐχομένους τάξει. Δύο γὰρ ὅρων τῶν α, β παρεμπιπτέτωσαν πλείους ἑνὸς οἱ γ, δ· λέγω ὅτι ὁ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος, σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν γ, ϗ ὁ γ πρὸς τὸν δ, ϗ ὁ δ πρὸς τὸν β· ἐπεὶ γὰρ ὁ τοῦ α πρὸς τὸν β σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν δ, ϗ ὁ δ πρὸς τὸν β, ὡς ἀνωτέρω εἴρηται· ὁ δὲ τοῦ α πρὸς τὸν δ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν γ, ϗ ὁ γ πρὸς τὸν δ· ὁ ἄρα τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος, συμπίπτει ἔκ τε τοῦ ὃν ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ δ πρὸς τὸν β, ὁμοίως δὲ ϗ ἐπὶ τῶν λοιπῶν δειχθήσεται.

Ἔτι ἐν τῷ ῥητῷ φησιν, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ρλ πρὸς λδ, ἐδείχθη τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ· ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ λκ πρὸς τὸ ἀπὸ δλ· ὡς δὲ τὸ ἀπὸ κλ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ, οὕτω τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. Ἐδείχθη γὰρ, ὡς ἡ κλ πρὸς λδ, ἡ βδ πρὸς δχ, διὰ τοῦ συνθέντι· ὡς ἄρα ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ· πεποιήσθω δὲ ὡς ἡ ρλ πρὸς λχ, ἡ βζ πρὸς ζθ, τὸ θ σημεῖον ὅπως ποτὲ μὲν ἐὰν τεθῇ ὅσον πρὸς τὴν ἀκολουθίαν τῆς ἀποδείξεως, κατ' οὐδὲν ἐμποδὼν γίνεται τῷ λόγῳ· ὅτι δὲ καθὰ ἐν τῇ καταγραφῇ κεῖται ἀεὶ μεταξὺ τῶν β, ρ πίπτει οὕτω διάδηλον· ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ λκ πρὸς δκ, τουτέστι πρὸς κβ, οὕτως ἡ κρ πρὸς ρβ· ϗ ὡς ἄρα ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα. Ὡς ἡ λρ πρὸς ρκ, ἡ κρ πρὸς ρβ· μείζονα δὲ λόγον ἔχει ἡ λρ πρὸς ρχ, ὅπερ ἡ λρ πρὸς ρκ. Καὶ ἡ λρ ἄρα πρὸς ρχ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κρ πρὸς βρ, τουτέστιν ἡ ζβ πρὸς ζρ· ἐὰν ἄρα ποιήσωμεν ὡς ρλ πρὸς λχ, οὕτω τὴν βζ πρὸς ἄλλην τινὰ, ἔσται πρὸς μείζονα τῆς ζρ· φανερὸν δὲ αὐτόθεν ὅτι ἡ ζθ τῆς θβ μείζων ἐστίν. Ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ὡς ἡ λδ πρὸς δκ, ἡ δχ πρὸς χβ, ϗ ἡ κβ πρὸς βρ· μείζων δὲ ἡ δχ τῆς χβ, μείζων ἄρα ϗ ἡ λδ τῆς δκ, ϗ ἡ κβ τῆς βρ. Ὥστε ϗ ἡ λδ τῆς βρ, ϗ ὅλη ἄρα ἡ λχ τῆς χρ μείζων ἐστίν, ὥστε ϗ ἡ θζ τῆς θβ· λοιπὸν ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ βδ, τουτέστι τὸ δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, οὕτω ἡ ζχ πρὸς ζθ· ἐπεὶ γὰρ τῷ τῆς βζ πρὸς θζ λόγῳ ὁ αὐτὸς ἐδείχθη ὁ συγκείμενος ἐκ τοῦ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, ϗ τῆς βζ πρὸς ζχ· ὁ αὐτὸς δὲ τῷ τῆς βζ πρὸς ζθ ἐστὶ, ϗ ὁ συγκείμενος ἐκ τοῦ τῆς βζ πρὸς ζχ, ϗ τοῦ τῆς ζχ πρὸς ζθ λόγου. Καὶ ὁ συγκείμενος ἄρα ἐκ τοῦ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, ϗ τοῦ τῆς βζ πρὸς ζχ λόγος ὁ αὐτὸς ἐστὶ τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ τῆς βζ πρὸς ζχ, καὶ τοῦ τῆς χζ πρὸς ζθ. Ἐὰν οὖν τὸν ἐν ἀμφοτέραις ταῖς λόγοις κοινὸν ἀφέλωμεν τὸν τῆς βζ πρὸς ζχ, λοιπὸν ὁ τοῦ ἀπὸ βδ πρὸς ἀπὸ δχ λόγος, ὁ αὐτὸς ἐστὶ τῷ τῆς χζ πρὸς ζθ· ϗ δὴ δοθεῖσαν τὴν δζ τέμνειν δὴ κατὰ τὸ χ, ϗ ποιεῖν ὡς τὴν χζ πρὸς δοθεῖσαν, τουτέστι τὴν ζθ, οὕτω τὸ δοθὲν, τουτέστι τὸ ἀπὸ βδ, πρὸς τὸ ἀπὸ δχ· τοῦτο δὲ οὕτως ἁπλῶς μὲν λεγόμενον ἔχει διορισμόν. Προστιθεμένων δὲ τῶν προβλημάτων τῶν ἐνθάδε ὑπαρχόντων, τουτέστι τοῦ τε διπλασίαν εἶναι τὴν δβ τῆς βζ, ϗ τοῦ μείζονα τὴν βζ τῆς ζθ· ὡς κατὰ τὴν ἀνάλυσιν οὐκ ἔχει διορισμὸν, ϗ ἔσται πρόβλημα τοιοῦτον. Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν δβ, βζ, ϗ διπλασίας οὔσης τῆς δβ τῆς βζ, ϗ σημείου ἐπὶ τῆς βζ τοῦ θ, τεμεῖν τὴν δβ κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὸ ἀπὸ δβ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, τὴν χζ πρὸς ζθ· ἑκατέρα δὲ ταῦτα ἐπὶ τέλει ἀναλυθήσεται, καὶ συντεθήσεται· ἐπὶ τέλει μὲν τὸ προρηθὲν ἐπηγγείλατο δεῖξαι, ἐν οὐδενὶ δὲ τῶν ἀντιγράφων εὑρεῖν· ἔνεστι δὲ τὸ ἐπάγγελμα, ὅθεν καὶ Διονυσόδωρον μὲν εὑρίσκομεν μὴ τῶν αὐτῶν ἐπιτυχόντα, ἀδυνατήσαντα δὲ ἐπιβάλλειν τῷ καταληφθέντι λήμματι, ἐφ᾽ ἑκατέραν ὁδὸν τοῦ ὅλου προβλήματος ἐλθεῖν, ἥν τινα ἑξῆς γράψομεν. Διοκλῆς μέντοι καὶ αὐτὸ ἐν τῷ περὶ Πυρίων αὐτῷ συγγεγραμμένῳ βιβλίῳ, ἐπηγγέλθαι νομίζων τὸν Ἀρχιμήδη, μή ποτε πεποιηκέναι δὲ τὸ ἐπάγγελμα, αὐτὸς ἀναπληροῦν ἐπεχείρησε· καὶ τὸ ἐπιχείρημα ἑξῆς γράψομεν· ἔστι γὰρ καὶ αὐτὸ οὐδένα μὲν ἔχον πρὸς τὰ προλελημμένα λόγον· ὁμοίως δὲ τῷ Διονυσοδώρῳ δι᾽ ἑτέρας ἀποδείξεως κατασκευάζων τὸ πρόβλημα, ἔν τινι μέντοι παλαιῷ βιβλίῳ. Οὐδὲ γὰρ τῆς εἰς πολλὰ ζητήσεως ἀπέστημεν, ἐνετύχαμεν θεωρήμασι γεγραμμένοις, οὐκ ὀλίγην τὴν ἐκ τῶν πταισμάτων ἔχουσιν ἀσάφειαν περί τε τὰς καταγραφὰς πολυτρόπως ἡμαρτημένοις· τῶν μέντοι ζητουμένων εἶχον τὴν ὑπόστασιν, ἐν μέρει δὲ τὴν Ἀρχιμήδει φίλην Δωρίδα γλῶσσαν ἀπέσωζον, καὶ τοῖς συνήθεσι τῷ ἀρχαίῳ τῶν πραγμάτων ὀνόμασιν ἐγέγραπτο· τῆς μὲν παραβολῆς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς ὀνομαζομένης, τῆς δ᾽ ὑπερβολῆς ἀμβλυγωνίου κώνου τομῆς· ὡς ἐξ αὐτῶν διανοεῖσθαι, μὴ ἄρα καὶ αὐτὸς εἴη τὰ ἐν τῷ τέλει ἐπηγγελμένα γράφεσθαι· ὅθεν σπουδαιότερον ἐντυγχάνοντες, αὐτὸ μὲν τὸ ῥητὸν ὡς γέγραπται διὰ πλῆθος, ὡς εἴρηται τῶν πταισμάτων δυσχερὲς εὑρόντες, τὰς ἐννοίας κατὰ μικρὸν ἀποσυλήσαντες κοινότερα καὶ σαφέστερα κατὰ τὸ δυνατὸν λέξει γράφομεν. Καθόλου δὲ πρῶτον τὸ θεώρημα γραφήσεται, ἵνα τὸ λεγόμενον ὑπ᾽ αὐτοῦ σαφηνισθῇ περὶ τῶν διορισμῶν· εἶτα καὶ τοῖς ἀναλελυμένοις ἐν τῷ προβλήματι προσαρμοσθήσεται.

Εὐθείας δοθείσης τῆς αβ, καὶ ἑτέρας τῆς αγ, καὶ χωρίου τοῦ δ, προκείσθω λαβεῖν ἐπὶ τῆς αβ σημεῖον ὡς τὸ ε· ὥστε εἶναι ὡς τὴν αε πρὸς αγ, οὕτω τὸ δ χωρίον πρὸς τὸ ἀπὸ εβ· γεγονέτω, καὶ κείσθω ἡ αγ πρὸς ὀρθὰς τῇ αβ· καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γε διήχθω ἐπὶ τὸ ζ· καὶ ἤχθω διὰ τοῦ γ τῇ αβ παράλληλος ἡ γη, διὰ δὲ τοῦ β τῇ αγ παράλληλος ἡ ζηβ, συμπίπτουσα ἑκατέρᾳ τῶν γε, γη· καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ηθ παραλληλόγραμμον, καὶ διὰ τοῦ ε ὁποτέρᾳ τῶν γθ, ηζ παράλληλος ἡ κελ· καὶ τῷ δ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ γημ· ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτω τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ εβ· ὡς δὲ ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως ἡ γη πρὸς ηζ· ὡς δὲ ἡ γη πρὸς ηζ, οὕτω τὸ ἀπὸ γη πρὸς τὸ ὑπὸ γηζ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ γη πρὸς τὸ ὑπὸ γηζ, οὕτω τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ εβ, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ κζ· καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ἀπὸ γη πρὸς τὸ δ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ γημ, οὕτω τὸ ὑπὸ γηζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ· ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ γη πρὸς τὸ ὑπὸ γημ, οὕτως ἡ γη πρὸς ημ· καὶ ὡς ἄρα ἡ γη πρὸς ημ, οὕτω τὸ ὑπὸ γηζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ· ἀλλ᾽ ὡς ἡ γη πρὸς ημ, τῆς ηζ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτω τὸ ὑπὸ γηζ πρὸς τὸ ὑπὸ μηζ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ γηζ πρὸς τὸ ὑπὸ μηζ, οὕτω τὸ ὑπὸ γηζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ μηζ τῷ ἀπὸ ζκ· ἐὰν ἄρα περὶ ἄξονα τὴν ζη, γραφῇ διὰ τοῦ η παραβολή· ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν ημ, ἥξει διὰ τοῦ κ· καὶ ἔσται θέσει δεδομένη, διὰ τὸ δεδομένην εἶναι τὴν ημ τῷ μεγέθει, περιέχουσαν μετὰ τῆς ηγ δεδομένης δοθὲν τὸ δ· τὸ ἄρα κ ἅπτεται θέσει δεδομένης παραβολῆς· γεγράφθω οὖν, ὡς εἴρηται καὶ ἔστω ὡς ἡ ηκ· πάλιν ἐπειδὴ τὸ θλ χωρίον ἴσον ἐστὶ τῷ γβ, τουτέστι τὸ ὑπὸ θκλ τῷ ὑπὸ αβη· ἐὰν διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς θγ, γη γραφῇ, ὑπερβολὴ ἥξει διὰ τοῦ κ, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ η θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου Κωνικῶν στοιχείων· καὶ ἔσται θέσει δεδομένη, διὰ τὸ καὶ ἑτέραν τῶν θγ, γη, ἔτι μὴν καὶ τὸ β τῇ θέσει δεδόσθαι. Γεγράφθω ὡς εἴρηται, καὶ ἔστω ὡς ἡ κβ· τὸ ἄρα κ ἅπτεται θέσει δεδομένης ὑπερβολῆς· ἥπτετο δὲ καὶ θέσει δεδομένης παραβολῆς. Δέδοται ἄρα τὸ κ, καὶ ἔστιν ἀπ᾽ αὐτοῦ κάθετος ἡ κε· ἐπὶ θέσει δεδομένην τὴν αβ· δέδοται ἄρα τὸ ε· ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ εα πρὸς τὴν δοθεῖσαν τὴν αγ, οὕτω δοθὲν τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ εβ· δύο ἄρα στερεῶν ὧν βάσεις τὸ ἀπὸ εβ, καὶ τὸ δ· ὕψη δὲ αἱ εα, αγ, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ὥστε ἴσα ἐστὶ τὰ στερεά· τὸ ἄρα ἀπὸ εβ ἐπὶ τὴν εα, ἴσον ἐστὶ τῷ δοθέντι τῷ δ, ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν τὴν γα· ἀλλὰ τὸ ἀπὸ βε ἐπὶ τὴν εα μέγιστον ἐστὶ πάντων τῶν ὁμοίως λαμβανομένων ἐπὶ τῆς βα· ὅταν ἡ διπλασία ἡ βε τῆς εα, ὡς δειχθήσεται· δεῖ ἄρα τὸ δοθὲν ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς βε ἐπὶ τὴν εα.

Συντεθήσεται δὲ οὕτως. Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ αβ, ἄλλη δέ τις δοθεῖσα ἡ αγ, τὸ δὲ δοθὲν χωρίον τὸ δ. καὶ δέον ἔστω τεμεῖν τὴν αβ, ὥστε εἶναι ὡς τὸ ἓν τμῆμα πρὸς τὴν δοθεῖσαν τὴν αγ, οὕτω τὸ δοθὲν τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος· εἰλήφθω τῆς αβ τρίτον μέρος ἡ αε, τὸ ἄρα δ ἐπὶ τὴν αγ, ἤτοι μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς βε ἐπὶ τὴν εα, ἢ ἴσον, ἢ οὖν ἔλασσον· εἰ μὲν οὖν μεῖζόν ἐστιν, οὐ συντεθήσεται ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει δέδεικται· εἰ δὲ ἴσον ἐστὶ τὸ ε σημεῖον ποιήσει τὸ πρόβλημα. Ἴσων γὰρ ὄντων τῶν στερεῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι· καὶ ἔστιν ὡς ἡ εα πρὸς αγ· οὕτω τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ βε· εἰ δὲ ἔλασσον ἐστὶ τὸ ὁ ἐπὶ τὴν αγ, τοῦ ἀπὸ βε ἐπὶ τὴν εα, συντεθήσεται οὕτω. κείσθω ἡ αγ πρὸς ὀρθὰς τῇ αβ, καὶ διὰ τοῦ γ τῇ αβ παράλληλος ἤχθω ἡ γζ· διὰ δὲ τοῦ β τῇ αγ παράλληλος ἤχθω ἡ βζ, καὶ συμπιπτέτω τῇ γε ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ η· καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ζθ παραλληλόγραμμον, καὶ διὰ τοῦ ε τῇ ζη παράλληλος ἤχθω ἡ κελ· ἐπεὶ οὖν τὸ δ ἐπὶ τὴν αγ, ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ βε ἐπὶ τὴν εα· ἐστὶν ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτω τὸ δ πρὸς ἐλασσόν τι τοῦ ἀπὸ τῆς βε, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς ηκ. Ἔστω οὖν ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτω τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ ημ· καὶ τῷ δ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ γζν· ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτω τὸ δ, τουτέστι τὸ ὑπὸ γζν πρὸς τὸ ἀπὸ ημ· ἀλλ' ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτω ἡ γζ πρὸς ζη. Ὡς δὲ ἡ γζ πρὸς ζη, οὕτω τὸ ἀπὸ γζ πρὸς τὸ ὑπὸ γζη· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ γζ πρὸς τὸ ὑπὸ γζη, οὕτω τὸ ὑπὸ γζν πρὸς τὸ ἀπὸ ημ· καὶ ἐναλλὰξ, ὡς τὸ ἀπὸ γζ πρὸς τὸ ὑπὸ γζν, οὕτω τὸ ὑπὸ γζη πρὸς τὸ ἀπὸ ημ· ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ γζ πρὸς τὸ ὑπὸ γζν, οὕτως ἡ γζ πρὸς ζν· ὡς δὲ ἡ γζ πρὸς ζν τῆς ζη κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης· οὕτω τὸ ὑπὸ γζη πρὸς τὸ ὑπὸ νζη. Καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ γζη πρὸς τὸ ὑπὸ νζη, οὕτω τὸ ὑπὸ γζη πρὸς τὸ ἀπὸ ημ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ ημ τῷ ὑπὸ ζην· ἐὰν ἄρα διὰ τοῦ ζ περὶ ἄξονα τὴν ζη γράψωμεν παραβολὴν, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν ζν, ἥξει διὰ τοῦ μ· γεγράφθω καὶ ἔστω ἡ μξζ· καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ θλ τῷ αζ, τουτέστι τὸ ὑπὸ θκλ τῷ ὑπὸ αβζ· ἐὰν διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς θγ, γζ γράψωμεν ὑπερβολὴν· ἥξει διὰ τοῦ κ, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ η. θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου Κωνικῶν στοιχείων· γεγράφθω καὶ ἔστω ὡς ἡ βκ, τέμνουσα τὴν παραβολὴν κατὰ τὸ ξ· καὶ ἀπὸ τοῦ ξ ἐπὶ τὴν αβ κάθετος ἤχθω ἡ ξοπ. καὶ διὰ τοῦ ξ τῇ αβ παράλληλος ἤχθω ἡ ρξσ. Ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστι ἡ βκζ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ θγ, γζ· καὶ παράλληλοι ἠγμέναι εἰσὶν αἱ ρξπ, ταῖς αβζ. ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ρξπ τῷ ὑπὸ αβζ, ὥστε καὶ τὸ ρο τῷ οζ· ἐὰν ἄρα ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ τὸ σ ἐπιζευχθῇ, ἥξει διὰ τοῦ ο· ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ γοσ· ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ οα πρὸς αγ, οὕτως ἡ σβ πρὸς βσ, τουτέστιν ἡ γζ πρὸς ζσ· ὡς δὲ ἡ γζ πρὸς ζσ, τῆς ζν κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτω τὸ ὑπὸ γζν πρὸς τὸ ὑπὸ σζν· καὶ ὡς ἄρα ἡ οα πρὸς αγ, οὕτω τὸ ὑπὸ γζν πρὸς τὸ ὑπὸ σζν. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ γζν, τὸ δ χωρίον· τῷ δὲ ὑπὸ σζν, ἴσον τὸ ἀπὸ σξ, τουτέστι τὸ ἀπὸ βο, διὰ τὴν παραβολήν· ὡς ἄρα ἡ οα πρὸς αγ, οὕτω τὸ δ χωρίον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βο· εἴληπται ἄρα τὸ ο σημεῖον, ποιοῦν τὸ πρόβλημα.

Ὅτι διπλασίας οὔσης τῆς βε τῆς εα, τὸ ἀπὸ τῆς βε ἐπὶ τὴν εα μέγιστον ἐστὶ πάντων τῶν ὁμοίως λαμβανομένων ἐπὶ τῆς βα, δειχθήσεται οὕτως· ἔστω γὰρ ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει πάλιν δοθεῖσα εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς τῇ αβ, ἡ αγ· καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γε ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ διὰ τοῦ β παραλλήλῳ, ἠγμένῃ τῇ αγ κατὰ τὸ ζ· καὶ διὰ τῶν γζ παράλληλοι τῇ αβ ἤχθωσαν αἱ θζ, γη· καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ γα ἐπὶ τὸ θ· καὶ ταύτῃ παράλληλος διὰ τοῦ ε ἤχθω ἡ κελ· καὶ γεγονέτω ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτω τὸ ὑπὸ γημ πρὸς τὸ ἀπὸ εβ· τὸ ἄρα ἀπὸ βε ἐπὶ τὴν εα, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γημ ἐπὶ τὴν αγ, διὰ τὸ δύο στερεῶν ἀντιπεπονθέναι τὰς βάσεις τοῖς ὕψεσι. λέγω οὖν, ὅτι τὸ ὑπὸ γημ ἐπὶ τὴν αγ, μέγιστον ἐστὶ πάντων ὁμοίου ἐπὶ τὴν βο λαμβανομένου. Γεγράφθω γὰρ διὰ τοῦ η περὶ ἄξονα τὴν ζη παραβολή· ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν ημ· ἥξει δὴ διὰ τοῦ κ, ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει δέδεικται· καὶ συμπεσεῖται ἐκβαλλομένῃ τῇ θγ παραλλήλῳ οὔσῃ τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς, διὰ τὸ ἕβδομον καὶ εἰκοστὸν θεώρημα τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου Κωνικῶν στοιχείων· ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω κατὰ τὸ ν· καὶ διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς νγη, γεγράφθω ὑπερβολή· ἥξει ἄρα διὰ τοῦ κ· ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει εἴρηται· ἐρχέσθω οὖν ὡς ἡ βκ, καὶ ἐκβληθείσῃ τῇ ζη ἴση κείσθω ἡ νξ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ξκ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ο· φανερὸν ἄρα ὅτι ἐφάπτεται τῆς παραβολῆς διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ τετάρτου καὶ τριακοστοῦ θεωρήματος τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου Κωνικῶν στοιχείων. ἐπεὶ οὖν διπλῆ ἐστὶν ἡ βε τῆς εα, οὕτω γὰρ ὑπόκειται, τουτέστιν ἡ ζκ τῆς κθ· καὶ ἴσον ὅμοιον τὸ οκθ τρίγωνον τῷ ξζκ τριγώνῳ, διπλασία ἐστὶ καὶ ἡ ξκ τῆς κο, ἔστι δὲ καὶ ἡ ξκ τῆς κπ διπλῆ, διὰ τὸ καὶ τὴν ξζ τῆς ξη, καὶ παράλληλον εἶναι τὴν πη τῇ κζ· ἴση ἄρα ἡ οκ τῇ κπ, ἡ ἄρα οκπ ψαύουσα τῆς παραβολῆς, καὶ μεταξὺ οὖσα τῶν ἀσυμπτώτων δίχα τέμνεται· ἐφάπτεται ἄρα τῆς ὑπερβολῆς, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ τρίτου θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου Κωνικῶν στοιχείων· ἐφήπτετο δὲ καὶ τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ αὐτὸ κ. Ἡ ἄρα παραβολὴ τῆς ὑπερβολῆς ἐφάπτεται κατὰ τὸ κ· νενοήσθω οὖν καὶ ἡ ὑπερβολὴ προσεκβαλλομένη ὡς ἐπὶ τὸ ρ· καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς αβ τυχὸν σημεῖον τὸ σ, καὶ διὰ τοῦ σ τῇ κλ παράλληλος ἤχθω ἡ συ· καὶ συμβαλλέτω τῇ ὑπερβολῇ κατὰ τὸ τ, καὶ διὰ τοῦ τ τῇ γη παράλληλος ἤχθω ἡ φτχ. Ἐπεὶ οὖν διὰ τὴν ὑπερβολὴν καὶ τὰς ἀσυμπτώτους, ἴσον ἐστὶ τὸ φυ τῷ γβ, κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ γσ· ἴσον γὰρ τὸ φσ τῷ συ, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ τὸ χ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἥξει διὰ τοῦ σ· ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ἡ γσχ· καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ψχ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ χημ διὰ τὴν παραβολὴν, τὸ ἀπὸ τχ ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ χημ· γεγονέτω οὖν τῷ ἀπὸ τχ ἴσον τὸ ὑπὸ χηω· ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ σα πρὸς αγ, οὕτως ἡ γη πρὸς ηχ· ἀλλ᾽ ὡς ἡ γη πρὸς ηχ τῆς ηω κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γηω πρὸς τὸ ὑπὸ χηω· καὶ πρὸς τὸ ἴσον αὐτῷ, τὸ ἀπὸ χτ, τουτέστι τὸ ἀπὸ βσ ἐπὶ τὴν σα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γηω ἐπὶ τὴν γα· τὸ δὲ ὑπὸ γηω, ἐπὶ τὴν γα ἔλασσον ἐστὶ, τοῦ ὑπὸ γημ ἐπὶ τὴν γα· τὸ ἄρα ἀπὸ βσ ἐπὶ τὴν σα ἔλαττον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ βε ἐπὶ τὴν εα· ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ πάντων τῶν σημείων τῶν μεταξὺ λαμβανομένων τῶν ε, β· ἀλλὰ δὴ εἰλήφθω μεταξὺ τῶν ε, α σημεῖον τὸ ϛ· λέγω ὅτι καὶ οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς βε ἐπὶ τὴν εα μεῖζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ βϛ ἐπὶ τὴν ϛα. Τῶν γὰρ αὐτῶν κατεσκευασμένων ἤχθω διὰ τοῦ ϛ τῇ κλ παράλληλος ἡ υϛρ· καὶ συμβαλλέτω τῇ ὑπερβολῇ κατὰ τὸ ρ. συμβαλεῖ γὰρ αὐτῇ διὰ τὸ παράλληλος εἶναι τῇ ἀσυμπτώτῳ, καὶ διὰ τοῦ ρ παράλληλος ἀχθεῖσα τῇ αβ ἡ ρψ· συμβαλλέτω τῇ ηζ ἐκβαλλομένῃ κατὰ τὸ ψ· καὶ ἐπεὶ πάλιν διὰ τὴν ὑπερβολὴν ἴσον ἐστὶ τὸ γυ καὶ τῷ αψ, ἡ ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ τὸ ψ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, ἥξει διὰ τοῦ ϛ· ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς γϛψ· καὶ ἐπεὶ πάλιν διὰ τὴν παραβολὴν ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ αψ τῷ ἀπὸ ψημ, τὸ ἄρα ἀπὸ ρψ ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ ψημ· γεγονέτω τὸ ἀπὸ ρψ ἴσον τῷ ὑπὸ ψηω· ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ϛα πρὸς αγ, οὕτως ἡ γη πρὸς ηψ· ἀλλ᾽ ὡς ἡ γη πρὸς ηψ τῆς ηω κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτω τὸ ὑπὸ γηω πρὸς τὸ ὑπὸ ψηω· τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ ρψ, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ βϛ· τὸ ἄρα ἀπὸ βϛ ἐπὶ τὴν ϛα, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γηω ἐπὶ τὴν γα· καὶ μεῖζον τὸ ὑπὸ γημ τοῦ ὑπὸ γηω· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ βε ἐπὶ τὴν εα, τοῦ ἀπὸ βϛ ἐπὶ τὴν ϛα· ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ πάντων τῶν σημείων τῶν μεταξὺ τῶν ε, α λαμβανομένων· ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ πάντων τῶν μεταξὺ τῶν ε, β λαμβανομένων. Πάντων ἄρα τῶν ἐπὶ τῆς αβ ὁμοίως λαμβανομένων, μέγιστον ἐστὶν τὸ ἀπὸ τῆς βε ἐπὶ τὴν εα, ὅταν ἡ διπλασία ᾖ ἡ βε τῆς εα. Ἐπιστῆσαι δὲ χρὴ καὶ τοῖς ἀκολουθοῦσι κατὰ τὴν εἰρημένην καταγραφήν· ἐπεὶ γὰρ δέδεικται τὸ ἀπὸ βσ ἐπὶ τὴν σα, καὶ τὸ ἀπὸ βϛ ἐπὶ τὴν ϛα ἔλασσον τοῦ ἀπὸ βε ἐπὶ τὴν εα· δυνατόν ἐστὶ καὶ τοῦ δοθέντος χωρίου ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἐλάσσονος ὄντος τοῦ ἀπὸ τῆς βε ἐπὶ τὴν εα κατὰ δύο σημεῖα τὴν αβ τεμνομένην ποιεῖν τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα. τοῦτο δὲ γίνεται, εἰ νοήσαιμεν περὶ διάμετρον τὴν χη γραφομένην παραβολήν· ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν ηω. Ἡ γὰρ τοιαύτη παραβολὴ, πάντως ἔρχεται διὰ τοῦ τ· καὶ ἐπειδὴ ἀνάγκη αὐτὴν συμπίπτειν τῇ γυ παραλλήλῳ οὔσῃ τῇ διαμέτρῳ, δῆλον ὅτι τέμνει τὴν ὑπερβολὴν, καὶ κατ᾽ ἄλλο σημεῖον ἀνωτέρω τοῦ κ, ὡς ἐνταῦθα κατὰ τὸ ρ. Καὶ ἀπὸ τοῦ ρ ἐπὶ τὴν αβ κάθετος ἀγομένη, ὡς ἐνταῦθα ἡ ρϛ τέμνει τὴν αβ κατὰ τὸ ϛ· ὥστε τὸ ϛ σημεῖον ποιεῖν τὸ πρόβλημα, καὶ ἴσον γίνεσθαι τὸ ἀπὸ βσ ἐπὶ τὴν σα, τῷ ἀπὸ βϛ ἐπὶ τὴν ϛα, ὡς ἐστὶ διὰ τῶν προειρημένων ἀποδείξεων ἐμφανές. Ὥστε δυνατοῦ ὄντος ἐπὶ τῆς βα δύο σημεῖα λαμβάνειν, ποιοῦντα τὸ ζητούμενον, ἔξεστιν ὁπότερον τις βούλοιτο λαμβάνειν, ἢ τὸ μεταξὺ τῶν ε, β· ἢ τὸ μεταξὺ τῶν ε, α. Εἰ μὲν γὰρ τὸ μεταξὺ τῶν ε, β ὡς εἴρηται τῆς διὰ τῶν η, τ σημείων γραφομένης παραβολῆς κατὰ δύο σημεῖα τεμνούσης τὴν ὑπερβολὴν, τὸ μὲν ἐγγύτερον τοῦ η, τουτέστι τοῦ ἄξονος τῆς παραβολῆς εὑρήσει τὸ μεταξὺ τῶν ε, β, ὡς ἐνταῦθα τὸ τ εὑρίσκει τὸ σ· τὸ δὲ ἀποτέρω τὸ μεταξὺ τῶν ε, α ὡς ἐνταῦθα τὸ ρ εὑρίσκει τὸ ϛ.

Καθόλου μὲν οὖν οὕτως ἀναλέλυται καὶ συντεθεῖται τὸ πρόβλημα· ἵνα δὲ καὶ τοῖς Ἀρχιμηδείοις ῥήμασιν ἐφαρμοσθῇ, νενοήσθω ὡς ἐν αὐτῇ τῇ τοῦ ῥητοῦ καταγραφῇ, διάμετρος μὲν τῆς σφαίρας ἡ δβ· ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ βζ, καὶ ἡ δεδομένη ἡ ζθ· κατηντήσαμεν ἄρα φησὶν εἰς τὸ τὴν δζ τεμεῖν κατὰ τὸ χ· ὥστε εἶναι ὡς τὴν χζ πρὸς τὴν δοθεῖσαν, οὕτω τὸ δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δχ· τοῦτο δὲ ἁπλῶς μὲν λεγόμενον ἔχει διορισμόν· εἰ γὰρ τὸ δοθὲν ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν μεῖζον ἐτύγχανε τοῦ ἀπὸ τῆς δβ ἐπὶ τὴν βζ, ἀδύνατον ἦν τὸ πρόβλημα ὡς δέδεικται· εἰ δὲ ἴσον τὸ β σημεῖον ἐποίει τὸ πρόβλημα, καὶ οὕτω δὲ οὐδὲν ἦν πρὸς τὴν ἐξ ἀρχῆς Ἀρχιμήδους πρόθεσιν. Ἡ γὰρ σφαῖρα οὐκ ἐτέμνετο εἰς τὸν δοθέντα λόγον· ἁπλῶς γὰρ λεγόμενον εἶχον πρὸς διορισμόν· προτιθεμένου δὲ τῶν προβλημάτων τῶν ἐνθάδε ὑπαρχόντων· τουτέστι τοῦτε διπλασίαν εἶναι τὴν δβ τῆς ζβ, καὶ τοῦ μείζονα εἶναι τὴν βζ τῆς ζθ, οὐκ ἔχει διορισμόν· τὸ γὰρ ἀπὸ δβ τὸ δοθὲν ἐπὶ τὴν ζθ τὴν δοθεῖσαν ἔλαττον ἐστὶ, τοῦ ἀπὸ τῆς δβ ἐπὶ τὴν βζ· διὰ τὸ τὴν βζ τῆς ζθ μείζονα εἶναι, ὅπερ ὑπάρχοντος ἐδείξαμεν δυνατὸν, καὶ ὅπως πρόκειται τὸ πρόβλημα. Κατανοεῖν δὲ χρὴ καὶ τοῖς ὑπ᾽ Ἀρχιμήδους λεγομένοις συμφώνως ἔχουσι τοῖς ὑφ᾽ ἡμῶν ἀναλελυμένοις· πρότερον μὲν γὰρ μετὰ τὴν ἀνάλυσιν αὐτοῦ καθόλου τὸ εἰς ὃ κατήντησε λέγων, φησὶ δοθεῖσαν τὴν δζ τεμεῖν δεῖ κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὸ χζ πρὸς δοθεῖσαν, οὕτω τὸ δοθὲν πρὸς τὸ τῆς δχ· εἶτα εἰκὼν ὡς καθόλου μὲν τὸ λεγόμενον ἔχει διορισμόν· προστεθέντων δὲ τῶν ὑπ᾽ αὐτοῦ εὑρεθέντων προβλημάτων, τοῦτε εἶναι διπλασίαν τὴν δβ τῆς βζ· καὶ μείζονα τὴν βζ τῆς ζθ· μὴ ἔχειν διορισμὸν μερικώτερον, ἐπαναλαμβάνει τὸ πρόβλημα· καὶ φησὶν, ὅτι καὶ ἔσται πρόβλημα τοιοῦτον· δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν δβ, βζ, καὶ διπλασίας οὔσης τῆς δβ καὶ βζ, καὶ σημείου ἐπὶ τῆς βζ τοῦ θ, τεμεῖν τὴν δβ κατὰ τὸ χ, οὐκ ἔτι ὡς πρότερον τὴν δζ εἰπών, ἀλλὰ τὴν δβ δεῖν τεμεῖν διὰ τὸ ὡς ἀνωτέρω ἡμεῖς ἀπεδείξαμεν εἰδέναι αὐτόν, ὡς δύο σημεῖα ἐστὶ τὰ λαμβανόμενα ἐπὶ τῆς δζ, καὶ ποιοῦντα τὸ πρόβλημα, ἓν μὲν τὸ μεταξὺ τῶν δ, β· ἕτερον δὲ τὸ μεταξὺ τῶν β, ζ· ὧν τὸ μεταξὺ τῶν δ, β ἦν τὸ πρὸς τὴν ἐξ ἀρχῆς πρόθεσιν χρήσιμον.

Ταῦτα μὲν οὖν ἀκόλουθα τοῖς Ἀρχιμήδους ῥήμασι, κατὰ τὸ δυνατὸν σαφῶς ἀπεγραψάμεθα· ἐπεὶ δὲ ὡς προείρηται καὶ Διονυσόδωρος οὐδαμῶς τοῖς ἐπὶ τέλει γραφομένοις παρ' Ἀρχιμήδους ἐπηγγελμένοις ἐντυχών, ἀτονήσας δὲ ὥσπερ προσευρεῖν τὰ μὴ ἐκτεθέντα, ἐφ' ἑτέραν ὁδὸν βαδίζων τοῦ ὅλου προβλήματος, οὐκ ἄχαριν εὑρέσεως τὸ πρῶτον ἀναγκαῖον, ᾠήθημεν δεῖν καὶ αὐτὸν τούτοις ἐπισυνάψαι διορθωσάμενοι κατὰ δύναμιν· καὶ γὰρ αὐτὸς ἐκ πολλῆς ἀμελετησίας τῶν ἀνθρώπων τὰ πολλὰ τῶν ἀποδείξεων τῷ πλήθει τῶν πταισμάτων ἠφανισμένην ἔχων ἐν πᾶσιν οἷς ἡμεῖς ἐνετύχαμεν ἀντιγραφῆς ἐφέρετο.

Ὡς Διονυσόδωρος· σχῆμα 27

Τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα αὐτῆς πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν δοθέντα. Ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα, ἧς διάμετρος ἡ αβ· ὁ δὲ δοθεὶς λόγος, ὃν ἔχει ἡ γδ πρὸς δε· δεῖ δὴ τεμεῖν τὴν σφαῖραν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὴν αβ, ὥστε τὸ τμῆμα οὗ κορυφὴ τὸ α, πρὸς τὸ τμῆμα οὗ κορυφὴ τὸ β λόγον ἔχειν, ὃν ἔχει ἡ γδ πρὸς δε· ἐκβεβλήσθω ἡ βα ἐπὶ τὸ ζ· καὶ κείσθω τῆς αβ ἡμίσεια ἡ αζ καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ γε πρὸς εδ, ἐχέτω ἡ ζα πρὸς αη, καὶ ἔστω ἡ αη πρὸς ὀρθὰς τῇ αβ· καὶ τῶν ζα, αη μέση ἀνάλογον εἰλήφθω ἡ αθ· μείζων ἄρα ἡ αθ τῆς αη· καὶ περὶ ἄξονα τὴν ζβ διὰ τοῦ ζ γεγράφθω παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν αη· ἥξει ἄρα διὰ τοῦ θ· ἐπειδὴ τὸ ὑπὸ ζαη ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ αθ· γεγράφθω οὖν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ζθκ· καὶ διὰ τοῦ β ἀνήχθω παρὰ τὴν αθ ἡ βκ, καὶ τεμνέτω τὴν παραβολὴν κατὰ τὸ κ, καὶ διὰ τοῦ η· περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ζβκ· γεγράφθω ὑπερβολή· τεμεῖ δὴ τὴν παραβολὴν μεταξὺ τῶν θ, κ, τεμνέτω κατὰ τὸ λ· καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὴν α αβ κάθετος ἤχθω ἡ λμ· καὶ διὰ τῶν η, λ τῇ αβ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ην, λξ· ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ ηλ, ἀσύμπτωτοι δὲ αβκ, καὶ παράλληλοι ταῖς αην, αἱ μλξ, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ αην τῷ ὑπὸ μλξ, διὰ τὸ ή θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου Κωνικῶν στοιχείων· ἀλλ' ἡ μὲν ην τῇ αβ ἴση ἐστίν· ἡ δὲ λξ τῇ μβ, τὸ ἄρα ὑπὸ λμβ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ηαβ· καὶ διὰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον εἰσίν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ λμ πρὸς ηα, οὕτως ἡ αβ πρὸς βμ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ λμ πρὸς τὸ ἀπὸ ηα, οὕτω τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βμ, καὶ ἐπειδὴ διὰ τὴν παραβολὴν τὸ ἀπὸ λμ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ζμ αη, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζμ πρὸς μλ, ἡ μλ πρὸς αη· καὶ ὡς ἄρα ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης· ὡς ἄρα ἡ ζμ πρὸς αη, οὕτω τὸ ἀπὸ λμ πρὸς τὸ ἀπὸ ηα· ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ λμ πρὸς τὸ ἀπὸ αη, οὕτως ἐδείχθη τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βμ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βμ, οὕτως ἡ ζμ πρὸς αη· ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βμ, οὕτως ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αβ, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ βμ· καὶ ὡς ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αβ, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ βμ, οὕτως ἡ ζμ πρὸς αβ· ὁ ἄρα κῶνος βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αβ, ὕψος δὲ τὴν αη, ἴσος ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ βμ, ὕψος δὲ τὴν ζμ· ὧν γὰρ κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσὶν ἐκεῖνοι· ἀλλ' ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αβ, ὕψος δὲ τὴν ζα, πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν αη· ἐστιν ὡς ἡ ζα πρὸς αη, τουτέστιν ἡ γε πρὸς εδ· ἐπεὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ὕψη· καὶ ὁ κῶνος ὁ ἄρα βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αβ, ὕψος δὲ τὴν ζα, πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ βμ, ὕψος δὲ τὴν ζμ, ἐστιν ὡς ἡ γε πρὸς εδ· ἀλλ' ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αβ, ὕψος δὲ τὴν ζα, ἴσος ἐστὶ τῇ σφαίρᾳ· ὁ δὲ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ βμ, ὕψος δὲ τὴν ζμ, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, οὗ κορυφὴ μέν ἐστι τὸ β, ὕψος δὲ ἡ βμ· ὡς ἑξῆς δειχθήσεται· καὶ ἡ σφαῖρα ἄρα πρὸς τὸ εἰρημένον τμῆμα λόγον ἔχει, ὃν ἡ γε πρὸς εδ· καὶ διελόντι τὸ τμῆμα, οὗ κορυφὴ τὸ α, ὕψος δὲ ἡ αμ πρὸς τὸ τμῆμα οὗ κορυφὴ τὸ β, ὕψος δὲ ἡ βμ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ γδ πρὸς δε· τὸ ἄρα διὰ τῆς λμ ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον ὀρθὸν πρὸς τὴν αβ, τέμνει τὴν σφαῖραν εἰς τὸν δοθέντα λόγον, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ὅτι δὲ ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ βμ, ὕψος δὲ τὴν ζμ, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ β, ὕψος δὲ ἡ βμ, δειχθήσεται οὕτω· γεγονέτω γὰρ ὡς ἡ ζμ πρὸς μα, οὕτως ἡ ομ πρὸς μβ· ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ τὴν ομ, ἴσος ἐστὶ τμήματι· καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ζμ πρὸς μα, οὕτως ἡ ομ πρὸς μβ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ζμ πρὸς μο, οὕτως ἡ αμ πρὸς μβ, ἀλλ᾽ ὡς ἡ αμ πρὸς μβ, οὕτως τὸ ἀπὸ πμ πρὸς τὸ ἀπὸ μβ· καὶ οὕτως ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ πμ, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ μβ· ὡς ἄρα ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ πμ, πρὸς τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ μβ, οὕτως ἡ μζ πρὸς μο· ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ μβ, οὕτως ἡ μζ πρὸς μο· ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ μβ, ὕψος δὲ τὴν ζμ, ἴσος ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ πμ, ὕψος δὲ τὴν μο· ἀντιπεπόνθασι γὰρ αὐτῶν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ὥστε καὶ τῷ τμήματι ἴσος ἐστί.

Ὡς Διοκλῆς ἐν τῷ περὶ Πυρίων· σχῆμα 28

Γράφει δὲ καὶ ὁ Διοκλῆς ἐν τῷ περὶ πυρίων, προλέγων τάδε· ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου Ἀρχιμήδης ἀπέδειξεν, ὅτι πᾶν τμῆμα σφαίρας ἴσον ἐστὶ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ εὐθεῖαν τινὰ λόγον ἔχουσαν πρὸς τὴν ἀπὸ τῆς τοῦ τμήματος κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ ἡ τοῦ ἐναλλὰξ τοῦ τμήματος κάθετος πρὸς τὴν τοῦ ἐναλλὰξ τμήματος κάθετον· οἷον ἐὰν ᾖ σφαῖρα ἡ βγ, καὶ τμηθῇ ἐπιπέδῳ τινὶ τῷ περὶ διάμετρον τὴν γδ κύκλῳ· καὶ διαμέτρου οὔσης τῆς αβ, κέντρου δὲ τοῦ ε· ποιήσωμεν ὡς συναμφότερον τὴν εα, αζ πρὸς ζα· οὕτω τὴν ηζ πρὸς ζβ· ἔτι τε ὡς συναμφότερον τὴν εβ, βζ πρὸς ζβ, οὕτω τὴν θζ πρὸς ζα, ἀποδέδεικται ὅτι τὸ μὲν γβδ τμῆμα τῆς σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ὁ περὶ διάμετρον τὴν γδ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ζη· τὸ δὲ γαδ τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ἡ αὐτὴ, ὕψος δὲ ἡ θζ· προτεθέντος οὖν αὐτῷ τοῦ τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν δοθέντα, κατασκευάσας τὰ εἰρημένα φησί· λόγος ἄρα δοθεὶς καὶ τοῦ κώνου, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν γδ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ζθ πρὸς τὸν κῶνον οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ἡ αὐτὴ, ὕψος δὲ ἡ ζη· καὶ γὰρ τοῦτο ἀπεδείχθη, οἱ κῶνοι οἱ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντες, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη· λόγος ἄρα τῆς θζ πρὸς ζη δοθείς· καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ θζ πρὸς ζα, οὕτω συναμφότερος· ἡ εβζ πρὸς ζβ· διελόντι ὡς ἡ θα πρὸς αζ· οὕτως ἡ εβ πρὸς ζβ· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὡς ἡ ηβ πρὸς ζβ, οὕτως ἡ αὐτὴ εὐθεῖα πρὸς τὴν ζα· γέγονεν οὖν πρόβλημα τοιοῦτον· θέσει οὔσης εὐθείας τῆς αβ, καὶ δύο δοθέντων σημείων τῶν α, β, καὶ δοθείσης τῆς εβ, τεμεῖν τὴν αβ κατὰ τὸ ζ, καὶ προσθεῖναι τὰς θα, βη· ὥστε λόγον εἶναι τῆς θζ πρὸς ζη δοθέντα, ἔτι τε εἶναι ὡς μὲν τὴν θα πρὸς αζ, οὕτω τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πρὸς τὴν ζβ· ὡς δὲ τὴν ηβ πρὸς βζ, οὕτω τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν πρὸς ζα· τοῦτο δὲ ἑξῆς δέδεικται· ὁ γὰρ Ἀρχιμήδης μακρότερον αὐτὸ δείξας, καὶ οὕτως εἰς πρόβλημα ἕτερον ἀπάγει, ὃ οὐκ ἀποδείκνυσιν ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου.

Θέσει δεδομένης εὐθείας τῆς αβ, καὶ δύο δοθέντων σημείων τῶν α, β· καὶ λόγου τοῦ ὃν ἔχει ἡ γ πρὸς τὴν δ, τεμεῖν τὴν αβ κατὰ τὸ ε, καὶ προσθεῖναι τὰς ζα, ηβ· ὥστε εἶναι ὡς τὴν γ πρὸς τὴν δ, οὕτω τὴν ζε πρὸς τὴν εη· ἔτι τε εἶναι ὡς τὴν ζα πρὸς αε· οὕτω δοθεῖσαν τινὰ εὐθεῖαν πρὸς τὴν βε· ὡς δὲ τὴν ηβ πρὸς βε, οὕτω τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πρὸς τὴν εα· γεγονέτω, καὶ τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ θακ, λβμ· καὶ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴση κείσθω ἑκατέρα τῶν ακ, βμ· καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ κε, με ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ λ, θ· ἐπεζεύχθω δὲ καὶ ἡ κμ· διὰ τοῦ λ παράλληλος ἤχθω τῇ αβ ἡ λν· διὰ δὲ τοῦ ε τῇ ικ ἡ ξεοπ. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ζα πρὸς αε, οὕτως ἡ μβ πρὸς βε· ὑπόκειται γάρ· ὡς δὲ ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ θα πρὸς αε, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων, ὡς ἄρα ἡ ζα πρὸς αε, οὕτως ἡ θα πρὸς αε· ἴση ἄρα ἡ ζα τῇ θα· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ βη τῇ βλ· καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ θαε πρὸς συναμφότερον τὴν μβε, οὕτω συναμφότερος ἡ καε πρὸς συναμφότερον τὴν λβε. Ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς αε πρὸς εβ· τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς λβε, καὶ συναμφοτέρου τῆς θαε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς καε, καὶ συναμφοτέρου τῆς μβε· κείσθω τῇ κα ἴση ἑκατέρα τῶν αρ, βσ. Ἐπεὶ οὖν συναμφότερος μὲν ἡ θαε ἴση ἐστὶ τῇ ζε, συναμφότερος δὲ ἡ λβε ἴση τῇ εη· συναμφότερος δὲ ἡ καε ἴση τῇ ερ, συναμφότερος δὲ ἡ μβε σφαιρικὴ ἡ κατὰ τὴν βγδ· Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ τοῦ ε κώνου βάσις ταῖς τῶν ζ, η κώνων βάσεσι, καὶ εἰσὶν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ε κῶνος, τουτέστι ἡ σφαῖρα τοῖς ζ, η κώνοις· ἀλλ' ὁ ζ ἴσος ἐδείχθη τῷ κατὰ τὴν βγδ στερεῷ τομεῖ, κορυφὴν ἔχοντι τὸ α· λοιπὸς ἄρα ὁ η κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ λοιπῷ τμήματι, βάσιν ἔχων τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κατὰ τὴν βθδ τμήματος, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου.

Εἶτα πάλιν φησὶν, ἴσος ἄρα ὁ ν κῶνος, τουτέστιν ὁ βθ, ζα τομεὺς, τῷ βθζκ σχήματι. Ἐπεὶ γὰρ συνήχθη ὁ ν κῶνος, ἴσος ὢν κώνῳ οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ θκ· ὁ δὲ κῶνος οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ἡ αὐτὴ, ὕψος δὲ ἡ εκ, ἴσος τῷ τε εἰρημένῳ κώνῳ, καὶ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτὴν, ὕψος δὲ τὴν εθ· πρὸς ἀλλήλους γάρ εἰσιν ὡς τὰ ὕψη· κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὴν αὐτὴν, ὕψος δὲ τὴν εθ· λοιπὸν τὸ βθ ζκ σχῆμα ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν θκ· τουτέστι τῷ ν κώνῳ, τουτέστι βαθζ τομεῖ.

Ἐπαγαγὼν δὴ τὸ ἐκ τῶν συναχθέντων πόρισμα ἐπὶ τέλει τοῦ θεωρήματος, ἑξῆς δι' ἑτέρας ἀποδείξεως συνάγει τὸ τελευταῖον μέρος τοῦ θεωρήματος, τουτέστιν ὅτι τὸ βαζ τμῆμα σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ βκζ κώνῳ· καὶ προϊὼν φησὶν ὡς ἄρα ἡ κθ πρὸς θγ, ἡ θδ πρὸς δγ· καὶ ὅλη ἡ κδ πρὸς δθ ἐστὶν ὡς ἡ δθ πρὸς δγ· Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θγ, ἡ θδ πρὸς δγ· καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, ἡ θγ πρὸς γδ· καὶ συνθέντι, ὡς ἡ κδ πρὸς δθ, ἡ θδ πρὸς δγ· τουτέστιν ἡ κθ πρὸς θα· ἦν γὰρ ὡς ἡ κθ πρὸς θγ, ἡ θδ πρὸς δγ· ἴση δὲ ἡ θγ τῇ θα· καὶ μετ' ὀλίγον, ὡς ἄρα ἡ κθ πρὸς δθ, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κδ πρὸς τὸ ἀπὸ τῶν κθδ, οὕτω τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν α εγ. Νοείσθωσαν γὰρ χωρὶς κείμεναι αἱ κδ, αγ· καὶ ἔστω ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ· λέγω ὅτι ἐστὶ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ κδ, πρὸς τὸ ὑπὸ κθδ, οὕτω τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ὑπὸ αεγ· Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ· καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς ἡ κδ πρὸς δθ, οὕτως ἡ αγ πρὸς γε, ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ κδ πρὸς τὸ ἀπὸ θδ, ὡς τὸ ἀπὸ αγ, πρὸς τὸ ἀπὸ εγ· πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ· ἀλλ' ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, οὕτω τὸ ὑπὸ κθδ πρὸς τὸ ἀπὸ θδ, κοινοῦ ὕψους τῆς θδ λαμβανομένης· ὡς δὲ ἡ αε πρὸς εγ, οὕτω τὸ ὑπὸ αεγ πρὸς τὸ ἀπὸ εγ, κοινοῦ, πάλιν ὕψους λαμβανομένης τῆς εγ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ κθδ πρὸς τὸ ἀπὸ θδ, οὕτω τὸ ὑπὸ αεγ πρὸς τὸ ἀπὸ εγ· ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ ἀπὸ θδ, πρὸς τὸ ἀπὸ δκ, οὕτω τὸ εγ πρὸς τὸ ἀπὸ γα· καὶ δι' ἴσου ὡς τὸ ὑπὸ κθδ πρὸς τὸ ἀπὸ κδ, οὕτω τὸ ὑπὸ αεγ πρὸς τὸ ἀπὸ αγ· καὶ ἀνάπαλιν, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Εἰς τὸ γ'.

Ὡς δὲ οἱ εἰρημένοι κύκλοι πρὸς ἀλλήλους τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὸ ἀπὸ δβ, τουτέστιν ἡ αγ πρὸς γβ· ὡς γὰρ ἐν αὐτῇ τῇ τοῦ ῥητοῦ καταγραφῇ, ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ αδβ κάθετος ἦκται, καὶ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς ἡ δγ μέση, ἀνάλογόν ἐστι τῶν τῆς βάσεως τμημάτων· καὶ τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις· ὥστε ἐστὶν ὡς ἡ βγ πρὸς γδ, ἡ βδ πρὸς δα· καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ἄρα· ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ βγ πρὸς τὸ ἀπὸ γδ, οὕτως ἡ πρώτη ἡ βγ πρὸς τρίτην τὴν γα· καὶ ὡς ἄρα ἡ βγ πρὸς γα, οὕτω τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δα· δοθεὶς δὲ λόγος τῆς αγ πρὸς γβ, ὥστε δοθέν ἐστι τὸ γ σημεῖον· ἐπεὶ γὰρ ἡ σφαῖρα ὑπόκειται δεδομένη, δέδοται ἄρα καὶ ἡ διάμετρος αὐτῆς ἡ δγ· καὶ δέδοται ὁ λόγος τῆς αγ πρὸς γβ· ἐὰν δεδομένον μέγεθος εἰς δεδομένον λόγον διαιρεθῇ, δέδοται ἑκάτερον τῶν τμημάτων, ὥστε δοθεῖσά ἐστιν ἡ αγ, καὶ δοθὲν τὸ α· ἐπὶ γὰρ τῆς κοινῆς τομῆς ἐστὶ θέσει δεδομένων γραμμῶν, δέδοται ἄρα καὶ τὸ γ.

Εἰς τὸ δ'.

Καὶ διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον διὰ τῆς κατασκευῆς, ὡς ἡ λδ πρὸς δκ ἡ κβ πρὸς βρ· καὶ ἡ δχ πρὸς χβ· ἐν γὰρ τῷ πρὸ τούτου συνήγετο οὕτως. Ἐπεὶ ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ κδ, δχ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ρχ πρὸς χβ· διελόντι ὡς ἡ κδ πρὸς δχ, ἡ ρβ πρὸς βχ· ἐναλλὰξ, ὡς ἡ κδ, τουτέστιν ἡ κβ πρὸς βρ, ἡ δχ πρὸς χβ· πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ λχ πρὸς χδ, οὕτως συναμφότερος ἡ κβ, βχ πρὸς χβ· διελόντι καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ λδ πρὸς δκ, ἡ δχ πρὸς χβ· ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ δχ πρὸς χβ, ἡ κβ πρὸς βρ· ὡς ἄρα ἡ λδ πρὸς δκ, ἡ δχ πρὸς χβ, καὶ ἡ κβ πρὸς βρ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ρλ πρὸς ὅλην κλ, ἐστὶν ὡς ἡ κλ πρὸς λδ· ὡς γὰρ ἓν πρὸς ἓν, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὡς ἄρα ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ κλ πρὸς τὸ ἀπὸ κδ· ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ ρλ πρὸς λκ, ἡ κλ πρὸς λδ.

διὰ τὸ ϗ τὸ ἀπὸ βο τοῦ ἀπὸ βε· ἴση γάρ ἐςὶν ἡ βε τῇ εο, ἡμισείας ὀρθῆς οὔσης ἑκατέρας τῶν πρὸς τοῖς β, ο· ϗ τὸ ὑπὸ του ἄρα διπλάσιον ἐςὶν τοῦ ὑπὸ σερ· ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ, οὕτω τὸ ὑπὸ του πρὸς τὸ ἀπὸ ξο, ϗ τῶν ἡγουμένων τὰ ἥμισυ· ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτω τὸ ὑπὸ ρεσ πρὸς τὸ ἀπὸ ξο· ἴση δὲ ἡ ξο τῇ εη, διὰ τὸ ἑκατέραν αὐτῶν ἴσην εἶναι συναμφοτέρῳ τῇ λβε· ἐπεὶ οὖν ἐςὶν ὡς συναμφότερος ἡ θα ε πρὸς συναμφότερον τὴν μβε, οὕτω συναμφότερος ἡ κας πρὸς συναμφότερον τὴν λβε. Ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων ὁ αὐτός ἐςὶ τῷ τῆς ας πρὸς εβ. Τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς θαε, ϗ συναμφοτέρου τῆς λβε, ἴσον ἐςὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς καε, ϗ συναμφοτέρου τῆς μβε· ἀλλὰ συναμφοτέρῳ μὲν τῇ θαε ἴση ἐςὶ ἡ ζε, συναμφοτέρῳ δὲ τῇ λβε· ἴση ἡ εη: συναμφοτέρῳ τῇ καε ἴση ἡ ρε· συναμφοτέρῳ δὲ τῇ μβε, ἴση ἡ εσ· τὸ ἄρα ὑπὸ ζεη ἴσον ἐςὶ τῷ ὑπὸ ρεσ· ἀλλ' ὡς ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτω τὸ ὑπὸ ρεσ πρὸς τὸ ἀπὸ εη· ϗ ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτω τὸ ὑπὸ ζεη πρὸς τὸ ἀπὸ εη· ἀλλ' ὡς τὸ ὑπὸ ζεη πρὸς τὸ ἀπὸ εη, οὕτως ἡ ζε πρὸς εη, ϗ ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως ἡ ζε πρὸς εη, ϗ ἐπεὶ ἐςὶν ὡς ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ θα πρὸς αε· ἴση δὲ ἡ θα τῇ ζα· ὡς ἄρα ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ ζα πρὸς αε. Διὰ τὰ αὐτὰ ϗ ὡς ἡ κα πρὸς αε, οὕτως ἡ ηβ πρὸς βε· εὐθείας ἄρα δοθείσης τῆς αβ, ϗ ἑτέρας τῆς ακ, ϗ λόγου τοῦ τῆς γα πρὸς τὴν δ, εἴληπται ἐπὶ τῆς αβ τυχὸν σημεῖον τὸ ε· ϗ προσετέθεισαν εὐθεῖαι αἱ ζα, ηβ ϗ γέγονε τῷ δοθέντι λόγῳ ἡ ζε πρὸς εη· ἔτι τε ἐςὶν ὡς ἡ δοθεῖσα ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ ζα πρὸς ας· ὡς δὲ αὐτὴ ἡ δοθεῖσα ἡ κα πρὸς αε, οὕτως ἡ ηβ πρὸς βε, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Τούτων δεδειγμένων δυνατόν ἐςὶ τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν εἰς τὸν δοθέντα λόγον τεμεῖν οὕτως· ἔςω γὰρ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ· ὁ δὲ δοθεὶς λόγος, ὃν δεῖ ἔχειν τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα, ὁ τῆς γ πρὸς τὴν δ, κέντρου δὲ τῆς σφαίρας ἔςω τὸ ε, ϗ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς αβ σημεῖον τὸ ζ, ϗ προσκείσθωσαν αἱ ηα, θβ· ὥςε εἶναι ὡς τὴν γ πρὸς τὴν δ, οὕτω τὴν ηζ πρὸς τὴν ζθ· ἔτι τε εἶναι, ὡς μὲν τὴν ηα πρὸς αζ, οὕτω δοθεῖσαν τὴν εβ πρὸς βζ· ὡς δὲ τὴν θβ πρὸς βζ, οὕτω τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν τὴν εα πρὸς αζ· τοῦτο γὰρ ὡς δυνατὸν ποιεῖν προδέδεικται· ϗ διὰ τοῦ ζ τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ κλζ· ϗ διὰ τῆς κλ ἐπίπεδον ἐκβληθὲν ὀρθὸν πρὸς τὴν αβ τεμνέτω τὴν σφαῖραν· λέγω ὅτι τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν τῆς γ πρὸς τὴν δ· ἐπεὶ γάρ ἐςιν ὡς ἡ ηα πρὸς αζ, οὕτως ἡ εβ πρὸς βζ· ϗ συνθέντι, ὡς ἄρα ἡ ηζ πρὸς ζα, οὕτω συναμφότερος ἡ εβ, βζ πρὸς βζ· ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν κλ, ὕψος δὲ τὴν ζη, ἴσος ἐςὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτὴν, ὕψος δὲ τὴν ζα· πάλιν ἐπεὶ ἐςὶν ὡς ἡ θβ πρὸς βζ, οὕτως ἡ εα πρὸς αζ· καὶ συνθέντι ἐςὶν ὡς ἡ θζ πρὸς βζ, οὕτω συναμφότερος ἡ εα, αζ πρὸς αζ· ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν κλ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ζθ ἴσος ἐςὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτὴν, ὕψος δὲ τὴν βζ· ἐπεὶ οὖν οἱ εἰρημένοι κῶνοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη, τουτέςιν ὡς ἡ θζ πρὸς ζη, τουτέςιν ἡ γ πρὸς τὴν δ, ϗ τὰ τμήματα ἄρα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν δοθέντα, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ὡς δὲ δεῖ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου περὶ τὰς δοθείσας ἀσυμπτώτους γράψαι ὑπερβολὴν, δείξομεν οὕτως· ἐπειδὴ οὐκ αὐτόθεν κεῖται ἐν τοῖς Κωνικοῖς ςοιχείοις· ἔςωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ γα, αβ τυχοῦσαν γωνίαν περιέχουσαι τὴν πρὸς τὸ α, ϗ δεδόσθω σημεῖόν τι τὸ δ· ϗ προσκείσθω διὰ τοῦ δ περὶ ἀσυμπτώτους τὰς γα, αβ γράψαι ὑπερβολήν· ἐπεζεύχθω ἡ αδ, ϗ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ε· ϗ κείσθω τῇ δα ἴση ἡ ας, ϗ διὰ τοῦ δ τῇ αβ παράλληλος ἤχθω ἡ δζ ϗ κείσθω τῇ αζ ἴση ἡ ζγ· καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γδ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ β, ϗ τῷ ἀπὸ τῆς γβ ἴσον ἔςω τὸ ὑπὸ δεη, ϗ ἐκβληθείσης τῆς αδ γεγράφθω περὶ αὐτὴν διὰ τοῦ δ ὑπερβολὴ, ὥςε τὰς καταγομένας δύνασθαι τὰ περὶ τὴν εη ὑπερβάλλοντα, ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ δεη· λέγω ὅτι τῆς γεγραμμένης ὑπερβολῆς ἀσύμπτωτοί εἰσιν αἱ γα, αβ· ἐπεὶ γὰρ παράλληλος ἐςὶν ἡ δζ τῇ βα, ϗ ἴση ἡ γζ τῇ ζα, ἴση ἄρα ϗ ἡ γδ τῇ δβ, ὥςε τὸ ἀπὸ τῆς γβ τετραπλάσιον ἐςὶ τοῦ ἀπὸ τῆς γδ· ϗ ἔςι τὸ ἀπὸ γβ ἴσον τῷ ὑπὸ δεη· ἑκάτερον ἄρα τῶν ἀπὸ γδ, δβ, τέταρτον μέρος ἐςὶ τοῦ ὑπὸ δεη εἴδους· αἱ ἄρα γα, αβ ἀσύμπτωτοι εἰσὶ τῆς ὑπερβολῆς, διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου Κωνικῶν ςοιχείων.

Εἰς τὴν σύνθεσιν τοῦ δ'.

Ἐν τῇ συνθέσει προσεκβάλλων τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας τὴν δβ, ϗ ἀποθέμενος τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς ἴσην τῇ ζβ· ϗ τεμὼν αὐτὴν εἰς τὸν δοθέντα λόγον κατὰ τὸ θ, ϗ ἐπὶ τῆς δβ λαβὼν τὸ χ οὕτως ὥςε εἶναι ὡς τὴν χζ πρὸς θζ, οὕτω τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, τὰ αὐτὰ κα-

κατασκευάζων τοῖς πρότερον φησὶν, ὅτι γεγονέτω ὡς συναμφότερος ἡ κδχ πρὸς δχ, ὕτως ἡ ρχ πρὸς χβ, ϗ τέθησι τὸ ρ μεταξὺ τῶν θ, ζ· ὅτι δὲ τῦτο ὕτως ἔχει δεικτέον· ἐπεὶ γάρ ἐϛὶν ὡς συναμφότερος ἡ κδχ πρὸς δχ, ὕτως ἡ ρχ πρὸς χβ· διελόντι ὡς ἡ κδ πρὸς δχ, ἡ ρβ πρὸς χβ· ἐναλλὰξ ὡς ἡ κβ πρὸς ρβ, ἡ δχ πρὸς βχ· μείζων δὲ ἡ δχ τῆς χβ, μείζων ἄρα ϗ ἡ κβ τῆς βρ· τυτέϛιν ἡ ζβ τῆς βρ, ὥϛε τὸ ρ ἐντὸς τῦ ζ πεσεῖται· ὅτι δὲ ϗ ἐκτὸς τῦ θ δειχθήσεται ὁμοίως τοῖς ἐν τῇ ἀναλύσει προελθύσης πάσης συνθέσεως τῦ θεωρήματος· συνάγεται γὰρ ὅτι ἐϛὶν ὡς ἡ ρχ πρὸς χλ, ἡ ζφ πρὸς θβ, ὥϛε ϗ συνθέντι, ϗ διὰ τῦτο γὰρ ἀκόλυθος τοῖς ἄνω εἰρημένοις ϗ ἐνταῦθα ἡ δεῖξις.

Καὶ δι' ἴσου ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ· τεταραγμένην ἀναλογίαν ἐν τοῖς ϛοιχείοις ἐμάθομεν τριῶν ὄντων μεγεθῶν, ϗ ἄλλων αὐτοῖς ἴσον τὸ πλῆθος, ὅταν ᾖ ὡς μὲν ἡγέμενον πρὸς ἑπόμενον ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν, ὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγέμενον πρὸς ἑπόμενον· ὡς δὲ ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι ἐν τοῖς πρώτοις, ὕτως ἐν τοῖς δευτέροις ἄλλο τι πρὸς ἡγέμενον· Κἀνταῦθα ὗν δέδεικται ὡς μὲν ἡγέμενον ἡ ρλ πρὸς ἑπόμενον τὴν λδ, ὕτως ἡγέμενον ἡ χζ πρὸς ἑπόμενον τὴν ζθ, ὡς δὲ ἑπόμενον ἡ δλ πρὸς ἄλλο τι τὴν δχ, ὕτως ἄλλο τι ἡ εζ πρὸς ἡγέμενον τὴν χζ. ἕπεται ἄρα ϗ δι' ἴσον ὡς δέδεικται ἐν τῷ πέμπτῳ τῶν ϛοιχείων, ὡς ρλ πρὸς λχ, ὕτως ἡ βζ πρὸς ζθ.

Εἰς τὸ Ε'.

Καὶ ἐπεὶ ὅμοιον ἐϛὶ τὸ εζη τμῆμα τῷ θκλ τμήματι, ὅμοιος ἄρα ἐϛὶ καὶ ὁ εζω κῶνος τῷ ψθκ κώνῳ. νενοήϑωσαν γὰρ χωρὶς κείμεναι αἱ καταγραφαὶ ϗ ἐπεζευγμέναι αἱ εη, ηζ, εο, οζ, θλ, λκ, θξ, ξκ· ἐπεὶ ὗν ὅμοια ἐϛὶ τὰ εζη, θκλ τμήματα, ἴσαι εἰσὶ ϗ αἱ ὑπὸ εηζ, θλκ γωνίαι, ὥϛε ϗ αἱ ἡμίσειαι αὐτῶν· ϗ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς φ, υ. ϗ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἐϛὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ηφζ τρίγωνον τῷ λυκ, ϗ ἔϛιν ὡς ἡ ηφ πρὸς φζ, ὕτως ἡ λυ πρὸς υκ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσογωνίων ὄντων τῶν φζο, υκξ τριγώνων· Ἔϛιν ὡς ἡ ζφ πρὸς φο, ἡ κυ πρὸς υξ· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ηφ πρὸς φο, ἡ λυ πρὸς υξ· ϗ συνθέντι ὡς ἡ ηο πρὸς οφ, ἡ λξ πρὸς ξυ· ϗ τῶν ἡγεμένων τὰ ἥμισυ, ὡς ἡ σο πρὸς οφ, ἡ ρξ πρὸς ξυ· ϗ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἡ σοφ πρὸς φο, τυτέϛιν ἡ ψυ πρὸς υλ· ἀλλ' ὡς ἡ ηφ πρὸς φζ, ἡ λυ πρὸς υκ· ϗ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ωφ πρὸς φζ, ἡ ψυ πρὸς υκ· ϗ τῶν ἑπομένων τὰ διπλάσια. Ὡς ἄρα ἡ ωφ πρὸς εζ, ἡ ψυ πρὸς θκ, τῶν ἄρα ω εζ, ψθκ κώνων ἀνάλογον εἰσὶν οἱ ἄξονες ϗ διάμετροι τῶν βάσεων, ὅμοιοι ἄρα εἰσὶν οἱ κῶνοι, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λόγος δὲ τῆς ωφ πρὸς τὴν εζ δοθεὶς· ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὰ τμήματα τῶν σφαιρῶν, δεδομέναι εἰσὶ ϗ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων, ϗ τὰ ὕψη τῶν τμημάτων, ὥϛε δέδοται ἡ εζ, καὶ ἡ ηφ, καὶ ἡ ἡμίσεια ἄρα τῆς εζ ἡ εφ δοθήσεται, ὥϛε ϗ τὸ ἀπ' αὐτῆς· ϗ ἔϛιν ἴσον τῷ ὑπὸ ηφο· ἐὰν δὲ δοθὲν παρὰ δοθεῖσαν παραβληθῇ πλάτος ποιεῖ δοθεῖσαν, δοθεῖσα ἄρα ἡ φο, ἀλλὰ καὶ ἡ φη, καὶ ὅλη ἄρα ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας δοθεῖσα ἐϛὶ, ϗ διὰ τῦτο ἐϛὶ ϗ ἡ μίσεια αὐτῆς δέδοται ἡ σο· ἀλλὰ μὴν, ϗ ἡ οφ· δέδοται ἄρα καὶ ὁ τῆς σο πρὸς οφ λόγος, καὶ συνθέντι ὡς συναμφοτέρυ τῆς σοφ πρὸς τὴν οφ λόγος δοθεὶς ἔϛιν, τυτέϛι τῆς ωφ πρὸς φη· ϗ δέδοται ἄρα ϗ ἡ ωφ· ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ εζ· δέδοται ἄρα ϗ ὁ τῆς ωφ πρὸς εζ λόγος· τὰ αὐτὰ δὲ ἂν ῥηθείη ϗ ἐπὶ τῦ αβγ τμήματος, ϗ συναχθήσεται ἡ τῆς χτ πρὸς αβ λόγος δοθεὶς, ϗ διὰ τὸ δοθεῖσαν εἶναι τὴν αβ, δοθεῖσα ἐϛὶ καὶ ἡ χτ.

Ὅτι δ' ἂν τὰ τμήματα δεδομένα ᾖ, ϗ τὰ ὕψη αὐτῶν δοθήσονται, πρόδηλον μέν· ἵνα δὲ ϗ τῦτο ἀκολύθως τῇ ϛοιχειώσει τῶν δεδομένων δοκεῖ συνάγεσθαι, λεχθήσεται. ἐπειδὴ δέδοται τὰ τμήματα τῇ θέσει ϗ τῷ μεγέθει, δέδοται ϗ ἡ εζ· ϗ ἡ ἐν τῷ τμήματι γωνία, ὥϛτε ϗ ἡ ἡμίσεια αὐτῆς, ϗ ἐὰν νοήσωμεν ἐπιζευγνυμένην τὴν εη δεδομένης τῆς πρὸς τῷ φ ὀρθῆς· δεδομένη ἔϛαι ϗ ἡ λοιπή· ϗ τὸ εηφ τρίγωνον τῷ εἴδει· ὥϛε ϗ ὁ τῆς εφ πρὸς φη λόγος δοθεὶς ἔϛαι· ϗ δέδοται ἡ εφ ἡμίσεια ὗσα τῆς εζ, δέδοται ἄρα ϗ ἡ φη· ἔνεϛι δὲ ϗ ἄλλως λέγειν· ἐπεὶ δέδοται ἡ εζ τῇ θέσει, ϗ ἀποδεδομένυ τῦ φ, διχοτομία γὰρ ἐϛὶ τῆς εζ πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ φη τῇ θέσει· δέδοται ἄρα δὲ ϗ ἡ περιφέρεια τῦ τμήματος τῇ θέσει, δέδοται ἄρα τὸ η. ἦν δὲ ϗ τὸ φ δεδόμενον. Δέδοται ἄρα ϗ ἡ φη· ἐπεὶ ἐϛὶν ὡς ἡ ψυ πρὸς χτ, τυτέϛι τὸ ἀπὸ τῆς βα πρὸς τὸ ἀπὸ θκ, ὕτως ἡ κθ πρὸς δ· ἐπεὶ γὰρ γέγονεν ὡς ἡ ψυ πρὸς θκ, ἡ χτ πρὸς δ· ἐναλλὰξ ἡ ψυ πρὸς χτ ἡ κθ πρὸς δ· ἀλλ' ὡς ἡ ψυ πρὸς χτ, τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θκ· ἴσων γὰρ ὄντων τῶν κώνων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ὡς δὲ αἱ βάσεις πρὸς ἀλλήλυς, ὕτω τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα; Καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ θκ, ἡ θκ πρὸς τὸν δ. ϗ ἐναλλὰξ ὡς ἡ αβ πρὸς θκ, ἡ ϛ πρὸς τὴν δ· ἐπειδὴ τῷ λόγῳ τοῦ ἀπὸ τῆς βα πρὸς τὸ ἀπὸ θκ, ὁ αὐτὸς ἐδείχθη ὁ τῆς βα πρὸς ϛ, καὶ ὁ τῆς κθ πρὸς δ, καὶ ὁ τῆς βα ἄρα πρὸς ϛ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς κθ πρὸς δ· ὥστε ἐναλλὰξ ἐστὶν ὡς ἡ βα πρὸς θκ, ἡ ϛ πρὸς δ.

Εἰς τὴν σύνθεσιν τοῦ Ε΄.

Ἐπειδὴ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ αβ, θκ, ϛ, δ, ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θκ, ἡ θκ πρὸς δ· καθόλου γὰρ ἐὰν ὦσι τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, ἡ δευτέρα πρὸς τὴν τετάρτην· Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν, ἡ τρίτη πρὸς τὴν τετάρτην, ἐναλλὰξ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, ἡ δευτέρα πρὸς τὴν τετάρτην· ἀλλ' ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, ἡ δευτέρα πρὸς τὴν τετάρτην.

Εἰς τὸ Ϛ΄.

Ἐπεὶ δὲ ὅμοιόν ἐστι τὸ κλμ τῷ αβγ τμήματι, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ελ πρὸς εϱ, ἡ βπ πρὸς πθ· ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῶσιν αἱ μν, γθ, ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ τμήματα, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ πρὸς τοῖς βλ γωνίαι· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τοῖς μ, γ ὀρθαὶ καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ, καὶ ἰσογώνια ἐστὶ τὰ τρίγωνα, καὶ ἔστιν ὡς ἡ θβ πρὸς θγ, οὕτως ἡ λν πρὸς μν· ἀλλ' ὡς ἡ θγ πρὸς θπ, ἡ μν πρὸς κϱ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν γθπ, μνϱ τριγώνων, καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ βθ πρὸς θπ, ἡ θπ, ἡ λυ πρὸς υϱ· ὥστε καὶ διελόντι, ὡς ἡ βπ πρὸς πθ, οὕτως ἡ λϱ πρὸς ϱυ· λόγος δὲ τῆς εζ πρὸς βγ δοθείς, δοθεῖσα ἄρα ἑκατέρα· ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὰ τμήματα τῶν σφαιρῶν, δεδομέναι εἰσὶ καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων, καὶ τὰ ὕψη τῶν τμημάτων, ὥστε ἐπεὶ δέδοται ἡ αγ, δέδοται καὶ ἡ ἡμίσεια αὐτῆς ἡ γπ, δέδοται δὲ καὶ ἡ βπ, καὶ ὀρθὴν γωνίαν περιέχουσιν· δέδοται ἄρα καὶ ἡ βγ διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ ἡ εζ δοθεῖσα ἐστίν, ὥστε καὶ ὁ τῆς βγ πρὸς εζ λόγος δοθείς ἐστίν.

Εἰς τὴν σύνθεσιν τοῦ Ϛ΄.

Ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ ἐπὶ τῶν κμ, αγ τμήματα κύκλων· ἐὰν γὰρ ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει ἐπιζευχθῶσιν αἱ γθ, μν, ἐπεὶ ὀρθαί εἰσιν αἱ πρὸς τοῖς γ, μ καὶ κάθετοι αἱ γπ, μϱ μέσαι ἀνάλογον εἰσὶν τῶν τῆς βάσεως τμημάτων, ὥστε ἐστὶν ὡς ἡ πρώτη ἡ βπ, πρὸς τὴν τρίτην τὴν πθ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τῆς βγ· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ λϱ πρὸς ϱυ, οὕτω τὸ ἀπὸ λϱ πρὸς τὸ ἀπὸ λμ· καὶ ἔστιν ὡς ἡ βπ πρὸς πθ, ἡ ϱλ πρὸς ϱυ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ βπ πρὸς τὸ ἀπὸ πγ, οὕτω τὸ ἀπὸ λϱ πρὸς τὸ ἀπὸ ϱμ· καὶ ὡς ἄρα ἡ πβ πρὸς πλϱ, πρὸς ϱμ· καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσί. ἰσογώνια ἄρα τὰ τρίγωνα· ἴσαι ἄρα πρὸς τοῖς β, λ γωνίαι, καὶ αἱ διπλάσιαι αὐτῶν αἱ ἐν τοῖς τμήμασιν, ὅμοια ἄρα εἰσὶ τὰ τμήματα.

Εἰς τὸ Ζ.

Λόγος ἄρα δεδομένος συναμφοτέρου τῆς εδζ πρὸς δζ· ἐπεὶ γὰρ συναμφότερος ἡ εδ, δζ πρὸς δζ λόγον ἔχει δεδομένον. Ἐὰν μέγεθος πρός τι μόριον ἑαυτοῦ, λόγον ἔχει δεδομένον, καὶ πρὸς τὸ λοιπὸν λόγον ἕξει δεδομένον, ὥστε συναμφότερος ἡ εδζ πρὸς εδ λόγον ἔχει δεδομένον. Ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν εδ, δζ πρὸς συναμφότερον τὴν εδ λόγον ἔχει δεδομένον, καὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχουσι δεδομένον· δέδοται ἄρα ὁ τῆς εδ πρὸς δζ λόγος, καὶ δέδοται ἡ εδ· δέδοται γὰρ ἡ διάμετρος, δέδοται ἄρα καὶ ἡ δζ· λοιπὴ ἄρα ἡ ζβ δοθήσεται, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ δζβ, τουτέστι τὸ ἀπὸ αζ, τουτέστιν ἡ αζ, δοθεῖσα ἔσται· καὶ ὅλη ἄρα ἡ αγ· καὶ ἄλλως δὲ λέγοις ἄν, ὅτι ἡ αγ δοθεῖσα ἐστίν. Ἐπεὶ γὰρ δέδοται ἡ διάμετρος ἡ δβ τῇ θέσει· δέδοται δὲ καὶ τὸ ζ ὡς ἤτηται, καὶ ἀπὸ δεδομένου τοῦ ζ πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ αγ, δέδοται ἡ αγ τῇ θέσει, ἀλλὰ καὶ ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια· δοθέντα ἄρα τὰ α, γ, καὶ αὐτὴ ἡ αζγ δοθεῖσα ἐστί.

Καὶ ἐπεὶ συναμφότερος μὲν ἡ εδζ πρὸς δζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ εδβ πρὸς δβ· ἐπεὶ γὰρ ἡ εδ μείζων ἢ ἡμίσεια ἐστὶ τῆς δζ, συναμφότερος ἄρα ἡ εδζ τῆς δζ μείζων ἐστὶν ἢ ἡμιόλια συναμφότερος δὲ ἡ εδ, δβ τῆς δβ ἡμιόλια· μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἡ εδζ πρὸς δζ, ἤπερ ἡ εδβ πρὸς δβ, ἢ καὶ ἄλλως, ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ δβ τῆς δζ, ἄλλη δέ τις ἡ εδ, ἡ εδ ἄρα μείζονα λόγον ἔχει πρὸς θζ, ἤπερ ἡ εδ πρὸς δβ συνθέντι συναμφότερος ἡ εδζ πρὸς δζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ εδβ πρὸς δβ, ἡ σύνθεσις τοῦ θεωρήματος σαφὴς διὰ τῶν ἐνταῦθα εἰρημένων.

Εἰς τὸ Η΄.

Ἡ θζ πρὸς ζη ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ διπλασίονα τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ αδ. τουτέστιν ἡ βζ πρὸς ζδ· ἐπεὶ γὰρ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς κάθετος ἦκται ἡ αζ τῶν πρὸς τῇ καθέτῳ τριγώνων ὁμοίων ὄντων, ἔστιν ὡς ἡ ζβ πρὸς βα, ἡ αβ πρὸς βδ· ϗ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· ϗ τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται· ὡς ἄρα ἡ ζβ πρὸς βδ, τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βδ· ἀλλ' ὡς ἡ βδ πρὸς δζ, οὕτω τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δα· ὡς γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· ϗ δι' ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ δα, οὕτως ἡ βζ πρὸς δζ· συναχθείη δ' ἂν τὸ αὐτὸ ϗ ἄλλως οὕτως· ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ βζ πρὸς ζδ, οὕτω τὸ ὑπὸ ζ βδ πρὸς τὸ ὑπὸ βδ ζ, τῆς βδ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης· ϗ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ δ βζ ἴσον τὸ ἀπὸ βα· τὸ δὲ ὑπὸ βδζ ἴσον τὸ ἀπὸ δα· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ δα, οὕτως ἡ βζ πρὸς δζ.

Καὶ ἐπεὶ, ἡ θζ πρὸς ζκ ἡ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἡ θβ πρὸς βκ· καθόλου γὰρ ἐὰν ὦσι δύο μεγέθη ἄνισα, ϗ προστεθῇ αὐτοῖς ἴσα τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλασσον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ συντεθὲν πρὸς τὸ συντεθέν· ἔστωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ αβ, γδ. ϗ προσκείσθωσαν αὐταῖς αἱ βε, δζ· λέγω ὅτι ἡ αβ πρὸς γδ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αε πρὸς γζ, ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ αβ τῆς γδ, ἡ αβ ἄρα πρὸς βε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γδ πρὸς τὴν βε, τουτέστι πρὸς δζ· ὥστε καὶ συνθέντι ἡ αε πρὸς εβ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γζ πρὸς τὴν δζ, διὰ τὰ προδεδειγμένα.

Ἔλαττον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν θζ η τοῦ ἀπὸ ζκ· ἐὰν γὰρ ὦσι τρεῖς εὐθεῖαι συνεχεῖς, ὡς αἱ α, β, γ, ὥστε τὴν α, πρὸς τὴν β ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἤπερ τὴν πρὸς τὴν γ· τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων τῶν α, γ, ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μέσης τῆς β· ἐὰν γὰρ ποιήσωμεν, ὡς τὴν α πρὸς τὴν β, οὕτω τὴν β πρὸς ἄλλην τινὰ, ἔσται πρὸς μείζονα τῆς γ, ἤπερ δεῖ ἐλαττῶσαι τὸν τῆς β πρὸς γ λόγον, ϗ ἔσται τὸ ὑπὸ τῆς α καὶ τῆς μείζονα τῆς γ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς β· ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν α, γ ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς β.

Τὸ ἄρα ὑπὸ θζη πρὸς τὸ ἀπὸ ζη ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζη. ὡς γὰρ ἡ θζ πρὸς ζη, οὕτω τὸ ὑπὸ θζη πρὸς τὸ ἀπὸ ζη· τὸ δὲ ὑπὸ θζη τοῦ ἀπὸ ζκ ἔλασσον τὸ δὲ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλασσον· ϗ ἐκεῖ ἴση ἐστὶν ἡ βε τῇ εδ, ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βζδ τοῦ ὑπὸ τῶν βεδ· τὸ μὲν γὰρ ὑπὸ βδε ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εδ, τὰ δὲ ἀπὸ βζδ μετὰ τοῦ ἀπὸ εζ ἴσον ἐστὶ τῷ αὐτῷ· ϗ δῆλον ὅτι ὅσῳ τῆς διχοτομίας ἐφέστηκεν τὸ ζ μεῖζον, ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ἴσων· μετὰ γὰρ μείζονος τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν, ἴσον γίνεται τὸ ὑπὸ τῶν ἴσων, ὥστε εὐθεῖα κἂν εἰς ἄνισα τέμνεται κατ' ἄλλο ϗ ἄλλο σημεῖον τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῶν ἔγγιον τῆς διχοτομίας, μεῖζον ἐστὶ τοῦ ὑπο τῶν ἀπωτέρων τμημάτων.

Ἡ βζ ἄρα πρὸς βε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εδ πρὸς δζ· καθόλου γὰρ ἐαν τέσσαρες ὅροι ὡς οἱ α, β, γ, δ, ε· ϗ ᾖ τὸ ὑπὸ τῶν αδε, ἔλασσον τοῦ ὑπὸ βγ, ὁ α πρὸς τὸν β ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ πρὸς δε· ἔστω γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν βγ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν αζε· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, ὁ γ πρὸς τὸν ζε· ὁ δὲ γ πρὸς τὸν ζε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸν εδ ϗ ὁ αε πρὸς τὸν β ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ πρὸς δε.

Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ θβ πρὸς βκ, τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ· ἐπεὶ γὰρ τῷ ὑπὸ θβκ ἴσον ἐστὶ τὰ ἀπὸ βν, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον εἰσὶν ὡς ἡ θβ πρὸς βν, ὁ νβ πρὸς βκ· ϗ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, ἡ θβ πρὸς βκ· οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης, τουτέστι τὸ ἀπὸ βν πρὸς τὸ ἀπὸ βκ, ὡς δέδεικται ἀνωτέρω. πάλιν ἐστὶν ὡς ἡ θβ πρὸς βν, ἡ νβ πρὸς βκ· συνθέντι ὡς ἡ θν πρὸς νβ, ἡ κν πρὸς κβ ἐναλλὰξ ὡς ἡ θν πρὸς νκ, ἡ νβ πρὸς βκ ϗ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ, οὕτω τὸ ἀπὸ νβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ· ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ νβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ, οὕτως ἐδείχθη ἡ θβ πρὸς βκ· ϗ ὡς ἄρα ἡ θβ πρὸς βκ, οὕτω τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ· τὸ δὲ ἀπὸ θζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ πάλιν γὰρ δύο ἀνίσαις ταῖς θζ, ζκ πρόσκειται ἡ νζ, ϗ διὰ τὸ ἀνωτέρω εἰρημένον ἡ θζ πρὸς ζκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θν πρὸς νκ, ὥστε ϗ τὰ διπλάσια· τὸ ἄρα ἀπὸ θζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ, τουτέστιν ἡ θβ πρὸς βε, τουτέστιν ἡ κζ πρὸς ζη· ἡ ἄρα θζ πρὸς ζη μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἡμιόλιον τοῦ τῆς κζ πρὸς ζη· ἐκκείσθωσιν γὰρ χωρὶς κείμεναι εὐθεῖαι, ὡς αἱ αβ, γ, δ. ὥςε τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γ μείζονα λόγον ἔχειν, ἤπερ, τὴν γ πρὸς τὴν δ· λέγω ὅτι ἡ αβ πρὸς δ μείζονα ἢ ἡμιόλιον λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ γ πρὸς τὴν δ· εἰλήφθω γὰρ τῶν γ, δ μέση ἀνάλογον ἡ ε· Ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ πρὸς τὴν δ, ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γ λόγος διπλάσιον ἐςὶν τοῦ τῆς αβ πρὸς γ· ὁ δὲ τῆς γ πρὸς τὴν δ διπλασίων ἐςὶ τοῦ τῆς γ πρὸς ε, καὶ ἡ αβ ἄρα πρὸς γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ γ πρὸς ε. γεγονέτω οὖν ὡς ἡ ε πρὸς τὴν γ, ἡ γ πρὸς τὴν βζ· καὶ ἐπεὶ τέσσαρες εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογον εἰσὶν αἱ βζ, γ, ε, δ· ἡ βζ ἄρα πρὸς δ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βζ πρὸς γ, τουτέςιν ἡ γ πρὸς ε· ἔχει δὲ καὶ ἡ γ πρὸς δ διπλασίονα λόγον τοῦ τῆς γ πρὸς ε· ἡ ἄρα βζ πρὸς δ ἡμιόλιον.

Λῆμμα εἰς τὸ ἑξῆς.

Ἔςωσαν τέσσαρες ὅροι οἱ α, γ, δ, β· λέγω ὅτι ὁ συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ ὑπὸ τῶν α, β πρὸς τὸ ἀπὸ γ μετὰ τοῦ τῆς β πρὸς δ λόγου, ὁ αὐτὸς ἐςὶ τὸ ὑπὸ αβ ἐπὶ τὴν β πρὸς τὸ ἀπὸ γ ἐπὶ τὴν δ· ἔςω γὰρ τῷ μὲν ὑπὸ αβ ἴσος ὁ κ, τῷ δὲ ἀπὸ γ ἴσος ὁ λ· καὶ γεγονέτω ὡς ὁ β πρὸς δ, οὕτως ὁ λ πρὸς μ· Ὁ ἄρα τοῦ κ πρὸς μ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ κ πρὸς λ, τουτέςι τοῦ ὑπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γ, καὶ τοῦ λ πρὸς μ τουτέςι τοῦ β πρὸς δ· ὁ δὲ κ τὸν β πολλαπλασιάσας τὸν ν ποιείτω· ὁ δὲ λ τὸν β πολλαπλασιάσας, τὸν ξ ποιείτω τὸν δὲ δ πολλαπλασιάσας, τὸν ο· Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν αβ ὁ κ ἐςὶν, ὁ δὲ κ τὸν β πολλαπλασιάσας τὸν ν πεποίηκεν, ὁ ἄρα ν ἐςὶν ὁ ὑπὸ αβ ἐπὶ τὸν β· πάλιν ἐπεὶ ὁ αὐτὸς ἀπὸ γ ὁ λ ἐςίν· ὁ δὲ λ τὸν δ πολλαπλασιάσας τὸν ο πεποίηκεν· Ὁ ο ἄρα ἐςὶν ὁ ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ τὸν δ, ὥςε ὁ τοῦ ὑπὸ αβ ἐπὶ τὸν β λόγος πρὸς τὸ ἀπὸ γ ἐπὶ τὸν δ λόγος, ὁ αὐτὸς ἐςὶ τῷ τοῦ ν πρὸς ο· δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ὁ τοῦ κ πρὸς μ λόγος ὁ αὐτὸς ἐςὶ τῷ τοῦ ν πρὸς ο· ἐπεὶ οὖν ἑκάτερος τῶν κ, λ τὸν β πολλαπλασιάσας, ἑκάτερον τὸν ν, ξ πεποίηκεν· ἔςιν ἄρα ὡς ὁ κ πρὸς τὸν λ, οὕτως ὁ ν πρὸς ξ· πάλιν ἐπεὶ ὁ λ ἑκάτερον τῶν β, δ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν ξ, ο πεποίηκεν· ἔςιν ἄρα ὡς ὁ β πρὸς δ, ὁ ξ πρὸς ο· ἀλλ' ὡς ὁ β πρὸς δ, ὁ λ πρὸς τὸν μ· Καὶ ὡς ἄρα ὁ λ πρὸς μ, ὁ ξ πρὸς ο· οἱ ἄρα κ, λ, μ τοῖς ν, ξ, ο, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ σὺν δύο λαμβανόμενοι, καὶ δὴ ἴσον ἄρα ἐςὶν ὡς ὁ κ πρὸς μ, οὕτως ὁ ν πρὸς ο· καὶ ὁ τοῦ κ πρὸς μ λόγος, ὁ αὐτὸς τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ ὑπὸ αβ πρὸς τὸν ἀπὸ γ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ β πρὸς δ· ὁ δὲ τοῦ ν πρὸς ο λόγος, ὁ αὐτὸς ἐςὶ τῷ ὑπὸ αβ ἐπὶ τὸν β πρὸς τὸν ἀπὸ γ ἐπὶ τὸν δ· Ὁ ἄρ[α] συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ ὑπὸ αβ πρὸς τὸν ἀπὸ γ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ β πρὸς δ, ὁ αὐτὸς ἐςὶ τῷ ὑπὸ αβ ἐπὶ τὸν β πρὸς τὸν ἀπὸ γ ἐπὶ τὸν δ.

Φανερὸν δὲ, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ αβ ἐπὶ τὸν β ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὸν α· ἐπεὶ γὰρ ἐςὶν ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτω τὸ ὑπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ β, τοῦ β κοινοῦ ὕψους λαμβανομένου· ἐὰν δὲ τέσσαρες ὅροι ἀνάλογον ὦσιν· τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων, ἴσον ἐςὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων· ὁ ἄρα ὑπὸ αβ ἐπὶ τὸν β, ἴσος ἐςὶ τῷ ἀπὸ τοῦ β ἀπὸ τὸν α.

Εἰς τὸ ἄλλως τοῦ ή.

Εἴρηται ἐν τοῖς προλαβοῦσιν, ὡς ἐὰν δύο μεγέθεων ληφθῇ τὸ μέσον, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ πρῶτον πρὸς τὸ μέσον, καὶ τὸ μέσον πρὸς τὸ τρίτον. Ὁμοίως δὲ κἂν πλείονα μέσα ληφθῇ, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ τῶν λόγων ὧν ἔχουσι πάντα κατὰ τὸ ἑξῆς πρὸς ἄλληλα τὰ μεγέθη καὶ ἐνταῦθα οὖν φησιν, ὅτι ὁ τοῦ βαδ τμήματος πρὸς τὸ βγβ τμῆμα λόγος σύγκειται, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ βαδ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσις μὲν ἐςὶν ὁ περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον· Καὶ ὁ αὐτὸς κῶνος πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτὴν, κορυφὴν δὲ τὸ γ σημεῖον καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος πρὸς τὸ βγδ τμῆμα δηλαδὴ τοῦ δαβ τμήματος, καὶ τοῦ βγδ μέσων λαμβανομένων τῶν εἰρημένων κωνικῶν· ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ β αδ τμήματος πρὸς τὸν βα δ κῶνον, ὁ τῆς κθ ἐςὶ πρὸς θγ, διὰ τὸ πόρισμα τοῦ δευτέρου θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου. Ἐλέγετο γὰρ τὸ τμῆμα πρὸς τὸν ἐν ἑαυτῷ κῶνον τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος πρὸς τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος· ὁ δὲ τοῦ βαδ κώνου πρὸς τὸν βγδ κῶνον, ὁ τῆς αθ ἐςὶ πρὸς θγ· Ἐπεὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη· ὁ δὲ τοῦ β γδ κώνου πρὸς τὸ βγδ τμῆμα, ὁ τῆς αθ ἐςὶ πρὸς θζ, διὰ τὸ ἀνάπαλιν τοῦ εἰρημένου πορίσματος, ὥςε ὁ τοῦ βαδ τμήματος

τος πρὸς τὸ βγδ τμῆμα λόγος σύγκειται, ἔκ τε τοῦ τῆς ηθ πρὸς θγ, καὶ τὸν τῆς αθ πρὸς θγ, καὶ τοῦ τῆς αθ πρὸς θζ· ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ τῆς ηθ πρὸς θγ, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ ὁ τοῦ ὑπὸ ηθα ἐστὶ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ· τὰ γὰρ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ηθα πρὸς τὸ ἀπὸ γθ, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θζ, ὁ τοῦ ὑπὸ ηθα ἐστὶν ἐπὶ τὴν θα, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, ὡς δέδεικται ἐν τῷ προληφθέντι λήμματι· ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ηθα ἐπὶ τὴν θα, ὁ αὐτὸς ἐστὶ τῷ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη· καὶ τοῦτο γὰρ συναποδέδεικται ἐν τῷ προληφθέντι· ὁ ἄρα τοῦ τμήματος πρὸς τὸ τμῆμα λόγος ὁ αὐτὸς ἐστὶ τῷ τοῦ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ. Ἐπεὶ οὖν δεῖ δεῖξαι, ὅτι τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ διπλάσιον τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου, δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ βαδ τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ βγδ· τουτέστι τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γβ· ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βγ, οὕτως ἡ αθ πρὸς θγ· δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς προλαβοῦσι θεωρήμασι. Δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἐλάσσονα, ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ· ἀλλὰ τὸν τῆς αθ πρὸς θγ λόγου διπλάσιος ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ· καὶ ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. Ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ τῆς θη κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτω τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θη· χρὴ ἄρα δειχθῆναι, ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ αὐτὸ τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θη· πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο μεῖζον ἐστί· δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν ζθ μεῖζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θη· τουτέστιν ὅτι μείζων ἡ ζθ τῆς θη· ἔστι δὲ τοῦτο φανερόν· ἀνίσοις γὰρ ταῖς αθ, θγ ἴσαι πρόσκεινται αἱ ζα, γη.

Ταῦτα εἰπὼν, αὐτὸς μὲν οὐκ ἐπήγαγε τὴν σύνθεσιν, ἡμεῖς δ᾽ αὐτὴν προσθήσομεν. ἐπεὶ ἡ ζθ τῆς θη μείζων ἐστὶ τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, μεῖζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θη· ὡς δὲ τοῦ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ αὐτὸ τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θη· ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θη, τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ γθ· τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ· ἀλλ᾽ ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ λόγος διπλάσιος ἐστὶ τοῦ τῆς αθ, πρὸς θγ· τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς αθ πρὸς θγ· ἀλλ᾽ ὁ μὲν τῶν τμημάτων λόγος ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ· ὁ δὲ τῶν ἐπιφανειῶν ὃν ἔχει ἡ αθ πρὸς θγ, τὸ ἄρα τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου· ἑξῆς δὲ ἀναλύων τὸ ἕτερον μέρος τοῦ θεωρήματος ἐπάγει· Φημὶ δὴ ὅτι τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τὸν ἡμιόλιον τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου· ἀλλ᾽ ὁ μὲν τῶν τμημάτων ἐδείχθη ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ· τοῦ δὲ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου ἡμιόλιος ἐστὶ ὁ τοῦ ἀπὸ αβ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς βγ κύβον· τοῦ γὰρ τῆς αβ πρὸς βγ διπλάσιος μὲν ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ αβ τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ βγ τετράγωνον· τριπλάσιος δὲ ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς αβ πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς βγ κύβον· ἀλλ᾽ ὡς ὁ ἀπὸ τῆς αβ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς βγ κύβον, οὕτως ὁ ἀπὸ αθ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς θβ κύβον. Ὡς γὰρ ἡ αβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως ἡ αθ πρὸς θβ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν αβγ, αβθ τριγώνων· ἐὰν δὲ ὦσι τέσσαρες εὐθεῖαι, ἀνάλογον καὶ τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν στερεὰ τὰ ὅμοια, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογόν εἰσιν, ὥστε ὁ ἀπὸ τῆς αθ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ θβ κύβον, ἡμιόλιον λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αβ τετράγωνον, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν, ἀλλ᾽ ὡς τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα, οὕτως τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ· φημὶ οὖν ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ὑπὸ ἀπὸ ἐπὶ τὴν θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ ἀπὸ τῆς αθ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς θβ κύβον· τουτέστιν ὁ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ· καὶ ὁ τῆς αθ πρὸς θβ· Ὁ γὰρ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ διπλασίω τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ προσλαβὼν τὸν τῆς αθ πρὸς θβ· ὁ αὐτὸς ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αθ κύβῳ πρὸς τὸν ἀπὸ θβ κύβον. Ἑκάτερος γὰρ τοῦ αὐτοῦ ἐστὶ τριπλάσιος· ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ προσλαβὼν τὸν τῆς αθ πρὸς θβ· ὁ τοῦ ἀπὸ αθ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ· ἐπεὶ γὰρ ὁ τῆς αθ πρὸς θβ λόγος ὁ αὐτὸς ἐστὶ τῷ τῆς θβ πρὸς θγ, τῆς βθ μέσης ἀνάλογον ὑπαρχούσης ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτὸς ἐστὶ τῷ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ μετὰ τοῦ τῆς βθ πρὸς θγ· ἀλλ᾽ ὁ τῆς βθ πρὸς θγ ὁ αὐτὸς ἐστὶ τῷ τοῦ ἀπὸ βθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ, τῆς βθ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. Ὥστε ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ λόγος, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, μετὰ τοῦ ἀπὸ θβ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ· ἀλλ' ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ λόγος ὁ συγκείμενός ἐστιν ἐκ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ, καὶ τοῦ ἀπὸ βθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ, τοῦ ἀπὸ βθ μέσου λαμβανομένου· ὥστε ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ λόγος, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ· ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ ἐπὶ τὴν θη, τῆς θη κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. φημὶ δὴ ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θη· πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσον ἐστί· δεικτέον ὅτι τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ βθγ ἐπὶ τὴν θη, ταυτὸν ἐστὶ τῷ δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θη πρὸς θζ· ἐὰν γὰρ ὦσι τέσσαρες ὅροι ὡς ἐνταῦθα, τὸ ἀπὸ γθ καὶ τὸ ὑπὸ γθβ, καὶ ἡ θη καὶ θζ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἔλασσον ᾖ τοῦ ὑπὸ τῶν μέσων, ὁ α'. πρὸς τὸν β'. ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ'. πρὸς τὸν δ'. ὡς δέδεικται ἀνωτέρω· εὐλόγως ἄρα ἐχρῆν δεῖξαι τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἔλασσον τοῦ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θη· ταυτὸν ἐστὶν τῷ δεῖξαι ὅτι τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θη πρὸς θζ· ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ, ἡ γθ πρὸς θβ· δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ γθ πρὸς θβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θη πρὸς θζ· τουτέστιν ἡ ηθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ· ἤχθω ἀπὸ τοῦ ε τῇ εγ πρὸς ὀρθὰς ἡ εκ· καὶ ἀπὸ τοῦ β κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ βλ· ἐπίλοιπον ἡμῖν δεῖξαι δεῖ, ὅτι ἡ ηθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ· ἴση δέ ἐστιν ἡ θζ συναμφοτέρῳ τῇ θα κε· ἡ γὰρ αζ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστί· δεῖ ἄρα δεῖξαι ὅτι ἡ ηθ πρὸς συναμφότερον τὴν θα κε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ· καὶ ἀφαιρεθείσης ἄρα ἀπὸ τῆς ηθ τῆς γθ· ἀπὸ δὲ τῆς κε τῆς ελ ἴσης τῇ βθ δεήσει δειχθῆναι, ὅτι λοιπὴ ἡ γη πρὸς λοιπὴν συναμφότερον τὴν αθ κλ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ· ἐπεὶ γὰρ ἔδει δειχθῆναι, ὅτι ἡ ηθ πρὸς συναμφότερον τὴν θα κε μείζονα λόγον ἔχει· ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ· καὶ ἐναλλὰξ, ὅτι ἡ ηθ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ θα κε πρὸς θβ· τουτέστι πρὸς λε, καὶ διελόντι ἡ ηγ πρὸς γθ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ θα κλ πρὸς λε, τουτέστι πρὸς βθ· ἐναλλὰξ, ὅτι ἡ ηγ πρὸς συναμφότερον τὴν θα κλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ· ἀλλ' ὡς ἡ γθ πρὸς θβ, οὕτως ἡ θβ πρὸς θα, τουτέστιν ἡ λε πρὸς αθ· ὅτι ἄρα ἡ ηγ πρὸς συναμφότερον τὴν θα κλ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ λε πρὸς αθ· καὶ ἐναλλὰξ, ὅτι ἡ γη, τουτέστιν ἡ κε πρὸς ελ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλθα πρὸς θα, διελόντι ἡ κλ πρὸς λε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ αὐτὴ ἡ κλ πρὸς θα· τουτέστιν ὅτι ἐλάσσων ἡ λε τῆς θα ἐστίν. Ἑξῆς δὲ ἡμεῖς τὴν σύνθεσιν προσθήσομεν, ἐπεὶ ἡ λε τῆς αθ ἐλάσσων, ἡ ἄρα κλ πρὸς λε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κλ πρὸς αθ· συνθέντι ἡ κε πρὸς ελ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλαθ πρὸς αθ· ἡ δὲ λε τῇ βθ ἐστὶν ἴση· ἡ ἄρα ηγ πρὸς βθ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλ αθ πρὸς αθ· ἐναλλὰξ, ἡ ἄρα ηγ πρὸς συναμφότερον τὴν κλαθ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ βθ πρὸς θα, τουτέστιν ἡ γθ πρὸς θβ· ἐναλλὰξ ἡ ηγ πρὸς γθ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλαθ πρὸς θβ· συνθέντι ἡ ηθ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλαθ μετὰ τῆς θβ, τουτέστι συναμφότερος ἡ αθ κε πρὸς βθ· ἴση δὲ ἡ κε τῇ αζ· ἡ ἄρα ηθ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ζθ πρὸς θβ· ἐναλλὰξ ἡ ηθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ· ὡς δὲ ἡ γθ πρὸς θβ, οὕτω τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ· ἡ ἄρα ηθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ, καὶ διὰ πρότερον εἰρημένα· τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θη· τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ βθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θη, τουτέστι τὸ ὑπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ, ἐπὶ τὴν θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθ· ὁ δὲ τοῦ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ, τοῦ ἀπὸ βθγ, μέσου λαμβανομένου, σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, καὶ τὸν ἀπὸ βθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ· ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ βθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ λόγος ὁ αὐτὸς ἐστὶ τῷ τῆς βθ πρὸς θγ, τουτέστι τῷ τῆς αθ πρὸς βθ· τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ· ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τὸν ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, καὶ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ τῆς αθ κύβου, πρὸς τὸν ἀπὸ θβ κύβον· τουτέστι τοῦ ἀπὸ αβ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ βγ κύβον· τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ μείζονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ αβ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ βγ κύβον· ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ λόγος, ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ τῶν τμημάτων λόγῳ· ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς αβ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς βγ κύβου λόγον, ἡμιόλιος ἐδείχθη τοῦ τῶν ἐπιφανειῶν λόγου· τὸ ἄρα τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἡμιόλιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν.

Εἰς τὸ Θ΄.

Δῆλον δὲ ὅτι ἡ βα τῆς μὲν ακ ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ διπλασία δυνάμει, τῆς δὲ ἐκ τοῦ κέντρου μείζων, ἢ διπλασία· ἐπιζευχθείσης γὰρ ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὸ κέντρον τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ ἀμβλείας γινομένης ὑπὸ τῆς βα, τὸ ἀπὸ τῆς αβ μεῖζον ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν περιεχουσῶν ἴσων ὄντων· ὥστε τοῦ ἑνὸς αὐτῶν, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου μείζων ἐστὶν, ἢ διπλάσιον. πάλιν δὲ τοῦ ἀπὸ αβ ἴσου ὄντος τοῖς ἀπὸ ακ, βκ· καὶ μείζονος ὄντος τοῦ ἀπὸ ακ τοῦ ἀπὸ κβ, τὸ ἀπὸ αβ τοῦ ἀπὸ ακ ἔλασσον ἐστὶν ἢ διπλάσιον· καὶ ταῦτα μὲν ἐπὶ τοῦ σχήματος, ἐφ' οὗ σημεῖον θ. Ἐν δὲ τῷ ἑτέρῳ σχήματι τἀναντία τούτοις εἰκότως λεχθήσεται.

Ἔστω τῇ ελ ἴση ἡ εν· καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετον τὴν θζ, κῶνος ἔστω κορυφὴν ἔχων τὸ ν· σημεῖον· ἴσος δὴ καὶ οὗτός ἐστι τῷ κατὰ τὴν θεζ περιφέρειαν ἡμισφαιρίῳ. Ἐπεὶ γὰρ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν θζ, ὕψος δὲ τὴν δε, τοῦ μὲν κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν, καὶ ὕψος ἴσον, τριπλάσιος ἐστὶ, τοῦ δὲ ἡμισφαιρίου ἡμιόλιος τὸ ἡμισφαίριον διπλάσιον ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ κώνου· ἔστι δὲ καὶ ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν θζ κύκλον· ὕψος δὲ τὴν λν, διπλάσιος τοῦ αὐτοῦ κώνου· καὶ τὸ ἡμισφαίριον ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζθ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν λν.

Τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν αργ μεῖζον ἐστὶ τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ακγ, διότι τὴν ἐλάσσονα πλευρὰν τῆς ἐλάσσονος τοῦ ἑτέρου μείζονα ἔχει· εἴρηται γὰρ ἀνωτέρω, ὅτι ἐὰν εὐθεῖα τμηθῇ εἰς ἄνισα, κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῶν κατὰ τὴν ἐγγυτέραν τῆς διχοτομίας τομὴν μεῖζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν τμημάτων κατὰ τὴν ἀποτέρω· ταυτὸν δὲ ἐστὶν εἰπεῖν· διότι τὴν ἐλάσσονα πλευρὰν τῆς ἐλάσσονος τοῦ ἑτέρου μείζονα ἔχει· ὅσῳ γὰρ ἐλάσσων ἐστὶ, τοσούτῳ πλέον ἀφέστηκεν ἡ τομὴ τῆς διχοτομίας.

Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς αρ ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ακ, γξ· ἥμισυ γάρ ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αβ· ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῇ ἡ βγ διὰ τὸ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς κάθετον ἦχθαι τὴν βκ, καὶ τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοια εἶναι· τῷ ὅλῳ γὰρ τὸ ὑπὸ γακ ἴσον τῷ ἀπὸ αβ, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῆς ἡμισείας τῆς γα, καὶ ακ, τουτέστι τὸ ὑπὸ γξ ακ ἴσον ἐστὶ τῷ ἡμίσει τοῦ ἀπὸ αβ, τουτέστι τῷ ἀπὸ αρ.

Μεῖζον οὖν ἐστὶ καὶ τὸ συναμφότερον τοῦ συναμφοτέρου· ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ακ, γξ, τῷ ἀπὸ αρ, μεῖζον δὲ τὸ ὑπὸ αργ τοῦ ὑπὸ ακγ· ἐὰν δὲ ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα, καὶ ἐκεῖνο μεῖζον, ὃ καὶ ἐξ ἀρχῆς μεῖζον, τῷ ὑπὸ αργ προστεθέντος τοῦ ἀπὸ αρ, τῷ δὲ ὑπὸ ακγ τοῦ ὑπὸ ακγξ, μεῖζον γίνεται τὸ ὑπὸ αργ μετὰ τοῦ ἀπὸ αρ, τοῦ ὑπὸ ακγ, μετὰ τοῦ ὑπὸ ακγξ, ἀλλὰ τὸ ὑπὸ αργ, μετὰ τοῦ ἀπὸ αρ ἴσον γίνεται τῷ ὑπὸ γαρ, διὰ τὸ δεύτερον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῆς στοιχειώσεως· τὸ δὲ ὑπὸ ακγ μετὰ τοῦ ὑπὸ ακγξ ἴσον τῷ ὑπὸ ακκξ διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ αὐτοῦ βιβλίου, ὥστε τὸ ὑπὸ γαρ μεῖζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ ακξ· τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ξκα ἴσον ἐστὶ τὰ ὑπὸ τῶν μκγ. Ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ ξγ πρὸς γκ, ἡ μα πρὸς ακ· ὥστε καὶ συνθέντι ὡς ἡ ξκ πρὸς κγ, οὕτως ἡ μκ πρὸς κα· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ξκα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ μκγ· ἀλλὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ξκα μεῖζον ἦν τὸ ὑπὸ γαρ· καὶ τὸ ὑπὸ γαρ ἄρα μεῖζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ μκγ· ὥστε μείζονα λόγον ἔχει ἡ αγ πρὸς γκ, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ· ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες εὐθεῖαι εἰσὶν αἱ γκ, κμ, γα, αρ· καὶ τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης καὶ τῆς γα, καὶ τετάρτης τῆς αρ, μκ, ἴσον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ δευτέρας τῆς μκ, καὶ τῆς τρίτης τῆς κγ· ἡ πρώτη ἡ γα πρὸς δευτέραν τὴν μκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τρίτη ἡ κγ πρὸς τετάρτην τὴν αρ· καὶ ἐναλλὰξ ἡ γα πρὸς κγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ· ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ αγ πρὸς γκ, τοῦτον ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς αγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ· ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς βγ, διὰ τὸ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς κάθετον εἶναι τὴν βγ, γίνεται ὡς ἡ αγ πρὸς γβ, ἡ βγ πρὸς γκ· καὶ διὰ τοῦτο ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, τουτέστιν ἡ αγ πρὸς γκ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ· ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ, οὕτω τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ· ὅμοιον γὰρ τὸ αβκ τῷ αβγ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ αγ πρὸς γκ, οὕτω τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ· ἡ δὲ αγ πρὸς γκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ· καὶ τὸ ἀπὸ αβ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ βκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίσεια τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ αβ· ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ αρ, πρὸς τὸ ἀπὸ βκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡμίσεια τῆς μκ πρὸς τὴν αρ· τουτέστιν ἡ μκ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς αε, ἀλλὰ τῷ ἀπὸ αε ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ζλ· ἐπειδὴ ἡ μὲν αβ τῇ εξ ὑπόκειται ἴση, ἡ δὲ εζ τῇ ζλ δυνάμει διπλῇ· ἴση γὰρ ἡ ελ τῇ λζ. Τῆς δὲ αε διπλασία ἡ νλ· ἐπεὶ καὶ τῆς λζ· ὥστε τὸ ἀπὸ ζλ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς αε, ἥ ἐστιν ἴση τῇ λν· μείζονα ἄρα λόγον ἔχει καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν θζ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ, ἤπερ ἡ μκ πρὸς νλ· ὥστε μείζων ἐστὶν ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζθ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ μ σημεῖον. Ἐὰν γὰρ ποιήσωμεν ὡς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζθ κύκλον πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλον, οὕτω τὴν κμ πρὸς ἄλλην τινὰ, ἔσται πρὸς ἐλάσσονα τῆς λν· καὶ ἔσται ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζθ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν εὑρεθεῖσαν ἐλάσσονα εὐθεῖαν, ἴσος μὲν τῷ μβδ διὰ τὸ ἀντιπεπονθέναι τὰς βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἐλάττων δὲ τοῦ νθζ διὰ τὸ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντας πρὸς ἀλλήλους εἶναι ὡς τὰ ὕψη· δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ἡμισφαίριον τὸ κατὰ τὴν εζθ περιφέρειαν, μεῖζόν ἐστι τοῦ τμήματος τοῦ κατὰ τὴν αβδ περιφέρειαν.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΣ

Χωροῦσα περὶ εὑρέσεως τῶν δύο Μέσων συνεχῶς ἑξῆς Ἀνάλογον Γραμμῶν, ἐπινοηθεῖσα, καὶ φιλοπονηθεῖσα παρὰ

ΜΠΑΛΑΝΟΥ ΒΑΣΙΛΟΠΟΥΛΟΥ

ΔΙΔΑΣΚΑΛΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ.

Μετά τε προσθήκης μιᾶς Προτάσεως περὶ καταγραφῆς ἐλλειψοειδῶν Σχημάτων.

Τοῖς ἐντευξομένοις τῷ παρόντι φιλοπονήματι, μικρῷ μὲν ὄντι, μεγάλην, δὲ παρ᾽ ἐμοὶ κριτῇ, παρέξοντι τὴν ὠφέλειαν τοῖς φιλομαθέσι,

ΜΠΑΛΑΝΟΣ ΒΑΣΙΛΟΠΟΥΛΟΣ

Ο͑ ΠΡΩΤΟΠΑΠΑ͂Σ Ι᾽ΩΑΝΝΙ´ΝΩΝ ΧΑΙ´ΡΕΙΝ.

Πολλὰ μὲν ἤδη, φιλεπιστήμονες ἄνδρες ϗ φιλομαθεῖς, τὰ συντελοῦντα εἰς εὕρεσιν τῶν πολλοῖς ἀπορουμένων, καί τισιν ὅλως ἀπιστουμένων, αὔξησίν τε τῶν ἐπιστημῶν, ϗ τελειοτέραν αὐτῶν διακόσμησιν. Δύο δὲ ταυτὶ τὰ ἀναγκαιότερα, ἀγχίνοιά φημι ϗ φιλοπονία, ὧν ἄνευ τἄλλα πάντα, ἀνωφελῆ πως εἰσὶν, ἢ μικρόν τι χρησιμεύουσι. Τούτων δ᾽ αὖθις ἡ μὲν παρ᾽ αὐτῆς δωρεῖται, ἵν᾽ οὕτως εἴπω, τῆς φύσεως, ϗ ἔμφυτος ὑπάρχει τοῖς ἀνθρώποις τελειότης, ὡς ἐκ τῆς τῶν αἰσθητηρίων ἀναφυομένη ἐπιτηδειότητός τε ϗ συμμετρίας, ϗ αὐτῆς τῆς πρὸς τὸ φαντάζεσθαι εὐχερῶς τὰ νοητὰ δυνάμεως, ϗ τῆς ἐν τῇ μνήμῃ τῶν ἐγνωσμένων διαμονῆς. Ἡ δὲ, τῆς ἡμετέρας ἐξαρτᾶται θελήσεως, ϗ τῆς πρὸς τὰ πλείω εἰδέναι ἀκορέστου ἐφέσεως. Ταῖς δυσὶ γὰρ ταύταις ἀνθρωπίναις ἀρεταῖς, οἵ τε πάλαι, ϗ νῦν τῶν Ἐπιστημῶν ἐρασταὶ καθοπλιζόμενοι, ϗ ἑκόντες τοῖς πόνοις ὁσημέραι γενναίως παραταττόμενοι, ἀφειδοῦντες τοῦ σώματος, πρὸς μείζονα τοῦ νοὸς τελειότητα, οὐ μόνον εἰς κρείττονα ταύτας προήγαγον κατάστασιν, ἀλλ᾽ ἀναπτύσσοντές γε τὰ παρ᾽ ἄλλοις ἀμφιβαλλόμενα, ϗ προσθέντες ἑκάστῃ τὰ ἐλλείποντα ἀνέθρεψάν τε καλῶς, ϗ ἀκμαιοτέρας αὐτὰς ἀπέδειξαν. Ὧν τὸ κάλλος ϗ ἡ ἰσχὺς τοῖς αὐτῶν τροφίμοις γνώριμον, ϗ οὐδὲ τούτοις πᾶσιν.

Ἀμφοτέρων τοίνυν συντρεχουσῶν, ἀμφοτεροδέξιοι εἰσὶ ϗ οἱ τῶν ἐπιστημῶν ἀπρὶξ ἀντεχόμενοι. Εὐχερέστερόν τε ἅμα ϗ ἀκριβέστερον τὰς θεωρίας ποιοῦνται, τὸν νοῦν ϗ ἐπ᾽ αὐτῶν τῶν δυσνοήτων ϗ ἀγνοουμένων γονιμώτερον ἐπὶ τὸ ἐνεργεῖν τῇ ἀκμήτῳ καθιστῶντες φιλοπονίᾳ, ὡς ϗ ὁ τῇ ἀντλίᾳ συνεχῶς ἀρδεύων τὴν γῆν. Καὶ ὀξύτερόν γε πρὸς ἀντίληψιν, ἡνιόχου δίκην τοῦ εἰς ταχύτερον δρόμον τοὺς ὁμοζύγους ἵππους τῇ μάστιγι διεγείροντος. Θατέρου δὲ τῶν δύο τούτων καλῶν ὑποσκάζοντος, ἀτελῆ τὰ πάντα ϗ ἄκοσμα, κἂν πολλὰ εἴη τὰ μέσα. Οὐ γὰρ ἡ πολλῶν διδασκάλων ἀκριβὴς παράδοσις, οὐ τῶν ὑπομνηματιστῶν αἱ ἐντελεῖς τῶν δυσνοήτων ἀναπτύξεις, οὐ πλῆθος βιβλίων, οὔτε χρόνου μακροῦ συνεχὴς παιδεία, ἢ εὐπορία τῶν πρὸς τὸ ζῆν, ϗ καιρὸς ὡρισμένος μελέτης, οὔτε μὴν ἐλευθερία γλώττης, οὐδ᾽ ἄλλο τι τῶν τοιούτων δύναταί τι πρὸς ἐπίτευξιν βαθυτέρων νοημάτων, ϗ τῶν τοῖς ἄλλοις ἀπιστουμένων, ἢ ἀπορουμένων κατάληψιν, ἀγχινοίας τε μὴ ἐνυπαρχούσης, ϗ φιλοπονίας μὴ συντρεχούσης.

Πρὸς ἀλλήλας δ᾽ αὗται παραβαλλόμεναί τε ϗ ἀντιπαρεξεταζόμεναι ἰδίῳ τινὶ ἀλλήλων ὑπερέχουσι προτερήματι, καί πως ἑαυτὰς βελτίους ἀλλήλων ἀποκαθιστᾶσιν. Ἀγχίνοια μὲν γὰρ ὑψηλοτέρα φιλοπονίας καθέστηκε, ϗ πολλῷ τῷ μέτρῳ ταύτης τιμιωτέρα τῇ ἀξίᾳ κρίνεται. Διὸ ϗ πάντες ἀγχινοίας ἐφίενται. Καὶ οὐδένα οἶμαι τῶν φιλομαθῶν ἀγχινοίᾳ τῶν ἄλλων ἀπολειπόμενον, μὴ δυσαναχετεῖν ϗ ἀγάλλειν ἐπὶ τῇ θεωρίᾳ τῶν δυσλήπτων, πολλὰ τῇ φύσει καταμεμφόμενον, πολλοὺς δὲ ταύτῃ ὑπερταίροντα μὴ μεγαλαυχοῦντε ϗ ἐναβρύνεσθαι· κτήσασθαι δὲ ταύτην ἀμήχανον. Οὐ γὰρ τῶν ἐφ᾽ ἡμῖν, οὐδ᾽ ἐπίκτητος, κἂν πολλαῖς ἰατροῖς δαπανήσῃ τις τὸν βίον. Φιλοπονία δὲ χρησιμωτέρα πολὺ ἀγχινοίας, ϗ ἀνάγκης, ἵνα τἀληθὲς εἴπω, ἀγχίθυρον. Ὅσα γὰρ διὰ τῆς ἀγχινοίας εὐχερῶς δέχεταί τις διδασκόμενος, ἢ θεωρῶν ἐφευρίσκει, ταῦτα τῇ φιλοπονίᾳ ἀναπελῶν κατὰ νοῦν, εἰς βάθος ἐντυποῖ τῆς μνήμης, ϗ ἀνεξάλειπτά πως κατεργάζεται. Ἃ δὲ τῇ ἀγχινοίᾳ ἀπολείπεται, τῇ φιλοπονίᾳ πάντως ἀναπληροῖ.

Τοιαύτην τοιγαροῦν περὶ τούτων τὴν κρίσιν κατ᾽ ἐμαυτὸν ποιούμενος, ϗ ὀρθῶς ἔχειν οἰόμενος, ἐραστὴς φιλοπονίας, ὡς εἶχον ἐγενόμην δυνάμεως. Καὶ ταύτῃ μᾶλλον τεθαῤῥηκὼς, πρὶν ἢ παρελθεῖν πεντεκαίδεκα ἡλιακὰς ὁλοκλήρους περιόδους, τοῖς Γεωμετρικοῖς ἐνασχολούμενος προβλήμασί τε, ϗ θεωρήμασι, καί τινα εὐληπτοτέραν ϗ ἀκριβεστέραν ἔκθεσιν τούτων ποιούμενος εἰς διακαῆ. ἐκ τῆς ἐν τούτοις ἡδύτητος, ἐμπέπτωκα ἔρωτα θατέρου τῶν πάλαι ϗ νῦν ἀπορημένων πολυθρυλλήτων γεωμετρικῶν προβλημάτων, τοῦ εἰς γεωμετρικὴν φημὶ εὕρεσιν τῶν δύο Μέσων συνεχῶς ἑξῆς Ἀνάλογον Γραμμῶν, δοθεισῶν τῶν ἄκρων ἀφορῶντος, ἀδύνατον ὅλως ἡγούμενος τὴν τοῦ ἑτέρου ἐπίτευξιν, τοῦ εἰς Τετραγωνισμὸν προβαλλομένου τοῦ κύκλου. Πολλὰ δὲ διὰ πολλῶν ἡμερῶν κἀν τούτῳ ποιήσας, διαφόρους τε τρόπους εἰς κατασκευὴν ποικίλων γεωμετρικῶν σχημάτων ἐπινενοηκὼς, ϗ μηδενὸς τῶν τότε ἐπινοηθέντων εἰς τὴν τῶν ζητουμένων εὕρεσιν χρησιμεύσαντος, χαίρειν εἰπὼν τοῖς βουλομένοις, τοιούτοις ἐνασχολεῖσθαι θεωρήμασιν, ὑψηλοτέρας ἀγχινοίας ϗ βαθυτέρας φιλοπονίας, τὴν περὶ τούτου εἶναι ζήτησιν ἀποφαινόμενος, ϗ ἀνδρῶν ἀποκύημα, τῶν πρὸς τὸ ζῆν μεριμνῶν ἀπηλλαγμένων, ϗ τὰς θεωρίας ἐν γαλήνῃ ποιουμένων βαθυτάτῃ, εἰς τὴν θεωρίαν ϗ ἔρευναν τῶν κατὰ τὴν ἐμὴν δύναμιν Γεωμετρικῶν ἐτράπην προβλημάτων, ἐμαυτῷ μᾶλλον μεμφόμενος, ὡς τοῖς ἀδυνάτοις ἐπιχειροῦντι, ϗ κλώθειν πειρωμένῳ, τὸ δὴ λεγόμενον, τὰ ἀσύγκλωστα. Τῆς δὲ περὶ τῶν τοιούτων ἡδυτάτης θεωρίας τὴν φλόγα ἀναζωπυρησάσης τοῦ προκαταλαβόντος με, ὡς ἔφθην εἰπὼν, ἔρωτος, ἀναλαβὼν ἐμαυτὸν ἀπὸ τῆς τοῦ ποθουμένου ἀπογνώσεως, ὡς ἀπὸ χαλεπῆς τινος νόσου, καί πως εὔελπις γεγονὼς, ἀσμένως τῶν προτέρων ἐκ δευτέρου ἡψάμην πόνων. Ἐν διαστήματι δὲ ἱκανῶν ἡμερῶν μηδὲν ϗ τότε ἀνύσας, ϗ εἰς ἀπόγνωσιν αὖθις τῆς τοῦ κυνηγεσίου θήρας ἐμπεσὼν, ϗ πάλιν ἐμαυτὸν ἀναλαβὼν, ϗ τοῦτο ἐκ διαλειμμάτων διὰ πολλοῦ ποιησάμενος γεωμετρικῶς τὴν τοῦ ἠπορημένου τούτου λύσιν ἐξεθέμην, διὰ τοῦ οὕτωσὶ κατασκευασθέντος διαγράμματος, γεωμετρικαῖς αὐτὴν ἐμπεδώσας ἀποδείξεσι.

Πολλάκις δὲ τήν τε κατασκευὴν τοῦ αὐτοῦ προβλήματος, ϗ τὰς δείξεις ἀκριβῶς ἐρευνήσας, μή τι ἐν αὐταῖς δεδομένον εἴη ζητῶν, ἢ ἀναπόδεικτον, ἢ ὅλως κρύπτηταί τις παραλογισμὸς, ϗ μηδὲν τοιοῦτον εὑρὼν, πέπεισμαι ἐμαυτῷ, ὑγιῶς τε ἔχειν τὰ πάντα ϗ γεωμετρικαῖς ἀσφαλίζεσθαι ἀρχαῖς. Ἀλλ᾽ οὐ μέντοι γε ἐφησυχάζειν ἠδυνάμην, ἂν μὴ ϗ παρ᾽ ἄλλοις κριταῖς τὰ αὐτὰ δόξειεν.

Ἔγραψα τοίνυν κατὰ τὸ ͵αψνʹ. Ἔτος τὸ σωτήριον πρὸς τοὺς ἐν τῇ περιφήμῳ Ἀκαδημίᾳ Πετρουπόλεως ἐπιστήμονας, ἀξιῶν αὐτοὺς δηλῶσαι μοι διὰ γραμμάτων ὁπωσδήποτε ἔχουσι τὰ περὶ τοῦ αὐτοῦ προβλήματος, ϗ τῆς τούτου λύσεως. Οἱ δὲ ἀπαντῶντες τοῖς ἐμοῖς γράμμασιν, ὡς ἐζήτουν, τὰς τῶν πάλαι ϗ νῦν ἐκτεθειμένας ἐφόδους εἰς λύσιν τοῦ τοιούτου προβλήματος διὰ βραχέων ἐδήλουν, προθέντες ἐν τῷ τέλει, ὡς ἐν ἐπιλόγῳ, αὐτολεξὶ ϗ ταῦτα.

„Εἰ τοίνυν, Αἰδεσιμώτατε ἄνερ, συντομώτερον ϗ εὐχερέστερον, ἄνευ τῆς καταγραφῆς τῶν „κωνικῶν τομῶν, ϗ καμπύλων γραμμῶν δυσχερεστέρας οὔσων καταγραφῆς, ἰσχύεις λῦσαι τὸ παρὸν „Πρόβλημα, παρέχον οὐ μικρὰν τὴν λυσιτέλειαν τοῖς φιλομαθέσι, ϗ κοινωνῆσαι τοῦτο τῇ Ἀκαδημίᾳ οὐδ᾽ ὅλως διστάζεις, πέπεισο ἀσφαλέστατα, ὅτι αὕτη ἡ Ἀκαδημία, ἥτις παντοίοις τρόποις „περιποιεῖται ϗ περιθάλπει τοὺς ἐνασχολουμένους πρὸς τὸ αὐξῆσαι τὰς ἐπιστήμας, μετὰ μεγίστης ἡδο„νῆς τοὺς σοὺς πόνους ἀποδεχθήσεται ϗ φιλοφρονήσει· ἔῤῥωσο.

Ταῦτα δ᾽ ἐγὼ ἀποδεξάμενος, ϗ μηδένα ἔχων εἰς τοῦτο δισταγμὸν, ἐν τάχει πρὸς τὴν αὐτὴν ἀπέστειλα Ἀκαδημίαν τὴν διὰ πολλῶν πόνων, ἐκ ὀλίγων δὲ ἱδρώτων εὑρεθεῖσαν μοι λύσιν τοῦ Προβλήματος, συντομωτέρας μέν τοι τῆς αὐτοῦ κατασκευασθείσης δείξεως, ἵνα μὴ προσκορής τε ἅμα, ϗ ἐπαχθὴς εἰς θεωρίαν εἴη. Μετὰ ἑπταμηνιαῖον δὲ ϗ ἐπέκεινα τοῦ χρόνου διάστημα, ἐνστάσεις τινὰς παρὰ τῆς αὐτῆς ἐδεξάμην Ἀκαδημίας, γενομένης τῆς βασάνου ἐπὶ τῆς τοῦ προβλήματος δείξεως τε ϗ κατασκευῆς διὰ τῶν ἀριθμητικῶν ἐφόδων, ἀλλὰ μὴ γεωμετρικῶς ὡς ἐζήτουν. Διὸ ϗ οἱ εὑρεθέντες ἀριθμοὶ ἀντὶ τῶν δύο μέσων συνεχῶς ἑξῆς ἀνάλογον γραμμῶν τῶν γεωμετρικῶς εὑρεθεισῶν, ἐλάττονες ἦσαν τῶν ἀριθμητικῶς εὑρισκομένων. Τοῦτο δὲ παρὰ τὴν διάφορον τῶν ἐν τῷ διαγράμματι γραμμῶν λῆψιν εἰς τὴν αὐτοῦ κατασκευὴν, οὐχὶ δὲ παρὰ τὸ παραλογισμόν τινα κρύπτεσθαι, προέρχεται. Εἰ γὰρ ἡ ἐν τῷ Σχήματι βζ γραμμὴ ληφθῇ ἐλάττων τῆς βγ, ἐγγύτερον πάντως εὑρεθήσονται οἱ ἀριθμοὶ τῶν ἀληθῶν, ἵνα μὴ ϗ ἴσοι ἐκείνοις εἴπω. Οὗ χάριν, καίπερ τότε συνειχόμην τεταρταίῳ πυρετῷ χρονίῳ, θαῤῥῶν ὅμως τῇ ἀκριβείᾳ τῆς τε κατασκευῆς ϗ δείξεως τοῦ Προβλήματος, κατὰ τὰς διαλειπούσας μόνας ἡμέρας, τὰς λύσεις τῶν ἐνστάσεων, ὡς εἶχον δυνάμεως, κατεσκεύασα. Καὶ εἰς Οὐενετίας ταύτας ἀπέστειλα μετὰ τῆς προτάσεως, πρὸς τοὺς ἐκεῖ διατρίβοντας γνησίους μοι μαθητὰς, μικράν τινα παραλλαγὴν ϗ ἔκτασιν διὰ τὸ εὐληπτότερόν τε ϗ ἀκριβέστερον, παυσάμενος τῆς προεκτεθείσης δείξεως. Οἱ δὲ διὰ συνδρομῆς φίλων εὐγενῶν, ϗ φιλεπιστημόνων ἀνδρῶν, τὰς μὲν λύσεις τῶν ἐνστάσεων μετὰ τῆς τοῦ προβλήματος προτάσεως ἀπέστειλαν εἰς τὴν ἐν Πετρουπόλει Ἀκαδημίαν, τὴν δὲ πρότασιν μόνην μετὰ ἐγκυκλίου ἐπιστολῆς εἰς τὴν ἐν Παρισίῳ, Βρεττανίᾳ, Ὀλλάνδᾳ, Βερολίνῳ, Ἄλλῃ τῆς Σαξονίας, ϗ τὴν ἐν Βονωνίᾳ, παρ' ἧς ϗ μόνης ἐδεξάμην τὴν εἰς τὰ ἐμὰ γράμματα ἀπάντησιν. Οὐ μέντοι εἰς κρίσιν τοῦ προβλήματος, ἀλλ' ἐπαινόντως τῶν πόνων, ϗ εὐχαριστίαν τοῦ εἰς αὐτὴν σταλῆναι τὴν πρότασιν. Πρὸς γὰρ τοῖς ἄλλοις ἐμπεριέχει ϗ ταῦτα αὐτολεξεί.

„Ἡ ἡμετέρα Ἀκαδημία, ἧ ἐγὼ ἐξ ἀποῤῥήτων εἰμὶ, σοὶ ϗ περὶ τῆς σῆς ἀγχινοίας συνήδεται, καὶ χάριτας ὁμολογεῖ, τῆς πρὸς αὐτήν σου ἐξαιρέτου ἀγάπης. Τὸ μέντοι κρυφιώτατον ζήτημα διαλῦσαι, ϗ τὴν ἰδίαν αὐτῆς κρίσιν ἐπαγαγεῖν οὐ τολμᾷ. Καὶ τοῦτο ἔχει ἑαυτῇ νενομοθετημένον· ϗ τὰ ἑξῆς· (μετὰ δὲ ταῦτα) Σὲ δὲ ἄνερ ἐξοχώτατε, βουλοίμην εἶναι καθ' ἑαυτὸν πεπεισμένον, τὴν σὴν ἡμᾶς ἀγχίνοιαν λίαν θαυμάζειν, ϗ πρὸς σὲ σπουδὴν ϗ ἀγάπην θάλπειν καὶ „τρέφειν. Εἴθε πολλοὶ μιμοῖντο τὰ σὰ ἐγχειρήματα· ϗ τὰ ἑξῆς.

Καὶ αὕτη μὲν ἡ Ἀκαδημία ταῦτα, παρὰ δὲ τῶν ἄλλων οὐδεμία, οὐκ οἶδ' ὅπως, ἀπόκρισις προσφιλὴς, ἢ γοῦν ἐναντία, μέχρι τοῦδε ἐγένετο, δύο ἔγγιστα ἡλιακῶν παρελθόντων χρόνων. Οὗ τί ἂν εἴη λυπηρότερον, ἵνα μή τι ἄλλο εἴπω; Εἰ μὲν γὰρ ὀρθῶς ἥτε κατασκευὴ ϗ δεῖξις, τοῦ αὐτοῦ προβλήματος ἔχει, τοιαύτην δεῖ ϗ τὴν περὶ αὐτῶν γίνεσθαι, ἢ τοῦτο δίκαιον, κρίσιν. Εἰδ' ἀμφότεραι, ἢ γοῦν ἡ ἑτέρα μόνη παραλογισμόν τινα ἐν ἑαυτῇ κρύπτει, τὸν αὐτὸν πάντως γε παραλογισμὸν ἐλέγχεσθαι ἀνακαλυπτόμενον. Εἰ γὰρ ἀδύνατος ἦν ἡ τοῦ προβλήματος τούτου λύσις, ὥς τινες ἐν μέρει ἀποφαίνονται, πῶς ἂν κατὰ διαφόρους τοῦ σχήματος καταγραφὰς διαφόρως λαμβανομένων τῶν βζ, βθ εὐθειῶν κατά γε ἔλλειψιν ϗ ὑπεροχὴν πρὸς τὰς βγ, ϗ βη, αἱ αὐταὶ εὑρίσκονται μέσαι γραμμαὶ, τῶν αὐτῶν ἄκρων κειμένων; Ἀλλ' οὐ τοῦτό γε προσεχὲς αἴτιον τῆς τῶν τοιούτων περιφήμων Ἀκαδημιῶν σιωπῆς. Δύναται δὲ ἕκαστος τῶν ἐντευξομένων φιλομαθῶν ἐκ τῶν εἰρημένων τοῦτο τεκμαίρεσθαι.

Ἀπογνοὺς τοίνυν τῶν πρὸς τὰς Ἀκαδημίας ἐλπίδων, ϗ μὴ ἀνεχόμενος τοὺς ἐμοὺς διὰ πολλοῦ, ϗ πάνυ πολλοῦ, γενομένους πόνους εἰς μάτην ἀποβῆναι. Τὸ δὲ τοιοῦτον γεωμετρικὸν πρόβλημα, τὸ παρὰ πᾶσι μὲν τῶν Γεωμετρῶν παισὶ θαυμαζόμενον, παρὰ πολλῶν δὲ ἐπιμελῶς ζητούμενον, καί τισιν, ὡς κριθὲν ἀδύνατον, ἀλλοτρίοις ἐφόδοις θεραπευόμενον, τοῖς βαθυτάτοις τῆς σιγῆς κατακαλυφθῆναι κύμασιν, ἔγνωκα τούτων δικαίους ἀποκαταστῆσαι κριτὰς τοὺς ἐντευξομένους τῷ ἐμῷ τούτῳ φιλοπονήματι, ϗ ἀπαθῶς τὰ ἐν αὐτῷ θεωρήσοντας.

Οὗ ἕνεκα ϗ Τύποις ἤδη ἐκδέδοται, ὅπως ἂν οἱ τῶν τοιούτων γνήσιοι ἐρασταὶ, ὡς φιλομαθεῖς, ἔχωσι ϗ διὰ τοῦτο, τοὺς τῆς φιλοπονίας ἐπιγινώσκειν καρποὺς, ϗ τὴν λυσιτέλειαν. Καὶ μὴ ἀποδειλιῶντες τοῖς πόνοις τῶν δυσλήπτων ἑαυτοὺς ὡς ἀδυνάτων, ἀπομακρύνωσιν. Ἐπεὶ δὲ πάλιν πολλάκις μοι οἱ ἐν Οὐενετίαις ῥηθέντες μαθηταὶ ἐκοίνουν διὰ γραμμάτων, ϗ τὰ περὶ τοῦ προβλήματος τοῖς κατὰ μέρος λεγόμενά τε ϗ ἀποφαινόμενα, ἑκάστου τῶν ἐκεῖ ϗ ἐν Βονωνίᾳ ἐπιστημόνων, κατὰ τὸ δοκοῦν αὐτῷ ἐπάγοντος τὴν κρίσιν. Καὶ τῶν μὲν ἀκρατῶς, ἢ οἰκειότερον εἰπεῖν, αὐθεντικῶς ἀντιφερομένων, ϗ μηδόλως ἀποδεχομένων τὴν τοῦ προβλήματος λύσιν, τοῖς ἀδύνατον ταύτην κρίνουσιν ἑπόμενοι, τῶν δὲ ἐπαινούντων μᾶλλον ταύτην, μετὰ τὴν ἀκριβῆ αὐτῆς θεωρίαν, ϗ ὀρθῶς ἔχουσαν ἀποφαινομένων, ὧν εἷς ϗ ἐκ τοῦ τάγματος τῶν Ἰησουϊτῶν, Εὐκλείδειον ταύτην κρίνων, παιδαριώδεις τὰς τῶν ἄλλων ἐνστάσεις ἐκάλει. Καὶ τῶν ἄλλων τὴν μέσην που βαδιζόντων, ϗ πολυτρόπως ἀπορούντων ἐπὶ τῆς τοῦ προβλήματος δείξεως, τὸ δ' ἀληθὲς, ἀνάπτυξιν τῶν ἐν αὐτῇ πάντων ζητούντων, ἵνα ἑκάστῳ μέρει τὸ ὀφειλόμενον ἀποδῶ. Τῶν μὲν τὴν εἰς τοῦτο ἀπελέγχων ἀπόγνωσιν, τῶν δὲ τὴν ἀπαθῶς ὑπ' αὐτῶν φερομένην κρίσιν ἀσφαλιζόμενος, ϗ τῶν τῆς τρίτης μερίδος τὰ ἀμφιῤῥεπὲς θεραπεύων, ἀκριβεστέραν τὴν αὐτὴν τοῦ προβλήματος καθειργασάμην δεῖξιν, τὰ μὲν ἀμφιβαλλόμενά πως μεταλλάττων. Τὰ δὲ διὰ τὸ συνεπτυγμένον ἀπορούμενα διασαφῶν, προσθεὶς τοῖς ἄλλοις ϗ τὰ εἰς δήλωσιν τοῦ λόγου τῆς κατὰ τὸ ο διαιρέσεως τῆς μξ ἐναπολαμβανομένης γραμμῆς, κἂν μὴ τοῦτο ὀφειλόμενον ἦν, ϗ τὰ εἰς ἀνατροπὴν τῆς δι' ἀριθμῶν γενομένης βασάνου ἀφορῶντα.

Μέμνησθε δέ μου οἱ ἐντυγχάνοντες, ἂν μὴ τινὸς ἄλλου, τῶν πόνων. Καὶ ἀσμένως ἀποδέξασθε τὴν εἰς τοὺς φιλομαθεῖς θερμοτάτην μου ἀγάπην. Ἀκριβῆ μὲν τὴν θεωρίαν τῶν ἐν τῷ προβλήματι ποιούμενοι, ἀπαθῶς δὲ τὴν περὶ αὐτοῦ ἀποδιδόντες ψῆφον. Ἵνα δὲ μή τις με ταῦτα λέγοντα τὸν ἔπαινον ζητεῖν ὑπολάβῃ, χάριτας αὐτῷ ὁμολογήσω, ἄν τινα παραλογισμὸν ἐν τῇ δείξει εὑρὼν κρυπτόμενον ἀνακαλύψῃ. Οὕτω γὰρ ἂν ϗ τὸ πρόβλημα ἀσφαλεστέραν, οἶμαι, δέξεται τὴν ἐμπέδωσιν. Ἔῤῥωσθε οἱ ἀσμένως ἀποδεχόμενοι χαίροντες ἅμα, ϗ εὐδαιμονοῦντες τοῖς κρείττοσι.

Μέθοδος τῆς τῶν δύο μέσων συνεχῶς ἑξῆς ἀνάλογον γραμμῶν εὑρέσεως δοθεισῶν τῶν ἄκρων, διὰ μόνου τοῦ κανόνος καὶ διαβήτου Γεωμετρικῶς ὁδεῦσαι.

Λ Η Μ Μ Α' Τ Ι Ο Ν.

Παντὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, καὶ τοῦ περὶ αὐτὸ γραφομένου κύκλου τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐστὶ τῶν αὐτοῦ διαγωνίων διαμέτρων.

(Ἰδὲ Σχῆμα παραλληλόγραμμον.)

Ἔστω παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ αβγδ, οὗ αἱ διαγώνιοι διάμετροι, αγ, βδ, τεμνέσθωσαν ἀλλήλαις ἔνθα τὸ ε. Λέγω ὅτι τὸ ε σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ αβγδ, ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, καὶ τοῦ περὶ αὐτὸ γραφομένου κύκλου. Ἐπεὶ γὰρ τὰ αδγ, δαβ τρίγωνα ἔχουσι τὰς δύο πλευρὰς, αδ, δγ δυσὶ ταῖς δα, αβ ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρα, ἴση γὰρ ἡ αβ, τῇ δγ, κατὰ τὴν τετάρτην τοῦ πρώτου τοῦ στοιχειωτοῦ, καὶ ἡ αδ κοινή. Ἔχουσι δ' ἔτι καὶ τὰς ὑπὸ αδγ, δαβ γωνίας ὁμοίως ἴσας. Ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἄρα καὶ βάσεις τὰς αγ, δβ ἴσας ἔχουσι κατὰ τὴν τετάρτην τοῦ αὐτοῦ. Αὖθις ἐπεὶ τὰ αεδ, βεγ τρίγωνα ἔχουσι τὰς δύο γωνίας, τὰς ὑπὸ εαδ, εδα δυσὶ ταῖς ὑπὸ εγβ, εβγ ἴσας, τὴν μὲν ὑπὸ εαδ, τῇ ὑπὸ εγβ, τὴν δὲ ὑπὸ εδα τῇ ὑπὸ εβγ ὡς ἐναλλὰξ, καὶ τὰς πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις πλευρὰς, αδ, βγ ὡσαύτως ἴσας. Ἄρα κατὰ τὴν κς'. τοῦ αὐτοῦ, καὶ τὰς ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας λοιπαὶ πλευρὰς, αε, εδ ἴσας ἔχουσι, ταῖς ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας δυσὶ πλευραῖς γε, εβ, ἑκατέραν ἑκατέρα. Ἴση ἄρα ἡ μὲν αε, τῇ εγ· ἡ δὲ δε, τῇ εβ· ἑκατέρα ἄρα τῶν αγ, βδ διαγωνίων διαμέτρων τοῦ αβγδ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου δίχα τέμνεται. Εἰσὶ δὲ καὶ ἴσαι, ὡς δέδεικται, αἱ τέσσαρες ἄρα αε, εβ, εγ, εδ ἴσαι εἰσί· καὶ τὸ ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ αβγδ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου. Ἀλλὰ καὶ ὁ κέντρῳ μὲν τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ εα, ἢ ἄλλῳ τινὶ τῶν λοιπῶν, γραφόμενος κύκλος, διελεύσεται καὶ διὰ τῶν ἄλλων σημείων. Τὸ ε, ἄρα σημεῖον, ἡ κοινὴ τομὴ, τῶν αγ, βδ διαγωνίων διαμέτρων κέντρον ἐστὶ, καὶ τοῦ περὶ τὸ αβγδ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π Ρ Ό Β Λ Η Μ Α.

Δύο δοθεισῶν ἀνίσων εὐθειῶν, δύο μέσας αὐτῶν συνεχῶς ἑξῆς ἀνάλογον γραμμὰς γεωμετρικῶς εὑρεῖν.

Ἰδὲ Σχῆμα Α'.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο ἄνισοι εὐθεῖαι, αβ, βγ. καὶ ζητηθήτωσαν αἱ μεταξὺ αὐτῶν δύο συνεχῶς ἑξῆς ἀνάλογον γραμμαί. Κείσθωσαν δὴ αἱ αβ, βγ πρὸς ἀλλήλας, ὥστε ὀρθὴν ποιεῖν γωνίαν τὴν ὑπὸ αβγ. Τῶν δὲ αβ, βγ ἐξαχθεισῶν κατὰ τὸ συνεχὲς ἀορίστως, ἀπὸ τοῦ β σημείου ἐπὶ τὰ δ καὶ ε. Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς βδ γραμμῆς, ἡ βζ ἴση τῇ βγ, καὶ γραφήτω περὶ τὴν αζ ἡμικύκλιον τὸ αηζ τέμνον τὴν βε κατὰ τὸ η. Καὶ ἔσται ἡ βη μέση ἀνάλογος τῶν αβ, βζ, κατὰ τὴν ιγ'. τοῦ ς'. τοῦ Στοιχειωτοῦ. Τῇ δὲ βη ἴσης ληφθείσης τῆς βθ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βδ, γραφήτω αὖθις ἡμικύκλιον περὶ τὴν αθ τὸ ακθ, τέμνον τὴν γε κατὰ τὸ κ. Καὶ ἔσται, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν πρότασιν, μέση ἀνάλογος, τῶν αβ, βθ ἡ βκ. Γραφήτωσαν δὲ καὶ περὶ τὰς γη, γκ, κύκλοι οἱ γλημ, γνκξ, τέμνοντες τὴν βδ, κατὰ τὰ μ, καὶ ξ σημεῖα. Καὶ ἔσται μέση ἀνάλογος, τῶν μὲν ηβ, βγ, ἡ βμ· τῶν δὲ κβ, βγ ἡ βξ. Εἶτα διαιρεθήτω ἡ μξ ἐναπολαμβανομένη γραμμὴ ἀναλόγως ταῖς ζμ, ξθ κατὰ τὸ ο. Ὥστε εἶναι ὡς ἡ ζμ πρὸς τὴν ξθ, τὴν μο, πρὸς τὴν οξ. Καὶ γραφήτω τρίτον περὶ τὴν αο ἡμικύκλιον τὸ απο, τέμνον τὴν βε, κατὰ τὸ π. Καὶ ἔσται μέση ἀνάλογος τῶν αβ, βο ἡ βπ. Λέγω τοίνυν καὶ τὴν βο μέσην εἶναι ἀνάλογον τῶν πβ, βγ, καὶ τὰς μὲν βπ, βο εἶναι τὰς ζητουμένας. Τὰς δὲ τέσσαρας αβ, βπ, βο, βγ συνεχῶς ἑξῆς ἀνάλογον. Ὡς ἡ αβ δηλονότι πρὸς τὴν βπ, τὴν βπ πρὸς τὴν βο, καὶ τὴν βο πρὸς τὴν βγ. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ απ, πο, ϗ τῆς γπ δίχα τμηθείσας κατὰ τὸ ρ, ἤχθω ἀπὸ τῦ ο, διὰ τῦ ϱ, ἡ οϱσ εὐθεῖα τέμνεσα τὴν απ κατὰ τὸ σ, ἀπὸ δὲ τῦ σ πιπτέτω μὲν κάθετος ἐπὶ τῆς αθ ἡ σφ· ἤχθω δὲ παράλληλος τῇ αὐτῇ αθ, ἡ στ· ϗ ἀπὸ τῦ ο, συνεςάθω κάθετος ἐπὶ τῆς στ ἡ ου, τέμνεσα τὴν στ κατὰ τὸ υ, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ φυ, ἣν λέγω διὰ τῦ ϱ σημείυ διέρχεϑαι. Εἰ γὰρ μὴ, διελεύσεται δήπυθεν δι' ἄλλυ τινὸς σημείυ τῆς γπ, ἢ τῶν μεταξὺ τῦ ρ ϗ 9, ἢ τῶν ἐν μέσῳ τῦ ρ ϗ β.

Ἰδὲ Σχῆμα Β'.

Διήχθω δὴ διὰ τῦ χ, ὡς ἡ φχυ, τέμνυσα τὴν σο, κατὰ τὸ ψ. ὥςε τὰς σψο, φψυ διαγωνίες διαμέτρυς τῦ σφου, ὀρθογωνίυ παραλληλογράμμυ κοινὴν ἔχειν τομὴν τὸ ψ, σημεῖον. Καὶ κατὰ τὸ προεκτυθὲν Λημμάτιον τὸ ψ, σημεῖον κέντρον ἐςὶ τῦτε σφου, ὀρθογωνίυ παραλληλογράμμυ, ϗ τῦ περὶ αὐτὸ γραφομένυ κύκλυ. Πιπτέτω δὲ ἀπὸ τῦ ψ, κέντρυ κάθετος ἐπὶ τῆς φο, ἡ ψω. Καὶ κατὰ τὴν γ'. τῦ γ'. τῦ ςοιχειωτῦ δίχα αὐτὴν τεμεῖν. Ἴση ἄρα ἡ φω τῇ ωο. Ἐπεὶ δὲ τὸ ψ ἐντὸς ἐςὶ τῦ σφβ 9, ὀρθογωνίυ παραλληλογράμμυ, πάντως γε ϗ ἡ ψω ἐντὸς πεσεῖται τῶν φβ, σημείων. Παράλληλος γάρ ἐςιν, ἐκ τῆς κατασκευῆς, τῇ γπ. Μείζων ἄρα ἡ φβ, τῆς φω. Ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ φω ἴση ἐςὶ τῇ ωο, ὡς ἤδη δέδεικται, ἄρα ἡ αὐτὴ φβ, μείζων ἐςὶ ϗ τῆς ωο· ἀλλ' ἡ ωο, μείζων ἐςὶ τῆς βο, ἡ φβ, ἄρα πολλῷ μείζων ἐςὶ τῆς βο. Ἀφαιρεθήτω τοίνυν ἀπὸ τῆς φβ, ἡ β 2 ἴση τῇ βο. Καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ϱ 2. Τῇ δὲ ρ 2 ἤχθω παράλληλος ἡ ψ 3. Καὶ προσεθήτω τῇ ωο ἀπὸ τῆς οδ ἡ ο 4 ἴση τῇ φ 3, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ψ 4, ὥςε συςαθῆναι τὸ ψ 4 ο τρίγωνον. Καὶ ἐπεὶ αἱ β 2, βο ἴσαι εἰσὶν, ἐκ τῆς κατασκευῆς, κοινὴ δὲ ἡ βϱ, αἱ δύο δὴ 2 β, βϱ ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς οβ, βρ. Ἔςι δὲ ϗ ἡ ὑπὸ 2 βϱ γωνία ὁμοίως ἴση τῇ ὑπὸ οβϱ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, ἄρα κατὰ τὴν δ'. τῦ ά. τῦ ςοιχοιωτῦ αἵτε ϱ 2, ϱο βάσεις, ϗ ἡ ὑπὸ ρ 2 β, ροβ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, προσετέθησαν δὲ, ταῖς ωφ, ωο ἴσαις αἱ φ 3, ο 4 ἴσαι κατὰ τὴν κατασκευὴν, ἄρα κατὰ τὸ β'. ἀξίωμα, αἱ ω 3, ω 4 ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, κοινὴ δὲ ἡ ωψ, ἄρα κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν δ'. τῦ ςοιχειωτῦ αἱ ψ 3, ψ 4 βάσεις ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Ὁμοίως δὲ ϗ αἱ ὑπὸ ψ 3 ω, ψ 4 ω γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἀλλ' αἱ ψ 3, ϱ 2 εὐθεῖαι παράλληλοι εἰσὶν ἐκ τῆς κατασκευῆς, ϗ εἰς αὐτὰς πέπτωκεν ἡ αδ, ἄρα κατὰ τὴν κθ'. τῦ αὐτῦ ἡ ὑπὸ ϱ 2 β, ἐκτὸς γωνία, ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ ψ 3 ω, ἐντὸς ϗ ἀπεναντίον. Ἔςι δὲ ϗ ἡ μὲν ὑπὸ ϱοβ ἴση τῇ ὑπὸ ϱ 2 β, ὡς δέδεικται· ἡ δὲ ὑπὸ ψ 4 ω, τῇ ὑπὸ ψ 3 ω, ἄρα ϗ ἡ ὑπὸ ψοω ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ ψ 4 ω. Ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ψοω γωνία ἐκτὸς ἐςὶ τῦ ψ 4 ο τριγώνυ· ἡ δὲ ὑπὸ ψ 4 ω, ἐντὸς, ἄρα ἡ ἐκτὸς γωνία τῦ ψ 4 ο τριγώνυ ἴση ἐςὶ τῇ ἐντὸς, ὅπερ ἀδύνατον κατὰ τὴν ιϛ'. τῦ αὐτῦ. Οὐκ ἄρα ἡ φυ διαγώνιος διάμετρος διὰ τῦ χ, διέρχεται σημείυ. Οὔτε μὴν δι' ἄλλυ τινὸς τῶν μεταξὺ τῦ ρ, ϗ 9. Καὶ ἑπομένως ὐδὲ τὸ κέντρον τῦτε σφου ὀρθογωνίυ παραλληλογράμμυ ϗ τῦ περὶ αὐτὸ γραφομένυ κύκλυ ἐκτὸς πίπτει τῆς ϱ 9.

Ἰδὲ Σχῆμα Γ'.

Ἀλλά γε διελθέτω ἡ φυ διαγώνιος διάμετρος διά τινος σημείυ τῶν ἐν μέσῳ τῦ ϱ ϗ β, ὡς ἡ φ 5 υ, τέμνυσα τὴν ϱσ κατὰ τὸ 6 σημεῖον. Καὶ διὰ τῦ 6 διελθέτω παράλληλος τῇ β 9 ἡ 78. Καὶ ἐπεὶ κατὰ τὸ προεκτεθὲν Λημμάτιον τὸ 6 σημεῖον κέντρον ἐςὶ τῦτε σφου ὀρθογωνίυ παραλληλογράμμυ, ϗ τῦ περὶ αὐτὸ γραφομένυ κύκλυ. Ἡ δὲ 78 γραμμὴ κάθετος ἐςὶ ἐφ' ἑκατέρας τῶν φο, συ διὰ τὸ παραλλήλως ἤχθαι τῇ β 9, πρὸς ὀρθὰς κειμένη ἐπὶ τῆς αθ, ἐκ τῆς κατασκευῆς· πάντως γε ἑκατέρα τῶν φο, συ ἀπεναντίον πλευρῶν τῦ σφου ὀρθογωνίυ παραλληλογράμμυ δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς 78, κατὰ τὴν γ'. τῦ γ'. τῦ ςοιχειωτῦ. Ἴση ἄρα ἡ σ 8, τῇ 8 υ, ἀλλ' ἡ σ 8, μείζων ἐςὶ τῆς σ 9, ἄρα ϗ ἡ 8 υ μείζων ἐςὶ τῆς σ 9. Ἔςι δὲ ἡ 9 υ μείζων τῆς 8 υ, ἄρα ἡ 9 υ πολλῷ μείζων ἐςὶ τῆς σ 9. Ἀφαιρείϑω δὴ ἀπὸ τῆς 9 υ, ἡ 9 Α ἴση τῇ σ 9, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ ϱ Α. Τῇ δὲ ϱ Α ἤχθω πάλληλος ἡ Β, ϗ προσεθήτω τῇ σ 9, ἡ σ Γ, γραμμὴ ἴση τῇ υ Β.

Εἶτα ἐπεζεύχθω ἡ 6 Γ, ϗ συναχθήσεται τὸ αὐτὸ ἄτοπον, ὃ ϗ ἐπὶ τῦ διωτέρω σχήματος. Αἱ μὲν γὰρ ϱσ, ρ Α βάσεις τῶν ρσ 9, ϱ Α 9 ὀρθογωνίων τριγώνων ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν δ'. τῦ ά. τῦ ςοιχειωτῦ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι ϗ τὰς σ 9, 9 Α εὐθείας, καὶ κοινὴν τὴν 9ϱ. Ὥςε καὶ αἱ ὑπὸ ϱσ 9, ρ Α 9 γωνίαι ἴσαι εἰσὶ, κατὰ τὴν αὐτήν. Εἰσὶ δὲ ἴσαι ϗ αἱ σ 8, 8 υ εὐθεῖαι, ὡς δέδεικται κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τῦ ἐναντίυ, ϗ ταύταις προσετέθησαν ἴσαι, αἱ σ Γ, υ Β, ἄρα ϗ αἱ Γ 8, 8 Β, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸ β'. ἀξίωμα. Κοινῆς δὲ λαμβανομένης τῆς 86, ἐπεὶ καὶ αἱ ὑπὸ 6 8 Γ, 68 Β γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα ἐκ τῆς κατασκευῆς, δῆλον ὅτι αἱ 6 Γ, 6 Β, βάσεις τῶν 68 Γ, 68 Β, ὀρθογωνίων τριγώνων ἴσαι εἰσὶ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν δ'. καὶ ἡ ὑπὸ 6 Γ 8 γωνία τῇ ὑπὸ 6 Β 8. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ρ Α 9 ἐκτὸς γωνία ἴση τῇ ὑπὸ 6 Β 8 ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, κατὰ τὴν κθ'. τοῦ αὐτοῦ· ἄρα ἡ ὑπὸ ρ Α 9 ἴση ἐστὶ καὶ τῇ ὑπὸ 6 Γ 8. τῇ δὲ ὑπὸ ρ Α 9, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ρσ 9, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ρσ 9, ἐκτὸς γωνία τοῦ 6 Γ σ, τριγώνου ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ 6 Γ 8, ἤτοι 6 Γσ· ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ. Τοῦτο δὲ ἀδύνατον κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ις'. τοῦ στοιχειωτοῦ. Ἡ φυ ἄρα διαγώνιος διάμετρος οὐ διέρχεται διὰ τοῦ 5, σημείου, ἢ ἄλλου τινὸς τῶν μεταξὺ τῶν ρ, καὶ β. Δέδεικται δ' ὅτι οὐδὲ διὰ τοῦ χ, ἢ ἄλλου τινὸς τῶν ἐν μέσῳ τοῦ ρ, καὶ 9, ἄρα διὰ τοῦ ρ, μόνου διέρχεται, ὡς ἡ φρυ. ὅπερ ἦν τὸ ἀμφιβαλλόμενον. Διέρχεται δὲ καὶ ἡ σο, διὰ τοῦ ρ, κατὰ τὴν κατασκευήν, ἄρα τὸ ρ, κοινὴ ἐστὶ τομὴ τῶν σο, φυ, διαγωνίων διαμέτρων τοῦ σφου, ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου· καὶ κατὰ τὸ προεκτεθὲν Λημμάτιον τὸ κέντρον τοῦτε σφου, ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, καὶ τοῦ περὶ αὐτὸ γραφομένου κύκλου τὸ ρ, ἐστὶ σημεῖον.

Ἐπεὶ δὲ ἡ ὑπὸ συο, γωνία ὀρθὴ ἐστὶν, ἐκ τῆς κατασκευῆς, καὶ βέβηκεν ἐπὶ τῆς σρο, ἄρα ἐν ἡμικυκλίῳ ἐστὶ κατὰ τὴν λα'. τοῦ αὐτοῦ, οὗ διάμετρος ἡ σρ. Ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ σπο, γωνία ὀρθὴ ἐστὶ, κατὰ τὴν αὐτὴν πρότασιν, ἐν ἡμικυκλίῳ γὰρ ἐστὶ τῷ απο, καὶ βέβηκεν ἐπὶ τῆς σρο, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ σπο, ἐν τῷ αὐτῷ ἡμικυκλίῳ ἐστὶν ἐν ᾧ καὶ ἡ ὑπὸ συο. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ συο, ἐστὶν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ τοῦ περὶ τὸ σφου, ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον γραφομένου κύκλου· ἄρα ὁ κέντρῳ μὲν τῷ ρ, διαστήματι δὲ τῷ ρο, ἢ ρσ, ἢ ρυ, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ π. Αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι ρσ, ρπ, ρυ, ρο, καὶ ρφ ἴσαι εἰσί. Τῇ δὲ ρπ, ἴση ἐστὶν ἡ ργ, ἐκ τῆς κατασκευῆς. Ἄρα αἱ ἓξ εὐθεῖαι, ρσ, ρπ, ρυ, ρο, ργ, καὶ ρφ ἴσαι εἰσί. Καὶ ὁ κέντρῳ μὲν τῷ ρ, διαστήματι δὲ τῷ ρσ, ἢ ἄλλῳ τινὶ τῶν ρπ, ρυ, καὶ λοιπῶν γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ γ. Τὸ πυογ ἄρα τόξον ἡμικύκλιον ἐστί. Καὶ ἡ βο μέση ἀνάλογος τῶν βπ, βγ κατὰ τὴν ιγ'. τοῦ ϛ'. τοῦ στοιχειωτοῦ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ βπ μέση ἀνάλογος τῶν αβ, βο κατὰ τὴν κατασκευήν· ἄρα αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι, αβ, βπ, βο, καὶ βγ συνεχῶς ἑξῆς εἰσὶν ἀνάλογον, ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βπ, ἡ βπ, πρὸς τὴν βο, καὶ ἡ βο, πρὸς τὴν βγ. Δέδονται δὲ αἱ αβ, βγ ἄκραι, ἄρα εὕρηνται αἱ ζητούμεναι μέσαι, βπ, βο· ὅπερ ἦν τὸ ἐν ἀρχῇ ὑποτεθέν. Δύο ἄρα δοθεισῶν ἀνίσων εὐθειῶν, εὕρηνται αἱ δύο μέσαι αὐτῶν συνεχῶς ἑξῆς ἀνάλογον γραμμαί.

Ἐπιστάσεως μέντοι ἄξιον, ὅτι ἡ μξ, ἐναπολαμβανομένη Γραμμὴ μεταξὺ τῶν μ, καὶ ξ, σημείων διῄρηται ἔνθα τὸ ο, σημεῖον κατὰ τὸν λόγον τῆς ζμ, πρὸς τὴν ξθ, ὡς προηρμήνευται, ὅτι οὐκ ἐνδέχεται ἄλλως τὴν αὐτῆς γενέσθαι διαίρεσιν· λαμβανομένης γὰρ ἑκατέρας τῶν βζ, βθ, ἀντὶ τῆς β'. τῶν ζητουμένων, καὶ μηδετέρας οὔσης ἀληθοῦς, ὡς ὀψόμεθα, εὑρίσκονται διὰ τῶν γμη, γξκ, ἡμικυκλίων ἐγγύτεραι τῆς ἀληθοῦς, αἱ βμ, βξ· ἡ μὲν ὑπερέχουσα τὴν βζ, τῇ ζμ, ὑπεροχῇ ἡ δὲ ἐλλείπουσα τῆς βθ, τῇ ξθ· καὶ ἐναπολαμβάνεται τοῖς μ, ξ, σημείοις ἡ μξ, γραμμή· μηδετέρας δὲ καὶ τῶν βμ, βξ, ἴσης οὔσης τῇ ζητουμένῃ ἀληθεῖ β'. ὡς καὶ τοῦτο δειχθήσεται, ἀλλὰ τῆς μὲν ἐλλειπούσης, τῆς δὲ ὑπερεχούσης τῆς ἀληθοῦς, διαιρεῖσθαι πάντως γε δεῖ τὴν μξ, ἐναπολαμβανομένην, ὥστε εὑρεθῆναι ἑτέραν γραμμὴν ὑπερέχουσαν μὲν τὴν βμ, ὁμολόγῳ τινὶ ὑπεροχῇ, ᾗ καὶ ἡ βμ, ὑπερέχει τὴν βζ· ἐλλείπουσαν δὲ τῆς βξ, ὡσαύτως ὁμολόγῳ ὑπεροχῇ, ᾗ καὶ ἡ βξ, ἐλλείπει τῆς βθ· ὥσπερ γὰρ ἑκατέρα τῶν βμ, βξ, ἐγγύτερον ἐστὶ τῆς ἀληθοῦς, διὰ τὸ τὴν ὑπὸ τῶν αὐτῶν περάτων ἐναπολαμβανομένην μξ, γραμμὴν ἐλάττονα εἶναι τῆς ὑπὸ τῶν περάτων τῶν βζ, βθ, ἐναπολαμβανομένης ζθ, οὕτω ἀληθὴς ἐστὶν, ἧς καὶ ἀντὶ ἐλάττονος καὶ ἀντὶ μείζονος λαμβανομένης, οὐδεμία ὑπὸ τῶν αὐτῆς περάτων ἐναπολαμβάνεται γραμμή, ἀλλ' ἡ αὐτὴ ὑπερέχει μὲν τὴν ἐλάττονα, ἐλλείπει δὲ τῆς μείζονος. Διῃρημένης δὲ τῆς μξ, κατὰ τὸν λόγον τῆς ζμ, πρὸς τὴν ξθ, εὑρίσκεται ἡ βο, μέση τῶν βμ, βξ, τὴν μὲν βμ, ὑπερέχουσα τῇ μο, ὑπεροχῇ, ὁμολόγῳ οὔσῃ τῇ ζμ, τῆς δὲ βξ, ἐλλείπουσα τῇ οξ, ὁμολόγῳ καὶ αὐτῇ οὔσῃ τῇ ξθ. Καὶ ὥσπερ τὸ μὲν περὶ τὴν γη, ἡμικύκλιον ἐκτὸς πίπτει τοῦ ζ, διὰ τὸ τὴν βζ, πολλῷ ἐλάττονα εἶναι τῆς ἀληθοῦς· τὸ δὲ περὶ τὴν γκ, ἐντὸς τοῦ θ, διέρχεται, τῷ τὴν βθ, πολλῷ μείζονα εἶναι τῆς αὐτῆς, οὕτω καὶ τὸ περὶ τὴν γπ, ἐκτὸς μὲν πίπτει τοῦ μ, διὰ τὸ εἶναι τὴν βμ, ἐλάττονα τῆς ἀληθοῦς, τοῦ δὲ ξ, ἐντός· μείζων γὰρ ἡ βξ, τῆς ἀληθοῦς· ἡ βο, ἄρα οὔτε ὑπερέχει τῆς ἀληθοῦς δευτέρας τῶν ζητουμένων, οὔτε ἐλλείπει, ἴση ἄρα· ὥστε καὶ ἡ βπ, ἴση ἐστὶ τῇ ἀληθεῖ πρώτῃ τῶν αὐτῶν.

Ἔτι ἐπεὶ ἡ μξ, τέτμηται ἀναλόγως ταῖς ζμ, ξθ, πάντως γε ὡς ἔχει ἡ ζμ, πρὸς τὴν ξθ, ἔχει καὶ ἡ μο, πρὸς τὴν οξ· ὥστε καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ζμ, πρὸς τὴν μο, ἡ ξθ, πρὸς τὴν οξ· καὶ συνθέντι ἄρα, ὡς ἡ ζο, πρὸς τὴν μο, ἡ οθ, πρὸς τὴν οξ· καὶ ἐναλλὰξ πάλιν ὡς ἡ ζο, πρὸς τὴν οθ, ἡ μο, πρὸς τὴν οξ. Ἡ βο, ἄρα μέση ἐστὶ, καὶ τῶν βζ, βθ, τὴν μὲν βζ, ὑπερέχουσα τῇ ζο. ὑπεροχῇ, ὁμολόγῳ οὔσῃ τῇ μο, ὡς δέδεικται ἤτοι τῇ ζμ. τῆς δὲ βθ, ἐλλείπουσα τῇ οθ, ὁμολόγῳ τῇ οξ, ἤγουν τῇ ξθ· ἀναλογεῖ ἄρα ἡ βο, ἑκατέρα τῶν βμ, βξ, ὥστε ψευδομένων τῶν βμ, βξ. ἡ βο, δήπουθεν ἀληθὴς ἐστὶ μέση. ὑγιῶς ἄρα τέτμηται ἡ μξ, ἀναπολαμβανομένη, ἔνθα τὸ ο, κατὰ τὸν λόγον τῆς ζμ, πρὸς τὴν ξθ.

Ὅτι δὲ ἑκατέρα μὲν τῶν βζ, βμ, ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἀληθοῦς β'. τῶν ζητουμένων, ἑκατέρα δὲ τῶν βξ, βθ, μείζων, ἐκ τῶν ἑξῆς γενήσεται δῆλον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ βζ, εἴληπται ἴση τῇ βγ, τετάρτῃ, πάντως γε ἐλάττων ἐστὶ τῆς β'. μὲν τῶν ζητουμένων, τρίτης δὲ τῶν τεσσάρων· ἄνισοι γὰρ αἱ αβ, βγ· ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ βμ μέση ἀνάλογος ἐστὶ, τῶν ηβ, βγ, εἴγε ἴση ἦν ἡ αὐτὴ βμ, τῇ ἀληθεῖ β'. ἦν ἂν δήπουθεν καὶ ἡ βη, ἴση τῇ ἀληθεῖ α', τῶν ζητουμένων. αὕτη γὰρ εὕρηται ἀντὶ πρώτης διὰ τῆς κατασκευῆς· εἰ δὲ ἡ βη, ἴση ἦν τῇ ἀληθεῖ α'. ἦν ἂν ἔτι ἡ αὐτὴ καὶ μέση ἀνάλογος τῶν αβ, βμ, ὥσπερ καὶ ἡ βμ, τῶν ηβ, βγ· ἀλλὰ τοῦτο ψευδὲς ἐκ τῆς κατασκευῆς· ἐστι γὰρ μέση ἀνάλογος τῶν αβ, βζ, καὶ ἐλάττων τῆς ἀληθοῦς πρώτης, ὥστε καὶ ἡ βμ, ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἀληθοῦς δευτέρας. Τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται καὶ ἡ βξ, μείζων τῆς αὐτῆς· ὅτι καὶ ἡ βκ, μέση οὖσα ἀνάλογος τῶν αβ, βθ, μείζων ἐστὶ τῆς ἀληθοῦς πρώτης· ὅτι δὲ καὶ ἡ βθ, πολλῷ μείζων ἐστὶ τῆς ἀληθοῦς δευτέρας φανερόν. Εἴληπται γὰρ ἴση τῇ βη, ἡ δὲ βη, μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν αβ, βζ ἤτοι αβ, βγ· ἡ δὲ μέση ἀνάλογος τῶν αβ, βγ, μεταξὺ ἐμπίπτει τῶν ζητουμένων· ἐλλείπουσα μὲν τῆς α'. ὑπερέχουσα δὲ τὴν β'. ἄρα ἡ βθ, μείζων ἐστὶ τῆς ἀληθοῦς β'. ὅπερ ἦν τὸ μετὰ τῶν ἄλλων ὑποσχεθέν.

Ἰστέον δ', ὅτι ἡ μὲν βζ, δύναται ληφθῆναι καὶ μείζων καὶ ἐλάττων τῆς βγ, ἡ δὲ βθ, τῆς βη, καὶ τὰς αὐτὰς εὑρίσκεσθαι μέσας γραμμὰς τῶν αὐτῶν ἄκρων φυλαττομένων· ἀλλ' ἐπεὶ τὸ μεῖζον καὶ ἔλαττον ἀόριστον ἐστί· καὶ ὁτὲ μὲν λαμβανομένης τῆς βζ, πολλῷ μείζονος, ἐμπίπτει ὁ περὶ τὴν γη, κύκλος ἐντὸς τοῦ ζ· ὥσπερ καὶ ὁ περὶ τὴν γκ, ἐντὸς τοῦ θ, καὶ τηνικαῦτα δέον ἐλάττονα λαμβάνειν τὴν αὐτὴν γζ. καὶ πολλαπλασιάζεσθαι, τούς τε κύκλους τοὺς περὶ τὴν γη, γραφομένους, καὶ τὰ περὶ τὴν αζ, ἡμικύκλια, ἕως ἂν ὁ περὶ τὴν ἐλαττωθεῖσαν γη, κύκλος ἐκτὸς πέσῃ τοῦ ζ· ὡς ἐπὶ τοῦ παρόντος ὁρᾶται Δ'. διαγράμματος. Ὁτὲ δὲ λαμβανομένης τῆς βζ, κατὰ συμβεβηκὸς ἴσης τῇ ἀληθεῖ, ὁ περὶ τὴν γη, κύκλος διέρχεται διὰ τοῦ ζ, σημείου, καὶ δι' ἑνὸς μόνου κύκλου τε καὶ ἡμικυκλίου συνίσταται τὸ διάγραμμα ὡς ὁρᾷς ἐπὶ τοῦ Ε'. Ἐπὶ μὲν γὰρ τοῦ Δ'. διαγράμματος, ληφθείσης τῆς ΒΖ, μείζονα ἢ διπλασίου τῆς βγ, ὁ γΗΜ, κύκλος ὁ περὶ τὴν γΗ. διῆλθε διά τινος σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ Β, καὶ Ζ. καὶ ἡ ΒΜ, ἐλάττων γέγονε τῆς ΒΖ, διά τοι τοῦτο ἐδέησε ληφθῆναι τὴν αζ, μικρὸν μείζονα τῆς βγ, καὶ ἐλάττονα τῆς ΒΖ. καὶ οὕτω τῶν λοιπῶν γενομένων κατὰ τὴν προεκτεθεῖσαν ἑρμηνείαν ἐπὶ τῆς κατασκευῆς, συνέστη τὸ διάγραμμα.

Ἐπὶ δὲ τοῦ Ε'. ληφθείσης τῆς βζ. ἐλάττονος ἢ διπλασίας τῆς βγ, καὶ τοῦ περὶ τὴν αζ, γραφομένου ἡμικυκλίου τέμνοντος τὴν γε, κατὰ τὸ η, ὁ περὶ τὴν γη, κύκλος διῆλθε διὰ τοῦ ζ· ὥστε δῆλον ὅτι γε ἡ βζ, εἴληπται κατὰ συμβεβηκὸς ἴση τῇ ἀληθεῖ β'. τῶν ζητουμένων, διὸ διὰ μόνου ἑνὸς ἡμικυκλίου καὶ ἑνὸς κύκλου γέγονε τὸ ἐπιταχθέν. Ἐπεὶ τοίνυν φημὶ τὸ μεῖζον καὶ ἔλαττον ἀόριστον ἐστὶ, τούτου ἕνεκα ὀφείλει ἡ βζ, ἴση λαβάνεσθαι τῇ βγ, διά τε τὸ ἀπονώτερον, καὶ πολλῷ μᾶλλον τὸ ὡρισμένον· καὶ τὰ λοιπὰ γίνεσθαι ὡς προηρμήνευται. τὰ αὐτὰ δὲ συμβήσεται κἂν ἡ βθ, πολλῷ ἐλάττων ληφθῇ τῆς βη.

Τῇ αὐτῇ ἐφόδῳ χρώμενοι τὰς αὐτὰς δύο μέσας συνεχῶς ἑξῆς ἀνάλογον εὑρήσομεν γραμμὰς, δοθεισῶν τῶν ἄκρων καὶ κατὰ τὸ ἀνάπαλιν, τῆς μὲν δηλονότι ἐλαχίστης ἀντὶ πρώτης τῶν αὐτῶν, τῆς δὲ μεγίστης ἀντὶ δευτέρας. Τὰ αὐτὰ γὰρ ἔσονται, ὁπωσδηποτοῦν τῶν ἄκρων δεδομένων. Προσετέθη δὲ καὶ τοῦτο, εἰς ἔνδειξιν μὲν τῆς ἐπί τε τῆς κατασκευῆς καὶ δείξεως τοῦ διαγράμματος ἀκριβείας, ἔλεγχον δὲ τῶν ἐμπαθῶς κατ' αὐτῶν φερομένων.

Μέθοδος καταγραφῆς ἐλλειψοειδοῦς σχήματος ὡρισμένων οὐσῶν τῶν αὐτοῦ διαμέτρων, διὰ μόνου τοῦ κανόνος καὶ διαβήτου γινομένης παρὰ τοῦ αὐτοῦ ἐπινοηθεῖσα Συγγραφέως.

ΠΡΌΒΛΗΜΑ.

Τῶν τοῦ ἐλλειψοειδοῦς σχήματος διαμέτρων δοθεισῶν τὸ περὶ αὐτὰς ἐλλειψοειδὲς σχῆμα καταγράψαι.

(Ἰδὲ Σχῆμα, ϛ́.)

Ἔςωσαν αἱ δοθεῖσαι τῦ ζητυμένυ ἐλλειψοειδῦς χήματος διάμετροι αἱ αβ ϛ γδ, τεμνόμεναι ἀλλήλαις δίχα ϗ πρὸς ὀρθὰς κατὰ τὸ ε. καὶ ζητηθήτω τὸ περὶ αὐτὰς γραφόμενον ἐλλειψοειδὲς χῆμα. Τμηθήτω δὴ ἑκατέρα τῶν αε, εβ μειζόνων ἡμιδιαμέτρων κατὰ τὰ ζ, ϗ η, σημεῖα, εἶτα ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τῆς εγ, ἐλάττονος, ἡμιδιαμέτρυ τὸ γθ, διάςημα ἴσον τῷ αζ, ἢ ζε. ϗ ἐπεζεύχθω ἡ ζθ. Δίχα δὲ τῆς ζθ, τμηθείσης κατὰ τὸ κ, συνιςάσθω ἐπ' αὐτῆς κάθετος ἡ κλ, τέμνυσα τὴν θδ, κατὰ τὸ μ. Καὶ ληφθήτω, ἐπὶ τῆς εγ, τὸ εν, διάςημα ἴσον τῷ εμ, ϗ ἀπὸ τῶν μ, ϗ ν, σημείων ἀχθήτωσαν διὰ τῶν ζ, ϗ η, αἱ μζξ, μηο, νζπ, νηρ, εὐθεῖαι· τελευταῖον κέντροις μὲν τοῖς ζ, ϗ η, ϗ διαςήματι τῷ ζα, ἢ ηβ, ἴσα γάρ, γραφήτωσαν ἑκατέρωθεν τὰ σατ, χβφ, τόξα. Κέντροις δὲ τοῖς μ, ϗ ν, ϗ διαςήματι τῷ μγ, ἢ νδ, ἴσα γὰρ ϗ ταῦτα, γραφήτωσαν, τὰ τγφ, χδσ τόξα, ϗ ἔςαι τὸ ἐπιταχθέν. Ὁ λόγος ἐν τῷ ζ βιβλίῳ, προτάσει λά. τῦ ά. μέρυς τῆς Γεωμετρίας, ἔνθα περὶ διαφόρων τρόπων καταγραφῆς ἐλλειψοειδῦς σχήματος.

Ἰςέον δ', ὅτι κατὰ τὴν διάφορον πρὸς ἀλλήλας χέσιν τῶν διδομένων διαμέτρων τῦ ζητυμένυ ἐλλειψοειδῦς χήματος διαφόρως εὑρίσκονται ϗ τὰ κέντρα τῶν τε σατ, χβφ, ϗ τγφ, χδσ, τόξων. Καὶ ὁτὲ μὲν πίπτυσιν ἐντὸς τῶν περάτων τῆς ἐλάττονος διαμέτρυ, ὡς ἐπὶ τῦ ϛ́. χήματος· ὁτὲ δὲ ἐκτὸς, ὡς ἐπὶ τῦ ζ. ϗ ἄλλοτε τὸ εθ, διάςημα εὑρίσκεται ἴσον τῷ εμ, ὡς ἐπὶ τῦ η. δύναται δὲ ἑκατέρα τῶν αε, εβ, διαιρεῖσθαι ϗ εἰς ἴσα ϗ εἰς ἄνισα. Ἀεὶ δὲ τὸ γθ, ἴσον λαμβάνεσθαι ὀφείλει τῷ αζ, ἢ ηβ, διαςήματι.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥ͑ΤΕΡΟΝ.

Μετάφρασις τῆς ἐκ Πετρουπόλεως ἀκαδημιακῆς ἐπιϛολῆς.

Τῷ αἰδεσιμωτάτῳ ἀνδρὶ κυρίῳ Μπαλάνῳ Βασιλοπούλῳ Α᾿ρχιπρεσβυτέρῳ καὶ Διδασκάλῳ Γ᾿ωαννίνων, εὖπράττειν.

Ἡ ἐν Πετρουπόλει τῶν Ἐπιϛημῶν Α᾿καδημία.

Α᾿φίκοντο εἰς τὴν ἡμετέραν Α᾿καδημίαν τὰ τιμαλφέϛατά σȣ γράμματα, καὶ πάντες οἱ ἐν αὐτῇ τῶν ἐπιϛημῶν τρόφιμοι, μετ᾿ ȣ̓ τῆς τυχȣ́σης εὐγνώμονος προθυμίας αἰδασί σοι τὴν αὐτὴν, ἣν αὐτοῖς παρέχειν ἠθελήθης τιμήν. Ε῎γνωσαν ἐξ αὐτῶν εἰωθέναι σε καταριθμεῖν τὰς περὶ τὴν μαθηματικὴν σπȣδὰς ἐν ταῖς ἐπιπονωτέραις φροντίσι μετὰ ϗ ϛαθερωτέρας ἐπιμελείας. Γράφεις γὰρ ἐντυχεῖν σε τὴν λύσιν τȣ̃ δηλείȣ λεγομένȣ μαθηματικȣ̃ προβλήματος, περὶ ἧς πολυμέριμνοι ἦσαν οἱ ἀρχαιότεροι τῶν μαθηματικῶν, τȣ́τȣ δηλαδὴ εὑρεῖν δύο μέσας ἀνάλογον ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ δεδομένων τῶν ἄκρων.

Τὴν ἀριθμητικὴν μὲν ȣ̓͂ν λύσιν, τὴν πᾶσι γνωριμωτάτην, ȣ̓χ ὁρᾷς ἥτις πορίζεται τῷ τρόπῳ τȣ́τῳ· πολλαπλασιασθήτω τὸ τετράγωνον τῆς πρώτης τῶν δοθεισῶν ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν τετάρτην, ϗ τȣ́τȣ γενομένȣ ἐξαχθήτω ἡ κυβικὴ ῥίζα, ϗ αὕτη παρίϛησι τὴν πρώτην τῶν ζητȣμένων· ἀλλ᾿ ἐθήρευσας τὴν τὴν Γεωμετρικὴν εὐχρεϛάτης ȣ̓͂σαν κατασκευῆς, ἢ κρεῖττον εἰπεῖν, εὐχερεϛέρας, ἤπερ ἐκεῖναι, αἵτινες μέχρι τȣ̃ νῦν σώζονται παραδεδομέναι παρὰ τῶν ἀγχινȣϛέρων τροφίμων τῆς μαθήσεως. Πρὶν δὲ ἢ ἐκδȣ̃ναι εἰς φῶς τὴν σὴν τȣ̃ προβλήματος λύσιν, προείλȣ εἰδήμονά σε γενέσθαι τί περὶ τȣ́τȣ παρὰ τοῖς ἄλλοις νεωτέροις μαθηματικοῖς εὕρηται. Ι῝να δὲ τῇ σῇ ἐφέσει ἀποχρώντως ἀφοσιωσώμεθα, παρακτέον ἡμῖν τὰς παρὰ τῷ Εὐτοκίῳ Α᾿σκαλωνίτῃ ἐν τοῖς εἰς τὸ δεύτερον τȣ̃ Α᾿ρχιμήδȣς περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρȣ ϛολίοις λύσεις. Μέναιχμός τις ὡς ἐκ τῆς τȣ̃ Εὐτοκίȣ δηλȣ̃ται μαρτυρίας, δοθεισῶν τῶν ἄκρων, ἐδίδαξε δύο εὐθείας γραμμὰς, (ἤτοι τὰς δοθείσας) συνάψας γνωμονικῶς (ἤτοι κατ᾿ ὀρθὴν γωνίαν) ϗ ἐπὶ τῆς ἐλάττονος τῶν δοθεισῶν ἄκρων ἀντὶ παραμέτρȣ παραβολῆς ληφθείσης τὴν παραβολὴν καταγράψαι· ὥσπερ ϗ ἐπὶ τῆς μείζονος τῶν δοθεισῶν ἀντὶ παραμέτρȣ παραβολῆς ὡσαύτως ληφθείσης ἑτέραν παραβολὴν καταγράψαι τῆς αὐτῆς ὑπαρχȣ́σης κορυφῆς ἑκατέρας παραβολῆς· ἐκ δὲ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν παραβολῶν κάθετον ἀγαγεῖν ἐπὶ τȣ̃ ἄξονος τῆς παραβολῆς, ἧς ἡ παράμετρος εἴληπται ἡ ἐλάττων τῶν δοθεισῶν. Γίνεται ϗ ἡ κάθετος αὕτη τῷ τρόπῳ τȣ́τῳ· συναφθήτω τὸ δοθὲν σημεῖον τῆς κοινῆς τομῆς τῶν παραβολῶν τῷ ἄξονι τῆς παραβολῆς, ἢ τῇ ἡμιτακτικῇ τῆς παραβολῆς, ἧς ἡ παράμετρος ἐϛὶν ἐλάττων, ἐλάττων ϗ τῶν ζητȣμένων συνεχῶς ἀνάλογον (ὥς μοι δοκεῖ, ἔδει κρεῖττον εἰπεῖν, ἐλάττων τῶν δοθεισῶν) ϗ ἀποτμηθεῖσα ἐνδείκνυσι τὴν μείζονα τῶν ζητȣμένων μέσον ἀνάλογον, (ἡ ἡμιτακτικὴ δηλ.)

Υ῾πάρχȣσι ϗ ἄλλαι πλείονες λύσεις ϗ κατασκευαὶ ἐν τοῖς τῶν νεωτέρων μαθηματικῶν συγγράμμασιν· ὡς ἔνεϛιν εἰδεῖν τίνας ἐν τοῖς ϛοιχείοις τῆς ἀναλύσεως τȣ̃ Βολφίȣ· σελίδι 528 § ἤτοι παραγράφῳ 624 ἐντεθειμένας· ἀλλὰ πᾶσαι αὗται αἱ κατασκευαὶ ϗ λύσεις ȣ̔́τω πορίζονται, ὥϛε δεῖν προϋποθέσθαι τὴν κατασκευὴν τῶν κωνικῶν τομῶν· ἥτις τὴν αὐτὴν συνεισάγει δυσχέρειαν τῇ ἀνωτέρῳ

Εἰ τοίνυν, αἰδεσιμώτατε ἄνερ, συντομώτερον, ϗ εὐχερέϛερον ἄνευ τῆς καταγραφῆς τῶν κωνικῶν τομῶν, ϗ καμπύλων γραμμῶν, δυσχερεϛέρας ȣ̓́σης καταγραφῆς ἰσχύεις λύσαι τὸ παρὸν πρόβλημα, παρέχον ȣ̓ μικρὰν τὴν λυσιτέλειαν τῇ μαθήσει, ϗ κοινωνῆσαι τȣ̃το τῇ Α᾿καδημίᾳ ἐνδόξως διϛάζεις· πέπεισο ἀσφαλέϛατα, ὅτι αὕτη ἡ Α᾿καδημία, ἥτις παντοίοις τρόποις περιποιεῖται, ϗ περιθάλπει τοὺς ἐνασχολουμένους πρὸς τὸ αὐξῆσαι τὰς ἐπιστήμας, μετὰ μεγίστης ἡδονῆς τοὺς σοὺς πόνους ἀποδεχθήσεται, ϗ φιλοφρονήσει· ἔρρωσο.

Ἐξέδοτο ἐν Πετρουπόλει κατὰ τὸ αψνά. ἔτος, Μαρτίου λ'.
Τῷ ὀνόματι τῆς τῶν ἐπιστημῶν ἀκαδημίας ἔγραψα
Γ. w. Ῥούχμαν.

Τῷ σοφωτάτῳ Κυρίῳ ἀμπάτε Στελίνῳ, Μπαλάνος Βασιλόπουλος ὁ Πρωτοπαπᾶς Ἰωαννίνων, χαίρειν.

Ἔφθασε ϗ εἰς ἡμᾶς, ἀνδρῶν ἄριστε, ἡ ἀγαθὴ ὑμῶν φήμη· δεδήλωκέ μοι πρὸ πολλοῦ ὁ φιλομαθέστατος γνήσιός μοι μαθητὴς κύριος Νικόλαος Κυριάκη διὰ τῶν αὐτοῦ πρός με γραμμάτων τὴν φιλοσοφικὴν ὑμῶν ἀγαθὴν διάθεσιν, ϗ τὴν μετ' εὐνοίας ἀποδοχὴν τῆς περὶ εὑρέσεως τῶν δύο μέσων ἑξῆς ἀνάλογον γραμμῶν δοθεισῶν τῶν ἄκρων Προτάσεων, ϗ τὴν ἀκριβῆ ταύτης θεωρίαν, ἐξ ἧς ἀνέκυψε, ϗ ἡ περὶ τῆς κατὰ τὸ σ, διαιρέσεως τῆς μξ γραμμῆς ἀπορία, ἣν ϗ τὸ σταλέν μοι τότε ἐδήλου διάγραμμα. Ἀλλ' ἐγὼ τηνικαῦτα χρονίῳ συνεχόμενος τεταρταίῳ πυρετῷ, ϗ ἀσθενῶς ἔχων τῷ σώματι, οὐκ ἠδυνήθην ἀπαντῆσαι, ὡς τὸ εἰκὸς, εἰς λύσιν τῆς παρ' ὑμῶν ταύτης ἀπορίας, ὅτε ϗ ἔδει, μετὰ καιρὸν δὲ τοῦτο πεποίηκα, ϗ εἰς Βενετίαν τὴν τῆς ἀπορίας λύσιν ἀπέστειλα, ὡς εἶχον μέντοι τότε δυνάμεως· μαθὼν δὲ παρὰ τῶν ἐν Βενετίαις διατριβόντων μοι μαθητῶν, δι' ἔρωτα τῆς Λατινίδος, ϗ τῶν νέων ἐπιστημῶν, ὡς οἱ πολλοὶ τῶν αὐτοῦ μαθηματικῶν, τὴν ἐκ τῆς κατασκευῆς τοῦ διαγράμματος τῆς αὐτῆς προτάσεως ἐξηρτημένην ἀπαντοῦσι δεῖξιν, ϗ ταύτην μόνην εἰς ἐμπέδωσιν τῆς τοῦ προβλήματος ἱκανὴν ἀποφαίνονται, ὀρθῶς περὶ τούτου κρίνοντες, μικρόν τι ἀναλαβὼν τῆς προτέρας μου δυνάμεως μείζοσιν ἐμαυτὸν ἐνέβαλον πόνοις· ϗ δὴ λημμάτιόν τι προετοιμάσας συνήγαγον δι' αὐτοῦ ἀναγκαίως, ὥς γε μοι δοκεῖ, μὴ ἐξεῖναι κατ' ἄλλον τινὰ λόγον τὴν μξ διαιρεθῆναι γραμμὴν παρὰ τὸν τῆς ζμ πρὸς τὴν ξθ, ὡς ἐπὶ τῆς τοῦ διαγράμματος κατασκευῆς ἡρμήνευται· ὅθεν δὲ ϗ ταύτην μόνην τὴν δεῖξιν τῆς προσταλείσης προτάσεως τῇ πρώτῃ αὐτῆς συνέταξα δείξει, ὡς ἀρκοῦσαν ἤδη εἴς τε ἐμπέδωσιν τοῦ τοιούτου προβλήματος, ϗ ἐπιβεβαίωσιν τῆς πρώτης αὐτοῦ δείξεως. οἶμαι δ' ὅτι, ἵνα μὴ καὶ πέπεισμαι εἴπω, ϗ τοὺς ἐριστικῶς προθυμουμένους κατὰ τῆς αὐτῆς φέρεσθαι προτάσεως μηδὲν ἀντιπεῖν ἔχειν· διὸ δὴ ϗ πρὸς τὴν σὴν μεγαλόνοιαν ἀδιστάκτως στέλλω τὴν πρότασιν, δυσὶν ἀσφαλιζομένην δείξεσιν, ὡς ταῖς τοιαύταις χαίρουσαν θεωρίαις. Ἀξιῶν αὐτὴν λεπτομερῶς ἐρευνῆσαι τὰ ἐν αὐτῇ, μηδὲ τὸ σμικρότατον καταλιποῦσαν, ἢ γοῦν παραδραμοῦσαν. ϗ διὰ τῶν τιμαλφεστάτων αὐτῆς γραμμάτων δηλῶσαί μοι τὰ δόξαντα. ἔρρωσο φιλοσόφων ἄριστε χαίρων τε ἅμα, ϗ εὐδαιμονῶν.

Κατὰ τὸ αψνγ. Ἀνθεστηριῶνος κέ. Ἰωαννινόθεν.

Τοῖς σοφωτάτοις καὶ ἐπιστημονικωτάτοις ἀνδράσι τοῖς ἐν τῇ περιφήμῳ Ἀκαδημίᾳ Πετρουπόλεως, Μπαλάνος Βασιλόπουλος ὁ Πρωτοπαπᾶς Ἰωαννίνων, χαίρειν.

Ὅσον τῷ ὄντι τερπνόν τε ἅμα ϗ ἐπωφελὲς τοῦ σκοποῦ ἐπιτυγχάνειν, ϗ μὴ μάτην πονεῖν, τοσοῦτον ἤδη λυπηρὸν, ϗ ἀνωφελὲς τοὐναντίον, ϗ πολλῷ μᾶλλον λυπηρότερον τὸ παρ' ἐλπίδα συμβαῖνον. ἔγωγε τοίνυν πολλοὺς, ϗ διὰ πολλοῦ ὑπομείνας τοὺς πόνους, ϗ οὐδὲ μετρίοις καταβρεχθεὶς τοῖς ἱδρῶσιν, εἰς ἐπίτευξιν τῆς μεθόδου, τῆς τῶν δύο μέσων συνεχῶς ἑξῆς ἀνάλογον γραμμῶν εὑρέσεως κατὰ γεωμετρικοὺς χωροῦσης κανόνας, ϗ εὑρὼν τὴν πρὸς ὑμᾶς εἰς κρίσιν πρὸ πολλοῦ σταλεῖσαν γεωμετρικὴν ἔφοδον, ὡς τῶν τοιούτων ὄντας ὑπερασπιστὰς, ἀντὶ τῆς παρ' ὑμῶν ἐλπιζομένης τῆς αὐτῆς ἐφόδου ἐπιβεβαιώσεως, ἐδέχθην τὴν παρὰ τοῦ σοφωτάτου, ὡς γράφουσιν, Εὔλερ ἀνασκευὴν ταῖς ἀριθμητικαῖς συνισταμένην ἐφόδοις, ὡς μικρὰν δῆθεν ἐχουσῶν τὴν ἰσχὺν, τῶν γεωμετρικῶν ἀρχῶν τε ϗ ἀποδείξεων, ὅπου γε μᾶλλον τοὐναντίον ἔδει ποιῆσαι, τὰς γεωμετρικὰς τοῦ προβλήματος ἀποδείξεις γεωμετρικῶς βασανίσας, ϗ μὴ ἀφέντα τὴν ὑπέραν τὸν πόδα διώκειν, τὸ δὴ λεγόμενον. Διὸ δὴ ἵνα μὴ εἰς μάτην οἱ ἐμοὶ ἀπέλθωσι πόνοι, τῶν ὧνπερ εἶχον περὶ τὴν εὑρεθεῖσαν ταύτην ἔφοδον ἐλπίδων ἐκπέσοιμι κατεσκεύασα ὡς εἶχον τότε δυνάμεως, χρονίῳ τεταρταίῳ συνεχόμενος πυρετῷ, τὴν πρὸ πολλῶν ἡμερῶν σταλεῖσαν ἡμῖν ἀπάντησιν εἰς ἀνασκευὴν τῶν παρὰ τοῦ Εὔλερ ἐνστάσεων ϗ ἐμπέδωσιν τοῦ προβλήματος, μικρόν τι παραλλάξας τὴν τῆς πρώτης δείξεως κατασκευὴν, καὶ δευτέραν προσθεὶς ἀπόδειξιν ἐκ τοῦ ἐπιλογισμοῦ τῆς κατὰ τὸ σ διαιρέσεως τῆς μξ ὑπολαμβαημένης γραμμῆς ἐξηρτημένου. Ἀλλ' ἐπεὶ οὔτε παρ' ὑμῶν διὰ γραμμάτων ἔμαθον τὰ περὶ τῆς αὐτῆς ἀπαντήσεως οὔτε μὴν παρὰ τῶν ἐν Βενετίαις γνησίων μοι ἀκροατῶν ἔχω τί περὶ τούτου σαφὲς εἰπεῖν· ἔμεινε δή μοι κατὰ τὸν εἰπόντα Ἄστροις τἀμὰ τεκμαίρεσθαι, ἐλαφρωθεὶς ἤδη τοῦ προκαταλαβόντος με πυρετοῦ, ϗ μικρόν τι τῆς προτέρας ἀναλαβὼν δυνάμεως. Ἀκούων δ' ὅτι ϗ πολλοὶ τῶν ἐν τοῖς μαθήμασιν ἀσχολουμένων τὴν ἐκ τῆς τοῦ διαγράμματος κατασκευῆς τοῦ αὐτοῦ προβλήματος ἐξηρτημένων ἀπαιτοῦσι δεῖξιν· ϗ ταύτην μόνην εἰς ἐμπέδωσιν τῆς προτάσεως ἀσφαλεστέραν ἀποφαίνεται ὀρθὴν τῷ ὄντι περὶ τούτου τὴν κρίσιν ποιοῦντες, κατεσκεύασα ϗ τὴν ἤδη πρὸς ὑμᾶς στελλομένην δεῖξιν, συντάξας αὐτὴν μόνην τῇ πρώτῃ, διὰ τὸν φόβον τῆς μακρηγορίας, πρὸς χάριν καὶ τοῦτο ποιήσας τῶν φιλομαθῶν· οἶμαι δὴ κατὰ τὴν ἐμὴν κρίσιν ϗ ὡς ἐμαυτῷ πέπεισμαι τὰς δύο ταύτας στελλομένας τῆς Προτάσεως δείξεις, ὀρθῶς τε ἔχειν παρ' ὑμῶν κριθῆναι, ϗ παντὸς ἄλλου τῶν ἀπαθῶς δεξομένην τὴν πρότασιν, ϗ κατὰ γεωμετρικοὺς χωρεῖν κανόνας μηδενὸς τῶν ἐν αὐτοῖς εἰς σύστασιν κειμένων, ἀναποδείκτου ὄντος ἢ λαμβανομένου, ἢ ὅλως δεδομένου. Εἰδὲ ϗ τούτων ἑκατέρα μόνην εἰς ἔνδειξιν ἱκανὴ τοῦ προβλήματος· ἀλλ' οὖν γε διὰ μὲν τῆς ά. δείξεως ἀποδείκνυται Γεωμετρικῶς ἐκ τῆς τοῦ σφου ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου κατασκευῆς τὸν διὰ τῶν π' ϗ γ' σημείων διερχόμενον κύκλον διαβαίνειν ἀναγκαίως ϗ διὰ τοῦ ό σημείου, ἔνθα ἡ μ' ξ' ἀναλόγως τοῖς ζμ. ξπ. τέμνεται. Διὰ δὲ τῆς β'. συνάγεται ἐμφανῶς ϗ τοῦτο ἐκ τοῦ προεκτεθέντος λημματίου· συνεπιφέρεται δ' ἔτι ϗ ὅτι ὀρθῶς ἡ μ' ξ' κατὰ τὸ ό τέμνεται γραμμὴ ἀναλόγως τοῖς ζ' μ' ξ' θ', ϗ ἀδύνατον κατ' ἄλλο τοῦτο παθεῖν σημεῖον. Διὸ ϗ εἰς κρείττονα τοῦ προβλήματος ἀνάπτυξιν ἀμφότεραι συνετάγησαν. Ἐγὼ μὲν οὖν οὕτω πέπεισμαι ϗ οὑτωσὶ ἀληθῆ τὴν πρότασιν κρίνω, ὡς μηδεμίαν τοῦ λοιποῦ ἐξεῖναι ἐμπεσεῖν περὶ αὐτῆς ἀμφιβολίαν, ἢ γοῦν ἔνστασιν μὴ ῥαδίως λυθησομένην, τῷ ϗ μικρὸν ἐπιστήσαντι, ἵνα μὴ ϗ ψευδῆ οὖσαν εἴπω λυθησομένην· ὑμᾶς δὲ ὡς τῆς ἀληθείας ὄντας ὑπερμάχους ϗ γνησίους τῶν τοιούτων ἐραστὰς προβλημάτων, λεπτομερῶς μὲν ἐρευνῆσαι δέον, τά τε τῇ κατασκευῇ τοῦ διαγράμματος, ϗ τὰ ἐν ἑκατέρᾳ τῶν ἐκτεθειμένων αὐτοῦ ἀποδείξεων· τὴν δὲ περὶ τούτων κρίσιν ἀπαθῆ ποιήσασθαι, ϗ τῶν τιμαλφεστάτων ὑμετέρων ἀξιῶσαι με γραμμάτων δηλοῦντας δι' αὐτῶν ϗ ἡμῖν τὰ δόξαντα· ὅπως ἂν ϗ τοῖς ἄλλοις τὸ τοιοῦτον κοινωθῇ πρόβλημα, ϗ μέτοχοι τῶν ἐμῶν πόνων οἱ τῶν μαθημάτων γένωνται τρόφιμοι, ϗ τότ' ἂν ἐπιγνῶ, οἷοι τῶν ἱδρῶσιν ἀφειδῶς ποτιζομένων μαθημάτων οἱ καρποί. Ἔρρωσθε.

Ἐγκεχάρακται μὲν ἐν Ἰωαννίνοις κατὰ τὸ αψνγ'. ἔντος τὸ σωτήριον Ἀνθεστηριῶνος κέ. ἐστάλη δὲ εἰς τὴν περίφημον τῆς Πετρουπολ. Ἀκαδημίαν.

Ἐγκύκλιος ἐπιστολὴ γεγραμμένη διὰ τὰς τρεῖς ἀκαδημίας, Βρετανίας, Ὁλλανδίας, καὶ Παρισίων, σταλεῖσα δὲ κατὰ τὸ αψνδ'. Φευρ. ιδ'.

Τοῖς σοφωτάτοις τε καὶ ἐπιστημονικωτάτοις Διδασκάλοις, τοῖς Ἐν τῇ περιφήμῳ ἀκαδημίᾳ Βρεττανίας, Μπαλάνος Λόπελος ὁ πρωτοπαπᾶς Ἰωαννίνων, χαίρειν.

Τίς οὐκ ἂν δικαίως ἐπαινέσειεν, ἀνδρῶν ἄριστοι, Λύσιππόν τε ϗ Ἀπελλῆν; τίς μὴ τὴν ἑκατέρου θαυμάσειεν ἀγαθὴν τῷ ὄντι διάθεσιν; ἀμφότεροί γε εἰς τὰς τῶν εἰκόνων κατασκευὰς ἐργάται ἦσαν ἐπιδεξιώτατοι, ἀλλὰ ϗ κριταὶ ἀλλήλων ἄμφω ἐγίνοντο δικαιότατοι. Διὸ ϗ Λύσιππος μὲν Ἀπελλῆν, Ἀπελλῆς δὲ Λύσιππον εἰς κρίσιν τῶν ἰδίων ἐκάλει γραφῶν. Ἔγωγε τοίνυν τοῖς μαθήμασι μᾶλλον, ὡς εἶχον δυνάμεως, ἐνασχολούμενος εἰς θερμὸν ἐμπέπτωκα ἔρωτα τῆς τῶν δύο μέσων συνεχῶς ἑξῆς ἀνάλογον γραμμῶν εὑρέσεως δοθεισῶν τῶν ἄκρων, τῆς διὰ μόνου τοῦ κανόνος ϗ διαβήτου γεωμετρικῶς γενομένης, ϗ πολλὰ πολλάκις εἰς ἐπίτευξιν τοῦ οὑτωσὶ ποθουμένου ποιήσας, καὶ πολλοὺς ἐκχέας τοὺς ἱδρῶτας οὐκ εἰς μάτην τοῦτο πεποίηκα. Ἀλλ' ὥς γε μοι δοκεῖ, τὸ πρὸ πολλοῦ ἀγνοούμενον, ϗ πολλοῖς ὡς ἀδύνατον κρινόμενον ἔγνωσται ἤδη, ὥστε ϗ τοῖς ἄκροις χείλεσι, τὸ δὴ λεγόμενον, τῶν γεωμετρικῶν ἁψαμένοις προβλημάτων τε ϗ θεωρημάτων ἀκριβῶς ἀντιλαμβάνεσθαι τῆς τοῦ διαγράμματος κατασκευῆς, ϗ ἐγκρατεῖς τῶν τούτων γίνεσθαι δείξεων· οὕτω δὲ ἀκριβῆ εἶναι τὴν τοῦ προβλήματος τούτου γεωμετρικῶς εὑρεθεῖσαν ἔφοδον, κατὰ τὴν ἐμὴν κρίνω κρίσιν, ὡς μηδὲ ἄλλην ποτὲ ἐνδέχεσθαι κρείττονα εὑρεθῆναι, ἢ γοῦν τελειοτέραν ϗ εὐχερεστέραν ταύτης γενέσθαι. Ἐπεὶ δ' αἱ εὔνοιαι, κατὰ τὸν εἰπόντα, δειναὶ δικάσαι τὰς ψήφους, ζηλώσας ἤδη εἰς τοῦτο Λύσιππόν τε ϗ Ἀπελλῆν τὸν δίκαιον ἐζήτουν τῶν ἐμῶν πόνων γε ϗ ἱδρώτων κριτήν. Διὸ δὴ κατ' ἐμαυτὸν περὶ τούτου διανοούμενος ἔγνωκα πρὸς ὑμᾶς στεῖλαι τὴν πρότασιν, ϗ κριτὰς ταύτης ἀποκαταστῆσαι τοὺς ϗ αὐτοῖς τοῖς ἀδύτοις ἐμβατεύσαντας τῆς μαθήσεως, ϗ τὰ ὄργια ταύτης ἀκριβῶς μυηθέντας, ὡς ϗ πρὸς ἡμᾶς ἡ φήμη φθάσασα τρανῶς τοῦτο δεδήλωκε, ϗ οἱ ἀφθόνως διαδιδόμενοι καρποὶ τῶν εὐθαλῶν λειμώνων τῆς περιβοήτου ταύτης ἀκαδημίας διαβεβαιοῦσιν. Ἀξιῶ δὲ ὑμᾶς ἀσμένως ϗ τὴν πρότασιν ταύτην ἀποδεχθῆναι, ϗ μετ' εὐνοίας αὐτὴν ἀκριβῶς θεωρῆσαι, μηδὲ τὸ ἐλάχιστον τῶν ἐν αὐτῇ ἀνεξέταστον καταλιπόντας. Καὶ πρὸς τὸ αὐτῆς μᾶλλον ἀφορᾶν χρήσιμον, ὡς τοῖς τοιούτοις χαίροντας φιλοπονήμασι, ϗ τοὺς περὶ τὰ τοιαῦτα καταγινομένους, ϗ πολλοὺς καταβάλλοντας τοὺς πόνους δεξιουμένους τε ϗ περιθάλποντας· τὴν δὲ τοῦ διαγράμματος ταύτης κατασκευὴν, καὶ τὰς μετ' αὐτὸ δύο γεωμετρικῶς ἐκτεθησομένας δείξεις διὰ τῶν γεωμετρικῶν βασανίσαι ἀρχῶν γε ϗ ὑποθέσεων. Διὰ μὲν γὰρ τῆς πρώτης δείξεως γραμμικῶς ἀποδείκνυται τὸν περὶ τὴν γ' π' γραφόμενον κύκλον, ϗ διὰ τοῦ ό σημείου διέρχεσθαι, ἔνθα ἡ ἐναπολαμβανομένη μ' ξ' γραμμὴ ἀναλόγως ταῖς ζ' μ', ξ' θ' τέμνεται γραμμαῖς. Ἐκ δὲ τῆς δευτέρας, τῆς ἐκ τῆς τοῦ διαγράμματος κατασκευῆς ἐξηρτημένης, αὐτὸ τοῦτο γεωμετρικῇ ἐφόδῳ συνάγεται· ϗ πρὸς τούτοις ἔτι, ϗ τὸ μὴ δύνασθαι τὴν μ' ξ' διαιρεῖσθαι γραμμὴν ἄλλως συνεπιφέρεται· ϗ τοιοῦτον γε τὸ ἐμὸν περὶ ταύτης τῆς προτάσεως ζήτημα· εἴγε δηλονότι ἥτε τοῦ διαγράμματος κατασκευὴ, ϗ αἱ τούτου δείξεις γεωμετρικῶς χωροῦσι, ϗ γεωμετρικαῖς ἐπερείδονται ἀρχαῖς, μηδὲν ἔχουσαι τῶν ἐν αὐταῖς δεδομένον ϗ λαμβανόμενον, ἢ γοῦν ἀναπόδεικτον, οὐδὲ λυθῆναι μὴ δυνάμενον· εἰ γὰρ ϗ ἐμαυτῷ πέπεισμαι ὀρθῶς τε ἄμφω ἔχειν, ϗ μηδεμίαν εὑρίσκεσθαι ἀμφιβολίαν ἀμφοτέραις ταῖς δείξεσι γεωμετρικῶς βασανιζομέναις, ὡς τῶν γεωμετρικῶν μόνων κατὰ Πτολεμαῖον ἀποδείξεων ἐπιστημονικὴν ἐχουσῶν τὴν ἐπιφορὰν, ἀλλ' οὔγε τὴν παρ' ὑμῶν ἀπαθῆ κρίσιν χρησταῖς προσμένων ταῖς ἐλπίσιν, εἰς ἀσφαλεστέραν τῆς προτάσεως ἐπιβεβαίωσιν, μετὰ πολλῆς ταύτην ἀπαιτῶ τῆς ἱκεσίας· ϗ τότ' ἂν μᾶλλον οἷοι οἱ καρποὶ γνωσθήσονται τῶν ἀφειδῶς περὶ τὰ τοιαῦτα καταβαλλομένων πόνων. ὑγιαίνοιτε, φιλοσόφων κράτιστοι χαίροντες ἅμα καὶ εὐδαιμονοῦντες τοῖς κρείττοσι.

Κατὰ τὸ αψνδ. Ποσειδεῶνος ἐννάτῃ ἐπὶ εἰκάδι· Ἰωαννινόθεν.

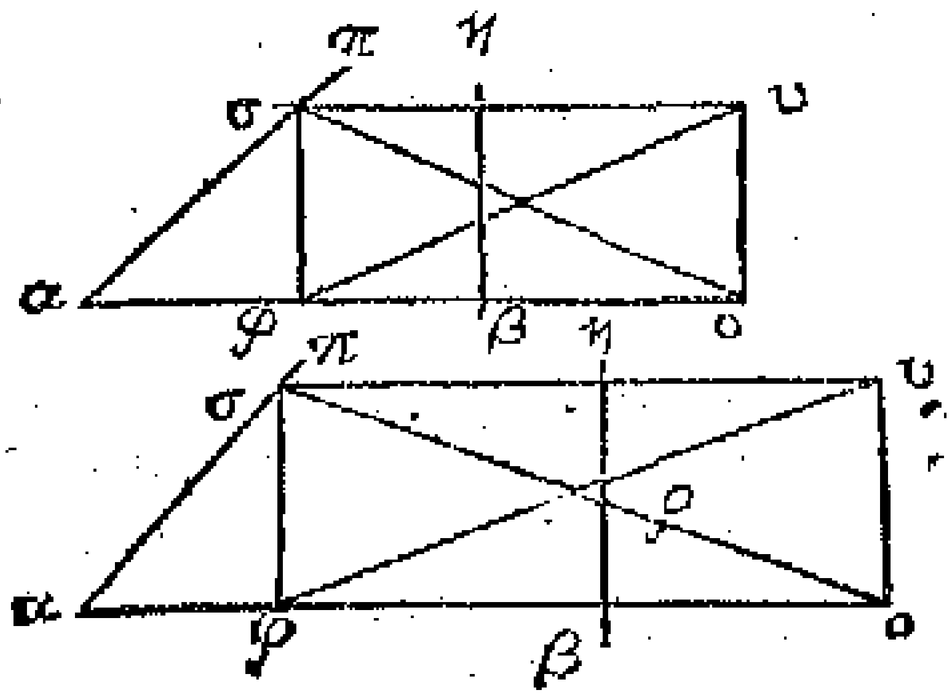
Τὴν ὑμετέραν σοφολογιωτάτην, καὶ ἐπιστημονικωτάτην Πανευδεσιμότητα εὐλαβοφρόνως προσκυνῶ σὺν τῷ σωτηρίῳ προσφωνήματι. ἣν καὶ διατηροίη ὁ ἐκ νεκρῶν ἀναστὰς ὑγιαίνουσαν, πανευδαίμονα καὶ μακρόβιον μετὰ πάντων τῶν ἐφετῶν καὶ καταθυμίων. 1754. Ἀπριλλίου 8. Ἐνετίηθεν.

Διὰ τὸ ἅγιον Πάσχα ἦλθον ἐνταῦθα πρὸ ὀλίγων ἡμερῶν ἐκ Βονωνίας, ὅπου διέτριψα ἕνα χρόνον ὁλόκληρον κατὰ συνέχειαν χωρὶς νὰ ἔλθω ἐδῶ διὰ τὰ μεγάλα ἔξοδα τῶν ὁδοιποριῶν, ϗ ὅπου σὺν Θεῷ μέλλω νὰ ἐπιστρέψω μετ' οὐ πολλὰς, εἰς ἐκπλήρωσιν τοῦ ἔργου μου, ϗ ὅθεν δὲν ἔλειψα νὰ τῆς γράψω διεξοδικῶς τὸν παρελθόντα Σεπτέμβριον. Δὲν λείπω λοιπὸν διὰ τοῦ παρόντος μου νὰ ἀποδώσω αὐτῇ τὴν ὀφειλομένην εὐλαβῆ προσκύνησιν, δηλοποιῶν, ὅτι δι' εὐχῶν αὐτῆς ὑγιαίνω, ϗ ἀποκρινόμενος εἰς τὰ παρ' αὐτῆς τότε κοινὰ πρὸς ἐμὲ, ϗ τὸν ἐν Χριστῷ μοι ἀγαπητὸν ἀδελφὸν κὺρ Γεώργιον γράμματα, ϗ τὰ ἴδια πρὸς ἐμὲ γραφέντα, ἅπερ ἀσφαλῶς ἐλάβομεν μετὰ τῶν διαφόρων τῆς προτάσεως ἀναπτύξεων, ἃς ἐπέμψατε εἰς ἀπόκρισιν, ϗ λύσιν τῶν ἐνστάσεων· ἔγνωμεν τὰ εἰς κάποιον τρόπον δίκαια παράπονα αὐτῆς πρὸς ἡμᾶς, ὡς δῆθεν μὴ γράψαντας πρὸς αὐτὴν, καὶ ἀμελοῦντας τοῦ περὶ τοῦ προβλήματος ἀγῶνος, ϗ ὡς ἀμνημονήσαντας αὐτῆς, ϗ δειλιῶντας ἐν ταῖς παρὰ τῶν ἐναντίων ἐνστάσεσι, ϗ τὰ ἑξῆς. Ἤμεθα βέβαιοι ὅμως, ὅτι ἂν τὰ οὐκ οἶδα ποίᾳ κακῇ τύχῃ διαπεπτωκότα ἡμέτερα γράμματα, τά τε ἐμοῦ ἐκ Βονωνίας, ϗ παρὰ τοῦ κὺρ Γεωργίου πολλάκις ἐντεῦθεν γραφέντα ἐλαμβάνετε, ϗ ἂν ἐμανθάνετε τὴν ἡμετέραν προθυμίαν, τὴν ζέσιν, τὴν θερμότητα, ϗ τὸν ἀγῶνα ὃν κατὰ δύναμιν οὐκ ἐπαυσάμεθα ἐπιδεικνύμενοι ὑπὲρ τοῦ προβλήματος, ἠθέλετε συμπεράνῃ, ὅτι ἡμεῖς ϗ ἦμεν, ϗ ἐσμὲν, ϗ ἐσόμεθα αὐτῆς. Ἀλλ' ἐπειδὴ οὐκ ἐνετύχετε τοῖς αὐτοῖς γράμμασιν· εἴχετε δίκαιον νὰ ὑποπτευθῆτε· ὡς τόσον ἡμεῖς εἰς ἀπόδειξιν τοῦ προβλήματος ἀγῶνος ἡμῶν, προασπισμοῦ, καὶ προμαχίας κατὰ τῶν ἐναντίων, ἂν ἄλλο δὲν προβάλλωμεν, προβάλλομεν αὐτὸν τὸν οἶκον τῶν παρὰ Θεοῦ εὐλογημένων Καραϊωαννιτῶν, ὅπου ἰξεύρουν πόσον ἐπιμελούμεθα, ϗ τὸ πρόβλημα ὑπερασπιζόμεθα, εἶναι ἔτι ἱκανὸν εἰς ἀπόδειξιν καὶ αὐτὴ ἡ ἐπιμέλεια τοῦ νὰ τυπωθῇ τὸ πρόβλημα μὲ τὴν πρὸς τὰς ἀκαδημίας ἐπιστολὴν, τὰ ὁποῖα σταλέντα ϗ πρὸς αὐτὴν τυπωμένα ἴσως τὰ ἐλάβετε μέχρι τοῦδε, ϗ ἐβεβαιώθητε. Ἐπειδὴ γὰρ μετὰ πολὺν ἀγῶνα εἴδομεν, ὅτι δὲν παύουν οἱ ἐναντίοι, ὄντες προκατειλημμένοι ἀπὸ τὸ ἀδύνατον κἀντεῦθεν ϗ τοῦ μικροῦ ἐπιλαβέσθαι πειρώμενοι, ἐκάμομεν καθὼς πολλάκις μᾶς ἐγράψατε νὰ τὸ τυπώσωμεν ἐπ' ὀνόματι αὐτῆς, διὰ νὰ μὴ τύχῃ ϗ τὸ σφετερισθῇ ἄλλος ἐπὶ τῷ ἰδίῳ ὀνόματι καθὼς ἔκαμαν ϗ εἰς ἄλλα εἰς τὰ μέρη ταῦτα οἱ ξένοις πτεροῖς ὡς ἄλλος κολοιὸς σεμνυνόμενοι, καὶ

σ-πάλιν ὕςερα ἀπὸ τὴν τύπωσίν του νὰ τὸ ὑπερασπιζώμεθα, ϗ εἰς τὰς πέριξ ἀκαδημίας ςείλωμεν μήπως εὕρωμεν τὴν βοηθήσουσαν· ὁ κὺρ Γεώργιος δὲν ἔλειψεν ἐνταῦθα νὰ ἀγωνίζεται, δείχνοντάς το εἰς μαθηματικοὺς, ϗ θηρεύμενος τοὺς ὑπὲρ ἡμῶν ἐσομένους, ϗ συμψηφισομένους, ἀπὸ τοὺς ὁποίους εὑρεθέντες τινὲς ὁποῦ τὸ ἀποδέχονται, ϗ εἶναι ὑπὲρ ἡμῶν, τί δύνανται νὰ κάμουν ϗ αὐτοὶ κατὰ μέρος, ὅταν δὲν ἔχωμεν μίαν Ἀκαδημίαν ὁποῦ νὰ κυρώσῃ, ϗ νὰ αναλάβῃ τὸν πόλεμον ἐναντίον τῆς αλλης ὁποῦ νὰ ἐναντιωθῇ. ἐγὼ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος ἐν Βονωνίᾳ καθὼς ἐπῆγα τὸν Μαΐον πέρυσι δὲν ἔλειψα νὰ ἀκολουθήσω τὰ αὐτά. ἔδειξα τὸ πρόβλημα τῷ ἐκεῖ περιφήμῳ ἀςρονόμῳ ἐμοῦ ὄντι καθηγητῇ ἐν τῇ ἀςρονομίᾳ, κὺρ Εὐςαθίῳ Τζαννώτῃ ὀνομαζομένῳ μοῦ ἔκαμε μίαν ἀνθίςασιν ἔγγραφον ἐν συντόμῳ, ϗ μοῦ τὴν ἐνεχείρισεν εἰς καιρὸν ὁποῦ ἐμίσευεν ἔξω ἀπὸ τὴν πόλιν εἰς τὸ πεδίον διὰ ξεφάντωσιν ϗ ἄνεσιν ὅλον τὸ καλοκαῖρι ὁποῦ σχολάζουσιν ἀπὸ τὰ μαθήματα κατὰ τὴν συνήθειαν τῶν ἀκαδημιακῶν διδασκάλων. ἐπῆγα εἰς τὸ κατάλυμά μου, ϗ ἄνοιξα νὰ ἰδῶ τὴν ἀνθίςασιν τὴν ἔγγραφον, εὗρον αὐτὴν ὁποῦ δὲν εἴχετο λόγου, ϗ δὲν εἶχε κανένα δίκαιον· τὸν ἀκαρτερῶ ἀπέξω διὰ νὰ τοῦ ἀποκριθῶ ὄντας βέβαιος, ὅτι ἂν ἐκείνη ἦτον ἡ ἀμφιβολία του, ϗ ὄχι ἄλλη, νὰ τὸν κάμω νὰ συναινέσῃ, ϗ νὰ τὸ ἀποδεχθῇ ὡς ἀληθέςατον ϗ ὀρθῶς ἔχον τὸ πρόβλημα. Μόλις ἦλθεν εἰς τὰς 15 Αὐγούςου. ἐπῆγα, τὸν εὗρον, τοῦ ἀπεκρίθην, ἔμεινε πληροφορημένος ὡμολόγησε πῶς αὐτὸς εἶχε λάβῃ λάθον μὴ θεωρήσας αὐτὸ ἀκριβῶς, ϗ ἀρξάμενος πάλιν νὰ τὴν θεωρήσῃ, ἐπελάθετο πάλιν, ὅτι οὐκ ἐποιήσατο μνείαν τῆς κατὰ τὸ σ, διαιρέσεως ἐν τῇ δείξει, ϗ ἄλλα τοιαῦτα, τὰ ὁποῖα σᾶς τὰ ἔγραφα ἐγὼ εἰς πλάτος εἰς ἕν μου γράμμα (ὁποῦ ὡς φαίνεται εἶναι χαμένον) τὸ ὁποῖον ςαλμένον παρ᾽ ἐμοῦ ἐνταῦθα τῷ κὺρ Γεωργίῳ σᾶς τὸ ἔςειλε, ἐν ᾧ ἔκαμα ϗ ἓν σχῆμα ὁποῦ αὐτὸς ἔκαμνε πρὸς ἀνθίςασιν, εἰς τὴν ὁποίαν ἀποκρινόμενος ἐγὼ, δὲν ἠξιέμην ἀκροάσεως παρ᾽ αὐτοῦ, ἀλλ᾽ ἔλεγέ μοι νὰ ςείλω τὸ πρόβλημα ϗ εἰς τὸν ἐν Παταβίῳ Ἀββᾶτε Σύτζην νὰ κρίνῃ ϗ αὐτὸς, ϗ εἰπῇ τὴν γνώμην του. Ἐγὼ ϗ ἠξεύρωντας τὸν Ἀββᾶτε Σύτζην πῶς ἐφέρθη, ὅταν ἐδῶ τοῦ τὴν εἶχε δείξῃ ὁ κὺρ Γεώργιος, ἀπεκρίθην τῷ ἀςρονόμῳ, ὅτι ὁ διδάσκαλός μου τὴν ἐδικήν σας κρίσιν προτιμᾷ παντὸς ἄλλου, ϗ ἐπειδὴ αὐτὸς δὲν ἀκαρτέρεσε νὰ ἀκούσουν πολλὰ ἐκ ςόματος, σᾶς ἔγραψα τὴν ἀνθίςασίν του διὰ νὰ τοῦ ἀποκριθῆτε ἐγγράφως. Ἐπειδὴ ὅταν εἶναι γεγραμμένα τὰ λεγόμενα, ἢ προβαλλόμενα δίδουν περισσοτέραν ἀκρόασιν, ἢ προσοχήν. ἀκαρτερῶσα κάμμίαν σας ἀπόκρισιν, εἰς τὸ αὐτό μου γράμμα, ϗ δὲν ἔλαβα μέχρι τῆς σήμερον. Ἐγίνετο ἡ ἐπιμέλεια νὰ τυπωθῇ διὰ τὸν προρρηθέντα φόβον τοῦ σφετερισμοῦ, ἐςάλη κἀμοὶ μία κόπια ἐνταῦθα παρὰ τοῦ κὺρ Γεωργίου, ἀξιώσει τοῦ ἐκλαμπροτάτου ἄρχοντος κὺρ Γεωργίου Καραϊάννου μὲ ἐπιςολὴν διὰ νὰ τὴν προσφέρω κοινῶς πάσῃ τῇ ἀκαδημίᾳ. τὴν ἐπρόσφερα, εὐχαρίςησαν διὰ τὴν τιμὴν ὁποῦ τοὺς ἐκάμετε νὰ τὴν ςείλετε ϗ πρὸς τὴν ἰδίαν ἀκαδημίαν αὐτῶν νὰ ἀποκριθοῦν ὅμως εἰς ἐπικύρωσιν τοῦ προβλήματος, ἢ ἀναίρεσιν ἂν ἔχῃ σφάλμα, δὲν τοὺς εἶναι συγχωρημένον ὡς μοῦ εἶπαν αὐτοὶ οἱ ἴδιοι, διὰ τί εἶναι νόμος τῆς ἰδίας των ἀκαδημίας ἄνωθεν ϗ ἐξ ἀρχῆς νὰ μὴν ἐπιχειρισθοῦν ἢ ἐπικύρωσιν ἢ ἀναίρεσιν εἰς ὁποιονοῦν αὐτοῖς προβληθησόμενον νέον, διὰ τὶ πολλάκις συμβαίνει· ὅτι ἡ μία Ἀκαδημία ἢ ἀποδέχεται, ἢ ὁ ἐκεῖνα ὁποῦ ἡ ἄλλη ἐνδέχεται νὰ μὴν τὸ κρίνῃ, ὁμοίως, ϗ ἀκολουθεῖ ἔπειτα νὰ πίπτουν εἰς διαλέξεις ἀναμεσόν των, ϗ νὰ γράφουσιν ἐναντίον μία τῆς ἄλλης, ἀπὸ τὸ ὁποῖον προξενοῦνται ϗ ἔξοδα εἰς τὸ νὰ τυπώνουν, ϗ χασομερίαις εἰς τὸ νὰ γράφουν ϗ ἀποκρίνονται, τοιαύτην δὲ εὐκολίαν ἡ ἐν Παρισίοις ἀκαδημία ἔχει, διὰ τί οἱ ἐκεῖ προφέσσορες, ἤτοι διδάσκαλοι ἔχουν πληρωμαῖς μεγαλωτάταις, ϗ βασιλικὰς δαπάνας, ϗ ἀγκαλὰ ϗ ἡ ἐδική των ἀκαδημία (ἤτοι ἡ ἐν Βονωνίᾳ) δὲν εἶναι κατωτέρα ἀπ᾽ ἐκείνην τὴν ἐν Παρισίοις, ποιοῦσα ϗ αὐτὴ κάθε πέμπτην ἑσπέρας σύναξιν τῶν προφεσσόρων, ϗ τὰ παρ᾽ αὐτῶν εὑρισκόμενα νέα προβαλλόμενα ϗ ἐναντιούμενα διὰ πολλῶν ἐπιχειρημάτων ἐξετάζει ϗ ἢ αναιρούμενα ἀποδοκιμάζει, ἢ ἀποδεικνύμενα ἐπικυροῖ, ϗ τυπώνει, ἔχουσα ϗ αὐτὴ πράξεις ἀκαδημιακὰς, ϗ τἆλλα ὡς ἐν Παρισίοις, ὅμως διὰ τὰ ἐδικά της μόνον ἐφευρέματα ἔχει νὰ ἐξοδεύῃ, ϗ νὰ ἐξετάζῃ, ϗ νὰ κρίνῃ, μὰ ὄχι διὰ ἐφευρέματα ἄλλων, ὢν τέτοιος νόμος αὐτῇ ἐξ ἀρχῆς, διὰ νὰ ἀποφύγῃ τὰς διαλέξεις ὁποῦ ἠμποροῦν να τῆς προξενήσουν χασομερίαις ϗ ἔξοδα χωρὶς ὄφελος αὐτῆς. ὅθεν ϗ προχθὲς ὁποῦ ἔμελλον νὰ μισεύσω ἐκεῖθεν. πάλιν ὑπῆγα ἐρωτῶν αὐτοὺς διὰ κάμμίαν ἀπόκρισιν ἢ ναὶ, ἢ οὒ, ϗ μοῦ ἀπεκρίθησαν τὰ αὐτά. λέγοντές μοι ἔτι, ὅτι ϗ ἂν ἦτον ἕνας φανερὸς παραλογισμὸς ἡμεῖς δὲν ἀνεχόμεθα νὰ ἀποκριθῶμεν τὸ οὔ. ἔξω μόνον μίαν ἐπιςολὴν ἔχομεν νὰ γράψωμεν πρὸς τὸν διδάσκαλόν σου εὐχαριςικὴν διὰ τὴν τιμὴν ὁποῦ μᾶς ἔκαμε, τὴν ὁποίαν ἐπροςάξαμεν νὰ τὴν γράψῃ ὁ σεκρετάριος τῆς ἀκαδημίας, ϗ μετὰ τὸ Πάσχα σοῦ τὴν δίδομεν, διὰ τὶ τώρα διὰ τὰς ἑορτὰς ϗ τὴν μεγάλην ἑβδομάδα δὲν ἔχομεν σύναξιν, ϗ θέλομεν τοῦ γράψει λατινιςὶ, διὰ τὶ ἡμεῖς ἑλληνιςὶ δὲν ἔχομεν τὴν ἐλευθερίαν ἐκείνην νὰ γράψωμεν, ϗ μεταγλώττισσαί την, ϗ ςείλε την εἰς αὐτόν. ταῦτα μοῦ εἶπαν, ϗ σὺν θεῷ γυρίζωντας, θέλω ἔχει αὐτὴν τὴν ἐπιςολὴν, ϗ θέλω σᾶς τὴν ςείλει. ταῦτα μὲν τὰ ὡς ἀπὸ τῆς κοινότητος τῆς ἀκαδημίας, κατὰ μέρος δὲ ἐξέδωκε τὸν λόγον κάθε ἀλγεβρίςας, ϗ μαθηματικὸς εἰς τὺς μαθητάς τυ· ὅτι εἶναι παραλογισμὸς ἐν τῇ προτάσει, ϗ ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ εὑρεθῇ, ϗ ὅτι ἂν ἤθελεν εἶςαι ἀληθινὴ αὐτὴ ἡ ἐφεύρεσις γεωμετρικὴ, κινδυνεύει πλέον νὰ σφάλει ἡ ἄλγεβρα εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι τώρα ἐπαχυμβισμένη ὅλη ἡ μαθηματικὴ, ϗ ἡ φυσικὴ, ἡ ὁποία ἄλγεβρα δείχνει. ὅτι διὰ νὰ κατασκευασθῇ ἡ ἑρμηνεία τῦ τοιύτυ προβλήματος, χρειάζεται ἓν ςερεὸν, ἢ μίαν παραβολὴν, ϗ μίαν ὑπερβολὴν, διὰ δὲ τῦ κύκλυ εἶναι ἀδύνατον, ϗ πῶς ἡ ἄλγεβρα θέλει τὸ ςερεὸν, ἰδὲ ὁπῦ κάμνω ἐδῶ τὴν πρᾶξιν ἀλγεβραϊκῶς δεικνύυσαν τὴν ἀνάβασιν εἰς τὸν τρίτον βαθμὸν, δεικνύοντα τὸ τριχῇ διαςατόν. Ὄντων γὰρ τῶν τεσσάρων τύτων γραμμῶν ἑξῆς ἀναλόγως, ὧν σημεῖα τὰ A: B: c: d. γράμματα, ἐπειδὴ αἱ δύο ἄκραι εἰσὶ δεδομέναι, αἱ δύο μέσαι εἰσὶν αἱ ἄγνωςοι, ϗ ζητύμεναι, αἵτινες παραςαθήτωσαν διὰ τῦ χ γράμματος· ζητυθήτω ὖν πρῶτον ἡ C ἤτοι ἡ τρίτη τῇ τάξει· ἔςαι ὖν A: : B: C., ἤτοι A: X: : X πρὸς τὸν δ': ὅρον, ὃς ἐςὶ τρίτος ἐν τῇ τάξει· ὑκῦν πολλαπλασιάσει τῦ γ': ϗ β': ϗ διαιρέσει ἐπὶ τὸν ά: ἔςαι ὁ δ': $\frac{X^2}{A}$ εὑρεθέντος ὖν τύτυ τῦ δ': μὲν κατὰ τὴν γενομένην ἀναλογίαν τρίτυ δὲ κατὰ τὴν ά: ἐκτεθεῖσαν τάξιν, τεθήτωσαν αὖθις $\frac{X}{A}$ οἱ ὅροι ἑξῆς· ϗ ἀντὶ τῦ c τεθήτω τὸ $\frac{X^2}{A}$· ἔςαι ὖν

A: X: : $\frac{X^2}{A}$ πρὸς τὸν δ'. d, ὃς ἔςαι, πολλαπλασιάσει τῦ γ': ϗ β': ϗ διαιρέσει ἐπὶ τὸν ά: ἔςαι, $\frac{X^3}{A}$ ἤτοι πολλαπλασιάσει τῦ δευτέρυ διαιρετῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν X^3 (ϗ γὰρ ἔςαι ταυτὸν) ἐςὶ $\frac{A:X^3}{A}$ συναιρυ: $\frac{\Delta}{A}$ μένων δὲ τῦ διαιρῦντος, ϗ πολλαπλασιάζοντος μενεῖ X^3 ὅπερ δείκνυσιν ὅτι ἐςὶ τριῶν διαςάσεων, ἤτοι τριχῇ διαςατὸν, ὁ δὲ κύκλος ἐν τῇ ἀλγέβρᾳ παρίςαται διὰ τῦ X^2 δευτέρυ βαθμῦ· ὅθεν ἐπιπεδικῶς κατασκευάζεται, τῦτο δὲ ὂν X^3, ὑ κατασκευάζεται διὰ τῦ κύκλυ· σαφέςερον δὲ τὴν πρᾶξιν ὕτω ποιήσω· A: X: : X: $\frac{X^2}{A}$, ϗ ἔπειτα A: X: : $\frac{X^2}{A}$: $\frac{X^3}{\frac{A}{\Delta}}$ δηλαδὴ $\frac{\cancel{A}\,X^3}{\cancel{A}}$ ὅπερ ἐςὶν ἴσον τῷ X^3. ὕτω δείκνυσιν ἡ Ἄλγεβρα ἀναβαῖνον τὸ πρόβλημα εἰς τρίτον βαθμόν. Αὐτοὶ λοιπὸν διὰ τῦτο νομίζυσι τὸ πρόβλημα ἐπιπεδικῶς μὴ δυνάμενον καταγραφῆναι, ϗ εὑρεθῆναι· ἐγὼ ἀποκρίθην, ὅτι ἀληθῶς τῦ κύκλυ ἡ ἑρμηνεία ἐςὶ χ^2, ὅταν ὅμως γένηται ὑδεὶ ἑνὸς κύκλυ, ἀλλὰ τριπλῦ, ἐνδέχεται γενέσθαι, ϗ πῶς ἂν λέγετε ὅτι διὰ νὰ διασωθῇ ἡ Ἀλγεβραϊκὴ ἀλήθεια, πρέπει νὰ εἶναι ψευδὴς ἡ Πρότασις. ἐγὼ λέγω πάλιν, ὅτι ἂν ψεύδηται ἡ Πρότασις, ἀκολυθεῖ νὰ συμψεύδεται ἡ γεωμετρία, ὕτις κατὰ τὺς ἰδίυς της κανόνας ἀποδείκνυσι τὴν πρότασιν ταύτην. ἀλλὰ λέγω ὅτι ὕτε ἐκείνη, ὕτε αὐτὴ ψεύδεται, ἀλλ' ἑκατέρα εὑρίσκει τὸ αὐτὸ μὲ διάφορον τρόπον, ϗ κατὰ τὺς ἰδίυς της κανόνας. εἰς ταῦτα αὐτοὶ δὲν δίδυν ἀκρόασιν. μάλιςα ἕνας Ἰησυΐτης διδάσκαλος τῆς Ἀλγέβρας εἶπεν εἰς τὺς μαθητάς τυ, ὅτι δὲν καταδέχεται ὕτε νὰ τὴν ἰδῇ, ἐπειδὴ εἶναι βεβαιωμένος πῶς εἶναι ἀδύνατον· ϗ πῶς ἐκοπίασαν πόσοι ϗ πόσοι, ϗ πῶς εἶδε τόσας ϗ τόσας ἄλλας μεθόδυς, ϗ εὑρέθησαν παραλογιζόμεναι· ὅθεν οἱ μαθηταί τυ ἔξω ἄρχισαν νὰ μῦ λέγυν, ὅτι εἶναι ἀδύνατον, ϗ πῶς εἶναι παραλογισμὸς, ϗ ἄλλα τοιαῦτα, καθὼς τὸ βεβαιώνει ὁ Πάδρε Ῥικάτης, ὕτως ὀνομαζόμενος ὁ Γιεζυΐτης· ἐγὼ τὺς εἶπα, ὅτι τὸν σιὸρ Πάδρε Ῥικάτην ὕτε τὸν ἐρωτῶ, ὕτε τῦ τὴν ἐπρόσφερα νὰ τὴν ἰδῇ, ὕτε τοῦ τὴν προσφέρω, καὶ ἂς μὴ πρειράζηται, οὔτε νὰ λάβῃ τὸν κόπον νὰ τὴν θεωρήσῃ, διά τι δὲν τὸν ἐρωτᾷ ὁ διδάσκαλος ὁπῦ τὴν ςέλλει, ἤτοι ὁ ἐφευρετὴς, ἀλλ' ἐρωτᾷ μόνην τὴν Ἀκαδημίαν, ϗ ὅτι ἀποκριθῇ ἡ ἀκαδημία ἐκεῖνο ἔχει νὰ ἐξετάσῃ· μάλιςα (εἶπα) ὑδὲ εἶναι ἴδιον ἀνθρώπυ σοφῦ νὰ συμπεραίνῃ εἰς τοιῦτον τρόπον, πῶς ἐπειδὴ εἶδε ϗ τόσας ἄλλας, ϗ ἦτον σφαλεραὶ, ἄρα ϗ αὐτὴ εἶναι σφαλερὰ, ἀλλὰ πρέπει νὰ τὴν ἰδῇ πρῶτον, ϗ νὰ ἀνακαλύψῃ τὸν παραλογισμὸν πῦ εἶναι· μὲ ταῦτα πιςεύσατέ μοι ἀπάντησα ἐχθὲς, ϗ ὁ θεὸς νὰ φυλάξῃ, ἀπὸ τὰ διαβολικὰ πνεύματα τῶν Γεζυϊτῶν, μάλιςα ἐκεῖ ὁπῦ ἤμεθα ἡμεῖς οἱ Γραικοὶ ὑποβλεπόμενοι, ϗ μισύμενοι, διά τι εἴμεσθεν εἰς τὴν ἐπαρχίαν τῦ Ῥώμης, ϗ δὲν θέλυν νὰ ἀκύσυν, πολλῦ γε ϗ δεῖ νὰ ἰδῦν μὲ καλὴν καρδίαν Γραικόν. Τὸ μίσος πρὸς τὺς Ἕλληνας τὸ ἔχυν, ϗ ὁ φθόνος πολὺς κατ' αὐτῶν. εἶναι τινὲς, ὁπȣ̃ ἂν ἦτον δυνατὸν, ἤθελαν νὰ δείξȣν, ὅτι ἀπὸ τὲς Ἕλληνας δὲν ἐφάνη τίποτες εἰς τὸν κόσμον ποτὲ, ἀλλὰ δὲν δύνανται, διὰ τὶ ἡ ἀλήθεια βοᾷ. ὅτι εἴτι ἔχȣν ἀπὸ τὰς ἐπιςήμας, τȣ̃τε πρέπει νὰ ὁμολογήσȣν εὑρετὰς τὲς Ἕλληνας, καυχῶνται μόνον διὰ τὰ νέα ἐφευρέματα, μᾶλλον δὲ παλαιὰ, ὑπ' αὐτῶν ἀνακαινισθέντα, ϗ τὲς Ἕλληνας τώρα τὲς μετρȣ̃σι βεβυθισμένȣς εἰς μέγα βάθος ἀμαθείας. καυχῶνται πῶς ἔφθασαν εἰς ἀκριβεςέραν θεωρίαν ὑπὲρ τὲς Ἕλληνας ἐν ταῖς ἐπιςήμαις, τὸ ὁποῖον εἶναι μὲν ἀληθὲς, ὅμως μὲ τὴν ἐποικοδόμησιν ἐπάνω εἰς τὰ θεμέλια τῶν Ἑλλήνων· εἶναι τινὲς ὁπȣ̃ γράφοντες βιβλία, ὅπȣ πίπτει λόγος περὶ τῶν Ἑλλήνων, εὐθὺς δεικνύȣσι τὸ μῖσος μὲ κάποιας ὀλίγας ἀφορμὰς ὁπȣ̃ λαμβάνȣσι διὰ νὰ ἐλέγξȣν κἀνένα ὁπȣ̃ παλαιόθεν δὲν ἦτον ἢ καλῶς, ἢ ἀρκέντως ἐξηγημένον· ἀπὸ τὴν Ἀριςοτελικὴν φιλοσοφίαν συχναῖς φοραῖς λέγȣσιν, ὁ θεὸς νὰ τὲς φυλάξῃ νὰ μὴ πέσȣν ἄλλην μίαν φορὰν εἰς τὸ σκότος της, ϗ ἄλλα τοιαῦτα. Εἶναι πάλιν καίτινες διακριτικοὶ, φιλαλήθεις, καὶ σοφοὶ ἀληθῶς, οἱ ὁποῖοι τȣ̀ς τε παλαιȣ̀ς Ἕλληνας ἐκθειάζȣσι, ϗ ἡμᾶς ἀγαπῶσι, ϗ τρόπον τινὰ μᾶς ἐλεȣ̃σι διὰ τὴν κατάντησιν τȣ̃ γένȣς ϗ τῆς πάλαι σοφίας, μεμνημένοι τῶν Ἀθηνῶν, ϗ πῶς εἰς τὸ γένος τῶν Ἑλλήνων ἔτρεχον πανταχόθεν διὰ νὰ λάβȣν φῶς ἐν ταῖς ἐπιςήμαις, ϗ τώρα οἱ Ἕλληνες ὑπάγȣν νὰ λάβȣν ἀπ' αὐτȣ̀ς. Τȣ́των ȣ̃ν ȣ̔́τως ἐχόντων, ἂς ςοχασθῇ ἡ σοφολογιότης σας, ἂν ἀνέχονται νὰ φανῇ ἕνα τοιȣ̃τον ἐφεύρεμα παρ' Ἕλληνος εἰς καιρὸν ὁπȣ̃ οἱ μὲν Ἕλληνες ὡς ἀμαθεῖς παρ' αὐτῶν νομίζονται, ϗ καταφρονȣ̃νται, αὐτοὶ δὲ ἀνθȣ̃σι μὲ θαυμαςὰ σπȣδαςήρια, ϗ ἀκαδημίας περιφήμȣς, ϗ καθ' ἑκάςην καλλιεργȣ̃σι τά τε παλαιὰ ϗ νέα ἐν παντὶ γένει, ϗ εἴδει ἐπιςημῶν, ὄντες ἀφιερωμένοι ἕκαςος εἰς τὸ ἴδιον μόνον ἐπάγγελμα, ϗ ἔχοντες πᾶσαν ἄνεσιν τȣ̃ σπȣδάζειν μὲ μεγάλας πληρωμὰς, ϗ τοσȣ̃τοι εἰς τὸ πλῆθος διδάσκαλοι εἰς μίαν μόνην πολιτείαν, ὡς ἐν Βονωνίᾳ, ὁπȣ̃ εἶναι ὀγδοήκοντα δύο τὸν ἀριθμὸν, ϗ μὲ θαυμασίας τάξεις, ϗ μὲ ὄργανα πάσης ἐπιςήμης ϗ τέχνης ἀξιάγαςα, μὲ σχολεῖα ὁπȣ̃ εἶναι ἐξαίσια ἀρχιτεκτονικῆς ἀποτελέσματα, μὲ βοήθειαν τȣ̃ Σενάτȣ, ϗ τȣ̃ Πρίγγιπος ὁπȣ̃ ἀντιλαμβάνονται, ϗ συναίρȣσι τοῖς σπȣδάζȣσι πολλαχῶς μὲ βιβλιοθήκαις ὑπερθαυμάςαις, ϗ πολυεξόδȣς, μάλιςα μίαν νέαν ὁπȣ̃ ὁ νῦν Πάπας ἀφιερώνει εἰς τὸ ἰνςιτȣ̃τον τῆς Βονωνίας ἐξοδεύωντας τριάντα χιλιάδας σκȣ̃δα διὰ εὐεργεσίαν τȣ̃ ἐν τῇ Πατρίδι αὐτȣ̃ (ὁπȣ̃ εἶναι ἡ Βονωνία) σπȣδαςηρίȣ· ϗ τί νὰ εἰπῇ τινὰς, ἢ πῶς νὰ παραςήσῃ τὰ ὅσα εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἰνςιτȣ̃τον· πᾶν γένος ϗ εἶδος μετάλλȣ, πᾶν γένος ϗ εἶδος χόρτȣ, πᾶν γένος ϗ εἶδος ξύλȣ, ϗ ἐν ὀλίγοις πᾶν εἴτι φέρει γῆ, ϗ θάλασσα προκείμενον τοῖς φυσικοῖς εἰς θεωρίαν· τί νὰ εἰπῇ πάλιν τινὰς διὰ τὴν ἀγάπην ὁπȣ̃ ἔχȣν νὰ σπȣδάζȣν, ἐπειδὴ ἡ ἀρετὴ τιμᾶται παρὰ πᾶσι, ϗ ἡ προκοπὴ, ϗ τὸ ἐκεῖ Σενάτον χαίρει πολλὰ εἰς τὴν αὔξησιν τῆς σπȣδῆς. ἔκαμαν μίαν ἀκαδημίαν τὸν παρελθόντα χειμῶνα πάνδημον, τὴν ὁποίαν δὲν τὴν εἶχαν κάμῃ παρὰ πρὸ ἑπτὰ χρόνων· ϗ τȣ̃τον τὸν χρόνον, ὄντȣ παρόντος τȣ̃ Καρδινάλιȣ, ὃς ϗ Πρίγγιψ λέγεται, ϗ τȣ̃ Σενάτȣ, προεβλήθησαν τινὰ προβλήματα νέα ἐφευρεθέντα ἐν φυσικὸν, ϗ ἐν ἀλγεβραϊκὸν, ϗ εἴμεσθαν ϗ ὅλοι οἱ σχολάροι παρόντες, ὁπȣ̃ ὕςερα ἀπὸ τόσας διαλέξεις ϗ ἐπιχειρήματα ἐκυρώθησαν. Ἡ ἀνατομικὴ Καθέδρα πάλιν τῆς Βονωνίας εἶναι ὑπερθαύμαςος διὰ τὰς διαλέξεις ϗ ἐπιχειρήματα, ὁπȣ̃ καθ' ἡμέραν εἰς δεκαὲξ μαθήματα ὁπȣ̃ κάμῃ ὁ Προφέσσορ ὁπȣ̃ νὰ ἐπιχειρισθῇ νὰ κάμῃ τὴν αὐτὴν ἀνατομίαν ὕςερα ἀπὸ τὰ Χριςȣ́γεννα, οἱ ἄλλοι προφέσσορες ὅλοι ἐπιχειρȣ̃σιν ἐναντίον τȣ, ϗ αὐτὸς εἶναι χρεώςης νὰ λύσῃ κάθε ἄπορον, ϗ κάθε πρόβλημα. Καὶ ἐπειδὴ τȣ̀ς παρελθόντας χρόνȣς ἀπέθαναν δύο ἀπὸ τῆς αὐτῆς καθέδρας, λαβόντες πάθος εἰς τὸ ςῆθος ἀπὸ τὸν ἀγῶνα, εἶχαν τραβιχθῇ οἱ Προφέσσορες, ϗ δὲν ἤθελε τινὰς νὰ κάμῃ τὰ αὐτὰ δεκαὲξ μαθήματα ἐπὶ τῆς καθέδρας ταύτης· εὐθὺς ȣ̃ν τὸ Σενάτον ἔβαλε βραβεῖον τοιȣ̃τον, ὁπȣ̃ ὅποιος κάμῃ τὰ αὐτὰ μαθήματα τῶν δεκαὲξ ἡμερῶν ἅπαξ, νὰ λαμβάνῃ εἰς ὅλην τȣ τὴν ζωὴν εἰκοσιπέντε φλορία ἐντράδα τὸν κάθε χρόνον, ἂν πάλιν κάμῃ τὰ αὐτὰ μαθήματα καὶ ἄλλον χρόνον ὁ ἴδιος νὰ λαμβάνῃ πάλιν ἕτερα τοσαῦτα ἐφ' ὅρȣ ζωῆς, ϗ ἁπλῶς ὁσάκις ἐπὶ τῆς αὐτῆς καθέδρας κάμῃ τὰ αὐτὰ μαθήματα νὰ διπλασιάζῃ, καὶ τριπλασιάζῃ ἡ αὐτὴ ἐντράδα. Ὅθεν πέρυσι, ϗ ἐφέτος ἔκαμε τὰ αὐτὰ μαθήματα κάποιος Βαλβῆς ἄξιος ἄνθρωπος, ϗ ἔκαμε πενῆντα φλορία ἐντράδα τὸν κάθε χρόνον διὰ ὅλην τȣ τὴν ζωὴν, ϗ ἂν θελήσῃ ϗ ἄλλον χρόνον, τὰ 50 φλορία τȣ γίνονται ἑβδομῆντα πέντε· τὸν ἐρχόμενον ὅμως χρόνον προετοιμάζει ἄλλος τὰ δεκαὲξ μαθήματα, διὰ νὰ λάβῃ τὸ αὐτὸ βραβεῖον ἐφ' ὅρȣ ζωῆς, ϗ ὅλως ὅποιος θέλει, ϗ δύναται νὰ δεφενδεύσῃ τὴν αὐτὴν Καθέδραν εἰς δεκαὲξ ἡμέρας πρόκειται τὸ βραβεῖον ἐφ' ὅρȣ ζωῆς αὐτȣ̃· εἰς τοιȣ̃τον τρόπον αὐξάνȣσιν αἱ ἐπιςῆμαι, αἱ μαθήσεις αἱ τέχναι πᾶσαι, ϗ παντοῖȣ γένȣς, ϗ εἴδȣς· ὅπȣ οἱ ἄθλιοι τȣ̃ γένȣς μας σπȣδαςαὶ ȣ̓δὲ ἐφαντάσθησαν ταῦτα, μάλιςα διὰ τὶ σπȣδάζȣσιν εἶναι περιφρονημένοι ὑπὸ τῶν ἀμαθεςάτων, πολλȣ̃ γε ϗ δεῖ νὰ βοηθȣ̃νται· ὅθεν ȣ̓δὲ τὰ ἄλλα ἔθνη, ὁπȣ̃ τώρα ἐνηγκαλίσθησαν ὅλην τὴν σπȣδὴν, ϗ ηὔξησαν τὰς ἡγεμονίας των, τὰς βασίλειά των, ἐπαρχίας των διὰ τὴν σοφὴν κυβέρνησιν· ϗ τὴν πρὸς ἀλλήλους ἀγάπην ϗ ὁμόνοιον πρὸς τὸ κοινὸν συμφέρον, διὰ τοὺς Ἕλληνας δὲν ἔχουν κάμμίαν ὑπόληψιν εἰς τὴν σπουδὴν, ὅθεν ϗ εἰς τὸ παρὰ τῆς ὑμετέρας ἐλλογιμότητος πρόβλημα ἀμφιβάλλουσι. διὰ τὶ μετροῦντες τοὺς Ἕλληνας τώρα χωρὶς σπουδὴν, ϗ σπουδαστήρια, ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος προκατειλημμένοι ἀπὸ τὸ ἀδύνατον, ϗ τὸν ἀπελπισμὸν τῆς εὑρέσεως τοῦ αὐτοῦ προβλήματος, ὅταν ἀκούσωσι πῶς ἕνας Ἕλλην ὑπόσχεται τὴν εὕρεσιν, ἀπιστοῦσι, ϗ ὅταν ἴδωσι τὴν μέθοδον δοκιμάζουσι νὰ πιασθῶσιν ἀπὸ τὰ παραμικρὸν, διὰ νὰ τὴν ἐλέγξωσι σφαλερὰν, μὴ ἀνεχομένης τῆς αὐτῶν ἐπάρσεως νὰ εὑρεθῇ ἓν τοιοῦτον παρ' Ἕλληνος πάλιν ἐν τῇ τῶν Ἑλλήνων καταπτώσει, ϗ ἐν καιρῷ τῆς ἰδίας αὐτῶν ἀκμῆς.

Ἔρχομαι ἤδη νὰ τῆς φανερώσω ποῦ ἐστάθη τέλος πάντων ἡ ἀπορία αὐτῶν ἐν τῷ προβλήματι, τὴν ὁποίαν κατὰ μέρος ἐμοὶ εἶπεν ὁ Ἀστρονόμος Εὐστάθιος Τζανώτης προχθὲς, ὅταν ἐκεῖθεν ἐμίσευσα, ϗ ἐπῆγα νὰ τοῦ ζητήσω πάλιν κάμμίαν ἀπόκρισιν. Ἐνίστανται ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ τρόπῳ τοιῷδε· τίς μᾶς βεβαιώνει, ἂν ἡ ἀπὸ τοῦ ό διὰ τοῦ ρ́ ἀγομένη εὐθεῖα, ὑπάγει νὰ τέμνῃ τὴν ά π́ γραμμὴν εἰς ἐκεῖνο τὸ δίκαιον σημεῖον σ́, ἐξ οὗ πίπτουσα ἡ κάθετος σ́ φ́ εὑρίσκειν δύναται τὸ δίκαιον φ́ σημεῖον, ὥστε νὰ ἀκολουθῇ ἔπειτα, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ φ εἰς τὸ ύ διαγώνιος νὰ διαπερᾷ διὰ τοῦ ρ́: ὅταν γὰρ ἡ ἀπὸ τοῦ ό διὰ τοῦ ρ́ ἄγεται δὲν εἶναι ὑπόχρεως ϗ βεβιασμένη διὰ οὐδὲ κἀνέναν λόγον γεωμετρικὸν νὰ τέμνῃ τὴν ά π́ κατὰ τὸ σ́. ἐνδέχεται γὰρ (λέγουσιν ἐνιστάμενοι) τέμνειν αὐτὴν εἰς ἄλλο σημεῖον σ ἢ πρὸς τὸ μέρος τοῦ π. ἢ πρὸς τὸ μέρος τοῦ α. τότε ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου ἐκείνου σ πίπτουσα κάθετος, οὐχ εὑρίσκει τὸ φ́. ἀλλ' ἢ πρὸς τῷ λ. ἢ πρὸς τῷ υ πεσεῖται τότε ἕπεται, ὅτι ἡ φ́ β́ νὰ εἶναι ἢ μείζων ἢ ἐλάττων τῆς β́ ά. κἀντεῦθεν ἡ φ́ ύ ἡ διὰ τοῦ ρ́ διελεύσεται ὡς ἐν τοῖς σχήμασι τούτοις. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ρ́ ἐστὶν ἐπὶ τῆς ηβ ἀκινήτου, καὶ ἀμετακίνητον σημεῖον, ὅταν μὲν ἄγηται ἀπὸ τοῦ ό διὰ τοῦ ρ́ ἡ ό σ́ ὑπάγει καλὰ, διαπερῶσα διὰ τοῦ αὐτοῦ ρ́ διωρισμένως, ὅταν ὅμως ἄγεται ἡ φ́ ύ δὲν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἀπεράσῃ διὰ τοῦ ρ́, διὰ τὶ μισεύει ἀπὸ τὸ φ́ ἀδιόριστον σημεῖον, τοῦ ὁποίου τὸ ἀδιόριστον ἤρτηται ἀπὸ τὸ ἀδιόριστον σ́, τὸ ὁποῖον ἐπὶ τῆς α π δὲν εἶναι διωρισμένον. Ἐνδέχεται γὰρ νὰ εἶναι τὸ σ́ ἢ κατὰ τὸ π́, ἢ κατὰ τὸ α. ὅθεν ἐνίστανται, ὅτι ἕπεται ἡ ἀπὸ τοῦ σ́ ἀγομένη κάθετος νὰ μὴν εὑρίσκῃ ἐκεῖνο τὸ φ́ σημεῖον ὁποῦ νὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν τόπον μεταξὺ τοῦ ν́ ϗ λ, ὃν ἔχει τὸ ο μεταξὺ τοῦ μ́ ϗ ξ́ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος. ταύτην τὴν ἀμφιβολίαν σᾶς τὴν ἔγραφα ϗ ἐγὼ, ὅταν ἐγύρισα ἀπὸ τὸ Πατάβιον ἐνταῦθα εἰς ἓν γράμμα ὁποῦ μὲ τὸν κὺρ Γεώργιον κοινὸν τῆς ἐγράψαμεν πέρυσι, ϗ μᾶς ἀπεκρίθητε ἀποδεικνύοντες κατὰ τὸν Εὐκλείδην, ὅτι τὸ φ́ σημεῖον ἔχει τὸν αὐτὸν τόπον μεταξὺ τῶν ν́ ϗ λ. ὃν τὸ ό μεταξὺ τοῦ μ́ ϗ ξ́. ἀλλ' ἡ ἀπορία στέκει ἀλλέως, ἤγουν, ὅτι ϗ ὑποτιθεμένου πῶς τὸ φ́ σημεῖον εἶναι ἐκεῖνο τὸ ἀνάλογον τῷ ό ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τίνι τρόπῳ δύναται νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ σ́ κάθετος ἀγομένη εἶναι ὑπόχρεως (οὕτως εἰπεῖν) νὰ εὕρῃ τὸ δίκαιον σημεῖον φ́. ἐπειδὴ ἡ σ́ φ́ δὲν εἶναι ἁπλῶς εὐθεῖα ὁποῦ νὰ ἐξαχθῇ ἀπὸ τοῦ ἑνὸς σημείου σ́ εἰς τὸ ἄλλο φ́, ἀλλὰ πίπτει κάθετος ἀπὸ τοῦ σ́, ϗ αὐτοὶ λέγουν ὅτι δὲν ἰξεύρομεν πῶς ἀναγκαίως ἔχει νὰ εὕρῃ τὸ φ́ σημεῖον, πόθεν τοῦτο δυνάμεθα νὰ βεβαιωθῶμεν; ἡ γὰρ κατασκευὴ τοῦ παραλληλογράμμου ἀρχίζει εἰς ἄλλον τρόπον, προηγουμένης δηλαδὴ τῆς ό σ́ διὰ τοῦ ρ́ διαγωνίου. ὅθεν δὲν εἶναι βέβαιον ἂν ἡ σ́ φ́ κάθετος ἐξίσου ἀφίσταται τῆς ή β́, ὡς ϗ ἡ ό ύ ϗ ἀκολούθως ἂν τὸ παραλληλόγραμμον ἀφ' οὗ γένῃ ἀκολουθεῖ νὰ εἶναι δίχα διῃρημένου ὑπὸ τῆς ή β́. τοῦτο δὲ ὅλον προέρχεται ἀπὸ τὸ ἀδιόριστον εἶναι τὸ σ́ ἐπὶ τῆς ά π́ ϗ εἰς τοῦτο εἶχα λόγον ἡ ἀπορία τους, τὴν ὁποίαν ϗ ἡ ἐλλογιμότης σας θέλει τὴν ἐξετάσει· ταύτην οὖν τὴν ἀπορίαν ἰξεύρωντας ἐγὼ, εἶχα προσαχθῇ διὰ νὰ ἔχω ἑτοίμην τὴν ἀπόκρισιν· ὅθεν ϗ εἶχα γράψῃ Ἰταλικῶς τὴν ἀπόκρισιν εἰς πλάτος, σχηματίζωντας πῶς ἡ ἐλλογιμότης σας ἀποκρίνεσθε εἰς ἐμὲ ὁποῦ σᾶς εἶχα ἐναντιωθῇ δῆθεν μὲ αὐτὴν τὴν ἀπορίαν πρὸ πολλοῦ, ϗ μοῦ εἴχετε ἀποκριθῇ Ἑλληνιστὶ, ϗ ἐγὼ τὴν ἐμεταγλώττισα δῆθεν, ϗ τοὺς τὴν παρασταίνω. ἡ ἀπόκρισις ὁποῦ ἔκαμα ἐστάθη αὕτη, ἐν συντομίᾳ γραφομένη ἐνταῦθα. ὅταν τὸ σ́ σημεῖον εἶναι ἀδιόριστον. ἀκολουθεῖ ὅτι ϗ τὸ φ́ νὰ εἶναι ἀδιόριστον κατὰ τὸν λόγον σας, ϗ ἀκολούθως ἡ ἀπὸ τοῦ ἀδιορίστου φ́ ἀγομένη φ́ ύ ἐνδέχεται νὰ περνᾷ διὰ τοῦ ρ́. ἀλλ' ἐντὸς τούτου ἢ διὰ τοῦ ψ, ἢ διὰ τοῦ 5 δὸς εἰπεῖν, ἤγουν ὄχι διὰ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἀληθῶς διαγωνίων, ἀλλὰ εἰς ἄλλο σημεῖον τῆς σ́ ό. ὅταν οὖν δὲν ἀπεράσῃ διὰ τοῦ ρ́ ἡ φ́ ύ, ἐξ ἀνάγκης ἕπεται ὅτι ἡ αὐτὴ γραμμὴ δὲν μισεύει ἀπὸ τὸ



δίκαιον σημεῖον φ΄, ἀλλ᾽ ἀπὸ τὸ αὐτὸ ἢ πλησιέστερον, ἢ ἀπώτερον ὂν τȣ̃ β΄. ϗ ἑπομένως ἀκολȣθεῖ νὰ μὴν εἶναι ἡ φ΄ β΄ ἴση τῇ β΄ ά, ὅθεν ȣ̓δὲ τὸ παραλληλόγραμμον δίχα διῃρημένον. ἀλλὰ μὴν ὁ ἐφευρετὴς τῆς μεθόδȣ δείκνυσιν, ὅτι ἡ φ΄ ύ διαπερᾷ διὰ τȣ̃ ρ, διὰ τῆς ἐξῆς εἰς ἀδύνατον ἐπαγωγῆς, ϗ ȣ̓ διαπερᾷ ȣ̓́τε διὰ τȣ̃ ψ, ȣ̓́τε διὰ τȣ̃ 5. ἄρα ἡ φ΄ ύ μισεύει ἀπὸ τὸ δίκαιον σημεῖον φ΄, ϗ ἀκολȣ́θως ϗ ἡ σ΄ φ΄ κάθετος πίπτει ἀπὸ τὸ δίκαιον σημεῖον σ΄. τὸ γὰρ μὴ διαπεράσαι τὴν φ΄ ύ διὰ τȣ̃ ρ εἶναι ἓν αἰτιατὸν ἐξ ἀνάγκης ἑπόμενον, ὅταν τὸ φ΄ ᾖ ἢ ἀπώτερον τȣ̃ β΄, ἢ πλησιέστερον, ὅπερ ἐστὶ ὡς αἴτιον προσεχὲς ϗ ἄμεσον, ἀλλαμὴν τὸ αἰτιατὸν ȣ̓κ ἔστι (δείκνυται γὰρ διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἐπαγωγῆς διαπερᾷν διὰ τȣ̃ ρ) ἄρα ȣ̓́τε τὸ αἴτιον ἐστὶν ἐν ταύτῃ τῇ κατασκευῇ τῆς τοιαύτης μεθόδȣ, δηλαδὴ ȣ̓κ ἔστι τὸ φ΄ ἢ ἀπώτερον, ἢ πλησιέστερον τȣ̃ β΄, ἀλλὰ τὸ δίκαιον ϗ ἀπαιτȣ́μενον σημεῖον φ΄, ϗ ἑπομένως ϗ τὸ σ΄, ἐξ ȣ̃ ἡ κάθετος εὑρίσκει τὸ φ΄, ἐστὶ τὸ δίκαιον, ϗ ἀπαιτȣ́μενον. Μὲ ταύτην τὴν ἀπόκρισιν ἀπεστομώθησαν, ϗ ἀφίθησαν νὰ προβάλȣν αὐτὴν τὴν ἀνθύστασιν, ϗ ἔπεσον πλέον νὰ ἐξετάσȣν τὴν εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγὴν, τὴν ὁποίαν ἐπεχειρίσθησαν νὰ ἐλέγξȣν ὡς ȣ̓κ ὀρθῶς ἔχȣσαν, ȣ̓κ ȣ̓́σης τῆς κατασκευῆς ὡς ἀπαιτεῖται, ϗ ὡς γενικὴν ȣ̓́σαν, ϗ ἄλλα τοιαῦτα, τὰ ὁποῖον διὰ νὰ δείξȣν μȣ̃ ἔκαμαν ἕναν παραλογισμὸν διαβολικὸν, ὁπȣ̃ δὲν ἔχει λόγον, τὸν ὁποῖον εἰς τὴν ὥραν τȣ̃ μισεύματός μȣ ἀπ᾽ ἐκεῖ προχθὲς μȣ̃ τὸν ἔκαμαν, ὅταν ἐπῆγα νὰ τȣ̀ς χαιρετήσω· ἐγὼ μετὰ ταῦτα σκεψάμενος, ἔγνων πῶς παραλογίζονται. ὅθεν μετὰ τρεῖς τέσσαρας ἡμέρας ὁπȣ̃ ἔχω νὰ ἐπιστρέψω σὺν Θεῷ πάλιν ἐκεῖ, ἔχω νὰ τȣ̀ς ἐλέγξω τὸν παραλογισμόν των, ϗ νὰ ἰδȣ̃μεν πȣ̃ τέλος πάντων θέλει ἐπακȣμβίσȣν. εἰς τὰ τοιαῦτα συχνάκις εὑρίσκομαι ἅγιε διδάσκαλε, ϗ διαλέγομαι ἀποκρινόμενος ὡς δυνατὸν, ἀμὴ τί νὰ κάμωμεν, ὁπȣ̃ ὅ,τι εἰπȣ̃ν αὐτοὶ, ϗ ἂν εἶναι ϗ παράλογον, πάντες οἱ ἀκȣ́οντες συγκατανεύȣσι μὲ δίκαιον τȣ̃ αὐτὸς ἔφα. ἡμᾶς ὅμως τίς μᾶς ἀκȣ́ει, ἔσωντας νὰ εἶναι παρ᾽ αὐτοῖς περιφρονȣ́μενοι εἰς τὸν παρόντα αἰῶνα οἱ Ἕλληνες. ἐστάλθη ἡ πρότασις ϗ εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τὴν ἐν Παρισίοις, ϗ μετ᾽ ȣ̓ πολλὰς ἐλπίζομεν ἐκεῖθεν κάμμίαν ἀπόκρισιν, ϗ ὅτι οἱ ἐκεῖθεν εἰπȣ̃ν, πλέον ϗ οἱ ἄλλοι θέλȣν συγκατανεύσει. στέλλονται μετ᾽ ȣ̓ πολλὰς ϗ τὰ πρὸς τὸν Εὔλερ, ϗ ὁ Θεὸς νὰ τȣ̀ς φωτίσῃ νὰ κρίνȣν ἀπαθῶς τὴν ἀλήθειαν. ἀμὴ τί δυνάμεθα νὰ κάμωμεν ἡμεῖς ἐν τῇ καταπτώσει τȣ̃ γένȣς ἡμῶν, ϗ ἐν καιρῷ ὁπȣ̃ οἱ Ἕλληνες ζητȣ̃σι παρ᾽ αὐτῶν; εἶναι τινες ἐδῶ ϗ ἱερωμένοι, καὶ λαϊκοὶ μαθηματικοὶ ὁπȣ̃ εἶναι ὑπὲρ ἡμῶν, ϗ τȣ̀ς ἀκαδημιακȣ̀ς κατηγορȣ̃σιν ὡς φθονερȣ̀ς, καὶ ἐχθρȣ̀ς τῶν Ἑλλήνων, ἀμὴ τί δύνανται νὰ κάμȣν; τώρα ὑπομονὴ, ϗ ὁ Θεὸς θέλει κάμει νὰ εὔγῃ ὁ κόπος σας μίαν φορὰν εἰς φῶς, συναγωνιζομένων ϗ ἡμῶν εἰς δύναμιν. τὴν ἔδειξα ἐν Βονωνίᾳ καὶ τῇ φιλοσόφῳ, μήπως αὐτὴ γένηται μεθ᾽ ἡμῶν, ἥτις ἐπαίνησε τὴν μέθοδον, ὅμως μȣ̃ ἀπεκρίθη, ὅτι ἔχει νὰ τὴν σκεφθῇ ἀκριβῶς· τῆς εἶχα δώσῃ ἓν χειρόγραφόν σας Ἑλληνικὸν ἀπ᾽ ἐκεῖνα ὁπȣ̃ μᾶς ἐπέμψατε, ϗ τὸ ἀνέγνωσε θαυμασίως διὰ τί εἶχε σπȣδάξῃ ϗ τὴν Ἑλληνικὴν διάλεκτον, καὶ ἀναγινώσκει, ϗ γινώσκει ϗ αὐτὸν τὸν Δημοσθένην. τοιαύτης ἀγχινοίας ἡ γυνὴ, μȣ̃ εἶπεν, ὅτι θέλει μȣ̃ ἀποκριθῇ τὴν γνώμην της μετὰ τὴν εἰς τὰ ἐκεῖσε ἐπάνοδόν μȣ. Τȣ́των ȣ̓́τως ἐχόντων, ἂς μὴν ὑποπτεύεται διὰ ἡμᾶς, διὰ τί ȣ̓́τε ἐπαυσάμεθα, ȣ̓́τε παυσόμεθα, ϗ ὑπερασπιζόμενοι τὸ πρόβλημα ϗ ἀγωνιζόμενοι. Συμπαθήσατέ μοι διὰ τὴν πολυλογίαν, ϗ διὰ τί δὲν γράφω ὡς πρέπει, ἔσωντας νὰ φροντίζω πάλιν τὰ τῆς ἀποδημίας διὰ τὴν Βονωνίαν, ϗ δὲν ἔχω καιρὸν νὰ γράψω ȣ̓́τε κἂν τῇ ἀγαπητῇ μοι αὐταδέλφῃ, ἡ ὁποία παρακαλῶ νὰ ἔχῃ παρ᾽ αὐτῆς τὴν εἴδησιν, ὅτι ὑγιαίνω, ϗ δὲν τῆς γράφω, καιρȣ̃ μὴ λαμβάνων, ὡσὰν ὁπȣ̃ νύκτωρ ϗ μεθ᾽ ἡμέραν ἀγωνίζομαι νὰ τελειώσω τὸ ἔργον μȣ διὰ νὰ ἐλευθερωθῶ ὅσον τάχιστα, ὡσὰν ὁπȣ̃ τὰ ἔξοδα ἐν Ἰταλίᾳ εἶναι ὑπέρμετρα, ϗ εἶναι χρεία νὰ ἔχῃ τινὰς πλȣ̃τον, διὰ νὰ δυνηθῇ νὰ τὰ ὑποφέρῃ. τȣ̀ς περὶ ἐμȣ̃ ἐρωτήσοντας συγγενεῖς ϗ φίλȣς προσκυνῶ. ἂς ἔχωμεν ϗ αὖθις ἐφετὰ ἡμῖν γράμματα αὐτῆς, ϗ εἰς ὅσον δύναται ἂς μὴ λείπῃ νὰ ὑποστηρίζῃ τὸ πρόβλημα δι᾽ ὁποίων ἀναπτύξεων ϗ ἀποδείξεων τὴν φωτίσει ὁ Κύριος, καθὼς ϗ ἡμεῖς ὑπὲρ αὐτῆς ὄντες ἀεὶ δὲν παύομεν ὡς δυνάμεθα νὰ τὴν δεφενδεύωμεν· ὁ δὲ Κύριος διατηροίη αὐτὴν ὑγιαίνουσαν, εὐδαίμονα, ϗ μακρόβιον εἰς καύχημα τȣ̃ γένȣς.

Τῆς ὑμετέρας σοφολογιωτάτης Πανναιδεσιμότητος.

Δοῦλος εὐλαβὴς
Νικόλαος Κυριάκη Ζαρζοῦλης.

Viro egregio praestantissimoque Franciscus Maria Zanottus Bononiensis scientiarum Academiae S. P. D.

Inventum novum atque mirabile, quo geometriam augere, vir praestantissime, conatus es, ingenium tuum, tuamque praeclaram in geometricis rebus facultatem ostendis. Academia nostra Bononiensis, cui ego a secretis sum, tibi et de tuo ingenio gratulatus, et de egregia in se voluntate gratias agit. Ceterum quaestionem reconditissimam dirimere, et judicium suum ferre non audet. Idque sibi propositum habet ut in controversiis omnibus, praesertim talibus, se sustineat. Tu interim, vir praestantissime, tibi persuadea; velim, nos tuum ingenium vehementer admirari, studiumque fovere: utinam multi conatus tuos imitentur. Me in primis tuum habe. vale

Bononiae. prid. cal. Maius A. MDCCLIV.

Ἀνδρὶ ἀρίςῳ, καὶ ἐξοχωτάτῳ Φραγγίσκος Μαρία Ζαννότης Σεκρετάριος τῆς ἐν Βονωνίᾳ τῶν ἐπιςημῶν Ἀκαδημίας. εὖ Πράττειν.

Ἡ νέα, ϗ θαυμασία ἐφεύρεσις, ἣ τὴν γεωμετρίαν αὐξῆσαι, Ἄνερ ἐξοχώτατε, ἐπειράσω, ἀγχίνοιαν τὴν σὴν, ϗ τὴν ἐν τοῖς γεωμετρικοῖς περιφανῆ σὴν δύναμιν ἀποδείκνυσιν. Ἡ ὑμετέρα Ἀκαδημία, ἧ ἐγὼ ἐξ ἀπορρήτων εἰμὶ, σοὶ καὶ περὶ τῆς σῆς ἀγχινοίας συνήδεται, καὶ χάριτας ὁμολογεῖ τῆς πρὸς αὐτὴν σε ἐξαιρέτε ἀγάπης. Τὸ μέντοι κρυφιώτατον ζήτημα διαλῦσαι, καὶ τὴν ἰδίαν αὐτῆς κρίσιν ἐπαγαγεῖν ὁ τολμᾷ, ϗ τοῦτο ἔχει ἑαυτῇ προνενομοθετημένον, ὅπως πασῶν τῶν ἀμφισβητήσεων, ϗ μάλιςα τοιέτων, ἐπέχῃ ἑαυτὴν, ϗ κωλύῃ. Σὲ δὲ, ἄνερ ἐξοχώτατε, βελοίμην εἶναι καθ' ἑαυτὸν πεπεισμένον τὴν σὴν ἡμᾶς ἀγχίνοιαν λίαν θαυμάζειν, ϗ πρὸς σὲ σπεδὴν ϗ ἀγάπην θάλπειν ϗ τρέφειν. εἴθε πολλοὶ μιμοῖντο τὰ σὰ ἐγχειρήματα. ἐμὲ ἐν τοῖς πρώτοις τῶν σῶν ἔχε. Ἔρρωσο.

Ἐν Βονωνίᾳ τῇ προτεραίᾳ τῶν καλανδῶν Μαΐε. 1754.

Θεοφιλέςατε σεβασμιώτατε Θεοπρόβλητε καὶ σοφολογιώτατε δέσποτα τῆς ὑμετέρας θεοφιλῆς σεβασμιότητος τὴν χαριτάβρυτον δεξιὰν εὐλαβῶς ἀσπάζομαι.

Τὸς σεβασμίες ἀσπασμὲς τὲς ὁποίες ἡ ὑμετέρα θεοφρέρητος θεοφιλεία διὰ τῆς πρὸς τὸν φιλογιμώτατον Κύριον παπᾶ Πέτρον Μάνεσκυ ἐπιςολῆς, μὲ ἀπέςειλεν, ἀντάμα μὲ τὴν τοῦ ἱερολογιωτάτε Διδασκάλε κυρίε Μπαλάνε ἐπιςολὴν δεξάμενος, ὑπερβολικῶς ηὐφράνθην διὰ τὲς ἀσπασμὲς, ἐπειδὴ ἐπληροφορήθην, ὅτι ἐνθυμᾶσθε ἀκόμι τὸν ταπεινόν σας δῆλον, τὸ ὁποῖον εἶναι δόξα, τρυφὴ, ϗ χαρὰ ὑπέρμετρος ἐδικήμε διὰ τὴν ἐπιςολὴν, ἐπειδὴ ἀναγινώσκωντας τὰς τῶν ἐνςάσεων λύσεις, ἐκατάλαβα ποταπὸν φωςῆρα εἰς τὰς μαθηματικὰς ἐπιςήμας τὸ ἡμέτερον ὀρθόδοξον γένος ἔχει, ἕτοιμον εἰς τὰς ἀνασκευὰς τῶν ἐνςάσεων, πρόχειρον νὰ λύσῃ κάθε δυσκολίαν, ἀρκετὸν να πείσῃ ἴσως κάθε νὲν, πῶς ὁ τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖον εὑρίσκει τὰς δύο μέσες ἀναλόγες εἶναι ἄπταισος. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ ἐδικός με νὲς ἐπείσθη πολλαῖς φοραῖς ἀπὸ τὴν ἀνάλυσιν, πῶς ἕνα τέτοιον πρόβλημα νὰ λυθῇ μὲ ἕναν τέτοιον τρόπον εἶναι ἀδύνατον, ἀκόμι δὲν θέλει νὰ καταπεισθῇ, ἀκόμι ἔχει ταῖς δυσκολίαις τε ϗ ἐνςάσεις εἰς αὐτὰς τὰς λύσεις πάλιν ἐπινοεῖ. ϗ διὰ νὰ μὴν κάμω ἐκεῖνο ὁπῦ ὁ σοφὸς Εὔλερ ἔκαμεν, ὁ ὁποῖος σιωπῶντας εἰς τὴν λύσιν τῆς ἐνςάσεώς τε, ἴσως μὲ τὴν σιωπὴν ἀπεκρίθη, ἰδὲ πῶς ἀποκρίνομαι· λύσει ὁ ἱερολογιώτατος τὴν α΄. ἔνςασιν, λέγωντας (διὰ να εἰπῶ συντόμως τὸ νόημα τε) πῶς εἶναι ἀδύνατον νὰ λυθῶσι διὰ τῆς ἀναλύσεως πάντα τὰ γεωμετρικῶς προβαλλόμενα. πλὴν ἂς σημειώσῃ πῶς ὅλοι ὅσοι σπεδάζεν ϗ καταγίνονται εἰς τὴν ἀνάλυσιν, λύεν ἀναλυτικῶς, ὅσα συνθετικῶς δηλ. γεωμετρικῶς προβάλλονται ϗ εὐκολώτερα, ϗ συντομώτερα· ϗ δὲν εἶναι πρόβλημα εἰς τὴν Γεωμετρίαν τὸ ὁποῖον ἀναλυτικῶς νὰ μὴν διαλύεται, καθὼς ϗ εἰς τὰ περὶ ἀναλύσεως βιβλία φαίνεται. προσέτι λύονται τῇ δυνάμει τῆς ἀναλύσεως ϗ τοῦ λογισμοῦ τῆς ὁλοκληρίας κάποια προβλήματα, τὰ ὁποῖα μόνη τῇ δυνάμει τῆς συνθέσεως ἢ ἀδύνατον, ἢ δυσκολώτατον εἶναι νὰ λυθῶσιν. Ὅσα δὲ προβλήματα ἀδύνατον εἶναι νὰ λυθῶσι καθὼς εἶναι ὁ τετραγωνισμὸς τῦ κύκλυ, ϗ ἄλλα ὅμοια, φανερὰ μᾶς τὸ παραςαίνει ἡ ἀνάλυσις· ϗ ὅσα πάλιν μερικῶς ϗ ὄχι γενικῶς καθὼς εἶναι τὸ ἀνὰ χεῖρας πρόβλημα, διαῤῥήδην μᾶς τὸ δείχνει, παραςαίνωντάς μας προσέτι: Πῶς ὄχι δἰ εὐθείας ϗ κύκλυ, ἀλλὰ δἰ εὐθείας ϗ παραβολῆς, ἢ διὰ κύκλυ ϗ παραβολῆς, ἢ δἰ εὐθείας ϗ ὑπερβολῆς τὸ τοιῦτον λύεται, ϗ ἔτζι κάνει εἰς ὅλα τὰ ἄλλα προβλήματα, δείχνει δηλ. μὲ ποῖα ςοιχεῖα τὸ πρόβλημα λύεται. Ὁπόταν δὲ ἀναλυτικῶς τὰ προβλήματα δοκιμάζωνται ἀνίσως ἡ ἐξίσωσις ὁπῦ εὑρίσκεται ἀληθεύει εἰς κάθε ὑπόθεσιν, ἡ λύσις γενικὴ εἶναι, καὶ τὸ πρόβλημα γενικῶς ἐλύθη, ἀνίσως δὲν ἀληθεύει εἰς κάθε ὑπόθεσιν, καθὼς εἰς τὴν παρῦσαν μέθοδον ἔδειξε, ἡ λύσις δὲν εἶναι γενική, ϗ ἐπομένως ὔτε ἀληθής· ϗ ταῦτα περὶ τῆς ἀλύσεως. Ἐρχόμενος δὲ εἰς τὴν β΄ λύσιν, ἐπειδὴ βλέπει τὸ ἄτοπον ὁπῦ συμπεραίνεται, μῦ ὁμολογεῖ, πῶς ἡ βφ εἶναι πολλῷ μείζων τῆς βο, ϗ ὁμολογῶντας ἐτῦτο, ἐπειδὴ βλέπει, πῶς εἰς τὸ διάγραμμα ὁπῦ ἐτυπώθη, πλέον δὲν συμπεραίνει τὸ ἄτοπον, ὁπῦ εἶχε σκοπὸν νὰ συμπεράνῃ, διὰ τὸ νὰ ἔπεσε τὸ τρίγωνον ρ3ο γράφει ἄλλο διάγραμμα ϗ μῦ ςέλνει, διὰ νὰ κατασκευάσῃ τὸ τρίγωνον· καὶ κατασκευάζει βέβαια τὸ τρίγωνον, ἀλλὰ τὸ ἄτοπον δὲν συμπεραίνεται· ἐπειδὴ ἐπάνω εἰς ταῖς β3, β4 ταῖς ἴσαις δὲν συνίςανται παντελῶς τρίγωνα διὰ νὰ δείξῃ τὰς γωνίας ρ4β 3β ἴσας, ϗ διὰ τὸ νὰ εἶναι ἴσαι ϗ αἱ ρ2β, ρ3β, ϗ αὐτὴ ἡ ρ2β ἴση τῇ 3β, ἐπομένως νὰ συμπεράνῃ τὸ ἄτοπον· ὅθεν βλέπωντας, πῶς δὲν συμπεραίνεται παντελῶς τὸ ἄτοπον ὁπῦ ζητεῖ ἐςοχάσθηκα μήπως ϗ εἶναι σφάλμα εἰς τὴν ἐπιςολήν τυ, ϗ ἀντὶς νὰ εἰπῇ εἰλήφθω ἡ φ3 ἴση τῇ ο4, εἶπεν εἰλήφθω ἡ 23 ἴση τῇ ο4 ἐπειδὴ ἀνίσως ϗ ληφθῇ ἡ 3φ, ἴση τῇ ο4, τότε γίνονται αἱ δύο 3ω, ω4 ἴσαι, διὰ τὸ νὰ εἶναι ἴση ἡ φω, τῇ ωο· ὅθεν ὡς εἰς τὰ δύο τρίγωνα 3ω ω4 δείχνονται ἴσαις ἡ γωνίαις 3ω, 4ω, ϗ ἐπομένως συμπεραίνεται τὸ ἄτοπον ὁπῦ ζητεῖ· ἀλλὰ ϗ ἂν ἔτζι ἤθελε γράψῃ· λέγω πῶς ἡ 3 ἡ παραλλήλως τῇ φ2 ἀγομένη, ὔτε ἐκτὸς τῦ ν καθὼς ὑποθέττει, ὔτε ἐπὶ τὸ ν, ἀλλὰ πίπτει ἐπὶ τὸ φ ϗ πίπτωντας ἐπὶ τὸ φ ἐπειδὴ ἡ φω εἶναι ἴση μὲ τὴν ωο, ἂν προσθέσῃ εἰς τὴν ωο μέρος τι, οἷον τὸ ο4 δὲν κάνει ἐπ᾽ αὐτὰς ἴσα τρίγωνα διὰ νὰ δειχθῦν ἴσαις ἡ γωνίαις φω, 4ω, ὥςε ὁπῦ διὰ νὰ γένυν ἴσα τὰ τρίγωνα, πρέπει νὰ ταυτισθῇ ἡ ρ4 μὲ τὴν ρο, ϗ πάλιν ἐγκρεμνίσθη τὸ τρίγωνον, ὁπῦ ἐκατασκεύασε ϗ πίπτωντας τὸ τρίγωνον δὲν συμπεραίνει ἄτοπον, ϗ μὴν συμπεραίνωντας ἄτοπον, πάλιν λέγω πῶς τὸ λ εἶναι τὸ κέντρον, ϗ ὄχι τὸ ρ· ϗ ἐπειδὴ δὲν εἶναι τὸ ρ, δὲν εὑρέθηκαν αἱ δύο μέσοι ἀνάλογοι. Προσθέτει εἰς τὴν αὐτὴν λύσιν, πῶς ἠμπορεῖ νὰ δειχθῇ ἡ μο ἴση τῇ λφ, ἀλλὰ ϗ ἂν δειχθῶσιν, ἴσως πάλιν ἀπορίαι καὶ δυσκολίαι εἰς αὐτὴν τὴν δεῖξιν γεννῶνται. Καὶ ταῦτα περὶ τῆς β΄. Λύει τὴν γ΄. λέγωντας, πῶς οἱ παῖδες τῶν Γεωμέτρων κέχρηνται τῇ παρ᾽ αὐτοῖς λεγομένῃ γεωμετρικῇ πτώσει· ἀλλ᾽ ἂς ἔχει εἴδησιν ὁ Ἐλλογιμώτατος ἱεροδιδάσκαλος, πῶς τέτοιυς παῖδας δὲν τὺς ἐγνωρίζω, ϗ ἂν τοὺς ἐγνώριζα ἤθελα νὰ τὺς εἰπῶ. Τί ὦ καλοὶ παῖδες διὰ τί δὲν ἀκολυθεῖτε, ϗ διὰ τί δὲν μιμᾶσθε τὸν πατέρα σας τὸν Εὐκλείδην; ϗ νὰ τὺς εἰπῶ ἤθελα, σοφοὶ παῖδες ἀνίσως ϗ μὲ τὴν κατασκευὴν τὴν ὁποίαν ἐκάμετε, διὰ τῆς αὐτῆς, εἶναι ἀδύνατον, ἢ εἶναι δύσκολον νὰ γένῃ ἡ ἀπόδειξις, μίαν τέτοιαν κατασκευὴν διὰ τί τὴν ἐκάμετε; εἰς τὰ προβλήματα ἡ κατασκευὴ εἶναι ὁδὸς, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὸ ζητέμενον, ϗ ἂν ἐκείνη εἶναι ἡ ὁδὸς τῆς εὑρέσεως, ἐκείνη ἀναμφιβόλως ἔχει νὰ εἶναι ἡ ὁδὸς ϗ τῆς δείξεως, ϗ ὁπόταν δὲν ἠμπορεῖ νὰ δείξῃ ἐκεῖνο ὁπῦ εὗρηκε, φανερὸν εἶναι, πῶς μήτε νὰ τὸ εὕρῃ δὲν ἐδυνήθη· ϗ νὰ τὺς προσθέσω ἀκόμη ἤθελα, πῶς ἂς ἐνθυμηθῦν, ὅτι μὲ αὐτὴν τὴν κατὰ πτῶσιν κατασκευὴν ἀπομένει πάντοτε τὸ εὑρεθὲν ἀόριςον· διὰ τὸ νὰ μὴν εἶναι λόγος ὁπῦ νὰ μᾶς βιάζῃ νὰ λάβωμεν ἐκείνην τὴν γραμμὴν, φέρ᾽ εἰπεῖν τὴν εὑρεθεῖσαν βο, ἢ νὰ λάβωμεν ἄλλην πρὸς ἀρέσκειαν, φέρ᾽ εἰπεῖν τὴν βξ, ἢ βδ. Καὶ ταῦτα περὶ τῆς γ΄. Λύει δὲ τὴν δ΄. λέγωντας· ἡ δὲ τετάρτη ἔνςασις μικρόντι δύναται ὡς προείρηται, διὰ νὰ μὴν εἰπῶ ὐδέν· ἑκάςη γὰρ τῶν ἐπιςημῶν, ἐξόχως δὲ ἡ Μαθηματικὴ, ἐκ τῶν οἰκείων ἀρχῶν, ἀξιωμάτων τε καὶ ὑποθέσεων ἔχει τὸ πιςὸν, ϗ ὐδεῖ τῆς συναντιλαμβανομένης, ἀρχιτεκτονικὴ ὖσα, καὶ ὑπερβεβηκῦια· ἀλλ᾽ ἂς ἐνθυμηθῇ ἡ Ἱερολογιότης τυ, πῶς ἡ ἀνάλυσις μία ϗ αὐτὴ ἐπιςήμη εἶναι μὲ τὴν γεωμετρίαν, ταῖς ἰδίαις ἀρχαῖς ϗ τὰ αὐτὰ ἀξιώματα, ϗ τὰς αὐτὰς ὑποθέσεις ἔχει, ϗ κατ᾽ ὐδὲν τῆς Γεωμετρίας διαφέρει, εἰμὴ μόνον ὅτι ἡ μὲν ἀναλυτικῶς ϗ συντόμως ὁδεύει, ἡ δὲ συνθετικῶς ϗ ἐκτεταμένως· καὶ διὰ τοῦτο ἡ μὲν ἀνάλυσις, ἡ δὲ σύνθεσις παρὰ πάντων καλεῖται· καλεῖται δὲ ἡ αὐτὴ ἀνάλυσις ϗ Γεωμετρία ὑψηλοτέρα, ϗ Γεωμετρία ἁπλῶς, μέθοδος τοῦ εὑρίσκειν, ϗ μὲ τὸ Ἀραβικὸν ὄνομα Ἄλγεβρα· ὥστε, ἐπειδὴ δὲν διαφέρει ἀπὸ τὴν Γεωμετρίαν, καὶ μᾶς δείχνει, πῶς εἶναι ἀδύνατον νὰ εὑρεθῇ τοιούτης λογῆς ἕνα τέτοιον πρόβλημα· ἄρα ἀδύνατον εἶναι ϗ δὲν εὑρέθη· ἂς σημειώσῃ προσέτι ὁ Ἱερολογιώτατος, πῶς ἂν λέγεται ἡ ἀνάλυσις εἰδικὴ, λέγεται, ὄχι διὰ τί δὲν λύει γενικῶς κάθε πρόβλημα, ἀλλὰ διὰ τί μεταχειρίζεται τὰ στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα εἴδη ὁ Καρτέσιος ὠνόμασε· ϗ ταῦτα περὶ τῆς δ΄. Ἂς συγχωρήσῃ σὲ παρακαλῶ ὁ Ἱερολογιώτατος διδάσκαλος τὸ πεῖσμά μου, ϗ ἂς θεωρήσει ἀκριβῶς, ἴσως δὲν τὸ εὕρῃ πεῖσμα, ἀλλὰ ἀλήθειαν, ϗ πεισθεὶς, θέλει τοῦ ἀπομένει ἡ δόξα ϗ ἡ τιμὴ, ἀστὰν ὁποῦ ἐκοπίασε τόσον διὰ ἕνα τέτοιον πολυθρύλητον, ἀλλὰ ἀδύνατον, καθὼς ἀπέδειξα, πρόβλημα· ἐπειδὴ τὸ νὰ ἐκοπίασε διὰ αὐτὸ εἶναι τιμὴ ϗ ἔπαινος, τὸ δὲ νὰ τὸ θέλῃ ἄπταιστον, συμὰ εἰς τοὺς Μαθηματικοὺς, ϗ ἂς μὴν τὸ πιστεύσει, δὲν εἶναι ἐπαινετόν· ϗ ταῦτα μὲν περὶ τῶν ἐνστάσεων, καθὼς ἡ ἐνεστῶσα τοῦ θέρους ὑπερβολικὴ καῦσις μοῦ ἐσυγχώρησεν. Ἡ δὲ ὑμετέρα θεοφύλακτος σεβασμιότης, ἂς μὲ ἠξεύρει ὅλον ἐδικόν της ϗ ἕτοιμον εἰς τὰς προσταγάς αὐτῆς.

Ἐκ Κερκύρας αψνς. Ἰουλίου κ΄.

Νικηφόρος Θεοτόκης ὁ ταπεινὸς Ἱερομόναχος.

Τρύφωνι τῷ Πανοσιωτάτῳ Συγκέλλῳ τῆς Ἰωαννίνων Ἐκκλησίας καὶ σοφολογιωτάτῳ Διδασκάλῳ, Εὐγένιος Ἱεροδιάκονος ὁ Βούλγαρις τὴν ἐκ κέντρου ψυχῆς ἀδελφικὴν πρόσρησιν.

Εἰ οὗτος εἰλικρινοῦς φιλίας ἔλεγχος ἀκραιφνὴς, πάθος ἀντιδιδόμενον, ϗ τῆς παρ' ἄλλου εὐνοίας, ἡ πρὸς ἐκεῖνον αὐτοῦ, μάρτυς ἑκάστῳ ἐχέγγυος, ἔχοις ἂν ἄρα, ἐξ ὧν περὶ ἡμᾶς πάσχειν ὁμολογεῖς, οὐκ ἐλλιπῆ ϗ παρ' ἡμῶν τῆς ἀγάπης τὴν ἀντιμέτρησιν. Πείθεις δὲ ϗ ἡμᾶς αὐτὸ, φασὶ, πεπεισμένους ἐφ' οἷς πεπόνθαμεν. Οὐ γὰρ οὐδ' ἡμῖν δηλονότι ποτὲ τοῦ θαυμασοῦ Τρύφωνος, οὐδὲ μνεία ἐπέρχεται, οὐδὲ λόγος γίνεται πρὸς τοὺς ἐντυγχάνοντας, μὴ παρ' αὐτὸ τὴν ψυχὴν πρὸς τὸ ἥδιστον διατιθεμένοις. Ἀλλ' ὁ ἐν τῷ κρυπτῷ ἡμῶν ἄνθρωπος αὐτίκα τοῖς πᾶσιν ἐπίδηλος, ϗ ἡ διάχυσις οὐκ ἀφανὴς, ϗ ἐκ τοῦ περισσεύματος τῆς καρδίας οἱ λόγοι. Καὶ ὅλως, πόθου τινὸς οὐκ ἀσήμου τοῦ περὶ τὴν σὴν λογιότητα, ἀκριβῆ πανταχόθεν ἡμῖν ἐπιφαίνεται τὰ γνωρίσματα, ὡς ϗ αὐτοῖς, εἴ τισι ϗ ἄλλοις, τὸ τοῦ Ἀσκραίου Ποιητοῦ πεφωρᾶσθαι ψευδόμενον, τοὺς ὁμοτέχνους ἀντιτέχνους καλέσαντος. Ἀλλὰ τὸ μὲν τῆς φιλίας τῆς πρὸς ἀλλήλους, οὕτως ἰσοῤῥόπως ἔχει ὡς εἴρηται, ϗ δὴ καὶ ἕξει καὶ ἑξῆς διὰ βίου, οἷόν τι φυτὸν γενναῖον, ἀπὸ τῆς κατὰ τὴν φιλοσοφίαν ϗ τότε φυταλιᾶς εἰς βάθος ἡμῖν ῥιζούμενον, ϗ εἰς ὕψος κομῶν ϗ θάλλον, ϗ ταῖς διὰ γραμμάτων διακαέσιν ἀρδείαις ἀμοιβαίοις προσταβρυνόμενον. Τὸ δὲ τοῦ θρυλλουμένου προβλήματος εὕρημα, ἐπεὶ ϗ τοῦτο διαπυνθάνῃ, πῶς ἄρα ἡμῖν ἀπήντηκεν, ἐρῶ. Λέξω δὲ οὐκ ἄκων (τοῦτο δὴ τὸ φερεκράτειον.)

. . . . Σοί τε γὰρ κλύειν,

Ἐμοί τε λέξαι, θυμὸς ἡδονὴν ἔχει.

Ἀλλὰ μικρὸν ἄνωθεν ἑλόντα, οἷά μοι πρὶν ὑποστῆναι ἐγένετο, τὸν νῦν ἀτεχνῶς κατῳκισμένῳ, ϗ μόνον οὐκ ἀπειρηκότι ἐπὶ τῇ προσδοκίᾳ τοῦ κρυπτοδεικνυμένου εἰς τόδε σκέμματος. Καὶ μὴν ϗ ἄττα περὶ αὐτὸ, μακρὸν ἐλινύοντι ϗ σφαδάζοντι τὴν ψυχὴν, ὡς εἰκὸς, ὑπόληπτα, προεκθέσθαι ἴσως οὐκ ἄσκοπον. Οὐ γὰρ χθὲς ἡμῖν, οὐδὲ πρώην τὰ ὦτα ἡ τῶν δύω μέσων ἐθρόησεν εὕρεσις· ἐνιαυτοὶ δὲ ἤδη παρήλασαν πλέον ἢ πεντεκαίδεκα, ἐξ οὗπερ γε ἡ περὶ αὐτῆς διαῤῥεύσασα φήμη, ἐνῆγε μὲν εἰς τὸ θαυμάζειν ϗ ἡμᾶς ἐπ' αὐτῇ, οὐ παρεῖχε δὲ μαθεῖν τὴν ἐπίνοιαν. Ἐτηρεῖτο γε ἐν ἀποῤῥήτοις τὸ πρᾶγμα, ἐπεὶ μήπω τοῖς τυχοῦσιν ἐδόκει δημοσιεύεσθαι. Καὶ τισὶ μὲν, ὡς δῆθεν τὰ τοιαῦτα τετελεσμένοις οὖσι τε, ϗ ἀξίοις ἀνεκοινοῦτο· ἡμῖν δὲ ἄρα ὡς ἀμυήτοις τισὶ ϗ βεβήλοις, οἷς οὐ θεμιτὸν ἦν εἰς τὰ ἄδυτα ταῦτα παρακύπτειν, πᾶσα μὲν θύρα ἐπετίθετο, πᾶσα δὲ θέα ἀπείργετο. Ἐκ τούτου, πῶς οἴει; Παντοῖος ἐγινόμην ἐγὼ, ϗ μηδὲν ἔχων ὅ,τι ϗ δράσω, ἄλλοτε ἄλλως ὡς ἐπὶ πεττείας τὰς κρίσεις μετέπιπτον. Καί ποτε ϗ μεταξὺ ὑπενόουν, μὴ ϗ κόμπος τις εἴη κενὸς ϗ ψευδὴς ὁ πολὺς θροῦς ἐκεῖνος, ἀκούων μὲν ὑπὸ πολλῶν διακωδωνιζομένην τὴν εὕρεσιν, ὁρῶν δ' εἰς τοσοῦτον ὑπερτιθεμένην αὐτῆς τὴν ἐπίδειξιν. Καὶ ταῦτα οὐδ' αἰτίας τινὸς ὑπούσης, ἐξ ἧς ἂν τὰ τῆς ἀναβολῆς σχοίη τὸ εὔλογον. Εὑρεθέν γε, οὐδὲ λόγος ἔδει πολλῶν ϗ περιττῶν, ὥστε ἐκδοθῆναι τὸ γράμμα. Τὰς μὲν γὰρ ἄλλας τῶν συγγραφῶν, ὅσαις τῷ τῆς διασκευῆς ἐντέχνῳ, ϗ ἐνρύθμῳ λέξεως, ϗ τῷ ἄλλῳ πλούτῳ τῆς κατὰ τὴν ῥητορείαν δυνάμεως, ἐπανθεῖ τὰ τῆς χάριτος, εἰκὸς ϗ μακροτέρας δεομένης τῆς τημελείας, μὴ οὕπω ταχὺ εἰς τὸ μέσον ἐκφέρεσθαι. Καὶ τάχα συγγνωστέον μὲν τῷ Ἰσοκράτει, τὸν δεκαέτην πανηγυρικὸν διαγλύφοντι ϗ τορεύοντι, συγγνωστέον δὲ ϗ Πλάτωνι τῷ κτενίζειν τε ϗ βοστρυχίζειν, ϗ πάντα τρόπον ἀναπλέκειν τοὺς διαλόγους τοὺς αὐτοῦ, ἄχρι γήρως μὴ διαλείποντι. Προβλήματος δὲ Γεωμετρικοῦ ἡ μὲν ἔκθεσις ἁπλῆ, ἡ δὲ φράσις ἀκόριτος, ἡ δὲ λέξις ἀφελής. Καὶ ἅμα νοῦς τ' ἐπεβάλλετο, ϗ λόγος ἐξεῖπε, γυμνοῖς τῶν ἐννοιῶν τισι συμβόλοις χρωσάμενος· ταῦτ' εὖ εἰδότι παρῆν ἐνδοιάζειν, ὡς εἴρηται, τεκμήριον τῆς ἀποτυχίας ποιουμένῳ τὴν τῆς μεθόδου διὰ μακροῦ ἀποσίγησιν. Ἐπεὶ δὲ ἡ τῆς εὑρέσεως φήμη συμπροϊοῦσα τῷ χρόνῳ μᾶλλον ἐῤῥώννυτο, ϗ ἐδόκει ἤδη τοῦ μοδίου ὑποξενευθέντα τὸν λύχνον, ἐπὶ τὸ λυχνίον τεθεῖναι. Καὶ λοιπὸν ἦν ὡς ἐλέγετο, τῶν κατὰ τὰς ἐν Εὐρώπῃ περιβλέπτους Ἀκαδημίας λυχνιῶν τινός, ἐν καλῷ ποι ἱδρυθῆναι, ὡς ἂν ᾖ τοῖς πᾶσι περίοπτος. Ἢ κἂν τῇ, παρὰ τῷ τ' ἀληθῆ ἡμῖν ἐξισ(ι)ρηκότι ἐκείνῳ, λυχνουπόλει, οἷα δὴ πολίτην ἄξιον ὄντα, πολιτογραφῆναι. ἐντεῦθεν κἀμοὶ ἡ ψῆφος ἐλευκαίνετο, συνεκνικώσης τῷ θρυλλουμένῳ τῆς Κρίσεως. Οὐδέ γε εἰκὸς ἦν, τῶν ἄλλων, ἐν μυριαγωγοῖς σοφίας ὁλκάσι, πρύμναν ἀνακρούεσθαι λεγομένων, ἡμᾶς τῷ ῥοθίῳ μὴ ὑπενδιδόναι· μόνους δὲ αὐτοὺς τολμᾶν, ἐν Ἀκατίῳ οὕτω σμικρῷ ναυτιλλομένους, πρὸς κῦμα τοσοῦτον ἀντεξετάζεσθαι, τὸ μέν γε ὕποπτον, ἐφ' οἷς μὴ λόγος ἐπαυγάζει σαφής, φιλόσοφον· τὸ δὲ ϗ ὑπερδιατείνεσθαι πάντῃ μὴ οὕτως ἔχειν, ἐπεὶ μὴ σφίσι δοκεῖ, ϗ ταῦτα ἐκ ὀλίγων, οὐδ' ἀσήμων τινῶν ὄντων τῶν συνηγορούντων, ἴσως ἀβέλτερον, ϗ τρόπου δεινῶς ἐθελοκακοῦντος ἴδιον. Τηνικαῦτα καὶ θαυμάζειν μάλα ἐνδίκως εἶχον τὸν ἄνδρα, ϗ ἐπὶ τῇ λεπτότητι τῶν φρενῶν ἐμακάριζον, ϗ τὸ ἐπινοηθὲν ἄξιον εἶναι τῆς Πυθαγορικῆς ἔγραφον βουθυσίης. Καὶ χαιρόντων ἤδη, κατ' ἐμαυτὸν ἔφασκον, μᾶλλον δὲ ὑπ' αἰσχύνης ἑαυτοὺς καλυπτόντων οἱ περὶ Εὔδοξον, ϗ Ἀρχύταν, ϗ Μέναιχμον, ϗ Διοκλεῖς ἐκεῖνοι, ϗ Νικομήδεις, Ἥρωνές τε, ϗ Ἀπολλώνιοι, ϗ Πάπποι, ϗ Σπόροι, καὶ Πλάτωνες αὐτοὶ οἱ δαιμόνιοι· ὧν οἱ μὲν εἰς ὀργανικὰς, ϗ μηχανικὰς κατασκευὰς τὸν τοῦ στερεοῦ διπλασιασμὸν ἀπάγειν ἐπιχειροῦντες, ϗ μεσολαβίοις τισὶν ἐπὶ τούτῳ ἐντέχνοις χρώμενοι, οἱ δὲ διὰ τῶν στερεῶν καλουμένων τόπων φερόμενοι, οἱ δὲ διὰ τῶν ἐπιπέδων, οἱ δὲ κινήσεις συμπλέκοντες, οἱ δὲ κύκλους περιγράφοντες, ϗ ἑνί γε τῷ ἕκαστος τῷ τρόπῳ, τῆς τῶν ἐν δυσὶ δεδομέναις ἀκριβότητι, δυεῖν ἐφεξῆς μέσων, ἐπιτυχίας τὴν ἀπόπειραν λαβάνοντες (1), ὅσον γε τείνει εἰς Γεωμετρικὴν φάναι ἀκρίβειαν, οὐδὲν ὤνησαν. Ἀμέλει τοι ϗ πλεῖον τοῦ Πλάτωνος ὧδε. Καὶ ἄλλα μὲν, ἄλλοτι τῶν καλῶν ἤνεγκε χρόνος, ὁ δὲ καθ' ἡμᾶς τὸ κάλλιστον τοῦτο, περὶ ὃ τοσοῦτοί τε ϗ τηλικοῦτοι πολλὰ ὠδύναντες, ὑπηνέμιον ἡμῖν τὸ ᾠὸν τετόκασι. Ταῦτα μὲν ἦν, ϗ τὰ ἐπὶ τῆς δευτέρας ψήφου ἐπιφωνήματα, λαμπρὰ μὲν καθ' ἑαυτὰ, οὐ πάνυ δὲ πόῤῥω τυχὸν τῆς ἀξίας ἐπιβοώμενα, εἰ μόνον μὴ τῷ Ἑρμεῖ ψευδομένῳ ἐξ ἀτυχίας ἀπαντῆσαι ἡμῖν ἐγένετο. Ἀλλ' ἔστι τῷ ὄντι τὸ περὶ τὰ τοιαῦτα ἐκ φήμης δικάζειν ἐπισφαλὲς, ὥσπερ δὴ ϗ τὸ, φασὶν ὅτι θέμις ψεύδεσθαι θεὸν ἔσαν, ψευδόμενον. Ὅρα γὰρ ὡς παλίμβολος ἐγώ σοι γίνομαι δικαστὴς, ἑτέροιας σοι τὴν κρίσιν, νέον φαινόμενος, ἢ ὡς πάροιθεν. Καὶ χάρις σοι ὦ φιλότης ὅτι πέμψας τὸ γράμμα, ἔξω γενέσθαι τῆς ἐξαπάτης ἡμᾶς ἐποίησας. Ἀνέγνων γε αὐτό, ϗ μὴ καταγνῶναι, οὐδ' ἂν ὅτι πολὺ βουληθείην, εἶχον. Οὐ κότει μοι τῆς Πυθαγόρου κλεινῆς βουθυσίης τὸ ἔργον ἄξιον, τῇ δὲ τοῦ Αὐγείου μᾶλλον βουστασίῃ κρίνεται παραπλήσιον. Παρ' ὅσον, οὐθ' Ἡρακλέους τινὸς ἆθλος, ἡ τούτου κάθαρσις ἀλλὰ ϗ τοῦ τυχόντος τὴν ἐν τοῖς Γεωμετρικοῖς μαθήμασι δεξιότητα. Παραλογισμός γε ἐστὶ σαφὴς ὁ ἐκδοθεὶς, ϗ τῶν πάνυ ἀφελῶν, ὑφ' οὗ μόνος ἄν τις παρακρουσθείη ἀρτιμαθὴς ὢν τὰ τοιαῦτα, ὃς ἀκμὴν ἀνέφυσεν ὀδόντας, ἢ, τῶν οὓς ἐδίδαξαν, εἰ τύχοι, ἀριστερὰ γράμματα μοῦσαι. Παραλογισμὸν δὲ λέγοντι, τοσοῦτό μοι ἀποδεῖ τοῦ ἀπόδειξιν ὀνομάζειν, ὅσον οὐδὲ ταῖς μηχανικαῖς τῶν ἐπινοιῶν τὴν φερομένην τάξαιμι ἂν ἐναρίθμιον. Ἐκεῖναι ϗ γὰρ, εἰ καὶ μὴ ἐπιστημόνως χωροῦσιν, ἀλλ' ἀληθεύουσιν. Αὕτη δε, ἐπὶ σαθροτάτοις θεμελίοις τοῖς τοῦ ψεύδους, κρηπιζομένη, ὅσον οὐρανὸς ἄπεστι γαίης, τοσοῦτον τῆς ἀληθείας ἀποπεπλάνηται. Καὶ οὐθ' ὅτι μηχανικὴ ἡ εὕρεσις, ὃ

(1) Παρ' Εὐτοκίῳ ἐν τοῖς εἰς τὸν Ἀρχιμ: Θεωρ: α. βιβλ: β: περὶ Σφαίρ: ϗ Κυλίνδρ.

ἐκδὺς ἀκέειν, ἐρεῖς, ἀνέχεται, πολλοῦ γ᾽ ἂν δεήσειε τοῦ ψευδομένην ὁμολογῆται. Τί θαυμαστόν; τοῦτο ταῖ τῶν παραλογιζομένων τὸ πάθος, τὸ μηδὲ συνορᾶν ἔχειν τὴν ἀπὸ τοῦ ὀρθοῦ λόγου παρατροπὴν αὐτῶν, καὶ ἀπόπτωσιν. Ὃ δὴ καὶ οἱ παρακεκινημένοι τὰς φρένας πάσχουσιν, οἳ παρανοοῦντες καὶ παρακαίοντες, πᾶν ὁτιοῦν, ἢ τοῦτο, ἑαυτοὺς πείθουσιν. Οἰόμενοι γὰρ αὐτοὶ σωφρονεῖν, ἔπειτα τοῖς ὑγιαίνουσι λαμπρὰν τὴν μανίαν ἐπιγελῶσιν, ἢ καὶ ἐπιδακρύουσιν. Ἀλλὰ γὰρ πότερος ἡμῶν τοῦ καρκίνου, φασὶν, ἐπεδράξατο, ἄλλοι ἐπιδικάσονται. Πολλοὶ δὲ καθ᾽ ἡμᾶς καὶ τῶν Ἑλλήνων εἰσὶν οἷς σπέρματα λόγων τῇ προνοίᾳ ἔδοξε καταθέσθαι τῶν Ἀττικῶν οὐ λειπόμενα. Οὗτοι γοῦν ἀμφοτέρων ὥσπερ ἀντιδίκων (ὡς Ἀριστοτέλης φησὶ (1)) τοὺς λόγους ἐτάσαντες, τὴν δικαίαν εὖ οἶδ᾽ ὅτι ἐποίσουσι. Πρὸ δὲ πάντων αὐτοῖς ἐπιψηφιεῖ, ὃς οὐδενὸς δεύτερος εἶ τὴν περὶ ταῦτα τριβὴν καὶ δεινότητα. Ἡμῶν δ᾽ ἂν εἴη τὴν ᾗ προσώκειλεν ὕφαλον ὁ θαυμαστὸς Γεωμέτρης, πλησίστιος οὐριοδρομῶν, ὡς ᾤετο, στῆσαι κατάδηλον, ἀνάγκαις, ὃ φασὶ, γραμμικαῖς, ταυτὸν εἰπεῖν, λόγοις ἀναντιῤῥήτοις, τὴν ἀπάτην ἀνακαλύψαντας. Ἄτοπον γὰρ ἐπιεικῶς κατὰ τὸν παρὰ τῷ Χαιρωνεῖ Χρύσιππον (2), τὸν ἐναντίον λόγον οἰομένους δεῖν τιθέναι μὴ μετὰ συνηγορίας, ἀλλ᾽ ὁμοίως τοῖς δικολόγοις κακοῦντα, ὥσπερ οὐ πρὸς τὴν ἀλήθειαν, ἀλλὰ περὶ νίκης ἀγωνιζομένους, οὕτω τιθέναι. Καίγε ἐκείνη ἔρις κακίστη ἴσην μὲν τὴν ἔριν ἀντιφυτεύουσα, μηδὲν δὲ τὸ παράπαν εἰς πορισμὸν γνώσεως συνεισφέρουσα. Ἀγαθὴ δ᾽ ἔρις ἥδε βροτοῖσιν, ἡ κατὰ λόγον καὶ μετὰ λόγου συνισταμένη, καὶ τὴν μὲν ἄγνοιαν θατέρου πάντως τῶν ἐριζόντων ἀποσκεδάζουσα, εἰς ὁμόνοιαν δὲ τέως, καὶ ὁμοφροσύνην αὐτοὺς συνάγουσα. Ὡς ἔμοιγε ἐλπὶς ὕπεστιν οὐ κούφη, ὅτι καὶ ὁ τῆς μεθόδου πατὴρ παλινῳδίαν ᾄσεται, καὶ σύμφωνον τῇ ἀληθείᾳ συνηχήσει τὸ μέλος, εἰ μόνον τοῖς παροῦσιν ἐγκύψαι ἐπιμελῶς ἀξιώσειεν. Πρόργου δ᾽ οὖν ἡμῖν πρὸ παντὸς εἴη αὐτὸ προστήσασθαι τὸ πρόβλημα περὶ οὗ ὁ λόγος, καὶ τούτου τὴν κατασκευὴν καὶ ἀπόδειξιν ἀνελλιπῶς τε, καὶ ἀκριβῶς, καὶ τί ἄλλο, ἢ ἐπὶ λέξεως; ὑποσυνάψαι, ὅπως ἂν ὑπ᾽ ὄψεσιν παραστὰς ὁ Πινδαρικὸς οὗτος Καινεὺς ὁ ἐξ ὕλης ἀδαμαντίνης κεχαλκευμένος, ὁ σιδήρῳ ἄῤῥηκτος, καὶ ἄτρωτος τὸ σῶμα, καὶ ἀπαθὴς, ὁ σχίζων ὀρθῷ ποδὶ γᾶν, ῥᾴδιον ἑαυτὸν συνιδεῖν παρέχοιτο, εἰ πιθανῶς, καὶ μὴ πεπλασμένως, τὸ δρᾶμα ἡμῖν ὑπεκρίνατο.

Καὶ τὰ λοιπὰ τοῦ προβλήματος.

Π ρ ό β λ η μ α.

„Δύω δοθεισῶν ἀνίσων εὐθειῶν, δύω μέσας αὐτῶν συνεχῶς ἑξῆς ἀνάλογον Γεωμετρικῶς „εὑρεῖν. (Σχῆμ. 42.)

„Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύω ἄνισοι εὐθεῖαι αβ, βγ, καὶ ζητηθήτωσαν αἱ μεταξὺ αὐτῶν „δύω συνεχῶς ἑξῆς ἀνάλογον. Κείσθωσαν δὴ αἱ αβ, βγ πρὸς ἀλλήλας, ὥστε ὀρθὴν ποιεῖν γω„νίαν τὴν ὑπὸ αβγ· τῶν δὲ αβ, βγ ἐξαχθεισῶν κατὰ τὸ συνεχὲς ἀορίστως ἀπὸ τοῦ β σημείου „ἐπὶ τὰ δ καὶ ε, εἰλήφθω ἐπὶ τῆς δβ, ἡ βζ, ἴση τῇ βγ, καὶ εὑρεθήτω μέση ἀνάλογος τῶν „αβ, βζ ἡ βη, διὰ τῆς ιγ΄: τοῦ ϛ΄: τοῦ στοιχειωτοῦ· τῇ δὲ βη ἴσης ληφθείσης τῆς βθ ἐπὶ τῆς αὐ„τῆς βδ, εὑρεθήτω αὖθις διὰ τῆς ῥηθείσης προτάσεως, μέση ἀνάλογος τῶν αβ, βθ ἡ βκ. „Καὶ γραφήτωσαν περὶ τὰς γκ, γκ εὐθείας (3) κύκλοι οἱ γλ ημ, γνκξ. Εἶτα διαιρεθήτω „ἡ μξ ἀναλόγως ταῖς ζμ, ξθ κατὰ τὸ ο (4), ὥστε εἶναι ὡς ἡ ζμ πρὸς τὴν ξθ, τὴν μο πρὸς „τὴν οξ. Καὶ εὑρεθήτω γ: μέση ἀνάλογος τῶν αβ, βο ἡ βπ: λέγω τοίνυν τὰς βπ, βο εἶναι „τὰς ζητουμένας, καὶ τὰς τέσσαρας αβ, βπ, βο, βγ συνεχῶς εἶναι ἑξῆς ἀνάλογον· ὡς ἡ αβ „δηλονότι πρὸς τὴν βπ, τὴν βπ πρὸς τὴν βο, καὶ τὴν βο πρὸς τὴν βγ.

Καὶ τὰ μὲν τῆς κατασκευῆς ταῦτα, εὔλογα τὰ πάντα, καὶ πρὸς στάθμην Γεωμετρικὴν ἀπηκριβωμένα, ὡς ἄρα τοῖς αἰτήμασι, καὶ τῇ γ΄: καὶ ι΄: καὶ ια΄: τοῦ Αου: τῶν στοιχείων, καὶ τῇ Θῃ: καὶ ιγῃ: τοῦ ϛου: προστερειδόμενα· τὰ δὲ τούτων ἐχόμενα αἰτήματά τινα ἐστὶ καὶ προβλήματα ἐκ τῶν στοιχείων καὶ αὐτὰ ὑποτιθέμενα, οἷς ἡ δεῖξις ὕστερον συγκροτηθήσεται.

„Ἐπεζεύχθωσαν γε, φησὶν, αἱ απ, πο (5), καὶ τῆς γπ δίχα τμηθείσης (6) κατὰ τὸ

---

(1) Μεταφ. β. (2) Πλούτ: στωϊκῶν ἐναντιωμ: (3) Νόειμοι ὡς περὶ διαμέτρους. (4) Θ: τοῦ ϛ.
(5) Αἰτ: αον: (6) Ιη τοῦ Αου:

„ρ, ἤχθω ἀπὸ τῦ ο διὰ τῦ ρ, ἡ ορσ εὐθεῖα (1) τέμνυσα τὴν απ κατὰ τὸ σ· (συμπεσεῖται „γὰρ πάντως ἐπειδὴ γὰρ ἡ ὑπὸ, απο, ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν (2), αἱ δὲ τῦ, απο, τριγώνυ τρεῖς γωνίαι ἅμα, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν (3), ἀνάγκη πᾶσα τὰς ὑπὸ παο, καὶ ποα δυεῖν ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι (4). Καὶ ἔτι μᾶλλον τὰς ὑπὸ παο καὶ ρoα. Καὶ ὕτως ἐμπιπτύσης τῆς αρ, τὰς ἀπὸ δυεῖν ἐλασσόνων, (τῶν ὑπὸ παο, ϗ ποα) ἐκβαλλομένας εὐθείας απ, ορ συμπίπτειν, ἐφ' ἁμέλη εἰσὶν αἱ τῶν δύω ὀρθῶν ἐλάσσονες (5)). „Ἀπὸ δὲ τῦ σ πιπτέτω μὲν κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, ἡ σφ (6), ἤχθω δὲ παράλληλος τῇ αὐτῇ „αθ, ἡ στ (7). Καὶ ἀπὸ τῦ ο συνεςάσθω κάθετος ἐπὶ τῆς στ ἡ ου, (8) τέμνυσα τὴν στ κατὰ τὸ υ. Καὶ ἐπεζεύχθω ἡ φυ (9) ἣν λέγω διὰ τῦ ρ σημείυ διέρχεσθαι.

Σημειωτέον, ὡς εἰ τῦτο δειχθῇ ὐδεὶς τῦ λοιπῦ λόγυ ἀμφισβητήσεως περιέςαι, τῦ μὴ κατὰ θυμὸν ἤδη ἀποβῆναι τῶν δύω μέσων τὴν εὕρεσιν. Ἐπεὶ γὰρ αἱ οσ καὶ φυ τῦ ὀρθογωνίυ παραλληλογράμμυ φσυο εἰσὶ διαγώνιοι. (Τὰς δὲ διαγωνίυς τῶν παραλληλογράμμων δίχα τέμνεσθαι ὑπ' ἀλλήλων, ἀληθές τε καὶ εὐαπόδεικτόν ἐςὶν) ὁ κέντρῳ μὲν τῷ ρ, διαςήματι δὲ τῷ, ἧς ἂν βέλοιο, τῶν ἡμιδιαγωνίων οἷον τῆς ρσ, ἢ τῆς ρυ καταγραφόμενος κύκλος, διὰ πασῶν τῶν τῦ ὀρθογωνίυ γωνιῶν διελεύσεται, σ, καὶ υ, καὶ ο, καὶ φ: ὁ αὐτὸς δὲ κύκλος καὶ διὰ τῆς κατὰ τὸ π γωνίας ὀρθῆς ὔσης ἀχθήσεται, τῆς μήτε εἴσω τῆς περιμέτρυ πιπτύσης, μήθ' ὑπερπιπτύσης, ὡς ὑπὸ Οὐίςωνος δεδειγμένον κεῖται ἐν ταῖς παρὰ Τακυετίῳ σημειώσεσιν (10). Ἐντεῦθεν διὰ τὸ παρὰ τῷ αὐτῷ Τακυετίῳ α^ον: πόρ: τῆς ιγ^ης; τῦ ς^υ: τῶν ςοιχείων, ἔςαι μὲν ἡ πβ μέση τῶν αβ, καὶ βο, ἔςαι δ' ἡ βο μέση τῶν πβ καὶ βγ· ταυτὸν εἰπεῖν, αβ, βπ, βο, βγ ∺, ὅπερ εὑρεῖν τε πρόκειται, καὶ δεῖξαι. Ἀλλὰ γὰρ ἐν ἐκείνῳ μάλιςα κεῖται ἡ τῦ λόγυ δυςχέρεια, καὶ ἡ δύναμις τῆς δείξεως περὶ τὴν φυ ςρέφεται πᾶσα, πότερον ἐπιζευγνυμένη διὰ τῦ ρ διέρχεται, ἢ δ' ἄλλυ τινὸς σημείυ; Ἐφ' ᾧ γοῦν ἐκεῖνο δεῖξαι διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς χωρεῖ ὁ τὸ πρόβλημα ἐπιλύσων. Ἔχει δὲ ὧδε ἡ ἔφοδος αὐτῷ ἐπὶ λέξεως.

„Εἰ γὰρ μή, διελεύσεται δήπυθεν δι' ἄλλυ τινὸς σημείυ τῆς γπ, ἢ τῶν μεταξὺ τῶν „ρ9, ἢ τῶν ἐν μέσῳ τῶν ρβ σημείων.

Ὁπότερον ὖν τύτων ὑποτεθῇ, παρὰ πόδας αὐτῷ δοκεῖ τὸ ἄτοπον ἕψεσθαι. Ὅθεν δὴ καὶ διασκευάζει τὴν δεῖξιν, τῷ αὐτῷ λόγῳ πιθανὸν τυγχάνον δεικνὺς, μηδέτερον.

„Διήχθω δὴ διὰ τῦ χ, ὡς ἡ φχυ τέμνυσα τὴν σο, κατὰ τὸ ψ. Καὶ ἐπεὶ τὰ μὲν „φσυ, ουσ ὀρθογώνια τρίγωνα, ἔχυσι τὰς δύο πλευρὰς φσ, συ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ου, υσ „ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ (ἴση γὰρ ἡ σφ τῇ ου κατὰ τὴν λδ^ην: τῦ Α^υ: τῦ ςοιχειωτῦ, καὶ ἡ „συ κοινή) καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ φσυ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ουσ ἴσην (ἄμφω γὰρ ὀρθαὶ ἐκ τῆς κατα„σκευῆς). Ἄρα καὶ βάσις ἡ φψυ, βάσει τῇ οψσ ἴση ἐςὶ, κατὰ τὴν Δ^ην: τῦ Α^υ: τῦ ςοιχειω„τῦ. Αὖθις ἐπεὶ τὰ σψυ, οψφ ἀμβλυγώνια τρίγωνα, ἔχυσι δύω γωνίας, τὰς ὑπὸ ψσυ, ψυσ, „ἴσας δυσὶ ταῖς ὑπὸ ψοφ, ψφο, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ ὡς ἐναλλὰξ, κατὰ τὴν κθ^ην: τῦ Α^υ: τῦ „ςοιχειωτῦ· παράλληλοι γὰρ αἱ συ, φο διὰ τῆς κατασκευῆς, ἔχυσι δὲ μίαν πλευρὰν τὴν συ, „μιᾷ πλευρᾷ τῇ φο ἴσην (11). Ἄρα κατὰ τὴν κς^ην: τῦ αὐτῦ, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοι„παῖς πλευραῖς ἴσας ἔχυσιν, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. Ἴση ἄρα ἡ μὲν σψ τῇ ψο, ἡ δὲ υψ τῇ ψφ. „Ὥςε τῦ σφου ὀρθογωνίυ παραλληλογράμμυ, αἱ σψο, φψυ διάμετροι, ἴσαι τε ἀλλήλαις εἰσὶ, „καὶ δίχα τέμνονται κατὰ τὸ ψ. Καὶ ἑπομένως τὸ ψ σημεῖον κέντρον ἐςὶ τῦτε ὑφου παραλληλο„γράμμυ, καὶ τῦ περὶ αὐτὸ γραφομένυ κύκλυ.

Ὁ μὲν λόγος ἅπας ἀληθής, ἓν δὲ τῦτο προσσημειωτέον ἐνταῦθα, μήτις (ὅπερ ἐσχάτως προσετέθη) κύκλον περὶ τὸ παραλληλόγραμμον γραφόμενον ἀκύων, αὐτὸν τὸν περὶ τὴν πγ πρωθυςέρως γεγραμμένον ἐπὶ τῦ σχήματος ὑπολάβῃ νοούμενον· ὐδὲ γὰρ ἀνάγκη τὸν κέντρῳ μὲν τῷ ὑποτεθέντι τῦ ὀρθογωνίυ ψ, διαςήματι δὲ τῷ ψσ καταγραφόμενον κύκλον, τὸν διὰ τῦ σ λέ-

(1) Αἴτ: α^ον: ϗ β^ον: (2) λα. τῦ γ^υ: (3) λβ. τῦ α^υ: (4) διὰ τὸ παρὰ Τακυετ: ε^ον: πόρισμα τῆς αὐτῆς. (5) Ἀξ: ια^ον: παρ Εὐκλείδ: ὃ δίκην θεωρήματ: παρὰ Κλαβίῳ, ϗ Τακυετ: ϗ ἄλλοις προβάλλεται, ϗ δείκνυται. (6) ιβ. τῦ Α^υ: (7) λα. τῦ Α^υ: (8) ιβ. τῦ Α^υ: (9) Αἴτ: Α^ον: (10) βιβλ: Γ^υ: τῶν ςοιχ: ἐν τῷ σχολ: τῆς κά: προτ: (11) διὰ τὴν λδ. τῦ Α^υ:

γω, καὶ υ, καὶ ο, καὶ φ, (κατὰ τὴν ἀποδειχθεῖσαν τῶν ἡμιδιαγωνίων ἰσότητα) φερόμενον, τὸν αὐτὸν εἶναι τὸν περὶ τὴν πγ ὡς περὶ διάμετρον γεγραμμένον. Πόθεν γάρ; εἰμὴ πρότερον τὰς (αἵπερ ἂν ἐπιζευχθεῖεν) ψπ, καὶ ψγ ἴσαις ταῖς ἡμιδιαγωνίοις αὐταῖς φθάσειεν ἀποδεῖξαι; Ἀλλ' ȣ̕πω τοιόνδε τι ὁ προληφθεὶς κατεσκεύασε λόγος. Νοητέον ἄρα ἀντὶ τȣ̃, περὶ τὸ φσυο παραλληλόγραμμον, γραφομένȣ κύκλȣ, ἄνευ τῶν ἐν τῷ διαγράμματι, διὰ τῆς εἰς τόδε κατασκευῆς, καταγραφέντων τινὰ, μόνον δὲ τὸν ψιλαῖς ταῖς φαντασίαις ἐς τόδε ἀνατυπȣ́μενον.

,,Πιπτέτω δὴ ἀπὸ τȣ̃ ψ κέντρȣ κάθετος ἡ ψω, ἐπὶ τῆς φο, καὶ, κατὰ τὴν γην: τȣ̃ ,,γȣ: τȣ̃ ϛοιχ: δίχα αὐτὴν τεμεῖ. Ἡ μὲν γὰρ φο ἐκτὸς ἐϛὶ τȣ̃ κέντρȣ, τȣ̃, περὶ τὸ σφου πα- ,,ραλληλόγραμμον, γραφομένȣ κύκλȣ (τȣ̃ ὡς ἀνωτέρω δηλ. νοȣμένȣ.) Ἡ δὲ ψω διὰ ,,τȣ̃ κέντρȣ τȣ̃ αὐτȣ̃ διέρχεται, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, κύκλȣ (τȣ̃, ὡς εἴρηται, νοȣμένȣ)· ,,καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει τὴν φο γραμμήν. Ἴση ἄρα ἡ φω τῇ ωο. Κοινὴ δὲ ἡ ωψ. Καὶ γωνία ,,ἡ ὑπὸ φωψ, γωνίᾳ τῇ ψωο, ὁμοίως ἴση ἐϛίν. Ἄρα καὶ ἡ ψφ βάσις, ἴση τῇ ψο βάσει. (τȣ̃- ,,το δὲ καὶ ἀμέσως ἐκ τῶν πρὸ τȣ́τȣ δειχθέντων ἕπεται. Ἴσαι γὰρ αἱ τȣ̃ ,,ὀρθογωνίȣ διάμετροι, καὶ δὴ καὶ τὰ τȣ́των ἥμίση.) Καὶ ἡ ὑπὸ ψφω γω- ,,νία, τῇ ὑπὸ ψοω γωνίᾳ, κατὰ τὴν $\Delta^{ην}$: τȣ̃ $A^{ȣ}$: τȣ̃ αὐτȣ̃.

Ἢ καὶ ȣ̕τω συντόμως. Ἐπὶ τῶν σφο, καὶ υοφ, αἱ σφ, καὶ φο ἴσαι ταῖς υο καὶ οφ, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· Ἴσαι δὲ καὶ αἱ ὑπὸ τȣ́των περιεχόμεναι γωνίαι ἑτέρα τῇ ἑτέρᾳ· (ὀρθαὶ γάρ.) Ἄρα καὶ τὰ λοιπά. (1) Καὶ ἡ ὑπὸ ψφω, τῇ ὑπὸ ψοω. Διὸ καὶ τῶν ἐν τῷ 4 καὶ 5 Ἀριθμ: τὰ πλεῖω, ὡς εἰς τȣ̃το τείνοντα περικά· τὸ γὰρ δι' ὀλίγων γινόμενον, διὰ πολλῶν φιλοτιμεῖσθαι ἐν τοῖς φιλοτιμεῖσθαι ἐν τοῖς τοιȣ́τοις ποιεῖν, ȣ̓χ ἵπως μάταιον, ἀλλὰ ϗ ἀπειροκαλίας, ἢ ἀμȣσίας γραφὴν διαφεῦγον· φίλον γὰρ τοῖς μαθήμασι τὸ τȣ̃ λόγȣ ἁπλȣ̃ν καὶ ἀπέριττον. Ἀλλ' ἐχόμεθα τῶν ἑξῆς.

,,Ἤχθω δὲ, φησὶ, παράλληλος τῇ ψφ, ἡ ρ2. Καὶ ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τῆς ωμ, ἡ μ3, ,,ἴση τῇ λ2. Καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ρ3. Καὶ ἐπεὶ αἱ φψ, ρ2 παράλληλοι εἰσὶν ἐκ τῆς κατασκευῆς, ,,καὶ ἐπ' αὐτὰς πέπτωκεν ἡ φω, πάντως γε κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν κθην:, καὶ ἡ ὑπὸ ρ2ω ἐκτὸς ,,γωνία, ἴση ἐϛὶ τῇ ὑπὸ ψφω ἐντός. Ἀλλ' ἡ λμ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνεται ὑπὸ τῆς γη, ,,ἔνθα τὸ β (κατὰ τὴν γην: τȣ̃ $γ^{ȣ}$: τȣ̃ αὐτȣ̃) ἡ μὲν γὰρ λμ ἐκτὸς ἐϛὶ τȣ̃ κέντρȣ τȣ̃ γλημ ,,κύκλȣ (τȣ̃το δὲ πάντως, διότι αἱ δοθεῖσαι αβ, βγ ἄνισαι εἰσίν.) Ἡ δὲ ,,γκ πρὸς ὀρθὰς ἐφέϛηκεν ἐπ' αὐτῆς, καὶ διὰ τȣ̃ κέντρȣ τȣ̃ γλημ κύκλȣ. (ὑπετέθη γὰρ ,,τὸν κύκλον περὶ τὴν ηγ, ὡς περὶ διάμετρον γράφεσθαι, καθάπερ ȣ̓̃ν καὶ τὸν γνκξ περὶ τὴν γκ. Ἐν Ἀριθμ: 1.). Τῶν δὲ λβ, βμ ἴσων, ἀφῄρηνται ἴσαι ,,αἱ λ2, μ3. (Ἡ μὲν λ2 διὰ τῆς ρ2 τῆς παραλλήλȣ ἀχθείσης πρὸς τὴν ψφ, ȣ̓ γὰρ ἄλλως. Ὃ καὶ καλῶς σημειωτέον. Ἡ δὲ μ3 κατὰ ἀποτομὴν ἀπὸ τῆς βμ μείζονος ȣ̓́σης, δυνάμει τῆς γης: τȣ̃ $A^{ȣ}$: τῶν ϛοιχείων· τȣ̃το γὰρ εἰ ,,καὶ μὴ εἴρηται, ἀλλὰ νοεῖται.) Ἄρα κατὰ τὸ γον: ἀξίωμα αἱ ἐναπολειφθεῖσαι 2β, ,,3β, ἴσαι εἰσί. Κοινῆς δὲ λαμβανομένης τῆς βρ (ἐπὶ τῶν τριγώνων δηλ. 2ρβ, βρ3) ,,ἔσονται αἱ δύο εὐθεῖαι 2β, βρ, ἴσαι δυσὶ ταῖς 3β, βρ. Ἔϛι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ 2βρ γωνία, ἴση ,,τῇ ὑπὸ 3βρ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα. Ἄρα κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν δην: τȣ̃ ϛοιχειωτȣ̃, καὶ βάσις ἡ ,,2ρ, βάσει τῇ 3ρ ἴση ἐϛί. Καὶ ἡ ὑπὸ ρ2β γωνία, τῇ ὑπὸ ρ3β ὁμοίως ἴση. Ἔϛι δὲ καὶ ἡ ,,ὑπὸ ψφβ, ἴση τῇ ὑπὸ ρ2β, ὡς δέδεικται. (ταυτὸν γὰρ ἐϛὶν εἰπεῖν τὴν ὑπὸ ψφω, καὶ ὑπὸ ,,ψφβ· ἡ αὐτὴ γὰρ παρίϛαται γωνία.) Ἄρα ἡ ὑπὸ ρ3β ἴση τῇ ὑπὸ ψφβ. Ἀλλὰ μὴν ἡ ὑπὸ ,,ψφω, ἴση ἐϛὶ τῇ ὑπὸ ψοω, ὡς ἤδη συνῆκται ἐκ τῆς τȣ̃ ἐναντίȣ ὑποθέσεως. (ἐν Ἀριθμ: 5.). (Νοήσεις δέ μοι ἐναντίαν ὑπόθεσιν τὴν ἐν Ἀριθμῷ 4, καθ' ἣν ἡ ἐπιζευγνημένη φυ, τέμνȣσα τὴν σο κατὰ τὸ ψ, ἐν αὐτῷ τȣ́τῳ τῷ σημείῳ, καὶ τὸ ,,τȣ̃ ὀρθογωνίȣ φσυο ἴϛησι κέντρον.) Ἄρα ἡ ὑπὸ ρ3β ἐκτὸς γωνία τȣ̃ ρ3 τριγώνȣ, ,,ἴση ἐϛὶ τῇ ὑπὸ ρ23 ἐντὸς αὐτȣ̃ γωνίᾳ. Ὅπερ ἀδύνατον κατὰ τὴν ιϛην: τȣ̃ $A^{ȣ}$: τȣ̃ ϛοιχειωτȣ̃. ,,Παντὸς γὰρ κατ' αὐτὴν τριγώνȣ, μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία μείζων

---

(1) ὅρα τοῦ Μυ:

„ ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον. Οὐκ᾽ ἄρα ἡ φυ διὰ τοῦ χ διέρχεται. Ὁμοίως δὲ δει-
„ χθήσεται ἀδύνατον κἂν δι᾽ ἄλλου τινὸς τῶν ἐπὶ τῆς ρθ, ὑποτεθῇ διέρχεσθαι, πλὴν τοῦ ρ.

„ Ἐπεὶ δὲ ἡ τῇ ψφ παράλληλος ἀγομένη, δύναται διελθεῖν καὶ διὰ τοῦ λ, ἢ διά-
„ τινος τῶν μεταξὺ λ καὶ φ σημείων. Εἰ μὲν διὰ τοῦ λ διέλθῃ, ἐπεζεύχθω ἡ ρμ. εἰ δὲ διάτινος
„ τῶν μεταξὺ τοῦ λ καὶ φ, προσεθείτω τῇ βμ ἀπὸ τῆς βθ. (Ἴση γὰρ ἡ μο τῇ λφ ὡς δειχθή-
„ σεται) ἴσον διάστημα τῷ ἀπὸ τῆς λ, μέχρις οὗ ἡ τῇ ψφ παραλλήλως ἀγομένη διέρχεται. Καὶ
„ ἐπεζεύχθω ἡ ἀπὸ τοῦ ρ. Καὶ τὸ αὐτὸ πάντως συναχθήσεται ἄτοπον.

Τῆς φυ μὴ διὰ τοῦ ρ (τοῦτο γὰρ ἐστὶ τὸ μάλιστα χρῆζον δείξεως, καὶ οὗ ἕνεκα ὁ τοσοῦτος καταβάλλεται λόγος, διὰ δέ τινος τῶν μεταξὺ ρ καὶ ει σημείων ἀγομένης οἷον διὰ τοῦ χ., ἐπεὶ κατὰ τὸ μᾶλλον καὶ ἧττον ἀφεστηκέναι ἐνδέχεται τοῦ ρ σημείου τὸ χ, δι᾽ οὗ διέρχεσθαι ὑποτίθεται, φανερὸν ὅτι καὶ ἡ τῶν παραλλήλων ἀπόστασις ἐντεῦθεν ἀόριστος οὖσα, καὶ κατὰ θάτερα τῶν περάτων, οἷον κατὰ τοῦ φ καὶ ϩ, ἐν ἀδήλῳ κεῖται ὅση τις ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ φ σημεῖον διὰ τῆς σφ καθέτου ὥρισται, τὸ ἄρα ϩ τὸ ὑπὸ τῆς ἀγομένης παραλλήλου, ἐστὶ τὸ σαλεῦον. Καὶ γένοιτ᾽ ἂν ἄρα τοῦτο νῦν μὲν ἐγγυτέρω, νῦν δ᾽ ἀπωτέρω τοῦ φ, ὡς ἄν ποτε σχοίη ἡ τοῦ χ ἀπ᾽ ἀλλήλως διάστασις. Οὕτω δέ τοι τὸ ϩ ἀστατοῦν, ἐνδέχοιτ᾽ ἂν συμπεσεῖν αὐτῷ τῷ λ, καθ᾽ ὃ τὴν αβ, ὁ περὶ τὴν κγ ὡς περὶ διάμετρον (Ἀριθμ: 5) γεγραμμένος κύκλος κατέτεμεν. Ἐνδέχοιτ᾽ ἂν δὲ καὶ εἴσω τοῦ κύκλου πεσεῖν, ὡς ἐπὶ τοῦ σχήματος. (Ἀριθ: 6.) Ἐνδέχοιτ᾽ ἂν δὲ τέως καὶ ἐκτὸς τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Καὶ τοῦτο ἐστὶ τὸ μεταξὺ τοῦ λ καὶ φ, ὡς ὁ τὴν μέθοδον ἡμῖν διαγράφων, καλῶς ποιῶν, σεσημείωκεν. (Ἀριθμ: 7.). Ἀλλὰ γὰρ ὅπως ποτ᾽ ἂν καὶ τύχοι τὸ σημεῖον τοῦτο (τὸ ϩ) πεσεῖν, καθ᾽ οἱανδήτινα λέγω θέσιν τε καὶ ἀπόστασιν τὴν πρὸς τὸ λ. κατὰ τὴν αὐτὴν θέσιν τε καὶ ἀπόστασιν, καὶ τὸ ʒ πρὸς τὸ μ, διὰ τῆς ἐπιζευγνυμένης ρʒ, ἡ τῆς δείξεως δύναμις ἀπαιτεῖ. Ἤτοι γάρ, κατ᾽ αὐτήν, καὶ τοῦτο (τὸ ʒ) ἐπ᾽ αὐτῆς πεσεῖται τῆς τοῦ κύκλου καὶ τῆς εὐθείας, κατατομῆς, ὡς ἐπὶ τοῦ μ. Ἢ γοῦν τοῦ κύκλου ἐντός, καθάπερ ἐπὶ τοῦ σχήματος: ἢ καὶ ἐκτός, μεταξὺ τοῦ μ καὶ ο. Ἤδη μὲν οὖν ἔνγε τοῦτο ἐν ἀμφισβητησίμοις δοκεῖ μοι εἶναι στρεφόμενον, τὸ ἐφεξῆς. Πότερον ἄρα πάρεστιν ἀεὶ τοσαύτην εὐθείαν ἀπὸ τῆς μο, διὰ τῆς ρʒ ἀπολαβεῖν, ὁπόσην ἂν ἀπὸ τῆς φλ, ἡ τῇ ψφ παράλληλος ρϩ ἀφέλοιτο; δέον γάρ, μήτοιγε τῆς ρϩ παραλλήλου μεταξὺ φ καὶ λ (ὅπερ ἐνδέχεσθαι καὶ αὐτὸς ὡμολόγησεν (Ἀρ: 7) ἀποτερματισθείσης, ἡ ἀποτεμνομένη ϩλ τοσαύτη ᾖ, ὁπόση ἑτέρωθεν ἡ τοῦ ο σημείου ἀπὸ τοῦ μ τυγχάνει ἀπόστασις. Τηνικαῦτα γὰρ ἡ ρʒ, τῇ ρο συμπίπτουσα ὑποσυνάπτειν οὐ δίδωσι τὴν ἀτοπίαν, ἐξ ἧς ἡ τοῦ προβλήματος λύσις ὅλη ὅλως ἐξήρτηται. Τοιγαροῦν ἐπεὶ καὶ τοῦτο συνοῖδεν ὁ Γεωμέτρης, καλῶς προσέθετο τό, Ἴση γὰρ ἡ μο τῇ λφ· τοῦτο μέντοι δείξεως εἶναι ἐπιδεὲς παντίπου δῆλον, καὶ οὐδ᾽ αὐτὸν ἔλαθεν. Οὐκοῦν δεόντως παρασυνῆψε, τὸ ὡς δειχθήσεται. Ἀλλὰ γὰρ ἤδη εὔκαιρον ἂν ἦν τοῦτο δεῖξαι, μᾶλλον δὲ ἀναγκαῖον· τούτου γὰρ ἄνευ ἡ εἰς τὸ ἀδύνατον ἀπαγωγή, πάντῃ ἀσυνάρτητος· οὐ γὰρ ἂν ἐπαχθείη τὸ ἄτοπον τοῦ τὴν ἐκτὸς γωνίαν ἴσην εἶναι τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, ἀφ᾽ ᾧ ἡ δεῖξις κρηπίζεται (Ἀρ: 6) μηδενὸς συνισταμένου τριγώνου· οὐδὲν δ᾽ ἂν συσταίη συμπιπτούσης τῆς ρʒ τῇ ρο· δύω γὰρ εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσι. Συμπέσοι δ᾽ ἂν τῆς μο ἴσης τῇ ϩλ, τῇ ἀπότε τῆς παραλλήλου ρϩ, καὶ τοῦ κύκλου ἐκτὸς ἀπειλημμένης. Τοῦτο δὲ δυνατόν, εἰ μὴ αἱ φλ καὶ μο φθάσασαι ἴσαι ἀποδειχθῶσι. Δεικτέον ἄρα ἦν αὐτῷ πρὸ παντὸς τοῦτο. Ὁ δὲ τὴν δεῖξιν ὑπερέθετο. Ἴση γάρ, φησίν, ἡ λφ τῇ μο; ὡς δειχθήσεται. Οὐκοῦν εὐλόγως ἡμεῖς ἐνδοιάσομεν, ἕως οὗ τὸ ὑποσχεθὲν αὐτῷ πληρωθῇ. Ἐπείγε γὰρ οὐδὲν τὴν φυ καὶ διὰ τοῦ χ διϊέναι, ἐπεὶ μήπω ἐξ ἀνάγκης ἕπεται τὸ ἄτοπον ἀπεδείχθη τῆς τῶν γωνιῶν (τῆς ἐκτὸς δηλ: καὶ ἐντὸς) τοῦ τριγώνου ἰσότητος. Τὰ μὲν οὖν περὶ τούτου ταύτηγε δίκαια ἐστίν, ὡς ἂν πᾶς τις ὁμολογήσειεν ἀκριβῶς ἐπιστήσας τῷ πράγματι· ὅγε μὴν τῆς μεθόδου πατήρ, ὡς τέλεον ἤδη τὸν προκείμενον αὐτῷ λόγον ἐκδούς, καὶ ἐπ᾽ ἀκριβὲς περάνας τὸ ἀδύνατον τῆς ὑπὲρ τὸ ρ διελεύσεως τῆς διαγωνίου φυ, διά τινος τῶν μεταξὺ τοῦ ρ καὶ 9 δηλ: σημείου, αὐτὸ τοῦτο κρατύνειν ἐπιχειρεῖ ὑποκαταβάς· παραπλησίᾳ τῇ δείξει κἀπὶ τῶν ὑπὸ τὸ ρ, ἀδύνατον ὁμοίως δεικνὺς τὴν φυ, καὶ διὰ τῶν μεταξὺ ρ καὶ β σημείως τινὸς διέρχεσθαι. Ἔχει γὰρ οὕτως ἐχόμενα.

„ Ἀλλάγε διελθέτω ἡ αὐτὴ φυ διαγώνιος διάμετρος διὰ τινὸς σημείου τῶν μεταξὺ ρ
„ καὶ β, ὡς διὰ τοῦ 4, τέμνουσα τὴν σο κατὰ τὸ 5 σημεῖον. Καὶ πιπτέτω κάθετος ἀπὸ τοῦ 5 ἡ
„ 56 γραμμή. Ἀπὸ δὲ τοῦ ρ ἤχθω παράλληλος τῇ 4φ γραμμῇ ἡ ρ7. Καὶ ἐπεὶ ἡ ρ7 ἐκτὸς τοῦ

,,ν πίπτει, ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τῆς ξδ, τὸ ξ8 μέρος, ἴσον τῷ ντ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ρ8· τούτων
,,γὰρ γενομένων εὐχερῶς δειχθήσεται ἡ ὑπὸ ροβ ἐκτὸς γωνία τοῦ ρ8ο τριγώνου, ἴση τῇ ὑπὸ ρ8ο
,,ἐντός. Δοθέντος γὰρ διέρχεσθαι τὴν φυ διὰ τοῦ 4 σημείου, πάντως γε τὸ 5 σημεῖον, καθ᾽ ὃ
,,τέμνονται αἱ σο, φ4υ διαγώνιοι διάμετροι τοῦ σφου παραλληλογράμμου κατὰ τὴν ὑπόθεσιν,
,,κέντρον ἐστὶ τοῦ σφου παραλληλογράμμου, καὶ τοῦ περὶ αὐτὸ γραφομένου κύκλου· (νοεῖν δὲ δεῖ
,,τὸν κύκλον κἀνταῦθα, ὡς ἐπὶ τοῦ 4 Ἀριθμοῦ σεσημείωται.) Πιπτούσης δὲ
,,ἀπὸ τοῦ 5 σημείου τῆς 56 γραμμῆς πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ φο, αἱ φβ, βο ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὰ ἤδη εἰ-
,,ρημένα (ἐν Ἀριθμ: 5, ὅπου ἡ φω, ἴση τῇ πο ἐδείκνυτο) κοινῆς δὲ εἰλημμένης τῆς
,,65, δειχθήσονται αἱ φ5, 5ο ἴσαι ἀλλήλαις, ὡς καὶ αἱ φψ, ψο ἐπὶ τοῦ προτέρου διαγράμ-
,,ματος. (Ἀρ: 5). Ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ 5φ6, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ 5ο6. Ἐπεὶ δὲ παραλλήλως ἦκ-
,,ται τῇ 4φ ἡ ρ7, δῆλον ὅτι καὶ τῇ ὑπὸ 4φβ ἐκτὸς γωνίᾳ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ρ7β ἐντός, κατὰ
,,τὴν κθην: τοῦ αου: τοῦ στοιχειωτοῦ. Δίχα δὲ τῆς νξ διαιρουμένης ὑπὸ τῆς γκ ἔνθα τὸ β, κα-
,,τὰ τὴν γηην: τοῦ γου: τοῦ αὐτοῦ, (ἐπεὶ δηλ: ὡς περὶ διάμετρον περὶ τὴν γκ,
ὁ γυκξ κύκλος περιεγράφη, καὶ αἱ αβ, βξ ἄνισοι. Τοῦτο δὲ ὡς ἀναγ-
καῖον ὂν πρὸς ἀκρίβειαν τῆς δείξεως, καὶ ἀνατέρω Ἀριθ: 5 σεσημείω-
,,ται.) Καὶ τῶν ν7, ξ8: ἴσως προστιθεμένων ταῖς βν, βξ ἴσαι ἔσονται πάντως γε καὶ αἱ β7,
,,β8 ἴσαι, κατὰ τὸ βον: ἀξίωμα, τὸ λέγον Ἐὰν ἴσαις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα. Κοι-
,,νῆς δὲ εἰλημμένης τῆς βρ, δειχθήσονται καὶ αἱ ρ7, ρ8 βάσεις ἴσαι, διὰ τῆς δης: τοῦ αὐτοῦ.
,,Ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ρ7β γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ρ8β. Ἀλλὰ τῇ ὑπὸ ρ7β, δέδεικται ἴση ἡ ὑπὸ 5φβ.
,,Ἄρα ἡ ὑπὸ 5φβ, ἴση ἐστὶ καὶ τῇ ὑπὸ ρ8β. Τῇ δὲ ὑπὸ 5φβ ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ροβ, εἴτ᾽ οὖν
,,5οβ. Ἄρα ἡ ὑπὸ ροβ ἐκτὸς τοῦ ρο8 τριγώνου, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ρ8ο ἐντός· ὅπερ ἀδύνατον κατὰ
,,τὴν ῥηθεῖσαν ιστην: τοῦ αου: τοῦ στοιχειωτοῦ.

Ἐπαναλαβὼν ἡμῖν τὴν δεῖξιν ὁ Γεωμέτρης τὴν ἀνωτέρω, ἐν ὑποθέσει ὅτι διά τινος τῶν μεταξὺ ρ καὶ β σημείων, οἷον διὰ τοῦ 4, ἡ φυ διερχομένη, τὴν οσ τέμνει κατὰ τὸ 5. Καὶ ἀπὸ τοῦ ρ παράλληλον ἀχθῆναι αἰτήσας τῇ 4φ τὴν ρ7, ὡς ὁμολογούμενον εἴληφε, τὴν ἔξω τοῦ ν τῆς παραλλήλου ταύτης ἀποπεράτωσιν. Φησὶ γάρ, καὶ ἐπεὶ ἡ ρ7 ἔξω τοῦ ν πίπτει, κ.τ.λ. : Ἔπεστιν οὖν κἀνταῦθα ἐνδοιάζειν περὶ τοῦ σημείου 7, ὡς καὶ ἀνωτέρω (ἐν Ἀριθμ: 7) περὶ τοῦ 2. Ἡ γὰρ ἀπόστασις τῶν σημείων ρ καὶ 5, ἀφ᾽ ὧν τοῦ μὲν 5 ἡ ἡμιδιαγώνιος 5φ ἄγεται, τοῦ δὲ ρ ἡ παράλληλος ρ4, αὐτὴ καὶ τὴν ἑτέρωθεν τῶν σημείων συνεπισπᾶται ἀπόστασιν, λέγω τῶν 7 καὶ φ. Καὶ ἡ ἐκείνων τῇ τούτων συμμεγεθύνεται πάντως, ἢ συνεκμειοῦται. Ἀλλὰ γὰρ τὸ φ τῆς 5φ πέρας ὂν, ἔστηκεν, τῇ καθέτῳ σφ φθάσαν διορισθῆναι· λείπεται ἄρα τὸ 7 ἡμῖν εἶναι τὸ σαλευόμενον. Εἰ δὲ τοῦτο, ἐνδέχοιτ᾽ ἂν καὶ τῷ ν αὐτῷ συμπεσεῖν σημείῳ, καθ᾽ ὃ ὁ γυκξ κύκλος τὴν αδ εὐθεῖαν κατέτεμεν. Ἐνδέχοιτο δ᾽ ἂν καὶ ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ κύκλου πεσεῖν, μεταξὺ τοῦ ν καὶ φ. Ἡ δὲ νφ οὐκ ἴση πάντως οὐδενὶ λόγῳ τῇ οξ ἀποδέδεικται, ὥσπερ οὐδ᾽ ἡ φλ τῇ μο ἀνωτέρω. (Ἐν Ἀριθμ: 7) τὴν γὰρ τούτων ἰσότητα καίτοι ἐπαγγειλάμενος ἀνωτέρω, (ἐν οἷς ἴση γάρ, εἶπεν, ἡ μο τῇ λφ, ὡς δειχθήσεται.) Οὔπω δέδειχε, τὴν δ᾽ ἐκείνων οὐδ᾽ ὅλως ὑπέσχετο. Καίτοι ῥᾶστον ἦν καὶ περὶ αὐτῶν εἰπεῖν, ὅτι δειχθήσεται. Τί γὰρ χαλεπόν, εἰ ἀποινὶ ἔξεστι ψεύδεσθαι; Ὥστε ἐπεὶ ἐνδέχεται τὴν νφ μείζονα εἶναι τῆς οξ, δυνατὸν τὴν ρ7 παράλληλον, εἴσω τοῦ ν, ὡς εἴρηται, ἀποτερματισθεῖσαν, τοσοῦτον ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ ν πρὸς τὸ φ, ὅση ἡ οξ. Τουτέστιν ὅση ἡ τῆς γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου ἀπόστασις ἀπὸ τοῦ ξ σημείου καθ᾽ ὃ ὁ γυκξ κύκλος τὴν αδ εὐθεῖαν κατέτεμεν. Εἰ δὲ τοῦτο γένηται, τίς οὐ συνορᾷ ὡς ἡ ρ8, εἰ μέλλοι ἀποληψεσθαι τῇ β7 ἴσην τὴν β8, αὐτῇ τῇ ρο συμπεσεῖται; συμπεσούσης δὲ πόθεν ἡμῖν ὁ τῆς ἀτοπίας ληφθήσεται ἔλεγχος, ὃν ἐκ μόνου τοῦ τριγώνου ἐλπίζειν ἐστί; φανερὸν ὡς οὐδαμόθεν. Δύο γὰρ εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσι. Δεικτέον ἄρα κἀνταῦθα τῶν νφ, καὶ οξ τὴν ἰσότητα. Ἢ μᾶλλον τὴν τῶν φλ καὶ μο. Ταύτῃ γὰρ δειχθείσῃ κἀκείνη συνέψεται. Δεικτέον δὲ καὶ τὸ τὴν παράλληλον ρ7 ἔξω τοῦ ν πίπτειν, ὅπερ εἰκῇ καὶ ἀλόγως παρέρριπται. Ἀλλὰ γὰρ τῷ καλῷ ἡμῶν Γεωμέτρῃ τούτων οὐ φροντίς ὡς ἔοικεν· αὐτὸν γὰρ οἷον κεκρουκέναι τὸν βατῆρα τῆς θύρας πονῶν, εὐθύμως μάλα χωρεῖ ἐπὶ τὸ πέρας τῆς θαυμαστῆς ἀποδείξεως, προστιθείς:

,,Ἡ φυ ἄρα διαγώνιος, οὐδὲ διὰ τοῦ 4, ἢ ἄλλου τινὸς τῶν μεταξὺ τοῦ ρ καὶ β σημείων διέρ-
,,χεται. Δέδεικται δ᾽ ὅτι οὐδὲ διὰ τοῦ χ, ἢ ἄλλου τῶν μεταξὺ τοῦ ρ καὶ ϑ σημείων. Ἄρα διὰ τοῦ

,, ρ μόνου διέρχεται, οἷα ἡ φρυ. ὅπερ ἦν τὸ ἀμφιβαλλόμενον. Καὶ τὸ ρ σημεῖον ἐστὶ τὸ κέντρον ,, τούτου σφου ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, καὶ τοῦ περὶ αὐτὸ γραφομένου κύκλου.

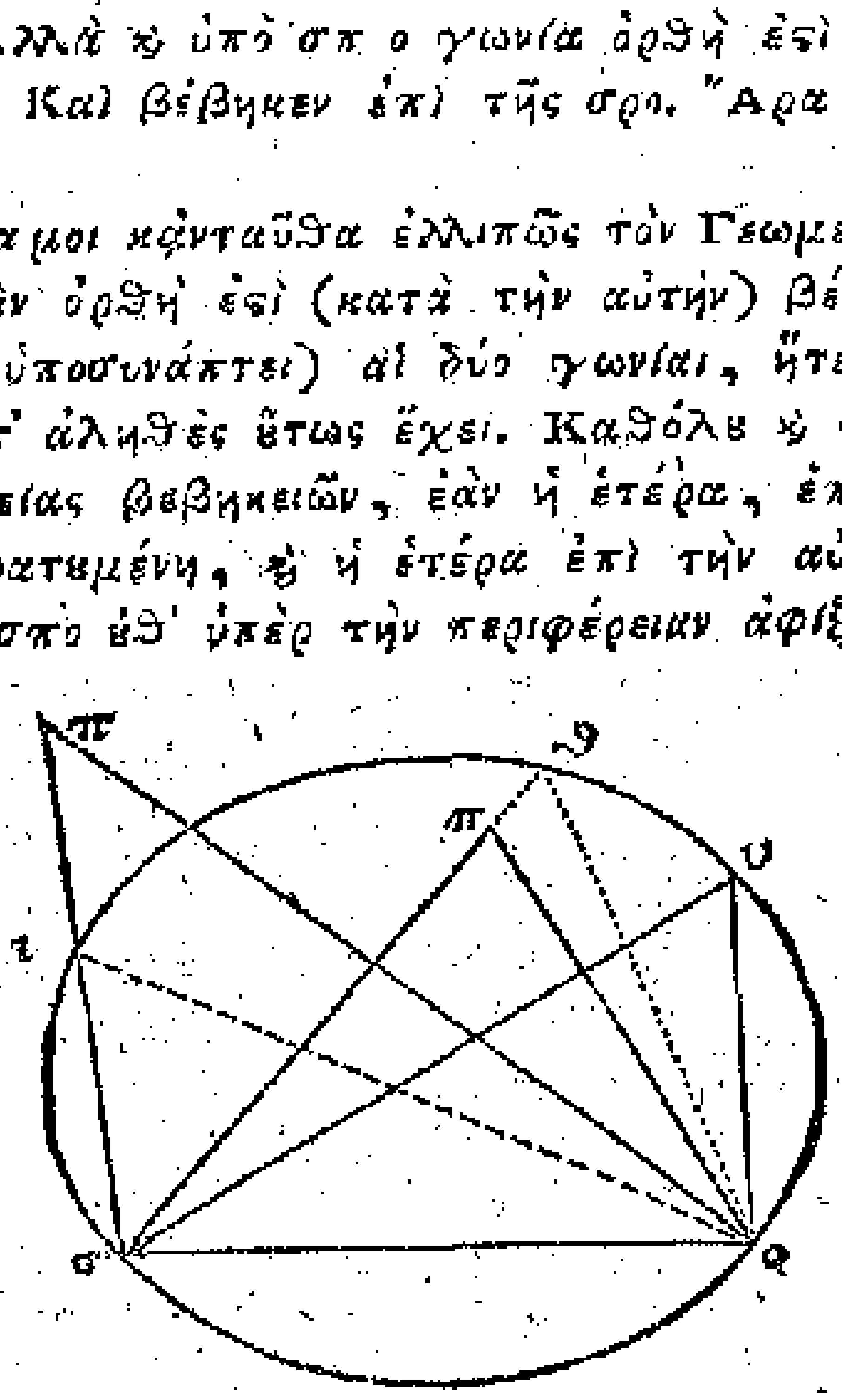
Εἰ οὕτω πεποιθότως τὸ ἄρα ἡμῖν ὑποθρυλλίζων, ϗ τὸ δέδεικται στομβάζων, ἐν οὕτω σφοδρῶς κλονεμέναις ταῖς ὑποθέσεσιν, ὁ τῆς μεθόδου Πατὴρ, χρυσοῦς ὀλυμπιᾶσι σταθῆναι δίκαιος εἶναι οἴεται μηδὲ τοὺς Ἑλλανοδίκας ὑποστελλόμενος: τὰ δὲ ἐντεῦθεν, ὥς γε πρὸς τὸν σκοπὸν, ἅπαιτα ~~ἔῤῥωται τὰ~~ ἀπὸ τοῦ ρ ἐκείνου τοῦ προῖκα ὑποτεθέντος. Καίτοι κἂν τούτοις ἐστί τι μὴ πάνυ πρὸς ἀκρίβειαν γεωμετρικὴν ἐπιφερόμενον. Ἀλλὰ παραθῶμεν ϗ ταῦτα.

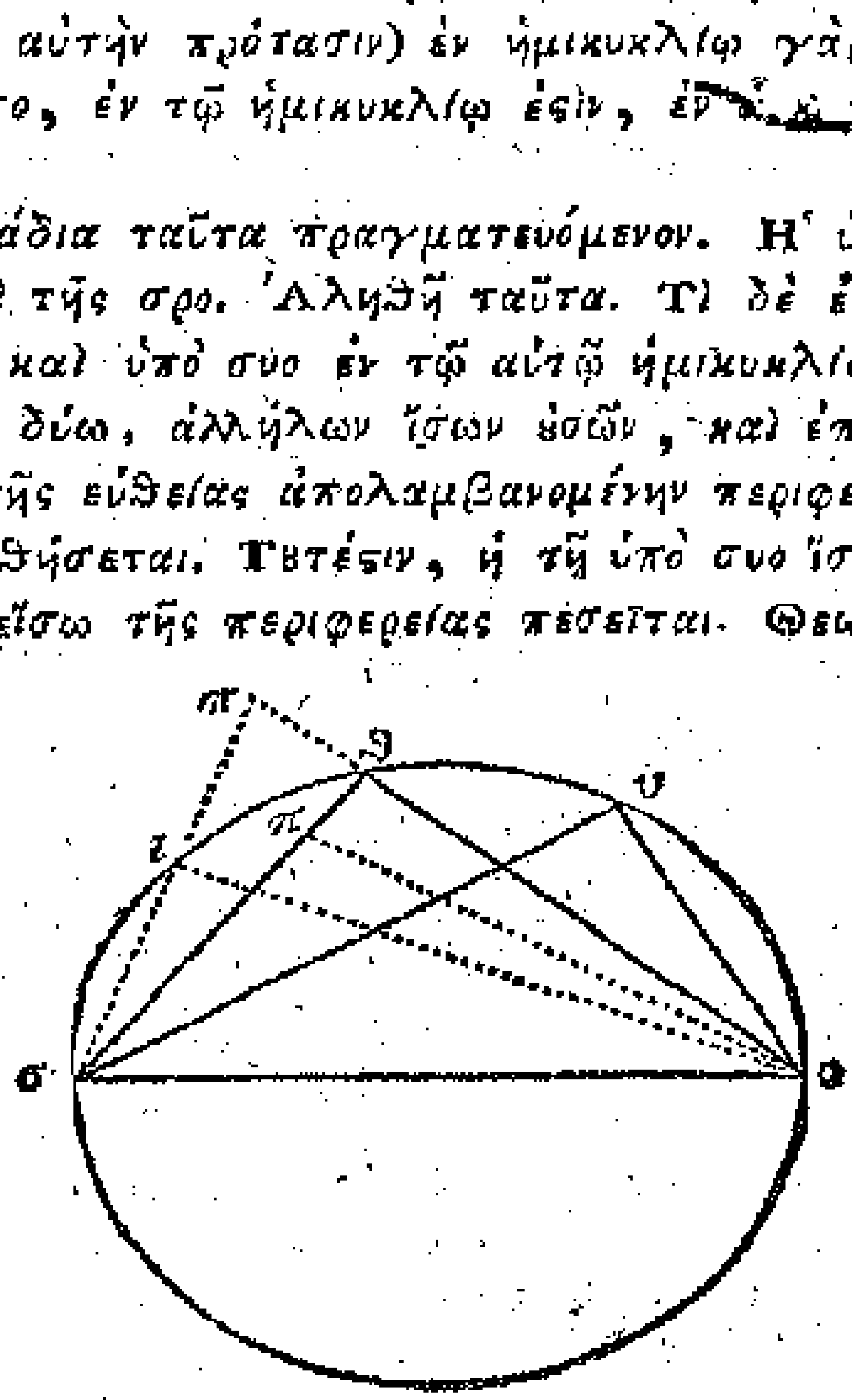
,, Ἐπεὶ ἡ ὑπὸ συο γωνία ὀρθή ἐστιν, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ϗ βέβηκεν ἐπὶ τῆς σρο, ἄρα ,, ἐν ἡμικυκλίῳ ἐστὶ (κατὰ τὴν λαην: τοῦ αὐτοῦ γου:) ἧ βάσις ἡ σρο.

Τὴν ὑπὸ συο γωνίαν ὀρθὴν εἶναι, ϗ ἐπὶ τῆς σρο βεβηκέναι, αὐτὴ ἡ τοῦ ὀρθογωνίου κατασκευὴ δείκνυσιν. Ὃ δὲ ἐπιφέρει ἐντεῦθεν, ὅτι ἄρα ἐν ἡμικυκλίῳ ἐστὶ (κατὰ τὴν λαην: τοῦ γου:) ἧ βάσις ἡ σρο, οὔ μοι δοκεῖ γνησίως εἶναι ἐπιφερόμενον, καίτοι ἄλλως ἀληθεῦον. Ἐν μὲν γὰρ τῇ λαῃ:, διδόμενον μὲν ἐστὶ τὸ ἐν ἡμικυκλίῳ εἶναι τὴν γωνίαν, ζητούμενον δὲ τὸ εἶναι ὀρθήν· ὧδε δὲ ὁ λόγος βαίνει ἀντίστροφα, διδόμενον μὲν ἔχων τὸ ὀρθὴν εἶναι, κατηγορούμενον δὲ τὸ ἐν ἡμικυκλίῳ. Σαφέστερον λέγω. Ἐν ἐκείνῃ ὁ στοιχειωτὴς ὑποτίθησι γωνίαν ἐν ἡμικυκλίῳ συνεστῶσαν, κἀντεῦθεν δείκνυσιν ὅτι ἡ γωνία ὀρθή. Οὗτος δὲ τὸ ἐν ἐκείνῃ δεικνύμενον (τὴν τῆς γωνίας δηλ: ὀρθότητα) πιστὸν ἐκ τῆς κατασκευῆς ἔχων ϗ βέβαιον ϗ τὸ ἐν ἡμικυκλίῳ εἶναι (ὅπερ ἐν τῇ ῥηθείσῃ προτάσει ὑποτίθεσιν ὡς ὁμολογούμενον) ὑποσυνάπτειν δοκῶν, ἔπειτα τὴν λαην: εἰς μαρτυρίαν ἡμῖν προχειρίζεται. Ἀλλ' εἰ μὴ τοῦτο ἐπιφορᾶς εἶδος ἐστὶν ἐπαρίστερον, αὐτὸς μηδὲ τὴν ἀρχὴν εἰδέναι ἐρῶ, τί τὸ ὀρθῶς ϗ δεξιῶς ἐστὶ συλλογίζεσθαι. Τί οὖν; ἐρεῖ τις, οὐκ ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ ἐστὶν ἡ γωνία, ἡ ὑπὸ συο; Πάνυ μὲν οὖν. Ἀλλ' οὐκ ἐκ τῆς λαης: τοῦ γου: ἐξ αὐτῆς δὲ τῆς κατασκευῆς τοῦ ὀρθογωνίου, ϗ τὸ ἐπὶ τῆς σρο, ὡς ἐπὶ βάσεως, βεβηκέναι ἔχει, καὶ τὴν ὀρθότητα. Ἐπεὶ δὲ δῆθεν διὰ τῆς θαυμαστῆς δείξεως, καὶ τὸ ρ σημεῖον εἰς κέντρον εἶναι τοῦ ὀρθογωνίου ἡμῖν ἐξενίκησε, περὶ δὲ τὸ ὀρθογώνιον καιρὸς ἤδη (οὔπω γὰρ πρότερον) ϗ τὸν γρσπυο περιγράφεσθαι κύκλον, τὸν ψιλαῖς εἰς τόδε ταῖς φαντασίαις (Ἀριθμ: 4, 5, 8) νοούμενον, ταύτῃ τοι διὰ τὸν ιον: τοῦ γου: ὁρισμὸν, ἡ ὑπὸ συο γωνία ἐστὶν ἐν τμήματι. Τὸ δὲ τμῆμα ἡμικύκλιον, ἐπὶ γὰρ τῆς σρο τὸ κέντρον. Ἄρα ϗ ἐν ἡμικυκλίῳ. Τὰ γοῦν τοιαῦτα, καίτοι μικρὰ δοκοῦντα, ῥαδίως οὕτω παραπταίειν, οὐ πρὸς Γεωμέτρου τῷ ὄντι ἐστὶ, τοῦ μὴ μόνον τοῖς ὑπὸ τῶν ἄλλων εὑρεθεῖσιν ἀγαπῶντος, ἀλλὰ ϗ αὐτοῦ εὑρέσθαι τι, ὃ μήπω τοῖς ἄλλοις εὕρηται, νεανιευομένου.

,, Ἀλλὰ ϗ ὑπὸ σπο γωνία ὀρθή ἐστὶ (κατὰ τὴν αὐτὴν πρότασιν) ἐν ἡμικυκλίῳ γὰρ ,, ἐστὶ τῷ απρ. Καὶ βέβηκεν ἐπὶ τῆς σρο. Ἄρα ϗ ἡ ὑπὸ σπο, ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ ἐστὶν, ἐν ᾧ ϗ ἡ ,, ὑπὸ συο.

Ὁρᾷ μοι κἀνταῦθα ἐλλιπῶς τὸν Γεωμέτρην, τὰ ῥᾴδια ταῦτα πραγματευόμενον. Ἡ ὑπὸ σπο, φησὶν ὀρθή ἐστὶ (κατὰ τὴν αὐτὴν) βέβηκε δὲ ἐπὶ τῆς σρο. Ἀληθῆ ταῦτα. Τί δὲ ἐκ τούτων; ἄρα (ὑποσυνάπτει) αἱ δύο γωνίαι, ἥτε ὑπὸ σπο, καὶ ὑπὸ συο ἐν τῷ αὐτῷ ἡμικυκλίῳ εἰσίν. Ἦ που τ' ἀληθὲς οὕτως ἔχει. Καθόλου ϗ γὰρ γωνιῶν δύο, ἀλλήλων ἴσων οὐσῶν, καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας βεβηκειῶν, ἐὰν ἡ ἑτέρα, ἐπὶ τὴν ἀπὸ τῆς εὐθείας ἀπολαμβανομένην περιφέ- ,, ρειαν ᾖ περατουμένη, ϗ ἡ ἑτέρα ἐπὶ τὴν αὐτὴν περατωθήσεται. Τουτέστιν, ἡ τῇ ὑπὸ συο ἴση ,, γωνία ὑπὸ σπο οὔθ' ὑπὲρ τὴν περιφέρειαν ἀφίξεται, οὔτε εἴσω τῆς περιφερείας πεσεῖται. Θεω-





ρημα τοιγαροῦν τοῦτο ὄν, οὐκ ἀνενδεὲς δείξεως, οὔκουν ἁπλῶς οὕτως ἔδει παρατεθεῖναι,, ὡς εἴπερ αὐτομάτως ἐκ τῶν τεθέντων παρεῖχε συνιδεῖν τὴν συνέπειαν, προτεθεῖναι δὲ ὤφειλε ϗ δειχθῆναι. Ἀλλ᾽ ἐγώ σοι ϗ τοῦτο ἐκ τῶν τοῦ Ἄγγλου Οὐΐστωνος παραθήσομαι (1).

,, Τῆς ὑπὸ συο γωνίας ἐπὶ τῆς σο εὐθείας βεβηκείας ϗ ἐπὶ τὴν ἀπειλημμένην περιφέ-
,, ρειαν σιθυο κατὰ τὸ υ περατουμένης, καὶ ἡ ἴση αὐτῇ, (ἤτοι ἡ ὑπὸ σπο) ϗ ἐπὶ τῆς αὐτῆς σο
,, βεβηκεῖα, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη συνεστῶσα, πρὸς τὴν αὐτὴν περατωθήσεται ~~περιφέρειαν~~ πετέσω
,, οὐθ᾽ ὑπὲρ αὐτὴν, οὔτ᾽ αὐτῆς εἴσω γενήσεται.

Πιπτέτω γὰρ, εἰ δυνατὸν, εἴσω τῆς περιφερείας κατὰ τὸ π ἡ ὑπὸ σπο, ἡ τῇ ὑπὸ συο τῇ πρὸς τῇ περιφερείᾳ ἴση. Καὶ προήχθω ἡ σπ, ὥστε προσπεσεῖν τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ θο. Καὶ ἐπεὶ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι (2) ὑπὸ σθο, καὶ συο, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἡ δὲ ὑπὸ σπο (3) ἴση τῇ ὑπὸ συο. Ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ σπο ἐκτὸς ἴση τῇ ὑπὸ σθο ἐντὸς τοῦ πθο τριγώνου. Ὅπερ (4) ἄτοπον.

Ἀλλὰ γὰρ, εἰ δυνατὸν, τῆς περιφερείας ἐπέκεινα γινομένη πιπτέτω ἡ ὑπὸ σπο γωνία, τοῦ κύκλου ἐκτὸς, τέμνουσα τὴν περιφέρειαν τῇ πλευρᾷ σπ κατὰ τὸ ι. ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου τούτου τῆς τομῆς, ἐπεζεύχθω ἡ ιο. Καὶ ἔσται ὁμοίως σιο = συο (5). Καὶ συο = σπο (6). Ἄρα ϗ σιο = σπο. Ὅπερ (7) ἀδύνατον.

Ἐπεὶ οὖν μήτε ἐκτὸς πίπτειν ἐνδέχεται, μήτε εἴσω γίνεσθαι, ἀκριβῶς ἡ ὑπὸ σπο, ἐπ᾽ αὐτῆς τῆς περιφερείας ἀφίξεται. Ο, Ε. Δ.

Τὸν αὐτὸν οὖν τρόπον ϗ τοῦ τμήματος ἐλάσσονος ὄντος ἡμικυκλίου, ἢ ϗ ἡμικυκλίου, οἷον τὸ ἡμῖν προκείμενον, ῥάδιον ἀποδεῖξαι ὅτι ἡ ἴση τῇ πρὸς τῇ περιφερείᾳ, οὔτ᾽ ἐπέκεινα τῆς περιφερείας γενήσεται, οὔτ᾽ ἐντὸς, ἀλλ᾽ ἐπ᾽ αὐτὴν δὴ τὴν περιφέρειαν ἀκριβῶς ἀφίξεται.

,, Ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ ρ, διαστήματι δὲ τῷ ρο γραφόμενος κύκλος, διελεύσεται
,, ϗ διὰ τοῦ π. Αἱ γὰρ ορσ, φρυ διαγώνιοι διάμετροι τοῦ σφου ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου,
,, ἴσαι τε ἀλλήλαις εἰσὶ, ϗ δίχα τέμνονται, κατὰ τὸ ρ. Αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι ρσ, ρπ, ρυ, ρο,
,, ϗ ρφ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλὰ τῇ ρπ ἴση ἐστὶν ἡ ργ. δίχα γὰρ ἡ γπ τέτμηται κατὰ τὸ ρ. Ἄρα αἱ
,, ἓξ εὐθεῖαι, ρσ, ρπ, ρυ, ρο, ργ, ϗ ρφ ἴσαι εἰσί. Καὶ ὁ κέντρῳ μὲν τῷ ρ, διαστήματι δὲ τῷ
,, ρσ, ἢ ἄλλῳ τινὶ τῶν ρπ, ρυ, ρο, ρφ γραφόμενος κύκλος, διελεύσεται ϗ διὰ τοῦ γ.

Οὐκ ὀρθῶς οὖθ᾽ ἐνταῦθα αἰτιολογεῖ, τὸν γραφόμενον κύκλον λέγων διὰ τοῦ π διέρχεσθαι, διὰ τὸ τὰς διαγωνίους ἴσας ἀλλήλαις εἶναι, ϗ δίχα τέμνεσθαι. Ἀλλὰ τοῦ κύκλου τοῦ ὡς ἀπὸ κέντρου τοῦ ρ διά τε τῶν γωνιῶν τοῦ ὀρθογωνίου διερχομένου, ϗ δὴ, ϗ διὰ τοῦ π, δυνάμει τοῦ ἀρτίως ἡμῖν δεδειγμένου θεωρήματος, ἀγομένου. (Εἰ μὴ γὰρ, ἤτοι ὑπὲρ τὸ π διέρχοιτ᾽ ἂν, ἢ ὑπὸ τὸ π, ἑκάτερον δὲ ἄτοπον. Ἀριθμ: 11) ἐντεῦθεν ϗ διὰ τὴν εἰς ἴσα κατατομὴν τῆς πγ, ἴσαι αἱ ἕξ.

,, Τὸ πυογ ἄρα τόξον ἡμικύκλιόν ἐστι· ϗ ἡ βο μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν βπ, βγ, κα-
,, τὰ τὴν ιγην: τοῦ στου: τοῦ στοιχειωτοῦ· ἔστι δὲ ϗ ἡ βπ, μέση ἀνάλογος τῶν αβ, βο (ἐκ τῆς
,, κατασκευῆς) Ἄρα ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βπ, ἔστι ϗ ἡ βπ πρὸς τὴν βο. ὡς δὲ ἡ βπ πρὸς
,, τὴν βο, ἔστι ϗ ἡ βο πρὸς τὴν βγ. Αἱ τέσσαρες ἄρα εὐθεῖαι αβ, βπ, βο, βγ συνεχῶς ἑξῆς
,, εἰσὶν ἀνάλογον. Δέδονται δὲ αἱ αβ, βγ ἄκραι. Ἄρα εὕρηνται αἱ ζητούμεναι μέσαι βπ, βο.
,, ὅπερ ἦν τὸ ἐν ἀρχῇ ὑποσχεθέν. Δύω ἄρα δοθεισῶν ἀνίσων εὐθειῶν κτλ.

Οὕτως ὀρθῶς τε ϗ ἀκριβῶς ἡμῖν ὡς οἴεται, ὁ τοῦ προβλήματος ἐπιλύτωρ περάνας τὸν λόγον, ἐπισαλπίζει τέως τὸ εὕρηνται. Ἐμοὶ δὲ καιρὸς νῦν ἂν εἴη ἀντίφθογγον αὐτῷ ἐπάσαι τὸ μέλος, ἀντικράξαντα τὸ, οὐχ εὕρηνται· μᾶλλον δὲ τὸ, εὕρηνται μὲν ἄλλοις ἄλλως, τοῖς μὲν μηχανικῶς ἐπὶ τὴν εὕρεσιν τῶν ζητουμένων μέσων ἀφικομένοις (8)· τοῖς δὲ καὶ Γεωμετρικῶς, διὰ τῶν ἐν τοῖς Κωνικοῖς θεωρουμένων καμπύλων (9). Σοὶ δ᾽ οὐχ εὕρηνται Ἀλλ᾽ ἄνθρακες ὁ θησαυρὸς, τὸ τοῦ λόγου, ϗ αἱ ἐλπίδες κεναὶ, δεινῶς μὲν παραλογισθέντι, σχετλίως

---

(1) Ἐν ταῖς εἰς τὰ Τακουετ: στοιχ. σημειώσ: βιβλ: γ': Σχόλ: τῆς κά: προτ. (2) κα: τοῦ γου: (3) Ἐξυπο3: (4) ιςη: τοῦ αου: (5) καη: τοῦ γου: (6) Ἐξυποθ: (7) ιςη: τοῦ Δου: (8) Ὅρα Τακουετ: βιβλ: ςυ: τῶν Γεωμ: στοιχ: ἐν τῷ Σχολ: τῆς ιγης: προτ: (9) Ὅρα Οὐόλφ: ἐν τοῖς στοιχεί: τῆς Ἀναλύσ: Μέρει Αῳ: Τμήμ: βῳ: προβλ: συε: §. 624.

δὲ ϗ τὴν δειλαίαν Γεωμετρίαν διασπάσαντι, ϗ νευροκοπήσαντι. Συνεπιφθέγξεται δέμοι τὸ Οὐχ εὕρηνται τοῦτο, εὖ οἶδα, πᾶς ὅστις οὐκ ἔξω ταύτης τῆς παλαίστρας τῶν μαθημάτων γενόμενος, πρὸ παντὸς ἔγνω δεῖν τιμᾶν τὴν ἀλήθειαν, ἣν ϗ τῶν φίλων αὐτῶν εἶναι φιλτέραν ὁ λόγος αἱρεῖ ὁ φιλόσοφος· τῷ γὰρ ὄντι πῶς ἄντις ἐν τοῖς ἀποδεδειγμένοις τάξεις τὸ ζητούμενον, ὃ τὰ μὲν ὑποτίθεται (Ἀριθμ: 8) τὰ δὲ εἰς δεῖξιν μὲν ὑπερτίθεται (Ἀριθμ: 7) οὐδαμῶς δὲ δείκνυται; Ἢ τίς ~~ἂν~~ ἂν οὕτω τοῦ λοιποῦ, τῶν ὅσα ἐν ἀπόροις κεῖται, εὐχερῶς ἐπιλύεσθαι καταθρασύνοιτο, πρὸς τὸ δοκοῦν οἱ τιθεμένων, τῶν οἷς ἐφήδρασαι ἡ τοῦ πράγματος πᾶσα δυσχέρεια; τῷ γὰρ τοιούτῳ ἀνεπίλυτον οὐδὲν ἐπ᾿ ἀδείας καταψευδομένῳ, ϗ δεκτὰ ϗ ἄδεκτα, εἰς ταυτὸν ὁμοῦ συμφοροῦντι, ὡς μηδενὶ ἄρα εὐθύνας ὀφείλοντι, ϗ νομοθετοῦντι ἄντικρυς τὴν ἐπίλυσιν. Ἀλλ᾿ ἡμῖν, καίτοι τῶν ἄχρι τούτου ἐπισημειωθέντων, ἀποχρώντως εἰς τὸ ἀνακαλύψαι τὴν ἀπάτην, ϗ τὸν παραλογισμὸν ἐμφανῆ καταστῆσαι ϗ δῆλον παντὶ τῷ προσέχοντι. Ἔτι ϗ σαφέστερον, εἰ δυνατὸν τὴν κενοσπουδείαν τοῦ παραλελογισμένου Γεωμέτρου ἀπελεγκτέον.

Πρὸ πάντων ἓν ἐκεῖνο τίνα οὐκ ἂν εἰς ὑπόνοιαν ἐκίνησε παραλογισμοῦ, ἡ τῆς μξ εὐθείας, κατὰ λόγον τὸν τῆς ζμ πρὸς τὴν ξθ τομή, ἣν ἐν αὐταῖς ταῖς κατασκευαῖς (Ἀριθμ: 1) ὁ Γεωμέτρης ἡμᾶς ἐξητήσατο; Ἔστω, τεμνέσθω ταύτηγε ἡ μξ. Οὔκουν ἀντιλέγω, οὐδὲ γὰρ τὴν ἀρχὴν ἀντεῖπον οὕτω κελεύσαντι, μᾶλλον δὲ ϗ τὴν πρότασιν αὐτὴν ὑπεβαλόμην (τὴν Θην: τοῦ ςου:) ἐν ἐκείνοις (Ἀριθ: 1.) προσεπιχαριζόμενος. Αὐτὸς δὲ καλῶς ἂν ἐποίησας, εἰ τοῦτο προέσθου ἐκπαιδεῦσαι ἡμᾶς ϗ τῆς τομῆς τὴν χρῆσιν, ἥτις τε ἐστὶ, ϗ πρὸς ὃ τείνουσα. Τὸ γὰρ τὴν κατὰ τόνδε μόνον ϗ οὐχὶ καθ᾿ ἑτερόν τινα λόγον τομὴν, ἐν ἀπείροις ἄλλαις δυναταῖς οὔσαις, ἡ τῶν δ. μ. π. ε. ἢ ὅτι συμβαδίζειν ἐπάναγκες ἐπὶ τῶν περὶ τὰς γη, ϗ γπ ϗ γκ. εὐθείας εὐθεῖαν κύκλων τὰς τῶν ἄκρων ἀπὸ τοῦ μέσου κύκλου ἀποστάσεις, ταῖς τῶν περὶ τὴν αξθ, αζ, καὶ αο, καὶ αθ ἄκρων ἀπὸ τοῦ μέσου ἀποστάσεσι; Καὶ μὴν αὐτὸ τὸ ἐν ἀρχῇ αἰτούμενον ἐρεῖς, εἰ τοῦτο εἴποις. Αἱ γὰρ συμβαδίζουσαι ἀποστάσεις, αὐτοὶ οἱ ὅροι εἰσὶ τῆς ἀποῤῥήτου ἀναλογίας μο : οξ :: ζμ : ξθ. περὶ ἧς ἠπόρηται· ἔπεστιν οὖν ἀεὶ διαπυνθάνεσθαι τί δήποτε εἰ οὕτω τέμοιτις, καὶ μὴ ἄλλως, τὰς δύω μέσας εὑρήσει; Μένοντος δὲ ἐν ἀποῤῥήτοις οὕτω τοῦ πράγματος, καὶ ἡ ἐπαγομένη ἀπόδειξις βαθεῖ ζόφῳ πεπύκασται, καὶ οὐδ᾿ ἀξία ἐστὶ τοῦ ὀνόματος. Δεῖ γὰρ δὴ πᾶσαν ἀπόδειξιν ἐκ σαφεστέρων εἶναι καὶ γνωριμωτέρων τοῦ συμπεράσματος. (1)· ἥτε πρὸς τὰ ἐπιφερόμενα σχέσις τῶν τεθέντων παντὶ ἀποδεικτικῷ λόγῳ ἐστὶν ἀπαραίτητος. Ἀδήλου ϗ γὰρ οὔσης τῆς συνεπείας, ἀμφισβητοίη ἄντις εἰκότως, εἰ τάδε ἐκ τοῦδε ἕπεται, ἢ μὴ, ἀλλ᾿ ἐξ ἄλλου τυχόν. Οἷα δὴ κἀπὶ τοῦ προκειμένου ἡμῖν εὐλόγως ἄντις ἐνδοιάσειε, πρότερον ἄρα οὗτος ὁ τῆς τομῆς λόγος ἐπὶ τὸ ζητούμενον ἄγει, ἢ ϗ ἄλλως πως τυχὸν τῆς μξ τμηθείσης αἱ δύω μέσαι εἰσὶ θηράσιμοι; λέγω δὲ ταῦτα οὐχ ἁπλῶς οὐδ᾿ ἀλόγως εἰς ὑπόνοιαν ἀκάγων τοῦ πράγματος, ϗ τὸ κράτος οὕτω τοῦ ἐξενηνεγμένου λόγου ὑποθραύειντε, ϗ ἀπαμβλύνειν πειρώμενος. Ἀλλ᾿ ἐπισκοπήσας ἀκριβῶς ὅτι ϗ εἴτις τὴν μξ δίχα διέλοι, ἢ ϗ ἄλλως ὁπωσοῦν, διατηρείη δὲ, ὡς κεῖται ἐπὶ τῇ θρυλλουμένῃ μάτην εὑρέσει, τὰ λοιπὰ τῆς δείξεως, ἐπὶ τὸ αὐτὸ πέρας ἀφίξεται· οἷον ἐρῶ ϗ αὐτὸς ὁμοίως ἐκείνῳ.

Κείσθωσαν πρὸς ὀρθὰς αἱ δοθεῖσαι αβ, βγ. (2) καὶ ἀορίστως προσεκβληθήτωσαν ἐπὶ ε ϗ δ. Καὶ ἴσης τῇ βγ ληφθείσης τῆς βζ, εὑρεθήτω τῶν αβ, βζ, μέση ἡ βη. Καὶ πάλιν ληφθείσης τῆς βθ ἴσης τῇ βη, εὑρεθήτω μέση τῶν αβ, βθ ἡ βκ. Καὶ περὶ τὰς γη, γκ, κύκλοι γραφήτωσαν οἱ γλημ, ϗ γνκξ, ὧν ὁ μὲν τέμνοι τὴν βδ κατὰ τὸ μ, ὁ δὲ κατὰ τὸ ξ. Καὶ (τοῦτο γὰρ τὸ ἐμὸν ὅπερ ἂν ἴσῳ λόγῳ διὰ τὴν ἰσ: τοῦ Α: αἰτήσαιμι.) δίχα τετμήσθω ἡ μξ, κατὰ τὸ ο. Καὶ τῶν αβ, βο, εὑρεθήτω μέση ἡ βπ, ϗ ἐπεζεύχθωσαν αἱ απ, πο. Καὶ δίχα τετμήσθω ἡ πγ, κατὰ τὸ ρ. Καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ορ, ϗ προσαχθήτω ὥστε συμπεσεῖν τῇ απ κατὰ τὸ σ. Καὶ ἀπὸ τοῦ σ ἀχθήτω κάθετος μὲν ἐπὶ τῆς αβ ἡ σφ, παράλληλος δὲ τῇ αὐτῇ αβ ἡ στ. Καὶ ἀπὸ τοῦ ο κάθετος ἐπὶ τῆς στ ἡ συ. ὥστεμοι πληροῦσθαι τὸ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον. Εἶτα ϗ τὰ ἑξῆς προσθήσω, μηδὲν τῶν ὑπὸ τοῦ καλοῦ Γεωμέτρου εἰρημένων διαφέροντα. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἐρῶ ὡς ἐκεῖνος, ϗ ἡ φυ. Ἡ δὲ, ἤτοι διὰ τοῦ ρ χωρήσει, ἢ οὔ. Καὶ εἰ μὲν, ἔχομεν

---

(1) Ἀρ: ἐν ὑς: Ἀναλυτ: (2) Σχῆμ. 39 καὶ 42.

ἄρα σαφῶς ὅπερ θέλομεν. Εἰ δὲ μή, διερχέσθω ἄρα ἤτοι ὑπὲρ τὸ ρ διὰ τοῦ χ, ἢ πάντως ὑπὸ τὸ ρ διὰ τοῦ 4. Καὶ τὰ ἄτοπα δὲ ἐπιδείξω παραπλησίως ἐκείνῳ ἐφοδεύσας τὴν δεῖξιν, ὡς φανερὸν ἐστὶ παντὶ τῷ νοῦν ἔχοντι. (Περιττὸν γὰρ οἶμαι τὰ αὐτὰ δὶς γράφειν ἀνέχεσθαι, ἐνὸν ἐν τοῖς γραφῆναι φθάσασιν Ἀριθμ: 4, 5. 6 κξ: ταῦτα ἀναγνῶναι.) Καὶ τελευταῖον ἐπιβοήσειμεν καὶ αὐτός, μέγα κεκραγὼς καὶ διάτορον, (τί γὰρ οὐχί;) ὅτι ἄρα τὸ ρ τοῦτο ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦτε ὀρθογωνίου καὶ τοῦ κύκλου: (ἵνα μὴ δηλονότι τῇ ἴσῃ: τοῦ Α: προσκρούσαντες, ~~δίκας~~ ὑφέξωμεν). Καὶ ὅτι ἡ βπ, καὶ βο, αὗται εἰσὶν αἱ ἀπὸ δισχιλίων ἐνιαυτῶν ζητούμεναι, καὶ ἐπ' ἀγαθῷ τῶν μαθημάτων, νῦν εὑρισκόμεναι.

Ἀλλὰ γὰρ μὴ δίχα, τρίχα δὲ εἴπερ οἷόν τε ἢ τέτραχα, ἢ καὶ ἁπλῶς ὁπωσοῦν τὴν μξ τεμών, καὶ τὸ δόξαν μέρος τῆς τομῆς ἀπολαβὼν εἰς δύω, τὰ αὐτὰ κατασκευάζω, καὶ ταῦτα δείκνυμι, καὶ καθ' οἱανδήποτε τομὴν τὸ ζητούμενον εὑρίσκω, οὐδὲν χεῖρον μᾶλλον δὲ οὐδὲν ἄμεινον ἢ πρότερον γεωμετρικευόμενος. Καὶ ἢν μὲν τῷ μ ἔγγιον ποιήσωμαι τὴν τομήν, τὰς μέσας βπ, βο ἕξω ἐλάσσονας· ἢν δ' ἀπωτέρω, λήψομαι μείζονας. Ἀλλ' ἕξω, καὶ λήψομαι τῷ κρατίστῳ λόγῳ ῥωννύμενος. Ἀλλαμὴν φανερὸν ὡς ἡ μξ εἰς ἀεὶ διαιρετὰ διαιρουμένη ἐπ' ἄπειρον, ἀπείρας καὶ τὰς βο, τῷ μεγέθει ἀλλήλων διαφερούσας δίδωσιν. Ἡ δὲ τῆς βο κατὰ τὸ μέγεθος διαφορά, καὶ τὴν τῆς βπ ἐξ ἅπαντος διαφορὰν συνεφέλκεται. Τῇ γὰρ διαμέτρῳ αβο ἀμειβομένῃ, συναμείβεται καὶ ἡ ἀπὸ β κάθετος, καὶ συναύξει μὲν αὐξανούσῃ, συνεκμειοῦται δὲ μειουμένῃ. Ἄρα οὖν (ἢ οὔποι δοκεῖ γράμμασι τριπηχυαίοις εἶναι τὸ συμπέρασμα τόδε γράφεσθαι ἄξιον;) Ἄρα οὖν δύω δεδομένων τῶν ἄκρων ὡρισμένως αβ, καὶ βγ, αἱ διὰ τῆς θαυμαστῆς μεθόδου εὑρισκόμεναι μέσαι ἐφεξῆς ἀνάλογον, οὐ δύω εἰσίν, οὐδ' ὡρισμέναι, ὥσπερ δὲ ἔδει, ἀλλ' ἄπειροι καὶ ἀόριστοι. Βαβαὶ τῆς ἀτοπίας! Καὶ τολμήσει τις ἄρα τοῦ λοιποῦ, κἂν ὅτι μάλιστα θρασύσπλαγχνος ᾖ, ὡς ὑγιές τε, καὶ ἀπηκριβωμένον, καὶ ἅπασι τοῖς ἀπὸ τῆς Γεωμετρίας καλοῖς συγκεκροτημένον προβαλέσθαι τὸ τοιόνδε ἡμῖν ἐπινόημα;

Τοῦτο μὲν οὖν τὸ ἄτοπον. καὶ εἰ μηδὲν ἄλλο προσείη, ἤρκεσεν ἂν καὶ μόνον, τὸν ὑπὸ τῷ λίθῳ εὕδοντα σκορπίον ἡμῖν δεῖναι τεκμηριῶσαι. Πρὸς δέγε τούτῳ καὶ τὰ ἐν Ἀριθμοῖς 7 καὶ 8 σημειωθέντα, αὐτὸν ὁλόσωμον τῆς ὀπῆς προκύψαι τὸν σκορπίον ἐποίησε. Καὶ δὴ ἅλις ἂν εἴη τῶν λόγων, τοῦ ἐλέγχου ἀκριβῶς σὺν Θεῷ ἤδη πεπληρωμένου. Ἐπεὶ δὲ τῶν ἀτόπων καὶ τὰς ἀρχὰς ζητητέον. Δεσμοῖς γὰρ ἐοίκασιν, οὓς οὐ τμητέον μιμουμένοις τὸν τοῦ Φιλίππου, λυτέον δέ. Λύειν „δ' οὐκ ἔνι (ὡς Ἀριστοτέλης ἐν τοῖς μεταφυσικοῖς φησὶ β. Κ: α:) ἀγνοοῦντα τὸν δεσμόν. Ταύτητοι καὶ τὴν πλοκὴν ἡμῖν τοῦ δεσμοῦ πολυπραγμονητέον. Ἀμέλειτοι τὸ τοῦ παραλογισμοῦ κέντρον ἀμφότερον ἐξαιρετέον, καὶ σημειωτέον ἐν ᾧτε κεῖται, καὶ ὅθεν ὥρμηται. Εἶθ' οὕτως αὐτὴν τοῦ κακοῦ τὴν πιτυὰν εὑρηκόσι πέρας τῷ λόγῳ ἐπιθετέον. Ἔμοιγε τοίνυν (εἰμὴ κατὰ τὸν τῆς τραγῳδίας Πενθέα παρορῶ, ὃς δύω μὲν ἡλίους ὁρᾶν ἐδόκει, δισσὰς δὲ Θήβας) δισσαὶ παρίσανται ὑποθέσεις, ὑπ' ἀλλήλων ἀμοιβαδὸν ἀναιρούμεναι, Ἐξ ὧν ἡ πᾶσα τοῦ παραλογισμοῦ διπλόη συνήρτηται. Εἰσὶ δὲ αὗται τὰ δισσὰ κέντρα, ἃ λανθάνει ὁ καλὸς Γεωμέτρης τῷ ὀρθογωνίῳ φσυο κατὰ τὸ αὐτὸ ἀπονέμων, τὸ μὲν ἐκτὸς τῆς γκ, ὡς ὅτε τὰς διαγωνίους κατὰ τὸ ψ, ἢ τὸ 5 τέμνειν ἀλλήλας ὑποτίθησι, τὸ δ' οὐκ ἐκτός, ἀλλ' ἐπ' αὐτῆς τῆς γκ, ἐφ' ἧς καὶ τὰ κέντρα εἴληπται τῶν κύκλων, τοῦτε γλημ, καὶ τοῦ, γνκξ, ὡς ὅτε τὰ φ καὶ ο σημεῖα, τὰ κατὰ τὰς γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου, αὐτῶν τῶν λ καὶ μ, καὶ τῶν ν καὶ ξ σημείων, ἐπίσης ἑκατέρωθεν ἀφεστῶτα λαμβάνει, καθ' ἃ οἱ κύκλοι τὴν εὐθεῖαν τέμνουσιν αβδ. Αον: οὖν ὑπετέθη τὸ τοῦ παραλληλογράμμου κέντρον ἐκτὸς εἶναι τῆς γκ, κατὰ τὸ ψ. Βον: δὲ τὴν πλευρὰν τοῦ αὐτοῦ παραλληλογράμμου, ἤτοι τὴν φο, εἰς ἴσα τέμνεσθαι κατὰ τὸ β. Ἀλλ' ἡ κάθετος ἡ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ μέσον ἀγομένη τομῆς τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀρθογωνίου, διὰ τοῦ κέντρου δίεισι τοῦ αὐτοῦ· τὸ ἄρα κέντρον τοῦ ὀρθογωνίου, ἐπὶ τῆς καθέτου γκ ἐστὶν ἅμα διὰ τὴν βαν: ὑπόθεσιν, καὶ οὐκ ἔστι διὰ τὴν πρώτην. Ἀλλ' ἴσως ἄμεινον Γεωμετρικῇ καὶ ταῦτα μεθόδῳ χρησαμένους ἐπὶ τὸ σαφέστερον ἀνακαλέσαι πειράσασθαι. Κείσθω τοιγαροῦν.

Λ ῆ μ μ α. Αον:

„Παντὸς παραλληλογράμμου ὀρθογωνίου αἱ διαγώνιοι διάμετροι σα, υφ ἴσαι τε εἰσὶν „ἀλλήλαις, καὶ δίχα ὑπ' ἀλλήλων τεμνόμεναι· τούτου οὖν ἡ δεῖξις παρήχθη ἀνωτέρω ἐν Ἀριθμ: 4.

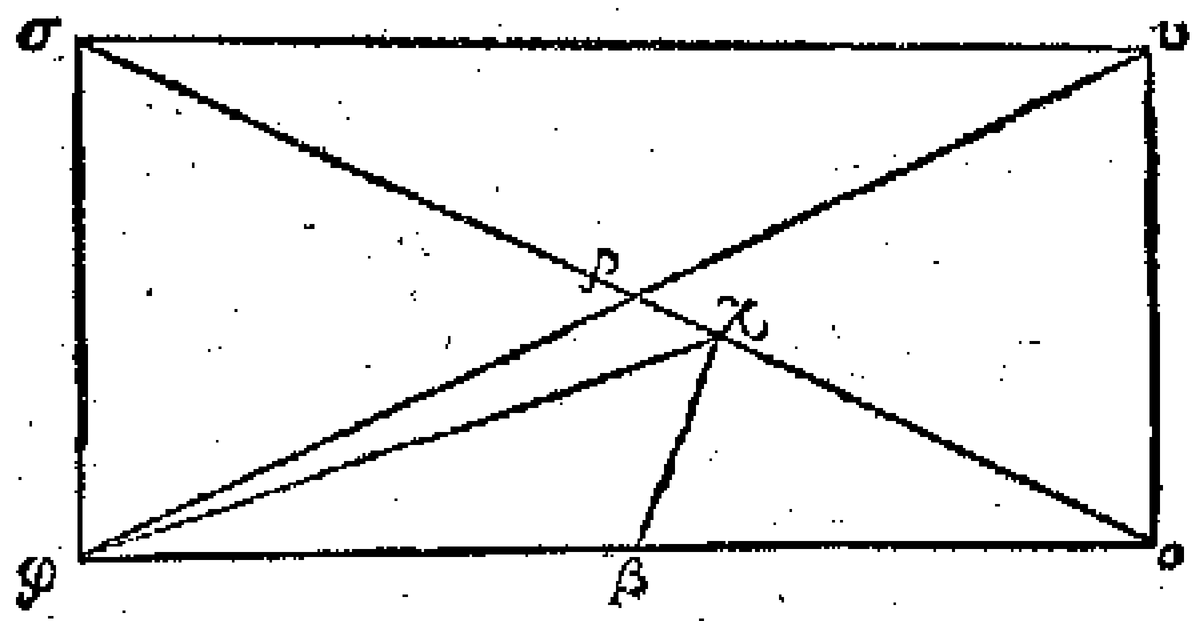
Π ό ρ ι σ μ α.

Διὰ δὲ τὸ ζον: ἀξίωμα, καὶ αἱ ἡμιδιάμετροι ἀλλήλαις ἴσαι.

Λ ῆ μ μ α Βον:

„Ἡ ἀπὸ τοῦ μεσαιτάτου σημείου β, (τινος τῶν πλευρῶν φο) κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τοῦ „παραλληλογράμμου φσυο, χωρήσασα, δι' αὐτοῦ τοῦ σημείου ρ καθ' ὃ καὶ αἱ διαγώνιοι διάμετροι „ἀλλήλας τέμνουσι, διέρχεται.

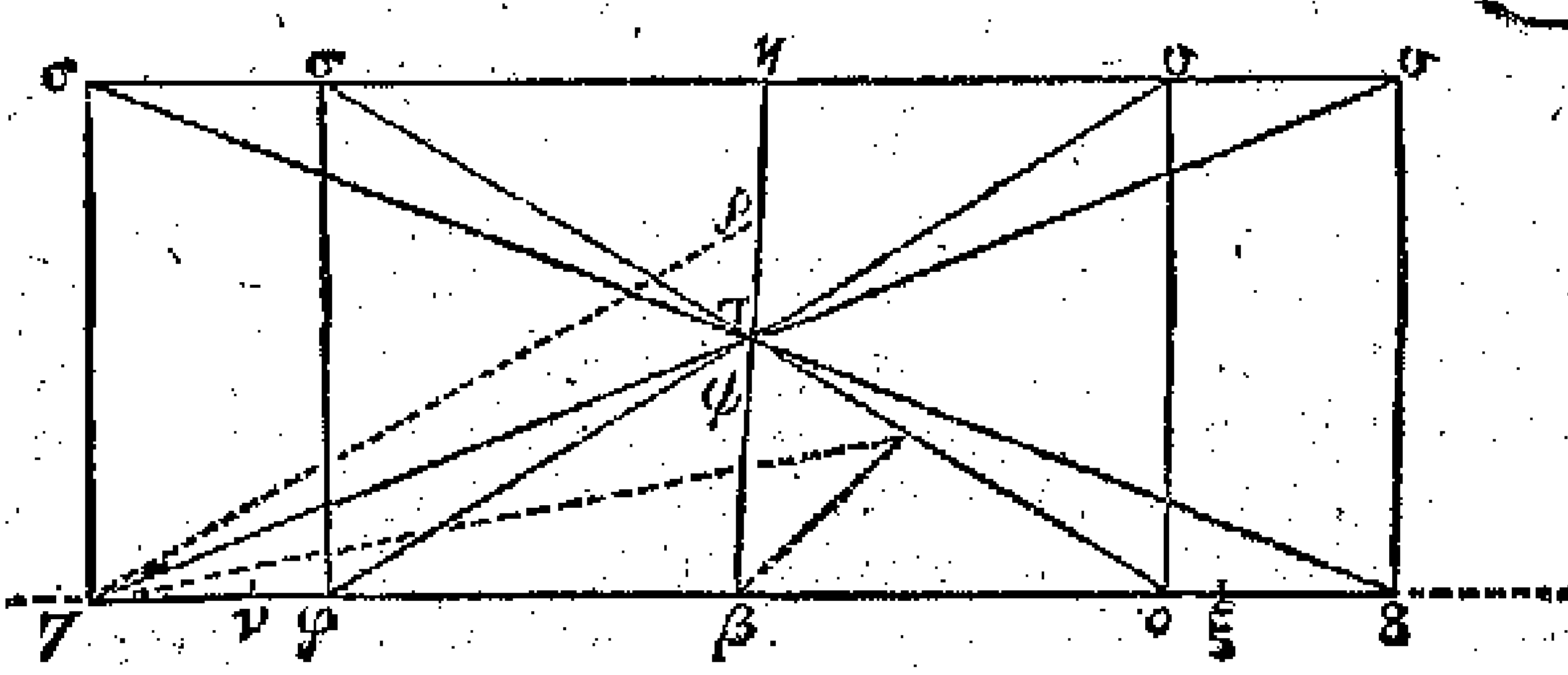
Εἰ μὴ γάρ, ἀλλὰ πιπτέτω μὴ ἐπὶ τοῦ ρ καθ' ὃ τέμνονται αἱ διαγώνιοι, ἄλλη δέπῃ οἷον ἐπὶ τὸ χ, ἡ ἀπὸ τοῦ μεσαιτάτου β σημείου τῆς πλευρᾶς φο, ἀγομένη κάθετος βχ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ φχ. Ἐπειδὴ δὲ φβ = οβ. (1) Καὶ κοινὴ ἡ βχ. (2). Καὶ ὑπὸ φβχ = ὑπὸ χβο (3), ἔσαι ꝁ φχ = οχ. (4). Κοινὴ δὴ προσιθέσθω ἡ χρ, ꝁ (5) ἔσαι ορ ⩵ φχ ꝁ χρ ἅμα. Ἀλλ: ορ = φρ (6). Ἄρα αἱ φχ ꝁ χρ ἅμα = φρ. Αἱ δύο τοῦ ρφχ τριγώνου πλευραὶ τῇ λοιπῇ, ὅπερ (7) ἀδύνατον. Ὡσαύτως δειχθήσεται τὴν ἀπὸ τοῦ β κάθετον ἀγομένην, κατὰ μηδὲν ἄλλο σημεῖον τῶν διαγωνίων διαμέτρων πίπτειν, ὅτι μὴ καθ' ὃ τέμνονται· τουτέσι κατὰ τὸ ρ, ὃ τοῦ ὀρθογωνίου τὸ κέντρον εἶναι λέγεται.



Ἄλλωςτε, ἐπειδὴ τὸ φρο τρίγωνον ἰσοσκελές ἐσιν (8). Ἡ δὲ τὴν βάσιν φο τοῦ ἰσοσκελοῦς δίχα τε ꝁ πρὸς ὀρθὰς τέμνουσα, διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ τριγώνου διέρχεται (9), δῆλον αὖ πάλιν κἀκ τούτου τὸ προτεθέν.

Τούτων οὖν οὕτως ἐχόντων, ἐπεὶ ἡ λμ δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνεται (ἐπὶ τοῦ σχήματος τῆς εὑρέσεως) ὑπὸ τῆς γπ, ἔνθα τὸ β, (κατὰ τὴν γην: τοῦ γου:. Καὶ αἱ λβ, καὶ βμ ἴσαι (ταῦτα γὰρ ἐπὶ λέξεως ἡμᾶς ἐδίδαξεν ὁ τῆς μεθόδου πατὴρ (ἐν Ἀριθμ: 9). Ἴση δὲ καὶ ἡ μο τῇ λφ (ὡς ὁ αὐτὸς φησὶν ἐν Ἀριθμ: 7). Ἴσαι ἄρα αἱ βφ, ꝁ βο. (10)· δίχα ἄρα τέμνεται ἡ πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου φο, ꝁ δὴ ꝁ πρὸς ὀρθὰς (11) ὑπὸ τῆς βρη. Οὐκοῦν ἐν ταύτῃ τῇ ὑποθέσει ἡ εὐθεῖα βρη διέρχεται (12) διὰ τοῦ κέντρου τοῦ παραλληλογράμμου, τουτέσι τὸ τοῦ παραλληλογράμμου τούτου ὀρθογωνίου κέντρον, καθ' ὃ τέμνονται αἱ διαγώνιοι διάμετροι ἐσὶν ἐπὶ τῆς βη. Ἀλλὰ ꝁ διὰ τὴν ἄλλην ὑπόθεσιν (τὴν ἐν Ἀριθμ: 4) οὐκ ἐσιν ἐπὶ τῆς βη, ἀλλ' ἐκτὸς αὐτῆς, ἔνθα τὸ ψ. Ἀρ' οὖν ἑκάτερον, ꝁ ἐπὶ τῆς βη, ꝁ μὴ ἐπ' αὐτῆς· ꝁ ἔνθα τὸ ψ, ꝁ μή· ἢ βέλτιον εἰπεῖν (ὑποθέσεως ὑπόθεσιν ἀναιρούσης) οὐδέτερον· οὔτε γὰρ ἐπὶ τῆς βη, ὅτι ἔνθα τὸ ψ. οὔτ' ἔνθα τὸ ψ, ὅτι ἐπὶ τῆς βη.

Ὁμοίως δὲ ꝁ τῆς διαγωνίου φυ ὑπὸ τὸ ρ διέρχεσθαι νοουμένης (ἐπὶ τοῦ Σχήμ: τῆς εὑρέσεως) οἷον διὰ τοῦ 4 ꝁ κατ' αὐτὸ τῆς Παραλλήλου τῇ 4φ, ἤτοι τῆς ρ7 ἐκτὸς τοῦ υ πίπτειν ὑποτιθεμένης (ἐν Ἀρ: 8), προαχθήτω ἡ φο τοῦ ὀρθογωνίου πλευρὰ ἑκατέρωθεν ἀορίςως, καὶ ληφθήτω μὲν νφ = ξο, ληφθήτω δὲ καὶ ν7 = ξ8, ὥςε ἴσας εἶναι τὰς φ7, ꝁ ο8. Καὶ ἐπὶ τῆς συ ἀντιθέτου πλευρᾶς ἑκατέρωθεν προεκβληθείσης, ἀπὸ τῶν σημείων 7 ꝁ 8 πιπτέτωσαν κάθετοι 7σ, ꝁ 8υ, (13) Καὶ τοῦ ὀρθογωνίου τσυ8 συςάντος, πάλιν διὰ τοῦ ἀνωτέρω βου: λήμματος, ὅτι ἡ ἀπὸ β τὴν 78



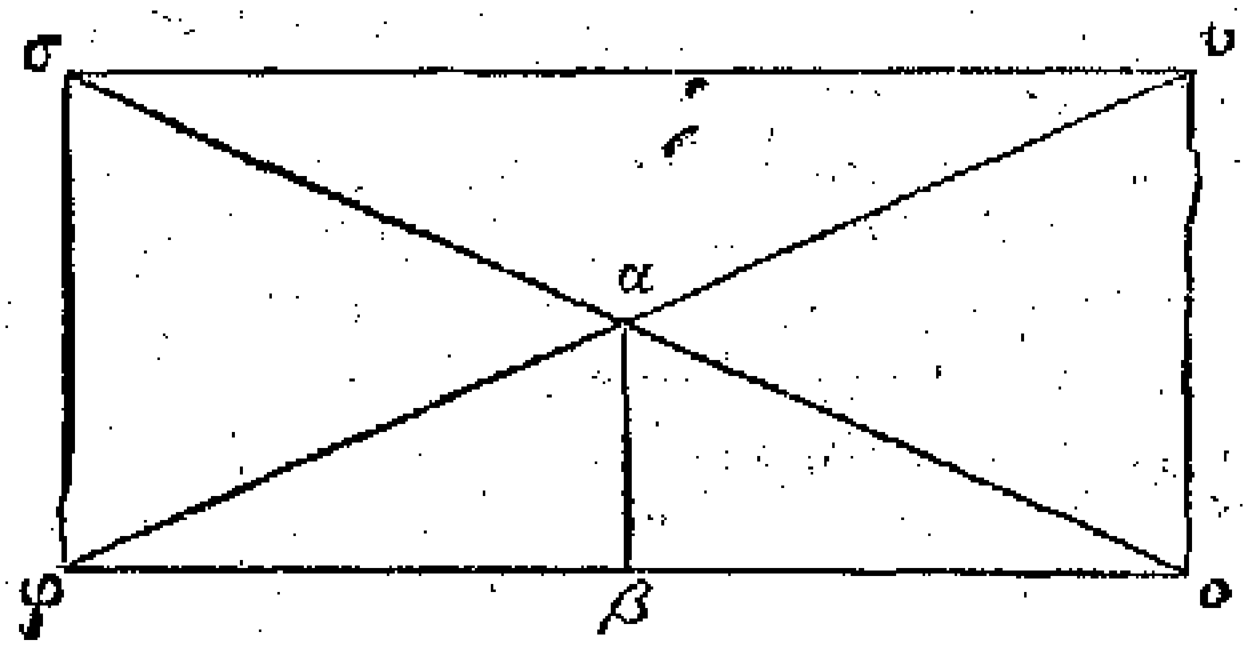
(1) Ἐξ ὑποθ: (2) Ἐξ ὑποθ: (3) Ἐξ ὑποθ: (4) Δ'ε τοῦ Αου: (5) ἀξ: βον: (6) διὰ τὸ ἀνωτ: πόρισ: (7) διὰ τὴν κ: τοῦ αου: (8) διὰ τὸ ἀνωτ: πόρισμα. (9) Πόρισμ: δον: τοῦ Σχολ: τοῦ μετὰ τὴν κδην: τοῦ Αου: παρὰ Οὐΐςωνι ἐν ταῖς εἰς τὰ ςοιχ: τοῦ Τακ: σημειωσ: (10) διὰ τὸ βον: ἀξ: (11) Ἐκ κατασ: (12) διὰ τὸ ἀνωτ: βον: λῆμμα. (13) ιβ. τοῦ Αου:

πλευρὰν δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ τέμνουσα, οὐκοῦν μὲν διὰ ἄλλου τινὸς σημείου οἷον τοῦ 5 διὰ δὲ τοῦ 4 διελεύσεται. Ὥστε καὶ οὕτως ἔσται μὲν ἐπὶ τῆς βη, ὡς ἀνωτέρω τὸ τοῦ ὀρθογωνίου κέντρον, ἔσται δὲ καὶ ἐκτὸς αὐτῆς, ἤτοι ἐπὶ τοῦ 5, διὰ τὴν ἄλλην ὑπόθεσιν. Καὶ ἡ Ἀντίφασις παραπλησία, τὸ τῶν ἀμοιβαδὸν ἀναιρουμένως ὑποθέσεων ἀποκύημα.

Ἀλλὰ γὰρ καὶ ἄλλοθεν ἐπισκοπήσας, καὶ ἐκ τῆς, διὰ τῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου καθέτων τομῆς, τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀρθογωνίου, δισσὰς οὐδὲν ἧττον εὑρήσεις τὰς ὑποθέσεις, πάντη ἀπεοικότας ἐχούσας. Οὕτως εὔφορον ἐστὶν ἀτοπιῶν τὸ τοῦ Γεωμέτρου μεθόδευμα. Ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν τούτου δήλωσιν κείσθω.

Λ ῆ μ μ α Γον:

„Ἐπὶ παντὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου, ἤτοι τοῦ σημείου καθ᾿ „ὃ αἱ διαγώνιοι διάμετροι τέμνονται, ἀγομένη κάθετος, δίχα τέμνει τὴν πλευρὰν ἐφ᾿ ἣν ἐφέστηκεν.



Ἐπειδὴ γὰρ ἐπὶ τῶν τριγώνων φαβ, καὶ βαο, ἐστὶν (1) ἡ φα = αο. Καὶ ὑπὸ αβφ = ὑπὸ αβο (2). Καὶ ὑπὸ αφβ = ὑπὸ αοβ (3). Ἔσται καὶ φβ = οβ. (4) Ο. Ε. Δ.

Ἄλλως τε κἀπὶ παντὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἀγομένην πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν βάσιν, δίχα τέμνειν τήν τε κορυφὴν, καὶ τὴν βάσιν, καὶ τῷ Ἀγγλῳ Οὐΐστωνι ἀποδέδεικται (5).

Εἰ τοίνυν ταῦθ᾿ οὕτως ἔχει, ἡ ἀπὸ ψ, τοῦ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν κέντρου τοῦ ὀρθογωνίου συοφ (ἐπὶ τοῦ τῆς μεθόδου διαγράμματος.) ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τῆς φο πλευρᾶς τοῦ αὐτοῦ ὀρθογωνίου, ἤτοι ἡ ψω δίχα τέμνει αὐτήν. Καὶ ἐστὶν ἄρα φω = ωο (ὃ καὶ ἐν Ἀριθμ: 5 τῷ εὑρετῇ ὡμολόγηται) Ἀλλ: ἡ φλ = μο (ἥ περ αὐτῷ δοκεῖ ἐν Ἀρ: 7) Ἄρα (6) τῇ ἀφαιρέσει τῶν ἴσων ἀπὸ τῶν ἴσων, ἔστι τῇ λω = μω. Ἀλλὰ διὰ τὴν γην τοῦ γου: ὡς ὁ αὐτὸς δείκνυσιν (ἐν Ἀρ: 6) ἡ λβ ἐστὶν ἴση τῇ βμ. Ἄρα ἡ λμ δίχα τέτμηται, ἤτοι εἰς ἴσα, καὶ κατὰ τὸ ω, καὶ κατὰ τὸ β. τὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. (7) Ἄρα ἡ λω ἴση τῇ λβ ἤτοι τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, οὗ τί ἀτοπώτερον; (8).

Ὡσαύτως δ᾿ ἂν ἔχοι τις καὶ τὴν τβ ἴσην ἀποδεῖξαι τῇ 7β, παραπλησίῳ τῷ λόγῳ χρησάμενος.

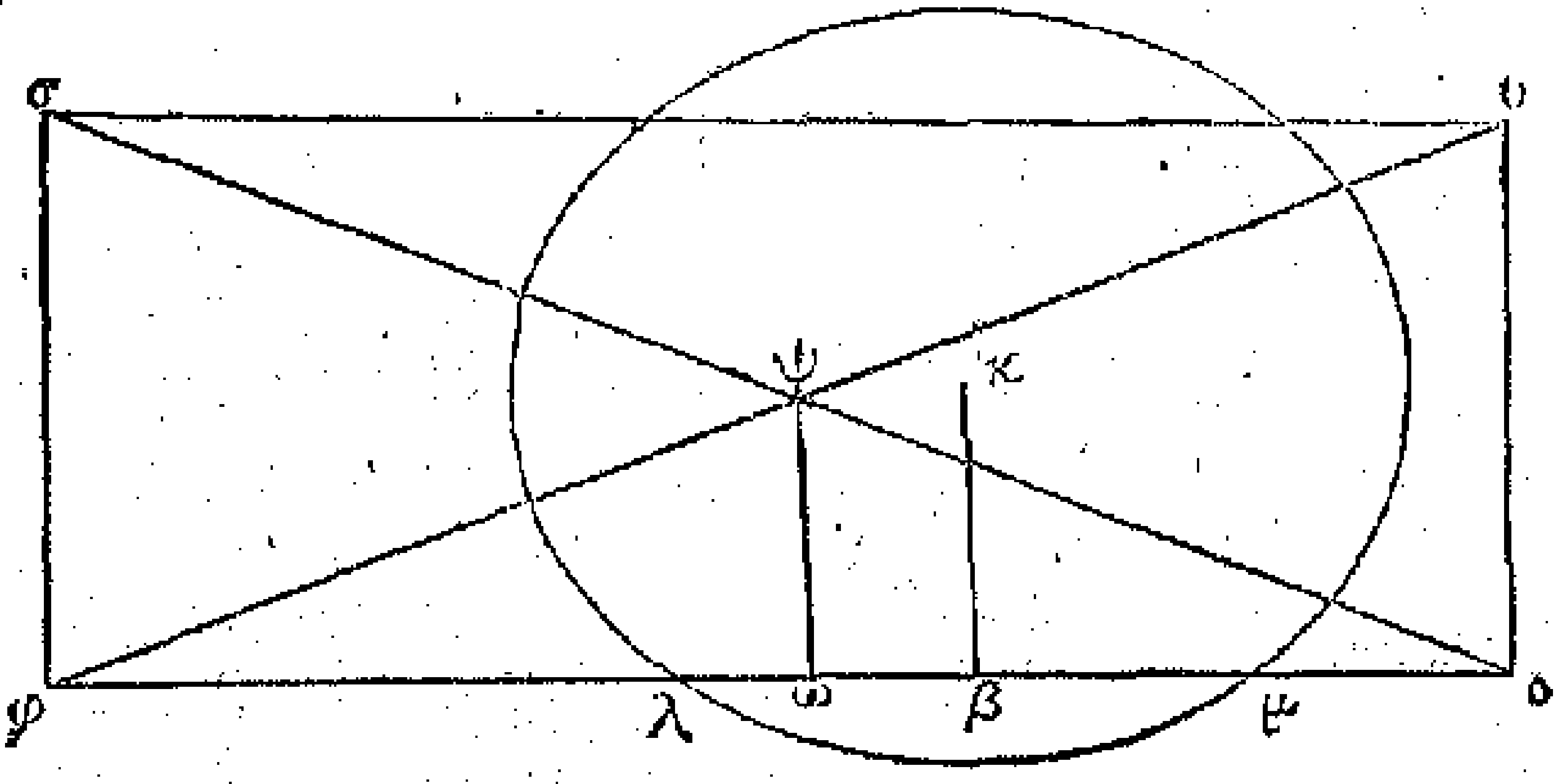
Ταύταις δὴ ταῖς ἀντιφράσεσιν, οὐκ ἂν περιέπιπτεν ὁ Γεωμέτρης οὗτος, εἰ συνορᾶν εἶχεν, ὡς ἐπεὶ ἅπαξ τὸ τοῦ ὀρθογωνίου κέντρον ψ, τῆς βη ἐκκυλίσαι τῇ ὑποθέσει προέθετο, καὶ τὰς φλ καὶ μο, τῆς ἰσότητος φθάσας συνεξεκύλισεν. Αὐτὸς μέντοι καὶ τὸ ἔκκεντρον θεὶς καὶ τὸ ὁμόκεντρον ἅμα ἐάσας ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τὴν ἑκατέρωθεν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου πρὸς τὸν περὶ τὴν γη κύκλον θέσιν τε καὶ ἀπόστασιν παραπλησίαν τε καὶ ἴσην ἐφύλαξε. Καὶ οἱονεὶ ἐπιλαθόμενος, ὅτι τοῦ κύκλου κατὰ χώραν μένοντος, τὸ ὀρθογώνιον σὺν αὐτῷ κέντρῳ καὶ γωνίαις ταῖς ἐπ᾿ αὐτοῦ, ἐπὶ θάτερα ὦσεν, καὶ μετεστησεν, αὐτὸ τοῦτο πάλιν κατέσχε τῷ λόγῳ ἀμετάστατον, καὶ ὡς εἶχε πρότερον, εἰπὼν ὅτι φλ = μο, καὶ διὰ τούτου τοῦ ψευδοῦς τὴν δεῖξιν περάνας, τόγε αὐτῷ δοκοῦν, νεανικώτατα· τοῦτο γὰρ ἀληθὲς ἔκρινε, καὶ ὃ τοιοῦτον, ἐπηγγείλατο δεῖξαι, (Ἀριθ: 7) προσθεὶς τὸ δειχθήσεται. Ἀλλ᾿ αὐτὸς μὲν ὅτι ἀληθὲς, οὐκ ἔδειξεν οὐδ᾿ ἂν δείξειεν. Ἡμεῖς δ᾿ ὅτι ψευδὲς ὧδι δείξομεν.

Λ ῆ μ μ α Δον:

„Ἐὰν ᾖ κύκλος ὑπὸ μιᾶς ἧς τινοσοῦν τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου (ἤτοι τῆς φο) μὴ διὰ „τοῦ κέντρου ἠγμένης τεμνόμενος (κατὰ λ καὶ μ) ᾖ τὰ κέντρα τοῦτε ὀρθογωνίου ψ, καὶ τὸ τοῦ κύ- „κλου μὴ ἐπὶ τῆς αὐτῆς πρὸς τὴν φο πλευρὰν καθέτου θάτερον δὲ πρὸς θατέραν τῶν γινομένων

(1) Διὰ τὸ μετὰ τὸ Αον: λῆμμα πόρισμα. (2) Ἐξ ὑποθ: (3) Εη: τοῦ Αου (4) κστη: τοῦ Αου: (5) Πορ: αω: τοῦ Σχολ: τοῦ μετὰ τὴν κστην: τῶν στοιχ: ἐν τοῖς Τακουετ: (6) Αξ: γον: (7) Αξ: ζον: (8) Αξ: θον:

,, τομῶν ἀποκλίνῃ (οἷον τὴν πρὸς λ). Ἀχθῶσι δὲ ἀφ' ἑκατέρων τῶν εἰρημένων κέντρων, πρὸς ,, τὴν ῥηθεῖσαν πλευρὰν κάθετοι αἱ ψω, κβ. Ἡ καθ' ὃ μέρος τὸ τοῦ ὀρθογωνίου κέντρον ἐςὶν, ,, εὐθεῖα ἡ ἀπολαμβανομένη ἀπότε τῆς περιφερείας, καὶ τῆς γωνίας, (ἤτοι ἡ λφ,) μείζων ἐςὶ ,, τῆς κατὰ θάτερον μέρος, καθ' ὃ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἀπολαμβανομένης ὁμοίως, ἀπότε τῆς ,, περιφερείας καὶ τῆς γωνίας, διαφορᾷ τῇ τῆς αβ τῆς ἀπὸ τῶν εἰρημένων καθέτων ἀπειλημμέ- ,, νης δὶς ληφθείσης.

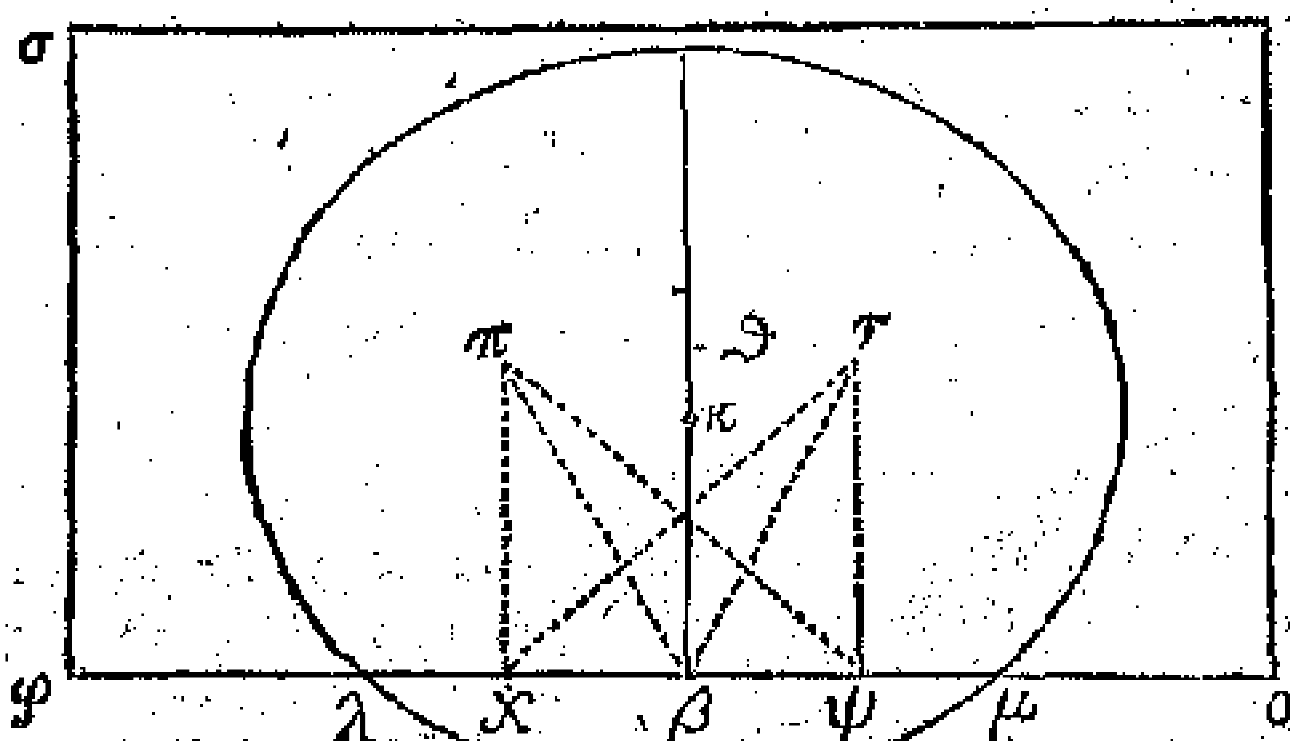


Ἡ ωφ ἴση ἐςὶ τῇ ωο. (1) Κοινῆς οὖν προςεθείσης τῆς ωβ, ἔςαι (2) ωφ + ωβ = ωο + ωβ. τουτέςιν ἐςὶν ἡ βφ = ωο + ωβ. Ἀλλ' ἡ μὲν βφ = βλ + λφ. ἡ δὲ ωο = ωβ + βο. Ἄρα ληφθέντων τῶν ἴσων ἀντὶ τῶν ἴσων, ἔςαι βλ + λφ = 2ωβ + βο. Ἡ δὲ βο = βμ + μο. Ἄρα βλ + λφ = 2ωβ + βμ + μο. Ἀλλ' ἡ βλ = βμ (3). Ἄρα τῶν ἴσων ἀφαιρεθέντων ἀπὸ τῶν ἴσων, ἔςαι (4) λφ = 2ωβ + μο, τουτέςιν ἡ φλ μείζων ἐςὶ τῆς μο, τῇ ἀπολαμβανομένῃ ἀπὸ τῶν καθέτων ωβ, δὶς ληφθείσῃ. Ο. Ε. Δ.

Δέδεικται τοίνυν ὅτι οὕτως ἐπὶ τῶν σχημάτων κέντρου ἔξω κέντρου ἐσῶτος, ἡ φλ, οὐχ ὅπως μείζων ἐςὶ τῆς μο, ἀλλὰ καὶ τοσούτῳ μείζων, ὡρισμένως δηλονότι, ὅση ἡ ἀπολαμβανομένη ἀπὸ τῶν καθέτων ωβ δὶς ληφθεῖσα. Ἐκ δὲ τούτου κατὰ τὸν τῆς ἀκολουθίας λόγον δέδεικται καὶ ψευδὲς εἶναι, ὅτι ἴσαι αἱ φλ καὶ μο, ὅπερ ὡς ἀληθὲς ἡμῖν ὁ γενναῖος, λαθεῖν νομίσας, ὑπέθετο, καὶ δεῖξαι ὑπέσχετο μὲν, οὐκ ἀπέδειξε δὲ, ὡς πολλάκις εἴρηται. Ἀλλ' ἤδη κείσθω καὶ τοῦτο τὸ ὑποτεθὲν αὐτῷ ἀληθὲς εἶναι, ὡς ἂν καὶ τὸ ἐντεῦθεν ἐπιφερόμενον λαβόντες, ἄμεινον ἐπιγνῶναι ἔχοιμεν τοῦ παραλληλογράμμου τὸ δίκεντρον.

Λ ῆ μ μ α. Ε΄.

,, Ἐὰν ὁ κύκλος ὑπὸ μιᾶς ἧς τινοσοῦν τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου, ἤτοι τῆς φο μὴ διὰ ,, τοῦ κέντρου ἡγμένης τεμνόμενος κατὰ τὰ σημεῖα λ καὶ μ. ὦσι δὲ ἑκατέρωθεν αἱ ἐπὶ τῆς ῥηθεί- ,, σης πλευρᾶς ἀπότε τῶν γωνιῶν φ καὶ ο τοῦ ὀρθογωνίου, καὶ τῶν εἰρημένων τομῶν λ καὶ μ ἀ- ,, πολαμβανόμεναι εὐθεῖαι, φλ, καὶ μο, ἴσαι ἀλλήλαις. Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας κείσεται τὰ ,, κέντρα, τοῦτε ὀρθογωνίου καὶ τοῦ κύκλου (δεῆσαν προσεκβληθείσης) τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύ- ,, κλου ἐπὶ τὴν εἰρημένην πλευρὰν πρὸς ὀρθὰς ἀγομένης.



Ἐπειδὴ γὰρ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου, ἐπὶ τὴν λμ τῆς μὴ διὰ τοῦ κέντρου πρὸς ὀρθὰς ἐφέςηκεν, ἴση ἄρα (5) ἡ βλ τῇ βμ. Ἴσαι δὲ (6) καὶ αἱ ἀπειλημμέναι λφ, μο. Ἄρα (7) βφ = βο.

Εἴπερ οὖν τὸ τοῦ ὀρθογωνίου φυο κέντρον ἤτοι τῷ κ συμπίπτει (δηλ: τῷ τοῦ κύκλου κέντρῳ) ἢ ἐπὶ τῆς βκ (προσαχθείσης δεῆσαν) οἷον κατὰ τὸ θ ἐςὶ, ἔχομεν τὸ προτεθέν. Ἀλλ' εἰ μὴ, ἔξω ἔξωθεν τῆς βκ, καὶ πάντῃ ἑτέρωθεν, ἤτοι γὰρ ἐφ' ὃ μέρος τὸ π, ἢ ἐφ' ὃ τὸ τ. Ἀλλ' ἔςω ἔνθα τὸ π. Καὶ

(1) Λῆμ: γον: (2) ἀξ: α΄ βον: (3) διὰ τὴν γην: τοῦ γου: (4) διὰ τὸ δ: ἀξ: (5) γ΄: τοῦ γου: (6) Ἐξ ὑποθ: (7) ἀξ: β΄ βου:

ἀπὸ τοῦ π ἀχθήτω κάθετος ἐπὶ τῆς φο (1) ἡ δὲ ἢ πάντως ἐπὶ τὸ β πεσεῖται, ἢ ἐπίτινος σημείου τῶν μεταξὺ β καὶ φ οἷον κατὰ τὸ χ ἢ ἐπίτινος τῶν μεταξὺ β καὶ ο οἷον κατὰ τὸ ψ. Ἀλλ', εἰ μὲν ἐπὶ τοῦ β, ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ πβφ (2). ὀρθὴ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ θβφ, (3) ἴσαι ἄρα ἀλλήλαις αἱ ὑπὸ πβφ, καὶ θβφ, τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, ὅπερ (4) ἀδύνατον.

Εἰ δὲ ἐπὶ τοῦ χ πέσῃ ἡ κάθετος πχ, ἔσται ἄρα (5) $\chi\varphi = \chi o$ ἤτοι ἡμίσεια τῆς φο. Ἀλλὰ καὶ ἡ βφ (δέδεικται ἀνωτέρω οὖσα) ἡμίσεια τῆς φο. Ἄρα (6) $\varphi\chi = \varphi\beta$. τὸ μέρος τῷ ὅλῳ. Ὅπερ (7) ἀδύνατον.

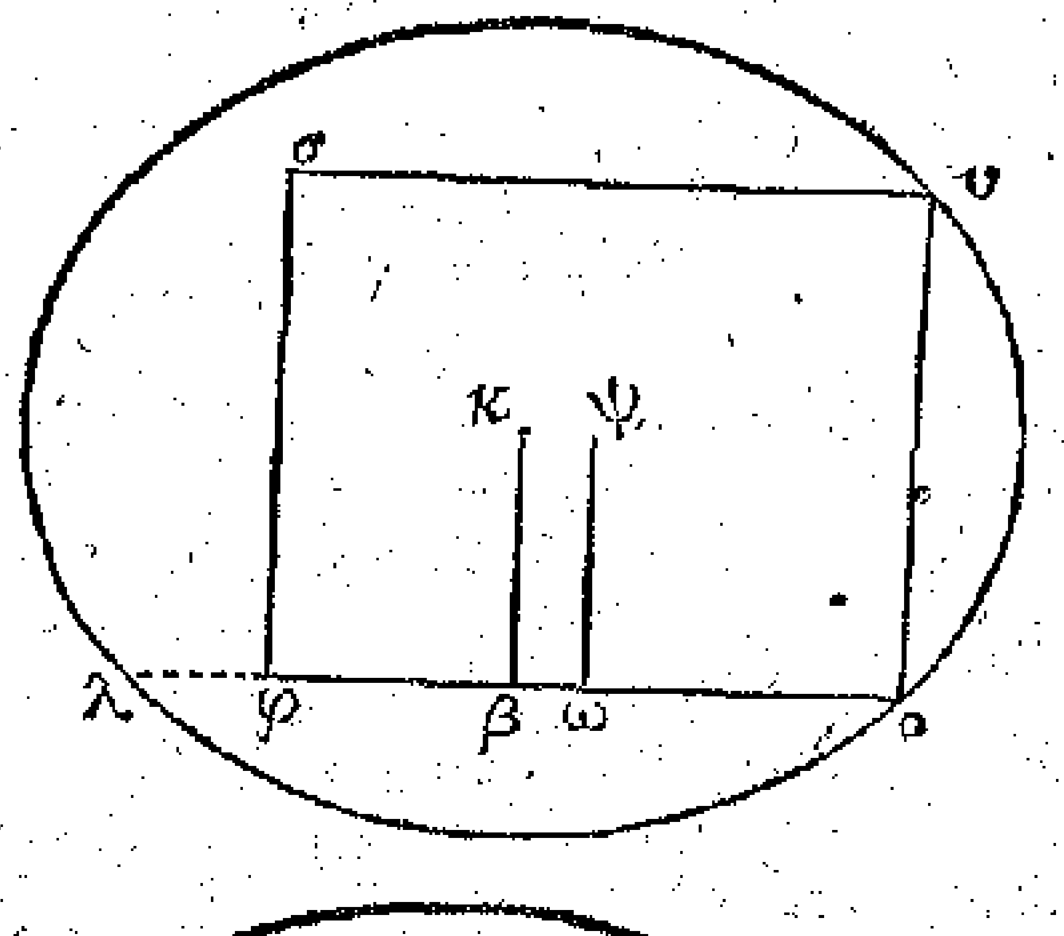
Διατὸν αὐτὸν δὲ λόγον οὐδ' ἐπὶ τὸ ψ, ἡ ἀπὸ τοῦ π κάθετος πεσεῖται, ἔσται γὰρ τὸ ὅλον ἴσον τῷ μέρει. Καὶ τῷ αὐτῷ τρόπῳ οὐδ' ἑτέρωθεν, οἷον ἐπὶ τοῦ τ, εἶναι τὸ τοῦ ὀρθογωνίου κέντρον, δεῖξαι ῥᾴδιον. Ἄρα κτ: Ο. Ε. Δ.

Καὶ ὅπως δὲ ἔχουσι θέσεώς τε καὶ ἀποστάσεως τὰ ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα, τὰ ἤτοι κατουδέτερον, ἢ κατὰ θάτερον μὲν τὴν περάτων μιᾶς τινὸς τῶν πλευρῶν, τῆς περιφερείας ἐκπίπτοντα, κατὰ θάτερον δὲ ἐμπίπτοντα, οὐδ' ἀλλότριον ἂν εἴη τοῦ σκοποῦ οἶμαι θεωρῆσαι, οὐδὲ δυσχερὲς κατασκευάσαι.

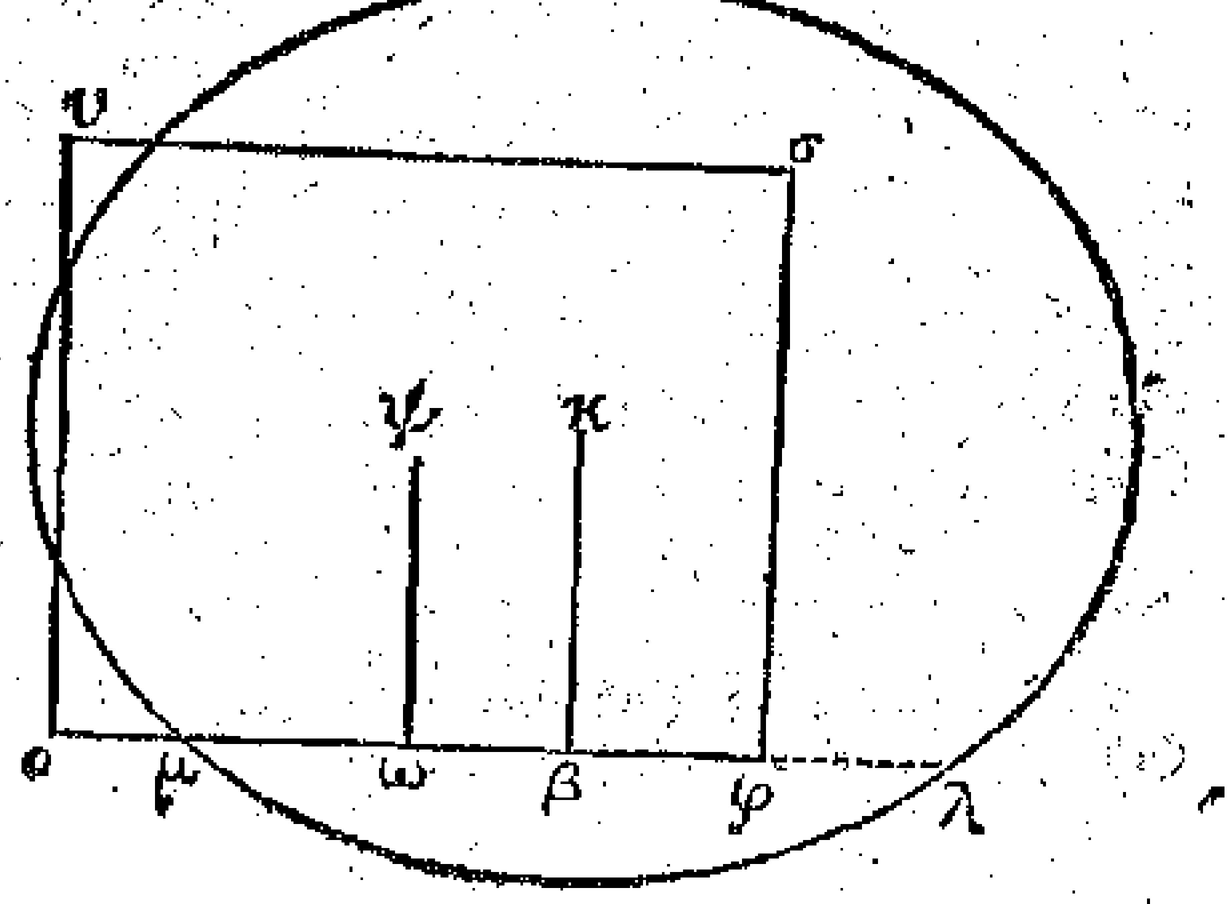
Λ ῆ μ μ α Ϛον:

„Ἐὰν κύκλου, μία ἡτισοῦν τῶν τοῦ ἐπ' αὐτῷ γεγραμμένου ὀρθογωνίου πλευρῶν (ἡ φο). „μὴ διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη τὴν περιφέρειαν μηδαμῶς τέμνῃ, ὡς ἀνωτέρω· (8) ἀλλ' ἤτοι Αον: „κατὰ θάτερον (οἷον κατὰ τὸ φ) ἐντὸς τῆς περιφερείας πίπτῃ, προπίπτῃ δὲ κατὰ πέρας θάτε-„ρον (οἷον τὸ ο.) Η' βον: κατὰ θάτερον μὲν ἐμπίπτῃ τὸ φ, κατὰ δὲ θάτερον ἐκπίπτῃ (τὸ ο) „τεμνομένης τῆς περιφερείας κατὰ τὸ μ. Η' δὲ τὸ τοῦ κύκλου κέντρον, κ, τοῦ μὲν ὀρθογωνίου „ἐντὸς, τῷ δὲ κέντρῳ αὐτοῦ ψ μηδαμῶς συμπίπτον, ἀλλ' ἐπὶ θάτερον πέρας τῆς εἰρημένης „πλευρᾶς ἀποκλῖνον· ἀχθῶσι δὲ καὶ κάθετοι ἀπὸ τῶν κέντρων, ἐπὶ τὴν ῥηθεῖσαν πλευρὰν, „αἱ κβ, ψω. Κατὰ μὲν τὴν Αην: ὑπόθεσιν, ἡ τοῦ ἐμπίπτονταις πέρατος φ, ἀπὸ τῆς περιφε-„ρείας ἀπόστασις, ἤτοι ἡ φλ, ἴση ἐστὶ τῇ ἀπειλημμένῃ ἀπὸ τῶν καθέτων ἐπὶ τῆς πλευρᾶς, „ἤτοι τῇ βω δὶς ληφθείσῃ. Κατὰ δὲ τὴν βαν: ἴση τῇ αὐτῇ βω δὶς ληφθείσῃ πλὴν τῆς, ἀπό-„τε τοῦ σημείου τῆς τομῆς μ, καὶ τοῦ ἐκπίπτοντος πέρατος ο, ἀπειλημμένης μο."

Καὶ γὰρ (προσεκχθείσης τῆς βφ, ὥστε προσπεσεῖν τῇ περιφερείᾳ πρὸς τὸ λ.) $\beta\lambda = \beta o$ (9) τουτέστι $\beta\varphi + \varphi\lambda = \beta\omega + \omega o$. Κοινὴ προστιθέσθω ἡ βω, καὶ ἔσται (10) $\beta\varphi + \varphi\lambda + \beta\omega = 2\beta\omega + \omega o$. Ἀλλ: $\beta\varphi + \beta\omega = \omega o$ (11). Ἄρα (12) $\varphi\lambda = 2\beta\omega$. Ο. Η. τὸ Α'.



Ὁμοίως προσεκχθείσης τῆς βφ, ὥστε προσπεσεῖν τῇ περιφερείᾳ πρὸς τὸ λ, ἐστὶν ἡ $\beta\lambda = \beta\mu$ (13). Τουτέστι $= \beta\varphi + \varphi\lambda = \beta\omega + \omega\mu$. Κοινὴ προστιθέσθω ἡ βω, Καὶ ἔσται (14) $\beta\varphi + \varphi\lambda + \beta\omega = 2\beta\omega + \omega\mu$. Κοινὴ προσέτι προστιθέσθω ἡ μο, καὶ ἔσονται $\beta\varphi + \beta\omega + \varphi\lambda + \mu o = 2\beta\omega + \omega\mu + \mu o$. Ἀλλὰ γὰρ $\beta\varphi + \beta\omega = \omega\mu + \mu o$ ἡ μὲν γὰρ ἴση τῇ ωφ, ἡ δὲ τῇ ωσ, ταῖς (15) ἴσαις ἀλλήλαις. Ἄρα τῶν ἴσων ἀφαιρεθέντων (16) ἔσται $\varphi\lambda + \mu o = 2\beta\omega$. Ἄρα $\varphi\lambda = 2\beta\omega - \mu o$. Ο. Ε. τὸ Β'.



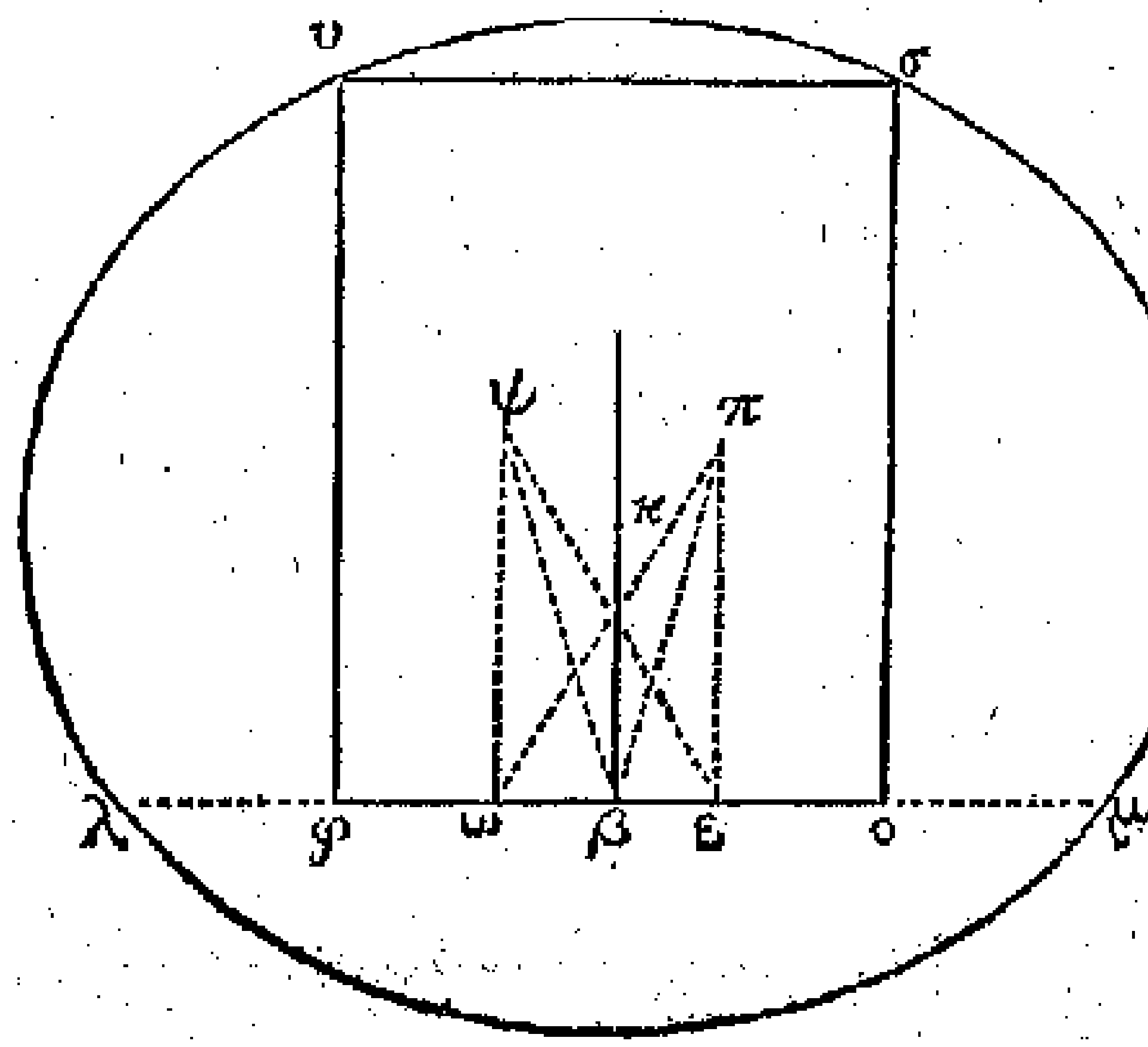
---

(1) ιβ'. τοῦ αου: (2) ἐξ ὑποθ: (3) ἐξ ὑποθ: (4) ἀξ: θου: (5) λῆμ: γου: (6) ἀξ: ζον: (7) ἀξ: θον: (8) λῆμ: δ'. καὶ ε': (9) γην: τοῦ γου: (10) ἀξ: βον: (11) λῆμ: γον: (12) ἀξ: γον: (13) γη: τοῦ γου: (14) ἀξ: βον: (15) λῆμ: γον: (16) ἀξ: γον:

Λ ῆ μ μ α Ζον:

„Ἐὰν παραλληλογράμμε ὀρθογωνίε τε υσφο, μία ἡτισεν τῶν πλευρῶν μὴ διὰ τε „κέντρε ἠγμένη, οἷον ἡ φο, ὅλη ἐντὸς τε κύκλε ἐμπίπτεσα, ἐπίσης ἑκατέρωθεν ἔχῃ τῆς πε„ριφερείας ἀφεςῶτα τὰ πέρατα φ, ϗ ο, ὥςε προεκβληθείσης ἑκατέρωθεν, καὶ τῇ περιφερείᾳ „προσπιπτέσης κατὰ λ, καὶ μ τὰς φλ καὶ ομ ἴσης εἶναι, ἡ ἀπὸ τε κέντρε τε κύκλε ἐπ' αὐ„τῆς κάθετος ἀγομένη κβ, (προεκβληθεῖσα ἢν δεήσῃ) διὰ τε κέντρε τε παραλληλογράμμε „διελεύσεται· τετέςιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς καθέτε ἀμφότερα τὰ κέντρα, τετε κύκλε, καὶ τε παραλ„ληλογ~~ράμμε π~~εσεται“.

Μὴ γὰρ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἐχέτω εὐθείας, εἰ δυνατὸν, τὸ κέντρον αὐτε τὸ παραλληλόγραμμον ἀλλ' ἑτέρωθεν, ἤτοι κατὰ τὸ ψ, ἢ κατὰ τὸ π.



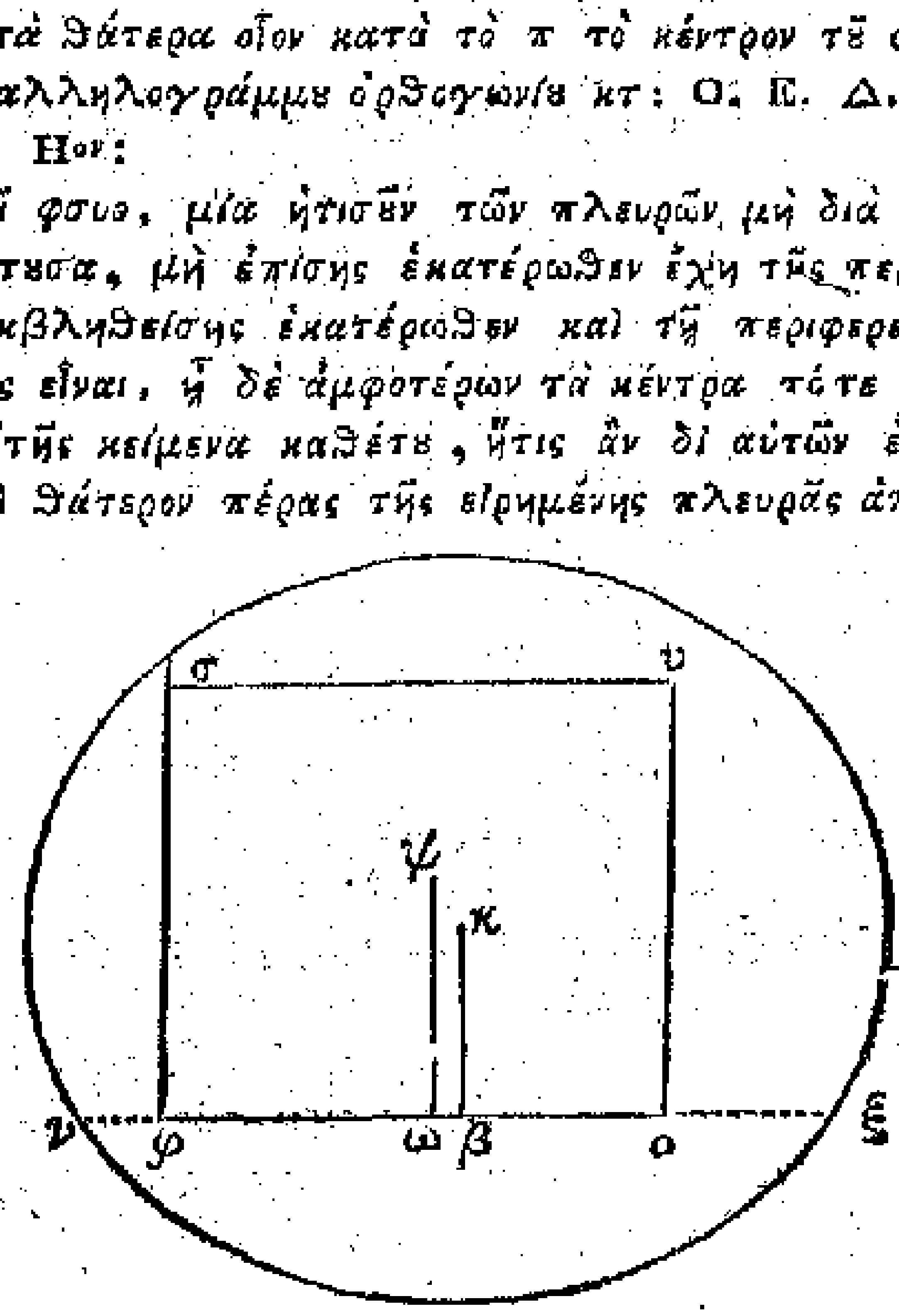
Καὶ ἤχθω ἀπὸ τε ψ κάθετος ἐπὶ τῆς φο προεκβληθείσης. Αὕτη γεν ἤτοι ἐπὶ τὸ β πεσεῖται, ὡς ἡ ψβ, ἢ ἐντεῦθεν, ὡς ἡ ψω, ἢ ἐντεῦθεν ὡς ἡ ψε. Καὶ εἰ μὲν ὡς ἡ ψβ, ἔςαι ἡ ὑπὸ ψβφ (1) ὀρθή· ὀρθὴ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ κβφ (2)· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ κβφ τῇ ὑπὸ ψβφ, τὸ ὅλον τὸ μέρει· ὅπερ (3) ἀδύνατον. Εἰ δὲ ὡς ἡ ψω, ἄρα (4) ωφ = ωο. Ἀλλὰ τῆς φο προεκβληθείσης ἑκατέρωθεν ἐπὶ λ καὶ μ, ἔςιν (5) βλ = βμ. Καὶ φλ = ομ. (6). Ἄρα τῶν ἴσων ἀπὸ τῶν ἴσων ἀφερεθεισῶν, ἔςαι (7) βφ = βο, εἰς ἴσα ἄρα τέτμηται ἡ φο καὶ κατὰ τὸ β καὶ κατὰ ω· δίχα γὰρ ἑκατέρωσε· τὰ δὲ τε αὐτε ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις (8) ἐςίν· ἴση ἄρα ἡ ωφ τῇ βφ. τὸ μέρος τῷ ὅλῳ. Ὅπερ (9) ἐκ ἔςιν.

Εἰ δὲ τέως ὡς ἡ ψε, δειχθήσεται ὁμοίως ἡ βφ = εφ. ὃ τῆς αὐτῆς ἐςὶν ἀτοπίας ἐχόμενον.

Τῷ αὐτῷ δὲ λόγῳ δειχθήσεται μηδὲ κατὰ θάτερα οἷον κατὰ τὸ π τὸ κέντρον τε ὀρθογωνίε παραλληλογράμμε πίπτειν. Ἐὰν ἄρα παραλληλογράμμε ὀρθογωνίε κτ: Ο. Ε. Δ.

Λ ῆ μ μ α Ηον:

„Ἐὰν παραλληλογράμμε ὀρθογωνίε τε φσυο, μία ἡτισεν τῶν πλευρῶν μὴ διὰ τε „κέντρε ἠγμένη ἡ φο, ὅλη ἐντὸς τε κύκλε ἐμπίπτεσα, μὴ ἐπίσης ἑκατέρωθεν ἔχῃ τῆς περι„φερείας ἀφεςῶτα τὰ πέρατα φ καὶ ο, ὥςε προεκβληθείσης ἑκατέρωθεν καὶ τῇ περιφερείᾳ „προσπιπτέσης κατὰ ν καὶ ξ, τὰς φν καὶ οξ ἀνίσες εἶναι, ἡ δὲ ἀμφοτέρων τὰ κέντρα τότε τε „κύκλε κ, καὶ τὸ τε ὀρθογωνίε ψ, μὴ ἐπὶ τῆς αὐτῆς κείμενα καθέτε, ἥτις ἂν δι' αὐτῶν ἐπὶ „τὴν εἰρημένην πλευρὰν ἀχθείη, ἀλλὰ θάτερον ἐπὶ θάτερον πέρας τῆς εἰρημένης πλευρᾶς ἀπο„νεῦον. Ἀχθῶσι δὲ καὶ κάθετοι ἀπὸ τῶν κέντρων ἐπὶ „τῶν πλευρῶν αἱ ψω, κβ, ἔςαι τῶν ἀπὸ τῶν περά„των τῆς πλευρᾶς, καὶ τῆς περιφερείας ἀπειλημμέ„νων ἡ μείζων οξ, ἴση τῇ δὶς ἀπειλημμένῃ ἀπὸ τῶν „καθέτων ωβ, σὺν τῇ ἐλάσσονι νφ. ἡ (ὃ ταυτὸν ἐ„ςὶν) ἡ ἐλάσσων φν, ἴση τῇ μείζονι οξ, πλὴν τῆς „ωβ δὶς ληφθείσης“.



Ἐπὶ γὰρ ἡ ωφ = ωο (10) κοινῇ προςεθεισῶν τῶν οξ, καὶ φν, καὶ ωβ, ἔςαι (11) ωφ + φν + ωβ + οξ = ωο + οξ + ωβ + φν, τετέςιν βν + οξ = βξ + 2ωβ + φν. Ἀλλ: βν = βξ (12). Ἄρα (13) οξ = 2ωβ + φν. Ἤτοι φν = οξ — 2ωβ. Ο. Ε. Δ.

(1) Ἐξ ὑποθ: (2) ἐξ ὑποθ: (3) ἀξ: 3ον: (4) λῆμ: γον: (5) γη: τε γε: (6) ἐξ ὑποθ: (7) ἀξ: γον: (8) ἀξ: ζον: (9) ἀξ: θον: (10) λῆμ: γον: (11) ἀξ: βον: (12) γη: τε γε: (13) ἀξ: γον:

Ταῦτάσοι καὶ Πύθια, φασὶ, καὶ Δήλια. Οὕτω γὰρ σαφῶς, οὕτως ἀκριβῶς, οὕτως ἐῤῥωμένως λέγεται, ὡς οὐκ οἶδ' εἴτι ἄλλο δι' ὅλης τῆς Γεωμετρίας ἔχει ἄν τις εὑρεῖν τούτων σαφέστερον θεωρούμενον, καὶ ἀναγκαστικώτερον κρατυνόμενον. Φέρε οὖν ἤδη, ἐπεὶ ταῦτα οὕτω κεῖται ἀσάλευτα, σοίτε, καμοὶ, καὶ παντὶ ὁτῳοῦν κοινῇ πρεσβευόμενα, λέγοις ἂν αὐτὸς ἡμῖν, ἐν βραχέσι ῥήμασιν ἀπαντήσας, Πῶς δήποτε περὶ τοῦ ἐν τῷ κατὰ σὲ διαγράμματι γλημ κύκλου καὶ τοῦ ἐπ' αὐτῷ ὀρθογωνίου φσυο, φρονεῖν ἡμᾶς χρή; τί δὲ καὶ λέγειν; Πότερον ποτὲ τέμνει τὸν κύκλον, ἡ τοῦ ὀρθογωνίου, μὴ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἠγμένη πλευρὰ φο; ἢ οὐχί; Ἀλλὰ τέμνει· τοῦτο γὰρ ἔοικας βουλομένῳ, καὶ ὁ περὶ τὴν γπ γραφόμενος κύκλος, τὴν μείζονα τῆς γη, τουτὶ πάντως ἀπαιτεῖ. Ἄλλωστε κἂν ἐπὶ τὸ μὴ, ἀναδράμῃς, ἕξεις δὴ καὶ πρὸς αὐτὸ (ὡς μικρὸν κατωτέρω) ἐπίσης ἡμᾶς ἀπαντήσοντας· τέμνει γοῦν. Πότερον δὲ, αἱ ἀπό τε τῶν κατὰ τὰς τομὰς σημείων λ καὶ μ, καὶ τῶν γωνιῶν φ καὶ ο ἀπολαβανόμεναι φλ, μο εὐθεῖαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἢ οὐχί; Ἀλλ' ἴσης οὔσης (ἐν Ἀριθμ: 7) προσθεὶς ὅτι καὶ δειχθήσεται. Πρὸς δὴ τούτοις ἐρήσομαίτι καὶ τρίτον, σὺ δὲ ἀπόκριναι, μόνον τὶ νεανικόν. Πότερον, ἐπὶ τῶν οὕτως ἐπικαταγεγραμμένων τῶνδε σχημάτων, τὸ τοῦ παραλληλογράμμου κέντρον, ἐκτὸς τῆς γη εὐθείας ἐστὶν, ἢ ἐπ' αὐτῆς; Ἀλλ' ἐκτὸς ὑπέθου ἔνθα τὸ ψ. ὁρᾷς; μεσημβρινῶν ἡλίου αὐγῶν φαεινοτέρα ἐστὶν, ἡ ταῖς ὑποθέσεσι ταύταις παραπηδοῦσα ἀντίφασις· τῆς γὰρ φο οὕτω τεμνούσης τὸν γλημ κύκλον, τὸ τοῦ ὀρθογωνίου κέντρον ψ, ἀνάγκη πᾶσα ἐπὶ τῆς γη (κατὰ τὸ Εον: λῆμμα·) εἶναι, καὶ ἅμα μὴ ἐπὶ τῆς γη, ὅτι καὶ ἐκτὸς κατὰ σέ· (ἐν Ἀρ: 4). Καὶ πάλιν, ἐπεὶ τὸ τοῦ ὀρθογωνίου κέντρον ψ (κατὰ σὲ Ἀρ: 4) ἐκτὸς τῆς γη εὐθείας ὑποτίθεται, ἐφ' ἧς τὸ τοῦ κύκλου, ἀνάγκη πᾶσα τὴν φλ μείζονα εἶναι τῆς μο (λῆμμα Δον:) τῇ δὶς ωβ. ἅμα δὲ ϗ μὴ μείζονα ἐπείσοι δοκεῖ, ἴσας ὑποτιθεμένῳ (ἐν Ἀρ: 7). τ' ἀδύνατα ἄρα ἡμῖν συῤῥάπτειν ἐπιχειρεῖς, ἑκάτερον ὑποτιθέμενος, τήν τε τῶν φλ ϗ μο εὐθειῶν ἰσότητα, ϗ τὴν τοῦ ψ κέντρου τοῦ ὀρθογωνίου, ἀπὸ τῆς γη εὐθείας ἔκπτωσιν. Καὶ τὴν ἑτέραν τῶν ὑποθέσεων ἐκ πάσης ἀνάγκης παραιτητέον, εἰμήσοι καθ' ἡδονήν ἐστὶ συγκλώθειν τ' ἀσύγκλωστα.

Ἀλλ' ἄγε δὴ ὁ ἐνελαφρίσας σεαυτὸν ὄρνις, ϗ τὴν ἄορνον αὐτὴν ἡμῖν ὑπερπτὰς μετάρσιος, χρῆσαι δὴ πλατωνικῶς (μᾶλλον δὲ ϗ ὑπὲρ τὸν Πλάτωνα ἐκεῖνον, τὸν περὶ τὸ πρόβλημα μάτην πονήσαντι,) τοῦ νοῦ τῷ πτερώματι, ϗ ἐπὶ τὸν μείζονα τῶν κύκλων, τὸν γνκ, ἐπικαθίσας τὸν λόγον, δίδασκε ϗ περὶ τούτου, τὶ ἄρα ἡμῖν ὑποληπτέον; πότερον ποτὲ τέμνει ϗ τοῦτον ἡ τοῦ ὀρθογωνίου πλευρὰ φο, ἡ μὴ διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, ἢ οὐχί; Ἀλλ' εἰ τέμνει ἐπὶ τὸν ἀνωτέρω λόγον περιπεσούμεθα δεύτερον. Ῥητέον οὖν ἄρα, ὡς οὐχὶ, ἀλλ' ἐμπίπτει ὅλη τοῦ κύκλου ἐντός· τοῦτο γάρ σοι βούλεται πάντως ϗ ὁ κύκλος ὁ περὶ τὴν γκ, τὴν μείζονα τῆς γπ περιγραφόμενος. Πότερον οὖν; προεκβληθείσης τῆς φο, ὥστε τῷ κύκλῳ προσπεσεῖν κατὰ τὰ σημεῖα ν ϗ ξ, ἡ φν ἴση ἐστὶ τῇ οξ, ἢ οὐχί; Ἀλλ' ἴσην οὖσαν. Δίχα γὰρ ἐτμήθη ὡς ἔφης (Ἀριθ: 8) ἡ νξ κατὰ τὸ β. ὡς τὰς βν, βξ ἴσας ἀλλήλαις εἶναι. Ἐὰν οὖν ἀφαιρεθῶσιν αἱ βλ, ϗ βμ, ὃ πάλιν, καλῶς ποιῶν, ἴσας ἀπεφήνω τυγχάνειν (Ἀριθμ: 6) ἔσονται αἱ λν, ϗ μξ ἴσαι. Καὶ ἐὰν ἀπὸ τούτων ἀφαιρεθῶσιν αἱ κατὰ σὲ ἴσαι (Ἀριθ: 7) φλ ϗ μο, ἔσται λοιπὴ ἡ φν, ἴση λοιπῇ τῇ οξ. Ἐπειδὴ τοίνυν ἐμπίπτει ἡ φο πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου ἐντὸς τοῦ γνκξ κύκλου, ϗ ἴσας ἔχει τὰς ἑκατέρωθεν ἀπὸ τῆς περιφερείας ἀποστάσεις, φανερὸν (Κατὰ τὸ ζον: λῆμμα.) ὅτι ἐπὶ τῆς αὐτῆς γκ κείσεται ϗ τὸ τοῦ κύκλου κέντρον, ϗ τὸ τοῦ ὀρθογωνίου ἐξ ὧν ἔθου. Ἀλλὰ ϗ μὴ ἐπὶ τῆς αὐτῆς, ἐκτὸς γὰρ τῆς γκ τὸ ψ, ἐξ ὧν ὑπέθου. Καὶ πάλιν ἐπεὶ τὸ κέντρον ψ, ἐκτὸς (κατὰ σὲ) τῆς εὐθείας γκ, ἐφ' ἧς τὸ τοῦ κύκλου γνκξ, μείζων ἄρα ἡ οξ τῆς φν, τῇ δὶς ωβ τῇ ἐναπειλημμένῃ ταῖς ἀπὸ τῶν κέντρων καθέτοις (Κατὰ τὸ Ηον: λῆμμα.) Καὶ οὐδὲ μείζων, ἐπειδὴ ἴσαι. Καὶ ἡ πάγη τῆς ἀντιφάσεως, ὡς ϗ πρὶν παρὰ πόδας.

Τὶ τοίνυν λοιπόν· ἢ (μὴ ἐξὸν τιθέναι ἑκάτερον), τῇ ἀνάγκῃ ἑτέρᾳ τῶν ὑποθέσεων χαίρειν φράσαντας, κατασχεῖν τὴν ἑτέραν. Αὐτὸς οὖν τὴν ὑπὲρ σεαυτοῦ ἑλὼν, φάθι δὴ, ποτέραν ἡμῖν ἀποσκευαστέον;

„Ἐν τριόδῳ ἕστηκα, δύ' εἰσὶ δὲ πρόσθεν ὁδοί μοι.

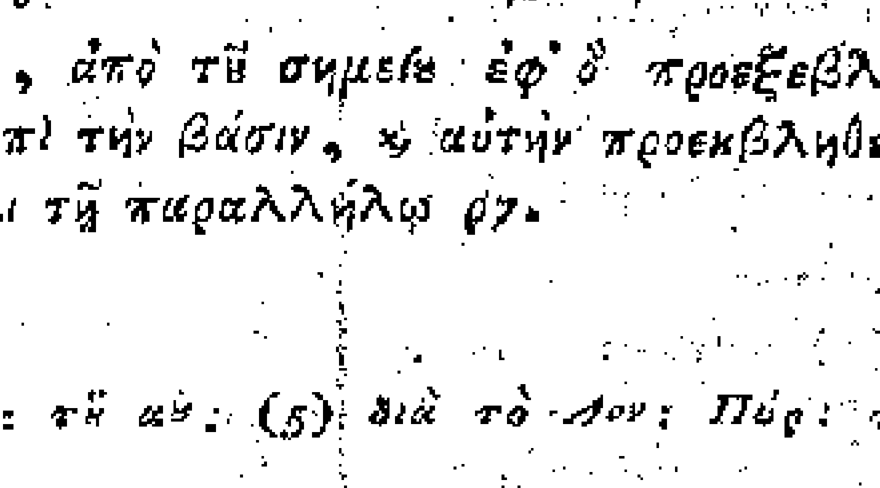
„Φροντίζω τούτων, ἥν τιν' ἴω προτέρην.

βούλει τὸ ψ ἐπὶ τὸ ρ μεταστήσωμεν; ἢ τοῦτο ἀποκληρωτικὸν πάντῃ ἂν εἴη, καὶ προῖκα λεγόμενον, ϗ τὸ ὅλον ψωραλέαν τινὰ τὴν εὕρεσιν ἀποφαῖνον, ϗ οὐδὲν ὑγιές. Ἀμέλειτοι ϗ αὐτὸς, ἄτε δὴ ἀνήλωκας. Ἀλλὰ τὰς φλ, ϗ μο, καὶ τὰς φυ καὶ οξ τῆς ἰσότητος ἀποςερήσωμεν· τῦτο γὰρ ἂν εἴη λειπόμενον, ἄλλο δ' ὐδέν. Ἔςω τοίνυν τεμνομένυ τῦ κύκλυ ἡ φλ. (ὅτι κατὰ ταύτῃ τὸ μέρος τὸ τῦ ὀρθογωνίυ κέντρον ψ ὑποτίθεται) μείζων τῆς μο, διαφορᾷ τῇ τῆς ωβ δὶς ληφθείσης. (λῆμ: Δον:). Ἔςω δὲ καὶ τῆς φο ὅλης ἐντὸς τῦ κύκλυ πιπτύσης, ἡ νφ τῆς οξ μείζων (ὅτι κατὰ ταύτης τὸ μέρος τὸ τῦ ὀρθογωνίυ κέντρον σ ἀπονεῦον τίθεται) τῇ β ὁμοίως δὶς ληφθείσῃ. (τὰ γὰρ ἐν τῷ ςῳ: λήμματι θεωρέμενα, ὡς μὴ κατὰ τὰς ὑποθέσεις τῶν ἑκατέρωθεν τῆς τῦ ὀρθογωνίυ πλευρᾶς φσ, ἐντὸς τῦ κύκλυ ἐμπτώσεων, ἢ ἐκτὸς ἐκπτώσεων βαίνοντα, ὡς ἡ τῦ τῆς εὑρέσεως διαγράμματος κατασκευὴ ἀπαιτεῖ, ἑκόντες παρήσομεν*) οἶσθα τί τὸ ἐκ τύτων ἑπόμενον; ἐκεῖνο δηλονότι ὃ φθάσας ἀνωτέρω (ἐν ἀριθμ: 7) σεσημείωκα. Ὅτι ἐν τῇ Α: ὑποθέσει ἡ διὰ τῆς ἀπὸ τῦ ρ παραλλήλυ ἀγομένης τῇ ψφ ἀποτεμνομένη ἀπὸ τῆς φλ, δηλ: ἡ λ2 (πίπτοντος τῦ 2 μεταξὺ φ ϗ λ, ὅπερ ἐνδέχεσθαι ϗ αὐτὸς ὡμολόγησας Ἀρ: 7) ἴση ἔςαι τῇ ἐκτὸς τῦ κύκλυ ἀποςάσει τῦ ο ἀπὸ τῦ μ· ἡ δὲ λοιπὴ ἐκείνης φ2, ἡ διαφορὰ, ἥτις (κατὰ τὸ λῆμ: τὸ Δον:) ἴση ἐςὶ τῇ δὶς ωβ. Καὶ ὕτως ἐὰν ἀπὸ τῦ μ πρὸς τὸ ο τῇ λ2 ἴσην, ὡς ἐπιτάσσεις, λάβωμεν τὴν μ3, αὐτὸ τὸ 3 συμπεσεῖται τῷ ο, ϗ ἡ ἐπιζευγνυμένη ρ3, ἔςαι ἡ ρο. Καὶ ὐδὲ τρίγωνον ἡμῖν συςήσεται τὸ 3ρο, τῶν ὁμόρων εὐθειῶν μηδὲν χωρίον περιεχυσῶν, ἀλλήλαις δὲ ἐφαρμοζυσῶν, ὐδὲ τὸ ἐκ τῦ τριγώνυ ἄτοπον ἕψεται, τὸ ἐπὶ Ἀριθ: 6, ἐπισφαλῶς ἐκφερόμενον, ὑφ' ὗ ἂν τὸ τῦ ὀρθογωνίυ Κέντρον ἀπὸ τῦ ψ, ἔνθα ὑπετέθη, ἐπὶ τὸ ρ μεταςῆσαι ἀναγκασθείημεν· ὡσαύτως δὲ ϗ τῆς φν (κατὰ τὴν βαν: ὑπόθεσιν) μείζονος ὔσης, τῆς δὲ οξ ἐλάσσονος, διαφορᾷ τῇ δὶς 6β (λῆμ: Η'.) ἡ ἀπὸ τῦ ρ πάλιν ἀγομένη παράλληλος τῇ 4φ, ἤτοι ἡ ρ7, τοσῦτον ἀπὸ τῦ ν ἀποςήσεται τῦ κύκλυ ἐντὸς ἀποληγῦσα, ὥςε τὴν ν7, ἴσην εἶναι τῇ οξ, ἤτοι τῇ τῆς γωνίας τῦ ὀρθογωνίυ ο ἀπὸ τῆς περιφερείας ἀποςάσει· τὴν δὲ 7φ, αὐτὴν εἶναι τὴν διαφορὰν τῆς νφ πρὸς τὴν οξ τῇ δὶς β6, ἴσην (λημ: Ηον:) τυγχάνυσαν. Καὶ ὕτως ἐὰν ἀπὸ τῦ ξ πρὸς τὸ ο τῇ ν7, ἴσην ὡς αἰτεῖς λάβωμεν τὴν ο8 αὐτὸ τὸ 8 συμπεσεῖται τῷ ο, ϗ ἡ ἐπιζευγνυμένη ρ8, ἔςαι ἡ ρο. Καὶ ὐδὲ τὸ τρίγωνον ὡς ἀνωτέρω ἐλέγετο, συςήσεται, ὐδ' ἄτοπον ἕψεται. Ἀλλ' ὅπως εἰδῇς ὅτι ϗ ταῦτα πρὸς ςάθμην Γεωμετρικὴν ἰθυνόμενα, ὀρθῶς λέγεται, ἔχε, λαβών.

Λ ῆ μ μ α Θον:

,,Παντὸς ἰσοσκελῦς τριγώνυ ψφο, ἐὰν ἀπό τινος σημείυ ρ τῶν ἐπὶ τῦ ἑτέρυ σκέλυς ,,ψο, παράλληλος ἀχθῇ πρὸς τὸ ἕτερον σκέλος ψφ, ἐπὶ τὴν βάσιν φο ἀποληγῦσα ἡ ρ2, τὸ ,,λοιπὸν τῦ σκέλυς, ἀφ' ὗ ἄγεται ἡ παράλληλος, λέγω τὸ ἀπὸ τῦ σημείυ ρ, ϗ τῦ τῆς γω- ,,νίας ο ἀπολαμβανόμενον ρο τῇ ἀγομένῃ παραλλήλῳ ἴσον ἐςί.

Ἡ γὰρ ὑπὸ ρ2ο = ψφο (1). Ἡ δὲ ὑπὸ ψφο = ψοφ (2). Ἄρα (3) ὑπὸ ρ2ο = ρο2. Ἄρα (4) ρ2 = ρο.



Π ό ρ ι σ μ α.

Ἡ ἄρα ἀπὸ τῦ σημείυ ρ, ἀφ' ὗ ἡ παράλληλος, ἐπὶ τὴν βάσιν ἀγομένη κάθετος ρβ, δίχα τέμνει τὴν 2ο βάσιν. (5).

Λ ῆ μ μ α Ιον:

,,Παντὸς ἰσοσκελῦς τριγώνυ φ5ο, ἐὰν τῦ ἑτέρυ ,,τῶν ἴσων σκελῶν προεκβληθέντος, ἤτοι τῦ ο5), ἐπὶ τὸ ρ, ἀπὸ τῦ σημείυ ἐφ' ὃ προεξεβλήθη (ἤτοι τῦ ρ) παράλληλος ἀχθῇ τῷ ἑτέρῳ σκέλει 5φ, ἐπὶ τὴν βάσιν, ϗ αὐτὴν προεκβληθεῖ- ,,σαν, περατυμένη, ἡ ρ7, ἡ προεκβεβλημένη ορ, ἴση ἔςαι τῇ παραλλήλῳ ρ7.

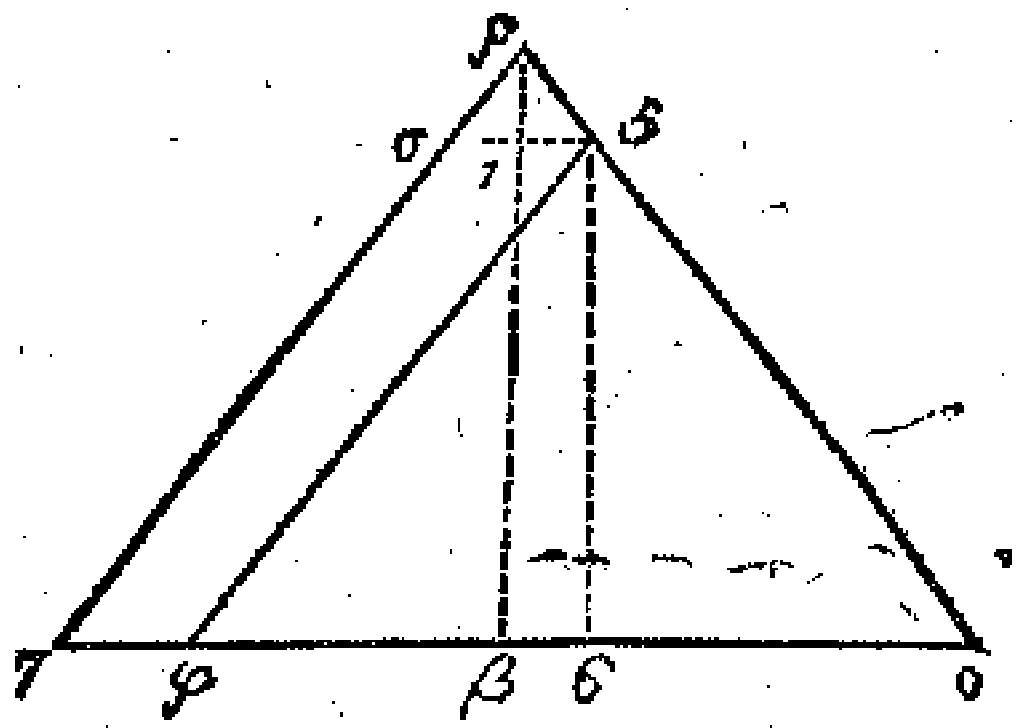
---

(1) κ3η: τῦ λυ: (2) Εη: τῦ λυ: (3) αξ: κοι: (4) ςη: τῦ αυ: (5) διὰ τὸ Δον: Πόρ: τῦ Σχολ: τῦ μετὰ τὴν κςην: τῦ ςοιχ: ἐν τοῖς Τακυετ:.

Δείκνυται ὁμοίως, καθάπερ τὸ ἀνωτέρω.

Πόρισμα.

Ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ ρ κάθετος δίχα τέμνει τὴν βάσιν.



Λῆμμα ΙΑον:

„Αἱ οὕτω πίπτουσαι παράλληλοι ἀπὸ τῆς ἑτέ-
„ρας τῶν πλευρῶν τοῦ ἰσοσκελοῦς ἐπὶ τὴν βάσιν,
„τὴν αὐταῖς ἀπολαμβανομένην ἐκ τῆς βάσεως εὐ-
„θεῖαν φ2, ἢ φγ, διπλασίονα λόγον ἔχουσι τῆς
„ἀπολαμβανομένης 2β, ἢ β6 ἀπὸ τῶν καθέτων
„ψ2, ρβ, ἢ ρβ, 5β τῶν ἀπὸ τῶν κορυφῶν ψ καὶ ρ, ἢ ρ καὶ 5 ἀγομένων. (Πρόσχες τοῖς δυσὶ Σχή-
„μασι τοῖς ἀμέσως ἀνωτέρω).

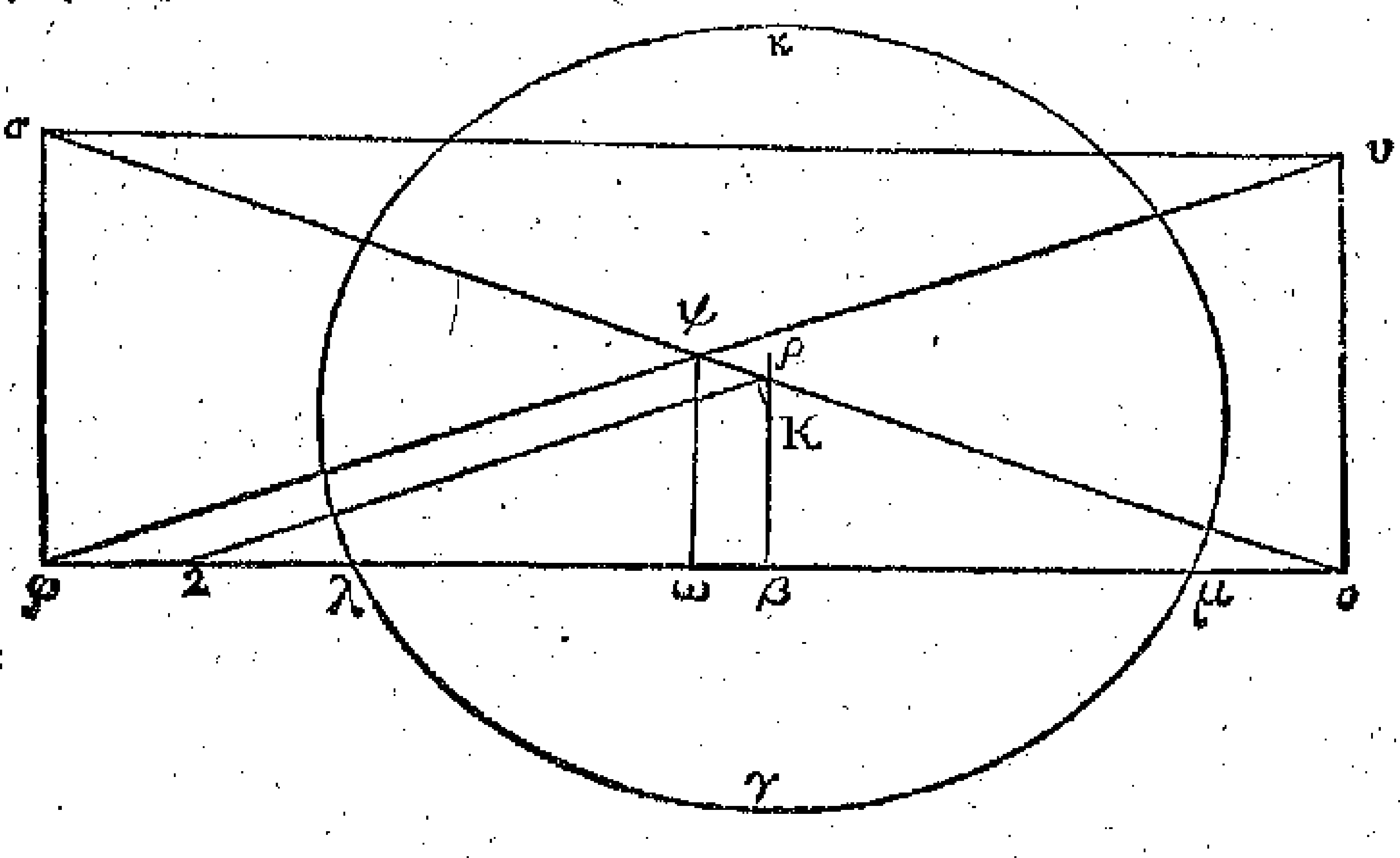
Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ ρ παράλληλος τῇ φ2 ἢ φο ἡ ρσ. Καὶ δὴ τοῦ σ2 παραλληλογράμμου ὄντος (1), ἡ σρ ἴση τῇ φ2 (2). Ἀλλὰ καὶ ψσρ ἴση τῇ κατὰ τὸ φ, καὶ ψρσ τῇ κατὰ τὸ ο (3), ἴσαι δὲ αἱ φ καὶ ο (4). Ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ ψσρ, καὶ ψρσ. Ἰσοσκελὲς ἄρα (5) τὸ σψρ. Ἡ δὲ ψισ ἴση τῇ ὑπὸ ψ2φ (6). Αὕτη δ' ὀρθή. (7) κἀκείνη ἄρα. Ἄρα διὰ τὸ ἀνωτ: Πόρ: δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς ψι ἡ σρ. Ἀλλὰ γὰρ τὸ ιβ παραλληλόγραμμόν ἐστι. (ἡ γὰρ ὑπὸ ρβο = ψ2β (8). Ἄρα ἡ ρβ παράλληλος ἐστὶ πρὸς τὴν ι2 (9), ἡ δὲ ιρ παράλληλος πρὸς τὴν 2β (10)). Ἄρ' οὖν ἡ ιρ = 2β (11). Καὶ ἐπεὶ ἡ σρ διπλασίων ἐδείχθη τῆς ιρ, Ἄρα διπλασίων ἐστὶ καὶ τῆς 2β. Ἀλλ' ἡ φ2 = σρ. Ἡ Ἄρα φ2, ἣν ἐκ τῆς φο βάσεως ἀπολαμβάνουσιν αἱ παράλληλοι, διπλασίων ἐστὶ τῆς 2β τῆς ἀπολαμβανομένης ἀπὸ τῶν καθέτων, αἳ ἀπὸ τῶν κορυφῶν τῶν ἰσοσκελῶν φψο, 2ρο ἄγοντα. Ο. Ε. Δ.

Τοῦτ' αὐτὸ δείξαις ἂν παραπλησίως, καὶ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου σχήματος τοῦ κατὰ τὸ ιον: Λῆμμα, ἐν ᾧ ἡ ργ παράλληλος, ἀπὸ τοῦ σκέλους 5ο προεκβληθέντος, ἐπὶ τὴν βάσιν φο προεκβληθεῖσαν ἄγεσθαι ὑπετίθετο· τὴν σ5 παράλληλον ἀγαγὼν πρὸς τὴν βάσιν, καὶ τῷ αὐτῷ λόγῳ ἐφοδεύσας τὴν δεῖξιν.

Λῆμμα ΙΒον:

„Ἐὰν ἐπὶ τοῦ γλμμ κύκλου ὀρθογώνιον ὑποτεθῇ ἐπιγεγραμμένον τὸ φσυο, οὗ ἡ μὴ διὰ
„τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου πλευρὰ φο, τέμνουσα τὸν κύκλον κατὰ τὰ σημεῖα λ καὶ μ, ἑκατέρωθεν ᾖ
„τοῦ κύκλου ἐκπίπτουσα· ὥστε δὲ τὸ ἐκτὸς ἀπολαμβανόμενα μέρη τῆς εἰρημένης πλευρᾶς ἄνισα
„οἷον τὸ μὲν φλ, τὸ πρὸς τὸ μέρος τοῦ κέντρου ψ, τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, μεῖζον, ἔ-
„λασσον δὲ τὸ μο τὸ πρὸς τὸ τοῦ κύκλου Κ. ἤτοι τὸ μο ἐπιζευχθεισῶν τῶν τοῦ ὀρθογωνίου διαμέ-
„τρων φυ, σο ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου ρ (καθ' ὃ τέμνει τὴν ἡμιδιαγώνιον ψο, ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύ-
„κλου Κ, πρὸς τὴν πλευρὰν ἀγομένη κάθετος ρβ) παράλληλος ἀχθεῖσα τῇ ἑτέρᾳ ἡμιδιαμέτρῳ
„ψφ, ἀποτέμνει τὴν 2λ ἐκτὸς τοῦ κύκλου ἀπὸ τοῦ μείζονος τῶν μερῶν φλ, ἴσην τῷ ἑτέρωθεν
„ἐκτὸς τοῦ κύκλου μέρει μο τῷ ἐλάσσονι.

Τὸ φψο ἰσοσκελὲς τρίγωνον (12) ἐπεὶ ἄρα ἡ ρ2 παράλληλος ἤχθη πρὸς τὴν ψφ (13), ἔσται ἡ φ2 διπλασίων (14) τῆς



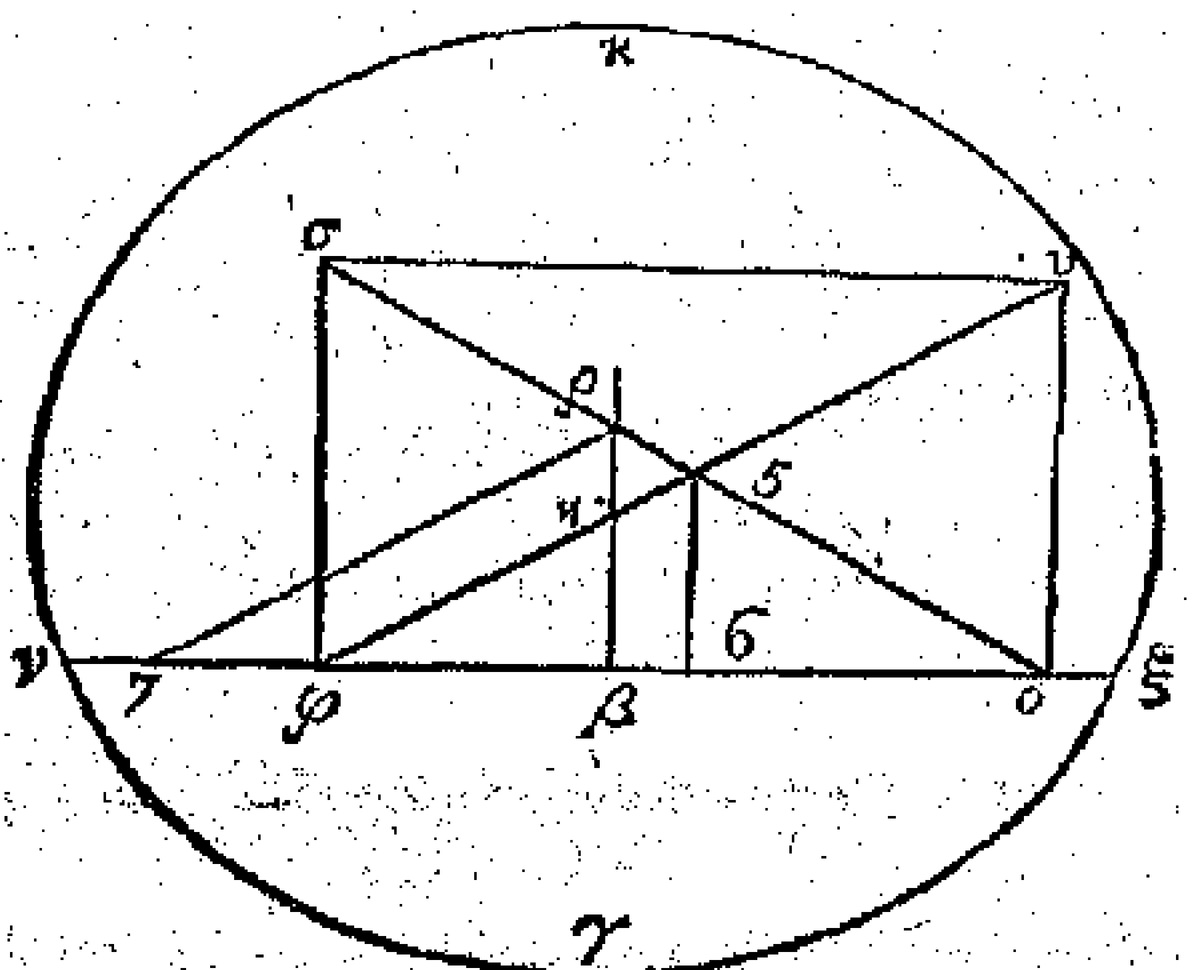
---

(1) Ἐκ κατ: (2) λδ, τοῦ αου: (3) κθη: τοῦ αου: (4) ἐξ ὑποθ: (5) β τοῦ αου: (6) κθη: τοῦ αου: (7) Ἐκ κατ: (8) Ἐκ κατ: (9) κη: τοῦ α': (10) Ἐκ κατ: (11) λδ: τοῦ α': (12) Πόρ: τοῦ Αου: λημ: (13) Ἐξ ὑποθ: (14) Λημ: ΙΑου:

ωβ. Ἀλλὰ γὰρ ἡ διαφορὰ τοῦ μείζονος μέρους φλ πρὸς τὸ ἔλασσον μα ἐστὶν (1) ἡ ωβ δὶς ληφθεῖσα, ἄρα ἀφαιρεθείσης τῆς φα διαφορᾶς, ἔσται ἡ αλ = μα. Ο. Ε. Δ.

Λ ῆ μ μ α ΙΓον:

„Ἐὰν ἐντὸς τοῦ γνκξ κύκλου, ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ φσυο, ἔχῃ τὴν „πλευρὰν αὐτοῦ φο (τὴν μὴ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀγομένην) ὅλην ἐμπίπτουσαν τῷ κύκλῳ „κατ' ἀνίσους τὰς τῶν περάτων αὐτῆς φ καὶ ο, ἀπὸ τῆς περιφερείας ἑκατέρωθεν ἀποστάσεις, ὡς „προαχθείσης τῆς εἰρημένης πλευρᾶς, καὶ τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὰ ν καὶ ξ σημεῖα προσπεσού„σης, μείζονα μὲν εἶναι τὴν ὅθεν ἀποκλίνει τὸ τοῦ κύκλου κέντρον μ, ἤτοι τὴν νφ, ἐλάσσονα „δὲ, τὴν, ὅθεν τὸ τοῦ ὀρθογωνίου 5, ἤτοι τὴν οξ. Ἐπιζευχθεισῶν τῶν φυ καὶ σο διαμέτρων „ἀπὸ δὲ τοῦ μ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀχθείσης καθέτου πρὸς τὴν πλευρὰν φο τοῦ ὀρθογωνίου τῆς „μβ, καὶ ταύτης κατὰ θάτερον προαχθείσης, ὡς διήκειν διὰ τῆς διαγωνίου σο, κατὰ ρ. ἐὰν ἀπὸ „τοῦ ρ σημείου τούτου καθ' ὃ τέμνει τὴν σο διαγώνιον διάμετρον ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου μ „ἀγομένη κάθετος μβ, πρὸς τὴν πλευρὰν φο) παράλληλος ἀχθῇ τῇ ἡμιδιαγωνίῳ 5φ, ἡ ρ7, „αὕτη ἀποτεμεῖ ἀπὸ τῆς μείζονος νφ, ἐντὸς τοῦ κύκλου, τὴν ν7, ἴσην τῇ ἑτέρωθεν ἐλάσσονι οξ.



Ἐπειδὴ γὰρ τὸ φ5ο ἰσοσκελές ἐστὶ τρίγωνον (2). Καὶ ἀπὸ τῆς 5ο προαχθείσης ἐπὶ τὸ ρ, ἡ ρ7 παράλληλος ἤχθη πρὸς 5φ. (3) Ἔσται ἡ φ7 διπλασίων (4) τῆς β6. Ἀλλαμὴν ἡ διαφορὰ τῆς μείζονος φν, πρὸς τὴν ἐλάσσονα οξ, ἐστὶν ἡ β6 (5) ληφθεῖσα. Ἄρα ἀφαιρεθείσης τῆς φ7 διαφορᾶς, ἔσται ἡ 7ν = οξ. Ο. Ε. Δ.

Ἐκ τῶνδε ῥάδιον ἐστὶν εἰσβαλεῖν, ὅτι ἐπ' οὐδετέρας τῶν ὑπολειφθεισῶν ἡμῖν ὑποθέσεων (ἐν Ἀριθ: 26) δυνατὸν λαβεῖν τὸ ἐπιτασσόμενον. Τουτέστιν οὔτ' ἐπὶ τῆς Ἀης: ὑποθέσεως (καθ' ἣν ἐκπίπτει τὰ τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀρθογωνίου πέρατα φ καὶ ο ἐκτὸς τοῦ ἐλάσσονος κύκλου γλημ, τοῦ περὶ τὴν γη γεγραμμένου) ἀφελεῖν ἐστὶν ἀπὸ τῆς μο, ἴσην τῇ λα, οὔτ' ἐπὶ τῆς Βας: (καθ' ἣν ἐμπίπτει τὰ αὐτὰ πέρατα ἐντὸς τοῦ μείζονος κύκλου γνκξ, τοῦ περὶ τὴν γκ γεγραμμένου) ἀποτεμεῖν ἐστὶν ἀπὸ τῆς οξ ἴσην τῇ 7ν· ἥτε γὰρ μο ἐπ' ἐκείνης ἴση ἐδείχθη τῇ λα, ἥτε οξ, ἐπὶ ταύτης, τῇ ν7. Τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ τῆς δοθείσης μείζονος εὐθείας, ἴσην λαβεῖν τῇ δοθείσῃ ἐλάσσονι (6) δυνατὸν, ἀπὸ δὲ τῆς ἴσης μοῖραν ἀφελεῖν, ἥτις ἂν ἴση εἴη τῇ ἴσῃ ὅλῃ, οὐδεμιᾷ μηχανῇ ἀνυστόν. Εἰ μὴ τῆς εἰς τόδε μέλλοιμεν περιίστασθαι, τῷ ὅλῳ ἴσον εἶναι τὸ μέρος οἴεσθαι, αὐτῶν τῶν κοινῶν ἐννοιῶν τὰς προδηλοτάτας ἀπαμαισάμενοι. Ἀλλ' εἴπερ ἄρα τῇ ἀποστάσει τοῦ α ἀπὸ τοῦ λ, μόνη ἐστὶν ἴση ἡ ἀπόστασις ἡ τοῦ ο ἀπὸ τοῦ μ, καὶ πάλιν εἰ τῇ ἀποστάσει τοῦ 7 ἀπὸ τοῦ ν, μόνη ἐστὶν ἴση ἡ ἀπόστασις ἡ τοῦ ο ἀπὸ τοῦ ξ, πῶς οὐκ ἂν εἴη, ἤτοι παίζοντος, ἢ ἀφραίνοντος τὰ αἰτήματα, τὰ ἀπὸ τοῦ ρ ἡμᾶς αἰτοῦντα εὐθείας ἄλλας παρὰ τὴν ρο, ἄγων τήν τε ρ3 λέγω, καὶ τὴν ρ8, ὧν ἡ μὲν τῇ λα, ἡ δὲ τῇ ν7, ἴσας τὰς μ3, καὶ ο8 ἀπολάβοιεν; δῆλον γὰρ ὅτι αὗται αἱ τὴν ἀποτομὴν ἂν ποιήσουσαι, αἱ ρ3, καὶ ρ8 αὐτῇ τῇ ρο συμπέσειεν. Εἰ δὲ τοῦτο· τρίγωνον ἂν ἡμῖν συσταίη οὐδὲν, τοῦ δὲ τριγώνου ἐκ μέσου γενομένου, ἀσυνάρτητον τὸ ἄτοπον, τῆς τῶν ἐκτὸς ταῖς ἐντὸς τῶν γωνιῶν ἐξισώσεως. Ἀτόπου δὲ μηδενὸς ἀναγκάζοντος, τὸ μετακινῆσαι δεῖν οἴεσθαι ἀπὸ τοῦ ψ, ἢ ἀπὸ τοῦ 5, τὸ τοῦ ὀρθογωνίου κέντρον, κἀπὶ τὸ ρ αὐτὸ μετοικίσαι, ὅθεν ἅπαξ κεκίνηται καθ' ὑπόθεσιν, μὴ καὶ ἄλογον ᾖ, καὶ πάντῃ ἄμουσαν. Τοῦ δέ τοι ρ εἰς κέντρον ἅμα τοῦτε ὀρθογωνίου, καὶ τοῦ περὶ τὴν γπ κύκλου, ταῖς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγαῖς μηδαμῶς ἐκνική-

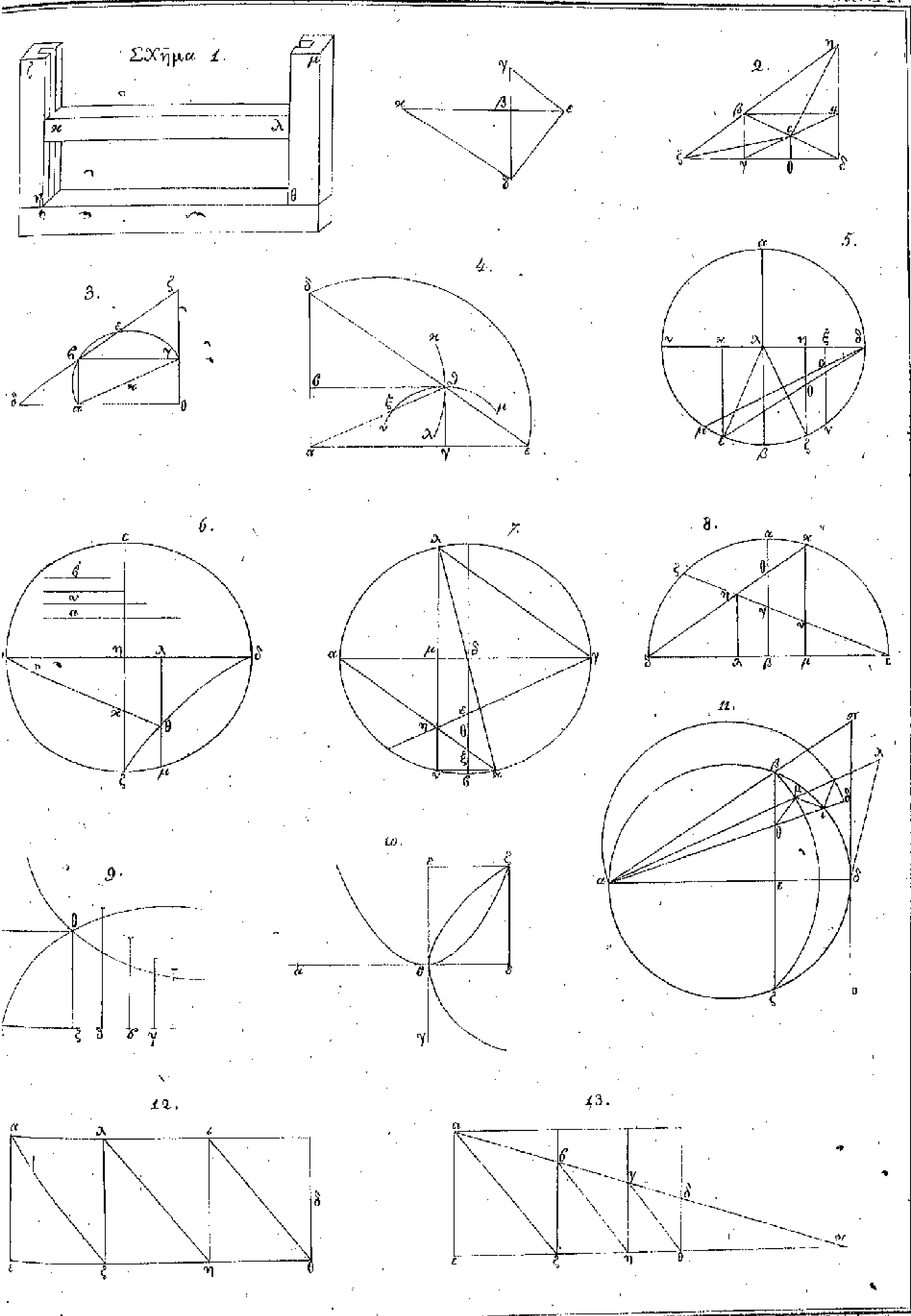
(1) Λῆμ: δον: (2) Πόρ: τοῦ Αου: λήμ: (3) Ἐξ ὑποθ: (4) λήμ: ΙΑον: (5) λῆμ: Δον: (6) γης: τοῦ Αου:

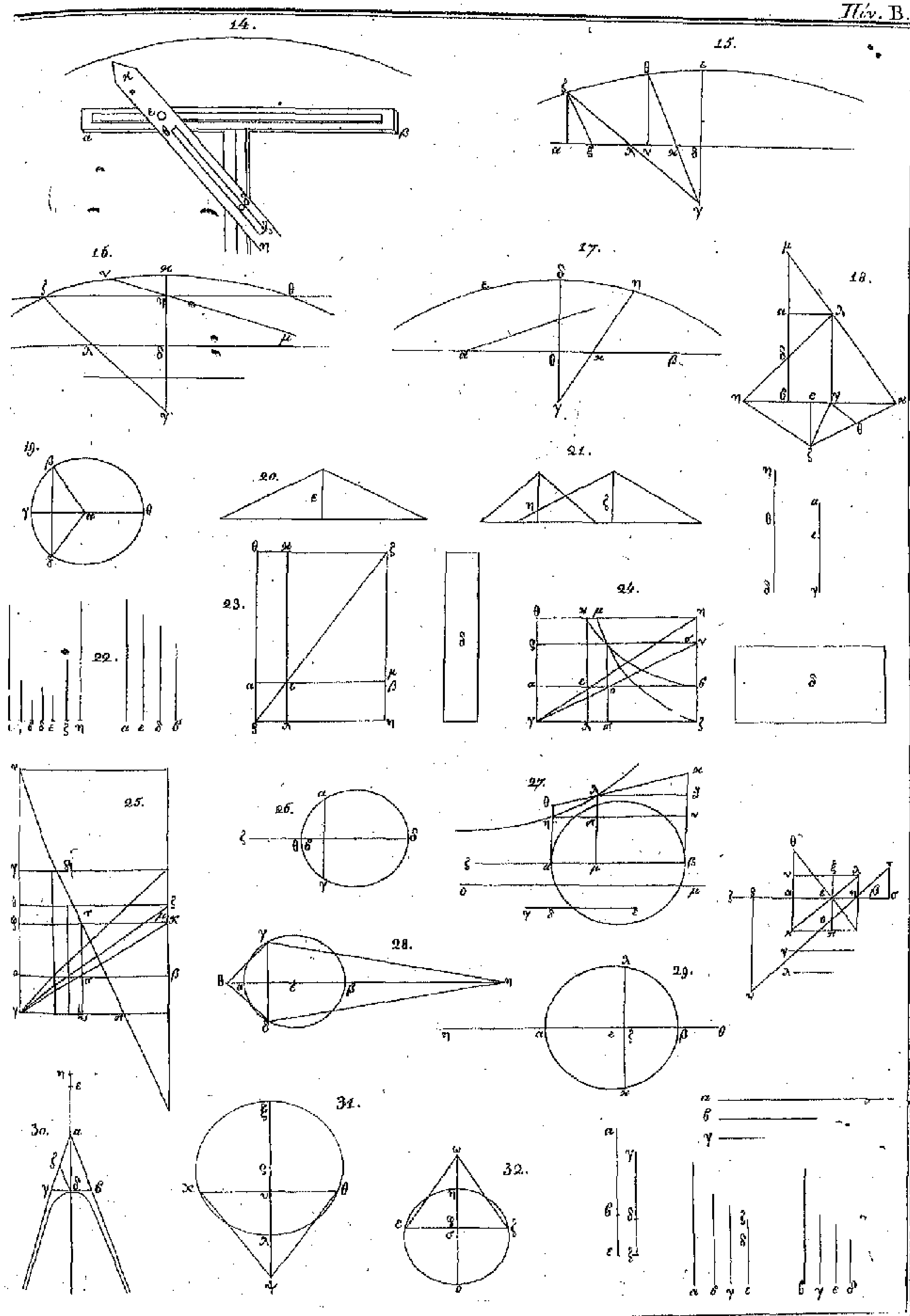
T

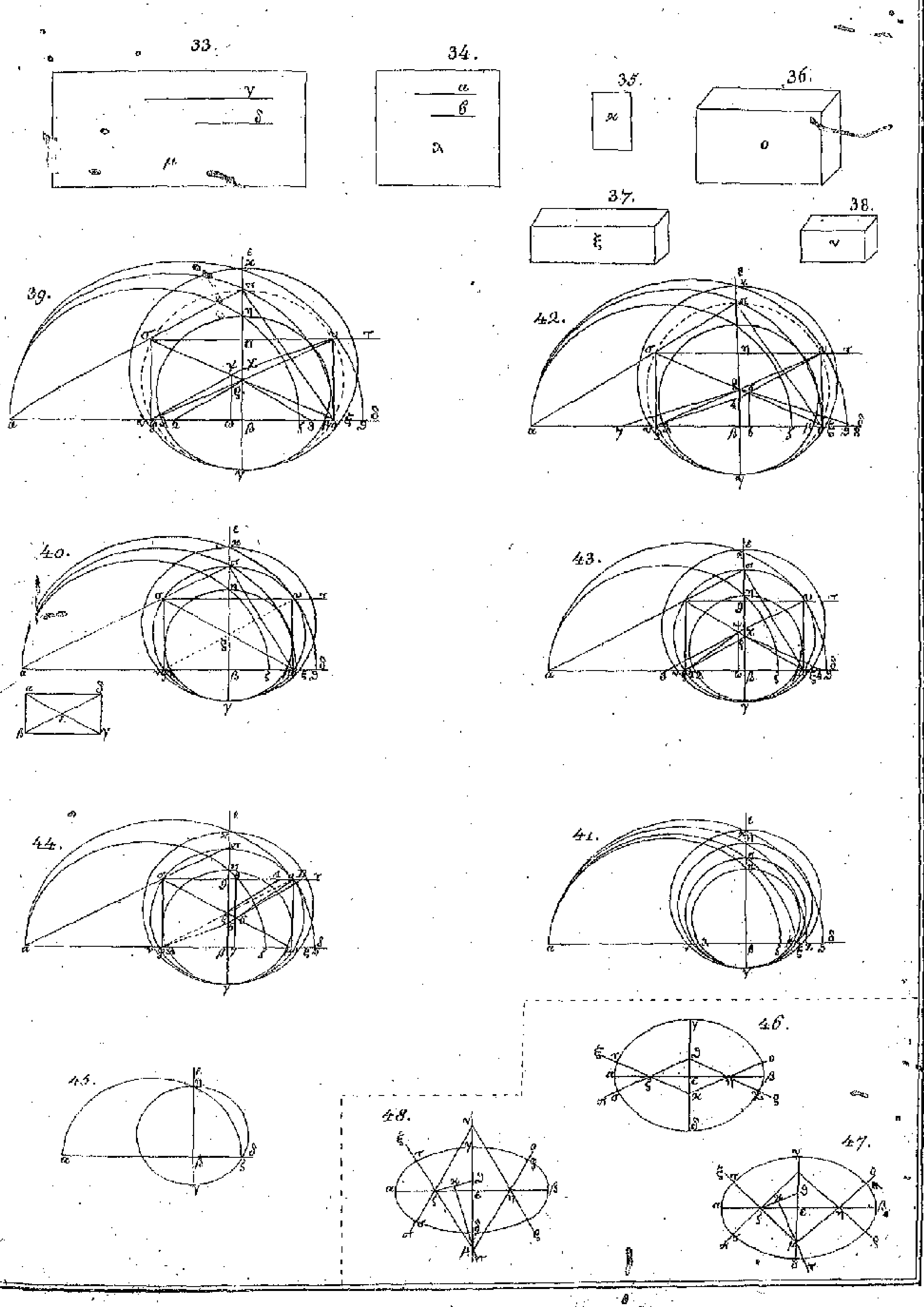
σαντος, ἡ ἀπόδειξις πᾶσα φρούδη ἐξήλεγκται, ϗ ὁ περὶ τὴν τῶν δύο μέσων εὕρεσιν πόνος μεματαίωται.

Πρὸς ὅ,τι ἂν ἄρα καταφεύξοιτο, ὁ περὶ τὰς ἐλπίδας τῆς εὑρέσεως ἐψευσμένος, λαμπραῖς ἡμῖν ἐγκυβιςῶν ταῖς ἀντιφράσεσι φωραθήσεται. Ἤτοι γὰρ τὸ τοῦ ὀρθογωνίου κέντρον ψ, ἐπ' αὐτῆς θήσει τῆς γη, ἔνθα τὸ ρ, ϗ τὸ ἐκδοθὲν οὕτως ἐξάκυκλον γράμμα, ὡς μηδὲν ὑγιὲς ὂν ἐξοβελιεῖ, ϗ ἄλλο τι προχειριεῖται, εἴπερ ἔνι, λόγου τινὸς ἐχόμενον. (Ἀριθμ: 26). Ἢ νῦν ἐν οἷς ὑπέθετο μόνων, ϗ τὸ ψ κατέχων, ἔνθα κατέταξε, τῶν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένων φλ καὶ μο, ϗ τῶν ἐντὸς φν ϗ οξ, τὴν ἰσότητα ἐξομώσεται. (Ἀριθμ: 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25.) Ἀρθείσης δὲ τῆς τούτων ἰσότητος, ϗ τὰς ἀπὸ ρ, παρὰ τὴν ρο, ἀγομένας ρ3 ϗ ρ8 παραγράψεται. (Ἀριθμ: 27. 28. 29. 30. 31.) ὡς μάτην εἰσαγομένας, διὰ τὸ τῶν τριγώνων ἀσύςατον. (Ἀριθμ: 32.) Ἐπὶ δὲ πᾶσι τὴν Γεωμετρίαν αἰδέμενος, ϗ τὴν ἔφορον ταύτην τιμῶν ἀλήθειαν, ὁμολογήσει, ὡς διὰ μακροῦ χρόνου, τῇδε τῇ ἄγρᾳ ὀμματαιάσαντι, αὕτη αὐτῷ ἡ μήρινθος οὐδὲν ἔσπασε.

Τ Ε Λ Ο Σ.


Σχῆμα 1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.


14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.
32.


33.
34.
35.
36.
37.
38.
39.
40.
41.
42.
43.
44.
45.
46.
47.
48.